ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΑΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ ΝΕΟΥ ΤΥΠΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1948

Λ. Αδαμόπουλος

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Φ. Κ. Βώρος

προσωπικό αρχείο

Δία 8. Πικέρμι

19009

τηλ. 6039678

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΑΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ ΝΕΟΥ ΤΥΠΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1948

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΠΡΩΤΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Ὁ ἄνθρωπος ἀσχολεῖται διαρκῶς μὲ πράγματα, τὰ ὁποῖα βλέπει καὶ ἐγγίζει. Τὰ πράγματα αὐτὰ τὰ ὀνομάζομεν ὑλικὰ σώματα ἁπλῶς σώματα. Ἕκαστον σῶμα καταλαμβάνει χῶρον. Ὁ χῶρος, τὸν ὁποῖον καταλαμβάνει ἓν σῶμα, λέγεται **ἔκτασις** αὐτοῦ.

Ἐξ ἄλλου, τὰ διάφορα σώματα τελειώνουν ἐξωτερικῶς κατὰ διαφόρους τρόπους· ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον τελειώνει ἓν σῶμα ἐξωτερικῶς, λέγεται **σχῆμα** αὐτοῦ.

2. Ἑνὸς σώματος δυνάμεθα νὰ ἐξετάσωμεν καὶ νὰ ἴδωμεν τὴν ὕλην, ἐκ τῆς ὁποίας εἶναι κατασκευασμένον, τὸ βάρος, τὸ χρῶμα κλπ. Ὅταν ὅμως ἐξετάζωμεν ἓν σῶμα, μόνον διὰ νὰ ἴδωμεν τί σχῆμα καὶ τί ἔκτασιν ἔχει, χωρὶς νὰ μᾶς ἐνδιαφέρῃ τίποτε ἄλλο, τὸ λέγομεν **γεωμετρικὸν σῶμα** ἢ **στερεὸν** (γεωμετρικόν).

3. Ἂν λάβωμεν οἱονδήποτε στερεὸν καὶ ἐξετάσωμεν τὴν ἔκτασίν του, θὰ ἴδωμεν, ὅτι αὕτη ἐκτείνεται πρὸς τὰ ἄνω, πρὸς τὰ ἐμπρὸς καὶ πρὸς τὰ πλάγια, ἤτοι ἐκτείνεται κατὰ τρεῖς διαστάσεις. Ὥστε πᾶν στερεὸν ἔχει **τρεῖς** διαστάσεις.

4. Ἕκαστον σῶμα ἔχει ἄκρα. Τὰ ἄκρα ἑνὸς σώματος, ὅλα ὁμοῦ, ἀποτελοῦν τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ. Ἂν προσέξωμεν τὰς ἐπιφανείας διαφόρων στερεῶν, θὰ ἴδωμεν, ὅτι μερικαὶ ἀπὸ αὐτὰς εἶναι πολὺ διάφοροι ἀπὸ τὰς ἄλλας. Ὅλαι ὅμως ἔχουν σχῆμα καὶ ἔκτασιν. Ἂν δὲ ἐξετάσωμεν τὰς ἐπιφανείας αὐτῶν ὡς πρὸς τὴν ἔκτασίν των, θὰ ἴδωμεν ὅτι αὗται ἔχουν δύο διαστάσεις. Εἶναι λοιπὸν ἡ ἔκτασις τῆς ἐπιφανείας **διάφορος** ἀπὸ τὴν ἔκτασιν τῶν στερεῶν.

5. Τὰ ἄκρα μιᾶς ἐπιφανείας ἢ μέρους αὐτῆς ἀποτελοῦν ὅλα ὁμοῦ **γραμμήν.**

Καὶ αἱ γραμμαὶ ἔχουν σχῆμα καὶ ἔκτασιν. Ἀλλ᾽ ἐὰν ἐξετάσωμεν τὰς γραμμὰς ὡς πρὸς τὴν ἔκτασίν των, θὰ ἴδωμεν, ὅτι αὗται ἔχουν μίαν διάστασιν. Ὥστε ἡ ἔκτασις τῆς γραμμῆς εἶναι διάφορος καὶ τῆς ἐκτάσεως τῶν στερεῶν καὶ τῆς ἐκτάσεως τῶν ἐπιφανειῶν.

6. Τὰ ἄκρα γραμμῆς ἢ μέρους γραμμῆς καλοῦνται **σημεῖα.** Τὸ σημεῖον δὲν ἔχει ἔκτασιν, καὶ κατὰ συνέπειαν δὲν ἔχει οὔτε μέρη.

7. Τὰ σημεῖα, τὰς γραμμὰς καὶ τὰς ἐπιφανείας δυνάμεθα νὰ ἐξετάσωμεν καὶ καθὲν χωριστά, δηλαδὴ χωρὶς τὰ σώματα, ἐπάνω εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται.

8. Ὅταν ἐξετάζωμεν τὰ στερεά, τὰς ἐπιφανείας καὶ τὰς γραμμὰς ὡς πρὸς τὴν ἔκτασιν, τὰ λέγομεν **ποσὰ γεωμετρικὰ** ἢ **μεγέθη.**

9. Τὸ σύνολον σημείων ἢ γραμμῶν ἢ ἐπιφανειῶν καλεῖται **γεωμετρικὸν σχῆμα.**

Σημείωσις. Τὰ σημεῖα, αἱ γραμμαί, αἱ ἐπιφάνειαι, παρίστανται δι᾽ εἰκόνων, αἱ ὁποῖαι καὶ αὐταὶ λέγονται σχήματα. Ὅταν ἔχωμεν πολλὰ σημεῖα καὶ θέλωμεν νὰ διακρίνωμεν τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο, γράφομεν εἰς τὸ καθὲν καὶ πλησίον του ἀπὸ ἓν γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου, ὡς φαίνεται κατωτέρω:

. Α . Γ
. Β

Λέγομεν δέ: τὸ σημεῖον Α, τὸ Β, τὸ Γ. Ὁμοίως καὶ τὰς γραμμὰς διακρίνομεν μὲ γράμματα, ὡς φαίνεται κατωτέρω:

Λέγομεν δέ: ἡ γραμμὴ α, ἡ ΑΒ, ἡ ΓΔΕ καὶ ἡ ΓΖΕ.

10. Εἴδομεν λοιπὸν ἀνωτέρω, ὅτι ἕκαστον σῶμα, ἐπιφάνεια καὶ γραμμὴ ἔχει σχῆμα καὶ ἔκτασιν. Ἡ ἐπιστήμη, ἡ ὁποία ἐξετάζει τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν αὐτῶν, λέγεται **Γεωμετρία** *.

* Ὁ Ἡρόδοτος διηγεῖται, ὅτι ὁ βασιλεὺς τῆς Αἰγύπτου Σέσωστρις 1300 π.Χ.) διήρεσε τὴν καλλιεργήσιμον ἔκτασιν τῆς χώρας του εἰς γαίας (χωράφια) καὶ τὰς διένειμεν εἰς τοὺς κατοίκους της. Ἀλλ᾽ αἱ πλήμμυραι τοῦ ποταμοῦ Νείλου ἐξηφάνιζον τὰ ὅρια αὐτῶν. Ὑπεχρεώθησαν λοιπὸν νὰ καταμετρήσουν τὰς γαίας ὥστε, μετὰ τὴν ἀπομά-

11. Αἱ βάσεις τῆς Γεωμετρίας, ἐπὶ τῶν ὁποίων αὕτη στηρίζεται καὶ ἀναπτύσσεται, εἶναι οἱ ὁρισμοὶ τῶν γεωμετρικῶν ἐννοιῶν καὶ μερικαὶ προτάσεις, τὴν ἀλήθειαν τῶν ὁποίων θεωροῦμεν φανερὰν καὶ ἑπομένως δι᾽ αὐτὰς οὐδεμίαν δεχόμεθα ἀντίρρησιν, ὅπως π.χ. εἶναι αἱ προτάσεις :

Ὅ,τι ἔχει ἔκτασιν εἶναι δυνατὸν νὰ διαιρεθῇ εἰς μέρη.

Πᾶν μέρος εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὸ ὅλον.

Τὰς τοιαύτας προτάσεις καλοῦμεν ἀδιαφόρως **ἀξιώματα** ἢ **αἰτήματα.**

12. Ἡ Γεωμετρία λοιπὸν ἀναχωροῦσα ἀπὸ τῶν ὁρισμῶν συνάγει σειρὰν ἄλλων προτάσεων. Ἀλλὰ τῶν προτάσεων αὐτῶν ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερὰ διὰ συλλογισμῶν. Αἱ τοιαῦται προτάσεις λέγονται **θεωρήματα,** οἱ δὲ συλλογισμοὶ (ἢ ὁ συλλογισμός), τοὺς ὁποίους κάμνομεν διὰ νὰ καταστήσωμεν φανερὰν τὴν ἀλήθειαν τοῦ θεωρήματος, ἀποτελοῦν τὴν **ἀπόδειξιν** αὐτοῦ.

13. Πόρισμα λέγεται πρότασις, ἡ ὁποία προκύπτει ἀμέσως ἐκ θεωρήματος ἀποδειχθέντος.

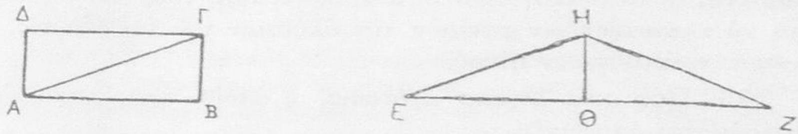
14. Πρότασις, εἰς τὴν ὁποίαν ζητεῖται νὰ γίνῃ τι, λέγεται **πρόβλημα.** Ἡ ἐκτέλεσις δὲ αὐτοῦ λέγεται **λύσις** τοῦ προβλήματος.

κρυνσιν τῶν ὑδάτων, νὰ ἀνευρίσκωνται εὐκόλως αἱ ἰδιοκτησίαι τῶν κατοίκων. Ἀπὸ τότε λοιπὸν οἱ Αἰγύπτιοι ἀπέκτησαν στοιχειώδεις γεωμετρικὰς γνώσεις. Γεωμετρία δὲ δι᾽ αὐτοὺς ἐσήμαινε μόνον τὴν μέτρησιν τῶν γαιῶν. Σήμερον ὅμως σημαίνει, ὡς εἴδομεν, τὴν ἐπιστήμην τοῦ σχήματος καὶ τῆς ἐκτάσεως. Τοῦτο δὲ ὀφείλεται καθ᾽ ὁλοκληρίαν εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας, διότι αὐτοὶ πρῶτοι ἐκαλλιέργησαν τὰς γεωμετρικὰς γνώσεις καὶ προήγαγον αὐτὴν εἰς ἐπιστήμην. Πρῶτος θεμελιωτὴς τῆς Γεωμετρίας ὡς ἐπιστήμης εἶναι ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος (600 π.Χ.). Ἄλλοι δὲ κορυφαῖοι Ἕλληνες γεωμέτραι εἶναι ὁ Εὐκλείδης (300 π.Χ.), ὁ Ἀρχιμήδης (287 - 212 π.Χ.) καὶ ὁ Ἀπολλώνιος (200 π.Χ.). Τὰ περίφημα «Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου», τὰ ὁποῖα περιέχουν πᾶν ὅ,τι ἐγνώριζον τότε σχετικὸν μὲ τὰ γεωμετρικὰ σχήματα καὶ τοὺς ἀριθμούς, εἶναι σύγγραμμα τελειότατον. Ἐχρησίμευσε δὲ ἐπὶ 1000 ἔτη καὶ πλέον ὡς τὸ μόνον βιβλίον τῶν στοιχειωδῶν Μαθηματικῶν. Ἀλλὰ καὶ σήμερον ἀκόμη, πλὴν μερικῶν μεταβολῶν, τὰ «Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου» ἀποτελοῦν τὴν βάσιν τῆς διδασκαλίας τῆς Στοιχειώδους Γεωμετρίας καὶ ὅλαι σχεδὸν αἱ θεωρίαι, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς αὐτά, εὑρίσκονται εἰς τὰς σημερινὰς ἐκδόσεις τῶν στοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΙΣΟΤΗΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ. ΑΝΙΣΟΤΗΣ

15. Εἰς τὴν Γεωμετρίαν ὅταν λέγωμεν ἰσότητα, ἐννοοῦμεν ἰσότητα σχημάτων. Δύο δὲ σχήματα λέγονται ἴσα, ὅταν τιθέμενα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς, ἤτοι κάθε σημεῖον τοῦ ἑνὸς εἶναι σημεῖον καὶ τοῦ ἄλλου. Ἀλλ' ἡ ἐπίθεσις τοῦ ἑνὸς σχήματος ἐπὶ τοῦ ἄλλου προϋποθέτει κίνησιν, ἡ ὁποία δὲν μεταβάλλει τὸ σχῆμα αὐτοῦ. Δι' ὃ δεχόμεθα τὸ ἀξίωμα: ***Πᾶν σχῆμα εἶναι δυνατὸν νὰ ἀλλάξῃ θέσιν χωρὶς τοῦτο καθόλου νὰ μεταβληθῇ.***

16. Δυνατὸν ὅμως δύο σχήματα νὰ εἶναι ἴσα κατὰ τὴν ἔκτασιν ἀλλὰ νὰ μὴ δύνανται νὰ ἐφαρμόζουν ἀκέραια. Ἐπειδὴ ὅμως ἓν σχῆμα (ὡς ἔχον ἔκτασιν) δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς μέρη, τὰ σχήματα ταῦτα



διαιρούμενα καταλλήλως ἐφαρμόζουν. Τὰ τοιαῦτα σχήματα, τὰ ἐφαρμόζοντα, ἀφοῦ διαιρεθοῦν εἰς μέρη, τὰ καλοῦμεν **ἰσοδύναμα** ἢ **ἴσα κατὰ μέρη.** Π.χ. ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια ΕΗΘ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς ΑΓΒ καὶ ἡ ΗΘΖ ἐπὶ τῆς ΑΔΓ, τὰ σχήματα ΕΗΘ καὶ ΑΓΒ εἶναι ἴσα, ὡς καὶ τὰ ΗΘΖ καὶ ΑΔΓ, ἐνῷ τὰ σχήματα ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗ εἶναι ἰσοδύναμα.

17. Δύο σχήματα, τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι ἴσον μὲ μέρος τι τοῦ ἄλλου, λέγονται **ἄνισα.** Καὶ ἐκεῖνο μέν, τὸ ὁποῖον εἶναι μέρος, λέγεται **μικρότερον** τοῦ ἄλλου, τὸ δὲ ἄλλο λέγεται **μεγαλύτερον.** Π.χ. τὰ σχήματα ΑΔΓ καὶ ΕΖΗ εἶναι ἄνισα, τὸ δὲ ΑΔΓ εἶναι μικρότερον τοῦ ΕΖΗ, ἤτοι ΑΔΓ$<$ΕΖΗ.

18. Ἀξιώματα τῆς ἰσότητος. 1ον. ***Δύο σχήματα ἴσα πρὸς τρίτον εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσα.*** Ἤτοι, ἂν π.χ. τὸ σχῆμα ΑΒΓ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΕΘΗ καὶ μὲ τὸ ΗΘΖ, καὶ τὰ σχήματα ΕΘΗ καὶ ΗΘΖ εἶναι ἴσα. Δηλαδή, ἐὰν ΑΒΓ=ΕΘΗ καὶ ΑΒΓ= ΗΘΖ, θὰ εἶναι καὶ ΕΘΗ=ΗΘΖ.

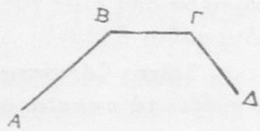
2ον. ***Δύο σχήματα δὲν εἶναι δυνατὸν τὰ αὐτὰ νὰ εἶναι καὶ***

ἴσα καὶ ἄνισα, δηλαδὴ κατὰ ἕνα τρόπον διαιρέσεως καὶ ἐπιθέσεως νὰ ἐφαρμόζουν, καὶ κατ᾽ ἄλλον νὰ εἶναι τὸ ἓν μέρος τοῦ ἄλλου.

ΕΙΔΗ ΓΡΑΜΜΩΝ

19. Ἔννοια τῆς εὐθείας γραμμῆς.—Ἡ ἁπλουστέρα ἀπὸ ὅλας τὰς γραμμὰς εἶναι ἡ **εὐθεῖα γραμμή.** Ἡ ἔννοια τῆς εὐθείας γραμμῆς εἶναι εἰς ὅλους γνωστή· λαμβάνομεν δὲ εἰκόνα αὐτῆς, ἐὰν τείνωμεν κλωστὴν ἢ τρίχα λεπτοτάτην. Εὐθείας γραμμὰς γράφομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ τοῦ πίνακος χρησιμοποιοῦντες τὸν κανόνα.

20. Τεθλασμένη γραμμὴ λέγεται ἡ γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας, ἀλλὰ δὲν εἶναι εὐθεῖα. Τοιαύτη εἶναι ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔ.



21. Καμπύλη γραμμὴ λέγεται ἐκείνη, τῆς ὁποίας οὐδὲν μέρος εἶναι εὐθεῖα γραμμή. Κατωτέρω δὲ θὰ ἴδωμεν, ὅτι τοιαῦται γραμμαὶ ὑπάρχουν.

22. Μεικτὴ γραμμὴ λέγεται ἡ γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμάς.

23. Περὶ τῆς εὐθείας γραμμῆς δεχόμεθα τὰ ἑπόμενα αἰτήματα, τὰ ὁποῖα ἐκφράζουν τὰς θεμελιώδεις ἰδιότητας αὐτῆς:

1ον. ***Ἀπὸ ἓν τυχὸν σημεῖον εἰς ἄλλο ἐπίσης τυχὸν σημεῖον ἄγεται μία εὐθεῖα γραμμὴ καὶ μόνον μία.***

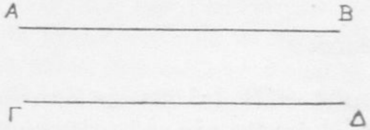
Ἐκ τούτου δὲ ἕπεται, ὅτι δύο διάφοροι εὐθεῖαι ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον δύνανται νὰ ἔχουν. Ἐὰν δὲ ἔχουν καὶ ἄλλο κοινὸν σημεῖον, συμπίπτουν.

2ον. ***Πᾶσα εὐθεῖα δύναται νὰ αὐξηθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα της, ὅσον θέλομεν, χωρὶς νὰ παύσῃ νὰ εἶναι εὐθεῖα.***

3ον. ***Πᾶσα εὐθεῖα δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ ἄλλης οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσουν δύο οἱαδήποτε ἄκρα αὐτῶν. Ἐὰν τότε συμπέσουν καὶ τὰ ἄλλα δύο ἄκρα, αἱ εὐθεῖαι λέγονται ἴσαι, ἄλλως ἡ μία εἶναι μικροτέρα τῆς ἄλλης.***

Ὥστε: ***Δύο εὐθεῖαι θὰ εἶναι ἢ ἴσαι ἢ ἄνισοι.***

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσαι, θὰ ἐφαρμόζουν ἢ ὅταν τεθῇ τὸ Γ ἐπὶ τοῦ Α (ὁπότε τὸ Δ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β), ἢ ὅταν τεθῇ τὸ Δ ἐπὶ τοῦ Α (ὁπότε τὸ Γ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β).



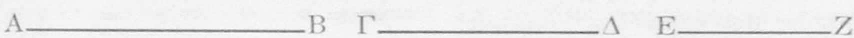
4ον. ***Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης γραμμῆς, ἡ ὁποία ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα.***

5ον. ***Ἐκ δύο εὐθειῶν δύναται πάντοτε ἡ μικροτέρα, πολλαπλασιαζομένη, νὰ ὑπερβῇ τὴν μεγαλυτέραν*** (Αἴτημα τοῦ Ἀρχιμήδους).

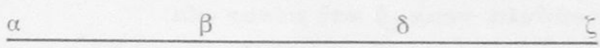
24. Ἀπόστασις σημείων.—Εἴδομεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει δύο σημεῖα, π.χ. τὰ Α καὶ Β, εἶναι μία καὶ μόνη, εἶναι δὲ καὶ ἡ μικροτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς ἄλλας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰ αὐτὰ ἄκρα. Διὰ τοῦτο ἡ εὐθεῖα ΑΒ λέγεται **ἀπόστασις τῶν σημείων Α καὶ Β.**

Ὥστε: ***Ἀπόστασις δύο σημείων λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ σημεῖα αὐτά.***

25. Ἄθροισμα εὐθειῶν.—Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ προσθέσωμεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΓΔ καὶ ΕΖ.



Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν συνήθως μὲ τὸν διαβήτην ἐπάνω εἰς μίαν ἄλλην εὐθεῖαν ἓν τμῆμα αβ ἴσον μὲ τὴν ΑΒ. Κατόπιν λαμβάνομεν ἓν



τμῆμα (συνεχόμενον) βδ ἴσον μὲ τὴν ΓΔ καὶ τέλος τμῆμα δζ ἴσον μὲ τὴν ΕΖ. Τότε ἡ εὐθεῖα αζ εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, εἶναι δηλαδὴ ΑΒ+ΓΔ+ΕΖ=αζ.

Σημείωσις α΄. Διὰ νὰ εὕρωμεν π.χ. τὸ διπλάσιον ἢ τὸ τριπλάσιον τῆς εὐθείας ΑΒ, θὰ λάβωμεν ἐπὶ μιᾶς ἄλλης εὐθείας δύο ἢ τρία τμήματα συνεχόμενα καὶ καθὲν ἴσον πρὸς τὴν ΑΒ.

Σημείωσις β΄. ***Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων εὐθειῶν*** (ὡς καὶ τῶν ἀριθμῶν) ***δὲν μεταβάλλεται, καθ᾽ οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν τεθῇ ἡ μία παρὰ τὴν ἄλλην.***

Διότι εἶναι φανερόν, ὅτι δύο εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι κατὰ μέρη θὰ εἶναι καὶ ἀκέραιαι ἴσαι. Ἀλλὰ καὶ ὅλαι αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως τῶν ἀριθμῶν ἀληθεύουν καὶ περὶ τῶν εὐθειῶν γραμμῶν.

26. Διαφορὰ δύο ἀνίσων εὐθειῶν.— Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ ἀπὸ τὴν ΑΒ.

ΦΚΒ + ΕΣΚ | Πηγούριον 2/5/950

Α Ε Β Γ Δ

Πρὸς τοῦτο θὰ κόψωμεν ἀπὸ τὴν ΑΒ ἓν τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἀρχίζει ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον τῆς ΑΒ καὶ θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὴν ΓΔ. Ἂς εἶναι δὲ τοῦτο τὸ ΑΕ. Τότε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι τὸ τμῆμα ΕΒ, τὸ ὁποῖον μένει, ἤτοι ΑΒ—ΓΔ=ΕΒ.

27. Ἀξίωμα. ***Ἐπὶ πάσης εὐθείας ὑπάρχει μέσον,*** ἤτοι σημεῖον, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη. Γενικῶς δέ: ***Ἐπὶ πάσης εὐθείας ὑπάρχουν σημεῖα, τὰ ὁποῖα διαιροῦν αὐτὴν εἰς ἴσα μέρη, ὅσα θέλομεν.*** Ὥστε δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ ἥμισυ ἢ τὸ τρίτον ἢ τὸ τέταρτον κτλ. εὐθείας.

Σημείωσις. Ἂν τῆς εὐθείας ΑΒ μέσον εἶναι τὸ σημεῖον Ο, τότε τὰ σημεῖα Α καὶ Β λέγονται **συμμετρικὰ** πρὸς τὸ Ο. Ὥστε διὰ

Α Ο Β Γ Δ Ε

νὰ εὕρωμεν τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς σημείου Γ πρὸς ἄλλο Δ, προεκτείνομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ κατὰ εὐθεῖαν ΔΕ ἴσην πρὸς τὴν ΓΔ.

Παρατήρησις. Αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος καὶ τῆς ἀνισότητος τῶν ἀριθμῶν ἀληθεύουν καὶ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν.

28. Μέτρησις τῶν εὐθειῶν γραμμῶν.— Ἔστω, ὅτι ἔχομεν μίαν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ θέλομεν νὰ λάβωμεν ἀκριβῆ ἰδέαν τῆς ἐκτάσεως αὐτῆς. Πρὸς τοῦτο θὰ **μετρήσωμεν** αὐτήν, ἤτοι θὰ τὴν συγκρίνωμεν πρὸς ἄλλην ὡρισμένην εὐθεῖαν, ἔστω τὴν ΜΝ, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **μονάδα** καὶ παριστῶμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 1. Ἐὰν δὲ κατὰ τὴν σύγκρισιν αὐτὴν ἴδωμεν, ὅτι ἡ ΑΒ γίνεται ἀπὸ τὴν ΜΝ, ἐπαναλαμβανομένην 4 π.χ. φοράς, θὰ παραστήσωμεν τὴν ΑΒ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 4. Ἐὰν δὲ ἴδωμεν, ὅτι ἡ ΑΒ γίνεται ἀπὸ τὴν μονάδα καὶ τὸ

Α——————Β
Μ——Ν

ἥμισυ αὐτῆς, τότε θὰ παραστήσωμεν τὴν ΑΒ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $1\frac{1}{2}$, καὶ ἂν γίνεται ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς μονάδος, ὅταν ἐπαναληφθῇ τρεῖς φοράς, τότε τὴν ΑΒ θὰ τὴν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{3}{4}$.

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις παριστᾷ μίαν εὐθεῖαν, λέγεται μέτρησις αὐτῆς, ὁ δὲ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται μῆκος τῆς εὐθείας.

Ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν εὐθειῶν λαμβάνομεν συνήθως τὸ (γαλλικὸν) μέτρον.

Ἀσκήσεις.

1) Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ καὶ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ. Κατόπιν, ἐὰν Ο εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ, μετροῦμεν α) τὴν ΑΔ διὰ τῆς ΒΟ, καὶ β) τὴν ΒΟ διὰ τῆς ΑΔ. Πόσον θὰ εἶναι τότε τὸ μῆκος: α') τῆς ΒΟ καὶ β') τῆς ΑΔ;

2) Λάβετε τρεῖς εὐθείας α, β, γ, κατασκευάσατε ἔπειτα τὰς εὐθείας α+β—γ καὶ α—β+γ καὶ τέλος ἐλέγξατε τὰς κατασκευὰς αὐτὰς διὰ μετρήσεως· ἀλλ' αἱ κατασκευαὶ αὐταὶ πότε θὰ εἶναι δυναταί;

3) Ἐπὶ εὐθείας εἶναι κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Εὕρετε δύο ζεύγη εὐθειῶν μὲ ἄκρα τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ τὰ ὁποῖα ἔχουν: α') ἴσα ἀθροίσματα καὶ β') ἴσας διαφοράς.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

29. Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἁπλῶς **ἐπίπεδον** λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζει πανταχοῦ, ἢ μὲ ἄλλους λόγους ἡ ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ὅλη ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ διερχομένη διὰ δύο **οἱωνδήποτε** σημείων αὐτῆς. Δεχόμεθα δὲ τὴν ὕπαρξιν τοιαύτης ἐπιφανείας, τῆς ὁποίας εἰκόνα μᾶς δίδει ἡ ἐπιφάνεια ἠρεμοῦντος ὕδατος ἢ ἄλλαι ὅμοιαι ἐπιφάνειαι, ὡς ἡ τοῦ πίνακος, τῶν ὑαλοπινάκων καὶ ἄλλαι.

Περὶ τοῦ ἐπιπέδου δεχόμεθα τὰ κάτωθι αἰτήματα:

1ον. ***Διὰ τριῶν σημείων διέρχεται ἓν ἐπίπεδον.***

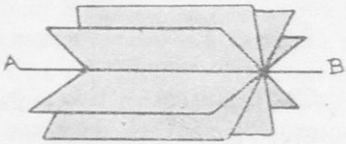
2ον. ***Ἓν ἐπίπεδον δύναται νὰ αὐξηθῇ ἀπὸ ὅλα τὰ ἄκρα του, ὅσον θέλομεν, καὶ νὰ εἶναι πάντοτε ἐπίπεδον.***

3ον. ***Ἓν ἐπίπεδον δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ἐπάνω εἰς ἄλλο***

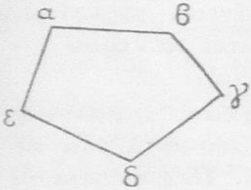
ἐπίπεδον, ὥστε νὰ ἀποτελέσουν ἓν μόνον ἐπίπεδον. Γίνεται δὲ ἡ ἐπίθεσις αὕτη καὶ ὅταν ἓν τῶν ἐπιπέδων ἀντιστραφῇ.

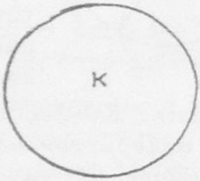
4ον. ***Ἐὰν εἰς ἐπίπεδον ὑπάρχῃ γραμμή τις, ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει δύο σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἑκατέρωθεν τῆς γραμμῆς, τέμνει αὐτήν.***

Σημείωσις. Ἐδέχθημεν ἀνωτέρω, ὅτι διὰ τριῶν σημείων διέρχεται ἓν ἐπίπεδον. Ἀλλ' ἐὰν τὰ τρία αὐτὰ σημεῖα κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τότε διέρχονται δι' αὐτῶν ὅσα ἐπίπεδα θέλομεν. Διότι, ἐὰν περιστρέψωμεν τὸ ἐπίπεδον περὶ τὴν εὐθεῖαν τῶν τριῶν αὐτῶν σημείων, αἱ διάφοροι θέσεις τὰς ὁποίας θὰ λάβῃ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς διάφορα ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τῆς εὐθείας. Ὥστε διὰ μιᾶς εὐθείας διέρχονται ἄπειρα ἐπίπεδα. Ἐὰν ὅμως τὰ τρία σημεῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τότε δεχόμεθα ὡς φανερόν, ὅτι διὰ τῶν σημείων τούτων διέρχεται ἓν μόνον ἐπίπεδον καὶ ἑπομένως δεχόμεθα ὅτι: ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ἔχουν τρία κοινὰ σημεῖα, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ἐφαρμόζουν καὶ ἀποτελοῦν ἓν ἐπίπεδον.***



30. Ἐπίπεδον σχῆμα.—Τὰ σημεῖα τῶν παρατιθεμένων σχημάτων





των παρατηροῦμεν, ὅτι ὅλα εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Σχήματα, ὡς τὰ ἀνωτέρω, λέγονται **ἐπίπεδα.**

Ὥστε: ***Ἐπίπεδον λέγεται τὸ σχῆμα, τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ σημεῖα εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.***

31. Στερεά.—Τὰ σχήματα, τῶν ὁποίων ὅλα τὰ σημεῖα δὲν εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὀνομάζονται **στερεά.**

32. Διαίρεσις τῆς Γεωμετρίας.—Τὰ ἐπίπεδα σχήματα ἡ Γεωμετρία τὰ ἐξετάζει εἰς ἰδιαίτερον μέρος, λέγεται δὲ τοῦτο **Ἐπιπεδομετρία,** ἐνῷ τὰ στερεὰ τὰ ἐξετάζει εἰς δεύτερον μέρος, τὸ ὁποῖον λέγεται **Στερεομετρία.**

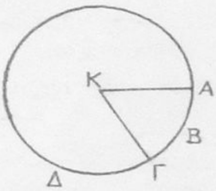
ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

33. Ὁρισμοί.— Ἐὰν εὐθεῖα, ὡς ἡ ΚΑ, μένουσα ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, περιστραφῇ περὶ τὸ ἀκίνητον σημεῖον Κ, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην αὐτῆς θέσιν, τὸ μὲν σημεῖον Α θὰ γράψῃ μίαν γραμμήν, τῆς ὁποίας εἶναι φανερόν, ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ σημεῖον Κ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΚΑ θὰ γράψῃ τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον τελειώνει εἰς τὴν ὡς ἄνω γραμμήν. Τὸ μέρος τοῦτο τοῦ ἐπιπέδου λέγεται **κύκλος,** ἡ δὲ γραμμή, εἰς τὴν ὁποίαν τελειώνει, λέγεται **περιφέρεια** αὐτοῦ, καὶ τὸ σημεῖον Κ λέγεται **κέντρον** τοῦ κύκλου τούτου (ἢ τῆς περιφερείας).



Ὥστε : ***Κύκλος λέγεται ἐπίπεδον σχῆμα, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον, καλούμενον κέντρον, ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς, εἰς τὴν ὁποίαν περατοῦται. Περιφέρεια δὲ κύκλου λέγεται ἡ γραμμή, εἰς τὴν ὁποίαν οὗτος περατοῦται.***

34. Ἀκτίς.— Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ κέντρου εἰς τὴν περιφέρειαν, λέγεται ἀκτίς. Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι. Ἑπομένως πᾶν σημεῖον τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστασιν μικροτέραν τῆς ἀκτῖνος, πᾶν δὲ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς αὐτοῦ, ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστασιν μεγαλυτέραν τῆς ἀκτῖνος. Ἀντιστρόφως δέ, πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα, κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, πᾶν δὲ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τούτου, ἀπέχον ἀπὸ τὸ κέντρον ἀπόστασιν διάφορον τῆς ἀκτῖνος, δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας.

35. Ἐὰν δύο κύκλοι ἔχουν ἴσας ἀκτῖνας εἶναι ἴσοι. Διότι, ὅταν τεθῇ ὁ εἷς ἐπὶ τοῦ ἄλλου καταλλήλως, θὰ ἐφαρμόσουν καὶ αἱ περιφέρειαι καὶ οἱ κύκλοι.

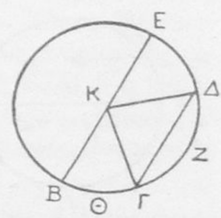
Σημείωσις. Περιφερείας κύκλου γράφομεν διὰ τοῦ διαβήτου.

36. Τόξον κύκλου, τομεύς.—Μέρος τι τῆς περιφερείας κύκλου λέγεται τόξον αὐτῆς. Π.χ. τόξον εἶναι τὸ μέρος ΑΒΓ. Ἐὰν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου ΑΓ φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΚΑ καὶ ΚΓ, τὸ μέρος τοῦ κύκλου ΚΑΒΓ, τὸ ὁποῖον περιέχεται ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΓ καὶ ὑπὸ τῶν ἀκτίνων ΚΑ καὶ ΚΓ, λέγεται **τομεύς.** Ἐὰν τὸν τομέα τοῦτον, μένοντα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου, περιστρέψωμεν περὶ τὸ σημεῖον Κ, τὸ τόξον ΑΓ κατὰ τὴν περιστροφήν του θὰ ἐφαρμόζῃ πάντοτε ἐπὶ τῆς περιφερείας, τῆς ὁποίας εἶναι μέρος. Διότι κατὰ ταύτην οὐδὲν σημεῖον τοῦ τόξου ΑΓ δύναται νὰ εὑρεθῇ ἐκτὸς τῆς περιφερείας Κ, ἀφοῦ ἅπαντα τὰ σημεῖα τοῦ τόξου τούτου ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν ἕπεται τὸ θεώρημα:

Πᾶν τόξον δύναται νὰ ἐφαρμόζῃ πανταχοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας, τῆς ὁποίας εἶναι μέρος.

Ἐκ τούτου δὲ ἀμέσως ἕπεται, ὅτι πᾶν τόξον ἐφαρμόζει καὶ ἐπὶ πάσης περιφερείας ἴσης πρὸς τὴν περιφέρειαν, τῆς ὁποίας εἶναι μέρος.

37. Ἄθροισμα τόξων.—Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσότερα τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας, θὰ θέσωμεν αὐτὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας, ἢ ἐπὶ ἄλλης ἴσης, κατὰ σειράν. Τότε τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ οὕτω τεθέντα τόξα, λέγεται ἄθροισμα τῶν τόξων. Οὕτως, ἄθροισμα τῶν τόξων ΒΓ καὶ ΓΔ λέγεται τὸ τόξον ΒΔ. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι καθ᾽ οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν δύο ἢ περισσότερα τόξα, θὰ εὑρίσκωμεν ἄθροισμα πάντοτε τὸ αὐτό.



38. Ἴσα καὶ ἄνισα τόξα. Διαφορὰ δύο τόξων.—Διὰ νὰ συγκρίνωμεν δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ δύο ἴσων περιφερειῶν, τὰ θέτομεν ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου (§ 35) οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσουν δύο ἄκρα αὐτῶν· ἐὰν δὲ συμπέσουν καὶ τὰ ἄλλα δύο ἄκρα, τότε τὰ τόξα ταῦτα εἶναι ἴσα, ἄλλως εἶναι ἄνισα. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου τόξου καὶ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτοῦ ἀποκόψωμεν μέρος ἴσον μὲ τὸ μικρότερον, τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον μένει, λέγεται **διαφορὰ τῶν τόξων** αὐτῶν. Οὕτω διαφορὰ τῶν τόξων ΒΔ καὶ ΒΓ εἶναι τὸ ΓΔ.

39. Ἀξίωμα. ***Ἐπὶ παντὸς τόξου ὑπάρχει μέσον,*** ἤτοι σημεῖον, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη. Καὶ γενικῶς, ἐπὶ παντὸς τόξου ὑπάρχουν σημεῖα, τὰ ὁποῖα διαιροῦν αὐτὸ εἰς ἴσα μέρη, ὅσα θέλομεν.

Σημείωσις. Καὶ περὶ τῆς ἰσότητος τῶν τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας ἰσχύουν αἱ αὐταὶ προτάσεις, αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν περὶ τῶν εὐθειῶν.

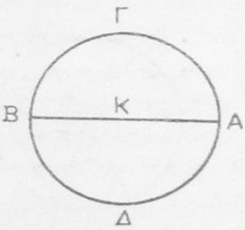
40. Χορδὴ τόξου.—Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ ἄκρα ἑνὸς τόξου, λέγεται **χορδὴ** αὐτοῦ. Ἕκαστον τόξον ἔχει μίαν χορδήν, ἀλλ' ἑκάστη χορδὴ ἔχει δύο τόξα. Π.χ. τὸ τόξον ΓΖΔ ἔχει τὴν χορδὴν ΓΔ, ἀλλ' ἡ χορδὴ ΓΔ ἔχει τὰ δύο τόξα ΓΖΔ καὶ ΓΒΔ.

41. Τμῆμα κύκλου. Διάμετρος αὐτοῦ.—Τὸ μέρος τοῦ κύκλου τὸ ὁποῖον περιέχεται ὑπὸ τόξου καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ, ὅπως π.χ. τὸ ΓΖΔΓ, λέγεται **τμῆμα** αὐτοῦ.

Ἡ χορδὴ τοῦ τόξου, ὅταν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου λέγεται **διάμετρος.**

Ὅλαι αἱ διάμετροι τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι.

42. Ἰδιότης τῆς διαμέτρου.—Ἔστω ὁ κύκλος ΑΓΒΔΑ καὶ τυχοῦσα διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΑΚΒ. Ἐὰν περιστραφῇ τὸ ἓν τμῆμα τοῦ κύκλου π.χ. τὸ ΑΒΓ περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ, μέχρις ὅτου πέσῃ εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἄλλου τμήματος ΑΒΔ, τὸ τόξον ΑΓΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΔΒ, διότι κατὰ τὴν περιστροφὴν αὐτοῦ αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων τοῦ τόξου ΑΓΒ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ δὲν μεταβάλλονται. Ἑπομένως κανὲν σημεῖον τοῦ τόξου ΑΓΒ δὲν θὰ εὑρεθῇ ἐκτὸς τοῦ τόξου ΑΔΒ, διότι τότε ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ κέντρου θὰ ἦτο μικροτέρα ἢ μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος, ὅπερ ἄτοπον. Ἀλλ' ἀφοῦ τὸ τόξον ΑΓΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΑΔΒ καὶ τὸ τμῆμα ΑΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΒΔ. Συνάγομεν λοιπὸν ὅτι :



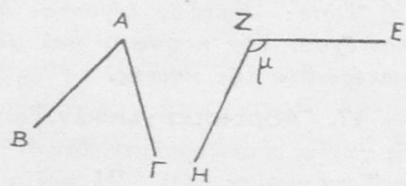
Πᾶσα διάμετρος τέμνει εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ.

Παρατήρησις. Πᾶσα χορδὴ κύκλου, ἡ ὁποία δὲν εἶναι διάμετρος αὐτοῦ, διαιρεῖ καὶ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἄνισα μέρη. Ὥστε μόνον αἱ διάμετροι διαιροῦν τὴν περιφέρειαν καὶ τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη, λέγονται δὲ τὰ δύο ταῦτα μέρη τῆς περιφερείας **ἡμιπεριφέρειαι** καὶ τὰ δύο μέρη τοῦ κύκλου **ἡμικύκλια.**

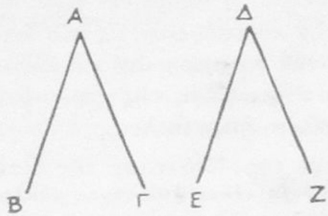
Σημείωσις. Ἡ πρότασις αὕτη περὶ τῆς ἰδιότητος τῆς διαμέτρου περιέχει τὴν ὑπόθεσιν: ***«Ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι διάμετρος κύκλου»*** καὶ τὸ συμπέρασμα: ***«διαιρεῖ καὶ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη»***. Ἡ δὲ πρότασις τοῦ θεωρήματος τῆς § 36 περιέχει τὴν ὑπόθεσιν: ***«Ἐὰν γραμμή τις εἶναι τόξον περιφερείας»*** καὶ τὸ συμπέρασμα: ***«δύναται νὰ ἐφαρμόζῃ πανταχοῦ ἐπ' αὐτῆς»***. Ὥστε πᾶν θεώρημα ἀποτελεῖται ἐκ τῆς ὑποθέσεως καὶ ἐκ τοῦ συμπεράσματος.

ΓΩΝΙΑΙ

43. Ὁρισμοί.—Ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Α, χωρὶς νὰ ἀποτελέσουν μίαν μόνην εὐθεῖαν, σχηματίζεται σχῆμα τὸ ΒΑΓ, τὸ ὁποῖον λέγεται **γωνία** (ἐπίπεδος). Τὸ σημεῖον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀρχίζουν αἱ εὐθεῖαι, λέγεται **κορυφὴ** τῆς γωνίας, αἱ εὐθεῖαι δέ, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν γωνίαν, λέγονται **πλευραὶ** αὐτῆς. Οὕτως ἡ γωνία ΒΑΓ ἔχει κορυφὴν τὸ σημεῖον Α καὶ πλευρὰς τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ. Τὴν ἀπαγγέλλομεν δὲ ὡς ἑξῆς: ἡ γωνία Α ἢ ἡ γωνία ΒΑΓ ἢ ἡ ΓΑΒ. Ὅπως βλέπομεν δέ, ὅταν ἀπαγγέλλωμεν μὲ τρία γράμματα, θέτομεν τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς εἰς τὸ μέσον. Ὁμοίως λέγομεν ἡ γωνία Ζ ἢ ἡ ΕΖΗ ἢ ἡ ΗΖΕ. Ἐνίοτε ὅμως σημειώνομεν τὴν γωνίαν καὶ μὲ ἓν μικρὸν γράμμα, τὸ ὁποῖον γράφομεν ἐντὸς αὐτῆς καὶ πλησίον τῆς κορυφῆς, λέγομεν δὲ τότε ἡ γωνία μ.

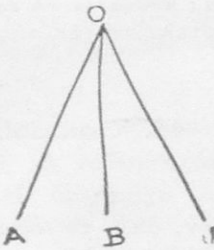


44. Γωνίαι ἴσαι.—Ἐὰν δύο γωνίαι τεθοῦν ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης καὶ ἀποτελέσουν μίαν γωνίαν, λέγονται ἴσαι. Οὕτω θὰ εἶναι γωνΒΑΓ =γωνΕΔΖ, ἐάν, ἀφοῦ τεθῇ ἡ κορυφὴ Δ ἐπὶ τῆς Α καὶ ἡ πλευρὰ ΔΕ ἐπὶ τῆς ΑΒ, πέσῃ καὶ ἡ ΔΖ ἐπὶ τῆς ΑΓ. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι τότε ἡ ΕΔΖ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΑΓ, ἐὰν τεθῇ ἐπ᾿ αὐτῆς καὶ ἀντιστρόφως. Ἤτοι, ἐὰν τεθῇ ἡ ΔΖ ἐπὶ τῆς ΑΒ, ὥστε τὸ Δ νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Α, ὁπότε ἡ ΔΕ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΓ. Κατὰ ταῦτα τὸ μέγεθος μιᾶς γωνίας δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μεγέθους τῶν πλευρῶν. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ὑποθέτωμεν τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας πάντοτε προεκτεινομένας ἀπεριορίστως.



45. Ἀξίωμα. ***Πάσης γωνίας ὑπάρχει διχοτόμος, ἤτοι εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἀρχομένη ἀπὸ τὴν κορυφὴν διαιρεῖ τὴν γωνίαν εἰς δύο ἴσας γωνίας.***

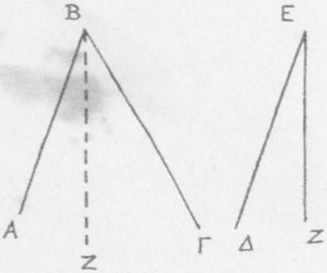
46. **Γωνίαι ἐφεξῆς.**—Αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ παρατηροῦμεν, ὅτι ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὴν Ο, τὴν πλευρὰν ΟΒ ἐπίσης κοινὴν καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ΟΑ καὶ ΟΓ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τῆς κοινῆς. Δύο τοιαῦται γωνίαι λέγονται **ἐφεξῆς**.



Ὥστε: ***Ἐφεξῆς λέγονται δύο γωνίαι, ὅταν ἔχουν τὴν κορυφὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, τὰς δὲ ἄλλας ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.***

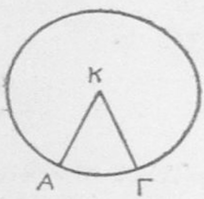
47. **Ἄθροισμα γωνιῶν. Γωνίαι ἄνισοι.**—Εἰς τὰς ἀνωτέρω ἐφεξῆς γωνίας παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ ΟΑ καὶ ΟΓ σχηματίζουν γωνίαν ΑΟΓ. Ἡ γωνία ΑΟΓ λέγεται **ἄθροισμα** τῶν δύο γωνιῶν ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ. Ἑκάστη δὲ τῶνγωνιῶν ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ λέγεται μέρος τῆς γωνίας ΑΟΓ. Εἶναι ἑπομένως ἑκάστη τούτων **ἄνισος** πρὸς τὴν ΑΟΓ καὶ μικροτέρα αὐτῆς, ἡ δὲ ΑΟΓ εἶναι μεγαλυτέρα ἑκάστης τούτων. Ἐὰν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν πολλὰς γωνίας, κάμνομεν τὴν δευτέραν ἐφεξῆς μὲ τὴν πρώτην, κατόπιν τὴν τρίτην ἐφεξῆς μὲ τὴν δευτέραν κ.ο.κ. Πάλιν ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν κάμνουν αἱ δύο ἄκραι πλευραί, θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι ἐδόθησαν. Ἐὰν μία γωνία εἶναι ἄθροισμα δύο ἢ τριῶν κτλ. ἴσων γωνιῶν, τότε λέγεται διπλασία ἢ τριπλασία κτλ. ἑκάστης τούτων. Ἑπομένως ἑκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν λέγεται τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κτλ. τῆς πρώτης γωνίας.

48. Διαφορὰ δύο ἀνίσων γωνιῶν.—Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν γωνίαν ΑΒΓ τὴν ΔΕΖ. Πρὸς τοῦτο θὰ ἀποκόψωμεν ἀπὸ τὴν ΑΒΓ μίαν γωνίαν, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ κορυφὴν τὴν Β καὶ μίαν πλευρὰν τὴν ΑΒ (ἢ τὴν ΒΓ) καὶ ἴσην μὲ τὴν ΔΕΖ. (Πρὸς τοῦτο δὲ πάλιν θὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν ΔΕΖ ἐπὶ μέρους τῆς ΑΒΓ. Τότε ἡ γωνία, ἡ ὁποία θὰ μείνῃ, δηλαδὴ ἡ ΖΒΓ, λέγεται **διαφορὰ** τῶν γωνιῶν αὐτῶν. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι ΖΒΓ+ΔΕΖ=ΑΒΓ.



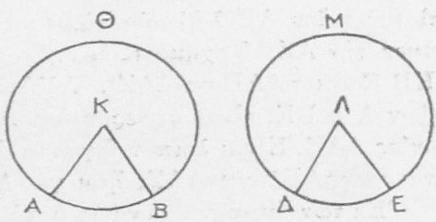
Σημείωσις. Περὶ τῆς προσθέσεως τῶν γωνιῶν καὶ περὶ τῆς ἰσότητος αὐτῶν ἀληθεύουν αἱ αὐταὶ προτάσεις, αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν περὶ τῶν εὐθειῶν καὶ τόξων τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

49. Ἐπίκεντρος γωνία.—Ἐὰν μία γωνία ἔχῃ τὴν κορυφήν της εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου λέγεται **ἐπίκεντρος**, ὅπως π.χ. ἡ γωνία ΑΚΓ, τὸ δὲ τόξον, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς λέγεται τόξον **ἀντίστοιχον** τῆς γωνίας (τὸ ΑΓ). Ἐξ ὅσων εἴπομεν μέχρι τοῦδε περὶ γωνίας εὐκόλως ἐννοοῦμεν, ὅτι τὰ τόξα τὰ ἀντίστοιχα ἐπικέντρων γωνιῶν εἶναι μικρότερα τῆς ἡμιπεριφερείας.

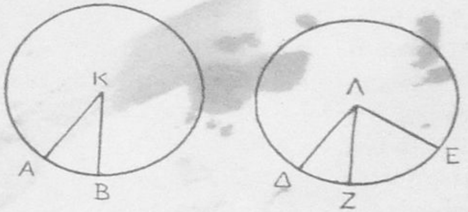


50. Σχέσεις τῶν ἀντιστοίχων τόξων ἐπικέντρων γωνιῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἴσων κύκλων.—Ἔστωσαν οἱ ἴσοι κύκλοι Κ καὶ Λ καὶ εἰς αὐτοὺς αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΔΛΕ. Αἱ γωνίαι αὐταὶ δύνανται :

α) Νὰ εἶναι ἴσαι. Θέλομεν δὲ νὰ ἴδωμεν, μήπως ὑπάρχει παρομοία σχέσις μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων τόξων ΑΒ καὶ ΔΕ. Πρὸς τοῦτο θὰ ἐφαρμόσωμεν τὰς γωνίας αὐτάς. Ἀλλὰ τότε θὰ ἐφαρμόσουν καὶ οἱ κύκλοι. Ὥστε τὸ Κ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Λ, τὸ Α ἐπὶ τοῦ Δ καὶ τὸ Β ἐπὶ τοῦ Ε· ἄρα θὰ ἐφαρμόσουν καὶ τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΔΕ. Εἶναι λοιπὸν ταῦτα ἴσα.



β) Νὰ εἶναι ἄνισοι καὶ ἔστω μεγαλυτέρα ἡ ΔΛΕ. Τότε, κατὰ τὴν ἐπίθεσιν τῶν γωνιῶν, ἀφοῦ τὸ Κ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Λ καὶ ἡ ΚΑ ἐπὶ τῆς ΛΔ, ἡ ΚΒ θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς γωνίας ΔΛΕ. Ἀλλὰ τότε τὸ σημεῖον Β θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς περιφερείας Λ εἰς σημεῖον κείμενον μεταξὺ τῶν σημείων αὐτῆς Δ καὶ Ε, π.χ. εἰς τὸ Ζ. Ἀλλ' ἤδη εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τόξον



ΔΖ εἶναι μέρος τοῦ τόξου ΔΕ. Ὥστε εἶναι τοξΔΕ>τοξΔΖ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι τοξΑΒ=τοξΔΖ (διότι εἶναι γωνΑΚΒ=γωνΔΛΖ) ἕπεται, ὅτι τοξΔΕ>τοξΑΒ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται λοιπὸν τὸ θεώρημα:

Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἐπὶ ἴσων κύκλων, αἱ ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων, καὶ αἱ ἄνισοι ἐπὶ ἀνίσων· ἡ μεγαλυτέρα δὲ γωνία βαίνει ἐπὶ μεγαλυτέρου τόξου.

51. Ἤδη θὰ ἐξετάσωμεν τὰς σχέσεις τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι βαίνουν εἰς ἴσα ἢ ἄνισα τόξα περιφερείας τοῦ αὐτοῦ ἢ ἴσων κύκλων.

α) Ἔστω, ὅτι περΚ=περΛ καὶ τοξΑΒ=τοξΔΕ. Ἀλλὰ τότε, ἐὰν ἐφαρμόσουν αἱ δύο ἴσαι περιφέρειαι, οὕτως ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν τὰ ἴσα αὐτὰ τόξα, θὰ ἐφαρμόσουν καὶ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΔΛΕ· ἄρα εἶναι ἴσαι.

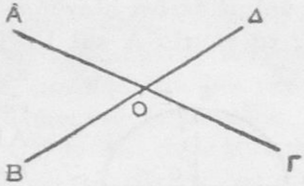
β) Ἔστω, ὅτι περΚ=περΛ καὶ τοξΔΕ>τοξΑΒ. Ἀλλὰ τότε, ἐὰν ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΕ λάβωμεν τὸ μέρος ΔΖ ἴσον μὲ τὸ τόξον ΑΒ καὶ φέρωμεν τὴν ΛΖ, ἡ σχηματιζομένη γωνία ΔΛΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΑΚΒ (διότι τοξΑΒ=τοξΔΖ). Ἀλλ' ἀφοῦ τὸ Ζ κεῖται μεταξὺ τῶν σημείων Δ καὶ Ε, εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ ἡ ἀκτὶς ΛΖ κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας ΔΛΕ. Εἶναι λοιπὸν ἡ γωνία ΔΛΖ μέρος τῆς γωνίας ΔΛΕ· ἄρα εἶναι γωνΔΛΕ>γωνΔΛΖ, ἤτοι γωνΔΛΕ>γωνΑΚΒ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται τὸ θεώρημα:

Αἱ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἐπὶ ἴσων κύκλων ἐπίκεντροι γωνίαι, ὅταν βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων, εἶναι ἴσαι· ὅταν δὲ βαί-

νουν ἐπὶ ἀνίσων τόξων, εἶναι ἄνισοι, μεγαλυτέρα δὲ εἶναι ἡ βαίνουσα ἐπὶ τοῦ μεγαλυτέρου τόξου.

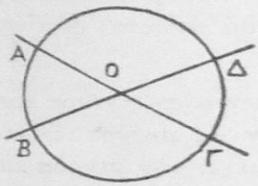
52. Ἀντίστροφα θεωρήματα.—Ἐὰν προσέξωμεν τὰ δύο ἀνωτέρω θεωρήματα 50 καὶ 51, θὰ ἴδωμεν, ὅτι ἡ ὑπόθεσις τοῦ πρώτου εἶναι συμπέρασμα εἰς τὸ δεύτερον, καὶ τὸ συμπέρασμα τοῦ πρώτου εἶναι ὑπόθεσις εἰς τὸ δεύτερον. Δύο τοιαῦτα θεωρήματα λέγονται **ἀντίστροφα.**



53. Γωνίαι κατὰ κορυφήν.—Ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι τοιαῦται, ὥστε αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς νὰ εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης, αἱ γωνίαι αὗται λέγονται κατὰ κορυφήν.

Τοιαῦται εἶναι αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ ἢ αἱ ΑΟΔ καὶ ΒΟΓ.

54. Ἰδιότης τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν.—Ἔστωσαν αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ, τὰς ὁποίας θέλομεν νὰ συγκρίνωμεν. Πρὸς τοῦτο θὰ καταστήσωμεν αὐτὰς ἐπικέντρους γράφοντες περιφέρειαν μὲ κέντρον τὴν κοινὴν κορυφὴν αὐτῶν Ο καὶ ἀκτῖνα οἱανδήποτε. Κατόπιν δὲ θὰ συγκρίνωμεν τὰ ἀντίστοιχα τόξα ΑΒ καὶ ΓΔ. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΟΓ καὶ ΒΟΔ εἶναι



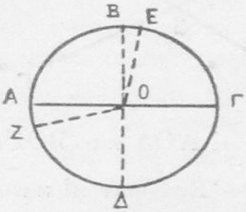
διάμετροι· εἶναι ἑπομένως τοξ ΑΔ+τοξ ΔΓ= ἡμιπεριφέρεια, καὶ τοξΑΔ+τοξΑΒ=ἡμιπεριφέρεια. Ὥστε εἶναι τοξΑΔ+τοξΔΓ=τοξΑΔ+τοξ ΑΒ, καὶ κατὰ συνέπειαν τοξΔΓ=τοξΑΒ. Ἄρα εἶναι γωνΑΟΒ=γωνΔΟΓ. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τοξΒΑ+τοξΑΔ=τοξΒΑ+τοξΒΓ, ἤτοι τοξΑΔ=τοξΒΓ, καὶ συνεπῶς καὶ γωνΑΟΔ= γωνΒΟΓ.

Συνάγομεν λοιπὸν ὅτι : ***Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.***

55. Εὐθεῖαι κάθετοι. Γωνία ὀρθή.—Ὅταν δύο εὐθεῖαι διασταυροῦνται, σχηματίζουν τέσσαρας γωνίας. Ἐὰν δὲ ἐξ αὐτῶν δύο ἐφεξῆς εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ τέσσαρες γωνίαι κατὰ τὴν ἀνωτέρω πρότασιν θὰ εἶναι ἴσαι. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ μία εὐθεῖα λέγεται **κάθετος** ἐπὶ τὴν ἄλλην. Τὸ σημεῖον δέ, εἰς ὃ ἡ κάθετος τέμνει τὴν ἄλλην, λέγεται **ποὺς** τῆς καθέτου. Ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ πλευρῶν καθέτων, λέγεται **ὀρθή.** Ἐὰν μία εὐθεῖα τέμνουσα ἄλλην δὲν εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν, λέγεται **πλαγία** πρὸς αὐτήν. Τὸ δὲ σημεῖον τῆς τομῆς μετὰ τῆς ἄλλης λέγεται ποὺς τῆς πλαγίας.

56. Θεώρημα. ***Διὰ σημείου εὐθείας δύναται νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ μία μόνη.***

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΓ καὶ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς Ο. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Γ. Ἐὰν ἤδη λάβωμεν τὰ μέσα Β καὶ Δ τῶν ἡμιπεριφερειῶν ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ καὶ φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΒΔ, αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς Ο. Διότι ἡ ΒΔ εἶναι διάμετρος καὶ σχηματίζει μετὰ τῆς ΑΓ τέσσαρας γωνίας ἴσας (§ 51). Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα ἡ ὁποία διέρχεται μὲν διὰ τοῦ Ο, ἀλλ' οὐχὶ καὶ διὰ τοῦ μέσου Β, ὡς ἡ ΟΕ, εἶναι πλαγία πρὸς τὴν ΑΓ. Διότι αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΑΟΕ καὶ ΕΟΓ εἶναι ἄνισοι ἀφοῦ καὶ τὰ τόξα ΑΕ καὶ ΕΓ εἶναι ἄνισα (§ 51). Ὥστε μία μόνη ὑπάρχει κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ο καὶ εἶναι ἡ ΟΒ.



57. Πόρισμα. ***Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι.*** Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο, ἂν καταστήσωμεν αὐτὰς ἐπικέντρους, εἰς ἴσους κύκλους. Διότι τὰ τόξα, ἐπὶ τῶν ὁποίων θὰ βαίνουν, θὰ εἶναι ἴσα ἕκαστον πρὸς τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας.

58. Μέτρησις γωνιῶν.—Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν γωνίαν, πρέπει πρῶτον νὰ λάβωμεν μίαν ὡρισμένην γωνίαν ὡς μονάδα· ἔπειτα δὲ εὑρίσκομεν πόσας φορὰς ἡ δοθεῖσα γωνία περιέχει τὴν μονάδα καὶ τὰ μέρη αὐτῆς. Καὶ ἐὰν περιέχῃ τὴν μονάδα μ φοράς, τὸ μέτρον τῆς δοθείσης γωνίας εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς μ, ἐὰν δὲ περιέχῃ τὸ νυοστὸν μέρος τῆς μονάδος μ φοράς, τότε τὸ μέτρον αὐτῆς εἶναι ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{\mu}{\nu}$.

59. Μονάδες γωνιῶν.—Ὡς μονὰς μετρήσεως γωνιῶν λαμβάνεται ἡ ὀρθὴ γωνία· διαιρεῖται δὲ αὕτη εἰς 90 ἴσας γωνίας, ἑκάστην τῶν ὁποίων ὀνομάζομεν γωνίαν μιᾶς μοίρας (1°). Ἡ μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ ($60'$) καὶ ἓν πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα λεπτὰ ($60''$).

Συνηθέστερον ὅμως ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν λαμβάνεται ἡ μοῖρα· ἐὰν π.χ. μία γωνία περιέχῃ τὴν μοῖραν 35 φοράς, θὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ ἀριθμός, ὅστις μετρεῖ τὴν γωνίαν εἶναι 35°· ἐὰν δὲ περιέχῃ καὶ τὸ πρῶτον λεπτὸν 20 φορὰς καὶ τὸ δεύτερον 40 φοράς, θὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ γωνία αὕτη εἶναι 35° 20′ 40′′.

Σημείωσις. Πρακτικῶς αἱ γωνίαι μετροῦνται διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου (Πρακτ. Γεωμ. § 39).

60. Μέτρησις τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας. — Διὰ νὰ μετρήσωμεν ἓν τόξον, συγκρίνομεν αὐτὸ πρὸς ἓν ὡρισμένον τόξον τῆς αὐτῆς περιφερείας, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς μονάδα. Καὶ ἐὰν μὲν τὸ πρὸς μέτρησιν τόξον εἶναι μ φορὰς μεγαλύτερον τῆς μονάδος, τὸ μέτρον αὐτοῦ εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς μ· ἐὰν δὲ εἶναι μ φορὰς μεγαλύτερον τοῦ νυοστοῦ μέρους τῆς μονάδος, τὸ μέτρον του εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$.

61. Μονάδες τόξων. — Ὡς μονὰς μετρήσεως τόξου λαμβάνεται τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας, εἰς ἣν ἀνήκει. Διαιρεῖται δὲ τὸ τεταρτημόριον τῆς περιφερείας εἰς 90 ἴσα τόξα, καθὲν τῶν ὁποίων λέγεται τόξον μιᾶς μοίρας. Καὶ ἡ μοῖρα δὲ τοῦ τόξου διαιρεῖται εἰς 60′ καὶ τὸ 1′ εἰς 60′′.

Συνήθης ὅμως μονὰς μετρήσεως τόξου εἶναι ἡ μοῖρα.

62. Σχέσις τοῦ μέτρου τόξου πρὸς τὸ μέτρον τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου γωνίας. — Προηγουμένως εἴδομεν (§ 57), ὅτι, ὅταν τὸ τόξον, ἐφ᾽ οὗ βαίνει μία ἐπίκεντρος γωνία, εἶναι τὸ τέταρτον περιφερείας, ἡ γωνία αὕτη εἶναι ὀρθή. Ἤδη ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ τεταρτημόριον τῆς περιφερείας εἶναι διῃρημένον εἰς 90 ἴσα μέρη, ἤτοι εἰς 90° καὶ ὅτι εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἔχουν ἀχθῆ αἱ ἀκτῖνες· ἀλλὰ τότε θὰ σχηματισθοῦν 90 ἴσαι γωνίαι. Ἐπειδὴ δὲ αὗται ἔχουν ἄθροισμα τὴν ὀρθήν, ἕπεται ὅτι ἑκάστη τῶν ἴσων τούτων γωνιῶν εἶναι 1°. Ἐξ οὗ ἕπεται, ὅτι: ***Εἰς τόξον 1° ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία 1°.***

Ὁμοίως συνάγομεν, ὅτι εἰς τόξον 1′ ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία 1′ καὶ εἰς τόξον 1′′ ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία 1′′. Ἑπομένως, ἐὰν τὸ μέτρον τόξου τινὸς εἶναι π.χ. 32° 25′ 30′′, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ τὸ μέτρον τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου γωνίας θὰ εἶναι 32° 25′ 30′′. Ὅθεν: ***Μία ἐπίκεντρος γωνία καὶ τὸ ἀντίστοιχον εἰς αὐτὴν τόξον μετροῦνται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μοιρῶν.***

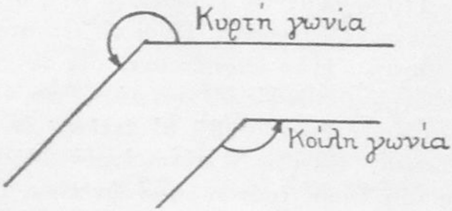
Γενικώτερον δέ: Ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα μετρήσεως τοῦ τόξου ΑΒ τὸ τόξον ΑΓ, ἐφ᾽ οὗ βαίνει ἡ γωνία ΑΚΓ, ἡ ὁποία ἐλήφθη ὡς μονὰς μετρήσεως τῆς ΑΚΒ, καὶ τὸ τόξον ΑΒ καὶ ἡ γωνία ΑΚΒ θὰ παρασταθοῦν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Ἡ μέτρησις λοιπὸν τῶν γωνιῶν δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν μέτρησιν τόξων, καὶ ἀντιστρόφως.

63. Γωνία δύο ὀρθῶν. Κυρτὴ καὶ κοίλη γωνία. — Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν εἰς τόξον 180°, ἤτοι εἰς ἡμιπεριφέρειαν ὡς ἡ ΑΒΓ (σχ. § 56), πρέπει νὰ ἀντιστοιχῇ ἐπίκεντρος γωνία 180°, ἤτοι δύο ὀρθῶν. Ἀλλ᾽ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας οὐδεμία βαίνει γωνία, διότι αἱ ΑΟ καὶ ΟΓ κεῖνται ἀπ᾽ εὐθείας.

Ὁμοίως, ἐὰν ἓν τόξον εἶναι μεγαλύτερον τῶν 180°, ὡς τὸ ΓΒΖ, πρέπει καὶ ἡ εἰς αὐτὸ ἐπίκεντρος γωνία νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 180°, ἤτοι μεγαλυτέρα τῶν δύο ὀρθῶν. Ἀλλ᾽ αἱ ἀκτῖνες ΟΓ καὶ ΟΖ, αἱ ὁποῖαι ἄγονται εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου, σχηματίζουν τὴν γωνίαν, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΔΖ τοῦ μικροτέρου τῆς ἡμιπεριφερείας. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ τοιαῦται περιπτώσεις δύνανται νὰ παρουσιασθοῦν κατὰ τὴν πρόσθεσιν γωνιῶν, πρέπει, διὰ νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν πάντοτε γωνία, νὰ δεχθῶμεν, ὅτι:

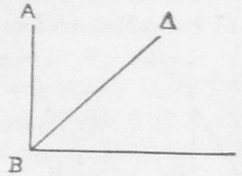
α) Ὅταν αἱ πλευραὶ μιᾶς γωνίας, ἡ ὁποία εἶναι ἄθροισμα ἄλλων γωνιῶν, κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας, ἡ γωνία αὐτη, δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι, ἤτοι 180°.



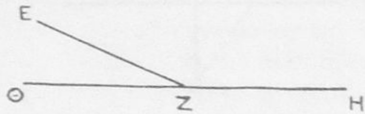
β) Δύο εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄρχονται ἐξ ἑνὸς σημείου καὶ δὲν ἀποτελοῦν εὐθεῖαν, σχηματίζουν δύο γωνίας, ἤτοι τὴν γωνίαν τὴν μικροτέραν τῶν δύο ὀρθῶν (δηλαδὴ τὴν γωνίαν τοῦ ἀρχικοῦ ὁρισμοῦ) καὶ τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν **κοίλην** γωνίαν, καὶ τὴν γωνίαν τὴν μεγαλυτέραν τῶν δύο ὀρθῶν, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν **κυρτήν**, καὶ

γ) Ὅταν αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας, ἡ ὁποία εἶναι ἄθροισμα ἄλλων γωνιῶν, συμπίπτουν, τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι τέσσαρες ὀρθαί, ἤτοι 360°.

64. Ὁρισμοί. — Ἐὰν μία γωνία εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς λέγεται **ὀξεῖα,** ἐὰν δὲ εἶναι μεγαλυτέρα αὐτῆς, ἀλλὰ μικροτέρα τῶν δύο ὀρθῶν, λέγεται **ἀμβλεῖα.** Π.χ. ὀξεῖα γωνία εἶναι ἡ ΓΒΔ, ἐνῷ ἡ ΕΖΗ εἶναι ἀμβλεῖα.



Συμπληρωματικαὶ λέγονται δύο γωνίαι ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι μία ὀρθὴ γωνία. Π.χ. αἱ γωνίαι ΑΒΔ καὶ ΔΒΓ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἄθροισμα τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΑΒΓ, εἶναι συμπληρωματικαί.



Παραπληρωματικαὶ λέγονται δύο γωνίαι, ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι δύο ὀρθαί. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι, ἐὰν ἐκ δύο γωνιῶν ἑκάστη εἶναι συμπληρωματικὴ ἢ παραπληρωματικὴ τῆς αὐτῆς τρίτης γωνίας, αἱ δύο αὗται γωνίαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Κατὰ ταῦτα, ἐὰν μία γωνία εἶναι 35°, ἡ συμπληρωματική της εἶναι 90°—35°=55°, καὶ ἡ παραπληρωματική της εἶναι 180°—35°=145°.

65. Θεώρημα. ***Ἐὰν ἐκ σημείου εὐθείας ἀχθῇ ἄλλη εὐθεῖα, αἱ σχηματιζόμεναι δύο γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί,*** καὶ ἀντιστρόφως. ***Ἐὰν δύο ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν κεῖνται ἐπ᾿ εὐθείας.***

1ον. Διότι, ἂν μὲ κέντρον τὸ σημεῖον καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε γράψωμεν περιφέρειαν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων τόξων τῶν δύο γωνιῶν εἶναι ἡμιπεριφέρεια.

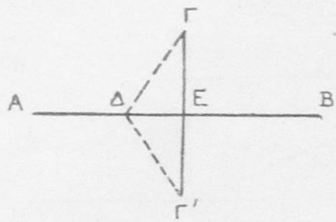
2ον. Διότι, ἂν αἱ γωνίαι αὗται γίνουν ἐπίκεντροι, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων τόξων τῶν δοθεισῶν ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι ἡμιπεριφέρεια. Ἑπομένως αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ τῶν γωνιῶν αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρρου, ἤτοι ἐπ᾿ εὐθείας.

66. Πόρισμα 1ον. ***Πᾶσαι αἱ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται, ὅταν ἐξ ἑνὸς σημείου εὐθείας φέρωμεν ὁσασδήποτε εὐθείας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς, ἔχουν ἄθροισμα δύο ὀρθὰς γωνίας.***

67. Πόρισμα 2ον. ***Πᾶσαι αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι, ὅταν ἐξ ἑνὸς σημείου φέρωμεν ὁσασδήποτε εὐθείας, ἔχουν ἄθροισμα τέσσαρας ὀρθάς.***

68. Θεώρημα. *Ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς εὐθείας, ἄγεται κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ μία μόνη.*

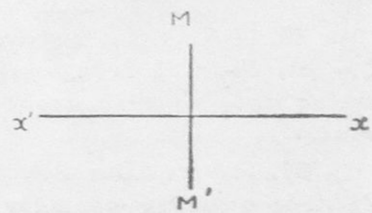
Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ σημεῖόν τι ἐκτὸς αὐτῆς τὸ Γ. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ διαιρεῖ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ εἰς δύο μέρη. Τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τούτου, τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ σημεῖον Γ, περιστρέφομεν περὶ τὴν ΑΒ, μέχρις ὅτου πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἄλλου μέρους. Τότε τὸ σημεῖον Γ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν Γ'. Ἐὰν ἤδη φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΓΓ', αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς Ε. Διότι, ἐὰν περιστραφῇ πάλιν τὸ ἓν μέρος τοῦ ἐπιπέδου περὶ τὴν ΑΒ, μέχρις ὅτου πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἄλλου μέρους, εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ γωνίαι ΓΕΑ καὶ Γ'ΕΑ θὰ ἐφαρμόσουν.



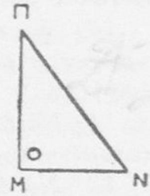
Εἶναι λοιπὸν αὗται ἴσαι· ἄρα εἶναι ἴσαι μεταξύ των ὅλαι αἱ περὶ τὸ Ε γωνίαι. Ὥστε ἡ ΓΓ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἤδη λέγω, ὅτι ἄλλη κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐκ τοῦ σημείου Γ δὲν δύναται νὰ ἀχθῇ. Ἀλλ' ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει μία ἄλλη κάθετος ἐκ τοῦ Γ, ἡ ΓΔ. Ἀλλὰ τότε κατὰ τὴν περιστροφὴν ὡς ἄνω, ἡ ΓΔ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν Γ'Δ. Ὥστε αἱ γωνίαι ΓΔΕ καὶ Γ'ΔΕ εἶναι ἴσαι· ἀλλ' εἶναι καὶ ἐφεξῆς, αἱ δὲ μὴ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, διότι διὰ τῶν σημείων Γ καὶ Γ' μία μόνον εὐθεῖα ἄγεται, ἡ ΓΕΓ'. Ὥστε αἱ ἴσαι γωνίαι ΓΔΕ καὶ Γ'ΔΕ δὲν εἶναι παραπληρωματικαί, ἤτοι δὲν εἶναι ὀρθαὶ γωνίαι. Ἡ ΓΔ λοιπὸν δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

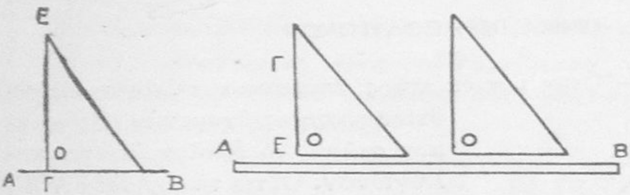
Σημείωσις α'. Τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ' λέγονται συμμετρικὰ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Ὥστε δύο σημεῖα Μ καὶ Μ' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν εὐθεῖαν χ' χ, ὅταν αὕτη εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΜΜ'.

Σημείωσις β'. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, ὡς καὶ τὸ θεώρημα τῆς § 56, δύνανται νὰ περιληφθοῦν εἰς τὴν ἑξῆς πρότασιν. *Διὰ σημείου οἱουδήποτε ἄγεται κάθετος ἐπὶ εὐθεῖαν καὶ μία μόνη.*



Γνώμων.—Πρακτικῶς φέρομεν κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν ΑΒ διὰ σημείου Γ ἐπ' αὐτῆς ἢ ἐκτὸς αὐτῆς διὰ τοῦ γνώμονος. Εἶναι δὲ οὗτος λεπτὴ σανίς, ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα ὅμοιον μὲ τὸ σχῆμα ΜΝΠ καὶ εἰς ὃ αἱ ΜΝ καὶ ΜΠ εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας. Καὶ ὅταν μὲν τὸ Γ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, ἐφαρμόζομεν τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν τοῦ γνώμονος ἐπὶ τῆς ΑΒ οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ Μ τῆς ὀρθῆς γωνίας νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ. Κατόπιν δὲ σύρομεν τὴν γραφίδα κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς τοῦ γνώμονος καὶ γράφομεν τὴν ΓΕ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος. Ἀλλ' ἐὰν τὸ Γ κεῖται ἐκτὸς τῆς ΑΒ, ἐφαρμόζομεν πάλιν τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν τοῦ γνώμονος ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἀλλ' οὕτως, ὥστε ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Γ. Κατὰ μῆκος δὲ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς σύρομεν τὴν γραφίδα καὶ γράφομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΕ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.





Ἀσκήσεις.

4) Ἐκ σημείου Ο ἄγονται τέσσαρες εὐθεῖαι. Ἐκ τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν ποῖαι εἶναι ἐφεξῆς καὶ ποῖαι ἔχουν μίαν πλευρὰν κοινήν, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἐφεξῆς;

5) Ἐκ δύο συμπληρωματικῶν γωνιῶν ἡ μία εἶναι 1) 35°· 2) α°· 3) 90°—α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη.

6) Ἐκ δύο παραπληρωματικῶν γωνιῶν ἡ μία εἶναι 1) 45°· 2) α°· 3) 180°—α· 4) 90°+α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη.

7) Ἐκ δύο γωνιῶν ἡ μία εἶναι 45° καὶ ἡ ἄλλη 18°. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συμπληρωματικὴ καὶ ἡ παραπληρωματικὴ α) τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο γωνιῶν καὶ β) τῆς διαφορᾶς των.

8) Ἐκ τοῦ σημείου Ο εὐθείας ΑΒ ἄγονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς αἱ εὐθεῖαι ΟΔ, ΟΓ, ΟΕ, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ ΟΔ, ΟΕ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ΑΟΓ, ΓΟΒ ἀντιστοίχως. Ἐὰν δὲ εἶναι ΑΟΓ=30°, νὰ εὑρεθῇ πόσων μοιρῶν εἶναι αἱ γωνίαι ΓΟΒ, ΔΟΓ, ΓΟΕ καὶ ΔΟΕ. Αἱ τιμαὶ τῶν γωνιῶν αὐτῶν νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς μέρη τῆς ὀρθῆς.

9) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτομοῦσαι δύο ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικὰς γωνίας εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

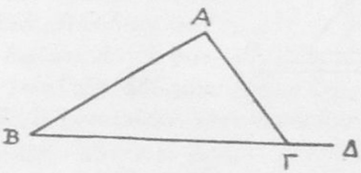
10) Ἐκ τῶν 4 γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ δύο εὐθειῶν τεμνομένων ἡ μία εἶναι 45°. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν τριῶν ἄλλων;

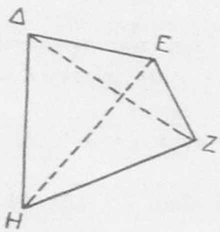
11) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς κοίλης γωνίας ΑΟΒ, προεκτεινομένη διχοτομεῖ καὶ τὴν κυρτὴν γωνίαν ΑΟΒ.

12) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ διχοτόμοι δύο κατὰ κορυφὴν γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

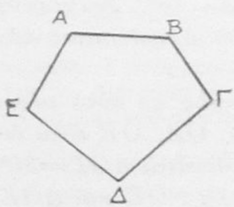
ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

69. Ὁρισμοί.—Ὅταν μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια τελειώνῃ εἰς εὐθείας γραμμάς, ἔχομεν ἓν εὐθύγραμμον σχῆμα, τὸ ὁποῖον λέγεται **πολύγωνον.** Οὕτω τὰ σχήματα ΑΒΓ, ΔΕΖΗ, ΑΒΓΔΕ εἶναι πολύγωνα. Αἱ εὐθεῖαι γραμμαί, εἰς τὰς ὁποίας τελειώνει ἓν πολύγωνον, λέγονται **πλευραὶ** αὐτοῦ. Οὕτω τοῦ σχήματος ΑΒΓ, πλευραὶ εἶναι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, καὶ τοῦ ΔΕΖΗ, πλευραὶ εἶναι αἱ ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΔ. Αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ πλευραὶ ἑνὸς πολυγώνου, λέγονται γωνίαι αὐτοῦ.





Ἐπίσης καὶ αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν αὐτῶν λέγονται κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου. Οὕτω γωνίαι τοῦ σχήματος ΑΒΓ εἶναι αἱ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ καὶ κορυφαὶ αὐτοῦ αἱ Α, Β, Γ. Παρατηροῦμεν δέ, ὅτι τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τρεῖς πλευρὰς ἔχει καὶ τρεῖς γωνίας, καὶ τρεῖς κορυφάς. Ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει τέσσαρας πλευράς, ἔχει καὶ 4 γωνίας καὶ 4 κορυφὰς κ.ο.κ.



Ἡ γωνία ΑΓΔ, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς ΑΓ τοῦ τριγώνου καὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς ΒΓ, λέγεται **ἐξωτερικὴ** γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐν γένει δὲ ἐξωτερικὴ γωνία πολυγώνου λέγεται ἡ σχηματιζομένη ὑπό τινος προσκειμένων εἰς αὐτὴν πλευρᾶς αὐτοῦ καὶ τῆς προεκτάσεως μιᾶς ἐκ τῶν πλευρῶν.

Τὸ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον τελειώνει εἰς τρεῖς πλευράς, ὡς τὸ ΑΒΓ, λέγεται **τρίγωνον** ἢ τρίπλευρον. Ἐκεῖνο δέ, τὸ ὁποῖον τελειώνει εἰς τέσσαρας πλευράς, λέγεται **τετράπλευρον.** Ἐκεῖνο δέ, τὸ ὁποῖον τελειώνει εἰς 5, 6 κτλ. πλευράς, λέγεται **πεντάγωνον, ἑξάγωνον** κτλ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ἑνὸς πολυγώνου λέγεται **περίμετρος.** Οὕτω τοῦ τετραπλεύρου ΔΕΖΗ περίμετρος εἶναι τὸ ἄθροισμα ΔΕ+ΕΖ+ΖΗ+ΗΔ.

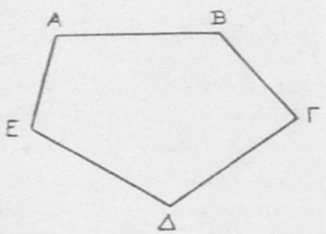
Εἰς τὸ σχῆμα ΔΕΖΗ αἱ εὐθεῖαι ΔΖ, ΕΗ λέγονται **διαγώνιοι** αὐτοῦ.

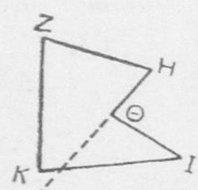
Ὥστε: ***Διαγώνιος ἑνὸς εὐθυγράμμου σχήματος λέγεται κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει δύο κορυφὰς αὐτοῦ καὶ δὲν εἶναι πλευρὰ τοῦ σχήματος.***

Τὰ τρίγωνα δὲν ἔχουν διαγωνίους.

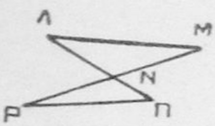
Ἂς λάβωμεν τώρα τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ ΖΗΘΙΚ. Εἰς τὸ πρῶτον παρατηροῦμεν, ὅτι οἱαδήποτε πλευρὰ καὶ ἂν προεκταθῇ, ἀφήνει ὁλόκληρον τὸ σχῆμα πρὸς ἓν μέρος αὐτῆς. Ἐνῷ εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα δὲν συμβαίνει αὐτό. Διότι ἡ πλευρὰ ΗΘ, ἐὰν προεκταθῇ, θὰ κόψῃ τὸ σχῆμα.

Τὰ σχήματα ὅπως τὸ ΑΒΓΔΕ λέγονται **κυρτά.** Ὥστε τὸ ΖΗΘΙΚ





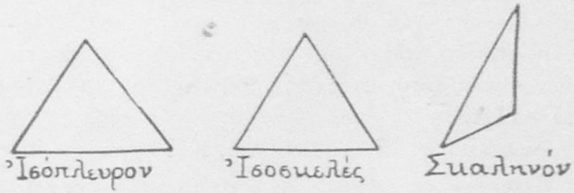
δὲν εἶναι **κυρτὸν** σχῆμα, λέγεται δὲ διὰ τοῦτο **κοῖλον.** Τὸ τρίγωνον εἶναι κυρτὸν σχῆμα.



Ὑπάρχουν εὐθύγραμμα σχήματα, τὰ ὁποῖα δὲν περιέχουν ἓν μόνον μέρος τοῦ ἐπιπέδου, ἀλλὰ δύο ἢ περισσότερα. Ἑνοῦνται δὲ εἰς ἓν ἢ περισσότερα σημεῖα, ὅπως π.χ. εἶναι τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα ΡΠΝΛΜ. Σχήματα ὅπως αὐτὰ λέγονται **σύνθετα,** ἐνῷ τὰ ἄλλα λέγονται **ἁπλᾶ.** Ἡμεῖς ὅταν λέγωμεν πολύγωνον θὰ ἐννοοῦμεν ἁπλοῦν καὶ κυρτόν.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

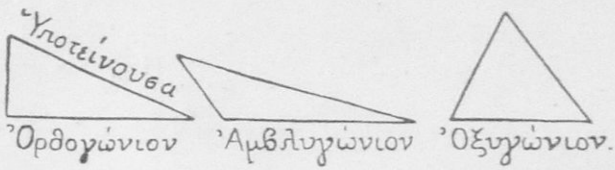
70. Ὁρισμοί.— Ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ λέγεται τὸ τρίγωνον: **Ἰσόπλευρον,** ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας, **ἰσοσκε-**



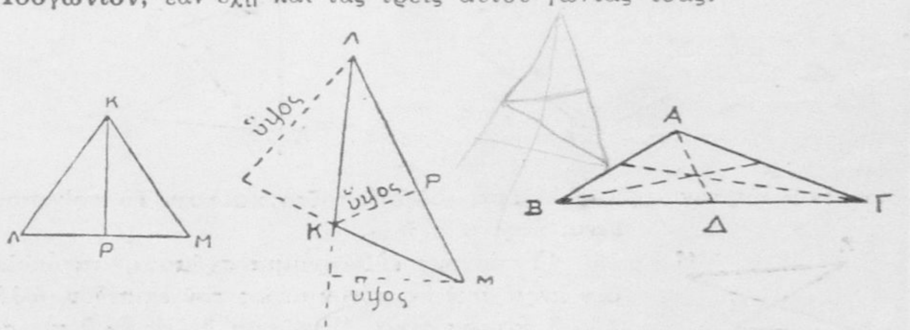
λές, ἐὰν ἔχῃ δύο μόνον πλευρὰς ἴσας καὶ **σκαληνόν,** ἐὰν δὲν ἔχῃ πλευρὰς ἴσας.

Ἐκ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ λέγεται τὸ τρίγωνον:

Ὀρθογώνιον, ἐὰν ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθήν. **Ἀμβλυγώνιον,** ἐὰν



ἔχῃ μίαν γωνίαν ἀμβλεῖαν. **Ὀξυγώνιον,** ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς ὀξείας. **Ἰσογώνιον,** ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς αὐτοῦ γωνίας ἴσας.



Ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου λέγεται ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρά.

Βάσις τριγώνου λέγεται μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τὴν κορυφήν, τὴν ἀπέναντι τῆς βάσεως, φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν, ἡ κάθετος αὕτη λέγεται **ὕψος** τοῦ τριγώνου. Οὕτως, ἐὰν εἰς τὸ τρίγωνον ΚΛΜ ληφθῇ ὡς βάσις ἡ ΛΜ, ἡ ΚΡ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τούτου.

Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον λαμβάνεται συνήθως ὡς βάσις ἡ ἄνισος πλευρά, εἰς δὲ τὸ ὀρθογώνιον ὡς βάσις καὶ ὕψος λαμβάνονται αἱ κάθετοι πλευραὶ αὐτοῦ.

Διάμεσος τριγώνου λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἄγεται ἐκ μιᾶς κορυφῆς αὐτοῦ μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς. Οὕτως ἡ ΑΔ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐὰν εἶναι ΒΔ=ΔΓ. Τὸ τρίγωνον ἔχει τρεῖς διαμέσους.

ΓΕΝΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

71. Θεώρημα. ***Παντὸς τριγώνου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.***

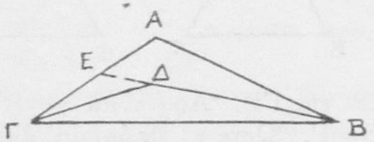
Τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως ταύτης εἶναι φανερόν, τὸ δὲ δεύτερον ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

Ἵνα δείξωμεν, ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων, προσθέτομεν εἰς αὐτὴν τὴν μικροτέραν ἐξ αὐτῶν, ὅτε ἔχομεν

$$ΒΓ+ΑΓ>ΑΒ.$$

Ἐὰν δὲ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ἀνίσων ἀφαιρέσωμεν τὴν αὐτὴν γραμμὴν ΑΓ, λαμβάνομεν $ΒΓ>ΑΒ-ΑΓ.$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ περὶ τῶν ἄλλων πλευρῶν.



72. Θεώρημα. ***Ἐὰν ἐντὸς τριγώνου ληφθῇ σημεῖόν τι Δ καὶ ἀχθοῦν ἐξ αὐτοῦ εὐθεῖαι εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς πλευρᾶς, αἱ ΔΒ, ΔΓ, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.***

Προεκτείνομεν τὴν ΒΔ, μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν ΑΓ, ἔστω δὲ Ε τὸ σημεῖον τῆς τομῆς. Ἀλλ' ἤδη, ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα ΒΑ+ΑΓ, ἤτοι εἰς τὸ ΒΑ+ΑΕ+ΕΓ, ἀντικαταστήσωμεν τὸ ΒΑ+ΑΕ διὰ τῆς εὐθείας ΒΕ, λαμβάνομεν ἄθροισμα ΒΕ+ΕΓ μικρότερον τοῦ προηγουμένου. Ἐὰν δὲ εἰς αὐτό, ἤτοι εἰς τὸ ΒΔ+ΔΕ+ΕΓ ἀντικαταστήσωμεν τὸ ΔΕ+ΕΓ διὰ τῆς εὐθείας ΔΓ, λαμβάνομεν τὸ ἄθροισμα ΒΔ+ΔΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τοῦ δευτέρου· ἄρα εἶναι μικρότερον καὶ τοῦ πρώτου, ἤτοι ἔχομεν ΒΔ+ΔΓ<ΒΑ+ΑΓ.

Σημείωσις. Αἱ τεθλασμέναι γραμμαὶ ΒΑΓ καὶ ΒΔΓ ἔχουν τὰ αὐτὰ ἄκρα. Καὶ ἡ πρώτη περικλείει τὴν δευτέραν. Ἀποδεικνύεται δὲ ὁμοίως, ὅτι πᾶσα κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ εἶναι μικροτέρα πάσης τεθλασμένης γραμμῆς, ἡ ὁποία περικλείει τὴν πρώτην, καὶ μετὰ τῆς ὁποίας ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα.

Ἀσκήσεις.

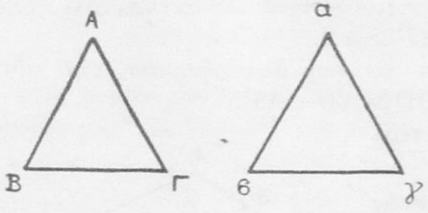
13) Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄ΒΓ ἔχουν τὴν ΒΓ κοινήν. Ἐὰν δὲ αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ Α΄Γ τέμνωνται, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΒ+Α΄Γ> Α΄Β+ΑΓ.

14) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περίμετρος κυρτοῦ σχήματος εἶναι μικροτέρα πάσης τεθλασμένης γραμμῆς, ἡ ὁποία τὸ περικλείει.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΙΣΟΣΚΕΛΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

73. Θεώρημα. ***Εἰς πᾶν ἰσοσκελὲς τρίγωνον αἱ γωνίαι, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν (αἱ παρὰ τὴν βάσιν), εἶναι ἴσαι.***

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΑΒ=ΑΓ. Ἐὰν ἐπαναληφθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐφαρμοσθοῦν αἱ ἴσαι γωνίαι Α καὶ α κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ πλευρὰ αβ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΓ καὶ ἡ αγ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ, τὸ σημεῖον β θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ καὶ τὸ γ ἐπὶ τοῦ Β καὶ ἡ εὐθεῖα βγ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΓΒ. Ἄρα εἶναι γ=Β καὶ ἐπειδὴ εἶναι καὶ γ=Γ, ἕπεται ὅτι Β=Γ. Ὥστε τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη.



74. Πόρισμα. ***Πᾶν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.***

75. Θεώρημα. ***Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ δύο γωνίας ἴσας, εἶναι ἰσοσκελές.***

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἔχον Β=Γ. Ἐὰν ἐπαναληφθῇ τὸ τρίγωνον καὶ τεθῇ τὸ αβγ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ κορυφὴ β νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Γ καὶ ἡ γ ἐπὶ τῆς Β, ἡ πλευρὰ βα θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς

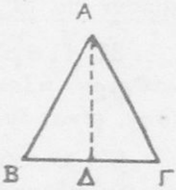
ΓΑ (διότι β=Γ) καὶ ἡ γα ἐπὶ τῆς ΒΑ καὶ τὸ α, κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν βα καὶ γα, θὰ γίνῃ κοινὸν σημεῖον τῶν ΒΑ καὶ ΓΑ, ὅπερ εἶναι τὸ Α· ὥστε τὸ α θὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ Α· ἐπομένως εἶναι αβ=ΑΓ καὶ ἐπειδὴ εἶναι αβ=ΑΒ, ἕπεται, ὅτι ΑΒ=ΑΓ· ὅ.ἔ.δ.

*76. Π ό ρ ι σ μ α. ***Πᾶν τρίγωνον ἰσογώνιον εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.***

77. Θ ε ώ ρ η μ α. ***Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου, διαιρεῖ τὴν βάσιν εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν.***

Διότι, ἐὰν περιστραφῇ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ περὶ τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α οὕτως, ὥστε ἡ γωνία ΔΑΓ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΔΑΒ, τὸ σημεῖον Γ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β, τὸ δὲ Δ θὰ μείνῃ ἀκίνητον. Ὥστε ἔχομεν ΔΒ=ΔΓ καὶ γωνΑΔΒ=γωνΑΔΓ· ὅ.ἔ.δ.

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς. Ἡ ὡς ἄνω εὐθεῖα ΑΔ παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι καὶ διάμεσος τοῦ τριγώνου καὶ ὕψος. Ὥστε εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον (εἰς τὸ ὁποῖον βάσιν θεωροῦμεν τὴν ἄνισον πλευρὰν) τὸ ὕψος εἶναι συγχρόνως καὶ διχοτόμος καὶ διάμεσος, ἢ ἡ διάμεσος ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν βάσιν εἶναι συγχρόνως καὶ ὕψος καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς, ἢ ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς καὶ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν αὐτῆς.



Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.

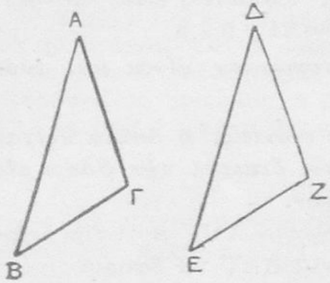
15) Αἱ προεκτάσεις τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου πρὸς τὸ μέρος τῆς βάσεως σχηματίζουν μετ' αὐτῆς γωνίας ἴσας.

16) Αἱ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶναι ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Ἐὰν δὲ αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ εἶναι ἴσαι, ἡ ΟΒ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΓ.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

78. Θ ε ώ ρ η μ α. ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, εἶναι ἴσα.***

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἔχοντα ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ καὶ Α=Δ. Λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα. Διότι, ἐὰν θέσωμεν τὴν γωνίαν Α ἐπὶ τῆς ἴσης της Δ, ἡ πλευρὰ ΑΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΔΕ καὶ ἡ ΑΓ ἐπὶ τῆς ΔΖ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ΑΒ=ΔΕ καὶ ΑΓ=ΔΖ, τὸ σημεῖον Β θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Ε καὶ τὸ Γ ἐπὶ τοῦ Ζ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΕΖ. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ἐφαρμόζουν, ἄρα εἶναι ἴσα.



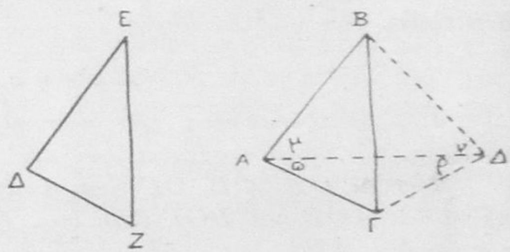
79. Π ό ρ ι σ μ α. ***Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ἴσα.***

80. Θ ε ώ ρ η μ α. ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ἴσα.***

Ἀποδεικνύεται τοῦτο εὐκόλως, ἐὰν θέσωμεν τὸ ἓν τρίγωνον ἐπὶ τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν αἱ ἴσαι πλευραί. Τότε θὰ ἐφαρμόσουν καὶ αἱ ἴσαι γωνίαι καὶ κατ᾽ ἀνάγκην καὶ τὸ τρίγωνον.

81. Π ό ρ ι σ μ α. ***Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην καὶ τὴν προσκειμένην ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, εἶναι ἴσα.***

82. Θ ε ώ ρ η μ α. ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν, εἶναι ἴσα.***



Ἔστωσαν ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ καὶ ΒΓ=ΕΖ. Ἐὰν τεθῇ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ οὕτως, ὥστε νὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΒΓΔ καὶ ἀχθῇ ἡ ΑΔ, ἕκαστον τῶν τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ εἶναι ἰσοσκελές· ὅθεν εἶναι μ=ν καὶ π=ρ· ἄρα εἶναι μ+π=ν+ρ, ἤτοι Α=Δ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα (Θ. 78).

83. Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς. α΄) Εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα αἱ ἴσαι πλευραὶ εὑρίσκονται ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν καὶ αἱ ἴσαι γωνίαι ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν.

β΄) Εἰς ἕκαστον τρίγωνον ἔχομεν ἓξ κύρια στοιχεῖα, ἤτοι τὰς τρεῖς πλευρὰς καὶ τὰς τρεῖς γωνίας αὐτοῦ. Ἐὰν δὲ ἐκ τῶν στοιχείων αὐτῶν γνωρίζωμεν τὴν ἰσότητα τριῶν, ὄχι οἱωνδήποτε ἀλλ' ἁρμοδίων, συνάγομεν καὶ τὴν ἰσότητα τῶν τριῶν ἄλλων.

Ἀσκήσεις.

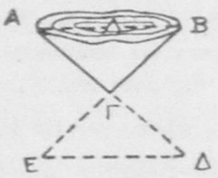
17) Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις ἴσας καὶ τὴν μίαν τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν ἴσην, εἶναι ἴσα.

18) Εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχομεν ΑΒ=ΑΔ καὶ ΓΒ=ΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι γωνΑΔΓ=γωνΑΒΓ.

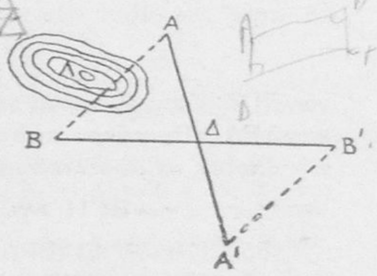
19) Αἱ διάμεσοι ἰσοσκελοῦς τριγώνου, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς αὐτοῦ, εἶναι ἴσαι.

20) Τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, εἶναι ἰσοσκελές.

21) Δύο τετράπλευρα ἔχοντα τὰς τέσσαρας πλευρὰς αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν καὶ μίαν γωνίαν, σχηματιζομένην ὑπὸ ἴσων πλευρῶν, ἴσην, εἶναι ἴσα.

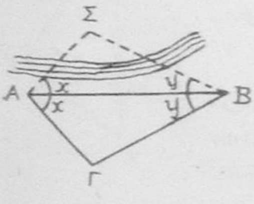


Σχ. 1

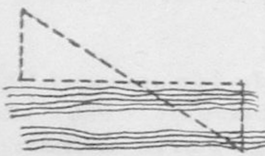


Σχ. 2

22) Εἰς τὰ σχήματα 1 καὶ 2 τὸ Λ παριστᾷ λίμνην. Δεικνύουν δὲ ταῦτα τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἀπόστασιν τῶν σημείων Α καὶ Β χωριζομένων δι' απροσίτου ἐκτάσεως. Νὰ ἐξηγήσητε τοῦτον.



Σχ. 3



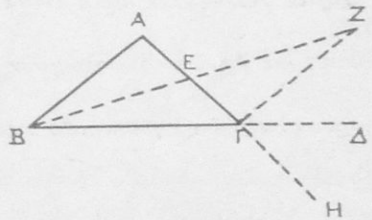
Σχ. 4

23) Εἰς τὸ σχῆμα 3 τὸ Σ παριστᾷ σταθερὸν σημαντῆρα ἐπιπλέοντα ἐπὶ τῆς θαλάσσης, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΒ κεῖται ἐπὶ τῆς παραλίας. Δεικνύει δὲ τοῦτο τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων Α καὶ Β ἀπὸ τὸ Σ. Νὰ ἐξηγήσητε τὸν τρόπον αὐτόν.

24) Τὸ σχῆμα 4 δεικνύει τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ πλάτος ποταμοῦ. Νὰ ἐξηγήσητε τοῦτον.

84. Θεώρημα. ***Πᾶσα ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ.***

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐξωτερικὴ γωνία αὐτοῦ ἡ ΑΓΔ. Λέγω, ὅτι αὕτη εἶναι μεγαλυτέρα καὶ τῆς γωνίας Α καὶ τῆς γωνίας Β. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ΑΓΔ > Α, φέρομεν ἐκ τῆς κορυφῆς Β τὴν διάμεσον ΒΕ, τὴν ὁποίαν προεκτείνομεν κατὰ τὴν ΕΖ, ἴσην μὲ τὴν ΒΕ. Ἐὰν δὲ φέρωμεν τὴν ΖΓ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΕΖΓ ἴσον μὲ τὸ ΑΒΕ κατὰ τὸ Θ. 78· ὥστε εἶναι γωνΕΓΖ = γωνΑ. Ἀλλὰ γωνΑΓΔ > γωνΕΓΖ· ὥστε εἶναι καὶ γωνΑΓΔ > γωνΑ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι γωνΑΓΔ > Β, μόνον ποὺ πρέπει νὰ φέρωμεν τὴν διάμεσον ἐκ τῆς Α, τὴν ὁποίαν νὰ προεκτείνωμεν ὡς ἄνω κτλ.· ἀποδεικνύεται δέ, ὅτι



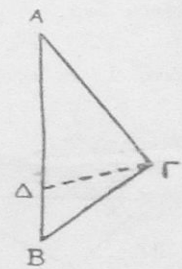
γωνΒΓΗ > γωνΒ, ἀλλὰ γωνΒΓΗ = γωνΑΓΔ.

85. Ἐπειδὴ ΑΓΔ + ΑΓΒ = 2 ὀρθαί, καὶ ἐπειδὴ Α < ΑΓΔ, ἕπεται, ὅτι Α + ΑΓΒ < 2 ὀρθῶν. Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι:

Τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν τριγώνου εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν. Ἐκ τούτου δὲ πάλιν ἕπεται, ὅτι ἓν τρίγωνον μόνον μίαν γωνίαν ὀρθὴν ἢ μίαν ἀμβλεῖαν δύναται νὰ ἔχῃ.

Ἐὰν δὲ ἔχῃ μίαν ἐξ αὐτῶν, αἱ ἄλλαι δύο θὰ εἶναι ὀξεῖαι.

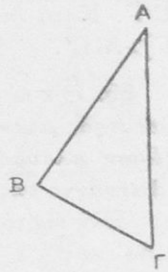
86. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἄνισοι, καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἄνισοι. Ἡ μεγαλυτέρα γωνία ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς.***



Ἤτοι, ἐὰν ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι ΑΒ > ΑΓ, θὰ εἶναι καὶ Γ > Β.

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ μέρος ΑΔ ἴσον μὲ τὴν ΑΓ καὶ φέρομεν τὴν ΓΔ. Ἡ γωνία ΑΔΓ (ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΓΔΒ) εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Β (Θ. 84) καὶ ἴση πρὸς τὴν ΑΓΔ (ΑΔ = ΑΓ).

Ὥστε ἡ γωνία ΑΓΔ, ἥτις εἶναι μέρος τῆς Γ, ὑπερβαίνει τὴν Β. Πολὺ δὲ περισσότερον ἡ γωνία Γ θὰ ὑπερβαίνῃ τὴν Β.



87. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἄνισοι, καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἄνισοι. Ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας.***

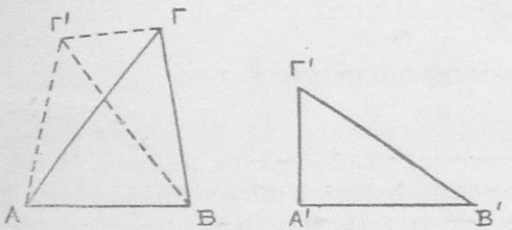
Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον ἔχομεν Β>Γ· λέγω, ὅτι εἶναι καὶ ΑΓ>ΑΒ.

Ἂν δὲν ἦτο ΑΓ>ΑΒ, θὰ ἦτο ἢ ΑΓ=ΑΒ ἢ ΑΓ<ΑΒ· ἀλλ' ἂν ἦτο ΑΓ=ΑΒ, θὰ ἦτο καὶ Β=Γ, ὅπερ ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν· ἂν δὲ ἦτο ΑΓ<ΑΒ, θὰ ἦτο καὶ Β<Γ (Θ. 86), ὅπερ καὶ τοῦτο ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Ὥστε θὰ εἶναι ΑΓ>ΑΒ.

Σημείωσις. Ἡ ἀπόδειξις ὅτι ΑΓ>ΑΒ εἴδομεν, ὅτι δὲν ἐγένετο ἀπ' εὐθείας. Ἀλλ' ἐπειδὴ περὶ τοῦ σχετικοῦ μεγέθους τῶν εὐθειῶν ΑΓ καὶ ΑΒ τρεῖς ὑποθέσεις δύνανται νὰ γίνουν, ἐξητάσαμεν τὰς δύο, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντίθετοι πρὸς τὸ συμπέρασμα τοῦ θεωρήματος. Εἴδομεν δέ, ὅτι αὗται εἶναι ψευδεῖς, διότι ὁδηγοῦν εἰς ἄτοπα. Μένει λοιπὸν ὡς ἀληθὴς ἡ τρίτη ὑπόθεσις.

Ἡ τοιαύτη μέθοδος τῆς ἀποδείξεως λέγεται ἀπαγωγὴ εἰς ἄτοπον.

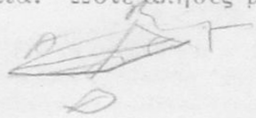
88. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν, τὰς δὲ περιεχομένας ὑπ' αὐτῶν γωνίας ἀνίσους, αἱ λοιπαὶ πλευραὶ θὰ εἶναι ἄνισοι, καὶ μεγαλυτέρα θὰ εἶναι ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας.***



Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ', εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι ΑΒ=Α'Β', ΒΓ =Β'Γ' καὶ γωνΒ>γωνΒ'. Θὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ΑΓ> Α'Γ'. Πρὸς τοῦτο θέτομεν τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ Α'Β' νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΑΒ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι γωνΒ>γωνΒ', ἡ Β'Γ' θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς γωνίας Β καὶ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΒΓ'. Ἀλλὰ τότε τὸ τρίγωνον ΒΓ'Γ εἶναι ἰσοσκελές. Ἑπομένως εἶναι γωνΒΓ'Γ=ΒΓΓ'. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι γωνία ΑΓ'Γ>γωνΒΓ'Γ καὶ γωνΓ'ΓΑ<γωνΒΓΓ', ἔπεται, ὅτι γωνΑΓ′Γ>γωνΓ′ΓΑ. Εἶναι δὲ αὗται γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΓ′Γ. Κατὰ δὲ τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι ΑΓ>ΑΓ′, ἤτοι ΑΓ>Α′Γ′.

89. Θ ε ώ ρ η μ α. ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν, τὰς δὲ λοιπὰς πλευρὰς ἀνίσους, αἱ ἀπέναντι τῶν ἀνίσων πλευρῶν γωνίαι εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα θὰ εἶναι ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς.***

Ἐὰν εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ ἄνισοι πλευραὶ εἶναι μόνον αἱ ΑΓ καὶ Α′Γ′, εἶναι δὲ ΑΓ>Α′Γ′, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι καὶ γωνΒ>γωνΒ′. Ἀλλὰ ὅλαι αἱ ἄλλαι ὑποθέσεις περὶ τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι γωνΒ=γωνΒ′ καὶ γωνΒ<γωνΒ′. Ἀλλ᾽ εὐκόλως δεικνύεται (Θ. 75 καὶ Θ. 88), ὅτι αὗται ὁδηγοῦν εἰς ἄτοπα. Ὥστε ἀληθὲς μόνον εἶναι, ὅτι γωνΒ>γωνΒ′.



Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.

25) Αἱ γωνίαι αἱ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν πλευρὰν τριγώνου εἶναι ὀξεῖαι.

26) Εἰς τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ΑΔ=ΒΓ καὶ γων ΑΔΓ>γωνΒΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΓ>ΒΔ.

27) Ἐὰν διάμεσος τριγώνου περιέχηται μεταξὺ ἀνίσων πλευρῶν, αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἔκ τινος σημείου αὐτῆς μέχρι τῶν ἄκρων τῆς τρίτης πλευρᾶς, εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἡ πρὸς τὸ μέρος τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς.

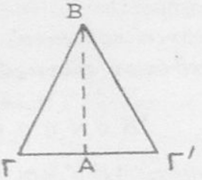
ΙΣΟΤΗΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

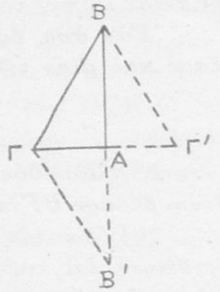
90. Αἱ περιπτώσεις ἰσότητος τριγώνων, τὰς ὁποίας ἐμάθομεν, περιλαμβάνουν, ὡς εἶναι εὐνόητον, καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ ἰδιαίτεραι περιπτώσεις ἰσότητος αὐτῶν. Ἀλλὰ πρὶν τὰς ἐξετάσωμεν θὰ ἴδωμεν τὰ ἑξῆς :

Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΓΒΓ′, εἰς ὃ ἡ ΒΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΓΓ′, εὐκόλως συνάγομεν ὅτι :

Πᾶν ἰσοσκελὲς τρίγωνον εἶναι τὸ διπλάσιον ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται διὰ τοῦ ὕψους του.

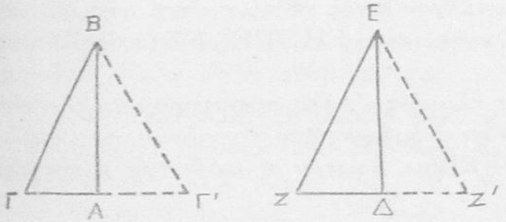
Ἐξ ἄλλου, ἐὰν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Α=1 ὀρθὴ) περιστραφῇ περὶ τὴν κάθετον πλευρὰν ΑΒ μέχρις ὅτου πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἄλλου μέρους τοῦ ἐπιπέδου καὶ λάβῃ τὴν θέσιν ΒΑΓ', θὰ σχηματισθῇ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΓΒΓ', διότι ἡ ΓΑΓ' εἶναι εὐθεῖα γραμμή. Ὁμοίως δέ, ἐὰν περιστραφῇ τὸ ΑΒΓ περὶ τὴν ΑΓ, θὰ σχηματισθῇ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΓΒΒ'. Ἐξ οὗ συνάγομεν, ὅτι :





Πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ὅπερ ἔχει βάσιν τὸ διπλάσιον μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ἴσας πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν.

91. Κατόπιν τούτων ἔστωσαν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι Α=Δ=1 ὀρθὴ καὶ ΓΒ=ΕΖ καὶ Β=Ε. Ἀλλά, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, τὸ μὲν ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΓΒΓ', τὸ δὲ ΔΕΖ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΖΕΖ'. Ἀλλὰ τὰ δύο ταῦτα ἰσοσκελῆ τρίγωνα κατὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ Θ. 78 εἶναι ἴσα. Ὥστε, ἐὰν θέσωμεν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ἐφαρμόζουν. Θὰ πέσῃ λοιπὸν τὸ Ε ἐπὶ τοῦ Β, τὸ Ζ ἐπὶ τοῦ Γ καὶ προφανῶς τὸ Δ ἐπὶ τοῦ Α. Ὥστε, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΖΔΕ ἐφαρμόζουν. Καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσα. Ἐκ τούτου λοιπὸν συνάγεται τὸ θεώρημα :



Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας αὐτῶν ἴσας καὶ μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην, εἶναι ἴσα.

92. Ἔστω ἤδη, ὅτι εἰς τὰ ἀνωτέρω ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ΑΒ=ΔΕ καὶ ΒΓ=ΕΖ. Ἐὰν θέσωμεν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ παρὰ τὸ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ ΕΔ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΒΑ, ἡ ΔΖ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΓΑ καὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΒΑΓ'. Ἀλλὰ τότε τὸ τρίγωνον ΓΒΓ' εἶναι ἰσοσκελές. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΒΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΓΓ′, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΓ′, ἤτοι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, εἶναι ἴσα. Ἕπεται λοιπὸν τὸ θεώρημα :

Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσην, εἶναι ἴσα.

Ἀσκήσεις.

28) Ἐὰν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα, τὰ ὕψη ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ΒΓ καὶ ΕΖ εἶναι ἴσα.

29) Ἐκ τῶν ἄκρων τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς ἀπέναντι πλευράς. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ κάθετοι αὗται εἶναι ἴσαι.

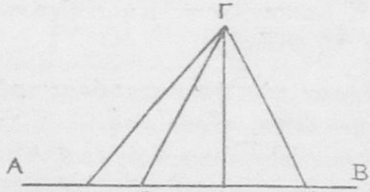
30) Ἐὰν αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τῶν κορυφῶν Α καὶ Β τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὰς ἀπέναντι πλευρὰς εἶναι ἴσαι, αἱ πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

ΠΕΡΙ ΚΑΘΕΤΟΥ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΩΝ

93. Ἐκ τοῦ σημείου Γ, κειμένου ἐκτὸς εὐθείας, π.χ. τῆς ΑΒ, φέρομεν τὴν κάθετον ΓΔ καὶ πλαγίας τὰς ΓΗ, ΓΕ, ΓΖ κτλ. Κατόπιν τούτου θὰ συγκρίνωμεν :

α′) Τὴν κάθετον πρὸς τὰς πλαγίας. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι οἱαδήποτε ἐξ αὐτῶν εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου μία τῶν καθέτων εἶναι ἡ ΓΔ. ***Εἶναι λοιπὸν ἡ κάθετος μικροτέρα πάσης πλαγίας*** (Θ. 87).

β′) Τὰς πλαγίας, ἐν σχέσει μὲ τὰς ἀποστάσεις τῶν ποδῶν των ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου. Ἀλλ᾽ ἐὰν ΔΕ=ΔΖ, τὰ τρίγωνα ΓΔΕ καὶ ΓΔΖ εἶναι ἴσα (Θ. 78). Ὥστε εἶναι ΓΕ=ΓΖ. Ἐξ οὗ συνάγομεν, ὅτι : ***Δύο πλάγιαι, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, εἶναι ἴσαι.***



γ′) Ἀλλ᾽ ἐὰν ΔΗ>ΔΕ, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον ΓΕΗ, ἡ γωνία ΓΕΗ εἶναι ἀμβλεῖα, διότι εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ὀξείας ΓΕΔ. Ὥστε εἶναι ΓΗ>ΓΕ (Θ. 87).

Ἄρα: ***Ἐκ δύο πλαγίων ἐκείνη, τῆς ὁποίας ὁ ποὺς ἀπέχει περισσότερον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, εἶναι μεγαλυτέρα.***

Ἐὰν αἱ πλάγιαι, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουν ἄνισον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, κεῖνται ἑκατέρωθεν αὐτῆς, ὥς αἱ ΓΗ, ΓΖ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΔΗ τὸ μέρος ΔΕ ἴσον πρὸς τὴν ΔΖ. Τότε ἡ πλαγία ΓΕ ἰσοῦται μὲ τὴν ΓΖ· ἐπειδὴ δὲ ΓΗ>ΓΕ, ἕπεται, ὅτι καὶ ΓΗ>ΓΖ.

94. Καὶ τὰ ἀντίστροφα τῶν τριῶν προηγουμένων προτάσεων ἀληθεύουν, ἤτοι: ***Ἐὰν ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας φέρωμεν ὁσασδήποτε εὐθείας μέχρις αὐτῆς:***

α΄) ***Ἡ μικροτέρα ἐξ ὅλων τῶν ἀγομένων εὐθειῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν.***

β΄) ***Ἐὰν δύο πλάγιαι εἶναι ἴσαι, οἱ πόδες αὐτῶν ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου,*** καὶ

γ΄) ***Ἐὰν δύο πλάγιαι εἶναι ἄνισοι, ὁ ποὺς τῆς μεγαλυτέρας ἀπέχει περισσότερον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου.***

Ἀποδεικνύονται δὲ καὶ αἱ τρεῖς αὗται προτάσεις εὐκολώτατα διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Π.χ. διὰ τὴν πρώτην λέγομεν, ἐὰν ἡ μικροτέρα δὲν ἦτο κάθετος, θὰ ἦτο μία ἄλλη, ἀλλὰ τότε ἡ ἄλλη θὰ ἦτο μικροτέρα τῆς πρώτης. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἄτοπον, διότι ἡ πρώτη εἶναι μικροτέρα. Ἄρα εἶναι αὕτη κάθετος.

95. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθείας.— Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι ἡ μικροτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ ἀχθοῦν ἀπὸ τὸ Γ μέχρι τῆς ΑΒ. Γνωρίζομεν δέ, ὅτι εἶναι μία καὶ μόνη. Ἕνεκα δὲ τούτου ἡ ΓΔ ὁρίζει τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου Γ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ.

Ὥστε: ***Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθείας λέγεται ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν.***

96. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω περὶ πλαγίων παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς: Πλάγιαι ἴσαι μεταξύ των δύο μόνον δύνανται νὰ εἶναι, διότι τρίτη πλαγία θὰ εἶναι ἢ μεταξὺ αὐτῶν ἢ ἐκτὸς αὐτῶν. Ἑπομένως θὰ εἶναι ἄνισος πρὸς αὐτάς. Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι: ***Ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς εὐθείας εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀχθοῦν εἰς αὐτὴν τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι.***

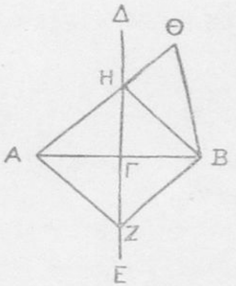
97. Ἤδη ἐκ τῆς προηγουμένης προτάσεως συνάγεται καὶ ἡ ἑξῆς: ***Περιφέρεια κύκλου καὶ εὐθεῖα γραμμὴ δὲν δύνανται νὰ***

ἔχουν κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο. Ἀποδεικνύεται δὲ αὕτη εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

98. Ἀφοῦ λοιπὸν περιφέρεια καὶ εὐθεῖα δὲν δύνανται νὰ ἔχουν κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο, ἕπεται ὅτι κανὲν μέρος τῆς περιφερείας, ὁσονδήποτε μικρόν, δὲν δύναται νὰ εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Ὥστε: ***Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι γραμμὴ καμπύλη.***

99. Θεώρημα τῆς καθέτου, ἡ ὁποία διχοτομεῖ εὐθεῖαν.— Εἰς τὸ θεώρημα τοῦτο ἐξετάζονται αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας, τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῆς καθέτου ἢ ἐκτὸς αὐτῆς.



1ον. Ἔστω ἡ ΕΓΔ κάθετος εἰς τὸ μέσον Γ τῆς εὐθείας ΑΒ. Ἐὰν δὲ Ζ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς καθέτου ΕΓΔ, αἱ πλάγιαι ΖΑ καὶ ΖΒ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι καὶ ΓΑ=ΓΒ (93, β).

2ον. Ἔστω Θ σημεῖόν τι ἐκτὸς τῆς καθέτου ΕΓΔ κείμενον· ἂν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΘΑ καὶ ΘΒ, ἡ ΘΑ τέμνει τὴν κάθετον ταύτην εἴς τι σημεῖον Η καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου ΘΗΒ λαμβάνομεν ΘΒ<ΒΗ+ΗΘ· καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΒΗ=ΑΗ, εὑρίσκομεν ΘΒ <ΑΗ+ΗΘ, ἤτοι ΘΒ<ΑΘ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι:

Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου εὐθείας ἀχθῇ κάθετος ἐπ᾽ αὐτήν:

1ον. ***Πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων,*** καὶ

2ον. ***Πᾶν σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου κείμενον ἀπέχει ἄνισον ἀπὸ τῶν ἄκρων.***

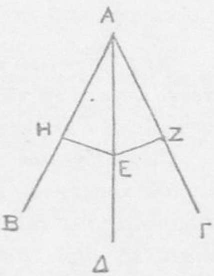
100. Ἐκ τούτου δὲ ἕπονται τὰ ἑξῆς:

1ον. ***Πᾶν σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων εὐθείας, κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ταύτης.*** Διότι, ἂν δὲν ἔκειτο ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης, θὰ ἀπεῖχεν ἄνισον.

2ον. ***Πᾶν σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἄνισον ἀπὸ τῶν ἄκρων εὐθείας, κεῖται ἐκτὸς τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.*** Διότι, ἂν ἔκειτο ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης, θὰ ἀπεῖχεν ἴσον.

101. Ἔννοια τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου.— Ἐπὶ τῶν προτάσεων τῶν §§ 99 καὶ 100 παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς: Τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου δύνανται νὰ διαιρεθοῦν εἰς δύο ὁμάδας. Ἡ μία περιέχει τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν ἄκρων εὐθείας τινὸς αὐτοῦ καὶ ἡ ἄλλη περιέχει τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπὸ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἄνισον. Ἀλλὰ τὰ σημεῖα τῆς πρώτης ὁμάδος κατέχουν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ μίαν ὡρισμένην θέσιν ἢ τόπον σχετικὸν μὲ τὴν εὐθεῖαν. Εἶναι δὲ ὁ τόπος οὗτος ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας. Ἐπὶ τῆς εὐθείας δὲ αὐτῆς κεῖνται ὅλα τὰ ἄπειρα σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν κοινὴν ἰδιότητα, τοῦ νὰ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας. Διότι οὐδὲν σημεῖον ἔχον τὴν ἰδιότητα αὐτὴν εἶναι δυνατὸν νὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας (§ 100, 1). Ἐξ ἄλλου, οὐδὲν σημεῖον τῆς καθέτου ταύτης εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ ἔχῃ τὴν ἰδιότητα τοῦ νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων (§ 99, 1). Ἕνεκα τούτων λοιπὸν ***ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον εὐθείας λέγεται γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας.***

102. Θεώρημα τῆς διχοτόμου γωνίας.—Τὸ θεώρημα τοῦτο ἐξετάζει τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων τῆς διχοτόμου γωνίας ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς.



Ἔστωσαν ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ, Ε τυχὸν σημεῖον τῆς ΑΔ καὶ ΕΗ, ΕΖ, αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ ἀντιστοίχως. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΗ, ΑΕΖ εἶναι ἴσα (§ 91) καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ΕΖ=ΕΗ.

Ὥστε: ***Πᾶν σημεῖον τῆς διχοτόμου γωνίας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς.***

103. Ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι τὸ σημεῖον Ε ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΒΑΓ, ἤτοι εἶναι ΕΖ=ΕΗ. Ἂν ἀχθῇ ἡ ΑΕ, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΗ, ΑΕΖ εἶναι ἴσα (§ 92)· ὥστε θὰ εἶναι γων ΖΑΕ=γωνΗΑΕ, ἤτοι ἡ ΑΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ.

Ὥστε: ***Πᾶν σημεῖον ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῶν πλευρῶν γωνίας κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας.***

104. Ἐκ τῶν προτάσεων 102 καὶ 103 ἕπονται τὰ ἑξῆς:

1ον. ***Ἐὰν αἱ ἀποστάσεις σημείου ἀπὸ τῶν πλευρῶν γωνίας εἶναι ἄνισοι, τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται ἐκτὸς τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας.***

2ον. ***Πᾶν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας, ἀπέχει ἄνισον ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς.***

105. Ἐὰν συλλογισθῶμεν ὡς εἰς τὴν § 101, συνάγομεν, ὅτι ***ἡ διχοτόμος γωνίας εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς.***

Σημείωσις. Ἐπίσης, ἐὰν ἔχωμεν ὑπ' ὄψει μας, ὅσα εἴπομεν εἰς τὴν § 34, συνάγομεν, ὅτι ἡ περιφέρεια κύκλου εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ ἓν σημεῖον αὐτοῦ.

Ἐκ τῶν τριῶν δὲ παραδειγμάτων γεωμετρικῶν τόπων, τὰ ὁποῖα εἴδομεν, συνάγομεν, ὅτι μία γραμμὴ θὰ εἶναι γεωμετρικὸς τόπος σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν κοινὴν ἰδιότητα, α΄) ὅταν ὅλα τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται ἐπὶ τῆς γραμμῆς αὐτῆς, καὶ β΄) ὅταν ὅλα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς ἔχουν τὴν κοινὴν αὐτὴν ἰδιότητα (*).

Ἀσκήσεις.

31) Ἔχομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ποῖον σημεῖον τῆς γραμμῆς ΒΑΓ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς πλευρᾶς ΒΓ; Καὶ ποῖον σημεῖον τῆς γραμμῆς ΑΓΒ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς πλευρᾶς ΑΒ;

32) Ἔχομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐκ δὲ τοῦ σημείου Ο τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου αἱ ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΒΓ διέρχονται διὰ τῶν μέσων των. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι α΄) τὸ σημεῖον Ο ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφὰς τοῦ τριγώνου, καὶ β΄) τὸ σημεῖον Ο κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΓ.

33) Δίδεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ποῖον σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν; Καὶ ποῖον σημεῖον τῆς ΓΑ ἀπέχει ἐπίσης ἴσον ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν;

34) Δίδεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ ὑπάρχει σημεῖον Ο, ἐκ τοῦ ὁποίου αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἰς τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ διχοτομοῦν τὰς γωνίας Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι α΄) τὸ σημεῖον Ο ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, καὶ β΄) τὸ σημεῖον Ο κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α.

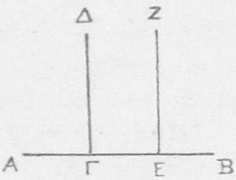
(*) Τοὺς γεωμετρικοὺς τόπους ἐπενόησεν ὁ φιλόσοφος Πλάτων.

ΔΓ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ

106. Εἴδομεν προηγουμένως (§ 68, β), ὅτι ἐκ σημείου οἱουδήποτε ἄγεται κάθετος ἐπὶ εὐθεῖαν καὶ μία μόνη. Ἐκ τούτου ἕπεται τὸ ἑξῆς: ***Δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν δὲν δύνανται νὰ ἔχουν οὐδὲν κοινὸν σημεῖον.***

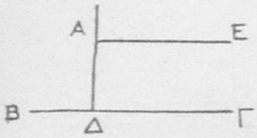
Ἔστωσαν αἱ ΓΔ καὶ ΕΖ κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Λέγω, ὅτι αἱ κάθετοι αὗται δὲν δύνανται νὰ ἔχουν κανὲν κοινὸν σημεῖον ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ὁσονδήποτε καὶ ἂν προεκταθοῦν, δὲν θὰ συναντηθοῦν. Καὶ πράγματι. Αἱ κάθετοι αὗται δὲν δύνανται νὰ ἔχουν δύο ἢ περισσότερα κοινὰ σημεῖα. Διότι τότε θὰ συνέπιπτον, καὶ θὰ εἴχομεν μίαν καὶ μόνον κάθετον. Ὥστε, ἂν ἔχουν κοινὸν σημεῖον, θὰ ἔχουν μόνον ἕν. Ἀλλὰ καὶ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον. Διότι ἐκ τοῦ κοινοῦ τούτου σημείου θὰ εἴχομεν δύο καθέτους ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ὅπερ ἀδύνατον. Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι ὑπάρχουν εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ προεκταθοῦν. Τὰς τοιαύτας εὐθείας λέγομεν ***παραλλήλους.***



Ὥστε: ***Δύο εὐθεῖαι λέγονται παράλληλοι, ὅταν, κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθοῦν ἑκατέρωθεν.***

Κατὰ ταῦτα, ἡ πρώτη πρότασις ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς: ***Δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι.***

107. Σχετικαὶ θέσεις δύο εὐθειῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.— Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται, ὅτι δύο εὐθεῖαι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὰς ὁποίας ὑποθέτομεν προεκτεινομένας ἑκατέρωθεν ἐπ᾽ ἄπειρον, δύνανται νὰ ἔχουν α′) δύο κοινὰ σημεῖα, ὁπότε συμπίπτουν, β′) ἓν κοινὸν σημεῖον, ὁπότε τέμνονται, καὶ γ′) οὐδὲν κοινὸν σημεῖον, ὁπότε εἶναι παράλληλοι.



108. Θεώρημα. ***Διὰ σημείου Α, ἐκτὸς εὐθείας ΒΓ κειμένου, δύναται νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτήν.***

Ἐκ τοῦ σημείου Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τὴν ΒΓ, κατόπιν δὲ φέρομεν ἐκ τοῦ Α τὴν κάθετον ΑΕ ἐπὶ τὴν ΑΔ. Τότε αἱ εὐθεῖαι ΑΕ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι, διότι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΔ.

109. Αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου.—*Ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς εὐθείας, μία μόνη ἄγεται παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτήν.*

110. Πόρισμα 1ον. ***Πᾶσα εὐθεῖα, συναντῶσα μίαν τῶν παραλλήλων, θὰ συναντᾷ καὶ τὴν ἄλλην.***

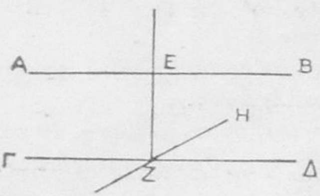
Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

111. Πόρισμα 2ον. ***Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τρίτην εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι.***

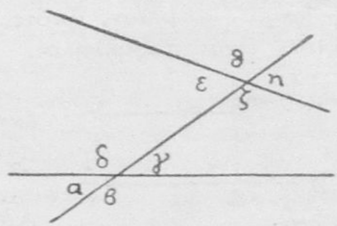
Διότι, ἂν συνηντῶντο εἴς τι σημεῖον, θὰ εἴχομεν ἐξ αὐτοῦ δύο παραλλήλους πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

112. Πόρισμα 3ον. ***Πᾶσα κάθετος ἐπὶ μίαν τῶν παραλλήλων εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.***

Ἤτοι, ἐὰν αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι καὶ ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ. Διότι πρῶτον ἡ ΕΖ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ΑΒ, θὰ συναντᾷ καὶ τὴν ΓΔ (Π. 110). Ἔπειτα λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ εἰς τὸ Ζ: Διότι, ἂν δὲν εἶναι κάθετος καὶ ἐκ τοῦ Ζ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΖ, ἔστω τὴν ΖΗ, αὐτη πρέπει νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, διότι καὶ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἄτοπον. Ὥστε ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ.



113. Γωνίαι σχηματιζόμεναι ὑπὸ τεμνούσης δύο ἄλλας εὐθείας.—Ὅταν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ τρίτης, σχηματίζονται 8 γωνίαι. Ἐκ τούτων, αἱ μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης κείμεναι καλοῦνται **ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.** Τοιαῦται εἶναι αἱ γωνίαι γ καὶ ζ, ὡς καὶ αἱ δ καὶ ε.

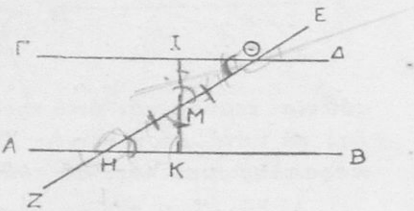


Αἱ γωνίαι δ καὶ ζ, ὡς καὶ αἱ γ καὶ ε (αἱ ἑκατέρωθεν τῆς τεμνούσης καὶ μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν κείμεναι καὶ αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι ἐφεξῆς), καλοῦνται **ἐντὸς ἐναλλάξ.**

Αἱ γωνίαι γ καὶ η (ὧν ἡ μία κεῖται ἐντός, ἡ δὲ ἄλλη ἐκτός, καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης) λέγονται **ἐντός, ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.** Οὕτω λέγονται καὶ αἱ γωνίαι δ καὶ θ, β καὶ ζ, α καὶ ε.

114. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τμηθοῦν ὑπὸ τρίτης οἱασδήποτε, θὰ σχηματίσουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας.***

Ἔστωσαν παράλληλοι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΕΖ εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Θ ἀντιστοίχως· λέγω, ὅτι γωνΓΘΗ=γων ΘΗΒ. Ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς ΘΗ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ, τὴν ΜΙ· ἀλλ' αὕτη θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Κ (Π. 112). Ἀλλὰ τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΙΘ καὶ ΜΚΗ ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας ΘΜ καὶ ΜΗ ἴσας, ἔχουν δὲ καὶ τὰς γωνίας ΙΜΘ καὶ ΗΜΚ ἴσας, ὡς κατὰ κορυφήν. Εἶναι λοιπὸν ἴσα (Θ. 91). Ὥστε εἶναι γωνΓΘΗ=γωνΘΗΒ.



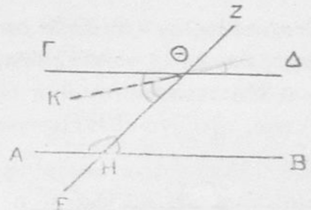
Σημείωσις. Καὶ αἱ ἄλλαι, ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι, ΔΘΗ καὶ ΑΗΘ εἶναι μεταξύ των ἴσαι, διότι εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν προηγουμένων ἴσων γωνιῶν.

115. Πόρισμα. ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τμηθοῦν ὑπὸ τρίτης οἱασδήποτε, θὰ σχηματίσουν τὰς ἐντός, ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη παραπληρωματικάς.***

Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο εὐκόλως, ἐὰν προσέξωμεν, ὅτι ἐκ τῶν ἐντὸς ἐκτὸς γωνιῶν, ἡ ἐκτὸς εἶναι κατὰ κορυφὴν μιᾶς τῶν ἐντὸς ἐναλλάξ· ἐκ δὲ τῶν ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἡ μία εἶναι παραπληρωματικὴ μιᾶς τῶν ἐντὸς ἐναλλάξ.

116. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας, αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι.***

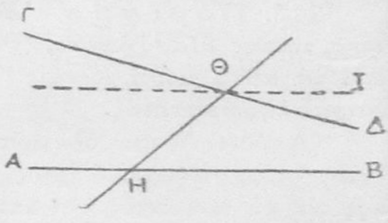
Ἔστω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΕΖ εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Θ ἀντιστοίχως, σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ΓΘΗ καὶ ΘΗΒ ἴσας· τότε λέγω, ὅτι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι. Ἀλλ' ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι δὲν εἶναι παράλληλοι· ἐὰν ἐκ τοῦ Θ φέρωμεν τὴν ΘΚ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, θὰ εἶναι κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα γωνΚΘΗ=γωνΘΗΒ. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ εἶναι καὶ γων ΓΘΗ=γωνΘΗΒ, πρέπει νὰ εἶναι γωνΚΘΗ=γωνΓΘΗ. Ἤδη ὅμως παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ γωνίαι αὗται ἔχουν τὴν κορυφὴν Θ κοινὴν καὶ τὴν πλευρὰν ΘΗ κοινήν, αἱ δὲ μὴ κοιναὶ πλευραὶ ΘΓ καὶ ΘΚ εἶναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κοινῆς. Πρέπει λοιπὸν αὗται νὰ συμπίπτουν. Ἑπομένως ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ.



117. Πόρισμα 1ον. ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζουν ἢ τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη παραπληρωματικάς, αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι.***

Αἱ δύο αὗται περιπτώσεις ἀνάγονται εἰς τὸ Θ. 116, καθ᾽ ὃν τρόπον αἱ περιπτώσεις τοῦ Π. 115 ἀνήχθησαν εἰς τὸ Θ. 114.

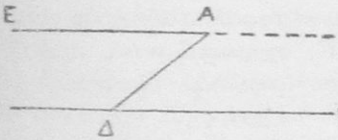
118. Πόρισμα 2ον. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν, ὅτι ἐὰν δύο εὐθεῖαι, τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης, δὲν σχηματίζουν γωνίας, ὡς λέγει τὸ Θ. 116 καὶ τὸ Π. 117, αἱ εὐθεῖαι δὲν εἶναι παράλληλοι. Οὕτως, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΒΗΘ καὶ ΔΘΗ δὲν εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν εἶναι παράλληλοι.

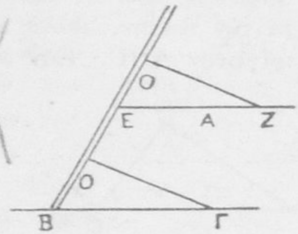


Ἤδη παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς: Ἐὰν εἶναι $ΒΗΘ+ΔΘΗ<2$ὀρθ., δυνάμεθα εἰς τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, π.χ. εἰς τὴν ΔΘΗ, νὰ προσθέσωμεν μίαν γωνίαν τοιαύτην, ὥστε αὐτὴ μετὰ τῶν δύο ἄλλων νὰ δώσουν ἄθροισμα δύο ὀρθῶν. Ἔστω δέ, ὅτι αὕτη εἶναι ἡ ΔΘΙ. Ἀλλὰ τότε ἡ μὲν ΘΙ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ δὲ ΘΔ κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας ΗΘΙ. Ὥστε, ἐὰν ἡ ΓΘΔ προεκταθῇ, θὰ συναντήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ πρὸς τὸ μέρος τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι εἴπομεν, ὅτι ἔχουν ἄθροισμα μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν.

Ὥστε: ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι, τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης, σχηματίζουν δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν, αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνονται, ὅταν προεκταθοῦν, πρὸς τὸ μέρος τῶν γωνιῶν τούτων.***

Σημείωσις. Τὸν τρόπον τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος, εἰς τὸ ὁποῖον ζητεῖται νὰ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ ἐκ σημείου ἐκτὸς αὐτῆς Α, δεικνύει τὸ Θ. 108. Ἀλλὰ γενικωτέραν λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ μᾶς δίδει τὸ Θ. 116. Νὰ φέρωμεν δηλαδὴ ἐκ τοῦ Α τυχοῦσαν εὐθεῖαν μέχρι τῆς ΒΓ, ἔστω τὴν ΑΔ, ἔπειτα δὲ νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ Α μίαν ἄλλην εὐθεῖαν πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς ΔΓ, ἀλλὰ τοιαύτην, ὥστε νὰ σχηματίζῃ γωνίαν ἴσην μὲ τὴν γωνίαν ΑΔΓ. Ἐὰν δὲ ἡ εὐθεῖα αὐτὴ εἶναι ἡ ΑΕ, ἐλύθη τὸ πρόβλημα.





Ἀλλὰ πῶς δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν γωνίαν ἴσην πρὸς ἄλλην γωνίαν, θὰ ἴδωμεν βραδύτερον. Ἤδη διὰ τοῦ γνώμονος λύομεν τὸ πρόβλημα τοῦτο ὡς ἑξῆς: Ἐφαρμόζομεν τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ γνώμονος ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ καὶ ἐπὶ μιᾶς καθέτου πλευρᾶς αὐτοῦ ἐφαρμόζομεν κανόνα. Ἔπειτα (ἐνῷ διατηροῦμεν τὸν κανόνα ἀκίνητον) κινοῦμεν τὸν γνώμονα ἐπὶ τοῦ κανόνος, μέχρις ὅτου ἡ ὑποτείνουσα διέλθῃ διὰ τοῦ Α. Τότε σύρομεν τὴν γραφίδα κατὰ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης καὶ γράφομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΑΖ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος. Διότι αἱ ΕΑΖ καὶ ΒΓ σχηματίζουν μὲ τὴν εὐθεῖαν τοῦ κανόνος, τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας.

135

Ἀσκήσεις.

35) Ἐκ τῶν ὀκτὼ γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν καὶ τῆς τεμνούσης αὐτάς, ἡ μία εἶναι 1) 52°· 2) $1\frac{1}{2}$ ὀρθῆς· 3) α°. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἑκάστης τῶν ἄλλων γωνιῶν.

135

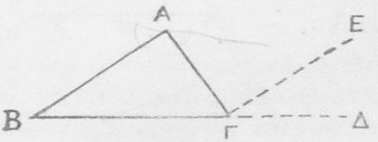
36) Ἐὰν ἀπὸ σημείου διχοτόμου γωνίας φέρωμεν παράλληλον πρὸς μίαν πλευρὰν αὐτῆς, τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

37) Ἐὰν ἀπὸ σημείου διχοτόμου γωνίας φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὰς δύο πλευρὰς αὐτῆς, τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα εἶναι ἴσα.

38) Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἐὰν δὲ εἶναι ΑΟ=ΟΒ καὶ ΓΟ=ΟΔ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΓΒ εἶναι παράλληλοι.

39) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνιῶν, τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν, τεμνομένων ὑπὸ τρίτης, εἶναι παράλληλοι.

119. Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τριγώνου.—Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τριγώνου, πρέπει νὰ κάμωμεν αὐτὰς ἐφεξῆς, ἤτοι τὴν πρώτην ἐφεξῆς μὲ τὴν δευτέραν, καὶ τὴν δευτέραν ἐφεξῆς μὲ τὴν τρίτην. Ἀλλὰ τοῦτο ἐπιτυγχάνεται ὡς ἑξῆς: Ἔστω τὸ τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐὰν προεκτείνωμεν μίαν τῶν πλευρῶν του, π.χ. τὴν ΒΓ, μέχρι τοῦ Δ καὶ ἐκ τοῦ Γ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΑ, τὴν ΓΕ, σχηματίζονται περὶ τὸ Γ τρεῖς γωνίαι. Ἀλλ᾽ ἐξ αὐτῶν ἡ ΑΓΕ ἰσοῦται μὲ τὴν Α (Θ. 114), ἡ δὲ ΕΓΔ ἰσοῦται μὲ τὴν Β (πόρισμα § 115). Ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν περὶ τὸ Γ γωνιῶν. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι. Ὥστε καὶ τὸ ἄλλο ἄθροισμα εἶναι δύο ὀρθαί. Ὅθεν: ***Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι δύο ὀρθαί.***



120. Πόρισμα 1ον. ***Ἡ ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου εἶναι ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ.***

121. Πόρισμα 2ον. ***Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ μίαν ὀρθὴν γωνίαν, αἱ ἄλλαι δύο ὀξεῖαι γωνίαι αὐτοῦ θὰ ἔχουν ἄθροισμα μίαν ὀρθήν.***

122. Πόρισμα 3ον. ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς δύο γωνίας ἴσας, θὰ ἔχουν καὶ τὴν τρίτην ἴσην.***

Ἀσκήσεις.

40) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὅταν εἶναι 1) $B=32^\circ\ 45'$, $\Gamma=82^\circ\ 40'$· 2) $B=101^\circ\ 29'$, $\Gamma=45^\circ\ 57'$· 3) $B=60^\circ\ 30'\ 40''$, $\Gamma=78^\circ\ 42'\ 55''$.

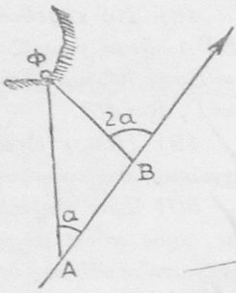
41) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ὅταν ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι 1) 45°· 2) $67^\circ\ 45'$· 3) $\frac{4}{9}$ τῆς ὀρθῆς.

42) Πρὸς πόσας μοίρας ἢ πρὸς πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἰσοῦται ἑκάστη τῶν γωνιῶν ἰσοπλεύρου τριγώνου;

43) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία Α ἰσοῦται πρὸς 1) 100°· 2) 110° 40′· 3) 86° 50′ 20″. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐσωτερικαὶ γωνίαι αὐτοῦ Α καὶ Β, ἐὰν εἶναι Γ=40°.

44) Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν τρίτην, τὸ τρίγωνον ἔχει μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

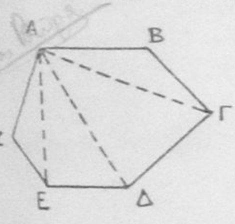
45) Ἐὰν ἡ μία ἐκ τῶν γωνιῶν τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, τὸ τρίγωνον ἔχει μίαν ἀμβλεῖαν γωνίαν.



Σχ. 1

46) Εἰς τὸ σχῆμα 1 τὸ Φ δεικνύει φάρον καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ τὴν διεύθυνσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν κινεῖται ἓν πλοῖον. Τί πρέπει νὰ προσδιορίσῃ ὁ πλοίαρχος, διὰ νὰ ἔχῃ τὴν ἀπόστασιν τοῦ πλοίου ἀπὸ τῆς θέσεως Β μέχρι τοῦ φάρου;

123. Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κυρτοῦ πολυγώνου.— Ἔστω τὸ κυρτὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ. Ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν αὐτοῦ Α φέρωμεν ὅλας τὰς διαγωνίους του, τὰς ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, διαιρεῖται τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα. Ἀλλ᾽ αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων τούτων εἶναι φανερόν, ὅτι κάμνουν τὰς γωνίας τοῦ δοθέντος πολυγώνου. Τὰ τρίγωνα



ὅμως αὐτὰ εἶναι δύο ὀλιγώτερα ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου. Δηλαδὴ εἶναι 6—2 τρίγωνα. Ὥστε τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι 2 ὀρθ. (6—2). Ὁμοίως, ἐὰν ἔχωμεν κυρτὸν πολύγωνον μὲ μ πλευρὰς καὶ τὸ διαιρέσωμεν εἰς τρίγωνα μὲ τὸν ἄνω τρόπον, θὰ λάβωμεν μ—2 τρίγωνα. Ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ θὰ εἶναι 2 ὀρθ. (μ—2). Συνάγομεν λοιπὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω τὸ θεώρημα:

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι τόσαι ὀρθαί, ὅσον εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 2 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν του ἠλαττωμένον κατὰ 2.

Ἀσκήσεις.

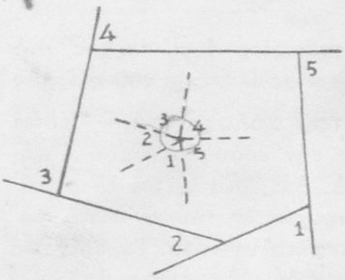
47) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ *πολυγώνου εἶναι τόσαι ὀρθαὶ γωνίαι, ὅσον εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του ἠλαττωμένον κατὰ τέσσαρα.*

48) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἄγνωστοι γωνίαι τοῦ κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ὅταν γνωρίζωμεν, ὅτι εἶναι 1) Α=65°, Β=75°, Γ=90°· 2) Α=Β=120° καὶ Γ=Δ· 3) Α=68°, Α=Γ, Β=Δ καὶ 4) Α+Β=180°, Α=Γ, Β=45°.

49) Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κυρτοῦ πενταγώνου, ἑξαγώνου, δεκαγώνου, δεκαπενταγώνου;

50) Ἐὰν κυρτὸν πολύγωνον μὲ μ πλευρὰς ἔχῃ ὅλας τὰς γωνίας ἴσας, πρὸς πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἢ πρὸς πόσας μοίρας ἰσοῦται ἑκάστη τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου τούτου; Ἐφαρμογὴ ὅταν εἶναι μ=5, 8, 20.

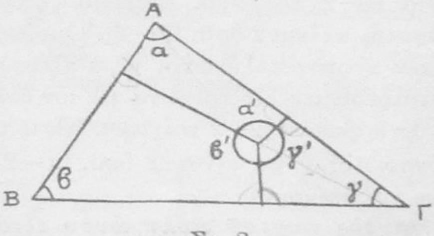
51) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν κυρτοῦ πολυγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εἶναι 1) 10 ὀρθαί· 2) 16 ὀρθαί· 3) 540°· 4) 720°;



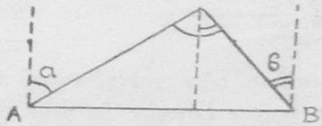
Σχ. 1

52) Ὑπάρχει κυρτὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εἶναι 9, 11, 2ν+1 ὀρθαί;

53) Ἐὰν αἱ πλευραὶ κυρτοῦ πολυγώνου προεκταθοῦν ὅλαι κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν (σχ. 1), τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων ἐξωτερικῶν γωνιῶν εἶναι τέσσαρες ὀρθαὶ γωνίαι. (Ἡ φορὰ ἐνταῦθα ἐννοεῖται κυκλική).



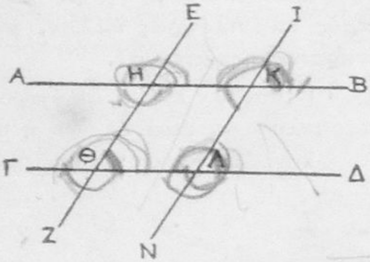
Σχ. 2

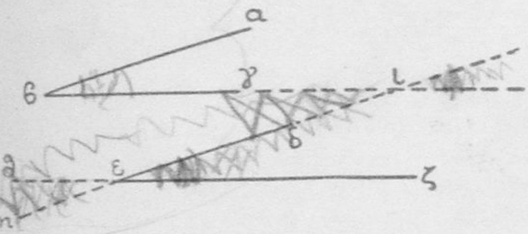


Σχ. 3

54) Εἰς τὸ σχῆμα 2 αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ σημείου ἐντὸς αὐτοῦ ἐπὶ τὰς πλευράς, εἶναι κάθετοι ἐπ᾽ αὐτάς. Ἐπὶ τῇ βάσει τούτου νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς. Ἐπίσης νὰ ἀποδειχθῇ τὸ αὐτὸ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ σχήματος 3.

124. Γωνίαι μὲ πλευρὰς παραλλήλους.— Ἔστωσαν αἱ δύο παράλληλοι ΕΖ καὶ ΙΝ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς παραλλήλους ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἐὰν ἤδη λάβωμεν τὰς γωνίας ΙΚΒ καὶ ΗΘΛ, παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ παράλληλοι πλευραὶ αὐτῶν ΘΛ καὶ ΚΒ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν, ἤτοι εἶναι ὁμόρροποι. Ἐπίσης ὁμόρροποι εἶναι καὶ αἱ παράλληλοι πλευραὶ ΘΗ καὶ ΚΙ. Ἐπειδὴ δὲ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΚΛΔ, ἕπεται, ὅτι εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσαι. Ἀλλ' ἐὰν λάβωμεν τὰς γωνίας ΙΚΒ καὶ ΓΘΖ, παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ παράλληλοι πλευραὶ αὐτῶν ἔχουν καὶ αἱ δύο ἀντίθετον φοράν, ἤτοι εἶναι ἀντίρροποι. Ἀλλὰ καὶ αὗται εἶναι ἴσαι, διότι ἡ ΓΘΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΘΛ, ἡ ὁποία εἴδομεν, ὅτι ἰσοῦται μὲ τὴν ΙΚΒ. Ἤδη λαμβάνομεν τὰς γωνίας ΙΚΒ καὶ ΗΘΓ. Εἰς αὐτὰς παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ μὲν πλευραὶ ΚΙ καὶ ΘΗ εἶναι παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι, αἱ δὲ πλευραὶ ΚΒ καὶ ΘΓ εἶναι παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΗΘΓ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ΗΘΛ, ἕπεται, ὅτι αὕτη εἶναι παραπληρωματικὴ καὶ τῆς ΙΚΒ. Εἰς τὰ αὐτὰ συμπεράσματα θὰ καταλήξωμεν, ἐὰν λάβωμεν δύο οἱασδήποτε γωνίας, ἀλλὰ μὲ πλευρὰς παραλλήλους, π.χ. τὰς αβγ καὶ δεζ, διότι ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς βγ καὶ εδ, μέχρις ὅτου συναντηθοῦν, θὰ λάβωμεν γωνίαν ἴσην μὲ ἑκάστην τούτων. Ἐὰν δὲ μᾶς δοθοῦν αἱ αβγ καὶ ηεθ, θὰ προεκτείνωμεν τὴν ηε καὶ τὴν θε κτλ. Συνάγομεν λοιπὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω τὸ θεώρημα :





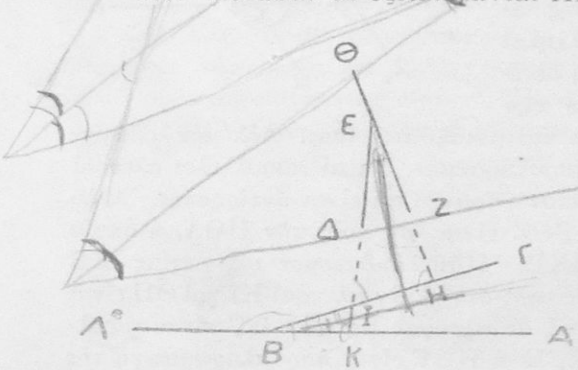
Ἐὰν αἱ πλευραὶ δύο γωνιῶν εἶναι παράλληλοι, αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι μέν, ἂν αἱ παράλληλοι πλευραὶ εἶναι ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι, παραπληρωματικαὶ δέ, ἂν δύο μὲν παράλληλοι πλευραὶ εἶναι ὁμόρροποι, αἱ δὲ δύο ἄλλαι ἀντίρροποι.

ΓΩΝΙΑΙ ΜΕ ΠΛΕΥΡΑΣ ΚΑΘΕΤΟΥΣ

125. Θεώρημα. ***Ἐὰν αἱ πλευραὶ γωνίας εἶναι κάθετοι πρὸς τὰς πλευρὰς ἄλλης, μία πρὸς μίαν, αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.***

(Ἴσαι μὲν εἶναι, ἂν ἀμφότεραι εἶναι ὀξεῖαι ἢ ἀμφότεραι ἀμβλεῖαι, παραπληρωματικαὶ δέ, ἂν ἡ μία εἶναι ὀξεῖα, ἡ δὲ ἄλλη ἀμβλεῖα).

1ον. Ἔστωσαν αἱ ὀξεῖαι γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν πλευρὰν ΕΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΑ καὶ τὴν ΕΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ. Λέγω, ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι, διότι, ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς τῆς μιᾶς γωνίας μέχρις ὅτου συναντήσουν τὰς καθέτους πρὸς αὐτὰς πλευρὰς τῆς ἄλλης γωνίας, σχηματίζονται τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΙΕΗ καὶ ΙΒΚ. Ἐπειδὴ δὲ αὐτὰ ἔχουν τὰς περὶ τὸ Ι ὀξείας γωνίας ἴσας ὡς κατὰ κορυφήν, ἕπεται, ὅτι ἔχουν καὶ τὰς γωνίας Β καὶ Ε ἴσας.



2ον. Ἐὰν προεκταθοῦν, ἡ μὲν ΑΒ μέχρι τοῦ Λ καὶ ἡ ΖΕ μέχρι τοῦ Θ, αἱ σχηματιζόμεναι ἀμβλεῖαι γωνίαι ΓΒΛ καὶ ΔΕΘ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν προηγουμένων ἴσων ὀξειῶν γωνιῶν.

3ον. Ἀλλὰ καὶ ἡ ἀμβλεῖα γωνία ΓΒΛ ἔχει τὰς πλευράς της καθέτους πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς ὀξείας γωνίας ΔΕΖ. Ἀλλ' ἀφοῦ ἡ πρώτη εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ὀξείας γωνίας ΑΒΓ, θὰ εἶναι παραπληρωματικὴ καὶ τῆς ἴσης της ΔΕΖ.

Σημείωσις. Τὰ θεωρήματα 124 καὶ 125 δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν συντόμως ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν αἱ πλευραὶ μιᾶς γωνίας εἶναι παράλληλοι ἢ κάθετοι πρὸς τὰς πλευρὰς ἄλλης, μία πρὸς μίαν, αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι μέν, ἂν εἶναι ἀμφότεραι ὀξεῖαι ἢ ἀμβλεῖαι, παραπληρωματικαὶ δέ, ἂν ἡ μία εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ ἄλλη ἀμβλεῖα.

126. Γωνίαι τριγώνου μὲ πλευρὰς παραλλήλους ἢ καθέ-

40500
27600
18100

τους.—Ἐὰν ἔχωμεν δύο τρίγωνα μὲ πλευρὰς παραλλήλους ἢ καθέτους, μίαν πρὸς μίαν, **μόνον ἴσαι, μία πρὸς μίαν, εἶναι αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων τούτων.** Διότι, ἐὰν ὑπῆρχον εἰς τὰ τρίγωνα αὐτὰ τρία ἢ δύο ζεύγη ἀντιστοίχων γωνιῶν παραπληρωματικῶν, θὰ εἶχον ταῦτα ἄθροισμα γωνιῶν μεγαλύτερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. Ἓν δὲ τοιοῦτο ζεῦγος παραπληρωματικῶν γωνιῶν καὶ δύο ζεύγη ἴσων γωνιῶν δὲν δύνανται νὰ ὑπάρχουν. Διότι, ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας, θὰ ἔχουν καὶ τὴν τρίτην ἴσην.

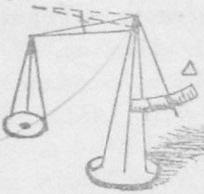
Ἀσκήσεις.

55) Ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς ἄλλης, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι παράλληλοι.

56) Ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς ἄλλης, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι κάθετοι.

57) Ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι κάθετοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς ἄλλης, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι κάθετοι.

58) Ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι κάθετοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς ἄλλης, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι παράλληλοι.



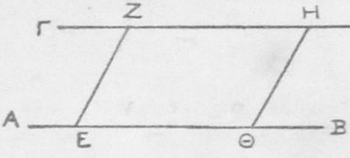
Σχ. 4

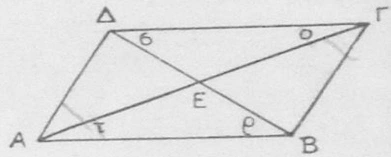
59) Τὸ σχῆμα 4 παριστᾷ ζυγόν. Τὰ διάφορα βάρη εἰς αὐτὸν ἐκφράζονται διὰ γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ ὁριζοντία διεύθυνσις τῆς φάλαγγος τοῦ ζυγοῦ μετὰ τῶν διευθύνσεων, τὰς ὁποίας λαμβάνει αὕτη ἀπὸ τὰ βάρη. Δεικνύονται δὲ ταῦτα διὰ τοῦ δείκτου Δ, ὅστις κινεῖται κατὰ πλάτος τοῦ ἠριθμημένου τόξου. Νὰ ἐξηγήσητε τοῦτο.

ΠΕΡΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

127. Ὁρισμός.—Ἐὰν ἓν τετράπλευρον ἔχῃ τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους, λέγεται **παραλληλόγραμμον.** Οὕτω παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ σχῆμα ΕΖΗΘ.

128. Εἰς ἓν παραλληλόγραμμον, ὅπως π.χ. εἰς τὸ ΑΒΓΔ, παρατηροῦμεν, ὅτι ἑκάστη τῶν ἀπέναντι γωνιῶν Δ καὶ Β εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας Α ἢ τῆς Γ, εἶναι ἑπομένως Β=Δ καὶ Α=Γ, ἐὰν





δὲ φέρωμεν τὴν διαγώνιον ΑΓ, παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ σχηματιζόμενα δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα (§ 80), εἶναι ἑπομένως ΑΒ=ΓΔ καὶ ΑΔ=ΒΓ· ἐὰν δὲ τέλος φέρωμεν καὶ τὴν ἄλλην διαγώνιον ΔΒ, τέμνουσαν τὴν πρώτην εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ ἐξετάσωμεν τὰ τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΔΕΓ, παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ ταῦτα εἶναι ἴσα (§ 80)· εἶναι λοιπὸν ΑΕ=ΕΓ καὶ ΒΕ=ΕΔ. Ὅθεν συνάγομεν, ὅτι :

Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ἀπέναντι γωνίαι καὶ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ διαγώνιοι αὐτοῦ διχοτομοῦν ἀλλήλας.

Ἀντιστρόφως δέ :

129. ***Πᾶν τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἢ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι ἢ τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι διχοτομοῦν ἀλλήλας, εἶναι παραλληλόγραμμον.***

Εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ : α′) Ὑποθέτομεν, ὅτι εἶναι Α=Γ καὶ Β=Δ. Ἀλλὰ γνωρίζομεν, ὅτι Α+Β+Γ+Δ =4 ὀρθ., ἤτοι Α+Β+Α+Β=4 ὀρθαὶ (1). Ὥστε εἶναι 2Α+2Β=4 ὀρθ. ἢ Α+Β=2 ὀρθ. Ἀφοῦ λοιπὸν αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι Α καὶ Β εἶναι παραπληρωματικαί, ἕπεται ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι. Ἀλλ᾽ ἐκτὸς τῆς ἰσότητος (1) λαμβάνομεν καὶ τὴν Α+Δ+Α+Δ=4 ὀρθ., ἤτοι Α+Δ=2 ὀρθ. Ὥστε, καὶ αἱ ΑΒ καὶ ΔΓ εἶναι παράλληλοι.

β′) Ἐὰν εἶναι ΑΔ=ΒΓ καὶ ΑΒ=ΔΓ καὶ φέρωμεν τὴν διαγώνιον ΔΒ, θὰ εἶναι σ=ρ καὶ ΑΔΒ=ΔΒΓ, ὡς συνάγεται ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΔΒ καὶ ΔΒΓ. Εἶναι ἑπομένως αἱ ΑΒ καὶ ΔΓ παράλληλοι, ὡς καὶ αἱ ΑΔ καὶ ΒΓ.

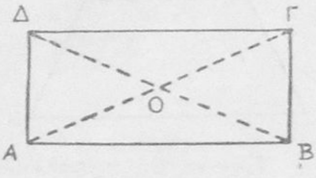
γ′) Ἂν, τέλος, ὑποθέσωμεν, ὅτι ΑΕ=ΕΓ καὶ ΕΒ=ΕΔ, πάλιν ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον. Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΕΔ καὶ ΒΕΓ συνάγεται ἡ ἰσότης τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ καὶ ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν δύο ἄλλων τριγώνων συνάγεται ἡ ἰσότης τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου.

130. *Ὁμοίως, παραλληλόγραμμον εἶναι καὶ τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους.* Διότι τὰ τρίγωνα, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἓν τοιοῦτον τετράπλευρον ὑπὸ μιᾶς τῶν διαγωνίων, εἶναι ἴσα. Ἔχει ἑπομένως τὸ τετράπλευρον αὐτὸ καὶ τὰς ἄλλας δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας. Εἶναι ἑπομένως παραλληλόγραμμον.

131. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐκόλως ἕπεται, ὅτι : *Αἱ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἀγόμεναι κάθετοι εἶναι ἴσαι,* μία δὲ τῶν καθέτων τούτων λέγεται **ἀπόστασις** τῶν παραλλήλων.

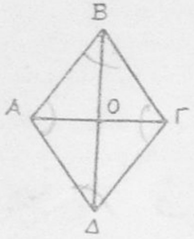
Ἡ ἀπόστασις δύο ἀπέναντι πλευρῶν παραλληλογράμμου, ἑκάστη τῶν ὁποίων λαμβάνεται ὡς **βάσις** αὐτοῦ, λέγεται **ὕψος** τοῦ παραλληλογράμμου.

132. **Ὀρθογώνιον.**— Ἐὰν αἱ γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ὅλαι ὀρθαί, λέγεται ὀρθογώνιον. Τοιοῦτον εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Τὸ ὀρθογώνιον, ἐκτὸς τῶν γενικῶν ἰδιοτήτων τοῦ παραλληλογράμμου, ἔχει καὶ τὴν ἰδιότητα, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ εἶναι **ἴσαι.** Τοῦτο δὲ συνάγεται ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΒΓ. Ὥστε τὰ τέσσαρα μέρη τῶν διαγωνίων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ καὶ ΟΔ εἶναι μεταξύ των ἴσα. Ἐκ τούτου λοιπὸν ἕπεται, ὅτι *εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ διάμεσος, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης.*

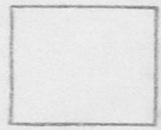


133. Ἀντιστρόφως : *Ἐὰν ἓν παραλληλόγραμμον ἔχῃ τὰς διαγωνίους του ἴσας, εἶναι ὀρθογώνιον.* Διότι τὰ τρίγωνα ΔΑΒ καὶ ΓΑΒ εἶναι ἴσα. Ἄρα ἴσαι εἶναι καὶ αἱ γωνίαι Α καὶ Β· ἐπειδὴ δὲ αὗται εἶναι παραπληρωματικαί, ἕπεται, ὅτι εἶναι ὀρθαί. Ἐξ οὗ ἕπεται, ὅτι *τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία τῶν διαμέσων εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς αὐτὴν πλευρᾶς, εἶναι ὀρθογώνιον.*

134. Ρόμβος.— Ἓν παραλληλόγραμμον, ὅταν ἔχῃ πάσας τὰς πλευράς του ἴσας, λέγεται ρόμβος. Π.χ. ρόμβος εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἀφοῦ ἡ μία διαγώνιος διαιρεῖ τὸν ρόμβον εἰς δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα καὶ ἡ ἄλλη διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς πρώτης, ἕπεται, ὅτι ***αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου τέμνονται καθέτως.*** Ἀντιστρόφως δέ, ***πᾶν παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι τέμνονται καθέτως, εἶναι ρόμβος.*** Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο εὐκόλως.

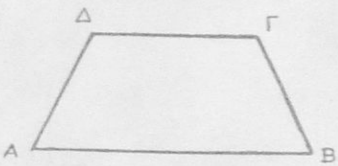


135. Τετράγωνον.—Τετράγωνον λέγεται τὸ παραλληλόγραμμον, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς πλευρὰς ὅλας ἴσας καὶ τὰς γωνίας ὅλας ὀρθάς. Εἶναι δὲ τοῦτο καὶ ὀρθογώνιον καὶ ρόμβος.



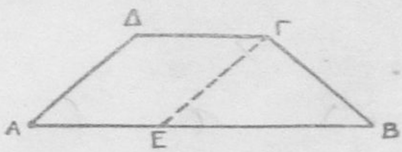
136. Περίπτωσις ἰσότητος παραλληλογράμμων.— ***Ἐὰν δύο παραλληλόγραμμα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι τὴν περιέχουν, ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ἴσα.*** Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο εὐκόλως.

137. Τραπέζιον.—Ἐὰν ἓν τετράπλευρον ἔχῃ δύο μόνον ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους, λέγεται τραπέζιον. Οὕτω τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι τραπέζιον. Αἱ παράλληλοι πλευραὶ τοῦ τραπεζίου λέγονται **βάσεις** αὐτοῦ, ἡ δὲ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ λέγεται **ὕψος** τοῦ τραπεζίου.



Ἐὰν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ τοῦ τραπεζίου εἶναι ἴσαι, λέγεται τοῦτο **ἰσοσκελές.**

Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον αἱ γωνίαι αἱ προσκείμεναι πρὸς μίαν τῶν βάσεων αὐτοῦ εἶναι ἴσαι. Οὕτως εἰς τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ, ἐὰν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι, θὰ εἶναι Α=Β (καὶ Γ=Δ). Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο, ἐὰν ἐκ τοῦ Γ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ, ὁπότε χωρίζεται τὸ τραπέζιον εἰς ἓν παραλληλόγραμμον καὶ εἰς ἓν τρίγωνον ἰσοσκελές. Ἐκ τῆς ἐξετάσεως δὲ τῶν γωνιῶν συνάγεται, ὅτι Α=Β.



Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.

60) Εἰς παραλληλόγραμμον μία γωνία εἶναι 1) 72°· 2) 135°· 3) 90°· 4) α°. Πόσων μοιρῶν εἶναι αἱ τρεῖς ἄλλαι γωνίαι αὐτοῦ;

61) Ὑπὸ ποίαν γωνίαν τέμνονται τὰ δύο ὕψη παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου μία γωνία εἶναι 1) 140°· 2) α°· 3) $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς;

62) Αἱ διχοτόμοι τῶν μὲν ἀπέναντι γωνιῶν παραλληλογράμμου εἶναι παράλληλοι, τῶν δὲ γωνιῶν τῶν προσκειμένων εἰς τὴν αὐτὴν πλευρὰν εἶναι κάθετοι.

63) Τὰ ἄκρα δύο διαμέτρων κύκλου εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

64) Ἑκάστη διαγώνιος ῥόμβου διχοτομεῖ τὰς γωνίας αὐτοῦ.

65) Ἐὰν αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι, τέμνωνται δὲ καθέτως, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τετράγωνον.

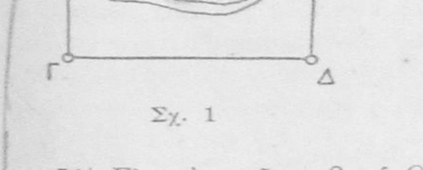
66) Ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὰ μέσα τῶν παραλλήλων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς πλευρὰς ταύτας.

67) Ἐὰν ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὰ μέσα δύο μὴ διαδοχικῶν πλευρῶν τετραπλεύρου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς πλευρὰς ταύτας, τὸ τετράπλευρον εἶναι τραπέζιον ἰσοσκελές.

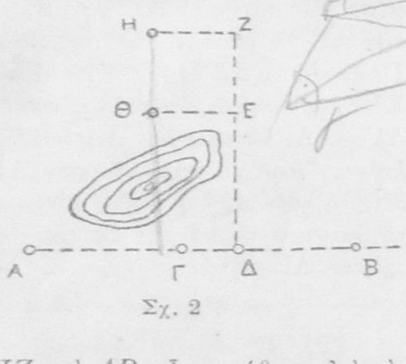
~~68) Αἱ διαγώνιοι ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι ἴσαι.~~

69) Ἐὰν τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ γωνίαι Α καὶ Β εἶναι ἴσαι, ὡς καὶ αἱ γωνίαι Γ καὶ Δ, τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τραπέζιον ἰσοσκελές.

70) Τὸ σχῆμα 1 δεικνύει πῶς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἀπόστασιν δύο ἀπροσίτων σημείων. Νὰ ἐξηγήσητε τοῦτο.



Σχ. 1



Σχ. 2

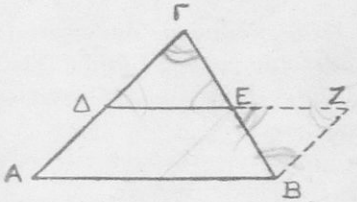
71) Εἰς τὸ σχῆμα 2 αἱ ΘΕ, ΗΖ καὶ ΑΒ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν

ΔΖ, ἡ δὲ προέκτασις τῆς ΗΘ πρέπει νὰ συναντᾷ καθέτως τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ. Πότε θὰ συμβῇ τοῦτο;

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

138. Θεώρημα. ***Ἡ εὐθεῖα γραμμή, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ μέσου πλευρᾶς τριγώνου παράλληλος πρὸς τὴν ἄλλην πλευρὰν αὐτοῦ, διχοτομεῖ τὴν τρίτην πλευράν.***

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, Δ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ ΔΕ ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ. Ἐὰν ἐκ τοῦ Β φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ, τέμνουσαν τὴν προέκτασιν τῆς ΔΕ εἰς τὸ Ζ, σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΖΔ. Ἐὰν δὲ ἐξετάσωμεν τὰ τρίγωνα ΔΓΕ καὶ ΕΒΖ, θὰ ἴδωμεν, ὅτι εἶναι ἴσα. Διότι ΑΔ==ΔΓ καὶ ΑΔ=ΒΖ, ἄρα εἶναι καὶ ΔΓ=ΒΖ. Ἐπίσης εἶναι γωνΓΔΕ==γωνΕΖΒ καὶ γωνΓ=γωνΕΒΖ. Ἀφοῦ λοιπὸν τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι καὶ ΒΕ=ΕΓ. Ὥστε τὸ Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ.



139. Θεώρημα. ***Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν αὐτοῦ καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς.***

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΔΕ ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΒΓ. Ἐκ τοῦ Β φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ τέμνουσαν τὴν προέκτασιν τῆς ΔΕ εἰς τὸ Ζ. Τότε τὰ τρίγωνα ΓΔΕ καὶ ΕΒΖ ἔχουν ΓΕ=ΕΒ, γωνΓΕΔ=γωνΒΕΖ καὶ γωνΓ=γων ΕΒΖ. Εἶναι λοιπὸν ταῦτα ἴσα. Ὥστε εἶναι ΔΓ=ΒΖ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ΔΓ=ΑΔ, ἕπεται, ὅτι ΑΔ=ΒΖ· εἶναι δὲ αἱ ΑΔ καὶ ΒΖ καὶ παράλληλοι. Ἄρα τὸ τετράπλευρον ΑΒΖΔ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἀπεδείχθη λοιπόν, ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, εἶναι δὲ καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς, διότι ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν προηγουμένων τριγώνων ἔχομεν ΔΕ=ΕΖ.

Ἀσκήσεις.

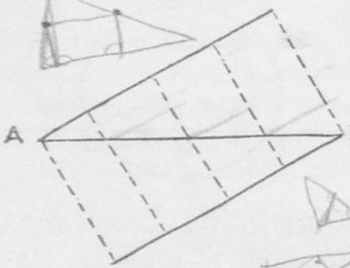
72) Αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου διαιροῦν αὐτὸ εἰς τέσσαρα τρίγωνα ἴσα μεταξύ των.

73) Αἱ κάθετοι ἐκ τῶν μέσων δύο πλευρῶν τριγώνου ἐπὶ τὴν τρίτην πλευρὰν εἶναι ἴσαι.

74) Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

75) Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι κορυφαὶ ρόμβου. @αντίστροφον

76) Ἐὰν μία κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης, ἡ ὀξεῖα γωνία, ἡ ὁποία πρόσκειται εἰς αὐτήν, εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης ὀξείας γωνίας, καὶ ἀντιστρόφως.

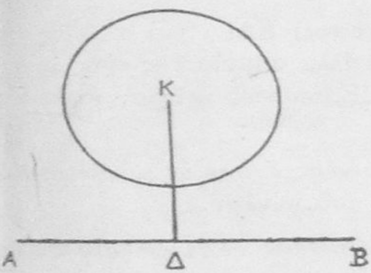


Σχ. 1

77) Εἰς τὸ σχῆμα 1 ἡ εὐθεῖα AB εἶναι διῃρημένη εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη. Πότε πρέπει νὰ συμβαίνῃ τοῦτο ;

ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΡΟΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΝ

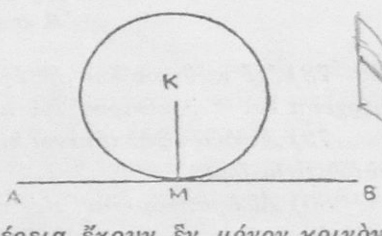
140. Εἴδομεν (§ 97), ὅτι εὐθεῖα καὶ περιφέρεια δὲν δύνανται νὰ ἔχουν κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο. Διὰ τοῦτο αἱ δυναταὶ θέσεις εὐθείας πρὸς περιφέρειαν εἶναι αἱ ἑξῆς τρεῖς:



1ον. Ἡ περιφέρεια καὶ ἡ εὐθεῖα δὲν ἔχουν κανὲν κοινὸν σημεῖον.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ***ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς εὐθείας ὑπερβαίνει τὴν ἀκτῖνα.*** Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο εὐκολώτατα.

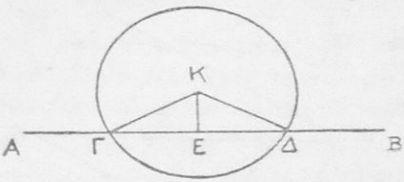
2ον. Ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, π.χ. τὸ Μ· ἀλλὰ τότε εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἀκτὶς ΚΜ εἶναι ἡ μικροτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ ἀχθοῖν ἐκ τοῦ Κ εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ· ἄρα ἡ ΚΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον Μ, καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ Κ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι ἡ ἀκτὶς ΚΜ.



Ὥστε : ***Ὅταν εὐθεῖα καὶ περιφέρεια ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν***

σημεῖον, ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς εὐθείας ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα.

3ον. Ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ περιφέρεια ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα· ἀλλὰ τότε ***τὸ μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχον μέρος τῆς εὐθείας κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς εὐθείας εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος.***



Διότι αἱ ἀκτῖνες ΚΓ καὶ ΚΔ εἶναι κατ' ἀνάγκην πλάγιαι καὶ ἡ κάθετος ΚΕ εἶναι μικροτέρα αὐτῶν. Ὥστε ὁ ποὺς Ε κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας καὶ εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΔ· ἄρα ἡ ΓΔ κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας.

Παρατήρησις. Καὶ τὰ ἀντίστροφα τῶν θεωρημάτων τούτων ἀληθεύουν καὶ ἀποδεικνύονται εὐκόλως. Διὰ τοῦτο ἀρκούμεθα εἰς τὸ ἑπόμενον.

141. ***Ἐὰν ἡ ἀπόστασις εὐθείας ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ περιφέρεια ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον.***

Διότι ὁ ποὺς Μ τῆς ἀποστάσεως (ἀκτῖνος) ΚΜ εἶναι σημεῖον τῆς περιφερείας καὶ τῆς εὐθείας, πάντα δὲ τὰ ἄλλα σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΒ ἀπέχουν περισσότερον τῆς ἀκτῖνος ΚΜ. Ἐπομένως κεῖνται ἐκτὸς τῆς περιφερείας.

142. Ὁρισμός.—Ἐὰν εὐθεῖα καὶ κύκλος ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ἡ εὐθεῖα λέγεται **ἐφαπτομένη** τοῦ κύκλου.

143. Πόρισμα. ***Εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς περιφερείας ὑπάρχει μία ἐφαπτομένη καὶ μόνον μία.***

Ἀσκήσεις.

78) Ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

79) Αἱ δύο ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας κύκλου ἐκ σημείου ἐκτὸς αὐτοῦ εἶναι ἴσαι.

80) Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα διαμέτρου κύκλου εἶναι παράλληλοι.

ΤΟΞΑ ΚΑΙ ΧΟΡΔΑΙ

144. Εἴδομεν, ὅτι δύο τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἴσων κύκλων εἶναι ἴσα, ὅταν ἐφαρμόζουν. Ἀλλ' ὅταν ἐφαρμόζουν τὰ τόξα, ἐφαρμόζουν καὶ τὰ ἄκρα αὐτῶν, ἄρα καὶ αἱ χορδαί.

Ὥστε: ***Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους τὰ ἴσα τόξα ἔχουν ἴσας χορδάς.***

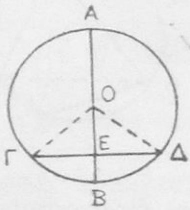
Ἀντιστρόφως δέ, ***αἱ ἴσαι χορδαὶ ἔχουν ἴσα τόξα.*** Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο εὐκόλως ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα σχηματίζονται, ὅταν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας εἰς τὰ ἄκρα τῶν χορδῶν αὐτῶν.

145. Ἐὰν ἤδη εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους ἔχωμεν ἄνισα τόξα, τὰ ὁποῖα δὲν ὑπερβαίνουν τὴν ἡμιπεριφέρειαν, αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι βαίνουν εἰς αὐτά, εἶναι ἄνισοι. Ἄρα κατὰ τὸ Θ. 88 καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν εἶναι ἄνισοι, καὶ τὸ μεγαλύτερον τόξον ἔχει μεγαλυτέραν χορδήν.

Ὥστε: ***Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους τὸ μεγαλύτερον τόξον ἔχει μεγαλυτέραν χορδὴν καὶ τὸ μικρότερον μικροτέραν, ἐὰν τὰ τόξα δὲν ὑπερβαίνουν τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας.***

Ἀληθεύει δὲ καὶ τὸ ἀντίστροφον καὶ ἀποδεικνύεται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

146. Ἐὰν ἡ διάμετρος ΑΟΒ τοῦ κύκλου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Ε, παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς: Αἱ ΟΓ καὶ ΟΔ εἶναι πλάγιαι ἴσαι, ἄρα εἶναι ΓΕ=ΕΔ (§ 94, β). Ἑπομένως ἡ ΟΕΒ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΓΟΔ (Θ. 77 παρατ.). Ὥστε εἶναι καὶ τοξΓΒ=τοξΒΔ. Ἐπίσης εὐκόλως ἀποδεικνύεται καὶ ὅτι τοξΑΓ=τοξΑΔ. Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι ***ἡ διάμετρος ἡ κάθετος ἐπὶ χορδὴν διαιρεῖ καὶ τὴν χορδὴν καὶ τὰ τόξα, τὰ ἔχοντα βάσιν αὐτήν, εἰς δύο ἴσα μέρη.***



147. ***Ἐὰν ἤδη φέρωμεν ἐκ τοῦ κέντρου εὐθεῖαν εἰς τὸ μέσον χορδῆς, αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν καὶ διαιρεῖ τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσιν αὐτήν, εἰς δύο ἴσα μέρη.***

Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο εὐκόλως ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ὑπὸ τῶν ἀκτίνων αἱ ὁποῖαι ἄγονται εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς, καὶ ἐκ τῆς παρατηρήσεως τοῦ Θ. 77.

148. Ὁμοίως εὐκόλως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ πρότασις: ***Ἡ κάθετος ἐπὶ χορδὴν εἰς τὸ μέσον αὐτῆς διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ διαιρεῖ τὰ δύο τόξα εἰς δύο ἴσα μέρη.***

Παρατήρησις. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ τοῦ Θ. 146 διέρχεται α΄) διὰ τοῦ κέντρου, β΄) διὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς, γ΄) διὰ τοῦ μέσου τοῦ ἑνὸς τόξου τῆς χορδῆς, δ΄) διὰ τοῦ μέσου τοῦ ἄλλου τόξου, καὶ ε΄) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδήν. Μία δὲ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἐκτελεῖ δύο ἐκ τούτων, θὰ ἐκτελῇ καὶ τὰ ἄλλα τρία.

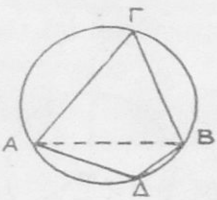
Ἀσκήσεις.

81) Ἐὰν ἐφαπτομένη περιφερείας καὶ χορδὴ τόξου αὐτῆς εἶναι παράλληλοι, τὰ τόξα τὰ περιεχόμενα μεταξὺ αὐτῶν εἶναι ἴσα, ὅπως ἐπίσης εἶναι ἴσα καὶ τὰ τόξα τὰ περιεχόμενα μεταξὺ δύο χορδῶν παραλλήλων.

82) Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους ἴσαι χορδαὶ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου καὶ ἀντιστρόφως.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΙΣ ΚΥΚΛΟΝ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

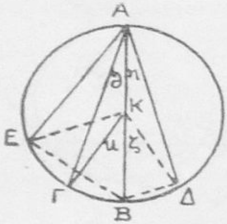
149. Ὁρισμοί.—Γωνία λέγεται **ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον,** ἐὰν ἡ κορυφὴ αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου. Π.χ. ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον καὶ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΔΒ.



Ἐὰν φέρωμεν τὴν χορδὴν ΑΒ, αὕτη μετὰ τοῦ τόξου ΑΓΒ ὁρίζει τὸ τμῆμα ΑΓΒΑ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΑΓΒ ἔχει τὴν κορυφήν της Γ ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ τμήματος, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς διέρχονται διὰ τῶν ἄκρων τῆς βάσεως ΑΒ τοῦ τμήματος, ἡ γωνία ΑΓΒ λέγεται **ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τμῆμα** ΑΓΒΑ. Ὁμοίως ἡ γωνία ΑΔΒ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τμῆμα ΑΔΒΑ καὶ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΓΒ.

Εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται **ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον,** ἐὰν πᾶσαι αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας. Ὁ δὲ κύκλος λέγεται τότε **περιγεγραμμένος περὶ τὸ σχῆμα.** Ἐὰν ὅμως ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ ἐφάπτεται εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, τότε τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον, ὁ δὲ κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ σχῆμα.

150. Σχέσις μεταξὺ ἐπικέντρου καὶ ἐγγεγραμμένης γωνίας, ὅταν αὗται βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου.—Ἔστω ΓΑΔ ἡ τυχοῦσα ἐγγεγραμμένη γωνία εἰς κύκλον Κ. Ἡ ΓΚΔ εἶναι ἡ ἀντιστοιχοῦσα ἐπίκεντρος· ἐὰν φέρωμεν τὴν διάμετρον ΑΚΒ, ἡ ἐξωτερικὴ γωνία κ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΚΓ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα $\vartheta+\Gamma$, θὰ εἶναι λοιπὸν $\kappa=2\vartheta$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι εἶναι καὶ $\zeta=2\eta$. Ἔχομεν λοιπὸν $\kappa+\zeta=2\vartheta+2\eta=2(\vartheta+\eta)$, ἤτοι ΓΚΔ$=2$. ΓΑΔ.



Ἐὰν ἐδίδετο ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΕΑΓ, θὰ εἴχομεν ὁμοίως ΕΚΒ$=2$.ΕΑΒ καὶ $\kappa=2\vartheta$ καὶ δι᾽ ἀφαιρέσεως ΕΚΓ$=2$.ΕΑΓ. Ἕπεται λοιπὸν τὸ θεώρημα :

Εἰς κύκλον ἡ ἐπίκεντρος γωνία εἶναι διπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης, ὅταν βαίνουν ἀμφότεραι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου.

151. Κατὰ τὸ ἄνω θεώρημα ἡ γωνία ΕΑΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΕΚΔ καὶ ἡ ΕΒΔ τὸ ἥμισυ τῆς κυρτῆς γωνίας ΕΚΔ. Εἶναι ἑπομένως ΕΑΔ+ΕΒΔ$=2$ ὀρθαί, ἀφοῦ αἱ περὶ τὸ Κ δύο γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα 4 ὀρθάς. Ὅθεν ἕπεται ὅτι :

Παντὸς εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου (ὡς τὸ ΑΕΒΔ) τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι.

152. Πορίσματα. Ἐὰν ἔχωμεν ἐγγεγραμμένας γωνίας, αἱ ὁποῖαι βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου, ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου, εἶναι μία. Ἕπεται λοιπὸν ὅτι :

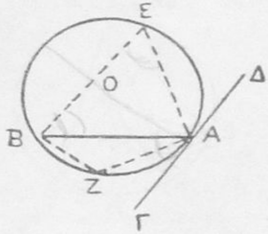
1ον. ***Ὅλαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου, εἶναι μεταξύ των ἴσαι.***

2ον. ***Αἱ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμέναι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων, εἶναι μεταξύ των ἴσαι.***

3ον. ***Πᾶσα γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθή.*** Ἑπομένως, ***ἐὰν ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου τούτου. Ἐὰν δὲ ἔχωμεν πολλὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὅλα τὴν αὐτὴν ὑποτείνουσαν, αἱ κορυφαὶ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν τῶν τριγώνων αὐτῶν.***

4ον. ***Μία γωνία ἐγγεγραμμένη εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα, ἐφ' ὅσον βαίνει ἐπὶ τόξου μικροτέρου ἢ μεγαλυτέρου τῆς ἡμιπεριφερείας.***

153. Γωνία σχηματιζομένη ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης. —Ἔστω ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς Α ἡ ΓΑΔ καὶ χορδή, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς, ἡ ΑΒ. Ἐὰν ἐκ τοῦ Β φέρωμεν τὴν ΒΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΑΔ, αἱ γωνίαι ΓΑΒ καὶ ΑΒΕ εἶναι ἴσαι (Θ. 114). Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ἐκ τοῦ Α ἀγομένη διάμετρος διαιρεῖ (σελ. 64 παρατ.) τὸ τόξον ΒΑΕ εἰς δύο ἴσα μέρη, τὰ ΒΑ καὶ ΑΕ, ἕπεται ὅτι ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΒΕ ἰσοῦται μὲ τὴν ἐγγεγραμμένην, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ, π.χ. τὴν ΑΕΒ. Ὥστε εἶναι γωνΓΑΒ=γωνΑΕΒ.



Ἐὰν ἤδη λάβωμεν τὴν γωνίαν ΑΖΒ, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΕΒ, αὐτὴ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας ΑΕΒ (§ 151). Ὥστε ἡ ΑΖΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΑΒ. Διότι ἡ τελευταία αὐτὴ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας ΓΑΒ, ἡ ὁποία, ὡς εἴδομεν, εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΕΒ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται τὸ θεώρημα :

Ἐν κύκλῳ ἡ ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης σχηματιζομένη γωνία εἶναι ἴση μὲ ἐγγεγραμμένην, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου.

154. Πόρισμα. ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται τοῦ κύκλου, ἡ τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς συνδέουσα εὐθεῖα σχηματίζει μετὰ τῶν δύο ἐφαπτομένων ἴσας γωνίας.***

Ἀσκήσεις.

83) Δύο χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΑΟΓ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα δύο ἐγγεγραμμένων γωνιῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΒ, ἡ δὲ ἄλλη ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΓ.

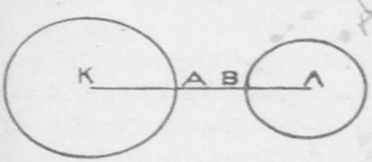
84) Ἐκ τοῦ σημείου Α ἐκτὸς περιφερείας φέρομεν τὰς τεμνούσας ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία Α ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν δύο ἐγγεγραμμένων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι βαίνουν ἐπὶ τῶν τόξων ΓΕ καὶ ΒΔ.

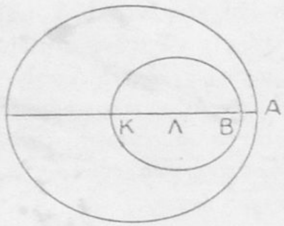
ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑΣ

155. Δύο περιφέρειαι δύνανται: 1) νὰ μὴ ἔχουν κανὲν κοινὸν σημεῖον· 2) νὰ ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον, καὶ 3) νὰ ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα. Εἰς ὅλας δὲ αὐτὰς τὰς περιπτώσεις θὰ συγκρίνωμεν τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο κέντρων πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων.

156. Περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι δὲν ἔχουν κανὲν κοινὸν σημεῖον.— Τότε ἢ θὰ εἶναι ἡ μία ὅλη ἐκτὸς τῆς ἄλλης, ἢ θὰ εἶναι ἡ μία ὅλη ἐντὸς τῆς ἄλλης.

α΄) Ἀλλ᾽ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν εἶναι προφανές, ὅτι $ΚΛ > ΚΑ + ΒΛ$.



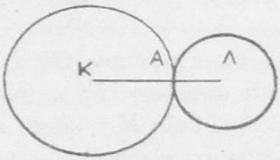


β΄) Εἰς δὲ τὴν δευτέραν εἶναι $ΚΛ = ΚΑ - (ΛΒ + ΒΑ)$· ὥστε εἶναι $ΚΛ < ΚΑ - ΛΒ$. Συνάγομεν λοιπὸν ἐκ τούτων τὸ θεώρημα:

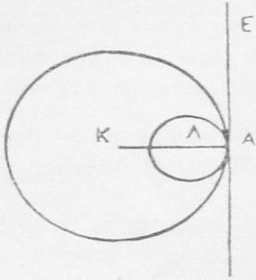
Ἐὰν δύο περιφέρειαι δὲν ἔχουν κανὲν κοινὸν σημεῖον, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἀκτίνων ἢ μικροτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

Σημείωσις. Ἐὰν τὰ κέντρα Κ καὶ Λ συμπίπτουν, αἱ περιφέρειαι λέγονται **ὁμόκεντροι**.

157. Περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον.—Τότε εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἡ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης, ὁπότε λέγομεν, ὅτι ἐφάπτονται ἐκτός, ἢ ἡ μία ἐντὸς τῆς ἄλλης, ὁπότε ἐφάπτονται ἐντός. Καὶ α΄) Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ἐὰν Α εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον, αἱ ἀκτῖνες ΚΑ καὶ ΛΑ ἀποτελοῦν εὐθεῖαν. Διότι, ἐὰν ἡ γραμμὴ **ΚΑΛ** ἦτο τεθλασμένη, ἡ εὐθεῖα γραμμή, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ κέντρα Κ καὶ Λ, δὲν θὰ διήρχετο διὰ τοῦ Α· ἑπομένως θὰ



ἔτεμνε τὰς περιφερείας εἰς δύο ἄλλα σημεῖα. Ἐὰν δὲ τὰ σημεῖα αὐτὰ ἦσαν τὰ Β καὶ Γ, ἡ εὐθεῖα ΚΛ θὰ ἦτο ἄθροισμα τῶν δύο ἀκτίνων ΚΒ καὶ ΛΓ καὶ τῆς εὐθείας ΒΓ, ἡ ὁποία θὰ ἦτο ἐκτὸς τῶν κύκλων. Ἀλλὰ τότε ἡ εὐθεῖα ΚΛ θὰ ἦτο μεγαλυτέρα τῆς τεθλασμένης ΚΑ+ΑΛ, ἡ ὁποία εἶναι ἄθροισμα μόνον δύο ἀκτίνων. Ἀλλ' αὐτὸ εἶναι ἄτοπον. Ὥστε ἡ ΚΑΛ εἶναι εὐθεῖα γραμμή. Ἄρα εἶναι ΚΑΛ=ΚΑ+ΑΛ.

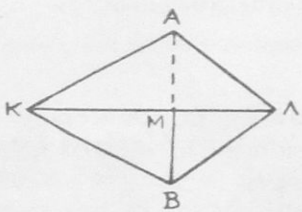


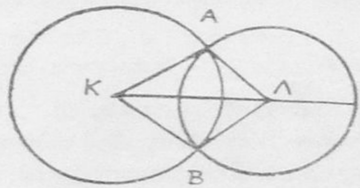
β΄) Εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐντός, παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς: Ἐὰν ΕΑ εἶναι ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν, αἱ ἀκτῖνες ΚΑ καὶ ΛΑ, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΕΑ καὶ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Α, κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Κατόπιν τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ΚΛ=ΚΑ—ΛΑ. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸ θεώρημα:

Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται μεταξύ των, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων των ἐὰν ἐφάπτωνται ἐκτός, καὶ μὲ τὴν διαφορὰν αὐτῶν ἐὰν ἐφάπτωνται ἐντός.

158. Περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα.— Ἔστω Α καὶ Β δύο κοινὰ σημεῖα δύο περιφερειῶν Κ καὶ Λ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς:

α΄) Ἐπειδὴ ΚΑ=ΚΒ, ἕπεται, ὅτι τὸ Κ εἶναι σημεῖον τῆς καθέ-





του εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ· ἀλλ' εἶναι καὶ ΛΑ=ΛΒ· Ὥστε καὶ τὸ Λ εἶναι σημεῖον τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΚΛ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ, ἤτοι ὅτι ἡ εὐθεῖα τῶν κέντρων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τῶν κοινῶν σημείων καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.

β′) Ἄλλο κοινὸν σημεῖον τῶν αὐτῶν περιφερειῶν δὲν ὑπάρχει. Διότι ἐὰν ὑπῆρχεν ἓν τοιοῦτον σημεῖον Γ, ἢ θὰ ἔκειτο ἐπὶ τῆς ΑΒ, ὁπότε αὕτη θὰ ἔτεμνε τὰς περιφερείας εἰς τρία σημεῖα Α, Β, Γ, ἢ ἐκτός, ὁπότε ἡ ΚΛ θὰ ἦτο κάθετος εἰς τὰ μέσα τῆς ΑΓ καὶ τῆς ΑΒ. Ἀλλὰ καὶ αἱ δύο αὗται ὑποθέσεις εἶναι ἄτοποι (§§ 97, 68 β′).

γ′) Ἐκ τοῦ τριγώνου ΚΑΛ ἀμέσως συνάγεται, ὅτι

$$ΚΛ < ΚΑ + ΛΑ \quad \text{καὶ} \quad ΚΛ > ΚΑ - ΛΑ.$$

δ′) Αἱ ὡς ἄνω περιφέρειαι λέγομεν, ὅτι τέμνονται. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν ἕπεται τὸ θεώρημα :

Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα :

1ον. ***Ἡ εὐθεῖα τῶν κέντρων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία συνδέει τὰ δύο αὐτὰ σημεῖα καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.***

2ον. ***Αἱ τοιαῦται περιφέρειαι δὲν δύνανται νὰ ἔχουν ἄλλο σημεῖον κοινόν.***

3ον. ***Ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι μικροτέρα μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, μεγαλυτέρα δὲ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.***

4ον. ***Αἱ τοιαῦται περιφέρειαι τέμνονται.***

Παρατήρησις. Καὶ τὰ ἀντίστροφα τῶν θεωρημάτων τούτων ἀληθεύουν καὶ ἀποδεικνύονται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Ἀσκήσεις.

85) Ποῖαι εἶναι αἱ δυναταὶ θέσεις δύο ἴσων περιφερειῶν ;

86) Αἱ κοιναὶ ἐφαπτόμεναι δύο περιφερειῶν εἶναι ἴσαι.

87) Ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη δύο ἀνίσων περιφερειῶν εἶναι μικροτέρα τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν διαφόρων προτάσεων παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ὑπόθεσις αὐτῶν χρησιμοποιεῖται ὁλόκληρος. Ἕπεται λοιπὸν ἐκ τούτου ὅτι, ὅταν μᾶς δοθῇ μία πρότασις, πρέπει νὰ κατανοήσωμεν καλῶς τὴν ὑπόθεσιν ἢ τὰς ὑποθέσεις αὐτῆς, τὰς ὁποίας θὰ χρησιμοποιήσωμεν χωρὶς νὰ παραλείψωμεν καμμίαν. Φανερὸν δὲ εἶναι ὅτι πρέπει νὰ κατανοήσωμεν καὶ τὸ συμπέρασμα.

Ὅταν πρόκειται νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἰσότητα σχημάτων, τὴν ἀποδεικνύομεν διὰ τῆς ἐπιθέσεως, ἐφ᾽ ὅσον δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν αὐτὴν δυνατήν. Ἀλλ' ὅταν τοῦτο δὲν εἶναι δυνατόν, ἀποδεικνύομεν αὐτὴ χρησιμοποιοῦντες ἄλλας γνωστὰς προτάσεις ἢ ἀνάγοντες τὸ ζήτημ εἰς ἄλλο γνωστόν.

Οὕτω τὰς δύο πρώτας περιπτώσεις τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνω ἀπεδείξαμεν διὰ τῆς ἐπιθέσεως. Ἀλλὰ διὰ τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴ ὁποίαν ὑποθέτομεν τὰς τρεῖς πλευρὰς δύο τριγώνων ἴσας, ἐχρησιμο ποιήσαμεν τὰς ἰδιότητας τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἔχουν καὶ μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ δύο ἴσων πλευρῶν.

Εἰδικώτερον δὲ

α΄) Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο εὐθεῖαι ἢ δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι, ὅταν ἡ ἀπόδειξις τῆς ἰσότητος δι' ἐπιθέσεως δὲν εἶναι δυνατή, προσπαθοῦμεν, ἐξ ὅσων συνάγομεν ἀπὸ τὰ προηγούμενα, νὰ ἴδωμεν μήπως:

1) Εἶναι χωριστὰ ἴσαι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ἢ γωνίαν, ἢ ἴσαι πρὸς εὐθείας ἢ γωνίας ἴσας.

2) Ὅταν τὰς προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ εὐθείας ἢ γωνίας ἴσας, λαμβάνομεν ἐξαγόμενα ἴσα.

3) Εἶναι πλευραὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἢ γωνίαι τῆς βάσεως αὐτοῦ.

4) Εἶναι ἀπέναντι πλευραὶ ἢ γωνίαι παραλληλογράμμου.

5) Εἶναι πλευραὶ ἢ γωνίαι ἴσων τριγώνων.

β΄) Ἐπὶ πλέον δὲ διὰ γωνίας προσπαθοῦμεν νὰ ἴδωμεν μήπως:

1) Εἶναι κατὰ κορυφήν.

2) Εἶναι ἐπίκεντροι ἢ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἰς ἴσους κύκλους καὶ βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων.

3) Εἶναι συμπληρωματικαὶ ἢ παραπληρωματικαὶ τῆς αὐτῆς γωνίας.

4) Εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ ἢ ἐντὸς ἐκτὸς κτλ. παραλλήλων εὐθειῶν.

5) Ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους ἢ καθέτους κτλ.

6) Ἡ μία εἶναι γωνία χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης καὶ ἡ ἄλλη ἐγγεγραμμένη, βαίνουσα ἐπὶ τοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς πρώτης.

γ΄) Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι, προσπαθοῦμεν νὰ ἴδωμεν μήπως:

1) Ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι βάσις ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἡ δὲ ἄλλη εἶναι διάμεσος ἢ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς αὐτοῦ.

2) Ἡ μία εἶναι παράλληλος πρὸς εὐθεῖαν, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἄλλην.

3) Εἶναι πλευραὶ τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ δύο γωνίαι, αἱ προσκείμεναι εἰς τὴν τρίτην πλευράν, ἔχουν ἄθροισμα 1 ὀρθήν.

4) Εἶναι πλευραὶ ἐπικέντρου γωνίας, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ τετάρτου τῆς περιφερείας, ἢ ἐγγεγραμμένης, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ ἡμιπεριφερείας.

5) Εἶναι διαγώνιοι ρόμβου (ἢ τετραγώνου).

6) Εἶναι πλευραὶ τριγώνου, καὶ ἡ διάμεσος ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης.

7) Εἶναι ἡ μία κοινὴ χορδὴ δύο περιφερειῶν τεμνομένων, ἐνῷ ἡ ἄλλη διέρχεται διὰ τῶν κέντρων τούτων.

δ') Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τρία σημεῖα, Α, Β, Γ, κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ὅτι δύο εὐθεῖαι, ΑΒ καὶ ΒΓ, ἀποτελοῦν εὐθεῖαν, πρέπει νὰ εὕρωμεν μίαν εὐθεῖαν, ΕΒΖ, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται διὰ τοῦ Β καὶ νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῶν ΑΒ καὶ ΒΓ γωνίας παραπληρωματικὰς ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, νὰ σχηματίζῃ τὰς γωνίας ΕΒΑ καὶ ΖΒΓ ἴσας.

ε') Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, πρέπει νὰ ἴδωμεν μήπως :

1) Τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης, σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἢ τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας κτλ.

2) Εἶναι κάθετοι ἢ παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

3) Εἶναι ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου.

4) Ἡ μία ἐξ αὐτῶν διέρχεται διὰ τῶν μέσων πλευρῶν τριγώνου, εἰς τὸ ὁποῖον τρίτη πλευρὰ εἶναι ἡ ἄλλη εὐθεῖα.

5) Ὅταν τέμνουν περιφέρειαν, καὶ τὰ τόξα τὰ μεταξὺ αὐτῶν εἶναι ἴσα.

ϛ') Ἄλλην μέθοδον ἀποδείξεως εἴδομεν τὴν διὰ τῆς ἀπαγωγῆς εἰς ἄτοπον, αὕτη δὲ ἐφαρμόζεται ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῶν ἀντιστρόφων θεωρημάτων ἀποδειχθέντων.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Α' Βιβλίου.

88) Ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται πρὸς 1 ὀρθ. $+ \frac{A}{2}$*, ἐνῷ ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἰσοῦται μὲ 1 ὀρθ.* $- \frac{A}{2}$*. Τέλος ἡ γωνία τῆς* διχοτόμου τῆς ἐσωτερικῆς γωνίας Β καὶ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Γ ἰσοῦται μὲ $\frac{A}{2}$.

89) Αἱ κάθετοι ἐπὶ τῶν δύο πλευρῶν γωνίας εἰς σημεῖα αὐτῶν ἀπέχοντα ἴσον ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας τέμνονται ἐπὶ τῆς διχοτόμου αὐτῆς.

90) Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

91) Αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα πλευρῶν τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἀπέχον ἰσάκις ἀπὸ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ.

92) Αἱ τρεῖς διάμεσοι τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ ἑκάστης κορυφῆς ἴσην πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέσου, ἡ ὁποία διέρχεται δι᾽ αὐτῆς.

93) Τὰ τρία ὕψη παντὸς τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

94) Αἱ διχοτόμοι δύο ἐξωτερικῶν γωνιῶν τριγώνου καὶ ἡ διχοτόμος τῆς τρίτης γωνίας, ἡ ὁποία δὲν εἶναι ἐφεξῆς μὲ καμμίαν ἐκ τῶν δύο ὡς ἄνω ἐξωτερικῶν γωνιῶν, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

95) Ἐὰν δύο πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἄνισοι, εἰς τὴν μικροτέραν ἐξ αὐτῶν ἀντιστοιχεῖ ἡ μεγαλυτέρα διάμεσος.

96) Τὰ ὕψη ἑνὸς τριγώνου εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν.

97) Τὸ παραλληλόγραμμον, ὅπερ σχηματίζεται, ὅταν ἑνοῦμεν δι᾽ εὐθειῶν τὰ μέσα τετραπλεύρου, εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραπλεύρου τούτου.

98) Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ἀχθῇ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἀντιστοίχως, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή.

99) Ἐὰν ἡ διχοτόμος ἐξωτερικῆς γωνίας τριγώνου εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, καὶ ἀντιστρόφως.

100) Πᾶν εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένον παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον, καὶ πᾶν εἰς κύκλον περιγεγραμμένον εἶναι ῥόμβος.

101) Ἐὰν εἰς δύο περιφερείας ὑπάρχουν δύο ἐγγεγραμμένα τρίγωνα ἴσα πρὸς ἄλληλα, αἱ δύο περιφέρειαι εἶναι ἴσαι.

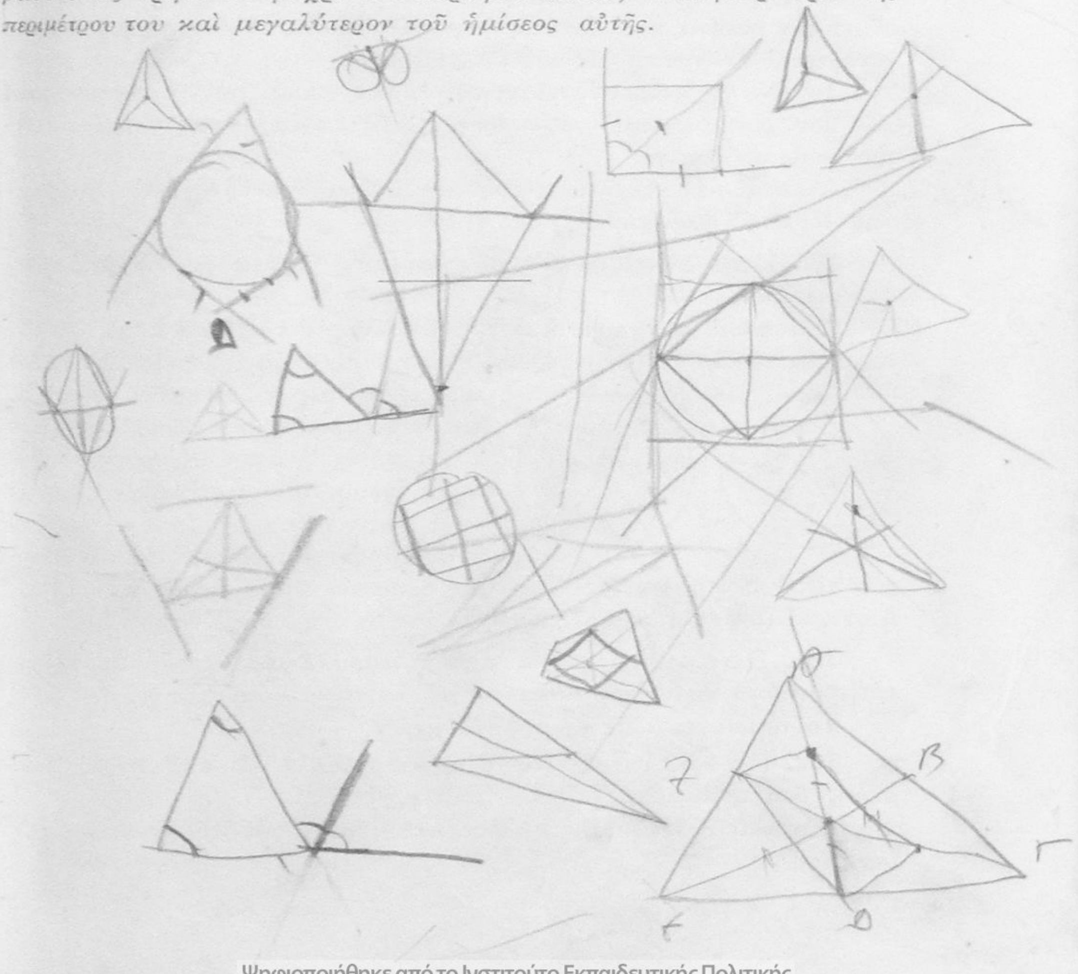
102) Ἐὰν τετραπλεύρου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαί, τὸ τετράπλευρον τοῦτο δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον.

103) *Ἐὰν ἐκ σημείου τινὸς ἄγωνται εἰς περιφέρειαν τρεῖς εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας.*

104) *Ἐκ τῶν δύο διαγωνίων παντὸς παραλληλογράμμου, μεγαλυτέρα εἶναι ἡ συνδέουσα τὰς κορυφὰς τῶν μικροτέρων γωνιῶν αὐτοῦ.*

105) *Πᾶσα πλευρὰ τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία συνδέει τοὺς πόδας τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἔκ τινος σημείου αὐτῆς ἐπὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ τριγώνου.*

106) *Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εὐθειῶν, τῶν ἀγομένων ἔκ τινος σημείου ἐντὸς τριγώνου μέχρι τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου του καὶ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος αὐτῆς.*



ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΛΥΟΜΕΝΑ ΔΙΑ ΤΟΥ ΚΑΝΟΝΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΔΙΑΒΗΤΟΥ

159. Διὰ τὴν λύσιν τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων χρησιμοποιοῦμεν τὸν κανόνα καὶ τὸν διαβήτην. Τοῦτο δέ, διότι αἱ γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ ἀνάγονται εἰς τὰς ἑξῆς:

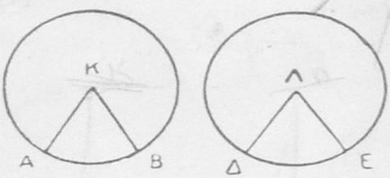
1ον. Νὰ γράψωμεν εὐθεῖαν, τῆς ὁποίας γνωρίζομεν δύο σημεῖα, καὶ

2ον. Νὰ γράψωμεν περιφέρειαν, τῆς ὁποίας γνωρίζομεν τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα.

Ἀλλ' αἱ μὲν εὐθεῖαι γράφονται διὰ τοῦ κανόνος, αἱ δὲ περιφέρειαι διὰ τοῦ διαβήτου.

160. Πρόβλημα. ***Νὰ σχηματισθῇ γωνία ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν.***

Ἔστω δοθεῖσα γωνία ἡ ΑΚΒ. Μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν τυχοῦσαν, γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὰς πλευρὰς τῆς δοθείσης γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Κατόπιν, μὲ κέντρον ἓν ἄλλο σημεῖον Λ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτήν, γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν, ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τόξον ΔΕ ἴσον μὲ τὸ τόξον ΑΒ, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας. Ἐὰν ἤδη φέρωμεν τὰς εὐθείας ΛΔ καὶ ΛΕ, ἡ σχηματιζομένη γωνία ΔΛΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν (§ 51).



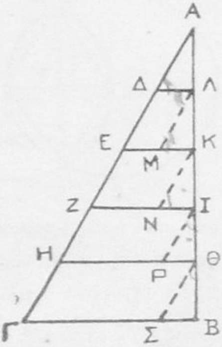
161. Πρόβλημα. ***Νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἀπὸ δοθέντος σημείου μὴ κειμένου ἐπ' αὐτῆς.***

Τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον.

162. Πρόβλημα. ***Νὰ διαιρεθῇ δοθεῖσα εὐθεῖα εἰς ἴσα μέρη, ὅσα θέλομεν.***

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ, τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν εἰς 5 ἴσα μέρη.

Πρὸς τοῦτο, ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον τῆς ΑΒ, π. χ. τὸ Α, φέρομεν μίαν ἄλλην εὐθεῖαν, τὴν ΑΓ, καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν μὲ τὸν διαβήτην κατὰ σειρὰν 5 τμήματα ἴσα, τὰ ΑΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΓ. Κατόπιν φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, τέλος δὲ ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ, Η φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΒΓ. Αἱ παράλληλοι αὗται διαιροῦν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς 5 ἴσα μέρη, τὰ ΑΛ, ΛΚ, ΚΙ, ΙΘ, ΘΒ. Διότι, ἐὰν ἐκ τῶν σημείων Λ, Κ, Ι, Θ ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΓ, σχηματίζονται τὰ τρίγωνα ΛΜΚ, ΚΝΙ, ΙΡΘ, ΘΣΒ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα πρὸς τὸ ΑΔΛ. Καὶ πράγματι, ἐὰν ἐξετάσωμεν τὸ ΑΔΛ πρὸς ἓν τούτων, π.χ. πρὸς τὸ ΚΝΙ, βλέπομεν, ὅτι ἔχουν ΚΝ=ΕΖ=ΑΔ. Ἐπίσης ἔχουν τὰς γωνίας τὰς προσκειμένας εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΔ καὶ ΚΝ, ἴσας μίαν πρὸς μίαν (§§ 115, 124). Ὥστε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα. Ὅθεν τὰ τμήματα ΑΛ, ΛΚ, ΚΙ κτλ. εἶναι ἴσα.



163. Πόρισμα. ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν καὶ τὰ τμήματα τῆς μιᾶς εὐθείας, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν παραλλήλων, εἶναι μεταξύ των ἴσα, θὰ εἶναι μεταξύ των ἴσα καὶ τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης.***

164. Πρόβλημα. ***Ἐκ τῶν δύο πλευρῶν τριγώνου καὶ ἐκ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.***

165. Πρόβλημα. ***Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ ἐκ δύο γωνιῶν νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.***

Ἀσκήσεις.

107) Ἐκ τῶν δύο γωνιῶν τριγώνου νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη.

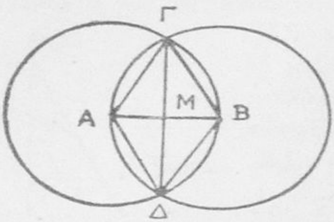
108) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, ὅταν δίδωνται τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

109) Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία αὐτῶν.

110) Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ἴση πρὸς τὰ $\frac{5}{3}$ δοθείσης εὐθείας.

166. Πρόβλημα. ***Νὰ ἀχθῇ ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον δοθείσης εὐθείας ΑΒ.***

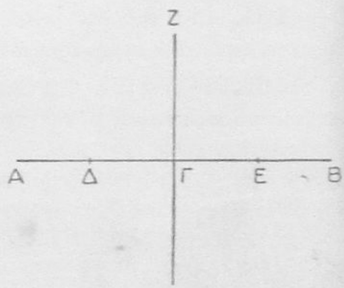
Γνωρίζομεν, ὅτι (Θ. 99) τὰ σημεῖα τῆς ζητουμένης καθέτου ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας ΑΒ, καὶ ἀντιστρόφως, ὅτι τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β, κεῖνται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὕρωμεν δύο τοιαῦτα σημεῖα, καὶ πρὸς τοῦτο γράφομεν δύο κύκλους ἴσους μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ μὲ ἀκτῖνα μεγαλυτέραν τοῦ ἡμίσεος τῆς ΑΒ, ἵνα οἱ κύκλοι οὗτοι τέμνωνται. Ἄρα ἡ ζητουμένη κάθετος εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα τέμνονται οἱ κύκλοι οὗτοι.



167. Πρόβλημα. ***Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τόξον ἢ δοθεῖσα γωνία εἰς δύο ἴσα μέρη.***

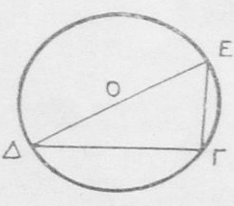
Φέρομεν τὴν χορδὴν τοῦ δοθέντος τόξου καὶ ἀνάγομεν τὸ πρόβλημα τοῦτο εἰς τὸ προηγούμενον. Διὰ τὴν γωνίαν κάμνομεν αὐτὴν ἐπίκεντρον καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ τόξον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου βαίνει ἡ γωνία, εἰς δύο ἴσα μέρη.

168. Πρόβλημα. ***Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Γ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν.***

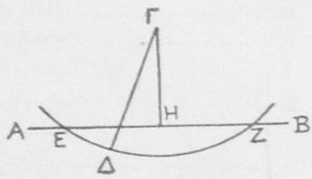


Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΑΒ δύο σημεῖα Δ καὶ Ε τοιαῦτα, ὥστε ΔΓ=ΓΕ, ἀνάγομεν τὸ πρόβλημα τοῦτο εἰς τὸ πρόβλημα 166.

Παρατήρησις. Ἐὰν τὸ Γ εἶναι εἰς τὸ ἄκρον εὐθείας, τὴν ὁποίαν δὲν θέλομεν νὰ προεκβάλωμεν, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Μὲ κέντρον οἱονδήποτε σημεῖον Ο ἐκτὸς τῆς ΑΒ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΟΓ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ Γ καὶ τέμνει τὴν ΑΒ καὶ εἰς ἄλλο σημεῖον Δ. Κατόπιν φέρομεν τὴν διάμετρον ΔΟΕ· τότε ἡ ΕΓ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.



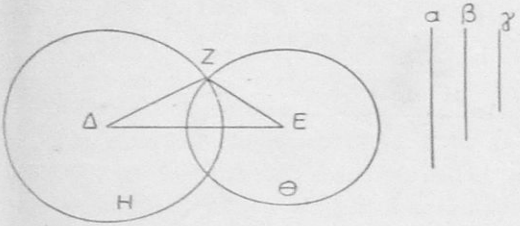
169. Πρόβλημα. ***Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ νὰ ἀχθῇ κάθετος ἀπὸ τοῦ σημείου Γ, ὅπερ δὲν κεῖται ἐπ᾽ αὐτῆς.***



Κάμνομεν τὸ Γ κέντρον περιφερείας, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ. Ἔπειτα δὲ ἐπὶ τοῦ μέρους τῆς εὐθείας ΑΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι χορδή, φέρομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον.

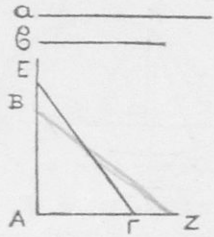
170. Πρόβλημα. ***Ἐκ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν α, β, γ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον.***

Λαμβάνομεν μίαν εὐθεῖαν ἴσην πρὸς μίαν ἐκ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, π.χ. τὴν α. Ἔστω δὲ αὕτη ἡ ΔΕ, ἡ ὁποία θὰ εἶναι ἡ μία πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τριγώνου· τότε ἡ δευτέρα πλευρὰ αὐτοῦ θὰ ἀρχίζῃ ἀπὸ ἓν ἄκρον τῆς ΔΕ, π.χ. τὸ Δ, καὶ θὰ τελειώνῃ εἰς σημεῖον, τὸ ὁποῖον θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὸ Δ ἀπόστασιν ἴσην π.χ. μὲ τὴν β. Ἀλλὰ τοιαῦτα σημεῖα εἶναι ἄπειρα, κεῖνται δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν β. Ὁμοίως, ἡ τρίτη πλευρὰ θὰ ἀρχίζῃ ἀπὸ τὸ σημεῖον Ε καὶ θὰ τελειώνῃ εἰς σημεῖον τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Ε καὶ ἀκτῖνα τὴν γ. Γράφομεν λοιπὸν τὰς δύο αὐτὰς περιφερείας. Ἐὰν δὲ Ζ εἶναι ἓν τῶν σημείων, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ γραφεῖσαι περιφέρειαι τέμνονται, τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον. Ἄλλο δὲ τρίγωνον διάφορον τούτου δὲν δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἐκ τῶν αὐτῶν πλευρῶν α, β, γ, διότι δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς αὐτὰς πλευρὰς εἶναι ἴσα.



Περιορισμός. Ἵνα αἱ ἀνωτέρω περιφέρειαι τέμνωνται, πρέπει ἑκάστη τῶν δοθεισῶν πλευρῶν νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς των, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἡ μεγαλυτέρα ἐκ τῶν δοθεισῶν πρέπει νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων δύο.

171. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ὀρθογώνιον ἐκ τῆς ὑποτεινούσης του α καὶ ἐκ μιᾶς καθέτου πλευρᾶς αὐτοῦ β.***



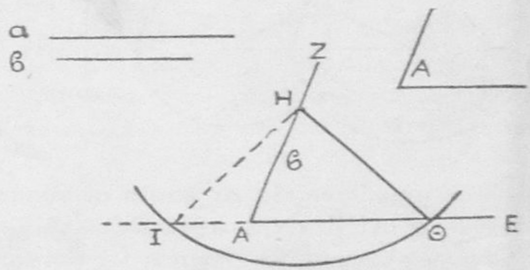
Κατασκευάζομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν ΕΑΖ, καὶ ἔπειτα λαμβάνομεν ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς αὐτῆς, π.χ. ἐπὶ τῆς ΕΑ, ἓν τμῆμα ΒΑ ἴσον μὲ τὴν δοθεῖσαν κάθετον πλευρὰν β. Τέλος, μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Β καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν α γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Ἐὰν δὲ Γ εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον αὕτη τέμνει τὴν ΑΖ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον. Ἄλλο δὲ ὀρθογώνιον τρίγωνον διάφορον τούτου δὲν δύναται νὰ κατασκευασθῇ μὲ τὰ αὐτὰ δεδομένα (§ 92).

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι δυνατόν, ἐὰν εἶναι $\alpha > \beta$.

172. Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα εἶναι γνωστά, ἐκτὸς τῶν πλευρῶν α καὶ β, καὶ ἡ ὀρθὴ γωνία Α, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς ὑποτεινούσης α. Ἐὰν ὅμως, ἀντὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας Α, δοθῇ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς α μία γωνία Α οἱαδήποτε, ἡ κατασκευὴ μένει ἡ αὐτή, ἀλλὰ τὸ πρόβλημα τότε διατυποῦται ὡς ἑξῆς:

Ἐκ τῶν δύο πλευρῶν τριγώνου α καὶ β καὶ ἐκ τῆς γωνίας Α τῆς ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς α νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.

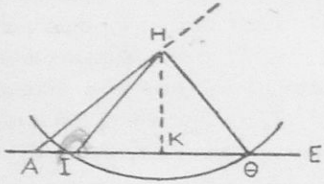
Κάμνομεν λοιπὸν τὴν κατασκευὴν ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, μὲ τὴν διαφοράν, ὅτι, ἀντὶ τῆς ὀρθῆς δοθείσης γωνίας, θὰ κατασκευάσωμεν γωνίαν ἴσην μὲ τὴν Α. Ὡς δὲ δεικνύει τὸ σχῆμα, τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΗΘ.



Διερεύνησις. Εἰς τὸ σχῆμα, ἡ περιφέρεια ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Η καὶ ἀκτῖνα τὴν α, τέμνει τὴν δευτέραν πλευρὰν ΑΕ τῆς γωνίας Α εἰς ἓν μόνον σημεῖον, τὸ Θ, καὶ ἑπομένως ἔχομεν μίαν λύσιν. Καὶ τοῦτο διότι ἡ πλευρὰ α εἶναι μεγαλυτέρα τῆς β. Ἐὰν ὅμως ἡ πλευρὰ α εἶναι μικροτέρα τῆς β, διὰ νὰ ἴδωμεν τί λύσεις θὰ ἔχωμεν, πρέπει νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ Η τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΕ, ἔστω δέ, ὅτι αὕτη εἶναι ἡ ΗΚ. Τότε:

1ον. Ἐὰν ἡ α εἶναι μικροτέρα τῆς ΗΚ, ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Η καὶ ἀκτῖνα τὴν α, δὲν θὰ τέμνῃ τὴν ΑΕ. Ἑπομένως δὲν θὰ ἔχωμεν λύσιν.

2ον. Ἐὰν εἶναι α=ΗΚ, τότε ἡ περιφέρεια αὕτη ἐφάπτεται τῆς ΑΕ εἰς τὸ Κ. Ὥστε ὑπάρχει μία μόνη λύσις, τὸ τρίγωνον ΑΗΚ· καὶ



3ον. Ἐὰν εἶναι ἡ α μεγαλυτέρα τῆς ΗΚ (εἶναι δέ, ὡς εἴπομεν, μικροτέρα τῆς β), τότε ἡ περιφέρεια τέμνει τὴν ΑΕ εἰς δύο σημεῖα Ι καὶ Θ.

Ἑπομένως ἔχομεν δύο λύσεις, ἤτοι τὰ δύο τρίγωνα ΑΙΗ καὶ ΑΘΗ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος.

Σημείωσις α΄. Ὅταν α<β, ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα. Ὅταν δὲ α>β (ὁπότε ἔχομεν πάντοτε μίαν λύσιν), ἡ γωνία δύναται νὰ εἶναι ὀξεῖα, ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα.

Σημείωσις β΄. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΗΙ, ἀπέναντι τῆς ΑΗ εἶναι ἡ ἀμβλεῖα γωνία ΗΙΑ, εἰς δὲ τὸ ΑΗΘ ἀπέναντι τῆς ΑΗ, εἶναι ἡ γωνία ΗΘΙ· ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΗΙΘ εἶναι ἰσοσκελές, αἱ γωνίαι ΗΙΘ καὶ ΗΘΙ εἶναι ἴσαι. Ὥστε αἱ δύο γωνίαι, αἱ ἀπέναντι τῆς ΑΗ εἶναι παραπληρωματικαί. Ἐκ τῆς σημειώσεως αὐτῆς καὶ ἐκ τοῦ προηγουμένου προβλήματος, ἕπεται τὸ θεώρημα:

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ μίαν γωνίαν ἴσην ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν, ἢ εἶναι τὰ τρίγωνα ταῦτα ἴσα ἢ αἱ δύο γωνίαι, αἱ ἀπέναντι τῶν δύο ἄλλων ἴσων πλευρῶν, εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ ἄνισοι.

Παρατήρησις. Ὅταν ἡ δεδομένη γωνία εἶναι ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα, τὰ τρίγωνα εἶναι πάντοτε ἴσα.

Ἀσκήσεις.

111) Νὰ κατασκευασθῇ ῥόμβος, ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ διαγωνίους ἴσας πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας.

112) Νὰ διαιρεθῇ περιφέρεια εἰς 4, 8, 16 ἴσα μέρη.

113) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$ τῆς ὀρθῆς ἢ ἴση πρὸς 60°, 30°.

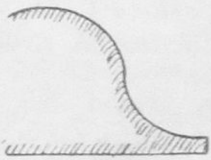
114) Ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ δοθέντος τριγώνου νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.

115) Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον, οὗ δίδεται μία τῶ πλευρῶν καὶ αἱ διαγώνιοι.

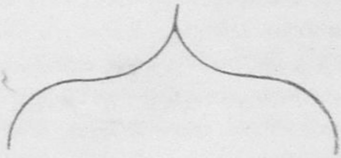
116) Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς δοθὲν σημεῖον περιφερείας.

117) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ ὑποτείνουσα καὶ μία τῶν ἄλλων πλευρῶν.

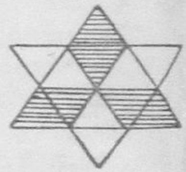
118) Νὰ κατασκευασθοῦν διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου σχήματα ὡς τὰ 1, 2, 3, 4, 5, 6.



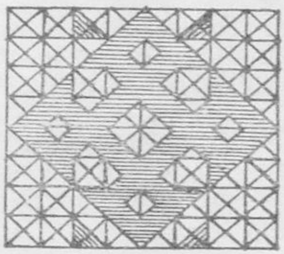
Σχ. 1



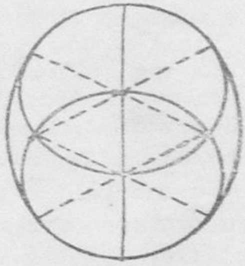
Σχ. 2



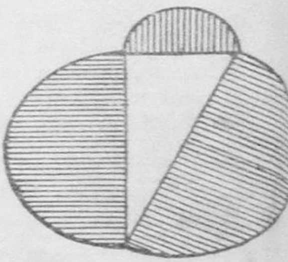
Σχ. 3



Σχ. 4



Σχ. 5



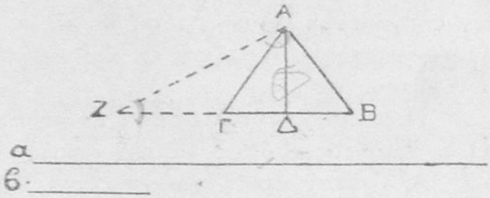
Σχ. 6

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

173. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ περίμετρος α καὶ ἡ κάθετος β ἐπὶ τὴν βάσιν ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς.***

Ἐπειδὴ δὲν γνωρίζομεν νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ἀπ᾽ εὐθείας, θὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς :

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ζητούμενον τρίγωνον εὑρέθη καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου εἶναι ΑΒ=ΑΓ, ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ=α καὶ ἡ κάθετος ΑΔ ἐπὶ τὴν βάσιν ἴση πρὸς τὴν β. Ἐπίσης εἰς αὐτὸ εἶναι ΑΔ<ΑΓ+ΓΔ, ἤτοι $A\Delta < \frac{1}{2}\alpha$. Ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν βάσιν ΒΓ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ καὶ λάβωμεν ΓΖ=ΓΑ, τὸ τρίγωνον ΑΓΖ εἶναι ἰσοσκελές. Τὸ δὲ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΖ ἔχει τὴν ΔΖ ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς περιμέτρου α καὶ τὴν ΑΔ ἴσην πρὸς τὴν β. Ἑπομένως τοῦτο δύναται νὰ κατασκευασθῇ. Ὅταν δὲ τοῦτο κατασκευασθῇ καὶ ἀποκόψωμεν ἐξ αὐτοῦ ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον διὰ μιᾶς εὐθείας ἐκ τοῦ Α, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς ΑΖ γωνίαν ἴσην μὲ τὴν Ζ, θὰ μείνῃ τὸ τρίγωνον ΑΔΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ζητουμένου.



Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι, εὑρίσκομεν τὴν ἑπομένην λύσιν τοῦ προβλήματος:

Κατασκευή. Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν αὐτοῦ ἴσην πρὸς $\frac{\alpha}{2}$ καὶ τὴν ἄλλην κάθετον ἴσην μὲ β. Ἔστω δὲ τοῦτο τὸ ΑΔΖ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ΔΖ>ΑΔ, εἶναι καὶ γωνΔΑΖ>γωνΖ. Ὥστε, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΑΓ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίσῃ μετὰ τῆς ΑΖ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Ζ, ἡ ΑΓ θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς γωνίας ΔΑΖ. Ἀλλὰ τότε τὸ τρίγωνον ΑΔΖ θὰ διαιρεθῇ εἰς δύο τρίγωνα, ἤτοι εἰς τὸ ἰσοσκελὲς ΑΓΖ καὶ εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΑΔΓ. Ἐὰν ἤδη προεκτείνωμεν τὴν ΓΔ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Δ καὶ λάβωμεν ΔΒ=ΔΓ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ΒΔ=ΔΓ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, ἔχον τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν, ἤτοι τὴν ΑΔ, ἴσην πρὸς τὴν β. Ἐπειδὴ δὲ ΑΓ=ΓΖ, ἕπεται, ὅτι $A\Gamma + \Delta\Gamma = \frac{1}{2}\alpha$· ἄρα εἶναι ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ=α.

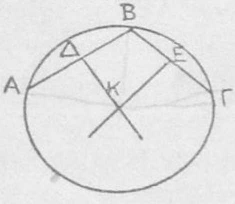
Σημείωσις. Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα τοῦτο δυνατὸν πρέπει νὰ εἶναι $\beta < \frac{\alpha}{2}$.

174. Ἀνάλυσις καὶ σύνδεσις.— Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προηγουμένου προβλήματος συνάγομεν τὰ ἑξῆς: Ὅταν δὲν γνωρίζωμεν τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος, ὑποθέτομεν εὑρεθὲν τὸ ζητούμενον αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ σχήματος δὲ αὐτοῦ, χρησιμοποιοῦντες γνωστὰς προτάσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν σχέσιν πρὸς τὰ δεδομένα καὶ τὰ ζητούμενα τοῦ προβλήματος προσπαθοῦμεν νὰ φθάσωμεν εἰς ἓν σχῆμα, τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν νὰ κατασκευάζωμεν. Ἐκ τοῦ νέου δὲ τούτου σχήματος ὁδηγούμεθα εἰς τὴν ζητουμένην λύσιν. Διότι, ὅπως ἐκ τοῦ πρώτου σχήματος φθάνομεν εἰς τὸ δεύτερον, οὕτω καὶ ἐκ τοῦ δευτέρου δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ πρῶτον.

Ἡ μέθοδος αὐτὴ τῆς ἀναζητήσεως τῆς λύσεως λέγεται **ἀναλυτική**. Ὁ δὲ τοιοῦτος τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον σκεπτόμεθα, λέγεται **ἀνάλυσις**.

Ἀλλ᾽ ὅταν πλέον ἔχωμεν εὕρει τὴν λύσιν καὶ θέλωμεν νὰ ἐκθέσωμεν αὐτὴν εἰς ἄλλους, ἀκολουθοῦμεν ἄλλην μέθοδον. Ἀρχίζομεν δηλαδὴ ἀμέσως ἀπὸ γνωστὰς προτάσεις. Συνδυάζοντες δὲ αὐτὰς καταλλήλως προχωροῦμεν ἀπ᾽ εὐθείας εἰς τὴν λύσιν. Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται **συνθετική**, ὁ δὲ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον σκεπτόμεθα κατὰ τὴν μέθοδον αὐτήν, λέγεται **σύνθεσις.** Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι ἡ σύνθεσις εἶναι ἀντίθετος τῆς ἀναλύσεως. Ὥστε εἰς τὴν λύσιν τοῦ προηγουμένου προβλήματος ἐκάμαμεν χρῆσιν τῆς ἀναλύσεως, ὅταν ὑπεθέσαμεν εὑρεθὲν τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ ὅταν, ἐφαρμόσαντες ἐπ᾽ αὐτοῦ γνωστὰς προτάσεις, ἐσχηματίσαμεν ἐξ αὐτοῦ ἄλλο δυνάμενον νὰ κατασκευασθῇ. Ὅταν ὅμως, ὁδηγούμενοι ἐκ τῆς ἀναλύσεως, κατεσκευάσαμεν ἐκ τοῦ δευτέρου τριγώνου τὸ πρῶτον, ἐκάμαμεν χρῆσιν τῆς συνθέσεως. Κατ᾽ αὐτὴν ἀπεδείξαμεν, ὅτι τὸ τελευταῖον τρίγωνον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος ἐφαρμόζεται καὶ διὰ τὴν ἀπόδειξιν θεωρημάτων. Ἀλλ᾽ ὅλα τὰ προηγούμενα θεωρήματα (ὅσα δὲν ἐγράφησαν ὡς ἀσκήσεις) ἀπεδείχθησαν διὰ τῆς συνθετικῆς μεθόδου, πλήν, ἐννοεῖται, ἐκείνων, τὰ ὁποῖα ἀπεδείχθησαν διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Κατωτέρω λύομεν μερικὰ προβλήματα διὰ τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου.



175. Π ρ ό β λ η μ α. ***Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ τριῶν δοθέντων σημείων Α, Β, Γ, μὴ κειμένων ἐπ᾽ εὐθείας.***

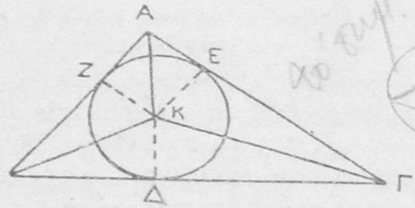
Ἀ ν ά λ υ σ ι ς. Ἔστω Κ τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας. Τότε θὰ εἶναι ΚΑ=ΚΒ=ΚΓ· ἐὰν δὲ Δ καὶ Ε εἶναι τὰ μέσα τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ ἀντιστοίχως, ἡ ΚΔ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ καὶ ἡ ΚΕ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ἡ ἀκόλουθος λύσις :

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Φέρομεν τὰς καθέτους εἰς τὰ μέσα Δ καὶ Ε τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ ἀντιστοίχως· αἱ κάθετοι αὗται τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Κ, διότι σχηματίζουν μετὰ τῆς ΔΕ γωνίας, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τῶν 2 ὀρθῶν· ἡ δὲ μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΑ γραφομένη περιφέρεια εἶναι ἡ ζητουμένη, διότι εἶναι ΚΑ=ΚΒ=ΚΓ.

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς. Ἄλλη περιφέρεια εἶναι ἀδύνατον νὰ διέλθῃ διὰ τῶν αὐτῶν τριῶν σημείων, διότι δύο διάφοροι περιφέρειαι οὐδέποτε ἔχουν κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.

176. Π ρ ό β λ η μ α. ***Εἰς δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.***

Ἀ ν ά λ υ σ ι ς. Ἂς ὑποτεθῇ, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Κ τὸ κέντρον τοῦ εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ, ὅπου ὁ κύκλος ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, αἱ ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ, θὰ εἶναι κάθετοι ἐπ' αὐτὰς ὡς ἐφαπτομένας· ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι τὸ σημεῖον Κ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν ἑκάστης τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ καὶ κατ' ἀκολουθίαν θὰ κεῖται ἐπὶ τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τούτων (§ 103).



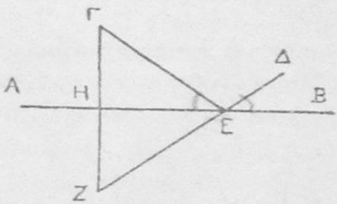
Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Διχοτομοῦμεν δύο ἐκ τῶν γωνιῶν τοῦ δοθέντος τριγώνου, π.χ. τὰς Β, Γ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Κ, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ διχοτόμοι τέμνονται, φέρομεν κάθετον ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν, π.χ. ἐπὶ τὴν ΒΓ, τὴν ΚΔ, ἔπειτα δὲ γράφομεν κύκλον μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΔ. Ἤδη λέγομεν, ὅτι ὁ κύκλος οὗτος θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τρίγωνον.

Διότι αἱ ἐκ τοῦ Κ ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ἀγόμεναι κάθετοι ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ εἶναι ἴσαι, καὶ διὰ τοῦτο ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΔ, θὰ διέρχεται διὰ τῶν σημείων Δ, Ε, Ζ, αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, ὡς κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ, θὰ εἶναι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου.

177. Π ρ ό β λ η μ α. ***Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ σημεῖόν τι, ἀπὸ τοῦ ὁποίου αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἰς δύο δοθέντα σημεῖα Γ, Δ νὰ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μετὰ τῶν δύο μερῶν τῆς εὐθείας.***

Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ὑποτίθενται κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ.

Ἀνάλυσις. Ἔστω Ε τὸ ζητούμενον σημεῖον, ἤτοι ἔστω ἡ γωνία ΔΕΒ ἴση πρὸς τὴν ΓΕΑ. Ἐὰν προεκταθῇ ἡ ΔΕ πέραν τῆς Ε, ἡ γωνία ΑΕΖ, ὡς ἴση πρὸς τὴν ΔΕΒ, θὰ εἶναι ἴση καὶ πρὸς τὴν ΓΕΑ. Ἐὰν ἄρα λάβωμεν ΕΖ=ΕΓ καὶ φέρωμεν τὴν ΓΖ, τὰ δύο τρίγωνα ΓΕΗ καὶ ΗΕΖ θὰ εἶναι ἴσα καὶ θὰ εἶναι ἡ ΓΗ ἴση πρὸς τὴν ΗΖ καὶ αἱ



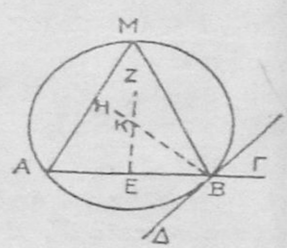
περὶ τὸ Η γωνίαι ἴσαι, ἤτοι ἡ ΓΖ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ θὰ διαιρῆται ὑπ' αὐτῆς εἰς δύο μέρη ἴσα. Ἐὰν λοιπὸν φέρωμεν τὴν ΓΖ καὶ εὕρωμεν τὸ Ζ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Γ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ τομὴ τῆς εὐθείας ΖΔ καὶ τῆς ΑΒ θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Σύνθεσις. Τοῦ ἑνὸς τῶν δοθέντων σημείων, ἔστω τοῦ Γ, εὑρίσκομεν τὸ συμμετρικὸν σημεῖον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ· ἔστω δὲ τοῦτο τὸ Ζ· φέρομεν ἔπειτα τὴν ΖΔ. Τὸ σημεῖον Ε, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ΖΔ τέμνει τὴν ΑΒ, εἶναι τὸ ζητούμενον.

Διότι τὰ τρίγωνα ΓΕΗ, ΖΕΗ εἶναι ἴσα· ἑπομένως αἱ γωνίαι ΓΕΗ καὶ ΗΕΖ εἶναι ἴσαι· ἀλλ' ἡ γωνία ΔΕΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΕΖ ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα ἡ γωνία ΓΕΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΒ.

Σημείωσις. Ἐὰν τὰ σημεῖα Γ, Δ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ΑΒ καὶ ζητῆται, αἱ ἴσαι γωνίαι νὰ σχηματίζωνται μετὰ τοῦ ἑνὸς μέρους αὐτῆς, ἡ λύσις μένει ἡ αὐτή. Ἀλλ' ἐὰν τὰ σημεῖα κεῖνται εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς εὐθείας, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον μέν, ἂν δὲν εὑρίσκωνται καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου, ἀόριστον δέ, ἂν τοὐναντίον.

178. Πρόβλημα. ***Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ νὰ γραφῇ τμῆμα κύκλου, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Γ.***



Δηλαδὴ ἡ εἰς τὸ τμῆμα τοῦτο ἐγγραφομένη γωνία νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ.

Ἀνάλυσις. Ἔστω τοιοῦτον τμῆμα τὸ ΑΜΒ· ἐὰν φέρωμεν τὴν ΒΔ ἐφαπτομένην εἰς τὸ Β, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γωνία ΑΒΔ ἰσοῦται πρὸς τὴν δοθεῖσαν Γ καὶ ὅτι τὸ κέντρον Κ εἶναι τομὴ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον Ε τῆς ΑΒ καὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΒΔ εἰς τὸ Β. Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑπομένη κατασκευή.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν γωνίαν τὴν ΔΒΑ ἴσην πρὸς τὴν Γ, ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Β καὶ πλευρὰν τὴν ΒΑ· κατόπιν φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΔ εἰς τὸ σημεῖον Β καὶ τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ, τέμνουσαν τὴν πρώτην εἰς τὸ σημεῖον Κ· ἐὰν δὲ μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΒ γραφῇ περιφέρεια, αὕτη θὰ διέρχεται διὰ τοῦ Α καὶ θὰ ἐφάπτεται τῆς ΒΔ εἰς τὸ σημεῖον Β· εἶναι ἄρα γωνΑΒΔ =γωνΑΜΒ=γωνΓ.

Ἀσκήσεις.

Νὰ κατασκευασθῇ :

119) Ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἔχον δοθεῖσαν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο καθέτων πλευρῶν.

120) Ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχον δοθὲν τὸ ὕψος.

121) Ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς καὶ ἡ γωνία αὐτῆς.

122) Ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ ἐκ μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

123) Κύκλος ἐφαπτόμενος μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ τῶν προεκβολῶν τῶν δύο ἄλλων (κύκλοι παρεγγεγραμμένοι).

ΛΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΟΠΩΝ

179. Εἰς τὸ πρόβλημα τῆς § 170 ἄγνωστος εἶναι κυρίως ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ ζητουμένου τριγώνου. Διότι αἱ ἄλλαι δύο κορυφαὶ αὐτοῦ εἶναι τὰ ἄκρα μιᾶς εὐθείας ἴσης πρὸς μίαν ἐκ τῶν δοθεισῶν. Ἀλλ' ἡ τρίτη κορυφὴ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἓν οἱονδήποτε σημεῖον, διότι πρέπει τοῦτο νὰ ἱκανοποιῇ ὡρισμένας ἀπαιτήσεις. Ἤτοι νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ Δ ἀπόστασιν ἴσην μὲ β καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἀπόστασιν ἴσην μὲ γ. Ἀλλὰ τὴν πρώτην μόνον ἀπαίτησιν ἱκανοποιοῦν ἄπειρα σημεῖα· ἔχουν δὲ ταῦτα τόπον τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν β. Ἐπίσης τὴν δευτέραν ἀπαίτησιν ἱκανοποιοῦν πάλιν ἄπειρα σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τόπον τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ Ε καὶ ἀκτῖνα τὴν γ. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον σημεῖον πρέπει νὰ ἱκανοποιῇ καὶ τὰς δύο ἀνωτέρω ἀπαιτήσεις, θὰ εὑρίσκεται κατ' ἀνάγκην καὶ εἰς τὸν ἕνα τόπον καὶ εἰς τὸν ἄλλον, ἤτοι καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς περιφερείας καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης. Ἑπομένως θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς τομῆς αὐτῶν.

Ὁμοίως εἰς τὸ πρόβλημα τῆς § 175 ἄγνωστον εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας. Πρέπει δὲ τοῦτο α′) νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β, καὶ β′) νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων Β καὶ Γ· ἀλλὰ τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἐκπληροῦν τὴν πρώτην ἀπαίτησιν, εἶναι ἄπειρα καὶ ἔχουν τόπον τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΑΒ. Ἀλλὰ καὶ τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἐκπληροῦν καὶ τὴν δευτέραν ἀπαίτησιν, εἶναι ἄπειρα. Ἔχουν δὲ καὶ ταῦτα τόπον τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Ὥστε τὸ ζητούμενον σημεῖον θὰ εἶναι ἡ τομὴ τῶν τόπων τούτων.

Ἀλλὰ καὶ πλεῖστα ἄλλα γεωμετρικὰ προβλήματα ἀνάγονται εἰς τὴν εὕρεσιν ἑνὸς σημείου ἢ πλειόνων ὑπὸ ὡρισμένους ὅρους (ἀπαιτήσεις), ἐκτός, ἐννοεῖται, ἐκείνων, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἀπ' εὐθείας ἡ εὕρεσις σημείου ὑπὸ ὡρισμένους ἐπίσης ὅρους, ὡς εἶναι τὸ πρόβλημα 177. Ἀλλ' ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ προβλήματος εἶναι δύο, ἢ δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς δύο, ἐργαζόμεθα, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ὡς ἑξῆς: Ἀφίνομεν προσωρινῶς τὸν ἕνα ὅρον κατὰ μέρος, καὶ ἔχομεν ὑπ' ὄψιν μας μόνον τὸν ἄλλον ὅρον. Ἀλλὰ τότε τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα πληροῦν μόνον τὸν ὅρον αὐτόν, εἶναι ἐν γένει ἄπειρα καὶ θὰ ἔχουν ἕνα ὡρισμένον τόπον. Ἀφοῦ δὲ εὕρωμεν τὸν τόπον αὐτόν, ἐρχόμεθα εἰς τὸν ἄλλον ὅρον, τὸν ὁποῖον παρελείψαμεν, καὶ ἔχομεν ὑπ' ὄψιν μας μόνον αὐτόν. Ἀλλὰ καὶ τότε εἶναι ἐν γένει ἄπειρα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα πληροῦν τὸν ὅρον αὐτόν. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν καὶ ἕνα ἄλλον τόπον, τὸν ὁποῖον καὶ τοῦτον εὑρίσκομεν. Ἡ τομὴ δὲ τῶν δύο τόπων, τοὺς ὁποίους εὕρομεν, θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

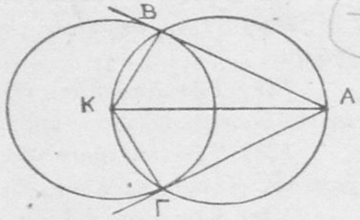
Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι, ἐὰν οἱ δύο τόποι τέμνωνται εἰς δύο σημεῖα, θὰ ἔχωμεν δύο λύσεις, ἐὰν δὲ τέμνωνται εἰς ἕν, θὰ ἔχωμεν μίαν λύσιν, καὶ ἐὰν δὲν τέμνωνται, δὲν θὰ ἔχωμεν λύσιν.

Παραδείγματα προβλημάτων λυομένων διὰ τῶν γεωμετρικῶν τόπων δίδομεν τὰ ἑπόμενα:

180. Πρόβλημα. ***Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ δοθέντος κύκλου Κ ἐκ δοθέντος σημείου Α ἐκτὸς τοῦ κύκλου.***

Ἄγνωστον εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πληροῖ τὸν ἑξῆς ὅρον· αἱ ἐξ αὐτοῦ ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ

Α νὰ σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν, ἀλλὰ τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα πληροῦν τὸν ὅρον τοῦτον, ἔχουν τόπον τὴν ἐπὶ τῆς ΑΚ ὡς διαμέτρου γραφομένην περιφέρειαν (§ 152, 3ον), ἐπ' αὐτῆς ἄρα θὰ κεῖται τὸ ζητούμενον σημεῖον. Πρέπει δὲ νὰ εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας. Ἄρα εἶναι τομὴ αὐτῶν. Ἐπειδὴ δὲ δύο τομαὶ ὑπάρχουν, ἔχομεν δύο λύσεις τοῦ προβλήματος τούτου.



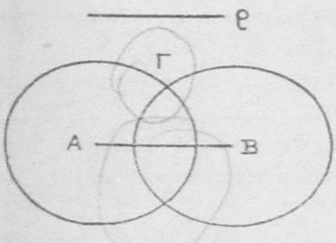
181. Π ρ ό β λ η μ α. ***Ἐκ δύο σημείων αὐτῆς καὶ ἐκ τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς νὰ γραφῇ ἡ περιφέρεια.***

Ἄγνωστον εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφέρειας, ἥτις πρέπει νὰ πληροῖ τοὺς ἑξῆς δύο ὅρους :

1ον. Νὰ διέρχεται διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Α καὶ νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ρ.

2ον. Νὰ διέρχεται διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Β καὶ νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν ρ.

Ἀλλ' ἂν μόνον τὸν πρῶτον ὅρον πληροῖ, τὸ κέντρον αὐτῆς ἔχει τόπον τὴν μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ρ γραφομένην περιφέρειαν· ἂν δὲ μόνον τὸν δεύτερον ὅρον πληροῖ, τὸ κέντρον αὐτῆς ἔχει τόπον τὴν μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ρ γραφομένην περιφέρειαν. Ἑπομένως τὸ ζητούμενον κέντρον εἶναι τομὴ τῶν δύο τούτων περιφερειῶν καὶ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχῃ δύο μὲν λύσεις, ἂν τέμνωνται αἱ ὡς ἄνω περιφέρειαι ($AB < 2\rho$), μίαν δέ, ἐὰν ἐφάπτωνται ἀλλήλων ($AB = 2\rho$) καὶ οὐδεμίαν, ἐὰν οὐδὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον ($AB > 2\rho$).



Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.

124) Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς δοθείσης περιφερείας Κ εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ διερχομένη διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Β.

125) Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν περιφερειῶν ἐκτὸς καὶ ἔχουσα ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν α.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Β΄ Βιβλίου.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος:

126) Τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

127) Τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ δύο εὐθειῶν τεμνομένων.

128) Τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται δοθείσης γωνίας.

129) Τῶν μέσων ἴσων χορδῶν τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

130) Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

131) Νὰ κατασκευασθῇ ρόμβος ἔχων δοθεῖσαν γωνίαν καὶ τὴν διαγώνιον, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς δοθείσης γωνίας.

132) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ περίμετρος καὶ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων του.

133) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται δύο πλευραὶ καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

134) Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα, καὶ ὁ ὁποῖος νὰ ἐφάπτεται δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.

135) Ἐπὶ δεδομένης εὐθείας νὰ εὑρεθῇ σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ δύο δεδομένας εὐθείας ἢ ἀπὸ δύο δεδομένα σημεῖα.

136) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο δοθείσας εὐθείας οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζεται τρίγωνον ἰσοσκελές.

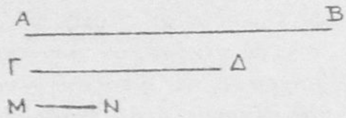
137) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τοιαύτη, ὥστε τὸ ἐντὸς τοῦ δοθέντος κύκλου κείμενον τμῆμα αὐτῆς νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

138) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗτινος ἡ γωνία τῆς κορυφῆς νὰ εἶναι τετραπλασία ἑκατέρας τῶν δύο γωνιῶν τῆς βάσεως.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

182. Κοινὸν μέτρον δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν.—Ἔστω ὅτι ἔχομεν δύο ὁμοειδῆ μεγέθη, π.χ. δύο εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἔστω δὲ ἐπίσης, ὅτι ἡ μὲν ΑΒ γίνεται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΜΝ ἐπαναλαμβανομένην 5 φοράς, ἡ δὲ ΓΔ γίνεται ἀπὸ τὴν ΜΝ ἐπαναλαμβανομένην 3 φοράς. Τότε ἡ ΜΝ λέγεται **κοινὸν μέτρον** τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Γενικῶς δέ :



Κοινὸν μέτρον δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν λέγεται τρίτον ὁμοειδὲς μέγεθος, ἐκ τοῦ ὁποίου, ἐπαναλαμβανομένου, ἀποτελοῦνται ἀμφότερα.

183. Σύμμετρα καὶ ἀσύμμετρα ὁμοειδῆ μεγέθη—Ὅταν μεγέθη ὁμοειδῆ ἔχουν κοινὸν μέτρον, λέγονται **σύμμετρα** μεταξύ των. Ἀλλά, ὡς θὰ ἴδωμεν βραδύτερον, ὑπάρχουν ὁμοειδῆ μεγέθη, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν κοινὸν μέτρον. Ὅταν εἰς ὁμοειδῆ μεγέθη, συμβαίνῃ τοῦτο, λέγονται **ἀσύμμετρα.**

184. Μέτρησις τῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν.—Ἡ ἔννοια τῆς μετρήσεως, ὡς τὴν εἴδομεν εἰς τὰς §§ 28, 58 καὶ 60, ἐκτείνεται, ὡς εἶναι εὐνόητον, καὶ ἐπὶ παντὸς γεωμετρικοῦ μεγέθους.

Κατὰ ταῦτα :

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος παριστᾷ ἓν μέγεθος ἢ ποσόν, λέγεται μέτρησις αὐτοῦ καὶ

Διὰ νὰ μετρήσωμεν ἓν ποσόν, συγκρίνομεν αὐτὸ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς καὶ ὡρισμένον, τὸ ὁποῖον λέγεται μονάς.

185. Ἀντὶ νὰ μετρήσωμεν ἓν μέγεθος, εἶναι φανερόν, ὅτι δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν τὰ μέρη του καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι προέκυψαν ἀπὸ τὴν μέτρησιν τῶν μερῶν.

186. Ὅταν μετροῦμεν ἴσα ἢ ἰσοδύναμα σχήματα, λαμβάνομεν ἴσους ἀριθμούς, διότι ταῦτα ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰ ἴδια μέρη. Ἀντιστρόφως δέ, ὅταν μετροῦμεν σχήματα καὶ λαμβάνωμεν ἴσους ἀριθμούς, τὰ σχήματα εἶναι ἴσα ἢ ἰσοδύναμα, διότι γίνονται ἀπὸ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγέθους, τὸ ὁποῖον ἐλήφθη ὡς μονάς.

187. Γινόμενον μεγέθους ἐπὶ ἀριθμόν.—Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἐπαναλάβωμεν τὴν εὐθεῖαν α τρεῖς φοράς, θὰ γράψωμεν $\alpha.3=\alpha+\alpha+\alpha$. Ἡ δὲ εὐθεῖα $\alpha+\alpha+\alpha$, ἡ ὁποία εἶναι τριπλασία τῆς α, βλέπομεν, ὅτι γίνεται ἀπὸ τὴν α καθὼς ὁ 3 γίνεται ἀπὸ τὴν μονάδα 1. Λέγομεν δὲ τὴν εὐθεῖαν ταύτην γινόμενον τῆς εὐθείας α ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3. Γενικῶς δὲ ***γινόμενον μεγέθους Α ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμὸν λέγεται τὸ μέγεθος, τὸ ὁποῖον γίνεται ἐκ τοῦ Α καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ, ὡς γίνεται ὁ ἀριθμὸς ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς.***

Π. χ. τὸ γινόμενον $A.\frac{3}{5}$ εἶναι $\frac{A}{5}+\frac{A}{5}+\frac{A}{5}$ καὶ τὸ γινόμενον $A.2\frac{3}{4}$ εἶναι $A+A+\frac{A}{4}+\frac{A}{4}+\frac{A}{4}$.

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς μεγέθους ἐπὶ ἀριθμὸν ἔχει τὰς ἑξῆς γενικὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀριθμῶν:

$$M.(\alpha+\beta)=(M.\alpha)+(M.\beta)$$
$$(M+M').\alpha=(M.\alpha)+(M'.\alpha)$$
$$(M.\alpha).\beta=M.(\alpha.\beta).$$

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς εἶναι πολλαπλασιαστής, ἔπρεπε νὰ γράφωμεν Α.3, Α.5· ἀλλ' ἐπεκράτησεν ἡ γραφὴ 3Α, 5Α, διότι εἰς τὰς ἀλγεβρικὰς πράξεις προτάσσομεν τοὺς ἀριθμητικοὺς παράγοντας.

188. Λόγος δύο μεγεθῶν.—Ἐὰν ἓν μέγεθος Α εἶναι γινόμενον τοῦ ὁμοειδοῦς μεγέθους Β ἐπί τινα ἀριθμὸν α, τότε ὁ α λέγεται **λόγος** τοῦ Α πρὸς Β καὶ παριστᾶται οὕτως: $A:B=\alpha$.

Περὶ τοῦ λόγου δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, ὅτι ***ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν παριστώντων αὐτὰ ἀριθμῶν, ὅταν μετρηθοῦν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος.***

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν μετροῦντες τὰ μεγέθη Α καὶ Β, δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν διὰ τῶν αὐτῶν γραμμάτων, ἐγκλειομένων εἰς παρένθεσιν, δηλαδὴ (Α), (Β)· τότε ὁ λόγος Α:Β παριστᾶται διὰ τοῦ πηλίκου $\frac{(A)}{(B)}$ ἢ καὶ ἁπλῶς διὰ τοῦ $\frac{A}{B}$.

189. Θ ε ώ ρ η μ α. ***Ἐὰν εὐθεῖα οἱαδήποτε ληφθῇ ὡς μονὰς καὶ παρασταθῇ διὰ τοῦ 1, αἱ μὲν σύμμετροι πρὸς τὴν μονάδα εὐθεῖαι παριστῶνται διὰ τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν*** (οἱ ὁποῖοι διὰ τοῦτο λέγονται σύμμετροι), ***αἱ δὲ ἀσύμμετροι πρὸς τὴν μονάδα παριστῶνται δι' ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι οὔτε ἀκέραιοι εἶναι οὔτε κλασματικοί, ἀλλ' ἔχουν ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικὰ*** (οἱ ὁποῖοι διὰ τοῦτο λέγονται ἀσύμμετροι). Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο εὐκόλως.

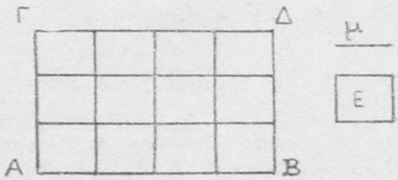
Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἀληθεύει καὶ περὶ τῶν τόξων τοῦ αὐτοῦ κύκλου, διότι καὶ ταῦτα συγκρίνονται μεταξύ των, ὡς αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ (§ 38), ἀκόμη δὲ καὶ περὶ τῶν γωνιῶν.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

190. Ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνεται τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν τὴν μονάδα τῶν εὐθειῶν, ὁ ἀριθμὸς δέ, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐκ τῆς μετρήσεως ἐπιφανείας, λέγεται **ἐμβαδὸν** αὐτῆς.

191. Μέτρησις τοῦ ὀρθογωνίου.—Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδόν. Ἔστω δέ:

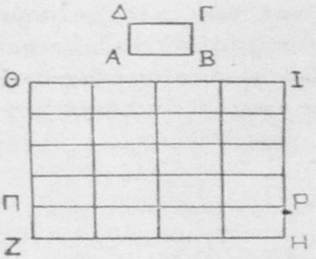
1ον. Ὅτι οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ ὕψος ΑΓ, εἶναι ἀκέραιοι. Ἔστω, δηλαδή, ὅτι (ΑΒ) = 4 μ. καὶ (ΑΓ) = 3 μ. Τότε διαιροῦμεν τὴν βάσιν ΑΒ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΓ. Οὕτω δὲ διαιρεῖται τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον



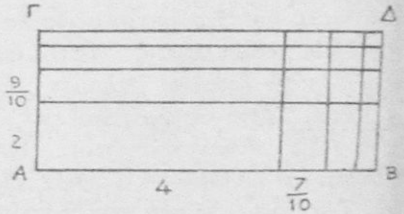
εἰς τέσσαρα ἴσα ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσιν 1 μ. καὶ ὕψος 3 μ. Κατόπιν διαιροῦμεν καὶ τὸ ὕψος εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΒ· ἀλλὰ τότε ἕκαστον τῶν τεσσάρων ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὸ ὅλον ὀρθογώνιον, διαιρεῖται εἰς τρία ἴσα τετράγωνα πλευρᾶς 1 μ., ἤτοι εἰς 3 τ. μ. Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου εἶναι 3.4, ἤτοι 12 τ.μ.· εἶναι δὲ ὁ ἀριθμὸς 12 γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος.

2ον. Ἔστω ἤδη τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ βάσις $(ΑΒ) = \frac{5}{4}$ μ. καὶ τὸ ὕψος $(ΑΔ) = \frac{3}{5}$ μ.

Ἐὰν τεθοῦν κατὰ σειρὰν 4 ὀρθογώνια ἴσα πρὸς τὸ δοθέν, σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον ΖΗΡΠ μὲ βάσιν 5 μ. καὶ ὕψος $\frac{3}{5}$ μ.· ἐὰν δὲ τεθοῦν ἐπ' ἄλληλα 5 ὀρθογώνια ἴσα πρὸς τὸ ΖΗΡΠ, σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον ΖΗΙΘ μὲ βάσιν 5 μ. καὶ ὕψος 3 μ. Ἐπομένως εἶναι (ΖΗΙΘ) = 15 τ. μ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΖΗΙΘ ἀποτελεῖται ἀπὸ 20 ὀρθογώνια ἴσα πρὸς τὸ ΑΒΓΔ. Εἶναι ἄρα (ΑΒΓΔ) = $\frac{15}{20}$ τ. μ. (= $\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{5}$).



3ον. Ἐὰν τέλος, τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι (ΑΒ) = 4 μ., 7841... καὶ (ΑΓ) = 2 μ., 9189... χωρίζομεν τοῦτο εἰς πλῆθος ὀρθογωνίων, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα, ἑκάστου τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν κατὰ τὰς προηγουμένας περιπτώσεις· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τούτων εὐκόλως φαίνεται, ὅτι εἶναι γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 4,7841 .... καὶ 2,9189 ....



Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται τὸ θεώρημα :

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ (δηλαδὴ τῶν παριστώντων αὐτὰ ἀριθμῶν).

192. Μέτρησις τοῦ τετραγώνου.—Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον εἶναι ὀρθογώνιον μὲ ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας, ἕπεται, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της. Π. χ. ἓν τετράγωνον ἔχει πλευρὰν 4 μ. Τότε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $4 \times 4 = 4^2 = 16$ τ. μ. Δι' αὐτὸν δὲ τὸν λόγον εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν τὴν δευτέραν δύναμιν ἑνὸς ἀριθμοῦ τὴν λέγομεν καὶ τετράγωνον.

Σημείωσις. Ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του, ἐὰν εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἐμβαδοῦ. Οὕτως ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 81 τ. μ., εἶναι $\sqrt{81} = 9$ μ.

Ἀσκήσεις

139) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος εἶναι 1) 17,5 μ., 12,7 μ.· 2) 0,3 μ., 0,04 μ.· 3) 0,25 μ., 0,035 μ.

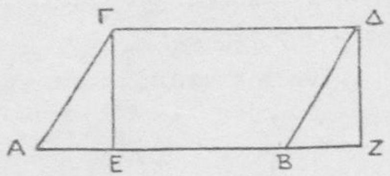
140) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 1) 17 μ., 2) $3\frac{1}{4}$ μ., 3) 0,45 μ. ἢ τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 1) 19 μ., 2) 3,04 μ., 3) 0,81 μ.

141) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις καὶ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἀντιστοίχως 1) 19,3 μ., 96,5 τ.μ.· 2) 8 μ., 3,60 τ.μ.· 3) 0,45 μ., 0,0135 τ.μ.

142) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 1) 12321 τ.μ., 2) 62,41 τ.μ., 3) 1,1416 τ.μ.

~~193. Μέτρησις τοῦ παραλληλογράμμου.~~—Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Διὰ νὰ μετρήσωμεν αὐτό, τὸ μετασχηματίζομεν εἰς ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓΔ. Γίνεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς :

Ἐκ τῶν ἄκρων τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒ, ὁπότε σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον ΕΓΔΖ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον, διότι τὰ μέρη ἑκάστου τούτων (δηλ. τραπέζιον καὶ τρίγωνον) εἶναι ἴσα. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΕΓΔΖ ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὰ αὐτὰ μὲ τὰ τοῦ δοθέντος παραλληλογράμμου καὶ ἐπειδὴ εἶναι (ΕΓΔΖ) =(ΑΒ).(ΓΕ), εἶναι ἐπομένως καὶ (ΑΒΓΔ)=(ΑΒ).(ΓΕ). Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται τὸ θεώρημα :



Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Δηλαδὴ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, οὗ βάσις εἶναι ἡ ΑΒ καὶ ὕψος τὸ ΓΕ, τὸ ἐμβαδὸν εἶναι (ΑΒΓΔ)=(ΑΒ).(ΓΕ).

194. Πόρισμα 1ον. ***Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμα.***

195. Πόρισμα 2ον. ***Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὁποῖα***

ἔχουν ἴσας βάσεις, ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν των· ὅσα δὲ ἔχουν ἴσα ὕψη ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεών των.

Δηλαδή, ἐὰν δύο παραλληλόγραμμα ἔχουν ἴσας βάσεις, ἀλλὰ τὸ ὕψος τοῦ ἑνὸς εἶναι π.χ. διπλάσιον τοῦ ὕψους τοῦ ἄλλου καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς θὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἄλλου, διότι ὁ λόγος τῶν ὑψῶν εἶναι 2.

Ἀσκήσεις.

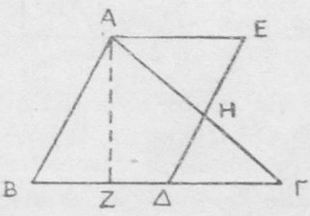
143) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, ὅπερ ἔχει βάσιν καὶ ὕψος 1) 142μ., 14,9μ.· 2) 13,2μ., 0,64μ.· 3) 0,009μ., 1,06μ.

144) Παραλληλογράμμου δύο προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι 9μ. καὶ 4μ., ἡ δὲ κάθετος μεταξὺ τῶν μεγαλυτέρων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 2,5μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς καθέτου μεταξὺ τῶν μικροτέρων πλευρῶν αὐτοῦ.

145) Παραλληλογράμμου τινὸς ἡ περίμετρος εἶναι 44 μ. καὶ ἡ μία πλευρά του 8 μ., ἡ δὲ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν μεγαλυτέρων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 6 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου.

146) Ἰσοδύναμα παραλληλόγραμμα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν. Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀπέναντι τῆς βάσεως;

196. Μέτρησις τοῦ τριγώνου.—Ἔστω βάσις τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ ΒΓ καὶ ὕψος τὸ ΑΖ· ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς ΒΓ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΑ καὶ ἐκ τοῦ Α παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, σχηματίζεται παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΔΕ, ἔχον βάσιν τὴν $ΒΔ=\frac{1}{2}$ ΒΓ καὶ ὕψος τὸ ΑΖ. Εἶναι δὲ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον, διότι ἕκαστον τούτων σύγκειται ἐκ μερῶν ἴσων· ἐπειδὴ δὲ εἶναι



$$(ΑΒΔΕ)=\frac{1}{2}\ (ΒΓ).(ΑΖ), \text{ ἕπεται καὶ } (ΑΒΓ)=\frac{1}{2}\ (ΒΓ).(ΑΖ).$$

Ἕπεται λοιπὸν τὸ θεώρημα:

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμίσεος τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

197. Πόρισμα 1ον. *Πᾶν τρίγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον ἔχον βάσιν μὲν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου.*

198. Πόρισμα 2ον. *Τὰ ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη ἔχοντα τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα.*

199. Πόρισμα 3ον. *Τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν· τὰ δὲ ἔχοντα ἴσα ὕψη εἶναι ὡς αἱ βάσεις των.*

Ἀσκήσεις.

147) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος εἶναι: 1) 34 μ., 13, 7μ.· 2) 0,28μ., 0,4μ.· 3) $3\frac{1}{2}$μ., 0,03μ.

148) Αἱ διαγώνιοι ῥόμβου εἶναι 18,4 μέτρα καὶ 6 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, ὅταν αἱ διαγώνιοι εἶναι α μ. καὶ β μ.

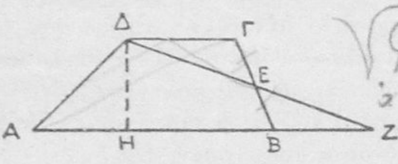
149) Τριγώνου ἡ βάσις εἶναι 15,8μ., τὸ δὲ ἐμβαδὸν 72,68τ.μ. Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τῆς ἀπέναντι τῆς βάσεως ἀπὸ ταύτης;

150) Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου εἶναι γινόμενον τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

151) Δύο τρίγωνα ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν, τὰς δὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας παραπληρωματικάς, εἶναι ἰσοδύναμα.

152) Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν ἰσοδυνάμων τριγώνων ἐχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν;

200. Μέτρησις τοῦ τραπεζίου.—Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ. Ἐὰν τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία συνδέει τὴν κορυφὴν Δ μετὰ τοῦ μέσου Ε τῆς πλευρᾶς ΓΒ, προεκτείνωμεν, ὥστε νὰ συναντήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ζ, ἀποδεικνύεται, ὡς εἰς τὰ περὶ παραλληλογράμμου καὶ τριγώνου, ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΑΖ καὶ τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοδύναμα· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $(\Delta AZ)=\frac{1}{2}(AZ).(\Delta H)=\frac{(AB)+(\Delta\Gamma)}{2}\cdot$ (ΔH) ἕπεται, ὅτι καὶ $(AB\Gamma\Delta)=\frac{(AB)+(\Delta\Gamma)}{2}\cdot(\Delta H)$.



Ἕπεται λοιπὸν ὅτι: ***Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

201. Πόρισμα. Ἐὰν φέρωμεν τὴν διαγώνιον ΑΓ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ, τοῦτο διαιρεῖται εἰς τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΑΓΒ. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΔ, ΑΓ καὶ ΓΒ, εὐκόλως δεικνύεται, ὅτι ἀποτελοῦν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τραπεζίου, λέγεται διάμεσος αὐτοῦ, ἕπεται, ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς διαμέσου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἀσκήσεις.

153) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὕψος 9 μ. αἱ δὲ βάσεις αὐτοῦ εἶναι ἡ μὲν 24,15 μ., ἡ δὲ 10,8 μ.

154) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, τοῦ ὁποίου ἡ διάμεσος εἶναι 13,8 μ. καὶ τὸ ὕψος 3,75 μ.

155) Τραπέζιον ἔχει βάσεις 7,4 μ. καὶ 3,6 μ. καὶ ἐμβαδὸν 20,90 τ. μ. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος του;

156) Τραπέζιον ἔχει ἐμβαδὸν 42 τ. μ., ὕψος 5,5 μ. καὶ τὴν μίαν τῶν βάσεών του 8,7 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη βάσις.

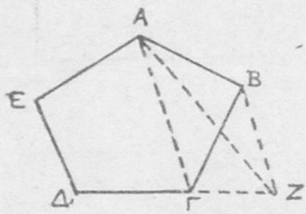
202. Μέτρησις οἱουδήποτε εὐθυγράμμου σχήματος.—Τὸ ἐμβαδὸν εὐθυγράμμου σχήματος δυνάμεθα νὰ τὸ εὕρωμεν, ἐὰν ἀναλύσωμεν αὐτὸ εἰς τρίγωνα. Ἐὰν δὲ ἔχωμεν πολύγωνον περιγεγραμμένον περὶ κύκλον καὶ φέρωμεν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εὐθείας μέχρι τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, τὸ πολύγωνον διαιρεῖται εἰς τόσα τρίγωνα, ὅσαι καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ. Ἐὰν δὲ λάβωμεν ὡς βάσεις τῶν τριγώνων τούτων τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, τὰ ὕψη τούτων θὰ εἶναι ἴσα πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν εὐκόλως συνάγομεν, ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς πολυγώνου περιγεγραμμένου περὶ κύκλον εἶναι τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Σημείωσις. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς πολυγώνου εὑρίσκεται καὶ ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἰσοδυνάμου τριγώνου, εἰς ὃ δύναται νὰ μετασχηματισθῇ τὸ πολύγωνον κατὰ τὰ κάτωθι:

203. Πρόβλημα. ***Ἐκ τοῦ δοθέντος πολυγώνου νὰ κατασκευασθῇ ἄλλο, ἔχον ἐπιφάνειαν μὲν τὴν αὐτήν, μίαν δὲ πλευρὰν ὀλιγώτερον.***

Ἔστω, ὅτι ἐκ τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ κατεσκευάσθη τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ τετράπλευρον ΑΖΔΕ. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ΑΓ, παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν εἰς ἕκαστον τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΖΓ προστεθῇ τὸ αὐτὸ σχῆμα ΑΓΔΕ, προκύπτουν τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΖΔΕ· ἑπομένως τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἰσοδύναμα. Ἐπειδὴ δὲ ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΓ, ἔχουν ὕψη ἴσα. Ἄρα ἡ ΒΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ. Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, κατασκευάζομεν τὸ ζητούμενον πολύγωνον ὡς ἑξῆς: Φέρομεν πρῶτον τὴν διαγώνιον ΑΓ, χωρίζουσαν ἀπὸ τοῦ δοθέντος πολυγώνου ΑΒΓΔΕ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, δεύτερον τὴν ΒΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ, τέμνουσαν τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ κατὰ τὸ Ζ, καὶ τέλος φέρομεν τὴν ΑΖ.



Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΖΓ, ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΓ καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἰσοδύναμα· ἄρα καὶ τὰ σχήματα ΑΒΓΔΕ καὶ ΑΖΔΕ, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦνται ἐξ ἰσοδυνάμων σχημάτων, εἶναι ἰσοδύναμα· ἔχει δὲ τὸ ΑΖΔΕ μίαν πλευρὰν ὀλιγώτερον ἢ τὸ δοθέν· ὥστε κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον.

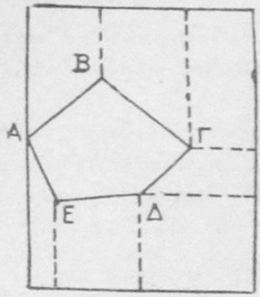
204. Πόρισμα. ***Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον*** (ἑπομένως καὶ ὀρθογώνιον) ***ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν πολύγωνον.***

Ἀσκήσεις.

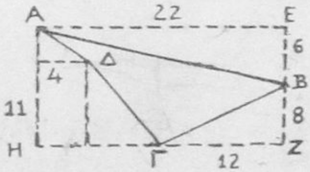
157) Πῶς θὰ μετρηθῇ ἡ εἰς τὸ σχ. 1 (σελ. 98) ἀπροσπέλαστος ἐπιφάνεια ΑΒΓΔΕ;

158) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων, τὰ ὁποῖα ἀναγράφονται εἰς τὸ σχῆμα 2 (σελ. 98).

205. Περὶ ἀναλογιῶν.— Ἀναλογία λέγεται ἡ ἰσότης δύο λόγων. Π.χ. ἡ ἰσότης Α : Β = Γ : Δ ἢ $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ εἶναι ἀναλογία. Τὰ Α, Β, Γ, Δ ἢ δύνανται νὰ εἶναι ἀριθμοί, ὁπότε ἔχομεν ἀναλογίαν ἀριθμῶν, ἢ μεγέθη, ὁπότε ἔχομεν ἀναλογίαν μεγεθῶν. Ἀλλὰ γνωρίζομεν, ὅτι οἱ ὅροι ἑκάστου λόγου πρέπει νὰ εἶναι ἀριθμοὶ ἢ μεγέθη ὁμοειδῆ, διότι ἄλλως λόγος δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ. Οὕτω δύο εὐθεῖαι ἢ δύο ἐπιφάνειαι ἔχουν λόγον. Ἀλλὰ λόγος εὐθείας πρὸς ἐπιφάνειαν δὲν ὑπάρχει. Ἐξ ἄλλου ὅμως, ἐὰν ὁ λόγος δύο εὐθειῶν εἶναι π. χ. 3 καὶ ὁ λόγος δύο ἐπιφανειῶν εἶναι ἐπίσης 3, τότε δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι ὁ λόγος τῶν εὐθειῶν αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἐπιφανειῶν. Ὥστε εἰς μίαν ἀναλογίαν εἶναι δυνατὸν οἱ ὅροι ἑνὸς λόγου νὰ εἶναι ἑτεροειδεῖς πρὸς τοὺς ὅρους τοῦ ἄλλου λόγου. Οἱ πρῶτοι ὅροι τῶν δύο λόγων λέγονται **ἡγούμενοι** ὅροι τῆς ἀναλογίας, οἱ δὲ δεύτεροι ὅροι λέγονται **ἑπόμενοι** ὅροι αὐτῆς



Σχ. 1



Σχ. 2

Ὁ πρῶτος καὶ τέταρτος ὅρος λέγονται **ἄκροι** ὅροι αὐτῆς, ὁ δὲ δεύτερος καὶ τρίτος λέγονται **μέσοι** ὅροι. Ἐὰν οἱ δύο μέσοι ὅροι ἀναλογίας εἶναι ἴσοι, ἡ ἀναλογία λέγεται **συνεχὴς** καὶ ὁ μέσος ὅρος λέγεται **μέσος ἀνάλογος** τῶν δύο ἄκρων. Οὕτως ἐν τῇ ἀναλογίᾳ $Α : Β = Β : Γ$ ὁ Β λέγεται μέσος ἀνάλογος τῶν Α καὶ Γ.

206. Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι Α καὶ Β καὶ δύο ἐπιφάνειαι Γ καὶ Δ· ἔστω δὲ ὅτι εἶναι $\frac{Α}{Β} = \frac{Γ}{Δ}$· ἀλλὰ τότε ἔχομεν ἀναλογίαν μεγεθῶν. Ἐὰν τὰς εὐθείας Α καὶ Β μετρήσωμεν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος, π. χ. διὰ τοῦ μέτρου, οἱ ἀριθμοὶ (Α) καὶ (Β), τοὺς ὁποίους θὰ λάβωμεν, θὰ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον $\frac{Α}{Β}$, ἤτοι θὰ εἶναι $\frac{Α}{Β} = \frac{(Α)}{(Β)}$· ὁμοίως, ἐὰν μετρήσωμεν τὰς ἐπιφανείας Γ καὶ Δ διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος, θὰ ἔχωμεν $\frac{Γ}{Δ} = \frac{(Γ)}{(Δ)}$, ἄρα εἶναι καὶ $\frac{(Α)}{(Β)} = \frac{(Γ)}{(Δ)}$, ἤτοι πᾶσα ἀναλογία μεγεθῶν τρέπεται εἰς ἀναλογίαν ἀριθμῶν, ὅταν οἱ ὅροι ἑκάστου λόγου μετρηθοῦν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος. Ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν $\frac{(A)}{(B)} = \frac{(\Gamma)}{(\Delta)}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$.

207. Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν.— Ἀφοῦ πᾶσα ἀναλογία μεγεθῶν τρέπεται εἰς ἀναλογίαν ἀριθμῶν καὶ ἀντιστρόφως, εὐκόλως ἕπεται ὅτι :

1ον) Ἐὰν $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{B}{A} = \frac{\Delta}{\Gamma}$ ἢ καὶ $\frac{A+B}{B} = \frac{\Gamma+\Delta}{\Delta}$.

2ον) Ἐὰν Α, Β, Γ, Δ εἶναι μεγέθη ὁμοειδῆ καὶ $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{(A)}{(B)} = \frac{(\Gamma)}{(\Delta)}$, ἐὰν τὰ μεγέθη ταῦτα ἐμετρήθησαν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος. Ἐκ τῆς ἀναλογίας δὲ αὐτῆς τῶν ἀριθμῶν λαμβάνομεν, κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, $(A).(\Delta)=(\Gamma).(B)$ (1) καὶ ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν $\frac{(A)}{(\Gamma)} = \frac{(B)}{(\Delta)}$. Ἡ ἀναλογία δὲ αὕτη τρέπεται εἰς τὴν ἀναλογίαν τῶν μεγεθῶν (§ 206) $\frac{A}{\Gamma} = \frac{B}{\Delta}$.

Ὥστε : ***Εἰς ἀναλογίαν μεγεθῶν, ὅταν τὰ μεγέθη εἶναι ὅλα ὁμοειδῆ, δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων ὅρων.***

Ἐκ τῆς ἰσότητος (1) ἕπεται πάλιν, ὅτι, ἐὰν εἰς ἀναλογίαν μεγεθῶν τὰ μεγέθη εἶναι ὅλα ὁμοειδῆ, μετρήσωμεν δὲ αὐτὰ διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος, ***τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τοὺς ἄκρους ὅρους, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τοὺς μέσους.***

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι πᾶσα ἰδιότης, ἡ ὁποία ἀληθεύει ἐπὶ ἀναλογίας ἀριθμῶν, τῆς ὁποίας οἱ ὅροι προέκυψαν ἀπὸ τὴν μέτρησιν τῶν ὅρων ἑκάστου λόγου διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος, ἀληθεύει καὶ ἐπὶ τῆς ἀναλογίας τῶν μεγεθῶν, εἰς τὴν ὁποίαν τρέπεται ἡ πρώτη.

208. Μεγέθη ἀνάλογα.—Ἔστωσαν τὰ μεγέθη Α, Β, Γ, Δ. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον τούτων ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, π.χ. τὸν 2, λαμβάνομεν τὰ μεγέθη Α′, Β′, Γ′, Δ′.

Τὰ μεγέθη Α′, Β′, Γ′, Δ′ λέγονται ἀνάλογα πρὸς τὰ μεγέθη Α Β, Γ, Δ. Παρατηροῦμεν δὲ εἰς αὐτά, ὅτι εἶναι :

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{\Gamma'}{\Gamma} = \frac{\Delta'}{\Delta} = 2 \text{ (διότι π.χ. } \frac{A'}{A} = \frac{A.2}{A} = 2).$$

Ὥστε : ***Δύο ἢ περισσότερα μεγέθη λέγονται ἀνάλογα πρὸς ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος, ὅταν γίνωνται ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ πολ-***

λαπλασιασμοῦ ἑκάστου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἤτοι ὅταν ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ πρῶτον, τοῦ δευτέρου πρὸς τὸ δεύτερον κτλ. εἶναι εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Ἐπειδὴ ἀνωτέρω εἴδομεν, ὅτι $A' = A.2$, $B' = B.2$ κτλ., ἐὰν ἕκαστον τῶν μεγεθῶν A', B', Γ', Δ' πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\frac{1}{2}$, θὰ προκύψουν τὰ μεγέθη Α, Β, Γ, Δ. Ὥστε καὶ τὰ Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ A', B', Γ', Δ'. Τὰ μεγέθη Α καὶ A' ἢ τὰ Β καὶ B' κτλ. λέγονται **ἀντίστοιχα** ἢ **ὁμόλογα.** Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι τὰ ἀντίστοιχα μεγέθη εἶναι ὁμοειδῆ.

Ἀσκήσεις.

159) Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι Α, Β, Γ, Δ συνιστοῦν ἀναλογίαν, τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἄκρων εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν μέσων, καὶ ἀντιστρόφως.

ΠΟΣΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΑ ΑΝΑΛΟΓΩΣ

209. Ποσὰ μεταβλητά.—Ποσὸν **μεταβλητὸν** λέγεται τὸ ποσὸν ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον λαμβάνει διαφόρους τιμὰς ἢ καταστάσεις, ὅπως π.χ. εἶναι ἡ ἀκτὶς κύκλου, ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τριγώνου, ἐνῷ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι **σταθερόν.**

210. Ἐὰν τόξον κύκλου μεταβληθῇ, καὶ ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία βαίνει ἐπ᾿ αὐτοῦ, θὰ μεταβληθῇ· ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν μεταβληθῇ ἡ ἐπίκεντρος γωνία, θὰ μεταβληθῇ καὶ τὸ τόξον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου βαίνει. Ὥστε τὰ δύο αὐτὰ ποσὰ ἐξαρτῶνται ἀπ᾿ ἀλλήλων. Ἐπίσης ἐξαρτῶνται ἀπ᾿ ἀλλήλων ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ, τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ κτλ. Ὥστε δύο ποσὰ λέγομεν, ὅτι ἐξαρτῶνται ἀπ᾿ ἀλλήλων, ὅταν ἡ μεταβολὴ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν προξενῇ μεταβολὴν καὶ τοῦ ἄλλου.

211. Ἐὰν ἡ πλευρὰ τετραγώνου διπλασιασθῇ ἢ τριπλασιασθῇ, καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ θὰ διπλασιασθῇ ἢ θὰ τριπλασιασθῇ. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι καὶ μὲ οἱονδήποτε ἀριθμὸν καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἡ πλευρὰ τετραγώνου, μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν θὰ πολλαπλασιασθῇ καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ. Ἕνεκα τούτου λέγομεν, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ μεταβάλλονται ἀναλόγως ἢ ὅτι εἶναι ἀνάλογα. Γενικῶς δέ:

Δύο ποσὰ λέγομεν, ὅτι μεταβάλλονται ἀναλόγως, ἐάν, πολλαπλασιαζομένης τιμῆς τινος τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἐπί τινα ἀριθμόν, πολλαπλασιάζεται καὶ ἡ πρὸς αὐτὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἤτοι ἐὰν πάντοτε αἱ νέαι τιμαὶ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς παλαιάς.

Σημείωσις. Ὑποτίθεται, ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν δύο ποσῶν ἀντιστοιχοῦν μεταξύ των, μία πρὸς μίαν. Ποσὸν δέ τι λέγεται, ὅτι μεταβάλλεται **ἀναλόγως πρὸς πολλὰ ἄλλα,** ἐὰν μεταβάλλεται ἀναλόγως πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν, ὅταν τὰ λοιπὰ δὲν μεταβάλλωνται. Π.χ. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου μεταβάλλεται ἀναλόγως πρὸς τὴν βάσιν καὶ πρὸς τὸ ὕψος αὐτοῦ. Διότι, ὅταν ἡ βάσις μείνῃ ἀμετάβλητος, τὸ ἐμβαδὸν μεταβάλλεται ἀναλόγως τοῦ ὕψους· καὶ πάλιν, ὅταν τὸ ὕψος μείνῃ ἀμετάβλητον, μεταβάλλεται ἀναλόγως τῆς βάσεως.

212. Ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἴδομεν, ὅτι μεταβάλλονται ἀναλόγως. Ἐὰν δὲ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι α, ἡ περίμετρος αὐτοῦ θὰ εἶναι β. Ἐὰν δὲ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ μεταβληθῇ καὶ γίνῃ α', καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ θὰ μεταβληθῇ καὶ θὰ γίνῃ β'. Ὥστε ἐδῶ ἔχομεν δύο τιμὰς τοῦ πρώτου ποσοῦ καὶ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ δευτέρου. Ἀλλ' ἵνα ἡ τιμὴ α μεταβληθῇ εἰς τὴν α', πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν α ἐπὶ τὸν λόγον $\frac{\alpha'}{\alpha}=\varrho$· ἀλλὰ τότε καὶ ἡ τιμὴ β θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ϱ καὶ θὰ γίνῃ β' (ἀφοῦ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα). Ὥστε εἶναι $\beta'=\beta\varrho$, ἤτοι $\frac{\beta'}{\beta}=\varrho$, δηλαδὴ εἶναι $\frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{\beta'}{\beta}$. Ἐκ τούτων ἕπεται τὸ θεώρημα :

Ἐὰν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως, δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ πρώτου ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουν καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ δευτέρου.

Ἀντιστρόφως δέ : ***Ἐὰν δύο τυχοῦσαι τιμαὶ ἑνὸς ποσοῦ ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουν καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ ἄλλου ποσοῦ*** (ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐξαρτᾶται), ***τὰ ποσὰ ταῦτα μεταβάλλονται ἀναλόγως.***

Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο εὐκόλως.

Σημείωσις. Ἀνωτέρω ἐλάβομεν παράδειγμα ποσῶν ὁμοειδῶν. Ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ θεώρημα τοῦτο καὶ τὸ ἀντίστροφόν του ἀληθεύουν καὶ ὅταν τὰ ἀνάλογα ποσὰ δὲν εἶναι ὁμοειδῆ.

213. Εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα ἃς λάβωμεν καὶ ἄλλας τιμὰς τῆς πλευρᾶς, π.χ. τὰς α'', α''' κτλ. καὶ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς περιμέτρου β'', β''' κτλ. Ἀλλὰ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἔχομεν:

$$\frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{\beta'}{\beta},\quad \frac{\alpha''}{\alpha}=\frac{\beta''}{\beta},\quad \frac{\alpha'''}{\alpha}=\frac{\beta'''}{\beta}.$$

ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ὁμοειδῆ, δυνάμεθα εἰς ἑκάστην ἀναλογίαν νὰ ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων ὅρων, ὁπότε θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha}{\beta},\quad \frac{\alpha''}{\beta''}=\frac{\alpha}{\beta},\quad \frac{\alpha'''}{\beta'''}=\frac{\alpha}{\beta},$$

ἤτοι
$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}=\frac{\alpha'''}{\beta'''},$$

ἢ καί, ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta}=\varrho$, $\alpha=\beta\,\varrho$, $\alpha'=\beta'\,\varrho$, $\alpha''=\beta''\,\varrho$, $\alpha'''=\beta'''\,\varrho$. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν ἀνωτέρω ποσῶν εἶναι πάντοτε ὁ αὐτός, ἤτοι ἐκ τούτων ἕπεται τὸ θεώρημα:

Ἐὰν δύο ὁμοειδῆ ποσὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως, ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν αὐτῶν μένει πάντοτε ὁ αὐτός.

Ἀντιστρόφως δέ: ***Ἐὰν ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν δύο ὁμοειδῶν ποσῶν μένῃ πάντοτε ὁ αὐτός, τὰ ποσὰ ταῦτα μεταβάλλονται ἀναλόγως.***

214. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς § 211, δὲν εἶναι εὔκολον νὰ διακρίνωμεν, ἂν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως· διότι κατ' αὐτὸν πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, πολλαπλασιαζομένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμὸν ἀκέραιον, κλασματικὸν ἢ ἀσύμμετρον, πρέπει καὶ ἡ πρὸς αὐτὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου νὰ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἀκέραιον, κλασματικὸν κλπ. Ἀλλὰ τὸ κατωτέρω θεώρημα ἁπλουστεύει τὸ ζήτημα, ὡς ἀμέσως θὰ ἴδωμεν.

Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο ποσὰ εἶναι τοιαῦτα, ὥστε, πολλαπλασιαζομένης τιμῆς τινος τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀκέραιον ἀριθμόν, πολλαπλασιάζεται καὶ ἡ πρὸς αὐτὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τότε τὰ ποσὰ ταῦτα εἶναι ἀνάλογα.***

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ δύο ποσῶν, τὰ ὁποῖα εἶναι τοιαῦτα, ὥστε, ἐὰν τιμή τις τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, π.χ. ἡ Α τοῦ πρώτου, πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀκέραιον ἀριθμόν, καὶ ἡ πρὸς αὐτὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου, δηλ. ἡ Β, θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, λέγω τότε, ὅτι καὶ ἐὰν ἡ Α πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τυχόντα ἀριθμόν, π.χ. τὸν 3,6741, καὶ ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς, ἡ Β, θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ἑπομένως τὰ δύο ποσὰ θὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως, ἤτοι εἶναι ἀνάλογα.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Εἰς τὴν τιμὴν Α τοῦ πρώτου ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ Β τοῦ δευτέρου· ἄρα εἰς τὴν τιμὴν 3Α τοῦ πρώτου θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ τιμὴ 3Β τοῦ δευτέρου.

Εἰς τὴν τιμὴν $\frac{A}{10}$ τοῦ πρώτου ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $\frac{B}{10}$ τοῦ δευτέρου· διότι, ὅταν δεκαπλασιασθῇ τὸ $\frac{A}{10}$ καὶ γίνῃ Α, πρέπει νὰ δεκαπλασιασθῇ καὶ ἡ πρὸς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ καὶ νὰ γίνῃ Β, ἡ δὲ τιμή, ἥτις δεκαπλασιαζομένη γίνεται Β εἶναι ἡ $\frac{B}{10}$. Ἄρα εἰς τὴν τιμὴν (3,6). Α, ἤτοι $36 \cdot \frac{A}{10}$, θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ (3,6). Β.

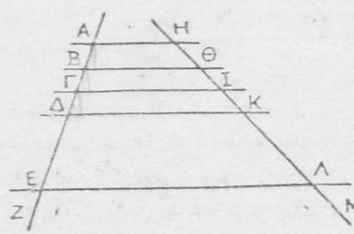
Ὡσαύτως, εἰς τὴν τιμὴν $\frac{A}{100}$ τοῦ πρώτου θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ τιμὴ $\frac{B}{100}$ τοῦ δευτέρου, ἄρα εἰς τὴν τιμὴν (3,67). Α θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ (3,67). Β.

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως ἀποδεικνύομεν, ὅτι εἰς τὴν τιμὴν (3,6741) Α θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ τιμὴ (3,6741) Β, ἐξ οὗ γίνεται φανερόν, ὅτι τὰ δύο ποσὰ μεταβάλλονται ἀναλόγως.

Κατὰ τὸ θεώρημα δὲ τοῦτο, ἐπειδή, ὅταν τὸ τόξον διπλασιάζεται, καὶ ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἐπὶ τοῦ ὁποίου βαίνει, διπλασιάζεται, ἕπεται ὅτι, μὲ οἱονδήποτε ἀριθμὸν καὶ ἂν πολλαπλασιασθῇ τὸ τόξον, ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν θὰ πολλαπλασιασθῇ καὶ ἡ ἐπίκεντρος γωνία. Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι : ***Ἐν κύκλῳ ἡ ἐπίκεντρος γωνία μεταβάλλεται ἀναλόγως τοῦ τόξου, ἐφ᾽ οὗ βαίνει.***

ΕΥΘΕΙΑΙ ΑΝΑΛΟΓΟΙ

215. Θεώρημα τοῦ Θαλῆ.—Ἔστω, ὅτι δύο εὐθεῖαι, αἱ ΑΖ καὶ ΗΜ, τέμνονται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν. Ἐὰν δὲ εἶναι ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ, θὰ εἶναι (Π. 163) καὶ ΗΘ = ΘΙ = ΙΚ. Βλέπομεν δὲ ἐκ τούτου, ὅτι, ἐπειδὴ τὸ τμῆμα ΒΔ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ἀντίστοιχόν του ΘΚ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΗΘ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀντίστοιχον τοῦ ΑΒ. Ἐὰν δὲ τὸ τμῆμα ΔΕ εἶναι τριπλάσιον τοῦ ΑΒ, εὐκόλως



δεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ ἀντίστοιχον τμῆμα ΚΛ εἶναι τριπλάσιον τοῦ ΗΘ. Κατὰ ταῦτα εἶναι

$$\frac{AB}{B\Delta}=\frac{H\Theta}{\Theta K},\quad \frac{AB}{\Delta E}=\frac{H\Theta}{K\Lambda}.$$

ὁμοίως δὲ εἶναι $\dfrac{B\Gamma}{B\Delta}=\dfrac{\Theta I}{\Theta K},\quad \dfrac{\Gamma A}{\Delta A}=\dfrac{IH}{KH}$ κτλ.

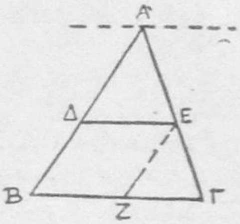
Ἐκ τούτων συνάγομεν, ὅτι δύο οἱαδήποτε τμήματα μιᾶς εὐθείας ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουν τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης. Ἕπεται λοιπὸν ἐκ τούτων τὸ θεώρημα:

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν, τὰ ἀντίστοιχα τμήματα αὐτῶν μεταβάλλονται ἀναλόγως.

216. Πόρισμα 1ον. Ἐπειδὴ τὰ τμήματα τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι ποσὰ ὁμοειδῆ, τὰ ὁποῖα μεταβάλλονται ἀναλόγως, ἕπεται (§ 213), ὅτι ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν εἶναι πάντοτε ὁ αὐτός· ἤτοι εἶναι $\dfrac{AB}{H\Theta}=\dfrac{B\Gamma}{\Theta I}=\dfrac{\Delta E}{K\Lambda}$ κτλ.

Ὥστε: ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν, ὁσαδήποτε τμήματα τῆς μιᾶς εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης.***

217. Πόρισμα 2ον. Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου τέμνομεν τὰς δύο πλευρὰς δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν τρίτην, π.χ. πρὸς τὴν ΒΓ. Ἔστω δὲ διὰ τῆς ΔΕ. Ἀλλ' ἐὰν ἐκ τοῦ Α φέρωμεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΕ, ἔχομεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω:



$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AE}{A\Gamma}\qquad(1)$$

καὶ $$\frac{A\Delta}{\Delta B}=\frac{AE}{E\Gamma}\qquad(2)$$

καὶ $$\frac{AB}{\Delta B}=\frac{A\Gamma}{E\Gamma}\qquad(3)$$

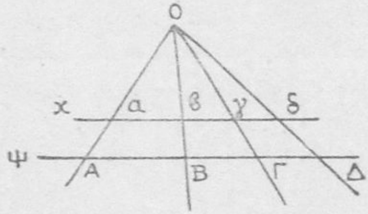
Ὥστε: ***Ἐὰν εὐθεῖα τέμνουσα τὰς δύο πλευρὰς τριγώνου εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην, τέμνει αὐτὰς εἰς μέρη ἀνάλογα.***

218. Πόρισμα 3ον. Ἐὰν εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα φέρωμεν τὴν ΕΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, θὰ εἶναι κατὰ τὸ ἄνω πόρισμα $\dfrac{AE}{A\Gamma}=\dfrac{BZ}{B\Gamma}$ ἤ, ἐπειδὴ $BZ=\Delta E$, $\dfrac{AE}{A\Gamma}=\dfrac{\Delta E}{B\Gamma}$. Ἀλλ' εἴδομεν,

ὅτι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}$. Ὥστε εἶναι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$ ἤ, μὲ ἄλλους λόγους, αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΔΕ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀντιστοίχους ἢ ὁμολόγους πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Βλέπομεν δέ, ὅτι ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι αἱ κείμεναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν τῶν τριγώνων τούτων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας κατὰ μίαν.

Ὥστε : ***Ἐὰν εὐθεῖα τέμνουσα τὰς δύο πλευρὰς τριγώνου εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην, σχηματίζει νέον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ πρώτου τριγώνου.***

219. Εἰς τὸ θεώρημα τοῦ Θαλῆ εἴδομεν, πῶς τέμνονται δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν. Ἤδη θὰ ἴδωμεν, πῶς τέμνονται δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ὑπὸ εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄρχονται ἐξ ἑνὸς σημείου. Πρὸς τοῦτο, ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι χ καὶ ψ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ κτλ. Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΟΑΒ παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ αβ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ. Ὥστε κατὰ τὸ ἀνωτέρω πόρισμα εἶναι:



$\frac{Οα}{ΟΑ} = \frac{αβ}{ΑΒ} = \frac{Οβ}{ΟΒ}$· ἀλλὰ καὶ ἡ βγ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ. Ὥστε ἔχομεν $\frac{Οβ}{ΟΒ} = \frac{βγ}{ΒΓ} = \frac{Ογ}{ΟΓ}$· ὁμοίως ἔχομεν $\frac{Ογ}{ΟΓ} = \frac{γδ}{ΓΔ} = \frac{Οδ}{ΟΔ}$.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων δὲ τούτων προκύπτουν αἱ

$$\frac{αβ}{ΑΒ} = \frac{βγ}{ΒΓ} = \frac{γδ}{ΓΔ}.$$

Ἕπεται ἐκ τούτων τὸ θεώρημα :

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τέμνωνται ὑπὸ εὐθειῶν ἐξ ἑνὸς σημείου ἀρχομένων, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.

220. Ἤδη θὰ ἐξετάσωμεν, ἐὰν ἀληθεύουν τὰ ἀντίστροφα τῶν προτάσεων 217 καὶ 219.

1ον. Ἔστω, ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ ΔΕ τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς μέρη ἀνάλογα, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$· ἀλλ' εἰς τὴν ὑπόθεσιν αὐτὴν ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος ἢ ὄχι ; Ἐὰν ἡ ΔΕ δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, τότε φέρομεν ἐκ τοῦ Δ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, τὴν ΔΕ΄. Ἀλλὰ κατὰ τὸ πόρισμα 217 ἔχομεν $\frac{ΑΔ}{ΔΒ}=\frac{ΑΕ'}{Ε'Γ}$. Ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη καὶ $\frac{ΑΔ}{ΔΒ}=\frac{ΑΕ}{ΕΓ}$, εἶναι καὶ $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=\frac{ΑΕ'}{Ε'Γ}$. Ἐκ τῆς ἀναλογίας δὲ αὐτῆς προκύπτει ἡ (§ 207, 1) $\frac{ΑΕ+ΕΓ}{ΕΓ}=\frac{ΑΕ'+Ε'Γ}{Ε'Γ}$, ἤτοι ἡ $\frac{ΑΓ}{ΕΓ}=\frac{ΑΓ}{Ε'Γ}$. Ἐξ αὐτῆς δὲ ἔχομεν $ΕΓ=Ε'Γ$· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἄτοπον. Τὰ σημεῖα λοιπὸν Ε καὶ Ε΄ συμπίπτουν καὶ ἑπομένως ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

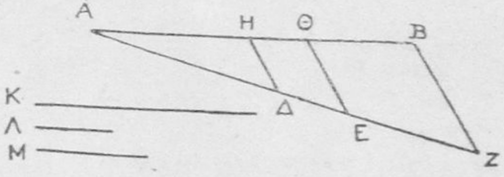
Ὥστε: ***Ἐὰν εὐθεῖα τέμνῃ δύο πλευρὰς τριγώνου εἰς μέρη ἀνάλογα, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν αὐτοῦ.***

2ον. Ὁμοίως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον τοῦ Θ. 219, ἤτοι ὅτι: ***Μὴ παράλληλοι εὐθεῖαι, τέμνουσαι δύο παραλλήλους εἰς μέρη ἀνάλογα, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.***

Σημείωσις. Εὐνόητον εἶναι ὅτι ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων τμημάτων εἶναι διάφορος τῆς μονάδος 1.

221. Πρόβλημα. ***Νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν Κ, Λ, Μ.***

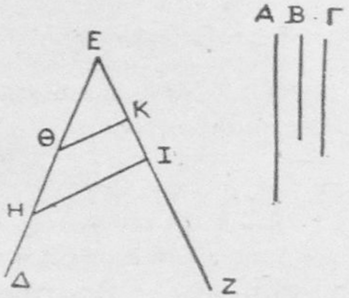
Ἐκ τοῦ σημείου Α ἄς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα σχηματίζουσα γωνίαν μετὰ τῆς ΑΒ καὶ ἄς ληφθοῦν ἐπ᾽ αὐτῆς ἡ ΑΔ ἴση πρὸς τὴν Κ, ἡ ΔΕ ἴση πρὸς τὴν Λ καὶ ἡ ΕΖ ἴση πρὸς τὴν Μ. Ἄς ἀχθῇ δὲ ἐκ τοῦ Ζ ἡ ΖΒ καὶ ἐκ τῶν σημείων Δ, Ε παράλληλοι πρὸς αὐτὴν αἱ ΔΗ, ΕΘ. Ἀλλ᾽ αὗται διαιροῦν τὴν ΑΒ εἰς τὰ μέρη ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, τὰ ὁποῖα κατὰ τὸ πόρισμα 216 εἶναι ἀνάλογα τῶν ΑΔ, ΔΕ, ΕΖ, ἤτοι τῶν εὐθειῶν Κ, Λ, Μ.



222. Πρόβλημα. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν Α, Β, Γ.***

Ἤτοι μία εὐθεῖα Δ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι $Α : Β = Γ : Δ$. Ἄς σχηματισθῇ τυχοῦσα γωνία ἡ ΔΕΖ καὶ ἄς ληφθῇ ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς ἡ ΕΗ ἴση τῇ Α καὶ ἡ ΕΘ ἴση τῇ Β, ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης ἡ ΕΙ ἴση τῇ Γ·

ἂς ἀχθῇ δὲ ἔπειτα ἡ ΗΙ καὶ ἐκ τοῦ Θ ἡ ΘΚ παράλληλος τῇ ΗΙ· λέγω, ὅτι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα Δ εἶναι ἡ ΕΚ. Διότι κατὰ τὸ θεώρημα 215, εἶναι ΕΗ : ΕΘ=ΕΙ : ΕΚ, ἤτοι Α : Β=Γ : ΕΚ.



223. Π ό ρ ι σ μ α. ***Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἐπὶ τὸν λόγον δύο ἄλλων.***

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.

160) Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν καὶ δύο τμήματα τῆς μιᾶς ἔχουν λόγον 3:4, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον.

161) Ἐν τριγώνῳ ΑΒΓ ἡ παράλληλος τῇ ΒΓ τέμνει τὰς ἄλλας πλευρὰς εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, ἡ δὲ ἐκ τῆς Ε παράλληλος τῇ ΑΒ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (ΑΔ) : (ΒΔ)=(ΒΖ):(ΓΖ).

162) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἐπὶ δοθείσης βάσεως ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον (πρβλ. § 222).

ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

224. **Ὁρισμοί.**—Ὅλοι ἔχομεν τὴν ἔννοιαν τῆς ὁμοιότητος. Κοινῶς δύο πράγματα λέγονται ὅμοια, ὅταν δὲν διαφέρουν καθόλου ἢ διαφέρουν ὀλίγον κατὰ τὴν μορφήν, τὰς διαστάσεις, τὴν ποιότητα κτλ. Εἰς τὴν Γεωμετρίαν ὅμως δύο εὐθύγραμμα σχήματα, διὰ νὰ τὰ εἴπωμεν ὅμοια, πρέπει νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκριβῶς μορφήν, ἀλλ᾿ ἔκτασιν διάφορον. Οὕτω π.χ. ἓν εὐθύγραμμον σχῆμα καὶ ἡ μεγέθυνσίς του διὰ φωτογραφήσεως ἢ δι᾿ ἄλλου τινὸς τρόπου εἶναι σχήματα ὅμοια. Ἐὰν δὲ προσέξωμεν τὰ σχήματα ταῦτα, θὰ ἴδωμεν, ὅτι ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους. Ἐκ τούτου ἀγόμεθα εἰς τὸν ἑξῆς ὁρισμόν :

Ὅμοια λέγονται δύο εὐθύγραμμα σχήματα, ἐὰν αἱ μὲν γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν, αἱ δὲ ἀντιστοιχοῦσαι πλευραὶ αὐτῶν (ἤτοι αἱ τὰς κορυφὰς ἴσων γωνιῶν συνδέουσαι) ***εἶναι ἀνάλογοι.***

Αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πλευραὶ τῶν ὁμοίων σχημάτων λέγονται καὶ **ὁμόλογοι.**

Ὥστε δύο πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε θὰ εἶναι ὅμοια, ἐὰν εἶναι

$$Α=α, \; Β=β, \; Γ=γ \text{ κτλ.}$$

καὶ

$$\frac{ΑΒ}{αβ}=\frac{ΒΓ}{βγ}=\frac{ΓΔ}{γδ} \text{ κτλ.}$$

Ὁ λόγος δύο ὁμολόγων πλευρῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων λέγεται **λόγος ὁμοιότητος.**

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

225. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμόν, δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ὅμοια, ἐὰν ἔχουν $Α = Α'$, $Β = Β'$, $Γ = Γ'$ καὶ

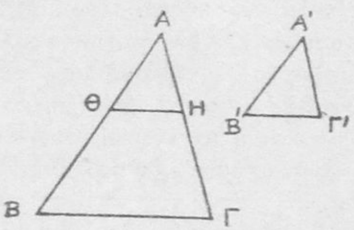
$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'}=\frac{ΒΓ}{Β'Γ'}=\frac{ΓΑ}{Γ'Α'},$$

ἢ ἐὰν ἔχουν $Α = Α'$, $Β = Β'$ καὶ $\frac{ΑΒ}{Α'Β'}=\frac{ΒΓ}{Β'Γ'}=\frac{ΓΑ}{Γ'Α'}$.

Ἀλλ' ὡς θὰ ἴδωμεν ἀμέσως κατωτέρω, ἀρκοῦν καὶ ὀλιγώτερα δεδομένα (δύο μόνον) διὰ νὰ συμπεράνωμεν τὴν ὁμοιότητα δύο τριγώνων.

226. Κατὰ πρῶτον παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν ὁρισμὸν τῶν ὁμοίων σχημάτων καὶ τὸ πόρισμα 218, συνάγομεν, ὅτι: ***Ἐὰν εὐθεῖα τέμνουσα δύο πλευρὰς τριγώνου εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην, σχηματίζει νέον τρίγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ ἀρχικόν.***

227. Ἔστωσαν ἤδη δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄, τὰ ὁποῖα ἔχουν γωνΑ=γωνΑ΄καὶ γωνΒ=γωνΒ΄· ἀλλὰ τότε θὰ ἔχουν καὶ γωνΓ=γωνΓ΄. Ἐὰν δὲ ἐφαρμοσθῇ ἡ Α΄ ἐπὶ τῆς ἴσης της Α καὶ ἡ Α΄Β΄ ἐπὶ τῆς ὁμολόγου της ΑΒ, τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν ΑΘΗ καὶ θὰ εἶναι ἡ ΘΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ· διότι Β΄= ΑΘΗ. Ὥστε τὰ τρίγωνα ΑΘΗ καὶ ΑΒΓ, ἤτοι τὰ Α΄Β΄Γ΄ καὶ ΑΒΓ, εἶναι ὅμοια. Ἐκ τούτων ἕπεται τὸ θεώρημα:



Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ὅμοια.

228. Πόρισμα. ***Δύο ὁμόλογα ὕψη δύο ὁμοίων τριγώνων ἔχουν λόγον τὸν λόγον δύο ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν.***

229. Πρόβλημα. ***Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας Α΄Β΄ ὡς πλευρᾶς νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ὅμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ.***

Πρὸς τοῦτο φέρομεν ἐκ τῶν ἄκρων τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς δύο εὐθείας σχηματιζούσας μετὰ τῆς Α΄Β΄ γωνίας Α΄ καὶ Β΄ ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς Α καὶ Β.

Ἀσκήσεις.

163) Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἔχοντα τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς ἴσην εἶναι ὅμοια.

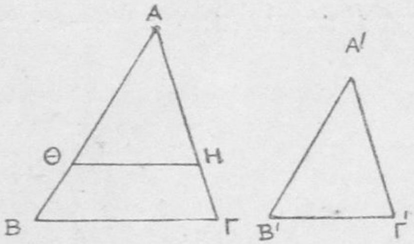
164) Ἐὰν ἡ μία τῶν βάσεων τραπεζίου εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἓν εἶναι διπλάσιον τοῦ ἄλλου.

165) Ἐὰν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἀχθοῦν ἡ διάμετρος ΑΔ καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΕ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (ΑΒ) : (ΑΔ) = (ΑΕ) : (ΑΓ).

230. Ἔστω, ὅτι εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'}=\frac{ΑΓ}{Α'Γ'}=\frac{ΒΓ}{Β'Γ'} \qquad (1)$$

Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΑΒ τὴν ΑΘ ἴσην πρὸς τὴν Α΄Β΄ καὶ φέρωμεν τὴν ΘΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΘΗ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια· ἑπομένως εἶναι $\frac{ΑΒ}{ΑΘ}=\frac{ΑΓ}{ΑΗ}=\frac{ΒΓ}{ΘΗ}$ (2)· ἐπειδὴ δὲ ἐλήφθη ΑΘ = Α΄Β΄, θὰ εἶναι καὶ $\frac{ΑΒ}{ΑΘ}=\frac{ΑΒ}{Α'Β'}$ · ἄρα καὶ οἱ ἓξ λόγοι (1) καὶ (2) εἶναι ἴσοι· καὶ οἱ ἔχοντες ἀριθμητὰς ἴσους θὰ ἔχουν καὶ τοὺς παρονομαστὰς ἴσους· ὅθεν ἕπεται ΘΗ = Β΄Γ΄ καὶ ΑΗ = Α΄Γ΄. Ἀλλὰ τότε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ὅμοια. Ἐκ τούτων ἕπεται τὸ θεώρημα :



Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.

231. Ἤδη ὑποθέτομεν, ὅτι εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι Α = Α΄ καὶ $\frac{Α'Β'}{ΑΒ}=\frac{Α'Γ'}{ΑΓ}$. (1)

Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΑΒ τὴν ΑΘ ἴσην πρὸς τὴν Α΄Β΄ καὶ φέρωμεν τὴν ΘΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΘΗ εἶναι ὅμοια καὶ διὰ τοῦτο εἶναι $\frac{ΑΘ}{ΑΒ}=\frac{ΑΗ}{ΑΓ}$ (2)· καὶ ἐπειδὴ ἐλήφθη ΑΘ = Α΄Β΄, εἶναι καὶ $\frac{ΑΘ}{ΑΒ}=\frac{Α΄Β΄}{ΑΒ}$, ἄρα ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) προκύπτει $\frac{Α΄Γ΄}{ΑΓ}=\frac{ΑΗ}{ΑΓ}$· ὅθεν Α΄Γ΄ = ΑΗ. Ἀλλὰ τότε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ὅμοια.

Ἐκ τούτων ἕπεται τὸ θεώρημα:

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.

232. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἀνὰ δύο ἢ καθέτους ἀνὰ δύο, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια καὶ ὁμόλογοι πλευραὶ θὰ εἶναι αἱ παράλληλοι ἢ αἱ κάθετοι.***

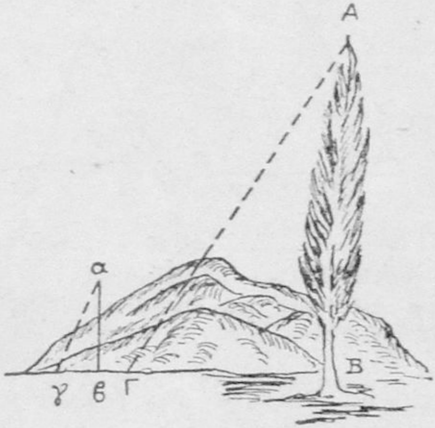
Τοῦτο εἶναι συνέπεια τῶν θεωρημάτων 126 καὶ 227.

Ἀσκήσεις.

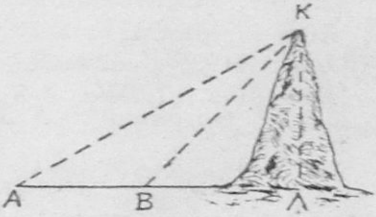
166) Δύο ὀρθογώνια καὶ ἰσοσκελῆ τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

167) Αἱ ὁμόλογοι διάμεσοι δύο ὁμοίων τριγώνων σχηματίζουν

Σχ. 1



Σχ. 2



Σχ. 3

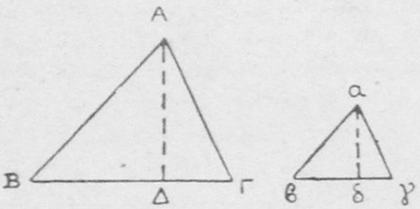
μετὰ τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν γωνίας ἴσας καὶ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον δύο ὁμολόγων πλευρῶν.

168) Εἰς τὸ σχῆμα 1 (σελ. 110), ἐὰν μετρήσωμεν τὰς ΑΓ, ΓΔ καὶ ΕΔ, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος ΑΒ τῆς λίμνης. Πῶς θὰ τὸ εὕρωμεν καὶ διατί ;

169) Τὸ σχῆμα 2 (σελ. 110), δεικνύει τὸν τρόπον, διὰ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος δένδρου ἐκ τῆς σκιᾶς του. Νὰ ἐξηγήσητε τοῦτον.

170) Διὰ τῆς κατασκευῆς ὁμοίων τριγώνων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος βουνοῦ. Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ σχήματος 3 (σελ. 110) νὰ εἴπητε τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος ΚΛ.

233. Λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγώνων.— Ἔστωσαν τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ. Ἐὰν ἐκ τῶν κορυφῶν δύο ἴσων γωνιῶν Α καὶ α φέρωμεν τὰ ὕψη ΑΔ καὶ αδ, θὰ ἔχωμεν



$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}(ΒΓ).(ΑΔ) \quad \text{καὶ}$$

$$(αβγ) = \frac{1}{2}(βγ).(αδ).$$

Ὅθεν $\frac{(αβγ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{(βγ)}{(ΒΓ)} \cdot \frac{(αδ)}{(ΑΔ)}$ ἢ $\frac{(αβγ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{(βγ)^2}{(ΒΓ)^2}$,

ἐπειδὴ $\frac{(αδ)}{(ΑΔ)} = \frac{(βγ)}{(ΒΓ)}$. Ἐκ τούτων ἕπεται τὸ θεώρημα :

Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγώνων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν.

234. Πόρισμα. Ἑπομένως, ἐὰν ἐκ δύο ὁμοίων τριγώνων αἱ πλευραὶ τοῦ ἑνὸς εἶναι διπλάσιαι τῶν πλευρῶν τοῦ ἄλλου, τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἄλλου. Διότι ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος εἶναι 2. Ὥστε, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, εἶναι

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(αβγ)} = \left(\frac{ΒΓ}{βγ}\right)^2, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{(ΑΒΓ)}{(αβγ)} = 2^2 \text{ ἢ } (ΑΒΓ) = 4\,(αβγ).$$

Γενικῶς δέ, ἐὰν ϱ εἶναι ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος, θὰ εἶναι $(ΑΒΓ) = ϱ^2\,(αβγ)$.

Ὅθεν : ***Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ϱ, τὸ ἐμβαδὸν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ϱ².***

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.

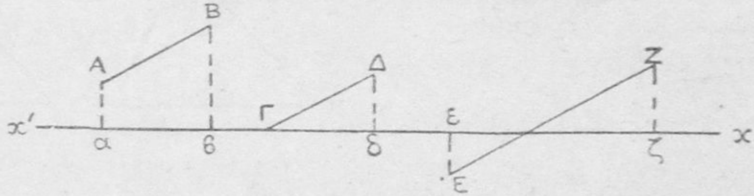
171) Δύο ὁμόλογοι πλευραὶ δύο ὁμοίων τριγώνων εἶναι 5 μ. καὶ 3 μ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου τριγώνου εἶναι 75 τ. μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δευτέρου.

172) Ἐν τριγώνῳ ΑΒΓ, ἡ ΔΕ, ἥτις εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ, τέμνει τὴν ΑΒ εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον 3 : 5. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ.

173) Τριγώνου τινὸς αἱ πλευραὶ εἶναι 6,7,8 μ. Ποῖαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ πρὸς αὐτὸ ὁμοίου τριγώνου καὶ διπλασίαν ἔχοντος ἐπιφάνειαν;

ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΝ ΤΩ ΤΡΙΓΩΝΩ

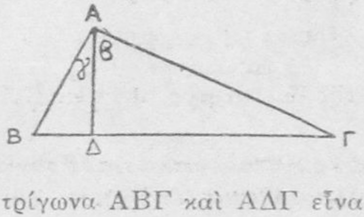
235. Προβολὴ εὐθείας.—Ἔστω ἡ εὐθεῖα χ΄χ. Ἐὰν ἐκ τῶν ἄκρων μιᾶς ἄλλης εὐθείας, π.χ. τῆς ΑΒ, φέρωμεν καθέτους ἐπὶ τὴν χ΄χ,



τὰς Αα καὶ Ββ, τὸ τμῆμα αβ τῆς χ΄χ λέγεται **προβολὴ** τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν χ΄χ. Ἐὰν δὲ ἔχωμεν τὴν ΓΔ καὶ φέρωμεν τὴν κάθετον Δδ, τὸ τμῆμα Γδ τῆς χ΄χ εἶναι προβολὴ τῆς ΓΔ ἐπὶ τὴν χ΄χ.

Ὥστε: ***Προβολὴ εὐθείας ἐπὶ ἄλλην λέγεται, ἐὰν ἀπὸ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἀχθοῦν κάθετοι ἐπὶ τὴν ἄλλην, τὸ μεταξὺ τῶν καθέτων τούτων περιεχόμενον τμῆμα.*** Οὕτω προβολὴ τῆς ΕΖ ἐπὶ τὴν χ΄χ εἶναι ἡ εζ.

236. Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας Α τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, τὴν ΑΔ, παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς:



Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ, ὡς ἔχοντα τὴν γωνίαν Β κοινήν, εἶναι ὅμοια. Ὁμοίως καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὴν γωνίαν Γ κοινήν· τὰ δὲ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια, ὡς ἀμφότερα ὅμοια πρὸς τὸ ΑΒΓ.

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ εὑρίσκομεν

$$\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΓΔ}} \text{ ἢ } \text{ΒΔ} : \text{ΑΔ} = \text{ΑΔ} : \text{ΔΓ}. \qquad (1)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν ἕπεται τὸ θεώρημα:

Ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν:

1ον. Διαιρεῖ τὸ τρίγωνον εἰς δύο τρίγωνα τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια καὶ μεταξύ των καὶ πρὸς τὸ ὅλον.

2ον. Εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης.

237. Ἐκ τῶν ἄνω ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ εὑρίσκομεν $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΔ}}$ ἢ ΒΓ : ΑΒ = ΑΒ : ΒΔ (2), ἐκ δὲ τῶν ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ εὑρίσκομεν $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΔΓ}}$ ἢ ΒΓ : ΑΓ = ΑΓ : ΔΓ (3).

Ὥστε: ***Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἑκάστη πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.***

238. Πόρισμα. ***Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τὸ τετράγωνον ἑκάστης πλευρᾶς τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ὀρθογώνιον, ὅπερ βάσιν ἔχει τὴν ὑποτείνουσαν καὶ ὕψος τὴν προβολήν της ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.***

Διότι ἐκ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων (2) καὶ (3) λαμβάνομεν $(\text{ΑΒ})^2 = (\text{ΒΓ}).(\text{ΒΔ})$ καὶ $(\text{ΑΓ})^2 = (\text{ΒΓ}).(\text{ΔΓ})$ (4).

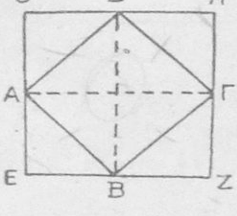
239. Θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα.— ***Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.***

Διότι ἐὰν προσθέσωμεν τὰς ἄνω ἰσότητας (4) κατὰ μέλη λαμβάνουεν $(\text{ΑΒ})^2 + (\text{ΑΓ})^2 = (\text{ΒΓ}).(\text{ΒΔ}+\text{ΔΒ})$, ἤτοι $(\text{ΑΒ})^2 + (\text{ΑΓ})^2 = (\text{ΒΓ})^2$.

240. Πόρισμα. ***Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, τὸ τετράγωνον ἑκάστης πλευρᾶς τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων τετραγώνων.***

Ἤτοι $(AB)^2=(B\Gamma)^2-(A\Gamma)^2$ καὶ $(A\Gamma)^2=(B\Gamma)^2-(AB)^2$.

241. Π ό ρ ι σ μ α. ***Τὸ ἐπὶ τῆς διαγωνίου τετραγώνου κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι διπλάσιον αὐτοῦ.***



Διότι ἐν τῷ τετραγώνῳ ΑΒΓΔ ἡ διαγώνιος π.χ. ΑΓ εἶναι ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ. Ἔχομεν λοιπὸν $(A\Gamma)^2=2(AB)^2$· ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς λαμβάνομεν $\frac{(A\Gamma)^2}{(AB)^2}=2$ ἢ $\frac{(A\Gamma)}{(AB)}=\sqrt{2}$, ἕπεται ὅτι: ***ἡ διαγώνιος παντὸς τετραγώνου εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν αὐταῦ.***

242. Π ρ ό β λ η μ α. ***Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα δύο δοθέντων τετραγώνων.***

243. Π ρ ό β λ η μ α. ***Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν δύο δοθέντων τετραγώνων.***

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.

174) Ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ εἶναι 5 μ. καὶ 4 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὑποτείνουσα, ὡς καὶ αἱ προβολαὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

175) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 13 μ. καὶ ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν 12 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη πλευρά, ὡς καὶ αἱ προβολαὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

176) Ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 5 μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἄλλαι πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

177) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι 5 μ., 5 μ. καὶ 7 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

178) Ἰσοπλεύρου τριγώνου ἡ πλευρὰ εἶναι 1) 3 μ., 2) α μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος αὐτοῦ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

179) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν δύο τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ τρίτη πλευρὰ ὑπὸ τοῦ ὕψους.

180) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς *γωνίας ὀρθωγωνίου τριγώνου ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν προβολῶν των ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.*

181) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τριῶν δοθέντων τετραγώνων.

244. Θεώρημα. ***Τὸ τετράγωνον τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὰ δύο τμήματα τῆς ὑποτεινούσης.***

Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος (1) τῆς § 236 λαμβάνομεν

$$(\text{ΑΔ})^2 = (\text{ΒΔ}).(\text{ΔΓ}).$$

245. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον.***

246. Παντὸς εὐθυγράμμου σχήματος δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἰσοδύναμον τετράγωνον (§ 204 καὶ 245).

247. Θεώρημα. ***Ἐὰν εὐθεῖα, ὡς ἡ ΑΓ, εἶναι ἄθροισμα δύο ἄλλων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ, τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ΑΒ καὶ ΒΓ καὶ δύο ὀρθογωνίων, μὲ βάσιν καὶ ὕψος τὰς δύο αὐτὰς εὐθείας.***

Τοῦτο ἀποδεικνύεται ἐκ τῆς γνωστῆς ταυτότητος $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, ἐὰν ὑποτεθῇ, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β προκύπτουν ἀπὸ τὴν μέτρησιν τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ, ὁπότε τὸ $(\alpha+\beta)^2$ παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας ΑΓ.

248. Θεώρημα. ***Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι διαφορὰ δύο ἄλλων, τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων, ἠλαττωμένον κατὰ δύο ὀρθογώνια, μὲ βάσιν καὶ ὕψος τὰς δύο αὐτὰς εὐθείας.***

Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο ἐκ τῆς ταυτότητος $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$.

249. Θεώρημα. ***Ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὸ ἄθροισμα δύο εὐθειῶν καὶ ὕψος τὴν διαφορὰν αὐτῶν, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.***

Τοῦτο ἀποδεικνύεται ἐκ τῆς ταυτότητος $(\alpha+\beta).(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$.

Ἀσκήσεις.

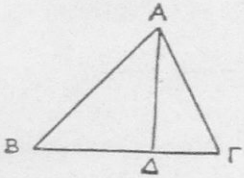
182) Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον τὰ δύο τμήματα τῆς ὑποτεινούσης, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ ὕψους, εἶναι τὸ μὲν 6,4 μ., τὸ δὲ ἄλλο 3,6 μ., Ζητοῦνται: τὸ ὕψος, αἱ ἄλλαι πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

183) Ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι 6 μ. καὶ 8 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

184) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τρίγωνον.

185) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο δοθέντων ὀρθογωνίων.

250. Ἐπέκτασις τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος.— Κατ' αὐτὴν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, ἤτοι τὰς περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας μία πλευρὰ τριγώνου κεῖται ἀπέναντι ὀξείας ἢ ἀπέναντι ἀμβλείας γωνίας.



1ον. Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ πλευρὰ ἀπέναντι ὀξείας γωνίας ἡ ΑΒ. Ἂν φέρωμεν τὴν κάθετον ΑΔ ἔχομεν $(ΑΒ)^2 = (ΑΔ)^2 + (ΒΔ)^2$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΒΔ = ΒΓ - ΔΓ$ λαμβάνομεν (Θ. 248).

$$(ΒΔ)^2 = (ΒΓ)^2 + (ΔΓ)^2 - 2(ΒΓ).(ΔΓ).$$

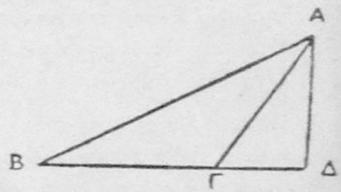
Ὅθεν ἡ πρώτη ἰσότης γίνεται

$$(ΑΒ)^2 = (ΑΔ)^2 + (ΒΓ)^2 + (ΔΓ)^2 - 2(ΒΓ).(ΔΓ)$$

καὶ ἐπειδὴ $(ΑΔ)^2 + (ΔΓ)^2 = (ΑΓ)^2$, συμπεραίνομεν τὴν ἰσότητα

$$(ΑΒ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΒΓ)^2 - 2(ΒΓ).(ΔΓ).$$

2ον. Ἔστω ἤδη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ ΑΒ ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας Γ. Ἐὰν φέρωμεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἔχομεν $(ΑΒ)^2 = (ΑΔ)^2 + (ΒΔ)^2$· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $ΒΔ = ΒΓ + ΓΔ$, ἕπεται ὅτι $(ΒΔ)^2 = (ΒΓ)^2 + (ΓΔ)^2 + 2(ΒΓ).(ΓΔ)$ (§ 247).



Ὅθεν ἡ πρώτη ἰσότης γίνεται $(ΑΒ)^2 = (ΑΔ)^2 + (ΒΓ)^2 + (ΓΔ)^2 + 2(ΒΓ).(ΓΔ)$· ἀλλ' ἐπειδὴ πάλιν εἶναι $(ΑΔ)^2 + (ΓΔ)^2 = (ΑΓ)^2$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

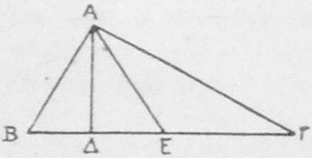
$$(ΑΒ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΒΓ)^2 + 2.(ΒΓ).(ΓΔ)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται τὸ θεώρημα :

Εἰς πᾶν τρίγωνον τὸ τετράγωνον μιᾶς πλευρᾶς αὐτοῦ κειμένης ἀπέναντι ὀξείας (ἀμβλείας) γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ἠλαττωμένον (ηὐξημένον) κατὰ δύο ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσιν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν καὶ ὕψος τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ ταύτην.

251. Πόρισμα. ***Ἐὰν εἰς τρίγωνον μία πλευρὰ ἔχῃ τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων, ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία εἶναι ὀρθή.***

252. Θεώρημα τῆς διαμέσου.—Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρωμεν τὴν διάμεσον ΑΕ, διαιρεῖται τοῦτο εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΕΓ. Ἐὰν δὲ εἰς τὸ πρῶτον ἡ ΑΒ κεῖται ἀπέναντι ὀξείας γωνίας, εἰς τὸ δεύτερον ἡ ΑΓ θὰ κεῖται ἀπέναντι ἀμβλείας γωνίας. Ἐκτὸς τῆς περιπτώσεως καθ' ἣν τὸ τρίγωνον ΒΑΓ εἶναι ἰσοσκελές, ὁπότε ἀμφότεραι αἱ ἀπέναντι γωνίαι θὰ εἶναι ὀρθαί. Ἐὰν δὲ εἰς τὰς πλευρὰς αὐτὰς ἐφαρμόσωμεν τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἐκ τοῦ ΑΒΕ θὰ ἔχωμεν $(AB)^2 = (AE)^2 + (BE)^2 - 2(BE).(\Delta E)$, ἐκ δὲ τοῦ ΑΓΕ θὰ ἔχωμεν $(A\Gamma)^2 = (AE)^2 + (\Gamma E)^2 + 2(\Gamma E).(\Delta E)$· προσθέτοντες δὲ τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἐνθυμούμενοι, ὅτι εἶναι $BE = \Gamma E$, εὑρίσκομεν $(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = 2(AE)^2 + 2(BE)^2$.



Ἡ σχέσις δὲ αὐτὴ ἐκφράζει τὸ θεώρημα τῆς διαμέσου.

Ἀσκήσεις.

186) Ἐκ τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν πλευράς: 1) 0,3 μ., 0,4 μ., 0,06 μ., 2) 1,3 μ., 0,9 μ., 1,2 μ. καὶ 3) 12 μ., 35 μ., 37 μ., ποῖον εἶναι ὀξυγώνιον, ποῖον ἀμβλυγώνιον καὶ ποῖον ὀρθογώνιον;

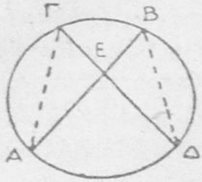
187) Τριγώνου τινὸς αἱ πλευραὶ εἶναι 2, 3, 4 μέτρα. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διάμεσοι αὐτοῦ.

188) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν παραλληλογράμμου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του.

189) Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ἐκ τοῦ Β κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΑ τέμνει αὐτὴν προεκτεινομένην εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $(\Gamma B)^2 = 2(\Gamma A).(\Gamma\Delta)$.

ΕΥΘΕΙΑΙ ΑΝΑΛΟΓΟΙ ΕΝ ΤΩ ΚΥΚΛΩ

253. Ὅμοια τρίγωνα δυνάμεθα νὰ λάβωμεν καὶ ὅταν ἔχωμεν εἰς



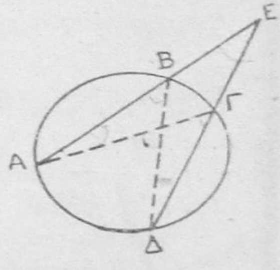
κύκλους χορδὰς τεμνομένας· π. χ. ὅταν ἔχωμεν τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Ε. Διότι, ἐὰν φέρωμεν τὰς ΑΓ καὶ ΒΔ, τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας κατὰ μίαν, ὡς εὐκόλως φαίνεται. Εἶναι ἑπομένως ταῦτα ὅμοια. Ὥστε εἶναι $\frac{ΕΑ}{ΕΔ} = \frac{ΕΓ}{ΕΒ}$.

Ἐκ τῆς ἀναλογίας δὲ αὐτῆς λαμβάνομεν (ΕΑ). (ΕΒ) = (ΕΓ). (ΕΔ). Ἐκ τούτων λοιπὸν συνάγομεν τὸ θεώρημα:

Ἐὰν δύο χορδαὶ κύκλου τέμνωνται ἐντὸς αὐτοῦ, τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τῶν δύο τμημάτων τῆς μιᾶς, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τῶν δύο τμημάτων τῆς ἄλλης.

Ἀντιστρόφως δέ: ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνωνται εἰς τὸ σημεῖον Ε οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι (ΕΑ). (ΕΒ) = (ΕΓ). (ΕΔ), τὰ ἄκρα Α, Β, Γ, Δ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας.***

Διότι ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν τριῶν ἐξ αὐτῶν, π.χ. διὰ τῶν Α, Β, Γ, ἐὰν δὲν διέρχεται καὶ διὰ τοῦ Δ θὰ τέμνῃ τὴν ΓΔ εἴς τι σημεῖον π.χ. τὸ Δ′· ἀλλὰ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι (ΕΑ). (ΕΒ) = (ΕΓ). (ΕΔ′)· ἀλλὰ τότε πρέπει νὰ εἶναι ΕΔ′ = ΕΔ. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον, ἐκτὸς ἐὰν τὰ Δ′ καὶ Δ συμπίπτουν.



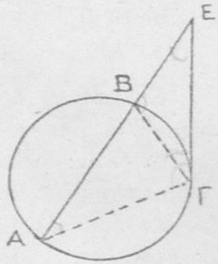
254. Ἀλλὰ καὶ ἐὰν τὸ σημεῖον Ε κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου καὶ αἱ ΕΒΑ καὶ ΕΓΔ εἶναι τέμνουσαι αὐτοῦ, περατούμεναι εἰς τὴν περιφέρειάν του, πάλιν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν δύο ὅμοια τρίγωνα, ἤτοι τὰ ΑΕΓ καὶ ΕΒΔ. Εἶναι δὲ ταῦτα ὅμοια, διότι, ὡς εὐκόλως βλέπει τις, ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας κατὰ μίαν. Ἐκ δὲ τούτων λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{ΕΑ}{ΕΔ} = \frac{ΕΓ}{ΕΒ}$ καὶ ἐξ αὐτῆς τὴν ἰσότητα (ΕΑ). (ΕΒ) = (ΕΓ). (ΕΔ).

Ὅθεν: ***Ἐὰν ἐκ σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου, ἀχθοῦν δύο τέμνουσαι, αἱ ὁποῖαι περατοῦνται εἰς τὴν περιφέ-***

ρειαν αὐτοῦ, τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τῆς μιᾶς τεμνούσης καὶ τοῦ τμήματος αὐτῆς τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῆς ἄλλης τεμνούσης καὶ τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου τμήματος αὐτῆς.

Ἀντιστρόφως δέ: ***Ἐὰν αἱ προεκτάσεις τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνωνται εἴς τι σημεῖον Ε οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι (ΕΑ).(ΕΒ) = (ΕΓ). (ΕΔ), τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας.*** Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο, ὡς ἀπεδείχθη τὸ ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου Θ., διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

255. Ὁμοίως ἐὰν ἐκ τοῦ Ε φέρωμεν τὴν ὡς ἄνω τέμνουσαν ΕΒΑ καὶ τὴν ἐφαπτομένην ΕΓ εἰς τὸ Γ καὶ ἔπειτα τὰς ΒΓ καὶ ΑΓ, τὰ τρίγωνα ΕΒΓ καὶ ΑΕΓ ἔχουν τὴν γωνίαν Ε κοινήν· ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐγγεγραμμένη Α βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓ, ἡ δὲ ΒΓΕ σχηματίζεται ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης, ἕπεται ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι. Ὥστε τὰ δύο ὡς ἄνω τρίγωνα εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως εἶναι $\frac{ΕΑ}{ΕΓ} = \frac{ΕΓ}{ΕΒ}$, ἤτοι $(ΕΓ)^2 = (ΕΑ).(ΕΒ)$.



Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι:

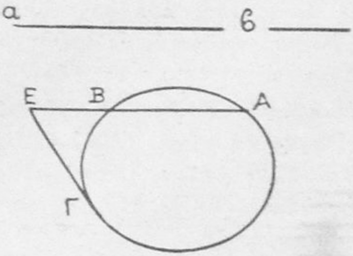
Ἐὰν ἐκ σημείου ἐκτὸς κύκλου ἀχθοῦν ἐφαπτομένη αὐτοῦ καὶ τέμνουσα, αἱ ὁποῖαι ἀμφότεραι περατοῦνται εἰς τὴν περιφέρειαν, τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῆς ὅλης τεμνούσης καὶ τοῦ τμήματος αὐτῆς τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου.

Ἀντιστρόφως δέ: ***Ἐὰν εὐθεῖα ΑΒ προεκταθῇ μέχρι σημείου Ε καὶ ἐκ τοῦ Ε ἀχθῇ εὐθεῖα ΕΓ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι (ΕΓ)² = (ΕΑ). (ΕΒ), ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, ἐφάπτεται τῆς ΕΓ εἰς τὸ Γ.*** Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

256. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ μέση ἀνάλογος δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.***

Ἤτοι, ἐὰν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι εἶναι αἱ α καὶ β, νὰ εὑρεθῇ τρίτη εὐθεῖα χ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{α}{χ} = \frac{χ}{β}$.

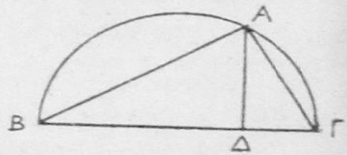
1) Ἐπειδὴ ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῆς λαμβάνομεν τὴν $(\chi)^2 = (\alpha).(\beta)$, ἡ ὁποία μᾶς ἐνθυμίζει τὴν ἰσότητα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, συνάγομεν τὴν ἑξῆς κατασκευήν. Ἐπὶ εὐθείας ΕΑ λαμβάνομεν ἓν μέρος ΕΑ ἴσον μὲ τὴν α καὶ ἓν μέρος ΕΒ ἴσον μὲ τὴν β. Κατόπιν δὲ φέρομεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β καὶ τέλος ἐφαπτομένην αὐτῆς ἐκ τοῦ Ε, τὴν ΕΓ. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $(ΕΓ)^2 = (ΕΑ).(ΕΒ)$ ἢ $(ΕΓ)^2 = (\alpha).(\beta)$, ἤτοι $\frac{\alpha}{ΕΓ} = \frac{ΕΓ}{\beta}$.



Ὥστε ἡ ΕΓ εἶναι ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος.

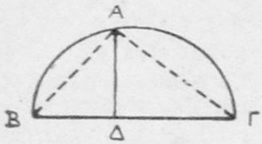
2) Ἀλλ' ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\chi} = \frac{\chi}{\beta}$ μᾶς ἐνθυμίζει καὶ τὸ Θ. 236.

Ἐκ τούτου δὲ ἕπεται ἡ ἑξῆς κατασκευή: Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν ἓν μέρος ΒΔ ἴσον μὲ τὴν α καὶ ἓν μέρος ΔΓ ἴσον μὲ τὴν β. Ἔπειτα δὲ μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν, καὶ τέλος ἐκ τοῦ Δ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Α. Ἀλλὰ τότε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον. Ὥστε εἶναι $\frac{ΒΔ}{ΑΔ} = \frac{ΑΔ}{ΔΓ}$, ἤτοι $\frac{\alpha}{ΑΔ} = \frac{ΑΔ}{\beta}$.



Ὥστε ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος εἶναι ἡ ΑΔ.

3) Ἀλλ' ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\chi} = \frac{\chi}{\beta}$ μᾶς ἐνθυμίζει καὶ τὸ Θ. 237. Ἐκ τούτου δὲ ἕπεται ἡ ἑξῆς κατασκευή:



Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ λαμβάνομεν ἓν μέρος ΒΓ ἴσον μὲ τὴν α καὶ ἓν μέρος ΒΔ ἴσον μὲ τὴν β. Μὲ τὴν ΒΓ δὲ ὡς διάμετρον γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν καὶ κατόπιν ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ ἐκ τοῦ σημείου Δ, τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Α. Ἀλλὰ τότε σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Ὥστε ἔχομεν $\frac{ΒΓ}{ΑΒ} = \frac{ΑΒ}{ΔΒ}$ ἢ $\frac{\alpha}{ΑΒ} = \frac{ΑΒ}{\beta}$ ἤτοι ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος εἶναι ἡ ΑΒ.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.

190) Χορδαὶ κύκλου τέμνονται ἐντὸς αὐτοῦ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ε. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὀρθογωνίων τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῶν δύο τμημάτων ἑκάστης χορδῆς, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶναι 5 μ., ἡ δὲ ἀπόστασις τοῦ Ε ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εἶναι 3 μ.

191) Δύο τέμνουσαι κύκλου ἄγονται ἐκ σημείου ἐκτὸς αὐτοῦ, ἡ δὲ περιφέρεια τέμνει τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν εἰς δύο τμήματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἐκτὸς εἶναι 3 μ., καὶ τὸ ἐντὸς 9 μ., ἐνῷ τὴν ἄλλην τέμνουσαν τέμνει εἰς δύο ἴσα μέρη. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἄλλης.

192) Τρία σημεῖα Α, Β, Γ, κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ εἶναι (ΑΒ) = 0,5 μ. καὶ (ΒΓ) = 0,4 μ. Ἐπὶ δὲ τῆς ΑΒ ὡς διαμέτρου γράφομεν περιφέρειαν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις ἄγεται εἰς αὐτὴν ἀπὸ τοῦ Γ.

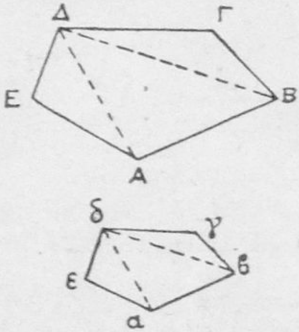
193) Ἐκ σημείου Η τῆς κοινῆς χορδῆς δύο τεμνομένων κύκλων ἄγονται δύο εὐθεῖαι, ἐξ ὧν ἡ μὲν τέμνει τὴν περιφέρειαν τοῦ ἑνὸς κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ, ἡ δὲ τέμνει τὴν τοῦ ἄλλου εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Γ, Ε, Δ, Ζ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας.

ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

257. Διαίρεσις ὁμοίων πολυγώνων εἰς τρίγωνα.—Ἔστωσαν ὅμοια τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε, ἤτοι ἔστω, ὅτι

$$\frac{\alpha\beta}{AB} = \frac{\beta\gamma}{B\Gamma} = \frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta} = \frac{\delta\varepsilon}{\Delta E} = \frac{\varepsilon\alpha}{EA} = \varrho$$

καὶ $A = \alpha$, $B = \beta$, $\Gamma = \gamma$, $\Delta = \delta$, $E = \varepsilon$.



Ἐὰν ἐκ τῶν ὁμολόγων κορυφῶν Δ καὶ δ φέρωμεν τὰς διαγωνίους ΔΑ, ΔΒ, δα, δβ, εἶναι φανερόν, ὅτι ἕκαστον τῶν πολυγώνων τούτων διαιρεῖται εἰς ἴσα τὸ πλῆθος τρίγωνα. Ἐξ αὐτῶν δὲ παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΕΔ καὶ αεδ κατὰ τὸ Θ. 231 εἶναι ὅμοια. Ὥστε εἶναι $\frac{\Delta E}{\delta\varepsilon} = \frac{A\Delta}{\alpha\delta} = \frac{AB}{\alpha\beta}$, ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ γων ΔΑΒ = γων δαβ, ἕπεται, ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ΔΑΒ καὶ δαβ εἶναι ὅμοια. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ΔΒΓ καὶ δβγ εἶναι ὅμοια. Ἐκ τούτων λοιπὸν συνάγομεν τὸ θεώρημα:

Δύο ὅμοια πολύγωνα δύνανται νὰ διαιρεθοῦν εἰς τρίγωνα ἴσα τὸ πλῆθος, ὅμοια ἓν πρὸς ἓν καὶ ὁμοίως τεταγμένα.

Σημείωσις. Ἡ διαίρεσις πολυγώνων εἰς τρίγωνα δύναται νὰ γίνῃ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον. Π.χ. νὰ λάβωμεν ἓν σημεῖον Ζ ἐντὸς τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ καὶ νὰ φέρωμεν ἐξ αὐτοῦ εὐθείας εἰς τὰς κορυφάς του. Τότε, ἐὰν τὸ πολύγωνον τοῦτο εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ αβγδε, μὲ κορυφὰς τὰ ἄκρα μιᾶς πλευρᾶς αβ κατασκευάζομεν δύο γωνίας ἴσας μὲ τὰς γωνίας τῆς ὁμολόγου τῆς ΑΒ μετὰ τῶν ΑΖ καὶ ΒΖ. Ἐὰν δὲ αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι θὰ ἀχθοῦν ἐκ τῶν ἄκρων τῆς αβ, τέμνωνται εἰς τὸ ζ, φέρωμεν δὲ τὰς ζγ, ζδ καὶ ζε, τὰ δύο ὡς ἄνω πολύγωνα θὰ διαιρεθοῦν εἰς τρίγωνα, ὡς λέγει τὸ ἄνω θεώρημα. Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο ὁμοίως.

258. Λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων πολυγώνων.— Ἐκ τῶν δοθέντων ἴσων λόγων τοῦ ἄνω θεωρήματος εὑρίσκομεν ὅτι (ἰδὲ Ἀριθμητικήν).

$$\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\varepsilon+\varepsilon\alpha}{AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta E+EA}=\varrho=\frac{\alpha\beta}{AB}.$$

Ὥστε: ***Αἱ περίμετροι δύο ὁμοίων πολυγώνων ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.***

259. Λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων.—Τὰ τρίγωνα τοῦ ἄνω σχήματος εἴδομεν, ὅτι εἶναι ὅμοια· ἔχομεν ἑπομένως διὰ τὰ ἐμβαδά των

$$\frac{(\alpha\delta\varepsilon)}{(A\Delta E)}=\frac{(\alpha\delta\beta)}{(A\Delta B)}=\frac{(\beta\gamma\delta)}{(B\Gamma\Delta)}=\varrho^2$$

Ὅθεν εἶναι $\dfrac{(\alpha\delta\varepsilon)+(\alpha\delta\beta)+(\beta\gamma\delta)}{(A\Delta E)+(A\Delta B)+(B\Gamma\Delta)}=\dfrac{(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)}{(AB\Gamma\Delta E)}=\varrho^2=\dfrac{(\alpha\beta)^2}{(AB)^2}$. Ἕπεται λοιπὸν ὅτι:

Τὰ ἐμβαδὰ δύο ὁμοίων πολυγώνων ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.

260. Πόρισμα 1ον. ***Ἐὰν πλευραὶ πολυγώνου πολλαπλασιασθοῦν ὅλαι ἐπί τινα ἀριθμὸν ϱ, αἱ δὲ γωνίαι αὐτοῦ μείνουν ἀμετάβλητοι, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ϱ^2.***

261. Πόρισμα 2ον. Ἐὰν δύο ὅμοια πολύγωνα δύνανται νὰ ἐγγραφοῦν εἰς κύκλον, αἱ ἐκ τῶν δύο κέντρων ἀγόμεναι ἀκτῖνες εἰς τὰς κορυφάς των διαιροῦν τὰ πολύγωνα κατὰ τὸν τρόπον τοῦ θεωρήματος 257. Ὥστε ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων δύο κύκλων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος τῶν πολυγώνων αὐτῶν. Ἐκ τούτων λοιπὸν ἕπεται, ὅτι:

Ἐὰν δύο ὅμοια πολύγωνα δύνανται νὰ ἐγγραφοῦν εἰς κύκλον, ὁ λόγος τῶν περιμέτρων των ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων τῶν κύκλων, ὁ δὲ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων.

Ἀσκήσεις.

194) Δύο ὁμόλογοι πλευραὶ δύο ὁμοίων πολυγώνων ἔχουν μήκη ἡ μὲν 2 μ., ἡ δὲ 5 μ. Ἐὰν δὲ ἡ περίμετρος τοῦ πρώτου εἶναι 24 μ., πόση εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ δευτέρου;

195) Αἱ περίμετροι δύο ὁμοίων πολυγώνων ἔχουν μήκη ἡ μία 25 μ. καὶ ἡ ἄλλη 40 μ. Μία δὲ πλευρὰ τοῦ πρώτου εἶναι 5 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς τοῦ δευτέρου πολυγώνου.

196) Ἡ περίμετρος πολυγώνου εἶναι τετραπλασία τῆς περιμέτρου ἄλλου ὁμοίου πολυγώνου. Πόσας φορὰς μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρώτου ἀπὸ τὴν τοῦ δευτέρου;

197) Δίδεται πολύγωνον ΑΒΓΔΕ. Ἐντὸς τοῦ πολυγώνου τούτου λαμβάνομεν ἓν σημεῖον Ο καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρομεν τὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ, τῶν ὁποίων τὰ μέσα εἶναι ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα α, β, γ, δ, ε. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολύγωνον αβγδε εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ. Κατόπιν δὲ νὰ εἴπητε, πῶς δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ

Εἰς πολλὰς περιστάσεις λύομεν γεωμετρικὰ προβλήματα ἀλγεβρικῶς. Πολλάκις δὲ ὁδηγούμεθα εἰς τὴν γεωμετρικὴν λύσιν ἀπὸ τὴν ἀλγεβρικήν, ὡς φαίνεται ἀπὸ τὰ κατωτέρω.

Πρόβλημα 1ον. ***Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν πολυγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα 14 ὀρθῶν;***

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Τότε θὰ ἔχωμεν $2\chi - 4 = 14$. Πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶναι ἀκέραιος θετικός. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν $\chi = 9$.

Πρόβλημα 2ον. ***Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον διπλάσιον δοθέντος τετραγώνου.***

Ἐὰν α εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος τετραγώνου καὶ χ ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2 = 2\alpha^2$, ἤτοι $\chi^2 = \alpha^2 + \alpha^2$. Ἀλλ' αὕτη μᾶς λέγει, ὅτι ἡ ζητουμένη πλευρὰ εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ ἰσοῦνται μὲ α. Κατασκευάζομεν λοιπὸν τὸ τρίγωνον τοῦτο, ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης τοῦ ὁποίου κατασκευάζομεν τετράγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα 3ον. ***Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον.***

Ἐδῶ ἄγνωστος εὐθεῖα εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου. Ἐὰν παραστήσωμεν αὐτὴν διὰ χ, τὴν δὲ γνωστὴν βάσιν καὶ τὸ γνωστὸν ὕψος ὀρθογωνίου διὰ τῶν α καὶ β, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2 = \alpha\beta$, ἡ ὁποία μᾶς λέγει, ὅτι ἡ ζητουμένη πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου, τὴν ὁποίαν γνωρίζομεν νὰ κατασκευάζωμεν γεωμετρικῶς.

Πρόβλημα 4ον. ***Νὰ διαιρεθῇ δοθεῖσα εὐθεῖα εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ἤτοι εἰς δύο μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ ἄλλου μέρους.***

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν διὰ τοῦ α, τὸ δὲ μέρος αὐτῆς, τὸ ὁποῖον εἶναι μέσον ἀνάλογον τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ λοιποῦ μέρους, διὰ χ, θὰ εἶναι $\alpha : \chi = \chi : (\alpha - \chi)$. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις $\chi^2 + \alpha\chi - \alpha^2 = 0$· πρέπει δὲ νὰ εἶναι $0 < \chi < \alpha$· λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν

$$\chi = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \alpha^2}$$

(ἡ δευτέρα λύσις ὡς ἀρνητικὴ ἀπορρίπτεται). Ἤδη εὑρίσκομεν τὸ μέρος χ διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς ὡς ἑξῆς:

Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον καθέτους πλευρὰς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν α καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς $\frac{\alpha}{2}$ ὁπότε ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ παρίσταται ὑπὸ τοῦ

$$\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \alpha^2}\cdot$$

ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης εὐθείας· τὸ ὑπόλοιπον θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ χ καὶ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ζητούμενον μέρος.

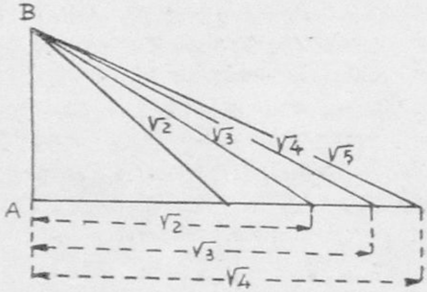
Σημείωσις. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος (ὅταν γίνῃ ἀκεραία πρὸς ὅλα τὰ γράμματα) εἶναι βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου, ἡ γεωμετρικὴ λύσις τοῦ προβλήματος αὐτοῦ δὲν εἶναι πάντοτε δυνατή.

Ἀσκήσεις.

198) Πόσαι μοῖραι ἢ πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς εἶναι αἱ γωνίαι τριγώνου, ὅταν αὗται εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3;

199) Πόσαι μοῖραι ἢ πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς εἶναι αἱ γωνίαι κυρτοῦ τετραπλεύρου, ὅταν αὗται εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 1, 3, 5 καὶ 7;

200) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τρίγωνον.



Σχ. 1

201) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον τριπλάσιον, τετραπλάσιον, πενταπλάσιον, δοθέντος τετραγώνου (σχ. 1).

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Γ' Βιβλίου.

202) Ἡ μία πλευρὰ ὀρθογωνίου εἶναι τετραπλασία τῆς προσκειμένης της καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι 23,04 τ. μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου.

203) Διὰ σημείου μιᾶς τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμου φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο ἐκ τῶν σχηματισθέντων παραλληλογράμμων εἶναι ἰσοδύναμα.

204) Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Ε τῆς διαγωνίου ΑΓ κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς ΒΓ καὶ ΔΓ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ΗΖ καὶ ΔΒ εἶναι παράλληλοι.

205) Ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ τέμνουσαν τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως.

Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον $Α Δ Γ$ εἶναι μέσον ἀνάλογον τοῦ δοθέντος τριγώνου καὶ τοῦ $ΑΕΔ$.

206) Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.

207) Εἰς τραπέζιον $ΑΒΓΔ$ αἱ γωνίαι $Α$ καὶ $Δ$ εἶναι ὀρθαί, αἱ δὲ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται καθέτως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $(ΑΔ)^2 = (ΑΒ).(ΔΓ)$.

208) Ἐὰν τετράπλευρον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ φέρωμεν τὰς διαγωνίους αὐτοῦ, τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ὑπὸ τῶν τμημάτων ἑκάστης διαγωνίου, εἶναι ἰσοδύναμα.

209) Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ ὕψους ἐπ' αὐτῆς.

210) Ἐὰν ἐν τριγώνῳ $ΑΒΓ$ ἡ $ΒΓ$ κεῖται ἔναντι γωνίας 120°, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 + (ΑΒ)(ΑΓ)$.

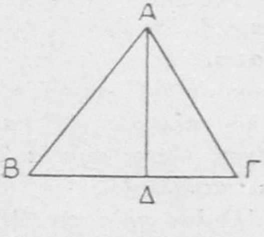
211) Ἐὰν ἡ $ΑΔ$ διχοτομῇ τὴν γωνίαν $Α$ τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΔΒ}{ΔΓ}$.

212) Ἡ $ΑΔ$ διχοτομεῖ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν $ΒΑΖ$ τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ$ καὶ τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς $ΓΒ$ εἰς τὸ $Δ$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΔΒ}{ΔΓ}$.

213) Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν αὐτοῦ πλευρῶν, τὸ ὁποῖον διῃρέθη διὰ τοῦ διπλασίου τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

214) Νὰ ἐγγραφῇ καὶ νὰ περιγραφῇ περὶ δοθέντα κύκλον τρίγωνον ὅμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον.

215) ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.***



Ἔστω τρίγωνον τὸ $ΑΒΓ$, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἂς παριστῶνται διὰ τῶν ἀριθμῶν $α$ (ἡ $ΒΓ$), $β$ (ἡ $ΑΓ$) καὶ $γ$ (ἡ $ΑΒ$). Ζητεῖται ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν $Ε$ τοῦ τριγώνου. Ἐκ τῆς κορυφῆς $Α$ ἂς ἀχθῇ τὸ ὕψος $ΑΔ$ τοῦ τριγώνου, ὁπότε εἶναι $Ε = \frac{1}{2} α (ΑΔ)$. Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $ΑΓΔ$ εὑρίσκομεν $(ΑΔ)^2 = β^2 - (ΓΔ)^2$ ἢ $ΑΔ = \sqrt{β^2 - (ΓΔ)^2}$.

Ὅθεν $$E = \frac{1}{2}\,\alpha\sqrt{\beta^2 - (\Gamma\Delta)^2} \qquad (1)$$

Ἀλλ' ἐκ γνωστοῦ θεωρήματος ἔχομεν τὴν ἰσότητα
$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha(\Gamma\Delta),$$
ἐξ ἧς
$$\Gamma\Delta = \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha}$$
καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὴν ΓΔ διὰ τῆς τιμῆς αὐτῆς εὑρίσκομεν
$$E = \frac{1}{2}\,\alpha\sqrt{\beta^2 - \frac{(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}{4\alpha^2}} = \frac{1}{4}\sqrt{4\alpha^2\beta^2 - (\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}.$$

Τὸ ὑπόρριζον, ὡς διαφορὰ δύο τετραγώνων, ἀναλύεται εἰς τοὺς παράγοντας
$$2\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 \text{ καὶ } 2\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2,$$
τούτων δὲ ὁ μὲν πρῶτος ὅρος γράφεται ὡς ἑξῆς: $(\alpha+\beta)^2 - \gamma^2$ καὶ ἀναλύεται ἑπομένως εἰς τοὺς δύο παράγοντας $(\alpha+\beta+\gamma)$ καὶ $(\alpha+\beta-\gamma)$, ὁ δὲ δεύτερος γράφεται ὡς ἑξῆς: $\gamma^2 - (\alpha-\beta)^2$ καὶ ἀναλύεται εἰς τοὺς ἑξῆς δύο: $\gamma - (\alpha-\beta)$ καὶ $\gamma + (\alpha - \beta)$· ἑπομένως τὸ ὑπόρριζον ἀναλύεται εἰς γινόμενον τεσσάρων παραγόντων καὶ εἶναι:
$$E = \frac{1}{4}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}.$$

Ἀλλ' ἐὰν τεθῇ $\alpha+\beta+\gamma = 2\tau$, θὰ εἶναι
$$-\alpha+\beta+\gamma = 2(\tau-\alpha),\quad \alpha-\beta+\gamma = 2(\tau-\beta),\quad \alpha+\beta-\gamma = 2(\tau-\gamma)$$
καὶ ὁ εὑρεθεὶς τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ γράφεται
$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta(\tau-\gamma)}$$

Ἐφαρμογή: Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι 7,4 μ., 9,45 μ. καὶ 15,05 μ.

Ενθύμιον
μαθητικής ζωής
Ευγενία Βώρου

Souvenir of
school-life
11-5-1951

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

262. Ὁρισμοί.— Τὸ τετράγωνον ἔχει ὅλας τὰς πλευράς του ὡς καὶ ὅλας τὰς γωνίας του ἴσας. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον. Λέγονται δὲ διὰ τοῦτο κανονικά.

Γενικῶς δέ :

Κανονικὸν πολύγωνον λέγεται ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλας τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας καὶ ὅλας τὰς γωνίας αὐτοῦ ἴσας.

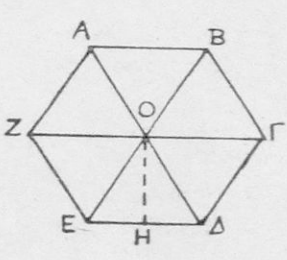
Κανονικὴ δὲ **τεθλασμένη γραμμὴ** λέγεται ἡ ἔχουσα ὅλας τὰς πλευρὰς ἴσας καὶ ὅλας τὰς γωνίας ἴσας.

263. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς κυρτοῦ ἑξαγώνου εἶναι, ὡς γνωρίζομεν $2.6-4=8$ ὀρθαί.

Ὥστε εἰς τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ἑκάστη γωνία αὐτοῦ εἶναι $\frac{8}{6}$ ἢ $\frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς. Γενικῶς δὲ ἑκάστη γωνία κανονικοῦ πολυγώνου μὲ μ πλευρὰς ἰσοῦται μὲ $\frac{2\mu-4}{\mu}$ ὀρθάς, ἤτοι μὲ $2-\frac{4}{\mu}$ ὀρθάς.

264. ***Τὰ κανονικὰ πολύγωνα ἔχουν ἰδιαιτέρας ἰδιότητας, τὰς ὁποίας θὰ ἐξετάσωμεν κατωτέρω.***

Ἔστω τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ. Φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Α καὶ Β, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Ο, καὶ κατόπιν φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ καὶ ΟΖ. Ἔπειτα δὲ παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς : Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΟΑΒ ἑκάστη τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν ἰσοῦται μὲ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΓΒΟ εἶναι ἴση μὲ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς, ἕπεται, ὅτι τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΒΓ εἶναι ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ.



Κατὰ τὸν ἴδιον δὲ τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον ΟΔΓ ἰσοῦται μὲ τὸ τρίγωνον ΟΒΓ κ.ο.κ. Ὥστε ὅλα τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἐσχηματίσθησαν, εἶναι μεταξύ των ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ. Ἑπομένως εἶναι ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ κτλ., ἐὰν δὲ μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΑ γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου, αὕτη θὰ διέλθῃ δι' ὅλων τῶν κορυφῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Ὁμοίως παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ κάθετοι ἐκ τοῦ Ο ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Ἐὰν λοιπὸν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα μίαν τῶν καθέτων τούτων, π.χ. τὴν ΟΗ, γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη θὰ ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Ἐκ τούτων λοιπὸν συνάγομεν τὸ θεώρημα:

Πᾶν κανονικὸν πολύγωνον δύναται νὰ ἐγγραφῇ καὶ νὰ περιγραφῇ εἰς κύκλον.

Σημείωσις. Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις ἐφαρμόζεται ἀκριβῶς ὁμοία ἐπὶ πάσης κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς. Ὥστε καὶ εἰς πᾶσαν τοιαύτην γραμμὴν ἐγγράφεται κύκλος καὶ περιγράφεται κύκλος.

265. Ὁρισμοί.—Τὸ κοινὸν κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς κανονικὸν πολύγωνον λέγεται καὶ **κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου,** αἱ δὲ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ κέντρου κανονικοῦ πολυγώνου μέχρι τῶν κορυφῶν αὐτοῦ λέγονται **ἀκτῖνες** τοῦ πολυγώνου τούτου. **Ἀπόστημα** δὲ αὐτοῦ λέγεται ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου του ἀπὸ ἑκάστης πλευρᾶς του.

Ἡ γωνία δύο ἀκτίνων κανονικοῦ πολυγώνου, αἱ ὁποῖαι ἄγονται εἰς τὰ ἄκρα πλευρᾶς τινος αὐτοῦ, καλεῖται **κεντρικὴ γωνία** τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Οὕτως ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι κεντρικὴ γωνία. Πᾶσαι αἱ κεντρικαὶ γωνίαι κανονικοῦ τινος πολυγώνου εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Ἀσκήσεις.

216) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγεθος εἰς μοίρας καὶ ὀρθὰς γωνίας ἑκάστης τῶν ἐσωτερικῶν καὶ ἐξωτερικῶν γωνιῶν κανονικοῦ πενταγώνου, ἑξαγώνου, ὀκταγώνου, δωδεκαγώνου.

217) Τίνος κανονικοῦ πολυγώνου ἑκάστη μὲν γωνία εἶναι 150°, ἑκάστη δὲ τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν εἶναι 60° ;

218) Νὰ εὑρεθῇ ἡ κεντρικὴ γωνία κανονικοῦ πολυγώνου μὲ 5, 6, 8, μ πλευράς· καὶ ἀντιστρόφως, νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ὅταν ἡ κεντρικὴ γωνία εἶναι 90°, 45°, 22°30′.

219) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΒΕ κανονικοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

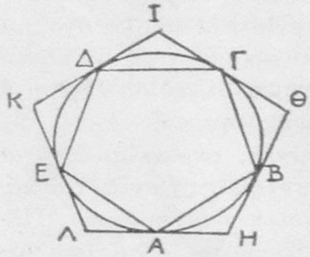
266. Ἐὰν ἔχωμεν ἓν κανονικὸν πολύγωνον καὶ γράψωμεν περὶ αὐτὸ κύκλον, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ περιφέρεια αὐτοῦ θὰ εὑρεθῇ διῃρημένη εἰς ἴσα τόξα. Τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ ὅταν ἐγγράψωμεν εἰς τὸ κανονικὸν πολύγωνον κύκλον. Ἐκ τῶν παρατηρήσεων δὲ τούτων δυνάμεθα νὰ συναγάγωμεν τὸ ἑξῆς θεώρημα :

Ἐὰν περιφέρειαι διαιρεθοῦν εἰς ἴσα τόξα (περισσότερα τῶν δύο) :

1ον) ***Αἱ χορδαὶ αὐτῶν σχηματίζουν ἐγγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον.***

2ον) ***Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως σχηματίζουν περιγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον.***

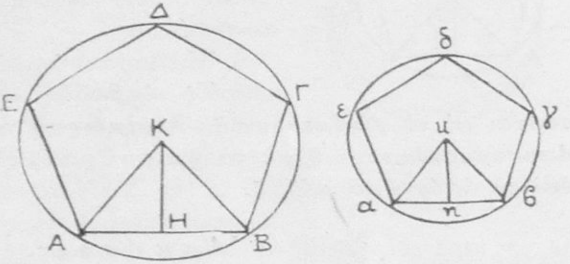
α′) Ἔστω ἡ περιφέρεια Ο, ἡ ὁποία διῃρέθη εἰς ἴσα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ. Αἱ χορδαὶ τῶν τόξων αὐτῶν εἶναι ἴσαι. Ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ τῶν χορδῶν αὐτῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὴν περιφέρειαν καὶ βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων· ἄρα τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι κανονικόν.



β′) Εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε τῆς διαιρέσεως τῆς ἄνω περιφερείας ἂς φέρωμεν ἐφαπτομένας καὶ ἂς ἐξετάσωμεν δύο οἱαδήποτε ἀπὸ τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα, π. χ. τὰ ΗΑΒ καὶ ΙΓΔ. Ταῦτα ἔχουν ΑΒ = ΓΔ καὶ τὰς γωνίας Α, Β, Γ, Δ ἴσας μεταξύ των, διότι σχηματίζονται ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἴσαι πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ ἢ τοῦ ἴσου του ΓΔ. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ταῦτα, ὡς καὶ τὰ ΘΒΓ, ΚΔΕ κτλ., εἶναι ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ, ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων αὐτῶν ἕπεται, ὅτι Η = Θ = Ι κτλ. καὶ ὅτι ΑΗ = ΗΒ = ΒΘ κτλ. ἤτοι ΗΘ = ΘΙ = ΙΚ = ΚΛ = ΛΗ. Ἄρα τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον ΗΘΙΚΛ εἶναι κανονικόν.

Σημείωσις. Δύο πολύγωνα, τὰ ὁποῖα ἐγγίζουν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ αὐτὰ σημεῖα καὶ εἶναι τὸ μὲν ἓν ἐγγεγραμμένον, τὸ δὲ ἄλλο περιγεγραμμένον, λέγονται **ἀντιστοιχοῦντα.** Ὁμοίως ἀντιστοιχοῦσαι λέγονται δύο τεθλασμέναι γραμμαί, ἐὰν εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ἡ μὲν ἐγγεγραμμένη, ἡ δὲ περιγεγραμμένη, ἐγγίζουν δὲ καὶ αἱ δύο τὸ τόξον εἰς τὰ αὐτὰ σημεῖα.

267. Ὁμοιότης κανονικῶν πολυγώνων ἐχόντων ἴσον πλῆθος πλευρῶν.— Ἔστωσαν δύο κανονικὰ πολύγωνα ΑΒΓΔ... καὶ αβγδ..., καθὲν τῶν ὁποίων ἔχει μ πλευράς. Ἀλλὰ τότε ἑκάστη γωνία καὶ τῶν δύο πολυγώνων ἰσοῦται μὲ $2 - \frac{4}{\mu}$ ὀρθάς. Ἔχουν λοιπὸν ταῦτα τὰς γωνίας των ἴσας. Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ ἑνὸς διὰ τοῦ Α καὶ τοῦ ἄλλου διὰ τοῦ α, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ λόγος μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἑνὸς πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ ἄλλου εἶναι πάντοτε ὁ αὐτὸς καὶ ἴσος μὲ $\frac{\alpha}{A}$ $\left(\text{ἢ μὲ } \frac{A}{\alpha}\right)$. Ὥστε τὰ πολύγωνα ταῦτα ἔχουν καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους. Εἶναι λοιπὸν ὅμοια.

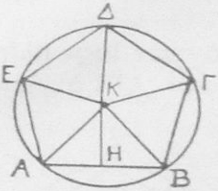


Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι, κατὰ τὸ πόρισμα 261, οἱ λόγοι τῶν περιμέτρων τῶν πολυγώνων τούτων, τὰς ὁποίας παριστῶμεν διὰ τοῦ Σ καὶ σ, ἰσοῦνται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων ΚΑ καὶ κα. Ἤτοι εἶναι $\frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{\kappa\alpha}{KA}$. Ἀλλ᾽ ἐὰν φέρωμεν τὰ ἀποστήματα κη καὶ ΚΗ, παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ακη καὶ ΑΚΗ εἶναι ὅμοια. Ὥστε εἶναι $\frac{\kappa\alpha}{KA} = \frac{\kappa\eta}{KH}$, ἄρα $\frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{\kappa\alpha}{KA} = \frac{\kappa\eta}{KH}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν συνάγομεν τὸ θεώρημα:

Δύο κανονικὰ πολύγωνα ἔχοντα ἴσον πλῆθος πλευρῶν, εἶναι ὅμοια καὶ ὁ λόγος τῶν περιμέτρων αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων των ἢ τῶν ἀποστημάτων των.

268. Ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου.— Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ. Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ Κ φέρωμεν εὐθείας εἰς τὰς κορυφάς του, διαιρεῖται τοῦτο εἰς πέντε τρίγωνα ἴσα μεταξύ των. Ὥστε εἶναι ἐμβ. ΑΒΓΔΕ= ἐμβ. ΑΚΒ. 5, ἤτοι



$$(ΑΒΓΔΕ) = 5.\left(\frac{1}{2}\,ΑΒ\cdot ΚΗ\right) = (5.ΑΒ).\frac{(ΚΗ)}{2}.$$

Ἀλλὰ 5. ΑΒ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου.

Ἐκ τούτων λοιπὸν συνάγεται τὸ θεώρημα:

Τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀποστήματός του, ἢ μὲ τὸ ἥμισυ γινόμενον τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ.

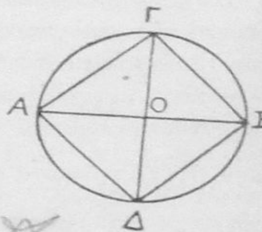
Ἀσκήσεις.

220) Πολύγωνον ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον εἰς δύο κύκλους ὁμοκέντρους εἶναι κανονικόν.

221) Ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων δύο κανονικῶν ὀκταγώνων εἶναι $\frac{3}{4}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν περιμέτρων καὶ τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν.

269. Πρόβλημα. ***Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.***

Φέρομεν δύο διαμέτρους καθέτους μεταξύ των. Αὗται διαιροῦν τὴν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν σχηματίζουν τετράγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον.

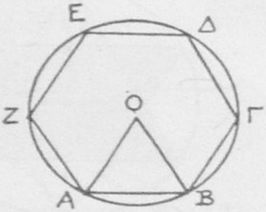


Σημείωσις. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΟΓ λαμβάνομεν

$(ΑΓ)^2 = 2(ΟΑ)^2$, ὅθεν καὶ $(ΑΓ) = (ΟΑ)\sqrt{2}$.

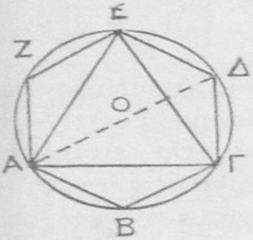
270. Πρόβλημα. ***Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.***

Ἐὰν ἡ ΑΒ εἶναι τὸ ἕκτον τῆς περιφερείας Ο, ἡ χορδὴ ΑΒ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου ἑξαγώνου, ἡ δὲ γωνία ΑΟΒ θὰ εἶναι τὰ $\frac{4}{6}$ ἢ τὰ $\frac{2}{3}$ μιᾶς ὀρθῆς. Ἑπομένως ἑκάστη τῶν δύο ἄλλων ἴσων γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΟΒ θὰ εἶναι $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΟΒ θὰ εἶναι ἰσογώνιον. Ὥστε θὰ εἶναι καὶ ΑΒ = ΟΑ = ΟΒ. Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν ἐπὶ τῆς περιφερείας χορδὰς συνεχεῖς καὶ ἴσας πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς, αὗται θὰ σχηματίσουν ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον.



271. Π ρ ό β λ η μ α. ***Νὰ ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.***

Ἐγγράφομεν πρῶτον κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ἔπειτα ἑνοῦμεν δι' εὐθειῶν τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἐναλλάξ. Τὸ τρίγωνον ΑΓΕ (ἢ τὸ ΒΔΖ) εὐκόλως νοεῖται ὅτι θὰ εἶναι ἰσόπλευρον.



Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΓ εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἀκτῖνος ΟΑ ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔ (διάμετρον τοῦ κύκλου), σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΔ καὶ ἐκ τούτου εὑρίσκομεν $(ΑΓ)^2 = (ΑΔ)^2 - (ΓΔ)^2$· ἐπειδὴ δὲ $ΑΔ = 2ΟΑ$ καὶ $ΓΔ = ΟΑ$, ἕπεται $(ΑΓ)^2 = 4(ΟΑ)^2 - (ΟΑ)^2 = 3(ΟΑ)^2$. Ὅθεν

$$ΑΓ = ΟΑ\sqrt{3}.$$

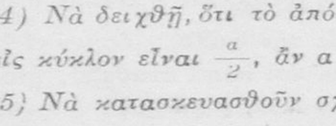
Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.

222) Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφοῦν κανονικὰ πολύγωνα μὲ 8, 16, 12, 24 πλευράς.

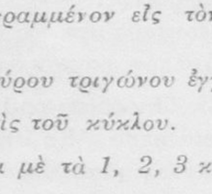
223) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο τετραγώνων, ἐξ ὧν τὸ ἓν εἶναι περιγεγραμμένον, τὸ δὲ ἄλλο ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.

224) Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἀπόστημα ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον εἶναι $\frac{α}{2}$, ἂν α εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου.

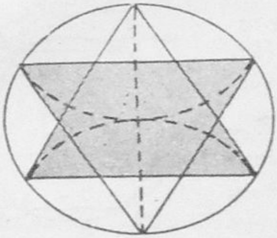
225) Νὰ κατασκευασθοῦν σχήματα ὅμοια μὲ τὰ 1, 2, 3 καὶ 4.



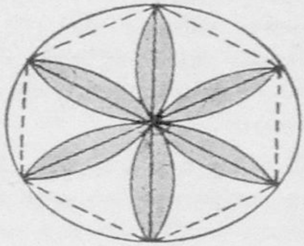
Σχ. 1



Σχ. 2



Σχ. 3



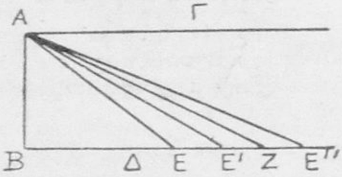
Σχ. 4

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ

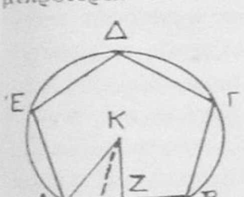
272. Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου ἑνὸς πολυγώνου, θὰ θέσωμεν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας τὴν μίαν μετὰ τὴν ἄλλην τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, ἤτοι θὰ ἀναπτύξωμεν τὴν περίμετρον αὐτοῦ καὶ κατόπιν διὰ τῆς μονάδος τοῦ μήκους θὰ μετρήσωμεν τὸ ἀνάπτυγμα, τὸ ὁποῖον θὰ λάβωμεν. Πρακτικῶς ὅμως μετροῦμεν ἑκάστην πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ μήκη, τὰ ὁποῖα θὰ εὕρωμεν.

Ἀλλ' ἐὰν πρόκειται νὰ μετρήσωμεν τὴν περιφέρειαν ἑνὸς κύκλου, δὲν δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἄνω. Διότι αἱ καμπύλαι γραμμαὶ δὲν ἀναπτύσσονται. Ἐὰν ὅμως κατορθώσωμεν νὰ ἀναγάγωμεν τὴν μέτρησιν περιφερειῶν εἰς τὴν μέτρησιν εὐθειῶν γραμμῶν, θὰ δυνηθῶμεν νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἄνω. Ἀλλ' εἶναι δυνατὸν νὰ κατορθώσωμεν τοῦτο. Διὰ τὸν σκοπὸν ὅμως τοῦτον μᾶς χρειάζεται ἡ ἔννοια τοῦ **ὁρίου.**

273. Ἔννοια τοῦ ὁρίου.— Εἰς τὴν § 209 εἴδομεν τί λέγονται μεταβλητὰ ποσά. Ἐπίσης ἐκεῖ εἴδομεν καὶ ποσὰ σταθερά, ἤτοι ποσά, τὰ ὁποῖα δὲν μεταβάλλονται, ἐνῷ τὰ ἄλλα, μετὰ τῶν ὁποίων ἔχουν σχέσιν τινά, μεταβάλλονται. Ἀλλ' ὑπάρχουν μεταβλητὰ ποσά, τὰ ὁποῖα, ἐνῷ αὐξάνουν διαρκῶς, οὐδέποτε δύνανται νὰ φθάσουν ἓν σταθερὸν καὶ ὡρισμένον ποσόν. Π.χ. ἐὰν ἐπὶ τῆς ΑΒ φέρωμεν τὰς καθέτους ΑΓ καὶ ΒΔ καὶ ἐκ τοῦ Α φέρωμεν τὴν πλαγίαν ΑΕ, ἡ γωνία ΒΑΕ εἶναι ὀξεῖα. Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον Ε κινούμενον ἐπὶ τῆς ΒΔ ἀπομακρύνεται συνεχῶς τοῦ Β, ἡ ὀξεῖα γωνία ΒΑΕ μεταβάλλεται καὶ διαρκῶς αὐξάνει. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι, ὁσονδήποτε καὶ ἂν ἀπομακρυνθῇ τὸ Ε ἀπὸ τοῦ Β, ἡ γωνία ΒΑΕ, μολονότι πλησιάζει πρὸς τὴν σταθερὰν ὀρθὴν γωνίαν ΒΑΓ, οὐδέποτε θὰ γίνῃ ἴση μὲ αὐτήν. Ἀλλ' εἶναι φανερὸν πάλιν, ὅτι ἡ διαφορὰ τῆς μεταβλητῆς αὐτῆς ὀξείας γωνίας ἀπὸ τῆς ὀρθῆς δύναται νὰ γίνῃ ὅσον θέλομεν μικρά. Διότι, ἐὰν θέλωμεν, ἵνα ἡ διαφορὰ αὕτη γίνῃ μικροτέρα π. χ. τῆς γωνίας ΖΑΓ, δὲν ἔχομεν ἢ νὰ προχωρήσωμεν τὸ σημεῖον Ε εἰς τὴν θέσιν Ε'', ἡ ὁποία νὰ εἶναι πέραν τοῦ Ζ, διότι τότε γωνΕ''ΑΓ < γων ΖΑΓ. Εἶναι δὲ φανερὸν ἐπίσης, ὅτι ἡ διαφορὰ αὕτη ἢ ἡ γωνία Ε''ΑΓ ἐξακολουθεῖ νὰ μένῃ μικροτέρα τῆς γωνίας ΖΑΓ, ὅταν τὸ Ε'' ἐξακολουθῇ νὰ κινῆται πέραν τοῦ Ζ. Ἕνεκα δὲ τούτων ἡ ὀρθὴ γωνία ΒΑΓ λέγεται **ὅριον τῆς** μεταβλητῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ κάθετος ΑΒ μὲ τὴν πλαγίαν ΑΕ.



Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν καὶ εἰς τὸ ἀπόστημα κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον. Τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ εἶναι μικρότερον τῆς ἀκτῖνος. Ἀλλ' ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ διπλασιασθῇ, ἡ πλευρὰ αὐτοῦ θὰ γίνῃ μικροτέρα. Ἑπομένως τὸ ἀπόστημα τοῦ νέου πολυγώνου θὰ γίνῃ μεγαλύτερον καὶ κατὰ συνέπειαν θὰ διαφέρῃ ἀπὸ τῆς σταθερᾶς ἀκτῖνος ὀλιγώτερον. Ἐὰν δὲ καὶ τοῦ νέου πολυγώνου ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν διπλασιασθῇ, πάλιν ἡ πλευρά του θὰ γίνῃ μικροτέρα καὶ τὸ ἀπόστημα θὰ αὐξηθῇ ἀκόμη περισσότερον καὶ ἑπομένως ἡ διαφορά του ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος θὰ γίνῃ ἀκόμη μικροτέρα. Ἐὰν δὲ ἐξακολουθήσωμεν οὕτως, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἀπόστημα διαρκῶς θὰ αὐξάνῃ καὶ ἡ διαφορά του ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος θὰ γίνεται διαρκῶς μικροτέρα. Δύναται δὲ αὕτη νὰ γίνῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης εὐθείας μ ὁσονδήποτε μικρᾶς. Γίνεται δὲ τοῦτο, ὅταν ἡ πλευρὰ τοῦ πολυγώνου γίνῃ ἀκόμη μικροτέρα τῆς μ καὶ ὅταν ἡ πλευρὰ τοῦ πολυγώνου γίνῃ ἀκόμη μικροτέρα.



Ἕνεκα τούτων, ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου λέγεται ὅριον τοῦ ἀποστήματος κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτόν, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου συνεχῶς διπλασιάζεται.

Ὥστε : ***Ὅριον μεταβλητοῦ ποσοῦ λέγεται ἓν σταθερὸν καὶ***

ὡρισμένον ποσόν, ἐὰν ἡ διαφορὰ κατ' ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ μεταβλητοῦ ἀπὸ τοῦ σταθεροῦ δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης ποσότητος, μένῃ δὲ τοιαύτη καὶ δι' ὅλας τὰς τιμάς, τὰς ὁποίας ἔπειτα λαμβάνει τὸ μεταβλητόν.

Σημείωσις α'. Ἓν μεταβλητὸν ποσὸν δύναται νὰ ἐλαττοῦται συνεχῶς καὶ οὐδέποτε νὰ φθάνῃ ἓν σταθερὸν καὶ ὡρισμένον ποσόν. Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σταθερὸν αὐτὸ ποσὸν εἶναι ὅριον τοῦ μεταβλητοῦ.

Σημείωσις β'. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι μεταβλητοὶ καὶ ἔχουν ὅρια, ἀποδεικνύεται, ὅτι:

1) $\text{ὅρ}(\alpha+\beta+\gamma) = \text{ὅρ}\,\alpha + \text{ὅρ}\,\beta + \text{ὅρ}\,\gamma$,

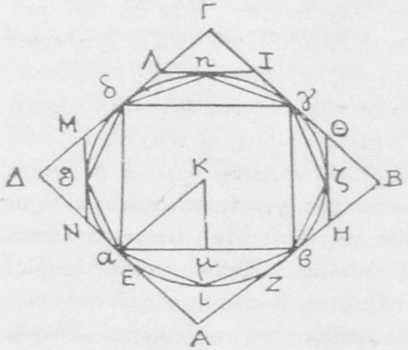
2) $\text{ὅρ}(\alpha-\beta) = \text{ὅρ}\,\alpha - \text{ὅρ}\,\beta$,

3) $\text{ὅρ}(\alpha\beta\gamma) = (\text{ὅρ}\,\alpha)(\text{ὅρ}\,\beta)(\text{ὅρ}\,\gamma)$,

4) $\text{ὅρ}\,\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\text{ὅρ}\,\alpha}{\text{ὅρ}\,\beta}$, ὅταν τὸ ὅριον τοῦ β εἶναι διάφορον τοῦ 0.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν μεταβλητὸς θετικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος λαμβάνει ἀπείρους τιμάς, αὐξάνῃ (ἐλαττοῦται) διαρκῶς, μένῃ ὅμως πάντοτε μικρότερος (μεγαλύτερος) ἀριθμοῦ τινος Α, ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει ὅριον.

274. Ἤδη ἔστω ὁ κύκλος Κ, εἰς τὸν ὁποῖον ἐγγράφομεν διαδοχικῶς κανονικὰ πολύγωνα μὲ 4 π.χ. πλευράς, μὲ 8, 16, 32 κ.ο.κ. διπλασιάζοντες ἀδιαλείπτως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν. Ἀλλὰ τότε εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ περίμετροι (τὰ μήκη αὐτῶν) τῶν διαδοχικῶν πολυγώνων διαρκῶς αὐξάνουν (ἄσκ. 14), χωρὶς ὅμως οὐδέποτε νὰ δυνηθοῦν νὰ ὑπερβοῦν τὴν σταθερὰν περίμετρον τοῦ τυχόντος περιγεγραμμένου πολυγώνου εἰς τὸν κύκλον τοῦτον. Ὥστε ἡ περίμετρος κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ διαρκῶς διπλασιάζεται, ἔχει ὅριον.



Ἀλλὰ καὶ ἐὰν περιγράφωμεν διαδοχικῶς περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον Κ ἀντιστοιχοῦντα πολύγωνα μὲ 4, 8, 16, 32 κτλ. πλευράς, πάλιν συνάγομεν, ὅτι αἱ περίμετροι τῶν πολυγώνων τούτων τείνουν πρὸς ἓν ὅριον.

Διότι, ἐνῷ αὗται βαίνουν διαδοχικῶς ἐλαττούμεναι, μένουν πάντοτε μεγαλύτεραι τῆς σταθερᾶς περιμέτρου τοῦ τυχόντος ἐγγεγραμμένου πολυγώνου.

Κατόπιν τούτων παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ ἀντιστοιχοῦντα κανονικὰ πολύγωνα αβγδ, ΑΒΓΔ εἶναι ὅμοια. Ὥστε, ἐὰν διὰ σ καὶ Σ παραστήσωμεν τὰς περιμέτρους αὐτῶν ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν $\frac{\sigma}{\Sigma}=\frac{K\mu}{K\alpha}$. Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὐτὴ ἀληθεύει καὶ ὅταν ἔχουν τὰ ἀντιστοιχοῦντα πολύγωνα 8, 16, 32, 64 κτλ. πλευράς, μὲ τὴν διαφορὰν μόνον, ὅτι τὰ σ καὶ Σ θὰ παριστοῦν τὰς περιμέτρους τῶν πολυγώνων, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν, τὸ δὲ Κμ θὰ παριστᾷ τὸ ἀπόστημα τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, ἐνῷ τὸ Κα θὰ μένῃ πάντοτε τὸ αὐτό. Ἀλλ' ἐὰν ἐξακολουθῶμεν διαρκῶς νὰ λαμβάνωμεν πολύγωνα μὲ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν, θὰ φθάσωμεν εἰς τὸ ὅριον τῶν περιμέτρων καὶ τοῦ ἀποστήματος, τὸ ὁποῖον, ὡς εἴδομεν προηγουμένως, εἶναι ἡ ἀκτὶς Κα τοῦ κύκλου Κ. Ὥστε θὰ ἔχωμεν $\frac{\text{ὅρ}\,\sigma}{\text{ὅρ}\,\Sigma}=\frac{K\alpha}{K\alpha}=1$, ἤτοι ὅρ σ = ὅρ Σ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν συνάγεται τὸ θεώρημα:

Αἱ περίμετροι δύο κανονικῶν πολυγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσον πλῆθος πλευρῶν, ἐξ ὧν τὸ μὲν εἶναι ἐγγεγραμμένον, τὸ δὲ περιγεγραμμένον περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον, ἔχουν μήκη τείνοντα πρὸς κοινὸν ὅριον, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῶν διαρκῶς διπλασιάζεται.

275. Μῆκος περιφερείας, ἀνάπτυγμα αὐτῆς.—Τὸ ἀνωτέρω κοινὸν ὅριον καλοῦμεν μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Κ.

Ὥστε: ***Μῆκος περιφερείας κύκλου λέγεται τὸ κοινὸν ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνουν τὰ μήκη τῶν περιμέτρων τῶν ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων καὶ τῶν ἀντιστοίχων περιγεγραμμένων, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῶν διαρκῶς διπλασιάζεται.***

Ἡ εὐθεῖα δέ, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, καλεῖται ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας.

Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας εἶναι εὐθεῖα μεγαλυτέρα μὲν τῆς περιμέτρου παντὸς ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, μικροτέρα δὲ τῆς περιμέτρου παντὸς περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν κανονικοῦ πολυγώνου καὶ μία μόνη.

276. Λόγος τῶν περιφερειῶν δύο κύκλων.—Ἤδη ἔστωσαν δύο κύκλοι, κ καὶ Κ, ὧν αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἀντιστοίχως α καὶ Α. Εἰς αὐτοὺς ἐγγράφομεν δύο κανονικὰ πολύγωνα ἔχοντα ἴσον πλῆθος πλευρῶν. Τὰ πολύγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια, ἑπομένως αἱ περίμετροι αὐτῶν, τὰς ὁποίας παριστῶ διὰ σ καὶ Σ, εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν, τὰς ὁποίας παριστῶ διὰ α καὶ Α, ἤτοι ἔχομεν $\frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{\alpha}{A}$.

Ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἰσότης αὐτὴ ἀληθεύει, οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν. Ὥστε, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν διαρκῶς διπλασιάζεται, θὰ φθάσωμεν εἰς τὰ ὅρια τῶν περιμέτρων, ἤτοι εἰς τὰ μήκη τῶν περιφερειῶν, τὰ ὁποῖα παριστῶμεν διὰ γ καὶ Γ.

Ἑπομένως ἡ ἰσότης $\frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{\alpha}{A}$ θὰ γραφῇ $\frac{\gamma}{\Gamma} = \frac{\alpha}{A}$. Αὕτη δὲ ἐκφράζει τὸ θεώρημα (τοῦ Ἱπποκράτους τοῦ Χίου):

Ὁ λόγος τῶν περιφερειῶν δύο κύκλων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

277. Λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.—Ἐπειδὴ ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος $\frac{\gamma}{\Gamma} = \frac{\alpha}{A}$ εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἰσότητα $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\Gamma}{A}$ καὶ ἔπειτα τὴν $\frac{\gamma}{2\alpha} = \frac{\Gamma}{2A}$, συνάγομεν, ὅτι:

Ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι σταθερός, ἤτοι εἶναι ὁ αὐτὸς εἰς πάντας τοὺς κύκλους.

Ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρόν της παριστᾶται εἰς τὰ συγγράμματα ὅλων τῶν ἐθνῶν διὰ τοῦ ἑλληνικοῦ γράμματος π. Ἀποδεικνύεται δέ, ὅτι εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος (ἤτοι:

$$\pi = 3{,}14159265358979 32\ldots)$$

Διὰ τὰς ἐφαρμογὰς κάμνουν συνήθως χρῆσιν τῆς τιμῆς 3,1416, ἥτις εἶναι κατὰ προσέγγισιν καὶ καθ' ὑπεροχήν.

278. Εὕρεσις τοῦ μήκους περιφερείας.—Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν εἶναι $\frac{\gamma}{2\alpha} = \pi$, ἤτοι $\gamma = 2\pi\alpha$. Ἡ τελευταία δὲ αὐτὴ ἰσότης εἶναι ὁ τύπος, διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου ἐκ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ α.

Σημείωσις. Ἡ περιφέρεια κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον εἶναι $\alpha = 1$, ἔχει μῆκος 2π.

Ἀσκήσεις.

226) Ἡ ἀκτὶς κύκλου εἶναι 1) 10 μ. 2) 0,6 μ. 3) 0,08 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του. Καὶ ἀντιστρόφως, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτίς του, ὅταν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του εἶναι: 1) 31,416 μ. 2) 15,708 μ. 3) 1,2566 μ.

227) Αἱ περίμετροι δύο ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων εἶναι 1,12 μ. καὶ 0,8 μ. Ἡ περιφέρεια ἡ περιγεγραμμένη περὶ τὸ πρῶτον πολύγωνον εἶναι 2,4 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρεια ἡ περιγεγραμμένη περὶ τὸ ἄλλο πολύγωνον;

ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

279. Ὁρισμοί.—Ἐὰν εἰς τόξον κύκλου ἐγγράψωμεν κανονικὰς τεθλασμένας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι περατοῦνται εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ, περιγράψωμεν δὲ καὶ ἀντιστοιχούσας τεθλασμένας γραμμάς, ἀποδεικνύομεν μὲ τοὺς ἰδίους συλλογισμοὺς τῆς § 274, ὅτι αἱ γραμμαὶ αὗται ἔχουν κοινὸν ὅριον ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῶν διαρκῶς διπλασιάζεται. Τὸ κοινὸν δὲ ὅριον αὐτῶν λέγεται **μῆκος** τοῦ τόξου, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ περιγεγραμμέναι.

Ἡ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τόξου τινός, λέγεται ἀνάπτυγμα τοῦ τόξου τούτου. Εἶναι δὲ αὕτη μεγαλυτέρα μὲν πάσης ἐν τῷ τόξῳ ἐγγεγραμμένης κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς, μικροτέρα δὲ πάσης περὶ αὐτὸ κανονικῆς περιγεγραμμένης καὶ μία μόνη.

Σημείωσις α΄. Τὰ εἰς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας ἀντιστοιχοῦντα τόξα δύο κύκλων λέγονται **ὅμοια** (ἀκόμη δὲ καὶ οἱ τομεῖς, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἴσας γωνίας, λέγονται ὅμοιοι). Ἀποδεικνύεται δέ, καθ' ὃν τρόπον ἀπεδείχθη διὰ τὰς περιφερείας, ὅτι καὶ τὰ ὅμοια τόξα εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν.

Σημείωσις β΄. Ὅπως ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς εἶναι ὁ αὐτὸς εἰς πάντας τοὺς κύκλους, οὕτω καὶ ὁ λόγος ἑκάστου τόξου πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ εἶναι ὁ αὐτὸς εἰς πάντα τὰ ὅμοια τόξα. Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος

$$\frac{(\text{τόξ.}\alpha\beta)}{(\text{τόξ.}\mathrm{AB})} = \frac{\alpha}{\mathrm{A}}$$

(α καὶ Α ἀκτῖνες τούτων) συνάγεται:

$$\frac{(\text{τόξ.}\alpha\beta)}{\alpha} = \frac{(\text{τόξ.}\mathrm{AB})}{\mathrm{A}}.$$

280. Εὕρεσις τοῦ μήκους τοῦ τόξου.—Ἂν παρασταθῇ διὰ τοῦ α ἡ ἀκτίς, ἡ περιφέρεια ἔχει μῆκος 2πα, τὸ τόξον 1° ἔχει μῆκος $\frac{2\pi\alpha}{360} = \frac{\pi\alpha}{180}$ καὶ τὸ τόξον μ° ἔχει $\frac{\pi\alpha\mu}{180}$. Οὕτως, ἐὰν α = 12 μ. τὸ μῆκος τόξου 75° εἶναι $\frac{\pi . 12 . 75}{180} = 15,7080$ μ.

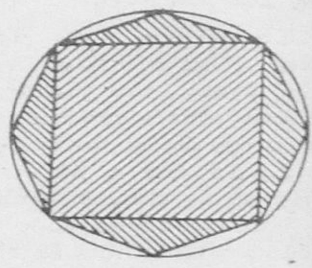
Ἀσκήσεις.

228) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τόξου, ὅταν εἶναι 1) α=6 μ. μ=52° 2) α=5 μ. μ=22° 30′, 3) α=1 μ. μ=50° 20′ 40″.

229) Τὸ μῆκος τόξου 45° εἶναι 7,854 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας του.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ

281. Ἔστω κύκλος τις Κ, εἰς τὸν ὁποῖον ἐγγράφομεν κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ. Ἐὰν φέρωμεν τὸ ἀπόστημα ΚΗ, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι (§ 268) $\frac{1}{2} \cdot (\text{ΚΗ}) \cdot (\Pi)$, ἂν διὰ Π παραστήσωμεν τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου. Ἀλλ᾽ ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ διαρκῶς διπλασιάζεται, τὸ μὲν ἀπόστημα ΚΗ ἔχει ὅριον τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου α, ἡ δὲ περίμετρος Π ἔχει ὅριον τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του Γ. Τὸ ἐμβαδὸν ἑπομένως τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ ἔχει ὅριον τὸ $\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \Gamma = \Gamma \cdot \frac{\alpha}{2}$. Ἐὰν τὸ πολύγωνον ἦτο περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον Κ, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ ἦτο $\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \Pi$ καὶ θὰ εἶχεν ὅριον τὸ $\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \Gamma = \Gamma . \frac{\alpha}{2}$.



Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸ θεώρημα:

Τὰ ἐμβαδὰ δύο κανονικῶν πολυγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσον πλῆθος πλευρῶν, ἐξ ὧν τὸ μὲν εἶναι ἐγγεγραμμένον, τὸ δὲ περιγεγραμμένον περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον, ἔχουν κοινὸν ὅριον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῶν διαρκῶς διπλασιάζεται.

282. Ὁρισμός.—Τὸ ἀνωτέρω κοινὸν ὅριον λέγεται ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

Ὥστε: ***Ἐμβαδὸν κύκλου καλεῖται τὸ ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ ἐγγεγραμμένου ἢ περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύκλον κανονικοῦ πολυγώνου, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ διαρκῶς διπλασιάζεται.***

283. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου.—Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ Κ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, θὰ εἶναι κατὰ τὰ προηγούμενα $K = \Gamma . \frac{\alpha}{2}$.

Ὥστε: ***Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.***

284. Πόρισμα 1ον. ***Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ π ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος.***

Διότι εἶναι $\Gamma = 2\pi\alpha$, ἄρα $K = 2\pi\alpha . \frac{\alpha}{2} = \pi\alpha^2$.

Πόρισμα 2ον. ***Δύο κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.***

Ἀσκήσεις.

230) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι 1) 3 μ., 2) 0,3 μ., 3) 0,21 μ. ἢ τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια εἶναι 25,1328 μ.

231) Τὸ ἐμβαδὸν κύκλου τινὸς εἶναι 90 τ.μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του.

232) Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος ἔχων ἐπιφάνειαν ἴσην πρὸς τὴν διαφορὰν ἢ πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο δοθέντων κύκλων.

285. Ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως.—Τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως ὁρίζεται καὶ αὐτό, ὡς τὸ ὅριον κανονικοῦ πολυγωνικοῦ τομέως ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κυκλικὸν τομέα, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ διαρκῶς διπλασιάζεται. Καλεῖται δὲ πολυγωνικὸς τομεὺς ἐγγεγραμμένος εἰς τὸν κυκλικὸν τομέα τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν ἀκτίνων τοῦ κυκλικοῦ τομέως καὶ τῆς κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τομέως. Αἱ πλευραὶ δὲ ταύτης καλοῦνται καὶ πλευραὶ τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ τόξου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος. Ἡ ὕπαρξις δὲ τοῦ ὁρίου τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κυκλικὸν τομέα καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτοῦ ἀποδεικνύεται, καθ᾽ ὃν τρόπον ἀπεδείχθησαν καὶ τὰ ζητήματα ταῦτα προκειμένου περὶ ὁλοκλήρου τοῦ κύκλου.

286. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ κυκλικοῦ τομέως.—Τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως, οὗ ἡ γωνία εἶναι μ° δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\frac{\pi\alpha\mu}{180}\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi\alpha^2\mu}{360}$. Οὕτω τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως, εἰς ὃν εἶναι $\mu = 15°$ καὶ $\alpha = 20$ μ. εἶναι $\frac{\pi\cdot 20^2\cdot 15}{360} = 52{,}36$ τ.μ.

Ἀσκήσεις.

233) Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 10 μ., πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως, οὗ ἡ γωνία εἶναι 10°;

234) Κυκλικοῦ τομέως 36° τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 3,853750 τ. μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, εἰς ὃν ἀνήκει.

235) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τμήματος κύκλου ἀκτῖνος 2 μ., ὅταν τὸ τόξον τοῦ τμήματος εἶναι 60°.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Δ΄ Βιβλίου.

236) Ἐὰν μία κορυφὴ κανονικοῦ πενταγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον συμπίπτῃ μετὰ μιᾶς τῶν κορυφῶν κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ τόξον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν δύο ἀμέσως ἑπομένων κορυφῶν;

237) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς περιμέτρου ἰσοπλεύρου τριγώνου περιγεγραμμένου περὶ κύκλον πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.

238) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς περιφερείας κύκλου πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτόν.

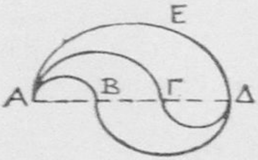
239) Δύο τόξα ἔχουν ἴσα μήκη. Τὸ πρῶτον εἶναι 12° 30′ καὶ τὸ δεύτερον 2° 30′. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ δευτέρου, ὅταν ἡ τοῦ πρώτου εἶναι 2,5 μ.

240) Ἐὰν ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 120°, *νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον τοῦτο περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι ἴση πρὸς μίαν τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ.*

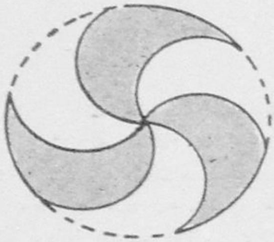
241) Τὸ ἔδαφος δωματίου ἐστρώθη διὰ πλακῶν ἐχουσῶν σχήματα κανονικῶν πολυγώνων καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶναι κ, λ, ρ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\frac{1}{\varkappa}+\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{2}\ (\S\ 263).$$

242) Εἰς τὸ σχῆμα 1 ἡ εὐθεῖα ΑΔ εἶναι διῃρημένη εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ τὰ τόξα, ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἑκάστη τῶν τριῶν γραμμῶν ΑΒΔ, ΑΓΔ καὶ ΑΕΔ, εἶναι ἡμιπεριφέρειαι. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ τρεῖς αὗται γραμμαὶ ἔχουν ἴσα μήκη.



Σχ. 1



Σχ. 2

243) Εἰς τὸ σχῆμα 2 ἡ διάμετρος τοῦ ὁλοκλήρου κύκλου ἂς ὑποτεθῇ, ὅτι εἶναι 4 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου ἑκάστου τῶν τριῶν λευκῶν τμημάτων αὐτοῦ.

244) Ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων δύο ἴσων κύκλων ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα των. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κοινῆς ἐπιφανείας τῶν κύκλων τούτων.

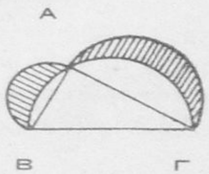
245) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τμήματος κύκλου ἀκτῖνος α, ὅταν ἡ χορδὴ αὐτοῦ εἶναι 1) πλευρὰ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ 2) πλευρὰ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου.

246) Μὲ κέντρα τὰς ἀρτίας (ἢ τὰς περιττὰς) κορυφὰς κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος α γράφομεν τρία τόξα ἐντὸς τοῦ κύκλου κείμενα καὶ περατούμενα εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῶν οὕτω σχηματιζομένων τριῶν φύλλων.

247) Τρεῖς κύκλοι ἀκτῖνος α ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἀνὰ δύο. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἥτις περιέχεται μεταξὺ τῶν περιφερειῶν τῶν κύκλων τούτων.

248) Ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ δύο ὁμοκέντρων κύκλων περιλαμβανομένη εἶναι ἰσοδύναμος μὲ κύκλον, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα τὴν ἐφαπτομένην τῆς μικροτέρας περιφερείας, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς ἄλλης.

249) Ἐὰν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ὡς ἐπὶ διαμέτρου, γραφῇ ἡμικύκλιον περιέχον αὐτό, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν ἡμικύκλια ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, τὰ μέρη τῶν ἡμικυκλίων τούτων τὰ ἐκτὸς τοῦ πρώτου κείμενα (ἅτινα λέγονται μηνίσκοι τοῦ Ἱπποκράτους) ἔχουν ἄθροισμα τὸ τρίγωνον.



250) Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον περιγραφῇ κύκλος καὶ ἔπειτα μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν γραφῇ ἄλλος κύκλος, τὸ ἐκτὸς τούτου κείμενον μέρος τοῦ πρώτου εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τρίγωνον.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΘΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

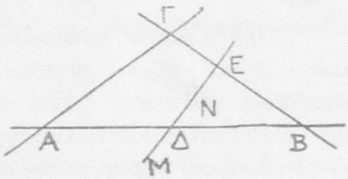
287. Αἱ δυναταὶ θέσεις εὐθείας καὶ ἐπιπέδου εἶναι αἱ ἑξῆς:

1ον. Ἡ εὐθεῖα δύναται νὰ κεῖται ὅλη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.

2ον. Ἡ εὐθεῖα δύναται νὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον, ὁπότε θὰ ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, καὶ

3ον. Ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθοῦν, ὁπότε λέγονται **παράλληλα.**

288. Εἰς τὴν Ἐπιπεδομετρίαν (§ 29 σημ.) εἴδομεν, ὅτι διὰ τριῶν σημείων, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας, διέρχονται ἄπειρα ἐπίπεδα, ἐκεῖ δὲ ἐδέχθημεν ὡς φανερόν, ὅτι διὰ τριῶν σημείων μὴ κειμένων ἐπ᾽ εὐθείας διέρχεται ἓν μόνον ἐπίπεδον. Ἀλλ᾽ ὅ,τι ἐκεῖ ἐδέχθημεν ὡς φανερόν, ἐδῶ θὰ τὸ ἀποδείξωμεν.



Ἔστωσαν τρία τοιαῦτα σημεῖα, τὰ Α,Β,Γ, ὅτε διὰ τῶν σημείων τούτων διέρχεται ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἂς ὀνομάσωμεν Π. Ἀλλ᾽ ἄλλο ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται διὰ τῶν αὐτῶν σημείων Α, Β, Γ, δὲν ὑπάρχει. Διότι, ἐὰν ὑπῆρχε καὶ ἄλλο ἐπίπεδον Ρ, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ καὶ ΓΑ θὰ ἔκειντο καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ. Ἐὰν δὲ τότε ληφθῇ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ ἄλλο σημεῖον αὐτοῦ Ν ἐντὸς τοῦ σχήματος ΑΒΓ καὶ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΜΝ, αὕτη, προεκτεινομένη, προφανῶς θὰ ἐξέλθῃ τοῦ σχήματος ΑΒΓ καὶ θὰ τέμνῃ τὴν περίμετρον αὐτοῦ εἰς δύο σημεῖα, τὰ Δ καὶ Ε· ἀλλὰ ταῦτα εἶναι σημεῖα καὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ. Ὥστε ἡ ὅλη εὐθεῖα ΔΕ κεῖται καὶ ἐπὶ τοῦ Ρ· ἄρα καὶ τὸ Μ. Ὥστε πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π εἶναι σημεῖον καὶ τοῦ Ρ· ὁμοίως δὲ ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ πᾶν σημεῖον τοῦ Ρ εἶναι σημεῖον καὶ τοῦ Π. Ἑπομένως τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ἐφαρμόζουν.

Τὰ ἀνωτέρω ἐκφράζονται καὶ ὡς ἑξῆς:

Τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου.

289. Πόρισμα 1ον. ***Δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι, ὡς αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ, ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται.***

290. Πόρισμα 2ον. ***Δύο παράλληλοι ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου.***

291. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι, ***ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνωνται, ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν εἶναι εὐθεῖα γραμμή.***

Διότι, ἂν ἡ τομὴ εἶχε τρία σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας, τὰ δύο ἐπίπεδα, ὡς διερχόμενα διὰ τῶν τριῶν τούτων σημείων, θὰ ἐφήρμοζον καὶ θὰ ἀπετέλουν ἓν μόνον ἐπίπεδον, ὅπερ ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν· ἄρα ὅλα τὰ σημεῖα τῆς τομῆς κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.

Ὥστε δύο ἐπίπεδα διάφορα ἢ τέμνονται (κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν) ἢ εἶναι **παράλληλα**, δηλαδὴ δὲν συναντῶνται ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν.

Ἀσκήσεις.

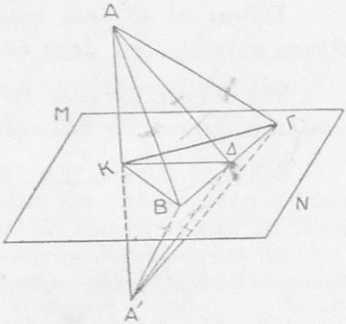
251) Εὐθεῖα κινουμένη καὶ ἡ ὁποία διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Α καὶ τέμνει εὐθεῖαν μὴ περιέχουσαν τὸ Α, γράφει ἐπιφάνειαν ἐπιπέδου.

252) Ποίαν ἐπιφάνειαν γράφει εὐθεῖα γραμμὴ κινουμένη οὕτως, ὥστε νὰ τέμνῃ περιφέρειαν κύκλου;

253) Τρεῖς εὐθεῖαι γραμμαί, ἐκ τῶν ὁποίων ἑκάστη συναντᾷ τὰς ἄλλας δύο, ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου ἢ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

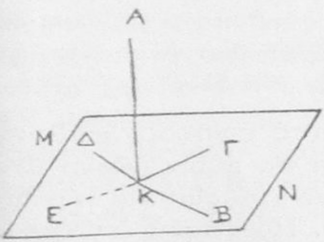
292. Εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον.—Μία εὐθεῖα εἶναι δυνατὸν νὰ τέμνῃ ἓν ἐπίπεδον εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ ὅλας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ διέρχονται διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς, ἤτοι διὰ τοῦ σημείου ὅπου τέμνει τὸ ἐπίπεδον. Τότε ἡ εὐθεῖα λέγεται κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἢ τὸ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν.

293. Εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας τεμνομένας.—Ἔστω μία εὐθεῖα ΑΚ κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας τεμνομένας ΚΒ καὶ ΚΓ κατὰ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν Κ. Θέλομεν δὲ νὰ ἐξετάσωμεν πῶς τέμνει ἡ ΑΚ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ τῶν τεμνομένων εὐθειῶν. Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ καὶ ἐκ τοῦ Κ τυχοῦσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ τέμνουσαν τὴν ΒΓ εἰς τὸ Δ. Κατόπιν προεκτείνομεν τὴν ΑΚ μέχρι τοῦ Α′ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ΑΚ = ΚΑ′. Ἀλλὰ τότε, ἐπειδὴ αἱ ΚΒ καὶ ΚΓ εἶναι κάθετοι εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΑ′, εἶναι ΓΑ=ΓΑ′ καὶ ΒΑ=ΒΑ′. Ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′ΒΓ εἶναι ἴσα. Ὅταν δὲ ἐφαρμόσουν, θὰ πέσῃ τὸ Α′ ἐπὶ τοῦ Α καὶ τὸ Δ θὰ μείνῃ εἰς τὴν θέσιν του, ὥστε ἡ Α′Δ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΔ. Εἶναι λοιπὸν ΔΑ=ΔΑ′ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν ἡ ΔΚ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΑ′· ἄρα ἡ ΑΑ′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΔ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ πᾶσαν εὐθεῖαν διὰ τοῦ Κ διερχομένην καὶ κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο. Ἐκ τούτων ἕπεται τὸ θεώρημα:



Ἐὰν μία εὐθεῖα ΑΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας τεμνομένας ΚΒ, ΚΓ (κατὰ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν), ***θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΜΝ.***

294. Κάθετοι ἐπὶ εὐθεῖαν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον αὐτῆς.—



Ἔστωσαν αἱ ΚΒ καὶ ΚΓ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΚ εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς Κ· ἀλλὰ τότε ἡ ΑΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ τῶν εὐθειῶν ΚΒ καὶ ΚΓ. Ἤδη φέρομεν ἐκ τοῦ Κ καὶ τρίτην κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΚ, ἔστω τὴν ΚΔ. Θέλομεν δὲ νὰ ἐξετάσωμεν, ἂν ἡ ΚΔ κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ ἢ ἐπ᾽ αὐτοῦ. Ἀλλ᾽ ἐὰν ἡ ΚΔ δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, τὸ δι᾽ αὐτῆς καὶ διὰ τῆς ΚΑ ἀγόμενον ἐπίπεδον, τὸ ΑΚΔ, θὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ κατὰ μίαν εὐθεῖαν ΚΕ, ἡ ὁποία θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν

ΚΑ (§ 292). Ἀλλὰ τότε ἐκ τοῦ σημείου Κ θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν ΚΑ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι μετὰ τῆς ΚΑ, αἱ ΚΔ καὶ ΚΕ, ὅπερ ἀδύνατον. Ὥστε ἡ ΚΔ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ. Ἐπειδὴ δὲ ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι πᾶσα ἄλλη κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΚ εἰς τὸ Κ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ἕπεται τὸ θεώρημα:

Πᾶσαι αἱ ἐξ ἑνὸς σημείου εὐθείας ἀγόμεναι ἐπ' αὐτὴν κάθετοι κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν.

295. Πόρισμα 1ον. ***Δι' ἑκάστου σημείου τῆς δοθείσης εὐθείας ἄγεται ἓν ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτὴν καὶ ἓν μόνον.***

Σημείωσις. Ἐὰν ἐκ σημείου Γ ἐκτὸς εὐθείας ΑΒ φέρωμεν τὴν ΓΚ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, τὸ ἐπίπεδον τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Κ θὰ περιέχῃ τὴν ΓΚ. Ἐκ τούτου λοιπὸν συνάγομεν τὸ ἑξῆς:

Δι' ἑκάστου σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου ἄγεται ἐπ' αὐτὴν ἓν κάθετον ἐπίπεδον καὶ ἓν μόνον.

296. Πόρισμα 2ον. ***Ὅλα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἐκ δύο σημείων Α καὶ Β, κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.***

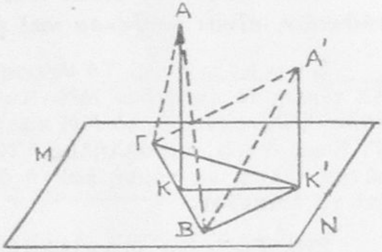
Διότι πᾶν σημεῖον ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν Α, Β κεῖται ἐπὶ εὐθείας καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.

Ἀσκήσεις.

254) Πᾶσα εὐθεῖα πλαγία πρὸς ἐπίπεδον εἶναι κάθετος ἐπί τινα εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κειμένην καὶ διερχομένην διὰ τοῦ ποδός της, μία δὲ καὶ μόνη τοιαύτη εὐθεῖα ὑπάρχει.

255) Τρεῖς εὐθεῖαι ἔχουσαι ἓν κοινὸν σημεῖον καὶ κάθετοι ἀνὰ δύο δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἑκάστη δὲ τούτων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων.

297. Δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.—Εἰς τὴν Ἐπιπεδομετρίαν εἴδομεν, ὅτι δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι. Ἤδη θὰ ἐξετάσωμεν, ἂν συμβαίνῃ τὸ αὐτὸ καὶ ὅταν δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Πρὸς τοῦτο ἔστωσαν αἱ ΑΚ καὶ Α'Κ' κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΜΝ. Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ ΑΚ καὶ Α'Κ' εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΚΚ'. Ἐὰν δὲ ἦσαν καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, θὰ ἦσαν παράλληλοι. Ἀλλὰ διὰ νὰ εἶναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν (Π. 296), ὅτι δύο οἱαδήποτε σημεῖα τῆς ΑΚ καὶ δύο οἱαδήποτε σημεῖα τῆς Α΄Κ΄ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ δύο ἄλλων σημείων. Ἀλλ᾽ ἐὰν φέρωμεν ἐκ τοῦ Κ καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΚ΄, τὴν ΒΓ καὶ λάβωμεν ΚΒ = ΚΓ, τότε θὰ εἶναι ΑΓ = ΑΒ καὶ Κ΄Γ = Κ΄Β (§ 93, β). Ἐπομένως τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα Α΄Κ΄Β καὶ Α΄Κ΄Γ εἶναι ἴσα, ἄρα εἶναι καὶ Α΄Β = Α΄Γ. Ὥστε τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Κ, Α΄, Κ΄, ἐπειδὴ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τῶν δύο σημείων Β καὶ Γ, κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου· ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου κεῖνται λοιπὸν αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΚ, Α΄Κ΄ καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς εἴπομεν, ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΚΚ΄, συνάγεται, ὅτι εἶναι παράλληλοι. Ἐκ τούτων λοιπὸν ἕπεται τὸ θεώρημα :



Δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι.

298. Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι καὶ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ μίαν ἐξ αὐτῶν.—Εἰς τὴν Ἐπιπεδομετρίαν εἴδομεν, ὅτι, ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ μίαν τῶν παραλλήλων, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.

Ἤδη θὰ ἐξετάσωμεν, ἂν καὶ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ μίαν τῶν παραλλήλων, εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.

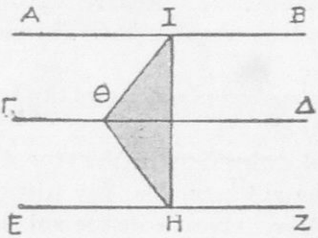
Πρὸς τοῦτο, ἔστωσαν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΚ καὶ Α΄Κ΄ καὶ ἓν ἐπίπεδον ΜΝ κάθετον ἐπὶ μίαν ἐξ αὐτῶν, π.χ. ἐπὶ τὴν Α΄Κ΄. Ἀλλ᾽ ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ΚΚ΄, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν Α΄Κ΄, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΑΚ. Ἵνα δὲ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΚ ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἵνα ἡ ΑΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ΜΝ, ἀρκεῖ ἵνα ἡ ΑΚ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΚ΄, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ μίαν ἄλλην εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ διερχομένην διὰ τοῦ Κ. Ἀλλ᾽ ἐὰν γίνῃ ἡ κατασκευὴ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἀποδεικνύεται ὁμοίως, ὅτι τὰ σημεῖα Κ, Κ΄, Α΄ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τῶν Β καὶ Γ· ἑπομένως τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΚΚ΄Α΄ εἶναι κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Ἀλλ᾽ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου κεῖται καὶ ἡ ΑΚ ὡς παράλληλος πρὸς τὴν Α΄Κ΄, ἄρα ἡ ΚΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΚ·

ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς δύο εὐθείας ΚΚ΄ καὶ ΚΒ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. Ἐκ τούτων λοιπὸν ἕπεται τὸ θεώρημα :

Ἐὰν ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ μίαν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν, εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα αὐτὸ ὑποθέτει προηγουμένως, ὅτι ἡ ΑΚ τέμνει τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. Καὶ πράγματι τὸ ἐπίπεδον τῶν δοθεισῶν παραλλήλων τέμνει τὸ ΜΝ κατὰ εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ Κ΄, ὅπου ἡ μία παράλληλος Α΄Κ΄ τέμνει τὸ ἐπίπεδον, τὴν δὲ εὐθεῖαν αὐτὴν πρέπει νὰ τέμνῃ καὶ ἡ ἄλλη παράλληλος (§ 110), ἄρα τέμνει καὶ τὸ ἐπίπεδον.

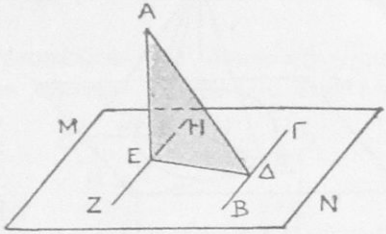
299. Εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς ἄλλην εὐθεῖαν.—Εἰς τὴν Ἐπιπεδομετρίαν (§ 111) ἀπεδείξαμεν, ὅτι ***δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τρίτην εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι.*** Ἐδῶ θὰ ἐξετάσωμεν, μήπως συμβαίνει τὸ αὐτὸ καὶ ὅταν αἱ τρεῖς εὐθεῖαι κεῖνται ἀνὰ δύο εἰς διάφορα ἐπίπεδα. Πρὸς τοῦτο, ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ παράλληλοι πρὸς τὴν ΕΖ. Ἀλλ' ἐὰν φέρωμεν τυχὸν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΖ, ἔστω τὸ ΙΘΗ, τοῦτο κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ. Ἀλλ' αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἶναι μεταξύ των παράλληλοι (§ 297). Ὥστε ἡ ὡς ἄνω πρότασις τῆς § 111 ἀληθεύει καὶ ὅταν αἱ εὐθεῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.



300. Πρόβλημα. ***Νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον ἀπὸ δοθέντος σημείου ἐκτὸς αὐτοῦ.***

Ἔστω Α τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ ΜΝ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Ἔστω δὲ ἐπίσης ΑΕ ἡ ζητουμένη κάθετος· ἀλλὰ τότε αὐτη θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΕΔ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ. Ἐὰν δὲ φέρωμεν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Δ τῆς ΕΔ, κάθετον ἐπ' αὐτὴν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ, τὴν ΒΔΓ καὶ φέρωμεν τὴν ΑΔ, λέγω, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. Διότι ἐὰν φέρωμεν ἐκ τοῦ Ε παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, τὴν ΖΗ (ἥτις θὰ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ), αὐτη, ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς

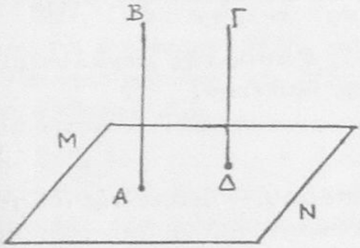
ΕΔ καὶ ΕΑ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΕΔ· ἄρα καὶ ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Ὥστε ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.



Κατασκευή. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ γράφομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, τὴν ΒΓ καὶ ἐπ' αὐτὴν φέρομεν κάθετον ἐκ τοῦ σημείου Α, τὴν ΑΔ. Ἐκ τοῦ Δ ἄγομεν τὴν ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ καὶ τέλος ἐκ τοῦ Α τὴν ΑΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΕ. Αὕτη, ἡ ΑΕ, εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.

Διότι ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΔΕ· ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ Ε ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ΖΗ, θὰ εἶναι καὶ αὐτὴ κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΑΔΕ, ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν ΑΕ. Ἡ ΑΕ λοιπόν, κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΗ καὶ ἐπὶ τὴν ΕΔ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ.

301. Πρόβλημα. ***Νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον ἀπὸ δοθέντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου.***

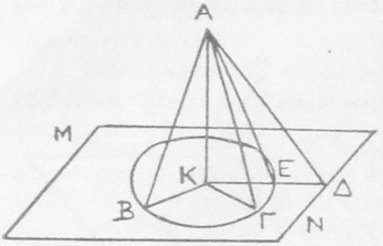


Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον. Διότι ἐὰν τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, τότε ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Γ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ἄγομεν κάθετον ἐπ' αὐτὸ τὴν ΓΔ καὶ κατόπιν ἐκ τοῦ Α παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ΜΝ.

302. Πόρισμα 1ον. ***Ἐξ ἑκάστου σημείου μία μόνη κάθετος ἄγεται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.***

303. Πόρισμα 2ον. ***Ἐὰν ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μὲν μία πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἡ δὲ ἄλλη ἐπὶ εὐθεῖαν τινὰ τοῦ ἐπιπέδου, καὶ ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν*** (ἐὰν τέμνῃ αὐτήν).

304. Περὶ καθέτου καὶ πλαγίων ἐκ σημείου ἐπὶ ἐπίπεδον.— Ἤδη θὰ ἐξετάσωμεν, μήπως τὸ θεώρημα τῆς § 93 ἀληθεύει καὶ ὅταν ἡ κάθετος καὶ ὁσαιδήποτε πλάγιαι ἄγωνται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἀλλά :



1ον. Ἡ κάθετος ΑΚ, ἡ τυχοῦσα πλαγία ΑΒ καὶ ἡ ΚΒ συνιστοῦν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ἄρα εἶναι ΑΚ < ΑΒ.

2ον. Ἐὰν ΚΒ = ΚΓ, τὰ τρίγωνα ΑΚΒ καὶ ΑΚΓ εἶναι ἴσα, ἄρα εἶναι καὶ ΑΒ = ΑΓ.

3ον. Ἐὰν ΚΔ > ΚΒ, καὶ ληφθῇ ΚΕ = ΚΒ, ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΕΔ λαμβάνομεν ΑΔ > ΑΕ ἢ ΑΔ > ΑΒ. Ὥστε, ἐὰν ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς ἐπιπέδου φέρωμεν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τὴν κάθετον καὶ ὁσασδήποτε πλαγίας, ἡ κάθετος καὶ αἱ πλάγιαι ἔχουν τὰς αὐτὰς ἰδιότητας, τὰς ὁποίας ἔχουν ἡ κάθετος καὶ αἱ πλάγιαι τοῦ Θ. 93.

Ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν ἐκ σημείου ἐκτὸς ἐπιπέδου φέρωμεν ὁσασδήποτε εὐθείας μέχρις αὐτοῦ :

1ον. ***Ἡ μικροτέρα ἐξ ὅλων τῶν ἀγομένων εὐθειῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.***

2ον. ***Ἐὰν δύο πλάγιαι εἶναι ἴσαι, οἱ πόδες αὐτῶν ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου***, καὶ

3ον. ***Ἐὰν δύο πλάγιαι εἶναι ἄνισοι, ὁ ποὺς τῆς μεγαλυτέρας ἀπέχει περισσότερον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου.***

Ἀποδεικνύονται δὲ καὶ αἱ τρεῖς αὗται προτάσεις εὐκολώτατα διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

305. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπιπέδου.—Ἕνεκα τῆς ἰδιότητος τῆς καθέτου ΑΚ, αὕτη ὁρίζει τὴν ἀπόστασιν τοῦ Α ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ. Ὥστε ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπιπέδου λέγεται ἡ κάθετος ἡ ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

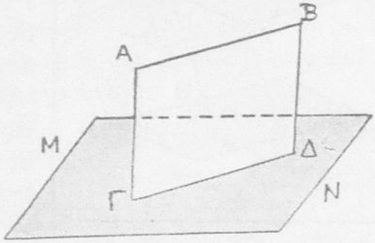
Ἀσκήσεις.

256) Ἐὰν εὐθεῖα στρέφεται περὶ ἄξονα, μένουσα παράλληλος πρὸς αὐτόν, δύο οἱαιδήποτε θέσεις τῆς εὐθείας εἶναι παράλληλοι.

257) Ἐκ τῶν σημείων τῆς εὐθείας ΑΒ ἄγονται κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. Τί εἶναι μεταξύ των αἱ κάθετοι αὗται ; Καὶ ἐπὶ ποίας ἐπιφανείας κεῖνται ;

258) Ὅταν εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον, ὅλα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας αὐτῆς ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου. Τί λέγεται λοιπὸν ἀπόστασις εὐθείας ἀπὸ ἐπιπέδου, πρὸς τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλος;

306. Παραλληλία εὐθείας καὶ ἐπιπέδου.— Εἴδομεν προηγουμένως, ὅτι μία εὐθεῖα καὶ ἓν ἐπίπεδον λέγονται παράλληλα, ὅταν δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν. Ἐὰν ἑπομένως ἔχωμεν μίαν εὐθεῖαν ΑΒ παράλληλον πρὸς μίαν εὐθεῖαν ΓΔ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, αὕτη δὲν εἶναι δυνατόν, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῇ, νὰ συναντήσῃ τὸ ἐπίπεδον αὐτό. Διότι, ἐὰν τὸ συναντήσῃ, θὰ συναντήσῃ καὶ τὴν παράλληλόν της ΓΔ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ καὶ τοῦ ΜΝ. Ἐκ τούτου ἕπεται τὸ θεώρημα:

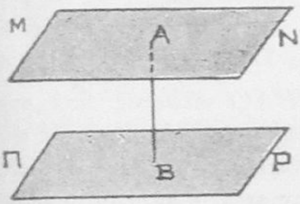


Πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος πρὸς εὐθεῖαν τινὰ ἑνὸς ἐπιπέδου θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

307. Πόρισμα 1ον. ***Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, πᾶν ἐπίπεδον ΑΒΓΔ, δι' αὐτῆς διερχόμενον καὶ τέμνον τὸ ΜΝ, τέμνει αὐτὸ κατὰ παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.***

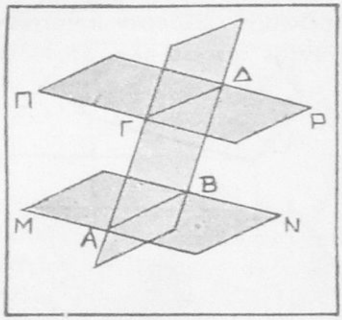
308. Πόρισμα 2ον. ***Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον, αἱ ἐκ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν κεῖνται πᾶσαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.***

309. Ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.—Ἔστωσαν τὰ ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΡ κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Θέλομεν δὲ νὰ ἴδωμεν, ἂν τὰ ἐπίπεδα ταῦτα, προεκτεινόμενα, θὰ συναντηθοῦν. Ἀλλ' ἐὰν συναντηθοῦν καὶ φέρωμεν ἔκ τινος σημείου Γ τῆς τομῆς αὐτῶν τὰς εὐθείας ΓΑ καὶ ΓΒ, θὰ σχηματισθῇ τρίγωνον, τὸ ΑΒΓ, ἔχον δύο ὀρθὰς γωνίας, τὰς Α καὶ Β. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἄτοπον. Ἐκ τούτων λοιπὸν συνάγομεν τὸ θεώρημα:



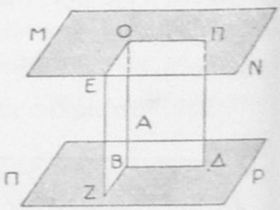
Δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλα.

310. Τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου.—Ἔστω, ὅτι δύο παράλληλα ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΡ τέμνονται ὑπὸ τρίτου ἐπιπέδου. Θέλομεν δὲ νὰ ἴδωμεν, ἂν αἱ τομαὶ αὐτῶν ΑΒ καὶ ΓΔ συναντῶνται. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τομαὶ αὐταὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ καὶ ἐξ αὐτῶν ἡ μὲν ΑΒ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ἡ δὲ ΓΔ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ. Ὥστε, ἐὰν συναντηθοῦν αἱ τομαί, θὰ συναντηθοῦν καὶ τὰ ἐπίπεδα. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἄτοπον, διότι τὰ ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΡ ὑπετέθησαν παράλληλα. Ἐκ τούτων λοιπὸν ἕπεται τὸ θεώρημα :



Αἱ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου εἶναι παράλληλοι.

311. Εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἓν ἐκ δύο ἐπιπέδων παραλλήλων.— Προηγουμένως (§ 298) εἴδομεν ὅτι, ἐὰν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ἡ μία εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ ἡ ἄλλη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Ἤδη θὰ λάβωμεν δύο παράλληλα ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΡ καὶ μίαν εὐθεῖαν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, π.χ. ἐπὶ τὸ ΠΡ· θὰ ἐξετάσωμεν δέ, ἂν ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ΜΝ. Ἀλλὰ πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἐπίπεδον τῆς ΑΒ καὶ ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου Γ τοῦ ΜΝ τέμνει τὰ ἐπίπεδα ΠΡ καὶ ΜΝ ἀντιστοίχως κατὰ τὰς εὐθείας ΒΔ καὶ ΟΓ, αἱ ὁποῖαι εἶναι μεταξύ των παράλληλοι. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΟΓΒΔ, θὰ τέμνῃ καὶ τὸ ΜΝ καὶ τὴν ΟΓ κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο. Θὰ εἶναι δὲ ἡ ΒΑΟ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΓ, διότι εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΒΔ. Ἐὰν δὲ φέρωμεν διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ ἄλλο ἐπίπεδον, π.χ. τὸ ΑΒΕ, ἀποδεικνύεται ὁμοίως, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν ΟΕ· ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. Ἐκ τούτων λοιπὸν ἕπεται τὸ θεώρημα :

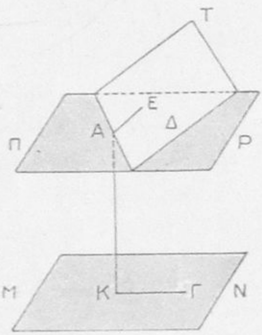


Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἓν ἐπίπεδον εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἄλλο.

Σημείωσις. Δι' ὁμοίου τρόπου ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις:

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα τέμνουσα τὸ ἓν θὰ τέμνῃ καὶ τὸ ἄλλο.

312. Ἔστω ἤδη ἓν ἐπίπεδον ΜΝ καὶ ἓν σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Θέλομεν δὲ νὰ ἴδωμεν, ἂν ἐκ τοῦ Α δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ΜΝ. Ἀλλ' ἐὰν φέρωμεν τὴν ΑΚ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ καὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΚ, τὰ δύο ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΡ εἶναι παράλληλα (§ 309). Ὥστε δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ Α ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ΜΝ. Ἤδη δὲ μένει νὰ ἐξετάσωμεν, ἂν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ Α, ἐκτὸς τοῦ ΠΡ, καὶ ἄλλο παράλληλον ἐπίπεδον πρὸς τὸ ΜΝ. Ἀλλ' ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει καὶ ἄλλο τοιοῦτον ἐπίπεδον, π.χ. τὸ ΑΤ, τὸ τυχὸν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἄγεται διὰ τῆς ΑΚ, θὰ τέμνῃ τὸ μὲν ΜΝ κατὰ μίαν εὐθεῖαν, τὴν ΚΓ, τὰ δὲ ΠΡ καὶ ΑΤ κατὰ τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΑΕ. Αἱ εὐθεῖαι δὲ αὗται ΑΔ καὶ ΑΕ θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΚΓ, διότι καὶ τὰ δύο ἐπίπεδα ΠΡ καὶ ΑΤ ὑπετέθησαν παράλληλα πρὸς τὸ ΜΝ. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἄτοπον. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν ἕπεται τὸ θεώρημα:



Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου δύναται νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον καὶ ἓν μόνον.

313. Ἀφοῦ λοιπόν, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἐξ ἑνὸς σημείου ἓν μόνον ἐπίπεδον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν παράλληλον πρὸς δοθέν, ἕπεται ὅτι ***δύο ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τρίτον εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλα.***

Διότι, ἐὰν δὲν ἦσαν, θὰ εἴχομεν ἐξ ἑνὸς σημείου τῆς τομῆς των δύο ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τρίτον.

314. Σύγκρισις εὐθειῶν παραλλήλων, περιεχομένων μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων.— Διὰ νὰ συγκρίνωμεν τοιαύτας εὐθείας, παρατηροῦμεν, ὅτι δύο τοιαῦται εὐθεῖαι ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰ δύο παράλληλα ἐπίπεδα κατ᾽ εὐθείας παραλλήλους. Αἱ τομαὶ λοιπὸν αὗται καὶ αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι σχηματίζουν παραλληλόγραμμον.

Ὥστε: ***Παράλληλοι εὐθεῖαι περιεχόμεναι μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι ἴσαι.***

315. Πόρισμα. ***Αἱ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἀγόμεναι κάθετοι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.***

316. Ὁρισμός.—Ἀπόστασις δύο παραλλήλων ἐπιπέδων λέγεται μία οἱαδήποτε τῶν μεταξὺ αὐτῶν καθέτων.

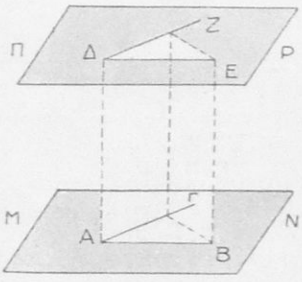
Ἀσκήσεις.

259) Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον α') πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ β') πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας, αἱ ὁποῖαι οὔτε τέμνονται οὔτε εἶναι παράλληλοι.

260) Δι᾽ ἑκάστης ἐκ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην.

261) Ἐὰν εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, εἶναι μεταξύ των παράλληλα.

317. Γωνίαι μὲ πλευρὰς παραλλήλους.—Εἰς τὴν Ἐπιπεδομετρίαν εἴδομεν, ὅτι, ἐὰν δύο γωνίαι ἔχουν τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους, μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ἴσαι. Ἤδη θὰ συγκρίνωμεν δύο τοιαύτας γωνίας, αἱ ὁποῖαι ὅμως νὰ μὴ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Συγχρόνως δὲ θὰ ἐξετάσωμεν, ἂν τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι παράλληλα ἢ ὄχι.



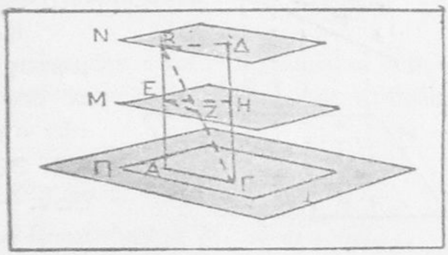
Ἔστω λοιπόν, ὅτι αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ κεῖνται εἰς τὰ ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΡ ἀντιστοίχως. Ἐπίσης ἔστω, ὅτι ἔχουν τὴν ΑΒ παράλληλον καὶ ὁμόρροπον πρὸς τὴν ΔΕ καὶ τὴν ΑΓ παράλληλον καὶ ὁμόρροπον πρὸς τὴν ΔΖ. Ἀλλ᾽ ἐὰν λάβωμεν ΑΓ=ΔΖ καὶ φέρωμεν τὰς ΑΔ καὶ ΓΖ, σχηματίζεται παραλληλόγραμμον, τὸ ΑΔΖΓ. Ὥστε ἡ ΓΖ θὰ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ. Ὁμοίως, ἐὰν λάβωμεν ΑΒ = ΔΕ, ἡ ΕΒ θὰ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ. Ὥστε ἀμφότεραι αἱ εὐθεῖαι ΓΖ καὶ ΒΕ θὰ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΔ. Ὥστε καὶ μεταξύ των αἱ ΒΕ καὶ ΓΖ θὰ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Ἀλλὰ τότε τὸ σχῆμα ΕΒΓΖ θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ὥστε καὶ ἡ ΒΓ θὰ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ θὰ εἶναι ἴσα. Ἄρα καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔΖ.

Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ αἱ ΔΕ καὶ ΔΖ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. Ἕπεται λοιπὸν ἐκ τούτου, ὅτι καὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται, εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ΜΝ. Διότι, ἐὰν ἐτέμνοντο τὰ ἐπίπεδα αὐτά, ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν θὰ ἔτεμνεν ἢ μίαν ἐκ τῶν ΔΕ καὶ ΔΖ ἢ καὶ τὰς δύο. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἄτοπον. Ἐπομένως τὰ ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΡ εἶναι παράλληλα. Ἐκ τούτων λοιπὸν ἕπεται τὸ θεώρημα:

Ἐὰν δύο γωνίαι μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἔχουν τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους, αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν παράλληλα.

Σημείωσις. Εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ ἴσαι καὶ παράλληλοι, ἔχουν τὰ ἄκρα Δ, Ε, Ζ ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ ΜΝ. Ἀλλὰ καὶ ὁσασδήποτε τοιαύτας εὐθείας καὶ ἂν φέρωμεν ἐκ σημείων τοῦ ΜΝ, πάλιν τὰ ἄκρα αὐτῶν εὑρίσκονται ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ πρῶτον. Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο ὁμοίως.

318. Εἰς τὰ προηγούμενα (§ 215) εἴδομεν, ὅτι ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα. Ἤδη θὰ ἴδωμεν, ἂν τοῦτο ἀληθεύῃ ὅταν δύο οἱαιδήποτε εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων.



Ἔστωσαν δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων Π, Μ καὶ Ν εἰς τὰ σημεῖα Α, Ε, Β καὶ Γ, Η, Δ. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ΒΓ τέμνουσαν τὸ ἐπίπεδον Μ εἰς τὸ Ζ, αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΕΖ εἶναι παράλληλοι. Ἐπίσης παράλληλοι εἶναι καὶ αἱ ΒΔ καὶ ΖΗ. Ὥστε ἔχομεν

$$\frac{ΒΕ}{ΕΑ} = \frac{ΒΖ}{ΖΓ} \quad καὶ \quad \frac{ΒΖ}{ΖΓ} = \frac{ΔΗ}{ΗΓ}.$$

Ἐκ τούτων λοιπὸν ἕπεται, ὅτι $\frac{ΒΕ}{ΕΑ} = \frac{ΔΗ}{ΗΓ}$, ἤτοι ὅτι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ διῃρέθησαν εἰς μέρη ἀνάλογα.

Ἐκ τούτων ἕπεται τὸ θεώρημα:

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.

Ἀσκήσεις.

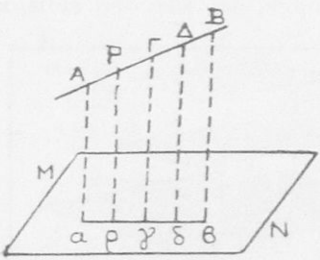
262) Ἐὰν δύο γωνίαι μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἔχουν δύο μὲν πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους, τὰς δὲ ἄλλας δύο παραλλήλους καὶ ἀντιρρόπους, αἱ γωνίαι αὗται εἶναι παραπληρωματικαί.

263) Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων καὶ τὰ τμήματα τῆς μιᾶς τὰ περιεχόμενα μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τούτων εἶναι μεταξύ των ἴσα, θὰ εἶναι μεταξύ των ἴσα καὶ τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΟΒΟΛΩΝ

319. Ὁρισμοί.— Προβολὴ σημείου ἐπὶ ἐπίπεδον λέγεται ὁ πούς τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἐκ τοῦ σημείου ἄγεται πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

Προβολὴ δὲ γραμμῆς ἐπὶ ἐπίπεδον λέγεται ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦν αἱ προβολαὶ τῶν σημείων αὐτῆς.

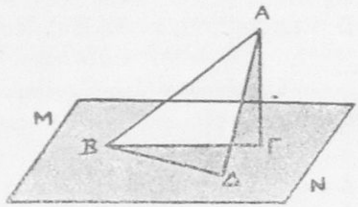


Καὶ **προβολὴ οἱουδήποτε σχήματος ἐπὶ ἐπίπεδον** λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν αἱ προβολαὶ ὅλων τῶν σημείων αὐτοῦ.

320. Προβολὴ εὐθείας ἐπὶ ἐπίπεδον. — Δίδεται εὐθεῖα ΑΒ, τὴν ὁποίαν προβάλλομεν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. Θέλομεν δὲ νὰ ἴδωμεν ποίαν γραμμὴν ἀποτελοῦν αἱ προβολαὶ τῶν σημείων αὐτῆς. Ἀλλ' αἱ ἐκ τῶν σημείων τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, π.χ. αἱ Αα, Ββ, Γγ, Δδ εἶναι παράλληλοι, τέμνουν δὲ καὶ τὴν ΑΒ· ἄρα κεῖνται πᾶσαι ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, τοῦ αΑΒ καὶ διὰ τοῦτο οἱ πόδες αὐτῶν εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ἤτοι ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς, τῆς αγδβ. Ἀντιστρόφως δέ, πᾶν σημεῖον τῆς αβ, π.χ. τὸ ρ, εἶναι προβολὴ σημείου τινὸς τῆς ΑΒ. Διότι, ἐὰν ἐξ αὐτοῦ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν αΑ, ἡ ρΡ, αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Ρ, θὰ εἶναι δὲ καὶ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· ἄρα τὸ ληφθὲν σημεῖον ρ εἶναι προβολὴ τοῦ Ρ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται τὸ θεώρημα:

Ἡ προβολὴ εὐθείας ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι εὐθεῖα.

321. Κλίσις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον. — Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ, τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον ΜΝ εἰς τὸ σημεῖον Β, καὶ ΒΓ ἡ προβολὴ αὐτῆς. Θέλομεν δὲ νὰ συγκρίνωμεν τὴν γωνίαν ΑΒΓ πρὸς τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ ΑΒ μετ' ἄλλων εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου, π.χ. μετὰ τῆς ΒΔ. Ἀλλ' ἐὰν λάβωμεν ΒΓ = ΒΔ καὶ φέρωμεν τὴν ΑΔ, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ἔχουν τὴν ΑΒ κοινήν, τὴν ΒΔ ἴσην πρὸς τὴν ΒΓ, ἀλλὰ τὴν πλευρὰν ΑΓ μικροτέραν τῆς ΑΔ (διότι ἡ μὲν ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἡ δὲ ΑΔ πλαγία)· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΒΔ. Ἐκ τούτων λοιπὸν συνάγομεν τὸ θεώρημα:



Ἐὰν εὐθεῖα τέμνῃ ἐπίπεδον, ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει μετὰ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἐκ τῶν γωνιῶν, ἃς σχηματίζει μετὰ τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου.

Ἕνεκα δὲ τούτου ἡ ὀξεῖα γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει εὐθεῖά τις μετὰ τῆς προβολῆς της ἐπὶ ἐπίπεδον, λέγεται **κλίσις τῆς εὐθείας πρὸς τὸ ἐπίπεδον.**

Ἀσκήσεις.

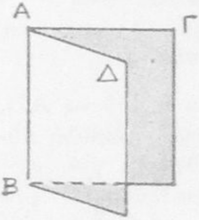
264) Πότε ἡ προβολὴ εὐθείας ἐπὶ ἐπίπεδον δὲν εἶναι εὐθεῖα;

265) Ἡ εὐθεῖα ἡ παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον καὶ ἡ προβολή της ἐπ' αὐτὸ εἶναι ἴσαι.

266) Αἱ προβολαὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν δύο πρώτων εὐθειῶν.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΙΕΔΡΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

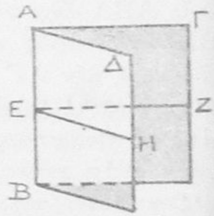
322. Ὁρισμοί.— Δίεδρος γωνία λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν δύο ἐπίπεδα τεμνόμενα καὶ περατούμενα εἰς τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν. Ἡ κοινὴ δὲ αὐτὴ τομὴ λέγεται **ἀκμὴ τῆς διέδρου γωνίας.** Τὰ ἐπίπεδα τῆς διέδρου γωνίας καλοῦνται **ἕδραι** αὐτῆς. Τὴν δίεδρον γωνίαν ὁρίζομεν διὰ δύο σημείων τῆς ἀκμῆς ἢ διὰ δύο τῆς ἀκμῆς καὶ ἑνὸς ἐξ ἑκάστης ἕδρας, π.χ. ἡ δίεδρος γωνία τοῦ παρακειμένου σχήματος σημειοῦται ΑΒ ἢ ΔΑΒΓ. Ἴσαι λέγονται αἱ δίεδροι γωνίαι, ἐὰν δύνανται νὰ τεθοῦν οὕτως, ὥστε νὰ ἀποτελέσουν μίαν μόνην.



Ὡς ἔχομεν ἐφεξῆς καὶ κατὰ κορυφὴν ἐπιπέδους γωνίας, οὕτως ἔχομεν ἐφεξῆς καὶ κατὰ κορυφὴν διέδρους, ὁρίζονται δὲ ἀναλόγως.

Ὅταν δίεδρος γωνία τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὴν ἀκμὴν αὐτῆς, ἡ προκύπτουσα ἐπίπεδος γωνία λέγεται **ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν δίεδρον.**

Οὕτως ἡ ἐπίπεδος γωνία ΗΕΖ, ἡ ὁποία προκύπτει ὅταν τμηθῇ ἡ δίεδρος δι᾽ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὴν ἀκμὴν ΑΒ, εἶναι ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν δίεδρον ΑΒ. Δὲν μᾶς ἐνδιαφέρει δὲ τὸ σημεῖον τῆς ἀκμῆς, ἀπὸ τὸ ὁποῖον θὰ ἀχθῇ τὸ κάθετον ἐπίπεδον ἐπ᾽ αὐτήν, διότι ὅλαι αἱ οὕτω προκύπτουσαι ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ἐπειδὴ ἔχουν τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους.



323. Αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι διέδρων γωνιῶν ἐπιτρέπουν, ὥστε ζητήματα, τὰ ὁποῖα ἀφοροῦν διέδρους γωνίας, νὰ ἀνάγωνται εἰς ὅμοια ζητήματα τῶν ἀντιστοίχων των ἐπιπέδων ἢ νὰ λύωνται διὰ τούτων. Πρὸς τοῦτο δὲ θὰ ἴδωμεν τὰ ἑξῆς :

324. Θεώρημα. ***Δύο δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἐὰν αἱ ἀντιστοιχοῦσαι αὐτῶν ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι.***

Διότι, ὅταν ἐφαρμόσουν αἱ δύο ἴσαι ἐπίπεδοι γωνίαι, αἱ ἀκμαὶ αὐτῶν, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν καὶ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, θὰ ἐφαρμόσουν· ἄρα θὰ ἐφαρμόσουν καὶ αἱ ἕδραι.

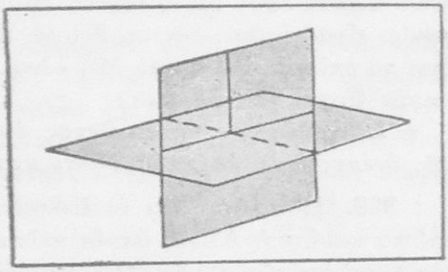
Σημείωσις. Ἡ ἀντίστροφος πρότασις, ἤτοι: *Ὅταν αἱ δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι εἶναι ἴσαι*, εἶναι ἀφ' ἑαυτῆς φανερά.

325. Πόρισμα. ***Αἱ κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.***

326. Θεώρημα. ***Δύο δίεδροι γωνίαι ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουν αἱ πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίπεδοι γωνίαι.***

Διότι εἰς διπλασίαν, τριπλασίαν κτλ. δίεδρον ἀντιστοιχεῖ διπλασία, τριπλασία κτλ. ἐπίπεδος.

Σημείωσις. Ὡς μέτρον τῆς διέδρου γωνίας λαμβάνεται ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίπεδος γωνία, ἤτοι ἀμφότεραι παριστῶνται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Διότι, ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν διέδρων γωνιῶν τὴν δίεδρον γωνίαν, τῆς ὁποίας ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἀριθμός, ὅστις μετρεῖ μίαν δίεδρον γωνίαν, εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ἀριθμόν, ὅστις μετρεῖ τὴν ἀντίστοιχον αὐτῆς ἐπίπεδον.



327. Κάθετα ἐπίπεδα.— Κάθετα λέγονται δύο ἐπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐάν, τεμνόμενα, σχηματίζουν τέσσαρας διέδρους γωνίας ἴσας. Τότε αἱ γωνίαι αὗται λέγονται ὀρθαί. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι τῶν ὀρθῶν διέδρων γωνιῶν αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι εἶναι ὀρθαί, καὶ ἀντιστρόφως, ὅτι, ἐὰν αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι εἶναι ὀρθαί, καὶ αἱ δίεδροι εἶναι ὀρθαί.

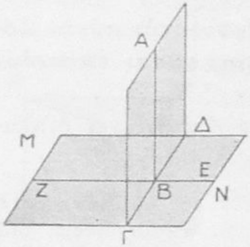
Ἀσκήσεις.

267) Τὸ ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς διέδρων γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα, εἶναι δύο ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι.

268) Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς διέδρων γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι, αἱ μὴ κοιναὶ ἕδραι αὐτῶν κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

269) Ἐὰν δι' εὐθείας ἐπὶ ἐπιπέδου φέρωμεν ἐπίπεδον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ πρώτου ἐπιπέδου, τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων διέδρων γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι.

328. Ἔστω τὸ ἐπίπεδον ΜΝ καὶ ἡ ΑΒ κάθετος ἐπ' αὐτό. Θέλομεν δὲ νὰ ἴδωμεν, πῶς τέμνουν τὸ ΜΝ τὰ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ



τῆς ΑΒ, π.χ. τὸ ΓΔΑ. Ἀλλὰ διὰ νὰ ἴδωμεν τοῦτο, πρέπει νὰ ἴδωμεν, ἂν αἱ δίεδροι γωνίαι ΑΓΔΝ καὶ ΑΓΔΜ εἶναι ὀρθαὶ ἢ ὄχι ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἂν αἱ ἐπίπεδοι αἱ ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων τούτων γωνιῶν εἶναι ὀρθαὶ ἢ ὄχι. Ἀλλ' ἐὰν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ φέρωμεν τὴν ΕΒΖ κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν ΓΔ τῶν δύο ἐπιπέδων, τὸ ἐπίπεδον ΑΒΕ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἡ ὁποία εἶναι κοινὴ ἀκμὴ τῶν διέδρων γωνιῶν ΑΓΔΕ καὶ ΑΓΔΖ· ἄρα αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΕΒΑ καὶ ΖΒΑ ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς διέδρους ταύτας· καὶ ἐπειδὴ αἱ ἐπίπεδοι αὗται γωνίαι εἶναι ὀρθαί, ἕπεται, ὅτι αἱ ἀναφερθεῖσαι δίεδροι εἶναι ὀρθαί, ἤτοι τὰ ἐπίπεδα ΑΓΔ καὶ ΜΝ εἶναι μεταξύ των κάθετα. Ἐκ τούτων λοιπὸν ἕπεται τὸ θεώρημα :

Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ ὅλα τὰ δι' αὐτῆς διερχόμενα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

329. Ἤδη ἔστω, ὅτι τὰ ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΑΓΔ εἶναι μεταξύ των κάθετα καὶ ὅτι ἡ ΑΒ, ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ τοῦ ΑΓΔ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν αὐτῶν τομήν. Θέλομεν δὲ νὰ ἴδωμεν, πῶς ἡ ΑΒ τέμνει τὸ ΜΝ. Ἀλλὰ πρὸς τοῦτο φέρομεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ τὴν ΕΒΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ, ὁπότε ἀποδεικνύεται ὁμοίως, ὅτι αἱ δύο ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΒΕ καὶ ΑΒΖ ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς ἴσας διέδρους γωνίας ΑΓΔΜ καὶ ΑΓΔΝ· ἄρα καὶ αὗται εἶναι ἴσαι καὶ διὰ τοῦτο ὀρθαί. Ὥστε ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ καὶ ἐπὶ τὴν ΕΖ· εἶναι ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΜΝ.

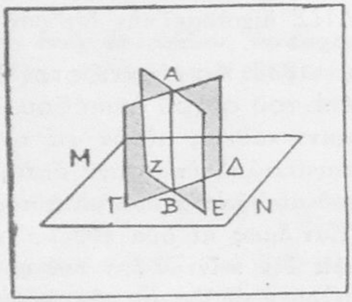
Ἐκ τούτων λοιπὸν συνάγομεν τὸ θεώρημα :

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι μεταξύ των κάθετα, πᾶσα εὐθεῖα τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἄλλο.

330. Πόρισμα. ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι μεταξύ των κά-***

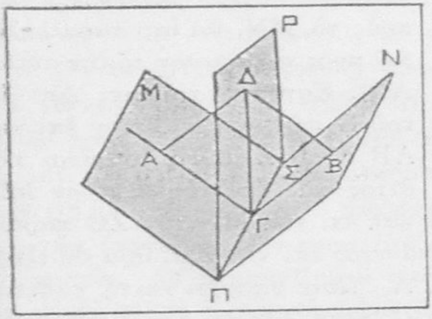
θετα καὶ ἐκ τυχόντος σημείου τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἄλλο, αὕτη θὰ κεῖται ὅλη ἐπὶ τοῦ πρώτου ἐπιπέδου.

331. Ἔστωσαν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα ΑΓΔ καὶ ΑΕΖ ἀμφότερα κάθετα ἐπὶ τὸ ΜΝ. Θέλομεν δὲ νὰ ἴδωμεν, πῶς ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ΑΒ τέμνει τὸ ΜΝ. Ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ΜΝ. Διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Α τῆς κοινῆς τομῆς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, αὕτη θὰ κεῖται καὶ ἐν τῷ πρώτῳ ἐπιπέδῳ καὶ ἐν δευτέρῳ· ἄρα θὰ εἶναι ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ΑΒ. Ἕπεται λοιπὸν ἐκ τούτων τὸ θεώρημα :



Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τεμνόμενα εἶναι ἀμφότερα κάθετα ἐπὶ ἄλλο, καὶ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

332. Ἐπίπεδον διχοτομοῦν δίεδρον γωνίαν.—Ὅπως ὑπάρχει διχοτόμος ἐπιπέδου γωνίας, οὕτως ὑπάρχει καὶ ἐπίπεδον διχοτομοῦν δίεδρον γωνίαν. Ὅπως δὲ πᾶν σημεῖον τῆς διχοτόμου γωνίας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς, οὕτω καὶ ***πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ δίεδρον γωνίαν, ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἑδρῶν αὐτῆς.***



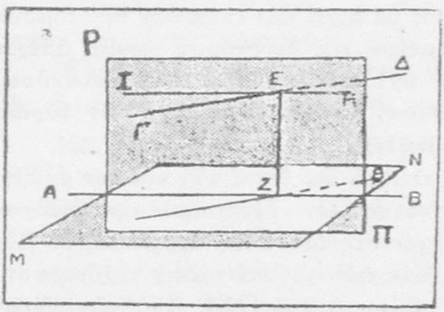
Διότι ἔστω τὸ ἐπίπεδον ΠΣΡ, τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ τὴν δίεδρον γωνίαν ΜΠΣΝ. Ἔστωσαν δὲ ΔΑ καὶ ΔΒ αἱ ἀποστάσεις τυχόντος σημείου Δ τοῦ ΠΣΡ ἀπὸ τῶν ἑδρῶν τῆς δοθείσης διέδρου. Ἀλλὰ τότε τὸ ἐπίπεδον ΑΔΒ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὸ ΠΣΜ καὶ ἐπὶ τὸ ΠΣΝ. Ὥστε εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν ΠΣ εἰς τὸ σημεῖον Γ. Ἐπομένως αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΔΓΒ καὶ ΔΓΑ εἶναι ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων, εἰς τὰς ὁποίας ἐδιχοτομήθη ἡ δίεδρος ΜΠΣΝ. Ἐπειδὴ δὲ αὗται εἶναι ἴσαι, ἕπεται, ὅτι καὶ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΔΓΒ καὶ

ΔΓΑ εἶναι ἴσαι. Ὥστε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΓΔΒ εἶναι ἴσα· ἐπομένως εἶναι ΔΑ=ΔΒ.

Ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν ΔΑ=ΔΒ, τότε τὸ σημεῖον Δ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ τὴν δίεδρον, ἤτοι ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΔΠΣ διχοτομεῖ τὴν δίεδρον ΜΠΣΝ· ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο εὐκόλως.

333. Κοινὴ κάθετος δύο εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.— Ἐὰν αἱ δύο εὐθεῖαι τέμνωνται, ὑπάρχει κοινὴ κάθετος αὐτῶν εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των. Ἐὰν δὲ εἶναι παράλληλοι, ὑπάρχουν ἄπειροι κοιναὶ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου μὲ αὐτὰς καὶ αἱ ὁποῖαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Ἐὰν ὅμως αἱ δύο εὐθεῖαι οὔτε τέμνωνται, οὔτε εἶναι παράλληλοι, τότε δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θέλομεν νὰ ἴδωμεν, ἂν ὑπάρχῃ κοινὴ κάθετος αὐτῶν.

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Διὰ τῆς ΑΒ φέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ, ἔστω τὸ ΜΝ καὶ κατόπιν φέρομεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ΜΝ καὶ διερχόμενον διὰ τῆς ΑΒ, ἔστω δὲ τοῦτο τὸ ΠΡ. Τὸ ΠΡ τέμνει τὴν ΓΔ, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Ε (διότι ἄλλως ἡ ΓΔ θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς τὸ ΠΡ· ἐπειδὴ δὲ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ΜΝ, θὰ ἦτο παράλληλος καὶ πρὸς τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν ΑΒ). Κατόπιν τούτων, ἐὰν ἐκ τοῦ Ε φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ τὴν ΕΖ, αὕτη θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ (§ 329). Ἐὰν δὲ φέρωμεν ἐκ τοῦ Ζ καὶ ἐπὶ τοῦ ΜΝ τὴν ΖΘ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ΕΖ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΘ, ἄρα θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΓΔ. Ὥστε ὑπάρχει κοινὴ κάθετος τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ αὕτη εἶναι ἡ ΕΖ. Ἤδη, ἐὰν ἐκ τοῦ Ε φέρωμεν τὴν ΙΕΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, τὸ ἐπίπεδον ΔΕΗ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ΜΝ. Ἑπομένως ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ΔΕΗ, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται ἡ ΓΔ. Ἀλλὰ τοῦτο φανερώνει, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι



ἢ μικροτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συνδέουν δύο σημεῖα τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Ὅτι δὲ ἡ ΕΖ εἶναι καὶ ἡ μόνη κοινὴ κάθετος αὐτῶν εἶναι φανερόν.

Ἐκ τούτων ἕπεται τὸ θεώρημα:

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δὲν κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, ὑπάρχει κοινὴ αὐτῶν κάθετος καὶ μία μόνη· εἶναι δὲ αὕτη ἡ ἐλαχίστη μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν ἀπόστασις.

Ἀσκήσεις.

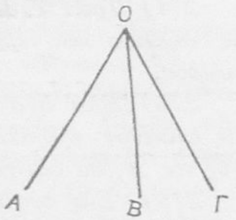
270) Δι' ἑκάστης εὐθείας κειμένης ἐν ἐπιπέδῳ ἄγεται ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτό, καὶ ἓν μόνον.

271) Διὰ δοθέντος σημείου ἄγεται ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ κάθετον ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον, καὶ ἓν μόνον.

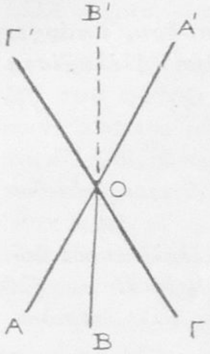
272) Ἐὰν εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον εἶναι κάθετα πρὸς ἄλλο ἐπίπεδον, εἶναι πρὸς ἄλληλα παράλληλα.

273) Ἡ ἀπόστασις εὐθείας παραλλήλου πρὸς ἐπίπεδον ἀπὸ οἱασδήποτε εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου μὴ παραλλήλου πρὸς τὴν πρώτην εἶναι ἡ αὐτὴ πάντοτε.

334. Στερεαὶ γωνίαι. Ὁρισμοί.—Εἰς τὸ σχῆμα ΟΑΒΓ παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ ἐπίπεδα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ διέρχονται ὅλα διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο καὶ ὅτι ἕκαστον τούτων περατοῦται εἰς τὰς δύο εὐθείας, κατὰ τὰς ὁποίας τέμνεται ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τῶν προσκειμένων εἰς αὐτό. Τὸ σχῆμα τοῦτο λέγεται **στερεὰ γωνία**. Γενικῶς δὲ **στερεὰ γωνία** λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν τρία ἢ περισσότερα ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ περατούμενα ἕκαστον εἰς δύο εὐθείας, κατὰ τὰς ὁποίας τέμνεται ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τῶν προσκειμένων εἰς αὐτό.



Τὰ ἐπίπεδα, τὰ σχηματίζοντα τὴν στερεὰν γωνίαν, λέγονται ἕδραι αὐτῆς, αἱ δὲ τομαὶ αὐτῶν (ἑκάστου ὑπὸ τῶν δύο πλησίον αὐτοῦ) λέγονται **ἀκμαὶ** τῆς στερεᾶς γωνίας καὶ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ ἀκμαὶ συναντῶνται, λέγεται **κορυφὴ** τῆς στερεᾶς γωνίας. Αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας ἀποτελοῦν αἱ ἀκμαὶ ἑκάστης τῶν ἑδρῶν, λέγονται **ἕδραι** ἢ **ἐπίπεδοι γωνίαι** τῆς στερεᾶς γωνίας. Αἱ δὲ γωνίαι, τὰς ὁποίας ἀποτελοῦν αἱ δι᾿ ἑκάστης τῶν ἀκμῶν διερχόμεναι ἕδραι, λέγονται **δίεδροι γωνίαι** τῆς στερεᾶς γωνίας. Οὕτω τῆς στερεᾶς γωνίας ΟΑΒΓ ἕδραι εἶναι τὰ ἐπίπεδα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ, ἀκμαὶ αὐτῆς εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, καθ᾿ ἃς τέμνονται τὰ ἐπίπεδα, καὶ κορυφὴ αὐτῆς εἶναι τὸ Ο.



Τρίεδρος λέγεται ἡ στερεὰ γωνία, ἡ ὁποία ἔχει τρεῖς μόνον ἕδρας. Ἐὰν δὲ ἔχῃ **τέσσαρας** μόνον ἕδρας, λέγεται **τετράεδρος** κ.ο.κ.

Ἡ τρίεδρος γωνία, ἡ ὁποία ἔχει τὰς τρεῖς ἀκμὰς αὐτῆς καθέτους πρὸς ἀλλήλας ἀνὰ δύο, ἔχει ὀρθὰς τὰς διέδρους αὐτῆς γωνίας (ὡς καὶ τὰς ἐπιπέδους) καὶ λέγεται **τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία.**

Κυρτὴ λέγεται ἡ στερεὰ γωνία, ἐὰν ἑκάστη ἕδρα αὐτῆς, προεκτεινομένη, ἀφήνῃ τὴν στερεὰν γωνίαν ὁλόκληρον πρὸς τὸ ἓν μέρος αὐτῆς.

335. Στερεαὶ κατὰ κορυφὴν γωνίαι. Ὁρισμός.—Ἐὰν αἱ ἀκμαὶ στερεᾶς γωνίας προεκταθοῦν ὅλαι πέραν τῆς κορυφῆς, σχηματίζεται νέα στερεὰ γωνία, ἥτις λέγεται **κατὰ κορυφὴν** ἢ **συμμετρικὴ** τῆς πρώτης. Τοιαῦται εἶναι αἱ στερεαὶ γωνίαι ΟΑΒΓ καὶ ΟΑ'Β'Γ'.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Ε' Βιβλίου.

274) Τρεῖς εὐθεῖαι γραμμαί, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ τέμνουν τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

275) Ἐὰν δύο εὐθεῖαι Α καὶ Β εἶναι μεταξύ των παράλληλοι, πᾶν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν Β καὶ διερχόμενον διὰ σημείου τινὸς τῆς Α, θὰ διέρχεται δι᾿ ὁλοκλήρου τῆς εὐθείας Α.

276) Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι μεταξύ των κάθετοι, δι᾿ ἑκάστης ἐξ αὐτῶν διέρχεται ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην, καὶ ἓν μόνον.

277) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων δύο σημείων ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶναι διπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ μέσου τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ δύο ταῦτα σημεῖα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

278) Ἐὰν Μ εἶναι σημεῖόν τι δοθείσης περιφερείας, Ο εἶναι σημεῖον ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ τὸ Ν διαιρῇ τὴν εὐθεῖαν ΟΜ κατὰ δοθέντα λόγον, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι διὰ τὰς διαφόρους θέσεις τοῦ M ὁ τόπος τοῦ N εἶναι περιφέρεια κύκλου.

279) Ἐὰν ἔχωμεν δύο εὐθείας καὶ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν διὰ τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην, αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι μεταξύ των κάθετοι.

280) Τὰ ἐπίπεδα τὰ διχοτομοῦντα δύο κατὰ κορυφὴν διέδρους γωνίας κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

281) Τὰ ἐπίπεδα τὰ διχοτομοῦντα δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικὰς διέδρους γωνίας εἶναι μεταξύ των κάθετα.

282) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (στρεβλὸν τετράπλευρον), εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος :

283) Τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ δύο εὐθειῶν παραλλήλων.

284) Τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ δύο εὐθειῶν τεμνομένων.

285) Τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ δύο ἐπιπέδων παραλλήλων.

286) Τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τεσσάρων σημείων, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (ἓν σημεῖον).

287) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο δοθείσας εὐθείας μὴ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

288) Νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τέμνουσα δύο δοθείσας εὐθείας μὴ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

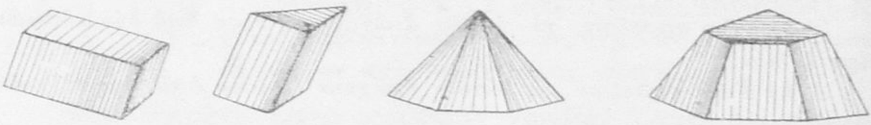
289) Ἐὰν ἐκ τῶν σημείων A, B, Γ, Δ δύο παραλλήλων εὐθειῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$, κειμένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἐπιπέδου, ἀχθοῦν εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας, τέμνουσαι τὸ ἀνωτέρω ἐπίπεδον ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα α, β, γ, δ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $AB : \Gamma\Delta = \alpha\beta : \gamma\delta$.

290) Ἐὰν ἐπίπεδον διχοτομῇ δίεδρον γωνίαν, πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπ' αὐτὸ καὶ περατουμένη εἰς τὰς ἕδρας τῆς διέδρου, διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

ΠΕΡΙ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

336. Ὁρισμοί.—Τὰ κάτωθι στερεὰ παρατηροῦμεν, ὅτι τελειώνουν πανταχόθεν εἰς ἐπίπεδα. Λέγονται δὲ διὰ τοῦτο πολύεδρα.

Ὥστε: ***Πολύεδρον λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον περατοῦται πανταχόθεν εἰς ἐπίπεδα.***



Τὰ ἐπίπεδα σχήματα, εἰς τὰ ὁποῖα περατοῦται τὸ πολύεδρον, λέγονται **ἕδραι** αὐτοῦ.

Ἂν αἱ ἕδραι τοῦ πολυέδρου εἶναι τέσσαρες, λέγεται τοῦτο **τετράεδρον,** ἂν πέντε **πεντάεδρον,** κ.ο.κ.

Γωνίαι τοῦ πολυέδρου λέγονται αἱ στερεαὶ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ ἕδραι αὐτοῦ καὶ **κορυφαὶ** αὐτοῦ αἱ κορυφαὶ τῶν στερεῶν γωνιῶν του.

Ἀκμαὶ ἢ πλευραὶ τοῦ πολυέδρου λέγονται αἱ πλευραὶ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ.

Διαγώνιος πολυέδρου λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει δύο κορυφάς, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας.

Κυρτὸν λέγεται τὸ πολύεδρον, ἐὰν ἑκάστη ἕδρα αὐτοῦ προεκτεινομένη ἀφήνῃ τὸ πολύεδρον ὁλόκληρον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος. Κατωτέρω, ὅταν θὰ ὁμιλῶμεν περὶ πολυέδρων, θὰ ἐννοοῦμεν κυρτὰ πολύεδρα.

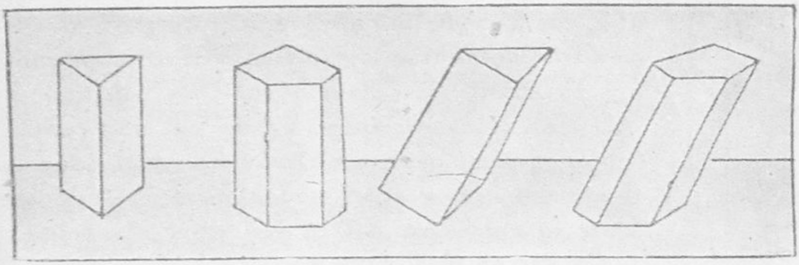
Ἐὰν ἐπίπεδον τέμνῃ πολύεδρον κυρτόν, ἡ τομὴ θὰ εἶναι πολύγωνον κυρτόν.

337. Πρίσματα.— Τὰ πολύεδρα κατὰ τὴν διάταξιν τῶν ἑδρῶν τὰ κατατάσσομεν εἰς διαφόρους τύπους. Εἷς δὲ ἐξ αὐτῶν εἶναι ἐκεῖνος, εἰς τὸν ὁποῖον δύο ἕδραι τοῦ πολυέδρου εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ λοιπαὶ ἕδραι εἶναι παραλληλόγραμμα. Τὰ τοιαῦτα πολύεδρα καλοῦμεν **πρίσματα.**

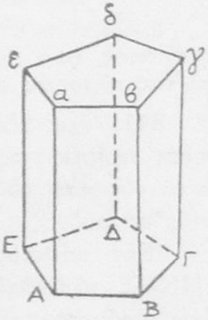
Αἱ δύο παράλληλοι ἕδραι τοῦ πρίσματος λέγονται **βάσεις** αὐτοῦ, ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεών του λέγεται **ὕψος** τοῦ πρίσματος.

Τὸ πρῖσμα λέγεται ἐκ τῆς βάσεως αὐτοῦ **τριγωνικόν,** ἐὰν ἔχῃ βάσιν τρίγωνον, **τετραγωνικόν,** ἐὰν τετράπλευρον, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τὸ πρῖσμα λέγεται **ὀρθόν,** ὅταν αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν



τὰς ἀντιστοιχούσας κορυφὰς τῶν βάσεων αὐτοῦ (αἱ ὁποῖαι καὶ πλευραὶ ἰδίως καλοῦνται) εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις, εἰ δὲ μή, τὸ πρῖσμα λέγεται **πλάγιον.** Τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος ἑκάστη πλευρὰ ἰσοῦται προφανῶς πρὸς τὸ ὕψος αὐτοῦ, αἱ δὲ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια.

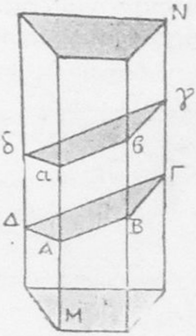


338. Κατασκευὴ πρίσματος.—Ἵνα κατασκευάσωμεν πρῖσμα, λαμβάνομεν τυχὸν πολύγωνον, ὡς τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ φέρομεν ἐκ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ εὐθείας ἴσας καὶ παραλλήλους, τὰς Αα, Ββ, Γγ, Δδ, Εε, κειμένας ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ. Τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν τούτων θὰ κεῖνται ἐφ᾽ ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ (§ 317 σημ.) καὶ τὸ στερεόν, ὅπερ περατοῦται ὑπὸ τῶν δύο ἐπιπέδων σχημάτων ΑΒΓΔΕ, αβγδε, καὶ ὑπὸ τῶν τετραπλεύρων ΑΒαβ, ΒΓβγ, ΓΔγδ, ΔΕδε, ΕΑεα, θὰ εἶναι πρῖσμα, ὡς εὐκόλως δεικνύεται.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ

Προκειμένου νὰ μετρήσωμεν τὰ πρίσματα, εἶναι ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν προηγουμένως τὰ ἑξῆς :

339. Ἔστω τυχὸν πρῖσμα τὸ ΜΝ καὶ τομαὶ αὐτοῦ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων (ἀλλὰ μὴ παραλλήλων πρὸς τὰς πλευράς του) αἱ ΑΒΓΔ καὶ αβγδ. Θέλομεν δὲ νὰ συγκρίνωμεν μεταξύ των τὰς τομὰς αὐτάς. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ αβγδ· αὗται δὲ μετὰ τῶν πλευρῶν τοῦ πρίσματος σχηματίζουν παραλληλόγραμμα, π.χ. τὸ ΑΒαβ· ὥστε εἶναι αὗται ἴσαι μία πρὸς μίαν. Ἀλλὰ τὰ πολύγωνα ταῦτα ἔχουν καὶ τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ ἴσων πλευρῶν, ἴσας. Διότι αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι. Ὥστε τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔ καὶ αβγδ εἶναι ἴσα.



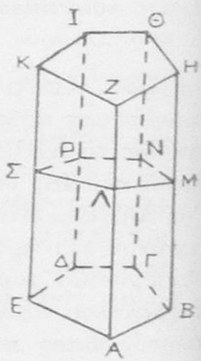
Ἐκ τούτων λοιπὸν ἕπεται τὸ θεώρημα :

Αἱ τομαὶ πρίσματος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι πολύγωνα ἴσα.

340. Πόρισμα. ***Ἐὰν πρῖσμα τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτοῦ, ἡ τομὴ εἶναι ἴση τῇ βάσει.***

Σημείωσις. **Κάθετος** λέγεται ἡ τομὴ τοῦ πρίσματος, ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ.

341. Ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος.—Ἔστω τὸ πρῖσμα ΑΙ. Θέλομεν δὲ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτοῦ.



Ἐὰν κάθετος τομὴ τοῦ πρίσματος εἶναι ἡ ΛΜΝΡΣ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΗΖ εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ΑΖ ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ ΛΜ (διότι αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ΑΖ καὶ ΒΗ). Ὁμοίως δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΒΓΘΗ εἶναι γινόμενον τῆς βάσεώς του ΒΗ ἐπὶ τὸ ὕψος ΜΝ, κ.ο.κ.

Ὥστε τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶναι ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραλληλογράμμων, τὰ ὁποῖα ὅλα ἔχουν ἴσας βάσεις, ἤτοι τοῦτο εἶναι

$$(ΑΖ).(ΛΜ)+(ΑΖ).(ΜΝ)+(ΑΖ).(ΝΡ)+(ΑΖ).(ΡΣ)+(ΑΖ).(ΣΛ)$$

$$\text{ἢ} \quad (ΑΖ).(ΛΜ+ΜΝ+ΝΡ+ΡΣ+ΣΛ).$$

Ἐκ τούτων λοιπὸν ἕπεται, ὅτι τὸ ***ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον μιᾶς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὴν περίμετρον τῆς καθέτου τομῆς του.***

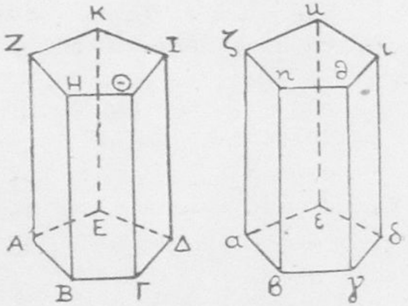
Ἀσκήσεις.

291) Τὰς παραπλεύρους ἕδρας ὀρθοῦ πρίσματος δυνάμεθα νὰ τὰς θέσωμεν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε αἱ πλευραὶ τῶν βάσεων αὐτοῦ νὰ κεῖνται ἐπὶ εὐθειῶν γραμμῶν; Καὶ διατί;

292) Πρῖσμα ὀρθὸν μὲ βάσιν τετράγωνον ἔχει ὕψος 5 μέτρα καὶ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως 6,25 τ.μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του.

293) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος ὀρθοῦ μὲ βάσιν κανονικὸν ἑξάγωνον ἰσοῦται μὲ $4\sqrt{3}.αυ$, ὅταν α εἶναι τὸ ἀπόστημα τῆς βάσεως καὶ υ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.

342. Ὀρθὰ πρίσματα ἴσα καὶ ἰσοδύναμα.— Δύο πρίσματα καὶ γενικῶς δύο στερεὰ λέγονται ἴσα, ὅταν ἐφαρμόζουν ἐντελῶς, ἐνῷ ὅταν ἐφαρμόζουν κατὰ μέρη, λέγονται ἰσοδύναμα.



Ἔστωσαν δύο ὀρθὰ πρίσματα, ὡς τὰ ΑΙ καὶ αι, ἔχοντα τὰς βάσεις αὐτῶν ἴσας καὶ τὰ ὕψη ΑΖ καὶ αζ ἴσα. Ἐὰν ἡ βάσις αβγδε ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΒΓΔΕ, ἡ αζ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΖ (διότι ἀμφότεραι θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔΕ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Α) καὶ τὸ σημεῖον ζ εἰς τὸ σημεῖον Ζ· ὁμοίως θὰ πέσῃ καὶ τὸ η εἰς τὸ σημεῖον Η καὶ τὸ θ εἰς τὸ Θ καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε τὰ δύο πρίσματα θὰ ἐφαρμόσουν. Ἐκ τούτων λοιπὸν ἕπεται τὸ θεώρημα:

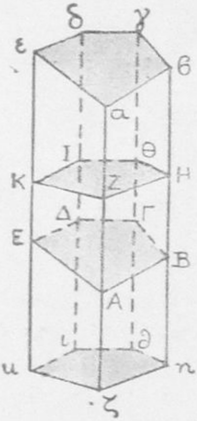
Δύο ὀρθὰ πρίσματα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη.

343. Πόρισμα. ***Δύο ὀρθὰ πρίσματα, ἔχοντα βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἰσοδύναμα.***

344. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν δύο ὀρθὰ πρίσματα ἔχουν ἴσας βάσεις, ἀλλὰ τοῦ ἑνὸς τὸ ὕψος εἶναι διπλάσιον ἢ τριπλάσιον κτλ. τοῦ ὕψους τοῦ ἄλλου, τὸ πρῶτον πρῖσμα θὰ εἶναι διπλάσιον κτλ. τοῦ ἄλλου.

Ὥστε: ***Δύο ὀρθὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις, ἔχουν λόγον, ὃν ἔχουν τὰ ὕψη αὐτῶν.***

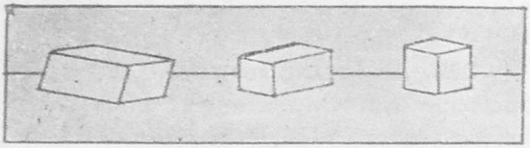
345. Μετασχηματισμὸς πλαγίου πρίσματος εἰς ἰσοδύναμον ὀρθόν.—Ἔστω πλάγιον πρῖσμα τὸ ΑΒΓΔΕαβγδε καὶ κάθετος τομὴ αὐτοῦ ἡ ΖΗΘΙΚ. Ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς αὐτοῦ καὶ λάβωμεν Αζ=αΖ, Βη=βΗ, Γθ=γΘ, Δι=δΙ, Εκ=εΚ, φέρωμεν δὲ καὶ τὰς εὐθείας ζη, ηθ, θι, ικ, κζ, προκύπτει πρῖσμα ὀρθόν, τὸ ΖΗΘΙΚζηθικ, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν κάθετον τομὴν τοῦ πλαγίου καὶ ὕψος τὴν Ζζ, ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν Αα τοῦ πλαγίου (ζΑ=Ζα). Ἀλλὰ τὸ ὀρθὸν τοῦτο πρῖσμα καὶ τὸ δοθὲν πλάγιον ἔχουν κοινὸν μέρος τὸ στερεὸν ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ, τὰ δὲ μὴ κοινὰ μέρη αὐτῶν, τὰ ΑΒΓΔΕζηθικ καὶ αβγδεΖΗΘΙΚ, εἶναι ἴσα. Καὶ πράγματι, ἐὰν ἐφαρμόσῃ τὸ πολύγωνον ΖΗΘΙΚ ἐπὶ τοῦ ἴσου του ζηθικ, ἡ Ζα θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ζΑ (διότι θὰ εἶναι ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ζηθικ καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου), καὶ ἐπειδὴ ἐλήφθη ζΑ=Ζα, θὰ πέσῃ τὸ α εἰς τὸ Α· ὁμοίως θὰ πέσῃ τὸ β εἰς τὸ Β καὶ τὸ γ εἰς τὸ Γ, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ὥστε τὰ δύο στερεὰ ΑΒΓΔΕζηθικ καὶ αβγδεΖΗΘΙΚ θὰ ἐφαρμόσουν.



Ἄρα τὸ ὀρθὸν πρῖσμα καὶ τὸ δοθὲν πλάγιον ἐφαρμόζουν, ὅταν διαιρεθοῦν εἰς μέρη, ἤτοι εἶναι ἰσοδύναμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν λοιπὸν τὸ θεώρημα:

Πᾶν πλάγιον πρῖσμα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ὀρθόν, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν μὲν τὴν κάθετον τομὴν τοῦ πλαγίου, ὕψος δὲ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

346. Παραλληλεπίπεδα.— Μία ἰδιαιτέρα κατηγορία πρισμάτων εἶναι ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς βάσεις παραλληλόγραμμα. Τότε ταῦτα ἔχουν ὅλας τὰς ἕδρας παραλληλόγραμμα καὶ λέγονται **παραλληλεπίπεδα.**

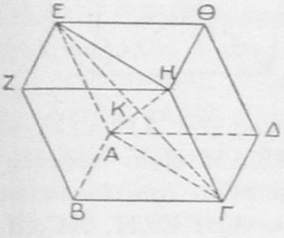


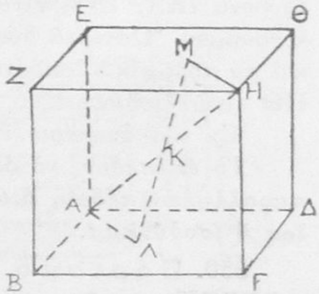
Τὸ παραλληλεπίπεδον ἔχει ἓξ ἕδρας. Ἐὰν τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθόν, ἔχει δὲ καὶ βάσεις ὀρθογώνια, λέγεται **ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.**

Ἐὰν δὲ αἱ βάσεις εἶναι τετράγωνα, ὡς καὶ αἱ λοιπαὶ ἕδραι, τὸ στερεὸν λέγεται **κύβος** ἢ **κανονικὸν ἑξάεδρον.**

347. Ἰδιαίτερον χαρακτηριστικὸν τῶν παραλληλεπιπέδων εἶναι, ὅτι ἔχουν **τὰς ἀπέναντι ἕδρας ἴσας καὶ παραλλήλους.** Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο, ὡς ἀπεδείχθη ἡ ἰσότης τῶν παραλλήλων τομῶν πρίσματος. Ἕνεκα δὲ τούτου ***βάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου δύνανται νὰ ληφθοῦν δύο οἱαιδήποτε ἀπέναντι ἕδραι αὐτοῦ.***

348. Ἰδιότης τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλεπιπέδου.— Ἔστω παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ καὶ δύο διαγώνιοι αὐτοῦ αἱ ΑΗ, ΕΓ· ἀλλ' αἱ ΑΕ καὶ ΗΓ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ἑπομένως τὸ σχῆμα ΑΓΗΕ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΗ καὶ ΕΓ διχοτομοῦνται. Ἐκ τούτου λοιπὸν ἕπεται, ὅτι ***αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλεπιπέδου διχοτομοῦνται.***



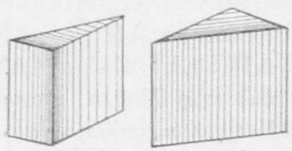


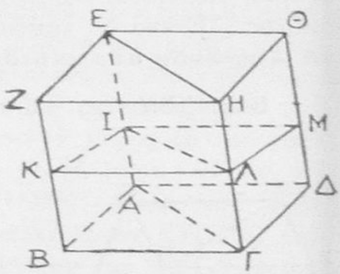
Σημείωσις α'. Διαγώνιοι τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ εἶναι αἱ ἑξῆς τέσσαρες: ΑΗ, ΒΘ, ΓΕ, ΔΖ, καὶ τέμνονται ἀνὰ δύο, ὡς ἀπεδείχθη, εἰς τὸ μέσον αὐτῶν, ἑπομένως καὶ αἱ τέσσαρες διέρχονται διὰ τοῦ μέσου Κ τῆς ΑΗ. Τοῦτο δὲ εἶναι τὸ μέσον καὶ τῶν ἄλλων.

Σημείωσις β'. Πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ σημείου Κ καὶ περατουμένη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ παραλληλεπιπέδου, ὅπως ἡ ΛΚΜ, τέμνεται εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ τοῦ σημείου Κ, ὡς δεικνύεται ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΚΛΑ καὶ ΚΗΜ. Διὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην τὸ σημεῖον Κ λέγεται *κέντρον* τοῦ παραλληλεπιπέδου.

349. Διαίρεσις παραλληλεπιπέδου εἰς δύο τριγωνικὰ πρίσματα.—Ἔστω παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ· ἐὰν φέρωμεν διὰ τῶν δύο ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρῶν ΑΕ καὶ ΓΗ τὸ ἐπίπεδον ΑΕΗΓ, διαιρεῖται τὸ παραλληλεπίπεδον εἰς δύο στερεὰ ΑΒΓΕΖΗ καὶ ΑΓΔΕΗΘ, τὰ ὁποῖα εἶναι πρίσματα.

Καὶ ἂν μὲν τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθόν, τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα, εἰς τὰ ὁποῖα διηρέθη, εἶναι ἴσα (§ 342), ἂν δὲ τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι πλάγιον, καὶ τὰ πρίσματα εἶναι ἐπίσης πλάγια· εἶναι δὲ καὶ ἰσοδύναμα, διότι ἐὰν φέρωμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ, ὡς τὸ ΙΚΛΜ, τὸ μὲν τριγωνικὸν πρῖσμα, ΑΒΓΕΖΗ εἶναι ἰσοδύναμον (§ 345) μὲ τὸ ὀρθὸν πρῖσμα, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν ΙΚΛ καὶ ὕψος τὴν ΑΕ, τὸ δὲ ΑΓΔΕΗΘ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ





ὀρθὸν πρῖσμα, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν ΙΛΜ καὶ ὕψος τὴν ΑΕ· ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΙΚΛ, ΙΛΜ εἶναι ἴσα, διότι τὸ σχῆμα ΙΚΛΜ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ὥστε τὰ δύο ὡς ἄνω ὀρθὰ πρίσματα εἶναι ἴσα, ἑπομένως καὶ τὰ πρὸς αὐτὰ ἰσοδύναμα τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΓΕΖΗ, ΑΓΔΕΗΘ εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται τὸ θεώρημα:

Τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἄγεται διὰ δύο ἀπέναντι πλευρῶν παραλληλεπιπέδου, διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο τριγωνικὰ πρίσματα ἴσα ἢ ἰσοδύναμα.

350. Πόρισμα. ***Ἐὰν ἔχωμεν τριγωνικὸν πρῖσμα, ὡς τὸ ΑΒΓΕΖΗ, καὶ ἐκ τοῦ ἄκρου ἑκάστης τῶν ἀκμῶν ΒΑ, ΒΓ, ΒΖ τῆς στερεᾶς γωνίας Β φέρωμεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ***

ἐπίπεδον τῶν δύο ἄλλων, σχηματίζεται παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒΓΔΕΖΗΘ, τὸ ὁποῖον εἶναι διπλάσιον τοῦ δοθέντος τριγωνικοῦ πρίσματος.

Ἀσκήσεις.

294) Αἱ διαγώνιοι παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι, τὸ δὲ τετράγωνον μιᾶς τούτων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν ἀκμῶν μιᾶς τῶν στερεῶν αὐτοῦ γωνιῶν.

295) Νὰ εὑρεθῇ 1) ἡ διαγώνιος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς ἀκμαὶ μιᾶς τῶν στερεῶν αὐτοῦ γωνιῶν εἶναι 8 μ., 6 μ. καὶ $5\sqrt{5}$ μ., καὶ 2) ἡ διαγώνιος κύβου ἀκμῆς α.

296) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκμὴ κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος εἶναι 64 μ.

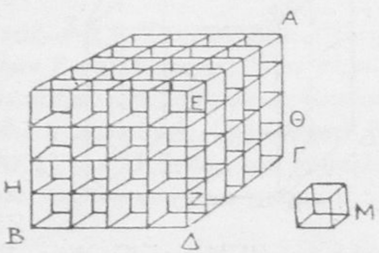
297) Ποῖον εἶναι τὸ σχῆμα τῆς τομῆς κύβου ἀκμῆς α ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ δύο ἀπέναντι ἀκμῶν αὐτοῦ μὴ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας καὶ ποῖον τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς ;

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ

351. Μονάδες ὄγκου.—Ὡς μονὰς μετρήσεως τῶν στερεῶν λαμβάνεται ὁ κύβος, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκμὴν ἴσην μὲ ἓν μέτρον καὶ λέγεται κυβικὸν μέτρον. Ἂν ὁ κύβος ἔχει ἀκμὴν ἴσην μὲ μίαν παλάμην ἢ μὲ ἕνα δάκτυλον ἢ μὲ μίαν γραμμήν, λέγεται κυβικὴ παλάμη ἢ κυβικὸς δάκτυλος ἢ κυβικὴ γραμμή. Δυνάμεθα δὲ νὰ μετρήσωμεν στερεὰ μὲ κυβικὰς παλάμας ἢ καὶ μὲ κυβικοὺς δακτύλους ἢ καὶ μὲ κυβικὰς γραμμάς.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἀπὸ τὴν μέτρησιν στερεοῦ λέγεται **ὄγκος** αὐτοῦ.

352. Ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.—Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΒ. Αἱ τρεῖς ἀκμαὶ μιᾶς στερεᾶς γωνίας αὐτοῦ, π.χ. αἱ ΔΒ, ΔΓ, ΔΕ, λέγονται διαστάσεις αὐτοῦ καὶ ἡ μὲν μία λέγεται **μῆκος**, ἡ δὲ **πλάτος** καὶ ἡ ἄλλη **ὕψος**. Ἂς ὑποτεθῇ δέ, ὅτι αἱ διαστάσεις αὗται ἐμετρήθησαν μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους καὶ ἔχουν (ΔΒ)=α, (ΔΓ)=β καὶ (ΔΕ)=γ. Κατόπιν τούτου λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΔΕ τὸ τμῆμα ΔΖ



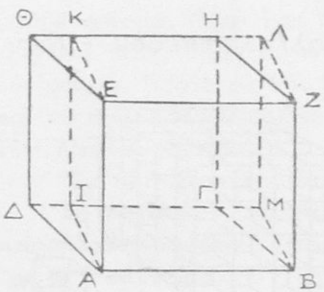
ἴσον μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους καὶ ἐκ τοῦ Ζ φέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΒΔΓ, τὸ ΗΖΘ. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι α.β, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΒΘ ἰσοῦται μὲ α.β μονάδας ὄγκου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΒ ἀποτελεῖται ἀπὸ γ παραλληλεπίπεδα ἴσα μὲ τὸ ΒΘ, ἕπεται, ὅτι ὁ ὄγκος αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ α.β.γ μονάδας ὄγκου.

Ὥστε: ***Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι μετροῦν τὰς τρεῖς διαστάσεις αὐτοῦ.***

Σημείωσις: Ἡ ἄνω ἀπόδειξις ὑποθέτει, ὅτι οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ α,β,γ εἶναι ἀκέραιοι. Ἀλλ᾽ οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι μετροῦν τὰς τρεῖς ὡς ἄνω διαστάσεις, πάντοτε ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν. Διότι διὰ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΒ καὶ διὰ τὸ Π, τὸ ὁποῖον ἔχει διαστάσεις α,β,1 ἔχομεν $\frac{AB}{\Pi}=\frac{\gamma}{1}$ (§ 344). Διὰ τὸ Π καὶ τὸ Ρ, τὸ ὁποῖον ἔχει διαστάσεις α, 1, 1, ἔχομεν $\frac{\Pi}{P}=\frac{\beta}{1}$, ἐνῷ διὰ τὸ Ρ καὶ τὸ Λ, τὸ ὁποῖον ἔχει διαστάσεις 1, 1, 1, ἔχομεν $\frac{P}{\Lambda}=\frac{\alpha}{1}$. Ἐὰν ἤδη πολλαπλασιάσωμεν τὰς τρεῖς αὐτὰς ἰσότητας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $\frac{AB}{\Lambda}=\alpha\beta\gamma$. Ἀλλὰ τὸ παραλληλεπίπεδον Λ εἶναι ἡ μονὰς τῶν στερεῶν. Ὥστε εἶναι (ΑΒ)=αβγ.

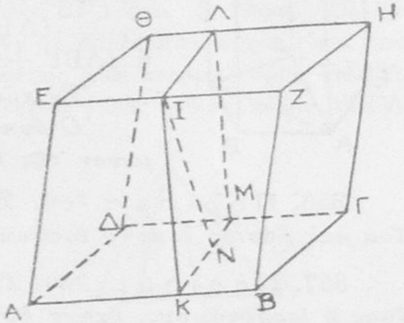
353. Πόρισμα. ***Ὁ ὄγκος παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

354. Ὄγκος παντὸς παραλληλεπιπέδου.—α᾽) **Ὀρθοῦ.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου, μετασχηματίζομεν αὐτὸ εἰς ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον, ὡς ἑξῆς φαίνεται.



Ἔστω ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἐὰν διὰ τῶν ἀκμῶν ΑΕ καὶ ΒΖ φέρωμεν ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν ἕδραν ΔΓΗΘ, σχηματίζονται τὰ ὀρθὰ τριγωνικὰ πρίσματα ΑΙΔΕΚΘ καὶ ΒΓΜ ΖΗΛ, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις τὰς ΑΙΔ καὶ ΒΓΜ καὶ ἴσα ὕψη. Εἶναι λοιπὸν ταῦτα ἴσα. Ὥστε, ἐὰν ἀπὸ τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον ἀποκόψωμεν τὸ πρίσμα ΑΙΔΕΚΘ καὶ τὸ θέσωμεν ἐπὶ τοῦ ΒΓΜΖΗΛ, σχηματίζεται ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΙΜΒΚΕΖΛ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθέν. Ἀλλ' ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου τούτου παραλληλεπιπέδου εἶναι (ΑΒΜΙ). (ΑΕ) ἢ καὶ (ΑΒΓΔ). (ΑΕ)· οὗτος δὲ εἶναι καὶ ὁ ὄγκος τοῦ δοθέντος παραλληλεπιπέδου, ἤτοι τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

β') **Πλαγίου.** Ἔστω νῦν πλάγιον παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ καὶ κάθετος τομὴ αὐτοῦ ἡ ΙΚΛΜ, ἥτις εἶναι παραλληλόγραμμον. Τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν ΙΚΛΜ καὶ ὕψος τὴν ΑΒ· τὸ ὀρθὸν δὲ τοῦτο παραλληλεπίπεδον ἔχει ὄγκον (ΙΚΛΜ). (ΑΒ)· ἄρα καὶ τὸ δοθὲν τὸν αὐτὸν ὄγκον ἔχει. Ἀλλὰ τοῦ παραλληλογράμμου ΙΚΛΜ βάσις εἶναι ἡ ΚΜ (κάθετος ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΓΔ), ὕψος δὲ ἡ ἐκ τοῦ Ι ἐπὶ τὴν ΚΜ ἀγομένη κάθετος ΙΝ, ἡ ὁποία θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι καὶ τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ· ἐπομένως ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: (ΑΒ). (ΚΜ). (ΙΝ). Ἐπειδὴ δὲ (ΑΒ). (ΚΜ) εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΒΓΔ, ἕπεται, ὅτι ὁ ὄγκος εἶναι (ΑΒΓΔ).(ΙΝ), ἤτοι τὸ ***γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.***

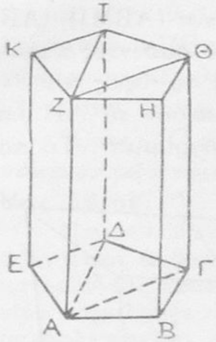


Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται τὸ θεώρημα:

Ὁ ὄγκος παντὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

355. Ὄγκος παντὸς πρίσματος.—α') Τριγωνικοῦ. Ἔστω τριγωνικὸν πρῖσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν β καὶ ὕψος υ. Ἐὰν ἐκ τῶν ἀκμῶν μιᾶς τῶν στερεῶν γωνιῶν του κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον, τοῦτο θὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος (§ 350) καὶ θὰ ἔχῃ βάσιν διπλασίαν 2β καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ υ. Ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου τούτου θὰ εἶναι 2β.υ· ἄρα τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ὁ ὄγκος θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ, ἤτοι β.υ.

β') **Πολυγωνικοῦ.** Ἔστω πολυγωνικὸν πρῖσμα τὸ ΑΙ, ἔχον ὕψος υ καὶ βάσιν τὴν ΑΒΓΔΕ. Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς Α διαιρεθῇ ἡ βάσις αὐτοῦ εἰς τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ καὶ ἀχθοῦν τὰ ἐπίπεδα ΖΑΓ, ΖΑΔ, διαιροῦν τὸ πρῖσμα εἰς τριγωνικὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις τὰ τρίγωνα, εἰς τὰ ὁποῖα διηρέθη ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ τοῦ πρίσματος, καὶ ὕψος τὸ τοῦ πρίσματος.



Ὁ ὄγκος τῶν πρισμάτων τούτων εἶναι (ΑΒΓ).υ, (ΑΓΔ).υ, (ΑΔΕ).υ. Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ δοθέντος πολυγωνικοῦ πρίσματος εἶναι

$$(ΑΒΓ).υ + (ΑΓΔ).υ + (ΑΔΕ).υ$$

$$ἢ \quad (ΑΒΓ + ΑΓΔ + ΑΔΕ).υ \quad ἢ \quad (ΑΒΓΔΕ).υ.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται τὸ θεώρημα:

Ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος εἶναι τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

356. Πόρισμα 1ον. ***Τὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὕψη ἴσα καὶ βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους εἶναι ἰσοδύναμα.***

357. Πόρισμα 2ον. ***Τὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους, ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν των· ἐὰν δὲ ἔχουν ἴσα ὕψη, ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεών των.***

Ἀσκήσεις.

298) Αἱ τρεῖς διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 1) 6 μ., 18 μ. καὶ 6,25 μ., καὶ 2) 3,5 μ., 4,25 μ. καὶ 5,8 μ. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ ;

299) Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια κύβου ἔχει ἐμβαδὸν 96 τ. μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος αὐτοῦ ὡς καὶ ὅταν ἡ διαγώνιος αὐτοῦ εἶναι $α\sqrt{3}$ *μ.*

300) Ἡ ἀκμὴ κύβου εἶναι 3 μ., α μ. Ποία εἶναι ἡ ἀκμὴ κύβου, ὅστις εἶναι διπλάσιος κατὰ τὸν ὄγκον ;

301) Πόσα κυβικὰ μέτρα ἀέρος χωρεῖ δωμάτιόν τι, οὗτινος τὸ ὕψος εἶναι 6 μ., τὸ δὲ πάτωμα ἔχει μῆκος 4,8 μ., καὶ πλάτος 5,2 μ. ; Καὶ πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἀέρος τούτου ;

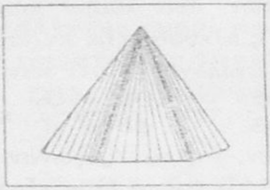
302) Κύβος τις ἔχει ὄγκον 125 κ. μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ ἀκμή του, πόσα ἡ διαγώνιος αὐτοῦ καὶ πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ἡ ὁλική του ἐπιφάνεια ;

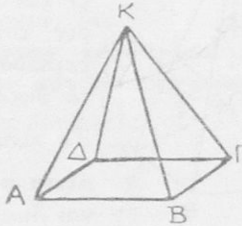
303) Πρῖσμά τι ἔχει ὕψος 7,6 μ. καὶ βάσιν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 12,3 μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του.

304) Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα, ὧν αἱ βάσεις ἔχουν διαστάσεις τοῦ μὲν ἑνὸς 3,5 μ. καὶ 3,4 μ., τοῦ δὲ ἄλλου 1,8 μ. καὶ 5,5 μ., ἔχουν ἴσα ὕψη. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ δευτέρου παραλληλεπιπέδου, ὅταν ὁ ὄγκος τοῦ πρώτου εἶναι 39,1 κ.μ.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΥΡΑΜΙΔΩΝ

358. Ὁρισμοί.—Τὸ πολύεδρον ΚΑΒΓΔ ἔχει 5 ἕδρας. Ἐξ αὐτῶν ἡ μὲν ΑΒΓΔ εἶναι τετράπλευρον, αἱ δὲ λοιπαὶ ἕδραι εἶναι τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, κορυφὴν δὲ κοινήν, τὴν Κ, ἡ ὁποία κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ.





Τὸ πολύεδρον τοῦτο λέγεται **πυραμίς.** Γενικῶς δὲ **πυραμὶς** λέγεται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποίου μία ἕδρα εἶναι οἱονδήποτε πολύγωνον, αἱ δὲ λοιπαὶ εἶναι τρίγωνα, τὰ ὁποῖα βάσεις μὲν ἔχουν τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, κορυφὴν δὲ κοινήν, σημεῖόν τι, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου.

Βάσις τῆς πυραμίδος λέγεται τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔ, **κορυφὴ** τὸ σημεῖον Κ, **ὕψος** δὲ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη κάθετος. Αἱ ἀκμαί, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν ἀπὸ τὴν κορυφήν, λέγονται ἰδίως **πλευραί,** ἡ δὲ πέριξ αὐτῶν ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς ἕδρας ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΑ, λέγεται **παράπλευρος ἐπιφάνεια** τῆς πυραμίδος.

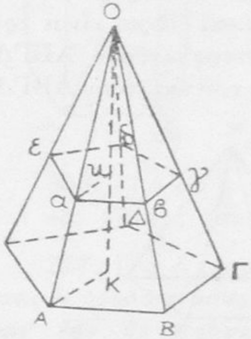
Ἡ πυραμὶς λέγεται ἐκ τῆς βάσεως αὐτῆς **τριγωνική,** ἐὰν ἔχῃ βάσιν τρίγωνον, **τετραγωνική,** ἐὰν ἔχῃ βάσιν τετράπλευρον, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τετράεδρον, δύναται δὲ οἱαδήποτε ἐκ τῶν ἑδρῶν αὐτῆς νὰ ληφθῇ ὡς βάσις τῆς πυραμίδος.

Κανονικὴ λέγεται ἡ πυραμίς, ἐὰν ἡ βάσις αὐτῆς εἶναι κανονικὸν πολύγωνον καὶ ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν πίπτῃ εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς. Ἡ κάθετος αὕτη λέγεται **ἄξων** τῆς κανονικῆς πυραμίδος.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΥΡΑΜΙΔΩΝ

359. Τομὴ πυραμίδος ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν.—Ἔστω ἡ πυραμὶς ΟΑΒΓΔΕ καὶ τομὴ αὐτῆς παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ἡ αβγδε, ὕψος δὲ ἡ ΟΚ. Ἀλλὰ κατὰ πρῶτον παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν φέρωμεν διὰ τῆς κορυφῆς Ο καὶ ἄλλο ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν, τοῦτο μετὰ τῶν δύο ἄλλων παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς πυραμίδος καὶ τὸ ὕψος εἰς μέρη ἀνάλογα. Διότι κατὰ τὸ Θ. 31 εἶναι $\frac{Oα}{αA} = \frac{Oβ}{βB}$ καὶ $\frac{Oβ}{βB} = \frac{Oγ}{γΓ}$ κ.ο.κ. Ἔπειτα παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον Οαβ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΟΑΒ καὶ τὸ Οβγ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΟΒΓ κ.ο.κ. Ἐκ τῶν ὁμοίων δὲ τούτων τριγώνων συνάγεται, ὅτι



$$\frac{Oα}{OA} = \frac{αβ}{AB} = \frac{Oβ}{OB} \quad καὶ \quad \frac{Oβ}{OB} = \frac{βγ}{BΓ} = \frac{Oγ}{OΓ}$$

$$καὶ \quad \frac{Oγ}{OΓ} = \frac{γδ}{ΓΔ} = \frac{Oδ}{OΔ} \quad κ.ο.κ.$$

Ἑπομένως εἶναι καὶ $\frac{αβ}{AB} = \frac{βγ}{BΓ} = \frac{γδ}{ΓΔ} = \frac{δε}{ΔE} = \frac{εα}{EA}$.

Ὥστε τὰ πολύγωνα αβγδε καὶ ΑΒΓΔΕ ἔχουν τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους· ἐπειδὴ δὲ ἔχουν καὶ γωνΑ = γωνα, γωνΒ = γωνβ κτλ. (Θ. 317), ἕπεται, ὅτι τὰ πολύγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται τὸ θεώρημα:

Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν αὐτῆς, αἱ πλευραὶ τῆς πυραμίδος καὶ τὸ ὕψος τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα καὶ ἡ τομὴ εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν βάσιν.

Σημείωσις α'. Τὰ τρίγωνα ΟΑΚ καὶ Οακ εἶναι ὅμοια. Ἔπεται λοιπόν, ὅτι $\frac{Oα}{OA} = \frac{Oκ}{OK} = \frac{ακ}{AK}$.

Ἐπειδὴ δὲ εἴδομεν, ὅτι εἶναι καὶ $\frac{O\alpha}{OA}=\frac{\alpha\beta}{AB}$, ἕπεται πάλιν ὅτι $\frac{\alpha\beta}{AB}=\frac{O\kappa}{OK}$.

Σημείωσις β΄. Καὶ πᾶσα εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς εἰς τὴν βάσιν, τέμνεται εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

360. Ἀνωτέρω εἴδομεν, ὅτι τὰ πολύγωνα αβγδε καὶ ΑΒΓΔΕ εἶναι ὅμοια. Ἑπομένως εἶναι

$$\frac{(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)}{(AB\Gamma\Delta E)}=\frac{(\alpha\beta)^2}{(AB)^2} \quad (\S\ 259)$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι

$$\frac{\alpha\beta}{AB}=\frac{O\kappa}{OK},$$

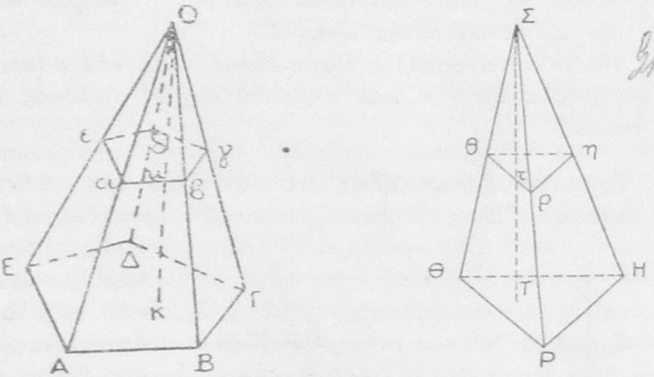
ἕπεται, ὅτι

$$\frac{(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)}{(AB\Gamma\Delta E)}=\frac{(O\kappa)^2}{(OK)^2}.$$

Ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἰσότητος συνάγομεν, ὅτι:

Παράλληλοι τομαὶ πυραμίδος ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων αὐτῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς.

361. Ἤδη ἔστωσαν δύο πυραμίδες ἰσοϋψεῖς, αἱ ΟΑΒΓΔΕ καὶ



ΣΡΗΘ, ἔχουσαι ὕψη τὰ ΟΚ καὶ ΣΤ καὶ τομαὶ αὐτῶν, παράλληλοι πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τῶν κορυφῶν, αἱ αβγδε καὶ ρηθ. Ἀλλά, κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν, εἶναι

$$\frac{(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)}{(AB\Gamma\Delta E)}=\frac{(O\kappa)^2}{(OK)^2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{(\rho\eta\theta)}{(P H\Theta)}=\frac{(\Sigma\tau)^2}{(\Sigma T)^2},$$

ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη ΣΤ = ΟΚ και Στ = Οκ, ἕπεται ἡ ἰσότης

$$\frac{(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)}{(AB\Gamma\Delta E)}=\frac{(\rho\eta\theta)}{(PH\Theta)} \qquad (1)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται τὸ θεώρημα: ***Ἐὰν δύο πυραμίδες ἰσοϋψεῖς τμηθοῦν ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν καὶ τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τῶν κορυφῶν, αἱ τομαὶ θὰ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς βάσεις.***

362. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος (1), ἐὰν ὑποτεθῇ (ΑΒΓΔΕ) = (ΡΗΘ), ἕπεται, ὅτι καὶ (αβγδε) = (ρηθ).

Ὥστε: ***Ἐὰν δύο πυραμίδες ἔχουν ἴσα ὕψη καὶ βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους, αἱ τομαὶ αὐτῶν, αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τῶν κορυφῶν, θὰ εἶναι ἐπίσης ἴσαι ἢ ἰσοδύναμοι.***

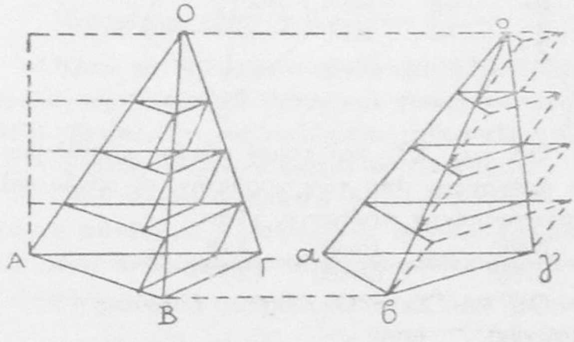
Ἀσκήσεις.

305) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἕδραι τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα.

306) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος μὲ βάσιν ἑξάγωνον πλευρᾶς 8 μέτρων καὶ ὅταν τὸ ὕψος ἑνὸς τῶν τριγώνων αὐτῆς εἶναι 10 μ.

307) Δύο τομαὶ πυραμίδος παράλληλοι πρὸς τὰς βάσεις ἀπέχουν ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτῆς 4 μ. καὶ 3 μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν.

363. Τριγωνικαὶ πυραμίδες μὲ ὕψη ἴσα καὶ βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους.—Ἔστωσαν δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες αἱ ΟΑΒΓ καὶ οαβγ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς βάσεις των ΑΒΓ καὶ αβγ ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα. Θέλομεν δὲ νὰ ἐξετάσωμεν, ἂν αὗται εἶναι ἴσαι κατὰ τὸν ὄγκον ἢ ἄνισοι. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Θέτομεν τὰς βάσεις τῶν δύο πυραμίδων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ ὕψος τῆς



μιᾶς εἰς ἴσα μέρη, π.χ. εἰς τέσσαρα. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως φέρωμεν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν βάσεων, αἱ ἀντίστοιχοι τομαὶ τῶν πυραμίδων ὑπὸ ἑκάστου ἐπιπέδου εἶναι ἰσοδύναμοι (§ 362). Κατόπιν εἰς ἕκαστον τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα διῃρέθησαν αἱ πυραμίδες ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, κατασκευάζομεν τριγωνικὰ πρίσματα μὲ βάσεις τὰς ἄνω βάσεις ἑκάστου τμήματος καὶ μὲ ὕψος τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ τῶν δύο βάσεων, ἡ ὁποία εἶναι ἴση εἰς ὅλα τὰ τμήματα, καὶ τὸ ὁποῖον παριστῶμεν διὰ τοῦ υ. Ἀλλὰ τότε τὰ πρίσματα μὲ βάσεις ἰσοδυνάμους εἶναι ἰσοδύναμα. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τριῶν πρισμάτων τῆς μιᾶς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τριῶν πρισμάτων τῆς ἄλλης. Φανερὸν δὲ εἶναι, ὅτι ἓν ἕκαστον τῶν ἀθροισμάτων τούτων εἶναι μικρότερον τοῦ ὄγκου καὶ τῆς μιᾶς καὶ τῆς ἄλλης πυραμίδος.

Ὁμοίως, ἐὰν κατασκευάσωμεν πρίσματα μὲ βάσεις τὰς κάτω βάσεις τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα διῃρέθησαν αἱ δοθεῖσαι πυραμίδες, καὶ μὲ ὕψος υ, πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τεσσάρων πρισμάτων τῆς μιᾶς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τεσσάρων πρισμάτων τῆς ἄλλης. Εἶναι δὲ προφανῶς ἑκάτερον τούτων, μεγαλύτερον τοῦ ὄγκου καὶ τῆς μιᾶς καὶ τῆς ἄλλης πυραμίδος. Ἀλλ' ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ ὄγκοι τῶν δύο πυραμίδων περιέχονται μεταξὺ τῶν ἀθροισμάτων τῶν τεσσάρων πρισμάτων καὶ τῶν τριῶν. Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ τῶν ἀθροισμάτων τούτων εἶναι (ΑΒΓ).υ, ἕπεται, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ὄγκων τῶν πυραμίδων (ἐὰν ὑπάρχῃ) εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς (ΑΒΓ).υ. Ἀλλ' ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ὕψος τῶν πυραμίδων εἰς 8, 16, 32, 64 κτλ. ἴσα μέρη, τὸ υ θὰ γίνεται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον μικρότερον, ἐνῷ τὸ (ΑΒΓ) μένει σταθερόν. Ἑπομένως ἡ διαφορὰ (ΑΒΓ). υ γίνεται διαρκῶς μικροτέρα, δύναται δὲ νὰ γίνῃ αὕτη μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, ὅταν τὸ υ γίνῃ ὅσον πρέπει μικρόν. Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ υ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ἡ διαφορὰ (ΑΒΓ).υ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, τοῦτο δὲ σημαίνει, ὅτι οἱ ὄγκοι τῶν δύο πυραμίδων οὐδεμίαν δύνανται νὰ ἔχουν διαφοράν, ἤτοι εἶναι ἴσοι. Ὥστε αἱ πυραμίδες αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν συνάγομεν τὸ θεώρημα:

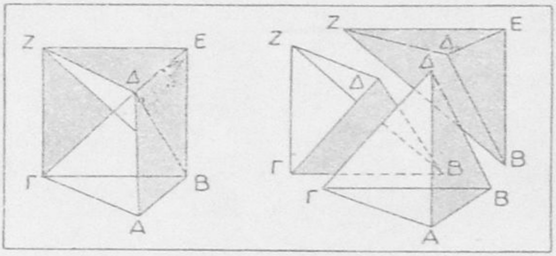
Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες, ἔχουσαι βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἀσκήσεις.

308) Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν κορυφῶν ἰσοδυνάμων πυραμίδων ἐχουσῶν τὴν αὐτὴν βάσιν ;

309) Νὰ διαιρεθῇ τετράεδρον εἰς τρία, τέσσαρα καὶ γενικῶς εἰς ν τετράεδρα ἰσοδύναμα, δι' ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς.

364. Ὄγκος τριγωνικῆς πυραμίδος.—Ἡ εὕρεσις τοῦ ὄγκου τριγωνικῆς πυραμίδος, ὡς τῆς ΔΑΒΓ, ἀνάγεται εἰς τὴν μέτρησιν ὄγκου πρίσματος. Διότι, ἐὰν κατασκευάσωμεν πρῖσμα μὲ βάσιν τὴν ΑΒΓ καὶ μὲ πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΔ, ἤτοι μὲ ὕψος ἴσον μὲ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος, παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :



Τὸ κατασκευασθὲν πρῖσμα ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα καὶ ἀπὸ τὴν πυραμίδα ΔΒΓΕΖ, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓΕΖ καὶ κορυφὴν τὸ Δ. Ἀλλ' ἐὰν φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον ΔΒΖ, διαιρεῖται ἡ τελευταία πυραμὶς εἰς τὰς τριγωνικὰς πυραμίδας ΔΒΓΖ καὶ ΔΒΖΕ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἀλλ' ἐξ αὐτῶν ἡ ΔΒΖΕ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ΔΑΒΓ· διότι ἂν ληφθοῦν ὡς βάσεις αὐτῶν τὰ ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Δ, Β, καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσα. Αἱ τρεῖς λοιπὸν πυραμίδες ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται τὸ κατασκευασθὲν πρῖσμα, εἶναι ἰσοδύναμοι· ἄρα ἡ δοθεῖσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος αὐτοῦ, ὅπερ ἔχει ὄγκον (ΑΒΓ).υ. Ὥστε ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ΔΑΒΓ εἶναι $\frac{1}{3}$ (ΑΒΓ).υ.

Ἐκ τούτου λοιπὸν ἕπεται τὸ θεώρημα :

Ὁ ὄγκος πάσης τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος της.

365. Ὄγκος οἱασδήποτε πυραμίδος.—Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τῆς τυχούσης πολυγωνικῆς πυραμίδος, θὰ ἐργασθῶμεν ὅπως καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ὄγκου τοῦ πολυγωνικοῦ πρίσματος (§ 355, β), ὁπότε συνάγομεν τὸ θεώρημα :

Ὁ ὄγκος πάσης πυραμίδος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος της.

366. Πόρισμα 1ον. *Πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.*

367. Πόρισμα 2ον. *Αἱ πυραμίδες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἴσα ὕψη, ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεών των. Ἐὰν δὲ ἔχουν ἴσας βάσεις ἢ ἰσοδυνάμους, ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν των.*

Ἀσκήσεις.

310) Πυραμίς τις ἔχει βάσιν τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ εἶναι 6,2 μ., τὸ δὲ ὕψος της εἶναι 12,5 μ. Ζητεῖται ὁ ὄγκος αὐτῆς.

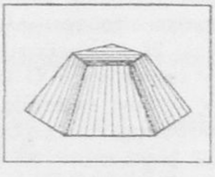
311) Κανονική τις πυραμὶς ἔχει βάσιν ἑξάγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ εἶναι 3,2 μ., ἑκάστη δὲ τῶν εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς συντρεχουσῶν ἀκμῶν εἶναι 8 μ. Ζητεῖται ὁ ὄγκος αὐτῆς.

312) Τριγωνικῆς πυραμίδος τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι 6 τ.μ. καὶ ὁ ὄγκος εἶναι 25 κ. μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος της.

313) Ὁ ὄγκος κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς α ἰσοῦται μὲ $\frac{\sqrt{2}}{12}\alpha^3$. *Καὶ μὲ τί ἰσοῦται τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς του ἐπιφανείας; Ἐφαρμογὴ ὅταν εἶναι α=3 μ., 4 μ., 2,5 μ.*

ΠΕΡΙ ΚΟΛΟΥΡΟΥ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

368. Ὁρισμοί.—Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν αὐτῆς, τὸ μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἐπιπέδου περιεχόμενον μέρος αὐτῆς λέγεται **κόλουρος πυραμίς.**

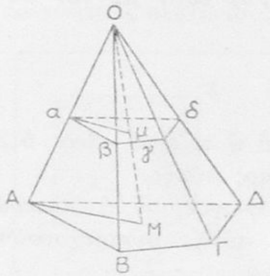


Βάσεις τῆς κολούρου πυραμίδος λέγονται αἱ παράλληλοι ἕδραι αὐτῆς, **ὕψος** δὲ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον κολούρου πυραμίδος, ὡς τῆς ΑΒΓΔαβγδ (σελὶς 186), παρατηροῦμεν, ὅτι οὗτος εἶναι διαφορὰ τοῦ ὄγκου τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓΔ, ἐκ τῆς ὁποίας προέκυψεν ἡ δοθεῖσα κόλουρος, καὶ τῆς πυραμίδος Οαβγδ. Ἀλλ' ἐὰν παραστήσωμεν τὰ ἐμβαδὰ τῆς κάτω καὶ ἄνω βάσεως ἀντιστοίχως διὰ Β καὶ β, τὰ ὕψη ΟΜ καὶ

Ομ διὰ χ καὶ ψ καὶ τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος χ—ψ διὰ υ, θὰ ἔχωμεν:

Κόλουρος πυραμὶς ΑΒΓΔαβγδ$=\frac{1}{3}$ Β.χ$-\frac{1}{3}$ β.ψ$=\frac{1}{3}$ (Βχ—βψ).

Ἀλλ' ἔχομεν $\frac{B}{\beta}=\frac{\chi^2}{\psi^2}$ ἢ $\frac{B}{\chi^2}=\frac{\beta}{\psi^2}=\lambda$· ἐκ τῆς τελευταίας δὲ ταύτης λαμβάνομεν $B=\lambda\chi^2$ καὶ $\beta=\lambda\psi^2$. Ἔχομεν ἄρα: κόλουρος πυραμὶς ΑΒΓΔαβγδ $=\frac{1}{3}(\lambda\chi^2.\chi-\lambda\psi^2.\psi)=\frac{1}{3}(\lambda\chi^3-\lambda\psi^3)$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\chi^3-\psi^3=(\chi-\psi)(\chi^2+\chi\psi+\psi^2)$ (ἰδὲ Ἄλγεβραν ἄσκ. 55/70), λαμβάνομεν τελικῶς: κόλουρος πυραμὶς ΑΒΓΔαβγδ $=\frac{1}{3}(\chi-\psi)$ $(\lambda\chi^2+\lambda\chi\psi+\lambda\psi^2)=\frac{1}{3}\,\upsilon\,(B+\sqrt{B\beta}+\beta)$.



Ὅθεν συνάγομεν, ὅτι ***πᾶσα κόλουρος πυραμὶς εἶναι ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, αἵτινες ἔχουν ὕψος μὲν κοινόν, τὸ ὕψος τῆς κολούρου, βάσεις δὲ ἡ μέν, τὴν μίαν βάσιν τῆς κολούρου, ἡ δέ, τὴν ἄλλην, ἡ δέ, τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο τούτων βάσεων.***

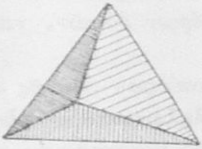
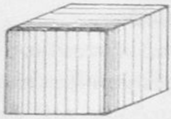
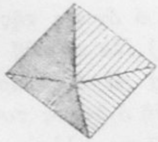
Σημείωσις α'. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ρ τὸν λόγον δύο ὁμολόγων πλευρῶν τῶν βάσεων Β καὶ β, θὰ εἶναι $\beta=B\rho^2$. Ἄρα

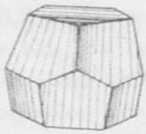
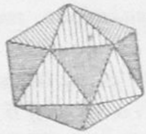
$$\sqrt{B\beta}=\sqrt{B.B\rho^2}=B\rho.$$

Ὅθεν ὁ ὄγκος γίνεται $\frac{1}{3}\upsilon.(B+B\rho+B\rho^2)$, ἤτοι $\frac{1}{3}$ Βυ. $(1+\rho+\rho^2)$.

Σημείωσις β'. Ἐὰν ἔχωμεν οἱονδήποτε πολύεδρον καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον αὐτοῦ, θὰ τὸ ἀναλύσωμεν εἰς πυραμίδας. Πρὸς τοῦτο δὲ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ο ἐντὸς αὐτοῦ καὶ ἐκ τοῦ σημείου τούτου φέρομεν πρὸς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυέδρου εὐθείας. Οὕτω δὲ διαιρεῖται τὸ πολύεδρον εἰς πυραμίδας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ Ο καὶ βάσεις τὰς ἕδρας τοῦ στερεοῦ. Ἐὰν δὲ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑκάστης πυραμίδος καὶ προσθέσωμεν αὐτούς, θὰ ἔχωμεν τὸν ὄγκον τοῦ πολυέδρου.

Σημείωσις γ'. Ὑπάρχουν πολύεδρα, τῶν ὁποίων αἱ ἕδραι εἶναι ἴσαι μεταξύ των κανονικὰ πολύγωνα, ὡς καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι των ἴσαι ἐπίσης μεταξύ των. Λέγονται δὲ ταῦτα κανονικὰ καὶ εἶναι μόνον πέντε, τὰ ἑξῆς: Τετράεδρον, ὀκτάεδρον, εἰκοσάεδρον ἐκ τριγώνων, ἑξάεδρον ἐκ τετραγώνων καὶ δωδεκάεδρον ἐκ πενταγώνων (σελ. 185).

Ἀσκήσεις.

314) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ παράπλευροι ἕδραι κολούρου πυραμίδος, ἡ ὁποία προέκυψεν ἐκ κανονικῆς πυραμίδος (κανονικὴ κόλουρος πυραμίς), εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τραπέζια.

315) Κανονικῆς πυραμίδος ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 8 μ., τὸ δὲ ὕψος εἶναι 6 μ. Ἐπίπεδον δὲ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ ὕψους. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κολούρου πυραμίδος, ἡ ὁποία προέκυψεν ἐκ τῆς τομῆς αὐτῆς, ὡς καὶ ὁ ὄγκος τῆς ἰδίας κολούρου πυραμίδος.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ ΣΤ' Βιβλίου.

316) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν αἱ διαγώνιοι παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι, τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθογώνιον.

317) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων διαγωνίων παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν 12 ἀκμῶν αὐτοῦ.

318) Ἐπὶ πλευρᾶς τινος δοθείσης πυραμίδος νὰ εὑρεθῇ σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε τὸ δι' αὐτοῦ διερχόμενον παράλληλον ἐπίπεδον πρὸς τὴν βάσιν νὰ δίδῃ τομὴν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως.

319) Πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς α μ. Ἐὰν δὲ λ μ. εἶναι τὸ μῆκος μιᾶς τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν, νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος καὶ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος.

320) Πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς α μ. Ἐὰν δὲ Β τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν, νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος καὶ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος.

321) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κανονικοῦ ὀκταέδρου ἀκμῆς α.

322) Αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι α, β, γ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ὀκταέδρου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου.

323) Τὸ ὕψος κολούρου πυραμίδος εἶναι 3,6 μ., τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεγαλυτέρας βάσεως αὐτῆς εἶναι 24 τ.μ. καὶ μία τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτῆς εἶναι 3,85 μ., ἡ δὲ πρὸς αὐτὴν ὁμόλογος πλευρὰ τῆς ἄλλης βάσεως εἶναι 2,2 μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς κολούρου ταύτης πυραμίδος.

324) Ἡ βάσις κανονικῆς πυραμίδος εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς α, ἡ δὲ παράπλευρος ἀκμὴ εἶναι λ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος καὶ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος.

325) Αἱ τρεῖς ἀκμαὶ τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας κύβου α διχοτομοῦνται ὑπὸ ἐπιπέδου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ οὕτω σχηματιζομένου τετραέδρου.

326) Αἱ βάσεις κολούρου πυραμίδος εἶναι Β καὶ β. Νὰ εὑρεθῇ ἐξ αὐτῶν τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς, ἥτις εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτὰς καὶ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπ' αὐτῶν.

327) Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου ΑΒΓΔ, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον ἑκάστης τούτων.

328) Εἰς τετράεδρον ΑΒΓΔ τὰ ἓξ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ μιᾶς ἀκμῆς καὶ τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

329) Αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς κορυφὰς τετραέδρου ΑΒΓΔ μὲ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν διαμέσων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ διαιροῦνται ὑπ' αὐτοῦ εἰς δύο μέρη, τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄλλου.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

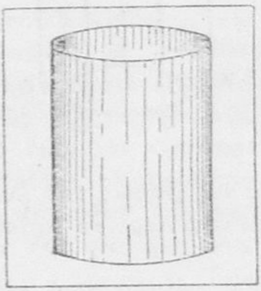
ΣΤΕΡΕΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

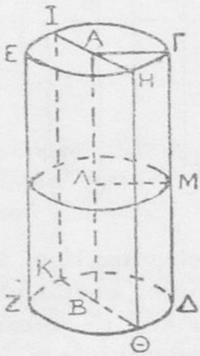
ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ, ΚΩΝΟΣ, ΣΦΑΙΡΑ

Α΄. ΠΕΡΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

369. Ὁρισμοί.— Ἐὰν περιστρέψωμεν ὀρθογώνιον περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (ἡ ὁποία μένει ἀκίνητος) πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν ἐκ τῆς ὁποίας ἤρχισε νὰ στρέφεται, θὰ λάβωμεν στερεόν, τὸ ὁποῖον λέγεται **κύλινδρος**.

Ἔστω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ, μέχρις





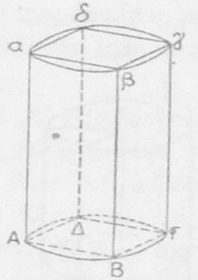
οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του. Κατὰ τὴν περιστροφὴν ταύτην αἱ πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΔ γράφουν κύκλους, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν ΑΒ, τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ γράφουν τὰς περιφερείας τῶν κύκλων τούτων, ἡ δὲ πλευρὰ ΓΔ γράφει ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία λέγεται **κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου**, ἐνῷ ἡ ΓΔ λέγεται **γενέτειρα.**

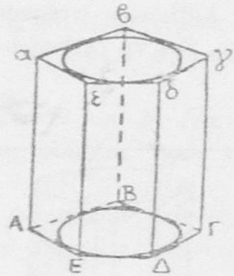
Βάσεις τοῦ κυλίνδρου λέγονται οἱ δύο κύκλοι, τοὺς ὁποίους γράφουν αἱ πλευραὶ ΑΓ, ΒΔ τοῦ ὀρθογωνίου.

Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἢ **ὕψος** αὐτοῦ λέγεται ἡ πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου, ἡ ὁποία μένει ἀκίνητος.

370. Τομαὶ κυλίνδρου.—Ἐὰν φέρωμεν ἐπίπεδον διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου, εὐκόλως φαίνεται, ὅτι ἡ τομή, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν, ὡς ἡ ΙΚΘΗ, εἶναι ὀρθογώνιον διπλάσιον τοῦ ΑΒΓΔ. Ἐὰν δὲ φέρωμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἡ τομὴ εἶναι κύκλος ἴσος μὲ τὰς βάσεις. Διότι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὸν ἄξονα ΑΒ καὶ τὴν γενέτειραν ΓΔ κατὰ εὐθεῖαν ΛΜ κάθετον καὶ εἰς τὰς δύο. Ἑπομένως κατὰ τὴν περιστροφὴν ἡ ΛΜ θὰ γράψῃ κύκλον, ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι ἡ ἰδία τομή, διότι τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα.

371. Ἐγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα ὀρθὰ πρίσματα.—Ὀρθὸν πρῖσμα λέγεται **ἐγγεγραμμένον** εἰς κύλινδρον, ἐὰν αἱ βά-





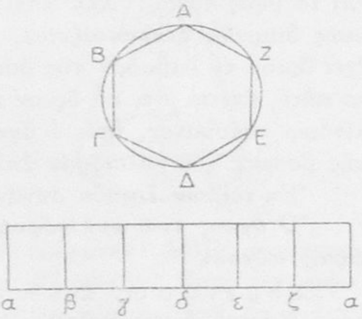
σεις τοῦ πρίσματος εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Ὁ δὲ κύλινδρος λέγεται τότε **περιγεγραμμένος** περὶ τὸ πρῖσμα. Τοιοῦτον εἶναι π.χ. τὸ πρῖσμα ΑΒΓΔαβγδ.

Περιγεγραμμένον δὲ λέγεται τὸ ὀρθὸν πρῖσμα περὶ τὸν κύλινδρον, ἐὰν αἱ βάσεις τοῦ πρίσματος εἶναι περιγεγραμμέναι περὶ τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου, ὁ δὲ κύλινδρος λέγεται τότε **ἐγγεγραμμένος** εἰς τὸ πρῖσμα, ὅπως π.χ. εἶναι τὸ πρῖσμα ΑΒΓΔΕαβγδε.

372. Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου.—Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κυλίνδρου, ἐπειδὴ δὲν εἶναι ἐπίπεδος, εἶναι φανερόν, ὅτι δὲν δύναται νὰ μετρηθῇ, διότι ἡ μονὰς μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι ἐπιφάνεια ἐπίπεδος, ἡ δὲ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου δὲν δύναται νὰ ἀναπτυχθῇ ἐπὶ ἐπιπέδου. Δι' ὃ τὴν μέτρησιν αὐτῆς θὰ τὴν ἀναγάγωμεν εἰς τὴν μέτρησιν ἐπιπέδου ἐπιφανείας διὰ τοῦ κάτωθι ὁρισμοῦ τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτῆς.

Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου λέγεται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος διαρκῶς διπλασιάζεται.

373. Κατόπιν τούτων, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, ἐγγράφομεν πρῶτον εἰς τοῦτον ὀρθὸν πρῖσμα μὲ βάσιν κανονικὸν πολύγωνον. Ἀλλ' ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἔχει ἐμβαδὸν τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του, ἤτοι ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου. Ἀλλ' ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως διαρκῶς διπλασιάζεται, ἡ περίμετρος τῆς βάσεως ἔχει ὅριον τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, ἐνῷ τὸ ὕψος μένει σταθερόν. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος ἔχει ὅριον τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. Ἀλλὰ τὸ ὅριον τοῦτο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. Ἐκ τούτων λοιπὸν ἕπεται τὸ θεώρημα :



Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου εἶναι γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Σημείωσις. Ἐὰν παρασταθῇ διὰ τοῦ Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, τὸ μῆκος τῆς περιφερείας θὰ εἶναι 2πΑ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου θὰ εἶναι 2πΑ.υ.

Ἀσκήσεις.

330) Κυλίνδρου τινὸς ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 4,5 μ., τὸ δὲ ὕψος 1,8 μ. Πόση εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ;

331) Αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι δύο κυλίνδρων ἐχόντων ἴσας βάσεις εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν, ἐὰν δὲ ἔχουν ἴσα ὕψη, εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων.

332) Ποῖον εἶναι τὸ σχῆμα τῆς τομῆς κυλίνδρου δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ;

374. Ὄγκος κυλίνδρου. Ὁρισμός.—***Ὄγκος τοῦ κυλίνδρου λέγεται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος πρίσματος ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως διαρκῶς διπλασιάζεται.***

375. Κατόπιν τούτων, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου, θὰ ἐγγράψωμεν εἰς αὐτὸν ὀρθὸν πρῖσμα μὲ βάσιν κανονικὸν πολύγωνον. Ἀλλ' ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος αὐτοῦ εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Ἀλλ' ἐπειδή, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως διαρκῶς διπλασιάζεται, τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος ἔχει ὅριον τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, ἐνῷ τὸ ὕψος μένει τὸ αὐτό, ἕπεται ὅτι τὸ ὅριον τοῦ ὄγκου τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν τῷ κυλίνδρῳ πρίσματος, ἤτοι ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου, εἶναι τὸ γινόμενον τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἐκ τούτων λοιπὸν συνάγεται τὸ θεώρημα:

Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Σημείωσις. Ἐὰν παρασταθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου διὰ τοῦ Α, τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως θὰ εἶναι πA^2. Ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου θὰ παριστᾶται ὑπὸ τοῦ τύπου $\pi A^2.\upsilon$, ἔνθα υ σημαίνει τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις.

333) Κυλίνδρου τινὸς ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 8,4 μ., τὸ δὲ ὕψος 3,5 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ καὶ πόσος θὰ εἶναι ὁ ὄγκος του, ἐὰν μόνον ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ α ἢ μόνον τὸ ὕψος του πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ β;

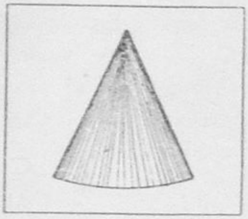
334) Πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ κυλινδρικὸν ἀγγεῖον ἐκ λευκοσιδήρου, τὸ ὁποῖον νὰ χωρῇ μίαν ὀκᾶν ὕδατος καὶ νὰ ἔχῃ ὕψος διπλάσιον τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως. Ποῖαι θὰ εἶναι αἱ διαστάσεις αὐτοῦ;

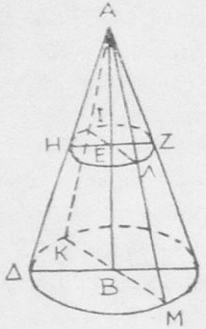
335) Κύλινδρός τις ἐκ χυτοῦ σιδήρου ἔχει μῆκος μὲν 4,12 μ., περιφέρειαν δὲ βάσεως 0,6 μ. Ζητεῖται τὸ βάρος αὐτοῦ. (Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χυτοῦ σιδήρου εἶναι 7,2 περίπου).

336) Ὁ ὄγκος κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεώς του.

Β.΄ ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΥ

376. Ὁρισμοί.—Ἐὰν περιστρέφωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον περὶ μίαν τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐκ τῆς ὁποίας ἤρχισε νὰ στρέφεται θὰ λάβωμεν στερεόν, τὸ ὁποῖον λέγεται **κῶνος.**





Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν του. Κατὰ τὴν περιστροφὴν αὐτὴν ἡ μὲν πλευρὰ ΒΓ θὰ γράψῃ κύκλον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ὅστις λέγεται **βάσις** τοῦ κώνου, ἡ δὲ πλευρὰ ΑΓ θὰ γράψῃ ἐπιφάνειαν, ἥτις λέγεται **κυρτὴ ἐπιφάνεια** τοῦ κώνου.

Ἄξων τοῦ κώνου ἢ **ὕψος** αὐτοῦ λέγεται ἡ πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ ὁποία μένει ἀκίνητος. Κορυφὴ δὲ τοῦ κώνου λέγεται τὸ σημεῖον Α.

Πλευρὰ δὲ ἢ **ἀπόστημα** τοῦ κώνου λέγεται ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐκ τοῦ ὁποίου γίνεται. Ἀποδεικνύεται δέ, ὡς ἀπεδείχθη καὶ εἰς τὸν κύλινδρον, ὅτι πᾶσα τομὴ κώνου κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ εἶναι κύκλος, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. Πᾶσα δὲ τομὴ τοῦ κώνου ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, ὡς εἶναι ἡ ΑΜΚ, εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον διπλάσιον τοῦ ΑΒΓ, ὅπως εὐκόλως φαίνεται.

Ἐγγεγραμμένη λέγεται πυραμὶς εἰς κῶνον, ἐὰν ἔχουν ἀμφότερα τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου.

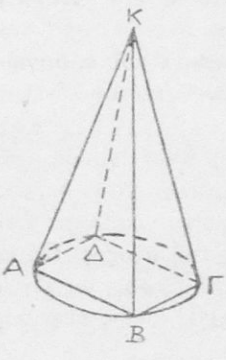
Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς εἰς κῶνον ἐγγεγραμμένης πυραμίδος κεῖνται προφανῶς ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, ἡ δὲ πυραμὶς κεῖται ἐντὸς τοῦ κώνου

Περιγεγραμμένη δὲ λέγεται ἡ πυραμὶς περὶ κῶνον, ἐὰν ἀμφότερα ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι περιγεγραμμένη περὶ τὴν βάσιν τοῦ κώνου.

Ἑκάστη τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τῆς περιγεγραμμένης περὶ κῶνον πυραμίδος, ἐγγίζει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου κατὰ μίαν εὐθεῖαν· διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ βάσις τῆς ἕδρας ἐγγίζει τὴν βάσιν τοῦ κώνου, φέρωμεν εὐθεῖαν εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου, ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ἕδρας καὶ ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου Αἱ δύο δὲ αὗται ἐπιφάνειαι οὐδὲν ἄλλο ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ὁ κῶνος κεῖται ὅλος ἐντὸς τῆς πυραμίδος.

377. Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου. Ὁρισμός.— ***Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου λέγεται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτῆς διαρκῶς διπλασιάζεται.***

378. Κατόπιν τούτων διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας δοθέντος κώνου Κ, ἐγγράφομεν εἰς αὐτὸν τὴν κανονικὴν πυραμίδα ΚΑΒΓΔ, ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς ὁποίας ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ τρίγωνα ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΑ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς βάσεις αὐτῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ ΔΑ ἴσας μεταξύ των, ὡς καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ΚΑ, ΚΒ ΚΓ καὶ ΚΔ, ἐπειδὴ εἶναι πλευραὶ τοῦ αὐτοῦ κώνου. Ἔχουν ἑπομένως καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν ἴσα. Τὸ ἐμβαδὸν ἄρα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος ταύτης εἶναι γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως αὐτῆς ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ἑνὸς τῶν τριγώνων τούτων· ἀλλ' ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως διαρκῶς διπλασιάζεται, ἡ περίμετρος ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ ἔχει ὅριον τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως, τὸ δὲ ὕψος ἔχει ὅριον τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου, τὸ δὲ ὅριον τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς ἐγγεγραμμένης ταύτης



πυραμίδος, κατὰ τὸν ὁρισμόν, εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. Εἶναι ἄρα τοῦτο τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται τὸ θεώρημα:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου εἶναι γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

Σημείωσις. Ἐὰν παρασταθῇ ἡ μὲν ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου διὰ τοῦ Α, ἡ δὲ πλευρὰ αὐτοῦ διὰ τοῦ λ, τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ εἶναι $\frac{1}{2}$ λ.2πΑ, ἤτοι π.Α.λ, καὶ ἐπειδὴ $\lambda = \sqrt{A^2 + \upsilon^2}$, τὸ ἐμβαδὸν τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας παριστᾶται καὶ ὑπὸ τοῦ τύπου π.Α. $\sqrt{A^2+\upsilon^2}$.

Ἀσκήσεις.

337) Κώνου τινὸς ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 6,5 μ., τὸ δὲ ὕψος 12 μ. Πόση εἶναι ἡ κυρτὴ αὐτοῦ ἐπιφάνεια;

338) Κώνου τινὸς ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 8 μ., ἡ δὲ πλευρὰ 24,8 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

339) Τετράγωνον πλευρᾶς α στρέφεται περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανειας τῆς γραφομένης ὑπὸ μιᾶς τῶν διαγωνίων του.

379. Ὄγκος τοῦ κώνου. Ὁρισμός.— ***Ὄγκος τοῦ κώνου καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος κανονικῆς πυραμίδος ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτῆς διαρκῶς διπλασιάζεται.***

380. Ὥστε διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ δοθέντος κώνου, ἐγγράφομεν εἰς τοῦτον κανονικὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας γνωρίζομεν, ὅτι ὁ ὄγκος εἶναι τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους της· ἀλλ' ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτῆς διαρκῶς διπλασιάζεται, τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ταύτης ἔχει ὅριον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, ἐνῶ τὸ ὕψος μένει τὸ αὐτό, ὁ δὲ ὄγκος τῆς πυραμίδος ἔχει ὅριον, κατὰ τὸν ὁρισμόν, τὸν ὄγκον τοῦ κώνου. Εἶναι ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ κώνου γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους του.

Ἐκ τούτων λοιπὸν ἕπεται τὸ θεώρημα:

Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους του.

Σημείωσις. Ἐὰν παρασταθῇ διὰ τοῦ Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου καὶ διὰ τοῦ υ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ὁ ὄγκος αὐτοῦ παριστᾶται ὑπὸ τοῦ τύπου $\frac{1}{3}$ π Α².υ.

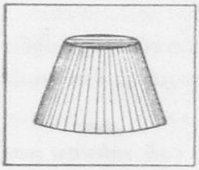
Ἀσκήσεις.

340) Κώνου τινὸς ἡ μὲν διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 2,8 μ., ἡ δὲ πλευρὰ 3,64 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

341) Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κώνου εἶναι 2,50 μ., ὁ δὲ ὄγκος αὐτοῦ 80 κ.μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου.

342) Ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗ αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι 3 μ., καὶ 4 μ., στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς δύο ταύτας καθέτους πλευράς. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν σχηματιζομένων στερεῶν.

381. **Κόλουρος κῶνος.**—Ἐὰν κῶνος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ, ἤτοι καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα, τὸ μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς βάσεως μέρος τοῦ κώνου λέγεται **κόλουρος κῶνος.** Τοιοῦτο εἶναι τὸ στερεὸν ΗΖΔΓ (σχ. σελίδος 193).



Βάσεις τοῦ κολούρου κώνου λέγονται οἱ δύο κύκλοι, ὑφ᾽ ὧν περατοῦται.

Ἄξων δὲ αὐτοῦ ἢ **ὕψος** λέγεται ἡ τὰ κέντρα τῶν βάσεων ἑνοῦσα εὐθεῖα.

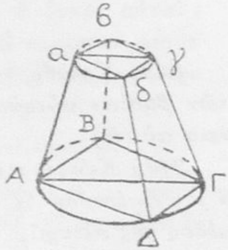
Πλευρὰ δὲ αὐτοῦ λέγεται τὸ μέρος τῆς πλευρᾶς τοῦ ὅλου κώνου, τὸ μεταξὺ τῶν δύο βάσεων περιεχόμενον. Οὕτως εἰς τὸ στερεὸν ΗΖΔΓ βάσεις μὲν εἶναι οἱ κύκλοι ΗΖ καὶ ΔΓ, ἄξων ἡ εὐθεῖα ΕΒ καὶ πλευρὰ ἡ ΓΖ.

Κόλουρος πυραμὶς λέγεται ἐγγεγραμμένη εἰς κόλουρον κῶνον, ὅταν αἱ βάσεις αὐτῆς εἶναι ἐγγεγραμμέναι ἀντιστοίχως εἰς τὰς βάσεις τοῦ κολούρου κώνου. Τότε αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς κολούρου αὐτῆς πυραμίδος κεῖνται ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, ἡ δὲ κόλουρος πυραμὶς κεῖται ἐντὸς τοῦ κολούρου κώνου.

382. **Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου.**—***Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου λέγεται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς κολούρου πυραμίδος ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κό-***

λουρον κῶνον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεών της διαρκῶς διπλασιάζεται.

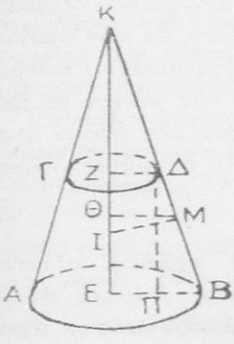
383. Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου ΑΓαγ, ἐγγράφομεν εἰς τοῦτον τὴν κανονικὴν κόλουρον πυραμίδα ΑΒΓΔαβγδ, τῆς ὁποίας αἱ βάσεις εἶναι κανονικὰ πολύγωνα μὲ ἴσον ἀριθμὸν πλευρῶν.



Ἀλλ' ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια αὐτῆς ἀποτελεῖται ἀπὸ ἴσα ἰσοσκελῆ τραπέζια (ἄσκ. 314). Ἑπομένως τὸ ἐμβαδόν της εἶναι τὸ ἡμιάθροισμα τῶν περιμέτρων τῶν βάσεών της ἐπὶ τὸ ὕψος ἑνὸς τῶν ἴσων τραπεζίων. Ἀλλ' ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεών της διαρκῶς διπλασιάζεται, αἱ περίμετροι αὐτῶν ἔχουν ὅριον τὰς περιφερείας τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου, τὸ ὕψος τῶν ἴσων τραπεζίων ἔχει ὅριον τὴν πλευρὰν τοῦ κολούρου κώνου, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς ἐγγεγραμμένης κολούρου πυραμίδος ἔχει ὅριον τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου.

Ἐκ τούτων λοιπὸν ἕπεται τὸ θεώρημα:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεών του ἐπὶ τὴν πλευράν του.



Κατὰ ταῦτα λοιπόν, ἐὰν διὰ τοῦ Ε παραστήσωμεν τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν, διὰ τῶν Α καὶ α τὰς ἀκτῖνας τῶν δύο βάσεων καὶ διὰ λ τὴν πλευρὰν τοῦ κολούρου κώνου, θὰ ἔχωμεν

$$Ε = \frac{2πΑ + 2πα}{2}.λ, \text{ ἤτοι } Ε = π.(Α+α).λ.$$

Σημείωσις α΄. Ἐὰν ΘΜ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς τομῆς τῆς παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴσον ἀπεχούσης ἀπὸ αὐτάς, αὕτη εἶναι ἴση μὲ $\frac{Α+α}{2}$, ὁπότε εἶναι $Ε = 2π.ΘΜ.λ$.

Σημείωσις β΄. Ἐὰν ἐκ τοῦ ἄκρου Μ τῆς ὡς ἄνω ΘΜ φέρωμεν τὴν ΜΙ κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κολούρου κώνου, ἐκ δὲ τοῦ Δ τὴν ΔΠ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα, τὰ δύο τρίγωνα ΜΘΙ καὶ ΔΠΒ εἶναι ὅμοια (Θ. 232). Ὥστε ἔχομεν $\frac{ΔΠ}{ΘΜ}=\frac{ΔΒ}{ΜΙ}$, ἤτοι ΔΠ.ΜΙ = ΔΒ.ΘΜ ἢ ΕΖ.ΜΙ = ΔΒ.ΘΜ, διότι ΕΖ = ΔΠ. Ἑπομένως τὸ 2π.ΘΜ.λ γράφεται ὡς ἑξῆς: 2π.ΜΙ.ΕΖ, ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι: *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου εἶναι γινόμενον τοῦ ὕψους του ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα τὴν ἐκ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς του ὑψουμένην κάθετον ἐπ' αὐτὴν μέχρι τοῦ ἄξονος.*

Ἀσκήσεις.

343) Κολούρου τινὸς κώνου τὸ ὕψος εἶναι 0,74 μ., αἱ δὲ ἀκτῖνες τῶν βάσεων αὐτοῦ εἶναι 0,5 μ. καὶ 0,3 μ. Πόση εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ;

344) Κώνου τινὸς ἡ πλευρὰ εἶναι 10 μ. καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως 6 μ. Ἐπίπεδον δὲ ἀγόμενον παραλλήλως πρὸς τὴν βάσιν καὶ διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς τέμνει τὸν κῶνον. Πόση εἶναι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ ἀποκοπέντος κολούρου κώνου;

384. Ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου.— ***Ὄγκος κολούρου κώνου λέγεται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος κανονικῆς κολούρου πυραμίδος ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κόλουρον κῶνον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων αὐτῆς διαρκῶς διπλασιάζεται.***

Ἀλλ' ὁ ὄγκος τῆς ὡς ἄνω κολούρου πυραμίδος εἶναι ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὕψος τὸ τῆς κολούρου καὶ βάσεις, ἡ μὲν τὴν ἄνω βάσιν, ἡ δὲ τὴν κάτω βάσιν καὶ ἡ τρίτη τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο τούτων βάσεων (§ 368). Ἀλλ' ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων τῆς ἐγγεγραμμένης κολούρου πυραμίδος διαρκῶς διπλασιάζεται, ὁ ὄγκος ἑκάστης τῶν τριῶν πυραμίδων, ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἡ κόλουρος, ἔχει ὅριον τὸν ὄγκον τοῦ ἀντιστοίχου κώνου, ἤτοι ἡ μὲν τὸν κῶνον μὲ βάσιν τὴν ἄνω βάσιν, ἡ δὲ τὸν κῶνον μὲ βάσιν τὴν κάτω βάσιν καὶ ἡ τρίτη τὸν κῶνον μὲ βάσιν τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο βάσεων τοῦ κολούρου. Καὶ οἱ τρεῖς δὲ οὗτοι κῶνοι ἔχουν ὕψος τὸ τοῦ κολούρου κώνου.

Ἐκ τούτων λοιπὸν συνάγομεν τὸ θεώρημα:

Ὁ κόλουρος κῶνος εἶναι ἄθροισμα τριῶν κώνων, οἵτινες ἔχουν ὕψος μὲν κοινόν, τὸ τοῦ κολούρου κώνου, βάσεις δέ, ὁ μὲν τὴν ἄνω τούτου βάσιν, ὁ δὲ τὴν κάτω, ὁ δὲ τὴν μέσην ἀνάλογον τούτων.

Ὥστε, ἐὰν διὰ τοῦ υ παραστήσωμεν τὸ ὕψος τοῦ κολούρου κώνου καὶ δι᾿ Α καὶ α τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεών του, ὁ ὄγκος του εἶναι $O = \frac{1}{3}$ π.υ. $(A^2 + A\alpha + \alpha^2)$.

Ἀσκήσεις.

345) Κολούρου τινὸς κώνου τὸ ὕψος εἶναι 1,18 μ., αἱ δὲ ἀκτῖνες τῶν βάσεων εἶναι 0,14 μ. καὶ 0,06 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

346) Κῶνός τις ἔχει ὕψος 20 μ. Ἐὰν θέλωμεν νὰ τάμωμεν αὐτὸν εἰς δύο ἴσα τὸν ὄγκον μέρη δι᾿ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει, ἐκ ποίου σημείου τοῦ ὕψους πρέπει νὰ ἀχθῇ τὸ τέμνον ἐπίπεδον;

Γ΄. ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ

385. Ὁρισμοί.—Σφαῖρα λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον περατοῦται εἰς ἐπιφάνειαν, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἓν σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ. Τὸ σημεῖον τοῦτο λέγεται **κέντρον** τῆς σφαίρας.

Ἀκτὶς τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἐκ τοῦ κέντρου ἄγεται εἴς τι σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατοῦται ἑκατέρωθεν ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς σφαίρας, πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι, ὡσαύτως καὶ αἱ διάμετροι, ὡς διπλάσιαι τῆς ἀκτῖνος. Σφαῖραι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἴσας ἀκτῖνας ἢ ἴσας διαμέτρους, εἶναι ἴσαι.

Δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν τὴν σφαῖραν γεννωμένην ὑπὸ ἡμικυκλίου στρεφομένου περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ. Διότι πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τοῦ οὕτω γεννωμένου στερεοῦ, ὡς σημεῖα τῆς περιφερείας, θὰ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτῆς.

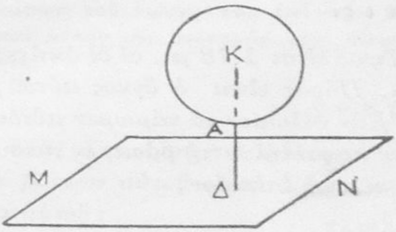
Ἐπίπεδον λέγεται **ἐφαπτόμενον** σφαίρας, ἐὰν ἔχῃ ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Εὐθεῖα δὲ λέγεται ἐφαπτομένη σφαίρας, ἐὰν ἔχῃ ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς.

Δύο σφαῖραι, λέγεται, ὅτι **ἐφάπτονται ἀλλήλων,** ἐὰν αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν ἓν μόνον ἔχουν κοινὸν σημεῖον.

ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΘΕΣΕΙΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΑΣ

386. Ἔστω ἓν ἐπίπεδον ΜΝ καὶ μία σφαῖρα μὲ κέντρον Κ. Ἐκ τοῦ Κ φέρομεν τὴν κάθετον ΚΔ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. Τότε δύναται νὰ εἶναι

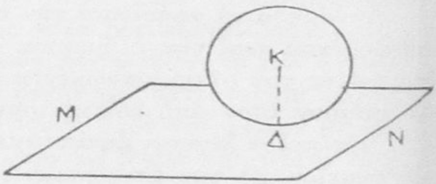
1ον. ΚΔ $>$ ΚΑ (ἀκτίς). Ἀλλὰ τότε ὁ ποὺς Δ κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας. Ἀλλὰ πλὴν τοῦ σημείου Δ καὶ ὅλα τὰ λοιπὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ κεῖνται ἐκτὸς τῆς σφαίρας. Διότι αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὡς πλάγιαι, εἶναι μεγαλύτεραι τῆς καθέτου ΚΔ. Ἑπομένως εἶναι μεγαλύτεραι καὶ τῆς ἀκτῖνος ΚΑ καὶ κατὰ συνέπειαν ***τὸ ἐπίπεδον καὶ ἡ σφαῖρα δὲν ἔχουν κανὲν κοινὸν σημεῖον.***



Ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν ἐπίπεδον καὶ σφαῖρα δὲν ἔχουν κανὲν κοινὸν σημεῖον, ***ἡ ἀπόστασις ΚΔ τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος ΚΑ.*** Διότι ὁ ποὺς Δ κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας (ἄλλως τὸ ἐπίπεδον, ὡς διερχόμενον διὰ τοῦ Δ, θὰ ἐξήρχετο ἐκ τῆς σφαίρας καὶ θὰ ἔτεμνεν αὐτήν). Ὥστε εἶναι ΚΔ $>$ ΚΑ.

2ον. ΚΔ $=$ ΚΑ. Ἀλλὰ τότε τὸ Δ εἶναι σημεῖον καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἤτοι εἶναι κοινὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καὶ τῆς σφαίρας. Ἀλλὰ τὰ λοιπὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἀπέχουν ἀπὸ τοῦ κέντρου περισσότερον τῆς ἀκτῖνος· διότι αἱ ἐκ τοῦ κέντρου εἰς αὐτὰ ἀγόμεναι εὐθεῖαι, εἶναι πλάγιαι καὶ διὰ τοῦτο μεγαλύτεραι τῆς καθέτου ΚΔ· ἄρα κεῖνται ἐκτὸς τῆς σφαίρας· ὥστε ***ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχουν, τὸ Δ,*** ὁπότε τὸ ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς σφαίρας.

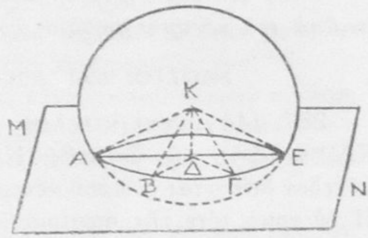
Ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν σφαῖρα καὶ ἐπίπεδον ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ***ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα.***



Διότι, ἂν ἡ σφαῖρα Κ καὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἔχουν μόνον τὸ σημεῖον Δ κοινόν, τὰ λοιπὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου κεῖνται ἐκτὸς τῆς σφαίρας καὶ διὰ τοῦτο ἀπέχουν ἀπὸ τοῦ κέντρου περισσότερον τῆς ἀκτῖνος. Ἑπομένως ἡ ΚΔ εἶναι ἡ μικροτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ Κ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· εἶναι λοιπὸν κάθετος ἐπ' αὐτὸ καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἡ ἀκτὶς ΚΔ. Ἐκ τούτων ἕπεται ἡ ἑξῆς πρότασις : ***Εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς ἐπιφα-***

νείας τῆς σφαίρας ὑπάρχει ἓν ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον αὐτῆς, καὶ ἓν μόνον.

3ον. ΚΔ < ΚΑ. Ἀλλὰ τότε τὸ σημεῖον Δ κεῖται ἐντὸς τῆς σφαίρας καὶ ἑπομένως ***τὸ δι' αὐτοῦ διερχόμενον ἐπίπεδον ΜΝ τέμνει τὴν σφαῖραν.*** Ἐὰν ἤδη φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ... εἰς διάφορα σημεῖα τῆς γραμμῆς, ἐπὶ τῆς ὁποίας περατοῦται ἡ τομή, αὗται ὡς πρὸς τὴν κάθετον ΚΔ εἶναι πλάγιαι. Ἀλλ' εἶναι ἴσαι. Ὥστε ***ἡ γραμμὴ ΑΒΓΕ, εἰς τὴν ὁποίαν περατοῦται ἡ τομή, εἶναι περιφέρεια κύκλου, τῆς ὁποίας κέντρον εἶναι τὸ Δ.***



Ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν ἐπίπεδον τέμνῃ τὴν σφαῖραν, ***τότε εἶναι ΚΔ < ΚΑ.*** Διότι ἐὰν ΚΔ > ΚΑ, τὸ ἐπίπεδον καὶ ἡ σφαῖρα δὲν θὰ εἶχον κανὲν κοινὸν σημεῖον. Ἐὰν δὲ ΚΔ = ΚΑ, τὸ ἐπίπεδον καὶ ἡ σφαῖρα θὰ εἶχον ἓν μόνον σημεῖον κοινόν. Ἀλλ' ἀμφότερα ταῦτα εἶναι ἄτοπα, διότι ὑπετέθη, ὅτι ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον ἔχουν κοινὰ σημεῖα περισσότερα τοῦ ἑνός.

Ἀνακεφαλαιοῦντες λοιπὸν τὰ ἀνωτέρω παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ σχετικαὶ θέσεις ἐπιπέδου καὶ σφαίρας εἶναι τρεῖς: Ὅταν

1ον. Ἐπίπεδον καὶ σφαῖρα δὲν ἔχουν κανὲν κοινὸν σημεῖον.

2ον. Ἐπίπεδον καὶ σφαῖρα ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ἤτοι, ὅταν ἐφάπτωνται.

3ον. Ἐπίπεδον καὶ σφαῖρα ἔχουν κοινὰ σημεῖα περισσότερα τοῦ ἑνός, ἤτοι, ὅταν τέμνωνται. Ἡ δὲ τομὴ αὐτῶν εἶναι κύκλος.

Σημείωσις. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΔΑ εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν $(ΚΑ)^2 = (ΚΔ)^2 + (ΔΑ)^2$, διὰ τῆς ὁποίας συνδέονται (εἰς ἑκάστην σφαῖραν) ἡ ἀπόστασις ΚΔ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τῆς τομῆς.

Ἀσκήσεις.

347) Ἐὰν ἐπίπεδον ἐφάπτεται σφαίρας, ἡ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς ἀγομένη ἀκτὶς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον. Καὶ τί εἶναι τῆς σφαίρας τὸ ἐπίπεδον, ὅπερ εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἄκρον ἀκτῖνος αὐτῆς;

348) Ποῖαι εἶναι αἱ σχετικαὶ θέσεις εὐθείας πρὸς σφαῖραν, ὅταν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς θεωρουμένης εὐθείας εἶναι 1ον) μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας, 2ον) ἴση καὶ 3ον) μικροτέρα αὐτῆς;

349) Ἡ εὐθεῖα, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπί τινα ἀκτῖνα τῆς σφαίρας εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς, ἐφάπτεται τῆς σφαίρας καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι σφαίρας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον αὐτῆς κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ εἶναι ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

350) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου σφαίρας ἀκτῖνος 0,4 μ. ἀπόστασιν ἴσην μὲ 0,25 μ.

ΜΕΓΙΣΤΟΙ ΚΑΙ ΜΙΚΡΟΙ ΚΥΚΛΟΙ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

387. Μέγιστοι κύκλοι.— Ἐκ τῆς εὑρεθείσης σχέσεως $(ΚΑ)^2 = (ΚΔ)^2 + (ΔΑ)^2$, ἐὰν ὑποτεθῇ $(ΚΔ) = 0$, ἤτοι ἐὰν τὸ τέμνον τὴν σφαῖραν ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, εὑρίσκομεν $ΚΑ = ΔΑ$. Ἡ δὲ τομὴ τότε τῆς σφαίρας λέγεται **μέγιστος κύκλος αὐτῆς.**

Οἱ μέγιστοι κύκλοι τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι πάντες μεταξύ των ἴσοι. Ἐπειδὴ δὲ ἡ τομὴ δύο ἐξ αὐτῶν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, ἕπεται ὅτι εἶναι κοινὴ διάμετρος αὐτῶν. Ὥστε οἱ μέγιστοι κύκλοι τῆς αὐτῆς σφαίρας διχοτομοῦν ἀλλήλους.

388. Ἰδιότητες μεγίστου κύκλου σφαίρας.—Εἷς μέγιστος κύκλος σφαίρας διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο μέρη. Ἐὰν δὲ χωρίσωμεν πρῶτον τὰ μέρη αὐτὰ καὶ ἔπειτα τὰ ἐφαρμόσωμεν οὕτως ὥστε νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κοινῆς αὐτῶν βάσεως, θὰ ἴδωμεν, ὅτι θὰ ἐφαρμόσουν καὶ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν μερῶν. Διότι τὰ σημεῖα ἑκάστης τούτων ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς κοινῆς αὐτῶν βάσεως. Ἐκ τούτων συνάγομεν, ὅτι :

Πᾶς μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἴσα μέρη, καλούμενα ἡμισφαίρια.

389. Τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ δύο σημεῖα αὐτῆς Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι ἄκρα τῆς αὐτῆς διαμέτρου, ὁρίζουν ἓν μόνον ἐπίπεδον. Τοῦτο δὲ τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον. Ἄλλος δὲ μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας αὐτῆς, ὁ ὁποῖος νὰ διέρχεται διὰ τῶν αὐτῶν σημείων, εἶναι φανερόν, ὅτι δὲν ὑπάρχει. Ὥστε :

Διὰ δύο σημείων τῆς σφαίρας, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι ἄκρα τῆς αὐτῆς διαμέτρου, διέρχεται μέγιστος κύκλος καὶ εἷς μόνον.

Ἐνῷ, ἐὰν τὰ σημεῖα αὐτὰ εἶναι ἄκρα τῆς αὐτῆς διαμέτρου εἶναι φανερόν, ὅτι διέρχονται δι᾽ αὐτοῦ ἄπειροι μέγιστοι κύκλοι.

390. Μικροὶ κύκλοι.— Εἰς τὴν ὡς ἄνω σχέσιν $(ΚΑ)^2=(ΚΔ)^2+(ΔΑ)^2$, ἐὰν εἶναι $(ΚΔ)\neq 0$, ἤτοι, ἐὰν τὸ τέμνον τὴν σφαῖραν ἐπίπεδον δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς, θὰ εἶναι $ΔΑ<ΚΑ$ καὶ ἡ τομὴ θὰ εἶναι μικρὸς κύκλος.

Οἱ μικροὶ κύκλοι εἶναι τόσῳ μικρότεροι, ὅσῳ περισσότερον ἀπέχουν τὰ κέντρα αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

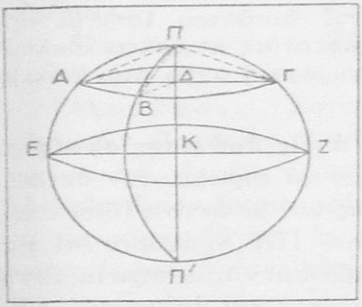
Ἡ θέσις μικροῦ κύκλου εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη, ὅταν δοθοῦν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας τρία σημεῖα τῆς περιφερείας του.

Ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας εἰς τὸ κέντρον τοῦ μικροῦ κύκλου ἀγομένη εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μικροῦ κύκλου.

Τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κύκλου σφαίρας λέγονται **πόλοι** αὐτοῦ.

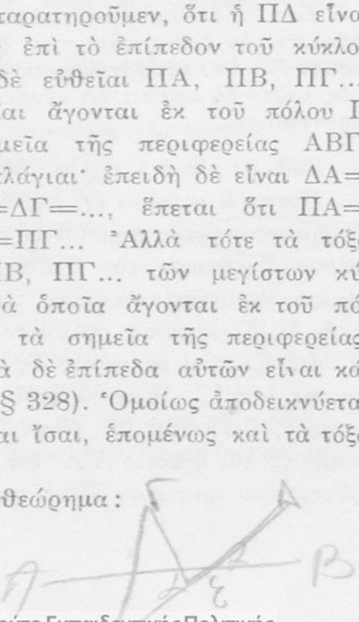
Ὅλοι οἱ κύκλοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τοὺς αὐτοὺς δύο πόλους, κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδων παραλλήλων, δι᾽ ὃ λέγονται καὶ **παράλληλοι** κύκλοι τῆς σφαίρας.

391. Ἰδιότητες τῶν πόλων κύκλου σφαίρας.—Ἔστω ΑΒΓ ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου Δ τῆς σφαίρας Κ καὶ Π, Π′ οἱ πόλοι αὐτοῦ.



Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ΠΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου Δ, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ..., αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ πόλου Π εἰς σημεῖα τῆς περιφερείας ΑΒΓ, εἶναι πλάγιαι· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $ΔΑ=ΔΒ=ΔΓ=...$, ἕπεται ὅτι $ΠΑ=ΠΒ=ΠΓ...$ Ἀλλὰ τότε τὰ τόξα ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ... τῶν μεγίστων κύκλων, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἐκ τοῦ πόλου εἰς τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας, εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ἴσας χορδάς, τὰ δὲ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΑΒΓ (§ 328). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ χορδαὶ Π′Α, Π′Β, Π′Γ... εἶναι ἴσαι, ἑπομένως καὶ τὰ τόξα Π′Α, Π′Β, Π′Γ... εἶναι ἴσα κτλ.

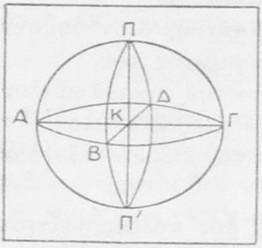
Ἐκ τούτων λοιπὸν συνάγομεν τὸ θεώρημα:



Ἕκαστος τῶν πόλων τοῦ τυχόντος κύκλου τῆς σφαίρας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς περιφερείας αὐτοῦ.

Σημείωσις. Ἐὰν ὁ κύκλος εἶναι μέγιστος, αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ΠΚΑ, ΠΚΒ κτλ. μετροῦνται ὑπὸ τῶν τόξων ΠΑ, ΠΒ κτλ., καὶ διὰ τοῦτο τὰ τόξα αὐτῶν εἶναι τεταρτημόρια περιφερείας.

392. Πόρισμα. ***Ἐὰν τὰ ἔκ τινος σημείου Π τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἀγόμενα τόξα μεγίστου κύκλου (ΠΑ, ΠΒ) εἰς δύο σημεῖα τῆς περιφερείας ἄλλου μεγίστου κύκλου (ΑΒΓ) εἶναι τεταρτημόρια, τὸ σημεῖον Π εἶναι πόλος τοῦ μεγίστου τούτου κύκλου ΑΒΓ.***

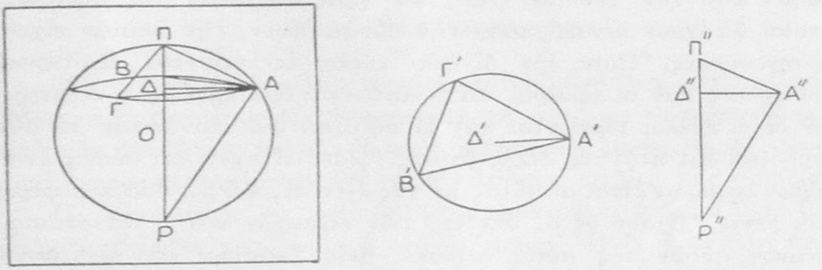


Σημείωσις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται, ὅτι δυνάμεθα νὰ γράφωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας περιφερείας, ὅπως γράφομεν καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Πρὸς τοῦτο μεταχειριζόμεθα διαβήτην μὲ σκέλη καμπύλα καὶ ὅστις λέγεται σφαιρικὸς διαβήτης. Τοῦ διαβήτου τούτου τὸ ἄκρον τοῦ ἑνὸς σκέλους στηρίζομεν εἴς τι σημεῖον τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον εἶναι εἷς τῶν πόλων τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται ὑπὸ τοῦ ἄκρου τοῦ ἄλλου σκέλους.

Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ γράψωμεν τόξον μεγίστου κύκλου, πρέπει νὰ λάβωμεν τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο ἄκρων τοῦ διαβήτου ἴσην μὲ τὴν χορδὴν ΠΑ τοῦ τεταρτημορίου ΠΚΑ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου· πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει νὰ εἶναι γνωστὴ ἡ περιφέρεια αὕτη, ἤτοι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.

393. Πρόβλημα. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς δοθείσης σφαίρας.***

Ἔστω ἡ σφαῖρα Ο, τῆς ὁποίας θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα. Μὲ πόλον τὸ τυχὸν σημεῖον Π τῆς ἐπιφανείας καὶ μὲ ἀκτῖνα (ἤτοι ἀπόστασιν τῶν ἄκρων τοῦ διαβήτου) οἱανδήποτε ΠΑ γράφομεν ἐπὶ τῆς σφαίρας περιφέρειαν κύκλου, τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τρία σημεῖα, ἔστω τὰ Α, Β, Γ· κατόπιν ὁρίζομεν διὰ τοῦ διαβήτου τὰς ἀποστάσεις ΑΒ, ΒΓ καὶ ΓΑ καὶ μὲ αὐτὰς ὡς πλευρὰς γράφομεν ἐπὶ ἐπιπέδου τρίγωνον, τὸ Α′Β′Γ′. Ἐὰν δὲ περὶ τοῦτο περιγράψωμεν κύκλον Δ′, εἶναι φανερόν, ὅτι οὗτος θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν κύκλον ΑΒΓ τῆς σφαίρας, ἑπομένως καὶ ἡ ἀκτὶς Δ′Α′ θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα ΔΑ. Ὥστε τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΠΔΑ γνωρίζομεν τὴν ΠΑ καὶ τὴν ΔΑ. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον ἴσον μὲ αὐτὸ ἐπὶ ἐπιπέδου, ἔστω δὲ τοῦτο τὸ Π''Δ''Α''. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὴν σφαῖραν Ο παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ διάμετρος ΠΡ εἶναι προέκτασις τῆς πλευρᾶς ΠΔ, ἡ δὲ ΠΑΡ εἶναι ὀρθὴ γωνία, ἐὰν φέρωμεν τὴν Α''Ρ'' κάθετον ἐπὶ τὴν

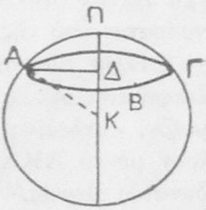


Π''Α'' καὶ προεκτείνωμεν τὴν Π''Δ'', σχηματίζεται τὸ τρίγωνον Π''Α''Ρ'', τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ Π''Ρ'' ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον ΠΡ τῆς σφαίρας· ὥστε τὸ ἥμισυ τῆς Π''Ρ'' εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης σφαίρας.

394. Πρόβλημα. ***Ἐπὶ τῆς δοθείσης σφαίρας νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου ἔχουσα ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.***

Περιορισμός. Ἡ δοθεῖσα ἀκτὶς δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

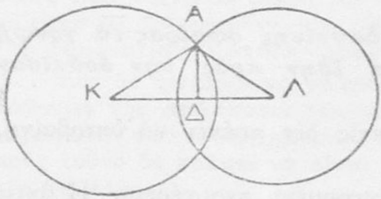
Ἀνάλυσις. Ἔστω ΑΒΓΑ ἡ ζητουμένη περιφέρεια. Ἡ ἀκτὶς αὐτῆς ΔΑ (ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν) εἶναι γνωστή, ὡς καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας ΑΚ· τὸ ὀρθογώνιον λοιπὸν τρίγωνον ΑΚΔ δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἐπὶ ἐπιπέδου. Ὅταν δὲ κατασκευάσωμεν τοῦτο, εὑρίσκομεν καὶ τὴν εὐθεῖαν ΔΠ, ἂν προεκτείνωμεν τὴν ΔΚ, ὥστε νὰ γίνῃ ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα ΚΑ. Τέλος εὑρίσκεται ἐκ τούτων καὶ ἡ ΠΑ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν ἄκρων τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου, μὲ τὴν ὁποίαν γράφεται ἡ περιφέρεια ἐκ τοῦ πόλου Π. Ἡ σύνθεσις τοῦ προβλήματος τούτου ὡς εὐκολωτάτη παραλείπεται.



ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΣΦΑΙΡΩΝ

395. Ἔστωσαν δύο σφαῖραι Ο καὶ Ο΄. Ἐὰν διὰ τῶν κέντρων Ο καὶ Ο΄ φέρωμεν οἱονδήποτε ἐπίπεδον, τοῦτο θὰ τέμνῃ τὰς σφαίρας κατὰ δύο μεγίστους κύκλους. Ἐὰν δὲ τοὺς κύκλους τούτους περιστρέψωμεν περὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΟ΄, θὰ γράψουν οὗτοι τὰς σφαίρας, αἱ ὁποῖαι θὰ ἔχουν μεταξύ των τὴν αὐτὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν εἶχον καὶ προηγουμένως. Ὥστε, ἐὰν οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς καὶ αἱ σφαῖραι θὰ ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς· ἐὰν δὲ οἱ κύκλοι τέμνωνται καὶ αἱ σφαῖραι θὰ τέμνωνται· τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ περὶ τὰς ἄλλας θέσεις. Ὥστε αἱ σχετικαὶ θέσεις δύο διαφόρων σφαιρῶν εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ τὰς σχετικὰς θέσεις δύο περιφερειῶν, ἤτοι πέντε. Ἔχουν δὲ αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν τὰς αὐτὰς σχέσεις (εἰς ἑκάστην τῶν θέσεων), τὰς ὁποίας εἴδομεν, ὅτι ἔχουν καὶ αἱ ἀκτῖνες τῶν περιφερειῶν.

396. Ἔστωσαν ἤδη δύο σφαῖραι Κ καὶ Λ τεμνόμεναι καὶ Α σημεῖον τι κοινὸν τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν. Τὸ ἐπίπεδον ΚΑΛ θὰ τέμνῃ τὰς δύο σφαίρας κατὰ δύο κύκλους τεμνομένους. Ἐὰν δὲ περιστραφοῦν οὗτοι περὶ τὴν ΚΛ, θὰ γράψουν τὰς δύο σφαίρας, τὸ δὲ σημεῖον Α θὰ γράψῃ περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῶν δύο σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν. Αὕτη δὲ θὰ ἔχῃ ἀκτῖνα τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΛ καὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον γράφεται ὑπὸ τῆς ΑΔ, κάθετον ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΚΛ.



Πλὴν τῶν σημείων τῆς περιφερείας ταύτης, αἱ δύο σφαιρικαὶ ἐπιφάνειαι οὐδὲν ἄλλο ἔχουν κοινὸν σημεῖον, διότι πᾶν τοιοῦτον σημεῖον, συνδεόμενον πρὸς τὰ Κ καὶ Λ δι᾽ εὐθειῶν, παρέχει τρίγωνον ἴσον μὲ τὸ ΑΚΛ, τὸ δὲ τρίγωνον τοῦτο ἔλαβε περὶ τὴν ΚΛ ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται τὸ θεώρημα:

Ἐὰν δύο σφαῖραι τέμνωνται, ἡ τομὴ τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν εἶναι περιφέρεια κύκλου ἔχουσα τὸ κέντρον αὐτῆς ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία συνδέει τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν, τὸ δὲ ἐπίπεδον αὐτῆς εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

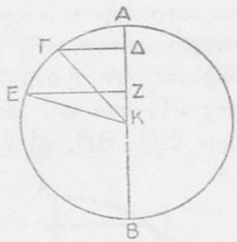
Ἀσκήσεις.

351) Τὰ κέντρα δύο σφαιρῶν ἀπέχουν 0,1 μ., αἱ δὲ ἀκτῖνες αὐτῶν εἶναι 0,06 μ. τῆς μιᾶς καὶ 0,08 μ. τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κοινῆς τομῆς αὐτῶν.

ΣΦΑΙΡΑΣ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

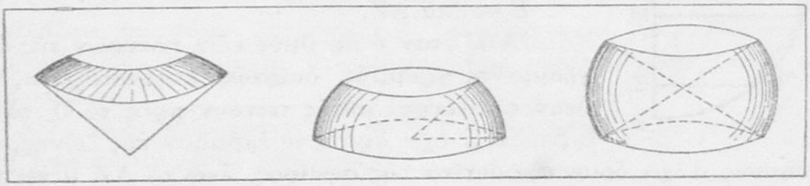
397. Ὁρισμοί.—Ἐὰν σφαῖρα τμηθῇ ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, τὸ μὲν μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τούτων λέγεται **σφαιρικὴ ζώνη,** τὸ δὲ μέρος τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον ὑπ᾽ αὐτῶν λέγεται **τμῆμα** τῆς σφαίρας.

Οἱ δύο κύκλοι εἰς τοὺς ὁποίους περατοῦται ἡ ζώνη ἢ τὸ τμῆμα, λέγονται **βάσεις** τῆς ζώνης ἢ τοῦ τμήματος. Ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ἡ ζώνη ἢ τὸ τμῆμα, λέγεται **ὕψος** τῆς ζώνης ἢ τοῦ τμήματος. Σημειωτέον ὅμως, ὅτι, ἐὰν ἓν τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐφάπτεται τῆς σφαίρας ἡ ζώνη καὶ τὸ τμῆμα ἔχουν μίαν μόνον βάσιν.



Σφαιρικὸς τομεύς. Ὅταν ἡμικύκλιον στρεφόμενον περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ γράψῃ τὴν σφαῖραν, τυχὸν τομεὺς τοῦ ἡμικυκλίου τούτου γράφει στερεόν, τὸ ὁποῖον λέγεται σφαιρικὸς τομεύς.

Ἐὰν νοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον ΑΓΕΒΑ στρεφόμενον περὶ τὴν διάμετρόν του ΑΒ καὶ γράφον τὴν σφαῖραν, τὸ μὲν τόξον ΓΕ θὰ γράψῃ

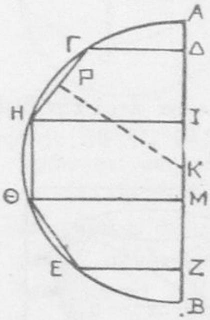


Διάφοροι μορφαὶ σφαιρικῶν τομέων.

σφαιρικὴν ζώνην ἔχουσαν βάσεις τοὺς ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΓΔ καὶ ΕΖ γραφομένους κύκλους καὶ ὕψος τὴν ΔΖ, τὸ δὲ μέρος ΓΕΖΔ τοῦ ἡμικυκλίου θὰ γράψῃ σφαιρικὸν τμῆμα ἔχον τὰς αὐτὰς βάσεις καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Τὸ τόξον ΑΓ θὰ γράψῃ ζώνην ἔχουσαν μίαν μόνον βάσιν καὶ τὸ μέρος ΑΓΔ τοῦ ἡμικυκλίου θὰ γράψῃ τμῆμα ἔχον μίαν βάσιν. Ὁ δὲ κυκλικὸς τομεὺς ΓΚΕ θὰ γράψῃ σφαιρικὸν τομέα, ὡσαύτως καὶ ὁ τομεὺς ΑΓΚ.

398. Ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης. Ὁρισμός.— ***Ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης λέγεται τὸ ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει κανονικὴ τεθλασμένη γραμμὴ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τόξον, τὸ γράφον τὴν ζώνην, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῆς διαρκῶς διπλασιάζεται.***

399. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ σφαιρικῆς ζώνης.—Ἔστω ἡ σφαιρικὴ ζώνη, ἡ ὁποία γράφεται ὑπὸ τοῦ τόξου ΓΕ, καὶ τῆς ὁποίας θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδόν. Πρὸς τοῦτο ἐγγράφομεν εἰς τὸ τόξον ΓΕ κανονικὴν τεθλασμένην γραμμήν, τὴν ΓΗΘΕ. Ἡ χορδὴ ΓΗ κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἡμικυκλίου περὶ τὴν ΑΒ θὰ γράψῃ ἐπιφάνειαν κολούρου κώνου, τῆς ὁποίας τὸ ἐμβαδὸν εἶναι γινόμενον τῆς ΙΔ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα τὴν ΚΡ, ἤτοι τὴν ἀπόστασιν τῆς χορδῆς ΓΗ ἀπὸ τοῦ κέντρου· τὸ αὐτὸ δὲ ἰσχύει καὶ περὶ τῶν ἄλλων χορδῶν ΗΘ, ΘΕ, αἱ ὁποῖαι, ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι μεταξύ των (καὶ πρὸς τὴν ΓΗ), ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸ κέντρον Κ. Ὥστε, ἂν διὰ τοῦ α παραστήσωμεν τὴν ἀπόστασιν τῶν ἴσων χορδῶν ἀπὸ τοῦ Κ, τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ τεθλασμένη γραμμή, εἶναι :



$$Ε = 2πα.ΔΙ + 2πα.ΙΜ + 2πα.ΜΖ,$$ ἤτοι

$$Ε = 2πα\,(ΔΙ + ΙΜ + ΜΖ),$$ ἢ τέλος

$$Ε = 2πα.ΔΖ.$$

Ἀλλ' ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς ἐγγεγραμμένης γραμμῆς διαρκῶς διπλασιάζεται, ἤτοι ὅταν αἱ πλευραὶ αὐτῆς τείνουν πρὸς τὸ 0, τὸ μὲν ἐμβαδὸν Ε ἔχει ὅριον τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης, ἡ δὲ ἀπόστασις α ἔχει ὅριον τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, ἐνῷ τὸ ΔΖ μένει σταθερόν. Ὥστε, ἐὰν διὰ τοῦ Α παραστήσωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν τῆς ζώνης εἶναι 2πΑ.ΔΖ.

Ἐκ τούτων λοιπὸν συνάγεται τὸ θεώρημα :

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης εἶναι γινόμενον τοῦ ὑ-

ψου αὐτῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας.

400. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.— Ἐὰν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ἡ ζώνη, ἐφάπτωνται ἀμφότερα τῆς σφαίρας, τότε ἡ ζώνη εἶναι ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας. Ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ζώνη, τῆς ὁποίας τὸ ὕψος εἶναι ἴσον μὲ τὴν διάμετρον. Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν αὐτῆς εἶναι $2\pi A . 2A$.

Ὥστε: ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι γινόμενον τῆς διαμέτρου της ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου αὐτῆς.***

401. Πόρισμα 1ον. ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τεσσάρων μεγίστων κύκλων αὐτῆς.***

Σημείωσις. Ἐπειδὴ $A = \frac{\Delta}{2}$ (Δ διάμετρος τῆς σφαίρας), εἶναι $4\pi A^2 = \pi \Delta^2$.

402. Πόρισμα 2ον. ***Αἱ ἐπιφάνειαι δύο σφαιρῶν ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων των ἢ τῶν τετραγώνων τῶν διαμέτρων των.***

403. Πόρισμα 3ον. ***Εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν αἱ ἰσοϋψεῖς ζῶναι ἔχουν ἴσα ἐμβαδά.***

Ἀσκήσεις.

352) Ἡ ἀκτὶς σφαίρας τινὸς εἶναι 3,5. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς;

353) Σφαῖρα, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι 3,6 μ., τέμνεται ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, ἀπεχόντων ἀπ' ἀλλήλων κατὰ 0,4 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἥτις περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων;

354) Ἐὰν διπλασιασθῇ ἡ ἀκτὶς σφαίρας τινός, πόσας φορὰς γίνεται ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς μεγαλυτέρα;

404. Ὄγκος τῆς σφαίρας.— Διὰ νὰ δυνηθῶμεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὰ κάτωθι.

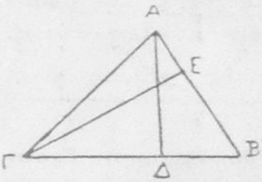
405. Εἴδομεν ὅτι, ἐὰν τρίγωνον ὀρθογώνιον περιστρέψωμεν περὶ μίαν τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν, θὰ γράψῃ τοῦτο κῶνον.

1ον. Ἐὰν ὅμως περιστρέψωμεν οἱονδήποτε τρίγωνον, ὡς τὸ ΑΒΓ, περὶ μίαν τῶν πλευρῶν, π.χ. περὶ τὴν ΓΒ, θὰ γράψῃ τοῦτο στερεόν, τὸ ὁποῖον θὰ ἀποτελῆται ἐκ δύο κώνων, τοὺς ὁποίους γράφουν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΑΒΔ· ἔχουν δὲ οἱ δύο οὗτοι κῶνοι βάσιν τὴν αὐτὴν καὶ ὕψη, ὁ μὲν τὴν ΓΔ, ὁ δὲ τὴν ΒΔ. Ἑπομένως ἔχομεν:

$$\text{ὄγκ. } ΑΒΓ = \frac{1}{3}\pi\,(ΑΔ)^2.ΔΒ + \frac{1}{3}\pi\,(ΑΔ)^2.ΓΔ,$$

$$\text{ἤτοι ὄγκ. } ΑΒΓ = \frac{1}{3}\pi\,(ΑΔ)^2.ΒΓ. \qquad (1)$$

Ἀλλ' ἐὰν γράψωμεν ὄγκ. $ΑΒΓ = \frac{1}{3}\pi.ΑΔ.ΑΔ.ΒΓ$, παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ γινόμενον ΑΔ.ΒΓ παριστᾷ τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἀλλ' ἐὰν λάβωμεν ὡς βάσιν τοῦ δοθέντος τριγώνου τὴν ΑΒ, ὁπότε τὸ ὕψος αὐτοῦ εἶναι ἡ ΓΕ, θὰ ἔχωμεν ΑΔ.ΒΓ = ΑΒ.ΓΕ. Ὥστε ἡ ἰσότης (1) γίνεται



$$\text{ὄγκ. } ΑΒΓ = \frac{1}{3}\,\pi.ΑΔ.ΑΒ.ΓΕ.$$

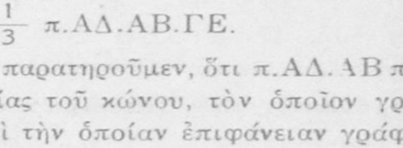
Ἀλλ' ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι π.ΑΔ.ΑΒ παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, τὸν ὁποῖον γράφει τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΒ, καὶ τὴν ὁποίαν ἐπιφάνειαν γράφει ἡ πλευρὰ ΑΒ. Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\pi.ΑΔ.ΑΒ = (\text{ἐπιφ. } ΑΒ).$$

Ὥστε τελικῶς ἔχομεν:

$$\text{ὄγκ. } ΑΒΓ = (\text{ἐπιφ. } ΑΒ).\,\frac{1}{3}\,ΓΕ.$$

Ἐὰν ἡ κάθετος ΑΔ πίπτῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώγου ΑΒΓ, ὁ ὄγκος ΑΒΓ εἶναι διαφορὰ τῶν ὄγκων τῶν δύο προηγουμένων κώνων ΑΓΔ καὶ ΑΒΔ. Ἐὰν δὲ ἐργασθῶμεν ὁμοίως ὡς ἄνω, πάλιν εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ ὄγκος ΑΒΓ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ βάσις του ΑΒ ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους του ΓΕ.



2ον. Ἀλλ' ἓν τρίγωνον δυνάμεθα νὰ περιστρέψωμεν καὶ περὶ ἄξονα, ὁ ὁποῖος κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ του, διέρχεται διὰ μιᾶς τῶν κορυφῶν του καὶ δὲν τέμνει τὸ τρίγωνον, ὡς π.χ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περὶ τὸν ἄξονα

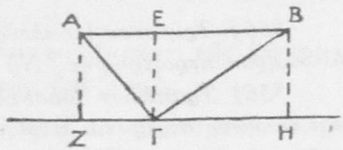
ΓΔ. Ἀλλὰ τότε ἡ βάσις ΑΒ ἢ τέμνει τὸν ἄξονα ἢ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτόν· καὶ

α′) ἐὰν ἡ ΑΒ τέμνῃ τὸν ἄξονα ΓΔ εἰς τὸ Δ, τὸ στερεὸν τὸ γραφόμενον ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι διαφορὰ τῶν στερεῶν, τὰ ὁποῖα γράφουν τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ. Ὅθεν εἶναι

$$\text{ὄγκ. ΑΒΓ} = (\text{ἐπιφ. ΑΔ}).\frac{1}{3}\,\text{ΓΕ} - (\text{ἐπιφ. ΒΔ}).\frac{1}{3}\,\text{ΓΕ} =$$

$$= (\text{ἐπιφ. ΑΔ} - \text{ἐπιφ. ΒΔ}).\frac{1}{3}\,\text{ΓΕ} = (\text{ἐπιφ. ΑΒ}).\frac{1}{3}\,\text{ΓΕ}.$$

β′) ἐὰν δὲ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα ΓΔ, φέρομεν ἐκ τῶν ἄκρων τῆς ΑΒ καθέτους ἐπὶ τὸν ἄξονα, τὰς ΑΖ καὶ ΒΗ.



Ἀλλὰ τότε εἶναι προφανῶς ὄγκ. ΑΒΓ=ὄγκ.ΑΖΗΒ—(ὄγκ.ΑΖΓ + ὄγκ. ΓΒΗ). ἐπειδὴ δὲ

$$\text{ὄγκ. ΑΖΗΒ} = \pi(\text{ΑΖ})^2.\text{ΖΗ}$$

$$\text{ὄγκ. ΑΖΓ} = \frac{1}{3}\,\pi(\text{ΑΖ})^2.\text{ΓΖ}$$

$\text{ὄγκ. ΒΓΗ} = \frac{1}{3}\,\pi(\text{ΑΖ})^2.\,\text{ΓΗ}$, ἔχομεν

$$\text{ὄγκ. ΑΖΓ} + \text{ὄγκ. ΒΓΗ} = \frac{1}{3}\,\pi(\text{ΑΖ})^2\,(\text{ΓΖ} + \text{ΓΗ}) = \frac{1}{3}\,\pi(\text{ΑΖ})^2.\text{ΖΗ}$$

Ὥστε εἶναι $\text{ὄγκ. ΑΒΓ} = \pi(\text{ΑΖ})^2.\text{ΖΗ} - \frac{1}{3}\,\pi(\text{ΑΖ})^2\text{ΖΗ}$, ἢ

$$\text{ὄγκ. ΑΒΓ} = \frac{1}{3}\,\pi(\text{ΑΖ})^2.(3\text{ΖΗ} - \text{ΖΗ}) = \frac{1}{3}\,\pi(\text{ΑΖ})^2.2\text{ΖΗ} =$$

$\frac{1}{3}$ ΑΖ.2πΑΖ.ΖΗ. Ἀλλὰ 2π.ΑΖ.ΖΗ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ ΑΒ, ἤτοι εἶναι 2π.ΑΖ.ΖΗ = ἐπιφ. ΑΒ.

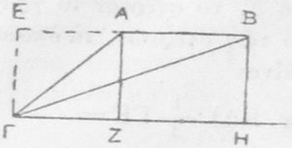
Ὥστε εἶναι $\text{ὄγκ.ΑΒΓ} = (\text{ἐπιφ.ΑΒ}).\frac{1}{3}\,\text{ΑΖ}$, καὶ ἐπειδὴ ΑΖ = ΓΕ,

$$\text{ὄγκ.ΑΒΓ} = (\text{ἐπιφ.ΑΒ}).\frac{1}{3}\,\text{ΓΕ}.$$

Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι καθ᾽ ὅλας τὰς ἄνω περιπτώσεις πάντοτε εἶναι $\text{ὄγκ.ΑΒΓ} = (\text{ἐπιφ.ΑΒ}).\frac{1}{3}\,\text{ΓΕ}$. Ἑπομένως συνάγομεν τὸ θεώρημα.

Ἐὰν τρίγωνον περιστραφῇ περὶ ἄξονα κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ, διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς του καὶ μὴ τέμνοντα

αὐτό, τὸ γραφόμενον ὑπὸ τοῦ τριγώνου στερεὸν ἔχει ὄγκον ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ βάσις τοῦ τριγώνου, ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους του.



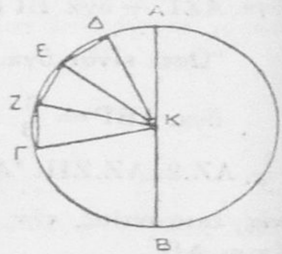
Σημείωσις. Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν, ἐὰν αἱ κάθετοι ΑΖ καὶ ΒΗ πίπτουν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τότε εἶναι ὄγκ.ΑΒΓ = ὄγκ.ΑΓΖ + + ὄγκ. ΑΖΗΒ — ὄγκ. ΓΒΗ. Ἀλλὰ πάλιν εὑρίσκομεν ὁμοίως, ὅτι ὄγκ. ΑΒΓ = (ἐπιφ. ΑΒ). $\frac{1}{3}$ ΓΕ.

Ἀσκήσεις.

355) Τρίγωνον ἰσόπλευρον στρέφεται περὶ μίαν τῶν πλευρῶν του ὁλόκληρον περιστροφήν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ προκύπτοντος στερεοῦ.

356) Τραπέζιον ἰσοσκελές, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς δύο βάσεις καὶ τὸ ὕψος στρέφεται περὶ τὴν μεγαλυτέραν βάσιν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ σχηματιζομένου στερεοῦ.

406. Ὄγκος σφαιρικοῦ τομέως.— Ἔστω ΚΓΔ ὁ κυκλικὸς τομεύς, ὅστις περιστρεφόμενος περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ γράφει τὸν σφαιρικὸν τομέα, τοῦ ὁποίου θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον.



Ἐὰν διαιρεθῇ τὸ τόξον ΓΔ εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη καὶ ἀχθοῦν αἱ χορδαὶ αὐτῶν, προκύπτει πολυγωνικὸς τομεύς, ὡς ὁ ΚΔΕΖΓΚ ἐγγεγραμμένος εἰς τὸν κυκλικὸν τομέα. Ὁ πολυγωνικὸς οὗτος τομεὺς κατὰ τὴν περιστροφὴν θὰ γράψῃ στερεὸν ἀποτελούμενον ἐκ τῶν στερεῶν, τὰ ὁποῖα γράφουν τὰ ἴσα τρίγωνα ΚΖΓ, ΚΖΕ, ΚΕΔ, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται· ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τούτου θὰ εἶναι (§ 405).

$$\frac{1}{3}\,\alpha.(\text{ἐπιφ. }\Gamma Z) + \frac{1}{3}\,\alpha.(\text{ἐπιφ. }ZE) + \frac{1}{3}\,\alpha.(\text{ἐπιφ. }E\Delta),$$

ἤτοι
$$\frac{1}{3}\,\alpha.(\text{ἐπιφ. }\Gamma Z + \text{ἐπιφ. }ZE + \text{ἐπιφ. }E\Delta),$$

ἢ
$$\frac{1}{3}\,\alpha.(\text{ἐπιφ. }\Gamma Z E\Delta),$$

ἤτοι ἴσος μὲ τὴν ἐπιφάνειαν, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΓΖΕΔ ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀποστάσεως α τῶν χορδῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ πολυγωνικὸς τομεὺς ἔχει ὅριον τὸν κυκλικὸν τομέα, ἕπεται, ὅτι καὶ τὸ ὑπ᾿ αὐτοῦ γραφόμενον στερεὸν ἔχει ὅριον τὸ ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τομέως γραφόμενον, ἤτοι τὸν σφαιρικὸν τομέα· ὥστε εἶναι

$$\text{ὄγκ. σφ. τομέως} = \text{ὅρ.}\left[\frac{1}{3}\,\alpha.(\text{ἐπιφ.}\,\Gamma Z E \Delta)\right] =$$

$$= \text{ὅρ.}\left(\frac{1}{3}\,\alpha\right).\,\text{ὅρ.}\,(\text{ἐπιφ.}\,\Gamma Z E \Delta).$$

Ἀλλ᾿ ὅριον τῆς ἀποστάσεως α εἶναι ἡ ἀκτὶς Α τῆς σφαίρας, ὅριον δὲ τῆς ἐπιφανείας ΓΖΕΔ εἶναι ἡ σφαιρικὴ ζώνη ἡ γραφομένη ὑπὸ τοῦ τόξου ΓΔ· ἄρα

$$\text{ὄγκ. σφ. τομέως} = \frac{1}{3}\,A.\,(\text{ζών.}\,\Gamma\Delta)$$

Ἐκ τούτων λοιπὸν ἕπεται τὸ θεώρημα:

Ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως εἶναι γινόμενον τῆς ζώνης, ἥτις εἶναι βάσις αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος.

407. Πόρισμα 1ον. Ἐὰν τὸ τόξον ΓΔ αὐξανόμενον γίνῃ ἴσον μὲ τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΓΒ, ὁ μὲν τομεὺς ΚΓΔ γίνεται ἴσος μὲ τὸ ἡμικύκλιον, ὁ δὲ ὑπ᾿ αὐτοῦ γραφόμενος σφαιρικὸς τομεὺς γίνεται ἴσος μὲ ὅλην τὴν σφαῖραν.

Ὥστε: ***Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι γινόμενον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς.***

Σημείωσις. Ἐὰν παρασταθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας διὰ τοῦ Α, ἡ μὲν ἐπιφάνεια αὐτῆς εἶναι $4\pi A^2$, ὁ δὲ ὄγκος αὐτῆς θὰ εἶναι $4\pi A^2.\frac{1}{3}\,A$, ἢ $\frac{4}{3}\,\pi A^3$. Ἐὰν δὲ θέσωμεν $A = \frac{\Delta}{2}$ (Δ διάμετρος τῆς σφαίρας), ὁ ὄγκος αὐτῆς θὰ εἶναι $\frac{1}{6}\,\pi\Delta^3$.

408. Πόρισμα 2ον. ***Οἱ ὄγκοι δύο σφαιρῶν ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ἀκτίνων των ἢ τῶν κύβων τῶν διαμέτρων των.***

Ἀσκήσεις.

357) Ἡ ἀκτὶς σφαίρας τινὸς εἶναι 3,5 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτῆς;

358) Κοίλης σιδηρᾶς σφαίρας ἡ ἀκτὶς τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας της εἶναι 0,05 μ., ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς ἐσωτερικῆς ἐπιφανείας της εἶναι 0,04 μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ σιδήρου τῆς σφαίρας αὐτῆς.

359) Μιᾶς σφαίρας ὁ ὄγκος εἶναι 33,5104 κ. μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτῆς;

360) Ἐὰν ἡ ἀκτὶς σφαίρας διπλασιασθῇ, πόσας φορὰς μεγαλύτερος θὰ γίνῃ ὁ ὄγκος αὐτῆς; Καὶ ἐὰν ὁ ὄγκος σφαίρας διπλασιασθῇ, ἐπὶ ποῖον ἀριθμὸν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς;

361) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας πρὸς τὸν ὄγκον περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν κύβου (ἤτοι κύβου, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι ἐφάπτονται τῆς σφαίρας).

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Ζ' Βιβλίου.

362) Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ δύο δοθέντων σημείων;

363) Θέλει τις νὰ κατασκευάσῃ κωνικὴν σκηνὴν χωρητικότητος 120 κ. μέτρων, τὴν ὁποίαν θὰ στηρίξῃ ἐπὶ κυκλικῆς βάσεως ἐμβαδοῦ 80 τ. μ. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα ὑφάσματος σκηνῆς θὰ χρειασθῇ;

364) Τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης σφαίρας τινὸς ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τῆς ζώνης.

365) Σφαῖρα ἀκτῖνος ρ φωτίζεται ὑπὸ φωτιστικῆς πηγῆς, ἡ ὁποία ἀπέχει ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἀπόστασιν α. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς φωτιζομένης σφαιρικῆς ζώνης εἶναι $\frac{2\pi\rho^2\alpha}{\rho+\alpha}$.

366) Κανονικὸν ἡμιεξάγωνον στρέφεται περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ σχηματιζομένου στερεοῦ.

367) Ὀρθογώνιον τρίγωνον στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτοῦ. Οἱ σχηματιζόμενοι ὄγκοι εἶναι Ο, ὅταν στρέφεται περὶ τὴν ὑποτείνουσαν, καὶ Ο', Ο'', ὅταν στρέφεται περὶ τὰς ἄλλας πλευράς. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις:

$$\frac{1}{O'^2}+\frac{1}{O''^2}-\frac{1}{O^2}.$$

368) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας καὶ ὁ ὄγκος αὐτῆς, ὅταν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης αὐτῆς, ὕψους 5 μ., εἶναι 94,248 τ.μ.

369) Διὰ νὰ γίνῃ ἓν σφαιρικὸν ἀερόστατον ἐχρησιμοποιήθη περίβλημα ἐμβαδοῦ 5026,56 τ. μ. Ἐπληρώθη δὲ δι' ἀερίου, τοῦ ὁποίου τὸ βάρος ἦτο τὰ 0,0000895 τοῦ βάρους ἴσου ὄγκου ὕδατος. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τοῦ ἀερίου μὲ τὸ ὁποῖον ἐπληρώθη τὸ ἀερόστατον τοῦτο.

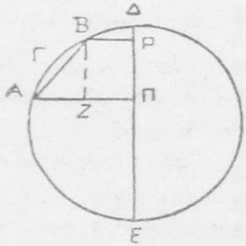
370) Εἷς ἀτμολέβης ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα κύλινδρον καὶ ἀπὸ 2 ἴσα ἡμισφαίρια εἰς τὰ ἄκρα του. Ἐὰν τὸ ὅλον ἐσωτερικὸν μῆκος τοῦ ἀτμολέβητος εἶναι λ, καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀκτὶς τῶν ἡμισφαιρίων (ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου) εἶναι α, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι $\frac{\pi\alpha^2}{3}(3\lambda - 2\alpha)$.

371) Ἀπὸ ἓν εἰδικὸν σταγονόμετρον πίπτει διὰ τὴν λίπανσιν μιᾶς μηχανῆς ἀνὰ 5 δευτερόλεπτα μία σταγὼν ἐλαίου, διαμέτρου 4 χιλιοστῶν τοῦ μέτρου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τοῦ ἐλαίου, τὸ ὁποῖον ἐχρησιμοποιήθη διὰ τὴν λίπανσιν τῆς μηχανῆς αὐτῆς ἐπὶ 8 ὥρας, ὅταν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου τούτου εἶναι 0,8.

372) Αἱ ἀκτῖνες τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας κοίλης μεταλλίνης σφαίρας εἶναι 0,03 μ. καὶ 0,04 μ. ἀντιστοίχως. Ἀλλ' ἐκ τοῦ μετάλλου αὐτῆς κατεσκευάσθη κύβος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου αὐτοῦ.

373) Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι πρὸς τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν κυλίνδρου (ἤτοι περιλαμβανομένων καὶ τῶν βάσεων αὐτοῦ) ὡς ὁ 2 πρὸς τὸν 3. Τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἔχουν καὶ οἱ ὄγκοι τῶν δύο τούτων στερεῶν.

374) Οἱ ὄγκοι σφαίρας καὶ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν πολυέδρου ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουν καὶ αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν.



375) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν κυκλικὸν τμῆμα στραφῇ περὶ διάμετρον μὴ τέμνουσαν αὐτό, γράφει στερεόν, ὅπερ εἶναι ἥμισυ τοῦ κώνου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα βάσεως τὴν χορδὴν τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν προβολὴν τῆς χορδῆς ταύτης ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς.

376) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τμήματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὄγκων δύο κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν βάσεις τὰς βάσεις αὐτοῦ, καὶ ὕψος τὸ ὕψος αὐτοῦ, εἰς τὸ ὁποῖον προστίθεται ὁ ὄγκος σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὸ ὕψος αὐτοῦ.

377) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ἀμφικύρτου φακοῦ, τοῦ ὁποίου αἱ ἕδραι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα ϱ καὶ τὸ αὐτὸ βάθος ε.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

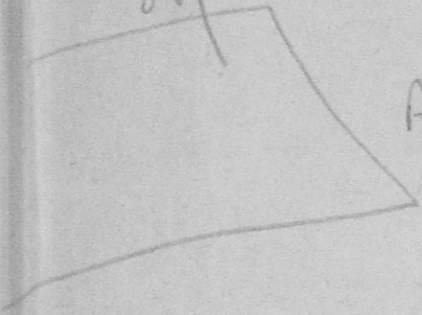
ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

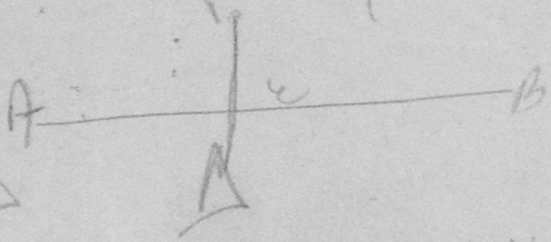
Στερεὰ ἐκ περιστροφῆς

βούρτσα -

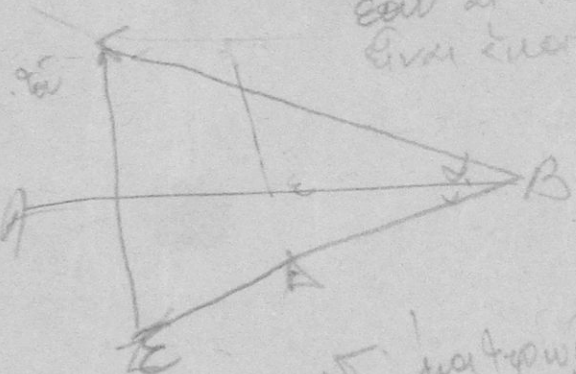
Στοιχειοθεσία - Ἐκτύπωσις
ΓΕΡ. Σ. ΧΡΗΣΤΟΥ & ΥΙΟΣ
Βιβλιοδεσία: Π. ΓΑΡΜΠΗ

[illegible]



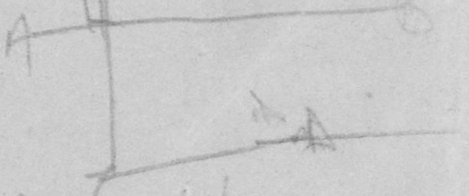


[illegible]



[illegible]

$a = \alpha$



[illegible]