ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

# ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ [illegible]

*Μετὰ προσθηκῶν καὶ βελτιώσεων*

ὑπὸ

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ

[illegible]

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΑΙ Ι. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΣ & Σ[illegible]
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ «ΕΣΤΙΑΣ»
ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ [illegible]
[illegible]

ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

# ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΚΑΤΗ ΟΓΔΟΗ

*Μετὰ προσθηκῶν καὶ βελτιώσεων*

ΥΠΟ

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ

Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν τοῦ Θ' Γυμνασίου Ἀθηνῶν

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΕΚΔΟΤΑΙ: Ι. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΣ & Σ^ΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ «ΕΣΤΙΑΣ»

50—ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ—50

1928

*Πᾶν ἀντίτυπον, μὴ φέρον τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέω*
*καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ Βιβλιοπωλείου τῆς «Ἑστίας», θεωρεῖται ἐκ τ*
*ποκλοπίας προερχόμενον.*



ΤΥΠΟΙΣ Π. Δ. ΧΑΛΚΙΟΠΟΥΛΟΥ - ΓΕΡΑΝΙΟΥ 11

Σ

# Κ Η Σ

## ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### *Προκαταρκτικαὶ ἔννοιαι.*

1. Ἡ ἔννοια ἑνὸς πράγματος καὶ πολλῶν πραγμάτων εἶναι εἰς πάντας γνωστή.

Ὅταν ἔχομεν πλῆθός τι τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅμοια πράγματα (ἢ τῶν ὁποίων τὰς διαφορὰς παραβλέπομεν) καὶ συγκρίνομεν αὐτὸ πρὸς ἓν τῶν πραγμάτων τούτων, σχηματίζομεν τὴν ἔννοιαν τοῦ **ἀριθμοῦ**.

Τὸ ἓν τῶν πραγμάτων πρὸς τὸ ὁποῖον συγκρίνεται τὸ πλῆθος, λέγεται ***μονάς***.

***Ἀριθμὸς δὲ λέγεται ἡ ἔννοια ἡ ὁποία ὁρίζει τὸ πλῆθος***, ἤτοι ἐκφράζει πόσα εἶναι τὰ πράγματα, ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται τὸ πλῆθος.

Παραδείγματος χάριν ὅταν λέγωμεν πέντε ἄνθρωποι, τρία χωρία, αἱ ἔννοιαι πέντε, τρία ἐκφράζουσιν ἀριθμούς.

***Ἀριθμητικὴ*** λέγεται ἡ ἐπιστήμη, ἥτις πραγματεύεται περὶ τῶν ἀριθμῶν.

### *Ὀνομασία καὶ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν μέχρι τοῦ χίλια.*

2. Ἡ μονάς, ὅταν θεωρῆται ὡς ἀριθμός, λέγεται ἓν καὶ γράφεται διὰ τοῦ συμβόλου *1*.

Ἐὰν εἰς τὴν μονάδα προστεθῇ καὶ ἄλλη μονάς, σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς δύο, ὅστις γράφεται διὰ τοῦ συμβόλου ***2***.

Ἐὰν δὲ εἰς τὸ δύο προστεθῇ καὶ ἄλλη μονάς, σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς τρία, ὅστις γράφεται ***3***.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον (δηλαδὴ προσθέτοντες τὴν μονάδα) σχηματίζομεν ἐξ ἑκάστου ἀριθμοῦ τὸν ἀμέσως μεγαλύτερόν του.

Τρία καὶ ἓν σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν τέσσαρα . . . . . 4

Τέσσαρα καὶ ἓν σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν πέντε . . . . 5

Πέντε καὶ ἓν σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν ἕξ . . . . . . . 6

Ἓξ καὶ ἓν σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν ἑπτά. . . . . . . 7

Ἑπτὰ καὶ ἓν σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν ὀκτώ . , . . . 8

Ὀκτὼ καὶ ἓν σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν ἐννέα. . . . . 9

Ἐννέα καὶ ἓν σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν δέκα, ὅστις γράφεται ὡς ἑξῆς· 10.

***Σημείωσις.*** Τὰ σύμβολα, μὲ τὰ ὁποῖα γράφομεν τοὺς ἀριθμούς, λέγονται ψηφία, εἶναι δὲ δέκα τὰ ἑξῆς· 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Τὸ τελευταῖον, τὸ 0, λέγεται ***μηδὲν*** ἢ ***μηδενικόν***.

Ὁ ἀριθμὸς δέκα θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται ***δεκάς***.

3. Καθὼς ἡ μονὰς 1, οὕτω καὶ ἡ δεκὰς παράγει ἀριθμοὺς διὰ τῆς ἐπαναλήψεως.

Δύο δεκάδες σχηματίζουσιν ἀριθμόν, ὅστις λέγεται εἴκοσι καὶ γράφεται ὡς ἑξῆς· 20.

Τρεῖς δεκάδες σχηματίζουσιν ἀριθμόν, ὅστις λέγεται τριάκοντα καὶ γράφεται 30.

Τέσσαρες δεκάδες σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν τεσσαράκοντα . 40

Πέντε δεκάδες σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν πεντήκοντα . . 50

Ἓξ δεκάδες σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν ἑξήκοντα . . . . 60

Ἑπτὰ δεκάδες σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν ἑβδομήκοντα . . 70

Ὀκτὼ δεκάδες σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν ὀγδοήκοντα . . 80

Ἐννέα δεκάδες σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν ἐνενήκοντα . . 90

Δέκα δεκάδες σχηματίζουσιν ἀριθμόν, ὅστις λέγεται ἑκατὸν καὶ γράφεται ὡς ἑξῆς . . . . . . . . . . . . 100

Ὁ ἑκατὸν θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται ***ἑκατοντάς***.

4. Καὶ ὁ ἑκατὸν παράγει ὁμοίως ἀριθμούς, ὡς ἑξῆς·

Δύο ἑκατοντάδες, ἤτοι διακόσια . . . . . . . . . 200

Τρεῖς ἑκατοντάδες, ἤτοι τριακόσια . . . . . . . . 300

Τέσσαρες ἑκατοντάδες, ἤτοι τετρακόσια . . . . . . 400

Πέντε ἑκατοντάδες ἤτοι πεντακόσια . . . . . . . 500

Ἓξ ἑκατοντάδες, ἤτοι ἑξακόσια . . . . . . . . . 600

Ἑπτὰ ἑκατοντάδες, ἤτοι ἑπτακόσια . . . . . . . . 700

Ὀκτὼ ἑκατοντάδες, ἤτοι ὀκτακόσια . . . . . . . . 800
Ἐννέα ἑκατοντάδες, ἤτοι ἐνακόσια . . . . . . . . 900

Δέκα δὲ ἑκατοντάδες, σχηματίζουσιν ἀριθμόν, ὅστις λέγεται χίλια καὶ γράφεται ὡς ἑξῆς· . . . . . . . . . . . . 1000

Ὁ ἀριθμὸς χίλια θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται **χιλιάς**.

5. Ὁ ἀριθμὸς ἓν λέγεται μονὰς πρώτης τάξεως, ὁ δέκα λέγεται μονὰς δευτέρας τάξεως, ὁ ἑκατὸν τρίτης τάξεως, καὶ ὁ χίλια τετάρτης.

6. Πᾶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ χίλια δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς μονάδας, εἰς δεκάδας (ἐὰν ἔχῃ)· καὶ εἰς ἑκατοντάδας (ἐὰν ἔχῃ), ἤτοι εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων, καὶ αἱ μονάδες ἑκάστης τάξεως νὰ μὴ εἶναι περισσότεραι τῶν ἐννέα.

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ μονάδας περισσοτέρας τῶν ἐννέα, ἑνοῦμεν αὐτὰς ἀνὰ δέκα δέκα καὶ σχηματίζομεν δεκάδα· τότε, ἢ δὲν θὰ περισσεύσῃ καμμία μονάς, ἢ θὰ περισσεύσουν, ἀλλ' ὄχι περισσότεραι τῶν ἐννέα (διότι, ἂν ἐπερίσσευον περισσότεραι, θὰ ἐγίνετο καὶ ἄλλη δεκάς). Ἐὰν δὲ καὶ αἱ δεκάδες εἶναι περισσότεραι τῶν ἐννέα, ἑνοῦμεν αὐτὰς ἀνὰ δέκα δέκα καὶ σχηματίζομεν ἑκατοντάδας· τότε, ἢ δὲν θὰ μείνῃ δεκάς, ἢ θὰ μείνουν, ἀλλ' ὄχι περισσότεραι τῶν ἐννέα. Αἱ δὲ ἑκατοντάδες, τὰς ὁποίας ἐσχηματίσαμεν, δὲν θὰ εἶναι περισσότεραι τῶν ἐννέα· διότι, ἂν ἦσαν δέκα, θὰ ἐσχημάτιζον τὸν ἀριθμὸν χίλια, ἐνῷ ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἐλάβομεν, εἶναι μικρότερος τοῦ χίλια.

Ἀνελύθη λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς εἰς μονάδας, δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας, καὶ εἰς ἑκάστην τάξιν δὲν εἶναι μονάδες περισσότεραι τῶν ἐννέα.

7. Διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων εὐκολύνεται μεγάλως καὶ ἡ ὀνοματοθεσία τῶν ἀριθμῶν καὶ ἡ γραφὴ αὐτῶν, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς·

1) Οἱ ἀριθμοί, οἵτινες ὑπάρχουσι μεταξὺ τοῦ δέκα καὶ τοῦ ἑκατόν, ἔχουσι δεκάδας, δύνανται δὲ νὰ ἔχωσι καὶ μονάδας· καὶ τὸ ὄνομα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν σχηματίζεται ἀπὸ τὸ ὄνομα τῶν δεκάδων του καὶ ἀπὸ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων του (ἂν ἔχῃ). Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει ἑπτὰ δεκάδας (ἑβδομήκοντα) καὶ τρεῖς μονάδας, λέγεται ἑβδομήκοντα τρία· ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις ἔχει ὀκτὼ δεκάδας (ὀγδοήκοντα) καὶ μίαν μονάδα, λέγεται ὀγδοήκοντα ἕν.

***Σημείωσις***. Ἀντὶ δέκα ἕν, λέγομεν ἕνδεκα, καὶ ἀντὶ δεκαδύο, λέγομεν δώδεκα.

Διὰ νὰ γράψωμεν δὲ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους, γράφομεν πρῶτον τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον δεικνύει πόσαι εἶναι αἱ δεκάδες τοῦ ἀριθμοῦ, ἔπειτα, πλησίον αὐτοῦ (πρὸς τὰ δεξιὰ) τὸ ψηφίον τῶν μονάδων του· (ἐὰν δὲ δὲν ἔχῃ μονάδας, γράφομεν εἰς τὸν τόπον αὐτῶν τὸ 0).

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἑβδομήκοντα τρία γράφεται 73, ὁ δὲ ὀγδοήκοντα ἓν γράφεται 81, ὁ δὲ ἑξήκοντα γράφεται (ὡς πρὶν εἴδομεν) 60

2) Οἱ ἀριθμοί, οἵτινες ὑπάρχουσι μεταξὺ τοῦ ἑκατὸν καὶ τοῦ χίλια, ἔχουσιν ἑκατοντάδας, δύνανται δὲ νὰ ἔχωσι καὶ δεκάδας καὶ μονάδας, καὶ τὸ ὄνομα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν γίνεται ἀπὸ τὸ ὄνομα τῶν ἑκατοντάδων του καὶ ἀπὸ τὸ ὄνομα τῶν δεκάδων του (ἂν ἔχῃ) καὶ ἀπὸ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων του (ἂν ἔχῃ).

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει πέντε ἑκατοντάδας (πεντακόσια) καὶ τρεῖς δεκάδας (τριάκοντα) καὶ ἑπτὰ μονάδας, λέγεται πεντακόσια τριάκοντα ἑπτά· ὁ δὲ ἔχων δύο ἑκατοντάδας καὶ τρεῖς μονάδας, λέγεται διακόσια τρία.

Διὰ νὰ γράψωμεν δὲ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους, γράφομεν πρῶτον τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων (ἤγουν, τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον φανερώνει πόσας ἑκατοντάδας ἔχει ὁ ἀριθμός), ἔπειτα τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων (ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ δεκάδας, γράφομεν εἰς τὸν τόπον αὐτῶν τὸ 0) καὶ ἔπειτα τὸ ψηφίον τῶν μονάδων· ἂν δὲ ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ μονάδας, γράφομεν εἰς τὸν τόπον αὐτῶν τὸ 0).

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς ἑπτακόσια ἑξήκοντα τρία γράφεται 763· ὁ διακόσια ὀγδοήκοντα γράφεται 280, ὁ δὲ ἑξακόσια (ὡς εἴδομεν) γράφεται 600.

## *Σχηματισμὸς τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων.*

8. Εἴδομεν ἀνωτέρω πῶς ἐσχηματίσθησαν αἱ μονάδες ἕν, δέκα, ἑκατὸν καὶ χίλια· διὰ τοῦ ἰδίου τρόπου δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ὅσας θέλομεν ἄλλας· ἤγουν, δέκα μονάδες ἑκάστης τάξεως σχηματίζουσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ὡς φαίνεται εἰς τὸν ἑξῆς πίνακα.

| | | | |
|---|---|---|---|
| δέκα μονάδες | σχηματίζουσι | μίαν δεκάδα . . . . | 10 |
| δέκα δεκάδες | » | μίαν ἑκατοντάδα. . | 100 |
| δέκα ἑκατοντάδες | » | μίαν χιλιάδα . . . | 1 000 |
| δέκα χιλιάδες | » | μίαν δεκάδα χιλιάδων | 10 000 |

| | |
|---|---|
| δέκα δεκάδες χιλιάδων μίαν ἑκατοντάδα χιλιάδων | *100 000* |
| δέκα ἑκατοντάδες χιλιάδων, ἤτοι χίλιαι χιλιάδες, σχηματίζουσιν ἓν ἑκατομμύριον . . . . . | *1 000 000* |
| δέκα ἑκατομμύρια μίαν δεκάδα ἑκατομμυρίου . | *10 000 000* |
| δέκα δεκάδες ἑκατομ. μίαν ἑκατοντάδα ἑκατομ. | *100 000 000* |
| δέκα ἑκατοντάδες ἑκατομμυρίου, ἤτοι χίλια ἑκατομμύρ. σχηματίζουσιν ἓν δισεκατομμύριον | *1 000 000 000* |
| δέκα δισεκατομμύρια μίαν δεκάδα δισεκατομ. | *10 000 000 000* |
| δέκα δεκάδες δισεκατομ. μίαν ἑκατ. δισεκατομ. | *100 000 000 000* |

δέκα ἑκατοντάδες δισεκατομ., ἤτοι χίλια δισεκατομμύρια, σχηματίζουσιν ἓν τρισεκατομμύριον *1 000 000 000 000*, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐκ τῶν μονάδων τούτων αἱ ἑξῆς λέγονται ***ἀρχικαὶ*** ἢ ***πρωτεύουσαι***. ἕν, χίλια, ἑκατομμύριον, δισεκατομμύριον, τρισεκατομμύριον, κτλ. Ἑκάστη ἀρχικὴ μονὰς σχηματίζεται ἀπὸ χιλίας μονάδας τῆς προηγουμένης.

## *Ὀνομασία καὶ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ χίλια καὶ ἐφεξῆς.*

9. Ὁ ἀριθμὸς χίλια εἶναι ἀρχικὴ μονάς. Διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῆς παράγονται ἀριθμοὶ χιλιάδων.

Τὰ ὀνόματα αὐτῶν γίνονται ἀπὸ τὸ ὄνομα τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις φανερώνει πόσας φορὰς ἐλάβομεν τὸν χίλια, εἰς τὸ ὁποῖον προσαρτᾶται ἡ λέξις «χιλιάδες»· οἷον, δύο χιλιάδες, τρεῖς χιλιάδες, τέσσαρες χιλιάδες, τριάκοντα χιλιάδες, τεσσαράκοντα ἑπτὰ χιλιάδες, ἑκατὸν δώδεκα χιλιάδες, κτλ.

Διὰ νὰ γράψωμεν δὲ αὐτοὺς μὲ ψηφία, γράφομεν πρῶτον τὸν ἀριθμόν, ὅστις φανερώνει πόσαι εἶναι αἱ χιλιάδες, καὶ κατόπιν αὐτοῦ τρία μηδενικά· οἷον·

| | |
|---|---|
| δύο χιλιάδες γράφεται . . . . . . . . . . . . . | *2 000* |
| δεκαπέντε χιλιάδες . . . . . . . . . . . . . . | *15 000* |
| τριάκοντα χιλιάδες . . . . . . . . . . . . . . | *30 000* |
| διακόσιαι πεντήκοντα ἓξ χιλιάδες . . . . . . . | *256 000* |
| πεντακόσιαι χιλιάδες . . . . . . . . . . . . . | *500 000* |
| χίλιαι χιλιάδες, ἤτοι ἓν ἑκατομμύριον . . . . . . | *1 000 000* |

Ὁ ἀριθμὸς χίλιαι χιλιάδες, ἢ ἓν ἑκατομμύριον, εἶναι ἀρχικὴ μονάς·

διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτοῦ σχηματίζονται ἀριθμοὶ ἑκατομμυρίων. Τὰ ὀνόματα αὐτῶν γίνονται ἀπὸ τὸ ὄνομα τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις φανερώνει, πόσας φορὰς ἐλάβομεν τὸ ἑκατομμύριον, εἰς δὲ τὸ ὄνομα τοῦτο προσαρτῶμεν τὴν λέξιν «ἑκατομμύρια»· οἷον, δύο ἑκατομμύρια, τρία ἑκατομμύρια, δέκα ὀκτὼ ἑκατομμύρια, διακόσια τριάκοντα ἑκατομμύρια, κτλ.

Διὰ νὰ γράψωμεν δὲ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους, γράφομεν πρῶτον τὸν ἀριθμόν, ὅστις φανερώνει πόσα εἶναι τὰ ἑκατομμύρια, καὶ κατόπιν αὐτοῦ ἓξ μηδενικά· οἷον·

| | |
|---|---|
| δύο ἑκατομμύρια γράφεται . . . . . . . . . | 2 000 000 |
| εἰκοσιπέντε ἑκατομμύρια . . . . . . . . . | 25 000 000 |
| τετρακόσια ὀκτὼ ἑκατομμύρια . . . . . . . | 408 000 000 |
| χίλια ἑκατομμύρια, ἤτοι ἓν δισεκατομμύριον . | 1 000 000 000 |

Ὁ ἀριθμὸς ἓν δισεκατομμύριον εἶναι καὶ αὐτὸς ἀρχικὴ μονάς· ἐξ αὐτοῦ σχηματίζονται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως ἀριθμοὶ δισεκατομμυρίων.

Ἡ ὀνομασία καὶ ἡ γραφὴ αὐτῶν εἶναι εὐκολωτάτη (μὲ ἐννέα μηδενικά).

10. Ὁ σχηματισμὸς τῶν ἀρχικῶν μονάδων εὐκολύνει μεγάλως τὴν ὀνομασίαν καὶ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς·

1) Οἱ μεταξὺ τοῦ χίλια καὶ τοῦ ἑκατομμυρίου ὑπάρχοντες ἀριθμοὶ ἔχουσι χιλιάδας τινὰς (αἱ ὁποῖαι θὰ εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν χιλίων· διότι χίλιαι χιλιάδες σχηματίζουσιν ἓν ἑκατομμύριον), δύνανται δὲ νὰ ἔχωσι καί τι μέρος μικρότερον τοῦ χίλια· καὶ τὸ ὄνομα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν γίνεται ἀπὸ τὸ ὄνομα τῶν χιλιάδων του καὶ ἀπὸ τὸ ὄνομα τοῦ μέρους, ὅπερ εἶναι μικρότερον τοῦ χίλια (ἂν ἔχῃ)· οἷον, διακόσιαι ὀκτὼ χιλιάδες καὶ ὀκτακόσια εἴκοσι πέντε, δεκαεπτὰ χιλιάδες καὶ πεντακόσια τριάκοντα ἕξ, τρεῖς χιλιάδες καὶ ἑξακόσια, κτλ.

Ἡ δὲ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν τούτων γίνεται ὡς ἑξῆς· γράφομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν χιλιάδων καὶ ἔπειτα πλησίον αὐτοῦ (πρὸς τὰ δεξιὰ) τὸν ἀριθμὸν τὸν μικρότερον τοῦ χίλια (ἂν ὑπάρχῃ). Προσέχομεν ὅμως κατόπιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν χιλιάδων νὰ εὑρίσκωνται πάντοτε τρία ψηφία· ἂν λοιπὸν ὁ ἀριθμός, ὁ μικρότερος τοῦ χίλια δὲν ἔχῃ τρία ψηφία, προτάσσομεν αὐτοῦ τόσα μηδενικά, ὅσα ψηφία τοῦ λείπουν· οἷον, ὁ ἀριθμὸς τριάκοντα ἑπτὰ χιλιάδες καὶ ἐνακόσια δώδεκα γράφεται 37 912, ὁ δὲ ἀριθμὸς τρεῖς χιλιάδες καὶ δεκαεπτὰ γράφεται 3 017, ὁ δὲ ἀριθμὸς ἑκατὸν χιλιάδες καὶ ἑπτὰ μονάδες γράφεται 100 007.

2) Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὑπάρχοντες μεταξὺ τοῦ ἑκατομμυρίου καὶ τοῦ δισεκατομμυρίου, ἔχουσιν ἑκατομμύριά τινα (ὀλιγώτερα τῶν χιλίων), ἔτι δὲ καὶ ἀριθμόν τινα μικρότερον τοῦ χίλια.

Καὶ τὸ μὲν ὄνομα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν γίνεται ἀπὸ τὸ ὄνομα τῶν ἑκατομμυρίων καὶ ἀπὸ τὸ ὄνομα τῶν χιλιάδων του (ἂν ἔχῃ) καὶ ἀπὸ τὸ ὄνομα τοῦ μικροτέρου τοῦ χίλια ἀριθμοῦ (ἂν ἔχῃ)˙ οἷον, τεσσαράκοντα τρία ἑκατομμύρια ὀκτακόσιαι δύο χιλιάδες καὶ τετρακόσιαι μονάδες.

Ἡ δὲ γραφὴ αὐτῶν γίνεται ὡς ἑξῆς˙ γράφομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑκατομμυρίων, ἔπειτα κατόπιν αὐτοῦ (πρὸς τὰ δεξιὰ) τὸν ἀριθμὸν τῶν χιλιάδων (ἂν ὑπάρχῃ) καὶ κατόπιν τούτου τὸν ἀριθμὸν τὸν μικρότερον τοῦ χίλια (ἂν ὑπάρχῃ). Προσέχωμεν ὅμως κατόπιν τῶν ἑκατομμυρίων νὰ εὑρίσκωνται ἓξ ψηφία, κατόπιν δὲ τῶν χιλιάδων τρία. Ἂν λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς τῶν χιλιάδων δὲν ἔχῃ τρία ψηφία, προτάσσομεν αὐτοῦ τόσα μηδενικά, ὅσα ψηφία τοῦ λείπουν (οἷον, ἀντὶ 17 γράφομεν 017, ἀντὶ 8 γράφομεν 008)˙ τὸ αὐτὸ δὲ κάμνομεν καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν μικρότερον τοῦ χίλια˙ οἷον, ὁ ἀριθμὸς τεσσαράκοντα ἑκατομμύρια ἑκατὸν εἴκοσι πέντε χιλιάδες καὶ πεντακόσια ἑπτά, γράφεται 40 125 507 ὁ δὲ ἀριθμὸς τετρακόσια πέντε ἑκατομμύρια δέκα ὀκτὼ χιλιάδες γράφεται 405 018 000, ὁ δὲ ἀριθμὸς τριακόσια ἑκατομμύρια καὶ δέκα πέντε μονάδες γράφεται 300 000 015.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐννοοῦμεν, πῶς γράφονται καὶ οἱ ἀριθμοί, οἱ μεγαλύτεροι τοῦ δισεκατομμυρίου καὶ πῶς σχηματίζονται τὰ ὀνόματα αὐτῶν.

***Σημείωσις α΄***. Ἐκ τῶν προηγουμένων βλέπομεν, ὅτι πάντες οἱ ἀριθμοὶ γράφονται διὰ τῶν ἑξῆς δέκα σημείων ἢ ψηφίων˙

*1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,* ***καὶ*** *0* *

Ἐκ τούτων τὸ ψηφίον 0 δὲν παριστάνει κανένα ἀριθμὸν˙ διὸ καὶ

* Τὰ ψηφία ταῦτα λέγονται καὶ ἀραβικοὶ χαρακτῆρες, διότι ἡμεῖς ἐμάθαμεν αὐτὰ παρὰ τῶν Ἀράβων (περὶ τὸν 12ον αἰῶνα μ. Χ). Ἡ ἐφεύρεσις ὅμως αὐτῶν καὶ ἡ μέθοδος τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἐπινόησις τῶν Ἰνδῶν, παρὰ τῶν ὁποίων ἔμαθον αὐτὴν οἱ Ἄραβες.

λέγεται (ὡς εἴπομεν καὶ πρὶν) μηδὲν ἢ μηδενικόν· χρησιμεύει ὅμως εἰς τὸ νὰ λαμβάνῃ τὴν θέσιν τῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι λείπουσι· πρὸς διάκρισιν δὲ ἀπ᾽ αὐτοῦ λέγονται τὰ ἄλλα ἐννέα ψηφία, σημαντικὰ ψηφία.

***Σημείωσις β΄. Μονοψήφιοι*** λέγονται οἱ ἀριθμοί, οἱ δι᾽ ἑνὸς ψηφίου γραφόμενοι, οἷον, ὁ 6· διψήφιοι οἱ διὰ δύο, οἷον 45· τριψήφιοι οἱ διὰ τριῶν, ὡς 120, καὶ πολυψήφιοι οἱ διὰ περισσοτέρων.

## *Παρατήρησις.*

11. Ἡ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν διὰ τῶν ψηφίων εἶναι μία ἐκ τῶν εὐφυεστάτων ἐπινοήσεων τῶν ἀνθρώπων· διότι καὶ σύντομος εἶναι καὶ δέκα μόνον σημεῖα χρειάζεται· (διὰ τοῦτο καὶ τὰς πράξεις τῶν ἀριθμῶν, ὡς θὰ μάθωμεν κατόπιν, καθιστᾷ εὐκολωτέρας)· ἐν ᾧ ἡ διὰ λέξεων γραφὴ αὐτῶν καὶ μακροτέρα εἶναι καὶ μέγα πλῆθος διαφόρων λέξεων ἀπαιτεῖ.

Στηρίζεται δὲ ἡ διὰ τῶν ψηφίων γραφή, πρῶτον μὲν ἐπὶ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων, καὶ δεύτερον ἐπὶ τῆς ἑξῆς συμφωνίας· ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον παριστᾷ ὄχι μόνον ἁπλᾶς μονάδας, ἀλλὰ καὶ δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας καὶ χιλιάδας καὶ μονάδας πάσης τάξεως, ***κατὰ τὴν θέσιν του***· οἷον, τὸ ψηφίον 5, ἐὰν μὲν εἶναι μόνον του, παριστᾷ πέντε μονάδας· ἐὰν δὲ ἔχῃ ἓν οἱονδήποτε ψηφίον κατόπιν του, παριστᾷ πέντε δεκάδας, ἢ ***πεντήκοντα*** (ὡς 50, 51, 58)· ἐὰν δὲ ἔχῃ δύο οἱαδήποτε ψηφία κατόπιν του, παριστᾷ ἑκατοντάδας (ὡς 500, 505, 520, 541), ἐὰν δὲ τρία, χιλιάδας (ὡς 5000, 5080), ἐὰν τέσσαρα, δεκάδας χιλιάδων (ὡς 54 801), ἐὰν ἕξ ἑκατομμύρια· καὶ οὕτω καθεξῆς· καὶ γενικῶς, ***πᾶν ψηφίον γραφόμενον ὄπισθεν (πρὸς τὰ ἀριστερὰ) ἄλλου παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως ἢ τὸ ἄλλο ψηφίον.***

Ἡ μέθοδος αὕτη καὶ ἡ ἀνάλυσις τῶν ἀριθμῶν εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων ἀποτελοῦσι τὸ λεγόμενον σύστημα ἀριθμήσεως. Ὁ ἀριθμὸς δέκα, ὅστις δεικνύει, πόσαι μονάδες ἑκάστης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας, λέγεται βάσις τοῦ συστήματος τούτου, τὸ ὁποῖον διὰ τοῦτο λέγεται ***δεκαδικὸν σύστημα.***

## *Περὶ τῆς ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν.*

12. Ἀριθμὸν γεγραμμένον διὰ ψηφίων ἀπαγγέλλομεν κατὰ τοὺς ἑξῆς κανόνας·

***1) Ἐὰν τὰ ψηφία δὲν εἶναι περισσότερα τῶν τριῶν, ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον χωριστὰ μετὰ τοῦ ὀνόματος τῶν μονάδων τὰς ὁποίας παριστάνει, ἀρχίζομεν δὲ ἀπὸ τὸ πρῶτον.***

Οἷον, ὁ ἀριθμὸς 422 ἀπαγγέλλεται, τέσσαρες ἑκατοντάδες δύο δεκάδες καὶ δύο μονάδες, ἢ συντομώτερον, τετρακόσια εἴκοσι δύο· ὁ ἀριθμὸς 705 ἀπαγγέλλεται ἑπτακόσια, πέντε, ὁ δὲ 72 ἑβδομήκοντα δύο.

2) Ἐὰν τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι περισσότερα τῶν τριῶν, τὰ μὲν τρία τελευταῖα παριστῶσι τὰς ἁπλᾶς μονάδας, τὰς δεκάδας καὶ τὰς ἑκατοντάδας, τὰ τρία ὄπισθεν τούτων παριστῶσι τὰς χιλιάδας, τὰ δὲ τρία ὄπισθεν τούτων παριστῶσι τὰ ἑκατομμύρια, κ.τ.λ., διὰ τοῦτο ***χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τμήματα τριψήφια*** (ἀρχίζοντες ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων) ***καὶ μετὰ ταῦτα ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον τμῆμα χωριστά, ὡς νὰ ἦτο εἷς ἀριθμός, προσαρτῶντες καὶ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, ἃς παριστᾷ·*** εἰς τὴν ἐκφώνησιν ἀρχίζομεν ἀπὸ τὸ τμῆμα τῶν ἀνωτάτων μονάδων, ὅπερ δυνατὸν νὰ εἶναι καὶ διψήφιον ἢ μονοψήφιον.

Οἷον, ὁ ἀριθμὸς 15 107 ἀπαγγέλλεται, δεκαπέντε χιλιάδες καὶ ἑκατὸν ἑπτά, ὁ δὲ ἀριθμὸς 18 030 601 ἀπαγγέλλεται, δέκα ὀκτὼ ἑκατομμύρια τριάκοντα χιλιάδες καὶ ἑξακόσια ἕν· καὶ οὕτω καθεξῆς.

## *Γραφὴ ἀπαγγελλομένου ἀριθμοῦ.*

13. Ἐξ ὅσων εἴπομεν προηγουμένως, εὐκόλως συνάγομεν τοὺς κάτωθι κανόνας διὰ τὴν γραφὴν ἀπαγγελλομένου ἀριθμοῦ.

***1. Διὰ νὰ γράψωμεν ἀπαγγελλόμενον ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ χίλια, γράφομεν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο τὰ ψηφία τῶν ἑκατοντάδων, δεκάδων καὶ ἁπλῶν μονάδων αὐτοῦ· ἀλλ' ἐὰν ὁ ἀπαγγελλόμενος ἀριθμὸς δὲν περιέχει ἁπλᾶς μονάδας ἢ δεκάδας, εἰς τὴν θέσιν αὐτῶν γράφομεν 0.***

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς πεντακόσια ἑξήκοντα τρία γράφεται: *563*, ὁ δὲ τριακόσια εἴκοσι γράφεται: *320* καὶ ὁ τετρακόσια ὀκτώ: *408*.

***2. Διὰ νὰ γράψωμεν ἀπαγγελλόμενον ἀριθμόν, μεγαλύτερον τοῦ χίλια, γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν διαφόρων ἀρχικῶν μονάδων τὰς ὁποίας περιέχει, ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον κατὰ σειράν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τῆς ἀνωτάτης ἀρχικῆς μονάδος. Ἀλλ' ἐὰν εἷς τοιοῦτος ἀριθμὸς κατωτέρας τινὸς ἀρ-***

***χικῆς μονάδος δὲν δοθῇ, γράφομεν εἰς τὴν θέσιν αὐτοῦ τρία Ο ἢ ἐὰν δοθῇ μονοψήφιος γράφομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ δύο Ο ἢ ἐὰν δοθῇ διψήφιος γράφομεν ἓν Ο πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ.***

π. δ. 5 430 704
26 016 007
35 000 408 (§ 10 ἐδ. 2).

## *Σύνολον μονάδων τάξεώς τινος δοθέντος ἀριθμοῦ.*

14. Τὸ σύνολον μονάδων τάξεώς τινος δοθέντος ἀριθμοῦ παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος μένει, ἂν ἀπὸ τὸν δοθέντα, ἀποκόψωμεν (ἐκ δεξιῶν) τὸν ἀριθμὸν τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ ψηφία τῶν μονάδων κατωτέρας τάξεως τῆς ζητουμένης.

Οὕτω ὁ ἀριθμὸς 487 536 περιέχει ἐν ὅλῳ ἑκατοντάδας 4 875, δεκάδας δὲ χιλιάδων, ἐν ὅλῳ 48.

## *Ἴσοι καὶ ἄνισοι ἀριθμοί.*

15. ***Ἴσοι*** λέγονται δύο ἀριθμοί, ὅταν ἑκάστη μονὰς τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν μονάδα τοῦ ἄλλου.

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς τῶν ἄνω ἄκρων ἀνθρώπου εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν κάτω ἄκρων αὐτοῦ. Ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς τῶν δακτύλων τῆς δεξιᾶς χειρὸς εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν δακτύλων τῆς ἀριστερᾶς.

Σημεῖον τῆς ἰσότητος δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ =, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται ἴσον καὶ τὸ ὁποῖον γράφεται μεταξὺ τῶν δύο ἴσων ἀριθμῶν, ὡς 8=8 (ὀκτὼ ἴσον ὀκτώ).

16. ***Ἄνισοι*** λέγονται δύο ἀριθμοὶ ὅταν μονάδες τινὲς τοῦ ἑνὸς δὲν ἔχωσιν ἀντιστοίχους εἰς τὸν ἄλλον· ὁ δὲ ἔχων τὰς περισσοτέρας μονάδας λέγεται μεγαλύτερος ἐνῷ ὁ ἄλλος λέγεται μικρότερος. Π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ καὶ 5 εἶναι ἄνισοι· εἶναι δὲ ὁ 7 μεγαλύτερος τοῦ 5.

Σημεῖον τῆς ἀνισότητος εἶναι τὸ $<$, γράφεται δὲ ὁ μικρότερος ἀριθμὸς πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας ὡς

$8<9$ ἀναγινώσκεται δὲ ὀκτὼ μικρότερον τοῦ ἐννέα
ἢ $9>8$ καὶ » ἐννέα μεγαλύτερον τοῦ ὀκτώ.

## Ἀσκήσεις.

1) Πόσας μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας ἔχει α) μία χιλιὰς β) μία κὰς χιλιάδων γ) μία ἑκατοντὰς χιλιάδων;

2) Πόσα δεκάδραχμα καὶ πόσα ἑκατοντάδραχμα περιέχονται α) εἰς 00 δραχ. β) εἰς 100 000 δραχ. γ) εἰς 1 000 000 δραχ.;

3) Ποσάκις ἡ χιλιὰς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς δεκάδος καὶ ποσάκις ἡ δεκὰς λιὰς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἑκατοντάδος;

4) Πῶς γράφονται διὰ ψηφίων οἱ ἀριθμοί:

α) ἑβδομήκοντα ἓξ β) τετρακόσια πεντήκοντα τέσσαρα γ) ἑξακόσια ὀκτὼ ) δύο χιλιάδες τριάκοντα ἐννέα ε) τριάκοντα χιλιάδες δέκα ἑπτὰ στ) ὀκτα- όσιαι τρεῖς χιλιάδες ζ) ἑπτὰ ἑκατομμύρια ἑκατὸν τρία.

5) Πῶς ἀπαγγέλλονται οἱ ἑξῆς ἀριθμοί:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 59 | 80 007 | 1 010 101 | 300 500 |
| 850 | 50 800 | 3 005 | 300 500 000 |
| 1 650 | 800 107 | 30 005 | 305 000 000 |
| 12 107 | 1 001 | 300 005 | 6 006 006 |
| 35 011 | 100 001 | 300 050 | 6 060 060 |

6) Νὰ γραφῶσι διὰ ψηφίων οἱ ἀριθμοὶ οἵτινες ἔχουσι α) 12 δεκάδας αὶ 7 μονάδας β) 12 ἑκατοντάδας καὶ 7 μονάδας γ) 12 χιλιάδας καὶ ἑπτὰ ονάδας δ) τρεῖς δεκάδας χιλιάδων, πέντε ἑκατοντάδας καὶ δύο δεκάδας ε) έσσαρας μονάδας ἑκατομμυρίων καὶ τέσσαρας δεκάδας ἁπλᾶς.

7) Νὰ γραφῶσιν ὅλοι οἱ ἀριθμοί, ὅσοι ἔχουν 142 δεκάδας τὸ ὅλον.

8) Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν δεκάδων, ἑκατοντάδων, χιλιάδων καὶ κατοντάδων χιλιάδων ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν 1 252, 37 206, 705 040, 604 809.

## Ἑλληνικὴ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν.

Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν ἐγνώριζον τὰ ἰνδικὰ ψηφία, μετεχειρίζο- ντο δὲ διὰ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν τὰ 24 γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, θέτοντες πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῶν καὶ ὀλίγον ὑπεράνω ἕνα τόνον. Καὶ τὰς ιὲν μονάδας *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9* παρίστανον διὰ τῶν γραμ- μάτων ἀπὸ τοῦ α μέχρι τοῦ θ· ἐπειδὴ ὅμως τὰ γράμματα ταῦτα εἶναι μόνον ὀκτώ, μετεχειρίζοντο πρὸς παράστασιν τοῦ ἀριθμοῦ 6 τὸ σημεῖον ϛ (στίγμα)·

ὥστε οἱ ἀριθμοὶ *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,*
παριστάνοντο α΄, β΄, γ΄, δ΄, ε΄, ϛ΄, ζ΄, η΄, θ΄.

Τὰς δὲ δεκάδας *10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 9* παρίστανον διὰ τῶν γραμμάτων ἀπὸ τοῦ ι μέχρι τοῦ π· ἐπειδὴ δὲ ταῦτα εἶναι ὀκτώ, μετεχειρίζοντο τὸ σύμβολον ϟ (ὅπερ λέγεται κόππ πρὸς παράστασιν τοῦ ἀριθμοῦ 90· ὥστε οἱ ἀριθμοὶ

| | *10,* | *20,* | *30,* | *40,* | *50,* | *60,* | *70,* | *80,* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| παριστάνοντο | ι΄, | κ΄, | λ΄, | μ΄, | ν΄, | ξ΄, | ο΄, | π΄, | |

Τὰς δὲ ἑκατοντάδας *100, 200, 300, 400, 500, 600, 70 800, 900,* παρίστανον διὰ τῶν ἐπιλοίπων ὀκτὼ γραμμάτων τ ἀλφαβήτου καὶ διὰ τοῦ σημείου ϡ (ὅπερ λέγεται σαμπὶ) ὡς ἑξῆς:

| *100,* | *200,* | *300,* | *400,* | *500,* | *600,* | *700,* | *800,* | *900,* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ρ΄, | σ΄. | τ΄, | υ΄, | φ΄, | χ΄, | ψ΄, | ω΄, | ϡ΄. |

Τοὺς ἐκ μονάδων καὶ δεκάδων συγκειμένους ἀριθμοὺς παρίσταν γράφοντες πρῶτον τὸ γράμμα τῶν δεκάδων καὶ ἔπειτα τὸ γράμμα τ μονάδων· οἷον, 47 ἐγράφετο μζ, 53, νγ΄. Ὁμοίως καὶ τοὺς συγκειμένο ἐκ μονάδων, δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων· οἷον, οἱ ἀριθμοὶ *312, 507, 60* ἐγράφοντο ὡς ἑξῆς . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . τιβ΄, φζ΄, χ

Διὰ τὰς χιλιάδας μετεχειρίζοντο τὰ αὐτὰ γράμματα, θέττοντες τ τόνον ὄπισθεν καὶ ὀλίγον ὑποκάτω· οἷον, ὁ 1 000 ἐγράφετο ͵α, 3 000 ͵γ, ὁ 100 000 ͵ρ, κτλ.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

### ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

17. ***Ἡ πρόσθεσις εἶναι πρᾶξις, δι᾽ ἧς σχηματίζομεν ἕνα ἀρ θμὸν ἐκ πασῶν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας ἔχουσι δύο ἢ περισσό τεροι ἄλλοι ἀριθμοί.***

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, θέλω νὰ εὕρω, ***πόσα μῆλα ἔλαβεν ἕ παιδίον, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ πατήρ του ἔδωκεν 8 μῆλα, ἡ δὲ μήτηρ του 9 ὁ δὲ πάππος του 2,*** πρέπει νὰ ἑνώσω 8 μονάδας, 9 μονάδας καὶ 2 μο νάδας καὶ νὰ σχηματίσω ἐξ αὐτῶν ἕνα ἀριθμόν· τοῦτο δὲ εἶναι πρόσ θεσις.

Οἱ ἀριθμοί, οἵτινες πρέπει νὰ προστεθῶσι, λέγονται ***προσθετέοι*** Τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως, ἤτοι ὁ δι᾽ αὐτῆς εὑρισκόμενος ἀριθ μός, λέγεται ***κεφάλαιον*** ἢ ***ἄθροισμα***.

Ἡ πρόσθεσις σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου +, τὸ ὁποῖον ἀναγινώ σκεται σὺν καὶ γράφεται μεταξὺ τῶν προσθετέων ἀριθμῶν· οἷον 5+3 παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 3· ἀναγινώσκεται δὲ πέντε σὺν ἢ καὶ τρία.

Ὅταν προσθέτωμεν ἀριθμούς, ὑποθέτομεν, ὅτι εἶναι ὁμοειδεῖς, δηλαδὴ ὅτι αἱ μονάδες των παριστάνουν ὅλαι τὸ αὐτὸ πρᾶγμα· δυνάμεθα π. χ. νὰ προσθέσωμεν τρία μῆλα καὶ δύο μῆλα, ἢ τρεῖς μῆνας καὶ δύο μῆνας, ἢ τρεῖς ὥρας καὶ δύο ὥρας· ἀλλὰ δὲν δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν τρία μῆλα καὶ δύο μῆνας, ἢ τρία ἔτη καὶ δύο μῆνας, διότι ταῦτα εἶναι ἑτεροειδῆ· ἐπειδὴ ὅμως, ὅ,τι πρᾶγμα καὶ ἂν παριστάνωσιν αἱ μονάδες, πάντοτε τρία καὶ δύο κάμνουν πέντε (ἤτοι, τρία μῆλα καὶ δύο μῆλα κάμνουν πέντε μῆλα, τρεῖς ἄνθρωποι καὶ δύο ἄνθρωποι κάμνουν πέντε ἀνθρώπους, τρεῖς δραχμαὶ καὶ δύο δραχμαὶ κάμνουν πέντε δραχμάς), διὰ τοῦτο δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἠξεύρωμεν, τί παριστάνουσιν αἱ μονάδες τῶν προσθετέων· ἀρκεῖ νὰ παριστάνωσιν ὅλαι τὸ αὐτὸ πρᾶγμα.

*Σημείωσις.*—Ὅταν δὲν ὁρίζωμεν τὸ πρᾶγμα τοῦ ὁποίου τὸ μέγεθος φανερώνει ὁ ἀριθμός, τότε οἱ ἀριθμοὶ λέγονται ***ἀφῃρημένοι***· ὅταν δὲ ὁρίζωμεν αὐτό, τότε οἱ ἀριθμοὶ λέγονται ***συγκεκριμένοι*** οἷον, οἱ ἀριθμοὶ 8, 9 εἶναι ἀφῃρημένοι, οἱ δὲ ἀριθμοὶ 8 μῆλα, 9 σῦκα εἶναι συγκεκριμένοι.

Εἰς τὴν πρόσθεσιν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις· α΄) ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι μονοψήφιοι· β΄) ὅταν εἶναι οἱοιδήποτε.

## *Πρόσθεσις ἀριθμῶν μονοψηφίων.*

18. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν δύο μονοψηφίους ἀριθμούς· οἷον, τοὺς 8 καὶ 4. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα προσθέτομεν εἰς τὸν 8 τὰς μονάδας τοῦ 4, ἀπὸ μίαν μίαν· ἤγουν λέγομεν, ὀκτὼ καὶ ἓν κάμνουν ἐννέα, ἐννέα καὶ ἓν κάμνουν δέκα, δέκα καὶ ἓν κάμνουν ἕνδεκα, ἕνδεκα καὶ ἓν κάμνουν δώδεκα· ἄρα τὸ ἄθροισμα εἶναι ὁ ἀριθμὸς 12.

Ἀντὶ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 8 τὰς μονάδας τοῦ 4, δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 4 τὰς μονάδας τοῦ 8, καὶ εἶναι προφανὲς ὅτι θὰ εὕρωμεν ὡς ἄθροισμα πάλιν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 12· διότι τὸ ἄθροισμα σχηματίζεται ἀπὸ 8 μονάδας καὶ ἀπὸ 4 μονάδας, εἶναι δὲ ἀδιάφορον, κατὰ ποῖον τρόπον θὰ ἑνωθῶσιν αἱ μονάδες αὗται.

***Σημείωσις***. Τὴν πρόσθεσιν δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν ἐκτελοῦμεν ἀμέσως ἀπὸ μνήμης, διότι εὐκόλως μανθάνομεν νὰ ἐνθυμώμεθα τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν· ὥστε λέγομεν εὐθύς, ὀκτὼ καὶ τέσσαρα (ἢ τέσσαρα καὶ ὀκτὼ) κάμνουν δώδεκα· 5 καὶ 6 κάμνουν 11, κλπ.

Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολλοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς, προσθέτομεν δύο ἐξ αὐτῶν· ἔπειτα εἰς τὸ ἄθροισμα τούτων προσθέτομεν ἕνα ἄλλον, εἰς τὸ νέον ἄθροισμα ἕνα ἄλλον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις ὅτου λάβωμεν πάντας τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Ἐὰν π. χ. ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 6, 8, 2, 5, 6, 9, λέγομεν 6 καὶ 8 κάμνουν 14, 14 καὶ 2 κάμνουν 16, 16 καὶ 5 κάμνουν 21, 21 καὶ 6 κάμνουν 27 καὶ τέλος 27 καὶ 9 κάμνουν 36. (Τὰς διαδοχικὰς ταύτας προσθέσεις ἐκτελοῦμεν ἢ ἀπὸ μνήμης, ἢ προσθέτοντες τὰς μονάδας τοῦ μονοψηφίου εἰς τὸν πολυψήφιον ἀπὸ μίαν μίαν). Τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι λοιπὸν 36.

Σημειωτέον δέ, ὅτι, καὶ κατ' ἄλλην τάξιν ἂν λάβωμεν τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τοὺς προσθέσωμεν, πάλιν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα θὰ εὕρωμεν· διότι τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς μονάδας τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· εἶναι δὲ ἀδιάφορον κατὰ ποῖον τρόπον θὰ ἑνωθῶσιν αἱ μονάδες αὗται. Λόγου χάριν, ἠδυνάμεθα νὰ ἑνώσωμεν αὐτὰς ὡς ἑξῆς· Λαμβάνομεν μίαν μονάδα του 6 καὶ τὴν προσθέτομεν εἰς τὸ 9, ὅτε τοῦτο γίνεται 10 καὶ τὸ 6 γίνεται 5, τότε τὰ δύο 5 κάμνουν ἄλλα 10· καὶ τὸ 8 καὶ 2 κάμνουν ἄλλα 10· ἔχομεν λοιπὸν 30· τοῦτο μὲ τὸ ἄλλο 6 ἀποτελεῖ τέλος τὸν 36.

## *Πρόσθεσις ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν.*

19. ***Πρόβλημα***. Ἕνας παντοπώλης ἐκέρδισεν ἀπὸ τὴν πώλησιν βουτύρου 4507 δραχ. ἀπὸ τὴν πώλησιν ἐλαίου 9813 δραχ καὶ ἀπὸ τὴν πώλησιν ἀλεύρου 552 δραχ. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισεν ἐν ὅλῳ;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο πρέπει νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 4507, 9813 καὶ 552. Τὸ δὲ ἄθροισμα 4507 δρ. + 9813 δρ. + 552 δραχ. εἶναι τὸ ὁλικὸν κέρδος.

Ἀλλ' ἡ πρόσθεσις τῶν πολυψηφίων τούτων ἀριθμῶν ἀνάγεταaι εἰς τὴν ἁπλῆν πρόσθεσιν μονοψηφίων· διότι φανερόν εἶναι, ὅτι διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀριθμούς, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας αὐτῶν, χωριστὰ τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας κτλ. καὶ νὰ ἑνώσωμεν πάντα ταῦτα τὰ ἀθροίσματα.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται πρὸς εὐκολίαν ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 4507 \\ 9813 \\ \underline{552} \\ 14872 \end{array}$$

Γράφομεν τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην· ἔπειτα ἄγομεν ὑπ᾽ αὐτοὺς ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς ταύτης γράφομεν τὰ ψηφία τοῦ ἀθροίσματος, καθ᾽ ὅσον εὑρίσκομεν αὐτά.

Κατὰ πρῶτον προσθέτομεν τὰς ἁπλᾶς μονάδας, λέγοντες, 2 καὶ 3 κάμνουν 5, καὶ 7 κάμνουν 12· τὸ ἄθροισμα τῶν ἁπλῶν μονάδων εἶναι λοιπὸν 12 μονάδες· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἔχει δύο μονάδας καὶ μίαν δεκάδα, γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ἁπλῶν μονάδων μόνον τὸ ψηφίον 2 τῶν μονάδων καὶ κρατοῦμεν τὴν μίαν δεκάδα, διὰ νὰ νὰ τὴν ἑνώσωμεν μὲ τὰς δεκάδας τῶν προσθετέων ἀριθμῶν.

Μεταβαίνοντες εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων, λέγομεν, 1 τὸ κρατούμενον καὶ 5 κάμνουν 6, καὶ 1 κάμνουν 7. Τὸ ἄθροισμα τῶν δεκάδων εἶναι λοιπὸν 7 δεκάδες· γράφομεν αὐτὰς εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων.

Μεταβαίνοντες ἔπειτα εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων λέγομεν, 5 καὶ 8 κάμνουν 13, καὶ 5 κάμνουν 18. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἑκατοντάδων εἶναι λοιπὸν 18 ἑκατοντάδες· καὶ ἐπειδὴ 18 ἑκατοντάδες σχηματίζουσι μίαν χιλιάδα καὶ 8 ἑκατοντάδας, γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων μόνον τὸ ψηφίον 8 τῶν ἑκατοντάδων καὶ κρατοῦμεν τὴν μίαν χιλιάδα, διὰ νὰ τὴν ἑνώσωμεν μὲ τὰς χιλιάδας τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Μεταβαίνοντες τέλος εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων, λέγομεν, 1 τὸ κρατούμενον καὶ 9 κάμνουν 10, καὶ 4 κάμνουν 14· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν χιλιάδων εἶναι 14 χιλιάδες, καὶ ἐπειδὴ 14 χιλιάδες ἀποτελοῦσι μίαν δεκάδα χιλιάδων καὶ 4 χιλιάδας, γράφομεν 4 εἰς τὴν θέσιν τῶν χιλιάδων, καὶ ὄπισθεν αὐτοῦ (ἤτοι εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων χιλιάδων) τὸ ψηφίον 1.

Τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι λοιπὸν 14872, ἤτοι ὁ παντοπώλης ἐκέρδισεν ἐν ὅλῳ 14872 δραχ.

## *Κανὼν τῆς προσθέσεως.*

20. ***Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προσθέσεως καὶ ἐξ ἄλλων ὁμοίων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς προσθέσεως.***

***Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, γράφομεν πρὸς εὐκολίαν αὐτοὺς τὸν ἕνα ὑποκάτω τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες ἑκάστης τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην· ἔπειτα ἄγομεν ὑπ' αὐτοὺς ὁριζοντίαν γραμμήν, διὰ νὰ ἀποχωρίσωμεν αὐτοὺς ἀπὸ τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον θὰ γραφῇ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς. Ἔπειτα προσθέτομεν χωριστὰ τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων· καὶ ὅταν μὲν τὸ ἄθροισμα μιᾶς στήλης δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν 9, γράφομεν αὐτὸ ὑποκάτω τῆς ἰδίας στήλης, ἐὰν ὅμως ὑπερβαίνῃ τὸν 9 (ὅτε θὰ ἔχῃ δεκάδας καὶ μονάδας) γράφομεν μόνον τὰς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος ὑποκάτω τῆς στήλης, τὰς δὲ δεκάδας προσθέτομεν εἰς τὴν ἀκόλουθον πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλην· καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τῆς τελευταίας στήλης.***

***Σημείωσις.*** Ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἰς ἑκάστην στήλην δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν 9, εἶναι ἀδιάφορον ἂν ἀρχίζωμεν τὴν πρᾶξιν ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἢ ἂν ἀρχίζομεν ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ δεξιά· τοῦτο συμβαίνει π. χ. εἰς τὴν ἑξῆς πρόσθεσιν·

$$\begin{array}{r} 521 \\ 314 \\ 123 \\ \hline 958 \end{array}$$

Ἀλλ' ὅταν τὸ ἄθροισμα μιᾶς στήλης (ἢ καὶ περισσοτέρων) ὑπερβαίνῃ τὸν 9, ἐὰν ἀρχίζωμεν ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης τάξεως, θὰ εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ ἀλλάξωμεν τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον ἐγράψαμεν π. χ. εἰς τὴν ἑξῆς πρόσθεσιν·

$$\begin{array}{r} 89\,592 \\ 4\,721 \\ 25\,491 \\ 1\,592 \\ \hline 121\,396 \end{array}$$

Τὸ ἄθροισμα τῆς στήλης τῶν δεκάδων χιλιάδων εἶναι μόνον 10, ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῆς στήλης τῶν χιλιάδων καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῆς στήλης τῶν ἑκατοντάδων λαμβάνομεν ἀκόμη 2 δεκάδας χιλιάδων, ὥστε τὸ 10 πρέπει νὰ γίνῃ 12· διὰ ταῦτα ἀρχίζομεν τὴν πρόσθεσιν πάντοτε ἀπὸ τὴν στήλην τῶν ἁπλῶν μονάδων.

***Σημείωσις***. Τὴν πρόσθεσιν δύο διψηφίων ἀριθμῶν ἐκτελοῦμεν εὐκόλως ἀπὸ μνήμης, ὅταν ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν λήγῃ εἰς 0 (ἢ καὶ οἱ δύο) οἷον, 60+20 εἶναι 80, 32+40 κάμνουν 72, κτλ.

Μικρὰ δὲ ἄσκησις ἀρκεῖ διὰ νὰ προσθέτῃ τις πάντοτε ἀπὸ μνήμης τοὺς διψηφίους ἀριθμούς.

## *Δοκιμὴ τῆς προσθέσεως.*

21. ***Δοκιμὴ μιᾶς πράξεως ἀριθμητικῆς λέγεται ἄλλη πρᾶξις τὴν ὁποίαν κάμνομεν διὰ νὰ ἴδωμεν, ἂν ἡ πρώτη ἔγινε χωρὶς λάθος.***

Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν τῆς προσθέσεως ἐπαναλαμβάνομεν τὴν πρόσθεσιν κατ' ἄλλην τάξιν· ἤτοι, προσθέτομεν τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἐὰν προηγουμένως ἐκάμαμεν τὴν πρόσθεσιν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω· ἢ γράφομεν τοὺς προσθετέους κατ' ἄλλην σειράν· ἐὰν εὕρωμεν πάλιν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, εἶναι πιθανόν, ὅτι δὲν ἔγινε λάθος.

## *Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.*

Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἑπόμενα ἀθροίσματα (ἀπὸ μνήμης).

| | | |
|---|---|---|
| 9) | 10 δρχ. + 7 δρχ. | 40 δρχ. + 50 δρχ. + 60 δρχ. |
| | 17 δρχ. + 7 δρχ. | 80 μετ. + 70 μετ. + 37 μετ. |
| | 30 μετρ. + 60 μετρ. | 90 πηχ. + 69 πηχ. + 70 πηχ. |
| | 50 πηχ. + 70 πηχ. | 40 ὀκ. + 50 ὀκ. + 90 ὀκ. + 80 ὀκ. |
| | 20 ὀκ. + 35 ὀκ. | 20 ταλ. + 90 ταλ. + 10 ταλ. + 95 ταλ. |
| 10) | 300 + 500 | 400 + 500 + 300 |
| | 700 + 600 | 700 + 800 + 600 |
| | 900 + 800 | 200 + 600 + 436 |
| | 200 + 257 | 700 + 900 + 100 + 435 |
| | 400 + 159 | 300 + 500 + 755 + 400 |

11) 460 + 40 5500 + 500
630 + 70 7200 + 800
910 + 90 6400 + 658
468 + 40 3349 + 700
911 + 90 4977 + 100

12) 56 + 44 460 + 530
67 + 33 880 + 220
81 + 19 350 + 655
78 + 32 846 + 160
73 + 69 638 + 462

13) Νὰ ἀπαγγελθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ πέντε εἰς πέντε (μέχρι τοῦ 100).

14) Παιδίον τι εἶναι 12 ἐτῶν· ποίαν ἡλικίαν θὰ ἔχῃ μετὰ 5 ἔτη; ποίαν μετὰ 10; καὶ ποιαν μετὰ 20;

15) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀθροίσματα (γραπτῶς).

795 + 182 + 218 + 347
2943 + 3851 + 536 + 584 + 5208
59308 + 95244 + 25091 + 561 + 6781 + 3038
21979 + 128681 + 30677 + 450690 + 578 + 46 + 84954
27803 + 104283 + 875 + 99 + 3019 + 2702300

16) Ἄνθρωπός τις ἐγεννήθη κατὰ τὸ ἔτος 1838. Κατὰ ποῖον ἔτος ἦτο 75 ἐτῶν;

17) Εἷς ἔμπορος ἠγόρασε τυρὸν ἀντὶ 5075 δραχ. καὶ τὸν μετεπώλησε μὲ κέρδος 967 δραχ. Πόσας δραχμὰς εἰσέπραξεν ἐκ τῆς πωλήσεως;

18) Εἷς ὀπωροπώλης ἐπώλησεν ὀπωρικὰ ἀντὶ 2115 δραχ. καὶ ἐζημιώθη ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτῆς 892 δραχ. Ποίας ἀξίας ἦσαν τὰ πωληθέντα;

19) Ἡ Τροία ἐκυριεύθη τῷ 1270 π. Χ. Πόσα ἔτη παρῆλθον ἀπὸ τότε μέχρι σήμερον; (1928 μ. Χ.)·

20) Γεωργός τις εἰσέπραξεν ἐκ τοῦ σίτου του 1050 δραχ., ἐκ τοῦ οἴνου του 822 δραχ. καὶ ἐκ τοῦ βάμβακός του 2500 δραχ. Πόσας δραχμὰς εἰσέπραξε τὸ ὅλον; (ἀπ. 4372 δρχ.).

21) Διὰ τὴν ἀγορὰν ἑνὸς κτήματος ἐπλήρωσέ τις 87540 δραχ. καὶ διὰ τὴν ἐπισκευὴν αὐτοῦ ἐδαπάνησε 27765 δραχ. Ἐπώλησε δὲ ἔπειτα αὐτὸ μὲ κέρδος 8780 δραχ. Πόσας δραχμὰς τὸ ἐπώλησε; (ἀπ. 124085).

22) Οἰκογενειάρχης τις δαπανᾷ κατὰ μῆνα: δι' ἐνοίκιον 2500 δραχ. διὰ τρόφιμα 4675 δραχ., διὰ φωτισμὸν 112 δραχ., διὰ καύσιμον ὕλην 127 δραχ., δι' ὑδροληψίαν 39 δραχ. καὶ διὰ διάφορα ἄλλα ἔξοδα 875 δραχμάς. Πόσον δαπανᾷ οὗτος κατὰ μῆνα; (ἀπ. 8328 δρ.).

23) Ἐπώλησέ τις 370 ὀκάδας οἴνου ἀντὶ 3320 δραχ., 725 ὀκ. ἀντὶ 7975 δραχ., 1095 ὀκ. ἀντὶ 8760 δραχ. καὶ 1810 ὀκ. ἀντὶ 12670 δραχ. Πό-

σας ὀκάδας ἐπώλησεν καὶ πόσας δραχμὰς εἰσέπραξε ; (ἀπ. 4000 ὀκ., 32735 δρ.).

24) Ἐπλήρωσέ τις χρέος εἰς τρεῖς δόσεις. Διὰ τὴν πρώτην δόσιν ἐπλήρωσε 1275 δραχ., διὰ τὴν δευτέραν 375 δραχ. περισσότερον, καὶ διὰ τὴν τρίτην 680 δραχ. περισσότερον ἀπὸ τὴν δευτέραν. Εἰς πόσας δραχμὰς ἀνήρχετο τὸ χρέος ; (ἀπ. 5255 δρ.)

25) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα πέντε ἀριθμῶν ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος εἶναι 53 482 καὶ ὁ καθεὶς τῶν ἄλλων εἶναι μεγαλύτερος τοῦ προηγουμένου του κατὰ 4007. (ἀπ. 3074 80).

26) Ἐξ ὀκτὼ ἀριθμῶν ὁ εἷς εἶναι μικρότερος τοῦ ἑπομένου του κατὰ 2706 καὶ ὁ τελευταῖος εἶναι 3969. Ποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὀκτὼ αὐτῶν ἀριθμῶν ; (ἀπ. 107520).

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

## ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

22. ***Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι᾽ ἧς ἐλαττώνομεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος τις δοθεὶς ἀριθμός.***

Ἐὰν π. χ. θέλω νὰ εὕρω ***πόσαι δραχμαὶ θὰ μοῦ μείνουν, ὅταν ἀπὸ τὰς 9 δραχμάς, τὰς ὁποίας ἔχω, δώσω τὰς*** 4, πρέπει νὰ ἐλαττώσω τὸν 9 κατὰ τέσσαρας μονάδας, ἤγουν νὰ ἐκβάλω ἀπὸ τοῦ 9 τέσσαρας μονάδας· τοῦτο εἶναι ἀφαίρεσις.

Ὁ πρῶτος ἀριθμός, ὅστις πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ, λέγεται ***μειωτέος***, ὁ δὲ δεύτερος ***ἀφαιρετέος***· ὁ δὲ ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως προκύπτων ἀριθμὸς λέγεται ***ὑπόλοιπον ἢ ὑπεροχὴ ἢ διαφορά.***

***Ὁ μειωτέος εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς.*** Διότι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως, ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ 6 ἀπὸ τοῦ 8 εἶναι 2, τοῦτο σημαίνει, ὅτι ὁ 8 περιέχει 6 μονάδας καὶ 2 μονάδας· δηλαδὴ σύγκειται ἀπὸ τὸν 6 καὶ ἀπὸ τὸν 2, ἢ εἶναι ἄθροισμα αὐτῶν.

Ἡ ἀφαίρεσις σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου —, τὸ ὁποῖον γράφεται μεταξὺ τοῦ μειωτέου καὶ τοῦ ἀφαιρετέου (γράφεται δὲ πρῶτος ὁ μειωτέος) καὶ ἀναγινώσκεται πλὴν ἢ ἀπὸ· οἷον, 8—6 σημαίνει, ὅτι ἀπὸ τοῦ 8 πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 6, καὶ ἀναγινώσκεται ὀκτὼ πλὴν ἓξ ἢ 6 ἀπὸ 8.

***Σημείωσις.***—Καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν οἱ ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν.

Ἐὰν ὁ ἀφαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ τὸν μειωτέον εἶναι φανερόν, ὅτι μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν οὐδεμία μονὰς τοῦ μειωτέου μένει, λέγομεν δὲ τότε, ὅτι ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι 0, παραδεχόμενοι τὸ 0 ὡς ἀριθμόν. Οὕτω 8—8=0.

Ἐὰν ὁ ἀφαιρετέος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μειωτέου ἡ ἀφαίρεσις εἶναι ἀδύνατος.

## *Ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀπὸ ἄλλον ἀριθμόν.*

23. ***Πρόβλημα.—Εἶχε τις 14 δραχ. καὶ ἐδαπάνησε 5 δραχ. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν;***

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν τὰς ὁποίας ἐδαπάνησε, ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν τὰς ὁποίας εἶχεν ἤτοι τὸν μονοψήφιον 5 ἀπὸ τοῦ 14. Τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως ταύτης εἶναι αἱ δραχμαὶ αἱ ὁποῖαι τοῦ ἔμειναν.

Ἀλλὰ διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν μονοψήφιον ἀπὸ ἄλλον ἀριθμόν, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ αὐτὸν τὰς μονάδας τοῦ μονοψηφίου, ἀπὸ μίαν μίαν, ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις μένει, ὅταν καὶ ἡ τελευταία μονὰς τοῦ ἀφαιρετέου ἀφαιρεθῇ, εἶναι τὸ ὑπόλοιπον.

Οὕτω, διὰ νὰ ἀφαιρέσω τὸν 5 ἀπὸ τὸν 14, λέγω, 14 πλὴν 1 μένουν 13, 13 πλὴν 1 μένουν 12, 12 πλὴν 1 μένουν 11, 11 πλὴν 1 μένουν 10, 10 πλὴν 1 μένουν 9· ἄρα τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶναι 9. Ὥστε τοῦ ἔμειναν 9 δραχμαί.

Ἐὰν ἔχω νὰ ἀφαιρέσω 6 δραχ. ἀπὸ 147 δραχ., ἀφαιρῶ τὰς 6 δραχ. μόνον ἀπὸ τὰς 7 μονάδας τοῦ 147, καὶ εὑρίσκω τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον 141 δραχ.

Ὅταν ὁ μειωτέος δὲν εἶναι πολὺ μεγάλος ἀριθμός, αἱ ἀφαιρέσεις αὗται γίνονται ἀμέσως ἀπὸ μνήμης· ὥστε λέγομεν ἀμέσως, 9 ἀπὸ 15 μένουν 6, 8 ἀπὸ 17 μένουν 9· καὶ οὕτω καθεξῆς.

***Σημείωσις.*** Ὅταν ἔχω νὰ ἀφαιρέσω 9, ἀφαιρῶ 10 καὶ ἔπειτα προσθέτω 1· οἷον, 9 ἀπὸ 537 μένουν 528· ὁμοίως ὅταν ἔχω νὰ προσθέσω 9, προσθέτω 10 καὶ ἔπειτα ἀφαιρῶ 1· οἷον, 165 καὶ 9 κάμνουν 174.

## *Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.*

24. ***1) Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα ἀπὸ ἄλλον, δυνά-***

***μεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας του, τὰς δεκάδας του, τὰς ἑκατοντάδας του κτλ., ἤγουν, διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν πάντα τὰ μέρη του.***

Ἐάν, λ. χ., ἔχω νὰ ἀφαιρέσω τὸν 15 ἀπὸ ἄλλον ἀριθμόν, ἔστω ἀπὸ τὸν 28, δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω τὰς 5 μονάδας (ὅτε μένει 23) καὶ ἔπειτα ἀπὸ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον μένει, νὰ ἀφαιρέσω τὴν μίαν δεκάδα (ὅτε μένει 13).

***2) Ἐὰν προσθέσωμεν (ἢ ἀφαιρέσωμεν) καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.***

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ὁ μειωτέος ὑπερβαίνῃ τὸν ἀφαιρετέον κατὰ ἑπτὰ μονάδας, φανερὸν εἶναι, ὅτι καὶ ἂν προσθέσωμεν καὶ εἰς τοὺς δύο ἀπὸ μίαν μονάδα, πάλιν ἡ διαφορά των θὰ μείνῃ ἑπτά, καὶ ἂν ἔπειτα προσθέσωμεν καὶ ἄλλην μονάδα, ἡ διαφορὰ θὰ μείνῃ πάλιν 7, ὥστε ὅσας μονάδας καὶ ἂν προσθέσωμεν ἐξ ἴσου καὶ εἰς τοὺς δύο, ἡ διαφορά των δὲν ἀλλάσσει.

Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι καὶ ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται (ἀρκεῖ αἱ ἀφαιρέσεις νὰ εἶναι δυναταί).

## *Ἀφαίρεσις πολυψηφίου ἀπὸ πολυψήφιον.*

25. ***Πρόβλημα Α΄.—Δύο βαρέλια περιέχουν ὁμοῦ 957 ὀκάδας οἴνου· τὸ ἓν δὲ ἐξ αὐτῶν περιέχει 425 ὀκάδας. Πόσας ὀκάδας οἴνου περιέχει τὸ ἄλλο βαρέλιον;***

Αἱ ζητούμεναι ὀκάδες εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὀκάδων τὰς ὁποίας περιέχει τὸ ἓν βαρέλιον ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὀκάδων τὰς ὁποίας περιέχουν τὰ δύο ὁμοῦ ἤτοι τοῦ ἀριθμοῦ 425 ἀπὸ τοῦ 957. Ἀλλὰ διὰ νὰ ἀφαιρέσω τὸν 425 ἀπὸ τὸν 957 ἀφαιρῶ ἀπὸ τὸν μειωτέον πάντα τὰ μέρη τοῦ ἀφαιρετέου (§ 24 ἰδιότης 1) γίνεται δὲ τοῦτο εὐκολώτερον ἂν γράψωμεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν, ὡς

$$\begin{array}{r} 957 \\ \underline{425} \\ 532 \end{array}$$

ἀφαιροῦμεν δὲ τὰς 5 μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς 7 μονάδας τοῦ μειωτέου (λέγοντες, 5 ἀπὸ 7 μένουν 2) καὶ γράφομεν τὰς δύο μονάδας αἵ ὁποῖαι μένουν, εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰς 2 δεκάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς 5 δεκάδας τοῦ μειωτέου (λέγοντες 2 ἀπὸ 5 μένουν 3) καὶ γράφομεν τὰς 3 δεκάδας, αἵτινες μένουν, εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων· τέλος ἀφαιροῦμεν τὰς 4 ἑκατοντάδας ἀπὸ τὰς ἑκατοντάδας καὶ γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων τὰς 5 ἑκατοντάδας, αἵ ὁποῖαι μένουν· ὥστε τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶναι 53 Ὥστε 532 ὀκ. περιέχει τὸ ἄλλο βαρέλιον.

***Σημείωσις.*** Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο ἠδυνάμεθα νὰ ἀρχίσωμε τὴν πρᾶξιν ἀπὸ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἑκατοντάδων καὶ ἔπειτα νὰ κάμω μεν τὴν ἀφαίρεσιν τῶν δεκάδων καὶ ἔπειτα τῶν μονάδων.

26. ***Πρόβλημα Β΄.***—Μετεπώλησέ της ζάχαριν ἀντὶ 75 853 δρα με κέρδος 8 492 δραχ. Πόσων δραχμῶν ἦτο ἡ ἀξία τῆς ζαχάρεως ;

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ζητουμένας δραχμὰς πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμε τὰς 8 492 δραχ. ἀπὸ τὰς 75 853 δραχ. Πρὸς τοῦτο γράφομεν, ὡ προηγουμένως τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου,

$$\begin{array}{r} 75\,853 \\ 8\,492 \\ \hline 67\,361 \end{array}$$

καὶ λέγομεν δύο μονάδες (ἀφαιρούμεναι) ἀπὸ τρεῖς μονάδας δίδου μίαν μονάδα, 9 δεκάδες ἀπὸ 5 δεκάδες, δὲν ἀφαιροῦνται· διὰ νὰ δυνη θῶμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν, προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον 10 δεκάδα ὥστε γίνονται αἵ 5 δεκάδες του 15, καὶ ἔπειτα λέγομεν 9 ἀπὸ 15 μένου 6· τώρα πρέπει νὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 10 δεκάδα (διὰ νὰ μὴ ἀλλάξῃ ἡ διαφορά), ἢ ἀντ' αὐτῶν μίαν ἑκατοντάδα· λέγο μεν λοιπόν, ἓν τὸ κρατούμενον καὶ 4 κάμνουν 5, ἀπὸ 8 μένουν 3· ἔπειτ 8 (χιλιάδες) ἀπὸ 5 χιλιάδας δὲν ἀφαιροῦνται· προσθέτομεν λοιπὸν 1 χιλιάδας εἰς τὸν μειωτέον, ὥστε ἔχει τώρα 15 χιλιάδας, καὶ λέγομεν ἀπὸ 15 μένουν 7· πρέπει τώρα νὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέο τὰς 10 χιλιάδας (διὰ νὰ μὴ ἀλλάξῃ ἡ διαφορὰ) ἢ μίαν δεκάδα χιλιάδω ὥστε ὁ ἀφαιρετέος ἔχει τώρα μίαν δεκάδα χιλιάδων, καὶ ἂν τὴν ἀφαι ρέσωμεν ἀπὸ τὰς 7 δεκάδας χιλιάδων, ἃς ἔχει ὁ μειωτέος, μένουν δεκάδες χιλιάδων· ὥστε τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον ἤτοι ἡ ἀξία τῆ μεταπωληθείσης ζαχάρεως εἶναι 67 361 δραχμαί.

Καὶ ἡ ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀπὸ πολυψήφιον δύναται νὰ γίνῃ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς φαίνεται εἰς τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

| | | |
|---|---|---|
| 497 | 191 | 1002 |
| 5 | 6 | 7 |
| 492 | 185 | 995 |

## *Κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως.*

27. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς ἀφαιρέσεως.

***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα ἀπὸ ἄλλον ἀριθμόν, γράφομεν αὐτὸν ὑποκάτω τοῦ ἄλλου, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν· ἔπειτα, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας, ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τοῦ μειωτέου. Ἐὰν δὲ ψηφίον τι τοῦ μειωτέου εἶναι μικρότερον τοῦ ἀντιστοιχοῦντος ψηφίου τοῦ ἀφαιρετέου προσθέτομεν εἰς αὐτὸ 10 ἀλλ᾽ ἔπειτα, ἐρχόμενοι εἰς τὸ ἀκόλουθον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου, αὐξάνομεν αὐτὸ κατὰ μίαν μονάδα, πρὶν τὸ ἀφαιρέσωμεν. Τὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν τούτων ἀφαιρέσεων εἶναι τὰ ψηφία τοῦ ζητουμένου ὑπολοίπου.***

28. Ὅταν ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν πολλοὺς ἄλλους, ἢ ἀφαιροῦμεν αὐτοὺς χωριστά, τὸν ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου, ἢ προσθέτομεν αὐτοὺς προηγουμένως καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀντὶ αὐτῶν τὸ ἄθροισμά των. (Διότι, κατὰ τὴν πρώτην ἀρχήν, καὶ οἱ δύο τρόποι θὰ δώσουν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.)

Παραδείγματος χάριν, ἂν ἀπὸ τὸν 15 458 πρόκειται νὰ ἀφαιρεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 455, 892, 2 500, θὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 458 | | 455 | |
| 455 | | 892 | 15 458 |
| 15 003 | ἢ | 2 500 | 3 847 |
| 892 | | 3 847 | 11 611 |
| 14 111 | | | |
| 2 500 | | | |
| 11 611 | | | |

## *Δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως.*

29. Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν τῆς ἀφαιρέσεως, προσθέτομεν τὸν ἀφαιρετέον καὶ τὸ ὑπόλοιπον· ἐὰν ὡς ἄθροισμά των εὕρωμεν τὸν μειωτέον, εἶναι πιθανόν, ὅτι δὲν ἔγινε λάθος εἰς τὴν ἀφαίρεσιν.

Ἡ δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως γίνεται καὶ ὡς ἑξῆς: ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν μειωτέον τὸ εὑρεθὲν ὑπόλοιπον καὶ ἐὰν εὕρωμεν τὸν ἀφαιρετέον, εἶναι πιθανόν, ὅτι ἡ ἀφαίρεσις ἔγινε χωρὶς λάθος.

## *Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.*

Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ κάτωθι ἀφαιρέσεις (ἀπὸ μνήμης).

| | | |
|---|---|---|
| 27) | 18 δρ. — 9 δρ. | 570 δρ. — 40 δρ. |
| | 15 τάλ. — 8 τάλ. | 820 πήχ. — 320 πήχ. |
| | 70 ὀκ. — 40 ὀκ. | 3600 ὀκ. — 600 ὀκ. |
| | 99 πήχ.— 39 πήχ. | 7800 δρ. — 700 δρχ. |
| | 75 μέτ. — 35 μετ. | 99000 μ. — 9000 μ. |
| 28) | 59 — 18 | 525 — 317 |
| | 47 — 25 | 942 — 608 |
| | 88 — 49 | 8500 — 6500 |
| | 200 — 37 | 9700 — 3800 |
| | 800 — 752 | 345000 — 35000 |

Νὰ συμπληρωθῶσιν αἱ ἰσότητες.

| | | |
|---|---|---|
| 29) | 11 + . . . = 31 | 750 + . . . = 950 |
| | 15 + . . . = 40 | 437 + . . . = 545 |
| | 42 + . . . = 97 | 1049 + . . . = 1200 |

30) Εἶχον 95 δραχ. καὶ ἐξ αὐτῶν ἐξώδευσα τὰς 10 πόσαι μοῦ ἔμειναν καὶ ἂν ἀκόμη ἐξοδεύσω 15 πόσαι θὰ μοῦ μείνουν;

31) Βοσκός τις εἶχεν 80 πρόβατα ἀλλὰ τὸν χειμῶνα τοῦ ἐψόφησαν 20 πόσα τοῦ ἔμειναν: καὶ πόσα πρέπει νὰ ἀγοράσῃ διὰ νὰ τὰ κάμῃ 100;

32) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑπόμεναι ἀφαιρέσεις (γραπτῶς).

| | |
|---|---|
| 3576 — 378 | 4315819 — 732944 |
| 52436 — 23709 | 1483040 — 606450 |
| 10006 — 5938 | 2372691 — 1141943 |
| 101010 — 85054 | 5130248 — 3025619 |
| 748317 — 269931 | 24494576 — 20212683 |

33) Νὰ συμπληρωθῶσιν αἱ ἰσότητες.

| | |
|---|---|
| 757 + . . . = 4465 | 98769 + . . . = 181211 |
| 23062 + . . . = 40541 | 260368 + . . . = 455049 |
| 87308 + . . . = 96094 | 698409 + . . . = 900400 |

34) Ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 48712 ν' ἀφαιρεθῇ τὸ ἄθροισμα 3038 + 26406 + 9268.

35) Εἰς τὸν ἀριθμὸν 48201 νὰ προστεθῇ ἡ διαφορὰ 8300 — 7019.

36) Ἀπὸ τὸν 1284 νὰ ἀφαιρεθῇ ἡ διαφορὰ 918 —662.

37) Ἀπὸ τὸ ἄθροισμα 219 + 528 + 311 νὰ ἀφαιρεθῇ ἡ διαφορὰ 737 — 329.

38) Εἰς τὴν διαφορὰν 2112 — 946 νὰ προστεθῇ ἡ διαφορὰ 4500 — 3321.

39) Ἄνθρωπός τις ἠγόρασε κτῆμα ἀντὶ 7720 δραχμῶν καὶ τὸ ἐπώλησεν ὕστερον ἀντὶ 8 517 δρ., πόσας δραχμὰς ἐκέρδισεν ; (ἀπ. 799).

40) Ἠγόρασέ τις κτῆμα ἀξίας 63 750 δραχ. διὰ τὸ ὁποῖον χρεωστε ἀκόμη 14 875 δραχ. Πόσας δραχ. ἐπλήρωσε ; (ἀπ. 48 875).

41) Ἄνθρωπός τις ἀπέθανε τῷ 1879 εἰς ἡλικίαν 85 ἐτῶν· εἰς ποῖον ἔτος ἐγεννήθη ; (ἀπ. 1794)

42) Ἐπώλησέ τις ἐμπόρευμα ἀντὶ 12075 δραχ. καὶ ἐκέρδισεν 2488 δρχ. Πόσον τὸ εἶχεν ἀγοράσει ; (ἀπ. 9587).

43) Ἡ Κων]πολις ἔπεσεν εἰς χεῖρας τῶν Τούρκων τῷ 1453. Πόσα ἔτη παρῆλθον μέχρι σήμερον (1928) ; (ἀπ. 475).

44) Ἡ ὑψηλοτέρα κορυφὴ τοῦ Πεντελικοῦ ὄρους εἶναι 1110 μέτρα ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης, ἡ δὲ τῆς Πάρνηθος 1413 μ. Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ὑψῶν ; (ἀπ. 303 μ.).

45) Ἀρτοποιός τις, ἐξ 9645 ὀκ. ἀλεύρου μετέβαλεν εἰς ἄρτους τὴν μίαν ἡμέραν 2148 ὀκ., τὴν δὲ ἑπομένην 3679 ὀκ. Πόσαι ὀκάδες ἀλεύρου τοῦ ἀπομένουν ἀκόμη πρὸς ἀρτοποίησιν ; (ἀπ. 3818).

46) Δύο ἐργάται ἐκέρδισαν ὁμοῦ 1932 δραχμάς, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς ἐκέρδισεν 807 δραχ. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισεν ὁ ἄλλος καὶ πόσας ἐπὶ πλέον τοῦ πρώτου ; (ἀπ. 1125, 318).

47) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 1890 ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μικρότερος εἶναι ὁ 684. Ποία ἡ διαφορὰ τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν ; (ἀπ. 522).

48) Πόσαι ὧραι εἶναι ἀπὸ τῆς 9ης πρὸ μεσημβρίας μέχρι τῆς 11ης μετὰ μεσημβρίαν (τῆς αὐτῆς ἡμέρας) ; (ἀπ. 14).

49) Πόσαι ὧραι εἶναι ἀπὸ τῆς 2ας μ. μ. μέχρι τῆς 9ης μ. μ. τῆς ἑπομένης ἡμέρας ; (ἀπ. 31).

50) Χωρικός τις ἐπῆγεν εἰς τὴν πόλιν διὰ νὰ ἀγοράσῃ διάφορα πράγματα, τὰ ὁποῖα τοῦ ἐχρειάζοντο, ἔφερε δὲ μαζύ του 1245 δραχ-

καὶ ἐπέστρεψε μὲ 17 δραχ., ἀλλ' ἔμεινε καὶ χρεώστης εἰς ἕνα ἔμπορον 76 δραχ. Πόσης ἀξίας πράγματα ἠγόρασε ; (ἀπ. 1304).

51) Πατήρ τις εἶναι 48 ἐτῶν, ὁ δὲ υἱός του 14. Ποία θὰ εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ πατρός, ὅταν ἡ τοῦ υἱοῦ του θὰ εἶναι 37 ἐτῶν ; (ἀπ. 71).

52) Πατήρ τις εἶναι κατὰ 36 ἔτη μεγαλύτερος τοῦ υἱοῦ του, ὅστις εἶναι 1[illegible] ἐτῶν. Ποία θὰ εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ πατρός, ὅταν ἡ τοῦ υἱοῦ θὰ εἶναι 40 ἐτῶν ; (ἀπ. 76).

53) Πατήρ τις εἶναι κατὰ 27 ἔτη μεγαλύτερος τοῦ υἱοῦ του καὶ κατὰ 28 ἔτη μεγαλύτερος τῆς θυγατρός του, ἥτις εἶναι 23 ἐτῶν. Πόσων ἐτῶν εἶναι ὁ πατὴρ καὶ πόσων ὁ υἱός ; (ἀπ. 51, 14).

54) Εἰς ἑλληνικόν τι σχολεῖον φοιτῶσι 120 μαθηταὶ καὶ εἰς μὲν τὴν τρίτην τάξιν φοιτῶσι 27 μαθ. εἰς δὲ τὴν δευτέραν 14 μαθηταὶ περισσότεροι ἀπὸ τοὺς τῆς τρίτης. Πόσοι μαθηταὶ φοιτῶσι εἰς βαν καὶ αην τάξιν ; (ἀπ. 41, 52).

55) Ἐδαπάνησέ τις πρὸς συντήρησιν τῆς οἰκογενείας του, διὰ τρεῖς μῆνας ἐν ὅλῳ 15291 δραχ. Αἱ δαπάναι τοῦ πρώτου μηνὸς ἦσαν 5764 δραχ. αἱ δὲ τοῦ δευτέρου κατὰ 325 δραχμὰς ὀλιγώτεραι ἀπὸ τὰς τοῦ πρώτου. Πόσας δραχμὰς ἐδαπάνησε τὸν δεύτερον καὶ τρίτον μῆνα ; (ἀπ. 5439, 4088).

56) Ἔμπορός τις ἤνοιξε κατάστημα μὲ κεφάλαια 398000 δραχμάς, καὶ κατὰ τὸ 1ον ἔτος τῆς ἐργασίας του ἐκέρδισε 102500 δραχ. ἀλλ' ἐδαπάνησε πρὸς συντήρησίν του 72000 δραχ. τὸ 2ον ἔτος ἐκέρδισε 145850 δραχ. καὶ ἐδαπάνησε 80500 δραχ. τὸ δὲ 3ον ἐκέρδισε 6920[illegible] δραχ. καὶ ἐδαπάνησε 73000 δραχ. Κατὰ πόσας δραχμὰς εὑρέθησαν ηὐξημένα τὰ κεφάλαιά του εἰς τὸ τέλος τοῦ 3ου ἔτους καὶ εἰς τί ποσὸν ἀνῆλθον ; (ἀπ. 92050, 490050).

57) Μία οἰκογένεια σύγκειται ἐκ τοῦ πατρός, ἐκ τῆς μητρὸς καὶ ἐκ δύο τέκνων· αἱ ἡλικίαι τῶν τεσσάρων ὁμοῦ πέρυσιν ἀπετέλουν τὸν ἀριθμὸν 127· ἐφέτος ὁ πατὴρ ταξιδεύει καὶ τῶν ἄλλων αἱ ἡλικίαι ὁμοῦ ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 72· πόσων ἐτῶν εἶναι ὁ πατήρ ; (ἀπ. 59).

58) Γυνὴ χήρα, ἐρωτηθεῖσα, εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανεν ὁ σύζυγός της ἀπεκρίθη· «τοῦτο μὲν δὲν ἐνθυμοῦμαι, γνωρίζω ὅμως, ὅτι, ὅταν μ[illegible] ἐνυμφεύθη, ἐγὼ μὲν ἤμην 20 ἐτῶν, αὐτὸς δὲ 30, τώρα δὲ ἔχω ἡλικίαν 62 ἐτῶν καὶ εἶμαι χήρα ἀπὸ 3 ἐτῶν»· εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανεν ὁ σύζυγός της ; (ἀπ. 69 ἐτῶν).

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

## ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

30. ***Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς ἐπαναλαμβάνομεν ἕνα ἀριθμὸν πολλάκις καὶ σχηματίζομεν ἐξ αὐτοῦ ἄλλον ἀριθμόν.***

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, θέλω νὰ εὕρω πόσας ἡμέρας ἔχουν τρεῖς ἑβδομάδες, πρέπει νὰ ἐπαναλάβω τὸν 7 τρεῖς φοράς, ἤτοι νὰ προσθέσω 7 καὶ 7 καὶ 7· τοιουτοτρόπως σχηματίζω ἐκ τοῦ 7 τὸν ἀριθμὸν 21· τοῦτο δὲ εἶναι πολλαπλασιασμός.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι ***πρόσθεσις ἀλλεπάλληλος ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς τὸν ἑαυτόν του.***

Εἰς ἕκαστον πολλαπλασιασμὸν δίδονται δύο ἀριθμοί· ὁ εἷς πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ, ἤγουν νὰ πολλαπλασιασθῇ, καὶ λέγεται διὰ τοῦτο ***πολλαπλασιαστέος,*** ὁ δὲ ἄλλος δεικνύει, πόσας φορὰς θὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πρῶτος, καὶ λέγεται ***πολλαπλασιαστής.***

Ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ σχηματιζόμενος ἀριθμός, ἤτοι τὸ ἐξαγόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, λέγεται ***γινόμενον.***

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ 7, πολλαπλασιαστὴς ὁ 3 καὶ γινόμενον ὁ 21.

Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς λέγονται καὶ μὲ ἓν ὄνομα ***παράγοντες τοῦ γινομένου.***

Ὁ πολλαπλασιασμὸς σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου $\times$, τὸ ὁποῖον ἀναγινώσκεται ἐπί· οἷον, $5 \times 7$ σημαίνει, ὅτι ὁ 5 πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν 7, ἤτοι νὰ ἐπαναληφθῇ ἑπτάκις· ἀναγινώσκεται δὲ πέντε ἐπὶ ἑπτά.

***Σημείωσις.*** Τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον· διότι γίνεται ἐκ τούτου διὰ προσθέσεως. Ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς θεωρεῖται πάντοτε ὡς ἀριθμὸς ἀφῃρημένος· διότι σημαίνει μόνον πόσας φορὰς θὰ λάβωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον.

31. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

1) Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μονοψήφιοι.

2) Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι πολυψήφιος, ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς μονοψήφιος.

3) Ὅταν ἀμφότεροι εἶναι πολυψήφιοι.

## *Α΄) Πολλαπλασιασμὸς μονοψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ μονοψήφιον.*

32. Ὁ πολλαπλασιασμὸς μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον γίνεται εὐκόλως διὰ τῆς προσθέσεως, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· ἐὰν π. χ. ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 6 ἐπὶ 5, δηλαδὴ νὰ εὕρω τὸ ἄθροισμα $6+6+6+6+6$, λέγω 6 καὶ 6 κάμνουν 12, καὶ 6 κάμνουν 18, καὶ 6 κάμνουν 24, καὶ 6 γίνονται 30· λοιπὸν τὸ γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ 5 εἶναι 30.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε μονοψηφίων. Εἶναι δὲ τὰ γινόμενα ταῦτα κατατεταγμένα εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα, ὅστις λέγεται πυθαγόρειος· διότι ὡς λέγουσιν, ὁ Πυθαγόρας ἐπενόησεν αὐτόν.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Ἡ πρώτη ὁριζοντία σειρὰ περιέχει τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμούς. Ἡ δευτέρα περιέχει τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 2, ἤτοι τὰ διπλάσια αὐτῶν. Ἡ τρίτη τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 3, ἤτοι τὰ τριπλάσια αὐτῶν· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Διὰ νὰ εὕρωμεν εἰς τὸν πίνακα τοῦτον τὸ γινόμενον δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν, ζητοῦμεν τὸν πολλαπλασιαστέον εἰς τὴν πρώτην κατακόρυφον, τὸ γινόμενον εὑρίσκεται ἐκεῖ, ὅπου συναντῶνται αἱ δύο σειραί, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουσιν ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.

Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον 35, τοῦ $5\times7$, εὑρίσκεται ἐκεῖ, ὅπου συναντᾶται ἡ πέμπτη κατακόρυφος σειρὰ μὲ τὴν ἑβδόμην ὁριζοντίαν.

***Σημείωσις***. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι 1, τὸ γινόμενον εἶναι τὸ ἴδιον μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον δηλαδὴ $5\times1$ εἶναι 5, $8\times1$ εἶναι 8, κτλ.

***Παρατήρησις***. Πᾶς πολλαπλασιασμός, ὡς θὰ ἴδωμεν ἀκολούθως, ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον· διὰ τοῦτο, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ἐκ στήθους τὰ εἰς τὸν πίνακα τοῦτον περιεχόμενα γινόμενα.

## *Β΄) Πολλαπλασιασμὸς Πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.*

33. Ἃς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 8726 ἐπὶ 5. Κανὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν ἑξῆς πρόσθεσιν : $8726+8726+8726+8726+8726$

$$\begin{array}{r} 8726 \\ 8726 \\ 8726 \\ 8726 \\ 8726 \\ \hline \end{array} \qquad \text{ἢ} \qquad \begin{array}{r} 8726 \\ 5 \\ \hline 43630 \end{array}$$

Εἰς τὴν πρόσθεσιν ταύτην βλέπομεν, ὅτι αἱ 6 μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ λαμβάνονται πεντάκις, ἤτοι πολλαπλασιάζονται ἐπὶ 5· καὶ αἱ δύο δεκάδες τοῦ ἀριθμοῦ ἐπίσης λαμβάνονται πέντε φοράς, ἤτοι πολλαπλασιάζονται ἐπὶ 5· καὶ αἱ 7 ἑκατοντάδες ἐπίσης· καὶ αἱ 8 χιλιάδες ἐπίσης. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τῶν 6 μονάδων ἐπὶ πέντε (30 μονάδας) εὑρίσκομεν εἰς τὸν πυθαγόρειον πίνακα (ἢ τὸ ἠξεύρομεν ἐκ στήθους), ὁμοίως καὶ τὸ γινόμενον τῶν δύο δεκάδων ἐπὶ 5 (10 δεκάδας), ὁμοίως ἠξεύρομεν καὶ τὸ γινόμενον τῶν 7 ἑκατοντάδων ἐπὶ 5 (35 ἑκατοντάδας), κτλ. Διὰ τοῦτο συντομεύομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς: Γράφομεν ἅπαξ τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ ὑποκάτω αὐτοῦ τὸν πολλαπλασιαστὴν 5· καὶ ἀφοῦ σύρωμεν ὑποκάτω ὁριζοντίαν γραμμήν, λέγομεν, 6 μονάδες ἐπὶ 5 γίνονται 30 μονάδες, δηλαδὴ 3 δεκάδες καὶ 0 μονάδες· ὅθεν γράφομεν 0 ὑποκάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων καὶ κρατοῦμεν τὰς 3 δεκάδας, διὰ νὰ τὰς ἑνώσωμεν μὲ τὸ ἀκόλουθον γινόμενον τῶν δεκάδων. Ἐρχόμενοι ἔπειτα εἰς τὰς δεκάδας, λέγομεν, 2 δεκάδες ἐπὶ 5 γίνονται 10 δεκάδες καὶ 3 αἱ κρατούμεναι γίνονται 13 δεκάδες, δηλαδὴ μία ἑκατοντὰς καὶ 3 δεκάδες· ὅθεν γράφομεν καὶ τὰς τρεῖς δεκάδας ὑποκάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων καὶ κρατοῦμεν τὴν μίαν ἑκατοντάδα, διὰ νὰ τὴν ἑνώσωμεν μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἑκατοντάδων· 7 ἑκατοντάδες ἐπὶ 5 γίνονται 35 ἑκατοντάδες καὶ μία ἡ κρατουμένη γίνονται 36 ἑκατοντάδες, ἤτοι 6 ἑκατοντάδες καὶ 3 χιλιάδες· λοιπὸν γράφομεν τὰς 6 ἑκατοντάδας εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων καὶ κρατοῦμεν τὰς 3 χιλιάδας, διὰ νὰ τὰς ἑνώσωμεν μὲ τὸ γινόμενον τῶν χιλιάδων· τέλος λέγομεν 8 χιλιάδες ἐπὶ 5 γίνονται 40 χιλιάδες καὶ 3 αἱ κρατούμεναι γίνονται 43 χιλιάδες, τὰς ὁποίας γράφομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν ἑκατοντάδων. Οὕτω δὲ εὑρήκαμεν τὸ ζητούμενον γινόμενον 43 630, τὸ ὁποῖον ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ πολλαπλασιαστέου 8726 πεντάκις εἰς τὸν ἑαυτόν του.

34. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ μονοψήφιον, γράφομεν τὸν μονοψήφιον ὑποκάτω τοῦ πολυψηφίου καὶ ἄγομεν ὑπ' αὐτοὺς ὁριζοντίαν γραμμήν· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων. Καὶ ἂν μὲν γινόμενόν τι εἶναι μονοψήφιον, γράφομεν αὐτὸ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς καὶ εἰς τὴν στήλην τοῦ ψηφίου, τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσαμεν· ἐὰν δὲ τὸ γινόμενον εἶναι διψήφιον, γράφομεν ἐκεῖ μόνον τὰς μονάδας αὐτοῦ, τὰς δὲ δεκάδας ἑνώνομεν μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀκολούθου ψηφίου· καὶ οὕτω καθεξῆς.***

*Παραδείγματα*

| | | |
|---|---|---|
| 678 508 | 4 490 091 | πολλαπλασιαστέος |
| 6 | 8 | πολλαπλασιαστὴς |
| 4 071 048 | 35 920 728 | γινόμενον. |

*Σημείωσι:.* Ἐὰν ψηφίον τι τοῦ πολλαπλασιαστέου εἶναι 0, κα τὸ γινόμενόν του εἶναι 0.

## Γ') Πολλαπλασιασμὸς οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

35. Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν πῶς εὑρίσκεται τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, πρέπει πρῶτον νὰ μάθωμεν τὰς ἑξῆς συντομίας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

***1η) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 10, γράφομεν δεξιὰ αὐτοῦ ἓν μηδενικόν· διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 100, γράφομεν δύο μηδενικά· διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 1000, γράφομεν τρία· καὶ οὕτω καθεξῆς.***

*Παραδείγματα*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Τὸ γινόμενον | 5×10 εἶναι | 50 | 7×100 εἶναι | 700 |
| | 18×10 εἶναι | 180 | 103×100 εἶναι | 10300 |
| | 407×10 εἶναι | 4070 | 5914×100 εἶναι | 591400 |

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Ὁ δὲ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον κάμνομεν τοῦτο εἶναι ὁ ἑξῆς· Διὰ νὰ πολλαπλασιάσω ἀριθμόν τινα, ἔστω τὸν 593, ἐπὶ 18, ἤγουν διὰ νὰ ἐπαναλάβω τὸν 593 δέκα φοράς, πρέπει νὰ ἐπαναλάβω δέκα φορὰς τὰς 3 μονάδας του, ἐπίσης δέκα φορὰς τὰς 9 δεκάδας του, καὶ καθεξῆς· τουτέστι πρέπει νὰ ἐπαναλάβω 10 φορὰς ὅλα τὰ μέρη του. Ἀλλ' ὅταν λάβω τὴν ἁπλῆν μονάδα 10 φορὰς γίνεται δεκάς· ἄρα, ὅταν λάβω τὰς τρεῖς μονάδας δέκα φοράς, γίνονται 3 δεκάδες· ὁμοίως, ὅταν λάβω μίαν δεκάδα δέκα φοράς, προκύπτει μία ἑκατοντάς· ἄρα, ὅταν λάβω τὰς 9 δεκάδας τοῦ ἀριθμοῦ δέκα φοράς, γίνονται 9 ἑκατοντάδες. Ἐπίσης δεικνύω, ὅτι αἱ 5 ἑκατοντάδες γίνονται 5 χιλιάδες· ὥστε, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω ἐπὶ δέκα, προβιβάζω τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ ὅλα κατὰ μίαν τάξιν, τὰς μονάδας κάμνω δεκάδας, τὰς δεκάδας ἑκατοντάδας κτλ. Ἀλλὰ τοῦτο γίνεται, ὅταν τὸ μηδενικὸν γραφῇ εἰς τὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ καὶ λάβῃ τὴν θέσιν τῶν μονάδων.

***2α) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ ἄλλον, τοῦ ὁποίου τὸ πρῶτον ψηφίον εἶναι σημαντικόν, τὰ δὲ ἄλλα μηδενικὰ (οἷον, 400, 500 κτλ.), πολλαπλασιάζομεν μόνον ἐπὶ τὸ σημαντικὸν ψηφίον, καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου γράφομεν τὰ μηδενικὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.***

***Παραδείγματα***

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12× 30 εἶναι | 360 | 12×3 εἶναι 36 | |
| 125× 60 εἶναι | 7 500 | 125 | 4508 |
| 4508×800 εἶναι | 3 606 400 | 6 | 8 |
| | | 750 | 36064 |

Ὁ δὲ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον κάμνομεν τοῦτο, εἶναι ὁ ἑξῆς:

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσω, λόγου χάριν, τὸν ἀριθμὸν 159 ἐπὶ 400, πρέπει νὰ ἐπαναλάβω τὸν 159 τετρακοσίας φοράς· τοῦτο δὲ ἠμπορῶ νὰ τὸ κάμω ὡς ἑξῆς·

ἐπαναλαμβάνω τὸν 159 κατὰ πρῶτον 100 φορὰς καὶ εὑρίσκω 15 900
ἔπειτα ἐπαναλαμβάνω αὐτὸν ἄλλας 100 φορὰς καὶ εὑρίσκω 15 900
ἔπειτα ἄλλας 100 φορὰς καὶ εὑρίσκω πάλιν . . . . . . . . . . . 15 900
καὶ τέλος ἄλλας 100 φορὰς καὶ εὑρίσκω . , . . . . . . . . . 15 900

Τώρα πρέπει νὰ προσθέσω τοὺς τέσσαρας τούτους ἀριθμοὺς καὶ θὰ ἔχω τὸν 159 τετρακοσίας φοράς· ὅ ἐστι θὰ ἔχω τὸ γινόμενον τοῦ 159 ἐπὶ 400· ἀλλὰ βλέπω, ὅτι θὰ εὕρω τὸ ἴδιον, καὶ ἂν προσθέσω τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς

$$\begin{array}{r} 159 \\ 159 \\ 159 \\ 159 \\ \hline 636 \end{array}$$

καὶ δεξιὰ τοῦ ἀθροίσματος 636 γράψω τὰ δύο μηδενικά· ἀλλὰ τὸ δεύτερον τοῦτο ἄθροισμα εἶναι τὸ γινόμενον 159×4· πολλαπλασιάζω λοιπὸν τὸν 159 ἐπὶ 4 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου γράφω δύο μηδενικά.

36. Δυνάμεθα τώρα νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ὁποιουσδήποτε ἀριθμούς.

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 4897 ἐπὶ 875· κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν ἀριθμὸν 4897 ὀκτακοσίας ἑβδομήκοντα πέντε φοράς, καὶ ὁ ἀριθμός, ὅστις θὰ 'σχηματισθῇ ἐκ τῆς ἐπαναλήψεως ταύτης, θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον. Ἀλλ' ἀντὶ νὰ λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν 875 φοράς, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν αὐτὸν κατὰ πρῶτον 800 φορὰς μόνον, καὶ ἔπειτα 70 φοράς, καὶ ἔπειτα 5 φορὰς (διότι ὁ 875 ἐὰν ἀναλυθῇ, κατὰ τὴν ἀξίαν τῶν ψηφίων του, εἶναι 800+70+5)· ὅ ἐστι δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν κατὰ πρῶτον ἐπὶ 800, ἔπειτα χωριστὰ ἐπὶ 70, καὶ ἔπειτα ἐπὶ 5, καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὰ τρία γινόμενα.

Ἰδοὺ οἱ τρεῖς οὗτοι πολλαπλασιασμοί·

| | | |
|---|---|---|
| 4897 | 4897 | 4897 |
| 5 | 70 | 800 |
| 24485 | 342790 | 3917600 |

| | |
|---|---|
| πρῶτον γινόμενον | 24485 |
| δεύτερον γινόμενον | 342790 |
| τρίτον γινόμενον | 3917600 |
| | 4284875 γινόμενον τοῦ 4897 ἐπὶ 875. |

Πρὸς συντομίαν διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς·

| | | |
|---|---|---|
| 4897 | πολλαπλασιαστέος | |
| 875 | πολλαπλασιαστὴς | |
| 24485 | μερικὸν γινόμενον ἐπὶ | 5 |
| 342790 | μερικὸν γινόμενον ἐπὶ | 70 |
| 3917600 | μερικὸν γινόμενον ἐπὶ | 800 |
| 4284875 | ἄθροισμα τῶν μερικῶν γινομένων, ἤγουν τὸ ὁλικὸν γινόμενον. | |

Τὰ μηδενικά, τὰ ὁποῖα γράφομεν δεξιὰ τῶν μερικῶν γινομένων (τοῦ δευτέρου, τρίτου κλπ.) δὲν λαμβάνουσι κανὲν μέρος εἰς τὴν πρόσθεσιν αὐτῶν, ἑπομένως δυνάμεθα νὰ τὰ παραλείπωμεν, ἀρκεῖ μόνον νὰ ἀφίνωμεν κενὸν τὸν τόπον αὐτῶν· πρὸς τοῦτο γράφομεν ἕκαστον μερικὸν γινόμενον οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον του, νὰ εἶναι ὑποκάτω τοῦ ψηφίου, μὲ τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσαμεν· τότε δὲ ἡ πρᾶξις ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάζωμεν διαδοχικῶς τὸν πολλαπλασιαστέον 4897 ἐφ᾽ ἕκαστον τῶν σημαντικῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, πρῶτον ἐπὶ 5, ἔπειτα ἐπὶ 7 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 8, καὶ νὰ γράφωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἄλλο, ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν.

37. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ ἄλλον, γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ ὑποκάτω ἄγομεν ὁριζοντίαν γραμμήν· πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον χωριστὰ μὲ ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἀρχίζοντες ἐκ δεξιῶν, καὶ γράφομεν ἕκαστον μερικὸν γινόμενον οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον του νὰ εἶναι ὑποκάτω τοῦ ψηφίου, μὲ τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσαμεν· ἔπειτα ἄγομεν γραμμὴν καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα· τὸ προκῦπτον ἄθροισμα εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.***

*Παραδείγματα πολλαπλασιασμοῦ.*

```
  56042         1462        175004
     77          801         30013
 -------       -----       -------
 392294         1462        525012
392294       11696       175004
-------      -------   ----------
4315234      1171062   525012
                       ----------
                       5252395052
```

***Συντομία.*** Ὅταν εἷς ἐκ τῶν παραγόντων, ἢ καὶ οἱ δύο, λήγωσιν εἰς μηδενικά, συντομεύεται ὁ πολλαπλασιασμὸς ὡς ἑξῆς· πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμοὺς χωρὶς τὰ μηδενικὰ καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου γράφομεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 87000 ἐπὶ 900, πολλαπλασιάζω $87 \times 9$ καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου 783 γράφω τὰ πέντε μηδενικά, τὰ ὁποῖα παρέλειψα, 78300000. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσω 90700 ἐπὶ 380, πολλαπλασιάζω 907×38 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου 34466 γράφω τρία μηδενικά, 34466000.

### *Δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ τοῦ σταυροῦ.*

38. Προσθέτομεν ὅλα τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ ἐὰν τὸ ἄθροισμά των δὲν εἶναι μονοψήφιος ἀριθμός, προσθέτομεν καὶ αὐτοῦ τὰ ψηφία του· καὶ τοῦτο κάμνομεν, ἕως νὰ εὕρωμεν ἄθροισμα μονοψήφιον. Τὸ αὐτὸ κάμνομεν καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιαστὴν καὶ εἰς τὸ γινόμενον· οὕτω θὰ ἔχωμεν τρεῖς μονοψηφίους ἀριθμούς· ἔπειτα γράφομεν τοὺς δύο πρώτους, τοὺς ὁποίους εὑρήκαμεν ἐκ τῶν δύο παραγόντων, εἰς τὰς δύο ἐπάνω γωνίας τοῦ σταυροῦ, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς καὶ τοῦ γινομένου (ἂν δὲν εἶναι μονοψήφιον) προσθέτομεν τὰ ψηφία, ἕως ὅτου εὑρεθῇ ἀριθμὸς μονοψήφιος· τὸν ἀριθμὸν τοῦτον γράφομεν εἰς μίαν τῶν ὑποκάτω γωνιῶν τοῦ σταυροῦ, τὸν δὲ μονοψήφιον ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἔδωκε τὸ γινόμενον, γράφομεν εἰς τὴν ἄλλην γωνίαν. Ἐὰν οἱ δύο τελευταῖοι ἀριθμοί, οἱ ὑποκάτω εὑρισκόμενοι, δὲν εἶναι ἴσοι, ὁ πολλαπλασιασμὸς ἔχει λάθος, ἐὰν δὲ εἶναι ἴσοι, εἶναι πιθανόν, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἔγινε χωρὶς λάθος. (Τὴν ἀπόδειξιν τούτου ἰδὲ εἰς τὴν μεγάλην μου ἀριθμητικὴν ἐδ. 92).

Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὴν δοκιμὴν ταύτην εἰς τὸν ἑξῆς πολλαπλασιασμόν.

```
  254807          8 | 7
     142          --+--
  ------          2 | 2
  509614
 1019228
 254807
--------
36182594
```

Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστέου εἶναι 26 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ 26 εἶναι 8· ὁμοίως εὑρίσκομεν ἐκ τῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τὸν ἀριθμὸν 7.

Τὸ γινόμενον τῶν ψηφίων τούτων εἶναι 56· καὶ ἐξ αὐτοῦ εὑρίσκομεν τὸν μονοψήφιον 2· τὸν αὐτὸν δὲ εὑρίσκομεν καὶ ἐκ τοῦ γινομένου· διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ γινομένου εἶναι 38 καὶ τούτου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 11 καὶ τούτου πάλιν 2.

## *Ἀσκήσεις.*

59) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοὶ (ἀπὸ μνήμης).

| | |
|---|---|
| 40 × 2 | 700 × 5 |
| 50 × 3 | 600 × 8 |
| 80 × 5 | 600 × 7 |
| 70 × 6 | 900 × 3 |
| 30 × 9 | 800 × 8 |

60) Ὁμοίως οἱ

| | |
|---|---|
| 3000 × 2 | 40 × 50 |
| 7000 × 4 | 60 × 40 |
| 8000 × 9 | 50 × 70 |
| 6000 × 8 | 800 × 30 |
| 50000 × 3 | 90 × 200 |

61) Ὁμοίως οἱ

| | |
|---|---|
| 36 × 2 | 72 × 50 |
| 82 × 2 | 25 × 300 |
| 33 × 3 | 26 × 400 |
| 72 × 5 | 580 × 200 |
| 81 × 5 | 150 × 3000 |

62) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοὶ γραπτῶς.

| | |
|---|---|
| 1283 × 96 | 1456 × 916 |
| 9563 × 39 | 3039 × 6300 |
| 274 × 520 | 3673 × 3002 |
| 849 × 360 | 2045 × 4069 |
| 205 × 817 | 4753 × 40085 |

## *Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.*

39. Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολλοὺς ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν δύο ἐξ αὐτῶν, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸ γινόμενον ἐπὶ ἕνα ἄλλον καὶ τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ ἕνα ἄλλον· καὶ οὕτω καθεξῆς· ἕως οὗ λάβωμεν πάντας τοὺς ἀριθμούς.

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ εὕρω τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 5, 6, 7, 12 (τὸ ὁποῖον σημειοῦται ὡς ἑξῆς, 5×6×7×12), πολλαπλασιάζω τὸν 5 ἐπὶ 6 καὶ εὑρίσκω 30· ἔπειτα πολλαπλασιάζω τὸν 30 ἐπὶ τὸν 7 καὶ εὑρίσκω 210· τέλος πολλαπλασιάζω τὸν 210 ἐπὶ 12 καὶ εὑρίσκω 2520· τοῦτο δὲ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν 5,6,7,12.

## *Γενικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.*

40. Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἔχει δύο γενικὰς ἰδιότητας, τὰς ὁποίας καλὸν εἶναί νὰ ἠξεύρωμεν, διότι ἔχουσι πολλὰς ἐφαρμογάς· εἶναι δὲ αἱ ἑξῆς:

***1η) Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται ὁποιοσδήποτε καὶ ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἄλλον.***

Δηλαδή, εἴτε τὸν 5 πολλαπλασιάσω ἐπὶ 7, εἴτε τὸν 7 ἐπὶ 5, τὸ αὐτὸ γινόμενον θὰ εὕρω, ἤτοι 7×5 = 5×7.

Διὰ νὰ δείξω τοῦτο, ἀναλύω τὸν 7 εἰς τὰς μονάδας του καὶ γράφω αὐτὰς εἰς μίαν σειράν, ἐπαναλαμβάνω δὲ τὴν σειρὰν ταύτην πέντε φοράς· ὡς ἑξῆς·

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσιν ὅλαι αὐταὶ αἱ μονάδες, εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ 5· διότι ἀποτελεῖται ἀπὸ 7 μονάδας, τὰς ὁποίας λαμβάνομεν πέντε φοράς· ἀλλ' αἱ αὐταὶ μονάδες ἀποτελοῦσι καὶ τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 7· διότι αἱ πέντε μονάδες μιᾶς κατακορύφου στήλης ἐπαναλαμβάνονται ἑπτὰ φορὰς (διότι εἶναι ἑπτὰ στῆλαι)· ἄρα 7×5 = 5×7.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δεικνύεται ἡ ἰδιότης αὕτη, ὁποιοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ δύο ἀριθμοί.

Καὶ πολλῶν ἀριθμῶν τὸ γινόμενον δὲν ἀλλάσσει, καθ' ὁποιανδήποτε σειρὰν καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσι. Δηλαδή, ἐὰν ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς ἀριθμοὺς 5, 6, 2, 4, δύναμαι νὰ εἴπω 5×2 εἶναι 10, 10×4 εἶναι 40, καὶ 40×6 εἶναι 240· τοῦτο δὲ τὸ γινόμενον θὰ εὕρω καὶ ἂν τοὺς λάβω μὲ τὴν σειράν, καθ' ἣν εἶναι γεγραμμένοι.

Ἡ ἐλευθερία αὕτη εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εὐκολύνει πολλάκις τὴν πρᾶξιν· διότι δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν τὸν εὐκολώτερον τρόπον τῆς ἐκτελέσεως. Ἐάν, λόγου χάριν, ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω δύο ἀριθμούς, οἷον τοὺς 54 καὶ 27198, λαμβάνω ὡς πολλαπλασιαστέον τὸν μεγαλύτερον (διότι τότε θὰ ἔχω νὰ κάμω ὀλιγωτέρους μερικοὺς πολλαπλασιασμούς). Ἐὰν δὲ ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς ἀριθμοὺς

2, 13, 7, 5, 5, 2,

λέγω 2×5 εἶναι 10, 10×5 εἶναι 50, 50×2 εἶναι 100, 100×13 εἶναι 1300, 1300×7 εἶναι 9100. Δύναμαι μάλιστα καὶ νὰ συγχωνεύσω δύο ἢ περισσοτέρους παράγοντας εἰς ἕνα μόνον, πολλαπλασιάζων αὐτούς. Λόγου χάριν, εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα δύναμαι, ἀντὶ τῶν παραγόντων 2 καὶ 5, νὰ θέσω τὸ 10 (τὸ γινόμενόν των) καὶ ἀντὶ τῶν ἄλλων δύο, 2 καὶ 5, νὰ θέσω 10, ὅτε ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς ἀριθμοὺς 10 10 7 13·
καὶ ἂν οἱ δύο παράγοντες 10 καὶ 10 συγχωνευθῶσι καὶ αὐτοὶ εἰς ἕνα, θὰ ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς ἀριθμοὺς 100 7 13.
καὶ ἐπειδὴ 13×7 εἶναι 91, τὸ ζητούμενον γινόμενον θὰ εἶναι

91×100, ἤτοι 9100

Ὁμοίως εὑρίσκω εὐκολώτατα, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν·

6, 2, 2, 5, 5, 2, 5, 8 εἶναι 48000.

***Παρατήρησις.*** Εἰς τὴν ἰδιότητα ταύτην τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στηρίζεται ἡ ἑξῆς δοκιμὴ αὐτοῦ. Ἀφοῦ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἀριθμούς, διὰ νὰ δοκιμάσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, ἐπαναλαμβάνομεν αὐτὸν λαμβάνοντες ὡς πολλαπλασιαστὴν τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν δὲν ἔγινε λάθος, πρέπει νὰ εὑρεθῇ τὸ ἴδιον γινόμενον.

***2α). Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέρη του.***

Ἐάν, π. χ. ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω τὸ ἄθροισμα 3+8+9 ἐπὶ ἀριθμόν τινα, οἷον τὸν 11, ἢ πολλαπλασιάζω ἕκαστον τῶν μερῶν του (τὸ 3, τὸ 8 καὶ τὸ 9) καὶ προσθέτω ἔπειτα τὰ γινόμενα 33+88+99, ἢ εὑρίσκω τὸ ἄθροισμα 20 καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, 20×11.

Διότι, ὅταν λαμβάνω τὸν ἀριθμὸν $3+8+9$ πολλὰς φοράς, λαμβάνω καὶ τὰ μέρη του· καὶ ἕκαστον μέρος τὸ λαμβάνω τόσας φορὰς ὅσας καὶ τὸν ὅλον ἀριθμόν.

Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἐγνωρίσαμεν καὶ ἐφηρμόσαμεν ἤδη εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον· διότι ἀνελύσαμεν τὸν πολυψήφιον πολλαπλασιαστέον εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν διαφόρων μονάδων του.

## *Περὶ δυνάμεων.*

41. ***Δύναμις ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον ἴσων παραγόντων πρὸς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον,*** οἷον, $5\times5$, $2\times2\times2$, εἶναι δυνάμεις.

Ἐὰν εἶναι δύο οἱ παράγοντες τὸ γινόμενον λέγεται ***δευτέρα δύναμις ἢ τετράγωνον,*** ἐὰν τρεῖς, ***τρίτη δύναμις ἢ κῦβος·*** καὶ οὕτω καθεξῆς. Τὰς δυνάμεις γράφομεν συντόμως ὡς ἑξῆς· γράφομεν μόνον τὸν ἕνα παράγοντα, ἔπειτα δεξιὰ αὐτοῦ καὶ ὀλίγον ὑπεράνω γράφομεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει, πόσοι εἶναι οἱ παράγοντες (ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται ***ἐκθέτης,*** ἐνῷ ὁ εἷς τῶν ἴσων παραγόντων λέγεται ***βάσις*** τῆς δυνάμεως)· οὕτω ἡ τρίτη δύναμις τοῦ δύο γράφεται συντόμως $2^3$· εἰς αὐτὴν ὁ 2 εἶναι ἡ βάσις, ὁ δὲ 3 ὁ ἐκθέτης καὶ εἶναι $2^3=2\times2\times2=8$· ἐπίσης ἡ τετάρτη δύναμις τοῦ πέντε γράφεται $5^4$ καὶ εἰς αὐτὴν ἡ μὲν βάσις εἶναι 5, ὁ δὲ ἐκθέτης εἶναι 4 καὶ εἶναι $5^4=5\times5\times5\times5=625$.

Τὰ τετράγωνα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 12) εἶναι κατὰ σειρὰν τὰ ἑξῆς :

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ἀριθμοὶ | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9, | 10, | 11, | 12. |
| τετράγωνα | 1, | 4, | 9, | 16, | 25, | 36, | 49, | 64, | 81, | 100, | 121, | 144. |

42. ***Θεμελιώδης ἰδιότης τῶν δυνάμεων.***

Ἔστω, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς δύο δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἤτοι τὰς $3^2$ καὶ $3^4$. Ἐπειδὴ $3^2=3\times3$, ἡ δὲ $3^4=3\times3\times3\times3$ θὰ εἶναι καὶ $3^2\times3^4=3\times3\times3\times3\times3\times3$ ἤτοι $3^2\times3^4=3^6$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $7^3\times7^5=7^8$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν ἑπομένην ἰδιότητα.

«***Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάλιν***

***δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐκθετῶν».***

## *Ἀσκήσεις.*

63) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κάτωθι γινόμενα.

$3 \times 5 \times 7$ $\qquad 4 \times 25 \times 30$
$6 \times 8 \times 2$ $\qquad 4 \times 29 \times 25$
$5 \times 4 \times 12$ $\qquad 50 \times 78 \times 2$
$8 \times 4 \times 30$ $\qquad 50 \times 49 \times 4$
$5 \times 8 \times 9 \times 10$ $\qquad 4 \times 21 \times 125$

64) Ὁμοίως τὰ

$5 \times 7 \times 9 \times 13$ $\qquad 8 \times 7 \times 4 \times 30 \times 5 \times 2$
$13 \times 17 \times 55 \times 46$ $\qquad 50 \times 25 \times 19 \times 2 \times 10$
$38 \times 4 \times 77 \times 8$ $\qquad 101 \times 21 \times 37 \times 4 \times 15$

65) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἑπόμενα γινόμενα κατὰ τὸν συντομώτερον τρόπον.

$41 \times 11 =$ (410+41 διότι 11 = 10+1)
$28 \times 101 =$ (2800+28 διότι 101 = 100 + 1

$75 \times 11$ $\qquad 93 \times 101$
$3212 \times 11$ $\qquad 150 \times 101$
$2140 \times 12$ $\qquad 1170 \times 102$
$4245 \times 12$ $\qquad 2489 \times 102$

66) Ὁμοίως τὰ

$31 \times 9 =$ (310—31 διότι, ἀφοῦ 9=10—1 λαμβάνω τὸν 31 δέκα φορὰς καὶ ἐκ τοῦ γινομένου τὸν ἀφαιρῶ ἅπαξ).
$43 \times 99 =$ (4300—43 διότι 99=100—1).

$5125 \times 9$ $\qquad 223 \times 999$
$7018 \times 9$ $\qquad 1037 \times 999$
$719 \times 99$ $\qquad 6208 \times 999$
$872 \times 99$ $\qquad 520 \times 998$
$460 \times 98$ $\qquad 2490 \times 998$

67) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα τῶν

$57 + 24 \times 3$ $\qquad 13 \times 7 + 25 \times 7$
$98 + 19 \times 4$ $\qquad 81 \times 4 + 95 \times 4$
$9 \times 23 + 76$ $\qquad 9 \times 8 + 15 \times 8 + 24 \times 8$
$11 \times 92 + 147$ $\qquad 43 + 20 \times 11 + 35 \times 11$
$15 \times 74 + 205$ $\qquad 101 + 17 \times 15 + 51 \times 15$

68) Νὰ εὑρεθῶσι αἱ δυνάμεις τοῦ 10 ἀπὸ τῆς 2ας μέχρι τῆς 8ης.

69) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 13, 14 κτλ. μέχρι τοῦ 20.

70) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ κῦβοι τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3 κτλ. μέχρι τοῦ 10.

71) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον τοῦ γινομένου $2^3 \times 2^4 \times 3^2 \times 3^3$

## *Προβλήματα λυόμενα διὰ πολλαπλασιασμοῦ.*

Πόσον ἀξίζουν 32 πήχεις ἑνὸς ὑφάσματος, ἐὰν ὁ πῆχυς ἀξίζῃ 3 δραχμάς;

***Λύσις.*** Ἀφοῦ ὁ εἷς πῆχυς ἀξίζει 3 δραχμάς, οἱ δύο θὰ ἀξίζουν δύο φορὰς 3 δραχμάς, ἤτοι $3+3$ ἢ $3\times2$· οἱ τρεῖς θὰ ἀξίζουν τρεῖς φορὰς 3 δραχμάς· ἤτοι $3+3+3$ ἢ $3\times3$· καὶ οἱ 32 θὰ ἀξίζουν 32 φορὰς 3 δραχμάς· πρέπει λοιπὸν νὰ ἐπαναλάβω 32 φορὰς τὸν 3, ἤγουν νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸν ἐπὶ 32. Τὸ γινόμενον $3\times32$ εἶναι 96· τόσον λοιπὸν ἀξίζουν οἱ 32 πήχεις.

Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

43. ***Ἐὰν ἠξεύρωμεν πόσον ἀξίζει ἡ μονὰς ἑνὸς πράγματος (ἤγουν ὁ εἷς πῆχυς ἢ ἡ μία ὀκᾶ κτλ.), διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν πολλῶν μονάδων τοῦ ἰδίου πράγματος, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μονάδος ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἐκφράζει πόσαι εἶναι αἱ μονάδες.***

***Παρατήρησις.*** Τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον (ὅστις εἶναι ἡ ἀξία τῆς μονάδος), διότι εἶναι ἐπανάληψις αὐτοῦ, ἤτοι γίνεται ἐξ αὐτοῦ πολλάκις ἐπαναλαμβανομένου, ὁ δὲ πολλασιαστὴς θεωρεῖται πάντοτε ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμὸς καὶ δεικνύει πόσας φορὰς θὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος

## *Προβλήματα.*

72) Πόσας ἡμέρας ἔχουσι 18 ἑβδομάδες; (ἀπ. $7\times18$).

73) Πόσα λεπτὰ κάμνουν 72 δραχμάς; (ἀπ. $100\times72$).

74) Ἡ ἀγγλικὴ λίρα ἔχει 375 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς κάμνουν αἱ 82 λίραι; (ἀπ. $375\times82$ ἢ 30750).

75) Πόσους μῆνας ἔχουν 18 ἔτη; (ἀπ. 12×18).

76) Παιδίον τι ἔκοψεν ἓν μῆλον εἰς πέντε μέρη, ἔπειτα πάλιν ἔκοψε τὸ καθὲν εἰς τέσσαρα· εἰς πόσα μέρη εἶναι διῃρημένον τὸ μῆλον;

77) 15 ἄνθρωποι ἐμοίρασαν χρήματα καὶ ἔλαβεν ἕκαστος 850 δραχμάς· πόσα ἦσαν τὰ μοιρασθέντα χρήματα; (ἀπ. 850×15 ἢ 12750).

78) Ἐργάτης ἐργάζεται ἡμερησίως ἐπὶ 8 ὥρας. Πόσας ὥρας θὰ ἐργασθῇ ἐπὶ 175 ἐργασίμους ἡμέρας; (ἀπ. 8×175).

79) Ἐγέμισέ τις 16 βαρέλια οἴνου καθὲν τῶν ὁποίων χωρεῖ 1125 ὀκάδας. Πόσας ὀκάδας οἴνου χωροῦν ὅλα τὰ βαρέλια; (ἀπ. 1125×16).

80) Ἀπὸ τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν εἶδε τις τὴν ἀστραπήν, μέχρι τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἤκουσε τὴν βροντὴν ἐπέρασαν 12 δεύτερα λεπτὰ τῆς ὥρας· ἠξεύρομεν δὲ ὅτι τὸ μὲν φῶς ἔρχεται σχεδὸν τὴν ἰδίαν στιγμήν, ὁ δὲ ἦχος διατρέχει 340 μέτρα εἰς ἕκαστον δεύτερον λεπτόν. Πόσον μακρὰν ἦτο τὸ σύννεφον εἰς τὸ ὁποῖον ἐβρόντησε; ἀπ. 4080 μ.).

81) Ἠγόρασέ τις 725 ὀκάδας πράγματος πρὸς 5 δραχ. τὴν ὀκᾶν ἐπλήρωσε δὲ 2585 δραχμάς· πόσας ὀφείλει νὰ πληρώσῃ ἀκόμη; (ἀπ. 1040).

82) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν 70 σάκκους ἀλεύρου πρὸς 240 δραχ. τὸν σάκκον· ἐπώλησε δὲ τὸν κάθε σάκκον 320 δραχ.· πόσον ἐκέρδισεν;

83) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν 6252 ὀκάδας ἐμπορεύματος πρὸς 25 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν· ἐξ αὐτῶν ὅμως ἐπώλησε 5480 ὀκ. πρὸς 30 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, τὰς δὲ ὑπολοίπους πρὸς 28· πόσον ἐκέρδισε; (ἀπ. 29716).

84) Ἠγόρασέ τις 128 πρόβατα πρὸς 220 δραχμὰς τὸ καθέν· ἐξ αὐτῶν ἀπέθανον τὰ 12, τὰ δὲ ἐπίλοιπα ἐπώλησε πρὸς 270 δραχμάς· ἐκέρδισεν ἢ ἐζημίωσε; Καὶ πόσον; (ἀπ. ἐκέρ. 3160 δρχ.).

85) Ὑπηρέτης λαμβάνει μισθὸν 480 δρχ. κατὰ μῆνα, στέλλει δὲ ἐξ αὐτοῦ εἰς τοὺς γέροντας γονεῖς του 200 δραχ. τὸν μῆνα καὶ εἰς τὴν ἀδελφήν του 150· πόσα τοῦ μένουν κατ' ἔτος. (ἀπ. 130×12).

86) Οἰκογένειά τις συνέκειτο ἐκ πέντε ἀνθρώπων καὶ αἱ ἡλικίαι αὐτῶν ἀπετέλουν ποτὲ τὸν ἀριθμὸν 98. Μετὰ 30 ἔτη ἀπέθανεν ὁ πατὴρ καὶ τότε αἱ ἡλικίαι τῶν ἄλλων ἀπετέλουν τὸν ἀριθμὸν 165· εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανεν ὁ πατήρ; (ἀπ. 248—165=83).

87) Ἐκ δύο βαρελίων οἴνου τὸ μὲν περιέχει 238 ὀκάδας τὸ δὲ ἄλλο

386 ὀκάδας. Καὶ τὸν μὲν οἶνον τοῦ πρώτου βαρελίου ἠγόρασε πρὸς 13 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, τὸν δὲ τοῦ δευτέρου πρὸς 11 δραχ. Πόσον ἐστοίχισεν ὅλος ὁ οἶνος; (ἀπ. 7340).

88) Βιβλίον τι ἔχει 120 σελίδας· ἑκάστη σελὶς ἔχει 35 στίχους καὶ ἕκαστος στίχος ἔχει 40 γράμματα· πόσα γράμματα ἔχει ὅλον τὸ βιβλίον; (ἀπ. 40×35×120 ἢ 168000).

89) Ὁ στατὴρ κοινῶς καντάρι ἔχει 44 ὀκάδας καὶ ἑκάστη ὀκᾶ ἔχει 400 δράμια· πόσα δράμια ἔχουν 8 στατῆρες; (ἀπ. 400×44×8).

90) Πόσον ἀξίζουν 8 στατῆρες, ἐξ ἑνὸς πράγματος, ἂν ἡ ὀκᾶ ἀξίζῃ 50 δραχμὰς καὶ πόσον ἂν 10 δραχμάς; (ἀπ. 17600, 3520).

91) Ἄνθρωπός τις ἔζησεν 80 ἔτη πόσας ὥρας ἔζησεν; (ἓν ἔτος ἔχει 365 ἡμέρας· τὸ δίσεκτον ἔχει 366· ἡ δὲ ἡμέρα 24 ὥρας).

92) Αὐτοκίνητον συγκοινωνίας μεταφέρει εἰς ἕκαστον ταξείδιον 16 ἄτομα. Πόσα ἄτομα μεταφέρει εἰς 30 ἡμέρας, ἐὰν ἑκάστ ν ἡμέραν κάμνει 8 ταξείδια; (ἀπ. 3840).

93) Ἀτμάμαξά τις διατρέχουσα 10 μέτρα εἰς ἓν δευτερόλεπτον, φθάνει ἀπὸ μιᾶς πόλεως εἰς ἄλλην εἰς 5 ὥρας· πόσα μέτρα ἀπέχουν αἱ δύο πόλεις ἀπ' ἀλλήλων; (ἀπ. 180000).
ΣΗΜ.—Ἑκάστη ὥρα ἔχει 60 πρῶτα λεπτὰ καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν ἔχει 60 δεύτερα.

94) Ἠγόρασέ τις 20 δωδεκάδας μανδύλια πρὸς 128 δραχμὰς τὴν δωδεκάδα καὶ ἐπώλησεν αὐτὰ πρὸς 12 δραχμὰς τὸ ἕν. Πόσας δραχμὰς ἔδωκε διὰ τὴν ἀγορὰν καὶ πόσας ἐκέρδισεν;

95) Ἔχει τις 18 χαρτονομίσματα τῶν 1000 δραχμῶν, 9 τῶν 5000, 24 τῶν 500, 115 τῶν 100, 208 τῶν 25 καὶ 121 τῶν 50. Πόσας δραχμὰς ἔχει ἐν ὅλῳ;

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

### ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

***44) Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας μοιράζομεν ἀριθμόν τινα εἰς μέρη ἴσα.***

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν θέλωμεν νὰ μοιράσωμεν 18 δραχ. εἰς 3 ἀνθρώπους ἐξ ἴσου, ἡ πρᾶξις, τὴν ὁποίαν θὰ κάμωμεν, εἶναι διαίρεσις.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ μοιρασθῇ, λέγεται ***διαιρετέος***, ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις φανερώνει εἰς πόσα μέρη θὰ μοιρασθῇ ὁ ἄλλος, λέγεται ***διαιρέτης***· τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς διαιρέσεως λέγεται ***πηλίκον***.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα διαιρετέος εἶναι ὁ 18. διαιρέτης δὲ ὁ 3 καὶ πηλίκον ὁ 6.

Ὁ ***μερισμὸς*** δὲν γίνεται πάντοτε ἀκριβῶς, * ἀλλὰ περισσεύει πολλάκις ἀριθμός τις· ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται ***ὑπόλοιπον***.

Ἐὰν π. χ. θέλω νὰ μοιράσω 16 δραχ. εἰς 3 ἀνθρώπους ἐξ ἴσου, βλέπω εὐκόλως, ὅτι ἕκαστος ἄνθρωπος θὰ λάβῃ 5 δραχμὰς καὶ θὰ περισσεύσῃ καὶ μία δραχμή. Εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην διαιρετέος μὲν εἶναι ὁ 16, διαιρέτης ὁ 3· πηλίκον δὲ (ὄχι ἀκριβὲς) ὁ 5 καὶ ὑπόλοιπον 1.

Σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶναι τὸ ἑξῆς : (ὅπερ ἀπαγγέλλεται διά). Γράφεται δὲ τὸ σημεῖον τοῦτο κατόπιν τοῦ διαιρετέου καὶ μετ᾽ αὐτὸ γράφεται ὁ διαιρέτης, οἷον 15 : 3 σημαίνει ὅτι ὁ 15 πρέπει νὰ διαιρεθῇ εἰς 3 ἴσα μέρη, ἤτοι νὰ διαιρεθῇ διὰ 3. Ὁμοίως 8 : 4 σημαίνει, ὅτι ὁ 8 πρέπει νὰ διαιρεθῇ εἰς τέσσαρα μέρη ἴσα, ἤτοι νὰ διαιρεθῇ διὰ 4. ὡσαύτως 125 : 7 σημαίνει, ὅτι ὁ 125 πρέπει νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 7.

---

* Εἰς τὸ δεύτερον βιβλίον θὰ μάθωμεν, ὅτι ἡ διαίρεσις γίνεται πάντοτε ἀκριβῶς διὰ τῶν κλασμάτων.

45. Καθὼς ὁ πολλαπλασιασμὸς ἠμπορεῖ νὰ ἐκτελεσθῇ διὰ τῆς ἀλλεπαλλήλου προσθέσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς τὸν ἑαυτόν του, οὕτω καὶ ἡ διαίρεσις ἠμπορεῖ νὰ ἐκτελεσθῇ διὰ τῆς ἀλλεπαλλήλου ἀφαιρέσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ. Διότι, ἂν ἔχωμεν π. χ. νὰ μοιράσωμεν 65 δραχμὰς εἰς ἑπτὰ ἀνθρώπους, ἐξ ἴσου, ἠμποροῦμεν νὰ δώσωμεν εἰς καθένα πρῶτα ἀπὸ μίαν δραχμήν· τότε θὰ μείνουν 65—7, ἤτοι 58 δραχμαί· ἔπειτα, ἀπὸ τὰς 58 δραχμὰς (αἱ ὁποῖαι ἔμειναν) νὰ δώσωμεν πάλιν εἰς καθένα ἀπὸ μίαν δραχμήν· τότε θὰ μείνουν 58—7, ἤγουν 51· καὶ οὕτω καθεξῆς· εἰς τὸ τέλος ἢ δὲν θὰ μείνῃ τίποτε ἢ θὰ μείνῃ ἀριθμός τις δραχμῶν μικρότερος τοῦ 7.

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο βλέπομεν ὅτι θὰ λάβῃ ἕστος ἀνὰ 9 δραχμάς, καὶ ὅτι θὰ περισσεύσουν καὶ 2 δραχμαί.

| | |
|---|---|
| 65 | |
| 7 | 1 |
| 58 | |
| 7 | 1 |
| 51 | |
| 7 | 1 |
| 44 | |
| 7 | 1 |
| 37 | |
| 7 | 1 |
| 30 | |
| 7 | 1 |
| 23 | |
| 7 | 1 |
| 16 | |
| 7 | 1 |
| 9 | |
| 7 | 1 |
| 2 | |

***Πρόβλημα.*** —Πόσα τετράδια ἀγοράζω μὲ 24 δραχμάς, ἂν ἕκαστον τετράδιον ἀξίζει 6 δραχμάς ;

Ἂν ἀπὸ τὰς 24 δραχμὰς δώσω 6, θ᾿ ἀγοράσω ἓν τετράδιον καὶ θὰ μοῦ μείνουν 18 δραχμαί. Ἂν ἔπειτα δώσω ἄλλας 6 δρχ. θὰ ἀγοράσω ἄλλο ἓν τετράδιον καὶ θὰ ἔχω 12 δραχ.· ἂν πάλιν δώσω καὶ ἄλλας 6 δρχ. θὰ ἔχω ἓν ἀκόμη τετράδιον καὶ θὰ μοῦ μείνουν 6 δρχ. Τέλος ἂν δώσω καὶ τὰς 6 αὐτὰς δραχμὰς θ᾿ ἀγοράσω καὶ ἓν ἀκόμη τετράδιον, καὶ δὲν θὰ μοῦ μείνουν καθόλου δραχμαί. Ὥστε θὰ ἀγοράσω 4 τετράδια, ἤτοι τόσα, ὅσας φορὰς ἀφήρησα τὸν 6· δηλαδὴ ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 6 εἰς τὸν 24.

Ἡ πρᾶξις, δι᾿ ἧς εὕρωμεν τὸ ζητούμενον εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν πρᾶξιν, δι᾿ ἧς εὕρομεν ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι τὰς 9 δραχμ., ἤτοι διαίρεσις, τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ τὸν ἑξῆς ὁρισμόν.

***Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν, πόσας φορὰς χωρεῖ εἷς ἀριθμὸς εἰς ἄλλον.***

Ἡ τοιαύτη διαίρεσις λέγεται ***μέτρησις*** καὶ τὸ πηλίκον αὐτῆς λόγος.

## *Παρατήρησις.*

Ἡ διαίρεσις δύναται νὰ γίνῃ καὶ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸν 44 διὰ τοῦ 8. Πολλαπλασιάζω τὸν διαιρέτην 8 ἐπὶ 1, ἐπὶ 2, ἐπὶ 3 κτλ. κατὰ σειρὰν καὶ εὑρίσκω

$8\times1=8$, $8\times2=16$, $8\times3=24$, $8\times4=32$, $8\times5=40$, $8\times6=48$.

Ἐκ τούτων βλέπω ὅτι, ἂν ἔχω νὰ μοιράσω 44 δραχμὰς εἰς 8 ἀνθρώπους, δύναμαι νὰ δώσω εἰς ἕκαστον ἀπὸ 5 δραχμάς, διότι τότε θὰ λάβωσιν ὅλοι $5\times8$, ἤτοι 40 δραχμάς, καὶ θὰ περισσεύσουν καὶ 4 δραχμαί· ἀλλὰ δὲν δύναμαι νὰ δώσω εἰς καθένα ἀπὸ 6· διότι τότε ἔπρεπε νὰ εἶναι δραχμαὶ $6\times8$, ἤγουν 48. Λοιπὸν ἡ διαίρεσις ἐξετελέσθη, καὶ πηλίκον μὲν εἶναι 5, ὑπόλοιπον δὲ 4.

## *Τελεία διαίρεσις.*

46. Ἡ διαίρεσις λέγεται ***τελεία,*** ὅταν ὁ διαιρετέος μοιράζεται εἰς ἴσα μέρη, χωρὶς νὰ μένῃ τίποτε· π. χ. ἡ διαίρεσις 18 : 3 εἶναι τελεία καὶ πηλίκον εἶναι ὁ 6· διότι $18=6+6+6$.

Ἐπειδὴ δὲ $6+6+6$ εἶναι τὸ γινόμενον $6\times3$, συμπεραίνομεν ὅτι εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν ***ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου.***

## *Ἀτελὴς διαίρεσις.*

47. ***Ἀτελὴς*** λέγεται ἡ διαίρεσις ἐὰν ἀφίνῃ ὑπόλοιπον.

Π. χ. ἡ διαίρεσις 17 : 3 εἶναι ἀτελής· διότι ἀφαιροῦντες τὸν 3 ἀπὸ τὸν 17, ὅσας φορὰς εἶναι δυνατὸν (5 φοράς), εὑρίσκομεν ὅτι μένει ὑπόλοιπον 2 (ἂν δηλ. 3 ἄνθρωποι ἔχουσι νὰ μοιρασθῶσι 17 δραχμάς, θὰ λάβῃ ἕκαστος 5 δραχμὰς καὶ θὰ μείνουν καὶ 2 δραχμαί)· ὥστε ἡ διαίρεσις 17 : 3 δίδει πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 2.

Ἐπειδὴ εἰς τὴν διαίρεσιν 17 : 3 ἀφῃρέσαμεν τὸν 3 πέντε φορὰς ἀπὸ τὸν 17 καὶ ἔμεινε 2, τοῦτο σημαίνει, ὅτι ὁ 17 σύγκειται ἀπὸ τὸν 3, λαμβανόμενον 5 φοράς, καὶ ἀπὸ τὸν 2, ἤτοι

$$17=3+3+3+3+3+2$$
$$\text{ἢ}\quad 17=3\times5+2$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι

εἰς πᾶσαν ἀτελῆ διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, ὅταν εἰς τὸ γινόμενον τοῦτο προστεθῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον. Τὸ γινόμενον ἄρα τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρετέου.

***Σημείωσις.*** Κατὰ τὰ λεχθέντα εἰς τὸ ἐδ. 37, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι πάντοτε μικρότερον τοῦ διαιρέτου.

## *Γενικὸς ὁρισμὸς τῆς διαιρέσεως.*

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος τοῦ πηλίκου, συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικώτερον ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως.

48. ***Διαίρεσις ἀριθμοῦ δι' ἄλλου, εἶναι ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται ὁ μεγαλύτερος ἀριθμός, ὅστις, πολλαπλασιάζων τὸν διαιρέτην, δίδει γινόμενον ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ διαιρετέου.***

## *Παρατηρήσεις.*

Ὅταν ἡ μονὰς εἶναι διαιρέτης τὸ πηλίκον εἶναι ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον· ἐὰν π. χ. ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν 15 διὰ τοῦ 1, φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ μονὰς χωρεῖ 15 φορὰς εἰς τὸν 15· ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι 15.

Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἴσος μὲ τὸν διαιρετέον, τὸ πηλίκον εἶναι 1· ἂν λ. χ. ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν 18 διὰ τοῦ 18, ἤτοι νὰ μοιράσωμεν 18 δραχμὰς εἰς 18 ἄνδ. φανερὸν εἶναι, ὅτι ὁ καθεὶς θὰ λάβῃ μίαν δραχμήν· ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι 1.

Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι 0, ὁ δὲ διαιρέτης ἄλλος ἀριθμὸς μὴ μηδέν, τὸ πηλίκον εἶναι 0. Καὶ πράγματι ἂν ἔχωμεν $0:5$ τὸ πηλίκον εἶναι 0 διότι $5\times0=0$.

Ὅταν καὶ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι 0, πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πηλίκον. Π. χ. $0:0=5$ διότι $0\times5=0$. Ἀλλὰ καὶ $0:0=6$ διότι $0\times6=0$ κ. ο. κ.

Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, ὁ δὲ διαιρέτης 0, ἡ διαίρεσις δὲν δύναται νὰ γίνῃ ἤτοι εἶναι ἀδύνατος. Διότι πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 0 δίδει γινόμενον 0. Ἐπίσης ἀδύνατος εἶναι ἡ διαίρεσις καὶ ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου.

## Ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου.

49. Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν, πόσα ψηφία θὰ ἔχῃ τὸ πηλίκον (πρὶν ἀκόμη κάμωμεν τὴν διαίρεσιν), κάμνομεν ὡς ἑξῆς.

Γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου, τόσα μηδενικά, ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ γίνῃ ὁ διαιρέτης μεγαλύτερος τοῦ διαιρετέου· ὅσα μηδενικὰ χρειάζονται διὰ νὰ γίνῃ τοῦτο, τόσα ψηφία θὰ ἔχῃ τὸ πηλίκον

Διότι, ἔστω ἡ διαίρεσις 175 : 18.

Ἐὰν γράψω δεξιὰ τοῦ 18 ἓν μηδενικὸν (δηλαδή, ἂν τὸν πολλαπλασιάσω ἐπὶ 10), γίνεται 180 καὶ ὑπερβαίνει τὸν διαιρετέον 175· ἐπειδὴ δὲ τὸ δεκαπλάσιον τοῦ διαιρέτου 18 ὑπερβαίνει τὸν διαιρετέον 175, τοῦτο σημαίνει, ὅτι δὲν ἐμπεριέχεται ὁ διαιρέτης 18 εἰς τὸν διαιρετέον 10 φοράς, ἀλλ᾿ ὀλιγώτερον· ἄρα τὸ πηλίκον δὲν εἶναι 10, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ 10 καὶ διὰ ταῦτα εἶναι μονοψήφιον.

Ἔστω καὶ ἡ διαίρεσις 1855 : 43.

Διὰ νὰ γίνῃ ὁ διαιρέτης 43 μεγαλύτερος τοῦ διαιρετέου 1855, χρειάζονται δύο μηδενικὰ (διότι ὁ 4300 ὑπερβαίνει τὸν 1855, ἀλλ᾿ ὁ 430 εἶναι μικρότερος τοῦ 1855)· ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ διαιρετέος 1855 περιέχει τὸν διαιρέτην 10 φοράς, οὐχὶ ὅμως 100 φοράς· ἄρα τὸ πηλίκον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 10, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ 100· ἐπομένως θὰ ἔχῃ δύο ψηφία.

Διὰ τοῦ ἰδίου συλλογισμοῦ εὑρίσκω, ὅτι
τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 141192 : 37 ἔχει 4 ψηφία·
τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 197004 : 1091 ἔχει 3· καὶ οὕτω καθεξῆς.

## Περὶ τοῦ τρόπου, καθ᾿ ὃν γίνεται ἡ διαίρεσις.

50. Ὁ τρόπος τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καθὼς καὶ ὁ ἄλλος, ὅστις ἀπαιτεῖ ἀλλεπαλλήλους ἀφαιρέσεις, δὲν εἶναι κατάλληλος ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι μεγάλοι· διότι καὶ καιρὸν ἀπαιτοῦσι καὶ κόπον πολύν. Διὰ τοῦτο ἐπενόησαν ἄλλον τρόπον συντομώτερον, μὲ τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ διαίρεσις. Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν δὲ αὐτόν, διακρίνομεν τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις.

1) Όταν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος.
2) Όταν ὁ διαιρέτης εἶναι οἱοσδήποτε.

### *α΄) Διαίρεσις, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος.*

51. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἂν εἶναι καὶ τὸ πηλίκον μονοψήφιον (καὶ τοῦτο διακρίνεται εὔκολα, ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν), ἡ διαίρεσις γίνεται ἀπὸ μνήμης· διότι ἐκ τοῦ πυθαγορείου πίνακος ἐνθυμούμεθα ἀμέσως τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς μονοψηφίους ἀριθμοὺς καὶ εὑρίσκομεν ἀμέσως τὸ μέγιστον γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἐμπεριέχεται εἰς τὸν διαιρετέον.

Ἂν, π. χ. πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸν 17 διὰ 5, ἐνθυμούμεθα ἀμέσως, ὅτι εἶναι $5\times3=15$ (ἀλλὰ $5\times4=20$)· ἄρα πηλίκον εἶναι ὁ 3· ἀφαιροῦντες δὲ τὸν 15 ἀπὸ τὸν 17 εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 2.

Ὁμοίως, ἂν πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸν 75 διὰ 8, ἐνθυμούμεθα ἀμέσως ὅτι εἶναι $8\times9=72$ (ἀλλὰ $8\times10=80$)· ἄρα πηλίκον εἶναι ὁ 9, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὸν διαιρετέον 75 τὸ γινόμενον 72· εἶναι λοιπὸν 3.

***Σημείωσις.*** Εἰς τὴν ἁπλῆν ταύτην διαίρεσιν θὰ ἴδωμεν, ὅτι ἀνάγεται πᾶσα διαίρεσις· ὥστε ὁ μαθητὴς πρέπει νὰ ἀσκηθῇ καλῶς εἰς αὐτὴν καὶ νὰ ἐκτελῇ αὐτὴν ταχέως ἀπὸ μνήμης.

52. Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι πρόκειται νὰ μοιράσωμεν ἐξ ἴσου 14865 δραχ. εἰς 4 ἀνθρώπους. Αἱ δραχμαὶ τὰς ὁποίας θὰ λάβῃ ἕκαστος εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν 14865 δραχ. διὰ 4. Τὸ πηλίκον τοῦτο εἶναι πολυψήφιον (ἔχει 4 ψηφία)· καὶ διὰ νὰ εὕρω αὐτό, ἐργάζομαι ὡς ἑξῆς.

***Λαμβάνω ἀπὸ τὸν διαιρετέον τόσα μόνον ψηφία (ἀπὸ τὴν ἀρχήν), ὅσα χρειάζονται, διὰ νὰ ἔχω πηλίκον μονοψήφιον.***

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο βλέπω, ὅτι πρέπει νὰ λάβω τὰ δύο πρῶτα ψηφία, ἤτοι τὰς 14 χιλιάδας τοῦ διαιρετέου 14865 (διὰ νὰ ἔχω πηλίκον μονοψήφιον).

Μοιράζω λοιπὸν κατ᾽ ἀρχὰς εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους τὰς 14 χιλιάδας καὶ εὑρίσκω ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος 3 χιλιάδας καὶ θὰ μείνουν καὶ 2 χιλιάδες.

Αἱ δύο αὗται χιλιάδες ὁμοῦ μὲ τὰς 865 μονάδας, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν, ἀποτελοῦσι 2865 δραχμάς, αἱ ὁποῖαι μένουν ἀκόμη, ἵνα μοιρασθῶσιν εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους. Τοῦτο θὰ γίνῃ διὰ νέας διαιρέσεως· ὥστε ἔχω τώρα νὰ κάμω τὴν διαίρεσιν 2865 : 4.

Λαμβάνω πάλιν τὰ δύο πρῶτα ψηφία 28 (διὰ νὰ ἔχω μονοψήφιον πηλίκον) καὶ μοιράζω τὰς 28 ἑκατοντάδας εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους· ἕκαστος θὰ λάβῃ 7 ἑκατοντάδας (ἤτοι 700) χωρὶς νὰ μείνῃ καμμία ἑκατοντάς.

Μένει ὅμως ἀκόμη νὰ μοιράσω τὰς 65 μονάδας (τὰς ὁποίας ἀφῆκα) εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους, ἤτοι νὰ κάμω τὴν διαίρεσιν 64 : 4.

Λαμβάνω τώρα τὸ πρῶτον μόνον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, ἤτοι τὰς 6 δεκάδας (διότι αὐτὸ ἀρκεῖ διὰ νὰ ἔχω πηλίκον μονοψήφιον) καὶ μοιράζω τὰς 6 δεκάδας εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους· ἕκαστος θὰ λάβῃ 1 δεκάδα (ἤτοι δέκα δραχμὰς) καὶ μένουν καὶ δύο δεκάδες.

Αἱ δύο αὗται δεκάδες ὁμοῦ μὲ τὰς 5 μονάδας (τὰς ὁποίας ἀφῆκα) ἀποτελοῦσιν 25 μονάδας, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ μοιράσω εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους, ἤτοι νὰ κάμω τὴν διαίρεσιν 25 : 4· ἕκαστος θὰ λάβῃ 6 δραχμὰς καὶ θὰ μείνῃ καὶ μία δραχμή.

Ὥστε εὑρήκαμεν ὅτι, ἂν μοιράσωμεν 14865 δραχμὰς εἰς 4 ἀνθρώπους, θὰ λάβῃ ἕκαστος 3 χιλιάδας καὶ 7 ἑκατοντάδας καὶ μία δεκάδα καὶ 6 μονάδας, τουτέστι 3716 δραχ. καὶ θὰ μείνῃ καὶ ὑπόλοιπον 1.

***Σημείωσις.*** Ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου ἐννοοῦμεν, ὅτι ἑκάστη διαίρεσις ἀναλύεται εἰς ἄλλας μερικὰς διαιρέσεις, ἐξ ὧν ἑκάστη ἔχει πηλίκον μονοψήφιον.

Ἡ πρᾶξις δύναται νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς·

| | |
|---|---|
| 14΄865 | 4 |
| 12 | 3000 |
| 28΄65 | 700 |
| 28 | 10 |
| 06΄5 | 6 |
| 4 | |
| 25 | |
| 24 | |
| 1. | |

Ἀφοῦ γράψωμεν τὸν διαιρετέον καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τὸν διαιρέτην, χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ γραμμῆς κατακορύφου καὶ σύρομεν ὑποκάτω τοῦ διαιρετέου γραμμὴν ὁριζοντίαν· ὑπὸ τὴν γραμμὴν ταύτην γράφομεν τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου, καθόσον εὑρίσκομεν αὐτά.

Χωρίζομεν διὰ μικρᾶς γραμμῆς τὰ δύο πρῶτα ψηφία τοῦ διαιρετέου (τὰ ὁποῖα χρειάζονται, διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον) ἀπὸ τὰ ἄλλα ψηφία (τὰ 865), τὰ ὁποῖα δὲν χρειάζονται διόλου εἰς τὴν πρώτην διαίρεσιν.

Διαιροῦμεν τὸν 14 διὰ 4 λέγοντες, τὸ 4 εἰς τὸ 14 περιέχεται 3 φορὰς (ἢ 4 ἄνθρωποι νὰ μοιρασθῶσι 14 δραχμάς, λαμβάνει ἕκαστος 3) καὶ γράφομεν τὸ πηλίκον 3 (χιλιάδας· διότι χιλιάδας ἐμοιράσαμεν) εἰς τὴν θέσιν του· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ τὸ γινόμενον 12 (χιλιάδας) ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰς 14 χιλιάδας καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 2 (χιλιάδας).

Δεξιὰ τοῦ 2 καταβιβάζομεν τώρα καὶ τὰ ἄλλα ψηφία τοῦ διαιρετέου, ὅσα ἀφήκαμεν εἰς τὴν πρώτην διαίρεσιν, καὶ προκύπτει ὑπόλοιπον 2865, τὸ ὁποῖον πρέπει ἀκόμη νὰ μοιράσωμεν εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους· ὥστε τώρα εἰς τὴν δευτέραν αὐτὴν διαίρεσιν διαιρετέος εἶναι ὁ 2865. Καὶ εἰς τὴν δευτέραν ταύτην διαίρεσιν κάμνομεν καθὼς καὶ εἰς τὴν πρώτην (μόνον τὸν διαιρέτην 4 δὲν γράφομεν πλέον, διότι εἶναι ἤδη γεγραμμένος), χωρίζομεν δηλαδὴ τὰ δύο πρῶτα ψηφία 28 καὶ διαιροῦμεν τὸν 28 διὰ 4· τὸ 4 περιέρχεται εἰς τὸ 28, 7 φοράς· γράφομεν τὸ πηλίκον 7 (ἑκατοντάδας) εἰς τὴν θέσιν του, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 4 καὶ τὸ γινόμενον 28 ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ χωρισθὲν μέρος 28· ὅθεν εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0.

Καταβιβάζομεν δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου, ὅσα ψηφία ἀφήκαμεν· καὶ προκύπτει ὑπόλοιπον τὸ 65, τὸ ὁποῖον πρέπει ἀκόμη νὰ μοιρασθῇ, ὥστε εἰς τὴν τρίτην αὐτὴν διαίρεσιν διαιρετέος εἶναι ὁ 65.

Χωρίζω τώρα τὸ πρῶτον μόνον ψηφίον (τὸ 6)· διότι αὐτὸ φθάνει διὰ νὰ ἔχω πηλίκον μονοψήφιον· καὶ διαιρῶ αὐτὸ διὰ 4 καὶ εὑρίσκω, πηλίκον 1 (δεκάδα), ὅπερ γράφω εἰς τὴν θέσιν του· ἔπειτα πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 4 καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιρῶ ἀπὸ τὸ χωρισθὲν ψηφίον καὶ εὑρίσκω ὑπόλοιπον 2 (δεκάδας). Δεξιὰ τοῦ 2 καταβιβάζω τέλος καὶ τὸ ψηφίον 5, τὸ ὁποῖον ἀφῆκα προηγουμένως καὶ προκύπτει ὑπόλοιπον τὸ 25, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ μοιρασθῇ εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους.

Εἰς τὴν τετάρτην ταύτην διαίρεσιν διαιρετέος εἶναι ὁ 25· λαμβάνω δὲ αὐτὸν ὅλον· διότι τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον δίδει εἶναι μονοψήφιον. διαιρῶ τὸ 25 διὰ 4 καὶ εὑρίσκω πηλίκον 6 (μονάδας) καὶ ὑπόλοιπον 1.

Ὥστε ἡ διαίρεσις 14865 : 4 ἐτελείωσε καὶ ἔδωκε πηλίκον 3716 καὶ ὑπόλοιπον 1.

## *Παρατηρήσεις*

1) Δεξιὰ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου 2 δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ καταβιβάζωμεν ὅλα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου, ὅσα ἀφήκαμεν εἰς τὴν πρώτην διαίρεσιν, ἤτοι τὰ 865, ἀλλὰ μόνον τὸ πρῶτον (τὸ 8)· διότι αὐτὸ μόνον χρειάζεται εἰς τὴν δευτέραν διαίρεσιν, διότι εἰς αὐτὴν μόνον τὸν 28 διαιροῦμεν, τὰ δὲ ἄλλα ψηφία τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 2865 τὰ ἀφίνομεν· Ἐπίσης δεξιὰ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου 0 δυνάμεθα νὰ καταβιβάσωμεν μόνον τὸ πρῶτον ἀπὸ τὰ παραλειφθέντα ψηφία, ἤτοι τὸ 6· διότι αὐτὸ μόνον διαιροῦμεν εἰς τὴν τρίτην διαίρεσιν, τὸ δὲ 5 τὸ ἀφίνομεν· ἑπομένως ***εἰς κάθε νέαν μερικὴν διαίρεσιν καταβιβάζομεν ἀπὸ ἓν ψηφίον τοῦ διαιρετέου μὲ τὴν σειράν των.***

2) Καὶ τὰ μηδενικά, τὰ ὁποῖα ἐγράψαμεν δεξιὰ τοῦ ψηφίου 3, διὰ νὰ σημάνῃ τρεῖς χιλιάδας, καὶ δεξιὰ τοῦ ψηφίου 7, διὰ νὰ σημάνῃ ἑπτὰ ἑκατοντάδας, καὶ δεξιὰ τοῦ 1, διὰ νὰ γίνῃ δεκάς, τὰ μηδενικά, λέγω, ταῦτα ἠμποροῦν νὰ παραλείπωνται, ἐὰν γράφωμεν τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου εἰς μίαν σειρὰν κατὰ τὴν τάξιν, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκονται, ἤγουν ἐὰν γράψωμεν 3716· διότι τότε τὸ 3 σημαίνει χιλιάδας, τὸ 7 σημαίνει ἑκατοντάδας κτλ.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἡ πρᾶξις διατάσσεται συντομώτερον ὡς ἑξῆς.

```
14865 | 4
12    | 3716
 28
 28
  06
   4
   25
   24
    1
```

Ἀλλ᾽ ὅταν διατάσσωμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον, πρέπει νὰ προσέχωμεν εἰς τὸ ἑξῆς· ***ἂν εἰς μερικήν τινα διαίρεσιν, ἀφοῦ καταβιβάσωμεν ἓν ψηφίον τοῦ διαιρετέου, δὲν εὕρωμεν πηλίκον*** (ἂν δηλαδὴ ὁ διαιρέτης δὲν χωρεῖ εἰς τὸν προκύπτοντα τότε ἀριθμόν), ***πρέπει νὰ γράψωμεν ἓν μηδενικὸν δεξιὰ τῶν εὑρεθέντων ψηφίων τοῦ πηλίκου καὶ*** τοῦτο διὰ νὰ διατηρῆται ἡ ἀξία των.

Τοῦτο συμβαίνει εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα·

| | |
|---|---|
| 15452 | 7 |
| 14 | 2207 |
| 14 | |
| 14 | |
| 052 | |
| 49 | |
| 3 | |

Τὸ πηλίκον δὲν ἔχει δεκάδας· ἐγράψαμεν λοιπὸν 0 εἰς τὴν θέσιν των· ἄλλως τὸ πρῶτον 2 δὲν θὰ ἐσήμαινε χιλιάδας οὔτε τὸ δεύτερον 2 θὰ ἐσήμαινεν ἑκατοντάδας.

## *Παραδείγματα.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 897 | 8 | 20′00 | 3 | 21′014 | 7 |
| 8 | 112 | 18 | 666 | 21 | 3002 |
| 09 | | 20 | | 0014 | |
| 8 | | 18 | | 14 | |
| 17 | | 20 | | 00 | |
| 16 | | 18 | | | |
| 1 | | 2 | | | |

***Σημείωσις.*** Πρὸς συντομίαν δυνάμεθα νὰ ἀφαιρῶμεν τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου, χωρὶς νὰ τὰ γράφωμεν· τότε ἡ πρᾶξις λαμβάνει τὴν ἑξῆς διάταξιν·

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 897 | 8 | 2000 | 3 | 21014 | 7 |
| 09 | 112 | 20 | 666 | 0014 | 3002 |
| 17 | | 20 | | 0 | |
| 1 | | 2 | | | |

## β΄) Διαίρεσις δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

1) Ἐὰν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον.

53. Ἐὰν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον (ἐὰν δηλαδὴ ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου, ἀλλ' ὄχι μικρότερος αὐτοῦ), εὑρίσκομεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 3892 διὰ τοῦ 800 ἤτοι νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 800 εἰς τὸν 3892· τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον (διότι δέκα φορὰς 800 γίνεται 8000· τοῦτο δὲ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου 3892, ὥστε δὲν χωρεῖ ὁ διαιρέτης 800 εἰς τὸν διαιρετέον 3892 δέκα φοράς, ἀλλ' ὀλιγώτερον).

Διὰ νὰ εὕρω δὲ τὸ πηλίκον, σκέπτομαι ὡς ἑξῆς· αἱ 8 ἑκατοντάδες τοῦ διαιρέτου δὲν περιέχονται εἰς τὰς μονάδας οὔτε εἰς τὰς δεκάδας τοῦ διαιρετέου, ἀλλὰ μόνον εἰς τὰς 38 ἑκατοντάδας αὐτοῦ· περιέχονται δὲ 4 μόνον φορὰς (διότι τὸ 8 εἰς τὸ 38 περιέχεται 4 φοράς)· λοιπὸν συμπεραίνω, ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι 4· πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 800 καὶ εὑρίσκω τὸ γινόμενον 3200· ἀφαιρῶν δὲ ἀπὸ τὸν διαιρετέον τὸ γινόμενον 3200 τοῦ πηλίκου 4 ἐπὶ τὸν διαιρέτην εὑρίσκω 692, τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Διὰ νὰ δώσωμεν ἄλλο παράδειγμα, ἔστω ἡ διαίρεσις

$$8975 : 2891$$

Τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον (διότι $2891 \times 10$ εἶναι 27910, μεγαλύτερον τοῦ διαιρέτου) καὶ διὰ νὰ τὸ εὕρω παρατηρῶ, ὅτι αἱ δύο χιλιάδες τοῦ διαιρέτου χωροῦσιν εἰς τὸν διαιρετέον (δηλαδὴ εἰς τὰς χιλιάδας του) 4 φορὰς μόνον· λοιπὸν καὶ ὅλος ὁ διαιρέτης 2891 δὲν ἠμπορεῖ νὰ χωρῇ εἰς τὸν διαιρετέον περισσοτέρας ἀπὸ 4 φοράς· ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι ἢ 4 ἢ μικρότερον τοῦ 4. Διὰ νὰ δοκιμάσω τὸ 4, πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 2891 καὶ εὑρίσκω γινόμενον 11564 μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου· ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι μικρότερον τοῦ 4. Διὰ νὰ δοκιμάσω τὸ 3, πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ εὑρίσκω γινόμενον 8673, μικρότερον τοῦ διαιρετέου· λοιπὸν τὸ πηλίκον εἶναι 3.

Ἀφαιρῶ τώρα τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου 3 καὶ τοῦ διαιρέτου 2891 ἀπὸ τὸν διαιρετέον καὶ εὑρίσκω τὸ ὑπόλοιπον 302· καὶ οὕτως ἐξετελέσθη ἡ διαίρεσις.

| | |
|---|---|
| 8975 | 2891 |
| 8673 | 3 |
| 302 | |

54. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν, ὅταν εἶνε μονοψήφιον, λαμβάνομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρέτου καὶ μὲ αὐτὸ διαιροῦμεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρετέου (ἂν ἔχωσι καὶ οἱ δύο ἴσον ἀριθμὸν ψηφίων), ἢ τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ δύο πρῶτα ψηφία αὐτοῦ (ἂν ἔχῃ ὁ διαιρετέος ἓν ψηφίον περισσότερον)· τὸ πηλίκον, ὅπερ εὑρίσκομεν, θὰ εἶναι ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ ζητουμένου.***

***Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν δὲ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην· καὶ ἂν μὲν τὸ προκῦπτον γινόμενον χωρῇ εἰς τὸν διαιρετέον, τότε αὐτὸ εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον, καὶ οὕτω καθεξῆς, ἕως οὗ εὕρωμεν ἓν ψηφίον, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον νὰ περιέχηται εἰς τὸν διαιρετέον.***

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως εἶναι ἡ ἰδία ὡς καὶ προηγουμένως (σελ. 55).

## *Παραδείγματα.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6083 | 714 | 56946 | 8101 | 1000 | 125 |
| 5712 | 8 | 56707 | 7 | 1000 | 8 |
| 371 | | 239 | | 0 | |

*Σημείωσις.* Ὅταν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ διαιρέτου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 5, προτιμώτερον εἶναι νὰ αὐξάνωμεν τὸ πρῶτον ψηφίον κατὰ μονάδα, πρὶν διαιρέσωμεν δι᾽ αὐτοῦ τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρετέου (ἢ τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ δύο πρῶτα)· διότι τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν ταχύτερον τὸ πηλίκον· ἰδοὺ παράδειγμα. Ἂς διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 8197 διὰ τοῦ 2938. Αἱ 2 χιλιάδες τοῦ διαιρέτου περιέχονται εἰς τὰς 8 χιλιάδας τοῦ διαιρετέου 4 φοράς· ὥστε τὸ πηλίκον θὰ εἶνε ἢ 4 ἢ μικρότερον τοῦ 4· δοκιμάζοντες εὑρίσκομεν, ὅτι εἶνε 2. Τοῦτο θὰ εὑρίσκωμεν ταχύτερον, ἐὰν ἐσκεπτόμεθα ὅτι ὁ διαιρέτης ἔχει σχεδὸν 3 χιλιάδας καὶ αἱ 3 χιλιάδες χωροῦσιν εἰς τὰς 8 χιλιάδας 2 φοράς· ὥστε τὸ πηλίκον θὰ εἶνε ἢ 2 ἢ μεγαλύτερον τοῦ 2.

2) Ἐὰν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον.

55. Ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον, ἡ διαίρεσις ἀναλύεται εἰς ἄλλας, ἐκ τῶν ὁποίων ἑκάστη ἔχει πηλίκον μονοψήφιον.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν 45897 : 38, ἤτοι πρόκειται νὰ μοιράσωμεν 45897 δραχ. εἰς 38 ἀνθρώπους.

$$\begin{array}{r|l} 45'897 & 38 \\ \cline{2-2} 38 & 1 \\ \cline{1-1} 78'97 & \end{array}$$

Λαμβάνω ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται, διὰ νὰ ἔχω πηλίκον μονοψήφιον· λαμβάνω λοιπὸν τὰς 45 χιλιάδας καὶ μοιράζω αὐτὰς εἰς τοὺς 38 ἀνθρώπους· εἰς τὴν μερικὴν αὐτὴν διαίρεσιν διαιρετέος εἶναι 45 (χιλιάδες), πηλίκον 1 (χιλιὰς) καὶ κατάλοιπον 7 (χιλιάδες)

Αἱ ἑπτὰ χιλιάδες, αἱ ὁποῖαι ἔμειναν, ὁμοῦ μὲ τὰς 897 μονάδας, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν ἐξ ἀρχῆς, ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 7897, ὁ ὁποῖος μένει ἀκόμη νὰ μοιρασθῇ εἰς τοὺς 38 ἀνθρώπους.

Καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν λαμβάνω ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ διαιρετέου τὰ δύο πρῶτα ψηφία, ἤγουν τὰς 78 ἑκατοντάδας (διὰ νὰ ἔχω πηλίκον μονοψήφιον) καὶ μοιράζω αὐτὰς εἰς τοὺς 38 ἀνθρώπους· εὑρίσκω δὲ πηλίκον 2 ἑκατοντάδας καὶ ὑπόλοιπον 2 ἑκατοντάδας, αἱ ὁποῖαι ὁμοῦ μὲ τὰς 97 μονάδας, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν, ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 297, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ μοιράσωμεν ἀκόμη εἰς τοὺς 38 ἀνθρώπους.

Εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην λαμβάνω ὅλον τὸν διαιρετέον 297 (μονάδας)· διότι δίδει πηλίκον μονοψήφιον· διαιρῶ τὸ 297 διὰ 38 καὶ εὑρίσκω πηλίκον μὲν 7, ὑπόλοιπον δὲ 31. Ὥστε ἡ διαίρεσις 45897 : 38 ἐτελείωσε καὶ πηλίκον μὲν ἔδωκε τὸν ἀριθμὸν 1207, ὑπόλοιπον δὲ 31.

***Παρατήρησις.*** Διὰ τοὺς λόγους, τοὺς ὁποίους εἴπομεν εἰς τὸ ἐδ. 53, καταβιβάζομεν δεξιὰ ἑκάστου ὑπολοίπου ἀπὸ ἓν ψηφίον τοῦ διαιρετέου κατὰ σειρὰν (οἷον, δεξιὰ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου 7 καταβιβάζω μόνον τὸ πρῶτον ἐκ τῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα ἀφῆκα, ἤγουν τὸ 8· διότι αὐτὸ μόνον χρειάζεται εἰς τὴν δευτέραν διαίρεσιν)· ἐπίσης γράφομεν τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου κατὰ σειράν, πρῶτα τὸ πρῶτον, ἔπειτα τὸ δεύτερον, τὸ τρίτον καὶ καθεξῆς· διότι τότε ἡ ἀξία ἑκάστου ψηφίου διατηρεῖται· μόνον, ἀφοῦ καταβιβάσωμεν ἓν ψηφίον τοῦ διαιρετέου, ἐὰν δὲν ἐμπεριέχηται ὁ διαιρέτης εἰς τὸν ἀποτελούμενον ἀριθμὸν (τότε λέγομεν ὅτι τὸ μονοψήφιον πηλίκον εἶναι 0), γράφομεν 0 δεξιὰ τῶν εὑρεθέντων ψηφίων τοῦ πηλίκου.

Τὴν διάταξιν τῆς πράξεως δεικνύει τὸ ἑξῆς παράδειγμα.

| | |
|---|---|
| 1151΄6769 | 459 |
| 918 | 25091 |
| 2336 | |
| 2295 | |
| 4176 | |
| 4131 | |
| 459 | |
| 459 | |
| 0 | |

Χωρίζω τὰ τέσσαρα ψηφία τοῦ διαιρετέου (διὰ νὰ ἔχω πηλίκον μονοψήφιον) καὶ διαιρῶ τὸν ἀριθμὸν αὐτῶν, ἤτοι τὸν 1151, διὰ τοῦ διαιρέτου 459· πηλίκον εὑρίσκω 2 καὶ ὑπόλοιπον 233· δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου καταβιβάζω τὸ πρῶτον ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα ψηφία τοῦ διαιρετέου, ἤτοι τὸ 6, καὶ διαιρῶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν 2336 διὰ τοῦ διαιρέτου 459· τὸ πηλίκον 5 γράφω δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου 2, εὑρίσκω δὲ καὶ κατάλοιπον 41· δεξιὰ αὐτοῦ καταβιβάζω τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, ἤτοι τὸ 7, καὶ ἐπειδὴ ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 417 δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ διαιρέτου 459, γράφω 0 εἰς τὸ πηλίκον καὶ καταβιβάζω καὶ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 6· διαιρῶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν 4176 διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκω πηλίκον 9, τὸ ὁποῖον γράφω δεξιὰ τῶν ἄλλων ψηφίων τοῦ πηλίκου, καὶ κατάλοιπον 45· τέλος καταβιβάζω δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον 9 καὶ διαιρῶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν 459 διὰ τοῦ διαιρέτου, ὅτε εὑρίσκω πηλίκον 1 (τὸ ὁποῖον γράφω δεξιὰ τῶν ἄλλων ψηφίων τοῦ πηλίκου) καὶ κατάλοιπον 0.

## *Κανὼν τῆς διαιρέσεως.*

56. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς διαιρέσεως.

***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα δι᾿ ἄλλου ἀριθμοῦ, χωρίζομεν ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον*** (πρὸς τοῦτο χωρίζομεν ἢ τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης, ἢ ἓν περισσότερον), ***διαιροῦμεν τὸ μέρος, τὸ ὁποῖον ἐχωρίσαμεν, καὶ εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ ψηφίον τοῦτο καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ ἴδιον μέρος, δεξιὰ δὲ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου. Τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου, τὸ ὁποῖον ἀφοῦ τὸ γράψωμεν δεξιὰ τοῦ πρώτου, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν ἴδιον ἀριθμόν· ἔπειτα καταβιβάζομεν δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ διαιροῦμεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ διαιρέτου· ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως, μέχρις οὗ καταβιβάσωμεν ὅλα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου. Ἐὰν δὲ εἴς τινα μερικὴν διαίρεσιν, ἀφοῦ καταβιβάσωμεν τὸ ἁρμόδιον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, δὲν διαιρῆται ὁ προκύπτων ἀριθμὸς διὰ τοῦ διαιρέτου, γράφομεν Ο εἰς τὸ πηλίκον καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν.***

*Παραδείγματα.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 58923΄4 | 8153 | 2716΄793 | 543 |
| 57071 | 72 | 2715 | 5003 |
| 18524 | | 1793 | |
| 16306 | | 1629 | |
| 2218 | | 164 | |

Παρατήρησις. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι πολυψήφιος, προτιμότερον εἶναι νὰ γράφωμεν τὸ γινόμενον αὐτοῦ μὲ καθὲν ψηφίον τοῦ πηλίκου καὶ ἔπειτα νὰ τὸ ἀφαιρῶμεν, ὡς εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα φαίνεται. Τινὲς διὰ συντομίαν πολλαπλασιάζουσιν ἕκαστον ψηφίον τοῦ διαιρέτου μὲ τὸ ψηφίον τοῦ πηλίκου καὶ ἀφαιροῦσι τὸ γινόμενον ἀμέσως ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τοῦ διαιρετέου. Ἀλλ' ὁ τρόπος οὗτος ὄχι μόνον εἶναι δυσκολώτερος καὶ ἑπομένως ὑπόκειται εἰς περισσότερα σφάλματα, ἀλλ' ἔχει καὶ τὰ ἑξῆς ἐλαττώματα· 1) ὅταν τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον δοκιμάζομεν, δὲν εἶναι τὸ ἀληθές, δὲν ἀνακαλύπτομεν ἀμέσως τὸ λάθος, εἰ μὴ ἀφοῦ φθάσωμεν εἰς τὴν τελευταίαν ἀφαίρεσιν· ὥστε κάμνομεν περισσότερον κόπον· 2) ἂν συμβῇ νὰ ἐπαναληφθῇ εἰς τὸ πηλίκον πολλάκις τὸ αὐτὸ ψηφίον, πρέπει πάλιν νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμὸς κάθε φορὰν ἐκ νέου, ἐνῷ τοῦτο δὲν γίνεται, ἐὰν ἔχωμεν τὸ γινόμενον γεγραμμένον.

## *Συντομίαι.*

1η)

57. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι 10, ἡ διαίρεσις γίνεται τάχιστα ὡς ἑξῆς· Χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ διαιρετέου· τότε τὰ ἄλλα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελοῦσι τὸ πηλίκον, τὸ δὲ χωρισθὲν ψηφίον εἶναι τὸ κατάλοιπον, οἷον·

ἡ διαίρεσις 5894 : 10 δίδει πηλίκον 589 καὶ κατάλοιπον 4.

ἡ διαίρεσις 890 : 10 δίδει πηλίκον 89 καὶ κατάλοιπον 0.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς.

Διὰ νὰ διαιρέσω τὸν 5894 διὰ τοῦ 10, πρέπει νὰ εὕρω πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 10 εἰς τὸν 5894, ἤγουν πόσας δεκάδας ἔχει ὁ 5894· ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει 589 δεκάδας καὶ 4 μονάδας· λοιπὸν τὸ πηλίκον εἶναι 589, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι αἱ 4 μονάδες.

Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶνε 100, ἡ διαίρεσις γίνεται τάχιστα ὡς ἑξῆς. ***Χωρίζομεν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ διαιρετέου· τότε τὰ ἄλλα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελοῦσι τὸ πηλίκον, τὰ δὲ χωρισθέντα τὸ ὑπόλοιπον.***

***Καὶ γενικῶς ὅταν ὁ διαιρέτης ἀποτελῆται ἀπὸ τὴν μονάδα καὶ ἀπὸ μηδενικά, χωρίζομεν ἀπὸ τὸ τέλος τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ διαιρέτης*** (κατόπιν τῆς μονάδος)· τότε τὰ ἄλλα ψηφία τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσι τὸ πηλίκον, τὰ δὲ χωρισθέντα τὸ κατάλοιπον.

***Παραδείγματα:*** 6897 : 100, πηλίκον 68, κατάλοιπον 97
16978 : 1000, πηλίκον 16, κατάλοιπον 978
6800 : 100, πηλίκον 68, κατάλοιπον 0

Ὁ δὲ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς. Εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα πρέπει νὰ εὕρωμεν, πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 100 εἰς τὸν 6897· ἤτοι πόσας ἑκατοντάδας ἔχει ὁ 6897· ἔχει δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος 68 ἑκατοντάδας. Εἰς τὸ δεύτερον πρέπει νὰ εὕρωμεν πόσας χιλιάδας ἔχει ὁ ἀριθμὸς 16 978· ἔχει δὲ 16· καὶ οὕτω καθεξῆς.

2α)

58. Ὅταν ὁ διαιρέτης ἔχῃ εἰς τὸ τέλος μηδενικά, ἀφίνομεν αὐτά· ἀφίνομεν ὅμως καὶ ἴσον ἀριθμὸν ψηφίων ἀπὸ τὸ τέλος τοῦ διαιρετέου· τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον τότε εὑρίσκομεν, εἶναι τὸ ζητούμενον· ἀλλὰ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀληθὲς ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, πρέπει δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς συντομευθείσης διαιρέσεως νὰ γράψωμεν καὶ τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου. τὰ ὁποῖα ἀφήκαμεν.

Ἄς ὑποθέσωμεν, π. χ., ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3897521 διὰ τοῦ 45000. Διὰ νὰ εὕρω τὸ πηλίκον, πρέπει νὰ ἀφαιρέσω τὰς 45000 ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 3897521, ὅσας φορὰς δύναμαι· ἐπειδὴ ὅμως αἱ χιλιάδες δὲν ἠμποροῦν νὰ ἀφαιρεθοῦν ἀπὸ μονάδας οὔτε ἀπὸ δεκάδας οὔτε ἀπὸ ἑκατοντάδας, πρέπει νὰ ἀφαιρέσω τὰς 45 χιλιάδας ἀπὸ τὰς 3897 χιλιάδας τοῦ διαιρετέου, ὅσας φορὰς δύναμαι, ἤτοι πρέπει νὰ διαιρέσω τὸν ἀριθμὸν 3897 διὰ τοῦ 45, διὰ νὰ εὕρω τὸ πηλίκον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον θὰ ἀπαρτίζηται ἀπὸ χιλιάδας, αἱ ὁποῖαι θὰ μείνουν, καὶ ἀπὸ τὰς 521 μονάδας, τὰς ὁποίας ἐξ ἀρχῆς ἀφήκαμεν.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 389΄7(521) | 45(00 | 1410(00 | 3(00 |
| 360 | 86 | 21 | 470 |
| 297 | | 00 | |
| 270 | | | |
| 27521 | | | |

3η)

59. Ὅταν τὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου εἶναι ὅλα 9, ἡ διαίρεσις συντομεύεται ὡς ἑξῆς.

Ἂς ὑποθέσωμεν, λ. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν 1897405 : 999, ἤτοι νὰ μοιράσωμεν 1897405 δραχμὰς εἰς 999 ἀνθρώπους.

Διὰ νὰ εὐκολύνω τὴν διαίρεσιν, παραδέχομαι ἀκόμη ἕνα ἄνθρωπον καὶ γίνονται 1000 ἄνθρωποι· τότε (κατὰ 1ην συντομίαν) θὰ πάρῃ ἕκαστος 1897 δραχμὰς καὶ θὰ περισεύσουν καὶ 405.

Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ὁ εἷς ἄνθρωπος εἶναι φανταστικός, τὸ μερίδιόν του (ἤγουν 1897 δραχμὰς) δὲν τὸ ἔλαβε κανείς, ἔμεινε λοιπὸν τὸ μερίδιον τοῦτο ὁμοῦ μὲ τὸ ὑπόλοιπον 405, ἤτοι ἔμειναν 2302 δραχμαὶ καὶ πρέπει νὰ μοιρασθῶσιν ἀκόμη καὶ αὗται εἰς τοὺς 999 ἀνθρώπους· γίνεται δὲ τοῦτο διὰ νέας διαιρέσεως 2302 : 999.

Καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν κάμνω τὴν ἰδίαν συντομίαν καὶ εὑρίσκω ὁμοίως, ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος ἐκ τῶν 999 ἀνθρώπων 2 δραχμὰς καὶ θὰ μείνουν 304 δραχμαὶ ὑπόλοιπον. Ὥστε ἡ διαίρεσις ἐξετελέσθη καὶ πηλίκον μὲν ἔδωκε 1897+2, ἤτοι 1899, ὑπόλοιπον δὲ 304

Ἡ διάταξις δὲ τῆς πράξεως ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ ὡς ἑξῆς.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1897΄405 | 999 | 3598΄54 | 99 |
| 405 | 1897 | 54 | 3598 |
| 2΄302 | 2 | 36΄52 | 36 |
| 2 | 1899 | 36 | 3634 |
| 304 | | 88 | |

***Σημείωσις.*** Ὅταν τὸ πηλίκον μέλλῃ νὰ ἔχῃ πολλὰ ψηφία, εἶναι δὲ καὶ ὁ διαιρέτης πολυψήφιος, σχηματίζομεν κατὰ πρῶτον πίνακα, ὁ ὁποῖος περιέχει τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου μὲ τοὺς 9 μονοψηφίους ἀριθμοὺς κατὰ σειράν· τότε, βλέποντες τὸν πίνακα τοῦτον, εὑρίσκομεν ἀμέσως εἰς ἑκάστην μερικὴν διαίρεσιν τὸ ψηφίον τοῦ πηλίκου. Οὕτω δὲ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν καὶ συντομώτερον καὶ ἀσφαλέστερον. Τὸ αὐτὸ δὲ πρέπει νὰ κάμνωμεν, ὅταν δι᾽ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν πολλὰς διαιρέσεις· διότι τότε ὁ πίναξ τὸν ὁποῖον ἅπαξ ἐσχηματίσαμεν, χρησιμεύει εἰς πάσας ταύτας τὰς διαιρέσεις.

## *Δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως.*

60. Ἀφοῦ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, ἂν θέλωμεν νὰ κάμωμεν

τὴν δοκιμήν της, ***πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ἂν ἔμεινεν· ἐὰν τότε εὑρεθῇ ὁ διαιρετέος, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος.***

***Σημείωσις.*** Διὰ τῆς διαιρέσεως ἠμποροῦμεν νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς ἑξῆς. Διαιροῦμεν τὸ εὑρεθὲν γινόμενον διὰ τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν παραγόντων, καὶ ἂν ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος, πρέπει νὰ εὕρωμεν ὡς πηλίκον τὸν ἄλλον παράγοντα· ὑπόλοιπον δὲ 0.

## *Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.*

61. Ἡ διαίρεσις ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, διότι πολλάκις χρησιμεύουσι.

1) ***Ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὰ μέρη του χωριστὰ καὶ ἔπειτα νὰ ἑνώσωμεν τὰ πηλίκα.***

Τὴν ἰδιότητα ταύτην μετεχειρίσθημεν ἤδη, διὰ νὰ ἐξηγήσωμεν τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, εἶναι δὲ φανερά· διότι, ἂν ἔχω· λ. χ., νὰ μοιράσω 1868 δραχμὰς εἰς 4 ἀνθρώπους, δύναμαι βέβαια νὰ μοιράσω εἰς αὐτοὺς πρῶτον τὰς 1000 δραχμάς, ἔπειτα τὰς 800, ἔπειτα τὰς 60 καὶ τέλος τὰς 8.

2) ***Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δὲν βλάπτεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην ἐπὶ ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμόν.***

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, ὅταν λ. χ. ἔχωμεν νὰ μοιράσωμεν 120 δραχ. εἰς 8 ἀνθρώπους, ἂν ἔλθωσι καὶ ἄλλοι 8 ἄνθρωποι καὶ συγχρόνως ἄλλαι 120 δραχμαί, δηλαδὴ ἂν διπλασιασθῶσιν οἱ ἄνθρωποι, ἀλλὰ νὰ διπλασιασθῶσι καὶ αἱ δραχμαί, τὸ μερίδιον ἑκάστου ἀνθρώπου θὰ μείνῃ τὸ αὐτό, εἴτε χωριστὰ μοιράσουν οἱ 8 τὰς 120 καὶ οἱ ἄλλοι 8 τὰς ἄλλας 120, εἴτε ὁμοῦ μοιράσουν τὰς διπλασίας $120 \times 2$ οἱ διπλάσιοι $8 \times 2$.

Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι, ἂν τριπλασιασθῶσιν οἱ ἄνθρωποι καὶ συγχρόνως τριπλασιασθῶσιν αἱ δραχμαί, πάλιν τὸ μερίδιον ἑκάστου δὲν ἀλλάσσει· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἂν π. χ. ἔχω νὰ διαιρέσω ἀριθμόν τινα διὰ τοῦ 5, διπλασιάζω τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ ἔπειτα διαιρῶ διὰ 10. Ὁμοίως, ἂν ἔχω νὰ διαιρέσω ἀριθμόν τινα διὰ 25, πολλαπλασιάζω αὐτὸν ἐπὶ 4 καὶ διαιρῶ ἔπειτα διὰ τοῦ 100.

3) ***Διὰ νὰ διαιρέσω γινόμενον δι᾽ ἑνὸς τῶν παραγόντων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψω τὸν παράγοντα τοῦτον.***

Ἐὰν π. χ. ἔχω νὰ διαιρέσω τὸ γινόμενον $8\times2\times5$ διὰ τοῦ 5, ἀρκεῖ νὰ παραλείψω τὸν παράγοντα 5· τὸ πηλίκον θὰ εἶναι $8\times2$. Διότι, ἂν πολλαπλασιάσω τὸν $8\times2$ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 5, εὑρίσκω πάλιν τὸν διαιρετέον $8\times2\times5$.

## *Ἀσκήσεις (ἀπὸ μνήμης).*

97) Ἐκ δύο ἀδελφῶν, ὁ εἷς ἔχει 120 πρόβατα, ὁ δὲ ἄλλος 70· πόσα πρέπει νὰ δώσῃ ὁ πρῶτος εἰς τὸν δεύτερον, διὰ νὰ ἔχωσιν ἴσα;

98) Πόσας ὥρας κάμνουν 6000 πρῶτα λεπτά;

99) Μία ἅμαξα ἐνοικιάζεται 160 δραχμὰς διὰ 5 ἡμέρας, πόσον ἔχει τὴν ἡμέραν;

100) 2000 στρατιῶται εἶναι παρατεταγμένοι εἰς τετράδας (τέσσαρες τέσσαρες)· πόσας τετράδας κάμνουν;

101) 50 ἄνθρωποι ἐξώδευσαν ἀπὸ κοινοῦ εἰς ἓν ταξείδιον 1200 δραχμάς· πόσα ἐξώδευσεν ὁ καθείς;

102) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑπόμεναι διαιρέσεις (ἀπὸ μνήμης).

| | | |
|---|---|---|
| 72 : 8 | 82 : 2 | 84 : 6 |
| 63 : 9 | 96 : 8 | 91 : 7 |
| 42 : 2 | 84 : 4 | 85 : 5 |
| 34 : 2 | 88 : 8 | 96 : 6 |
| 63 : 3 | 51 : 3 | 57 : 3 |

103) Ὁμοίως αἱ

| | | | |
|---|---|---|---|
| 36 : 12 | 75 : 15 | 540 : 9 | 2400 : 80 |
| 48 : 12 | 60 : 15 | 390 : 13 | 4500 : 90 |
| 72 : 12 | 68 : 17 | 720 : 12 | 2500 : 500 |
| 39 : 13 | 95 : 19 | 800 : 80 | 6300 : 700 |
| 55 : 11 | 84 : 14 | 7500 : 75 | 1000 : 125 |

104) Ὁμοίως αἱ

| | | |
|---|---|---|
| 37 : 12 | 91 : 15 | 476 : 10 |
| 40 : 13 | 95 : 16 | 1593 : 100 |
| 62 : 12 | 50 : 17 | 1579 : 100 |
| 65 : 15 | 60 : 18 | 9895 : 1000 |
| 56 : 11 | 56 : 19 | 89735 : 1000 |

105) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ κάτωθι διαιρέσεις (γραπτῶς

| | |
|---|---|
| 49776 : 48 | 8152 : 1019 |
| 85258 : 94 | 14616 : 1624 |
| 14700 : 196 | 284355 : 16871 |
| 59576 : 709 | 8384628 : 15419 |
| 150880 : 736 | 9150000 : 375000 |

## *Προβλήματα.*

1) 75 ὀκάδες ἑνὸς πράγματος ἀξίζουν 1125 δραχμάς· πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ;

***Λύσις.*** Αἱ 1125 δραχμαὶ εἶναι ἡ ἀξία τῶν 75 ὀκάδων· λοιπὸν διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς ὀκᾶς, πρέπει νὰ μοιράσωμεν τὰς 1125 δραχμὰς εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ ὀκάδες, ἤτοι εἰς 75 ἴσα μέρη, καὶ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς. Διαιροῦντες, εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ζητουμένη ἀξία τῆς ὀκᾶς εἶναι 15 δραχμαί.

***Παρατήρησις.*** Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

***Ὅταν ἠξεύρωμεν τὴν ἀξίαν πολλῶν μονάδων ἑνὸς πράγματος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος τοῦ ἰδίου πράγματος πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν γνωστὴν ἀξίαν τῶν μονάδων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἐκφράζει, πόσαι εἶναι αἱ μονάδες.***

2) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 75 δραχμάς· πόσας ὀκάδας ἀγοράζω μὲ 1125 δραχμάς;

***Λύσις.*** Ἂν ἀπὸ τὰς 1125 δραχμὰς δώσω 75, θὰ ἀγοράσω μίαν ὀκᾶν καὶ θὰ ἔχω δραχμὰς 1050· ἂν ἔπειτα δώσω ἄλλας 75, θὰ ἀγοράσω καὶ ἄλλην ὀκᾶν, καὶ θὰ μοῦ μείνουν 975 δραχμαί. Ἐκ τούτων βλέπω, ὅτι τόσας ὀκάδας θὰ ἀγοράσω, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 75 εἰς τὸν 1125. Διὰ νὰ λύσω λοιπὸν τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ διαιρέσω τὸν 1125 διὰ 75· διαιρῶ καὶ εὑρίσκω 15· ὥστε 15 ὀκάδας δύναμαι νὰ ἀγοράσω.

***Παρατήρησις.*** Τὸ δεύτερον τοῦτο πρόβλημα ἔχει τοὺς ἰδίους ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους ἔχει καὶ τὸ πρῶτον, καὶ μὲ τὴν ἰδίαν πρᾶξιν ἐλύθη. Ἀλλ' εἰς μὲν τὸ πρῶτον πρόβλημα ἐμοιράσαμεν τὸν 1125 εἰς 75 ἴσα μερίδια· διὰ τοῦτο ἕκαστον μερίδιον εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον· εἰς δὲ τὸ δεύτερον ἐξητάσαμεν, πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς 75 εἰς τὸν 1125, δηλαδὴ ἀπὸ πόσα 75 σύγκειται ὁ 1125· οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν τώρα θεωροῦνται ἀφῃρημένοι· διὰ τοῦτο καὶ τὸ πηλίκον αὐτῶν, ὡς ἐξαγόμενον τῆς πράξεως, εἶναι ἀριθμὸς ἐπίσης ἀφῃρημένος, λαμβάνει δὲ ἔπειτα τὴν σημασίαν τὴν ὁποίαν ὁρίζει τὸ πρόβλημα καὶ ἥτις δύναται νὰ εἶναι ὁποιαδήποτε.

Ἐκ τῶν δύο τούτων διαιρέσεων παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μὲν πρώτη εἶναι μερισμός, ἡ δὲ δευτέρα μέτρησις.

## *Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.*

106) Ἐὰν ὁ διαιρετέος εἶναι 1411 καὶ τὸ πηλίκον 83, τίς εἶναι ὁ διαιρέτης; (ἀπ. 17).

107) Τὸ γινόμενον τῶν δύο παραγόντων εἶναι 48118, ὁ δὲ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶναι 491· ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος; (ἀπ. 98).

108) Ἅμαξά τις διέτρεξεν εἰς 18 ὥρας 162 χιλιόμετρα· πόσα χιλιόμετρα διέτρεχε κάθε ὥραν; (ἀπ. 9).

109) 59 ἐργάται ἐμοιράσθησαν ἐξ ἴσου 22715 δραχμάς· πόσας ἔλαβεν ὁ καθείς; (ἀπ. 385).

110) Πόσας δραχμὰς ἀποτελοῦσι 78955 λεπτά; (ἀπ. 789 δρχ. καὶ περισσεύουν 55 λ.).

111) Νὰ τραπῶσιν 97870 δράμια εἰς ὀκάδας. (ἀπ. 244 ὀκ. καὶ περισσεύουν 270 δράμ.).

112) Οἰκία τις δίδει ἐνοίκιον 18000 δραχμὰς τὸ ἔτος· πόσον δίδει κατὰ μῆνα; (ἀπ. 1500).

113) Ἐκ μιᾶς κρήνης ῥέει ὕδωρ 879 ὀκάδων καθ' ὥραν· εἰς πόσας ὥρας θὰ γεμίσῃ αὕτη δεξαμενήν, ἥτις χωρεῖ 24612 ὀκάδας; (ἀπ. 28).

114) Ἀτμόπλοιόν τι διανύει 90 μίλια εἰς 8 ὥρας· ἓν ἄλλο διανύει 250 μίλια εἰς 28 ὥρας· ποῖον ἐκ τῶν δύο εἶναι ταχύτερον; (ἀπ. τὸ πρῶτον).

115) Θέλει τις νὰ ἀγοράσῃ σῖτον τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 5 δραχμάς· διὰ νὰ λάβῃ χρήματα πωλεῖ 167 ὀκάδας ἐλαίου πρὸς 37 δραχ. τὴν ὀκᾶν· πόσας ὀκάδας σίτου θὰ ἀγοράσῃ μὲ τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα θὰ λάβῃ ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ ἐλαίου; (ἀπ. 1233).

116) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ὕφασμα ἀντὶ 2975 δραχμῶν καὶ τὸ μετεπώλησε πρὸς 3570 δραχμὰς κερδίσας 7 δραχ. τὸν πῆχυν. Ἐκ πόσων πήχεων ἀπετελεῖτο τὸ ἀγορασθὲν ὕφασμα; (ἀπ. 85).

117) Ὑπάλληλός τις λαμβάνει μισθὸν κατὰ μῆνα 4680 δραχμάς, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἐξοδεύει τὸν μῆνα 3540 δραχ. Πόσας δραχμὰς ἐξοικονομεῖ καθ' ἡμέραν; (ἀπ. 38).

117) Ἱππεύς τις καταδιώκει πεζόν, ὅστις ἀνεχώρησεν 20 ὥρας πρὸ αὐ-

τοῦ καὶ ὁ μὲν πεζὸς διατρέχει καθ' ὥραν 6 χιλιόμετρα· ὁ δὲ ἱππεὺς 10· πόσας ὥρας χρειάζεται ὁ ἱππεὺς διὰ νὰ φθάσῃ τὸν πεζόν ; (ἀπ. 30).

118) Ἐπώλησέ τις 8 σάκκους ξυλανθράκων ἀντὶ 1440 δραχμ. μὲ κέρδος ἐν ὅλῳ 120 δραχ. Πόσον ἠγόρασεν τὸν σάκκον ; (ἀπ. 165).

119) Ἠγόρασέ τις 67 ὀκ. ἔλαιον καὶ 15 ὀκ. βούτυρον ἀντὶ 4223 δραχμῶν. Τὸ βούτυρον ἠγόρασε πρὸς 85 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πρὸς πόσας δραχμὰς ἠγόρασε τὴν μίαν ὀκᾶν ἐλαίου ; (ἀπ. 44).

120) Ἁμαξοστοιχία τις διέτρεξε διάστημα 309 χιλιομέτρων εἰς 9 ὥρας. Κατὰ τὰς 3 πρώτας ὥρας ἔτρεχε 29 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Πόσα χιλιόμ. ἔτρεχε τὴν ὥραν κατὰ τὸν ὑπόλοιπον χρόνον ; (ἀπ. 37).

121) 18 ἄνθρωποι ἐμοιράσθησαν ποσόν τι χρημάτων ἐξ ἴσου· οἱ 14 ἐξ αὐτῶν ἔλαβον ὁμοῦ 2100 δραχμάς· πόσα ἦσαν τὰ μοιρασθέντα χρήματα καὶ πόσα ἔλαβεν ὁ καθείς ; (ἀπ. 2700, 150).

122) Ἠγόρασέ τις 240 πρόβατα πρὸς 280 δραχμὰς τὸ καθὲν καὶ θέλει τώρα νὰ τὰ πωλήσῃ καὶ νὰ κερδίσῃ ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτῶν 12000 δραχ. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ καθέν ; (ἀπ. 330).

123) Κτηνοτρόφος τις ἐχρεώστει 26000 δραχμάς. Ἐξώφλησε δὲ τὸ χρέος τοῦτο μὲ 7300 δραχμὰς εἰς μετρητὰ καὶ τὸ ὑπόλοιπον μὲ πρόβατα τὰ ὁποῖα ἤξιζον 275 δραχμὰς τὸ ἕνα. Πόσα πρόβατα ἔδωκε ; (ἀπ. 68).

124) Ὑπάλληλός τις ἐξοδεύει πρὸς συντήρησιν του 68 δραχμὰς τὴν ἡμέραν· καὶ οἰκονομεῖ εἰς ἓν ἔτος 4380 δραχμάς. Ποῖος εἶναι ὁ μηνιαῖος μισθὸς αὐτοῦ ; (ἀπ. 2400).

125) Ἐργάτης ἐργάζεται καθ' ἑκάστην, πλὴν τῶν Κυριακῶν καὶ λαμβάνει ἡμερομίσθιον 50 δραχ. ἐξοδεύει ὅμως διὰ τὴν συντήρησίν του καθ' ἡμέραν 32 δραχμάς· εἰς πόσας ἡμέρας θὰ οἰκονομήσῃ 1350 δραχμάς ; (ἀπ. 1350).

126) Ἐργάτης τις λαμβάνει δι' ἑκάστην ἡμέραν ἐργασίας 60 δραχμάς, ἐξοδεύει δὲ πρὸς συντήρησίν του καθ' ἡμέραν 39 δραχμάς· εἰς τὸ διάστημα ἑνὸς ἔτους τοῦ ἐπερίσσευσαν 2085 δραχμαί. Πόσας ἡμέρας εἰργάσθη καὶ πόσας ἔμεινεν ἄεργος ; (εἰργάσθη 272).

127) Ἠγόρασέ τις οἶνον πρὸς 9 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν διὰ τὸν ὁποῖον ἐπλήρωσε 18288 δραχ. καὶ τὸν ὁποῖον μετήγγισεν εἰς βαρέλια τῶν 127 ὀκάδων ἕκαστον. Εἰς πόσα βαρέλια τὸν μετήγγισε ;

128) Ἠγόρασέ τις ἀντὶ 5349 δραχμῶν ὕφασμα τριῶν ποιοτήτων. Τῆς πρώτης ποιότητος ἦτο 19 πήχ. και ἤξιζε 87 δραχμὰς τὸν πῆχυν· τῆς δευτέρας ἦτο 28 πήχ. καὶ ἤξιζε 78 δραχμάς· τῆς δὲ τρίτης ἦτο ὕφασμα 24 πήχεων. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τοῦ πήχεως τοῦ ὑφάσματος τῆς τρίτης ποιότητος ; (ἀπ. 63).

129) Ἐὰν εἷς ἄνθρωπος ἀρχίσῃ ν' ἀπαγγέλῃ τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ σειρὰν καὶ χρειάζεται δι' ἕκαστον ἀριθμὸν ἓν δεύτερον λεπτόν, πόσον χρόνον χρειάζεται διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν ἀριθμὸν 1000 000 000 ; (ἀπ. 11 574 ἡμ. 46 πρῶτα λεπτὰ καὶ 4 δεύτερα ἢ 31 ἔτη περίπου).

130) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν βαμβακερὸν καὶ μάλλινον ὕφασμα τὸ ὅλον 48 πήχεις· ἐπώλησε δὲ τὸ μὲν βαμβακερὸν πρὸς 50 δραχμὰς τὸν πῆχυν, τὸ δὲ μάλλινον πρὸς 100 δραχμὰς καὶ ἔλαβε ἐν ὅλῳ 3000 δραχμάς. Πόσους πήχεις βαμβακεροῦ καὶ πόσους πήχεις μαλλίνου ὑφάσματος ἐπώλησεν ; (ἀπ. 36 πήχ. βαμβακεροῦ).

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

## ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ

### *Ὁρισμοί.*

62. ***Διαιρετὸς*** λέγεται ἀριθμός τις δι' ἄλλου, ἐὰν διαιρῆται δι' αὐτοῦ ἀκριβῶς (ἤγουν χωρὶς νὰ μένῃ ὑπόλοιπον).

Οἷον, ὁ 15 εἶναι διαιρετὸς διὰ 5, ὁ 20 εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, κτλ

Ὁ διαιρῶν ἀκριβῶς ἀριθμόν τινα λέγεται διαιρέτης αὐτοῦ· π. χ. ὁ 3 εἶναι διαιρέτης τοῦ 15, ὁ 4 εἶναι διαιρέτης τοῦ 20 κτλ.

Ἀριθμός τις λέγεται πολλαπλάσιον ἄλλου ἀριθμοῦ, ἐὰν γίνεται ἐξ αὐτοῦ διὰ τοῦ **πολλαπλασιασμοῦ**· οἷον, ὁ 15 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5 (διότι $15=5\times3$)· ὁ 24 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6 (διότι $24=6\times4$) κτλ. Ὁ δὲ **ἀριθμός**, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος παράγει ἄλλον, **λέγεται παράγων αὐτοῦ**, οἷον ὁ 5 εἶναι παράγων τοῦ 15, ὁ 6 εἶναι **παράγων** τοῦ 24, κτλ.

Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖ ἀκριβῶς τὰ πολλαπλάσιά του καὶ μόνον αὐτά.

Οἱ διαιρέται παντὸς ἀριθμοῦ καὶ οἱ παράγοντες αὐτοῦ εἶναι οἱ ἴδιοι ἀριθμοί.

***Ἄρτιοι*** (ἢ ζυγοὶ) λέγονται ὅσοι ἀριθμοὶ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2· ***περιττοὶ*** δὲ (ἢ μονοί), ὅσοι δὲν διαιροῦνται διὰ τοῦ 2· π. χ. ὁ 10 εἶναι ἄρτιος, ὁ δὲ 5 περιττός.

***Πρῶτος*** λέγεται ἀριθμός τις, ἐὰν δὲν ἔχῃ κανένα διαιρέτην παρὰ μόνον τὴν μονάδα καὶ τὸν ἑαυτόν του· τοιοῦτοι εἶναι ὁ 5, ὁ 7, ὁ 13 κτλ.

Πρῶτοι ἀριθμοὶ ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 100 εἶναι οἱ ἑξῆς.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 11 | 23 | 31 | 41 | 53 | 61 | 71 | 83 | 97 |
| 2 | 13 | 29 | 37 | 43 | 59 | 67 | 73 | 89 | |
| 3 | 17 | | | 47 | | | 79 | | |
| 5 | 19 | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | |

## *Γενικαὶ ἀρχαὶ τῆς διαιρετότητος.*

63. ***Ἐὰν εἷς ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.***

Παραδείγματος χάριν, ἐπειδὴ ὁ 5 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 15 καὶ 25, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 15+25, ἤγουν 40.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς·

Ὁ 15 καὶ ὁ 25 εἶναι καὶ οἱ δύο πολλαπλάσια τοῦ 5· ἤτοι σύγκεινται ἀπὸ πολλὰ πέντε (ἐπειδὴ διαιροῦνται δι' αὐτοῦ)· καὶ ὁ μὲν 15 εἶναι 5+5+5, ὁ δὲ 25 εἶναι 5+5+5+5+5· ἄρα τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 5+5+5+5+5+5+5+5, ἤγουν σύγκειται ἀπὸ πολλὰ πέντε, ὥστε εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5.

64. Ἐκ τῆς ἀρχῆς ταύτης συμπεραίνομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

***Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῇ ἄλλον ἀριθμόν, διαιρεῖ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ.***

Παραδείγματος χάριν, ἐπειδὴ ὁ 9 διαιρεῖ τὸν 27, θὰ διαιρῇ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, ἤτοι τὸ διπλάσιον αὐτοῦ 27×2, τὸ τριπλάσιον 27×3, κτλ.

Διότι τὸ 27×2 εἶναι 27+27, τὸ 27×3 εἶναι 27+27+27, κτλ.

65. ***Ἐὰν εἷς ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.***

Παραδείγματος χάριν, ἐπειδὴ ὁ 3 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 18 καὶ 12 θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν 18—12, ἤγουν 6.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὅμοιος τῷ προηγουμένῳ.

## *Χαρακτηριστικὰ τῆς διαιρετότητος.*

Πολλάκις εἶναι ὠφέλιμον νὰ ἠξεύρωμεν, ἂν ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλου (μάλιστα δὲ διὰ τῶν ἀνωτέρω μικρῶν ἀριθμῶν), χωρὶς νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν. Εἰς τοῦτο βοηθούμεθα διὰ τῶν ἑξῆς κανόνων.

## *Κανὼν διὰ τὸ 10, 100, 1000 κ.τ.λ.*

66. ***Διὰ τοῦ 10 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν τελειώνῃ εἰς 0, διὰ τοῦ 100 ἂν τελειώνῃ εἰς δύο 0, διὰ τοῦ 1000, ἂν εἰς τρία 0 κ. ο. κ.***

Διότι ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι 10 χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, ἂν εἶναι 100 χωρίζομεν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ (57) κ.ο.κ. ὥστε ἂν τὰ ψηφία ποῦ χωρίζομεν εἶναι μηδενικά, ἡ διαίρεσις διὰ τοῦ 10, 100 κ.τ.λ. γίνεται ἀκριβῶς.

## *Κανὼν διὰ τὸ 2 καὶ 5.*

67. ***Διὰ τοῦ 2 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν τὸ τελευταῖον ψηφίον του διαιρῆται διὰ 2. Τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει καὶ περὶ τοῦ 5.***

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι

διὰ τοῦ 2 διαιροῦνται οἱ ἀριθμοί, ὅσοι ἔχουσι τελευταῖον ψηφίον ἢ 2, ἢ 4, ἢ 6, ἢ 8, ἢ 0.

Διὰ τοῦ 5 διαιροῦνται, ὅσοι ἔχουσι τελευταῖον ψηφίον ἢ 5 ἢ 0.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 1025 διαιρεῖται διὰ 5, διότι λήγει εἰς 5· ὁ 128 διαιρεῖται διὰ 2, διότι λήγει εἰς 8· ὁ δὲ 1027 δὲν διαιρεῖται διὰ 2, διότι λήγει εἰς 7.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς :

Ἕκαστος ἀριθμὸς (ἐὰν δὲν εἶναι μονοψήφιος) σύγκειται ἀπὸ μονάδας καὶ ἀπὸ δεκάδας· καὶ τὰς μὲν δεκάδας τὰς διαιρεῖ ὁ 2 (καὶ ὁ 5)· διότι ἑκάστη δεκάς, ἤτοι 10, διαιρεῖται διὰ τοῦ 2 (καὶ διὰ τοῦ 5)· ἐὰν λοιπὸν διαιρῶνται καὶ αἱ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 2 (ἢ διὰ τοῦ 5), θὰ διαιρῆται καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς διὰ τοῦ 2 (ἢ διὰ τοῦ 5) (ἐδ. 63).

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 1875 σύγκειται ἀπὸ 187 δεκάδας καὶ ἀπὸ 5 μονάδας· ἑκάστη δεκὰς διαιρεῖται διὰ 5 (καὶ δίδει πηλίκον 2)· ἄρα αἱ 187 δεκάδες διαιροῦνται διὰ τοῦ 5 (καὶ δίδουσι πηλίκον $2 \times 187$, ἤτοι 374)· ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ (αἱ 5) διαιροῦνται διὰ τοῦ 5, συμπεραίνομεν, ὅτι καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ 5 (καὶ τὸ πηλίκον εἶναι 374+1, ἤγουν 375).

## *Κανὼν διὰ τὸ 4 καὶ 25.*

68. ***Διὰ τοῦ 4 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ σχηματίζωσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4. Τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει καὶ διὰ τὸ 25.***

Ἑπομένως διὰ τοῦ 25 διαιροῦνται, ὅσοι ἀριθμοὶ λήγουν εἰς 00, ἢ εἰς 25, ἢ εἰς 50, ἢ εἰς 75.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 187544 διαιρεῖται διὰ 4· διότι καὶ ὁ ἀριθμὸς 44, τὸν ὁποῖον σχηματίζουσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του, διαιρεῖται διὰ τοῦ 4· ὁ δὲ ἀριθμὸς 1945050 διαιρεῖται διὰ τοῦ 25· διότι καὶ ὁ 50 διαιρεῖται διὰ τοῦ 25· ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς 25746 δὲν διαιρεῖται διὰ 4· διότι καὶ ὁ 46 δὲν διαιρεῖται διὰ 4· ὁ δὲ ἀριθμὸς 58715 δὲν διαιρεῖται διὰ 25· διότι ὁ 15 δὲν διαιρεῖται διὰ 25.

Ὁ δὲ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς. Αἱ ἑκατοντάδες παντὸς ἀριθμοῦ διαιροῦνται διὰ 4 (καὶ διὰ 25)· διότι ἑκάστη ἑκατοντάς, ἤτοι 100, διαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ διὰ 4 καὶ διὰ 25 ($100=4\times25$)· ἐὰν λοιπὸν αἱ δεκάδες καὶ αἱ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ ὁμοῦ διαιρῶνται διὰ 4, καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς θὰ διαιρῆται διὰ 4.

Τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει προδήλως καὶ περὶ τοῦ 25.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 875975 σύγκειται ἀπὸ δύο μέρη, ἀπὸ 8759 ἑκατοντάδας καὶ ἀπὸ 75 μονάδας· ἑκάστη ἑκατοντάς, ἤτοι 100, διαιρεῖται διὰ 25 (καὶ δίδει πηλίκον 4)· ἄρα καὶ αἱ 8759 ἑκατοντάδες διαιροῦνται διὰ 25 (καὶ δίδουσι πηλίκον $8759\times4$)· ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ 75 μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ διαιροῦνται διὰ τοῦ 25, συμπεραίνομεν ὅτι καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 25 (καὶ δίδει πηλίκον $8759\times4$ καὶ 3).

## *Κανὼν διὰ τὸ 3 καὶ 9.*

69. ***Διὰ τοῦ 9 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 9· τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει καὶ περὶ τοῦ 3.***

Εἰς τὸ ἄθροισμα ὅλα τὰ ψηφία λαμβάνονται ὡς ἁπλαῖ μονάδες.

Παραδ. χάριν, διὰ νὰ δοκιμάσωμεν, ἂν ὁ ἀριθμὸς 58973 διαιρῆται διὰ τοῦ 9, εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του 5+8+9+7+3, ἤτοι 32, καὶ ἐπειδὴ τοῦτο δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 9, οὐδὲ ὁ ἀριθμὸς 58973 διαιρεῖται διὰ 9 Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν, ἂν ὁ ἀριθμὸς 1845 διαιρῆται διὰ 9, εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του 1+8+4+5, ἤτοι 18, καὶ ἐπειδὴ τοῦτο διαιρεῖται διὰ 9, καὶ ὁ ἀριθμὸς 1845 θὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 9.

Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν, ἂν ὁ ἀριθμὸς 85107 διαιρῆται διὰ 3, εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του 8+5+1+7, ἤτοι 21· καὶ ἐπειδὴ τοῦτο διαιρεῖται διὰ 3, καὶ ὁ ἀριθμὸς 85107 θὰ διαιρῆται διὰ 3.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς. Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 8975· ὁ ἀριθμὸς οὗτος σύγκειται ἀπὸ 897 δεκάδας καὶ ἀπὸ 5 μονάδας· ἂν ἀπὸ ἑκάστην δεκάδα (ἤτοι 10) ἀφαιρέσωμεν τὸ 9, μένει ὑπόλοιπον μία μονάς, ἤτοι ἡ δεκὰς γίνεται ἁπλῆ μονάς· ἂν λοιπὸν ἀπὸ τὰς 897 δεκάδας τοῦ ἀριθμοῦ 8975 ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ κάθε μίαν τὸ 9 θὰ μείνουν εἰς τὸν ἀριθμὸν 897 μονάδες καὶ 5 μονάδες· ἤτοι θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς 897+5. Ἐὰν δὲ πάλιν ἀπὸ τὰς 89 δεκάδας τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ κάθε μίαν τὸ 9, θὰ μείνουν 89 μονάδες καὶ 7 μονάδες καὶ 5 μονάδες, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς 89+7+5. Καὶ τέλος, ἂν ἀπὸ τὰς 8 δεκάδας τούτου ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ κάθε μίαν τὸ 9, θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς 8+9+7+5.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 8975 σύγκειται ἀπὸ πολλὰ 9 (ἤτοι ἀπὸ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 9) καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα 8+9+7+5. ἤτοι εἶναι 8975=8+9+7+5+ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 9· ὥστε, ἂν τὸ ἄθροισμα 8+9+7+5 διαιρῆται διὰ 9, καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς θὰ διαιρῆται διὰ 9.

Ὁμοίως σκεπτόμεθα καὶ διὰ τὸν 3· στηριζόμεθα δὲ εἰς τοῦτο· ὅτι, ἂν ἀπὸ μίαν δεκάδα ἀφαιρέσωμεν τρεῖς φορὰς τὸν 3, μένει ὑπόλοιπον 1, ἤτοι μία μονὰς ἁπλῆ.

***Σημείωσις α΄.*** Διὰ τοῦ 6 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 3.

***Σημείωσις β΄.*** Διὰ τοῦ 12 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 4.

## Ἀσκήσεις.

131) Ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 298, 140, 453, 25700, 3262, 10425, 16000, εἶναι διαιρετοὶ μὲ καθένα ἐκ τῶν ἀριθμῶν, 2, 5, 10, 100 ;

132) Ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1970, 608, 975, 1400, 18250, 19285, 10392, εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 4 ἢ 25 ;

133) Ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 891, 652, 6273, 8604, 64370, 16326, 206007, 315783, εἶναι διαιρετοὶ διὰ 3 ἢ 9 ;

134) Ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 976, 3072, 4143, 7500, 8145, 6162, 12096, 14156, 7008 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 6 ἢ 12 ;

135) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων (χωρὶς νὰ γίνωσιν αὗται) διὰ 2, 3, 4, 5, 9, 25, 100 τῶν ἀριθμῶν 648, 1593, 4735, 8043, 65826, 53469, 40007, 162072.

## ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ

### Ὁρισμοί.

70. ***Κοινὸς*** διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ἀριθμός τις, ἐὰν τοὺς διαιρῇ ὅλους ἀκριβῶς.

Παραδείγματος χάριν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν 16 24 56 20, κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ 2· διότι τοὺς διαιρεῖ ὅλους· τῶν αὐτῶν δὲ ἀριθμῶν κοινὸς διαιρέτης εἶναι καὶ ὁ 4.

***Μέγιστος*** κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται (ὡς καὶ τὸ ὄνομα αὐτοῦ φανερώνει) ὁ μέγιστος ἐκ τῶν κοινῶν διαιρετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ 16 24 40
ἔχουσι τοὺς ἑξῆς κοινοὺς διαιρέτας 1, 2, 4, 8
καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν εἶναι ὁ 8.

Ἐὰν ἀριθμοί τινες δὲν ἔχωσι κανένα κοινὸν διαιρέτην, πλὴν τοῦ 1, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Τοιοῦτοι εἶναι ἀριθμοὶ 3, 4, 9.

### *Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν. Κανών.*

71. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἀριθμῶν, διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου· καὶ ἂν***

*μὲν ἡ διαίρεσις γίνῃ ἀκριβῶς, τότε ὁ μικρότερος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης. Ἂν ὅμως μείνῃ ὑπόλοιπον, διαιροῦμεν τὸν μικρότερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου· ἂν ἡ δευτέρα αὕτη διαίρεσις γίνῃ ἀκριβῶς, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι ὁ διαιρέτης αὐτῆς· εἰ δὲ μή, διαιροῦμεν τὸν διαιρέτην αὐτῆς διὰ τοῦ ὑπολοίπου της καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως διαιροῦντες ἕκαστον διαιρέτην διὰ τοῦ ἀντιστοίχου ὑπολοίπου, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον Ο. Ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας διαιρέσεως εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.*

## *Παραδείγματα.*

1ον) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 84 καὶ 21. Διαιροῦμεν

| | |
|---|---|
| 84 | 21 |
| 84 | 4 |
| 0 | |

καὶ ἐπειδὴ ὁ μικρότερος (ὁ 21) διαιρεῖ τὸν μεγαλύτερον (τὸν 84), αὐτός, ὁ μικρότερος, θὰ εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν 84 καὶ 21.

2ον) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγ. κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν 128 καὶ 40.

Διαιροῦμεν

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 128 | 40 | | 40 | 8 |
| 120 | 3 | Διαιροῦμεν ἔπειτα | 40 | 5 |
| 8 | | | 0 | |

ὥστε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 128 καὶ 40 εἶναι ὁ 8.

3ον) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγ. κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 1600 καὶ 60.
Διαιροῦμεν

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1600 | 60 | 60 | 40 | 40 | 20 |
| 120 | 26 | 40 | 1 | 40 | 2 |
| 400 | | 20 | | 0 | |
| 40 | | | | | |
| 360 | | | | | |

ὥστε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 1600 καὶ 60 εἶναι ὁ 20.

## *Διάταξις τῆς πράξεως.*

Πρὸς συντομίαν διατάσσεται ἡ πρᾶξις ὡς ἑξῆς: γράφεται δηλαδὴ τὸ πηλίκον ἑκάστης διαιρέσεως ὑπεράνω τοῦ διαιρέτου καὶ χωρίζεται ἀπ᾽ αὐτοῦ διὰ γραμμῆς ὁριζοντίας· ἡ δὲ θέσις ὑποκάτω τοῦ διαιρέτου φυλάσσεται διὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἑπομένης διαιρέσεως.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 25 | 1 | |
| 1600 | 60 | 40 | 20 |
| 120 | 40 | 40 | |
| 400 | 20 | 0 | |
| 360 | | | |
| 40 | | | |

***Σημείωσις.*** Ἂν ὡς μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εὑρεθῇ ἡ μονάς, τοῦτο σημαίνει, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ μόνον αὐτὴν ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην, ἤτοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

## *Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης πολλῶν ἀριθμῶν.*

72. Τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς·

Ἀφοῦ γράψωμεν τοὺς ἀριθμοὺς εἰς μίαν σειράν, λαμβάνομεν τὸν μικρότερον ἐξ αὐτῶν καὶ διαιροῦμεν δι᾽ αὐτοῦ ὅλους τοὺς ἄλλους καὶ γράφομεν ὑποκάτω ἑκάστου τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἀφίνει ἡ διαίρεσίς του.

Ἂν ὅλα τὰ ὑπόλοιπα εἶναι 0, ὁ διαιρέτης, διὰ τοῦ ὁποίου διῃρέσαμεν, εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης· εἰ δὲ μή, κάμνομεν τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὴν νέαν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν (τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσι τὰ ὑπόλοιπα καὶ ὁ διαιρέτης) καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως, μέχρις οὗ εὕρωμεν ἀριθμόν, ὅστις διαιρῶν τοὺς ἄλλους τῆς σειρᾶς του νὰ ἀφίνῃ ὅλα τὰ ὑπόλοιπα 0· ὁ διαιρέτης οὗτος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

### *Παράδειγμα.*

Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 40 | 48 | 56 | 24 | (διὰ τοῦ 24) |
| 12 | 16 | 0 | 8 | 24 | (διὰ τοῦ 8) |
| 4 | 0 | 0 | 8 | 0 | (διὰ τοῦ 4) |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

ὁ 4 εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Ἀριθμός τις λέγεται κοινὸν πολλαπλάσιον ἄλλων ἀριθμῶν ἐὰν εἶναι πολλαπλάσιον ἑκάστου ἐξ αὐτῶν· οἷον, ὁ 24 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 4, 8 καὶ 12· διότι εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 4 καὶ τοῦ 8 καὶ τοῦ 12.

***Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον*** δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, λέγεται (ὡς καὶ τὸ ὄνομα δηλοῖ) ὁ μικρότερος ἐξ ὅλων τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν τούτων· οἷον, ὁ 24 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τοῦ 6 καὶ τοῦ 8· διότι εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τοῦ 6 καὶ τοῦ 8 καὶ ἄλλος ἀριθμός μικρότερος δὲν ὑπάρχει, ὅστις νὰ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δεδομένων ἀριθμῶν, κάμνομεν ὡς ἑξῆς.

Γράφωμεν τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς εἰς μίαν σειράν ἔπειτα παρατηροῦμεν, ἂν δύο ἢ περισσότεροι ἐξ αὐτῶν ἔχουν κοινόν τινα διαιρέτην πρῶτον ἀριθμόν· καὶ ἂν ἔχωσι, διαιροῦμεν αὐτοὺς διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου των καὶ γράφομεν ὑποκάτω ἑκάστου τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον δίδει διαιρούμενος· ἐπίσης γράφομεν ὑποκάτω καὶ ἐκείνους, οἵτινες δὲν διαιροῦνται (διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, δι' οὗ διῃρέσαμεν)· οὕτως ἔχομεν μίαν νέαν σειρὰν ἀριθμῶν (δηλαδὴ τοὺς μὴ διαιρετοὺς καὶ τὰ πηλίκα ἐκείνων, οἵτινες διῃρέθησαν)· καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην σειρὰν κάμνομεν τὸ ἴδιον καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως, ἕως οὗ εὕρωμεν μίαν σειρὰν ἀριθμῶν, εἰς τὴν ὁποίαν νὰ μὴ ὑπάρχωσιν ἀριθμοὶ ἔχοντες κοινόν τινα διαιρέτην (πλὴν τῆς μονάδος). Τότε οἱ ἀριθμοὶ τῆς τελευταίας ταύτης σειρᾶς καὶ πάντες οἱ διαιρέται, δι' ὧν διῃρέσαμεν, πολλαπλασιαζόμενοι δίδουσι τὸ ζητούμενον ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.

## *Παραδείγματα.*

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλ. κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 6, 9

| Διαιρέται : | ἀριθμοί : |
|---|---|
| | 2, 3, 6, 9 |
| 2 | 1, 3, 3, 9 |
| 3 | 1, 1, 1, 3 |

Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶναι 2×3×3, ἤτοι 18.

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 12, 21, 28.

| Διαιρέται: | ἀριθμοί: |
|---|---|
| | 12, 21, 28 |
| 2 | 6, 21, 14 |
| 2 | 3, 21, 7 |
| 3 | 1, 7, 7 |
| 7 | 1, 1, 1 |

Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶναι 2×2×3×7, ἤτοι 84.

***Σημείωσις***. Καλὸν εἶναι ν' ἀρχίζωμεν ἀπὸ τῶν μικρῶν διαιρετῶν 2, 2, 5 κ. τ. λ.

## *Ἀσκήσεις.*

136) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν α) 762, 256 β) 180, 156 γ) 252, 588 δ) 1881, 475 ε) 768, 256 στ) 648, 75 ζ) 1591, 1247 η) 17171, 4906, θ) 84600, 940, ι) 7171, 11009.

137) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν α) 87, 348, 783 β) 144, 180, 396 γ) 310, 290, 570, 150 δ) 825, 2570, 1375, 2475 ε) 4200, 8100, 900, 1500 στ) 37500, 80000, 302000, 40200.

138) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν α) 14, 21 β) 15, 21 γ) 26, 39 δ) 20, 30, 12 ε) 18, 30, 45 στ) 24, 30 60, 40 ζ) 84, 56, 24, 36 θ) 84, 56, 24, 36.

# ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ
# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ
## ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄

## ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

### *Ὁρισμοί.*

73. ***Πρόβλημα.*** Ἐὰν μοιρασθῇ 1 μῆλον εἰς 4 παιδία, ποῖον εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν 1μ : 4. Ἀλλ' ἡ διαίρεσις αὕτη, ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, εἶνε ἀδύνατος. (παρτ. σελ. 50). Ἑπομένως ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου εἶναι ἀδύνατος. Ἀλλ' εἰς τὴν πραγματικότητα δυνάμεθα νὰ κόψωμεν τὸ 1 μῆλον εἰς 4 ἴσα μέρη, καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου θὰ εἶναι ἓν ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ μέρη. Δι' ἀριθμοῦ ὅμως δὲν δυνάμεθα νὰ τὸ παραστήσωμεν. Διὰ τοῦτο εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐπινοηθῶσι καὶ ἄλλοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι μετὰ τῶν ἤδη γνωστῶν ἀριθμῶν, νὰ ἀποτελέσωσιν ἕνα γενικώτερον σύστημα ἀριθμῶν, εἰς τὸ ὁποῖον πᾶσα διαίρεσις νὰ εἶναι δυνατὴ καὶ τελεία (ἐκτὸς τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διαφόρου τοῦ 0 διὰ τοῦ 0).

Ἡ ἐπινόησις τῶν νέων ἀριθμῶν στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ἑξῆς· ὅλοι παραδεχόμεθα, ὅτι πᾶν πρᾶγμα (ὅπως ἀνωτέρω εἰς τὸ μῆλον) δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη καὶ κατὰ συνέπειαν δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν, ὅτι καὶ ἡ μονὰς 1 δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη.

Καὶ ἂν μὲν ἡ μονὰς 1 διαιρεθῇ εἰς δύο ἴσα μέρη τὸ καθὲν λέγεται ἥμισυ καὶ γράφεται ὡς ἑξῆς: $\frac{1}{2}$· ἂν δὲ εἰς τρία, τὸ καθὲν λέγεται τρίτον καὶ γράφεται $\frac{1}{3}$· ἂν δὲ εἰς τέσσαρα, τὸ καθὲν λέγεται τέταρτον καὶ γράφεται $\frac{1}{4}$· κ. ο. κ.

Προκύπτει δὲ ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1,\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1,\quad \text{κ. ο. κ.}$$

Δεχόμεθα δηλαδὴ ὅτι τὰ: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ .... εἶναι ἀριθμοί. Τοὺς ἀριθμοὺς τούτους θεωροῦμεν ***ὡς νέας μονάδας,*** αἵτινες λέγονται ***κλασματικαί*** · ἡ δὲ μονὰς 1 λέγεται ***ἀκεραία***. Ὥστε ***κλασματικὴ μονὰς λέγεται, τὸ ἓν ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ἀκεραία μονάς.***

***Ἀκέραιοι ἀριθμοὶ*** λέγονται, ὅσοι γίνονται ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1, διὰ τῆς ἐπαναλήψεως, ὡς 1+1 ἢ 2, 1+1+1 ἢ 3 κτλ.. ἔτι δὲ καὶ αὐτὴ ἡ μονὰς 1.

***Κλασματικοὶ ἀριθμοὶ*** ἢ ἁπλῶς ***κλάσματα*** λέγονται οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι γίνονται ἀπὸ μίαν κλασματικὴν μονάδα διὰ τῆς ἐπαναλήψεως· οἷον $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ ἤτοι δύο τρίτα· ἔτι δὲ καὶ αἱ κλασματικαὶ μονάδες.

***Ὥστε πᾶς ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα μονάδων ἢ καὶ μία μονάς, οἱ δὲ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἓν ἢ πολλὰ μέρη τῆς μονάδος 1.***

74. Τὸ κλάσμα γράφεται διὰ δύο ἀκεραίων· καὶ ὁ μὲν πρῶτος φανερώνει πόσας μονάδας (κλάσματος) ἔχει τὸ κλάσμα, ὁ δὲ δεύτερος δεικνύει εἰς πόσα μέρη διῃρέθη ἡ ἀκεραία μονὰς καὶ ἔδωκε τὴν κλασματικήν· ἤτοι τὸ μέγεθος τῆς κλασματικῆς μονάδος, ἐξ ἧς γίνεται τὸ κλάσμα.

Καὶ ὁ μὲν πρῶτος λέγεται ***ἀριθμητής***, ὁ δὲ δεύτερος, (ὁ τὸ μέγεθος τῆς κλασματικῆς μονάδος δηλῶν) λέγεται ***παρονομαστής***· οἱ δύο ὁμοῦ λέγονται ***ὅροι*** τοῦ κλάσματος. Γράφεται δὲ ὁ παρονομαστὴς ὑποκάτω τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ χωρίζεται ἀπ' αὐτοῦ διὰ γραμμῆς, οἷον τὸ ἓν πέμπτον γράφεται (ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν) $\frac{1}{5}$

ὁ ἀριθμὸς δύο τρίτα, ἤτοι $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ γράφεται $\frac{2}{3}$

ὁ ἀριθμὸς τέσσαρα πέμπτα, ἤτοι $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ γράφεται $\frac{4}{5}$

ὁ ἀριθμὸς τρία δεύτερα, ἤτοι $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ γράφεται $\frac{3}{2}$ κ.λ.π.

***Σημείωσις*** Ὅταν ἀπαγγέλλωμεν τὸ κλάσμα, τὸν μὲν ἀριθμητὴν ἀπαγγέλλομεν ὡς ἀριθμητικὸν ἀπόλυτον ὄνομα, τὸν δὲ **παρονομαστὴν** ὡς τακτικόν· οἷον τρία ὄγδοα $\left(\frac{3}{8}\right)$ πέντε ἕβδομα $\left(\frac{5}{7}\right)$ κ.λ.π.

75. Διὰ τῆς παραδοχῆς τῶν νέων τούτων ἀριθμῶν, πᾶσα διαίρεσις καθίσταται δυνατὴ καὶ τελεία. Διότι εἰς τὸ πρόβλημα, τοῦ ἐδ. 73 εἶναι φανερὸν ἐξ ὅσων εἴπομεν, ὅτι, τὸ ζητούμενον μερίδιον εἶναι $\frac{1}{4}$ τοῦ μήλου· ἂν δὲ ἔχωμεν νὰ μοιράσωμεν 5 δραχμὰς εἰς 6 ἀνθρώπους φανερὸν εἶναι, ὅτι δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν αὐτὰς χωριστὰ μίαν μίαν. Ἀλλὰ ἀπὸ κάθε μίαν δραχμὴν θὰ λάβῃ ἕκαστος τῶν ἀνθρώπων $\frac{1}{6}$ τῆς δραχμῆς· λοιπὸν ἀπὸ 5 δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{5}{6}$ ὥστε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 5 : 6 εἶναι $\frac{5}{6}$. Ἂν πάλιν ἔχωμεν νὰ μοιράσωμεν 17 δραχμὰς εἰς 5 ἀνθρώπους, μοιράζοντες αὐτὰς μίαν πρὸς μίαν, θὰ εὕρωμεν, ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ $\frac{17}{5}$ τῆς δραχμῆς, ἤτοι ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 17 : 5 εἶναι $\frac{17}{5}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι πᾶσα διαίρεσις εἶναι ***δυνατὴ*** καὶ ὅτι ***τὸ πηλίκον πάσης διαιρέσεως εἶναι κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην.***

Ὁ μερισμὸς τῶν 17 δραχ. εἰς τοὺς 5 ἀνθρώπους διὰ τῶν ἀκεραίων θὰ μᾶς ἔδιδε πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 2 ἤτοι ὅτι τὸ μερίδιον ἑκάστου θὰ ἦτο 3 δραχμ. καὶ θὰ μᾶς ἐπερίσσευον καὶ 2 δραχμαί. Ἀλλ' ἤδη διὰ τῶν κλασμάτων δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν καὶ τὰς 2 αὐτὰς δραχμὰς εἰς τοὺς 5 ἀνθρώπους, ἐκ τῶν ὁποίων θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{2}{5}$. Ἤτοι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως 17 : 5 εἶναι $3+\frac{2}{5}$ ἢ ἁπλούστερον $3\frac{2}{5}$. Ἐπίσης τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως 31 : 7 εἶναι $4\frac{3}{7}$. Ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι διὰ τῶν κλασμάτων ***πᾶσα διαίρεσις*** εἶναι τελεία· καὶ ὅτι ***τὸ ἀκριβὲς πηλίκον*** (πάσης ἀτελοῦς διαιρέσεως) ***σύγκειται ἐκ τοῦ ἀκεραίου πηλίκου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν διὰ τῆς πράξεως, καὶ ἐκ τοῦ κλάσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην.***

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικώτερον ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως

***Διαίρεσις δοθέντος ἀριθμοῦ καλουμένου διαιρετέου, διά τινος ἄλλου καλουμένου διαιρέτου, λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τρίτον ἀριθμὸν καλούμενον πηλίκον, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην, δίδει τὸν διαιρετέον.***

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω δὲ ὁρισμοῦ συμπεραίνομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

***Πᾶν κλάσμα, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του, δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του.***

διότι, ἐπειδὴ $5:6=\frac{5}{6}$, ἔχομεν καὶ $\frac{5}{6}\times 6=5$.

## *Ἀσκήσεις.*

139) Ἀπὸ ἓν δοχεῖον τὸ ὁποῖον περιέχει 15 ὀκάδας οἴνου ἐλάβομεν μίαν ὀκᾶν. Τί μέρος τοῦ ὅλου οἴνου ἐλάβομεν;

140) Ἐὰν ἡ μονὰς 1 διαιρεθῇ εἰς 9 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν τὰ 4, τί μέρος τῆς μονάδος θὰ λάβωμεν;

141) Νὰ γραφῶσιν οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ πέντε ὄγδοα, ἑπτὰ δωδέκατα, δώδεκα ἑξηκοστά, τριάκοντα ἐννέα ἑκατοστὰ εἰκοστὰ πέμπτα, ἕνδεκα ἑξακοσιοστά, τρία χιλιοστά, ἑκατὸν πέντε χιλιοστὰ εἰκοστὰ ἔνατα.

142) Πῶς σχηματίζονται ἐκ τῆς μονάδος 1, οἱ ἀνωτέρω κλασματικοὶ ἀριθμοί;

143) 12 καλλιεργηταὶ ἐμοίρασαν μεταξύ των ἐξ ἴσου ἓν κτῆμα· τί μέρος τοῦ κτήματος ἔλαβον, οἱ 7 ἐκ τῶν καλλιεργητῶν;

144) Τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι τὸ 1 λεπτόν, τὰ 5, τὰ 20, τὰ 50, καὶ τὰ 85 λεπτά;

145) Τί μέρος τοῦ ἡμερονυκτίου εἶναι ἡ 1 ὥρα, αἱ 7 ὧραι;

146) Τί μέρος τῆς ἑβδομάδος εἶναι ἡ 1 ἡμέρα, αἱ 3 ἡμέραι;

147) Τί μέρος τοῦ ἔτους εἶναι ὁ 1 μήν, οἱ 5 μῆνες;

148) Τί μέρος τοῦ στατῆρος εἶναι αἱ 15 ὀκάδες καὶ τί τῆς ὀκᾶς εἶναι τὰ 90 δράμια;

149) Ἐμοιράσαμεν 7 δραχμὰς εἰς 8 ἀνθρώπους. Ποῖον εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου;

150) Ὕφασμα 25 πήχεων ἐμοιράσθη εἰς 8 ἀνθρώπους, ποῖον εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου;

151) Ποῖον εἶναι τὸ (ἀκριβὲς) πηλίκον τῶν διαιρέσεων 3 : 7, 8 : 15, 21 : 3, 42 : 5, 65 : 12, 120 : 9;

152) Ποία εἶναι ἡ διπλῆ σημασία τοῦ κλάσματος $\frac{7}{9}$;

## *Σύγκρισις τῶν κλασμάτων πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα.*

76. Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος εἶναι ἴσοι, ὡς $\frac{5}{5}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{3}{3}$ τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1· διότι, ὡς εἴδομεν εἶναι $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}$· ἂν δὲ μοιρασθῇ εἰς τρία, θὰ σύγκειται ἀπὸ τρία τρίτα, ὥστε εἶναι $1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}$ ἂν δὲ εἰς τέσσαρα, θὰ σύγκειται ἀπὸ τέσσαρα τέταρτα· ὥστε

$$1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4} \quad \text{κ.λ.π.}$$

Ὅταν δὲ ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος· διότι π. χ. τὸ $\frac{3}{5}$ εἶναι $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ καὶ χρειάζονται ἀκόμη δύο πέμπτα $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ διὰ νὰ γίνῃ ἴσον μὲ τὴν μονάδα 1.

Ὅταν δὲ ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος.

Διότι π. χ. τὸ $\frac{7}{6}$ σύγκειται ἀπὸ $\frac{6}{6}$ (ὅπερ εἶναι ἴσον μὲ τὴν μονάδα) καὶ ἀπὸ $\frac{1}{6}$· ὥστε ὑπερβαίνει τὴν μονάδα 1.

## *Τροπὴ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἰς κλάσματα.*

77. Ἡ ἀκεραία μονὰς 1 δύναται ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν, νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα ἔχον ἴσους ὅρους, ὡς $\frac{5}{5}, \frac{3}{3}$ κ.λ.π.

Καὶ πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ τραπῇ εἰς κλάσμα, ἐὰν αἱ μονάδες του τραπῶσιν εἰς κλάσματα.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, θέλω νὰ τρέψω τὸν ἀκέραιον 8 εἰς πέμπτα (ἤτοι εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὸν 5), ἀρκεῖ νὰ ἐνθυμηθῶ, ὅτι ἑκάστη ἀκεραία μονὰς ἔχει 5 πέμπτα· ἄρα αἱ δύο ἀκέραιαι μονάδες ἔχουσι 10 πέμπτα (2 φορὰς πέντε)· αἱ τρεῖς ἔχουσι 15 πέμπτα καὶ αἱ 8 ἔχουσιν 8 φορὰς 5 πέμπτα, ἤτοι $8 \times 5$ πέμπτα.

$$\text{ὥστε εἶναι } 8 = \frac{8 \times 5}{5} = \frac{40}{5}.$$

78. Ἐξ οὗ βλέπω, ὅτι

***διὰ νὰ τρέψω ἀκέραιον εἰς κλάσμα, ἔχον δοθέντα παρονομαστήν, πολλαπλασιάζω τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφω παρονομαστὴν τὸν δοθέντα.***

## *Περὶ τῶν μικτῶν ἀριθμῶν.*

### Τροπὴ τῶν μικτῶν εἰς κλάσματα.

79. Μικτὸς ἀριθμὸς λέγεται ὁ συγκείμενος ἀπὸ ἀκέραιον καὶ κλάσμα· οἷον οἱ ἀριθμοὶ $2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{5}$ κ.τ.λ.

Ὅταν π. χ. 2 ἄνθρωποι μοιρασθῶσι 5 δραχμάς, λαμβάνει ὁ καθεὶς $2\frac{1}{2}$ δραχμάς.

Ὁ μικτὸς ἀριθμὸς τρέπεται εἰς κλασματικόν· διότι τὸ ἀκέραιον μέρος του γίνεται κλάσμα.

Ἔστω λ. χ. ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $5\frac{2}{3}$.

διὰ νὰ τρέψω αὐτὸν εἰς κλάσμα, τρέπω πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος 5 εἰς κλάσμα μὲ παρονομαστὴν 3 (διότι καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ ἔχει παρονομαστὴν 3). Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ῥηθέντα ὁ 5 τρεπόμενος εἰς τρίτα γίνεται $\frac{5 \times 3}{3}$ ἢ $\frac{15}{3}$, ὥστε ὁ μικτὸς γίνεται $\frac{15}{3}$ καὶ $\frac{2}{3}$. ἀλλὰ 15 τρίτα καὶ 2 τρίτα κάμνουν 17 τρίτα (καθὼς 15 δραχμαὶ καὶ 2 δραχμαὶ κάμνουν 17 δραχμάς, 15 μῆλα καὶ 2 μῆλα κάμνουν 17 μῆλα, καὶ οὕτω καθεξῆς)· ὥστε ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $5\frac{2}{3}$ γίνεται $\frac{17}{3}$· δηλαδὴ εἶναι

$$5\frac{2}{3}=\frac{17}{3}$$

08. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

***Διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν ἀριθμὸν εἰς κλασματικόν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιόν του ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα γράφομεν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.***

## *Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων τοῦ κλάσματος.*

Ἐὰν κλάσμα τι περιέχῃ ἀκεραίας μονάδας (ὅτε ὁ ἀριθμητής του εἶναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ του), δυνάμεθα νὰ ἀποχωρίσωμεν αὐτάς.

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{15}{7}$. Τοῦτο περιέχει ἀκεραίας μονάδας, διότι ὁ ἀριθμητής του 15 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ 7· ἐπειδὴ δὲ μία ἀκεραία μονὰς ἔχει 7 ἕβδομα, ἐὰν ἀπὸ τὰ 15 ἕβδομα λάβωμεν τὰ 7 ἕβδομα, σχηματίζομεν ἐξ αὐτῶν μίαν ἀκεραίαν μονάδα, μένουσι δὲ ἀκόμη 15—7, ἤτοι 8 ἕβδομα· ἐὰν δὲ καὶ ἀπὸ τὰ 8 ἕβδομα λάβωμεν τὰ 7, σχηματίζομεν ἄλλην μίαν ἀκεραίαν μονάδα, καὶ μένει καὶ $\frac{1}{7}$ (ὅπερ εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος)· ὥστε ὁ ἀριθμὸς $\frac{15}{7}$ ἀνελύθη εἰς 2 ἀκέραια καὶ $\frac{1}{7}$, ἤτοι εἶναι $\frac{15}{7}=2+\frac{1}{7}$ ἢ $2\frac{1}{7}$.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τόσαι ἀκέραιαι μονάδες σχηματίζονται ἐκ τοῦ δοθέντος κλάσματος, ὅσας φορὰς δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν ἀπὸ τὸν ἀριθμητήν του, ἤτοι ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ παρονομαστὴς εἰς τὸν ἀριθμητήν· ὥστε τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ κλάσματος εὑρίσκεται ὡς πηλίκον, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

81. ***Διὰ νὰ ἀποχωρίσωμεν ἀπὸ κλάσμα τι τὸν ἀκέραιον, τὸν ὁποῖον περιέχει, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· καὶ τὸ μὲν εὑρεθὲν πηλίκον εἶναι ὁ ἀκέραιος, τὸν ὁποῖον περιέχει τὸ κλάσμα, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἂν μείνῃ) εἶναι ὁ ἀριθμη-***

***τῆς τοῦ μένοντος κλάσματος (τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ παρονομαστὴν τὸν αὐτὸν μὲ τὸ δοθὲν κλάσμα).***

82. Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ ἀκέραιον ἀριθμόν.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον τρέπονται τὰ ἑξῆς κλάσματα εἰς μικτοὺς ἢ ἀκεραίους (εἰς ἀκεραίους μέν, ἂν ἡ διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς, εἰς μικτοὺς δέ, ἂν μένῃ ὑπόλοιπον).

$$\frac{13}{5}=2\ \frac{3}{5}, \qquad \frac{18}{7}=2\ \frac{4}{7}, \qquad \frac{31}{8}=3\ \frac{7}{8}.$$

$$\frac{28}{4}=7, \qquad \frac{49}{7}=7.$$

## *Ἀσκήσεις.*

153) Ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{2}{3}, \frac{4}{4}, \frac{6}{5}, \frac{17}{17}, \frac{32}{31}, \frac{106}{160}, \frac{545}{545}, \frac{8003}{8998}$, ποία εἶναι μικρότερα τῆς ἀκεραίας μονάδος, ποία ἴσα καὶ ποία μεγαλύτερα αὐτῆς·

154) Νὰ τραπῇ ὁ ἀκέραιος 9 εἰς πέμπτα, ἔνατα, δωδέκατα.

155) Νὰ τραπῇ ὁ ἀκέραιος 18 εἰς δέκατα πέμπτα, ὁ 25 εἰς εἰκοστὰ πρῶτα καὶ ὁ 198 εἰς τριακοστὰ ἕβδομα.

156) Νὰ τραπῶσιν οἱ 5 πήχεις εἰς ὄγδοα (ρούπια), αἱ 2 ὧραι εἰς ἑξηκοστὰ (πρῶτα λεπτὰ) καὶ αἱ 6 ὀκάδες εἰς τετρακοσιοστὰ (δράμια).

157) Νὰ τραπῶσιν εἰς κλάσματα οἱ μικτοὶ

$$3\ \frac{3}{8},\ 6\ \frac{4}{9},\ 5\ \frac{7}{12},\ 18\ \frac{8}{15},\ 68\ \frac{9}{20},\ 99\ \frac{85}{97}.$$

$$13\ \frac{767}{1003},\ 317\ \frac{6}{7},\ 1508\ \frac{15}{26},\ 36\ \frac{49}{54},\ 351\ \frac{44}{45},\ 1041\ \frac{1037}{2143}.$$

158) Ἀπὸ πόσα ὄγδοα ἀποτελοῦνται οἱ $15\ \frac{9}{8}$ πήχεις, ἀπὸ πόσα τέταρτα αἱ $9\ \frac{3}{4}$ ὧραι καὶ πόσα τετρακοσιοστὰ αἱ $23\ \frac{350}{400}$ ὀκάδες.

159) Νὰ ἐξαχθῶσιν αἱ ἀκέραιαι μονάδες, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς τὰ κλάσματα.

$$\frac{21}{7},\ \frac{72}{9},\ \frac{81}{27},\ \frac{240}{12},\ \frac{15}{7},\ \frac{19}{8},\ \frac{65}{9},\ \frac{75}{6},\ \frac{89}{5},\ \frac{123}{8}$$

160) Ὁμοίως, εἰς τὰ κλάσματα

$$\frac{631}{9},\ \frac{916}{7},\ \frac{497}{40},\ \frac{819}{13},\ \frac{5400}{25},\ \frac{10000}{35},\ \frac{37009}{522},\ \frac{199415}{1080}.$$

## Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

83. ***Ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν καὶ οἱ δύο ὅροι του πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ διαιρεθῶσι δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ.***

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$ καὶ ἂς πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ὅροι του, ὁ 2 καὶ ὁ 5, μὲ ἕνα ἀριθμόν, οἷον τὸν 3· τότε τὸ κλάσμα γίνεται $\frac{6}{15}$. λέγω δὲ ὅτι τὸ $\frac{2}{5}$ καὶ τὸ $\frac{6}{15}$ ἔχουσιν ἴσην ἀξίαν.

Διότι τὸ $9\frac{2}{5}$ εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου ἀνθρώπου, ὅταν 5 ἄνθρωποι μοιρασθῶσι 2 δραχμάς· ἀλλ' ἐὰν τριπλασιασθῶσιν αἱ δραχμαί, τριπλασιασθῶσι δὲ καὶ οἱ ἄνθρωποι, φανερὸν εἶναι, ὅτι τὸ μερίδιον θὰ μείνῃ τὸ ἴδιον· λοιπὸν τὰ $\frac{6}{15}$ εἶναι ἴσα μὲ $\frac{2}{5}$.

Καὶ ἂν διαιρεθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν βλάπτεται· διότι τὸ $\frac{6}{15}$ καὶ τὸ $\frac{2}{5}$ εἶναι ἴσα· προκύπτει δὲ τὸ δεύτερον ἐκ τοῦ πρώτου, ἐὰν διαιρεθῶσιν οἱ ὅροι τοῦ διὰ 3.

84. ***Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμόν, καὶ ὅλον τὸ κλάσμα*** (δηλαδὴ ἡ ἀξία αὐτοῦ) ***πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὴς διαιρεθῇ, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διαιρεῖται.***

Δηλαδή, ἐὰν διπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής, καὶ ὅλον τὸ κλάσμα διπλασιάζεται· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$· ἐὰν διπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής του, γίνεται $\frac{6}{8}$· εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι τὰ 6 ὄγδοα εἶναι διπλάσια τῶν 3 ὀγδόων· διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων ἐδιπλασιάσθη.

Ὁμοίως $\frac{9}{8}$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ $\frac{3}{8}$· διότι ἐτριπλασιάσθη ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων του (ἀπὸ 3 ἔγιναν 9).

***Σημείωσις.*** Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἐννοοῦμεν ἀμέσως, ἂν ἐνθυμηθῶμεν, ὅτι ὁ παρονομαστὴς δεικνύει μόνον τὸ μέγεθος τῆς κλασματικῆς μονάδος, ἐξ ἧς γίνεται τὸ κλάσμα, ὁ δὲ ἀριθμητὴς δηλοῖ πόσας μονάδας ἔχει ὁ ἀριθμός.

Ἐὰν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητής, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Διότι π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ $\frac{6}{8}$.

**85· Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διαιρεῖται διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ· ἐὰν δὲ ὁ παρονομαστὴς διαιρεθῇ, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάζεται.**

Δηλαδή, ἐὰν διπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ 2, ἤτοι γίνεται τὸ ἥμισυ τοῦ πρίν· ἐὰν τριπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ 3, ἤτοι γίνεται τρὶς μικρότερον καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$· ἐὰν τριπλασιάσω τὸν παρονομαστὴν 8, γίνεται τὸ κλάσμα $\frac{5}{24}$· λέγω δέ, ὅτι τὸ νέον τοῦτο κλάσμα $\frac{5}{24}$ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ $\frac{5}{8}$, ἤτοι πρέπει νὰ ληφθῇ τρεῖς φορὰς $\frac{5}{24}+\frac{5}{24}+\frac{5}{24}$, διὰ νὰ δώσῃ τὸ $\frac{5}{8}$· καὶ τῷ ὄντι, ἐὰν τὸ λάβω τρεῖς φοράς, $\frac{5}{24}+\frac{5}{24}+\frac{5}{24}$, εὑρίσκω $\frac{15}{24}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{5}{8}$ διότι προκύπτει ἐκ τοῦ $\frac{5}{8}$, ὅταν πολλαπλασιασθῶσι καὶ οἱ δύο ὅροι ἐπὶ 3.

Ἐὰν διαιρεθῇ ὁ παρονομαστὴς δι᾽ ἀριθμοῦ, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Διότι π. χ. τὸ $\frac{5}{8}$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ $\frac{5}{24}$· προκύπτει δὲ ἐξ αὐτοῦ ἐὰν διαιρεθῇ ὁ παρονομαστὴς 24 διὰ 3.

***Σημείωσις.*** Ἐκ τῶν προηγουμένων βλέπομεν ὅτι, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς μόνον πολλαπλασιασθῇ, πολλαπλασιάζεται ὅλον τὸ κλάσμα, ὅταν δὲ ὁ παρονομαστὴς μόνον πολλαπλασιασθῇ, διαιρεῖται ὅλον τὸ κλάσμα, ὅταν δὲ ἀμφότεροι πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, οὔτε πολλαπλασιάζεται τὸ κλάσμα οὔτε διαιρεῖται, ἀλλὰ μένει ἴσον· δηλαδὴ ἡ αὔξησις, τὴν ὁποίαν προξενεῖ ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ, ἐξουδετερώνεται ἀπὸ τὴν ἐλάττωσιν, τὴν ὁποίαν προξενεῖ ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ παρονομαστοῦ. Ἐν γένει δέ, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐξήσῃ, τὸ κλάσμα αὐξάνει (διότι ἔχει περισσοτέρας μονάδας)· οἷον $\frac{3}{8}$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\frac{2}{8}$· ἀλλ' ὅταν ὁ παρονομαστὴς αὐξήσῃ, τὸ κλάσμα ἐλαττοῦται (διότι αἱ μονάδες του μικραίνουν)· π.χ., τὸ $\frac{5}{8}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{5}{7}$, διότι τὸ $\frac{1}{8}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{7}$.

## Ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων.

86. ***Ἁπλοποίησις*** τοῦ κλάσματος λέγεται ἡ πρᾶξις δι' ἧς εὑρίσκομεν ἄλλο κλάσμα ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ ἔχον μικροτέρους ὅρους.

Ἡ ἁπλοποίησις γίνεται, ὅταν οἱ ὅροι τοῦ δοθέντος κλάσματος ἔχουσι κοινόν τινα διαιρέτην· διότι διαιροῦντες δι' αὐτοῦ καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος εὑρίσκομεν ἄλλο κλάσμα, ἔχον ὅρους μικροτέρους, καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ δοθέν.

### *Παραδείγματα*

Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{18}{20}$, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην τὸν 2· ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους διὰ τοῦ 2, εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{9}{10}$ ὅπερ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{18}{20}$ (κατὰ τὸ ἐδ. 83) καὶ ἁπλούστερον αὐτοῦ· διότι ἔχει μικροτέρους ὅρους.

Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{12}{18}$, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι διαιροῦνται καὶ οἱ δύο διὰ 6· ἐὰν διαιρέσωμεν αὐτούς, εὑρίσκομεν τὸ ἁπλούστερον κλάσμα $\frac{2}{3}$· ὅπερ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{12}{18}$.

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ $\left(\text{ὡς } \frac{4}{2}, \frac{8}{2}, \frac{15}{5}\right)$, ἁπλοποιούμενον τὸ κλάσμα, λαμβάνει παρονομαστὴν τὴν μονάδα $\left(\frac{2}{1}; \frac{4}{1}; \frac{3}{1}\right)$, ἀλλὰ τότε τὸ κλάσμα παριστᾷ ἀκέραιον ἀριθμὸν (ἐδ. 82).

Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν τοὺς ἀκεραίους καὶ ὡς κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1.

Ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος δὲν ἔχουσι κανένα κοινὸν διαιρέτην, δὲν δύναται τὸ κλάσμα νὰ ἁπλοποιηθῇ καὶ λέγεται ***ἀνάγωγον***· τοιαῦτα εἶναι τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ κτλ.

***Σημείωσις***. Διὰ νὰ εὑρίσκωμεν τοὺς κοινοὺς διαιρέτας τῶν ὅρων, πρέπει νὰ ἐνθυμώμεθα τοὺς κανόνας τῆς διαιρετότητος (ἐδ. 67—69).

Διὰ νὰ καταστήσωμεν δὲ τὸ δοθὲν κλάσμα ἀνάγωγον, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους του διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν·

## *Ἀσκήσεις.*

161) Νὰ καταταχθῶσι κατὰ τάξιν μεγέθους αὐξανομένου τὰ κλάσματα

$\frac{31}{64}, \frac{17}{64}, \frac{2}{64}, \frac{45}{64}, \frac{39}{64}, \frac{13}{64}, \frac{51}{64}, \frac{25}{64}.$

162) Ὁμοίως νὰ καταταχθῶσι κατὰ τάξιν μεγέθους ἐλαττουμένου τὰ κλάσματα $\frac{108}{120}, \frac{108}{130}, \frac{108}{184}, \frac{108}{196}, \frac{108}{260}.$

163) Νὰ γίνωσι τὰ κάτωθι κλάσματα 2, 3, 4 . . . φορὰς μεγαλύτερα

$\frac{6}{15}, \frac{16}{90}, \frac{45}{120}, \frac{76}{84}, \frac{156}{8}.$

164) Νὰ γίνωσι τὰ ἑπόμενα κλάσματα 2, 3, 4 . . . φορὰς μικρότερα

$\frac{8}{15}, \frac{18}{96}, \frac{15}{21}, \frac{86}{108}, \frac{96}{180}.$

165) Νὰ συμπληρωθῶσιν αἱ ἰσότητες

$$\frac{5}{6}=\frac{;}{30} \qquad \frac{4}{9}=\frac{;}{36} \qquad \frac{19}{24}=\frac{;}{120}$$

$$\frac{7}{8}=\frac{;}{24} \qquad \frac{2}{9}=\frac{;}{63} \qquad \frac{3}{4}=\frac{;}{192}$$

166) Ὁμοίως αἱ

$$\frac{3}{4}=\frac{9}{;} \qquad \frac{9}{11}=\frac{45}{;} \qquad \frac{19}{24}=\frac{95}{;}$$

$$\frac{5}{8}=\frac{45}{;} \qquad \frac{7}{17}=\frac{28}{;} \qquad \frac{9}{25}=\frac{135}{;}$$

167) Ὁμοίως αἱ

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{;} \qquad \frac{44}{77}=\frac{4}{;} \qquad \frac{35}{50}=\frac{;}{10}$$

$$\frac{15}{40}=\frac{3}{;} \qquad \frac{10}{15}=\frac{;}{3} \qquad \frac{132}{156}=\frac{;}{13}$$

168) Νὰ ἁπλοποιηθῶσι τὰ κλάσματα

$$\frac{7}{10},\ \frac{15}{20},\ \frac{20}{30},\ \frac{16}{18},\ \frac{36}{48},\ \frac{60}{72},\ \frac{48}{64},\ \frac{35}{49},\ \frac{39}{91},\ \frac{38}{57}.$$

169) Ὁμοίως τὰ

$$\frac{70}{84},\ \frac{39}{117},\ \frac{95}{133},\ \frac{825}{975},\ \frac{108}{396},\ \frac{2568}{7680},\ \frac{10200}{47600},\ \frac{20020}{14300}.$$

## *Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.*

87. ***Ὁμώνυμα*** λέγονται ὅσα κλάσματα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἤτοι ὅσα γίνονται ἀπὸ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν κλασματικὴν μονάδα.
$\left(\text{ὡς } \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$· ***ἑτερώνυμα*** δὲ λέγονται τὰ ἔχοντα διαφόρους παρονομαστάς, ἤτοι ὅσα γίνονται ἀπὸ διαφόρους κλασματικὰς μονάδας $\left(\text{ὡς } \frac{2}{5}, \frac{3}{8}\right)$.

***88.*** Τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα τρέπονται εἰς ὁμώνυμα, χωρὶς νὰ βλαφθῇ ἡ ἀξία αὐτῶν. Ἡ τροπὴ αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἰδιότητος τῶν κλασμάτων (ἐδ. 82) καὶ γίνεται κατὰ τοὺς ἑξῆς κανόνας.

1) ***Διὰ νὰ τρέψωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ καθενὸς ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου.***

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα τὰ ἑξῆς κλάσματα :

$\frac{2}{5}, \frac{3}{7}$, χωρὶς νὰ βλάψωμεν τὴν ἀξίαν αὐτῶν.

Κατὰ τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τοῦ ἐδαφίου 83, τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$

δὲν βλάπτεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι καὶ οἱ δύο του ὅροι ἐπὶ 7, (ὅπερ 7 εἶναι ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἄλλου)· τότε τὸ $\frac{2}{5}$ γίνεται $\frac{2 \times 7}{5 \times 7}$ ἢ $\frac{14}{35}$.

Ἐπίσης καὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{7}$ δὲν βλάπτεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι καὶ οἱ δύο ὅροι του ἐπὶ 5 (ὅπερ 5 εἶναι ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἄλλου κλάσματος)· τότε δὲ γίνεται $\frac{3 \times 5}{7 \times 5}$ ἢ $\frac{15}{35}$.

ὥστε τὰ δύο κλάσματα $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$

ἔγιναν ὁμώνυμα: $\frac{14}{35}$, $\frac{15}{35}$, χωρὶς νὰ βλαφθῇ ἡ ἀξία αὐτῶν.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τρέπονται τὰ κλάσματα $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{9}$.

εἰς ὁμώνυμα $\frac{27}{72}$, $\frac{40}{72}$,

καὶ τὰ κλάσματα $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$,

τρέπονται εἰς $\frac{5}{15}$, $\frac{3}{15}$.

2) ***Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα ὁσαδήποτε καὶ ἂν εἶναι, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ καθενὸς μὲ τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον, εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τοὺς παρονομαστὰς ὅλων τῶν ἄλλων κλασμάτων.***

Ἂς λάβωμεν, ὡς παράδειγμα, τὰ ἑξῆς κλάσματα·

$$\frac{3}{5}, \quad \frac{2}{7}, \quad \frac{1}{8}.$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 7×8 (δηλαδὴ ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν πλὴν τοῦ ἰδικοῦ του), δὲν βλάπτεται ἡ ἀξία του καὶ γίνεται

$$\frac{3 \times 7 \times 8}{5 \times 7 \times 8} \quad \text{ἢ} \quad \frac{168}{280}.$$

Ὁμοίως, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{2}{7}$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 5×8 (δηλ. ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν, πλὴν τοῦ ἰδικοῦ του), δὲν βλάπτεται ἡ ἀξία του καὶ γίνεται

$$\frac{2 \times 5 \times 8}{7 \times 5 \times 8} \quad \text{ἢ} \quad \frac{80}{280}.$$

Καὶ τέλος ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{1}{8}$ μὲ τὸ γινόμενον $5\times7$, δὲν βλάπτεται ἡ ἀξία του καὶ γίνεται $\frac{5\times7}{8\times7\times5}$ ἢ $\frac{35}{280}$

Ὥστε τὰ δοθέντα κλάσματα $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{1}{8}$

ἐτράπησαν εἰς $\frac{168}{280}$, $\frac{80}{280}$, $\frac{35}{280}$,

ἤτοι εἰς ὁμώνυμα, χωρὶς νὰ βλαφθῇ ἡ ἀξία αὐτῶν.

Ὁμοίως τρέπονται τὰ κλάσματα $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$,

εἰς τὰ ἑξῆς ὁμώνυμα : $\frac{5\times4}{3\times5\times4}$, $\frac{3\times4}{5\times3\times4}$, $\frac{3\times5}{4\times3\times5}$.

ἤ, ἂν ἐκτελέσωμεν τοὺς πολλαπλασιασμούς, $\frac{20}{60}$, $\frac{12}{60}$, $\frac{15}{60}$.

***Σημείωσις***. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον κοινὸς παρονομαστὴς γίνεται τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν.

3) ***Ὅταν ἠξεύρωμεν ἀριθμόν τινα, τὸν ὁποῖον νὰ διαιρῶσιν ὅλοι οἱ παρονομασταί, δυνάμεθα νὰ κάμωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον κοινὸν παρονομαστὴν τῶν δοθέντων κλασμάτων. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος μὲ τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὸν ῥηθέντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος τούτου.***

Ἔστωσαν ὡς παραδείγματα, τὰ ἑξῆς κλάσματα :

$$\frac{1}{2}.\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{9},\ \frac{1}{6}.$$

Ὁ ἀριθμὸς 18 διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ὅλων τῶν παρονομαστῶν, δυνάμεθα λοιπὸν νὰ κάμωμεν αὐτὸν κοινὸν παρονομαστήν· τοῦτο γίνεται ὡς ἑξῆς.

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ πηλίκον $18 : 2$, ἤτοι ἐπὶ 9, καὶ εὑρίσκομεν $\frac{9}{18}$.

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ πηλίκον $18 : 3$, ἤτοι ἐπὶ 6, καὶ εὑρίσκομεν $\frac{12}{18}$.

Ὁμοίως πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸ πηλίκον $18 : 9$, ἤτοι 2, καὶ εὑρίσκομεν $\frac{8}{18}$.

Τέλος πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ τετάρτου ἐπὶ τὸ πηλίκον 18 : 6, ἤτοι 3, καὶ εὑρίσκομεν $\frac{3}{18}$.

Ὥστε τὰ δοθέντα κλάσματα $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{1}{6}$,

ἔγιναν ὁμώνυμα $\frac{9}{18}, \frac{12}{18}, \frac{8}{18}, \frac{3}{18}$.

***Σημείωσις.*** Εἰς τὸν τελευταῖον τοῦτον κανόνα περιλαμβάνονται καὶ οἱ ἄλλοι. Διότι τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν εἶναι προφανῶς διαιρετὸν δι' ἑκάστου ἐξ αὐτῶν καὶ τοῦτο γίνεται κοινὸς παρονομαστής, κατὰ τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον κανόνα. Ἀλλ' ἐνίοτε εὑρίσκεται ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν καὶ διαιρετὸς δι' αὐτῶν· τότε ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι προτιμότερος. Ὁ μικρότερος δὲ παρονομαστής, τὸν ὁποῖον δύνανται τὰ κλάσματα νὰ ἀποκτήσωσιν, ὅταν γίνωσιν ὁμώνυμα, εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν (ἐὰν εἶναι ἀνάγωγα).

89. Ὅταν εἷς ἐκ τῶν δοθέντων παρονομαστῶν διαιρῆται δι' ὅλων τῶν ἄλλων, κάμνομεν αὐτὸν κοινὸν παρονομαστήν, κατὰ τὸν ἀνωτέρω λεχθέντα τρόπον.

Ἔστωσαν, ὡς παράδειγμα, τὰ κλάσματα $\frac{3}{8}, \frac{5}{16}$.

Ὁ μεγαλύτερος παρονομαστὴς 16 διαιρεῖται διὰ τοῦ ἄλλου 8 καὶ δίδει πηλίκον 2. Πολλαπλασιάζοντες λοιπὸν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{3}{8}$ ἐπὶ 2 τρέπομεν αὐτὸ εἰς τὸ $\frac{6}{16}$· ὥστε τὰ δοθέντα κλάσματα $\frac{3}{8}, \frac{5}{16}$ ἔγιναν ὁμώνυμα $\frac{6}{16}, \frac{5}{16}$.

Ἔστωσαν τέλος τὰ ἑξῆς κλάσματα :

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{24}.$$

Ὁ μεγαλύτερος παρονομαστὴς 24 διαιρεῖται διὰ τῶν ἄλλων ὅλων· διότι 24 : 6 εἶναι 4, 24 : 3 εἶναι 8, 24 : 4 εἶναι 6.

Πολλαπλασιάζοντες λοιπὸν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ 4 (διότι 24 : 6 εἶναι 4) τρέπομεν αὐτὸ εἰς $\frac{4}{24}$.

Πολλαπλασιάζοντες δὲ καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου ἐπὶ 8 (διότι 24 : 3 εἶναι 8) τρέπομεν αὐτὸ εἰς $\frac{16}{24}$.

Τέλος πολλαπλασιάζοντες καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ τρίτου ἐπὶ 6 (διότι 24 : 4 εἶναι 6) τρέπομεν αὐτὸ εἰς $\frac{6}{24}$.

Ὥστε τοιουτοτρόπως τὰ δοθέντα κλάσματα $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{24}$.

ἔγιναν ὁμώνυμα $\frac{4}{24}, \frac{16}{24}, \frac{6}{24}, \frac{5}{24}$.

***Παρατήρησις.*** Ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα χρησιμεύει 1) εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν τῶν κλασμάτων, ὡς ἀμέσως θὰ ἴδωμεν, καὶ 2) εἰς τὸ νὰ διακρίνωμεν ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων κλασμάτων ποῖον εἶνε τὸ μεγαλύτερον. Διότι τρέποντες αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα βλέπομεν ἀμέσως ποῖον ἔχει τὸν μεγαλύτερον ἀριθμητήν, ὅπερ εἶνε μεγαλύτερον.

Ἂν, παραδείγματος χάριν, πρόκειται νὰ διακρίνω, ποῖον ἐκ τῶν δύο κλασμάτων $\frac{5}{16}$ καὶ $\frac{1}{3}$ εἶναι μεγαλύτερον, τρέπω αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα $\frac{15}{48}$ καὶ $\frac{16}{48}$, ἐξ οὗ βλέπω ἀμέσως, ὅτι τὸ $\frac{1}{3}$ εἶνε μεγαλύτερον τοῦ $\frac{5}{16}$ κατὰ $\frac{1}{48}$.

## *Ἀσκήσεις.*

170) Νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα

α) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ β) $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}$ γ) $\frac{3}{4}, \frac{7}{8}$ δ) $\frac{7}{12}, \frac{5}{18}$

ε) $\frac{9}{15}, \frac{9}{20}$ στ) $\frac{13}{35}, \frac{5}{14}$

171) Ὁμοίως τὰ κλάσματα

α) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ β) $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{5}{6}$ γ) $\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{6}{7}$

δ) $\frac{5}{12}, \frac{7}{8}, \frac{13}{24}$ ε) $\frac{7}{9}, \frac{4}{15}, \frac{13}{20}$ στ) $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{3}{10}$

172) Ὁμοίως τὰ κλάσματα

α) $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{13}{18}$ β) $\frac{1}{8}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{19}{30}$

γ) $\frac{13}{60}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{21}{50}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{7}{30}$ δ) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$

173) Εἴς τινα ἐκδρομήν, ἐκ δύο μαθητῶν ἐκ τῶν ὁποίων εἶχεν ἕκαστος τὸ αὐτὸ ποσὸν χρημάτων ὁ εἷς ἐδαπάνησε τὰ $\frac{13}{15}$ τῶν χρημάτων του· ἐνῶ ὁ ἄλλος τὰ $\frac{19}{25}$. Ποῖος ἐκ τῶν δύο ἐδαπάνησε τὰ περισσότερα ;

174) Ἡ μεγαλυτέρα ἐπίδοσις τριῶν μαθητῶν εἰς τὸ ἅλμα εἰς ὕψος ἄνευ φορᾶς εἶναι $\frac{3}{5}$ τοῦ μέτρου τοῦ ἑνός, $\frac{16}{25}$ τοῦ ἄλλου καὶ $\frac{2}{3}$ τοῦ τριτου. Ποῖος ἐξ αὐτῶν ὑπερτερεῖ τοὺς δύο ἄλλους ;

145) Ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{2}{3}$ ποῖον εἶναι τὸ μεγαλύτερον καὶ ποῖον τὸ μικρότερον.

176) Νὰ γραφῶσι κατὰ τάξιν μεγέθους αὐξανομένου τὰ κλάσματα

α) $\frac{3}{4}$, $\frac{13}{18}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{11}{12}$

β) $\frac{11}{15}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{14}{25}$, $\frac{17}{30}$, $\frac{3}{5}$

# ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

## ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

### *Ὁρισμοί.*

90. ***Ἡ πρόσθεσις εἶναι πρᾶξις, δι᾽ ἧς σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἐκ πασῶν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας ἔχουσι δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοί.***

Τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἐδώκαμεν καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ἐδ. 13)· ἐδῶ πρέπει νὰ ἐνθυμώμεθα τοῦτο, ὅτι αἱ μονάδες, τὰς ὁποίας ἔχουσιν οἱ ἀριθμοί, δύνανται νὰ εἶναι ἢ ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί·

***Ἄθροισμα*** ἢ ***κεφάλαιον*** λέγεται καὶ πάλιν τὸ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως, οἱ δὲ εἰς πρόσθεσιν δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται ὁμοίως ***προσθετέοι***.

91. Διὰ νὰ προστεθῶσι δύο ἢ καὶ περισσότερα κλάσματα πρέπει νὰ εἶναι ὁμώνυμα, ἤγουν νὰ γίνωνται ὅλα ἀπὸ τὴν ἰδίαν μονάδα. Διὰ τοῦτο, ὅταν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν κλάσματα, ***ἐὰν δὲν εἶναι ὁμώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμώνυμα***.

Ἡ πρόσθεσις τότε ἐκτελεῖται κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα.

92 ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσματα ὁμώνυμα, προσθέτομεν μόνον τοὺς ἀριθμητάς των, ὁ δὲ παρονομαστὴς μένει ὁ ἴδιος***.

Ἂς ὑποθέσωμεν, π. χ., ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ ἑξῆς ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$.

εἶναι φανερόν, ὅτι 1 ὄγδοον καὶ 3 ὄγδοα καὶ 5 ὄγδοα κάμνουν 9 ὄγδοα (καθὼς 1 μῆλον καὶ 3 μῆλα καὶ 5 μῆλα κάμνουν 9 μῆλα, ἢ 1 μὴν καὶ 3 μῆνες καὶ 5 μῆνες κάμνουν 9 μῆνας)· ὥστε

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{9}{8}=1\ \frac{1}{8} \qquad \text{(ἐδ. 81).}$$

### *Παραδείγματα*

Ὁμώνυμα.

$$\frac{2}{7}+\frac{1}{7}+\frac{4}{7}=\frac{7}{7}=1.$$

$$\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9}=\frac{12}{9}=1\ \frac{3}{9}=1\ \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}.$$

Ἑ τ ε ρ ώ ν υ μ α.

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$· τρέπω πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα (εἰς ἕκτα), καὶ εὑρίσκω $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}$· καὶ προσθέτων εὑρίσκω $\frac{6}{6}$ ἢ 1· ὅθεν

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1.$$

2) $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$· τρέπω πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ εὑρίσκω $\frac{6}{30}+\frac{5}{30}$, καὶ προσθέτων εὑρίσκω $\frac{11}{30}$· ὥστε $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{11}{30}$.

3) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{5}{18}$· τρέπω πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα (εἰς δέκατα ὄγδοα) καὶ εὑρίσκω (ἐδ. 89) $\frac{6}{18}+\frac{3}{18}+\frac{2}{18}+\frac{5}{18}$· καὶ προσθέτων εὑρίσκω $\frac{16}{18}$ ἢ $\frac{8}{9}$, ὥστε $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{5}{18}=\frac{8}{9}$.

***Σημείωσις.*** Τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀκεραίου καὶ κλάσματος δίδει μικτὸν ἀριθμόν, ὡς $1+\frac{1}{2}$ γράφεται ὡς ἑξῆς $1\frac{1}{2}$· κτλ.

## *Πρόσθεσις μικτῶν.*

93. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν μικτοὺς ἀριθμούς, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο ἀθροίσματα.***

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς μικτοὺς ἀριθμοὺς

$$3\frac{1}{8} \text{ καὶ } 5\frac{2}{9}.$$

Οἱ ἀκέραιοι, χωριστὰ προσθετόμενοι, δίδουν 8, τὰ δὲ κλάσματα γίνονται κατὰ πρῶτον ὁμώνυμα $\frac{9}{72}$ καὶ $\frac{16}{72}$

καὶ προσθετόμενα δίδουσιν $\frac{25}{72}$.

ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν μικτῶν εἶναι $8\frac{25}{72}$.

Ὁμοίως, ἂν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς μικτοὺς

$$15\frac{1}{3} \text{ καὶ } 2\frac{4}{5},$$

τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων εἶναι 17,

τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων εἶναι $\frac{17}{15}$, ἤτοι $1\frac{2}{15}$.

ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν μικτῶν εἶναι $17+1+\frac{2}{15}$, ἤτοι $18\frac{2}{15}$.

***Σημείωσις.*** Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀκέραιον καὶ μικτόν, προσθέτομεν τὸν ἀκέραιον εἰς τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ· οἷον

$$5\frac{1}{7}+3=8\frac{1}{7}.$$

Διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσμα καὶ μικτόν, προσθέτομεν τὸ κλάσμα εἰς τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ· οἷον

$$5\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=5+1=6, \qquad 2\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=2\frac{8}{15}.$$

## *Ἀσκήσεις.*

**177)** Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ προσθέσεις (ἀπὸ μνήμης).

α) $\frac{5}{17}+\frac{3}{17}+\frac{7}{17}+\frac{1}{17}$. δ) $7\frac{2}{3}+8$

β) $\frac{3}{28}+\frac{9}{28}+\frac{11}{28}+\frac{5}{28}$. ε) $5+\frac{3}{5}+4+\frac{2}{5}$

γ) $\frac{25}{72}+\frac{35}{72}+\frac{11}{72}+\frac{17}{72}$. στ) $3\frac{1}{7}+2\frac{5}{7}+\frac{4}{7}$

178) Ὁμοίως αἱ

α) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ δ) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

β) $\frac{1}{4}+\frac{5}{8}$ ε) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{12}$

γ) $\frac{2}{3}+\frac{8}{15}$ στ) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{11}{12}$

179) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ προσθέσεις (γραπτῶς)

α) $\frac{3}{4}+\frac{9}{10}$ δ) $\frac{8}{9}+\frac{2}{15}+\frac{2}{3}$

β) $\frac{13}{16}+\frac{7}{12}$ ε) $\frac{5}{12}+\frac{2}{15}+\frac{9}{10}+\frac{3}{5}$

γ) $\frac{7}{8}+\frac{3}{15}$ στ) $\frac{7}{12}+\frac{2}{3}+\frac{6}{7}+\frac{3}{4}+\frac{11}{14}$

180) Ὁμοίως αἱ

α) $7\frac{4}{15}+3\frac{1}{8}+\frac{2}{3}+6\frac{3}{4}$ δ) $2\frac{2}{3}+5\frac{1}{7}+1\frac{4}{21}+\frac{3}{5}$

β) $13\frac{1}{4}+7\frac{11}{12}+2\frac{25}{36}+8\frac{7}{9}$ ε) $15\frac{2}{3}+29\frac{4}{9}+48\frac{10}{11}+32+75\frac{1}{2}$

γ) $14\frac{1}{9}+12\frac{3}{5}+3\frac{2}{7}$ στ) $115\frac{3}{14}+208\frac{5}{21}+193\frac{11}{28}+305\frac{7}{9}$

## *Προβλήματα.*

181) Τρία πακέτα νήματος ζυγίζουν τὸ α) $\frac{4}{5}$ ὀκ. τὸ β) $\frac{3}{4}$ ὀκ. καὶ τὸ γ) $\frac{9}{10}$ ὀκ. Πόσον ζυγίζουν ἐν ὅλῳ; $\left(\text{ἀπ. } 1\frac{19}{20}\right)$.

182) Ἓν τεμάχιον ὑφάσματος εἶναι $87\frac{1}{8}$ πήχεις καὶ ἓν ἄλλο $75\frac{3}{4}$ πήχ. Πόσων πήχεων εἶναι καὶ τὰ δύο τεμάχια ὁμοῦ; $\left(\text{ἀπ. } 162\frac{7}{8}\right)$.

183) Ἐξώδευσέ τις, ἐκ τῶν χρημάτων ποῦ εἶχε $37\frac{1}{4}$ δραχμὰς καὶ τοῦ ἔμειναν $108\frac{4}{5}$ δραχ. Πόσας εἶχεν ἀρχικῶς; $\left(\text{ἀπ. } 146\frac{1}{20}\right)$.

184) Εἷς σωφὲρ ἐξεκίνησε ἀπὸ τὴν πόλιν Α διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν Β καὶ ἀφοῦ διέτρεξε $28\frac{7}{12}$ χιλιόμετρα, ὑπελόγισεν ὅτι, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Β πρέπει νὰ διατρέξῃ ἀκόμη $13\frac{2}{3}$ χιλιόμ. Πόσον ἀπέχει ἡ Α ἀπὸ τὴν Β. $\left(\text{ἀπ. } 42\frac{1}{4}\right)$.

185) Μήτηρ τις ὑφαίνει $3\frac{5}{8}$ πήχεις ὑφάσματος εἰς μίαν ἡμέραν, ἑκάστη δὲ ἐκ τῶν δύο θυγατέρων της, ὑφαίνει εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον $2\frac{1}{4}$ πήχεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος. Πόσους πήχεις ὑφαίνουσι καὶ αἱ τρεῖς εἰς μίαν ἡμέραν; $\left(8\frac{1}{8} \text{ πήχ.}\right)$.

186) Ἠγόρασέ τις δύο φιάλας οἴνου· καὶ ἡ μὲν μία περιεῖχε $2\frac{3}{8}$ ὀκάδας, ἡ δὲ ἄλλη $\frac{1}{2}$ ὀκ. περισσότερον. Πόσας ὀκάδας οἴνου περιεῖχον αἱ δύο φιάλαι; $\left(\text{ἀπ. } 5\frac{1}{4}\right)$.

187) Ἠγόρασέ τις δύο ἐνδυμασίας διὰ τὰ τέκνα του· καὶ διὰ μὲν τὴν μίαν ἐπλήρωσε $628\frac{3}{4}$ δραχμάς, διὰ δὲ τὴν ἄλλην $57\frac{4}{5}$ δραχ. περισσότερον. Πόσας δραχμὰς ἔδωκεν ἐν ὅλῳ; $\left(\text{ἀπ. } 1315\frac{3}{10}\right)$.

188) Ἀπὸ ἓν τεμάχιον ὑφάσματος, ἐπώλησέ τις $18\frac{2}{3}$ μέτρα καὶ ἔπειτα ἄλλα $5\frac{1}{6}$ μέτρα· τοῦ ἔμειναν δὲ $37\frac{1}{2}$ μέτρα. Ἐκ πόσων μέτρων ἀπετελεῖτο ὁλόκληρον τὸ τεμάχιον; $\left(\text{ἀπ. } 61\frac{1}{3}\right)$.

189) Οἰκογενειάρχης τις ἐξόδευσε μίαν ἡμέραν $48\frac{3}{4}$ δραχ. διὰ κρέας, $18\frac{4}{5}$ δραχ. δι' ἄρτον, 9 δραχ. διὰ τυρόν, $12\frac{1}{2}$ δραχ. διὰ λαχανικὰ καὶ $16\frac{9}{20}$ δραχ. διὰ φροῦτα. Πόσας δραχ. ἐξώδευσεν ἐν ὅλῳ; $\left(\text{ἀπ. } 105\frac{1}{2}\right)$.

190) Τρεῖς ἐργάται ἤνοιξαν ἕνα χάνδακα· καὶ ὁ μὲν 1ος) ἤνοιξε $12\frac{7}{20}$ μέτρα μῆκος· ὁ 2ος) 3 μέτρα ἐπὶ πλέον τοῦ 1ου καὶ ὁ 3ος) $1\frac{3}{4}$ μέτρα ἐπὶ πλέον τοῦ 2ου. Πόσων μέτρων ἦτο τὸ μῆκος τοῦ χάνδακος; $\left(\text{ἀπ. } 44\frac{8}{10}\right)$.

## ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

94. ***Η ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι᾽ ἧς ἐλαττώνομεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος ἀριθμός.***

Αἱ μονάδες δυνατὸν νὰ εἶναι ἢ ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί.

Ὁ πρῶτος τῶν δεδομένων ἀριθμῶν λέγεται πάλιν ***μειωτέος,*** ὁ δὲ δεύτερος ***ἀφαιρετέος,*** τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως λέγεται ***ὑπόλοιπον ἢ διαφορά.***

Ἐὰν ἑνώσωμεν τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τοῦ ὑπολοίπου, θὰ ἀποτελέσωμεν προδήλως τὸν μειωτέον. Ὅθεν ***ὁ μειωτέος εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τοῦ ὑπολοίπου.***

## *Ἀφαίρεσις κλασμάτων.*

95. ***Διὰ νὰ ἀφαιρεθῇ κλάσμα ἀπὸ ἄλλο, πρέπει νὰ εἶναι ὁμώνυμον μὲ αὐτό. Διὰ τοῦτο, ὅταν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ ἄλλο, ἐὰν δὲν εἶναι ὁμώνυμα τρέπομεν αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμώνυμα.***

Ἡ ἀφαίρεσις τότε γίνεται κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα.

96. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ ἄλλο ὁμώνυμον, ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ μειωτέου καὶ ὑποκάτω τοῦ ὑπολοίπου γράφομεν τὸν ἴδιον παρονομαστήν.***

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $\frac{5}{12}$ ἀπὸ $\frac{7}{12}$, εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν ἀπὸ 7 δωδέκατα ἀφαιρέσωμεν 5 δωδέκατα, θὰ μείνουν 2 δωδέκατα (καθώς, ὅταν ἀπὸ 7 μῆνας ἀφαιρέσωμεν 5 μῆνας, μένουν 2 μῆνες, καὶ οὕτω καθεξῆς)· ἄρα

$$\frac{7}{12}-\frac{5}{12}=\frac{2}{12} \text{ ἢ } \frac{1}{6}.$$

Ἂς ὑποθέσωμεν δεύτερον, ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ $\frac{1}{5}$ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{1}{4}$.

Ἐπειδὴ τὰ κλάσματα ταῦτα εἶναι ἑτερώνυμα, τρέπομεν πρῶτον εἰς ὁμώνυμα· καὶ ὁ μὲν ἀφαιρετέος $\frac{1}{5}$ γίνεται $\frac{4}{20}$, ὁ δὲ μειωτέος $\frac{1}{4}$ γίνεται $\frac{5}{20}$· ὥστε $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{5}{20}-\frac{4}{20}=\frac{1}{20}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{6}{9}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}, \qquad \frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{10}{12}-\frac{9}{12}=\frac{1}{12}.$$

## *Ἀφαίρεσις μικτῶν.*

97. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ μικτοῦ, ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα, καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο ὑπόλοιπα.***

Παρδείγματος χάριν, ἐὰν ἔχω νὰ ἀφαιρέσω τὸν μικτὸν ἀριθμὸν $5\frac{1}{8}$ ἀπὸ τὸν μικτὸν $8\frac{5}{12}$, ἀφαιρῶ τοὺς ἀκεραίους χωριστά· $8-5=3$· ἔπειτα τὰ κλάσματα χωριστὰ $\frac{5}{12}-\frac{1}{8}=\frac{10}{24}-\frac{3}{24}=\frac{7}{24}$.
ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶνε $3\frac{7}{24}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$5\frac{1}{2}-2\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}, \quad 8\frac{1}{3}-4\frac{1}{3}=4, \quad 3\frac{1}{2}-3\frac{1}{8}=\frac{3}{8}.$$

***Παρατήρησις.*** Ἐὰν τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου, ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων δὲν γίνεται. Διὰ νὰ ὑπερνικήσωμεν τὸ ἐμπόδιον τοῦτο, ***λαμβάνομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα τοῦ μειωτέου καὶ τὴν ἑνώνομεν μὲ τὸ κλάσμα αὐτοῦ, ἀφοῦ τὴν τρέψωμεν καὶ αὐτὴν εἰς κλάσμα ὁμώνυμον.***

Ἔστω, π. χ., ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $1\frac{2}{9}$ ἀπὸ $5\frac{1}{8}$.

Ἂν τὰ κλάσματα γίνωσιν ὁμώνυμα, θὰ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $1\frac{16}{72}$ ἀπὸ $5\frac{6}{72}$· καὶ ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{16}{72}$ (τοῦ ἀφαιρετέου) δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{9}{72}$ (τοῦ μειωτέου), λαμβάνω μίαν ἀκεραίαν μονάδα τοῦ μειωτέου καὶ τρέπω αὐτὴν εἰς ἑβδομηκοστὰ δεύτερα **τότε** θὰ ἔχω νὰ ἀφαιρέσω τὸν μικτὸν $1+\frac{16}{72}$ ἀπὸ $4+\frac{72}{72}+\frac{9}{72}$, δηλαδὴ ἀπὸ $4+\frac{81}{72}$.

Ἀφαιρῶ τότε, κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα, καὶ εὑρίσκω ὑπόλοιπον $3\frac{65}{72}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $3\frac{1}{5}-2\frac{2}{7}=\frac{32}{35}$, $12\frac{1}{2}-8\frac{2}{3}=3\frac{5}{6}$.

Τὸ αὐτὸ κάμνομεν, καὶ ὅταν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ ἀκέραιον· οἷον, $5-2\frac{1}{8}=4+\frac{8}{8}-2\frac{1}{8}=2\frac{7}{8}$.

***Σημείωσις α΄.*** Ἐὰν τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου, ἡ ἀφαίρεσις γίνεται καὶ ὡς ἑξῆς. Προσθέτωμεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα εἰς τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου καὶ διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ τὸ ὑπόλοιπον (24) προσθέτωμεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ εἰς τὸν ἀκέραιον τοῦ ἀφαιρετέου. Καὶ ἀφαιροῦμεν κατὰ τὸν κανόνα.

Οὕτως ἔχομεν $7\frac{2}{5}-3\frac{2}{3}=7\frac{6}{15}-3\frac{10}{15}=7\frac{21}{15}-4\frac{10}{15}=3\frac{11}{15}$.

***Σημείωσις β΄.*** Ἐὰν ἀπὸ μικτὸν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀκέραιον ἀφαιροῦμεν αὐτὸν ἀπὸ τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ· οἷον, $5\frac{1}{7}-3=2\frac{1}{7}$.

Ἐὰν δὲ ἀπὸ μικτὸν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα, ἀφαιροῦμεν αὐτὸ ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ, ἂν δύναται ν᾽ ἀφαιρεθῇ· οἷον $3\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=3\frac{1}{6}$. Ἄλλως ἀφαιροῦμεν αὐτὸ ἀπὸ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον προκύπτει, ὅταν μία μονὰς τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ μειωτέου προστεθῇ εἰς τὸ κλάσμα αὐτοῦ.

Οἷον, $3\frac{1}{7}-\frac{2}{3}=2\frac{8}{7}-\frac{2}{3}=2\frac{10}{21}$.

## Ἀσκήσεις.

191) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀφαιρέσεις (ἀπὸ μνήμης).

| | | |
|---|---|---|
| α) $\frac{11}{15}-\frac{8}{15}$ | δ) $23\frac{45}{53}-\frac{19}{53}$ | ζ) $35\frac{13}{16}-26\frac{5}{16}$ |
| β) $\frac{28}{41}-\frac{9}{41}$ | ε) $37\frac{12}{25}-\frac{12}{25}$ | η) $21\frac{7}{30}-19\frac{7}{30}$ |
| γ) $15\frac{9}{17}-\frac{5}{17}$ | στ) $18\frac{13}{15}-7\frac{4}{15}$ | θ) $13\frac{25}{31}-13\frac{19}{31}$ |

192) Ὁμοίως αἱ

α) $1-\frac{16}{19}$ δ) $5-3\frac{2}{7}$ ζ) $100-5\frac{3}{4}$

β) $7-\frac{8}{13}$ ε) $4\frac{1}{5}-\frac{3}{5}$ η) $2\frac{1}{3}-\frac{2}{3}$

γ) $11-\frac{61}{100}$ στ) $12-1\frac{7}{12}$ θ) $\frac{2}{5}-\frac{3}{10}$.

193) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑπόμεναι ἀφαιρέσεις (γραπτῶς)

α) $\frac{11}{12}-\frac{4}{7}$ δ) $28\frac{14}{25}-9\frac{13}{15}$ ζ) $7\frac{1}{8}-\left(4\frac{5}{12}+1\frac{1}{6}\right)$

β) $\frac{19}{18}-\frac{11}{12}$ ε) $17\frac{29}{35}-12\frac{41}{42}$ η) $8\frac{11}{16}-\left(3\frac{7}{48}+5\frac{1}{3}+2\frac{7}{8}\right)$

γ) $10\frac{9}{16}-6\frac{11}{12}$ στ) $15\frac{4}{21}-\left(3\frac{5}{7}+8\frac{2}{3}\right)$

θ) $\left(13\frac{7}{8}+8\frac{2}{3}\right)-\left(7\frac{12}{16}+5\frac{4}{9}+3\frac{5}{12}\right)$

## *Προβλήματα.*

194) Ἐξώδευσέ τις τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν χρημάτων του. Πόσα μέρη αὐτῶν τοῦ ὑπολείπονται;

195) Ἀπὸ ἕνα ὕφασμα 18 πήχεων ἐπώλησέ τις $4\frac{3}{8}$ πήχεις. Πόσοι πήχεις τοῦ ἔμειναν;

196) Ἐργάτης κερδίζει $52\frac{1}{2}$ δραχμὰς τὴν ἡμέραν καὶ δαπανᾷ $30\frac{3}{5}$ δραχμ. Πόσον ἐξοικονομεῖ τὴν ἡμέραν;

197) Δοχεῖον πλῆρες οἴνου ζυγίζει ὁλόκληρον (μικτὸν βάρος) $11\frac{1}{2}$ ὀκάδας, κενὸν δὲ $2\frac{13}{16}$ ὀκάδας. Πόσον εἶναι τὸ καθαρὸν βάρος τοῦ οἴνου; (ἀπ. $8\frac{11}{16}$)

198) Δι' ἕνα χρέος ἐπλήρωσέ τις τὸ πρῶτον τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ καὶ ἔπειτα τὰ $\frac{5}{12}$ αὐτοῦ. Πόσον μέρος τοῦ χρέους τοῦ ὑπολείπεται νὰ πληρώση; $\left(\text{ἀπ. } 1\frac{1}{4}\right)$

199) Τέσσαρες ὁμάδες ἐργατῶν ἀνέλαβον νὰ ἐπισκευάσωσι δρόμον $70\frac{7}{10}$ χιλιομέτρων. Ἡ α) ὁμὰς ἀνέλαβε νὰ ἐπισκευάση $17\frac{4}{5}$ χιλ. ἡ β) $17\frac{1}{2}$ καὶ ἡ γ) $17\frac{2}{5}$ χιλ. Πόσα χιλιόμετρα ἀνέλαβεν ἡ δ) ὁμάς; (ἀπ. 18)

200) Εἶχέ τις 500 δραχμὰς καὶ ἠγόρασε εἰς μίαν ἡμέραν κρέας ἀξίας $57\frac{1}{2}$ δραχμάς, βούτυρον $78\frac{3}{4}$ δραχ. ζάχαριν 46 δραχ., ἔλαιον $113\frac{2}{5}$ δραχμὰς καὶ διάφορα ἄλλα ἀξίας $86\frac{1}{4}$ δραχμῶν. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν; $\left(\text{ἀπ. } 119\frac{1}{10} \text{ δρ.}\right)$

201) Ἀτμόπλοιόν τι ἀνεχώρησεν ἐκ τοῦ λιμένος Α τὴν $6\frac{3}{4}$ π. μ. καὶ ἔφθασεν εἰς τὸν λιμένα Β μετὰ $12\frac{1}{3}$ ὥρας. Ποίαν ὥραν ἔφθασεν; $\left(\text{ἀπ. } 7\frac{1}{12} \text{ μ. μ.}\right)$

202) Ἀτμόπλοιόν τι ἀνεχώρησεν ἐκ τοῦ λιμένος Α τὴν $9\frac{1}{4}$ π. μ. καὶ ἔφθασεν εἰς τὸν λιμένα Β τὴν $11\frac{43}{60}$ π. μ. τῆς ἑπομένης ἡμέρας. Πόσας ὥρας ἐταξείδευσεν; $\left(\text{ἀπ. } 26\frac{7}{15}\right)$

203) Ἀπὸ ἓν βαρέλιον τὸ ὁποῖον περιεῖχε 375 ὀκάδας οἴνου ἐπώλησέ τις $75\frac{1}{4}$ ὀκ. καὶ ἀπὸ ἓν ἄλλο περιέχον $215\frac{1}{4}$ ὀκάδας ἐπώλησε $43\frac{2}{5}$ ὀκάδας. Πόσαι ὀκάδες ἔμειναν ἐπὶ πλέον εἰς τὸ ἓν βαρέλιον ἀπὸ τὸ ἄλλο; $\left(\text{ἀπ. } 127\frac{9}{10}\right)$.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ (ἐπὶ ἀκέραιον)

## Ὁρισμοί.

98. ***Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἡ ἐπανάληψις αὐτοῦ πολλάκις.***

Ὁ ἀριθμός, ὅστις πρόκειται νὰ ἐπαναληφθῇ πολλάκις, λέγεται ***πολλαπλασιαστέος,*** ὁ δὲ ἀκέραιος ἀριθμός, ὅστις δεικνύει πόσας φορὰς θὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πρῶτος λέγεται ***πολλαπλασιαστής***. Τὸ δὲ ἐξαγόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ λέγεται ***γινόμενον***.

Παραδείγματος χάριν, $6 \times 4$ εἶναι ἡ ἐπανάληψις τοῦ 6 τέσσαρας φοράς, ἤτοι $6+6+6+6$·

$\frac{7}{8} \times 3$. εἶναι ἡ ἐπανάληψις τοῦ $\frac{7}{8}$ τρεῖς φοράς· $\frac{7}{8}+\frac{7}{8}+\frac{7}{8}$.

## Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος.

99. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν μόνον τὸν ἀριθμητήν του, τὸν δὲ παρονομαστὴν ἀφίνομεν τὸν ἴδιον·***

Παραδείγματος χάριν, $\frac{2}{5} \times 3$ εἶναι $\frac{6}{5}$ (κατὰ τὸ ἐδ. 84)·

***ἢ διαιροῦμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ*** (ἐὰν διαιρῆται) ***καὶ ἀφίνομεν τὸν ἴδιον ἀριθμητήν.***

Παραδείγματος χάριν, $\frac{7}{20} \times 4$ εἶναι $\frac{7}{5}$

διότι $\frac{7}{20} \times 4$ εἶναι ἴσον $\frac{7 \times 4.}{20}$ καὶ ἐπειδὴ ἀμφότεροι οἱ ὅροι τούτου διαιροῦνται διὰ τοῦ 4, ἁπλοποιοῦντες εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον ἴσον μὲ $\frac{7}{5}$.

***Σημείωσις.*** Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἴσος μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, τὸ γινόμενον εἶναι ὁ ἀριθμητὴς (ἐδ. 75)· οἷον,

$$\frac{5}{8} \times 8 = 5. \quad \frac{3}{5} \times 5 = 3, \text{ κτλ.}$$

## Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ.

100. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτόν, πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος του καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα του καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο γινόμενα.***

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν μικτὸν $12\frac{2}{3}$ ἐπὶ 4, θὰ ἔχωμεν $12 \times 4 = 48$ καὶ $\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$· ἄρα τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι $50\frac{2}{3}$.

***Σημείωσις.*** Ὁ λόγος τῆς πράξεως ταύτης εἶναι ἁπλούστατος· ὅταν ἐπαναλαμβάνωμεν ἕνα ἀριθμόν, φανερὸν εἶναι, ὅτι ἐπαναλαμβάνομεν καὶ τὰ μέρη του (ἴδε ἐδ. 40).

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ (δι᾽ ἀκεραίου).

101. ***Ἡ διαίρεσις εἶναι μερισμὸς ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς ἴσα μέρη.***

Ὁ ἀριθμός, ὅστις πρόκειται νὰ μερισθῇ, λέγεται διαιρετέος· ὁ δὲ ἀκέραιος ἀριθμός, ὅστις δεικνύει, εἰς πόσα μέρη θὰ διαιρεθῇ, λέγεται διαιρέτης· τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς διαιρέσεως λέγεται πηλίκον.

Ἐάν, ἀφοῦ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς ἴσα μέρη, ἑνώσωμεν πάλιν ὅλα τὰ μέρη, θά ἀποτελεσθῇ βέβαια ὁ διαιρετέος· ὥστε ὁ διαιρετέος προκύπτει ἐκ τοῦ πηλίκου διὰ τῆς ἐπαναλήψεως, ***ἤγουν εἶναι γινόμενον τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην*** (75).

## *Διαίρεσις ἀκεραίου.*

102. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀκέραιον, γράφομεν αὐτὸν ὡς ἀριθμητὴν καὶ ὑποκάτω γράφομεν ὡς παρονομαστὴν τὸν δοθέντα διαιρέτην· τὸ οὕτω σχηματιζόμενον κλάσμα εἶναι τὸ πηλίκον*** (κατὰ τὸ ἐδάφ. 75).

Οἷον, τὸ πηλίκον τοῦ 5 διὰ τοῦ 6 εἶναι $\frac{5}{6}$· τὸ πηλίκον τοῦ 12 διὰ 3 εἶναι $\frac{12}{3}$ ἢ 4· καὶ τὸ πηλίκον τοῦ 15 διὰ 7 εἶναι $\frac{15}{7}$ ἢ $2\frac{1}{7}$.

## *Διαίρεσις κλάσματος.*

103. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ διαιρέτου*** (ἐὰν διαιρῆται), ***ἢ πολλαπλασιάζωμεν τὸν παρανομαστήν του ἐπὶ τὸν διαιρέτην.***

Ἐὰν λ. χ. ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{15}{28}$ διὰ τοῦ 5, τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{3}{28}$, διότι τοῦτο, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5 γίνεται $\frac{15}{28}$.

Ἐὰν δὲ ἔχωμεν νὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$ διὰ 3, τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{5}{24}$ (κατὰ τὸ ἐδάφιον 85).

## *Διαίρεσις μικτοῦ.*

104. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν μικτόν, διαιροῦμεν τὰ δύο μέρη του χωριστὰ*** (ἤγουν τὸ ἀκέραιον καὶ τὸ κλάσμα) ***καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο πηλίκα.***

Παραδείγματος χάριν, ἵνα διαιρέσω τὸν μικτὸν $15\frac{1}{5}$ διὰ 3, διαιρῶ πρῶτον τὸν 15 διὰ 3 καὶ εὑρίσκω πηλίκον 5, ἔπειτα τὸ $\frac{1}{5}$ διὰ 3 καὶ εὑρίσκω πηλίκον $\frac{1}{15}$· ἄρα τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι $5\frac{1}{15}$.

Ἐὰν δὲ ἔχω νὰ διαιρέσω τὸν μικτὸν $12\frac{4}{9}$ διὰ τοῦ 8, τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{12}{8} + \frac{4}{72}$ ἢ ἁπλοποιούμενον $\frac{3}{2} + \frac{1}{18}$ καὶ προσθέτοντες ταῦτα εὑρίσκομεν πηλίκον τὸ $\frac{28}{18}$ ἢ $\frac{14}{9}$ ἢ $1\frac{5}{9}$.

Ὁμοίως εὑρίσκω, ὅτι τὸ $5\frac{1}{3} : 12$ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{16}{36}$ ἢ $\frac{4}{9}$ καὶ ὅτι τὸ $18\frac{3}{7} : 3$ εἶναι $6\frac{1}{7}$.

## *Παρατήρησις.*

Ἐπειδὴ οἱ μικτοὶ τρέπονται εἰς κλάσματα, δύναταί τις νὰ ἀποφύγῃ τὰς πράξεις τῶν μικτῶν, ἐὰν τρέπῃ πρὶν αὐτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα ἐκτελῇ τὰς πράξεις. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι δυσκολώτερον· ὅθεν προτιμότερον εἶναι νὰ ἐκτελῶνται αἱ πράξεις τῶν μικτῶν, ὡς ἀνωτέρω διελάβομεν.

## *Ἀσκήσεις.*

204) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα : $\frac{7}{24} \times 6$, $\frac{3}{8} \times 21$, $\frac{5}{12} \times 41$, $\frac{15}{16} \times 35$, $3\frac{4}{11} \times 5$, $18\frac{5}{6} \times 25$, $29\frac{7}{9} \times 53$, $71\frac{15}{28} \times 19$.

205) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα $\frac{7}{9}:9$, $\frac{16}{17}:8$, $\frac{49}{60}:7$, $\frac{13}{15}:30$, $\frac{64}{85}:48$, $4\frac{8}{25}:36$, $18\frac{3}{16}:15$, $79\frac{3}{5}:14$, $17\frac{17}{24}:16$, $118\frac{1}{3}:45$.

## *Προβλήματα.*

1) Ὁ πῆχης ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 12 δραχμάς· πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ πήχεως;

***Λύσις.*** Ἀφοῦ ὁ πῆχυς ἀξίζει 12 δραχμάς, τὸ ἓν πέμπτον αὐτοῦ ἀξίζει τὸ πέμπτον τῶν 12 δραχμῶν, ἤτοι $\frac{12}{5}$ τῆς δραχμῆς· καὶ ἑπομένως τὰ 3 πέμπτα τοῦ πήχεως ἀξίζουν τρεῖς φορὰς τὸ $\frac{12}{5}$, ἤτοι $\frac{12}{5}\times 3$ ἢ $\frac{36}{5}$ τῆς δραχμῆς, τουτέστιν 7 δραχμὰς καὶ $\frac{1}{5}$ τῆς δραχμῆς (ἢ 7 δραχμὰς καὶ 20 λεπτά).

2) Πόσον ἀξίζουν 5 ὀκάδες καὶ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 7 δραχμάς;

***Λύσις.*** Εὑρίσκω πρῶτον τὴν ἀξίαν τῶν 5 ὀκάδων καὶ ἔπειτα τὴν ἀξίαν τῶν $\frac{2}{3}$ τῆς ὀκᾶς.

Αἱ 5 ὀκάδες ἀξίζουν $7\times 5$ ἢ 35 δραχμάς· τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν $\frac{7\times 2}{3}$ ἢ $\frac{14}{3}$ ἢ $4\frac{2}{3}$· διότι τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζει δραχμὰς $\frac{7}{3}$.

Ὥστε αἱ 5 ὀκάδες καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν $39\frac{2}{3}$ δραχμάς.

3) Ἐργάτης τις τελειώνει ἔργον τι εἰς 7 ὥρας· πόσον μέρος τοῦ ἔργου θὰ τελειώσῃ εἰς τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας;

***Λύσις.*** Εἰς 7 ὥρας τελειώνει ὅλον τὸ ἔργον· ἄρα εἰς μίαν ὥραν θὰ τελειώσῃ τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ ἔργου καὶ εἰς $\frac{1}{5}$ τῆς ὥρας θὰ τελειώσῃ τὸ πέμπτον τοῦ $\frac{1}{7}$, ἤτοι $\frac{1}{7\times 5}$ τοῦ ἔργου· ἄρα εἰς τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας θὰ τελειώσῃ τέσσαρας φορὰς τὸ $\frac{1}{7\times 5}$, ἤτοι $\frac{4}{7\times 5}$ ἢ $\frac{4}{35}$ τοῦ ἔργου.

4) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει $5\frac{3}{8}$ δραχμάς· πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{7}{10}$ τῆς ὀκᾶς;

***Λύσις.*** Ἀφοῦ ἡ ὀκᾶ ἀξίζει $5\frac{3}{8}$ ἢ $\frac{43}{8}$ τῆς δραχμῆς, τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζει τὸ δέκατον τῶν $\frac{43}{8}$, ἤτοι $\frac{43}{8\times10}$ τῆς δραχμῆς, καὶ τὰ $\frac{7}{10}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν 7 φορὰς $\frac{43}{8\times10}$, ἤτοι $\frac{43\times7}{8\times10}$ ἢ $\frac{301}{80}$ τῆς δραχμῆς ἢ $3\frac{61}{80}$ δραχμάς.

5) Τὸ ἓν δράμιον νήματος ἀξίζει $\frac{7}{8}$ τῆς δραχμῆς· πόσον ἀγοράζω μὲ $\frac{3}{5}$ τῆς δραχμῆς;

***Λύσις.*** Μὲ $\frac{7}{8}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζω 1 δράμιον

μὲ $\frac{1}{8}$ » » » $\frac{1}{7}$ τοῦ δραμίου

μὲ $\frac{8}{8}$, ἤτοι μὲ μίαν δραχμήν, ἀγοράζω $\frac{8}{7}$ » »

καὶ μὲ $\frac{1}{5}$ τῆς δραχμῆς » $\frac{8}{7\times5}$.

ἄρα μὲ $\frac{3}{5}$ » » » $\frac{8\times3}{7\times5}$.

6) Ἄνθρωπός τις ἐξώδευσε τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς περιουσίας του εἰς ἀγορὰν οἰκίας καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτῆς εἰς ἀγορὰν κτήματος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον μέρος τῆς περιουσίας του, τὸ ὁποῖον ἦτο 12000 δραχμαί, ἐδάνεισε· πόση ἦτο ἡ περιουσία του, καὶ πόσα ἔδωκε διὰ τὴν οἰκίαν καὶ διὰ τὸ κτῆμα;

***Λύσις.*** Θὰ εὕρω πρῶτον, τί μέρος τῆς περιουσίας ἦσαν αἱ 12000 δραχμαί. Τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ παντὸς πράγματος κάμνουν τὰ $\frac{5}{6}$ αὐτοῦ (διότι $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$)· καὶ ἐπειδὴ ἡ περιουσία (ὡς καὶ κάθε ἄλλο πρᾶγμα) ἔχει $\frac{6}{6}$; συμπεραίνω ὅτι τὸ ἐπίλοιπον μέρος ἦτο $\frac{1}{6}$ τῆς περιουσίας. Ἀφοῦ δὲ τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς περιουσίας ἦτο 12000 δραχμαὶ τὰ $\frac{6}{6}$, ἤτοι ὅλη ἡ περιουσία, ἦτο $12000\times6$, ἤτοι 72000 δραχμαί, καὶ διὰ μὲν τὴν οἰκίαν ἔδωκε τὸ $\frac{1}{2}$, ἤτοι 36000, διὰ δὲ τὸ κτῆμα τὸ $\frac{1}{3}$, ἤτοι 24000 δραχμαί.

7) Ἐργάτης τις τελειώνει ἓν ἔργον εἰς 12 ἡμέρας· ἄλλος τις ἐργάτης τελειώνει τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 18 ἡμέρας· ἐὰν οἱ δύο οὗτοι ἐργάται ἐργάζωνται συγχρόνως, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον;

***Λύσις.*** Θὰ εὕρω πρῶτον, πόσον μέρος τοῦ ἔργου κάμνουν οἱ δύο ἐργάται εἰς μίαν ἡμέραν.

Ὁ πρῶτος ἐκτελεῖ τὸ ἔργον εἰς 12 ἡμέρας· ἄρα εἰς μίαν ἡμέραν κάμνει τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ἔργου.

Ὁ δεύτερος τελειώνει τὸ ἔργον εἰς 18 ἡμέρας· ἄρα εἰς μίαν ἡμέραν κάμνει τὸ $\frac{1}{18}$ τοῦ ἔργου.

Ὅταν λοιπὸν ἐργάζωνται καὶ οἱ δύο συγχρόνως, θὰ κάμουν εἰς μίαν ἡμέραν τὸ $\frac{1}{12}+\frac{1}{18}$ τοῦ ἔργου, ἤτοι τὰ $\frac{5}{36}$ τοῦ ἔργου.

Ἀφοῦ ηὗρα τοῦτο, σκέπτομαι ὡς ἑξῆς.

Διὰ νὰ κάμουν τὰ $\frac{5}{36}$ τοῦ ἔργου, χρειάζονται 1 ἡμέραν,

διὰ νὰ κάμουν τὸ $\frac{1}{36}$ » » θὰ χρειάζωνται $\frac{1}{5}$ τῆς ἡμέρας

καὶ διὰ νὰ κάμουν τὰ $\frac{36}{36}$, ἤτοι ὁλόκληρον τὸ ἔργον χρειάζονται $\frac{36}{5}$ τῆς ἡμέρας· ἤγουν 7 ἡμέρας καὶ $\frac{1}{5}$.

## *Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.*

206) Ἡ 1 ὀκᾶ βουτύρου τιμᾶται 84 δραχμάς· πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς; $\left(\text{ἀπ. } 52\frac{1}{2}\right)$

207) Ἡ 1 ὀκᾶ τυροῦ ἀξίζει 44 δραχμάς· πόσον ἀξίζουν 3 ὀκάδες καὶ $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς; $\left(\text{ἀπ. } 158\frac{2}{5}\right)$

208) Ἐργάτης τις τελειώνει ἔργον τι εἰς 5 ὥρας· πόσον μ ρος τοῦ ἔργου θὰ τελειώσῃ εἰς $2\frac{3}{4}$ ὥρας; $\left(\text{ἀπ. } \frac{11}{20}\right)$

209) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος ἀξίζει $20\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς· πόσον ἀξίζουν $18\frac{3}{10}$ τοῦ πήχεως.
(Θὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσον ἀξίζουν οἱ 18 πήχεις καὶ ἔπειτα πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{10}$ αὐτοῦ· ἀξίζουν δὲ οἱ $18\frac{3}{10}$ πήχ. $373\frac{16}{50}$ δραχμάς).

210) Ἡ ὀκᾶ πράγματος τινὸς πωλεῖται $6\frac{4}{5}$ δραχμάς· πόσας ὀκάδας ἀγοράζω μὲ $86\frac{7}{10}$ δραχμάς; $\left(\text{ἀπ. } 12\frac{3}{4}\right)$

211) Νὰ τραπῶσιν $\frac{7}{10}$ τῆς ὀκᾶς εἰς δράμια $\left(\text{ἀπ. } 280\right)$

212) Θέλει τις νὰ ἀλλάξῃ 17 πήχεις τσόχας, τῆς ὁποίας ὁ πῆχυς ἀξίζει 120 δραχμὰς μὲ μεταξωτὸν ὕφασμα, τοῦ ὁποίου ὁ πῆχυς ἀξίζει 80 δραχμάς· πόσους πήχεις θὰ λάβῃ ὡς ἀντάλλαγμα ; $\left(\text{ἀπ. } 25\frac{1}{2}\right)$

213) Ἐργάτης ἀπὸ τὴν ἐκτέλεσιν ἔργου τινὸς πρόκειται νὰ λάβῃ 700 δραχμάς· ἐξετέλεσε δὲ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ;

$\left(\text{ἀπ. } 525\right)$

214) Ἐργάτης ἐξετέλεσε τὰ $\frac{3}{8}$ ἔργου τινὸς καὶ τοῦ ὀφείλονται 261 δραχμάς· πόσας δραχμάς θὰ λάβῃ ἐὰν ἐκτελέσῃ ὅλον τὸ ἔργον ;

$\left(\text{ἀπ. } 696\right)$

215) Ἀντήλλαξέ τις 460 ὀκάδας τυροῦ, μὲ 780 ὀκάδας λίπους· ἡ τιμὴ ἑκάστης ὀκᾶς τοῦ τυροῦ εἶναι 43 δραχμαί· ποία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ λίπους ; $\left(\text{ἀπ. } 25\frac{14}{39}\right)$

216) Πόσα πρῶτα λεπτὰ ἔχουν τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ἡμέρας ; $\left(\text{ἀπ. } 900\right)$

217) Ἀτμόπλοιόν τι ἀνεχώρησεν ἐκ Πειραιῶς διὰ Σῦρον τὴν 7ην ὥραν π. μ. καὶ διανύει $8\frac{1}{2}$ μίλια τὴν ὥραν· μετὰ δύο ὥρας ἀνεχώρησεν ἄλλο ἀτμόπλοιον ἐκ Πειραιῶς καὶ ἔφθασε τὸ πρῶτον, ἀφοῦ ἐταξείδευσε 5 ὥρας· πόσην ταχύτητα εἶχε τὸ δεύτερον τοῦτο ἀτμόπλοιον;

$\left(\text{ἀπ. } 11\frac{9}{10} \text{ μίλια εἰς 1 ὥραν}\right)$

218) Ἔμπορός τις ἐκέρδισεν ἐφέτος ἐκ τῆς πωλήσεως ὑφασμάτων κέρδος ἴσον πρὸς τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ κεφαλαίου του καὶ ἔχει τώρα τὸ ὅλον 11800 δραχμάς· πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιόν του ;

(ἀπ. αἱ 11800 δραχ. εἶναι τὰ $\frac{7}{5}$ τοῦ κεφαλαίου· τὸ δὲ ὅλον κεφάλ. εἶναι $8428\frac{4}{7}$)

## *Γενίκευσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.*

105. Ἀπὸ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων ὁδηγούμενοι οἱ ἄνθρωποι ἔφθασαν εἰς τὴν ἰδέαν νὰ γενικεύσωσι τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, δηλαδὴ νὰ δώσωσιν εἰς τὸ ὄνομα **«πολλαπλασιασμὸς»** ἄλλην σημασίαν, γενικωτέραν ἐκείνης, τὴν ὁποίαν εἶχε πρίν.

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν τοῦτο, πρέπει νὰ ἐνθυμηθῶμεν τὸν ἑξῆς κανόνα (σελ. 43) τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων.

***Ὅταν ἠξεύρωμεν τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος ἑνὸς πράγματος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν ὁσωνδήποτε μονάδων τοῦ αὐτοῦ πράγματος, πρέπει νὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμὸν*** (δηλαδὴ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων).

Ἐὰν π. χ. ἡ ἀξία τῆς μιᾶς ὀκᾶς εἶναι 5 δραχμαί, ἡ ἀξία τῶν 7 ὀκάδων θὰ εἶναι $5 \times 7$ δραχμαί.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

***Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς, ὅταν ἡ ὀκᾶ ἀξίζῃ 5 δραχμάς;***

Καὶ τώρα ἡ πρᾶξις τὴν ὁποίαν θὰ κάμωμεν (διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα) πρέπει νὰ ὀνομάζεται ***πολλαπλασιασμὸς*** (διότι μόνον τὸ ποσὸν τῶν ὀκάδων ἤλλαξεν· ἀντὶ 7 ὀκάδων ἔχομεν τώρα $\frac{7}{8}$.)

Διὰ νὰ εὕρωμεν ὅμως τὸ ζητούμενον, πρέπει σύμφωνα μὲ τὰ ἀνωτέρω ῥηθέντα (ἰδὲ πρόβλ. 1, σελ. 110) νὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς.

Ἀφοῦ ὅλη ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 5 δραχμάς, τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζει τὸ ὄγδοον τῶν 5 δραχμῶν, ἤτοι $\frac{5}{8}$ τῆς δραχμῆς (κατὰ τὸ ἐδ. 102)· καὶ ἀφοῦ τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζει $\frac{5}{8}$ τῆς δραχμῆς, τὰ $\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν ἑπτὰ φορὰς τὰ $\frac{5}{8}$ ἤτοι $\frac{5}{8} \times 7$, ἢ $\frac{35}{8}$ τῆς δραχμῆς.

Διὰ νὰ λύσωμεν λοιπὸν τὸ πρόβλημα, ἐκάμαμεν τώρα δύο πράξεις· πρῶτον ἐμερίσαμεν τὸν ἀριθμὸν 5 εἰς 8 ἴσα μέρη, καὶ ἔπειτα ἐπανελάβομεν τὸ ἓν μέρος (τὸ $\frac{5}{8}$) ἑπτὰ φοράς, ἤτοι ἐπολλαπλασιάσαμεν αὐτὸ ἐπὶ 7.

Αἱ δύο αὗται πράξεις ὁμοῦ πρέπει νὰ ὀνομασθῶσι πολλαπλασιασμὸς (κατὰ τὴν νέαν, τὴν γενικὴν σημασίαν τῆς λέξεως), διὰ νὰ ἀληθεύῃ ὁ ἀνωτέρω εἰρημένος κανών, οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων (εἴτε ἀκέραιος, εἴτε κλασματικός).

106. Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα πρέπει νὰ δώσωμεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν.

***Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα εἶναι ἐπανάληψις μέρους τινὸς τοῦ ἀριθμοῦ.***

Ποῖον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου θὰ ἐπαναληφθῇ, δεικνύει ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος, τὸ ὁποῖον εἶναι πολλαπλασιαστής· ποσάκις δὲ θὰ ἐπαναληφθῇ, δεικνύει ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ.

Ὥστε γενικῶς ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον οἱονδήποτε πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς ἑξῆς.

107. ***Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς ἐπαναλαμβάνομεν ἕνα ἀριθμὸν ἢ μέρος τι αὐτοῦ καὶ σχηματίζομεν νέον ἀριθμόν.***

Ὁ πολλαπλασιαστέος ἐπαναλαμβάνεται ὅλος, ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος· οἷον, $7 \times 4$ σημαίνει $7+7+7+7$· ἐπαναλαμβάνεται δὲ μέρος τι αὐτοῦ, ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλάσμα· οἷον,

$$7 \times \frac{4}{5} \text{ σημαίνει } \frac{7}{5}+\frac{7}{5}+\frac{7}{5}+\frac{7}{5}.$$

***Σημείωσις.*** Ὁ πολλαπλασιασμὸς καταντᾷ μερισμός, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλασματικὴ μονάς.

Διότι π. χ. τὸ γινόμενον $8 \times \frac{1}{4}$ εἶναι $\frac{8}{4}$ ἢ 2.

## *Παρατήρησις.*

Κατὰ τὸν νέον τοῦτον πολλαπλασιασμόν, ὁ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιάζεται, αὐξάνει μέν, ἂν πολλαπλασιάζηται ἐπὶ ἀριθμὸν μεγαλύτερον τῆς μονάδος 1, ἐλαττοῦται δέ, ἂν πολλαπλασιάζηται ἐπὶ ἀριθμὸν μικρότερον τῆς μονάδος (μένει δὲ ὁ ἴδιος, ἐὰν πολλασιάζηται ἐπὶ τὴν μονάδα 1).

Καὶ τῷ ὄντι, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 8 ἐπὶ $\frac{5}{3}$, πρέπει νὰ ἐπαναλάβω 5 φορὰς τὸ τρίτον τοῦ 8, ἀλλὰ τὸ τρίτον τοῦ 8, ὅταν ληφθῇ τρεῖς φοράς, δίδει τὸν 8 (ὡς καὶ τὸ τρίτον παντὸς πράγματος, ὅταν ληφθῇ τρεῖς φοράς, δίδει ὁλόκληρον τὸ πρᾶγμα)· ἄρα, ὅταν ληφθῇ πέντε φοράς, θὰ δώσῃ περισσότερον τοῦ 8. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσω δὲ τὸν 8 ἐπὶ $\frac{2}{3}$, πρέπει νὰ λάβω δύο φορὰς τὸ τρίτον τοῦ 8. ἄρα, ὅταν ληφθῇ δύο μόνον φοράς, δίδει ὀλιγώτερον τοῦ 8.

## *Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα.*

108. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα***, ***πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ***

***τὸ γινόμενον γράφομεν παρονομαστὴν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος.***

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον 12 ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν (ἐδάφ. 107), πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ πέμπτον τοῦ 12 καὶ νὰ ἐπαναλάβωμεν αὐτὸ δίς. Ἀλλὰ τὸ πέμπτον τοῦ 12 εἶναι $\frac{12}{5}$ (ἐδάφ. 75). Ἐὰν δὲ τὸ $\frac{12}{5}$ ληφθῇ δίς, ἤτοι, ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2 γίνεται (ἐδάφ.84) $\frac{12\times2}{5}$ ἢ $\frac{24}{5}$ ἢ $4\ \frac{4}{5}$.

***Σημείωσις.*** Εἴτε τὸν 12 πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\frac{2}{5}$ εἴτε τὸ $\frac{2}{5}$ ἐπὶ 12, τὸ αὐτὸ γινόμενον εὑρίσκομεν.

## *Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα.*

109. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστήν, καὶ τὸ μὲν γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν γράφομεν ἀριθμητήν, τὸ δὲ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν παρονομαστήν.***

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ ἐπὶ τὸ $\frac{7}{8}$· κατὰ τὸν ὁρισμὸν (ἐδ. 107) πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{3}{5}$ καὶ νὰ ἐπαναλάβωμεν αὐτὸ ἑπτάκις.

Τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{3}{5}$ εἶναι $\frac{3}{5\times8}$ (κατὰ τὸ ἐδ. 85), τὸ δὲ ἑπταπλάσιον τοῦ $\frac{3}{5\times8}$ εἶναι $\frac{3\times7}{5\times8}$· ἄρα τὸ ζητούμενον γινόμενον τοῦ κλάσματος $\frac{3}{5}$ ἐπὶ $\frac{7}{8}$ εἶναι $\frac{3\times7}{5\times8}$ ἢ $\frac{21}{40}$.

***Σημείωσις.*** Ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι εἶναι $\frac{3}{5}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{8}\times\frac{3}{5}$.

## *Παρατήρησις.*

Εἰς τὸν κανόνα τοῦτον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων περιλαμβάνονται καὶ οἱ δύο ἀνωτέρω· ἤτοι οἱ κανόνες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον (ἐδ. 99) καὶ ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα (ἐδ. 108)· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ παριστάνωνται οἱ ἀκέραιοι ὡς κλάσματα μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα

Καὶ τῷ ὄντι $5 \times \frac{3}{8} = \frac{5}{1} \times \frac{3}{8} = \frac{5\times 3}{1\times 8} = \frac{5\times 3}{8}$.

$$\frac{5}{6} \times 7 = \frac{5}{6} \times \frac{7}{1} = \frac{5\times 7}{6\times 1} = \frac{5\times 7}{6}.$$

## *Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ κλάσμα.*

110. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτόν, πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος του καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα του καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο γινόμενα.***

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν μικτὸν $4\frac{5}{8}$ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{4}{3}$· Κατὰ τὸν ὁρισμὸν (ἐδ. 107), πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ τρίτον τοῦ μικτοῦ (ἤτοι νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν διὰ 3) καὶ ἔπειτα νὰ λάβωμεν αὐτὸ τετράκις.

Τὸ τρίτον τοῦ μικτοῦ $4\frac{5}{8}$ εἶναι $\frac{4}{3} + \frac{5}{8\times 3}$ (ἐδ. 104), τὸ δὲ τετραπλάσιον τοῦ $\frac{4}{3} + \frac{5}{8\times 3}$ εἶναι $\frac{4\times 4}{3} + \frac{5\times 4}{8\times 3}$· Τοῦτο δὲ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ἀκεραίου μέρους 4 ἐπὶ $\frac{4}{3}$ καὶ τὸ γινόμενον τοῦ κλάσματος $\frac{5}{8}$ ἐπὶ $\frac{4}{3}$·

*Παραδείγματα.*

1) $3\frac{5}{8}$ ἐπὶ $\frac{2}{3}$· Τὸ γινόμενον εἶναι $3\times\frac{2}{3} + \frac{5}{8}\times\frac{2}{3}$, ἤτοι $2 + \frac{10}{24}$ ἢ $2\frac{5}{12}$·

2) $2\frac{1}{2}$ ἐπὶ $\frac{1}{2}$· Τὸ γινόμενον εἶναι $2\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$, ἤτοι $1 + \frac{1}{4}$·

3) $5\frac{1}{6}\times\frac{6}{5} = 5\times\frac{6}{5} + \frac{1}{6}\times\frac{6}{5} = 6 + \frac{1}{5}$·

## *Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ μικτόν.*

111. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο μικτούς, πολλαπλασιάζομεν·***

1) ***τοὺς δύο ἀκεραίους,***

2) ***τὰ δύο κλάσματα,***

3) ***τὸν ἀκέραιον τοῦ πρώτου μὲ τὸ κλάσμα τοῦ δευτέρου καὶ***

4) ***τὸν ἀκέραιον τοῦ δευτέρου μὲ τὸ κλάσμα τοῦ πρώτου καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ τέσσαρα ταῦτα γινόμενα.***

Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον τῶν δύο μικτῶν $3\frac{1}{8}$ καὶ $5\frac{2}{3}$

εἶναι $3\times5$ καὶ $\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}$ καὶ $3\times\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{1}{8}\times5$,

ἤτοι $15+\frac{2}{24}+2+\frac{5}{8}$, ἤτοι $17+\frac{2}{24}+\frac{15}{24}$ ἢ $17\frac{17}{24}$.

Ὁ δὲ λόγος τῆς πράξεως ταύτης εἶναι ὁ ἑξῆς·

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἠγόρασέ τις 3 ὀκάδας καὶ $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 5 δραχμὰς καὶ $\frac{2}{3}$ τῆς δραχμῆς· διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον θὰ πληρώσῃ, φανερὸν εἶναι, ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς $5\frac{2}{3}$ ἐπὶ $3\frac{1}{8}$ (κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα τοῦ ἐδ. 105). Ἀλλὰ δύναμαι νὰ εὕρω τὸ ζητούμενον καὶ ὡς ἑξῆς.

Κατὰ πρῶτον εὑρίσκω πόσον ἀξίζουν αἱ 3 ὀκάδες χωριστὰ καὶ ἔπειτα πόσον ἀξίζει τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκᾶς.

Αἱ 3 ὀκάδες πρὸς 5 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν ἀξίζουν $5\times3$.

Αἱ 3 ὀκάδες πρὸς $\frac{2}{3}$ τῆς δραχμῆς ἡ ὀκᾶ, ἀξίζουν $\frac{2}{3}\times3$.

τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκᾶς πρὸς 5 δραχμὰς ἡ ὀκᾶ, ἀξίζει $5\times\frac{1}{8}$,

τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκᾶς πρὸς $\frac{2}{3}$ τῆς δραχμῆς ἡ ὀκᾶ, ἀξίζει $\frac{2}{3}\times\frac{1}{8}$.

λοιπὸν αἱ 3 ὀκάδες καὶ τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκᾶς πρὸς 5 δραχμὰς καὶ $\frac{2}{3}$ τῆς δραχμῆς ἀξίζουν $5\times3$ καὶ $\frac{2}{3}\times3$ καὶ $5\times\frac{1}{8}$ καὶ $\frac{2}{3}\times\frac{1}{8}$.

ταῦτα δὲ εἶναι τὰ ἀνωτέρω ῥηθέντα τέσσαρα γινόμενα.

***Σημείωσις.*** Δύο μικτοὺς δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ κατ' ἄλλον τρόπον νὰ τρέψωμεν δηλ. αὐτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσωμεν.

οὕτω : $3\frac{1}{8}\times5\frac{2}{3}=\frac{25}{8}\times\frac{17}{3}=\frac{425}{24}=17\frac{17}{24}$.

## *Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.*

112. Τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται, ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους (ἐδ. 39).

### *Παραδείγματα.*

Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{7}$.

Τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων εἶναι $\frac{2\times3}{2\times5}$· τὸ γινόμενον τούτου καὶ τοῦ τρίτου εἶναι $\frac{2\times3\times7}{3\times5\times8}$· καὶ τέλος τὸ γινόμενον τούτου καὶ τοῦ τετάρτου εἶναι $\frac{2\times3\times7\times1}{3\times5\times8\times7}$· τοῦτο δὲ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων κλασμάτων.

Τὸ δὲ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{3}$, 5, $\frac{2}{3}$ εἶναι $\frac{1\times5\times2}{3\times3}$.

113. Ἐκ τῶν παραδειγμάτων τούτων γίνεται φανερόν, ὅτι ***τὸ γινόμενον πολλῶν κλασμάτων εἶναι κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.***

Τοῦτο δὲ ἀληθεύει, καὶ ὅταν τινὲς τῶν παραγόντων εἶναι ἀκέραιοι, ἀρκεῖ νὰ γράφωνται ὡς κλάσμα μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1.

***Σημείωσις.*** Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων συμβαίνουσι πολλάκις ἁπλοποιήσεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ κάμνωμεν· παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ ἀνωτέρω εὑρεθὲν γινόμενον $\frac{2\times3\times7\times1}{3\times5\times8\times7}$ δύναμαι νὰ διαιρέσω καὶ τοὺς δύο ὅρους διὰ 3, ἔπειτα διὰ 7 καὶ εὑρίσκω $\frac{2\times1}{5\times8}$· ἐὰν δὲ καὶ τούτου διαιρέσω καὶ τοὺς δύο ὅρους διὰ 2, εὑρίσκω

$$\frac{1}{5\times4} \text{ ἢ } \frac{1}{20}.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἀριθμητὴν καὶ ἕνα παρονομαστὴν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· ἂν λοιπὸν εἷς ἀριθμὸς εἶναι καὶ ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστής, παραλείπεται.

## *Γενικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.*

114. Αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων (ἐδ. 40) ἀληθεύουσι καὶ διὰ τὰ κλάσματα.

Π. χ. εἶναι: $\frac{3}{8}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{6}\times\frac{3}{8}$, $\frac{4}{5}\times\frac{3}{8}\times\frac{7}{9}=\frac{3}{8}\times\frac{7}{9}\times\frac{4}{5}$,

$$\left(\frac{5}{7}+\frac{3}{8}+1\right)\times\frac{2}{3}=\frac{5}{7}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{8}+\frac{2}{3}+1\times\frac{2}{3}\cdot$$

### *Ἀσκήσεις.*

219) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα $45\times\frac{1}{3}$, $15\times\frac{7}{15}$, $72\times\frac{8}{9}$, $60\times\frac{25}{36}$, $88\times\frac{17}{33}$, $28\times2\frac{4}{7}$, $16\times4\frac{5}{18}$, $93\times8\frac{5}{6}$, $225\times1\frac{1}{9}$, $437\times5\frac{11}{12}$

220) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα $\frac{7}{9}\times\frac{8}{11}$, $\frac{3}{4}\times\frac{8}{17}$, $\frac{17}{24}\times\frac{13}{25}$, $1\frac{27}{40}\times\frac{19}{35}$, $\frac{3}{7}\times6\frac{5}{12}$, $8\frac{3}{8}\times8\frac{3}{4}$, $10\frac{7}{13}\times5\frac{11}{20}$, $28\frac{1}{2}\times49\frac{2}{3}$.

221) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα $\frac{3}{8}\times\frac{7}{9}\times\frac{6}{11}$, $\frac{8}{9}\times\frac{3}{5}\times\frac{15}{16}$, $\frac{15}{16}\times\frac{4}{9}\times\frac{6}{17}\times\frac{51}{60}$, $3\frac{1}{3}\times1\frac{1}{4}\times5\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}\times3\frac{2}{5}\times3\frac{5}{7}$, $8\frac{3}{4}\times2\frac{1}{7}\times\frac{2}{9}$.

## *Διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ κλάσματος.*

115. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.***

Ἂς ὑποθέσωμεν, π. χ., ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν $\frac{3}{8}$ διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{2}{5}$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως (ἐδ. 75) πρέπει νὰ εὕρω ἕνα ἀριθμόν, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ $\frac{2}{5}$ νὰ δίδῃ γινόμενον τὸ $\frac{3}{8}$· ἀλλὰ διὰ νὰ πολλαπλασιάσω οἱονδήποτε ἀριθμὸν ἐπὶ $\frac{2}{5}$, πρέπει νὰ λάβω τὸ πέμπτον αὐτοῦ δίς, ἤτοι τὰ δύο πέμπτα αὐτοῦ.

Ὥστε τὰ δύο πέμπτα τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ εἶναι $\frac{3}{8}$·

ἄρα τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{2}{8\times2}$ (ἐδ. 85)·

καὶ τὰ 5 πέμπτα, ἤτοι ὅλος ὁ ἀριθμός, θὰ εἶναι $\frac{3\times5}{8\times2}$ ἢ $\frac{3}{8}\times\frac{5}{2}$.

Καὶ τῷ ὄντι, ἂν πολλαπλασιασθῇ τὸ γινόμενον τοῦτο $\frac{3}{8}\times\frac{5}{2}$ ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{2}{5}$, δίδει $\frac{3}{8}\times\frac{5}{2}\times\frac{2}{5}$ ἢ $\frac{3\times5\times2}{8\times2\times5}$, ἤτοι (ἐδ. 86) $\frac{3}{8}$. εὑρέθη λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς $\left(\text{ὁ } \frac{3}{8}\times\frac{5}{2}\right)$, ὅστις πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{2}{5}$ ἔδωκε τὸν διαιρετέον $\frac{3}{8}$· ἄρα ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τὸ πηλίκον.

### *Παραδείγματα.*

$12 : \frac{1}{8} = 12\times\frac{8}{1} = 12\times8 = 96,\quad 10 : \frac{2}{5} = 10\times\frac{5}{2} = \frac{50}{2} = 25.$

$5 : \frac{7}{6} = 5\times\frac{6}{7} = \frac{30}{7} = 4\,\frac{2}{7},\quad \frac{2}{9} : \frac{5}{9} = \frac{2}{9}\times\frac{9}{5} = \frac{2\times9}{9\times5} = \frac{2}{5}.$

$\left(8+\frac{1}{3}\right) : \frac{2}{7} = \left(8+\frac{1}{3}\right)\times\frac{7}{2} = 8\times\frac{7}{2} + \frac{1}{3}\times\frac{7}{2} = 28 + \frac{7}{6} = 29\,\frac{1}{6}.$

116. Διὰ μικτοῦ ἀριθμοῦ δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἄλλως ἢ τρέποντες αὐτὸν εἰς κλάσμα.

Π. χ. $2 : \left(1+\frac{1}{5}\right) = 2 : \frac{6}{5} = 2\times\frac{5}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1\,\frac{2}{3}.$

$$\frac{1}{8} : 2\,\frac{3}{5} = \frac{1}{8} : \frac{13}{5} = \frac{1}{8}\times\frac{5}{13} = \frac{5}{104}.$$

***Σημείωσις.*** Ὁ ἀνωτέρω ῥηθεὶς κανὼν ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν δι᾿ ἀκεραίου, ἀρκεῖ ὁ ἀκέραιος διαιρέτης νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα.

Διότι π. χ. εἶναι $\frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{5} : \frac{3}{1} = \frac{2}{5}\times\frac{1}{3} = \frac{2}{15}.$

## *Γενικαὶ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.*

117. Αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀληθεύουσι καὶ διὰ τοὺς κλασματικούς.

Π. χ. εἶναι $\left(5+\frac{1}{8}+12\right):3=\frac{5}{3}+\frac{1}{8\times3}+\frac{12}{3}$ (ἐδ. 61,1)

$\frac{2}{5}:\frac{3}{8}=\left(\frac{2}{5}\times\frac{6}{7}\right):\left(\frac{3}{8}\times\frac{6}{7}\right)$ (ἐδ. 61,2)

$\frac{4}{5}\times\frac{3}{8}\times\frac{7}{9}:\frac{3}{8}=\frac{4}{5}\times\frac{9}{7}$ (ἐδ. 61,3).

## *Σύνθετα κλάσματα.*

118. Τὸ πηλίκον δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν ὡς κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην (ἐδάφ. 75).

π. χ. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{2}{3}:4$ δυνάμεθα νὰ τὸ παραστήσωμεν διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{\frac{2}{3}}{5}$, τοῦ ὁποίου ἀριθμητὴς εἶναι ὁ διαιρετέος $\frac{2}{3}$ καὶ παρονομαστὴς ὁ διαιρέτης 5.

Ὁμοίως τὸ πηλίκον $7:\frac{3}{4}$, παρίσταται διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{7}{\frac{3}{4}}$ τὸ δὲ πηλίκον $\frac{5}{8}:\frac{2}{3}$ παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{2}{3}}$.

Τὰ κλάσματα, ὡς τὰ ἀνωτέρω, τῶν ὁποίων δὲν εἶναι ἀμφότεροι οἱ ὅροι ἀκέραιοι ἀριθμοί, λέγονται ***σύνθετα κλάσματα***, τὰ δὲ μέχρι τοῦδε γνωστὰ λέγονται ***ἁπλᾶ***.

119. Τὰ σύνθετα κλάσματα, ἔχουσιν ὅλας τὰς ἰδιότητας τῶν ἁπλῶν κλασμάτων. Τρέπεται δε σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ συνθέτου ἐπὶ τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν τῶν ὅρων αὐτοῦ.

Π. χ. Δίδεται τὸ σύνθετον κλάσμα $\frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{8}}$, ἵνα τραπῇ εἰς ἁπλοῦν. Τοὺς ὅρους τοῦ συνθέτου κλάσματος, $\frac{4}{9}$ καὶ $\frac{5}{8}$ δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, χωρὶς ὡς γνωρίζομεν (ἐδ. 83), νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία αὐτοῦ. Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν αὐτοὺς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 9×8, ὅστις εἶναι τὸ ε. κ. π. τῶν παρονομαστῶν 9, 8 τῶν ὅρων αὐτοῦ καὶ ἔχομεν $\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{8}}=\dfrac{\frac{4}{9}\times9\times8}{\frac{5}{8}\times9\times8}=\dfrac{4\times8}{5\times9}=\dfrac{32}{45}$.

Ἐὰν ὁ εἷς τῶν ὅρων τοῦ συνθέτου κλάσματος εἶναι ἀκέραιος, γράφομεν αὐτὸν ὡς κλάσμα μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1, οὕτω ἔχομεν

$$\frac{5}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{5}{1}\times4}{\frac{3}{4}\times4}=\frac{20}{3}.$$

Ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ συνθέτου κλάσματος εἶναι μικτοί, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἀκολούθως τρέπομεν τὸ σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν. Οὕτω ἔχομεν

$$\frac{3\,\frac{1}{15}}{4\,\frac{2}{5}}=\frac{\frac{46}{15}}{\frac{22}{5}}=\frac{\frac{46}{15}\times15}{\frac{22}{5}\times15}=\frac{46}{66}=\frac{23}{33}.$$

Εἰς τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα φθάνομεν καὶ ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ συνθέτου κλάσματος·

$$\frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{8}}=\frac{4}{9}:\frac{5}{8}=\frac{4}{9}\times\frac{8}{5}=\frac{32}{45},\quad \frac{3\,\frac{1}{15}}{4\,\frac{2}{5}}=\frac{46}{15}:\frac{22}{5}=\frac{46}{15}\times\frac{5}{22}=\frac{46}{66}$$

## *Ἀσκήσεις.*

222) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα $12:\frac{4}{5}$, $36:\frac{9}{11}$, $21:\frac{28}{41}$, $7:3\,\frac{1}{3}$, $25:3\,\frac{3}{8}$, $41:62\,\frac{5}{6}$, $8\,\frac{9}{16}:\frac{13}{16}$, $\frac{21}{50}:\frac{16}{25}$, $\frac{117}{300}:\frac{59}{200}$, $8\,\frac{8}{25}:11\,\frac{3}{25}$, $16\,\frac{4}{7}:3\,\frac{11}{28}$, $15\,\frac{5}{6}:4\,\frac{1}{4}$.

223) Νὰ τραπῶσι τὰ ἑπόμενα σύνθετα κλάσματα εἰς ἁπλᾶ.

$$\frac{\frac{11}{14}}{5},\ \frac{5\frac{1}{7}}{9},\ \frac{15}{\frac{1}{8}},\ \frac{42}{4\frac{7}{9}},\ \frac{\frac{13}{15}}{\frac{14}{15}},$$

$$\frac{\frac{49}{50}}{3\frac{17}{25}},\ \frac{4\frac{3}{8}}{\frac{5}{4}},\ \frac{12\frac{3}{4}}{26\frac{1}{2}},\ \frac{43\frac{1}{8}}{5\frac{11}{18}},\ \frac{40\frac{1}{5}}{14\frac{14}{25}}.$$

## *Προβλήματα.*

1) Ἑνὸς ὑφάσματος ὁ πῆχυς ἀξίζει $10\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς· πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως.

*Λύσις.* Κατὰ τὸν νέον ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἡ ἀξία τῶν $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως εἶναι $10\frac{2}{5}\times\frac{5}{8}$ ἢ $10\times\frac{5}{8}+\frac{2}{5}\times\frac{5}{8}$ ἤτοι $\frac{52}{8}$ τῆς δραχμῆς ἤτοι $6\frac{1}{2}$ δραχμαί.

2) Ἐξ ἑνὸς πράγματος ἠγόρασέ τις $\frac{3}{16}$ τῆς ὀκᾶς· μὲ $\frac{5}{12}$ τῆς δραχμῆς πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ;

*Λύσις.* Ἡ ζητουμένη ἀξία τῆς ὀκᾶς εἶναι ὁ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν $\frac{3}{16}$ δίδει $\frac{5}{12}$ τῆς δραχμῆς ἄρα εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{5}{12}:\frac{3}{16}$, τουτέστι $\frac{5}{12}\times\frac{16}{3}=\frac{20}{9}$ τῆς δραχμῆς $=2\frac{2}{9}$.

## *Παρατήρησις.*

Κατὰ τὸν νέον ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως ἀληθεύουσι πάντοτε οἱ ἑξῆς κανόνες (ἰδὲ σελ. 43 καὶ 66).

***α΄) Ἔχοντες τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος οἱουδήποτε πράγματος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν ὁσωνδήποτε μονάδων τοῦ αὐτοῦ πράγματος, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων.***

***β΄) Ἔχοντες τὴν ἀξίαν μονάδων τινῶν οἱουδήποτε πράγματος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν ἀξίαν τῶν μονάδων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν.***

3) Νὰ εὕρωμεν τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ ἀριθμοῦ 40.

*Λύσις*. Τὸ ἔνατον τοῦ 40 εἶναι $\frac{40}{9}$ καὶ τὰ 4 ἔνατα αὐτοῦ εἶναι

$$\frac{40\times4}{9} \text{ ἢ } \frac{160}{9} = 17\frac{7}{9}.$$

4) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{3}{8}$ εἶναι 62 ;

*Λύσις*. Ἀφοῦ τὰ 3 ὄγδοα εἶναι 62, τὸ 1 ὄγδοον θὰ εἶναι $\frac{62}{3}$ καὶ τὰ 8 ὄγδοα, ἤτοι ὅλος ὁ ἀριθμός, θὰ εἶναι $\frac{62\times8}{3}$.

## *Παρατήρησις.*

Ἐκ τῶν δύο τελευταίων προβλημάτων συνάγομεν τοὺς ἑξῆς κανόνας.

***α΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν οἱουδήποτε ἀριθμοῦ δοθὲν τι μέρος, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν μὲ τὸ κλάσμα, δι' οὗ ἐκφράζεται τὸ μέρος.***

***β΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν ἔχοντες μέρος τι αὐτοῦ, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ μέρος τοῦτο διὰ τοῦ κλάσματος, δι' οὗ ἐκφράζεται τὸ μέρος.***

5) Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{4}{15}$ εἰς τετρακοσιοστά.

*Λύσις*. Ἐπειδὴ ἡ ἀκεραία μονὰς ἔχει 400 τετρακοσιοστά, τὸ $\frac{1}{15}$ αὐτῆς θὰ ἔχῃ $\frac{400}{15}$ τετρακοσιοστά, καὶ τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτῆς θὰ ἔχωσι $\frac{400\times4}{15}$ τετρακοσιοτὰ ἢ 106 τετρακοσιοστὰ καὶ $\frac{2}{3}$ τοῦ τετρακοσιοστοῦ.

Ἐκ τοῦ προβλήματος τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

***Διὰ νὰ τρέψω οἱονδήποτε ἀριθμὸν εἰς κλάσμα, ἔχον δοθέντα παρονομαστήν, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸν μὲ τὸν δοθέντα παρονομαστήν.***

Διὰ νὰ τρέψω, π. χ., τὸν ἀριθμὸν $5\frac{1}{7}$ εἰς εἰκοστά, πολλαπλασιάζω αὐτὸν ἐπὶ 20 καὶ εὑρίσκω, ὅτι σύγκειται ἀπὸ 102 εἰκοστὰ καὶ $\frac{6}{7}$ τοῦ εἰκοστοῦ.

## *Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.*

224) Μὲ 80 δραχμὰς ἀγοράζει τις $\frac{5}{9}$ τοῦ πήχεως· πόσους πήχεις ἀγοράζει μὲ 450 δραχμάς; $\left(\text{ἀπ. } 3\frac{1}{8}\right)$

225) Τὰ $\frac{3}{5}$ τεμαχίου ὑφάσματος ἀξίζουν 1320 δραχμάς· πόσας δραχμὰς ἀξίζει ὅλον τὸ τεμάχιον; $\left(\text{ἀπ. 2200 δραχ.}\right)$

226) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ 52 $\left(\text{ἀπ. } 20\frac{4}{5}\right)$

227) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ μικτοῦ ἀριθμοῦ $6\frac{1}{3}$ $\left(\text{ἀπ. } 3\frac{23}{24}\right)$

228) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{2}{5}$ εἶναι 40; $\left(\text{ἀπ. } 100\right)$

229) Τὰ $\frac{3}{4}$ ἀριθμοῦ τινος εἶναι 120· πόσον εἶναι τὰ $\frac{5}{8}$ αὐτοῦ; $\left(\text{ἀπ. } 100\right)$

230) Ἐργάτης τις ἐξετέλεσε τὸ $\frac{1}{12}$ ἔργου τινος εἰς 40 πρῶτα λεπτά· πόσα μέρη τοῦ ἔργου θὰ ἐκτελέσῃ εἰς 2 ὥρας; $\left(\text{ἀπ. } \frac{1}{4}\right)$

231) Ὑφάντριά τις ὑφαίνει $8\frac{1}{3}$ πήχεις ὑφάσματος εἰς $6\frac{1}{4}$ ὥρας· πόσους πήχεις ὑφαίνει εἰς 1 ὥραν; $\left(\text{ἀπ. } 1\frac{1}{3}\right)$

232) Βαρέλιον εἶναι πλῆρες οἴνου κατὰ τὰ $\frac{3}{7}$ χρειάζεται δὲ διὰ νὰ γεμίσῃ ἐντελῶς 66 ὀκάδες οἴνου ἀκόμη· πόσας ὀκάδας οἴνου χωρεῖ τὸ βαρέλιον; $\left(\text{ἀπ. } 115\frac{1}{2}\right)$

233) Λάμπα καίει $28\frac{1}{2}$ δράμια πετρελαίου καθ' ὥραν· μένει δὲ ἀναμμένη ἐπὶ $5\frac{3}{4}$ ὥρας ἑκάστην ἑσπέραν· πόσα δράμια πετρελαίου καίει ἐπὶ 6 ἡμέρας; $\left(\text{ἀπ. } 983\frac{1}{4}\right)$

234) Δύο βαρέλια εἶναι πλήρη οἴνου, ἀλλ' ἡ χωρητικότης τοῦ ἑνὸς εἶναι τὰ $\frac{3}{7}$ τῆς τοῦ ἄλλου, τὸ ὁποῖον περιέχει 252 ὀκάδας ἐπὶ πλέον τοῦ πρώτου· πόσας ὀκάδας οἴνου περιέχει ἕκαστον βαρέλιον; $\left(\text{ἀπ. 189, 441}\right)$

235) Ἠγόρασέ τις $47 \frac{3}{4}$ ὀκάδας καφὲ πρὸς $92 \frac{1}{2}$ δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, καὶ διπλασίαν ποσότητα ζαχάρεως, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ κατ' ὀκᾶν εἶναι τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς τοῦ καφέ· πόσας δραχμὰς ἔδωκεν ἐν ὅλῳ ;

$$\left(\text{ἀπ. } 6583 \frac{5}{8}\right)$$

236) Ἐμπόρου τινὸς στοιχίζουν οἱ 6 πήχεις ὑφάσματός τινος 310 δραχμάς, πωλεῖ δὲ τοὺς 8 πήχεις πρὸς 456 δραχμάς· πόσας δραχμὰς θὰ κερδίσῃ ἐὰν πωλήσῃ 30 πήχεις ἐκ τοῦ ὑφάσματος αὐτοῦ ;

$$\left(\text{ἀπ. } 182 \frac{1}{2}\right)$$

237) Ἐάν τις δι' ἑκάστην ὥραν ἐργασίας λαμβάνῃ $\frac{3}{5}$ τοῦ 25δράχμου, πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ λάβῃ 30 25δραχμα ;

$$\left(\text{ἀπ. } 30 : \frac{3}{5} \text{ ἢ } 30 \times \frac{5}{3} = 50 \text{ ὥρας}\right)$$

238) Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ καφέ, ὅταν 18 ὀκάδες καὶ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς ἐπωλήθησαν 1389 δραχμὰς καὶ $\frac{1}{5}$ τῆς δραχμῆς ;

$$\left(\text{ἀπ. } 1389 \frac{1}{5} : 18 \frac{2}{5}, \text{ ἤτοι } 75 \frac{1}{2} \text{ δραχμὰς}\right)$$

239) Πατήρ τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ λάβῃ ὁ υἱός του τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς περιουσίας του, ἡ δὲ θυγάτηρ του τὰ $\frac{4}{9}$ αὐτῆς, καὶ ὅ,τι περισσεύῃ νὰ λάβῃ ἡ σύζυγός του. Ἡ σύζυγος ἔλαβεν 7500 δραχμάς· πόσα ἔλαβον τὰ τέκνα καὶ πόση ἦτο ἡ περιουσία ;

$$\left(\text{ἀπ. ἡ περιουσία ἦτο } \frac{7500 \times 45}{7}, \text{ ἤτοι } 48214 \frac{2}{7} \cdot \text{ ὁ υἱὸς ἔλαβε } 19285 \frac{5}{7}, \text{ ἡ δὲ θυγάτηρ } 21428 \frac{4}{7}\right)$$

240) Ἔχων τις νὰ λάβῃ παρ' ἄλλου ποσόν τι χρημάτων ἐχάρισεν εἰς αὐτὸν τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ποσοῦ καὶ ἀκόμη 100 δραχμάς, ἔλαβε δὲ τὰ ἐπίλοιπα, τὰ ὁποῖα ἦσαν 1560 δραχμαί· πόσα εἶχε νὰ λάβῃ ;

$$\left(\text{ἀπ. 2075 δραχμάς, ἐχάρισε δὲ 515 δραχμὰς}\right)$$

241) Ἀγοράσας τις 1200 ὀκάδας σίτου πρὸς 4 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, ἐπώλησε τὰς 850 ὀκάδας πρὸς 5 δραχμὰς ἑκάστην· πόσον τοῦ κοστίζει ἡ ὀκᾶ ἐκ τῶν ἐπιλοίπων ; $\left(\text{ἀπ. } 1 \frac{4}{7}\right)$

242) Τὸ ἓν τρίτον κτήματός τινος ἐπωλήθη 7250 δραχμάς, τὸ δὲ ἐπίλοιπον μέρος 14400· ποῖον μέρος ἐπωλήθη ἀκριβότερον ;

(ἀπ. Τὸ πρῶτον· διότι ἀφοῦ τὰ $\frac{2}{3}$ ἐπωλήθησαν 14400, τὸ $\frac{1}{3}$ ἔπρεπε νὰ πωληθῇ 7200· ἐπωλήθη δὲ 7250)

243) Τίνος ἀριθμοῦ τὸ $\frac{1}{20}$, κατὰ 30 αὐξηθὲν γίνεται ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ ;

(ἀπ. $\frac{1}{8} - \frac{1}{20}$ ἤτοι τὰ $\frac{3}{40}$ τοῦ ζητουμένου εἶναι ὁ 30 ἤτοι ὁ ζητούμενος εἶναι ὁ 400)

244) Δεξαμενή τις πληροῦται ὑπὸ 2 κρουνῶν, ὅταν ῥέωσι συγχρόνως εἰς 20 ὥρας· ὁ εἷς ἐκ τῶν κρουνῶν μόνος γεμίζει τὴν δεξαμενὴν εἰς 30 ὥρας· εἰς πόσας ὥρας ὁ ἄλλος θὰ γεμίσῃ αὐτήν ;

***Λύσις.*** Εἰς μίαν ὥραν οἱ δύο, ὁμοῦ ῥέοντες, γεμίζουν τὸ $\frac{1}{20}$ τῆς δεξαμενῆς, ὁ δὲ εἷς μόνος εἰς μίαν ὥραν γεμίζει τὸ $\frac{1}{30}$· ἄρα ὁ ἄλλος γεμίζει εἰς μίαν ὥραν $\frac{1}{20} - \frac{1}{30}$, ἤτοι τὸ $\frac{1}{60}$, ἑπομένως γεμίζει τὴν δεξαμενὴν εἰς 60 ὥρας.

245) Ἀτμόπλοιον διανύον 8 μίλια τὴν ὥραν, καταδιώκει ἄλλο, ἀναχωρῆσαν 15 ὥρας πρὸ αὐτοῦ καὶ διανύον 6 $\frac{1}{2}$ μίλια τὴν ὥραν· μετὰ πόσας θὰ τὸ φθάσῃ ; (ἀπ. 65)

246) Ὁδοιπόρος τις ἔχει νὰ διατρέξῃ 700 στάδια εἰς 30 ἡμέρα, διέτρεξε δὲ τὰς 12 πρώτας ἡμέρας τὰ 350 στάδια· πόσα ἔχει νὰ διατρέχῃ τώρα καθ' ἡμέραν ; (ἀπ. $\frac{350}{18}$, ἤτοι 19 $\frac{4}{9}$)

247) Ἐρωτηθείς τις πόσα χρήματα ἔχει ἀπήντησεν ὡς ἑξῆς. Ἐὰν εἶχον τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον καὶ τὸ τέταρτον τῶν ὅσων ἔχω, θὰ εἶχα 20 δραχμὰς ἐπὶ πλέον· πόσας δραχμὰς εἶχεν ; (ἀπ. 240)

248) Ἐδαπάνησέ τις τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν χρημάτων του, εἶτα τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ ἔπειτα τὰ $\frac{2}{7}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου· τοῦ ἔμειναν δὲ 48 δραχμαί· πόσας εἶχεν ἀρχικῶς ; (ἀπ. 224)

# ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

## *Ὁρισμοί.*

120. Ἐκ τῶν κλασματικῶν μονάδων, ὅσαι ἔχουσι παρονομαστὴν 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ. ὅσαι δηλαδὴ προκύπτουσιν, ὅταν ἡ ἀκεραία μονὰς διαιρεθῇ εἰς 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ. ἴσα μέρη, λέγονται ***δεκαδικαὶ μονάδες.***

Αἱ κλασματικαὶ δεκαδικαὶ μονάδες εἶναι κατὰ σειρὰν αἱ ἑξῆς :

$$\frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{10000},\ldots\ldots$$

***Δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ*** λέγονται, ὅσοι γίνονται ἀπὸ μίαν δεκαδικὴν κλασματικὴν μονάδα διὰ τῆς ἐπαναλήψεως· οἷον, $\frac{175}{100}$ ἢ $1\frac{75}{100}, \frac{3}{10}\ldots$ εἶναι δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ὑπάγονται εἰς τὰ κλάσματα· καὶ ὅσα περὶ τῶν κλασμάτων ἐμάθομεν, ἀληθεύουσι καὶ περὶ τῶν δεκαδικῶν. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων τούτων εἶναι ἢ 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ., αἱ πράξεις των εἶναι πολὺ εὐκολώτεραι παρὰ αἱ πράξεις τῶν ἄλλων κλασμάτων (τὰ ὁποῖα πρὸς διάκρισιν λέγονται ***κοινά***). Διὰ τοῦτο διαλαμβάνομεν περὶ αὐτῶν ἰδιαιτέρως.

## *Γραφὴ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.*

121. Ἂν φαντασθῶμεν εἰς μίαν σειρὰν τὰς ἀκεραίας μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων (ἤτοι τὰς ἁπλᾶς μονάδας, τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας κτλ.) καὶ τὰς δεκαδικὰς κλασματικὰς μονάδας ὡς ἑξῆς :

$$\ldots\ldots 1000,\ 100,\ 10,\ 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{10000},\ldots\ldots\ldots$$

ἑκάστη τῶν μονάδων τούτων εἶναι δεκαπλασία τῆς ἀκολούθου, ἤτοι 1 ἀκεραία μονὰς κάμνει 10 δέκατα $\left(1=\frac{10}{10}\right)$, ἓν δέκατον κάμνει 10 ἑκατοστὰ $\left(\frac{1}{10}=\frac{10}{100}\right)$, ἓν ἑκατοστὸν κάμνει 10 χιλιοστὰ $\left(\frac{1}{100}=\frac{10}{1000}\right)$ καὶ οὕτω καθεξῆς. Διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς, ὥς καὶ τοὺς ἀκεραίους, στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀρχήν, ***ὅτι πᾶν ψηφίον, γραφόμενον κατόπιν ἄλλου, σημαίνει μονάδας τῆς ἀμέσως ἑπομένης τάξεως*** (ἐδ. 11).

Κατὰ τὴν ἀρχὴν αὐτήν, κατόπιν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων γράφομεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων, κατόπιν τούτου τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοστῶν, καὶ οὕτω καθεξῆς. Πρέπει ὅμως νὰ διακρίνωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων, καὶ πρὸς τοῦτο γράφομεν κατόπιν του ὑποδιαστολήν· ἡ ὑποδιαστολὴ χωρίζει τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ τὸ κλασματικὸν αὐτοῦ μέρος.

## *Παραδείγματα.*

Ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 2 δεκάδας, 3 μονάδας (ἢ 23 μονάδας ἀκεραίας) καὶ 5 δέκατα, γράφεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω ῥηθέντα ὡς ἑξῆς: 23,5, ἀντὶ $23\frac{5}{10}$ Ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 4 ἀκεραίας μονάδας, 3 δέκατα καὶ 8 ἑκατοστά, γράφεται ὡς ἑξῆς· 4,38, ἀντὶ $4\frac{38}{100}$.

Ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 15 ἀκέραια καὶ 6 ἑκατοστὰ καὶ 4 χιλιοστά, γράφεται ὡς ἑξῆς· 15,064, ἀντὶ $15\frac{6}{100}+\frac{4}{1000}$ ἢ $15\frac{64}{1000}$.

Ἐγράψαμεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάτων, διότι ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχει δέκατα· κάμνομεν δηλαδή, ὅτι κάμνομεν καὶ εἰς τὴν γραφὴν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (οἷον, 105, 2007 κτλ).

Ὅταν ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἀκέραιον μέρος, γράφομεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν ἀκεραίων μονάδων καὶ κατόπιν αὐτοῦ θέτομεν τὴν ὑποδιαστολήν, οἷον ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 7 δέκατα καὶ 2 ἑκατοστὰ καὶ 5 δεκάκις χιλιοστά, γράφεται ὡς ἑξῆς: 0,7205, ἀντὶ $\frac{7}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{10000}$ ἢ $\frac{7205}{10000}$.

***Δεκαδικὰ ψηφία*** τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ λέγονται ὅσα εἶναι κατόπιν τῆς ὑποδιαστολῆς.

## *Πῶς ἀπαγγέλλεται δεκαδικὸς ἀριθμὸς γεγραμμένος ὡς ἀκέραιος.*

122. Κατὰ πολλοὺς τρόπους ἠμποροῦμεν νὰ ἀπαγγείλωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν γεγραμμένον διὰ ψηφίων.

1) Δυνάμεθα ν' ἀπαγγείλωμεν χωριστὰ ἕκαστον ψηφίον μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων του· οἷον, 5,805 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς: 5 ἀκέραια 8 δέκατα καὶ 5 χιλιοστά.

***Σημείωσις.*** Ὁ τρόπος οὗτος δὲν εἶναι συνήθης διὰ πολυψηφίους ἀριθμούς· διότι δὲν εἶναι σύντομος.

2) Δυνάμεθα νὰ ἀπαγγείλωμεν τὰ ψηφία, ὡς νὰ ἐσχημάτιζον ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν (ἤγουν χωρὶς νὰ προσέξωμεν εἰς τὴν ὑποδιαστολήν), νὰ προσαρτήσωμεν ὅμως κατόπιν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου. Οἷον : 5,75 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς : 575 ἑκατοστά.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς·

| | |
|---|---|
| | τὰ 5 ἀκέραια=50 δέκατα=500 ἑκατοστὰ |
| | 7 δέκατα= 70 ἑκατοστὰ |
| | ἔχομεν καὶ 5 ἑκατοστὰ |
| ὥστε | 5,75 εἶναι 575 ἑκατοστά. |

***Σημείωσις.*** Καὶ ὁ τρόπος οὗτος εἶναι χρήσιμος, μόνον ὅταν τὰ ψηφία εἶναι ὀλίγα· ὅταν ὅμως εἶναι πολλά, μεταχειριζόμεθα τὸν ἑπόμενον γενικὸν τρόπον :

3) Ἀναλύομεν τὸν ἀριθμόν, εἰς ὅσα θέλομεν τμήματα, καὶ ἀπαγγέλλομεν αὐτὰ κατὰ σειρὰν ἕκαστον χωριστά, ὡς νὰ ἦτο εἷς ἀκέραιος ἀριθμός· προσαρτῶμεν ὅμως κατόπιν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ τμήματος.

Οἷον, 375,125987 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς : 375 ἀκέραια, 125 χιλιοστὰ καὶ 987 ἑκατομμυριοστά· ἢ καὶ ὡς ἑξῆς : 375 ἀκέραια, 12 ἑκατοστά, 59 δεκάκις χιλιοστὰ καὶ 87 ἑκατομμυριοστά· ἢ καὶ ὡς ἑξῆς : 375 ἀκέραια 1259 μυριοστὰ καὶ 87 ἑκατομμυριοστά.

***Σημείωσις.*** Συνήθως χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς δύο τμήματα, τὸ ἀκέραιον καὶ τὸ δεκαδικόν, καὶ ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον χωριστά· οἷον, 17,587 ἀπαγγέλλεται 17 ἀκέραια καὶ 587 χιλιοστά.

## *Παρατήρησις.*

Διὰ νὰ γράφωμεν εὐκόλως ἀπαγγελλόμενον δεκαδικὸν ἀριθμόν, ἢ καὶ τὸ ἐναντίον, διὰ νὰ ἀπαγγέλλωμεν γεγραμμένον δεκαδικὸν ἀριθμόν, καλὸν εἶναι νὰ ἐνθυμώμεθα τὰ ἑξῆς.

Τὰ δέκατα γράφονται μὲ ἓν μόνον δεκαδικὸν ψηφίον· ὥστε 125 δέκατα γράφεται ὡς ἑξῆς : 12,5· τὰ ἑκατοστὰ γράφονται μὲ δύο δεκαδικὰ ψηφία· ὥστε 52 ἑκατοστὰ γράφονται 0,52· καὶ 6 ἑκατοστὰ γράφονται 0,06.

Τὰ χιλιοστὰ γράφονται μὲ τρία δεκαδικὰ ψηφία, τὰ δεκάκις χιλιοστὰ (ἢ μυριοστὰ) μὲ τέσσαρα, τὰ ἑκατοντάκις χιλιοστὰ μὲ πέντε, τὰ ἑκατομμυριοστὰ μὲ ἕξ, καὶ οὕτω καθεξῆς.

## *Πῶς γράφονται οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ὡς κοινὰ κλάσματα.*

123. Ἐπειδὴ οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι κλάσματα, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν αὐτοὺς καὶ μὲ παρονομαστήν, ὡς καὶ τὰ ἄλλα κλάσματα· πρὸς τοῦτο ἔχομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

***Διὰ νὰ γράψωμεν δοθὲν δεκαδικὸν κλάσμα ὡς κοινόν, παραλείπομεν τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ γράφομεν τὸν τότε προκύπτοντα ἀκέραιον ὡς ἀριθμητήν, ὑποκάτω δ' αὐτοῦ γράφομεν παρονομαστὴν τὴν μονάδα, ἀκολουθουμένην ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.***

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, ὁ ἀριθμὸς 1,5· οὗτος ἔχει 15 δέκατα, ἄρα γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς : $\frac{15}{10}$.

Ἔστω προσέτι ὁ ἀριθμὸς 13,705· οὗτος ἔχει 13705 χιλιοστὰ (ἰδὲ ἐδ. 122)· ἄρα γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς : $\frac{13705}{1000}$.

Καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν δοθῇ κοινὸν κλάσμα, ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα, ἀκολουθουμένην ἀπὸ μηδενικὰ (ἤτοι 10 ἢ 100 ἢ 1000 . . .), διὰ νὰ γράψωμεν αὐτὸ ὡς δεκαδικόν, γράφομεν τὸν ἀριθμητὴν χωριστὰ καὶ ἔπειτα χωρίζομεν πρὸς τὸ τέλος αὐτοῦ δι' ὑποδιαστολῆς τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ δοθεὶς παροναμαστής.

Παραδείγματος χάριν, τὸ κλάσμα $\frac{17}{10}$ γράφεται 1,7· καὶ τὸ κλάσμα $\frac{1801}{100}$ γράφεται 18,01.

Ἐὰν δὲν ἔχῃ ὁ ἀριθμητὴς ἀρκετὰ ψηφία, γράφομεν μηδενικὰ εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ (ὅπερ δὲν βλάπτει αὐτόν)· οἷον, τὸ κλάσμα $\frac{13}{1000}$ γράφεται $\frac{0013}{1000}$, ἤτοι 0,013.

## *Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.*

124. ***Ἡ ἀξία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν γραφῶσιν ὁσαδήποτε μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ.***

Διότι ἡ ἀξία ἑκάστου ψηφίου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν θέσιν του ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολὴν (ἐδάφ. 121)· ἡ θέσις δὲ αὕτη δὲν ἀλλάσσει διὰ τῆς γραφῆς τῶν μηδενικῶν εἰς τὸ τέλος, ὥστε ἕκαστον ψηφίον διατηρεῖ τὴν ἀξίαν του.

Π. χ. 3,8 εἶναι ἴσον μὲ 3,80 ἢ μὲ 3,800· διότι ὁ καθεὶς ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων ἔχει τρεῖς ἀκεραίας μονάδας καὶ 8 δέκατα.

Ὁμοίως, ἀντὶ τοῦ ἀκεραίου 5, δύναμαι νὰ γράψω 5,0 ἢ 5,00 κτλ.

***Σημείωσις.*** Ἡ ἰδιότης αὕτη τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν συνάγεται καὶ ἐκ τῆς γενικῆς ἰδιότητος τῶν κλασμάτων (ἐδ. 83), φαίνεται δὲ τοῦτο ἀμέσως, ἐὰν γραφῶσιν οἱ δεκαδικοὶ ὡς κλάσματα.

Τῷ ὄντι, $3\frac{8}{10}$ $3\frac{80}{100}=3\frac{800}{1000}$· Ὁμοίως $5=\frac{50}{10}=\frac{500}{100}$ κλπ.

125. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ., ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἐμπρὸς (διὰ τὸ 10), δύο (διὰ τὸ 100), τρεῖς (διὰ τὸ 1000) κτλ.***

***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δὲ δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ 10, 100 κτλ., ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν θέσιν πρὸς τὰ ὀπίσω (διὰ τὸ 10), δύο (διὰ τὸ 100) κτλ.***

| | | | |
|---|---|---|---|
| Παραδείγματος χάριν, | 5,871 × 10 | γίνεται | 58,71 |
| | 35,905 × 100 | » | 3590,5 |
| | 16,59 : 10 | εἶναι | 1,659. |

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς. Ὅταν εἰς τὸν ἀριθμὸν 5,871 μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἐμπρός, προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 58,71. Καὶ αἱ μὲν 5 μονάδες γίνονται 5 δεκάδες (ἤτοι δεκαπλασιάζονται), τὰ 8 δέκατα γίνονται 8 ἀκέραια (ἤτοι δεκαπλασιάζονται, διότι 1 ἀκέραιον = 10 δέκατα), τὰ δὲ 7 ἑκατοστὰ γίνονται 7 δέκατα καὶ τὸ 1 χιλιοστὸν γίνεται 1 ἑκατοστόν· ὥστε πάντα τὰ μέρη τοῦ 5,871 ἐδεκαπλασιάσθησαν· ἄρα καὶ ὁ ἀριθμὸς ὅλος ἐδεκαπλασιάσθη.

Ὁμοίως, ὅταν εἰς τὸν ἀριθμὸν 35,905 μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν δύο θέσεις πρὸς τὰ ἐμπρός, ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ ἑκατονταπλασιάζεται· ἄρα καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς ἑκατονταπλασιάζεται.

Διὰ τὴν διαίρεσιν δεικνύεται ἡ ἰδιότης ὁμοίως.

***Σημείωσις.*** Δυνατὸν νὰ συμβῇ ὁ ἀριθμὸς νὰ μὴ ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία, ὥστε νὰ ἠμπορῇ νὰ μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολή. Ἡ δυσκολία αὕτη αἴρεται, ἐὰν γράψωμεν μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ ἢ εἰς τὴν ἀρχήν του (ὅπου χρειάζονται), ὅπερ δὲν βλάπτει τὸν ἀριθμόν.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν $1{,}2 \times 1000$, πρέπει νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ ἐμπρός, ἀλλὰ δὲν ἠμποροῦμεν, διότι εἶναι ἐμπρὸς ἓν μόνον ψηφίον (τὸ 2). Ἐὰν ὅμως γράψωμεν τόν ἀριθμὸν 1,2 ὡς ἑξῆς : 1,200, μετατίθεται ἡ ὑποδιαστολὴ καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 1200.

Ὁμοίως ἂν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν 0,15 : 1000 πρέπει νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ ὀπίσω· διὰ νὰ γίνῃ τοῦτο, γράφομεν τὸν ἀριθμὸν 0,15 ὡς ἑξῆς : 000,15 (ὅπερ οὐδόλως βλάπτει αὐτόν)· τότε μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 0,00015.

## *Ἀσκήσεις.*

249) Πόσα δεκάκις χιλιοστά, κάμνουν ἓν χιλιοστόν, ἓν ἑκατοστόν, ἓν δέκατον ;

250) Ποίαν δεκαδικὴν μονάδα παριστᾷ τὸ ψηφίον τὸ ὁποῖον κατέχει τὴν 3ην, 4ην, 5ην, 6ην θέσιν μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν ;

251) Τέσσαρες ἁπλαῖ μονάδες, πόσα ἑκατοστά, πόσα χιλιοστὰ καὶ πόσα δεκάκις χιλιοστὰ κάμνουν ;

252) Νὰ γραφῶσιν οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ
α) τριακόσια τεσσαράκοντα ὀκτὼ χιλιοστὰ
β) τριάκοντα ἑπτὰ χιλιοστὰ
γ) τετρακόσια πέντε δεκάκις χιλιοστὰ
δ) εἴκοσι πέντε ἑκατοντάκις χιλιοστὰ
ε) ἑκατὸν ὀκτὼ ἀκέραια καὶ διακόσια πέντε ἑκατομμυριοστὰ
ϛ) ἑπτὰ χιλιάδες ἑκατὸν εἴκοσι ἓξ ἑκατοστά.

253) Νὰ ἀπαγγελθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ

| | | |
|---|---|---|
| 13,5 | 0,004132 | 8,200005 |
| 47,08 | 125,513006 | 0,0000036 |
| 1,0034 | 32,00671 | 13,02500342. |

254) Νὰ γραφῶσι οἱ ἑπόμενοι δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ὡς κοινὰ κλάσματα 0,6 : 0,18 : 0,608 : 0,005 : 4,25 : 0,00175 : 18,008 :

255) Νὰ γίνωσιν οἱ ἀριθμοὶ 7,012 : 1,195 : 0,534 : 0,7 : 18,24 : 2,12847 : 0,000009 : 10,100,1000 φορὰς μεγαλύτεροι.

256) Νὰ γίνωσιν οἱ ἑπόμενοι ἀριθμοὶ 10,100,1000 φορὰς μικρότεροι: 10,4 : 31,415 : 0,075 : 0,0001 : 1563,62.

# ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

## ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

126. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμούς, κάμνομεν πρῶτον νὰ ἔχωσιν ἴσον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων· γίνεται δὲ τοῦτο, ἂν γράψωμεν εἰς τὸ τέλος τινῶν ἐξ αὐτῶν ἓν ἢ περισσότερα μηδενικά. Ἔπειτα προσθέτομεν αὐτούς, ὡς καὶ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς (δηλαδὴ προσθέτομεν τὰ ψηφία ἑκάστης τάξεως χωριστά)· εἰς δὲ τὸ ἄθροισμα θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἀμέσως μετὰ τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν ἁπλῶν μονάδων τῶν ἀριθμῶν.***

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως φαίνεται ἐκ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων.

1) Νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 51,809 12,65 1,0591.

| | |
|---|---|
| | 51,8090 |
| | 12,6500 |
| | 1,0591 |
| ἄθροισμα | 65,5181 |

2) Νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 0,001 2,1 155,75.

| | |
|---|---|
| | 0,001 |
| | 2,100 |
| | 155,750 |
| ἄθροισμα | 157,851 |

Ὁ δὲ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον κάμνομεν οὕτως, ἐδόθη εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ἴδε ἐδ. 19).

***Σημείωσις.*** Ἡ γραφὴ τῶν μηδενικῶν εἰς τὸ τέλος τῶν ἀριθμῶν εἶναι περιττή· διότι ταῦτα εἰς τὴν πρόσθεσιν δὲν δίδουσι τίποτε. Διὰ τοῦτο συνήθως γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εἶναι εἰς μίαν κατακόρυφον στήλην· ἑπομένως καὶ αἱ ὑποδιαστολαὶ νὰ εὑρίσκωνται εἰς μίαν κατακόρυφον στήλην, καὶ ἔπειτα προσθέτομεν, ὡς καὶ πρίν.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως γίνεται τότε ὡς ἑξῆς :

| |
|---|
| 1,597 |
| 21,7 |
| 54 |
| 3,0001 |
| 80,2971 |

## Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

257) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀθροίσματα.
62,22+73,8+2,419+45,6+0,287
0,425+3,1418+13,28161+8,42+102,564
74,1+0,7568+300,42+0,785649+48+0,00268

258) Χρεωστεῖ τις εἰς ἕνα 1347,50, εἰς ἄλλον 1445,75, εἰς τρίτον 2500 καὶ εἰς τέταρτον 987,25 δραχμάς· πόσας ὀφείλει ἐν ὅλῳ ;

259) Ἀφοῦ ἐξόφλησέ τις τρία γραμμάτια ἐκ 3100 δραχμῶν, 2845,65 δραχ. καὶ 4150,4 δραχ. τοῦ ἔμειναν εἰς τὸ ταμεῖόν του ἄλλαι 5075,75 δραχ. πόσας δραχ. εἶχε πρὸ τῆς ἐξοφλήσεως τῶν γραμματίων ;

260) Ἐργάτης τις κερδίζει τὴν 1ην ἡμέραν τῆς ἑβδομάδος 45,75 δραχ. τὴν 2αν 53,35, τὴν 3ην 60 δραχ. καὶ τὰς ὑπολοίπους ἡμέρας αὐτῆς ἀνὰ 54,45 δραχμάς· πόσον ἐκέρδισε κατὰ τὴν ἑβδομάδα ταύτην ;

261) Ἐργάτης τις ἐδαπάνησε τὴν 1ην ἡμέραν ἐκ τοῦ ἡμερομισθίου του 35,60 δραχμάς καὶ οἰκονόμησε 17,15 δραχ. τὴν 2αν ἡμέραν ἐδαπάνησε 33,75 δραχ. καὶ οἰκονόμησε 16,25 δραχ. καὶ τὴν 3ην ἐδαπάνησε 37,8 δραχ. οἰκονομήσας 18,85 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστης ἡμέρας, πόσον ἐδαπάνησε ἐν ὅλῳ καὶ πόσον κατὰ τὰς τρεῖς ταύτας ἡμέρας ;

### ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

127. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλον, κάμνομεν πρῶτον αὐτοὺς νὰ ἔχωσιν ἰσάριθμα δεκαδικὰ ψηφία, ἔπειτα ἀφαιροῦμεν, ὡς νὰ ἦσαν ἀκέραιοι· εἰς δὲ τὸ ὑπόλοιπον θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἀμέσως μετὰ τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον δίδει ἡ ἀφαίρεσις τῶν ἁπλῶν μονάδων.***

Ἂς ὑποθέσωμεν, π. χ., ὅτι ἔχομεν ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 15,0983 ἀπὸ τοῦ 27,001.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{lr} & 27{,}0010 \\ & \underline{15{,}0983} \\ \text{ὑπόλοιπον} & 11{,}9027 \end{array}$$

Ὁ δὲ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον κάμνομεν οὕτω τὴν ἀφαίρεσιν, ἐδόθη εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ἰδὲ ἐδ. 25).

***Σημείωσις.*** Δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν καὶ χωρὶς νὰ γράφωμεν μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος· ἡ πρᾶξις τότε διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

| | | |
|---|---|---|
| 1,059 | 21,58 | 52,7 |
| 0,37 | 12 | 25,132 |
| 0,689 | 9,58 | 27,568 |

## *Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.*

262) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀφαιρέσεις.

1 — 0,008    25,0378 — 18,127
15 — 6,072    462 — 268,846
8,9 — 3,569    0,005 — 0,00059
0,75— 0,075    1000 — 775,0998.

263) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ διαφοραί.

160,75 — (15,408+3,5157+103,64)
1115 — (69,07+462,4+56+3,0005)
(3109,8+214,527) — (375,198+2115,0019).

264) Ἐὰν τις χρεωστῇ δραχμὰς 1812,25 καὶ πληρώσῃ 697,90, πόσα χρεωστεῖ ἀκόμη ;

265) Διὰ μίαν ἐπιχείρησιν κατέθεσαν δύο ὁμοῦ 64500 δραχμάς, τὸ δὲ κατατεθὲν ποσὸν ὑπὸ τοῦ ἑνὸς εἶναι 37500,75· πόσας κατέθεσεν ὁ ἄλλος ;

266) Ἠγόρασέ τις ἀπὸ ἓν παντοπωλεῖον, τυρὸν ἀξίας 18,65 δραχ., βούτυρον ἀξίας 78,45 δραχ. καὶ ζάχαριν ἀξίας 27,75 δραχ. καὶ ἔδωκε δύο χαρτονομίσματα τῶν 100 δραχμῶν· πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ὡς ὑπόλοιπον ;

267) Ἐχρεώστει τις εἴς τινα 7105,35 δραχ. καὶ ἔδωκε εἰς αὐτὸν κατὰ διαφόρους ἐποχὰς τὰ ποσὰ 2125,50 δραχ. : 900 δραχ. : 1775,75 καὶ 1320,25 δραχ. πόσας δραχμὰς χρεωστεῖ ἀκόμη ;

268) Ἠγόρασέ τις οἰκίαν ἀντὶ 125000 δραχμῶν καὶ ἐδαπάνησε διὰ τὴν ἐπισκευὴν αὐτῆς 8164,65 δραχ. μετεπώλησε δὲ αὐτήν, ἀντὶ ἑνὸς ποσοῦ τὸ ὁποῖον ἔλαβεν εἰς δύο δόσεις ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν ἀπετελεῖτο ἐξ 107500,50 δραχ. ἡ δὲ ἄλλη ἐκ 43325,75 δραχ. πόσον ἐκέρδισε ἐκ τῆς μεταπωλήσεως ταύτης ;

269) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσω εἰς τὸν 465,1578 διὰ νὰ λάβω τὸν 1000 ;

270) Ἀπὸ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει ν' ἀφαιρέσω τὸν 0,097 διὰ νὰ λάβω τὸν 0,00346 ;

## ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

128. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο δεκαδικοὺς ἀριθμούς, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον, ὡς νὰ μὴ ὑπῆρχον αἱ ὑποδιαστολαί,***

***ἔπειτα χωρίζομεν δι᾽ ὑποδιαστολῆς εἰς τὸ γινόμενον τόσα ψηφία δεκαδικά, ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο ὁμοῦ***

Ἄς ὑποθέσωμεν, π.χ., ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 7,5 καὶ 12,28˙ ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{lr} & 1228 \\ & 75 \\ \hline & 6140 \\ & 8596\phantom{0} \\ \hline \text{γινόμενον} & 92{,}100 \end{array}$$

Ὁ δὲ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον κάμνομεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοιουτοτρόπως, εἶναι ὁ ἑξῆς.

Ὁ ἀριθμὸς 12,28 εἶναι ἴσος μὲ τὸ κλάσμα $\frac{1228}{100}$, ὁ δὲ ἀριθμὸς 7,5, εἶναι ἴσος μὲ $\frac{75}{10}$˙ διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δὲ τὰ δύο ταῦτα κλάσματα (ἰδὲ ἐδάφ. 108), πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς $1228 \times 75$ (δηλαδὴ τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς χωρὶς ὑποδιαστολὴν) καὶ τὸ γινόμενον νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν, ἤτοι διὰ τοῦ 1000˙ τοῦτο δὲ γίνεται, ἐὰν χωρίσωμεν εἰς τὸ τέλος τοῦ γινομένου τρία δεκαδικὰ ψηφία δι᾽ ὑποδιαστολῆς, ἤτοι ὅσα δεκαδικὰ ἔχουσιν ὁμοῦ οἱ δύο παράγοντες.

### *Παραδείγματα.*

$$\begin{array}{r} 32{,}79 \\ 5 \\ \hline 163{,}95 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}15 \\ 0{,}00008 \\ \hline 0{,}0000120 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 158 \\ 1{,}8 \\ \hline 1264 \\ 158\phantom{0} \\ \hline 284{,}4 \end{array}$$

***Σημείωσις.*** Ἐὰν τὸ γινόμενον δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία, ὅσα δηλαδὴ μέλλομεν νὰ χωρίσωμεν, γράφομεν εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ, ὅσα μηδενικὰ θέλομεν˙ τοῦτο ἐκάμαμεν εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα.

***Παρατήρησις.*** Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἐφαρμόζεται προφανῶς, καὶ ὅταν ὁ εἷς παράγων εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

## *Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.*

271) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα

| | |
|---|---|
| 15, 747×36 | 84, 86×3,5 |
| 68,0705×13 | 5, 79×4,45 |
| 768×82,003 | 2,003×1,01 |
| 4×17,04285 | 0, 38×0,0049. |

272) Νὰ πολλαπλασιασθῇ ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 358,7 : 5819,58 : 70562 ἐπὶ α) 0,2 β) 0,02 γ) 0,002 δ) 0,003 ε) 0,03 ϛ) 0,3.

273) Ἠγόρασέ τις 2158 ὀκάδας σίτου πρὸς 4,75 δραχ. τὴν ὀκᾶν· πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσεν ; (ἀπ. 10250,50)

274) Ἐάν τις οἰκονομῇ καθ' ἡμέραν 25,25 δραχμάς, πόσας θὰ οἰκονομήσῃ εἰς ἕνα μῆνα καὶ πόσας εἰς ἓν ἔτος ; (ἀπ. 757,50 : 9216,25)

275) Ὁ εἷς πῆχυς ὑφάσματος ἀξίζει 37,4 δραχ. πόσον ἀξίζουν οἱ 64,5 πήχεις ; (ἀπ. 2412,80)

276) Ἁμαξοστοιχία διανύει εἰς μίαν ὥραν 37,7 χιλιόμ. πόσα χιλιόμ. θὰ διανύσῃ εἰς 16,8 ὥρας ; (ἀπ. 633,36)

277) Εἶχέ τις 376,4 δραχμὰς καὶ ἐδαπάνησεν τὰ 0,35 αὐτῶν· πόσας δραχμὰς ἐδαπάνησε καὶ πόσαι τοῦ ἔμειναν ; (ἀπ. 131,74 : 244,66

278) Ἐπώλησέ τις 53450 πορτοκάλλια πρὸς 175,45 τὰ ἑκατόν· πόσας δραχμὰς εἰσέπραξε ; (ἀπ. 9332,37)

279) Εἰς ἕνα ἐργοστάσιον ἐργάζονται 45 ἐργάται καθεὶς τῶν ὁποίων λαμβάνει 52,75 δραχ. τὴν ἡμέραν καὶ 63 ἐργάτριαι καθεμία τῶν ὁποίων λαμβάνει τὴν ἡμέραν 38,25 δραχ. πόσας δραχμὰς πληρώνει ὁ ἐργοστασιάρχης δι' ἡμερομίσθια μιᾶς ἡμέρας ; (ἀπ. 4683,50)

280) Ἄνθρωπός τις κερδίζει 77,45 δραχμὰς εἰς μίαν ἡμέραν καὶ δαπανᾷ 58,80 δραχ. πόσας δραχ. οἰκονομεῖ εἰς ἓν ἔτος ; (ἀπ. 6807,25)

281) Ἠγόρασέ τις 5 σάκκους ζαχάρεως πρὸς 19,65 δραχ. τὴν ὀκᾶν· πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ, ἐὰν ὁ εἷς σάκκος ἐζύγιζε 31,6 ὀκάδας ; (ἀπ. 3104,70)

282) Εἶχε δανεισθῇ τις προπολεμικῶς 12000 χρυσᾶς δραχμάς. Συνεβιβάσθη ὅμως σήμερον νὰ πληρώσῃ ἐκ τοῦ χρέους αὐτοῦ τὰ 0,35 εἰς χρυσᾶς δραχμὰς καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἰς χαρτίνας· μία δὲ χρυσῆ δραχμὴ ἰσοῦται πρὸς 15,03 χαρτίνας· πόσας χαρτίνας δραχμὰς ἐπλήρωσε διὰ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του ; (ἀπ. 70926)

## ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

### *1) Διαίρεσις δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου.*

129. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 21,876 διὰ τοῦ ἀκεραίου 12. Φανερὸν εἶναι, ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ διαιρέσωμεν πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος 21 καὶ ἔπειτα τὸ κλασματικόν. Διαιροῦντες τὸ ἀκέραιον μέρος 21 διὰ τοῦ 12 εὑρίσκομεν πηλίκον 1 καὶ κατάλοιπον 9 ἀκέραια, ὅπερ πλέον δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 12.

Τὰ δὲ 9 ταῦτα ἀκέραια, τὰ ὁποῖα ἔμειναν, τρέπομεν εἰς δέκατα (1 ἀκέρ. =10 δέκατα) καὶ εὑρίσκομεν 90 δέκατα, τὰ ὁποῖα ὁμοῦ μὲ τὰ 8 δέκατα τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσιν 98 δέκατα (τὸν ἀριθμὸν τοῦτον τῶν 98 δεκάτων σχηματίζομεν ἀμέσως καταβιβάζοντες τὸ ψηφίον 8 δεξιὰ τοῦ καταλοίπου 9)· διαιροῦντες καὶ τὰ 98 δέκατα διὰ τοῦ 12 εὑρίσκομεν πηλίκον 8 δέκατα καὶ κατάλοιπον 2 δέκατα· τὰ δύο αὐτὰ δέκατα (=20 ἑκατοστὰ), ὁμοῦ μὲ τὰ 7 ἑκατοστὰ τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσιν 27 ἑκατοστά, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ διαιρέσωμεν διὰ 12· διαιροῦντες καὶ αὐτὰ εὑρίσκομεν πηλίκον 2 ἑκατοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 3 ἑκατοστά· τὰ 3 ταῦτα ἑκατοστὰ ὁμοῦ μὲ τὰ 6 χιλιοστὰ τοῦ διαιρετέου, ἀποτελοῦσι 36 χιλιοστά, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ διαιρεθῶσι διὰ 12· διαιροῦντες καὶ αὐτὰ εὑρίσκομεν πηλίκον 3 χιλιοστὰ καὶ κατάλοιπον 0· ὥστε ἡ διαίρεσις ἐτελείωσε καὶ τὸ πηλίκον εἶναι 1,823. Τὸ πηλίκον δὲ τοῦτο, παρατηροῦμεν, ὅτι ἔχει τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα τοιαῦτα ἔχει ὁ διαιρετέος· διότι εἰς ἕκαστον δεκαδικὸν ψηφίον τοῦ διαιρετέου ἀντιστοιχεῖ ἓν δεκαδικὸν ψηφίον τοῦ πηλίκου.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r|l} 21{,}876 & 12 \\ \hline 98 & 1{,}823 \\ 27 & \\ 36 & \\ 0 & \end{array}$$

130. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ῥηθέντων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου, ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν, ὡς νὰ μὴ ὑπῆρχεν ἡ ὑποδιαστολή, ἤτοι ὡς νὰ ἦτο ὁ διαιρετέος ἀκέραιος καὶ χωρίζομεν ἔπειτα εἰς τὸ πηλίκον τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα τοιαῦτα ἔχει ὁ διαιρετέος.***

***Παραδείγματα.***

$$\begin{array}{r|l} 0{,}15 & 3 \\ \hline 15 & 0{,}05 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 0{,}000158 & 7 \\ \hline 18 & 0{,}000022 \\ 4 & \end{array}$$

Τὸ πηλίκον τῆς δευτέρας διαιρέσεως εἶναι 0,000022 καὶ $\frac{4}{7}$ ἑκατομμυριοστοῦ· καὶ ἂν λάβωμεν ὡς πηλίκον μόνον τὸ 0,000022, θὰ κάμωμεν λάθος μικρότερον τοῦ ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ· τουτέστι θὰ ἔχωμεν τὸ πηλίκον μὲ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ

***Σημείωσις.*** Ἐὰν ἡ διαίρεσις ἀφήσῃ ὑπόλοιπον, δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν πρᾶξιν τρέποντες τὸ ὑπόλοιπον εἰς δεκαδικὰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως (πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν ἓν μηδενικὸν δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου) καὶ διαιροῦντες τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ διαιρέτου. Οὕτω προχωροῦντες, ἐὰν δὲν εὕρωμεν κανὲν ὑπόλοιπον 0, δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν ὅσον θέλομεν, καὶ ἑπομένως νὰ προσδιορίσωμεν τὸ πηλίκον μὲ ὅσην προσέγγισιν θέλομεν.

### *Παραδείγματα.*

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ 125,75 διὰ 7 μὲ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ.

$$\begin{array}{l|l} 125{,}75 & 7 \\ \hline 55 & 17{,}964\ldots \\ \quad 67 & \\ \quad\ 45 & \\ \quad\quad 30 & \\ \quad\quad\ 2 & \end{array}$$

τὸ ἀκριβὲς πηλίκον εἶναι 17,964 καὶ $\frac{2}{7}$ ἑνὸς χιλιοστοῦ· ὥστε παραλείποντες τὸ κλάσμα τοῦτο τοῦ χιλιοστοῦ, ἔχομεν τὸ πηλίκον μὲ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ.

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ 1,6038 διὰ 6 μὲ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

$$\begin{array}{l|l} 1{,}6038 & 6 \\ \hline 16 & 0{,}26\ldots \\ \ 40 & \\ \quad 4 & \end{array}$$

***Σημείωσις.*** Ὅταν τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον παραλείπομεν, ὑπερβαίνῃ τὸ ἥμισυ (ὅταν δηλαδὴ τὸ κατάλοιπον ὑπερβαίνῃ τὸ ἥμισυ τοῦ διαιρέτου), ἐὰν κάμωμεν αὐτὸ 1, προσεγγίζομεν περισσότερον εἰς τὸ ἀληθὲς πηλίκον. Οὕτω, π. χ., εἰς τὴν τελευταίαν διαίρεσιν τὸ πηλίκον ὡς ἔγγιστα εἶναι 0,27, προσεγγίζει δὲ τοῦτο εἰς τὸ ἀληθὲς πηλίκον περισσότερον ἢ τὸ 0,26· καὶ τὸ μὲν 0,26 εἶναι μικρότερον τοῦ ἀληθοῦς, τὸ δὲ 0,27 μεγαλύτερον.

## *Παρατήρησις.*

131. Καὶ ἀκέραιος δι' ἀκεραίου διαιρεῖται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, διότι ὁ ἀκέραιος διαιρετέος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δεκαδικός, τοῦ ὁποίου τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶναι μηδενικά.

Ἂς διαιρεθῇ, π. χ., ὁ ἀκέραιος 17 διὰ τοῦ 20.

$$\begin{array}{r|l} 17 & 20 \\ \hline 170 & 0{,}85 \\ 100 & \\ 0 & \end{array}$$

Ἐπειδὴ τὸ αὐτὸ πηλίκον εἶναι ἴσον μὲ τὸ κλάσμα $\frac{17}{20}$, ἕπεται ὅτι τὸ κλάσμα τοῦτο $\frac{17}{20}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸν δεκαδικὸν 0,85. ***Τρέπομεν*** δηλαδὴ ***τὸ κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του***· ἡ δὲ τροπὴ θὰ γίνῃ ἢ ἀκριβὴς (ἄν ποτε εὑρεθῇ ὑπόλοιπον 0) ἢ κατὰ προσέγγισιν (ἄν ποτε δὲν εὑρίσκεται ὑπόλοιπον 0).

Π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 3 \\ \hline 20 & 0{,}666\ldots \\ 20 & \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$$

εὑρίσκεται ὅμως δεκαδικὸν κλάσμα προσεγγίζον εἰς τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$, ὅσον θέλομεν, διότι τὸ 0,666 διαφέρει τοῦ $\frac{2}{3}$ κατὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ χιλιοστοῦ, ἤτοι ὀλιγώτερον τοῦ ἑνὸς χιλιοστοῦ. Ὁμοίως τὸ δεκαδικὸν 0,666666 διαφέρει τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον τοῦ ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ. Ἂν π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ εἶναι τῆς δραχμῆς, τρεπόμενον εἰς δεκαδικὸν γίνεται 0,66, ἤτοι 66 λεπτὰ (διότι τὸ ἑκατοστὸν τῆς δραχμῆς λέγεται λεπτὸν) καὶ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἑκατοστοῦ, ἤτοι τοῦ λεπτοῦ· ἡ δὲ προσέγγισις αὕτη μέχρι τῶν ἑκατοστῶν τῆς δραχμῆς ἀρκεῖ διὰ τὰς συνήθεις περιστάσεις.

## *Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.*

283) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ διαιρέσεις

| | |
|---|---|
| 9,09 : 9 | 83,5128 : 36 |
| 0,121 : 11 | 5,705 : 35 |
| 0,0035 : 7 | 0,3465 : 231 |
| 5,0024 : 8 | 9,765 : 1050 |

284) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων κατὰ προσέγγισιν 0,001

| | |
|---|---|
| 0,569 : 21 | 3,4 : 701 |
| 73,18 : 137 | 76,5 : 859 |

285) Ὁμοίως τῶν κάτωθι διαιρέσεων κατὰ προσέγγισιν 0,0001

| | |
|---|---|
| 24,8 : 7 | 206,7 : 419 |
| 142,56 : 23 | 0,572 : 303 |

286) Νὰ τραπῶσιν εἰς δεκαδικὰ τὰ κοινὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{16}$, $\frac{9}{25}$, $\frac{19}{32}$, $\frac{13}{40}$, $\frac{27}{64}$, $\frac{111}{125}$.

287) Ὁμοίως τὰ $2\frac{3}{8}$, $3\frac{3}{12}$, $7\frac{9}{20}$, $11\frac{21}{80}$, $5\frac{121}{200}$.

288) Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{7}{9}$ τῆς δραχμῆς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.

(ἀπ. 0,777 ἤτοι 77 λεπτὰ καὶ $\frac{7}{9}$ τοῦ λεπτοῦ σχεδὸν 0.78 ἤτοι 78 λεπτά)

289) Ἐπώλησέ τις 232 ὀκάδας πράγματος ἀντὶ 3677,20 δραχ. πόσον ἐπώλησε τὴν μίαν ὀκᾶν; (ἀπ. 15,85)

290) Ἐργοστασιάρχης ἐπλήρωσε δι' ἐργασίαν μιᾶς ἡμέρας εἰς 7 ὁμάδας ἐξ 9 ἐργατῶν ἑκάστη, 3008,25 δραχ. πόσον εἶναι τὸ ἡμερομίσθιον ἑνὸς ἐργάτου; (ἀπ. 47, 75)

291) Βιβλίον τι ἔχει 320 σελίδας καὶ τὸ πάχος αὐτοῦ, ὅταν σφιχθῇ καλῶς, εἶναι 0,015 τοῦ μέτρου· πόσον εἶναι τὸ πάχος ἑκάστου φύλλου; (τὰ φύλλα ὑποθέτω, ὅτι ἔχουν ὅλα ἴσον πάχος)
(ἀπ. 0,015 : 160 ἤτοι 0,000094...)

292) Νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ $\frac{3}{4}$ καὶ 0,275 (ἀπ. 0,75 + 0,275)

293) Νὰ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ $2\frac{1}{2}$ καὶ 4,8.

## 2) Διαίρεσις δεκαδικοῦ διὰ δεκαδικοῦ.

132. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ δεκαδικοῦ, μεταθέτομεν πρῶτον τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ εἰς τοὺς δύο, ἴσας θέσεις πρὸς τὰ ἐμπρός, ὥστε νὰ γίνῃ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος· ἔπειτα διαιροῦμεν κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα.*

Ἐὰν ὁ διαιρετέος δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ δεκαδικὰ ψηφία, διὰ νὰ μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολή, γράφομεν μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ.

*Παραδείγματα.*

1) Νὰ διαιρεθῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 15,897 διὰ τοῦ 3,1.

Μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ εἰς τοὺς δύο ἀπὸ μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἐμπρός, τοῦτέστι πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ἐπὶ 10· τὸ πηλίκον αὐτῶν δὲν βλάπτεται (ἐδ. 61)· τοιουτοτρόπως ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν.

| | |
|---|---|
| 158,97 | 31 |
| 39 | 5,12 |
| 87 | |
| 25 | |

2) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 0,37 διὰ 1,897.

Μεταθέτομεν τὰς ὑποδιαστολὰς τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ ἐμπρός, ἤτοι πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ἐπὶ 1000· τὸ πηλίκον αὐτῶν δὲν βλάπτεται καὶ ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν ἀκέραιον δι᾽ ἀκεραίου.

| | |
|---|---|
| 370 | 1897 |
| 3700 | 0,19 . . . |
| 1897 | |
| 18030 | |
| 17073 | |
| 957 | |

3) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 1,51 διὰ τοῦ 2,67.

Μεταθέτομεν τὰς ὑποδιαστολὰς δύο θέσεις πρὸς τὰ ἐμπρός, τουτέστι πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ἐπὶ 100· τὸ πηλίκον αὐτῶν δὲν βλάπτεται καὶ ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν

```
 151      | 261
 1510     |--------
 1305     | 0,57 . . .
 ----
 2050
 1827
 ----
  223
```

Τὸ πηλίκον εἶναι 0,57 ἢ μᾶλλον 0,58 μὲ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$.

## *Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.*

294) Νὰ εὑρεθῶσιν τὰ πηλίκα

| | |
|---|---|
| 0,35 : 0,7 | 2 : 0,5 |
| 0,45 : 0,15 | 3 : 0,25 |
| 0,006 : 0,06 | 72 : 0,09 |
| 0,072 : 0,4 | 144 : 0,012 |

295) Ὁμοίως τὰ

| | |
|---|---|
| 2875 : 2,857 | 8,5604 : 0,4 |
| 819 : 0,0819 | 345,6 : 0,064 |
| 8675,6 : 0,001 | 0,00027 : 11,07 |

296) Ἐργάτης τις λαμβάνει δι' ἑκάστην ὥραν ἐργασίας δραχ. 8,75· πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ λάβῃ 638 δραχ. καὶ 75 λεπτά ; (ἀπ. 73)

297) Διὰ νὰ μεταφέρωσιν ὕδωρ ἔκ τινος πηγῆς, εἰς ἀπόστασιν 2085 μέτρων, ἐχρησιμοποίησαν σωλῆνας μήκους 0,75 τοῦ μέτρου· πόσους τοιούτους σωλῆνας ἐχρησιμοποίησαν ; (ἀπ. 2780)

298) Εἶχέ τις οἶνον, τὸ ἥμισυ τοῦ ὁποίου ἐπώλησε πρὸς 7,86 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἔλαβε 884,25 δραχμάς· πόσον οἶνον εἶχεν ; (ἀπ. 225)

299) Ἠγόρασέ τις ὕφασμα πρὸς 48,75 δραχμὰς τὸν πῆχυν καὶ μετεπώλησεν αὐτὸ πρὸς 57 δραχ. τὸν πῆχυν, ἐκέρδισε δὲ οὕτω ἐν ὅλῳ 693 δραχ. ἐκ πόσων πήχεων ἀπετελεῖτο τὸ ὕφασμα ; (ἀπ. 84)

300) Ἠγόρασέ τις παρὰ κρεοπώλου ὁλόκληρον ἀρνίον μὲ 208,80 δραχ. τὸ ἀρνίον ἐζύγιζεν $5\frac{1}{2}$ ὀκάδας· πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν ;
(ἀπ. 38,15 περίπου)

301) Ποία εἶναι ἡ πραγματικὴ ἀξία ἑνὸς χαρτονομίσματος τῶν 1000 δραχμῶν, ὅταν τὸ χρυσοῦν εἰκοσάφραγκον ἰσοδυναμῇ μὲ 300,40 χαρτίνας δραχμάς ; $\left(\text{ἀπ. } \frac{20\times1000}{300,4}\right)$

302) Πωλήσας ἔμπορός τις $50\frac{3}{4}$ ὀκάδας κριθῆς πρὸς $3\frac{1}{2}$ δραχ. τὴν ὀκᾶν, ἐζημιώθη 40,6 δραχ. πρὸς πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὴν κριθήν; (ἀπ. 4,30).

## Ὁρισμοί.

133. ***Τετραγωνικὴ ῥίζα*** ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει αὐτὸν τετράγωνον.

Παραδείγματος χάριν, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 81 εἶναι ὁ 9· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 9 εἶναι 81· ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{25}{36}$ εἶναι τὸ $\frac{5}{6}$· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{5}{6}$ εἶναι $\frac{25}{36}$ κτλ.

Τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν παριστῶμεν διὰ τοῦ σημείου $\sqrt{\ }$, τὸ ὁποῖον λέγεται ριζικόν· οἷον $\sqrt{49}$ σημαίνει τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 49, ἤτοι τὸ 7, καὶ $\sqrt{\frac{1}{4}}$ σημαίνει τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ $\frac{1}{4}$, ἤτοι τὸ $\frac{1}{2}$.

134. ***Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος*** λέγεται ὁ μέγιστος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος· οἷον τοῦ 58 τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 7· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 7 εἶναι 49 (καὶ χωρεῖ εἰς τὸν 58), τοῦ δὲ 8 εἶναι 64, τουτέστι μεγαλύτερον τοῦ 58. Ὁμοίως τοῦ 17 τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 4, καὶ τοῦ $17\frac{1}{2}$ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὡσαύτως ὁ 4· τοῦ δὲ 25 τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισισιν μονάδος εἶναι ὁ 5.

135. Τετραγωνικὴ δὲ ρίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ λέγεται ἐκ τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἔχουσι παρονομαστὴν τὸν 10, τὸ μέγιστον, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

Παραδείγματος χάριν, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ εἶναι $\frac{14}{10}$· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{14}{10}$ ἤτοι τὸ $\frac{196}{100}$, χωρεῖ εἰς τὸν ἀριθμὸν 2 ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{15}{10}$ δὲν χωρεῖ εἰς τὸν 2, διότι εἶναι $\frac{225}{100}$ ἢ 2,25.

136. Ἐπίσης τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ λέγεται ἐκ τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἔχουσι παρονομαστὴν τὸν 100, τὸ μέγιστον, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος. Καὶ γενικῶς.

137. Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν κλασματικῆς μονάδος λέγεται τὸ μεγαλύτερον πολλαπλάσιον αὐτῆς, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

### ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ

138. Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης δοθέντος ἀριθμοῦ λέγεται ἡ πρᾶξις, δι᾽ ἧς εὑρίσκομεν τὴν τετραγωγικὴν ῥίζαν αὐτοῦ, ἢ τὴν ἀκριβῆ (ἂν εἶναι τέλειον τετράγωνον), ἢ τὴν κατὰ προσέγγισιν ὡρισμένην.

Πρὶν ἢ μάθωμεν πῶς ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἀναφέρομεν τοὺς ἑξῆς πρακτικοὺς κανόνας, διὰ τῶν ὁποίων διακρίνομεν πότε ἀριθμός τις δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

1) Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγῃ εἰς ἓν ἐκ τῶν ψηφίων
2, 3, 7, 8,
δὲν εἶναι τετράγωνον.

2) Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγῃ εἰς περιττὸν ἀριθμῶν μηδενικῶν (ὡς οἱ 50, 15000 κτλ.) δὲν εἶναι τετράγωνον.

## *Α) Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.*

139. Ἂν μὲν ὁ δοθεὶς ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ 100, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ (ἢ ἡ ἀκριβὴς ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος) θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 100, ἤτοι μικροτέρα τοῦ 10· ἄρα θὰ εἶναι μονοψήφιος· εὑρίσκομεν δ᾽ αὐτὴν ἀμέσως ἀπὸ μνήμης, διότι ἐκ τοῦ πυθαγορείου πίνακος ἐνθυμούμεθα ἀμέσως τὰ τετράγωνα πάντων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν.

Παραδείγματος χάριν, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 49 εἶναι 7· διότι $7 \times 7 = 49$. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 35 (κατὰ προσέγγισιν μονάδος) εἶναι ὁ 5· διότι τὸ τετράγωνον αὐτοῦ (ἤτοι τὸ 25) χωρεῖ εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμὸν καὶ μένει καὶ ὑπόλοιπον 10, ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀμέσως μεγαλυτέρου ἀκεραίου (τοῦ 6) δὲν χωρεῖ.

140. Ἂν δὲ ὁ δοθεὶς ἀκέραιος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 100, εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν (ἐὰν δὲν εἶναι προφανής, ὅπως π. χ. τοῦ $10000=(100)^2$ διὰ τῆς ἑξῆς πράξεως.

Ἔστω π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 3854.

$$
\begin{array}{r|r}
38'54 & 62 \\ \hline
36 & 122 \\ \cline{1-1}
25'4 & 2 \\ \cline{2-2}
24'4 & 244 \\ \cline{1-1}
10 &
\end{array}
$$

Ὁ μηχανισμὸς τῆς πράξεως ταύτης ἔχει ὡς ἑξῆς· α') χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα διψήφια ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας· β') ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ πρώτου τμήματος, ὅπερ εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἀριθμοῦ καί, εἰς τὸ παράδειγμά μας, εἶναι διψήφιον (τὸ 38). Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ τμήματος τούτου θὰ εἶναι τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης ρίζης (τὸ 6)· γ') ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ρίζης (τὸ 36) ἀπὸ τοῦ τμήματος, ἐξ οὗ εὑρέθη (τὸ 38), καὶ δεξιὰ τοῦ μένοντος ὑπολοίπου (2) καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον τμῆμα (τὸ 54), ὅτε σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς 254· δ') τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἀποχωρίζομεν τὰς ἁπλᾶς μονάδας (4) καὶ διαιροῦμεν τὰς δεκάδας του (25) διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῆς ρίζης (12) ε') διὰ νὰ δοκιμάσωμεν, ἂν τὸ πηλίκον τῆς τελευταίας ταύτης διαιρέσεως (τὸ 2) εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ζητουμένης ρίζης, τὸ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου αὐτῆς (τοῦ 12) καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν (τὸν 122) πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ἴδιον πηλίκον 2, τὸ δὲ γινόμενον (244) ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 254. Τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 10 καὶ λέγεται ***ὑπόλοιπον τῆς ὅλης πράξεως*** (τὸ ὁποῖον δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης τετραγωνικῆς ρίζης). Δηλαδὴ εἶναι $3854=(62)^2+10$ καὶ ἑπομένως ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3854 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 62.

## *Παρατηρήσεις.*

1) Εἶναι ἐνδεχόμενον εἰς ἄλλα παραδείγματα τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον σχηματίζομεν κατὰ τὸ ἐδάφιον 140, νὰ μὴ ἀφαιρῆται ἀπὸ

τὸν σχηματισθέντα ἀριθμόν, τότε δοκιμάζομεν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν ψηφίον δίδον γινόμενον, τὸ ὁποῖον ν' ἀφαιρῆται. Τὸ τελευταῖον τοῦτο ψηφίον εἶναι τὸ ζητούμενον ψηφίον τῆς ρίζης.

Ἐὰν ὅμως ἡ ἀφαίρεσις τοῦ γινομένου, τὸ ὁποῖον σχηματίζομεν κατὰ τὸ ἐδ. 140 ἀπὸ τὸν σχηματισθέντα ἀριθμόν, δίδει ὑπόλοιπον μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον κάμνουσι ὅλα τὰ εὑρεθέντα ὡς ψηφία τῆς ρίζης, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μεγαλύτερον ψηφίον καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις οὗ εὕρωμεν ψηφίον δίδον γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἀφαιρούμενον ἀπὸ τὸν σχηματισθέντα ἀριθμόν, νὰ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ διπλασίου τοῦ ὡς ἄνω ἀριθμοῦ.

2) Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἔμεινεν ὑπόλοιπον τὸ (10). Δυνατὸν εἰς ἄλλα παραδείγματα νὰ μὴ μείνῃ. Τότε ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι τέλειον τετράγωνον καὶ ἡ ἐξαχθεῖσα τετραγωνικὴ ρίζα εἶναι ἡ ἀκριβής. Τοῦτο π.χ. συμβαίνει εἰς τὸν ἀριθμὸν 289. Ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικήν του ρίζαν κατὰ τὸν κανόνα, εὑρίσκομεν $\sqrt{289}=17$.

3) Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἀνελύθη εἰς δύο μόνον διψήφια τμήματα. Ἂν ὅμως ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος, π.χ. ὀκταψήφιος ἢ ἑπταψήφιος κτλ. ἀναλυόμενος δίδει τμήματα διψήφια, τρία ἢ τέσσαρα ἢ καὶ περισσότερα. Τότε διὰ μὲν τὸ πρῶτον τμῆμα ἐκτελοῦμεν τὰ τοῦ ἐδαφίου 140, εἶτα διὰ τὰ λοιπὰ τμήματα μέχρι τοῦ τελευταίου ἐφαρμόζομεν ὅσα ἐκεῖ εἴπομεν διὰ τὸ δεύτερον τμῆμα διαιροῦντες τὰς δεκάδας τοῦ ἑκάστοτε σχηματιζομένου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν ὅλα τὰ εὑρεθέντα ψηφία τῆς ρίζης.

## *Β΄) Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.*

141. Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ δεκαδικοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος λέγεται ἡ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ ἀκεραίου μέρους του. Π. χ. τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 58742,34 ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 242, δηλαδὴ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ ἀριθμοῦ. Ἐὰν ὅμως θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μὲ μεγαλυτέραν

προσέγγισιν, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 587,42. Πρῶτον παρατηροῦμεν, ἂν ἔχῃ ἄρτιον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων, ὡς συμβαίνει ἐνταῦθα, (ἂν δὲ ἔχῃ περιττόν, προσθέτομεν ἓν μηδενικὸν εἰς τὸ τέλος του, ὅπερ δὲν βλάπτει αὐτόν). Εἶτα ἐξάγομεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ 58742, ὡς ἐὰν ἦτο ἀκέραιος, παραβλέποντες δηλαδὴ τὸ κόμμα, καὶ εὑρίσκομεν 242 κατὰ προσέγγισιν μονάδος Τέλος, εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν τετραγωνικὴν ρίζαν χωρίζομεν ἀπὸ τοῦ τέλους δεκαδικὰ ψηφία δύο φορὰς ὀλιγώτερα ἐκείνων, ἅτινα ἔχει ὁ ἀριθμὸς 587,42, καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 24,2. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς δεκάτου, δηλαδὴ κατὰ προσέγγισιν τῆς τελευταίας δεκαδικῆς κλασματικῆς μονάδος τοῦ ἀριθμοῦ 24,2.

### *Παρατήρησις.*

Ἐπειδὴ πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δεκαδικὸς μὲ δεκαδικὰ ψηφία ὅλα μηδέν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν κατὰ τὸν προηγούμενον τρόπον τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν οἱουδήποτε ἀκεραίου κατὰ προσέγγισιν τῆς τυχούσης κλασματικῆς δεκαδικῆς μονάδος. Π. χ., διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 5 κατὰ προσέγγισιν 0,01, τὸν γράφομεν ὡς ἑξῆς : 5,0000 καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν προηγούμενον κανόνα εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 2,23. Τὸν ἴδιον κανόνα δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν πρὸς εὕρεσιν τῆς τετραγωνικῆς του ρίζης κατὰ προσέγγισιν οἱασδήποτε δεκαδικῆς κλασματικῆς μονάδος, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν ἀνάλογον ἀριθμὸν μηδενικῶν εἰς τὸ τέλος του ἢ καὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν δεκαδικὰ ψηφία, ἐὰν περισσεύουν.

## *Γ') Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.*

142. 1) Ἂν τύχῃ τοῦ δοθέντος κλάσματος καὶ οἱ δύο ὅροι νὰ εἶναι ἢ νὰ γίνωνται δι' ἁπλοποιήσεως τετράγωνα ἀκεραίων, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ **κλάσματος** εὑρίσκεται ἀκριβῶς καὶ εἶναι ἴση πρὸς κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ δοθέντος καὶ παρονομαστὴν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ παρονομαστοῦ.

Ἂν τὸ προηγούμενον δὲν συμβαίνῃ,

2) Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ κλάσματος κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀκεραίου μέρους του. Π. χ.

$$\sqrt{1\frac{5}{8}} = 1, \qquad \sqrt{65\frac{2}{3}} = 8,$$

$$\sqrt{25\frac{1}{2}} = 5, \qquad \sqrt{\frac{4}{7}} = 0.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν ὅμως μὲ μεγαλυτέραν προσέγγισιν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν, τρέπομεν τὸ δοθὲν κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικὸν καὶ ἔπειτα ἐργαζόμεθα κατὰ τοὺς κανόνας τῆς περιπτώσεως τῶν δεκαδικῶν.

***Παράδειγμα :***

$$\sqrt{17\frac{3}{4}} = 4{,}21 \text{ κατὰ προσέγγισιν } 0{,}01.$$

## *Ἀσκήσεις.*

303) Νὰ εὑρεθοῦν ὅλοι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ μέχρι τοῦ 100, ὅσοι εἶναι τετράγωνα ἄλλων ἀκεραίων.

304) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι, αἱ ἀκριβεῖς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, τῶν ἑξῆς ἀκεραίων : 18, 26, 38, 48, 64, 75, 86, 99, 100.

305) Νὰ εὑρεθοῦν κατὰ προσέγγισιν 0,1 αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν :

$$28, \ 3{,}05, \ \frac{3}{5}, \ \frac{36}{400}.$$

306) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἑξῆς τετραγωνικαὶ ρίζαι·

$\sqrt{8{,}34}$ κατὰ προσέγγισιν 0,1

$\sqrt{9432}$ » » 0,01

$\sqrt{47\frac{2}{3}}$ » » 0,1

$\sqrt{\frac{9}{7}}$ » » 0,01

307) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τετραγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 575 τετραγ. μέτρα.

308) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ μία κάθετος πλευρὰ εἶναι 12 μ. καὶ ἡ ἄλλη 6.

('Απόκρ. $\sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180}$).

309) Μὲ 400 δραχμὰς ἠγόρασα τόσας ὀκάδας ἑνὸς πράγματος, ὅσα λεπτὰ ἐστοίχιζεν ἡ ὀκᾶ. Πόσας ὀκάδας ἠγόρασα ;

# ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ

# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

## ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'

## ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

### Ὁρισμοί.

143. ***Ποσὸν*** λέγεται κάθε πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον ἐπιδέχεται αὔξησιν καὶ ἐλάττωσιν.

***Μέτρησις*** τοῦ ποσοῦ λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδές, ὡρισμένον καὶ γνωστόν, τὸ ὁποῖον λέγεται ***μονάς***. Διὰ τῆς συγκρίσεως ταύτης εὑρίσκομεν, πόσαι μονάδες ἢ μέρη τῆς μονάδος ἀποτελοῦσι τὸ ποσὸν καὶ παριστάνομεν αὐτὸ δι' ἀριθμοῦ. Ἐάν, παραδείγματος χάριν, τὸ ποσὸν ἀποτελῆται ἀπὸ τὴν μονάδα καὶ ἀπὸ τὸ ἥμισυ αὐτῆς, θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $1\frac{1}{2}$· ἐὰν δὲ ἀποτελῆται ἀπὸ τὴν μονάδα λαμβανομένην πέντε φοράς, θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ 5.

Διὰ νὰ ἀποφύγωσι τὰ κλάσματα, ἔδωκαν εἴς τινα μέρη τῆς ἀρχικῆς μονάδος ἰδιαίτερα ὀνόματα καὶ ἐθεώρησαν αὐτὰ ὡς νέας μονάδας· παραδείγματος χάριν, τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς ὠνόμασαν ***δράμιον*** καὶ ἐπομένως ἀντὶ νὰ λέγωσιν, ὅτι βάρος τι εἶναι 27 ὀκάδες καὶ $\frac{150}{400}$ τῆς ὀκᾶς, λέγουσιν, ὅτι εἶναι 27 ὀκάδες καὶ 150 δράμια· ὁμοίως τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως ὠνόμασαν ***ῥούπιον***· τὸ $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας ὠνόμασαν ***λεπτὸν πρῶτον***· τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς δραχμῆς ***λεπτόν***· καὶ τὸ $\frac{1}{40}$ τοῦ γροσίου (τουρκικοῦ νομίσματος) ***παρᾶν***.

Ἐπίσης διὰ νὰ ἀποφύγωσι τοὺς μεγάλους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι προκύπτουσιν, ὅταν τὸ ποσὸν εἶναι πολὺ μέγα ὡς πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα, ἔλαβον πολλαπλάσιά τινα αὐτῆς ὡς νέας μονάδας καὶ ἔδωκαν εἰς αὐτὰ ἰδιαίτερα ὀνόματα· ἐάν, π. χ., πρόκειται νὰ μετρήσωμεν τὸ μάκρος ἑνὸς τοίχου, ἀρκεῖ ὁ πῆχυς, ἀλλ᾽ ἐὰν ἔχωμεν νὰ μετρήσωμεν τὴν ἀπόστασιν τῶν Ἀθηνῶν ἀπὸ τῆς Κωνσταντινουπόλεως, λαμβάνομεν 1000 πήχεις, ὡς μίαν μονάδα, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν ***στάδιον***.

144. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἠμπορεῖ ποσόν τι νὰ παριστάνηται δι᾽ ἀριθμοῦ συγκειμένου ἐκ πολλῶν ἄλλων, ὁμοειδῶν μέν, ἀλλ᾽ ἐχόντων διαφόρους μονάδας· ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς λεγεται ***συμμιγὴς*** ἀριθμός.

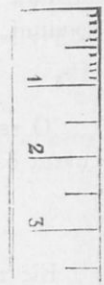
Ἐκ τούτων ὁδηγούμεθα εἰς τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τῶν συμμιγῶν.

145. ***Συμμιγὴς ἀριθμὸς εἶναι ἀριθμὸς συγκεκριμένος σύνθετος ἐξ ἄλλων, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι πολλαπλάσια μιᾶς ἀρχικῆς μονάδος ἢ μέρη αὐτῆς, ἔχοντα ἴδιον ὄνομα ἕκαστον.***

Οἷον, 7 ὀκάδες καὶ 250 δράμια εἶναι συμμιγὴς ἀριθμός.

146. Πρὶν μάθωμεν, πῶς γίνονται αἱ πράξεις τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, πρέπει νὰ μάθωμεν τὰ διάφορα εἴδη αὐτῶν.

Τὰ διάφορα ἔθνη δὲν λαμβάνουσι δι᾽ ἕκαστον ποσὸν οὔτε τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν μονάδα οὔτε τὰς αὐτὰς ὑποδιαιρέσεις αὐτῆς· διὰ τοῦτο ἐκθέτομεν ἐν τοῖς ἑξῆς τὰ κυριώτερα εἴδη τῶν συμμιγῶν, μάλιστα δέ, ὅσα ἡμεῖς μεταχειριζόμεθα.



## *Μονάδες μήκους.*

### *1) Γαλλικὸν μέτρον ἢ βασιλικὸς πῆχυς.*

Ἡ κυριωτέρα μονὰς τοῦ μήκους, τῆς ὁποίας ἡ χρῆσις ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐξαπλοῦται εἶναι τὸ ***γαλλικὸν μέτρον***.

Ἡ μονὰς αὕτη συνδέεται πρὸς τὸ μέγεθος τῆς γῆς· διότι ὡρίσθη οὕτως, ὥστε ἡ περιφέρεια τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς νὰ ἔχῃ μῆκος 40000000 μέτρα.

Ἐν Ἑλλάδι τὸ γαλλικὸν μέτρον ὠνομάσθη ***βασιλικὸς πῆχυς***. ***Μέτρον ἢ βασιλικὸς πῆχυς,*** ἀρχικὴ μονάς.

***Παλάμη*** $= \frac{1}{10}$ τοῦ πήχεως ***Στάδιον*** = 1000 μέτρα.

***Δάκτυλος*** $= \frac{1}{10}$ τῆς παλάμης.

***Γραμμὴ*** $= \frac{1}{10}$ τοῦ δακτύλου.

Λοιπὸν 1 πῆχ. = 10 παλ. = 100 δάκτ. = 1000 γραμμαί.

1 παλ. = 10 δάκτ = 100 γραμμαί.

1 δάκτ. = 10 γραμμαί.

Τὸ ἀπέναντι σχῆμα παριστᾷ μίαν παλάμην διῃρημένην εἰς δακτύλους.

Καθὼς βλέπομεν, αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου εἶναι δεκαδικαί· τοῦτο δὲ ἔγινε διὰ τὴν εὐκολίαν τῶν πράξεων.

Διότι πᾶς ἀριθμός, ὅστις παριστᾷ μῆκος, ἤτοι σύγκειται ἐκ μέτρων, παλαμῶν, δακτύλων καὶ γραμμῶν, παρίσταται καὶ ὡς δεκαδικὸς ἀριθμός, ἔχων ἀκέραιον μέρος τοὺς πήχεις, δέκατα τὸν ἀριθμὸν τῶν παλαμῶν, ἑκατοστὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν δακτύλων καὶ χιλιοστὰ τὸν ἀριθμῶν τῶν γραμμῶν. Οἷον, 15 πήχ., 2 παλ., 3 δακτ., 5 γραμμ., εἶναι = 15 πήχ. 235.

Ἑπομένως αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν συμμιγῶν τούτων ἀριθμῶν ἀνάγονται εἰς τὰς πράξεις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 15 πήχ. 235 ἀπαγγέλλεται, κατὰ τὰ λεχθέντα περὶ ἀπαγγελίας τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν (ἐδ. 122), καὶ ὡς ἑξῆς : 152 παλάμαι καὶ 35 γραμμαί, ἢ 15235 γραμμαί, ἢ 1523 δάκτυλοι καὶ 5 γραμμαί, κτλ.

### 2) *Τεκτονικὸς πῆχυς.*

Ὁ τεκτονικὸς πῆχυς εἶναι τὰ 75 ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου· μεταχειρίζονται δὲ αὐτὸν εἰς τὰς οἰκοδομὰς καὶ εἰς τὰ οἰκόπεδα.

### 3) *Πήχεις τοῦ ἐμπορίου.*

Εἰς τὸ ἐμπόριον διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑφασμάτων μεταχειρίζονται τὸν μικρὸν πῆχυν τῆς Κωνσταντινουπόλεως, ὅστις ὀνομάζεται ***ἐνδεζὲ*** καὶ εἶναι 0,648 πήχ. (ἤτοι 648 χιλιοστὰ τοῦ γαλλικοῦ μετρου), καὶ τὸν μεγαλύτερον, ὅστις λέγεται ***ἀρσὶν*** καὶ εἶναι 0,669 μέτρα· διαιρεῖται δὲ ἕκαστος τούτων εἰς 8 ***ῥούπια.***

### 4) *Ὀργυιά.*

Ἡ ὀργυιὰ εἶναι παλαιοτέρα ἀρχικὴ μονὰς τοῦ μήκους. Ἔχει δὲ τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις.

***Ὀργυιά***, ἀρχικὴ μονὰς  ***Ποὺς*** $= \frac{1}{6}$ τῆς ὀργυιᾶς.

***Δάκτυλος*** $= \frac{1}{12}$ τοῦ ποδός.  ***Γραμμὴ*** $= \frac{1}{12}$ τοῦ δακτύλου.

Ἡ χρῆσις τῆς ὀργυιᾶς καὶ τῶν ὑποδιαιρέσεων αὐτῆς ἤρχισεν ἤδη νὰ γίνηται σπανιωτέρα.

Ἡ σχέσις αὐτῆς πρὸς τὸ μέτρον εἶναι ἡ ἑξῆς :

1 ὀργ. = 1,94904 μέτρ. καὶ 1 μέτρ. = 0 ὀργ., 3 πόδ., 21 γρ. $\frac{296}{1000}$.

1 ποὺς = 0,32484 τοῦ μέτρου.

***Σημείωσις.*** Οἱ Ἄγγλοι μεταχειρίζονται ὡς ἀρχικὴν μονάδα μήκους τὴν ***ὑάρδαν***· ἑκάστη ὑάρδα διαιρεῖται εἰς 3 πόδας, ἕκαστος δὲ ποὺς ὑποδιαιρεῖται εἰς 12 δακτύλους.

Ἡ σχέσις αὐτῆς πρὸς τὸ μέτρον εἶναι ἡ ἑξῆς· 1 ὑάρδα = 0,91439 μέτρα.

Οἱ Ἰταλοὶ καὶ οἱ Γερμανοὶ παρεδέχθησαν τὸ γαλλικὸν μέτρον, οἱ δὲ Ῥῶσοι ἔχουσι μονάδα μήκους τὸ ***ἀρσὶν*** = 0, μ. 711 τοῦ μέτρου.

### *5) Μίλια.*

Τὸ γεωγραφικὸν ἢ Γερμανικὸν μίλιον εἶναι 7420,440· μέτρα (περιέχεται δὲ 5400 φορὰς εἰς τὸν μεσημβρινὸν τῆς γῆς, τουτέστιν ὅλη ἡ περιφέρεια τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς εἶναι 5400 γεωγραφικὰ μίλια).

Τὸ ἀγγλικὸν μίλιον εἶναι 1760 ὑάρδαι ἢ μέτρα 1609,3295.

Τὸ ναυτικὸν μίλιον δι' ὅλα τὰ ἔθνη εἶναι μέτρα 1852· περίπου τὸ τέταρτον τοῦ γεωγραφικοῦ μιλίου.

Τὸ ῥωσικὸν βέρστιον ἔχει 1500 ἀρσίν, ἤτοι 1066 μ., 79.

### *Ἀσκήσεις.*

310) Νὰ τραπῶσιν 158 μικροὶ πήχεις εἰς μέτρα. (ἀπ. $0,64 \times 158$)

311) Νὰ τραπῶσιν 285 τεκτονικοὶ πήχεις εἰς μέτρα. (ἀπ. $0,75 \times 285$)

312) Νὰ τραπῶσιν 464 μέτρα εἰς μικροὺς πήχεις. $\left(\text{ἀπ. } \frac{464}{0,64}\right)$

313) Νὰ τραπῶσιν 261 μέτρα εἰς τεκτονικοὺς πήχεις. $\left(\text{ἀπ. } \frac{261}{0,75}\right)$

314) 763,5 μέτρα νὰ τραπῶσιν α) εἰς ὑάρδας β) εἰς ἀρσίν.

315) 105,5 ὑάρδαι νὰ τραπῶσιν εἰς μικροὺς πήχεις.

316) 312 μικροὶ πήχεις νὰ τραπῶσιν εἰς ὑάρδας.

317) 117,25 ναυτικὰ μίλια πόσα χιλιόμετρα κάμνουν;

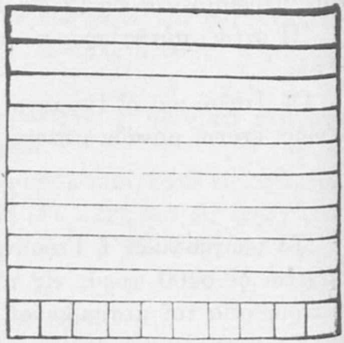
318) Νὰ τραπῶσιν 468,750 χιλιόμετρα εἰς ναυτικὰ μίλια.

## *Μονάδες ἐπιφανείας.*

Μονάδες ἐπιφανειῶν εἶναι τὰ τετράγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι πλευρὰς τὰς μονάδας τοῦ μήκους.

Εἶναι δὲ τὸ τετράγωνον ἐπιφάνεια ἐπίπεδος, περικλειομένη ὑπὸ τεσσάρων ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουσιν ὀρθὰς γωνίας.

***Τετραγωνικὸς πῆχυς*** λέγεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ ἕνα πῆχυν.



***Τετραγωνικὴ παλάμη*** λέγεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μία παλάμη ($=\frac{1}{10}$ τοῦ πήχεως)· εἶναι δὲ ἡ τετραγωνικὴ παλάμη τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως. Ἐάν, τῷ ὄντι, θέσωμεν 10 τετραγωνικὰς παλάμας εἰς μίαν σειρὰν καὶ προσαρμόσωμεν αὐτάς, θὰ ἀποτελεσθῇ ἓν ὀρθογώνιον, ἔχον βάσιν 1 πῆχυν καὶ ὕψος $\frac{1}{10}$ τοῦ πήχεως, ἤτοι μίαν παλάμην. Ἐὰν δὲ 10 τοιαῦτα ὀρθογώνια προσκολλήσωμεν (κατὰ τὰς μεγαλυτέρας πλευράς των), θὰ ἀποτελεσθῇ ὁ τετραγωνικὸς πῆχυς· ὥστε ὁ τετραγωνικὸς πῆχυς περιέχει $10 \times 10$ ἤτοι 100 τετραγωνικὰς παλάμας.

***Τετραγωνικὸς δάκτυλος*** λέγεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι εἷς δάκτυλος $\left(=\frac{1}{10}\right.$ τῆς παλάμης $=\frac{1}{100}$ τοῦ πήχεως$\left.\right)$· εἶναι δὲ ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς τετραγωνικῆς παλάμης καὶ τὸ $\frac{1}{10000}$ τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως.

Καὶ ἐνταῦθα αἱ ὑποδιαιρέσεις εἶναι δεκαδικαί· ὥστε πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος παριστᾷ ἐπιφάνειαν, ἤτοι σύγκειται ἐκ τετραγωνικῶν πήχεων, τετραγωνικῶν παλαμῶν, τετραγωνικῶν δακτύλων, γράφεται καὶ ὡς δεκαδικὸς ἀριθμός, οἷον, 3τπ, 15τπλ, 2τδ. γράφεται 3τπ., 1502· ἀπαγγέλλεται δὲ (σύμφωνα μὲ τὰ λεχθέντα ἐν τῷ ἐδ. 122) κατὰ πολλοὺς τρόπους· π.χ., 3 τετρ. πήχ., 15 τετρ. παλ. καὶ 2 τετρ. δάκτ. ἢ 315 τετρ. παλ. καὶ 2 τετρ. δάκτυλοι, ἢ 31502 τετρ. δάκτυλοι, κτλ.

***Τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς*** εἶναι τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι εἷς τεκτονικὸς πῆχυς· εἶναι δὲ ἐν χρήσει διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων.

Ἡ σχέσις αὐτοῦ πρὸ τὸ τετρ. μέτρον εἶναι ἡ ἑξῆς: 1 τεκ. τετ. π. $= \frac{9}{16}$ τοῦ τετραγ. πήχ. καὶ ἑπομένως 1 τετραγ. π. $= \frac{16}{9}$ τοῦ τετραγ. τεκτ. πήχ.

Διὰ τὰς μεγάλας ἐπιφανείας μεταχειρίζονται ἐν Γαλλίᾳ, Γερμανίᾳ καὶ Ἀγγλίᾳ ὡς μονάδα τὸ καλούμενον ἄρουρα (are). Εἶναι δὲ τοῦτο τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 10 μέτρα· ἑπομένως περιέχει 100 τετραγωνικὰ μέτρα.

***Τὸ ἑκτάριον*** εἶναι 100 ἄρουραι· εἶναι δὲ τετράγωνον, ἔχον πλευρὰν 100 μέτρα.

Ἐν Ἑλλάδι διὰ τὰς μεγάλας ἐκτάσεις μεταχειρίζονται ὡς μονάδα ***τὸ βασιλικὸν στρέμμα,*** τὸ ὁποῖον ἔχει 1000 τετραγωνικὰ μέτρα· ἐὰν νοηθῇ ὡς τετράγωνον, ἡ πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι περίπου μέτρα 31,6 . . .

***Τὸ παλαιὸν στρέμμα*** εἶναι τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 55 πήχεις Κωνσταντινουπόλεως μικροὶ (ἐνδεξέ).

Εἶναι δὲ τὸ παλαιὸν στρέμμα ἴσον μὲ 1,27 βασιλ. στρ., ἑπομένως τὸ βασιλικὸν στρέμμα εἶναι ἴσον μὲ 0,787 τοῦ παλαιοῦ στρέμματος.

## *Προβλήματα.*

319) Ἔκτασιν 1840 τετρ. πήχεων μετέτρεψέ τις εἰς 10 οἰκόπεδα· ἐκ πόσων τεκτ. τετρ. πήχεων ἀποτελεῖται ἕκαστον;

320) Ἔκτασις 25,4 ἑκταρίων ἐκ πόσων βασιλικῶν στρεμμάτων ἀποτελεῖται;

321) 15,48 βασιλικὰ στρέμματα μὲ πόσα ἑκτάρια ἰσοδυναμοῦσιν;

322) Ἀγρὸς ἐκτάσεως $6\frac{3}{4}$ παλαιῶν στρεμμάτων, ἐπωλήθη πρὸς 2500 δραχμὰς τὸ βασιλικὸν στρέμμα· ἀντὶ πόσων δραχμῶν ἐπωλήθη;

323) Ἔστρωσέ τις δάπεδον ἐκτάσεως 20 τετραγ. πήχεων διὰ πλακῶν ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶχεν ἐπιφάνειαν 2 τετρ. παλαμῶν καὶ ἀξίαν 0,75 δραχ. τὴν τετρ. παλάμην· πόσον ἐστοίχισαν αἱ ἀπαιτηθεῖσαι πλάκες διὰ τὴν ἐπίστρωσιν;

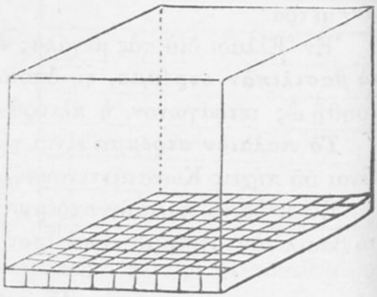
## *Μονάδες ὄγκου ἢ χωρητικότητος*

Μονάδες τοῦ ὄγκου εἶναι οἱ κύβοι, τῶν ὁποίων πλευραὶ εἶναι αἱ μονάδες τοῦ μήκους.

Εἶναι δὲ ὁ κύβος στερεόν, περικλειόμενον ὑπὸ ἓξ ἴσων τετραγώνων. Καὶ ἂν μὲν ἡ μονὰς τοῦ μήκους εἶναι τὸ μέτρον, ἡ μονὰς τῶν ὄγκων λέγεται ***κυβικὸν μέτρον***· ἂν δὲ ἡ μονὰς τοῦ μήκους εἶναι ἡ παλάμη, ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου λέγεται ***κυβικὴ παλάμη,*** κτλ.

Ἡ κυβικὴ παλάμη εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ κυβικοῦ μέτρου.

Ἐάν, τῷ ὄντι, θέσωμεν εἰς μίαν σειρὰν 10 κυβικάς παλάμας καὶ προσαρμόσωμεν αὐτάς, σχηματίζομεν στερεόν, ὅπερ ἔχει μῆκος 1 πῆχυν, πλάτος ὅμως καὶ ὕψος μίαν παλάμην· ἐὰν δὲ δέκα τοιαῦτα στερεὰ θέσωμεν ἐπί τινος ἐπιπέδου καὶ προσαρμόσωμεν αὐτὰ κατὰ τὰς ἐπιμήκεις ἐπιφανείας των, σχηματίζομεν στερεόν, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος καὶ πλάτος ἴσα μὲ ἕνα πῆχυν, ὕψος ὅμως μίαν παλάμην· ἐὰν τέλος 10 τοιαῦτα στερεὰ θέσωμεν ἐπ᾽ ἀλλήλων καὶ προσαρμόσωμεν αὐτά, σχηματίζομεν τὸ κυβικὸν μέτρον. Ὥστε τὸ κυβικὸν μέτρον σύγκειται ἐκ 1000 κυβικῶν παλαμῶν, ἢ ἡ κυβικὴ παλάμη εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ κυβικοῦ πήχεως.



Ὁμοίως σύγκειται ἡ κυβικ παλάμη ἐκ 1000 κυβικῶν δακτύλων, καὶ ὁ κυβικὸς δάκτυλος εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τῆς κυβικῆς παλάμης.

***Λίτρα*** λέγεται ἡ χωρητικότης τῆς κυβικῆς παλάμης, ἤτοι ἡ χωρητικότης κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μία παλάμη. Εἰς ἓν κυβικὸν μέτρον περιέχονται, κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα 1000 λίτραι.

Ἡ λίτρα εἶναι ἐν χρήσει διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑγρῶν.

***Κοιλὸν*** λέγεται τὸ δέκατον τοῦ κυβικοῦ πήχεως, ἤτοι ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον ἔχουσιν 100 κυβικαὶ παλάμαι· γίνεται δὲ ἡ χρῆσις τούτου ἰδίως εἰς τοὺς δημητριακοὺς καρπούς.

## *Προβλήματα.*

324) Πόσα κυβικὰ μέτρα ἀποτελοῦσιν α) 7000 κυβ. παλάμαι καὶ β) 35000000 κυβ. δάκτυλοι ;

325) Πόσοι κυβικοὶ δάκτυλοι περιέχονται α) εἰς $1\frac{1}{4}$ κυβ. παλάμας καὶ β) εἰς τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ κυβικοῦ μέτρου;

326) Δεξαμενὴ χωρητικότητος 7,45 κυβ. μέτρων μὲ πόσας λίτρας ὕδατος γεμίζει ;

327) Μὲ 260 κοιλὰ σίτου ἐγέμισέ τις τὴν ἀποθήκην του· πόσων κυβ. μέτρων ἦτο ἡ χωριτικότης τῆς ἀποθήκης;

## *Μονάδες βάρους.*

Οἱ Γάλλοι, παραδεχθέντες τὸ μέτρον ὡς ἀρχικὴν μονάδα τοῦ μήκους, ἐσχέτισαν πρὸς ταύτην καὶ τὰς λοιπὰς μονάδας· ὅθεν καὶ τὰς μονάδας τοῦ βάρους. Διὰ τοῦτο παρεδέχθησαν τὰς ἑξῆς μονάδας βάρους.

***Γραμμάριον ἢ δραχμὴ*** (gramme).

Τοῦτο εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, ὅσον χωρεῖ εἰς ἕνα κυβικὸν δάκτυλον (τὸ ὕδωρ πρέπει νὰ εἶναι καθαρὸν ἀπεσταγμένον καὶ εἰς θερμοκρασίαν 4° το κοινοῦ θερμομέτρου).

***Χιλιόγραμμον*** (kilogramme)=1000 γραμμάρια.

Τὸ χιλιόγραμμον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, ὅσον χωρεῖ 1 κυβικὴ παλάμη, ἤτοι τὸ βάρος μιᾶς λίτρας ὕδατος.

***Τόννος*** λέγεται τὸ βάρος 1000 χιλιογράμμων, ἤτοι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, ὅσον χωρεῖ εἰς ἓν κυβικὸν μέτρον

Τὰς μονάδας ταύτας τοῦ βάρους παρεδέχθησαν καὶ οἱ Βέλγοι καὶ οἱ Ὁλλανδοί, ἔτι δὲ καὶ οἱ Γερμανοὶ πλὴν τοῦ ὅτι ἀντὶ τοῦ χιλιογράμμου μεταχειρίζονται τὸ ***πφούντιον*** (pfund), ὅπερ ἔχει βάρος 500 γραμμαρίων.

Παρ' ἡμῖν καὶ παρὰ τοῖς Τούρκοις μονάδες βάρους ἐν χρήσει εἶναι αἱ ἑξῆς:

***Ὀκᾶ***, ἀρχικὴ μονάς. ***Στατὴρ***=44 ὀκάδ. ***Δράμιον*** $=\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς.

Ἡ σχέσις τῆς ὀκᾶς πρὸς τὸ χιλιόγραμμον εἶναι ἡ ἑξῆς.

1 ὀκᾶ=1280 γραμμάρια· 1 δράμιον=3,2 γραμμάρια.

Τὸ δὲ χιλιόγραμμον εἶναι $312\frac{1}{2}$ δράμια = 0,78 . . τῆς ὀκᾶς

1 λίτρα ὕδατος εἶναι λοιπὸν $312\frac{1}{2}$ δράμια.

Διὰ τὰ φάρμακα μεταχειρίζονται τὰς ἑξῆς μονάδας βάρους.

***Κόκκος*** ἡ ἐλαχίστη μονάς. ***Γράμμα*** (σκρούπουλον) = 20 κόκκοι. ***Δραχμὴ***=3 γραμ.=60 κόκκοι. ***Οὐγγία***=8 δραχ. ***Λίτρα***=12 οὐγγίαι.

Ἡ λίτρα τῶν φαρμακείων εἶναι περίπου 115 δράμια τῆς ὀκᾶς.

## *Προβλήματα.*

328) Νὰ τραπῶσιν εἰς γραμμάρια α) 150 δράμια, β) τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς.

329) Τὸ 1 γραμμάριον τί μέρος εἶναι τοῦ δραμίου ;

330) Νὰ τραπῶσιν 320 γραμμάρια εἰς δράμια.

331) Νὰ τραπῶσιν 15 ὀκάδες καὶ 250 δράμια εἰς χιλιόγραμμα.

332) Εἰσήγαγέ τις μεταξωτὰ ὑφάσματα βάρους 48 ὀκάδων καὶ ἐπλήρωσεν εἰσαγωγικὸν δασμὸν 1242,50 δραχμὰς τὸ χιλιόγραμμον· πόσον ἐπλήρωσε ;

333) Πόσα χιλιόγραμμα κάμνουν ἕνα στατῆρα ;

334) Νὰ τραπῶσιν 180 πφούντια εἰς ὀκάδας.

334) Νὰ τραπῶσιν 8 χιλιόγραμμα καὶ 562 γραμμάρια εἰς ὀκάδας.

336) 1 δράμιον κινίνης πόσους κόκκους ἔχει ;

## *Μονάδες νομισμάτων.* [1]

### *) Τῆς Λατινικῆς ἑνώσεως.*

Ἡ Γαλλία, ἡ Ἰταλία, ἡ Ἑλβετία, τὸ Βέλγιον καὶ ἡ Ἑλλὰς παρεδέχθησαν διὰ συμβάσεως νὰ κόπτωσι νομίσματα ὅμοια καὶ ἴσης ἀξίας, διὰ νὰ εὐκολύνωσι τὸ ἐμπόριον. Κατὰ τὴν σύμβασιν ταύτην (ἥτις λέγεται ***Λατινικὴ νομισματικὴ σύμβασις***) ἀρχικὴ μονὰς τῶν νομισμάτων εἶναι τὸ ***φράγκον***, ὅπερ ἐν Ἑλλάδι λέγεται ***δραχμή***. Εἶναι δὲ τοῦτο νόμισμα ἀργυροῦν, ἔχον βάρος 5 γραμμαρίων (ἓν δράμιον καὶ $\frac{9}{16}$ τοῦ δραμίου), τοῦ ὁποίου ὁ βαθμὸς καθαρότητος εἶναι 0,835, δηλαδὴ μόνον τὰ $\frac{835}{1000}$ αὐτοῦ εἶναι καθαρὸς ἄργυρος, τὰ δὲ ἄλλα $\frac{165}{1000}$ εἶναι χαλκὸς ἢ καὶ ἄλλα μέταλλα. Διαιρεῖται δὲ τὸ φράγκον εἰς 100 ἴσα μέρη, ἐξ ὧν ἕκαστον παρ' ἡμῖν λέγεται ***λεπτόν***.

Τὰ νομίσματα τῆς ἑνώσεως ταύτης εἶναι χαλκᾶ, ἀργυρᾶ καὶ χρυσᾶ· Καὶ ἐκ χαλκοῦ μὲν εἶναι τὰ ἑξῆς· τὸ μονόλεπτον, τὸ δίλεπτον, ὁ ὀβολὸς (κοινῶς πεντάρα) καὶ τὸ διώβολον (κοινῶς δεκάρα).

Τὸ βάρος τοῦ διωβόλου εἶναι 10 γραμμάρια, τοῦ δὲ ὀβολοῦ 5. Ἐξ ἀργύρου δὲ εἶναι τὰ ἑξῆς.

1. Αἱ τιμαὶ αὐτῶν δὲν εἶναι σταθεραί, ἀλλ' ὑφίστανται διακυμάνσεις

1) Τὸ εἰκοσάλεπτον=20 λεπτὰ (βάρος 1 γραμμάριον).

2) Τὸ ἥμισυ τῆς δραχμῆς=50 λεπτὰ (βάρος $2\frac{1}{2}$ γραμμάρια).

3) Ἡ δραχμὴ (βάρος 5 γραμμάρια).

4) Τὸ δίδραχμον (βάρος 10 γραμμάρια).

5) Τὸ πεντάδραχμον (βάρος 25 γραμμάρια).

Τοῦ τελευταίου τούτου βαθμὸς καθαρότητος ὡρίσθη διὰ τῆς συμβάσεως εἰς 0,900, τῶν δὲ ἄλλων εἰς 0,835.

Ἐκ χρυσοῦ δὲ εἶναι τὰ ἑξῆς.

Πεντάδραχμον (βάρος 1 γρ. 61290)· δεκάδραχμον (βάρος 3 γρ. 2258) εἰκοσάδραχμον (βάρος 6γρ. 45161)· πεντηκοντάδραχμον (βάρος 16γρ. 12903)· καὶ ἑκατοντάδραχμον (βάρος 32γρ. 25806).

Τούτων ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος εἶναι 0,900.

*Σημείωσις.* Ἐν Ἑλλάδι ὑπάρχουσι καὶ νομίσματα ἐκ νικελίου τῶν 5, 10 καὶ 20 λεπτῶν

### 2) *Ἀγγλικαί.*

Ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ ***Ἀγγλικὴ λίρα***. Αὕτη ὑποδιαιρεῖται εἰς 20 σελλίνια καὶ τὸ σελλίνιον εἰς 12 ***πέννυ***· ἕκαστον δὲ πέννυ εἰς 4 ***φαρδίνια.*** Τὸ βάρος τῆς ἀγγλικῆς λίρας εἶναι 7 γρ., 988.

Ἡ ἀγγλικὴ λίρα ἔχει ἀξίαν 25 δραχμῶν· ὥστε τὸ σελλίνιον ἔχει ἀξίαν 1,25 δρ. καὶ τὸ πέννυ $10\frac{5}{12}$ λεπτά.

Χρυσᾶ νομίσματα εἶναι ἡ λίρα καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς. (=10 σελλίνια), ἔτι 2 καὶ 5 λιρῶν· βαθμὸν δὲ καθαρότητος ἔχουσιν $\frac{11}{12}$.

Ἀργυρᾶ εἶναι διὰ 2, 3, 4, 6 πέννυ, ἔτι δὲ διὰ 1, 2, $2\frac{1}{2}$, 5 σελλίνια.

Βαθμὸς δὲ καθαρότητος αὐτῶν εἶναι $\frac{37}{40}$.

Χαλκᾶ εἶναι τὸ φαρδίνιον, 2 φαρδίνια καὶ τὸ πέννυ.

### 3) ***Γερμανικαί.***

Ἐν Γερμανίᾳ μονὰς τῶν νομισμάτων εἶναι τὸ ***μάρκον.***

Ὑποδιαιρεῖται δὲ εἰς 100 ἴσα μέρη, ἅτινα λέγονται ***πφένιχ.***

Ἡ ἀξία τοῦ μάρκου εἶναι 1 δρ. 25 (ἀκριβέστερον 1,234), τὸ δὲ βάρος εἶναι 6γρ., 55.

Ἀργυρᾶ νομίσματα εἶναι τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ μάρκου, τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ, τὸ μάρκον, τὸ δίμαρκον καὶ τὸ πεντάμαρκον. Χρυσᾶ δὲ εἶναι τῶν 5,10 καὶ 20 μάρκων.

Βαθμὸς καθαρότητος πάντων τούτων εἶναι 0,900.

### 4) *Αὐστριακαί.*

Ἐν Αὐστρίᾳ μονὰς τῶν νομισμάτων εἶναι ἡ ***κορώνα***, ἥτις ἔχει ἀξίαν 1 δρ. 05. Διαιρεῖται δὲ εἰς 100 ἕλλερ.

Ἀργυρᾶ νομίσματα εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$, 1 καὶ 2 φιορίνια (ἓν φιορίνιον= 2 δρ. 50).

Χρυσᾶ δὲ 10 καὶ 20 κορῶναι, 4 καὶ 8 φιορίνια, ἔτι δὲ τὸ δουκᾶτον (=11 δρ., 85) καὶ τὸ τετραπλοῦν δουκᾶτον.

### 5) *Τουρκικαί.*

Ἐν Τουρκίᾳ μονὰς τῶν νομισμάτων εἶναι τὸ ***γρόσιον***, τὸ ὁποῖον διαιρεῖται εἰς 40 ***παράδες***, καὶ ὁ παρᾶς εἰς 3 ***ἄσπρα***. Τὸ γρόσιον εἶναι ἴσον περίπου μὲ 23 λεπτά. Χρυσοῦν νόμισμα σύνηθες εἶναι ἡ ***λίρα***= 100 γρόσια, ἀργυρᾶ δὲ τὸ τάλληρον (20 γρ.), τὸ ἥμισυ καὶ τὸ τέταρτον αὐτοῦ.

### 6) *Ρωσικαί.*

Ἀρχικὴ μονὰς ***ρούβλιον***=4 δρ., διαιρεῖται δὲ εἰς 100 ***καπίκια***.

Χρυσᾶ νομίσματα εἶναι τὸ ***πὼλ - ἰμπεριὰλ***=5 ρούβλια, τὸ ***ἰμπεριὰλ***=10 ρούβλια καὶ τὸ ***δουκᾶτον***=3 ρούβλια.

### 7) *Ἡνωμέναι Πολιτεῖαι.*

Μονὰς τῶν νομισμάτων ἐν ταῖς Ἡνωμέναις Πολιτείαις εἶναι τὸ ***δολλάριον***=5 δρ., 18· διαιρεῖται δὲ εἰς 100 ἴσα μέρη (ἑκατοστά).

Χρυσᾶ νομίσματα εἶναι ὁ ***ἀετὸς***=10 δολλάρια, ὁ ***διπλοῦς ἀετός***, ἔτι τῶν 5, 3, $2\frac{1}{2}$ καὶ 1 δολλαρίου. Ἀργυρᾶ δὲ τὸ δολλάριον, τὸ ἥμισυ αὐτοῦ, τὸ τέταρτον, τὸ πέμπτον καὶ τὸ δέκατον.

## *Προβλήματα.*

337) Νὰ τραπῶσιν 87,25 λίραι 'Αγγλίας εἰς δραχμάς. (1 λίρα 'Αγγλίας =375 δραχμάς).

338) 55687,50 δραχμαί πόσας λίρας 'Αγγλίας κάμνουσι ;

339) Πόσας δραχμὰς κάμνουσι 124,8 μάρκα ; (1 μάρκον=18,35 δραχ.).

340) Πόσα μάρκα κάμνουσι 7345 δραχμαί ;

341) Πόσας λίρας Τουρκίας κάμνουσι 6276,60 δραχμαί ; (1 λίρα Τουρκίας=39,60 δραχ.).

342) Πόσας δραχμὰς κάμνουσι α) 1648,4 κορῶναι Αὐστρίας (1 κορ.= 10,85 δραχ.) καὶ β) 750 δολλάρια ; (1 δολλ.=77,25 δραχ.).

343) 11718 δραχμαὶ πόσας κορώνας Αὐστρ. κάμνουσι καὶ πόσα δολλάρια;

344) Πόσας δραχμὰς κάμνουσι 2147,6 γαλλικὰ φράγκα, ὅταν 1 γαλλικὸν φράγκον ἰσοῦται πρὸς 3,02 δραχμάς ;

345) Πόσας δραχμὰς κάμνουσι 1050 ἑλβετικὰ φράγκα ὅταν 1 ἑλβετικὸν φράγκον=14,87 δραχμάς ;

346) Μὲ 9375,55 δραχ. πόσα γαλλικὰ φράγκα ἀγοράζομεν, ὅταν 1 γαλλ. φράγκον=3,02 δραχμάς ;

347) Πόσα δηνάρια (Σερβίας) κάμνουσι 6256 δραχμαί ; (1 δην.=1,36 δρχ.).

348) Πόσα λέυ (Ρουμανίας) κάμνουσι 2704,80 δραχμαί; (1 λέυ=0,48 δρχ.).

349) Πόσα λέβι (Βουλγαρίας) κάμνουσι 12800 δραχμαί; (1 λέβ.=0,64 δρχ.).

350) Πόσας δραχμὰς κάμνουσι 7345,8 λιρέτται ('Ιταλίας), ὅταν 1 λιρέττα ἰσοῦται πρὸς 4,04 δραχμάς ;

## *Μονάδες χρόνου.*

***('Εν χρήσει εἰς ὅλα τὰ πεπολιτισμένα ἔθνη).***

'Αρχικὴ μονὰς τοῦ χρόνου εἶναι ἡ ***ἡμέρα*** ἢ τὸ ***ἡμερονύκτιον*** (ἢ καὶ ***νυχθήμερον***).

***Ὥρα*** $= \frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας

***Μὴν*** = 30 ἡμέραι
***Ἔτος***=12 μῆνες

***Λεπτὸν πρῶτον***$=\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας

***Λεπτὸν δεύτερον*** $=\frac{1}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ$=\frac{1}{3600}$ τῆς ὥρας.

***Σημείωσις.*** Οἱ 12 μῆνες τοῦ ἔτους ὀνομάζονται κατὰ σειράν· 'Ιανουάριος, Φεβρουάριος, Μάρτιος, 'Απρίλιος, Μάϊος, 'Ιούνιος, 'Ιούλιος, Αὔγουστος, Σεπτέμβριος, 'Οκτώβριος, Νοέμβριος, Δεκέμβριος.

'Εκ τούτων 4 ἔχουσι 30 ἡμέρας, οἱ ἑξῆς·

'Απρίλιος, 'Ιούνιος, Σεπτέμβριος καὶ Νοέμβριος.

Εἷς δέ, ὁ Φεβρουάριος, ἔχει 28 ἡμέρας εἰς τὰ κοινὰ ἔτη (ἅτινα ἔχουσι 365 ἡμέρας), 29 δὲ εἰς τὰ ***ἐμβόλιμα ἢ δίσεκτα*** (ἅτινα ἔχουσι 366 ἡμέρας).

Οἱ δὲ ὑπόλοιποι 7 μῆνες ἔχουσιν ἀπὸ 31 ἡμέρας.

Ἀπὸ τέσσαρα συνεχῆ ἔτη τὸ ἓν εἶναι δίσεκτον, ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4· οἷον, ἐκ τῶν ἐτῶν 1902, 1903, 1904, 1905 δίσεκτον εἶναι τὸ 1904. Ἐξαιροῦνται τὰ ἔτη τὰ ὁποῖα φανερώνουσι πλήρεις αἰῶνας (αἰὼν χρονικὸν διάστημα 100 ἐτῶν), τὰ ὁποῖα εἶναι κοινά, ἐκτὸς ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑκατοντάδων διαιρεῖται διὰ 4· οὕτω ἐκ τῶν 2000, 2100, 2200, 2300 δίσεκτον εἶναι τὸ 2000.

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ πόσας ἡμέρας ἔχει εἷς μὴν (ὅταν δὲν ἐνθυμώμεθα), γράφομεν τοὺς ἑπτὰ πρώτους ἀριθμοὺς εἰς ἕνα γύρον ὡς ἑξῆς:

*1*

*7* *2*

*6* *3*

*5* *4*

καὶ ἔπειτα ἀπαγγέλλομεν τοὺς μῆνας κατὰ σειρὰν δίδοντες εἰς ἕκαστον μῆνα τὸν ἀντίστοιχόν του ἀριθμὸν (Ἰανουάρ. 1, Φεβρουάρ. 2, Μάρτ. 3 κτλ)· ἐὰν ὁ μὴν πέσῃ εἰς περιττὸν ἀριθμόν, ἔχει 31 ἡμέρας, ἐὰν δὲ εἰς ἄρτιον, ἔχει 30 (πλὴν τοῦ Φεβρουαρίου).

Ἡ ἑβδομὰς ἔχει 7 ἡμέρας.

***Σημείωσις.*** Ἡ ἐργάσιμος ἡμέρα θεωρεῖται ἴση μὲ 12 ὥρας, ἐκτὸς ἂν εἰς τὸ πρόβλημα ὁρίζηται ἄλλως.

***Σημείωσις.*** Τὰ πρῶτα λεπτὰ σημειοῦνται διὰ μιᾶς ὀξείας· οἷον 15', τὰ δὲ δεύτερα διὰ δύο· οἷον 20''.

## *Μονάδες κυκλικῶν τόξων.*

Διὰ νὰ μετρήσωμεν ἓν κυκλικὸν τόξον, λαμβάνομεν ὡς ἀρχικὴν μονάδα τόξον τῆς αὐτῆς περιφερείας, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $\frac{1}{360}$ αὐτῆς καὶ ὅπερ καλεῖται μοῖρα. Ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται πρῶτα λεπτὰ καὶ ἕκαστον πρῶτον εἰς 60 δεύτερα λεπτά. Αἱ μοῖραι σημειοῦνται διὰ τοῦ συμβόλου ($^0$), τὰ πρῶτα λεπτὰ διὰ τοῦ (′) καὶ τὰ δεύτερα διὰ τοῦ (″). Οὕτω τόξον 25 μοιρῶν, 48 πρώτων λεπτῶν καὶ 30 δευτέρων σημειοῦται οὕτω : $25^0\ 48'\ 30''$.

## *Τροπὴ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ εἰς ἁπλοῦν, ἤτοι εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος.*

147. α΄.) ***Ἐὰν ὁ συμμιγὴς τραπῇ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του, γίνεται ἀκέραιος ἀριθμός.***

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 5 ὧρ., 27΄· ἂς τραπῇ δὲ εἰς λεπτὰ πρῶτα (εἰς τὴν τελευταίαν τάξιν του).

Ἐπειδὴ ἡ μία ὥρα ἔχει 60 λεπτὰ πρῶτα, αἱ δύο ὧραι ἔχουσιν δύο φορὰς 60, ἤτοι 60×2, αἱ τρεῖς ἔχουσιν 60×3 καὶ αἱ 5 ὧραι ἔχουσιν 60×5, ἤτοι 300 πρῶτα λεπτά. Ἐὰν δὲ εἰς τὰ 300 ταῦτα πρῶτα λεπτὰ προσθέσωμεν καὶ τὰ 27΄ τοῦ δοθέντος συμμιγοῦς, εὑρίσκομεν 327΄. ὥστε ὁ δοθεὶς συμμιγὴς 2 ὧραι 27΄ ἐτράπη εἰς 327΄.

Ἂς λάβωμεν, ὡς δεύτερον παράδειγμα, τὸν συμμιγῆ 12 στατ., 18 ὀκάδ., 250 δράμ., ὅστις πρόκειται νὰ τραπῇ εἰς δράμια.

Κατὰ πρῶτον τρέπομεν τοὺς στατῆρας εἰς ὀκάδας καὶ ἔπειτα τὰς ὀκάδας εἰς δράμια· σκεπτόμεθα δὲ ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ 1 στατὴρ ἔχει 44 ὀκάδας, οἱ 12 στατῆρες ἔχουσι 44×12 ἢ 528 ὀκάδας· ἔχει ἀκόμη ὁ συμμιγὴς 18 ὀκάδας· ὥστε οἱ 12 στατῆρες καὶ αἱ 18 ὀκάδες γίνονται 546 ὀκάδες.

Ἐπειδὴ 1 ὀκᾶ ἔχει 400 δράμια, αἱ 546 ὀκάδες ἔχουσι 400×546 δράμια, ἤτοι 218400 δράμια· ἔχει δὲ ἀκόμη ὁ συμμιγὴς 250 δράμια· ὥστε γίνονται τὸ ὅλον 218650 δράμια· ἐτράπη λοιπὸν ὁ δοθεὶς συμμιγὴς εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του.

## *Διάταξις τῆς πράξεως.*

Πρὸς εὐκολίαν, διατάσσεται ἡ πρᾶξις ὡς ἑξῆς.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 στ. | | 18 ὀκ. | 250 δρ. |
| 44 | | | |
| 48 | | | |
| 48 | | | |
| 528 | ὀκάδες | | |
| 18 | ὀκάδες | | |
| 546 | ὀκάδες | | |
| 400 | | | |
| 218400 | δράμια | | |
| 250 | δράμια | | |
| 218650 | δράμια | | |

*β΄.) Ἐὰν ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς τραπῇ εἰς μονάδας ἄλλης τάξεως* (ἀνωτέρας ἢ ἡ τελευταία), *γίνεται κλασματικὸς ἀριθμὸς ἢ καὶ μικτός.*

Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸν συμμιγῆ 25 ὀκ. 150 δρ. καὶ ἂς τρέψωμεν αὐτὸν εἰς ἀριθμὸν ὀκάδων.

Ὁ ἀριθμὸς 25 εἶναι ὀκάδες· ὥστε θὰ μείνῃ ὡς εἶναι.

Ὁ ἀριθμὸς 150 δράμια πρέπει καὶ αὐτὸς νὰ τραπῇ εἰς ἀριθμὸν ὀκάδων (ἤτοι εἰς κλάσμα ὀκᾶς), τοῦτο δὲ γίνεται εὐκολώτατα, ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν, ὅτι δράμιον σημαίνει τὸ τετρακοσιοστὸν τῆς ὀκᾶς (ἤτοι 1 δρ. $= \frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς)· ὥστε, ἀντὶ νὰ εἴπω 150 δράμια, δύναμαι νὰ εἴπω $\frac{150}{400}$ τῆς ὀκᾶς.

Ὥστε ὁ δοθεὶς συμμιγὴς 25 ὀκ. 150 δρ. ἐτράπη εἰς ὀκάδας καὶ ἔγινεν 25 $\frac{150}{400}$ ὀκάδες, ἢ 25 $\frac{15}{40}$ ἢ ὀκάδες 25 $\frac{3}{8}$.

Ἂς λάβωμεν ὡς δεύτερον παράδειγμα τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν 8 ὀργ. 5 πόδ., 3 δακτ., 10 γραμμ. καὶ ἂς τρέψωμεν αὐτὸν εἰς ἀριθμὸν ποδῶν.

Αἱ μὲν ὀργυιαὶ καὶ οἱ πόδες γίνονται ἀκέραιος ἀριθμὸς ποδῶν, ὡς ἀνωτέρω διελάβομεν.

| | | |
|---|---|---|
| 8 ὀργ.<br>6<br>48 πόδ.<br>5<br>53 πόδ. | ὥστε αἱ 8 ὀργ., 5 πόδ. = 53 πόδ., τὸ δὲ ἄλλο μέρος τοῦ συμμιγοῦς (ἤτοι τοὺς 3 δακτ. 10 γρ.), τρέπομεν κατὰ πρῶτον εἰς γραμμάς. | 3 δάκτ.<br>12<br>36 γρ.<br>10<br>46 γρ. |

Μένει τώρα νὰ τρέψωμεν τὰς 46 γραμμὰς εἰς πόδας (ἢ μέρη τοῦ ποδός)· πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι ἀρκεῖ νὰ μάθωμεν, πόσον μέρος τοῦ ποδὸς εἶναι μία γραμμή, δηλαδὴ πόσας γραμμὰς ἔχει εἷς πούς.

1. π. = 12 δ. = 12×12 γρ. = 144 γρ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μία γραμμὴ εἶναι τὸ $\frac{1}{144}$ τοῦ ποδός, αἱ 46 γραμμαὶ εἶναι τὰ $\frac{46}{144}$ ἢ $\frac{23}{72}$ τοῦ ποδός.

Ἄρα ὁ δοθεὶς συμμιγὴς ἐτράπη εἰς ἀριθμὸν ποδῶν 53 $\frac{23}{72}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 15 ὥρ., 24΄, 10΄΄ τρέπεται εἰς ἀριθμὸν ὡρῶν 15 $\frac{29}{72}$.

Ὁ αὐτὸς συμμιγὴς τρέπεται εἰς ἀριθμὸν λεπτῶν $924' \frac{1}{6}$.

Ὁ αὐτὸς συμμιγὴς τρέπεται εἰς ἀριθμὸν ἡμερῶν $\frac{1109}{1728}$.

Ἀπὸ τὰ παραδείγματα ταῦτα συμπεραίνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

148. ***Διὰ νὰ τρέψωμεν συμμιγῆ ἀριθμὸν εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος του, τρέπομεν τὰ μέρη, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι μεγαλύτεραι τῆς δοθείσης, εἰς ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν τῆς μονάδος ταύτης, τὰ δὲ μέρη, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι μικρότεραι τῆς δοθείσης, τρέπομεν εἰς κλάσμα τῆς αὐτῆς μονάδος. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ κλάσματος τούτου τρέπομεν πρῶτον τὰ μέρη ταῦτα εἰς τὸ τελευταῖον ἐξ αὐτῶν καὶ ἔπειτα ὑπὸ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν γράφομεν παρονομαστὴν τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει, πόσαι μονάδες τῆς τελευταίας τάξεως ἀποτελοῦσι τὴν ὁρισθεῖσαν μονάδα.***

*Παραδείγματα.*

3 ὀργ., 2 πόδ., 6 δάκτ. $= 3\frac{5}{12}$ τῆς ὀργυιᾶς $= 20\frac{1}{2}$ πόδ., $= 246$ δάκτ.

$$6 \text{ ὥρ.}, 40', 20'' = 6\frac{121}{180} \text{ ὥρ.} = 400'\frac{1}{3} = 24020''.$$

## Ἀσκήσεις.

351) Νὰ τραπῶσιν εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως α) 15 μέτρα 7 παλάμαι 5 δάκτ. β) 7238 ὀκάδες 300 δράμια γ) 34 λίραι Ἀγγλίας 15 σελλίνια 8 πέννυ δ) 65 πήχεις 6 ῥούπια.

352) Ὁμοίως νὰ τραπῶσιν εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως α) $4^0$ 7′ 40″ β) 6 ἡμέραι 10 ὧραι 25′ 40″.

353) Νὰ τραπῶσιν εἰς λίρας Ἀγγλίας αἱ 7 λίραι 12 σελλίνια.

354) Νὰ τραπῶσιν εἰς λίρας, γρόσια 3 λίραι Τουρκίας, 40 γρόσια καὶ 15 παράδες.

355) Νὰ τραπῶσιν 20 πήχεις 3 ῥούπια εἰς πήχεις.

356) Νὰ τραπῶσιν εἰς μέτρα, 42 μέτρα 8 παλάμαι, 6 δάκτυλοι, 5 γραμμαί.

357) Νὰ τραπῶσιν εἰς ὥρας, 5 ὧραι 50′ 20″.

358) Νὰ τραπῶσιν εἰς στατῆρας, οἱ 3 στ. 19 ὀκάδες 250 δράμια.

359) 2347 πέννυ πόσα σελλίνια περιέχουσι ;

(ἀπ. 195 σελ. καὶ περισ. 7 πέν.)

360) 195 σελλίνια πόσας λίρας περιέχουσι ;

(ἀπ. 9 λίρας καὶ περισσεύουσι 15 σελλίνια).

361) Ὁ ἀνωτέρω ἀκέραιος ἀριθμὸς τῶν 2347 πέννυ νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν. (ἀπ. 9 λίρ. 15 σελ. 7 πένναι)

362) Ἐκ τῶν τριῶν ἀνωτέρω προβλημάτων νὰ εὑρεθῇ κανὼν τροπῆς συγκεκριμένου ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῆ.

363) Νὰ τραπῶσιν εἰς συμμιγεῖς οἱ ἑπόμενοι ἀκέραιοι : α) 36 ῥούπια, β) 900 δράμια γ) 42 σελλίνια δ) 108 παλάμαι ε) 468 πρῶτα λεπτὰ τῆς ὥρας.

364) Νὰ τραπῶσιν εἰς συμμιγεῖς οἱ ἑπόμενοι ἀκέραιοι : α) 16765 δράμια β) 10174 πέννυ γ) 232465'' ὥρας.

365) Ὁμοίως οἱ α) 214816'' κυκλικοῦ τόξου β) 15311 φαρδίνια γ) 45350 δράμια.

## *Τροπὴ συγκεκριμένου κλάσματος εἰς συμμιγῆ.*

149. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται κλασματικός τις ἀριθμός, συγκεκριμένος, οἷον $\frac{13}{5}$ τῆς ὀκᾶς, νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ.

Τὸ κλάσμα τοῦτο $\frac{13}{5}$ εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου ἀνθρώπου, ὅταν 5 ἄνθρωποι μοιρασθῶσι 13 ὀκάδας. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν 13 : 5, βλέπομεν, ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος 2 ὀκάδας καὶ θὰ περισσεύουν καὶ 3 ὀκάδες.

Διὰ νὰ μοιράσωμεν καὶ τὰς 3 ὀκάδας εἰς τοὺς 5 ἀνθρώπους, τρέπομεν αὐτὰς εἰς δράμια καὶ γίνονται 400×3, ἤτοι 1200 δράμια· μοιράζομεν λοιπὸν τὰ 1200 δράμια εἰς τοὺς 5 ἀνθρώπους καὶ βλέπομεν, ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος 240 δράμια, χωρὶς νὰ περισσεύσῃ τίποτε· ὥστε ὁ μερισμὸς ἐτελείωσεν. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι εἶναι

$$\frac{13}{5} \text{ τῆς ὀκᾶς} = 2 \text{ ὀκ. } 240 \text{ δράμια.}$$

## *Διάταξις τῆς πράξεως.*

Πρὸς συντομίαν διατάσσεται ἡ πρᾶξις ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{l|l} 13 \text{ ὀκ.} & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 2 \text{ ὀκ. } 240 \text{ δρ.} \\ \underline{400} & \\ 1200 \text{ δράμ.} & \\ 20 & \\ 00 & \end{array}$$

Ὁμοίως τρέπεται καὶ τὸ κλάσμα $\frac{24}{7}$ τῆς ὀργυιᾶς εἰς συμμιγῆ.

| | |
|---|---|
| 24 ὀργ. | 7 |
| 3 | 3 ὀρ., 2 π., 6 δ., 10 γρ. $\frac{2}{7}$ |
| 6 | |
| 18 π. | |
| 4 | |
| 12 | |
| 48 δ. | |
| 6 | |
| 12 | |
| 72 γρ. | |
| 2 γρ. | |

150. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

***Διὰ νὰ τρέψωμεν συγκεκριμένον κλάσμα εἰς συμμιγῆ, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸ κλάσμα· τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης (ἂν μείνῃ) τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· τὸ πηλίκον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως παριστᾷ μονάδας τῆς τάξεως ταύτης καὶ γράφεται πλησίον τοῦ πρώτου πηλίκου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἂν μείνῃ) τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως· τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως.***

### *Παραδείγματα.*

$\frac{18}{5}$ τῆς ὀκᾶς = 3 ὀκ. 240 δρ. $\frac{3}{5}$ τοῦ στατῆρος = 26 ὀκ. 160 δρ.

$\frac{6}{7}$ τῆς ἡμέρας = 20 ὧρ., 34′, 27″ $\frac{1}{7}$.

## *Ἀσκήσεις.*

366) Νὰ τραπῶσιν εἰς συμμιγεῖς οἱ ἑξῆς ἀριθμοί : α) 2 $\frac{3}{4}$ ὀκ. β) 8 $\frac{1}{4}$ πήχεις γ) 6 $\frac{7}{12}$ ὥρας δ) 9 $\frac{3}{4}$ λίρας Ἀγγλίας.

367) Νὰ τραπῶσιν εἰς συμμιγεῖς οἱ α) $\frac{19}{5}$ στατ. β) $\frac{37}{9}$ ἡμέρας γ) $\frac{53}{15}$ ἔτη.

368) Ὁμοίως οἱ : α) $\frac{239}{32}$ λίρ. ἀγγλίας β) $\frac{139}{45}$ μοῖραι.

369) Ὁμοίως οἱ α) 4,25 ὧραι β) 8,375 πήχεις γ) 0,45 λίρ. τουρκίας δ) 15,1875 ἡμέραι.

# ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ

## ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

151. Ἡ πρόσθεσις τῶν συμμιγῶν γίνεται, ὡς καὶ ἡ πρόσθεσις τῶν ἀκεραίων· δηλαδὴ προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἑκάστης τάξεως ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως· καὶ ὅταν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων μιᾶς τάξεως δὲν ἀποτελῇ ἀριθμὸν τῆς ἀνωτέρας τάξεως, γράφομεν αὐτὸ ὁλόκληρον· ὅταν ὅμως ἀποτελῇ, τότε διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει, πόσαι μονάδες τῆς τάξεως ταύτης κάμνουσι μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας· καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀθροίσματος, τὸ δὲ πηλίκον ἑνώνομεν μὲ τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

***Σημείωσις***. Πρὸς εὐκολίαν τῆς πράξεως γράφομεν τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε οἱ ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην.

### Παραδείγματα.

| | | |
|---|---|---|
| 18 ὥρ. | 28′ | 53″ |
| 6 | 3′ | 20″ |
| 5 | | 25″ |
| | 8′ | 35″ |
| 29 ὥρ. | 41′ | 13″ |

| | | |
|---|---|---|
| 56 στ., | 28 ὀκ. | 150 δρ. |
| | 40 | 280 |
| 18 | 22 | 160 |
| 76 στ. | 3 ὀκ. | 190 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 ὀργ. | 3 π. | 9 δ. | 6 γρ. |
| 13 | | 6 | 7 |
| | | 5 | 10 |
| | | | 11 |
| 21 ὀργ. | 4 π | 10 δ. | 10 γρ. |

## *Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.*

370) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ προσθέσεις: α) 1 ὀκ. 300 δραμ. + 4 ὀκ. 200 δράμ. β) 6 πήχ. 5 ρουπ. + 3 πήχ. 4 ρουπ. γ) 2 λίρ. 8 σελ. 5 πεν. + 3 λίρ. 7 σελ. 9 πεν.

371) Ὁμοίως αἱ : α) 3 ὑάρ. 2 πόδ. 10 δάκτ. + 5 ὑάρ. 1 ποδ. 8 δακ. + 1 ὑαρ. 7 δάκτ. β) 2 ὀργ. 3 πόδ. 7 δάκ. 5 γραμ. + 6 ὀργ. 5 πόδ. 9 δάκ. 10 γραμμαί.

372) Ὁμοίως αἱ : α) 7 δραχ. 45 λεπ. + $3\frac{1}{2}$ δραχ. + 3,2 δραχ. β) 3 στατ. 17 ὀκ. 200 δραμ. + $8\frac{7}{8}$ στατ. + $3\frac{2}{5}$ ὀκάδας.

373) Ἔλαβέ τις ἐξ ἀγγλίας ἐμπορεύματα διὰ τὰ ὁποῖα ἐπλήρωσε α) 14 λίρ. 8 σελ. 5 πεν. β) 23 λίρ. 1 σελ. 11 πεν. γ) 45 λίρ 14 σελ. $7\frac{1}{2}$ πεν. καὶ δ) 101 λίρ. 3 σελ. 2 φαρδ. Τί ποσὸν ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ ;

374) Ἐγεννήθη τις τὴν 6 Δεκεμβρίου 1884 καὶ ἀπέθανεν εἰς ἡλικίαν 42 ἐτῶν 5 μηνῶν 12 ἡμερῶν. Πότε ἀπέθανεν ; (ἀπ. 18 Μαΐου 1926).

375) Μετέφερέ τις εἰς τὴν ἀποθήκην του τὴν α) ἡμέραν 64 στατ, 25 ὀκ. ξυλανθράκων τὴν β) 15 στατ. 30 ὀκ. περισσότερον καὶ τὴν γ) ὅσον μετέφερε καὶ τὰς δύο ἡμέρας ὁμοῦ. Πόσους ξυλάνθρακας μετέφερεν ἐν ὅλῳ ; (ἀπ. 289 στ. 28 ὀκ.).

## ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

152. Καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν συμμιγῶν γίνεται, ὡς καὶ τῶν ἀκεραίων· δηλαδὴ ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμὸν τοῦ μειωτέου ἀρχίζοντες ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς τελευταίας τάξεως. Ἐὰν δὲ ἀριθμός τις τοῦ μειωτέου εἶναι μικρότερος τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ τοῦ ἀφαιρετέου, αὐξάνομεν αὐτὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσαι ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως φροντίζοντες ὅμως νὰ προσθέσωμεν ἔπειτα μίαν μονάδα εἰς τὴν ἀμέσως ἀνωτέραν τάξιν τοῦ ἀφαιρετέου (κατὰ τὴν ἰδιότ. τοῦ ἐδ. 24).

*Σημείωσις*. Πρὸς εὐκολίαν τῆς πράξεως γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου, οὕτως ὥστε οἱ ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ νὰ εὑρίσκωνται εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν στήλην.

### *Παραδείγματα.*

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | ἡμ. | 5 | ὥρ. | 22′ | 40″ | | 125 | στ. | 28 | ὀκ. | | | |
| 4 | | 12 | | 52′ | 20″ | | 8 | | 40 | | | 150 | δρ. |
| 13 | ἡμ. | 16 | ὥρ. | 30′ | 20″ | | 116 | στ, | 31 | ὀκ. | | 250 | δρ. |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | ὀργ. | | | 5 | δακτ. | 10 | γρ. |
| | | 5 | π, | 10 | | 6 | |
| 7 | ὀργ. | 0 | π. | 7 | δακτ. | 4 | γρ. |

## Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

376) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑπόμεναι ἀφαιρέσεις· α) 3 ὀκ. 200 δραμ.—2 ὀκ. 300 δραμ. β) 5 στατ.—3 στατ. 15 ὀκ. γ) 23 πήχ. 3 ρούπ.—14 πηχ. 5 ρουπ. δ) 35 λίρ. τουρκ. 40 γρόσ. 20 παρ.—17 λίρ. 60 γρ. 30 παρ.

377) Ὁμοίως αἱ α) 62 λίρ. ἀγγλ. 10 σελ. 9 πεν.—29 λίρ. 12 σελ. 7 πεν. 2 φαρδ. β) 47 στ. 300 δραμ.—28 στ. 25 ὀκ. γ) 9 ἡμ. 7 ὥρ. 35' 15''—2 ἡμ. 14 ὥρ. 50' 20''

378) Ἐπώλησέ τις πρᾶγμά τι ἀντὶ 5 ταλ. 3 δραχ. 50 λεπ. καὶ ἐκέρδισε 1 ταλ. 4 δραχ. 60 λεπ. Πόσον τὸ ἠγόρασε.

379) Εἶχέ τις ὕφασμα 7 ὑαρ. 1 ποδ. 7 δακτ. ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀπέκοψε διὰ τὴν κατασκευὴν ἐνδυμασίας 3 ὑαρ. 2 ποδ. 10 δακ. Πόσον τοῦ ἀπέμεινε.

380) Ἐγεννήθη τις τὴν 28 Φεβρουαρίου 1892 καὶ ἀπέθανε τὴν 11 Αὐγούστου 1928. Εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανε.

381) Ἁμαξοστοιχία ἀναχωρεῖ ἑκάστην ἡμέραν ἐξ Ἀθηνῶν εἰς τὰς 7 ὥρ. 15' πρὸ μεσημβρίας καὶ φθάνει εἰς τὰς Πάτρας εἰς τὰς 4 ὥρ. 18' μ. μ. τῆς αὐτῆς ἡμέρας. Πόσον χρόνον διαρκεῖ τὸ ταξείδιον τοῦτο ;

382) Πόσος χρόνος μεσολαβεῖ ἀπὸ τῆς 6 ὥρ. 25' π. μ. μέχρι τῆς 7 ὥρ. 40' π. μ. τῆς ἑπομένης ἡμέρας ;

383) Ἔλαβέ τις ἐμπορεύματα ἀξίας α) 14 λίρ. 8 σελ. 7 πεν. β) 13 λίρ. 3 σελ. γ) 48 λίρ. 15 σελ. καὶ δ) 76 λιρ. 15 σελ. 9 πεν. ἀλλ' ἕνεκα φθορᾶς των ἐγένετο ἔκπτωσις 5 λιρ. 18 σελ. 4 πεν. Πόσον ἐπλήρωσε ;

## ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

### *Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον.*

153. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον*** (ἤτοι διὰ νὰ ἐπαναλάβωμεν συμμιγῆ πολλὰς φοράς), ***πολλαπλασιάζομεν τὰ μέρη του καθ' ἓν χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.***

***Παρατήρησις.*** Ἂν εἰς μερικόν τι γινόμενον περιέχωνται μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἐξάγομεν αὐτὰς καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὸ ἀκόλουθον μερικὸν γινόμενον (δηλ. κατατάσσομεν τὰς μονάδας τοῦ συμμιγοῦς, ὡς πρέπει)· διὰ τοῦτο ἀρχίζομεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀπὸ τὴν τελευταίαν τάξιν.

### *Παραδείγματα*

***Πρόβλημα. Ἔχομεν 8 βαρέλια ζακχάρεως, ἐξ ὧν ἕκαστον ἔχει 5 στ., 28 ὀκ., 160 δρ.· πόσην ζάκχαριν ἔχουσιν ὅλα ὁμοῦ ;***

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος πρέπει προφανῶς νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 8, ἤτοι νὰ λάβωμεν τὸν συμμιγῆ ὀκτάκις.

| | | |
|---|---|---|
| 5 στ. | 28 ὀκ. | 160 δρ. |
| | | 8 |
| 40 στ. | 224 ὀκ. | 1280 δρ. |

***Κατάταξις τῶν μονάδων.*** Τὰ 1280 δρ. κάμνουν 3 ὀκ. καὶ 80 δρ. αἱ 224 + 3 ἢ 227 ὀκάδες κάμνουν 5 στατ. καὶ 7 ὀκάδας· ὥστε τὸ γινόμενον γράφεται ὡς ἑξῆς : 45 στατ., 7 ὀκ. 80 δρ.

***Πρόβλημα. Ἵνα διατρέξῃ τις ἓν στάδιον, χρειάζεται 1 ὥραν 12′ καὶ 20″· πόσας ὥρας χρειάζεται, ἵνα διατρέξῃ 12 στάδια ;***

| | | |
|---|---|---|
| 1 ὥρ. | 12′ | 20″ |
| | | 12 |
| 12 ὥρ. | 144′ | 240″ |

Κατάταξις 240″ κάμνουν 4′.

144′ + 4′ ἢ 148′ κάμνουν 2 ὥρας καὶ 28′.

ὥστε τὸ γινόμενον εἶναι 14 ὧραι, 28′.

## *Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.*

384) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ ἑπόμενοι πολλαπλασιασμοὶ

3 ὥρ. 15′ 44″ × 4

9 στ. 35 ὀκ. 249 δραμ. × 9

2 λίρ. 17 σελ. 4 πεν. 2 φαρδ. × 8

385) Ὁμοίως οἱ

9 ἡμ. 5 ὥρ. 52′ 35″ × 18

12 πήχ. 6 ρ. × 45

14 ὑαρ. 7 δακ. × 16

386) Ἐργάτης τις μετατρέπει 1 ὀκᾶν βάμβακος εἰς νῆμα εἰς διάστημα 2 ὡρῶν καὶ 25′. Εἰς πόσον χρόνον θὰ μετατρέψῃ εἰς νῆμα 5 ὀκάδας βάμβακος ; (ἀπ. 12 ὥρ. 5′)

387) Πόσον ζυγίζουν 15 σάκκοι ξυλανθράκων, ὅταν ὁ εἷς ζυγίζῃ 1 στ. 15 ὀκ. 250 δράμια. (ἀπ. 5 στ. 14 ὀκ. 150 δραμ.)·

388) Ἔφερέ τις 21 τεμάχια ὑφάσματος ἕκαστον τῶν ὁποίων στοιχίζει 10 λίρ. 16 σελ. 8 πεν. Πόσον στοιχίζουν ὅλα τὰ τεμάχια ; (ἀπ. 227 λίρ. 10 σελ).

389) Διὰ μίαν ἐνδυμασίαν χρειάζεται ὕφασμα 2 ὑαρ. 1 ποδ. καὶ 7 δακτ. Πόσον ὕφασμα χρειάζεται διὰ 24 ἐνδυμασίας ; (ἀπ. 60 ὑαρ. 2 ποδ.).

390) Ὕφασμα 400 πήχεων τὸ ὁποῖον ἐστοίχιζε 1 λιρ. 5 σελ. 10 πεν. τὸν πῆχυν μετεπώλησεν ἔμπορός τις πρὸς 1 λιρ. 6 σελ. 1 πεν. Πόσον ἐκέρδισεν ἐν ὅλῳ ; (ἀπ. 5 λιρ.).

### *Διαίρεσις συμμιγοῦς δι᾽ ἀκεραίου.*

154. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι᾽ ἀκεραίου*** (ἤτοι διὰ νὰ μερίσωμεν συμμιγῆ εἰς ἴσα μέρη), ***διαιροῦμεν χωριστὰ ἕκαστον τῶν μερῶν του διὰ τοῦ ἀκεραίου.***

Ὅταν δὲ ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ τινος τοῦ συμμιγοῦς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον, τρέπομεν αὐτὸ εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ ἑνώνομεν αὐτὰς μὲ τὰς ὁμοίας μονάδας τοῦ συμμιγοῦς πρὶν διαιρέσωμεν αὐτάς.

Διὰ τοῦτο ἀρχίζομεν τὴν διαίρεσιν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῆς ἀνωτάτης τάξεως, καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰς κατωτέρας.

### *Παράδειγμα.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ μοιράσωμεν 180 στ., 20 ὀκ., 250 δρ. ἑνὸς πράγματος εἰς 12 ἀνθρώπους. Κατὰ πρῶτον μοιράζομεν τοὺς 180 στ. καὶ εὑρίσκομεν ὅτι λαμβάνει ἕκαστος ἄνθρωπος 15 στ., χωρὶς νὰ μείνῃ ὑπόλοιπον· ἔπειτα μοιράζομεν καὶ τὰς 20 ὀκ. καὶ λαμβάνει ἕκαστος 1 ὀκᾶν, μένουσι δὲ 8 ὀκάδες· τὰς 8 αὐτὰς ὀκάδας τὰς κάμνομεν δράμια καὶ γίνονται $400 \times 8$ ἢ 3200 δράμια· πρέπει δὲ νὰ μοιράσωμεν αὐτὰ εἰς τοὺς 12 ἀνθρώπους, ἔχομεν ὅμως νὰ μοιράσωμεν καὶ 250 δράμια· ὥστε ἔχομεν τὸ ὅλον δρ. 3450. Μοιράζοντες τέλος καὶ αὐτὰ εἰς τοὺς 12 ἀνθρώπους, εὑρίσκομεν, ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος $287\,^1/_2$ δράμ. ὥστε ἡ διαίρεσις ἐτελείωσε καὶ τὸ πηλίκον εἶναι 15 στ. 1 ὀκ. $287\,^1/_2$ δράμ.

## *Διάταξις τῆς πράξεως.*

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται χάριν εὐκολίας ὡς ἑξῆς·

```
180 στ.    20 ὀκ.    250 δρ. | 12
 60                          |-----------------------------
  0                            15 στ., 1 ὀκ., 287 1/2 δρ.
 20 ὀκ.
  8
 400
------
3200
 250 δρ.
-------
3450 δρ.
 105
  90
   6
```

Ὡς παράδειγμα τῆς διαιρέσεως ταύτης ἂς λύσωμεν καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

***Ἀτμόπλοιόν τι διήνυσεν 90 μίλια εἰς 11 ὥρας 55′ καὶ 40″· εἰς πόσον χρόνον διανύει τὸ ἓν μίλιον;***

Φανερὸν εἶναι, ὅτι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν συμμιγῆ διὰ τοῦ 90.

```
  11    55′    40″ | 90
  60               |-------------------
-----                0 ὥρ.   7′   57″ 1/9
 660
  55
-----
 715′
  85
   60
-----
5100
  40
-----
5140″
 640
  10
```

ὥστε τὸ ἓν μίλιον τὸ διανύει εἰς 7′, 57″ καὶ $^1/_9$ τοῦ δευτέρου λεπτοῦ.

## *Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.*

391) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς διαιρέσεις

28 πήχ. 4 ρούπ. : 6
72 λίρ. 7 σελλ. 6 πέν. : 15
24 στ. 17 ὀκ. 300 δρ. : 16

392) Ὁμοίως αἱ

88 λίρ. 17 σελλ. $1\frac{1}{2}$ πέν. : 63
56 ὑάρ. 9 δάκτ. : 30
5 ὧρ. 37′ 12″ : 72

393) Ὀκτὼ ὑάρδαι ὑφάσματος ἀξίζουν 12 λίρ. 7 σελλ. 10 πένν. πόσον στοιχίζει ἡ 1 ὑάρδα ; (ἀπ. 1 λίρ. 10 σελλ. 11 πένν. 3 φαρ.)

394) Ἁμαξοστοιχία διατρέχει εἰς 1 ὥραν 20′, 64 χιλιόμετρα· εἰς πόσον χρόνον διατρέχει 1 χιλιόμετρον ; (ἀπ. 1′ 15″)

395) 25 σάκκοι καφφὲ ζυγίζουν 10 στατ. 28 ὀκ. 300 δράμια· πόσον ζυγίζει ὁ εἷς σάκκος ; (ἀπ. 18 ὀκ. 300 δρ.)

396) 175 τεμάχια χάλυβος ζυγίζουν 1 τόν. 330 χιλιόγραμμα· πόσον ζυγίζει τὸ 1 τεμάχιον ; (ἀπ. 7 χιλ. 600 γραμμ.)

397) Ἔμπορός τις τὴν ἀξίαν 6 τεμαχίων ὑφάσματος ἐπλήρωσεν εἰς δύο δόσεις ἐκ 40 λιρ. 10 σελλ. 7 πένν. τὴν πρώτην καὶ ἐξ 65 λιρ. 19 σελλ. 8 πένν. τὴν δευτέραν· πόσον ἤξιζε τὸ 1 τεμάχιον ; (ἀπ. 17 λίρ. 15 σελλ. 2 φαρ.)

## *Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.*

155. Ὁ πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ καὶ κατὰ τὴν ἑξῆς μέθοδον, ἥτις λέγεται ***μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν*** (προτιμᾶται δὲ ἡ μέθοδος αὕτη, ὅταν ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστὴς εἶναι πολυψήφιος ἀριθμός).

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ 6 ὥρ., 40′, 50″ ἐπὶ τὸν 240.

Καθὼς καὶ πρίν, πολλαπλασιάζομεν καὶ πάλιν κάθε μέρος τοῦ συμμιγοῦς χωριστά. Καὶ αἱ μὲν 7 ὧραι πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ τὸν 240 γίνονται ὧραι 7×240 ἢ 1680.

Τώρα: διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ 40′ ἐπὶ τὸν 240, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 60′ (δηλ. 1 ὥρ,) ἐπὶ 240, θὰ εὑρίσκομεν γινόμενον 240 ὥρας· δηλαδὴ 60′× 240 = 240 ὧραι

λοιπὸν 30′ × 240 = 120 ὧραι· διότι τὰ 30′ εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 60′·
καὶ 10′ × 240 = 40 ὧραι· διότι 10′ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ 30′·
ὥστε 40′ × 240 = 160 ὧραι·

Εὑρίσκομεν δηλαδὴ τὸ γινόμενον τῶν 40′ ἐπὶ 240 ἀναλύσαντες αὐτὰ εἰς 30′ (ἥμισυ τῆς ὥρας) καὶ εἰς 10′ (τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ τρίτον τῶν 30′)· ἀνελύσαμεν δηλαδὴ τὰ 40′ εἰς ἁπλᾶ μέρη τῆς ὥρας, ἤτοι τοιαῦτα, ὥστε νὰ πολλαπλασιάζωνται εὐκόλως. Μένει ἀκόμη νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ 50″ ἐπὶ 240 καὶ πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

τὰ 10′ × 240 δίδουν γινόμενον 40 ὥρας·
λοιπὸν τὸ 1′ × 240 = 4 ὧραι·
ἄρα τὰ 30″ × 240 = 2 ὧραι· διότι 30″ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ 1′·
καὶ τὰ 20″ × 240 = $1\frac{1}{3}$ ὧραι· διότι 20″ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ 1′·
λοιπὸν τὰ 50″ × 240 = 3 ὧρ. 20′ $\left(\frac{1}{3}\right.$ ὥρας = 20′$\left.\right)$·

Ἀφοῦ ἐπολλαπλασιάσαμεν τὰ μέρη τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ 240, δὲν μένει τώρα ἄλλο παρὰ νὰ προσθέσωμεν τὰ εὑρεθέντα μερικὰ γινόμενα.

| | | |
|---|---|---|
| 7 ὧρ. × 240= | 1680 ὧρ. | |
| 40′ × 240= | 160 ὧρ. | |
| 50″ × 240= | 3 ὧρ. | 20′ |
| λοιπὸν τὸ γινόμενον εἶναι | 1843 ὧρ. | 20′ |

## *Διάταξις τῆς πράξεως.*

Πρὸς συντομίαν διατάσσεται ἡ πρᾶξις ὡς ἑξῆς :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 7 ὧρ. | 40′ | 50″ |
| | | 240 | | |
| | | 1680 ὧρ. | | |
| 40′ | 30′ = ἥμισυ τῆς ὥρας δίδει | 120 | | |
| | 10′ = ἓν τρίτον τῶν 30, | 40 | | |
| 50″ | 30″ = ἥμισυ τοῦ 1′, | 2 | | (1′ δίδει 4 ὧρ.) |
| | 20″ = ἓν τρίτον τοῦ 1′. | 1 | 20′ | |
| | | 1843 ὧρ. | 20′ | |

Διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου λύομεν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) ***Μὲ 1 τάλληρον ἀγοράζει τις ἐξ ἑνὸς πράγματος 2 στ., 35 ὀκ 250 δρ.˙ πόσον θὰ ἀγοράσῃ μὲ 280 τάλληρα ;***

Φανερὸν εἶναι, ὅτι πρέπει νὰ ληφθῇ ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 280 φοράς, ἤγουν νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 280.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 2 στ. | 35 ὀκ. | 250 δρ. |
| | | 280 | | |
| | | 560 | | |
| 35 ὀκ. | 22=ἥμισυ τοῦ στατ. | 140 | | |
| | 11=ἥμισυ τῶν 22 ὀκ. | 70 | | |
| | 2 ἓν ἑνδέκατον τῶν 22 | 12 | | |
| | | | (1 ὀκ. δίδει 6 στ. 16 ὀκ.) | |
| | | | 32 ὀκ. | |
| 250 δρ. | 200=ἥμισυ τῆς ὀκᾶς | | 3 | 8 |
| | 50=ἓν ἑνδέκατον τῶν 200 δρ. | | 0 | 35 |
| | | 786 στ. | 31 ὀκ. | |

2) ***Ὁ στατὴρ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 6 δρ. 30 λεπτά˙ πόσον ἀξίζουν 520 στατῆρες***

| | | |
|---|---|---|
| | 6 δρ. | 30 λεπ. |
| | 520 | |
| | 3120 | |
| 20 λεπ.=ἓν πέμπ. τῆς δραχ. | 104 | |
| 10 λεπ.=ἥμισυ τῶν 20 λεπ. | 52 | |
| | 3276 δρ. | |

3) ***Κτίστης τις κτίζει εἰς μίαν ὥραν 1 ὀργ. 5 ποδ. καὶ 6 δακ. πόσον θὰ κτίσῃ εἰς 120 ὥρας;***

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 ὀργ. | 5 πόδ. | 6 δακτ. |
| | 120 | | |
| | 120 ὀργ. | | |
| 3 π.=ἥμισυ τῆς ὀργυιᾶς | 60 | | |
| 1 π.=ἓν τρίτον τῶν 3 ποδῶν | 20 | | |
| 1 π.=ἓν τρίτον τῶν 3 ποδῶν | 20 | | |
| 6 δακτ.=ἥμισυ τοῦ ποδὸς | 10 | | |
| | 230 ὀργ. | | |

4) ***Ὑπηρέτης λαμβάνει κατὰ μῆνα 8 τάλ. 3 δρ. 40 λεπ.· πόσα θὰ λάβῃ εἰς πέντε ἔτη;***

Ἐπειδὴ τὸ ἔτος ἔχει 12 μῆνας, τὰ πέντε ἔτη ἔχουσι 12×5, ἤτοι 60 μῆνας· πρέπει λοιπὸν νὰ ληφθῇ ὁ δοθεὶς συμμιγὴς 60 φοράς, ἤτοι νὰ πολλαπλασιασιασθῇ ἐπὶ 60.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 8 τάλλ. | 2 δρ. | 40 λεπ. |
| | 60 | | |
| | 480 | | |
| $2\frac{1}{2}$ δρ.=ἥμισυ τοῦ ταλλ. | 30 | | |
| $\frac{1}{2}$ δρ.=ἓν δέκατον τοῦ ταλλ. | 6 | (1 δρ. δίδει 12 τάλλ). | |
| 20 λεπ.=ἓν πέμπτον τῆς δραχμῆς | 2 | 2 δρ. | |
| 20 λεπ.= | 2 | 2 δρ. | |
| | 520 τάλλ. | 4 δρ. | |

## *Ἀσκήσεις.*

398) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ ἑπόμενοι πολλαπλασιασμοὶ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

9 ὥρ. 35′ 12″ × 360
4 στατ. 33 ὀκ. 320 δράμ. × 160
7 λίρ. 16 σελ. 8 πένν. × 210
12 τάλλ. 4 δρχ. 80 λεπτ. × 420

## *Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ κλασματικὸν καὶ ἐπὶ μικτόν.*

156. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.***

***Σημείωσις.*** Τὸ κλάσμα δύναται νὰ εἶναι κοινὸν ἢ καὶ δεκαδικόν. Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν συμμιγῆ 5 ὧραι

18′ 20″ ἐπὶ $\frac{3}{4}$, πολλαπλασιάζω πρῶτον αὐτὸν ἐπὶ 3 καὶ ἔπειτα διαιρῶ τὸ γινόμενον διὰ 4. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

5 ὥρ. 18′ 20″ ἐπὶ $\frac{3}{4}$
3
15 ὥρ. 54′ 60″ | 4
3 ὥρ. 58′ 45″
3
60
180′
54′
234′
34′
2′
60″
120″
60″
180″
20
0

Τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι 3 ὥρ. 48′ 45″.

2 πήχ. 5 ρ. ἐπὶ $\frac{5}{6}$
5
10 π. 25 ρ. | 6
1 π. 9 ρ. $\frac{3}{6}$
ἢ 2 π. 1 ρ. $\frac{1}{2}$
4
8
32 ρ.
25 ρ.
57 ρ.
3

Τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι 2 π. 1 ρ. $\frac{1}{2}$

Ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον κάμνομεν οὕτω τὸν πολλαπλασιασμὸν συμμιγοῦς ἐπὶ κλάσμα εἶναι ὁ ἑξῆς :

Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 108), διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν οἱονδήποτε ἐπὶ $\frac{3}{4}$, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ τέταρτον αὐτοῦ τρεῖς φοράς, ἢ τὸ τέταρτον τοῦ τριπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ.

Πρὸς ἐφαρμογὴν ἄς λύσωμεν καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

***Ἐργάτης ἐκτελεῖ ἔργον τι εἰς 18 ὥρας 50′ 40″· εἰς πόσας ὥρας θὰ ἐκτελέσῃ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ἔργου ;***

Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου θὰ τὸ ἐκτελέσῃ εἰς τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ συμμιγοῦς, ἤγουν εἰς τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν 18 ὥρ. 50′ 40″, τὰ δὲ $\frac{2}{5}$ τοῦ ἔργου θὰ τὰ ἐκτελέσῃ εἰς τὰ

$\frac{2}{5}$ τοῦ συμμιγοῦς· ὥστε πρέπει νὰ λάβωμεν δύο φορὰς τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ συμμιγοῦς, ἤτοι νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ $\frac{2}{5}$.

18 ὧρ. 50′ 40″
2

36 ὧρ. 100′ 80″ | 5
7 ὧρ. 32′ 16″

1
60′

60′
100

160
10
0

80″
30
0

*Σημείωσις*. Τὸ γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος εἶναι περιττὸν νὰ κατατάσσωμεν, ὅταν τὸ κλάσμα, ἐφ' ὃ πολλαπλασιάζομεν, εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος.

157. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ μικτόν, πολλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ, ἔπειτα καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα αὐτοῦ καὶ ἑνώνομεν τὰ δύο γινόμενα.***

***Πρόβλημα*. Ἐὰν μία μηχανὴ ὑφαίνῃ καθ' ἡμέραν 158 πήχ. 3 ρούπ. ἑνὸς ὑφάσματος, πόσον θὰ ὑφάνῃ εἰς 5 $^1/_2$ ἡμέρας;**

Φανερὸν εἶναι, ὅτι διὰ νὰ εὕρω τὸ ζητούμενον, πρέπει νὰ λάβω τὸ πενταπλάσιον τοῦ συμμιγοῦς καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ, ἤγουν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸν ἐπὶ $5\frac{1}{2}$.

158 π. 3 ρ.
5

790 π. 15 ρ.
Κατάταξις γινομένου: 791 π. 7 ρ.

158 π. 3 ρ. | 2
79 π. 1 ρ. $\frac{1}{2}$
18
0

Ἕνωσις τῶν δύο γινομένων
791 π. 7 ρ.
79 $1\frac{1}{2}$

871 π. $\frac{1}{2}$ ρ.

## *Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ κλάσματος.*

158. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος,*** (ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι μερισμὸς), ***ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸ ἀντεστραμμένον κλάσμα.***

Ὁ λόγος τούτου ἐδόθη εἰς τὴν διαίρεσιν ἀριθμοῦ διὰ κλάσματος (ἰδὲ ἐδάφ. 115).

159. ***Διὰ μικτοῦ ἀριθμοῦ δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν κανένα ἀριθμόν, ἀλλὰ τρέπομεν τὸν μικτὸν (διαιρέτην) εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν, ὡς ἀνωτέρω, ἐὰν ἡ διαίρεσις εἶναι μερισμός.***

### *Ἀσκήσεις.*

399) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ ἑπόμενοι πολλαπλασιασμοί.

17 πήχ. 3 ρούπ. $\times \frac{3}{4}$ $35^0$ 45′ 20″ $\times 3\frac{1}{3}$

22 ὀργ. 5 πόδ. $\times \frac{4}{5}$ 40 στ. 32 ὀκ. 200 δρ. $\times 7\frac{9}{16}$.

400) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς διαιρέσεις.

15 μέτ. 6 παλ. 9 δάκτ. : $\frac{3}{5}$ 75 λίρ. 18 σελλ. 6 πένν. : $2\frac{1}{2}$

46 τάλ. 3 δρχ. 20 λ. : 0,8 3 τόν. 200 χιλ. 150 γραμ : 4,6.

## *Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ.*

160. Ὁ πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ γίνεται ὡς ἑξῆς: ***Πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον μὲ ἕκαστον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστοῦ χωριστὰ καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ μερικὰ γινόμενα.***

***Τὸν πολλαπλασιαστέον διακρίνομεν ἐκ τούτου, ὅτι εἶναι ὁμοειδὴς μὲ τὸ γινόμενον, ἤτοι σημαίνει τὸ αὐτὸ πρᾶγμα (διότι τὸ γινόμενον γίνεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως), τὰ δὲ μέρη τοῦ πολλαπλασιαστοῦ θεωροῦνται ὡς ἀφῃρημένοι ἀριθμοί·*** (ὡς εἰς πάντα πολλαπλασιασμόν).

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ μὲ καθὲν ἐκ τῶν μερῶν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἢ τρέπομεν τὰ μέρη ταῦτα εἰς ἀριθμοὺς μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μονάδος (τὴν ὁποίαν ὁρίζει τὸ πρόβλημα· διότι κατὰ τὸ πρόβλημα δι᾽ ἑκάστην τοιαύτην μονάδα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ λαμβάνεται εἰς τὸ γινόμενον ὅλος ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ δι᾽ ἕκαστον μέρος αὐτῆς λαμβάνεται εἰς τὸ γινόμενον τὸ ὁμώνυμον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου) ἢ μεταχειριζόμεθα τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν (ὅπερ εἶναι συνήθως εὐκολώτερον).

***Πρόβλημα.*** *Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 5 δρ. 20 λ. πόσον ἀξίζουν 12 πήχ. 6 ρ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;*

Πολλαπλασιαστέος μὲν εἶναι αἱ 5 δραχ. 20 λεπ., πολλαπλασιαστὴς δὲ οἱ 12 πήχ. 6 ρούπ. $\left(\text{ἢ } 12\frac{6}{8}\right)$. Διότι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου πρέπει νὰ λάβωμεν ὅλον τὸν συμμιγῆ 5 δραχ. 20 λεπ. δώδεκα φορὰς καὶ τὸ ὄγδοον αὐτοῦ ἓξ φοράς. Οἱ 12 πήχεις ἀξίζουν 12 φορὰς 5 δρχ. 20 λεπ· διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὴν ἀξίαν τῶν 12 πήχεων, πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ 5 δραχ. 20 λεπ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 12 καὶ εὑρίσκομεν 62 δραχ. 40 λεπτά.

Διὰ νὰ εὕρω, πόσον ἀξίζουν τὰ 6 ρούπ., ἢ τρέπω αὐτὰ εἰς πήχεις (διότι τοῦ πήχεως ἡ ἀξία ἐδόθη), ὅτε γίνονται $\frac{6}{8}$ ἢ $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως, καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζω τὸν συμμιγῆ ἐπὶ $\frac{3}{4}$, ἢ μεταχειρίζομαι τὴν μέθον τῶν ἁπλῶν μερῶν ὡς ἑξῆς:

| | | | |
|---|---|---|---|
| τὰ 8 ρούπια ἀξίζουν. . . . . . . . . . | 5 δρχ. | 20 λεπ. |
| τὰ 4 » » . . . . . . . . . . | 2 » | 60 » |
| τὰ 2 » » . . . . . . . . . . | 1 » | 30 » |
| ἄρα τὰ 6 » » . . . . . . . . . . | 3 » | 90 » |
| ὥστε οἱ 12 πήχ. καὶ τὰ 6 ρούπια ἀξίζουν. . . . | 66 » | 30 » |

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 5 δραχ. | | 20 λεπ. |
| | 12 πήχ. | | 6 ρούπ. |
| ἀξία τῶν 12 πήχ. | πρὸς 5 δραχ. | 60 | |
| | πρὸς 20 λεπ. | 2 | 40 |
| ἀξία τῶν 6 ρούπ. | τῶν 4, | 2 | 60 |
| | τῶν 2, | 1 | 30 |
| | γινόμενον | 66 δρ. | 30 |

*Πρόβλημα Τὸ ῥούπιον ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 5 δρ. 20 λ· πόσον ἀξίζουν 12 πήχ. καὶ 6 ρούπ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;*

Οἱ συμμιγεῖς εἶναι οἱ ἴδιοι· ἀλλὰ τώρα πρέπει ὁ πολλαπλασιαστέος 5 δρ. 20 λεπ. νὰ ληφθῇ τόσας φοράς, ὅσα ρούπια ἔχει ὁ συμμιγὴς (ἤτοι 102 φοράς), διότι ἕκαστον ρούπιον ἀξίζει 5 δραχ. 20 λεπ. Ἐνταῦθα λοιπὸν πολλαπλασιαστὴς εἶναι ὁ ἀκέραιος 102· ἐκτελοῦντες δὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν εὑρίσκομεν 530 δραχ. 40 λεπτά.

***Πρόβλημα.*** *Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 8 δρ. 40 λ· πόσον ἀξίζουν 20 ὀκ. 150 δράμ. τοῦ ἰδίου πράγματος;*

Πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ συμμιγὴς 8 δραχ. 40 λεπ., πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ συμμιγὴς 20 ὀκ. 150 δρ. $\left(\text{ἢ } 20\frac{150}{400}\right)$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 8 δρ. | 40 λεπ. |
| | | 20 ὀκ. | 150 δράμ. |
| ἀξία τῶν 20 ὀκάδ. | πρὸς 8 δρ. | 160 δρ. | |
| | πρὸς 40 λεπ. | 8 | |
| ἀξία τῶν 150 δραμ. | τῶν 100 δρ. $= \frac{1}{4}$ ὀκᾶς, | 2 | 10 λεπ. |
| | τῶν 50 δρ. $= \frac{1}{2}$ τῶν 100,1 | | 05 |
| | γινόμενον | 171 δρ. | 15 λεπ. |

*Πρόβλημα. Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζει τις 20 ὀκ. 150 δρ. ἐξ ἑνὸς πράγματος· πόσον ἀγοράζει μὲ 8 δρ. 40 λεπτά;*

Οἱ συμμιγεῖς εἶναι οἱ ἴδιοι τοῦ προηγουμένου προβλήματος· ἀλλ' ἐδῶ ζητοῦμεν ὀκάδας, ἤγουν τὸ γινόμενον μέλλει νὰ εἶναι ὀκάδες· ὥστε τώρα πολλαπλασιαστέος εἶναι αἱ 20 ὀκ. 150 δράμ., πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ 8 δραχ. 40 λεπ. $\left(\text{ἢ } 8\ \frac{2}{5}\right)$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 20 ὀκ. | 150 δράμ. |
| | | 8 | 40 λεπ. |
| ἀγοράζει μὲ 8 δρχ. | ἀπὸ 20 ὀκ. | 160 ὀκ. | |
| | ἀπὸ 100 δράμ. | 2 ὀκ. | |
| | ἀπὸ 50 δράμ. | 1 | |
| ἀγοράζει μὲ 40 λ. | μὲ 20 λεπ. $= \frac{1}{5}$ δρ. | 4 | 30 δράμ. |
| | μὲ 20 λεπ. $= \frac{1}{5}$ δρ. | 4 | 30 δράμ. |
| | | 171 ὀκ. | 60 δράμ. |

***Πρόβλημα.*** *Κρήνη τις παρέχει κάθε ὥραν 850 ὀκ. 275 δρ. ὕδατος· πόσον θὰ δώσῃ εἰς 18 ὥρ. καὶ 40΄;*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 850 ὀκ. | 275 δράμ. |
| | | 18 ὥρ. | 40΄ |
| θὰ δώσῃ εἰς 18 ὥρας | ἀπὸ 850 ὀκ. | 6800 ὀκ | |
| | | 850 | |
| | ἀπὸ 200 δρ. | 9 | |
| | ἀπὸ 50 δρ. | 2 | 100 δράμ. |
| | ἀπὸ 25 δρ. | 1 | 50 |
| θὰ δώσῃ εἰς 40΄ | εἰς 30΄ $= \frac{1}{2}$ ὥρ. | 425 | $137\frac{1}{2}$ |
| | εἰς 10΄ $= \frac{1}{3}$ τῶν 30΄ | 141 | $312\frac{1}{2}$ |
| | Τὸ ὅλον | 15879 ὀκάδ. | 200 δράμ. |

***Πρόβλημα.*** *Εἷς ὑφαντὴς χρειάζεται 1 ὥρ. 12΄ διὰ νὰ ὑφάνῃ ἕνα πῆχυν ὑφάσματος· πόσας ὥρας χρειάζεται νὰ ὑφάνῃ 22 πήχ. 5 ρούπ. ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσμαaος ;*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 1 ὥρ. | 12΄ |
| | | 22 πήχ. | 5΄ |
| Διὰ τοὺς 22 πήχ. χρειάζεται | ἀπὸ 1 ὥρ. | 22 ὥρ. | |
| | ἀπὸ 12΄ $= \frac{1}{5}$ ὥρ. | 4 | 24΄ |
| Διὰ τὰ 5 ρούπια χρειάζεται | τὰ 4 ρ. $= \frac{1}{2}$ πήχ. | 0 ὥρ. | 36΄ |
| | τὸ 1 ρ. $= \frac{1}{4}$ τῶν 4 | 0 | 9΄ |
| | Τὸ ὅλον | 27 ὥρ· | 9΄ |

***Πρόβλημα.*** *Μία οἰκογένεια χρειάζεται 580 ὀκ. 300 δρ. σίτου δι᾽ ἓν ἔτος· πόσον χρειάζεται διὰ 9 μῆνας καὶ 15 ἡμέρας ;*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 580 ὀκ. | 300 δράμ. |
| | | 9 μ. | 15 ἡμέρ. |
| Διὰ τοὺς 9 μῆνας χρειάζεται | διὰ τοὺς 6 μ $= \frac{1}{2}$ ἔτους, | 290 ὀκ. | 150 δράμ. |
| | διὰ τοὺς 3 μ. $= \frac{1}{2}$ τῶν 6, | 145 | 75 |
| Διὰ τὰς 15 ἡμέρας $= \frac{1}{6}$ τῶν 3 μ. χρειάζεται | | 24 | $79\frac{1}{6}$ |
| | Τὸ ὅλον χρειάζεται | 459 ὀκ. | $304\frac{1}{6}$ δρ. |

***Πρόβλημα. Μία ὀκᾶ σίτου ἀνταλλάσσεται μὲ 1 ὀκ. 250 δρ. κριθῆς· μὲ πόσας ὀκάδας κριθῆς θ' ἀνταλλαχθῶσι 12 ὀκ. 100 δράμια σίτου ;***

Πολλαπλασιαστέος μὲν εἶναι ὁ συμμιγὴς 1 ὀκ. 250 δρ. κριθῆς, διότι ὀκάδες κριθῆς θὰ εἶναι τὸ γινόμενον· πολλαπλασιαστὴς δὲ εἶναι αἱ 12 ὀκ. 100 δρ. ἢ $12\frac{1}{4}$, διότι πρέπει νὰ λάβωμεν 12 φορὰς τὸν συμμιγῆ 1 ὀκ. 250 δρ. καὶ τὸ τέταρτον αὐτοῦ ἅπαξ.

| | | |
|---|---|---|
| | 1 ὀκ. | 250 δρ. |
| | 12 | 100 |
| αἱ 12 ὀκάδες θ' ἀνταλλαχθῶσι μὲ | 19 ὀκ. | 200 δρ. |
| τὰ 100 δρ. $=\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἀνταλλάσσονται μὲ | 0 | $162\frac{1}{2}$ δρ. |
| Τὸ ὅλον | 19 ὀκ. | $362\frac{1}{2}$ δρ. |

Δυνατὸν ὁ πολλαπλασιαστέος νὰ ἔχῃ καὶ ἕνα μόνον ἀριθμὸν ὡς συμβαίνει εἰς τὰ ἑξῆς προβλήματα :

***Πρόβλημα. Ὁ στατὴρ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 8 δραχ.· πόσον ἀξίζουν 5 στατ. 28 ὀκάδες ;***

Πολλαπλασιαστέος εἶναι ἐδῶ αἱ 8 δραχμαί, πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ συμμιγὴς 5 στατ. 28 ὀκ. $\left(\text{ἢ ὁ } 5\frac{28}{44}\right)$

| | | |
|---|---|---|
| | 8 δρ. | |
| | 5 στ. | 28 ὀκ. |
| ἀξία τῶν 5 στατ. . . . . . . . . . . | 40 δρ. | |
| τῶν 28 ὀκάδων · τῶν $22=\frac{1}{2}$ στ. | 4 | |
| τῶν $4=\frac{1}{11}$ | 0 | 72 λεπ. $\frac{8}{11}$ |
| τῶν 2. . . . . . . . | 0 | 36 » $\frac{4}{11}$ |
| γινόμενον ἢ ἀξία τοῦ ὅλου | 45 δρ. | 9 λεπ. $\frac{1}{11}$ |

***Πρόβλημα. Ἐργάτης τις λαμβάνει κάθε ὥραν 4 δραχ.· πόσον θὰ λάβῃ, ἂν ἐργασθῇ 15 ὥρ. 20' ;***

| | | |
|---|---|---|
| | 4 δρ. | |
| | 15 ὥρ. | 20' |
| διὰ τὰς 15 ὥρας | 60 δρ. | |
| διὰ τὰ 20'=ἓν τρίτον τῆς ὥρας | 1 | 33 λεπ. $\frac{1}{3}$ |
| Τὸ ὅλον | 61 δρ. | 33 λεπ. $\frac{1}{3}$ |

***Πρόβλημα* *῾Ο πῆχυς μιᾶς τσόχας ἔχει βάρος 250 δράμια· πόσον βάρος ἔχουσι 18 π. 5 ϱ. ἐκ τῆς αὐτῆς τσόχας ;***

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 250 | |
| | | 18 πήχ. | 5 ϱ. |
| βάρος τῶν 18 πήχ. | | 2000 δράμ. | |
| | | 250 | |
| βάρος τῶν 5 ϱ. | τῶν 4 ϱ. $= \frac{1}{2}$ πήχ. | 125 | |
| | τοῦ 1 ϱ. $= \frac{1}{4}$ τῶν 4, | $31\frac{1}{4}$ | |
| | Τὸ ὅλον δϱ. | $4656\frac{1}{4}$ ἢ 11 ὀκ. 256 δϱ. $\frac{1}{4}$. | |

***Πρόβλημα.* *῾Η ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 6 δραχ.· πόσον ἀξίζουν τὰ 350 δράμια ;***

ἀξία τῶν 200 δϱ.=3 δϱ.
» » 100 δϱ.=1 50 λ. ἄϱα ἀξία τῶν 350 δϱ.=5 δϱ. 25.
» » 50 δϱ.=0 75

## *Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς.*

161. Συμμιγὴς διαιϱέτης δὲν ἠμποϱεῖ νὰ διαιϱέσῃ κανένα ἀϱιθμόν· ὥστε ἐνταῦθα ὁ διαιϱέτης τϱέπεται εἰς ἀκέϱαιον ἢ κλάσμα μιᾶς τῶν μονάδων του.

162. ῾Ο συμμιγὴς διαιϱετέος θὰ εἶναι γινόμενον τοῦ διαιϱέτου καὶ τοῦ ζητουμένου πηλίκου, ὁ δὲ ζητούμενος οὗτος ἀϱιθμὸς δύναται νὰ εἶναι ἐν τῷ γινομένῳ, ἢ πολλαπλασιαστὴς ἢ πολλαπλασιαστέος. Καὶ κατὰ μὲν τὴν πϱώτην πεϱίπτωσιν ὁ ζητούμενος ἀϱιθμὸς πολλαπλασιάζων τὸν διαιϱέτην δίδει τὸν διαιϱετέον· ἑπομένως ὁ διαιϱετέος γίνεται ἐκ τοῦ διαιϱέτου καὶ ἐκ τῶν μεϱῶν του καὶ εἶναι διὰ τοῦτο ὁμοειδὴς πϱὸς αὐτὸν καὶ ἡ τοιαύτη διαίϱεσις εἶναι μέτϱησις· κατὰ δὲ τὴν δευτέϱαν πεϱίπτωσιν ὁ ζητούμενος ἀϱιθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιϱέτην δίδει τὸν διαιϱετέον· ἑπομένως ὁ διαιϱετέος γίνεται τότε ἐκ τοῦ πηλίκου καὶ ἐκ τῶν μεϱῶν αὐτοῦ καὶ εἶναι ὁμοειδὴς πϱὸς αὐτό, πϱὸς δὲ τὸν διαιϱέτην διάφοϱος· ἡ δὲ τοιαύτη διαίϱεσις εἶναι μεϱισμός.

Διὰ τοῦτο διακϱίνομεν δύο εἴδη πϱοβλημάτων διαιϱέσεως.

Διακϱίνομεν δὲ εὐκόλως τὸ εἶδος τῆς διαιϱέσεως, ἂν δηλαδὴ εἶναι μέτρησις ἢ μερισμός, ἐὰν ἐξετάσωμεν τὸ αὐτὸ πρόβλημα λαμβάνοντες ἀντὶ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν οἱουσδήποτε ἀκεραίους.

## *Προβλήματα μετρήσεως.*

Εἰς τὰ προβλήματα ταῦτα ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ὁμοειδεῖς.

***Πρόβλημα.*** ***Ἐργάτης τις λαμβάνει καθ' ἡμέραν 36 δρ. 50 λ· εἰς πόσας ἡμέρας ἐργαζόμενος θὰ λάβῃ 857 δρ. 75 λ.***

Ἂν ἀντὶ τῶν συμμιγῶν εἴχομεν ἀκεραίους ἀριθμούς, ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου θὰ ἦτο εὐκολωτάτη· ἂν π. χ. ἐλάμβανε καθ' ἡμέραν 36 δρ., καὶ ἐζητεῖτο, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ λάβῃ 857 δρ., φανερὸν εἶναι ὅτι τόσαι ἡμέραι θὰ ἐχρειάζοντο, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 36 εἰς τὸν 857 δρ. Ἀλλ' εἶναι εὔκολον νὰ κάμωμεν, ὥστε οἱ δοθέντες συμμιγεῖς νὰ γίνωσιν ἀκέραιοι, ἐὰν τρέψωμεν αὐτοὺς εἰς λεπτά· τὸ πρόβλημα τότε καταντᾷ εἰς τὸ ἑξῆς:

***Ἐργάτης λαμβάνει καθ' ἡμέραν 3650 λεπτά· εἰς πόσας ἡμέρας ἐργαζόμενος θὰ λάβῃ 85775 λεπτά;***

Φανερὸν εἶναι, ὅτι τόσαι ἡμέραι ἐργασίας χρειάζονται, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς 3650 εἰς τὸν 85775· εἶναι λοιπὸν πρόβλημα μετρήσεως (σελ. 52, παρατήρ.) καὶ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 85775 διὰ τοῦ 3650 θεωροῦντες τοὺς δύο τούτους ἀκεραίους ἀριθμοὺς ὡς ἀφῃρημένους· τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{85775}{3650}$ καὶ πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὅτι παριστᾷ (ὡς τὸ πρόβλημα λέγει) ἡμέρας. Ἐὰν δὲ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν ἡμερῶν, γίνεται

23 ἡμ., 12 ὥρ.

Ἔστω προσέτι καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ διαιρετέος ἔχει ἕνα μόνον ἀριθμόν.

***Μὲ ἕνα τάλληρον ἀγοράζει τις ἐξ ἑνὸς πράγματος 15 ὀκ. 350 δρ. πόσα τάλληρα χρειάζεται, διὰ νὰ ἀγοράσῃ 5 στατῆρας ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος;***

Ἐὰν τρέψωμεν καὶ τοὺς δύο εἰς δράμια, τὸ πρόβλημα καταντᾷ εἰς τὸ ἑξῆς:

***Μὲ ἓν τάλληρον ἀγοράζει τις ἐξ ἑνὸς πράγματος 6350 δρά-***

***μια πόσα τάλληρα χρειάζονται διὰ νὰ ἀγοράσῃ 88000 δράμια ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος ;***

Φανερὸν εἶναι, ὅτι τόσα τάλληρα θὰ χρειασθῇ, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 6350 εἰς τὸν 88000˙ διὰ νὰ εὕρωμεν τοῦτο, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 88000 διὰ τοῦ 6350 (ὡς ἀφῃρημένους ἀριθμούς)˙ τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{88000}{6350}$ ἢ $\frac{1760}{127}$ καὶ θεωρεῖται ὡς παριστῶν τάλληρα (ὡς ὁρίζει τὸ πρόβλημα). Ἐὰν δὲ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν ταλλήρων, γίνεται

13 τάλλ., 4 δρ., 29 λεπτ. $\frac{17}{127}$.

Εἰς τὸ ἑξῆς πρόβλημα ἔχει ὁ διαιρέτης ἕνα μόνον ἀριθμόν.

***Μία μηχανὴ ὑφαίνει κάθε ὥραν 5 π. ἑνὸς ὑφάσματος˙ πόσας ὥρας χρειάζεται διὰ νὰ ὑφάνῃ 1870 π., 2 ρούπια τοῦ ἰδίου ὑφάσματος ;***

Οἱ 5 π. κάμνουν ρούπ. 40, οἱ δὲ 1870 πήχεις καὶ 2 ρούπια γίνονται ρούπια 14962˙ ὥστε πρέπει νὰ εὕρωμεν, πόσας φορὰς χωροῦσι τὰ 40 ρούπια εἰς τὰ 14962 (διότι τόσαι ὧραι χρειάζονται), ἤτοι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 14962 διὰ τοῦ 40. Τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{14962}{40}$ ἢ $\frac{7481}{20}$ καὶ θεωρεῖται ὡς παριστῶν ὥρας (ὡς ὁρίζει τὸ πρόβλημα)˙ ἐὰν δὲ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν ὡρῶν, γίνεται 374 ὧραι 3′.

163. .Εκ τούτων βλέπομεν, ὅτι

***διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι᾿ ἄλλου, ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι μέτρησις, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς ἀκεραίους ὁμοειδεῖς καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τοὺς ἀκεραίους τούτους˙ τὸ δὲ εἶδος τοῦ πηλίκου προσδιορίζεται ἐκ τοῦ προβλήματος.***

Τρέπεται δὲ ὁ συμμιγὴς εἰς ἀκέραιον, ἐὰν τραπῇ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του (ἐδ. 147).

## *Προβλήματα μερισμοῦ.*

Εἰς τὰ προβλήματα ταῦτα ὁ διαιρετέος εἶναι ὁμοειδὴς μὲ τὸ ζητούμενον πηλίκον, διάφορος δὲ τοῦ διαιρέτου.

***Πρόβλημα.*** ***Ἐργασθείς τις 8 ὥρ. 15′. 20″ ἔλαβεν ὡς ἀμοιβὴν 59 δρ. 65 λ.˙ πόσας ἔλαβε δι᾿ ἑκάστην ὥραν ;***

Ἂν ἐλάμβανε τὰς 59 δρ. 65 λ. δι᾿ ἐργασίαν 8 ὡρῶν μόνον θὰ ἦτο εὔκολος ἡ λύσις, διότι εἶναι προφανές, ὅτι τότε ἤρκει νὰ μερίσωμεν τὰς

59 δρ. 65 λ. εἰς 8 ἴσα μερίδια καὶ ἕκαστον μερίδιον θὰ ἦτο ἡ ἀμοιβὴ διὰ τὴν ἐργασίαν 1 ὥρας· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ 8 ὥρ. 15′ 20″ εἰς ἀριθμὸν ὡρῶν· τότε τὸ πρόβλημα καταντᾷ εἰς τὸ ἑξῆς:

***Ἐργασθείς τις $\frac{743}{90}$ τῆς ὥρας ἔλαβεν ὡς ἀμοιβὴν 59 δρ. 65 λ· πόσας ἔλαβε δι' ἑκάστην ὥραν;***

Λύεται δὲ ἁπλούστατα ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ διὰ τὰ 743 ἐνενηκοστὰ τῆς ὥρας ἔλαβε 59 δρ. 65 λ., διὰ τὸ 1 ἐνενηκοστὸν ἔλαβε τὸ 743ον μέρος τοῦ 59 δρ. 65 λ., καὶ διὰ 90 ἐνενηκοστά, ἤτοι διὰ μίαν ὥραν, ἔλαβεν ἐνενήκοντα φορὰς τὸ 743ον μέρος τοῦ 59 δρ. 65 λ., ἤτοι τὸ γινόμενον τοῦ 59 δρχ. 65 λ. ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{90}{743}$· ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμὸν εὑρίσκομεν, ὅτι δι' ἑκάστην ὥραν ἔλαβεν 7 δρ. 22 λ. $\frac{404}{743}$.

***Πρόβλημα. Ἁμαξά τις εἰς 7 ὥρ. 45′ διέτρεξε 52 στάδ. 428 μέτρα· πόσον διατρέχει καθ' ὥραν;***

Ἐπειδὴ εἰς $\frac{31}{4}$ τῆς ὥρας διέτρεξε τὰ 52 στ. 428 μέτρα, εἰς 1 τέταρτον τῆς ὥρας διέτρεξε τὸ 31ον μέρος τῶν 52 στ. 428 μ. καὶ εἰς μίαν ὥραν διέτρεξε τὰ $\frac{4}{31}$ τῶν 52 στ. 428 μ., ἤτοι τὸ γινόμενον

$$52 \text{ στ. } 428 \text{ μ. ἐπὶ } \frac{4}{31}\cdot$$

ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμὸν εὑρίσκομεν, ὅτι καθ' ὥραν διατρέχει

$$6 \text{ στ. } 764 \text{ μ. } \frac{28}{31}.$$

***Πρόβλημα. Μὲ 1875 δρ. ἠγόρασέ τις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος 254 πήχεις καὶ 3 ῥούπια· πρὸς πόσον ἠγόρασε τὸν πῆχυν;***

Οἱ 254 πήχεις καὶ τὰ 3 ῥούπια γίνονται 2035 ῥούπια· ἐπειδὴ δὲ τὰ 2035 ῥούπια ἀξίζουν 1875 δραχμάς, τὸ ἓν ῥούπιον θὰ ἀξίζῃ $\frac{1875}{2035}$ τῆς δρ., καὶ ὁ πῆχυς θὰ ἀξίζῃ $\frac{1875\times 8}{2035}$ τῆς δρ., ἤτοι 7 δρ. 37 λ. $\frac{41}{407}$.

***Πρόβλημα. Σιδηρόδρομός τις διήνυσε 306 στάδια εἰς 12 ὥρας καὶ 45′· πόσον διανύει εἰς 1′;***

Αἱ 12 ὥρ. 45′ κάμνουν 765′, καὶ ἐπειδὴ εἰς 765′ διήνυσε 306 στάδια, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον διανύει εἰς 1′, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 306 στ. διὰ τοῦ 755· διαιροῦντες εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς 1′ διανύει 400 μ.

***Πρόβλημα. Εἴς τινα ἀγρὸν ἐσπάρησαν 25 ὀκ. 300 δρ. σίτου καὶ παρήγαγον 452 ὀκ 120 δρ.· πόσον παρήγαγεν ἑκάστη ὀκᾶ;***

Ἐνταῦθα γίνεται διάκρισίς τις τῶν δύο συμμιγῶν· ὁ πρῶτος σημαίνει τὸν σπόρον, ὁ δὲ δεύτερος τὸ προϊόν. Τρέποντες τὸν διαιρέτην 25 ὀκ. 300 δρ. εἰς κλάσμα τῆς ὀκᾶς (διότι τὸ προϊὸν τῆς μιᾶς ὀκᾶς ζητεῖται), εὑρίσκομεν 25 $\frac{3}{4}$ ἢ $\frac{103}{4}$ καὶ διαιροῦντες δι᾽ αὐτοῦ τὸν συμμιγῆ διαιρετέον εὑρίσκομεν, ὅτι ἑκάστη ὀκᾶ παρήγαγε 17 ὀκ. 226 δρ. $\frac{2}{103}$.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν ἀκόλουθον κανόνα.

164. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι᾽ ἄλλου, ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι μερισμός, τρέπομεν τὸν διαιρέτην εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος του (ἐκείνης, ἣν ὁρίζει τὸ πρόβλημα) καὶ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διαιροῦμεν τὸν διαιρετέον (ἐδάφ. 158).***

## *Προβλήματα.*

401) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 80 δραχμὰς καὶ 75 λεπτά· πόσον ἀξίζουν 10 πήχεις καὶ 6 ρούπια; (ἀπ. 868 δραχ. 6 λεπ. $\frac{1}{4}$)

402) Ὁ στατὴρ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 5 δραχμὰς καὶ 20 λεπτά· πόσον ἀξίζουν 16 στατ. 25 ὀκ. καὶ 240 δράμ.; (ἀπ. 86 δρ. 22 λεπ. $\frac{6}{11}$)

403) Ἀτμόπλοιόν τι διατρέχει εἰς μίαν ὥραν 14 $\frac{1}{2}$ μίλια· πόσα θὰ διατρέξῃ εἰς 8 ὥρας 15′, 20′′; (ἀπ. 119 μίλια $\frac{127}{180}$)

404) Ἓν βαρέλιον χωρεῖ 320 ὀκάδας οἴνου καὶ 300 δράμια· πόσον θὰ χωρέσουν 8 βαρέλια ἴσα μὲ αὐτό; (ἀπ. 2566 ὀκάδας)

405) Μία μηχανὴ καίει καθ᾽ ἡμέραν δύο τόννους ἀνθράκων καὶ 500 χιλιόγραμμα· πόσον θὰ καύσῃ εἰς 7 ἡμέρας; (ἀπ. 17 $\frac{1}{2}$ τόννους)

406) Κτίστης τις κτίζει εἰς μίαν ὥραν τοῖχον 5 ποδῶν, 6 δακτύλων καὶ 5 γραμμῶν· εἰς πόσας ὥρας θὰ κτίσῃ 120 ὀργυιάς; (ἀπ. 130 ὥρ. 5 16′′ $\frac{148}{797}$)

407) Ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος ἐπωλήθησαν 18 πήχεις καὶ 3 ρούπια διὰ 2241 δραχ. καὶ 75 λεπτ.· πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς; (ἀπ. 122 δραχ.)

408) Ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος ἐπώλησαν δύο ἔμποροι, ὁ μὲν εἷς 15 ὀκ. 300 δράμ. ἀντὶ 52 δραχ. 60 λεπτῶν, ὁ δὲ ἄλλος 152 ὀκ. 250 δράμ. ἀντὶ 500 δραχ. τίς ἐκ τῶν δύο ἐπώλησεν εὐθηνότερα;
(ἀπ. ὁ πρῶτος 3 δραχ. 33 λεπ. $\frac{61}{63}$· ὁ δεύτερος, 3 δραχ. 27 λ. $\frac{733}{1221}$)

409) Ἄνθρωπός τις ἐγεννήθη τὴν 21ην Ἰανουαρίου 1855 καὶ ἀπέθανε τὴν 15ην Ἰουλίου 1870· πόσα ἔτη, πόσους μῆνας καὶ πόσας ἡμέρας ἔζησεν;

410) Ὡρολόγιόν τι εἰς διάστημα 24 ὡρῶν ἔμεινεν ὀπίσω 8′ καὶ 40″· πόσον μένει ὀπίσω κάθε ὥραν; (ἀπ. 21″ $\frac{2}{3}$)

411) Σιδηροῦ τινος ἐλάσματος ὁ πῆχυς ἔχει βάρος 90 ὀκ. 150 δράμ. πόσον βάρος ἔχουσι 2 πήχεις 6 ρούπια ἐκ τοῦ ἰδίου ἐλάσματος;
(ἀπ. 248 ὀκ. 212 $\frac{1}{2}$ δράμ.)

412) Μία οἰκογένεια ἐξώδευσε 42 ὀκ. 300 δράμ. ζάκχαριν εἰς 5 μῆνας καὶ 20 ἡμέρας· πόσην ζάκχαριν ἐξοδεύει καθ' ἑκάστην, πόσην τὸν μῆνα καὶ πόσην χρειάζεται κατ' ἔτος; (ἀπ. καθ' ἑκάστην 100 δράμ. κατὰ μῆνα 7 ὀκ. 200 δράμ. καὶ κατ' ἔτος 90 ὀκ. 100 δράμ.)

413) Ἐὰν τὸ μέτρον ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 23 δραχ. 44 λεπτ., πόσον ἀξίζει ὁ μικρὸς πῆχυς; (ἀπ. 16 δρ. 48 λ. $\frac{64}{125}$)

414) Ἠγόρασέ τις βούτυρον 108 ὀκ. 150 δράμ. πρὸς 88,80 δραχ. τὴν ὀκᾶν, ἐπλήρωσε δὲ 6785,80 δραχ.· πόσα θὰ πληρώσῃ ἀκόμη;
(ἀπ. 2837 δρ. 90 λ.)

415) Μὲ 144 δραχ. 90 λεπτ. ἠγόρασέ τις 7 ὀκ. 250 δράμ. ἐξ ἑνὸς πράγματος· πόσον ἀγοράζει μὲ 618 δρ. 70 λεπ.; (ἀπ. 33 ὀκ. 250 δράμ.)

# *Προσθῆκαι.*

## Α΄

### *Πῶς εὑρίσκεται ποία ἡμέρα εἶναι ἡ πρώτη οἱουδήποτε ἔτους μ. Χ.*

Ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τοῦ ἔτους ἀφαιροῦμεν μίαν μονάδα καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ 28· εἰς τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ μένει, προσθέτομεν τὸ τέταρτον αὐτοῦ (παραλείποντες τὸ κλασματικὸν μέρος, ἐὰν εἶναι)· τὸ ἄθροισμα διαιροῦμεν τέλος διὰ τοῦ 7 καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης δεικνύει τὴν ἡμέραν τῆς ἑβδομάδος, ἥτις θὰ εἶναι ἢ ἦτο ἡ πρώτη τοῦ ἔτους ἐκείνου· δεικνύει δὲ αὐτὴν ὡς ἑξῆς: ἂν μείνῃ ὑπόλοιπον 1, θὰ εἶναι Κυριακή· ἂν 2, θὰ εἶναι Δευτέρα· ἂν 3, Τρίτη· ἂν 4, Τεταρτη· ἂν 5, Πέμπτη· ἂν 6, Παρασκευή· ἂν 0, Σάββατον.

## *Παραδείγματα.*

1) Νὰ εὕρωμεν ποία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος ἦτο ἡ πρώτη τοῦ ἔτους 1844.

Ἀφαιροῦμεν 1 καὶ μένει 1843.

Διαιροῦμεν τὸ 1843 διὰ τοῦ 28 καὶ μένει ὑπόλοιπον 23.

Προσθέτομεν εἰς τὸ ὑπόλοιπον 23 τὸ τέταρτον αὐτοῦ 5 (τὸ ἀκέραιον μέρος) καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα 28.

Διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα 28 διὰ 7 καὶ μένει ὑπόλοιπον 0· ὥστε ἡ πρώτη ἡμέρα τοῦ ἔτους 1844 ἦτο Σάββατον.

2) Νὰ εὕρωμεν ποία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος ἦτο ἡ πρώτη τοῦ ἔτους 1921.

Ἀφαιροῦμεν 1 καὶ μένει 1920.

Διαιροῦμεν τὸ 1920 διὰ τοῦ 28 καὶ μένει ὑπόλοιπον 16.

Προσθέτομεν εἰς τὸ 16 τὸ τέταρτον αὐτοῦ 4 καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα 20.

Διαιροῦμεν τὸ 20 διὰ 7 καὶ μένει ὑπόλοιπον 6. Ὥστε ἡ πρώτη ἡμέρα τοῦ ἔτους 1921 ἦτο Παρασκευή.

***Σημείωσις.*** Ἐπειδὴ αἱ 365 ἡμέραι, ἃς ἔχουσι τὰ κοινὰ ἔτη, κάμνουν 50 ἑβδομάδας καὶ μίαν ἡμέραν περιπλέον, διὰ τοῦτο ἡ πρώτη το ἔτους ἀπὸ κάθε κοινὸν ἔτος εἰς τὸ ἑπόμενόν του μετακινεῖται καὶ προχωρεῖ κατὰ μίαν ἡμέραν τῆς ἑβδομάδος· ἀλλὰ ἀπὸ κάθε δίσεκτον εἰς τὸ ἑπόμενόν του ἔτος προχωρεῖ ἡ πρώτη τοῦ ἔτους κατὰ δύο ἡμέρας τῆς ἑβδομάδος. Οἷον ἡ πρώτη ἡμέρα τοῦ 1895 ἦτο Κυριακή, ἡ πρώτη τοῦ 1896 Δευτέρα· ἀλλ' ἡ πρώτη τοῦ 1897 Τετάρτη.

Μετὰ παρέλευσιν 28 ἐτῶν αἱ ἡμέραι τῆς ἑβδομάδος ἐπανέρχονται αἱ ἴδιαι κατὰ τὰς αὐτὰς ἡμερομηνίας· ἑπομένως ἡ 1η Ἰανουαρίου τῶν ἐτῶν 1844, 1872, 1900 κτλ. εἶναι ἡ ἰδία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος.

Β′

### *Πῶς εὑρίσκεται ποία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος εἶναι, ὅταν δοθῇ τὸ ἔτος, ὁ μὴν καὶ ἡ ἡμερομηνία.*

Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῆς πρώτης τοῦ ἔτους καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον προσθέτομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν ἑκάστου μηνὸς (παραλείποντες τὰς 28 ἡμέρας ἑκάστου) ἀπὸ τοῦ Ἰανουαρίου καὶ ἐφεξῆς κατὰ σειρὰν μέχρι τοῦ μηνός, ὅστις προηγεῖται τοῦ δοθέντος· προσθέτομεν ἀκόμη καὶ τὴν δεδομένην ἡμερομηνίαν ἠλαττωμένην κατὰ 1. Τὸ προκῦπτον ἄθροισμα διαιροῦμεν διὰ 7 καὶ τὸ ὑπόλοιπον δεικνύει τὴν ἡμέραν τῆς ἑβδομάδος.

## *Παραδείγματα.*

1) Νὰ εὑρεθῇ ποία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος ἦτο ἡ 1 Ἀπριλίου τοῦ 1844.

| | | |
|---|---|---|
| Ἡ πρώτη ἡμέρα τοῦ 1844 ἦτο Σάββατον | = 0 | |
| ἡμέραι τοῦ Ἰανουαρίου | = 3 | |
| » » Φεβρουαρίου | = 1 | (διότι εἶχεν 29) |
| » » Μαρτίου | = 3 | |
| » » Ἀπριλίου 1—1 | = 0 | |
| ἄθροισμα | 7 | |

Διαιροῦμεν τὸ 7 δι᾽ 7 καὶ μένει 0· ὥστε ἡ 1 Ἀπριλίου τοῦ 1844 ἦτο Σάββατον.

2) Νὰ εὑρεθῇ ποία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος ἦτο ἡ 25 Μαρτίου τοῦ 1821.

Θά εὕρω πρῶτον, ποία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος ἦτο ἡ 1 Ἰανουαρίου 1821. Ἀφαιρῶ 1 καὶ μένει 1820. Διαιρῶ τὸν 1820 διὰ 28 καὶ μένει 0· προσθέτω τὸ τέταρτον τοῦ 0 καὶ ἔχω πάλιν 0, διαιρῶ δι᾽ 7 καὶ μένει 0· ὥστε ἡ 1η τοῦ ἔτους 1821 ἦτο Σάββατον.

| | |
|---|---|
| πρώτη τοῦ ἔτους Σάββατον | = 0 |
| ἡμέραι Ἰανουαρίου | = 3 |
| » Φεβρουαρίου | = 0 |
| » Μαρτίου 25 — 1 | = 24 |
| ἄθροισμα | 27 |

Διαιρῶ τὸ 27 διὰ 7 καὶ μένει 6· ὥστε ἡ 25 Μαρτίου τοῦ 1821 ἦτο Παρασκευή.

***Σημείωσις.*** Ἡ 1η καὶ ἡ 8η (1 + 7) καὶ ἡ 15η (8 + 7) καὶ ἡ 22α (15 + 7) καὶ ἡ 29η (22 + 7) ἑκάστου μηνὸς εἶναι ἡ ἰδία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος.

# ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ

# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

## ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄

## ΠΕΡΙ ΜΕΘΟΔΩΝ

### *Ὁρισμοί.*

### *Ποσὰ ἀνάλογα.*

165. ***Δύο ποσὰ λέγονται ἀνάλογα, ἐὰν ὁ πολλαπλασιασμὸς τῆς τυχούσης τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ προξενῇ τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τῆς πρὸς αὐτὴν ἀντιστοίχου τιμῆς τοῦ ἄλλου ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν***· δηλαδή, ὅταν διπλασιάζηται, τριπλασιάζηται κ.τ.λ. τιμή τις τοῦ ἑνός, νὰ διπλασιάζηται τριπλασιάζηται κ.τ.λ. καὶ ἡ πρὸς αὐτὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ.

***Παραδείγματα.*** Ἂν 2 ὀκάδες ἐξ ἑνὸς πράγματος ἀξίζουν 7 δραχ. αἱ 4 (2×2) ὀκάδες τοῦ ἰδίου πράγματος ἀξίζουν 14 δραχ. (7×2), αἱ 6 ὀκάδες (2×3) ἀξίζουν 21 (7×3) δραχ. καὶ καθεξῆς· ὥστε ἡ ἀξία ἑνὸς πράγματος καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων του εἶναι ἀνάλογα· ὁμοίως ἡ ἀξία ἑνὸς ὑφάσματος καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεών του εἶναι ἀνάλογα.

Ἂν ἐργάτης τις λαμβάνῃ ἡμερομίσθιον 3 δραχ., διὰ δύο ἡμέρας θὰ λάβῃ 6 (3×2) δραχ., διὰ 3 θὰ λάβῃ 9 (3×3) καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε ὁ μισθὸς τοῦ ἐργάτου καὶ αἱ ἡμέραι τῆς ἐργασίας του εἶναι ἀνάλογα.

Ἂν ὁδοιπόρος τις διανύῃ εἰς μίαν ὥραν 6 στάδια, εἰς 2 ὥρας θὰ διανύσῃ 6×2, ἤτοι 12 στάδια, εἰς 3 ὥρας θὰ διανύσῃ 6×3 ἢ 18 στάδια, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε αἱ ὧραι τῆς ὁδοιπορίας καὶ τὰ διανυόμενα στάδια εἶναι ἀνάλογα.

Ἂν μοιρασθοῦν 1000 δραχ. εἰς 5 ἀνθρώπους, θὰ λάβῃ ἕκαστος 200 δραχ., ἂν μοιρασθοῦν διπλάσιαι, ἤτοι 2000 δραχ., θὰ λάβῃ ἕκαστος διπλασίας, ἤτοι 400 δραχ., ἂν μοιρασθοῦν τριπλάσιαι, ἤτοι 3000, θὰ λάβῃ ἕκαστος τριπλασίας, ἤτοι 600, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον διανέμεται, καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου ἀνθρώπου εἶναι ἀνάλογα (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων πρέπει νὰ μένῃ ὁ ἴδιος).

***Σημείωσις.*** Δὲν πρέπει νὰ νομίζωμεν ὅτι, ὅταν δύο ποσὰ συναυξάνωσιν, εἶναι καὶ ἀνάλογα· διότι, παραδείγματος χάριν, τὸ ἀνάστημα τοῦ παιδίου καὶ τὰ ἔτη αὐτοῦ συναυξάνουν καὶ ὅμως δὲν εἶναι ἀνάλογα.

166. Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται ***ἀνάλογοι*** πρὸς ἄλλους ἴσους τὸ πλῆθος, ὅταν προκύπτωσιν ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μὲ ἕνα ἀριθμόν· π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 10, 12, 20 εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 5, 6, 10· διότι προκύπτουσιν ἐκ τούτων πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ 2.

## *Ποσὰ ἀντίστροφα.*

167. ***Δύο ποσὰ λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα, ἐὰν ὁ πολλαπλασιασμὸς τῆς τυχούσης τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, προξενῇ διαίρεσιν τῆς πρὸς αὐτὴν ἀντιστοίχου τιμῆς τοῦ ἄλλου, διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ,*** δηλαδὴ ὅταν διπλασιάζηται, τριπλασιάζηται κ.τ.λ. τιμή τις τοῦ ἑνός, ἡ πρὸς αὐτὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ ὑποδιπλασιάζεται, ὑποτριπλασιάζεται κ.τ.λ.

***Παραδείγματα*** Ἐὰν εἷς ἐργάτης τελειώνῃ ἓν ἔργον εἰς 18 ἡμέρας, δύο ἐργάται θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον τοῦτο εἰς 9 μόνον ἡμέρας, 3 ἐργάται θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον εἰς $\frac{18}{3}$, ἤτοι 6 ἡμέρας, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, εἰς τὰς ὁποίας τελειώνουν ἔργον τι, εἶναι ἀντίστροφα ποσά.

Ἐὰν 5 ἄνθρωποι μοιράσουν 1000 δραχ., θὰ λάβῃ ἕκαστος 200 δραχ.· ἐὰν 10 ἄνθρωποι μοιράσουν τὰς ἰδίας δραχμάς, θὰ λάβῃ ἕκαστος 100 μόνον (τὸ ἥμισυ τοῦ πρώτου μεριδίου), ἐὰν 15 ἄνθρωποι μοιράσουν τὰ ἴδια χρήματα, θὰ λάβῃ καθεὶς $\frac{200}{3}$, ἤτοι $66\frac{2}{3}$, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων, οἱ ὁποῖοι θὰ μοιράσουν πρᾶγμά τι, καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα.

***Σημείωσις.*** Δὲν πρέπει νὰ νομίζωμεν ὅτι, ὅταν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἀνομοίως (δηλαδὴ τὸ ἓν αὐξάνει καὶ τὸ ἄλλο ἐλαττώνεται) εἶναι καὶ ἀντίστροφα· διότι, π. χ., ἂν μία ἅμαξα, συρομένη ὑπὸ 2 ἵππων, διατρέχῃ τὸ ἀπ' Ἀθηνῶν εἰς Πειραιᾶ διάστημα εἰς μίαν ὥραν, συρομένει ὑπὸ 4, δὲν θὰ διατρέξῃ αὐτὸ εἰς $\frac{1}{2}$ ὥραν, οὔτε συρομένη ὑπὸ 8 θὰ διανύσῃ αὐτὸ εἰς $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας.

## ΠΕΡΙ ΛΟΓΟΥ

168. ***Λόγος ἀφηρημένου ἀριθμοῦ α πρὸς ἄλλον τοιοῦτον β ἢ συγκεκριμένου ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον ὁμοειδῆ, λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις δεικνύει πῶς ἀποτελεῖται ὁ α ἐκ τοῦ β καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ.***

Ὁ λόγος σύγκειται ἀπὸ τὴν μονάδα 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς, καθ' ὃν τρόπον σύγκειται ὁ α ἐκ τοῦ β καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ.

Ἐὰν π. χ. εἶναι $\alpha = \beta + \beta + \frac{\beta}{2}$, ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι $1 + 1 + \frac{1}{2}$, ἤτοι $\frac{5}{2}$.

***Σημείωσις.*** Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ὁρίζεται καὶ ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε ὁμοειδῶν ποσῶν.

169. Ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι $2\frac{3}{5}$· τοῦτο σημαίνει, ὅτι εἶναι $\alpha = \beta + \beta + \frac{\beta}{5} + \frac{\beta}{5} + \frac{\beta}{5}$

$$\text{ἢ } \alpha = \left(1 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)\beta.$$

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ἂν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ β.

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 2\frac{3}{5}\cdot$$

ὥστε ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ α διὰ β.

Διὰ τοῦτο ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ καὶ διὰ τοῦ $\alpha : \beta$.

## *Περὶ ἀναλογιῶν.*

170. Ἀναλογία εἶναι ἡ ἰσότης δύο λόγων·

$$\text{οἷον } \frac{12}{8} = \frac{6}{4} \text{ ἢ } 12 : 8 = 6 : 4 \text{ εἶναι ἀναλογία.}$$

***Σημείωσις.*** Ὅταν ἡ ἀναλογία γράφηται διὰ τεσσάρων ἀριθμῶν, ὡς ἑξῆς· $12 : 8 = 6 : 4$, οἱ εἰς τὰ ἄκρα εὑρισκόμενοι ἀριθμοὶ (οἱ 12 καὶ 4) λέγονται ***ἄκροι*** τῆς ἀναλογίας, οἱ δὲ ἄλλοι δύο λέγονται ***μέσοι***· καὶ οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ λέγονται ***ὅροι*** τῆς ἀναλογίας. Πρὸς τούτοις οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ τῶν δύο λόγων (ὁ 12 καὶ ὁ 6) λέγονται ***ἡγούμενοι***, οἱ δὲ δεύτεροι λέγονται ***ἑπόμενοι***.

171. Ἐπειδὴ αἱ ἀναλογίαι ὑπάγονται εἰς τὰς ἰσότητας, αἱ ἰδιότητες αὐτῶν εὑρίσκονται ἐκ τῶν γενικῶν ἰδιοτήτων τῆς ἰσότητος· ὥστε εἶναι περιττὸν νὰ γίνηται μακρότερος λόγος περὶ αὐτῶν· διὰ τοῦτο ἀρκούμεθα εἰς τὰς ἑξῆς δύο ἰδιότητας.

1) ***Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων.***

Ἔστω ἡ ἀναλογία $5 : 8 = 10 : 16$ ἢ $\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο ἴσα ἐπὶ $8 \times 16$, εὑρίσκομεν

$$\frac{5}{8} \times 8 \times 16 = \frac{10}{16} \times 16 \times 8$$

ἢ $5 \times 16 = 8 \times 10$· καὶ αὐτὸ ἐπρόκειτο νὰ δείξωμεν.

Καὶ ἀντιστρόφως· ἐκ τῆς ἰσότητος $5 \times 16 = 8 \times 10$, ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ ἴσα διὰ τοῦ $8 \times 16$, προκύπτει·

$$\frac{5 \times 16}{8 \times 16} = \frac{8 \times 10}{8 \times 16} \text{ ἢ } \frac{5}{8} = \frac{10}{16} \text{ ἢ } 5 : 8 = 10 : 16.$$

ὥστε, ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον δύο ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι συνιστῶσιν ἀναλογίαν, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἄκροι εἶναι οἱ παράγοντες τοῦ ἑνὸς γινομένου, μέσοι δὲ οἱ παράγοντες τοῦ ἄλλου.

2) ***Ἐὰν προστεθῶσιν οἱ ὁμοταγεῖς ὅροι ὁσωνδήποτε λόγων ἴσων, προκύπτει λόγος ἴσος.***

Ἔστωσαν ἴσοι οἱ λόγοι.

$$\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{12}{20}.$$

Ἐπειδὴ τὰ κλάσματα ταῦτα εἶναι ἴσα, ἐὰν προσθέσωμεν τοὺς ὁμωνύμους ὅρους αὐτῶν, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{3 + 6 + 12}{5 + 10 + 20} = \frac{21}{35}$, τὸ ὁποῖον προφανῶς εἶναι ἴσον πρὸς τὰ προηγούμενα· τουτέστιν ὁ λόγος τοῦ $3 + 6 + 12$ πρὸς τὸ $5 + 10 + 20$ εἶναι ἴσος πρὸς τοὺς δοθέντας ἴσους λόγους.

172. Ὅταν εἷς ὅρος μιᾶς ἀναλογίας εἶναι ἄγνωστος, δυνάμεθα νὰ τὸν εὕρωμεν. Π. χ. ἐὰν ζητῆται ὁ δ' ὅρος, τὸν ὁποῖον παριστῶμεν διὰ τοῦ $\chi$, τῆς ἀναλογίας

$$10 : 2 = 5 : \chi,$$

θὰ ἔχωμεν $10 \times \chi = 2 \times 15$.

Ὥστε $\chi = \frac{2 \times 15}{10} = 3.$

Ἐπίσης ἐκ τῆς ἀναλογίας $12 : 3 = \chi : 9$
εὑρίσκομεν $3 \times \chi = 12 \times 9$, ὥστε $\chi = \frac{12 \times 9}{3} = 36.$

## *Μέθοδοι.*

173. ***Μέθοδος*** λέγεται τρόπος τις γενικός, διὰ τοῦ ὁποίου λύομεν εἶδός τι προβλημάτων.

***Στοιχειώδη*** προβλήματα λέγονται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ ἐξ αὐτῶν εὑρίσκεται ὁ ἄγνωστος διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διὰ διαιρέσεως.

Τοιαῦτα εἶνε λ. χ., τὰ ἑξῆς δύο γενικὰ προβλήματα.

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία πολλῶν μονάδων (ἑνὸς πράγματος), ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ ἀξία μιᾶς μονάδος.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος (ἑνὸς πράγματος), ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ ἀξία πολλῶν μονάδων.

Διότι τὸ μὲν πρῶτον λύεται δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ, τὸ δὲ δεύτερον διὰ μιᾶς διαιρέσεως.

## *Μέθοδος τῶν τριῶν.*

174. Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν λύει τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ δύο ποσῶν ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τί γίνεται ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, ὅταν ἡ πρὸς αὐτὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ μεταβληθῇ.

Τὰ τοιαῦτα προβλήματα ἀναλύονται εἰς δύο στοιχειώδη καὶ λύονται, ὡς φαίνεται ἀπὸ τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

***Πρόβλημα. Ὀκτὼ ὀκάδες ἑνὸς πράγματος ἀξίζουν 25 δραχ.· πόσον ἀξίζουν 75 ὀκάδες τοῦ ἰδίου πράγματος;***

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν δύο ποσὰ ἀνάλογα· τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀκάδων καὶ τὰς δραχμάς· πρῶτα ἦσαν 8 ὀκάδες καὶ 25 δραχμαί· τώρα αἱ ὀκάδες ἔγιναν 75· πόσαι θὰ γίνουν αἱ δραχμαί;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ αἱ 8 ὀκάδες ἀξίζουν 25 δρ., ἡ μία ὀκᾶ ἀξίζει $\frac{25}{8}$ τῆς δραχμῆς·

ἀφοῦ δὲ ἡ μία ὀκᾶ ἀξίζει $\frac{25}{8}$ τῆς δραχμῆς, αἱ 75 ὀκάδες ἀξίζουν $\frac{25}{8} \times 75$, ἤτοι 234 δρ. $\frac{3}{8}$.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι τὸ δοθὲν πρόβλημα ἀνελύθη εἰς τὰ ἑξῆς δύο στοιχειώδη

1) Αἱ 8 ὀκάδες ἀξίζουν 25 δραχμάς· πόσον ἀξίζει ἡ μία;

2) Ἡ μία ὀκᾶ ἀξίζει $\frac{25}{8}$ τῆς δραχμῆς· πόσον ἀξίζουν αἱ 75;

***Πρόβλημα. Μὲ 600 δραχμὰς ἠγόρασέ τις 18 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος· πόσους πήχεις ἀγοράζει μὲ 1550 δραχμάς;***

Καὶ εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν δύο ποσὰ ἀνάλογα, τοὺς πήχεις καὶ τὰς δραχμάς· πρῶτα ἦσαν 600 δραχμαὶ καὶ 18 πήχεις· τώρα αἱ δραχμαὶ ἔγιναν 1550· πόσοι θὰ γίνουν οἱ πήχεις;

Θὰ εὕρωμεν κατὰ πρῶτον, πόσον ἀγοράζει μὲ μίαν δραχμήν, καὶ πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Μὲ 600 δραχμὰς ἀγοράζει τις 18 πήχεις· ἄρα μὲ μίαν δραχμὴν θὰ ἀγοράσῃ $\frac{18}{600}$ τοῦ πήχεως.

Ἀφοῦ εὑρήκαμεν πόσον ἀγοράζει ἡ μία δραχμή, λέγομεν: ἡ μία δραχμὴ ἀγοράζει $\frac{18}{600}$ τοῦ πήχεως, ἄρα αἱ 1550 δραχμαὶ ἀγοράζουσι $\frac{18}{600} \times 1550$ πήχεις, ἤτοι 46 $\frac{1}{2}$ πήχεις.

***Πρόβλημα. Ἐργάτης τις, ἐργαζόμενος 8 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἐτελείωσεν ἔργον τι εἰς 12 ἡμέρας· ἂν εἰργάζετο 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας ἤθελε τελειώσῃ τὸ ἔργον;***

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν δύο ποσὰ ἀντίστροφα· τὰς ὥρας τῆς καθημερινῆς ἐργασίας καὶ τὰς ἡμέρας, εἰς τὰς ὁποίας τελειώνει τὸ ἔργον· πρῶτα αἱ ὧραι ἦσαν 8 καὶ αἱ ἡμέραι 12· τώρα αἱ ὧραι ἔγιναν 9, πόσαι θὰ γίνουν αἱ ἡμέραι.

Πρῶτον θὰ εὕρωμεν, πόσας ἡμέρας χρειάζεται, ἂν ἐργάζηται 1 ὥραν μόνον καθ' ἡμέραν· καὶ πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ὅταν εἰργάζετο 8 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἐχρειάσθη 12 ἡμέρας διὰ νὰ τελειώσῃ τὸ ἔργον· ἂν λοιπὸν εἰργάζετο μόνον 1 ὥραν καθ' ἡμέραν, θὰ ἐχρειάζετο ὀκταπλασίας ἡμέρας, ἤτοι $12 \times 8$ ἡμέρας.

Ἀφοῦ δέ, ὅταν ἐργάζηται μίαν ὥραν καθ' ἡμέραν χρειάζεται $12 \times 8$

ἡμέρας, ἂν ἐργάζηται 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, θὰ χρειασθῇ ἡμέρας $\frac{12\times8}{9}$ ἤτοι $\frac{96}{9}$ ἢ 10 ἡμέρας ἐργασίας καὶ $\frac{6}{9}$, ἤτοι 16 ὥρας.

***Σημείωσις.*** Τὸ αὐτὸ πρόβλημα δύναται καὶ ἄλλως νὰ λυθῇ, ὡς ἑξῆς: Διὰ νὰ τελειώσῃ τὸ ἔργον, ὁ ἐργάτης εἰργάζετο 12 ἡμέρας ἀπὸ 8 ὥρας καθ' ἡμέραν· ἄρα εἰργάσθη τὸ ὅλον ὥρας $12\times8$· τὸ ἔργον λοιπὸν ἀπαιτεῖ ἐργασίαν $12\times8$ ὡρῶν· ἂν λοιπὸν θέλῃ τις νὰ ἐργάζηται καθ' ἡμέραν 9 ὥρας, θὰ χρειασθῇ ἡμέρας $\frac{12\times8}{9}$.

***Πρόβλημα. Εἴς τι φρούριον εἶναι 500 στρατιῶται καὶ ἔχουσι τροφὰς δι' 70 ἡμέρας. Ἐὰν γίνῃ ἀνάγκη νὰ περάσουν 90 ἡμέρας μὲ τὰς ἰδίας τροφάς, πόσον μέρος τοῦ πρώτου σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος;***

***Σιτηρέσιον*** λέγεται τὸ μερίδιον τῆς τροφῆς, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ἕκαστος στρατιώτης καθ' ἡμέραν.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν δύο ἀντίστροφα· τὸ σιτηρέσιον καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν, εἰς τὰς ὁποίας φθάνουν αἱ τροφαὶ (διότι, ἂν διπλασιασθῇ τὸ σιτηρέσιον, αἱ ἡμέραι τῆς διαρκείας τῶν τροφῶν γίνονται τὸ ἥμισυ, ἂν τριπλασιασθῇ, αἱ ἡμέραι γίνονται τὸ τρίτον, καὶ οὕτω καθεξῆς).

Τὸ ἀρχικὸν σιτηρέσιον θὰ παραστήσω διὰ τῆς μονάδος 1 καὶ θὰ εὕρω πρῶτον, πόσον θὰ ἐλάμβανεν ἕκαστος, ἂν ἐπρόκειτο αἱ τροφαὶ νὰ διαρκέσουν μόνον μίαν ἡμέραν.

Ἐὰν θέλουν νὰ διαρκέσουν αἱ τροφαὶ 70 ἡμέρας, λαμβάνει ἕκαστος 1· ἐὰν θέλουν νὰ διαρκέσουν 1 ἡμέραν, θὰ λάβῃ ἕκαστος $1\times70$ (ἤτοι 70 φορὰς περισσότερον).

Ἂν θέλουν νὰ διαρκέσουν αἱ τροφαὶ μίαν ἡμέραν, θὰ λάβῃ ἕκαστος 70· ἄρα, ἂν θέλουν νὰ διαρκέσουν 90 ἡμέρας, θὰ λαμβάνῃ ἕκαστος 90 φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι $\frac{70}{90}$ ἢ $\frac{7}{9}$.

Ἄν, π. χ. ἐλάμβανε πρὶν ἕκαστος 200 δράμια ἄρτου (τότε τὰ 200 δράμια παριστᾷ ἡ μονὰς 1), τώρα θὰ λαμβάνῃ τὰ $\frac{7}{9}$ τῶν 200 δραμ. ἤγουν $\frac{1400}{9}$ ἢ $155\frac{5}{9}$ δράμια.

***Σημείωσις.*** Τὸ πρόβλημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ ἁπλούστερον ὡς ἑξῆς.

Ἕκαστος στρατιώτης ἔχει ἰδικά του 70 σιτηρέσια, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ φάγῃ εἰς 90 ἡμέρας· πρέπει λοιπὸν νὰ μοιράσῃ αὐτὰ εἰς 90 μερίδια ἴσα καὶ νὰ λαμβάνῃ καθ' ἡμέραν ἓν μερίδιον· ὥστε θὰ λαμβάνῃ καθ' ἑκάστην $\frac{70}{90}$ τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου.

***Σημείωσις.*** Ὁ ἀριθμὸς 500 τῶν στρατιωτῶν δὲν ἐμβαίνει διόλου εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος· δηλαδή, ἡ λύσις θὰ ἦτο ἡ ἰδία, ὅσοι καὶ ἂν ἦσαν οἱ στρατιῶται.

## *Κανὼν γενικός.*

175. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα βλέπομεν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εὑρίσκεται ἐκ τῶν τριῶν δοθέντων, ἐὰν πολλασιασθῶσιν οἱ δύο καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἄλλου. Διὰ νὰ διακρίνωμεν δέ, ποῖοι πρέπει νὰ πολλαπλασιάζωνται, κάμνομεν τὸ ἑξῆς.

Γράφομεν εἰς ἕνα στίχον τὰς πρώτας τιμὰς τῶν δύο ποσῶν, ἔπειτα εἰς δεύτερον στίχον τὴν νέαν τιμὴν τοῦ ἑνὸς καὶ τὴν ζητουμένην νέαν τιμὴν τοῦ ἄλλου, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος χ· φροντίζομεν δέ, ὥστε οἱ ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ νὰ εἶναι εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ γραμμῆς ὁριζοντίας.

***Τότε διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον χ, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν*** (τὸν ὁμοειδῆ του) ***μὲ τὸν λόγον ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς δύο ἄλλους ἀριθμούς, ὡς εἶναι γεγραμμένοι, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, ἢ μὲ τὸν λόγον αὐτὸν ἀντεστραμμένον, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.***

Π. χ. Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ 1ον πρόβλημα, γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς :

| | ὀκάδες | δραχμαὶ |
|---|---|---|
| | 8 | 25 |
| | 75 | χ |

καὶ ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα (πολλαπλασιάζομεν δηλαδὴ τὸν ὁμοειδῆ τοῦ χ., ἤγουν τὸν 25, μὲ τὸν λόγον $\frac{8}{75}$ ἀντεστραμμένον διότι τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα) καὶ εὑρίσκομεν $χ=25 \times \frac{75}{8}$.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ 3ον πρόβλημα, γράφομεν πάλιν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς :

| ὧραι ἐργ. | ἡμέραι |
|---|---|
| 8 | 12 |
| 9 | χ |

καὶ ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα, ὅτε εὑρίσκομεν $\chi = 12 \times \frac{8}{9}$· ἐνταῦθα πολλαπλασιάζομεν τὸν ὁμοειδῆ τοῦ χ ἐπὶ τὸν λόγον τῶν δύο ἄλλων, ὡς εἶναι γεγραμμένοι, διότι τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

***Παρατήρησις.*** Καὶ ὅταν οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ δὲν εἶναι ἀκέραιοι (ἀλλὰ κλασματικοὶ ἢ μικτοὶ ἢ συμμιγεῖς), πάλιν ὁ ἴδιος κανὼν ἐφαρμόζεται.

Ἐάν, π. χ., δοθῇ τὸ ἑξῆς πρόβλημα: $7^1/_2$ πήχεις ὑφάσματός τινος ἀξίζουν 82 δραχ.· πόσον ἀξίζουν $18^1/_2$ πήχεις τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;

Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα, γράφομεν $\frac{7^1/_2}{18^1/_2}$ πήχεις $\frac{82}{\chi}$ ἀξία· καὶ ἑπομένως πρὸς εὕρεσιν τοῦ χ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὁμοειδῆ τοῦ ἀγνώστου (τὸ 82) ἐπὶ $18^1/_9$ καὶ τὸ γινόμενον νὰ διαιρέσωμεν διὰ $7^1/_2$.

176. ***Λύσις διὰ τῶν ἀναλογιῶν***. Εἰς τὸν ἴδιον κανόνα φθάνομεν καὶ διὰ τῶν ἀναλογιῶν. Π. χ. εἰς τὸ α΄ πρόβλημα τῆς παραγράφου 174 γράφομεν:

| | |
|---|---|
| 8 ὀκ. | 25 δρ. |
| 75 | χ |

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὰ δύο ποσά, ὀκάδες καὶ δραχμαί, εἶναι ἀνάλογα, οἱ λόγοι $\frac{8}{75}$ καὶ $\frac{25}{\chi}$ πρέπει νὰ εἶναι ἴσοι, δηλαδὴ ἔχομεν

$$8 : 75 = 25 : \chi$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν $8 \times \chi = 75 \times 25$

$$\text{καὶ } \chi = \frac{75 \times 25}{8}.$$

Ἐπίσης εἰς τὸ γ΄ πρόβλημα τῆς αὐτῆς παραγράφου γράφομεν:

| | |
|---|---|
| 8 ὥρ. | 12 ἡμ. |
| 9 ὥρ. | χ |

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὰ δύο ποσά, ὧραι ἐργάσιμοι καὶ ἡμέραι χρειαζόμεναι διὰ τὴν ὅλην ἐργασίαν, εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα, ὁ λόγος $\frac{8}{9}$ θὰ εἶναι ἀντίστροφος τοῦ $\frac{12}{\chi}$, δηλαδὴ θὰ ἔχωμεν: $\frac{8}{9} = \frac{\chi}{12}$, ὅθεν προκύπτει $\chi = \frac{8 \times 12}{9}$.

Ἡ λύσις τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν διὰ τῶν ἀναλογιῶν, φανερώνει τὴν αἰτίαν τῆς τοιαύτης ὀνομασίας τῆς μεθόδου. Ὠνομάσθη δὲ ***μέθοδος τῶν τριῶν,*** διότι εἰς αὐτὴν λύονται, ὅπως εἴδομεν ἀνωτέρω, τὰ προβλήματα διὰ μιᾶς ἀναλογίας τῆς ὁποίας **τρεῖς** ὅροι εἶναι γνωστοί.

## *Προβλήματα.*

415) Ἐργάτης τις κερδίζει εἰς 3 ἡμέρας 112,50 δραχ. Πόσας θὰ κερδίσῃ εἰς 13 ἡμέρας; (ἀπ. 487,50)

416) Ἐργάτης τις ἐκέρδισεν εἰς 15 ἡμ. 845,25 δραχ. Πόσας θὰ ἐκέρδιζεν ἐὰν ἠργάζετο 6 ἡμέρας ἐπὶ πλέον; (ἀπ. 1183,35)

417) Οἰκογένειά τις χρειάζεται 428 ὀκάδας ἄλευρον τὸ ἔτος· πόσον χρειάζεται διὰ 8 μῆνας; $\left(\text{ἀπ. } \frac{428 \times 8}{12} = 285 \text{ ὀκ. } 133\frac{1}{3} \text{ δράμ.}\right)$

418) Ἐπλήρωσέ τις διὰ 12 μανδήλια 65 δραχμάς· πόσας θὰ πληρώσῃ δι' $8\frac{1}{2}$ δωδεκάδας; (ἀπ. 554,50)

419) 50 δράμια μετάξης ἀξίζουν 125 δραχ. Πόσας ἀξίζουν 2 ὀκ. 150 δράμια; (ἀπ. 2375)

420 Μὲ 400 δραχμὰς ἀγοράζει τις $5\frac{1}{2}$ ὀκάδας βουτύρου· πόσον ἀγοράζει μὲ 1252,5 δραχμάς; $\left(\text{ἀπ. 17 ὀκ. 88 δρμ. } \frac{7}{41}\right)$

421) Ἁμαξοστοιχία τις διανύει 408 χιλιόμετρα εἰς 12 ὥρας. Πόσα χιλιόμ. θὰ διανύσῃ εἰς 20 ὥρας; (ἀπ. 680)

422) Ταχυδρόμος διανύει 26 χιλιόμ. εἰς 5 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας θὰ διανύσῃ 62 χιλιόμ. 400 μέτρα; (ἀπ. 12)

423) Ταχυδρόμος βαδίζων 5 ὥρας καθ' ἡμέραν διανύει ἀπόστασίν τινα εἰς 12 ἡμέρας· ἂν βαδίζει καθ' ἑκάστην 6 ὥρας εἰς πόσας ἡμέρας θὰ διανύσῃ τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν; (ἀπ. 10)

424) Τὸ ἥμισυ ἔργου τινὸς ἐτελείωσαν 38 ἐργάται εἰς 18 ἡμέρας· πόσοι ἐργάται θὰ τελειώσουν τὸ ὑπόλοιπον ἔργον εἰς 12 ἡμέρας; (ἀπ. 57)

425) 250 δράμια πράγματός τινος ἀξίζουν 27,50 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς; (ἀπ. 38,50)

426) Ἐπρόκειτο νὰ μοιρασθῇ ἓν ποσὸν χρημάτων εἰς 68 πτωχοὺς ἕκαστος τῶν ὁποίων ὑπελογίσθη, ὅτι θὰ ἐλάμβανε 17,50 δραχμάς· ἀλλὰ τὸ ποσὸν τοῦτο ἐμοιράσθη τελικῶς εἰς 70 πτωχούς· πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος; (ἀπ. 17)

427) Ράβδος τις, ἔχουσα μῆκος 1 μέτρου καὶ 80 ἑκατοστῶν τοῦ μέτρου, ὀρθία ρίπτει σκιὰν 3 μέτρων καὶ 12 ἑκατοστῶν· πόσον ὕψος ἔχει

ἓν κωδωνοστάσιον, τὸ ὁποῖον τὴν αὐτὴν στιγμὴν ρίπτει σκιὰν 22 μέτρων ; (ἀπ. 13 μ., 20 ἑκ.)

*Σημείωσις*. Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, παραδεχόμεθα ὅτι αἱ σκιαὶ τῶν δύο ὀρθίων πραγμάτων εἰς τὴν αὐτὴν στιγμὴν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν

428) Διὰ τὴν ἐνδυμασίαν 80 ἀνθρώπων ἐχρειάσθησαν 312 πήχεις καὶ 2 ρούπια ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει πλάτος 6 ρούπια· πόσοι πήχεις χρειάζονται διὰ τὴν ἐνδυμασίαν τῶν ἰδίων ἀνθρώπων ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει πλάτος ἕνα πῆχυν ;

429) Εἴς τι φρούριον ἦσαν 700 ἄνδρες, ἔχοντες τροφὰς διὰ 50 ἡμέρας· ἦλθεν εἰς αὐτοὺς ἐπικουρία συγκειμένη ἀπὸ 200 στρατιώτας μὲ 2 ἡμερῶν τροφάς των. Ἐὰν τώρα θέλουν νὰ φθάσουν αἱ τροφαὶ πάλιν 50 ἡμέρας, πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ὁ καθείς ;

*Λύσις*. Οἱ πρῶτοι ἔχουσι σιτηρέσια 700×50, ἤγουν 35000· οἱ δεύτεροι ἔχουσι 400· ὥστε τὰ σιτηρέσια ὅλα εἶναι 35400 καὶ πρέπει νὰ διαρκέσουν εἰς τοὺς 900 ἀνθρώπους 50 ἡμέρας λοιπὸν θὰ λαμβάνῃ ἕκαστος $\frac{354}{450}$.

430) Ἐκ δύο ἀγρῶν τῆς αὐτῆς ποιότητος, ὁ μὲν εἷς δίδει κατ' ἔτος φόρον 300 δραχμάς, ὁ δὲ ἄλλος 195 εἶνε δὲ ὁ μὲν πρῶτος 14 στρέμματα, ὁ δὲ δεύτερος $7\,^1/_2$· τίς ἐκ τῶν δύο ἀγρῶν φορολογεῖται βαρύτερον ;

## *Προβλήματα ποσοστῶν.*

177. Συνήθως ὁ μεσάζων μεταξὺ πωλητοῦ καὶ ἀγοραστοῦ καὶ διευκολύνων τὴν πώλησιν λαμβάνει ὡς ἀμοιβ ν ὡρισμένον τι μέρος ἐκ τῆς ἀξίας τοῦ πράγματος (μεσιτεία). Τὸ μέρος τοῦτο προσδιορίζεται συνήθως ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ 100.

Π χ. ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι μεσίτης τις ἐπώλησεν διὰ λογαριασμόν μας ἐμπορεύματα ἀξίας 12000 δραχμῶν καὶ ἔλαβεν διὰ μεσιτείαν 2 ἐπὶ τοῖς ἑκατόν· τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ μεσίτης ἔλαβε ὡς ἀμοιβὴν 2 δραχμὰς δι' ἑκάστην ἑκατοντάδα δραχμῶν ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ ἐμπορεύματος· ἡ ἀμοιβὴ αὕτη σημειοῦται συμβολικῶς 2 %.

Ἐπίσης καὶ ἄλλα ποσὰ προσδιορίζονται ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ 100 ἢ καὶ τοῦ 1000.

Οὕτω ὁ ἔμπορος πωλεῖ τὸ ἐμπόρευμά του μὲ κέρδος 8 % ἢ μὲ ἔκπτωσιν 12 %· οἱ ὑπάλληλοι τῶν καταστημάτων λαμβάνουσιν ὡς πρόσθετον ἀμοιβὴν 5 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν ὑπ᾽ αὐτῶν πωλουμένων· τὸ δημόσιον ὁρίζει τὸν φόρον ἐπὶ τοῦ εἰσοδήματος πρὸς 3 %· αἱ ἀσφαλιστικαὶ ἑταιρεῖαι ἀσφαλίζουσι τὰς οἰκοδομὰς ἐναντίον τοῦ πυρὸς μὲ ἀσφάλιστρα $3\frac{1}{2}$ ‰ $\left(3\frac{1}{2}\right.$ ἐπὶ τοῖς χιλίοις$\left.\right)$, ἤτοι εἰς ἑκάστην χιλιάδα τῆς ἀξίας τῆς ἀσφαλισθείσης οἰκοδομῆς, λαμβάνουσιν $3\frac{1}{2}$ δρ. ὡς ἀσφάλιστρα διὰ διάστημα ἑνὸς ἔτους κ.τ.λ. κ.τ.λ.

Τὸ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ 100 ἢ τοῦ 1000 ἀντιστοιχοῦν ποσὸν ἐπὶ τῆς ὅλης ἀξίας καλεῖται ***ποσοστόν***.

Τὰ προβλήματα ποσοστῶν οὐδόλως διαφέρουσι τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων.

1) Μεσίτης τις ἐπώλησεν οἰκίαν ἀντὶ 128000 δραχμῶν, λαμβάνει δὲ διὰ τὴν μεσιτείαν του $1^1/_2$ % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς οἰκίας· πόσα θὰ λάβῃ;

Ἐκ τῶν 100 δραχ. λαμβάνει $1^1/_2$
» » 128000 » » χ

ἐπειδὴ δὲ τὸ ποσόν, ὅπερ λαμβάνει, εἶναι ἀνάλογον τῆς ἀξίας τοῦ πωληθέντος πράγματος, ἕπεται

$$\chi = \frac{3}{2} \times \frac{128000}{100} = 1920 \text{ δρχ.}$$

2) Ἠσφάλισέ τις τὴν οἰκίαν του ἀξίας 200000 δραχ. πληρώσας ἀσφάλιστρα 3 ‰· πόσα θὰ πληρώνῃ ἐτησίως ;

Διὰ 1000 δραχ. πληρώνει 3
» 200000 » χ

ἐπειδὴ δὲ τὸ ποσόν, ὅπερ πληρώνει, εἶναι ἀνάλογον τῆς ἀξίας τῆς ἀσφαλισθείσης οἰκίας, ἕπεται

$$\chi = 3 \times \frac{200000}{1000} = 600 \text{ δρχ.}$$

3) Ἔμπορος πωλήσας ἐμπόρευμά τι μὲ κέρδος 7 %, ἔλαβεν ἐκ τῆς πωλήσεως 2289,80 δραχ.· ποία ἦτο ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος ;

Δι᾽ ἀξίαν 100 δρχ. ἔλαβεν 107
» χ » 2289,80

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ἔχομεν

$$\chi = 100 \times \frac{2289{,}80}{107} = 2140 \text{ δρχ.}$$

Ἐὰν ἐζητεῖτο μόνον τὸ κέρδος, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὴν ἀξίαν τοῦ ἐμπορεύματος ὡς ἀνωτέρω καὶ ἔπειτα νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὴν ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς πωλήσεως, ἢ νὰ τὸ εὕρωμεν ἀπ' εὐθείας· οὕτω

ὅταν λαμβάνῃ 107 δρχ. κερδίζει 7

» » 2289,80 » χ

$$\text{καὶ } \chi = 7 \times \frac{2289{,}80}{107} = 149{,}80 \text{ δρχ.}$$

4) Ἐπωλησέ τις ἐμπόρευμα ἀξίας 850 δραχ. καὶ ἐκέρδισεν 63,75 δραχμάς· πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισεν ὁ ἔμπορος ἐπὶ τῆς ἀξίας;

δι' ἀξίαν 850 δρχ. ἐκέρδισε 63,75

» » 100 » » χ

$$\chi = 63{,}75 \times \frac{100}{850} = 7{,}5\ \%.$$

## *Προβλήματα.*

431) Νὰ εὑρεθῇ τὸ 1% ἐπὶ τῶν 200 δρ., 700 δρ., 450 δρ., 50 δρ., 25 δρ., 20 δρ., 10 δρ. καὶ 1 δρ. ὡς καὶ ἐπὶ τῶν 305,7 δρ., 428,60 δρ. 1658,5 μέτρ. 3487,5 ὀκ.

432) Νὰ εὑρεθῇ: τὸ 2%, 3%, 12% ἐπὶ τῶν 800 δρ., 1500 δρ., 250 δολλ., 360 ὀκ., 486 λιρῶν Τουρκίας.

433) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ: τὸ $\frac{1}{2}$%, $1\frac{1}{2}$%, ἐπὶ τῶν 100 δρ., 400 δρ., 480 δρ., 1250 πήχ. 2186 ὀκ.

434) Νὰ εὑρεθῇ: τὸ $\frac{3}{4}$%, $3\frac{3}{4}$%, ἐπὶ τῶν 300 δρ., 3200 δρ., 80 δρ., 1257,5 λιρ. ἀγγλ. 1086,4 ὀκ.

435) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ: τὸ $\frac{1}{3}$%, $\frac{2}{3}$%. $4\frac{1}{3}$%, ἐπὶ τῶν 900 δρ., 960 δρ., 480 δρ., 4821,60, 7239,30 δρ.

436) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ: τὸ 50%, 100%, 150%, 125% ἐπὶ τῶν 24 δρ. 80 δρ., 149 δρ., 258,4 δρ., 793,64 δρ.

437) Νὰ εὑρεθῇ: τὸ 1‰, 2‰, $2^1/_2$‰ ἐπι τῶν 10000 δρ., 25000, 4656 δρ.

438) Ἀγοράσας τις οἰκίαν ἀντὶ 78500 δρ. τὴν μετεπώλησεν ἀμέσως μὲ κέρδος 8%. Πόσον ἐκέρδισεν καὶ πόσον τὴν ἐπώλησεν;

439) Ἀγοράσας τις ὕφασμα ἀντὶ 56,25 δρ. τὸν πῆχυν, πωλεῖ αὐτὸ πρὸς 60,75 δρ. Πόσον % κερδίζει; (ἀπ. 8%)

440) Ἀσφαλίζει τις οἰκίαν ἀξίας 225000 δρ. πρὸς $2\,^3/_4$‰. Πόσα ἀσφάλιστρα πληρώνει ἐτησίως; (ἀπ. 618,75)

441) Ἠσφάλισέ τις ἐμπορεύματα ἐναντίον τῶν κινδύνων τῆς θαλάσσης

πρὸς $3\frac{1}{2}\%$ καὶ ἐπλήρωσεν 896 δρ. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων; (ἀπ. 25600)

442) Μεσίτης τις ἐνοικίασε οἰκίαν πρὸς 2500 δραχμὰς τὸν μῆνα. Ἔλαβε δὲ μεσιτείαν ἐπὶ τοῦ ἐνοικίου ἑνὸς ἔτους $2\frac{1}{4}\%$. Πόσα ἔλαβε; (ἀπ. 675)

443) Ἔμπορός τις πτωχεύσας μὲ παθητικὸν 400000 δραχμῶν, συνεβιβάσθη νὰ πληρώσῃ 55% ἐπὶ ἐκείνων τὰ ὁποῖα χρεωστεῖ. Πόσα ἐπλήρωσε; (ἀπ. 220000)

444) Ἔμπορος πωλήσας ὕφασμα ἀντὶ 789,95 δρ. ἐζημιώθη $7\frac{1}{2}\%$ ἐπὶ τῆς ἀξίας. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τοῦ ὑφάσματος; (ἀπ. 854)

445) Τὸ μικτὸν βάρος ἐμπορεύματος εἶναι 875 ὀκ. Πόσον εἶναι τὸ καθαρὸν βάρος αὐτοῦ, ἐὰν τὸ ἀπόβαρον εἶναι $4\frac{1}{2}\%$· (δηλ. εἰς 100 ὀκ. μικτὸν βάρος τὸ ἀπόβαρον εἶναι 4 ὀκ. 200 δραμ.). (ἀπ. 835 ὀκ. 250 δραμ.)

446) Τὸ καθαρὸν βάρος ἐμπορεύματος εἶναι 609 ὀκ. 240 δραμ. Πόσον εἶναι τὸ μικτὸν βάρος αὐτοῦ ἐὰν τὸ ἀπόβαρον εἶναι 4%; (ἀπ. 635 ὀκ.)

447) Ὤφειλέ τις ἓν ποσὸν χρημάτων ἐπὶ τοῦ ὁποίου, τῷ ἐγένετο ἔκπτωσις 25%. Ἐπλήρωσε δὲ οὕτω 2625 δραχ. Πόσα ὤφειλε; (ἀπ. 3500)

448) Ἐπώλησέ τις οἰκίαν καὶ ἀφοῦ ἐπλήρωσεν ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς πωλήσεως 3% διὰ μεσιτείαν καὶ 12% διὰ φόρον ὑπερτιμήματος, τοῦ ἀπέμεινον 327250 δραχ. Ἀντὶ πόσων δραχμῶν ἐπώλησεν τὴν οἰκίαν; (ἀπ. 385000)

449) Ὁ ἄρτος τὸν ὁποῖον παρασκευάζει ἀρτοποιὸς ἐξ ἀμερικανικοῦ ἀλεύρου εἶναι κατὰ 23% βαρύτερος τοῦ χρησιμοποιουμένου ἀλεύρου· ἡμέραν δέ τινα παρεσκεύασε 984 ὀκ. ἄρτου. Πόσον ἄλευρον ἐχρησιμοποίησε; (ἀπ. 800)

450) Ἠγόρασέ τις 450 ὀκ. καφὲ πρὸς 68,70 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ 1250 ὀκ. ζάκχαριν πρὸς 18,40 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Ἐπώλησε δὲ τὸν μὲν καφὲν μὲ κέρδος 9% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς τὴν δὲ ζάκχαριν μὲ κέρδος 12,5% ἐπὶ τῆς ἀξίας. Ποῖον εἶναι τὸ ὁλικὸν κέρδος τοῦ ἐμπόρου;

451) Ἔχει τις οἰκίαν καὶ εἰσπράττει κατ' ἔτος δι' ἐνοίκιον 38000 δραχ. Πληρώνει δὲ ἐπ' αὐτοῦ φόρον οἰκοδομῶν 12% καὶ φόρον ὁδοστρωμάτων $3\frac{1}{2}\%$ καὶ $2\frac{1}{2}‰$ δι' ἀσφάλιστρα ἐπὶ τῆς ἀξίας οἰκίας ὑπολογιζομένης εἰς 500000 δραχ. Ἐπὶ τοῦ ἀπομένοντος δὲ ποσοῦ πληρώνει φόρον εἰσοδήματος 4%. Ποῖον εἶναι τὸ καθαρὸν εἰσόδημα τοῦ ἰδιοκτήτου εἰς ἓν ἔτος;

Ἀπὸ ἕκαστον γραμμάριον τοῦ α΄ εἴδους, τὸ ὁποῖον θὰ εἰσέλθῃ εἰς τὸ κρᾶμα, θὰ ἔχῃ περίσσευμα 0,965—0,920=0,045 τοῦ γραμμαρίου καθαροῦ χρυσοῦ.

Ἀπὸ ἕκαστον γραμμάριον τοῦ β΄ εἴδους, τὸ ὁποῖον θὰ εἰσέλθῃ εἰς τὸ κρᾶμα, θὰ τοῦ λείπουν 0,920—0,870=0,050 τοῦ γραμμαρίου καθαροῦ χρυσοῦ. Ἂν λάβῃ λοιπὸν ἀπὸ τὸ α΄ 50 γραμμάρια θὰ ἔχῃ περίσσευμα 0,045×50 γραμ. καθαροῦ χρυσοῦ καὶ ἂν λάβῃ ἀπὸ τὸ β΄ 45 γραμμάρια, θὰ τοῦ λείπουν 0,050×45 γραμ. καθαροῦ χρυσοῦ· ἐπειδὴ δὲ εἶναι 0,045×50=0,050×45, συμπεραίνομεν ὅτι οὔτε περίσσευμα καθαροῦ χρυσοῦ οὔτε ἔλλειμα θὰ ἔχῃ ἂν λάβῃ καὶ συντήξῃ

50 γραμ. ἀπὸ τὸ α΄. εἶδος<br>
καὶ 45 » » » β΄. »

ἐργαζόμενοι δὲ ἤδη ὡς καὶ εἰς τὸ β΄ πρόβλημα τοῦ ἐδαφ 195 εὑρίσκομεν, ὅτι διὰ νὰ κάμῃ κρᾶμα 380 γραμ. πρέπει νὰ συντήξῃ ἀπὸ τὸ α΄ $\frac{50}{95}\times380=200$ γραμ. καὶ ἀπὸ τὸ β΄ $\frac{45}{95}\times380=180$ γραμ.

***Σημείωσις*** Καὶ ἐνταῦθα παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν γραμμαρίων τὰ ὁποῖα θὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν γραμμαρίων τὰ ὁποῖα θὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος, πρέπει νὰ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 50 καὶ 45 ἢ 10 καὶ 9. Εὑρίσκομεν λοιπὸν τὸ ζητούμενον με ἰζοντες τὸν 380 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 10 καὶ 9.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{llcll} & \alpha'. & 0{,}965 & & 50 \text{ ἢ } 10 \\ & & & \diagdown \quad \diagup & \\ \text{τίτλος κράματος} & & & 0{,}920 & \\ & & & \diagup \quad \diagdown & \\ & \beta'. & 0{,}870 & & 45 \text{ ἢ } \underline{9} \\ & & & & \quad\quad 19 \end{array}$$

α΄. $\frac{380\times10}{9}=200$ γραμ. β΄. $\frac{380\times9}{19}=180$ γραμ.

## *Προβλήματα.*

522) Ἀνέμειξέ τις 175 ὀκ. οἴνου ἀξίας 6,40 δρ. κατ' ὀκᾶν μὲ 215 ὀκ. οἴνου ἀξίας 5,80 δρ. κατ' ὀκᾶν καὶ μὲ ἄλλας 110 ὀκ. οἴνου ἀξίας 7,20 δρ. τὴν ὀκᾶν. Ποία εἶναι ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος ;
(ἀπ. 6,32 κατὰ προσ.)

523) Εἶχέ τις δύο βαρέλια πλήρη ἐλαίου· τὸ α΄ περιεῖχε 450 ὀκάδας

ἀξίας 33 δραχ. τὴν ὀκᾶν, τὸ δὲ ἄλλο 300 ὀκάδας, ἀξίας 22,50 δραχ. τὴν ὀκᾶν, ἔκαμε δὲ μῖγμα ἀπὸ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ α' καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ β' βαρελίου. Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος; (ἀπ. 31,25)

524) Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα νὰ εὑρεθῇ πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος διὰ νὰ κερδίσῃ ἐν ὅλῳ 1350 δραχ.; (ἀπ. 35

525) Εἶχέ τις 2340 ὀκάδας οἴνου τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἐτιμᾶτο 6,80 δραχ. ἔρριψε δὲ εἰς αὐτὸν 5 % τοῦ βάρους του οἰνόπνευμα ἀξίας 18 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ 380 ὀκάδας ὕδατος. Πόσας δραχ. ἦτο ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος; (ἀπ. 6,35 περίπου)

526) Ἀνέμειξέ τις 120 λίτρας οἰνοπνεύματος $85^0$ μετὰ διπλασίας ποσότητος οἰνοπνεύματος $40^0$ καὶ μετὰ 630 λιτρῶν ὕδατος. Ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ μίγματος; (ἀπ. $20^0$)

527) Κατασκευάζει τις κρᾶμα μὲ 220 δράμια ἀργύρου τίτλου 0,920 καὶ μὲ 320 δράμια ἀργύρου τίτλου 0,785. Ποῖος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος; (ἀπ. 0,840)

528) Ἔχει τις 385 γραμμάρια χρυσοῦ τίτλου 0,880 καὶ 140 γραμμάρια καθαροῦ χρυσοῦ (τίτλος 1,000). Κάμνει δὲ ἐξ αὐτῶν καὶ ἐκ 35 γραμ. χαλκοῦ (τίτλος 0) κρᾶμα. Ποῖος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος; (ἀπ. 0,855

529) Ἀνέμειξέ τις 158 ὀκάδας καφὲ τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἐτιμᾶτο 85 δραχ. μὲ 39 ὀκάδας κριθὴν καὶ ἔκαμε μῖγμα τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἐτιμᾶτο 69,40 δραχ. Πόσον ἐτιμᾶτο ἡ ὀκᾶ τῆς κριθῆς; (ἀπ. 6,20)

(Ἀπὸ τὴν ἀξίαν τοῦ ὅλου μίγματος ἀφαιροῦμεν τὴν ἀξίαν τοῦ καφὲ καὶ τὴν διαφορὰν διαιροῦμεν διὰ 39).

530) Ἔκαμέ τις κρᾶμα τίτλου 0,640 ἐκ 52 γραμμαρίων χρυσοῦ τίτλου 0,895, ἐκ 76 γραμ. χρυσοῦ ἀγνώστου τίτλου καὶ ἐκ 32 γραμ. χαλκοῦ. Ποῖος εἶναι ὁ ἄγνωστος τίτλος; (ἀπ. 0,735)

531) Σιτέμπορος ἔχει δύο εἴδη σίτου· τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 5,40 δρ. τοῦ δὲ δευτέρου 3,85 δρ. Θέλει δὲ νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν μῖγμα 2480 ὀκάδων τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 4,45 δραχ. Πόσον θὰ λάβῃ ἀπὸ κάθε εἶδος; (ἀπ. α' 960, β' 1520)

532) Θέλει νὰ κάμῃ τις μετ' ἀνύδρου οἰνοπνεύματος ($100^0$) καὶ οἰνοπνεύματος $36^0$, μῖγμα 450 λιτρῶν $52^0$. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ κάθε εἶδος; $\left(\text{ἀπ. α' } 112\frac{1}{2},\ \text{β' } 337\frac{1}{2}.\right)$

533) Ἀνέμειξέ τις βούτυρον τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἤξιζε 84 δραχ. μετὰ λίπους ἀξίας κατ. ὀκᾶν 36 δραχ. καὶ ἔκαμε μῖγμα 144 ὀκάδων ὁλικῆς ἀξίας 10080 δραχμῶν. Πόσον ἔλαβεν ἐξ ἑκάστου εἴδους; (ἀπ. α' 102, β' 42)

534) Οἰνοπώλης ἔχει 3500 ὀκάδας οἴνου, τὸν ὁποῖον πωλεῖ πρὸς 8 δραχ. τὴν ὀκᾶν· πόσον ὕδωρ πρέπει ν' ἀναμίξῃ, ὥστε ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος ν' ἀξίζῃ 7 δραχμάς;

***Λύσις.*** Ἡ ἀξία ὅλου τοῦ μίγματος εἶναι δραχμαὶ $8 \times 3500$ καὶ τόσας πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτοῦ· ἐπειδὴ δὲ δι' ἑκάστην ὀκᾶν θὰ λαμβάνῃ 7 δραχ. συμπεραίνομεν, ὅτι πρέπει νὰ πωλήσῃ ὀκάδας $\frac{3500 \times 8}{7}$ ἤτοι $500 \times 8$ ἢ 4000· ὥστε πρέπει νὰ προσθέσῃ 500 ὀκάδας ὕδατος.

***Ἄλλη λύσις.*** Διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν συντόμως

$$\begin{array}{lccc} \text{α)} & \text{δρ. } 8 & & 7 \\ & & \searrow\swarrow & \\ \text{τιμὴ μίγματος} & & 7 & \\ & & \swarrow\searrow & \\ \text{β)} & \text{δρ. } 0 & & 1 \end{array}$$

καὶ λέγομεν 7 ὀκ. οἴνου θὰ ἀναμείξῃ μὲ 1 ὀκᾶν ὕδατος
3500 » » » » » χ » »

καὶ $\chi = 1 \times \frac{3500}{7}$ ὀκ. ὕδ. $= 500$ ὀκ ὕδατος.

535) Ἐὰν ὁ αὐτὸς οἰνοπώλης θέλῃ νὰ κερδίσῃ ἐκ τῆς ἀναμίξεως 10% ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μίγματος (ἂν δηλ. τὸ μῖγμα ἀξίζῃ 100 δραχ., νὰ λάβῃ 110), πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ βάλῃ;

***Λύσις.*** Ἡ ἀξία τοῦ μίγματος εἶναι $8 \times 3500$ δραχμάς, ἤτοι 28000 δραχμαί, θέλει ὅμως ἐκ τῆς πωλήσεως νὰ λάβῃ αὐτάς· καὶ τὸν τόκον των πρὸς 10%, ἤτοι δρ. 2800 ὥστε πρέπει νὰ λάβῃ δραχ. 30800 καὶ ἐπειδὴ πωλεῖ τὴν ὀκᾶν πρὸς 7 δραχμάς, πρέπει νὰ πωλήσῃ ὀκ. 4400· ὥστε πρέπει νὰ προσθέσῃ 900 ὀκάδας ὕδατος.

536) Ἔμπορός τις ἔχει ἤδη 2 ἤδη σίτου· τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 3,20 δραχ., τοῦ δὲ δευτέρου 3,60· πόσας ὀκάδας τοῦ πρώτου εἴδους πρέπει νὰ ἀναμίξῃ μὲ 1200 ὀκάδας τοῦ δευτέρου, διὰ νὰ κάμῃ μῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 4 δραχ. (ἀπ. 400)

537) Ἐὰν ὁ αὐτὸς ἔμπορος θέλῃ ἐκ τῆς ἀναμίξεως νὰ κερδίσῃ 300 δρ., πόσας ὀκάδας ἐκ τοῦ α' εἴδους πρέπει νὰ βάλῃ; (ἀπ. 150)

538) Παντοπώλης τις ἔχει 200 ὀκ. βουτύρου ἁγνοῦ, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ὀκᾶ ἀξίζει 76 δρ.· θέλει δὲ νὰ ἀναμίξῃ μὲ αὐτὸ λίπος, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ὀκᾶ ἀξίζει 24, ὥστε νὰ ἀποτελεσθῇ μῖγμα, οὗτινος ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 55,40. Πόσον λίπος πρέπει νὰ βάλῃ;

## *Περὶ τῶν ἀριθμητικῶν μέσων.*

197. ***Ἀριθμητικὸν μέσον ἢ μέσος ὅρος*** διαφόρων ποσῶν ὁμοει-

δῶν λέγεται τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν, ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 8 εἶναι $\frac{4+8}{2}$ ἤτοι 6· ὁ δὲ μέσος ὅρος τῶν τριῶν ἀριθμῶν 12, 18, 30 εἶναι ὁ $\frac{12+18+30}{3}$ ἢ 20.

Τοὺς μέσους ὅρους μεταχειριζόμεθα εἰς πολλὰς περιστάσεις.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἐμετρήσαμεν τὸ μῆκος μιᾶς γραμμῆς τρεῖς φοράς, καὶ τὴν μὲν πρώτην φορὰν εὑρήκαμεν 12,625 μέτρα, τὴν δὲ δευτέραν 11,628 καὶ τὴν τρίτην 12,621. Εὑρήκαμεν δὲ διαφόρους ἀριθμοὺς εἰς τὰς τρεῖς καταμετρήσεις διὰ τὰ λάθη, τὰ ὁποῖα, χωρὶς νὰ θέλωμεν, ἐκάμαμεν εἰς τὴν ἐργασίαν ταύτην.

Τότε ὡς πιθανωτέραν τιμὴν τοῦ μήκους τῆς γραμμῆς λαμβάνομεν τὸν μέσον ὅρον τῶν τριῶν εὑρεθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι

$$\frac{1}{3}\,(12{,}625 + 12{,}628 + 12{,}621) \text{ ἢ } 12{,}624{,}6.$$

Ὡς παραδείγματα τῶν μέσων ὅρων ἔστωσαν καὶ τὰ ἑξῆς :

1) Κτῆμά τι ἔφερε κατὰ τὸ παρὸν ἔτος εἰσόδημα 7800 δραχμῶν, πέρυσι δὲ 8700 καὶ προπέρυσι 4970· ποῖος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τοῦ εἰσοδήματος τοῦ κτήματος τούτου κατὰ τὰ τρία ταῦτα ἔτη ;

Ἂν προσθέσωμεν τὰ εἰσοδήματα τῶν τριῶν ἐτῶν εὑρίσκομεν 21470 δραχ., καὶ διαιροῦντες διὰ 3 εὑρίσκομεν τὸν μέσον ὅρον 7156 $\frac{2}{3}$ ἢ δραχμὰς 7156,66. . .

2) Οἰκογένειά τις ἐπλήρωνεν ἐπὶ 5 ἔτη δι᾽ ἐνοίκιον 700 δραχ. κατὰ μῆνα· μετὰ ταῦτα ἐπὶ 3 ἔτη 800 καὶ μετὰ ταῦτα ἐπὶ 2 ἔτη 1000· πόσον εἶναι τὸ μέσον ἐνοίκιον αὐτῆς κατὰ τὰ 10 ταῦτα ἔτη ;

Προφανῶς πρέπει νὰ εὕρωμεν ὅλα, ὅσα ἐπλήρωσε δι᾽ ἐνοίκιον κατὰ τὰ 10 ἔτη, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ ποσὸν τοῦτο εἰ τόσα ἴσα μέρη, ὅσοι εἶναι οἱ μῆνες τῶν 10 ἐτῶν, ἤτοι 120.

| | |
|---|---|
| Εἰς τὰ 5 ἔτη, ἤγουν 60 μῆνας, ἔδωκεν | $700 \times 60$ ἢ 42000 |
| εἰς τὰ 3 ἔτη, ἤγουν 36 μῆνας, ἔδωκεν | $800 \times 36$ ἢ 28800 |
| καὶ εἰς τὰ 2 ἔτη, ἤγουν 24 μῆνας, ἔδωκεν | $1000 \times 24$ ἢ 24000 |
| ὥστε εἰς τοὺς 120 μῆνας ἔδωκε τὸ ὅλον | 94800 |

ἄρα ὁ μέσος ὅρος τοῦ ἐνοικίου εἰς τὰ 10 ταῦτα ἔτη εἶναι

$$\frac{94800}{120} \text{ ἢ } \frac{9480}{12} \text{ ἢ } \frac{2370}{3} \text{ ἢ } 790 \text{ δραχμαί.}$$

## *Προβλήματα.*

539) Πλοῖόν τι διέτρεξε τὴν πρώτην ἡμέραν ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του 10 μίλια, τὴν δευτέραν 8 καὶ τὴν τρίτην 7, τὰς δὲ ἑπομένας 10 ἡμέρας διέτρεχε καθ' ἑκάστην ἀπὸ 4· πόσα μίλια διέτρεχε καθ' ἑκάστην κατὰ μέσον ὅρον ; (ἀπ. 5)

540) Τρεῖς ἐκτιμηταὶ ἐξετίμησαν χωριστὰ μίαν οἰκίαν· ὁ πρῶτος ἐξετίμησεν αὐτὴν διὰ 42000 δρ. ὁ δὲ δεύτερος διὰ 40000 καὶ ὁ τρίτο διὰ 45000· ποῖος εἶναι ὁ μέσο ὅρος ; $\left(\text{ἀπ. } 42333\frac{1}{3}\right)$

541) Ὁ μέσος ὅρος τῶν ἐνοικίων μιᾶς οἰκίας κατὰ τοὺς τρεῖς μῆνας τοῦ θέρους ἦτο 650 δρ. κατὰ δὲ τοὺς ἐπιλοίπους ἐννέα μῆνας ὁ μέσος ὅρος 550 δρ.· πόσος εἶναι ὁ μέσος ὅρος ὅλου τοῦ ἔτους ;

542) Ἱστιοφόρον μετέφερεν ἀπὸ τὸν λιμένα Α εἰς τὸν Β ξυλάνθρακας· καὶ εἰς μὲν τὸ α΄ ταξείδιον μετέφερε 105 στατ.—30 ὀκ., εἰς τὸ β΄ μετέφερε 95 στατ.—15 ὀκ., εἰς τὸ γ΄ 120 στατ. καὶ εἰς τὸ δ΄ 75 στατ.—28 ὀκ. Πόσους ξυλάνθρακας μετέφερε κατὰ μέσον ὅρον εἰς ἕκαστον τῶν τεσσάρων τούτων ταξειδίων ;

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ & ΚΑΤΑΣΤΙΧΟΓΡΑΦΙΑΣ

### *Περὶ ἐμπορίου καὶ ἐμπορικῶν πράξεων.*

**Ἐμπόριον** ὀνομάζεται ἡ ἐνέργεια ἀνταλλαγῶν διαφόρων ἀξιῶν μὲ τελικὸν σκοπὸν τὸ κέρδος.

**Ἐμπορεύματα** ὀνομάζονται τὰ φυσικὰ ἢ καὶ βιομηχανικὰ προϊόντα, τὰ πωλούμενα εἰς τὰ καταστήματα, τὰς ἀγορὰς κ.τ.λ.

**Κύριαι ἐμπορικαὶ πράξεις** εἶναι ἡ ἀγορὰ καὶ ἡ πώλησις.

**Ἀγορὰ** εἶναι ἡ πρᾶξις, δι᾽ ἧς ὑποχρεοῦταί τις νὰ πληρώσῃ ἀμέσως ἢ μετὰ καιρὸν ποσόν τι ἐπ᾽ ἀνταλλαγῇ ἀντικειμένου τινός.

**Πώλησις** εἶναι ἡ πρᾶξις, καθ᾽ ἣν παραδίδει τις ἀντικείμενόν τι ἐπὶ ἀνταλλαγῇ χρήματος, εἰσπραττομένου ἀμέσως ἢ μετά τινα χρόνον.

**Ἀγορὰ ἢ πώλησις τοῖς μετρητοῖς** ὀνομάζεται ἡ πρᾶξις ἐκείνη καθ᾽ ἣν τὸ ἀντίτιμον εἰς χρῆμα τοῦ πωλουμένου ἀντικειμένου ὀφείλει νὰ καταβληθῇ εἰς τὸν πωλητὴν ἅμα τῇ παραλαβῇ τοῦ ἀντικειμένου τούτου ὑπὸ τοῦ ἀγοραστοῦ.

**Ἐπὶ προθεσμίᾳ ἢ πιστώσει πώλησις** ὀνομάζεται ἡ πρᾶξις καθ᾽ ἣν τὸ εἰς χρῆμα ἀντίτιμον τοῦ πωλουμένου ἀντικειμένου ὀφείλει νὰ καταβληθῇ ὑπὸ τοῦ ἀγοραστοῦ εἰς τὸν πωλητὴν ἐντὸς ὡρισμένης προθεσμίας ἀπὸ τῆς παραλαβῆς του.

**Ἔμπορος** ὀνομάζεται πᾶς ὁ τελῶν ἐμπορικὰς ἐργασίας, ὁ ἔχων ταύτας ὡς εἰδικὸν ἐπάγγελμα.

### *Περὶ γραμματίων.*

**Γραμμάτιον** ὀνομάζεται τὸ ἔγγραφον, δι᾽ οὗ ἀναλαμβάνει τις τὴν ὑποχρέωσιν νὰ πληρώσῃ εἰς ἄλλον ἢ εἰς διαταγὴν τοῦ ἄλλου τούτου ποσόν τι εἰς ὡρισμένον χρόνον.

**Εἰς διαταγὴν** τοῦ ἄλλου σημαίνει, εἰς οἱονδήποτε τρίτον ἤθελε ὁ πρὸς ὃν ἐξεδόθη τὸ γραμμάτιον ὑποδείξει εἰς τὸν ἐκδόσαντα (ὑπογράψαντα) αὐτό.

***Τὰ γραμμάτια χρησιμεύουν*** ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον εἰς τὸν διακανονισμὸν τῶν ἐπὶ προθεσμίᾳ πράξεων.

***Γραμματίων*** διακρίνομεν τρία εἴδη :

τὸ εἰς διαταγὴν γραμμάτιον,
τὴν συναλλαγματικήν,
τὴν ἐπιταγήν.

***Γραμμάτιον εἰς διαταγὴν*** εἶναι τὸ ἔγγραφον, δι᾿ οὗ ὁ χρεώστης ὑπόσχεται νὰ πληρώσῃ εἰς διαταγὴν τοῦ πιστωτοῦ του τὴν ὀφειλήν του εἰς ὡρισμένον χρόνον.

Τὸ εἰς διαταγὴν γραμμάτιον, διὰ νὰ εἶναι ἐν τάξει, πρέπει νὰ περιέχῃ:

1) Τὸν τόπον καὶ τὴν ἡμερομηνίαν τῆς ἐκδόσεως.
2) Τὴν λῆξιν (ἤτοι τὴν ἡμερομηνίαν πληρωμῆς) ὁλογράφως.
3) Τὴν ἔκφρασιν ἀναλήψεως ὑποχρεώσεως πληρωμῆς.
4) Τὸ ὄνομα τοῦ εἰς διαταγὴν οὗ θὰ πληρωθῇ.
5) Τὸ πληρωτέον ποσὸν ὁλογράφως.
6) Τὸ εἶδος τῆς ὑπὸ τοῦ χρεώστου ληφθείσης ἀξίας.
7) Τὴν ὑπογραφὴν καὶ διεύθυνσιν τοῦ ἐκδίδοντος (ὑπογράφοντος) τὸ γραμμάτιον.

## *Ὑπόδειγμα γραμματίου εἰς διαταγήν.*

(1) Ἀθῆναι τῇ 10ῃ Μαρτίου 1918. Διὰ δρχ. 1000.—

(2) Τὴν δεκάτην τρέχοντος Ἰουλίου / (3) ὑπόσχομαι καὶ ὑποχρεοῦμαι τὰ πληρώσω / (4) εἰς διαταγὴν τοῦ Κου Ι. Ἰωάννου / (5) χιλίας δραχμάς, / (6) ἃς παρ᾿ αὐτοῦ ἔλαβον εἰς ἐμπορεύματα.

(7) Γ. Γεωργίου
Ὁδὸς Βύσσης 315.

***Συναλλαγματικὴ*** ὀνομάζεται τὸ ἔγγραφον, δι᾿ οὗ ὁ ἔχων λαμβάνειν διατάσσει τὸν ὀφειλέτην του νὰ πληρώσῃ εἰς τρίτον τινὰ ἢ εἰς διαταγὴν τοῦ τρίτου τούτου τὸ ὀφειλόμενον ποσόν.

Ἡ συναλλαγματικὴ δέον νὰ περιέχῃ :

1) Τὸν τόπον καὶ τὴν ἡμερομηνίαν τῆς ἐκδόσεως.
2) Τὴν λῆξιν (ἤτοι τὴν ἡμερομηνίαν πληρωμῆς).
3) Τὴν πρόσκλησιν πρὸς πληρωμήν.
4) Τὸ ὄνομα τοῦ εἰς διαταγὴν τίνος θὰ πληρωθῇ.
5) Τὸ πληρωτέον ποσόν.

6) Τὸ εἶδος τῆς προμηθευθείσης εἰς τὸν χρεώστην ἀξίας.
7) Τὴν ὑπογραφὴν τοῦ δίδοντος τὴν διαταγήν.
8) Τὸ ὄνομα καὶ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ὀφείλοντος νὰ πληρώσῃ αὐτήν.

## *Αον ὑπόδειγμα συναλλαγματικῆς.*

(1) Ἀθῆναι τῇ 15ῃ Μαρτίου 1918. Διὰ δραχ. 1000.—

(2) Τὴν δεκάτην προσεχοῦς Ἰουλίου / (3) πληρώσατε διὰ τῆς παρούσης / (4) εἰς διαταγὴν τοῦ Κου Β. Βασιλείου / (5) δραχμὰς χιλίας / (6) ἃς παρ᾽ ἐμοῦ ἐλάβατε εἰς μετρητά.

(7) Ι. Ἰωάννου

(8) Πρὸς τὸν Κον Γ. Γεωργίου
Ὁδὸς Βύσσης 315

Ὁ εἰς διαταγὴν οὗ ἐκδίδεται ἡ συναλλαγματικὴ παρουσιάζει αὐτὴν εἰς τὸν ἐφ᾽ οὗ ἐξεδόθη, ἵνα οὗτος τὴν ἀποδεχθῇ.

***Ἀποδέχομαι συναλλαγματικὴν*** σημαίνει, ἀναγνωρίζω τὸ χρέος καὶ ἀναλαμβάνω τὴν ὑποχρέωσιν νὰ τὸ πληρώσω· ἡ πρᾶξις δ᾽ αὕτη ἐγγράφεται εἰς ἓν οἱονδήποτε περιθώριον τῆς συναλλαγματικῆς καὶ ὑπογράφεται ὑπὸ τοῦ ὀφειλέτου ὡς ἑξῆς:

Δεκτὴ
Γ. Γεωργίου

## *Βον ὑπόδειγμα συναλλαγματικῆς.*

Ἀθῆναι 15 Μαρτίου 1918. Διὰ δραχμ. 1000.—

Μεθ᾽ ἡμέρας τριάκοντα ἀπὸ τῆς παρουσιάσεως πληρώσατε εἰς διαταγὴν τοῦ Κου Β. Βασιλείου δραχμὰς χιλίας, ἃς παρ᾽ ἐμοῦ ἐλάβατε εἰς μετρητά.

Ι. Ἰωάννου

Πρὸς τὸν Κον Γ. Γεωργίου
Ὁδὸς Βύσσης 315.

Δεκτὴ
Ἀθῆναι 20 Μαρτίου 1918
Γ. Γεωργίου

Ὡς βλέπομεν, ἐν τῷ δευτέρῳ ὑποδείγματι ἡ πρᾶξις τῆς ἀποδοχῆς συνοδεύεται ὑπὸ τῆς ἡμερομηνίας, καθ᾽ ἣν αὕτη ἔλαβε χώραν, τοῦτο δέ, διότι ἀπὸ τῆς ἡμερομηνίας ταύτης, οὔσης ἡμερομηνίας παρουσιάσεως, θὰ καθορισθῇ ἡ λῆξις τῆς συναλλαγματικῆς.

***Ἐπιταγὴ*** ὀνομάζεται τὸ ἔγγραφον, δι' οὗ ὁ πιστωτὴς διατάσσει τὸν ὀφειλέτην νὰ πληρώσῃ ἅμα τῇ εἰς αὐτὸν παρουσιάσει τοῦ ἐγγράφου εἰς τρίτον ἢ εἰς διαταγὴν τούτου ἢ ἁπλῶς εἰς τὸν φέροντα ποσόν τι.

### *Ὑπόδειγμα ἐπιταγῆς.*

Ἀθῆναι 10 Ἰουλίου 1918. Διὰ δραχ. 1000.—

Πληρώσατε ἐπὶ τῇ ἐμφανίσει εἰς διαταγὴν τοῦ κ. Ἰ. Ἰωάννου δραχμὰς χιλίας εἰς χρέωσιν τοῦ παρ' ὑμῖν λογαριασμοῦ μου.

Πρὸς τὴν Τράπεζαν Ἀνατολῆς

Ἐνταῦθα Γ. Γεωργίου

## *Γενικὰ περὶ Γραμματίων.*

***Ὀπισθογράφησις*** λέγεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς ὁ εἰς διαταγὴν οὗ ἐξεδόθη τὸ γραμμάτιον ἐντέλλεται εἰς τὸν ὀφειλέτην νὰ πληρώσῃ εἰς τρίτον ἢ τὴν διαταγὴν τούτου τὸ ὀφειλόμενον ποσόν. Λέγετε ὀπισθογράφησις, διότι ἀναγράφεται ἐπὶ τῆς ὀπισθίας ὄψεως τοῦ γραμματίου, ἔχει δὲ ὡς ἑξῆς:

Ἀντ' ἐμοῦ πληρώσατε εἰς διαταγὴν τοῦ
Κου Κ. Παπαλέξη.
Ἐν Ἀθήναις τῇ 26ῃ Μαρτίου 1918
Ἰ. Ἰωάννου

***Διαμαρτύρησις*** ὀνομάζεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς ὁ κομιστὴς τοῦ γραμματίου διαμαρτύρεται ἐνώπιον τῆς ἀρχῆς, διὰ τὴν μὴ πληρωμὴν τοῦ γραμματίου ὑπὸ τοῦ ὀφειλέτου ἢ διὰ τὴν μὴ ἀποδοχὴν τῆς συναλλαγματικῆς ὑπὸ τοῦ ἐφ' οὗ ἐξεδόθη αὕτη.

Διακρίνομεν ὅθεν δύο εἰδῶν διαμαρτυρήσεις· τὴν λόγῳ μὴ πληρωμῆς καὶ τὴν λόγῳ μὴ ἀποδοχῆς.

Ἡ διαμαρτύρησις γίνεται διὰ πράξεως συμβολαιογράφου, εἰς ὃν τὸ πρὸς διαμαρτύρησιν γραμμάτιον δέον νὰ παραδοθῇ τὴν ἑπομένην τῆς λήξεώς του. Ἐν περιπτώσει καθ' ἣν ἡ διαμαρτύρησις δὲν γίνῃ ἐντὸς τῆς ὑπὸ τοῦ νόμου τασσομένης προθεσμίας, οἱ τυχὸν ὀπισθογράφοι τοῦ γραμματίου, οἵτινες εἶναι ἀλληλεγγύως μετὰ τοῦ ἀρχικοῦ ὀφειλέτου ὑπεύθυνοι διὰ τὴν πληρωμὴν αὐτοῦ, παύουσι τοῦ νὰ ὑπέχωσι τοιαύτην εὐθύνην.

***Ἐκδότης*** διὰ μὲν τὰ εἰς διαταγὴν γραμμάτια ὀνομάζεται ὁ ἀναλαμβάνων τὴν ὑποχρέωσιν νὰ πληρώσῃ εἰς διαταγὴν τοῦ ἄλλου, διὰ δὲ τὰς συναλλαγματικὰς ὁ ἐντελλόμενος εἰς ἄλλον πληρωμήν.

***Ἀποδέκτης*** ὀνομάζεται ὁ ἐφ᾽ οὗ ἐξεδόθη ἡ συναλλαγματική, ἀφοῦ ἀποδεχθῇ αὐτήν.

## *Περὶ Λογιστικῆς καὶ λογιστικῶν βιβλίων.*

***Λογιστικὴ*** ὀνομάζεται ἡ τέχνη τοῦ ἐγκαθιστᾶν καὶ τηρεῖν τοὺς λογαριασμοὺς τῶν ἐμπορικῶν οἴκων.

***Λογιστικὰ βιβλία*** εἶναι τὰ διὰ τὴν τήρησιν τῶν τοιούτων λογαριασμῶν ἀπαιτούμενα.

Ἐν αὐτοῖς ὁ ἔμπορος ἐγγράφει ἁπάσας τὰς ἐμπορικάς του πράξεις κατὰ τρόπον ὥστε νὰ δύναται ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν νὰ γνωρίζῃ τὴν ἐμπορικήν του κατάστασιν.

***Κατάστασις*** ἑνὸς ἐμπόρου ὀνομάζεται τὸ τί ἔχει εἰς χεῖρας του ἢ ὑπὸ τὴν ἄμεσον κυριότητά του καὶ τὸ τί ἔχει λαμβάνειν ἀφ᾽ ἑνός, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ τὸ τί ὀφείλει. Καὶ ὅ,τι μὲν ἔχει ὑπὸ τὴν κατοχήν του ἢ ἔχει λαμβάνειν ὀνομάζεται ***Ἐνεργητικόν,*** ὅ,τι δ᾽ ὀφείλει ὀνομάζεται ***Παθητικόν.***

Τὸ ὑπερβάλλον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ποσῶν τοῦ ἐνεργητικοῦ ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ποσῶν τοῦ παθητικοῦ ἀποτελεῖ τὴν καθαρὰν περιουσίαν τοῦ ἐμπόρου, δηλαδὴ τὸ ***Κεφάλαιόν του***.

## *Παράδειγμα.*

Καταμετροῦμεν τὴν περιουσίαν τοῦ ἐμπόρου ἐλαίων Λ. Λαδάκη καὶ εὑρίσκομεν :

Ἐν τῇ ἀποθήκῃ του ἔλαια ἀξίας δραχ. 40,000· ἐν τῷ καταστήματί του ἔπιπλα ἀξίας δρ. 2.000· ἐν τῷ ταμείῳ του δρ. 2.000· ἐν τῷ χαρτοφυλακίῳ του γραμμάτια ὑπογραφῶν διαφόρων πελατῶν του ἀξίας δραχ. 10,000.

Ἐκ δὲ τῶν βιβλίων του ὅτι ἔχει :

Ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν λαμβάνειν παρὰ τῆς Τραπέζης Ἀνατολῆς ἐκ καταθέσεων δραχ. 20,000· καὶ παρὰ τοῦ Ἰ. Ἰωάννου ἐξ ἀξίας πωληθέντων αὐτῷ ἐμπορευμάτων δρ. 1000.

Ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ ἐκκρεμῆ ὀφειλὴν εἰς τὸν Δ. Δημητρίου δι᾽ ἐμπορεύματα, ἅτινα παρ᾽ αὐτοῦ ἔλαβε, δρ. 15.000, καὶ ὅτι ἔχει ἐκδώσει γραμμάτια εἰς διαταγὴν διαφόρων ἐκ δρ. 25.000, ἅτινα ὀφείλει νὰ πληρώσῃ εἰς τὴν λῆξίν των.

Ἡ καταμέτρησις αὕτη ὀνομάζεται ***Ἀπογραφή***.

Μετὰ τὴν ἀπογραφὴν προβαίνομεν εἰς τὴν κατάστρωσιν τῆς καταστάσεως τοῦ ἐμπόρου. Ἐπειδὴ δ', ὡς εἴπομεν, ἡ κατάστασις ἑνὸς ἐμπόρου ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὸ ἐνεργητικὸν αὐτοῦ, ἤτοι τὸ τί ἔχει καὶ τὸ τί ἔχει λαμβάνειν, καὶ τὸ παθητικόν του, ἤτοι τὸ τί ὀφείλει, γράφομεν:

## *Ἐνεργητικόν.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***Ἐμπορεύματα,*** 2000 ὀκ. ἔλαιον πρὸς δρ. 20 | Δρ. | 40.000.— | |
| ***Ἔπιπλα,*** ἀξίας | » | 2.000.— | |
| ***Ταμεῖον***, μετρητὰ | » | 2.000.— | |
| ***Γραμμάτια*** πρὸς εἴσπραξιν | » | 10 000.— | |
| ***Τράπεζα Ἀνατολῆς***, κατάθεσις | » | 20.000.— | Δρ. |
| ***Ι. Ἰωάννου,*** ὀφειλή του | » | 1.000.— | 75.000.— |

## *Παθητικόν.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***Δ. Δημητρίου***, ὅσα ἔχει λαμβάνειν | Δρ. | 15.000.— | Δρ. |
| ***Γραμμάτια*** πρὸς πληρωμὴν | » | 25.000.— | 40.000.— |

ὑπερβάλλον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ποσῶν τοῦ ἐνεργητικοῦ ἐπὶ τῶν τοῦ παθητικοῦ, ἤτοι ***Κεφάλαιον*** Δρ. 35.000.—

Δηλαδή, ἐὰν ὁ Λ. Λαδάκης σήμερον πωλήσῃ τὰ ἔλαιά του καὶ εἰσπράξῃ τὰ ὅσα ἔχει λαμβάνειν, πληρώσῃ δὲ τὰ ὅσα ὀφείλει, θὰ μείνῃ μὲ περιουσίαν καθαρὰν Δρ. 35.000.

***Λογιστικὰ βιβλία.*** Τὰ λογιστικὰ βιβλία διαιροῦνται εἰς δύο. Εἰς κύρια καὶ βοηθητικά.

Κύρια βιβλία εἶναι τὸ ***Ἡμερολόγιον*** καὶ τὸ βιβλίον τῶν ***Ἀπογραφῶν***. Τὰ δύο ταῦτα βιβλία δέον νὰ ὦσι χαρτοσημασμένα καὶ μονογραφημένα ὑπὸ τοῦ προέδρου τῶν Πρωτοδικῶν ἢ τοῦ νομίμου ἀναπληρωτοῦ του.

Ἐν τῷ ἡμερολογίῳ ὁ ἔμπορος ὀφείλει νὰ ἐγγράφῃ καθ' ἑκάστην ἁπάσας τὰς ἐμπορικάς του πράξεις μὲ πᾶσαν δυνατὴν λεπτομέρειαν.

Ἐν τῷ βιβλίῳ τῶν ἀπογραφῶν ἐγγράφεται τοὐλάχιστον ἅπαξ τοῦ ἔτους ἡ κατάστασις τοῦ ἐμπόρου, ὡς προηγουμένως εἴδομεν.

## ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΟΝ ΤΟΥ Λ. ΛΑΔΑΚΗ

### Ἰανουάριος 1918.

| | | Δρ. | |
|---|---|---|---|
| | 1η | | |
| Τ / Π. Λ. | Κατέθεσα εἰς τὸ Ταμεῖον μου διὰ κεφάλαιον ....... | 100000 | — |
| | ἰδία | | |
| Ἐξ. / Τ | Ἐπλήρωσα δι ἐνοίκιον ἑνὸς μηνὸς τοῦ μαγαζείου μου | 1000 | — |
| | 2 | | |
| Ἐπ. / Τ | Ἠγόρασα τοῖς μετρητοῖς δύο τραπέζια, δύο καρέκλες καὶ μίαν πλάστιγγα .................... | 3800 | — |
| | 4 | | |
| Ἐμπ. / Τ | Ἠγόρασα τοῖς μετρητοῖς 400 ὀκάδ. ἐλαίου πρὸς δρ. 30 | 12000 | — |
| | 7 | | |
| Ἐμπ. / Π. Λ. | Ἠγόρασα ἐπὶ πιστώσει ἀπὸ Ι. Ἰωάννου 3000 ὀκάδας οἴνου πρὸς δραχμὰς 7 .................... | 21000 | — |
| | 8 | | |
| Τ / Ἐμπ. | Ἐπώλησα τοῖς μετρητοῖς 1000 ὀκάδας οἴνου πρὸς δρ. 9,10 | 9100 | — |
| | 10 | | |
| Ἐμπ / Π. Λ. | Ἠγόρασα ἀπὸ Δ. Δημητρίου ἐπὶ πιστώσει 500 ὀκάδας ἐλαίου πρὸς δραχμὰς 30 .................. | 15000 | — |
| | 11 | | |
| Π. Λ. / Ἐμπ. | Ἐπώλησα ἐπὶ πιστώσει εἰς τὸν Ε. Εὐστρατίου 100 ὀκάδας ἐλαίου προς δραχμὰς 34,40 ............. | 3440 | — |
| | 13 | | |
| Π. Λ. / Τ | Ἐπλήρωσα εἰς τὸν Ι. Ἰωάννου ἔναντι χρέους μου ... | 5000 | — |
| | 15 | | |
| Π. Λ. / Γ. Π. | Ὑπέγραψα εἰς διαταγὴν τοῦ Δ. Δημητρίου γραμμάτιον λήξεως 10 Ἀπριλίου 1918 καὶ τοῦ τὸ ἔδωκα ...... | 10000 | — |
| | 18 | | |
| Τ / Π. Λ. | Εἰσέπραξα ἀπὸ Ε. Εὐστρατίου ἔναντι χρέους του .... | 1000 | — |
| | 19 | | |
| Τ / Ἐμπ. | Ἐπώλησα τοῖς μετρητοῖς 100 ὀκάδ. ἐλαίου πρὸς δρ. 34,40 | 3440 | — |
| | 20 | | |
| Π. Λ. / Ἐμπ. | Ἐπώλησα ἐπὶ πιστώσει εἰς τὸν Ζ. Ζάννον 400 ὀκάδας οἴνου πρὸς δραχμὰς 8,20 .................... | 3280 | — |
| | Ἄθροισμα εἰς μεταφορὰν ... | 188060 | — |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 'Εκ μεταφορᾶς . . . | | 188060 — |
| | 25 | | |
| Τ. / 'Εμπ. | 'Επώλησα μετρητοῖς 500 ὀκ. ἐλαίου πρὸς δρ. 34,30 δρ. | 17150 | |
| | καὶ 1000 ὀκ. οἴνου » » 8,10 » | 8100 | 25250 — |
| | 26 | | |
| Γ.Εἰσ. / Γ. Λ. | Ἔλαβον ἀπὸ Ζ. Ζάννον γραμμάτιον τοῦ εἰς διαταγήν μου λῆγον τὴν 20ὴν Φεβρουαρίου 1918 . . . . . . . . . . | | 4000 — |
| | 31 | | |
| Ἔξ. / Τ. | 'Επλήρωσα μισθὸν ὑπαλλήλου δρ. | 1000 | |
| | » διάφορα ἔξοδα μ νὸς » | 2000 | 3000 — |
| | Ἄθροισμα τοῦ μηνός. . . . . | | 220310 — |

***Βοηθητικὰ βιβλία.*** Τὰ βοηθητικὰ βιβλία εἶναι τὰ βιβλία ἐκεῖνα, εἰς ἃ μεταφέρονται αἱ πράξεις τοῦ Ἡμερολογίου, μεταφερόμεναι ἑκάστη εἰς δύο ἢ πλείονα ἐξ αὐτῶν ἰδιαιτέρως ἀναλόγως τῆς πράξεως.

Τὰ βοηθητικὰ βιβλία εἶναι ἠριθμημένα εἰς διπλᾶς σελίδας, τὴν ἀριστερὰν καὶ τὴν δεξιάν.

Ἡ μὲν ἀριστερὰ σελὶς ἀντιπροσωπεύει τὴν Εἰσαγωγὴν ἢ Χρέωσιν ἢ Δοῦναι τοῦ βιβλίου, ἡ δὲ δεξιὰ τὴν Ἐξαγωγὴν ἢ Πίστωσιν ἢ Λαβεῖν αὐτοῦ (δηλ. τοῦ ἐν τῷ βιβλίῳ ἐγγραφομένου λογαριασμοῦ.)

Ὁ ἀριθμὸς τῶν βοηθητικῶν βιβλίων κανονίζεται ἀναλόγως τοῦ εἴδους τῆς ἐργασίας τοῦ ἐμπόρου. Τινὰ ὅμως ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀπαραίτητα εἰς πάντα ἔμπορον. Ταῦτα εἶναι:

1ον) ***Τὸ βιβλίον Ταμείου,*** ἐν τῷ ὁποίῳ ἐγγράφομεν πᾶσαν χρηματικὴν κίνησιν, τὰς μὲν εἰσπράξεις εἰς τὴν ἀριστερὰν σελίδα, ἤτοι τὴν χρέωσιν, τὰς δὲ πληρωμὰς εἰς τὴν δεξιάν, ἤτοι τὴν πίστωσιν.

2ον) ***Τὸ βιβλίον ἐμπορευμάτων,*** ἐν τῷ ὁποίῳ ἐγγράφομεν πᾶσαν κίνησιν τῶν ἐμπορευμάτων, τὰς μὲν εἰσαγωγὰς εἰς τὸ ἀριστερὸν ἢ τὴν χρέωσιν, τὰς δὲ ἐξαγωγὰς εἰς τὸ δεξιὸν ἢ τὴν πίστωσιν. Ἐὰν ἔχωμεν πολλῶν εἰδῶν ἐμπορεύμα α, ἀνοίγομεν δι᾽ ἕκαστον εἶδος ἰδιαιτέραν διπλῆν σελίδα ἐν τῷ αὐτῷ βιβλίῳ.

3ον) ***Τὸ βιβλίον ἐπίπλων καὶ σκευῶν,*** ἐν τῷ ὁποίῳ ἐγγράφομεν εἰς μὲν τὴν ἀριστερὰν σελίδα ἢ χρέωσιν πάντα τὰ ἐν τῷ καταστήματι ἢ γραφείῳ μας εἰσαγόγενα ἔπιπλα ἢ σκεύη ἐργασίας μας, εἰς δὲ τὴν δεξιὰν αὐτοῦ σελίδα ἢ πίστωσιν πάντα τὰ λόγῳ πωλήσεως ἢ καὶ καταστροφῆς ἐξερχόμενα ἔπιπλα ἢ σκεύη.

4ον) ***Τὸ βιβλίον Γραμματίων πρὸς εἴσπραξιν,*** ἐν τῷ ὁποίῳ ἐγγράφομεν πάντα τὰ ὑπὸ τρίτων διδόμενα ἡμῖν εἰς διαταγήν μας γραμμάτια, ὅταν μὲν τὰ λαμβάνωμεν, εἰς τὴν ἀριστερὰν σελίδα ἢ χρέωσιν ἢ εἰσαγωγήν, ὅταν δὲ εἰσπράξαντες τὴν ἀξίαν αὐτῶν τὰ ἐπιστρέφωμεν εἰς τὸν ἐκδώσαντα αὐτά, εἰς τὴν ἐξαγωγὴν ἢ πίστωσιν, ἤτοι τὴν δεξιὰν σελίδα τοῦ βιβλίου.

5ον) ***Τὸ βιβλίον τῶν Γραμματίων πρὸς πληρωμήν,*** ἐν τῷ ὁποίῳ ἐγγράφομεν πάντα τὰ ὑφ' ὑμῶν ἐκδιδόμενα γραμμάτια, ὅταν μὲν τὰ ἐκδίδωμεν, εἰς τὴν ἐξαγωγὴν ἢ πίστωσιν, ὅταν δέ, ἀφ' οὗ τὰ πληρώσωμεν, μᾶς ἐπιστραφῶσιν, εἰς τὴν εἰσαγωγήν, ἤτοι τὴν ἀριστερὰν σελίδα τοῦ βιβλίου.

6ον) ***Τὸ βιβλίον τῶν προσωπικῶν λογαριασμῶν.*** Ἐν τῷ βιβλίῳ τούτῳ ἀνοίγομεν δι' ἕκαστον πρόσωπον μετὰ τοῦ ὁποίου εὑρισκόμεθα εἰς συναλλαγάς, ἰδιαιτέραν δ πλῆν σελίδα, γράφοντες εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς σελίδος τὸ ὄνομα τοῦ προσώπου, εἰς ὃ ἀνήκει ὁ λογαριασμός· καὶ ὅσα μὲν ποσὰ ἢ ἀξίας δίδομεν εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τὰ ἐγγράφομεν εἰς τὴν χρέωσίν του, ὅσα δὲ λαμβάνομεν παρ' αὐτοῦ τὰ ἐγγράφομεν εἰς τὴν πίστωσίν του.

7ον) ***Τὸ βιβλίον τῶν ἐξόδων,*** ἐν τῷ ὁποίῳ ἐγγράφομεν ἅπαντα τὰ λόγῳ τῆς ἐργασίας γινόμενα ἔξοδα, ἤτοι μισθοὺς ὑπαλλήλων, ἐνοίκια, μικροεπισκευὰς κ. λ. π. καταχωρίζοντες ταῦτα εἰς τὴν χρέωσιν τοῦ βιβλίου.

## *Χρέωσις καὶ πίστωσις τῶν διαφόρων βιβλίων ἢ λογαριασμῶν.*

Ὡς ἐκ τῶν προλεχθέντων εἴδομεν, ὅταν εἰσάγεται παρὰ τῷ ἐμπόρῳ ἀξία τις, ἤτοι μετρητά, ἐμπορεύματα, γραμμάτια κ.λ.π. τὸ εἰς χρῆμα ἀντίτιμον αὐτῶν καταχωρίζεται εἰς τὴν χρέωσιν τοῦ βιβλίου, εἰς ὃ ἡ ἀξία αὕτη ὑπάγεται, ὅταν δὲ παρὰ τοῦ ἐμπόρου ἐξάγεται ἀξία τις, τὸ ἀντίτιμον αὐτῆς καταχωρίζεται εἰς τὴν πίστωσιν τοῦ βιβλίου, εἰς ὃ ἡ ἀξία αὕτη ὑπάγεται.

Ἐὰν λοιπὸν προσωποποιήσωμεν τὰ διάφορα ταῦτα βιβλία καὶ εἴπωμεν ὅτι, ὅταν εἰσάγωμεν μετρητὰ εἰς τὸ Ταμεῖον, τοῦτο λαμβάνει τὰ χρήματα (καταχωρίζομεν δὲ ταῦτα εἰς τὴν χρέωσιν τοῦ βιβλίου Ταμείου),

ὅταν εἰσάγωμεν ἐμπορεύματα εἰς τὴν ἀποθήκην, τὰ ἐμπορεύματα λαμβάνουσι (καταχωρίζομεν δὲ ταῦτα εἰς τὴν χρέωσιν τοῦ βιβλίου των),

ὅταν εἰσάγωμεν Γραμμάτια εἰς τὸ χαρτοφυλάκιον, τὰ Γραμμάτια λαμβάνουσι (καταχωρίζομεν δὲ ταῦτα εἰς τὴν χρέωσιν τοῦ βιβλίου των) καὶ οὕτω καθεξῆς.

βλέπομεν ὅτι, ὅταν εἰσάγεται ἀξία τις παρὰ τῷ ἐμπόρῳ, τὸ βιβλίον ὅπερ ὑποτίθεται ὅτι **λαμβάνει** τὴν ἀξίαν ταύτην, ***χρεοῦται***·

ἀφ' ἑτέρου δὲ ὅτι,

ὅταν ἐξάγωμεν μετρητὰ ἐκ τοῦ Ταμείου, τοῦτο δίδει τὰ χρήματα (καταχωρίζομεν δὲ ταῦτα εἰς τὴν πίστωσιν τοῦ βιβλίου Ταμείου)

ὅταν ἐξάγωμεν ἐμπορεύμτατα ἐκ τῆς ἀποθήκης, τὰ ἐμπορεύματα δίδουσι (καταχωρίζομεν δὲ τὴν ἀξίαν των εἰς τὴν πίστωσιν τῶν βιβλίων ἐμπορευμάτων) καὶ οὕτω καθεξῆς.

βλέπομεν ὅτι, ὅταν ἐξάγῃ ἀξίαν τινα ὁ ἔμπορος, τὸ βιβλίον, ὅπερ ὑποτίθεται ὅτι ***δίδει*** τὴν ἀξίαν ταύτην, ***πιστοῦται.***

Ἐπίσης εἴδομεν, ὅτι εἰς τὸ βιβλίον, ὅπερ κρατούμενον διὰ τοὺς λογαριασμοὺς τῶν μεθ' ὧν συναλλασόμεθα, ἤτοι τὸ βιβλίον τῶν προσωπικῶν λογαριασμῶν, τὰ ποσὰ ἢ τὴν ἀξίαν τῶν εἰδῶν, τὰ ὁπ ῖα οὗτοι **λαμβάνουσι** παρ' ἡμῶν, καταχωρίζομεν εἰς τὴν χρέωσίν των, τὰ δὲ ποσὰ ἢ τὴ ἀξίαν τῶν εἰδῶν, ἅτινα μᾶς δίδουσι, καταχωρίζομεν εἰς τὴν πίστωσίν των.

Συνάγομεν ὅθεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων τὸν ἑξῆς θεμελιώδη κανόνα τῆς Λογιστικῆς :

***Εἰς τὰ λογιστικὰ βιβλία πᾶς λαμβάνων (πρόσωπον ἢ λογαριασμὸς) χρεοῦται, πᾶς δὲ δίδων (πρόσωπον ἢ λογαριασμὸς) πιστοῦται.***

Ἐν ἀρχῇ εἴπομεν ὅτι ἐμπόριον εἶναι ἡ ἀνταλλαγὴ διαφόρων ἀξιῶν. Ἑκάστη τοιαύτη ἀνταλλαγὴ εἶναι μία δοσοληψία. Ἐν ἑκάστῃ δοσοληψίᾳ ὑπάρχουσι τοὐλάχιστον δύο ἐνεργοῦντες, ὁ δίδων καὶ ὁ λαμβάνων.

Ἐπειδή, ὡς εἴπομεν, πᾶς λαμβάνων χ εοῦται καὶ πᾶς δίδων πιστοῦται, συνάγομεν τὸν ἕτερον θεμελιώδη κανόνα τῆς Λογιστικῆς, ὑπαγορεύοντα ὅτι :

***Εἰς τὰ λογιστικὰ βιβλία πᾶσα χρέωσις βιβλίου ἢ λογαριασμοῦ προϋποθέτει καὶ συνεπάγεται σύγχρονον καὶ ἰσάξιον πίστωσιν ἄλλου βιβλίου ἢ λογαριασμοῦ, καὶ τἀνάπαλιν, πᾶσα πίστωσις βιβλίου ἢ λογαριασμοῦ προϋποθέτει καὶ συνεπάγεται σύγχρονον καὶ ἰσάξιον χρέωσιν ἄλλου βιβλίου ἢ λογαριασμοῦ.***

Τὸ βιβλίον (ἢ λογαριασμὸς) Γενικῶν Ἐξόδων χρεοῦται μὲ τὰ ἐξοδευόμενα χρήματα, διότι θεωρεῖται λαμβάνον τὰ χρήματα, ἅτινα τὸ Ταμεῖον δίδει.

## *Ἐγγραφὴ τῶν πράξεων τοῦ Ἡμερολογίου εἰς τὰ βοηθητικὰ βιβλία.*

Ἵνα μεταφέρωμεν τὰς πράξεις ἐκ τοῦ Ἡμερολογίου εἰς τὰ βοηθητικὰ βιβλία, ὀφείλομεν πρὸ πάσης ἐγγραφῆς νὰ θέτωμεν τὰ ἑξῆς ἐρωτήματα :

Τίς λαμβάνει ; Τίς δίδει ;

Ἀφοῦ δὲ εὕρωμεν τούτους, νὰ χρεώσωμεν τὸν λαμβάνοντα καὶ νὰ πιστώσωμεν τὸν δίδοντα.

Τούτων δοθέντων, ἀρχόμεθα τῆς καταχωρίσεως τῶν πράξεων τοῦ Γ. Λαδάκη εἰς τὰ βοηθητικά του βιβλία.

***Πρᾶξις*** 1η. Ὁ Γ. Λαδάκης κατέθεσεν (ἔδωκεν) εἰς τὸ Ταμεῖόν του δραχ. 100.000. Τίς λαμβάνει ; Τὸ Ταμεῖον. Ἐγγράφομεν λοιπὸν εἰς τὴν χρέωσιν τοῦ Ταμείου τὰς 100.000 δραχμάς.

Τίς δίδει ; Ὁ Γ. Λαδάκης. Ἀνοίγομεν λοιπὸν εἰς τὸ βιβλίον τῶν προσωπικῶν λογαριασμῶν μίαν μερίδα μὲ ἐπικεφαλίδα Γ. Λαδάκης καὶ ἐγγράφομεν εἰς τὴν πίστωσιν τῆς μερίδος ταύτης τὰς 100.000 δραχμάς.

2α. Ἐπληρώθησαν δι᾽ ἐνοίκιον δραχ. 1000.

Τὸ ἐνοίκιον εἶναι ἔξοδον. Ἄρα ὁ λαμβάνων εἶναι τὸ βιβλίον Ἐξόδων, εἰς τὴν χρέωσιν τοῦ ὁποίου καταχωρίζομεν τὰς 1000 δραχμάς.

Τίς δίδει ; Τὸ Ταμεῖον. Ἄρα πιστώνομεν τὸ βιβλίον Ταμείου μὲ τὸ αὐτὸ ποσόν.

***Σημ.*** Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ γεννᾶται ἡ ἀπορία, διατί, ἀφοῦ τὰς 1000 δραχμὰς ἔλαβεν ὁ ἰδιοκτήτης δὲν χρεώνεται αὐτός. ἀλλὰ τὰ ἔξοδα. Διότι ὁ ἰδιοκτήτης ἔλαβε μὲν χρήματα, ἀντ᾽ αὐτῶν ὅμως παρέχει τὸ κατάστημά του εἰς τὸν Λαδάκην, συνεπῶς οὔτε χρεωστᾶ οὔτε ἔχει λαμβάνειν, ὡς ἐκ τούτου δὲν τὸν ἀναφέρομεν εἰς τὰ βιβλία.

3η. Ἐπληρώθησαν δι᾽ ἀγορὰν διαφόρων ἐπίπλων Δραχ. 3800.

Τίς λαμβάνει ; Τὰ ἔπιπλα τὰ ὁποῖα εἰσήχθησαν εἰς τὸ κατάστημα. Ἄρα χρεώνομεν τὸ βιβλίον ἐπίπλων.

Τίς δίδει ; Τὸ Ταμεῖον, ὁ ὁποῖον ἐπλήρωσε τὴν ἀξίαν αὐτῶν. Καταχωρίζωμεν ὅθεν τὰς 3800 Δρ. εἰς πίστωσιν τοῦ Ταμείου.

4η Ἠγοράσθησαν, παρελήφθησαν καὶ ἐπληρώθησαν 400 ὀκάδες ἐλαίου ὁλικῆς ἀξίας Δρ. 12000.

Τίς λαμβάνει ; Τὸ ἔλαιον εἶναι ἐμπόρευμα, τὸ ὁποῖον εἰσήχθη εἰς ἀποθήκην, ἄρα χρεώνομεν τὸ βιβλίον ἐμπορευμάτων εἰς μερίδα ἐλαίου.

Τίς δίδει ; Τὸ Ταμεῖον, τὸ ὁποῖον ἐπλήρωσε τὴν ἀξίαν τοῦ ἐλαίου. Ἄρα πιστώνομεν τὸ βιβλίον Ταμείου.

5η. Ἔλαβα ἀπὸ τὸν Ἰ. Ἰωάννου 3000 ὀκ. οἴνου ἀξίας Δρ. 21000 Τίς λαμβάνει ; Τὰ ἐμπορεύματα, τὰ ὁποῖα καὶ χρεώνομεν μὲ τὴν ἀξίαν τοῦ ἀγορασθέντος οἴνου, ἀνοίγοντες ἐντὸς τοῦ βιβλίου μερίδα οἴνου·

Τίς δίδει ; Ὁ Ἰ. Ἰωάννου, ὁ ὁποῖος ἔδωκε τὸν οἶνον χωρὶς νὰ εἰσπράξῃ τὴν ἀξίαν του. Συνεπῶς ἀνοίγομεν εἰς τὸ βιβλίον Προσωπικῶν Λογαριασμῶν μίαν μερίδα διὰ τὸν Ἰ. Ἰωάννου, εἰς τῆς ὁποίας μερίδος τὴν πίστωσιν καταχωρίζομεν τὴν ἀξίαν τοῦ οἴνου, δηλαδὴ πιστώνομεν τὸν Ἰ. Ἰωάννου.

6η. Ἐπώλησα τοῖς μετρητοῖς 1000 ὀκ. οἴνου. Δηλ. ἔδωκα ἐμπόρευμα καὶ ἔλαβον χρήματα.

Τίς λαμβάνει ; Τὸ Ταμεῖον· ἄρα τὸ χρεώνομεν.

Τίς δίδει ; Τὰ ἐμπορεύματα· ἄρα τὰ πιστώνομεν.

7η. Ἠγόρασα ἀπὸ Δ. Δημητρίου 500 ὀκ. ἐλαίου ἀξίας Δρχ. 15.000· Τίς λαμβάνει ; Τὰ ἐμπορεύματα. Τίς δίδει ; Ὁ Δ. Δημητρίου. Χρεώνω ὅθεν τὰ ἐμπορεύματα καὶ πιστώνω τὸν Δημητρίου.

8η. Ἐπώλησα εἰς τὸν Ε. Εὐστρατίου 100 ὀκ. ἐλαίου ἀξίας Δραχ. 3.440. Τίς λαμβάνει ; Ὁ Εὐστρατίου. Τίς δίδει ; Τὰ ἐμπορεύματα. Χρεώνομεν λοιπὸν τὸν Εὐστρατίου καὶ πιστώνομεν τὰ ἐμπορεύματα·

9η. Ἐπλήρωσα εἰς τὸν Ἰ. Ἰωάννου ἔναντι χρέους μου Δρχ 5.000. Τίς λαμβάνει ; Ὁ Ἰωάννου. Τίς δίδει ; Τὸ Ταμεῖον. Ἄρα χρεώνομεν τὸν Ἰωάννου καὶ πιστώνομεν τὸ Ταμεῖον.

10η. Ἔδωκα εἰς τὸν Δ. Δημητρίου εἰς ἐξόφλησιν τοῦ χρέους μου γραμμάτιον εἰς διαταγήν του Δρχ. 10.000.

Τίς λαμβάνει ; Ὁ Δημητρίου. Τίς δίδει ; Τὰ Γραμμάτια πληρωτέα. Χρεώνομεν ὅθεν τὸν Δημητρίου καὶ πιστώνομεν τὰ Γραμμάτια πληρωτέα.

11η. Ὁ Εὐστρατίου μοῦ ἔδωκεν ἔναντι τοῦ χρέους του Δρ. 1.000. Τὸ Ταμεῖον λαμβάνει· συνεπῶς τὸ χρεώνω. Ὁ Εὐστρατίου δίδει συνεπῶς τὸν πιστώνω.

12η. Ἐπώλησα τοῖς μετρητοῖς 100 ὀκ. ἐλαίου καὶ εἰσεπραξα Δρ. 3440. Χρεώνομεν τὸ Ταμεῖον, ὅπερ λαμβάνει, καὶ πιστώνομεν τὰ ἐμπορεύματα, ἅτινα δίδουσι.

13η. Ἐπώλησα εἰς Ζ. Ζάννον 400 ὀκ. ἐλαίου Δρ. 3280. Χρεώνομεν τὸν Ζ. Ζάννον, ὅστις ἔλαβε τὸ ἔλαιον, καὶ πιστώνομεν τὰ ἐμπορεύματα

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 14η. Ἐπώλησα | 500 | ὀκ. ἐλαίου | τοῖς μετρητοῖς | ἀντὶ | Δρ. | 17150 |
| καὶ | 1000 | » οἴνου | » | » | » | 8100 |
| | | | Τὸ ὅλον . . . . | » | » | 25.250 |

Τὸ ταμεῖον εἰσέπραξεν· ἄρα τὸ χρεώνομεν. Τὰ ἐμπορεύματα ἔδωκαν· ἄρα τὰ πιστώνομεν.

15η. Ὁ Ζάννος μοῦ ἔδωκε τὸ γραμμάτιόν του Δρ. 4000. Χρεώνομεν τὰ Γραμμάτια εἰσπρακτέα, ἅτινα ἔλαβον τὸ γραμμάτιον, καὶ πιστώνομεν τὸν Ζάννον, ὅστις τὸ ἔδωκε.

16η. Ἐπληρώθησαν τὰ ἑξῆς ἔξοδα :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Διὰ μισθὸν ὑπαλλήλου | Δρ. | 1000 | |
| Μικρὰ ἔξοδα μηνὸς | » | 2000 | 3000 |

Εἴπομεν, ὅτι διὰ τῶν ἐξόδων τοῦ καταστήματος χρεώνομεν τὸ βιβλίον Γενικῶν Ἐξόδων, πιστώνομεν δὲ ἐκεῖνον, ὅστις τὰ πληρώνει, δηλαδὴ τὸ Ταμεῖον.

***Σημείωσις*** Ἵνα πειθώμεθα, ὅτι ὅλαι αἱ πράξεις τοῦ Ἡμερολογίου καταχωρίζονται εἰς τὰ οἰκεῖα βοηθητικὰ βιβλία, εἰς τὴν χρέωσιν τοῦ ἑνὸς καὶ εἰς τὴν πίστωσιν τοῦ ἄλλου, ἐγγράφομεν εἰς τὴν πρώτην στήλην τοῦ Ἡμερολογίου τὰ ἀρχικὰ ψηφία ἑκάστου βοηθητικοῦ βιβλίου ἔναντι ἑκάστης πράξεως χωρίζοντες αὐτὰ διὰ μιᾶς γραμμῆς. Καὶ ἄνωθεν μὲν τῆς γραμμῆς ταύτης γράφομεν τὰ ἀρχικὰ τοῦ χρεουμένου βιβλίου, κάτωθεν, δὲ αὐτῆς τὰ ἀρχικὰ τοῦ πιστωνομένου τοιούτου.

***Μηνιαῖος ἔλεγχος***. Εἴπομεν, ὅτι ὅλαι αἱ πράξεις τοῦ Ἡμερολογίου καταχωρίζονται εἰς τὰ βοηθητικὰ βιβλία, ἑκάστη εἰς ὃ βιβλίον ὑπάγεται. Ἑκάστη πρᾶξις εἶναι μία δοσοληψία, ἄρα δι᾽ ἑκάστην πρᾶξιν ἐγένετο μία χρέωσις (ἡ τοῦ λαβόντος) καὶ μία πίστωσις (ἡ τοῦ δώσαντος).

Ἐὰν ὅθεν ἀθροίσωμεν ὅλα τὰ ἐν τῷ Ἡμερολογίῳ ἐγγραφέντα ποσὰ ἀφ᾽ ἑνός, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ τὰ ποσὰ τῶν χρεώσεων ὅλων τῶν βοηθητικῶν βιβλίων καὶ ἐκ τρίτου ὅλα τὰ ποσὰ τῶν πιστώσεων αὐτῶν, αἱ τρεῖς αὗται ἀθροίσεις δέον νὰ εἶναι μέχρι λεπτοῦ ὅμοιαι.

Ἀθροίζομεν ὅθεν πρῶτον, τὰ ποσὰ τοῦ Ἡμερολογίου καὶ εὑρίσκομεν ὁλικὸν ἄθροισμα δρ. 220310. Μετὰ ταῦτα λαμβάνομεν ἓν ἕκαστον ἐκ τῶν βιβλίων καὶ κάμνομεν τὰς ἀθροίσεις τῆς χρεώσεως καὶ τῆς πιστώσεως ἑνὸς ἑκάστου αὐτῶν διὰ μολυβδίδος ἐλαφρά, ὥστε νὰ σβέννυνται μετὰ ταῦτα δι᾽ ἐλαστικοῦ κόμεος· τὰς δὲ ἀθροίσεις ταύτας ἐγγράφομεν εἰς φύλλον χάρτου μὲ διπλᾶς στήλας χρεώσεως καὶ πιστώσεως, ὡς τὸ κατωτέρω ὑπόδειγμα. Ἀφ᾽ οὗ ἐγγράψωμεν τὰς ἀθροίσεις ὅλων τῶν βιβλίων εἰς τὸ φύλλον τοῦτο ἑκάστην ἄθροισιν εἰς τὴν στήλην, εἰς ἣν ὑπάγεται (στήλην χρεώσεως ἢ πιστώσεως), ἀθροίζομεν τὰ ἐγγραφέντα ποσὰ καὶ βλέπομεν, ὅτι αἱ ἀθροίσεις τῶν δύο στηλῶν, χρεώσεως καὶ πιστώσεως, εἶναι ὅμοιαι οὐ μόνον πρὸς ἀλλήλας, ἀλλὰ καὶ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν τοῦ ἡμερολογίου.

| | Μερικαὶ | | Ὀλικαὶ | |
|---|---|---|---|---|
| | χρεώσεις | πιστώσεις | χρεώσεις | πιστώσεις |
| Ταμεῖον. . . . . . . . . . | | | 138790 — | 24800 — |
| μπορεύματα . . . . . . . | | | | |
| Ἔλαια. . . . . . . . . . . . | 27000 — | 24030 — | | |
| Οἶνοι. . . . . . . . . . . . . | 21000 — | 20480 — | 48000 — | 44510 |
| Ἔξοδα. . . . . . . . . . . | | | 4000 — | |
| Ἔπιπλα καὶ σκεύη. . . | | | 3800 — | |
| Προσωπικοὶ λογ)μοί. | | | | |
| Γ. Λαδάκης . . . . . . . | | 100000 — | | |
| Ἰωάννου . . . . . . . . | 5000 — | 21000 — | | |
| Ἐ. Εὐστρατίου . . . . . | 3440 — | 1000 — | | |
| Δ. Δημητρίου . . . . . . | 10000 — | 15000 — | | |
| Ζ. Ζάννος. . . . . . . . . | 3280 — | 4000 | 21720 — | 141000 — |
| Γραμμάτια εἰσπρακτέα | | | 4000 — | |
| Γραμμάτια πληρωτέα . | | | | 10000 — |
| | | | 220310 — | .20310 — |

Τὸ ὡς ἄνω φύλλον ὀνομάζεται ***ἰσολογισμὸς ἐξελέγξεως.***

Ἐὰν ὑπάρχῃ διαφορά τις μεταξὺ τῶν ἀθροίσεων τοῦ ἰσολογισμοῦ τούτου ἢ μεταξὺ αὐτῶν καὶ τῆς ἀθροίσεως τοῦ ἡμερολογίου, τοῦτο σημαίνει, ὅτι ἢ κατὰ τὰς ἐγγραφὰς τοῦ ἡμερολογίου εἰς τὰ βοηθητικὰ ἢ εἰς τὰς ἀθροίσεις τοῦ ἡμερολογίου ἢ εἰς τὰς τῶν βοηθητικῶν ἐγένετο λάθος, ὅπερ δέον νὰ ἀνεύρωμεν καὶ διορθώσωμεν.

***Κλείσιμον βιβλίων, ἄνοιγμα αὐτῶν εἰς νέον καὶ συνέχισις ῶν πράξεων.*** Ὁ ἔμπορος ὀφείλει τοὐλάχιστον ἅπαξ τοῦ ἔτους νὰ κάμνῃ ἀπογραφὴν τῆς ἐμπορικῆς του περιουσίας, ἤτοι νὰ καταστρώνῃ τὴν ἐμπορικήν του κατάστασιν, ἵνα ἐξ αὐτῆς ἀντιλαμβάνηται, ἐὰν χάνῃ ἢ ἐὰν κερδίζῃ καὶ πόσα. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ κάμῃ

1ον) ἰσολογισμὸν ἐξελέγξεως, ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν.

2ον) νὰ καταγράψῃ τὰ ἐν τῇ ἀποθήκῃ του ἐμπορεύματα.

3ον) νὰ κάμῃ δεύτερον ἰσολογισμὸν ἐξελέγξεως, παρουσιάζοντα μό νον τὰς μεταξὺ τῆς χρεώσεως καὶ πιστώσεως ἑκάστου βιβλίου ὑφισταμένας διαφορὰς ἢ ὑπόλοιπα Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον λογαριασμοῦ τινος προέρχεται ἐκ πλεονάσματος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ποσῶν τῆς χρεώσεως ἐπὶ τῶν τοῦ τῆς πιστώσεως, λέγομεν, ὅτι τὸ παρουσιαζόμενον ὑπόλοιπον εἶναι χρεωστικὸν καὶ ἐγγράφομεν αὐτὸ εἰς τὴν στήλην χρεώσεως, ἐὰν συμβαίνῃ τὸ ἐναντίον, λέγομεν, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον εἶναι πιστωτικὸν καὶ ἐγγράφομεν αὐτὸ εἰς τὴν στήλην πιστώσεως τοῦ φύλλου ἰσολογισμοῦ ὡς ἑξῆς.

| | | | Ὑπόλοιπα | |
|---|---|---|---|---|
| | | | χρεωστικὰ | πιστωτικὰ |
| Ταμεῖον . . . . . . . . . . . | | | 113990 — | |
| Ἐμπορεύματα . . . . . . . . | | | | |
| Ἔλαια ἐν ἀποθήκῃ ὀκ. | 200 | 2970 | | |
| Οἶνοι » » » | 600 | 520 | 3490 — | |
| Ἔξοδα . . . . . . . . . . . | | | 4000 — | |
| Ἔπιπλα καὶ Σκεύη . . . . . . . | | | 3800 — | |
| Προσωπικοὶ λογαριασμοί. . . . . . | | | | |
| Γ. Λαδάκης . . . . . | | 100000 — | | |
| Ι. Ἰωάννου . . . . . | | 16000 — | | |
| Ἐ. Εὐστρατίου . . | 2440 — | | | |
| Δ. Δημητρίου . . | — | 5000 — | | |
| Ζ. Ζάννος. . . . | | 720 — | | |
| | 2440 — | 121720 — | | 119280 — |
| Γραμμάτια εἰσπρακτέα . . . . . . | | | 4000 — | |
| » πληρωτέα . . . . . . . | | | | 10000 — |
| | | | 129280 — | 129280 |

4ον) Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὑπολοίπων τούτων νὰ κλείσῃ τὰ βιβλία, ὡς ἐν ἑκάστῳ τούτων ὑποδεικνύεται.

5ον) νὰ καταστρώσῃ νέον ἰσολογισμὸν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν εἰς νέον ὑπολοίπων καὶ τῶν ἀθροισμάτων τῶν μὴ τυχὸν κλεισθέντων λογαριασμῶν (π. χ. λογ]σμὸς ἐπίπλων) ὡς ἑξῆς·

| | | | Ὑπόλοιπα | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Χρεωστικὰ | Πιστωτικὰ |
| Ταμεῖον . . . . . . . . . . . | | | 113990 — | |
| Ἐμπορεύματα . . . . . . . . . | | | | |
| Ἔλαια ὀκ. . . . . . | 200 | 6000.— | | |
| Οἶνοι ὀκ. . . . . . | 600 | 4200.— | 10200 — | |
| Ἔπιπλα καὶ σκεύη . . . . . . . . | | | 3800 — | |
| Προσωπικοὶ Λογαριασμοὶ . . . . . | | | | |
| Γ. Λαδάκης . . . . . | | 102710 — | | |
| Ἰ. Ἰωάννου . . . . . | | 16000 — | | |
| Ε Εὐστρατίου . . | 2440 — | | | |
| Δ. Δημητρίου. . . . . | | 5000 — | | |
| Ζ. Ζάννος. . . . . . | | 720 — | | |
| | 2440 — | 124430 — | | 121990 — |
| Γραμμάτια εἰσπρακτέα . . . . . . | | | 4000 — | |
| » πληρωτέα . . . . . . . . | | | | 10000 — |
| | | | 131990 — | 131990 — |

6ον) Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω ὑπολοίπων καταστρώνομεν τὸ ἐνεργητικὸν καὶ παθητικὸν τοῦ ἐμπόρου ὡς ἑξῆς:

***Ἐνεργητικὸν***

| | | |
|---|---|---|
| Μετρητὰ ἐν τῷ Ταμείῳ | | Δρχ. 113990.— |
| Ἐμπορεύματα ἐν Ἀποθήκῃ | | |
| Ἔλαια ὀκ. 200 Δρ. 30.— | Δρ. 6000.— | |
| Οἶνοι » 600 » 7.— | » 4200.— | » 10200.— |
| Ἔπιπλα ἐν καταστήματι | | 3800.— |
| Διάφοροι χρεῶσται: | | |
| Ε. Εὐστρατίου | Δρ. 2440.— | » 2440.— |
| Γραμμ. εἰσπρ.: Γρ. Ζάννου λήξεως 20 - 2 - 18 | | » 4000.— |
| | | Δρ. 134430.— |

***Παθητικὸν***

| | | |
|---|---|---|
| Πιστωταὶ διάφοροι: | | |
| Ἰ. Ἰωάννου | Δρ. 16.000.— | |
| Δ. Δημητρίου | » 5.000.— | |
| Ζ. Ζάννος | » 720.— | |
| Γραμμάτια πληρωτέα: | | |
| Γραμμ. Ζάννου λήξ. 10.4.18 | » 10.000.— | Δρ. 31.720.— |
| Γ. Λαδάκης καθαρὸν κεφάλαιον | | Δρ. 102.710.— |
| | | Δρ. 134.430.— |

## *Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν λογαριασμῶν.*

***Ταμεῖον.*** Τὰ ἐν τῷ Ταμείῳ εἰσαγόμενα χρήματα καταχωρίζονται εἰς τὴν χρέωσιν, τὰ δὲ ἐξ αὐτοῦ ἐξερχόμενα εἰς τὴν πίστωσιν. Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν χρήματα ἐκ τοῦ Ταμείου, δέον τοῦτο νὰ ἔχῃ ταῦτα καὶ διὰ νὰ ἔχῃ, πρέπει νὰ ἔχωσι προηγουμένως εἰσαχθῇ ἐν τῷ Ταμείῳ χρήματα

Τὸ Ταμεῖον ὅθεν δέον νὰ παρουσιάζῃ πάντοτε χρεωστικὸν ὑπόλοιπον, οὐδέποτε δὲ πιστωτικόν, διότι ἐν τῇ τελευταίᾳ ταύτῃ περιπτώσει θὰ εἴχομεν τὸ ὀξύμωρον σχῆμα τῆς ἐξαγωγῆς χρημάτων ἐκεῖθεν, ὅπου δὲν ὑπάρχουσι.

***Ἐμπορεύματα.*** Ὁ λογ[σμὸς ἐμπορευμάτων ἀπαρτίζεται ἀπὸ δύο μέρη· τὸ ὑλικὸν (ἐμπορεύματα, εἴδη) καὶ τὸ χρηματικὸν (ἀξία αὐτῶν).

Καὶ εἰς μὲν τὸ ὑλικὸν μέρος τοῦ λογ[σμο. τούτου παρατηρεῖται ὅ,τι καὶ εἰς τὸ Ταμεῖον, δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξαχθέντων ἐμπορευμάτων δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τῶν εἰσαχθέντων.

Εἰς τὸ χρηματικὸν ὅμως μέρος τοῦ λογαριασμοῦ δὲν συμβαίνει τὸ ἴδιον, διότι ἡ ἀξία τῶν ἐξαγομένων εἶναι πάντοτε μεγαλυτέρα τῆς τῶν εἰσαγομένων, ἐκτὸς ἐὰν ὁ ἔμπορος πωλῇ μὲ ζημίαν.

Ἄρα εἰς τὸν λογαριασμὸν ἐμπορευμάτων δύναται ἡ πίστωσις νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς χρεώσεως, συνεπῶς δὲ καὶ τὸ ὑπόλοιπον νὰ εἶναι πιστωτικόν.

***Γραμμάτια εἰσπρακτέα.*** Εἰς τὸν λ]σμὸν τοῦτον τὸ ὑπόλοιπον δέον νὰ εἶναι πάντοτε χρεωστικὸν δι᾿ οὓς λόγους καὶ ὁ λογ]σμὸς Ταμείου.

***Γραμμάτια πληρωτέα.*** Εἰς τὸν λογ]σμὸν τοῦτον τὸ ὑπόλοιπον, ἐὰν ὑπάρχῃ, δέον νὰ εἶναι πάντοτε πιστωτικόν, διότι ἀντιθέτως πρὸς τὰ Γραμμάτια εἰσπρακτέα τὰ Γραμμάτια πληρωτέα ἐξέρχονται ὅταν κατὰ πρῶτον ἐκδίδονται, ἐπανεισέρχονται δέ, ὅταν πληρωθῶσι. Διὰ νὰ παρουσιάζῃ ὁ λογ]σμὸς οὗτος ὑπόλοιπον, πρέπει νὰ ὑπάρχωσι γραμμάτια τοῦ ἐμπόρου ἀπλήρωτα εἰσέτι, ἐπειδὴ δὲ τὰ ἀπλήρωτα γραμμάτια εὑρίσκονται ἐγγεγραμμένα εἰς τὴν ἐξαγωγὴν ἢ πίστωσιν τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι πιστωτικόν.

***Ἔξοδα.*** Ὁ λογ[σμὸς ἐξόδων εἶναι πάντοτε χρεωστικός, διότι ὑποτίθεται, ὡς εἴπομεν, ὅτι λαμβάνει τὰ ὑπὸ τοῦ Ταμείου δι' ἔξοδα πληρωνόμενα χρήματα, οὐδέποτε δὲ δίδει, ὥστε νὰ πιστωθῇ.

***Ἔπιπλα καὶ σκεύη.*** Ὁ λογ[σμὸς οὗτος δύναται νὰ παρουσιάσῃ πιστωτικὸν ὑπόλοιπον μόνον εἰς ἣν περίπτωσιν πωλήσωμεν τὰ ἔπιπλα ἢ σκεύη εἰς τιμὴν ἀκριβοτέραν τῆς ἀγορᾶς των.

***Προσωπικοὶ λογ)σμοί.*** Οἱ προσωπικοὶ λογ)σμοὶ δύνανται νὰ εἶναι χρεωστικοὶ ἢ πιστωτικοὶ ἀναλόγως τῶν δοσοληψιῶν, ἃς μετ' αὐτῶν ἔχει ὁ ἔμπορος, ὁ λογ)σμὸς ὅμως τοῦ ἐμπόρου δὲν δύναται νὰ εἶναι χρεωστικὸς ἢ μόνον ὅταν οὗτος χάσῃ ἅπασαν τὴν περιουσίαν του καὶ μείνῃ ὀφειλέτης εἰς διαφόρους πιστωτάς του.

Σελ. 1. ΤΑΜΕΙΟΝ Σελ. 1.

***Δοῦναι*** (χρέωσις, εἰσπράξεις) (πίστωσις, πληρωμαὶ) ***Λαβεῖν***

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1998 | | | | | 1918 | | | | |
| Ἰαν. | 1 | Εἰς Γ. Λαδάκην | 100000 | – | Ἰαν. | 1 | Ἀπὸ ἐνοίκιον Ἰαν. | 1000 | – |
| » | 8 | » πώλησιν οἴνου | 9100 | – | » | 2 | » ἀγορὰν ἐπίπλων | 3800 | – |
| » | 18 | » Ε. Εὐστρατίου | 1000 | – | » | 4 | » ἀγορὰν ἐλαίου | 12000 | – |
| » | 19 | » πώλησιν ἐλαίου | 3440 | | » | 13 | » Ι. Ἰωάννου ἔναντι | 5000 | – |
| » | 23 | » » » | 17150 | – | » | 31 | » μισθοὺς 1000 | | |
| » | » | » » οἴνου | 8100 | – | » | » | » μικροέξοδα 2000 | 3000 | – |
| | | | | | | | Ὑπόλοιπον ταμείου | 113990 | – |
| | | ἄθροισις | 138790 | – | | | ἄθροισις | 138790 | – |

***Σημείωσις.*** Ὑπόλοιπον Ταμείου ὀνομάζεται τὸ πλεόνασμα τῶν εἰσπράξεων ἐπὶ τῶν πληρωμῶν.

***Κλείσιμον βιβλίου.*** Ἵνα κλείσωμεν τὸ βιβλίον Ταμείου, φέρομεν εἰς τὴν πίστωσιν τὸ ὑπόλοιπον αὐτοῦ, ἤτοι ἰσολογίζομεν τὰς δύο στήλας χρεώσεως καὶ πιστώσεως, κάμνομεν τὰς προσθέσεις καὶ κλείομεν ταύτας διὰ δύο γραμμῶν.

***Ἄνοιγμα εἰς νέον.*** Διὰ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὰς ταμειακὰς πράξεις τὸν ἑπόμενον μῆνα, φέρομεν εἰς τὴν στήλην χρεώσεως τὸ ὑπόλοιπον τοῦ Ταμείου γράφοντες ὡς ἑξῆς :

Φεβρ. 1. Ὑπόλοιπον εἰς νέον 113990

καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὰς πράξεις.

Σελ. 1. ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΑ Σελ. 1.

***Δοῦναι*** (χρέωσις, εἰσαγωγαὶ) ΕΛΑΙΑ (πίστωσις, ἐξαγωγαὶ) ***Λαβεῖν***

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1918 | | | ὀκ. | τιμὴ | ἀξία | 1918 | | | ὀκ. | τιμὴ | ἀξία |
| Ιαν | 4 | Ἀγορὰ μετρητοῖς | 400 | 30 | 12000 | Ιαν. | 11 | Πώλ. εἰς Εὐστρατίου | 100 | 34,40 | 3440 |
| » | 10 | » ἀπὸ Δημητρίου | 500 | 30 | 15000 | » | 19 | Πώλ. μετρητοῖς | 100 | » | 3440 |
| | | Κέρδος μεταφερόμενον λ/σμὸν Λαδάκη | | | 3030 | | 23 | » » | 500 | » | 17150 |
| | | | | | | | | Ἔλαια ἐν ἀποθήκῃ | 200 | 30 | 6000 |
| | | | 900 | | 30030 | | | | 900 | | 30030 |

Σελ. 2. Σελ. 2.

***Δοῦναι*** (χρέωσις, εἰσαγωγαί) ΟΙΝΟΙ (πίστωσις, ἐξαγωγαὶ) ***Λαβεῖν***

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1910 | | | ὀκ. | τιμ | ἀξία | 1918 | | | ὀκ. | τιμ. | ἀξία |
| Ιαν. | 7 | Ἀγορὰ ἀπὸ Ἰωάννου | 3000 | 7 | 21000 | Ιαν. | 8 | Πώλ. μετρητοῖς | 1000 | 9.10 | 9100 |
| | | | | | | » | 20 | » εἰς Ζάννον | 400 | 8.20 | 3280 |
| | | Κέρδος μεταφερόμενον λ/σμὸν Λαδάκη | | | 3680 | » | 23 | » μετρητοῖς | 1000 | 8.10 | 8100 |
| | | | | | | | | Οἶνοι ἐν ἀποθήκῃ | 600 | 7.— | 4200 |
| | | | 3000 | | 24680 | | | | 3000 | | 24680 |

***Σημείωσις***. Διὰ νὰ κλείσωμεν τὸν βιβλίον Ἐμπορευμάτων, ὀφείλομεν πρῶτον νὰ εὕρωμεν τὸ ἐξ αὐτῶν προκῦψαν κέρδος. Τοῦτο εὑρίσκομεν, ἐὰν ἐκτιμήσωμεν τὰ ἐν τῇ ἀποθήκῃ ἐμπορεύματα εἰς τὴν ἀγοραίαν αὐτῶν τιμὴν (χονδρικῆς πωλήσεως), φέρωμεν ταῦτα ὡς πωληθέντα εἰς τὴν ἐξαγωγήν, ἀθροίσωμεν τὰ ποσὰ χρεώσεως καὶ πιστώσεως καὶ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῆς πρώτης ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῆς δευτέρας. Τὸ ὑπερβάλλον τοῦτο τῆς πιστώσεως ἐπὶ τῆς χρεώσεως εἶναι τὸ κέρδος, διότι τὰ πωληθέντα ἐμπορεύματα (πίσωσις, ἐξαγωγὴ) ἐπωλήθησαν ἀκριβότερα παρ᾽ ὅσον ἠγοράσθησαν. Ἐὰν συνέβαινε τὸ ἀντίθετον, θὰ προήρχετα ζημία, ὁπότε τὰ ποσὰ τῆς χρεώσεως θὰ ἦσαν μεγαλύτερα τῶν ποσῶν τῆς πιστώσεως.

***Κλείσιμον τοῦ βιβλίου***. Ἐν τῇ παρούσῃ περιπτώσει προέκυψε κέρδος, ἵνα δὲ κλείσωμεν τοὺς λ]σμοὺς ἐμπορευμάτων, χρεώνομεν ἕκαστον, ἐμπόρευμα μὲ τὸ κέρδος, ὅπερ ἀπέδωκεν· ἐπειδὴ τὰ κέρδη ταῦτα ἀνήκουσιν εἰς τὸν Γ. Λαδάκην, εἰς ὃν ἀνήκει ἡ ὅλη ἐπιχείρησις, πιστώνομεν τὸν λογαριασμόν του μὲ τὰ κέρδη τα`τα. Μετὰ ταῦτα κάμνομεν τὰς προσθέσεις τῶν τε ὀκάδων καὶ τῶν δραχμῶν καὶ κλείομεν ταύτας διὰ δύο γραμμῶν.

***Ἄνοιγμα εἰς νέον.*** Ἵνα ἐξακολουθήσωμεν τὰ πράξεις μας, δέον νὰ φέρωμεν ἐκ νέου εἰς τὴν χρέωσιν (εἰσαγωγὴν) τοῦ βιβλίου τὰ ἐν τῇ ἀποθήκῃ ὑπάρχοντα ἐμπορεύματα, ἕκαστον εἰς τὸν λογαριασμόν του μὲ τὴν τιμὴν τῆς ἐκτιμήσεως.

Σελ. 1. ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΞΟΔΩΝ Σελ. 1.

***Δοῦναι*** (χρέωσις) (πίστωσις) ***Λαβεῖν***

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1918 | | | | | 1918 | | | | |
| Ιαν. | 1 | Ἐνοίκιον Ἰανουαρίου | 1000 | — | Ιαν. | 31 | Εἰς χρέωσιν Λαδάκη | 4000 | |
| » | 31 | Μισθὸς ὑπαλλήλου | 1000 | — | | | | | |
| » | » | Διάφορα μικροέξοδα | 2000 | — | | | | | |
| | | | 4000 | | | | | 4000 | — |

***Κλείσιμον τοῦ βιβλίου.*** Τὰ ὡς ἄνω γενόμενα ἔξοδα ἐπιβαρύνουσι τὴν ἐπιχείρησιν τοῦ Γ. Λαδάκη. Διὰ νὰ κλείσωμεν ὅθεν τὸ βιβλίον ἐξόδων, πιστώνομεν αὐτὸ μὲ τὸ ἄθροισμά των καὶ χρεώνομεν δι' αὐτοῦ τὸν λογ[σμὸν τοῦ Λαδάκη. Ὁ λογ[σμὸς οὗτος δὲν ἀνοίγεται εἰς νέον, συνεχίζομεν δὲ τὰς πράξεις μας ὡς ἐν ἀρχῇ

Σελ. 1. ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΠΙΠΛΩΝ ΚΑΙ ΣΚΕΥΩΝ Σελ 1.

***Δοῦναι*** (χρέωσις) (πίστωσις) ***Λαβεῖν***

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1918 | | | | | |
| Ιαν. | 2 | Διὰ 2 τραπέζια πρὸς δρ. 200 | 400 | | |
| | | » 2 καθέκλας » » 50 | 100 | | |
| | | » 1 πλάστιγγα » » 3300 | 3300 | | |

***Σημείωσις.*** Τὸ βιβλίον τοῦτο δὲν κλείομεν, διότι ἡ ἀξία τῶν ἐπίπλων ἢ σκευῶν δὲν ὑπέστη καμμίαν αὐξομείωσιν.

Ἐὰν ἐπωλοῦμέν τι ἐξ αὐτῶν ἢ ἐὰν κατεστρέφετό τι θὰ ἐφέρομεν τὴν ἀξίαν αὐτοῦ εἰς τὴν πίστωσιν (ἐξαγωγήν) μὲ χρέωσιν μὲν τοῦ Ταμείου, ἐὰν ἐπωλεῖτο καὶ εἰσπράττομεν τὴν ἀξίαν του, μὲ χρέωσιν δὲ τοῦ Λαδάκη, ἐὰν κατεστρέφετο, διότι ὁ Λαδάκης θὰ ὑφίστατο τὴν ἐκ τῆς καταστροφῆς ζημίαν. Ἐν τῇ μιᾷ δὲ ἢ τῇ ἄλλῃ περιπτώσει μὲ τὴν ἀξίαν τῶν ὑπολειπομένων θὰ ἐκλείωμεν τὸ βιβλίον (ὡς εἰς τὸ βιβλίον Ἐμπορευμάτων) καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀξίαν θὰ ἠνοίγωμεν τὸ βιβλίον εἰς νέον.

Σελ. 1. ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΟΣΩΠΙΚΩΝ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΩΝ Σελ. 1

***Δοῦναι*** (χρέωσις) ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΛΑΔΑΚΗΣ (πίστωσις) ***Λαβεῖν***

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1918 Ιαν. | 31 | Ζημ. ἐξ ἐξόδων | 4000 | — | 1918 | 1 | Κατάθεσίς του | | 100000 | — |
| | | Πρὸς ἐξίσωσιν | 102710 | — | Ἰαν. | 31 | Κέρδος ἐξ ἐλαίου δρ. | 3030 | | |
| | | | | | | | » » οἴνου » | 3680 | 6710 | — |
| | | | 106710 | | | | | | 106710 | — |
| | | | | | Φεβ. | 1 | Εἰς νέον | | 106710 | |

***Σημείωσις.*** Ὡς βλέπομεν, ὁ λογ[σμὸς τοῦ Γ. Λαδάκη ἐπιβαρύνεται διὰ τῶν ζημιῶν, (αἵτινες καταχωρίζονται εἰς τὴν χρέωσίν του) καὶ ὠφελεῖται ἐκ τῶν κερδῶν (ἅτινα καταχωρίζονται εἰς τὴν πίστωσίν του).

***Κλείσιμον.*** Ἵνα κλείσωμεν τὸν λογ[σμόν, εὑρίσκομεν τὴν μεταξὺ χρεώσεως καὶ πιστώσεως διαφορὰν καὶ φέρομεν αὐτὴν εἰς τὴν ἀσθενεστέραν στήλην, μεθ᾽ ὃ κάμνομεν τὰς προσθέσεις καὶ κλείομεν αὐτὰς διὰ δύο γραμμῶν.

***Ἄνοιγμα εἰς νέον.*** Ἵνα ἀνοίξωμεν εἰς νέον τὸν λογαριασμόν, φέρομεν τὸ ἐξισῶσαν τὸν λογ[σμὸν ὑπόλοιπον εἰς τὴν ἀντίθετον πρὸς τὴν ἐξισωθεῖσαν στήλην καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν ἐγγραφὴν τῶν νέων πράξεων.

***Καθαρὸν κέρδος.*** Ἐκ τοῦ ἄνω λογ(σμοῦ βλέπομεν, ὅτι ἡ περιουσίου τοῦ Λαδάκη, ἥτις εἰς τὰς ἀρχὰς τῆς ἐπιχειρήσεως ἦτο Δρ. 100000, ηὐξήθη εἰς Δρ. 102.710. Ἡ διαφορὰ αὕτη τῶν 2710 δραχμῶν ἀποτελεῖ τὸ καθαρὸν αὐτοῦ κέρδος.

Σελ. 2 **ΙΩΑΝΝΗΣ ΙΩΑΝΝΟΥ** Σελ.2

***Δοῦναι*** (χρέωσις) (πίστωσις) ***Λαβεῖν***

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1918 | | | | | 1918 | | | | |
| Ἰαν. | 13 | Μετρητὰ | 5000 | – | Ἰαν. | 7 | Ἀξία 3000 ὀκ. οἴνου πρὸς δρ. 7 | 21000 | – |
| | 31 | Πρὸς ἐξίσωσιν | 16000 | – | | | | | |
| | | | 21000 | – | | | | 21000 | – |
| Κλείσιμον καὶ ἄνοιγμα ὡς ἀνωτέρω εἰς νέον | | | | | Φεβ. | 1 | Εἰς νέον | 16000 | – |

Σελ. 3. **ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΥ** Σελ. 3.

***Δοῦναι*** (χρέωσις) πίστωσις ***Λαβεῖν***

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1918 | | | | | 1918 | | | | |
| Ἰαν. | 11 | Ἀγορά του 100 ὀκ. ἐλαίου | 3440 | – | Ἰαν | 8 | Ἐμτρ. ἔναντι λ)μοῦ | 1000 | – |
| | | | | | | 31 | Ὑπόλ. πρὸς ἐξίσωσ. | 2440 | – |
| | | | 3440 | – | | | | 440 | – |
| Φεβ. | | Ὑπόλοιπον εἰς νέον | 2440 | – | | | | | |

***Σημείωσις.*** Κλείσιμον καὶ ἄνοιγμα εἰς νέον ὡς ἀνωτέρω.

Σελ. 4. **ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ** Σελ. 4.

***Δοῦναι*** (χρέωσις) (πίστωσις) ***Λαβεῖν***

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1918 | | | | | 918 | | | | |
| Ἰαν. | 15 | Γραμ)όν μου ο)γήν του | 10000 | – | Ἰαν. | 10 | Πώλησίς του 500 ὀκ. ἐλαίου | 15000 | – |
| | | πρὸς ἐξίσωσιν | 5000 | – | | | | | |
| | | | 15000 | – | | | | 500 | – |
| Κλείσιμον καὶ ἄνοιγμα εἰς νέον | | | | | Φεβ. | 1 | εἰς νέον | 5000 | – |

Σελ. 5. Σελ. 5

***Δοῦναι*** (χρέωσις) **ΖΑΝΝΟΣ ΖΑΝΝΟΣ** (πίστωσις) ***Λαβεῖν***

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1918 | | | | | 1918 | | | | |
| Ἰαν. | 20 | Ἀγορά του 400 ὀκ. οἴνου | 3280 | – | Ιαν. | 1 | Γραμμάτιόν του διαταγήν μου | 4000 | – |
| | | Πρὸς ἐξίσωσιν | 720 | – | | | | | |
| | | | 4000 | – | | | | 4000 | – |
| Φεβ. | 1 | | | | | | Εἰς νέον | 720 | – |

***Σημείωσις.*** Κλείσιμον καὶ ἄνοιγμα εἰς νέον ὡς εἰς τοὺς προηγουμένους λογ[σμούς.

## ΒΙΒΛΙΟΝ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ ΕΙΣΠΡΑΚΤΕΩΝ

Σελ. 1. Σελ. 1.

***Δοῦναι*** (εἰσαγωγή) (ἐξαγωγή) ***Λαβεῖν***

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1918 Ιαν. | Γραμμάτ. Ζάννου λήξ. 20/2/18 | 4000 | — | 1918 Ἰαν. | 31 | Πρὸς πίστωσιν | 4000 | — |
| Φεβ. | Εἰς νέον | 4000 | — | | | | | |

***Σημείωσις***. Ὁ λογ]σμὸς οὗτος παρουσιάζει μόνον χρέωσιν. Ἵνα τὸν κλείσωμεν, φέρομεν εἰς τὴν πίστωσιν ὅλον τὸ ποσὸν τῆς χρεώσεως, σύρομεν τὰς δύο γραμμὰς καὶ τὸν ἀνοίγομεν πάλιν εἰς νέον.

## ΒΙΒΛΙΟΝ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ ΠΛΗΡΩΤΕΩΝ

Σελ. 1. Σελ. 1.

***Δοῦναι*** (εἰσαγωγὴ) (ἐξαγωγὴ) ***Λαβεῖν***

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1918 Ἰαν. | Πρὸς ἐξίσωσιν | 10000 | — | 1918 Ἰαν. | 15 | Γρ/τιόν μου δ/γὴν τοῦ Δημητρ. | 10000 | — |
| | | | | Φεβ. | 1 | Εἰς νέον | 10000 | — |

***Σημείωσις***. Ἡ περίπτωσις τοῦ λογ]σμοῦ τούτου εἶναι ἐν ἀντιθέτῳ ὁμοία πρὸς τὴν τοῦ ἀνωτέρω.

ΤΕΛΟΣ