ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ καθηγητοῦ τῶν μαθηματικῶν
ἐν τῷ Πρακτικῷ Λυκείῳ Ἀθηνῶν.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΚΑΙ ΜΑΘΗΤΡΙΩΝ
ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΣΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ Β΄

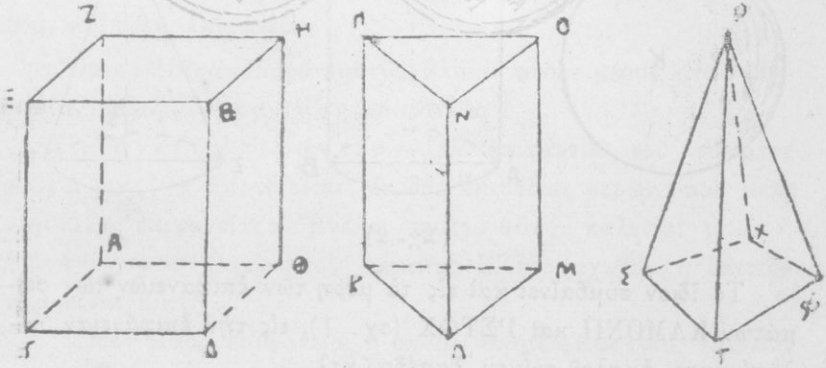
ΕΚΔΟΤΙΚΟΝ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
...ΤΖΑΚΑ & Σ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ
1922

Πᾶν ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφ
καὶ τὴν σφραγῖδα τῶν ἐκδοτῶν.

ΕΚΔΟΤΙΚΟΝ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
Ν. ΤΖΑΚΑ & Σ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

Τύποις: ΑΧΙΛ. ΚΟΥΡΕΜΗ καὶ Σια, Ἀθῆναι, Ζήνωνο 2

ΑΔΕΛΦΟΙ Γ. ΑΣΠΙΩΤΗ ΕΝ ΚΕΡΚΥΡΑι



(Σχ. 1)

§ 1 **Διάστημα.—** Ὄγκος σώματος.—Τὸ σῶμα ΑΒ [1](σχ. 1), ὡς καὶ πᾶν ἄλλο σῶμα, εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς ἀπείρου περὶ ἡμᾶς ἐκτάσεως, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν διάστημα.

Ἕκαστον τῶν σωμάτων ΑΒ, ΚΛΜΟΝΠ, ΡΣΤΦΧ (σχ. 1) καταλαμβάνει μέρος τι τοῦ διαστήματος, τὸ ὁποῖον καλεῖται ὄγκος αὐτοῦ.

Ὥστε: Ὄγκος σώματος καλεῖται τὸ μέρος τοῦ διαστήματος, τὸ ὁποῖον τὸ σῶμα τοῦτο καταλαμβάνει.

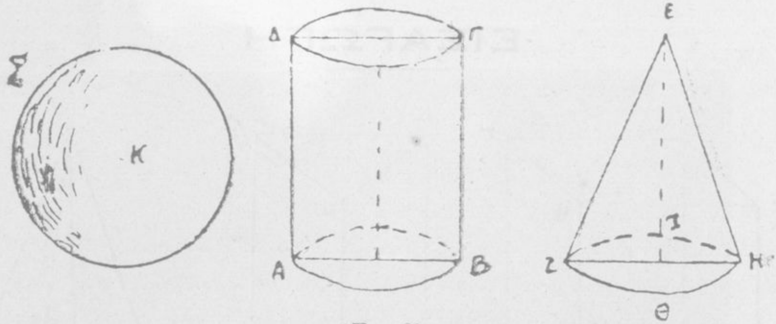
§ 2. **Ἐπιφάνεια.**—Παρατηροῦντες ἓν τυχὸν σῶμα π.χ. τὸ ΑΒ (σχ. 1), ἐκ τῶν ἔμπροσθεν, ὄπισθεν, δεξιῶν, ἀριστερῶν, ἄνω καὶ κάτω, βλέπομεν πάντα τὰ ἄκρα αὐτοῦ. Πάντα ὁμοῦ τὰ ἄκρα ταῦτα ἀποτελοῦσι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σώματος τούτου. Τοῦτο ἀληθεύει καὶ διὰ πᾶν ἄλλο σῶμα.

Ὥστε: Ἐπιφάνεια σώματος καλεῖται τὸ σύνολον τῶν ἄκρων αὐτοῦ.

§ 3 —Εἴδη ἐπιφανειῶν.—α΄. Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια.—Τοῦ σώματος ΑΒ (σχ 1) ἡ ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται ἀπὸ

[1] Ὁ διδάσκων ἐπιδεικνύει τοῖς μαθηταῖς τὰ σχήματα ΑΒ κτλ. (σχ. 1)

ἓξ μέρη. Ἐὰν ἐπί τινος τούτων, π. χ. τοῦ ΕΓΔΒ, θέσωμεν νῆμα καλῶς τεταμένον, παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο ἐφαρμόζει πανταχοῦ τοῦ ΕΓΔΒ.



(Σχ. 2)

Τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ εἰς τὰ μέρη τῶν ἐπιφανειῶν τῶν σωμάτων ΚΛΜΟΝΠ καὶ ΡΣΤΦΧ (σχ. 1), εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ὑαλοπίνακος, ὁμαλοῦ τοίχου, δαπέδου κτλ.

Εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σώματος Σ (σχ. 2) τὸ τεταμένον νῆμα οὐδόλως ἐφαρμόζει.

Εἰς τὰ μέρη ΑΒ καὶ ΔΓ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος ΑΒΓΔ (σχ. 2) τὸ νῆμα ἐφαρμόζει πανταχοῦ, ἐν ᾧ εἰς τὴν λοιπὴν αὐτοῦ ἐπιφάνειαν δὲν ἐφαρμόζει πανταχοῦ. Ὅμοιον συμβαίνει καὶ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σώματος ΕΖΗ (σχ. 2). Ὥστε εἰς ἄλλας μὲν ἐπιφανείας τὸ τεταμένον νῆμα ἐφαρμόζει πανταχοῦ, εἰς ἄλλας δὲν ἐφαρμόζει πανταχοῦ καὶ εἰς ἄλλας οὐδόλως ἐφαρμόζει.

Πᾶσα ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας νῆμα καλῶς τεταμένον ἐφαρμόζει πανταχοῦ, καλεῖται ἐ π ί π ε δ ο ς ἐπιφάνεια ἢ ἁπλῶς ἐ π ί π ε δ ο ν.

Ἡ ἐπιφάνεια ὑαλοπίνακος, ὁμαλοῦ τοίχου, δαπέδου, ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ἠρεμοῦντος ὕδατος, εἶναι ἐπίπεδος ἐπιφάνεια.

β'. Τ ε θ λ α σ μ έ ν η ἢ π ο λ υ ε δ ρ ι κ ὴ ἐ π ι φ ά ν ε ι α.—Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σώματος ΑΒ (σχ. 1) ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα, ἀλλὰ δὲν εἶνε ὅλη ὁμοῦ ἐ π ί π ε δ ο ν. Αὕτη καλεῖται π ο λ υ ε δ ρ ι κ ὴ ἢ τ ε θ λ α σ μ έ ν η ἐπιφάνεια.

Τοιαύτη εἶνε καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστου τῶν σωμάτων ΚΛΜΟΝΠ, ΡΣΤΦΧ (σχ. 1).

Ὥστε: Πᾶσα ἐπιφάνεια ἡ ὁποία ἀποτελεῖται μὲν ἀπὸ ἐπίπεδα, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἐπίπεδον, καλεῖται τεθλασμένη ἢ πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια.

γ'. Καμπύλη ἐπιφάνεια.—Τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος Σ (σχ. 2) οὐδὲν μέρος εἶναι ἐπίπεδον· ἡ ἐπιφάνεια αὕτη καλεῖται καμπύλη ἐπιφάνεια. Καὶ ἡ ἐπιφάνεια ᾠοῦ εἶναι ἐπίσης καμπύλη ἐπιφάνεια.

Ὥστε: Πᾶσα ἐπιφάνεια τῆς ὁποίας οὐδὲν μέρος εἶναι ἐπίπεδον, καλεῖται καμπύλη ἐπιφάνεια.

δ'. Μικτὴ ἐπιφάνεια.—Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σώματος ΑΒΓΔ (σχ. 2) ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἐπιπέδων μερῶν καὶ μιᾶς καμπύλης ἐπιφανείας. Ἕνεκα τούτου αὕτη καλεῖται μικτὴ ἐπιφάνεια. Ὁμοίως τοῦ σώματος ΕΖΗ (σχ. 2) ἡ ἐπιφάνεια εἶναι μικτή.

Ὥστε: Πᾶσα ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα καὶ καμπύλα μέρη, καλεῖται μικτὴ ἐπιφάνεια.

Ἐρωτήσεις.—Τί καλεῖται διάστημα; τί ὄγκος σώματος; τί ἐπιφάνεια σώματος; Πόσα καὶ ποῖα τὰ εἴδη τῶν ἐπιφανειῶν; Πῶς διακρίνομεν ἂν ἐπιφάνειά τις εἶναι ἐπίπεδος; Τί καλεῖται τεθλασμένη ἐπιφάνεια; πῶς ἄλλως λέγεται αὕτη; Τί καλεῖται καμπύλη καὶ τί μικτὴ ἐπιφάνεια;

§ 4. **Γραμμαί**.—Εἴδη γραμμῶν.—Τὰ δύο μέρη, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σώματος ΕΖΗ (σχ. 2) τέμνονται· ἡ τομὴ αὐτῶν ΖΘΗΙ καλεῖται γραμμή. Ὁμοίως γραμμὴ καλεῖται καὶ ἡ τομὴ ΔΘ τῶν δύο μερῶν ΑΓΔΘ καὶ ΔΘΒΗ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος ΑΒ (σχ 1).

Ὥστε: Γραμμὴ καλεῖται ἡ τομὴ δύο ἐπιφανειῶν.

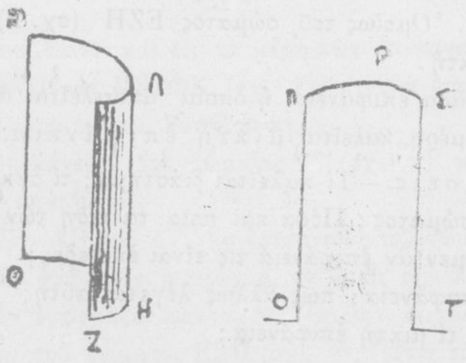
α'. Εὐθεῖα γραμμή.—Ἡ ἁπλουστέρα τῶν γραμμῶν εἶναι ἡ εὐθεῖα γραμμή.— Εἰκόνα ταύτης σχηματίζομεν παρατηροῦντες νῆμα ἢ τρίχα καλῶς τεταμένην, τὴν τομὴν δύο τοίχων κ.τ.λ.

β'. Τεθλασμένη γραμμή.—Ἡ γραμμὴ ΚΛΜ (σχ. 1) ἀποτελεῖται μὲν ἐξ εὐθειῶν, ἀλλὰ δὲν εἶναι εὐθεῖα γραμμή. Αὕτη καλεῖται τεθλασμένη γραμμή. Ὁμοίως αἱ γραμμαὶ ΔΒΗ, ΡΣΤΦ (σχ. 1) εἶναι τεθλασμέναι γραμμαί.

Ὥστε: Τεθλασμένη γραμμὴ καλεῖται πᾶσα γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται μὲν ἐξ εὐθειῶν, ἀλλὰ δὲν εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

γ΄. Καμπύλη γραμμή. — Τῆς γραμμῆς ΑΒ (σχ. 2) οὐδὲν μέρος εἶναι εὐθεῖα γραμμή. Αὕτη καλεῖται καμπύλη γραμμή. Ὁμοίως αἱ γραμμαί, εἰς τὰς ὁποίας περατοῦται φύλλον δάφνης, ἑκατέρα ὄψις μεταλλικοῦ νομίσματος κ.τ.λ. εἶναι καμπύλαι γραμμαί.

Ὥστε: Καμπύλη γραμμὴ καλεῖται πᾶσα γραμμή, τῆς ὁποίας οὐδὲν μέρος εἶναι εὐθεῖα γραμμή.



(Σχ. 3)

δ΄. Μικτὴ γραμμή. — Ἡ γραμμὴ ΖΗΘΜΛ, εἰς τὴν ὁποίαν περατοῦται ἡ ἐξωτερικὴ π.χ. ἐπιφάνεια τοῦ σώματος ΘΛ (σχ. 3) ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο εὐθείας καὶ δύο καμπύλας γραμμάς. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον αὕτη καλεῖται μικτὴ γραμμή. — Ὁμοίως ἡ γραμμὴ ΟΠΡΣΤ (σχ. 3) ἀποτελουμένη ἐκ δύο εὐθειῶν καὶ μιᾶς καμπύλης γραμμῆς καλεῖται μικτὴ γραμμή.

Ὥστε: Μικτὴ γραμμὴ καλεῖται πᾶσα γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμάς.

Ἐρωτήσεις. — Τί καλοῦνται γραμμαί; Πόσα καὶ τίνα τὰ εἴδη τῶν γραμμῶν; Πῶς σχηματίζομεν εἰκόνα τῆς εὐθείας γραμμῆς; Τί καλεῖται τεθλασμένη, καμπύλη, μικτὴ γραμμή;

Περιληπτικὸς πίναξ ἐπιφανειῶν καὶ γραμμῶν.

Εἴδη ἐπιφανειῶν	*Εἴδη γραμμῶν*
Α΄. Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἐπίπεδον	Α΄. Εὐθεῖα γραμμή.
Β΄. Τεθλασμένη ἐπιφάνεια (ἀποτελεῖται ἐξ ἐπιπέδων ἀλλὰ δὲν εἶναι ἐπίπεδον)	Β΄. Τεθλασμένη γραμμή. (ἀποτελεῖται ἐξ εὐθειῶν ἀλλὰ δὲν εἶναι εὐθεῖα γραμμή).
Γ΄. Καμπύλη ἐπιφάνεια (Οὐδὲν μέρος αὐτῆς εἶναι ἐπίπεδον)	Γ΄. Καμπύλη γραμμή. (Οὐδὲν μέρος αὐτῆς εἶναι εὐθεῖα γραμμή.
Δ΄. Μικτὴ ἐπιφάνεια (ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπιπέδους καὶ καμπύλας ἐπιφανείας).	Δ΄. Μικτὴ γραμμή. (ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμάς).

§ 5. **Σημεῖον.** — Ἡ τομὴ Β τῶν δύο γραμμῶν ΔΒ καὶ ΒΕ (σχ. 1) καλεῖται σημεῖον. Ὁμοίως ἡ τομὴ Μ. τῶν γραμμῶν ΘΜ. καὶ ΜΛ (σχ. 3) εἶναι σημεῖον.

Ὥστε: Σημεῖον καλεῖται ἡ τομὴ δύο γραμμῶν.

Ἕκαστον σημεῖον παρίσταται ἐν τῷ χάρτῃ ἢ τῷ πίνακι διά τινος στιγμῆς.

Σημ. Ἐξ ὅσων εἴπομεν μέχρι τοῦδε εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι ἀνήκουσιν εἰς τὰ σώματα, αἱ γραμμαὶ εἰς τὰς ἐπιφανείας (καὶ ἐπομένως καὶ εἰς τὰ σώματα) καὶ τὰ σημεῖα εἰς τὰς γραμμὰς (ἐπομένως καὶ εἰς τὰς ἐπιφανείας καὶ σώματα).

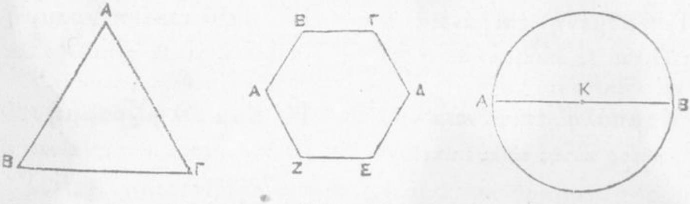
Πολλάκις ὅμως νοοῦμεν τὰς ἐπιφανείας ἄνευ τῶν σωμάτων, τὰς γραμμὰς ἄνευ τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τὰ σημεῖα ἄνευ τῶν γραμμῶν, εἰς τὰς ὁποίας εὑρίσκονται.

§ 6 **Σχῆμα σώματος. — Εἴδη σχημάτων.** — Τὸ σῶμα ΑΒ (σχ 1) περατοῦται ἐξωτερικῶς κατὰ τρόπον διάφορον τοῦ τρόπου, κατὰ τὸν ὁποῖον περατοῦται τὸ σῶμα ΚΛΜΝΟΠ (σχ 1). Ἕνεκα τούτου λέγομεν περὶ αὐτῶν ὅτι ἔχουσιν διάφορον σχῆμα. Ὁμοίως τὰ σώματα Σ, ΑΒΓΔ, ΕΖΗ (σχ 2) ἔχουσι διάφορον σχῆμα, διότι ἕκαστον περατοῦται ἐξωτερικῶς κατὰ τρόπον διάφορον τοῦ τρόπου, κατὰ τὸν ὁποῖον ἕκαστον τῶν ἄλλων περατοῦται.

Ὥστε: Σχῆμα σώματος καλεῖται ὁ τρόπος, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ σῶμα τοῦτο περατοῦται ἐξωτερικῶς.

Ἑκάστου τῶν σχημάτων ΑΒΓ, ΑΒΓΔΕΖ, Κ (σχ. 4) πάντα τὰ σημεῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ χάρτου (ἢ πίνακος).

Τὰ τοιαῦτα σχήματα καλοῦνται διὰ τοῦτο ἐπίπεδα σχήματα.



(Σχ. 4)

Οὐδενὸς ὅμως τῶν σχημάτων ΑΒ, ΚΛΜΝΟΠ, ΡΣΤΦΧ (σχ 1) Σ, ΑΒΓΔ, ΕΖΗ, (σχ 2) ὅλα τὰ σημεῖα δύνανται νὰ τεθῶσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Τὰ τοιαῦτα σχήματα καλοῦνται στερεὰ σχήματα.

Ὥστε: Ἐπίπεδα σχήματα καλοῦνται τὰ σχήματα, τῶν ὁποίων ὅλα τὰ σημεῖα εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Στερεὰ σχήματα καλοῦνται τὰ σχήματα, τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα δὲν κεῖνται ὅλα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

§ 7. **Γεωμετρία**. — Διαίρεσις αὐτῆς. — Γεωμετρία καλεῖται ἡ ἐπιστήμη, ἡ ὁποία διδάσκει τὰς ἰδιότητας τῶν σχημάτων καὶ τὰς μεθόδους τῆς μετρήσεως αὐτῶν.

Τὸ μέρος τῆς γεωμετρίας, τὸ ὁποῖον ἐξετάζει τὰ ἐπίπεδα σχήματα, καλεῖται ἐπιπεδομετρία· τὸ δὲ μέρος, τὸ ὁποῖον ἐξετάζει τὰ στερεὰ σχήματα, καλεῖται στερεομετρία.

Ἡ γεωμετρία ἐξετάζει τὰ διάφορα σχήματα χωρὶς νὰ λαμβάνῃ ὑπ' ὄψιν τὴν ὕλην, ἐκ τῆς ὁποίας ἀποτελοῦνται τὰ τοιοῦτον ἢ τοιοῦτον σχῆμα ἔχοντα σώματα.

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ. - ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

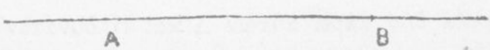
§. 8. **Χάραξις εὐθείας γραμμῆς.** – Εὐθείας γραμμὰς χαράσσομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ τοῦ πίνακος τῇ βοηθείᾳ τοῦ κανόνος (σχ. 5) κατὰ μῆκος τοῦ ὁποίου σύρομεν τὴν

(Σχ. 5)

γραφίδα ἢ τὴν κιμωλίαν. Ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ ἐπὶ μικρῶν ἰδίᾳ ἐκτάσεων, π. χ. κήπων προαυλίων κτλ. χαράσσομεν εὐθεῖαν γραμμὴν ὡς ἀκολούθως. Ἐμπήγομεν ἐπὶ δύο σημείων τοῦ ἐδάφους δύο πασσάλους, ἀπὸ τῶν ὁποίων προσδένομεν νῆμα καλῶς τεταμένον· εἶτα σύρομεν κατὰ μῆκος τοῦ νήματος τούτου αἰχμηρὸν πάσσαλον. Ἡ αἰχμὴ τούτου χαράσσει ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τῶν δύο σημείων, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐνεπήχθησαν οἱ πάσσαλοι.

Οἱ τεχνῖται ἐνίοτε χαράττουσιν ἐπὶ σανίδος εὐθεῖαν ὡς ἀκολούθως. Μεταξὺ δύο σημείων, διὰ τῶν ὁποίων θέλουσι νὰ διέλθῃ ἡ εὐθεῖα, στερεοῦσι νῆμα καλῶς τεταμένον καὶ προσφάτως χρωματισθὲν δι' ἐρυθροῦ συνήθως χρώματος. Ἀνυψοῦσιν εἶτα τὸ νῆμα διὰ τῶν δύο δακτύλων (μεγάλου καὶ δείκτου) κατὰ τὸ μέσον αὐτοῦ περίπου καὶ ἀφήνουσι πάλιν αὐτὸ νὰ πέσῃ ἀποτόμως ἐπὶ τῆς σανίδος. Ἡ ἐπὶ τῆς σανίδος προσκολλουμένη χρωματιστὴ ὕλη ὁρίζει τὴν εὐθεῖαν γραμμήν.

§ 9. **Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης εὐθείας γραμμῆς.** — Διὰ τῶν δύο σημείων Α, Β (σχ. 6) διέρχεται ἡ εὐθεῖα ΑΒ, τὴν



(Σχ. 6)

ὁποίαν εὐκόλως χαράσσομεν τῇ βοηθείᾳ τοῦ κανόνος. Ἐὰν θελήσωμεν νὰ γράψωμεν καὶ ἄλλην εὐθεῖαν, ἥτις νὰ διέρχηται διὰ τῶν ἰδίων σημείων Α καὶ Β, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αὕτη συμπίπτει μετὰ τῆς ΑΒ καὶ ἀποτελεῖ μετ' αὐτῆς μίαν εὐθεῖαν γραμμήν. Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἀλήθεια τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

Διὰ δύο σημείων διακεκριμένων ἀπ' ἀλλήλων μία μόνον εὐθεῖα γραμμὴ διέρχεται.

Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἐκφράζομεν καὶ ὧδε.

Δύο διακεκριμένα ἀπ' ἀλλήλων σημεῖα ὁρίζουσι τὴν θέσιν μιᾶς εὐθείας.

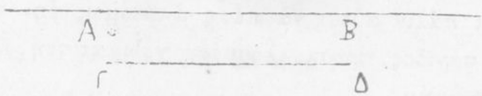
Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἑκάστην εὐθεῖαν ὀνομάζομεν διὰ δύο σημείων αὐτῆς. Λέγοντες π. χ. εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 6) νοοῦμεν τὴν ὡρισμένην καὶ μόνην εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β.

§ 10. **Εὐθύγραμμα τμήματα.** — Εὐθεῖάν τινα π. χ. τὴν ΑΒ (σχ 6) νοοῦμεν ἑκατέρωθεν καὶ ἐπ' ἄπειρον ἐκτεινομένην· λέγοντος δηλ. εὐθείας ΑΒ νοοῦμεν τὴν ἀπέραντον εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν δύο σημείων Α καὶ Β. Ἵνα δὲ ἀπὸ τῆς ἀπεράντου εὐθείαν ΑΒ (σχ 6) διακρίνωμεν τὸ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β περιεχόμενον μέρος αὐτῆς, θέλομεν καλῇ αὐτὸ εὐθύγραμμον τμῆμα.

Ὥστε: Εὐθύγραμμον τμῆμα καλεῖται πᾶν μέρος εὐθείας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο σημείων αὐτῆς.

Τὰ δύο σημεῖα μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ἕκαστον εὐθύγραμμον τμῆμα, καλοῦνται ἄκρα αὐτοῦ.

§ 11. **Ἴσα καὶ ἄνισα εὐθ. τμήματα.** — Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 7) δύο εὐθ. τμήματα. Ἂν τὸ ἓν τούτων π. χ. τὸ ΓΔ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἄλλου, οὕτως ὥστε τὰ ἄκρα αὐτῶν Γ καὶ Α νὰ ἐφαρμόσωσι, θέλει συμβῇ μία τῶν ἀκολούθων περιπτώσεων.



(Σχ. 7)

α'. Τὰ ἄλλα δύο ἄκρα αὐτῶν Δ καὶ Β δυνατὸν νὰ ἐφαρμόσωσιν· ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὰ δύο εὐθ. τμήματα συμπίπτουσι καθ' ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη καὶ ἓν μόνον εὐθ. τμῆμα ἀποτελοῦσι. Τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ λέγονται τότε ἴσα.

β'. Τὸ ἄκρον Δ δυνατὸν νὰ πέσῃ μεταξὺ τῶν ἄκρων Α καὶ Β τοῦ ἄλλου τμήματος· ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ ΓΔ ἐφαρμόζει ἐπὶ μέρους τοῦ ΑΒ καὶ λέγεται μικρότερον τοῦ ΑΒ.

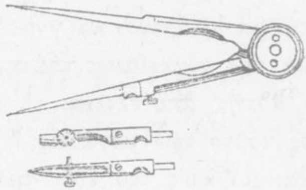
γ'. Τὸ ἄκρον Δ δυνατὸν νὰ πέσῃ ἐκτὸς τοῦ τμήματος ΑΒ· ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ ΓΔ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΑΒ.

Εἰς ἀμφοτέρας τὰς τελευταίας περιπτώσεις τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ καλοῦνται ἄνισα.

Ὥστε: Δύο εὐθ. τμήματα λέγονται ἴσα, ἐὰν καταλλήλως ἐπιτιθέμενα ἐφαρμόζωσι καὶ ἓν μόνον τμῆμα ἀποτελῶσιν.

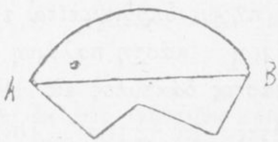
Δύο εὐθ. τμήματα λέγονται ἄνισα, ἐὰν τὸ ἓν ἐφαρμόζῃ ἐπὶ μέρους τινὸς τοῦ ἄλλου.—Ἐκ τούτων ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἐφαρμόζει ἐπὶ μέρους τοῦ ἄλλου, καλεῖται μικρότερον τοῦ ἄλλου, τὸ δὲ ἄλλο καλεῖται μεγαλύτερον τοῦ πρώτου.

Διὰ τοῦ διαβήτου * (σχ. 8) λαμβάνομεν εὐκόλως ἐπὶ δεδομένης εὐθείας εὐθ. τμῆμα ἴσον, μικρότερον ἢ μεγαλύτερον ἄλλου δεδομένου εὐθ. τμήματος.



(Σχ. 8)

§ 12. **Σχέσεις εὐθ. τμήματος πρὸς ἄλλας γραμμὰς ἐχούσας τὰ αὐτὰ πέρατα.**—Ἔστω ΑΒ (σχ. 9) εὐθύγραμμόν τι τμῆμα. Διὰ τῶν ἄκρων αὐτοῦ διέρχονται ἄπειροι τεθλασμέναι, καμπύλαι καὶ μικταὶ γραμμαί. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα ἀποτελεῖ τὴν συντομωτέραν ὁδόν, ἡ ὁποία ἄγει ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτοῦ εἰς τὸ ἄλλο. Τοῦτο ἐκφράζομεν διὰ τῆς ἀκολούθου προτάσεως.



(Σχ. 9)

Ἕκαστον εὐθ. τμῆμα εἶναι μικρότερον πάσης ἄλλης γραμμῆς, ἡ ὁποία ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα.

§ 13. **Ἀπόστασις δύο σημείων.**—Ἀπόστασις δύο σημείων καλεῖται τὸ ὑπ' αὐτῶν ὁριζόμενον εὐθύγραμμον τμῆμα.

(*) Ὁ διδάσκων περιγράφει ἐποπτικῶς καὶ συντόμως τὸν διαβήτην.

Ἐρωτήσεις. Πῶς λαμβάνομεν ἔννοιαν τῆς εὐθείας γραμμῆς; Τίνες οἱ διάφοροι τρόποι χαράξεως εὐθείας γραμμῆς; Τίς ἰδιότης διακρίνει τὴν εὐθεῖαν ἀπὸ τὰς ἄλλας γραμμάς; Τί καλεῖται εὐθ. τμῆμα; Πότε δύο εὐθ. τμήματα λέγονται ἴσα, πότε ἄνισα; Τίς σχέσις ὑφίσταται μεταξὺ εὐθ. τμήματος καὶ τυχούσης ἄλλης γραμμῆς, ἡ ὁποία ἔχει τὰ αὐτὰ πέρατα; Ἐφαρμόζομεν ἐν τῷ βίῳ ἡμῶν τὴν ἰδιότητα ταύτην καὶ πότε;

Ἀσκήσεις. 1) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας μίαν εὐθεῖαν καὶ ἓν εὐθ. τμῆμα καὶ λάβετε εἶτα ἐπὶ τῆς εὐθείας τμῆμα ἴσον πρὸς τὸ γραφὲν τμῆμα.

2). Λάβετε ἐπὶ εὐθείας τμῆμα περιέχον δίς, τρὶς κ.τ.λ. ἄλλο δεδομένον εὐθ. τμῆμα.

§ 14. **Μέτρησις εὐθ. τμημάτων.**—Διὰ νὰ μετρήσωμεν εὐθύγραμμόν τι τμῆμα, συγκρίνομεν αὐτὸ πρὸς ἄλλο εὐθ. τμῆμα ὡρισμένον καὶ γνωστόν, τὸ ὁποῖον μονάδα καλοῦμεν. Διὰ τῆς συγκρίσεως ταύτης εὑρίσκομεν ἐκ πόσων μονάδων ἢ μερῶν αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ μετρούμενον εὐθ. τμῆμα. Ὁ τὸ πλῆθος τοῦτο τῶν μονάδων ἢ μερῶν αὐτῆς ἐκφράζων ἀριθμὸς καλεῖται μῆκος τοῦ εὐθ. τμήματος. Αἱ διάφοροι μονάδες, δι' ὧν μετροῦμεν τὰ εὐθ. τμήματα καὶ ἐν γένει τὰς γραμμάς, καλοῦνται μονάδες μήκους.

§ 15. **Κυριώτεραι μονάδες μήκους.**—Ἡ συνηθεστέρα μονὰς τοῦ μήκους εἶναι τὸ μέτρον ἢ ὁ βασιλικὸς πῆχυς. Ὁ β. πῆχυς ὑποδιαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, ὧν ἕκαστον λέγεται παλάμη· ἑκάστη παλάμη διαιρεῖται εἰς 10 δακτύλους καὶ καὶ ἕκαστος δάκτυλος εἰς 10 γραμμάς.

Ὥστε: $1^{\mu} = 10^{\pi} = 100^{\delta} = 1000$ γραμ.

$1^{\pi} = 10^{\delta} = 100$ γραμ.

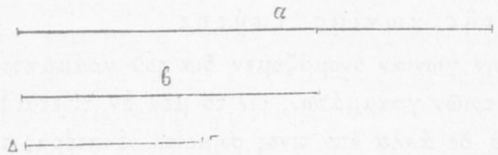
$1^{\delta} = 10$ γραμ.

Ἐν τῇ πράξει μεταχειριζόμεθα τὸ διπλοῦν ὑποδεκάμετρον ἔχον μῆκος $0{,}20^{\mu}$ καὶ τὴν ταινίαν ἔχουσαν μῆκος 10^{μ} ἢ 20^{μ}· τὴν χρῆσιν τούτων ὡς ἁπλουστάτην παραλείπομεν.

Ἐὰν ἡ πρὸς μέτρησιν γραμμὴ εἶναι πολὺ μεγάλη, μεταχειριζόμεθα μεγαλυτέραν μονάδα, τὸ στάδιον ἢ χιλιόμετρον ἔχουν

1000 μέτρα καὶ τὸ μυριάμετρον ἔχον 10 στάδια ἢ 10000 μέτρα.

Ἀσκήσεις. 1) Μετρήσατε διὰ τοῦ δ. ὑποδεκαμέτρου τὰ εὐθ. τμήματα α, β, ΔΕ (σχ. 10).



(Σχ. 10)

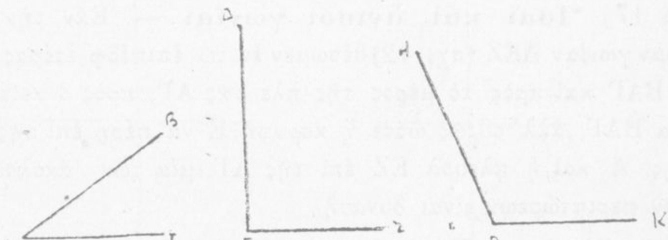
2) Χαράξατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ ἐπ' αὐτῆς λάβετε τμῆμα μήκους 0,12μ ἕτερον μήκους 0,17μ καὶ τρίτον 0,20μ.

3) Λάβετε ἐπὶ εὐθείας γεγραμμένης ἐπὶ τοῦ πίνακος τμῆμα μήκους 0,27μ, ἕτερον 0,30μ καὶ τρίτον 0,40μ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΓΩΝΙΑΙ — ΚΑΘΕΤΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

§ 16. Ὁρισμὸς γωνίας καὶ τῶν στοιχείων αὐτῆς.



(Σχ. 11)

Τὸ σχῆμα ΒΑΓ (σχ. 11) ἀποτελεῖται ἐκ δύο εὐθειῶν γραμμῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, αἱ ὁποῖαι ἄρχονται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α καὶ δὲν ἀποτελοῦσιν εὐθεῖαν. Τὸ σχῆμα τοῦτο καλεῖται γωνία. Ὁμοίως τὰ σχήματα ΔΕΖ, ΗΘΚ (σχ. 11) εἶναι γωνίαι.

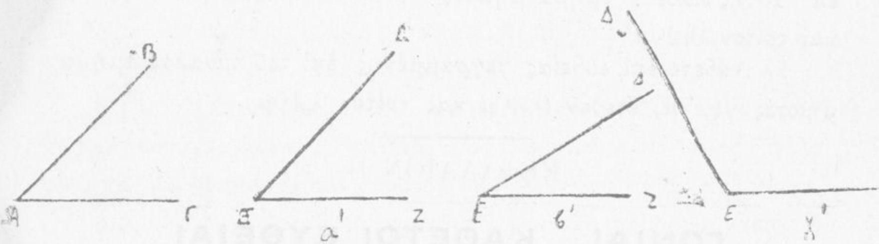
Ὥστε: Γωνία καλεῖται πᾶν σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσι δύο εὐθεῖαι ἐξ ἑνὸς σημείου ἀρχόμεναι καὶ μὴ ἀποτελοῦσαι εὐθεῖαν γραμμήν[1].

1) Ὁ διδάσκων ἐξηγεῖ τοῖς μαθηταῖς ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται δέον νὰ νοῶνται ἐπ' ἄπειρον ἐκτεινόμεναι μόνον πρὸς τὸ ἓν μέρος ἑκατέρα ἀπὸ τοῦ κοινοῦ σημείου αὐτῶν.

Αἱ δύο εὐθεῖαι γραμμαί, αἱ ὁποῖαι ἀπετελοῦσι γωνίαν τινά, καλοῦνται πλευραὶ τῆς γωνίας ταύτης.

Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν πλευρῶν ἑκάστης γωνίας καλεῖται κορυφὴ τῆς γωνίας ταύτης.

Ἑκάστην γωνίαν ὀνομάζομεν διὰ τοῦ γράμματος τῆς κορυφῆς ἢ διὰ τριῶν γραμμάτων, ὧν τὸ μὲν ἓν τίθεται πλησίον τῆς κορυφῆς, τὰ δὲ ἄλλα ἐπὶ τινος σημείου ἑκατέρας τῶν πλευρῶν αὐτῆς (σχ. 11). Ἐν τῇ τελευταίᾳ ταύτῃ περιπτώσει τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς ἀναγινώσκεται πάντοτε εἰς τὸ μέσον.



(Σχ. 12)

§ 17. **Ἴσαι καὶ ἄνισοι γωνίαι.** — Ἐὰν τὴν τυχοῦσαν γωνίαν ΔΕΖ (σχ. 12) θέσωμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἑτέρας γωνίας ΒΑΓ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς πλευρᾶς ΑΓ, πρὸς ὃ κεῖται ἡ γωνία ΒΑΓ, ἀλλ' οὕτως ὥστε ἡ κορυφὴ Ε νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Α καὶ ἡ πλευρὰ ΕΖ ἐπὶ τῆς ΑΓ, μία τῶν ἀκολούθων μένων περιπτώσεων εἶναι δυνατή.

1ον) Ἡ πλευρὰ ΕΔ (σχ. 12α') θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ· ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ αἱ δύο γωνίαι ἐφαρμόζουσι καὶ μίαν ἀποτελοῦσι γωνίαν, λέγονται δὲ ἴσαι γωνίαι.

2ον) Ἡ πλευρὰ ΕΔ (σχ. 12β') θὰ πέσῃ μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΒ. τότε ἡ γωνία ΔΕΖ ἐφαρμόζει ἐπὶ μέρους τῆς γωνίας ΒΑΓ, λέγεται δὲ μικροτέρα αὐτῆς.

3ον) Ἡ πλευρὰ ΕΔ (σχ. 12 γ') θὰ πέσῃ ἐκτὸς τῆς γωνίας ΒΑΓ· τότε ἡ γωνία ΔΕΖ λέγεται μεγαλυτέρα τῆς ΒΑΓ.

Εἰς τὰς δύο τελευταίας περιπτώσεις αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΔΕΖ λέγονται ἄνισοι.

Ὥστε: Δύο γωνίαι λέγονται ἴ σ α ι, ἐὰν καταλλήλως ἐπιτιθέμεναι ἐφαρμόζωσι καὶ ἀποτελῶσι μίαν γωνίαν.

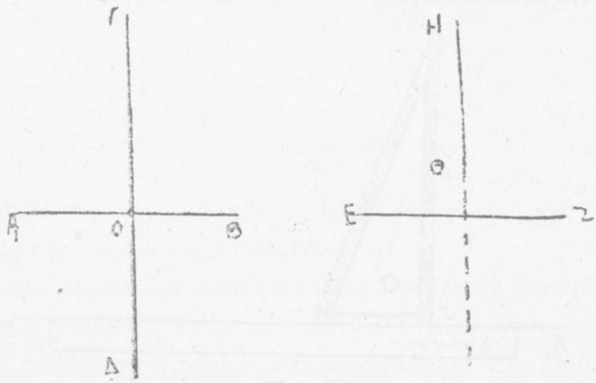
Δύο γωνίαι λέγονται ἄ ν ι σ ο ι, ἐὰν ἡ μία ἐφαρμόζῃ ἐπὶ μέρους τινὸς τῆς ἄλλης.

Ἐκ τούτων ἐκείνη, ἡ ὁποία ἐφαρμόζει ἐπὶ μέρους τῆς ἄλλης, καλεῖται μ ι κ ρ ο τ έ ρ α τ ῆ ς ἄ λ λ η ς· ἡ δὲ ἄλλη καλεῖται μ ε γ α λ υ τ έ ρ α τ ῆ ς π ρ ώ τ η ς.

Ἐκ τούτων γίνεται φανερὸν ὅτι ἡ ἰσότης δύο γωνιῶν οὐδόλως ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μεγέθους τῶν πλευρῶν αὐτῶν. Ὁμοίως τὸ μέγεθος γωνίας τινὸς εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ μήκους τῶν πλευρῶν αὐτῆς.

Ἐ ρ ω τ ή σ ε ι ς. Τί καλεῖται γωνία; Πόσα καὶ τίνα τὰ στοιχεῖα ἑκάστης γωνείας; Τί καλοῦνται πλευραὶ γωνίας; Τί καλεῖται κορυφὴ γωνίας; Πότε δύο γωνίαι λέγονται ἴσαι, ἄνισοι; Τίς τῶν ἀνίσων γωνιῶν λέγεται μικροτέρα, τίς μεγαλυτέρα;

§ 18. **Κάθετοι εὐθεῖαι**. — Αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ



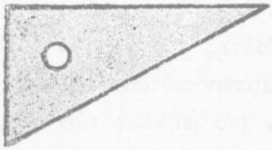
(ΣΧ. 13)

(σχ. 13) τεμνόμεναι κατὰ τὸ σημεῖον Ο σχηματίζουσι τέσσαρας γωνίας ἴσας πάσας πρὸς ἀλλήλας. Αἱ εὐθεῖαι αὗται λέγονται κ ά θ ε τ ο ι ἐπ᾽ ἀλλήλας. Ὁμοίως αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΗΘ (σχ. 13) εἶναι κάθετοι ἀπ᾽ ἀλλήλας, διότι προεκτεινομένης τῆς ΗΘ ἐντεῦθεν τῆς ΕΖ σχηματίζονται 4 γωνίαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ὥστε: Δύο εὐθεῖαι λέγονται κ ά θ ε τ ο ι ἐ π᾽ ἀ λ λ ή λ α ς ἐὰν αἱ ὑπ᾽ αὐτῶν (προεκτεινομένων ἐν ἀνάγκῃ) σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι πᾶσαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

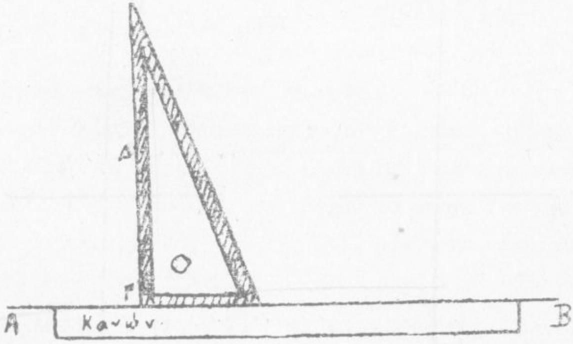
Ἔχομεν πολλὰ παραδείγματα εὐθειῶν καθέτων, τὸ σημεῖον + τῆς ἀριθμητικῆς, τὰ δύο σκέλη σταυροῦ, αἱ σιδηραῖ ῥάβδοι τῶν παραθύρων κ. ἄ.

§ 19. **Χάραξις καθέτων εὐθειῶν.**—Γ ν ώ μ ω ν. Διὰ τὴν χάραξιν καθέτων εὐθειῶν γίνεται χρῆσις τοῦ γνώμονος (σχ. 14), οὗτινος αἱ δύο μικρότεραι πλευραὶ εἶναι κάθετοι ἐπ᾽ ἀλλήλας.



(Σχ. 14)

Πρὸς τοῦτο, ἀφ᾽ οὗ χαραχθῇ εὐθεῖά τις, τοποθετεῖται ὁ γνώμων ὥστε ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ νὰ συμπέσῃ μετ᾽ αὐτῆς καὶ σύρεται εἶτα ἡ γραφὶς κατὰ μῆκος τῆς ἑτέρας καθέτου πλευρᾶς αὐτοῦ. Ἡ οὕτω γραφομένη εὐθεῖα εἶναι προφανῶς κάθετος ἐπὶ τὴν πρώτην. Τὴν εὐθεῖαν ταύτην, ἂν θέλωμεν, προεκτείνομεν τῇ βοηθείᾳ τοῦ κανόνος.



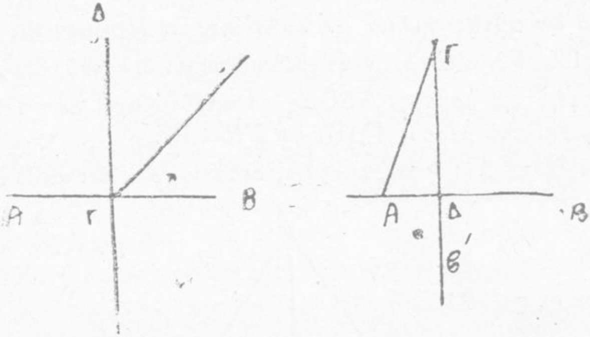
(Σχ. 15)

Ἐὰν θέλωμεν νὰ χαράξωμεν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ δεδομένου σημείου καὶ κάθετον ἐπὶ δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 15), κάμνομεν χρῆσιν τοῦ γνώμονος καὶ κανόνος. Πρὸς τοῦτο τοποθετοῦμεν τὸν μὲν κανόνα οὕτως ὥστε μία πλευρὰ αὐτοῦ νὰ συμπίπτῃ μετὰ τῆς δοθείσης εὐθείας, τὸν δὲ γνώμονα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς εὐθείας καὶ τοῦ σημείου καὶ οὕτως ὥστε ἡ μία (συνήθως ἡ μικροτέρα) τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ νὰ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς τοῦ κανόνος (σχ. 15). Τηροῦντες εἶτα τὸν κανόνα ἀκινητον μεταθέτομεν κατὰ μῆκος αὐτοῦ τὸν γνώμονα, μέχρις οὗ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ διέλθῃ διὰ τοῦ δεδομένου σημείου, καὶ σύρομεν κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς ταύτης τοῦ γνώμονος, τὴν γραφίδα:

Σημ. α'. Εἶναι εὐνόητον ὅτι τὸ δεδομένον σημεῖον δύναται νὰ κεῖται, ὡς τὸ Γ. (σχ. 15), ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ἢ ἐκτὸς αὐτῆς, ὡς τὸ Δ (σχ. 15).

Σημ. β'. Βραδύτερον θὰ μάθωμεν καὶ ἄλλον τρόπον κατασκευῆς καθέτων εὐθειῶν διὰ τοῦ διαβήτου καὶ κανόνος.

§ 20. **Ἰδιότητες τῶν καθέτων εὐθειῶν.**—Α'. Ἔστω



α'. (Σχ. 16) β'.

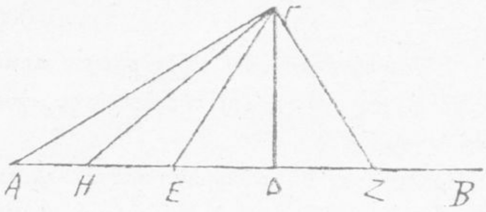
ΑΒ εὐθεῖά τις καὶ Γ τυχὸν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς (σχ. 16 α'.) ἢ ἐκτὸς αὐτῆς (σχ. 16 β'.) κείμενον.

Ἐργαζόμενοι, ὡς προηγουμένως εἴπομεν τῇ βοηθείᾳ τοῦ κανόνος καὶ γνώμονος γράφομεν εὐθεῖαν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ διὰ τοῦ ὡρισμένου σημείου Γ διερχομένην. Ἐὰν δὲ θελήσωμεν νὰ γράψωμεν καὶ ἄλλην εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Γ, διερχομένην, παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη συμπίπτει μετὰ τῆς ΓΔ. Ἄρα.

Δι' ἑκάστου σημείου ἐπὶ εὐθείας ἢ ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου ἄγεται μία μόνον κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην.

Πᾶσαι αἱ ἄλλαι (πλὴν τῆς καθέτου) ἐκ τοῦ σημείου Γ πρὸς τὴν ΑΒ ἀγόμεναι εὐθεῖαι (σχ. 16 β') λέγονται πλάγιαι. Τὰ δὲ κοινὰ σημεῖα τῆς ΑΒ μετὰ τῶν ἐκ τοῦ Γ ἀγομένων εὐθειῶν καλοῦνται π ό δ ε ς α ὐ τ ῶ ν.

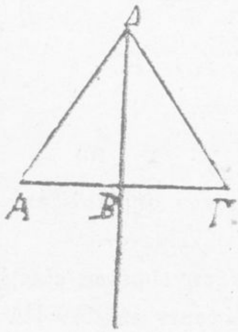
Β΄. Ἔστω ΑΒ (σχ. 17) τυχοῦσα εὐθεῖα, Γ σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς κείμενον, ΓΔ ἡ ἐκ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος καὶ ΓΑ τυχοῦσα πλαγία. Τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαβήτου βεβαιούμεθα ὅτι ΓΔ < ΓΑ.



(Σχ. 17)

Ἔστω ἤδη Ε τυχὸν σημεῖον τῆς ΑΒ· ἂς λάβωμεν διὰ τοῦ διαβήτου ἐπ᾽ αὐτῆς τμῆμα ΔΖ=ΔΕ καὶ ἂς φέρωμεν τὰς πλαγίας ΓΕ καὶ ΓΖ. Εἶναι εὔκολον νὰ βεβαιωθῶμεν διὰ τοῦ διαβήτου (ἢ διὰ στροφῆς τοῦ μέρους ΑΔΓ τοῦ ἐπιπέδου περὶ τὴν ΓΔ μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τοῦ μέρους ΓΔΒ) ὅτι ΓΕ=ΓΖ.

Ἐὰν τέλος ΔΗ > ΔΖ εὐκόλως βεβαιούμεθα ὅτι καὶ ΓΗ > ΓΖ.



(Σχ. 18)

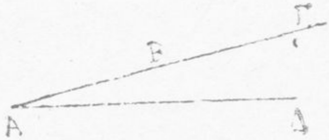
Ἄρα : Ἐὰν ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου ἀχθῇ ἡ κάθετος ἐπ᾽ αὐτὴν καὶ ὁσαιδήποτε πλάγιαι, α΄) ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας, β΄) δύο πλάγιαι, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἴσον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, εἶναι ἴσαι, γ΄) δύο πλάγιαι, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἄνισον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου εἶναι ἄνισοι, καὶ μεγαλυτέρα εἶνε ἐκείνη, τῆς ὁποίας ὁ πούς ἀπέχει περισσότερον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου. (*)

(*) Ὁ διδάσκων ἐξηγεῖ τοῖς μαθηταῖς ὅτι λέγοντες ἐνταῦθα κάθετον ἢ πλαγίαν ἐννοοῦμεν τὸ μεταξὺ τοῦ σημείου Γ καὶ τοῦ ποδὸς ἑκάστης περιεχόμενον τμῆμα αὐτῆς.

Γ'.— Ἐπὶ τυχούσης εὐθείας ἄς ληφθῶσι διαδοχικῶς δύο τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ ἴσα (σχ. 18) οὕτω τὸ σημεῖον Β εἶναι μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΓ. Ἄς κατασκευασθῇ δὲ ἡ ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ διὰ τοῦ σημείου Β διερχομένη κάθετος ΓΔ. Τὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς Δ καὶ τὰ ἄκρα Α καὶ Γ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΓ ὁρίζουσι τὰ τμήματα ΔΑ καὶ ΔΓ ἅτινα εἶναι ἴσα (§ 20 Β, β').

Ἄρα: Πᾶν σημεῖον τῆς διὰ τοῦ μέσου εὐθ. τμήματος ἀγομένης ἐπ' αὐτὸ καθέτου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος τούτου.

Ἐφαρμογαί. 1) Δύο σημεῖα Β καὶ Γ (σχ. 19) ἀπέχουσιν



(Σχ. 19)

ἀπ' ἀλλήλων 0,02 μ., ἡ δὲ δι' αὐτῶν διερχομένη εὐθεῖα ΒΓ τέμνει πλαγίως ἑτέραν εὐθεῖαν ΑΔ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ΑΔ σημεῖον ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῶν σημείων Β καὶ Γ (§ 20 Γ'.).

2) Χαράξατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας (ἢ τοῦ πίνακος) εὐθεῖάν τινα καὶ δύο καθέτους ἐπ' αὐτήν. Δείξατε ὅτι αἱ κάθετοι αὗται οὐδέποτε συναντῶνται, ὅσῳ καὶ ἂν προεκταθῶσι (§ 20 Α').

§ 21. **Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθείας.**—Ἐπειδὴ ὡς ἐμάθομεν ἤδη, ἐκ πασῶν τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ σημείου πρὸς εὐθεῖαν, μικροτέρα εἶναι ἡ μία καὶ μόνη ἐπ' αὐτὴν κάθετος, ἀγόμεθα εἰς τὸν ἀκόλουθον ὁρισμόν:

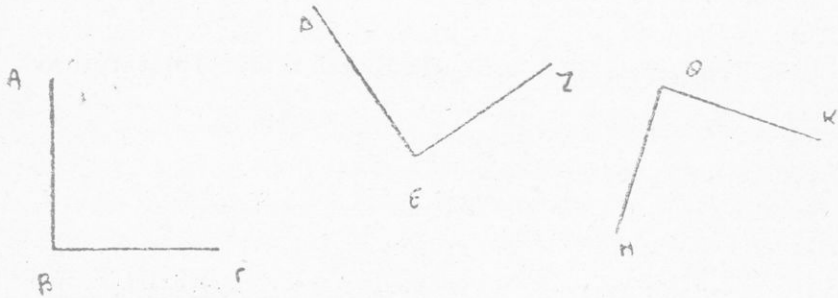
Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθείας καλεῖται τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ σημείου τούτου καὶ τοῦ ποδὸς τῆς ἐξ αὐτοῦ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ἀγομένης καθέτου. Οὕτως ΓΔ (σχ. 17) εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Γ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ.

ΕΙΔΗ ΓΩΝΙΩΝ

§ 22 Α'. **Ὀρθαὶ γωνίαι.**—Ἡ ὑπὸ τῶν δύο καθέτων πλευρῶν τοῦ γνώμονος σχηματιζομένη γωνία λέγεται ὀ ρ θ ὴ γ ω ν ί α· ὁμοίως ἑκάστη τῶν γωνιῶν Β,Ε,Θ (σχ. 20), τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, εἶναι ὀρθὴ γωνία.

Γενικῶς: Ὀρθὴ γωνία καλεῖται πᾶσα γωνία, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

§ 23. **Ἰδιότης τῶν ὀρθῶν γωνιῶν.** Ἐὰν τὴν τυχοῦσαν ὀρθὴν γωνίαν Ε (σχ 20) θέσωμεν ἐπὶ ἑτέρας ὀρθῆς γωνίας Β οὕτως ὥστε νὰ συμπέσωσιν αἱ κορυφαὶ καὶ δύο πλευραὶ αὐτῶν, παρατηροῦμεν ὅτι καὶ αἱ ἄλλαι δύο πλευραὶ αὐτῶν συμπίπτουσιν.* Ἄρα: Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι.



(Σχ. 20)

Ἕνεκα τοῦ σταθεροῦ μεγέθους αὐτῆς ἡ ὀρθὴ γωνία λαμβάνεται ὡς μονὰς πρὸς μέτρησιν τῶν γωνιῶν.

§ 24. Β'. **Ὀξεῖαι γωνίαι.**—Ἑκατέρα τῶν γωνιῶν Α καὶ Β (σχ. 21) εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας, ὀνομάζεται δὲ ὀξεῖα γωνία· ὁμοίως ἑκατέρα τῶν ἄλλων (πλὴν τῆς ὀρθῆς) γωνιῶν τοῦ γνώμονος εἶναι ὀξεῖα γωνία.

Γενικῶς; Ὀξεῖα γωνία καλεῖται πᾶσα γωνία μικροτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας.

(Σχ. 21)

§ 25. Γ'. **Ἀμβλεῖαι γωνίαι.**—Ἑκατέρα τῶν γωνιῶν Γ καὶ Δ (σχ. 21) εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας, καλεῖται δὲ ἀμβλεῖα γωνία.

---

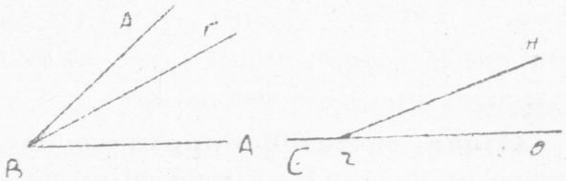
* Ἐὰν δὲν συνέπιπτον θὰ διήρχοντο δι' ἑνὸς σημείου δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ὅπερ ἄτοπον. (§ 20 Α'.).

Γενικῶς: Ἀμβλεῖα γωνία καλεῖται πᾶσα γωνία μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας.

Ἐρωτήσεις: Πόσα καὶ τίνα τὰ εἴδη τῶν γωνιῶν; Τί καλεῖται ὀρθὴ γωνία; Διατί ἡ ὀρθὴ γωνία λαμβάνεται ὡς μονὰς πρὸς μέτρησιν τῶν γωνιῶν; Τί καλεῖται ὀξεῖα καὶ τί ἀμβλεῖα γωνία;

Ἐφαρμογή. 1). Κατασκευάσατε ὀρθὴν γωνίαν, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ κορυφὴν σημεῖον τοῦ τετραδίου σας ἐκ τῶν προτέρων ὁρισθέν. Πόσας τοιαύτας γωνίας δύνασθε νὰ κατασκευάσητε;

2) Κατασκευάσατε ὀρθὴν γωνίαν ἔχουσαν μίαν πλευρὰν ἐκ τῶν

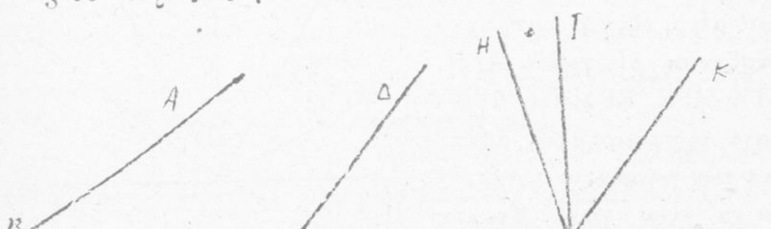


(Σχ. 22)

προτέρων χαραχθὲν εὐθ. τμῆμα καὶ κορυφὴν ἓν ἄκρον αὐτοῦ.

3) Χαράξατε δύο εὐθείας πλαγίως τεμνομένας καὶ ἐξελέγξατε τῇ βοηθείᾳ τοῦ γνώμονος τὸ εἶδος ἑκάστης τῶν ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένων τεσσάρων γωνιῶν.

§ 26 **Ἐφεξῆς γωνίαι.**—Αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ (σχ 22)



(Σχ. 23)

ἔχουσι κορυφὴν κοινὴν καὶ μίαν πλευράν, τὴν ΒΓ, κοινήν, ἑκατέρωθεν τῆς ὁποίας κεῖνται αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν ΒΑ καὶ ΒΔ. Αἱ δύο αὗται γωνίαι καλοῦνται ἐφεξῆς γωνίαι. Ὁμοίως ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι καὶ γωνίαι ΕΖΗ καὶ ΗΖΘ (σχ. 22).

Γενικῶς: Δύο γωνίαι λέγονται ἐφεξῆς, ἐὰν ἔχωσι κορυφὴν κοινὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, αἱ δὲ μὴ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.

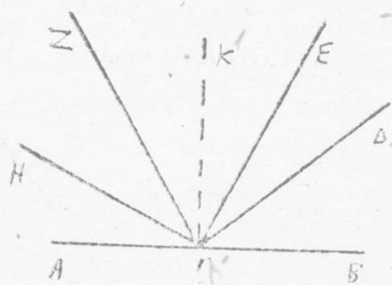
§ 27. **Ἄθροισμα καὶ διαφορὰ γωνιῶν.** — Ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς γωνιῶν καλεῖται ἡ ὑπὸ τῶν μὴ κοινῶν πλευρῶν αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία π. χ. τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ (σχ. 22) ἄθροισμα εἶναι ἡ γωνία ΑΒΔ.

Ἄθροισμα οἱωνδήποτε καὶ ὁσωνδήποτε γωνιῶν καλεῖται ἡ γωνία ἥτις σχηματίζεται, ὅταν τεθῶσιν πᾶσαι ἡ μία παρὰ τὴν ἄλλην οὕτως ὥστε ἀνὰ δύο διαδοχικαὶ νὰ εἶναι ἐφεξῆς γωνίαι. Π. χ. τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ ΗΘΙ (σχ. 23) ἄθροισμα εἶναι ἡ γωνία ΗΘΛ, ἥτις ἐσχηματίσθη τεθεισῶν τῶν γωνιῶν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἰς τὰς θέσεις τῶν γωνιῶν ΙΘΚ καὶ ΚΘΛ.

§ 28. **Ἀξιοσημείωτα ἀθροίσματα γωνιῶν.** — Κατὰ τὰ προειρημένα τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων γωνιῶν πρέπει νὰ εἶναι μία γωνία. Ὑπάρχουσιν ὅμως δύο ἀξιοσημείωτοι περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας τὸ ἄθροισμα γωνιῶν δὲν εἶναι μία γωνία.

Αἱ περιπτώσεις αὗται εἶναι αἱ ἀκόλουθοι:

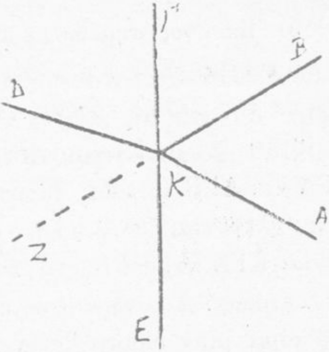
Α΄. Ἂς φέρομεν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Γ (σχ. 24) εὐθείας τινὸς ΑΒ ἄλλας εὐθείας ΓΔ, ΓΕ, ΓΖ, ΓΗ πάσας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ· οὕτω σχηματίζονται αἱ γωνίαι ΑΓΗ, ΗΓΖ, ΖΓΕ, ΕΓΔ καὶ ΔΓΒ. Κατὰ τὰ προειρημένα, ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτων πρέπει νὰ εἶναι γωνία ἔχουσα πλευρὰς τὰς εὐθείας ΓΑ καὶ ΓΒ· ἀλλὰ τοιαύτη γωνία δὲν ὑπάρχει, διότι αἱ ΓΑ καὶ ΓΒ ἀποτελοῦσιν εὐθεῖαν γραμμήν. Ἂν ὅμως ἀχθῇ ἐκ τοῦ Γ ἡ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ΓΚ, διαιρεῖται μὲν ἡ γωνία ΖΓΕ εἰς δύο γωνίας, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν προειρημένων γωνιῶν δὲν μεταβάλλεται. Εἶναι δὲ ἤδη εὐνόητον ὅτι αἱ μὲν πρὸς τὸ ἓν μέρος τῆς καθέτου κείμεναι γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα τὴν μίαν τῶν ὀρθῶν γωνιῶν



(Σχ. 24)

ΑΓΚ καὶ ΒΓΚ αἱ δὲ πρὸς τὸ ἕτερον τὴν ἄλλην.

Ἄρα: Τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν, ὅταν ἔκ τινος σημείου εὐθείας ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς, εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι.



(Σχ. 25)

Β'. Ἔκ τινος σημείου Κ (σχ. 25) ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΚΑ ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΕ καὶ ἂς προεκβληθῇ μία τούτων ἔστω, ἡ ΚΒ, πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς κορυφῆς Κ. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα ἐκ τῶν περὶ τὸ Κ γωνιῶν αἱ μὲν πρὸς τὸ ἓν μέρος τῆς εὐθείας ΒΖ κείμεναι ἔχουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθάς, αἱ δὲ πρὸς τὸ ἕτερον ἄλλας δύο ὀρθὰς γωνίας.

Ἄρα: Τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν, ὅταν ἔκ τινος σημείου ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι, εἶναι τέσσαρες ὀρθαὶ γωνίαι.

§ 29. **Διαφορὰ δύο ἀνίσων γωνιῶν** λέγεται ἡ γωνία, ἡ ὁποία μένει, ὅταν ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας ἀποκοπῇ γωνία ἴση πρὸς τὴν μικροτέραν καὶ ἔχουσα μετὰ τῆς μεγαλυτέρας μίαν πλευρὰν κοινήν. Π. χ. τῶν γωνιῶν ΑΒΔ καὶ ΑΒΓ (σχ. 22) διαφορὰ εἶναι ἡ γωνία ΓΒΔ.

Ἐφαρμογαί. 1) Ἐὰν ἡ γωνία ΗΖΘ (σχ. 22) εἶναι $^1/_3$ τῆς ὀρθῆς γωνίας, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς ΕΖΗ;

2) Εὐθεῖα ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς καὶ μεταξὺ τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας σχηματίζει μετὰ τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτῆς γωνίαν ἴσην πρὸς $^1/_7$ τῆς ὀρθῆς. Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν ἡ αὐτὴ εὐθεῖα σχηματίζει μετὰ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς τῆς ὀρθῆς γωνίας;

3) Ἀγομένων ἐκ σημείου εὐθείας τινὸς δύο εὐθειῶν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς πρώτης σχηματίζονται τρεῖς γωνίαι. Ἐὰν ἡ μία τούτων εἶναι $^1/_4$ ὀρθῆς, αἱ δὲ ἄλλαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκατέρας τούτων;

4) Ἀγομένων ἐκ σημείου τριῶν εὐθειῶν σχηματίζονται τρεῖς γωνίαι. Ἐὰν αὗται εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης;

5) Ἔκ τινος σημείου εὐθείας ἄγεται πρός τι μέρος αὐτῆς ἄλλη εὐθεῖα. Ἐὰν ἡ μία τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκατέρας;

§ 30. **Συμπληρωματικαὶ γωνίαι.**—Αἱ δύο γωνίαι ΚΓΔ καὶ ΔΓΒ (σχ. 24) ἔχουσι ἄθροισμα τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΚΓΒ: αὗται λέγονται συμπληρωματικαὶ γωνίαι· ὁμοίως αἱ γωνίαι ΚΓΕ καὶ ΕΓΒ (σχ 24) εἶναι συμπληρωματικαὶ γωνίαι.

Γενικῶς: Δύο γωνίαι λέγονται συμπληρωματικαί, ἐὰν ἔχωσιν ἄθροισμα μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

§ 31. **Παραπληρωματικαὶ γωνίαι.**—Αἱ δύο γωνίαι ΕΖΗ καὶ ΗΖΘ (σχ. 22) ἔχουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθὰς γωνίας (§ 28 Α΄)· αὗται λέγονται παραπληρωματικαὶ γωνίαι.

Γενικῶς: Δύο γωνίαι λέγονται παραπληρωματικαί, ἐὰν ἔχωσιν ἄθροισμα δύο ὀρθὰς γωνίας.

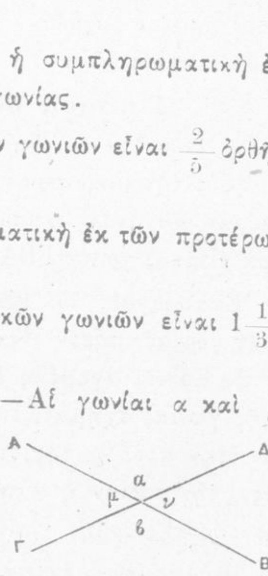
Ἐφαρμογαί: 1) Νὰ κατασκευασθῇ ἡ συμπληρωματικὴ ἐκ τῶν προτέρων κατασκευασθείσης ὀξείας γωνίας.

2) Ἐὰν ἡ μία τῶν συμπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι $\frac{2}{5}$ ὀρθῆς πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς ἄλλης;

3) Νὰ κατασκευασθῇ ἡ παραπληρωματικὴ ἐκ τῶν προτέρων κατασκευασθείσης γωνίας

4) Ἐὰν ἡ μία τῶν παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι $1\frac{1}{3}$ ὀρθ. πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς ἄλλης;

§ 32. **Κατὰ κορυφὴν γωνίαι.**—Αἱ γωνίαι α καὶ β (σχ. 26) ἔχουσι κορυφὴν κοινήν, αἱ δὲ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης. Αἱ γωνίαι αὗται λέγονται κατὰ κορυφὴν γωνίαι· Ὁμοίως αἱ γωνίαι μ καὶ ν (σχ. 26) εἶναι κατὰ κορυφήν.



(Σχ. 26)

Γενικῶς: Δύο γωνίαι λέγονται κατὰ κορυφήν, ἐὰν ἔχωσι κορυφὴν κοινήν, αἱ δὲ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.

Εἶναι εὐνόητον ὅτι ὑπὸ δύο εὐθειῶν τεμνομένων σχηματίζονται δύο ζεύγη κατὰ κορυφὴν γωνιῶν.

§ 33. **Ἰδιότης τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν.**—Ἄς χαράξωμεν ἐπὶ φύλλου χάρτου δύο εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένας εἴς τι σημεῖον (σχ. 26). Ἄς κόψωμεν εἶτα διὰ ψαλλίδος τὸν χάρτην κατὰ μῆκος τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Οὕτω θέλουσι χωρισθῆ ἀπ' ἀλλήλων αἱ τέσσαρες γωνίαι α β, μ καὶ ν. Ἐὰν δὲ ἐπιθέσωμεν καταλλήλως τὴν α ἐπὶ τῆς β, βλέπομεν ὅτι ἐφαρμόζουσιν, ἤτοι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι· ὁμοίως πειθόμεθα καὶ περὶ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν μ καὶ ν. Ἄρα:

Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἐφαρμογαί. 1) Δοθείσης γωνίας τινὸς νὰ κατασκευασθῇ ἑτέρα ἴση πρὸς αὐτὴν καὶ τὴν αὐτὴν ἔχουσα κορυφήν.

Λύσις: Ἀρκεῖ νὰ σχηματισθῇ ἡ κατὰ κορυφὴν τῆς δοθείσης.

2) Ἐάν τις τῶν τεσσάρων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ 2 τεμνομένων εὐθειῶν, εἶναι $\frac{3}{4}$ ὀρθ. πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης τῶν ἄλλων;

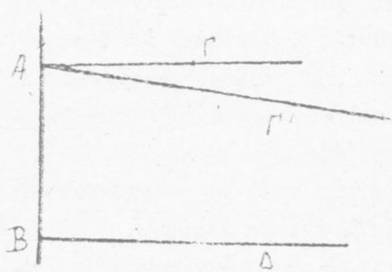
3) Ἐάν τις τῶν ὑπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν σχηματιζομένων γωνιῶν εἶναι ὀρθή, αἱ εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι (διατί;)

4) Νοήσατε τὴν γωνίαν α (σχ. 26) στρεφομένην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς περὶ τὴν κορυφὴν αὐτῆς, ὡς στρέφονται οἱ δεῖκται ὡρολογίου καὶ μέχρις οὗ ἡ μία πλευρὰ αὐτῆς ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της. Ποίαν θέσιν θέλει καταλάβει ἡ ἄλλη πλευρὰ καὶ διατί;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

§ 34. **Ὁρισμὸς τῶν παραλλήλων εὐθειῶν.**—Ἂς χαράξωμεν ἐπὶ φύλλου χάρτου (ἢ τοῦ πίνακος) τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 27) καὶ δύο ἄλλας εὐθείας ΑΓ καὶ ΒΔ καθέτους ἐπ' αὐτήν. Αἱ κάθετοι αὗται οὐδέποτε συναντῶνται, ὅσῳ καὶ ἂν προεκταθῶσιν ἑκατέρωθεν (§ 20 Α΄), κεῖνται δὲ ἐκ κατασκευῆς καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Τὰς εὐθείας ταύτας καλοῦμεν παραλλήλους εὐθείας.



(Σχ. 27)

Ὁμοίως παράλληλοι εὐθεῖαι εἶναι καὶ αἱ ΓΕ καὶ ΒΔ τοῦ σώματος ΑΒ (σχ. 1), αἱ ΚΠ καὶ ΛΝ (σχ. 1), αἱ ἀπέναντι πλευραὶ συνήθους τραπέζης, τοίχου, κτλ.

Γενικῶς: Δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ λέγονται παράλληλοι, ἐὰν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κείμεναι ἐπιπέδου οὐδέποτε συναντῶνται, ὅσῳ καὶ ἂν προεκταθῶσιν ἑκατέρωθεν.

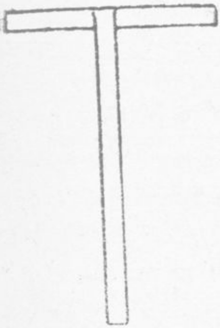
§ 35. **Εὐκλείδειον ἀξίωμα.**—Ἔστω ΒΔ τυχοῦσα εὐθεῖα, Α τυχὸν σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς κείμενον καὶ ΑΒ ἡ ἐξ αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ΒΔ ἀγομένη κάθετος (σχ. 27). Ἡ ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΑΒ ἀγομένη καθέτος ΑΓ εἶναι, ὡς προηγουμένως εἴπομεν, παράλληλος τῇ ΒΔ. Ἐὰν νοηθῇ ἡ ΑΓ στρεφομένη περὶ τὸ σημεῖον Α, ἔστω καὶ ἐπ' ἐλάχιστον, παύει νὰ εἶνε παράλληλος τῇ ΒΔ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἐκ τῶν διὰ τοῦ σημείου Α διερχομένων ἀπείρων εὐθειῶν μία μόνον, ἡ ΑΓ, εἶναι παράλληλος τῇ ΒΔ. Τοῦτο ἐκφράζομεν διὰ τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

Διὰ παντὸς σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου μία μόνον εὐθεῖα παράλληλος ἐκείνη διέρχεται.

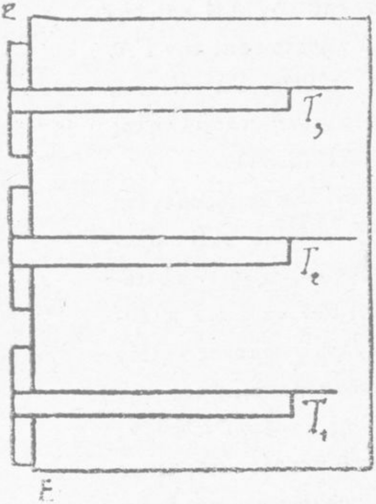
Ἡ πρότασις αὕτη ὀφειλομένη εἰς τὸν Ἕλληνα μαθηματικὸν Εὐκλείδην (320 π. Χ.) καλεῖται Εὐκλείδειον ἀξίωμα.

§ 36. **Χάραξις παραλλήλων εὐθειῶν.** — α') Ἐπὶ τοῦ πίνακος, τραπέζης, ἰχνογραφικῆς σανίδος κτλ. χαράσσομεν παραλλήλους εὐθείας ὡς ἀκολούθως.

Τοποθετοῦμεν ἐπὶ τοῦ πίνακος (τραπέζης κτλ.) τὸ ὄργα-

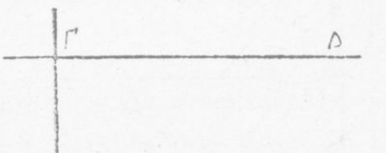


(Σχ. 28)



(Σχ. 29)

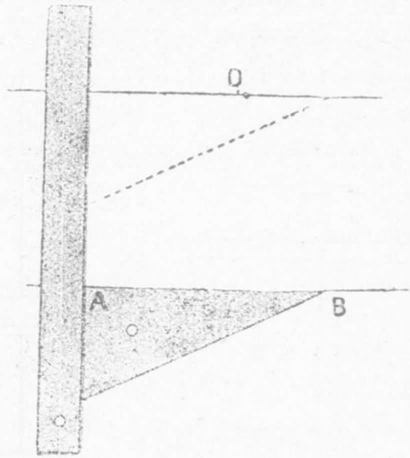
νον ταῦ (σχ. 28) εἰς θέσιν τινὰ $Τ_1$ ὡς ἐν τῷ σχήματι 29 φαίνεται, σύρομεν τὴν γραφίδα κατὰ μῆκος τῆς μιᾶς ἢ καὶ ἀμφοτέρων τῶν ἐπιμηκεστέρων πλευρῶν τοῦ σκέλους αὐτοῦ. Ὠθοῦντες εἶτα τὸ ταῦ κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΕΖ τοῦ πίνακος ἀναγκάζομεν αὐτὸ νὰ καταλάβῃ διαδοχικῶς διαφόρους θέσεις $Τ_2$, $Τ_3$, κτλ. ἐν ἑκάστῃ δὲ τῶν θέσεων τούτων σύρομεν τὴν γραφίδα κατὰ μῆκος τῶν ἐπιμηκεστέρων πλευρῶν τοῦ σκέλους. Ἅπασαι αἱ οὕτω χαρασσόμεναι εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας (§ 34).



(Σχ. 30)

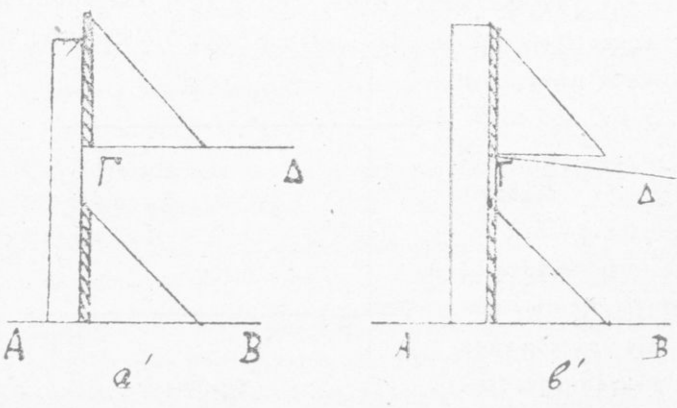
Ἐὰν θέλωμεν νὰ χαράξωμεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς δοθεῖσον εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 30) καὶ διερχομένην δι' ὡρισμένου σημείου Γ, ἐργαζόμεθα κατὰ μίαν τῶν ἀκολούθων μεθόδων.

β' Ἄγομεν διὰ τοῦ γνώμονος τὴν ΓΑ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΑ. Ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος τῇ ΑΒ (§ 34).



(Σχ. 31)

γ' Ἐφαρμόζομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ μίαν (συνήθως τὴν μεγαλυτέραν) τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ γνώμονος καὶ τὸν κανόνα κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς αὐτοῦ προσέχοντες ὅπως ὁ γνώμων καὶ τὸ δεδομένον σημεῖον Ο κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κανόνος (σχ. 31). Τηροῦντες εἶτα ἀκίνητον ἐν τῇ θέσει ταύτῃ τὸν κανόνα μετακινοῦμεν κατὰ μῆκος αὐτοῦ τὸν



(Σχ. 32)

γνώμονα, μέχρις οὗ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Ο ἡ πλευρὰ τοῦ γνώμονος, ἡ ὁποία εἶχεν ἀρχικῶς τοποθετηθῆ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ. Σύροντες τέλος κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς ταύτης τὴν γραφίδα χαράσσομεν τὴν ζητουμένην εὐθεῖαν (§ 34).

§ 37. **Ἔλεγχος τῆς παραλληλίας ἢ μὴ δύο εὐθειῶν.** — Ἵνα βεβαιωθῶμεν ὅτι δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 32) κεχαραγμέναι ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι παράλληλοι ἢ οὔ, ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως; Ἐφαρμόζομεν τὸν γνώμονα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν καὶ οὕτως ὥστε μία τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ νὰ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν εὐθειῶν τούτων π χ. τῆς ΑΒ. Τοποθετοῦμεν ἔπειτα τὸν κανόνα παρὰ τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν τοῦ γνώμονος καὶ κρατοῦντες αὐτὸν ἀκίνητον ἐν τῇ θέσει ταύτῃ μετακινοῦμεν κατὰ μῆκος αὐτοῦ τὸν γνώμονα, μέχρις οὗ ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ ἔλθῃ ἐπὶ τῆς δευτέρας εὐθείας ΓΔ. Ἐὰν ἐν τῇ θέσει ταύτῃ τοῦ γνώμονος ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς ΓΔ ἡ πλευρὰ τοῦ γνώμονος, ἡ ὁποία ἀρχικῶς εἶχε τοποθετηθῆ ἐπὶ τῆς ΑΒ, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 32 α') εἶναι παράλληλοι (§ 34), ἄλλως αὗται δὲν εἶναι παράλληλοι (σχ, 32 β').

Ἐφαρμογαί. 1) Χαράξατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας τρεῖς εὐθείας παραλλήλους πρὸς ἀλλήλας καὶ ἄλλας παραλλήλους καὶ τεμνούσας τὰς πρώτας.

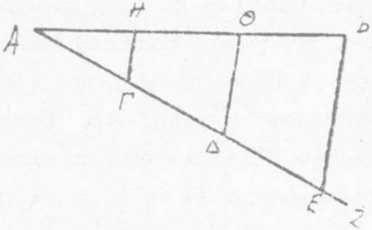
2) Σημειώσατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας τρία σημεῖα μὴ κείμεἐπ' εὐθείας καὶ χαράξατε τὴν δι' ἑκάστου τούτων ἀγομένην παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν τὰ ἄλλα ὁρίζουσιν.

3) Γράψατε δύο εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ δείξατε ὅτι αὗται εἶνε καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι (§ 35).

4) Γράψατε δύο εὐθείας παραλλήλους καὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὴν μίαν τούτων. Δείξατε ὅτι αὕτη τέμνει καὶ τὴν ἄλλην (§ 35).

§ 38 **Πρόβλημα.** — Νὰ διαιρεθῇ δεδομένον εὐθύγραμμον τμῆμα εἰς τρία ἴσα μέρη.

Λύσις: Διὰ τοῦ ἑνὸς τῶν ἄκρων Α τοῦ δεδομένου εὐθ. τμήματος ΑΒ (σχ. 33) ἄγομεν εὐθεῖαν ΑΖ σχηματίζουσαν μετὰ τῆς ΑΒ τυχοῦσαν γωνίαν. Ἐπὶ δὲ τῆς εὐθείας ταύτης ΑΖ ἀπὸ τοῦ Α ἀρχόμενοι λαμβάνομεν διαδοχικῶς τρία εὐθ. τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ ἴσα πρὸς ἄλληλα, μεθ' ὃ ἄγομεν τὴν ΕΒ. Τέλος ἐκ τῶν σημείων Γ καὶ Δ ἄγομεν εὐθείας ΓΗ καὶ ΔΘ παραλλήλους τῇ ΕΒ. Οὕτω τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ διαιρεῖται εἰς τρία εὐθ. τμήματα ΑΗ, ΗΘ καὶ ΘΒ, ἅτινα εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, ὡς εὐκόλως διὰ τοῦ διαβήτου πειθόμεθα.



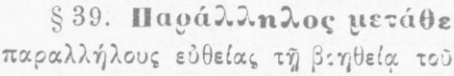
(Σχ. 33)

Ἐφαρμογαί: 1) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τυχούσης γωνίας Α λάβετε τμήματα τυχόντα ΑΒ καὶ ΑΓ, ὁρίσατε τὰ μέσα Δ καὶ Ε αὐτῶν καὶ χαράξατε τὰ εὐθ. τμήματα ΒΓ καὶ ΔΕ. Ἐπαληθεύσατε τὴν παραλληλίαν ἢ μὴ τῶν τμημάτων τούτων καὶ ἀνεύρετε τὴν μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουσαν σχέσιν μεγέθους.

2) Ἰχνογραφήσατε τὸ σχῆμα 34.

§ 39. **Παράλληλος μετάθεσις.** — Ὅταν χαράττωμεν παραλλήλους εὐθείας τῇ βοηθείᾳ τοῦ γνώμονος (§ 36 γ΄) δίδομεν εἰς τοῦτον κίνησίν τινα, διὰ τῆς ὁποίας μεταβαίνει ἔκ τινος θέσεως εἰς ἄλλην κτλ. (σχ. 31). Κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην ἄξια παρατηρήσεως εἶναι τὰ ἀκόλουθα:

α΄). Τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ γνώμονος, ὅπερ ἀρχικῶς ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ πίνακος, φύλλου χάρτου κτλ. ὀλισθαίνει διαρκῶς ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου ταύτης ἐπιφανείας μηδόλως αὐτῆς ἐξερχομένη. β΄). Ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ μέρους τούτου τῆς ἐπιφανείας τοῦ γνώμονος ἡ μία ὀλισθαίνει ἐπὶ τῆς ἀκινήτου εὐθείας τοῦ κανόνος μετὰ τῆς ὁποίας συμπίπτει, ἡ ΑΒ μένει πάντοτε παράλληλος ἑαυτῇ (§ 34) καὶ γ΄.) εἶναι εὔκολον νὰ βεβαιωθῶμεν (§ 37), ὅτι καὶ ἡ τρίτη πλευρά, ὡς καὶ πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὀλισθαινούσης ἐπιφανείας γεγραμμένη καὶ μὴ παράλληλος οὐδὲ συμπίπτουσα τῇ πλευρᾷ τοῦ κανόνος, ἐφ᾽ ἧς ὀλισθαίνει ἡ μία πλευρὰ τοῦ γνώμονος, μένει κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην παράλληλος ἑαυτῇ.


(Σχ. 34)

Ἡ κίνησις αὕτη τοῦ γνώμονος καλεῖται παράλληλος μετάθεσις.

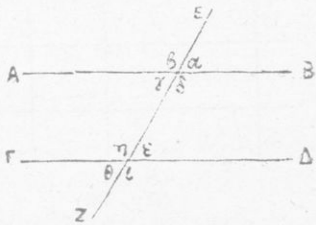
Ἡ εὐθεῖα τοῦ κανόνος ἐπὶ τῆς ὁποίας ὀλισθαίνει ἡ μία πλευρὰ τῆς κινουμένης ἐπιφανείας, καλεῖται ὁδηγός.

Ὁμοίως ἡ κίνησις, εἰς τὴν ὁποίαν ὑποβάλλομεν τὸ ταῦ (σχ. 29) κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΕΖ πίνακος, τραπέζης κτλ. ὅταν θέλωμεν νὰ γράψωμεν δι' αὐτοῦ εὐθείας παραλλήλους, εἶναι παράλληλος μετάθεσις μὲ ὁδηγὸν τὴν ΕΖ.

Γενικῶς: Ὅταν ἐπίπεδόν τι σχῆμα ὀλισθαίνῃ ἐπὶ ἑτέρου ἀκινήτου ἐπιπέδου καὶ οὕτως ὥστε μία αὐτοῦ εὐθεῖα νὰ ὀλισθαίνῃ διαρκῶς ἐπὶ ὡρισμένης εὐθείας τοῦ ἀκινήτου ἐπιπέδου, λέγομεν ὅτι τὸ κινούμενον ἐπίπεδον σχῆμα ὑφίσταται παράλληλον μετάθεσιν.

Ἡ εὐθεῖα τοῦ ἀκινήτου ἐπιπέδου κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ὁποίας γίνεται ἡ παράλληλος μετάθεσις καλεῖται ὁδηγός.

Κατὰ τὴν παράλληλον μετάθεσιν ἐπιπέδου σχήματος πᾶσα εὐθεῖα αὐτοῦ ἡ ὁποία δὲν εἶναι παράλληλος οὐδὲ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς ὁδηγοῦ, μένει παράλληλος ἑαυτῇ.



(Σχ. 35)

§ 40. **Ἰδιότητες τῶν παραλλήλων εὐθειῶν.** Α' Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 35) δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ ΕΖ ἄλλη εὐθεῖα τέμνουσα ἐκείνας πλαγίως. Ἐκ τῶν σχηματιζομένων ὑπ' αὐτῶν γωνιῶν α, β, γ, δ, ε, ι, η, θ, αἱ μὲν α, γ, ε καὶ θ εἶναι ὀξεῖαι, αἱ δὲ λοιπαὶ ἀμβλεῖαι.

Ἂν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ε ὑποβάλωμεν εἰς παράλληλον μετάθεσιν κατὰ τὴν ὁδηγὸν ΕΓ καὶ μέχρις οὗ ἡ κορυφὴ αὐτῆς ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς $\hat{\alpha}$, βλέπομεν ὅτι αὕτη ἐφαρμόζει (§ 39) ἐπὶ τῆς $\hat{\alpha}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἶναι $\hat{\varepsilon}=\hat{\alpha}$. Ἐπειδὴ δέ, ὡς γνωστὸν (§ 33), εἶναι καὶ $\hat{\alpha}=\hat{\gamma}$, $\hat{\theta}=\hat{\varepsilon}$, ἕπεται ὅτι $\hat{\alpha}=\hat{\gamma}=\hat{\varepsilon}=\hat{\theta}$.

Ὥστε: Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τμηθῶσιν ὑπὸ τρίτης πλαγίως, πᾶσαι αἱ σχηματιζόμεναι ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

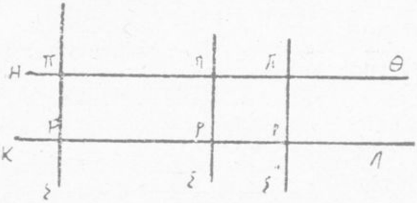
Β'. Ἐὰν ὑποβάλωμεν εἰς ὁμοίαν παράλληλον μετάθεσιν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν $\hat{\eta}$, βλέπομεν ὅτι αὕτη ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς $\hat{\beta}$ ὥστε $\hat{\eta}=\hat{\beta}$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\hat{\eta}=\hat{\iota}$ καὶ $\hat{\delta}=\hat{\beta}$, ἔπεται ὅτι $\hat{\eta}=\hat{\delta}=\hat{\beta}=\hat{\iota}$.

Ὥστε: Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τμηθῶσιν ὑπὸ τρίτης πλαγίως, πᾶσαι αἱ σχηματιζόμεναι ἀμβλεῖαι γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

γ'. Ζητήσωμεν ἤδη νὰ μάθωμεν τίς σχέσις ὑφίσταται μεταξὺ τυχούσης ὀξείας $\hat{\gamma}$ καὶ ἀμβλείας $\hat{\eta}$ ἐκ τῶν προειρημένων γωνιῶν.

Ἐπειδὴ $\hat{\gamma}=\hat{\varepsilon}$ καὶ $\hat{\eta}+\hat{\varepsilon}=2$ ὀρθ. (§ 28 Α'.) ἔπεται εὐκόλως ὅτι $\hat{\eta}+\hat{\gamma}=2$ ὀρθ.

Ὥστε: Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τμηθῶσιν ὑπὸ τρίτης πλαγίως, τυχοῦσα ὀξεῖα εἶναι παραπληρωματικὴ τυχούσης ἀμβλείας ἐκ τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν.



(Σχ. 36)

Δ'. Ἔστωσαν ΗΘ καὶ ΚΛ (Σχ. 36) δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ΣΡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΛ καὶ Π τὸ σημεῖον, κατὰ τὸ ὁποῖον ἡ ΣΡ τέμνει (§ 35) τὴν ΗΘ.

Ἐπειδὴ διὰ παραλλήλου μεταθέσεως ἡ ὀρθὴ γωνία Ρ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς Π, ἔπεται ὅτι καὶ ἡ Π εἶναι ὀρθὴ γωνία.

Ἄρα: Πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ μίαν τῶν παραλλήλων εὐθειῶν εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.

§ 41. **Ἀπόστασις δύο παραλλήλων εὐθειῶν.**— Ἔστωσαν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ΗΛ καὶ ΚΘ (σχ. 36) καὶ διάφοροι ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ΠΡΣ, Π'Ρ'Σ', Π''Ρ''Σ'' κτλ. Παραβάλλοντες διὰ τοῦ διαβήτου τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν περιεχόμενα τμήματα τῶν καθέτων τούτων πειθόμεθα ὅτι πάντα εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα· παριστᾷ δὲ ἕκαστον τούτων (§ 20 Β') τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν δύο σημείων κειμένων ἀνὰ ἓν ἐπὶ τῶν παραλλήλων ΚΛ καὶ ΗΘ. Ἕνεκα τούτου ἕκαστον τῶν εὐθ. τμημάτων ΠΡ, Π́Ρ́ Π̈Ρ̈ κτλ. καλεῖται ἀπόστασις τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΚΛ καὶ ΗΘ.

Ὥστε: Ἀπόστασις δύο παραλλήλων εὐθειῶν καλεῖται τὸ μεταξὺ αὐτῶν περιεχόμενον τμῆμα τυχούσης κοινῆς αὐτῶν καθέτου.

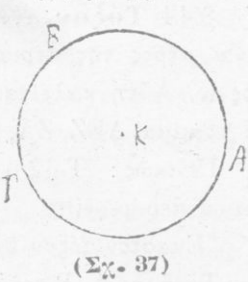
Ἐφαρμογαί. 1) Χαράξατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας τυχοῦσαν εὐθεῖαν καὶ μίαν παράλληλον αὐτῇ καὶ ἀπέχουσαν 0,03μ. ἀπὸ ταύτης.

2). Χαράξατε δύο εὐθείας παραλλήλους καὶ ἑτέραν παράλληλον αὐταῖς καὶ εἰς ἴσην ἀπ' ἀμφοτέρων κειμένην ἀπόστασιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

ΚΥΚΛΟΣ

§ 42. **Κύκλος, κέντρον καὶ περιφέρεια κύκλου.** —Στερεοῦντες τὰ δύο σκέλη διαβήτου οὕτως ὥστε νὰ μὴ μεταβάλληται ἡ ἀπόστασις τῶν αἰχμῶν αὐτῶν, ἂς στηρίξωμεν τὴν αἰχμὴν τοῦ ἑνὸς σκέλους ἐπὶ τινὸς σημείου Κ ἐπιπέδου τινὸς (π. χ. πίνακος, φύλλου χάρτου, τραπέζης κτλ.) Εἶτα ἂς στρέψωμεν περὶ τὸ σημεῖον Κ τὸν διαβήτην οὕτως ὥστε τὸ ἄκρον τοῦ ἄλλου σκέλους νὰ ἐγγίζῃ πάντοτε τὸ ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ κεῖται τὸ σημεῖον Κ. Οὕτω τὸ κινούμενον τοῦτο ἄκρον τοῦ διαβήτου, ὃν ἐφωδιασμένον διὰ γραφίδος, θέλει γράψει συνεχῆ γραμμὴν ΑΒΓ (σχ. 37). τῆς ὁποίας ἕκαστον σημεῖον ἀπέχει ἀπὸ τοῦ Κ ἀπόστασιν ἴσην τῇ σταθερᾷ ἀποστάσει τῶν αἰχμῶν τῶν σκελῶν τοῦ διαβήτου.



(Σχ. 37)

Τὸ ὑπὸ τῆς γραμμῆς ΑΒΓ περικλειόμενον μέρος τοῦ ἐπιπέδου καλεῖται κύκλος, τὸ σημεῖον Κ καλεῖται κέντρον καὶ ἡ γραμμὴ ΑΒΓ περιφέρεια του κύκλου τούτου.

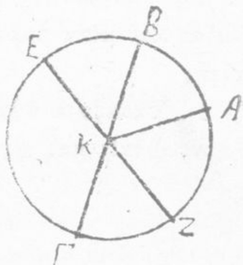
Ἑκάτερον τῶν ἐπιπέδων μερῶν τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος ΑΒΓΔ (σχ. 2) εἶναι κύκλος· ὁμοίως τὸ ἐπίπεδον μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος ΕΖΗ (σχ. 2) εἶναι κύκλος.

Γενικῶς: Κύκλος καλεῖται μέρος ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς γραμμῆς, εἰς τὴν ὁποίαν τοῦτο περατοῦται.

Περιφέρεια κύκλου καλεῖται ἡ γραμμή, εἰς τὴν ὁποίαν οὗτος περατοῦται.

Κέντρον κύκλου καλεῖται τὸ σημεῖον, ὅπερ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς περιφερείας αὐτοῦ.

§ 43. **Ἀκτὶς καὶ διάμετρος κύκλου.** Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΚΑ (σχ. 38) ἄρχεται ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου Κ καὶ καταλήγει εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ· τὸ τμῆμα τοῦτο καλεῖται ἀκτὶς τοῦ κύκλου Κ. Ὁμοίως τὰ τμήματα ΚΒ ΚΖ, εἶναι ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου.



(Σχ. 38)

Γενικῶς: Ἀκτὶς κύκλου καλεῖται πᾶν εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἄρχεται ἐκ τοῦ κέντρου καὶ καταλήγει εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ.

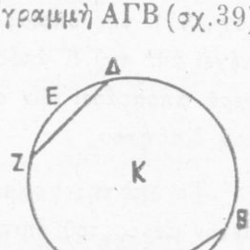
Τὸ εὐθ. τμῆμα ΒΚΓ (σχ. 38) διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου Κ καὶ περατοῦται ἑκατέρωθεν εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ· τὸ τμῆμα τοῦτο καλεῖται διάμετρος τοῦ κύκλου Κ. Ὁμοίως τὸ εὐθ. τμῆμα ΕΚΖ εἶναι διάμετρος τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Γενικῶς: Διάμετρος κύκλου καλεῖται πᾶν εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατοῦται ἑκατέρωθεν εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου τούτου.

§ 44. **Τόξον.** — Χορδὴ τόξου. — Ἡ γραμμὴ ΑΓΒ (σχ. 39) εἶναι μέρος τῆς περιφερείας κύκλου τινὸς Κ. Αὕτη καλεῖται τόξον. Ὁμοίως αἱ γραμμαὶ ΔΕΖ, ΖΑ, (σχ. 39) εἶναι τόξα.

Γενικῶς: Τόξον καλεῖται τυχὸν μέρος περιφερείας.

Ἕκαστον τόξον ἔχει δύο ἄκρα.



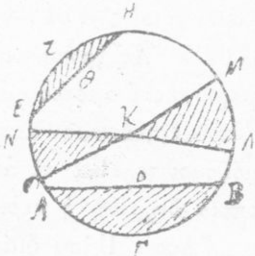
(Σχ. 39)

Τὰ ἄκρα Α, Β τοῦ τόξου ΑΓΒ (σχ. 39) ὁρίζουσι τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ. Τοῦτο καλεῖται χορδὴ τοῦ τόξου ΑΓΒ. Ὁμοίως τὸ εὐθ. τμῆμα ΖΔ εἶναι χορδὴ τοῦ τόξου ΔΕΖ.

Γενικῶς: Χορδὴ τόξου λέγεται τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζουσι τὰ ἄκρα αὐτοῦ.

Ἄξιον παρατηρήσεως εἶναι ὅτι ἕκαστον τόξον ἔχει μίαν χορδὴν (§ 9), ἐν ᾧ εἰς ἑκάστην χορδὴν ἀντιστοιχοῦσι δύο τόξα.

§ 44. **Τμῆμα κύκλου.—Κυκλικὸς τομεύς**. Τὸ σχῆμα ΑΓΒΔΑ (σχ. 40) εἶναι μέρος κύκλου περικλειόμενον ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΓΒ καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ. Τοῦτο καλεῖται τμῆμα κύκλου. Ὁμοίως τὸ σχῆμα ΕΖΗΘ εἶναι τμῆμα κύκλου.



(Σχ. 40)

Γενικῶς: Τμῆμα κύκλου καλεῖται πᾶν μέρος αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον περικλείεται μεταξὺ τόξου τινὸς καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ.

Τὸ σχῆμα ΚΜΛ (σχ. 40) εἶναι μέρος κύκλου περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ τόξου ΜΛ καὶ τῶν ἀκτίνων ΚΜ, ΚΛ, αἱ ὁποῖαι καταλήγουσιν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ αὐτοῦ τόξου. Τοῦτο καλεῖται κυκλικὸς τομεύς. Ὁμοίως τὸ σχῆμα ΝΚΟ εἶναι κυκλικὸς τομεύς.

Γενικῶς: Κυκλικὸς τομεὺς καλεῖται πᾶν μέρος κύκλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τόξου τινὸς καὶ τῶν ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι καταλήγουσιν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ.

Ἐρωτήσεις: Τί καλεῖται κύκλος; τί περιφέρεια; καὶ κέντρον κύκλου; Τί καλεῖται ἀκτὶς καὶ τί διάμετρος κύκλου; Ἐκ πόσων ἀκτίνων ἀποτελεῖται ἑκάστη διάμετρος; Τί καλεῖται τόξον; Τί καλεῖται χορδὴ τόξου καὶ πόσας χορδὰς ἔχει ἕκαστον τόξον καὶ διατί; πόσα τόξα ἀντιστοιχοῦσιν εἰς ἑκάστην χορδήν; Τί καλεῖται τμῆμα κύκλου καὶ τί κυκλικὸς τομεύς;

Ἐφαρμογαὶ 1) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας περιφέρειαν ἀκτῖνος 0,02 μ. καὶ χαράξατε δύο διαμέτρους καθέτους. Εἰς πόσα καὶ τίνα σχήματα διαιρεῖται οὕτως ὁ κύκλος;

2) Γράψατε περιφέρειαν ἀκτῖνος 0,03 μ. καὶ ὁρίσατε ἐπ' αὐτοῦ δύο τόξα ἔχοντα κοινὰ ἄκρα καὶ χορδὴν 0,04 μ. Εἰς πόσα καὶ ὁποῖα σχήματα διαιρεῖται οὕτως ὁ κύκλος;

§ 46. **Κυκλικαὶ ἰδιότητες.** — Α'. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ κύκλου (§ 42) εἶναι φανερὰ ἡ ἀλήθεια τῆς ἀκολούθου ἰδιότητος.

Πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες ἑκάστου κύκλου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Β'. Ἐπειδὴ ἑκάστη διάμετρος ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ἕπεται εὐκόλως ὅτι:

Πᾶσαι αἱ διάμετροι ἑκάστου κύκλου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

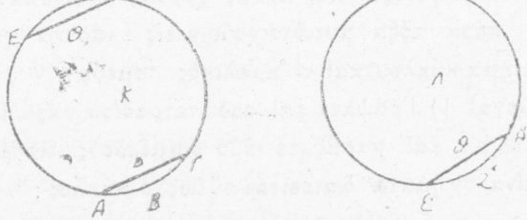
Γ'. Ἂς τμήσωμεν τυχόντα ἐκ χάρτου κύκλον κατὰ μῆκος τυχούσης διαμέτρου αὐτοῦ. Ἐὰν τὰ οὕτω προκύπτοντα δύο μέρη αὐτοῦ ἐπιθέσωμεν καταλλήλως, παρατηροῦμεν ὅτι ταῦτα ἐφαρμόζουσι τελείως· τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ δύο τόξα εἰς τὰ ὁποῖα διηρέθη ἡ περιφέρεια αὐτοῦ.

Ἄρα: Πᾶσα διάμετρος διαιρεῖ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἑκάτερον τῶν δύο ἴσων μερῶν τοῦ κύκλου καλεῖται ἡμικύκλιον, ἑκάτερον δὲ τῶν δύο ἴσων τόξων τῆς περιφερείας καλεῖται ἡμιπεριφέρεια.

Δ'. Ἂς γράψωμεν ἐπὶ φύλλου χάρτου δύο περιφερείας μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα. Ἐὰν ἔπειτα ἀποκόπτοντες τὸν ἕνα τῶν σχηματισθέντων κύκλων θέσωμεν ἐπὶ τοῦ ἄλλου, οὕτως ὥστε νὰ συμπέσωσι τὰ κέντρα αὐτῶν, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ περιφέρειαι αὐτῶν ἐφαρμόζουσι καὶ οἱ κύκλοι ὁμοίως.

Ἄρα: Ἐὰν αἱ ἀκτῖνες δύο κύκλων εἶναι ἴσαι, οἱ κύκλοι εἶναι ἴσοι καὶ αἱ περιφέρειαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.



(Σχ. 41)

Ε'. Ἐπὶ κύκλου τινὸς Κ ἢ ἐπὶ δύο ἴσων καὶ ἐκ χάρτου κύκλων Κ καὶ Λ (σχ. 41) ἂς χαράξωμεν τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαβήτου καὶ κανόνος δύο ἴσας χορδὰς ΑΓ καὶ ΕΗ. Ἀποκόπτοντες εἶτα τὸ ἕτερον τῶν μικροτέρων ἡμικυκλίου κυκλικῶν τμημάτων ΕΖΗΘΕ ἂς ἐπιθέσωμεν ἐπὶ τοῦ ἄλλου ΑΒΓΔΑ οὕτως ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσιν αἱ ἴσαι αὐτῶν χορδαὶ καὶ ἀμφότερα τὰ κυκλικὰ τμήματα νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῶν χορδῶν αὐτῶν. Θέλομεν οὕτω παρατηρήσει ὅτι τὰ τόξα ΑΒΓ καὶ ΕΖΗ ἐφαρμόζουσι τελείως, ἤτοι ταῦτα εἶναι ἴσα. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι τὰ μεγαλύτερα ἡμιπεριφερείας τόξα ΑΖΓ καὶ ΕΒΗ εἶναι ἴσα.

Ἀντιστρόφως: Ἐὰν νοήσωμεν δύο ἴσα τόξα ΑΒΓ καὶ ΕΓΗ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἴσων κύκλων ἐπιτιθέμενα οὕτως ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσιν, εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι (§ 9) καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν ΑΓ καὶ ΕΗ ἐφαρμόζουσιν.

Ἄρα: Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις τὰ ἴσα τόξα ἔχουσιν ἴσας χορδάς· καὶ ἀντιστρόφως: τὰ εἰς ἴσας χορδὰς ἀντιστοιχοῦντα μικρότερα ἡμιπεριφερείας τόξα εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ μεγαλύτερα ἡμιπεριφερείας εἶναι ὁμοίως ἴσα.

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον, ὅταν θέλωμεν νὰ ὁρίσωμεν ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἢ ἴσων περιφερειῶν τόξα ἴσα, ἀρκούμεθα νὰ ὁρίζωμεν διὰ τοῦ διαβήτου τὰ ἄκρα ἴσων χορδῶν. Καὶ ὄντως, ταῦτα εἶναι καὶ ἄκρα ἴσων τόξων.

Ἐφαρμογαί. 1). Ἐπὶ περιφερείας ὁρίσατε τόξον μικρότερον ἡμιπεριφερείας καὶ εἶτα ἄλλο διπλάσιον αὐτοῦ.

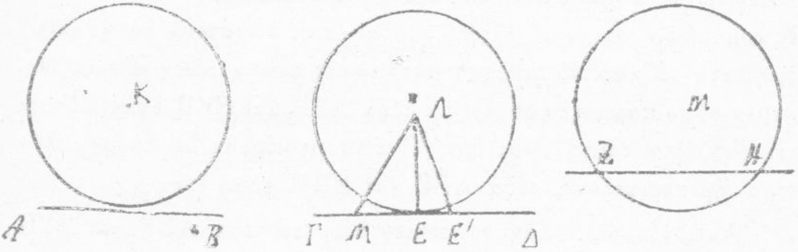
2) Ἐπὶ περιφερείας ὁρίσατε τόξον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ χορδὴν ἴσην πρὸς δεδόμενον εὐθ. τμῆμα. Εἶναι πάντοτε τοῦτο δυνατόν;

3) Ἐπὶ περιφερείας ὁρίσατε τόξον μικρότερον ἡμιπεριφερείας καὶ ἔχον χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Προσπαθήσατε νὰ εὕρητε ἐκ πόσων τοιούτων τόξων ἀποτελεῖται ὅλη ἡ περιφέρεια.

4) Χαράξατε δύο ἴσας χορδὰς ἐν κύκλῳ καὶ τὰς ἀποστάσεις τοῦ κέντρου ἀπ' αὐτῶν (§ 21). Εὕρετε εἶτα τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαβήτου τὴν μεταξὺ τῶν ἀποστάσεων τούτων ὑπάρχουσαν σχέσιν μεγέθους.

§ 47. **Θέσεις εὐθείας πρὸς περιφέρειαν κύ-**

κλου. — Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου Κ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ (Σχ. 42) οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον.



(Σχ. 42)

Ἡ περιφέρεια Λ καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΔ ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, τὸ Ε, τέλος ἡ περιφέρεια Μ καὶ ἡ εὐθεῖα ΖΗ ἔχουσι δύο κοινὰ σημεῖα.

Αἱ θέσεις, ἄρα, τὰς ὁποίας εὐθεῖά τις δύναται νὰ λάβῃ πρὸς περιφέρειαν κύκλου, εἶναι τρεῖς.

Α′. Ἡ εὐθεῖα κεῖται ὅλη ἐκτὸς τοῦ κύκλου μηδὲν μετὰ τῆς περιφερείας του ἔχουσα κοινὸν σημεῖον.

Β′. Ἡ εὐθεῖα ἔχει μετὰ τῆς περιφερείας ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον.

Γ′. Ἡ εὐθεῖα ἔχει μετὰ τῆς περιφερείας δύο κοινὰ σημεῖα (τέμνουσα).

§ 48. **Ἐφαπτομένη περιφερείας.** — Ἡ εὐθεῖα ΓΔ, ἡ ὁποία ἔχει μετὰ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Λ (Σχ. 42) ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, καλεῖται ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας ταύτης

Γενικῶς: Ἐφαπτομένη περιφερείας καλεῖται πᾶσα εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἔχει μετ' αὐτῆς ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον.

Τὸ κοινὸν σημεῖον ἐφαπτομένης καὶ περιφερείας καλεῖται σημεῖον ἐπαφῆς.

§ 49. **Ἰδιότητες τῶν ἐφαπτομένων περιφερείας.** — Α′. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΛΕ (Σχ. 42), ὅπερ ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ κέντρου Λ καὶ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Ε, εἶναι προφανῶς ἀκτὶς τοῦ κύκλου Λ, τὸ δὲ εὐθ. τμῆμα ΛΜ, ὅπερ ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ κέντρου Λ καὶ τυχόντος ἄλλου σημείου Μ τῆς ἐφαπτομένης εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἀκτῖνος.

Ἄρα: Ἐξ ὅλων τῶν σημείων ἑκάστης ἐφαπτομένης περιφερείας τινὸς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς κεῖται εἰς μικροτέραν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστασιν.

Β'. Τῇ βοηθείᾳ τοῦ γνώμονος βεβαιούμεθα εὐκόλως ὅτι ἑκατέρα τῶν γενικῶν ΛΕΓ καὶ ΛΕΔ εἶναι ὀρθή.

Ἄρα: Πᾶσα ἐφαπτομένη περιφερείας εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς.

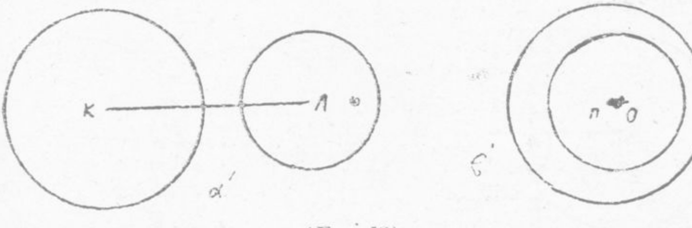
Γ'. Ἡ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΛΒ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς Ε κάθετος ἔχει προφανῶς μετὰ περιφερείας κοινὸν σημεῖον τὸ Ε (σχ. 42). Ἐπειδὴ δὲ ὅλα τὰ ἄλλα σημεῖα τῆς ΓΔ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ Λ ἀποστάσεις μεγαλυτέρας τῆς ἀκτῖνος ΛΕ, ὡς διὰ τοῦ διαβήτου εὐκόλως πειθόμεθα, ἕπεται ὅτι πάντα ταῦτα κεῖνται ἐκτὸς τῆς περιφερείας.

Ἄρα: Ἡ κάθετος εἰς τὰ ἄκρον ἀκτῖνος εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας.

Δ'. Ἐκ τῆς ἰδιότητος Γ' ἔχοντες ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν ἰδιότητα (20 Α'.) συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι:

Δι' ἑκάστου σημείου περιφερείας ἄγεται μία μόνον ἐφαπτομένη ταύτης. 13-4-28

§ 50. **Πρόβλημα**. — Νὰ κατασκευασθῇ ἐφαπτομένη περιφερείας εἰς δεδομένον σημεῖον αὐτῆς.



(Σχ. 43)

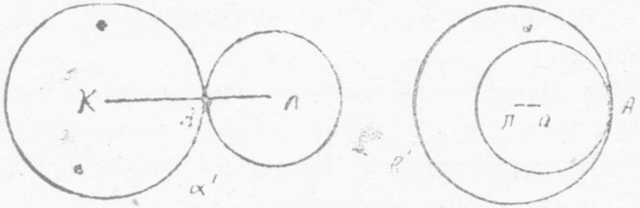
Λύσις: — Ἄγομεν τὴν εἰς τὸ δεδομένον σημεῖον καταλήγουσαν ἀκτῖνα καὶ εἶτα κάθετον ἐπὶ ταύτην διὰ τοῦ δεδομένου σημείου διερχομένην. Ἡ κάθετος αὕτη εἶναι (49 Γ'.) ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.

Ἐφαρμογαί. 1) Γράψατε περιφέρειαν καὶ εὐθεῖαν οὐδὲν ἔχουσαν μετ' ἐκείνης κοινὸν σημεῖον. Εἶτα ἄλλην εὐθεῖαν τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν.

2) Γράψατε περιφέρειαν κύκλου, μίαν διάμετρον αὐτοῦ καὶ τὰς διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς διερχομένας ἐφαπτομένας. Δείξατε εἶτα ὅτι αὗται εἶναι παράλληλοι.

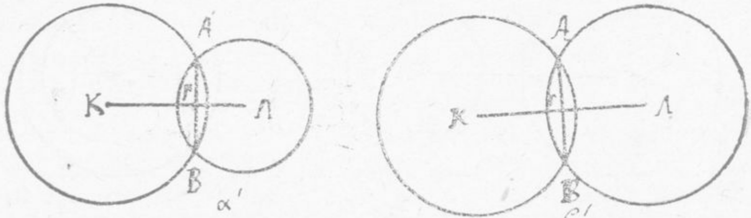
3) Γράψατε περιφέρειαν κύκλου, δύο ἀκτῖνας καθέτους καὶ τὰς διὰ τῶν ἄκρων αὐτῶν διερχομένας ἐφαπτομένας. Ἀναγνωρίσατε τῇ βοηθείᾳ τοῦ καταλλήλου γεωμ. ὀργάνου τὸ εἶδος τῆς ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων τούτων σχηματιζομένης γωνίας.

§ 51. **Θέσεις δύο περιφερειῶν πρὸς ἀλλήλας.** —Αἱ δύο περιφέρειαι Κ καὶ Λ. (σχ. 43 α') οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον καὶ ἑκατέρα κεῖται ὅλη ἐκτὸς τοῦ κύκλου, τὸν ὁποῖον ἡ ἄλλη ὁρίζει.



(Σχ. 44)

Αἱ περιφέρει Ο καὶ Π (σχ. 48 β') οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον, κεῖται δὲ ἡ μία (ἡ Ο) ὁλόκληρος ἐντὸς τοῦ κύκλου, τὸν ὁποῖον ὁρίζει ἡ ἄλλη.



(Σχ. 45)

Αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Λ (σχ. 44 α'.) ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, Α καὶ πάντα τὰ ἄλλα σημεῖα ἑκατέρας κεῖνται ἐκτὸς τοῦ ὑπὸ τῆς ἄλλης ὁριζομένου κύκλου. Αἱ τοιαῦτοι περιφέρειαι λέγομεν ὅτι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐκτός.

Αἱ περιφέρειαι Ο καὶ Π (σχ. 44 β'.) ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον Α, ἀλλὰ πάντα τὰ ἄλλα σημεῖα τῆς μιᾶς (τῆς Ο) κεῖνται ἐντὸς τοῦ ὑπὸ τῆς ἄλλης ὁριζομένου κύκλου.

Περὶ τῶν τοιούτων περιφερειῶν λέγομεν ὅτι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός.

Αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Λ (Σχ. 45) ἔχουσι δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β. Περὶ τῶν τοιούτων περιφερειῶν λέγομεν ὅτι τέμνονται·

Κατὰ ταῦτα αἱ πρὸς ἀλλήλας θέσεις δύο περιφερειῶν εἶναι αἱ ἀκόλουθοι πέντε.

α'. Ἑκατέρα κεῖται ὁλόκληρος ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ὃν ἡ ἄλλη ὁρίζει.

β'. Ἡ μία κεῖται ὁλόκληρος ἐντὸς τοῦ κύκλου, ὃν ὁρίζει ἡ ἄλλη.

Εἰς ἀμφοτέρας ταύτας τὰς περιπτώσεις αἱ περιφέρειαι οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον.

β'. Αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐκτός.

δ'. Αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός.

Εἰς τὰς δύο ταύτας περιπτώσεις αἱ περιφέρειαι ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον.

ε'. Αἱ περιφέρειαι τέμνονται (δύο κοινὰ σημεῖα).

Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν κέντρων δύο περιφερειῶν, καλεῖται διάκεντρος αὐτῶν.

Τὸ κοινὸν σημεῖον δύο ἐφαπτομένων (ἐντὸς ἢ ἐκτὸς) περιφερειῶν καλεῖται σημεῖον ἐπαφῆς.

Τὸ σημεῖον ἐπαφῆς δύο περιφερειῶν κεῖναι πάντοτε ἐπὶ τῆς διακέντρου αὐτῶν.

Ἐρωτήσεις. Πόσαι αἱ διάφοροι θέσεις δύο περιφερειῶν πρὸς ἀλλήλας; εἰς πόσας καὶ ποίας περιπτώσεις δύο περιφέρειαι οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον;. Εἰς πόσας καὶ ποίας περιπτώσεις δύο περιφέρειαι ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον;. Πῶς καλεῖται τὸ μόνον κοινὸν σημεῖον δύο περιφερειῶν;. Τίνα θέσιν ἐν σχέσει πρὸς τὴν διάκεντρον ἔχει τὸ σημεῖον ἐπαφῆς δύο περιφερειῶν;. Πόσα τὸ πολὺ κοινὰ σημεῖα δύνανται νὰ ἔχωσι δύο περιφέρειαι;. Πῶς καλοῦνται ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ αἱ περιφέρειαι;.

Ἐφαρμογαί. 1) Γράψατε εὐθ. τμῆμα μήκους 0,04 μ.

καὶ μὲ κέντρα τὰ ἄκρα αὐτοῦ δύο περιφερείας, ὧν ἡ μία νὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ὃν ἡ ἄλλη ὁρίζει.

2) Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα εὐθ. τμήματος μήκους 0,02 μ. γράψατε δύο περιφερείας, μίαν μὲν μὲ ἀκτῖνα 0,02 μ. τὴν δὲ ἄλλην μὲ ἀκτῖνα 0,05 μ. Τίς ἡ ἀμοιβαία αὐτῶν θέσις;.

3) Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα εὐθ. τμήματος μήκους 0,03 μ. γράψατε δύο περιφερείας ἐκτὸς ἐφαπτομένας καὶ ἄλλας δύο ἐντὸς ἐφαπτομένας.

§ 52. **Κοινὴ χορδὴ δύο περιφερειῶν.** — Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ (Σχ. 45), τὸ ὁποῖον ὁρίζουσι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ, εἶναι προφανῶς χορδὴ εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιφερείας ταύτας. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον καλεῖται κοινὴ χορδὴ αὐτῶν.

Γενικῶς. Κοινὴ χορδὴ δύο περιφερειῶν καλεῖται τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζουσι τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῶν.

§ 53. **Ἰδιότητες τῆς κοινῆς χορδῆς δύο περιφερειῶν.**—Α΄. Ἡ κοινὴ χορδὴ ΑΒ τέμνεται ὑπὸ τῆς διακέντρου ΚΛ (σχ 45) εἴς τι σημεῖον Γ. Τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαβήτου πειθόμεθα εὐκόλως ὅτι τὰ εὐθ. τμήματα ΑΓ καὶ ΓΒ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα· τῇ βοηθείᾳ δὲ τοῦ γνώμονος πειθόμεθα ὅτι πᾶσαι αἱ περὶ τὸ Γ γωνίαι εἶναι ὀρθαί. (1)

Ἄρα: Ἡ κοινὴ χορδὴ δύο περιφειῶν τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς διακέντρου.

Β΄. Ἄς γράψωμεν δύο περιφερίας τεμνομένας καὶ ἴσας (§ 46 Δ΄.) Κ καὶ Λ (σχ. 45 β΄.) καὶ ἄς χαράξωμεν τὴν κοινὴν αὐτῶν χορδὴν ΑΒ καὶ τὴν διάκεντρον ΚΛ. Ἐὰν ἤδη συγκρίνωμεν διὰ τοῦ διαβήτου τὰ εὐθ. τμήματα ΚΓ καὶ ΓΛ, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων ὑπὸ τῆς κοινῆς χορδῆς, παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα.

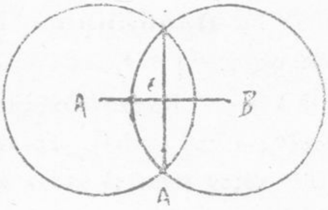
Ἄρα: Ἡ κοινὴ χορδὴ δύο ἴσων περιφερειῶν διχοτομεῖ τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων αὐτῶν.

---

(1) Εἰς τὰ συμπεράσματα ταῦτα φθάνομεν καὶ ἂν νοήσωμε τὰ δύο ἡμικύκλια, τὸ ὁποῖα περιέχουσι τὸ Α, στρεφόμενα περὶ τὴν διάκεντρον, μέχρις οὗ πέσουσιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἄλλων ἡμικυκλίων.

§ 54. **Πρόβλημα.** Νὰ γραφῇ εὐθεῖα τέμνουσα δίχα καὶ καθέτως δεδομένον εὐθ. τμῆμα.

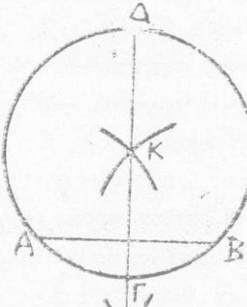
Λύσις — Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ δεδομένου εὐθ. τμήματα ΑΒ (σχ. 46) καὶ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα γράφομεν δύο τεμνομένας περιφερείας καὶ ἄγομεν τὴν κοινὴν αὐτῶν χορδὴν ΓΔ. Αὕτη εἶνε ἡ ζητουμένη εὐθεῖα (§ 53) καὶ τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον Ε εἶναι τὸ μέσον ἀμφοτέρων τῶν εὐθ. τμημάτων ΓΔ καὶ ΑΒ.



(Σχ. 46)

§ 55. **Ἰδιότητες τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον χορδῆς.** — Α΄. Ἔστω κύκλος τις Κ καὶ ΑΒ τυχοῦσα ἐν αὐτῷ χορδὴ (σχ. 47). Ἂς γράψωμεν μὲ κέντρα τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῆς χορδῆς ταύτης καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν ΚΑ δύο περιφερείας. Αὗται τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ, ἡ δὲ κοινὴ αὐτῶν χορδὴ ΚΛ τέμνει τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ δίχα καὶ καθέτως (§ 54).

Ἄρα : Ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον χορδῆς διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.



(Σχ. 47)

Β΄. Ἔστωσαν, Γ καὶ Δ τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα τέμνει τὴν περιφέρειαν ἡ προηγουμένως κατασκευασθεῖσα κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ (σχ. 47). Ἂν τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαβήτου συγκρίνωμεν τὰς χορδὰς ΑΓ καὶ ΓΒ, παρατηροῦμεν ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι : κατ' ἀκολουθίαν (§ 46 Ε΄.) συμπεραίνομεν ὅτι καὶ τὰ τόξα ΑΓ καὶ ΓΒ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα. Ὁμοίως πειθόμεθα καὶ περὶ τῆς ἰσότητος τῶν τόξων ΑΔ καὶ ΔΒ.

Ἄρα: Ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον χορδῆς διχοτομεῖ ἀμφότερα τὰ εἰς ταύτην ἀντιστοιχοῦντα τόξα.

§ 56 **Πρόβλημα**.—Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη.

Λύσις. Κατασκευάζομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς αὐτοῦ (§ 54). Τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον αὕτη τέμνει τὸ δοθὲν τόξον εἶναι τὸ μέσον αὐτοῦ. (§ 55 Β'.

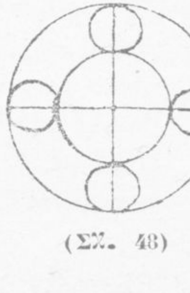
Ἐφαρμογαί. 1) Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα διάμετρον δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

2) Γράψατε τυχοῦσαν εὐθεῖαν καὶ ὁρίσατε τυχαίως δύο σημεῖα ἐκτὸς καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς κείμενα. Γράψατε εἶτα περιφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται διὰ τῶν σημείων τούτων καὶ νὰ ἔχῃ τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς χαραχθείσης εὐθείας (§ 55 Α'. — § 54).

3) Γράψατε εὐθ. τμῆμα μήκους 0 05 μ. καὶ ὁρίσατε εἶτα σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ μὲν τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτοῦ 0,04 μ. ἀπὸ δὲ τοῦ ἄλλου 0,03 μ. (Πόσα τοιαῦτα σημεῖα ὑπάρχουσιν;).

4) Κατασκευάσατε τὸ σχῆμα 48.

§ 57. **Ἐπίκεντροι γωνίαι** —Τῆς γωνίας ΑΚΒ (Σχ. 49) ἡ κορυφὴ εἶναι κέντρον κύκλου τινὸς Κ· Ἡ γωνία αὕτη καλεῖται ἐ π ί κ ε ν τ ρ ο ς γ ω ν ί α· τὸ δὲ τόξον, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς, καλεῖται ἀ ν τ ί σ τ ο ι χ ο ν τ ό ξ ο ν α ὐ τ ῆ ς. Ὁμοίως ἡ ΒΚΕ εἶναι ἐπίκεντρος γωνία καὶ τὸ τόξον ΒΕ τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς τόξον.

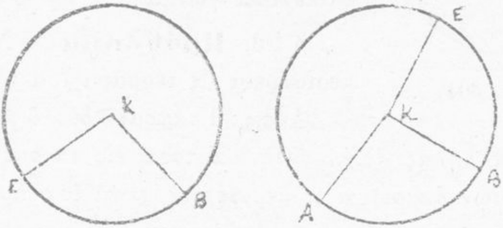


(Σχ. 48)

Γενικῶς: Ἐ π ί κ ε ν τ ρ ο ς γ ω ν ί α καλεῖται πᾶσα γωνία, ἡ ὁποία ἔχει ὡς κορυφὴν τὸ κέντρον κύκλου τινός.

Τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν ἐπικέντρου γωνίας περιεχόμενον τόξον αὐτῆς καλεῖται ἀ ν τ ί σ τ ο ι χ ο ν α ὐ τ ῆ ς τ ό ξ ο ν.

§ 58. **Ἰδιότητες ἐπικέντρων γωνιῶν.** — Α΄. Ἔστωσαν δύο ἴσα τόξα. (§ 46 Ε΄.) ΑΒ καὶ ΒΕ ἀνήκοντα εἰς τὴν αὐτὴν ἢ εἰς δύο ἴσας περιφερείας γεγραμμένας ἐπὶ φύλλου χάρτου (Σχ. 49). Ἂν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες, αἱ ὁποῖαι καταλήγουσιν εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν, σχηματίζονται δύο κυκλικοὶ τομεῖς ΑΚΒ καὶ ΒΚΕ. Ἤδη, ἂν ἀποκόψωμεν τὸν ἕνα τούτων καὶ θέσωμεν ἐπὶ τοῦ ἄλλου οὕ-



(Σχ. 49)

τως ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσι τὰ ἴσα τόξα, θέλομεν παρατηρήσει ὅτι οἱ τομεῖς οὗτοι ἐφαρμόζουσι τελείως καὶ κατ' ἀκολουθίαν καὶ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΒΚΕ ἐφαρμόζουσιν.

Ἄρα: Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις εἰς ἴσα τόξα βαίνουσιν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι.

Β΄. Ἔστω ἤδη ἀντιστρόφως ὅτι αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΒΚΕ (Σχ. 49) εἶναι ἴσαι καὶ ἀνήκουσιν εἰς τὸν αὐτὸν ἢ εἰς ἴσους κύκλους. Ἐὰν πάλιν ἐπιθέσωμεν τὸν ἕνα κυκλικὸν τομέα ἐπὶ τοῦ ἄλλου οὕτως ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσιν αἱ ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι, εὐκόλως κατανοοῦμεν ὅτι καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα θέλουσιν ἐφαρμόσει.

Ἄρα: Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι βαίνουσιν εἰς ἴσα τόξα.

Γ΄. Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τούτων συμπεραίνομεν εὐκόλως τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις εἰς τόξον διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. ἑτέρου τόξου βαίνει διπλασία, τριπλασία κτλ. ἐπίκεντρος γωνία: Καὶ ἀντιστρόφως ἐπίκεντρος γωνία διπλασία, τριπλασία κτλ. ἄλλης βαίνει εἰς διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. τόξον.

Ἐρωτήσεις: Τί καλεῖται ἐπίκεντρος γωνία; Τί καλεῖται ἀντίστοιχον τόξον ἐπικέντρου γωνίας; Πῶς δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν γωνίαν τινὰ ἐπίκεντρον; Τίς σχέσις ὑφίσταται μεταξὺ ἐπικέντρων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων; Ἐὰν τόξον τι εἶναι πενταπλάσιον ἄλλου, τίνα σχέσιν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας αἱ ἐπ' αὐτῶν βαίνουσι ἐπίκεντροι γωνίαι;

(Σχ. 50)

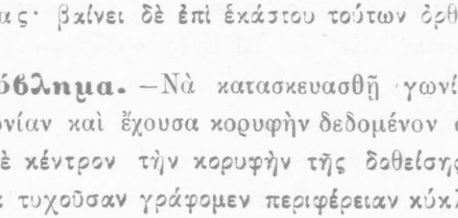
§ 59. **Πρόβλημα**. – Νὰ διαιρεθῇ περιφέρεια εἰς τέσσαρα ἴσα τόξα.

Λύσις: Γράφομεν δύο διαμέτρους καθέτους ἐπ' ἀλλήλας (Σχ. 50). Τὰ τόξα, εἰς τὰ ὁποῖα ὑπὸ τῶν καθέτων τούτων διαιρεῖται ἡ περιφέρεια, εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα· διότι αἱ ἐπ' αὐτῶν βαίνουσαι ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι ἴσαι ὡς ὀρθαί.

Ἕκαστον τῶν τόξων τούτων καλεῖται τεταρτημόριον περιφερείας· βαίνει δὲ ἐπὶ ἑκάστου τούτων ὀρθὴ ἐπίκεντρος γωνία.

§ 60 **Πρόβλημα.** –Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς δεδομένην γωνίαν καὶ ἔχουσα κορυφὴν δεδομένον σημεῖον.

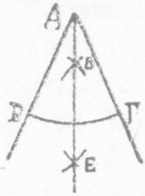
Λύσις: Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς δοθείσης γωνίας Α καὶ μὲ ἀκτῖνα τυχοῦσαν γράφομεν περιφέρειαν κύκλου· ἔστω δὲ



(Σχ. 51)

ΔΕ τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχόμενον τόξον (Σχ. 51). Ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον Β καὶ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα γράφομεν ἑτέραν περιφέρειαν ἐπὶ ταύτης δὲ λαμβάνομεν § 46 Ε'.) τόξον ΖΘ ἴσον πρὸς τὸ ΔΕ καὶ φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΒΖ καὶ ΒΘ. Ἡ ὑπὸ τούτων σχηματιζομένη γωνία ΘΒΖ εἶναι ἡ ζητουμένη (§ 58 Α'.).

Σημ. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύομεν καὶ οὕτω. Ἄγομεν ἐκ τοῦ B εὐθείας BZ καὶ BΘ παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς AΔ, AE, ἀμφοτέρας δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς AB κειμένας. Ἡ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία ΘBZ εἶναι ἡ ζητουμένη. Πράγματι αὕτη διὰ παραλλήλου μεταθέσεως κατὰ τὴν ὁδηγὸν BΘ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς ω, δι' ἑτέρας δὲ παραλλήλου μεταθέσεως κατὰ τὴν ὁδηγὸν AΔ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς A.



(Σχ. 52)

§ 61. **Πρόβλημα.** — Νὰ διαιρεθῇ δεδομένη γωνία εἰς δύο ἴσας γωνίας

Λύσις: Καθιστῶμεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν A (Σχ. 52) ἐπίκεντρον καὶ ἔπειτα κατασκευάζομεν τὴν κάθετον EΔ εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς τοῦ ἀντιστοίχου τόξου BΓ. Ἡ κάθετος αὕτη διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας καὶ τοῦ μέσου τοῦ τόξου BΓ (§ 55). Διαιρεῖ ἑπομένως τὴν γωνίαν A εἰς δύο γωνίας BAE καὶ EAΓ, αἵτινες εἶναι ἴσαι (§ 58 A'.).

§ 62. **Διχοτόμος γωνίας.** — Ἡ εὐθεῖα AE (σχ. 52), ἡ ὁποία διαιρεῖ τὴν γωνίαν A εἰς δύο ἴσας γωνίας, καλεῖται διχοτόμος τῆς γωνίας A.

Γενικῶς: Διχοτόμος γωνίας καλεῖται ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο ἴσας γωνίας.

Ἐφαρμογαί: 1) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸ τὸ ἥμισυ ὀρθῆς γωνίας.

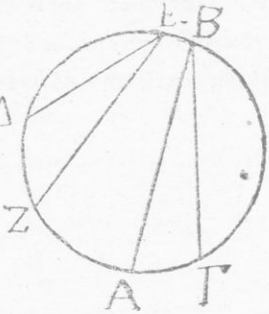
2) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς $1\frac{1}{2}$ ὀρθ.

3) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς $\frac{1}{4}$ ὀρθῆς γωνίας.

4) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς $\frac{3}{4}$ ὀρθῆς γωνίας. (§ 58 Γ'.).

5) Γράψατε τυχοῦσαν περιφέρειαν καὶ διαιρέσατε εἶτα αὐτὴν εἰς 8 ἴσα τόξα.

§ 63. **Ἐγγεγραμμέναι εἰς κύκλον γωνίαι.**—Τῆς γωνίας ΑΒΓ (Σχ. 53) ἡ μὲν κορυφὴ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Κ, αἱ δὲ πλευραὶ εἶναι χορδαὶ ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ. Ἡ γωνία αὕτη καλεῖται ἐ γ γ ε γ ρ α μ μ έ ν η εἰ ς κ ύ κ λ ο ν γ ω ν ί α· τὸ δὲ τόξον ΑΓ, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς, καλεῖται ἀ ν τ ί σ τ ο ι χ ο ν α ὐ τ ῆ ς τ ό ξ ο ν.



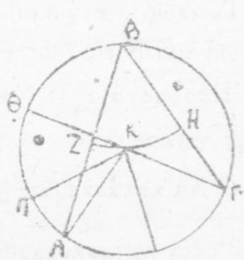
(Σχ. 53)

Ὁμοίως ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον εἶναι καὶ ἡ γωνία ΔΕΖ καὶ τὸ τόξον ΔΖ εἶναι τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς τόξον.

Γενικῶς: Ἐ γ γ ε γ ρ α μ μ έ ν η εἰ ς κ ύ κ λ ο ν γ ω ν ί α καλεῖται πᾶσα γωνία, τῆς ὁποίας ἡ μὲν κορυφὴ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραὶ εἶναι χ ο ρ δ α ὶ ἐ ν τ ῷ α ὐ τ ῷ κ ύ κ λ ῳ.

Τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν ἐγγεγραμμένης εἰς κύκλον γωνίας περιεχόμενον τόξον καλεῖται ἀ ν τ ί σ τ ο ι χ ο ν α ὐ τ ῆ ς τ ό ξ ο ν.

§ 64. **Ἰδιότητες τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς κύκλον γωνιῶν.**—Α΄. Ἔστω τυχοῦσα ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία ΑΒΓ, καὶ ΑΚΓ (σχ. 54) ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ αὐτὸ τόξον. Ἂς καταστήσωμεν τὴν ἐγγεγραμμένη γωνίαν ΑΒΓ ἐπίκεντρον, γράφοντες μὲ μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν αὐτῆς καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΒ περιφέρειαν κύκλου· ἔστω δὲ ΖΗ τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς ΑΒΓ περιεχόμενον τόξον τῆς περιφερείας ταύτης. Μετὰ τοῦτο ἂς κατασκευάσωμεν τὴν διχοτόμον ΚΔ τῆς ἐπικέντρου γωνίας ΑΚΓ. Ἐὰν



(Σχ. 54)

τώρα τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαβήτου συγκρίνωμεν τὰς χορδὰς ΖΗ καὶ

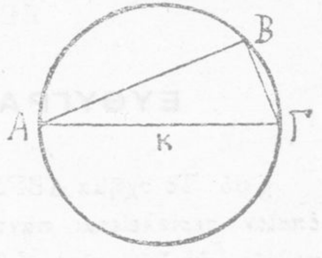
ΑΔ, βλέπομεν ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι· συμπεραίνομεν ὅθεν (§ 46 Ε΄.) ὅτι τὰ τόξα ΑΔ καὶ ΖΗ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν (§ 58 Α΄.) καὶ αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΑΚΔ εἶναι ἐπίσης ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Εἶναι λοιπὸν ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου ΑΚΓ.

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τυχούσης ἐπικέντρου γωνίας ΘΚΛ, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τόξου ἴσου πρὸς τὸ ΑΓ.

Ἄρα: Πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ ἐπικέντρου γωνίας, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἴσου τόξου.

Β΄. Στηριζόμενοι εἰς τὴν προηγουμένην ἰδιότητα συμπεραίνομεν εὐκόλως τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

Πᾶσαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἴσων τόξων, εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.



(Σχ. 55)

Γ΄. Ἔστω ΑΒΓ (Σχ. 55) ἐγγεγραμμένη γωνία, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ ἡμιπεριφερείας. Τῇ βοηθείᾳ τοῦ γνώμονος πειθόμεθα εὐκόλως ὅτι ἡ γωνία αὕτη εἶναι ὀρθή.

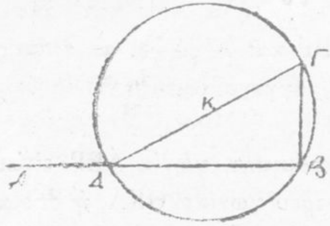
Ἄρα: Πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία βαίνουσα ἐπὶ ἡμιπεριφερείας εἶναι ὀρθὴ γωνία.

Ἐρωτήσεις: Τί καλεῖται ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία; τί ἀντίστοιχον τόξον ἐγγεγραμμένης γωνίας; Τίς σχέσις ὑφίσταται μεταξὺ ἐπικέντρου καὶ ἐγγεγραμμένης γωνίας βαινούσης ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἴσου τόξου;

Τίς σχέσις ὑφίσταται μεταξὺ ἐγγεγραμμένων γωνιῶν, αἵτινες βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἴσων τόξων; Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἐγγεγραμμένης γωνίας, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ ἡμιπεριφερείας;

Ἐφαρμογαί: 1) Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἐγγεγραμμένης γωνίας, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τεταρτημόριον περιφερείας;

2) Ἐὰν ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς γωνίας πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς ἐπικέντρου γωνίας, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου;



(Σχ. 56)

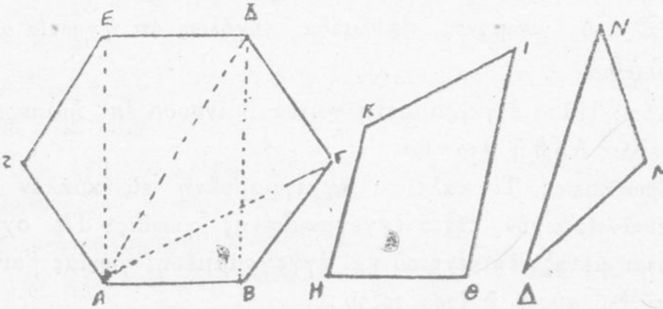
3) Μὲ κέντρον σημεῖόν τι Κ κείμενον ἐκτὸς εὐθείας ΑΒ (Σχ. 56) καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΒ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Δ. Ἄγομεν ἔπειτα τὴν διάμετρον ΔΚΓ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΓΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

§ 65 Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 57) εἶναι μέρος ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περικλείεται πανταχόθεν ὑπὸ εὐθυγράμμων τμημάτων, καλεῖται δὲ διὰ τοῦτο εὐθύγραμμον σχῆμα.

Τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ καὶ ΖΑ, ὑφ' ὧν



(Σχ. 57)

τοῦτο περικλείεται, καλοῦνται πλευραὶ τοῦ εὐθ. τούτου σχήματος.

Αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ κτλ. οἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος τούτου, καλοῦνται γωνίαι τοῦ εὐθ. σχήματος τούτου. Αἱ κορυφαὶ Α,Β,Γ κτλ. τῶν γωνιῶν τούτων καλοῦνται κορυφαὶ τοῦ εὐθ. σχήματος ΑΒΓΔΕΖ.

Ὁμοίως τὰ σχήματα ΗΘΙΚ, ΜΔΝ εἶναι εὐθ. σχήματα. Τὸ α'. τούτων ἔχει πλευρὰς τὰ εὐθ. τμήματα ΗΘ,ΘΙ,ΙΚ,ΚΗ, γωνίας τὰς Η, Θ, Ι, Κ καὶ κορυφὰς τὰς κορυφὰς Η, Θ, Ι, Κ τῶν γωνιῶν τούτων. Τὸ β' ἔχει πλευρὰς τὰ εὐθ. τμήματα ΔΜ,ΜΝ καὶ ΔΝ, γωνίας τὰς Μ,Δ,Ν καὶ κορυφάς, τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν τούτων.

Γενικῶς: Εὐθύγραμμον σχῆμα καλεῖται μέρος ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περικλείεται πανταχόθεν ὑπὸ εὐθ. τμημάτων.

Πλευραὶ εὐθ. σχήματος καλοῦνται τὰ εὐθ. τμήματα ὑπὸ τῶν ὁποίων τοῦτο περικλείεται.

Γωνίαι εὐθ. σχήματος καλοῦνται αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουσιν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ.

Κορυφαὶ εὐθ. σχήματος καλοῦνται αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

Ἕκαστον εὐθ. σχῆμα ἔχει ἴσον ἀριθμὸν πλευρῶν, γωνιῶν καὶ κορυφῶν.

Τὰ εὐθ. σχήματα ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γωνιῶν ἢ πλευρῶν αὐτῶν διαιροῦνται εἰς τρίγωνα ἢ τρίπλευρα, τετράπλευρα, πεντάγωνα, ἑξάγωνα κτλ.

Τὰ πεντάγωνα, ἑξάγωνα, ἑπτάγωνα κτλ. καλοῦνται συνήθως πολύγωνα.

§ 66. Ἕκαστον τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΓ,ΑΔ,ΑΕ συνδέει δύο μὴ διαδοχικὰς κορυφὰς τοῦ εὐθ. σχήματος ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 57) καλεῖται δὲ ἕκαστον τούτων διαγώνιος τοῦ εὐθ σχήματος ΑΒΓΔΕΖ.

Ὁμοίως τὸ εὐθ. τμῆμα ΗΙ εἶναι διαγώνιος τοῦ τετραπλεύρου ΗΘΙΚ (σχ. 57).

Γενικῶς: Διαγώνιος εὐθ. σχήματος καλεῖται πᾶν εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον συνδέει δύο κορυφὰς μὴ διαδοχικάς.

Τὰ τρίγωνα στεροῦνται διαγωνίων.

Περίμετρος εὐθ. σχήματος καλεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Ἐὰν π.χ. αἱ πλευραὶ τριγώνου ἔχωσι μῆκος 369μ ἡ μέν, 81 μ. ἡ ἄλλη καὶ 360 μ. ἡ τρίτη, ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι 369μ + 81μ + 360μ = 810μ.

Ἐρωτήσεις: Τί καλεῖται εὐθ. σχῆμα; Τίνα τὰ στοιχεῖα εὐθ. σχήματος; Τί καλοῦνται πλευραί, γωνίαι, κορυφαὶ εὐθ. σχήματος; Τί καλοῦνται διαγώνιοι εὐθ. σχήματος; Τίνα τὰ εἴδη τῶν εὐθ. σχημάτων ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν ἢ γωνιῶν αὐτῶν; Τί καλεῖται περίμετρος εὐθ. σχήματος;

Ἐφαρμογαί. 1) Γράψατε ἓν τρίγωνον, ἓν τετράπλευρον, ἓν πεντάγωνον, ἓν ἑξάγωνον.

2) Τίνος εἴδους γραμμὴν ἀποτελοῦσι τέσσαρες συνεχεῖς πλευραὶ ἑξαγώνου;

3) Πόσας διαγωνίους ἔχει ἕκαστον τετράπλευρον;

4) Κατασκευάσατε ἓν πεντάγωνον καὶ χαράξατε πάσας τὰς διαγωνίους αὐτοῦ.

ΔΙΑΦΟΡΑ ΕΙΔΗ ΕΥΘ. ΣΧΗΜΑΤΩΝ

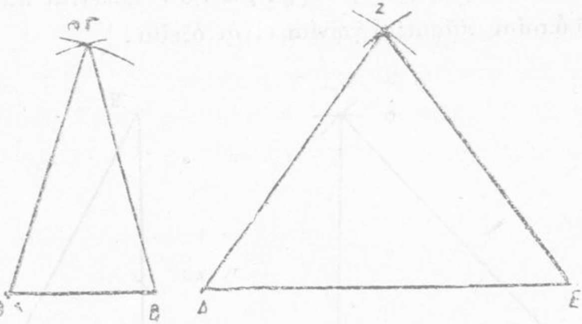
1. Τρίγωνα — Εἴδη αὐτῶν.

§ 67. Α΄. Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα Α καὶ Β εὐθ. τμήματος ΑΒ (Σχ. 58) καὶ μὲ ἀκτῖνα ΑΒ ἂς γράψωμεν δύο περιφερείας· ἔστω δὲ Γ τὸ ἓν κοινὸν αὐτῶν σημεῖον. Ἂς χαράξωμεν εἶτα τὰ εὐθ. τμήματα ΓΑ καὶ ΓΒ· οὕτω σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον καλεῖται **ἰσόπλευρον τρίγωνον**.

(Σχ. 58)

Γενικῶς. **Ἰσόπλευρον τρίγωνον** καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι πᾶσαι ἴσαι.

Β΄ Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα Α καὶ Β εὐθ. τμήματος ΑΒ (Σχ. 59) καὶ ἀκτῖνα μεγαλυτέραν τοῦ ΑΒ ἂς γράψωμεν δύο ἴσας περιφερείας· ἔστω δὲ Γ τὸ ἓν κοινὸν σημεῖον αὐτῶν. Χαράσσοντες εἶτα τὰ εὐθ. τμήματα ΓΑ καὶ ΓΒ σχηματίζομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ δύο πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Τὸ τρίγωνον τοῦτο καλεῖται ἰσοσκελὲς τρίγωνον.



(Σχ. 59)

Ὁμοίως, ἂν μὲ κέντρα τὰ ἄκρα εὐθ. τμήματος ΔΕ καὶ ἀκτῖνα μικροτέραν αὐτοῦ γράφωμεν δύο ἴσας καὶ τεμνομένας περιφερείας, φέρωμεν δὲ εἰς τὸ ἓν τῶν σημείων τομῆς Ζ τὰς ἀκτῖνας ΔΖ καὶ ΖΕ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοσκελὲς (Σχ. 59).

Γενικῶς: Ἰσοσκελὲς τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον, ὅπερ ἔχει δύο μόνον πλευρὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας.

Ἡ ἄνισος πλευρὰ ἰσοσκελοῦς τριγώνου δύναται νὰ εἶναι μικροτέρα (ὡς ἐν τῷ ΑΒΓ) ἢ μεγαλυτέρα (ὡς ἐν τῷ ΔΕΖ) ἑκατέρας τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ.

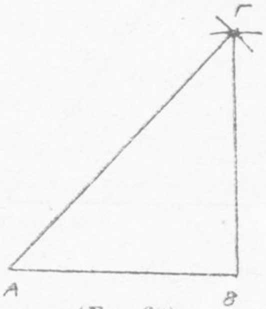
Γ'. Ἂς γράψωμεν τέλος δύο ἀνίσους καὶ τεμνομένας περιφερείας μὲ κέντρα τὰ ἄκρα εὐθ. τμήματος ΑΒ καὶ ἀκτῖνας διαφόρους τοῦ ΑΒ· ἔστω δὲ Γ τὸ ἓν τῶν κοινῶν σημείων αὐτῶν. Χαράσσοντες τὰ εὐθ. τμήματα ΑΓ καὶ ΒΓ σχηματίζομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 60), τοῦ ὁποίου πᾶσαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἄνισοι. Τοῦτο καλεῖται σκαληνὸν τρίγωνον.

Γενικῶς: Σκαληνὸν τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου πᾶσαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἄνισοι.

Τὰ τρίγωνα ἄρα ἐκ τῆς σχέσεως τοῦ μεγέθους τῶν πλευρῶν αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας διακρίνονται εἰς ἰσόπλευρα, ἰσοσκελῆ καὶ σκαληνά.

§ 68 Τοῦ τριγώνου ΔΕΖ (Σχ. 58) πᾶσαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι· ἕνεκα τούτου καλεῖται ὀξυγώνιον τρίγωνον. Ὁμοίως τὰ τρίγωνα ΑΒΓ (Σχ. 58 καὶ 59) εἶναι ὀξυγώνια.

Γενικῶς: Ὀξυγώνιον τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου πᾶσαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι.



(Σχ. 60)

(Σχ. 61)

Β΄. Ἔστω Α ὀρθή τις γωνία (Σχ 61). Ἐὰν τμήσωμεν τὰς πλευρὰς αὐτῆς διὰ τυχούσης εὐθείας ΒΓ μὴ διερχομένης διὰ τῆς κορυφῆς Α, σχηματίζομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Τοῦτο ὡς ἔχον μίαν γωνίαν ὀρθὴν καλεῖται ὀρθογώνιον τρίγωνον.

Γενικῶς: Ὀρθογώνιον τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

Ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου καλεῖται ὑποτείνουσα αὐτοῦ.

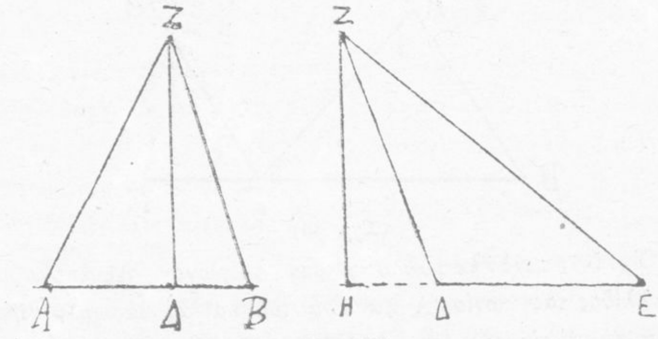
Γ΄. Ἔστω Δ ἀμβλεῖά τις γωνία (Σχ. 62). Ἐργαζόμενοι ὡς προηγουμένως σχηματίζομεν τρίγωνον ΖΔΕ, ἔχον μίαν γωνίαν ἀμβλεῖαν. Τοῦτο καλεῖται διὰ τοῦτο ἀμβλυγώνιον τρίγωνον.

Γενικῶς: Ἀμβλυγώνιον τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν γωνίαν ἀμβλεῖαν.

Τὰ τρίγωνα ὅθεν ἐκ τοῦ εἴδους τῶν γωνιῶν αὐτῶν καὶ ἀσχέτως πρὸς τὸ μέγεθος τῶν πλευρῶν διακρίνονται εἰς ὀξυγώνια, ὀρθογώνια καὶ ἀμβλυγώνια

Ἐρωτήσεις: Τί καλοῦνται τρίγωνα Τίνα τὰ στοιχεῖα ἑκάστου τριγώνου; Τί καλοῦνται πλευραί, τί γωνίαι, τί κορυφαὶ τριγώνου; Πόσα καὶ τίνα τὰ εἴδη τῶν τριγώνων ἐκ τοῦ σχετικοῦ μεγέθους τῶν πλευρῶν; Τίνα τρίγωνα καλοῦντα ἰσόπλευρα; τίνα ἰσοσκελῆ καὶ τίνα σκαληνά; Πόσα καὶ τίνα τὰ εἴδη τῶν τριγώνων ἐκ τοῦ εἴδους τῶν γωνιῶν αὐτῶν; Τίνα τρίγωνα καλοῦνται ὀξυγώνια, τίνα ὀρθογώνια καὶ τίνα ἀμβλυγώνια;

Ἐφαρμογαί: 1) Κατασκευάσατε τρίγωνων ἰσόπλευρον, τοῦ ὁποίου ἑκάστης πλευρὰ νὰ ἔχῃ μῆκος 0,05 μ. ἕτερον ἰσοσκελές, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ νὰ ἔχῃ μῆκος 0,02 μ. ἑκατέρα δὲ τῶν ἄλλων ἀνὰ 0,06 μ.



(Σχ. 62)

2) Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας νὰ ἔχωσι μήκη 0,02 μ. ἡ μὲν καὶ 0,04 μ. ἡ ἄλλη.

3) Ἐὰν ἡ περίμετρος ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 182,25 μ. πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς αὐτοῦ;

4) Ἡ περίμετρος ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 197,60 μ. ἡ δὲ βάσις 50 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκατέρας τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ;

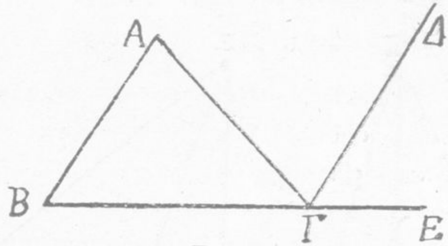
§ 69. **Βάσις καὶ ὕψος τριγώνου.**—Βάσις τριγώνου καλεῖται μίαν οἱαδήποτε πλευρὰ αὐτοῦ. Ἂς ληφθῇ ἡ AB ὡς βάσις τοῦ τριγώνου ABZ (Σχ. 62). Ἡ κορυφὴ Z, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς βάσεως ταύτης, ἀπέχει τῆς βάσεως ἀπόστασιν ZΔ (§ 21). Ἡ ἀπόστασις αὕτη καλεῖται ὕψος τοῦ τριγώνου ABΓ. Ὁμοίως, ἂν ληφθῇ ὡς βάσις τοῦ τριγώνου ΔEZ (Σχ. 62) ἡ πλευρὰ ΔE, ὕψος αὐτοῦ θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις ZH τῆς κορυφῆς Z ἀπὸ τῆς βάσεως.

Γενικῶς: Ὕψος τριγώνου καλεῖται ἡ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀπόστασις τῆς ἀπέναντι κορυφῆς αὐτοῦ.

Ἐκ τοῦ σχήματος ΔΕΖ (Σχ. 62) βλέπομεν ὅτι ἐνίοτε τὸ ὕψος τριγώνου εὑρίσκεται ἐκτὸς αὐτοῦ.

Εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ὡς βάσις καὶ ὕψος λαμβάνονται συνήθως αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ, εἰς δὲ τὰ ἰσοσκελῆ ὡς βάσις λαμβάνεται ἡ ἄνισος πλευρὰ αὐτοῦ.

§ 70. **Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν τριγώνων.**—Α΄. Ἔστω



(Σχ. 63)

ΑΒΓ (Σχ. 53) τυχὸν ἐκ φύλλου χάρτου τρίγωνον. Ἂς ἀποκόψωμεν διὰ ψαλλίδος τὰς γωνίας Α καὶ Β αὐτοῦ καὶ ἂς θέσωμεν τὴν μὲν Α παρὰ τὴν Γ εἰς τὴν θέσιν ΑΓΔ τὴν δὲ Β παρὰ τὴν ΑΓΔ εἰς θέσιν ΔΓΕ. Βλέπομεν οὕτω ὅτι αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ ΓΕ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ κατ' ἀκολουθίαν (§ 28 Α΄) $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=2$ ὀρθ.

Ἄρα: Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας.

Β΄. Ἐκ τῆς προηγουμένης ἰδιότητος συνάγεται εὐκόλως ἡ ἀλήθεια τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν, τὰ τρίγωνα ταῦτα θὰ ἔχωσι καὶ τὰς ἄλλας αὐτῶν γωνίας ἴσας.

Γ΄. Παρατηροῦντες ὅτι ἑκάστη πλευρὰ τριγώνου εἶναι εὐθ. τμῆμα, αἱ δὲ λοιπαὶ πλευραὶ αὐτοῦ ἀποτελοῦσι τεθλασμένην γραμμὴν τὰ αὐτὰ μετ' ἐκείνου ἔχουσαν ἄκρα, συμπεραίνομεν τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀκολούθου προτάσεως (§ 12).

Ἑκάστη πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

Ἐφαρμογαί: 1) Τιγώνου τινὸς δύο γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα $1\frac{4}{5}$ ὀρθ. Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς τρίτης γωνίας αὐτοῦ;

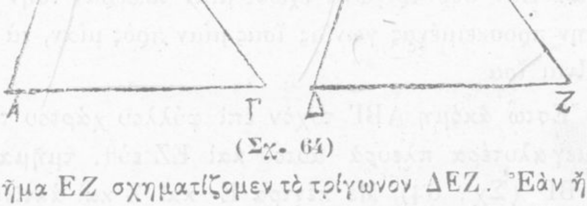
2) Τριγώνου τινὸς δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἑκατέρα εἶναι $\frac{4}{7}$ ὀρθ. Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς τρίτης γωνίας αὐτοῦ.

3) Πόσον εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, (πλὴν τῆς ὀρθῆς), γωνιῶν ὀρθογωνίου τριγώνου; Ποῖον τὸ εἶδος ἑκατέρας τῶν γωνιῶν τούτων;

4) Ὀρθογωνίου τριγώνου μία τῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι $\frac{4}{5}$ ὀρθ. Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκατέρας τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ;

5) Ὀρθογωνίου τριγώνου μία ὀξεῖα γωνία εἶναι ἴση πρὸς μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἄλλου ὀρθογωνίου τριγώνου. Τίς σχέσις ὑφίσταται μεταξὺ τῶν ἄλλων ὀξειῶν γωνιῶν τῶν αὐτῶν ὀρθογωνίων τριγώνων;

§ 71 **Ἰσότης τριγώνων.** — Ἔστω ΑΒΓ τυχὸν ἐκ φύλλου χάρτου τρίγωνον (σχ. 64). Ἄς κατασκευάσωμεν (§ 60) γωνίαν Δ ἴσην τῇ γωνίᾳ Α τοῦ τριγώνου τούτου καὶ ἄς λάβωμεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς τμήματα ΔΕ, ΔΖ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἄγοντες τέλος τὸ



(Σχ. 64)

εὐθ. τμῆμα ΕΖ σχηματίζομεν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ. Ἐὰν ἤδη ἀποχωρίζοντες διὰ ψαλλίδος τοῦ λοιποῦ χάρτου τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐπιθέσωμεν αὐτὸ ἐπὶ τοῦ ΔΕΖ, οὕτως ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσιν αἱ ἴσαι γωνίαι Α καὶ Δ καὶ αἱ ἴσαι πλευραὶ αὐτῶν, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα ἐφαρμόζουσι καὶ ἕν μόνον τρίγωνον ἀποτελοῦσι. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα καλοῦνται ἴσα τρίγωνα.

Γενικῶς: Δύο τρίγωνα λέγονται ἴσα, ὅταν καταλλήλως ἐπιτιθέμενα ἐφαρμόζωσιν καὶ ἓν τρίγωνον ἀποτελῶσι.

§ 72. **Γενικαὶ περιπτώσεις ἰσότητος τριγώνων.** — Εἴς τινας περιπτώσεις ἀναγνωρίζομεν ἂν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, χωρὶς νὰ θέσωμεν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Αἱ γενικώτεραι τῶν περιπτώσεων τούτων εἶναι αἱ ἀκόλουθοι.

Α΄. Ἐκ τοῦ τρόπου, καθ᾽ ὃν ἐσχηματίσαμεν προηγουμένως (§ 71) τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ, προκύπτει ἡ ἀλήθεια τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.

Β΄. Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 64) τυχὸν ἐπὶ φύλλου χάρτου τρίγωνον καὶ ΕΖ εὐθ. τμῆμα ἴσον μιᾷ πλευρᾷ αὐτοῦ π. χ. τῇ ΒΓ. Ἂς κατασκευάσωμεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ΕΖ δύο γωνίας μὲ πλευρὰν ΕΖ κορυφὰς δὲ τὰ ἄκρα Ε καὶ Ζ καὶ ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς γωνίας Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (§ 60). Αἱ λοιπαὶ (πλὴν τῆς ΕΖ) πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων τέμνονται εἴς τι σημεῖον Δ· οὕτω δὲ σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΔΕΖ. Ἂν ἤδη τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ΔΕΖ οὕτως ὥστε ἡ πλευρὰ ΒΓ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης ΕΖ (τοῦ ἄκρου Β συμπίπτοντος μετὰ τοῦ Ε), παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα ἐφαρμόζουσι.

Ἄρα: Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς εἰς ταύτην προσκειμένας γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Γ΄. Ἔστω ἀκόμη ΑΒΓ τυχὸν ἐπὶ φύλλου χάρτου τρίγωνον, ΒΓ ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ αὐτοῦ καὶ ΕΖ εὐθ. τμῆμα ἴσον τῇ πλευρᾷ ΒΓ (Σχ. 64). Μὲ κέντρα Ε καὶ Ζ καὶ ἀκτῖνας ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἂς γράψωμεν περιφερείας κύκλου. Βλέπομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι τέμνονται καὶ ἔστω Δ τὸ ἓν σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν. Ἂν δὲ φέρωμεν τὰ εὐθ. τμήματα ΔΕ καὶ ΔΖ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΔΕΖ. Ἂν ἤδη τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τεθῇ καταλλήλως ἐπὶ τοῦ ΔΕΖ, βλέπομεν ὅτι ἐφαρμόζει ἐπ' αὐτοῦ καὶ ἓν μόνον τρίγωνον σχηματίζει μετ' αὐτοῦ.

Ἄρα: Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι πάσας τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ἴσα.

Σημ. Δύο ἴσα τρίγωνα ἔχουσιν ἴσα ἓν πρὸς ἓν πάντα τὰ ὁμοειδῆ αὐτῶν στοιχεῖα. Εἶναι δὲ ἴσαι γωνίαι αἱ κείμεναι ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν, ἴσαι δὲ πλευραὶ αἱ κείμεναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν.

Ἐφαρμογαί. 1) Ἐὰν αἱ κάθετοι πλευραὶ δύο ὀρθογωνίων τριγώνων εἶναι ἴσαι μία πρὸς μίαν, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. Διατί;

2) Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσι τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. Διατί;

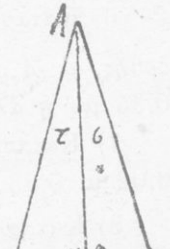
3) Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσι μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσην καὶ μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, διατί;

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΟΣΚΕΛΩΝ ΚΑΙ ΙΣΟΠΛΕΥΡΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

§ 73 Ἔστω ΑΒΓ (Σχ. 65) ἰσοσκελές τι τρίγωνον, ΒΓ ἡ βάσις αὐτοῦ καὶ Δ τὸ μέσον αὐτῆς. Ἂν ἀχθῇ τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΔ, διαιρεῖται τὸ ΑΒΓ εἰς δύο τρίγωνα ἴσα (§ 72 Γ'.) καὶ ἑπομένως εἶναι ἀληθεῖς αἱ ἑξῆς ἰσότητες Β=Γ, τ=σ καὶ ω=φ, Ἄρα:

Α'. Αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.

Β'. Τὸ εὐθ. τμῆμα, ὅπερ ὁρίζεται ὑπὸ τῆς κορυφῆς καὶ τοῦ μέσου τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου, διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς.



(Σχ. 65)

Γ'. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ω καὶ φ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, εἶναι δὲ καὶ παραπληρωματικαὶ (§ 20 Α'). ἕπεται ὅτι ἑκατέρα εἶναι ὀρθή.

Ἄρα: Τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τῆς κορυφῆς καὶ τοῦ μέσου τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου, εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν.

§ 74. Ἔχοντες πρὸ ὀφθαλμῶν τὰ προηγουμένας ἰδιότητας τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων καὶ παρατηροῦντες ὅτι πᾶν ἰσόπλευρον τρίγωνων θεωρεῖται ὡς ἰσοσκελὲς ἔχον βάσιν οἱανδήποτε πλευρὰν αὐτοῦ, συνάγομεν εὐκόλως τὴν ἀλήθειαν τῶν ἀκολούθων ἰδιοτήτων τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων.

Α΄. Πᾶν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.

Β΄. Τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ ἑκάστης κορυφῆς καὶ τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ἰσοπλεύρου τριγώνου, διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς ταύτης.

Γ΄. Τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ ἑκάστης κορυφῆς καὶ τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ἰσοπλεύρου τριγώνου, εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ταύτην.

Ἐφαρμογαί. 1) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνία εἶναι $\frac{2}{7}$ ὀρθῆς γωνίας. Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκατέρας τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ;

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγεθος ἑκατέρας τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

3) Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης τῶν γωνιῶν ἰσοπλεύρου τριγώνου;

4) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς.

5) Ποῖον τὸ εἶδος ἑκατέρας τῶν παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνιῶν;

6) Κατασκευάσατε τρίγωνον, οὗ μία γωνία νὰ εἶναι $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς νὰ ἔχωσι μήκη 0,02 μ. ἡ μὲν καὶ 0,35 μ. ἡ ἄλλη.

7) Κατασκευάσατε τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ πλευρὰς 0,02 μ. 0,03 μ. καὶ 0,04 μ.

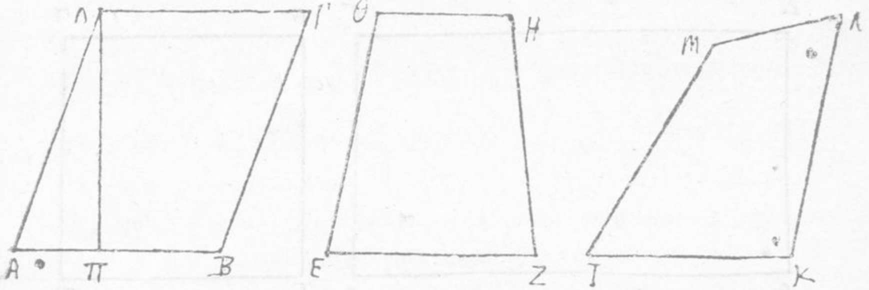
8) Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ νὰ ἔχωσι μῆκος 0,03 μ. ἡ μὲν καὶ 0,04 μ. ἡ ἄλλη. Νὰ εὕρητε εἶτα διὰ τοῦ ὑποδεκαμέτρου τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ.

2. ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

§ 75. **Εἴδη τετραπλεύρων.**—Α'. Τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (Σχ. 66) αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι· διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ τετράπλευρον τοῦτο καλεῖται παραλληλόγραμμον.

Γενικῶς: Παραλληλόγραμμον καλεῖται πᾶν τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι.

Βάσις παραλληλογράμμου καλεῖται μία οἱαδήποτε πλευρὰ αὐτοῦ.



(Σχ. 66)

Ὕψος δὲ παραλληλογράμμου καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῆς βάσεως ἀπὸ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς αὐτοῦ (§ 41). Οὕτως, ἂν ἡ ΑΒ ληφθῇ ὡς βάσις τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (Σχ. 66), ὕψος αὐτοῦ θὰ εἶναι τὸ τμῆμα ΔΠ.

Β'. Τοῦ τετραπλεύρου ΕΖΗΘ (Σχ. 66) δύο μόνον πλευραὶ εἶναι παράλληλοι· τοῦτο καλεῖται τραπέζιον.

Γενικῶς: Τραπέζιον καλεῖται πᾶν τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου δύο μόνον πλευραὶ εἶναι παράλληλοι.

Αἱ παράλληλοι πλευραὶ ἑκάστου τραπεζίου καλοῦνται βάσεις αὐτοῦ.

Ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων τραπεζίου καλεῖται ὕψος αὐτοῦ.

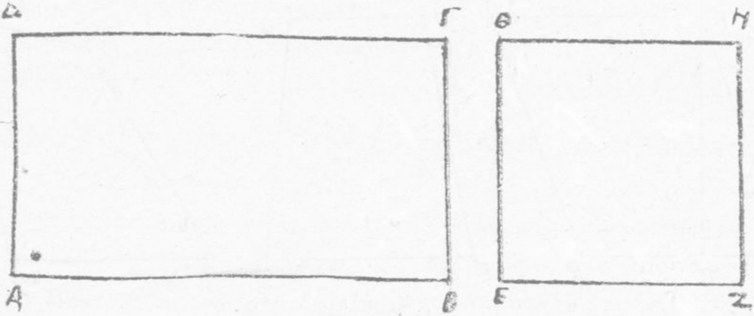
Γ'. Τὸ τετράπλευρον ΙΚΛΜ (Σχ. 66) δὲν ἔχει πλευρὰς παραλλήλους· τοῦτο καλεῖται τραπεζοειδές.

Γενικῶς: Τραπεζοειδὲς καλεῖται πᾶν τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει πλευρὰς παραλλήλους.

Τὰ τετράπλευρα ὅθεν διαιροῦνται εἰς παραλληλόγραμμα τραπέζια καὶ τραπεζοειδῆ.

Ἐκ τούτων τὰ παραλληλόγραμμα θέλομεν ἐξετάσει λεπτομερέστερον ἐν τοῖς ἀκολούθοις.

Ἐρωτήσεις: Τί καλεῖται τετράπλευρον; πόσα καὶ τίνα τὰ εἴδη τῶν τετραπλεύρων; Τί καλεῖται παραλληλόγραμμον; τί τραπέζιον, τί τραπεζοειδές; Πόσα ζεύγη παραλλήλων πλευρῶν ἔχει ἕκαστον παραλληλόγραμμον: πόσα ἕκαστον τραπέζιον; Τί καλεῖται βάσις καὶ τί ὕψος παραλληλογράμμου; Τί καλοῦνται βάσεις καὶ τί ὕψος τραπεζίου;



(Σχ. 67 α'.)

(Σχ. 67 β'.)

Ἐφαρμογαί: 1) Κατασκευάσατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας ἀνὰ ἓν παραλληλόγραμον, τραπέζιον καὶ τραπεζοειδές. Χαράξατε τὰ ὕψη τοῦ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ τραπεζίου.

2) Κατασκευάσατε τυχοῦσαν γωνίαν Α καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς λάβετε δύο τμήματα, τὰ ὁποῖα νὰ ἀρχίζωσιν ἀπὸ τῆς κο-

ρυφῆς καὶ νὰ ἔχωσι μήκη 0,05 μ. τὸ ἓν καὶ 0,03 τὸ ἄλλο. Εἶτα κατασκευάσατε παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου μία γωνία νὰ εἶναι ἡ Α καὶ δύο πλευραὶ τὰ ὁρισθέντα τμήματα τῶν πλευρῶν αὐτῆς.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

§ 76. **Εἴδη παραλληλογράμμων.** — Ἑκατέρου τῶν παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ (Σχ. 67α'.) αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαί, τούτου ἕνεκα καλοῦνται ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ἢ ἁπλῶς ὀρθογώνια.

Γενικῶς: Ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἢ ἁπλῶς ὀρθογώνιον καλεῖται πᾶν παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαί.

Βάσις καὶ ὕψος ὀρθογωνίου εἶναι δύο προσκείμεναι πλευραὶ αὐτοῦ.

Τοῦ ὀρθογωνίου ΕΖΗΘ αἱ πλευραὶ εἶναι πᾶσαι ἴσαι· τοῦτο καλεῖται τετράγωνον.

Γενικῶς: Τετράγωνον καλεῖται πᾶν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου πᾶσαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Β'. Τοῦ παραλληλογράμμου ΜΙΚΛ (Σχ. 67β') αἱ πλευραὶ εἶναι πᾶσαι ἴσαι, αἱ δὲ γωνίαι διάφοροι τῆς ὀρθῆς· τοῦτο καλεῖται ῥόμβος.

Γενικῶς: Ῥόμβος καλεῖται πᾶν παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου πᾶσαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, αἱ δὲ γωνίαι μὴ ὀρθαί.

Γ'. Τοῦ παραλληλογράμμου ΝΠΡΣ (Σχ. 67β') αἱ προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι ἄνισοι, αἱ δὲ γωνίαι μὴ ὀρθαί: τοῦ καλεῖται ῥομβοειδές. Καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (Σχ. 66) εἶναι ῥομβοειδές.

Γενικῶς: Ῥομβοειδὲς καλεῖται πᾶν παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι ἄνισοι, αἱ δὲ γωνίαι μὴ ὀρθαί.

Τὰ παραλληλόγραμμα ὅθεν διαιροῦνται εἰς ὀρθογώνια (ἐν οἷς καὶ τὰ τετράγωνα), ῥόμβους καὶ ῥομβοειδῆ.

Ἐρωτήσεις: Τί καλεῖται παραλληλόγραμμον; τίνα τὰ εἴδη τῶν παραλληλογράμμων; τί καλεῖται ὀρθογώνιον; τί τετράγωνον; τί ῥόμβος; τί ῥομβοειδές; Τίνα παραλληλόγραμμα ἔχουσι πάσας τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας; τίνα παραλληλόγραμμα ἔχουσι πάσας τὰς γωνίας ἴσας; Ποία ὁμοιότης ὑφίσταται μεταξὺ α΄.) τετραγώνου καὶ ὀρθογωνίου; β΄.) τετραγώνου καὶ ῥόμβου; γ΄.) ῥόμβου καὶ ῥομβοειδοῦς; δ΄.) ὀρθογωνίου καὶ ῥομβοειδοῦς; Ποία διαφορὰ ὑφίσταται μεταξὺ α΄.) τετραγώνου καὶ ὀρθογωνίου; β΄.) τετραγώνου καὶ ῥομβοειδοῦς; γ΄.) τετραγώνου καὶ ῥόμβου; δ΄.) ὀρθογωνίου καὶ ῥομβοειδοῦς; ε΄) ῥόμβου καὶ ῥομβοειδοῦς;

Ἐφαρμογαί: 1) Κατασκευάσατε τετράγωνον καὶ χαράξατε τὰς διαγωνίους αὐτοῦ.

2) Ἀποδείξατε ὅτι ἑκατέρα διαγώνιος τετραγώνου διχοτομεῖ δύο γωνίας αὐτοῦ (§ 70 Α΄.—73 Α΄.).

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ῥόμβου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 184, 60 μ.

4) Ἡ πλευρὰ τετραγώνου ἔχει μῆκος 56, 35 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ;.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

§ 77. Ἐπὶ τοῦ τυχόντος ἐκ χάρτου παραλληλογράμμου ἂς χαράξωμεν μίαν τῶν διαγωνίων αὐτοῦ καὶ ἂς κόψωμεν εἶτα τὸ παραλληλόγραμμον κατὰ μῆκος τῆς διαγωνίου ταύτης. Ἐὰν τὰ οὕτω παραγόμενα δύο τρίγωνα θέσωμεν ἐπ' ἄλληλα, ὥστε νὰ συμπέσωσιν αἱ ἀπέναντι τῆς χαραχθείσης διαγωνίου κορυφαὶ καὶ δύο ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμου παρατηροῦμεν ὅτι τελείως ἐφαρμόζουσι. Τοῦτο δὲ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν ἑτέραν διαγώνιον. Ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν τὴν ἀλήθειαν τῶν ἀκολούθων ἰδιοτήτων.

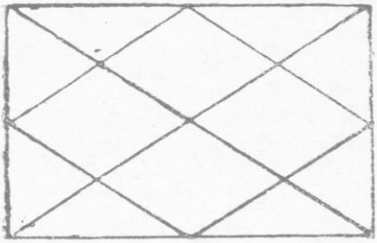
Α΄. Ἑκατέρα διαγώνιος παραλληλογράμμου διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο τρίγωνα ἴσα.

Β΄. Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

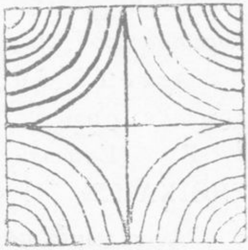
Γ΄. Παντὸς παραλληλογράγμου αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἐφαρμογαί: 1) Ἡ περίμετρος παραλληλογράμμου εἶναι 191, 40 μ. μία δὲ πλευρὰ αὐτοῦ 23, 40 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ;

2) Παραλληλογράμμου μία γωνία εἶναι $\frac{2}{5}$ ὀρθ. Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς ἀντικειμένης γωνίας αὐτοῦ;



(Σχ. 68)

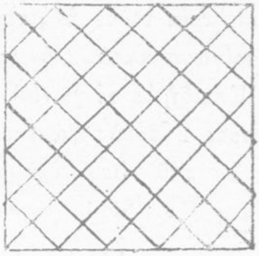


(Σχ. 69)

3) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶν ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου δύο προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι ἴσαι εἶναι τετράγωνον.

4) Ἰχνογραφήσατε τὸ σχῆμα 68, 69 καὶ 70.

5) Κατασκευάσατε τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 0,03 μ.

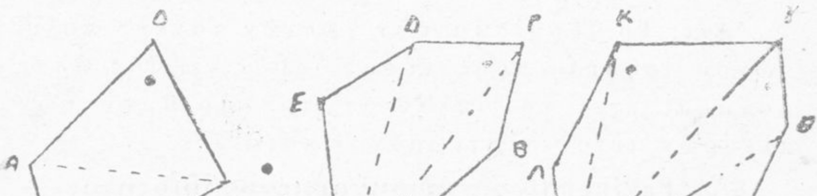


(Σχ. 70)

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΠΑΝΤΟΣ ΕΥΘ. ΣΧΗΜΑΤΟΣ

§ 78. Α΄. Γνωρίζομεν (§ 70 Α΄.) ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας.

Β΄. Ἔστω ἤδη τυχὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 71) καὶ ΑΓ



(Σχ. 71)

τυχοῦσα διαγώνιος αὐτοῦ. Ἡ διαγώνιος αὕτη διαιρεῖ τὸ τετράπλευρον εἰς δύο τρίγωνα, τῶν ὁποίων αἱ γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου. Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι ἑκάστου τριγώνου ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 2 ὀρθὰς γωνίας, ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 2 ὀρθ. $\times 2 = 4$ ὀρθ.

Ἄρα. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τετραπλεύρου ἰσοῦται πρὸς 4 ὀρθὰς γωνίας.

Γ'. Ἔστωσαν τέλος τυχόντα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ ΖΗΘΙΚΛ (Σχ. 71).

Ἂν φέρωμεν πάσας τὰς διαγωνίους ἑκατέρου, αἱ ὁποῖαι διέρχονται δι' ὡρισμένης κορυφῆς αὐτοῦ, διαιρεῖται τὸ μὲν πρῶτον εἰς τρία τὸ δὲ δεύτερον εἰς τέσσαρα τρίγωνα, ἤτοι ἕκαστον εἰς τρίγωνα κατὰ 2 ὀλιγώτερα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι παντὸς τριγώνου ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 2 ὀρθὰς γωνίας, συμπεραίνομεν ὅτι αἱ γωνίαι

τοῦ 5ου ἔχουσιν ἄθροισμα $2\times 3=6$ ὀρθὰς γωνίας
» 6ου » » $2\times 4=8$ » »
» 7ου » » $2\times 5=10$ » » κ. τ. λ.

Ἀλλ' εἰς τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα φθάνομεν καὶ ἂν διπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν ἑκάστου πολυγώνου καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου ἀφαιρέσωμεν 4. Τῷ ὄντι

διὰ τὸ πεντάγωνον εὑρίσκομεν $(5\times 2)-4=6$
» » ἑξάγωνον » $(6\times 2)-4=8$
» » ἑπτάγωνον » $(7\times 2)-4=10$ κτλ.

Ἄρα: Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς πολυγώνου ἰσοῦται πρὸς τόσας ὀρθὰς γωνίας, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἠλαττωμένον κατὰ 4.

§ 79. **Γενίκευσις τῆς προηγουμένης ἰδιότητος.**— Ἐπειδὴ $(3\times 2)-4=2$ καὶ $(4\times 2)-4=4$, ἕπεται ὅτι ἡ προηγουμένη ἰδιότης ἀληθεύει καὶ διὰ τὰ τρίγωνα καὶ τὰ τετράπλευρα, ἤτοι δι' ὅλα τὰ εὐθύγραμμα σχήματα. Τούτου ἕνεκα δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν αὐτὴν γενικῶς οὕτω:

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς εὐθ. σχήματος εἶναι τόσαι ὀρθαὶ γωνίαι, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἠλαττωμένον κατὰ 4.

Ἐφαρμογαί: 1) Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς δεκαγώνου;

2) Ἐὰν μία γωνία παραλληλογράμμου εἶναι $\frac{5}{8}$ ὀρθῆς, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ;

3) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν μία γωνία παλαλληλογράμου εἶναι ὀρθή, τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

4) Ἐὰν μία γωνία ῥόμβου εἶναι $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ;

5) Ἐκ τῶν δύο γωνιῶν παραλληλογράμμου τῶν προσκειμένων τῇ αὐτῇ πλευρᾷ ἡ μία εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης. Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης τῶν γωνιῶν αὐτοῦ;

6) Τραπεζίου τινὸς ἡ μία τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις αὐτοῦ. Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ ὀρθῶν γωνιῶν αὐτοῦ;

7) Ἐὰν πᾶσαι αἱ γωνίαι ἑξαγώνου εἶναι ἴσαι, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης;

§ 80. **Κανονικὰ εὐθ. σχήματα.** — Ἑκάστου τετραγώνου αἱ πλευραὶ εἶναι πᾶσαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ αἱ γωνίαι ὡσαύτως πᾶσαι ἴσαι. Ἕνεκα τούτου τὸ τετράγωνον καλεῖται κανονικὸν εὐθ. σχῆμα.

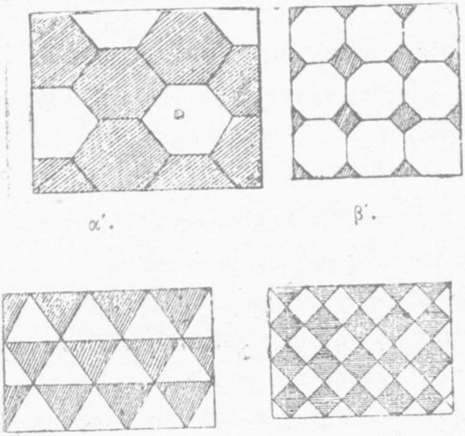
Ὁμοίως τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι κανονικὸν εὐθ. σχῆμα (§ 74 Α΄.).

Γενικῶς: Εὐθύγραμμόν τι σχῆμα λέγεται κανονικόν, ἐὰν πᾶσαι αἱ πλευραὶ καὶ πᾶσαι αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Αἱ πλάκες, ὧν γίνεται χρῆσις διὰ τὴν ἐπίστρωσιν διαδρόμων, αἰθουσῶν, αὐλῶν, μαγειρείων κτλ. εἶναι κανονικὰ εὐθ. σχήματα.

Εἰς τὰ σχήματα ταῦτα πρέπει αἱ γωνίαι, τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ συμπίπτουσιν ἐπί τινος σημείου τοῦ ἐδάφους, νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 4 ὀρθάς, ἵνα μὴ μεταξὺ αὐτῶν μένῃ χάσμα τι (§ 28 Β΄.)

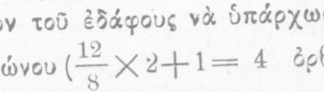
Διὰ τὸν λόγον τοῦτο πρὸς ἐπίστρωσιν γίνεται χρῆσις καταλλήλων κανονικῶν σχημάτων. Τετραγωνικαὶ π. χ. πλάκες εἶναι κατάλληλοι πρὸς τοῦτο· τῷ ὄντι 4 γωνίαι αὐτῶν τιθέμεναι περί



α'. β'.

γ'. (Σχ. 72) δ'.

τι σημεῖον τοῦ ἐδάφους δὲν ἀφίνουσιν ἀκάλυπτον ἔδαφος, διότι ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 4 ὀρθὰς γωνίας (Σχ 72δ'). Τὰ κανονικὰ ἑξάγωνα χρησιμοποιοῦνται ἐπίσης διὰ τὸν σκοπὸν τοῦτον, διότι τρεῖς γωνίαι αὐτῶν ἔχουσιν ἄθροισμα $\frac{8}{6} \times 3 = 4$ ὀρθ. (Σχ. 72α'). Ἐπίσης τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα εἶναι κατάλληλα, διότι $\frac{2}{3} \times 6 = 4$ ὀρθ. (Σ. 72γ'). Συνηθέστατα δὲ γίνεται χρῆσις κανονικῶν ὀκταγώνων καὶ τετραγώνων (Σχ. 72β'.) τοποθετουμένων οὕτως ὥστε περὶ ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἐδάφους νὰ ὑπάρχωσι 2 γωνίαι ὀκταγώνου καὶ μία τετραγώνου ($\frac{12}{8} \times 2 + 1 = 4$ ὀρθ.).



(Σχ. 73)

Ὁμοίως γίνεται χρῆσις κανονικῶν ἑξαγώνων καὶ ἰσοπλεύρων τριγώνων (Σχ. 73) τοποθετουμένων οὕτως ὥστε περὶ ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἐδάφους νὰ εὑρίσκωνται δύο γωνίαι ἑξαγώνου καὶ δύο τριγώνου ($\frac{8}{6} \times 2 + \frac{2}{3} \times 2 = 4$ ὀρθ.).

Ἐφαρμογαί. 1) Τίνα τῶν τετραπλεύρων εἶναι σχήματα κανονικά; Τίνα τῶν τριγώνων;

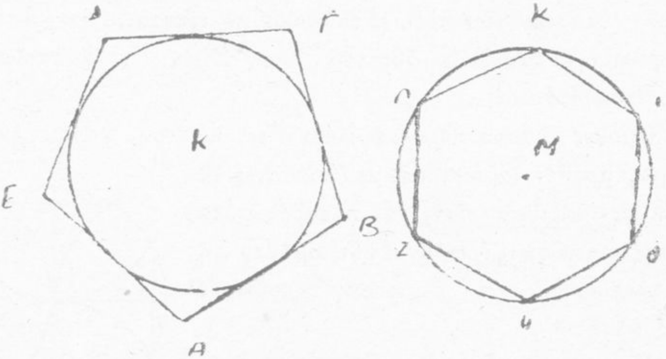
2) Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης γωνίας κανονικοῦ δεκαγώνου;

3) Πλάκες ἔχουσαι σχῆμα κανονικοῦ δεκαγώνου εἶναι κατάλληλοι πρὸς ἐπίστρωσιν ἢ οὔ; καὶ διατί;

4) Κανονικοῦ πολυγώνου αἱ γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα 32 ὀρθ. Πόσας πλευρὰς ἔχει τοῦτο, Δυνάμεθα διὰ τοιούτων πολυγώνων νὰ ἐπιστρώσωμεν αἴθουσαν;

5) Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι κανονικὰ ἢ οὔ καὶ διατί;

§ 81 **Περιγεγραμμένα καὶ ἐγγεγραμμένα εἰς κύκλον κανονικὰ εὐθύγραμμα σχήματα.** — Τοῦ εὐθ. σχήματος ΑΒΓΔ (Σχ. 74) πᾶσαι αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται τοῦ



Σχ. 74)

κύκλου Κ. Τὸ εὐθύγραμμον τοῦτο σχῆμα καλεῖται περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον Κ, ὁ δὲ κύκλος οὗτος καλεῖται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ εὐθ. σχῆμα ΑΒΓΔΕ.

Γενικῶς: Εὐθύγραμμόν τι σχῆμα καλεῖται περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, ἐὰν πᾶσαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ἐφάπτωνται τοῦ κύκλου. Κύκλος δέ τις λέγεται ἐγγεγραμμένος εἰς εὐθ. σχῆμα, ἂν τοῦτο εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον.

Τοῦ εὐθ. σχήματος ΖΗΘΙΚΛ (Σχ. 74) αἱ πλευραὶ εἶναι πᾶσαι χορδαὶ ἔν τινι κύκλῳ Μ· τὸ σχῆμα τοῦτο καλεῖται ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Μ, ὁ δὲ κύκλος οὗτος καλεῖται περιγεγραμμένος περὶ τὸ εὐθ σχῆμα ΖΗΘΙΚΛ.

Γενικῶς : Εὐθύγραμμόν τι σχῆμα λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, ἂν πᾶσαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι χορδαὶ ἐν τῷ κύκλῳ τούτῳ.

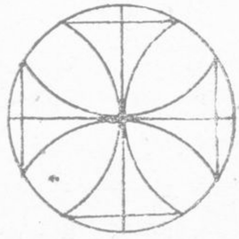
Κύκλος δέ τις λέγεται περιγεγραμμένος περὶ εὐθ. σχῆμα, ἂν τοῦτο εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον τοῦτον.

§ 82. Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἐγγράψωμεν εἰς δοθέντα κύκλον ὡρισμένον κανονικὸν εὐθ. σχῆμα, ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως.

Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εἰς τόσα ἴσα τόξα, ὅσας πλευρὰς θέλομεν νὰ ἔχῃ τὸ κανονικὸν ἐγγεγραμμένον σχῆμα, καὶ ἄγομεν τὰς χορδὰς αὐτῶν.

Τὸ οὕτω σχηματιζόμενον ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι πράγματι κανονικόν, διότι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι πᾶσαι ἴσαι (46 Ε΄.) καὶ αἱ γωνίαι ἐπίσης ἴσαι, ὡς ἐγγεγραμμέναι βαίνουσαι ἐπὶ ἴσων τόξων, (ἕκαστον τῶν τόξων τούτων ὑπολείπεται, ἂν ἀπὸ τῆς περιφερείας ἀφαιρεθῶσι δύο τῶν ἴσων τόξων, εἰς τὰ ὁποῖα διηρέθη ἡ περιφέρεια).

Ὁμοίως διὰ νὰ περιγράψωμεν περὶ κύκλον κανονικὸν εὐθ. σχῆμα, πρέπει νά διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς ἰσάριθμα πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσα τόξα καὶ νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας διὰ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως αὐτῆς.



(Σχ. 75)

Ἐφαρμογαί: 1) Ἐγγράψατε εἰς δεδομένον κύκλον τέτράγωνον (§ 59).

2) Περιγράψατε περὶ δεδομένον κύκλον τετράγωνον.

3) Ἰχνογραφήσατε τὸ Σχ. 75.

4) Ἐγγράψατε εἰς δοθέντα κύκλον κανονικὸν ὀκτάγωνον (58—56).

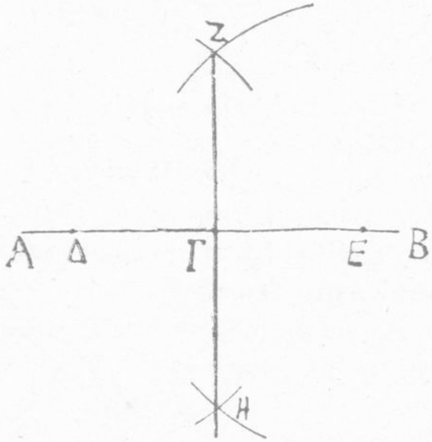
5) Περιγράψατε περὶ δοθέντα κύκλον κανονικὸν ὀκτάγωνον.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

§ 83 **Πρόβλημα 1ον.** — Διὰ δεδομένου σημείου Γ εὐθείας ΑΒ νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν.

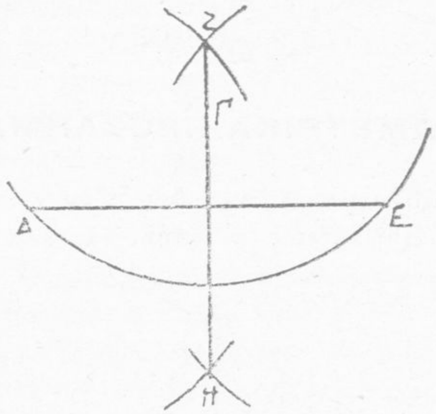


(Σχ. 76)

Λύσις. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ δεδομένου σημείου Γ δύο τμήματα ΓΔ καὶ ΓΕ (Σχ. 76) ἴσα πρὸς ἄλληλα καὶ εἶτα κατασκευάζομεν εὐθεῖαν ΖΗ τέμνουσαν δίχα καὶ καθέτως τὸ εὐθ. τμῆμα ΔΕ (§ 54). Προφανῶς ἡ ΖΗ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

§ 84 **Πρόβλημα 2ον.** — Διὰ δεδομένου σημείου Γ ἐκτὸς εὐθείας ΒΓ κειμένου νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν.

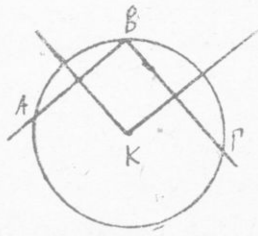
Λύσις. Μὲ κέντρον τὸ δεδομένον σημεῖον Γ γράφομεν περιφέρειαν ἔχουσαν μετὰ τῆς ΑΒ δύο κοινὰ σημεῖα Δ καὶ Ε (Σχ. 77). Ἔπειτα κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν ΖΗ, ἡ ὁποία τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὸ εὐθ. τμῆμα ΔΕ (§ 54). Ἡ εὐθεῖα αὕτη ΖΗ εἶναι ἡ ζητουμένη, διότι εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, διέρχεται δὲ διὰ τοῦ σημείου Γ (§ 55 Α'.).



(Σχ. 77)

Σημ. Ὡς γνωστὸν (§ 19) τὴν λύσιν τῶν δύο τούτων προβλημάτων ἐκτελοῦμεν καὶ διὰ τοῦ γνώμονος καὶ κανόνος.

§ 85 **Πρόβλημα 3ον.** — Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ τριῶν σημείων μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας.



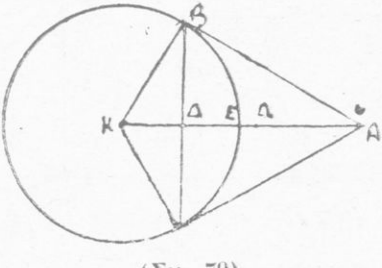
(Σχ. 78)

Λύσις. Ἔστωσαν Α, Β, Γ, (Σχ. 78) τὰ τρία σημεῖα. Ἄγομεν τὰς καθέτους εἰς τὰ μέσα τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ καὶ ΒΓ· ἔστω δὲ Κ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ κάθετοι αὗται τέμνονται. Ἔπειτα μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΑ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Αὕτη διέρχεται διὰ τῶν σημείων Α, Β καὶ Γ, διότι ΚΑ=ΚΒ=ΓΚ (§ 20 Γ'.) Εἶναι ἄρα ἡ ζητουμένη.

Σημ. Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὸ κέντρον δεδομένου κυκλικοῦ τόξου.

§ 86 **Πρόβλημα 4ον.** — Διὰ δεδομένου σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς δεδομένου κύκλου, νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ.

Λύσις. Ἔστω Κ ὁ δεδομένος κύκλος καὶ Α τὸ δεδομένον σημεῖον (Σχ. 79). **Γράφομεν** περιφέρειαν ἔχουσαν διάμετρον τὸ εὐθ. τμῆμα ΚΑ, ἔστωσαν δὲ Β καὶ Γ τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αὕτη τέμνει τὴν δεδομένην περιφέρειαν. Ἄγομεν εἶτα τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ. Λέγω ὅτι αὗται εἶναι ἐφαπτόμεναι εἰς τὴν



(Σχ. 79)

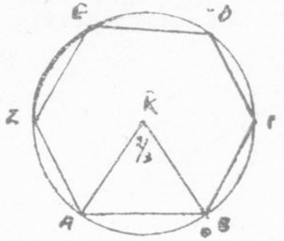
περιφέρειαν τοῦ κύκλου Κ. Πράγματι ἂν ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΚΒ, σχηματίζεται ἡ γωνία ΑΒΚ ἡ ὁποία εἶναι ὀρθὴ (§ 64 Γ′) καὶ ἐπομένως ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΚΒ, ἄρα (§ 49 Γ′,) εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι καὶ ἡ ΑΓ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς αὐτῆς περιφερείας Κ.

Παρατήρησις. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου βλέπομεν ὅτι δι' ἑκάστου σημείου ἐκτὸς κύκλου κειμένου, ἄγονται δύο ἐφαπτόμεναι εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ. Συγκρίνοντες δὲ διὰ τοῦ διαβήτου τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ πειθόμεθα ὅτι εἶναι ἴσα. Ἤτοι :

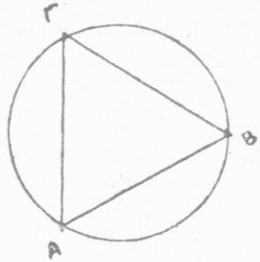
Τὸ κοινὸν σημεῖον δύο ἐφαπτομένων περιφερείας ἀπέχει ἴσον ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν σημείων ἐπαφῆς.

§ 87. **Πρόβλημα 3ον.**—Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον.

Λύσις. Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἀρκεῖ νὰ διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια εἰς ἓξ ἴσα τόξα καὶ νὰ ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ αὐτῶν (§ 82). Ἂς λάβωμεν τόξον τι ΑΒ (Σχ. 80) μικρότερον ἡμιπεριφερείας καὶ ἔχον χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου· ἡ εἰς αὐτὸ βαίνουσα ἐπίκεντρος γωνία ΑΚΒ εἶναι ἴση πρὸς $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς, ὡς γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΚΒ. Ἐπειδὴ δὲ 4 ὀρθ. : $\frac{2}{3}$ ὀρθ. $= 6$, ἕπεται ὅτι περὶ τὸ σημεῖον Κ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ ἀκριβῶς 6 τοιούτων γωνιῶν, αἵτινες πᾶσαι βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξον. Πρὸς διαίρεσιν ἄρα τῆς περιφερείας εἰς 6 ἴσα τόξα, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν διαδοχικῶς ἐπ' αὐτῆς τόξα,



(Σχ. 80)

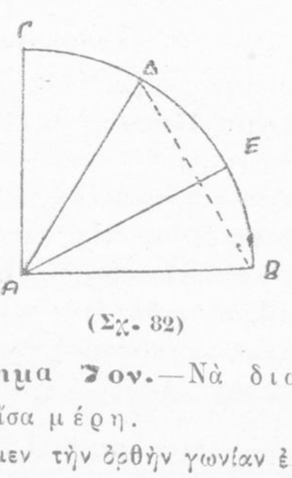


(Σχ. 81)

ὧν ἕκαστον ἔχει χορδὴν ἴσην τῇ ἀκτῖνι καὶ εἶναι μικρότερον ἡμιπεριφερείας. Ἄγοντες εἶτα τὰς χορδὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, καὶ ΖΑ τῶν τόξων τούτων σχηματίζομεν κανονικὸν ἐγγεγραμμένον ἑξάγωνον.

§ 88 **Πρόβλημα 6ον.**—Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κύκλον κανονικὸν τρίγωνον.

Λύσις. Διαιροῦμεν, ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν, τὴν περιφέρειαν εἰς ἓξ ἴσα τόξα, ἐξ ὧν εὐκόλως ἀποτελοῦμεν τρία τόξα, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίτον τῆς περιφερείας. Ἄγοντες εἶτα τὰς χορδὰς τῶν τριῶν τούτων τόξων σχηματίζομεν τὸ ζητούμενον κανονικὸν τρίγωνον (Σχ. 81).

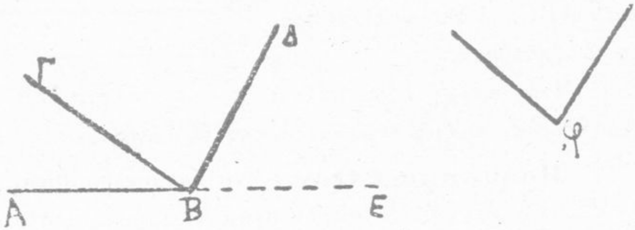


(Σχ. 82)

§ 89. **Πρόβλημα 7ον.**—Νὰ διαιρεθῇ ἡ ὀρθὴ γωνία εἰς τρία ἴσα μέρη.

Λύσις. Καθιστῶμεν τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἐπίκεντρον καὶ ἔστω

ΒΓ τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς τόξον (Σχ. 82). Ἐπὶ τοῦ τόξου τούτου λαμβάνομεν δύο τόξα ΒΔ καὶ ΓΕ ἔχοντα χορδὴν ἴσην τῇ ἀκτῖνι ΑΒ καὶ φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΑΕ καὶ ΑΔ. Οὕτω διαιρεῖται ἡ ὀρθὴ γωνία εἰς τρεῖς γωνίας ΓΑΔ, ΔΑΕ, ΕΑΒ ἴσας. Τῷ ὄντι· ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΔΒ εἶναι εἶναι ἰσόπλευρον, ἡ γωνία ΔΑΒ ἰσοῦται πρὸς $\frac{2}{3}$ ὀρθ. καὶ ἑπομένως ἡ ΓΑΔ ἰσοῦσαι πρὸς $\frac{1}{3}$ ὀρθῆς. Ὁμοίως, ἐπειδὴ $\widehat{\Gamma A E} = \frac{2}{3}$ ὀρθ. ἡ $\widehat{EAB}$ εἶναι ἴση πρὸς $\frac{1}{3}$ ὀρθῆς. ἡ δὲ $\widehat{\Delta A E}$ ἰσοῦται πρὸς 1 ὀρθ. $- \frac{1}{3} \times 2 = \frac{1}{3}$ ὀρθῆς.



(Σχ. 83)

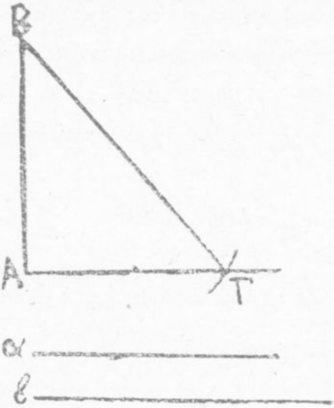
§ 90 **Πρόβλημα 8ον.**—Δεδομένων τῶν δύο γωνιῶν τριγώνου νὰ κατασκευασθῇ ἡ τρίτη γωνία αὐτοῦ.

Λύσις. Ἔστωσαν $\widehat{AB\Gamma}$ καὶ φ (Σχ. 83) αἱ δοθεῖσαι γωνίαι. Μὲ κορυφὴν Β καὶ πλευρὰν τὴν ΒΓ κατασκευάζομεν (§ 60) γωνίαν ΓΒΔ, ἴσην τῇ φ καὶ κειμένην πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς κοινῆς πλευρᾶς ΒΓ. Τέλος προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΑΒ πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς κορυφῆς καὶ σχηματίζεται οὕτως γωνία ΔΒΕ, ἡ ὁποία εἶναι ζητουμένη. Πράγματι· ἡ ζητουμένη γωνία τοῦ τριγώνου καὶ αἱ δύο δεδομέναι ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 2 ὀρθὰς γωνίας (§ 70 Α΄) ἀλλὰ καὶ ἡ ΔΒΕ μετὰ τῶν αὐτῶν γωνιῶν ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 2 ὀρθὰς (§ 28 Α΄).

Σημ. Τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν μόνον ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων γωνιῶν εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν γωνιῶν.

§ 91. **Πρόβλημα 9ον.**—Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὑποτείνουσαν καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσας πρὸς δεδομένα εὐθ. τμήματα.

Λύσις : Κατασκευάζομεν ὀρθὴν γωνίαν Α (Σχ. 84) καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΑΒ ἴσον πρὸς τὴν δεδομένην κάθετον πλευρὰν α. Ἔπειτα μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν δεδομένην ὑποτείνουσαν β γράφομεν περιφέρειαν κύκλου· ἡ περιφέρεια αὕτη τέμνει τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς γωνίας εἴς τι σημεῖον Γ. Ἐὰν ἤδη φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.



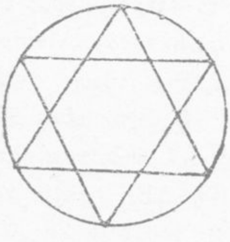
(Σχ. 84)

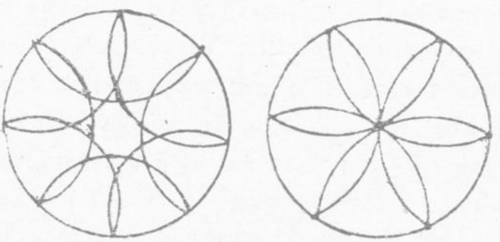
Σημ. Ἵνα ὑπάρχῃ λύσις πρέπει νὰ εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα β μεγαλύτερον τοῦ α (§ 20 Β', α').

§ 92. **Πρόβλημα 10ον.**—Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, ἐκ δύο πλευρῶν καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένης γωνίας (§ 71).

§ 93 **Πρόβλημα 11ον.**—Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ τῶν προσκειμένων αὐτῇ γωνιῶν αὐτοῦ. (§ 72 Β').

§ 94 **Πρόβλημα 12ον.**—Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν αὐτοῦ (ὅρα § 72 Γ'.).


(Σχ. 85)


(Σχ. 86)

Ἐφαρμογαί : 1) Περιγράψατε περὶ δοθέντα κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ κανονικὸν τρίγωνον.

2) Ἐγγράψατε εἰς δοθέντα κύκλον κανονικὸν δωδεκάγωνον.

3) Ἐκ δοθέντος σημείου εὐθείας χαράξατε πρὸς τὸ αὐτὸ μέ-

ρος αὐτῆς δύο εὐθείας οὕτως ὥστε νὰ σχηματίζωνται τρεῖς γωνίαι ἴσαι.

5) Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου μία γωνία εἶναι $\frac{1}{3}$ ὀρθῆς, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ἰσοῦται πρὸς δεδομένον εὐθ. τμῆμα.

6) Κατασκευάσατε παλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου μία γωνία νὰ εἶναι $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς νὰ ἔχωσι μήκη 0.04 μ. ἡ μία καὶ 0,02 μ. ἡ ἄλλη.

7) Ἰχνογραφήσατε τὰ σχήματα 85 καὶ 86.

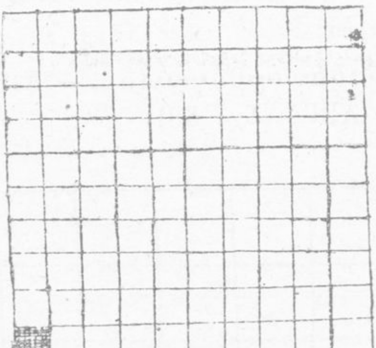
8) Εἰς δεδομένον τετράγωνον ἐγγράψατε κύκλον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

I. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘ. ΣΧΗΜΑΤΩΝ

§ 95. **Μονάδες ἐπιφανειῶν**. — Πρὸς μέτρησιν ἐπιφανείας τινὸς συγκρίνεται αὕτη πρὸς ὡρισμένην καὶ γνωστὴν ἐπι-



(Σχ. 87)

φάνειαν, τὴν ὁποίαν μονάδα καλοῦμεν. Διὰ τῆς συγκρίσεως ταύτης εὑρίσκομεν ἐκ πόσων μονάδων ἢ καὶ μερῶν αὐτῆς ἀποτελεῖται ἡ μετρηθεῖσα ἐπιφάνεια.

Ὁ τὸ πλῆθος τοῦτο τῶν μονάδων ἢ καὶ μερῶν αὐτῆς ἐκφράζων ἀριθμὸς καλεῖται ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

Αἱ διάφοροι μονάδες, δι᾽ ὧν μετροῦμεν τὰς ἐπιφανείας, καλοῦνται μονάδες ἐπιφανειῶν.

Συνηθέστεραι μονάδες ἐπιφανειῶν εἶναι αἱ ἑξῆς:

α΄. Τὸ τετραγωνικὸν μέτρον, ὅπερ εἶναι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν ἴσην πρὸς ἕν μέτρον (Σχ. 87).

β΄. Τὰ ὑποπολλαπλάσια τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου, ἅτινα εἶναι τὰ ἀκόλουθα:

τετραγωνικὴ παλάμη $=\frac{1}{100}$ τετρ. μ.

τετραγωνικὸς δάκτυλος $=\frac{1}{100}$ τ. π. $=\frac{1}{10000}$ τ. μ.

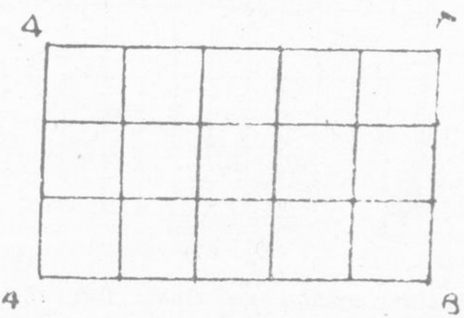
τετραγωνικὴ γραμμὴ $=\frac{1}{100}$ τ.δ. $=\frac{1}{10000}$ τ.π. $=\frac{1}{1000000}$ τ. μ.

γ΄) τὰ πολλαπλάσια τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου, ἅτινα εἶναι τὰ ἀκόλουθα:

Βασιλικὸν στρέμμα	$=1000$	τετρ. μέτρα
Παλαιὸν στρέμμα	$=1270$	» »
τετραγωνικὸν χιλιόμετρον	$=1000000$	» »

Πρὸς μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων γίνεται συνήθως χρῆσις καὶ τοῦ τεκτονικοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως, ὁ ὁποῖος ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τετρ. μέτρου.

§ 96. **Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου.**— Ἔστω πρὸς μέτρησιν τυχὸν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ (Σχ. 88).



(Σχ. 88)

Μετροῦμεν τὴν βάσιν αὐτοῦ ΑΒ καὶ τὸ ὕψος ΑΔ· ἔστω δὲ ὅτι ΑΒ=5 μ. καὶ ΑΔ=3 μ. Ἂν διαιρέσωμεν τὴν μὲν ΑΒ εἰς 5 ἴσα μέρη (§ 38), τὴν δὲ ΑΔ εἰς 3 ἴσα μέρη καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν ἄλλην, διαιρεῖται τὸ ὀρθογώνιον εἰς $5 \times 3 = 15$ τετρ. μέτρα. Ὁμοίως ἐργαζόμενοι καὶ ἐπὶ ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις ἔχει μῆκος 7 μ., τὸ δὲ ὕψος 4 μ. εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $7 \times 4 = 28$ τετρ. μέτρα. Ὅθεν συμπεραίνομεν τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς ὀρθογωνίου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Σημ. Ἡ πρότασις αὕτη ἀληθεύει οἱωνδήποτε ὄντων τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἐκφράζουσι τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου π.χ. οὗτινος ἡ βάσις εἶναι 15,35 μ. καὶ τὸ ὕψος 3,7 μ. τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $15{,}35 \times 3{,}7 = 56{,}795$ τ. μ. Τῷ ὄντι· ἂν νοηθῇ ἡ βάσις διῃρημένη εἰς 1535 καὶ τὸ ὕψος εἰς 370 ἴσα μέρη, νοηθῶσι δὲ ἠγμέναι, παράλληλοι ἑκατέρα ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως τῆς ἄλλης, διαιρεῖται τὸ ὀρθογώνιον εἰς $1535 \times 370 = 567950$ τετρ. δακτύλους ἢ $\frac{567950}{10000} = 56{,}795$ τετρ. μέτρα.

Ἐάν, χάριν γενικότητος, παραστήσωμεν τὸ μὲν ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τινὸς διὰ Ε, τὸ δὲ μῆκος τῆς βάσεως αὐτοῦ διὰ β καὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους διὰ υ, ἀληθεύει, κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν, μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν Ε, β καὶ υ ἡ ἀκόλουθος ἰσότης:

$$E = \beta \times \upsilon \qquad (1)$$

Ἐφαρμογαί: 1) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου ἔχοντος βάσιν μὲν 25,05 μ., ὕψος δὲ 10 μ. (Ἀπ. 250,5 τετρ. μ.).

2) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν περίμετρος, εἶναι 40 μ μία δὲ πλευρὰ αὐτοῦ 8 μ.; (Ἀ. 96 τ. μ.).

3) Πρόκειται νὰ φυτευθῇ ἄμπελος σχήματος ὀρθογωνίου καὶ ἐμβαδοῦ 600 τετρ. μέτρων. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ πλάτος αὐτῆς, ἂν τὸ μῆκος αὐτῆς εἶναι 30 μέτρων; (Ἀπ. 20 μ.).

4) Ἐπώλησέ τις ἀγρὸν ὀρθογώνιον καὶ ἔχοντα μῆκος μὲν 50 μ. πλάτος δὲ 30 μ., πρὸς 400 δραχμὰς τὸ βασιλικὸν στρέμμα· Πόσα χρήματα ἔλαβεν; (Ἀπὸ 600 δραχμάς).

§ 97 **Ἐμβαδὸν τετραγώνου.**—Ἐπειδὴ πᾶν τετράγωνον εἶναι ὀρθογώνιον (§ 76) ἐφαρμόζεται καὶ ἐπ' αὐτοῦ ἡ προηγουμένη πρότασις. Ἕνεκεν ὅμως τῆς ἰσότητος πασῶν τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου ἡ πρότασις αὕτη διατυποῦται ὡς ἀκολούθως:

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τετραγώνου εἶναι γινόμενον τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐφ' ἑαυτήν.

Τοῦ τετραγώνου π. χ. τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἔχει μῆκος 5 μ. τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $5 \times 5 = 25$ τετρ. μέτρα.

Σημ. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ γινόμενον παντὸς ἀριθμοῦ α ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του καλεῖται τετράγωνον τοῦ α. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ α σημειοῦται οὕτω α^2.

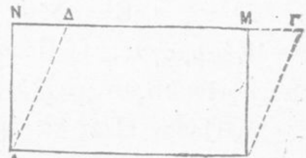
Κατὰ ταῦτα μεταξὺ τοῦ ἐμβαδοῦ Ε καὶ τοῦ μήκους α τῆς πλευρᾶς τετραγώνου τινὸς ἀληθεύει ἡ ἀκόλουθως ἰσότης: $E = \alpha^2$.

Ἐφαρμογαί: 1) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἔχει μῆκος 8,05 μ; ('Απ. 64,8025 τ. μ.).

2) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου ἔχοντος περίμετρον 107, 36μ. ('Απ. 720,3856 τ. μ.)

3) Τετράγωνόν τι ἔχει ἔμβαδον 144 τετρ. μέτρων. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς αὐτοῦ; ('Απ. 12 μ.).

4) Τετραγωνικὸν οἰκόπεδον ἐπωλήθη πρὸς 20 δραχμὰς τὸν τεκτονικὸν τετραγωνικὸν πῆχυν· ἐὰν ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ἔχῃ μῆκος 30 μέτρων, ἀντὶ πόσων χρημάτων ἐπωλήθη; ('Απ. 32000 δραχ.).



(Σχ. 89)

§ 98. **Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου.** — Ἔστω πρὸς μέτρησιν τυχὸν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 89).

Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΒΓΜ ὑποβάλωμεν εἰς παράλληλον μετάθεσιν κατὰ τὴν ὁδηγὸν ΓΔ καὶ μέχρις οὗ ἡ κορυφὴ Γ πέσῃ ἐπὶ τῆς Δ ἡ ΓΒ μένουσα πάντοτε παράλληλος ἑαυτῇ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ σημεῖον Β ἐπὶ τοῦ Α (§ 77 Β'.) καὶ τὸ τρίγωνον ΒΓΜ θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν ΑΔΝ. Οὕτω δὲ τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον μετασχηματίζεται εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΜΝ, ὅπερ ἔχει τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρὸς τὰ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΜΝ εἶναι (§ 96) (ΑΒ)$\times$(ΒΜ), τόσον εἶναι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου.

Ὅθεν ἕπεται ἡ ἀλήθεια τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

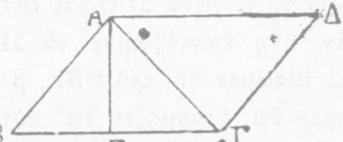
Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Κατὰ τὴν πρότασιν ταύτην μεταξὺ τοῦ ἐμβαδοῦ Ε, τῆς βάσεως β καὶ τοῦ ὕψος υ παραλληλογράμμοσου ἀληθεύει ἡ ἰσότης $Ε=β\times υ$.

Ἐφαρμογαί: 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν μὲν 12,2 μ. ὕψος δὲ 5,7 μ. (Ἀπ. 69,54 τετρ. μέτρα).

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου δύο ἀπέναντι πλευραὶ ἔχουσι μῆκος 28,46 μ. ἡ δὲ μεταξὺ αὐτῶν κάθετος 8,76 μ, (Ἀπ. 124,6548 τ, μ.).

3) Παραλληλόγραμμόν τι ἔχει ἐμβαδὸν 5 βασιλικῶν στρεμμάτων καὶ βάσιν 100 μέτρων. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ; (Ἀπ. 50 μ.).



(Σχ. 90)

§ 99. **Ἐμβαδὸν τριγώνου.**—Ἔστω πρὸς μέτρησιν τὸ τυχὸν τρίγωνον ΒΑΓ (Σχ. 90). Ἄγοντες ἐκ δύο κορυφῶν αὐτοῦ Α καὶ Γ παραλλήλους πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς, σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ τρίγωνον.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου τούτου (§ 77 Α΄) συμπεραίνομεν εὐκόλως τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀκολούθου προτάσεως:

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα μεταξὺ τοῦ ἐμβαδοῦ Ε, τῆς βάσεως β καὶ τοῦ ὕψους υ τριγώνου τινὸς ἀληθεύει ἡ σχέσις $Ε=\frac{β\times υ.}{2}$

'Εφαρμογαί: 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ ἔχει μῆκος 27 μ. ἡ δὲ ἀπόστασις τῆς ἀπέναντι κορυφῆς ἀπὸ ταύτης εἶναι 12 μ. ('Απ. 162 τ. μ.).

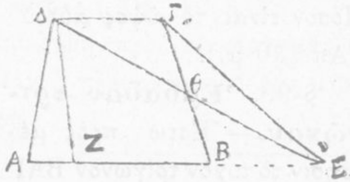
2) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν ἔχει μῆκος 25 μ. ἡ δὲ ἄλλη 46, 30 μ., ('Απ. 578, 75 τ. μ.).

3) Τρίγωνόν τι ἔχει ἐμβαδὸν 2 παλαιῶν στρεμμάτων καὶ ὕψος 40 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς βάσεως αὐτοῦ. (127 μ.).

4) 'Αγρὸς τριγωνικὸς καὶ ἕτερος τετραγωνικὸς ἔχουσιν ἴσον ἐμβαδόν. Τοῦ μὲν τριγωνικοῦ ἡ βάσις ἔχει μῆκος 400 μ. τοῦ δὲ τετραγωνικοῦ ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος 200 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου ἀγροῦ καὶ πόσον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγωνικοῦ;

('Απ. 48 β. στρεμ. 200 μ.).

§ 100. **'Εμβαδὸν τραπεζίου.**—"Εστω τυχὸν ἐπὶ φύλλου χάρτου τραπέζιον ΑΒΓΔ (Σχ. 91). "Ας ὁρίσωμεν τὸ μέσον Θ τῆς πλευρᾶς ΒΓ (§ 54) καὶ ἂς φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΔΘ. αὕτη τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ εἰς τι σημεῖον Ε καὶ σχηματίζονται οὕτω τὰ τρίγωνα ΔΓΘ καὶ ΒΘΕ. "Αν ἤδη ἀποκόψωμεν τὸ ΔΓΘ καὶ θέσωμεν ἐπὶ τοῦ ΘΒΕ, βλέπομεν ὅτι ἐφαρμόζει ἐπ' αὐτοῦ καὶ τὸ τραπέζιον μετασχηματίζεται εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐμβαδὸν καὶ ὕψος ἴσα πρὸς τὰ τοῦ τραπεζίου. 'Επειδὴ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΔΕ εἶναι (§ 99) ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον $\frac{(\mathrm{AE})\times(\Delta\mathrm{Z})}{2}$, τόσον θὰ εἶναι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου. 'Αλλ' ἐπειδὴ $(\Delta\Gamma)=(\mathrm{BE})$, ἔπεται ὅτι $(\mathrm{AE})=(\mathrm{AB})+(\Delta\Gamma)$ καὶ ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι $\frac{(\mathrm{AB})+(\Delta\Gamma)}{2}\times(\Delta\mathrm{Z})$.



(Σχ. 91)

"Αρα: Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπεζίου εἶναι γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα, ἂν παρασταθῇ διὰ Ε τὸ ἐμβαδόν, διὰ Β καὶ β τὰ μήκη τῶν βάσεων καὶ διὰ υ τὸ ὕψος τραπεζίου τινός, ἀληθεύει μεταξὺ αὐτῶν ἡ ἰσότης $E = \frac{B+\beta}{2} \times \upsilon$.

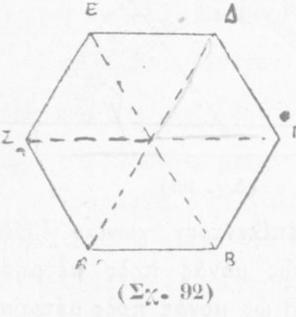
Ἐφαρμογαί: 1) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, τοῦ ὁποίου ἡ μία τῶν παραλλήλων πλευρῶν ἔχει μῆκος 45 μ., ἡ ἄλλη 20 μ. καὶ τὸ ὕψος 12,5 μ. (Ἀπ. 406,25 τ. μ.).

2) Ἐκ πόσων παλαιῶν στρεμμάτων ἀποτελεῖται ἀγρὸς σχήματος τραπεζίου τοῦ ὁποίου ἡ μία τῶν παραλλήλων πλευρῶν ἔχει μῆκος 62 μ ἡ ἄλλη 85 μ. καὶ τὸ ὕψος 20 μ; (Ἀπ. 1,157 π. σ).

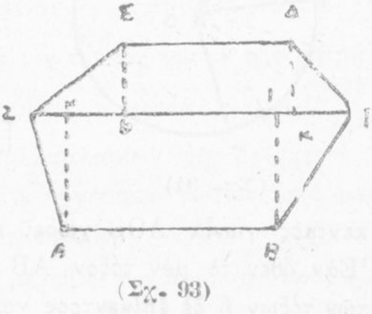
§ 101. **Ἐμβαδὸν οἱωνδήποτε εὐθ. σχημάτων.**— Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τραπεζοειδοῦς τινος ἢ οἱουδήποτε πολυγώνου διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς τρίγωνα, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν τριγώνων τούτων (§ 99) καὶ προσθέτομεν τὰ ἐμβαδὰ ταῦτα.

Διαιροῦμεν δὲ εὐθύγραμμον σχῆμα εἰς τρίγωνα κατὰ τοὺς δύο ἀκολούθους τρόπους.

α΄) Φέρομεν πάσας τὰς διαγωνίους τοῦ σχήματος, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διά τινος κορυφῆς αὐτοῦ (Σχ. 71).



(Σχ. 92)



(Σχ. 93)

β΄) Ὁρίζομεν ἐντὸς τοῦ σχήματος σημεῖόν τι καὶ ἄγομεν πάντα τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ὑπ' αὐτοῦ καὶ τῶν κορυφῶν τοῦ σχήματος (Σχ. 92).

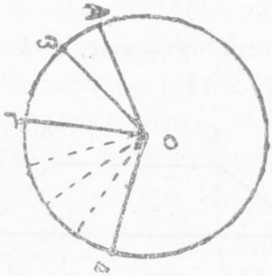
Συνήθως ἀναλύομεν εὐθύγραμμόν τι σχῆμα οὐ μόνον εἰς τρίγωνα, ἀλλὰ καὶ εἰς τραπέζια καὶ ὀρθογώνια ἐνίοτε. Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὴν μεγαλυτέραν διαγώνιον αὐτοῦ καὶ ἐκ τῶν λοιπῶν κορυφῶν ἄγομεν καθέτως ἐπὶ ταύτην (Σχ. 93).

Ἐφαρμογαί: 1) Ἀγρός τις ἔχει σχῆμα τραπεζοειδοῦς, τοῦ ὁποίου ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος ἔχει μῆκος 80 μ. αἱ δὲ ἀποστάσεις τῶν λοιπῶν κορυφῶν ἀπὸ ταύτης εἶναι 5 μ. ἡ μὲν καὶ 35 μ. ἡ ἄλλη. Ἐκ πόσων β. στρεμμάτων ἀποτελεῖται ὁ ἀγρὸς οὗτος; (1,6 β. στρεμ.).

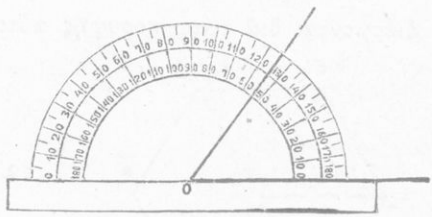
2) Πενταγώνου αἱ πλευραὶ εἶναι κατὰ σειρὰν 10 μ, 20 μ, 30 μ, 40 μ, 50 μ. σημεῖον δέ τι αὐτοῦ ἀπέχει ἀπὸ τῶν πλευρῶν κατὰ σειρὰν ἀποστάσεις 23 μ, 25 μ, 20 μ, 17 μ, καὶ 10 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ; (Ἀπ. 1255 τ. μ.).

2. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

§ 102. Γνωρίζομεν ὅτι ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις εἰς διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. τόξον βαίνει διπλασία, τριπλασία κτλ. ἐπίκεντρος γωνία καὶ ἀντιστρόφως (§ 58 Γ΄.). Κατὰ ταῦτα ὁσάκις τόξον τι ΑΒ (Σχ. 94) χωρεῖ εἰς ἕτερον τόξον ΓΔ (τῆς αὐτῆς ἢ ἴσης περιφερείας), τοσάκις καὶ ἡ ἐπί-



(Σχ. 94)



(Σχ. 95)

κεντρος γωνία ΑΟΒ χωρεῖ εἰς τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν ΓΟΔ. Ἐὰν ὅθεν τὸ μὲν τόξον ΑΒ ληφθῇ ὡς μονὰς πρὸς μέτρησιν τῶν τόξων ἡ δὲ ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΒ ὡς μονὰς πρὸς μέτρησιν τῶν γωνιῶν, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ τυχὸν τόξον ΓΔ (τῆς αὐτῆς ἢ ἴσης περιφερείας) καὶ ἡ εἰς αὐτὸ βαίνουσα ἐπίκεντρος γωνία παρίστανται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον πρὸς μέτρησιν γωνίας τινὸς ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν τὸ τόξον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου αὕτη βαίνει, ὅταν καταστῇ ἐπίκεντρος ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει καὶ τὸ τόξον, ὅπερ λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν τόξων.

Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον χρησιμεύει ἡμῖν τὸ μοιρογνωμόνιον (Σχ. 95), ὅπερ εἶναι μεταλλικὸν ἡμικύκλιον τοῦ ὁποίου ἡ ἡμιπεριφέρεια εἶναι διῃρημένη εἰς 180 ἴσα μέρη, ὧν ἕκαστον καλεῖται μοῖρα.

Ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60′ καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60″. Ἐν τῷ μέσῳ τῆς διαμέτρου τοῦ ἡμικυκλίου τούτου ὑπάρχει μικρά τις ἐγκοπὴ δεικνύουσα τὴν θέσιν τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, οὗτινος τὸ μοιρογνωμόνιον εἶναι ἥμισυ.

Ἵνα διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου μετρήσωμεν γωνίαν τινὰ (Σχ. 95) ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως.

Τοποθετοῦμεν αὐτὸ οὕτως ὥστε τὸ μὲν κέντρον νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας, ἡ δὲ διὰ τῆς ἀρχῆς τῆς διαιρέσεως διερχομένη ἀκτὶς μετά τινος πλευρᾶς τῆς γωνίας καὶ τὸ ὅλον μοιρογνωμόνιον, πρὸς ὃ μέρος κεῖται ἡ ἑτέρα πλευρά. Οὕτως ἡ δευτέρα αὕτη πλευρὰ τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν τοῦ ὀργάνου εἴς τι σημεῖον· ὁ ἐπ' αὐτοῦ γεγραμμένος ἀριθμὸς παριστᾷ εἰς μοίρας κτλ. τὸ μέγεθος τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας περιεχομένου τόξου καὶ κατ' ἀκολουθίαν καὶ αὐτῆς τῆς γωνίας τὸ μέγεθος.

Ἡ ὀρθὴ γωνία εἶναι 90^0 διότι καὶ τὸ τεταρτημόριον τῆς περιφερείας, ἐφ' οὗ αὕτη βαίνει εἶναι $\frac{360^o}{4}=90^0$ (§ 59).

Σημ. Εἶναι φανερὸν ὅτι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τῆς μετρήσεως τῶν γωνιῶν λαμβάνεται ὡς μονὰς ἡ γωνία 1^0 ἤτοι τὸ $\frac{1}{90}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας μετὰ τῶν ὑποπολλαπλασίων τῆς μοίρας.

Ἐφαρμογαί: 1) Κατασκευάσατε τυχοῦσαν γωνίαν καὶ μετρήσατε εἶτα αὐτὴν διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου.

2) Πόσον εἶναι εἰς μοίρας τὸ μέγεθος γωνίας ἴσης πρὸς $\frac{2}{5}$ ὀρθῆς; (36^0).

3) Πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι γωνία 50^0; (ἀπ. $\frac{5}{9}$ ὀρθ.).

4) Πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι γωνία $33^0\,45'$; (ἀπ. $\frac{3}{8}$ ὀρθ).

5) Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία ὀξεῖα γωνία νὰ εἶναι 54^0 καὶ ἡ ὑποτείνουσα 0,04 μ.

6) Κατασκευάσατε τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία γωνία νὰ εἶναι

108^0 αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς 0,06 μ. ἡ μία καὶ 0,04 μ. ἡ ἄλλη. Μετρήσατε τὰς ἄλλας αὐτοῦ γωνίας.

7). Γράψατε περιφέρειαν κύκλου ἀκτῖνος 0,03 μ. καὶ χωρίσατε ἐν αὐτῷ κυκλικὸν τομέα 25^0.

3. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΚΥΚΛΟΥ

§ 103. Ἄς κατασκευάσωμεν ἐκ χαρτονίου ἢ λεπτῆς σανίδος κύκλον καὶ ἄς περιβάλωμεν ἅπαξ ἅπασαν τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ διὰ νήματος. Ἐκτυλίσσοντες εἶτα καὶ μετροῦντες τὸ νῆμα, εὑρίσκομεν τὸ μῆκος αὐτοῦ, ὅπερ εἶναι κατ' ἀρκοῦσαν προσέγγισιν καὶ μῆκος τῆς περιφερείας. Ἐὰν ἤδη τὸ μῆκος τοῦτο τῆς περιφερείας διαιρέσωμεν διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου αὐτοῦ, εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον τὸν ἀριθμὸν 3,14159.

Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο συμβαίνει εἰς πάντα κύκλον συμπεραίνομεν ὅτι:

Ἐν παντὶ κύκλῳ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ μήκους τῆς περιφερείας διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου αὐτοῦ εἶναι 3,14159.

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι:

Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου εἶναι γινόμενον τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3,14159.

Κατὰ ταῦτα, ἂν παρασταθῇ διὰ γ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου καὶ διὰ α τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ ἀληθεύει ἡ ἰσότης $\gamma = 2 \times \alpha \times 3,\ 14149$. (1)

Ἐκ ταύτης δὲ πορίζόμεθα εὐκόλως τὴν ἀκόλουθον ἰσότητα

$$2 \times \alpha = \frac{\gamma}{3{,}14159} \quad (2),$$

ἥτις ἐκφράζει ὅτι: ἡ διάμετρος κύκλου εὑρίσκεται, ἂν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας αὐτοῦ διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3,14159.

Ἐφαρμογαί :) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα 3 μ.; (ἀπ. 18μ, 84954).

2) Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς κύκλου, ὅστις ἔχει περιφέρειαν 25,5.; (ἀπ. 4μ, 05).

3) Τροχὸς διὰ μιᾶς ὁλοκλήρου στροφῆς διανύει διάστημα 2μ, 25. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ; (ἀπ. 0,358 μ.).

4. ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ

§ 104. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μήκους τόξου τινὸς ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως. Μετροῦμεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου καὶ ὑπολογίζομεν, ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν, τὸ μῆκος ὅλης τῆς περιφερείας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ τόξον. Ἔστω τοῦτο 8 μ. εἶτα διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου εὑρίσκομεν τὸ μέγεθος τῆς ἐπ' αὐτοῦ βαινούσης ἐπικέντρου γωνίας καὶ κατ' ἀκολουθίαν καὶ αὐτοῦ τοῦ τόξου τὸ μέγεθος εἰς μοίρας κτλ. ἔστω δὲ 50°. Ἤδη σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως:

Τόξον 360° ἐν τῷ προκειμένῳ κύκλῳ ἔχει μῆκος 8 μ.

» 1° » » αὐτῷ κύκλῳ ἔχει μῆκος $\frac{8}{360}$ μ.

» 50° » » » » » μῆκος $\frac{8}{360}\times 50=1,111$ μ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τόξον 75° ἐν κύκλῳ, τοῦ ὁποίου ὅλη ἡ περιφέρεια ἔχει μῆκος 12 μ. ἔχει μῆκος $\frac{12^{\mu}}{360}\times 75=2^{\mu},5$.

Κατὰ ταῦτα, ἂν γ εἶναι τὸ μῆκος ὁλοκλήρου περιφερείας καὶ τ τὸ μῆκος τόξου μ° αὐτῆς, ἀληθεύει ἡ ἰσότης

$$\tau=\frac{\gamma}{360}\times \mu = \overset{\text{μέτρ.}}{\gamma} \times \overset{\text{μέτρ.}}{\frac{\mu}{360}}.$$

Σημ. Ἂν ὁ εἰς μοίρας κτλ. παριστῶν τὸ τόξον ἀριθμὸς περιέχει καὶ πρῶτα ἢ δεύτερα λεπτά, τρέπομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{\mu}{360}$ εἰς μονάδας τῆς κατωτέρας ἐν τῷ μ περιεχομένης τάξεως καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν προηγούμενον τύπον.

Ἐφαρμογαί: 1) Πόσον εἶνε τὸ μῆκος τόξου 15° ἐν κύκλῳ ἀκτῖνος 8^{μ}; (ἀπ. 0^{μ}, 78539).

3) Ἡ περιφέρεια κύκλου ἔχει μῆκος 18^{μ}. Πόσον μῆκος ἔχει τόξον αὐτῆς $25^{\circ}\ 36'\ 40''$; (ἀπ. $\tau=18\times\frac{92200}{1296000}=1,28^{\mu}$.)

5. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΚΥΚΛΟΥ

§ 105. Ἡ θεωρητικὴ γεωμετρία ἀποδεικνύει τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

Τὸ ἐμβαδὸν κύκλου εἶναι γινόμενον τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα, ἂν α εἶναι ἡ ἀκτὶς κύκλου τινὸς καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, ἀληθεύει ἡ ἰσότης ;

$$E=2\times\alpha\times3{,}14159\times\frac{\alpha}{2} \text{ ἢ } E=3{,}14159\times\alpha^2 \quad (1).$$

Ἡ ἰσότης (1) ἐκφράζει ὅτι :

Τὸ ἐμβαδὸν κύκλου εἶναι γινόμενον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3,14159.

Ἐφαρμογαί. 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα 2^{μ} (ἀπ. 12,566 τ.μ.).

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κυκλικῆς ἅλω, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα 5 μέτρων (ἀπ. 78,53975 τ.μ.)

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια ἔχει μῆκος $32{,}5^{\mu}$ (ἀπ. 33,0549125 τ.μ.)

6. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΩΣ

§ 106. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ κυκλικοῦ τομέως ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως. Μετροῦμεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου καὶ ὑπολογίζομεν, ὡς ἀνωτέρω, τὸ ἐμβαδὸν ὅλου τοῦ κύκλου, ἔστω δὲ τοῦτο 4 τ.μ. Ἔπειτα μετροῦμεν διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζουσιν αἱ ἀκτῖνες, εἰς τὰς ὁποίας περατοῦται ὁ κυκλικὸς τομεὺς καὶ εὑρίσκομεν οὕτω εἰς μοίρας κτλ. τὸ μέγεθος τῆς γωνίας ταύτης καὶ τοῦ ἀντιστοίχου κατ' ἀκολουθίαν τόξου ἔστω δὲ τοῦτο 45^0. Ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως.

Ὅλος ὁ κύκλος ἤτοι κυκλικὸς τομεὺς 360^0 ἔχει ἐμβαδὸν 4 τ.μ. τοῦ αὐτοῦ κύκλου κυκλικὸς τομεὺς 1^0 ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{4}{360}$ τ.μ. τοῦ αὐτοῦ κύκλου κυκλικὸς τομεὺς 45^0 ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{4}{360}$ τ.μ. $\times 45=0{,}5$ τ.μ. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἰς κύκλον ἔχοντα ἐμβαδὸν 30 τ.μ. κυκλικὸς τομεὺς 20^0 ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{30}{360}$ τ.μ. $\times 20=1{,}666$ τ. μ. Κατὰ ταῦτα, ἂν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κύκλου τινὸς καὶ ε τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως αὐτοῦ μ^0, ἀληθεύει ἡ ἰσότης

$$\varepsilon=\frac{E}{360}\times\mu=E\times\frac{\mu}{360} \quad (1).$$

Σημ. α΄. Ἂν τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τομέως περιέχῃ καὶ πρῶτα ἢ δεύτερα λεπτά, ἐργαζόμεθα ὡς εἴπομεν ἐν (§ 104Σημ.).

Σημ. β΄. Ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ τ τὸ μῆκος τόξου μ^0, διὰ τοῦ γ τὸ μῆκος ὁλοκλήρου τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα α, ἀληθεύει, ὡς γνωστὸν (§ 104) ἡ ἰσότης $\tau = \gamma \times \frac{\mu}{360}$ Ἐπειδὴ δὲ ἐκ ταύτης προκύπτει ὅτι $\frac{\tau}{\gamma} = \frac{\mu}{360}$ ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$\varepsilon = E \times \frac{\tau}{\gamma}$ καὶ ἐπειδὴ $E = \gamma \times \frac{\alpha}{2}$ (§ 105), ἕπεται ὅτι

$\varepsilon = \gamma \times \frac{\alpha}{2} \times \frac{\tau}{\gamma}$ ἢ $\varepsilon = \frac{\alpha}{2} \times \tau$ (2).

Ἤτοι: Τὸ ἐμβαδὸν κυκλικικοῦ τομέως εἶναι γινόμενον τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου αὐτοῦ.

Ἐφαρμογαί. 1) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως 100^0 ἐν κύκλῳ, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 3,14159 τ. μ; (ἀπ. 0,872 τ. μ.).

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως 30^0 καὶ ἀκτῖνος 4 μ. (ἀπ. 4,18878 τ. μ.).

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

1) Ἐκ πόσων βασ. στρεμμάτων ἀποτελεῖται τετραγωνικὸς ἀγρὸς ἔχων περίμετρον 600 μέτρων; (ἀπ. $22\frac{1}{2}$ β. στρ.).

2) Ἐκ πόσων τεκτονικῶν τετραγωνικῶν πήχεων ἀποτελεῖται οἰκόπεδον σχήματος ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις ἔχει μῆκος 25μ τὸ δὲ ὕψος 8,2μ; (Ἀπ. 364,44 τ.τ.π.).

3) Λιθόστρωτος ὁδὸς ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου ἔχοντος μῆκος 150 μ. καὶ ὕψος 15 μ. Ἡ ὁδὸς αὕτη εἶναι ἐστρωμένη μὲ τετραγωνικὰς πλάκας, τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος 0,75 μ. Πόσας πλάκας περιέχει ἐν ὅλῳ ἡ ὁδὸς αὕτη; (Ἀπ. 4000).

4) Ἀγρός τις ἔχει σχῆμα παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶναι 65 μ. τὸ δὲ ὕψος 22 μ. Πόσον τιμᾶται ὁ ἀγρὸς οὗτος ἂν ἕκαστον παλαιὸν στρέμμα αὐτοῦ τιμᾶται 130 δραχμάς; (Ἀπ. 146,37 δρ.)

5) Ἀγρὸς σχήματος παραλληλογράμμου ἔχοντος βάσιν 18 μ.

καὶ ὕψος 10 μ. ἀνταλλάσσεται μὲ τετραγωνικὸν ἀγρὸν πλευρᾶς 12 μ. Ἐὰν ἕκαστον τετρ. μέτρον τοῦ δευτέρου ἀγροῦ τιμᾶται 0,40 δρ., πόσον τιμᾶται ἕκαστον τετρ. μέτρον τοῦ πρώτου; (Ἀπ. 0,32 δραχ.).

6) Τριγωνικοῦ ἀγροῦ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 750 τ. μ. ἡ δὲ βάσις 50 μ. Πόσον εἶνε τὸ ὕψος αὐτοῦ; (Ἀπ. 30 μ.).

7) Δωμάτιον μήκους 5 μ. καὶ πλάτος 3.60 μ. πρόκειται νὰ πατωθῇ διὰ σανίδων, ὧν ἑκάστη ἔχει μετὰ τὴν ὑπὸ τοῦ τεχνίτου ἐπεξεργασίαν μῆκος μὲν 1,80 μ. πλάτος δέ, 0,25 μ. Πόσαι τοιαῦται σανίδες χρειάζονται; (Ἀπ. 40 σανίδες).

8) Ἁμάξης διανυσάσης 1884,9 μ. οἱ πρόσθιοι τροχοὶ ἔκαμον ἀνὰ 1000 περιστροφάς. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς ἑκατέρου τούτων: (Ἀπ. 0,3 μ.).

9) Περὶ κυκλικὴν τράπεζαν διαμέτρου 1,95 μ. κάθηνται 8 ἄνθρωποι. Πόσον μέρος τῆς περιφερείας ἀναλογεῖ δι' ἕκαστον; (Ἀπ. 0,589 μ.).

10) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα 3,30 μ.; (Ἀπ. 34,21 τ. μ).

11) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ ἀγροῦ, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος ἔχει μῆκος 48,60 μ, ; (Ἀπ. 1855,08 τ. μ.).

12) Πόσας δραχμὰς θὰ πληρώσῃ τις διὰ τὴν ἀμμοκονίασιν τοῦ πυθμένος κυκλικῆς δεξαμενῆς, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι 12,6 μ. ἐὰν πληρώνῃ 4,50 δραχ. κατὰ τετρ. μέτρον; (Ἀπ. 560,80 δραχ.).

13) Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τραπεζίου, ὅπερ ἔχει ἐμβαδὸν 525 τ. μ. μίαν βάσιν 60 μ. καὶ τὴν ἄλλην 40 μ.; (Ἀπ. 10.5 μ.).

14) Διὰ τὴν ἐπισανίδωσιν τοῦ δαπέδου τετραγωνικοῦ δωματίου γενομένην πρὸς 15,50 δρ. κατὰ τετρ. μέτρον ἐδαπανήθησαν 225,28 δραχ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ δωματίου τούτου; (Ἀπ. 3,81 μ.).

15) Νὰ εὑρεθῇ εἰς παλαιὰ στρέμματα τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶναι 137,70 μ. τὸ δὲ ὕψος 100 μέτρα; (Ἀπ. $5\frac{1}{2}$ π. στρ.).

16) Ἠγόρασέ τις ἄμπελον πρὸς 624 δραχ. τὸ βασ. στρέμμα.

Ἡ ἄμπελος ἔχει σχῆμα τραπεζίου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν μία βάσις εἶναι 29,50 μ. ἡ ἄλλη 38,20 μ. καὶ τὸ ὕψος 47,30 μ. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πληρώσῃ; ('Απ. 928,4 δραχ.).

17) Ἐν κύκλῳ ἀκτῖνος 3 μ λαμβάνομεν τόξον 128^0 καὶ ἄγομεν τὰς ἀκτῖνας εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ οὕτω σχηματιζομένου κυκλικοῦ τομέως. ('Απ. 9,42477 τετρ. μ.).

18) Ἐκ δύο ὁμοκέντρων κύκλων τοῦ μὲν ἡ ἀκτὶς εἶναι 5 μ. τοῦ δὲ 3 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν περιφερειῶν αὐτῶν; ('Απ. 50,26544 τ.μ).

19) Κύκλος ἔχων ἀκτῖνα 5 μ. εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τετράγωνον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐκτὸς τοῦ κύκλου κειμένης ἐπιφανείας τοῦ τετραγώνου. ('Απ. 21,46025 τ.μ.)

20) Οἰκόπεδόν τι ἐπωλήθη πρὸς 3,40 δραχ. τὸν τεκτονικὸν τετραγωνικὸν πῆχυν. Ἐκ πόσων βασιλικῶν στρεμμάτων ἀποτελεῖται τοῦτο, ἂν ἡ ὁλικὴ αὐτοῦ ἀξία εἶναι 34000 δραχμαί; ('Απ. 5 β.σ., 625).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

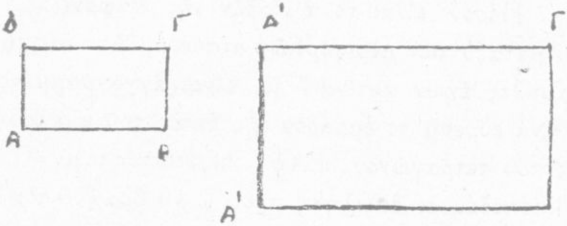
107. **Εὐθ. τμήματα ἀνάλογα πρὸς ἄλλα.**—Νοήσωμεν τρία εὐθύγραμμα τμήματα, τῶν ὁποίων τὰ μήκη εἶναι κατὰ σειρὰν 2 μ., 4 μ. καὶ 7 μ. καὶ ἕτερα τρία ἔχοντα μήκη 3×10 μ., 4×10 μ. καὶ 7×10 μ. Τὰ τελευταῖα ταῦτα εὐθ. τμήματα, λέγονται ἀνάλογα πρὸς τὰ πρῶτα. Ἐπίσης τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι μήκη 3×12 μ., 4×12 μ. καὶ 7×12 λέγονται ἀνάλογα πρὸς τὰ πρῶτα.

Γενικῶς: Δύο ἢ πλείονα εὐθ. τμήματα λέγονται ἀνάλογα πρὸς ἄλλα ἰσάριθμα, ἂν τὰ μήκη αὐτῶν προκύπτωσιν ἐκ τῶν μηκῶν τῶν ἄλλων πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν ἀριθμῶν 3×12, 4×12, 7×12 πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ $\frac{1}{12}$ προκύπτουσιν οἱ ἀριθμοί, 3,4,12 καὶ τὰ εὐθ. τμήματα, ὧν τὰ μήκη εἶναι 3 μ., 4., 12. εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἔχοντα μήκη 3×12 μ. 4×12 μ. καὶ 7×12 μ. Τὰ δύο εὐθ. τμήματα, ὧν τὰ μήκη προκύπτουσιν ἐξ ἀλλήλων διὰ πολλαπλασιασμοῦ, καλοῦνται ἀντίστοιχα ἢ ὁμόλογα τμήματα.

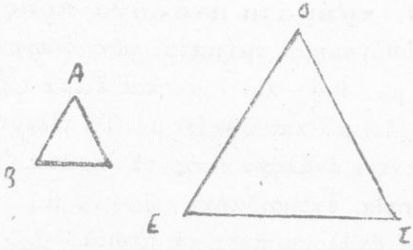
Σημ. Τὸ μῆκος εὐθ. τμήματος ΑΒ σημειοῦμεν συνήθως οὕτω (ΑΒ).

§ 108. **Ὅμοια εὐθ σχήματα.**—Ἔστω ΑΒΓΔ (Σχ. 96)



(Σχ. 96)

τυχὸν ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν ΑΒ καὶ ὕψος ΑΔ. Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τυχούσης εὐθείας τμῆμα Α΄Β΄ διπλάσιον τοῦ ΑΒ καὶ ἐπὶ τῶν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ καθέτων ἂς λάβωμεν τμήματα Α΄Δ΄ καὶ Β΄Γ΄ διπλάσια τοῦ ΑΔ, ἂς φέρωμεν δὲ τέλος τὸ εὐθ. τμῆμα Δ΄Γ΄. Οὕτω σχηματίζεται ἕτερον ὀρθογώνιον Α΄Β΄Γ΄Δ΄, τοῦ ὁποίου αἱ μὲν γωνίαι εἶναι ἴσαι, μία πρὸς μίαν, πρὸς τὰς γωνίας

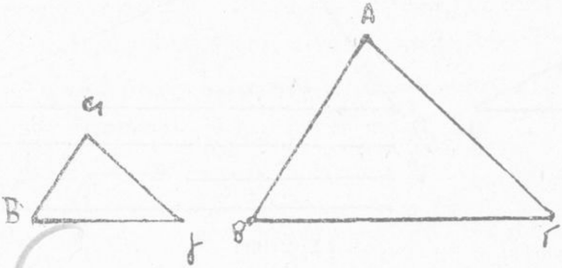


(Σχ. 97)

τοῦ ΑΒΓΔ, αἱ δὲ πλευραὶ ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς ἐκείνου ἐκ κατασκευῆς. Τὰ δύο ταῦτα ὀρθογώνια λέγονται ὅμοια. Αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ Α΄Β΄ λέγονται ὁμόλογοι πλευραί· ὁμοίως ὁμόλογοι εἶναι αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ Β΄Γ΄, ΓΔ καὶ Γ΄Δ΄ ΑΔ, καὶ Α΄Δ΄. Ὁμοίως τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (Σχ. 97), ὧν τὸ δεύτερον ἔχει πλευρὰς τριπλασίας τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου καὶ τὰς γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν πρὸς τὰς γωνίας αὐτοῦ εἶναι ὅμοια.

Γενικῶς: Δύο εὐθύγραμμα σχήματα λέγονται ὅμοια, ἐὰν αἱ μὲν γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν, αἱ δὲ πλευραί, εἰς τὰς ὁποίας πρόσκεινται ἴσαι γωνίαι, εἶναι ἀνάλογοι.

Αἱ πλευραὶ δύο ὁμοίων σχημάτων, εἰς τὰς ὁποίας πρόσκεινται ἴσαι γωνίαι λέγονται ὁμόλογοι πλευραί.

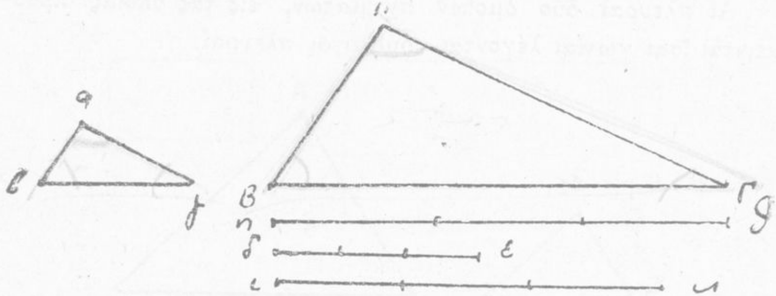


(Σχ. 98)

§ 109. **Ὅμοια τρίγωνα.**—Α΄. Ἔστω τρίγωνόν τι αβγ (Σχ. 98). Ἐπὶ τυχούσης εὐθείας ἂς λάβωμεν τμῆμα ΑΒ διπλάσιον τῆς πλευρᾶς αβ καὶ ἂς κατασκευάσωμετ μὲ πλευρὰν ΑΒ καὶ κορυφὰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ δύο γωνίας Α καὶ Β ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς γωνίας α καὶ β καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ΑΒ κειμένας (§ 60). Αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων τέμνονται εἴς τι σημεῖον Γ καὶ σχηματίζεται νέον τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς γωνίας του ἴσας, μίαν πρὸς μίαν τὰς γωνίας τοῦ αβγ (§ 70 Β΄.). Ἐὰν ἤδη τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΒΓ συγκρίνωμεν τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαβήτου πρὸς τὰς αγ καὶ βγ, βλέπομεν ὅτι, ὅπως $AB=\alpha\beta\times 2$, οὕτω καὶ $A\Gamma=\alpha\gamma\times 2$ καὶ $B\Gamma=\beta\gamma\times 2$· τὰ τρίγωνα ὅθεν ΑΒΓ καὶ αβγ εἶναι ὅμοια. Τοῦτο συμβαίνει δι' ὅλα τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι πάσας τὰς γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν. Ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν, εἶναι ὅμοια.

Β΄. Ἔστω τρίγωνόν τι αβγ (Σχ. 99). Ἐπὶ εὐθείας τινὸς ἂς λάβωμεν διαδοχικῶς τρία τμήματα ἴσα τῇ πλευρᾷ αβ, ὅτε ἀποτελεῖται τὸ τμῆμα δε τριπλάσιον τῆς πλευρᾶς αβ· ὁμοίως σχηματίζομεν τμῆμα ηθ τριπλάσιον τῆς βγ καὶ ικ τριπλάσιον τῆς αγ. Ἤδη ἂς κατασκευάσωμεν τρίγων ΑΒΓ ἔχον πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰ τμήματα δε, ηθ, ικ (§ 94) ἤτοι τριπλασίας τῶν πλευρῶν τοῦ αβγ. Ἐπιθέτοντες τὰς γωνίας α, β, γ τοῦ τριγώνου αβγ ἀντι-



(Σχ. 99)

στοίχως ἐπὶ τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ τοῦ ΑΒΓ βλέπομεν ὅτι ἐφαρμόζουσι μία πρὸς μίαν. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ταῦτα ἔχουσι τὰς γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, ἔχουσι δὲ καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους. Ἄρα:

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.

Γʹ. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν γωνίας Α ἴσης τῇ γωνίᾳ α τριγώνου αβγ ἂς λάβωμεν τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ ἀνάλογα πρὸς τὰς πλευρὰς αβ καὶ αγ, π. χ. ΑΒ$=$αβ$\times$3 καὶ ΑΓ$=$αγ$\times$3, καὶ ἂς χαράξωμεν τὸ τμῆμα ΒΓ. Συγκρίνοντες τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαβήτου τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ βγ τῶν δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ αβγ (Σχ. 99) βλέπομεν ὅτι ΒΓ$=$βγ$\times$3. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ταῦτα ἔχουσι τὰς πλευρὰς ἀναλόγους καί, κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν, εἶναι ὅμοια. Ἄρα:

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῆς ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.

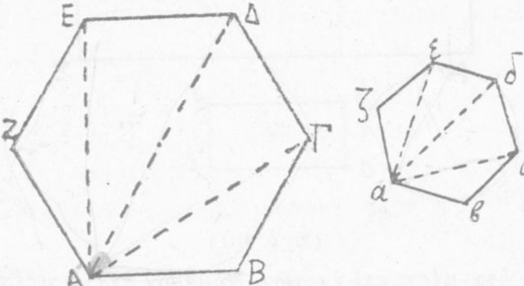
Σημ. Εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι αἱ κείμεναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν καὶ ἴσαι γωνίαι αἱ κείμεναι ἀπέναντι ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἐφαρμογαί. 1) Κατασκευάσατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας τυχὸν τρίγωνον, διαιρέσατε δύο πλευρὰς αὐτοῦ εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ χαράξατε τὸ εὐθ. τμῆμα, ὅπερ ὁρίζουσι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τούτων. Ἀποδείξατε ὅτι τὸ τμῆμα τοῦτο εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου (§ 109 Γ').

2) Ἀποδείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἄλλου τριγώνου, εἶναι ὅμοιον πρὸς αὐτό. (§ 189 ἐφαρμ. 1. § 109 Β'.)

3) Ἀποδείξατε ὅτι δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰς καθέτους πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια (§ 109 Γ'.).

§ 110. **Ἀνάλυσις ὁμοίων πολυγώνων εἰς ὅμοια τρίγωνα.** — Ἔστωσαν δύο ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕΖ



(Σχ. 100)

καὶ αβγδεζ (σχ. 100) καὶ ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι ἑκάστη πλευρὰ τοῦ πρώτου εἶναι διπλασία τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς τοῦ δευτέρου, ἤτοι (ΑΒ)=(αβ)$\times$2, (ΒΓ)=(βγ)$\times$2 κ.τ.λ.

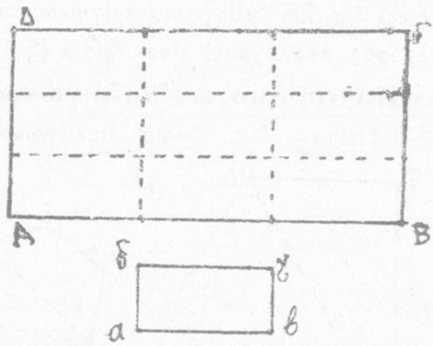
Ἐὰν φέρωμεν πάσας τὰς διαγωνίους αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ δύο ὁμολόγων κορυφῶν αὐτῶν π. χ. διὰ τῶν Α καὶ α, διαιροῦνται τὰ πολύγωνα εἰς τρίγωνα ἰσάριθμα· ἐὰν δὲ τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαβήτου συγκρίνωμεν τὰς διαγωνίους τοῦ ἑνὸς πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ ἄλλου, βλέπομεν ὅτι (ΑΓ)=(αγ)$\times$2, (ΑΔ)=(αδ)$\times$2, (ΑΕ)=(αε)$\times$2.

Τὰ τρίγωνα ὅθεν ΑΒΓ καὶ αβγ εἶναι (§ 109 Β'.) ὅμοια. ὁμοίως τὰ ΑΓΔ καὶ αγδ, ΑΔΕ καὶ αδε, ΑΖΕ καὶ αζε εἶναι ὅμοια.

Ἄρα: Αἱ διαγώνιοι δύο ὁμοίων πολυγώνων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ δύο ὁμολόγων κορυφῶν αὐτῶν, διαιροῦσι ταῦτα εἰς τρίγωνον ἰσάριθμα καὶ ὅμοια ἓν πρὸς ἕν.

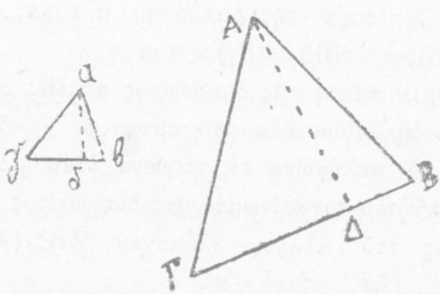
§ 111. Σχέσις μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων σχημάτων.

Ἔστωσαν δύο ὅμοια ὀρθογώνια ΑΒΓΔ καὶ αβγδ (Σχ.101). Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι (ΑΒ)=(αβ)×3,(ΒΓ)=(βγ)×3,(ΓΔ)=(γδ)×3 καὶ (ΑΔ)=(αδ)×3. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ ὕψος



(Σχ. 101)

ΑΔ εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν ἄλλην, βλέπομεν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ διαιρεῖται εἰς ἐννέα ὀρθογώνια ἴσα πρὸς τὸ αβγδ.



(Σχ. 102)

Τὸ ἐμβαδὸν ὅθεν τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι ἐννεαπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ αβγδ.

Ἔστωσαν ἐπίσης δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ (102) καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι $(\mathrm{AB})=(\alpha\beta)\times 4$, $(\mathrm{B\Gamma})=(\beta\gamma)\times 4$ καὶ $(\mathrm{A\Gamma})=(\alpha\gamma)\times 4$. Ἐὰν φέρωμεν δύο ὁμόλογα ὕψη ΑΔ καὶ αδ καὶ συγκρίνωμεν ταῦτα πρὸς ἄλληλα, βλέπομεν ὅτι $(\mathrm{A\Delta})=(\alpha\delta)\times 4$. Ἐνθυμούμενοι ἤδη τὸν τρόπον τῆς εὑρέσεως τοῦ ἐμβαδοῦ παντὸς τριγώνου, ἔχομεν $(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{(\mathrm{\Gamma B})\times(\mathrm{A\Delta})}{2}$ ἢ $(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{(\beta\gamma)\times 4\times(\alpha\delta)\times 4}{2}$ ἢ $(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{(\beta\gamma)\times(\alpha\delta)}{2}\times 16=(\alpha\beta\gamma)\times 16$, ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓ εἶναι δεκαεξαπλάσιον τοῦ αβγ.

Ἔστωσαν τέλος δύο ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε (Σχ. 100) καὶ ἔστω ὅτι $(\mathrm{AB})=(\alpha\beta)\times 2$. $(\mathrm{B\Gamma})=(\beta\gamma)\times 2$ κτλ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ, ΑΕΖ εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοια πρὸς τὰ αβγ, αγδ, αδε, αεζ (§ 110), ἕπεται ὅτι:

$(\mathrm{AB\Gamma})=(\alpha\beta\gamma)\times 4$, $(\mathrm{A\Gamma\Delta})=(\alpha\gamma\delta)\times 4$, $(\mathrm{A\Delta E})=(\alpha\delta\varepsilon)\times 4$ καὶ $(\mathrm{AEZ})=(\alpha\varepsilon\zeta)\times 4$. Προσθέτοντες ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι $(\mathrm{AB\Gamma\Delta EZ})=(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta)\times 4$.

Ἄρα: Ἐὰν ἐκ δύο εὐθ. σχημάτων Σ καὶ σ αἱ πλευραὶ τοῦ Σ εἶναι γινόμενα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τοῦ σ ἐπί τινα ἀριθμὸν λ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Σ θὰ εἶναι γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ σ ἐπὶ λ^2.

Ἐφαρμογαί: 1) Ἐὰν πᾶσαι αἱ πλευραὶ τριγώνου πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 7, ποσάκις τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ γίνεται μεγαλύτερον;

2) Ἐὰν ἡ πλευρὰ τετραγώνου εἶναι ἑξαπλασία τῆς πλευρᾶς ἄλλου, ποσάκις ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρώτου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἄλλου τετραγώνου;

3) Τριγώνου τινὸς αἱ πλευραὶ ἔχουσι μῆκος 3, 4 καὶ 5 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν πλευρῶν ἄλλου τριγώνου ὁμοίου καὶ ἔχοντος τετραπλάσιον ἐμβαδόν;

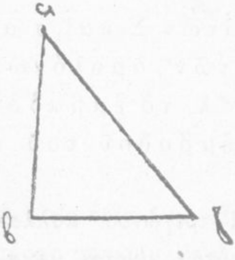
ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΕΠΙ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΥ

§ 112. Πολλάκις λαμβάνομεν ἀνάγκην νὰ ἀπεικονίσωμεν ἐπὶ χάρτου ἀγρὸν ἢ ἄμπελον ἢ οἱονδήποτε γήπεδον, τὸ ὁποῖον βεβαίως ὁ χάρτης δὲν δύναται νὰ περιλάβῃ μὲ τὰς πραγματικὰς αὐτοῦ διαστάσεις. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει γράφομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ ἀπεικονιζόμενον, ὅπερ καλεῖται διάγραμμα ἐκείνου. Ἡ ἀπεικόνισις αὕτη γίνεται ὡς ἀκολούθως θέλομεν ἐκθέσει.

Σημ. Ἐν τοῖς ἀκολούθοις θέλομεν σημειοῖ διὰ κεφαλαίων γραμμάτων πᾶν σχῆμα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους θεωρούμενον, διὰ τῶν ἀντιστοίχων δὲ μικρῶν τὸ ἐπὶ τοῦ χάρτου ὅμοιον αὐτῷ.

§ 113. **Α΄. Ἀπεικόνισις τριγώνου.** — α΄. Κατασκευάζομεν τμήματα ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς ὡρισμένον τι ὑποπολλαπλάσιον (π.χ. πρὸς τὸ $\frac{1}{10000}$) τῶν πλευρῶν τοῦ τριγωνικοῦ ἀγροῦ ΑΒΓ. Εἶτα κατασκευάζομεν τρίγωνον αβγ. τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς τὰ τμήματα ταῦτα. Τὸ οὕτω σχηματιζόμενον τρίγωνον αβγ εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΒΓ (§ 109 Β΄.).

β΄. Κατασκευάζομεν γωνίαν βαγ (Σχ. 103) ἴσην γωνίᾳ τινι Α τοῦ τριγωνικοῦ ἀγροῦ ΑΒΓ καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς λαμβάνομεν μήκη αβ, αγ ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὸ $\frac{1}{10000}$ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ της γωνίας Α. Ἄγομεν τέλος τὸ εὐθ. τμῆμα βγ καὶ σχηματίζομεν τὸ τρίγωνον αβγ, ὅπερ εἶναι ὅμοιον τῷ τριγωνικῷ ἀγρῷ ΑΒΓ (§ 109—Γ΄.).



(Σχ. 103)

γ΄. Χαράσσομεν τμῆμα αγ ἴσον πρὸς ὡρισμένον ὑποπολλαπλάσιον, π.χ. τὸ $\frac{1}{10000}$ πλευρᾶς τινος ΑΓ τοῦ ἀγροῦ. Εἶτα σχηματίζομεν δύο γωνίας ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς Α καὶ Γ τοῦ ἀγροῦ, ἐχούσας πλευρὰν αγ, κορυφὰς ἀντιστοίχως τὰ ἄκρα α καὶ γ τοῦ τμήματος αγ καὶ κειμένας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς αγ. Τῶν μὴ κοινῶν πλευρῶν τῶν γωνιῶν τούτων τεμνομένων σχηματίζεται τὸ τρίγωνον αβγ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΒΓ (§ 109 Α΄.).

Ἐκ τῶν τριῶν τούτων μεθόδων ἀπεικονίσεως ἡ α΄. εἶναι μᾶλλον ἐν χρήσει, διότι αἱ ἄλλαι δύο ἀπαιτοῦσι τὴν χρῆσιν εἰδικῶν ὀργάνων διὰ τὴν μέτρησιν γωνιῶν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.

Σημ. Ἡ κλασματικὴ μονὰς $\frac{1}{10000}$, ἧς ἐγένετο χρῆσις ἐν τοῖς προηγουμένοις παραδείγμασι, καλεῖται κλῖμαξ ἢ σμίκρυνσις. Ὁ παρονομαστὴς τῆς κλίμακος δεικνύει ποσάκις εὐθύγραμμόν τι τμῆμα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους κείμενον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἐπὶ τοῦ χάρτου ὁμολόγου. Αἱ συνήθεις κλίμακες εἶναι $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ κτλ. καὶ αἱ διπλάσιαι αὐτῶν $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{500}$ κτλ.

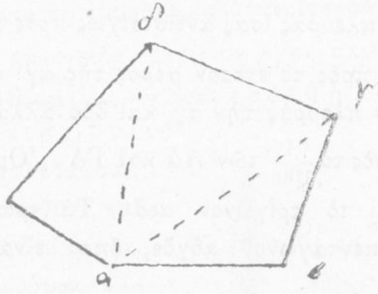
Ἐφαρμογαί: 1) Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{10000}$ ἀγρὸς ἔχων σχῆμα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ ἔχουσι μήκη 60^{μ} ἡ μὲν καὶ 80^{μ} ἡ ἄλλη.

2) Τριγώνου τινὸς αἱ πλευραὶ εἶναι 3500 μ. ἡ μία, 1800 μ. ἡ ἄλλη καὶ 2000 μ. ἡ τρίτη Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{100000}$ καὶ νὰ μετρηθῶσιν αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

Σημ. Θὰ μετρηθῶσιν αἱ γωνίαι τοῦ διαγράμματος διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου.

3) Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1.000.000}$ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἔχει μῆκος μῆκος 50000 μ.

§ 114. **Β΄. Ἀπεικόνισις οἱωνδήποτε εὐθ. σχημάτων.** — Διὰ τὴν ἀπεικόνισιν τῶν τετραπλεύρων καὶ πολυγώνων γίνεται χρῆσις τῶν ἀκολούθων μεθόδων.



(Σχ. 104)

α΄. Ἔστω ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τυχὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ ἀπεικονίσωμεν ὑπὸ κλίμακά τινα π. χ. $\frac{1}{1000}$.

Μετροῦμεν ἐν πρώτοις τὰς πλευρὰς καὶ γωνίας αὐτοῦ, εἶτα χαράσσομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου εὐθ. τμῆμα αβ (Σχ. 104) ἴσον πρὸς τὸ

$\frac{1}{1000}$ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ σχήματος ΑΒΓΔΕ. Μὲ πλευρὰν αϐ καὶ κορυφὴν α σχηματίζομεν γωνίων ἴσην τῇ γωνίᾳ Α καὶ ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς αὐτῆς λαμϐάνομεν τμῆμα αε ἔχον μῆκος ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ μήκους τῆς ΑΕ. Ὁμοίως μὲ πλευρὰν εα καὶ κορυφὴν ε σχηματίζομεν, πρὸς ὃ μέρος, τῆς αε φέρεται ἡ αϐ, γωνίαν ἴσην τῆς Ε καὶ ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς αὐτῆς λαμϐάνομεν τμῆμα (εδ) ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{1000}$ τῆς (ΕΔ). Οὕτως ἐξακολουθοῦντες σχηματίζομεν τὸ σχῆμα αϐγδε, ὅπερ εἶναι ὅμοιον τῷ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους κειμένῳ ΑΒΓΔΕ (§ 108).

ϐ΄. Ἐὰν χαράξωμεν πάσας τὰς διαγωνίους τοῦ διαγράμματος αϐγδε (Σχ. 104), αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἔκ τινος κορυφῆς αὐτοῦ α, νοήσωμεν δὲ καὶ τὰς ἐπὶ τοῦ σχήματος ΑΒΓΔΕ ἀντιστοίχους ΑΓ καὶ ΑΔ, ἀναλύονται ἀμφότερα τὰ σχήματα αϐγδε καὶ ΑΒΓΔΕ εἰς τρίγωνα ἰσάριθμα καὶ ὅμοια ἓν πρὸς ἓν (§ 110).

Ἐκ τούτου προκύπτει ὁ ἀκόλουθος τρόπος ἀπεικονίσεως, τὸν ὁποῖον μάλιστα μεταχειριζόμεθα, ὁσάκις θέλομεν ν' ἀποφύγωμεν τὴν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μέτρησιν γωνιῶν.

Μετροῦμεν πάσας τὰς πλευρὰς τοῦ σχήματος ΑΒΓΔΕ καὶ πάσας τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΑΔ, αἵτινες διέρχονται διά τινος κορυφῆς Α αὐτοῦ. Ἔπειτα κατασκευάζομεν τρίγωνον αϐγ (σχ. 104), τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὸ $\frac{1}{1000}$ τῶν ΑΒ,ΒΓ καὶ ΑΓ. Εἶτα πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς αγ σχηματίζομεν τρίγωνον αγδ ἔχον πλευρὰς τὴν αγ καὶ δύο ἄλλας αδ καὶ γδ ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὸ $\frac{1}{1000}$ τῶν ΑΔ καὶ ΓΔ. Ὁμοίως τέλος κατασκευάζομεν καὶ τὸ τρίγωνον αεδ. Τὰ τρία ταῦτα τρίγωνα ἀποτελοῦσι τὸ πεντάγωνον αϐγδε, ὅπερ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ.

Σημ. Ὅπως πᾶσα πλευρὰ ἢ διαγώνιος οὕτω καὶ πᾶν ἄλλο εὐθ. τμῆμα διαγράμματός τινος λαμϐανόμενον τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ παρανομαστὴς τῆς κλίμακος, ἀποτελεῖ τὸ ἀντίστοιχον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εὐθ. τμῆμα.

Ἐφαρμογαί: 1) Ἄμπελός τις ἔχει σχῆμα τραπεζοειδοῦς

ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν (ΑΓ) = 450 μ. ἡ πλευρὰ (ΑΒ)= 350 μ. ἡ (ΒΓ)=180 μ ἡ (ΔΓ)=250 μ. καὶ ἡ (ΔΑ)=260 μ. Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς.

2) Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου ἡ μεγαλυτέρα βάσις ἔχει μῆκος 50 μ. ἡ μικροτέρα 35 μ. ἡ τρίτη πλευρὰ 12 μ. καὶ ἡ ὑπὸ ταύτης καὶ τῆς μεγαλυτέρας βάσεως σχηματιζομένη γωνία εἶναι ἴση πρὸς $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς γωνίας.

§ 115. **Γ'. Ἀπεικόνισις κύκλου.** — Κυκλικὸς ἀγρὸς κτλ. ἀπεικονίζεται διὰ κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ὡρισμένον τι ὑποπολλαπλάσιον τῆς ἀκτῖνος ἐκείνου.

Ἐὰν π. χ. ἡ ἀκτὶς κυκλικῆς ἅλω εἶναι 30 μ. ἀπεικονίζομεν αὐτὴν ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$ διὰ κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα 0,030 μ.

Σημ. Καὶ τυχὸν κυκλικὸς τομεὺς ἀπεικονίζεται διὰ κυκλικοῦ τομέως ἴσης γωνίας καὶ ἀκτῖνος ἴσης πρὸς ὡρισμένον τι ὑποπολλαπλάσιον τῆς ἀκτῖνος ἐκείνου.

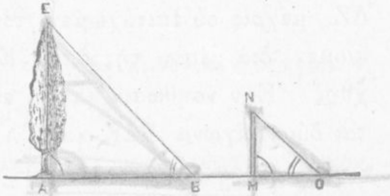
Ἐφαρμογαί: 1) Ἀπεικονίσατε ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$ κύκλον ἀκτῖνος 8 μ.

2) Ἀπεικονίσατε ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$ κυκλικὸν τομέα 60° καὶ ἀκτῖνος 5 μ.

3) Ἀπεικονίσατε τῇ βοηθείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{100}$ κανονικὸν ἑξάγωνον ἔχον πλευρὰν 4 μ.

§ 116. **Πρόβλημα.** — Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος δένδρου ἐκ τῆς σκιᾶς αὐτοῦ.

Λύσις: Ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, ἐφ' οὗ ὑψοῦται τὸ δένδρον, καὶ ὅπερ ὑποθέτομεν ὁριζόντιον, ἐμπήγομεν κατακορύφως ῥάβδον τινὰ ΜΝ, ἡ ὁποία ῥίπτει σκιὰν ΜΟ (Σχ. 105), τῆς ὁποίας μετροῦμεν τὸ μῆκος.



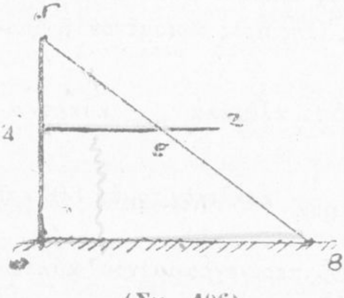
(Σχ. 105)

Ἐπειδὴ αἱ ἡλιακαὶ ἀκτῖνες ΕΒ καὶ ΝΟ θεωροῦνται παράλληλοι, ἕνεκα τῆς μεγάλης ἀφ' ἡμῶν ἀποστάσεως τοῦ ἡλίου αἱ γωνίαι Β καὶ Ο εἶναι ἴσαι (§ 60 Σημ.) ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $\hat{A}=\hat{M}$, ἕπεται ὅτι καὶ $\hat{E}=\hat{N}$, ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΜΝΟ εἶναι ὅμοια (§ 109 Α΄. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ ὕψος (ΑΕ) τοῦ δένδρου καὶ ἡ σκιὰ αὐτοῦ (ΑΒ) εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ μήκη (ΜΝ) καὶ ΜΟ. Ἐὰν δηλ. εἶναι $(MN)=(MO)\times\rho$. (1), θὰ εἶναι καὶ $(AE)=(AB)\times\rho$. (2). Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς ἰσότητος (1) προκύπτει εὐκόλως ὅτι $\rho=\frac{(MN)}{(MO)}$ ἡ ἰσότης (2) γίνεται. $(AE)=(AB)\times\frac{(MN)}{(MO)}$ (3).

Ἂν π.χ. $(AB)=8\mu$. $(MO)=1{,}60\ \mu$. καὶ $(MN)-2\ \mu$. εὑρίσκομεν ὅτι $(AE)=8\times\frac{2}{1{,}60}=10\ \mu$.

Σημ. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον εὑρίσκομεν καὶ τὸ ὕψος κατακορύφου πύργου ἢ κωδωνοστασίου.

§ 117. **Πρόβλημα.**—Εὑρεῖν τὸ πλάτος ποταμοῦ χωρὶς νὰ μεταβῶμεν εἰς τὴν ἀπέναντι ὄχθην.



(Σχ. 106)

Λύσις: Εἴς τι σημεῖον Α (Σχ. 106) τῆς ὄχθης, ἐφ' ἧς ἱστάμεθα, στηρίζομεν κατακορύφως κανόνα ΑΓ, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι γνωστὸν καὶ κατά τι μικρότερον τοῦ ἀναστήματος ἡμῶν. Κατὰ μῆκος τοῦ κανόνος τούτου μετακινοῦμεν καθέτως ἐπ' αὐτὸν ἕτερον κανόνα ΔΖ ὁ ὁποῖος φέρει εἰς γνωστὴν ἀπὸ τοῦ Δ. ἀπόστασιν ὀπήν τινα Ε. Θέτοντες τὸν ὀφθαλμὸν ἡμῶν εἰς τὸ Γ μετακινοῦμεν τὸν κανόνα ΔΖ, μέχρις οὗ ἐπιτύχωμεν τοιαύτην αὐτοῦ θέσιν ὥστε νὰ βλέπωμεν διὰ μέσου τῆς ὀπῆς Ε σημεῖόν τι Β. τῆς ἀπέναντι ὄχθης. Ἐὰν νοηθῶσιν καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΕΒ, σχηματίζονται δύο τρίγωνα ΓΔΕ καὶ ΓΑΒ ὅμοια (§ 109 Α΄) ἐξ ὧν προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες $(A\Gamma)=(\Delta\Gamma)\times\rho$. (1)

$$(AB)=(\Delta E)\times\rho. \quad (2)$$

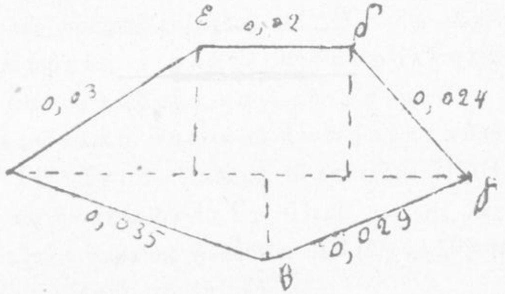
Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς (1) προκύπτει ὅτι $\rho=\frac{(A\Gamma)}{(\Delta\Gamma)}$ ἡ (2) γίνεται $(AB)=(\Delta E)\times\frac{(A\Gamma)}{(\Delta\Gamma)}$ (3). Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν τὸ πλάτος (ΑΒ) τοῦ ποταμοῦ γνωρίζοντες τὰ μήκη (ΑΓ), (ΔΕ) καὶ μετροῦντες τὸ μῆκος τοῦ εὐθ. τμήματος ΔΓ. Ἐὰν π.χ. εἶναι (ΑΓ)=1,40 μ. (ΔΕ)=1 μ. καὶ (ΓΑ)=0,40 εὑρίσκομεν ὅτι (ΑΒ)=1 μ. $\times \frac{1,40}{0,40}$ =3,5 μ.

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

1) Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{10000}$ ὀρθογώνιον ἔχον βάσιν 700 μ. καὶ ὕψος 200 μ. Τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαγράμματος νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου αὐτοῦ.

2) Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{50}$ τετραγωνικὴ ἄμπελος, ἧς ἑκάστη πλευρὰ ἔχει μῆκος 12,5 μ.

3) Τὸ σχῆμα αβγδε (Σχ. 107) ἀπεικονίζει ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{500}$ ἀγρὸν ΑΒΓΔΕ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀγροῦ τούτου.



(Σχ. 107)

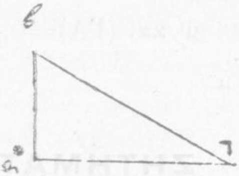
4) Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$ κανονικὸν ἑξάγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἔχει μῆκος 35 μ.

5) Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἔχει μῆκος 60 μ.

6) Ὁ κύκλς κ (Σχ. 108) ἀπεικονίζει ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{500}$ ἀλώνιον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀλωνίου τούτου.

7) Τραπεζίου ἡ μία βάσις ἔχει μῆκος 140 μ. ἡ ἄλλη 35 μ.

(Σχ. 108)



(Σχ. 109)

καὶ ἡ μία τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν κάθετος οὖσα ἐπὶ τὰς βάσεις ἔχει μῆκος 32 μ. Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$.

8) Τὸ σχῆμα αβγ (Σχ. 109) ἀπεικονίζει ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{500}$ ἄμπελον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς.

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΠΟΛΥΕΔΡΑ

§ 118. **Θέσεις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον.** — Ἡ εὐθεῖα ΓΔ (Σχ. 1) κεῖται ὅλη ἐν τῇ ἐπιπέδῳ ΓΔΘΑ. Ὁμοίως ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΑΘ, ΔΘ κεῖται ὅλη ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Ἡ εὐθεῖα ΕΒ. (Σχ. 1) οὐδέποτε συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον ΓΔΘΑ, ὅσον δήποτε καὶ ἂν προεκταθῶσιν ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον. Αὕτη καλεῖται παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΓΔΘΑ· ὁμοίως ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΓΔΘ.

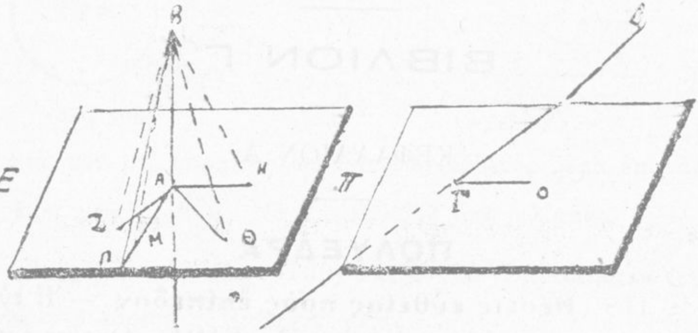
Γενικῶς: Εὐθεῖά τις λέγεται παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον, ἐὰν ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον οὐδέποτε συναντῶνται, ὅσῳ καὶ ἂν προεκταθῶσιν.

Ἡ εὐθεῖα ΓΕ (Σχ. 1) διαπερᾷ τὸ ἐπίπεδον ΑΓΔΘ καὶ ἔχει μετ' αὐτοῦ ἓν κοινὸν σημεῖον τὸ Γ. Περὶ ταύτης λέγομεν ὅτι τέμνει τὸ ἐπίπεδον. Ὁμοίως ἡ εὐθεῖα ΑΒ (Σχ. 110) τέμνει τὸ ἐπίπεδον Ε, ἡ ΓΔ τέμνει τὸ ἐπίπεδο Π.

Κατὰ ταῦτα, αἱ διάφοροι θέσεις, τὰς ὁποίας εὐθεῖά τις δύναται νὰ λάβῃ πρὸς ἐπίπεδον, εἶναι τρεῖς:

α΄) ἡ εὐθεῖα κεῖται ὅλη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, β΄) ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον καὶ γ΄) ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸ ἐπίπεδον.

§ 119. **Εὐθεῖαι κάθετοι καὶ πλάγιαι πρὸς ἐπίπεδον.** — Ἡ εὐθεῖα ΑΖ (Σχ. 1) εἶναι κάθετος ἐπὶ ἑκατέραν τῶν εὐθειῶν ΑΘ καὶ ΑΓ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓΔΘ ὡς καὶ ἐπὶ πᾶσαν ἄλλην εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν διὰ τοῦ Α δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Αὕτη καλεῖται κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΓΔΘ. Ὁμοίως ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 110) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ε, διότι εἶναι κάθετος πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τούτου, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τοῦ Α.



(Σχ. 110)

Γενικῶς: Εὐθεῖά τις λέγεται κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον ἐὰν εἶναι κάθετος πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου αὐτῆς καὶ τοῦ ἐπιπέδου.

Ἡ εὐθεῖα ΓΔ (Σχ 110) τέμνει τὸ ἐπίπεδον Π. καὶ δὲν εἶναι κάθετος πρὸς πάσας τὰς εὐθείας αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τοῦ Γ· δὲν εἶναι λοιπὸν αὕτη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. Λέγεται δὲ αὕτη πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π. Ὁμοίως ἡ ΒΗ εἶναι πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ε (Σχ. 110).

Γενικῶς: Πᾶσα εὐθεῖα, ἡ ὁποία τέμνει ἐπίπεδον καὶ δὲν εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτό, καλεῖται πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

Τὸ κοινὸν σημεῖον ἐπιπέδου καὶ εὐθείας τεμνούσης αὐτὸ (καθέτως ἢ πλαγίως) καλεῖται πούς τῆς εὐθείας ταύτης.

Ἐφαρμογαί. 1) Στηρίξατε ἐπὶ τοῦ μελανοπίνακος τὸν γνώμονα οὕτως ὥστε ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ νὰ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτόν.

2) Τείνατε νῆμα παραλλήλως πρὸς τὸ δάπεδον αἰθούσης καὶ εἶτα παραλλήλως πρός τινα τοῖχον αὐτῆς.

§ 120. **Ἰδιότητες τῆς καθέτου καὶ πλαγίων πρὸς ἐπίπεδον.** — Α΄. Τῇ βοηθείᾳ τοῦ γνώμονος βεβαιούμεθα εὐκόλως περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

Δι' ἑκάστου σημείου ἐπὶ ἐπιπέδου ἢ ἐκτὸς αὐτοῦ κειμένου ἄγεται μία μόνον κάθετος ἐπὶ αὐτό.

Β' Ἔστω ΒΑ ἡ ἐκ τοῦ Β ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ε (Σχ. 110) καὶ ΒΗ τυχοῦσα πλαγία καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀγομένη. Ἐπειδὴ ἡ μὲν ΒΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΗ (§ 119 ἡ δὲ ΒΗ πλαγία πρὸς αὐτήν, συμπεραίνομεν (§ 20 Β') ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΗ.

Ἐὰν δὲ ἐπὶ δύο ἢ πλειόνων εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου Ε καὶ ἐκ τοῦ ποδὸς Α ἀγομένων λάβωμεν ἴσα τμήματα ΑΖ, ΑΗ, ΑΘ κτλ. καὶ φέρωμεν τὰς εὐθείας ΒΗ, ΒΖ, ΒΘ κτλ. σχηματίζωνται τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΑΖ, ΒΑΗ, ΒΑΘ καὶ ἐπειδὴ ταῦτα εἶναι ἴσα (§ 72 Α'.) ἕπεται ὅτι αἱ πλάγιαι ΒΖ, ΒΗ, ΒΘ κτλ. εἶναι πᾶσαι ἴσαι.

Τέλος ἂς λάβωμεν ἐπὶ εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου Ε καὶ ἐκ τοῦ Α ἀρχομένης τμῆμα ΑΛ μεγαλύτερον τοῦ ΑΗ καὶ ἂς φέρωμεν τὴν ΒΛ· αὕτη εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πλαγίας ΒΗ Τῷ ὄντι· ἂν ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΛ τμῆμα ΑΜ ἴσον τῷ ΑΗ, θὰ εἶναι, ὡς προηγουμένως ἀπεδείχθη, ΒΜ=ΒΗ· ἐπειδὴ δὲ τὸ σημεῖον Μ. κεῖται μεταξὺ Α καὶ Λ, ἀμφότεραι δὲ αἱ εὐθεῖαι ΒΜ καὶ ΒΛ εἶναι πλάγιαι πρὸς τὴν ΑΛ, ἕπεται (§ 20 Β'. γ'.) ὅτι ΒΛ>ΒΜ, ἄρα, καὶ ΒΛ>ΒΗ.

Ἄρα: Ἐὰν ἐκ σημείου ἐκτὸς ἐπιπέδου κειμένου ἀχθῇ ἡ κάθετος ἐπ' αὐτὸ καὶ ὁσαιδήποτε πλάγιαι, α') ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας, β') αἱ πλάγιαι τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου εἶναι ἴσαι καὶ γ') δύο πλάγιαι, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἄνισον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἐκείνη, τῆς ὁποίας ὁ ποὺς ἀπέχει τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου περισσότερον.

§ 121. **Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπιπέδου.**—Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπιπέδου καλεῖται τὸ εὐθ.

τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ σημείου τούτου καὶ τοῦ ποδὸς τῆς ἐξ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἀγομένης καθέτου.

§ 122. **Θέσεις δύο ἐπιπέδων πρὸς ἄλληλα.**—Τὰ ἐπίπεδα ΑΘΔΓ καὶ ΖΗΒΕ (Σχ. 1) οὐδέποτε συναντῶνται, ὅσῳ καὶ ἂν προεκταθῶσι. Ταῦτα καλοῦνται παράλληλα ἐπίπεδα. Ὁμοίως τὰ ἐπίπεδα ΑΓΕΖ καὶ ΔΘΗΒ, τὰ ΚΛΜ καὶ ΠΝΟ (Σχ. 1), οἱ ἀπέναντι τοῖχοι αἰθούσης κτλ. εἶναι παράλληλα ἐπίπεδα.

Γενικῶς: Δύο ἐπίπεδα λέγονται παράλληλα ἐὰν δὲν συναντῶνται, ὅσῳ καὶ ἂν προεκταθῶσιν.

Ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΓΕ, ΑΖ, ΔΒ, ΘΗ (Σχ. 1) εἶναι κάθετος ἐπ' ἀμφότερα τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ΑΓΔΘ καὶ ΕΒΗΖ. Τὰ δὲ μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τούτων περιεχόμενα τμήματα αὐτῶν εἶναι πάντα ἴσα, ὡς εὐκόλως διὰ τοῦ διαβήτου πειθόμεθα. Καλεῖται δὲ ἕκαστον τούτων ἀπόστασις τῶν δύο τούτων παραλλήλων ἐπιπέδων. Ὁμοίως ἕκαστον τῶν εὐθ. τμημάτων ΚΠ, ΛΝ καὶ ΜΟ παριστᾷ τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΚΛΜ καὶ ΠΝΟ (Σχ. 1).

Γενικῶς: Ἀπόστασις δύο παραλλήλων ἐπιπέδων καλεῖται τὸ μεταξὺ αὐτῶν περιεχόμενον τμῆμα τυχούσης κοινῆς αὐτῶν καθέτου.

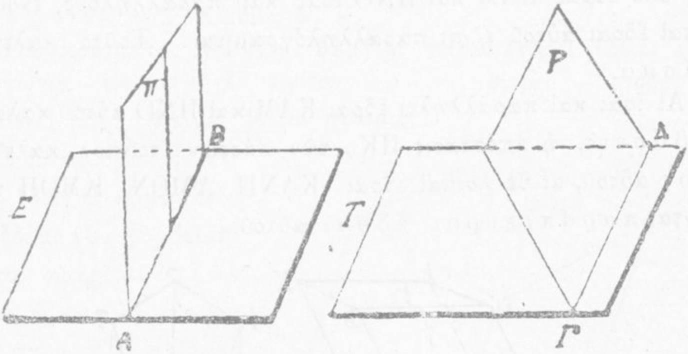
Τὰ ἐπίπεδα ΕΓΔΒ καὶ ΑΓΔΘ (Σχ. 1) τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖα ΓΔ. Τὰ ἐπίπεδα Ε καὶ Π τέμνονται κατὰ τὴν ΑΒ (Σχ. 111).

Ὥστε: Δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα ἢ τέμνονται. Τὸ ἐπίπεδον ΕΓΔΒ (Σχ. 1) περιέχει τὴν εὐθεῖαν ΕΓ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΓΔΘ. Ὁμοίως τὸ ἐπίπεδον ΒΔΘΗ περιέχει τὴν εὐθεῖαν ΒΔ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΓΔΘ. Ἑκάτερον τῶν ἐπιπέδων ΕΓΔΒ, ΒΔΘΗ καλεῖται κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπίπεδον ΑΓΔΘ.

Γενικῶς. Ἐπίπεδόν τι καλεῖται κάθετον ἐπὶ ἄλλο ἐπίπεδον, ἐὰν περιέχῃ κάθετόν τινα εὐθεῖαν ἐπὶ τὸ ἄλλο ἐπίπεδον.

Τὸ ἐπίπεδον Ρ (Σχ. 111) τέμνει τὸ ἐπίπεδον Τ καὶ δὲν εἶναι κάθετον ἐπ' αὐτό. Τὸ ἐπίπεδον Ρ καλεῖται πλάγιον ἢ κεκλιμένον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Τ. Ὁμοίως ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων, ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἡ στέγη οἰκίας, εἶναι κεκλιμμένον πρὸς τὸ δάπεδον.

Γενικῶς: Ἐὰν ἐπίπεδόν τι δὲν εἶναι παράλληλον οὐδὲ κάθετον πρὸς ἄλλο, καλεῖται πλάγιον ἢ κεκλειμένον πρὸς αὐτό.



(Σχ. 111)

Ἐφαρμογαί 1) Διαθέσατε ἐπίπεδον τεμάχιον χαρτονίου παραλλήλως πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ πίνακος.

2) Διαθέσατε τὸ αὐτὸ τεμάχιον καθέτως καὶ εἶτα πλαγίως πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ πίνακος.

3) Μετρήσατε τὴν ἀπόστασιν δύο ἀντικειμένων τοίχων τῆς αἰθούσης τῆς διδασκαλίας.

§ 123. **Πολύεδρα.** — Τὸ σῶμα ΑΒ (Σχ. 1) περικλείεται πανταχόθεν ὑπὸ ἐπιπέδων. Τὸ σῶμα τοῦτο καλεῖται πολύεδρον. Τὰ ἐπίπεδα ΑΓΔΘ, ΔΘΒΗ, ΕΓΔΒ, ΕΒΖΗ, ΕΓΑΖ καὶ ΖΑΘΗ, ὑπὸ τῶν ὁποίων περικλείεται καλοῦνται ἕδραι αὐτοῦ. Αἱ πλευραὶ ΑΓ, ΓΕ κτλ. τῶν ἑδρῶν τούτων καλοῦνται ἀκμαὶ τοῦ πολυέδρου τούτου αἱ δὲ κορυφαὶ Α, Γ, Δ, Ε κτλ. τῶν ἑδρῶν καλοῦνται κορυφαὶ τοῦ αὐτοῦ πολυέδρου.

Γενικῶς: Πολύεδρον καλεῖται πᾶν σῶμα, τὸ ὁποῖον περικλείεται πανταχόθεν ὑπὸ ἐπιπέδων.

Ἕδραι πολυέδρου καλοῦνται τὰ ἐπίπεδα, ὑπὸ τῶν ὁποίων περικλείεται τοῦτο.

Ἀκμαὶ πολυέδρου καλοῦνται αἱ κορυφαὶ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ.

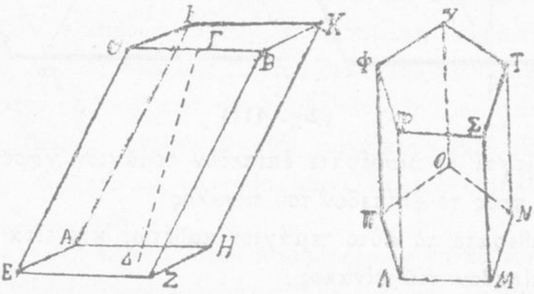
Κορυφαὶ πολυέδρου καλοῦνται αἱ κορυφαὶ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ.

Τὰ πολύεδρα ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐδρῶν αὐτῶν διακρίνονται εἰς τετράεδρα, πεντάεδρα, ἑξάεδρα κτλ.

ΔΙΑΦΟΡΑ ΕΙΔΗ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

§ 124. **Πρίσματα.**—Τὸ πολύεδρον ΚΛΜΟΝΠ (Σχ. 1) ἔχει δύο ἕδρας ΚΛΜ καὶ ΠΝΟ ἴσας καὶ παραλλήλους, ἐνῷ αἱ λοιπαὶ ἕδραι αὐτοῦ εἶναι παραλληλόγραμμα. Τοῦτο καλεῖται πρίσμα.

Αἱ ἴσαι καὶ παράλληλοι ἕδραι ΚΛΜ καὶ ΠΝΟ αὐτοῦ καλοῦνται βάσεις, ἡ ἀπόστασις ΠΚ τῶν βάσεων τούτων καλεῖται ὕψος αὐτοῦ, αἱ δὲ λοιπαὶ ἕδραι ΚΛΝΠ, ΛΜΟΝ, ΚΜΟΠ καλοῦνται παράπλευροι ἕδραι αὐτοῦ.



(Σχ. 112)

Ὁμοίως τὸ πολύεδρον ΛΤ (Σχ. 112) εἶναι πρίσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσεις τὰς ἕδρας ΠΛΜΝΟ καὶ ΦΡΣΤΥ, ὕψος ΡΛ καὶ παραπλεύρους ἕδρας τὰς ΦΠΛΡ, ΡΛΜΣ, ΣΜΝΤ, ΥΟΝΤ καὶ ΠΟΥΦ.

Γενικῶς: Πρίσμα καλεῖται πᾶν πολύεδρον, τοῦ ὁποίου δύο μὲν ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ λοιπαὶ παραλληλόγραμμα.

Βάσεις πρίσματος καλοῦνται αἱ δύο ἴσαι καὶ παράλληλοι ἕδραι αὐτοῦ.

Ὕψος πρίσματος καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων αὐτοῦ.

Παράπλευροι ἕδραι πρίσματος καλοῦνται αἱ λοιπαὶ (πλὴν τῶν βάσεων) ἕδραι αὐτοῦ.

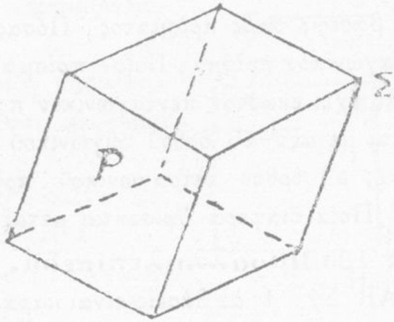
Τὸ πρίσμα ΚΛΜΟΝΠ (Σχ. 1), τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι τρίγωνα, καλεῖται τριγωνικὸν πρίσμα. Τὸ πρίσμα ΑΒ (Σχ.

112) ἔχον βάσεις τετράπλευρα καλεῖται τετραγωνικὸν πρίσμα. Τὸ πρίσμα ΛΤ (Σχ. 112) ἔχον βάσεις πεντάγωνα καλεῖται πενταγωνικὸν πρίσμα.

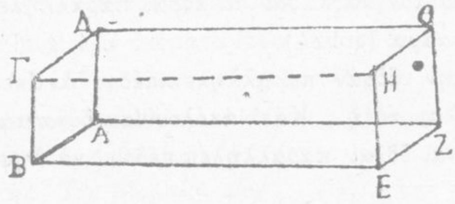
Ὥστε τὰ πρίσματα ἐκ τοῦ εἴδους τῶν βάσεων αὐτῶν διακρίνονται εἰς τριγωνικά, τετραγωνικά, πενταγωνικά, ἑξαγωνικὰ κτλ. πρίσματα.

Τοῦ πρίσματος ΛΤ (Σχ. 112) αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια· καλεῖται δὲ τοῦτον ὀρθὸν πρίσμα. Ὁμοίως τὸ ΚΛΜΝΠ (Σχ. 1) εἶναι ὀρθὸν πρίσμα.

Τοῦ πρίσματος ΑΒ (Σχ. 112) αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶνα ῥομβειδῆ· τοῦτο καλεῖται πλάγιον ἢ κεκλιμένον πρίσμα. Τοῦ πρίσματος ΡΣ (Σχ. 113) αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ῥόμβοι· καὶ τοῦτο καλεῖται πλάγιον ἢ κεκλιμένον πρίσμα. Ὁμοίως τὸ πρίσμα ΒΘ (Σχ. 114), τοῦ ὁποίου μόνον αἱ ἕδραι ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ εἶναι ῥομβοειδῆ, αἱ δὲ ἄλλαι εἶναι ὀρθογώνια καλεῖται πλάγιον ἢ κεκλιμένον.



(Σχ. 113)



(Σχ. 114)

Γενικῶς: Ὀρθὸν πρίσμα καλεῖται πᾶν πρίσμα, τοῦ ὁποίου αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια.

Πλάγιον ἢ κεκλιμένον πρίσμα καλεῖται πᾶν πρίσμα, τοῦ ὁποίου πᾶσαι ἤ τινες τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν εἶναι ῥόμβοι ἢ ῥομβοειδῆ.

Ὥστε τὰ πρίσματα ἐκ τοῦ εἴδους τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν αὐτῶν διακρίνονται εἰς ὀρθὰ καὶ πλάγια πρίσματα.

Ἐρωτήσεις: Τί καλεῖται πολύεδρον; τί καλοῦνται ἕδραι, ἀκμαί, κορυφαὶ πολυέδρου; τί καλεῖται πρίσμα; τί καλοῦνται βάσεις καὶ τί ὕψος πρίσματος; Εἰς τί διαιροῦνται τὰ πρίσματα α΄) ἐκ τοῦ ἴδους τῶν βάσεων; καὶ β΄) ἐκ τοῦ εἴδους τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν αὐτῶν; Πόσαι παράπλευροι ἕδραι ἀντιστοιχοῦσιν εἰς ἑκάστην πλευρὰν τῆς μιᾶς τῶν βάσεων πρίσματος; Πόσας παραπλεύρους ἕδρας ἔχει ἕκαστον τριγωνικὸν πρίσμα; Πόσας ἕδρας ἔχει ἐν ὅλῳ ἕκαστον ἑξαγωνικὸν πρίσμα; Πόσαι ἀκμαὶ ἐκτὸς τῶν βάσεων κείμεναι ἀντιστοιχοῦσιν εἰς ἑκάστην κορυφὴν βάσεώς τινος πρίσματος; Πόσας ἐν ὅλῳ ἀκμὰς ἔχει ἕκαστον τετραγωνικὸν πρίσμα; Ποῖον πρίσμα ἔχει 21 ἀκμάς; Πόσας κορυφὰς ἔχει ἕκαστον πενταγωνικὸν πρίσμα; Ποία ὁμοιότης ὑφίσταται μεταξὺ α΄) ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος καὶ πλαγίου τοιούτου; β΄) ὀρθοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος καὶ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ; Ποία διαφορὰ ὑφίσταται μεταξὺ τῶν αὐτῶν σωμάτων;

§ 125. **Παραλληλεπίπεδα.** — Τοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος ΑΒ (Σχ. 1) αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα. Τοῦτο καλεῖται π α ρ α λ λ η λ ε π ί π ε δ ο ν. Ὁμοίως τὰ τετραγωνικὰ πρίσματα ΑΒ (Σχ. 112) καὶ ΡΣ (Σχ. 113) εἶναι παραλληλεπίπεδα.

Γενικῶς: Παραλληλεπίπεδον καλεῖται πᾶν πρίσμα, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα.

Εἶναι εὐνόητον ὅτι πᾶσαι αἱ ἕδραι παραλληλεπιπέδου εἶναι παραλληλόγραμμα (§ 124).

Εἰς ἑκάστην ἕδραν παραλληλεπιπέδου ἀντίκειται ἄλλη ἴση καὶ παράλληλος αὐτῇ. Κατ' ἀκολουθίαν δύνανται δύο τυχοῦσαι ἀντικείμεναι ἕδραι παραλληλεπιπέδου νὰ ληφθῶσιν ὡς βάσεις αὐτοῦ.

Τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΒ (Σχ. 1) πᾶσαι αἱ ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια. Τοῦτο καλεῖται ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

Τὰ συνήθη σχήματα τῶν δωματίων, τῶν κυτίων κτλ. εἶναι ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα.

Γενικῶς: Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καλεῖται πᾶν παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια.

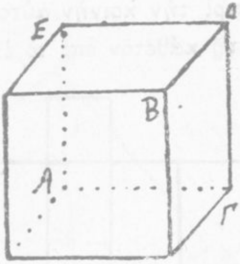
Αἱ ἀκμαὶ ΑΘ, ΑΓ, ΑΖ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΑΒ

(Σχ. 1,) συναντῶνται πᾶσαι εἰς τὴν αὐτὴν κορυφὴν Α αὐτοῦ. Αὗται λέγονται διαστάσεις αὐτοῦ.

Γενικῶς: Διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καλοῦνται τρεῖς ἀκμαί, αἱ ὁποῖαι συναντῶνται εἰς τὴν αὐτὴν κορυφὴν αὐτοῦ.

Τῶν τριῶν διαστάσεων ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἡ μὲν μία καλεῖται μῆκος, ἡ ἄλλη πλάτος ἢ βάθος καὶ ἡ τρίτη εἶνε τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΒ (Σχ. 115) πᾶσαι αἱ ἕδραι εἶναι τετράγωνα. Τοῦτο καλεῖται κύβος.



(Σχ. 115)

Ὥστε: Κύβος καλεῖται πᾶν παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου πᾶσαι αἱ ἕδραι εἶναι τετράγωνα.

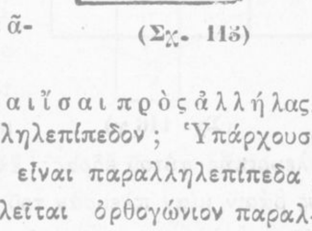
Ἐπειδὴ εἶναι ΑΓ=ΔΓ=ΔΒ (Σχ. 115) κατανοοῦμεν εὐκόλως ὅτι:

α΄. Αἱ ἀκμαὶ κύβου εἶναι πᾶσαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας;

β΄. Αἱ ἕδραι κύβου εἶναι πᾶσαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

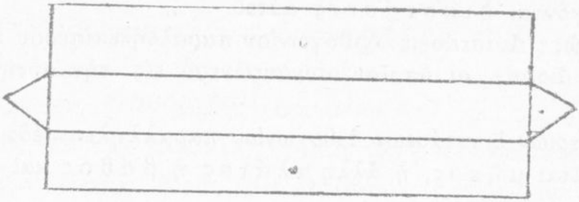
Ἐρωτήσεις: Τί καλεῖται, παραλληλεπίπεδον; Ὑπάρχουσι τετραγωνικὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι παραλληλεπίπεδα; Καθορίσατε τὰς βάσεις αὐτῶν. Τί καλεῖται ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον; τί καλοῦνται διαστάσεις ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου; Τίνα τὰ ἰδιαίτερα ὀνόματα τῶν διαστάσεων τούτων; Τί καλεῖται κύβος; Ὁ κύβος εἶναι ὀρθὸν ἢ πλάγιον πρίσμα; Πόσας ἕδρας ἔχει ἕκαστον παραλληλεπίπεδον; Πόσας ἀκμὰς καὶ πόσας κορυφὰς ἔχει ὁ κύβος;

Ἐφαρμογή: Τῇ βοηθείᾳ τῶν σχεδίων τοῦ σχήματος 116 κατασκευάσατε ἐκ χαρτονίου κύβον, ὀρθὸν τριγωνικὸν πρίσμα καὶ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.



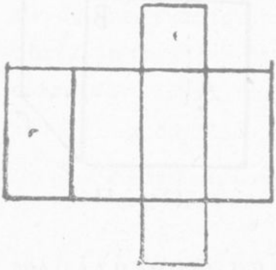
(Σχ. 116 α)

Πρὸς κατασκευὴν κύβου κάμπτονται τὰ τετράγωνα 2, 4, 5 καὶ 3 περὶ τὴν κοινὴν πλευρὰν ἑκάστου καὶ τοῦ τετραγώνου 1 καὶ διατίθενται καθέτως πρὸς τὸ 1 καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ· τέλος τὸ 6 κάμπτεται



(Σχ. 116 β)

περὶ τὴν κοινὴν αὐτοῦ καὶ τοῦ 5 πλευρὰν οὕτως ὥστε νὰ κατα-στῇ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον 5 καὶ νὰ ἀντίκειται τῷ 1. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν ἄλλων σχημάτων.



(Σχ. 116 γ)

2. ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

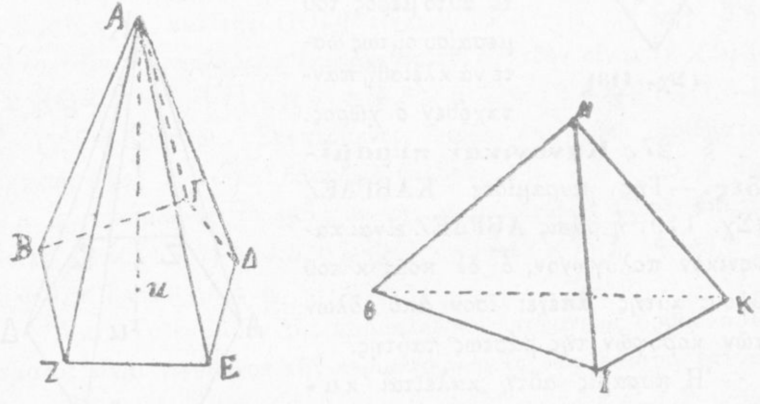
§ 126. Τοῦ πολυέδρου ΡΣΤΦΧ (Σχ. 1) ἡ μὲν ἕδρα ΣΤΦΧ εἶναι τετράπλευρον αἱ δὲ λοιπαὶ πᾶσαι εἶναι τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον Ρ, ὅπερ κεῖται ἐκτὸς τῆς τετραπλευρικῆς αὐτοῦ ἕδρας· ἕκαστον δὲ τῶν τριγώνων τούτων ἔχει ὡς βάσιν μίαν πλευρὰν τοῦ τετραπλεύρου ΣΤΦΧ. Τὸ πολύεδρον τοῦτο καλεῖται π υ ρ α μ ί ς. Ἡ κοινὴ κορυφὴ Ρ τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν καλεῖται κορυφὴ τῆς πυραμίδος ταύτης. Τὸ τετράπλευρον ΣΤΦΧ, τὸ ὁποῖον δὲν περιέχει τὴν κορυφήν, καλεῖται β ά σ ι ς αὐτῆς.

Ὁμοίως τὸ πολύεδρον ΑΒΓΔΕΖ (Σχ. 117) εἶναι πυραμὶς ἔχουσα κορυφὴν τὸ σημεῖον Α καὶ βάσιν τὸ πεντάγωνον ΒΓΔΕΖ. Καὶ τὸ πολύεδρον ΗΘΙΚ (Σχ. 117), τοῦ ὁποίου πᾶσαι αἱ ἕδραι εἶναι τρίγωνα, καλεῖται πυραμίς. Καὶ ἐν αὐτῇ τρεῖς ἕδραι ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν σημεῖόν τι, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τῆς τετάρτης ἕδρας, καὶ βάσεις τὰς πλευρὰς τῆς τετάρτης ἕδρας.

Γενικῶς: Πυραμὶς καλεῖται πᾶν πολύεδρον, τοῦ ὁποίου μία ἕδρα εἶναι τυχὸν εὐθ. σχῆμα, αἱ δὲ λοιπαὶ εἶναι τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι βάσεις μὲν τὰς πλευρὰς τοῦ εὐθυγράμμου τούτου σχήματος, κορυφὴν δὲ κοινὴν σημεῖόν τι κείμενον ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ εὐθ. σχήματος.

Κορυφὴ πυραμίδος καλεῖται τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν αὐτῆς.

Βάσις πυραμίδος καλεῖται ἡ ἕδρα, ἡ ὁποία δὲν περιέχει τὴν κορυφὴν αὐτῆς.



(Σχ. 117)

Παράπλευραι ἕδραι πυραμίδος καλοῦνται αἱ λοιπαὶ ἕδραι αὐτῆς πλὴν τῆς βάσεως.

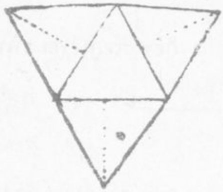
Ὕψος πυραμίδος καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῆς βάσεως αὐτῆς.

Αἱ πυραμίδες ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων αὐτῶν διακρίνονται εἰς τ ρ ι γ ω ν ι κ ά ς, τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ά ς, π ε ν τ α γ ω ν ι κ ὰ ς κτλ.

Εἰς τὰς τριγωνικὰς πυραμίδας ὡς βάσις λαμβάνεται τυχοῦσα ἕδρα αὐτῆς.

Ἐρωτήσεις : Τί καλεῖται πυραμίς ; τί καλεῖται κορυφή, βάσις καὶ ὕψος πυραμίδος ; Εἰς τί διαιροῦνται αἱ πυραμίδες ἐκ τοῦ εἴδους τῶν βάσεων αὐτῶν ; Πόσαι παράπλευροι ἕδραι πυραμίδος ἀντιστοιχοῦσιν εἰς ἑκάστην πλευρὰν τῆς βάσεως αὐτῆς ; Πόσας παραπλεύρους ἕδρας ἔχει ἑκάστη τετραγωνικὴ πυραμίς ; Πόσας ἕδρας ἔχει ἐν ὅλῳ ἑκάστη ἑξαγωνικὴ πυραμίς ; Πόσαι ἀκμαὶ ἀντιστοιχοῦσιν εἰς ἑκάστην κορυφὴν τῆς βάσεως πυραμίδος; Πόσας ἀκμὰς ἔχει ἑκάστη τριγωνικὴ πυραμίς; Πόσας ἔχει ἑκάστη πενταγωνικὴ πυραμίς;

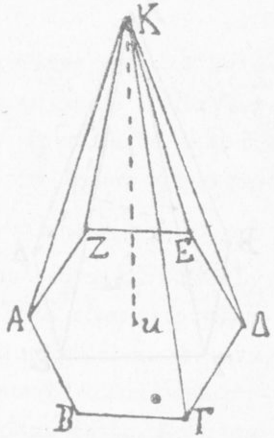
Ἐφαρμογή: Τῇ βοηθείᾳ τοῦ σχεδίου 118 κατασκευάσατε ἐκ χονδροῦ χάρτου τριγωνικὴν πυραμίδα.



(Σχ. 118)

Τὰ τρία πέριξ τρίγωνα ἀνεγείρονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μεσαίου οὕτως ὥστε νὰ κλεισθῇ πανταχόθεν ὁ χῶρος.

§ 127. **Κανονικαὶ πυραμίδες.**—Τῆς πυραμίδος ΚΑΒΓΔΕΖ (Σχ. 119) ἡ βάσις ΑΒΓΔΕΖ εἶναι κανονικὸν πολύγωνον, ὁ δὲ ποῦς κ τοῦ ὕψους αὐτῆς ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλων τῶν κορυφῶν τῆς βάσεως ταύτης.



(Σχ. 119)

Ἡ πυραμὶς αὕτη καλεῖται κανονικὴ πυραμίς, τὸ δὲ σημεῖον κ καλεῖται κέντρον τῆς βάσεως.

Ὁμοίως ἡ πυραμὶς ΟΑΒΓ (Σχ. 120) εἶναι κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμίς· αὕτη καλεῖται καὶ κανονικὸν τετράεδρον.

(Σχ. 120)

Ὥστε: Κανονικὴ πυραμὶς καλεῖται πᾶσα πυραμίς, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν κανονικὸν εὐθύγραμμον σχῆμα καὶ τῆς ὁποίας τὸ ὕψος διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

Αἱ ἀκμαὶ κανονικῆς πυραμίδος, αἱ ὁποῖαι συνέρχονται εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἶναι πᾶσαι ἴσαι (§ 120 Β′ 6′.). Τούτου ἕνεκα αἱ παράπλευροι αὐτῆς ἕδραι εἶναι τρίγωνα ἰσοσκελῆ· ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ βάσεις τῶν τριγώνων τούτων εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι (§ 72 Γ′) αἱ παράπλευροι αὗται ἕδραι εἶναι πᾶσαι ἴσαι.

§ 128. Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος. Ἔστω ΛΤ (Σχ. 112) ὀρθόν τι πρίσμα. Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι τὸ ὕψος αὐτοῦ ΦΠ εἶναι 5 μ. καὶ ὅτι ΠΛ=2μ.(ΛΜ)=3 μ. (ΜΝ)=1 μ. (ΝΟ)=1,5 μ. καὶ (ΟΠ=2,5μ. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας ΦΠΛΡ εἶναι 2×5 τ.μ, τῆς ἕδρας ΡΛΜΣ εἶναι 3×5 τ.μ, τῆς ΣΜΝΤ εἶναι 1×5 τ.μ. τῆς ΥΟΝΤ εἶναι 1,5×5 τ.μ. καὶ τῆς ΠΟΥΦ εἶναι 2,5×5 τ.μ. (§ 96). Τῆς ὅλης ὅθεν παραπλεύρου ἐπιφανείας τὸ ἐμβαδὸν εἶναι (2×5)+(3×5)+(1×5)+(1,5×5)+(2,5×5) ἢ (2+3+1+1,5+2,5)×5=50 τ.μ. Σκεπτόμενοι ὁμοίως ἐπὶ ὀρθοῦ πρίσματος ἔχοντος ὕψος 7 μ. καὶ βάσιν μὲ πλευρὰς 4 μ. 3,5 μ. 5 μ. καὶ 2 μ. εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου αὐτοῦ ἐπιφανείας εἶναι (4×7)+(3,5×7)+(5×7)+(2×7) ἢ (4+3,5+5+2)×7=101,5 τ.μ.

Ἄρα: Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι γινόμενον τῆς περιμέτρου μιᾶς τῶν βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἐφαρμογαί: 1) Ὀρθὸν τριγωνικὸν πρίσμα ἔχει ὕψος 2,5 μ. καὶ ἑκατέρα τῶν βάσεων αὐτοῦ εἶναι τρίγωνον ἰσόπλευρον ἔχον πλευρὰν 2 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτοῦ; (ἀπ. 15 τ.μ.).

2) Στήλη ἔχει ὕψος 4 μ. καὶ βάσιν τετράγωνον, πλευρᾶς 0,50 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτῆς; (ἀπ. 8 τ.μ.).

§ 129. **Ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος.**—Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος ἀρκεῖ προφανῶς εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτοῦ νὰ προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων.

Ἐφαρμογαί: 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς στήλης, περὶ ἧς γίνεται λόγος ἐν τῇ ἀσκήσει 2 τῆς § 128 (ἀπ. 8,50 τ.μ.).

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐν τῇ

ἀσκήσει 1 § 128 μνημονευομένου ὀρθοῦ πρίσματος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ὕψος ἑκατέρας τῶν βάσεων αὐτοῦ εἶναι 1,732 μ.

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κύβου, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀκμὴ ἔχει μῆκος 0,40 (ἀπ. 0,96 τ.μ.).

§ 130. **Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας πυραμίδων**.—Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας πυραμίδος πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης ἕδρας καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐμβαδὰ ὅλων τῶν ἑδρῶν αὐτῆς.

Ἐὰν ἡ πυραμὶς εἶναι κανονική, εὑρίσκωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ὡς ἀκολούθως. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς τῶν ἴσων παραπλεύρων ἑδρῶν αὐτῆς καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν παραπλεύρων τούτων ἑδρῶν, εἰς δὲ τὸ οὕτω προκύπτον γινόμενον προσθέτομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος.

Ἐφαρμογαί: 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τετραγωνικῆς πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 0,60 μ. αἱ δὲ ἀποστάσεις τῆς κορυφῆς ἀπὸ ἑκάστης πλευρᾶς τῆς βάσεως εἶναι πᾶσαι ἴσαι πρὸς 1 μ. (ἀπ. 1,56 τ μ.).

2) Πυραμὶς τριγωνικὴ ἔχει βάσιν τρίγωνον ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι 2 μ. ἡ μέν, 3 μ. ἡ ἄλλη καὶ 3,60555 μ. ἡ ὑποτείνουσα. Ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας τῆς βάσεως ἀγομένη ἀκμὴ αὐτῆς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν καὶ ἴση πρὸς 1,5 μ. ἡ δὲ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τῆς βάσεως εἶναι 5,02 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος ταύτης; (ἀπ. 15,7999 τ. μ.).

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ ἀπέχει ἀπὸ ἑκάστης πλευρᾶς τῆς βάσεως 3,5 μ. ἡ δὲ βάσις εἶναι τετράγωνον ἔχων περίμετρον 8,60 μ.

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κανονικοῦ τετραέδρου, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀκμὴ ἔχει μῆκος 4 μ., ἡ δὲ κορυφὴ ἀπέχει ἀπὸ ἑκάστης πλευρᾶς τῆς βάσεως 3,4641 μ.

§ 131. **Μονάδες ὄγκου**.—Πρὸς μέτρησιν τοῦ ὄγκου (§ 1) σώματός τινος συγκρίνεται οὗτος πρὸς ὡρισμένον καὶ γνωστὸν ὄγκον, τὸν ὁποῖον καλοῦμεν μονάδα. Διὰ τῆς συγκρίσεως ταύτης εὑρίσκομεν ἐκ πόσον μονάδων ἢ καὶ μερῶν αὐτῆς ἀποτελεῖται ὁ μετρηθεὶς ὄγκος.

Ὁ τὸ πλῆθος τοῦτο τῶν μονάδων ἢ καὶ μερῶν αὐτῆς ἐκφράζων ἀριθμὸς καλεῖται καὶ αὐτὸς ὄγκος τοῦ σώματος.

Αἱ διάφοροι μονάδες, διὰ τῶν ὁποίων μετροῦμεν τοὺς ὄγκους τῶν σωμάτων, καλοῦνται μονάδες ὄγκου.

Αἱ συνήθεις μονάδες ὄγκου εἶναι αἱ ἑξῆς:

Α΄. Τὸ κυβικὸν μέτρον, τὸ ὁποῖον εἶναι κύβος, οὗ ἑκάστη ἀκμὴ ἰσοῦται πρὸς ἓν μέτρον.

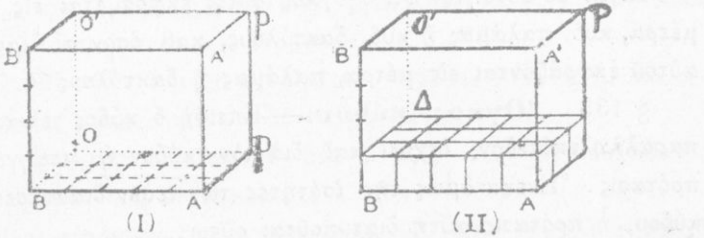
Β΄. Τὰ ὑποπολλαπλάσια τοῦ κυβικοῦ μέτρου, ἅτινα εἶναι τὰ ἀκόλουθα:

κυβικὴ παλάμη$=\frac{1}{1000}$ κ. μ.,

κυβικὸς δάκτυλος$=\frac{1}{1000}$ κ. π.$=\frac{1}{1000000}$ κ. μ.,

κυβικὴ γραμμὴ$=\frac{1}{1000}$ κ. δ.$=\frac{1}{1000000}$ κ. π.$=\frac{1}{1000000000}$ κ. μ.

§ 132. **Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.**—Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΒΡ (Σχ. 121). Πρὸς τοῦτο μετροῦμεν τὰς τρεῖς αὐτοῦ διαστάσεις (§ 125) καὶ ἔστω ὅτι τὸ μὲν μῆκος ΒΑ αὐτοῦ εἶναι 5 μ. τὸ πλάτος ΒΟ εἶναι 3 μ. καὶ τὸ ὕψος ΒΒ΄ εἶναι 4



(Σχ. 121)

μ. Ἐὰν νοήσωμεν τὸ μῆκος ΒΑ διῃρημένον εἰς 5 ἴσα μέρη καὶ τὸ πλάτος ΒΟ εἰς τρία ἴσα μέρη, ἐκ δὲ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας νοήσωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν ἄλλην τῶν δύο τούτων εὐθειῶν, διαιρεῖται ἡ βάσις εἰς $5 \times 3 = 15$ τετρ. μέτρα. Ἐὰν ἤδη φαντασθῶμεν ὅτι ἐπὶ ἑκάστου τῶν τετραγωνικῶν τούτων μέτρων τοποθετεῖται ἀνὰ ἓν κυβικὸν μέτρον, θέλει ἀποτελεσθῆ ἐκ τῶν 15 τούτων κυβικῶν μέτρων τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΔ (Σχ. 121, II) ὅπερ ἔχει ὕψος ἑνὸς μέτρου. Ἐπειδὴ τὸ ὕψος ΒΒ' ἰσοῦται πρὸς 4 μ. εἶναι εὐνόητον ὅτι τὸ ὀρθ. παραλληλεπίπεδον ΒΡ περιέχει ἀκριβῶς 4 ὀρθ. παραλληλεπίπεδα ὡς τὸ ΑΔ, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν ἐπ' ἄλληλα μέχρι τῆς ἕδρας Α'Β'Θ'Ρ. Τὸ κυβικὸν ἄρα μέτρον χωρεῖ ἐντὸς τοῦ ΒΡ ἀκριβῶς 15×4 ἢ $5 \times 3 \times 4$ φοράς, ἤτοι ὁ ὄγκος τοῦ ΒΘ εἶναι $5 \times 3 \times 4 = 60$ κυβ. μέτρα. Ὁμοίως σκεπτόμενο ἐπὶ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου, ὅπερ ἔχει διαστάσεις 7 μ., 6 μ. καὶ 10 μ. κατανοοῦμεν ὅτι ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι $7 \times 6 \times 10 = 420$ κυβ. μέτρα.

Ἐὰν ὀρθ. παραλληλεπιπέδου αἱ διαστάσεις εἶναι 2,35 μ. ἡ μέν, 3,40 μ. ἡ ἄλλη καὶ 5 μ. ἡ τρίτη, οὐδὲν μᾶς ἐμποδίζει νὰ λάβωμεν ὡς μονάδα μήκους τὸ δάκτυλον, ὅτε αἱ διαστάσεις αὐτοῦ θὰ παρίστανται ὑπὸ τῶν ἀκεραίων 235^{δ}, 340^{δ}, 500^{δ}. Σκεπτόμενοι δέ, ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι $235 \times 340 \times 500$ κυβ. δάκτυλοι ἢ $\frac{235 \times 340 \times 500}{1000000} = 2,35 \times 3,40 \times 5$ κυβ. μέτρα.

Ἄρα: Ὁ ὄγκος παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῶν τριῶν αὐτοῦ διαστάσεων.

Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι ὁ ὄγκος οὗτος ἐκφράζεται εἰς κυβικὰ μέτρα, κυβ. παλάμας ἢ κυβ. δακτύλους, καθ' ὅσον αἱ διαστάσεις αὐτοῦ ἐκφράζονται εἰς μέτρα, παλάμας ἢ δακτύλους.

§ 133. **Ὄγκος κύβου.**—Ἐπειδὴ ὁ κύβος εἶναι ὀρθ. παραλληλεπίπεδον, ἰσχύει καὶ διὰ τὸν κύβον ἡ προηγουμένη πρότασις. Ἕνεκα ὅμως τῆς ἰσότητος τῶν τριῶν διαστάσεων τοῦ κύβου, ἡ πρότασις αὕτη διατυποῦται οὕτω.

Ὁ ὄγκος κύβου εἶναι γινόμενον τριῶν παραγόντων ἴσων πρὸς τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς αὐτοῦ.

Σημ. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ γινόμενον τριῶν παραγόντων ἴσων πρός τινα ἀριθμὸν α καλεῖται καὶ κύβος τοῦ α. Ὁ κύβος τοῦ α σημειοῦται οὕτω α^3.

Ἐφαρμογαί: 1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος αἰθούσης ἡ ὁποία ἔχει μῆκος 6 μ. πλάτος 5 μ. καὶ ὕψος 4 μ. π. (ἀπ. 120 κυβ., μέτρα).

2) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κύβου, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀμκὴ ἔχει μῆκος 2,30 μ; (ἀπ. 12,167 κ. μ.).

3) Πλατεῖα τετραγωνικὴ ἔχουσα πλευρὰν 80 μέτρων πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ σκίρων εἰς ὕψος 0,16 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τῶν ἀπαιτουμένων σκίρων; (ἀπ. 1024 κ. μ.).

3) Ὁ ὄγκος ὀρθ. παραλληλεπιπέδου εἶναι 74,06 κ. μ. ἡ δὲ βάσις εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 4,6 μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ; (ἀπ. 3,5 μ.).

5) Κιβώτιον ἐσωτερικοῦ μήκους 1 μέτρου, πλάτους 0,20 μ. καὶ ὕψους 0,70 μ. εἶναι πεπληρωμένον σάπωνος, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλὰξ ἔχει μῆκος 0,14 μ. πλάτος δὲ καὶ ὕψος ἀνὰ 0,05 μ. Πόσας τοιαύτας πλάκας περιέχει; (400).

6) Πόσα κοιλὰ σίτου χωρεῖ ἀποθήκη σχήματος ὀρθ. παραλληλεπιπέδου ἔχοντος μῆκος 6 μ. πλάτος 4 μ. καὶ ὕψος 3 μ.; (ἀπ. 720 κ.).

Σημ. Κοιλὸν εἶναι τὸ δέκατον τοῦ κυβ. μέτρου.

§ 134. **Μονάδες βάρους.** — Ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς γνωρίζομεν ὅτι μονάδες βάρους, τὰς ὁποίας ὅλα τὰ πεπολιτισμένα ἔθνη παρεδέχθησαν, εἶναι τὸ γραμμάριον, χιλιόγραμμον καὶ ὁ τόνος.

α΄. Γραμμάριον καλεῖται τὸ βάρος ἑνὸς κυβ. δακτύλου ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4° Κ.

β΄. χιλιόγραμμον καλεῖται τὸ βάρος μιᾶς κυβ. παλάμης ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμογρασίας. 4° Κ.

γ΄. Τόνος καλεῖται τὸ βάρος ἑνὸς κυβ. μέτρου ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4° Κ.

Εἶναι εὐνόητον ὅτι 1 χιλιόγραμ.=1000 γραμμάρια καὶ 1 τόνος=1000 χιλιόγραμ =1000000 γραμμάρια.

Συμφώνως πρὸς τοὺς ὁρισμοὺς τῶν μονάδων τούτων βάρους, ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸν ὄγκον ὕδατος ἀπεσταγμένου 4° Κ εἰς κυβ. δακτύλους, κ. παλάμας ἢ κ. μέτρα, ὁ ἴδιος ἐκφράζει καὶ τὸ βάρος τοῦ αὐτοῦ ὕδατος ἀντιστοίχως εἰς γραμμάρια, χιλιόγραμμα ἢ τόνους. Οὕτως ὕδωρ ἀπεσταγμένον 4° Κ ἔχον ὄγκον 12 κ. δ. ἔχει βάρος 12 γραμμαρίων, ἐνῷ τοιοῦτον ὕδωρ 145 κ. παλαμῶν ἔχει βάρος 145 χιλιογράμων καὶ ὅμοιον ὕδωρ 25 κ. μέτρων ἔχει βάρος 25 τόνων.

§ 135. **Εἰδικὸν βάρος σώματος.**—Ὑποτεθείσθω ὅτι ἔχομεν εἰς τὴν διάθεσιν ἡμῶν κύβον ἐξ ὑάλου ἀκμῆς 0,05 μ. Ἐὰν ζυγίσωμεν αὐτόν, θέλομεν εὕρει ὅτι ἔχει βάρος 311 γραμμαρίων. Ἐπειδὴ δὲ ὕδωρ ἀπεσταγμένον 4° Κ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν αὐτὸν ὄγκον ἤτοι 0,05×0,5×0,05=125 κ. δ, ἔχει βάρος 125 γρμ. ἔπεται ὅτι ὁ ὑάλινος, κύβος εἶναι βαρύτερος ἴσου ὄγκου ὕδατος ἀπεσταγμένου 4° Κ. κατὰ 311 Γρ: 125 γρ =2, 48ο. Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εἰς ὁμοίας φύσεως ὑάλινον ὀρθ. παραλληλεπίπεδον, εὑρίσκομεν ὅτι καὶ τούτου τὸ βάρος εἶναι κατὰ 2, 488 φορὰς ἀνώτερον τοῦ βάρους ἴσου ὄγκου ὕδατος ἀπεσταγμένου 4° Κ. Τὸν ἀριθμὸν 2,488 καλοῦμεν εἰδικὸν βάρος τῆς ὑάλου.

Γενικῶς: Εἰδικὸν βάρος σώματος καλεῖται τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὸ βάρος τεμαχίου τοῦ σώματος τούτου διὰ τοῦ βάρους ἴσου ὄγκου ὕδατος ἀπεσταγμένου 4° Κ.

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ ἀριθμός, ὅστις ἐκφράζει εἰς γραμμάρια, χιλιόγραμμα, τόνους τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου 4° Κ, ὁ ἴδιος ἐκφράζει (§ 134) εἰς κ δακτύλους, κ. παλάμας, κ. μέτρα τὸν ὄγκον τῆς αὐτῆς ποσότητος ὕδατος καὶ κατ' ἀκολουθίαν καὶ τοῦ σώματος τὸν ὄγκον, ὁ προηγούμενος ὁρισμὸς διατυποῦται καὶ οὕτω. Εἰδικὸν βάρος σώματος καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ βάρους διὰ τοῦ ὄγκου αὐτοῦ.

Ἐὰν δηλ. σῶμα ἔχον ὄγκον 100 κ.π. ἔχει βάρος 778,8 χιλιόγραμμα, τὸ εἰδ. βάρος αὐτοῦ εἶναι 778, 8: 100=7, 788. Ὁμοίως σῶμα ἔχον ὄγκον 30 κ. δ. καὶ βάρος 105, 48 γραμμ. ἔχει εἰδ. βάρος 105, 48: 30=3, 516.

Τὰς μεθόδους τῆς εὑρέσεως τοῦ εἰδ. βάρους τῶν σωμάτων διδάσκει ἡ Φυσική. Ὁ ἀκόλουθος πίναξ παρέχει τὰ εἰδικὰ βάρη σωμάτων τινῶν.

Χρυσὸς	19,258	Μάρμαρον	2,837	Φελλὸς	0,240
Μόλυβδος	11,353	Ὕαλος	2,488	Ὑδράργυρος	13,596
Ἄργυρος	10,474	Θεῖον	2,070	Γάλα	1,030
Χαλκὸς	8,788	Πάγος	0,930	Οἶνος	0,994
Σίδηρος	7,788	Πτελέα	0,800	Ἔλαιον	0,915
Ἀδάμας	3,516	Ἐλάτη	0,675	Ἀὴρ	0,001293

§ 136. **Σχέσεις ὄγκου καὶ βάρους τῶν σωμάτων.**— Ἂς παραστήσωμεν διὰ Β τὸ βάρος εἰς γραμμάρια, χιλιόγραμμα ἢ τόνους τεμαχίου σώματος, διὰ Σ τὸν ὄγκον αὐτοῦ ἀντιστοίχως εἰς κ. δακτύλους, κ. παλάμας ἢ κ. μέτρα καὶ διὰ ε τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς ὕλης, ἐκ τῆς ὁποίας συνίσταται τοῦτο. Κατὰ τὸν προηγούμενον ὁρισμὸν τοῦ εἰδικοῦ βάρους, θὰ εἶναι:

$$Β : Σ = ε \quad (1)$$

Ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἰσότητος συνάγεται εὐκόλως ὅτι

$$Β = Σ \times ε \quad (2).$$

Ἄρα: Τὸ βάρος σώματος εὑρίσκεται, ἂν ὁ ὄγκος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς ἰσότητος (2) προκύπτει εὐκόλως ἡ ἰσότης $Σ = \frac{Β}{ε}$ (3), ἕπεται ὅτι:

Ὁ ὄγκος σώματος εὑρίσκεται, ἂν τὸ βάρος διαιρεθῇ διὰ τοῦ εἰδικοῦ βάρους αὐτοῦ.

Σημ. Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ἰσοτήτων (2) ἢ (3) δὲν πρέπει νὰ λησμονῶμεν ὅτι ἂν Β παριστᾷ γραμμάρια, χιλιόγραμμα, τόνους, Σ θὰ παριστᾷ ἀντιστοίχως κ. δακτύλους, κ. παλάμας, κ. μέτρα καὶ τἀνάπαλιν.

Ἐφαρμογαί: 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ὀρθ. παραλληλεπιπέδου ἐκ μαρμάρου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ διαστάσεις αὐτοῦ εἶναι 2μ, 1, 5 μ. καὶ 3 μ. (ἀπ. 25533 χιλιόγραμ.).

2) Τεμάχιον ἐλάτης ἔχει βάρος 25 χιλιογράμμων. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ; (ἀπ. 38, 05 κ. παλ.).

3) Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἀέρος, ὅστις περιέχεται ἐν δωματίῳ μήκους 3 μ. πλάτους 2μ. καὶ ὕψους 4μ; (ἀπ. 31,032 χιλιόγραμμα)

§ 137. **Ὄγκος πρίσματος.**—Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ὀρθοῦ ἢ πλαγίου πρίσματος ἐκ πτελέας, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ὕψος εἶναι 0,06 μ. ἡ δὲ βάσις ἔχει ἐμβαδὸν 0,0003 τ. μ.

Πρὸς τοῦτο (§ 126.—3) εὑρίσκομεν τὸ ἀκριβὲς βάρους αὐτοῦ, ὅπερ εἶναι 120 γραμμαρίων καὶ τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τοῦ εἰδικοῦ βάρους 0,8 τῆς πτελέας. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος τούτου εἶναι 120:0,8=150 κ.δ.=0,000150 κ.μ. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν 0,0003 τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος 0,05 τοῦ πρίσματος. Ὁμοίως ἐργαζόμενοι ἐπὶ μαρμαρίνου πρίσματος παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ αὐτὸ φθάνομεν ἐξαγόμενον εἴτε διαιροῦντες τὸ βάρος αὐτοῦ διὰ τοῦ εἰδ. βάρους τοῦ μαρμάρου, εἴτε πολλαπλασιάζοντες τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Καταλήγομεν οὕτω πρακτικῶς εἰς τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀκολούθου προτάσεως, τὴν ὁποίαν ἄλλως ἡ θεωρητικὴ γεωμετρία ἀποδεικνύει.

Ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Σημ. Ἡ πρότασις αὕτη ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα, διότι τὸ γινόμενον τῶν δύο αὐτοῦ διαστάσεων μήκους καὶ πλάτους παριστᾷ (§ 96) τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ.

Ἐφαρμογαί: 1) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις ἔχει ἐμβαδὸν 27 τ.μ. τὸ δὲ ὕψος εἶναι 10,5 μ.; (ἀπ. 283,5 κ.μ.).

2) Πρίσμα ἔχει ὕψος μὲν 10 μ. βάσιν δὲ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ ἔχουσι μῆκος 12 μ. ἡ μὲν καὶ 15 μ. ἡ ἄλλη. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ; (ἀπ. 900 κ.μ.).

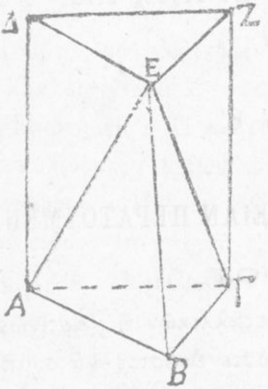
3) Πόσον εἶναι τὸ ὕψος πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ὄγκον μὲν 840 κ.μ. βάσιν δὲ 100 τ.μ.; (ἀπ. 8,40 μ.).

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου 4°Κ, ὅπερ πληροῖ κυβικὸν δοχεῖον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀκμὴ εἶναι 0,5 μ.; (ἀπ. 97 ὀκ. 257 $^1/_2$ δραμ.).

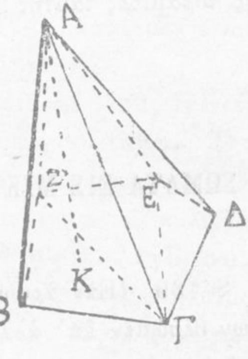
5) Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τοῦ ἐλαίου, ὅπερ πληροῖ τὸ δοχεῖον τοῦ προηγουμένου ζητήματος.

§ 138. **Ὄγκος πυραμίδος.**—Ἔστω τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ (Σχ. 122) κατασκευασμένον ἐξ ὁμοιομεροῦς ξύλου. Ἂν εὕρωμεν πρῶτον τὸ ἀκριβὲς βάρος αὐτοῦ καὶ εἶτα ἀποσπάσαντες ἀπ' αὐτοῦ τὴν πυραμίδα ΕΑΒΓ ζυγίσωμεν καὶ ταύτην μετ' ἀκριβείας, θέλομεν παρατηρήσει ὅτι τὸ βάρος αὐτῆς εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίτον τοῦ βάρους τοῦ πορίσματος ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀπεσπάσθη.

'Επειδὴ δὲ τὰ δύο ταῦτα σώματα ἔχουσι τὸ αὐτὸ εἰδικὸν βάρος ἕπεται ὅτι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ΕΑΒΓ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΖ, μεθ' οὗ αὕτη ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Τοῦτο δὲ ἀληθεύει καὶ διὰ πᾶσαν ἄλλην τριγωνικὴν πυραμίδα.



(Σχ. 122)



(Σχ. 123)

Ἄρα: Ὁ ὄγκος πάσης τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.

Ἔστω ἤδη τυχοῦσα πολυγωνικὴ πυραμὶς ΑΒΓΔΕΖ (Σχ. 123). Ἐπειδὴ αὕτη ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων ΑΒΓΖ, ΑΓΖΕ καὶ ΑΓΔΕ, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΚ, ἕπεται ὅτι ὁ ὄγκος αὐτῆς εἶναι ἴσος πρὸς

$$\frac{(\text{ΒΓΖ})\times(\text{ΑΚ})}{3}+\frac{(\text{ΓΖΕ})\times(\text{ΑΚ})}{3}+\frac{(\text{ΓΕΔ})\times(\text{ΑΚ})}{3}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{[(\text{ΒΓΖ})+(\text{ΓΖΕ})+(\text{ΓΕΔ})]\times(\text{ΑΚ})}{3}=\frac{(\text{ΒΓΔΕΖ})\times(\text{ΑΚ})}{3}$$

Ἄρα: Ὁ ὄγκος πάσης πυραμίδος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἐφαρμογαί: 1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος μὲν 5 μ. βάσιν δὲ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ εἶναι 10 μ. καὶ ἡ ἑτέρα τῶν προσκειμένων αὐτῇ εἶναι 3 μ.; (ἀπ. 50 κ. μ.).

2) Τριγωνική τις πυραμὶς ἔχει ὕψος μὲν 3 μ. βάσιν δὲ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη κάθετος πλευρὰ ἔχει μῆκος

3,70 μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος αὐτῆς; (ἀπ. 9,845 κ. μ.).

3) Πόσον εἶναι τὸ ὕψος πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει ὄγκον 50 κ. μ. καὶ βάσιν 20 τ. μ; (ἀπ. 5 μ.).

4) Τετραγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ὕψος 6 μ. καὶ βάσιν τραπέζιον, τοῦ ὁποίου ἡ μία τῶν παραλλήλων πλευρῶν εἶναι 4 μ ἡ ἄλλη 8 μ. καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν 3 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ταύτης; (ἀπ. 36 κ. μ).

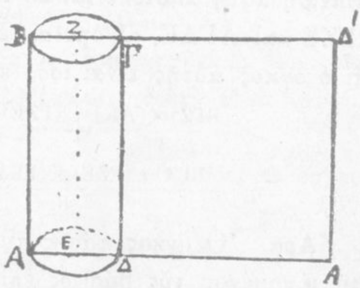
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

ΣΩΜΑΤΑ ΕΙΣ ΜΙΚΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΝ ΠΕΡΑΤΟΥΜΕΝΑ

1. ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

§ 139. Ἐὰν ἀριθμόν τινα ἴσων μεταλλικῶν ἢ χαρτίνων κύκλων θέσωμεν ἐπ' ἀλλήλους οὕτως ὥστε ἕκαστος νὰ συμπίπτῃ μετὰ τοῦ ὑποκειμένου, σχηματίζεται σῶμά τι, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν κύλινδρον. Τὰ συνήθη μέτρα τῆς χωρητικότητος, οἱ σωλῆνες τῶν θερμαστρῶν καὶ ὑδραγωγείων, τὸ σῶμα ΑΒΓΔ (Σχ. 124) εἶναι κύλινδροι.

Ὁ κύλινδρος παράγεται καὶ ὑπὸ ἑνὸς μόνον κύκλου ἀρκεῖ νὰ νοήσωμεν αὐτὸν κινούμενον, οὕτως ὥστε τὸ κέντρον αὐτοῦ νὰ μένῃ πάντοτε ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ εὐθείας. Ἐν τῇ κινήσει ταύτῃ ὁ μὲν κύκλος γράφει τὸν κύλινδρον, ἡ δὲ περίφέρεια αὐτοῦ γράφει καμπύλην τινὰ ἐπιφάνειαν, τὴν ὁποίαν ἰδιαιτέρως καλοῦμεν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου.



(Σχ. 124)

Ὥστε: Κύλινδρος καλεῖται πᾶν σῶμα παραγόμενον ὑπὸ κύκλου, ὁ ὁποῖος κινεῖται παραλλήλως πρὸς ἑαυτὸν καὶ ἔχει τὸ κέντρον του πάντοτε ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου ἐπ' αὐτὸν εὐθείας.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω γίνεται φανερὸν ὅτι ὁ κύλινδρος περατοῦται εἰς δύο κύκλους ἴσους καὶ παραλλήλους (ὁ κινητὸς κύκλος ἐν τῇ πρώτῃ καὶ τελευταίᾳ θέσει αὐτοῦ) καὶ εἰς καμπύλην τινὰ ἐπιφάνειαν.

Βάσεις κυλίνδρου καλοῦνται οἱ δύο κύκλοι, εἰς τοὺς ὁποίους οὗτος περατοῦται.

Ὕψος κυλίνδρου καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων αὐτοῦ. Οὕτω τοῦ κυλίνδρου ΑΒΓΔ (Σχ. 124) βάσεις μὲν εἶναι οἱ δύο κύκλοι Ε καὶ Ζ, ὕψος δὲ τὸ εὐθ. τμῆμα ΕΖ.

Ἐρωτήσεις: Τί καλεῖται κύλινδρος; Πόσας βάσεις ἔχει ἕκαστος κύλινδρος; Ποῖον τὸ σχῆμα τῶν βάσεων κυλίνδρου; Τί καλεῖται ὕψος κυλίνδρου; Τί καλεῖται κυρτὴ ἐπιφάνεια κυλίνδρου; Τίνος εἴδους ἐπιφάνεια εἶναι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου;

§ 140. **Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου.**— Ἂς περιβάλλωμεν ἅπαξ καὶ ἀκριβῶς ὅλην τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κυλίνδρου διὰ λεπτοῦ φύλλου χάρτου. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ φύλλου τούτου. Ἐκτυλίσσοντες τὸ φύλλον τοῦτο βλέπομεν ὅτι λαμβάνει σχῆμα ὀρθογωνίου ΔΓΔ'Α (Σχ. 124), τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὴν βάσιν (ΔΑ) ἐπὶ τὸ ὕψος (ΔΓ) αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ μὲν βάσις (ΔΑ) ἰσοῦται πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου Ε, ἐπὶ τῆς ὁποίας προηγουμένως ἐφήρμοζεν, τὸ δὲ ὕψος (ΔΓ) εἶναι καὶ τοῦ κυλίνδρου ὕψος, συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα, ἂν παραστήσωμεν διὰ ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, διὰ υ τὸ ὕψος καὶ διὰ α τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως αὐτοῦ, θὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης (§ 103).

$$\varepsilon = 2 \times \alpha \times 3{,}14159 \times \upsilon \qquad (1)$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου πρέπει εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας νὰ προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν βάσεων αὐτοῦ (§ 105). Ἂν δὲ παραστήσωμεν διὰ Ε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, ὁ

ὁποῖος ἔχει ὕψος υ καὶ ἀκτῖνα βάσεως α, θὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης.
$E=(2\times\alpha\times3{,}14159\times\upsilon)+(2\times3{,}1415\times\alpha^2)$ ἢ
$E=2\times\alpha\times3{,}14159\times(\upsilon+\alpha)$ (2), ἥτις ἐκφράζει
ὅτι: Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ ὕψους καὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως αὐτοῦ.

Ἐφαρμογαί: 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος 4 μ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,40 μ. (ἀπ. 10,053 τ. μ.).

1) Πρόκειται δι' ὑφάσματος πλάτους 1 μ. νὰ καλυφθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κυλινδρικῆς στήλης, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος 3 μ. καὶ διάμετρον βάσεως 0 65 μ. Πόσα μέτρα χρειάζονται; (6,03168 μ.).

3) Κυλινδρικὴ στήλη ἔχει ὕψος 2 μ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,37 μ. Πόσα χρήματα ἀπαιτοῦνται πρὸς χρωματισμὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτῆς, ἂν δι' ἕκαστον τετρ. μέτρον, ἀπαιτοῦνται 3 δραχμαί; (ἀπ. 13,95 δρ.

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος μὲν 0,60 μ. ἀκτῖνα δὲ βάσεως 0,3 μ. (ἀπ. 1,6964 τ. μ.).

§ 141. **Ὄγκος κυλίνδρου.** – Λάβωμεν κύλινδρον ὁμοιμερῆ καὶ κατεσκευασμένον ἐκ ξύλου ἔχοντος γνωστὸν εἰδικὸν βάρος π. χ. 0,8. Ἔστω δὲ ὅτι τὸ μὲν ὕψος αὐτοῦ εἶναι 10 δακτύλων, ἡ δὲ διάμετρος τῆς βάσεως 7 δακ. Ἐὰν ζυγίσωμεν αὐτόν, δι' ἀκριβοῦς ζυγοῦ, θέλομεν εὕρει ὅτι τὸ βάρος του εἶναι 307,872 γραμμ. Ὁ ὄγκος, ὅθεν, αὐτοῦ εἶναι

$$307{,}872:0{,}8=384{,}84 \text{ κ. δ.},$$

Ἐπειδὴ δὲ τοῦ κυλίνδρου τούτου, ἡ βάσις ἔχει ἐμβαδὸν $3{,}14159\times3{,}5^2=38{,}484$ τ. δ. τὸ δὲ ὕψος εἶναι 10 δ. παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου τούτου ($38{,}484\times10=384{,}84$). Ὁμοίως ἐργαζόμενοι καὶ ἐπὶ ἄλλου κυλίνδρου διαφόρων διαστάσεων καὶ οὐσίας τοῦ προηγουμένου καταλήγομεν εἰς ὅμοιον συμπέρασμα.

Ἄρα: Ὁ ὄγκος κυλίνδρου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα, ἂν παραστήσωμεν διὰ Θ τὸν ὄγκον κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος υ καὶ ἀκτῖνα βάσεως α, θὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης

$$\Theta = 3{,}14159 \times \alpha^2 \times \upsilon \qquad (1)$$

Ἐφαρμογαί: 1) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος 5 μ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 1 μέτρου; (ἀπ. 15,70795 κ. μ.).

2) Ὁ ὄγκος κυλίνδρου τινὸς εἶναι 20 κ. μ. τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ 5 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ; (ἀπ. 4 μ.).

3) Πόσον εἶναι τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου 4°Κ., ὅπερ χωρεῖ κυλινδρικὸς κάδος, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος 2,5 μ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,6 μ.; (ἀπ. 2827431 γραμ.).

4) Πρόκειται ἐπὶ κυκλικῆς βάσεως, ἡ ὁποία ἔχει ἐμβαδὸν 3,2 τ. μ. νὰ κατασκευασθῇ κυλινδρικὸς κάδος χωρητικότητος 5000 ὀκάδων ὕδατος ἀπεσταγμένου 4°Κ. Πόσον ὕψος πρέπει νὰ ἔχῃ ὁ κάδος οὗτος; (ἀπ. 2. μ.).

2. ΚΩΝΟΣ

§ 142. Τὸ σῶμα ΓΑΒ (Σχ. 125) περατοῦται εἴς τινα κύκλον Κ καὶ καμπύλην τινὰ ἐπιφάνειαν. Ἡ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ὑψουμένη ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἔχει μετὰ τῆς καμπύλης ἐπιφανείας ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον Γ. Πᾶσαι δὲ αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου τούτου εἰς τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας κεῖνται ἐπὶ τῆς καμπύλης ἐπιφανείας τοῦ σώματος.

Τὸ σῶμα τοῦτο καλεῖται κῶνος.

Τὸ σημεῖον Γ καλεῖται κορυφὴ τοῦ κώνου

(Σχ. 125)

Ὁ κύκλος, εἰς τὸν ὁποῖον περατοῦται ὁ κῶνος, καλεῖται βάσις αὐτοῦ.

Ἡ ἀπόστασις ΓΚ τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῆς βάσεως καλεῖται ὕψος τοῦ κώνου τούτου.

Τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ὑπὸ τῆς κορυφῆς καὶ τῶν διαφόρων σημείων τῆς περιφερείας τῆς βάσεως κώνου, καλοῦνται πλευραὶ αὐτοῦ. Πᾶσαι αἱ πλευραὶ ἑκάστου κώνου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας (§ 120 Β΄ β΄).

Καὶ τοῦ κώνου τὴν καμπύλην ἐπιφάνειαν καλοῦμεν ἰδιαιτέρως κυρτὴν ἐπιφάνειαν.

§ 143. **Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κώνου.** — Ἐὰν περιβάλωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κώνου διὰ λεπτοῦ φύλλου χάρτου, ὡς ἀκριβῶς ἐπράξαμεν καὶ διὰ τὸν κύλινδρον (§ 140), καὶ ἐκτυλίξωμεν ἔπειτα τὸ φύλλον, βλέπομεν ὅτι τοῦτο ἔχει σχῆμα κυκλικοῦ τομέως ΓΒΔ (Σχ. 125). Τοῦ τομέως τούτου ἡ μὲν ἀκτὶς ἰσοῦται πρὸς τὴν πλευρὰν ΓΒ τοῦ κώνου, τὸ δὲ τόξον ἔχει τὸ αὐτὸ μῆκος Γ μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως, μεθ' ἧς πρὸ τῆς ἐκτυλίξεως συνέπιπτεν. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως τούτου εἶναι $\frac{(\Gamma B)}{2}\times(\text{τοξ.}B\Delta)$ (§ 196 Σημ. β΄) ἢ $\frac{(\Gamma B)}{2}\times\Gamma$, ἕπεται ὅτι τόσον εἶναι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

Ἄρα: Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου εἶναι γινόμενον τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου, διὰ τοῦ λ τὴν πλευρὰν καὶ διὰ τοῦ α τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως αὐτοῦ, θὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης:

$$\varepsilon=\frac{\lambda}{2}\times 2\times\alpha\times 3{,}14159 \text{ ἢ } \varepsilon=\lambda\times\alpha\times 3{,}14159 \qquad (1)$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ Ε τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κώνου πρέπει εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας νὰ προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ (§ 105). Κατὰ ταῦτα ἀληθεύει ἡ ἰσότης $E=(\lambda\times\alpha\times 3{,}14159)+(\alpha^2\times 3{,}14159)$ ἢ

$$E=\frac{2\times\alpha\times 3{,}14159}{2}\times(\lambda+\alpha) \qquad (2)$$

Ἤτοι: Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως αὐτοῦ.

Ἐφαρμογαί: 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει πλευρὰν μὲν 2,25 μ. ἀκτῖνα δὲ βάσεως 9,35 μ. (ἀπ. 2,474 τ. μ.).

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει πλευρὰν 3 μ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,40 μ. (ἀπ. 4, 2725 τ. μ).

3) Κυκλικὸς τομεὺς ἐκ χαρτονίου 45° καὶ ἀκτῖνος 0,04 μ. περιτυλίσσεται εἰς σχῆμα κώνου. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τούτου; (ἀπ. 0,0314159 τ. μ.).

§ 144. **Ὄγκος κώνου.** — Κυλινδρικὸν ποτήριον χωρεῖ ὕδωρ τριπλασίου βάρους ἀπὸ ἐκεῖνο ὅπερ χωρεῖ κωνικὸν ποτήριον ἔχον ἴσην βάσιν καὶ ἴσον ὕψος πρὸς τὸ προηγούμενον. Ὁ ὄγκος ἐπομένως τοῦ ὑδατίνου κώνου εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ὑδατίνου κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἴσην βάσιν καὶ ἴσον ὕψος πρὸς τὸν κῶνον. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ (§ 141), συνάγομεν εὐκόλως ὅτι:

Ὁ ὄγκος κώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα, ἂν υ εἶναι τὸ ὕψος κώνου, α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ Θ ὁ ὄγκος αὐτοῦ, ἀληθεύει ἡ ἰσότης: $\Theta = \frac{\alpha^2 \times 3,14159 \times \upsilon}{3}$ (1)

Ἐφαρμογαί: 1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κώνου, ἔχοντος ὕψος 1 μ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,25 μ.: (ἀπ. 0,065449791 κ. μ).

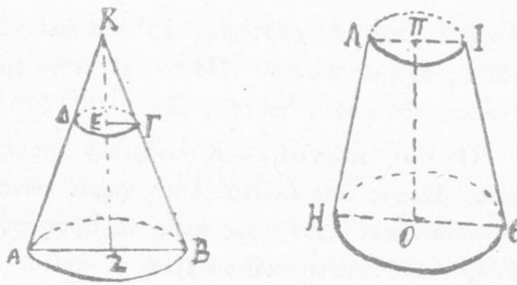
2) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος μὲν 2 μ. διάμετρον δὲ βάσεως 1 μέτρου; (ἀπ. 05235983 κ. μ.).

3) Πόσον εἶναι τὸ βάρος κώνου ἔχοντος ὕψος 0,40 μ., διάμετρον βάσεως 0,30 μ. καὶ κατεσκευασμένον ἐκ μετάλλου τοῦ ὁποίου τὸ εἰδ. βάρος εἶναι 7,788; (ἀπ. 72, 4 χιλιόγραμμα).

3. ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ

§ 145. Ἐὰν τὸν τυχόντα κῶνον ΚΑΒ (Σχ. 126) τμήσωμεν δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτοῦ, μένει μεταξὺ τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ τῆς βάσεως στερεόν τι ΑΒΓΔ· τὸ στερεὸν τοῦτο καλεῖται κόλουρος κῶνος. Ὁμοίως τὸ στερεὸν ΗΘΙΛ (Σχ. 126) εἶναι κόλουρος κῶνος.

Γενικῶς: Κόλουρος κῶνος καλεῖται μέρος κώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεως τοῦ κώνου τούτου καὶ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸν κῶνον καὶ εἶναι παράλληλον τῇ βάσει αὐτοῦ.



(Σχ. 126)

Ἡ τομὴ ἑκάστου κώνου ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει καὶ μὴ διερχομένου διὰ τῆς κορυφῆς εἶναι κύκλος μικρότερος τῆς βάσεως αὐτοῦ. Κατ' ἀκολουθίαν τούτου ὁ κόλουρος κῶνος περατοῦται εἰς δύο κύκλους καὶ κυρτήν τινα ἐπιφάνειαν.

Οἱ δύο κύκλοι, εἰς τοὺς ὁποίους περατοῦται κόλουρος κῶνος, καλοῦνται βάσεις αὐτοῦ.

Ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων κολούρου κώνου καλειται ὕψος αὐτοῦ.

Πλευραὶ κολούρου κώνου καλοῦνται τὰ μέρη τῶν πλευρῶν τοῦ κώνου, ἐξ οὗ παρήχθη, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν βάσεων αὐτοῦ π.χ. ΛΗ καὶ ΙΘ εἶναι δύο πλευραὶ τοῦ κολούρου κώνου ΗΛΙΘ.

§ 146. **Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας κολούρου κώνου.**— Ἡ θεωρητικὴ γεωμετρία ἀποδεικνύει τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἡμίσεος τῆς πλευρᾶς ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα, ἂν παραστήσωμεν διὰ λ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς διὰ Α καὶ α τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεων κολούρου κώνου καὶ διὰ ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας, ἀληθεύει ἡ ἰσότης:

$$ε=\frac{λ}{2}\times(2\times3{,}14159\times A+2\times3{,}14159\times α) \text{ ἤ}$$

$$ε=3{,}14159\times λ\times(A+α) \qquad (1)$$

Τὸ δὲ ἐμβαδὸν Ε τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου εὑρίσκομεν, ἂν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας προσθέσωμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ. Ὥστε:

$$E=3{,}14159\times λ\times(A \quad α)+3{,}14159\times A^2+3{,}14159\times α^2 \text{ ἤ}$$

$$E=3{,}14159\times[A^2+α^2+λ\times(A+α)]. \qquad (2)$$

Ἐφαρμογαί. 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει πλευρὰν 2 μ. καὶ ἀκτῖνας βάσεων 0,45 μ. καὶ 0,25 μ. (ἀπ. 4,398226 τ.μ.).

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει πλευρὰν 1 μ. καὶ ἀκτῖνας βάσεων 0,60 μ. καὶ 0,40 μ. (ἀπ. 4,7752168 τ.μ.).

§ 157. **Ὄγκος κολ. κώνου.** — Ἡ θεωρητικὴ γεωμετρία ἀποδεικνύει ὅτι ὁ ὄγκος Θ κολ. κώνου, ὅστις ἔχει ὕψος υ καὶ ἀκτῖνας βάσεων Α καὶ α, παρέχεται ὑπὸ τῆς ἰσότητος.

$$Θ=\frac{1}{3}\times3{,}14159\times υ\times(A^2+A\times α+α^2) \qquad (1)$$

Πρακτικῶς δυνάμεθα νὰ πεισθῶμεν περὶ τῆς ἀληθείας ταύτης ὡς ἀκολούθως. Λαμβάνομεν ποτήριον, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα κολ. κώνου καὶ μετροῦμεν τὸ ἐσωτερικὸν ὕψος καὶ τὰς ἀκτῖνας τῶν ἐσωτερικῶν βάσεων αὐτοῦ. Ἔστω δὲ ὅτι $υ=10^δ$, $A=4^δ$, καὶ $α=3δ$. Ὑπολογίζοντες τὸν κενὸν ὄγκον αὐτοῦ κατὰ τὴν ἰσότητα (1) εὑρίσκομεν $Θ=\frac{1}{3}\times3{,}14159\times10\times16+12+9=387{,}46$ κ.δ.

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ποτήριον τοῦτο ὀφείλει νὰ χωρῇ ὕδωρ ἀπεσταγμένον 4^0Κ βάρους 387,46 γρμμαρίων· πράγματι δὲ ζυγίζοντες αὐτὸ πρῶτον μὲν κενὸν εἶτα δὲ πλῆρες τοιούτου ὕδατος, ἀνευρίσκομεν ὅτι χωρεῖ ὕδωρ 387,46 γραμμαρίων.

Ἐφαρμογαί: 1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κολ. κώνου, ὅστις ἔχει ὕψος 0,30 μ. καὶ ἀκτῖνας βάσεων 0,12 μ. καὶ 0,08 μ. (ἀπ. 0,00956 κ.μ.).

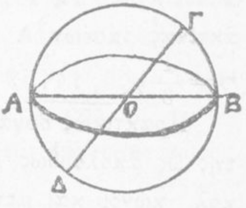
2) Κώνου ἡ μὲν βάσις ἔχει διάμετρον 0,12μ, τὸ δὲ ὕψος εἶναι 0,16μ. Ἐὰν οὗτος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει καὶ ἀπέχοντος ἀπ' αὐτῆς 0,08μ, σχηματίζεται τομὴ αὐτοῦ ἔχουσα διάμετρον 0,06. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ οὕτω σχηματιζομένου κολ. κώνου;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ

ΣΦΑΙΡΑ

§ 148. Τοῦ σώματος Σ (Σχ. 2 ἡ ἐπιφάνεια εἶναι καμπύλη. Πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας ταύτης ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τὸ σημεῖον Κ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ σώματος τούτου. Τὸ σῶμα Σ καλεῖται σφαῖρα. Ὁμοίως τὸ σῶμα ΑΒΓ (σχ. 127) εἶναι σφαῖρα.

Γενικῶς: Σφαῖρα καλεῖται πᾶν σῶμα τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.



(Σχ. 127)

Κέντρον σφαίρας καλεῖται τὸ σημεῖον αὐτῆς, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.

Τὰ εὐθ. τμήματα ΟΑ, ΟΓ κτλ. καλοῦνται ἀκτῖνες τῆς σφαίρας Ο (Σχ. 127). Ἄρχεται δὲ ἕκαστον ἐκ τοῦ κέντρου καὶ καταλήγει εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.

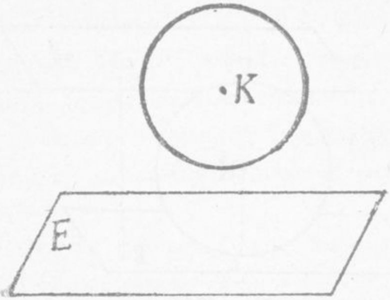
Ὥστε: ἀκτὶς σφαίρας καλεῖται πᾶν εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἄρχεται ἐκ τοῦ κέντρου καὶ καταλήγει εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς.

Πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες σφαίρας εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

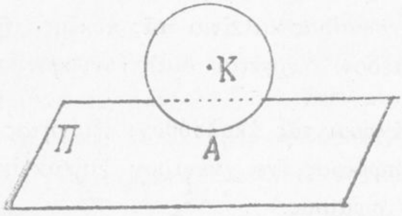
Τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΓΔ λέγονται διάμετροι τῆς σφαίρας Ο (Σχ. 127) Ἕκαστον δὲ τούτων διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ καταλήγει ἑκατέρωθεν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς.

Ὥστε: Διάμετρος σφαίρας καλεῖται πᾶν εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ καταλήγει ἑκατέρωθεν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς.

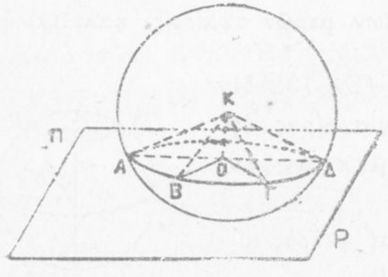
Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι α') Πᾶσα διάμετρος σφαίρας σύγκειται ἐκ δύο ἀκτίνων καὶ β') πᾶσαι αἱ διάμετροι σφαίρας εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.



(Σχ. 128)



(Σχ. 129)

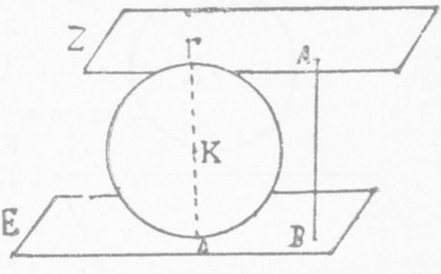


(Σχ. 130)

§ 149. **Θέσεις ἐπιπέδου πρὸς σφαῖραν.** — Τὸ ἐπίπεδον Ε (σχ. 128) οὐδόλως συναντᾷ τὴν σφαῖραν Κ. Τὸ ἐπίπεδον Π. (σχ. 129) ἐγγίζει τὴν σφαῖραν Κ εἰς ἓν μόνον σημεῖον Α, λέγεται δὲ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον. Τέλος τὸ ἐπίπεδον Π. (Σχ. 130) τέμνει τὴν σφαῖραν Κ, ἤτοι εἰσχωρεῖ ἐντὸς τῆς σφαίρας καὶ χωρίζει αὐτὴν εἰς δύο μέρη ἑκατέρωθεν αὐτῆς κείμενα. Ὥστε αἱ θέσεις τὰς ὁποίας τυχὸν ἐπίπεδον δύναται νὰ ἔχῃ πρὸς σφαῖραν εἶναι τρεῖς: α') τὸ ἐπίπεδον οὐδόλως συναντᾷ τὴν σφαῖραν, β') τὸ ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς σφαίρας καὶ γ') τὸ ἐπίπεδον τέμνει τὴν σφαῖραν.

§ 150. **Εὕρεσις τῆς ἀκτῖνος σφαίρας.** — Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀκτῖνος σφαίρας Κ (Σχ. 131) τοποθετοῦμεν αὐτὴν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τραπέζης Ε καὶ ἐπ' αὐτῆς στηρίζομεν ἐπίπεδον τεμάχιον χαρτονίου Ζ ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας καὶ παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ Ε. Μετροῦμεν ἔπειτα τὴν ἀπόστασιν ΑΒ τῶν δύο τούτων παραλλήλων πιπέδων καὶ διαιροῦμεν αὐτὴν διὰ 2. Τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας. Τῷ ὄντι· ἡ διάμετρος ΓΔ τῆς σφαίρας ἰσοῦται τῇ ἀποστάσει ΑΒ τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ Ζ.

§ 151. **Κύκλοι σφαίρας.**—Ἐὰν ἐπίπεδόν τι τέμνῃ σφαῖραν, ἔχει μετ' αὐτῆς κοινόν τι μέρος· τὸ κοινὸν τοῦτο μέρος εἶναι κύκλος. Τοῦτο ἐκφράζομεν οὕτω:



(Σχ. 131)

Ἡ τομὴ σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου εἶναι κύκλος.

Τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΑΒ (σχ. 127) διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας Ο· ὁ κύκλος οὗτος καλεῖται μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας Ο.

Γενικῶς: Μέγιστος κύκλος σφαίρας καλεῖται πᾶς κύκλος τῆς σφαίρας, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς.

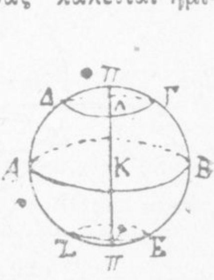
Οἱ μεγ. κύκλοι σφαίρας ἔχουσι τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας.

α'. Πᾶς μέγιστος κύκλος σφαίρας ἔχει κέντρον καὶ ἀκτῖνα τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

β'. Πᾶς μέγιστος κύκλος σφαίρας διαιρεῖ τὴν σφαῖραν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἑκάτερον τῶν ἴσων τούτων μερῶν σφαίρας καλεῖται ἡμισφαίριον.

Τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΔΓ (Σχ. 132) δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἐφ' ἧς κεῖται. Οὗτος καλεῖται μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας.



(Σχ. 132)

Ὁμοίως ὁ κύκλος ΖΕ εἶναι μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας Κ (σχ. 132).

Γενικῶς: Μικρὸς κύκλος σφαίρας καλεῖται πᾶς κύκλος σφαίρας, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντραυ αὐτῆς.

Τῶν κύκλων ΔΓ, ΑΒ, ΖΕ (σχ. 132) τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα· λέγονται δὲ οὗτοι παράλληλοι κύκλοι τῆς σφαίρας Κ.

Γενικῶς: Παράλληλοι κύκλοι σφαίρας καλοῦνται οἱ κύκλοι καθ' οὓς αὐτὴ τέμνεται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων.

§ 152. **Σφαιρικὴ ζώνη.**—Τὸ μέρος ΑΒΔΓ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας Κ (σχ. 12) περιέχεται μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων ΑΒ καὶ ΓΔ αὐτῆς. Τὸ μέρος τοῦτο καλεῖται σφαιρικὴ ζώνη. Ὁμοίως σφαιρικὴ ζώνη εἶναι καὶ τὸ μέρος ΑΒΖΕ τῆς ἐπιφανείας τῆς αὐτῆς σφαίρας.

Γενικῶς: Σφαιρικὴ ζώνη καλεῖται πᾶν μέρος τῆς ἐπιφανείας σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο παραλλήλων κύκλων αὐτῆς.

Βάσεις σφαι. ζώνης καλοῦνται οἱ δύο κύκλοι μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται αὕτη.

Ὕψος δὲ σφαιρικῆς ζώνης καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων αὐτῆς.

Σημ. Ἐνίοτε τὸ ἓν τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ἡ σφ. ζώνη, ἐφάπτεται τῆς σφαίρας. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ζώνη ἔχει μίαν βάσιν.

§ 153. **Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας σφαίρας.**—Ἡ θεωρητικὴ γεωμετρία ἀποδεικνύει τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀκολούθου προτάσεως:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τεσσάρων μεγίστων κύκλων αὐτῆς.

Κατὰ ταῦτα, τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ἐπιφανείας σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα α, παρέχεται ὑπὸ τῆς ἰσότητος $Ε = α^2 \times 3,14159 \times 4$ (1).

Ἐφαρμογαί: 1) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα 0,35 μ.; (ἀπ. 1,539379 τ. μ).

2) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον 3,50.; (ἀπ. 38,4844775 τ. μ.).

3) Ἡ ἀκτὶς σφαίρας, τὸ ὕψος κυλίνδρου καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως αὐτοῦ ἔχουσι πάντα μῆκος ἀνὰ 0,2 μ. ἕκαστον. Ποσάκις ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι μεγαλυτέρα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου; (ἀ. δίς).

4) Σφαῖρα ἔχει ἐπιφάνειαν 50,26544 τ. μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτῆς; (ἀπ. 2 μ.).

§ 154. **Ὄγκος σφαίρας.**—Ἡ θεωρητικὴ γεωμετρία ἀποδεικνύει τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀκολούθου προτάσεως:

Ὁ ὄγκος σφαίρας εἶναι γινόμενον τῆς ἐπιφανείας ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς.

Οὕτω σφαῖρα ὑαλίνη ἀκτῖνος 0,05 μ. ἔχει ἐπιφάνειαν μὲν 314,159 τ. δ. ὄγκον δὲ $314,159 \times \frac{5}{3} = 523,598$ κ. δ. Ἡ αὐτὴ σφαῖρα ὀφείλει νὰ ἔχῃ εἰς βάρος $523,598 \times 2,488 = 1302,7$ γραμμάρια. Ὄντως, ἐὰν μίαν τοιαύτην σφαῖραν ζυγίσωμεν, εὑρίσκομεν ἀκριβῶς τὸ ὑπολογισθὲν βάρος αὐτῆς. Πειθόμεθα οὕτω πρακτικῶς περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἀνωτέρω προτάσεως.

Κατὰ ταῦτα, ὁ ὄγκος Θ σφαίρας ἐχούσης ἀκτῖνα α παρέχεται ὑπὸ τῆς ἰσότητος :

$$\Theta = \alpha^2 \times 3,14159 \times 4 \times \frac{\alpha}{3} \text{ ἢ } \Theta = \frac{4}{3} \times 3,14159 \times \alpha^3 \qquad (1)$$

Ἐφαρμογαί: 1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον 1,2 μ. (ἀπ. 0,9047 κ. μ.).

3. Πόσον εἶναι τὸ βάρος σφαίρας ἐκ μολύβδου ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα 0,15 μ; (ἀπ. 114,714 χιλιόγραμ.).

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

1. Τρίγωνόν τι, οὗ μία πλευρὰ ἔχει μῆκος 0,40 μ. ἡ δὲ ἀπόστασις τῆς ἀπέναντι κορυφῆς ἀπ' αὐτῆς εἶναι 0,25, ἀποτελεῖ τὴν βάσιν πρίσματος, ὅπερ ἔχει ὕψος 9 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ; (ἀπ. 9,450 κ. μ).

2. Ἐργάται ἠνέφξαν τάφρον μήκους 40 μ. βάθους 2 μ. καὶ πλάτους 0,80 μ. Πόσας δραχμὰς ἔλαβον διὰ τὴν ἐργασίαν ταύτην, ἐὰν εἶχον συμφωνήσῃ νὰ πληρώνωνται, 1,89 δραχ. δι' ἕκαστον κ. μέτρον ἐξαχθησομένου χώματος; (ἀπ. 115,2 δραχ.).

3. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος μὲν 6 μ. βάθος δὲ ὀρθογώνιον, οὗ δύο προσκείμεναι πλευραὶ ἔχουσι μῆκος, 2,4 μ. ἡ μὲν καὶ 0,85 μ. ἡ ἄλλη; (ἀπ. 4,08 κ. μ.).

4. Πόσον εἶναι τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου 4° Κ, ὅπερ χωρεῖ κυλινδρικὸς κάδος ὕψους 2,5 μ. καὶ ἀκτῖνος βάσεως 0,60 μ. (ἀπ 2824,35 χιλιόγραμ.).

5. Τεμάχιον θείου ἔχει βάρος 24, 84 χιλιόγραμ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ; (ἀπ. 12 κ. παλ).

6. Πόσον εἶναι τὸ βάρος σιδηρᾶς σφαίρας, ἧς ἡ ἀκτὶς εἶναι 0,02 μ; (ἀπ. 260,9765 γραμ.).

7. Κῶνός τις ἔχει ὕψος 3 μ. καὶ ὄγκον 0,156636 κ. μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως αὐτοῦ; (ἀπ. 0,2 μ.).

8. Κῶνος καὶ πυραμὶς ἔχουσιν ἴσα ὕψη καὶ τὸν αὐτὸν ὄγκον. Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου εἶναι 0,5 μ. πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος; (ἀπ. 0,502 τ.μ.).

9. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ἀκτῖνος 6 μ.

10. Ἐντὸς ποτηρίου πλήρους ὕδατος ἀπεστ. 4^0 K ρίπτομεν κύλινδρον σιδηροῦν ὕψους 0,03 μ. καὶ ἀκτῖνος βάσεως 0,01 μ. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον θὰ χυθῇ;

11. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος εἰς κυβ. ὑφεκατόμετρα σανίδος ἐχούσης μῆκος 3,20, μ. πλάτος 0, 27 μ. καὶ πάχος 0,04 μ; (ἀπ. 34560 κ. ὑφ.).

12. Ἀντλίον (κουβᾶς) ἔχει βάθος 0,30 μ. ἡ διάμετρος τοῦ πυθμένος εἶναι 0,23 μ. ἡ δὲ τοῦ στομίου 0,29 μ. Πόσας ὀκάδας ὕδατος χωρεῖ; (ἀπ. $12\frac{1}{2}$ ὀκ.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΠΡΟΒΟΛΑΙ

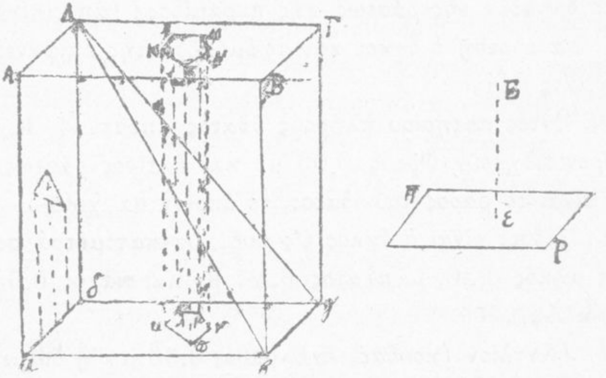
§ 155. **Ὀρθὴ προβολὴ σημείου ἐπὶ ἐπίπεδον.** — Ἡ αἴθουσα δΒ (σχ. 133) ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Ἡ ἀκμὴ αὐτῆς Αα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δάπεδον καὶ ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς Α τῆς ὀροφῆς. Ὁ πούς α καλεῖται ὀ ρ θ ὴ π ρ ο β ο λ ὴ τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ δαπέδου. Ὁμοίως οἱ πόδες β, γ, δ τῶν καθέτων Ββ, Γγ, Δδ, εἶναι ὀρθαὶ προβολαὶ τῶν κορυφῶν Β, Γ, Δ τῆς ὀροφῆς ἐπὶ τὸ δάπεδον, τὸ σημεῖον ε εἶναι ὀρθὴ προβολὴ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ.

Γενικῶς: Ὀρθὴ προβολὴ σημείου ἐπὶ ἐπίπεδον καλεῖται ὁ πούς τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Σημ. Τὴν ὀρθὴν προβολὴν θέλομεν καλῇ χάριν συντομίας ἁπλῶς προβολήν.

Τὸ ἐπίπεδον, ἐφ᾽ ὃ γίνεται προβολὴ καλεῖται π ρ ο β ο λ ι κ ὸ ν ἐ π ί π ε δ ο ν. Ἡ κάθετος δι᾽ ἧς προβάλλεται ἕκαστον σημεῖον, καλεῖται προβάλλουσα αὐτοῦ. Οὕτω Αα εἶναι ἡ προβάλλουσα τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὸ δάπεδον.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς προβολῆς γίνεται φανερὰ ἀλήθεια τῶν ἀκολούθων προτάσεων.



(Σχ. 133)

α΄. Ἐὰν εὐθεῖά τις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον, πάντα τὰ σημεῖα αὐτῆς ἔχουσι τὴν αὐτὴν προβολὴν (τὸν πόδα αὐτῆς).

β΄. Πᾶν σημεῖον τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου ταὐτίζεται μετὰ τῆς προβολῆς του.

§ 156. **Προβολὴ οἱουδήποτε σχήματος**.—Αἱ προβολαὶ τῶν σημείων τῆς ἀκμῆς ΑΒ (Σχ. 133) ἐπὶ τὸ δάπεδον ἀποτελοῦσι τὴν πλευρὰν αβ αὐτοῦ. Ἡ αβ καλεῖται προβολὴ τῆς ΑΒ. Ὁμοίως αἱ προβολαὶ ὅλων τῶν σημείων τῆς ὀροφῆς ΑΒΓΔ ἀποτελοῦσι τὸ δάπεδον αβγδ· τὸ σχῆμα αβγδ καλεῖται προβολὴ τοῦ σχήματος ΑΒΓΔ ἐπὶ τὸ δάπεδον.

Γενικῶς: Προβολὴ σχήματος ἐπὶ ἐπίπεδον καλεῖται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσιν αἱ προβολαὶ πάντων τῶν σημείων αὐτοῦ.

Σημ. Ἐνίοτε ἡ προβολὴ εὐθείας γραμμῆς εἶναι σημεῖον (§ 155 α΄.).

§ 157. **Προβολαὶ εὐθ. τμημάτων**.—Α΄. Τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ, ΒΓ κτλ. προβολαὶ ἐπὶ τὸ δάπεδον εἶναι τὰ εὐθ. τμήματα αβ, βγ. κτλ. (Σχ. 133).

Γενικῶς: Ἡ προβολὴ εὐθ. τμήματος ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι εὐθ. τμῆμα.

Σημ. Ἐξαίρεσιν ἀποτελοῦσι τὰ εὐθ. τμήματα, ἅτινα κεῖνται ἐπὶ εὐθειῶν καθέτων ἐπὶ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον (§ 155 α΄.).

Β΄. Ἑκάστου τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, τὰ ὁποῖα εἶναι παράλληλα πρὸς τὸ δάπεδον (Σχ. 133) ἡ προβολὴ ἐπὶ τὸ δάπεδον εἶναι τμῆμα ἴσον αὐτῷ. Οὕτω αβ=ΑΒ ἕνεκεν τοῦ παραλληλογράμμου ΑαβΒ. Τοῦ εὐθ. τμήματος Δβ προβολὴ ἐπὶ τὸ δάπεδον εἶναι τὸ δβ, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον αὐτοῦ, διότι ἡ μὲν βδ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν Δδ (§ 119) ἡ δὲ βΔ πλαγία πρὸς αὐτὴν (§ 20 α΄.).

Ὥστε: Ἡ προβολὴ εὐθ. τμήματος παραλλήλου πρὸς τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον εἶναι εὐθ. τμῆμα ἴσον πρὸς αὐτό. Ἡ δὲ προβολὴ εὐθ. τμήματος μὴ παραλλήλου οὐδὲ καθέτου πρὸς τὸ προβ. ἐπίπεδον εἶναι εὐθ. τμῆμα μικρότερον αὐτοῦ.

Γ΄. Τῶν παραλλήλων εὐθ. τμημάτων ΑΔ καὶ ΒΓ (Σχ. 133) προβολαὶ ἐπὶ τὸ αὐτὸ προβολικὸν ἐπίπεδον αβγδ εἶναι τὰ εὐθ. τμήματα αδ καὶ βγ, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁμοίως παράλληλα.

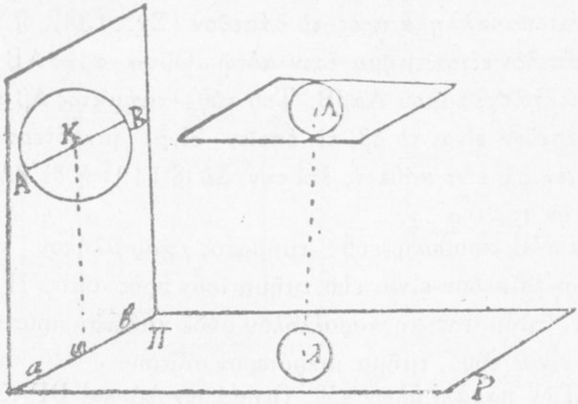
Γενικῶς: Αἱ προβολαὶ παραλλήλων εὐθ. τμημάτων ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι εὐθ. τμήματα παράλληλα.

Σημ. Τὰ παράλληλα εὐθ. τμήματα δὲν πρέπει νὰ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ προβ. ἐπίπεδον οὐδὲ νὰ κεῖνται ἐν ἐπιπέδῳ καθέτῳ ἐπ' αὐτό. Διότι, ἐν μὲν τῇ α΄. περιπτώσει αἱ προβολαὶ αὐτῶν εἶναι σημεῖα, ἐν δὲ τῇ β΄. κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

§. 158. **Προβολαὶ εὐθ. σχημάτων.**—Τὸ ἐπίπεδον ΑαδΔ (Σχ. 133) εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ δάπεδον· προβολὴ δὲ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ δάπεδον εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα αδ, καθ' ὃ τέμνεται ὑπὸ τοῦ δαπέδου. Τυχόντος δὲ εὐθ. σχήματος κειμένου ἐν τῇ ἐπιπέδῳ ΑαδΔ προβολὴ ἐπὶ τὸ δάπεδον εἶναι τμῆμα τῆς αδ. Ἡ ὀροφὴ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ δάπεδον καὶ προβολὴ αὐτῆς ἐπ' αὐτὸ εἶναι ὅλον τὸ δάπεδον, ὅπερ ἰσοῦται τῇ ὀροφῇ. Τοῦ τυχόντος εὐθ. σχήματος ΚΛΜΝΠ, ὅπερ κεῖται ἐν τῇ ὀροφῇ, προβολὴ ἐπὶ τὸ δάπεδον εἶναι τὸ ἴσον αὐτῷ σχῆμα κλμνπ.

Τοῦ τριγώνου Δβγ προβολὴ ἐπὶ τὸ δάπεδον εἶναι τὸ τρίγωνον δβγ, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον αὐτοῦ. Ὥστε ἡ προβολὴ εὐθ. σχήματος ἐπὶ ἐπίπεδον ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ πρὸς τὸ προβ. ἐπίπεδον.

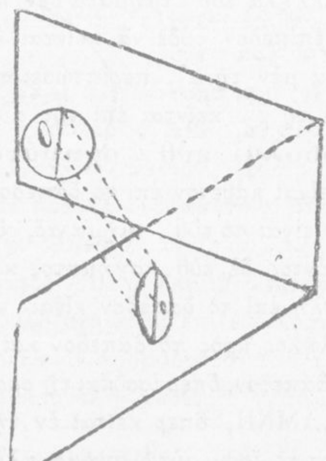
α΄. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον εὐθ. σχήματος εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ προβ. ἐπίπεδον, ἡ προβολὴ αὐτοῦ εἶναι μέρος τῆς εὐθείας, καθ' ἣν τέμνονται τὰ δύο ταῦτα ἐπίπεδα.



(Σχ. 134)

β΄. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον, εὐθ. σχήματος εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ προβ. ἐπίπεδον, ἡ προβολὴ αὐτοῦ εἶναι σχῆμα ἴσον.

γ΄. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον εὐθ. σχήματος εἶναι κεκλιμένον πρὸς τὸ



(Σχ. 135)

προβ. ἐπίπεδον, ἡ προβολὴ αὐτοῦ εἶναι εὐθ. σχῆμα μικρότερον αὐτοῦ.

§ 159. **Προβολὴ κύκλου.**—Ὁ κύκλος Κ (Σχ. 134) κεῖται ἐν ἐπιπέδῳ καθέτῳ ἐπὶ τὸ προβ. ἐπίπεδον ΠΡ· προβολὴ αὐτοῦ εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα ακβ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων. Τοῦ κύκλου Λ, ὁ ὁποῖος εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ προβ. ἐπίπεδον, προβολὴ εἶναι ὁ κύκλος λ, ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος πρὸς αὐτόν. Τοῦ κύκλου Ο, (Σχ. 135) ὁ ὁποῖος κεῖται ἐν ἐπιπέδῳ κεκλιμένῳ πρὸς τὸ προβ. ἐπίπεδον, ἡ προβολὴ περικλείεται ὑπὸ καμπύλης γραμμῆς, ἡ ὁποία καλεῖται ἔλλειψις.

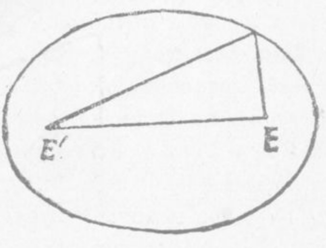
Ὥστε: α'. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον κύκλου εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ προβ. ἐπίπεδον, ἡ προβολὴ αὐτοῦ εἶναι μέρος τῆς τομῆς τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων.

Σημ. Τὸ μέρος τοῦτο συμπίπτει μὲ τὴν προβολὴν τῆς διαμέτρου, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος, πρὸς τὸ προβ. ἐπίπεδον, καὶ εἶναι ἑπομένως ἴσον πρὸς τὴν διάμετρον.

β'. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον κύκλου εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ προβ. ἐπίπεδον, ἡ προβολὴ αὐτοῦ εἶναι κύκλος ἴσος αὐτῷ καὶ ἔχων κέντρον τὴν προβολὴν τοῦ κέντρου.

γ'. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον κύκλου εἶναι κεκλιμμένον πρὸς τὸ προβ. ἐπίπεδον, ἡ προβολὴ αὐτοῦ περικλείεται ὑπὸ καμπύλης γραμμῆς, ἡ ὁποία καλεῖται ἔλλειψις.

Σημ. Ἔλλειψιν γράφομεν ὡς ἀκολούθως: Στερεοῦμεν τὰ ἄκρα νήματος εἰς δύο σημεῖα Ε καὶ Ε'. (Σχ. 136), τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις εἶναι μικροτέρα τοῦ μήκους τοῦ νήματος, τείνομεν εἶτα τὸ νῆμα διὰ γραφίδος, τὴν ὁποίαν περιάγομεν οὕτως ὥστε τὸ μὲν νῆμα νὰ τηρῆται τεταμένον, τὸ δὲ ἄκρον τῆς γραφίδος, νὰ ἅπτηται συνεχῶς τοῦ ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ κεῖνται τὰ σημεῖα Ε καὶ Ε'. Ἡ οὕτω κινουμένη γραφὶς γράφει ἔλλειψιν.



(Σχ. 136)

§ 160. **Προβολαὶ στερεῶν τινων.** - α'. Ἡ προβολὴ ὀρθοῦ πρίσματος ἐπὶ ἐπίπεδον παράλληλον τῇ βάσει αὐτοῦ εἶναι εὐθ. σχῆμα ἴσον τῇ βάσει ταύτῃ. Ἡ δὲ προβολὴ ἐπὶ ἐπίπεδον κάθετον τῇ βάσει αὐτοῦ εἶναι ὀρθογώνιον ἰσοϋψὲς τῷ πρίσματι.

β'. Ἡ προβολὴ πυραμίδος ἐπὶ ἐπίπεδον παράλληλον τῇ βάσει αὐτοῦ εἶναι εὐθ. σχῆμα ἴσον τῇ βάσει. Ἡ δὲ προβολὴ ἐπὶ ἐπίπεδον κάθετον τῇ βάσει εἶναι τρίγωνον ἰσοϋψὲς τῇ πυραμίδι.

γ'. Κυλίνδρου ἡ προβολὴ ἐπὶ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις αὐτοῦ εἶναι κύκλος ἴσος πρὸς ἑκατέραν τῶν βάσεων αὐτοῦ

Δ

καὶ ἔχει κέντρον τὴν προβολὴν τῶν κέντρων τῶν βάσεων αὐτοῦ. Ἡ δὲ προβολὴ ἐπὶ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὰς βάσεις εἶναι ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν ἴσην πρὸς τὴν διάμετρον ἑκατέρας τῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὸ τοῦ κυλίνδρου.

δ'. Κώνου ἡ προβολὴ ἐπὶ ἐπίπεδον παράλληλον τῇ βάσει αὐτοῦ εἶναι κύκλος ἴσος πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ καὶ ἔχει κέντρον τὴν προβολὴν τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

Ἡ δὲ προβολὴ ἐπὶ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν εἶναι τρίγωνον, οὗ μία πλευρὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον τῆς βάσεως τοῦ κώνου, τὸ δὲ ἀντίστοιχον ὕψος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κώνου.

ε'. Ἡ προβολὴ σφαίρας ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι κύκλος, ὁ ὁποῖος ἔχει κέντρον τὴν προβολὴν τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν τῆς σφαίρας.

§ 161. **Ἠριθμημένα ἐπίπεδα.**—Ἡ προβολὴ σημείου ἐπὶ ἐπίπεδον δὲν ἀρκεῖ νὰ ὁρίσῃ τὴν θέσιν τοῦ σημείου τούτου ἐν τῷ διαστήματι. Τῷ ὄντι· τὸ τυχὸν σημεῖον ε τοῦ προβ. ἐπιπέδου ΠΡ (Σχ. 133) εἶναι προβολὴ πάντων τῶν σημείων τῆς καθέτου Εε. Ἐὰν θέλωμεν νὰ ὁρίσωμεν τὴν θέσιν σημείου τινὸς ἐν τῷ διαστήματι, πρέπει σὺν τῇ προβολῇ αὐτοῦ νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ πρ. ἐπιπέδου καὶ τὸ μέρος, πρὸς ὅ, ἐν σχέσει πρὸς τὸ πρ. ἐπίπεδον (ἄνω ἢ κάτω, δεξιὰ ἢ ἀριστερά, ἔμπροσθεν ἢ ὄπισθεν), κεῖται τοῦτο. Ἐν τῇ τοπογραφίᾳ π. χ. λαμβάνουσιν ἓν ὁριζόντιον ἐπίπεδον καὶ ἐπ' αὐτοῦ προβάλλουσι τὰ κυριώτερα σημεῖα τῆς χώρας, τῆς ὁποίας θέλουσι νὰ ἀπεικονίσωσι τὰς τοπογραφικὰς ἀνωμαλίας. Παρὰ τὴν προβολὴν ὅμως ἑκάστου σημείου ἀναγράφουσι καὶ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει εἰς μέτρα τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τοῦ προβ. ἐπιπέδου. Ἔμπροσθεν δὲ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου θέτουσι σημεῖον + μέν, ἂν τὸ σημεῖον κεῖται ἄνω τοῦ ὁριζοντίου τούτου προβ. ἐπιπέδου, τὸ — δέ, ἂν τοῦτο κεῖται κάτωθεν αὐτοῦ. Τὰ οὕτω σχηματιζόμενα π. ἐπίπεδα καλοῦνται γενικῶς ἠριθμημένα ἐπίπεδα. Ἂν δέ, ὡς συνήθως γίνεται, τὸ ὁριζόντιον πρ. ἐπίπεδον ἀπεικονίζει τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης, οἱ ἐπ' αὐτοῦ ἀριθμοὶ παριστῶσι τὰ ὕψη τῶν ἀντιστοίχων σημείων ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης.

§ 162. **Προβολαὶ ἐπὶ δύο προβολικὰ ἐπίπεδα.**—Συνήθως διὰ τὴν παράστασιν τῶν στερεῶν ἰδίᾳ γίνεται χρῆσις δύο προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ δύο προβολικὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα τέ-

300+50