ΑΙΜ. ΚΑΡΦΟΠΟΥΛΟΥ
ΕΜΜ. ΧΑΛΚΙΑΔΑΚΗ

ἀριθμητική

ΙΩ. ΤΖΟΥΦΛΑ
Μ. ΤΖΟΥΦΛΑ

γεωμετρία

Ε΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ – ΑΘΗΝΑ 1981

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΑΙΜ. ΚΑΡΦΟΠΟΥΛΟΥ
ΕΜ. ΧΑΛΚΙΑΔΑΚΗ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΙΩ. ΤΖΟΥΦΛΑ
Μ. ΤΖΟΥΦΛΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ε΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1981

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Κεφάλαιο I. Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί. *('Επανάληψη ὕλης Τετάρτης τάξης)*

α. Ποιοί ἀριθμοί λέγονται ἀκέραιοι. Γραφή καί ἀπαγγελία.

Παραδείγματα: Ὁ Γιῶργος ἔχει στή σάκα του 5 τετράδια. Ἡ Μαρία ἔχει 15 δραχμές. Ὁ Γιάννης ἔχει 20 βώλους. Ὁ βοσκός ἔχει 150 πρόβατα καί 60 κατσίκες. Ἡ Πέμπτη τάξη ἔχει 36 μαθητές. Οἱ μαθητές κάθονται σέ 18 θρανία.

Οἱ ἀριθμοί, πού ἀναφέρονται στά παραπάνω παραδείγματα, δείχνουν καί μετροῦν συγκεκριμένα πράγματα καί γι' αὐτό λέγονται σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν ο ι ἀ ρ ι θ μ ο ί.

Ὁ κάθε ἀριθμός δείχνει ἕνα πλῆθος ὅμοιων πραγμάτων.

Τό πλῆθος αὐτό γίνεται μέ τήν ἐπανάληψη τῆς ἀκέραιης μονάδας.

Τά 5 τετράδια πχ. γίνονται μέ τήν ἐπανάληψη 5 φορές τοῦ ἑνός τετράδιου ($1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$).

Οἱ 15 δραχμές εἶναι ἕνα πλῆθος δραχμές, πού γίνεται μέ τήν ἐπανάληψη 15 φορές τῆς μιᾶς ἀκέραιης μονάδας, δηλαδή τῆς μιᾶς δραχμῆς.

Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί εἶναι ἕνα σύνολο ἀριθμῶν πού ἀρχίζει μέ τό 0 καί δέν τελειώνει ποτέ. Φτάνει ὥς τό ἄπειρο.

Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί εἶναι:
Μονοψήφιοι: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Διψήφιοι: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 .... ὥς 99
Τριψήφιοι: 100, 101, 102, 103, 104, 108 .... ὥς 999
Τετραψήφιοι: 1000, 1001, 1002, 1003, 1004 .... ὥς 9.999
Πενταψήφιοι: 10.000 .... ὥς 99.999
Ἑξαψήφιοι: 100.000 .... ὥς 999.999
Ἑπταψήφιοι: 1.000.000 .... ὥς 9.999.999
κτλ.

Ἔτσι συνεχίζονται ὥς τό ἄπειρο (∞).

6. Ἀπαγγελία τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν.

Βλέπουμε γραμμένο κάπου τόν ἀκέραιο πολυψήφιο ἀριθμό

542.683.705.149

Πῶς θά διαβάσουμε ἕνα τόσο μεγάλο ἀκέραιο ἀριθμό;

Πρῶτα πρέπει νά χωρίσουμε τίς ὁμάδες του μέ τελεῖες, δηλαδή τά τριψήφια τμήματα ἀπό τά δεξιά.

1η ὁμάδα. Δισεκατομμύρια
Διαβάζουμε: 542 δισεκατομμύρια.
2η ὁμάδα. Ἑκατομμύρια.
Διαβάζουμε: 683 ἑκατομμύρια.
3η ὁμάδα. Χιλιάδες.
Διαβάζουμε: 705 χιλιάδες.
4η ὁμάδα. Μονάδες.
Διαβάζουμε: 149 μονάδες.

Ὁ ἀκέραιος πολυψήφιος αὐτός ἀριθμός ἀπαγγέλεται ἔτσι: 542 δισεκατομμύρια, 683 ἑκατομμύρια, 705 χιλιάδες, 149 μονάδες.

Κάθε ὁμάδα (κλάση) ἔχει τρεῖς τάξεις.
1η τάξη. Ἀπό δεξιά Μονάδες.
2η τάξη. Ἀπό τά δεξιά Δεκάδες.
3η τάξη. Ἀπό τά δεξιά Ἑκατοντάδες.

Στόν παρακάτω πίνακα μπορεῖς νά δεῖς παραστατικά τίς ὁμάδες καί τίς τάξεις σέ μερικούς ἀριθμούς.

ΔΙΣΕΚΑΤΟΜΜ.			ΕΚΑΤΟΜΜΥΡΙΑ			ΧΙΛΙΑΔΕΣ			ΜΟΝΑΔΕΣ		
Ἑκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Ἑκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Ἑκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Ἑκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
									1	4	7
							2	3	8	5	6
			8	2	5	1	4	7	1	3	4
5	4	2	6	8	3	7	0	5	1	4	9

Παρατήρησε προσεκτικά ὅτι ὁ πίνακας ἔχει τέσσερις ὁμάδες καί κάθε ὁμάδα χωρίζεται σέ τρεῖς τάξεις.

Οἱ ἀριθμοί τοῦ πίνακα θά διαβαστοῦν ὡς ἑξῆς:

1ος ἀριθμός 147 εἶναι τριψήφιος.
Τό ψηφίο τῶν μονάδων εἶναι 7.
Τό ψηφίο τῶν δεκάδων εἶναι 4.
Τό ψηφίο τῶν ἑκατοντάδων εἶναι 1.

2ος ἀριθμός 23.856

Ἀπό τά δεξιά πρός τά ἀριστερά τοῦ ἀριθμοῦ χωρίζουμε μέ τελεία τό πρῶτο τριψήφιο τμῆμα του. Εἶναι ἡ ὁμάδα τῶν μονάδων. Τό δεύτερο τριψήφιο τμῆμα του εἶναι ἡ ὁμάδα τῶν χιλιάδων

1η ὁμάδα Μονάδες	α τάξη μονάδες μονάδων	6
	β τάξη δεκάδες μονάδων	5
	γ τάξη ἑκατοντάδες μονάδων	8
2η ὁμάδα	α τάξη μονάδες χιλιάδων	3
	β τάξη δεκάδες χιλιάδων	2

Ἐδῶ τελειώνει ὁ ἀριθμός.
Ἀπαγγέλουμε: Εἴκοσι τρεῖς χιλιάδες, ὀκτακόσια πενήντα ἕξι.

3ος ἀριθμός 825.147.134

Παρατήρησε τίς ὁμάδες καί τίς τάξεις τῶν ψηφίων του καί ἀνάλυσέ τον μέ τόν ἴδιο τρόπο πού εἶδες παραπάνω.

Νά τόν ἀπαγγείλεις ὅπως ἔμαθες.

4ος ἀριθμός 542.683.705.149

Παρατήρησε μέσα στόν πίνακα τίς ὁμάδες καί τίς τάξεις τῶν ψηφίων του καί ἀνάλυσέ τον μέ τόν ἴδιο τρόπο πού ἔμαθες.

Νά τόν ἀπαγγείλεις ὅπως ἔμαθες.

Ἀσκήσεις

1. Νά ἀπαγγείλεις τούς παρακάτω ἀκέραιους ἀριθμούς.

α) 49
β) 149
γ) 5.149
δ) 700.000
ε) 705.000
στ) 300.300.003
ζ) 945.607.503
η) 8.742.547
θ) 6.789.456

Πρόσεξε: Τό 0 δέν μετρᾶ μονάδες, εἶναι ὅμως ψηφίο θέσεως καί δέν εἶναι δυνατόν νά τό παραλείψουμε.

Χρειάζεται προσοχή καί μεγάλη ἐξάσκηση στή γραφή καί στήν ἀπαγγελία τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν.

Πρίν διαβάσεις ἕναν ἀκέραιο ἀριθμό, πρέπει νά τόν χωρίσεις μέ τελεῖες σέ τριψήφια τμήματα, ἀρχίζοντας ἀπό τά δεξιά του.

Τό τελευταῖο τμῆμα πρός τά ἀριστερά τοῦ ἀριθμοῦ μπορεῖ καί νά μήν εἶναι τριψήφιο π.χ. 25.746, 2.378, 3.842.550.

γ. Πράξεις τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν.

1. Ἡ πρόσθεση

Νά θυμηθεῖς αὐτά πού ἔμαθες στήν Τετάρτη τάξη γιά τήν πρόσθεση τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν.

α) Πότε κάνουμε πρόσθεση; Διατύπωσε ἕναν κανόνα.
β) Πῶς λέγονται οἱ ἀριθμοί πού προσθέτουμε;
γ) Πῶς λέγεται τό ἀποτέλεσμα τῆς προσθέσεως;
δ) Πόσους προσθετέους μπορεῖ νά ἔχει μιά πρόσθεση;
ε) Πῶς γίνεται ἡ δοκιμή τῆς προσθέσεως;
στ) Τί εἶναι ἡ προσεταιριστικότητα στήν πρόσθεση;
ζ) Τί εἶναι ἡ ἀντιμεταθετικότητα στήν πρόσθεση;

Ἀσκήσεις

Μέ τό νοῦ
α) 9 + 8 + 7 + 5 + 9 + 6 + 2 =
β) 8 + 7 + 6 + 8 + 9 + 4 + 3 + 5 =
γ) 6 + 8 + 6 + 8 + 7 + 8 + 5 + 7 + 9 + 2 =

Γραπτά
α) 23.485 + 842 + 547 =
β) 2.842 + 64 + 165 =
γ) 275.648 + 852 + 175 + 9 =

Προβλήματα

1. Ὁ πατέρας τῆς Μαρίας ἔδωσε τά ἑξῆς ποσά γιά νά ψωνίσει διάφορα τρόφιμα γιά τίς ἀνάγκες τῆς οἰκογένειάς του:
   Γιά βούτυρο 250 δραχ., γιά κρέας 264 δραχ., γιά πατάτες 164 δραχ. καί γιά λάδι 548 δραχμές. Πόσα χρήματα ἀξίζουν τά τρόφιμα πού ἀγόρασε;
2. Ἕνα κατάστημα τροφίμων ἔκαμε εἰσπράξεις τή βδομάδα:
   Δευτέρα 18.950 δραχμές, Τρίτη 15.008 δραχμές, Τετάρτη 22.645 δραχμές, Πέμπτη 22.000 δραχμές, Παρασκευή 16.705 δραχμές, καί τό Σάββατο 36.642 δραχμές. Πόση ἦταν ἡ ἑβδομαδιαία εἴσπραξη τοῦ καταστήματος;
3. Νά κάμεις καί σύ δυό δικά σου προβλήματα προσθέσεως σχετικά μέ τή ζωή μέσα ἀπό τό δικό σου περιβάλλον.

2. Ἡ ἀφαίρεση

Νά θυμηθεῖς αὐτά πού ἔμαθες στίς ἄλλες τάξεις γιά τήν ἀφαίρεση.

α) Πότε κάνουμε ἀφαίρεση; Νά διατυπώσεις τόν κανόνα.
β) Πόσους ἀριθμούς ἔχουμε στήν ἀφαίρεση; Πῶς λέγεται καθένας;
γ) Πῶς λέγεται τό ἀποτέλεσμα τῆς ἀφαιρέσεως;
δ) Πῶς κάνουμε τή δοκιμή τῆς ἀφαιρέσεως;
ε) Ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετικότητα στήν ἀφαίρεση;

Ἀσκήσεις

Μέ τό νοῦ	α) 28−4 =	δ) 31−9 =	ζ) 250−120 =
	β) 39−6 =	ε) 45−8 =	η) 560−230 =
	γ) 48−7 =	στ) 69−9 =	θ) 1.000−510 =

Γραπτά	α) 272−27 =	δ) 1.256−375 =	ζ) 35.742−6.445 =
	β) 356−29 =	ε) 1.458−287 =	η) 672.748−25.000 =
	γ) 642−149 =	στ) 22.575−278 =	θ) 445.764−142.500 =

Προβλήματα

1. Ἕνας δημόσιος ὑπάλληλος παίρνει μισθό 14.750 δραχμές καί πληρώνει ἐνοίκιο τό μήνα 3.745 δραχμές. Πόσα χρήματα τοῦ μένουν γιά τά ἄλλα ἔξοδα τῆς οἰκογένειάς του;
2. Ἕνα βαρέλι γεμάτο λάδι ζυγίζει 227 κιλά. Τό ἀπόβαρο τοῦ βαρελιοῦ εἶναι 28 κιλά. Πόσα κιλά εἶναι τό καθαρό περιεχόμενο τοῦ βαρελιοῦ;
3. Ποιόν ἀριθμό πρέπει νά προσθέσω στό 1.875 γιά νά ἔχω τόν ἀριθμό 3.742;
4. Νά κάμεις καί σύ ἕνα δικό σου πρόβλημα ἀφαιρέσεως σχετικό μέ τή ζωή μέσα στό περιβάλλον σου.

3. Ὁ πολλαπλασιασμός

α) Νά θυμηθεῖς αὐτά πού ἔμαθες στίς ἄλλες τάξεις γιά τόν πολλαπλασιασμό.
β) Νά θυμηθεῖς τόν πίνακα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν μονοψηφίων.

γ) Πόσους ἀριθμούς ἔχουμε στήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καί πῶς λέγονται;
δ) Πῶς λέγεται τό ἀποτέλεσμα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ;
ε) Ἰσχύει στόν πολλαπλασιασμό ἡ προσεταιριστικότητα;
στ) Ἰσχύει στόν πολλαπλασιασμό ἡ ἀντιμεταθετικότητα;
ζ) Πότε σέ ἕνα πρόβλημα κάνουμε πολλαπλασιασμό;
η) Νά θυμηθεῖς πῶς πολλαπλασιάζουμε ἕναν ἀριθμό μέ 10, 100, 1000 κτλ.
θ) Νά θυμηθεῖς τή δοκιμή τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἀσκήσεις

1. Νά βρεῖς τά γινόμενα.

Μέ τό νοῦ α) $7 \times 8 \times 3 \times 4 =$ δ) $6 \times 9 \times 2 =$
β) $6 \times 5 \times 3 \times 2 =$ ε) $7 \times 7 \times 2 =$
γ) $4 \times 3 \times 7 \times 2 =$ στ) $6 \times 4 \times 5 \times 2 =$

Γραπτά α) $375 \times 65 =$ δ) $2.524 \times 25 =$
β) $742 \times 344 =$ ε) $2.485 \times 10 =$
γ) $645 \times 37 =$ στ) $742 \times 100 =$

Προβλήματα

1. Ὁ πατέρας τῆς Ἑλένης ἀγόρασε ἀπό τόν κρεοπώλη 5 κιλά μοσχαρίσιο κρέας πρός 125 δραχμές τό κιλό. Πόσο ἀξίζει τό κρέας;
2. Ἕνας ψαράς ψάρεψε 25 κιλά μπαρμπούνια καί τά πούλησε πρός 180 δραχμές τό κιλό. Πόσα χρήματα εἰσέπραξε;
3. Ἕνας γεωργός πούλησε 750 κιλά λάδι πρός 78 δραχμές τό κιλό. Πόσες δραχμές εἰσέπραξε;
4. Ἕνας ἀμπελουργός πούλησε 1.875 κιλά σταφίδα πρός 28 δραχμές τό κιλό καί 15.784 κιλά κρασοστάφυλα πρός 8 δραχμές τό κιλό. Μέ τά χρήματα πού εἰσέπραξε πλήρωσε ἕνα χρέος πού εἶχε στήν Ἀγροτική Τράπεζα καί τοῦ ἔμειναν καί 88.749 δραχμές. Πόσα χρήματα ἦταν τό χρέος του;
5. Νά κάμεις καί σύ ἕνα δικό σου πρόβλημα σχετικό μέ τή ζωή σου μέσα στό περιβάλλον σου.

4. Ἡ διαίρεση

Νά θυμηθεῖς αὐτά πού ἔμαθες στίς ἄλλες τάξεις γιά τή διαίρεση.

α) Πότε κάνουμε διαίρεση; Νά διατυπώσεις χωριστό κανόνα γιά τή μέτρηση καί γιά τό μερισμό.

β) Πόσους ἀριθμούς ἔχουμε στή διαίρεση καί πῶς λέγεται ὁ καθένας;

γ) Πῶς λέγεται τό ἀποτέλεσμα τῆς διαιρέσεως δυό ἀριθμῶν;

δ) Ἰσχύει στή διαίρεση ἡ ἀντιμεταθετικότητα;

ε) Πῶς κάνουμε τή δοκιμή τῆς διαιρέσεως;

στ) Πῶς διαιροῦμε σύντομα ἕναν ἀκέραιο ἀριθμό μέ 10, 100, 1000 κτλ.

Ἀσκήσεις

1. Νά κάμεις τίς διαιρέσεις

Μέ τό νοῦ	α) 15 : 5 =	δ) 120 : 4 =	ζ) 1375 : 10 =
	β) 36 : 4 =	ε) 140 : 5 =	η) 2.578 : 100 =
	γ) 64 : 8 =	στ) 200 : 10 =	θ) 18.789 : 1000 =

Γραπτά	α) 174 : 6 =	δ) 2.575 : 25 =
	β) 275 : 15 =	ε) 7.848 : 28 =
	γ) 647 : 25 =	στ) 65.744 : 12 =

Προβλήματα

1. Στό φιλόπτωχο ταμεῖο τῆς ἐνορίας συγκέντρωσαν μέ ἔρανο 6.750 δραχμές καί τίς μοίρασαν σέ 5 φτωχές οἰκογένειες. Πόσες δραχμές θά πάρει ἡ κάθε μιά οἰκογένεια; Νά προσδιορίσεις τό εἶδος τῆς διαιρέσεως.
2. Ἕνα σχολεῖο ἔχει 220 μαθητές καί ἀποφασίστηκε νά κάμουν μιά ἐκδρομή μέ 5 λεωφορεῖα. Πόσοι μαθητές θά μποῦν στό κάθε λεωφορεῖο;
3. Ἕνας λαδέμπορος ἔχει σέ βαρέλια 425 κιλά λάδι καί θέλει νά τό βάλει σέ δοχεῖα τῶν 17 κιλῶν. Πόσα δοχεῖα θά χρειαστεῖ; Νά προσδιορίσεις τό εἶδος τῆς διαιρέσεως.
4. Νά κάμεις καί σύ δικό σου πρόβλημα διαιρέσεως σχετικό μέ τή ζωή μέσα στό περιβάλλον σου.

Κεφάλαιο ΙΙ. Οἱ δεκαδικοί ἀριθμοί. (Ἐπανάληψη ὕλης Τετάρτης τάξης)

α. Οἱ δεκαδικές μονάδες. Γραφή καί ἀπαγγελία.

α) Τά δέκατα.

Δέκατο λέγεται τό ἕνα ἀπό τά 10 ἴσα μέρη, πού χωρίσαμε τήν ἀκέραιη μονάδα.

Τά δέκατα γράφονται μέ ἕνα δεκαδικό ψηφίο π.χ. 0,1 0,5 0,9.

Τά 10 δέκατα εἶναι μιά ὁλόκληρη μονάδα (ἀκέραιη μονάδα).

β) Τά ἑκατοστά.

Ἑκατοστό λέγεται τό ἕνα ἀπό τά 100 ἴσα μέρη πού χωρίσαμε τήν ἀκέραιη μονάδα.

Τά ἑκατοστά γράφονται μέ δυό δεκαδικά ψηφία.

Τό ἕνα ἑκατοστό γράφεται 0,01 καί τό διαβάζουμε: Ἕνα ἑκατοστό ἤ μηδέν ἀκέραιος καί ἕνα ἑκατοστό.

Τά δυό ἑκατοστά γράφονται	0,02	καί διαβάζουμε:	Δυό ἑκατοστά.
Τά δέκα ἑκατοστά »	0,10	»	Δέκα ἑκατοστά.
Τά 99 » »	0,99	»	99 ἑκατοστά.

Τά 100 ἑκατοστά εἶναι μιά ὁλόκληρη μονάδα (ἀκέραιη μονάδα).

γ) Τά χιλιοστά.

Χιλιοστό λέγεται τό ἕνα ἀπό τά 1000 ἴσα μέρη πού χωρίσαμε τήν ἀκέραιη μονάδα.

Χιλιοστά τοῦ μέτρου εἶναι οἱ γραμμές ἤ χιλιοστά, ὅπως ἔμαθες.

Χιλιοστά τοῦ κιλοῦ εἶναι τά γραμμάρια.

Τά χιλιοστά γράφονται μέ τρία δεκαδικά ψηφία.

Τό 1 χιλιοστό γράφεται 0,001 καί διαβάζεται 1 χιλιοστό ἤ μηδέν ἀκέραιος καί ἕνα χιλιοστό.

Τά δέκα χιλιοστά γράφονται	0,010	καί διαβάζονται	10 χιλιοστά.
Τά 100 χιλιοστά	0,100		100
Τά 999	0,999		999

δ) Τά δεκάκις χιλιοστά.

Δεκάκις χιλιοστό λέγεται τό ἕνα ἀπό τά δέκα χιλιάδες ἴσα μέρη, πού χωρίσαμε τήν ἀκέραιη μονάδα.

Τά δεκάκις χιλιοστά γράφονται μέ τέσσερα δεκαδικά ψηφία.

ε) Τά ἑκατοντάκις χιλιοστά.

Ἑκατοντάκις χιλιοστό λέγεται τό ἕνα ἀπό τά 100.000 ἴσα μέρη, πού χωρίσαμε τήν ἀκέραιη μονάδα. Τά ἑκατοντάκις χιλιοστά στήν πραγματικότητα δέν εἶναι πρακτικές δεκαδικές μονάδες καί δέν αἰσθητοποιοῦνται εὔκολα. Τά ἑκατοντάκις χιλιοστά γράφονται μέ πέντε δεκαδικά ψηφία.

στ) Τά ἑκατομμυριοστά.

Ἑκατομμυριοστό λέγεται τό ἕνα ἀπό τά 1.000.000 ἴσα μέρη, πού χωρίσαμε τήν ἀκέραιη μονάδα.

Τά ἑκατομμυριοστά εἶναι καί αὐτά πολύ μικρές δεκαδικές μονάδες, πού δέν αἰσθητοποιοῦνται εὔκολα, μᾶς χρειάζονται ὅμως πολύ στίς πράξεις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν καί τίς χρησιμοποιοῦν στίς μικρομετρήσεις.

Τά ἑκατομμυριοστά γράφονται μέ ἕξι δεκαδικά ψηφία.

Δεκαδικοί ἀριθμοί λέγονται οἱ ἀριθμοί πού φανερώνουν ἀκέραιες μονάδες καί δεκαδικές ὑποδιαιρέσεις τῆς ἀκέραιης μονάδας, δέκατα, ἑκατοστά, χιλιοστά κτλ. ἤ μόνο δεκαδικές ὑποδιαιρέσεις τῆς ἀκέραιης μονάδας.

Δεκαδικοί ἀριθμοί εἶναι οἱ ἀριθμοί 5,50 μέτρα, 20,50 δραχμές, 40,550 κιλά, 0,25 μέτρα, 0,70 δραχμές, 0,450 κιλά.

Εἰκόνα τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος τῶν ὑποδιαιρέσεων τῆς ἀκέραιης μονάδας

1 ἀκερ. μονάδα	= 10 δέκατα	= 100 ἑκ/στά	= 1000 χιλ/στά	= 10.000 δ.χ.
1	= 10 »	= 100		= 1.000
	1 »	= 10 »		= 100
		1 »		= 10

Μπορεῖς νά συμπληρώσεις τόν πίνακα τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος καί μέ τίς ἄλλες δεκαδικές μονάδες.

Παρατήρησε ὅτι κάθε δεκαδική μονάδα τοῦ συστήματος εἶναι 10 φορές μικρότερη ἀπό τήν προηγούμενή της.

Ὁ παρακάτω πίνακας βοηθᾶ πολύ νά καταλάβουμε τή δεκαδική διάταξη τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

Ἑκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Ὑποδιαστολή	Δέκατα	Ἑκατοστά	Χιλιοστά	Δεκάκις χιλιοστά	Ἑκατοντάκις χιλιοστά
		2	,	4				
		0	,	3	7			
		0	,	1	6	5		
		0	,	0	2	7		

Πρόσεξε τή θέση τῆς ὑποδιαστολῆς. Δεξιά της εἶναι τό δεκαδικό μέρος τοῦ ἀριθμοῦ. Ἀριστερά της εἶναι τό ἀκέραιο μέρος τοῦ ἀριθμοῦ.

Οἱ μονάδες κάθε θέσεως πρός τά δεξιά γίνονται 10 φορές μικρότερες ἀπό τήν προηγούμενη. Οἱ μονάδες πρός τά ἀριστερά τῆς ὑποδιαστολῆς εἶναι ἀκέραιες καί σέ κάθε θέση ἔχουμε 10 φορές μεγαλύτερες μονάδες ἀπό τήν προηγούμενη.

Ἀσκήσεις

1. Νά γράψεις καί νά ἀπαγγείλεις τούς δεκαδικούς ἀριθμούς.

α) Τέσσερα δέκατα = 0,4 — δ) 1 ἀκέραιος καί 2 δέκατα =

β) 6 δέκατα = — ε) 5 ἀκέραιοι καί 8 δέκατα =

γ) 9 δέκατα = — στ) 10 ἀκέραιοι καί 1 δέκατο =

2. Νά γράψεις καί νά διαβάσεις τούς δεκαδικούς ἀριθμούς.

α) 0,04 = Μηδέν ἀκέραιος καί 4 ἑκατοστά. Κλάσμα $\frac{4}{100}$

β) 5,08 = Μεικτός $5\frac{8}{100}$

6. *Οἱ ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.*

1η Ἰδιότητα. Παραδείγματα. 6,9 μέτρα ὕφασμα.
6,90 μέτρα ὕφασμα.
6,900 μέτρα ὕφασμα.

Παρατήρησε τούς τρεῖς δεκαδικούς ἀριθμούς. Εἶναι συγκεκριμένοι ἀριθμοί καί καθένας μετρᾶ μιά ποσότητα ὑφάσματος.

Ποιά σχέση ἔχουν μεταξύ τους οἱ ἀριθμοί αὐτοί;

Φανερώνουν τήν ἴδια ποσότητα ὑφάσματος, γιατί εἶναι ἴσοι ἀριθμοί. Τά μηδενικά δέν ἔχουν καμιά ἀξία.

Ἡ ἀξία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δέν ἀλλάζει, ἄν στό τέλος τοῦ δεκαδικοῦ μέρους γράψουμε ἤ σβήσουμε μηδενικά.

2η Ἰδιότητα. Παραδείγματα. Ἔχουμε 8,837 μέτρα ὕφασμα.
Ἔχουμε 88,37 μέτρα ὕφασμα.

Οἱ δυό συγκεκριμένοι δεκαδικοί ἀριθμοί μετροῦν δυό ποσότητες ὑφάσματος. Ἔχουν τά ἴδια ψηφία καί μόνο ἡ ὑποδιαστολή τοῦ δεύτερου βρίσκεται μιά θέση δεξιότερα.

Ποιά διαφορά ἔχουν σέ ἀξία;

Ὁ δεύτερος ἀριθμός δείχνει ποσότητα ὑφάσματος 10 φορές μεγαλύτερη σέ σχέση μέ τόν πρῶτο ἀριθμό. Ἡ μετακίνηση τῆς ὑποδιαστολῆς μιά θέση πρός τά δεξιά μεγαλώνει τόν ἀριθμό ὁλόκληρο δέκα φορές, δηλαδή σάν νά τόν πολλαπλασιάζουμε μέ τό 10. Ἄν τή μετακινήσουμε μιά θέση πρός τά ἀριστερά ὁ ἀριθμός γίνεται 10 φορές μικρότερος, δηλαδή σάν νά διαιρεῖται μέ τό 10.

Ἄν μετακινήσουμε τήν ὑποδιαστολή τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μιά θέση πρός τά δεξιά, ἡ ἀξία του μεγαλώνει 10 φορές, ἄν τήν μετακινήσουμε δυό θέσεις ἡ ἀξία του μεγαλώνει 100 φορές κτλ.

Ἄν τήν μετακινήσουμε μιά θέση ἀριστερά ἡ ἀξία του μικραίνει 10 φορές καί ἄν τήν μετακινήσουμε δυό θέσεις ἡ ἀξία του μικραίνει 100 φορές κτλ.

3η Ἰδιότητα. Παραδείγματα. 8 μέτρα ὕφασμα
8,0 μέτρα ὕφασμα
8,00 μέτρα ὕφασμα

Καί οἱ τρεῖς ἀριθμοί μετροῦν τήν ἴδια ποσότητα ὑφάσματος. Ὁ ἀριθμός 8 ἀκέραιος πῆρε μορφή δεκαδικοῦ μέ τό νά τοῦ βάλουμε ὑποδιαστολή καί μηδενικά, χωρίς νά ἀλλάξει ἡ ἀξία του.

Κάθε ἀκέραιο ἀριθμό μποροῦμε νά τόν κάνουμε δεκαδικό ἄν τοῦ βάλουμε ὑποδιαστολή καί ὅσα μηδενικά θέλουμε. Ἡ ἀξία του δέν ἀλλάζει.

γ. Οἱ πράξεις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

1. Ἡ πρόσθεση

Πρόβλημα: Ἡ μητέρα τοῦ Νίκου ἀγόρασε ἀπό τό παντοπωλεῖο διάφορα τρόφιμα καί πλήρωσε τά ἑξῆς ποσά. Γιά λάδι 168,80 δραχμές, γιά πατάτες 24,60 δραχ., γιά ρύζι 64 δραχμές καί γιά ἕνα φακελάκι πιπέρι 0,80 δραχ. Πόσα χρήματα πλήρωσε συνολικά;

Δίδονται: Οἱ τιμές τῶν πραγμάτων πού ἀγόρασε ἡ μητέρα ἀπό τό παντοπωλεῖο.

Ζητοῦνται: Τό ἄθροισμα τῶν χρημάτων πού πλήρωσε.

Σκέψη: Γιά νά βροῦμε πόσα χρήματα πλήρωσε ἡ μητέρα τοῦ Νίκου στό παντοπωλεῖο, γιά τά τρόφιμα πού ἀγόρασε, πρέπει νά βροῦμε τό ἄθροισμα τῶν μερικῶν ποσῶν.

Ἄθροισμα: 168,80 + 24,60 + 64 + 0,80 =

Διάταξη τῆς πράξεως

$$\begin{array}{rl} 168{,}80 & \\ 24{,}60 & \\ 64{,}00 & \text{προσθετέοι} \\ +\ 0{,}80 & \\ \hline 258{,}20 & \text{ἄθροισμα} \end{array}$$

Ἀπάντηση: Ἡ μητέρα τοῦ Νίκου πλήρωσε στό παντοπωλεῖο 258,20 δραχμές.

Κανόνας: Γιά νά προσθέσουμε δεκαδικούς ἀριθμούς, γράφουμε τόν ἕνα προσθετέο κάτω ἀπό τόν ἄλλο ἔτσι, πού οἱ ὑποδιαστολές τους νά βρίσκονται στήν ἴδια στήλη. Προσέχουμε ὅμως ἀκόμη, ὅταν τούς γράφουμε, νά εἶναι οἱ μονάδες, οἱ ἑκατοντάδες κτλ. τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν στίς ἀντίστοιχες στῆλες τους. Τό ἴδιο προσέχουμε νά γίνει καί στό δεκαδικό μέρος τοῦ ἀριθμοῦ, δηλαδή νά εἶναι τά δέκατα, τά ἑκατοστά, τά χιλιοστά κτλ. στίς ἀντίστοιχες στῆλες. Κάνουμε τήν πρόσθεση ἀρχίζοντας ἀπό τά δεξιά τοῦ ἀριθμοῦ, δηλαδή ἀπό τό τελευταῖο δεκαδικό ψηφίο. Ὅταν τελειώσουμε τήν πρόσθεση τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ, γράφουμε τήν ὑποδιαστολή στό ἄθροισμα καί συνεχίζουμε τήν πρόσθεση καί στό ἀκέραιο μέρος τῶν προσθετέων μας.

Πρόσεξε: Ὅταν ἕνας ἤ καί περισσότεροι προσθετέοι εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, ὅπως εἶναι στό πρόβλημά μας ὁ ἀριθμός 64, τούς γράφουμε στή θέση τῶν ἀκεραίων ὅπως ξέρουμε, τούς βάζουμε ὑποδιαστολή καί συμπληρώνουμε τίς θέσεις τῶν δεκαδικῶν ψηφίων μέ μηδενικά.

Ὅταν ἀποκτήσεις εὐχέρεια στήν πρόσθεση τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν μπορεῖς νά μή βάνεις τήν ὑποδιαστολή στούς ἀκέραιους ἀριθμούς καί οὔτε νά συμπληρώνεις τίς θέσεις τῶν δεκαδικῶν ψηφίων μέ μηδενικά.

Ἀσκήσεις

Νά κάμεις τίς προσθέσεις:

α) 8,5+2,7+6,45+7+25 =
β) 136,5+24,90+6,145+12+5 =
γ) 36+25+64,5+6,40 =
δ) 138+0,80+6,45+1.250 =

Προβλήματα

Ἕνας ἔμπορος ὑφασμάτων ἀγόρασε γιά τό κατάστημά του διάφορα ὑφάσματα. Ἀπό μιά ποιότητα ἀγόρασε 14,70 μέτρα καί πλήρωσε γι' αὐτό

2.560 δραχ. ἀπό μιά ἄλλη ποιότητα ἀγόρασε 14,75 μ. καί πλήρωσε 1.475,50 δραχ., καί ἀπό μιά τρίτη ποιότητα 43,80 μ. καί πλήρωσε 9.890 δραχμές. Πόσα μέτρα ὕφασμα ἀγόρασε γιά τό κατάστημά του καί πόσα χρήματα πλήρωσε;

Νά κάμεις καί σύ ἕνα δικό σου πρόβλημα προσθέσεως δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

2. Ἡ ἀφαίρεση

Πρόβλημα: Ἕνα δοχεῖο λαδιοῦ (ντίνα) περιέχει 378,250 κιλά λάδι καί ἀπ' αὐτό πουλήσαμε 124,500 κιλά. Πόσα κιλά λάδι περιέχει ἀκόμη τό δοχεῖο;

Δίδονται: Τό περιεχόμενο τοῦ δοχείου 378,250 κιλά. Πουλήθηκαν 124,500 κιλά.

Ζητοῦνται: Τό ὑπόλοιπο. Χ; κιλά μένουν.

Σκέψη: Γιά νά λύσουμε τό πρόβλημα αὐτό θά κάνουμε ἀφαίρεση καί θά ἀφαιρέσουμε τά 124,500 κιλά, πού πουλήθηκαν ἀπό τό περιεχόμενο τοῦ δοχείου, δηλαδή ἀπό τά 387,250 κιλά. Τό ὑπόλοιπο, πού θά βροῦμε, εἶναι τά κιλά πού μένουν στό δοχεῖο ἀκόμη.

Διάταξη τῆς πράξεως

378,250	μειωτέος
−124,500	ἀφαιρετέος
253,750	ὑπόλοιπο ἤ διαφορά

Ἀπάντηση: Τό δοχεῖο περιέχει ἀκόμη 253,750 κιλά λάδι.

Κανόνας. Γιά νά ἀφαιρέσουμε δεκαδικό ἀριθμό ἀπό δεκαδικό γράφουμε τόν ἀφαιρετέο κάτω ἀπό τό μειωτέο καί προσέχουμε οἱ ὑποδιαστολές τους νά εἶναι στήν ἴδια στήλη. Προσέχουμε ἀκόμη οἱ μονάδες, οἱ δεκάδες, οἱ ἑκατοντάδες κτλ. στό ἀκέραιο μέρος τῶν ὅρων νά βρίσκονται στίς ἀντίστοιχες στῆλες. Τό ἴδιο προσέχουμε καί στό δεκαδικό μέρος τους, δηλαδή τά δέκατα, τά ἑκατοστά, τά χιλιοστά κτλ. νά βρίσκονται στίς ἀντίστοιχες στῆλες. Ἀρχίζουμε τήν ἀφαίρεση ἀπό τά δεξιά τῶν ὅρων, δηλαδή ἀπό τό τελευταῖο δεκαδικό ψηφίο. Ὅταν τελειώσουμε τήν ἀφαίρεση τῶν δεκαδικῶν ψηφίων, γράφουμε τήν ὑποδιαστολή στό ὑπόλοιπο καί συνεχίζουμε τήν ἀφαίρεση καί στό ἀκέραιο μέρος τῶν ὅρων, ὅπως ξέρουμε.

Πρόσεξε: Ὅταν ὁ ἕνας ἀπό τούς ὅρους τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός τοῦ βάζουμε ὑποδιαστολή καί συμπληρώνουμε μέ μηδενικά τίς θέσεις τῶν δεκαδικῶν ψηφίων. Μέ μηδενικά συμπληρώνουμε ἐπίσης τίς θέσεις τῶν δεκαδικῶν ψηφίων πού λείπουν.

Παρακολούθησε τά παρακάτω παραδείγματα καί κάμε τίς ἀφαιρέσεις.

375,5	←	Συμπλήρωσε τίς κενές
−226,635		θέσεις μέ μηδενικά
	←	Κάμε τήν ἀφαίρεση
575	←	Βάλε ὑποδιαστολή στόν ἀκέραιο μειωτέο
−324,55		καί συμπλήρωσε μέ μηδενικά τίς θέσεις.
	←	Κάμε τήν ἀφαίρεση

Ἀσκήσεις

Νά κάμεις τίς ἀφαιρέσεις

α) 357,75−148,25 =	γ) 742,5−600 =	ε) 357,855−25,25 =
β) 1.674−895,45 =	δ) 2.578−0,750 =	στ) 8.985−1.930,5 =

Πρόβλημα

Ἡ Μαρία ἀγόρασε ἀπό τό βιβλιοπωλεῖο διάφορα σχολικά εἴδη πού ἄξιζαν 748,50 δραχμές. Πόσα ρέστα θά πάρει, ἄν δώσει στό ταμεῖο τοῦ καταστήματος ἕνα χιλιόδραχμο;

Νά κάμεις καί σύ δικά σου προβλήματα μέσα ἀπό τή ζωή σου.

3. Ὁ πολλαπλασιασμός

Πρόβλημα. Ἡ Νίκη ἀγόρασε 8 κιλά πατάτες πρός 12,6 δραχμές τό κιλό. Πόσες δραχμές θά πληρώσει;

Σκέψη: Ἡ Νίκη θά πληρώσει 12,6 δραχμές γιά τό κάθε κιλό πατάτες πού ἀγόρασε. Δηλαδή θά πληρώσει 8 φορές τίς 12,6 δραχμές. Ἀφοῦ γνωρίζουμε πόσο ἀξίζει ἡ μιά μονάδα (τό ἕνα κιλό) καί ζητοῦμε νά βροῦμε πόσο ἀξίζουν τά πολλά κιλά, θά κάνουμε πολλαπλασιασμό.

Δίδονται:
ἡ τιμή μιᾶς μονάδας = 12,6 δραχ.
οἱ πολλές μονάδες = 8 κιλά πού ἀγοράστηκαν

Ζητοῦνται:
Ἡ ἀξία τῶν πολλῶν μονάδων Χ, δραχμές

Διάταξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

12,6	πολλαπλασιαστέος	παράγοντες
× 8	πολλαπλασιαστής	
100,8	γινόμενο	

Ἀπάντηση: Τά 8 κιλά οἱ πατάτες,πρός 12,60 δραχμές τό κιλό, ἀξίζουν 100,80 δραχμές.

> **Κανόνας:** Γιά νά πολλαπλασιάσουμε δεκαδικό ἀριθμό μέ ἀκέραιο ἤ δεκαδικό ἀριθμό μέ δεκαδικό τούς πολλαπλασιάζουμε σάν νά εἶναι ἀκέραιοι. Στό τελικό γινόμενο χωρίζουμε ἀπό τά δεξιά πρός τά ἀριστερά, τόσα δεκαδικά ψηφία, ὅσα ἔχουν οἱ παράγοντες τοῦ γινομένου.

Νά θυμηθεῖς πώς κάνουμε σύντομα ἕναν πολλαπλασιασμό δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μέ 10, 100, 1000 κτλ.

Ἀσκήσεις

1. Νά κάμεις τούς πολλαπλασιασμούς.

α) 354 × 8,2 =
β) 25,8 × 8,5 =
γ) 23,5 × 10 =
δ) 26,75 × 100 =
ε) 32,7 × 0,7 =
στ) 3,5 × 1000 =

Προβλήματα

1. Ἡ μητέρα τῆς Μαρίας ἀγόρασε 5,5 κιλά ρύζι πρός 28,90 δραχμές τό κιλό. Πόσες δραχμές θά πληρώσει;
2. Ἕνας σταφιδοπαραγωγός πούλησε 1.275,8 κιλά σταφίδα πρός 28,50 δραχμές τό κιλό. Πόσες δραχμές εἰσέπραξε;
3. Κάμε δικά σου προβλήματα.

4. Ἡ διαίρεση

α. Διαίρεση δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μέ ἀκέραιο.

Πρόβλημα: Γιά νά κατασκευάσουμε 6 πουκάμισα χρειάστηκαν 15,90 μέτρα ὕφασμα. Πόσα μέτρα ὕφασμα χρειάστηκε γιά τό καθένα πουκάμισο;

Σκέψη: Γιά νά κατασκευαστοῦν τά 6 ὅμοια πουκάμισα μοιράστηκαν τά 15,90 μέτρα ὕφασμα σέ 6 ἴσα μέρη. Ἔγινε δηλαδή μιά διαίρεση τῆς ποσότητας τοῦ ὑφάσματος σέ 6 ἴσα μέρη.

Θά γίνει μιά διαίρεση μερισμοῦ.

15,90 : 6 = 2,65

Δίδονται:

Ἡ ποσότητα πού μοιράζεται: 15,90 μέτρα
Ὁ ἀριθμός πού μοιράζει: 6 πουκάμισα

Ζητοῦνται:

Χ; μέτρα τό μερίδιο (τό κομμάτι)

Διάταξη τῆς διαιρέσεως

Διαιρετέος	15,90	6 διαιρέτης
	39	2,65 πηλίκο
	30	
	0	
	ὑπόλοιπο	

Ἀπάντηση: Γιά τό κάθε πουκάμισο χρειάστηκαν 2,65 μέτρα.

Κανόνας: Γιά νά διαιρέσουμε δεκαδικό ἀριθμό μέ ἀκέραιο κάνουμε τή διαίρεση ὅπως καί στούς ἀκέραιους ἀριθμούς. Ὅταν τελειώσει ἡ διαίρεση τῶν ψηφίων τοῦ ἀκέραιου μέρους τοῦ διαιρετέου, γράφουμε ὑποδιαστολή στό πηλίκο καί συνεχίζουμε τή διαίρεση καί τῶν δεκαδικῶν ψηφίων του.

β. Διαίρεση ἀκεραίου ἀριθμοῦ μέ δεκαδικό.

Πρόβλημα: Ἕνας παντοπώλης ἔδωσε 437 δραχμές καί ἀγόρασε πατάτες γιά τό κατάστημά του πρός 9,5 δραχμές τό κιλό. Πόσα κιλά πατάτες ἀγόρασε;

Σκέψη: Μᾶς δίδονται πολλές μονάδες (437 δραχμές) καί ἡ ἀξία τῆς μιᾶς μονάδας (9,5 δραχμές τό κιλό) καί ζητοῦμε νά βροῦμε πόσες εἶναι οἱ μονάδες πού μᾶς δόθηκε ἡ ἀξία τους (Χ; κιλά πατάτες ἀγοράστηκαν μέ τίς 437 δραχμές).

Θά γίνει μιά διαίρεση μετρήσεως. 437 : 9,5 =

Διάταξη τῆς διαιρέσεως

Διαιρετέος	437	9,5 Διαιρέτης
	4370	95
	570	46 πηλίκο
	00	

Ἀπάντηση: Ἀγόρασε 46 κιλά πατάτες.

Παρατήρηση: Ὁ διαιρέτης ἦταν δεκαδικός ἀριθμός (9,5). Μέ δεκαδικό διαιρέτη δέν εἶναι εὔκολη ἡ διαίρεση.

Γι' αὐτό τόν κάναμε ἀκέραιο σβήνοντάς του τήν ὑποδιαστολή. Μέ τήν πράξη μας ὅμως αὐτή, ἐπειδή εἶχε ἕνα δεκαδικό ψηφίο, τόν μεγαλώσαμε 10 φορές καί γιά νά μήν ἀλλάξει τό πηλίκο μας μεγαλώσαμε καί τό διαιρετέο μας 10 φορές, βάζοντάς του ἕνα μηδενικό στό τέλος του, γιατί ἦταν ἀκέραιος.

Ἂν ὁ διαιρετέος ἦταν καί αὐτός δεκαδικός, θά μετακινούσαμε τήν ὑποδιαστολή του τόσες θέσεις δεξιά, ὅσα δεκαδικά ψηφία εἶχε ὁ δεκαδικός διαιρέτης του.

Θυμήσου ἐδῶ τίς ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν πού ἔμαθες.

Προσπάθησε νά διατυπώσεις ἕνα γενικό κανόνα, πῶς διαιροῦμε, ὅταν ὁ διαιρέτης μας εἶναι δεκαδικός ἀριθμός.

Παράδειγμα διαιρέσεως δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μέ δεκαδικό.

Διάταξη τῆς διαιρέσεως

186,75 : 2,25 =

Διαιρετέος	Διαιρέτης
186,75	2,25
18675	225
−675	83 πηλίκο
−0	

γ. Διαίρεση ἀκεραίων μέ πηλίκο δεκαδικό ἀριθμό (Μέ προσέγγιση δεκάτου, ἑκατοστοῦ κτλ.)

Πρόβλημα: Ἡ Μαρία ἀγόρασε 4 μέτρα ὕφασμα καί ἔδωσε 615 δραχμές. Πόσες δραχμές ἀξίζει τό μέτρο;

Εἶναι εὔκολο νά σκεφθοῦμε ὅτι τό πρόβλημα αὐτό λύεται μέ μιά διαίρεση μερισμοῦ καί μέ διαιρετέο καί διαιρέτη ἀκέραιους ἀριθμούς.

Διάταξη τῆς διαιρέσεως

Διαιρετέος	διαιρέτης
615	4
21	153,75
15	
30	
20	

Στό ὑπόλοιπο 3 βάλαμε μηδενικό καί ὑποδιαστολή στό πηλίκο καί ἔτσι βρίσκουμε δέκατα.

Στό ὑπόλοιπο 2 βάλαμε μηδενικό καί συνεχίσαμε τή διαίρεση μέ ἑκατοστά στό πηλίκο.

Ἀπάντηση: Πλήρωσε τό μέτρο (ἀξίζει τό μέτρο) 153,75 δραχμές.

Μέ ἕνα μηδενικό στό ὑπόλοιπο καί ὑποδιαστολή στό πηλίκο ἔχουμε πηλίκο μέ προσέγγιση δεκάτου.

Μέ δεύτερο μηδενικό στό ὑπόλοιπο ἔχουμε πηλίκο μέ προσέγγιση ἑκατοστοῦ.

Μέ τρίτο μηδενικό στό ὑπόλοιπο ἔχουμε πηλίκο μέ προσέγγιση χιλιοστοῦ κτλ.

Μέ τόν τρόπο αὐτό πετυχαίνουμε δυό πράγματα:

α) Νά κάνουμε ὅσο μποροῦμε πιό τέλεια τή διαίρεση καί

β) Νά κάνουμε καί διαιρέσεις μέ τό διαιρετέο τους μικρότερο ἀπό τό διαιρέτη. Στίς διαιρέσεις αὐτές τό πηλίκο εἶναι πιό μικρό πάντοτε ἀπό τήν ἀκέραιη μονάδα.

Ἀσκήσεις

1. Νά κάμεις τίς διαιρέσεις μέ προσέγγιση.

α) 669 : 5 = β) 794 : 6 = γ) 3.815 : 7 =

2. Νά κάμεις τίς διαιρέσεις (μέ πιό μικρό διαιρετέο ἀπό τό διαιρέτη)

α) 60 : 80 = β) 75 : 91 = γ) 312 : 415 =

δ. Διαίρεση δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μέ τό 10, 100, 1000 κτλ.

Παράδειγμα: Μέ 83,5 μέτρα ὕφασμα ἔφτιαξαν 10 κουρτίνες γιά ξενοδοχεῖο. Πόσα μέτρα ὕφασμα χρειάστηκε γιά τήν κάθε κουρτίνα;

Εὔκολα καταλαβαίνουμε πώς θά κάνουμε μιά διαίρεση μερισμοῦ. Θά διαιρέσουμε τό δεκαδικό ἀριθμό 83,5 μέτρα μέ τό 10. Ἡ διαίρεση αὐτή γίνεται ὅπως ἔμαθες στή διαίρεση δεκαδικοῦ μέ ἀκέραιο.

Πιό σύντομα ὅμως γίνεται, ὅπως ἔμαθες καί στήν Τετάρτη τάξη ἐφαρμόζοντας ἐδῶ τήν ἰδιότητα τῶν δεκαδικῶν «τί παθαίνει ὁ δεκαδικός ἀριθμός ὅταν μετακινήσουμε τήν ὑποδιαστολή του πρός τά ἀριστερά». Θυμήσου ὅτι σέ κάθε μετακίνηση πρός τά ἀριστερά (σέ κάθε θέση) γίνεται ὁ ἀριθμός 10 φορές μικρότερος.

Έτσι μπορούμε νά βρούμε τό πηλίκο άμέσως

83,5 : 10 = 8,35

Επομένως θά χρειαστοῦν γιά τήν κάθε κουρτίνα 8,35 μέτρα.

Άλλο παράδειγμα:

83,5 : 100 = 0,835

83,5 : 1.000 = 0,0835

Ασκήσεις

1. Νά κάμεις σύντομα τίς διαιρέσεις.

α) 185,4 : 10 =	γ) 185,4 : 100 =	ε) 185,4 : 1000 =
β) 542,85 : 100 =	δ) 0,75 : 10 =	στ) 0,5 : 100 =

Προβλήματα σύνθετα ἀκέραιων καί δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

1. Ένας παντοπώλης άγόρασε γιά τό κατάστημά του 100 κιλά πατάτες καί ἔδωσε 1.240 δραχμές. Πόσες δραχμές άγόρασε τό ένα κιλό καί πόσες δραχμές θά εἰσπράξει, ὅταν τίς πουλήσει, ἄν κερδίζει στό κάθε κιλό 1,30 δραχμές;
2. Μιά οἰκογένεια ξόδεψε γιά τή θέρμανση τοῦ σπιτιοῦ της στούς τρεῖς μῆνες τοῦ χειμώνα τά ἑξῆς ποσά: Τόν Δεκέμβριο 1.378 δραχμές, τόν Ἰανουάριο 1.178,50 δραχ. καί τό Φεβρουάριο 198,30 δραχμές περισσότερο ἀπό ὅσα ξόδεψε τόν Ἰανουάριο. Πόσα χρήματα ξόδεψε γιά τή θέρμανση καί τούς τρεῖς μῆνες;
3. Ένας ἔμπορος οἰκιακῶν εἰδῶν ἀγόρασε γιά τό κατάστημά του 15 δωδεκάδες πιάτα μέ 366 δραχμές τή δωδεκάδα καί τά πούλησε μέ κέρδος 7,30 δραχμές τό πιάτο. Πόσες δραχμές ἔδωσε γιά νά ἀγοράσει τά πιάτα, πόσα χρήματα εἰσέπραξε καί πόσα χρήματα κέρδισε ἀπό τό ἐμπόριο τῶν πιάτων;
4. Ένας οἰκογενειάρχης εἶναι δημόσιος ὑπάλληλος καί παίρνει μισθό τό μήνα 14.876 δραχμές. Ἀπό τό μισθό του πλήρωσε ἀμέσως τή ΔΕΗ, γιά ρεῦμα, 864,40 δραχμές καί στόν ΟΤΕ, γιά τό τηλέφωνο, 577,80 δραχμές. Πόσα χρήματα τοῦ μένουν γιά τίς ἄλλες οἰκογενειακές του ἀνάγκες;
5. Ένας γεωργός ἀγόρασε ἕνα ἀμπέλι καί ἕνα λιόφυτο καί ἔδωσε καί γιά τά δυό 275.000 δραχμές. Ἡ ἀξία τοῦ ἀμπελιοῦ εἶναι 15.875 δραχμές μεγαλύτερη ἀπό τά μισά τῶν χρημάτων, πού ἔδωσε καί γιά τά δυό κτήματα. Πόσο ἄξιζε τό ἀμπέλι καί πόσο τό λιόφυτο;
6. Ἀπό τά παραπάνω κτήματα, πού ἀγόρασε ὁ γεωργός, πῆρε ἀμέσως τόν πρῶτο χρόνο τά ἑξῆς εἰσοδήματα: ἀπό τό ἀμπέλι 1.375 κιλά σταφίδα καί τήν πούλησε πρός 28,50 δραχμές τό κιλό, καί ἀπό τό λιόφυτο

578,500 κιλά λάδι καί τό πούλησε πρός 68,40 δραχμές τό κιλό. Πόσα χρήματα ἀπό τά χρήματα τῆς ἀγορᾶς του κάλυψε ἀμέσως τόν πρῶτο χρόνο μέ τά εἰσοδήματα τῶν κτημάτων;

7. Ἕνας πτηνοτρόφος πουλεῖ τά αὐγά του μέ 96 δραχμές τήν καρτέλα, πού χωρεῖ 30 αὐγά. Πόσο πρέπει νά πουλεῖ τά αὐγά στό κατάστημά του ὁ ἔμπορος, γιά νά κερδίζει 10,80 δραχμές στή δωδεκάδα;

Κεφάλαιο III. *Ἡ Διαιρετότητα*

1. Πότε ἕνας ἀριθμός εἶναι διαιρετός μέ ἕναν ἄλλο.

Παραδείγματα: Ὁ ἀκέραιος ἀριθμός 18 διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τόν ἀριθμό 3, γιατί 18 : 3 = 6.

Ὁ ἀριθμός 18 διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό 6, γιατί 18 : 6 = 3.

Οἱ ἀριθμοί 6 καί 3 λέγονται διαιρέτες τοῦ ἀκέραιου 18.

Ὁ ἀκέραιος ἀριθμός 18 λέμε ὅτι εἶναι διαιρετός μέ τό 3 καί τό 6.

Ξέρουμε ὅτι 3 × 6 = 18 γι' αὐτό ὁ ἀριθμός 18 λέγεται γινόμενο τῶν παραγόντων 3 καί 6.

Ὁ ἀριθμός 18 λέγεται πολλαπλάσιο τοῦ 3 καί τοῦ 6.

Ὁ ἀριθμός 20 εἶναι διαιρετός μέ τό 5 καί ὁ ἀριθμός 5 εἶναι διαιρέτης τοῦ 20, γιατί 20 : 5 = 4 καί 4 × 5 = 20.

Ὁ ἀριθμός 49 εἶναι διαιρετός μέ τό 7 καί ὁ ἀριθμός 7 λέγεται διαιρέτης τοῦ 49, γιατί 49 : 7 = 7 καί 7 × 7 = 49.

Κανόνας: Ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός εἶναι διαιρετός ἀπό ἕναν ἄλλο ἀκέραιο ἀριθμό, δηλαδή διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπ' αὐτόν ὅταν τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς τους, εἶναι μηδέν.

Ἕνας ἀριθμός λέγεται διαιρέτης ἀκέραιου ἀριθμοῦ, ὅταν τόν διαιρεῖ ἀκριβῶς.

2. Πότε ἕνας ἀριθμός εἶναι πολλαπλάσιο ἄλλου ἀριθμοῦ.

Παραδείγματα: Ὁ ἀριθμός 24 γίνεται ἀπό τόν ἀριθμό 8 ὅταν τό πολλαπλασιάσουμε μέ τό 3. Λέμε λοιπόν ὅτι ὁ ἀριθμός 24 εἶναι πολλαπλάσιο τῶν ἀριθμῶν 3 καί 8.

Κάθε ἀριθμός ἔχει ἄπειρα πολλαπλάσια.

Παραδείγματα: Πολλαπλάσια τοῦ ἀριθμοῦ 3 εἶναι:
3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, *24*, 27, 30, 33, . . . *48*...∞

Πολλαπλάσια τοῦ ἀριθμοῦ 8 εἶναι:
8, 16, *24*, 32, 40, *48*, 56, 64, 72, 80... ∞

Παρατήρησε μερικά ἀπό τά πρῶτα πολλαπλάσια τοῦ 3 καί τοῦ 8. Τά πολλαπλάσια 24 καί 48 καί ἄλλα εἶναι κοινά πολλαπλάσια τοῦ 3 καί τοῦ 8.

Τό πιό μικρό ἀπό τά κοινά πολλαπλάσια, δηλαδή τό 24 στό παράδειγμά μας, λέγεται ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τῶν ἀριθμῶν 3 καί 8.

Κανόνας: Ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δυό ἤ καί περισσότερων ἀκέραιων ἀριθμῶν λέγεται τό πιό μικρό ἀπό τά κοινά πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

Τό Ε.Κ.Π. θά μᾶς βοηθήσει πολύ στίς ἐργασίες μας πάνω στά κλάσματα καί γι' αὐτό θά μάθουμε πιό κάτω νά τό βρίσκουμε.

3. Κριτήρια διαιρετότητας (πότε ἕνας ἀκέραιος διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπό ἕναν ἄλλο ἀριθμό)

α. Πότε ἕνας ἀριθμός εἶναι διαιρετός μέ τό 10, 100, 1000 κτλ.

Παρατήρηση 1η: Τά πολλαπλάσια τοῦ 10 εἶναι:
10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120 ....∞

Τά πολλαπλάσια τοῦ 10 διαιροῦνται ἀκριβῶς μέ τό 10.

Πολλαπλάσια τοῦ 10 εἶναι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, πού τελειώνουν σέ ἕνα ἤ περισσότερα μηδενικά.

Παρατήρηση 2η: Τά πολλαπλάσια τοῦ 100 εἶναι:
100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1100, 1200...∞

Δηλαδή οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί πού τελειώνουν σέ δυό ἤ καί περισσότερα μηδενικά.

Διαιρετοί ἀριθμοί μέ 100 εἶναι οἱ ἀκέραιοι πού τελειώνουν σέ δυό ἤ σέ περισσότερα μηδενικά.

Εὔκολα τώρα καταλαβαίνουμε ὅτι μέ τό 1000 διαιροῦνται ἀκριβῶς οἱ ἀκέραιοι, πού τελειώνουν σέ τρία ἤ περισσότερα μηδενικά.

Διατύπωσε ἕνα γενικό κανόνα.

β. Πότε ἕνας ἀριθμός διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό 2 ἤ τό 5.

Παραδείγματα: Τό 2 διαιρεῖ ἀκριβῶς τά πολλαπλάσιά του:
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 ....∞

Δηλαδή τούς ἀριθμούς, πού τό τελευταῖο τους ψηφίο εἶναι ἄρτιος (ζυγός) ἀριθμός ἤ μηδέν.

Τό 5 διαιρεῖ ἀκριβῶς τά πολλαπλάσιά του:
5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40...∞.

Δηλαδή τούς ἀκέραιους ἀριθμούς πού τελειώνουν σέ 5 ἤ σέ μηδέν.

> **Κανόνας:** Μέ τό 2 διαιροῦνται οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί πού τελειώνουν σέ ἄρτιο (ζυγό) ἀριθμό ἤ σέ μηδεν.
>
> Μέ τό 5 διαιροῦνται ἀκριβῶς οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί πού τελειώνουν σέ 5 ἤ σέ μηδενικά.

γ. Πότε ἕνας ἀριθμός διαιρεῖται μέ τό 4 ἤ μέ τό 25.

Μέ τό 4 διαιροῦνται ἀκριβῶς τά πολλαπλάσια τοῦ 4.

Πολλαπλάσια τοῦ 4 εἶναι:
4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, ... 96, 100 ... 112 κτλ.

Τά πολλαπλάσια ὅμως τοῦ 4 εἶναι ἄπειρα καί δέν εἶναι δυνατόν νά τά βροῦμε καί νά τά ξέρουμε.

Γιά νά ἀναγνωρίζουμε τά πολλαπλάσια τοῦ 4 ἤ τοῦ 25, παρατηροῦμε τά δυό τελευταῖα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ, ὅπως εἶναι γραμμένος. Ἄν τά δυό τελευταῖα ψηφία εἶναι ἀριθμός πολλαπλάσιο τοῦ 4 ἤ τοῦ 25 τότε καί ὁλόκληρος ὁ ἀριθμός εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 4 ἤ τοῦ 25, ἑπομένως διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπ' αὐτούς.

Παραδείγματα: Ὁ ἀριθμός 5.132 διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό 4. Γιατί;

Οἱ ἀριθμοί 7.875 καί 9.700 διαιροῦνται ἀκριβῶς μέ τό 25. Γιατί;

> **Κανόνας:** Ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό 4 ἤ τό 25, ὅταν τά δυό τελευταῖα ψηφία του εἶναι ἀριθμός πού διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό 4 ἤ τό 25.

δ. Πότε ἕνας ἀριθμός διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό 3 ἤ μέ τό 9.

Μέ τό 3 διαιροῦνται ἀκριβῶς ὅλα τά πολλαπλάσιά του.

Μέ τό 9 διαιροῦνται ἀκριβῶς ὅλα τά πολλαπλάσιά του.

Γιά νά δοῦμε πρακτικά ποιοί ἀριθμοί εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 3 ἤ τοῦ 9, παρατηροῦμε, ἄν τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων τους μᾶς δίνει ἀριθμό πολλαπλάσιο τοῦ 3 ἤ τοῦ 9, τότε ὁ ἀριθμός εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3 ἤ τοῦ 9 καί διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό 3 ἤ 9.

Παραδείγματα: Ὁ ἀριθμός 5.427 ἔχει ἄθροισμα ψηφίων: 5+4+2+7 = 18 καί 1+8 = 9. Ἑπομένως ὁ ἀριθμός αὐτός διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό 9 καί μέ τό 3.

Ὁ ἀριθμός 3.732 διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό 3 καί ὄχι μέ τό 9. Γιατί;

> **Κανόνας:** Ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό 3 ἤ τό 9, ὅταν τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι ἀριθμός πού διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ 3 ἤ μέ 9.

Οἱ παραπάνω παρατηρήσεις καί τά συμπεράσματα λέγονται κριτήρια διαιρετότητας τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν καί μᾶς βοηθοῦν πολύ καί στίς διαιρέσεις καί στούς πολλαπλασιασμούς.

4. Πρῶτοι καί σύνθετοι ἀριθμοί

Παρατήρηση: Ὁ πίνακας αὐτός δείχνει τούς ἀριθμούς τῆς πρώτης δεκάδας καί τούς διαιρέτες πού ἔχει καθένας ἀπ' αὐτούς.

Ὁ ἀριθμός 1 ἔχει διαιρέτη τό 1, γιατί 1 : 1 = 1
Ὁ ἀριθμός 2 ἔχει διαιρέτη τό 1 καί 2, γιατί 2 : 1 = 2, 2 : 2 = 1
Ὁ ἀριθμός 3 ἔχει διαιρέτη τό 1 καί 3, γιατί;
Ὁ ἀριθμός 4 ἔχει διαιρέτη τό 1 τό 2 τό 4. Γιατί;
Ὁ ἀριθμός 5 ἔχει διαιρέτη τό 1 καί τό 5. Γιατί;
Ὁ ἀριθμός 6 ἔχει διαιρέτη τό 1 τό 2 τό 3 καί τό 6. Γιατί;
Ὁ ἀριθμός 7 ἔχει διαιρέτη τό 1 καί τό 7. Γιατί;
Ὁ ἀριθμός 8 ἔχει διαιρέτη τό 1 τό 2 τό 4 καί τό 8. Γιατί;
Ὁ ἀριθμός 9 ἔχει διαιρέτη τό 1 τό 3 καί τό 9. Γιατί;
Ὁ ἀριθμός 10 ἔχει διαιρέτη τό 1 τό 2 τό 5 καί τό 10. Γιατί;

Μέ τόν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νά βροῦμε τούς διαιρέτες καί ἄλλων ἀριθμῶν.

Παρατηροῦμε στόν πίνακα πού κάναμε, ὅτι μερικοί ἀριθμοί, ὅπως τό 1, τό 2, τό 3, τό 5, τό 7, ἔχουν διαιρέτες μόνο τή μονάδα (τό 1) καί τόν ἑαυτό τους καί ἄλλοι, ὅπως τό 4, τό 6, τό 8, τό 9, τό 10 ἔχουν καί ἄλλους διαιρέτες.

Οἱ ἀριθμοί, πού ἔχουν διαιρέτες μόνο τή μονάδα καί τόν ἑαυτό τους, λέγονται π ρ ῶ τ ο ι ἀ ρ ι θ μ ο ί.

Οἱ ἀριθμοί, πού ἔχουν διαιρέτες ἐκτός τή μονάδα καί τόν ἑαυτό τους καί ἄλλους ἀριθμούς, λέγονται σ ύ ν θ ε τ ο ι ἀ ρ ι θ μ ο ί.

Πρῶτοι ἀριθμοί εἶναι τό 2, τό 3, τό 7 κτλ.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοί εἶναι ἄπειροι.

Οἱ σύνθετοι ἀριθμοί εἶναι καί αὐτοί ἄπειροι.

Κάθε ἀριθμός μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο παραγόντων.

Τό 72 πχ. ἔχει παράγοντες τούς ἀριθμούς: 36, 24, 18, 12, 9, 8, 6, 4, 3, 2, 1.

Γιατί $36 \times 2 = 72$ $24 \times 3 = 72$ $18 \times 4 = 72$ $12 \times 6 = 72$ $9 \times 8 = 72$ ...$1 \times 72 = 72$.

Καί κάθε ἀριθμός εἶναι πολλαπλάσιο τῶν παραγόντων του.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοί μᾶς βοηθοῦν νά βρίσκουμε εὔκολα τό Ε.Κ.Π. τῶν σύνθετων ἀριθμῶν μέ μιά μέθοδο, πού θά μάθεις παρακάτω.

5. Ἀνάλυση σύνθετου ἀριθμοῦ σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Παράδειγμα. Νά ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων ὁ σύνθετος ἀριθμός 210.

Ἡ ἀνάλυση τοῦ σύνθετου ἀριθμοῦ στούς πρώτους παράγοντές του, λέγεται παραγοντοποίηση τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἡ παραγοντοποίηση τοῦ ἀριθμοῦ γίνεται μέ διαδοχικές διαιρέσεις μέ διαιρέτες πρώτους ἀριθμούς.

Νά πῶς γίνεται ἡ ἐργασία αὐτή.

Δοκιμάζουμε νά διαιρέσουμε τόν σύνθετο ἀριθμό 210 μέ τούς πρώτους ἀριθμούς 2, 3, 5, 7, κτλ., ἀρχίζοντας ἀπό τό 2 μέχρι νά βροῦμε ἕνα ἀπό αὐτούς, πού νά τόν διαιρεῖ ἀκριβῶς.

Τό 2 διαιρεῖ ἀκριβῶς τόν ἀριθμό 210 (210 : 2 = 105).

Τό πηλίκο 105 διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τόν πρῶτο ἀριθμό 3. 105 : 3 = 35.

Τό πηλίκο 35 διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τόν πρῶτο ἀριθμό 5.

35 : 5 = 7.

Τό πηλίκο 7 διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τόν πρῶτο ἀριθμό 7. 7 : 7 = 1. Τό πηλίκο 1 δείχνει ὅτι τελείωσε ἡ ἐργασία τῆς παραγοντοποιήσεως τοῦ σύνθετου ἀριθμοῦ 210.

Ὁ ἀριθμός 210 ἀναλύθηκε στούς πρώτους παράγοντες 2, 3, 5, 7. Νά ἡ ἀπόδειξη. 2 × 3 × 5 × 7 = 210.

α' παράδειγμα

Διάταξη τῆς ἐργασίας

ἀριθμός	210	2	
	105	3	
	35	5	2 × 3 × 5 × 7 = 210
	7	7	
	1		

β΄ παράδειγμα

Διάταξη τῆς ἐργασίας

ἀριθμός	504	2	
	252	2	
	126	2	$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 504$
	63	3	
	21	3	
	7	7	
	1		

Πρόσεξε: Μέ ὁποιαδήποτε σειρά κι ἄν πάρουμε τούς πρώτους παράγοντες, πάντοτε θά βροῦμε στήν παραγοντοποίηση τοῦ ἀριθμοῦ τούς ἴδιους παράγοντες.

Ἀσκήσεις

1. Νά ἀναλύσεις σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων τούς σύνθετους ἀριθμούς.
   α) 525 β) 660 γ) 756 δ) 4.755

6. Πῶς βρίσκουμε τό ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) δυό ἤ καί περισσότερων ἀριθμῶν.

Α΄ Μέθοδος

Πρόβλημα.

1. Ποιό εἶναι τό ΕΚΠ τῶν ἀριθμῶν 8 καί 6;

Νά πῶς ἐργαζόμαστε.

Παίρνουμε τούς ἀριθμούς πού μᾶς δόθηκαν καί παρατηροῦμε ἄν ὁ πιό μεγάλος ἀπ' αὐτούς διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπό τόν ἄλλο.

Ἄν δέν διαιρεῖται τότε τόν διπλασιάζουμε καί κάνουμε τήν ἴδια παρατήρηση. Ἄν καί πάλι δέν διαιρεῖται τόν τριπλασιάζουμε κ.ο.κ. μέχρι νά βροῦμε πολλαπλάσιο τοῦ μεγαλύτερου ἀριθμοῦ, πού νά διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπό τόν ἄλλο ἀριθμό.

Τό πολλαπλάσιο αὐτό εἶναι τό ΕΚΠ τῶν ἀριθμῶν, πού μᾶς δόθηκαν.

Διάταξη τῆς ἐργασίας.

Ἀριθμοί πού δόθηκαν: 8 καί 6

Δέν διαιρεῖται τό 8 μέ τό 6

Διπλασιάζουμε 2 × 8 = 16

Δέν διαιρεῖται πάλι.

Τριπλασιάζουμε 3 × 8 = 24. Τό 24 διαιρεῖται μέ τό 6.

Ἐπομένως τό 24 εἶναι τό ΕΚΠ, γιατί 24 : 8 = 3 καί 24 : 6 = 4

Πρόβλημα 2. Ποιό εἶναι τό ΕΚΠ τῶν ἀριθμῶν 35 καί 21;

Διάταξη τῆς ἐργασίας.

Ἀριθμοί πού δόθηκαν: 35 καί 21

Δέν διαιρεῖται τό 35 μέ τό 21

Διπλασιάζουμε 2 × 35 = 70

Καί πάλι δέν διαιρεῖται.

Τριπλασιάζουμε 3 × 35 = 105. Διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό 21.

Ἐπομένως τό 105 εἶναι τό ΕΚΠ τῶν ἀριθμῶν 35 καί 21 γιατί 105 : 35 = 3 καί 105 : 21 = 5.

Πρόβλημα 3. Ποιό εἶναι τό ΕΚΠ τῶν ἀριθμῶν 12, 36, 20, 45

Διάταξη τῆς ἐργασίας.

Ἀριθμοί: 12 36 20 45. Δέν διαιρεῖται ὁ μεγαλύτερος ἀπό ὅλους καί τόν διπλασιάζουμε:

90 ← 2 × 45

Δέν διαιρεῖται ἀπό ὅλους καί τόν τριπλασιάζουμε:

135 ← 3 × 45

Δέν διαιρεῖται ἀπό ὅλους καί τόν τετραπλασιάζουμε:

180 ← 4 × 45

Διαιρεῖται ἀπ' ὅλους.

Ἐπομένως ΕΚΠ 12, 36, 20, 45 εἶναι τό 180.

Ἡ μέθοδος αὐτή λέγεται μέθοδος τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ μεγαλύτερου.

Ἀσκήσεις

1. Νά βρεῖς μέ τή μέθοδο πού ἔμαθες τό Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν.

α) 8 7	γ) 21 63	ε) 15 45 90
β) 9 5	δ) 15 12	στ) 18 30 45

Β΄ Μέθοδος

α) **Πρόβλημα:** Ποιό εἶναι τό Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 8 καί 6;

Τό πρόβλημά μας εἶναι τό ἴδιο πού χρησιμοποιήσαμε καί στήν προηγούμενη μέθοδο.

Λύση: Νά πῶς ἐργαζόμαστε μέ τή β΄ μέθοδο.

Γράφουμε τούς ἀριθμούς, πού ζητοῦμε τό Ε.Κ.Π. τους, τόν ἕνα δίπλα στόν ἄλλο καί στά δεξιά τους χαράζουμε μιά κατακόρυφη γραμμή.

Οἱ ἀριθμοί →	8	6	2 ← Διαιρέτες
	4	3	2
	2	3	2
	1	3	3
	1	1	

Γινόμενο διαιρετῶν
$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$
Ε.Κ.Π. $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

Ἀνάλυση τῆς ἐργασίας.

Παρατηροῦμε ἄν οἱ ἀριθμοί 8 καί 6 διαιροῦνται μέ τό 2.

Οἱ ἀριθμοί 8 καί 6 διαιροῦνται μέ τό 2. Γράφουμε τό 2 διαιρέτη στά δεξιά τῆς κατακόρυφης γραμμῆς καί διαιροῦμε μ᾿ αὐτόν τό διαιρέτη καθένα ἀπό τούς ἀριθμούς. Κάτω ἀπό τόν καθένα ἀριθμό γράφουμε τό πηλίκο τῆς διαιρέσεώς του. $(8 : 2 = 4)$. Γράφουμε τό 4 κάτω ἀπό τό 8. Τό ἴδιο κάνουμε καί μέ τό 6. $(6 : 2 = 3)$. Γράφουμε τό 3 κάτω ἀπό τό 6. Συνεχίζουμε τήν ἴδια ἐργασία καί γιά τά πηλίκα τῶν ἀριθμῶν. Παρατηροῦμε ὅτι τό 4 διαιρεῖται μέ τό 2. Δέν διαιρεῖται ὅμως καί τό 3. Γράφουμε στή θέση τῶν διαιρετῶν καί πάλι τό 2 καί μ᾿ αὐτό διαιροῦμε τό 4 καί κάτω ἀπ᾿ αὐτό γράφουμε τό πηλίκο τῆς διαιρέσεώς του. $(4 : 2 = 2)$. Τό 3 ὅμως, πού δέν διαιρεῖται μέ τό 2, τό γράφουμε ὅπως εἶναι κάτω ἀπό τόν ἑαυτό του. Ὁ ἀριθμός 2 διαιρεῖται μέ τό 2 καί τό ξαναγράφουμε στή στήλη τῶν διαιρετῶν. Κάνουμε τή διαίρεση $(2 : 2 = 1)$ καί γράφουμε τό 1 κάτω ἀπό τό 2. Συνεχίζουμε τήν ἐργασία μέ τό 3. Τό 3 διαιρεῖται μέ τόν ἑαυτό του. Γράφουμε τό 3 στή στήλη τῶν διαιρετῶν καί κάνουμε τή διαίρεση $3 : 3 = 1$ καί γράφουμε τό πηλίκο κάτω ἀπό τόν ἀριθμό 3. Ἡ ἐργασία μας ἔχει τελειώσει, ὅταν στήν τελευταία σειρά κάτω ἀπό τούς ἀριθμούς βροῦμε γιά ὅλους τό πηλίκο 1.

Ποιό εἶναι τώρα τό Ε.Κ.Π.;

Μᾶς τό δείχνει τό γινόμενο ὅλων τῶν διαιρετῶν, πού εἶναι στά δεξιά τῆς κατακόρυφης γραμμῆς, δηλαδή τό γινόμενο $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$.

Τό 24 εἶναι τό Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 8 καί 6.

β) **Πρόβλημα:** Ποιό εἶναι τό Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 21 καί 35;

Λύση: Ἐργαζόμαστε ὅπως καί στό προηγούμενο πρόβλημα.

Διάταξη τῆς ἐργασίας

Ἀριθμοί →	21	35	3	← διαιρέτες
	7	35	5	
	7	7	7	
	1	1		

Γινόμενο τῶν διαιρετῶν:
Ε.Κ.Π. $3 \times 5 \times 7 = 105$

Ἀπάντηση: Τό Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 21 καί 35 εἶναι τό 105, γιατί $105 : 21 = 5$ καί $105 : 35 = 3$.

γ) **Πρόβλημα:** (Μέ περισσότερους ἀπό δυό ἀριθμούς).

Ποιό εἶναι τό Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 12, 36, 20, 45;

Λύση. Ἐργαζόμαστε ὅπως καί στό προηγούμενο παράδειγμα.

Διάταξη τῆς ἐργασίας

Ἀριθμοί →	12	36	20	45	2	← διαιρέτες
	6	18	10	45	2	
	3	9	5	45	3	
	1	3	5	15	3	
	1	1	5	5	5	
	1	1	1	1		

Γινόμενο διαιρετῶν:
$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180$

Ἀπάντηση: Τό Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 12, 36, 20, 45 εἶναι τό 180. Μέ τήν ἴδια διάταξη ἐργαζόμαστε καί σέ κάθε ἄλλο πρόβλημα.

Γιά νά βροῦμε λοιπόν τό Ε.Κ.Π. δυό ἤ περισσότερων ἀριθμῶν, βρίσκουμε τούς διαιρέτες τους μέ τήν παραπάνω μέθοδο ἐργασίας. Τό γινόμενο ὅλων τῶν διαιρετῶν (δηλαδή τῶν ἀριθμῶν πού βρίσκονται στά δεξιά τῆς κατακόρυφης γραμμῆς) εἶναι τό Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν πού μᾶς δόθηκαν.

Πρόσεξε: Ἡ μέθοδος αὐτή εἶναι ἡ πιό κατάλληλη γιά νά βρίσκεις τό Ε.Κ.Π πολλῶν ἀριθμῶν, ἀρκεῖ νά τή μάθεις καλά.

Σάν διαιρέτες προτιμοῦμε τούς πρώτους ἀριθμούς. Δέν ἔχει σημασία μέ ὅποια σειρά καί ἄν τούς βροῦμε. Εἶναι πάντοτε οἱ ἴδιοι.

Τό Ε.Κ.Π. θά σοῦ χρειαστεῖ πολύ στίς ἐργασίες σου πάνω στά κλάσματα.

Ἀσκήσεις

1. Νά βρεῖς τό Ε.Κ.Π., μέ τή β΄ μέθοδο, τῶν ἀριθμῶν:

α) 5 9 15 β) 14 21 24 γ) 56 72 84 δ) 70 14 21 56

Κεφάλαιο IV *Ὁ μέσος ὅρος – Ἔννοια τοῦ μέσου ὅρου*

Πρόβλημα *α΄*. Ὁ Κώστας πῆρε στό τέλος τῆς σχολικῆς χρονιᾶς, στήν Τετάρτη τάξη, τούς ἑξῆς βαθμούς σέ κάθε μάθημα. Θρησκευτικά 9, Ἑλληνικά 8, Ἱστορία 10, Φυσικά 8, Γεωγραφία 9, Ἀριθμητική 8, Τεχνικά 10, Μουσική 9, Γυμναστική 10. Μέ ποιό βαθμό προβιβάστηκε στήν Πέμπτη τάξη;

Λύση.

α΄ ἐργασία. Προσθέτουμε ὅλους τούς βαθμούς πού πῆρε στά μαθήματα καί βρίσκουμε ἔτσι τό ἄθροισμα τῶν μονάδων τῶν βαθμῶν.

Ἄθροισμα μονάδων $9 + 8 + 10 + 8 + 9 + 8 + 10 + 9 + 10 = 81$.

β΄ ἐργασία. Διαιροῦμε τό ἄθροισμα τῶν μονάδων πού συγκέντρωσε μέ τόν ἀριθμό τῶν μαθημάτων.

$$81 : 9 = 9$$

Τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι ὁ βαθμός τῆς προαγωγῆς τοῦ Κώστα στήν Πέμπτη τάξη.

Ἀπάντηση: Ὁ Κώστας προβιβάστηκε μέ τό βαθμό 9.

Ὁ βαθμός 9 λέγεται μέσος ὅρος τῆς βαθμολογίας τοῦ Κώστα στήν Τετάρτη τάξη.

Σύντομη διάταξη τῶν πράξεων

$$\text{Μ.Ο. βαθμολογίας } \frac{9+8+10+8+9+8+10+9+10}{9} = \frac{81}{9} = 9$$

Πρόβλημα β΄. Ἕνα ἐκδρομικό λεωφορεῖο ταξίδεψε σέ μιά τριήμερη ἐκδρομή, τήν πρώτη μέρα 378 χιλιόμετρα, τή δεύτερη μέρα 327 χιλιόμετρα, καί τήν τρίτη μέρα 216 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα κατά μέσο ὅρο ταξίδευε τό λεωφορεῖο τή μέρα;

α΄ ἐργασία. Ἄθροισμα χιλιομέτρων τῆς τριήμερης ἐκδρομῆς.

$$378 + 327 + 216 = 921 \text{ χιλιόμετρα}$$

β΄ ἐργασία. 921 : 3 = 307 χιλιόμετρα κατά μέσο ὅρο ταξίδευε τή μέρα.

Σύντομη διάταξη τῶν πράξεων

$$\text{Μ.Ο. χιλιομέτρων τή μέρα} = \frac{378+327+216}{3} = \frac{921}{3} = 307$$

Ἀπάντηση. Τό λεωφορεῖο ταξίδευε κατά μέσο ὅρο 307 χιλιόμετρα τή μέρα.

Πρόβλημα γ΄. Τά ἔξοδα φαγητοῦ τῶν ἡμερῶν μιᾶς ἑβδομάδας σέ μιά οἰκογένεια ἦταν: Δευτέρα 125,50 δρχ., Τρίτη 85,80 δραχμές, Τετάρτη 95,20 δραχ., Πέμπτη 125,90 δραχ., Παρασκευή 84,50 δραχ., Σάββατο 120,30 δραχ., Κυριακή 280,50. Ποιός εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν ἡμερήσιων ἐξόδων τῆς οἰκογένειας τήν ἑβδομάδα;

Λύση.

$$\text{Μ.Ο. ἐξόδων ἑβδομάδ.} \frac{125{,}5+85{,}8+95{,}2+125{,}9+84{,}5+120{,}3+280{,}5}{7}$$

$$= \frac{917,7}{7} = 917,7 : 7 = 131,10 \text{ δραχμές.}$$

Παρατήρησε ποιές ἐργασίες κάναμε.

Προσθέσαμε πρῶτα τά ἔξοδα τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδας καί τό ἄθροισμα τō διαιρέσαμε μέ τό 7. Γιατί;

Κανόνας. Μέσος ὅρος (Μ.Ο.) δυό ἤ περισσότερων ἀφηρημένων ἤ συγκεκριμένων ἀριθμῶν, πού μετροῦν ὁμοειδῆ ποσά, λέγεται τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματός τους μέ τόν ἀριθμό πού δείχνει τό πλῆθος τους.

Προβλήματα

1. Στό Ληξιαρχεῖο τοῦ Δήμου μιᾶς πόλεως δηλώθηκαν στό πρῶτο ἑξάμηνο τοῦ ἔτους οἱ ἑξῆς γεννήσεις: Ἰανουάριος 240 παιδιά, Φεβρουάριος 166, Μάρτιος 204, Ἀπρίλιος 320, Μάιος 147 καί Ἰούνιος 225. Ποιά ἦταν ἡ μηνιαία κίνηση τῶν γεννήσεων στήν πόλη, γιά τό πρῶτο ἑξάμηνο;
2. Ἕνας ἀμπελουργός πῆρε τά τρία τελευταῖα χρόνια τίς ἑξῆς ποσότητες σταφίδας ἀπό τό ἀμπέλι του. Τόν πρῶτο χρόνο 2.578 κιλά, τό δεύτερο 1.675 κιλά καί τόν τρίτο 3.645 κιλά. Ποιός εἶναι ὁ Μ.Ο. τῆς παραγωγῆς τοῦ ἀμπελιοῦ τά τρία τελευταῖα χρόνια;
3. Σέ μιά πολυκατοικία ξοδεύτηκαν τούς τρεῖς μῆνες τοῦ Χειμώνα οἱ ἑξῆς ποσότητες πετρελαίου. Δεκέμβριος 1875 κιλά, Ἰανουάριος 2325 κιλά καί Φεβρουάριος 1930 κιλά πετρέλαιο. Ποιά εἶναι ἡ μέση κατανάλωση (Μ.Ο.) πετρελαίου γιά τό τρίμηνο τοῦ χειμώνα;
4. Νά κάμεις καί σύ δικά σου προβλήματα Μ.Ο. μέσα ἀπό τό δικό σου περιβάλλον.

Κεφάλαιο V
Οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοί

1. Ἔννοια τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

Ἡ Μαρία ἀγόρασε ὕφασμα 4 μέτρα 2 παλάμες καί 6 δακτύλους (πόντους) γιά νά κάμει φόρεμα.

Ὁ κ. Γιῶργος ἔβγαλε φέτος ἀπό τό ἀμπέλι του σταφίδα 3 τόνους 650 κιλά καί 350 γραμμάρια.

Τό ταξίδι μέ αὐτοκίνητο ἀπό τό Ἡράκλειο στά Χανιά διαρκεῖ 3 ὧρες καί 45 λεπτά.

Ὁ χρόνος περιφορᾶς τῆς Γῆς γύρω ἀπό τόν Ἥλιο διαρκεῖ 365 μέρες, 48 πρῶτα λεπτά καί 46 δευτερόλεπτα.

Παρατήρηση. Οἱ παραπάνω ἀριθμοί εἶναι συγκεκριμένοι ἀριθμοί καί φανερώνουν διάφορα ποσά.

Καθένας ἀπ' αὐτούς τούς ἀριθμούς ἀποτελεῖται ἀπό ἄλλους συγκεκριμένους ἀριθμούς, πού οἱ μονάδες τους ἔχουν ἰδιαίτερα ὀνόματα καί εἶναι πολλαπλάσια ἤ ὑποδιαιρέσεις μιᾶς μονάδας, ἡ ὁποία λέγεται ἀρχική μονάδα ἤ βασική μονάδα.

Τό ὕφασμα πού ἀγόρασε ἡ Μαρία μᾶς τό δείχνει ὁ ἀριθμός 4 μέτρα, 2 παλάμες, 6 δάκτυλοι. Εἶναι ὁλόκληρος ἕνας συγκεκριμένος ἀριθμός, πού ἀποτελεῖται ἀπό μιά σειρά ἀριθμούς.

Καθένας ἀπό τούς ἀριθμούς αὐτούς μετρᾶ διαφορετικές μονάδες, τοῦ ἴδιου ποσοῦ.

Οἱ μονάδες αὐτές γίνονται μέ τήν ὑποδιαίρεση τοῦ μέτρου πού εἶναι ἡ ἀρχική μονάδα.

Νά ἡ ἀνάλυση τοῦ ἀριθμοῦ.

4 μέτρα. Τό μέτρο εἶναι ἡ ἀρχική μονάδα.
2 παλάμες. Ἡ παλάμη εἶναι δεκαδική ὑποδιαίρεση τοῦ μέτρου.
6 δάκτυλοι. Ὁ δάκτυλος εἶναι δεκαδική ὑποδιαίρεση τοῦ μέτρου.

Οἱ ἀριθμοί πού ἔχουν αὐτή τή μορφή λέγονται συμμιγεῖς.

Κανόνας. Συμμιγεῖς ἀριθμοί λέγονται οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοί, πού ἀποτελοῦνται ἀπό ἄλλους ἀριθμούς, οἱ μονάδες τῶν ὁποίων ἔχουν δικό τους ὄνομα καί εἶναι πολλαπλάσια ἤ ὑποδιαιρέσεις μιᾶς ἀρχικῆς (βασικῆς) μονάδας.

Δεξιά τῆς ἀρχικῆς μονάδας γράφονται οἱ ὑποδιαιρέσεις της. Ἀριστερά τῆς ἀρχικῆς μονάδας γράφονται τά πολλαπλάσιά της.

Παρατήρησε τήν εἰκόνα ἑνός συμμιγή πού φανερώνει χρόνο.

Πολλαπλάσια ἀρχ. μον.	Ἀρχική μονάδα	Ὑποδιαιρέσεις	ἀρχ. μον.
4 αἰῶνες	1 ἔτος	6 μῆνες	5 ἡμέρες

2. *Οἱ μονάδες μετρήσεως*

α. Μονάδες μετρήσεως χρόνου

Γιά νά μετρήσουμε τό χρόνο,χρησιμοποιοῦμε τίς μονάδες χρόνου, πού εἶναι καί οἱ ἴδιες χρόνος.

Ἀρχική μονάδα μετρήσεως τοῦ χρόνου εἶναι ἡ ἡμέρα (ἡμερονύχτιο ἤ εἰκοσιτετράωρο). Εἶναι ὁ χρόνος πού χρειάζεται ἡ Γῆ γιά νά κάμει μιά περιστροφή γύρω ἀπό τόν ἄξονά της.

Ὑποδιαιρέσεις τῆς ἡμέρας εἶναι οἱ ὧρες.

1 ἡμέρα = 24 ὧρες
1 ὥρα = 60 πρῶτα λεπτά (60΄ ἤ 60 π)
1 π = 60 δευτερόλεπτα (60΄΄ ἤ 60 δ)

Πολλαπλάσια τῆς ἀρχικῆς μονάδας (ἡμέρας) εἶναι:

Ἡ ἑβδομάδα = 7 ἡμέρες
Ὁ μήνας = 30 ἡμέρες
Τό ἔτος = 365 ἡμέρες
Ὁ αἰώνας = 100 ἔτη
Ἡ χιλιετηρίδα = 1000 ἔτη

Σημείωση: Τό πολιτικό ἔτος ὑπολογίζεται μέ 365 ἡμέρες.
Τό δίσεκτο ἔτος ὑπολογίζεται μέ 366 ἡμέρες.
Τό ἐμπορικό ἔτος ὑπολογίζεται μέ 360 ἡμέρες.
Στήν ἀριθμητική χρησιμοποιοῦμε τό ἐμπορικό ἔτος.

β. Μονάδες μετρήσεως νομισμάτων (δεκαδικό σύστημα).

Γιά νά μετροῦμε τά ποσά νομισμάτων χρησιμοποιοῦμε τίς μονάδες μετρήσεως νομισμάτων, πού εἶναι οἱ ἴδιες νομίσματα.

Ἀρχική μονάδα μετρήσεως τῶν ἑλληνικῶν νομισμάτων εἶναι ἡ δραχμή.

Οἱ ὑποδιαιρέσεις τῆς δραχμῆς ἔχουν δεκαδικό σύστημα καί τίς ἔχεις μάθει καί στούς δεκαδικούς ἀριθμούς.

1 δραχμή = 100 λεπτά
1 λεπτό = 0,01 δραχμῆς
10 λεπτά = 0,10 δραχμῆς

Πολλαπλάσια τῆς ἀρχικῆς μονάδας (δραχμῆς).

2δραχμο	= 2 δραχμές	κέρματα (μεταλλικά)
5δραχμο	= 5 δραχμές (τάληρο)	
10δραχμο	= 10 δραχμές	
20δραχμο	= 20 δραχμές	
50δραχμο	= 50 δραχμές	Χαρτονομίσματα
100δραχμο	= 100 δραχμές	
500δραχμο	= 500 δραχμές	
1000δραχμο	= 1000 δραχμές	

Δεκαδική διάταξη τῶν ὑποδιαιρέσεων τῆς δραχμῆς

1 δραχμή = 10 δέκατα (δεκάρες) = 100 λεπτά

1 δέκατο (δεκάρα) = 10 λεπτά = 0,10 δραχ. ἤ $\frac{1}{10}$

1 λεπτά = 0,01 δραχ. ἤ $\frac{1}{100}$

Κάθε συμμιγής πού φανερώνει ποσό ἑλληνικῶν νομισμάτων μπορεῖ νά διαβαστεῖ καί σάν δεκαδικός ἀριθμός καί σάν δεκαδικό κλάσμα, ἐπειδή οἱ ὑποδιαιρέσεις ἔχουν δεκαδικό σύστημα.

Κάθε κράτος ἔχει τό δικό του νόμισμα, πού λέγεται ἐθνικό νόμισμα. Στό μάθημα τῆς Γεωγραφίας θά μάθεις καί τά νομίσματα τῶν κρατῶν πού θά γνωρίσεις.

Ἐδῶ θά ἀναφέρουμε καί νομίσματα μερικῶν κρατῶν, πού κυκλοφοροῦν σέ ὅλο τόν κόσμο (ἔχουν γίνει διεθνῆ), καί πού τό σύστημα τῶν μονάδων τους εἶναι δεκαδικό, ὅπως καί τό δικό μας.

Ἡ ἀγγλική λίρα (Βρετανία καί χῶρες τῆς Βρετανικῆς Κοινοπολιτείας).

1 ἀγγλική λίρα = 100 πέννες. Ἔχει διεθνή κυκλοφορία
1 γερμαν. μάρκο = 100 πφένιχ. Ἔχει διεθνή κυκλοφορία
1 ἀμερικ. δολάριο (ΗΠΑ) = 100 σέντς. Ἔχει διεθνή κυκλοφορία
1 ρωσικό ρούβλι (ΕΣΣΔ) = 100 καπίκια

Τήν ἀντιστοιχία τῶν νομισμάτων αὐτῶν μέ τά ἑλληνικά δέν τήν ἀναφέρουμε γιατί συνέχεια μεταβάλλεται.

Ἀσκήσεις

α) Νά γράψεις μέ μορφή δεκαδικοῦ καί κλάσματος τούς συμμιγεῖς

25 δραχμές	καί 40 λεπτά	0 δραχμές	2 δεκάρες 5 λεπτά
1 λίρα ἀγγλ.	50 πέννες	6 δολάρια	30 σέντς

γ. Μονάδες μετρήσεως βάρους (δεκαδικό σύστημα).

Τό βάρος εἶναι ἕνα ποσό πού θά μάθεις γι' αὐτό στή Φυσική Πειραματική.

Γιά νά μετρήσουμε τό βάρος χρησιμοποιοῦμε τίς μονάδες βάρους, πού εἶναι καί οἱ ἴδιες βάρος.

Ἀρχική μονάδα βάρους (διεθνής) εἶναι τό κιλό (χιλιόγραμμο).

Ὑποδιαιρέσεις τοῦ κιλοῦ, μέ τό δεκαδικό σύστημα, εἶναι:

1 κιλό (χιλιόγραμμο = 1000 γραμμάρια

Πολλαπλάσια τῆς ἀρχικῆς μονάδας (κιλό) εἶναι.

Ὁ τόνος = 1000 κιλά

Μέ δεκαδική μορφή οἱ ὑποδιαιρέσεις γράφονται

1 κιλό = 1000 γραμμάρια

1 γραμμάριο = 0,001 κιλ. ἤ $\frac{1}{1000}$ κιλ.

δ. Μονάδες μετρήσεως μήκους (Δεκαδικό σύστημα)

Γιά νά μετρήσουμε τό μῆκος, χρησιμοποιοῦμε τίς μονάδες μήκους, πού εἶναι καί οἱ ἴδιες μῆκος.

Μετρῶ τό μῆκος πού πήδηξε ὁ ἀθλητής στό στάδιο, σημαίνει πώς συγκρίνω τό μῆκος τοῦ ἅλματος μέ τή μονάδα μετρήσεως τοῦ μήκους. Εἶναι τό τόσο γνωστό σου γαλλικό μέτρο. Μέ αὐτό ἐργάστηκες πολύ πέρυσι στούς δεκαδικούς ἀριθμούς καί γνωρίζεις τίς δεκαδικές ὑποδιαιρέσεις του. Εἶναι διεθνής μονάδα.

Ἀρχική μονάδα μετρήσεως μήκους εἶναι τό γαλλικό μέτρο.

Ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου (δεκαδικό σύστημα).

1 μέτρο = 10 δεκατόμετρα = 100 ἑκατοστόμετρα = 1000 χιλιοστόμετρα
(παλάμες) (πόντοι - δάκτυλοι) (γραμμές)
1 παλάμη = 10 » = 100 »
1 δάκτυλος = 10 »

Πολλαπλάσια τοῦ μέτρου (ἀρχική μονάδα)

Δεκάμετρο = 10 μέτρα
100μετρο = 100 μέτρα
1000μετρο = 1000 μέτρα

Σέ πολλές χῶρες χρησιμοποιοῦν καί ἄλλες μονάδες, πού ἴσως θά τίς ἔχεις ἀκούσει πολλές φορές.

Ἡ γιάρδα (ἀγγλική μονάδα μετρήσεως μήκους) = 0,914 μέτρα. Ὑποδιαιρεῖται σέ 3 πόδια

1 πόδι	= 12 δάκτυλοι (ἴντσες)
1 τεκτονικός πήχης	= 0,75 μέτρα
1 ἀγγλικό μίλι	= 1.609 μέτρα
1 ναυτικό μίλι	= 1.852 μέτρα
1 ναυτική λεύγα	= 5.556 μέτρα

Ἀσκήσεις

1. Πόσες παλάμες κάνουν 25 μέτρα, πόσους δακτύλους, πόσες γραμμές;
2. Πόσες γραμμές μᾶς κάνουν 3,5 μέτρα, 5,001 μ., 0,101 μ.;

3. Γράψε μέ δεκαδικό τούς συμμιγεῖς:
5 μέτρα 6 δεκατόμ. 8 χιλιοστόμ.
7 μέτρα 7 δεκατόμ. 7 χιλιοστόμ.
0 μέτρα 5 δεκατόμ. 5 χιλιοστόμ.

ε. Μονάδες μετρήσεως ἐπιφάνειας (ἐμβαδόν) (Δεκαδικό σύστημα).

Γιά νά μετρήσουμε τίς ἐπιφάνειες χρησιμοποιοῦμε τίς μονάδες ἐπιφάνειας, πού εἶναι καί οἱ ἴδιες ἐπιφάνειες.

Ἀπό τήν Τετάρτη τάξη γνωρίζεις τό τετραγωνικό μέτρο. Εἶναι ἡ ἀρχική μονάδα μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν.

Ἀρχική μονάδα = τό τετραγωνικό μέτρο.

Ὑποδιαιρέσεις τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου (δεκαδικό σύστημα)
1 τ.μ. = 100 τ.π. = 10.000 τ.δ. = 1.000.000 τετρ. γραμμές
1 τ.π. = 100 τ.δ. = 10.000 τετρ. γραμμές
1 τ.δ. = 100 τετρ. γραμμές

Πολλαπλάσια τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου.
Τό στρέμμα = 1.000 τετραγ. μέτρα
Τό τετραγ. χιλιόμετρο = 1.000.000 τετραγ. μέτρα

στ. Μονάδες μετρήσεως ὄγκου (χωρητικότητα) (Δεκαδικό σύστημα).

Γιά τή μέτρηση τοῦ ὄγκου (χωρητικότητας) χρησιμοποιοῦμε τίς μονάδες ὄγκου, πού εἶναι καί οἱ ἴδιες ὄγκος (χωρητικότητα).

Στή συλλογή ὀργάνων τῆς Φυσικῆς Πειραματικῆς καί Χημείας ὑπάρχουν ὀγκομετρικά δοχεῖα. Ζήτησε νά τά δεῖς.

Ἀρχική μονάδα μετρήσεως τοῦ ὄγκου εἶναι τό κυβικό μέτρο.

Εἶναι κύβος μέ ἀκμή ἕνα μέτρο.

Ὑποδιαιρέσεις τοῦ κυβικοῦ μέτρου (δεκαδικό σύστημα).		
1 κυβ. μέτρο = 1.000 κυβ. παλ. =	1.000.000 κυβ. δακτ. =	1.000.000.000 κ.γ.
1 κυβ. παλ. =	1.000 κυβ. δακτ. =	1.000.000 κ.γ.
	1 κυβ. δακτ. =	1.000 κ.γ.

Ἀσκήσεις

1. Νά γράψεις μέ δεκαδική μορφή τούς συμμιγεῖς:

α) 1 κ.μ. 500 κυβ. παλ.

β) 0 κ.μ. 500 κυβ. παλ. 400 κ.δ.

γ) 9 κ.μ. 200 κυβ. παλ. 900 κ.δ.

δ) 2 τετρ. μ. 50 τετρ. παλ.

ε) 5 τετρ. μ. 99 τετρ. παλ.

ς) 0 τετρ. μ. 1 τετρ. παλ.

3. *Πῶς τρέπουμε ἕνα συμμιγή ἀριθμό σέ μονάδες μιᾶς τάξεως*

Πρόβλημα 1ο. Πόσες παλάμες (δεκατόμετρα) μᾶς κάνουν 25 μέτρα 8 παλάμες;

Λύση

α΄ ἐργασία. Κάνουμε τά μέτρα παλάμες. Μέτρα 25 × 10 παλάμες = 250 π.

β΄ ἐργασία. Στό γινόμενο προσθέτουμε τίς παλάμες πού ἔχει ὁ συμμιγής. Παλάμες 250 + 8 παλάμες = 258 παλάμες (δεκατόμετρα).

Διάταξη τῆς ἐργασίας

25	μέτρα
×10	παλάμες
250	παλάμες
+ 8	παλάμες
258	παλάμες

Ἀπάντηση. Μᾶς κάνουν 258 παλάμες.

Πρόβλημα 2ο. Μιά δεξαμενή νεροῦ γεμίζει ἀπό μιά βρύση σέ χρόνο 2 ὧρες 15 π 45 δ. Σέ πόσα δευτερόλεπτα γεμίζει;

Λύση. α΄ ἐργασία. Κάνουμε τίς ὥρες πρῶτα λεπτά. 2 × 60 π = 120 π

β΄ ἐργασία. Προσθέτουμε στό γινόμενο τά 15 π. 120 + 15 = 135 π

γ΄ ἐργασία. Κάνουμε τά πρῶτα λεπτά δευτερόλεπτα 135 π × 60 δ = 8.100 δ

δ΄ ἐργασία. Προσθέτουμε στό γινόμενο τά 45 δ. 8.100 δ + 45 δ = 8.145 δ.

Διάταξη τῆς ἐργασίας

2	ὥρες
× 60	πρῶτα
120	πρῶτα
+ 15	πρῶτα
135	πρῶτα
× 60	δευτερόλεπτα
8100	δευτερόλεπτα
+ 45	δευτερόλεπτα
8145	δευτερόλεπτα

Ἀπάντηση. Ἡ δεξαμενή γεμίζει σέ 8.145 δευτερόλεπτα.

Κανόνας. Γιά νά τρέψουμε (νά κάνουμε) ἕνα συμμιγή ἀριθμό σέ ἀκέραιο ἀριθμό, τόν τρέπουμε σέ μονάδες τῆς τελευταίας του τάξεως.

Ἀσκήσεις

Νά κάνεις ἀκέραιους τούς συμμιγεῖς:

α) μέ τό νοῦ α) 1 ἑκατοντάδραχμο 1 πενηντάδραχμο 2 δεκάδραχμα 5 δρχ.

β) 6 κιλά 500 γραμ.

γ) 5 τόννοι 250 κιλά 500 γραμμάρια

β) Γραπτά α) 2 ἡμέρες 12 ὧρες 20 π
β) 8 τετρ. μέτρα 80 τετρ. παλ. 25 τετρ. γραμ.
γ) 7 τόνοι 800 κιλά 450 γραμ.

Οἱ συμμιγεῖς τῶν ἀσκήσεων νά γίνουν μονάδες τῆς τελευταίας τους τάξεως καί νά γραφτοῦν ὕστερα καί σάν δεκαδικοί ἀριθμοί, ὅσοι ἀπ' αὐτούς ἀνήκουν σέ δεκαδικά συστήματα.

4. Πῶς κάνουμε ἕναν ἀκέραιο ἀριθμό συμμιγή

Πρόβλημα. Ἀπό τήν ἡμέρα πού γεννήθηκε ὁ Γιῶργος ἔχουν περάσει 3.770 ἡμέρες. Πόσων ἐτῶν εἶναι ὁ Γιῶργος;

α΄ ἐργασία. Διαιροῦμε τίς ἡμέρες τῆς ἡλικίας μέ τό 30 γιά νά βροῦμε τήν ἡλικία σέ μῆνες.

Ἡμέρες ἡλικίας	3.770	30 ἡμέρες
	– 77	125 μῆνες
	170	
ἡμέρες	20 ὑπόλοιπο	

β΄ ἐργασία. Διαιροῦμε τούς μῆνες, πού βρήκαμε μέ τήν προηγούμενη διαίρεση, μέ τό 12 γιά νά βροῦμε ἔτη.

Μῆνες ἡλικίας	125	12
	–05	10 ἔτη
	ὑπόλοιπο	

Τήν ἀπάντηση τή δίνουμε καί ἀπό τίς δυό διαιρέσεις. Ἀπό τή δεύτερη διαίρεση παίρνουμε τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπό της καί ἀπό τήν πρώτη παίρνουμε τό ὑπόλοιπό της.

Ἀπάντηση. Ἡ ἡλικία τοῦ Γιώργου σέ συμμιγή ἀριθμό εἶναι:
10 ἔτη 5 μῆνες 20 ἡμέρες

Ἡ ἐργασία πού κάναμε παίρνει μιά σύντομη διάταξη.

Διάταξη τῆς ἐργασίας

Ἡμέρες	3.770	30 ἡμέρες	
	77	125 μῆνες	12 μῆνες
	170	05 μῆνες	10 ἔτη
ἡμέρες	20		

Πρόσεξε! Τό τελευταῖο πηλίκο καί τά προηγούμενα ὑπόλοιπα μᾶς δίνουν τό συμμιγή.

Ἕνα παράδειγμα ἀκόμη μέ συμμιγή πού ἔχει δεκαδικό σύστημα μονάδων.

Νά γίνει συμμιγής ἀριθμός ὁ ἀκέραιος ἀριθμός 6.758 κιλά σταφίδα.

Διάταξη τῆς ἐργασίας

κιλά σταφίδας	6.758	1000 κιλά τόνος
κιλά ὑπόλοιπο	758	6 τόνοι

Ἀπάντηση. Ὁ συμμιγής εἶναι 6 τόνοι 758 κιλά σταφίδα.

Ἀσκήσεις

1. Νά γίνουν συμμιγεῖς ἀριθμοί οἱ συγκεκριμένοι ἀκέραιοι.
   α) 8.658.750 γραμμάρια λάδι
   β) 6.738 δευτερόλεπτα
   γ) 7.585 γραμμάρια ρύζι
   δ) Ἀπό τήν ἅλωση τῆς Κωνσταντινουπόλεως ἔχουν περάσει μέχρι σήμερα 189.155 ἡμέρες. Νά γίνει ὁ ἀκέραιος ἀριθμός συμμιγής.
   ε) Ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα τοῦ Γιώργου σέ ἡμέρες εἶναι 12.025 ἡμέρες. Νά ἐκφραστεῖ αὐτή ἡ ἡλικία σέ συμμιγή ἀριθμό.

5. *Οἱ πράξεις τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.*

α. Πρόσθεση συμμιγῶν

Πρόβλημα α΄. Ἕνας ἔμπορος ὑφασμάτων πούλησε δυό τόπια ὕφασμα τῆς ἴδιας ποιότητας. Τό ἕνα τόπι εἶχε 16 μέτρα 4 παλάμες καί τό ἄλλο 24 μέτρα 3 παλάμες. Πόσα μέτρα ὕφασμα πούλησε;

Σκέψη. Γιά νά λύσουμε τό πρόβλημα αὐτό θά βροῦμε τό ἄθροισμα τῶν δυό συμμιγῶν πού φανερώνουν τό μῆκος τοῦ ὑφάσματος, πού εἶχε τό κάθε τόπι.

Λύση. Ἐργασία πρώτη. Γράφουμε τόν ἕνα συμμιγή ἀριθμό κάτω ἀπό τόν ἄλλο καί προσέχουμε οἱ μονάδες τῆς κάθε τάξεως, νά γράφονται στήν ἴδια στήλη.

γραφή	16 μέτρα	4 παλάμες
	+ 24 »	3 »
ἄθροισμα	40 »	7 »

Ἐργασία β΄. Προσθέτουμε τίς μονάδες τῆς κάθε μιᾶς τάξεως σάν νά εἶναι ἀκέραιοι. Ἀρχίζουμε πάντοτε τήν πρόσθεση ἀπό τήν μικρότερη τάξη.

Ἀπάντηση. Τά δυό τόπια τό ὕφασμα, πού πούλησε ὁ ἔμπορος, εἶχαν 40 μέτρα 7 παλάμες.

Πρόβλημα β΄. Ἕνας ἄλλος ἔμπορος πούλησε σέ μιά μέρα τρία τόπια ὕφασμα τῆς ἴδιας ποιότητας. Τό ἕνα τόπι εἶχε 26 μέτρα 5 παλάμες, τό ἄλλο 19 μέτρα 7 παλάμες καί τό τρίτο 17 μέτρα 6 παλάμες. Πόσο ἦταν τό μῆκος τοῦ ὑφάσματος πού πούλησε;

Σκέψη. Τό μῆκος τοῦ ὑφάσματος, πού πούλησε ὁ ἔμπορος, εἶναι τό ἄθροισμα τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, πού δείχνουν τό μῆκος τοῦ κάθε τοπιοῦ.

Λύση. Ἐργασία α΄. Γράφουμε τόν ἕνα συμμιγή κάτω ἀπό τόν ἄλλο καί προσέχουμε οἱ μονάδες τῆς ἴδιας τάξεως νά βρίσκονται στήν ἴδια στήλη.

γραφή	26 μέτρα	5 παλάμες
	19 »	7 »
	+ 17 »	6 »
ἄθροισμα	62 »	18 »
	63 »	8 »

Παρατήρηση. Οἱ μονάδες τῆς μικρότερης τάξεως στό ἄθροισμα ἔχουν μονάδες τῆς μεγαλύτερης τάξεως. Οἱ 18 παλάμες μᾶς κάνουν 1μέτρο καί 8 παλάμες. Παίρνουμε τό ἕνα μέτρο καί τό προσθέτουμε στά μέτρα. Ἔτσι τό τελικό ἄθροισμα εἶναι 63 μέτρα 8 παλάμες.

Ἀπάντηση. Πούλησε 63 μέτρα 8 παλάμες.

Κανόνας. Γιά νά προσθέσουμε συμμιγεῖς ἀριθμούς:

α) Γράφουμε τόν ἕνα συμμιγή κάτω ἀπό τόν ἄλλο καί προσέχουμε νά βρίσκονται οἱ μονάδες τῆς ἴδιας τάξεως στήν ἴδια στήλη.

β) Κάνουμε τήν πρόσθεση σάν νά εἶναι ἀκέραιοι ἀρχίζοντας ἀπό τή μικρότερη τάξη.

γ) Στό ἄθροισμα πού βρίσκουμε προσέχουμε ἄν οἱ μονάδες τῆς κατώτερης τάξεως περιέχουν μονάδες τῆς ἀνώτερης.

δ) Ἄν συμβαίνει αὐτό, παίρνουμε τίς μονάδες τῆς ἀνώτερης τάξεως καί τίς προσθέτουμε στήν τάξη τους, τό ὑπόλοιπο γράφουμε στήν ἴδια τάξη.

Ἀσκήσεις

Νά κάμεις τίς προσθέσεις τῶν συμμιγῶν.

α) 8 μέτρα 4 παλάμες 7 δάκτυλοι
5 μέτρα 6 παλάμες 9 δάκτυλοι
2 μέτρα 8 παλάμες 5 δάκτυλοι

β) 7 ὧρες 25 π 30 δ
6 ὧρες 40 π 15 δ
4 ὧρες 50 π 20 δ

γ) 12 ἔτη 7 μῆνες 19 ἡμέρες
8 ἔτη 6 μῆνες 26 ἡμέρες

Προβλήματα

1. Ὁ Νίκος ἔχει ἡλικία 10 ἔτη 5 μῆνες 15 ἡμέρες. Ὁ Κώστας εἶναι πιό μεγάλος ἀπό τό Νίκο 1 ἔτος 2 μῆνες 15 ἡμέρες. Ποιά εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ Κώστα;
2. Ἕνας ἐργάτης γιά νά σκάψει ἕνα ἀμπέλι ἐργάστηκε τήν πρώτη ἡμέρα 7 ὧρες 30 π 35 δ., τή δεύτερη μέρα 6 ὧρες 25 π 30 δ καί τήν τρίτη 8 ὧρες 10 π 45 δ. Πόσο χρόνο ἐργάστηκε ὁ ἐργάτης γιά νά σκάψει τό ἀμπέλι;
3. Νά κάμεις καί σύ δικά σου προβλήματα μέ τίς μονάδες πού ἔμαθες.

6. Ἀφαίρεση συμμιγῶν

Πρόβλημα α΄. Ἕνας ἔμπορος ὑφασμάτων εἶχε στό κατάστημά του ἕνα τόπι ὕφασμα πού εἶχε μῆκος 28 μέτρα 8 παλάμες. Ἀπ' αὐτό πούλησε 6 μέτρα καί 3 παλάμες. Πόσο ὕφασμα ἔμεινε;

Σκέψη. Γιά νά λύσουμε τό πρόβλημα αὐτό θά πρέπει νά βροῦμε τή διαφορά τῶν δυό ποσῶν. Θά ἀφαιρέσουμε τό μῆκος τοῦ ὑφάσματος πού πούλησε ἀπό τό μῆκος τοῦ ὑφάσματος πού εἶχε τό τόπι. Τό ὑπόλοιπο εἶναι τό ζητούμενο τοῦ προβλήματος.

Λύση. ἐργασία α΄. Γράφουμε τό μειωτέο συμμιγή καί κάτω ἀπ' αὐτόν τόν ἀφαιρετέο συμμιγή καί προσέχουμε οἱ μονάδες κάθε τάξεως νά βρίσκονται στήν ἴδια στήλη.

ἐργασία β΄. Κάνουμε τήν ἀφαίρεση, ἀφαιρώντας χωριστά τίς μονάδες κάθε τάξεως σάν νά εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Διάταξη τῆς πράξεως

μειωτέος	28 μέτρα	8 παλάμες
ἀφαιρετέος	−6 μέτρα	3 παλάμες
ὑπόλοιπο	22 μέτρα	5 παλάμες

Ἀπάντηση. Ἔμειναν ἀπούλητα 22 μέτρα 5 παλάμες.

Πρόβλημα β΄. Ὁ Νίκος εἶναι σήμερα 11 ἐτῶν 2 μηνῶν καί 20 ἡμερῶν καί εἶναι πιό μεγάλος ἀπό τόν ἀδελφό του τόν Κώστα 2 ἔτη 8 μῆνες 25 ἡμέρες. Ποιά εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ Κώστα;

Σκέψη. Γιά νά βροῦμε τήν ἡλικία τοῦ Κώστα πρέπει νά ἀφαιρέσουμε ἀπό τήν ἡλικία τοῦ Νίκου, 2 ἔτη 8 μῆνες 25 ἡμέρες.

Λύση. Γράφουμε τούς ἀριθμούς ὅπως μάθαμε παραπάνω.

μειωτέος	11 ἔτη	2 μῆνες	20 ἡμέρες
ἀφαιρετέος	−2 ἔτη	8 μῆνες	25 ἡμέρες

Παρατήρηση. Παρατηροῦμε ὅτι στίς μικρότερες τάξεις τοῦ μειωτέου συμμιγή, οἱ μονάδες εἶναι λιγότερες ἀπό τίς ἀντίστοιχες μονάδες τοῦ ἀφαιρετέου καί ἔτσι δέν ἀφαιροῦνται. Οἱ 25 ἡμέρες δέν ἀφαιροῦνται ἀπό τίς 20 ἡμέρες.

Θά πάρουμε μιά μονάδα ἀπό τήν προηγούμενη μεγαλύτερη τάξη, δηλαδή τούς μῆνες, θά τήν κάνουμε ἡμέρες καί θά τίς προσθέσουμε στίς ἡμέρες. Ἔτσι ἐλαττώνονται οἱ μῆνες μιά μονάδα καί αὐξάνονται οἱ ἡμέρες κατά 30 ἡμέρες (1 μήνας = 30 ἡμέρες).

Πρόσεξε! Δέν εἶναι δανεισμός. Ἡ ἀξία τοῦ συμμιγή μειωτέου δέν ἐλαττώνεται μέ τή μεταφορά μιᾶς μονάδας του ἀπό τάξη σέ τάξη, ἀρκεῖ νά τή μετατρέψουμε στίς ἰσοδύναμες μονάδες τῆς τάξεως.

Γι' αὐτό καί δέν ἐπιστρέφουμε τή μονάδα ἀλλά σημειώνουμε τή μεταβολή πάνω στόν μειωτέο.

Παρακολούθησε τήν ἐργασία στήν πράξη τῆς ἀφαιρέσεως.

			13			
	10		1		50	
μειωτέος	11	ἔτη	2	μῆνες	20	ἡμέρες
ἀφαιρετέος	−2	ἔτη	8	μῆνες	25	ἡμέρες
	8	ἔτη	5	μῆνες	25	ἡμέρες

Ἀπάντηση. Ἡ ἡλικία τοῦ Κώστα εἶναι 8 ἔτη 5 μῆνες 25 ἡμέρες.

Κανόνας. Γιά νά ἀφαιρέσουμε συμμιγή ἀριθμό ἀπό συμμιγή:

α) Γράφουμε τόν ἀφαιρετέο κάτω ἀπό τόν μειωτέο καί προσέχουμε οἱ μονάδες τῆς κάθε τάξεως νά εἶναι στήν ἴδια στήλη.

β) Κάνουμε τήν ἀφαίρεση στήν κάθε τάξη σάν νά εἶναι ἀκέραιοι.

γ) Σέ περίπτωση πού οἱ μονάδες τοῦ ἀφαιρετέου σέ μιά τάξη εἶναι λιγότερες ἀπό τοῦ μειωτέου τότε μεταφέρουμε μιά μονάδα ἀπό τήν ἀμέσως μεγαλύτερη τάξη καί ἀφοῦ τήν κάνουμε μονάδες τῆς τάξεως, τίς προσθέτουμε στίς μονάδες τῆς τάξεως τοῦ μειωτέου.

Οἱ μεταβολές σημειώνονται ὅπως δείχνει τό παράδειγμά μας.

Ἀσκήσεις

1. Νά κάμεις τίς ἀφαιρέσεις συμμιγῶν.

α) 5 ἑκατοντάδραχμα 5 δεκάδραχμα 7 δραχμές
2 ἑκατοντάδραχμα 6 δεκάδραχμα 5 δραχμές

β) 25 μέτρα 5 παλάμες 2 δάκτυλοι
14 μέτρα 6 παλάμες 5 δάκτυλοι

γ) 17 ὧρες 30 π 25 δ
8 ὧρες 18 π 45 δ

Προβλήματα

1. Ἕνα βαρέλι γεμάτο πετρέλαιο ἔχει μεικτό βάρος 225 κιλά 580 γραμμάρια. Τό ἀπόβαρο τοῦ βαρελιοῦ εἶναι 35 κιλά 800 γραμ. Πόσο εἶναι τό καθαρό βάρος τοῦ πετρελαίου;
2. Ἡ ἅλωση τῆς Κωνσταντινουπόλεως ἔγινε στίς 29 Μαΐου 1453. Πόσος χρόνος ἔχει περάσει ἀπό τότε μέχρι σήμερα, πού λύνεις τό πρόβλημα;
3. Γιά νά ράψει μιά μοδίστρα ἕνα φόρεμα χρειάζεται ὕφασμα μέ μῆκος 5 μέτρα 3 παλάμες 8 δάκτυλοι. Ἔχει ὅμως μόνο 2 μ. 6 παλ. 9 δάκτυλ. Πόσο ὕφασμα πρέπει νά ἀγοράσει ἀκόμη γιά συμπλήρωμα;
4. Ἕνα οἰκόπεδο ἔχει ἐμβαδόν (ἐπιφάνεια) 245 τετρ. μέτρα 84 τ.π. Πάνω στό οἰκόπεδο αὐτό κτίστηκε ἕνα σπίτι μέ ἐμβαδόν 125 τ. μέτρα 84 τετρ. παλάμες. Τό ὑπόλοιπο ἔγινε κῆπος. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κήπου;
5. Ὅταν γεννήθηκε ἡ Ἑλένη ὁ πατέρας της ἦταν ἀκριβῶς 25 ἐτῶν. Σήμερα ἡ Ἑλένη εἶναι 10 ἐτῶν 8 μηνῶν 25 ἡμερῶν. Πόση εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα της σήμερα;
6. Ὁ κύρ Γιῶργος καί οἱ γιοί του ἐργάστηκαν 3 ἡμέρες γιά νά σκάψουν τό ἀμπέλι τους. Τήν πρώτη ἡμέρα ἐργάστηκαν 7 ὧρες 30 π 40 δ, τή δεύτερη μέρα 1 ὥρα 10 π 25 δ περισσότερο ἀπό τήν πρώτη μέρα, καί τήν τρίτη μέρα 2 ὧρες 10 π 50 δ λιγότερο ἀπό τή δεύτερη μέρα. Πόσο χρόνο ἐργάστηκαν γιά νά σκάψουν τό ἀμπέλι τους;
7. Ἕνας ἔμπορος λαδιοῦ ἀγόρασε τρία βαρέλια λάδι. Τό πρῶτο βαρέλι εἶχε μεικτό βάρος 185 κιλά 800 γραμμάρια, τό δεύτερο βαρέλι εἶχε μεικτό βάρος 210 κιλά 500 γραμμάρια καί τό τρίτο βαρέλι εἶχε μεικτό βάρος 2 κιλά καί 880 γραμμάρια περισσότερο ἀπό τό δεύτερο βαρέλι. Ὅταν ἄδειασε τά βαρέλια στίς δεξαμενές λαδιοῦ ζύγισε καί τά τρία ἄδεια βαρέλια καί εἶχαν ἀπόβαρο 75 κιλά 800 γραμ. Πόσο ἦταν τό λάδι πού ἀγόρασε;

Γιά τόν πολλαπλασιασμό καί τή διαίρεση τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν θά μάθεις σέ ἄλλη τάξη.

Εἰσαγωγή

Σέ ὅλους σας ἔτυχε νά μοιράσετε μιά σοκολάτα, ἕνα γλυκό, ἕνα πορτοκάλι ἤ ἄλλο φροῦτο, μέ τ' ἀδέλφια σας ἤ τούς φίλους σας.

Τότε ἀντιληφθήκατε ὅτι δέν μπορούσατε νά κάνετε διαφορετικά, παρά μόνο νά μοιράσετε τή σοκολάτα, τό γλυκό, τό φροῦτο σέ 2,3 ἤ 4, ἴσα κομμάτια, ἰσάριθμα μέ τούς δικαιούχους.

Τότε ἀκριβῶς χρησιμοποιήσατε τά κλάσματα.

Διότι ἀσφαλῶς γιά νά μοιράσετε δίκαια, χρειάστηκε νά μετρήσετε τά πλακάκια τῆς σοκολάτας, τίς φέτες τοῦ πορτοκαλιοῦ ἤ προσπαθήσατε νά κόψετε τό γλύκισμα σέ ὅμοια, ἴσα κομμάτια.

Ἄλλοτε πάλι ἀγοράζοντας διάφορα τρόφιμα π.χ. τυρί, ἀλλαντικά, καφέ κτλ. δέν ἀγοράζετε 1, 2 ἤ 3 κιλά, ἀλλά μισό κιλό, τέταρτο, 200 γραμμάρια κτλ. Καί γιά νά βρεῖτε τήν ἀξία τοῦ εἴδους πού ἀγοράσατε, μοιράσατε τήν τιμή τοῦ κιλοῦ σέ 2, 4 ἤ 5 κτλ. μέρη.

Ἀκόμη πολλές φορές ὑπολογίζετε τό χρόνο ὄχι σέ ὁλόκληρες ὧρες, ἀλλά σέ λεπτά, μισή ὥρα, σέ τέταρτο, τρία τέταρτα κτλ.

Σέ ὅλες αὐτές τίς περιπτώσεις ἀσχοληθήκατε μέ κλάσματα.

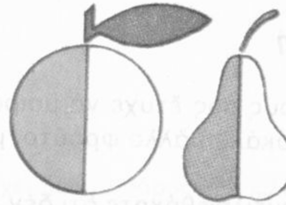
Ἐφέτος θά μάθουμε νά λογαριάζουμε συστηματικά μέ κλάσματα.

Ἄς τά πάρουμε λοιπόν μέ τή σειρά τους γιά νά τά μελετήσουμε, νά τά μάθουμε σωστά, γιατί πολλές φορές θά μᾶς χρειαστοῦν στή ζωή.

1. ΕΝΝΟΙΑ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ

α) Κλασματική μονάδα

Μοιράζοντας ἕνα μῆλο σέ δυό ἴσα μέρη, κάθε κομμάτι λέγεται μισό. Μποροῦμε νά μοιράσουμε σέ δυό ἴσα μέρη, ἕνα πορτοκάλι, ἀπίδι, καρπούζι, κώκ, σοκολάτα κτλ.

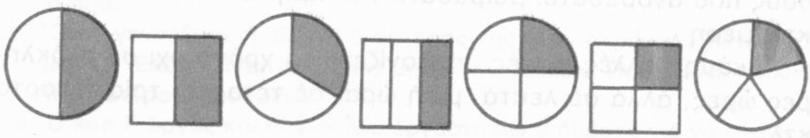


Καθένα ἀπό τά δύο αὐτά κομμάτια πού μοιράσαμε ἕνα πράγμα, λέγεται **μισό** ἤ **ἕνα δεύτερο.**

Κάθε πράγμα πού εἶναι ὁλόκληρο, εἶναι μιά **ἀκέραιη μονάδα.**

Μισό λοιπόν ἤ ἕνα δεύτερο εἶναι ἕνα ἀπό τά δύο ἴσα μέρη στά ὁποῖα μοιράσαμε ἕνα ὁλόκληρο πράγμα, μιά ἀκέραιη μονάδα.

Γιά νά ἀντιληφθοῦμε καλύτερα τά κλάσματα, τά παρακάτω σχήματα θεωροῦνται τό καθένα ἕνα ὁλόκληρο πράγμα, μιά ἀκέραιη μονάδα.



Ἄν μοιράσουμε τήν ἀκέραιη μονάδα σέ **τρία** ἴσα μέρη, κάθε κομμάτι λέγεται **ἕνα τρίτο** καί εἶναι **ἕνα ἀπό τά τρία** ἴσα μέρη τῆς μοιρασμένης ἀκέραιης μονάδας.

Ἄν μοιράσουμε τήν ἀκέραιη μονάδα σέ **τέσσερα** ἴσα μέρη, κάθε κομμάτι εἶναι **ἕνα ἀπό τά τέσσερα** ἴσα μέρη τῆς μοιρασμένης ἀκέραιης μονάδας καί λέγεται **ἕνα τέταρτο.** Ἄν μοιράσουμε μιά ἀκέραιη μονάδα **σέ 5 ἴσα μέρη,** κάθε κομμάτι εἶναι **ἕνα ἀπό τά πέντε ἴσα μέρη** τῆς μοιρασμένης ἀκέραιης μονάδας, εἶναι τό **ἕνα πέμπτο,** κ.ο.κ.

Ἄν μοιράσουμε ἕνα γλύκισμα σέ δώδεκα ἄτομα, τί θά πάρει κάθε ἄτομο; Τί ἀξία ἔχει κάθε κομμάτι;

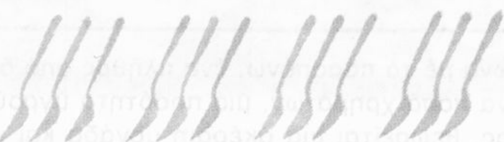
Τά παραπάνω κομμάτια εἶναι τό καθένα μιά ξεχωριστή μονάδα. Τό κάθε κομμάτι μεγάλο ἤ μικρό εἶναι μιά **κλασματική μονάδα.**

> *Λοιπόν:* **Κλασματική μονάδα εἶναι, ἕνα ἀπό τά ἴσα μέρη, στά ὁποῖα χωρίσαμε μιά ἀκέραιη μονάδα.**

Κλασματική μονάδα ποσοῦ.

Πρόσεξε τό κουτί μέ τά τυράκια.
Κάθε κουτί ἔχει 6 τυράκια.
Κάθε τυράκι εἶναι ἕνα ἀπό τά ἕξι.
Κάθε τυράκι εἶναι τό ἕνα ἕκτο ἀπό τό σύνολο τῶν τυριῶν τοῦ κουτιοῦ.
Τά 3 τυράκια εἶναι τό ἕνα δεύτερο ἀπό τό σύνολο τῶν τυριῶν τοῦ κουτιοῦ.
Τά 2 τυράκια εἶναι τό ἕνα τρίτο ἀπό τό σύνολο τῶν τυριῶν τοῦ κουτιοῦ.

Πρόσεξε τά παρακάτω κουταλάκια. Εἶναι μιά δωδεκάδα.



Κάθε κουταλάκι εἶναι τό ἕνα δωδέκατο τῆς δωδεκάδας.
Τά 6 κουταλάκια εἶναι τό ἕνα δεύτερο τῆς δωδεκάδας.
Τά 3 κουταλάκια εἶναι τό ἕνα τέταρτο τῆς δωδεκάδας.
Αὐτό συμβαίνει σέ πολλά πράγματα πού πουλιοῦνται σέ δωδεκάδες, ὅπως, μαχαίρια, πηρούνια, κουτάλια, ποτήρια, πιάτα, φλυτζάνια κτλ.

Πρόσεξε! Ἔχουμε ἕνα ἑκατοστάρικο. Μποροῦμε νά τό μοιράσουμε, σέ 2 πενηντάρικα, σέ 5 εἰκοσάρικα ἤ σέ 10 δεκάρικα.
Τό ἕνα πενηντάρικο εἶναι τό ἕνα δεύτερο τοῦ ἑκατοστάρικου.

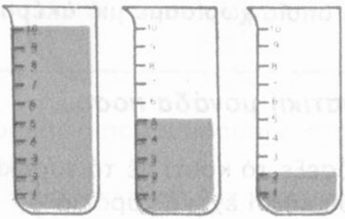
Τό ἕνα εἰκοσάρικο εἶναι τό ἕνα πέμπτο τοῦ ἑκατοστάρικου.
Τό ἕνα δεκάρικο εἶναι τό ἕνα δέκατο τοῦ ἑκατοστάρικου.

Πρόσεξε τό ὑγρό πού ὑπάρχει στούς ὀγκομετρικούς σωλῆνες.

Στόν πρῶτο τό ὑγρό φτάνει στά 10 κ. ἑκ.

Στόν δεύτερο τό ὑγρό φτάνει στά 5 κ. ἑκ.

Στόν τρίτο τό ὑγρό φτάνει στά 2 κ. ἑκ.



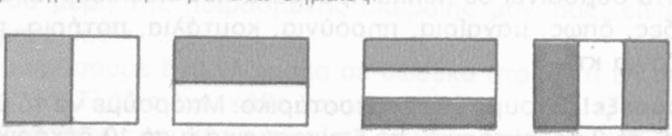
Ὅπως βλέπουμε ὁ α΄ σωλήνας εἶναι γεμάτος, ὁ β΄ σωλήνας εἶναι μισός, καί ὁ γ΄ σωλήνας περιέχει τό ἕνα πέμπτο, ἀπό τήν ποσότητα τοῦ ὑγροῦ πού περιέχει ὁ α΄.

Ἐδῶ, μέ τή βοήθεια τῶν ὑποδιαιρέσεων, ὑπολογίζουμε τήν ποσότητα τοῦ ὑγροῦ πού περιέχει κάθε σωλήνας, σέ σχέση μέ τήν ποσότητα τοῦ ὑγροῦ πού χωρεῖ. Κάτι ἀνάλογο κάνουμε γιά νά ὑπολογίσουμε τό περιεχόμενο μιᾶς φιάλης, μιᾶς κανάτας, ἑνός ποτηριοῦ, ἑνός δοχείου, ἑνός βαρελιοῦ, μιᾶς δεξαμενῆς κτλ.

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω, ἕνα πλῆθος ἀπό ὅμοια πράγματα, ἕνα ποσό χρημάτων, μιά ποσότητα ὑγροῦ ἤ ἄλλου πράγματος, θεωρεῖται μιά ἀκέραιη μονάδα καί μπορεῖ νά μοιρασθεῖ σέ κλασματικές μονάδες.

Ἐργασίες

1. Παρατήρησε τίς παρακάτω σημαῖες.



– Σέ πόσα μέρη χωρίζεται κάθε μιά; Τί ἀντιπροσωπεύει κάθε χρῶμα;

2. Κόψε σέ χαρτονάκια διάφορα γεωμετρικά σχήματα (κύκλους, τρίγωνα, τετράγωνα, ὀρθογώνια) καί δίπλωσέ τα σέ δυό, τρία καί τέσσερα μέρη.
3. Μοίρασε, χωρίς νά μετρήσεις, ἕνα νῆμα 75 ἑκ. σέ δυό ἴσα μέρη.
4. Ἔχουμε 12 χρωματιστά τόπια. Ἀπό αὐτά 3 εἶναι κόκκινα, 6 πράσινα καί 3 κίτρινα. Ποιά κλασματική μονάδα παρουσιάζει κάθε χρῶμα;

5. Σέ μιά λιμνούλα κολυμποῦν 3 πάπιες, 3 χῆνες καί 6 κύκνοι. Τί μέρος ἀπό τό σύνολο τῶν πουλιῶν, ἀντιπροσωπεύει κάθε εἶδος;

6. Ἀπό ἕνα βαρέλι πού εἶχε 75 κιλά λάδι, πήραμε τό $\frac{1}{3}$. Πόσα κιλά πήραμε;

γ) Γραφή κλασματικῶν μονάδων.

Πρόσεξε πῶς γράφουμε τίς κλασματικές μονάδες.

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{7}, \quad \frac{1}{12}, \quad \frac{\text{Ἀριθμητής}}{\text{Παρονομαστής}},$$

$$\frac{\textbf{1 ἀπό τά ἴσα μέρη τῆς ἀκέραιας μονάδας}}{\textbf{Σέ πόσα μέρη μοιράσαμε τήν ἀκερ. μονάδα}}$$

Κάθε κλασματική μονάδα γράφεται μέ δυό ἀριθμούς, τόν ἕνα πάνω ἀπό τόν ἄλλο, πού χωρίζονται μέ μιά γραμμούλα, πού λέγεται **κλασματική γραμμή.**

Ὁ ἀριθμός πού γράφεται πάνω ἀπό τήν κλασματική γραμμή λέγεται **ἀριθμητής.**

Ὁ ἀριθμός πού γράφεται κάτω ἀπό τήν κλασματική γραμμή λέγεται **παρονομαστής** καί φανερώνει σέ πόσα ἴσα μέρη μοιράστηκε ἡ ἀκέραιη μονάδα.

Καί οἱ δυό μαζί λέγονται **ὅροι τοῦ κλάσματος.**

Πρόσεξε:

Πόσα γραμμάρια εἶναι τό $\frac{1}{2}$ καί τό $\frac{1}{4}$ τοῦ κιλοῦ;

Σκέψη: Τό κιλό ἔχει 1000 γραμμάρια. Τό $\frac{1}{2}$ εἶναι 1000 : 2 = 500 γραμμάρια.

Τό $\frac{1}{4}$ εἶναι 1000 : 4 = 250 γραμμάρια.

Ἄρα: Γιά νά βροῦμε τί ἀντιπροσωπεύει μιά κλασματική μονάδα ἑνός ποσοῦ, διαιροῦμε τό ποσό μέ τόν παρονομαστή τῆς κλασματικῆς μονάδας.

Πρόσεξε: Ποιά κλασματική μονάδα τοῦ ἑκατοστάρικου, ἀντιπροσωπεύει ἕνα εἰκοσάρικο;

Σκέψη: Ξέρουμε ὅτι τό ἑκατοστάρικο ἔχει 5 εἰκοσάρικα. Καί τό βρίσκουμε μέ τή διαίρεση 100 : 20 = 5.

Δηλ. τό εἰκοσάρικο εἶναι τό $\frac{1}{5}$ τοῦ ἑκατοστάρικου.

Ἄρα: Γιά νά βροῦμε ποιά κλασματική μονάδα ἀντιπροσωπεύει ἕνα μέρος ἑνός ποσοῦ, μετροῦμε πόσες φορές αὐτό τό μέρος τοῦ ποσοῦ, χωρεῖ στό ποσό. Τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως αὐτῆς, μᾶς δίνει τόν παρονομαστή τῆς κλασματικῆς μονάδας πού ζητοῦμε.

δ) Σύγκριση κλασματικῶν μονάδων

Παρατήρησε τά παρακάτω σχήματα: Τί κάναμε;

Μοιράσαμε ἕνα καρπούζι σέ 2, σέ 4, σέ 6, σέ 8 ἴσα κομμάτια.

Πρόσεξε τίς φέτες τοῦ καρπουζιοῦ σέ κάθε περίπτωση.

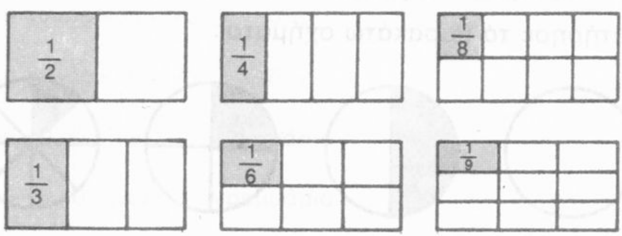
Πότε παίρνουμε μεγαλύτερο κομμάτι; Ὅταν τό μοιράζουμε σέ 2 ἴσα μέρη.

Πότε παίρνουμε μικρότερο κομμάτι; Ὅταν τό μοιράζουμε σέ 8 ἴσα μέρη.

Ἄρα συγκριτικά τά κομμάτια μπαίνουν σ' αὐτή τή σειρά:

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{6} > \frac{1}{8}$$

Παρατήρησε τά παρακάτω σχήματα: Τί κάναμε;



Μοιράσαμε ὅμοια ὀρθογώνια σέ 2, 3, 4, 6, 8 καί 9 ἴσα μέρη.

Πρόσεξε τά κομμάτια κάθε σχήματος.

Ποιό κομμάτι εἶναι μικρότερο; Τό —

Ποιό κομμάτι εἶναι μεγαλύτερο; Τό —

Ποιά εἶναι ἡ σειρά τους ἀπό τό μικρότερο στό μεγαλύτερο;

— < — < — < — < —

Σκέψου καί σύγκρινε:

Τό $\frac{1}{2}$ τοῦ χρόνου εἶναι 6 μῆνες.

Τό $\frac{1}{3}$ τοῦ χρόνου εἶναι μῆνες.

Τό $\frac{1}{4}$ τοῦ χρόνου εἶναι μῆνες.

Τό $\frac{1}{6}$ τοῦ χρόνου εἶναι μῆνες.

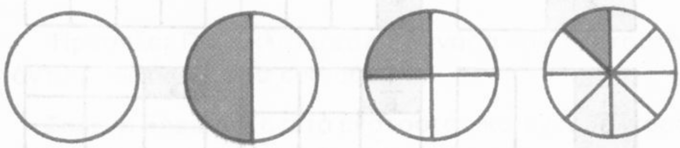
Τό $\frac{1}{12}$ τοῦ χρόνου εἶναι μῆνες.

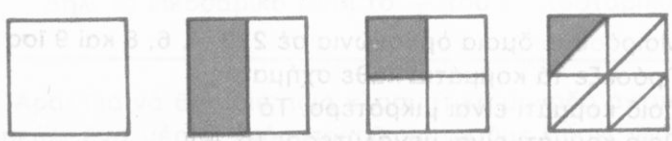
Ποιό μέρος τοῦ ἔτους εἶναι μεγαλύτερο καί ποιό μικρότερο;
Ποιά εἶναι ἡ σειρά τους; — — — — — —

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι:
Ὅσο μικρότερος εἶναι ὁ παρονομαστής, τόσο μεγαλύτερη εἶναι ἡ κλασματική μονάδα. Καί ἀντίστροφα.
Ὅσο μεγαλύτερος εἶναι ὁ παρονομαστής, τόσο μικρότερη εἶναι ἡ κλασματική μονάδα.

Δεύτερα – Τέταρτα – Ὄγδοα

Παρατήρησε τά παρακάτω σχήματα:

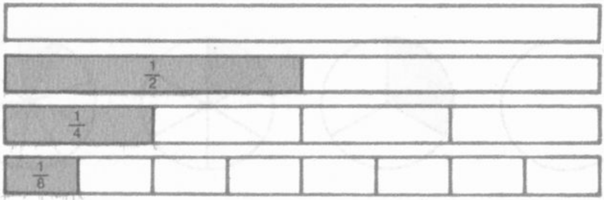




Σημείωσε τίς κλασματικές μονάδες καί σύγκρινέ τις.
Γράψε τις στή σειρά ἀπό τή μεγαλύτερη στή μικρότερη.

— > — > — > —

Πρόσεξε τήν παρακάτω ὁμάδα τῶν κλασματικῶν μονάδων.



Πρόσεξε, σκέψου, ἀπάντησε, συμπλήρωσε:

Τό $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου εἶναι   ἑκατοστά.

Τό $\frac{1}{4}$ τοῦ μέτρου εἶναι   ἑκατοστά.

Τό $\frac{1}{8}$ τοῦ μέτρου εἶναι   ἑκατοστά.

Τό $\frac{1}{2}$ τοῦ χιλιάρικου εἶναι   δρχ.

Τό $\frac{1}{4}$ τοῦ χιλιάρικου εἶναι   δρχ.

Τό $\frac{1}{8}$ τοῦ χιλιάρικου εἶναι   δρχ.

Τό $\frac{1}{2}$ τοῦ κιλοῦ εἶναι   γραμμάρια.

Τό $\frac{1}{4}$ τοῦ κιλοῦ εἶναι   γραμμάρια.

Τό $\frac{1}{8}$ τοῦ κιλοῦ εἶναι   γραμμάρια.

Τί κλάσματα ἔχουμε ἄν μοιράσουμε τό $\frac{1}{2}$ σέ 2, 3, ἤ 4 μέρη;

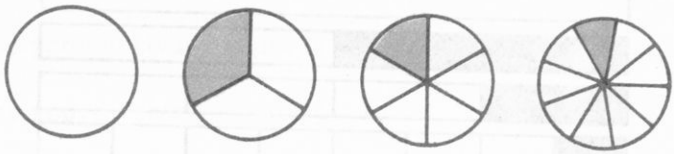
Ὅταν χωρίσουμε τό $\frac{1}{2}$ σέ 2, παίρνουμε τέταρτα.

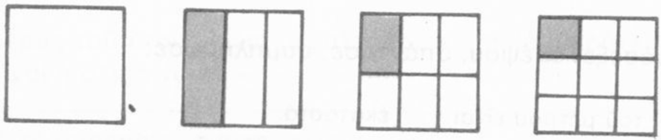
Ὅταν χωρίσουμε τό $\frac{1}{2}$ σέ 3, παίρνουμε ....

Ὅταν χωρίσουμε τό $\frac{1}{2}$ σέ 4, παίρνουμε ....

Τρίτα – Ἕκτα – Δωδέκατα

Παρατήρησε τά παρακάτω σχήματα:

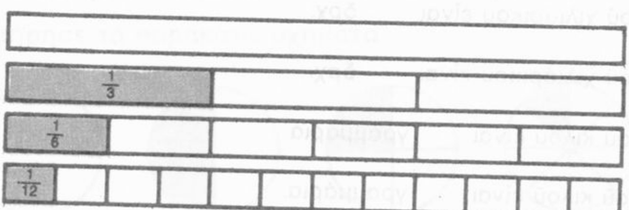




Σημείωσε τίς κλασματικές μονάδες καί σύγκρινέ τις.
Γράψε τις στή σειρά ἀπό τή μικρότερη στή μεγαλύτερη.

___ ___ ___ ___

Πρόσεξε τήν παρακάτω ὁμάδα κλασματικῶν μονάδων.



Πρόσεξε, σκέψου, ἀπάντησε, συμπλήρωσε:

Τό $\frac{1}{3}$ τῆς ὥρας εἶναι ___ λεπτά.

Τό $\frac{1}{6}$ τῆς ὥρας εἶναι ___ λεπτά.

Τό $\frac{1}{12}$ τῆς ὥρας εἶναι ___ λεπτά.

Τό $\frac{1}{3}$ τοῦ μήνα εἶναι ___ μέρες.

Τό $\frac{1}{6}$ τοῦ μήνα εἶναι μέρες.

Τό $\frac{1}{3}$ τοῦ ἔτους εἶναι μῆνες.

Τό $\frac{1}{4}$ τοῦ ἔτους εἶναι μῆνες.

Τό $\frac{1}{12}$ τοῦ ἔτους εἶναι μῆνες.

Τί κλάσματα ἔχουμε ἄν μοιράσουμε τό $\frac{1}{3}$ σέ 2, 3, ἤ 4 μέρη;

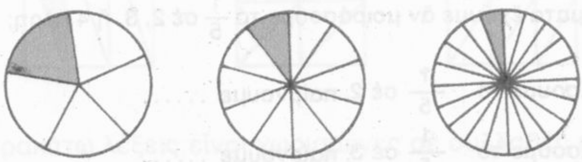
Ὅταν χωρίσουμε τό $\frac{1}{3}$ σέ 2, παίρνουμε ἕκτα.

Ὅταν χωρίσουμε τό $\frac{1}{3}$ σέ 3, παίρνουμε .....

Ὅταν χωρίσουμε τό $\frac{1}{3}$ σέ 4, παίρνουμε .....

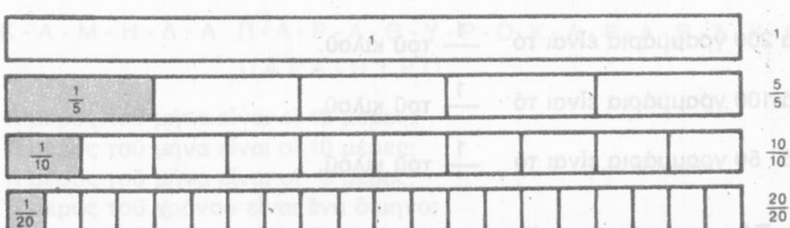
Πέμπτα – Δέκατα – Εἰκοστά.

Παρατήρησε τά παρακάτω σχήματα:



Σημείωσε τίς κλασματικές μονάδες καί σύγκρινέ τις.
Γράψε τις στή σειρά: — > — > —.

Πρόσεξε τήν παρακάτω ὁμάδα τῶν κλασματικῶν μονάδων.



Πρόσεξε, σκέψου, ἀπάντησε, συμπλήρωσε:

Τό $\frac{1}{5}$ τοῦ μέτρου εἶναι ἑκατοστά.

Τό $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου εἶναι ἑκατοστά.

Τό $\frac{1}{20}$ τοῦ μέτρου εἶναι ἑκατοστά.

Τό $\frac{1}{5}$ τοῦ κιλοῦ εἶναι γραμμάρια.

Τό $\frac{1}{10}$ τοῦ κιλοῦ εἶναι γραμμάρια.

Τό $\frac{1}{20}$ τοῦ κιλοῦ εἶναι γραμμάρια.

Τό $\frac{1}{5}$ τοῦ χιλιομέτρου εἶναι μέτρα.

Τό $\frac{1}{10}$ τοῦ χιλιομέτρου εἶναι μέτρα.

Τό $\frac{1}{20}$ τοῦ χιλιομέτρου εἶναι μέτρα.

Τί κλάσματα ἔχουμε ἄν μοιράσουμε τό $\frac{1}{5}$ σέ 2, 3, ἤ 4 μέρη;

Ὅταν χωρίσουμε τό $\frac{1}{5}$ σέ 2, παίρνουμε ......

Ὅταν χωρίσουμε τό $\frac{1}{5}$ σέ 3, παίρνουμε ......

Ὅταν χωρίσουμε τό $\frac{1}{5}$ σέ 4, παίρνουμε ......

Τά 500 γραμμάρια εἶναι τό $\frac{1}{\quad}$ τοῦ κιλοῦ.

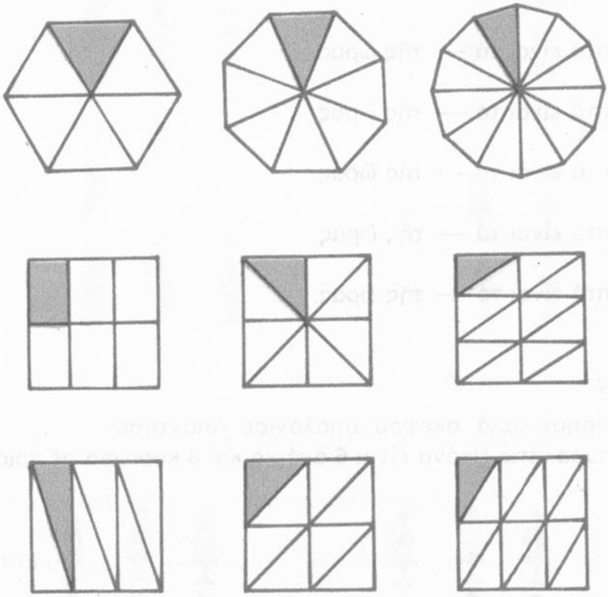
Τά 200 γραμμάρια εἶναι τό $\frac{1}{\quad}$ τοῦ κιλοῦ.

Τά 100 γραμμάρια εἶναι τό $\frac{1}{\quad}$ τοῦ κιλοῦ.

Τά 50 γραμμάρια εἶναι τό $\frac{1}{\quad}$ τοῦ κιλοῦ.

Σέ πόσα μέρη χωρίζεται καθένα ἀπό τά παρακάτω σχήματα;

Όρισε τίς κλασματικές μονάδες κάθε σχήματος.



Οἱ παρακάτω λέξεις εἶναι χωρισμένες σέ συλλαβές καί γράμματα.

Μπορεῖς νά βρεῖς τίς ἀντίστοιχες κλασματικές μονάδες;

Κ Α Μ Η Λ Α	Π Α Ρ Α Θ Υ Ρ Ο	Κ Α Ρ Α Β Α Κ Ι
ΚΑ - ΜΗ - ΛΑ	ΠΑ - ΡΑ - ΘΥ - ΡΟ	ΚΑ - ΡΑ - ΒΑ - ΚΙ
Κ - Α - Μ - Η - Λ - Α	Π - Α - Ρ - Α - Θ - Υ - Ρ - Ο	Κ - Α - Ρ - Α - Β - Α - Κ - Ι
	Π Α Ρ Α - Θ Υ Ρ Ο	

Τί μέρος τοῦ μήνα εἶναι οἱ 15 μέρες;
Τί μέρος τοῦ μήνα εἶναι οἱ 10 μέρες;
Τί μέρος τοῦ μήνα εἶναι οἱ 5 μέρες;
Τί μέρος τοῦ χρόνου εἶναι ἕνα δίμηνο;
Τί μέρος τοῦ χρόνου εἶναι ἕνα τρίμηνο;

Τί μέρος τοῦ χρόνου εἶναι ἕνα τετράμηνο;
Τί μέρος τοῦ χρόνου εἶναι ἕνα ἑξάμηνο;

Τά 30 λεπτά εἶναι τό —— τῆς ὥρας.

Τά 20 λεπτά εἶναι τό —— τῆς ὥρας.

Τά 15 λεπτά εἶναι τό —— τῆς ὥρας.

Τά 10 λεπτά εἶναι τό —— τῆς ὥρας.

Τά 5 λεπτά εἶναι τό —— τῆς ὥρας.

Ἀσκήσεις

α) Παρατήρησε καλά, σκέψου, ὑπολόγισε, ἀπάντησε:
Στήν παρακάτω εἰκόνα εἶναι 6 ἀγόρια καί 6 κορίτσια σέ τριάδες.

Τά ἀγόρια εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο τῶν παιδιῶν.

Τά κορίτσια εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο τῶν παιδιῶν.

Κάθε τριάδα εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο τῶν παιδιῶν.

Κάθε παιδί εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο τῆς τριάδας.

Κάθε ἀγόρι εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο τῶν ἀγοριῶν.

Κάθε κορίτσι εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο τῶν κοριτσιῶν.

Κάθε παιδί εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο τῶν παιδιῶν.

β) Ἔχουμε 24 παιδιά συνταγμένα σέ 8 τριάδες.

Κάθε τριάδα εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο τῶν παιδιῶν.

Κάθε τριάδα εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο τῶν τριάδων.

Οἱ 2 τριάδες εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο τῶν τριάδων.

Οἱ 2 τριάδες εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο τῶν παιδιῶν.

Οἱ 4 τριάδες εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο τῶν παιδιῶν.

Οἱ 4 τριάδες εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο τῶν τριάδων.

Ὁ κάθε ζυγός εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο τῶν ζυγῶν.

Ὁ κάθε ζυγός εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο τῶν παιδιῶν.

γ) Σέ ποιές ἄλλες διατάξεις μποροῦμε νά τά τοποθετήσουμε;

Σέ 4 ἑξάδες. Κάθε ἑξάδα εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο.

Σέ 3 .... Κάθε .... εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο.

Σέ 2 .... Κάθε .... εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο.

δ) Σέ ποιές διατάξεις μποροῦμε νά συντάξουμε 36 στρατιῶτες;

Σέ 12 τριάδες. Κάθε τριάδα εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο.

Σέ 9 .... Κάθε ...... εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο.

Σέ 6 .... Κάθε ...... εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο

Σέ 4 .... Κάθε ...... εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο.

Σέ 3 .... Κάθε ...... εἶναι τό —— ἀπό τό σύνολο.

ε) Τί κλασματική μονάδα εἶναι τό μισό τοῦ μισοῦ;
Τί κλασματική μονάδα εἶναι τό μισό τοῦ τετάρτου;
Τί κλασματική μονάδα εἶναι τό μισό τοῦ τρίτου;
Τί κλασματική μονάδα εἶναι τό μισό τοῦ ἕκτου;

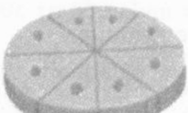
στ) Στόν κῆπο ἔχουμε 9 δέντρα. 3 πορτοκαλιές, 3 μανταρινιές καί 3 λεμονιές. Τί μέρος ἀπό τό σύνολο τῶν δέντρων ἀντιπροσωπεύει κάθε δέντρο καί κάθε εἶδος;

2. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

α) Ἔννοια κλασματικῶν ἀριθμῶν

Ἡ μητέρα μοίρασε τό γλυκό σέ 8 ἴσα κομμάτια.

Σύμφωνα μέ ὅσα γνωρίζουμε, κάθε κομμάτι εἶναι τό $\frac{1}{8}$ τοῦ γλυκοῦ. Στίς παρακάτω εἰκόνες βλέπουμε:



1. Ὁλόκληρο τό γλυκό.
Ἔχουμε καί τά ὀκτώ.

Δυό κομμάτια γλυκοῦ.
Ἔχουμε 2 ἀπό τά 8.
Δηλ. πήραμε 2 φορές ἀπό $\frac{1}{8}$.

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$$

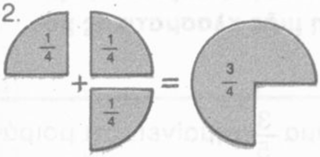
Τέσσερα κομμάτια. Ἔχουμε 4 ἀπό τά 8.

Πήραμε 4 φορές ἀπό $\frac{1}{8}$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}$$

Δηλ. τά $\frac{2}{8}$ καί τά $\frac{4}{8}$ γίνανε ἀπό τήν κλασματική μονάδα $\frac{1}{8}$.

2.



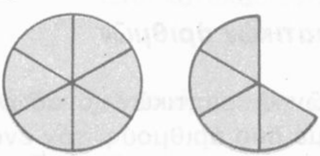
Μοιράσαμε μιά ἀκέραιη μονάδα σέ 4 ἴσα μέρη καί πήραμε τά 3. Πήραμε δηλ. 3 ἀπό τά 4 ἴσα μέρη πού μοιράσαμε μιά ἀκέραιη μονάδα.

Τό κάθε κομμάτι εἶναι $\frac{1}{4}$ κι ἐμεῖς πήραμε 3 φορές ἀπό $\frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Τά $\frac{3}{4}$ γίνανε ἀπό τήν κλασματική μονάδα $\frac{1}{4}$.

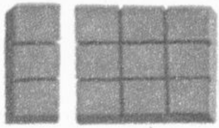
3.



Μοιράσαμε μιά ἀκέραιη μονάδα σέ 6 ἴσα μέρη καί πήραμε τά 4. Πήραμε δηλ. 4 ἀπό τά 6 ἴσα μέρη πού μοιράσαμε μιά ἀκερ. μονάδα.

Τό κάθε κομμάτι εἶναι $\frac{1}{6}$ καί πήραμε 4 φορές ἀπό $\frac{1}{6}$.

Τά $\frac{4}{6}$ γίνανε ἀπό τήν κλασματική μονάδα $\frac{1}{6}$.

4\. 

Μοιράσαμε μιά σοκολάτα σέ 12 ἴσα μέρη. Πήραμε τά 9 κομμάτια, δηλ. 9 φορές ἀπό $\frac{1}{12}$ δηλ. πήραμε τά $\frac{9}{12}$, πού γίνανε ἀπό τήν ἐπανάληψη τῆς κλασματικῆς μονάδας $\frac{1}{12}$.

Οἱ ἀριθμοί $\frac{4}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{9}{12}$, λέγονται κλασματικοί ἀριθμοί ἤ κλάσματα καί γίνονται καθένας ἀπό μιά ἰδιαίτερη κλασματική μονάδα.

Λοιπόν: **Κλασματικός ἀριθμός ἤ κλάσμα, λέγεται ὁ ἀριθμός πού γίνεται ἀπό τήν ἐπανάληψη μιᾶς κλασματικῆς μονάδας.**

Δηλ. ὅταν λέμε ὅτι ἔχουμε τό κλάσμα $\frac{3}{5}$ σημαίνει, ὅτι μοιράσαμε τήν ἀκερ. μονάδα σέ 5 ἴσα μέρη καί πήραμε τά 3. Δηλαδή πήραμε 3 φορές ἀπό $\frac{1}{5}$.

Τί φανερώνει τό κλάσμα $\frac{6}{7}$; Ποιά εἶναι ἡ κλασμ. μονάδα του;

Τί φανερώνει τό κλάσμα $\frac{7}{9}$; Ποιά εἶναι ἡ κλασμ. μονάδα του;

Τί φανερώνει τό κλάσμα $\frac{12}{15}$; Ποιά εἶναι ἡ κλασμ. μονάδα του;

β) Γραφή καί ἀπαγγελία τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν

Ὅπως γνωρίζουμε ἀπό τή γραφή τῶν κλασματικῶν μονάδων, κάθε κλασματικός ἀριθμός γράφεται μέ δύο ἀριθμούς, τόν ἕνα κάτω ἀπό τόν ἄλλο, πού χωρίζονται μέ τήν κλασματική γραμμή.

Ὁ ἐπάνω λέγεται **ἀριθμητής** καί ὁ κάτω **παρονομαστής.**

Καί οἱ δύο μαζί λέγονται **ὅροι τοῦ κλάσματος.**

Ὁ ἀριθμητής τοῦ κλάσματος ἀπαγγέλλεται σάν ἕνα **ἀπόλυτο ἀριθμητικό** (ἕνα, δύο, τρία, τέσσερα, πέντε, ἕξι, ἑπτά κτλ.) καί ὁ παρονομαστής σάν **τακτικό ἀριθμητικό** (δεύτερο, τρίτο ἤ τρίτα, τέταρτα, πέμπτα, ἕκτα, ἕβδομα κτλ.)

Π.χ. $\frac{1}{2}$ ἕνα δεύτερο, $\frac{2}{3}$ δύο τρίτα, $\frac{4}{6}$ τέσσερα ἕκτα, $\frac{7}{10}$ ἑπτά δέκατα, $\frac{12}{15}$ δώδεκα δέκατα πέμπτα, $\frac{25}{100}$ εἰκοσιπέντε ἑκατοστά.

Πρόσεξε ἀκόμη τά παρακάτω κλάσματα καί ἀπάγγειλέ τα.

$$\frac{3}{4} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{12}{15} \quad \frac{18}{24} \quad \frac{21}{35} \quad \frac{25}{40}$$

Τά παραπάνω κλάσματα φανερώνουν, ὅτι:

1) Χωρίσαμε τήν ἀκέραιη μονάδα σέ 4 ἴσα μέρη καί πήραμε τά 3.
2) » » » » » 6 » » » » » 4.
3) » » » » » 9 » » » » » 5.
4) » » » » » 12 » » » » » ...
5) » » » » » 15 » » » » » ...
6) » » » » » 24 » » » » » ...
7) » » » » » 35 » » » » » ...
8) » » » » » 40 » » » » » ...

Πρόσεξε: ὅπως βλέπεις, ὁ παρονομαστής μᾶς δείχνει σέ πόσα ἴσα μέρη χωρίσαμε τήν ἀκέραιη μονάδα καί δίνει τό ὄνομα στό κλάσμα καί ὁ ἀριθμητής μᾶς δείχνει, πόσα ἀπό τά μέρη αὐτά πήραμε.

Ἔτσι καταλαβαίνουμε τήν ἀξία κάθε κλάσματος.

γ) Κλάσματα ὁμώνυμα καί ἑτερώνυμα

Πρόσεξε καί ἀπάγγειλε τά παρακάτω κλάσματα:

$$\frac{3}{8} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{2}{8} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{10}{12} \quad \frac{9}{12}$$

Τί παρατηρεῖς;

Παρατηροῦμε ὅτι τά κλάσματα πού ἔχουν τόν ἴδιο παρονομαστή, δηλ. γίνονται ἀπό τήν ἴδια κλασματική μονάδα, ἔχουν τό ἴδιο ὄνομα καί λέγονται ὁ μ ώ ν υ μ α.

Πρόσεξε καί ἀπάγγειλε τά παρακάτω κλάσματα:

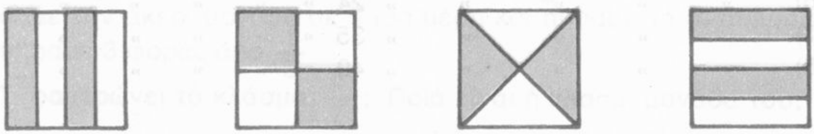
$\frac{3}{5}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{12}{16}$ $\frac{17}{25}$ $\frac{25}{30}$ $\frac{32}{55}$ $\frac{75}{100}$

Τί παρατηρεῖς;

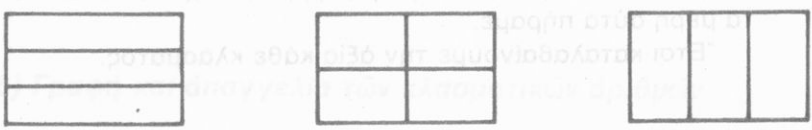
Παρατηροῦμε ὅτι τά κλάσματα αὐτά ἔχουν διαφορετικούς παρονομαστές, γίνονται δηλ. ἀπό διαφορετικές κλασματικές μονάδες, γι' αὐτό ἔχουν διαφορετικά ὀνόματα καί λέγονται ἑ τ ε ρ ώ ν υ μ α.

Ἐργασίες

1. Πρόσεξε τά παρακάτω σχήματα:
Τί μέρος ἀντιπροσωπεύει κάθε χρωματισμένο τμῆμα;

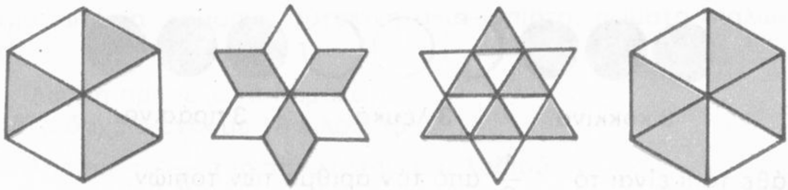


2. Χρωμάτισε τίς παρακάτω σημαῖες.
Τί κλάσμα ἀντιπροσωπεύει κάθε χρῶμα σέ κάθε σημαία;

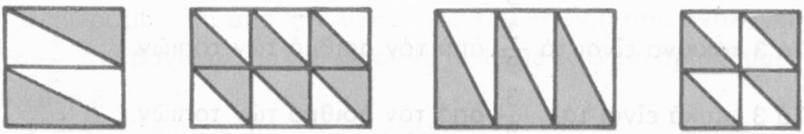


Αὐστρία	Παναμάς	Νιγηρία
τό λευκό, —	Τό μπλέ, —	Τό πράσινο, —
Τό κόκκινο, —	τό κόκκινο, —	τό λευκό, —
	τό λευκό, —	

3. Τί κλάσμα ἀντιπροσωπεύει κάθε χρωματισμένο τμῆμα;



4. Τί κλάσμα ἀντιπροσωπεύει κάθε χρωματισμένο τμῆμα;



δ) Κλασματικοί ἀριθμοί ποσοῦ

Ἡ μητέρα ἔδωσε στό Γιάννη, στή Σοφία, στήν Ἄννα καί στό Θωμᾶ ἀπό ἕνα τυράκι.

Τό κουτί εἶχε συνολικά 6 τυράκια.

Κάθε παιδί πῆρε $\frac{1}{6}$ ἀπό τόν ἀριθμό τῶν τυριῶν.

Ὅλα μαζί τά παιδιά πῆραν $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

πῆραν δηλ. 4 ἀπό τά 6 τυράκια τοῦ κουτιοῦ.

Στό κουτί ἔμειναν ἄλλα $\frac{2}{6}$ τῶν τυριῶν.

Στήν παραπάνω περίπτωση τό κουτί, πού ὁλόκληρο λογαριάζεται σάν μιά ἀκέραια μονάδα, εἶναι ἕνα πλῆθος ἀπό 6 ὅμοια τυράκια. Κάθε τυράκι εἶναι μιά κλασματική μονάδα, τό $\frac{1}{6}$ τοῦ κουτιοῦ.

Τά παιδιά πῆραν συνολικά 4 ἀπό τά 6 τυράκια, δηλ. τά $\frac{4}{6}$.
Πῆραν 4 φορές τήν κλασματική μονάδα $\frac{1}{6}$.

Ἔχουμε μπροστά μας 9 τόπια.

3 κόκκινα. 3 λευκά. 3 πράσινα.

Κάθε τόπι εἶναι τό $\frac{1}{9}$ ἀπό τόν ἀριθμό τῶν τοπιῶν.

Τά 2 τόπια εἶναι τά $\frac{2}{9}$ ἀπό τόν ἀριθμό τῶν τοπιῶν.

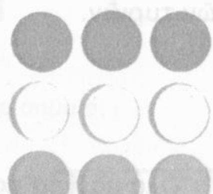
Τά 3 κόκκινα εἶναι τά $\frac{3}{9}$ ἀπό τόν ἀριθμό τῶν τοπιῶν.

Τά 3 λευκά εἶναι τά $\frac{3}{9}$ ἀπό τόν ἀριθμό τῶν τοπιῶν.

Τά λευκά καί τά κόκκινα μαζί, εἶναι τά $\frac{6}{9}$ ἀπό τόν ἀριθμό τῶν τοπιῶν κ.ο.κ.

Στήν περίπτωση αὐτή σχηματίζουμε διάφορους κλασματικούς ἀριθμούς μέ κλασματική μονάδα τό ἕνα τόπι, πού εἶναι τό $\frac{1}{9}$ ἀπό τά τόπια πού ἔχουμε.

Ἄν βάλουμε τά 9 τόπια σέ τριάδες, ἔχουμε 3 τριάδες.



Κάθε τριάδα εἶναι τό $\frac{1}{3}$ ἀπό τόν ἀριθμό τῶν τοπιῶν.

Οἱ 2 τριάδες εἶναι τά $\frac{2}{3}$ ἀπό τόν ἀριθμό τῶν τοπιῶν.

Οἱ 3 τριάδες εἶναι τά $\frac{3}{3}$ ἀπό τόν ἀριθμό τῶν τοπιῶν.

Αὐτό τό βρίσκουμε ἄν διαιρέσουμε τά 9 τόπια μέ τό 3. Τότε στό $\frac{1}{3}$ ἀντιστοιχοῦν 3 τόπια, μιά τριάδα.

Στήν περίπτωση αὐτή σχηματίζουμε κλασματικούς ἀριθμούς, μέ κλασματική μονάδα τό $\frac{1}{3}$ πού ἀντιστοιχεῖ σέ μιά τριάδα.

Σκέψου ἀνάλογα παραδείγματα. Κάνε σειρές ἀπό βόλους, στρατιωτάκια, κουμπιά, αὐτοκινητάκια, σπίρτα, πώματα φιαλῶν κτλ.

Ἀκόμη πρόσεξε τά παρακάτω:
Σ' ἕνα δοχεῖο ἔχουμε 18 κιλά λάδι.
Πουλήσαμε τά $\frac{4}{6}$ τῆς ποσότητας τοῦ λαδιοῦ.
Πόσα κιλά λάδι ἔμειναν στό δοχεῖο;
Τί γνωρίζουμε; Τί ζητοῦμε;

Ξεκινοῦμε πάλι ἀπό τήν ποσότητα τοῦ λαδιοῦ πού ἀναλογεῖ στό $\frac{1}{6}$ τοῦ δοχείου. Δηλ. διαιροῦμε τό 18 μέ τό 6 καί βρίσκουμε, $18 : 6 = 3$.

Ἄρα στό $\frac{1}{6}$ ἀναλογοῦν 3 κιλά λάδι.
στά $\frac{2}{6}$ ἀναλογοῦν 6 κιλά λάδι.
στά $\frac{4}{6}$ ἀναλογοῦν 12 κιλά λάδι.

Στό δοχεῖο λοιπόν ἔμειναν $18 - 12 = 6$ κιλά λάδι.

Παρατηροῦμε ὅτι τά $\frac{4}{6}$ τῆς ποσότητας τοῦ λαδιοῦ πού εἴχαμε στό δοχεῖο, ἀντιπροσωπεύουν 12 κιλά λάδι καί ἔγιναν ἀπό τήν κλασματική μονάδα $\frac{1}{6}$, πού ἀντιπροσωπεύει 3 κιλά λάδι.

Γενικό συμπέρασμα:
Ἀπό ὅλα τά παραπάνω καί τά προηγούμενα, βγάζουμε τό συμπέρασμα, ὅτι: **Κλασματικός ἀριθμός ἤ κλάσμα,** εἶναι ἕνας, νέος ἀριθμός πού γίνεται ἀπό τήν ἐπανάληψη μιᾶς κλασματικῆς μονάδας.

Ἐργασίες:

Πρόσεξε καί συμπλήρωσε σωστά τά παρακάτω:
Τό ἔτος ἔχει 12 μῆνες. Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα:

1. Κάθε μήνας εἶναι τό $\frac{1}{12}$ τοῦ ἔτους.

Οἱ 2 μῆνες εἶναι τά $\frac{2}{12}$ τοῦ ἔτους.

Οἱ 3 μῆνες εἶναι τά $\frac{\quad}{12}$ τοῦ ἔτους.

Οἱ 5 μῆνες εἶναι τά $\frac{\quad}{\quad}$ τοῦ ἔτους κ.ο.κ.

2. Ἄν πάρουμε ὅμως σάν κλασματική μονάδα τό δίμηνο, τότε τό ἔτος ἔχει 6 δίμηνα.

Οἱ 2 μῆνες εἶναι τό $\frac{1}{6}$ τοῦ ἔτους.

Οἱ 4 μῆνες εἶναι τά $\frac{2}{6}$ τοῦ ἔτους.

Οἱ 6 μῆνες εἶναι τά $\frac{\quad}{\quad}$ τοῦ ἔτους.

Οἱ 10 μῆνες εἶναι τά $\frac{\quad}{\quad}$ τοῦ ἔτους κ.ο.κ.

3. Ἄν πάρουμε σάν κλασματική μονάδα τή μιά ἐποχή (τρίμηνο). Τότε τό ἔτος πού ἔχει 4 ἐποχές, ἔχει 4 τρίμηνα.

Τότε οἱ 3 μῆνες εἶναι τό $\frac{1}{4}$ τοῦ ἔτους.

οἱ 6 μῆνες εἶναι τά $\frac{2}{4}$ τοῦ ἔτους.

οἱ 9 μῆνες εἶναι τά $\frac{3}{4}$ τοῦ ἔτους κ.ο.κ.

4. Ἄν πάρουμε σάν κλασματική μονάδα τούς 4 μῆνες, τό ἔτος ἔχει . . . τετράμηνα.

Τότε οἱ 4 μῆνες εἶναι τό τοῦ ἔτους.

οἱ 8 μῆνες εἶναι τά τοῦ ἔτους.

οἱ 12 μῆνες εἶναι τά τοῦ ἔτους.

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι τό σύνολο τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους μποροῦμε νά τό χωρίσουμε σέ δωδέκατα, σέ ἕκτα, σέ τέταρτα, σέ τρίτα καί δεύτερα.

Κάθε φορά ἡ κλασματική μονάδα ἔχει διαφορετική ἀξία, διαφορετική τιμή καί ἐξαρτᾶται ἀπό τό πλῆθος τῶν μηνῶν πού ἀντιπροσωπεύει.

Ἐργασίες

Πρόσεξε καί συμπλήρωσε:

α) Οἱ 6 μῆνες εἶναι τά $\frac{\quad}{12}$ ἤ $\frac{\quad}{6}$ ἤ $\frac{\quad}{4}$ ἤ $\frac{\quad}{2}$ τοῦ ἔτους.

β) Οἱ 4 μῆνες εἶναι τά $\frac{\quad}{12}$ ἤ $\frac{\quad}{6}$ ἤ $\frac{\quad}{3}$ τοῦ ἔτους.

γ) Οἱ 3 μῆνες εἶναι τά $\frac{\quad}{12}$ ἤ $\frac{\quad}{4}$ τοῦ ἔτους.

δ) Οἱ 9 μῆνες εἶναι τά $\frac{\quad}{12}$ ἤ $\frac{\quad}{4}$ τοῦ ἔτους.

Πρόσεξε τήν παρακάτω σχηματική παράσταση τοῦ ἔτους:

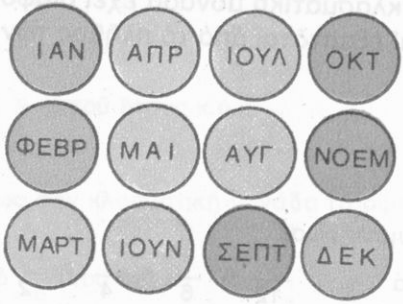
Ἐδῶ οἱ μῆνες εἶναι σέ ἑξάδες.
ἤ σέ δυάδες.

Κάθε ἑξάδα εἶναι τό $\frac{1}{2}$ τοῦ ἔτους.

Κάθε δυάδα εἶναι τό — τοῦ ἔτους.

4 δυάδες εἶναι τά — τοῦ ἔτους.

Ἐδῶ εἶναι σέ   τετράδες.
ἤ σέ   τριάδες.



Κάθε τετράδα εἶναι τό $\frac{1}{3}$ τοῦ ἔτους

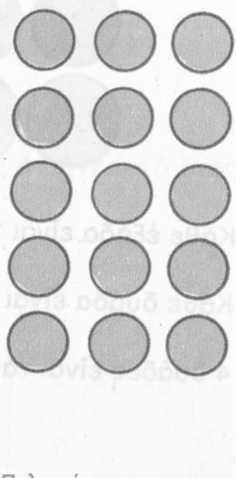
Κάθε τριάδα εἶναι τό $\frac{\ }{\ }$ τοῦ ἔτους.

3 τριάδες εἶναι τά $\frac{\ }{\ }$ τοῦ ἔτους.

Συμπληρωματικές ἀσκήσεις

Σκέψου, ὑπολόγισε, ἀπάντησε:

1. Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε 15 τόπια.
Τά τόπια εἶναι τοποθετημένα σέ   τριάδες.
Τά τόπια εἶναι τοποθετημένα σέ   πεντάδες.
Τί κλασματική μονάδα εἶναι κάθε τριάδα;
Τί κλασματική μονάδα εἶναι κάθε πεντάδα;



Πόσα τόπια ἀναλογοῦν στά $\frac{2}{3}$ τοῦ συνόλου;

Πόσα τόπια ἀναλογοῦν στά $\frac{3}{5}$ τοῦ συνόλου;

Πόσα τόπια ἀναλογοῦν στά $\frac{4}{5}$ τοῦ συνόλου;

2. Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε 20 τόπια.

Τά τόπια εἶναι τοποθετημένα σέ   τετράδες

Τά τόπια εἶναι τοποθετημένα σέ 4 ....

Τί κλασματική μονάδα εἶναι κάθε τετράδα;

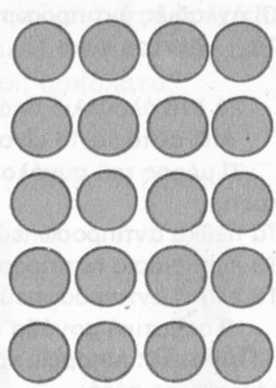
Τί κλασματική μονάδα εἶναι κάθε πεντάδα;

Πόσα τόπια ἀναλογοῦν στά $\frac{3}{5}$ τοῦ συνόλου;

Πόσα τόπια ἀναλογοῦν στά $\frac{4}{5}$ τοῦ συνόλου;

Πόσα τόπια ἀναλογοῦν στά $\frac{2}{4}$ τοῦ συνόλου;

Πόσα τόπια ἀναλογοῦν στά $\frac{3}{4}$ τοῦ συνόλου;

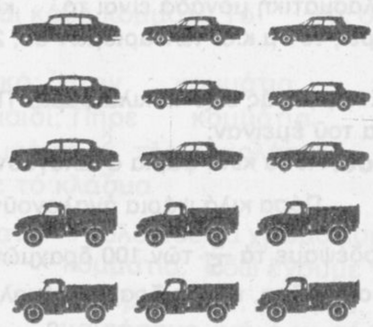


3. Σέ ποιές ἄλλες διατάξεις μποροῦν νά τοποθετηθοῦν;
Σέ   δεκάδες ἤ σέ   δυάδες.

4. Σ' ἕνα σταθμό αὐτοκινήτων σταθμεύουν 15 αὐτοκίνητα. Ἀπό αὐτά τά 6 εἶναι φορτηγά καί τά 9 εἶναι ἐπιβατικά. Τί μέρος ἀπό τό σύνολο τῶν αὐτοκινήτων ἀντιπροσωπεύουν τά φορτηγά; Τί ἀντιπροσωπεύουν τά ἐπιβατικά;

Γιά νά βρεῖς τήν ἀναλογία, πρόσεξε τή διάταξη τῶν αὐτοκινήτων καί σκέψου τί ἀντιπροσωπεύει κάθε τριάδα, ὡς πρός τό σύνολο.

Τά 6 φορτηγά εἶναι τά   τοῦ συνόλου καί τά ἐπιβατικά τά



Προβλήματα

1. **Σέ ἕνα περιβόλι ὑπάρχουν 24 δέντρα. Ἀπό αὐτά 16 εἶναι μηλιές καί 8 ἀχλαδιές. Τί μέρος ἀπό τό σύνολο τῶν δέντρων τοῦ κήπου ἀντιπροσωπεύει κάθε εἶδος δέντρου;**
Οἱ μηλιές ἀντιπροσωπεύουν τά   τοῦ συνόλου τῶν δέντρων.

Οἱ ἀχλαδιές ἀντιπροσωπεύουν τά   τοῦ συνόλου τῶν δέντρων.
Τά   δέντρα εἶναι τό   , δηλ. ἡ κλασμ. μονάδα τοῦ συνόλου.

2. Σέ ἕνα ἀλσύλλιο ὑπάρχουν 36 δέντρα.
Ἀπό αὐτά τά 18 εἶναι πεῦκα, τά 12 κυπαρίσσια καί τά 6 ἔλατα.
Τί μέρος τοῦ συνόλου τῶν δέντρων ἀντιπροσωπεύει κάθε εἶδος δέντρου;
Τά πεῦκα ἀντιπροσωπεύουν τά   τοῦ συνόλου τῶν δέντρων.
Τά κυπαρίσσια ἀντιπροσωπεύουν τά   τοῦ συνόλου τῶν δέντρων.
Τά ἔλατα ἀντιπροσωπεύουν τά   τοῦ συνόλου τῶν δέντρων.
Κλασματική μονάδα εἶναι τό   καί ἀναλογεῖ σέ   δέντρα.
Πρόσεξε: Μπορεῖς νά βρεῖς τόν μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 36, 18, 12, 6; Σοῦ λέει τίποτε αὐτό;

3. Σέ μιά τάξη εἶναι 35 μαθητές. Ἀπό αὐτούς 15 εἶναι ἀγόρια καί 20 κορίτσια. Τί μέρος ἀπό τό σύνολο τῶν μαθητῶν ἀντιπροσωπεύουν τά ἀγόρια καί τί τά κορίτσια;
Τά ἀγόρια ἀντιπροσωπεύουν τά   τοῦ συνόλου τῶν μαθητῶν.
Τά κορίτσια ἀντιπροσωπεύουν τά   τοῦ συνόλου τῶν μαθητῶν.
Κλασματική μονάδα εἶναι τό   καί ἀντιστοιχεῖ σέ   παιδιά.
Βρές τόν μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 35, 20 καί 15. Σοῦ λέει τίποτε;

4. Ἕνας ψαράς εἶχε 48 κιλά ψάρια. Πούλησε τά $\frac{5}{6}$ ἀπό αὐτά. Πόσα κιλά ψάρια τοῦ ἔμειναν;
Σκέψου: Πόσα κιλά ψάρια ἀναλογοῦν στό $\frac{1}{6}$ τοῦ συνόλου;
Πόσα κιλά ψάρια ἀναλογοῦν στά $\frac{5}{6}$ τοῦ συνόλου;
Ξοδέψαμε τά $\frac{3}{5}$ τῶν 100 δραχμῶν. Πόσα χρήματα μᾶς ἔμειναν;
Σκέψου πρῶτα, πόσες δραχμές ἀναλογοῦν στό $\frac{1}{5}$ τοῦ ἑκατοστάρικου.
Πόσα λεπτά ἀναλογοῦν στά $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{2}{3}$, τῆς ὥρας;

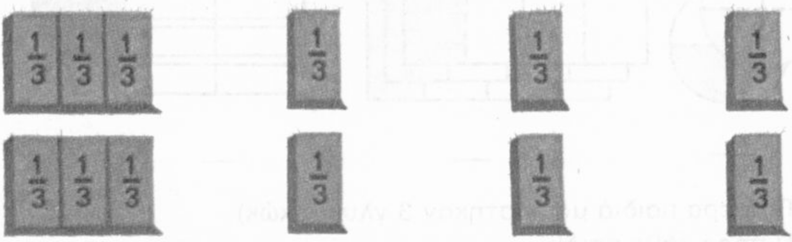
ε) Ἀξία τοῦ κλάσματος – Τό κλάσμα σάν πηλίκον διαιρέσεως.

Ὁ Μάρκος, ὁ Κώστας καί ἡ Πόπη, μοιράστηκαν 2 σοκολάτες. Πῶς ἔκαναν τή διανομή; Τί πῆρε κάθε παιδί;

Σκέψη: Βλέπουμε ὅτι οἱ σοκολάτες εἶναι δύο καί τά παιδιά τρία. Λοιπόν ἄν θέλουν νά μοιράσουν δίκαια δέν πρόκειται νά πάρει κανένα παιδί ὁλόκληρη σοκολάτα.

Τί ἔκαναν λοιπόν;

	ὁ Μάρκος πῆρε	ὁ Κώστας πῆρε	ἡ Πόπη πῆρε



	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

Σέ πόσα κομμάτια ἔκοψαν τήν κάθε σοκολάτα; Σέ

Τί μέρος τῆς σοκολάτας εἶναι κάθε κομμάτι; Τό τῆς σοκολάτας.

Πόσα κομμάτια ἦταν συνολικά; Ἦταν κομμάτια.

Πόσα κομμάτια πῆρε κάθε παιδί; Πῆρε κομμάτια.

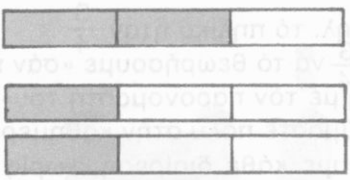
Ἄρα κάθε παιδί πῆρε συνολικά τά $\frac{2}{3}$ τῆς σοκολάτας.

Σκέψου πῶς δημιουργήθηκε τό κλάσμα

Πρόσεξε τά παρακάτω σχήματα: Ὑπολόγισε τά χρωματισμένα κομμάτια. Ἐδῶ ἔχουμε τά $\frac{2}{3}$ ἀπό μία ἀκερ. μονάδα. Δηλ. μοιράσαμε μιά ἀ.μ. σέ 3 ἴσα μέρη καί πήραμε τά 2.

$\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$

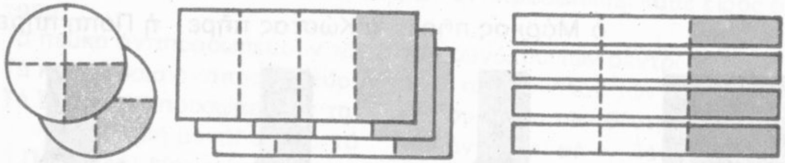


Ἐδῶ ἔχουμε $\frac{2}{3}$ πού γίνηκαν ἀπό 2 ἀκερ. μονάδες. Δηλ. μοιράσαμε 2 ἀ.μ. σέ 3 ἴσα μέρη καί πήραμε 1 ἀπό κάθε μιά.

Ἄρα ἕνα κλάσμα μπορεῖ νά δημιουργηθεῖ καί ἀπό ἴσα κομμάτια πολλῶν ἀκέραιων μονάδων.

Πρόσεξε τά παρακάτω σχήματα:

Γράψε τί κλάσμα ἀντιπροσωπεύουν τά σκιερά μέρη κάθε σχήματος.



— — —

Τέσσερα παιδιά μοιράστηκαν 3 γλυκά (κώκ).

Τί πῆρε κάθε παιδί;

Κάθε γλυκό κόπηκε σέ ἴσα μέρη.

Κάθε παιδί πῆρε τό $\frac{1}{4}$ ἀπό κάθε γλυκό.

Κάθε παιδί πῆρε συνολικά τά $\frac{\;}{4}$ τοῦ γλυκοῦ.

Ἀπό τά παραπάνω βλέπουμε ὅτι:

Εἴχαμε νά μοιράσουμε 3 γλυκά σέ 4 παιδιά. Δηλ. εἴχαμε τή διαίρεση 3 : 4.

Τό ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως δηλ. τό πηλίκο ἦταν $\frac{3}{4}$.

Μποροῦμε λοιπόν τό κλάσμα $\frac{3}{4}$ νά τό θεωρήσουμε «σάν πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητῆ μέ τόν παρονομαστή του».

Μέ τόν τρόπο αὐτό ἐξυπηρετούμαστε πολύ στήν καθημερινή ζωή, γιατί μποροῦμε νά τελειώνουμε κάθε διαίρεση, χωρίς νά ἀφήνουμε ὑπόλοιπο. Ὥστε:

Κάθε κλάσμα εἶναι τό ἀκριβές πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητῆ μέ τόν παρονομαστή του.

Ἑπομένως καί κάθε διαίρεση μπορεῖ νά σημειωθεῖ σάν κλάσμα. π.χ.

$$7 : 9 = \frac{7}{9} \qquad 15 : 18 = \frac{15}{18}.$$

Ἐργασίες

Πρόσεξε, σκέψου, ὑπολόγισε, ἀπάντησε:

1) Μοίρασε 7 δραχμές σέ 10 παιδιά. Τί θά πάρει κάθε παιδί;

Λύση

$7 : 10 = \frac{7}{10}$ τῆς δραχμῆς.

Ἐπαλήθευση: 7 δραχμές εἶναι ___ δεκάρες. Κάθε παιδί θά πάρει .. δεκάρες, δηλ. τά ___ τῆς δρχ.

2) Μοίρασε 6 δραχμές σέ 12 παιδιά. Τί θά πάρει κάθε παιδί; Κάνε τήν ἐπαλήθευση.

3) Γράψε τά πηλίκα τῶν παρακάτω διαιρέσεων.

$5 : 5 =$ —— $\quad 3 : 7 =$ —— $\quad 5 : 8 =$ ——

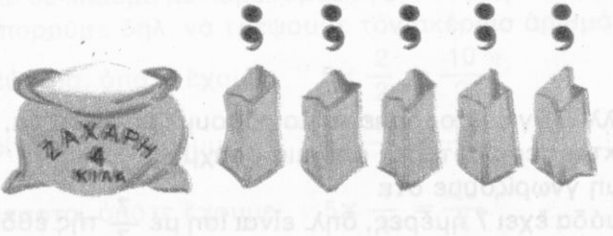
$9 : 12 =$ —— $\quad 11 : 15 =$ —— $\quad 18 : 24 =$ ——

4) Μοίρασε 12 δραχμές σέ 20 παιδιά. Τί θά πάρει κάθε παιδί; Κάνε τήν ἐπαλήθευση.

5) Νά βρεῖς ποιές διαιρέσεις παριστάνουν τά κλάσματα:

$$\frac{3}{7}, \frac{4}{12}, \frac{7}{16}, \frac{12}{15}, \frac{50}{150}, \frac{125}{275},$$

6) Μοίρασε 4 κιλά ζάχαρη σέ 5 σακοῦλες. Πόση ζάχαρη θά βάλεις σέ κάθε σακούλα; Κάνε τήν ἐπαλήθευση μέ γραμμάρια.



7) Μοίρασε 15 κιλά λάδι σέ 25 φιάλες. Πόσο λάδι θά περιέχει κάθε φιάλη; Κάνε τήν ἐπαλήθευση μέ γραμμάρια.

3. ΣΧΕΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

α) Τροπή ἀκέραιου ἀριθμοῦ σέ κλάσμα

Ὅλοι μας γνωρίζουμε ὅτι:

Ἡ δραχμή ἔχει 2 πενηνταράκια, δηλ. $\frac{2}{2}$ τῆς δραχμῆς.

Οἱ 2 δραχμές ἔχουν 4 πενηνταράκια, δηλ. εἶναι ἴσες μέ $\frac{4}{2}$ δρχ.

Οἱ 3 δραχμές ἔχουν 6 πενηνταράκια, δηλ. εἶναι ἴσες μέ — δρχ.

Οἱ 5 δραχμές ἔχουν ; πενηνταράκια, δηλ. εἶναι ἴσες μέ — δρχ.

κ.ο.κ.

Ἡ μιά δραχμή ἔχει 5 εἰκοσαράκια, δηλ. εἶναι ἴση μέ $\frac{5}{5}$ τῆς δραχμῆς.

Οἱ 2 δραχμές ἔχουν 10 εἰκοσαράκια, δηλ. εἶναι ἴσες μέ τῆς δραχμῆς.

Οἱ 3 δραχμές ἔχουν ; εἰκοσαράκια, δηλ. εἶναι ἴσες μέ τῆς δραχμῆς.

Οἱ 7 δραχμές ἔχουν ; εἰκοσαράκια, δηλ. εἶναι ἴσες μέ τῆς δραχμῆς.

κ.ο.κ.

Ἡ μιά δραχμή ἔχει 10 δεκάρες, δηλ. εἶναι ἴση μέ $\frac{10}{10}$ τῆς δραχμῆς.

Οἱ 2 δραχμές ἔχουν 20 δεκάρες, δηλ. εἶναι ἴσες μέ — τῆς δραχμῆς.

Οἱ 4 δραχμές ἔχουν ; δεκάρες, δηλ. εἶναι ἴσες μέ τῆς δραχμῆς.

Οἱ 8 δραχμές ἔχουν ; δεκάρες, δηλ. εἶναι ἴσες μέ τῆς δραχμῆς.

κ.ο.κ.

Μέ ἄλλα λόγια μποροῦμε νά μοιράσουμε σέ δεύτερα, πέμπτα, δέκατα κτλ. περισσότερες ἀπό μιά δραχμές.

Ἀκόμη γνωρίζουμε ὅτι:

Ἡ ἑβδομάδα ἔχει 7 ἡμέρες, δηλ. εἶναι ἴση μέ $\frac{7}{7}$ τῆς ἑβδομάδας.

Οἱ 2 ἑβδομάδες ἔχουν 14 ἡμέρες, δηλ. εἶναι ἴσες μέ $\frac{14}{7}$ τῆς ἑβδομάδας.
Οἱ 3 ἑβδομάδες ἔχουν ; ἡμέρες, δηλ. εἶναι ἴσες μέ τῆς ἑβδομάδας.

κ.ο.κ.

Τό μέτρο ἔχει $\frac{10}{10}$ ἤ $\frac{100}{100}$ ἤ $\frac{1000}{1000}$ τοῦ μέτρου.
Τά 2 μέτρα ἔχουν $\frac{20}{10}$ ἤ $\frac{200}{100}$ ἤ $\frac{2000}{1000}$ τοῦ μέτρου.

Τά 3 μέτρα ἔχουν —— ἤ —— ἤ —— τοῦ μέτρου κ.ο.κ.

Κατά τόν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νά μοιράσουμε ὄχι μόνο τίς διάφορες μονάδες μετρήσεως, ἀλλά καί περισσότερες ἀκέραιες μονάδες, σέ κλασματικές μονάδες, δηλ. **νά τρέψουμε ἀκέραιες μονάδες σέ κλάσματα.**

Μποροῦμε π.χ. νά τρέψουμε:

1 μῆλο σέ τέταρτα, ὁπότε ἔχουμε $\frac{4}{4}$ τοῦ μήλου.

2 μῆλα σέ τέταρτα, ὁπότε ἔχουμε $\frac{2\times4}{4}=\frac{8}{4}$ τοῦ μήλου.

3 μῆλα σέ τέταρτα, ὁπότε ἔχουμε $\frac{3\times4}{4}=\frac{12}{4}$ τοῦ μήλου
κ.ο.κ.

Δηλ. γιά νά τό ἐπιτύχουμε αὐτό, πρέπει νά γνωρίζουμε **σέ τί κλασματικές μονάδες** θά τρέψουμε τίς ἀκέραιες μονάδες. (π.χ. σέ δεύτερα, τρίτα, πέμπτα, ὄγδοα κτλ.).

Κατά τόν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νά τρέψουμε κάθε ἀκέραιο ἀριθμό σέ κλάσμα μέ παρονομαστή ἕναν ὁρισμένο φυσικό ἀριθμό.

Μποροῦμε δηλ. νά τρέψουμε τόν ἀκέραιο ἀριθμό 5,

σέ δεύτερα, ὁπότε ἔχουμε $5\times\frac{2}{2}=\frac{10}{2}$.

σέ τρίτα, ὁπότε ἔχουμε $5\times\frac{3}{3}=\frac{15}{3}$.

σέ τέταρτα, ὁπότε ἔχουμε $5\times\frac{4}{4}=\frac{20}{4}$.

Στήν περίπτωση αὐτή πολλαπλασιάζουμε τόν ἀκέραιο ἀριθμό μέ τόν ἀριθμητή καί τό γινόμενο γράφουμε ἀριθμητή τοῦ κλάσματος καί παρονομαστή ἀφήνουμε τόν ἴδιο.

Λοιπόν: Γιά νά τρέψουμε ἀκέραιο σέ κλάσμα μέ ὁρισμένο παρονομαστή, πολλαπλασιάζουμε τόν ἀκέραιο μέ τόν παρονομαστή πού μᾶς δόθηκε καί τό γινόμενο γράφουμε ἀριθμητή καί παρονομαστή ἀφήνουμε τόν ἴδιο.

Πρόσεξε ἀκόμη: Τί θά κάνουμε ἄν ἔχουμε ἕνα ἀκέραιο ἀριθμό πχ. 4 (πορτοκάλια) καί θέλουμε νά τόν τρέψουμε σέ κλάσμα, ἀλλά δέν μᾶς ἔχουν ὁρίσει τόν παρονομαστή;

Σκέπτομαι ὅτι κάθε ἀκέραιη μονάδα μποροῦμε νά τήν παραστήσουμε μέ τό ἰσοδύναμο κλάσμα $\frac{1}{1}$ (ἕνα πρῶτο) πού σημαίνει ὅτι τό ἕνα πορτοκάλι τό πήραμε ὁλόκληρο. Τότε;

Τά 2 πορτοκάλια θά εἶναι $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=\frac{2}{1}$ δύο πρῶτα.

Τά 3 πορτοκάλια θά εἶναι $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=\frac{3}{1}$ τρία πρῶτα.

Τά 4 πορτοκάλια θά εἶναι $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=\frac{4}{1}$ τέσσερα πρῶτα.

Ἔτσι ὁ ἀκέραιος ἀριθμός τρέπεται σέ κλάσμα μέ ἀριθμητή τόν ἴδιο τόν ἀριθμό καί παρονομαστή τή μονάδα.

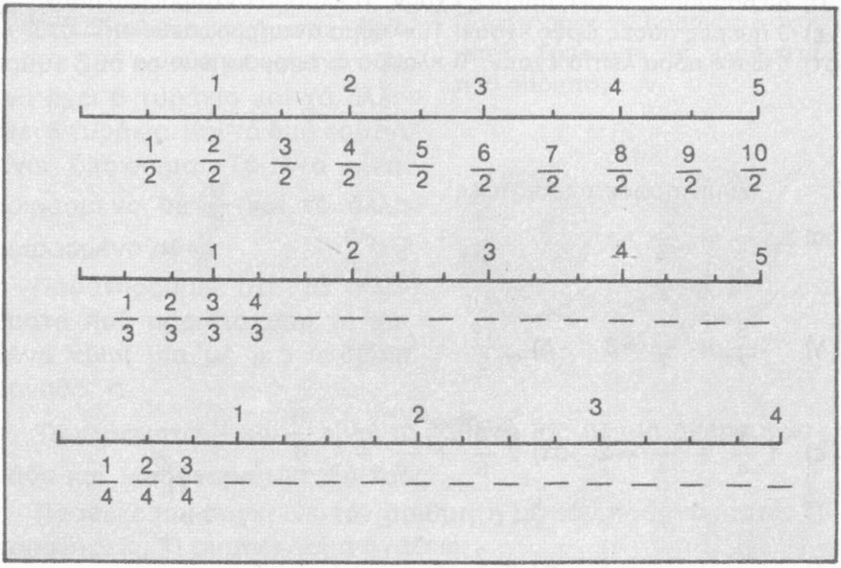
Λοιπόν: α) Κάθε ἀκέραιο ἀριθμό, μποροῦμε νά τόν γράψουμε σάν κλάσμα μέ ἀριθμητή τόν ἴδιο τόν ἀριθμό καί παρονομαστή τήν ἀκέραιη μονάδα. π.χ. $\frac{5}{1}$, $\frac{12}{1}$, $\frac{28}{1}$, $\frac{75}{1}$ κτλ.

β) Κάθε καταχρηστικό κλάσμα πού ἔχει παρονομαστή τήν ἀκέραιη μονάδα εἶναι ἴσο μέ τόν ἀριθμητή του.

πχ. $\frac{7}{1}=7$, $\frac{15}{1}=15$, $\frac{24}{1}=24$ κτλ.

Ἐργασίες

Πρόσεξε τά παρακάτω σχήματα, συμπλήρωσε:



Ἀσκήσεις

α) Νά τρέψετε σέ ἕβδομα τούς ἀριθμούς 3, 7, 12.
β) Νά τρέψετε σέ ἔνατα τούς ἀριθμούς 4, 9, 16.
γ) Νά τρέψετε σέ δέκατα ἕκτα τούς ἀριθμούς 5, 8, 20.
δ) Πόσα ἕκτα ἔχουν 14 ἀκέραιοι ἀριθμοί;
ε) Πόσα τέταρτα ἔχουν 27 ἀκέραιοι ἀριθμοί;
στ) Πόσα ὄγδοα ἔχουν 16 ἀκέραιοι ἀριθμοί;

1. Τρέψε σέ δεύτερα τούς ἀριθμούς:

$1=\frac{\ }{2}$, $5=\frac{\ }{2}$, $3=\frac{\ }{2}$, $7=\frac{\ }{2}$, $12=\frac{\ }{2}$.

2. Τρέψε σέ ἕκτα τούς ἀριθμούς:

$1=\frac{\ }{6}$, $3=\frac{\ }{6}$, $6=\frac{\ }{6}$, $9=\frac{\ }{6}$, $17=\frac{\ }{6}$.

3. α) 7 ἔτη πόσους μῆνες ἔχουν; Τί κλάσμα ἀντιπροσωπεύουν; —.
β) 12 ἔτη πόσους μῆνες ἔχουν; Τί κλάσμα ἀντιπροσωπεύουν; —.
γ) 4 μῆνες πόσες ἡμέρες ἔχουν; Τί κλάσμα ἀντιπροσωπεύουν; —.
δ) 6 ἑβδομάδες πόσες ἡμέρες ἔχουν; Τί κλάσμα ἀντιπροσωπεύουν; —.
ε) 3 ἡμέρες πόσες ὧρες ἔχουν; Τί κλάσμα ἀντιπροσωπεύουν; —.
στ) 5 ὧρες πόσα λεπτά ἔχουν; Τί κλάσμα ἀντιπροσωπεύουν; —.

4. Συμπλήρωσε τίς ἰσότητες:

α) $\frac{1}{5} + \frac{\ }{5} = 1$ β) $\frac{3}{5} + \frac{\ }{5} = 2$

γ) $\frac{8}{7} + \frac{\ }{7} = 3$ δ) $\frac{12}{9} + \frac{\ }{9} = 4$

ε) $1\frac{1}{4} + \frac{\ }{4} = 2$ στ) $2\frac{4}{6} + \frac{\ }{6} = 4.$

ζ) $\frac{15}{8} + \frac{\ }{8} = 5$ η) $3\frac{2}{8} + \frac{\ }{8} = 7.$

θ) $\frac{4}{1} =$; $\frac{7}{1} =$; $\frac{10}{1} =$; $\frac{5}{1} =$; $\frac{9}{1} =$; $\frac{18}{1} =$;

ι΄) $2 = \frac{\ }{1}$, $7 = \frac{\ }{1}$, $9 = \frac{\ }{1}$, $15 = \frac{\ }{1}$, $27 = \frac{\ }{1}$.

ια΄) $4 = \frac{\ }{11}$, $7 = \frac{\ }{9}$, $12 = \frac{\ }{7}$, $18 = \frac{\ }{10}$, $22 = \frac{\ }{20}$.

5. α) 9 δραχμές ἔχουν ; πενηνταράκια. Τί κλάσμα ἔχουμε; — δρχ.
β) 6 δραχμές ἔχουν ; εἰκοσαράκια. Τί κλάσμα ἔχουμε; — δρχ.
γ) 15 δραχμές ἔχουν ; δεκάρες. Τί κλάσμα ἔχουμε; — δρχ.

β) Σύγκριση τῶν κλασμάτων μέ τήν ἀκέραιη μονάδα

α) Κλάσματα ἴσα μέ τήν ἀκέραιη μονάδα

Στά διπλανά σχήματα βλέπουμε δυό κουτιά μέ τυράκια. Τό ἕνα ἔχει 6 τυράκια καί τό ἄλλο ἔχει 8 τυράκια. Καί τά δυό κουτιά εἶναι ὁλόκληρα. Τό ἕνα εἶναι μοιρασμένο σέ $\frac{6}{6}$ καί τό ἄλλο μοιρασμένο σέ $\frac{8}{8}$.

Παρατηροῦμε ὅτι τά κλάσματα πού παριστάνουν τό καθένα εἶναι ἴσα μέ μιά ἀκέραιη μονάδα.

Παρατήρησε τά παρακάτω σχήματα. Σημείωσε τά κλάσματα πού παριστάνουν.

Τά κλάσματα $\frac{6}{6}$ καί $\frac{8}{8}$ εἶναι τό καθένα ἴσο μέ μιά ἀκέραιη μονάδα καί **ἰσοδύναμα** μεταξύ τους.

Πρόσεξε καί σύγκρινε τόν ἀριθμητή μέ τόν παρονομαστή. Τί παρατηρεῖς; Τί συμπέρασμα βγάζεις;

β) Κλάσματα μικρότερα ἀπό τήν ἀκέραιη μονάδα

Στά διπλανά σχήματα βλέπομε δυό κουτιά μέ τυράκια. Τό ἕνα ἔχει 4 ἀπό τά 6 τυράκια, τό ἄλλο ἔχει 5 ἀπό τά 8 τυράκια. Ἔχουμε δηλ. τά δύο ἀντίστοιχα κλάσματα $\frac{4}{6}$ καί $\frac{5}{8}$.

Καθένα ἀπό τά κλάσματα αὐτά εἶναι μικρότερο ἀπό μιά ἀκέραιη μονάδα.

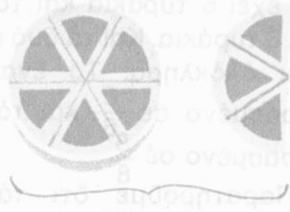
Τά κλάσματα $\frac{4}{6}$ καί $\frac{5}{8}$ εἶναι ,μικρότερα ἀπό μιά ἀκέραιη μονάδα καί λέγονται **γνήσια** κλάσματα.

Παρατήρησε τά παρακάτω σχήματα. Σημείωσε τά κλάσματα πού παριστάνουν.

Πρόσεξε καί σύγκρινε τόν ἀριθμητή μέ τόν παρονομαστή. Τί παρατηρεῖς; Τί συμπέρασμα βγάζεις;

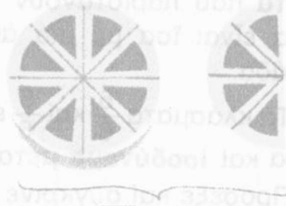
γ) Κλάσματα μεγαλύτερα ἀπό τήν ἀκέραιη μονάδα

Στά διπλανά σχήματα βλέπομε δυό κουτιά μέ τυράκια. Τό ἕνα ἔχει καί τά 6 κομμάτια καί δίπλα ἄλλα 3 ἀκόμη.



Ἔχουμε συνολικά 9 ὅμοια τυράκια. Μποροῦμε σύμφωνα μέ τά προηγούμενα νά τά παραστήσουμε μέ τό κλάσμα $\frac{9}{6}$.

Τό ἄλλο ἔχει καί τά 8 κομμάτια καί δίπλα ἄλλα 4 ἀκόμη.



Ἔχουμε συνολικά 12 ὅμοια τυράκια καί μποροῦμε νά τά παραστήσουμε μέ τό κλάσμα $\frac{12}{8}$.

Παρατηροῦμε ὅμως πώς τά κλάσματα $\frac{9}{6}$ καί $\frac{12}{8}$ εἶναι μεγαλύτερα ἀπό μιά ἀκέραιη μονάδα καί λέγονται **καταχρηστικά**.

Πρόσεξε καί σύγκρινε τόν ἀριθμητή μέ τόν παρονομαστή. Τί παρατηρεῖς; Τί συμπέρασμα βγάζεις;

Συμπέρασμα:

Ἀπό τά προηγούμενα παρατηροῦμε ὅτι τά κλάσματα σέ σύγκριση μέ τήν ἀκέραιη μονάδα διακρίνονται σέ γνήσια, ἰσοδύναμα καί καταχρηστικά.

α) Κάθε κλάσμα πού ὁ ἀριθμητής του εἶναι μικρότερος ἀπό τόν παρονομαστή του, εἶναι μικρότερο ἀπό μιά ἀκέραιη μονάδα καί λέγεται γ ν ή σ ι ο κ λ ά σ μ α.

π.χ. $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{12}{15}$, $\frac{20}{35}$, $\frac{75}{100}$, $\frac{125}{150}$

β) Κάθε κλάσμα πού ὁ ἀριθμητής του εἶναι ἴσος μέ τόν παρονομαστή του, εἶναι **ἰσοδύναμο** μέ τήν ἀκέραιη μονάδα.

π.χ. $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{15}{15}$, $\frac{20}{20}$, $\frac{100}{100}$ ...

γ) Κάθε κλάσμα πού ὁ ἀριθμητής του εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν παρονομαστή του, εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τήν ἀκέραιη μονάδα καί λέγεται καταχρηστικό.

π.χ. $\frac{3}{2}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{15}{12}$, $\frac{36}{24}$, $\frac{75}{60}$, $\frac{90}{85}$.

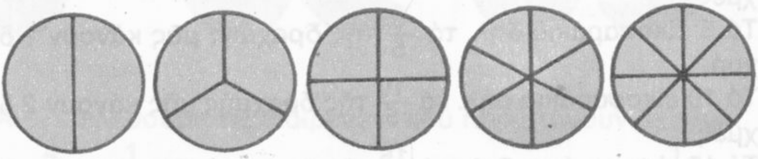
Ἐργασίες

Παρατήρησε τά παρακάτω σχήματα:

1. Σημείωσε τά κλάσματα πού παριστάνουν τά χρωματισμένα μέρη.

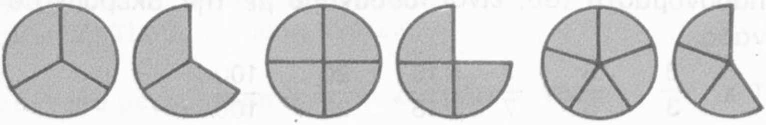
Τί κλάσματα εἶναι σέ σχέση μέ τήν ἀκέραιη μονάδα;
Μπορεῖς νά τό ἐξηγήσεις;

2. Σημείωσε τά κλάσματα πού παριστάνουν τά παρακάτω σχήματα.



Τί κλάσματα εἶναι σέ σχέση μέ τήν ἀκέραιη μονάδα;
Μπορεῖς νά τό ἐξηγήσεις;

3. Σημείωσε τά κλάσματα πού παριστάνουν τά παρακάτω σχήματα.



Σέ σχέση μέ τήν ἀκέραιη μονάδα, τί κλάσματα εἶναι;
Μπορεῖς νά τό ἐξηγήσεις;

Ξεχώρισε τά παρακάτω κλάσματα, σέ γνήσια, ἰσοδύναμα μέ τήν ἀκέραιη μονάδα καί καταχρηστικά.

α) $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{18}{20}$, $\frac{24}{18}$, $\frac{15}{15}$

β) $\frac{3}{9}$, $\frac{11}{11}$, $\frac{19}{30}$, $\frac{18}{12}$, $\frac{120}{120}$, $\frac{65}{100}$, $\frac{200}{250}$, $\frac{500}{500}$

γ) Ἐξαγωγή ἀκέραιων μονάδων ἀπό καταχρηστικά κλάσματα

Ὅλοι μας ξέρουμε ὅτι:

α) Τά 2 πενηνταράκια δηλ. τά $\frac{2}{2}$ τῆς δραχμῆς μᾶς κάνουν 1 δραχμή.
Τά 4 πενηνταράκια δηλ. τά $\frac{4}{2}$ τῆς δραχμῆς μᾶς κάνουν 2 δραχμές.
Τά 6 πενηνταράκια δηλ. τά $\frac{6}{2}$ τῆς δραχμῆς μᾶς κάνουν ; δραχμές.
Τά 8 πενηνταράκια δηλ. τά $\frac{8}{2}$ τῆς δραχμῆς μᾶς κάνουν ; δραχμές.

β) Τά 5 εἰκοσαράκια δηλ. τά $\frac{5}{5}$ τῆς δραχμῆς μᾶς κάνουν 1 δραχμή.
Τά 10 εἰκοσαράκια δηλ. τά $\frac{10}{5}$ τῆς δραχμῆς μᾶς κάνουν 2 δραχμές.
Τά 15 εἰκοσαράκια δηλ. τά $\frac{15}{5}$ τῆς δραχμῆς μᾶς κάνουν ; δραχμές.
Τά 20 εἰκοσαράκια δηλ. τά $\frac{20}{5}$ τῆς δραχμῆς μᾶς κάνουν ; δραχμές κ.ο.κ.

Παρατηροῦμε ὅτι τά κλάσματα $\frac{4}{2}, \frac{6}{2}, \frac{8}{2}, \frac{10}{5}, \frac{15}{5}, \frac{20}{5}$.

εἶναι καταχρηστικά.

Θυμήσου ὅτι:

α) Κάθε καταχρηστικό κλάσμα εἶναι μεγαλύτερο ἀπό μιά ἀκερ. μονάδα.

β) Κάθε κλάσμα εἶναι τό ἀκριβές πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητῆ του, μέ τόν παρονομαστή του.

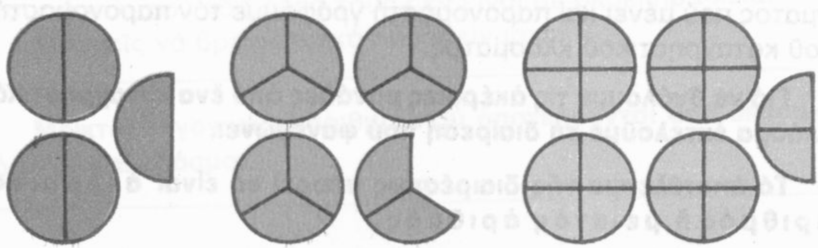
Ἄν ἐκτελέσουμε τίς διαιρέσεις ἔχουμε:

$\frac{4}{2}=2$, $\frac{6}{2}=3$, $\frac{8}{2}=4$ κοκ. $\frac{10}{5}=2$, $\frac{15}{5}=3$, $\frac{20}{5}=4$ κοκ.

δηλ. βγάζουμε ἀπό κάθε καταχρηστικό κλάσμα τίς ἀκέραιες μονάδες πού περιέχει καί πού μᾶς τίς δείχνει τό πηλίκον.

Ἡ ἐκτέλεση τῆς διαιρέσεως,πού φανερώνει τό κλάσμα, λέγεται **ἐξαγωγή τῶν ἀκέραιων μονάδων ἀπό τά καταχρηστικά κλάσματα.**

Πρόσεξε τά παρακάτω σχήματα καί σημείωσε τά κλάσματα πού παριστάνουν.



Ἄν ἐκτελέσουμε τίς διαιρέσεις πού παριστάνουν ἔχουμε:

$\frac{5}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2}$ δηλ. 2 ἀκ.μ. + $\frac{1}{2}$ πού γράφουμε $2\frac{1}{2}$.

$\frac{11}{3} = \frac{9}{3} + \frac{2}{3}$, δηλ. 3 ἀκ.μον. + $\frac{2}{3}$ πού γράφουμε $3\frac{2}{3}$.

$$\frac{18}{4} = \frac{16}{4} + \frac{2}{4} \text{ δηλ. 4 ἀκ.μον.} + \frac{2}{4} \text{ πού γράφουμε } 4\frac{2}{4}\,.$$

Παρατηροῦμε ὅτι τό ἀποτέλεσμα τῆς διαιρέσεως δέν μᾶς δίνει μόνο ἀκέραιο ἀριθμό ἀλλά καί κλάσμα.

Μᾶς δίνει δηλ. ἕνα μεικτό ἀριθμό.

Πρόσεξε τώρα τήν ἐκτέλεση τῶν διαιρέσεων.

$$\frac{5}{2} = 5{:}2 = 2\frac{1}{2} \qquad \frac{11}{3} = 11{:}3 = 3\frac{2}{3} \qquad \frac{18}{4} = 18{:}4 = 4\frac{2}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & 3 \\ \hline 2 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 4 \\ \hline 2 & 4 \end{array}$$

Τί μᾶς φανερώνει τό πηλίκον;

Τί φανερώνει τό ὑπόλοιπο;

Τί φανερώνει ὁ διαιρέτης;

Τί συμπέρασμα βγάζουμε;

Γιά νά βγάλουμε τίς ἀκέραιες μονάδες ἀπό ἕνα καταχρηστικό κλάσμα, διαιροῦμε τόν ἀριθμητή μέ τόν παρονομαστή του.

Τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν ἀκέραιων μονάδων. Ἄν ὑπάρχει ὑπόλοιπο τό γράφουμε ἀριθμητή τοῦ κλάσματος πού μένει καί παρονομαστή γράφουμε τόν παρονομαστή τοῦ καταχρηστικοῦ κλάσματος.

Γιά νά βγάλουμε τίς ἀκέραιες μονάδες ἀπό ἕνα καταχρηστικό κλάσμα ἐκτελοῦμε τή διαίρεση πού φανερώνει.

Τό ἀποτέλεσμα τῆς διαιρέσεως μπορεῖ νά εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός ἤ μεικτός ἀριθμός.

Μεικτός λέγεται ὁ ἀριθμός πού ἀποτελεῖται ἀπό ἀκέραιο ἀριθμό καί κλάσμα. πχ. $5\frac{3}{4}$, $7\frac{5}{8}$, $12\frac{7}{9}$ κτλ.

Γράψε μερικούς μεικτούς ἀριθμούς, πού νά φανερώνουν συγκεκριμένα παραδείγματα: π.χ. Μιά σοκολάτα ἀξίζει $7\frac{1}{2}$ δραχμές.

4. ΜΕΙΚΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

α) Ἔννοια τῶν μεικτῶν ἀριθμῶν

Ἄν 3 παιδιά μοιραστοῦν 8 σοκολάτες, τί θά πάρει κάθε παιδί; Μέ τήν ἐκτέλεση τῆς διαιρέσεως 8 : 3 βρίσκουμε ὅτι: κάθε παιδί θά πάρει 2 σοκολάτες καί $\frac{2}{3}$ τῆς σοκολάτας.

Αὐτό μποροῦμε νά τό γράψουμε $2\frac{2}{3}$ σοκολάτες.

Ὁ ἀριθμός $2\frac{2}{3}$ εἶναι ὅπως εἴδαμε μεικτός ἀριθμός.

Μεικτοί ἀριθμοί προκύπτουν συνήθως ἀπό καταχρηστικά κλάσματα. Ἀλλά καί στήν καθημερινή ζωή χρησιμοποιοῦμε πολλές φορές τούς μεικτούς ἀριθμούς. Ἀναφέρουμε μερικά παραδείγματα.

Ἕνα μολύβι μπορεῖ νά ἀξίζει $3\frac{1}{2}$ δραχμές.

Γιά νά πᾶμε ἀπό μιά πόλη σέ ἄλλη, χρειαζόμαστε $2\frac{3}{4}$ ὧρες.

Γιά νά ράψουμε ἕνα κουστούμι χρειαζόμαστε $2\frac{1}{4}$ μέτρα ὕφασμα.

Ὑπάρχουν χαρτοκιβώτια πού περιέχουν $2\frac{1}{2}$ κιλά ἀπορρυπαντικό.

Ἀκόμη πολλά εἴδη συσκευάζονται σέ δοχεῖα, κιβώτια, φιάλες, κουτιά κτλ. πού τό βάρος τους δέν εἶναι σέ ὁλόκληρα κιλά.

Μπορεῖς νά βρεῖς μερικά παραδείγματα;

Μεικτοί λέγονται οἱ ἀριθμοί πού ἀποτελοῦνται ἀπό ἀκέραιο ἀριθμό καί κλάσμα.

Ἐργασίες

Νά βγάλεις τίς ἀκέραιες μονάδες ἀπό τά καταχρηστικά κλάσματα:

α) $\frac{3}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{9}{4} = — + — = —$

$\frac{7}{2} = — + — = —$ $\qquad \frac{13}{4} = — + — = —$

$\frac{7}{3} = \frac{}{} + \frac{}{} = \frac{}{}$ $\qquad$ $\frac{19}{5} = \frac{}{} + \frac{}{} = \frac{}{}$.

β) $\frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$ $\qquad$ $\frac{38}{9} =$ $\qquad$ $\frac{43}{7} =$ $\qquad$ $\frac{170}{50} =$

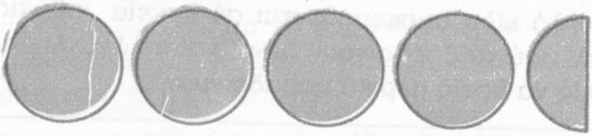
$\frac{30}{6} =$ $\qquad$ $\frac{75}{25} =$ $\qquad$ $\frac{125}{25} =$ $\qquad$ $\frac{254}{80} =$

γ) Γράψε μέ μεικτούς ἀριθμούς τίς παρακάτω σχέσεις:

8 δραχμές καί 3 δεκάρες. $\qquad$ 7 ὧρες καί 25 λεπτά.
5 ἔτη καί 7 μῆνες. $\qquad$ 9 μῆνες καί 17 ἡμέρες.
12 μέτρα καί 63 πόντους. $\qquad$ 15 κιλά καί 250 γραμμάρια.
7 χιλιάρικα καί 1 πεντακοσάρικο.

β) Τροπή μεικτοῦ ἀριθμοῦ σέ κλάσμα

Πρόσεξε τά παρακάτω σχήματα καί σημείωσε τόν ἀριθμό πού παριστάνουν.

 =

Πρόσεξε τώρα:

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι εἶναι δραχμές, τότε ἔχουμε $4\frac{1}{2}$ δραχμές.

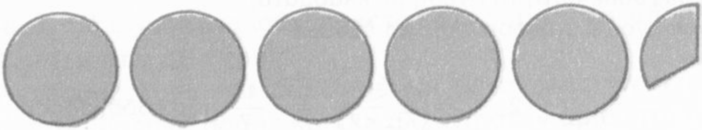
Οἱ $4\frac{1}{2}$ δραχμές μᾶς κάνουν 9 πενηνταράκια.

Ἡ σχέση αὐτή μέ κλάσματα γράφεται $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ δραχ.

Δηλ. τρέψαμε τόν μεικτό ἀριθμό $4\frac{1}{2}$ σέ κλάσμα $\frac{9}{2}$.

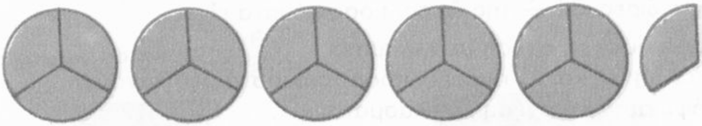
Πρόσεξε πώς ἡ τροπή ἔγινε σέ κλάσμα πού ἔχει παρονομαστή τόν παρονομαστή τοῦ κλάσματος τοῦ μεικτοῦ.

Πρόσεξε τά σχήματα καί σημείωσε τόν ἀριθμό πού παριστάνουν.

 =

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \frac{1}{3} =$$

Τά ἴδια σχήματα παρουσιάζονται σέ κλάσματα παρακάτω.



$$\frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{16}{3}$$

Δηλ. τρέπουμε τίς ἀκέραιες μονάδες σέ ἰσοδύναμα κλάσματα μέ παρονομαστή τό 3 καί προσθέτουμε καί τό ἀρχικό κλάσμα.

Δηλ. ἔχουμε

$$5\frac{1}{3} = (5 \times \frac{3}{3}) + \frac{1}{3} = \frac{15}{3} + \frac{1}{3} = \frac{16}{3} \text{ ἤ } \frac{(5\times3)+1}{3} = \frac{16}{3}$$

Συμπέρασμα: Γιά νά τρέψουμε ἕνα μεικτό ἀριθμό σέ κλάσμα, πολλαπλασιάζουμε τόν ἀκέραιο μέ τόν παρονομαστή τοῦ κλάσματος καί στό γινόμενο προσθέτουμε τόν ἀριθμητή. Τό ἐξαγόμενο γράφουμε ἀριθμητή τοῦ νέου κλάσματος καί παρονομαστή ἀφήνουμε τόν ἴδιο.

$$5\frac{+1}{\times 3} = \frac{16}{3}$$

Ἐργασίες

Παράδειγμα: Δύο ἑβδομάδες καί 3 ἡμέρες, πόσες ἡμέρες κάνουν; Πῶς γράφουμε αὐτή τή σχέση μέ κλάσματα;

Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα ἔχουμε:

$$2\frac{3}{7} = 2\frac{+3}{\times 7} = \frac{17}{7} \text{ τῆς ἑβδομάδος.}$$

1) Ἕνα ἔτος καί 7 μῆνες, πόσοι μῆνες εἶναι;
Γράψε αὐτή τή σχέση μέ κλάσματα.

2) Τρεῖς ὧρες καί $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας, πόσα τέταρτα εἶναι;
Γράψε αὐτή τή σχέση μέ κλάσματα.

3) Πέντε ὧρες καί $\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας, πόσα πέμπτα εἶναι;
Γράψε αὐτή τή σχέση μέ κλάσματα.

4) Ἑπτά μῆνες καί 21 ἡμέρες, πόσα τριακοστά μᾶς κάνουν;
Γράψε αὐτή τή σχέση μέ κλάσματα.

5) 27 κιλά καί 350 γραμμάρια, πόσα χιλιοστά μᾶς κάνουν;
Γράψε αὐτή τή σχέση μέ κλάσματα.

6) Γράψε σέ μεικτούς καί μετά σέ κλάσματα, τίς παρακάτω σχέσεις.

12 ἔτη καί 5 μῆνες.
5 αἰῶνες καί 54 ἔτη.
15 μέτρα καί 7 παλάμες.
32 κιλά καί 765 γραμμάρια.
9 μῆνες καί 17 ἡμέρες.
4 ἡμέρες καί 15 ὧρες.
23 μέτρα καί 78 πόντους.
54 κιλά καί 875 γραμμάρια.
3 ἑκατοστάρικα καί 7 δεκάρικα.
9 πενηντάρικα καί 3 δεκάρικα.
4 εἰκοσάρικα καί 6 δίδραχμα.
7 δεκάρικα καί 6 δραχμές.

Νά τρέψεις σέ κλάσματα τούς παρακάτω μεικτούς.

$4\frac{3}{5}$, $6\frac{5}{9}$, $10\frac{4}{7}$, $9\frac{12}{15}$, $13\frac{18}{24}$

$14\frac{4}{6}$, $35\frac{5}{8}$, $52\frac{7}{12}$, $125\frac{12}{20}$, $254\frac{6}{8}$

Ἀπό ποιούς μεικτούς ἀριθμούς πρόκυψαν τά καταχρηστικά κλάσματα;

$\frac{13}{5}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{24}{7}$, $\frac{53}{8}$, $\frac{75}{20}$, $\frac{225}{50}$.

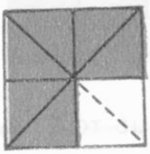
5. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Τώρα πιά ἔχεις καταλάβει ἀρκετά τά κλάσματα καί μπορεῖς νά ὑπολογίζεις τήν ἀξία τους.

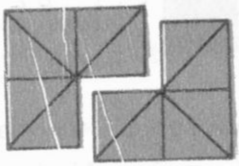
Ἄς δοῦμε λοιπόν τί συμβαίνει, τί μεταβολές γίνονται στά κλάσματα, ἄν ἐπιφέρουμε κάποια ἀλλαγή στόν ἀριθμητή ἤ στόν παρονομαστή τους. Ἄς γνωρίσουμε λοιπόν τίς χαρακτηριστικές ἰδιότητές τους. Αὐτή ἡ ἐργασία καί γνώση, θά μᾶς βοηθήσει πολύ ἀργότερα στίς πράξεις τῶν κλασμάτων.

α) Πότε μεγαλώνει ἡ ἀξία ἑνός κλάσματος

1) Ἔχουμε τό κλάσμα $\frac{6}{8}$.



$$\frac{6 \times 2}{8} = \frac{12}{8}$$

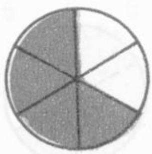


Ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν ἀριθμητή του μέ τό 2, ἔχουμε τή σχέση, $\frac{6 \times 2}{8} = \frac{12}{8}$. Ἀλλά ὅπως βλέπουμε τά $\frac{12}{8}$ εἶναι διπλάσια σέ ἀξία ἀπό τά $\frac{6}{8}$ διότι εἶναι 2 φορές τά $\frac{6}{8}$, ἀφοῦ τά 6 κομμάτια, οἱ 6 κλασματικές μονάδες ἔγιναν 12 κλασματικές μονάδες.

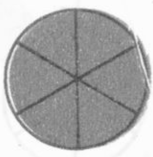
Πρόσεξε ἀκόμη:

Ἔχουμε τό κλάσμα $\frac{2}{6}$.

$\frac{2}{6}$



$\frac{2 \times 2}{6} = \frac{4}{6}$



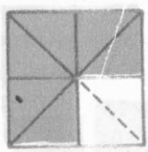
$\frac{2 \times 3}{6} = \frac{6}{6}$

Ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν ἀριθμητή του μέ τό 2, ἔχουμε τή σχέση $\frac{2\times 2}{6} = \frac{4}{6}$ καὶ ἂν πολλαπλασιάσουμε τὸν ἀριθμητή του μὲ τὸ 3, ἔχουμε τὴ σχέση $\frac{2\times 3}{6} = \frac{6}{6}$. Ἀλλὰ παρατηροῦμε ὅτι τὰ $\frac{4}{6}$ εἶναι διπλάσια σὲ ἀξία ἀπὸ τὰ $\frac{2}{6}$ καὶ τὰ $\frac{6}{6}$ εἶναι τριπλάσια σὲ ἀξία ἀπὸ τὰ $\frac{2}{6}$.

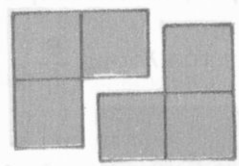
Αὐτὸ συμβαίνει σὲ ὅλα τὰ κλάσματα. Δηλ. **ἂν πολλαπλασιάσουμε τὸν ἀριθμητὴ ἑνὸς κλάσματος μὲ ἕνα ἀκέραιο ἀριθμό, τότε ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό.**

2) Πρόσεξε τώρα:

Ἔχουμε πάλι τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$.



$$\frac{6}{8:2} = \frac{6}{4}$$



Ἂν διαιρέσουμε τὸν παρονομαστή του μὲ τὸ 2, ἔχουμε τὴ σχέση $\frac{6}{8:2} = \frac{6}{4}$. Ἀλλά, ὅπως φαίνεται καὶ στὸ σχῆμα, τὰ $\frac{6}{4}$ εἶναι διπλάσια σὲ ἀξία ἀπὸ τὰ $\frac{6}{8}$, δηλ. ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος **διπλασιάστηκε. Διότι ἔχουμε τὸν ἴδιο ἀριθμὸ κομματιῶν, ἀλλὰ εἶναι διπλάσια σὲ μέγεθος, εἶναι μεγαλύτερες κλασματικὲς μονάδες.**

Πρόσεξε ἀκόμη:

Ἔχουμε τὸ κλάσμα $\frac{2}{6}$.

$\frac{2}{6}$ $\qquad$ $\frac{2}{6:2} = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{2}{6:3} = \frac{2}{2}$

Ἄν διαιρέσουμε τόν παρονομαστή του μέ τό 2, ἔχουμε $\frac{2}{6:2} = \frac{2}{3}$, δηλ. ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διπλασιάστηκε καί ἄν διαιρέσουμε τόν παρονομαστή του μέ τό 3, ἔχουμε $\frac{2}{6:3} = \frac{2}{2}$, δηλ. ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος τριπλασιάστηκε.

Διότι ἔχουμε τόν ἴδιο ἀριθμό κλασματικῶν μονάδων, ἀλλά οἱ κλασματικές μονάδες εἶναι διπλάσιες καί τριπλάσιες ἀπό τήν ἀρχική.

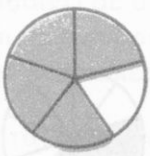
Αὐτό συμβαίνει σέ ὅλα τά κλάσματα. Δηλ. **ἄν διαιρέσουμε τόν παρονομαστή ἑνός κλάσματος μέ ἕνα ἀκέραιο ἀριθμό, ($\neq 0$), τότε τό κλάσμα πολλαπλασιάζεται μέ τόν ἴδιο ἀριθμό.**

Ἀπό ὅλα τά προηγούμενα συμπεραίνουμε ὅτι:

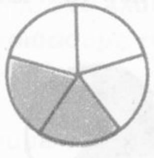
> Ἡ ἀξία ἑνός κλάσματος μεγαλώνει, πολλαπλασιάζεται, ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν ἀριθμητή του, μέ ἕναν ἀκέραιο ἀριθμό, ἤ διαιρέσουμε τόν παρονομαστή του, μέ ἕναν ἀκέραιο ἀριθμό.

β) Πότε μικραίνει ἡ ἀξία ἑνός κλάσματος

1) Ἔχουμε τό κλάσμα $\frac{4}{5}$.



$$\frac{4:2}{5} = \frac{2}{5}$$

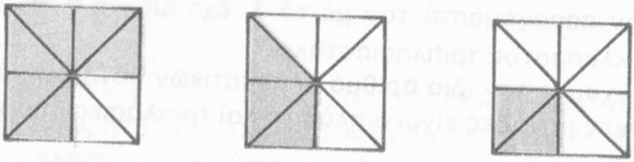


Ἄν διαιρέσουμε τόν ἀριθμητή του μέ 2, ἔχουμε $\frac{4:2}{5} = \frac{2}{5}$

Ἀλλά παρατηροῦμε ὅτι τά $\frac{2}{5}$ εἶναι μισά σέ ἀξία ἀπό τά $\frac{4}{5}$, διότι οἱ κλασματικές μονάδες ἀπό 4 ἔγιναν 2.

Πρόσεξε ἀκόμη:

Ἔχουμε τό κλάσμα $\frac{6}{8}$.



$$\frac{6}{8} \qquad \frac{6:2}{8} = \frac{3}{8} \qquad \frac{6:3}{8} = \frac{2}{8}$$

Ἄν διαιρέσουμε τόν ἀριθμητή του μέ τό 2, ἔχουμε $\frac{6:3}{8} = \frac{3}{8}$
Παρατηροῦμε ὅτι τό κλάσμα μειώθηκε στό μισό, δηλ. ὅλο τό κλάσμα διαιρέθηκε μέ τό 2, διότι οἱ κλασματικές μονάδες ἀπό 6 ἔγιναν 3.

Ἄν διαιρέσουμε τόν ἀριθμητή του μέ 3, ἔχουμε $\frac{6:3}{8} = \frac{2}{8}$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος μειώθηκε στό τρίτο, οἱ 6 κλασματικές μονάδες ἔγιναν 2, δηλ. ὅλο τό κλάσμα διαιρέθηκε μέ τό 3.

Αὐτό συμβαίνει σέ ὅλα τά κλάσματα. Δηλ. ἕνα **κλάσμα μικραίνει, διαιρεῖται ἄν διαιρέσουμε τόν ἀριθμητή του, μέ ἕνα ἀκέραιο ἀριθμό ($\neq 0$).**

2) Πρόσεξε τώρα:

Ἔχουμε πάλι τό κλάσμα $\frac{4}{5}$.

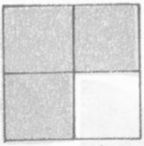
$$\frac{4}{5\times 2} = \frac{4}{10}$$

Ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν παρονομαστή του μέ 2, ἔχουμε $\frac{4}{5\times 2} = \frac{4}{10}$.

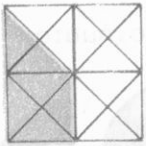
Παρατηροῦμε ὅτι τά $\frac{4}{10}$ εἶναι τά μισά σέ ἀξία ἀπό τά $\frac{4}{5}$ διότι ἔχουμε ἴσο ἀριθμό κλασματικῶν μονάδων ἀλλά τά δέκατα εἶναι τά μισά σέ ἀξία ἀπό τά πέμπτα, δηλ. τό κλάσμα μειώθηκε στό μισό.

Πρόσεξε ἀκόμη:

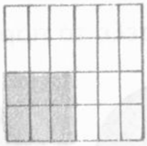
Ἔχουμε πάλι τό κλάσμα $\frac{6}{8}$.



$\frac{6}{8}$



$\frac{6}{8\times2} = \frac{6}{16}$



$\frac{6}{8\times3} = \frac{6}{24}$

Ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν παρονομαστή του μέ 2 ἔχουμε $\frac{6}{8\times2}=\frac{6}{16}$. Ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος μειώθηκε στό μισό, διότι ἔχουμε ἰσάριθμες κλασματικές μονάδες ἀλλά τά δέκατα ἕκτα εἶναι μισά σέ ἀξία ἀπό τά ὄγδοα, ἄρα ὅλο τό κλάσμα διαιρέθηκε μέ τό 2.

Ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν παρονομαστή του μέ 3, ἔχουμε $\frac{6}{8\times3}=\frac{6}{24}$. Ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος μειώθηκε στό τρίτο, διότι ἔχουμε ἰσάριθμες κλασματικές μονάδες ἀλλά τά εἰκοστά τέταρτα ἔχουν τό τρίτο τῆς ἀξίας ἀπό τά ὄγδοα, ἄρα ὁλόκληρο τό κλάσμα διαιρέθηκε μέ τό 3.

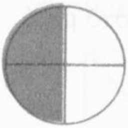
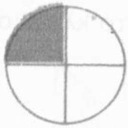
Αὐτό συμβαίνει σέ ὅλα τά κλάσματα. Δηλ. **ἕνα κλάσμα μικραίνει διαιρεῖται μέ ἕνα ἀριθμό, ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν παρονομαστή του μέ ἕναν ἀκέραιο ἀριθμό ($\neq 0$).**

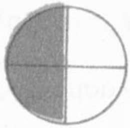
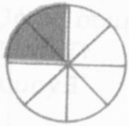
Ἀπό ὅλα τά προηγούμενα συμπεραίνουμε ὅτι:

Ἡ ἀξία ἑνός κλάσματος μικραίνει, διαιρεῖται, ἄν διαιρέσουμε τόν ἀριθμητή του μέ ἕναν ἀκέραιο ἀριθμό ἤ πολλαπλασιάσουμε τόν παρονομαστή του μέ ἕναν ἀκέραιο ἀριθμό ($\neq 0$).

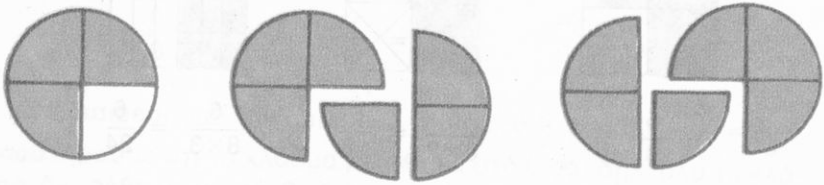
Ἐργασίες:

1. Παρατήρησε τά παρακάτω σχήματα, καί θυμήσου τούς κανόνες.

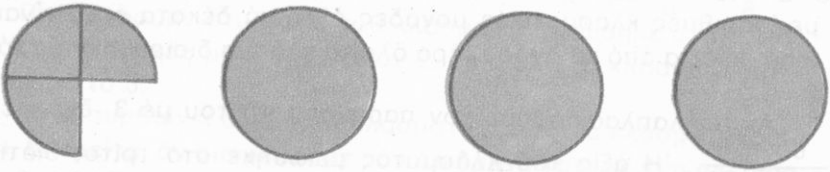
 $\frac{2:2}{4} = \frac{1}{4}$ 

 $\frac{2}{4 \times 2} = \frac{2}{8}$ 

2. Πρόσεξε τά παρακάτω σχήματα:



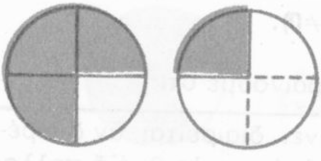
$\frac{3}{4}$ $\qquad$ $\frac{3 \times 4}{4} = \frac{12}{4} = 3$

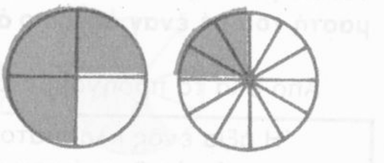


$\frac{3}{4}$ $\qquad$ $\frac{3}{4:4} = \frac{3}{1} = 3$

Ἐξήγησε μέ λόγια ποιά ἰδιότητα παριστάνει κάθε σειρά:

3. Κάνε τό ἴδιο μέ τά παρακάτω σχήματα:





$\frac{3:3}{4} = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$

4. Μεγάλωσε τά παρακάτω κλάσματα 5 φορές, ὅπως νομίζεις καλύτερα.

$\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{12}{15}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{11}{17}$.

5. Μίκρυνε 4 φορές τά κλάσματα, ὅπως νομίζεις καλύτερα.

$\frac{8}{9}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{24}{36}$.

6. Κάνε τά κλάσματα 3 φορές μεγαλύτερα, χωρίς νά θίξεις τούς ἀριθμητές.

$\frac{6}{9}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{16}{21}$, $\frac{25}{27}$.

7. Κάνε τά κλάσματα 3 φορές μικρότερα, χωρίς νά θίξεις τούς παρονομαστές.

$\frac{3}{5}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{27}{35}$.

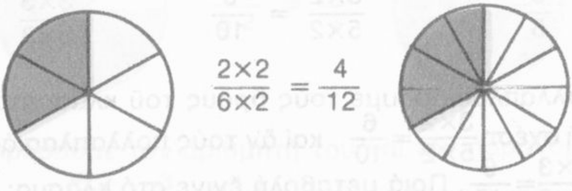
8. Τί παθαίνει ἡ ἀξία ἑνός κλάσματος, ἄν τριπλασιάσουμε τόν ἀριθμητή του, καί τί παθαίνει ἄν τριπλασιάσουμε τόν παρονομαστή του;

9. Τί παθαίνει ἡ ἀξία ἑνός κλάσματος, ἄν διαιρέσουμε τόν ἀριθμητή του μέ 5;

10. Τί παθαίνει ἄν διαιρέσουμε τόν παρονομαστή του μέ 5;

γ) Πότε ἡ ἀξία ἑνός κλάσματος δέ μεταβάλλεται

1) Ἔχουμε τό κλάσμα $\frac{2}{6}$



$$\frac{2\times 2}{6\times 2} = \frac{4}{12}$$

Ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν ἀριθμητή του καί τόν παρονομαστή του μέ τό 2 ἔχουμε $\frac{2\times 2}{6\times 2}=\frac{4}{12}$. Ποιά μεταβολή ἔγινε στό κλάσμα; Γιά θυμήσου τί ἔμαθες μέχρι τώρα;

Πολλαπλασιάζοντας τόν ἀριθμητή τό κλάσμα μεγαλώνει, πολλαπλασιάζοντας τόν παρονομαστή τό κλάσμα μικραίνει.

Τώρα πού συνέβησαν καί τά δυό, τί λές νά ἔπαθε τό κλάσμα;

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ὅροι τοῦ β΄ κλάσματος εἶναι διπλάσιοι ἀπό τούς ὅρους τοῦ α΄, ἀλλά ὅπως φαίνεται ἀπό τά σχήματα τά κλάσματα $\frac{2}{6}$ καί $\frac{4}{12}$ ἔχουν τήν ἴδια ἀξία.

Ἄς συγκρίνουμε τά δυό κλάσματα μέ κάτι συγκεκριμένο.

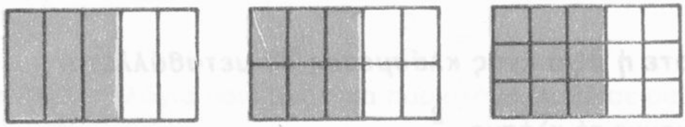
Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τά κλάσματα $\frac{2}{6}$ καί $\frac{4}{12}$ παριστάνουν μέρος τῆς ὥρας. Μπορεῖς νά ὑπολογίσεις πόσα λεπτά τῆς ὥρας ἀντιπροσωπεύουν τό καθένα; Γιά νά τό βρεῖς θά ξεκινήσεις ἀπό τίς ἀντίστοιχες κλασματικές μονάδες.

Τό $\frac{1}{6}$ τῆς ὥρας ἔχει 10 λεπτά, τά $\frac{2}{6}$ τῆς ὥρας ἔχουν 20 λεπτά.

Τό $\frac{1}{12}$ τῆς ὥρας ἔχει 5 λεπτά, τά $\frac{4}{12}$ τῆς ὥρας ἔχουν 20 λεπτά.

Δηλ. καί μέ τή σύγκριση ἐπαλήθευσε ἡ πρώτη ἐντύπωση καί καταλαβαίνουμε ὅτι τά κλάσματα εἶναι ἴσης ἀξίας.

Πρόσεξε τώρα:
Ἔχουμε τό κλάσμα $\frac{3}{5}$.



$\frac{3}{5}$ $\qquad$ $\frac{3\times2}{5\times2} = \frac{6}{10}$ $\qquad$ $\frac{3\times3}{5\times3} = \frac{9}{15}$

Ἄν πολλαπλασιάσουμε τούς ὅρους τοῦ κλάσματος μέ τό 2, ἔχουμε τή σχέση $\frac{3\times2}{5\times2}=\frac{6}{10}$, καί ἄν τούς πολλαπλασιάσουμε μέ 3 ἔχουμε $\frac{3\times3}{5\times3}=\frac{9}{15}$. Ποιά μεταβολή ἔγινε στό κλάσμα;

Πρόσεξε τά κλάσματα στή σειρά $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}$.

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ὅροι τοῦ β΄ κλάσματος εἶναι διπλάσιοι καί τοῦ γ΄ κλάσματος εἶναι τριπλάσιοι, ἀπό τούς ὅρους τοῦ α΄ κλάσματος.

Ἄς ὑποθέσουμε πάλι ὅτι τά τρία κλάσματα παριστάνουν μέρος τῆς ὥρας. Κάνοντας τή σύγκριση μεταξύ τους, βρίσκουμε ὅτι:

Τό $\frac{1}{5}$ τῆς ὥρας ἔχει 12 λεπτά, τά $\frac{3}{5}$ τῆς ὥρας ἔχουν 36 λεπτά.

Τό $\frac{1}{10}$ τῆς ὥρας ἔχει 6 λεπτά, τά $\frac{6}{10}$ τῆς ὥρας ἔχουν 36 λεπτά.

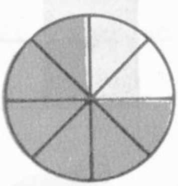
Τό $\frac{1}{15}$ τῆς ὥρας ἔχει 3 λεπτά, τά $\frac{9}{15}$ τῆς ὥρας ἔχουν 36 λεπτά.

Μέ τήν ἐπαληθευτική αὐτή σύγκριση, καταλαβαίνουμε ὅτι τά τρία αὐτά κλάσματα ἔχουν διαφορετικούς ὅρους ἀλλά τήν ἴδια ἀξία. Αὐτό συμβαίνει σέ ὅλα τά κλάσματα. Δηλ. **ἄν πολλαπλασιάσουμε καί τούς δύο ὅρους ἑνός κλάσματος μέ τόν ἴδιο ἀκέραιο ἀριθμό, ἡ ἀξία του δέν μεταβάλλεται.**

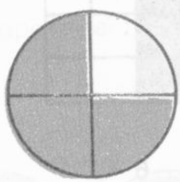
Τό ἀρχικό καί τό τελικό κλάσμα εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ τους. Αὐτή ἡ ἰδιότητα εἶναι πολύ σπουδαία καί μᾶς ἐξυπηρετεῖ πολύ στήν πρόσθεση καί ἀφαίρεση τῶν κλασμάτων, ὅπως θά δεῖς ἀργότερα.

2) Πρόσεξε τώρα:

Ἔχουμε τό κλάσμα $\frac{6}{8}$.



$$\frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$$



Ἄν διαιρέσουμε τόν ἀριθμητή του καί τόν παρονομαστή του μέ τό 2, ἔχουμε $\frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$. Ποιά μεταβολή ἔχουμε στό κλάσμα; Γιά θυμήσου τά προηγούμενα:

Διαιρώντας τόν ἀριθμητή ἑνός κλάσματος, τό κλάσμα μικραίνει. Διαιρώντας τόν παρονομαστή ἑνός κλάσματος, τό κλάσμα μεγαλώνει.

Τώρα πού συνέβησαν καί τά δύο, τί λές νά έπαθε τό κλάσμα;

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ὅροι τοῦ ἀρχικοῦ κλάσματος εἶναι διπλάσιοι ἀπό τούς ὅρους τοῦ δεύτερου, ἀλλά ὅπως φαίνεται ἀπό τά σχήματα, τά κλάσματα $\frac{6}{8}$ καί $\frac{3}{4}$ ἔχουν τήν ἴδια ἀξία. Ἄς τά συγκρίνουμε μέ κάτι συγκεκριμένο.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τά κλάσματα $\frac{6}{8}$ καί $\frac{3}{4}$ εἶναι μέρος τοῦ κιλοῦ. Μπορεῖς νά ὑπολογίσεις πόσα γραμμάρια ἀναλογοῦν σέ κάθε κλάσμα; Γιά νά τό βρεῖς θά ξεκινήσεις ἀπό τίς ἀντίστοιχες κλασματικές μονάδες.

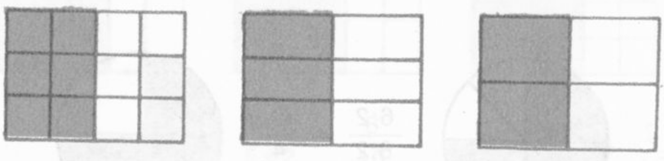
Τό $\frac{1}{8}$ τοῦ κιλοῦ ἔχει 125 γραμμάρια, τά $\frac{6}{8}$ τοῦ κιλοῦ ἔχουν 750 γραμμάρια.

Τό $\frac{1}{4}$ τοῦ κιλοῦ ἔχει 250 γραμμάρια, τά $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ ἔχουν 750 γραμμάρια.

Μέ τήν ἐπαληθευτική σύγκριση, καταλαβαίνουμε ὅτι τά δυό αὐτά κλάσματα ἔχουν τήν ἴδια ἀξία, εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ τους.

Πρόσεξε τώρα:

Ἔχουμε τό κλάσμα $\frac{6}{12}$.



$\frac{6}{12}$ $\qquad$ $\frac{6:2}{12:2} = \frac{3}{6}$ $\qquad$ $\frac{6:3}{12:3} = \frac{2}{4}$

Ἄν διαιρέσουμε τούς ὅρους τοῦ κλάσματος μέ τό 2, ἔχουμε $\frac{6:2}{12:2} = \frac{3}{6}$.

Ἄν διαιρέσουμε τούς ὅρους τοῦ κλάσματος μέ 3, ἔχουμε $\frac{6:3}{12:3} = \frac{2}{4}$.

Ποιά μεταβολή ἔγινε στό κλάσμα;

Πρόσεξε τά κλάσματα στή σειρά $\frac{6}{12}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{4}$.

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ὅροι τοῦ α΄ κλάσματος εἶναι διπλάσιοι ἀπό τοῦ δευτέρου καί τριπλάσιοι ἀπό τοῦ τρίτου. Δηλ. οἱ ὅροι τοῦ β΄ κλάσματος εἶναι μικρότεροι στό μισό καί τοῦ γ΄ κλάσματος ἔχουν μειωθεῖ στό τρίτο, ἀπό τούς ὅρους τοῦ ἀρχικοῦ κλάσματος, ἀλλά ἡ ἀξία τους εἶναι ἴση, εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ τους.

Αὐτό συμβαίνει σέ ὅλα τά κλάσματα. Δηλ. **ἄν διαιρέσουμε τούς ὅρους ἑνός κλάσματος μέ τόν ἴδιο ἀκέραιο ἀριθμό (≠0), ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δέν μεταβάλλεται.**

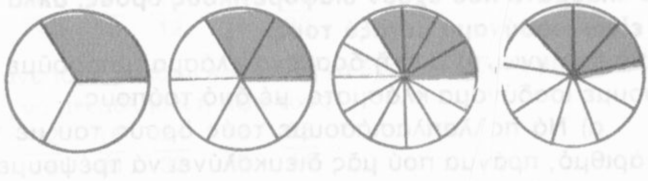
Τό ἀρχικό καί τό τελικό κλάσμα εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ τους.

Ἀπό ὅλα τά προηγούμενα συμπεραίνουμε ὅτι:

> Ἡ ἀξία ἑνός κλάσματος δέ μεταβάλλεται, ἄν πολλαπλασιάσουμε καί τούς δύο ὅρους του μέ τόν ἴδιο ἀκέραιο ἀριθμό, ἤ ἄν διαιρέσουμε καί τούς δυό ὅρους του μέ τόν ἴδιο ἀκέραιο ἀριθμό (≠0).

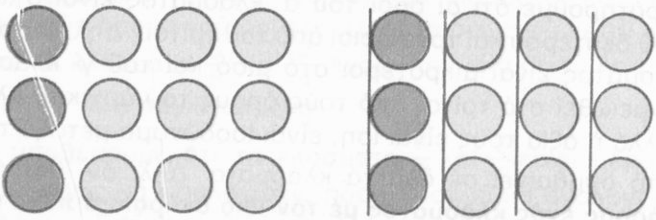
δ) Ἰσοδύναμα κλάσματα

Πρόσεξε τά παρακάτω σχήματα. Τί παρατηρεῖς;



Τά κλάσματα ἔχουν διαφορετικούς ὅρους, ἀλλά τήν ἴδια ἀξία.

Παρακάτω βλέπεις 12 τόπια, τοποθετημένα σέ 4 τριάδες.



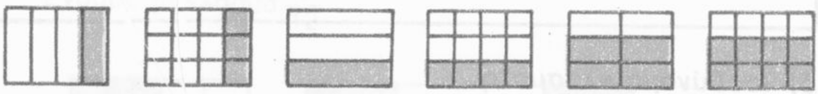
Ἄν πάρουμε τά 3 ἀπό τά 12 ἔχουμε τό κλάσμα $\frac{3}{12}$.

Ἄν πάρουμε μιά τριάδα ἀπό τίς 4 ἔχουμε τό κλάσμα $\frac{1}{4}$.

Καί στίς δυό περιπτώσεις πήραμε οὐσιαστικά 3 τόπια, λοιπόν τά κλάσματα $\frac{3}{12}$ καί $\frac{1}{4}$ ἔχουν τήν ἴδια ἀξία.

Πρόσεξε τά παρακάτω σχήματα. Τί παρατηρεῖς;

Σημείωσε τίς ἰσότητες πού παριστάνουν κατά ζεύγη.



Τά παραπάνω σχήματα, παριστάνουν κατά ζεύγη, κλάσματα πού ἔχουν διαφορετικούς ὅρους ἀλλά τήν ἴδια ἀξία, εἶναι ἰσοδύναμα.

Τά κλάσματα πού ἔχουν διαφορετικούς ὅρους, ἀλλά τήν ἴδια ἀξία, εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ τους.

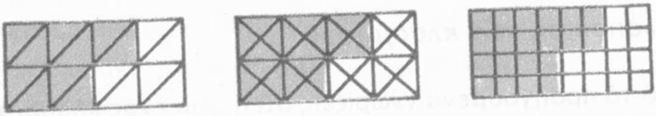
Ἀπό ἕνα γνωστό μας ἤ δοσμένο κλάσμα, μποροῦμε νά σχηματίσουμε ἰσοδύναμα κλάσματα, μέ δυό τρόπους.

α) Νά πολλαπλασιάσουμε τούς ὅρους του μέ τόν ἴδιο ἀριθμό, πράγμα πού μᾶς διευκολύνει νά τρέψουμε ἑτερώνυμα κλάσματα σέ ὁμώνυμα, πού βοηθοῦν στήν πρόσθεση καί ἀφαίρεση τῶν κλασμάτων.

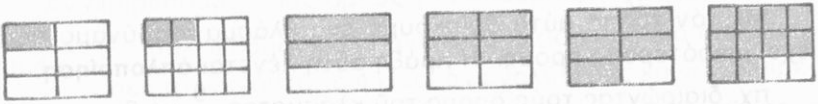
β) Νά διαιρέσουμε τούς ὅρους του μέ τόν ἴδιο ἀριθμό, πράγμα πού μᾶς διευκολύνει στήν ἁπλοποίηση τῶν κλασμάτων.

Ἐργασίες

1. Παρατήρησε τά παρακάτω σχήματα καί σημείωσε τά ἀντίστοιχα ἰσοδύναμα κλάσματα πού παριστάνουν.



2. Σημείωσε τίς ἰσότητες πού παριστάνουν τά παρακάτω ζεύγη.



3. Συμπλήρωσε τίς παρακάτω ἰσότητες μέ ἰσοδύναμα κλάσματα.

α) $\frac{3}{4} = \frac{\quad}{8}$, $\frac{3}{4} = \frac{9}{\quad}$, $\frac{3}{4} = \frac{\quad}{20}$, $\frac{3}{4} = \frac{12}{\quad}$.

β) $\frac{3}{5} = \frac{\quad}{10}$, $\frac{3}{5} = \frac{9}{\quad}$, $\frac{3}{5} = \frac{\quad}{20}$, $\frac{3}{5} = \frac{15}{\quad}$.

γ) $\frac{5}{8} = \frac{\quad}{16} = \frac{15}{\quad} = \frac{\quad}{32} = \frac{35}{\quad}$, $\frac{4}{7} = \frac{12}{\quad} = \frac{20}{\quad}$

δ) $\frac{18}{24} = \frac{9}{\quad} = \frac{\quad}{8} = \frac{3}{\quad} = \frac{\quad}{48}$, $\frac{9}{11} = \frac{\quad}{33} = \frac{\quad}{55}$.

4. Κάνε τά παρακάτω κλάσματα νά ἔχουν 5 φορές μεγαλύτερους ὅρους, χωρίς νά μεταβληθεῖ ἡ ἀξία τους:

$\frac{2}{3}$ $\frac{6}{9}$ $\frac{7}{10}$ $\frac{10}{12}$ $\frac{14}{15}$ $\frac{23}{30}$.

5. Κάνε τά παρακάτω κλάσματα νά ἔχουν 4 φορές μικρότερους ὅρους, χωρίς νά μεταβληθεῖ ἡ ἀξία τους.

$\frac{4}{8}$ $\frac{12}{16}$ $\frac{16}{20}$ $\frac{24}{32}$ $\frac{36}{40}$ $\frac{28}{44}$.

6. Τά παρακάτω κλάσματα παριστάνουν μέρος τῆς ὥρας.

$\frac{45}{60} = \frac{15}{20} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Είναι σωστή ή διάταξη; Είναι ισοδύναμα μεταξύ τους; Κάνε τή σύγκριση μέ τά λεπτά τῆς ὥρας.

7. Είναι ισοδύναμα τά παρακάτω κλάσματα;

$\frac{4}{8}$ $\frac{44}{88}$ $\frac{444}{888}$ · $\frac{7}{9}$ $\frac{77}{99}$ $\frac{777}{999}$·

ε) Ἁπλοποίηση τῶν κλασμάτων

Ἀπό τά προηγούμενα γνωρίζεις ὅτι ἡ ἀξία ἑνός κλάσματος δέ μεταβάλλεται ἄν διαιρέσουμε καί τούς δυό ὅρους του μέ τόν ἴδιο ἀκέραιο ἀριθμό.

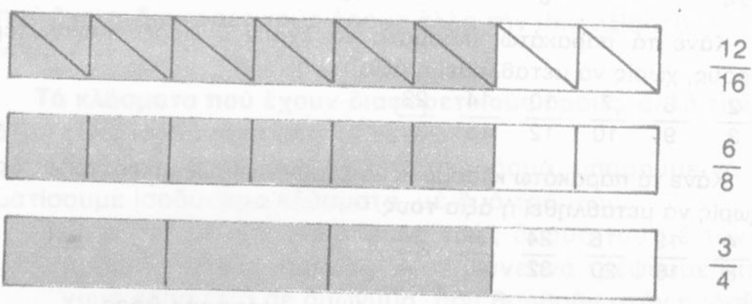
Μέ τόν τρόπο αὐτό βρίσκουμε ἕνα κλάσμα ισοδύναμο πού ἔχει μικρότερους ὅρους. Ἡ πράξη αὐτή λέγεται **ἁπλοποίηση.**

πχ. διαιρώντας τούς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{9}{15}$ μέ 3, ἔχουμε τή σχέση $\frac{9:3}{15:3}=\frac{3}{5}$.

Πρόσεξε: Γιά νά γίνει ἡ ἁπλοποίηση ἑνός κλάσματος, πρέπει νά βροῦμε ἕναν ἀριθμό πού νά διαιρεῖ ἀκριβῶς τόν ἀριθμητή καί τόν παρονομαστή του. Νά βροῦμε δηλ. ἕναν **κοινό διαιρέτη** τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος.

Θυμήσου τί ἔμαθες γιά τούς κοινούς διαιρέτες καί τά κριτήρια τῆς διαιρετότητας. Θά σέ βοηθήσουν πολύ.

Πρόσεξε τά παρακάτω σχήματα. Τί παρατηρεῖς;



Παριστάνουν τά ισοδύναμα κλάσματα $\frac{12}{16}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{3}{4}$.

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ὅροι τοῦ α΄ κλάσματος εἶναι διπλάσιοι ἀπό τούς ὅρους τοῦ β΄ καί τετραπλάσιοι ἀπό τούς ὅρους τοῦ γ΄. Πρόσεξε πώς μποροῦμε νά τό ἐπιτύχουμε αὐτό.

$\frac{12:2}{16:2} = \frac{6}{8}$ καί $\frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$.

Διαιρώντας διαδοχικά τούς ὅρους κάθε κλάσματος μέ τόν ἴδιο ἀκερ. ἀριθμό βρίσκουμε κλάσματα ἰσοδύναμα μέ μικρότερους ὅρους. Τό τελικό κλάσμα $\frac{3}{4}$ δέν ἁπλοποιεῖται περισσότερο καί λέγεται **ἀνάγωγο.**

Πρόσεξε τώρα:

Ἄν διαιρέσουμε τούς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{12}{16}$ μέ 4 ἔχουμε $\frac{12:4}{16:4} = \frac{3}{4}$. δηλ. φθάσαμε στό ἀνάγωγο κλάσμα μέ μιά διαίρεση.

Στήν περίπτωση αὐτή τό 4 εἶναι ὁ μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{12}{16}$ καί γι' αὐτό λέγεται **μέγιστος κοινός διαιρέτης** τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος.

Πρόσεξε τίς παρακάτω ἁπλοποιήσεις γιά νά καταλάβεις καλύτερα τή διαδικασία τῆς ἁπλοποιήσεως.

$\underset{\text{κ.δ.3}}{\frac{12:3}{18:3}} = \underset{\text{κ.δ.2}}{\frac{4:2}{6:2}} = \frac{2}{3} \longrightarrow \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$

Μ.Κ.Δ. 6 (2×3 = 6)

$\underset{\text{κ.δ. 2}}{\frac{18:2}{36:2}} = \underset{\text{κ.δ. 3}}{\frac{9:3}{18:3}} = \underset{\text{κ.δ. 3}}{\frac{3:3}{6:3}} = \frac{1}{2}$

$\underset{\text{κ.δ. 6}}{\frac{18:6}{36:6}} = \underset{\text{κ.δ. 3}}{\frac{3:3}{6:3}} = \frac{1}{2}$

$\underset{\text{κ.δ. 9}}{\frac{18:9}{36:9}} = \underset{\text{κ.δ. 2}}{\frac{2:2}{4:2}} = \frac{1}{2}$

$\frac{18:18}{36:18} = \frac{1}{2}$

Μ.Κ.Δ. 18

Μέ τό μέγιστο κοινό διαιρέτη τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος πετυχαίνουμε καλύτερη ἁπλοποίηση καί φθάνουμε συντομότερα στό ἀνάγωγο κλάσμα.

Ἐργασίες

1. Νά ἁπλοποιήσετε τά κλάσματα:

   $\frac{15}{20}$ $\frac{42}{56}$ $\frac{35}{70}$ $\frac{48}{60}$ $\frac{54}{66}$ $\frac{36}{48}$

2. Νά ἁπλοποιήσετε τά παρακάτω κλάσματα μέ διαδοχικές διαιρέσεις.

   $\frac{45}{60}$ $\frac{72}{90}$ $\frac{180}{360}$ $\frac{250}{750}$ $\frac{450}{900}$ $\frac{775}{1500}$

3. Ποιά ἀπό τά παρακάτω κλάσματα εἶναι ἀνάγωγα καί ποιά ἁπλοποιοῦνται;

   $\frac{17}{51}$ $\frac{44}{77}$ $\frac{56}{64}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{25}{75}$ $\frac{67}{90}$ $\frac{125}{250}$

4. Νά ἁπλοποιήσετε τά κλάσματα μέ τόν Μ.Κ.Δ.

   $\frac{16}{64}$ $\frac{27}{54}$ $\frac{36}{108}$ $\frac{250}{1500}$ $\frac{450}{1800}$

5. Τί σημαίνει ἁπλοποιῶ ἕνα κλάσμα;
6. Τί εἶναι κοινός διαιρέτης δύο ἤ περισσότερων ἀριθμῶν;
7. Ποιός εἶναι ὁ Μέγιστος Κ.Δ. δύο ἤ περισσότερων ἀριθμῶν;
8. Σέ ποιά ἰδιότητα τῶν κλασμάτων στηρίζεται ἡ ἁπλοποίηση;

στ) Σύγκριση τῶν κλασμάτων μεταξύ τους

1) Κλάσματα ὁμώνυμα

Θυμήσου τή σύγκριση τῶν κλασματικῶν μονάδων.

Πρόσεξε τώρα: Ἔχουμε δυό ὅμοια γλυκά καί μοιράζουμε τό καθένα σέ 12 ὅμοια κομμάτια.

Ἀπό τό α΄ πήραμε 3 κομμάτια δηλ. $\frac{3}{12}$.	Ἀπό τό β΄ πήραμε 6 κομμάτια δηλ. $\frac{6}{12}$, τά διπλάσια.

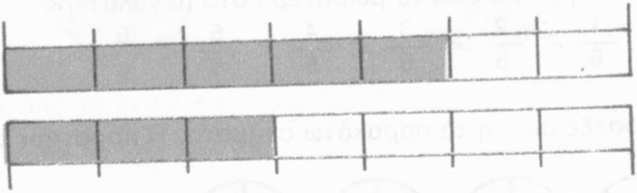
Παρατηροῦμε ὅτι τά κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα καί διαφέρουν στόν ἀριθμητή.

Ἄν τά συγκρίνουμε βλέπουμε ὅτι τό δεύτερο εἶναι μεγαλύτερο καί μάλιστα διπλάσιο ἀπό τό πρῶτο.

δηλ. ἔχουμε $\frac{3}{12} < \frac{6}{12}$ ἀλλά διπλάσιος εἶναι μόνο ὁ ἀριθμητής.

Τό ἴδιο παρατηροῦμε καί στίς παρακάτω ταινίες

$\frac{1}{7}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{5}{7}$



$\frac{1}{7}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{7}$

Κάθε ταινία εἶναι μοιρασμένη σέ 7 ἴσα μέρη.

Ἀπό τήν α΄ πήραμε 5 μέρη δηλ. $\frac{5}{7}$.

Ἀπό τή β΄ πήραμε 3 μέρη δηλ. $\frac{3}{7}$.

Τά κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα καί ἀπό τήν α΄ ταινία πήραμε μεγαλύτερο κομμάτι, παρά ἀπό τή β΄.

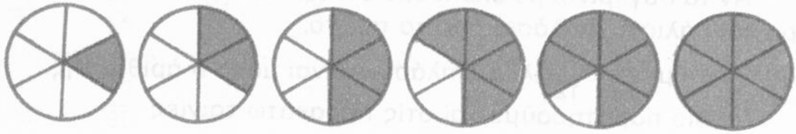
Ἔχουμε λοιπόν $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$, ἀλλά μεγαλύτερος εἶναι μόνο ὁ ἀριθμητής. Ἡ διαφορά ἐξαρτᾶται ἀπό τούς ἀριθμητές.

Δηλ. **μεταξύ δύο κλασμάτων πού ἔχουν τόν ἴδιο παρονομαστή μεγαλύτερο εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει μεγαλύτερο ἀριθμητή.**

Πρόσεξε καί συμπλήρωσε τίς ἀνισότητες.

$\frac{9}{15} \quad \frac{11}{15}$, $\frac{7}{11} \quad \frac{4}{11}$, $\frac{12}{20} \quad \frac{17}{20}$, $\frac{8}{18} \quad \frac{13}{18}$.

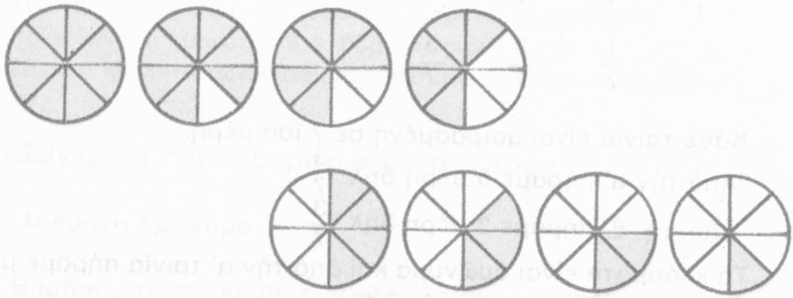
Πρόσεξε τά παρακάτω σχήματα. Τί παρατηρεῖς;



Παρατηροῦμε ὅτι παριστάνουν ὁμώνυμα κλάσματα τοποθετημένα στή σειρά ἀπό τό μικρότερο στό μεγαλύτερο.

δηλ. $\frac{1}{6} < \frac{2}{6} < \frac{3}{6} < \frac{4}{6} < \frac{5}{6} < \frac{6}{6}$.

Πρόσεξε ἀκόμη τά παρακάτω σχήματα. Τί παρατηρεῖς;



Παρατηροῦμε ὅτι εἶναι τοποθετημένα στή σειρά ἀπό τό μεγαλύτερο στό μικρότερο.

δηλ. $\frac{8}{8} > \frac{7}{8} > \frac{6}{8} > \frac{5}{8} > \frac{4}{8} > \frac{3}{8} > \frac{2}{8} > \frac{1}{8}$.

Τί συμπέρασμα μπορεῖς νά βγάλεις ἀπό ὅλα τά προηγούμενα;

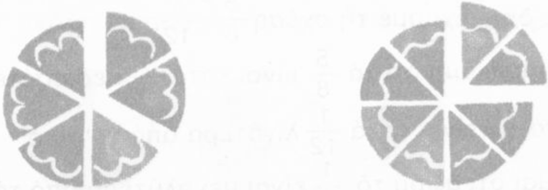
Μεταξύ δύο ἤ περισσότερων κλασμάτων πού ἔχουν ἴσους παρονομαστές (ὁμώνυμα), μεγαλύτερο εἶναι αὐτό πού ἔχει μεγαλύτερο ἀριθμητή καί μικρότερο αὐτό πού ἔχει μικρότερο ἀριθμητή.

Δηλ. στά ὁμώνυμα κλάσματα ἡ σύγκριση γίνεται μέ τούς ἀριθμητές.

2) Κλάσματα ἑτερώνυμα, μέ ἴσους ἀριθμητές

Ἔχουμε δύο ὅμοια γλυκά:

Μοιράζουμε τό ἕνα σέ 6 κομμάτια. Μοιράζουμε τό ἄλλο σέ 8 κομμάτια.



Πήραμε ἀπό τό ἕνα 2 κομμάτια. Πήραμε ἀπό τό ἄλλο 2 κομμάτια.

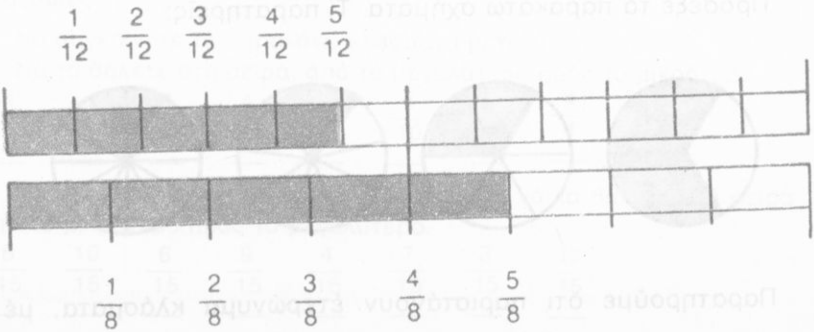
δηλ. πήραμε τά $\frac{2}{6}$. δηλ. πήραμε τά $\frac{2}{8}$.

Ποιό ἀπό τά δύο κλάσματα εἶναι μεγαλύτερο; Γιατί;

Ἀπό ὅτι παρατηροῦμε ἔχουμε $\frac{2}{6} > \frac{2}{8}$.

Γιά νά τό ἐξηγήσω σκέπτομαι ὅτι, ἀφοῦ τό $\frac{1}{8}$ εἶναι μικρότερο ἀπό τό $\frac{1}{6}$, τότε καί τά $\frac{2}{8}$ εἶναι μικρότερα ἀπό τά $\frac{2}{6}$.

Πρόσεξε τίς δυό παρακάτω ταινίες. Ὅπως βλέπεις εἶναι ἴσες. Ἡ μιά εἶναι μοιρασμένη σέ 12 μέρη δηλ. σέ δωδέκατα καί ἡ ἄλλη σέ 8 μέρη δηλ. σέ ὄγδοα.



Ἀπό τήν α΄ ταινία πήραμε 5 μέρη δηλ. τά $\frac{5}{12}$.

Ἀπό τή β΄ ταινία πήραμε 5 μέρη δηλ. τά $\frac{5}{8}$.

Ποιό ἀπό τά δυό κλάσματα εἶναι μεγαλύτερο;

Ἀπό τά σχήματα φαίνεται ὅτι τά $\frac{5}{8}$ εἶναι μεγαλύτερο κλάσμα ἀπό τά $\frac{5}{12}$, δηλ. ἔχουμε τή σχέση $\frac{5}{8} > \frac{5}{12}$.

Βλέπουμε ἀκόμη ὅτι τά $\frac{5}{8}$ εἶναι κατά $\frac{1}{8}$ περισσότερα ἀπό τό μισό, ἐνῶ τά $\frac{5}{12}$ εἶναι κατά $\frac{1}{12}$ λιγότερα ἀπό τό μισό.

Σκέπτομαι ὅτι ἀφοῦ τό $\frac{1}{8}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό $\frac{1}{12}$, τότε καί τά $\frac{5}{8}$ εἶναι μεγαλύτερο κλάσμα ἀπό τά $\frac{5}{12}$ διότι παίρνουμε ἴσα σέ ἀριθμό κομμάτια, ἀλλά ἀπό διαφορετικές κλασματικές μονάδες.

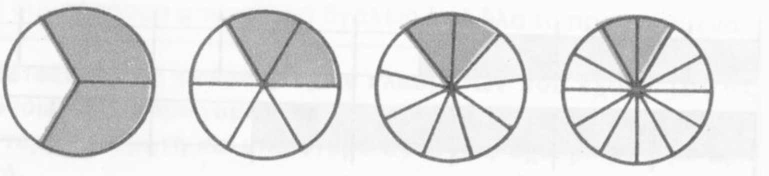
Δηλ. **στά ἑτερώνυμα κλάσματα μέ ἴσους ἀριθμητές, ἡ σύγκριση γίνεται μέ τούς παρονομαστές.**

Δηλ. **μεταξύ δυό κλασμάτων πού ἔχουν ἴσους ἀριθμητές μεγαλύτερο εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει μικρότερο παρονομαστή.**

Πρόσεξε καί συμπλήρωσε τίς παρακάτω ἀνισότητες.

$\frac{7}{9} \quad \frac{7}{12}$, $\quad \frac{12}{15} \quad \frac{12}{18}$, $\quad \frac{9}{10} \quad \frac{9}{15}$, $\quad \frac{11}{16} \quad \frac{11}{20}$.

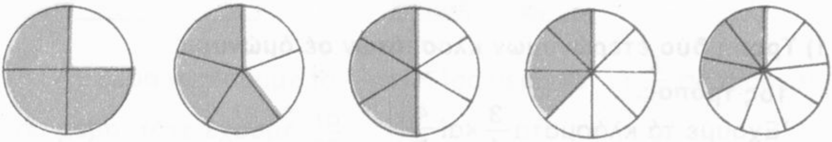
Πρόσεξε τά παρακάτω σχήματα. Τί παρατηρεῖς;



Παρατηροῦμε ὅτι παριστάνουν ἑτερώνυμα κλάσματα, μέ ἴσους ἀριθμητές, τοποθετημένα μέ τή σειρά ἀπό τό μεγαλύτερο πρός τό μικρότερο.

Δηλ. $\frac{2}{3} > \frac{2}{6} > \frac{2}{9} > \frac{2}{12}$.

Πρόσεξε ἀκόμη τά παρακάτω σχήματα. Τί παρατηρεῖς;



Παρατηροῦμε ὅτι παριστάνουν ἑτερώνυμα κλάσματα, μέ ἴσους ἀριθμητές, τοποθετημένα στή σειρά, ἀπ' τό μεγαλύτερο στό μικρότερο.

Δηλ. $\frac{3}{4} > \frac{3}{5} > \frac{3}{6} > \frac{3}{8} > \frac{3}{9}$.

Τί συμπέρασμα μπορεῖς νά βγάλεις ἀπό τά προηγούμενα;

Μεταξύ δύο ἤ περισσότερων κλασμάτων πού ἔχουν ἴσους ἀριθμητές ἀλλά διαφορετικούς παρονομαστές (ἑτερώνυμα), μεγαλύτερο εἶναι αὐτό πού ἔχει μικρότερο παρονομαστή καί μικρότερο αὐτό πού ἔχει μεγαλύτερο παρονομαστή.

Ἐργασίες

1. Νά συγκρίνετε τά παρακάτω κλάσματα μεταξύ τους.
Νά τά βάλετε στή σειρά, ἀπό τό μεγαλύτερο πρός τό μικρότερο.

$\frac{4}{8}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{4}{12}$ $\frac{4}{4}$

— — — — — — — — .

2. Νά συγκρίνετε τά παρακάτω κλάσματα καί νά τά βάλετε στή σειρά ἀπό τό μικρότερο πρός τό μεγαλύτερο.

$\frac{8}{15}$ $\frac{10}{15}$ $\frac{6}{15}$ $\frac{9}{15}$ $\frac{4}{15}$ $\frac{7}{15}$ $\frac{3}{15}$ $\frac{12}{15}$

— — — — — — — —

3. Ποιό ἀπό τά παρακάτω κλάσματα εἶναι μεγαλύτερο καί γιατί;

$\frac{3}{12}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{3}{9}$ $\frac{3}{7}$ Σειρά —— ——, —— ——.

Μεγαλύτερο κλάσμα εἶναι τά — διότι, μεταξύ δυό ἤ περισσότερων κλασμάτων πού .... κτλ.

ζ) Τροπή ἑτερώνυμων κλασμάτων σέ ὁμώνυμα

1) Τροπή δύο ἑτερώνυμων κλασμάτων σέ ὁμώνυμα

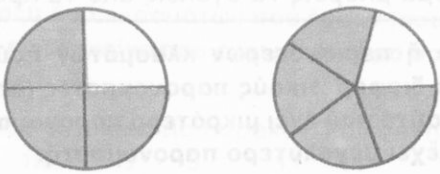
1ος τρόπος.

Ἔχουμε τά κλάσματα $\frac{3}{4}$ καί $\frac{4}{5}$.

Ποιό ἀπό τά δύο κλάσματα εἶναι μεγαλύτερο;

Σύμφωνα μέ τά γνωστά μας συμπεράσματα, δέν μποροῦμε ἀμέσως νά ἀπαντήσουμε, γιατί τά κλάσματα αὐτά εἶναι ἑτερώνυμα καί ἔχουν καί διαφορετικούς ἀριθμητές.

Ἄς συγκρίνουμε τά δύο αὐτά κλάσματα μέ κάτι συγκεκριμένο.



Ἄς ποῦμε: Τά $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας εἶναι 45 λεπτά.

Τά $\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας εἶναι 48 λεπτά.

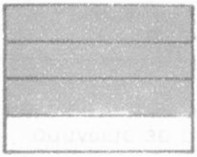
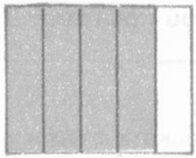
Τότε ἔχουμε 45λ. < 48λ.

ἄρα καί $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$.

Αὐτός ὁ τρόπος συγκρίσεως δέν εἶναι πάντοτε εὔκολος καί δυνατός.

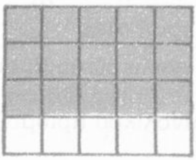
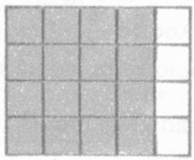
Γι' αὐτό πιό καλύτερα εἶναι νά τρέψουμε τά κλάσματα πού συγκρίνουμε σέ ἰσοδύναμα ὁμώνυμα.

Πρόσεξε: Ἄν παραστήσουμε τά κλάσματα πού συγκρίνουμε μέ σχήματα, τότε εὔκολα ἀντιλαμβανόμαστε ὅτι $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$.

$\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$

Ἄν τώρα χωρίσουμε τά $\frac{3}{4}$ σέ 5 ἴσα μέρη καί τά $\frac{4}{5}$ σέ τέσσερα ἴσα μέρη, τότε ἔχουμε $\frac{15}{20}$. $\frac{16}{20}$

$\frac{15}{20} < \frac{16}{20}$

Ἀλλά τά κλάσματα $\frac{3}{4}$ καί $\frac{4}{5}$ εἶναι ἰσοδύναμα μέ τά $\frac{15}{20}$ καί $\frac{16}{20}$ καί ἀντί νά συγκρίνουμε τά $\frac{3}{4}$ μέ τά $\frac{4}{5}$ συγκρίνουμε τά $\frac{15}{20}$ μέ τά $\frac{16}{20}$, δηλ. δύο ὁμώνυμα κλάσματα.

Πῶς φθάσαμε σ' αὐτό τό ἀποτέλεσμα;

Πολλαπλασιάσαμε τούς ὅρους τῶν $\frac{3}{4}$ μέ τό 5 καί τούς ὅρους τῶν $\frac{4}{5}$ μέ τό 4.

$$\frac{3\times5}{4\times5} = \frac{15}{20} \quad \text{καί} \quad \frac{4\times4}{5\times4} = \frac{16}{20}$$

Ἀλλά τό 5 εἶναι ὁ παρονομαστής τοῦ δεύτερου κλάσματος καί τό 4 εἶναι ὁ παρονομαστής τοῦ πρώτου κλάσματος.

Δηλ. πολλαπλασιάζουμε τούς ὅρους τοῦ α΄ κλάσματος μέ τόν παρονομαστή τοῦ β΄ κλάσματος καί τούς ὅρους τοῦ β΄ κλάσματος μέ τόν παρονομαστή τοῦ α΄ κλάσματος. Ὥστε:

Γιά νά τρέψουμε δυό κλάσματα έτερώνυμα σέ ίσοδύναμα όμώνυμα, πολλαπλασιάζουμε τούς ὅρους τοῦ α΄ κλάσματος μέ τόν παρονομαστή τοῦ δεύτερου καί τούς ὅρους τοῦ β΄ κλάσματος μέ τόν παρονομαστή τοῦ πρώτου.

Ἐργασίες

1. Νά τρέψεις τά παρακάτω ἑτερώνυμα κλάσματα σέ ὁμώνυμα.

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ · $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ · $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{7}$ · $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{8}$ · $\frac{1}{3}$ $\frac{4}{6}$.

2. Νά συγκρίνεις ἀνά δυό τά παρακάτω κλάσματα.

$\frac{4}{6}$ $\frac{4}{8}$ · $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{9}$ · $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{8}$ · $\frac{4}{5}$ $\frac{7}{10}$ · $\frac{6}{8}$ $\frac{8}{12}$.

3. Δύο ἀδέλφια εἶχαν τά ἴδια χρήματα. Ὁ ἕνας ξόδεψε τά $\frac{7}{10}$ ἀπό τά χρήματά του καί ὁ ἄλλος τά $\frac{4}{7}$. Ποιός ξόδεψε περισσότερα;

4. Σέ μιά τάξη τά ἀγόρια εἶναι ἴσα μέ τά $\frac{4}{10}$ τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαθητῶν καί τά κορίτσια εἶναι ἴσα μέ τά $\frac{3}{5}$ τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαθητῶν.

Ποιά εἶναι περισσότερα, τά ἀγόρια ἤ τά κορίτσια;

Πρόσεξε:

Ἔχουμε νά τρέψουμε τά κλάσματα $\frac{3}{5}$ καί $\frac{6}{9}$ σέ ὁμώνυμα.

Σύμφωνα μέ τόν κανόνα ἔχουμε $\frac{3\times9}{5\times9}$ καί $\frac{6\times5}{9\times5}$ δηλ. $\frac{27}{45}$ καί $\frac{30}{45}$.

Μποροῦμε ὅμως νά τά κατατάξουμε ὅπως παρακάτω:

$$\frac{3}{5} \text{ καί } \frac{6}{9} = \frac{\overset{9}{3}}{5} \text{ καί } \frac{\overset{5}{6}}{9} = \frac{27}{45} \text{ καί } \frac{30}{45}.$$

δηλ. τοποθετοῦμε τόν πολλαπλασιαστή παρονομαστή, πάνω ἀπό τούς ὅρους τοῦ ἀντίθετου κλάσματος. (στό καλαθάκι).

Αὐτή ἡ διάταξη ἀπλοποιεῖ τή διαδικασία τῶν πράξεων.

Παράδειγμα: Νά τρέψεις τά κλάσματα $\frac{4}{6}$ καί $\frac{7}{8}$ σέ ὁμώνυμα.
Σύμφωνα μέ τά παραπάνω ἔχουμε:

$$\frac{\overset{8}{\frown}\!\!\!4}{5} \text{ καί } \frac{\overset{5}{\frown}\!\!\!7}{8} = \frac{32}{40} \text{ καί } \frac{35}{40}$$

Ἐργασίες

1. Νά τρέψεις σέ ὁμώνυμα τά παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{3}{8}$ $\frac{8}{9}$ β) $\frac{2}{3}$ $\frac{6}{7}$ γ) $\frac{4}{5}$ $\frac{8}{12}$ δ) $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$

ε) $\frac{2}{5}$ $\frac{6}{10}$ στ) $\frac{12}{20}$ $\frac{18}{24}$ ζ) $\frac{6}{9}$ $\frac{8}{15}$ η) $\frac{7}{13}$ $\frac{9}{15}$.

2. Νά συγκρίνεις τά παρακάτω ζευγάρια κλασμάτων:

$\frac{5}{7}$ $\frac{4}{6}$, $\frac{9}{15}$ $\frac{15}{20}$, $\frac{17}{32}$ $\frac{5}{14}$, $\frac{8}{18}$ $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{9}$ $\frac{11}{15}$.

3. Τρία ἀδέλφια μοιράστηκαν τήν πατρική περιουσία σύμφωνα μέ τή διαθήκη, ὡς ἑξῆς: Ὁ πρῶτος ἀδελφός πῆρε τό $\frac{1}{3}$ τῆς περιουσίας, ὁ δεύτερος τά $\frac{4}{12}$ καί τό ὑπόλοιπο πῆρε ἡ ἀδελφή τους.

Ποιός πῆρε τό μεγαλύτερο μερίδιο;

Σέ ποιά ἰδιότητα τῶν κλασμάτων στηρίζεται ἡ τροπή τῶν ετερώνυμων κλασμάτων σέ ὁμώνυμα;

Πρόσεξε:

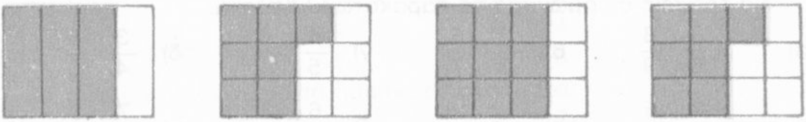
Ἔχουμε νά τρέψουμε τά κλάσματα $\frac{3}{4}$ καί $\frac{7}{12}$ σέ ὁμώνυμα. Σύμφωνα μέ τόν κανόνα ἔχουμε:

$$\frac{\overset{12}{\frown}\!\!\!3}{4} \text{ καί } \frac{\overset{4}{\frown}\!\!\!7}{12} = \frac{36}{48} \text{ καί } \frac{28}{48}.$$

Ὅμως ἄν παρατηρήσουμε πάλι τά κλάσματα $\frac{3}{4}$ καί $\frac{7}{12}$ παρατηροῦμε ὅτι ὁ παρονομαστής τοῦ β΄ κλάσματος, τό 12, εἶναι τριπλάσιος ἀπό τόν παρονομαστή τοῦ α΄ κλάσματος, τό 4. Δηλ. τό 12 εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 4.

Τότε μπορούμε νά πούμε $\overset{3}{\frac{3}{4}}$ καί $\overset{1}{\frac{7}{12}} = \frac{9}{12}$ καί $\frac{7}{12}$.

δηλ. μιά καί τό 4 χωρεῖ 3 φορές στό 12, πολλαπλασιάζουμε τό πρῶτο κλάσμα μέ τό 3 καί τό δεύτερο μέ τό 1, ὁπότε γίνονται ὁμώνυμα μέ μικρότερους ὅρους, ἁπλοποιημένα.



$\frac{3}{4}$; $\frac{7}{12}$ $\qquad$ $\frac{9}{12} > \frac{7}{12}$

Τρέψε τά παρακάτω κλάσματα σέ ὁμώνυμα:

α) $\frac{5}{6}$ $\frac{9}{12}$, β) $\frac{2}{5}$ $\frac{6}{10}$, γ) $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{9}$, δ) $\frac{3}{5}$ $\frac{18}{25}$

2ος τρόπος.

Τροπή δυό έτερώνυμων κλασμάτων σέ ὁμώνυμα, μέ τό ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τῶν παρονομαστῶν.

1η μέθοδος:

Γιά νά συγκρίνουμε τά κλάσματα $\frac{6}{8}$ καί $\frac{4}{6}$ πρέπει νά τά τρέψουμε σέ ὁμώνυμα.

Ἀλλά ὁ μεγαλύτερος παρονομαστής, δηλ. τό 8, δέν εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 6.

Τότε διπλασιάζουμε τό 8 καί γίνεται 16, ἀλλά καί τό 16 δέν εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 6, καί τριπλασιάζουμε τό 8 καί γίνεται 24, πού εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 6 καί διαιρεῖται ἀπό αὐτό.

Τό 24 λοιπόν εἶναι τό ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) τῶν παρονομαστῶν 8 καί 6.

Κατόπιν ὑπολογίζουμε, πόσες φορές χωρεῖ κάθε παρονομαστής στό Ε.Κ.Π. δηλ. στό 24 καί μέ τόν ἀριθμό αὐτό, πολλαπλασιάζουμε τούς ὅρους τοῦ κλάσματός του, γιά νά γίνουν ὁμώνυμα. Δηλ. ἐδῶ οἱ ὅροι τοῦ α΄ κλάσματος θά πολλαπλασιαστοῦν μέ 3 καί οἱ ὅροι τοῦ β΄ κλάσματος θά πολλαπλασιαστοῦν μέ 4.

διότι τό 8 στό 24 χωρεῖ 3 φορές
καί τό 6 στό 24 χωρεῖ 4 φορές.

$$\overset{3}{\frac{6}{8}}\ \overset{4}{\frac{4}{6}} = \frac{18}{24}\ \frac{16}{24}$$

$$\frac{6}{8}\quad \frac{4}{6}$$

16 –
24 ν

Ε·Κ·Π= 24

Τό Ε.Κ.Π. εἶναι ὁ κοινός παρονομαστής τῶν δύο κλασμάτων, πού ἔγιναν ὁμώνυμα.

2η μέθοδος:

Τό Ε.Κ.Π. μπορεῖ νά βρεθεῖ μέ τήν ἀνάλυση τῶν παρονομαστῶν σέ γινόμενο, πρώτων παραγόντων.

Ἔχουμε πάλι τά κλάσματα $\frac{6}{8}$ καί $\frac{4}{6}$

Γράφουμε τούς παρονομαστές 8 καί 6 τόν ἕνα δίπλα στόν ἄλλο καί δίπλα τό 2. Διαιροῦμε τούς 8 καί 6 μέ 2 καί τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως, γράφουμε ἀντίστοιχα ἀπό κάτω. Συνεχίζουμε πάλι μέ 2, ἀλλά ἐπειδή τό 3 δέν διαιρεῖται μέ τό 2 τό γράφουμε στή στήλη τῶν πηλίκων αὐτούσιο. Συνεχίζουμε πάλι μέ τό 2 καί μετά μέ τό 3, ὁπότε βρίσκουμε τό γινόμενο τῶν πρώτων παραγόντων, πού εἶναι τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν. Μετά συνεχίζουμε νά ἐργαζόμαστε ὅπως στήν προηγούμενη περίπτωση:

$$\begin{array}{cc|c} 8 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

γινόμενο
πρώτων παραγόντων

$2\times2\times2\times3 = 24$

Ε.Κ.Π. = 24

Ἐργασίες

1. Νά τρέψεις σέ ὁμώνυμα τά παρακάτω κλάσματα.

α) $\frac{2}{3}\ \frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}\ \frac{4}{6}$, $\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}$

β) $\frac{2}{3}\ \frac{6}{8}$, $\frac{4}{5}\ \frac{7}{8}$, $\frac{5}{7}\ \frac{6}{9}$, $\frac{7}{10}\ \frac{8}{12}$

2. Νά τρέψεις σέ ὁμώνυμα τά κλάσματα, μέ τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν.

α) $\frac{2}{4}\ \frac{4}{6}$, $\frac{2}{3}\ \frac{7}{9}$, $\frac{5}{6}\ \frac{5}{9}$, $\frac{6}{8}\ \frac{9}{12}$,

β) $\frac{4}{5}\ \frac{6}{7}$, $\frac{3}{4}\ \frac{12}{14}$, $\frac{6}{9}\ \frac{10}{15}$, $\frac{12}{15}\ \frac{16}{20}$.

2) Τροπή περισσότερων ἀπό δύο ἑτερώνυμων κλασμάτων σέ ὁμώνυμα.

1ος τρόπος:

Ἄν θέλουμε νά συγκρίνουμε τά κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, μποροῦμε νά τά συγκρίνουμε μέ κάτι συγκεκριμένο.

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι εἶναι κλάσματα τῆς ὥρας, τότε ἔχουμε

$\frac{2}{3}$ ὥρ. $=40$λ. $\frac{3}{4}$ ὥρ. $=45$λ. $\frac{5}{6}$ ὥρ. $=50$λ. ἄρα $\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$.

Πιό εὔκολα θά τά συγκρίνουμε ἄν τά τρέψουμε σέ ὁμώνυμα, σύμφωνα μέ τόν κανόνα πού ξέρουμε. Λοιπόν ἔχουμε:

$$\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{5}{6}\quad \frac{2\times24}{3\times24}=\frac{48}{72}\ \ \frac{3\times18}{4\times18}=\frac{54}{72}\ \ \frac{5\times12}{6\times12}=\frac{60}{72}.$$

Ἀφοῦ λοιπόν τά κλάσματα

$\frac{48}{72}<\frac{54}{72}<\frac{60}{72}$ τότε καί $\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$.

Δηλ. Γιά νά τρέψουμε ἑτερώνυμα κλάσματα σέ ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζουμε τούς ὅρους κάθε κλάσματος μέ τό γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων.

Γιά περισσότερη εὐκολία μποροῦμε νά τά κατατάξουμε ἔτσι:

$$\frac{\overset{24}{\frown}\!\!\!\!\!2}{3}\ \ \frac{\overset{18}{\frown}\!\!\!\!\!3}{4}\ \ \frac{\overset{12}{\frown}\!\!\!\!\!5}{6}=\frac{48}{72}\ \frac{54}{72}\ \frac{60}{72}.$$

Ἄλλο παράδειγμα: Νά τρέψεις τά κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{8}$, σέ ὁμώνυμα.

$$\frac{\overset{48}{\frown}\,3}{5}\quad \frac{\overset{40}{\frown}\,5}{6}\quad \frac{\overset{30}{\frown}\,6}{8} = \frac{144}{240}\quad \frac{200}{240}\quad \frac{180}{240}.$$

Ἐργασίες

Νά τρέψεις τά παρακάτω κλάσματα σέ ὁμώνυμα.

α) $\frac{3}{5}\quad \frac{4}{6}\quad \frac{5}{7}, \qquad \frac{4}{5}\quad \frac{6}{8}\quad \frac{7}{9}, \qquad \frac{3}{4}\quad \frac{5}{7}\quad \frac{6}{8},$

β) $\frac{5}{7}\quad \frac{6}{8}\quad \frac{7}{9}, \qquad \frac{2}{3}\quad \frac{4}{5}\quad \frac{5}{8}\quad \frac{6}{9}, \qquad \frac{6}{8}\quad \frac{8}{10}\quad \frac{12}{15}.$

2ος τρόπος:

Τροπή περισσότερων ἑτερώνυμων κλασμάτων σέ ὁμώνυμα, μέ τό ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τῶν παρονομαστῶν.

1η μέθοδος:

Ἄν τώρα θέλουμε νά τρέψουμε τά κλάσματα σέ ὁμώνυμα, προσέχουμε ὅτι μεγαλύτερος παρονομαστής εἶναι τό 6, πού διαιρεῖται μέ τό 3 ἀλλά δέν διαιρεῖται μέ τό 5.

Γι' αὐτό τόν διπλασιάσαμε, τόν τριπλασιάσαμε, τόν τετραπλασιάσαμε, τόν πενταπλασιάσαμε, μέχρι πού βρήκαμε πολλαπλάσιο πού διαιρεῖται ἀπό τούς ἄλλους παρονομαστές, δηλ. τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν.

$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{6}$
ν	–	12
ν	–	18
ν	–	24
ν	ν	30
Ε.Κ.Π. = 30		

Στή συνέχεια ὑπολογίζουμε, πόσες φορές χωρεῖ κάθε παρονομαστής στό Ε.Κ.Π. καί μέ τόν ἀριθμό αὐτό πολλαπλασιάζουμε τούς ὅρους τοῦ κλάσματός του καί τά κλάσματα τρέπονται σέ ὁμώνυμα.

Πολλαπλασιάζουμε τούς ὅρους τοῦ α΄ κλάσματος μέ τό 10
Πολλαπλασιάζουμε τούς ὅρους τοῦ β΄ κλάσματος μέ τό 6

Πολλαπλασιάζουμε τούς ὅρους τοῦ γ΄ κλάσματος μέ τό 5

Ἔχουμε λοιπόν τή διάταξη:

$$\overset{10}{\frac{2}{3}} \quad \overset{6}{\frac{3}{5}} \quad \overset{5}{\frac{5}{6}} = \frac{20}{30} \quad \frac{18}{30} \quad \frac{25}{30}.$$

2η μέθοδος:

Τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν μπορεῖ νά βρεθεῖ, μέ τήν ἀνάλυση τῶν παρονομαστῶν σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Στήν περίπτωσή μας ἐργαζόμαστε ὅπως γνωρίζουμε.

Παρονομαστές	πρῶτοι ἀριθμοί
3 5 6	2
3 5 3	3
1 5 1	5
1 1 1	γινόμενο πρώτων παραγόντων $2 \times 3 \times 5 = 30$ (Ε.Κ.Π.)

Στή συνέχεια ἐργαζόμαστε ὅπως στήν προηγούμενη περίπτωση.

Ἀπό ὅλα τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι:

> Γιά νά τρέψουμε ἑτερώνυμα κλάσματα σέ ὁμώνυμα, βρίσκουμε τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν, πού τό διαιροῦμε μέ τόν παρονομαστή κάθε κλάσματος καί μέ τό πηλίκον αὐτῆς τῆς διαιρέσεως, πολλαπλασιάζουμε τούς ὅρους του.

Ἐργασίες

Νά τρέψεις τά παρακάτω κλάσματα σέ ὁμώνυμα.

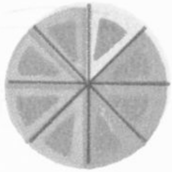
$$\frac{3}{4} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{5}{6}, \qquad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{6}{8}, \qquad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{9}{12}.$$

6. ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

1. ΠΡΟΣΘΕΣΗ

α) Πρόσθεση ὁμώνυμων κλασμάτων

Πρόσεξε τά παρακάτω προβλήματα.



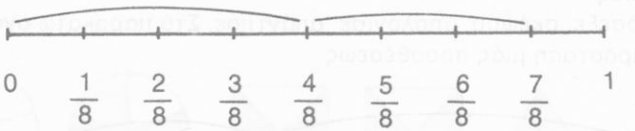
Ἀπό ἕνα κουτάκι πού εἶχε 8 τυράκια, ὁ Δῆμος ἔφαγε 4 τυράκια καί ἡ Πόπη 3 τυράκια. Πόσα τυράκια ἔφαγαν καί οἱ δυό μαζί;

Εὔκολα βρίσκουμε ὅτι ἔφαγαν 7 τυράκια. Πῶς θά παρουσιάσουμε αὐτή τήν πράξη, μέ κλασματικούς ἀριθμούς;

Ἀφοῦ τό κουτάκι εἶχε 8 τυράκια, κάθε τυράκι εἶναι τό $\frac{1}{8}$ ἀπό τό σύνολο τῶν τυριῶν. Ὁ Δῆμος ἔφαγε τά 4 ὄγδοα καί ἡ Πόπη τά 3 ὄγδοα καί οἱ δυό μαζί ἔφαγαν τά 7 ὄγδοα.

Σύμφωνα μέ ὅσα γνωρίζουμε ἔχουμε $\frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$.

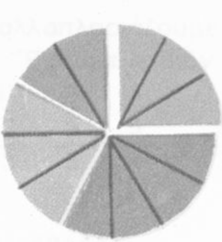
Δηλ. κάνουμε μιά πρόσθεση ὁμώνυμων κλασμάτων, ἀφοῦ τά κομμάτια εἶναι ἴδια, προσθέτοντας τούς ἀριθμητές.



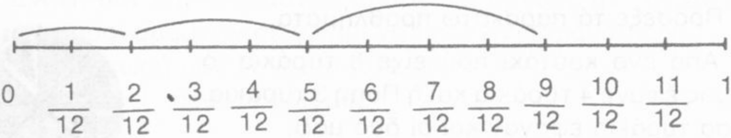
Πρόσεξε ἀκόμη:

Ἡ μητέρα μοίρασε τό γλυκό πού ἔφτιαξε σέ 12 κομμάτια. Ὁ Νίκος ἔφαγε 2 κομμάτια, ἡ Λένα 3 κομμάτια καί ὁ Στάθης 4 κομμάτια. Πόσα κομμάτια ἔφαγαν ὅλοι μαζί;

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω, ὁ Νίκος ἔφαγε τά $\frac{2}{12}$ τοῦ γλυκοῦ.



ἡ Λένα ἔφαγε τά $\frac{3}{12}$ τοῦ γλυκοῦ καί
ὁ Στάθης ἔφαγε τά $\frac{4}{12}$ τοῦ γλυκοῦ.
Ὅλοι μαζί ἔφαγαν τά $\frac{9}{12}$ τοῦ γλυκοῦ.
Δηλ. ἔχουμε $\frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{9}{12}$.

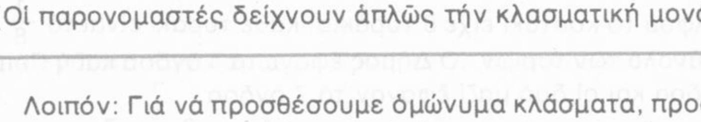


Ἀπό τά παραπάνω εὔκολα συμπεραίνουμε ὅτι στήν πρόσθεση ὁμώνυμων κλασμάτων προσθέτουμε βασικά τούς ἀριθμητές. (Οἱ παρονομαστές δείχνουν ἁπλῶς τήν κλασματική μονάδα).

> Λοιπόν: Γιά νά προσθέσουμε ὁμώνυμα κλάσματα, προσθέτουμε τούς ἀριθμητές καί τό ἄθροισμά τους τό γράφουμε ἀριθμητή τοῦ νέου κλάσματος καί παρονομαστή ἀφήνουμε τόν ἴδιο. Τό νέο αὐτό κλάσμα εἶναι τό ἄθροισμα.

Ἐργασίες

Πρόσεξε, σκέψου, ὑπολόγισε, ἀπάντησε. Στό παρακάτω σχῆμα ἔχεις τήν παράσταση μιᾶς προσθέσεως.



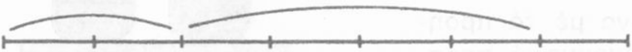
$$\frac{5}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9}$$

1. Μέ ὁδηγό τήν παραπάνω παράσταση σημείωσε τίς παρακάτω πράξεις.

α) 

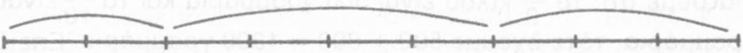
$0 \quad \frac{1}{12} \quad \frac{2}{12} \quad \frac{3}{12} \quad \frac{\quad}{12} \quad \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{\quad} \quad 1$

$\frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}.$

β) 

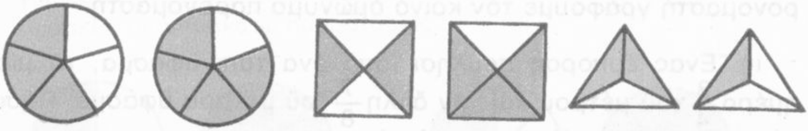
$0 \quad \frac{1}{7} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{\quad}{7} \quad \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{\quad} \quad 0$

$\frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

γ) 

$0 \quad \frac{1}{9} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{3}{9} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{\quad}{9} \quad \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{\quad} \quad 1$

2. Πρόσθεσε τά σκιερά μέρη τῶν παρακάτω σχημάτων.



$\frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

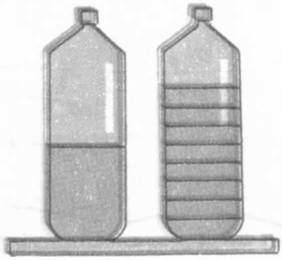
3. Πρόσθεσε τά παρακάτω κλάσματα.

$\frac{3}{12} + \frac{5}{12} + \frac{3}{12} = \frac{\quad}{\quad}$. $\qquad$ $\frac{4}{15} + \frac{2}{15} + \frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{\quad}{\quad}$

β) Πρόσθεση ἑτερώνυμων κλασμάτων

Πρόσεξε τά παρακάτω προβλήματα.

ι) Ἕνας ἀγόρασε δύο φιάλες λάδι. Ἡ μιά εἶχε $\frac{1}{2}$ τοῦ κιλοῦ λάδι καί ἡ ἄλλη $\frac{8}{10}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσο λάδι εἶχαν καί οἱ δυό φιάλες;



Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα ἔχουμε νά προσθέσουμε

$$\frac{1}{2} + \frac{8}{10} = —$$

Βλέπουμε ὅτι τά κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα καί δέν εἶναι εὔκολη ἡ πράξη. Ἄν κάνουμε τόν ὑπολογισμό μέ γραμμάρια λογαριάζουμε ὅτι: τό $\frac{1}{2}$ κιλοῦ εἶναι 500 γραμμάρια καί τά $\frac{8}{10}$ εἶναι 800 γραμμάρια, τότε ἔχουμε $500 + 800 = 1300$ γραμμάρια. Ἐπειδή τό $\frac{1}{2}$ εἶναι ἴσο μέ τά $\frac{5}{10}$ τοῦ κιλοῦ ἔχουμε:

$$\frac{5}{10} + \frac{8}{10} = \frac{13}{10} = 1\frac{3}{10} \text{ κιλά}$$

δηλ. 1 κιλό καί 300 γραμμάρια.

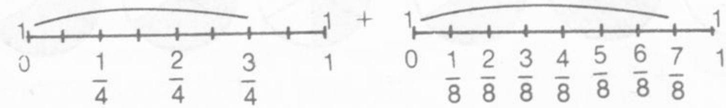
Ἀλλά ὅπως βλέπουμε γιά νά γίνει ἡ πρόσθεση, τρέπουμε τά κλάσματα σέ ὁμώνυμα, προσθέτουμε τούς ἀριθμητές καί παρονομαστή γράφουμε τόν κοινό ὁμώνυμο παρονομαστή.

ιι) Ἕνας ἔμπορος πούλησε ἀπό ἕνα τόπι ὕφασμα, τή μία ἡμέρα $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου καί τήν ἄλλη $\frac{7}{8}$ τοῦ μέτρου ὕφασμα. Πόσα μέτρα ὕφασμα πούλησε συνολικά;

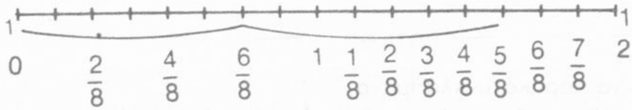
Σύμφωνα μέ τά παραπάνω ἔχουμε: $\frac{3}{4} + \frac{7}{8} = \frac{;}{;}$

Τά κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα καί γιά νά τά προσθέσουμε, θά τά τρέψουμε σέ ὁμώνυμα. Λοιπόν ἔχουμε:

$$\frac{\overset{2}{3}}{4} + \frac{\overset{1}{7}}{8} = \frac{6}{8} + \frac{7}{8} = \frac{13}{8} = 1\frac{5}{8}$$



$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$



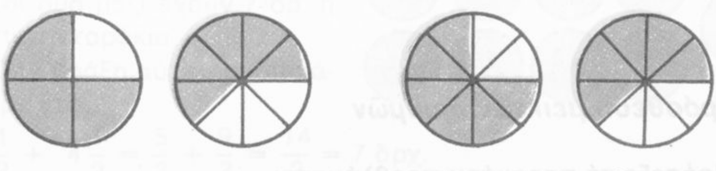
Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι:

Γιά νά προσθέσουμε ἑτερώνυμα κλάσματα, τά τρέπουμε σέ ὁμώνυμα καί προσθέτουμε τούς νέους ἀριθμητές καί παρονομαστή γράφουμε τόν κοινό ὁμώνυμο παρονομαστή.

Σέ περίπτωση πού τό ἄθροισμα εἶναι κλάσμα καταχρηστικό, ἐξάγουμε τίς ἀκέραιες μονάδες καί τό τελικό ἄθροισμα εἶναι μεικτός ἀριθμός.

Ἐργασίες

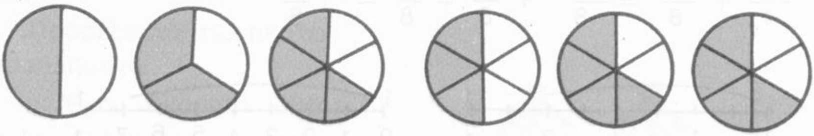
Πρόσεξε τίς παρακάτω παραστάσεις.



$$\frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8} + \frac{5}{8} = \frac{11}{8} = 1\frac{3}{8}$$

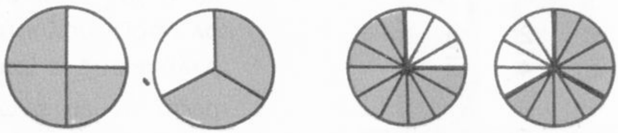
1. Μέ ὁδηγό τήν προηγούμενη παράσταση, συμπλήρωσε τίς παρακάτω

α)



$\frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

β)



$\frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad}$

2. Πρόσθεσε τά παρακάτω κλάσματα.

α) $\frac{5}{8} + \frac{7}{16}$, $\frac{10}{15} + \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$, $\frac{9}{12} + \frac{12}{18}$,

β) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{6}{9} + \frac{7}{12}$, $\frac{11}{18} + \frac{15}{24}$, $\frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \frac{6}{9} + \frac{8}{12}$.

3. Ἕνας ἐργάτης ἔσκαψε τή μιάν ἡμέρα τά $\frac{2}{6}$ ἑνός χωραφιοῦ, τή δεύτερη τά $\frac{2}{5}$ καί τήν τρίτη τά $\frac{3}{12}$. Πόσο μέρος τοῦ χωραφιοῦ ἔσκαψε συνολικά καί τίς τρεῖς ἡμέρες;

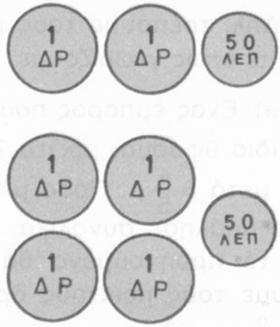
4. Μια βρύση γεμίζει σέ μιά ὥρα τά $\frac{6}{20}$ μιᾶς δεξαμενῆς. Μιά δεύτερη γεμίζει σέ μιά ὥρα τά $\frac{3}{15}$ καί μιά τρίτη βρύση τά $\frac{4}{10}$. Πόσο μέρος τῆς δεξαμενῆς γεμίζουν σέ μιά ὥρα, ὅταν τρέχουν καί οἱ τρεῖς μαζί;

5. Ἡ μητέρα γιά νά κάμει ἕνα γλυκό ἔβαλε $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ ἀλεύρι, $\frac{1}{4}$ τοῦ κιλοῦ ζάχαρη, $\frac{3}{5}$ τοῦ κιλοῦ γάλα καί $\frac{2}{10}$ τοῦ κιλοῦ βούτυρο. Πόσο ἦταν συνολικά τό βάρος τῶν ὑλικῶν;

γ) Πρόσθεση μεικτῶν ἀριθμῶν

Πρόσεξε τά παρακάτω προβλήματα:

ι) Ὁ Γιαννάκης ἔχει 2 δραχμές καί ἕνα πενηνταράκι, ὁ Κώστας ἔχει 4 δραχμές καί ἕνα πενηνταράκι. Πόσες δραχμές ἔχουν καί οἱ δυό μαζί;



Λογαριάζοντας τίς δραχμές καί τά πενηνταράκια πού ἔχει καθένας τους, εὔκολα βρίσκουμε ὅτι καί οἱ δύο μαζί ἔχουν 7 δραχμές.

Ἄν παρουσιάσουμε τήν πράξη αὐτή μέ κλασματικούς ἀριθμούς, ἔχουμε:

$$2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} = 7 \text{ δρχ.}$$

δηλ. ἔχουμε νά προσθέσουμε μεικτούς ἀριθμούς.

Προσθέτουμε λοιπόν πρῶτα τούς ἀκέραιους ἀριθμούς καί μετά τά κλάσματα καί προσθέτουμε τά δύο ἀθροίσματα.

$$2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} = 7$$

$$2 + 4 = 6$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$6 + 1 = 7$$

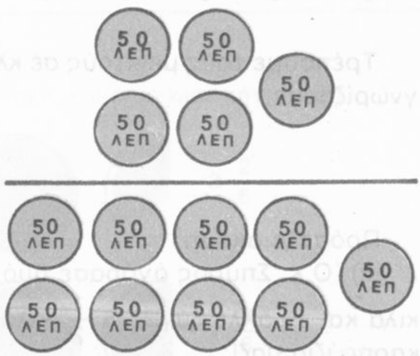
$$2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} = 6 + 1 = 7$$

Ἄν ὅμως λογαριάσουμε τά χρήματα τοῦ καθενός σέ πενηνταράκια, τότε λέμε:

Ὁ Γιαννάκης ἔχει $2\frac{1}{2}$ δρχ. ἤ 5 πενηνταράκια.

Ὁ Κώστας ἔχει $4\frac{1}{2}$ δρ. ἤ 9 πενηνταράκια.

καί οἱ δυό μαζί ἔχουν 7 δρ. ἤ 14 πενηνταράκια.



Τήν πράξη αὐτή παρουσιάζουμε ἔτσι:

$$2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} = \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ δρχ.}$$

Δηλ. τρέπουμε τούς μεικτούς σέ κλάσματα καί τά προσθέτουμε ὅπως γνωρίζουμε.

ιι) Ἕνας ἔμπορος πούλησε ἀπό τό ἴδιο ὕφασμα, πρῶτα $7\frac{2}{5}$ μέτρα καί μετά $6\frac{4}{5}$ μ. Πόσα μέτρα ὕφασμα πούλησε συνολικά; Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα θά προσθέσουμε τούς μεικτούς ἀριθμούς $7\frac{2}{5} + 6\frac{4}{5}$.

$$7\frac{2}{5} + 6\frac{4}{5} = 14\frac{1}{5}$$
$$7 + 6 = 13$$
$$\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$
$$13 + 1\frac{1}{5} = 14\frac{1}{5}$$

1ος τρόπος

$$7\frac{2}{5} + 6\frac{4}{5} = 13 + \frac{6}{5} = 13 + 1\frac{1}{5} = 14\frac{1}{5}.$$

Προσθέτουμε: χωριστά τούς ἀκέραιους, χωριστά τά κλάσματα καί προσθέτουμε τά δύο ἀθροίσματα.

2ος τρόπος

$$7\frac{2}{5} + 6\frac{4}{5} = \frac{37}{5} + \frac{34}{5} = \frac{71}{5} = 14\frac{1}{5}.$$

Τρέπουμε τούς μεικτούς σέ κλάσματα καί προσθέτουμε ὅπως γνωρίζουμε.

Πρόσεξε ἀκόμη:

ιιι) Ὁ κ. Σπύρος ἀγόρασε δυό καρπούζια. Τό ἕνα ζύγιζε $4\frac{3}{4}$ κιλά καί τό ἄλλο ζύγιζε $5\frac{1}{2}$ κιλά. Πόσο βάρος εἶχαν καί τά δυό καρπούζια μαζί;

Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα θά προσθέσουμε μεικτούς ἀριθμούς. Πρόσεξε τά κλάσματα τῶν μεικτῶν προσθετέων.

1ος τρόπος.

$$4\frac{3}{4} + 5\frac{1}{2} =$$

$$4 + 5 = 9$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

$$9 + 1\frac{1}{4} = 10\frac{1}{4} \text{ κιλά}$$

2ος τρόπος.

$$4\frac{3}{4} + 5\frac{1}{2} = \frac{19}{4} + \frac{11}{2} = \frac{19}{4} + \frac{22}{4} = \frac{41}{4} = 10\frac{1}{4}$$

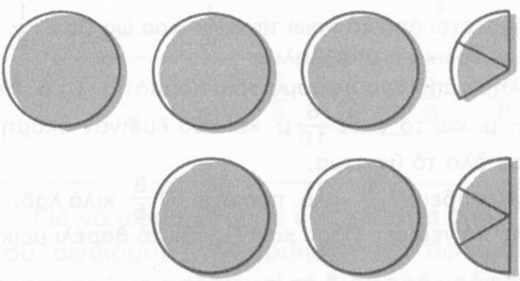
Παρατηροῦμε ὅτι τά κλάσματα τῶν μεικτῶν εἶναι ἑτερώνυμα καί τρέπονται καί στίς δυό περιπτώσεις σέ ὁμώνυμα.

Ἀπό τά προηγούμενα λοιπόν συμπεραίνουμε:

> **Γιά νά προσθέσουμε μεικτούς ἀριθμούς:**
>
> α) Προσθέτουμε χωριστά τούς ἀκέραιους καί χωριστά τά κλάσματα καί ἑνώνουμε τά δυό ἀθροίσματα. ἤ
>
> β) Τρέπουμε τούς μεικτούς σέ κλάσματα καί τά προσθέτουμε ὅπως γνωρίζουμε.

Ἐργασίες

1. Πρόσεξε τίς παρακάτω παραστάσεις καί σημείωσε τήν πράξη.



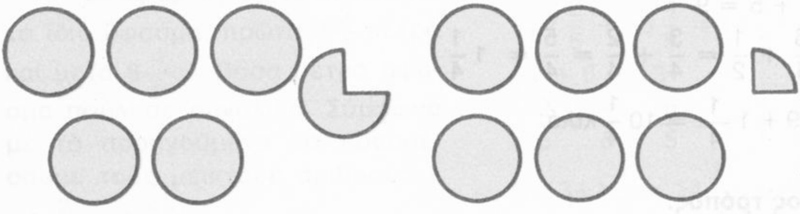
$3\frac{2}{6}$

$+ \qquad =$

$2\frac{3}{6}$

3 — + 2 — =

2. Μέ ὁδηγό τήν προηγούμενη, συμπλήρωσε τήν παρακάτω παράσταση.



____ + ____ = ____

3. Λύσε τίς παρακάτω ἀσκήσεις.

α) $5+\frac{3}{4}=$, $7+\frac{5}{8}=$, $\frac{6}{8}+3=$, $\frac{8}{11}+9=$.

β) $15\frac{1}{4}+27=$, $32\frac{3}{12}+11=$, $67\frac{7}{15}+28=$.

γ) $5\frac{2}{4}+3\frac{4}{8}=$, $7\frac{3}{4}+4\frac{2}{5}+9\frac{1}{3}=$,

δ) $13\frac{3}{5}+19\frac{4}{6}+12\frac{7}{8}=$.

4. Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε τρία σακιά ρύζι. Τό α΄ ζυγίζει $37\frac{3}{5}$ κιλά, τό β΄ $41\frac{2}{8}$ κιλά καί τό γ΄ $39\frac{1}{2}$ κιλά. Πόσο βάρος ἔχουν καί τά 3 μαζί;

5. Ἕνας ὑπάλληλος ἐργάζεται ἀπό τό πρωί τίς $8\frac{1}{4}$ ὥρα ὥς τίς $2\frac{1}{2}$ μμ. Πόσες ὧρες ἐργάζεται συνολικά ὁ ὑπάλληλος;

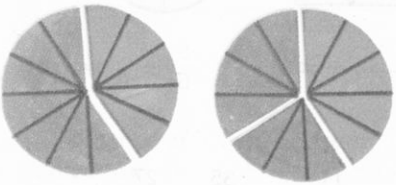
6. Ἕνας ἔμπορος πούλησε ἀπό ἕνα ὕφασμα τρία κομμάτια. Τό α΄ ἦταν $9\frac{3}{5}$ μέτρα, τό β΄ $17\frac{1}{2}$ μ. καί τό γ΄ $12\frac{6}{10}$ μ. καί τοῦ ἔμειναν ἀκόμη 37 μέτρα. Πόσα μέτρα ἦταν ὅλο τό ὕφασμα;

7. Ἕνα βαρέλι πού ζυγίζει ἄδειο $7\frac{1}{2}$ κιλά, περιέχει $67\frac{3}{5}$ κιλά λάδι, καί χρειάζεται ἀκόμη /4 κιλά νά γεμίσει. Πόσα κιλά ζυγίζει τό βαρέλι μεικτόβαρο;

2) ΑΦΑΙΡΕΣΗ

α) Ἀφαίρεση ὁμώνυμων κλασμάτων

Πρόσεξε τά παρακάτω προβλήματα:



Ἀπό τό κέικ πού εἶχε κόψει ἡ μητέρα σέ 12 κομμάτια, ἀφοῦ κέρασε τούς ἐπισκέπτες, περίσσεψαν 7 κομμάτια ἀκόμη, δηλ. $\frac{7}{12}$. Ἀργότερα κέρασε ἀκόμη 3 κομμάτια, δηλ. $\frac{3}{12}$. Πόσα κομμάτια ἔμειναν;

Λογαριάζοντας τά κομμάτια πού περίσσεψαν καί τά κομμάτια πού κέρασε ἀργότερα ἡ μητέρα, εὔκολα βρίσκουμε ὅτι ἔμειναν 4, δηλ. $\frac{4}{12}$ τοῦ κέικ.

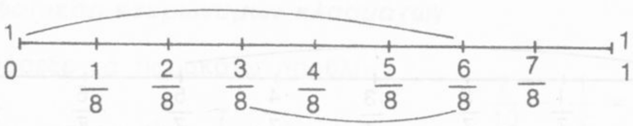
Στά κλάσματα ἔχουμε τή σχέση $\frac{7}{12} - \frac{3}{12} = \frac{7-3}{12} = \frac{4}{12}$.

Ἀπό $\frac{6}{8}$ τοῦ κιλοῦ καφέ πού εἴχαμε, ξοδέψαμε τά $\frac{3}{8}$. Πόσος καφές ἔμεινε;

Ἔχουμε τήν ἀφαίρεση $\frac{6}{8} - \frac{3}{8} = \frac{6-3}{8} = \frac{3}{8}$.

Ἀπό τά παραπάνω εὔκολα συμπεραίνουμε ὅτι καί στήν ἀφαίρεση ὁμώνυμων κλασμάτων, ἀφαιροῦμε βασικά τούς ἀριθμητές.

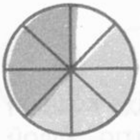
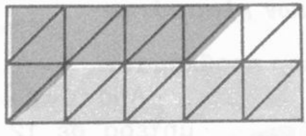
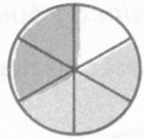
Πρόσεξε τήν παράσταση τῆς πράξεως.



Γιά νά ἀφαιρέσουμε ἕνα κλάσμα ἀπό ἕνα ἄλλο ὁμώνυμό του, ἀφαιροῦμε τόν ἀριθμητή τοῦ ἀφαιρετέου ἀπό τόν ἀριθμητή τοῦ μειωτέου καί τή διαφορά γράφουμε σάν ἀριθμητή τοῦ ὑπόλοιπου· παρονομαστή γράφουμε τόν ἴδιο.

Ἐργασίες

1. Πρόσεξε τίς παρακάτω παραστάσεις καί συμπλήρωσέ τις

$\frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{7-4}{8} = \frac{3}{8}$ $\qquad \frac{17}{20} - \frac{\quad}{20} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad \frac{5}{6} - \frac{\quad}{6} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

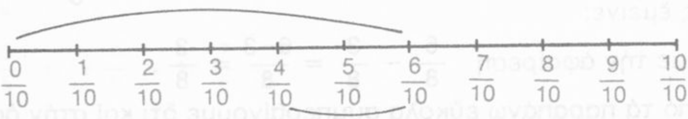
2. Λύσε τίς ἀσκήσεις:

α) $\frac{9}{12} - \frac{5}{12} =$, $\quad \frac{12}{16} - \frac{7}{16} =$, $\quad \frac{18}{25} - \frac{11}{25} =$, $\quad \frac{35}{60} - \frac{27}{60} =$.

β) $\frac{13}{15} - \frac{9}{15} =$, $\quad \frac{28}{35} - \frac{21}{35} =$, $\quad \frac{75}{125} - \frac{54}{125} =$, $\quad \frac{210}{240} - \frac{178}{240} =$.

3. Πρόσεξε, σκέψου, ὑπολόγισε, ἀπάντησε.

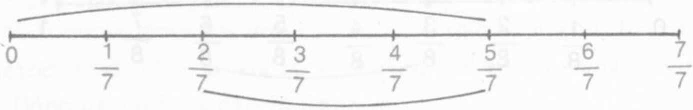
Στό παρακάτω σχῆμα ἔχεις τήν παράσταση μιᾶς ἀφαιρέσεως



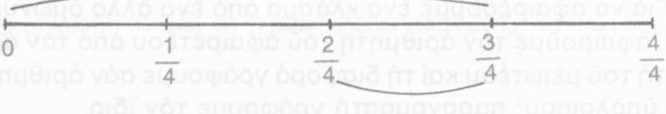
$\frac{6}{10} - \frac{2}{10} = \frac{4}{10}$

Μέ ὁδηγό τήν προηγούμενη παράσταση, σημείωσε τίς πράξεις.

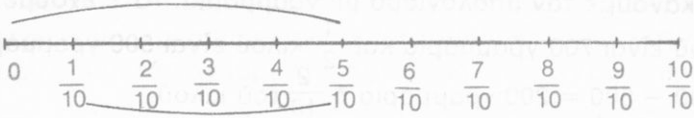
α)



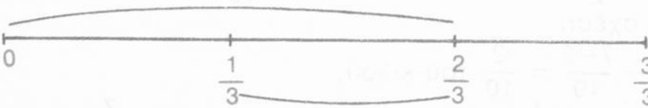
β)



γ)

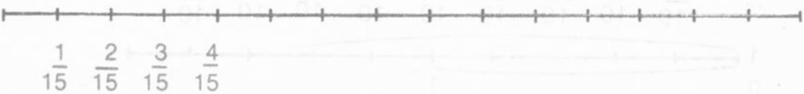


δ)



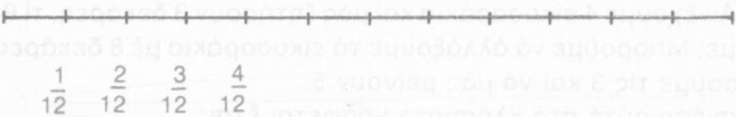
4. Συμπλήρωσε τήν παράσταση μέ τίς κατάλληλες καμπύλες, ὥστε νά φανερώνουν τίς πράξεις πού σημειώνονται.

α)



$$\frac{11}{15} - \frac{9}{15} = \frac{2}{15}$$

β)



$$\frac{10}{12} - \frac{6}{12} = \text{—}$$

β) Ἀφαίρεση ἑτερώνυμων κλασμάτων

Πρόσεξε τά παρακάτω προβλήματα:

ι) Ἡ μητέρα εἶχε $\frac{7}{10}$ τοῦ κιλοῦ λάδι. Ἔβαλε στά φαγητά $\frac{1}{2}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσο λάδι ἔμεινε;

$$\frac{7}{10} - \frac{1}{2} = ;$$

$$\frac{7}{10} - \frac{5}{10} = \frac{2}{10}$$

Σημειώνουμε τήν πράξη $\frac{7}{10} - \frac{1}{2} =$; καί βλέπουμε ὅτι ἔχουμε νά ἀφαιρέσουμε ἕνα κλάσμα ἀπό ἕνα ἄλλο ἑτερώνυμο.

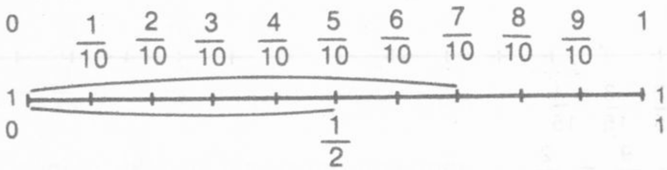
῎Αν κάνουμε τόν ὑπολογισμό μέ γραμμάρια, τότε ἔχουμε:

$\frac{7}{10}$ κιλοῦ εἶναι 700 γραμμάρια καί $\frac{1}{2}$ κιλοῦ εἶναι 500 γραμμάρια, δηλ. 700 − 500 = 200 γραμμάρια ἤ $\frac{2}{10}$ τοῦ κιλοῦ.

᾿Αλλά τό $\frac{1}{2}$ εἶναι ἰσοδύναμο μέ τά $\frac{5}{10}$. ῎Αρα μποροῦμε νά ἔχουμε τή σχέση

$\frac{7}{10} - \frac{5}{10} - \frac{7-5}{10} = \frac{2}{10}$ τοῦ κιλοῦ,

δηλ. τρέψαμε τό $\frac{1}{2}$ σέ κλάσμα ὁμώνυμο πρός τά $\frac{7}{10}$ καί κάναμε εὔκολα τήν ἀφαίρεση.



Θυμήσου κάτι ἀνάλογο ἀπό τήν πρόσθεση.

ιι) ῎Αν ἔχουμε 4 εἰκοσαράκια καί μᾶς ζητήσουν 3 δεκάρες, τί θά κάνουμε; Μποροῦμε νά ἀλλάξουμε τά εἰκοσαράκια μέ 8 δεκάρες, νά δώσουμε τίς 3 καί νά μᾶς μείνουν 5.

῾Η σχέση αὐτή στά κλάσματα γράφεται ἔτσι:

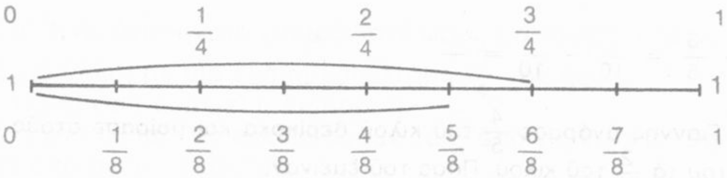
$$\frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{8}{10} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10}.$$

᾿Από τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι προκειμένου νά ἀφαιρέσουμε ἕνα κλάσμα ἀπό ἄλλο ἑτερώνυμο, πρέπει νά τά τρέψουμε σέ ὁμώνυμα. Διαφορετικά ἡ πράξη δέν γίνεται, γιατί οἱ κλασματικές μονάδες δέν εἶναι ἴσες.

Λοιπόν: Γιά νά ἀφαιρέσουμε ἕνα κλάσμα ἀπό ἕνα ἄλλο ἑτερώνυμο, τρέπουμε πρῶτα καί τά δυό κλάσματα σέ ὁμώνυμα καί μετά κάνουμε τήν ἀφαίρεση ὅπως γνωρίζουμε.

Ἐργασίες

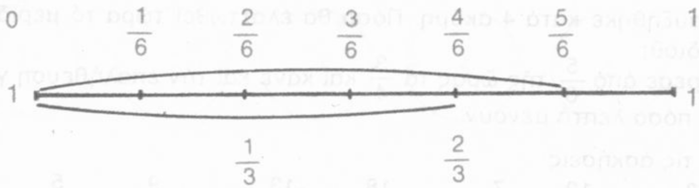
Πρόσεξε τίς παρακάτω παραστάσεις.



$$\frac{3}{4}-\frac{5}{8}=\frac{6}{8}-\frac{5}{8}=\frac{6-5}{8}=\frac{1}{8}$$

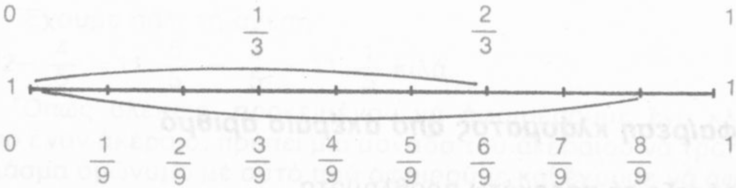
1. Μέ ὁδηγό τήν προηγούμενη συμπλήρωσε τίς ἄλλες.

α)



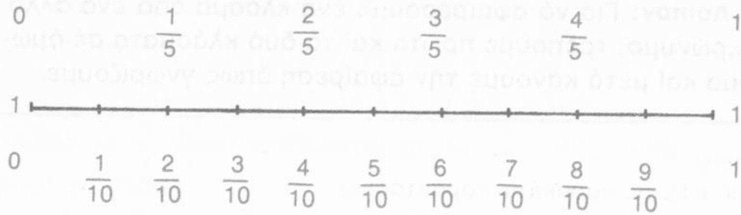
$$\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{\ }{\ }-\frac{\ }{\ }=\frac{\ }{\ }$$

β)



$$\frac{8}{9}-\frac{\ }{\ }=\frac{\ }{\ }-\frac{\ }{\ }=\frac{\ }{\ }$$

γ)



$$\frac{9}{10} - \frac{3}{5} = \frac{\quad}{10} - \frac{\quad}{10} = \frac{\quad}{\quad}$$

2. Ὁ Γιάννης ἀγόρασε $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ βερίκοκα καί μοίρασε στούς φίλους του τά $\frac{2}{4}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσα τοῦ ἔμειναν;
3. Ἀπό τά $\frac{8}{9}$ μιᾶς ἀποστάσεως, ἕνα αὐτοκίνητο ἔτρεξε τά $\frac{3}{5}$. Πόση ἀπόσταση πρέπει νά τρέξει ἀκόμη;
4. Ποιό εἶναι τό πάχος ἑνός σωλήνα, πού ἔχει ἐξωτερική ἀκτίνα $\frac{3}{4}$ τῆς ἴντσας καί ἐσωτερική $\frac{5}{8}$ τῆς ἴντσας;
5. Ὀκτώ παιδιά ἐπρόκειτο νά μοιραστοῦν 12 δραχμές. Ὁ ἀριθμός τῶν παιδιῶν αὐξήθηκε κατά 4 ἀκόμη. Πόσο θά ἐλαττωθεῖ τώρα τό μερίδιο κάθε παιδιοῦ;
6. Ἀφαίρεσε ἀπό $\frac{5}{6}$ τῆς ὥρας τά $\frac{3}{4}$ καί κάνε καί τήν ἐπαλήθευση γιά νά βρεῖς πόσα λεπτά μένουν.
7. Λύσε τίς ἀσκήσεις:

α) $\frac{8}{10} - \frac{3}{6} =$, $\frac{12}{15} - \frac{7}{11} =$, $\frac{18}{20} - \frac{13}{24} =$, $\frac{9}{12} - \frac{5}{7} =$,

β) $\frac{6}{8} - \frac{8}{12} =$, $\frac{12}{15} - \frac{15}{20} =$, $\frac{75}{100} - \frac{60}{140} =$, $\frac{150}{200} - \frac{125}{250} =$.

γ) Ἀφαίρεση κλάσματος ἀπό ἀκέραιο ἀριθμό

Πρόσεξε τά παρακάτω προβλήματα.

ι) Ἄν ἔχεις 7 δραχμές καί σοῦ ζητήσουν πενήντα λεπτά, πόσες δραχμές θά σοῦ μείνουν; Ἀσφαλῶς 6 $\frac{1}{2}$ δραχμές. Ὅμως γιά νά δώσεις τό πενηνταράκι, χρειάστηκε νά ἀλλάξεις μιά δραχμή μέ δυό πενηνταράκια, ἤ μέ δέκα δεκάρες.

Δηλ. εἶχες νά ἀφαιρέσεις κλάσμα ἀπό ἀκέραιο.

Ἡ σχέση αὐτή γράφεται:

$7-\frac{1}{2} = 6\frac{2}{2} - \frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$ δρχ.

ἤ $7-\frac{5}{10} = 6\frac{10}{10} - \frac{5}{10} = 6\frac{5}{10}$ δρχ.

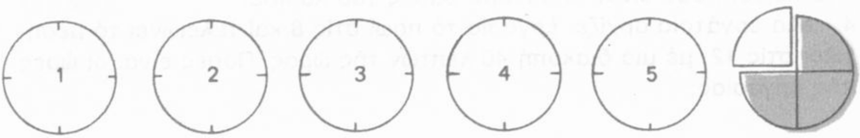
ιι) Ἕνα αὐτοκίνητο χρειάζεται 6 ὧρες γιά νά πάει ἀπό μιά πόλη σέ μιά ἄλλη, μέ μιά ἐνδιάμεση στάση $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας.

Πόση ὥρα διαρκεῖ ἡ διαδρομή;

Ἔχουμε πάλι νά ἀφαιρέσουμε τά $\frac{3}{4}$ ἀπό τίς 6 ὧρες, δηλ. κλάσμα ἀπό ἀκέραιο ἀριθμό.

Ἡ σχέση αὐτή γράφεται:

$6-\frac{3}{4} = 5\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = 5\frac{1}{4}$ ὧρες.



ιιι) Ἕνα δοχεῖο μέ λάδι ζυγίζει 12 κιλά. Τό ἀπόβαρο τοῦ δοχείου εἶναι $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσο εἶναι τό καθαρό βάρος τοῦ λαδιοῦ;

Ἔχουμε πάλι τή σχέση:

$12-\frac{4}{5} = 11\frac{5}{5} - \frac{4}{5} = 11\frac{1}{5}$ κιλά.

Ὅπως βλέπεις, προκειμένου νά ἀφαιρέσουμε ἕνα κλάσμα ἀπό ἕναν ἀκέραιο, πρέπει μιά μονάδα τοῦ ἀκέραιου νά τραπεῖ σέ κλάσμα ὁμώνυμο μέ αὐτό πού ἀφαιροῦμε καί ἔχουμε νά ἀφαιρέσουμε κλάσμα ἀπό μεικτό. Μετά ἀφαιροῦμε τό κλάσμα ἀπό τό κλάσμα τοῦ μειωτέου καί στό ὑπόλοιπο γράφουμε πρῶτα τόν ἀκέραιο καί μετά τό κλάσμα πού μένει.

Λοιπόν: Γιά νά ἀφαιρέσουμε κλάσμα ἀπό ἀκέραιο ἀριθμό, τρέπουμε τόν ἀκέραιο σέ μεικτό, μετατρέποντας μιά ἀκέραια μονάδα σέ κλάσμα ὁμώνυμο πρός τό κλάσμα πού ἀφαιροῦμε.

Ἀφαιροῦμε τό κλάσμα ἀπό τό κλάσμα τοῦ μειωτέου καί στό ὑπόλοιπο γράφουμε, τόν ἀκέραιο τοῦ μειωτέου καί τό κλάσμα πού μένει.

Ἐργασίες

1. Λύσε τίς ἀσκήσεις:

α) $9-\frac{2}{7}=$, $12-\frac{8}{12}=$, $17-\frac{45}{60}=$, $15-\frac{9}{15}=$.

β) $24-\frac{75}{100}=$, $25-\frac{125}{250}=$. $37-\frac{145}{300}=$, $45-\frac{250}{500}=$.

2. Ἔχεις ἕνα τάληρο καί σοῦ ζητοῦν 4 εἰκοσαράκια. Πόσες δραχμές σοῦ μένουν; Κάμε τήν πράξη μέ κλάσματα.

3. Ἕνα δοχεῖο μέ λάδι ζυγίζει 15 κιλά. Τό ἀπόβαρο τοῦ δοχείου εἶναι $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσο εἶναι τό καθαρό βάρος τοῦ λαδιοῦ;

4. Μιά ἐργάτρια ἀρχίζει ἐργασία τό πρωί στίς 8 καί τελειώνει τό μεσημέρι στίς 12, μέ μιά διακοπή 40 λεπτῶν τῆς ὥρας. Πόσες εἶναι οἱ ὧρες τῆς ἐργασίας;

δ) Ἀφαίρεση ἀκέραιου ἀπό μεικτό ἀριθμό

Πρόσεξε τά προβλήματα:

ι) Ἕνα ταξίδι κράτησε συνολικά $15\frac{3}{4}$ ὧρες. Ἐνδιάμεσα εἴχαμε συνολικά 3 ὧρες στάσεις. Πόσες ὧρες ἦταν ἡ διαδρομή;

Σύμφωνα μέ τό πρόβλημα ἔχουμε νά ἀφαιρέσουμε ἀκέραιο ἀριθμό ἀπό μεικτό ἀριθμό.

δηλ. ἔχουμε $15\frac{3}{4}-3=$;

Εὔκολα ὅμως βλέπουμε πώς μποροῦμε νά ἀφαιρέσουμε τόν ἀκέραιο ἀπό τόν ἀκέραιο τοῦ μεικτοῦ μειωτέου, χωρίς νά θίξουμε τό κλάσμα.

Πρόσεξε: $15\frac{3}{4} - 3 = 12\frac{3}{4}$ ὧρες,

ιι) Ἀπό ἕνα κιβώτιο πού εἶχε $19\frac{3}{5}$ κιλά ἀχλάδια, πουλήθηκαν 14 κιλά. Πόσα κιλά ἀχλάδια ἔμειναν;

Καί ἐδῶ πάλι ἔχουμε:

$19\frac{3}{5} - 14 = 19 - 14 \left(\frac{3}{5}\right) = 5\frac{3}{5}$ κιλά.

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι:

> Γιά νά ἀφαιρέσουμε ἀκέραιο ἀριθμό ἀπό μεικτό ἀριθμό, ἀφαιροῦμε τόν ἀκέραιο ἀφαιρετέο, ἀπό τόν ἀκέραιο τοῦ μειωτέου, καί δίπλα ἀπό τό ὑπόλοιπο, γράφουμε καί τό κλάσμα τοῦ μειωτέου. Ὁ μεικτός αὐτός ἀριθμός εἶναι τό ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως.

Ἐργασίες

Λύσε τίς παρακάτω ἀσκήσεις.

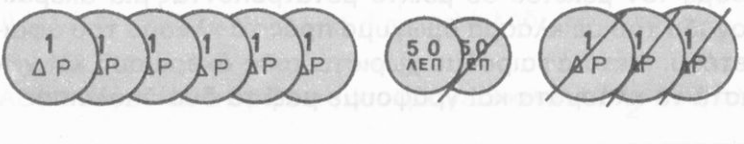
$9\frac{6}{9} - 7 =$, $15\frac{12}{18} - 9 =$, $27\frac{24}{36} - 19 =$, $45\frac{75}{100} - 37 =$.

ε) Ἀφαίρεση μεικτοῦ ἀπό ἀκέραιο ἀριθμό

Πρόσεξε τά παρακάτω προβλήματα.

ι) Ἔχεις 10 δραχμές καί πληρώνεις $3\frac{1}{2}$ δρχ. γιά ἕνα μολύβι. Πόσες δραχμές σοῦ ἔμειναν; Ἀσφαλῶς $6\frac{1}{2}$ δραχμές.

Γιά νά γίνει αὐτό πρέπει νά ἔχεις δυό πενηνταράκια. Κάπως ἔτσι:



Ἡ διάταξη μέ κλάσματα γράφεται ἔτσι:

$$10-3\frac{1}{2} = 6\frac{1}{2} \text{ δρχ.}$$

ἔχουμε ἀφαίρεση μεικτοῦ ἀπό ἀκέραιο.

Ἄν θυμηθοῦμε τά προηγούμενα, πρέπει γιά νά εἶναι ὁλοκληρωμένη ἡ διάταξη νά γραφτεῖ ἔτσι:

$$10-3\frac{1}{2} = 9\frac{2}{2} - 3\frac{1}{2} = 6\frac{1}{2} \text{ δρχ.}$$

δηλ. τρέπουμε τόν ἀκέραιο (μειωτέο) σέ μεικτό, μετατρέποντας μιά ἀκέραια μονάδα του σέ κλάσμα ὁμώνυμο πρός τό κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου.

$$9 - 3 = 6$$

$$\frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ἀφαιροῦμε χωριστά τούς ἀκέραιους καί χωριστά τά κλάσματα καί γράφουμε μαζί τά δυό ὑπόλοιπα.

$$6+\frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$$

ιι) Ἀπό ἕνα τόπι ὕφασμα πού εἶχε 43 μέτρα, πουλήσαμε συνολικά $19\frac{4}{5}$ μέτρα. Πόσο ὕφασμα ἔμεινε;

Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα ἔχουμε:

$$43-19\frac{4}{5} = 42\frac{5}{5} - 19\frac{4}{5} = 23\frac{1}{5} \text{ μ.}$$

$$42 - 19 = 23 \text{ μ.}$$

$$\frac{5}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \text{ μ.}$$

$$23+\frac{1}{5} = 23\frac{1}{5} \text{ μ.}$$

Λοιπόν: Γιά νά ἀφαιρέσουμε μεικτό ἀπό ἀκέραιο, τρέπουμε τόν μειωτέο σέ μεικτό μετατρέποντας μιά ἀκέραιη μονάδα του σέ κλάσμα ὁμώνυμο πρός τό κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου. Μετά ἀφαιροῦμε χωριστά τούς ἀκέραιους καί χωριστά τά κλάσματα καί γράφουμε μαζί τά δυό ὑπόλοιπα.

Ἐργασίες

Λύσε τίς ἀσκήσεις:

$25-7\frac{2}{7}$, $38-19\frac{6}{9}$, $45-25\frac{12}{18}$, $75-52\frac{25}{40}$,

Ἕνας ἐργάζεται ἀπό τίς $8\frac{1}{4}$ τό πρωί, ὥς τό μεσημέρι. Πόσες ὧρες ἐργάζεται;

στ) Ἀφαίρεση κλάσματος ἀπό μεικτό ἀριθμό

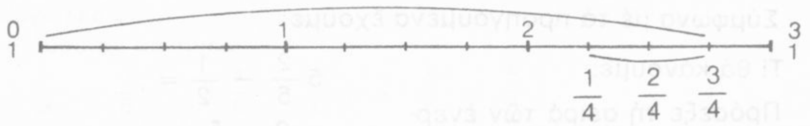
Πρόσεξε τά παρακάτω προβλήματα.

ι) Σέ μιά ἐκδρομή, τό ταξίδι διάρκεσε συνολικά 2 ὧρες καί $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας. Ἐνδιάμεσα εἴχαμε μιά στάση γιά $\frac{2}{4}$ τῆς ὥρας. Πόσο χρόνο διάρκεσε ἡ διαδρομή; Ἡ ἀπάντηση εἶναι πολύ εὔκολη. Ἡ διαδρομή διάρκεσε 2 ὧρες καί $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας. Σύμφωνα μέ ὅσα γνωρίζουμε ἔχουμε νά ἀφαιρέσουμε κλάσμα ἀπό μεικτό. Ἔχουμε τή σχέση:

$$2\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = 2\frac{3-2}{4} = 2\frac{1}{4} \text{ ὧρες.}$$

Ὅπως βλέπεις ἀφαιροῦμε τό κλάσμα (ἀφαιρετέο) ἀπό τό κλάσμα τοῦ μεικτοῦ (μειωτέου) καί γράφουμε τό ἀποτέλεσμα χωρίς νά θίξουμε τόν ἀκέραιο.

Πρόσεξε τή σχηματική παράσταση.



Ὅπως εἶδες αὐτό ἔγινε εὔκολα διότι τό κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου ἦταν μικρότερο ἀπό τό κλάσμα τοῦ μειωτέου.

Ὅμως πρόσεξε:

ιι) Ἀπό ἕνα δοχεῖο πού εἶχε $4\frac{1}{4}$ κιλά λάδι, ξοδέψαμε $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ λάδι. Πόσο λάδι μᾶς ἔμεινε;

Ἀσφαλῶς εὔκολα βρίσκεις ὅτι ἔμεινε 3 κιλά καί $\frac{1}{2}$ τοῦ κιλοῦ.

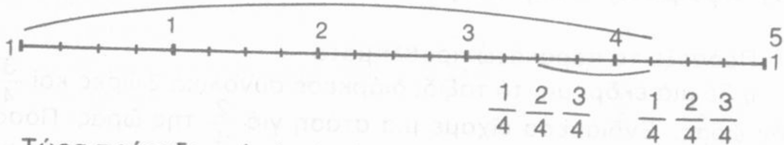
Μέ ὅσα ὥς τώρα γνωρίζουμε ἔχουμε:

$$4\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = ;$$

Βλέπουμε ὅμως, ὅτι τό κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό κλάσμα τοῦ μειωτέου. Τί θά κάνουμε λοιπόν;

Ἐκτός ἀπό τό $\frac{1}{4}$ θά πάρουμε ἀκόμη $\frac{2}{4}$ ἀπό τά 4 κιλά, γιά νά συμπληρώσουμε τά $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ.

Πρόσεξε τή σχηματική παράσταση:



Τώρα πρόσεξε καί τήν ἀριθμητική διάταξη:

$$4\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 3\left(\frac{4}{4} + \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4} = 3\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = 3\frac{2}{4} \text{ κιλά.}$$

δηλ. ἐδῶ κάναμε κάτι ἀνάλογο μέ τήν ἀφαίρεση κλάσματος ἀπό ἀκέραιο. Δανειστήκαμε μιά ἀκέραιη μονάδα καί τήν τρέψαμε σέ ὁμώνυμο πρός τό ἄλλο κλάσμα, καί ὑπολογίσαμε καί τό $\frac{1}{4}$ πού εἴχαμε ἀπό τήν ἀρχή. Μετά ἀφαιρέσαμε τό κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου ἀπό τό κλάσμα τοῦ μειωτέου, ὅπως καί προηγουμένως.

Πρόσεξε ἀκόμη:

ιιι) Ἀπό ἕνα δοχεῖο πού εἶχε $5\frac{2}{5}$ κιλά βούτυρο, πήραμε $\frac{1}{2}$ τοῦ κιλοῦ βούτυρο. Πόσα κιλά βούτυρο ἔμεινε στό δοχεῖο;

Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα ἔχουμε:

$$5\frac{2}{5} - \frac{1}{2} = ;$$

Τί θά κάνουμε;

Πρόσεξε τή σειρά τῶν ἐνεργειῶν:

Πρῶτα τρέπουμε τά κλάσματα σέ ὁμώνυμα, ἀλλά τό κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό κλάσμα τοῦ μειωτέου καί δανειζόμαστε μιά ἀκέραιη μονάδα ἀπό τό μειωτέο

$$5\overset{(2)}{\frac{2}{5}} - \overset{(5)}{\frac{1}{2}} = 5\frac{4}{10} - \frac{5}{10} =$$

$$= 4\frac{(10+4)}{10} - \frac{5}{10} = 4\frac{14}{10} - \frac{5}{10} =$$

$$= 4\frac{14}{10} - \frac{5}{10} = 4\frac{9}{10} \text{ κιλά}$$

πού τήν τρέπουμε σέ κλάσμα ὁμώνυμο μέ τά ἄλλα, καί αὐξάνουμε τό κλάσμα τοῦ μειωτέου. Μετά ἀφαιροῦμε ὅπως γνωρίζουμε.

Πρόσεξε τήν ἄσκηση:

$$17\,\overset{4}{\frac{2}{5}} - \overset{5}{\frac{3}{4}} = 17\frac{8}{20} - \frac{15}{20} = 16\frac{(20+8)}{20} - \frac{15}{20} = 16\frac{28}{20} - \frac{15}{20} = 16\frac{13}{20}.$$

Ἀπό ὅλα τά προηγούμενα συμπεραίνουμε ὅτι:

> **Γιά νά ἀφαιρέσουμε κλάσμα ἀπό μεικτό ἀριθμό:**
>
> 1. Ἀφαιροῦμε τό κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου ἀπό τό κλάσμα τοῦ μειωτέου χωρίς νά θίξουμε τόν ἀκέραιο. Στό ὑπόλοιπο γράφουμε τόν ἀκέραιο τοῦ μειωτέου καί τό κλάσμα πού μένει.
> 2. Ἄν τά κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα πρέπει νά γίνουν πρῶτα ὁμώνυμα.
> 3. Ἄν τό κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό κλάσμα τοῦ μειωτέου, δανειζόμαστε μιά ἀκέραιη μονάδα, ἀπό τό μειωτέο, τήν τρέπουμε σέ κλάσμα ὁμώνυμο πρός τά ἄλλα, αὐξάνουμε τό κλάσμα τοῦ μειωτέου καί ἀφαιροῦμε ὅπως γνωρίζουμε.

Ἐργασίες

1. Λύσε τίς ἀσκήσεις:

α) $6\frac{2}{3} - \frac{3}{6}$, $9\frac{4}{6} - \frac{5}{6}$, $11\frac{5}{6} - \frac{5}{8}$,

β) $15\frac{6}{9} - \frac{9}{12}$, $24\frac{9}{12} - \frac{3}{4}$, $35\frac{12}{15} - \frac{7}{8}$, $77\frac{12}{24} - \frac{5}{6}$,

2. Ἀπό ἕνα δοχεῖο πού εἶχε $19\frac{1}{4}$ κιλά κρασί πήραμε $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ κρασί. Πόσο κρασί ἔμεινε στό δοχεῖο;

3. Ὁ Στάθης ἔχει ὕψος $1\frac{1}{2}$ μ. καί εἶναι ψηλότερος κατά $\frac{1}{5}$ μ. ἀπό τό Θωμᾶ. Πόσο εἶναι τό ὕψος τοῦ Θωμᾶ;

4. Σέ ἕνα ἐργοστάσιο ἐργάζονται συνολικά 7 ὧρες, μέ μιά ἐνδιάμεση διακοπή 50 λεπτῶν τῆς ὥρας. Πόσος εἶναι ὁ χρόνος ἐργασίας;

ζ) Ἀφαίρεση μεικτοῦ ἀπό μεικτό

Πρόσεξε τά προβλήματα.

ι) Ἀπό ἕνα κεφάλι τυρί πού ζύγιζε $6\frac{4}{5}$ κιλά, ἕνας τυρέμπορος πούλησε $2\frac{3}{5}$ κιλά. Πόσο τυρί ἔμεινε;

Ὅπως βλέπεις ἔχουμε νά ἀφαιρέσουμε μεικτό ἀπό μεικτό.

$$6\frac{4}{5} - 2\frac{3}{5} = 4\frac{1}{5}.$$

Γιά νά τό λύσεις θυμήσου τί κάναμε στήν πρόσθεση, καθώς καί τά προηγούμενα τῆς ἀφαιρέσεως.

Πρόσεξε τώρα τή σειρά.

α) Τρόπος.

Ἀφαιροῦμε χωριστά τούς ἀκέραιους καί χωριστά τά κλάσματα καί ἑνώνουμε τά δυό ὑπόλοιπα.

$$6\frac{4}{5} - 2\frac{3}{5} = 4\frac{1}{5} \text{ κιλά}$$

$$6 - 2 = 4$$

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

$$4 + \frac{1}{5} = 4\frac{1}{5}$$

β) Τρόπος.

$$6\frac{4}{5} - 2\frac{3}{5} = \frac{34}{5} - \frac{13}{5} = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5} \text{ κιλά.}$$

Τρέπουμε τούς μεικτούς σέ κλάσματα καί ἀφαιροῦμε κλάσμα ἀπό κλάσμα. Ἀπό τό ὑπόλοιπο ἐξάγουμε τίς ἀκέραιες μονάδες. Πρόσεξε τώρα:

ιι) Ἀπό τό τυρί πού ἔμεινε, ὁ τυρέμπορος πούλησε ἀργότερα $2\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ ἀκόμη. Πόσο τυρί ἔμεινε τελικά;

Ἔχουμε πάλι $4\frac{1}{5} - 2\frac{4}{5} =$; Τί παρατηρεῖς;

Παρατηροῦμε ὅτι τό κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό κλάσμα τοῦ μειωτέου.

$$4\frac{1}{5} - 2\frac{4}{5} = ;$$

Σκέψου τί κάναμε σέ παρόμοια περίπτωση.

$4\frac{1}{5} - 2\frac{4}{5} = 3\frac{(5+1)}{5} - 2\frac{4}{5} = 3\frac{6}{5} - 2\frac{4}{5} = 1\frac{2}{5}$ κιλά τυρί

Ἀπό τό κλάσμα τοῦ μειωτέου δανειζόμαστε μιά ἀκέραιη μονάδα καί τήν τρέπουμε σέ κλάσμα ὁμώνυμο πρός τά ἄλλα, προσθέτουμε καί τό κλάσμα πού εἶχε ὁ μειωτέος καί αὐξάνουμε τό κλάσμα του. Μετά ἀφαιροῦμε χωριστά τούς ἀκέραιους καί χωριστά τά κλάσματα ὅπως γνωρίζουμε.

Τό πρόβλημα μπορεῖ νά λυθεῖ καί μέ τόν β΄ τρόπο, ὡς ἑξῆς:

$4\frac{1}{5} - 2\frac{4}{5} = \frac{21}{5} - \frac{14}{5} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$ κιλά.

Στήν περίπτωση αὐτή τρέπουμε τούς μεικτούς σέ κλάσματα καί ἀφαιροῦμε κλάσμα ἀπό κλάσμα, ὅπως γνωρίζουμε.

Πρόσεξε ἀκόμη:

ιιι) Τό τραῖνο ἀναχωρεῖ στίς $8\frac{3}{4}$ τό πρωί ἀπό μιά πόλη καί φτάνει στίς $12\frac{1}{2}$ τό μεσημέρι σέ μιά ἄλλη. Πόσες ὧρες διαρκεῖ τό ταξίδι; Τί θά κάνουμε; Τί ἄλλο παρατηρεῖς;

Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα ἔχουμε:

$12\frac{1}{2} - 8\frac{3}{4} = ;;$

Ἀλλά ἀφοῦ τά κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα, πρέπει νά γίνουν πρῶτα ὁμώνυμα καί μετά νά συνεχίσουμε ὅπως ξέρουμε.

α) $12\frac{\overset{\overbrace{2}}{1}}{2} - 8\frac{\overset{\overbrace{1}}{3}}{4} = 12\frac{2}{4} - 8\frac{3}{4} = 11\frac{(4+2)}{4} - 8\frac{3}{4} =$

$= 11\frac{6}{4} - 8\frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$ ὧρες.

$11 - 8 = 3$

$\frac{6}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

$3 + \frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$

β) $12\frac{1}{2} - 8\frac{3}{4} = \frac{50}{4} - \frac{35}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ ὧρες.

Ἀπό ὅλα τά προηγούμενα συμπεραίνουμε ὅτι:

Γιά νά ἀφαιρέσουμε μεικτό ἀπό μεικτό:

1. Ἀφαιροῦμε χωριστά τούς ἀκέραιους καί χωριστά τά κλάσματα καί γράφουμε μαζί τά δύο ὑπόλοιπα.
2. Ἄν τά κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα πρέπει πρῶτα νά γίνουν ὁμώνυμα.
3. Ἄν τό κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό κλάσμα τοῦ μειωτέου, τρέπουμε μιά ἀκέραιη μονάδα τοῦ μειωτέου σέ κλάσμα ὁμώνυμο μέ τά ἄλλα καί τό προσθέτομε στό ἀρχικό του κλάσμα ὁπότε τό κλάσμα τοῦ μειωτέου αὐξάνει, καί κάνουμε τήν ἀφαίρεση ὅπως γνωρίζουμε.
4. Μποροῦμε ἀκόμη νά τρέψουμε τούς μεικτούς σέ κλάσματα καί νά ἀφαιρέσουμε κλάσμα ἀπό κλάσμα, ὅπως γνωρίζουμε.

Σκέψου τώρα:

Σέ ποιές ἄλλες περιπτώσεις ἀφαιρέσεως κλασμάτων, μποροῦμε νά τρέπουμε τούς μεικτούς σέ κλάσματα.

Καί πότε συμφέρει νά γίνεται αὐτό.

Ἐργασίες

1. Λύσε τίς παρακάτω ἀσκήσεις. Διάλεγε τόν κατάλληλο τρόπο.

α) $10\frac{7}{9} - 7\frac{5}{9} =$, $24\frac{12}{15} - 15\frac{9}{15} =$, $30\frac{18}{20} - 18\frac{11}{20} =$.

β) $9\frac{3}{8} - 5\frac{5}{8} =$, $17\frac{9}{15} - 11\frac{12}{15} =$, $45\frac{15}{24} - 27\frac{20}{24} =$.

γ) $12\frac{8}{9} - 9\frac{7}{12} =$, $18\frac{4}{5} - 11\frac{9}{15} =$, $25\frac{6}{8} - 18\frac{3}{4} =$.

δ) $10\frac{2}{3} - 5\frac{7}{9} =$, $16\frac{6}{10} - 8\frac{4}{5} =$, $45\frac{3}{8} - 28\frac{10}{12} =$.

2. Ὁ Μιχάλης ἀγόρασε $6\frac{1}{2}$ μέτρα, χαρτί τοῦ μέτρου, (τοῦ ρόλου). Γιά νά φτιάξει τόν χαρταετό του χρειάστηκε $2\frac{2}{5}$ μέτρα. Πόσα μέτρα χαρτί τοῦ ἔμειναν;

3. Ἡ μητέρα ἀγόρασε $3\frac{1}{2}$ κιλά ζάχαρη. Χρειάστηκε γιά τά γλυκά $2\frac{3}{4}$ κιλά. Πόση ζάχαρη ἔμεινε;

4. Ἕνα βαρέλι ζυγίζει γεμάτο $155\frac{1}{2}$ κιλά. Τό ἀπόβαρό του εἶναι $9\frac{3}{5}$ κιλά. Πόσο εἶναι τό καθαρό βάρος τοῦ ὑγροῦ;

5. Ἕνας ἔμπορος εἶχε ἕνα τόπι ὕφασμα πού ἦταν $42\frac{2}{5}$ μέτρα. Πούλησε συνολικά $17\frac{3}{4}$ μέτρα. Πόσο ὕφασμα ἔμεινε;

Σύνθετα προβλήματα προσθέσεως καί ἀφαιρέσεως

1. Τό πλοῖο ἀναχωρεῖ ἀπό τόν Πειραιά στίς $7\frac{1}{2}$ τό ἀπόγευμα καί φθάνει στό Ἡράκλειο τήν ἐπομένη τό πρωί στίς $6\frac{3}{4}$ π.μ. Πόσες ὧρες διαρκεῖ τό ταξίδι;

2. Τά μαθήματα τοῦ Σχολείου ἀρχίζουν στίς $8\frac{1}{2}$ τό πρωί καί τελειώνουν στίς $1\frac{1}{4}$ μ.μ. Πόσες ὧρες διαρκοῦν;

3. Οἱ ἐργάτες ἑνός ἐργοστασίου, ἀρχίζουν ἐργασία στίς $7\frac{3}{4}$ τό πρωί καί σταματοῦν στίς 1 μμ. Ἀρχίζουν πάλι στίς $2\frac{1}{2}$ μ.μ. καί ἐργάζονται ὥς τίς $5\frac{1}{4}$ τό ἀπόγευμα. Πόσες ὧρες ἐργάζονται συνολικά οἱ ἐργάτες;

4. Ἕνας ἐπιπλοποιός ἀγόρασε ἕνα μεταχειρισμένο τραπέζι καί ἔδωσε $573\frac{1}{2}$ δραχμές. Γιά νά τό ἐπιδιορθώσει ἐξόδεψε $156\frac{4}{5}$ δραχμές. Πόσες δραχμές πρέπει νά πουλήσει τό τραπέζι γιά νά κερδίσει 150 δραχμές;

3. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

α) Πολλαπλασιασμός κλάσματος μέ ἀκέραιο ἀριθμό

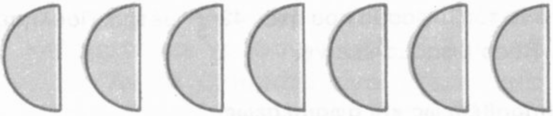
Πρόσεξε, σκέψου, ὑπολόγισε, ἀπάντησε:

4 πενηνταράκια, μᾶς κάνουν 2 δραχμές.
6 πενηνταράκια, μᾶς κάνουν δραχμές.
10 πενηνταράκια, μᾶς κάνουν δραχμές.

5 πενηνταράκια, μᾶς κάνουν   δραχμές.
9 πενηνταράκια, μᾶς κάνουν   δραχμές.
12 πενηνταράκια, μᾶς κάνουν   δραχμές.

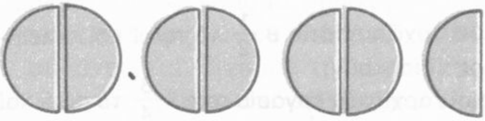
Τώρα πρόσεξε τά προβλήματα:

ι) Τά 7 πενηνταράκια πόσες δραχμές μᾶς κάνουν; Σκέπτομαι ὅτι κάθε πενηνταράκι εἶναι $\frac{1}{2}$ τῆς δραχμῆς. Ἔχουμε λοιπόν:



δηλ. $3\frac{1}{2}$ δρχ.

Ἄν τά ταιριάσουμε ἔχουμε:



δηλ. $3\frac{1}{2}$ δρχ.

Αὐτά μέ κλάσματα τά γράφουμε ἔτσι:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2} \text{ δρχ.}$$

ἤ πιό εὔκολα $\frac{1}{2}\times 7=\frac{1\times 7}{2}=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$ δρχ.

δηλ. ἐπαναλαμβάνουμε 7 φορές τό $\frac{1}{2}$. Στήν πράξη ἐπαναλαμβάνουμε 7 φορές τό 1 καί τό γινόμενο γράφουμε ἀριθμητή καί παρονομαστή γράφουμε τόν ἴδιο. Τό καταχρηστικό κλάσμα εἶναι τό γινόμενο, ἀπό ὅπου βγάζουμε τίς ἀκέραιες μονάδες καί τό τελικό γινόμενο εἶναι μεικτός.

ιι) Ἡ μητέρα ἀγόρασε 6 κουτιά γάλα ἐβαπορέ. Κάθε κουτί περιέχει $\frac{2}{5}$ τοῦ κιλοῦ γάλα. Πόσα κιλά γάλα ἀγόρασε συνολικά;

Τί γνωρίζουμε; Τί ζητοῦμε; Τί θά κάνουμε;

Πρέπει νά ἐπαναλάβουμε 6 φορές τά $\frac{2}{5}$ τοῦ κιλοῦ.

Ἔχουμε λοιπόν:

$$\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5} \text{ κιλά γάλα}$$

ἤ πιό σύντομα $\frac{2}{5} \times 6 = \frac{2 \times 6}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$ κιλά γάλα.

Δηλ. πολλαπλασιάζουμε τό 2 μέ τό 6 καί τό γινόμενο γράφουμε ἀριθμητή καί παρονομαστή γράφουμε τόν ἴδιο.

Τό ἀποτέλεσμα μᾶς ἔδωσε κλάσμα καταχρηστικό καί βγάλαμε τίς ἀκέραιες μονάδες καί πήραμε μεικτό ἀριθμό.

Δηλ. ἐπαναλαμβάνουμε τόν ἀριθμητή τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὅσες φορές μᾶς δείχνει ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστής.

Θυμήσου μιά βασική ἰδιότητα τῶν κλασμάτων.

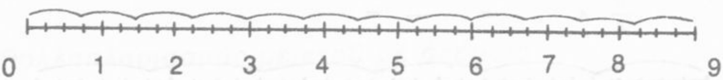
Κάνοντας τήν ἐπαλήθευση μποροῦμε νά ἐλέγξουμε τό ἀποτέλεσμα. Ὑπολογίζουμε ὅτι κάθε κουτί περιέχει $\frac{2}{5}$ τοῦ κιλοῦ γάλα, δηλ. 400 γραμμάρια. Τά 6 κουτιά ἔχουν $400 \times 6 = 2400$ γρμ. δηλ. 2 κιλά καί 400 γραμμάρια ἤ $2\frac{2}{5}$ κιλά.

ιιι) 12 μαθήτριες τῆς τάξης μας ἀγόρασαν κορδέλες γιά τά μαλλιά. Κάθε μιά χρειαζόταν $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου κορδέλα. Πόσα μέτρα ἀγόρασαν συνολικά;

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω ἔχουμε:

$\frac{3}{4} \times 12 = \frac{3 \times 12}{4} = \frac{36}{4} = 9$ μέτρα.

Σχηματικά τό πρόβλημα παρουσιάζεται ἔτσι:



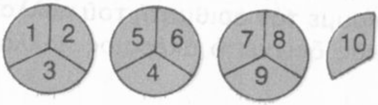
Κάνε τήν ἐπαλήθευση ὑπολογίζοντας τά $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου μέ 75 ἑκ.

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι:

> **Γιά νά πολλαπλασιάσουμε κλάσμα μέ ἀκέραιο,** πολλαπλασιάζουμε τόν ἀριθμητή τοῦ κλάσματος ἐπί τόν ἀκέραιο καί τό γινόμενο γράφουμε ἀριθμητή τοῦ νέου κλάσματος καί παρονομαστή ἀφήνουμε τόν ἴδιο.

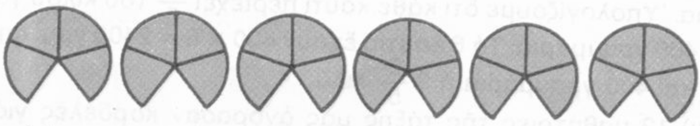
Ἐργασίες

Πρόσεξε τά παρακάτω σχήματα:

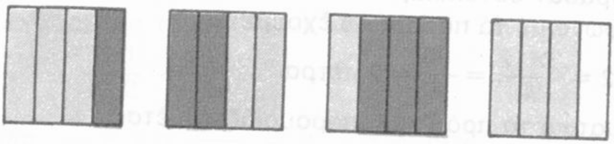


$\frac{2}{3} \times 5 = \frac{2 \times 5}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$

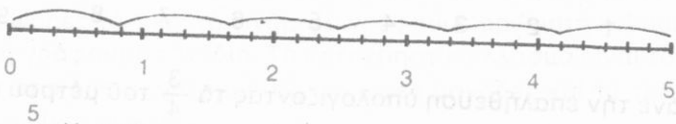
1. Μέ ὁδηγό τήν προηγούμενη, συμπλήρωσε τίς παρακάτω:



$\frac{4}{5} \times \quad = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$



$\frac{3}{4} \times \quad = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$



$\frac{5}{6} \times ; = \frac{\quad}{\quad} = ;$

2. Συμπλήρωσε τίς ἀσκήσεις:

α) $\frac{2}{3} \times 4 = \frac{\quad}{\quad} = ;$ $\frac{4}{5} \times 3 = ;$ $\frac{7}{10} \times 6 = ;$

β) $\frac{5}{12} \times 5 = \frac{\quad}{\quad} = ;$ $\frac{7}{20} \times 8 = ;$ $\frac{21}{36} \times 4 = ;$

3. Σέ κάθε χαρτοκιβώτιο εἶναι 48 κουτιά γάλα ἐβαπορέ. Κάθε κουτί περιέχει $\frac{2}{5}$ τοῦ κιλοῦ γάλα.

Πόσο γάλα (καθαρό βάρος) περιέχεται στό κιβώτιο;

(κάνε τήν ἐπαλήθευση)

4. Σέ ἕνα κουτί συσκευασίας ὑπάρχουν 25 γκοφρέττες, τῶν 40 γραμμαρίων. Πόσα κιλά γκοφρέττες ἔχει τό κουτί; (40 γρ. $= \frac{1}{25}$ κιλοῦ)

5. Σέ ἕνα κιβώτιο εἶναι 24 φιάλες μπύρας. Κάθε φιάλη ἔχει καθαρό βάρος 550 γραμμάρια μπύρας. Πόσα κιλά μπύρας περιέχουν ὅλες μαζί οἱ φιάλες τοῦ κιβώτιου; (550 γρμ. $= \frac{55}{100}$ ἤ $\frac{11}{20}$ κιλοῦ)

6. Πάρε ἕνα χαρτοκιβώτιο μέ κονσέρβες (κρέας ἤ κομπόστα ἤ ντομάτα, ἤ ψάρι κτλ.). Παρατήρησε πόσα κουτιά χωρεῖ τό κιβώτιο. Πρόσεξε τό βάρος πού ἔχει κάθε μιά. Ὑπολόγισε τό συνολικό βάρος τοῦ χαρτοκιβώτιου.

7. Παρατήρησε τά διάφορα συσκευασμένα προϊόντα, (σοκολάτες, γκοφρέττες, τυρί, κονσέρβες, ἀπορρυπαντικά κτλ.). Πρόσεξε πόσα κουτιά εἶναι σέ κάθε χαρτοκιβώτιο καί κάνε προβλήματα. (Τό βάρος πού γράφουν θά τό ἐκφράζεις σέ κλάσμα τοῦ κιλοῦ).

8. Τό μῆκος τῆς πλευρᾶς ἑνός τετραγώνου εἶναι $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ περίμετρός του;

9. Τό μῆκος τῆς πλευρᾶς ἑνός κανονικοῦ δωδεκάγωνου εἶναι $\frac{18}{20}$ τοῦ μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ περίμετρός του;

β) Πολλαπλασιασμός μεικτοῦ μέ ἀκέραιο

Πρόσεξε τά προβλήματα:

ι) Ἕνα μολύβι ἀξίζει $2\frac{1}{2}$ δραχμές. Πόσο ἀξίζει ἡ δωδεκάδα; Τί γνωρίζουμε; Τί ζητοῦμε; Τί θά κάνουμε;

Σκέπτομαι ὅτι ἀφοῦ τό ἕνα μολύβι ἀξίζει $2\frac{1}{2}$ δραχμές, τότε ἡ δωδεκάδα ἀξίζει 12 φορές ἀπό $2\frac{1}{2}$ δρχ.

Ὅπως βλέπεις ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι μεικτός καί ὁ πολλαπλασιαστής ἀκέραιος. Μέ τό νοῦ ἔκανα ἔτσι τόν ὑπολογισμό. Σκέφτηκα ὅτι 12 φορές 2 κάνουν 24 καί 12 φορές μισό κάνει 6,

ὅλα μαζί κάνουν 30 δρχ. Δηλ. πολλαπλασίασα χωριστά τόν ἀκέραιο καί χωριστά τό κλάσμα.

1ος τρόπος

Πολλαπλασιάζω χωριστά, τόν ἀκέραιο τοῦ πολλαπλασιαστέου μέ τόν ἀκέραιο πολλαπλασιαστή καί τό κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστέου μέ τόν ἀκέραιο πολλαπλασιαστή καί ἑνώνω τά δυό γινόμενα.

Πρόσεξε τή διάταξη:

$$2\frac{1}{2} \times 12 = 30 \text{ δρχ.}$$

$$2 \times 12 = 24$$

$$\frac{1}{2} \times 12 = \frac{12}{2} = 6$$

$$24 + 6 = 30$$

2ος τρόπος

$$2\frac{1}{2} \times 12 = \frac{5}{2} \times 12 = \frac{5\times12}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ δρχ.}$$

Τρέπω τόν μεικτό πολλαπλασιαστέο σέ κλάσμα καί πολλαπλασιάζω κλάσμα μέ ἀκέραιο ὅπως γνωρίζουμε. Τό γινόμενο εἶναι κλάσμα καταχρηστικό καί βγάζουμε τίς ἀκέραιες μονάδες.

ιι) Γιά ἕνα φόρεμα χρειάζονται $3\frac{2}{5}$ μέτρα ὕφασμα. Πόσο ὕφασμα χρειάζεται γιά 15 ὅμοια φορέματα;

Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα ἔχουμε:

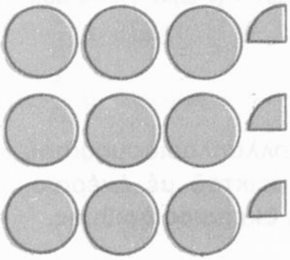
1) $3\frac{2}{5} \times 15 = (3\times15) + (\frac{2}{5} \times 15) = (45) + (\frac{30}{5}) = 45+6 = 51$ μ.

2) $3\frac{2}{5} \times 15 = \frac{17}{5} \times 15 = \frac{17\times15}{5} = \frac{255}{5} = 51$ μέτρα.

> Λοιπόν: Γιά νά πολλαπλασιάσουμε μεικτό ἀριθμό μέ ἀκέραιο, πολλαπλασιάζουμε, χωριστά τόν ἀκέραιο τοῦ πολλαπλασιαστέου μέ τόν ἀκέραιο πολλαπλασιαστή καί χωριστά τό κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστέου μέ τόν ἀκέραιο πολλαπλασιαστή καί ἑνώνουμε τά δυό γινόμενα
> ἤ τρέπουμε τόν μεικτό σέ κλάσμα καί πολλαπλασιάζουμε κλάσμα μέ ἀκέραιο ὅπως γνωρίζουμε.

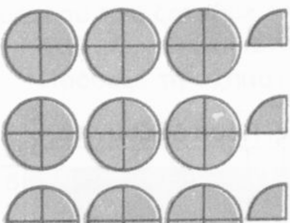
Ἐργασίες

1. Παρατήρησε τή σχηματική παράσταση καί ἐξήγησε τίς πράξεις.



$$\left.\begin{array}{l} 3\frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{4} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 3\frac{1}{4} + 3\frac{1}{4} + 3\frac{1}{4} = 9\frac{3}{4} \\ 3\frac{1}{4} \times 3 = 9\frac{3}{4} \\ \left.\begin{array}{l} 3 \times 3 = 9 \\ \frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4} \end{array}\right\} = 9\frac{3}{4} \end{array}\right.$$

$$3 + 3 + 3 + \frac{3}{4} = 9\frac{3}{4}$$



$$\left.\begin{array}{l} \frac{13}{4} \\ \frac{13}{4} \\ \frac{13}{4} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \frac{13}{4} + \frac{13}{4} + \frac{13}{4} = \frac{39}{4} = 9\frac{3}{4} \\ \frac{13}{4} \times 3 = \frac{39}{4} = 9\frac{3}{4} \end{array}\right.$$

$$\frac{12}{4} + \frac{12}{4} + \frac{12}{4} + \frac{3}{4} = \frac{39}{4} = 9\frac{3}{4}$$

2. Λύσε τίς ἀσκήσεις.

α) $7\frac{3}{4} \times 5 =$, $12\frac{6}{8} \times 9 =$, $6\frac{12}{15} \times 8 =$, $9\frac{18}{24} \times 8 =$.

β) $12\frac{25}{50} \times 7 =$, $25\frac{7}{9} \times 12 =$, $37\frac{2}{7} \times 5 =$, $45\frac{6}{12} \times 9 =$.

3. Μιά γκοφρέττα ἀξίζει $6\frac{1}{2}$ δρχ. Πόσο ἀξίζουν 15 γκοφρέττες;

4. Ἕνα αὐτοκίνητο διατρέχει $76\frac{3}{4}$ χιλιόμετρα τήν ὥρα. Πόσα χιλιόμετρα θά διατρέξει σέ 6 ὧρες;

5. Γιά ἕνα φόρεμα χρειάζονται $2\frac{4}{5}$ μέτρα ὕφασμα. Πόσο ὕφασμα χρειάζεται γιά 24 ὅμοια φορέματα;

6. Ἕνα πλοῖο προχωρεῖ μέ ταχύτητα $25\frac{3}{5}$ μιλίων τήν ὥρα. Πόσα μίλια θά διατρέξει σέ 12 ὥρες;

Παρατήρηση:

Στίς προηγούμενες περιπτώσεις πολλαπλασιασμοῦ πού ἔμαθες, κλάσματος μέ ἀκέραιο καί μεικτοῦ μέ ἀκέραιο, πρόσεξε ὅτι **ὁ πολλαπλασιαστής εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.**

γ) Πολλαπλασιασμός ἀκέραιου μέ κλάσμα

Πρόσεξε καλά τά παρακάτω προβλήματα.

ι) Ἕνα μέτρο δαντέλας ἀξίζει 15 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν τά $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου;

Τί γνωρίζουμε; Τί ζητοῦμε; Τί θά κάνουμε;

Στό πρόβλημα αὐτό γνωρίζουμε τήν ἀξία τοῦ 1 μέτρου δαντέλας καί ζητοῦμε τήν ἀξία τοῦ μέρους του, δηλ. τῶν $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου. Σκέπτομαι ὅτι θά ἦταν εὔκολο ἄν γνώριζα τήν ἀξία τοῦ $\frac{1}{5}$ τοῦ μέτρου. Λοιπόν ὑπολογίζω ὅτι:

Ἀφοῦ τό 1 μ. δηλ. τά $\frac{5}{5}$ τοῦ μέτρου ἀξίζουν 15 δραχμές.
τότε τό $\frac{1}{5}$ τοῦ μ. ἀξίζει 5 φορές λιγότερο δηλ. $\frac{15}{5} = 3$ δρχ.
καί τά $\frac{4}{5}$ τοῦ μ. ἀξίζουν 4 φορές περισσότερο ἀπό τό $\frac{1}{5}$, δηλ. $3 \times 4 = 12$ δρχ.

Ὅπως βλέπεις βρίσκουμε πρῶτα πόσο ἀξίζει τό $\frac{1}{5}$ τοῦ μέτρου, δηλ. ἡ μιά κλασματική μονάδα καί μετά πόσο ἀξίζουν τά $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου δηλ. οἱ περισσότερες κλασματικές μονάδες.

Αὐτός ὁ τρόπος λύσεως λέγεται **ἀναγωγή** στήν κλασματική μονάδα. Ἡ διάταξη τῶν πράξεων γίνεται ὡς ἑξῆς:

Τά $\frac{5}{5}$ μ. ἀξίζουν 15 δρχ.

τό $\frac{1}{5}$ μ. ἀξίζει $\frac{15}{5} = 3$ δρχ.

τά $\frac{4}{5}$ μ. ἀξίζουν $3 \times 4 =$

$= 12$ δρχ.

ἤ

Τά $\frac{5}{5}$ μ. ἀξίζουν 15 δρχ.

τό $\frac{1}{5}$ μ. ἀξίζει $\frac{15}{5}$ δρχ.

τά $\frac{4}{5}$ μ. ἀξίζουν $\frac{15}{5} \times 4 = \frac{60}{5} =$

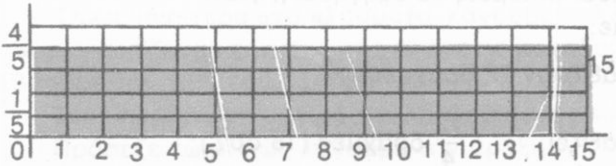
$= 12$ δρχ.

Ἀλλά γιά νά βροῦμε τό τελικό ἀποτέλεσμα βλέπουμε ὅτι, πολλαπλασιάζουμε $\frac{15 \times 4}{5}$ δηλ. $15 \times \frac{4}{5}$.

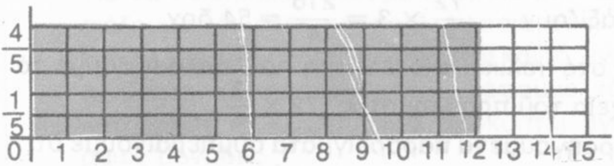
Ἀλλά αὐτά εἶναι τά ἀριθμητικά στοιχεῖα τοῦ προβλήματος. Τό 15 εἶναι ἡ τιμή τοῦ ἑνός μέτρου καί τά $\frac{4}{5}$ εἶναι τό μέρος τοῦ μέτρου πού ζητοῦμε τήν τιμή του.

Σοῦ λέει τίποτε αὐτό;

Πρόσεξε τή σχηματική παράσταση



$15 \times \frac{4}{5} = \frac{60}{5} = 12$



ii) Ἕνα αὐτοκίνητο διατρέχει σέ μιά ὥρα 63 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα διατρέχει σέ $\frac{4}{6}$ τῆς ὥρας;

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω ἀφοῦ γνωρίζουμε πόσα χιλιόμετρα διατρέχει στήν ὥρα δηλ. στά $\frac{6}{6}$ τῆς ὥρας καί ζητοῦμε νά βροῦμε πόσα χιλιοστόμετρα διατρέχει σέ $\frac{4}{6}$ τῆς ὥρας, θά κάνουμε πάλι

ἀναγωγή στήν κλασματική μονάδα.

Ἔχουμε λοιπόν τήν παρακάτω διάταξη:

Στά $\frac{6}{6}$ τῆς ὥρας τό αὐτοκίνητο διατρέχει 63 χιλιόμετρα,

στό $\frac{1}{6}$ τῆς ὥρας τό αὐτοκίνητο διατρέχει $\frac{63}{6}$ χιλιόμετρα,

στά $\frac{4}{6}$ τῆς ὥρας τό αὐτοκίνητο διατρέχει

$\frac{63}{6} \times 4 = \frac{63 \times 4}{6} = \frac{252}{6} = 42$ χλμ.

Πάλι γιά νά βροῦμε τό τελικό ἀποτέλεσμα, πολλαπλασιάζουμε τούς ἀριθμούς $\frac{63 \times 4}{6}$ δηλ. $63 \times \frac{4}{6}$, τά ἀριθμητικά στοιχεῖα τοῦ προβλήματος. Σκέψου λίγο νά βγάλεις ἕνα συμπέρασμα.

Πρόσεξε πάλι:

iii) Ἕνα κιλό λάδι ἀξίζει 72 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν τά $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ;

Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα θά κάνουμε πάλι **ἀναγωγή** στήν κλασματική μονάδα. Μπορεῖς νά ἐξηγήσεις, γιατί;

Λοιπόν ἔχουμε:

Τά $\frac{4}{4}$ τοῦ κιλοῦ ἀξίζουν 72 δραχμές,

Τό $\frac{1}{4}$ τοῦ κιλοῦ ἀξίζει $\frac{72}{4}$ δραχμές (18 δρχ.)

Τά $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ ἀξίζουν $\frac{72}{4} \times 3 = \frac{216}{4} = 54$ δρχ.

Καί πάλι ἐδῶ στό τελικό ἀποτέλεσμα πολλαπλασιάζουμε τά ἀριθμητικά στοιχεῖα τοῦ προβλήματος, $72 \times \frac{3}{4}$.

Ἀπό ὅλα τά προηγούμενα παραδείγματα συμπεραίνουμε ὅτι:

Ὅταν γνωρίζουμε τήν τιμή τῆς ἀκέραιης μονάδας (ἤ ἑνός συνόλου) καί ζητοῦμε νά βροῦμε τήν τιμή τοῦ μέρους, τότε χρησιμοποιοῦμε τήν **ἀναγωγή στήν κλασματική μονάδα** ἤ τόν **πολλαπλασιασμό ἀκέραιου μέ κλάσμα.**

Μποροῦμε λοιπόν τά προηγούμενα προβλήματα νά τά λύσουμε ὡς ἑξῆς:

ι) $15 \times \frac{4}{5} = \frac{15 \times 4}{5} = \frac{60}{5} = 12$ δρχ. γιά τά $\frac{4}{5}$ δαντέλας.

ιι) $63 \times \frac{4}{6} = \frac{63 \times 4}{6} = \frac{252}{6} = 42$ χλμ. τρέχει τό αὐτοκίνητο σέ $\frac{4}{6}$ τῆς ὥρας.

ιιι) $72 \times \frac{3}{4} = \frac{72 \times 3}{4} = \frac{216}{4} = 54$ δρχ. γιά τά $\frac{3}{4}$ κιλοῦ λάδι.

Γενικό συμπέρασμα:

Πολλαπλασιασμό συνήθως κάνουμε, ὅταν γνωρίζουμε τήν τιμή τῆς μιᾶς ἀκέραιης μονάδας καί ζητοῦμε νά βροῦμε τήν τιμή τῶν πολλῶν ἀκέραιων μονάδων.

Αὐτό ἰσχύει καί γιά τά κλάσματα (θυμήσου προηγούμενες περιπτώσεις).

Ὅμως **ἰδιαίτερα στά κλάσματα,** κάνουμε πολλαπλασιασμό καί ὅταν γνωρίζουμε τήν τιμή τῆς ἀκέραιης μονάδας καί ζητοῦμε νά βροῦμε τήν τιμή τοῦ μέρους της.

Στήν περίπτωση αὐτή **ὁ πολλαπλασιαστής εἶναι κλάσμα.**

Πρόσεξε τώρα πώς κάνουμε τήν πράξη.

Γιά νά πολλαπλασιάσουμε ἀκέραιο μέ κλάσμα, πολλαπλασιάζουμε τόν ἀκέραιο (πολλαπλασιαστέο) μέ τόν ἀριθμητή τοῦ κλάσματος (πολλαπλασιαστή) καί τό γινόμενο γράφουμε ἀριθμητή καί παρονομαστή γράφουμε τόν ἴδιο. Ἀπό τό καταχρηστικό κλάσμα πού προκύπτει βγάζουμε τίς ἀκέραιες μονάδες.

Τί σοῦ θυμίζει;

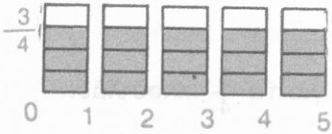
Τί διαφορά ὑπάρχει;

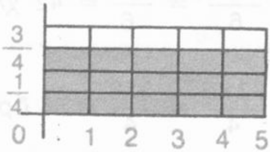
Πρόσεξε ἀκόμη:

Τό γινόμενο εἶναι μικρότερο ἀπό τήν τιμή τῆς ἀκέραιης μονάδας. Μπορεῖς νά βρεῖς τό γιατί;

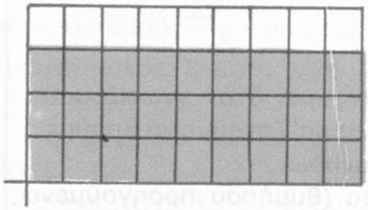
Ἐργασίες

1. Πρόσεξε τήν πρώτη σχηματική παράσταση καί συμπλήρωσε τίς ἄλλες.

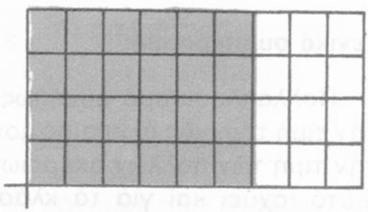




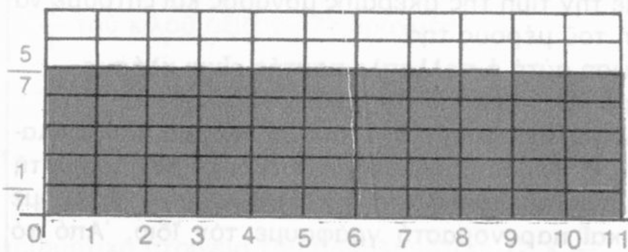
$5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4} =$



$36 \times \frac{3}{4} =$



$36 \times \frac{2}{3} =$



$\times \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} =$

Πρόσεξε: Ὑπολογίζουμε τό ἀποτέλεσμα, μετρώντας τίς κλασματικές μονάδες πού δημιουργοῦνται.

2. **Σκέψου, ὑπολόγισε, συμπλήρωσε.**

α) Πόσα ἑκατοστά εἶναι τά $\frac{3}{5}$ τοῦ μέτρου; . . . . . ἑκ.

Πόσα ἑκατοστά εἶναι τά $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου; . . . . . ἑκ.

Πόσα ἑκατοστά εἶναι τά $\frac{3}{8}$ τοῦ μέτρου; ..... ἑκ.

Πόσα ἑκατοστά εἶναι τά $\frac{5}{8}$ τοῦ μέτρου; ..... ἑκ.

Πόσα ἑκατοστά εἶναι τά $\frac{5}{10}$ τοῦ μέτρου; ..... ἑκ.

β) Πόσα γραμμάρια εἶναι τά $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ; ..... γρμ.

Πόσα γραμμάρια εἶναι τά $\frac{3}{5}$ τοῦ κιλοῦ; ..... γρμ.

Πόσα γραμμάρια εἶναι τά $\frac{6}{8}$ τοῦ κιλοῦ; ..... γρμ.

Πόσα γραμμάρια εἶναι τά $\frac{7}{10}$ τοῦ κιλοῦ; ..... γρμ.

γ) Πόσα λεπτά εἶναι τά $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας; ..... λ.

Πόσα λεπτά εἶναι τά $\frac{5}{6}$ τῆς ὥρας; ..... λ.

Πόσα λεπτά εἶναι τά $\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας; ..... λ.

Ἀσκήσεις:

1\. α) $45\times\frac{5}{9}=$, $72\times\frac{7}{12}=$, $64\times\frac{3}{16}=$, $99\times\frac{2}{3}=$,

β) $120\times\frac{7}{8}=$, $150\times\frac{4}{6}=$, $250\times\frac{16}{25}=$, $325\times\frac{7}{13}=$.

2\. Τό μέτρο ἑνός ὑφάσματος ἀξίζει 765 δραχμές.
Πόσο ἀξίζουν τά $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου;

3\. Ἕνα αὐτοκίνητο διατρέχει σέ μιά ὥρα 72 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα θά διατρέξει σέ $\frac{5}{12}$ τῆς ὥρας;

4\. Ὁ Κώστας ἔχει τά $\frac{3}{7}$ τῆς ἡλικίας τοῦ πατέρα του, πού εἶναι 49 ἐτῶν. Πόσων ἐτῶν εἶναι ὁ Κώστας;

5\. Ἕνας ποδηλάτης τρέχει 20 χιλιόμετρα τήν ὥρα. Πόσα χιλιόμετρα θά διατρέξει σέ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας;

6. Ὁ Γιάννης ἔχει τά $\frac{3}{12}$ τῆς ἡλικίας τοῦ πατέρα του, πού εἶναι 48 ἐτῶν. Πόσων ἐτῶν εἶναι ὁ Γιάννης;

7. Ἀπό τά 45 στρέμματα χωράφια πού εἶχε ἕνας γεωργός, πούλησε τά $\frac{3}{15}$ πρός 7.500 δραχμές τό στρέμμα. Πόσα χρήματα πῆρε;

8. Ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ἔχει μῆκος 25 μέτρα καί πλάτος τά $\frac{3}{5}$ τοῦ μήκους του. Πόσο εἶναι τό ἐμβαδόν του;

9. Στήν τάξη μας εἶναι 36 μαθητές. Ἀπό αὐτούς τά $\frac{5}{9}$ εἶναι ἀγόρια καί τά $\frac{8}{18}$ κορίτσια. Πόσα εἶναι τά ἀγόρια καί πόσα τά κορίτσια;

δ) Πολλαπλασιασμός κλάσματος μέ κλάσμα

Πρόσεξε καλά τά παρακάτω προβλήματα.

ι) Μιά εἰδικευμένη ἐργάτρια ὑφαίνει σέ μιά ὥρα $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου τάπητα. Πόσα μέτρα τάπητα ὑφαίνει σέ $\frac{4}{6}$ τῆς ὥρας;

Τί γνωρίζουμε; Τί ζητοῦμε; Τί θά κάνουμε;

Στό πρόβλημα αὐτό γνωρίζουμε πόσο τάπητα ὑφαίνει σέ μιά ὥρα καί ζητοῦμε νά βροῦμε πόσο ὑφαίνει σέ μέρος τῆς ὥρας. Μέ ὅσα ὥς τώρα γνωρίζεις, τί μποροῦμε νά κάνουμε; Πρίν προχωρήσουμε θυμήσου:

Πότε μικραίνει καί πότε μεγαλώνει ἕνα κλάσμα.

Σκέπτομαι ὅτι:

Ἀφοῦ σέ $\frac{6}{6}$ τῆς ὥρας ὑφαίνει $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου τάπητα,

σέ $\frac{1}{6}$ τῆς ὥρας ὑφαίνει 6 φορές λιγότερο τάπητα, $\frac{3}{4\times6}$

καί σέ $\frac{4}{6}$ τῆς ὥρας ὑφαίνει 4 φορές περισσότερο ἀπό ὅτι στό $\frac{1}{6}$,

δηλ. $(\frac{3}{4\times6})\times 4 = \frac{3\times4}{4\times6} = \frac{12}{24}$ τοῦ μέτρου τάπητα.

Ἀπλοποιώντας μέ τό 12 ἔχουμε $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου τάπητα.

Κάναμε λοιπόν **ἀναγωγή** στήν κλασματική μονάδα.

Ἀλλά γιά νά βροῦμε τό τελικό ἀποτέλεσμα βλέπουμε ὅτι πολλαπλασιάζουμε

$\frac{3\times4}{4\times6}$ δηλ. $\frac{3}{4}\times\frac{4}{6}$ δηλ. τά ἀριθμητικά στοιχεῖα τοῦ προβλήματος.

Πρόσεξε τώρα:

Τί γνωρίζαμε; Τό ἔργο πού γινόταν σέ μιά ὥρα,
τήν τιμή τῆς ἀκέραιης μονάδας.

Τί ζητούσαμε; Τό ἔργο πού γίνεται σέ μέρος τῆς ὥρας,
τήν τιμή τοῦ μέρους (κλασματικῶν μονάδων)

Σοῦ θυμίζει τίποτε αὐτό;

ιι) Μιά φιάλη χωρεῖ $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ λάδι.

Πόσο λάδι χωρεῖ στό $\frac{1}{2}$ τῆς φιάλης;

Καί πόσο λάδι χωρεῖ στά $\frac{6}{8}$ τῆς φιάλης;

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω γνωρίζουμε τί το λάδι χωρεῖ σέ ὁλόκληρη τή φιάλη καί ζητοῦμε νά βροῦμε πόσο χωρεῖ σέ μέρος τῆς φιάλης.

Γιά τό α΄ μέρος τοῦ προβλήματος σκέπτομαι ὅτι:

Ἀφοῦ ὁλόκληρη ἡ φιάλη χωρεῖ $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ λάδι, στό $\frac{1}{2}$ τῆς φιάλης χωρεῖ τό μισό λάδι, δηλ. τά $\frac{2}{5}$ τοῦ κιλοῦ.

Γιά τό β΄ μέρος τοῦ προβλήματος σκέπτομαι ὅτι:

Ἀφοῦ στά $\frac{8}{8}$ τῆς φιάλης χωρεῖ $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ λάδι,

στό $\frac{1}{8}$ τῆς φιάλης χωρεῖ 8 φορές λιγότερο, δηλ. $\frac{4}{5\times8}$

Στά $\frac{6}{8}$ τῆς φιάλης χωρεῖ 6 φορές περισσότερο ἀπό τό $\frac{1}{8}$

δηλ. $(\frac{4}{5\times8})\times6=\frac{4\times6}{5\times8}=\frac{24:8}{40:8}=\frac{3}{5}$ τοῦ κιλοῦ λάδι.

Κάναμε πάλι ἀναγωγή στήν κλασματική μονάδα τοῦ ὄγκου τῆς φιάλης.

Ἀλλά, γιά νά βροῦμε τό τελικό ἀποτέλεσμα πολλαπλασιάζουμε $\frac{4\times6}{5\times8}$ δηλ. $\frac{4}{5}\times\frac{6}{8}$, τά ἀριθμητικά στοιχεῖα τοῦ προβλήματος.

Ἀπό τά προηγούμενα παραδείγματα βγάζουμε τό συμπέρασμα ὅτι:

Ὅταν γνωρίζουμε τήν τιμή τῆς ἀκέραιης μονάδας καί ζητοῦμε νά βροῦμε τήν τιμή τοῦ μέρους, τότε κάνουμε **ἀναγωγή στήν κλασματική μονάδα ἤ πολλαπλασιασμό κλάσματος μέ κλάσμα.**

Πρόσεξε: Ὅπως βλέπεις ἐδῶ ἡ τιμή τῆς ἀκέραιης μονάδας δίνεται σέ κλάσμα καί ἀφοῦ τό μέρος εἶναι κλάσμα, ἔχουμε πολλαπλασιασμό κλάσματος μέ κλάσμα.

Πρόσεξε πῶς κάνουμε τήν πράξη:

> **Γιά νά πολλαπλασιάσουμε κλάσμα μέ κλάσμα,** πολλαπλασιάζουμε ἀριθμητή μέ ἀριθμητή καί τό γινόμενο γράφουμε ἀριθμητή καί παρονομαστή μέ παρονομαστή καί τό γινόμενο γράφουμε παρονομαστή.

Πρόσεξε ἀκόμη:

Μποροῦμε νά ἀντιμεταθέσουμε τούς δυό παράγοντες, χωρίς νά ἀλλάξει τό ἀποτέλεσμα. **Ὅμως** πρέπει τό κλάσμα, πού ζητοῦμε τήν τιμή του, νά μπαίνει πολλαπλασιαστής. Μέ λίγη προσοχή θά τό καταλαβαίνεις.

Γενικές παρατηρήσεις

Στά προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ ἀκέραιου μέ κλάσμα καί κλάσματος μέ κλάσμα γίνεται ἡ ὁλοκλήρωση τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στά κλάσματα. Πρέπει ἀπό τήν ἀρχή νά ξεκαθαρίζουμε, ὅτι:

α) Ἡ πράξη γίνεται ὅταν γνωρίζουμε τήν τιμή τῆς ἀκέραιης μονάδας (ἤ συνόλου) καί ζητοῦμε τήν τιμή τοῦ μέρους της.

β) **Πολλαπλασιαστέος** εἶναι ὁ ἀριθμός πού φανερώνει τήν τιμή τῆς ἀκέραιης μονάδας.

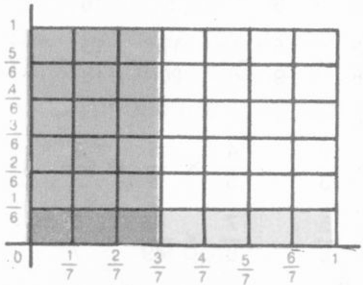
γ) **Πολλαπλασιαστής** εἶναι ὁ ἀριθμός πού φανερώνει τό μέρος τοῦ ὁποίου ζητοῦμε τήν τιμή, καί **εἶναι πάντα κλάσμα.**

δ) Τό πρόβλημα λύνεται καί μέ ἀναγωγή στήν κλασματική μονάδα.

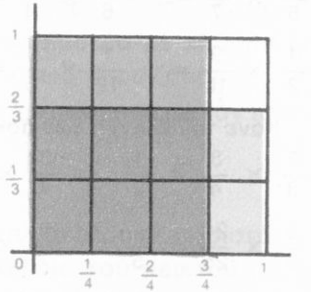
Ἐργασίες

Πρόσεξε τίς σχηματικές παραστάσεις καί συμπλήρωσέ τες.

α)

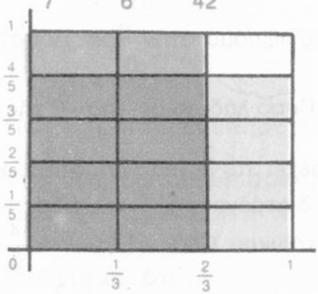


$$\frac{3}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{42}$$

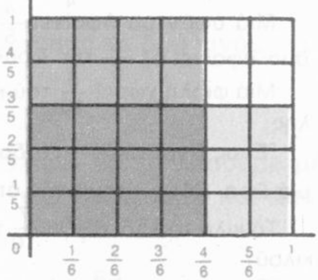


$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

β)

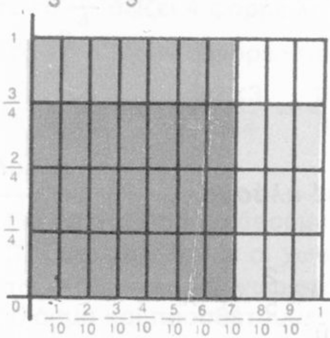


$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} =$$

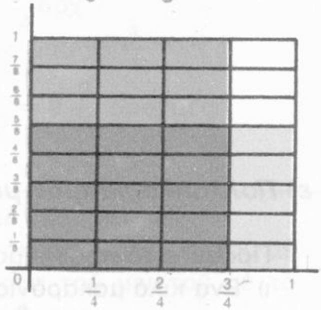


$$\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} =$$

γ)



$$\frac{7}{10} \times \frac{3}{4} =$$



$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{8} =$$

1. Λύσε τίς ἀσκήσεις:

α) $\frac{1}{5} \times \frac{6}{7} =$, $\frac{5}{6} \times \frac{1}{4} =$, $\frac{4}{5} \times \frac{5}{6} =$, $\frac{4}{5} \times \frac{15}{16} =$,

β) $\frac{1}{2} \times \frac{9}{10} =$, $\frac{1}{12} \times \frac{1}{5} =$, $\frac{3}{8} \times \frac{5}{9} =$, $\frac{17}{20} \times \frac{15}{18} =$.

2. Κάνε τόν ἔλεγχο τῶν ἀσκήσεων.

α) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{2}{3}$, $\frac{4}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$,

β) $\frac{5}{6} \times \frac{24}{25} = \frac{4}{5}$, $\frac{6}{7} \times \frac{35}{36} = \frac{5}{6}$, $\frac{7}{8} \times \frac{48}{49} = \frac{6}{7}$.

3. Μιά ἐργάτρια πλέκει σέ μιά ὥρα $\frac{6}{8}$ τοῦ μέτρου δαντέλα. Πόσο μῆκος δαντέλας πλέκει σέ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας;

4. Μιά ὑφάντρα ὑφαίνει $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου ὕφασμα στήν ὥρα. Πόσο ὕφασμα ὑφαίνει σέ $\frac{5}{6}$ τῆς ὥρας;

5. Μιά φιάλη χωρεῖ $\frac{8}{10}$ τοῦ κιλοῦ λάδι. Πόσο λάδι χωρεῖ στά $\frac{3}{5}$ τῆς φιάλης;

6. Ἕνας ἀγροτικός ταχυδρόμος διατρέχει τά $\frac{3}{5}$ μιᾶς ἀποστάσεως σέ μιά ὥρα. Πόσο τμῆμα τῆς ἀποστάσεως διατρέχει σέ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας;

7. Τό κιλό τό λάδι ἀξίζει $\frac{7}{10}$ τοῦ ἑκατοστάρικου. Πόσο ἀξίζουν τά $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ;

8. Ἕνα τριγωνικό χωράφι ἔχει βάση 55 μέτρα καί ὕψος τά $\frac{3}{5}$ τοῦ μήκους του. Πόσο εἶναι τό ἐμβαδόν του;

ε) Πολλαπλασιασμός μεικτοῦ μέ κλάσμα

Πρόσεξε τό πρόβλημα:

ι) Ἕνα κιλό μακαρόνια ἀξίζουν $12\frac{2}{5}$ δραχμές.

Πόσο ἀξίζουν τά $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ;

Τί γνωρίζουμε; Τί ζητοῦμε; Τί θά κάνουμε;

Γνωρίζουμε τήν ἀξία τοῦ ἑνός κιλοῦ καί ζητοῦμε τήν ἀξία μέρους του. Ἄρα θά κάνουμε πολλαπλασιασμό.

Ἔχουμε λοιπόν $12\,\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{62}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{186}{20} = 9\,\frac{6}{20} = 9\,\frac{3}{10}$ δρχ.

Δηλ. τρέπουμε τόν μεικτό πολλαπλασιαστέο σέ κλάσμα καί πολλαπλασιάζουμε κλάσμα μέ κλάσμα ὅπως γνωρίζουμε.

Ἀκόμη μποροῦμε νά βροῦμε τό ἴδιο ἀποτέλεσμα μέ τόν παρακάτω τρόπο.

$12\,\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = ;$

$12 \times \frac{3}{4} = \frac{36}{4} = 9$ δρχ.

$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ δρχ.

$9 + \frac{3}{10} = 9\,\frac{3}{10}$ δρχ.

Πολλαπλασιάζουμε χωριστά:

α) Τόν ἀκέραιο τοῦ μεικτοῦ μέ τό κλάσμα (πολλαπλασιαστή).

β) Τό κλάσμα τοῦ μεικτοῦ μέ τό κλάσμα.

Προσθέτουμε τά δυό γινόμενα.

Ποιός τρόπος ἐξυπηρετεῖ καλύτερα;

Σημείωση: Μποροῦμε τό πρόβλημα νά τό λύσουμε μέ ἀναγωγή; Σκέψου τί γνωρίζουμε καί τί ζητοῦμε καί ἀπάντησε.

Σκέπτομαι ὅτι:

Ἀφοῦ τό κιλό, τά $\frac{4}{4}$ κ. ἀξίζουν $12\frac{2}{5}$ δηλαδή $\frac{62}{5}$ δραχμές;

τότε τό $\frac{1}{4}$ ἀξίζει 4 φορές λιγότερο, $\frac{62}{5\times4}$ δρχ.

καί τά $\frac{3}{4}$ ἀξίζουν 3 φορές περισσότερο ἀπό τό $\frac{1}{4}$

δηλ. $\left(\frac{62}{5\times4}\right)\times3 = \frac{62\times3}{5\times4} = \frac{186}{20} = 9\,\frac{6}{20} = 9\,\frac{3}{10}$ δραχμές

Λοιπόν:

Γιά νά πολλαπλασιάσουμε μεικτό μέ κλάσμα:
Πολλαπλασιάζουμε α) χωριστά τόν ἀκέραιο τοῦ μεικτοῦ μέ τό κλάσμα καί β) χωριστά τό κλάσμα τοῦ μεικτοῦ μέ τό κλάσμα καί προσθέτουμε τά δυό γινόμενα.
Ἤ τρέπουμε τόν μεικτό πολλαπλασιαστέο σέ κλάσμα, καί πολλαπλασιάζουμε κλάσμα μέ κλάσμα.

Παρατήρηση: Ταιριάζουν κι ἐδῶ οἱ παρατηρήσεις πού κάναμε στά προηγούμενα μαθήματα, ὅπου ὁ πολλαπλασιαστής εἶναι κλάσμα.

στ) Πολλαπλασιασμός ἀκέραιου μέ μεικτό ἀριθμό

Πρόσεξε τό πρόβλημα:

ι) Ἕνα κιλό μῆλα ἀξίζει 24 δραχμές.

Πόσο ἀξίζουν τά $3\frac{2}{5}$ κιλά;

Τί γνωρίζουμε; Τί ζητοῦμε; Τί θά κάνουμε;

Μέ ὅσα ὥς τώρα μάθαμε θά κάνουμε πολλαπλασιασμό. Θά ἐπαναλάβουμε τήν τιμή τοῦ κιλοῦ τῶν μήλων, μέ ἀκέραιες καί κλασματικές μονάδες.

Ἔχουμε λοιπόν: $24 \times 3\frac{2}{5} = 24 \times \frac{17}{5} = \frac{408}{5} = 81\frac{3}{5}$ δραχμές

Δηλ. Τρέπουμε τόν μεικτό πολλαπλασιαστή σέ κλάσμα καί πολλαπλασιάζουμε ἀκέραιο μέ κλάσμα ὅπως γνωρίζουμε.

Μποροῦμε ὅμως νά ἀκολουθήσουμε καί ἄλλο τρόπο:

Πρόσεξε τήν παρακάτω διάταξη.

$24 \times 3\frac{2}{5} =$

$24 \times 3 = 72$ δρχ.

$24 \times \frac{2}{5} = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$ δρχ.

$72 + 9\frac{3}{5} = 81\frac{3}{5}$ δρχ.

Πολλαπλασιάζουμε χωριστά:
Τόν ἀκέραιο πολλαπλασιαστέο μέ τόν ἀκέραιο τοῦ μεικτοῦ
Τόν ἀκέραιο πολλαπλασιαστέο μέ τό κλάσμα τοῦ μεικτοῦ·
Καί προσθέτουμε τά δυό γινόμενα.

Τί σοῦ θυμίζει; Ποιός τρόπος ἐξυπηρετεῖ καλύτερα;

Προσπάθησε νά βγάλεις τόν κανόνα.

Ἐργασίες

1. Λύσε τίς ἀσκήσεις:

$7 \times 4\frac{1}{2} = .\quad 25 \times 3\frac{2}{5} = .\quad 12 \times 6\frac{3}{9} = .\quad 15 \times 5\frac{7}{11} = .\quad 35 \times 15\frac{5}{6} = .$

2. Ἕνα κιλό ζάχαρη ἀξίζει 23 δρχ. Πόσο ἀξίζουν $17\frac{1}{2}$ κιλά;
3. Ἕνα κιλό καφές ἀξίζει 235 δρχ. Πόσο ἀξίζουν $5\frac{3}{4}$ κιλά;
4. Ἕνας ποδηλάτης διατρέχει 17 χλμ. τήν ὥρα. Πόσα χλμ. θά διατρέξει σέ $3\frac{5}{6}$ ὧρες;
5. Ὁ ἦχος τρέχει στόν ἀέρα 340 μέτρα τό δευτερόλεπτο. Πόσα μέτρα θά διατρέξει σέ $12\frac{4}{5}$ δευτερόλεπτα;
6. Πόσες ὧρες εἶναι $2\frac{2}{12}$ μέρες;
7. Πόσες ἡμέρες εἶναι $4\frac{3}{7}$ ἑβδομάδες;
8. Πόσοι μῆνες εἶναι $5\frac{2}{3}$ ἔτη;

Συμπληρωματικές ἀσκήσεις

1. Λύσε τίς ἀσκήσεις.

α) $3\frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = .\quad 8\frac{6}{9} \times \frac{2}{3} = .\quad 6\frac{5}{10} \times \frac{4}{6} = .\quad 12\frac{2}{3} \times \frac{11}{15} = .$

β) $23\frac{3}{4} \times \frac{7}{9} = .\quad 29\frac{3}{5} \times \frac{15}{20} = .\quad 48\frac{1}{2} \times \frac{18}{25} = .\quad 73\frac{3}{7} \times \frac{20}{30} = .$

2. Ἕνα κιλό σιτάρι ἀξίζει $12\frac{2}{5}$ δρχ. Πόσο ἀξίζουν τά $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ;
3. Ἕνα κιλό ζάχαρη ἔχει $23\frac{1}{2}$ δραχμές. Πόσο ἔχουν τά $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ;
4. Ἕνα αὐτοκίνητο τρέχει μέ μέση ταχύτητα $75\frac{4}{5}$ χλμ. τήν ὥρα. Πόσα χιλιόμετρα διατρέχει σέ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας;
5. Τό μέτρο ἑνός ὑφάσματος ἀξίζει $245\frac{1}{2}$ δραχμές. Πόσο ἀξίζουν τά $\frac{5}{8}$ τοῦ μέτρου.
6. Τό τετραγωνικό μέτρο ἑνός τάπητα ἀξίζει $725\frac{1}{2}$ δρχ. Πόσο ἀξίζουν τά $\frac{16}{20}$ τοῦ τ. μέτρου;

ζ) Πολλαπλασιασμός κλάσματος μέ μεικτό

Πρόσεξε τό πρόβλημα:

Ένας κολυμβητής διατρέχει σέ μιά ώρα $\frac{4}{5}$ τοῦ μιλίου. Πόσα μίλια θά διατρέξει σέ $3\frac{3}{4}$ ὥρες;

Τί γνωρίζουμε; Τί ζητοῦμε; Τί θά κάνουμε;

Θά ἐπαναλάβουμε τήν ἀπόσταση πού διατρέχει σέ μιά ὥρα, μέ ἀκέραιες καί κλασματικές μονάδες.

Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{4}{5} \times 3\frac{3}{4} = \frac{4}{5} \times \frac{15}{4} = \frac{60:10}{20:10} = \frac{6}{2} = 3 \text{ μίλια.}$$

Τρέπουμε τόν μεικτό πολλαπλασιαστή σέ κλάσμα καί πολλαπλασιάζουμε κλάσμα μέ κλάσμα, ὅπως γνωρίζουμε.

Μποροῦμε ὅμως νά ἀκολουθήσουμε καί ἄλλο τρόπο.

Πρόσεξε τή διάταξη:

$$\frac{4}{5} \times 3\frac{3}{4} =$$

$$\frac{4}{5} \times 3 = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{12:4}{20:4} = \frac{3}{5}$$

$$2\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 2\frac{5}{5} = 3 \text{ μίλια}$$

Πολλαπλασιάζουμε χωριστά, τόν κλασματικό πολλαπλασιαστέο μέ τόν ἀκέραιο τοῦ μεικτοῦ πολλαπλασιαστῆ. Τόν κλασματικό πολλαπλασιαστέο, μέ τό κλάσμα τοῦ μεικτοῦ πολλαπλασιαστῆ, καί προσθέτουμε τά δυό γινόμενα.

Τί σοῦ θυμίζει; Ποιός τρόπος ἐξυπηρετεῖ καλύτερα;

Προσπάθησε νά βγάλεις τόν κανόνα.

Ἐργασίες

1. Λύσε τίς ἀσκήσεις.

α) $\frac{3}{5} \times 2\frac{1}{2} =$, $\frac{6}{8} \times 7\frac{2}{3} =$, $\frac{6}{9} \times 12\frac{3}{5} =$,

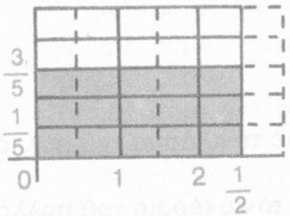
β) $\frac{11}{13} \times 7\frac{2}{5} =$, $\frac{25}{60} \times 3\frac{3}{9} =$, $\frac{75}{100} \times 5\frac{6}{8} =$,

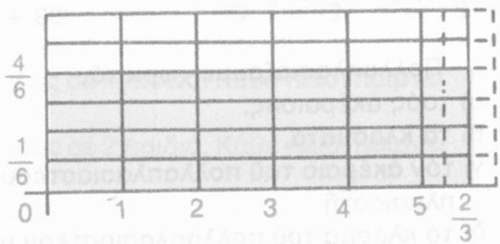
2. Μιά θερμάστρα καίει $\frac{3}{8}$ τοῦ κιλοῦ πετρέλαιο τήν ὥρα. Πόσο πετρέλαιο θά κάψει σέ $3\frac{2}{5}$ ὧρες;

3. Ἕνα αὐτοκίνητο καίει $\frac{3}{35}$ τοῦ κιλοῦ βενζίνη στό χιλιόμετρο. Πόση βενζίνη καίει σέ $37\frac{2}{5}$ χιλιόμετρα;

4. Ἕνας κολυμβητής διατρέχει $\frac{3}{4}$ τοῦ μιλίου τήν ὥρα. Πόση ἀπόσταση θά διατρέξει σέ $2\frac{1}{2}$ ὧρες;

5. Πρόσεξε τίς σχηματικές παραστάσεις καί συμπλήρωσέ τες.





$\frac{3}{5} \times 2\frac{1}{2} =$ $\qquad$ $\frac{4}{6} \times 5\frac{2}{3} =$

η) Πολλαπλασιασμός μεικτοῦ μέ μεικτό

Πρόσεξε τό πρόβλημα:

ι) Ἕνα μέτρο χρυσοκορδέλα ἀξίζει $12\frac{1}{2}$ δραχμές.
Πόσο ἀξίζουν τά $5\frac{3}{5}$ μέτρα;
Τί γνωρίζουμε; Τί ζητοῦμε; Τί θά κάνουμε;

Παρατηροῦμε ὅτι καί οἱ δυό παράγοντες εἶναι μεικτοί. Μέ ὅσα ὥς τώρα γνωρίζεις μπορεῖς νά βρεῖς τή λύση;

Λοιπόν ἔχουμε: $12\frac{1}{2} \times 5\frac{3}{5} = \frac{25}{2} \times \frac{28}{5} = \frac{700}{10} = 70$ δραχμές.

Τρέπουμε τούς μεικτούς σέ κλάσματα καί πολλαπλασιάζουμε κλάσμα μέ κλάσμα, ὅπως γνωρίζουμε.

Μποροῦμε νά ἀκολουθήσουμε καί ἄλλο τρόπο:
Πρόσεξε τή διάταξη.

$$12\frac{1}{2}\times 5\frac{3}{5}=70$$
$$12\times 5=60$$
$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$
$$12\times\frac{3}{5}=\frac{36}{5}=7\frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{2}\times 5=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$$

$$60+\frac{3}{10}+7\frac{1}{5}+2\frac{1}{2}=70$$
$$60+7+2=69$$
$$\overset{1}{\frac{3}{10}}+\overset{2}{\frac{1}{5}}+\overset{5}{\frac{1}{2}}=$$
$$=\frac{3}{10}+\frac{2}{10}+\frac{5}{10}=\frac{10}{10}=1$$
$$69+1=70$$

Πολλαπλασιάζουμε χωριστά,

α) τούς ἀκέραιους,

β) τά κλάσματα,

γ) τόν ἀκέραιο τοῦ πολλαπλασιαστέου μέ τό κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστῆ

δ) τό κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστέου μέ τόν ἀκέραιο τοῦ πολλαπλασιαστῆ καί προσθέτουμε τά τέσσερα γινόμενα.

Ποιός τρόπος ἐξυπηρετεῖ καλύτερα;

Προσπάθησε νά βγάλεις τόν κανόνα.

Ἐργασίες

1. Λύσε τίς ἀσκήσεις.

$7\frac{3}{5}\times 5\frac{4}{9}=$, $6\frac{5}{8}\times 9\frac{3}{12}=$, $15\frac{1}{3}\times 12\frac{7}{15}=$; $25\frac{2}{9}\times 20\frac{12}{18}=$.

2. Τό κιλό τό ρύζι ἀξίζει $32\frac{1}{2}$ δραχμές. Πόσο ἀξίζουν τά $7\frac{3}{5}$ κιλά;
3. Ἕνα αὐτοκίνητο τρέχει μέ $65\frac{1}{2}$ χλμ. τήν ὥρα. Πόσα χιλιόμετρα θά διατρέξει σέ $7\frac{2}{3}$ ὧρες.
4. Ἕνα πλοῖο πλέει μέ $18\frac{3}{5}$ μίλια τήν ὥρα. Πόσα μίλια θά κάνει σέ $9\frac{3}{4}$ ὧρες;
5. Πόσο εἶναι τό ἐμβαδόν ἑνός ὀρθογώνιου χωραφιοῦ πού ἔχει πλευρές $42\frac{3}{5}$ μ. καί $18\frac{1}{4}$ μ.;

4. ΔΙΑΙΡΕΣΗ

α) Διαίρεση κλάσματος μέ ἀκέραιο

ι) Ὁ ἀριθμητής διαιρεῖται ἀπό τόν ἀκέραιο

Πρόσεξε, σκέψου, ὑπολόγισε, ἀπάντησε.

Μοιράζουμε 6 δεκάρες σέ 2 παιδιά. Κάθε παιδί παίρνει 3 δεκάρες.
Μοιράζουμε 6 δεκάρες σέ 3 παιδιά. Κάθε παιδί παίρνει δεκάρες.
Μοιράζουμε 6 δεκάρες σέ 6 παιδιά. Κάθε παιδί παίρνει δεκάρες.
Μοιράζουμε 4 εἰκοσάρες σέ 4 παιδιά. Κάθε παιδί παίρνει εἰκοσάρες.
Μοιράζουμε 4 εἰκοσάρες σέ 2 παιδιά. Κάθε παιδί παίρνει εἰκοσάρες.

Τώρα σκέψου:

Τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι οἱ 6 δεκάρες;
Τί μέρος τῆς δραχμῆς παίρνει κάθε παιδί σέ κάθε περίπτωση;
Τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι οἱ 4 εἰκοσάρες;
Τί μέρος τῆς δραχμῆς παίρνει κάθε παιδί σέ κάθε περίπτωση;

Πρόσεξε τό παρακάτω πρόβλημα.

Τρία παιδιά μοιράστηκαν $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ κεράσια. Πόσα κεράσια πῆρε κάθε παιδί; Κάθε παιδί πῆρε κιλοῦ κεράσια.

Τί γνωρίζουμε; Τί ζητοῦμε; Τί θά κάνουμε;

Γνωρίζουμε πόσα κεράσια πῆραν καί τά τρία παιδιά καί ζητοῦμε νά βροῦμε πόσα κεράσια πῆρε κάθε παιδί.

Ὅπως καταλαβαίνεις, θά κάνουμε διαίρεση.

Ποιός εἶναι ὁ διαιρετέος;

Ποιός εἶναι ὁ διαιρέτης;

Λοιπόν ἔχουμε $\frac{3}{4} : 3 = \frac{3:3}{4} = \frac{1}{4}$ κιλοῦ κεράσια.

Διαιροῦμε τόν ἀριθμητή μέ τόν ἀκέραιο καί παρονομαστή ἀφήνουμε τόν ἴδιο.

Θυμήσου πότε μικραίνει ἕνα κλάσμα;

Σύμφωνα μέ τήν παραπάνω ἰδιότητα τί ἄλλο μποροῦμε νά κάνουμε;

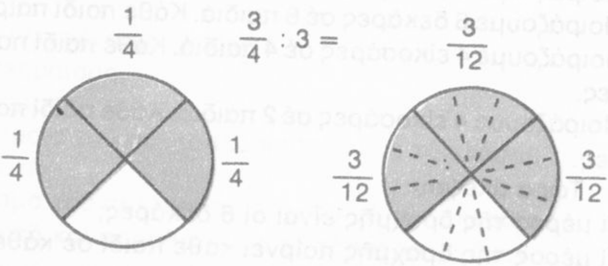
Μποροῦμε νά πολλαπλασιάσουμε τόν παρονομαστή μέ τόν ἀκέραιο καί ν' ἀφήσουμε τόν ἴδιο ἀριθμητή.

$\frac{3}{4} : 3 = \frac{3}{4\times3} = \frac{3}{12}$ τοῦ κιλοῦ.

Ἄν ἁπλοποιήσουμε μέ 3 ἔχουμε:

$\frac{3:3}{12:3} = \frac{1}{4}$ τοῦ κιλοῦ κεράσια.

Πρόσεξε τά σχήματα:



ιι) Ὁ ἀριθμητής δέ διαιρεῖται ἀπό τόν ἀκέραιο

Πρόσεξε τό παρακάτω πρόβλημα:

Ἕξη παιδιά μοιράστηκαν $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ κεράσια. Πόσα πῆρε κάθε παιδί;

Σύμφωνα μέ ὅσα γνωρίζουμε θά κάνουμε διαίρεση.

Θά διαιρέσουμε τά $\frac{3}{4}$ μέ τό 6. $\frac{3}{4} : 6 =$;

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἀριθμητής δέν διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπό τόν ἀκέραιο. Τί θά κάνουμε τώρα;

Θά ἐφαρμόσουμε τό β΄ μέρος τῆς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων, δηλαδή θά πολλαπλασιάσουμε τόν παρονομαστή

$\frac{3}{4} : 6 = \frac{3}{4\times6} = \frac{3:3}{24:3} = \frac{1}{8}$ τοῦ κιλοῦ.

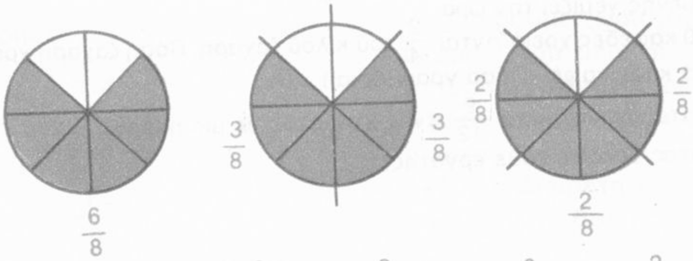
Ὅπως βλέπεις στό δεύτερο πρόβλημα τά παιδιά εἶναι διπλάσια γι' αὐτό παίρνουν τά μισά κεράσια καθένα.

Ἀπό τά προηγούμενα βγαίνει τό συμπέρασμα.

Γιά νά διαιρέσουμε κλάσμα μέ ἀκέραιο, ἤ διαιροῦμε τόν ἀριθμητή ἄν διαιρεῖται ἀκριβῶς καί παρονομαστή ἀφήνουμε τόν ἴδιο, ἤ πολλαπλασιάζουμε τόν παρονομαστή μέ τόν ἀκέραιο καί τό γινόμενο γράφουμε παρονομαστή καί ἀριθμητή ἀφήνουμε τόν ἴδιο.

Ἐργασίες

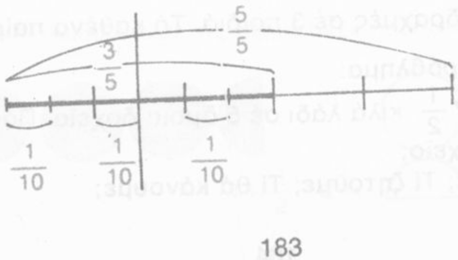
Πρόσεξε τίς σχηματικές παραστάσεις καί συμπλήρωσε τίς ἄλλες.



$\frac{6}{8} : 2 = \frac{3}{8}$ $\qquad$ $\frac{6}{8} : 3 = \frac{2}{8}$

α) 

$\frac{1}{2} : 2 =$ $\qquad$ $\frac{1}{2} : 3 =$ $\qquad$ $\frac{1}{2} : 4 =$ $\qquad$ $\frac{1}{2} : 5 =$

β) 

$\frac{3}{5} : 2 =$

1. Λύσε τίς ἀσκήσεις:

α) $\frac{10}{15} : 5 =$ $\frac{12}{20} : 6 =$, $\frac{21}{25} : 7 =$, $\frac{11}{55} : 9 =$,

β) $\frac{12}{18} : 12 =$, $\frac{75}{100} : 3 =$, $\frac{60}{90} : 15 =$, $\frac{125}{150} : 25 =$.

Προβλήματα

2. Ἕνας ἐργάτης ἔσκαψε σέ 5 ὧρες τά $\frac{4}{5}$ ἑνός κήπου. Τί μέρος τοῦ κήπου σκάβει σέ μιά ὥρα;
3. Μιά βρύση γεμίζει σέ 4 ὧρες τά $\frac{6}{8}$ μιᾶς δεξαμενῆς. Τί μέρος τῆς δεξαμενῆς γεμίζει τήν ὥρα;
4. Γιά 20 καφέδες χρειάζονται $\frac{2}{4}$ τοῦ κιλοῦ ζάχαρη. Πόση ζάχαρη χρειάζεται γιά κάθε καφέ; (Πόσα γραμμάρια;)
5. 6 ἐργάτες ἔσκαψαν τά $\frac{9}{12}$ ἑνός κτήματος σέ μιά ἡμέρα. Τί μέρος τοῦ κτήματος ἔσκαψε κάθε ἐργάτης;

β) Διαίρεση μεικτοῦ μέ ἀκέραιο

Σκέψου καί ἀπάντησε:

Μοιράζουμε $1\frac{1}{2}$ δραχμή σέ 3 παιδιά. Τό καθένα παίρνει $\frac{1}{2}$ δρχ.
Μοιράζουμε 3 δραχμές σέ 2 παιδιά. Τό καθένα παίρνει $1\frac{1}{2}$ δρχ.
Μοιράζουμε $4\frac{1}{2}$ δραχμές σέ 3 παιδιά. Τό καθένα παίρνει δρχ.
Μοιράζουμε $7\frac{1}{2}$ δραχμές σέ 3 παιδιά. Τό καθένα παίρνει δρχ.

Πρόσεξε τό πρόβλημα:

Μοιράσαμε $17\frac{1}{2}$ κιλά λάδι σέ 5 ὅμοια δοχεῖα. Πόσο λάδι βάλαμε σέ κάθε δοχεῖο;

Τί γνωρίζουμε; Τί ζητοῦμε; Τί θά κάνουμε;

Ἀφοῦ μοιράζουμε $17\frac{1}{2}$ κιλά λάδι σέ 5 δοχεῖα θά κάνουμε διαίρεση.

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὁ διαιρετέος εἶναι μεικτός ἀριθμός καί ὁ διαιρέτης ἀκέραιος.

Ἔχουμε λοιπόν:

Α΄ τρόπος

$$17\frac{1}{2} : 5 = \frac{35}{2} : 5 = \frac{35:5}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2} \text{ κιλά.}$$

Τρέπουμε τό μεικτό σέ κλάσμα καί διαιροῦμε, κλάσμα μέ ἀκέραιο ὅπως γνωρίζουμε.

Β΄ τρόπος

$$17\frac{1}{2} : 5 = 3\frac{1}{2}$$

$$17:5 = 3\frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{2} : 5 = \frac{1}{10}$$

Διαιροῦμε χωριστά, τόν ἀκέραιο τοῦ μεικτοῦ διαιρετέου μέ τόν ἀκέραιο διαιρέτη καί τό κλάσμα τοῦ μεικτοῦ διαιρετέου μέ τόν ἀκέραιο διαιρέτη καί προσθέτουμε τά δυό πηλίκα.

$$3\frac{2}{5} + \frac{1}{10} = 3\frac{4}{10} + \frac{1}{10} = 3\frac{5}{10} =$$

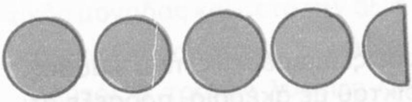
$$3\frac{5:5}{10:5} = 3\frac{1}{2} \text{ κιλά}$$

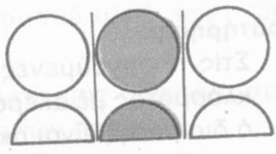
Ποιός τρόπος ἐξυπηρετεῖ καλύτερα;

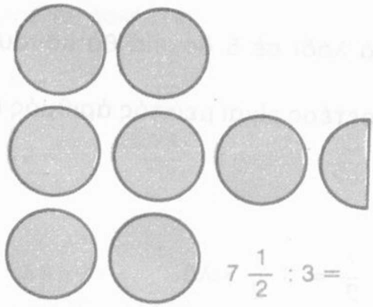
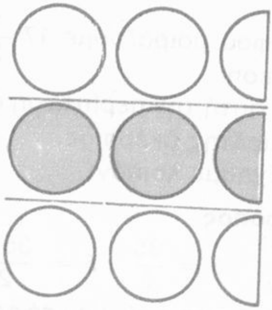
Προσπάθησε νά βγάλεις τόν κανόνα.

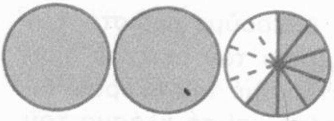
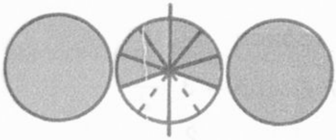
Ἐργασίες

1. Πρόσεξε καί συμπλήρωσε τίς σχηματικές παραστάσεις.

α) 

$4\frac{1}{2} : 3 =$ 

β)  $7\frac{1}{2} : 3 =$ 

γ)  $2\frac{6}{10} : 2 =$ 

2. Λύσε τίς ἀσκήσεις.

α) $9\frac{3}{5} : 3 =$, $12\frac{4}{6} : 4 =$, $15\frac{10}{15} : 5 =$, $27\frac{18}{24} : 9 =$.

β) $35\frac{6}{9} : 7 =$, $72\frac{6}{10} : 12 =$, $128\frac{7}{8} : 15 =$, $275\frac{3}{5} : 25 =$.

3. Τά 5 μέτρα ἑνός ὑφάσματος ἀξίζουν $157\frac{1}{2}$ δραχμές. Πόσες δραχμές ἀξίζει τό μέτρο;

4. Ἕνα πλοῖο διέτρεξε σέ 7 ὧρες $116\frac{1}{5}$ μίλια. Πόσα μίλια διατρέχει τήν ὥρα;

5. Μέ $846\frac{2}{5}$ δραχμές ἀγοράζουμε 8 κιλά κρέας. Πόσες δραχμές ἀξίζει τό κιλό;

6. Ἕνας ἔμπορος ἀπό 13 μέτρα ὕφασμα πού πούλησε, κέρδισε $257\frac{1}{2}$ δραχμές. Πόσο κέρδισε σέ κάθε μέτρο;

Παρατήρηση:

Στίς προηγούμενες περιπτώσεις διαιρέσεως πού ἔμαθες, κλάσματος μέ ἀκέραιο καί μεικτοῦ μέ ἀκέραιο, πρόσεξε ὅτι ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

γ) Διαίρεση ἀκέραιου μέ κλάσμα

Πρόσεξε καλά τά παρακάτω προβλήματα.

ι) Τά $\frac{2}{3}$ τοῦ μέτρου κορδέλας ἀξίζουν 6 δραχμές. Πόσες δραχμές ἀξίζει τό ἕνα μέτρο;

Τί γνωρίζουμε; Τί ζητοῦμε; Τί θά κάνουμε;

Ἀσφαλῶς θά βρεῖς εὔκολα τήν ἀπάντηση ἄν γνωρίζεις πόσο ἀξίζει τό $\frac{1}{3}$ τοῦ μέτρου.

ιι) Τά $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ τό σιτάρι ἀξίζει 9 δραχμές. Πόσες δραχμές ἀξίζει τό κιλό;

Ἐδῶ πάλι γνωρίζουμε πόσο ἀξίζει **ἕνα μέρος τοῦ κιλοῦ** (τά $\frac{3}{4}$) καί ζητοῦμε νά βροῦμε πόσο ἀξίζει **ὁλόκληρο τό κιλό** (τά $\frac{4}{4}$).

Σκέπτομαι ὅτι θά εἶναι πιό εὔκολο ἄν γνωρίζω τήν ἀξία τοῦ $\frac{1}{4}$ τοῦ κιλοῦ.

Λοιπόν: Ἀφοῦ τά $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ ἀξίζουν 9 δραχμές,

τότε τό $\frac{1}{4}$ τοῦ κιλοῦ ἀξίζει 3 φορές λιγότερο, δηλ. $\frac{9}{3} =$ 3 δρχ.

καί τά $\frac{4}{4}$ τοῦ κιλοῦ ἀξίζουν 4 φορές περισσότερο ἀπό τό $\frac{1}{4}$ κ.

δηλ. $3 \times 4 = 12$ δραχμές τό κιλό.

Βρίσκουμε πρῶτα τήν ἀξία τοῦ $\frac{1}{4}$ τοῦ κιλοῦ, τῆς μιᾶς κλασματικῆς μονάδας καί μετά τήν ἀξία ὁλόκληρου τοῦ κιλοῦ, τῶν περισσότερων κλασματικῶν μονάδων (τῶν $\frac{4}{4}$).

Αὐτός ὁ τρόπος λύσεως εἶναι ἡ γνωστή μας ἀναγωγή στήν κλασματική μονάδα. Πρόσεξε τή διάταξη τῶν πράξεων.

Τά $\frac{3}{4}$ κιλ. ἀξίζουν 9 δρχ.		Τά $\frac{3}{4}$ κιλοῦ ἀξίζουν 9 δρχ.
Τό $\frac{1}{4}$ κιλ. ἀξίζει $\frac{9}{3}$ δρχ. $= 3$ δρχ.	ἤ	Τό $\frac{1}{4}$ κιλ. ἀξίζει $\frac{9}{3}$ δρχ.
Τά $\frac{4}{4}$ κιλ. ἀξίζουν $3\times4 = 12$ δρχ.		Τά $\frac{4}{4}$ κιλ. ἀξίζουν $\frac{9}{3}\times 4 =$
		$= \frac{9\times4}{3} = \frac{36}{3} = 12$ δρχ.

Ἀλλά γιά νά βροῦμε τό τελικό ἀποτέλεσμα βλέπουμε ὅτι, πολλαπλασιάζουμε $\frac{9\times4}{3}$ δηλ. $9\times\frac{4}{3}$ δηλ. τά ἀριθμητικά στοιχεῖα τοῦ προβλήματος, **ἀλλά μέ τό κλάσμα ἀντεστραμμένο.**

Μποροῦμε λοιπόν νά μήν κάνουμε ἀναγωγή, ἀλλά διαίρεση ἀκέραιου μέ κλάσμα:

Ἔχουμε λοιπόν $9 : \frac{3}{4} = 9\times\frac{4}{3} = \frac{36}{3} = 12$ δρχ.

Πρόσεξε: Ἡ διαίρεση ἀκέραιου μέ κλάσμα, γίνεται πολλαπλασιασμός μέ τό κλάσμα ἀντεστραμμένο.

Πρόσεξε ἀκόμη:

ιιι) Μιά βρύση γεμίζει τά $\frac{6}{8}$ μιᾶς δεξαμενῆς σέ 12 ὧρες. Σέ πόσες ὧρες θά γεμίσει ὁλόκληρη ἡ δεξαμενή;

Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα θά κάνουμε ἀναγωγή στήν κλασματική μονάδα.

Ἀφοῦ τά $\frac{6}{8}$ τῆς δεξαμενῆς γεμίζουν σέ 12 ὧρες,

τότε τό $\frac{1}{8}$ τῆς δεξαμενῆς γεμίζει σέ $\frac{12}{6}$ ὧρες

καί τά $\frac{8}{8}$ τῆς δεξαμενῆς γεμίζουν σέ $\frac{12}{6}\times 8 = \frac{96}{6} = 16$ ὧρες.

Ἤ μποροῦμε νά κάνουμε διαίρεση μέ τά στοιχεῖα τοῦ προβλήματος.

Ἔχουμε λοιπόν: $12 : \frac{6}{8} = 12\times\frac{8}{6} = \frac{12\times8}{6} = \frac{96}{6} = 16$ ὧρες.

Συμπέρασμα: Διαίρεση κάνουμε συνήθως ὅταν γνωρίζουμε τήν τιμή τῶν πολλῶν μονάδων καί ζητοῦμε τήν τιμή τῆς μιᾶς.

Αὐτό ἰσχύει καί γιά τά κλάσματα. (Θυμήσου προηγούμενες περιπτώσεις). Ὅμως **ἰδιαίτερα στά κλάσματα κάνουμε διαίρεση,** καί ὅταν γνωρίζουμε τήν τιμή μέρους τῆς ἀκέραιης μονάδας (δ. κλάσματος) καί ζητοῦμε νά βροῦμε τήν τιμή ὁλόκληρης τῆς ἀκέραιης μονάδας. **Στήν περίπτωση αὐτή ὁ διαιρέτης εἶναι κλάσμα.**

> Λοιπόν: Γιά νά διαιρέσουμε ἀκέραιο μέ κλάσμα, ἀντιστρέφουμε τούς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτη καί κάνουμε πολλαπλασιασμό, ἀκέραιου μέ κλάσμα.

Παρατήρηση:

Παρατήρησε καί σύγκρινε τό διαιρετέο καί τό πηλίκο. Συνήθως στή διαίρεση τό πηλίκο εἶναι μικρότερο ἀπό τό διαιρετέο. Ὅμως ἐδῶ τό πηλίκο εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό διαιρετέο. Μπορεῖς νά βρεῖς, τό γιατί;

Ἐργασίες

1. Λύσε τίς ἀσκήσεις.

α) $12 : \frac{4}{5} =$, $15 : \frac{3}{5} =$, $21 : \frac{5}{8} =$, $32 : \frac{7}{9} =$,

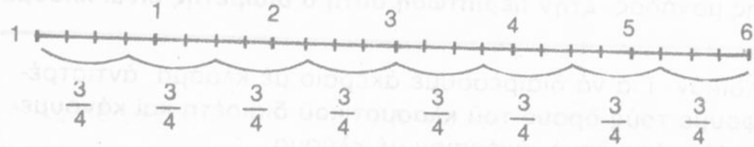
β) $45 : \frac{4}{6} =$, $55 : \frac{9}{12} =$, $88 : \frac{12}{15} =$, $150 : \frac{2}{3} =$.

2. Τά $\frac{5}{8}$ τοῦ μέτρου ἑνός ὑφάσματος ἀξίζουν 160 δραχμές. Πόσες δραχμές ἀξίζει τό μέτρο;
3. Τά $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ τό κρέας ἀξίζουν 100 δραχμές. Πόσο ἀξίζει τό κιλό;
4. Τά $\frac{3}{7}$ ἑνός δοχείου χωρεῖ 36 κιλά λάδι. Πόσα κιλά λάδι χωρεῖ ὁλόκληρο τό δοχεῖο;
5. Τά $\frac{3}{5}$ τῶν μαθητῶν μιᾶς τάξεως εἶναι 21 παιδιά. Πόσους μαθητές ἔχει ὁλόκληρη ἡ τάξη;

Πρόσεξε τά παρακάτω προβλήματα:

Γιά μιά κορδέλα μαλλιῶν χρειάζονται $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου ταινία ἀπό ὕφασμα. Πόσες ὅμοιες κορδέλες θά κάνουμε μέ 6 μέτρα ὕφασμα; Τί γνωρίζουμε; Τί ζητοῦμε; Τί θά κάνουμε;

Πρόσεξε τό παρακάτω σχῆμα:



Μετρᾶμε πόσες φορές χωρεῖ τό κομμάτι τῶν $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου στήν ταινία τῶν 6 μέτρων, δηλαδή κάνουμε διαίρεση.

$6 : \frac{3}{4} = 6 \times \frac{4}{3} = \frac{24}{3} = 8$ κορδέλες.

Τί εἶδος διαιρέσεως εἶναι; Μποροῦμε νά κάνουμε ἀναγωγή; Ἀπάντησε καί δικαιολόγησε.

Στό παραπάνω πρόβλημα γνωρίζουμε τί μῆκος ἔχει κάθε κορδέλα καί τί μῆκος ταινίας ἔχουμε. Καί ζητοῦμε νά βροῦμε πόσες φορές τό μῆκος τῆς μιᾶς κορδέλας χωρεῖ στό μῆκος τῆς ταινίας. Θά κάνουμε δηλ. μιά **διαίρεση μετρήσεως.**

Ἐργασίες

1. Μιά φιάλη χωρεῖ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ γάλα. Πόσες φιάλες χρειάζονται γιά νά βάλουμε 195 κιλά γάλα;
2. Γιά νά πλέξουμε ἕνα πουλόβερ χρειαζόμαστε $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ μαλλί. Μέ 24 κιλά μαλλί, πόσα πουλόβερ θά πλέξουμε;
3. Γιά ἕνα ὑποκάμισο χρειάζεται $\frac{2}{3}$ τοῦ μέτρου ὕφασμα. Μέ 32 μέτρα ὕφασμα, πόσα ὑποκάμισα θά ράψουμε;
4. Μιά ἀντλία βγάζει ἀπό ἕνα πηγάδι 228 κιλά νερό σέ $\frac{4}{6}$ τῆς ὥρας. Πόσο νερό βγάζει ἡ ἀντλία σέ μιά ὥρα;
5. Μέ 72 δραχμές ἀγοράζουμε $\frac{3}{8}$ τοῦ κιλοῦ ζαμπόν. Πόσες δραχμές στοιχίζει τό κιλό;

6. Τά $\frac{6}{9}$ ἑνός βαρελιοῦ χωροῦν 240 κιλά κρασί. Πόσα κιλά κρασί χωρεῖ τό βαρέλι;

7. Τά $\frac{2}{10}$ τοῦ κιλοῦ τοῦ καφέ, ἀξίζουν 52 δραχμές. Πόσο ἀξίζει τό κιλό;

8. Τά $\frac{4}{7}$ τῶν μαθητῶν μιᾶς τάξεως εἶναι 28 ἀγόρια. Πόσα εἶναι τά κορίτσια;

δ) Διαίρεση κλάσματος μέ κλάσμα

Πρόσεξε καλά τό πρόβλημα:

ι) Ἕνας ἐργάτης σκάβει σέ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας, τά $\frac{3}{5}$ ἑνός κήπου. Σέ πόση ὥρα θά σκάψει ὁλόκληρο τόν κῆπο;

Τί γνωρίζουμε; Τί ζητοῦμε; Τί θά κάνουμε;

Γνωρίζουμε ὅτι σέ μέρος τῆς ὥρας (στά $\frac{3}{4}$) σκάβει μέρος τοῦ κήπου (τά $\frac{3}{5}$). Ζητοῦμε τό χρόνο πού χρειάζεται γιά νά σκάψει ὁλόκληρο τόν κῆπο.

Ἀσφαλῶς θά βρεῖς εὔκολα τήν ἀπάντηση, ἄν γνωρίζεις σέ πόση ὥρα σκάβει τό $\frac{1}{5}$ τοῦ κήπου.

Ἀφοῦ τά $\frac{3}{5}$ τοῦ κήπου, τά σκάβει σέ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας,
τότε τό $\frac{1}{5}$ τοῦ κήπου, τό σκάβει σέ $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας
καί τά $\frac{5}{5}$ τοῦ κήπου, τά σκάβει σέ $\frac{5}{4}$ τῆς ὥρας, σέ $1\frac{1}{4}$ ὥρα.

Κάνουμε ἀναγωγή στήν κλασματική μονάδα.

Πρόσεξε τή διάταξη τῶν πράξεων.

Ἀφοῦ τά $\frac{3}{5}$ τοῦ κήπου, τά σκάβει σέ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας,
τότε τό $\frac{1}{5}$ τοῦ κήπου, τό σκάβει σέ $\frac{3}{4\times3}$ τῆς ὥρας
καί τά $\frac{5}{5}$ τοῦ κήπου, τά σκάβει σέ

$\frac{3\times5}{4\times3} = \frac{15}{12} = 1\frac{3}{12} = 1\frac{1}{4}$ ὥρα.

Παρατηροῦμε ὅτι, γιά νά βροῦμε τό τελικό ἀποτέλεσμα, πολλαπλασιάζουμε $\frac{3}{4} \times \frac{5}{3}$, τά ἀριθμητικά στοιχεῖα τοῦ προβλήματος ἀλλά μέ τό κλάσμα τοῦ διαιρέτη ἀντεστραμμένο.

Σύμφωνα μέ ὅσα ὥς τώρα ἔμαθες, μποροῦμε νά κάνουμε διαίρεση. Διαιρετέος εἶναι τά $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας, ἐφ' ὅσον ζητοῦμε τόν όλικό χρόνο καί διαιρέτης τά $\frac{3}{5}$, τοῦ κήπου.

Ἔχουμε λοιπόν:

$$\frac{3}{4} : \frac{3}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{12} = 1\frac{3}{12} = 1\frac{1}{4} \text{ ὥρα.}$$

Καί οἱ δυό παράγοντες τῆς διαιρέσεως εἶναι κλάσματα.

Λοιπόν: Γιά νά διαιρέσουμε κλάσμα μέ κλάσμα, ἀντιστρέφουμε τούς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτη καί κάνουμε πολλαπλασιασμό.

Γενικές παρατηρήσεις:

Στά προβλήματα διαιρέσεως ἀκέραιου μέ κλάσμα καί κλάσματος μέ κλάσμα, γίνεται ἡ ὁλοκλήρωση τῆς διαιρέσεως στά κλάσματα. Πρέπει ἀπό τήν ἀρχή νά ξεκαθαρίσουμε ὅτι:

α) Ἡ πράξη γίνεται, ὅταν γνωρίζουμε τήν τιμή κλάσματος τῆς ἀκέραιης μονάδας καί ζητοῦμε τήν τιμή ὁλόκληρης τῆς ἀκέραιης μονάδας.

β) **Διαιρετέος** εἶναι ὁ ἀριθμός πού φανερώνει τήν ἀξία τοῦ κλάσματος τῆς ἀκέραιης μονάδας, καί εἶναι ὁμοειδής πρός τό πηλίκο.

γ) **Διαιρέτης εἶναι πάντα κλάσμα.**

δ) Τό πρόβλημα λύνεται καί μέ ἀναγωγή στήν κλασματική μονάδα, (ἐφ' ὅσον δέν εἶναι διαίρεση μετρήσεως).

ε) Τό πηλίκο εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό διαιρετέο, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι γνήσιο κλάσμα καί μικρότερο, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι καταχρηστικό κλάσμα.

Εργασίες

1. Λύσε τίς ἀσκήσεις:

α) $\frac{3}{5} : \frac{2}{3} =$, $\frac{4}{8} : \frac{3}{5} =$, $\frac{6}{9} : \frac{7}{8} =$, $\frac{9}{12} : \frac{4}{7} =$.

β) $\frac{12}{15} : \frac{3}{5} =$, $\frac{16}{20} : \frac{10}{12} =$, $\frac{20}{25} : \frac{8}{10} =$, $\frac{35}{45} : \frac{7}{11} =$.

2. Ἕνας κολυμβητής σέ $\frac{4}{6}$ τῆς ὥρας διανύει $\frac{4}{5}$ τοῦ μιλίου. Σέ πόση ὥρα θά διανύσει ὁλόκληρο τό μίλι;

3. Ἕνας ἐλαιοχρωματιστής βάφει σέ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας τά $\frac{6}{16}$ ἑνός μεγάλου τοίχου. Τί μέρος τοῦ τοίχου βάφει σέ μιά ὥρα;

4. Τά $\frac{2}{3}$ τῆς ἡλικίας τοῦ Σταύρου εἶναι τό $\frac{1}{4}$ τῆς ἡλικίας τοῦ πατέρα του. Τί μέρος τῆς ἡλικίας τοῦ πατέρα εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ Σταύρου; (Ἐπαλήθευσε μέ συγκεκριμένα παραδείγματα).

5. Τά $\frac{4}{8}$ τοῦ μέτρου ἑνός ὑφάσματος, ἀξίζουν $\frac{4}{5}$ τοῦ πεντακοσάρικου. Πόσες δραχμές ἀξίζει τό μέτρο τοῦ ὑφάσματος;

6. Τά $\frac{8}{10}$ τοῦ μέτρου ἑνός ὑφάσματος ἀξίζουν $\frac{4}{5}$ τοῦ πεντακοσάρικου. Πόσο ἀξίζει τό μέτρο.

7. Μιά θερμάστρα πετρελαίου καίει στά $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας, $\frac{3}{8}$ τοῦ κιλοῦ πετρέλαιο. Πόσο πετρέλαιο καίει στή μιά ὥρα;

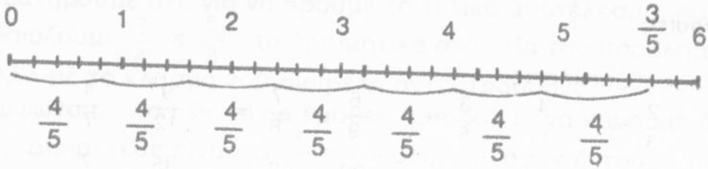
ε) Διαίρεση μεικτοῦ ἀριθμοῦ μέ κλάσμα

Πρόσεξε καλά τό πρόβλημα.

Γιά μιά ποδιά χρειάζονται $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου ὕφασμα. Μέ $5\frac{3}{5}$ μέτρα ὕφασμα, πόσες ὅμοιες ποδιές κάνουμε;

Τί γνωρίζουμε; Τί ζητοῦμε; Τί θά κάνουμε;

Θά μοιράσουμε τά $5\frac{3}{5}$ μέτρα ὑφάσματος σέ κομμάτια τῶν $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου. Πρόσεξε τή σχηματική παράσταση:



Θά κάνουμε διαίρεση. Τί εἴδους διαίρεση εἶναι;

Γνωρίζουμε τό μῆκος τοῦ ὑφάσματος κάθε ποδιᾶς καί ζητοῦμε νά βροῦμε πόσες φορές αὐτό τό μῆκος χωρεῖ στό μῆκος τοῦ ὑφάσματος πού ἔχουμε. Θά κάνουμε διαίρεση μετρήσεως.

Σύμφωνα μέ ὅσα γνωρίζουμε, ἔχουμε:

$$5\frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{28}{5} : \frac{4}{5} = \frac{28}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{140}{20} = 7 \text{ ποδιές.}$$

Ὁ διαιρετέος εἶναι μεικτός ἀριθμός καί ὁ διαιρέτης κλάσμα. Τρέπουμε τό μεικτό σέ κλάσμα, ἀντιστρέφουμε τούς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτη καί κάνουμε πολλαπλασιασμό.

Πρόσεξε: Ἡ διαίρεση μπορεῖ νά γίνει καί μέ ἄλλο τρόπο.

$$5\frac{3}{5} : \frac{4}{5} = ;$$

$$5 : \frac{4}{5} = 5 \times \frac{5}{4} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$6\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 6\frac{4}{4} = 7$$

Διαιροῦμε χωριστά τόν ἀκέραιο τοῦ μεικτοῦ μέ τό κλάσμα καί χωριστά τό κλάσμα τοῦ μεικτοῦ μέ τό κλάσμα καί ἑνώνουμε τά δυό πηλίκα.

Ποιός τρόπος ἐξυπηρετεῖ περισσότερο;

Προσπάθησε νά βγάλεις τόν κανόνα.

Ἐργασίες

1. Λύσε τίς ἀσκήσεις:

$10\frac{2}{5} : \frac{4}{5} =$. $27\frac{1}{2} : \frac{3}{8} =$. $12\frac{3}{7} : \frac{6}{9} =$. $143\frac{2}{5} : \frac{6}{7} =$

2. Γιά ἕνα πουλόβερ χρειάζονται $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ μαλλί. Μέ $19\frac{1}{5}$ κιλά μαλλί, πόσα πουλόβερ πλέκουμε;

3. Γιά ἕνα θερινό πουκάμισο χρειάζονται $\frac{2}{5}$ τοῦ μέτρου ὕφασμα. Μέ $24\frac{4}{5}$ μέτρα ὕφασμα, πόσα πουκάμισα ράβουμε;

Πρόσεξε ἀκόμη:

Τά $\frac{3}{5}$ τοῦ κιλοῦ τό ρύζι ἀξίζει $19\frac{1}{2}$ δραχμές. Πόσο ἀξίζει τό κιλό;

Ἔχουμε λοιπόν:

$$19\frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{39}{2} : \frac{3}{5} = \frac{39}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{195}{6} = 32\frac{3}{6} = 32\frac{1}{2} \text{ δρ.}$$

Τό παραπάνω πρόβλημα μᾶς δίνει τήν τιμή τοῦ μέρους τῆς ἀκέραιης μονάδας καί ζητεῖ νά βροῦμε τήν τιμή τοῦ ὅλου, τοῦ κιλοῦ. Πῶς ἀλλιῶς μποροῦμε νά τό λύσουμε; Μέ ἀναγωγή στή μονάδα.

Ἀφοῦ τά $\frac{3}{5}$ κιλοῦ ρύζι ἀξίζει $\frac{39}{2}$ δραχμές,

τότε τό $\frac{1}{5}$ κιλοῦ ρύζι ἀξίζει $\frac{39}{2 \times 3}$ δραχμές

καί τά $\frac{5}{5}$ κιλοῦ ρύζι ἀξίζει $\frac{39 \times 5}{2 \times 3} = \frac{195}{6} = 32\frac{3}{6} = 32\frac{1}{2}$ δρχ.

Στήν περίπτωση αὐτή, ὅπως καί σέ ἄλλα ὅμοια προβλήματα, **τρέπουμε πρῶτα τό μεικτό σέ κλάσμα καί λύνουμε μέ ἀναγωγή.**

Ἐδῶ ταιριάζουν καί οἱ παρατηρήσεις πού κάναμε καί στά προηγούμενα μαθήματα, ὅπου ὁ διαιρέτης εἶναι κλάσμα.

Ἐργασίες

1. Ἕνα αὐτοκίνητο διέτρεξε σέ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας, $49\frac{1}{2}$ χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα τρέχει τήν ὥρα;
2. Ἕνα ἀεροπλάνο διατρέχει σέ $\frac{2}{6}$ τῆς ὥρας, $173\frac{1}{5}$ χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα διατρέχει σέ μιά ὥρα;
3. Τά $\frac{3}{8}$ μιᾶς ἀποστάσεως εἶναι $26\frac{1}{4}$ χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα εἶναι ὅλη ἡ ἀπόσταση;

4. Τά $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ τό κρέας ἀξίζουν $103\frac{1}{5}$ δραχμές. Πόσο ἀξίζει τό ἕνα κιλό;

στ) Διαίρεση ἀκέραιου ἀριθμοῦ μέ μεικτό ἀριθμό

Πρόσεξε, σκέψου, ὑπολόγισε, ἀπάντησε.

Μέ $2\frac{1}{2}$ δραχμές ἀγοράζουμε ἕνα μολύβι. Μέ 5 δρχ. ἀγοράζουμε 2 μολύβια

Μέ 15 δρχ. ἀγοράζουμε 6 μολύβια.

Μέ $3\frac{1}{2}$ δραχμές ἀγοράζουμε μιά σοκολάτα.

Μέ 14 δραχμές ἀγοράζουμε ; σοκολάτες.

Μέ 21 δραχμές ἀγοράζουμε ; σοκολάτες.

Τί ἔκανες γιά νά βρεῖς τίς ἀπαντήσεις;

Πρόσεξε τό πρόβλημα.

Μέ 30 δραχμές ἀγοράζουμε $7\frac{1}{2}$ μέτρα πλαστικοῦ σωλήνα. Πόσες δραχμές ἀξίζει τό μέτρο;

Τί γνωρίζουμε; Τί ζητοῦμε; Τί κάνουμε;

Γνωρίζουμε τήν ἀξία τῶν $7\frac{1}{2}$ μέτρων σωλήνα καί ζητοῦμε τήν τιμή τοῦ ἑνός μέτρου, ἄρα θά κάνουμε διαίρεση.

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὁ διαιρετέος εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός καί ὁ διαιρέτης μεικτός.

Ἔχουμε λοιπόν:

$$30 : 7\frac{1}{2} = 30 : \frac{15}{2} = 30 \times \frac{2}{15} = \frac{60}{15} = 4 \text{ δραχμές}$$

Ὅπως βλέπεις τρέπουμε τό μεικτό σέ κλάσμα καί διαιροῦμε ἀκέραιο μέ κλάσμα, ὅπως γνωρίζουμε.

Προσπάθησε νά βγάλεις τόν κανόνα.

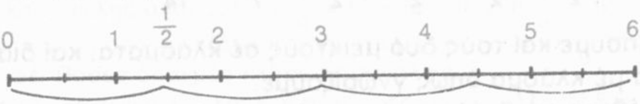
Σημείωση: Τό πρόβλημα μπορεῖ νά λυθεῖ καί μέ ἀναγωγή, ἀφοῦ τρέψουμε πρῶτα τό μεικτό σέ κλάσμα. Γιά προσπάθησε μόνος σου.

Ἐργασίες

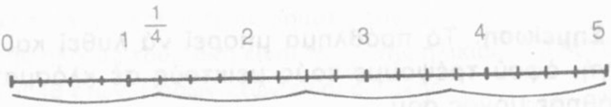
1. Λύσε τίς ἀσκήσεις:

$6:4\frac{2}{5}=$, $18:5\frac{2}{3}=$, $27:6\frac{3}{4}=$, $36:7\frac{1}{2}=$.

2. Τά $2\frac{3}{4}$ κιλά κρέας ἀξίζουν 330 δραχμές. Πόσο ἀξίζει τό κιλό;
3. Μέ 423 δραχμές ἀγοράζουμε $4\frac{1}{2}$ μέτρα ὕφασμα. Πόσες δραχμές ἀξίζει τό μέτρο;
4. Ἕνας πεζοπόρος σέ $2\frac{2}{4}$ ὧρες βάδισε 15 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα βαδίζει τήν ὥρα;
5. Παρατήρησε τίς σχηματικές παραστάσεις καί σημείωσε τίς πράξεις.



6 : =



5 : =

ζ) Διαίρεση μεικτοῦ μέ μεικτό

Μέ $1\frac{1}{2}$ δρχ. ἀγοράζουμε μιά τσίκλα.

Μέ $4\frac{1}{2}$ δρχ. ἀγοράζουμε τσίκλες;

Μέ $7\frac{1}{2}$ δρχ. ἀγοράζουμε τσίκλες;

Μέ $2\frac{1}{2}$ δρχ. ἀγοράζουμε μιά γόμα.

Μέ $7\frac{1}{2}$ δρχ. ἀγοράζουμε γόμες;

Μέ $12\frac{1}{2}$ δρχ. ἀγοράζουμε γόμες;

Τί ἔκανες γιά νά βρεῖς τίς ἀπαντήσεις;

Πρόσεξε τό παρακάτω πρόβλημα.

Μέ $17\frac{1}{2}$ δρχ. ἀγοράζουμε $3\frac{1}{2}$ μέτρα πλαστικοῦ σωλήνα. Πόσες δραχμές ἀξίζει τό μέτρο;

Τί γνωρίζουμε; Τί ζητοῦμε; Τί θά κάνουμε;

Ἀφοῦ γνωρίζουμε τήν ἀξία τῶν $3\frac{1}{2}$ μέτρων τοῦ σωλήνα καί ζητοῦμε τήν ἀξία τοῦ ἑνός μέτρου, θά κάνουμε διαίρεση.

Στήν περίπτωση αὐτή καί ὁ διαιρετέος καί ὁ διαιρέτης εἶναι μεικτοί ἀριθμοί.

Μέ ὅσα γνωρίζουμε ἔχουμε:

$17\frac{1}{2} : 3\frac{1}{2} = \frac{35}{2} : \frac{7}{2} = \frac{35}{2} \times \frac{2}{7} = \frac{70}{14} = 5$ δρχ. τό μέτρο.

Τρέπουμε καί τούς δυό μεικτούς σέ κλάσματα, καί διαιροῦμε κλάσμα μέ κλάσμα ὅπως γνωρίζουμε.

Προσπάθησε νά βγάλεις τόν κανόνα.

Σημείωση: Τό πρόβλημα μπορεῖ νά λυθεῖ καί μέ ἀναγωγή, ἀφοῦ τρέψουμε τούς μεικτούς σέ κλάσματα. Προσπάθησε μόνος σου.

Ἐργασίες

1. Λύσε τίς ἀσκήσεις:

$3\frac{3}{4} : 2\frac{2}{4} =$, $22\frac{1}{2} : 2\frac{2}{4} =$, $28\frac{3}{5} : 4\frac{5}{8} =$, $45\frac{4}{7} : 12\frac{1}{3} =$.

2. Μέ $28\frac{3}{4}$ δραχμές ἀγοράζουμε $5\frac{6}{8}$ μ. σύρμα. Πόσες δραχμές ἀξίζει τό μέτρο;

3. Μέ $10\frac{1}{2}$ κιλά ἀλεύρι γίνονται $12\frac{3}{4}$ κιλά ψωμί. Πόσα κιλά ψωμί γίνονται μέ ἕνα κιλό ἀλεύρι;

4. Ἕνα αὐτοκίνητο διέτρεξε $217\frac{3}{4}$ χιλιόμετρα σέ $3\frac{1}{4}$ ὧρες. Μέ πόση μέση ταχύτητα ἔτρεχε τήν ὥρα;

5. Σ' ἕνα βαρέλι ἔχουμε $215\frac{3}{5}$ κιλά κρασί. Σέ πόσα δοχεῖα πού χωρεῖ τό καθένα $2\frac{2}{5}$ κιλά, θά χωρέσει τό κρασί;

ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

1. Ἀγόρασα $1\frac{1}{2}$ κιλό ντομάτες, μέ 14 δρχ. τό κιλό, $4\frac{2}{5}$ κιλά πατάτες μέ $9\frac{1}{2}$ δρχ. τό κιλό καί $1\frac{3}{4}$ κιλά ροδάκινα μέ 25 δρχ. τό κιλό. Πόσα ρέστα θά πάρω ἀπό ἕνα πεντακοσάρικο;
2. Τό πλοῖο ἀναχώρησε στίς $6\frac{1}{2}$ μ.μ. ἀπό τόν Πειραιά γιά τή Ρόδο. Τό ταξίδι διαρκεῖ 13 ὧρες. Τί ὥρα θά φτάσει στή Ρόδο;
3. Ἕνα βαρέλι μέ κρασί ζυγίζει $96\frac{1}{5}$ κιλά. Τό ἀπόβαρό του εἶναι $9\frac{4}{5}$ κιλά. Πόσες φιάλες πού χωροῦν $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ κρασί θά γεμίσουμε μέ τό περιεχόμενο τοῦ βαρελιοῦ;
4. Ἕνας καφεπώλης ἀγόρασε $16\frac{1}{4}$ κιλά καφέ μέ $208\frac{4}{5}$ δρχ. τό κιλό καί τριπλάσια ποσότητα ζάχαρης πού ἡ τιμή της εἶναι τό $\frac{1}{9}$ τῆς τιμῆς τοῦ καφέ. Πόσες δραχμές πλήρωσε συνολικά;
5. Μιά βρύση γεμίζει μιά δεξαμενή σέ 6 ὧρες καί μιά ἄλλη σέ 8 ὧρες καί μιά τρίτη τήν ἀδειάζει σέ 12 ὧρες. Σέ πόσες ὧρες θά γεμίσει ἡ δεξαμενή, ἄν τρέχουν καί οἱ τρεῖς βρύσες συγχρόνως;
6. Τά $\frac{3}{4}$ τῆς ἡλικίας τοῦ Τάκη εἶναι τό $\frac{1}{4}$ τῆς ἡλικίας τοῦ πατέρα του, πού εἶναι 48 ἐτῶν. Πόσων ἐτῶν εἶναι ὁ Τάκης;
7. Ἕνας ὅρισε στή διαθήκη του, νά πάρει ἡ κόρη του τό $\frac{1}{3}$ τῆς κληρονομιᾶς, ὁ γιός του τά $\frac{2}{5}$ καί ἡ σύζυγός του τά $\frac{2}{10}$. Τό ὑπόλοιπο πού ἦταν 475.000 δρχ. ἄφησε στό ὀρφανοτροφεῖο τῆς πόλεως. Πόση ἦταν ἡ κληρονομιά καί πόσα πῆρε κάθε κληρονόμος;
8. Ἕνα αὐτοκίνητο διέτρεξε τά $\frac{4}{9}$ τῆς ἀποστάσεως μεταξύ δύο πόλεων. Ἡ ὑπόλοιπη ἀπόσταση εἶναι 65 χλμ. Πόσα χλμ. διέτρεξε ὥς τώρα;
9. Ἕνα πλοῖο μέ λαθρεμπόριο ἔφυγε κρυφά ἀπό ἕνα λιμάνι μέ ταχύτητα $12\frac{3}{4}$ μιλίων τήν ὥρα. Μετά ἀπό 4 ὧρες διατάχθηκε νά τρέξει νά τό συλλάβει ἕνα καταδιωκτικό πού ἔτρεχε μέ $21\frac{1}{4}$ μίλια τήν ὥρα. Μετά ἀπό πόσες ὧρες θά τό συλλάβει;

10. Τά $\frac{2}{5}$ ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι 60. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός αὐτός;
11. Τά $\frac{3}{4}$ ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι 120. Πόσο εἶναι τά $\frac{5}{8}$ τοῦ ἀριθμοῦ;
12. Τό $\frac{1}{3}$ καί τά $\frac{3}{4}$ ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι 39. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός;
13. Ἄν στό διπλάσιο ἑνός ἀριθμοῦ προσθέσω τά $\frac{2}{3}$ του, θά πάρω τόν ἀριθμό 72. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός αὐτός;
14. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός πού τά $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{4}{5}$ του, εἶναι 32;
15. Ποιός ἀριθμός εἶναι τό μισό τοῦ μισοῦ τῶν $\frac{3}{4}$ τοῦ 32;

7. ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

α) Τροπή δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ σέ κλάσμα

Ὅπως γνωρίζεις οἱ δεκαδικοί ἀριθμοί εἶναι ὑποδιαιρέσεις τῆς ἀκέραιης μονάδας σέ 10, 100, 1000 κτλ. ἴσα μέρη.

Μέ ὅσα ὡς τώρα ἔμαθες γιά τά κλάσματα, μπορεῖς ἄνετα νά σκεφθεῖς ὅτι καί οἱ δεκαδικοί εἶναι κλάσματα μέ κλασματικές μονάδες τό $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κτλ.

Πρόσεξε ἀκόμη νά ἰδεῖς πόσο εὔκολα μπορεῖς νά μετατρέψεις ἕνα δεκαδικό ἀριθμό σέ κλάσμα.

Ἀπάγγειλε τούς παρακάτω δεκαδικούς ἀριθμούς 0,5 0,17 0,135. Γράψε τους σάν κλάσματα, ὅπως ἀκριβῶς τούς ἀπαγγέλεις.

Ἀσφαλῶς θά γράψεις: $\frac{5}{10}$ $\frac{17}{100}$ $\frac{135}{1000}$.

Ἔγιναν λοιπόν κλάσματα πολύ εὔκολα. Αὐτό μπορεῖ νά γίνει σέ ὅλους τούς δεκαδικούς ἀριθμούς.

Ἀπάγγειλε τώρα τούς δεκαδικούς ἀριθμούς,
3,7 6,25 35,42 57,125 178,252 543,7500

Ἂν τούς γράψουμε ὅπως ἀκριβῶς τούς ἀπαγγέλουμε ἔχουμε,

$3\frac{7}{10}$, $6\frac{25}{100}$, $35\frac{42}{100}$, $57\frac{125}{1000}$, $178\frac{252}{1000}$, $543\frac{7500}{10000}$

δηλ. τούς γράφουμε σάν μεικτούς ἀριθμούς.

Ἀλλά μποροῦμε ἀκόμη νά τούς γράψουμε ἔτσι:

$\frac{37}{10}$ $\frac{625}{100}$ $\frac{3542}{100}$ $\frac{57125}{1000}$ $\frac{178252}{1000}$ $\frac{5437500}{10000}$

δηλ. σάν καταχρηστικά κλάσματα, ἐφ' ὅσον στήν ἀπαγγελία, λέγαμε τό ἀκέραιο καί τό δεκαδικό μέρος τοῦ ἀριθμοῦ σέ μονάδα τῆς τελευταίας τάξεως.

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι μποροῦμε εὔκολα νά τρέψουμε ἕνα δεκαδικό ἀριθμό σέ κλάσμα μέ ἀριθμητή τό δεκαδικό χωρίς ὑποδιαστολή καί παρονομαστή τήν τάξη τῆς μονάδας πού ἀνήκει.

Λοιπόν: Γιά νά τρέψουμε ἕνα δεκαδικό ἀριθμό σέ κλάσμα, παραλείπουμε τήν ὑποδιαστολή καί τόν γράφουμε ἀριθμητή, παρονομαστή γράφουμε τήν ἀκέραιη μονάδα καί δεξιά της τόσα μηδενικά ὅσα εἶναι τά δεκαδικά ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ.

Τά κλάσματα πού ἔχουν παρονομαστή 10, 100, 1000 κτλ. λέγονται δεκαδικά κλάσματα.

β) Τροπή κλάσματος σέ δεκαδικό ἀριθμό

Ὅπως ἔμαθες κάθε κλάσμα εἶναι τό ἀκριβές πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητῆ μέ τόν παρονομαστή του.

Πρόσεξε λοιπόν:

Ἔχουμε τά κλάσματα: $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{9}{12}$.

Ἂν ἐκτελέσουμε τίς διαιρέσεις πού φανερώνουν, ἔχουμε:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \hline 20 & 0{,}75 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 5 \\ \hline 0 & 0{,}6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 50 & 8 \\ \hline 20 & 0{,}625 \\ 40 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 12 \\ \hline 60 & 0{,}75 \\ 0 & \end{array}$$

0,75 0,6 0,625 0,75

Λοιπόν: Γιά νά τρέψουμε κλάσμα σέ δεκαδικό ἀριθμό, διαιροῦμε τόν ἀριθμητή μέ τόν παρονομαστή.
Τό πηλίκο πού προκύπτει εἶναι ὁ δεκαδικός ἀριθμός.

Παρατήρηση: Τρέψε τά κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{8}{12}$, σέ δεκαδικούς.

20	3	80	11	80	12
20	0,6666...	30	0,7272...	80	0,666...
20		80		80	
20		30		80	
		8		8	

Ὅπως βλέπεις τρέπονται σέ δεκαδικούς ἀριθμούς πού ἔχουν συνέχεια τό ἴδιο ψηφίο ἤ ἐπαναλαμβάνονται ὅμοια ψηφία καί ἡ διαίρεση δέν τελειώνει ὅσο καί ἄν συνεχίζουμε. Οἱ ἀριθμοί αὐτοί λέγονται **περιοδικοί δεκαδικοί ἀριθμοί.**

Ἐργασίες

1. Νά τρέψεις τούς παρακάτω δεκαδικούς σέ κλάσματα.

α) 0,1 0,7 0,23 0,92 0,06 0,425 0,854 0,4752

β) 0,9 0,3 0,42 0,04 0,05 0,075 0,009 0,0856

2. Νά τρέψεις τά παρακάτω κλάσματα σέ δεκαδικούς.

α) $\frac{1}{2}$, $\frac{12}{15}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{65}{90}$, $\frac{15}{70}$, $\frac{125}{350}$

β) $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{85}{100}$, $\frac{458}{500}$, $\frac{675}{1000}$, $\frac{3452}{10000}$

Παρατήρηση: Ἄν ἔχουμε νά ἐκτελέσουμε πράξεις μέ ἀριθμούς ἀνάμεικτους κλασματικούς καί δεκαδικούς, τρέπουμε τούς ἀριθμούς ἤ ὅλους σέ δεκαδικούς ἤ ὅλους σέ κλάσματα.

πχ. $\frac{2}{5} + 0,7 + 0,35 + \frac{3}{4} = \frac{2}{5} + \frac{7}{10} + \frac{35}{100} + \frac{3}{4} =$

$$\frac{40}{100} + \frac{70}{100} + \frac{35}{100} + \frac{75}{100} = \frac{220}{100} = 2\frac{2}{10}.$$

ἤ $0,4 + 0,7 + 0,35 + 0,75 = 2,20 = 2,2$.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

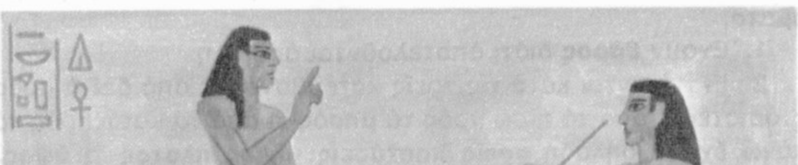
ΙΩΑΝΝΗ ΤΖΟΥΦΛΑ – ΜΑΡΙΑΝΘΗΣ ΤΖΟΥΦΛΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΦΥΣΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ ΣΩΜΑΤΑ

1. Γενικά

Ἡ φιλομάθεια τοῦ ἀνθρώπου καί οἱ ἀνάγκες τῆς ζωῆς τόν



Εἰκ. 1

ἔστρεψαν στή μελέτη τοῦ φυσικοῦ του περιβάλλοντος. Παρατήρησε πώς στή φύση ὑπάρχουν ὑλικά σώματα, πού ἔχουν ὁρισμένη **μορφή** κι ὁρισμένο **μέγεθος** κι ὀνομάζονται **φυσικά στερεά σώματα.** π.χ. τό διδακτήριο τοῦ σχολείου, οἱ τοῖχοι, τά θρανία, ἡ ἔδρα, ἡ κασσετίνα, τό μολύβι κι ἄλλα εἶναι: **φυσικά στερεά σώματα.**

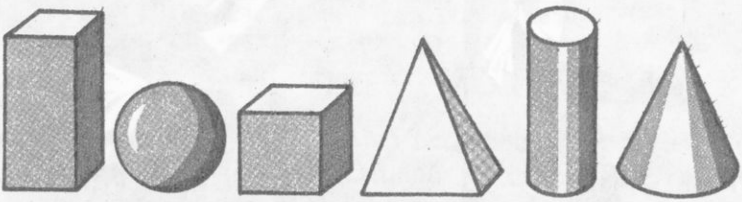
Βλέπετε; ▶

> Τά ὑλικά σώματα, πού διατηροῦν ὁρισμένη μορφή κι ὁρισμένο μέγεθος, λέγονται φυσικά στερεά σώματα.

2. Γνωρίσματα τῶν φυσικῶν στερεῶν.

Τά φυσικά στερεά διατηροῦν καί τά παρακάτω κοινά γνωρίσματα:

1. Ἔχουν **βάρος** διότι ἀποτελοῦνται ἀπό ὕλη.
2. Ἐκτείνονται κατά τίς τρεῖς κατευθύνσεις: ἀπό δεξιά πρός τ' ἀριστερά, ἀπό τά πίσω πρός τά μπρός κι ἀπό τά κάτω πρός τά πάνω, ἔχουν, δηλαδή, **τρεῖς διαστάσεις: μῆκος, πλάτος καί ὕψος.**
3. Ἐξωτερικά στό φῶς παρουσιάζουν καί χρωματισμό.



Εἰκ. 1α

Ἁπλά, φυσικά στερεά σώματα

Ἀσκήσεις

1. Ποιά εἶναι τά γνωρίσματα τῶν φυσικῶν στερεῶν;
2. Γιατί τά φυσικά στερεά ἔχουν βάρος;
3. Πόσες διαστάσεις διακρίνουμε σ' ἕνα στερεό καί ποιές;

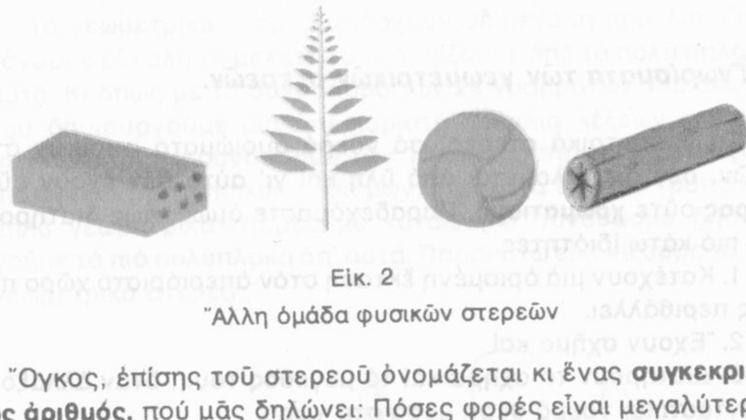
3. Ἐπιφάνεια καί σχῆμα τῶν φυσικῶν στερεῶν.

Τό ἐξωτερικό μέρος κάθε φυσικοῦ στερεοῦ σώματος ἀποτελεῖ τήν **ἐπιφάνειά** του. Ἡ ἐπιφάνεια εἶναι τό σύνορο, πού χωρίζει τό σῶμα ἀπ' τό χῶρο· πού τό περιβάλλει καί στό φῶς παρουσιάζει καί χρωματισμό.

Ἡ **μορφή** τοῦ σώματος λέγεται **σχῆμα** του.

4. Ὄγκος τῶν Φυσικῶν Στερεῶν.

Γιά κάθε φυσικό στερεό, σάν τό βλέπουμε, ἔχομε τήν ἔννοια ἑνός μεγέθους. Τό μέγεθος αὐτό εἶναι ὁ χῶρος, τόν ὁποῖο πιάνει τό στερεό. Τό μέγεθος αὐτό τό ὀνομάζουμε **ὄγκο τοῦ στερεοῦ.**



Εἰκ. 2

Ἄλλη ὁμάδα φυσικῶν στερεῶν

Ὄγκος, ἐπίσης τοῦ στερεοῦ ὀνομάζεται κι ἕνας **συγκεκριμένος ἀριθμός,** πού μᾶς δηλώνει: Πόσες φορές εἶναι μεγαλύτερος ἤ μικρότερος ὁ χῶρος, πού κατέχει τό στερεό, ἀπό τό χῶρο πού κατέχει ἕνα ἄλλο στερεό, τό ὁποῖο παίρνεται σά **μονάδα μετρήσεως** τοῦ ὄγκου.

Ἀσκήσεις

4. Τί λέγεται ἐπιφάνεια ἑνός σώματος;
5. Τί χωρίζει τό σῶμα ἀπ' τό γύρω χῶρο;
6. Τί ὀνομάζεται σχῆμα ἑνός σώματος;
7. Τί λέγεται ὄγκος ἑνός σώματος;

5. Γεωμετρικά στερεά - Γεωμετρία

Γιά νά διευκολυνθεῖ καί ν' ἁπλουστευθεῖ ἡ μελέτη τῶν φυσικῶν στερεῶν, ἐπινοήθηκαν φανταστικά ὁμοιώματά τους, τά ὁποῖα ὀνομάζονται **γεωμετρικά στερεά.**

Βλέπετε; ▶

Τά Γεωμετρικά στερεά εἶναι νοερά (φανταστικά) ὁμοιώματα τῶν φυσικῶν στερεῶν.

Ἡ ἐπιστήμη πού ἀσχολεῖται μέ τή μελέτη τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων ὀνομάζεται **γεωμετρία.**

6. Γνωρίσματα τῶν γεωμετρικῶν στερεῶν.

Τά γεωμετρικά στερεά, σά νοερά ὁμοιώματα φυσικῶν στερεῶν, δέν ἀποτελοῦνται ἀπό ὕλη καί γι' αὐτό δέν ἔχουν οὔτε **βάρος** οὔτε **χρωματισμό.** Παραδεχόμαστε ὅμως, πώς διατηροῦν τίς πιό κάτω ἰδιότητες.

1. Κατέχουν μιά ὁρισμένη ἔκταση στόν ἀπεριόριστο χῶρο πού μᾶς περιβάλλει.
2. Ἔχουν σχῆμα καί
3. Διατηροῦν τό σχῆμα καί τό μέγεθός τους, ὅταν ἀλλάξουν (φανταστικά) νοερά θέση μέσα στό χῶρο.

Ἀσκήσεις

8. Τί εἶναι γεωμετρικά στερεά;
   Γιατί τά Γεωμετρικά στερεά δέν ἀποτελοῦνται ἀπό ὕλη;
9. Γιατί τά γεωμετρικά στερεά δέν ἔχουν βάρος;
   Γιατί τά Γεωμετρικά στερεά δέν ἔχουν χρωματισμό;
10. Ποιές βασικές ἰδιότητες διατηροῦν τά γεωμετρικά στερεά;

11. Στό πιό κάτω σχῆμα ὑπάρχει ἕνα τρίγωνο σάν αὐτό πού χρησιμοποιοῦν τά παιδιά ὅταν λένε τά κάλαντα καί ἕνα τριγωνικό πλακάκι.

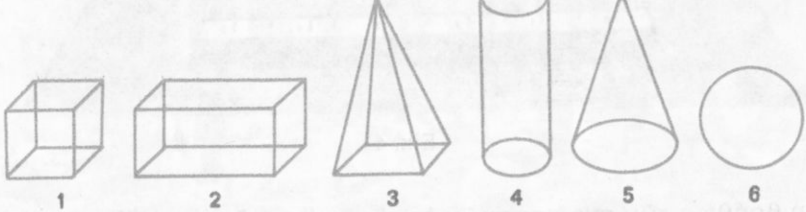
Εἰκ. 2α

Ἄν τά ἐξετάσετε σά γεωμετρικά σχήματα διαφέρουν;

12. Ὑπάρχει διαφορά ἀνάμεσα σέ ἕνα τόπι πίγκ πόνγκ καί σέ μιά δερμάτινη μπάλα, ἄν ἐξετασθοῦν σά γεωμετρικά σχήματα;

7. Ἁπλά γεωμετρικά στερεά.

Τά γεωμετρικά στερεά ὑπάρχουν σέ μεγάλη ποικιλία. Γιά νά κάνουμε εὔκολη τή μελέτη τους ἀρχίζουμε ἀπό τά πολύ ἁπλά ἀπό αὐτά. Κι ὅπως μέ τό συνδυασμό τῶν 24 γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου δημιουργοῦμε μιά ἀπεριόριστη ποικιλία λέξεων κι ἐκφράσεων, καί μέ τό συνδυασμό τῶν 10 ἀριθμοσήμων δημιουργοῦμε μιά ἀνεξάντλητη ποικιλία ἀριθμῶν, ἔτσι κατά τόν ἴδιο τρόπο μέ τά ἁπλά γεωμετρικά στερεά μέ κατάλληλο συνδυασμό δημιουργοῦμε τά πιό πολύπλοκα ἀπ' αὐτά. Παρακάτω εἰκονίζουμε τά ἁπλά γεωμετρικά στερεά.



Εἰκ. 3

Ἁπλά Γεωμετρικά στερεά: 1. ὁ κύβος, 2. τό παραλληλεπίπεδο, 3. ἡ πυραμίδα, 4. ὁ κύλινδρος, 5. ὁ κῶνος, 6. ἡ σφαίρα.

Σέ μαθήματα πού ἀκολουθοῦν, θά περιγράψουμε τά παραπάνω εἰκονιζόμενα γεωμετρικά στερεά.

Σ' αὐτά θά γνωρίσουμε καί θά μελετήσουμε τά στοιχεῖα, τά ὁποῖα διακρίνουμε πάνω τους.

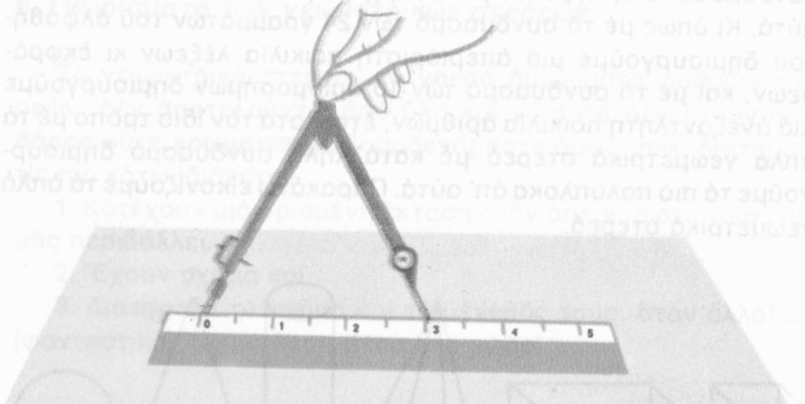
Ἀσκήσεις

13. Ὀνομάστε τά ἁπλά γεωμετρικά στερεά.

14. Πῶς μέ τά ἁπλά γεωμετρικά στερεά σχηματίζουμε τήν ἔννοια τῶν πιό συνθέτων ἀπ' αὐτά;

8. Πῶς σχεδιάζονται τά γεωμετρικά στερεά

Ὅπως οἱ ζωγράφοι εἰκονίζουν σέ πίνακες τά διάφορα ἀντικείμενα τοῦ χώρου, ἔτσι καί τά γεωμετρικά στερεά σχεδιάζονται, μέ



Εἰκ. 4

τή βοήθεια τῶν σχεδιαστικῶν ὀργάνων, ἔτσι ὥστε νά δίνουν τήν ἐντύπωση πώς βρίσκονται στό χῶρο. Ἐδῶ πρέπει νά σημειωθεῖ ὅτι κι οἱ εἰκόνες τῶν γεωμετρικῶν στερεῶν ὀνομάζονται ἐπίσης **σχήματα** αὐτῶν.

9. Γιατί μελετοῦμε τή Γεωμετρία

«Ἀεί ὁ Θεός γεωμετρεῖ».

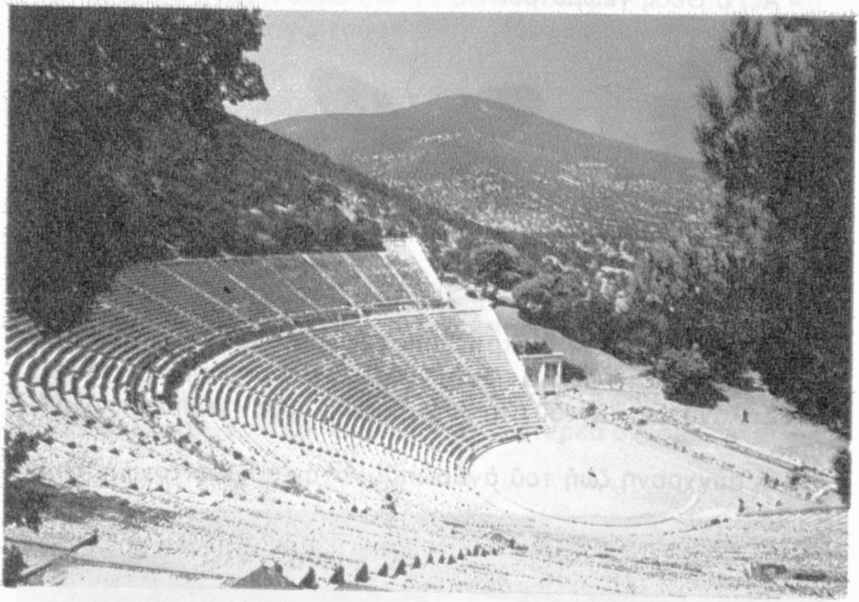
Εἰκ. 5

Παντοῦ γύρω μας διακρίνουμε «γεωμετρία». Στήν κερήθρα τῶν μελισσῶν, στά φύλλα τῶν δέντρων, στά πετρώματα, στά ζῶα, στούς πλανῆτες, παντοῦ στή φύση διακρίνουμε «γεωμετρικά σχέδια».

Στή σύγχρονη ζωή τοῦ ἀνθρώπου, στήν ἀρχιτεκτονική, στήν

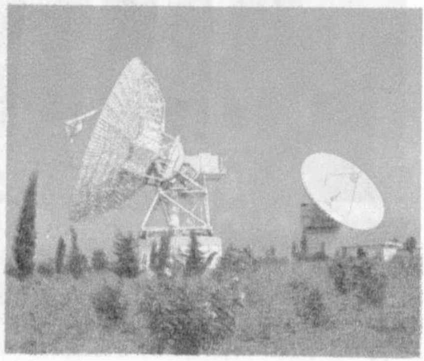
Εἰκ. 6

τέχνη, στίς μελέτες τοῦ διαστήματος, στά κτίρια, στούς δρόμους, στή ναυσιπλοΐα, παντοῦ εἶναι παροῦσα ἡ Γεωμετρία.



Εἰκ. 7
Τό ἀρχαῖο θέατρο τῆς Ἐπιδαύρου

Στό σχέδιο 8 εἰκονίζεται ὁ δορυφορικός Σταθμός πού εἶναι ἐγκαταστημένος στίς Θερμοπύλες. Γιά νά κατασκευαστεῖ χρειάστηκαν πολλές Γεωμετρικές Γνώσεις.



Εἰκ. 8

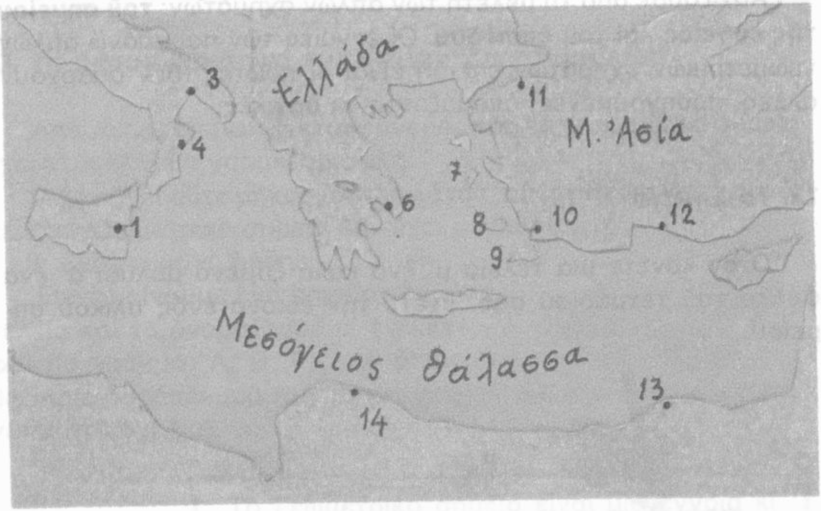
Ἀσκήσεις

15. Πῶς σχεδιάζουμε τά ἁπλά γεωμετρικά στερεά καί πῶς ἐμφανίζονται;
16. Τί ὀνομάζουμε σχῆμα ἑνός στερεοῦ;

10. Ἡ Γεωμετρία εἶναι Ἑλληνική Ἐπιστήμη

Ἡ Γεωμετρία σάν ὀργανωμένη γνώση, σάν ἐπιστήμη, εἶναι γνήσιος καρπός τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος.

Στόν παρακάτω χάρτη οἱ πόλεις σημειώνονται μέ ἀριθμούς.



Εἰκ. 9

Στόν πίνακα πού ἀκολουθεῖ, ὁ ἀριθμός δείχνει τή θέση τῆς πόλης στό χάρτη. Ἔπειτα γράφεται τό ὄνομα τῆς πόλης καί στή συνέχεια τό ὄνομα τοῦ ἀρχαίου Ἕλληνα μαθηματικοῦ, ὁ ὁποῖος ἔζησε καί δίδαξε στήν πόλη αὐτή.

1. Συρακοῦσες - Ἀρχιμήδης
3. Τάρας - Ἀρχύτας
4. Κρότωνας - Πυθαγόρας
6. Ἀθήνα - Πλάτων
6. Ἀθήνα - Ἀριστοτέλης
9. Κνίδος - Εὔδοξος
10. Μίλητος - Θαλῆς
11. Νίκαια Μ. Ἀσίας - Ἵππαρχος
12. Πέργαμος - Εὔδοξος
13. Ἀλεξάνδρεια - Ἐρατοσθένης

7. Χῖος - Ἱπποκράτης
8. Σάμος - Πυθαγόρας

13. Ἀλεξάνδρεια - Εὐκλείδης
14. Κυρήνη - Ἐρατοσθένης

Ἄσκηση

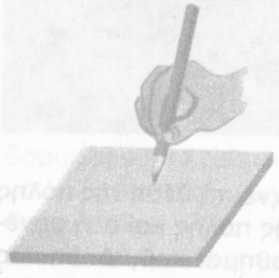
17. Μαζέψτε πληροφορίες, εἰκόνες κτλ. ἀπό ἐγκυκλοπαίδειες γιά τή ζωή καί τό ἔργο τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων σοφῶν.

11. Πρῶτες ἔννοιες.

Ἀρχίζουμε ἀπό τή μελέτη τῶν ἁπλῶν σχημάτων: **τοῦ σημείου τῆς εὐθείας** καί τοῦ **ἐπιπέδου.** Οἱ ἔννοιες τῶν παραπάνω ἁπλῶν γεωμετρικῶν σχημάτων ἐπειδή εἶναι οἱ πρῶτες (δέν ὑπάρχουν ἄλλες, προηγούμενες) ὀνομάζονται κι **ἀρχικές.**

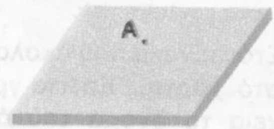
12. Τό Σημεῖο

Ὅταν κάνετε μιά τελεία μ' ἕνα καλά ξυμένο μολύβι σ' ἕνα φύλλο τοῦ τετραδίου σας, ἔχετε τήν εἰκόνα ἑνός ὑλικοῦ σημείου.



Εἰκ. 10

Ἀκουμπῶντας τή μύτη τοῦ μολυβιοῦ σημειώνουμε τό σημεῖο



Εἰκ. 11

Τό σημεῖο Α.

Ὅσο μικρή ὅμως κι ἄν ἔχετε κατασκευάσει τήν τελεία, αὐτή θά ἔχει: **μῆκος, πλάτος** καί **πάχος.**

Ἐάν φαντασθεῖτε μιά μεταβλητή τελεία, πού νά γίνεται ὁλοένα καί μικρότερη, ὥστε τελικά νά μήν ἔχει οὔτε μῆκος, οὔτε πλάτος, οὔτε πάχος, τότε θά ἔχετε τήν ἔννοια τοῦ γεωμετρικοῦ σημείου. Τέτοια ὅμως, τελεία, ὄχι μόνον εἶναι ἀόρατη, μά καί δέν ὑπάρχει.

Ἔτσι, τό γεωμετρικό σημεῖο εἶναι μιά ἔννοια κι ὄχι τελεία. Ἡ δέ θέση τοῦ γεωμετρικοῦ σημείου, σ' ἕνα φύλλο τοῦ τετραδίου μας, ἐπισημαίνεται μ' ἕνα ὁρατό ὑλικό σῆμα, ὅπως ἡ τελεία.

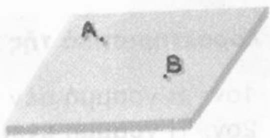
13. Τά χαρακτηριστικά τοῦ γεωμετρικοῦ σημείου

Ἀπό τά παραπάνω γίνεται φανερό, πώς τό γεωμετρικό σημεῖο ἔχει τ' ἀκόλουθα χαρακτηριστικά:

1) Δέν ἔχει οὔτε μῆκος, οὔτε πλάτος, οὔτε πάχος. Κατά συνέπεια τό γεωμετρικό σημεῖο δέν ἔχει μέγεθος.

2) Δείχνει μόνο θέση.

Ἐπισημαίνουμε ἕνα σημεῖο μέ μιά τελεία καί τό ὀνομάζουμε μ' ἕνα κεφαλαῖο γράμμα: Α, Β, Γ,... τό ὁποῖο βάζουμε παράπλευρά του (ὅπως φαίνεται στό σχέδιο).



Εἰκ. 12

Βλέπετε; ▶

> Τό Γεωμετρικό σημεῖο εἶναι μιά ἔννοια κι ὄχι τελεία. Ἡ θέση τοῦ γεωμετρικοῦ σημείου ἐπισημαίνεται μ' ἕνα ὑλικό σημεῖο, ὅπως εἶναι ἡ τελεία.

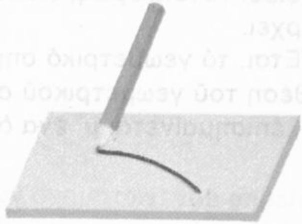
Ἀσκήσεις

18. Ἀναφέρατε πέντε φυσικά σημεῖα.
19. Τί διαφέρει τό φυσικό σημεῖο ἀπ' τό γεωμετρικό;
20. Πῶς παριστάνουμε ἕνα σημεῖο καί πῶς τό ὀνομάζουμε;
21. Σημειῶστε στό τετράδιό σας τέσσερα σημεῖα καί ὀνομάστε τα.

14. Έννοια τῆς Γραμμῆς

α. Ἐάν μετακινήσουμε τή μύτη ἑνός καλοξυμένου μολυβιοῦ πάνω σ' ἕνα φύλλο τοῦ τετραδίου μας, θά δοῦμε πώς θ' ἀφήσει σάν ἴχνος της τήν εἰκόνα μιᾶς γραμμῆς.

Παρόμοια, ἐάν μετακινήσουμε τήν κιμωλία πάνω στόν πίνακα.



Εἰκ. 13

Βλέπετε; ▶

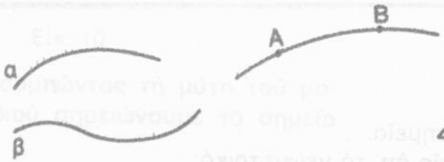
Γραμμή εἶναι μιά συνεχής σειρά θέσεων ἑνός σημείου, τό ὁποῖο μετακινεῖται, πάνω σέ μιά ἐπιφάνεια.

β. Χαρακτηριστικά τῆς γραμμῆς

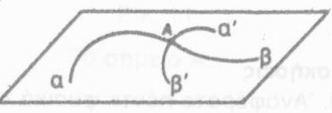
1ον. Ἡ γραμμή δέν ἔχει τέλος, κι ἀπ' τίς δυό κατευθύνσεις.
2ον. Ἡ γραμμή ἔχει μόνο μιά διάσταση, τό μῆκος.

Πῶς ὀνομάζουμε μιά γραμμή

Στά πιό κάτω θά ὀνομάζουμε μιά γραμμή ἤ μ' ἕνα μικρό γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου π.χ. ἡ γραμμή (α), ἡ γραμμή (β) ἤ μέ δυό κεφαλαῖα γράμματα δυό σημείων της π.χ. ἡ γραμμή ΑΒ.



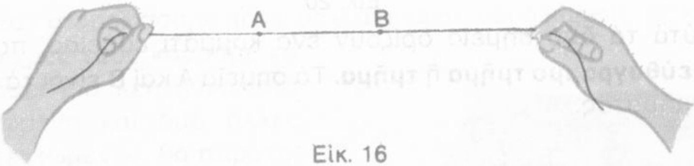
Εἰκ. 14
ἡ γραμμή (α)



Εἰκ. 15
οἱ γραμμές αβ καί α΄ β΄ κόβονται στό σημεῖο Α

15. Ἡ εὐθεία γραμμή

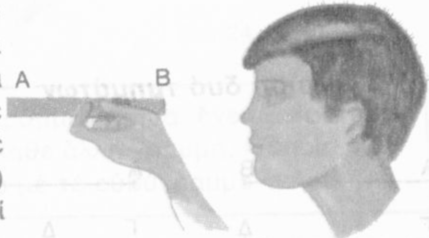
Εἶναι φανερό πώς ὑπάρχει ποικιλία γραμμῶν. Ἡ πιό ἁπλή ὅμως ἀπ' ὅλες εἶναι ἡ **εὐθεία γραμμή** ἤ γιά συντομία ἡ **εὐθεία.** Μιά εἰκόνα τῆς εὐθείας μᾶς δίνει μιά λεπτή τεντωμένη κλωστή.



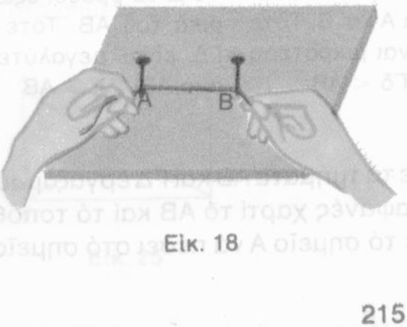
Εἰκ. 16

Ἡ μιά ὀπτική ἀκτίνα κατά τή σκόπευσή μας ἀπό τό σημεῖο Α σ' ἕνα δεύτερο σημεῖο Β.

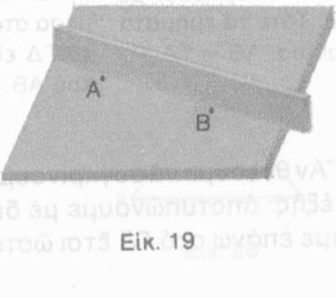
Γιά νά συμπληρώσουμε ὅμως αὐτή τήν εἰκόνα πρέπει νά δεχτοῦμε πώς ἡ εὐθεία προεκτείνεται ὅσο θέλουμε καί ἀπό τά δυό ἄκρα της. Μέ ἄλλα λόγια δεχόμαστε πώς: 1) **ἡ εὐθεία εἶναι ἀπεριόριστη** καί 2) Ἄν μεταξύ δυό σημείων τεν-τώσομε κι ἄλλη κλωστή, ὅπως φαίνεται στήν εἰκόνα 18, θά δια-πιστώσομε πώς τά δυό νήματα συμπίπτουν σέ ὅλο τό μῆκος τους. Ἑπομένως **ἀπό δυό σημεῖα μόνο μιά εὐθεία περνᾶ.**



Εἰκ. 17



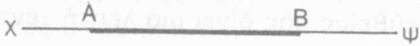
Εἰκ. 18



Εἰκ. 19

16. Εὐθύγραμμα τμήματα

Ἐπάνω σέ μιά εὐθεία ΧΨ σημειώνουμε δυό σημεῖα Α καί Β.



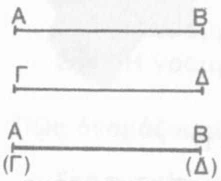
Εἰκ. 20

Αὐτά τά δυό σημεῖα ὁρίζουν ἕνα κομμάτι εὐθείας, πού τό λέμε **εὐθύγραμμο τμῆμα** ἤ **τμῆμα**. Τά σημεῖα Α καί Β εἶναι τά ἄκρα τοῦ τμήματος.

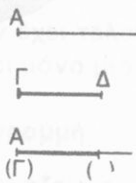
Βλέπετε; ▶

Τμῆμα εἶναι ἕνα κομμάτι εὐθείας, πού ὁρίζεται ἀπό δυό σημεῖα της.

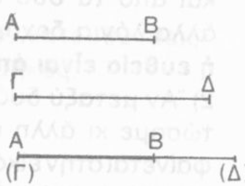
17. Σύγκριση δυό τμημάτων



Εἰκ. 21. 1η περίπτωση. Τό Δ νά συμπέσει μέ τό Β. Τότε τά τμήματα εἶναι ἴσα: ΑΒ = ΓΔ



Εἰκ. 22. 2η περίπτωση. Τό Δ νά βρεθεῖ ἀνάμεσα στά Α καί Β. Τότε τό ΓΔ εἶναι μικρότερο τοῦ ΑΒ: Γδ < ΑΒ.

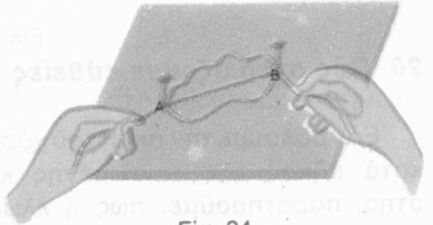


Εἰκ. 23. 3η περίπτωση. Τό Δ νά βρεθεῖ ἐξωτερικά τοῦ ΑΒ. Τότε τό ΓΔ εἶναι μεγαλύτερο ἀπό ΑΒ: ΓΔ > ΑΒ

Ἄν θέλουμε νά συγκρίνουμε τά τμήματα ΑΒ καί ΓΔ ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: ἀποτυπώνουμε μέ διαφανές χαρτί τό ΑΒ καί τό τοποθετοῦμε ἐπάνω στό ΓΔ ἔτσι ὥστε τό σημεῖο Α νά πέσει στό σημεῖο Γ καί τό Β νά βρίσκεται πρός τό μέρος τοῦ Δ. Τότε θά παρουσιαστοῦν οἱ τρεῖς περιπτώσεις πού εἰκονίζονται πιό πάνω.

18. Μιά ἰδιότητα τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος

Ἐάν στερεώσουμε πάνω σέ μιά πινακίδα δυό καρφίτσες κι ἀπό τίς αἰχμές τους κάνουμε νά περάσει μιά λεπτή κλωστή τεντωμένη καί δυό ἄλλες ὄχι τεντωμένες, θά παρατηρήσουμε πώς ἡ τεντωμένη κλωστή ἔχει τό μικρότερο μῆκος ἀπό κάθε ἄλλη ὄχι τεντωμένη κλωστή, πού συνδέει τά σημεῖα Α καί Β.

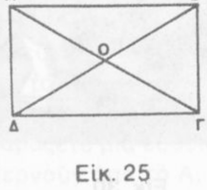


Εἰκ. 24

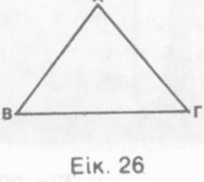
Βλέπετε; ▶ Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ἔχει μικρότερο μῆκος ἀπό κάθε ἄλλη γραμμή, ἡ ὁποία ἔχει τά ἴδια ἄκρα μέ τό εὐθύγραμμο τμῆμα.

Ἀσκήσεις

22. Ὀνομάστε τά εὐθύγραμμα τμήματα τῶν σχεδίων 25 καί 26 καθώς καί τά ἄκρα αὐτῶν.
23. Γράψτε δυό εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καί ΓΔ, πού νά «τέμνονται» στό σημεῖο Ε.



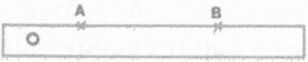
Εἰκ. 25

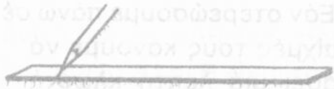


Εἰκ. 26

19. Ὁ χάρακας (κανόνας)

Ὁ χάρακας (κανόνας ἤ ρίγα) εἶναι ἕνα σχεδιαστικό ἐργαλεῖο καμωμένο ἀπό ξύλο ἤ ἀπό πλαστικό, ἤ ἀπό μέταλλο... ὅπως φαίνεται καί στήν εἰκόνα, καί τόν χρησιμοποιοῦμε γιά νά σχεδιάζουμε εὐθεῖες.

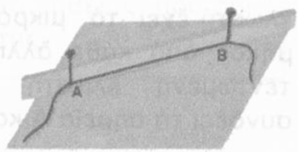




Εἰκ. 27

20. Πῶς σχεδιάζουμε εὐθεῖες

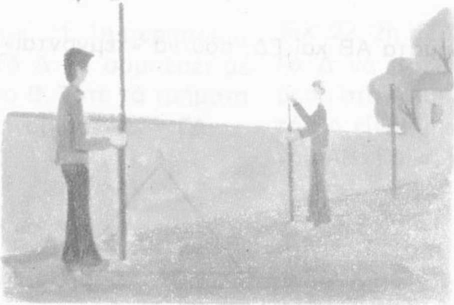
Ἐάν βάλουμε τήν ἀκμή τοῦ χάρακα κατά μῆκος τῆς τεντωμένης κλωστῆς, παρατηροῦμε, πώς ἡ κλωστή συμπίπτει μέ τήν κόψη (ἀκμή) τοῦ χάρακα, σ' ὅλο τό μῆκος. Ἀπό δῶ συμπεραίνουμε, πώς γιά νά σχεδιάσουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, μέ ἄκρα τά Α καί Β, ἐργαζόμαστε μέ τόν χάρακα, ὅπως φαίνεται στό σχέδιο 27.



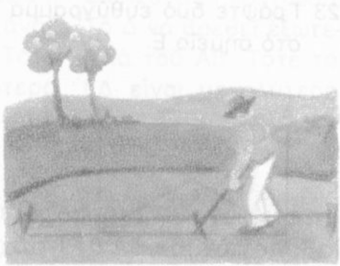
Εἰκ. 28

Μιά εὐθεία τήν ὀνομάζουμε μέ τά γράμματα δυό σημείων της π.χ. ἡ εὐθεία ΑΒ. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα τό ὀνομάζουμε μέ τά γράμματα τῶν ἄκρων του π.χ. τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ.

Παρακάτω εἰκονίζεται ὁ τρόπος πού χαράσσονται εὐθεῖες στό ὕπαιθρο.



Εἰκ. 29



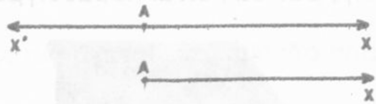
Εἰκ. 30

Ἀσκήσεις (χωρίς χαρτί καί μολύβι)

24. Ἀναφέρατε πέντε φυσικά εὐθύγραμμα τμήματα.
25. Πόσα σημεῖα ὑπάρχουν α) πάνω σέ μιά εὐθεία, β) πάνω σ' ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα.
26. Τί γεωμετρικό σχῆμα παριστάνεται ἀπ' τό «τσάκισμα» ἑνός φύλλου τετραδίου;
27. Μπορεῖ νά σχηματιστεῖ εὐθεία γραμμή, μέ τήν τοποθέτηση εὐθυγράμμων τμημάτων, τοῦ ἑνός κοντά στό ἄλλο καί γιατί;

21. ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ

Γράφουμε τήν εὐθεία Χ'Χ καί πάνω σ' αὐτή παίρνουμε τό σημεῖο Α. Ἐάν φανταστοῦμε πώς δέν ὑπάρχει τό τμῆμα αὐτῆς, πού βρίσκεται, ἀριστερά τοῦ Α, θ' ἀπομείνει ἡ ἡμιευθεῖα ΑΧ. Κατά τόν ἴδιο τρόπο παίρνουμε καί τήν ἔννοια τῆς ἡμιευθείας ΑΧ'. Τό σημεῖο Α λέγεται ἀρχή τῶν ἡμιευθειῶν ΑΧ', ΑΧ.



Εἰκ. 31

Βλέπετε; ▶

> **Ἕνα σημεῖο πάνω σέ μιά εὐθεία χωρίζει τήν εὐθεία σέ δυό κομμάτια πού λέγονται ἡμιευθεῖες.**

Ἀσκήσεις

28. Ποιά εἶναι ἡ διαφορά μεταξύ εὐθείας, ἡμιευθείας καί εὐθυγράμμου τμήματος; (ὡς πρός τά ἄκρα).
29. Πάνω σέ μιά εὐθεία ΧΨ νά πάρετε τό σημεῖο Ο: α) Νά ὀνομάστε τίς ἡμιευθεῖες τοῦ σχήματος, β) Ἐάν πάρετε τό σημεῖο Α πάνω στήν ΟΧ καί τό Β πάνω στήν ΟΨ πόσα εὐθύγραμμα τμήματα σχηματίζονται;
30. Τοποθετεῖστε ἕνα σημεῖο Α πάνω στό φύλλο τοῦ τετραδίου σας. Νά χαράξετε μιά εὐθεία ΒΓ πού περνάει ἀπό τό Α. Πόσες ἄλλες εὐθεῖες περνοῦν ἀπό τό Α;

31. Νά χαράξετε δυό εὐθεῖες ΑΒ καί ΓΔ πού κόβονται στό σημεῖο Ε. Εἶναι δυνατό νά βρεθεῖ ἄλλο σημεῖο τομῆς τῶν δυό διαφόρων εὐθειῶν ΑΒ καί ΓΔ;

22. Ἡ εἰκόνα τοῦ ἐπιπέδου.

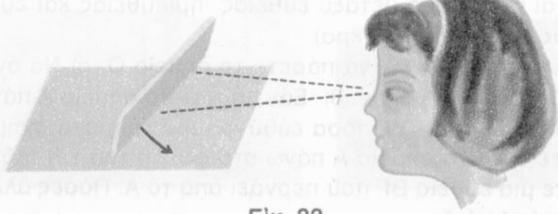
Εἴπαμε παραπάνω πώς τό ἐξωτερικό μέρος ἑνός σώματος, πού τό βλέπουμε ἤ τό πιάνουμε καί πού εἶναι τό σύνορο πού χωρίζει τό σῶμα ἀπό τό χῶρο πού τό περιβάλλει ἀποτελεῖ τήν ἐπιφάνεια τοῦ σώματος.

Οἱ πιό σημαντικές ἀπό τίς ἐπιφάνειες εἶναι αὐτές πού ὀνομάζονται **ἐπίπεδες ἐπιφάνειες ἤ ἐπίπεδα.**

Ἡ ἤρεμη ἐπιφάνεια μιᾶς δεξαμενῆς μέ νερό, ἤ τό ἐπάνω μέρος μιᾶς γυάλινης μαρμάρινης πλάκας, ἤ μιᾶς καλά πλανισμένης σανίδας εἶναι παραδείγματα φυσικῶν ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν.

Εἰκ. 32

Τό χαρακτηριστικό γνώρισμα μιᾶς ἐπίπεδης ἐπιφάνειας εἶναι, ὅτι ἐφαρμόζει πρός κάθε διεύθυνσή της ἤ κόψη (ἀκμή) τοῦ χάρακα.



Εἰκ. 33

Γι' αὐτό ὁ τεχνίτης γιά νά ἐλέγξει ἄν μιά ἐπιφάνεια εἶναι ἐπίπεδη, τοποθετεῖ ἐπάνω της τήν εὐθύγραμμη κόψη (ἀκμή) τοῦ κανόνα (χάρακα) σέ διάφορες θέσεις καί ἐξετάζει, ἄν τά σημεῖα τῆς ἀκμῆς βρίσκονται ὅλα πάνω στήν ἐπιφάνεια.

Δεχόμαστε πώς:

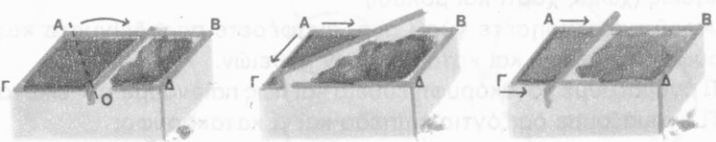
1) Τό ἐπίπεδο ἐκτείνεται ἀπεριόριστα καί
2) Τό ἐπίπεδο ἔχει δυό μόνο διαστάσεις: **τό μῆκος** καί **τό πλάτος**.

23. Πῶς εἰκονίζεται ἕνα ἐπίπεδο

Στά σχέδια, ἕνα μόνο μέρος τοῦ ἐπιπέδου εἰκονίζουμε, ὅπως φαίνεται καί στό παράπλευρο σχέδιο. Λέμε π.χ. τό ἐπίπεδο Ρ.

Εἰκ. 34

Ἡ πιό κάτω εἰκόνα δείχνει, πῶς **παράγεται** ἕνα ἐπίπεδο πρακτικά.



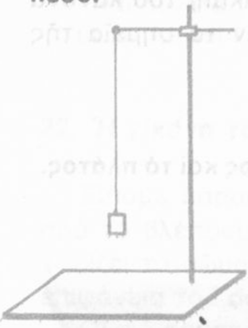
Εἰκ. 35

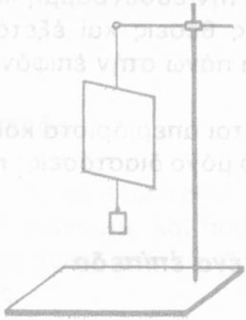
24. Κατακόρυφη εὐθεία. Κατακόρυφο ἐπίπεδο. Ὁριζόντιο ἐπίπεδο.

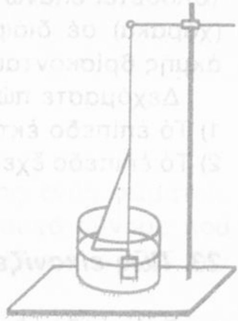
1. Στερεώνουμε τό νῆμα τῆς στάθμης ἀπό ἕνα στήριγμα, ὅπως εἰκονίζεται στήν εἰκόνα 36. Ἡ εὐθεία, πού εἰκονίζει ἡ τεντωμένη κλωστή τοῦ νήματος, ὀνομάζεται: **κατακόρυφη εὐθεία.**

2. Ἕνα ἐπίπεδο χαρτονιοῦ, ὅταν περιέχει τό νῆμα τῆς στάθμης, ὅπως φαίνεται στήν εἰκόνα 37, δίνει τήν εἰκόνα ἑνός **κατακόρυφου ἐπιπέδου.**

3. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἤρεμου ὑγροῦ ὀνομάζεται **ὁριζόντιο ἐπίπεδο.**


Εἰκ. 36


Εἰκ. 37


Εἰκ. 38

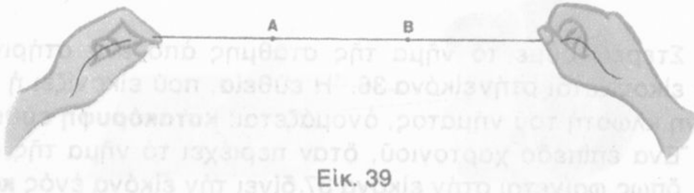
Στό σχέδιο 38 εἰκονίζεται ἕνα ὁριζόντιο ἐπίπεδο καί τό νῆμα τῆς στάθμης βυθισμένο μέσα στό ὑγρό. Τήν κατακόρυφο εὐθεία πού εἰκονίζει τό νῆμα τῆς στάθμης τήν ὀνομάζουμε κάθετο πρός τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο, πού τό εἰκονίζει ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ἤρεμου ὑγροῦ τοῦ δοχείου.

Ἀσκήσεις (χωρίς χαρτί καί μολύβι)

32. Ἀφοῦ παρατηρήσετε γύρω σας, ἀναφέρετε παραδείγματα κατακορύφων ἐπιπέδων καί κατακορύφων εὐθειῶν.
33. Τί ὀνομάζουμε κατακόρυφη εὐθεία καί πῶς παίρνουμε τήν εἰκόνα της;
34. Τί ὀνομάζουμε ὁριζόντιο ἐπίπεδο καί τί κατακόρυφο;

25. Εἴδη γραμμῶν.

1) Γνωρίζουμε πώς ἡ γραμμή πού ἔχει τή μορφή τῆς τεντωμένης κλωστῆς, εἶναι εὐθεία γραμμή ἤ ἁπλά **εὐθεία.**

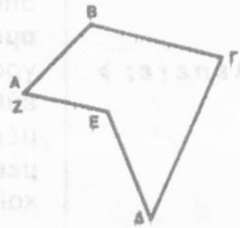


Εἰκ. 39

2) Τή γραμμή πού δέν εἶναι εὐθεία, ἀλλά ἀποτελεῖται ἀπό

εὐθύγραμμα τμήματα τή λέμε **τεθλασμένη ἤ πολυγωνική.**

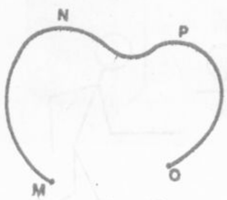
Τέτοιες γραμμές εἶναι αὐτές πού εἰκονίζονται στά σχήματα:



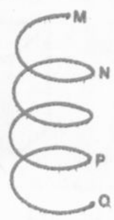
Εἰκ. 40	Εἰκ. 41	Εἰκ. 42
ΑΒΓΔΕ εἶναι τεθλασμένη ἤ πολυγωνική γραμμή.	ἀνοικτή πολυγωνική γραμμή μέ τά ἄκρα της Α καί Ζ διάφορα.	κλειστή πολυγωνική γραμμή. Τά ἄκρα της Α καί Ζ συμπίπτουν.

3) Ἡ γραμμή πού κανένα κομμάτι της, ὅσο μικρό καί νά εἶναι, δέν εἶναι εὐθύγραμμο, ὀνομάζεται **καμπύλη.**

Τέτοιες εἶναι οἱ γραμμές πού εἰκονίζονται:

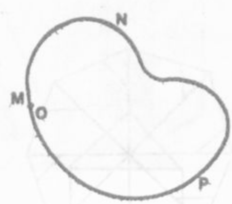


Εἰκ. 43



Εἰκ. 44

Ἀνοικτές καμπύλες γραμμές



Εἰκ. 45

κλειστή καμπύλη

4) Τίς γραμμές τέλος, πού ἀποτελοῦνται ἀπό εὐθύγραμμα καί καμπύλα μέρη τίς **λέμε μεικτές.**

Τέτοιες εἶναι οἱ γραμμές πού εἰκονίζονται. (εἰκ. 46).

Εἰκ. 46

Βλέπετε; ▶

'Υπάρχουν 4 εἴδη γραμμῶν:
1. Ἡ **εὐθεία,** ἔννοια τῆς ὁποίας παίρνουμε ἀπό μιά τεντωμένη κλωστή. 2) **Ἡ τεθλασμένη,** ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπό εὐθύγραμμα τμήματα, χωρίς ὁλόκληρη νά εἶναι εὐθεία. 3) **Ἡ καμπύλη,** τῆς ὁποίας κανένα μέρος δέν εἶναι εὐθύγραμμο τμῆμα. 4) **Ἡ μεικτή** πού ἀποτελεῖται ἀπό εὐθύγραμμα καί καμπύλα μέρη.

Ἀσκήσεις

35. Ποιά γράμματα κεφαλαῖα τῆς Ἑλληνικῆς ἀλφαβήτου ἀποτελοῦν α) τεθλασμένη γραμμή, β) καμπύλη γραμμή, γ) μεικτή γραμμή.
36. Πόσες διαστάσεις ἔχει μιά γραμμή;
37. Πῶς ὀνομάζεται ἡ γραμμή μέ τήν ὁποία ἔχουν σχεδιαστεῖ τά παρακάτω σκίτσα;

Εἰκ. 47

26. Εἴδη ἐπιφανειῶν

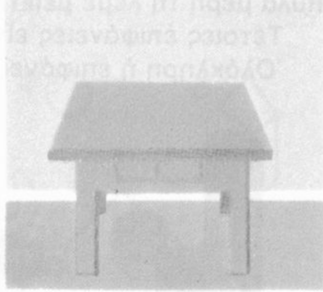
1) Εἴδαμε τήν **ἐπίπεδο ἐπιφάνεια.** Τέτοιες ἐπιφάνειες εἶναι ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια ἤρεμου ὑγροῦ, τό μέρος τοῦ τραπεζιοῦ πού

χρησιμοποιοῦμε γιά φαγητό, ἤ κάθε ἐπιφάνεια ἀπό αὐτές πού ἀποτελεῖται π.χ. ἕνα κουτί σπίρτα, ἤ βάση μιᾶς κονσέρβας κτλ. ἀποτελοῦν ἐπίπεδα μέρη.

2) Κάθε ἐπιφάνεια πού ἀποτελεῖται ἀπό ἄλλες ἐπίπεδες τή λέμε τεθλασμένη ἤ πολυεδρική.

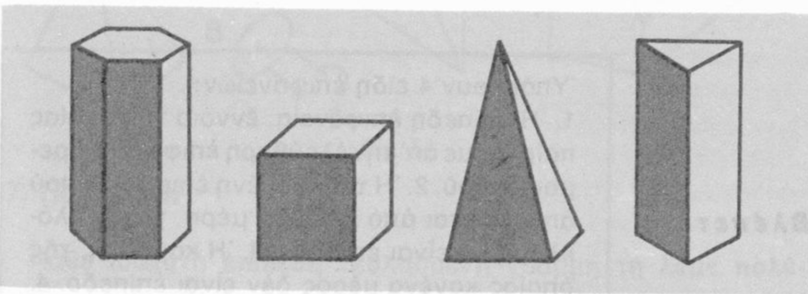
Τέτοια ἐπιφάνεια εἶναι:

Ὁλόκληρη ἡ ἐπιφάνεια ἀπό τήν ὁποία ἀποτελεῖται ἕνα χαρτοκιβώτιο.



Εἰκ. 48

Ὁλόκληρη ἡ ἐπιφάνεια ἀπό τήν ὁποία ἀποτελεῖται καθένα ἀπό τά σχήματα πού εἰκονίζονται παρακάτω:

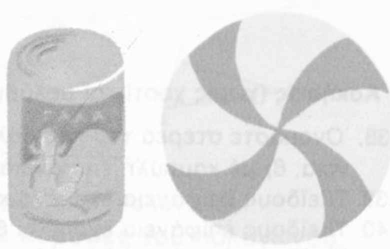


Εἰκ. 49

3) Ἡ ἐπιφάνεια, πού κανένα μέρος της δέν εἶναι ἐπίπεδο, λέγεται **καμπύλη.**

Τέτοιες ἐπιφάνειες εἶναι π.χ:

Τό τόπι πού παίζουμε, ἡ ἐπιφάνεια ἑνός κουτιοῦ γάλα (ἐκτός ἀπό τίς βάσεις του).



Εἰκ. 50

4) Τέλος τήν ἐπιφάνεια πού ἀποτελεῖται ἀπό ἐπίπεδα καί καμπύλα μέρη τή λέμε **μεικτή**.

Τέτοιες ἐπιφάνειες εἶναι:

Ὁλόκληρη ἡ ἐπιφάνεια ἑνός κουτιοῦ γάλα, μιᾶς κονσέρβας,

Εἰκ. 51

ὁλόκληρη ἡ ἐπιφάνεια ἑνός ποτηριοῦ.

Βλέπετε; ▶

Ὑπάρχουν 4 εἴδη ἐπιφανειῶν:
1. Ἡ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, ἔννοια τῆς ὁποίας παίρνουμε ἀπ' τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια ἤρεμου ὑγροῦ. 2. Ἡ τεθλασμένη ἐπιφάνεια πού ἀποτελεῖται ἀπό ἐπίπεδα μέρη, χωρίς ὁλόκληρη νά εἶναι ἐπίπεδη. 3. Ἡ καμπύλη, τῆς ὁποίας κανένα μέρος δέν εἶναι ἐπίπεδο. 4. Ἡ μεικτή πού ἀποτελεῖται ἀπό ἐπίπεδα καί καμπύλα μέρη.

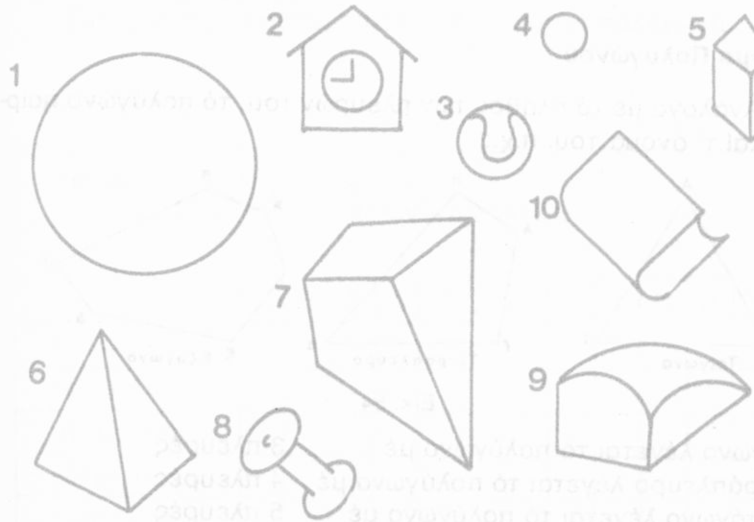
Ἀσκήσεις (χωρίς χαρτί καί μολύβι)

38. Ὀνομάστε στερεά τοῦ περιβάλλοντός σας α) μέ τεθλασμένη ἐπιφάνεια, β) μέ καμπύλη ἐπιφάνεια καί γ) μέ μεικτή ἐπιφάνεια.
39. Τί εἴδους ἐπιφάνεια ἔχει ἕνα κουτί σπίρτα;
40. Τί εἴδους ἐπιφάνεια ἔχουν οἱ βῶλοι;
41. Τί εἴδους ἐπιφάνεια ἔχει τό χωνάκι τοῦ παγωτοῦ;

42. Μεταξύ τῶν ἐπιφανειῶν πού εἰκονίζονται, ποιές εἶναι:

α) ἐπίπεδες; γ) καμπύλες;

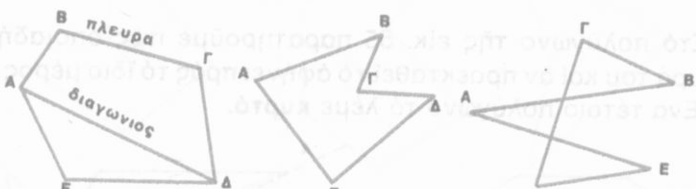
β) πολυεδρικές; δ) μεικτές;



Εἰκ. 52

27. *Πολύγωνα*

Κάθε κλειστή **ἐπίπεδη** τεθλασμένη γραμμή τή λέμε **πολύγωνο.** Τέτοια πολύγωνα εἶναι αὐτά πού εἰκονίζονται:



Εἰκ. 53

Κλειστές πολυγωνικές γραμμές ἤ πολύγωνα

Τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε τά λέμε **κορυφές** τοῦ πολυγώνου.

Τά τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ τά λέμε **πλευρές** τοῦ πολυγώνου.

Κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα, π.χ. τό ΑΔ, πού ἑνώνει δυό κορυφές, πού δέν εἶναι **συνεχόμενες**, τό λέμε **διαγώνιο** τοῦ πολυγώνου.

Ὄνομα Πολυγώνου

Ἀνάλογα μέ τό πλῆθος τῶν πλευρῶν του, τό πολύγωνο παίρνει καί τ' ὄνομά του. π.χ.:

Εἰκ. 54

Τρίγωνο λέγεται τό πολύγωνο μέ	3 πλευρές
Τετράπλευρο λέγεται τό πολύγωνο μέ	4 πλευρές
πεντάγωνο λέγεται τό πολύγωνο μέ	5 πλευρές
ἑξάγωνο λέγεται τό πολύγωνο μέ	6 πλευρές
ὀκτάγωνο λέγεται τό πολύγωνο μέ	8 πλευρές
δεκάγωνο λέγεται τό πολύγωνο μέ	10 πλευρές κτλ.

28. Κυρτά καί μή κυρτά πολύγωνα

Στό πολύγωνο τῆς εἰκ. 55 παρατηροῦμε πώς ὁποιαδήποτε πλευρά του καί ἄν προεκταθεῖ τό ἀφήνει πρός τό ἴδιο μέρος της.

Ἕνα τέτοιο πολύγωνο τό λέμε **κυρτό**.

Εἰκ. 55 Εἰκ. 56

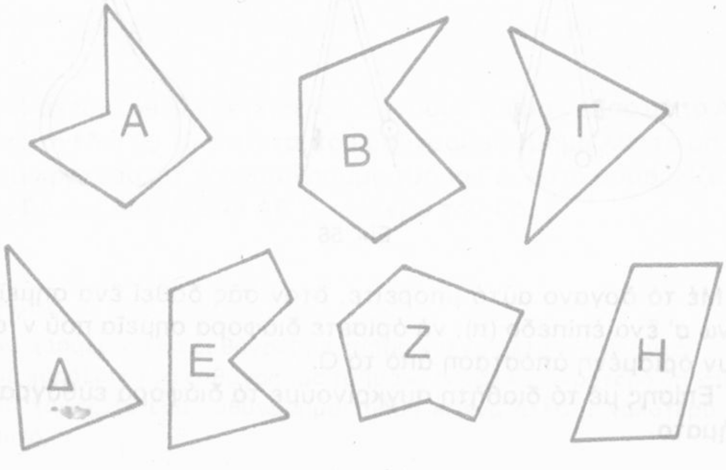
Ἐνῶ στό πολύγωνο τῆς εἰκ. 56 ἄν προεκταθεῖ ἡ πλευρά ΑΒ τό ἀφήνει καί ἀπό τά δυό μέρη της. Τά πολύγωνα αὐτοῦ τοῦ εἴδους τά λέμε **μή κυρτά.**

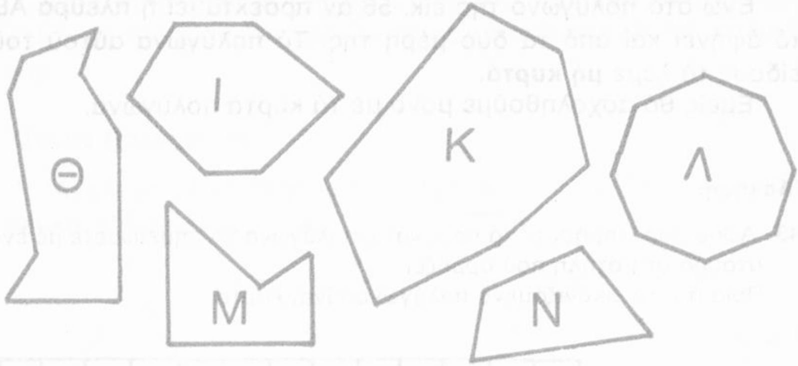
Ἐμεῖς θά ἀσχοληθοῦμε μόνο μέ τά κυρτά πολύγωνα.

Ἄσκηση:

43. Ἀφοῦ παρατηρήσετε τά παρακάτω πολύγωνα νά σημειώσετε μέ ἕνα σταυρό στή στήλη πού ἁρμόζει.
Ποιά ἀπ' τά εἰκονιζόμενα πολύγωνα εἶναι κυρτά;

	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν
Τρίγωνο													
τετράπλευρο													
πεντάγωνο													
ἑξάγωνο													
ἑπτάγωνο													
δεκάγωνο													





Εἰκ. 57

29. Ὁ διαβήτης.

Εἶναι ἕνα πολύ χρήσιμο ὄργανο, πού μέ διάφορες παραλλαγές χρησιμοποιεῖται στή μεταφορά ἀποστάσεων, σχεδιάσεις, χαράξεις, κατασκευές κύκλων κτλ.

Εἰκ. 58

Μέ τό ὄργανο αὐτό μπορεῖτε, ὅταν σᾶς δοθεῖ ἕνα σημεῖο Ο πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο (π), νά ὁρίσετε διάφορα σημεῖα πού ν' ἀπέχουν ὁρισμένη ἀπόσταση ἀπό τό Ο.

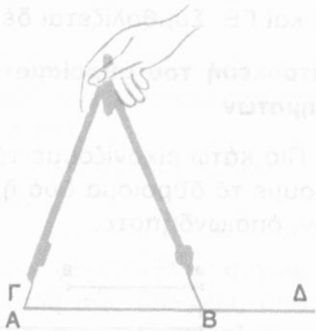
Ἐπίσης μέ τό διαβήτη συγκρίνουμε τά διάφορα εὐθύγραμμα τμήματα.

30. *Πράξεις σέ εὐθύγραμμα τμήματα*

Ἰσότητα. Νά συγκριθοῦν τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καί ΓΔ τοῦ σχεδίου 59. Μέ τή βοήθεια τοῦ διαβήτη μετρᾶμε τό μῆκος τοῦ ΑΒ καί τό μεταφέρουμε στό ΓΔ, ὅπως φαίνεται στό σχέδιο (α), ἔτσι, ὥστε τό μυτερό σκέλος τοῦ διαβήτη νά πέσει στό Γ, τότε ἐάν ἡ μύτη τοῦ μολυβιοῦ πέσει στό Δ, λέμε, πώς τό ΑΒ εἶναι ἴσο μέ τό ΓΔ καί τό συμβολίζουμε:

ΑΒ = ΓΔ, τό ὁποῖο διαβάζεται: ΑΒ ἴσο μέ τό ΓΔ.

Εἰκ. 59



Εἰκ. 60

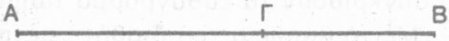
Στό σχέδιο 59 βλέπετε, πώς παίρνουμε τμῆμα ΓΔ ἴσο μέ τό ΑΒ.

Στό σχέδιο 60 εἰκονίζεται τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ, τό ὁποῖο εἶναι μικρότερο ἀπ' τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΓΔ. Αὐτό συμβολίζεται ΑΒ < ΓΔ καί διαβάζεται ΑΒ μικρότερο τοῦ ΓΔ.

Ἀσκήσεις:

45. Νά χαράξετε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα κι ἕνα ἄλλο ἴσο μ' αὐτό.
46. Νά χαράξετε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα κι ἕνα ἄλλο μικρότερο ἀπ' αὐτό.
47. Νά χαράξετε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα κι ἕνα ἄλλο μεγαλύτερο ἀπ' αὐτό.

31. Ἄθροισμα καί διαφορά δυό εὐθυγράμμων τμημάτων



Εἰκ. 61

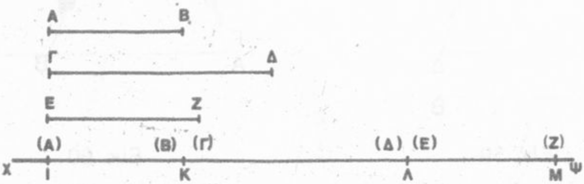
1. Ἐάν μεταξύ τῶν σημείων Α καί Β πάρουμε, ὅπως φαίνεται στό πιό πάνω σχέδιο, τό σημεῖο Γ, τότε τό τμῆμα ΑΒ λέγεται **ἄθροισμα** τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΑΓ καί ΓΒ. Συμβολίζεται:

ΑΓ + ΓΒ = ΑΒ καί διαβάζεται: ΑΓ καί ΓΒ ἴσον μέ ΑΒ.

2. Τό τμῆμα ΑΓ λέγεται: διαφορά τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΑΒ καί ΓΒ. Συμβολίζεται δέ ἔτσι: ΑΒ − ΓΒ = ΑΓ.

Κατασκευή τοῦ ἀθροίσματος 2 ἤ περισσοτέρων εὐθυγράμμων τμημάτων

Πιό κάτω εἰκονίζουμε τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο μποροῦμε νά βροῦμε τό ἄθροισμα δυό ἤ περισσοτέρων εὐθυγράμμων τμημάτων, ὁποιωνδήποτε.



Εἰκ. 62

Τό τμῆμα ΑΖ εἶναι τό ἄθροισμα τῶν τμημάτων ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ

ΑΖ = ΑΒ + ΓΔ + ΕΖ

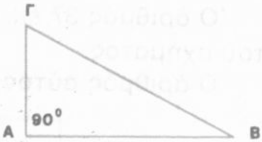
ἤ ΑΖ = ΙΚ + ΚΛ + ΛΜ

Βλέπετε; ▶

> Ἄθροισμα δυό ἤ περισσοτέρων εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι τό εὐθύγραμμο τμῆμα, πού παίρνουμε, ἐάν χαράξουμε σέ μιά εὐθεία, διαδοχικά τμήματα, ἀντιστοίχως ἴσα πρός τά δοσμένα καί τά προσθέσουμε.

Ἀσκήσεις:

48. Νά βρεθεῖ τό ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου πού εἰκονίζεται.
49. Νά βρεθεῖ ἡ διαφορά τῶν πλευρῶν ἀνά δυό τοῦ ἴδιου τριγώνου.



Εἰκ. 63

32. Μῆκος ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος

Ὅταν λέμε, πώς τό μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ εἶναι 3 μέτρα, ἐννοοῦμε, πώς:

α) Γιά τή μέτρηση τοῦ τμήματος ΑΒ χρησιμοποιήθηκε σά μονάδα μέτρησης τό μέτρο.

β) Ἡ μονάδα μήκους, δηλ. τό μέτρο, χωράει 3 φορές στό μετρημένο τμῆμα. Μ' ἄλλα λόγια ἐκφράζουμε τό ἀποτέλεσμα τῆς σύγκρισης τοῦ ποσοῦ πρός τή μονάδα του.

Τό ἀποτέλεσμα αὐτό εἶναι πάντα ἕνας συγκεκριμένος ἀριθμός, πού λέγεται **μῆκος** τοῦ τμήματος.

Βλέπετε; ▶

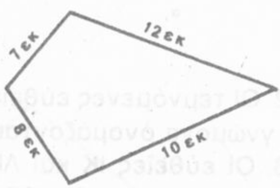
> Μῆκος ἑνός τμήματος λέγεται ἕνας συγκεκριμένος ἀριθμός, πού μᾶς δηλώνει, ἀπό πόσες μονάδες καί μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται ἕνα τμῆμα.

Βασική μονάδα μέτρησης μηκῶν εἶναι τό γαλλικό μέτρο.

33. Περίμετρος ἑνός εὐθυγράμμου σχήματος

Πρόβλημα: Ποιό εἶναι τό ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος πού εἰκονίζεται;

Λύση: Εἶναι φανερό, πώς τό ἄθροισμα αὐτό εἶναι 12 ἑκ. + 10 ἑκ. + 7 ἑκ. + 8 ἑκ. = 37 ἑκ.



Εἰκ. 64

Ὁ ἀριθμός 37 ἑκ. εἶναι τό ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος.

Ὁ ἀριθμός αὐτός λέγεται **περίμετρος** τοῦ σχήματος.

Βλέπετε; ▶

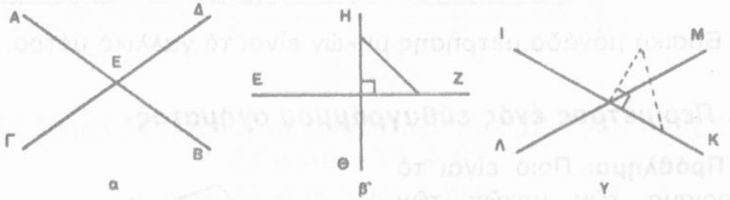
Περίμετρος ἑνός εὐθυγράμμου σχήματος λέγεται τό ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος.

Ἀσκήσεις:

50. Ἐάν ἡ πλευρά ἑνός τετραγώνου εἶναι 4 μ., νά βρεθεῖ ἡ περίμετρος αὐτοῦ.
51. Ἡ περίμετρος ἑνός τετραγώνου εἶναι 40 μ. Πόσο εἶναι τό μῆκος τῆς πλευρᾶς του;
52. Ἡ περίμετρος ἑνός ὀρθογωνίου εἶναι 100 μ. ἡ δέ μιά ἀπό τίς πλευρές του 30 μ. Πόσο εἶναι τό μῆκος κάθε μιᾶς ἀπ' τίς πλευρές του;

34. Τεμνόμενες εὐθεῖες. Κάθετες εὐθεῖες. Πλάγιες εὐθεῖες.

1. Οἱ εὐθεῖες ΑΒ καί ΓΔ πού περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Ε ὀνομάζονται **τεμνόμενες** εὐθεῖες (εἰκ. 65α).



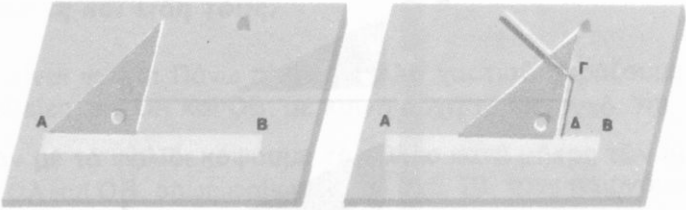
Εἰκ. 65

2. Οἱ τεμνόμενες εὐθεῖες πού περιέχουν τίς κάθετες πλευρές τοῦ γνώμονα ὀνομάζονται **κάθετες** εὐθεῖες (εἰκ. 65β).

3. Οἱ εὐθεῖες ΙΚ καί ΛΚ τῆς εἰκόνας 65γ πού τέμνονται χωρίς νά περιέχουν τίς κάθετες πλευρές τοῦ γνώμονα, ὀνομάζονται **πλάγιες** εὐθεῖες.

35. Κατασκευή καθέτων εὐθειῶν.

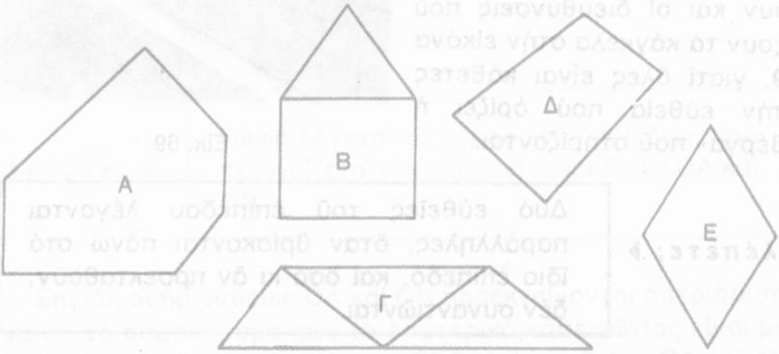
Κάθετες εὐθεῖες κατασκευάζουμε μέ τή βοήθεια τοῦ γνώμονα, ὅπως εἰκονίζεται στό σχέδιο. Γιά νά δηλώσουμε, πώς ἡ ΓΔ εἶναι κάθετη στήν ΑΒ, γράφουμε: ΓΔ ⊥ ΑΒ.



Εἰκ. 66

Ἀσκήσεις (χωρίς χαρτί καί μολύβι)

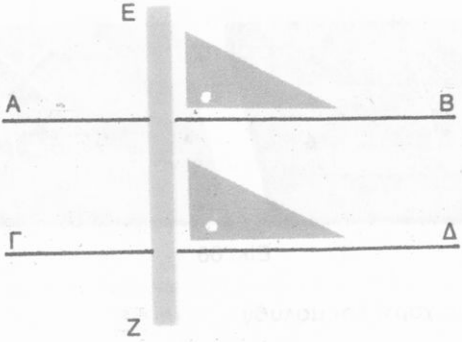
53. Ποιές εὐθεῖες λέγονται κάθετες;
54. Ποιές εὐθεῖες λέγονται τεμνόμενες;
55. Ποιές εὐθεῖες λέγονται πλάγιες;
56. Πῶς χαράζουμε κάθετες εὐθεῖες;
57. Παρατηρεῖστε τά σχήματα πού εἰκονίζονται καί χρησιμοποιεῖστε τό γνώμονα γιά νά ἐκτιμήσετε ποιές ἀπό τίς γωνίες τῶν σχημάτων εἶναι ὀρθές. Νά σημειώσετε σέ συνέχεια τίς ὀρθές γωνίες μέ τή χρήση τοῦ συμβόλου.



Εἰκ. 67

36. *Παράλληλες εὐθεῖες.*

Φέρουμε δυό κάθετες εὐθεῖες ἀπάνω στήν εὐθεία ΕΖ, τίς ΑΒ καί ΓΔ, ὅπως φαίνονται στήν εἰκόνα, πού νά βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο.



Εἰκ. 68

Οἱ εὐθεῖες αὐτές τοῦ ἐπιπέδου ἔχουν μιά ἰδιότητα: ὅσο καί ἄν προεκταθοῦν καί ἀπ' τίς δυό κατευθύνσεις δέν συναντιῶνται. Τίς εὐθεῖες αὐτοῦ τοῦ εἴδους τίς λέμε παράλληλες.

Παράλληλες εὐθεῖες ὁρίζουν καί οἱ διευθύνσεις πού ἔχουν τά κάγκελα στήν εἰκόνα 69, γιατί ὅλες εἶναι κάθετες στήν εὐθεία πού ὁρίζει ἡ «βέργα» πού στηρίζονται.

Εἰκ. 69

Βλέπετε; ▶

> Δυό εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου λέγονται παράλληλες, ὅταν βρίσκονται πάνω στό ἴδιο ἐπίπεδο, καί ὅσο κι ἄν προεκταθοῦν, δέν συναντιῶνται.

Ἡ παραλληλία τῶν εὐθειῶν ΑΒ καί ΓΔ συμβολίζεται: ΑΒ // ΓΔ καί διαβάζεται: ΑΒ παράλληλος πρός τήν ΓΔ.

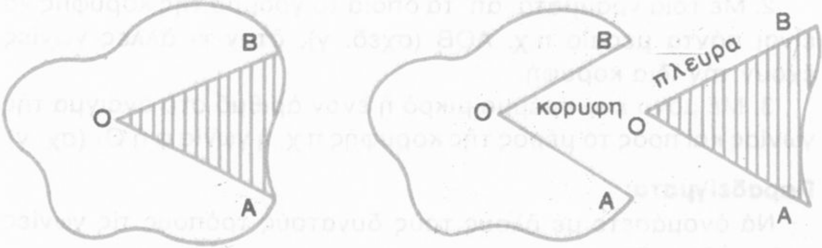
'Ασκήσεις:

58. 'Ονομάστε παραδείγματα παραλλήλων εὐθειῶν.
59. Νά κατασκευάσετε 3 παράλληλες εὐθεῖες (μεταξύ τους) μέ τή βοήθεια τοῦ γνώμονα.

37. Γωνίες καί εἴδη τους.

Τί εἶναι γωνία: Πάνω σ' ἕνα φύλλο χαρτιοῦ χαράζουμε δυό ἡμιευθεῖες, τίς ΟΑ καί ΟΒ, μέ κοινή ἀρχή τό Ο. (σχεδ. 70).

'Εάν μέ τό ψαλίδι κόψουμε τό φύλλο κατά μῆκος τῶν ἡμιευθειῶν ΟΑ καί ΟΒ, ὅπως φαίνεται στό σχδ. 70, τότε παίρνουμε τή γωνία ΑΟΒ.



Εἰκ. 70

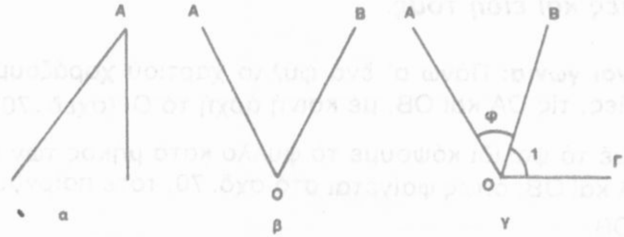
Βλέπετε; ▶

> Γωνία λέγεται τό μέρος τοῦ ἐπιπέδου, πού περιορίζεται ἀπό τίς δυό ἡμιευθεῖες ΟΑ καί ΟΒ.

'Επειδή οἱ ἡμιευθεῖες ΟΑ καί ΟΒ προεκτείνονται ἀπεριόριστα βγαίνει τό συμπέρασμα πώς τό ἐσωτερικό κάθε γωνίας εἶναι μιά ἀπεριόριστη ἐπίπεδη ἐπιφάνεια. Οἱ δυό ἡμιευθεῖες ΟΑ καί ΟΒ λέγονται **πλευρές** τῆς γωνίας, ἡ δέ κοινή ἀρχή λέγεται **κορυφή.**

38. Πῶς ὀνομάζουμε μιά γωνία.

1. Μέ μόνο τό γράμμα τῆς κορυφῆς, ὅταν τό σχῆμα δέν περιλαμβάνει ἄλλες γωνίες μέ τήν ἴδια κορυφή π.χ. ἡ γωνία Α (σχεδ. α), ἡ γωνία Ο (σχεδ. β).



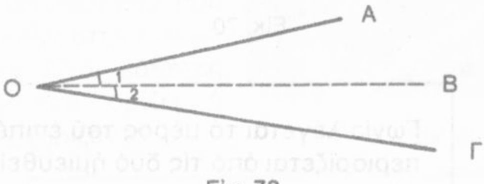
Εικ. 71

2. Μέ τρία γράμματα, ἀπ' τά ὁποῖα τό γράμμα τῆς κορυφῆς νά εἶναι πάντα μεσαῖο π.χ. ΑΟΒ (σχεδ. γ), ὅταν κι ἄλλες γωνίες ἔχουν τήν ἴδια κορυφή.

3. Μέ μόνο ἕνα γράμμα μικρό ἤ ἕναν ἀριθμό στό ἄνοιγμα τῆς γωνίας καί πρός τό μέρος τῆς κορυφῆς π.χ. ἡ γωνία φ ἤ O_1 (σχ. γ).

Παραδείγματα:

Νά ὀνομάσετε μέ ὅλους τούς δυνατούς τρόπους τίς γωνίες τοῦ σχεδίου 72.



Εικ. 72

α) Ἡ γωνία ΓΟΒ ἤ γωνία ΒΟΓ ἤ γωνία O_2.

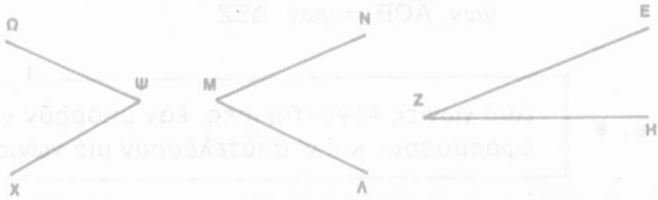
β) γωνία ΑΟΒ, ἤ γωνία ΒΟΑ ἤ γωνία Ο1

γ) γωνία ΓΟΑ ἤ γωνία ΑΟΓ

δ) Παρατηροῦμε, πώς ἡ γραφή γων. Ο δέν ταιριάζει, γιατί εἶναι τρεῖς οἱ γωνίες μέ κορυφή τό Ο: οἱ γωνίες ΑΟΒ, ΑΟΓ, καί ΒΟΓ.

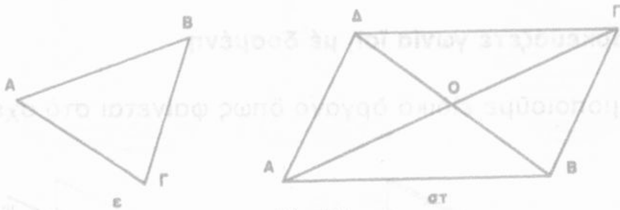
Ἀσκήσεις

60. Ὀνομάστε μὲ τρεῖς τρόπους τὶς γωνίες τῶν πιὸ κάτω σχημάτων.



Εἰκ. 73

61. Ὀνομάστε μὲ τρεῖς τρόπους κάθε μιὰ ἀπ' τὶς γωνίες τοῦ σχήματος 74.

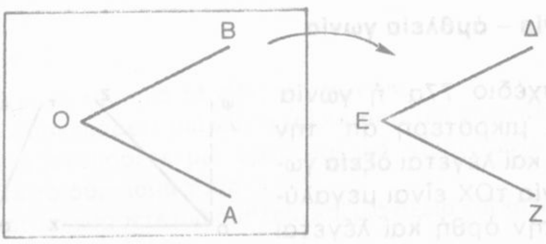


Εἰκ. 74

62. Ὀνομάστε τέσσερες γωνίες ποὺ νὰ ἔχουν κοινὴ κορυφὴ τὸ Ο (Σχ. στ).

39. Ἴσες γωνίες.

Ἀποτυπώνουμε σὲ διαφανὲς χαρτὶ τὴ γωνία ΑΟΒ, ὅπως φαίνεται καὶ στὸ σχέδιο, καὶ τὴ βάζουμε ἐπάνω στὴ γωνία ΔΕΖ.



Εἰκ. 75

'Εάν μπορέσουμε νά φέρουμε σέ σύμπτωση τίς πλευρές τῆς γωνίας ΑΟΒ μέ τίς πλευρές τῆς ΔΕΖ, τότε θά λέμε πώς οἱ γωνίες εἶναι ἴσες καί θά τό συμβολίζουμε:

γων. ΑΟΒ = γων. ΔΕΖ

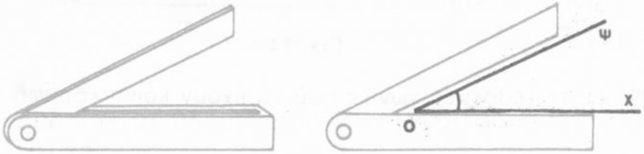
Βλέπετε; ▶

Δυό γωνίες λέγονται ἴσες, ἐάν μποροῦν νά ἐφαρμόσουν καί ν' ἀποτελέσουν μιά γωνία.

"Αν δυό γωνίες δέν εἶναι δυνατόν μέ τόν παραπάνω τρόπο νά συμπέσουν τίς λέμε ἄνισες.

Πῶς κατασκευάζετε γωνία ἴση μέ δοσμένη

Χρησιμοποιοῦμε εἰδικό ὄργανο ὅπως φαίνεται στό σχέδιο.

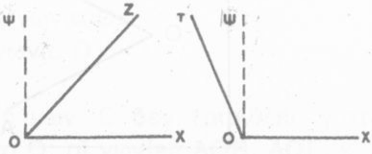


Εἰκ. 76

40. Εἴδη γωνιῶν

'Οξεία γωνία – ἀμβλεία γωνία

Στό σχέδιο 77α ἡ γωνία ΖΟΧ εἶναι μικρότερη ἀπ' τήν ὀρθή ΨΟΧ καί λέγεται **ὀξεία** γωνία. 'Η γωνία τΟΧ εἶναι μεγαλύτερη ἀπ' τήν ὀρθή καί λέγεται ἀμβλεία γωνία. Σχεδ. 77β.



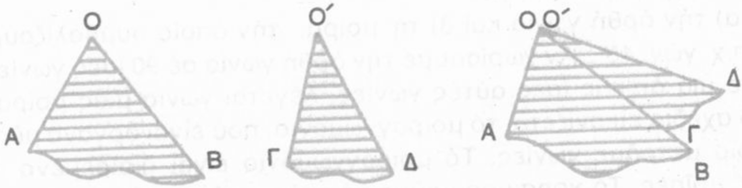
(α) Εἰκ. 77 (β)

Βλέπετε; ▶

> Όταν μιά γωνία εἶναι μικρότερη ἀπ' τήν ὀρθή λέγεται ὀξεία. Όταν εἶναι μεγαλύτερη ἀπ' τήν ὀρθή, λέγεται ἀμβλεία.

41. Ἄθροισμα γωνιῶν

Βλέπετε πιό κάτω πῶς βρίσκουμε τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΟΒ + ΓΟΔ = ΑΟΔ.



Εἰκ. 78

42. Διαφορά γωνιῶν.

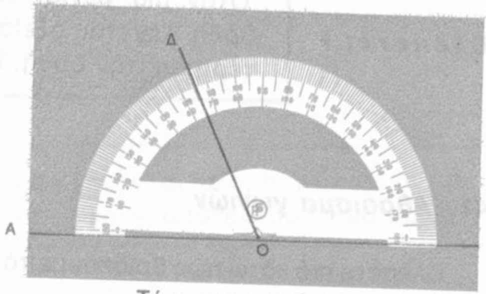
Στό πιό πάνω σχέδιο ἡ γωνία ΒΟΔ λέγεται διαφορά τῶν γωνιῶν ΑΟΒ καί ΑΟΔ. Δηλ. γων. ΒΟΔ = γων. ΑΟΔ − γων. ΑΟΒ.

Ἀσκήσεις

63. Πόσα εἶναι καί ποιά τά εἴδη τῶν γωνιῶν;
64. Νά κατασκευάσετε μιά γωνία καί κατόπιν μιά ἄλλη ἴση μέ τήν πρώτη.
65. Νά κατασκευάσετε μιά ὀρθή καί μιά ὀξεία γωνία καί κατόπιν νά βρεῖτε τό ἄθροισμά τους.
66. Νά κατασκευάσετε μιά ἀμβλεία καί μιά ὀξεία καί κατόπιν νά βρεῖτε τή διαφορά τους.

43. Μέτρηση γωνιῶν.

Μέτρηση μιᾶς γωνίας λέγεται ἡ σύγκριση της πρός τή μονάδα μέτρησής της. Μέτρο τῆς γωνίας λέγεται ὁ συγκεκριμένος ἀριθμός, πού μᾶς δηλώνει, ἀπό πόσες μονάδες καί μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται μιά γωνία.



Τό μοιρογνωμόνιο
Εἰκ. 79

Σάν μονάδα μέτρησης γωνιῶν χρησιμοποιοῦμε:

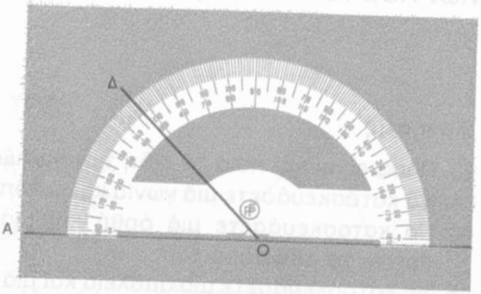
α) τήν ὀρθή γωνία καί β) τή μοίρα, τήν ὁποία συμβολίζουμε (°) π.χ. γων. 45°. Ἄν χωρίσουμε τήν ὀρθή γωνία σέ 90 ἴσες γωνίες, τότε μιά ἀπ' τίς ἴσες αὐτές γωνίες, λέγεται γωνία μιᾶς μοίρας. Στό σχέδιο εἰκονίζεται τό μοιρογνωμόνιο, πού εἶναι ὄργανο μέ τό ὁποῖο μετρᾶμε γωνίες. Τό μοιρογνωμόνιο εἶναι διαιρεμένο σέ 180° μοῖρες. Τό χρησιμοποιοῦμε σέ τοῦτες τίς πράξεις:

α) Γιά τή μέτρηση γωνίας.

Ἄν π.χ. θέλουμε νά μετρήσουμε τή γωνία ΑΟΔ (σχέδ. 80) τοποθετοῦμε τό μοιρογνωμόνιο, ὅπως φαίνεται καί βρίσκουμε πώς ἡ γωνία ΑΟΔ εἶναι 47°.

β) Γιά τήν κατασκευή γωνίας ὁρισμένου μεγέθους

Ἐάν π.χ. θέλουμε νά κατασκευάσουμε γωνία 134° μέ κορυφή τό σημεῖο Ο καί πλευρά τήν ΟΒ, τοποθετοῦμε τό μοιρογνωμόνιο, ὅπως φαίνεται στό σχ. 80 καί χαράζουμε, τήν πλευρά ΟΔ, ἔτσι, ὥστε νά περνάει ἀπ' τή διαίρεση 134°.



Εἰκ. 80

Βλέπετε; ▶

> Τό μέγεθος μιᾶς γωνίας ἐξαρτᾶται ἀπ' τό ἄνοιγμα τῶν πλευρῶν της κι ὄχι ἀπ' τό μῆκος αὐτῶν.

Ἀσκήσεις

67. Πόσες μοῖρες ἔχει ἡ ὀρθή γωνία;
68. Νά κατασκευάσετε μιά γωνία καί κατόπιν νά τή μετρήσετε.
69. Τό μισό τῆς ὀρθῆς γωνίας πόσες μοῖρες εἶναι;
70. Τό $\frac{1}{4}$ τῆς ὀρθῆς πόσες μοῖρες εἶναι; καί πόσα τά $\frac{3}{4}$ αὐτῆς;
71. Μιά γωνία εἶναι $1\frac{1}{2}$ τῆς ὀρθῆς. Πόσων μοιρῶν εἶναι;

44. Δοκιμάστε τίς γνώσεις σας.

Ἡ ἀριστερή στήλη περιλαμβάνει ὅρους, ἡ δέ δεξιά περιγραφή τῶν ὅρων. Γράψτε τούς ἀριθμούς ἀπ' τό 1 ἕως τό 10 σέ μιά στήλη κι ἀντιστοιχίστε σέ καθένα, τό γράμμα τῆς δεξιᾶς στήλης, πού ἀντιπροσωπεύει τήν ὀρθή ἀπάντηση.

1. Εὐθύγραμμο τμῆμα	α) Μιά γωνία μεγαλύτερη ἀπό 0° καί μικρότερη ἀπό 90°
2. Εὐθεῖα	β) Μιά γωνία μεγαλύτερη ἀπό 90° καί μικρότερη ἀπό 180°
3. Ἡμιευθεῖα	γ) Ὄργανο γιά τή μέτρηση καί κατασκευή γωνιῶν ὁρισμένου μεγέθους.
4. Μοιρογνωμόνιο	δ) Τό ἁπλούστερο γεωμετρικό σχῆμα, πού δέν ἔχει καμία διάσταση.
5. Γωνία	ε) Ἡ γωνία τῆς ὁποίας τό μέγεθος εἶναι 90°.
6. Ὀρθή γωνία	στ) Τό μέρος τοῦ ἐπιπέδου πού περιορίζεται ἀπό δυό ἡμιευθεῖες μέ κοινή ἀρχή.
7. Ὀξεία γωνία	ζ) Ἀρχική ἔννοια, τήν εἰκόνα τῆς ὁποίας σχηματίζουμε, ἐάν φανταστοῦμε πώς προεκτείναμε ἀπεριόριστα

8. Ἀμβλεία γωνία

9. Μῆκος εὐθ. τμήματος

10. Σημεῖο

ριστα ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα κι' ἀπό τίς δυό κατευθύνσεις.

η) Ἕνα ἀπ' τά δυό μέρη στά ὁποῖα χωρίζεται μιά εὐθεία κι ἕνα ἀπ' τά σημεῖα της.

θ) Ἕνα μέρος εὐθείας, πού περιορίζεται ἀπό δυό σημεῖα της.

ι) Ὁ συγκεκριμένος ἀριθμός πού μᾶς δηλώνει, ἀπό πόσες μονάδες καί πόσα μέρη της συγκροτεῖται ἕνα τμῆμα.

Ἐπιτυχία = 4 × (πλῆθος ἐπιτυχιῶν)

Ποῦ κατατάσεστε	Ἄριστα	Καλά	Μέτρια	Ὄχι ἱκανοποιητικά
	36-40	36-32	32-28	20 ἤ λιγότερο

45. Ἐπίπεδα σχήματα.

Εἰκ. 81

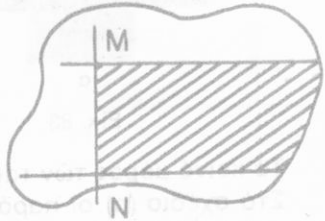
Τά σχήματα πού εἰκονίζονται πιό πάνω ὀνομάζονται ἐπίπεδα σχήματα. Αὐτά ἔχουν ὅλα τους τά σημεῖα πάνω στό ἴδιο ἐπίπεδο, σ' ἀντίθεση μέ τά στερεά, τῶν ὁποίων τά σημεῖα δέ βρίσκονται πάνω στό ἴδιο ἐπίπεδο π.χ. στό ἐπίπεδο πάνω στό ὁποῖο τό τοποθετοῦμε.

Βλέπετε; ▶

> Τά γεωμετρικά σχήματα, πού ἔχουν ὅλα τους τά σημεῖα πάνω στό ἴδιο ἐπίπεδο ὀνομάζονται ἐπίπεδα σχήματα.

46. Τί εἶναι ἐπίπεδη ταινία

Στό σχέδιο εἰκονίζεται ἕνα μέρος τοῦ ἐπιπέδου, πού βρίσκεται ἀνάμεσα σέ δυό παράλληλες εὐθεῖες. Τό μέρος αὐτό ὀνομάζουμε **ἐπίπεδη ταινία** ἤ ἁπλά **ταινία.**



Εἰκ. 82

Ἕνα μέρος τῆς ἐπίπεδης ταινίας βλέπουμε στά εἰσιτήρια τῶν λεωφορείων, στά χαρτονομίσματα, στίς διάφορες κορδέλες κτλ. ἐάν φανταστοῦμε ὅλα αὐτά τοποθετημένα πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο.

Ἐπειδή οἱ παράλληλες εὐθεῖες, προεκτείνονται ἀπεριόριστα, γι' αὐτό κι ἡ ταινία εἶναι μιά ἀπεριόριστη ἐπίπεδη ἐπιφάνεια.

47. Πλάτος τῆς ταινίας

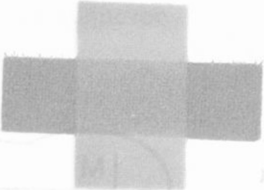
Τό μέρος ΜΝ τῆς κοινῆς κάθετης ἀνάμεσα στίς δυό παράλληλες εὐθεῖες, λέγεται ἀπόσταση αὐτῶν. Στό σχέδιο ἡ ἀπόσταση ΜΝ, πού εἶναι καί κοινή κάθετη τῶν παράλληλων, λέγεται καί πλάτος τῆς ταινίας. Ἐάν μέ ψαλίδι κόψουμε κατά μῆκος ὅλων τῶν γραμμῶν του ἕνα ριγωμένο φύλλο τετραδίου, τότε θά ἔχουμε ταινίες **τοῦ ἴδιου πλάτους.** Ἄν τό κόψουμε κατά μῆκος τῶν γραμμῶν του ἀνά 2, 3 κτλ., τότε θά ἔχουμε ταινίες μέ διάφορο πλάτος.

Βλέπετε; ▶

> Ἐπίπεδη ταινία εἶναι τό μέρος τοῦ ἐπιπέδου πού βρίσκεται ἀνάμεσα σέ δυό παράλληλες εὐθεῖες του.

48. Τομή δυό ταινιῶν

Τοποθετῶ δυό ταινίες, μιά ἔγχρωμη καί μιά διαφανή λευκή, πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο, ὅπως φαίνεται στά πιό κάτω σχέδια.



α

Εἰκ. 83

β

Εἰκ. 84

Τό κοινό μέρος τῶν ταινιῶν αὐτῶν λέγεται **τομή** τῶν ταινιῶν.

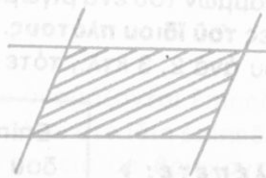
Στό σχέδιο (α) οἱ παράλληλες εὐθεῖες εἶναι κάθετες μεταξύ τους καί στό (β) εἶναι πλάγιες. Στήν πρώτη περίπτωση λέμε, πώς οἱ ταινίες εἶναι **κάθετες μεταξύ τους** καί στή δεύτερη **πλάγιες.**

Ἀσκήσεις

72. Ἀπό ἔγχρωμο φύλλο νά κόψετε ταινίες πλάτους: α) 1 ἑκατ., β) 2 ἑκ., γ) 3 ἑκ. καί δ) 2,5 ἑκ.
73. Νά σχηματίσετε τίς τομές τῶν ταινιῶν: α) 1 ἑκ. καί 2 ἑκ. β) 1 ἑκ. καί 3 ἑκ.

49. Οἰκογένεια τῶν παραλληλογράμμων

1. Στό σχ. 85 εἰκονίζεται ἡ τομή δυό ταινιῶν μέ διάφορο πλάτος. Ἐπειδή τό τετράπλευρο πού δημιουργεῖται, θά ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες θά εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμο. Αὐτό τό παραλληλόγραμμο ὀνομάζεται καί ρομβοειδές.

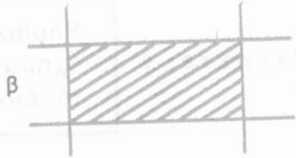


Εἰκ. 85

Βλέπετε; ▶

> Παραλληλόγραμμο λέγεται τό τετράπλευρο πού ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες καί σχηματίζεται ἀπ' τήν τομή δυό ταινιῶν.

2. Στό σχέδιο 86 εἰκονίζεται ἡ τομή δυό καθέτων ταινιῶν μέ διαφορετικό πλάτος. Τό παραλληλόγραμμο τῆς τομῆς, πού θά ἔχει ὅλες τίς γωνίες του ὀρθές, ὀνομάζεται **ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ἤ ἁπλά ὀρθογώνιο.**



Εἰκ. 86

Βλέπετε; ▶

> Ὀρθογώνιο λέγεται τό παραλληλόγραμμο πού ἔχει ὅλες τίς γωνίες του ὀρθές καί σχηματίζεται ἀπ' τήν τομή δυό καθέτων ταινιῶν μέ διαφορετικό πλάτος.

3. Στό σχ. 87 εἰκονίζεται ἡ τομή δυό καθέτων ταινιῶν τοῦ ἴδιου πλάτους. Τό ὀρθογώνιο πού σχηματίζεται κι ἔχει ὅλες του τίς πλευρές ἴσες λέγεται **τετράγωνο.**

Εἰκ. 87

Βλέπετε; ▶

> Τετράγωνο εἶναι τό παραλληλόγραμμο πού ἔχει ὅλες τίς πλευρές του ἴσες καί τίς γωνίες του ὀρθές. Σχηματίζεται ἀπ' τήν τομή δυό καθέτων ταινιῶν μέ ἴδιο πλάτος.

4. Στό σχ. 88 εἰκονίζεται ἡ τομή δυό ταινιῶν τοῦ ἰδίου πλάτους, ἀλλ' ὄχι καθέτων. Τό παραλληλόγραμμο τῆς τομῆς λέγεται **ρόμβος.**

Εἰκ. 88

Βλέπετε; ▸

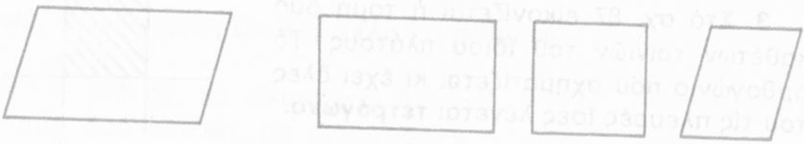
> Ρόμβος εἶναι τό παραλληλόγραμμο πού σχηματίζεται ἀπ' τήν τομή δυό ταινιῶν μέ τό ἴδιο πλάτος ἀλλ' ὄχι καθέτων.

Στό ρόμβο μέ τή βοήθεια τοῦ διαβήτη, διαπιστώνουμε πώς ὅλες οἱ πλευρές του εἶναι ἴσες.

Ἀσκήσεις πρακτικές

74. Μέ δυό κατάλληλες ταινίες νά σχηματίσετε: 1ον) Ἕνα ρομβοειδές, 2ον) Ἕνα ὀρθογώνιο, 3ον) ἕνα τετράγωνο καί 4ον) ἕνα ρόμβο. (Ὑπόδειξη: Νά χρησιμοποιηθοῦν διαφανεῖς καί χρωματιστές ταινίες).

50. Χαρακτηριστικές ἰδιότητες τῶν παραλληλογράμμων



Εἰκ. 89

α) Μέ τή βοήθεια τοῦ διαβήτη σας νά συγκρίνετε τίς ἀπέναντι πλευρές κάθε παραλληλογράμμου: Τί παρατηρεῖτε;

β) Ἀφοῦ ἀποτυπώσετε σέ διαφανές χαρτί μιά ἀπ' τίς γωνίες κάθε παραλληλογράμμου, νά τή συγκρίνετε μέ τήν ἀπέναντί της. Τί παρατηρεῖτε;

Βλέπετε; ▶

> Οἱ ἀπέναντι πλευρές **κάθε** παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες μεταξύ τους, β) οἱ ἀπέναντι γωνίες κάθε παραλληλογράμμου εἶναι, ἐπίσης, ἴσες μεταξύ τους.

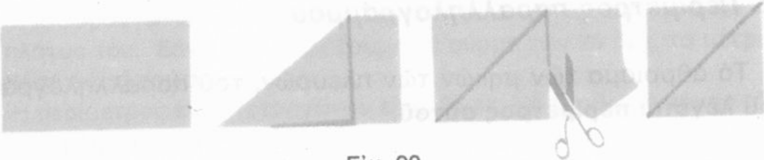
Ἀσκήσεις

74. Ποιά σχέση ἔχουν οἱ πλευρές τοῦ ρόμβου;
75. Ποιά σχέση ἔχουν οἱ πλευρές καί οἱ γωνίες τοῦ τετραγώνου;
76. Ποιές εἶναι οἱ διαφορές μεταξύ ρόμβου καί τετραγώνου;
77. Ποιές εἶναι οἱ διαφορές μεταξύ ὀρθογωνίου καί τετραγώνου;

51. Κατασκευές παραλληλογράμμων

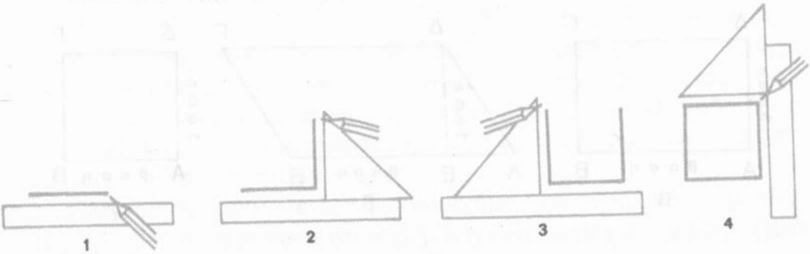
Α) Κατασκευή τετραγώνου

1ον. Μ' ἕνα φύλλο τοῦ τετραδίου σας. Τό διπλώνετε, ὅπως τό βλέπετε στήν εἰκόνα.



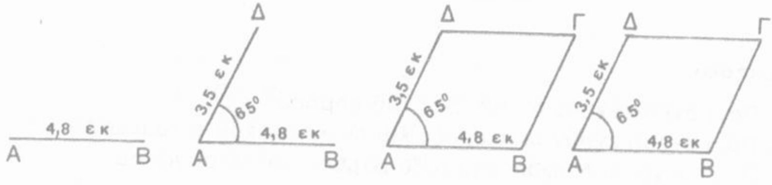
Εἰκ. 90

2ον. Μέ τή βοήθεια τοῦ κανόνα καί τοῦ γνώμονα.



Εἰκ. 91

Β) Πῶς κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο ἀπό δυό πλευρές του καί τήν περιεχόμενη γωνία του μέ τή βοήθεια τῶν σχεδιαστικῶν ὀργάνων. π.χ. ΑΒ = 4,8 ἑκ., ΑΔ = 3,5 ἑκ. καί γων. Α = 65°. Ἀφοῦ κατασκευάσουμε τή γωνία ΔΑΒ, θά φέρουμε παραλλήλους ἀπό Δ καί Β πρός τίς πλευρές ΑΒ καί ΑΔ.



Εἰκ. 92

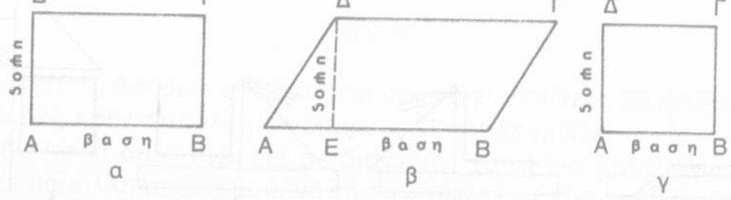
Ἀσκήσεις

78. Νά κατασκευάσετε σέ φύλλο τετραδίου μέ τή χρήση τῶν σχεδιαστικῶν ὀργάνων: 1) Τετράγωνο μέ πλευρά 5 ἑκ.
79. Ὀρθογώνιο μέ πλευρές 4 ἑκ. καί 6 ἑκ.
80. Ρόμβο μέ πλευρά 7 ἑκ. καί γωνία 60°.
81. Παραλληλόγραμμο μέ πλευρές 2.5 καί 4.5 καί γωνία 63°.

52. *Περίμετρος παραλληλογράμμου*

Τό ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν, τοῦ παραλληλογράμμου λέγεται **περίμετρος αὐτοῦ.**

Στοιχεῖα παραλληλογράμμου



Εἰκ. 93

Βάση παραλληλογράμμου λέγεται μιά τυχοῦσα πλευρά αὐτοῦ π.χ. ἡ ΑΒ σχ. (α).

Ὕψος παραλληλογράμμου λέγεται ἡ ἀπόσταση τῆς βάσης ἀπ' τήν ἀπέναντι πλευρά του π.χ. στό σχ. (α) ὕψος λέγεται ἡ ΑΔ. Γιά τό ρομβοειδές σχ. (β) ὕψος εἶναι τό ΔΕ. Στό τετράγωνο ἡ βάση ΑΒ εἶναι ἴση μέ τό ὕψος τοῦ ΔΑ σχ. (γ). Οἱ διαστάσεις τοῦ παραλληλογράμμου λέγονται μῆκος καί πλάτος αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις (Χωρίς χαρτί καί μολύβι)

82. Νά μετρήσετε τό μῆκος καί τό πλάτος τοῦ τετραδίου σας.
83. Ἡ πλευρά τετραγώνου εἶναι 8 ἑκ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του;
84. Ἡ πλευρά ἑνός ρόμβου εἶναι 5 ἑκ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του;

Γραπτά

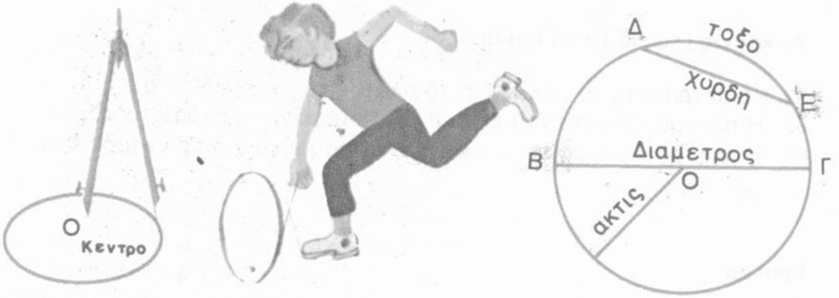
85. Πόσο σύρμα διχτυωτό θά χρειαστεῖτε γιά νά περιφράξετε ἕνα χωράφι, σχήματος ὀρθογωνίου, ὅταν οἱ διαστάσεις του εἶναι 100 μ. καί 60 μ.;
86. Ἕνας ὀρθογώνιος κῆπος ἔχει πλάτος 20 μ. καί μῆκος διπλάσιο ἀπ' τό πλάτος του. Ἐάν τό περιφράξουμε μέ σύρμα τῶν 25 δρχ. τό μέτρο, πόσα θά πληρώσουμε;
87. Ἡ περίμετρος ἑνός τετραγώνου εἶναι 24 ἑκ. Νά βρεθεῖ τό μῆκος τῆς πλευρᾶς του.
88. Ἡ περίμετρος ρόμβου εἶναι 26 ἑκ. Πόσο εἶναι τό μῆκος τῆς πλευρᾶς;
89. Ἡ περίμετρος ἑνός ὀρθογωνίου εἶναι 42 ἑκ. Τό μῆκος μιᾶς πλευρᾶς του εἶναι 8 ἑκ. Νά βρεῖτε τά μήκη τῶν ἄλλων πλευρῶν του.
90. Ἡ μητέρα σας γύρω ἀπό 12 πετσετάκια τοῦ τσαγιοῦ, ἔραψε δαντέλλα, πλάτους 2 ἑκ. Πόσο μῆκος δαντέλλας χρησιμοποίησε, ἐάν τά πετσετάκια ἔχουν σχῆμα τετράγωνο καί πλευρά 20 ἑκατοστόμετρα;
91. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος ἑνός τετραγωνικοῦ κήπου, πλευρᾶς 55 μ. Ἐάν πρόκειται νά τόν περιφράξουμε μέ 3 σειρές σύρμα τῶν 53,5 δρχ. τό μέτρο, πόσο θά πληρώσουμε;
92. Ἡ αὐλή τοῦ σχολείου μέ ὀρθογώνιο σχῆμα ἔχει μῆκος 96 μ. καί πλάτος 50 μ. Αὐτή περιβάλλεται ἀπό μαντρότοιχο πάχους 0,60 μ. Ποιό εἶναι τό μῆκος τοῦ ἐξωτερικοῦ μέρους τοῦ τοίχου;

52α. Κυκλικός δίσκος - Κύκλος

Κάθε μιά ἀπό τίς βάσεις ἑνός κουτιοῦ μέ γάλα εἶναι ἕνας κυκλικός δίσκος.

Ἡ γραμμή πού περιορίζει τόν κυκλικό δίσκο εἶναι ὁ κύκλος (λέγεται καί περιφέρεια).

Ὁ κύκλος ἔχει τήν ἑξῆς ἰδιότητα: Ὅλα τά σημεῖα του ἀπέχουν



Εἰκ. 94

ἐξ ἴσου ἀπό ἕνα ὁρισμένο σημεῖο τό ὁποῖο βρίσκεται μέσα στόν κύκλο καί λέγεται **κέντρο** τοῦ κύκλου.

Κύκλους κατασκευάζουμε μέ τό διαβήτη, ὅπως φαίνεται στό σχέδιο. Τό ἄνοιγμα τοῦ διαβήτη μᾶς καθορίζει τήν ἀπόσταση τοῦ κέντρου ἀπό τόν κύκλο. Ἡ ἀπόσταση αὐτή ὀνομάζεται **ἀκτίνα** τοῦ κύκλου.

Βλέπετε; ▶

> Κύκλος λέγεται ἡ κλειστή καμπύλη γραμμή, πού ὅλα τά σημεῖα της ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπό ἕνα σημεῖο, τό ὁποῖο λέγεται κέντρο καί εὑρίσκεται μέσα στόν κύκλο.
> Τό μέρος τοῦ ἐπιπέδου πού περικλείεται ἀπό ἕνα κύκλο, λέγεται κυκλικός δίσκος.

Ἄλλα στοιχεῖα τοῦ κύκλου

Ἀπό τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο κατασκευάζουμε ἕναν κύκλο ἐννοοῦμε ὅτι:

α) Ὅλες οἱ ἀκτίνες τοῦ κύκλου εἶναι ἴσες μεταξύ των.

β) Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΔΕ πού ἔχει τά ἄκρα του ἐπί τοῦ κύκλου λέγεται **χορδή** τοῦ κύκλου.

γ) Ἡ χορδή ΒΓ πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο λέγεται **διάμετρος** τοῦ κύκλου.

δ) Ἀπό τόν τρόπο τῆς κατασκευῆς της ἐννοοῦμε πώς: κάθε διάμετρος εἶναι διπλασία ἀπό τήν ἀκτίνα.

ε) Ὅλες οἱ διάμετροι εἶναι ἴσες μεταξύ τους.

στ) Κάθε μέρος τοῦ κύκλου λέγεται **τόξο.**

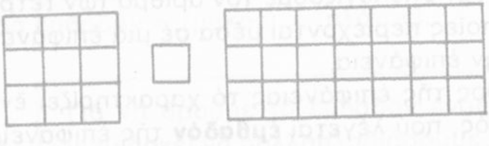
ζ) Κάθε διάμετρος κύκλου τόν χωρίζει σέ δυό ἴσα μέρη τά ὁποῖα λέγονται **ἡμικύκλια.**

Ἀσκήσεις

93. Νά ὀνομάσετε ἀντικείμενα ἀπό τό περιβάλλον σας μέ σχῆμα κυκλικοῦ δίσκου.
94. Ἡ ἀκτίνα ἑνός κύκλου εἶναι 5 ἑκατοστά. Πόσο εἶναι ἡ διάμετρός του;
95. Ἡ διάμετρος ἑνός κύκλου εἶναι 20 ἑκατοστά. Πόσο εἶναι ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου;
96. Νά κατασκευάσετε κύκλο μέ ἀκτίνα 3 ἑκατοστόμετρα.
97. Νά κατασκευάσετε κύκλο μέ διάμετρο 4 ἑκατοστόμετρα.

53. Ἐμβαδομετρία

1. Γενικά:



Εἰκ. 95

Πρόβλημα: Παρατηρῆστε στό τετραγωνισμένο φύλλο τό ὀρθογώνιο καί τό τετράγωνο. Νά βρεῖτε, ἀπό πόσα τετραγωνίδια ἀποτελεῖται ἡ ἐπιφάνεια: α) τοῦ ὀρθογωνίου, β) τοῦ τετραγώνου.

Λύση: α) ὡς πρός τήν ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παρατηροῦμε πώς: Τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπό 3 σειρές μέ τετραγωνίδια, τῶν 7 τετραγωνιδίων ἡ κάθε μία. Ἤτοι ἔχει: 7 × 3 = 21 τετραγωνίδια. β) Ὡς πρός τό τετράγωνο παρατηροῦμε πώς: τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπό 3 σειρές τετραγωνιδίων, μέ 3 τετραγωνίδια κάθε μιά. Ἤτοι ἔχει 3 × 3 = 9 τετραγωνίδια.

54. *Ἐμβαδόν μιᾶς ὁρισμένης ἐπιφανείας.*

Δέν εἶναι ἀρκετό νά γνωρίζουμε μόνο τόν ἀριθμό τῶν τετραγωνιδίων, τά ὁποῖα περιέχονται σ' ἕνα ὀρθογώνιο ἤ τετράγωνο, γιά νά ὑπολογίσουμε τό μέγεθος τῆς ἐπιφανείας του. Πρέπει νά γνωρίζουμε καί τό μέγεθος καθενός τετραγωνιδίου, τό ὁποῖο καί θά χρησιμοποιοῦμε σά μονάδα μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν. Συνήθως σά μονάδα μετρήσεως ἐπιφανειῶν χρησιμοποιοῦμε: α) Τό τετράγωνο, τό ὁποῖο ἔχει μῆκος πλευρᾶς 1 ἑκατοστομ. πού λέγεται τετραγωνικό ἑκατοστόμετρο καί συμβολίζεται (cm^2) ἤ τ.ἑκ.

β) Τό τετράγωνο πού ἔχει μῆκος πλευρᾶς μιά παλάμη, τό ὁποῖο λέγεται τετραγωνική παλάμη (dm^2) ἤ τ.π.

γ) Τό τετράγωνο πού ἔχει πλευρά μήκους ἑνός μέτρου, λέγεται τετραγωνικό μέτρο (m^2) ἤ τ.μ.

Τό τετραγωνικό μέτρο εἶναι ἡ ἀρχική μονάδα **μέτρησης** ἐπιφανειῶν.

Γενικά: ὅταν ὑπολογίζουμε τόν ἀριθμό τῶν τετραγωνικῶν μονάδων, οἱ ὁποῖες περιέχονται μέσα σέ μιά ἐπιφάνεια, λέμε, πώς μετροῦμε τήν ἐπιφάνεια.

Τό μέγεθος τῆς ἐπιφάνειας τό χαρακτηρίζει ἕνας συγκεκριμένος ἀριθμός, πού λέγεται **ἐμβαδόν** τῆς ἐπιφανείας.

Ὁ ἀριθμός αὐτός μᾶς δηλώνει, ἀπό πόσες τετραγωνικές μονάδες καί μέρη αὐτῆς συγκροτεῖται ἡ ἐπιφάνεια.

Βλέπετε; ▶

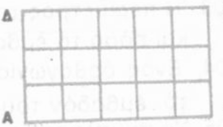
Ἐμβαδόν μιᾶς ἐπιφάνειας λέγεται ὁ συγκεκριμένος ἀριθμός, πού μᾶς δηλώνει τό μέγεθος τῆς ἐπιφανείας. Ἤτοι μᾶς δηλώνει, ἀπό πόσες τετραγωνικές μονάδες καί μέρη αὐτῆς συγκροτεῖται μιά ὁρισμένη ἐπιφάνεια.

Ἀσκήσεις

98. Τί ὀνομάζουμε ἐμβαδόν μιᾶς ὁρισμένης ἐπιφάνειας;
99. Τί ὀνομάζουμε τετραγωνικό δάκτυλο, τί τετραγωνική παλάμη καί τί τετραγωνικό μέτρο;
100. Νά κατασκευάσετε σέ τετραγωνισμένο χαρτί μιά τετραγωνική παλάμη.
101. Πόσους τετραγωνικούς δακτύλους περιέχει μιά τετραγωνική παλάμη καί πόσους ἕνα τετραγωνικό μέτρο;

55. Ἐμβαδόν ὀρθογωνίου

Πρόβλημα: Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδόν ὀρθογωνίου μέ μῆκος 5 ἑκ. καί πλάτος 3 ἑκ.



Εἰκ. 96

Λύση: Παρατηροῦμε πώς, ἐάν τετραγωνίζουμε τήν ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου ἀνά ἕνα ἑκ. τότε εἶναι εὔκολο νά παρατηρήσουμε πώς: τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπό 3 σειρές τετραγωνικῶν ἑκατοστῶν πρός 5 τετρ. ἑκατοστά ἡ σειρά. Ἄρα τό ἐμβαδόν θ' ἀποτελεῖται ἀπό $5 \times 3 = 15$ τετραγ. ἑκατοστά. Ἄρα ἐμβαδόν = (μῆκος) × (πλάτος).

Βλέπετε; ▶

Γιά νά βροῦμε τό ἐμβαδόν ἑνός ὀρθογωνίου ἀρκεῖ νά πολλαπλασιάσουμε τό μῆκος τῆς βάσης ἐπί τό μῆκος τοῦ ὕψους.

'Εάν συμβολίζεις τή βάση τοῦ ὀρθογωνίου μέ β καί μέ υ τό ὕψος καί μέ Ε τό ἐμβαδόν του, τότε τό ἐμβαδόν του συμβολίζεται: Ε = β × υ.

56. Ἐμβαδόν τετραγώνου.

'Επειδή οἱ διαστάσεις τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσες μεταξύ τους εἶναι φανερό πώς καί τό ἐμβαδόν τοῦ τετραγώνου βρίσκεται, ἐάν πολλαπλασιάσουμε τήν πλευρά του ἐπί τόν ἑαυτό της.

'Εάν α εἶναι ἡ πλευρά τοῦ τετραγώνου καί ε τό ἐμβαδόν του, ὁ τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ του γράφεται Ε = α × α ἤ Ε = $α^2$ καί διαβάζεται, Ε ἴσον μέ ἄλφα στό τετράγωνο.

Σημείωση: 1) καί οἱ δυό διαστάσεις πρέπει νά ἐκφράζονται στήν ἴδια μονάδα μήκους καί 2) τό ἐμβαδόν εἶναι πάντα συγκεκριμένος ἀριθμός κι ἐκφράζεται σέ τετραγωνικές μονάδες, πού μᾶς δηλώνει ὁ πολλαπλασιαστέος.

'Ασκήσεις

102. Κάποιου τετραγώνου ἡ πλευρά εἶναι 3,45 μ. Ποιά εἶναι ἡ περίμετρός του καί ποιό τό ἐμβαδόν του;
103. 'Η περίμετρος τετραγώνου εἶναι 60,24 μ. Πόση εἶναι ἡ πλευρά του καί πόσο τό ἐμβαδόν του;
104. 'Ενός ὀρθογωνίου οἱ πλευρές του εἶναι 3,50 μ καί 5,60 μ. Ποιό τό ἐμβαδόν του;
105. Νά συμπληρωθεῖ ὁ ἀκόλουθος πίνακας πού ἀναφέρεται σέ ὀρθογώνια.

Μῆκος	Πλάτος	Περίμετρος	'Εμβαδόν
20 μ.	15 μ.	(;)	(;)
7 ἑκ.	(;)	20 ἑκ.	(;)
(;)	12 π.	(;)	240 τ.π.

106. 'Η περίμετρος ἑνός κήπου σχήματος ὀρθογωνίου εἶναι 132 μ. Τό μῆκος του εἶναι διπλάσιο ἀπ' τό πλάτος του. Ποιά εἶναι ἡ ἀξία του πρός 97.500 δρχ. τό στρέμμα;

107. Μιά νοικοκυρά θέλει νά στρώσει μέ τάπητα τό σαλόνι της, τό όποῖο ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιο, μέ πλάτος 4,20 μ. καί μῆκος 5,40 μ. Πόσα μέτρα ἀπ' τόν τάπητα θά χρειαστεῖ, ἐάν αὐτός ἔχει πλάτος 2,70 μ.;

108. Ὁ στίβος τοῦ σταδίου τῆς Ἀθήνας ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου μέ μῆκος 204 μ. καί πλάτος 33 μ. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδόν του.

109. Ὁ Παρθενώνας ἔχει μῆκος 69,51 μ. καί περίμετρο 200,74 μ. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδόν τοῦ δαπέδου του.

110. Ἕνα χωράφι, σχήματος ὀρθογωνίου, ἔχει μῆκος 86,75 μ. κι ἐμβαδόν 3200,75 τ.μ. Ζητεῖται νά ὑπολογιστεῖ τό πλάτος τοῦ χωραφιοῦ.

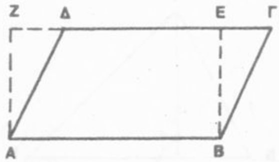
111. Ἕνα χωράφι σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει μῆκος 2,5 χιλιόμετρα καί πλάτος 3,6 δεκάμετρα. Ποιό εἶναι τό ἐμβαδόν του; (σέ τ.μ.).

112. Ἕνα ὀρθογώνιο ἔχει 180 μ. περίμετρο. Ποιό εἶναι τό ἐμβαδόν του, α) ἐάν τό πλάτος του ξεπερνάει τό μῆκος του κατά 10 μ. καί β) ἐάν τό πλάτος του εἶναι διπλάσιο ἀπ' τό μῆκος του;

113. Στό ἐσωτερικό ἑνός τετραγώνου, πλευρᾶς 15 ἑκ. κατασκευάζουμε ἕνα ἄλλο τετράγωνο, μέ τίς πλευρές του παράλληλες πρός τό πρῶτο καί μέ μῆκος πλευρᾶς 12 ἑκ. Ζητεῖται νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδόν, τό ἀνάμεσα στά δυό τετράγωνα.

57. *Ἐμβαδόν παραλληλογράμμου*

Πρόβλημα: Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδόν τοῦ παραλληλογράμμου πού εἰκονίζεται παραπλεύρως.



Εἰκ. 97

Λύση: Ἡ βάση τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἡ ΑΒ καί τό ὕψος του ΒΕ ἤ ΑΖ. Παρατηροῦμε πώς: Ἐάν μέ τό ψαλίδι κόψουμε τό τρίγωνο ΒΓΕ καί τό βάλουμε πάνω στό τρίγωνο ΑΔΖ θά διαπιστώσουμε, πώς εἶναι ἴσα. Ἐπομένως τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ἔχει τό ἴδιο ἐμβαδόν μέ τό ὀρθογώνιο ΑΒΕΖ, τοῦ ὁποίου τό ἐμβαδόν εἶναι (ΑΒ) × (ΑΖ).

Βλέπετε; ▶

Τό ἐμβαδόν κάθε παραλληλογράμμου εἶναι γινόμενο τοῦ μήκους τῆς βάσεώς του ἐπί τό μῆκος τοῦ ὕψους του.

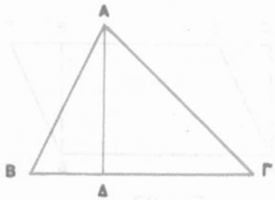
Συμβολίζεται: $E = \beta \times \upsilon$

Ἀσκήσεις

114. Ποιό εἶναι τό ἐμβαδόν ἑνός παραλληλογράμμου τοῦ ὁποίου ἡ βάση εἶναι 20 ἑκ. καί τό ὕψος 12 ἑκ. α) εἰς τ. ἑκ. καί β) εἰς τ. χιλ.
115. Ἕνα οἰκόπεδο σχήματος πλαγίου παραλληλογράμμου, μέ βάση 24,50 μ. καί ὕψος 12 μ. πουλήθηκε πρός 80 δρχ. τό τ.μ. Πόσες δρχ. πουλήθηκε;
116. Ἕνα ἀμπέλι, σχήματος πλαγίου παραλληλογράμμου, μέ βάση 140 μ. καί ὕψος 30 μ. πουλήθηκε 29,400 δρχ. Πόσες δρχ. πουλήθηκε τό στρέμμα;
117. Ἕνα παραλληλόγραμμο ἔχει βάση 52 μ. τό ἀντίστοιχο ὕψος εἶναι τό μισό αὐτῆς. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδόν τοῦ παραλληλογράμμου.

58. Τό Τρίγωνο.

1. Τό πολύγωνο πού εἰκονίζεται ὀνομάζεται **τρίγωνο:**



Εἰκ. 98

Εἴδαμε καί στά προηγούμενα, πώς τό πολύγωνο πού ἔχει 3 πλευρές ὀνομάζεται τρίγωνο. Στό σχέδιο 98 τό σημεῖο Α εἶναι μιά ἀπ' τίς κορυφές τοῦ τριγώνου. Τό τμῆμα ΒΓ εἶναι μιά ἀπό τίς πλευρές τοῦ τριγώνου καί ἡ γων. ΓΑΒ εἶναι μιά ἀπ' τίς γωνίες του. Τό τρίγωνο ἔχει τρεῖς κορυφές, τρεῖς πλευρές καί τρεῖς γωνίες. Ἡ πλευρά ΒΓ κι ἡ κορυφή Α λέγονται **ἀπέναντι.**

2. Στοιχεῖα τοῦ τριγώνου

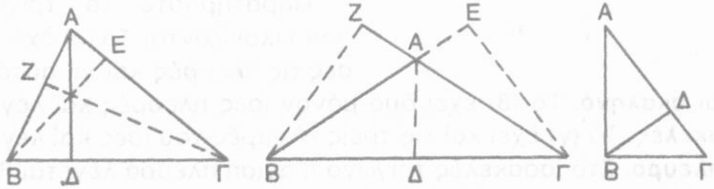
Μιά ὁποιαδήποτε πλευρά τοῦ τριγώνου ὀνομάζεται **βάση του.** π.χ. Ἡ πλευρά ΒΓ εἶναι βάση τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Φέρουμε ἀπ' τήν κορυφή Α τήν κάθετη ΑΔ πρός τήν ἀπέναντι πλευρά ΒΓ. Τό ΑΔ εἶναι ἕνα ἀπ' τά ὕψη τοῦ τριγώνου. Τό τρίγωνο ἔχει τρία ὕψη.

Βλέπετε; ▶

> Τό κάθετο εὐθύγραμμο τμῆμα πού σύρεται ἀπό μιά τῶν κορυφῶν ἑνός τριγώνου πρός τήν ἀπέναντι πλευρά, λέγεται ὕψος του.

Ἐπίσης ὕψος τοῦ τριγώνου λέγεται κι ὁ συγκεκριμένος ἀριθμός, πού ἐκφράζει τό μῆκος τοῦ τμήματος ΑΔ.



Εἰκ. 99

Τό τρίγωνο ἔχει τρία ὕψη.

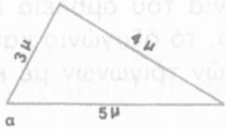
3. Περίμετρος τριγώνου

Στό τρίγωνο πού εἰκονίζεται παράπλευρα, τό ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν του εἶναι: 2 ἑκ. + 3 ἑκ. + 4 ἑκ. = 9 ἑκ. Τό ἄθροισμα αὐτό λέγεται περίμετρος τοῦ τριγώνου. Ἦτοι **περίμετρος ἑνός τριγώνου εἶναι τό ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν του.**

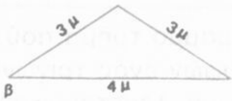
Εἰκ. 100

Οἰκογένεια τῶν τριγώνων μέ κριτήριο τήν πλευρά τους

Εἰκ. 101α



Σκαληνό λέμε τό τρίγωνο μέ ἄνισες τις πλευρές (εἰκ. 101α).



Εικ. 101β

Ἰσοσκελές λέμε τό τρίγωνο μέ 2 ἴσες πλευρές (εἰκ. 101β).

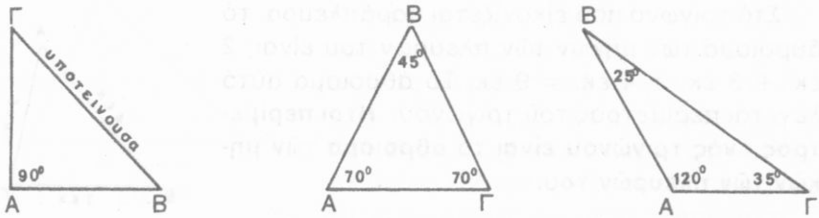
Εικ. 101γ

Ἰσόπλευρο λέμε τό τρίγωνο πού ἔχει καί τίς (3) πλευρές του ἴσες (εἰκ. 101γ).

Παρατηρῆστε τά τρίγωνα, πού εἰκονίζονται. Τό (α) ἔχει ἄνισες τίς πλευρές καί γι' αὐτό λέγεται **σκαληνό.** Τό (β) ἔχει δυό μόνον ἴσες πλευρές καί λέγεται **ἰσοσκελές.** Τό (γ) ἔχει καί τίς τρεῖς πλευρές του ἴσες καί λέγεται **ἰσόπλευρο.** Στό ἰσοσκελές τρίγωνο ἡ ἄνιση πλευρά λέγεται βάση του.

Τά τρίγωνα: σκαληνό, ἰσοσκελές καί ἰσόπλευρο ἀποτελοῦν τήν οἰκογένεια τῶν τριγώνων, μέ κριτήριο τήν πλευρά τους.

Οἰκογένεια τῶν τριγώνων μέ κριτήριο τή γωνία



Εἰκ. 102

α) ὀρθογώνιο β) ὀξυγώνιο γ) ἀμβλυγώνιο

1. Τό (α) πού ἔχει μιά γωνία ὀρθή, λέγεται **ὀρθογώνιο τρίγωνο.** 2) Τό (β) τρίγωνο ἔχει ὅλες τίς γωνίες του ὀξεῖες, λέγεται **ὀξυγώνιο τρίγωνο.** 3) Τό (γ) ἔχει μιά γωνία του ἀμβλεία καί λέγεται **ἀμβλυγώνιο τρίγωνο.** Τό ὀρθογώνιο, τό ὀξυγώνιο καί τό ἀμβλυγώνιο ἀποτελοῦν τήν οἰκογένεια τῶν τριγώνων μέ κριτήριο τή γωνία τους.

Προβλήματα: Ὁμάδα Α΄: 1) ἡ περίμετρος ἑνός ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 150 μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ πλευρά του;

2) Νά βρεθεῖ ἡ περίμετρος ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἐάν ἡ βάση του εἶναι 10 μ. καί κάθε μιά ἀπ' τίς ἴσες πλευρές του = 16 μ.

Ὁμάδα Β΄: 3) Πρόκειται νά περιφράξουμε μέ διχτυωτό σύρμα ἕνα χωράφι, σχήματος ἰσοπλεύρου τριγώνου, πλευρᾶς 50 μ. Ἐάν ἡ ἀξία τοῦ σύρματος εἶναι 45 δρχ. τό μέτρο, πόσο θά στοιχίσει ἡ περίφραξη;

4) Πρόκειται ν' ἀνοίξουμε αὐλάκι κατά μῆκος ἑνός χωραφιοῦ, σχήματος τριγώνου, μέ πλευρές 20 μ., 25 μ. καί 28. Συμφωνήθηκε πρός 100 δρχ. τό μέτρο. Πόσα θά πληρώσουμε;

59. Ἰδιότητες τῶν γωνιῶν τριγώνου

1. Πάνω σ' ἕνα τετραγωνισμένο φύλλο τετραδίου νά κατασκευάσετε τρία τρίγωνα. Ἕνα ὀξυγώνιο, ἕνα ὀρθογώνιο κι ἕνα ἀμβλυγώνιο. Σέ καθένα ἀπ' τά τρίγωνα νά μετρήσετε τίς γωνίες του καί νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμά τους. Τί παρατηρεῖτε;

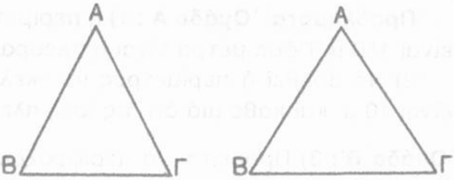
Βλέπετε; ▶

Τό ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν καθενός τριγώνου εἶναι πάντα δυό ὀρθές γωνίες ἤ 180°.

Ἐδῶ εἰκονίζεται ἄλλος τρόπος ὑπολογισμοῦ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τριγώνου.

Εἰκ. 103

Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τό ἄθροισμα, τῶν δυό ὀξειῶν γωνιῶν του, πόσο εἶναι; 2) Πάνω σ' ἕνα τετραγωνισμένο φύλλο χαρτιοῦ τοῦ τετραδίου σας νά κατασκευάσετε δυό τρίγωνα, ἕνα ἰσοσκελές κι ἕνα ἰσόπλευρο κι ὕστερα νά μετρήσετε τίς γωνίες του. Τί παρατηρεῖτε;



Εικ. 104

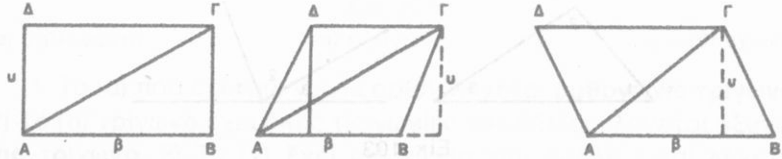
Βλέπετε; ▶

> 1. Κάθε γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἴση πρός 60°.
> 2. Κάθε ἰσοσκελές τρίγωνο ἔχει δυό γωνίες ἴσες.

Ἀσκήσεις

118. Ἡ μιά ἀπ' τίς ὀξεῖες γωνίες ὀρθ. τριγώνου εἶναι 60°. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἄλλη ὀξεία γωνία;
119. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ κάθε μιά γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου καί πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς;
120. Ἰσοσκελοῦς τριγώνου μιά ἀπ' τίς ἴσες γωνίες του εἶναι 50°. Πόσων μοιρῶν εἶναι καθεμιά ἀπ' τίς ἄλλες;
121. Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ γωνία τῆς κορυφῆς του εἶναι 70°. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ κάθε μιά ἀπ' τίς ἴσες γωνίες του;
122. Μιά γωνία τριγ. εἶναι 75° κι ἄλλη 85°. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ τρίτη;

60. Σχέση παραλληλογράμμου καί τριγώνου



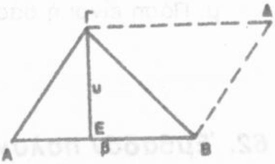
Εικ. 105

Νά κατασκευάσετε τά παραλληλόγραμμα, ὅπως εἰκονίζονται πιό πάνω. Κατόπιν νά τά ἀποτυπώσετε σέ διαφανές χαρτί. Ἀφοῦ φέρετε τή μιά ἀπ' τίς διαγώνιες νά τά ἀποχωρίσετε μέ τό ψαλίδι ἀπ' τό ἀρχικό φύλλο. Μέ τόν τρόπο αὐτό θά ἔχετε 3 ζευγάρια τριγώνων. Ἔχετε ἕνα ζευγάρι ὀρθογώνια τρίγωνα, ἕνα ἀμβλυγώνια τρίγωνα, κι ἕνα ὀξυγώνια. Ἐάν θέσετε τό ἕνα ἀπ' τά τρίγωνα τοῦ ζευγαριοῦ πάνω στό ἄλλο, θά διαπιστώσετε, πώς συμπίπτουν, ἄρα εἶναι ἴσα.

Βλέπετε; ▶ Ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου τό χωρίζει σέ δυό ἴσα τρίγωνα.

61. Ἐμβαδόν τριγώνου

Ἐάν ζητεῖται τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, σύμφωνα μέ τά πιό πάνω, πρέπει τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου ΑΒΓ = $= \frac{1}{2}$ ἐμβ. τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΔΓ. Ἀλλά ἐμβ. παραλληλογράμμου ΑΒΔΓ = Β × υ

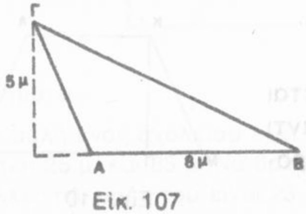


Εἰκ. 106

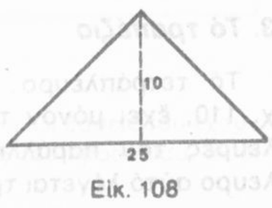
Ἑπομένως ἐμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ $= \frac{1}{2}$ Β × υ

Βλέπετε; ▶ Τό ἐμβαδόν τριγώνου εἶναι τό μισό τοῦ γινόμενου τῆς βάσης του ἐπί τό ὕψος του.

Παραδείγματα: 1ον) Σχ. 107 καί 108. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδόν κάθε τριγώνου.



Εἰκ. 107



Εἰκ. 108

$E = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 = 4 \times 5 = 20$ τ.μ.

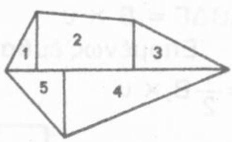
$E = \frac{1}{2} \times 25 \times 10 = 25 \times 5 = 125$ τ.μ.

Προβλήματα:

123. Ἕνα τριγωνικό οἰκόπεδο ἔχει βάση 52 μ. καί ὕψος 30 μ. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδόν του.
124. Ἕνα χωράφι σχήματος ὀρθογωνίου τριγώνου μέ κάθετες πλευρές 55 μ. καί 42 μ. πουλήθηκε πρός 100 δρχ. τό τ.μ. Πόσο πουλήθηκε;
125. Τό ἐμβαδόν ἑνός τριγωνικοῦ οἰκοπέδου εἶναι 4550 τ.μ. Ἐάν ἡ βάση του εἶναι 26 μ. Πόσο εἶναι τό ὕψος του;
126. Τό ἐμβαδόν τριγωνικοῦ χωραφιοῦ εἶναι 4200 τ.μ. καί τό ὕψος του 70 μ. Πόση εἶναι ἡ βάση του;

62. Ἐμβαδόν πολυγώνου

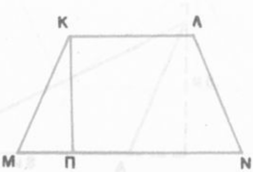
Ἐάν πρόκειται νά ὑπολογίσουμε τό ἐμβαδόν τοῦ διπλανοῦ πολυγώνου, ἐργαζόμαστε ἔτσι: Τό χωρίζουμε σέ τρίγωνα καί τετράπλευρα ὅπως φαίνεται στό σχέδιο, καί ὑπολογίζουμε χωριστά τό ἐμβαδόν καθενός τριγώνου 1, 3, 4 καί 5, καί τοῦ τετραπλεύρου 2 καί κατόπιν προσθέτουμε τά ἐμβαδά τους.



Εἰκ. 109

63. Τό τραπέζιο

Τό τετράπλευρο, πού εἰκονίζεται σχ. 110, ἔχει μόνον τίς δυό ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες. Τό τετράπλευρο αὐτό λέγεται τραπέζιο.



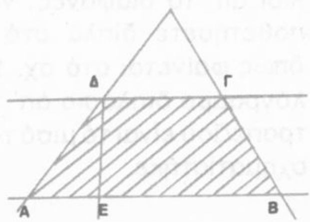
Εἰκ. 110

64. *Στοιχεῖα τοῦ τραπεζίου*

Ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν δυό παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου λέγεται **ὕψος** αὐτοῦ π.χ. τό ΚΠ (σχ. 110) εἶναι τό ὕψος τοῦ τραπεζίου καί συμβολίζεται μέ τό γράμμα υ. Οἱ παράλληλες πλευρές τοῦ τραπεζίου λέγονται **βάσεις του** π.χ. ΜΝ **ἡ μεγάλη βάση** τοῦ τραπεζίου καί συμβολίζεται μέ τό γράμμα Β. Ἡ ΚΛ εἶναι ἡ **μικρή βάση** τοῦ τραπεζίου καί συμβολίζεται μέ τό γράμμα β. Τό ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν τοῦ τραπεζίου λέγεται **περίμετρός του.**

Πῶς σχηματίζεται τό τραπέζιο

Νά σχηματίσετε στό τετράδιό σας μιά γωνία. Κόψτε κατόπιν μιά διαφανή ἔγχρωμη ταινία καί βάλτε την πάνω στή γωνία ὅπως εἰκονίζεται στό διπλανό σχέδιο.



Εἰκ. 111

Τότε τό κοινό μέρος τῶν δυό σχημάτων, τό ΑΒΓΔ, ὀνομάζεται **τραπέζιο.** Ἀπό τόν τρόπο πού σχηματίζεται καταλαβαίνουμε πώς τό τραπέζιο ἔχει μόνο δυό ἀπέναντι πλευρές παράλληλες.

Βλέπετε; ▸

Τραπέζιο λέγεται τό τετράπλευρο, πού ἔχει μόνο 2 ἀπέναντι πλευρές παράλληλες καί σχηματίζεται ἀπ' τήν τομή μιᾶς γωνίας καί μιᾶς ταινίας.

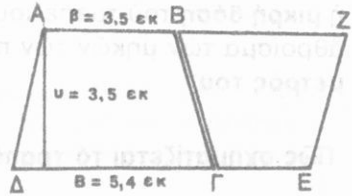
Προβλήματα

127. Ἡ αὐλή ἑνός σχολείου ἔχει σχῆμα τραπεζίου. Οἱ βάσεις του ἔχουν μήκη 25 μ. καί 35 μ. Νά βρεθεῖ ἡ περίμετρος τοῦ προαυλίου, ἄν οἱ ἄλλες πλευρές του εἶναι 23 μ. καί 27 μ.

128. Ένα οικόπεδο έχει σχήμα τραπεζίου, μέ βάσεις 25 μ. καί 20 μ. Οί μή παράλληλες πλευρές τοῦ τραπεζίου εἶναι 28 καί 33 μ. Πρόκειται νά περιφραχτεῖ μέ διχτυωτό συρματόπλεγμα πρός 30 δρχ. τό μέτρο. Πόσο θά στοιχίσει ή περίφραξη;

65. Ἐμβαδόν τραπεζίου.

Νά σχηματίσετε στό τετράδιό σας ένα τραπέζιο, μέ τίς βάσεις του πάνω σέ δυό ρίγες τοῦ τετραδίου σας. Ἔπειτα νά τό ἀποτυπώσετε σ' ἕνα διαφανές, κι ἀφοῦ τό ἀποχωρήσετε μέ τό ψαλίδι ἀπ' τό διαφανές, νά τό τοποθετήσετε δίπλα στό ἀρχικό, ὅπως φαίνεται στό σχ. 112. Ἔτσι θά σχηματίσετε ἕνα παραλληλόγραμμο διπλάσιο ἀπ' τό τραπέζιο. Ἐπομένως τό ἐμβαδόν τοῦ τραπεζίου εἶναι τό μισό τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου πού σχηματίστηκε.



Εικ. 112

Ἤτοι: $E = \frac{1}{2}(B+\beta) \times \upsilon$ ἤ $E = \frac{B+\beta}{2} \times \upsilon$

Βλέπετε; ▶ Τό ἐμβαδόν τοῦ τραπεζίου εἶναι γινόμενο τοῦ μισοαθροίσματος τῶν βάσεων ἐπί τό ὕψος του.

Παράδειγμα: Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδόν τραπεζίου, τοῦ ὁποίου Β = 5,4 ἐκ. β = 4,8 ἐκ. καί ὕψος υ = 3,5 ἐκ. Ἔχουμε:

$$E = \frac{B+\beta}{2} \times \upsilon$$

$$= \frac{5,4+4,8}{2} \times 3,5 \text{ τ. ἐκ.}$$

$$= 5,1 \times 3,5 = 17,85 \text{ τ. ἐκ.}$$

Ἀσκήσεις

129. Ποιό εἶναι τό ἐμβαδόν χωραφιοῦ, σχήματος τραπεζίου, τοῦ ὁποίου ἡ μεγάλη βάση εἶναι 108 μ., ἡ μικρή βάση 90 μ. καί τό ὕψος 100 μέτρα;
130. Πόσα κιλά λίπασμα θά χρειαστεῖ ἕνα χωράφι σέ σχῆμα τραπεζίου, γιά νά λιπανθεῖ, ἐάν οἱ βάσεις τοῦ τραπεζίου εἶναι 106 μ. καί 80 μ. καί τό ὕψος του 80 μ., κι ἐάν γιά κάθε τ.μ. χρειάζονται 0,8 κιλά λιπάσματος;
131. Μιά αὐλή, σχήματος τραπεζίου, μέ βάσεις 18 μ. καί 10 μ. καί ὕψος 6 μ., πρόκειται νά στρωθεῖ μέ πλάκες σέ σχῆμα ὀρθογωνίου, μέ διαστάσεις 0,28 καί 0,16 μ. Πόσες πλάκες θά χρειαστοῦν γιά τήν αὐλή;
132. Ἕνα κτῆμα, σχήματος τραπεζίου, ἔχει βάσεις 180 μ. καί 150 μ. καί ὕψος τό $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δυό βάσεων. Πουλήθηκε πρός 50.000 δρχ. τό στρέμμα. Πόσο πουλήθηκε τό κτῆμα τοῦτο;

66. Περίμετρος ἑνός κύκλου

Μελέτη τῆς περιμέτρου ἑνός κύκλου

Εἴδαμε πώς ἡ βάση ἑνός κουτιοῦ χρώματος ἤ νεσκαφέ ἤ κομπόστας ἤ γάλατος κτλ. εἶναι κυκλικός δίσκος. Ἡ καμπύλη γραμμή πού περιορίζει τόν κυκλικό δίσκο, εἶναι κύκλος. Γιά νά μελετήσουμε τήν περίμετρο ἑνός κύκλου, ἐργαζόμαστε ἔτσι: Μετροῦμε μέ μιά «μεζούρα» τήν περίμετρο τοῦ κύκλου καί τή διάμετρο τῶν παραπάνω κουτιῶν καί κατόπιν βρίσκουμε τό πηλίκο: (περίμετρος κύκλου) : (διαμέτρου). Παρατηροῦμε, πώς βρίσκουμε πάντα σάν πηλίκο τόν ἴδιο ἀριθμό 3,14. Ἤτοι:

Κουτί	Χρώματος	Νεσκαφέ	Κομπόστας
Διάμετρος Δ σέ χιλ.	55	76	103,5
Περίμετρος Γ: σέ χιλ.	173	238,5	325
Πηλίκο: =	3,14	3,14	3,14

* Σημείωση: ὅταν λέμε περίμετρο κύκλου, ἐννοοῦμε τό μῆκος τοῦ κύκλου.

Βλέπετε; ▶	Τό πηλίκο τῆς περιμέτρου ἑνός κύκλου διά τῆς διαμέτρου του εἶναι πάντα ὁ ἴδιος ἀριθμός 3,14 (περίπου).

Ὁ ἀριθμός 3,14 συμβολίζεται διεθνῶς μέ τό ἑλληνικό γράμμα «π».

67. *Ὑπολογισμός τῆς περιμέτρου κύκλου*

Εἴδαμε πιό πάνω πώς (περίμετρος κύκλου): (διάμετρος) = 3,14. Ἐάν ἐφαρμόσουμε τόν κανόνα ὅτι: ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μέ τόν διαιρέτη ἐπί τό πηλίκο, θά ἔχουμε:

(περίμετρος κύκλου) = (διάμετρος) × 3,14 ἤ $\Gamma = \Delta \times \pi$

Βλέπετε; ▶	Ἡ περίμετρος ἑνός κύκλου βρίσκεται ἀπό τό γινόμενο τῆς διαμέτρου του μέ τόν ἀριθμό 3,14.

Παραδείγματα: 1ο) Ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου ἑνός ραντάρ εἶναι 6,10 μ. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ περίμετρος τοῦ κύκλου τούτου: ἐφαρμόζοντας τόν τύπο: $\Gamma = \Delta \times \pi$ ἔχουμε $\Gamma = 6,10 \times 3,14 = 19,154$ μ.

Παράδειγμα *2ο).* Μιά κυκλική δεξαμενή ἔχει περίμετρο 16,70 μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίνα της;

$\Gamma = \Delta \times \pi$ βρίσκομε $\Delta = \frac{\Gamma}{\pi} = \frac{16,70}{3,14} = 5,30$

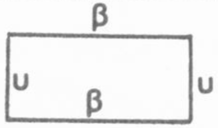
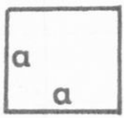
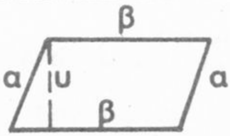
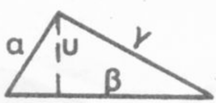
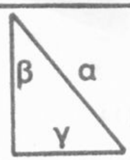
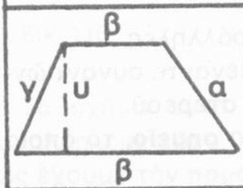
Ἀπάντηση: ἡ διάμετρός της εἶναι 5,30, ἄρα ἡ ἀκτίνα της εἶναι:

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{5,30}{2} = 2,65 \text{ μ.}$$

Ἀσκήσεις

133. Ἡ ἀκτίνα τοῦ τροχοῦ αὐτοκινήτου εἶναι 50 ἑκ. α) Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του. β) Πόσες στροφές θά κάνει ὅταν τό αὐτοκίνητο διατρέξει 94.200 μέτρα;
134. Ἡ μιά κυκλική βάση ἑνός κομμένου κυλινδρικοῦ κορμοῦ δέντρου ἔχει περίμετρο 2.983 μ. α) πόση εἶναι ἡ διάμετρός του; καί β) πόση ἡ ἀκτίνα του;

68. *Περίληψη*

Σχῆμα	Ὄνομα σχήματος	Τύπος πού δίνει τήν περίμετρο	Τύπος πού δίνει τό ἐμβαδόν
	Ὀρθογώνιο	$\Pi = 2\beta + 2\upsilon$	$E = \beta \times \upsilon$
	Τετράγωνο	$\Pi = 4 \times \alpha$	$E = \alpha \times \alpha$
	παραλληλόγραμμο ἤ ρομβοειδές	$\Pi = 2\beta + 2\alpha$	$E = \beta \times \upsilon$
	τρίγωνο	$\Pi = \alpha + \beta + \gamma$	$E = \frac{1}{2}\, \beta \times \upsilon$
	ὀρθογώνιο τρίγωνο	$\Pi = \alpha + \beta + \gamma$	$E = \frac{1}{2}\, \beta \times \gamma$
	τραπέζιο	$\Pi = B + \beta + \gamma + \alpha$,	$E = \frac{B+\beta}{2} \times \upsilon$

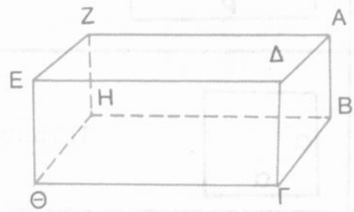
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΑΠΛΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ ΚΑΙ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥΣ

69. Ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο

Τό στερεό πού εἰκονίζεται παράπλευρα, ὀνομάζεται **ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.**

Σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχουν πολλά ξύλινα κιβώτια, τά χαρτοκιβώτια μέ τά ὁποῖα μεταφέρουν τίς κονσέρβες, τά τοῦβλα, τά κουτιά τῶν σπίρτων κτλ.



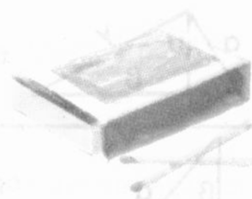
Εἰκ. 113

Στοιχεῖα

Εἶναι εὔκολο νά διακρίνουμε πώς:

1. Ὁλόκληρη ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ ἀποτελεῖται ἀπό ἕξ (6) διακρινόμενα ἐπίπεδα μέρη, τά ὁποῖα λέγονται: Ἕδρες τοῦ στερεοῦ.

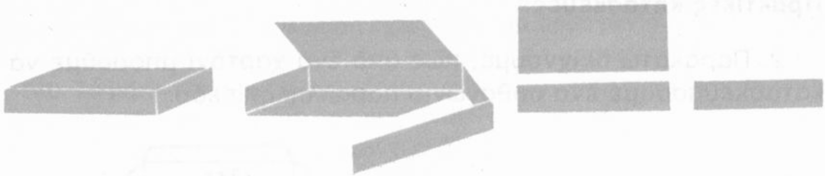
2. Ἀνά δύο οἱ ἕδρες βρίσκονται ἡ μιά ἀπέναντι τῆς ἄλλης καί ὅσο κι ἄν προεκταθοῦν, δέν συναντιῶνται. Γιά τοῦτο λέμε πώς οἱ ἀπέναντι ἕδρες τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι παράλληλες.



Εἰκ. 114

3. Ἀνά δυό οἱ ἕδρες, οἱ ὁποῖες δέν εἶναι ἀπέναντι, συναντιῶνται σέ μιά γραμμή, ἡ ὁποία λέγεται **ἀκμή** τοῦ στερεοῦ.

4. Ἀνά τρεῖς οἱ ἀκμές συναντιῶνται σ' ἕνα **σημεῖο,** τό ὁποῖο εἶναι μιά ἀπ' τίς κορυφές τοῦ στερεοῦ.



Εἰκ. 115

Πιό πάνω εἰκονίζονται οἱ ἕδρες τοῦ στερεοῦ, καθώς καί οἱ ἀκμές του.

'Ασκήσεις

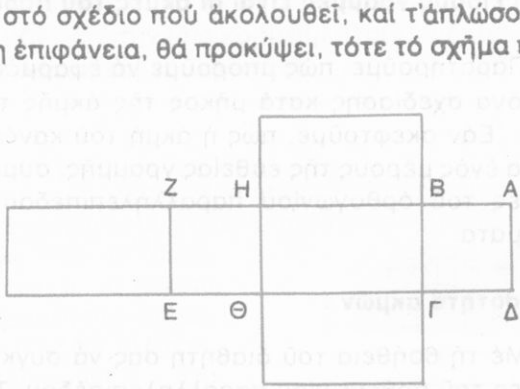
135. Νά ὀνομάσετε ἀντικείμενα, μέ σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

136. Πόσες ἀκμές καί πόσες κορυφές ἔχει τό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο;

137. Ποιές ἕδρες τοῦ παραλληλεπιπέδου λέγονται παράλληλες καί γιατί;

70. 'Ανάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ παραλληλεπιπέδου

1. 'Εάν κόψουμε ἕνα παραλληλεπίπεδο κατά μῆκος τῶν ἀκμῶν του, ὅπως φαίνεται στό σχέδιο πού ἀκολουθεῖ, καί τ'ἁπλώσουμε πάνω σέ μιά ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, θά προκύψει, τότε τό σχῆμα πού εἰκονίζεται.

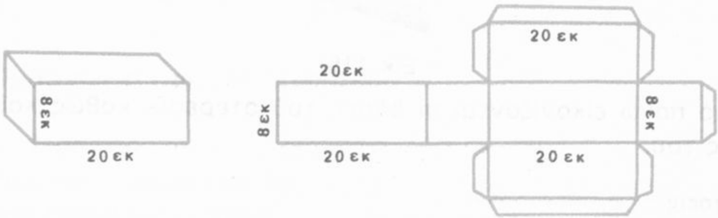


Εἰκ. 116

Τό σχῆμα αὐτό λέγεται: ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ παραλληλεπιπέδου. Ἄν δέν λάβουμε ὑπόψη τίς βάσεις, τότε λέμε πώς ἔχουμε τήν **παράπλευρη ἐπιφάνεια τοῦ παραλληλεπιπέδου.**

Πρακτικές κατασκευές:

2. Παρακάτω δείχνουμε, πῶς ἀπό ἕνα χαρτόνι μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.



Εἰκ. 117

Ἀσκήσεις

138. Μέ τίς διαστάσεις τοῦ προηγουμένου σχεδίου, νά κατασκευάσετε μέ χαρτονάκι ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

71. Οἱ ἀκμές τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

1. Τί εἴδους γραμμές εἶναι οἱ ἀκμές τοῦ παραλληλεπιπέδου:

Παρατηροῦμε, πώς μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε τήν ἀκμή τοῦ κανόνα σχεδίασης κατά μῆκος τῆς ἀκμῆς τοῦ παραλληλεπιπέδου. Ἐάν σκεφτοῦμε, πώς ἡ ἀκμή τοῦ κανόνα μᾶς δίνει τήν εἰκόνα ἑνός μέρους τῆς εὐθείας γραμμῆς, συμπεραίνουμε, πώς: οἱ ἀκμές τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα.

2. Ἰσότητα ἀκμῶν

Μέ τή βοήθεια τοῦ διαβήτη σας νά συγκρίνετε τίς ἀπέναντι ἀκμές τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Τί παρατηρεῖτε;

Βλέπετε; ▶ Οἱ ἀκμές ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἀνά τέσσερες ἴσες.

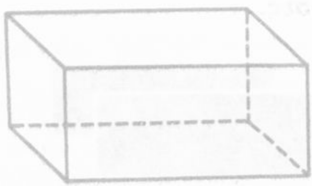
'Ασκήσεις

139α. Ἡ αἴθουσα διδασκαλίας ἔχει τό σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου; β) Νά δείξετε τίς ἀκμές του, γ) τίς κορυφές του.

140. Τά μήκη τῶν ἀκμῶν ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τά ὁποῖα περνᾶνε ἀπ' τήν ἴδια κορυφή εἶναι 5 ἑκ., 6 ἑκ. καί 7 ἑκ. Νά βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν μηκῶν ὅλων τῶν ἀκμῶν του.

72. Οἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Εἴδαμε πώς οἱ ἀκμές εἶναι ἀνά τέσσερες ἴσες κι ἐπειδή εἶναι δώδεκα συνολικά, ἀποτελοῦν τρεῖς ὁμάδες. Ἔχουμε τρία διάφορα μήκη, ἤτοι τρεῖς διαστάσεις. Τό μῆκος, τό πλάτος καί τό ὕψος του, πού ἀντιπροσωπεύονται ἀπ' τίς ἀκμές, πού περνᾶνε ἀπ' τήν ἴδια κορυφή.



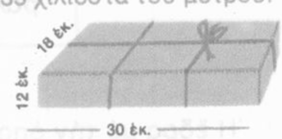
Εἰκ. 118

Βλέπετε; ▸ **Τό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει τρεῖς διαστάσεις: τά μήκη τῶν ἀκμῶν πού περνᾶνε ἀπ' τήν ἴδια κορυφή: ἤτοι τό μῆκος, τό πλάτος καί τό ὕψος του.**

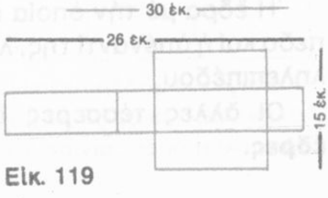
'Ασκήσεις

141. Νά κατασκευάσετε ἀπό χαρτόνι ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μέ διαστάσεις 75 χιλιοστά, 45 χιλιοστά καί 35 χιλιοστά τοῦ μέτρου.

142. Πόσο μῆκος κλωστῆς θά χρειαστεῖτε, γιά νά δέσετε τό πακέτο πού εἰκονίζεται (χωρίς τόν κόμπο;)



143. Στό παράπλευρο σχέδιο βλέπετε, πώς θά κατασκευάσετε ἕνα παραλληλεπίπεδο μέ τό ὕψος του ἴσο μέ τό πλάτος του. Μπορεῖτε νά βρεῖτε: 1) τίς διαστάσεις του, 2) τό ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀκμῶν του;



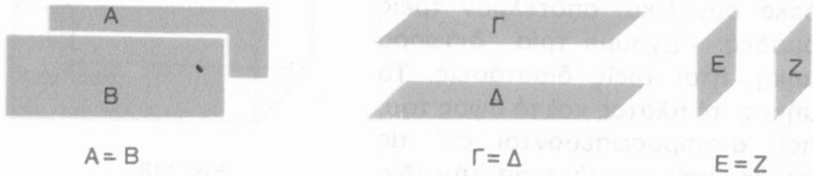
Εἰκ. 119

73. Τί εἴδους ἐπιφάνεια εἶναι ὁλόκληρη ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Παρατηροῦμε, πώς ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἀποτελεῖται ἀπό ἐπίπεδα μέρη, χωρίς ὁλόκληρη νά εἶναι ἐπίπεδη.

Οἱ ἐπιφάνειες, λοιπόν, τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων εἶναι **τεθλασμένες ἐπιφάνειες, ἤ πολυεδρικές.**

Οἱ ἀπέναντι ἕδρες ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσες.



Εἰκ. 120

Σ' ἕνα φύλλο ἀποτυπώνουμε τήν ἕδρα ἑνός ὀρθογωνίου καί παρατηροῦμε πώς τό ἀποτύπωμα αὐτό μπορεῖ νά μεταφερθεῖ στήν ἀπέναντι ἕδρα καί νά ἐφαρμόσει σ' αὐτήν. Ἔτσι λέμε πώς οἱ ἀπέναντι ἕδρες ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι **ἴσες.**

Βλέπετε; ▶ Οἱ ἀπέναντι ἕδρες ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἐπίπεδα μέρη ἴσα.

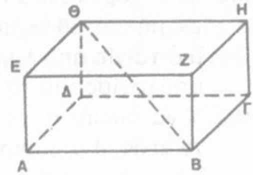
Ἡ ἕδρα μέ τήν ὁποία στηρίζεται τό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καί ἡ ἀπέναντί της, λέγονται **βάσεις** τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Οἱ ἄλλες τέσσερες ἕδρες αὐτοῦ, λέγονται **παράπλευρες ἕδρες.**

Εἶδος τῶν γωνιῶν καί ἑδρῶν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Μέ τή βοήθεια τοῦ γνώμονα διαπιστώνουμε πώς ὅλες οἱ γωνίες τῶν ἀκμῶν, πού περνοῦν ἀπό τήν ἴδια κορυφή τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, εἶναι ὀρθές.

Ἔτσι βλέπουμε πώς κάθε ἕδρα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο.



Εἰκ. 121

Διαγώνιος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΘΒ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου λέγεται διαγώνιος αὐτοῦ.

Ὅμοια καί κάθε τμῆμα πού ἔχει γιά ἄκρα του κορυφές τοῦ παραλληλεπιπέδου πού δέν βρίσκονται στήν ἴδια ἕδρα λέγεται διαγώνιος. Τό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει 4 διαγώνιες.

Ἀσκήσεις

144. Νά πάρετε ἀπ' τό κιβώτιο τῶν γεωμετρικῶν σωμάτων ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καί νά δείξετε α) τίς βάσεις του, β) τίς παράπλευρες ἕδρες καί γ) τίς ἴσες ἕδρες του.
145. Πόσες διάφορες ἕδρες ἔχει ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο;
146. Πόσα ζευγάρια ἴσων ἑδρῶν ἔχει τό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.
147. Νά συμπληρωθεῖ ὁ πίνακας μέ στοιχεῖα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

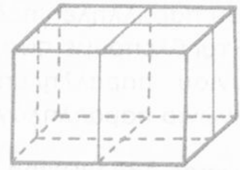
Μῆκος	7 μ.	25 μ.	35 μ.	5,5 μ.
Πλάτος	5 μ.	22 μ.	30 μ.	4 μ.
Ὕψος	3 μ.	12 μ.	25 μ.	3,2 μ.
Ἐμβαδόν παράπλευρης ἐπιφάνειας				
Ἐμβαδόν βάσεων				
Ἐμβαδόν ὁλικῆς ἐπιφάνειας				

148. Ἕνα κιβώτιο μέ σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει γιά διαστάσεις: μῆκος 25 ἑκ., πλάτος 20 ἑκατ. καί ὕψος 15 ἑκ. Ἐάν καλύψουμε ὅλες τίς ἀκμές του μέ αὐτοκόλλητη ταινία, πόσο μῆκος τῆς

ταινίας θά χρησιμοποιήσουμε;

149. Ένα χαρτόδεμα ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μέ 80 ἑκ. μῆκος, 50 ἑκ. φάρδος καί 50 ἑκατ. ὕψος. Σταυρωτά τό δένουμε μέ μιά ταινία ἀπό λαμαρίνα. Ποιό εἶναι τό μῆκος τῆς λαμαρίνας ἄν δέν ὑπολογίσουμε τό δέσιμο;

150. Ένα δωμάτιο μέ διαστάσεις 3,5 μ. πλάτος, 4 μ. μῆκος καί 2,80 ὕψος τό ὑδροχρωματίζουμε, μαζί μέ τήν ὀροφή, ἀντί 20 δρχ. τό τ. μέτρο. Πόσα θά πληρώσουμε;

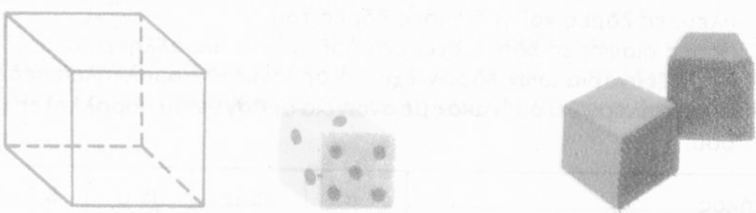


Εἰκ. 122

151. Πόσο θά μᾶς στοιχίσει τό ταπετσάρισμα ἑνός τετραγωνικοῦ δωματίου μέ πλευρά 4 μέτρα καί ὕψος 3 μ., ἄν τό κάθε ρολό καλύπτει 4 τετρ. μέτρα καί στοιχίζει 500 δρχ.;

74. Κύβος

1. Τό στερεό πού εἰκονίζεται ὀνομάζεται κύβος.



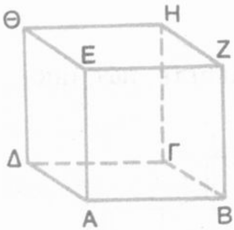
Εἰκ. 123

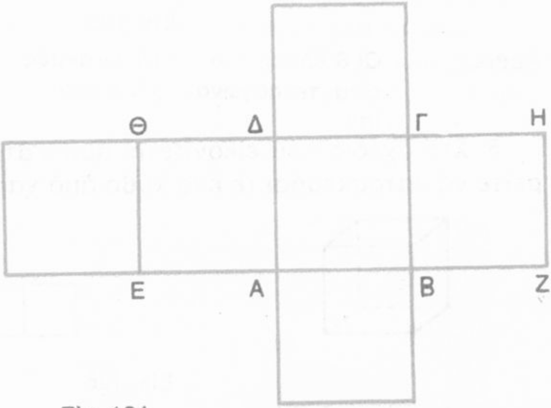
Τόν κύβο βλέπουμε στά ζάρια, στά ξύλινα παιδικά παιγνίδια πού εἰκονίζονται, σέ πολλά χαρτοκιβώτια συσκευασίας κτλ. Πόσες ἕδρες, πόσες ἀκμές, πόσες κορυφές καί πόσες διαγώνιες ἔχει ὁ κύβος;

2. Ἐάν ἀποτυπώσουμε πάνω σ' ἕνα φύλλο τοῦ τετραδίου μας μιά ἕδρα τοῦ κύβου καί στήν εἰκόνα τοποθετήσουμε διαδοχικά ὅλες τίς ἕδρες τοῦ κύβου, θά παρατηρήσουμε πώς ὅλες ἐφαρμόζουν πάνω στήν εἰκόνα.

Ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου

3. Ἐάν κόψουμε ἕναν κύβο κατά μῆκος τῶν ἀκμῶν του, ὅπως φαίνεται στό σχέδιο 124 καί ἁπλώσουμε τήν ἐπιφάνειά του πάνω





Εἰκ. 124

σέ μιά ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, θά προκύψει τό σχῆμα πού εἰκονίζεται. Τό σχῆμα αὐτό λέγεται ἀνάπτυγμα τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύβου. Ἄν δέν λάβουμε ὑπόψη μας τίς δυό βάσεις, τότε λέμε πώς ἔχουμε τό ἀνάπτυγμα τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ κύβου.

4. Ἀπό τό παραπάνω πείραμα συμπεραίνουμε πώς:

α) Ὅλες οἱ ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι ἴσες μεταξύ τους.

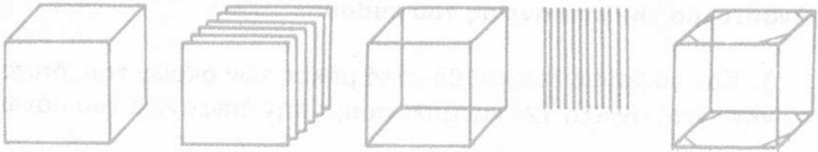
β) Ὅλες οἱ ἀκμές τοῦ κύβου εἶναι ἴσες μεταξύ τους.

γ) Ὅλες οἱ γωνίες τῶν ἀκμῶν του εἶναι ἴσες μεταξύ τους καί κάθε μιά ἴση μέ μιά ὀρθή.

Παρατηροῦμε λοιπόν, πώς κάθε ἕδρα τοῦ κύβου εἶναι τετράπλευρο, μέ ὅλες τίς πλευρές του ἴσες καί τίς γωνίες του ὀρθές. Τά τετράπλευρα τοῦ εἴδους αὐτοῦ τά ὀνομάσαμε τετράγωνα.

Βλέπετε; ▶

Ὁ κύβος εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μέ ὅλες τίς ἕδρες του ἴσα τετράγωνα.



Εἰκ. 125

Κύβος — Οἱ 6 ἕδρες του εἶναι τετράγωνα ἴσα — Οἱ 12 ἀκμές εἶναι ἴσες — Ἔχει 8 κορυφές

5. Στό σχέδιο πού εἰκονίζεται παρακάτω, βλέπετε, πώς μπορεῖτε νά κατασκευάσετε ἕνα κύβο ἀπό χαρτόνι.

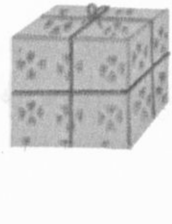
Εἰκ. 126

Ἀσκήσεις (χωρίς χαρτί καί μολύβι)

152. Τί ἐπιφάνεια εἶναι ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ κύβου.
153. Πόσες κορυφές, πόσες ἀκμές καί πόσες ἕδρες ἔχει ὁ κύβος.
154. Πόσες διαγώνιες ἔχει ὁ κύβος.
155. Κατά τί ὁμοιάζει καί κατά τί διαφέρει ὁ κύβος ἀπ' τό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Γραπτά:

156. Ἡ ἀκμή ἑνός κύβου εἶναι 58 ἑκ. Πόσο μῆκος ἔχουν ὅλες οἱ ἀκμές μαζί;
157. Ὅλες μαζί οἱ ἀκμές ἑνός κύβου ἔχουν μῆκος 312 ἑκατοστά. Πόσο εἶναι τό μῆκος τῆς ἀκμῆς του;
158. Πόσους κύβους χρειαζόμαστε, ἀκμῆς 2 ἑκατοστῶν, γιά νά κατασκευάσουμε ἕναν κύβο ἀκμῆς 4 ἑκ.;
159. Γιά νά δέσεις αὐτό τό κυβικό πακέτο πού εἰκονίζεται, μέ κλωστή, πόσα μέτρα κλωστῆς θά χρειαστεῖς, ἐάν δέν πάρεις ὑπ' ὄψη σου τόν κόμπο;



Εἰκ. 127

75. Ἔννοια τοῦ ὄγκου στερεοῦ

Εἴδαμε στή σελίδα 205 παράγραφος 4, πώς γιά κάθε φυσικό στερεό σάν τό βλέπουμε, ἔχουμε τήν ἔννοια ἑνός μεγέθους.

Τό μέγεθος αὐτό, πού εἶναι ὁ χῶρος τόν ὁποῖο πιάνει τό στερεό μέσα στό διάστημα, τό ὀνομάσαμε ὄγκο τοῦ στερεοῦ.

Ἀκόμα ὄγκο τοῦ στερεοῦ ὀνομάσαμε καί ἕνα συγκεκριμένο ἀριθμό, πού μᾶς δηλώνει πόσες φορές εἶναι μεγαλύτερος ἤ μικρότερος ὁ χῶρος, πού κατέχει τό στερεό, ἀπό τό χῶρο πού κατέχει ἕνα ἄλλο στερεό, τό ὁποῖο παίρνεται σά μονάδα μετρήσεως τῶν ὄγκων.

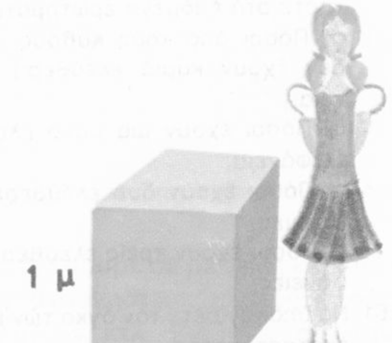
Μονάδες ὄγκου

Σά μονάδες μέτρησης τῶν ὄγκων χρησιμοποιοῦμε τούς παρακάτω κύβους:

1. Τό κυβικό μέτρο (κ.μ. ἤ m^3) εἶναι κύβος ἀκμῆς 1 μέτρου, γιά μεγάλους ὄγκους:
1 κ.μ. = 100 × 100 × 100 κ.δ. = 1000000 κ.δ.

2. Ἡ κυβική παλάμη (κ.π. ἤ dm^3) γιά μικρότερους ὄγκους:
1 κ.π. = 10 × 10 × 10 = 1000 κ.δ.

3. Κυβικός δάκτυλος (κ.δ. ἤ cm^3) γιά πιό μικρότερους ὄγκους.



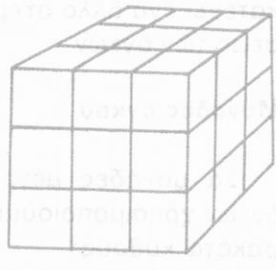
Εἰκ. 128

4. Κυβική γραμμή. Δηλαδή κύβος μέ ἀκμή μιά γραμμή ἤ τό χιλιοστό τοῦ μέτρου.

Εἰκ. 129

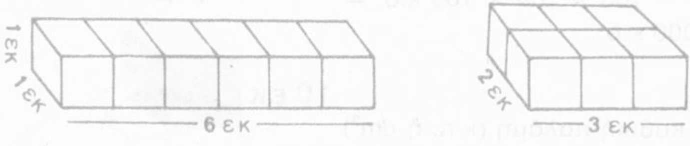
Ἀσκήσεις

160. Στό σχέδιο αὐτό βλέπετε ἕναν κύβο τόν ὁποῖο ἀποτελοῦν 27 μικρότεροι. Παρατηρῆστε τήν εἰκόνα καί ἀπαντῆστε στά ἑπόμενα ἐρωτήματα:
α) Πόσοι ἀπό τούς κύβους αὐτούς δέν ἔχουν καμιά ἐλεύθερη ἐπιφάνεια;
β) Πόσοι ἔχουν μιά μόνο ἐλεύθερη ἐπιφάνεια;
γ) Πόσοι ἔχουν δυό ἐλεύθερες ἐπιφάνειες;
δ) Πόσοι ἔχουν τρεῖς ἐλεύθερες ἐπιφάνειες;



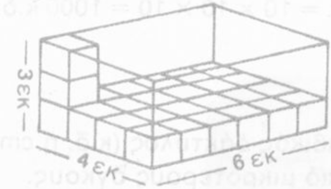
Εἰκ. 130

161. Νά ὑπολογίσετε τόν ὄγκο τῶν κιβωτίων πού εἰκονίζονται, σέ κυβικά ἑκατοστόμετρα.



Εἰκ. 131

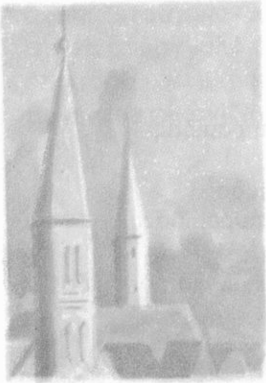
162. Πόσα κυβικά ἑκατοστόμετρα ὑπολείπονται γιά νά γεμίσει τό παραλληλεπίπεδο πού εἰκονίζεται.

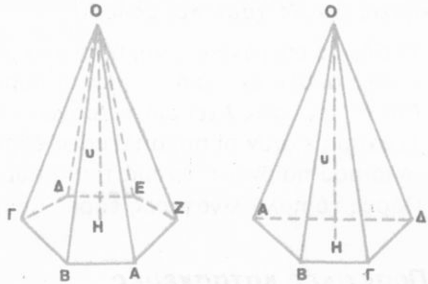


Εἰκ. 132

76. Πυραμίδα

Τό στερεό πού εἰκονίζεται, ὀνομάζεται: πυραμίδα.





Εἰκ. 133

Ἐξαγωνική πυραμίδα τετραπλευρική πυραμίδα

Αὐτοῦ τοῦ εἴδους τά στερεά τά βλέπουμε σέ μερικές κεραμοσκέπαστες στέγες, σέ μνημεῖα, σέ ἀναμνηστικές πλάκες, στούς ὀβελίσκους τῶν καθολικῶν ἐκκλησιῶν κτλ. Γνωστές ἀπ' τήν Ἱστορία εἶναι οἱ πυραμίδες τῆς Αἰγύπτου, οἱ ὁποῖες ἦταν κολοσσιαῖα οἰκοδομήματα πού χρησιμοποιήθηκαν σάν τάφοι βασιλιάδων, ἡγεμόνων κι αὐλικῶν. Ὅπως στό σχέδιο φαίνεται, στή μιά πυραμίδα, ἡ βάση εἶναι ἑξάγωνο. Στήν ἄλλη τετράπλευρο. Μποροῦσε νά εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε πολύγωνο.

Οἱ παράπλευρες ὅμως ἕδρες εἶναι πάντα τρίγωνο, μέ μιά κοινή κορυφή.

Βλέπετε; ▶

> Πυραμίδα εἶναι ἕνα στερεό, τοῦ ὁποίου ἡ βάση εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε πολύγωνο καί οἱ παράπλευρες ἕδρες τρίγωνα, μέ κοινή κορυφή, ἐκτός ἀπό τό ἐπίπεδο τῆς βάσης, καί καθένα μέ μιά κοινή πλευρά μέ τή βάση.

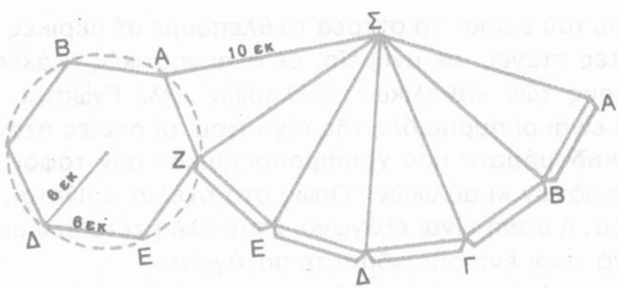
Τό ὄνομά της ἡ πυραμίδα τό παίρνει ἀπ' τό πολύγωνο τῆς βάσης π.χ. Ἐάν ἡ βάση εἶναι τρίγωνο, ἡ πυραμίδα λέγεται τριγωνική. Ἐάν εἶναι τετράπλευρο, τετραγωνική. Ἐάν εἶναι πεντάγωνο, πενταγωνική κτλ.

Ἀσκήσεις *(χωρίς χαρτί καί μολύβι)*

163. Τί εἴδους ἐπιφάνεια εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδας;
164. Πόσες ἀκμές ἔχει μιά τριγωνική πυραμίδα;
165. Πόσες κορυφές ἔχει μιά τετραγωνική πυραμίδα;
166. Τί σχῆμα ἔχουν οἱ παράπλευρες ἕδρες τῆς πυραμίδας;
167. Ἀπό ποῦ παίρνει τ' ὄνομά της ἡ πυραμίδα;
168. Πόσες τό πολύ λιγότερες ἕδρες μπορεῖ νά ἔχει μιά πυραμίδα;

77. *Πρακτικές κατασκευές*

Παρακάτω εἰκονίζεται ὁ τρόπος μέ τόν ὁποῖο κατασκευάζεται μέ χαρτόνι μιά πυραμίδα.



Εἰκ. 134

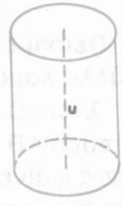
Ἀσκήσεις

Ἀφοῦ κατασκευάσετε μέ χαρτονάκι τήν πυραμίδα, πού εἰκονίζεται νά διακρίνετε:

169. Τίς παράπλευρες ἕδρες.
170. Τή βάση.
171. Τίς παράπλευρες ἀκμές της.
172. Τίς κορυφές της.
173. Γιατί ἡ πυραμίδα δέν ἔχει διαγώνιες;

78. Κύλινδρος

1. Τό στερεό, πού εἰκονίζεται παράπλευρα, ὀνομάζεται: κύλινδρος. Τόν κύλινδρο τόν βλέπουμε σ' ἕνα στρογγυλό ἄξυστο μολύβι, στά κουτιά γάλα ἐβαπορέ, σέ μερικές κονσέρβες καί στά ἀντικείμενα πού εἰκονίζονται πιό κάτω.



Εἰκ. 135


Εἰκ. 136

Ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι καμπύλη ἐπιφάνεια.

Ἡ ὁλική του ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται ἀπό ἐπίπεδα μέρη κι ἀπό καμπύλα μέρη. Δηλαδή εἶναι μεικτή ἐπιφάνεια.

Τά ἐπίπεδα μέρη τοῦ κυλίνδρου εἶναι οἱ βάσεις του.

Ἡ βάση τοῦ κυλίνδρου εἶναι **κυκλικός δίσκος,** καί ἡ γραμμή, πού περιβάλλει τόν κυκλικό δίσκο, εἶναι **κύκλος.** (παλιότερα ἡ γραμμή αὐτή λεγόταν περιφέρεια).

Οἱ κυκλικές βάσεις τοῦ κυλίνδρου βρίσκονται σέ **παράλληλα** ἐπίπεδα.

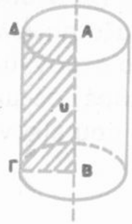
Ἀσκήσεις *(χωρίς χαρτί καί μολύβι)*

174. Ὀνομάστε ἀντικείμενα, πού ἔχουν σχῆμα κυλίνδρου.
175. Ὀνομάστε ἀντικείμενα, πού ἔχουν μεικτή ἐπιφάνεια.

2. Πῶς παράγεται ἕνας κύλινδρος

Πείραμα: Παίρνουμε ἕνα ὀρθογώνιο φύλλο λαμαρίνας τό ΑΒΓΔ.

Στερεώνουμε μέ εἰδική κόλλα στήν πλευρά ΑΒ ἕνα λεπτό μεταλλικό στέλεχος, ὅπως φαίνεται στό σχέδιο. Ἐάν τώρα περιστρέψουμε τό φύλλο γύρω ἀπ' τό στέλεχος ΑΒ σέ ὁλόκληρη στροφή θά παρατηρήσουμε πώς ἡ γρήγορη κίνησή του δίνει τήν εἰκόνα τοῦ κυλίνδρου.



Εἰκ. 137

Βλέπετε; ▶

> Ὁ κύλινδρος γεννιέται ἀπ' τήν περιστροφή ἑνός ὀρθογωνίου γύρω ἀπό μιά πλευρά του, κατά μιά πλήρη περιστροφή.

Ἡ πλευρά ΔΓ στίς διάφορες θέσεις γεννάει τήν παράπλευρο ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου καί λέγεται **γενέτειρά του.**

Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ λέγεται **ὕψος ἤ ἄξονας** τοῦ κυλίνδρου. Ἐπειδή ὁ κύλινδρος παράγεται μέ τήν περιστροφή τοῦ ὀρθογωνίου, γύρω ἀπό μιά τῶν πλευρῶν του, γιά τοῦτο λέγεται καί στερεό ἀπό περιστροφή.

Ἀσκήσεις *(χωρίς χαρτί καί μολύβι)*

176. Πόσες βάσεις ἔχει ἕνας κύλινδρος;
177. Γιατί ὁ κύλινδρος λέγεται ἀπό περιστροφή στερεό;
178. Τί ὀνομάζεται γενέτειρα τοῦ κυλίνδρου καί γιατί;
179. Ποιό εἶναι τό ὕψος τοῦ κυλίνδρου;

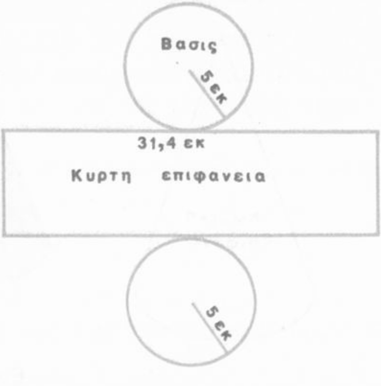
3. Ἀνάπτυγμα καί πρακτική κατασκευή κυλίνδρου

Ἐάν κόψουμε ἕναν κύλινδρο κατά μῆκος μιᾶς γενέτειράς του

καί τίς βάσεις κατά μῆκος τῶν κύκλων τους, τότε μποροῦμε νά ἀπλώσουμε τόν κύλινδρο πάνω σέ μιά ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, ὅπως φαίνεται στό παρακάτω σχέδιο.

Τό σχῆμα αὐτό εἶναι **τό ἀνάπτυγμα ὅλης τῆς ἐπιφάνειας τοῦ** κυλίνδρου.

Τό ἀνάπτυγμα αὐτό μᾶς ὁδηγεῖ στόν τρόπο, μέ τόν ὁποῖο μποροῦμε νά τόν κατασκευάσουμε.

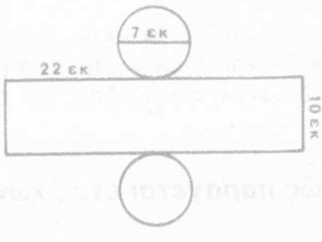


Εἰκ. 138

'Ασκήσεις

Μέ τίς διαστάσεις πού εἰκονίζονται, νά κατασκευάσετε μέ χαρτονάκι ἕναν κύλινδρο.

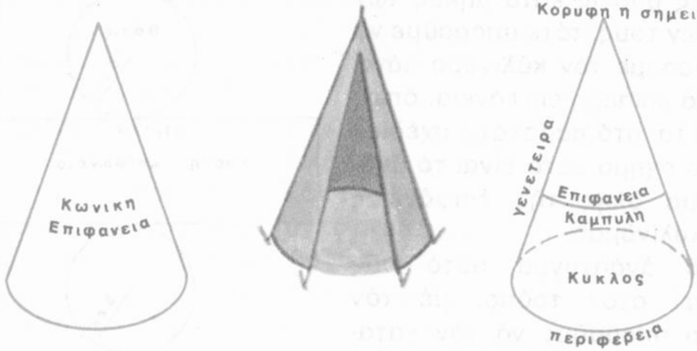
Εἰκ. 139



79. *Κῶνος*

Τό στερεό πού εἰκονίζεται λέγεται κῶνος. Σχῆμα κώνου ἔχουν τά στερεά: μιά σκηνή, τό χωνάκι τοῦ παγωτοῦ, ἡ στέγη τῶν ἀνεμομύλων, ἡ στέγη μερικῶν πύργων κτλ.

Εἰκ. 140α



Εικ. 140β

Ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι καμπύλη ἐπιφάνεια καί καταλήγει σ' ἕνα σημεῖο πού λέγεται: **κορυφή** τοῦ κώνου. Ἡ βάση του εἶναι ἕνας κυκλικός δίσκος.

Ὁλόκληρη ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι μιά μεικτή ἐπιφάνεια.

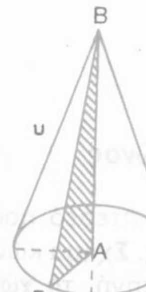
Ἀσκήσεις

180. Ὀνομάστε ἀντικείμενα μέ σχῆμα κώνου.
181. Ποιό εἶναι τό εἶδος τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου.
182. Τί διαφέρει ὁ κύλινδρος ἀπ' τόν κῶνο.

80. Πῶς παράγεται ἕνας κῶνος

Πείραμα: Παίρνουμε ἕνα φύλλο λαμαρίνας σέ σχῆμα ὀρθογωνίου τριγώνου τό ΑΒΓ. Στερεώνουμε, μέ εἰδική κόλλα, στήν πλευρά ΑΒ ἕνα λεπτό μεταλλικό σύρμα, ὅπως φαίνεται στό σχέδιο.

Ἐάν τώρα περιστρέψουμε τό φύλλο γύρω ἀπ' τό στέλεχος ΑΒ σέ ὁλόκληρη στροφή, θά παρατηρήσουμε, πώς ἡ γρήγορη κίνησή του δίνει εἰκόνα τοῦ κώνου.



Εικ. 141

Βλέπετε; ▶

> Ὁ κῶνος γεννιέται ἀπ' τήν περιστροφή ἑνός ὀρθογωνίου τριγώνου γύρω ἀπό μιά κάθετη πλευρά του, σέ μιά ὁλόκληρη περιστροφή.

Ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ στίς διάφορες θέσεις γεννάει τήν παράπλευρη ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, γιά τό λόγο αὐτό λέγεται **γενέτειρα** τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ κώνου.

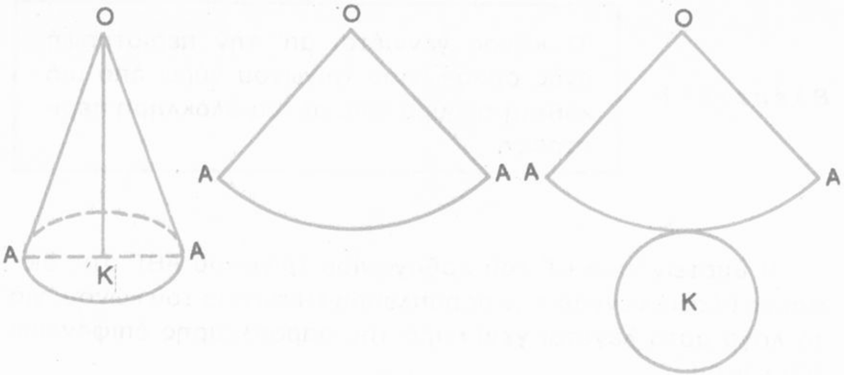
Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ λέγεται ὕψος ἤ ἄξονας τοῦ κώνου. Ἐπειδή ὁ κῶνος παράγεται μέ τήν περιστροφή τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου γύρω ἀπό μιά κάθετη πλευρά του, γιά τοῦτο λέγεται καί στερεό ἐκ περιστροφῆς.

Ἀσκήσεις

183. Τί ὀνομάζεται γενέτειρα τοῦ κώνου καί γιατί;
184. Γιατί ὁ κῶνος λέγεται στερεό ἐκ περιστροφῆς;
185. Ποιό εἶναι τό ὕψος τοῦ κώνου;
186. Πόσες βάσεις ἔχει ὁ κῶνος;

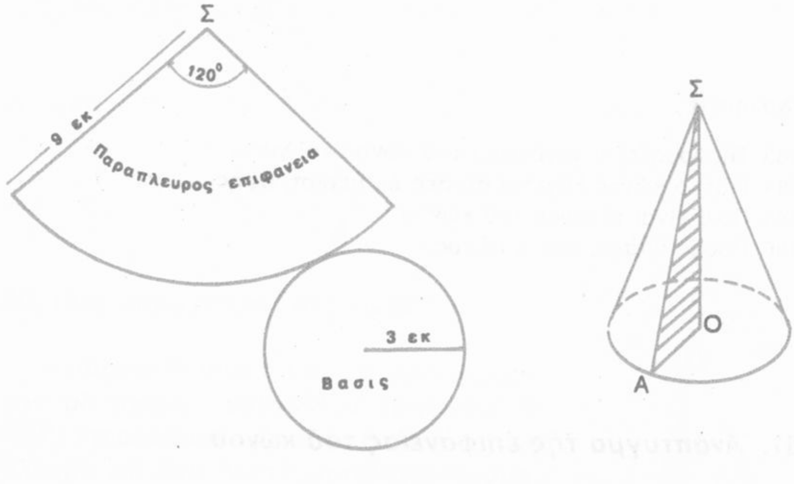
81. Ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου

Ἐάν κόψουμε ἕναν κῶνο κατά μῆκος μιᾶς γενέτειράς του καί τή βάση κατά μῆκος τοῦ κύκλου τῆς βάσης του, τότε μποροῦμε νά ἁπλώσουμε τόν κῶνο πάνω σέ μιά ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, ὅπως φαίνεται στό σχέδιο, πού εἰκονίζεται. Θά λάβουμε τότε τό ἀνάπτυγμα τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου.



Εἰκ. 142

Τό παρακάτω σχῆμα μᾶς ὁδηγεῖ στήν κατασκευή μέ χαρτόνι ἑνός κώνου μέ ἀκτίνα βάσης 3 ἐκ. καί γενέτειρα 9 ἐκ.



Εἰκ. 143

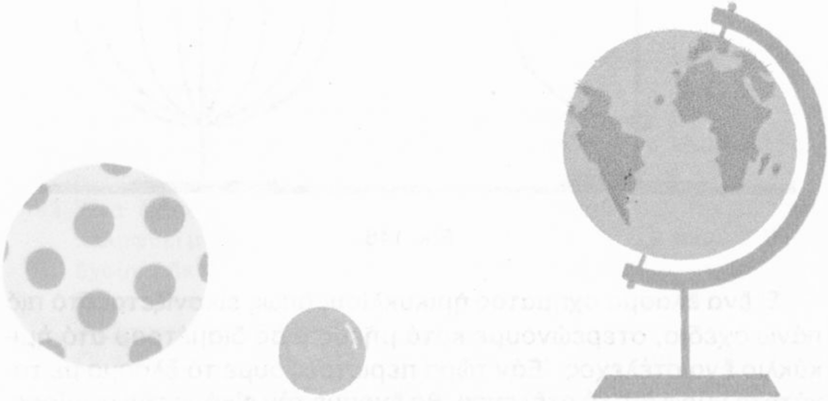
Ἀσκήσεις

187. Νά κατασκευάσετε τόν παραπάνω κῶνο μέ ἀκτίνα βάσης 5 ἐκ. καί γενέτειρα 16 ἐκ.

82. Ἡ σφαίρα

Τό στερεό πού εἰκονίζεται, ὀνομάζεται σφαίρα. Μιά μπάλλα ποδοσφαίρου ἤ παιχνιδιοῦ πίγκ - πόγκ ἤ τέννις ἤ ἑνός βώλου δίνει τήν εἰκόνα τῆς σφαίρας.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, κατ' ἀντίθεση πρός τίς ἐπιφάνειες τῶν πολυέδρων καί τοῦ κυλίνδρου, εἶναι καμπύλη ἐπιφάνεια.

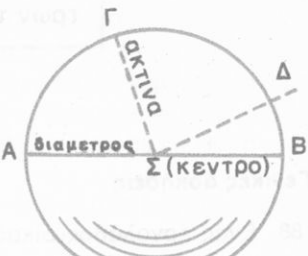


Εἰκ. 144

Ἡ σφαίρα ὁρίζεται ὡς τό στερεό τοῦ ὁποίου ὅλα τά σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπό ἕνα δοσμένο σημεῖο πού ὀνομάζεται **κέντρο της**. Ἡ κοινή αὐτή ἀπόσταση ὀνομάζεται **ἀκτίνα** τῆς σφαίρας. π.χ. τό τμῆμα ΣΓ εἶναι μιά ἀκτίνα καί τό Σ τό κέντρο τῆς σφαίρας.

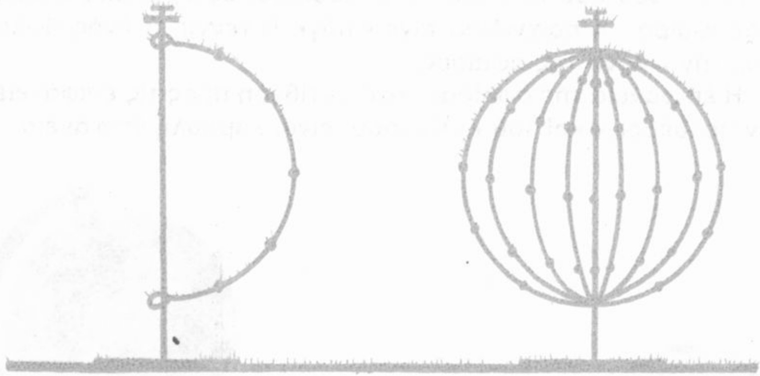
Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ, πού ἔχει τά ἄκρα στήν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας καί περνᾶ ἀπό τό κέντρο Σ, λέγεται **διάμετρος** τῆς σφαίρας.

Ὅπως φαίνεται καί στό σχέδιο ἡ διάμετρος εἶναι διπλάσια ἀπό τήν ἀκτίνα.



Εἰκ. 145

83. Πῶς παράγεται μιά σφαίρα



Εἰκ. 146

Σ' ἕνα ἔλασμα σχήματος ἡμικυκλίου, ὅπως εἰκονίζεται στό πιό πάνω σχέδιο, στερεώνουμε κατά μῆκος μιᾶς διαμέτρου στό ἡμικύκλιο ἕνα στέλεχος. Ἐάν τώρα περιστρέψουμε τό ἔλασμα μέ ταχύτητα γύρω ἀπ' τό στέλεχος, θά ἔχουμε τήν εἰκόνα τῆς σφαίρας.

Βλέπετε; ▶

Ἡ σφαίρα παράγεται ἀπ' τήν περιστροφή ἑνός ἡμικυκλίου, γύρω ἀπό μιά τῶν διαμέτρων του κατά μιά πλήρη περιστροφή.

Γενικές ἀσκήσεις

188. Ἕνας ἐργολάβος οἰκοδομῶν ὑπολόγισε ὅτι ἡ κατασκευή πατωμάτων ἀπό τσιμέντο στοιχίζει 1.110 δρχ. ἀνά τετραγωνικό μέτρο. Πόσο θά στοιχίσει ἡ κατασκευή τοῦ πατώματος μιᾶς αἴθουσας διαστάσεων 7,50 μ. ἐπί 12 μ.

189. Γιά τή σπορά τοῦ σταριοῦ ἀπαιτοῦνται, κατά μέσον ὅρο, 10 κιλά σπόρου κατά στρέμμα. Πόσα κιλά σπόρου ἀπαιτοῦνται γιά τή σπορά ἑνός κτήματος μέ σχῆμα ὀρθογωνίου, πλάτους 300 μ. καί μήκους 600 μ.;

190. Ἡ συγκομιδή σταριοῦ ἀπό ἕνα πρότυπο τετραγωνικό χωράφι, πλευρᾶς 400 μ. ἦταν 64 τόννοι. Ποιά ἦταν ἡ παραγωγή ἀνά τετραγωνικό μέτρο;

191. Ἀπό ἕνα ὀρθογώνιο μήκους 54 ἑκ. καί ὕψους 36 ἑκ. πρόκειται νά ἀποκοπεῖ τρίγωνο βάσης 48 ἑκ. καί ὕψους 30 ἑκ.

α) Ποιό θά εἶναι τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου;

β) Ποιό θά εἶναι τό ἐμβαδόν τοῦ ἀπομένοντος, μετά τήν ἀποκοπή τοῦ τριγωνικοῦ τμήματος;

192. Ἕνα ὀρθογώνιο ἀγρόκτημα ἔχει μῆκος 500 μ. καί πλάτος 300 μ. Μιά τάφρος σχηματίζει μέ τά ὅρια τοῦ ἀγροκτήματος αὐλάκι πλάτους 1 μ. Πρός πόσα m^2 ἰσοῦται τό ἐμβαδόν τῆς τάφρου;

193. Ἕνα ἐπίπεδο μέρος τῆς στέγης ἑνός σπιτιοῦ, πού πρόκειται νά καλυφθεῖ μέ κεραμίδια, ἔχει σχῆμα τραπεζίου, τοῦ ὁποίου οἱ βάσεις ἔχουν μῆκος 8,50 μ. καί 11,50 μ. κι ἀπέχουν 4,80 μ. μεταξύ τους. Πόσες δεσμίδες κεραμιδιῶν θά χρειαστοῦν, ἐάν ἀπαιτεῖται μιά δεσμίδα γιά τήν κάλυψη 3 τετρ. μέτρων;

194. Οἱ πλευρές ἑνός μετάλλινου καλαθιοῦ γιά ἄχρηστα, εἶναι λαμαρίνες σχήματος ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, τοῦ ὁποίου οἱ μή παράλληλες πλευρές εἶναι μεταξύ τους ἴσες. Οἱ παράλληλες πλευρές τοῦ τραπεζίου ἔχουν μήκη 25 ἑκ. καί 30 ἑκ., ἐνῶ ἡ μεταξύ τους ἀπόσταση εἶναι 38 ἑκ. Πόσα τ. ἑκατ. λαμαρίνας ἀπαιτοῦνται γιά τίς τέσσερες πλευρές τοῦ καλαθιοῦ;

195. Νά βρεῖτε τή συνολική ἐπιφάνεια ἑνός ἀμπαζούρ, πού τό ἀποτελοῦν 6 ἴσα ἰσοσκελῆ τραπέζια, τῶν ὁποίων οἱ παράλληλες πλευρές ἔχουν μήκη 25 ἑκ. καί 35 ἑκ. καί ἡ μεταξύ τους ἀπόσταση 15 ἑκ.

196. Ἕνας χάραξε ἕνα κυκλικό παρτέρι διαμέτρου 4,50 μ. στόν κῆπο του, κατόπιν φύτεψε στή συνέχεια βολβούς στήν περίμετρό του καί σ' ἀπόσταση 24 ἑκ. μεταξύ τους. Πόσους βολβούς φύτεψε;

197. Μιά κυρία ἔχει ἕναν κυκλικό καθρέφτη διαμέτρου 56 ἑκ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του;

198. Ἕνας κύκλος περιμέτρου 80 ἑκατ. ἀποκόπηκε ἀπό ἕνα τετραγωνικό φύλλο λαμαρίνας. Ποιά ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου;

199. Πόσα τετραγωνικά μέτρα χαρτιοῦ θά χρησιμοποιήσουμε, γιά νά καλύψουμε τό ἐσωτερικό ἑνός κυβικοῦ κιβωτίου χωρίς πῶμα, ἄν ἡ ἀκμή του εἶναι 0,50 ἑκ.

200. Γιά νά βάψουμε τίς ἕδρες ἑνός κυβικοῦ δοχείου ἀκμῆς 0,50 μ. πρός 125 δρχ. τό τετραγωνικό μέτρο, πόσο θά πληρώσουμε;

201. Ἀπό μιά τετραγωνική αὐλή χωρίζουμε πεζοδρόμιο ἐμβαδοῦ 69,60 τ.μ. καί πλάτους 2,40 μ. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδόν τοῦ ὑπολοίπου τμήματος τῆς αὐλῆς.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ἀριθμητική

Κεφάλαιο Ι. **Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί**

Κεφάλαιο ΙΙ. **Οἱ δεκαδικοί ἀριθμοί** (ἐπανάληψη)

Κεφάλαιο III. Ἡ διαιρετότητα

Κεφάλαιο IV. Ὁ μέσος ὅρος

Κεφάλαιο V. Οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοί

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Γεωμετρία

Κεφάλαιο 1ο
ΦΥΣΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ ΣΩΜΑΤΑ

Κεφάλαιο 2ο
ΑΠΛΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ
ΚΑΙ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥΣ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΜΕΓΑ Π.:Μαθηματικά σύγχρονα καί θεμελειώδη. Ἀθῆναι 1974.

ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ ΧΡ.: Πρακτική ἀριθμητική Ο.Ε.Σ.Β. 1939.

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΝΙΚ.: Πρακτική ἀριθμητική Ο.Ε.Δ.Β.

ΒΟΣΤΑΝΤΖΗ ΚΩΝ.: Πρακτική ἀριθμητική Ε΄ - Στ΄ 1967.

ΚΥΡΙΑΖΟΠΟΥΛΟΥ - ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΥ: Ἀριθμητική - Γεωμετρία Ε΄Ο.Ε.Δ.Β.1971.

ΣΑΜΑΡΑ ΗΛΙΑ: Ἀριθμῆτική - Γεωμετρία Ε΄, Ο.Ε.Δ.Β. 1977.

ΥΠΟΥΡΓ. ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΥΠΡΟΥ: Μαθηματικά γιά τό δημοτικό.
Βιβλίο 4ο καί 5ο γιά τό δάσκαλο.
Βιβλίο Ια, 4β, 5α γιά τό μαθητή 1970 - 72.

DOTTRENS ROBERT: Συνεργασία G. MIALARET - EDM. RAST - MICHEL RAY.
Παιδαγωγῶ καί διδάσκω. Ἐκδ. UNESCO - ΔΙΠΤΥΧΟ 1974.

DIE WELT DER ZAHL No 5 - No 6. H. SCHROEDEL VERLAG - HANNOVER 1968.

UNSER RECHENBUCH No 5 - No 6. ERNST KLETT VERLAG - STUT - TGART 1966.

LET'S EXOLORE MATHEMATICS BOOK 2. A - O. BLACK - LONDON.

FIELD MATHEMATICS PROGRAMM No 5 - No 6 TEACHERS EDITION - CALI-FORNIA 1974.

Εικονογράφηση: ΑΛΕΚΟΣ ΜΠΟΥΡΑΣ

024000029804
ΕΚΔΟΣΗ Β΄, 1981 (VI) - ΑΝΤΙΤ. 150.000 - ΣΥΜΒΑΣΗ: 3508/20-11-80
ΕΚΤΥΠΩΣΗ - ΒΙΒΛΙΟΔ.: «ΑΤΛΑΝΤΙΣ - Μ. ΠΕΧΛΙΒΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ» Α.Ε.

ΟΕ
ΔΒ