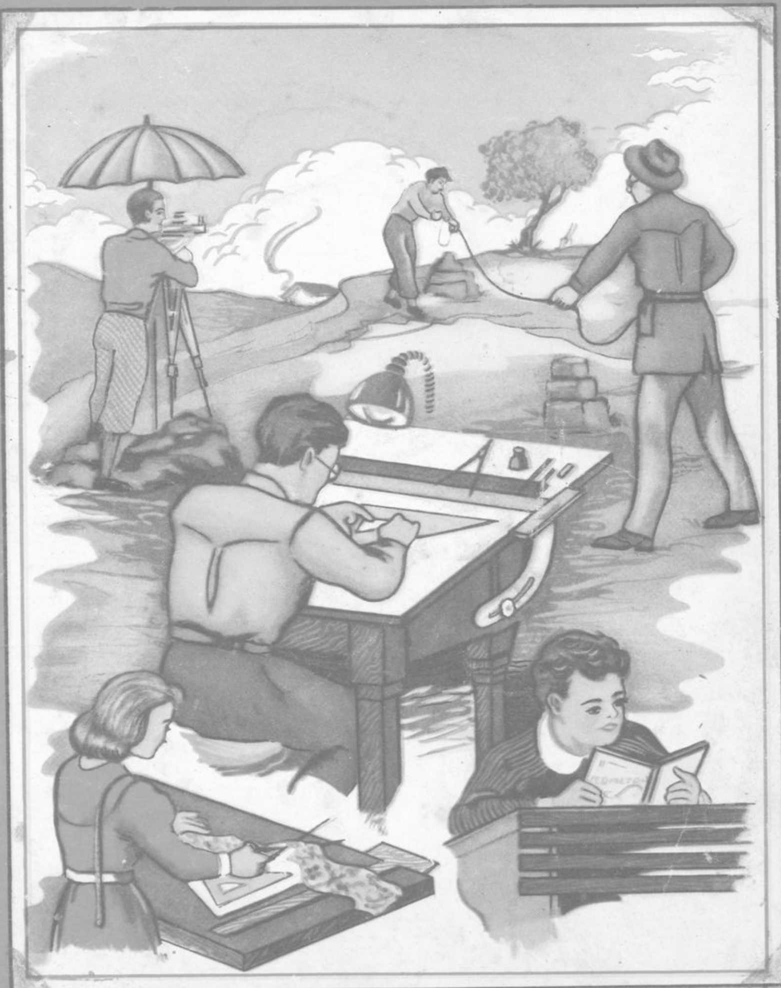
Α. Χ. ΠΑΤΣΗ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΜΕ ΕΙΚΟΝΕΣ

ΓΙΑ ΤΗΝ Ε' - ΣΤ' ΤΑΞΗ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ



ΕΚΔΟΣΕΙΣ: "ΝΕΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ,, ΑΘΗΝΑΙ
ΣΩΚΡΑΤΟΥΣ 37 - ΤΗΛΕΦ. 25.1.69

Α. Χ. ΠΑΤΣΗ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΜΕ ΕΙΚΟΝΕΣ

Γιὰ τὴν Ε' καὶ ΤΣ' τάξη τοῦ Δημοτικοῦ

ΠΡΩΤΟΤΥΠΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Ἡ γεωμετρία μὲ εἰκόνες, ζωντανή,
ἐποπτική, βγαλμένη ἀπ' τὴ ζωή.
Μὲ ὁδηγίες γιὰ τοὺς δασκάλους.

Ἐγκεκριμένη στὸ διαγωνισμὸ τοῦ Ὑπουργείου Παιδείας διὰ μίαν τριετίαν συμφώνως μὲ τὴν ὑπ' ἀριθ. 61452/12.6.52 ἀπόφασιν τοῦ Ὑπουργείου καὶ τοῦ Κεντρικοῦ Γνωμοδοτικοῦ καὶ Διοικητικοῦ Συμβουλίου Ἐκπαιδεύσεως.

Ἔκδοσις Ἕκτη

ΕΚΔΟΣΕΙΣ "ΝΕΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ"
ΑΘΗΝΑΙ-ΣΩΚΡΑΤΟΥΣ 37 ΤΗΛ. 25.169

Τυπογραφεῖον Ν. ΑΛΙΚΙΩΤΗΣ & ΥΙΟΙ — Κηφισσοῦ 33 Ἀθῆναι

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΓΟΝΕΙΣ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΔΑΣΚΑΛΟΥΣ

Τὸ βοηθητικὸ βιβλίο μας «Πρακτικὴ Γεωμετρία μὲ Εἰκόνες» εἶναι τὸ τελευταῖο βιβλίο τῆς σειρᾶς τῶν ἀριθμητικῶν μας γιὰ ὅλες τὶς τάξεις τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου. Ἡ σειρὰ αὐτὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ 7 βιβλία δηλαδὴ ἀπὸ 6 ἀριθμητικὲς (μία γιὰ κάθε τάξη) μὲ τὸ γενικὸ τίτλο «μαθαίνω νὰ μετρῶ» καὶ ἀπὸ τὴ Γεωμετρία αὐτὴ γιὰ τὴν Ε' καὶ ΣΤ' τάξη ποὺ ὁλοκληρώνει καὶ κλείνει τὴ σειρά.

Καὶ ἡ «Πρακτικὴ Γεωμετρία μὲ εἰκόνες» στηρίζεται στὶς ἴδιες ἀρχές, ποὺ στηρίζονται ὅλα τὰ σχολικά μας βιβλία: στὴν ἀρχὴ τῆς πραγματικότητας, στὴν ἀρχὴ τῆς ἐργασίας, τῆς αὐτενεργείας τῆς ἐποπτείας, τῆς συγκέντρωσης. Εἶναι γραμμένη μὲ βάση τῆς ἀπαιτήσεις τῆς Ἑνιαίας Διδασκαλίας. Μὰ καὶ οἱ συνάδελφοι ποὺ ἐφαρμόζουν «τακτὰ μαθήματα» βρίσκουν σαυτὴ ἄφθονο καὶ παιδαγωγικὰ διατυπωμένο διδακτικὸ ὑλικό. Γενικὰ τὰ πλεονεκτήματα τοῦ βιβλίου μας εἶναι τὰ ἑξῆς:

1) Στὴν ἀρχὴ εἰσάγομε κατάλληλα τὸ μαθητὴ στὸ σύνολο τῆς ὕλης τῆς Γεωμετρίας, ποὺ θὰ διδαχθῆ στὶς δυὸ τελευταῖες τάξεις τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου. Ἡ εἰκονογραφημένη δεκαεξασέλιδη εἰσαγωγὴ στὶς διάφορες γεωμετρικὲς ἔννοιες, ἔχει σκοπὸ νὰ δημιουργήση ἐνδιαφέρον στοὺς μαθητὲς γιὰ τὸ μάθημα αὐτὸ καὶ νὰ προπαρασκευάση τὸ ἔδαφος γιὰ τὴν κυρίως διδ)λία. Οἱ ὁλοσέλιδες εἰκόνες ἀντιπροσωπεύουν μεγάλες ἑνότητες ἑνιαίας δ)λίας. Προτείνομε δηλαδή, πρὶν ἀρχίση ἡ κυρίως δ)λία τῆς Γεωμετρίας, νὰ ἐπισκέπτωνται οἱ μαθητές, μὲ τοὺς δ)λους (ἢ γονεῖς των), διάφορες ἐγκαταστάσεις ἢ οἰκοδομὲς καὶ τεχνικὰ ἔργα. Νὰ μελετοῦν διάφορα ἐπαγγέλματα καὶ τὰ ὄργανα—ἐργαλεῖα μὲ τὰ ὁποῖα ἐκτελοῦνται αὐτά. Ἔτσι σιγὰ-σιγὰ θὰ ἀναπηδήση μόνη της ἡ ἀνάγκη γιὰ μιὰ συστηματικώτερη ἔρευνα τῶν θεμάτων αὐτῶν, ἔρευνα ποὺ ἀνάγεται στὸν τομέα τῆς Γεωμετρίας.

Ἔπειτα θὰ γίνουν παρατηρήσεις στὰ διάφορα ἀντικείμενα καὶ στερεὰ σώματα τοῦ περιβάλλοντος (σπιτιοῦ, χωριοῦ, σχολείου, πόλης) καὶ θὰ ἀντιληφθοῦν μόνοι των οἱ μαθητὲς πὼς μονάχα τὰ στερεὰ σώματα ποὺ ἔχουν κανονικὸ σχῆμα, ποὺ ἀνάγονται δηλαδὴ σὲ ἕνα ἀπὸ τὰ 10 κανονικὰ στερεὰ γεωμετρικὰ σώματα, ἐξετάζονται στὸ μάθημα τῆς Γεωμετρίας. Ὑποδείγματα τῶν 10 στερεῶν γεωμετρικῶν σωμάτων παρουσιάζομε στὸ τέλος τῆς εἰσαγωγῆς μας.

Ἐπίσης στὴν εἰσαγωγή μας δὲν παραλείπομε νὰ ἐμφανίσωμε καὶ μερικὲς προκαταρκτικὲς γεωμετρικὲς ἔννοιες. Δηλαδὴ λίγα στοιχεῖα γιὰ τὶς ἐπιφάνειες τῶν σωμάτων, τὶς γραμμές, τὶς γωνίες καὶ γενικὰ γιὰ τὰ σχήματα. Ἔτσι, ὅταν τὰ στοιχεῖα αὐτὰ τὰ συναντήσωμε στὰ οἰκεῖα κεφάλαια (π.χ. τὴν εὐθεία καὶ τὴν τεθλασμένη γραμμὴ στὸν κύβο, τὴν πλαγεία γραμμὴ καὶ τὴν ὀξεία γωνία στὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο κλπ.), μὲ ἄνεση θὰ κινοῦνται οἱ μαθητὲς στὰ ἑπόμενα μαθήματα.

Ἡ εἰσαγωγή μας καμμιὰ σχέση δὲν ἔχει μὲ παρόμοιες ὁλότελα ἀσύνδετες καὶ ἀφηρημένες «προκαταρκτικὲς γεωμετρικὲς γνώσεις» ποὺ βλέπει κανεὶς σὲ ἐγχειρίδια τοῦ Γυμνασίου ἢ τοῦ Δημοτικοῦ. Ἡ διαφορά μας εἶναι τεραστία. Ἐμεῖς ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὴν καθολικὴ ἐποπτεία ὁλόκληρης τῆς ὕλης τοῦ μαθήματος τῆς Γεωμετρίας, εἰσάγομε τὸ μαθητὴ σαυτή, τοῦ γεννοῦμε ἐνδιαφέρον καὶ τοῦ παρέχομε ἀφορμὲς γιὰ μιὰ ζωντανὴ ἐξοικείωση μὲ τὴν ὕλη της.

2) Ἀκολουθεῖ ἡ κυρίως δ)λία τῆς Γεωμετρίας. Τὴν ὕλη της τὴν χωρίσαμε σὲ 10 μεθοδικὲς ἑνότητες, ὅσα δηλαδὴ εἶναι καὶ τὰ στερεὰ γεωμετρικὰ σώματα ποὺ διδάσκονται στὴν Ε' καὶ ΣΤ' τάξη. Προσθέσαμε καὶ μιὰ ἑνότητα γιὰ τὴν κλίμακα.

3) Κάθε μεθοδικὴ ἑνότητα τὴν ἐξετάζομε ἀπὸ πολλὲς πλευρές. Σὰν βάση μας παίρνομε τὶς ἀρχὲς ποὺ ἀναφέρει ἡ Ὑπουργικὴ Προκήρυξη καὶ ὁ κ. Ν. Γ. Μιχαλόπουλος (Μαθηματικὸς καὶ Ἐκπαιδευτικὸς Σύμβουλος) στὸ βιβλίο του «Πρακτικὴ Γεωμετρία—Στερεομετρία». Δηλαδὴ τὴν ἐποπτεία, τὴν περιγραφή, τὴν μέτρηση καὶ τὴν κατασκευή.

4) Στὴν ἀρχὴ κάθε ἑνότητας παραθέτομε ὁλοσέλιδη εἰκόνα μὲ ὅλα τὰ ἀντικείμενα τοῦ γύρω περιβάλλοντος κόσμου, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴ μορφή, τὸ σχῆμα καὶ τὸν ὄγκο τοῦ ἐξεταζομένου στερεοῦ. Τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ (ἢ μερικὰ ἀπὸ αὐτὰ—ὅσα εἶναι δυνατὸν) ζητοῦμε νὰ συγκεντρώνονται στὴν τάξη καὶ κατόπιν ν' ἀρχίζῃ ἡ δ)λία καὶ νὰ μὴ στηρίζεται ἀποκλειστικὰ στὸ μοναδικὸ στερεὸ γεωμετρικὸ σῶμα, ποὺ διαθέτει τὸ σχολεῖο. Ἡ μετάβαση στὸ ὑποδειγματικὸ στερεὸ θὰ ἀρχίσῃ ἀπὸ τὰ ἀντικείμενα τοῦ περιβάλλοντος (πρᾶγμα ποὺ εἶναι σπουδαῖο ἀπὸ παιδαγωγικὴ καὶ μεθοδικὴ ἄποψη). Μὰ ἡ κυρίως διδασκαλία θὰ στηριχθῇ ἀποκλειστικὰ στὸ ὑποδειγματικὸ στερεό, γιατὶ τοῦτο παρουσιάζει κανονικὲς ἀναλογίες. Καὶ μὲ βάση αὐτὲς οἱ μετρήσεις θὰ εἶναι ὀρθὲς καὶ οἱ γεωμετρικὲς ἔννοιες σωστὲς καὶ ἀληθινές.

5) Ἐπίσης τὸ περιγραφικὸ καὶ ἐπεξηγηματικὸ κείμενο ποὺ ἀκολουθεῖ, κοσμεῖται μὲ πολλὰ καὶ διάφορα γεωμετρικὰ σχήματα καὶ τίποτε δὲν δίδεται κατὰ ἀφηρημένο τρόπο. Κάθε στερεὸ ἐξετάζεται πολύπλευρα. Ἐξάγονται, ὕστερα ἀπὸ πολλὲς μετρήσεις καὶ πολλαπλὲς συγκρίσεις, οἱ σχετικὲς γεωμετρικὲς ἀλήθειες καὶ διατυπώνονται σὲ ἁπλοὺς καὶ ἐπιστημονικὰ ὀρθοὺς κανόνες. Κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο ἐξετάζονται, περιγράφονται καὶ μετροῦνται τὰ διάφορα γεωμετρικὰ σχήματα, πάντοτε μὲ συσχετισμὸ πρὸς τὰ στερεὰ ἀπὸ τὰ ὁποῖα παράγονται.

6) Ἀκολουθοῦν διάφορες συγκεκριμένες ἐργασίες, ἀσκήσεις καὶ ἐφαρμογές, σὲ κάθε περίπτωση γενικὰ καὶ εἰδικὰ στὸ τέλος τῆς μεγάλης ἑνότητας. Πρὶν ἀπὸ τὶς ἐργασίες αὐτὲς παραθέτομε ἀναπτύγματα τῶν διαφόρων στερεῶν γιὰ νὰ διευκολύνωμε τὶς κατασκευὲς τῶν γεωμετρικῶν σωμάτων. Οἱ κατασκευὲς αὐτὲς δὲν γίνονται μονάχα μὲ χαρτόνι μὰ καὶ μὲ σανίδι καὶ μὲ γύψο. Ἐπιμένομε στὸ τελευταῖο αὐτὸ σημεῖο, γιατὶ μὲ τὴ χρήση τοῦ γύψου ἐμεῖς εἴχαμε θαυμάσια ἀποτελέσματα στὴν πράξη.

7) Ὕστερα ἀπὸ τὶς ἐργασίες αὐτὲς ἀκολουθοῦν πολλὰ προβλήματα καὶ τέλος ἡ ἑνότητα κλείνει μὲ ἄφθονες χειροτεχνικὲς ἐργασίες γιὰ ἀγόρια καὶ κορίτσια. Διάφορα ὑποδείγματα γιὰ χαρτοκολλητική, χαρτοδιπλωτική, χαρτοπλεκτική, κέντημα, ἰχνογραφία. Ἐπίσης διάφορα παιγνίδια καὶ γεωμετρικὰ αἰνίγματα. Οἱ ἀπασχολήσεις αὐτὲς εἶναι μιὰ ἀποθεραπεία γιὰ τοὺς μαθητὲς καὶ μιὰ διασκεδαστικὴ ἐργασία, ποὺ τοὺς γεννᾶ τὴν ἐπιθυμία νὰ τὶς συνεχίσουν καὶ στὶς ἄλλες ἑνότητες.

Καὶ μόνο ἐὰν τὸ ἐνδιαφέρον αὐτὸ δημιουργήσῃ στὰ παιδιὰ τὸ βιβλίο μας «Πρακτικὴ Γεωμετρία μὲ εἰκόνες» θὰ εἴμαστε εὐτυχεῖς. Γιατὶ σαυτὸ ἀκριβῶς ἀποβλέπουν ὅλες μας οἱ παιδαγωγικὲς προσπάθειες.

Ἀθῆναι, Αὔγουστος 1953

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Μὲ εἰκόνες

Νὰ παρατηρήσετε μὲ προσοχὴ τὰ διάφορα ἀντικείμενα καὶ ἐργαλεῖα ποὺ βλέπετε στὴν εἰκόνα αὐτή. Νὰ περιγράψετε τὶς ἐργασίες τοῦ κτίστη, τοῦ μαραγκοῦ, τοῦ ἀμμοκονιαστῆ, τοῦ σοβατζῆ, τοῦ ἐπιπλοποιοῦ, τοῦ μηχανικοῦ κλπ.

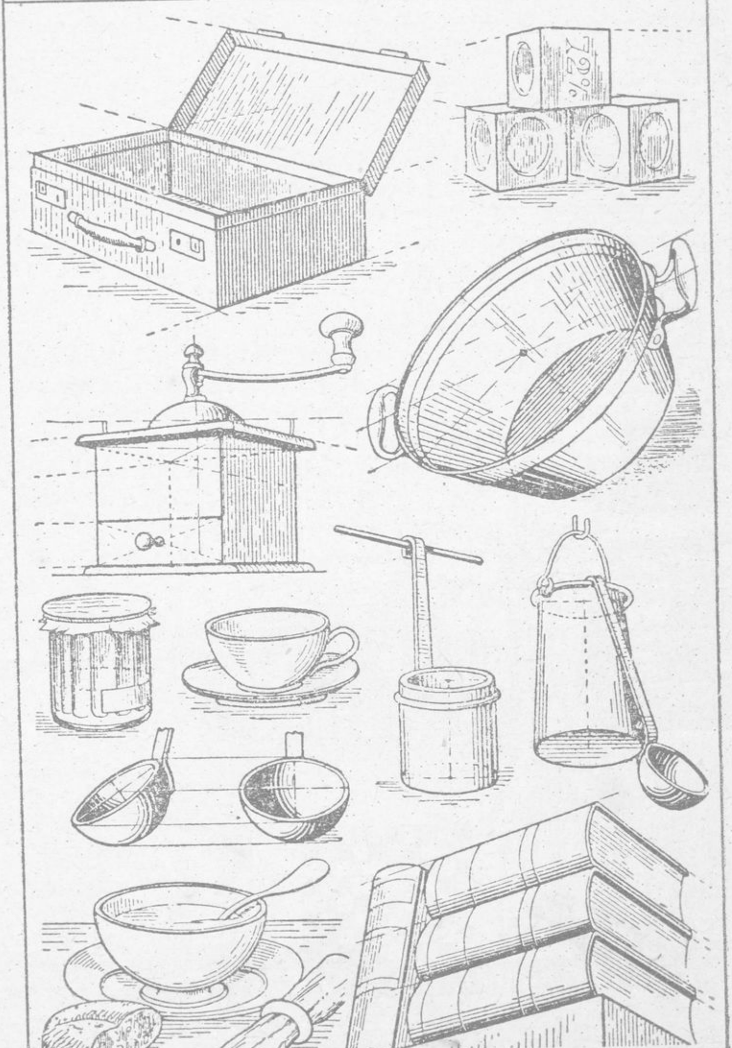
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Μέ εἰκόνες

Τὶ παρατηρεῖτε στὶς παραπάνω εἰκόνες; Νὰ τὶς περιγράψετε καὶ νὰ τὶς ἐξηγήσετε

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

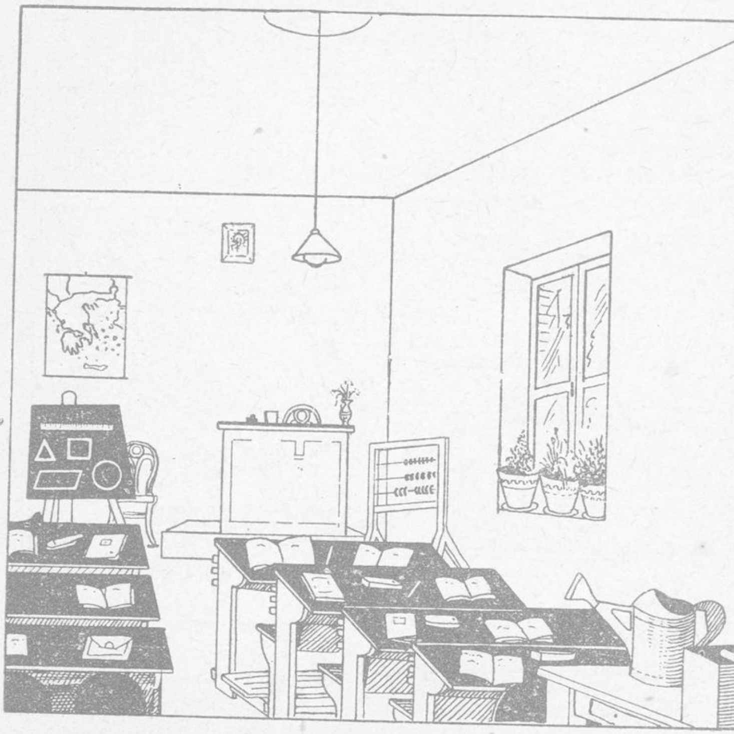
Μὲ εἰκόνες

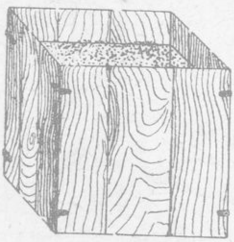


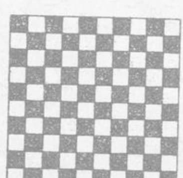
Νὰ παρατηρήσετε μὲ προσοχὴ τὰ διάφορα ἀντικείμενα τοῦ σπιτιοῦ σας: στὴν κουζίνα καὶ ττὰ ἄλλα δωμάτια καὶ νὰ τὰ περιγράψετε μὲ λεπτομέρειες.

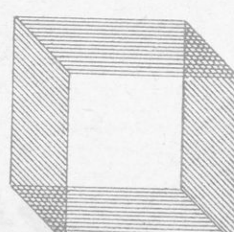
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Μὲ εἰκόνες









Νὰ παρατηρήσετε μὲ προσοχὴ τὰ διάφορα ἀντικείμενα καὶ ὄργανα ποὺ βλέπετε μέσα στὴν τάξη σας καὶ στὴν παραπάνω εἰκόνα. Νὰ τὰ περιγράψετε λεπτομερῶς.

ΤΙ ΕΙΝΑΙ Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ἡ Γεωμετρία εἶναι ἕνα πολὺ εὐχάριστο καὶ χρήσιμο μάθημα. Μᾶς διδάσκει νὰ μετροῦμε τὰ διάφορα σώματα ποὺ βρίσκονται ἐπάνω στὴ γῆ.

Ἡ Γεωμετρία εἶναι ἀπαραίτητη στοὺς μηχανικούς, στοὺς σχεδιαστές, στοὺς ἀρχιτέκτονες, στοὺς κτίστες, στοὺς ξυλουργούς, στοὺς τοπογράφους, στοὺς ράπτες, στὶς μοδίστρες κλπ.

Γεωμετρία πρέπει νὰ ξέρουν ὅλοι οἱ ἄνθρωποι ὅποιο ἐπάγγελμα κι' ἂν ἐξασκοῦν· ἀκόμη καὶ οἱ γεωργοὶ καὶ οἱ ἐργάτες.

Τὴ Γεωμετρία πρέπει νὰ μάθωμε καλὰ κι' ἐμεῖς οἱ μαθητὲς τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου γιατὶ θὰ μᾶς χρειασθῆ στὴ ζωὴ ὅποιο ἐπάγγελμα κι' ἂν διαλέξωμε. Ἐπίσης θὰ χρειασθῆ καὶ στοὺς μαθητὲς ποὺ θὰ φοιτήσουν σὲ ἀνώτερα σχολεῖα.

Ἡ Γεωμετρία ἔχει συγγένεια μὲ τὴν Ἀριθμητική. Καὶ τὰ δύο αὐτὰ μαθήματα λέγονται μὲ ἕνα ὄνομα Μαθηματικά.

Σώματα καὶ διαστάσεις τῶν σωμάτων

Μὲ τὴ γεωμετρία θὰ μάθωμε νὰ μετροῦμε τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος ἢ βάθος τῶν σωμάτων.

Μῆκος λέγεται, συνήθως, τὸ μακρύτερο μέρος τοῦ σώματος.

Πλάτος λέγεται τὸ στενώτερο μέρος τῶν σωμάτων.

Ὕψος λέγεται ἡ ἀπόσταση ἀπὸ τὸ μέρος ποὺ στηρίζεται ἕνα σῶμα (ἀπὸ τὴ βάση του) μέχρι τὸ ἐπάνω μέρος αὐτοῦ.

Σὲ μερικὰ σώματα τὸ μῆκος εἶναι ἴσο μὲ τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος. Σὲ ἄλλα διαφέρουν.

Τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος τῶν σωμάτων λέγονται μὲ ἕνα ὄνομα διαστάσεις τῶν σωμάτων.

Μὲ τὴ γεωμετρία θὰ μάθωμε ἀκόμη νὰ μετροῦμε ὅλο τὸ ἐξωτερικὸ μέρος τῶν σωμάτων (ἐπιφάνεια) καὶ τὸ χῶρο ποὺ καταλαμβάνει κάθε σῶμα (ὄγκο).

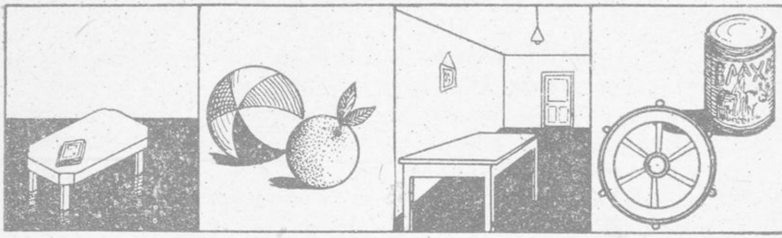
Ἐργασίες - ἀσκήσεις - ἐφαρμογὲς

1) Νὰ δείξετε καὶ νὰ ὀνομάσετε τὰ στερεὰ σώματα ποὺ βλέπετε στὸ σπίτι σας, στὸ χωριό σας, στὴ γειτονιά σας, στὸ δρόμο, στὴν αὐλὴ τοῦ σχολείου, μέσα στὴν τάξη σας κλπ.

2) Νὰ δείξετε τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος τοῦ θρανίου, τοῦ πίνακα, τοῦ πατώματος, τῆς ἕδρας, τοῦ τραπεζιοῦ, τῆς κασετίνας, τοῦ βιβλίου, τῆς ἀμμοδόχου κλπ.

3) Νὰ δείξετε τὶς διαστάσεις τῆς αἴθουσας, τοῦ διδακτηρίου, τοῦ σπιτιοῦ σας κλπ.

ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ



1 'Επίπεδη ἐπιφάνεια | 2 καμπύλη ἐπιφάνεια | 3 τεθλασμένη ἐπιφάνεια | 4 Μικτὴ ἐπιφάνεια

῞Ολων τῶν στερεῶν σωμάτων βλέπομε καὶ πιάνομε τὸ ἐξωτερικό τους μέρος. Αὐτὸ τὸ ἐξωτερικὸ μέρος τῶν σωμάτων λέγεται ἐπιφάνεια.

Σύρετε τὴν παλάμη σας ἐπάνω στὴν ἐπιφάνεια τοῦ βιβλίου σας, τῆς κασετίνας, τοῦ μολυβιοῦ σας, τοῦ θρανίου, τοῦ πίνακα κλπ.

῞Οπως βλέπομε ἡ ἐπιφάνεια ἔχει δύο μόνο διαστάσεις: μῆκος καὶ πλάτος.

Εἴδη ἐπιφανειῶν

῞Οπως βλέπομε οἱ ἐπιφάνειες τῶν σωμάτων δὲν μοιάζουν μεταξύ των. ῎Αλλες εἶναι στρωτὲς καὶ ἴσιες (τοῦ βιβλίου, τοῦ θρανίου, τοῦ πίνακα, τοῦ τοίχου, τοῦ τζαμιοῦ, τοῦ πατώματος)κι ἄλλες εἶναι κυρτὲς ὅπως τοῦ τοπιοῦ, τῆς μπάλλας κλπ. ῎Εχομε τὰ ἑξῆς εἴδη ἐπιφανειῶν:

1. 'Επίπεδη ἐπιφάνεια

῾Η ἐπιφάνεια τοῦ βιβλίου, τοῦ ἐπάνω μέρους τοῦ τραπεζιοῦ, τοῦ πίνακα κλπ. λέγεται ἐπίπεδη ἐπιφάνεια ἢ ἁπλῶς ἐπίπεδο.

2. Καμπύλη ἢ κυρτὴ ἐπιφάνεια

῾Η ἐπιφάνεια τοῦ τοπιοῦ, τῆς μπάλλας, τῆς σφαίρας κλπ. λέγεται καμπύλη ἢ κυρτὴ ἐπιφάνεια.

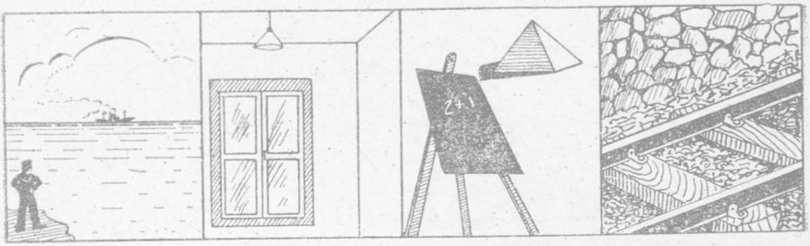
3. Τεθλασμένη ἐπιφάνεια

῾Η ἐπιφάνεια τῆς σκάλας καὶ τοῦ δωματίου, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὲς ἐπίπεδες ἐπιφάνειες κομματιαστές, λέγεται τεθλασμένη ἐπιφάνεια.

4. Μικτὴ ἐπιφάνεια

῾Η ἐπιφάνεια τοῦ κουτιοῦ τῆς κονσέρβας, τῆς ρόδας καὶ ὅλων σχεδὸν τῶν μαγειρικῶν σκευῶν λέγεται μικτή, γιατὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδη καὶ κυρτή.

ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ



1 Ὁριζόντια ἐπιφάνεια — 2 Κατακόρυφη ἐπιφάνεια — 3 Πλαγία ἐπιφάνεια — 4 Παράλληλες ἐπιφάνειες

Διεύθυνση ἐπιφανειῶν

1. Ὁριζόντια ἐπιφάνεια

Ἂν ἡ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια ἁπλώνεται ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά, ὅπως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἥσυχου νεροῦ τῆς λίμνης ἢ τῆς δεξαμενῆς, λέγεται ὁριζόντια ἐπιφάνεια ἢ ὁριζόντιο ἐπίπεδο.

2. Κατακόρυφη ἐπιφάνεια

Ἂν ἡ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια ἁπλώνεται ἀπὸ τὰ ἐπάνω πρὸς τὰ κάτω, ὅπως τοῦ τζαμιοῦ, τοῦ τοίχου, λέγεται κατακόρυφη ἐπιφάνεια ἢ κατακόρυφο ἐπίπεδο.

3. Πλαγία ἐπιφάνεια

Ἂν ἡ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια ἁπλώνεται πρὸς τὰ πλάγια (πλαγιαστὰ) ὅπως π.χ. τοῦ μαυροπίνακα, λέγεται πλαγία ἐπιφάνεια ἢ πλάγιο ἐπίπεδο.

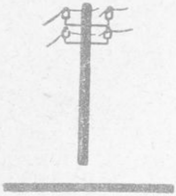
4. Παράλληλες ἐπίπεδες ἐπιφάνειες

Οἱ δύο ἐπίπεδες ἐπιφάνειες τοῦ νταβανιοῦ καὶ τοῦ πατώματος τῆς τάξης μας λέγονται παράλληλες ἐπίπεδες ἐπιφένειες γιατὶ ὅσο κι ἂν τὶς προεκτείνωμε δὲν συναντῶνται ποτέ. Παράλληλες εἶναι καὶ οἱ ἐπίπεδες ἐπιφάνειες τῶν ἀπέναντι τοίχων τοῦ σπιτιοῦ μας κλπ.

Ἐργασίες - ἀσκήσεις - ἐφαρμογὲς

1) Νὰ δείξετε ὅλα τὰ εἴδη τῶν ἐπιφανειῶν μέσα στὴν τάξη σας, στὸ σπίτι σας, παντοῦ σὲ ἀντικείμενα καὶ στὶς εἰκόνες τῶν σελίδων 10 καὶ 11.

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ



Εὐθεία γραμμή

2
τεθλασμένη γραμμή

3
καμπύλη γραμμή

4
μικτὴ γραμμή

Οἱ ἐπιφάνειες τελειώνουν γύρω-γύρω σὲ ἕνα, τρία ἢ περισσότερα ἄκρα. Τὰ ἄκρα αὐτὰ τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι γραμμές. Ἡ γραμμὴ ἔχει μόνο μῆκος. Δὲν ἔχει πλάτος. (Οἱ γραμμὲς τῆς σελίδας αὐτῆς φαίνονται κάπως παχιές. Ἔγιναν ἔτσι γιὰ νὰ τὶς διακρίνωμε. Νὰ τὶς φαντασθοῦμε πολὺ λεπτές).

Εἴδη γραμμῶν

Ὅ,τι παρατηροῦμε στὶς ἐπιφένειες τὸ ἴδιο παρατηροῦμε καὶ στὶς γραμμές.

1. Εὐθεία γραμμὴ

«Οἱ περισσότερες ἐπίπεδες ἐπιφάνειες τελειώνουν σὲ ἴσιες γραμμές». Αὐτὸ τὸ βλέπομε στὶς ἐπιφάνειες τοῦ βιβλίου, τοῦ θρανίου, τοῦ πίνακα, τοῦ τοίχου. Οἱ γραμμὲς αὐτὲς εἶναι εὐθεῖες γραμμές. Ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν λέγεται εὐθεία γραμμή. Ἡ εὐθεία γραμμὴ ἔχει τὸ σχῆμα τῆς τεντωμένης κλωστῆς καὶ εἶναι συντομώτερη ἀπὸ ὅλες τὶς ἄλλες γραμμές.

2. Τεθλασμένη γραμμὴ

Στὰ ἄκρα τῆς σκάλας σχηματίζεται μιὰ γραμμὴ κομματιαστή, ποὺ ἀποτελεῖται δηλαδὴ ἀπὸ πολλὲς εὐθεῖες. Ἡ γραμμὴ αὐτὴ λέγεται τεθλασμένη γραμμή. Τεθλασμένη γραμμὴ ἀποτελοῦν τὰ διάφορα κεφαλαῖα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου (τὸ Α, Γ, Δ, Ζ, Η, κλπ.). Ἑπομένως τεθλασμένη γραμμὴ λέγεται ἡ γραμμὴ ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὲς εὐθεῖες γραμμὲς χωρὶς νὰ εἶναι εὐθεία.

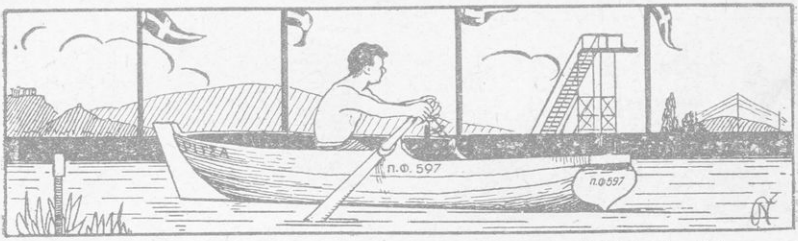
3. Καμπύλη γραμμὴ

Τὰ ἄκρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ φεγγαριοῦ ἢ μιᾶς μπάλλας ἢ σφαίρας ἀποτελοῦν καὶ αὐτὰ μιὰ γραμμή, ποὺ λέγεται καμπύλη γραμμή. Κανένα μέρος τῆς καμπύλης γραμμῆς δὲν εἶναι εὐθεία.

4. Μικτὴ γραμμὴ

Μικτὴ λέγεται μιὰ γραμμή, ὅταν ἀποτελεῖται ἀπὸ καμπύλη καὶ εὐθεία μαζί, ὅπως εἶναι τὸ δρεπάνι, τὸ μοιρογνωμόνιο κλπ. Οἱ ἐπιφάνειες καὶ οἱ γραμμές, ὅταν συναντῶνται σχηματίζουν διάφορες γωνίες. Γιὰ τὶς γωνίες θὰ μιλήσωμε παρακάτω.

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ



1) Ὁριζόντια εὐθεία γραμμή, 2) Κατακόρυφη εὐθεία γραμμή, 3) Πλαγία εὐθεία γραμμή, 4) παράλληλες εὐθεῖες γραμμές.

Διεύθυνση εὐθειῶν γραμμῶν

1. Ὁριζόντια εὐθεία γραμμή

Ἡ εὐθεία ποὺ ἀκολουθεῖ τὴ διεύθυνση τοῦ ἥσυχου νεροῦ μέσα σὲ ἕνα δοχεῖο λέγεται ὁριζόντια εὐθεία γραμμή.

2. Κατακόρυφη εὐθεία γραμμή

Ἡ εὐθεία ποὺ ἀκολουθεῖ τὴ διεύθυνση τοῦ νήματος τῆς στάθμης λέγεται κατακόρυφη εὐθεία γραμμή.

3. Πλαγία εὐθεία γραμμή

Ἡ εὐθεία ποὺ δὲν εἶναι οὔτε κατακόρυφη οὔτε ὁριζόντια λέγεται πλαγία εὐθεία γραμμή.

4. Παράλληλες εὐθεῖες γραμμὲς

Δύο εὐθεῖες εἶναι παράλληλες ὅταν βρίσκονται στὸ αὐτὸ ἐπίπεδο καὶ ὅσο καὶ ἂν τὶς προεκτείνωμε δὲν συναντῶνται.

Ἐργασίες - ἀσκήσεις - ἐφαρμογὲς

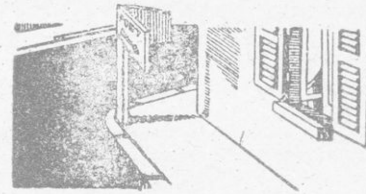
1) Νὰ δείξετε διάφορες γραμμὲς στὴν τάξη σας, στὸ σπίτι σας σὲ ὅλες τὶς ἐπιφάνειες ποὺ βλέπετε ἢ πιάνετε μὲ τὰ χέρια σας.

2) Νὰ ἰχνογραφήσετε 10 εὐθεῖες, 10 τεθλασμένες, 10 καμπύλες, 10 μικτὲς γραμμές.

3) Νὰ ἰχνογραφήσετε 10 ὁριζόντιες, 10 κατακόρυφες, 10 πλάγιες καὶ 10 παράλληλες γραμμές.

4) Νὰ βρῆτε ὅλα τὰ εἴδη τῶν γραμμῶν στὶς σελίδες 10 καὶ 11 μὲ τὰ διάφορα εἴδη ἐπιφανειῶν.

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΓΩΝΙΕΣ



Στὸ δωμάτιο τοῦ Γιώργου παίζουν 5 παιδιά. Τὸ καθένα κάθεται σὲ μιὰ γωνία καὶ ὁ Γιῶργος στὸ κέντρο. Στὴ δεύτερη εἰκόνα βλέπομε μία γωνία τοῦ δρόμου καὶ τὴν πινακίδα ποὺ ὁδηγεῖ τοὺς διαβάτες νὰ προσέχουν μὴ τοὺς παρασύρη κανένα αὐτοκίνητο.

Τί εἶναι ὅμως οἱ γωνίες; Ἂς τὸ μάθωμε.

Ὅταν δύο ἐπίπεδα δὲν εἶναι παράλληλα, τότε ἂν τὰ προεκτείνωμε, συναντῶνται. Στὸ μέρος ποὺ συναντῶνται σχηματίζουν ἕνα σχῆμα ποὺ λέγεται δίεδρη γωνία. Π. χ. ὁ μπροστινὸς τοῖχος τῆς τάξης μας μὲ τὸν δεξιὸ ἢ ὁ μπροστινὸς μὲ τὸν ἀριστερὸ ἢ ὁ μπροστινὸς μὲ τὸ νταβάνι ἐκεῖ ποὺ συναντῶνται σχηματίζουν δίεδρες γωνίες.

Μὰ καὶ οἱ εὐθεῖες γραμμὲς ἑνὸς ἐπιπέδου, ἂν προεκταθοῦν, ὅταν δὲν εἶναι παράλληλες, συναντῶνται. Στὸ μέρος ποὺ συναντῶνται σχηματίζεται ἕνα ἐπίπεδο σχῆμα ποὺ λέγεται ἐπίπεδη γωνία.

Ἐκεῖ ποὺ συναντῶνται τρία ἐπίπεδα π. χ. ὁ μπροστινὸς τοῖχος τῆς τάξης, ὁ δεξιὸς καὶ τὸ νταβάνι, σχηματίζεται ἕνα σχῆμα ποὺ λέγεται τρίεδρη ἢ στερεὰ γωνία. Στὸ σημεῖο αὐτὸ σχηματίζονται ἀπὸ τὶς εὐθεῖες γραμμὲς καὶ τρεῖς ἐπίπεδες γωνίες.

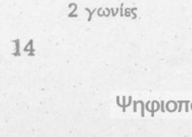
Κατασκευάζομε γωνίες

Μὲ δυὸ μολύβια

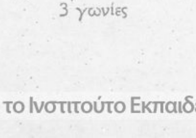
Μὲ δυὸ γραμμὲς

Διπλώνοντας χαρτόνια

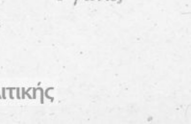
Μετροῦμε γωνίες



2 γωνίες

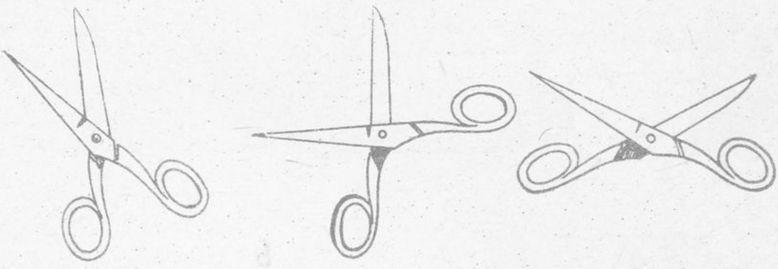


3 γωνίες



4 γωνίες

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΓΩΝΙΕΣ



1. μικρὸ ἄνοιγμα   2. μεγάλο ἄνοιγμα   3. ἀκόμη μεγαλύτερο ἄνοιγμα

Εἴδη γωνιῶν

Ὅπως βλέπομε, ὅλες οἱ γωνίες δὲν εἶναι ἴσες μεταξύ τους. Ἄλλες ἔχουν μικρὸ ἄνοιγμα, ἄλλες ἔχουν μεγάλο ἄνοιγμα κι ἄλλες ἀκόμη μεγαλύτερο ἄνοιγμα.

Ἐκεῖ ποὺ συναντῶνται μία κατακόρυφη καὶ μία ὁριζόντια εὐθεία γραμμή, σχηματίζεται μία γωνία ποὺ ὀνομάζεται ὀρθὴ γωνία (σχ. α). Ὀρθὴ γωνία μπορεῖ νὰ σχηματισθῆ καὶ ἀπὸ δύο πλάγιες εὐθεῖες γραμμές.

σχῆμα α

σχῆμα β

σχῆμα γ

σχῆμα δ

σχῆμα ε

Οἱ γωνίες ποὺ ἔχουν ἄνοιγμα μικρότερο ἀπὸ τὴν ὀρθὴ λέγονται ὀξεῖες γωνίες (σχ. β).

Οἱ γωνίες ποὺ ἔχουν ἄνοιγμα μεγαλύτερο ἀπὸ τὴν ὀρθὴ λέγονται ἀμβλεῖες γωνίες (σχ. γ).

Γιὰ νὰ μετρήσωμε τὶς γωνίες μεταχειριζόμαστε τὸ γνώμονα (σχ. δ) ἢ τὸ μοιρογνωμόνιο (σχ. ε).

Ἐργασίες - ἀσκήσεις - ἐφαρμογὲς

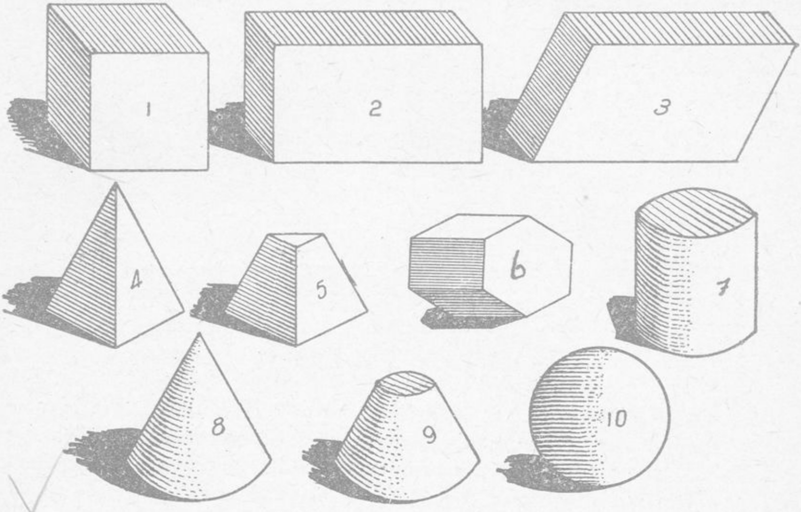
1) Νὰ βρῆτε μέσα στὴ τάξη σας 5 ὀρθὲς γωνίες, 5 ὀξεῖες, 5 ἀμβλεῖες.

2) Τί εἴδους γωνίες βλέπετε στὰ ἀνοιγμένα ψαλλίδια, στὰ κεφαλαῖα γράμματα Τ, Μ, Η καὶ στὰ σχήματα τῆς σελίδας αὐτῆς;

3) Πόσες γωνίες βλέπετε στὰ σχήματα τῆς ἀπέναντι σελίδας καὶ τῆς σελίδας αὐτῆς;

4) Νὰ ἰχνογραφήσετε διάφορες γωνίες στὸ τετράδιό σας καὶ στὸν πίνακα.

ΔΙΑΦΟΡΑ ΣΤΕΡΕΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΩΜΑΤΑ



Ὅλα τὰ στερεὰ σώματα ποὺ βρίσκονται ἐπάνω στὴ γῆ γιὰ νὰ μποροῦν νὰ μετρηθοῦν πρέπει νὰ ἔχουν ἕνα κανονικὸ σχῆμα. Πρέπει δηλαδὴ νὰ μοιάζουν μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ 10 στερεὰ σώματα ποὺ βλέπομε στὴν παραπάνω εἰκόνα.

Μερικὰ στερεὰ σώματα ἀποτελοῦνται ἀπὸ δύο ἢ καὶ περισσότερα γεωμετρικὰ σώματα κολλημένα. Ἀκόμη καὶ ἕνα ἀκανόνιστο σῶμα π. χ. ἕνας βράχος, ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ κανονικὰ σώματα κολλημένα.

Νὰ πῶς ὀνομάζονται τὰ στερεὰ γεωμετρικὰ σώματα ποὺ ἐξετάζει ἡ γεωμετρία:

1) Κύβος 2) ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο 3) πλάγιο παραλληλεπίπεδο 4) πυραμίδα 5) κόλουρη πυραμίδα 6) πρίσμα (τριγωνικό, πολυγωνικὸ κλπ.) 7) κύλινδρος 8) κῶνος 9) κόλουρος κῶνος 10) σφαίρα.

Εἴπαμε ὅτι τὰ στερεὰ σώματα ἔχουν τρεῖς διαστάσεις: μῆκος, πλάτος, ὕψος. Ἑπομένως καταλαμβάνουν ἕνα χῶρο. Ὁ χῶρος τὸν ὁποῖο καταλαμβάνει ἕνα σῶμα λέγεται ὄγκος.

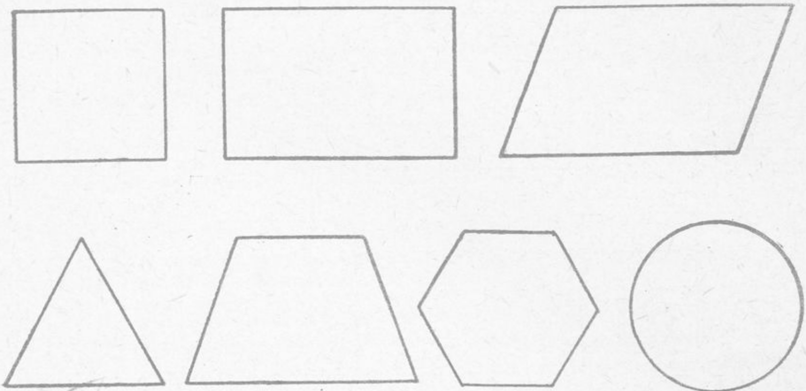
Ἐργασίες - ἀσκήσεις - ἐφαρμογὲς

1) Νὰ ἀναγνωρίσετε καὶ νὰ ὀνομάσετε σωστὰ τὰ παραπάνω γεωμετρικὰ σώματα.

2) Νὰ ἰχνογραφήσετε τὰ σώματα αὐτὰ στὸ τετράδιό σας καὶ στὸν πίνακα.

3) Νὰ δείξετε σ' αὐτὰ ὅλες τὶς ἐπιφάνειες, τὶς γραμμές, καὶ τὶς γωνίες ποὺ μάθαμε στὶς σελ. 10, 11, 12, 13, 14 καὶ 15 τοῦ βιβλίου μας αὐτοῦ.

ΔΙΑΦΟΡΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ



Μάθαμε ὅτι κάθε γεωμετρικὸ σῶμα ἔχει ἐπιφάνεια καὶ ὅτι ὁλόκληρη ἡ ἐπιφάνειά του διαιρεῖται σὲ δυὸ ἢ περισσότερες μικρότερες ἐπιφάνειες. Μόνο ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι μονοκόμματη.

Οἱ ἐπιφάνειες αὐτὲς ἔχουν διάφορα σχήματα. Πρέπει νὰ τὰ μάθωμε κι αὐτὰ πρὶν προχωρήσουμε. Ἔτσι θὰ μᾶς φανοῦν πολὺ εὐκολώτερα τὰ παρακάτω μαθήματα.

Ἂς πάρωμε τὰ σχήματα τῶν ἀπέναντι στερεῶν σωμάτων καὶ ἂς τὰ ὀνομάσωμε ἕνα-ἕνα μὲ τὴ σειρά:

1) Τὸ σχῆμα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου (π.χ. τῆς μπροστινῆς) λέγεται *τετράγωνο* (σχῆμα 1).

2) Τὸ σχῆμα μιᾶς μπροστινῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου λέγεται ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο (σχῆμα 2).

3) Τὸ σχῆμα τῆς μπροστινῆς ἐπιφανείας τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου λέγεται πλάγιο παραλληλόγραμμο (σχῆμα 3).

4) Τὸ σχῆμα μιᾶς ἀπὸ τὶς γύρω ἐπιφάνειες τῆς πυραμίδας λέγεται τρίγωνο (σχῆμα 4).

5) Τὸ σχῆμα μιᾶς ἀπὸ τὶς γύρω ἐπιφάνειες τῆς κολούρου πυραμίδας λέγεται τραπέζιο. (σχῆμα 5).

6) Τὸ σχῆμα τῆς κάτω ἢ ἐπάνω ἐπιφανείας τοῦ πολυγωνικοῦ πρίσματος λέγεται πολύγωνον (σχῆμα 6).

7) Τὸ σχῆμα τῆς ἐπάνω ἢ κάτω ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου (τοῦ κώνου κλπ.) λέγεται κύκλος (σχῆμα 7).

Ἐργασίες - ἀσκήσεις - ἐφαρμογὲς

1) Νὰ ἀναγνωρίσετε καὶ νὰ ὀνομάσετε σωστὰ τὰ παραπάνω γεωμετρικὰ σχήματα. Βλέπετε ὅτι παράγονται ἀπὸ τὰ στερεὰ γεωμετρικὰ σώματα τῆς σελ. 16

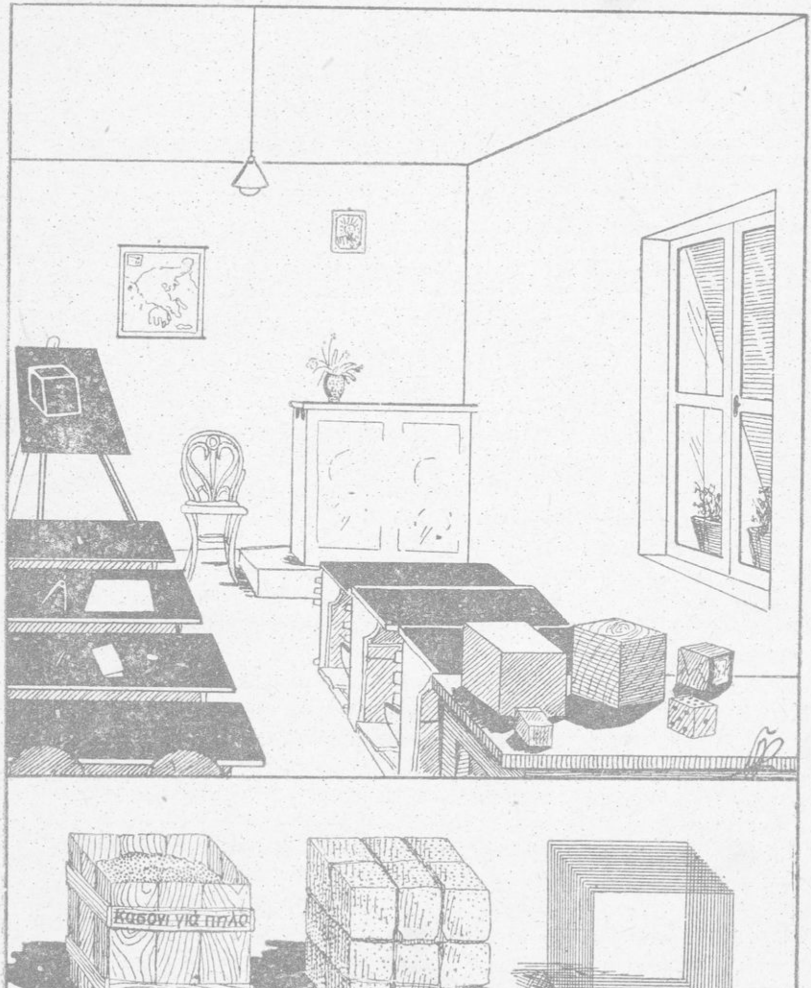
2) Νὰ τὰ ἰχνογραφήσετε στὰ τετράδιά σας καὶ στὸν πίνακα.

3) Νὰ δείξετε σ' αὐτὰ τὶς γραμμὲς καὶ τὶς γωνίες ποὺ μάθαμε.

4) Τώρα πιὰ μποροῦμε ἄφοβα νὰ προχωρήσωμε παρακάτω.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΕ ΕΙΚΟΝΕΣ

Παρατηροῦμε σώματα ποὺ ἔχουν σχῆμα κύβου



Νὰ μεταφέρετε στὴν τάξη σας κάθε ἀντικείμενο ἀπὸ τὸ σπίτι κι ἀπὸ τὸ περιβάλλον σας ποὺ ἔχει κυβικὸ σχῆμα: διάφορα κουτιά, δοχεῖα, κύβους (ἀπὸ τὴ χειροτεχνία τῶν περυσινῶν συμμαθητῶν σας ποὺ πῆγαν στὴν ἄλλη τάξη ἢ πῆραν ἀπολυτήριο), ξύλινους κύβους ἀπὸ τὰ ἐποπτικὰ μέσα τοῦ σχολείου σας κλπ. Ὁλόκληρη ἡ τάξη σας νὰ εἶναι γεμάτη ἀπὸ κύβους καὶ στὸν πίνακα καὶ στὰ τετράδιά σας νὰ κάνετε τὸ σχῆμα του.

ΠΡΩΤΗ ΜΕΘΟΔΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

Ο ΚΥΒΟΣ

Ἂν μετρήσουμε τὶς διαστάσεις τοῦ θρανίου θὰ βροῦμε ὅτι τὸ μῆκος του εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ πλάτος του καὶ τὸ πλάτος του μικρότερο ἀπὸ τὸ ὕψος του. Δηλαδὴ οἱ τρεῖς διαστάσεις του εἶναι ἄνισες. Ἄνισες εἶναι καὶ οἱ διαστάσεις τῆς ἕδρας, τοῦ βιβλίου, τῆς ἀμμοδόχου κλπ.

Ἂν πάρωμε ὅμως ἕνα ζάρι θὰ ἰδοῦμε ὅτι καὶ οἱ τρεῖς διαστάσεις του: τὸ μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος του εἶναι ἴσες. Τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει τὸ ζάρι τὸ ὀνομάζομε *κύβο*. Ἢ ἀλλιῶς λέμε ὅτι τὸ ζάρι ἔχει κυβικὸ σχῆμα.

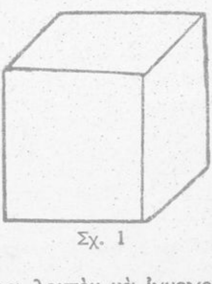
Κυβικὸ σχῆμα ἔχουν μερικὰ κουτιά, μερικὲς δεξαμενές, πελεκημένα μάρμαρα, σαπούνια, πάκα σπίρτων κλπ. Τέτοια σώματα βλέπομε στὴν ἀπέναντι σελίδα. Ὅλα τὰ σώματα αὐτὰ ἡ Γεωμετρία τὰ ὀνομάζει *κύβους*.

Ὁ κύβος ἔχει τὶς τρεῖς διαστάσεις του ἴσες

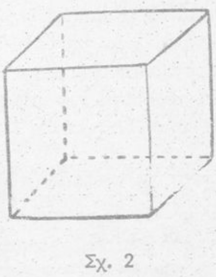
Ἕδρες τοῦ κύβου

Παίρνομε στὰ χέρια μας ἕνα κύβο. Ἂν προσέξωμε καλὰ θὰ ἰδοῦμε ὅτι ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρες (φάτσες): 1 κάτω, 1 ἐπάνω καὶ 4 γύρω-γύρω. Ἂν ἰχνογραφήσωμε ἕνα ξύλινο κύβο στὸν πίνακα ἢ στὸ τετράδιό μας θὰ ἰδοῦμε μόνο τὶς τρεῖς ἕδρες του: τὴ μπροστινή, τὴ δεξιὰ καὶ τὴν ἐπάνω (σχ. 1).

Ἂν ἰχνογραφήσωμε ὅμως ἕναν γυάλινο κύβο, βλέπομε καὶ τὶς ἄλλες τρεῖς ἕδρες του: τὴν πίσω, τὴν κάτω καὶ τὴν ἀριστερή (σχ. 2).



Σχ. 1



Σχ. 2

Καλύτερα λοιπὸν νὰ ἰχνογραφοῦμε γυάλινους κύβους, ὅταν θέλουμε νὰ φαίνωνται καὶ οἱ 6 ἕδρες τοῦ κύβου, ἡ μπροστινή, ἡ πισινή, ἡ δεξιά, ἡ ἀριστερή, ἡ κάτω καὶ ἡ ἐπάνω.

Στὰ παραπάνω σχήματα βλέπομε ὅτι ὅλο τὸ ἐξωτερικὸ μέρος τοῦ κύβου δηλαδὴ ὁλόκληρη ἡ ἐπιφάνειά του, διαιρεῖται σὲ 6 ἕδρες.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου διαιρεῖται σὲ 6 ἕδρες

Ἐργασίες - ἀσκήσεις - ἐφαρμογὲς

1) Νὰ δείξετε τὶς ἕδρες τοῦ κύβου ποὺ κρατᾶτε στὰ χέρια σας καὶ νὰ τὶς μετρήσετε.

2) Νὰ δείξετε μὲ τὸ χάρακά σας τὶς ἕδρες στὸν κύβο ποὺ ἔχετε ἰχνογραφήσει στὸν πίνακα καὶ νὰ τὶς ὀνομάσετε.

Ἀκμὲς τοῦ κύβου

Ὅπου συναντῶνται δύο ἕδρες τοῦ κύβου ἐκεῖ σχηματίζεται μιὰ κόψη. Ἡ κόψη αὐτὴ στὴ γεωμετρία λέγεται ἀκμή. Ὁ κύβος, ποὺ κρατοῦμε στὰ χέρια μας, ἔχει 12 ἀκμές: 4 κάτω, 4 ἐπάνω καὶ 4 γύρω του.

Ὁ κύβος ἔχει 12 ἀκμὲς

Κορυφὲς τοῦ κύβου

Ὅπου συναντῶνται τρεῖς ἕδρες τοῦ κύβου, ἐκεῖ σχηματίζεται μία κορυφή. Κορυφὲς ὁ κύβος ἔχει 8 δηλαδὴ 4 κάτω καὶ 4 ἐπάνω.

Ὁ κύβος ἔχει 8 κορυφὲς

Ἐργασίες - ἀσκήσεις - ἐφαρμογὲς

1) Νὰ δείξετε, νὰ ὀνομάσετε καὶ νὰ μετρήσετε τὶς ἕδρες, τὶς ἀκμὲς καὶ τὶς κορυφὲς α') τοῦ κύβου ποὺ κρατᾶτε στὰ χέρια σας καὶ β') τοῦ κύβου ποὺ εἶναι ἰχνογραφημένος στὸν πίνακα.

2) Νὰ ἰχνογραφήσετε δύο κύβους, ἕναν ξύλινο κι ἕναν γυάλινο γιὰ νὰ καταλάβετε πολὺ καλὰ ὅλα αὐτά.

Διεύθυνση τῶν ἑδρῶν καὶ τῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου

Ἂν προσέξωμε μία ἕδρα τοῦ κύβου, θὰ ἰδοῦμε πὼς ἡ ἐπιφάνεια της εἶναι ἴσια, στρωτή. Δὲν ἔχει δηλ. λακοῦβες. Κάθε στρωτὴ ἐπιφάνεια, ὅπως εἴδαμε, λέγεται ἐπίπεδη ἐπιφάνεια. Ἐπίπεδη ἐπιφάνεια ἔχει τὸ τζάμι, ὁ πίνακας, τὸ πάτωμα, ὁ τοῖχος, τὸ βιβλίο κλπ.

Καὶ οἱ 6 ἕδρες τοῦ κύβου ἔχουν ἐπίπεδη ἐπιφάνεια

Γιὰ νὰ δοκιμάσωμε, ἂν μία ἐπιφάνεια εἶναι ἐπίπεδη, βάζομε ἐπάνω της τὸ χάρακα σὲ διάφορες θέσεις. Ἂν ἡ κόψη τοῦ χάρακα ἀκουμπᾶ ἀκριβῶς ἐπάνω στὴν ἐπιφάνεια της, ἂν δηλαδὴ δὲν ἀφήνει κανένα ἄνοιγμα, τότε λέμε, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ εἶναι ἐπίπεδη.

Ὁ κύβος στηρίζεται σὲ μία ἀπὸ τὶς ἕδρες του. Δὲν μπορεῖ νὰ στηριχθῆ οὔτε στὴν ἀκμή του οὔτε στὴν κορυφή του. Ἡ ἕδρα στὴν ὁποία στηρίζεται ὁ κύβος λέγεται β ά σ η τοῦ κύβου.

Ὅταν τοποθετήσωμε τὸν κύβο ἐπάνω στὸ τραπέζι, βλέπομε ὅτι οἱ ἕδρες του δὲν ἔχουν τὴν ἴδια διεύθυνση. Ἡ ἕδρα τῆς βάσης του καὶ ἡ ἐπάνω ἔχουν τὴν ἴδια διεύθυνση: ἀπὸ δεξιὰ πρὸς τὰ ἀριστερά. Οἱ ἄλλες 4 ἔχουν ἄλλη διεύθυνση: ἀπὸ ἐπάνω πρὸς τὰ κάτω.

Τὴν ἐπιφάνεια τῆς βάσης καὶ τὴν ἐπάνω ἕδρα τὴν ὀνομάζομε ὁ ρ ι ζ ό ν τ ι α ἐ π ί π ε δ η ἐ π ι φ ά ν ε ι α ἢ ἁ π λ ῶ ς ὁ ρ ι ζ ό ν τ ι ο ἐ π ί π ε δ ο. Ὁριζόντια διεύθυνση παίρνει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἥσυχου νεροῦ κλπ. Τὴν ἐπιφάνεια τῶν ἄλλων 4 ἑδρῶν τὴν ὀνομάζομε κ α τ α κ ό ρ υ φ η ἐ π ι φ ά ν ε ι α ἢ ἁπλῶς κ α τ α κ ό ρ υ φ ο ἐ π ί π ε δ ο.

Ὁριζόντια ἐπίπεδα εἶναι τὸ πάτωμα, τὸ νταβάνι, τὸ ἐπάνω μέρος τοῦ τραπεζιοῦ, ἡ πλάκα μπετὸν τοῦ σπιτιοῦ μας κλπ.

Κατακόρυφα ἐπίπεδα εἶναι τὰ τζάμια τῶν παραθύρων ,οἱ τοῖχοι τῶν σπιτιῶν κλπ.

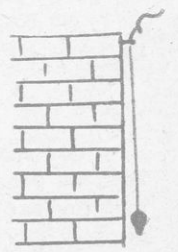
Μὲ τὸ μάτι δὲν μποροῦμε νὰ διακρίνωμε ἀκριβῶς ἂν ἕνα ἐπίπεδο εἶναι ὁριζόντιο ἢ κατακόρυφο. Γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸ μεταχειριζόμεθα διάφορα ὄργανα. Οἱ κτίστες, οἱ μαραγκοί, οἱ τεχνίτες, γιὰ νὰ δοκιμάσουν ἂν ἕνα ἐπίπεδο εἶναι ὁριζόντιο ἢ κατακόρυφο, μεταχειρίζονται τὸ ἀλφάδι ἢ τὴν ἀ ε ρ ο σ τ ά θ μ η.

Τὸ ἀλφάδι εἶναι ξύλινο ἢ σιδερένιο (σχῆμα 3).

Μοιάζει μὲ τὸ κεφαλαῖο γράμμα Ἄ λ φ α. Ἀπὸ τὴν κορυφή του κρέμε-

Σχ. 3

Σχ. 4



Σχ. 5

ται μὲ λεπτὸ σχοινὶ ἕνα βαρύδι. Στὴ μέση ἀκριβῶς τοῦ ἀλφαδιοῦ εἶναι χαραγμένο ἕνα αὐλακάκι. Ἂν τὸ ἐπίπεδο, ποὺ θέλομε νὰ δοκιμάσωμε, εἶναι ὁριζόντιο, τότε τὸ σχοινὶ τοῦ βαρυδιοῦ πρέπει νὰ περνᾶ μέσα ἀπὸ τὸ αὐλακάκι. Ἂν δὲν εἶναι ὁριζόντιο τότε τὸ σχοινὶ θὰ γέρνει ἀριστερὰ καὶ δεξιὰ (σχῆμα 4).

Ἡ ἀ ε ρ ο σ τ ά θ μ η ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα σωλῆνα γεμάτο νερὸ καὶ μὲ μιὰ μικρὴ φυσαλίδα ἀέρα ποὺ κινεῖται ἐλεύθερα μέσα στὸ σωλήνα. Ὁ σωλήνας αὐτὸς στηρίζεται σὲ ξύλινη βάση (σχῆμα 5).

Ὅταν ἡ φυσαλίδα σταθῆ στὴ μέση, τότε τὸ ἐπίπεδο εἶναι ὁριζόντιο. Γιὰ νὰ δοκιμάσωμε ἂν ἕνα ἐπίπεδο εἶναι κατακόρυφο, μεταχειριζόμεθα τὸ **νῆμα τῆς στάθμης.** (τὸ ζύγι) Τὸ νῆμα τῆς στάθμης εἶναι πολὺ ἁπλὸ ὄργανο. Ἕνα βαρύδι σιδερένιο ἢ μολυβένιο δεμένο μὲ σπάγγο. Ὅταν ἀφήσωμε τὸ βαρύδι ἐλεύθερο, ὁ σπάγγος τεντώνεται πρὸς τὰ κάτω. Αὐτὴ ἡ διεύθυνση ποὺ παίρνει ὁ σπάγγος, εἶναι κατακόρυφη (σχῆμα 5).

Ὅ,τι εἴπαμε γιὰ τὶς ἕδρες τοῦ κύβου, τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ μὲ τὶς ἀκμές του. Οἱ ἀκμὲς τοῦ κύβου ,ὅπως βλέπομε καὶ μὲ τὸ μάτι, εἶναι ὅλες ἴσες σὰν τὸ τεντωμένο νῆμα τῆς στάθμης. Γι αὐτὸ λέγονται εὐθεῖες γραμμές. Γιὰ τὶς εὐθεῖες γραμμὲς μιλήσαμε στὴν ἀρχὴ τοῦ βιβλίου μας. (Ξαναδιαβάστε μιὰ φορὰ ἀκόμη τὶς σελ. 12, 13 καὶ προσέξετε τὶς εἰκόνες ποὺ βλέπετε ἐκεῖ).

Οἱ 4 ἀκμὲς τῆς βάσης τοῦ κύβου καὶ οἱ 4 ἐπάνω εἶναι ὁριζόντιες. Οἱ ἄλλες 4, ποὺ βλέπομε γύρω-γύρω στὸν κύβο, εἶναι κατακόρυφες. Καὶ τὶς ἀκμὲς τὶς δοκιμάζομε μὲ τὰ ἴδια ὄργανα: τὶς ὁριζόντιες μὲ τὸ ἀλφάδι ἢ μὲ τὴν ἀεροστάθμη καὶ τὶς κατακόρυφες μὲ τὸ νῆμα τῆς στάθμης.

Ἐργασίες – ἀσκήσεις – ἐφαρμογὲς

1) Νὰ δείξετε μερικὰ ὁριζόντια ἐπίπεδα καὶ μερικὰ κατακόρυφα.

2) Νὰ δείξετε μερικὲς εὐθεῖες ἀκμὲς ὁριζόντιες καὶ μερικὲς κατακόρυφες.

3) Νὰ κατασκευάσετε μὲ χοντρὸ χαρτόνι ἢ μὲ κοντρα-πλακὲ ἕνα ἀλφάδι.

4) Νὰ κατασκευάσετε μὲ ἕνα σωληνάριο κινίνου μιὰ ἀεροστάθμη.

5) Νὰ κατασκευάσετε μὲ βαρύδι καὶ σπάγγο ἕνα νῆμα τῆς στάθμης καὶ νὰ κάνετε διάφορες δοκιμὲς μὲ αὐτό.

6) Νὰ δοκιμάσετε μὲ τὸ ἀλφάδι σας ἢ μὲ τὴν ἀεροστάθμη σας διάφορα ἐπίπεδα καὶ μερικὲς ἀκμὲς γιὰ νὰ ἰδῆτε ἂν εἶναι ὁριζόντια .

7) Νὰ δοκιμάσετε μὲ ὅλα τὰ αὐτὰ ὄργανα μερικὰ ἐπίπεδα καὶ μερικὲς ἀκμὲς (γραμμὲς) καὶ νὰ ξεχωρίσετε ποιὰ εἶναι ὁριζόντια, ποιὰ κατακόρυφα κλπ.

Παράλληλα ἐπίπεδα καὶ παράλληλες εὐθεῖες

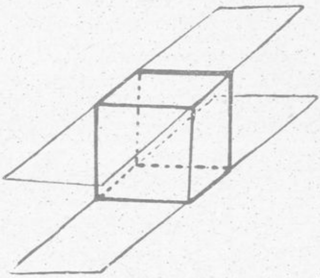
Ἂν προεκτείνωμε (μεγαλώσωμε) τὶς δυὸ ὁριζόντιες ἕδρες τοῦ κύβου δηλαδὴ τῆς βάσης καὶ τὴν ἐπάνω, θὰ ἰδοῦμε πὼς δὲν μποροῦν νὰ συναντηθοῦν ποτὲ (σχῆμα 6). Τὸ ἴδιο καὶ οἱ ἀπέναντι κατακόρυφες ἕδρες του ὅσο κι ἂν προεκταθοῦν (μεγαλώσουν) δὲν συναντῶνται. Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ μὲ τὶς 4 κατακόρυφες ἀκμές του καθὼς καὶ μὲ τὶς ἐπάνω καὶ κάτω ἀπέναντι ὁριζόντιες ἂν τὶς πάρωμε ἀνὰ δύο (σχῆμα 7).

Παράλληλα λέγονται δύο ἢ περισσότερα ἐπίπεδα ποὺ ὅσο κι ἂν προεκταθοῦν δὲν συναντῶνται ποτέ. Ἐπίσης δύο ἢ περισσότερες εὐθεῖες λέγονται παράλληλες ὅταν εὑρίσκωνται στὸ αὐτὸ ἐπίπεδο καὶ ὅσο κι ἂν τὶς προεκτείνωμε δὲν συναντῶνται

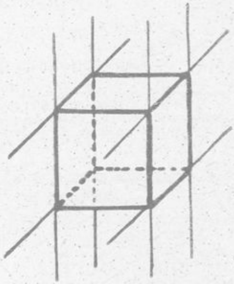
'Εργασίες - ἀσκήσεις - ἐφαρμογὲς

1) Νὰ δείξετε τὶς παράλληλες ἕδρες καὶ τὶς παράλληλες ἀκμὲς τῆς αἴθουσας τῆς τάξης σας, τοῦ δωματίου τοῦ σπιτιοῦ σας, τοῦ βιβλίου σας, τῆς κασετίνας κλπ.

2) Νὰ διαβάσετε τὴ σελ. 13 τοῦ βιβλίου μας αὐτοῦ καὶ νὰ προσέξετε τὶς εἰκόνες ποὺ βλέπομε ἐκεῖ μὲ τὶς παράλληλες γραμμές.



Σχ. 6



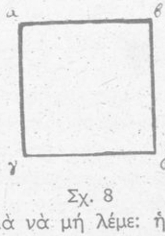
Σχ. 7

Σχῆμα τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου καὶ σχέση μεταξύ τους

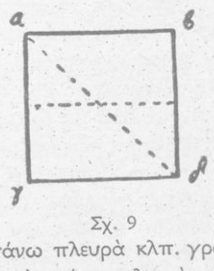
Ἂν στηρίξωμε τὸν κύβο ἐπάνω σ' ἕνα λευκὸ χαρτὶ καὶ σύρωμε μὲ τὸ μολύβι μας γύρω στὴν ἕδρα τῆς βάσης του μία γραμμή, θὰ σχηματισθῇ ἕνα σχέδιο ὅμοιο μὲ τὸ σχῆμα τῆς ἕδρας τοῦ κύβου (σχῆμα 8). Ἂν τώρα ἐπάνω σ' αὐτὸ τὸ σχῆμα στηρίξωμε τὸν κύβο μὲ ὅλες στὴ σειρὰ τὶς ἕδρες του, θὰ ἰδοῦμε ὅτι ὅλες ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς. Ἀπὸ αὐτὸ καταλαβαίνομε πὼς καὶ οἱ 6 ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι ἴσες.

Ὅλες οἱ ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι ἴσες.

Τὸ σχῆμα ποὺ σχηματίσαμε μὲ τὴν ἕδρα τοῦ κύβου ἔχει 4 εὐθεῖες γραμμές, ποὺ ἑνώνονται στὶς ἄκρες τους δύο-δύο. Οἱ τέσσερες αὐτὲς εὐθεῖες λέγονται πλευρές σ(σχῆμα 8).



Σχ. 8



Σχ. 9

Γιὰ νὰ μὴ λέμε: ἡ κάτω πλευρά, ἡ ἐπάνω πλευρὰ κλπ. γράφομε στὴν ἄκρη τους γράμματα τοῦ ἀλβφαβήτου. Ἔτσι τὴν κάτω πλευρὰ τὴ λέμε γδ, τὴν ἐπάνω αβ, τὴ δεξιὰ βδ καὶ τὴν ἀριστερὴ αγ (σχῆμα 9).

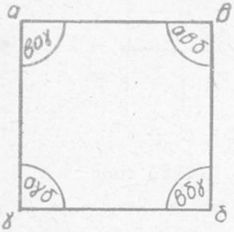
Ἂν τὸ σχῆμα αὐτὸ τὸ διπλώσωμε στὴ μέση θὰ ἰδοῦμε πὼς ἡ πλευρὰ αβ θὰ ἐφαρμόση ἀκριβῶς ἐπάνω στὴν πλευρὰ γδ. Καὶ ἂν τὸ διπλώσωμε λοξὰ στὶς γωνίες α καὶ δ, θὰ ἰδοῦμε πάλι πὼς ἡ πλευρὰ αβ θὰ ἐφαρμόση ἀκριβῶς ἐπάνω στὴν πλευρὰ αγ (σχῆμα 9).

Ἀπὸ αὐτὸ συμπεραίνομε πὼς οἱ πλευρὲς τῆς ἕδρας τοῦ κύβου εἶναι ἴσες. Μὰ οἱ πλευρὲς τῆς ἕδρας τοῦ κύβου εἶναι καὶ ἀκμὲς τοῦ κύβου.

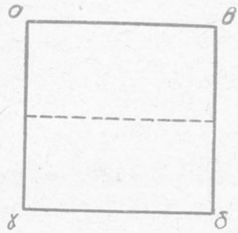
Ὅλες οἱ ἀκμὲς τοῦ κύβου εἶναι ἴσες μεταξύ τους

Τετράγωνο: πλευρὲς καὶ γωνίες τοῦ τετραγώνου

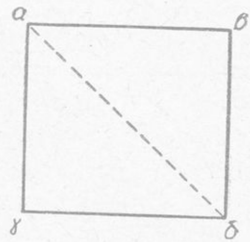
Ὅπου συναντῶνται δύο πλευρὲς τοῦ σχήματος τῆς ἕδρας τοῦ κύβου, σχηματίζεται μία γωνία. Στὸ σχῆμα λοιπὸν αὐτὸ σχηματίζονται 4 γωνίες (σχ.10).



Σχ. 10



Σχ. 11



Σχ. 12

1) Ἡ πλευρὰ αβ μὲ τὴν πλευρὰ αγ σχηματίζουν μιὰ γωνία ποὺ τὴ διαβάζομε γαβ ἢ βαγ. (Ὅταν διαβάζωμε γωνίες τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς θὰ τὸ βάζομε πάντοτε στὴ μέση. Μποροῦμε ὅμως νὰ διαβάσωμε μιὰ γωνία μόνο μὲ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς της.)

2) Ἡ πλευρὰ αβ μὲ τὴν πλευρὰ βδ σχηματίζουν τὴ γωνία αβδ.

3) Ἡ πλευρὰ βδ μὲ τὴν πλευρὰ δγ σχηματίζουν τὴ γωνία βδγ καὶ

4) Ἡ πλευρὰ δγ μὲ τὴν πλευρὰ γα σχηματίζουν τὴ γωνία αγδ.

Οἱ δύο πλευρὲς ποὺ σχηματίζουν μία γωνία λέγονται πλευρὲς τῆς γωνίας καὶ τὸ σημεῖο ποὺ συναντῶνται λέγεται κορυφὴ τῆς γωνίας.

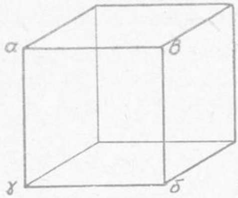
Ἂν διπλώσωμε τὸ σχῆμα τῆς ἕδρας τοῦ κύβου στὴ μέση θὰ ἰδοῦμε πὼς οἱ δύο γωνίες θὰ ἐφαρμόσουν ἀκριβῶς ἐπάνω στὶς ἄλλες δὺο δηλ. ἡ α ἐπάνω στὴ γ καὶ ἡ β ἐπάνω στὴ δ (σχῆμα 11).

Ἂν διπλώσωμε τὸ ἴδιο σχῆμα λοξά, δηλαδὴ γωνία μὲ γωνία, θὰ ἰδοῦμε πάλι πὼς ἡ γωνία β θὰ ἐφαρμόση ἀκριβῶς ἐπάνω στὴ γ (σχῆμα 12).

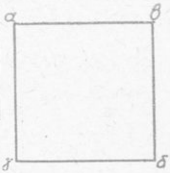
Ἔτσι βλέπομε πὼς καὶ οἱ 4 γωνίες τῆς ἕδρας τοῦ κύβου εἶναι ἴσες.

Τὸ σχῆμα αὐτὸ ποὺ ἔχει καὶ τὶς 4 πλευρές του ἴσες καὶ τὶς 4 γωνίες του ἴσες λέγεται τετράγωνο.

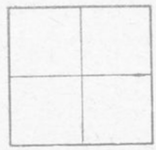
Μάθαμε ὅτι ἡ εὐθεία *αγ* (σχ. 12) εἶναι κατακόρυφη, ὅπως φαίνεται καὶ μὲ τὸ μάτι, καὶ ἡ εὐθεία *γδ* εἶναι ὁριζόντια. Ἐὰν τώρα ἐπάνω στὴν ὁριζόντια εὐθεία *γδ* φέρωμε τὴν κατακόρυφη *αγ* τότε στὸ σημεῖο ποὺ συναντῶνται οἱ δύο αὐτὲς εὐθεῖες σχηματίζεται μία ὀρθὴ γωνία σχ. 12α καὶ 12β). Τὸ ἴδιο παρατηρεῖται σὲ ὁποιοδήποτε τετράγωνο. Ἡ εὐθεία $γδ$ καὶ ἡ εὐθεία $αγ$ λέγονται μὲ ἕνα ὄνομα κάθετες εὐθεῖες. Τέτοιες κάθετες εὐθεῖες βλέπομε στὰ σχήματα 12γ καὶ 12δ.

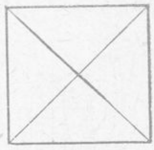


Σχ. 12α



Σχ. 12β


Σχ. 12γ


Σχ. 12δ

Τετράγωνο λέγεται τὸ τετράπλευρο ἐπίπεδο σχῆμα ποὺ ἔχει ὅλες τὶς πλευρές του ἴσες μεταξὺ των καὶ ὅλες τὶς γωνίες του ὀρθές.

Ἡ γραμμὴ ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ πολλὲς εὐθεῖες σπασμένες δηλ. ποὺ νὰ μὴν ἀποτελοῦν ὅλες μαζί, ὅπως εἶναι, μία εὐθεία λέγεται τεθλασμένη. (Γιὰ τὴν τεθλασμένη γραμμὴ καὶ τὰ ἄλλα εἴδη γραμμῶν μιλήσαμε στὴν ἀρχὴ τοῦ βιβλίου μας αὐτοῦ. Νὰ προσέξετε τὶς εἰκόνες ποὺ βλέπετε στὶς σελ. 12, 13).

Κατασκευὴ τετραγώνου

Γιὰ νὰ κατασκευάσωμε τετράγωνο ἀπὸ χαρτί, διπλώνωμε ἕνα φύλλο χαρτὶ ἀπὸ τὸ τετράδιό μας, σὲ τρόπο ὥστε ἡ μικρὴ πλευρά του νὰ πέσῃ ἀκριβῶς ἐπάνω στὴ μεγάλη. Κατόπι κόβομε τὸ χαρτὶ ποὺ περισσεύει ἀπὸ τὴ μεγάλη πλευρὰ καὶ ἔχομε ἕνα χάρτινο τετράγωνο.

Ἐργασίες - ἀσκήσεις - ἐφαρμογὲς

1) Νὰ μετρήσετε πόσες ὀρθὲς γωνίες ἔχουν οἱ δύο ὁριζόντιες ἕδρες τοῦ κύβου.

2) Νὰ μετρήσετε ὅλες τὶς ὀρθὲς γωνίες τοῦ κύβου.

3) Νὰ δείξετε τὶς ὀρθὲς γωνίες τοῦ δωματίου, τοῦ τραπεζιοῦ, τοῦ βιβλίου, τοῦ πίνακα, τοῦ νταβανιοῦ, τοῦ τζαμιοῦ.

4) Νὰ δείξετε δύο κάθετες εὐθεῖες γραμμὲς στὸν κύβο, στὸ δωμάτιο, στὸ τζάμι, στὸ βιβλίο.

5) Νὰ δείξετε δύο τεθλασμένες γραμμὲς στὸν κύβο, στὸ νταβάνι, στὸ διάδρομο.

6) Νὰ δείξετε διάφορα τετράγωνα σχήματα στὴν αἴθουσα τῆς τάξης σας.

7) Νὰ ἰχνογραφήσετε μία ὀρθὴ γωνία, μία τεθλασμένη γραμμή, δύο παράλληλες εὐθεῖες, δύο κάθετες εὐθεῖες κλπ.

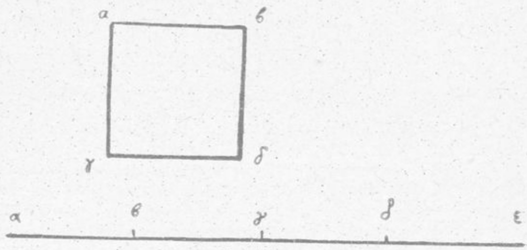
8) Νὰ προσέξετε ὅλα αὐτὰ στὶς πρῶτες εἰκονογραφημένες σελίδες τοῦ βιβλίου αὐτοῦ (σελ. 3—16).

9) Νὰ ἰχνογραφήσετε τετράγωνα στὸν πίνακα, στὸ τετράδιό σας, στὴν αὐλὴ καὶ νὰ κατασκευάσετε τετράγωνα μὲ χαρτί.

Δίεδρες καὶ στερεὲς γωνίες τοῦ κύβου

Μάθαμε ὅτι ὅπου συναντῶνται δύο ἕδρες τοῦ κύβου ,σχηματίζεται μιὰ ἀκμή. Ἀλλὰ αὐτὲς οἱ δυὸ ἕδρες τοῦ κύβου μαζὶ μὲ τὴν ἀκμή τους σχηματίζουν ἕνα σχῆμα ποὺ τὸ ὀνομάζομε δίεδρη γωνία. Εὔκολα μποροῦμε νὰ ἰδοῦμε δίεδρη γωνία στὸ μισανοιγμένο βιβλίο (σχῆμα 13).

Σχ. 13



Σχ. 14

Ὁ κύβος ἔχει 12 δίεδρες γωνίες ὅσες καὶ οἱ ἀκμές του

Εἴπαμε ὅτι ἐκεῖ ποὺ συναντῶνται τρεῖς ἕδρες τοῦ κύβου, σχηματίζεται μία κορυφή. Μὰ αὐτὲς οἱ τρεῖς ἕδρες μὲ τὴν κορυφή τους σχηματίζουν μία τρίεδρη γωνία ἢ στερεὰ γωνία.

Ὁ κύβος ἔχει 8 τρίεδρες ἢ στερεὲς γωνίες, ὅσες εἶναι καὶ οἱ κορυφές του

Ἀνακεφαλαίωση

Ὁ κύβος ἔχει:

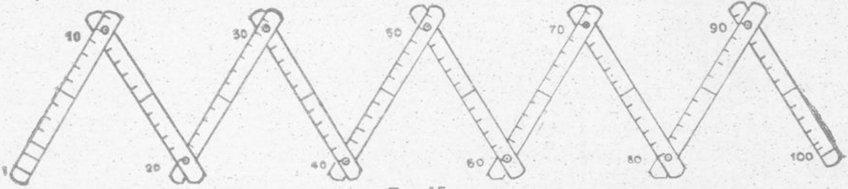
α) 6 ἕδρες.
β) 12 ἀκμὲς
γ) 8 κορυφές
δ) 12 δίεδρες γωνίες
ε) 8 στερεὲς γωνίες
στ) 24 ἐπίπεδες γωνίες.

Περίμετρος τοῦ τετραγώνου

Εἴπαμε ὅτι τὸ τετράγωνο ἔχει καὶ τὶς 4 πλευρές του ἴσες. Καὶ οἱ 4 αὐτὲς πλευρὲς τοῦ τετραγώνου γύρω-γύρω ἀποτελοῦν τὴν περίμετρο τοῦ τετραγώνου. Ἂν ἀνοίξωμε τὶς 4 πλευρὲς τοῦ τετραγώνου θὰ σχηματισθῆ μία εὐθεῖα γραμμὴ ἡ αβγδε (σχῆμα 14)

Μέτρα μήκους: τὸ μέτρο

Γιὰ νὰ μετρήσωμε μιὰ ἀπόσταση π.χ. τὸ μῆκος, τὸ πλάτο ἢ τὸ ὕψος τοῦ κύβου ἢ ἄλλου σώματος, μεταχειριζόμεθα διάφορα μέτρα. Τὰ παιδάκια μετροῦν μὲ τὶς πιθαμές, μὲ τὰ βήματα, μὲ τὶς ὀργιές τους. Οἱ μεγάλοι μετροῦν μὲ τὸ μέτρο ποὺ λέγεται καὶ *Γαλλικὸ* μέτρο. Οἱ κτίστες καὶ οἱ μαραγκοὶ τὸ μέτρο τὸ λένε πασέτο, οἱ μοδίστρες μεζούρα κλπ. Τὸ μέτρο εἶναι ξύλινο, σιδερένιο ἢ ἀπὸ μουσαμᾶ (κορδέλλα) σχ. 15.



Σχ. 15

Διαίρεση τοῦ μέτρου

Τὸ μέτρο διαιρεῖται σὲ δέκα ἴσα μέρη ποὺ λέγονται παλάμες, β) ἡ παλάμη διαιρεῖται σὲ δέκα ἴσα μέρη ποὺ λέγονται δάκτυλοι ἢ πόντοι ἢ ἑκατοστά, γ) ὁ δάκτυλος διαιρεῖται σὲ δέκα ἴσα μέρη ποὺ λέγονται γραμμὲς ἢ χιλιοστά.

Ἄρα τὸ μέτρο ἔχει 10 παλάμες ἢ 100 δακτύλους ἢ 1000 γραμμές.

Τὶς μεγάλες ἀποστάσεις τὶς μετροῦμε μὲ τὸ χιλιόμετρο. Τὸ χιλιόμετρο ἔχει 1000 μέτρα. Μὲ χιλιόμετρα μετροῦνται οἱ δρόμοι, οἱ σιδηροδρομικὲς γραμμὲς κλπ.

ΣΗΜ.– Ἀφοῦ ἡ παλάμη εἶναι τὸ δέκατο τοῦ μέτρου, ὁ δάκτυλος τὸ ἑκατοστὸ καὶ ἡ γραμμὴ τὸ χιλιοστὸ τοῦ μέτρου, μποροῦμε νὰ γράψωμε τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς καὶ ὡς δεκαδικούς. Π.χ. 3,845 μέτρα = 3 μέτρα, 8 παλάμες 4 δάκτυλοι καὶ 5 γραμμές. Καὶ ἀντίθετα 6 μέτρα 3 παλάμες 0 δάκτυλοι καὶ 4 γραμμὲς μποροῦν νὰ γραφοῦν ὡς δεκαδικὸς ἀριθμὸς 6,304 (Περισσότερες λεπτομέρειες γιὰ τὸ μέτρο καὶ τὶς ὑποδιαιρέσεις του κοίτα τὴν Ἀριθμητική μας τῆς Ε' καὶ ΣΤ' τάξεως καὶ στὸ κεφάλαιο τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

Μέτρηση τῆς περιμέτρου τοῦ τετραγώνου

Γιὰ νὰ μετρήσωμε τὶς 4 πλευρὲς τοῦ τετραγώνου δηλαδὴ γιὰ νὰ μετρήσωμε τὴν περίμετρό του θὰ ἐργασθοῦμε ὡς ἑξῆς: πρῶτα θὰ μετρήσωμε τὴν πρώτη πλευρά του. Ἔπειτα τὴ δεύτερη, τὴν τρίτη καὶ τέλος τὴν τετάρτη καὶ θὰ τίς προσθέσωμε. Μὰ ἐπειδὴ ξέρομε πὼς καὶ οἱ 4 πλευρές του τετραγώνου εἶναι ἴσες εἶναι περιττὸ νὰ κάνωμε τόσον κόπο. Μετροῦμε μόνο τὴ μία πλευρά του κι ὅ,τι βροῦμε τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ 4. Δηλαδή:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν περίμετρο τοῦ τετραγώνου πολλαπλασιάζομε τὴν πλευρά του ἐπὶ 4.

Ἕνα παράδειγμα

Ἕνας κῆπος ἔχει σχῆμα τετράγωνο. Ἡ κάθε πλευρά του εἶναι 8 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ περίμετρός του;

Πολλαπλασιάζομε τὸ 8 X 4 καὶ βρίσκομε ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ κήπου αὐτοῦ εἶναι 32 μέτρα.

Ἂν ἀντίθετα μᾶς ποῦν ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ κήπου αὐτοῦ εἶναι 32 μέτρα καί μᾶς ζητοῦν νὰ βροῦμε πόσα μέτρα εἶναι ἡ μία πλευρά του, διαιροῦμε τὸ 32 διὰ τοῦ 4 καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κήπου 32 : 4 = 8 μέτρα.

Ἐργασίες - ἀσκήσεις - ἐφαρμογὲς

1) Πόσες παλάμες ἔχουν 1, 9, 5, 8 μέτρα;

2) Πόσους δακτύλους ἔχει τὸ μισὸ μέτρο;

3) Πόσες γραμμὲς ἔχουν 1, 2, 3, μέτρα, 5,6,7 παλάμες, 3,9,7, δάκτυλοι;

4) Πόσα μέτρα εἶναι ἡ περίμετρος μιᾶς τετραγωνικῆς αὐλῆς ὅταν ἡ μία πλευρά της εἶναι 7,5 μέτρα;

5) Πόσο εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τετραγωνικοῦ οἰκοπέδου τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 288 μέτρα;

6) Τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ἑνὸς τετραγωνικοῦ περιβολιοῦ εἶναι 37 μέτρα. Πόσα μέτρα συρματόπλεγμα θά χρειασθοῦμε γιὰ νὰ τὸ φράξωμε; Καὶ πόσο θὰ στοιχίση ὅλο τὸ συρματόπλεγμα ὅταν τὸ μέτρο ἔχει 4.500 δραχμές;

7) Νὰ κάνετε τέτοια προβλήματα μόνοι σας καὶ νὰ τὰ λύσετε. (Λεπτομέρειες γιὰ τὸ μέτρο καὶ τὶς ὑποδιαιρέσεις του θὰ βρῆτε στὴν ἀριθμητικὴ τῆς Ε′ καὶ Στ′ τάξης στὸ κεφάλαιο τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

Μέτρα ἐπιφανείας

Μάθαμε ὅτι τὸ ἐξωτερικὸ μέρος τοῦ κύβου καὶ ὅλων τῶν στερεῶν σωμάτων λέγεται ἐπιφάνεια. Εἶναι ἀνάγκη νὰ μάθωμε τώρα νὰ μετροῦμε τὴν ἐπιφάνεια αὐτή.

Τὶς τρεῖς διαστάσεις (μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος) τῶν σωμάτων τὶς μετροῦμε μὲ τὸ μέτρο.

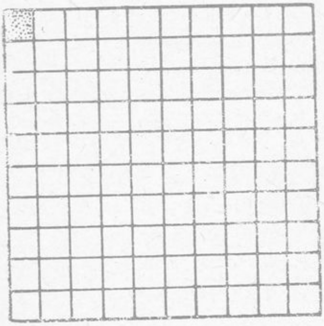
Τὴν ἐπιφάνεια τὴν μετροῦμε μὲ τὸ τετραγωνικὸ μέτρο. Τὸ τετραγωνικὸ μέτρο εἶναι ἕνα τετράγωνο τοῦ ὁποίου ἡ κάθε πλευρὰ εἶναι ἕνα μέτρο (σχ.16).

1) Τὸ τερταγωνικὸ μέτρο διαιρεῖται σὲ 100 τετραγωνικὲς παλάμες (ἡ τετραγωνικὴ παλάμη εἶναι κι αὐτὴ τετράγωνο ποὺ ἡ πλευρά του εἶναι μιὰ παλάμη)

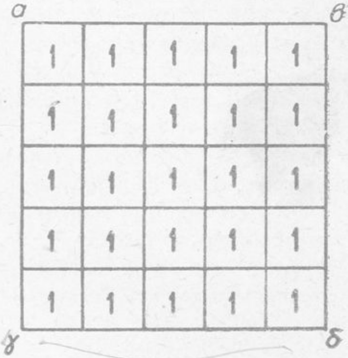
2) Ἡ τετραγωνικὴ παλάμη διαιρεῖται σὲ 100 τετραγωνικοὺς δακτύλους (ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος εἶναι κι αὐτὸς ἕνα μικρὸ τετράγωνο, ποὺ ἡ πλευρά του εἶναι ἕνας δάκτυλος.).

3) Ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος διαιρεῖται σὲ 100 τετραγωνικὲς γραμμὲς (ἡ τετραγωνικὴ γραμμὴ εἶναι ἕνα πολὺ μικρὸ τετράγωνο ποὺ ἡ πλευρά του εἶναι μία γραμμή).

Τὸ τετραγωνικὸ μέτρο λοιπόν, διαιρεῖται σὲ 100 τ.π. ἢ σὲ 10.0000 τ. δ. ἢ σὲ 1.000.0000 τ. γ. Ἡ τετραγωνικὴ παλάμη διαιρεῖται σὲ 100 τ. δ. ἢ σὲ 10.000 τ.γ.



Σχ. 16



Σχ. 17

Ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος διαιρεῖται σὲ 100 τ.γ. Μποροῦμε νὰ κατασκευάσωμε ἕνα τετραγωνικὸ μέτρο μὲ 4 ξύλινα πηχάκια, ἀπὸ ἕνα μέτρο τὸ καθένα καὶ νὰ τὰ καρφώσωμε ἔτσι ποὺ νὰ σχηματισθῆ ἕνα τετραγωνικὸ τελάρο.

Ὅταν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι μεγάλη τὴν μετροῦμε μὲ τετραγωνικὰ χιλιόμετρα. Καταλαβαίνομε πὼς τὸ τετραγωνικὸ χιλιόμετρο εἶναι κι αὐτὸ ἕνα μεγάλο τετράγωνο ποὺ ἡ κάθε πλευρά του εἶναι ἕνα χιλιόμετρο. Ὅλη τὴν ἐπιφάνεια τῆς Ἑλλάδας τὴν μετρήσανε καὶ τὴν βρῆκαν 132 χιλιάδες τετρ. χιλιόμετρα.

Τὰ χωράφια, τοὺς κήπους, τὰ περιβόλια τὰ μετροῦμε καὶ μὲ στρέμματα Ἕνα στρέμμα ἔχει 1000 τετρ. μέτρα. Δηλαδὴ εἶναι ἕνα τετράγωνο, ποὺ ἡ πλευρά τοῦ εἶναι σχεδὸν 33,333 μέτρα.

Ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου

Εἴπαμε ὅτι τὴν ἐπιφάνεια τῶν σωμάτων τὴν μετροῦμε μὲ τὸ τετραγωνικὸ μέτρο.

Ὁ ἀριθμὸς ποὺ φανερώνει τὴν ἔκταση μιᾶς ἐπιφανείας λέγεται *ἐμβαδόν*.

Ἂς ὑποθέσωμε ὅτι ἡ αὐλὴ τοῦ σχολείου μας, εἶναι τετραγωνικὴ καὶ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς της εἶναι 5 μέτρα (σχ. 17).

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδόν της θὰ ἐργασθοῦμε ὡς ἑξῆς: θὰ τοποθετήσωμε στὴν πλευρὰ γδ, 5 τετραγωνικὰ μέτρα στὴ σειρὰ ἀπὸ τὴν μιὰ ἄκρη στὴν ἄλλη γιατὶ τόσα χωρεῖ.

Κατόπιν πιὸ μέσα θὰ τοποθετήσωμε ἄλλα 5 μέτρα ποὺ γίνονται 10. Κατόπιν θὰ βάλωμε ἄλλα 5 ποὺ γίνονται 15. Κατόπιν ἄλλα 5, ποὺ γίνονται 20, καὶ τέλος ἄλλα 5, καὶ γίνονται ὅλα μαζὶ 25 τ.μ.

Ἔτσι μὲ τὰ 25 τ.μ. γεμίσαμε ὅλο τὸ ἐμβαδὸν τῆς αὐλῆς. Βρίσκομε λοιπὸν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς αὐλῆς εἶναι 25 τετραγωνικὰ μέτρα.

Μὰ ἡ ἐργασία αὐτὴ δὲν εἶναι εὔκολη, θέλει κόπο, χρόνο καὶ πολλὰ τετραγωνικὰ μέτρα. Μποροῦμε ὅμως πολὺ εὔκολα νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς αὐλῆς καὶ κάθε τετραγωνικῆς ἐπιφανείας μὲ ἕνα μόνο μέτρο (ὄχι τετραγωνικό). Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε θὰ σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς: Ἀφοῦ μὲ τὸ μέτρο βρήκαμε ὅτι ἡ πλευρὰ γδ τῆς αὐλῆς (ἂς ποῦμε τὸ μῆκος της) εἶναι 5 μέτρα, στὸ μῆκος της αὐτὸ θὰ χωρέση μιὰ σειρὰ ἀπὸ 5 τετραγωνικὰ μέτρα. Μὰ καὶ ἡ πλευρὰ αγ, (ἂς ποῦμε τὸ πλάτος της), εἶναι κι αὐτὴ 5 μέτρα, γιατὶ οἱ πλευρὲς τοῦ τετραγώνου εἶνου εἶναι ἴσες. Ἑπομένως θὰ χωρέσουν 5 σειρὲς ἀπὸ 5 τετρ. μέτρα. Ἄρα ἔχομε 5 φορὲς τὸ 5 = 25 τετραγωνικὰ μέτρα.

Μ' ἄλλα λόγια πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος 5 μέτρα ἐπὶ τὸ πλάτος 5 μέτρα καὶ βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν 25 τετραγωνικὰ μέτρα. Μὰ ἀφοῦ τὸ μῆκος τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσο μὲ τὸ πλάτος του, μετροῦμε μόνο τὸ μῆκος, δηλαδὴ τὴ μιὰ πλευρά του καὶ τὴν πολλαπλασιάζομε μὲ τὸν ἑαυτό της.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος του.

Ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου

Ξέρομε πὼς ὅλες οἱ ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι ἴσα τετράγωνα. Ὅταν λοιπὸν βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς ἕδρας του, τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸ 6, ὅσες εἶναι ὅλες οἱ ἕδρες τοῦ κύβου καὶ ἔτσι βρίασκομε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου.

Ἐργασίες - ἀσκήσεις - ἐφαρμογὲς

1) Νὰ βρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγωνικοῦ οἰκοπέδου ποὺ ἡ μία του πλευρὰ εἶναι 15,50 μέτρα.

2) Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυβικοῦ ντεπόζιτου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι 0,83 μέτρα;

3) Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ ἴδιου ντεπόζιτου, ὅταν λείπη τὸ καπάκι (ἡ ἐπάνω ἕδρα);

4) Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου εἶναι τετράγωνο. Ἡ μία πλευρά του εἶναι 6,50 μέτρα. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

5) Τὸ ἴδιο πάτωμα θέλωμε νὰ τὸ πλακοστρώσωμε μὲ τετραγωνικὰ πλακάκια. Κάθε πλακάκι ἔχει πλευρὰ 0,20 μέτρα. Πόσα πλακάκια θὰ μᾶς χρειασθοῦν;

6) Ἕνα τετραγωνικὸ οἰκόπεδο μὲ πλευρὰ 18,80 μέτρα πουλήθηκε πρὸς 5.000 δραχμὲς τὸ τετρ. μέτρο. Πόσες δραχμὲς πουλήθηκε;

7) Μιὰ τετραγωνικὴ αὐλὴ μὲ πλευρὰ 6,50 μέτρα πλακοστρώθηκε. Σὲ κάθε τετραγωνικὸ μέτρο πῆγαν 8 πλάκες. Πόσες πλάκες πῆγαν διὰ ὅλη τὴν αὐλή;

5, 6, 7

8) Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγωνικοῦ χωραφιοῦ εἶναι 170 μέτρα. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

9) Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγωνικοῦ μαυροπίνακα εἶναι 9 παλάμες, 6 δάκτυλοι καὶ 7 γραμμές. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

10) Κάμετε μόνοι σας παρόμοια προβλήματα.

ΣΗΜ.—Ἡ τετραγωνικὴ παλάμη εἶναι τὸ ἑκατοστὸ τοῦ τ.μ., ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος εἶναι τὸ δεκάκις χιλιοστὸ τοῦ τ.μ. καὶ ἡ τετραγωνικὴ γραμμὴ τὸ ἑκατομμυριοστὸ τοῦ μ. Ἄρα ὅταν, στὰ προβλήματά μας, συναντήσωμε ἕναν δεκαδικὸ ἀριθμὸ π.χ. 3,678349 τ.μ. μποροῦμε εὔκολα νὰ τὸν ἀναλύσωμε ὡς ἑξῆς: 3 τ.μ. 67 τ.π. 83 τ.δ. 49 τ.γ. Καὶ ἀντίθετα ἂν συναντήσωμε τὸν συμμιγῆ 60 τ.π. 36 τ.γ. τὸν τρέπομε σὲ δεκαδικὸ ὡς ἑξῆς 0,600036 τ.μ. (Περισσότερες λεπτομέρειες γιὰ τὸ τετραγωνικὸ μέτρο κοίτα στὴν Ἀριθμητική μας Ε' καὶ ΣΤ'.

Μέτρα ὄγκου (χώρου)

Κάθε στερὸ σῶμα ἐκεῖ ποὺ βρίσκεται πιάνει ἕνα χῶρο. Τὰ θρανία πιάνουν ἕνα χῶρο στὴν αἴθουσα. Ὅταν γεμίσωμε τὴν αἴθουσα μὲ θρανία, μὲ καρέκλες ἢ μὲ κιβώτια, θὰ ἰδοῦμε πὼς δὲν χωροῦν ἄλλα.

Αὐτὸν τὸν χῶρο ποὺ καταλαμβάνει κάθε σῶμα, θὰ πρέπει νὰ μάθωμε νὰ τὸν μετροῦμε. Ὁ ἀριθμὸς ποὺ δείχνει τὸ μέγεθος τοῦ χώρου τῶν σωμάτων λέγεται *ὄγκος*.

Τὶς διαστάσεις (μῆκος, πλάτος, βάθος ἢ ὕψος) τὶς μετροῦμε μὲ τὸ μέτρο.

Τὴν ἐπιφάνεια (ἐμβαδὸν) τὴν μετροῦμε μὲ τὸ τετραγωνικὸ μέτρο.

Τὸν ὄγκο τῶν σωμάτων τὸν μετροῦμε μὲ τὸ κυβικὸ μέτρο (σχ. 18).

Κυβικὸ μέτρο λέγεται ὁ κύβος τοῦ ὁποίου οἱ ἀκμές του εἶναι 1 μέτρο.

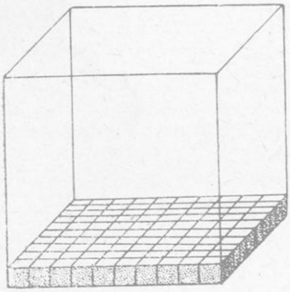
Τὸ κυβικὸ μέτρο μποροῦμε νὰ τὸ φαντασθοῦμε σὰν ἕνα κυβικὸ κιβώτιο μὲ ἀκμὴ ἑνὸς μέτρου. Μποροῦμε νὰ κατασκευάσωμε ἕνα κυβικὸ μέτρο μὲ 12 ξύλινα πηχάκια ποὺ καθένα νὰ ἔχῃ μῆκος 1 μέτρο. Πρῶτα κάνομε 2 τετραγωνικὰ μέτρα καρφώνοντας 8 πηχάκια (4 καὶ 4). Κατόπι καρφώνομε τὰ ἄλλα 4 ποὺ μᾶς μένουν, στὶς γωνίες τῶν δύο τετραγωνικῶν μέτρων, ποὺ κάναμε στὴν ἀρχή.

Ὅπως τὸ μέτρο διαιρεῖται σὰ παλάμες, δακτύλους καὶ γραμμὲς κι ὅπως τὸ τετραγωνικὸ μέτρο διαιρεῖται σὲ τ. παλάμες, τ. δακτύλους καὶ τ. γραμμές, ἔτσι καὶ τὸ κυβικὸ μέτρο διαιρεῖται σὲ 1000 κυβικὲς παλάμες, κάθε κυβικὴ παλάμη σὲ 1000 κυβικοὺς δακτύλους καὶ κάθε κυβικὸς δάκτυλος διαιρεῖται σὲ 1000 κυβικὲς γραμμές.

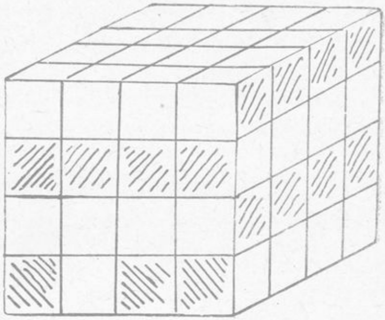
Ἡ κυβικὴ παλάμη εἶναι κύβος μὲ ἀκμὴ μιὰ κυβικὴ παλάμη. Ὁ κυβικὸς δάκτυλος εἶναι κύβος μὲ ἀκμὴ ἕνα δάκτυλο. Ἡ κυβικὴ γραμμὴ εἶναι κύβος μὲ ἀκμὴ μιὰ γραμμή.

Ἐπειδὴ ἡ κυβικὴ γραμμὴ εἶναι πολὺ μικρὸς κύβος δὲν θὰ τὴν ὑπολογίζωμε στὰ προβλήματα τῆς μετρήσεως τοῦ ὄγκου τῶν σωμάτων.

Ἄρα τὸ κυβικὸ μέτρο εἶναι διαιρεῖται σὲ 1000 κυβικὲς παλάμες ἢ σὲ 1.000.000 κυβικοὺς δακτύλους.



Σχ. 18



Σχ. 19

Ὄγκος τοῦ κύβου

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἐσωτερικὸ τῆς αἴθουσα τοῦ σχολείου μας ἔχει κυβικὸ σχῆμα μὲ 4 μέτρα ἡ κάθε διάσταση καὶ ὅτι θέλομε νὰ μετρήσωμε τὸν ἐσωτερικό της ὄγκο (χῶρο). Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο της θὰ ἐργασθοῦμε ὡς ἑξῆς (σχ. 19):

Θὰ πάρωμε κυβικὰ μέτρα καὶ θὰ τὰ τοποθετήσωμε στὸ πάτωμα τῆς αἴθουσας. Τὸ πάτωμα θὰ γεμίση ὅλο μὲ 16 κυβικὰ μέτρα γιατὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πατώματος εἶνα 4Χ4 =16 τ. μ. καί, ὅπως καταλαβαίνομε, σὲ κάθε τετραγωνικὸ μέτρο κάθεται ἕνα κυβικὸ μέτρο. Μὰ τὰ κυβικὰ μέτρα, ἐπειδὴ ἔχουν ὕψος 1 μέτρο τὸ καθένα, θὰ καταλάβουν 1 μέτρο χῶρο ἀπὸ τὸ πάτωμα πρὸς τὰ ἐπάνω (ὕψος). Ἐπάνω, τώρα,στὰ 16 αὐτὰ κυβικὰ μέτρα τοποθετοῦμε ἄλλα 16 κυβικὰ μέτρα. Ἔτσι μὲ τὰ 32 αὐτὰ κυβικὰ μέτρα γεμίσαμε τὸν ὄγκο (χῶρο) τῆς μισῆς αἴθουσας. Ἄν, τέλος, βάλωμε ἄλλες δύο σειρὲς ἀπὸ 16 κυβικὰ μέτρα στὴν κάθε σειρὰ θὰ γεμίσωμε ὅλον τὸν ὄγκο (χῶρο) τῆς αἴθουσας.

Βάλαμε λοιπὸν 4 σειρὲς κυβικὰ μέτρα ἀπὸ 16 κυβικὰ μέτρα στὴν κάθε σειρά. Δηλαδὴ 16 + 16 + 16+16 =64 κ. μέτρα. ἢ 4Χ16=64 κ. μ. Τὰ 16 κυβικὰ μέτρα φαίνονται στὸ σχῆμα 19 ἀπὸ ἐπάνω καὶ οἱ 4 σειρὲς ἀπὸ τὰ πλάγια.

Μὰ ἡ ἐργασία αὐτὴ δὲν εἶναι εὔκολη. Θέλει πολύ, κόπο πολὺ χρόνο καὶ πολλὰ κυβικὰ μέτρα. Μποροῦμε ὅμως πολὺ εὔκολα νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ δωματίου καὶ κάθε κυβικοῦ σώματος μὲ ἕνα μόνο τρόπο. Μάθαμε ὅτι γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου παλλαπλασιάζομε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος του. Ἡ πλευρὰ λοιπὸν τοῦ δωματίου εἶναι 4 μέτρα. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πατώματος εἶναι 4Χ4 = 16 τ. μέτρα. Εἴδαμε ὅτι στὰ 16 τ.μέτρα κάθονται 16 κυβικὰ μέτρα. Τὸ ὕψος τῆς αἴθουσας εἶναι 4 μέτρα γιατὶ οἱ διαστάσεις (ἀκμὲς) τοῦ κύβου εἶναι ἴσες. Κι ἀφοῦ τὸ ὕψος τοῦ δωματίου εἶναι 4 μέτρα θὰ χωρέση 4 φορὲς ἀπὸ 16 κυβικὰ μέτρα δηλαδὴ 64 κ.μ.

Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὸν ὄγκο τοῦ κύβου βρίσκομε πρῶτα τὸ ἐμβαδὸν

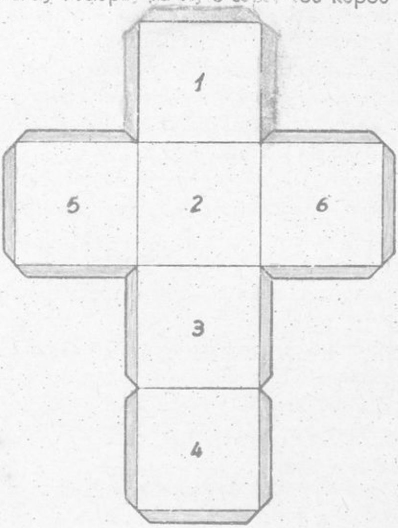
Ἐδῶ

τῆς βάσης του κι αὐτὸ τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸ ὕψος. Ἐπειδὴ ὅμως οἱ διαστάσεις τοῦ κύβου εἶναι ἴσες, πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος καὶ ὅ,τι βροῦμε τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸ ὕψος. Δηλαδὴ ὁ ὄγκος τοῦ δωματίου αὐτοῦ εἶναι 4Χ4Χ4=64 κ.μ. Ἄρα:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ κύβου πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸ ὕψος

Κατασκευὴ τοῦ κύβου

1) *Μὲ χαρτόνι.*—Γιὰ νὰ κατασκευάσωμε κύβο μὲ χαρτόνι, ἰχνογραφοῦμε πρῶτα ἐπάνω σ' αὐτὸ 4 τετράγωνα συνεχόμενα καὶ ἴσα μὲ τὴν ἕδρα ποὺ θέλομε. Ἔπειτα ἰχνογραφοῦμε, δίπλα στὸ δεύτερο τετράγωνο, ἄλλα δύο ἴσα τετράγωνα. Ἔτσι σχηματίζεται ἕνας σταυρὸς μὲ τὶς 6 ἕδρες τοῦ κύβου (σχ. 20). Κατόπι μὲ



Σχ. 20

ἕνα ξυραφάκι ἢ ψαλίδι κόβομε τὸ χαρτόνι ποὺ περισσεύει καὶ μένει ὁ σταυρός Ἔπειτα μὲ ξυραφάκι χαράζομε ἐλαφρὰ τὶς 5 μεσαῖες γραμμὲς καὶ τὸ διπλώνομε. Τὶς ἀκμὲς τὶς κολλοῦμε μὲ λεπτὲς λωρίδες χαρτιοῦ.

2) *Μὲ λεπτὴ σανίδα (κόντρα πλακέ).*—Ἰχνογραφοῦμε ἐπάνω στὸ σανίδι 6 ἴσα τετράγωνα καὶ τὰ κόβομε μὲ τὸ πριονάκι τῆς χειροτεχνίας. Ἔπειτα τὰ καρφώνομε μὲ μικρὰ καρφάκια ἢ τὰ κολλοῦμε μὲ ψαρόκολλα.

3) *Μὲ γύψο.*—Πρῶτα πρέπει νὰ κατασκευάσωμε κύβο ἀπὸ λεπτὸ σανίδι, ὅπως εἴπαμε παραπάνω, ἀλλὰ μὲ 5 ἕδρες. Ἡ ἐπάνω ἕδρα δὲν μᾶς χρειάζεται. Τὶς 5 ἕδρες δὲν πρέπει νὰ τὶς καρφώσωμε γερὰ γιὰ νὰ μποροῦμε εὔκολα νὰ τὶς ξεκαρ-

φώνωμε. Τὸν κύβο αὐτὸν μὲ τὶς 5 ἕδρες τὸν μεταχειριζόμεθα γιὰ καλούπι. Παίρνομε, τώρα, λίγο γύψο καὶ τὸν λυώνομε σὲ ἀνάλογο νερὸ ὥσπου νὰ γίνη πηχτὸς χυλός. Κατόπι χύνομε τὸ χυλὸ μέσα στὸν ξύλινο κύβο, ὥσπου νὰ γεμίση καὶ τὸν ἀφήνομε νὰ πήξη. (Τὸ πήξιμο γίνεται σὲ 20 λεπτὰ τῆς ὥρας). Ὅταν πήξη ὁ γύψος ξεκαρφώνομε τὶς ἕδρες τοῦ ξύλινου κύβου καὶ ἔτσι ἔχομε ἕνα πολὺ ὡραῖο καὶ λευκότατο γύψινο κύβο. Γιὰ νὰ ξεκολλάη εὐκολώτερα ὁ γύψος ἀπὸ τὸ σανίδι, τὸ ἀλείφομε μὲ λίγο λάδι, πρὶν χύσωμε μέσα τὸ λυωμένο γύψο.

Ἐργασίες - ἀσκήσεις - ἐφαρμογὲς

1) Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κύβου εἶναι 8 μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

2) Τὸ μῆκος μιᾶς κυβικῆς δεξαμενῆς εἶναι 6 μέτρα. Πόσα κυβικὰ μέτρα νερὸ χωρεῖ;

3) Ἕνας ἄνθρωπος χρειάζεται νὰ ἀναπνέει σὲ μιὰ νύχτα 2,25 κυβικὰ μέτρα ἀέρα. Πόσα ἄτομα μποροῦν νὰ κοιμηθοῦν σ' ἕνα κλεισμένο κυβικὸ δωμάτιο ποὺ ἔχει πλάτος 4,17 μέτρα;

4) Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κυβικοῦ δωματίου εἶναι 2 μέτρα. Πόσα κυβικὰ πάκα σπίρτα χωράει τὸ κυβώτιο αὐτὸ ἂν ἡ ἀκμὴ τοῦ κυβικοῦ πάκου εἶναι 0,25 μέτρα;

5) Ἕνας λάκος μὲ σχῆμα κύβου ἔχει βάθος 2,50 μέτρα. Πόσα κυβικὰ μέτρα χῶμα ἔβγαλαν ἀπὸ τὸ λάκκο αὐτό;

6) Μία κυβικὴ οἰκοδομὴ ἔχει μῆκος 6,50 μέτρα. Χωρίζεται σὲ δύο ἴσα δωμάτια καὶ σ' ἕνα διάδρομο. Ὁ διάδρομος ἔχει ὄγκο 85 κυβικὰ μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κάθε δωματίου;

7) Μία κυβικὴ οἰκοδομὴ ἔχει μῆκος 23,50 μ. Πρόκειται νὰ χωρισθῆ σὲ κυβικὰ δωμάτια μὲ πλάτος, τὸ καθένα 3,80 μέτρα. Σὲ πόσα τέτοια δωμάτια θὰ χωρισθῆ;

8) Ἕνα πυροσβεστικὸ αὐτοκίνητο ἔχει κυβικὸ ντεπόζιτο μὲ ἀκμὴ 3,50 μ. Πόσους τόνους νερὸ χωράει; (Ἕνα κυβικὸ μέτρο χωρεῖ νερὸ ἀποσταγμένο βάρους ἑνὸς τόνου. Μία κυβικὴ παλάμη χωρεῖ νερὸ ἀποσταγμένο βάρους ἑνὸς κιλοῦ. Καὶ ἕνας κυβικὸς δάκτυλος χωρεῖ νερὸ ἀποσταγμένο βάρους ἑνὸς γραμμαρίου).

9) Τὸ μαρμάρινο βάθρο ἑνὸς ἀγάλματος μὲ κυβικὸ σχῆμα ἔχει ὕψος 0,95 μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

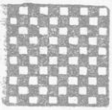
10) Νὰ κάνετε καὶ μόνοι σας πολλὰ ὅμοια προβλήματα.

Προσοχὴ — Προσοχή!

Ἡ κυβικὴ παλάμη εἶναι τὸ χιλιοστὸ τοῦ κυβικοῦ μέτρου. Καὶ ὁ κυβικὸς δάκτυλος εἶναι τὸ ἑκατομμυριοστὸ τοῦ κυβικοῦ μέτρου. Ἄρα ὅταν τὰ προβλήματά μας βροῦμε ἕνα δεκαδικὸ ἀριθμό, μποροῦμε εὔκολα νὰ τὸν ἀναλύουμε π.χ. 9,680736 κυβικὰ μέτρα=9 κ. μ., 680 κ.π. καὶ 736 κ.δ. Καὶ ἀντίθετα, ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 2 κ.μ. — 8 κ.π.—65 κ.δ. γράφεται ὡς δεκαδικὸς ἔτσι :3,008065. Περισσότερες λεπτομέρειες γιὰ τὸ κυβικὸ μέτρο κοίτα στὴν Ἀριθμητική μας μὲ εἰκόνες τῆς Ε' καὶ ΣΤ' τάξεως.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΕ ΕΙΚΟΝΕΣ

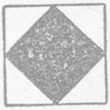
Διάφορες χειροτεχνικὲς ἐργασίες γύρω ἀπὸ τὴν ἑνότητα «ὁ κύβος».



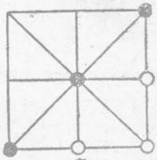
1

2

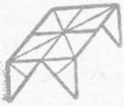
3



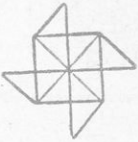
4



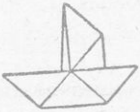
5



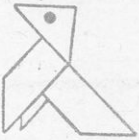
7



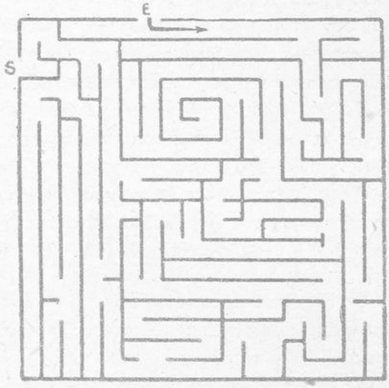
8



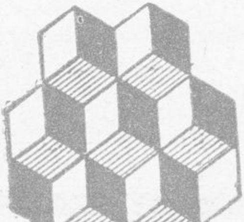
9



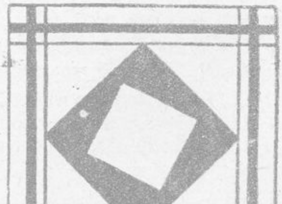
9β



10

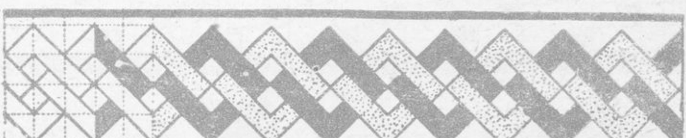


11

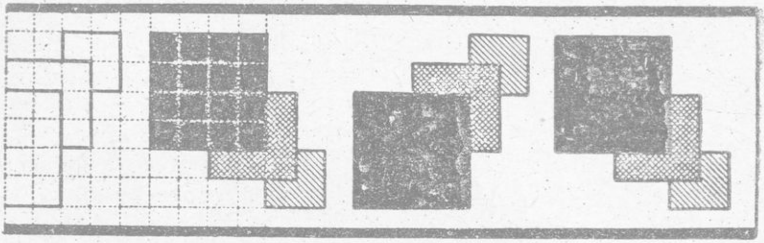


12

13



· Ἐξήγηση τῶν χειροτεχνικῶν ἐργασιῶν τῆς σελ. 35.



14

1) Τὸ παιγνίδι τῆς ντάμας ποὺ τὸ ξέρετε ὅλοι.

2, 3, 4) Κεντοῦμε μὲ χρώματα διάφορα μανδήλια μὲ διακοσμητικὴ τῆς ἀρεσκείας μας ἢ διακοσμοῦμε χαρτόνια τετραγωνικοῦ σχήματος.

5) Τὸ παιγνίδι τῆς «τριάρας» ἢ «τριώτας» ποὺ παίζουν ὅλα τὰ παιδιὰ καὶ πιὸ πολὺ τὰ χωριατόπουλα. Σχεδιάζουν τὸ σχῆμα πάνω στοὺς βράχους καὶ παίζουν τὴν «τριώτα». Δοκιμᾶστε το καὶ σεῖς σὲ χαρτόνι.

6) Σημείωση : Τὸ ὑπ' ἀριθ. 6 σχῆμα παρελείφθη ἀπὸ ἔλλειψη χώρου.

7) Διπλώνομε ἕνα τετράγωνο χαρτὶ στὸ σχῆμα τῆς τριώτας περίπου. Τὸ ξεδιπλώνομε. Φέρομε τὶς γωνίες στὸ μέσον. Τὸ ξαναγυρίζομε καὶ φέρομε πάλι τὶς γωνίες στὸ μέσο. Τέλος φέρομε τὰ μέσα τῶν γωνιῶν στὸ μέσον τοῦ τετραγώνου καὶ διπλώνομε. Ἔτσι σχηματίζεται ἕνα ὡραῖο **τραπεζάκι** (εἰκ. 7).

8) Κρύβομε τὰ πόδια τοῦ τραπεζιοῦ (εἰκ. 7) καὶ σχηματίζομε ἕνα **μύλο** (εἰκ. 8).

9) Σηκῶστε δύο πόδια τοῦ τραπεζιοῦ (εἰκ. 7) ἔτσι ποὺ 2 γωνίες ἀντίθετες νὰ σκεπάζωνται. Κατόπι χαμηλῶστε τὰ πόδια καὶ θὰ σχηματισθῆ μιὰ **κούνια** γιὰ τὸ μωρὸ (καροτσάκι) (εἰκ. 9).

9β) Πιᾶστε τώρα μὲ τὰ δάχτυλα τῆς ἐσωτερικὲς ἐπιφάνειες τῶν 2 ποδιῶν τῆς κούνιας, γυρίστε τὴν πρώτη καὶ σχηματίζεται τὸ κεφάλι τοῦ **κόκορα**. Βάλτε του καὶ ἕνα μάτι (εἰκ. 9β).

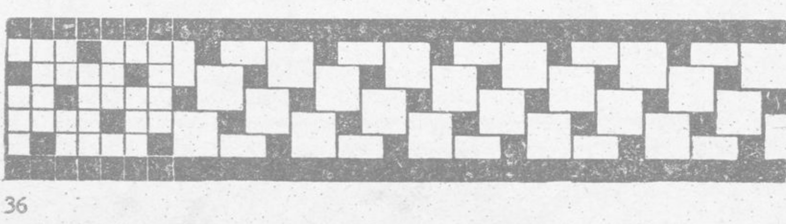
10) *Μαγικὸς λαβύρινθος*.—Νὰ μπῆτε ἀπὸ τὸ σημεῖο Ε καὶ νὰ βγῆτε ἀπὸ τὸ σημεῖο S. Ποιὸς θὰ τὸ πετύχη πρῶτος;

11) *Ὀπτικὸ παιγνίδι—αἴνιγμα*.—Πόσοι κύβοι εἶναι : 5 ἢ 7;

12) Μαντήλι μὲ ἐσωτερικὰ τετράγωνα (χαρτοκολλητική).

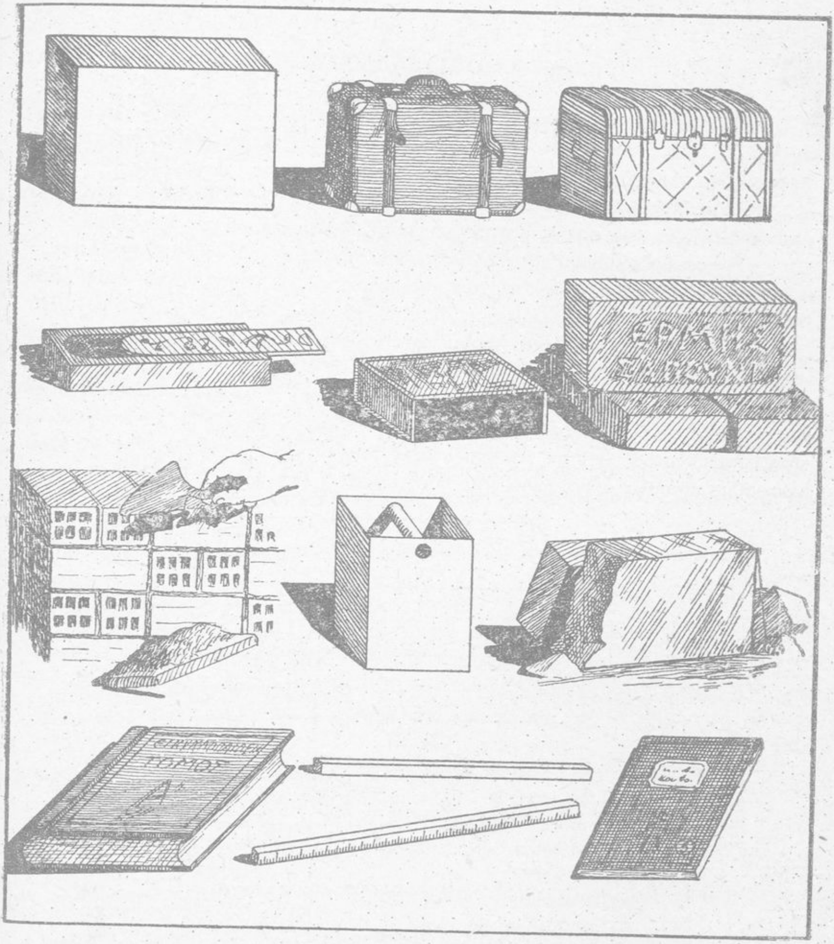
13, 14, 15) Χαρτοπλεκτική : μαίανδροι μὲ τετράγωνα κλπ.

15



ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΕ ΕΙΚΟΝΕΣ

Παρατηροῦμε διάφορα σώματα ποὺ ἔχουν σχῆμα παραλληλεπιπέδου.



Νὰ μεταφέρετε στὴν τάξη σας κάθε ἀντικείμενο ἀπὸ τὸ σπίτι καὶ ἀπὸ τὸ περιβάλλον σας ποὺ ἔχει σχῆμα παραλληλεπιπέδου: διάφορα κουτιὰ καὶ δοχεῖα καὶ νὰ παρατηρήσετε παρόμοια σχολικὰ ἀντικείμενα π.χ. κασετίνες, χάρακες, βιβλία, τετράδια κλπ. Ὁλόκληρη ἡ τάξη σας νὰ εἶναι γεμάτη ἀπὸ τέτοια ἀντικείμενα.

ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΘΟΔΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

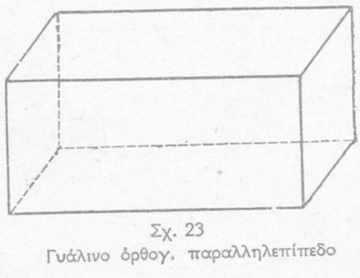
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ

Τὰ σώματα ποὺ βλέπομε στὴ σελίδα 37 δὲν εἶναι κύβοι. Δὲν ἔχουν κυβικὸ σχῆμα. Τὸ σχῆμα ποὺ ἔχουν τὸ σώματα αὐτὰ λέγεται ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Λέμε ὅτι τὰ σώματα αὐτὰ εἶναι ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα.

Τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μοιάζει πολὺ μὲ τὸν κύβο. Ἔχει ὅμως μερικὲς διαφορὲς ποὺ εὔκολα μποροῦμε νὰ τὶς ἰδοῦμε καὶ νὰ τὶς ἐξετάσωμε.

Σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχουν ἡ αἴθουσα τοῦ σχολείου, ἡ κασετίνα μας, τὸ κουτὶ τῶν σπίρτων, ὡρισμένες πλάκες σαπούνι, τὸ βιβλίο μας, διάφορα κιβώτια, κουτιά, μάρμαρα, δοχεῖα καὶ ἄλλα σώματα.

Ἂν προσέξωμε καλὰ θὰ ἰδοῦμε ὅτι τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, ποὺ κρατοῦμε στὰ χέρια μας ἔχει 6 ἕδρες ὅσες ἔχει καὶ ὁ κύβος: 1 κάτω, 1 ἐπάνω καὶ 4 γύρω-γύρω. Τώρα ἂν ἰχνογραφήσωμε ἕνα ξύλινο ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, βλέπομε μονάχα τὶς 3 ἕδρες του. Ἂν ὅμως ἰχνογραφήσωμε ἕνα γυάλινο παραλληλεπίπεδο βλέπομε καὶ τὶς 6 ἕδρες του. Καλύτερα λοιπὸν εἶναι νὰ ἰχνογραφοῦμε γυάλινα ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα (σχ. 23).



Σχ. 23
Γυάλινο ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο

Ὅπως ὁ κύβος ποὺ μάθαμε, ἔτσι καὶ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει:

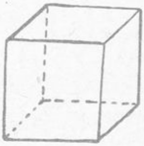
α) 6 ἕδρες
β) 12 ἀκμὲς
γ) 8 κορυφὲς
δ) 12 δίεδρες γωνίες
ε) 8 τρίεδρες γωνίες
στ) 24 ἐπίπεδες γωνίες (4 σὲ κάθε ἕδρα).

Ὅπως ὁ κύβος ἔτσι καὶ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει:

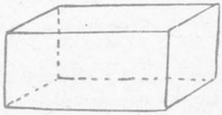
α) Τὶς δύο βάσεις του (τὴν κάτω καὶ τὴν ἐπάνω) ὁριζόντιες.
β) Τὶς 4 παράπλευρες ἕδρες του κατακόρυφες.
γ) Τὶς 8 ἀκμές του (4 ἐπάνω καὶ 4 κάτω) ὁριζόντιες.

δ) Τὶς ὑπόλοιπες 4 ἀκμές του κατακόρυφες.
ε) Τὶς ἀπέναντι ἕδρες καὶ ἀκμὲς παράλληλες.
στ) Τὶς 24 ἐπίπεδες γωνίες του ὀρθές.

Διαφορὰ κύβου καὶ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου



Σχ. 24



Σχ. 25

Στὸν κύβο σχ. 24
α) ὅλες οἱ ἕδρες του εἶναι ἴσες
β) ὅλες οἱ ἀκμὲς του εἶναι ἴσες

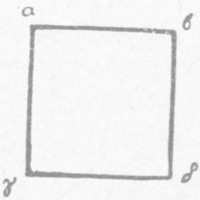
Στὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο σχ. 25 :
α) μόνο οἱ ἀπέναντι ἕδρες εἶναι ἴσες
β) μόνο οἱ ἀπέναντι ἀκμὲς εἶναι ἴσες

Ὀρθογώνιο παραλληλεπίδεπο λέγεται τὸ στερεὸ σῶμα ποὺ ἔχει τὶς ἀπέναντι ἕδρες του ἴσες καὶ παράλληλες καὶ τὶς γωνίες του ὀρθές.

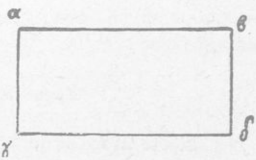
Ὀρθογώνιο παραληλλόγραμμο

Ἂν τοποθετήσωμε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ μία ἀπὸ τὶς μεγάλες ἕδρες του σ' ἕνα λευκὸ χαρτὶ καὶ σύρωμε μὲ τὸ μολύβι μας γραμμὴ γύρω στὴν ἕδρα αὐτή, θὰ σχηματισθῆ ἕνα σχέδιο ποὺ δείχνει τὸ σχῆμα τῆς ἕδρας του (σχ. 27).

Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ἢ ἁπλῶς ὀρθογώνιο.



Σχ. 26



Σχ. 27

Ὁμοιότητες καὶ διαφορὲς τετραγώνου καὶ ὀρθογωνίου

1) *Ὁμοιάζουν* γιατί :
α) Καὶ τὰ δύο σχήματα εἶναι τετράπλευρα, ἔχουν δηλαδὴ 4 πλευρές.
β) Καὶ τὰ δύο σχήματα ἔχουν τὶς ἀπέναντι πλευρὲς ἴσες καὶ παράλληλες.
γ) Καὶ τὰ δύο σχήματα ἔχουν τὶς γωνίες των ὀρθές.

2) *Διαφέρουν* γιατί : α) Τὸ τετράγωνο ἔχει καὶ τὶς 4 πλευρές του ἴσες (σχ. 26) ἐνῶ τὸ ὀρθογώνιο ἔχει μόνο τὶς ἀπέναντι πλευρές του ἴσες (σχ. 27).

'Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ἢ ἁπλῶς ὀρθογώνιο λέγεται τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει τὶς ἀπέναντι πλευρές του ἴσες καὶ παράλληλες καὶ τὶς γωνίες του ὀρθές.

Περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου

Περίμετρος ὀρθογωνίου λέγεται τὸ ἄθροισμα καὶ τῶν τεσσάρων πλευρῶν του. Εὔκολα μποροῦμε νὰ μετρήσωμε τὴν περίμετρο τοῦ ὀρθογωνίου. Μετροῦμε πρῶτα τὴ μεγάλη πλευρά του. Ὅσο βροῦμε τὸ διπλασιάζομε γιατὶ ὅσο μῆκος ἔχει ἡ μία μεγάλη πλευρά ἄλλο τόσο ἔχει καὶ ἡ ἀπέναντι μεγάλη πλευρά. Ἔπειτα μετροῦμε τὴ μικρὴ πλευρὰ καὶ ὅ,τι βροῦμε τὸ διπλασιάζομε γιὰ τὸν ἴδιο λόγο.

Τέλος προσθέτομε τὰ δύο γινόμενα. Ἐκτελοῦμε δηλαδὴ τρεῖς πράξεις: δύο πολλαπλασιασμοὺς καὶ μία πρόσθεση.

Μποροῦμε ὅμως νὰ βροῦμε τὴν περίμετρο καὶ μὲ ἄλλον τρόπο. Προσθέτομε τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος δηλαδὴ τὴ μεγάλη καὶ τὴ μικρὴ πλευρὰ καὶ ὅ,τι βροῦμε τὸ διπλασιάζομε. Παράδειγμα:

Μία αὐλὴ ἔχει σχῆμα ὀρθυγωνίου (σχ. 27). Τὸ μῆκος της (βάση) γδ εἶναι 8 μέτρα καὶ τὸ πλάτος της (ὕψος) αγ εἶναι 6 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός της;

Πρώτη λύση	*Δεύτερη λύση*
$8+8=16$	$8+6=14\times2=28$
$6+6=12+$	$+14$
28 μ.	28

Παρατήρηση. Καὶ στὰ σχήματα πολλὲς φορὲς τὸ μῆκος ἢ τὴν κάτω πλευρὰ μποροῦμε νὰ τὴν ὀνομάζωμε βάση. Ἐπίσης τὸ πλάτος μποροῦμε νὰ τὸ ὀνομάζωμε καὶ ὕψος.

'Εργασίες - ἀσκήσεις - ἐφαρμογὲς

1) Νὰ δείξετε μέσα στὴν τάξη σας μερικὰ ὀρθογώνια.

2) Νὰ δείξετε τὸ μῆκος (βάση) ἑνὸς τοίχου τῆς τάξης σας καὶ τὸ πλάτος της (ὕψος).

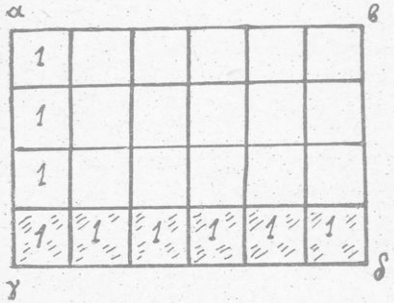
3) Πόση εἶναι ἡ περίμετρος ἑνὸς ὀρθογωνίου κήπου τοῦ ὁποίου ἡ βάση του εἶναι 33,50 μ. καὶ τὸ ὕψος 23,50 μέτρα;

4) Πόσο συρματόπλεγμα θὰ χρειασθοῦμε γιὰ νὰ φράξωμε ἕνα ὀρθογώνιο οἰκόπεδο τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος (βάση) εἶναι 15 μέτρα καὶ τὸ πλάτος (ὕψος) 12,50 μ.; Καὶ πόσο θὰ στοιχίση τὸ συρματόπλεγμα ἂν τὸ μέτρο πουλιέται 3.500 δραχμές;

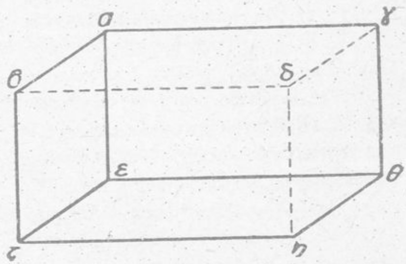
5) Νὰ κάνετε μερικὰ δικά σας προβλήματα καὶ νὰ τὰ λύσετε μόνοι σας.

Ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου

Ἂς ὑποθέσωμε πὼς θέλομε νὰ μετρήσωμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πατώματος τῆς τάξης μας ποὺ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου μὲ βάση (μῆκος) 6 μέτρα καὶ ὕψος (πλάτος) 4 μ. (σχ. 28).



Σχ. 28



Σχ. 29

Θὰ ἐργασθοῦμε ὅπως καὶ γιὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου. Στὴν πλευρὰ τῆς βάσης γδ θὰ τοποθετήσωμε μία σειρὰ ἀπὸ 6 τετραγωνικὰ μέτρα γιατὶ ἀφοῦ ἔχει μῆκος 6 μέτρα μόνο 6 τ. μ. χωρεῖ. Ἂν τώρα ἐξακολουθήσωμε νὰ τοποθετοῦμε τέτοιες σειρὲς ἀπὸ 6 τ. μ. ὥσπου νὰ φτάσωμε στὴν ἀπέναντι πλευρὰ αβ, θὰ ἰδοῦμε ὅτι χωροῦν 4 τέτοιες σειρές, γιατὶ τὸ ὕψος αγ εἶναι 4 μέτρα. Ἄρα θὰ γεμίσωμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πατώματος τῆς τάξης μας μὲ 24 τ. μ.

Ἐπειδὴ ἡ ἐργασία αὐτὴ εἶναι δύσκολη, βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πατώματος, δηλαδὴ τὰ 24 τ. μ., ἂν πολλαπλασιάσωμε τὴ βάση, δηλαδὴ τὰ 6 μέτρα, ἐπὶ τὸ ὕψος, δηλαδὴ ἐπὶ τὰ 4 μέτρα. Ἔτσι ἔχομε: $6 \times 4 = 24$ τ. μ.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου, πολλαπλασιάζομε τὴ βάση (μῆκος) ἐπὶ τὸ ὕψος του (πλάτος)

Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Ἕνα δωμάτιο ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 29). Τὸ μῆκος του εἶναι 6 μέτρα, τὸ πλάτος του 5 μ. καὶ τὸ ὕψος του 4 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ δωματίου αὐτοῦ (πάτωμα, νταβάνι καὶ 4 τοῖχοι);

Λύση:

α) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πατώματος (βάσης) ζεθη εἶναι	$6 \times 5 = 30$ τ. μ.
β) Τὸ ἴδιο ἐμβαδὸν ἔχει καὶ τὸ νταβάνι αβγδ	$6 \times 5 = 30$ »
γ) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγάλου τοίχου αζηδ	$6 \times 4 = 24$ »
δ) Ἄλλο τόσο ὁ ἀπέναντι τοῖχος βεθγ	$6 \times 4 = 24$ »
ε) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικροῦ τοίχου αβεζ	$5 \times 4 = 20$ »
στ) Ἄλλο τόσο ὁ ἀπέναντι τοῖχος γδθη	$5 \times 4 = 20$ »
	Σύνολον 148 τ. μ.

Ἀπόκριση: Βρῆκα ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐσωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ δωματίου αὐτοῦ εἶναι 148 τ. μ.

Ὑπάρχει καὶ ἄλλος τρόπος. Προσπαθῆστε νὰ τὸν βρῆτε μόνοι σας.

Ἐργασίες - ἀσκήσεις - ἐφαρμογὲς

1) Νὰ βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ διαδρόμου τοῦ σχολείου σας.

2) Νὰ βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πατώματος τοῦ σχολείου σας.

3) Θέλομε νὰ ἀσπρίσωμε τὴν τάξη μας (τοὺς 4 τοίχους της). Ἡ τάξη μας ἔχει μῆκος 8 μ., πλάτος 6 μ. καὶ ὕψος 4 μ. Ὁ σοβατζὴς ζητάει 1500 δραχμὲς τὸ τ. μ. Πόσο θὰ στοιχίση τὸ ἄσπρισμα;

4) Ἕνα πάτωμα μὲ μῆκος 6,50 μ. καὶ πλάτος 4,50 μ. πρόκειται νὰ πλακοστρωθῆ μὲ τετραγωνικὰ πλακάκια. Κάθε πλακάκι ἔχει μῆκος 0,25 μ. Πόσα πλακάκια θὰ χρειασθοῦμε;

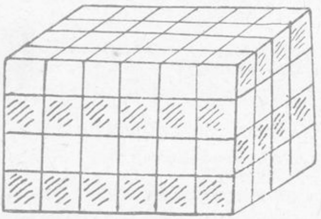
5) Ὁ γείτονας μας κ. Πέτρος θέλει νὰ πατώση μὲ σανίδες τὸ σπίτι του τοῦ ὁποίου τὸ πάτωμα ἔχει μῆκος 8,50 μ. καὶ πλάτος 6,50 μ. Ἡ κάθε σανίδα ἔχει μῆκος 4 μ. καὶ πλάτος 0,40 μ. Πόσες σανίδες θὰ χρειασθῆ ὁ κ. Πέτρος;

6) Νὰ βρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ποὺ ἔχει μῆκος 4,50 μ., πλάτος 3,40 μ. καὶ ὕψος 2,50 μ.

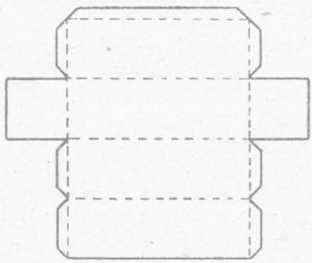
7) Νὰ λύσετε καὶ μόνοι σας πολλὰ ὅμοια προβλήματα.

Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ ὄγκου τοῦ κύβου. Ἂς ὑποθέσωμε ὅτι θέλομε νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο μιᾶς ἀποθήκης ποὺ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ μῆκος 5 μέτρα, πλάτος 4 μ. καὶ ὕψος 3 μ. (σχ. 30).



Σχ. 30



Σχ. 31

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσης ξέρομε ὅτι εἶναι $5 \times 4 = 20$ τ.μ. (μῆκος ἐπὶ πλάτος). Ἑπομένως τὸ πάτωμα τῆς ἀποθήκης τὸ γεμίζομε μὲ 20 κυβικὰ μέτρα. Μὲ 3 τέτοιες σειρὲς ἀπὸ 20 κυβικὰ μέτρα γεμίζομε ὁλόκληρη τὴν ἀποθήκη γιατὶ τὸ ὕψος της εἶναι 3 μέτρα. Ἔτσι ὁ ὄγκος τῆς ἀποθήκης εἶναι $3 \times 20 = 60$ κυβικὰ μέτρα. Ἄρα λοιπὸν βλέπομε πὼς ὅσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσης τόσο κυβικὰ μέτρα χωροῦν σ' αὐτή. Δὲν εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ τὰ τοποθετήσωμε. Ἀφοῦ ξέρομε πώς, ὅσα μέτρα εἶναι τὸ ὕψος τῆς ἀποθήκης τόσες σειρὲς κυβικὰ μέτρα χωρεῖ, δὲν χρειάζεται νὰ τὴ γεμίσωμε. Βρίσκομε λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσης καὶ τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸ ὕψος ἢ μὲ ἄλλα λόγια πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος καὶ τὸ γινόμενο αὐτῶν ἐπὶ τὸ ὕψος.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸ ὕψος

Κατασκευὴ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ χαρτόνι

Ἰχνογραφοῦμε ἐπάνω σὲ ἕνα χαρτόνι 4 ὀρθογώνια ἢ ὅλα ἴσα ἢ τὸ πρῶτο μὲ τὸ τρίτο ἴσα καὶ τὸ δεύτερο μὲ τὸ τέταρτο ἴσα, ἀνάλογα μὲ τὶς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ποὺ θέλομε νὰ κατασκευάσωμε. Ἔπειτα ἰχνογραφοῦμε δίπλα στὸ δεύτερο ὀρθογώνιο ἄλλα δύο τετράγωνα ἢ ὀρθογώνια ἴσα. Ἔτσι σχηματίζεται ἕνας σταυρὸς (σχῆμα 31).

Κατόπι μὲ ἕνα ξυραφάκι ἀποτελειώνομε τὴν ἐργασία ὅπως κάναμε καὶ γιὰ τὴν κατασκευὴ τοῦ κύβου. Μποροῦμε νὰ κατασκευάσωμε καὶ μὲ λεπτὴ σανίδα καὶ μὲ γύψο ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Θὰ ἐργασθοῦμε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ποὺ κατασκευάσαμε καὶ τὸν κύβο.

Ἐργασίες - ἀσκήσεις - ἐφαρμογὲς

1) Νὰ βρῆτε τὸν ὄγκο τῆς τάξης σας.

2) Πόσα κυβικὰ μέτρα χῶμα βγάζομε ἀπὸ ἕνα χαντάκι ποὺ ἔχει μῆκος 35 μ., πλάτος 5 μ. καὶ βάθος 8 μέτρα;

3) Ἕνας τοῖχος ἔχει μῆκος 8,50 μ., πάχος (πλάτος) 0,60 μ. καὶ ὕψος 6,50 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι ὁ τοῖχος αὐτός;

4) Ἕνα κιβώτιο ἔχει μῆκος 1,50 μέτρα, πλάτος 0,80 μέτρα καὶ ὕψος 1 μέτρο. Πόσες πλάκες σαπούνι θὰ χωρέση ἂν ἡ κάθε πλάκα ἔχει διαστάσεις $0{,}08 \times 0{,}05 \times 0{,}04$ μέτρα;

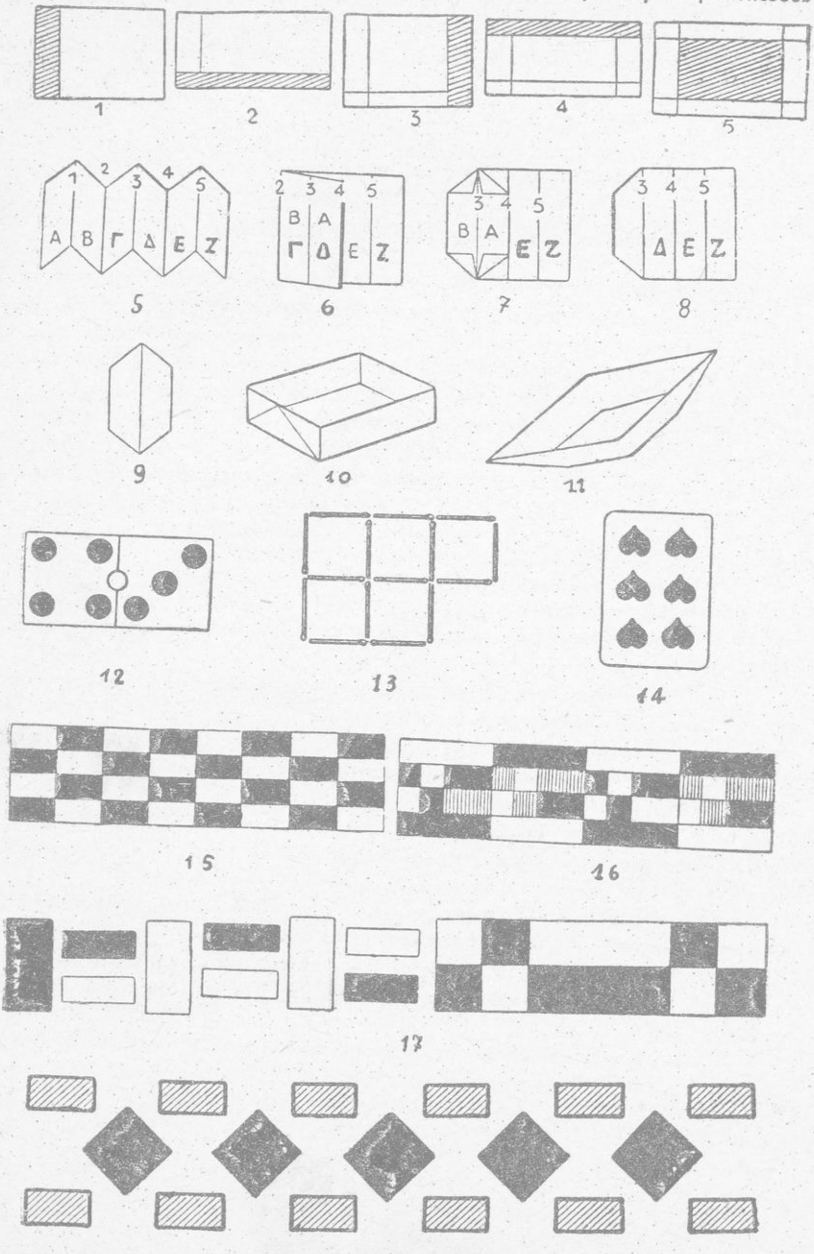
5) Ἕνα χοντρὸ δοκάρι ἔχει μῆκος 4 μέτρα, πλάτος 0,50 μ. καὶ ὕψος 0,40 μ. Πόσες σανίδες θὰ βγοῦν ἀπὸ τὸ δοκάρι αὐτὸ ἂν ἡ κάθε σανίδα ἔχει μῆκος 4 μέτρα, πλάτος 0,50 μ. καὶ ὕψος 0,08 μ.;

6) Σὲ ἕνα χωράφι στρατιῶτες κουβάλησαν χιλιάδες μπάλες χόρτο γιὰ τὰ ζῶα τοῦ στρατοῦ. Τὶς τοποθέτησαν ἔτσι ὥστε σχηματίσθηκε ἕνα πολὺ μεγάλο ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ μῆκος 50 μ., πλάτος 40 μ. καὶ ὕψος 20 μ. Ἡ κάθε μπάλα χόρτο εἶχε διαστάσεις $1{,}30 \times 0{,}80 \times {,}055$ μ. Πόσες ἦταν ὅλες οἱ μπάλες;

7) Νὰ λύσετε καὶ μόνοι σας δικά σας προβλήματα ἀπὸ τὴν καθημερινὴ ζωὴ καὶ τὶς προσωπικὲς παρατηρήσεις σας.

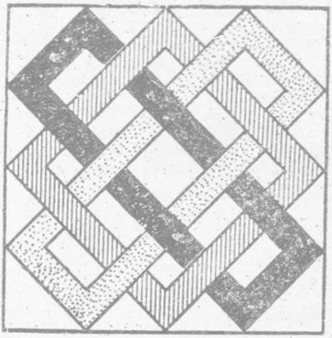
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΕ ΕΙΚΟΝΕΣ

Διάφορες χειροτεχνικὲς ἐργασίες γύρω ἀπὸ τὴν ἑνότητα περὶ «παραλληλεπιπέδου»



ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΕ ΕΙΚΟΝΕΣ

Ἐξήγηση τῶν ἀπέναντι χειροτεχνικῶν ἐργασιῶν



1, 2, 3, 4, 5) Διπλώνοντας ἕνα φύλλο χαρτὶ κατασκευάζομε διάφορα παραλληλόγραμμα.

5, 6, 7, 8, 9, 10) Κατασκευάζομε ἕνα κουτὶ γιὰ γλυκά. Διπλώνομε πρῶτα ἕνα χαρτὶ μὲ σχῆμα παραλληλογράμμου στὰ 6. Ἔτσι ἔχομε 5 δίπλες καὶ 6 ἐπιφάνειες (Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ). Κατόπι φέρομε τὴν ἐπιφάνεια Α νὰ συμπέση στὴ Δ διπλώνοντας τὴν ὑπ᾿ ἀριθ. 2 δίπλα (εἰκ. 6).

7) Ἔπειτα διπλώνομε ἀπὸ μέσα τὶς γωνίες τῶν ἐπιφανειῶν Α καὶ Β.

8) Φέρομε τὴν ἐπιφάνεια Α στὴ Β (εἰκ. 8).

9) Ξαναρχῖστε τὸ ἴδιο δίπλωμα ἀπὸ τὶς ἐπιφάνειες Δ, Ε, Ζ καὶ θὰ σχηματισθῆ τὸ σχῆμα 9.

10) Πιέσατε τὶς δίπλες καλὰ καὶ ἀνοῖξτε τὸ **κουτὶ** ποὺ σχηματίζεται. Σημειῶστε τὶς γωνίες μὲ μιὰ δίπλα.

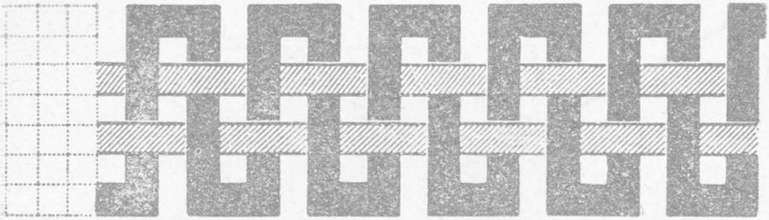
11) Πρὶν ἀνοίξετε τὸ κουτὶ ξαναδιπλῶστε ἄλλη μιὰ φορὰ τὶς γωνίες τῶν ἐπιφανειῶν Α, Β, Ε, Ζ. Ἀνοῖξτε τις γιὰ νὰ σχηματίσετε ἕνα **πλοῖο** σὰν **σκαφίδι**·

12, 14) Ντόμινα καὶ τραπουλόχαρτα.

13) Διασκεδαστικὸ παιγνίδι μὲ 15 σπίρτα. Νὰ βγάλετε 4 σπίρτα καὶ θὰ σχηματισθοῦν 2 ὅμοια παραλληλόγραμμα. Ποιὰ σπίρτα θὰ βγάλετε;

15, 16, 17, κλπ. Χαρτοκολλητική, χαρτοδιπλωτικὴ καὶ διακοσμητική.

ΤΡΙΤΗ ΜΕΘΟΔΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ



Ἡ Κλίμακα

Στὰ διάφορα βιβλία βλέπομε πολλὲς εἰκόνες ποὺ παριστάνουν ζῶα, σπίτια, φυτά, τοπία, διάφορα ἀντικείμενα κλπ. Ὅλα αὐτὰ βέβαια δὲν ἔχουν τὶς πραγματικὲς διαστάσεις των γιατὶ τότε δὲν θὰ μποροῦσαν νὰ χωρέσουν στὶς σελίδες τῶν βιβλίων μας. Εἶναι σχεδιασμένα πολὺ μικρότερα. Γιὰ νὰ ἰχνογραφήσωμε π.χ. τὸν πραγματικὸ ἐλέφαντα στὴ ζωολογία μας, θὰ ἔπρεπε νὰ εἴχαμε πολλὰ μέτρα χαρτὶ καὶ θὰ χρειαζόμασταν πολλὲς ἑβδομάδες νὰ σχεδιάζωμε! Τὸ ἴδιο θὰ συνέβαινε ἂν ἀποφασίζαμε νὰ ἰχνογραφήσωμε, στὶς πραγματικὲς διαστάσεις τὸ φοίνικα, τὸ δέντρο μπαομπάμπ, τὸ ρινόκερο, τὴ φάλαινα κλπ.

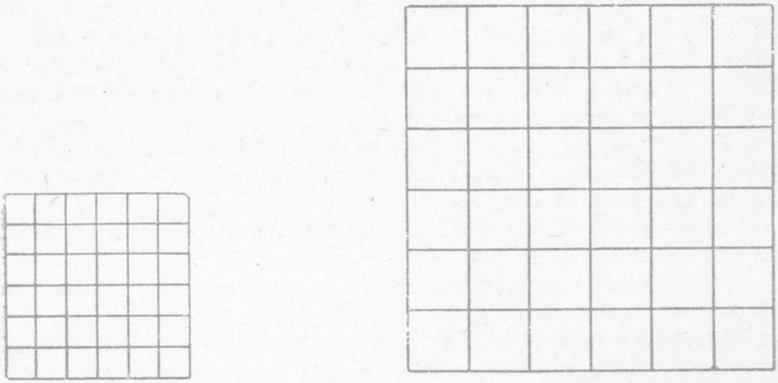
Ἐπίσης γιὰ νὰ χαρτογραφήσωμε τὸ νομό μας ἢ τὴν Ἑλλάδα μας ἢ τὶς ξένες χῶρες καὶ Ἠπείρους μὲ τὴν πραγματική τους ἔκταση θὰ χρειαζόμασταν χιλιάδες χιλιόμετρα χαρτὶ καὶ ποιὸς ξέρει πόσα χρόνια!... Γιαυτὸ οἱ ἄνθρωποι ἀνακάλυψαν τοὺς γεωγραφικοὺς χάρτες στοὺς ὁποίους ἀναπαριστάνουν, μὲ μικρότερες διαστάσεις, τὴν ἔκταση τῶν διαφόρων χωριῶν, ἐπαρχιῶν, Νομῶν, κρατῶν κλπ.

Μὰ καὶ οἱ φωτογράφοι πολλὲς φορὲς ἀναγκάζονται νὰ μεγεθύνουν ἢ νὰ μικρύνουν μιὰ φωτογραφία σύμφωνα μὲ τὴν ἐπιθυμία τῶν πελατῶν τους. Κι ἐμεῖς οἱ μαθητὲς παίρνομε διάφορες εἰκόνες ἀπὸ τὰ βιβλία μας, διάφορα ἱστορικὰ πρόσωπα ἢ καὶ προσωπογραφίες συγγενῶν μας καὶ τὶς μεγεθύνομε στὸ τετράδιο τῆς ἰχνογραφίας μας ἢ σὲ χωριστὸ χαρτὶ γλασέ.

Ἀκόμη βλέπομε στὰ βιβλία μας εἰκόνες ποὺ παριστάνουν σὲ μεγέθυνση, διάφορα μικροσκοπικὰ ζωύφια, π.χ. τὸν ψύλλο, τὸ κουνούπι, τὸν κοριό, τὰ μικρόβια κλπ. Πῶς ἀλλοιῶς θὰ μπορούσαμε νὰ μάθωμε τὴν κατασκευὴ τοῦ σώματός των καὶ τόσες ἄλλες λεπτομέρειες γιαὐτὰ ἀφοῦ μὲ τὸ γυμνὸ μάτι δὲν φαίνονται;

Ἀπ' ὅλα τὰ παραπάνω βγαίνει τὸ συμπέρασμα πὼς πρέπει νὰ μάθωμε νὰ μεγεθύνωμε ἢ νὰ σμικρύνωμε (νὰ μεγαλώνωμε ἢ νὰ μικραίνωμε) τὰ διάφορα ἀντικείμενα, ζῶα, φυτά, εἰκόνες, σχέδια, τὴν ἔκταση τῆς τάξης μας, τοῦ σχολείου μας, τοῦ χωριοῦ μας κλπ. Νὰ μάθωμε νὰ κατασκευάζωμε κι ἐμεῖς διαφόρους χάρτες καὶ σχέδια.

Πῶς μεγεθύνουμε ἕνα σχέδιο



Ἕνα παράδειγμα.—Θέλομε νὰ μεγεθύνωμε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο. Τὸ χωρίζομε σὲ τετραγωνίδια. Ἔπειτα κάνομε ἕνα ἄλλο ὀρθογώνιο μὲ διπλάσιες διαστάσεις καὶ τὸ χωρίζομε κι αὐτὸ σὲ τετραγωνίδια. Τὸ καθένα ἀπὸ τὰ τετραγωνίδια τοῦ δευτέρου ὀρθογωνίου ἔχει πλευρὰ δύο φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὰ τετραγωνίδια τοῦ πρώτου ὀρθογωνίου. Ἔχει ὅμως τετραπλασία ἐπιφάνεια. Γιατὶ συμβαίνει αὐτό ; Εὔκολα μποροῦμε νὰ τὸ καταλάβωμε. (Ἡ πλευρὰ π.χ. ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 3 μέτρα καὶ ἑνὸς ἄλλου διπλασία, δηλ. 6 μέτρα. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου εἶναι 3 X 3 = 9 τ. μ. καὶ τοῦ δευτέρου 6 X 6 = 36 τ. μ. δηλ. 4 φορὲς μεγαλύτερη).

Πῶς σμικρύνουμε ἕνα πρᾶγμα

Παράδειγμα: Θέλομε νὰ σμικρύνομε 2 φορὲς ἕνα τετράγωνο ποὺ ἔχει πλευρὰ 0,06 μ. (Σχεδιάστε ἕνα τέτοιο τετράγωνο).

Γιὰ νὰ γίνη τὸ τετράγωνο αὐτὸ 2 φορὲς μικρότερο θὰ διαιρέσωμε διὰ τοῦ 2 τὴν πλευρά τους Βρίσκομε ἔτσι ὅτι τὸ νέο τετράγωνο θὰ πρέπει νὰ ἔχη πλευρὰ 0,03 μ. δηλ. 2 φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὸ μεγάλο τετράγωνο. Αὐτὴ ἡ σμίκρυνση βλέπομε ὅτι ἔγινε μὲ ἀναλογία 1:2 (ἕνα πρὸς 2). Αὐτὴ ἡ ἀναλογία, στὴ Γεωμετρία, ὀνομάζεται κλίμακα. Λέμε δηλ. ὅτι τὸ πρῶτο τετράγωνο ἔγινε ὑπὸ κλίμακα 1:2 ἢ 1)2 σὲ σύγκριση μὲ τὸ δεύτερο (τὸ μικρότερο) τετράγωνο.

Πῶς κατασκευάζομε τὸ σχέδιο τῆς τάξης μας

Παράδειγμα: Θέλομε νὰ κατασκευάσωμε τὸ σχέδιο τῆς τάξης μας ὑπὸ κλίμακα 1:10 ἢ 1)10 μέτρα.

Ἐκτέλεση: Θὰ μετρήσωμε πρῶτα τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τῆς τάξης μας. Ἂς ὑποθέσωμε π.χ. ὅτι ἔχει 6 μέτρα μῆκος καὶ 4 πλάτος. Σύμφωνα μὲ τὴν κλίμακα ποὺ πήραμε ὡς βάση πρέπει στὸ σχέδιο μας οἱ διατάσεις αὐτὲς νὰ γίνουν στὸ 1)10 τῶν πραγματικῶν δηλ. 0,60 τὸ μῆκος καὶ 0,40 τὸ πλάτος. Θὰ ἀγοράσωμε λοιπὸν μιὰ κόλλα χαρτὶ τοῦ μέτρου διαστάσεων 0,60Χ 0,40 καὶ σ' αὐτὴ θὰ σχεδιάσωμε τὴν τάξη. Στὸ σχέδιο αὐτὸ κάθε πραγματικὸ μέτρο θὰ ἀντιστοιχῆ πρὸς 0,10 (μία παλάμη) καὶ τὰ 0,10 πρὸς 0,01 (ἕνα ἑκατοστὸ—πόντο). Ἡ ἀντίθετα κάθε πόντος στὸ σχέδιο αὐτὸ θὰ ἀντιστοιχῆ πρὸς 10 πόντους πραγματικούς, κάθε 10 πόντοι πρὸς 1 μέτρο καὶ κάθε 1 μέτρο πρὸς 10 μέτρα κλπ.

Δεύτερο παράδειγμα: Θέλομε νὰ κατασκευάσωμε τὸ σχέδιο τῆς τάξης μας ὑπὸ κλίμακα 1:100 ἢ 1)100.

Ἐκτέλεση: Ἡ τάξη μας ἔχει μῆκος 7 μ. καὶ πλάτος 5 μ. Ἄρα στὸ σχέδιό μας, οἱ διαστάσεις αὐτὲς θὰ παρασταθοῦν 100 φορὲς μικρότερες δηλ.: μῆκος 0,07 μ. καὶ πλάτος 005, μ. Ἢ καὶ ἀντίθετα: ὁ 1 πόντος στὸ σχέδιό μας ἀντιστοιχεῖ πρὸς 1 μέτρο πραγματικὸ καὶ 0,05 μ. ἀντιστοιχοῦν πρὸς 5 μέτρα καὶ 0,07 μέτρα πρὸς 7 μέτρα. Μὲ τὶς ἴδιες ἀναλογίες πρέπει νὰ σχεδιασθοῦν καὶ τὰ διάφορα ἀντικείμενα τῆς τάξης μας: θρανία, πίνακας, βιβλιοθήκη.

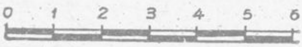
ΣΗΜ.—Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο κατασκευάζονται, ὑπὸ διοφορετικὲς κλίμακες, ὅλοι οἱ γεωγραφικοὶ χάρτες ποὺ χρησιμοποιοῦμε στὰ σχολεῖα μας γιὰ νὰ μάθωμε τὴ Γεωγραφία.

Ἐξήγηση γεωγραφικῶν χαρτῶν

Σὲ ὅλους τοὺς γεωγραφικοὺς χάρτες βλέπομε σημειωμένες διάφορες κλίμακες π.χ. 1:100.000 ἢ 1:1.000.000 ἢ 1:1.500.000 κλπ. Ὅταν ἕνας χάρτης ἔχει σημειωμένη κλίμακα 1:100.000 καταλαβαίνομε ὅτι 100.000 μέτρα μῆκος στὴν πραγματικότητα, παριστάνονται στὸ χάρτη μὲ 1 μέτρο μῆκος καὶ 1000 μέτρα μῆκος μὲ 0,01 μ. Ὅταν λοιπὸν ξέρωμε τὴν κλίμακα τοῦ χάρτη π.χ. 1:500.000 μποροῦμε νὰ βροῦμε τὴν ἀληθινὴ ἀπόσταση δύο σημείων (πόλεων, νησιῶν κλπ.) ἐπάνω σ' αὐτόν. Μετροῦμε μὲ τὸ ὑποδεκάμετρο τὴν ἀπόσταση αὐτὴ στὸ χάρτη. Ἂς ὑποθέσωμε ὅτι εἶναι 0,03 μ. Τὸν ἀριθμὸ αὐτὸν πολλαπλασιάζομε ἐπὶ 500.000 καὶ βρίσκομε ὅτι ἀντιστοιχεῖ πρὸς 15.000 πραγματικὰ μέτρα ἢ πρὸς 15 χιλιόμετρα ἀπόσταση.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν πραγματικὴ ἀπόσταση δύο σημείων σ' ἕνα χάρτη, πολλαπλασιάζομε τὴν ἀπόσταση αὐτὴ ἐπὶ τὸν διαιρέτη τῆς κλίμακός της.

Γιὰ εὐκολία μας ἐκτὸς ἀπὸ τὴν κλίμακα, στὸ κάτω μέρος τοῦ χάρτη εἶναι σημειωμένη μιὰ γραφικὴ παράσταση τέτοια:



Αὐτὴ μᾶς βοηθεῖ νὰ βρίσκομε μὲ εὐκολία τὴν ἀπόσταση σὲ χιλιόμετρα δύο σημείων ἐπάνω στὸ χάρτη. Παίρνομε μὲ τὸ διαβήτη ἢ μὲ τὸ ὑποδεκάμετρό μας τὴν ἀπόσταση δύο πόλεων. Τὴν προσαρμόζομε ἐπάνω στὴ γραφικὴ αὐτὴ παράσταση καὶ βρίσκομε πόσο ἀπέχουν μεταξύ των οἱ δύο αὐτὲς πόλεις.

Παράδειγμα: Σὲ ἕνα χάρτη τῆς Ἑλλάδος βλέπομε δύο πόλεις νὰ ἀπέχουν 23 ἑκατοστά. Ὁ χάρτης αὐτὸς εἶναι σχεδιασμένος ὑπὸ κλίμακα 1:2.000.000. Ποιὰ εἶναι ἡ πραγματικὴ ἀπόσταση μεταξὺ τῶν δύο πόλεων;

Λύση: 0,01 ἑκατοστὸ στὸ χάρτη αὐτὸν ἀντιστοιχεῖ πρὸς 20.000 πραματικὰ μέτρα ἀπόσταση. Ἄρα ἡ ἀπόσταση μεταξὺ τῶν δύο πόλεων εἶναι:

0,23X20.000 = 460.000 ἢ 460 χιλιόμετρα

Λύση μὲ τὸν κανόνα:

0,23 X 2.000.000 = 460.000 ἢ 460 χιλιόμετρα.

Ἐργασίες - ἀσκήσεις - ἐφαρμογὲς

1) Σὲ ἕνα χάρτη μὲ κλίμακα 1:700.000 δύο πόλεις ἀπέχουν 0,05 μ. Ποιὰ εἶναι ἡ πραγματική τους ἀπόσταση;

2) Νὰ βρῆτε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο τὶς ἀποστάσεις στὸ χάρτη τῆς Ἑλλάδος, μεταξὺ Πατρῶν—Ἀθηνῶν, Ἀθηνῶν—Ἰωαννίνων, Ἰωαννίνων—Πρεβέζης, Ἀθηνῶν—Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκης—Σερρῶν.

3) Νὰ βρῆτε κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο τὶς ἀποστάσεις τῶν πρωτευουσῶν τῆς Εὐρώπης καὶ τῶν ἄλλων Ἠπείρων καὶ νὰ λύσετε διάφορα προβλήματα.

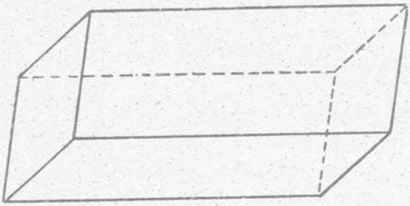
4) Νὰ κατασκευάσετε τὸ σχέδιο τοῦ σχολείου, τοῦ χωριοῦ, τῆς πόλης καὶ τοῦ νομοῦ σας μὲ διάφορες κλίμακες γιὰ νὰ συνηθίσετε.

5) Ἕνας χάρτης σημειώνει ἐπάνω κλίμακα 1:100.000. Θέλω νὰ πάω ἀπὸ μιὰ πόλη σὲ ἄλλη μὲ τὴ μοτοσυκλέττα μου. Οἱ δυὸ αὐτὲς πόλεις ἀπέχουν ἐπάνω στὸ χάρτη 0,5 μ. Σὲ πόσο χρόνο θὰ φθάσω στὸ τέρμα μου ἐὰν τρέχω μὲ 15 χιλιόμετρα τὴν ὥρα;

6) Νὰ λύσετε καὶ μόνοι σας ὅμοια προβλήματα.

Πλάγιο παραλληλεπίπεδο

Τρίτο γεωμετρικὸ σῶμα εἶναι τὸ *πλάγιο παραλληλεπίπεδο* (σχ. 32). Τὸ ὄνομά του δείχνει ὅτι ἔχει πλάγιες καὶ παράλληλες ἕδρες (ἐπίπεδα). Τέτοια σώματα, ποὺ νὰ ἔχουν δηλαδὴ σχῆμα πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἔχομε πολὺ λίγα: μερικὰ κομμάτια γλυκισμάτων τοῦ ταψιοῦ, μερικὰ πλακάκια διαδρόμων κλπ. Τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο, ὅπως καὶ τὰ δυὸ προηγούμενα γεωμετρικὰ σώματα ποὺ μάθαμε, ἔχουν:



Σχ. 32

α) 6 ἕδρες.
β) 12 ἀκμὲς
γ) 8 κορυφὲς
δ) 12 δίεδρες γωνίες (ὅσες καὶ οἱ ἀκμές),
ε) 8 τρίεδρες στερεὲς γωνίες (ὅσες καὶ οἱ κορυφὲς
στ) 24 ἐπίπεδες γωνίες (4 σὲ κάθε σχῆμα ἕδρα).

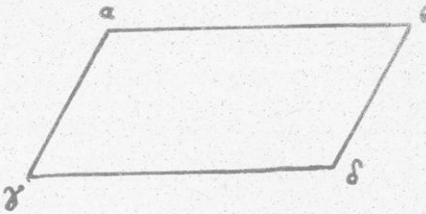
Πλάγιο παραλληλεπίπεδο λέγεται τὸ στερεὸ σῶμα ποὺ ἔχει τὶς ἀπέναντι ἕδρες του ἴσες καὶ παράλληλες.

Πλάγιο παραλληλόγραμμο

Ἂν τοποθετήσωμε ἕνα πλάγιο παραλληλεπίπεδο μὲ τὴν μπροστινὴ ἢ τὴν πισινὴ ἕδρα του σὲ ἕνα λευκὸ χαρτὶ καὶ σύρωμε γύρω στὴν ἕδρα αὐτή, μία γραμμὴ μὲ τὸ μολύβι, θὰ σχηματισθῆ ἕνα σχέδιο ποὺ δείχνει τὸ σχῆμα τῆς ἕδρας του (σχ. 33).

Τὸ σχῆμα αὐτὸ δὲν εἶναι οὔτε τετράγωνο οὔτε ὀρθογώνιο. Καὶ λέγεται π λ ά γ ι ο π α ρ α λ λ η λ ό γ ρ α μ μ ο ἢ ἁπλῶς π α ρ α λ λ η λ ό γ ρ α μ μ ο. Τὸ σχῆμα αὐτὸ ἔχει τὶς ἀπέναντι πλευρές του ἴσες καὶ παράλληλες. Οἱ 4 γωνίες του δὲν εἶναι ὀρθές. Οἱ δύο ἀπέναντι γωνίες του αβγ (σχ. 33) ἔχουν ἄνοιγμα μικρότερο ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα τῆς ὀρθῆς καί, ὅπως μάθαμε στὴν ἀρχή, ὀνομάζονται *ὀξεῖες γωνίες*.

Οἱ γωνίες γαβ καὶ βγδ (σχ. 33) ἔχουν ἄνοιγμα μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ἄ-



Σχ. 33.

νοιγμα τῆς ὀρθῆς καί, ὅπως μάθαμε στὴν ἀρχή, ὀνομάζονται ἀμβλεῖες *γωνίες*.

Οἱ δύο ἀπέναντι ὀξεῖες γωνίες εἶναι ἴσες. Ἐπίσης καὶ οἱ δύο ἀπέναντι ἀμβλεῖες γωνίες εἶναι ἴσες. Γιὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν αὐτῶν βεβαιωνόμαστε ἂν τοποθετήσωμε καταλλήλως τὴ μιὰ γωνία ἐπάνω στὴν ἄλλη.

Πλάγιο παραλληλόγραμμο ἢ ἁπλῶς παραλληλόγραμμο λέγεται τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει τὶς ἀπέναντι πλευρές του ἴσες καὶ παράλληλες καὶ τὶς ἀπέναντι γωνίες του ἴσες. Οἱ δύο ἀπ' αὐτὲς εἶναι ὀξεῖες καὶ οἱ ἄλλες ἀμβλεῖες. Ἀπὸ τὶς 6 ἕδρες τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου τοὐλάχιστον οἱ 4 πρέπει νὰ εἶναι πλάγια παραλληλόγραμμα.

Ἀσκήσεις - ἐργασίες - ἐφαρμογὲς

1) Νὰ δείξετε μερικὰ πλάγια ἐπίπεδα.

2) Νὰ δείξετε μερικὲς πλάγιες ἀκμὲς ἢ πλάγιες εὐθεῖες γραμμές.

3) Νὰ δείξετε μερικὲς ὀξεῖες καὶ μερικὲς ἀμβλεῖες γωνίες.

4) Νὰ θυμηθῆτε πῶς σχηματίζεται μιὰ ὀρθὴ γωνία καὶ νὰ τὴ συγκρίνετε μὲ τὶς ὀξεῖες καὶ ἀμβλεῖες γωνίες.

5) Ὅλες οἱ ὀρθὲς γωνίες, μάθαμε ,εἶναι ἴσες. Γιατί;

6) Οἱ ὀξεῖες γωνίες δὲν εἶναι ἴσες μεταξύ τους. Γιατί;

7) Οἱ ἀμβλεῖες γωνίες ἐπίσης δὲν εἶναι ἴσες. Γιατί;

8) Νὰ ἰχνογραφήσετε στὸ τετράδιό σας 5 ὀξεῖες, 5 ἀμβλεῖες καὶ 5 ὀρθές.

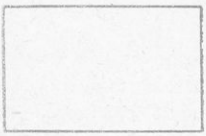
9) Νὰ ἀνοίξετε τὴ γεωμετρία σας αὐτὴ ἄλλη μιὰ φορὰ στὴν εἰσαγωγή. Νὰ προσέξετε τὶς εἰκόνες μὲ τὰ διάφορα εἴδη γωνιῶν ποὺ μάθαμε.

Ἐμβαδὸν πλαγίου παραλληλογράμμου

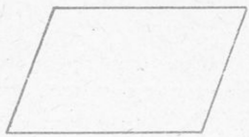
Τὸ σχῆμα 34 εἶναι ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο. Τὸ σχῆμα 35 εἶναι πλάγιο παραλληλόγραμμο.

Ἂν κόψωμε τὸ τμῆμα αγε (σχ. 36) καὶ τὸ τοποθετήσωμε ἀνάποδα στὸ ἀπέναντι μέρος, θὰ ἰδοῦμε ὅτι σχηματίστηκε ἕνα ὀρθογώνιο, τὸ α,ε,δ,β.

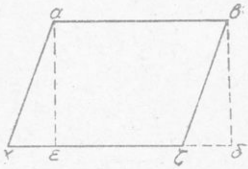
Ξέρομε πῶς βρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου. Πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος ἢ μὲ ἄλλα λόγια τὴ βάση ἐπὶ τὸ ὕψος. Μὰ τὸ ὀρθογώνιο ποὺ σχηματίσθηκε ἔχει τὸ ἴδιο ἐμβαδὸν μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου τὸ βρίσκομε ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος ἢ τὴ βάση ἐπὶ τὸ ὕψος. Χρειάζεται ὅμως νὰ προσέξωμε ποιὸ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου. Ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου δὲν εἶναι ἡ πλάγια πλευρά του ἀλλὰ ἡ κάθετος ποὺ ἑνώνει τὶς δύο παράλληλες βάσεις του, τὴν ἐπάνω καὶ τὴν κάτω.



Σχ. 34



Σχ. 35



Σχ. 36

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος δηλαδὴ τὴ βάση ἐπὶ τὸ ὕψος.

Ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ὁλοκλήρου τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ διὰ τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Βρίσκομε ἀνὰ δύο τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν του καὶ προσθέτομε στὸ τέλος ὅλα τὰ ἐμβαδά.

Ἐργασίες - ἀσκήσεις - ἐφαρμογὲς

1) Ἕνα οἰκόπεδο ἔχει σχῆμα παραλληλογράμμου. Τὸ μῆκος του (βάση) εἶναι 16,50 μ. καὶ τὸ πλάτος (ὕψος) εἶναι 9,40 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ οἰκοπέδου αὐτοῦ;

2) Ἕνα χωράφι μὲ σχῆμα παραλληλογράμμου ἔχει μῆκος 85 μ. καὶ πλάτος 42 μ. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι τὸ χωράφι αὐτὸ καὶ πόσο ἀξίζει ἐὰν κάθε τετραγωνικὸ μέτρο πουλιέται ἀντὶ 4.500 δραχμῶν;

3) Μία αὐλὴ ἔχει σχῆμα παραλληλογράμμου. Τὸ ἐμβαδὸν της εἶναι 72 τ. μ. καὶ τὸ μῆκος της εἶναι 9 μέτρα. Πόσο εἶναι τὸ πλάτος της;

4) Ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου τὸ μῆκος τῆς βάσεως εἶναι 2,50 μ.

Τὸ πλάτος 1,40 μ. καὶ τὸ ὕψος 3,20 μ. Πόσα τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας του;

5) Νὰ κάμετε καὶ μόνοι σας διάφορα τέτοια προβλήματα.

Ὄγκος πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο πλαγίου παραλληλεπιπέδου πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος.

Ἕνα παράδειγμα: Οἱ διαστάσεις ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι: μῆκος 5 μ., πλάτος 3 μ., ὕψος 4 μ. Ποιὸς εἶναι ὁ ὄγκος του;

Λύση: Ὁ ὄγκος του εἶναι 5 X 3 X 4 = 60 κ.μ.

Ἐμβαδὸν βάσεώς του εἶναι 5 X 3 = 15 τ. μ.

Ἄρα ὁ ὄγκος του εἶναι 15 τ. μ. X 4 μ. = 60 κ. μ.

Παρατήρηση: Νὰ μὴ λησμονοῦμε ὅτι τὸ πλάτος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἡ ἀπόσταση τῶν δύο παραλλήλων πλευρῶν τῆς βάσεώς του καὶ τὸ ὕψος εἶναι ἡ κάθετος ποὺ ἑνώνει τὶς δυὸ παράλληλες βάσεις του (τὴν ἐπάνω καὶ τὴν κάτω).

Κατασκευὴ πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Ἡ κατασκευὴ πλαγίου παραλληλεπιπέδου μὲ χαρτόνι, λεπτὸ σανίδι καὶ γύψο γίνεται μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ποὺ γίνεται ὁ κύβος καὶ τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο.

Ἐργασίες - ἀσκήσεις - ἐφαρμογές

1) Νὰ βρῆτε τὸν ὄγκο πλαγίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις 10 X 8 X 7 μ.

2) Ἕνας τοῖχος ἀπὸ μπετόν, σχήματος πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἔχει μῆκος 2,5 μ., πλάτος (πάχος) 0,50 μ. καὶ ὄγκο 7 κ. μ. Πόσα μέτρα εἶναι τὸ ὕψος του;

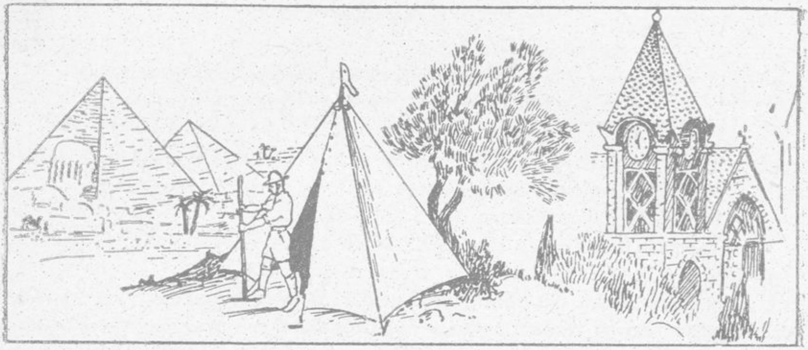
3) Τί διαφέρει τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἀπὸ τὸ πλάγιο;

4) Τί διαφέρει τὸ ὀρθογώνιο ἀπὸ τὸ παραλληλόγραμμο;

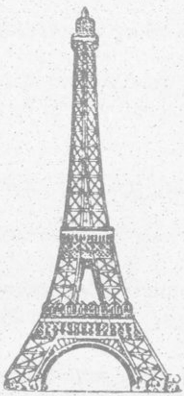
5) Πόσες ὀξεῖες καὶ ἀμβλεῖες γωνίες ἔχει τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο;

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΕ ΕΙΚΟΝΕΣ

Παρατηροῦμε διάφορα σώματα ποὺ ἔχουν τὸ σχῆμα πυραμίδων.



1 2 3



4

1. Οἱ πυραμίδες τῆς Αἰγύπτου.
2. Σκηνὴ προσκόπων μὲ σχῆμα πυραμίδας.
3. Τὸ ἐπάνω μέρος τῆς στέγης μερικῶν πύργων ἢ εὐρωπαϊκῶν σπιτιῶν.
4. Ὁ Πύργος τοῦ Ἄϊφελ.

Νὰ βρῆτε καὶ σεῖς μερικὰ ἀντικείμενα τὰ ὁποῖα ἔχουν σχῆμα πυραμίδας τριγωνικῆς ἢ πολυγωνικῆς καὶ νὰ τὰ σχεδιάσετε στὴν ἰχνογραφία σας. Τέτοια εἶναι μερικὰ ἡρῷα, μερικὰ σιδερένια κάγκελα, οἱ τροῦλοι μερικῶν ἐκκλησιῶν κλπ.

ΠΕΜΠΤΗ ΜΕΘΟΔΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΔΑ

Ὡς τώρα μάθαμε τρία στερεὰ σώματα ποὺ μοιάζουν μεταξύ τους: τὸν κύβο, τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καὶ τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο. Καὶ τὰ τρία αὐτὰ ἔχουν: 6 ἕδρες, 12 ἀκμές, 8 κορυφές, 12 δίεδρες γωνίες, 8 τρίεδρες στερεές γωνίες καὶ 24 ἐπίπεδες γωνίες.

Σήμερα θὰ μιλήσωμε γιὰ ἕνα ἄλλο στερεὸ σῶμα, ποὺ δὲν μοιάζει μὲ τὰ τρία προηγούμενα. Τὸ νέο αὐτὸ σῶμα ποὺ βλέπομε στὰ σχήματα 37 καὶ 38, ὀνομάζεται *τριγωνικὴ πυραμίδα*. Τέτοιο σχῆμα βλέπομε σὲ μερικὲς μαρμάρινες στῆλες τῶν «Ἡρώων» ποὺ εἶναι στημένες στὶς πλατεῖες τῶν χωριῶν καὶ τῶν πόλεων. Ἐπίσης σὲ μερικοὺς τρούλλους ἐκκλησιῶν στὶς Εὐρωπαϊκὲς πρωτεύουσες (Ρώμη, Παρίσι κλπ.) καὶ στὶς πυραμίδες τῆς Αἰγύπτου (Πυραμίδα τοῦ Χέοπα).

Ἂς πάρωμε τώρα μιὰ ξύλινη τριγωνικὴ πυραμίδα στὰ χέρια μας ἀπὸ αὐτὲς ποὺ ἔχομε στὸ σχολεῖο μας. Ὅταν τὴν προσέξωμε καλὰ βλέπομε ὅτι ἔχει;

α) 4 ἕδρες
β) 6 ἀκμὲς
γ) 4 κορυφὲς
δ) 6 δίεδρες γωνίες (ὅσες καὶ οἱ ἀκμὲς)
ε) 4 τρίεδρες στερεὲς γωνίες (ὅσες καὶ οἱ κορυφὲς)
στ) 12 ἐπίπεδες γωνίες (3 σὲ κάθε ἕδρα).


Σχ. 37


Σχ. 38

Ἂν ὅμως ἀφήσωμε ἀπὸ τὰ χέρια μας τὴν ξύλινη τριγωνικὴ πυραμίδα καὶ τὴν ἰχνογραφήσωμε στὸ τετράδιό μας ἢ στὸν πίνακα (σχ. 37) θὰ ἰδοῦμε ὅτι δείχνει μόνο τὶς δυὸ ἕδρες της. Ἂν ὅμως ἰχνογραφήσωμε μία γυάλινη τότε θὰ διακρίνωμε καὶ τὶς 4 ἕδρες της (σχ. 38).

Τρίγωνο

Ἂν τοποθετήσωμε τὴν ξύλινη τριγωνικὴ πυραμίδα μας μὲ μία ἀπὸ τὶς ἕδρες της ἐπάνω σὲ ἕνα λευκὸ χαρτὶ καὶ σύρωμε μὲ τὸ μολύβι γραμμὴ γύρω ἀπὸ τὴν ἕδρα της, θὰ σχηματισθῆ ἕνα σχέδιο ποὺ δείχνει τὸ σχῆμα τῆς ἕδρας (σχ. 42 καὶ 43).

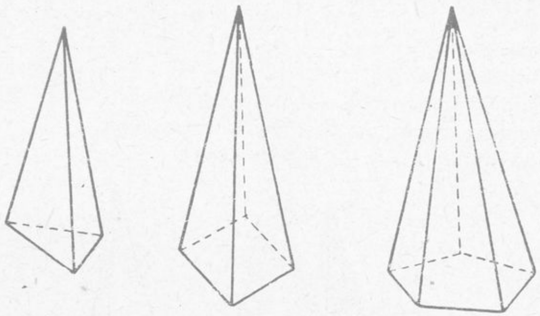
Τὸ σχῆμα αὐτὸ ἔχει 3 πλευρὲς καὶ 3 γωνίες καὶ λέγεται τρίγωνο.

Τρίγωνο λέγεται τὸ σχῆμα ποὺ περικλείεται ἀπὸ 3 εὐθεῖες γραμμὲς οἱ ὁποῖες σχηματίζουν τρεῖς γωνίες.

Ἐπειδὴ ἡ ἕδρα τῆς πυραμίδος αὐτῆς εἶναι τρίγωνο γι' αὐτὸ τὴ λέμε τριγωνικὴ πυραμίδα.

Ὑπάρχουν πολλὲς πυραμίδες ποὺ ἔχουν βάση τετράπλευρο σχῆμα ἢ πεντάπλευρο ἢ πολύπλευρο. Ἀνάλογα μὲ τὸ σχῆμα τῆς βάσεώς της, ἡ πυραμίδα παίρνει τὸ ὄνομά της:

1) Ἂν ἔχη βάση τρίγωνο λέγεται τριγωνικὴ (σχ. 39).
2) Ἂν ἔχη βάση τετράγωνο λέγεται τετραγωνικὴ (σχ. 40).
3) Ἂν ἔχη βάση πεντάγωνο λέγεται πενταγωνικὴ (σχ. 41).



Σχ. 39 Σχ. 40 Σχ. 41

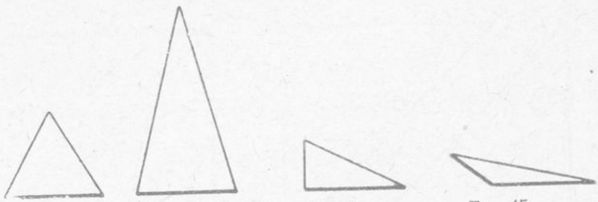
Ὅποιο σχῆμα ὅμως καὶ νὰ ἔχη ἡ βάση τῆς πυραμίδας, οἱ ὑπόλοιπες παράπλευρες ἕδρες της ἔχουν σχῆμα τρίγωνο.

Ὡς βάση τῆς πυραμίδας, ὅταν εἶναι τριγωνική, παίρνομε τὴ μικρότερη ἕδρα (σχ. 39). Ἂν εἶναι τετραγωνική, πενταγωνικὴ ἢ πολυγωνική, γιὰ βάση παίρνομε τὴν τετραγωνική, πενταγωνικὴ ἢ πολυγωνικὴ ἕδρα. Κορυφὴ τῆς πυραμίδας εἶναι ἡ κορυφὴ ποὺ βρίσκεται ἀπέναντι ἀπὸ τὴ βάση. Ὕψος τῆς πυραμίδας εἶναι ἡ κάθετος ποὺ ἀρχίζει ἀπὸ τὴν κορυφὴ καὶ φθάνει μέχρι τὴ βάση (σχ. 39).

Πυραμίδα λέγεται τὸ στερεὸ σῶμα ποὺ ἔχει μία τριγωνικὴ ἢ πολυγωνικὴ ἕδρα. Ὡς βάση καὶ τὶς ὑπόλοιπες ἕδρες της τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἑνώνονται σὲ μία κορυφή.

Εἴδη τριγώνων

Τὰ παρακάτω τρίγωνα, ὅπως βλέπομε, ἔχουν μερικὲς διαφορὲς μεταξὺ τους. Ἂς προσέξωμε πρῶτα τὶς πλευρές των:



Σχ. 42 Σχ. 43 Σχ. 44 Σχ. 45

1) Τὸ τρίγωνο (σχ. 42) ἔχει καὶ τὶς τρεῖς πλευρές του ἴσες. Γι' αὐτὸ λέγεται ἰσόπλευρο.

2) Τὸ τρίγωνο (σχ. 43) ἔχει μόνον τὶς δυὸ πλευρές του ἴσες δηλαδὴ τὰ δυὸ σκέλη του. Γι' αὐτὸ λέγεται ἰσοσκελές.

3) Τὰ τρίγωνα (σχ. 44 καὶ σχ. 45) δὲν ἔχουν τὶς πλευρές των ἴσες καὶ λέγονται σκαλινά.

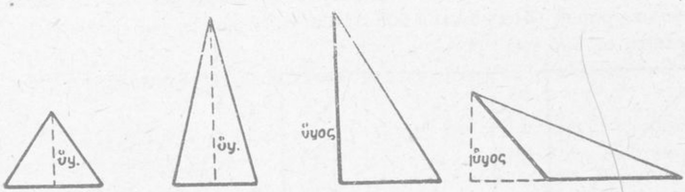
Τώρα ἂς προσέξωμε τὶς γωνίες των:

1) Τὸ ἰσόπλευρο καὶ τὸ ἰσοσκελὲς (σχ. 42 καὶ 43) ἔχουν καὶ τὶς τρεῖς γωνίες των ὀξεῖες (μικρότερες ἀπὸ τὴν ὀρθή). Γιαὐτὸ λέγονται ὀξυγώνια.

2) Τὸ τρίγωνο τοῦ σχήματος 44 ἔχει τὴ μιὰ γωνία του ὀρθή. Γι αὐτὸ λέγεται ὀρθογώνιο.

3) Τὸ τρίγωνο τοῦ σχήματος 45 ἔχει τὴ μία γωνία του ἀμβλεία (μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ὀρθή). Γι αὐτὸ λέγεται ἀβλυγώνιο.

Ὡς βάση τοῦ τριγώνου παίρνομε ὁποιαδήποτε ἀπὸ τὶς 3 πλευρές του. Κορυφὴ τοῦ τριγώνου λέγεται τὸ σημεῖο ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὴ βάση του

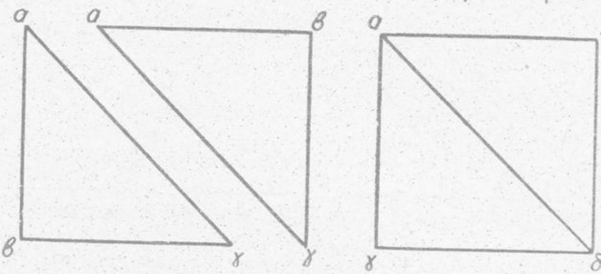


Σχ. 46 Σχ. 47 Σχ. 48 Σχ. 49

καὶ ὕψος τοῦ τριγώνου λέγεται ἡ κάθετος, ποὺ ἀρχίζει ἀπὸ τὴν κορυφὴ καὶ φθάνει στὴ βάση. Τὸ ὕψος, στὸ ἰσόπλευρο καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνο, πέφτει στὸ μέσον τῆς βάσης (σχ. 46 καὶ 47). Στὸ ὀρθογώνιο, ὕψος του εἶναι ἡ κάθετη πλευρὰ του (σχ. 48). Καὶ στὸ ἀμβλυγώνιο τὸ ὕψος του πέφτει ἔξω ἀπὸ τὴ βάση του (σχ. 49).

Ἐμβαδὸν τριγώνου

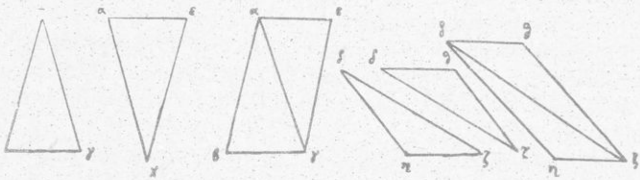
Ἂν ἑνώσωμε δύο ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα π.χ. τὰ βγ (σχ. 50 καὶ 51), τὸ δεύτερο ἀνάποδα, ἔτσι ποὺ οἱ μεγαλύτερες πλευρές τους (οἱ ὑποτείνουσες) νὰ πέσουν ἡ μία ἐπάνω στὴν ἄλλη, δηλαδὴ ἡ αγ τοῦ πρώτου νὰ πέση



Σχ. 50 Σχ. 51 Σχ. 52

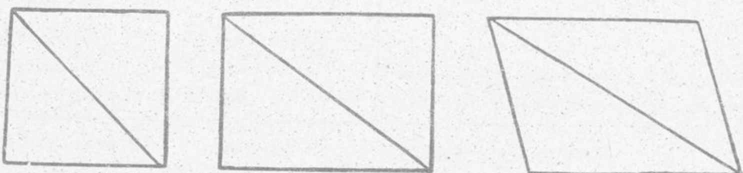
ἐπάνω στὴν αγ τοῦ δευτέρου, θὰ σχηματισθῆ ἕνα ὀρθογώνιο τὸ αβγδ (σχ. 52).

Καὶ ἂν ἑνώσωμε δύο ἴσα ὀξυγώνια τρίγωνα (σχ. 53) ἢ δύο ἴσα ἀμβλυγώνια (σχ. 54), θὰ σχηματισθοῦν δύο παραλληλόγραμμα: τὸ αβγε καὶ τὸ δηζθ.



Σχ. 53 Σχ. 54

Ἂς δοκιμάσωμε τώρα καὶ ἀντίθετα. Ἂν πάρωμε ἕνα τετράγωνο (σχ. 55), ἕνα ὀρθογώνιο (σχ. 56) καὶ ἕνα παραλληλόγραμμο (σχ. 57) καὶ ἑνώσωμε μὲ μία εὐθεία γραμμὴ (διαγώνιο) δύο ἀπέναντι γωνίες, θὰ ἰδοῦμε ὅτι χωρίζονται, τὸ καθένα, σὲ δύο ἴσα τρίγωνα.



Σχ. 55 Σχ. 56 Σχ. 57

Ἀπὸ ὅλα αὐτὰ καταλαβαίνομε, ὅτι μὲ δύο ἴσα τρίγωνα σχηματίζομε ἕνα τετράγωνο ἢ ὀρθογώνιο ἢ παραλληλόγραμμο. Ἐπίσης ἕνα τετράγωνο ἢ ὀρθογώνιο ἢ παραλληλόγραμμο, ὅταν τραβήξωμε μία διαγώνιο, χωρίζεται σὲ δύο ἴσα τρίγωνα. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι τὸ μισὸ ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀντιστοίχου τετραγώνου ἢ ὀρθογωνίου ἢ παραλληλογράμμου.

Ἂν προσέξωμε καλὰ θὰ ἰδοῦμε ὅτι ἡ βάση καὶ τὸ ὕψος τῶν τριγώνων εἶναι βάση καὶ ὕψος τῶν ἀντιστοίχων: τετραγώνου, ὀρθογωνίου ἢ παραλληλογράμμου. Καὶ ἀφοῦ ξέρομε πῶς, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου ἢ τοῦ ὀρθογωνίου ἢ τοῦ παραλληλογράμμου, πολλαπλασιάζομε τὴ βάση ἐπὶ τὸ ὕψος, τότε γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου πολλαπλασιάζομε τὴ βάση ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιροῦμε διὰ τοῦ 2.

Ἂς πάρωμε ἕνα παράδειγμα γιὰ νὰ τὸ καταλάβωμε καλύτερα. Ἔχομε τὸ

Σχ. 58

ὀρθογώνιο αβγδ (σχ. 58) ποὺ ἔχει βάση 5 μέτρα καὶ ὕψος 4 μέτρα. Τὸ ἐμβαδόν του εἶναι 5 X 4 = 20 τ.μ. Τὸ ἴδιο ὀρθογώνιο μὲ τὴ διαγώνιο αγ χωρίζεται σὲ δύο τρίγωνα ἴσα: στὸ αβγ καὶ στὸ αγδ ποὺ καὶ τὰ δύο ἔχουν βάσεις ἴσες (βγ = αδ) καὶ ὕψη ἴσα (αβ = γδ). Δηλαδὴ βάση 5 μ. καὶ ὕψος 4 μ. Ἄρα καθένα ἀπὸ αὐτὰ ἔχει τὸ μισὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου δηλαδὴ 10 τ. μ. Μὰ τὸν ἀριθμὸ 10 τ. μ. τὸν βρίσκομε ἂν πολλαπλασιάσωμε τὴ βάση 5 μ. ἐπὶ τὸ ὕψος 4 μ. καὶ διαιρέσωμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ 2 (5 X 4 = 20 : 2 = 10 τ.μ.). Ἄρα:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου πολλαπλασιάζομε τὴ βάση ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιροῦμε διὰ 2

Ἐμβαδὸν τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδας

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδας, βρίσκομε πρῶτα τὸ ἐμβαδὸν κάθε ἕδρας χωριστὰ καὶ κατόπι προσθέτομε ὅλα τὰ ἐμβαδά.

Ἐργασίες - ἀσκήσεις - ἐφαρμογὲς

1) Νὰ σχεδιάσετε μία τριγωνική, μία τετραγωνικὴ καὶ μία ἑξαγωνικὴ πυραμίδα.

2) Νὰ σχεδιάσετε καὶ νὰ ὀνομάσετε διάφορα τρίγωνα: ἰσόπλευρα, ἰσοσκελῆ, σκαλινά, ὀξυγώνια, ὀρθογώνια, ἀμβλυγώνια.

3) Ἡ βάση μιᾶς τριγωνικῆς αὐλῆς εἶναι 6,50 μ. καὶ τὸ ὕψος της 4,50 μ. Πόσα τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

4) Ἑνὸς τριγωνικοῦ οἰκοπέδου ἡ βάση εἶναι 60 μέτρα καὶ τὸ ὕψος 20 μέτρα. Νὰ βρεθῇ: α) τὸ ἐμβαδόν του, β) πόσο ἀξίζει ὁλόκληρο τὸ οἰκόπεδο ἂν τὸ τ.μ. ἔχῃ 7.500 δραχμές;

5) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγωνικοῦ χωραφιοῦ εἶναι 600 τ.μ. καὶ τὸ ὕψος του 30 μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ βάση του;

6) Ἡ περίμετρος ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 8,70 μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ μία πλευρά του;

7) Πόσα μέτρα εἶναι ἡ περίμετρος ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου τοῦ ὁποίου ἡ βάση εἶναι 3,6 μ. καὶ τὸ ἕνα του σκέλος 6,40 μέτρα;

8) Ἕνας ἀγόρασε ἕνα τριγωνικὸ οἰκόπεδο πρὸς 5.000 δραχμὲς τὸ τ. μέτρο. Ἡ βάση του εἶναι 8 μέτρα καὶ τὸ ὕψος του 35 μέτρα. Πόσα χρήματα ἔδωσε γιὰ ὁλόκληρο τὸ οἰκόπεδο;

9) Νὰ λύσετε καὶ μόνοι σας διάφορα ὅμοια προβλήματα ἀπὸ τὴν καθημερινὴ ζωή, ἀπὸ τὶς προσωπικές σας παρατηρήσεις κλπ.

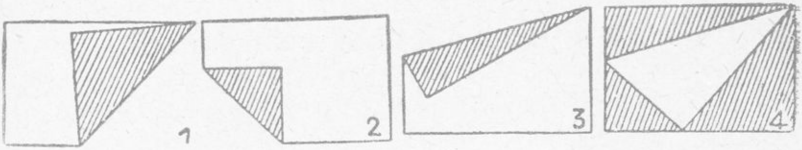
Διάφορες χειροτεχνικὲς ἐργασίες=Ἐξήγηση εἰκόνων τῆς ἀπέναντι σελίδος.

1, 2, 3, 4) Χαρτοδιπλωτική. Διπλώνοντας κομμάτια χαρτὶ σχηματίζομε διάφορα τρίγωνα.

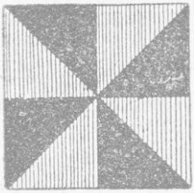
5α, 5β) Χαρτοκοπτική.

6) Διασκεδαστικὸ παιχνίδι μὲ 10 σπίρτα. Ἀλλάξετε θέση σὲ 2 σπίρτα καὶ θὰ σχηματισθοῦν 4 ἴσα τρίγωνα.

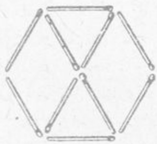
7, 8, 9, 10) Σχεδιάζομε τρίγωνα, τὰ διακοσμοῦμε καὶ κατόπι τὰ κεντοῦμε ἢ τὰ χρωματίζομε. Γίνονται καὶ μὲ χαρτοκολλητικὴ πολὺ καλά.



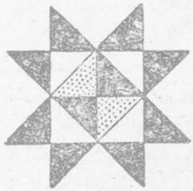
1 2 3 4



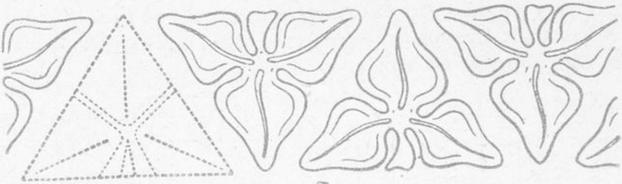
5α



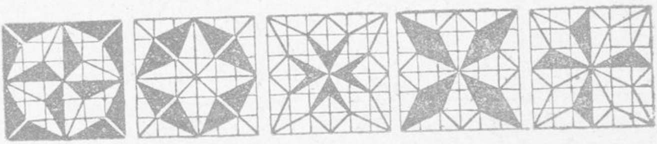
6



5β

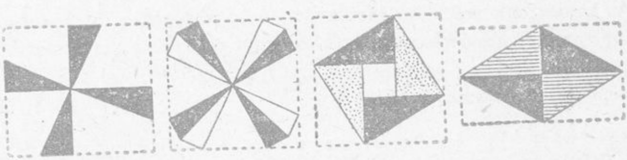


7

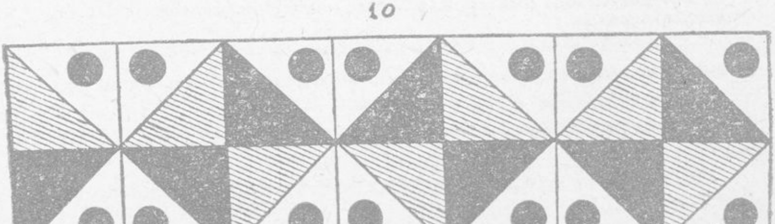


8

9



10

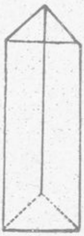


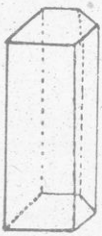
ΕΚΤΗ ΜΕΘΟΔΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

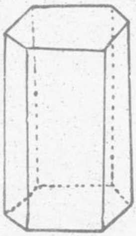
ΠΡΙΣΜΑΤΑ

Γιὰ νὰ ἀποτελειώσωμε τὶς πυραμίδες θὰ πρέπει νὰ μάθωμε ἀκόμη, πῶς θὰ βρίσκωμε τὸν ὄγκο τους. Μὰ γιὰ νὰ καταλάβωμε καλὰ πῶς βρίσκεται ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδας πρέπει νὰ ποῦμε μερικὰ λόγια γιὰ κάποια ἄλλα στερεὰ γεωμετρικὰ σώματα ποὺ ὀνομάζονται *πρίσματα*.

Ὅπως μάθαμε στὰ προηγούμενα μαθήματα, ὁ κύβος, τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καὶ τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο ἔχουν τὶς δύο ἀπέναντι βάσεις των (τὴν ἐπάνω καὶ τὴν κάτω) τετράπλευρες, ἴσες μεταξύ τους καὶ παράλληλες. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ ἄλλα στερεὰ σώματα ποὺ ἔχουν τὶς βάσεις τους ἴσες καὶ παράλληλες ὄχι ὅμως τετράπλευρες ἀλλὰ τρίπλευρες, πεντάπλευρες, ἑξάπλευρες κλπ. (σχ. 59, 60, 61).


Σχ. 59


Σχ. 60


Σχ. 61

Ὅλα τὰ σώματα αὐτὰ λέγονται πρίσματα.

Ἂν προσέξωμε καλά, θὰ ἰδοῦμε ὅτι, ὅσες πλευρὲς κι ἂν ἔχουν οἱ βάσεις τῶν πρισμάτων, ἡ παράπλευρη ἐπιφάνειά τους ἀποτελεῖται πάντοτε ἀπὸ παραλληλόγραμμα. Ἐπίσης, ὅσες πλευρὲς ἔχει ἡ βάση ἄλλες τόσες ἕδρες ἔχει καὶ ἡ παράπλευρή τους ἐπιφάνεια. Ἄρα:

Πρίσμα λέγεται τὸ στερεὸ σῶμα ποὺ ἔχει τὶς δύο ἀπέναντι ἕδρες του (τὶς δύο βάσεις του) ἴσες καὶ παράλληλες καὶ τὶς παράπλευρες ἕδρες του παραλληλόγραμμα.

ΣΗΜ.—Δὲν πρέπει νὰ λησμονοῦμε ὅτι καὶ τὸ τετράγωνο εἶναι καὶ παραλληλόγραμμο μαζί.

Ὕψος τῶν πρισμάτων εἶναι μία ὁποιαδήποτε κάθετος μεταξὺ τῶν δύο βάσεων.

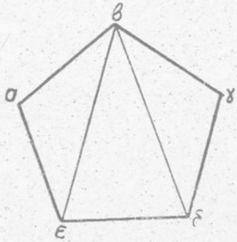
Ὁ κύβος, τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καὶ τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο λέγονται καὶ τετραγωνικὰ πρίσματα γιατὶ ἡ βάση τους ἔχει 4 πλευρές. Τὸ πρίσμα (σχ. 59) λέγεται τριγωνικὸ πρίσμα γιατὶ οἱ βάσεις του εἶναι τρίγωνα, Τὸ σχῆμα 60 λέγεται πενταγωνικὸ πρίσμα. Τὸ σχῆμα 61 λέγεται ἑξαγωνικὸ πρίσμα.

Πρίσματα εἶναι μερικὲς μαρμάρινες κολῶνες σπιτιῶν, ἐκκλησιῶν καὶ ἀγαλμάτων. Πρίσματα εἶναι καὶ τὰ περισσότερα γυάλινα καὶ κρυστάλλινα κομμάτια τοῦ πολυελαίου τῶν ἐκκλησιῶν πού, ὅπως μάθαμε στὴ Φυσικὴ Πειραματική, ἀναλύουν τὸ φῶς τοῦ ἡλίου σὲ ἑπτὰ χρώματα.

Ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος

Ὅταν ἡ βάση τοῦ πρίσματος εἶναι τετράγωνο, ὀρθογώνιο ἢ παραλληλόγραμμο, ξέρομε πῶς βρίσκεται τὸ ἐμβαδόν του (πολλαπλασιάζομε τὴ βάση ἐπὶ τὸ ὕψος). Ὅταν ὅμως εἶναι πολύγωνο (δηλαδὴ ἀπὸ πεντάπλευρο καὶ ἄνω) πῶς θὰ βρίσκωμε τὸ ἐμβαδόν;

Παράδειγμα: Μία πλατεία ἔχει σχῆμα πεντάγωνο (σχ. 62). Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδόν της, πρέπει νὰ τὴ χωρίσωμε σὲ τρίγωνα μὲ διαγώνιες ποὺ νὰ ἀρχίζουν ἀπὸ μία γωνία π. χ. ἀπὸ τὴν γωνία β. Μὲ τὶς δύο διαγώνιες βε καὶ βδ χωρίσαμε τὴν πεντάγωνη πλατεία σὲ τρία τρίγωνα. Βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κάθε τριγώνου χωριστὰ καὶ προσθέτομε τὰ τρία ἐμβαδά.



Σχ. 62

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου (πενταγώνου, ἑξαγώνου, δεκαγώνου κλπ.) χωρίζομε αὐτὸ μὲ διαγώνιες σὲ τρίγωνα, βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καθενὸς καὶ τὰ προσθέτομε.

Ἐμβαδὸν τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τῶν πρισμάτων

Εὔκολα βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῶν πρισμάτων. Πρῶτα βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν κάθε ἕδρας χωριστὰ καὶ προσθέτομε τὰ ἐμβαδά. Ἂν οἱ ἕδρες τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος εἶναι ἴσες, τότε βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν μόνον τῆς μιᾶς ἕδρας καὶ τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ τῶν ἑδρῶν του. Ὑπάρχουν διάφοροι σύντομοι τρόποι γιὰ τὴν εὕρεση τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τῶν πρισμάτων. Μποροῦμε μόνοι μας νὰ τοὺς βροῦμε.

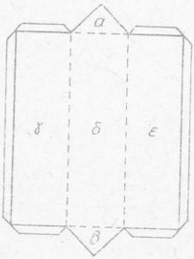
Ὄγκος τῶν πρισμάτων

Εἴπαμε ὅτι ὁ κύβος καὶ τὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι πρίσματα. Μάθαμε ὅτι γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ κύβου καὶ τῶν παραλληλεπιπέδων, πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο βρίσκομε καὶ τὸν ὄγκο ὅλων τῶν πρισμάτων (τριγωνικοῦ, πενταγωνικοῦ, ἑξαγωνικοῦ κλπ.). Γιατὶ ὅσα τετραγωνικὰ μέτρα ἔχει ἡ βάση τους, τόσα κυβικὰ μέτρα πατοῦν ἐπάνω της καὶ ὅσα μέτρα ὕψος ἔχει τόσες σειρὲς τετραγωνικὰ μέτρα χωρεῖ.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο ἑνὸς πρίσματος, πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος.

Κατασκευὴ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος

Γιὰ νὰ κατασκευάσωμε ἕνα ὀρθὸ τριγωνικὸ πρίσμα σχεδιάζομε ἐπάνω σὲ χαρτόνι ἕνα τρίγωνο (σχ. 63). Μὲ πλευρὰ τὴ βάση αὐτοῦ τοῦ τριγώνου σχεδιάζομε ἕνα ὀρθογώνιο. Δεξιὰ καὶ ἀριστερὰ αὐτοῦ σχεδιάζομε ἄλλα δύο ὀρθογώνια. Πρέπει νὰ προσέξωμε ὥστε οἱ μικρὲς ἕδρες του νὰ εἶναι ἴσες μὲ τὶς δύο ἀντίστοιχες πλευρὲς τοῦ τριγώνου. Στὴν κάτω πλευρὰ τοῦ μεσαίου ὀρθογωνίου σχεδιάζομε δεύτερο τρίγωνο ἴσο μὲ τὸ πρῶτο. Ἔπειτα μὲ ἕνα ξυραφάκι ἀφαιροῦμε τὸ χαρτόνι ποὺ δὲν μᾶς χρειάζεται. Χαράζομε, δίχως νὰ κόψωμε τελείως



Σχ. 63

τὸ μεσαῖο ὀρθογώνιο. Κλείνομε ἔπειτα τὰ δύο τρίγωνα καὶ τὰ δύο ἄλλα ὀρθογώνια καὶ ἔτσι τὸ ὀρθὸ τριγωνικὸ πρίσμα εἶναι ἕτοιμο. Τώρα βέβαια ξέρομε νὰ τὸ κατασκευάσωμε καὶ ξύλινο ἢ γύψινο, ἂν θέλωμε, ὅπως ἐκεῖνα.

Ἐργασίες - ἀσκήσεις - ἐφαρμογὲς

1) Μία μαρμάρινη στήλη ἔχει σχῆμα τριγωνικοῦ πρίσματος. Ἡ τριγωνική του ἕδρα ἔχει βάση 0,60 μ. καὶ ὕψος 0,50 μ. Κάθε ἕδρα τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας της ἔχει βάση 0,60 μ. καὶ ὕψος 3 μ. Νὰ εὑρεθῇ α) τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας της (θυμηθῆτε τί σχῆμα ἔχουν οἱ ἕδρες τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος) καὶ β) ὁ ὄγκος της.

2) Ἕνα ντεπόζιτο ἔχει σχῆμα πενταγωνικοῦ πρίσματος. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσης του εἶναι 4,50 τ.μ. καὶ τὸ ὕψος του 2,50 μ. Πόσα κ. μ. νερὸ χωρεῖ;

3) Ἑνὸς τριγωνικοῦ πρίσματος ὁ ὄγκος εἶναι 25 κ. μ. καὶ τὸ ὕψος του 5 μέτρα. Πόσα τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσης του;

4) Πόσες ἕδρες ἔχει τὸ τριγωνικὸ πρίσμα, τὸ πενταγωνικό, τὸ ἑξαγωνικό;

5) Πόσες παραλληλόγραμμες ἕδρες ἔχει τὸ ἑξαγωνικό, τὸ δεκαγωνικό, τὸ εἰκοσαγωνικὸ πρίσμα;

6) Ἕνα ντεπόζιτο ἔχει σχῆμα ἑξαγωνικοῦ πρίσματος. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσης του εἶναι 0,75 μέτρα. Κάθε ἕδρα τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας του ἔχει βάση 0,5 μ. καὶ ὕψος 1,50 μ. Τὸ ντεπόζιτο αὐτὸ πρόκειται νὰ τὸ χρωματίσωμε ἀπ' ἔξω. (Ὄχι βέβαια καὶ τὴν κάτω βάση του). Πόσο θὰ στοιχίση τὸ βάψιμο αὐτὸ ἂν πληρώσωμε 8.000 δρχ. κάθε τετραγωνικὸ μέτρο;

7) Νὰ λύσετε καὶ μόνοι σας διάφορα προβλήματα καὶ ἀσκήσεις.

Ὄγκος τριγωνικῆς πυραμίδας

Τώρα ποὺ μάθαμε νὰ βρίσκωμε τὸν ὄγκο τῶν πρισμάτων εὔκολα θὰ μάθωμε νὰ βρίσκωμε καὶ τὸν ὄγκο τῶν πυραμίδων. Ὅπως βλέπομε καὶ μὲ τὸ μάτι, τὴν πυραμίδα δὲν μποροῦμε νὰ τὴ γεμίσωμε μὲ κυβικὰ μέτρα. Γιατὶ ἡ πυραμίδα, ὅσο πηγαίνει πρὸς τὰ ἐπάνω, στενεύει καὶ καταλήγει σὲ μιὰ κορυφή. Ἄρα ὅσα κυβικὰ μέτρα μπορέσωμε νὰ τοποθετήσωμε στὴ βάση της, ἄλλα τόσα δὲν μποροῦμε νὰ βάλωμε ἀπὸ πάνω, γιατὶ ὁ χῶρος εἶναι στενός.

Ἕνα παράδειγμα: Παίρνομε δύο δοχεῖα μὲ τὴν ἴδια βάση καὶ τὸ ἴδιο ὕψος. Τὸ ἕνα νὰ ἔχη σχῆμα τριγωνικῆς πυραμίδας καὶ τὸ ἄλλο τριγωνικοῦ πρίσματος. Στὴν κορυφὴ κάθε δοχείου ἀνοίγομε μιὰ μικρὴ τρύπα. Γεμίζομε μὲ νερὸ τὸ πρῶτο δοχεῖο καὶ τὸ ἀδειάζομε ἔπειτα μέσα στὸ πρισματικὸ δοχεῖο. Βλέπομε ὅτι τὸ πρισματικὸ δοχεῖο δὲν θὰ γεμίση γιατὶ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ πρῶτο. Ξαναγεμίζομε τὸ πρῶτο δοχεῖο καὶ τὸ ξαναδειάζομε στὸ δεύτερο. Πάλι τὸ δεύτερο δὲν γεμίζει. Γεμίζομε καὶ τρίτη φορὰ τὸ πρῶτο καὶ τὸ ἀδειάζομε στὸ δεύτερο. Τὴν τρίτη αὐτὴ φορὰ θὰ ἰδοῦμε πὼς τὸ δεύτερο δοχεῖο θὰ γεμίση ὡς ἐπάνω.

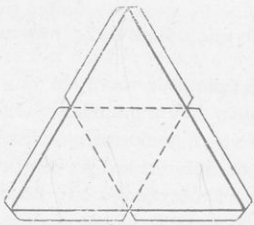
Ἀπὸ αὐτὸ καταλαβαίνομε ὅτι ὁ ὄγκος τῆς τριγωνικῆς πυραμίδας εἶναι τρεῖς φορὲς μικρότερος ἀπὸ τὸν ὄγκο ἑνὸς πρίσματος ποὺ ἔχει τὴν ἴδια βάση καὶ τὸ ἴδιο ὕψος. Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ μὲ ὁποιαδήποτε πυραμίδα (τετραγωνική, πενταγωνικὴ κλπ.).

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τῆς τριγωνικῆς, τετραγωνικῆς, πενταγωνικῆς κ.λ.π. πυραμίδας πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσης της ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιροῦμε διὰ τρία.

Κατασκευὴ τριγωνικῆς πυραμίδας

1) Μὲ χαρτόνι. Γιὰ νὰ κατασκευάσωμε μιὰ τριγωνικὴ κανονικὴ πυραμίδα σχεδιάζομε ἐπάνω σὲ χαρτόνι, ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο. Σὲ κάθε πλευρὰ αὐτοῦ τοῦ τριγώνου σχεδιάζομε καὶ ἀπὸ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο δηλ. ἄλλα τρία τρίγωνα ὁλότελα ἴσια. Ἔπειτα μὲ ἕνα ξυραφάκι ἀφαιροῦμε τὸ χαρτόνι ποὺ δὲν μᾶς χρειάζεται καὶ χαράσομε ἐλαφρὰ τὶς πλευρὲς τοῦ μεσαίου τριγώνου. Κλείνομε ἔπειτα τὰ 4 αὐτὰ τρίγωνα, κολλᾶμε τὶς ἀκμές των καὶ ἡ πυραμίδα εἶναι ἕτοιμη.

Παρατήρηση. Πρέπει νὰ προσέξωμε τὸ ὕψος τῶν τριῶν τριγώνων νὰ εἶναι κατάλληλο ὥστε νὰ κλείνη ἡ πυραμίδα.



Σχ. 64

2) Μὲ ξύλο. Τὸ ἴδιο σχῆμα τῶν ἑδρῶν, τὸ ἰχνογραφοῦμε ἐπάνω σὲ λεπτὴ σανίδα. Ἔπειτα μὲ τὸ πριονάκι τῆς χειροτεχνίας τὸ κόβομε καὶ τὸ κολλᾶμε μὲ ψαρόκολλα.

3) Μὲ γύψο. Παίρνομε τὴν παραπάνω ξύλινη πυραμίδα καὶ τὶς ἀφαιροῦμε τὴ βάση ἢ μιὰ ἕδρα της ἀπὸ τὶς παράπλευρες. Τὴ γεμίζομε μὲ λυωμένο γύψο καὶ τὸν ἀφήνομε νὰ πήξη. Ἔπειτα ξεκολλᾶμε τὶς ξύλινες ἕδρες καὶ ἔχομε ἕτοιμη τὴ γύψινη πυραμίδα.

Ἐργασίες — ἀσκήσεις — ἐφαρμογὲς

1) Νὰ βρεθῆ ὁ ὄγκος τριγωνικῆς πυραμίδας τῆς ὁποίας τὸ τρίγωνο τῆς βάσης της ἔχει βάση 0,20 μ. καὶ ὕψος 0,70 μ. Ὅλη δὲ ἡ πυραμίδα ἔχει ὕψος 3 μέτρα.

2) Νὰ βρεθῆ ὁ ὄγκος τετραγωνικῆς πυραμίδας τῆς ὁποίας ἡ βάση εἶναι τετράγωνο μὲ πλευρὰ 1,50 μ. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδας εἶναι 8,50 μ.

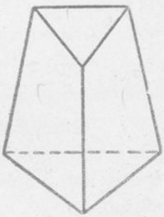
3) Νὰ βρεθῆ ὁ ὄγκος ἑξαγωνικῆς πυραμίδας τῆς ὁποίας τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσης εἶναι 160 τ. μ. καὶ ὕψος 35 μέτρα.

4) Ἡ πλευρὰ τῆς βάσης τῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας τοῦ Χέοπα στὴν Αἴγυπτο εἶναι 233 μέτρα καὶ τὸ ὕψος της εἶναι 148 μέτρα. Πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι ὁ ὄγκος της;

ΕΚΤΗ ΜΕΘΟΔΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΠΥΡΑΜΙΔΑ

Ἂν πάρωμε μιὰ ὁποιαδήποτε πυραμίδα καὶ τὴν κόψωμε λίγο κάτω ἀπὸ τὴν κορυφή της μὲ τομὴ παράλληλη πρὸς τὴ βάση της, θὰ ἔχωμε μιὰ κολοβὴ πυραμίδα, δηλ. δίχως κορυφή. Ἡ πυραμίδα αὐτὴ λέγεται *κόλουρος πυραμίδα* (σχῆμα 65).



Σχ. 65

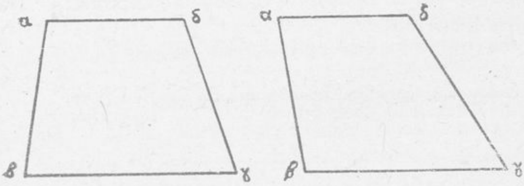
Ἔτσι τῆς ἀφαιρέσαμε τὴν κορυφὴ καὶ τῆς προσθέσαμε μιὰ ἕδρα, ὅμοια μὲ τὴν βάση της, ἀλλὰ μικρότερη. Ἡ κόλουρος τριγωνικὴ πυραμίδα ἔχει ἑπομένως 5 ἕδρες, ἡ τετραγωνικὴ 6, ἡ πενταγωνικὴ 7 κ.λ.π.

Ὡς βάση τῆς κολούρου πυραμίδας παίρνομε μιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ παράλληλες ἕδρες της, συνήθως παίρνουμε τὴ μεγαλύτερη.

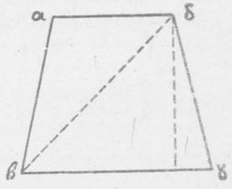
Ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδας εἶναι ἡ κάθετος ποὺ ἑνώνει τὶς δύο βάσεις της.

Τραπέζιο

Ἂν προσέξωμε τὶς παράπλευρες ἕδρες τῆς κολούρου πυραμίδας, θὰ ἰδοῦμε, ὅτι ἔχουν σχῆμα ποὺ δὲν τὸ μάθαμε ὡς τώρα (σχ. 66).



Σχ. 66



Σχ. 67

Τὸ σχῆμα αὐτὸ ἔχει 4 πλευρές. Οἱ δύο βάσεις του βγ καὶ αδ εἶναι παράλληλες ὄχι ὅμως καὶ ἴσες. Οἱ δύο ἄλλες μπορεῖ νὰ εἶναι ἴσες, ὅπως βλέπομε στὸ σχῆμα 66.

Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται τραπέζιο. Ἂν συγκρίνωμε τὸ τραπέζιο μὲ τὸ παραλληλόγραμμο, θὰ ἰδοῦμε ὅτι ἔχουν καὶ τὰ δύο 4 πλευρὲς καὶ 4 γωνίες μὰ τὸ παραλληλόγραμμο ἔχει τὶς ἀπέναντι πλευρές του ἴσες καὶ παράλληλες ἀνὰ δύο καὶ τὶς ἀπέναντι γωνίες ἴσες. Ἐνῶ τὸ τραπέζιο ἔχει μόνο δύο πλευρὲς παράλληλες ὄχι ὅμως καὶ ἴσες.

Ἐμβαδὸν τραπεζίου

Μάθαμε, ὅτι γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραπλεύρου, ποὺ δὲν εἶναι οὔτε τετράγωνο, οὔτε ὀρθογώνιο, οὔτε παραλληλόγραμμο, τὸ χωρίζομε μὲ μιὰ διαγώνιο σὲ δυὸ τρίγωνα.

Τὸ τραπέζιο εἶναι τετράπλευρο σχῆμα ποὺ ἔχει μόνο τὶς δύο πλευρές του παράλληλες. Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου τὸ χωρίζομε μὲ μιὰ διαγώνιο σὲ δυὸ τρίγωνα στὸ αβδ καὶ στὸ βδγ (σχ. 67).

Ξέρομε πῶς βρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου. (Πολλαπλασιάζομε τὴ βάση του ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιροῦμε διὰ 2).

Ἂς ὑποθέσωμε λοιπὸν ὅτι ἡ βάση βγ τοῦ τριγώνου βγδ (σχ. 67) εἶναι 4 μέτρα καὶ τὸ ὕψος του 3 μέτρα. Τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι $4 \times 3 = 12 : 2 = 6$ τ.μ. Ἡ βάση αδ τοῦ τριγώνου αβδ εἶναι 2 μέτρα καὶ τὸ ὕψος 3 μέτρα. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δευτέρου τριγώνου θὰ εἶναι $2 \times 3 = 6 : 2 = 3$ τ.μ.

Ἔτσι τὰ δύο τρίγωνα ποὺ ἀποτελοῦν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἔχουν ἐμβαδὸν $6 + 3 = 9$ τ.μ.

Ὅπως βλέπομε, ἡ βάση τοῦ τριγώνου βδγ δηλαδὴ ἡ βγ εἶναι καὶ κάτω βάση τοῦ τραπεζίου. Καὶ ἡ βάση αδ τοῦ τριγώνου αβδ εἶναι καὶ ἄνω βάση τοῦ τραπεζίου. Τὸ ὕψος καὶ τῶν δύο τριγώνων εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου.

Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ τὸ χωρίσωμε σὲ τρίγωνα, ἀλλὰ προσθέτομε τὶς δύο βάσεις του, ἔπειτα πολλαπλασιάζομε τὸ ἄθροισμα ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ τὸ γινόμενο διαιροῦμε διὰ 2.

Βρήκαμε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου (σχ. 67) ποὺ τὸ χωρίσαμε σὲ τρίγωνα, εἶναι 9 τ.μ. Τὸ ἴδιο ὅμως θὰ βροῦμε ἂν προσθέσωμε τὶς δύο βάσεις του, ἔπειτα ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸ ἄθροισμά τους ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιρέσωμε τὸ γινόμενο διὰ 2. $(4 + 2 = 6 \times 3 = 18 : 2 = 9$ τ.μ.$)$.

Ὑπάρχει κι ἄλλος τρόπος γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου. Νὰ προσπαθήσετε νὰ τὸν βρῆτε μόνοι σας.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου προσθέτομε τὶς δύο βάσεις του, ἔπειτα πολλαπλασιάζομε τὸ ἄθροισμά τους ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ τὸ γινόμενο διαιροῦμε διὰ 2.

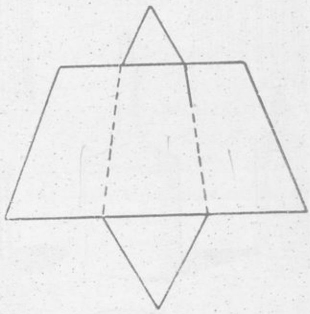
Ἐπιφάνεια τῆς κολούρου πυραμίδας

Εὔκολα μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδας. Βρίσκομε πρῶτα τὸ ἐμβαδὸν κάθε ἕδρας της χωριστὰ καὶ ἔπειτα προσθέτομε τὰ ἐμβαδά. Ἂν ἡ κόλουρος πυραμίδα εἶναι κανονική, οἱ ἕδρες τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας της θὰ εἶναι ἴσες. Ἑπομένως βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς καὶ τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἴσων ἑδρῶν.

Κατασκευὴ κολούρου τριγωνικῆς πυραμίδας

Γιὰ νὰ κατασκευάσωμε μιὰ κόλουρο τριγωνικὴ πυραμίδα σχεδιάζομε πρῶτα μιὰ κανονικὴ πυραμίδα (σχ. 68). Ἀπὸ τὶς κορυφὲς τῶν τριῶν παράπλευρων τριγώνων ἀφαιροῦμε τρία ἴσα κομμάτια (ἕνα ἀπὸ κάθε τρίγωνο). Ἔτσι στὴν κορυφή της σχηματίζεται ἕνα τριγωνικὸ ἄνοιγμα. Τοποθετοῦμε τὸ ἄνοιγμα αὐτὸ ἐπάνω σὲ ἄλλο χαρτόνι καὶ μὲ τὸ μολύβι μας σύρομε γραμμὴ γύρω. Ἔτσι θὰ σχηματισθῆ ἕνα μικρότερο τρίγωνο ἀπὸ τὸ τρίγωνο τῆς βάσης. Τὸ κόβομε μὲ ξυραφάκι καὶ τὸ κολλᾶμε στὸ ἄνοιγμα. Ἡ κόλουρος τριγωνικὴ πυραμίδα εἶναι ἕτοιμη πιὰ (σχ. 69).

Σχ. 68



Σχ. 69

Ἐργασίες — ἀσκήσεις — ἐφαρμογὲς

1) Τί διαφέρει ἡ κανονικὴ ἀπὸ τὴν κόλουρη πυραμίδα;

2) Τί διαφέρει τὸ τραπέζιο ἀπὸ τὸ τετράγωνο καὶ ἀπὸ τὸ παραλληλόγραμμο;

3) Μία αὐλὴ ἔχει σχῆμα τραπεζίου. Ἡ μεγάλη της βάση εἶναι 8,50 μ. Ἡ μικρὴ 5,50 μ. Καὶ τὸ ὕψος 6,50 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

4) Ἕνα χωράφι ἔχει σχῆμα τραπεζίου. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο βάσεών του εἶναι 46,50 μ. καὶ τὸ ὕψος του 14 μ. α) Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του; β) Πόσες δραχμὲς θὰ πάρη ὁ ἰδιοκτήτης ἂν πουλήση τὸ τετραγ. μέτρο πρὸς 4.500 δραχμές;

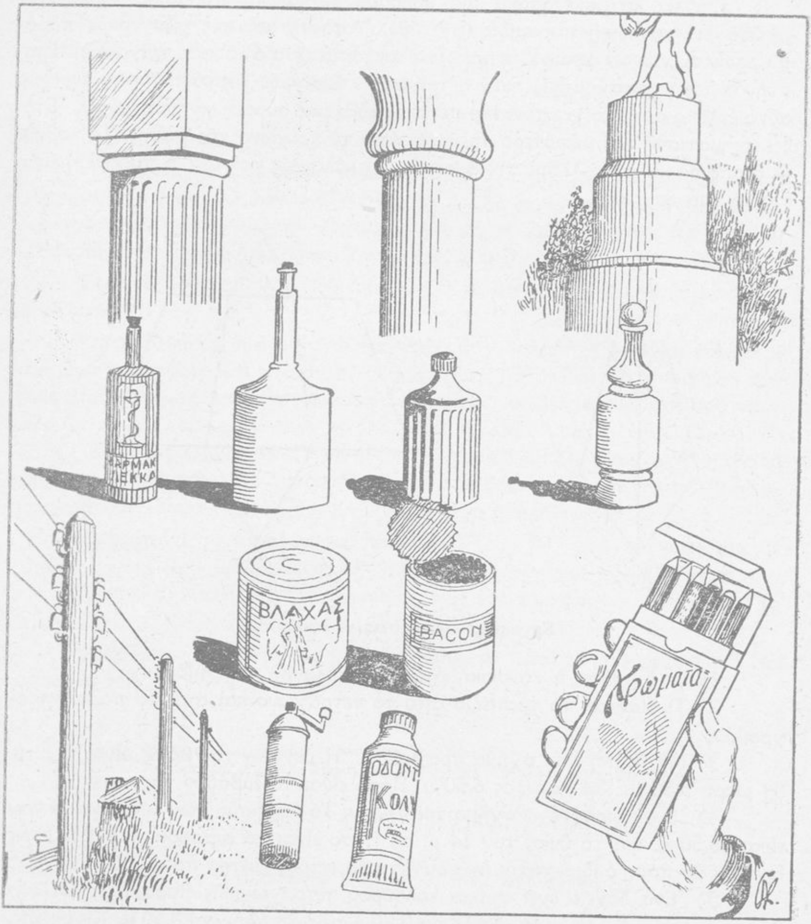
5) Ἕνα δοχεῖο ἔχει σχῆμα κολούρου τετραγωνικῆς πυραμίδας. Οἱ δύο βάσεις της εἶναι τετράγωνα μὲ πλευρὰ 0,80 μ. τῆς μεγάλης καὶ 0,50 μ. τῆς μικτῆς. Τὸ ὕψος του εἶναι 2 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα νερὸ χωρεῖ;

6) Τὸ ἴδιο δοχεῖο πρόκειται νὰ τὸ ντύσωμε μὲ σανίδες. Τὸ ὕψος τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας του εἶναι 2,40 μ. Πόσα τ.μ. σανίδες θὰ χρειασθοῦμε;

7) Ἑνὸς τραπεζίου ἡ κάτω βάση εἶναι 8,10 μ. Ἡ ἄνω 1,90 μ. Τὸ ἐμβαδόν του 4,80 τ.μ. Πόσο εἶναι τὸ ὕψος του;

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΕ ΕΙΚΟΝΕΣ

Παρατηροῦμε διάφορα σώματα ποὺ ἔχουν σχῆμα κυλίνδρου



Νὰ μεταφέρετε στὴν τάξη σας κάθε ἀντικείμενο ἀπὸ τὸ σπίτι σας ἢ ἀπὸ τὸ περιβάλλον σας, ποὺ ἔχει σχῆμα κυλίνδρου (κυλινδρικὸ) διάφορους σωλῆνες, σωληνάρια, μπουκάλια, κουτιὰ κονσέρβας, τὸ μύλο τοῦ καφέ, διάφορα μαγειρικὰ σκεύη, μολύβια. Νὰ παρατηρήσετε παντοῦ γύρω σας καὶ νὰ βρῆτε διάφορα ἀντικείμενα μὲ κυλινδρικὸ σχῆμα: κορμοὺς δέντρων, τηλεγραφόξυλα, κολῶνες ἀρχαίων ναῶν ἢ σημερινῶν μεγάρων.

ΕΒΔΟΜΗ ΜΕΘΟΔΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

Πολλὰ σώματα ἔχουν σχῆμα κυλίνδρου, ὅπως ὅλοι σχεδὸν οἱ σωλῆνες, οἱ μπουκάλες, τὰ κουτιὰ τῆς κονσέρβας, οἱ μύλοι τοῦ καφέ, τὰ μαγειρικὰ σκεύη, τὰ μολύβια, οἱ κολῶνες, οἱ κορμοὶ τῶν δένδρων, τὰ φυσίγγια κλπ. Ἕνα γυάλινο κύλινδρο θὰ τὸν ἰχνογραφήσωμε ἔτσι (σχ. 70).

Ὅλο τὸ ἐξωτερικὸ τοῦ κυλίνδρου ἀποτελεῖται, ὅπως βλέπομε, ἀπὸ τρεῖς ἐπιφάνειες. Δηλαδὴ ἀπὸ τὶς δύο βάσεις του (ἄνω καὶ κάτω), ποὺ εἶναι ἐπίπεδες καὶ ἀπὸ τὴν παράπλευρη ποὺ εἶναι καμπύλη δηλαδὴ κυρτή.

Ὁ κύλινδρος ὠνομάσθηκε ἔτσι γιατὶ κυλάει εὔκολα. Ἡ κάθετη γραμμὴ ποὺ ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν δύο βάσεων λέγεται ὕψος ἢ ἄξονας τοῦ κυλίνδρου. Ἂν μετρήσωμε τὶς δύο βάσεις τοῦ κυλίνδρου μὲ χαρτί, θὰ ἰδοῦμε ὅτι εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες.

Κύλινδρος λέγεται τὸ στερεὸ σῶμα, ποὺ ἔχει τὶς δύο βάσεις του ἴσες καὶ παράλληλες καὶ τὴν παράπλευρή του ἐπιφάνεια κυρτή.

Κύκλος

Ἂν στηρίξωμε τὸν κύλινδρο στὴ μία του βάση πάνω σὲ λευκὸ χαρτὶ καὶ σύρωμε μὲ τὸ μολύβι γραμμὴ γύρω σ' αὐτὴ θὰ παρουσιασθῆ τὸ σχῆμα 71.


Σχ. 70

Σχ. 71

ΣΣχ. 72

Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται κύκλος.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου εἶναι ἐπίπεδη. Γιὰ πλευρές του ἔχει μιὰ γραμμή, ποὺ δὲν εἶναι εὐθεία οὔτε τεθλασμένη. Ἡ γραμμὴ αὐτὴ λέγεται καμπύλη ὅπως μάθαμε στὴν ἀρχὴ τοῦ βιβλίου μας.

Καμπύλη γραμμὴ λέγεται ἡ γραμμὴ τῆς ὁποίας κανένα κομμάτι δὲν εἶναι εὐθεία.

Ἡ καμπύλη γραμμὴ ποὺ περικλείει τὴν ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου, γύρω-γύρω, λέγεται π ε ρ ι φ έ ρ ε ι α (σχ. 71). Τὸ σημεῖο ποὺ βρίσκεται στὸ μέσο ἀκριβῶς τοῦ κύκλου λέγεται κ έ ν τ ρ ο τ ο ῦ κ ύ κ λ ο υ.

Ἂν μὲ μιὰ κλωστὴ μετρήσωμε τὴν ἀπόσταση ἀπὸ τὸ κέντρο πρὸς τὰ διάφορα σημεῖα τῆς περιφερείας, θὰ ἰδοῦμε ὅτι ἡ ἀπόσταση εἶναι παντοῦ ἡ ἴδια. Τὸ κέντρο τοῦ κύκλου ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπ' ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας.

Κύκλος λέγεται ἡ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία περικλείεται ἀπὸ μία καμπύλη γραμμή, ποὺ ὅλα τὰ σημεῖα της ἀπέχουν τὸ ἴδιο ἀπὸ ἕνα σημεῖο, ποὺ βρίσκεται στὸ μέσον καὶ λέγεται κέντρο.

Πῶς γράφομε κύκλο

Γιὰ νὰ γράψωμε στὸν πίνακα ἕναν κύκλο, παίρνομε μία κλωστή. Στὴ μία της ἄκρη δένομε τὴν κιμωλία. Στηρίζομε στὸ μέσον τοῦ πίνακα μὲ τὸ ἕνα μας χέρι τὴν ἄλλη ἄκρη τῆς κλωστῆς καὶ μὲ τὸ ἄλλο τεντώνομε τὴν κλωστὴ καὶ σύρομε μὲ τὴ δεμένη κιμωλία μιὰ γραμμὴ γύρω-γύρω. Ἔτσι γράφομε συστὸ κύκλο. Καὶ στὴν αὐλὴ τοῦ σχολείου μας μποροῦμε νὰ κάνωμε σωστὸ κύκλο. Καρφώνομε ἕνα μικρὸ πάσαλο, δένομε σ' αὐτὸν ἕνα σπάγγο, στὴν ἄκρη τοῦ σπάγγου ἕνα μυτερὸ ξύλο ἢ καρφί, τεντώνομε τὸ σπάγγο καὶ μὲ τὸ ξύλο ἢ τὸ καρφὶ χαράζομε κύκλο. Στὸ τετράδιό μας κάνομε κύκλους μὲ τὸν διαβήτη. Ἡ εὐθεία ποὺ ἑνώνει τὸ κέντρο μὲ τὴν περιφέρεια λέγεται ἀ κ τ ί ν α (σχ. 72).

Ὅπως βλέπομε ὅλες οἱ ἀκτῖνες τοῦ κύκλου εἶναι ἴσες.

Ἀκτίνα τοῦ κύκλου λέγεται ἡ εὐθεία γραμμὴ ἡ ὁποία ἀρχίζει ἀπὸ τὸ κέντρο καὶ τελειώνει στὴν περιφέρεια.

Ἀκτίνες μποροῦμε νὰ σύρωμε πολλές.

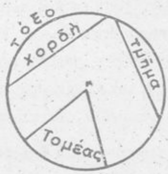
Ἡ εὐθεία ποὺ ἀρχίζει ἀπὸ τὴν περιφέρεια, περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο καὶ ξανασυναντᾶ τὴν περιφέρεια λέγεται δ ι ά μ ε τ ρ ο ς (σχ. 72 καὶ 73).

Ἡ διάμετρος εἶναι διπλασία τῆς ἀκτίνας. Ὅλες οἱ διάμετροι τοῦ κύκλου εἶναι ἴσες. Ἡ διάμετρος χωρίζει τὸν κύκλο σὲ δύο ἴσα μέρη ποὺ λέγονται ἡ μ ι κ ύ κ λ ι α καὶ τὴν περιφέρεια πάλι σὲ δύο ἴσα κομμάτια. Κάθε κομμάτι λέγεται ἡ μ ι π ε ρ ι φ έ ρ ε ι α (σχ. 73).

Ἡ εὐθεία γραμμὴ ποὺ ἑνώνει τὴν περιφέρεια σὲ δυὸ σημεῖα, δίχως νὰ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο, λέγεται χορδὴ (σχ. 74). Τὸ κομμάτι τῆς περιφερείας ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὴ χορδὴ λέγεται τόξο (σχ. 74). Ἡ χορδὴ εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴ διάμετρο.

Τὸ κομμάτι τοῦ κύκλου ποὺ περικλείεται ἀπὸ ἕνα τόξο καὶ μιὰ χορδὴ λέγεται τμῆμα τοῦ κύκλου (σχ. 74). Τὸ κομμάτι τοῦ κύκλου ποὺ περικλείεται ἀπὸ ἕνα τόξο καὶ δύο ἀκτίνες λέγεται τομέας τοῦ κύκλου (σχ. 74).

Σχ. 73



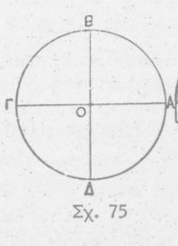
Σχ. 75

Διαίρεση τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου

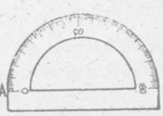
Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου διαιρεῖται σὲ 360 μέρη ποὺ λέγονται μοῖρες. Ἡ μεγάλη περιφέρεια βέβαια ἔχει μεγάλες μοῖρες. Ἡ μικρὴ ἔχει μικρές. Ὅμως εἴτε μικρὴ εἶναι ἡ περιφέρεια εἴτε μεγάλη διαιρεῖται πάντοτε σὲ 360 μοῖρες.

Κάθε μοῖρα διαιρεῖται σὲ 60 πρῶτα λεπτὰ καὶ κάθε πρῶτο λεπτὸ σὲ 60 δεύτερα. Ἑπομένως κάθε ἡμιπεριφέρεια κύκλου ἔχει 180 μοῖρες καὶ τὸ τέταρτο τῆς περιφερείας ἔχει 90 μοῖρες.

Γιὰ συντομία τὶς μοῖρες τὶς σημειώνομε μὲ ἕνα μικρὸ μηδενικὸ δεξιὰ καὶ λίγο ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἀριθμό. Τὸ πρῶτο λεπτὸ μὲ μιὰ ὀξεία καὶ τὸ δευτερόλεπτο μὲ δυὸ ὀξεῖες. Π. χ. 35 μοῖρες 25 πρῶτα λεπτὰ καὶ 45 δεύτερα λεπτά, σημειώνονται ἔτσι: 35ο–25′–45″.



Σχ. 75



Σχ. 76

Μοῖρες βλέπομε γραμμένες στὴ δεξιὰ καὶ ἀριστερὰ πλευρὰ τῶν γεωγραφικῶν χαρτῶν, ποὺ δείχνουν τὸ γεωγραφικὸ πλάτος τῶν διαφόρων χωρῶν τῆς γῆς. Ἐπίσης στὴν κάτω καὶ ἄνευ πλευρά τους, ποὺ δείχνουν τὸ γεωγραφικὸ μῆκος (σχ. 75).

Μὲ μοῖρες μετροῦμε καὶ τὸ ἄνοιγμα τῶν διαφόρων γωνιῶν. Στὸν κύκλο (σχ. 75) σύρομε δύο διαμέτρους κάθετες μεταξύ τους. Στὸ κέντρο τοῦ κύκλου βλέπομε ὅτι σχηματίζονται 4 γωνίες ὀρθές. Ἡ κάθε μιὰ ἀπ' αὐτὲς ἀντιστοιχεῖ σὲ τόξο, ποὺ εἶναι τὸ τέταρτο τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

Ἑπομένως κάθε μία ἀπὸ τὶς ὀρθὲς γωνίες ἔχει ἄνοιγμα 90ο.

Ἡ ὀρθὴ γωνία ἔχει ἄνοιγμα 90°

Οἱ γωνίες ποὺ εἶναι μικρότερες ἀπὸ τὴν ὀρθή, δηλ. οἱ ὀξεῖες, ἔχουν ἄνοιγμα μικρότερο ἀπὸ 90ο. Καὶ οἱ ἀμβλεῖες, ποὺ εἶναι μεγαλύτερες ἀπὸ τὴν ὀρθή, ἔχουν ἄνοιγμα μεγαλύτερο ἀπὸ 90ο. Ἡ ὀξεία γωνία ὅταν μικρύνη πολὺ καὶ φθάση σὲ ἄνοιγμα μηδὲν μοῖρες, παύει νὰ εἶναι γωνία. Ἡ ἀμβλεία, ὅταν πάρη ἄνοιγμα 180ο παύει κι αὐτὴ νὰ εἶναι γωνία. Οἱ δύο πλευρές της γίνονται εὐθεία γραμμή. Τὸ ἄνοιγμα τῶν γωνιῶν σὲ μοῖρες τὸ μετροῦμε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο (σχ. 76).

Κανονικὰ πολύγωνα

Μάθαμε ὅτι πολύγωνο λέγεται τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει πολλὲς πλευρές. Ὅταν οἱ πλευρὲς τοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσες, τὸ πολύγωνο λέγεται κανονικό.

Τὸ σχ. 77 εἶναι ἀκανόνιστο πολύγωνο. Τὸ σχ. 78 εἶναι κανονικὸ πολύγωνο.

Τὸ κανονικὸ πολύγωνο ποὺ ἔχει τρεῖς πλευρὲς μάθαμε ὅτι λέγεται ἰσόπλευρο τρίγωνο. Καὶ τὸ κανονικὸ πολύγωνο ποὺ ἔχει 4 πλευρὲς ἴσες καὶ 4 γωνίες ὀρθὲς λέγεται τετράγωνο. Ἑπομένως κανονικὸ πολύγωνο στὸ ἑξῆς θὰ ὀνομάζωμε τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει περισσότερες ἀπὸ 4 πλευρὲς ἴσες καὶ 4 ἴσες γωνίες.


Σχ. 77


Σχ. 78


Σχ. 79 .


Σχ. 80

Κανονικὸ πολύγωνο λέγεται τὸ πεντάπλευρο. ἑξάπλευρο κ.λ.π. σχῆμα ποὺ ἔχει ὅλες τὶς πλευρές του ἴσες καὶ ὅλες τὶς γωνίες του ἴσες.

Πῶς γράφομε κανονικὸ πολύγωνο μέσα σὲ κύκλο

Μέσα σ' ἕνα κύκλο μποροῦμε νὰ γράψωμε κανονικὸ πολύγωνο, ἂν χωρίσωμε τὴν περιφέρειά του σὲ τόσα ἴσα μέρη (τόξα) ὅσες εἶναι οἱ πλευρὲς τοῦ πολυγώνου ποὺ θέλομε νὰ γράψωμε καὶ κατόπιν ἑνώσωμε τὰ μέρη αὐτὰ (τὰ τόξα) μὲ χορδές. Οἱ χορδὲς αὐτὲς εἶναι οἱ πλευρὲς τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

Γιὰ νὰ γράψωμε στὸν κύκλο ἕνα κανονικὸ ἑξάγωνο, χωρίζομε τὴν περιφέρεια σὲ 6 ἴσα τόξα. Αὐτὸ εἶναι εὔκολο, γιατὶ ἂν ἀνοίξωμε τὸ διαβήτη, ὅσο εἶναι ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου καὶ μὲ τὸ ἄνοιγμα αὐτὸ μοιράσωμε τὴν περιφέρεια, θὰ ἰδοῦμε ὅτι μοιράζεται ἀκριβῶς σὲ 6 ἴσα μέρη.

Τώρα ἂν σύρωμε μὲ τὸ χάρακα στὰ 6 αὐτὰ τόξα τὶς χορδές τους θὰ ἔχωμε ἕνα κανονικὸ ἑξάγωνο (σχ. 79).

Ἂν ἑνώσωμε ἀνὰ δύο τὶς γωνίες τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, τότε γράφομε στὸν κύκλο ἰσόπλευρο τρίγωνο (σχ. 79). Ἂν μικρύνωμε τὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτη ὅσο εἶναι ἡ μισὴ ἀκτίνα ἢ ἂν χωρίσωμε τὰ τόξα, ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὸ κανονικὸ ἑξάγωνο, σὲ δύο ἴσα μέρη, τότε γράφομε στὸν κύκλο κανονικὸ δωδεκάγωνο. Ἂν ἐξακολουθήσωμε νὰ χωρίζωμε σὲ δύο τὰ τόξα, θὰ γράψωμε κανονικὰ πολύγωνα μὲ 24, 48, 96, 192 κ.τ.λ. πλευρές.

Ὅσο ὅμως προχωροῦμε θὰ φθάση στιγμὴ ποὺ οἱ πλευρὲς τοῦ πολυγώνου θὰ ἑνωθοῦν μὲ τὰ τόξα τοῦ κύκλου. Δηλαδὴ ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου θὰ γίνη σχεδὸν περιφέρεια τοῦ κύκλου.

Γιὰ νὰ γράψωμε σὲ κύκλο κανονικὸ τετράγωνο, σύρομε δύο διαμέτρους κάθετες μεταξύ τους. Οἱ διάμετρες αὐτὲς χωρίζουν τὴν περιφέρεια σὲ 4 ἴσα μέρη. Τὰ μέρη αὐτὰ τὰ ἑνώνομε μὲ χορδὲς κι ἔτσι γράφομε στὸν κύκλο κανονικὸ τετράγωνο (σχ. 80).

Ἀπὸ τὸ τετράγωνο αὐτὸ (μὲ τὸν τρόπο ποὺ εἴπαμε καὶ γιὰ τὸ ἑξάγωνο δηλαδὴ διαιροῦντες τὰ τόξα ὁλοένα σὲ δυὸ ἴσα μέρη) κατασκευάζομε κανονικὰ πολύγωνα μὲ 8, 16, 32, 64, 128 κλπ. πλευρές.

Ἐργασίες — ἀσκήσεις — ἐφαρμογὲς

1) Τὶ λέγεται κύκλος;

2) Τὶ λέγεται περιφέρεια, ἀκτίνα, διάμετρος;

3) Τὶ λέγεται ἡμικύκλιο, ἡμιπεριφέρεια, τόξο, χορδή;

4) Τὶ λέγεται τμῆμα κύκλου, τομέας;

5) Νὰ ἰχνογραφήσετε κύκλους στὸ τετράδιό σας μὲ ἀκτίνα 0,06 μ.

6) Νὰ ἰχνογραφήσετε κύκλο μὲ διάμετρο 0,10 μ.

7) Πόσες μοῖρες ἔχει μιὰ περιφέρεια κύκλου καὶ πόσες τὸ τέταρτο αὐτῆς;

8) Νὰ γράψετε σὲ κύκλο κανονικὸ τρίγωνο, ἑξάγωνο, τετράγωνο, ὀκτάγωνο.

9) Νὰ γράψετε ἕναν κύκλο καὶ νὰ σημειώσετε ἐπάνω στὴν περιφέρεια τὴν ἀκτίνα, τὴ διάμετρο, ἕνα τόξο, μιὰ χορδή, ἕνα τμῆμα καὶ ἕναν τομέα.

10) Ἑνὸς κύκλου ἡ ἀκτίνα εἶναι 0,35 μ. Πόση εἶναι ἡ διάμετρός του;

11) Ἕνας κύκλος ἔχει διάμετρο 0,94 μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίνα του;

12) Ἑνὸς κανονικοῦ τριγώνου, γραμμένου μέσα σὲ κύκλο, πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ τόξο, τὸ ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ σὲ κάθε πλευρά του;

13) Πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ τόξο ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν πλευρὰ κανονικοῦ ἑξαγώνου, πενταγώνου, ὀκταγώνου;

14) Νὰ κάνετε μόνοι σας ὅμοιες ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Πῶς βρίσκομε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου

Γιὰ νὰ βροῦμε πόσα μέτρα εἶναι ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου δὲν μποροῦμε νὰ τὴ μετρήσωμε μὲ τὸ μέτρο, γιατὶ ἡ γραμμή της δὲν εἶναι εὐθεία ἀλλὰ καμπύλη καὶ τὰ μέτρα δὲν μποροῦμε νὰ τὰ κάνωμε καμπυλωτά. Θὰ πρέπει λοιπὸν νὰ πάρωμε μιὰ κλωστή, νὰ τὴν τοποθετήσωμε μὲ προσοχὴ ἐπάνω στὴν περιφέρεια γύρω - γύρω. Ἔπειτα νὰ τὴν τεντώσωμε καὶ νὰ τὴ μετρήσωμε μὲ τὸ μέτρο.

Ἡ ἐργασία αὐτὴ εἶναι δύσκολη. Ἐκτὸς ἀπὸ αὐτὸ ὅμως, δὲν θὰ μπορέσωμε, μὲ ἀκρίβεια, νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας γιατὶ ἡ κλωστὴ κάπως θὰ μᾶς ξεφύγη. Δὲν εἶναι εὔκολο νὰ τὴν τοποθετήσωμε ἀκριβῶς ἐπάνω στὴν καμπύλη περιφέρεια. (Μάθαμε ὅτι καμπύλη λέγεται ἡ γραμμὴ τῆς ὁποίας κανένα σημεῖο δὲν εἶναι εὐθεία). Μὲ ποιὸ τρόπο λοιπὸν θὰ μπορέσωμε νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας;

Μέτρησαν προσεκτικὰ μὲ τὴν κλωστὴ πολλὲς περιφέρειες κύκλου (μικρὲς καὶ μεγάλες). Ἔπειτα μέτρησαν καὶ τὶς διαμέτρους των, τὶς σύγκριναν καὶ βρῆκαν ὅτι ἡ κάθε περιφέρεια εἶναι 3,14 φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ διάμετρό της.

Ἀφοῦ λοιπὸν ξέρομε αὐτὴ τὴ σχέση περιφερείας καὶ διαμέτρου, εὔκολα μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας χωρὶς νὰ τὴ μετροῦμε μὲ κλωστές.

Μετροῦμε τὴ διάμετρο τοῦ κύκλου, πρᾶγμα ποὺ εἶναι εὔκολο, καὶ τὴν πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ 3,14. Ἔτσι βρίσκομε τὴν περιφέρεια.

Τὸν ἀριθμὸ 3, 14 ποτὲ δὲν πρέπει νὰ τὸν ξεχνοῦμε, γιατὶ θὰ τὸν μεταχειριζόμαστε συχνά. Γιὰ εὐκολία στὴ Γεωμετρία τὸν ἀριθμὸ 3, 14 τὸν παριστάνομε μὲ τὸ μικρὸ γράμμα π. Ὅταν λοιπὸν συναντήσωμε ἕνα «π» (μικρὸ) πρέπει νὰ ξέρωμε ὅτι φανερώνει τὸν ἀριθμὸ 3,14.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου ἐπὶ 3,14.

Παρατήρηση: Νὰ μὴ λησμονοῦμε ὅτι ἡ διάμετρος εἶναι διπλασία τῆς ἀκτίνας. Ἑπομένως ὅταν ξέρωμε μόνο τὴν ἀκτίνα, γιὰ νὰ βροῦμε τὴν περιφέρεια διπλασιάζομε τὴν ἀκτίνα καὶ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ 3,14. Ἢ διπλασιάζομε τὸ 3,14 δηλαδὴ τὸ κάνομε 6,28 καὶ τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὴν ἀκτίνα.

Ἐργασίες — ἀσκήσεις — ἐφαρμογὲς

1) Ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου εἶναι 1,30 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρειά του;

2) Ἡ ἀκτίνα ἑνὸς κύκλου εἶναι 0,35 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρειά του;

3) Ἡ περιφέρεια ἑνὸς δένδρου εἶναι 2,512 μ. Πόση εἶναι ἡ διάμετρός του;

4) Ἡ ἀκτίνα τοῦ τροχοῦ ἑνὸς ποδηλάτου εἶναι 0,35 μ. Πόσες στροφὲς θὰ πάρη γιὰ νὰ διατρέξη ἀπόσταση 2.192 μέτρων;

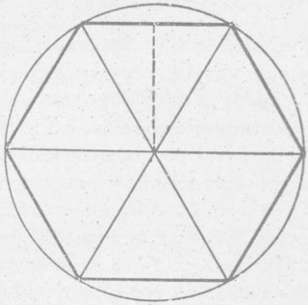
5) Νὰ λύσετε καὶ μόνοι σας ὅμοια προβλήματα καὶ ἀσκήσεις.

Ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου

Μάθαμε ὅτι γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς πολυγώνου τὸ διαιροῦμε μὲ διαγωνίους σὲ τρίγωνα. Βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν καθενὸς καὶ προσθέτομε τὰ ἐμβαδά.

Ὅταν τὸ πολύγωνο εἶναι κανονικό, γραμμένο σὲ κύκλο, τὸ ἐμβαδόν του τὸ βρίσκομε γρηγορώτερα γιατὶ μποροῦμε νὰ τὸ χωρίσωμε σὲ ἴσα τρίγωνα. Καὶ ὅταν τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς καὶ τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ τῶν τριγώνων.

Τὸ κανονικὸ πολύγωνο ποὺ εἶναι γραμμένο σὲ κύκλο τὸ χωρίζομε σὲ ἴσα τρίγωνα ἂν σύρωμε εὐθεῖες ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ κύκλου πρὸς τὶς γωνίες του (σχ. 81).



Σχ. 81

Ὅπως βλέπομε, τὸ κανονικὸ ἑξάγωνο τὸ χωρίσαμε σὲ 6 ἴσα τρίγωνα. Βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς μόνου τριγώνου καὶ τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ 6. Μὰ καὶ τῶν 6 τριγώνων οἱ βάσεις εἶναι ἴσες καὶ τὸ ὕψος εἶναι ἴσο. Μποροῦμε λοιπὸν καὶ διαφορετικὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου. Πολλαπλασιάζομε τὴν περίμετρό του, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλες τὶς βάσεις τῶν τριγώνων, ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιροῦμε διὰ δύο. Μάθαμε ὅτι, ὅσο μεγαλώνομε τὸ πολύγωνο δηλαδὴ ὅσο τὸ κάνομε μὲ περισσότερες πλευρὲς π. χ. 12, 24, 48, 96, 192 κ.λπ. τόσο μικραίνουν τὰ τόξα ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ κάθε πλευρά. Ὥστε αὐξάνοντας στὸ ἄπειρο τὶς πλευρὲς τοῦ πολυγώνου θὰ φθάση κάποτε ἡ στιγμὴ ποὺ ἡ περίμετρός του θὰ συμπέση μὲ τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου. Τότε ἡ βάση ὅλων τῶν τριγώνων τοῦ πολυγώνου, δηλαδὴ ἡ περίμετρός του, θὰ εἶναι καὶ περιφέρεια τοῦ κύκλου καὶ τὸ ὕψος τῶν τριγώνων θὰ εἶναι ἀκτίνα τοῦ κύκλου. Ἔτσι βγαίνει τὸ συμπέρασμα:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου πολλαπλασιάζομε τὴν περιφέρεια ἐπὶ τὴν ἀκτίνα καὶ διαιροῦμε διὰ 2.

Παράδειγμα: Ἡ ἀκτίνα ἑνὸς κύκλου εἶναι 4 μέτρα. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του; Λύση:

$4 + 4 = 8$ μ. διάμετρος
$8 \times 3{,}14 = 25{,}12$ μ. περιφέρεια
$25{,}12 \times 4 = 100{,}47 : 2 = 50{,}24$ τ. μ. ἐμβαδὸν κύκλου

καὶ συντομώτερα ἀκόμη: πολλαπλασιάζομε τὸ διπλάσιο τοῦ 3,14 δηλαδὴ τὸ 6,28 ἀμέσως ἐπὶ τὴν ἀκτίνα ἔτσι:

$4 \times 6{,}28 = 25{,}12$ μ. περιφέρεια
$25{,}12 \times 4 = 100{,}48 : 2 = 50{,}24$ τ.μ. ἐμβαδὸν κύκλου

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο βρίσκομε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέα. Πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος τοῦ τόξου ἐπὶ τὴν ἀκτίνα καὶ διαιροῦμε διὰ 2. Γιατὶ ὁ τομέας μοιάζει μὲ τρίγωνο.

Παρατήρηση: Γιὰ εὐκολία στὴ Γεωμετρία μεταχειριζόμαστε μερικοὺς τύπους ποὺ παριστάνουν τοὺς κανόνες. Μεταχειριζόμαστε τὰ ἀρχικὰ γράμματα π. χ. τὴν περιφέρεια τὴ γράφομε μὲ ἕνα Π κεφαλαῖο γιὰ νὰ μὴ γίνεται σύγχιση μὲ τὸ μικρὸ «π» πού, ὅπως εἴπαμε παριστάνει τὸ 3,14. Τὴ διάμετρο τὴν παριστάνομε μὲ ἕνα «δ» μικρό. Τὴν ἀκτίνα μὲ τὸ «α» μικρὸ καὶ τὸ ἐμβαδὸν μὲ Ε κεφαλαῖο. Ἔτσι λοιπὸν τὸν κανόνα τῆς εὑρέσεως τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τὸν γράφομε μὲ γράμματα ὡς ἑξῆς: $\Pi = \delta \times \pi$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ περιφέρεια εἶναι ἴση μὲ τὴ διάμετρο ἐπὶ 3,14. Ἐπειδὴ ἡ διάμετρος εἶναι δύο ἀκτίνες μποροῦμε νὰ γράψωμε καὶ τὸν τύπο ἔτσι: $\Pi = 2\alpha \times \pi$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ περιφέρεια εἶναι ἴση μὲ 2 ἀκτίνες ἐπὶ 3,14. Τὸν κανόνα γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου τὸν γράφομε μὲ τὸν ἑξῆς τύπο: $E = \alpha \times \alpha \times \pi$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τὸ βρίσκομε ἂν πολλαπλασιάσωμε τὴν ἀκτίνα ἐπὶ τὸν ἑαυτό της καὶ ἐπὶ 3,14.

Ἐργασίες — ἀσκήσεις — ἐφαρμογὲς

1) Ἡ ἀκτίνα ἑνὸς κύκλου εἶναι 2 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

2) Ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου εἶναι 7 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

3) Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου εἶναι 37,96 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

4) Ἕνα πρόβατο εἶναι δεμένο σὲ ἕνα χωράφι μὲ σχοινὶ 3,50 μ. Πόσα τ.μ. θὰ μπορέση νὰ βοσκήση;

5) Στὸ σχολικό μας κῆπο κάναμε ἕναν κύκλο μὲ σχοινὶ 5 μέτρων. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου;

6) Νὰ λύσετε καὶ μόνοι σας ὅμοια προβλήματα καὶ ἀσκήσεις.

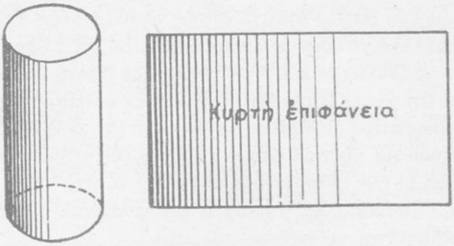
Ἐμβαδὸν τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου

Μάθαμε ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὶς δύο βάσεις του ποὺ εἶναι κύκλοι ἴσοι καὶ παράλληλοι καὶ ἀπὸ τὴν παράπλευρή του ἐπιφάνεια ποὺ εἶναι κυρτή.

Μάθαμε πῶς βρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του. Μένει τώρα νὰ μάθωμε πῶς βρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του. Πῶς θὰ τὸ βροῦμε;

Ἂν τυλίξωμε τὸν κύλινδρο μὲ ἕνα χαρτὶ καὶ ἔπειτα τὸ ἀνοίξωμε, θὰ ἰδοῦμε ὅτι τὸ χαρτὶ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Αὐτὸ τὸ βλέπομε πολλὲς φορές, ὅταν ἀνοίγωμε τὸ χαρτὶ ποὺ ἔχουν γύρω γύρω τὰ κουτιὰ τοῦ γάλακτος τῆς κονσέρβας κ.λ.π. (σχ. 82).

Δηλαδὴ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο μὲ βάση τὴν περιφέρεια τῆς κυκλικῆς βάσης του καὶ ὕψος τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.



Σχ. 82

Ξέρομε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου βρίσκεται ὅταν πολλαπλασιάσωμε τὴ βάση ἐπὶ τὸ ὕψος.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου πολλαπλασιάζομε τὴν περιφέρεια τῆς βάσης ἐπὶ τὸ ὕψος.

Γιὰ νὰ βροῦμε ὅμως τώρα τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, βρίσκομε πρῶτα τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς βάσης του, τὸ διπλασιάζομε καὶ προσθέτομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

Παράδειγμα: Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίνα τῆς βάσης του εἶναι 3 μ. καὶ ὕψος 5 μ;

Λύση: $3 + 3 = 6$
$6 \times 3{,}14 = 18{,}84$ περιφέρεια βάσης κυλίνδρου (κύκλου)
$18{,}84 \times 3 = 56{,}52 : 2 = 28{,}26$ ἐμβαδὸν μιᾶς βάσης
$28{,}26 + 28{,}26 = 56{,}52$ ἐμβαδὸν δύο βάσεων
$56{,}52 \times 5$ (ὕψος) $= 282{,}60$ τ. μ. κυρτὴ ἐπιφάνεια

Ἐμβαδὸν δύο βάσεων............. 56,52 τ.μ.
Ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας...... + 282,60

Ἐμβαδὸν ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου 339,12 τ.μ.

Ἐργασίες — ἀσκήσεις — ἐφαρμογὲς

1) Ἕνας κύλινδρος ἔχει ἀκτίνα βάσης 0,35 μ. καὶ τὸ ὕψος 3 μ. Νὰ βρεθῇ:

α) Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῶν 2 βάσεων; ..

β) Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του;

γ) Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας του;

δ) Πόσα τ.μ. κόντρα πλακὲ θὰ χρειασθοῦν γιὰ νὰ ντυθῇ ἡ κύρτή του ἐπιφάνεια καὶ ἡ ἐπάνω του βάση;

ε) Πόσο θὰ στοιχίση τὸ ντύσιμό του αὐτὸ ὅταν κάθε τ.μ. στοιχίζει 12.000 δραχμές;

Ὄγκος κυλίνδρου

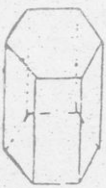
Ἂς πάρωμε δύο δοχεῖα ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ ἕνα νὰ ἔχη σχῆμα πολυγωνικοῦ πρίσματος (σχ. 83) καὶ τὸ ἄλλο κυλίνδρου (σχ. 84). Τὰ δοχεῖα αὐτὰ πρέπει νὰ ἔχουν καὶ τὰ δύο τὸ ἴδιο ὕψος καὶ τὴν ἴδια σχεδὸν βάση. Ἂν τώρα τὰ γεμίσωμε μὲ νερὸ θὰ ἰδοῦμε ὅτι χωροῦν τὴν ἴδια σχεδὸν ποσότητα καὶ τὰ δύο. Ὅπως καταλαβαίνομε, περισσότερο βέβαια νερὸ χωρεῖ στὸ κυλινδρικό.

Ἂν ὅμως κάνωμε τὸ πολυγωνικὸ δοχεῖο μὲ ἄπειρες ἕδρες θὰ καταντήση κύλινδρος. Δηλαδὴ οἱ δύο βάσεις του θὰ γίνουν κύκλοι καὶ ἡ παράπλευρη ἐπιφένειά του κυρτή. Ἑπομένως καὶ τὸν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου τὸν βρίσκομε ὅπως καὶ τὸν ὄγκο τοῦ πρίσματος.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσης του ἐπὶ τὸ ὕψος.

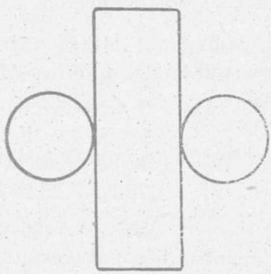
Παράδειγμα: Ἡ ἀκτίνα ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 0,30 μ. καὶ τὸ ὕψος 2 μ. Ποιὸς εἶναι ὁ ὄγκος του;

Λύση: $0{,}30 \times 0{,}30 = 0{,}60$ διάμετρος τῆς βάσης
$0{,}60 \times 3{,}14 = 1{,}884$ μ. ἡ περιφέρεια τῆς βάσης
$1{,}884 \times 0{,}30 = 0{,}5652 : 2 = 0{,}2826$ τ.μ. ἐμβαδὸν βάσης
$0{,}2826 \times 2 = 0{,}5652$ κυβικὰ μέτρα ὄγκος κυλίνδρου



Σχ. 83

Σχ. 84



Σχ. 85

Κατασκευὴ κυλίνδρου

Γιὰ νὰ κατασκευάσωμε τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ κυλίνδρου ἰχνογραφοῦμε σὲ χαρτόνι τὸ σχῆμα 85 καὶ ἐκτελοῦμε τὶς ἴδιες ἐργασίες ποὺ κάναμε καὶ στὰ ἄλλα ἀναπτύγματα. Μποροῦμε νὰ κατασκευάσωμε καὶ γύψινο χρησιμοποιώντας γιὰ καλούπι τὸν χάρτινο.

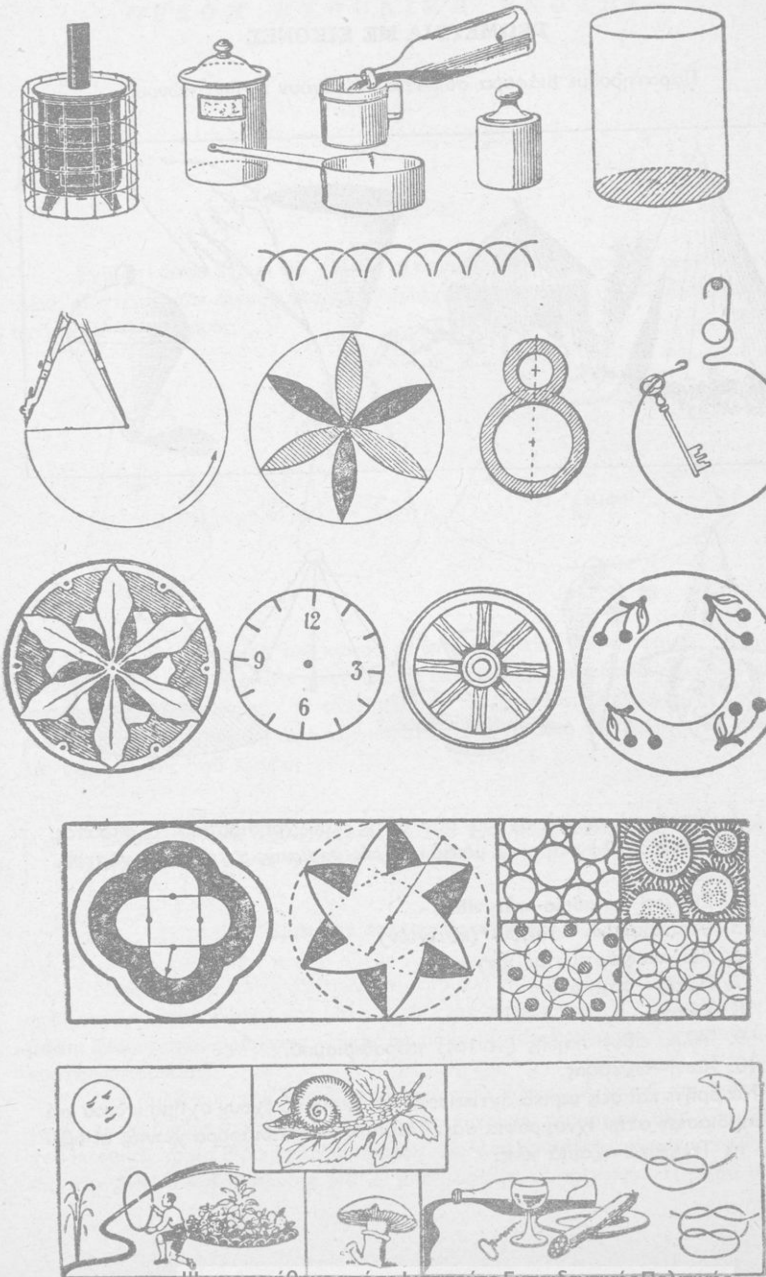
1) Νὰ εὑρεθῆ ὁ ὄγκος κυλίνδρου ποὺ ἔχει διάμετρο, 1,50 μ. καὶ ὕψος 3 μ.

2) Πόσα κιλὰ νερὸ χωρεῖ ἕνα κυλινδρικὸ δοχεῖο ποὺ ἔχει διάμετρο 2 μ. καὶ ὕψος 4 μ. ;

3) Ἡ ἀκτίνα τῆς βάσης ἑνὸς δοχείου εἶναι 0,90 καὶ τὸ ὕψος 1,80 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του καὶ πόσα κιλὰ λάδι χωρεῖ;

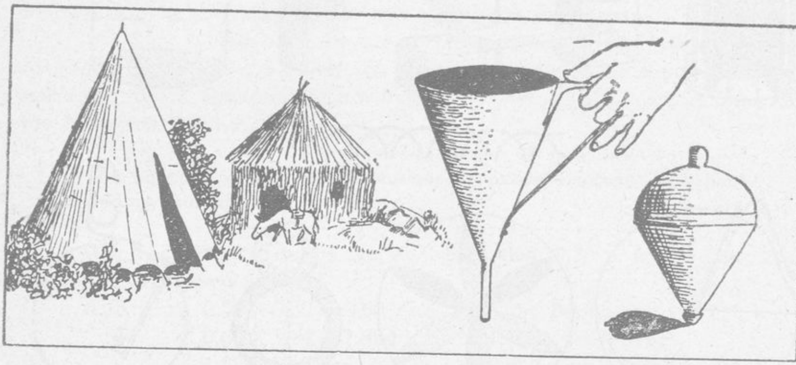
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΕ ΕΙΚΟΝΕΣ

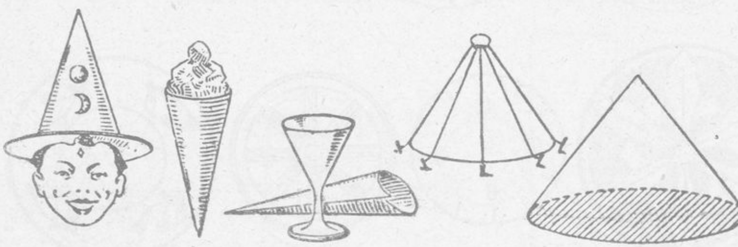
Διάφορες χειροτεχνικὲς ἐργασίες μὲ τὸ διαβήτη κτλ.



ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΕ ΕΙΚΟΝΕΣ

Παρατηροῦμε διάφορα σώματα ποὺ ἔχουν σχῆμα κώνου





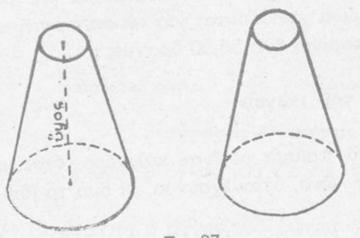
1. Σκηνὴ μὲ κωνικὸ σχῆμα σὰν αὐτὲς ποὺ χρησιμοποιεῖ ὁ στρατός.
2. Καλύβα βλάχικη ποὺ μοιάζει μὲ τὶς θημωνιὲς σιτηρῶν ἢ χόρτου.
3. Ἕνα χωνί.
4. Σβούρα (παιδικὸ παιγνίδι).
5. Ἀποκριάτικο καπέλλο (κοτιγιόν).
6. Χωνάκι χάρτινο μὲ παγωτό.
7. Ποτήρι σαμπάνιας.
8. Κέρατο.
9. Ἄλλο εἶδος σκηνῆς (τέντας) παραθερισμοῦ.
10. Χωνὶ—τηλεβόας.

Νὰ βρῆτε καὶ σεῖς μερικὰ ἀντικείμενα τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν σχῆμα κώνου καὶ νὰ τὰ σχεδιάσετε στὴν ἰχνογραφία σας. Τέτοια εἶναι τὰ διάφορα χωνιά, οἱ ὀβελίσκοι, τὰ Τουρκικὰ τζαμιὰ κλπ.

ΟΓΔΟΗ ΜΕΘΟΔΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

ΚΩΝΟΣ

Σχῆμα κώνου ἔχουν τὰ χωνιά, οἱ κωνικὲς σκηνές, οἱ στέγες μερικῶν σπιτιῶν, οἱ στέγες τῶν ἀνεμομύλων, τῶν βλάχικων καλυβιῶν, οἱ σβοῦρες κ.ἄ. Τὸ σχῆμα 87 εἶναι κῶνος.



Σχ. 87

ΣΧ. 88

Ὅλο τὸ ἐξωτερικὸ τοῦ κώνου ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἐπιφάνειες. Δηλαδὴ ἀπὸ τὴ βάση του, ἡ ὁποία εἶναι κύκλος καὶ ἀπὸ τὴν παράπλευρή του ἐπιφάνεια ἡ ὁποία εἶναι κυρτή. Ἡ παράπλευρή του ἐπιφάνεια τελειώνει σὲ μιὰ κορυφή. Ἡ κάθετη γραμμή, ἀπὸ τὴν κορυφὴ πρὸς τὸ μέσο τῆς βάσης τοῦ κώνου, λέγεται ὕψος τοῦ κώνου.

Κῶνος λέγεται τὸ στερεὸ σῶμα ποὺ ἔχει βάση κύκλο καὶ μιὰ παράπλευρη ἐπιφάνεια κυρτὴ ἡ ὁποία τελειώνει σὲ κορυφή.

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας κώνου

Εἴδαμε πὼς ὁ κῶνος ἀποτελεῖται ἀπὸ δυὸ ἐπιφάνειες, δηλαδὴ ἀπὸ μιὰ ἐπίπεδη κυκλικὴ (τὴ βάση) καὶ μιὰ κυρτὴ (τὴν παράπλευρη). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσης ξέρομε πῶς βρίσκεται. Τώρα θὰ μάθωμε πῶς βρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας.

Ἂν τυλίξωμε τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου μὲ χαρτὶ καὶ ἔπειτα τὸ ἀνοίξωμε θὰ ἰδοῦμε ὅτι τὸ χαρτὶ ἔχει σχῆμα κυκλικοῦ τομέα (σχ. 88). Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέα ξέρομε πὼς βρίσκεται. Πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος τοῦ τόξου ἐπὶ τὴν ἀκτίνα καὶ διαιροῦμε διὰ 2, γιατὶ μοιάζει μὲ τρίγωνο. Ἡ βάση αὐτοῦ

τοῦ τομέα, ὅπως βλέπομε, εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς βάσης τοῦ κώνου καὶ ἡ ἀκτίνα του εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, πολλαπλασιάζομε τὴν περιφέρεια τῆς βάσης του ἐπὶ τὴν πλευρά του καὶ διαιροῦμε διὰ 2.

Ἐργασίες — ἀσκήσεις — ἐφαρμογὲς

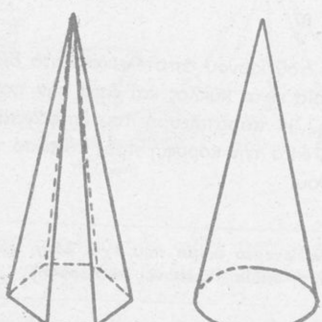
1) Ἑνὸς κώνου ἡ ἀκτίνα τῆς βάσης του εἶναι 3 μ. καὶ ἡ πλευρά του 5 μ. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ἡ κυρτή του ἐπιφάνεια.

2) Μιᾶς κωνικῆς σκηνῆς ἡ διάμετρος τῆς βάσης εἶναι 5 μ. καὶ ἡ πλευρά της 6 μ. Πόσα τ.μ. πανὶ ἔχει ;

3) Ἡ κωνικὴ στέγη ἑνὸς ἀνεμομύλου ἔχει ἀκτίνα 2,50 μ. καὶ πλευρὰ 6,50 μέτρα. Νὰ βρεθῆ α') πόσα τ.μ. λαμαρίνα χρειάζονται γιὰ νὰ σκεπαστῆ καὶ β') πόσο θὰ στοιχίση, ἂν τὸ τ.μ. τῆς λαμαρίνας ἔχει 56,50 δραχμές ;

Ὄγκος τοῦ κώνου

Ὅπως μοιάζει ἕνα πολυγωνικὸ πρίσμα μὲ ἕναν κύλινδρο, ἔτσι μοιάζει καὶ μιὰ πολυγωνικὴ πυραμίδα μὲ ἕναν κῶνο, ὅταν ἔχουν κι' οἱ δυὸ τὸ ἴδιο ὕψος καὶ τὴν ἴδια περίπου βάση (σχ. 89).



Σχ. 89

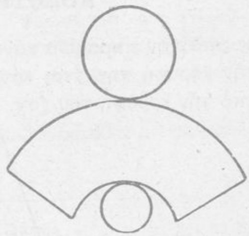
Ἂν τώρα κατασκευάσωμε τὴν πολυγωνικὴ πυραμίδα μὲ ἄπειρες πλευρές, ἡ περίμετρος τῆς βάσης της θὰ γίνη κύκλος καὶ ἡ παράπλευρη ἐπιφάνειά της κυρτή. Ἑπομένως ἡ πυραμίδα αὐτὴ θὰ γίνη κῶνος. Ἄρα τὸν ὄγκο τοῦ κώνου τὸν βρίσκομε, ὅπως καὶ τὸν ὄγκο τῆς πυραμίδος.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ κώνου πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσης του ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιροῦμε διὰ 3.

Κατασκευὴ κώνου

Γιὰ νὰ κατασκευάσωμε ἕναν κῶνο, ἰχνογραφοῦμε τὸ ἀνάπτυγμά του σὲ χαρτόνι, ὅπως κάναμε καὶ γιὰ τὰ ἄλλα γεωμετρικὰ σώματα. Στὸ ἀνάπτυγμα τοῦ κώνου βλέπομε ὅτι ἡ καμπύλη εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς βάσης τοῦ κώνου. Μποροῦμε νὰ κατασκευάσωμε καὶ γύψινο κῶνο, χρησιμοποιώντας γιὰ καλούπι τὸ χάρτινο.

Σχ. 90
Κατασκευὴ κώνου



Σχ. 91
Κατασκευὴ κολούρου κώνου (σελ. 86)

Ἐργασίες — ἀσκήσεις — ἐφαρμογὲς

1) Ποιὸς εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ποὺ ἔχει διάμετρο βάσης 2 μέτρα καὶ ὕψος 5 μέτρα ;

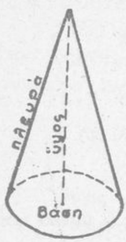
2) Ποιὸς εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ποὺ ἔχει διάμετρο βάσης 2,40 μ. καὶ ὕψος τριπλάσιο τῆς ἀκτίνας του ;

3) Πόσο εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι 35 κυβικὰ μέτρα καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσης του 9 τ.μ. ;

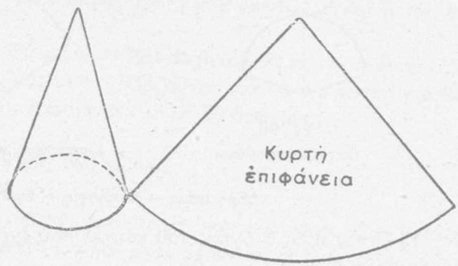
4) Νὰ κατασκευάσετε μὲ χαρτόνι καὶ γύψο κώνους.

ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ

Ὅπως ἀπὸ τὴν πυραμίδα κάνομε κόλουρο πυραμίδα, κόβοντας την λίγο κάτω ἀπὸ τὴν κορυφή της, ἔτσι κάνομε καὶ *κόλουρο κῶνο*, ἂν κόψωμε αὐτὸν λίγο κάτω ἀπὸ τὴν κορυφή του (σχ. 90).



Σχ. 90



Σχ. 01

Τέτοιο σχῆμα ἔχουν οἱ δαχτυλῆθρες, τὰ ποτήρια, τὰ ἀμπαζοὺρ, οἱ κουβάδες, διάφορα ἀνδοδοχεῖα, γλάστρες, κ.ἄ.

Ὁ κόλουρος κῶνος ἔχει δυὸ βάσεις κυκλικές, παράλληλες (ἡ ἐπάνω εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴν κάτω) καὶ μιὰ κυρτὴ ἐπιφάνεια.

Ὕψος τοῦ κολούρου κώνου ἢ ἄξονος εἶναι ἡ κάθετος, ποὺ ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν δύο βάσεων. Πλευρὰ τοῦ κολούρου κώνου, λέγεται ἡ εὐθεία τοῦ ἑνώνει δύο σημεῖα τῶν περιφερειῶν τῶν δύο βάσεών του.

Ἐμβαδὸν τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου

Τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων τοῦ κολούρου κώνου ξέρομε πὼς βρίσκεται, γιατὶ εἶναι κύκλοι (ποπλλαλασιάζομε τὴν περιφέρεια ἐπὶ τὴν ἀκτίνα καὶ διαιροῦμε διὰ 2.) Μένει νὰ μάθωμε πῶς βρίσκεται ἡ κυρτή του ἐπιφάνεια.

Ἂν τυλίξωμε τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου μὲ χαρτὶ καὶ ἔπειτα τὸ ἀνοίξωμε, θὰ σχηματισθῇ ἕνα σχῆμα ποὺ μοιάζει πολὺ μὲ τραπέζιο (σχ. 91) καὶ τοῦ ὁποίου βάσεις, εἶναι οἱ περιφέρειες τῶν δύο βάσεων τοῦ κολούρου κώνου. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου βρίσκεται ὅπως βρίσκεται καὶ τοῦ τραπεζίου.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου, πολλαπλασιάζομε τὸ ἄθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν δύο βάσεών του ἐπὶ τὴν πλευρά του καὶ διαιροῦμε διὰ 2.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α : Ἡ ἀκτίνα τῆς μεγάλης βάσης ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 3 μέτρα, τῆς μικρᾶς βάσης 2 μ. καὶ ἡ πλευρὰ του 4 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του.

Λ ύ σ η : 3+ 3 = 6μ. διάμετρος κάτω βάσης.
6× 3,14= 18,84 μ. περιφέρεια κάτω βάσης.
18,84× 3= 56,52 : 2= 28,26 τ.μ. ἐμβαδὸν κάτω βάσης.
2× 2= 4 μ. διάμετρος ἄνω βάσης.
4× 3,14= 12,56 μ. περιφέρεια ἄνω βάσης.
12,56× 2= 25,12 : 2= 12,56 τ.μ. ἐμβαδὸν ἄνω βάσης.
18,84+ 12,56= 31,40 μ. ἄθροισμα τῶν περιφ. τῶν δύο βάσεων.

Ἄρα : 31,40× 4= 125,60 : 2= 62,80 τ.μ. ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας.

28,26	**τ. μ. ἐμβαδὸν κάτω βάσης**
12,56	**τ. μ. ἐμβαδὸν ἄνω βάσης**
+ **62,80**	**τ. μ. ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας**
103,62	**τ. μ. ἐμβ. ὅλης τῆς ἐπιφ. τοῦ κολούρου κώνου**

Ἐργασίες — ἀσκήσεις — ἐφαρμογὲς

1) Ἕνα καδὶ ξύλινο σχήματος κολούρου κώνου ἔχει ἀκτίνα βάσεων 0,92 καὶ 0,63 καὶ πλευρὰ 0,80 μ. Νὰ εὑρεθῇ :

α΄) Τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του.

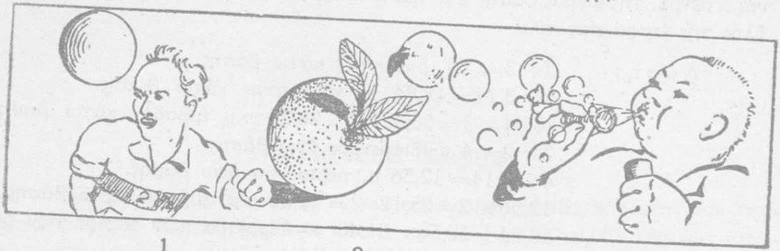
β΄) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

γ΄) Τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του.

2) Τὴν κατασκευὴ τοῦ κολούρου κώνου βλέπομε στὴν σελ. 85.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΕ ΕΙΚΟΝΕΣ

Παρατηροῦμε διάφορα σώματα μὲ σφαιρικὸ σχῆμα



1 2 3

4

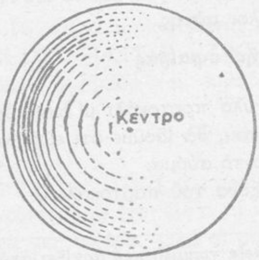
5 6

1. Ἕνας ποδοσφαιριστὴς παίζει μὲ τὴν μπάλλα. 2. Ἕνα πορτοκάλι. 3. Ὁ Λάκης κάνει φυσαλλίδες μὲ σαπουνάδα. 4. Ἡ Ἀλίκη ἀγοράζει ἕνα φλυτζάνι τσαγιοῦ ποὺ ἔχει σχῆμα μισῆς σφαίρας. 5. Διάφοροι βόλοι καὶ μιὰ μεγάλη μπάλλα γιὰ βόλεϋ—μπώλ. 6. Ὑδρόγειος σφαῖρα.

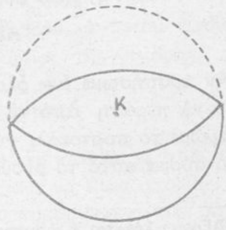
Νὰ βρῆτε καὶ σεῖς μερικὰ ἀντικείμενα μὲ σφαιρικὸ σχῆμα. Ὑπάρχουν πολλὰ τέτοια π.χ. τὰ πόμολα τῶν κρεβατιῶν, διάφορα κάγκελα, τόπια κ.ἄ.

ΣΦΑΙΡΑ

Τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει τὸ τόπι, τὸ ποδόσφαιρο, ὁ βόλος, διάφοροι καρποὶ (πορτοκάλια, μῆλα, ρόγες σταφυλιοῦ), οἱ μπίλιες καὶ ἄλλα σώματα λέγεται *σφαίρα*. Τὸ σχῆμα 92 εἶναι σφαίρα.



Σχ. 92



Σχ. 93

Ἡ σφαίρα, ὅπως βλέπομε, περικλείεται ἀπὸ μία ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν τὸ ἴδιο ἀπὸ ἕνα σημεῖο, ποὺ βρίσκεται στὸ μέσον της ἀκριβῶς καὶ τὸ ὁποῖο λέγεται κέντρο. Ἡ εὐθεία γραμμὴ ποὺ ἑνώνει τὸ κέντρο μὲ τὴν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, λέγεται ἀκτίνα τῆς σφαίρας. Ἡ εὐθεία γραμμὴ ποὺ ἀρχίζει ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια, περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο καὶ φθάνει πάλι στὴν ἐπιφάνεια, λέγεται διάμετρος τῆς σφαίρας. Ἡ σφαίρα δὲν ἔχει μιὰ ὡρισμένη βάση. Στηρίζεται σὲ πολλὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας της.

Σφαίρα λέγεται τὸ στερεὸ σῶμα, τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας του ἀπέχουν τὸ ἴδιο ἀπὸ ἕνα σημεῖο, ποὺ βρίσκεται μέσα σ' αὐτὴ καὶ λέγεται κέντρο τῆς σφαίρας.

Μεγάλοι καὶ μικροὶ κύκλοι

Ἂν κόψωμε ἕνα ὁλοστρόγγυλο πορτοκάλι σὲ δύο ἴσα κομμάτια καὶ προσέξωμε τὴν τομή, θὰ ἰδοῦμε ὅτι εἶναι ἐπιφάνεια μὲ σχῆμα κύκλου (σχ. 93).

Ὅσες τομὲς κι' ἂν κάνωμε στὸ πορτοκάλι, ὅλες ἔχουν σχῆμα κύκλου. Μὰ οἱ τομὲς ποὺ περνοῦν ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς σφαίρας, εἶναι κύκλοι ἴσοι καὶ μεγαλύτεροι ἀπὸ τοὺς κύκλους οἱ ὁποῖοι σχηματίζονται μὲ τομὲς ποὺ δὲν περνοῦν ἀπὸ τὸ κέντρο (σχ. 93).

'Εργασίες — ἀσκήσεις — ἐφαρμογὲς

1) Τί πρέπει νὰ ξέρωμε γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ τί γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο της;

2) Ποιὰ εἶναι ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι 0,25 μέτρα;

3) Ὁ μέγιστος κύκλος μιᾶς σφαίρας ἔχει ἐμβαδὸν 5,442 τ.μ. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνειά της;

4) Ὁ Ἰσημερινὸς τῆς Γῆς ἔχει μῆκος 40.000 χιλιόμετρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ἡ ἐπιφάνειά της;

5) Μιᾶς σφαίρας ἡ ἀκτίνα εἶναι 0,45 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

6) Νὰ λύσετε καὶ μόνοι σας ὅμοια προβλήματα καὶ ἀσκήσεις.

Κατασκευὴ σφαίρας μὲ γύψο

Γιὰ νὰ κατασκευάσωμε μιὰ σφαίρα ὁλοστρόγγυλη ἀπὸ χαρτόνι ἢ ξύλο εἶναι δύσκολο. Μὲ πηλὸ μποροῦμε νὰ κατασκευάσωμε εὐκολώτερα σφαίρα, μὰ πάλι δὲν θὰ ἔχωμε ἀκρίβεια. Μποροῦμε ὅμως νὰ κατασκευάσωμε γύψινη σφαίρα μὲ κάποια ἀκρίβεια ἂν κόψωμε ἕνα τόπι (ποὺ τρύπησε στὰ παιγνίδια μας καὶ δὲν μᾶς χρειάζεται) σὲ δύο ἴσα κομμάτια. Ἔπειτα ἑτοιμάζομε λυωμένο γύψο καὶ τὸν χύνομε μέσα στὸ μισὸ τόπι (στὸ ἡμισφαίριο). Πρὶν πήξῃ καλὰ ὁ γύψος μπήγομε στὸ κέντρο ἕνα ξύλο ἢ ἕνα καρφί, ἔτσι ὥστε νὰ χωθῇ τὸ μισό. Ὅταν πήξῃ βγάζομε ἀπὸ τὸ τόπι τὸ γύψινο ἡμισφαίριο ποὺ κάναμε καὶ ξαναχύνομε στὸ καλούπι μας αὐτὸ ἢ στὸ ἄλλο μισὸ τόπι πάλι λυωμένο γύψο. Πρὶν πήξῃ καλὰ ὁ γύψος προσαρμόζομε τὸ πρῶτο ἡμισφαίριο ἔτσι ὥστε νὰ χωθῇ τὸ ἄλλο μισὸ καρφὶ ποὺ ἐξέχει, μέσα στὸ κέντρο τοῦ δεύτερου ἡμισφαιρίου. Ἔτσι ἔχομε μιὰ ὡραία γύψινη σφαίρα. Τὸ ξυλάκι ἢ τὸ καρφὶ ποὺ βάλαμε συγκρατεῖ τὰ δύο ἡμισφαίρια.

ΤΕΛΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

III. Η ΚΛΙΜΑΚΑ

IV. ΠΛΑΓΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ

V. ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΔΑ

VI. ΠΡΙΣΜΑΤΑ

VII. ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΠΥΡΑΜΙΔΑ

VIII. ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

IX. ΚΩΝΟΣ

X. ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ

10 ΣΦΑΙΡΑ

[illegible] 9 — πόντοι
Καφέ 5 — πόντοι.
Κόκκινη 8 — «»
Κίτρινη. 8 — «»
[illegible] 4 — «»
Μαύρη 8 — «»

ΤΑ ΝΕΑ ΒΟΗΘΗΤΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΧΑΡΗ ΠΑΤΣΗ

ΤΑΞΗ Α'

No 1. 'Ολικὸ ἀναγνωστικὸ (πραγματογνωσία)
7. Γραμματικὴ μὲ εἰκόνες
30. Μαθαίνω νὰ μετρῶ

ΤΑΞΗ Β'

No 2. 'Ελεύθερο 'Αναγνωστικὸ (πραγματογνωσία)
8. Γραμματικὴ μὲ εἰκόνες
31. Μαθαίνω νὰ μετρῶ

ΤΑΞΗ Γ' (χωριστὴ)

No 3. 'Ελεύθερο 'Αναγνωστικὸ
9. Γραμματικὴ Δημοτικῆς
11. Παλαιὰ Διαθήκη
16. 'Ηρωϊκὰ Χρόνια
22. Φυσικὴ 'Ιστορία
32. 'Αριθμητικὴ μὲ εἰκόνες
36. Πατριδογνωσία - Τὸ διαμέρισμα κάθε μαθητοῦ
— Πατριδογνωστικὸς Χάρτης

ΤΑΞΗ Δ' (χωριστὴ)

No 4. 'Ελεύθερο 'Αναγνωστικὸ
9. Γραμματικὴ Δημοτικῆς
12. Καινὴ Διαθήκη
17 'Αρχαία 'Ελλάδα
23. Φυσικὴ 'Ιστορία
33. 'Αριθμητικὴ μὲ εἰκόνες
46. Γεωγραφία 'Ελλάδος
— Τριπλὸς χάρτης 'Ελλάδος

ΤΑΞΕΙΣ Γ-Δ (1ον ἔτος)

No 3. 'Ελεύθερο 'Αναγνωστικὸ
9. Γραμματικὴ Δημοτικῆς
11. Παλαιὰ Διαθήκη
18. 'Ελληνικὴ 'Ιστορία
22. Φυσικὴ Ἱστορία
32. 'Αριθμητικὴ μὲ εἰκόνες
36. Πατριδογνωσία - Τὸ διαμέρισμα κάθε μαθητοῦ
— Πατριδογνωστικὸς χάρτης

ΤΑΞΕΙΣ Γ-Δ (2ον ἔτος)

No 4. 'Ελεύθερο 'Αναγνωστικὸ
9. Γραμματικὴ Δημοτικῆς
12. Καινὴ Διαθήκη
19. 'Ελληνικὴ 'Ιστορία
23. Φυσικὴ Ἱστορία
33. 'Αριθμητικὴ μὲ εἰκόνες
46. Γεωγραφία 'Ελλάδος
— Τριπλὸς χάρτης 'Ελλάδος

ΤΑΞΗ Ε' (χωριστὴ)

No 5. 'Ελεύθερο 'Αναγνωστικὸ
10. Γραμματικὴ καθαρευούσης
13. 'Εκκλησιαστικὴ Ἱστορία
15. . . . . .
20. Βυζαντινὴ Ἱστορία
24. Φυσικὴ Ἱστορία
28. Φυσ. Πειραματικὴ-Χημεία
34. 'Αριθμητικὴ Ε-ΣΤ'
35. Γεωμετρία Ε-ΣΤ'
47. Γεωγραφία 'Ηπείρων
— Χάρτες 'Ηπείρων

ΤΑΞΗ ΣΤ' (χωριστὴ)

No 5. 'Ελεύθερο 'Αναγνωστικὸ
10. Γραμματικὴ καθαρευούσης
14. Λειτουργικὴ - Κατήχηση
15. . . . . .
21. 'Ιστορία Νέων Χρόνων
25. Φυσικὴ Ἱστορία
29. Φυσ. Πειραματικὴ - Χημεία
34 'Αριθμητικὴ Ε-ΣΤ'
35 Γεωμετρία Ε-ΣΤ'
48. Γεωγραφία Εὐρώπης
— Τριπλὸς χάρτης Εὐρώπης

ΤΑΞΕΙΣ Ε - ΣΤ' (1ον ἔτος)

No 5. 'Ελεύθερο 'Αναγνωστικὸ
10. Γραμματικὴ καθαρευούσης
13. 'Εκκλησιαστικὴ 'Ιστορία
15. . . . . .
20 Βυζαντινὴ 'Ιστορία
26. Φυσικὴ Ἱστορία
28. Φυσ. Πειραματικὴ - Χημεία
34. 'Αριθμητικὴ Ε-ΣΤ
35 Γεωμετρία Ε-ΣΤ
47. Γεωγραφία 'Ηπείρων
— Χάρτες 'Ηπείρων

ΤΑΞΕΙΣ Ε-ΣΤ' (2ον ἔτος)

No 6. 'Ελεύθερο 'Αναγνωστικὸ
10 Γραμματικὴ καθαρευούσης
14. Λειτουργικὴ - Κατήχηση
15 . . . . .
21. 'Ιστορία Νέων Χρόνων
27. Φυσικὴ Ἱστορία
29. Φυσ. Πειραματικὴ - Χημεία
34. 'Αριθμητικὴ
48. Γεωγραφία Εὐρώπης
— Τριπλὸς χάρτης Εὐρώπης