ΠΑΝ. Γ. ΜΕΓΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

$$X+3=12 \Leftrightarrow X=12-3 \Leftrightarrow X=9$$

$$3 \cdot X=12 \Leftrightarrow X=12:3 \Leftrightarrow X=4$$

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑ 1979

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ Γ. ΜΕΓΑ
ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΣΤΗ ΜΑΡΑΣΛΕΙΟ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΑΚΑΔΗΜΙΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Γιά τούς μαθητές τῆς ΣΤ΄ τάξεως τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1979

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α΄

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΟΥ ΔΙΔΑΧΤΗΚΕ ΣΤΗΝ Ε΄ ΤΑΞΗ ΜΕ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1

1. Συμμιγεῖς ἀριθμοί

α΄) Ποιός ἀριθμός λέγεται συμμιγής; Ποιούς συμμιγεῖς χρησιμοποιοῦμε σήμερα στήν Ἑλλάδα;

β΄) Ποιές εἶναι οἱ ὑποδιαιρέσεις τῆς γυάρδας καί ποιά ἡ ἀντιστοιχία κάθε μιᾶς μέ τό μέτρο;

γ΄) Πῶς μετατρέπουμε ἕνα συμμιγή σέ ἀκέραιο, δηλ. σέ μονάδες τῆς τελευταίας τάξεώς του;

δ΄) Πῶς μετατρέπουμε ἕνα συγκεκριμένο ἀκέραιο π.χ. 7880 δεύτερα λεπτά τῆς ὥρας σέ συμμιγή;

ε΄) Πῶς γίνεται ἡ πρόσθεση συμμιγῶν;

στ΄) Πῶς ἀφαιροῦμε ἕνα συμμιγή ἀπό ἕναν ἄλλο;

Παρατήρηση. Τά μέτρα τῶν ποσῶν πού ἔχουν μονάδες μετρήσεως μέ δεκαδικές ὑποδιαιρέσεις (10 ἤ 100 ἤ 1000 κ.τ.λ.) τά παριστάνουμε συνήθως μέ δεκαδικούς ἀριθμούς. Π.χ. ἄν τό μῆκος διαδρόμου εἶναι 15 μέτρα

3 δεκατόμετρα 6 έκατοστόμετρα, παριστάνεται μέ τό δεκαδικό ἀριθμό 15,36 μέτρα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὁμάδα Α΄

1) Νά τραποῦν:
 α΄) 7 ὧρες 11 π. λεπτά 26 δ. λεπτά σέ δεύτερα λεπτά.
 β΄) 13° 55΄ 45΄΄ σέ δεύτερα λεπτά μοίρας.
 γ΄) 12 γυάρδες 2 πόδες 8 ἴντσες σέ ἴντσες.
2) Νά τραποῦν σέ συμμιγεῖς: α) 892 πρῶτα λεπτά β) 30240 δεύτερα λεπτά γ) 358 ἴντσες καί δ) 1320 φαρδίνια.
3) Ἀπό μιά πανσέληνο μέχρι τήν ἑπόμενη περνοῦν 42525 πρῶτα λεπτά (χρονική περίοδος ἑνός φεγγαριοῦ). Ἐκφράστε τήν παραπάνω χρονική διάρκεια σέ ἡμέρες, ὧρες καί πρῶτα λεπτά.
4) Νά βρεῖτε τό ἄθροισμα: (8 ὧρες + 4 π. λ. + 25. δ. λ.) + (3 ὧρες 10 π. λ.) + (9 ὧρες 50 π.λ. + 35 δ.λ.) + (11 ὧρες 25 π.λ.).

2

5) Ὁ Πέτρος γεννήθηκε στίς 16 Νοέμβρη 1966. Πόσο χρονῶν ἦταν στίς 10 Σεπτεμβρίου 1978, πού γράφτηκε στήν ΣΤ΄ τάξη;
6) Πόσος χρόνος ἔχει περάσει: α΄) Ἀπό τίς 8 ὧρες 12 π. λεπτά π.μ. μέχρι τό μεσημέρι τῆς ἴδιας ἡμέρας; β΄) Ἀπό τίς 9 ὧρες 20 π.λ. 35 δ.λ. μέχρι τίς 5 ὧρες μ.μ.;
7) Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις: α΄) (17 ὧρες 7 π.λ. 40 δ.λ.) . 12 β΄) (3 γυάρδες 2 πόδια 5 ἴντσες) : 8.

 Ὑπόδειξη. Μετατρέψτε πρῶτα τούς συμμιγεῖς σέ ἀκεραίους καί ἔπειτα νά κάνετε τίς πράξεις.

8) Ἕνας τεχνητός δορυφόρος κάνει μιά περιστροφή γύρω ἀπό τή γῆ σέ 1 ὥρα καί 12 π. λεπτά. Πόσες περιστροφές θά κάνει ἄν μείνει στό διάστημα δύο ἡμερονύκτια;

2. Προβλήματα μέσου ὅρου

α΄) Τί ὀνομάζεται μέσος ὅρος δυό ἤ περισσοτέρων ἀφηρημένων ἀριθμῶν ἤ συγκεκριμένων ἀλλά ὁμοειδῶν;
β΄) Νά βρεῖτε τό μέσο γενικό βαθμό μέ τόν ὁποῖο προαχθήκατε ἀπό τήν Ε΄ τάξη τοῦ Δημοτικοῦ στήν ΣΤ΄ τάξη.

Ὁμάδα Α΄

9) Ἡ κατώτερη θερμοκρασία μιᾶς ἡμέρας τό Φεβρουάριο ἦταν 2,4° καί ἡ ἀνώτερη 15,8°. Πόση ἦταν ἡ μέση θερμοκρασία τῆς ἡμέρας;

10) Γιά τήν ἐκτίμηση μιᾶς ἀποστάσεως ΑΒ ἔγιναν τρεῖς μετρήσεις μέ τά ἑξῆς ἀποτελέσματα: 38,60 μέτρα 38,64 μέτρα καί 38,62 μέτρα. Ποιός εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς;

11) Μιά νοικοκυρά ξόδεψε ἐπί 3 ἡμέρες 240 δρχ. τήν ἡμέρα τίς 2 ἑπόμενες ἡμέρες 262 δρχ. τήν ἡμέρα καί τίς 7 ἑπόμενες 208 δρχ. τήν ἡμέρα. Ποιά εἶναι ἡ μέση ἡμερήσια δαπάνη κατά τό χρονικό αὐτό διάστημα;

3

3. Τά κλάσματα ἤ κλασματικοί ἀριθμοί

α΄) Τί ὀνομάζουμε κλασματική μονάδα καί τί κλάσμα ἤ κλασματικό ἀριθμό;

β΄) Πότε ἕνα κλάσμα εἶναι ἴσο μέ τήν ἀκέραια μονάδα, πότε εἶναι μικρότερο καί πότε μεγαλύτερο ἀπό αὐτή;

γ΄) Πῶς τρέπουμε ἕναν ἀκέραιο ἀριθμό σέ κλάσμα; Πότε ἕνα κλάσμα εἶναι ἴσο μέ ἀκέραιο ἀριθμό;

δ΄) Ποιός ἀριθμός λέγεται μεικτός; Πῶς τρέπουμε ἕνα μεικτό σέ κλάσμα;

ε΄) Πῶς ἕνα κλάσμα πολλαπλασιάζεται μ' ἕνα φυσικό ἀριθμό καί πότε διαιρεῖται μ' ἕνα φυσικό ἀριθμό;

στ΄) Πότε ἡ τιμή ἑνός κλάσματος δέ μεταβάλλεται;

ζ΄) Τί λέγεται ἁπλοποίηση ἑνός κλάσματος; Πότε ἕνα κλάσμα λέγεται ἀνάγωγο;

η΄) Τί λέγεται μέγιστος κοινός διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) ἀκεραίων ἀριθμῶν;

θ΄) Πῶς γίνεται ἕνα κλάσμα ἀνάγωγο μέ μιά ἁπλοποίηση;

ι΄) Ποιά κλάσματα λέγονται ὁμώνυμα καί ποιά ἑτερώνυμα;

ια΄) Πῶς μετατρέπουμε δύο ἤ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα σέ ἰσοδύναμα ὁμώνυμα μέ τή βοήθεια τοῦ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τους;

ιβ΄) Γιατί κάθε κλάσμα εἶναι τό ἀκριβές πηλίκο τοῦ ἀριθμητῆ του διά τοῦ παρονομαστῆ του;

ιγ΄) Πῶς τρέπουμε ἕνα δεκαδικό ἀριθμό σέ κλάσμα καί ἀντίστροφα ἕνα κλάσμα σέ δεκαδικό ἀριθμό;

Σημείωση 1. Οἱ ἀριθμοί 1, 2, 3, 4, 5,... ἀποτελοῦν μιά σειρά, πού ἀρχίζει ἀπό τό ἕνα καί δέν ἔχει τέλος (οἱ τρεῖς τελεῖες σημαίνουν «κ.ο.κ. χωρίς τέλος»). Γιατί, αὐξάνοντας τό πλῆθος τῶν μονάδων ἑνός ἀριθμοῦ τῆς σειρᾶς μέ μιά μονάδα ἀκόμη, βρίσκουμε τόν ἑπόμενο ἀριθμό τῆς σειρᾶς ἀπό ἐκεῖνο πού αὐξήσαμε.

Οἱ ἀριθμοί αὐτοί λέγονται ***φυσικοί ἀριθμοί.***

Ἄν στήν παραπάνω σειρά τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν πάρουμε καί τό μηδέν, ἔχουμε τή σειρά: 0, 1, 2, 3, 4, 5,... πού ἀρχίζει ἀπό τό μηδέν καί δέν ἔχει καί αὐτή τέλος. Οἱ ἀριθμοί τῆς σειρᾶς αὐτῆς λέγονται ***ἀκέραιοι ἀριθμοί τῆς Ἀριθμητικῆς.***

Σημείωση 2. Οἱ ἀκέραιοι καί οἱ κλασματικοί ἀριθμοί λέγονται ***ρητοί ἀριθμοί τῆς Ἀριθμητικῆς.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

12) Ποιό κλάσμα τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι κάθε μιά ἀπό τίς γωνίες 7°, 11° 19°;

13) Δίνονται τά κλάσματα: $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{12}{25}$, $\frac{10}{33}$.
Νά βρεῖτε:
α) ἀπό ποιές κλασματικές μονάδες γίνονται καί
β) ποιῶν διαιρέσεων εἶναι ἀκριβῆ πηλίκα.

14) Νά συγκρίνετε τά παρακάτω κλάσματα μέ τήν ἀκέραια μονάδα:
$\frac{4}{5}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{15}{7}$, $\frac{12}{12}$.

15) Νά τρέψετε τούς παρακάτω μεικτούς σέ κλάσματα:
$5\frac{1}{8}$, $12\frac{4}{5}$, $13\frac{1}{8}$, $20\frac{3}{4}$, $32\frac{5}{9}$, $114\frac{6}{15}$.

16) Νά πολλαπλασιάσετε τόν ἀριθμητή 3 τοῦ κλάσματος $\frac{3}{12}$ ἐπί 4 καί ἔπειτα νά διαιρέσετε τόν παρονομαστή του 12 διά 4. Νά συγκρίνετε τά δύο ἀποτελέσματα. Νά διατυπώσετε τό σχετικό κανόνα.

17) Νά γίνουν μέ δύο τρόπους τά παρακάτω κλάσματα 5 φορές μικρότερα:

$$\frac{5}{3},\ \frac{10}{7},\ \frac{15}{11},\ \frac{25}{30},\ \frac{45}{50}$$

18) Νά συμπληρώσετε κατάλληλα τίς ἰσότητες:

$$\frac{3}{5}=\frac{9}{;},\quad \frac{5}{6}=\frac{20}{;},\quad \frac{6}{7}=\frac{;}{35},\quad \frac{11}{;}=\frac{44}{48}$$

19) Νά γίνουν ἀνάγωγα τά παρακάτω κλάσματα μέ μιά ἁπλοποίηση:

$$\frac{16}{28},\ \frac{24}{60},\ \frac{35}{45},\ \frac{25}{120},\ \frac{45}{54},\ \frac{32}{80},\ \frac{125}{500}.$$

20) Νά γίνουν ὁμώνυμα τά κλάσματα:

α΄) $\frac{2}{5},\ \frac{3}{8},\ \frac{7}{10}$

β΄) $\frac{4}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{9},\ \frac{4}{15}$

γ΄) $\frac{8}{15},\ \frac{7}{12},\ \frac{3}{4},\ \frac{9}{20}$.

21) Νά τοποθετήσετε τά κλάσματα:

$$\frac{4}{5},\ \frac{7}{20},\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{15},\ \frac{5}{8}$$

σέ αὔξουσα διάταξη.

22) Νά τρέψετε:

α) σέ κλάσματα τούς δεκαδικούς ἀριθμούς: 0,3, 0,08, 0,015, 0,154, 3,24, 18,156.

β΄) σέ δεκαδικούς ἀριθμούς τά κλάσματα:

$$\frac{3}{5},\ \frac{3}{4},\ \frac{9}{5},\ \frac{7}{8},\ \frac{14}{15},\ \frac{11}{16},\ \frac{4}{9}.$$

4. Οἱ τέσσερις πράξεις μέ τά κλάσματα

α΄) Πῶς προσθέτουμε ὁμώνυμα κλάσματα; καί πῶς ἑτερώνυμα;

β΄) Πῶς προσθέτουμε μεικτούς ἀριθμούς;

γ΄) Πῶς ἀφαιροῦμε ἀπό ἕνα κλάσμα ἕνα ὁμώνυμό του κλάσμα μικρότερό του ἤ ἴσο;

δ΄) Πῶς ἀφαιροῦμε ἀπό ἕνα κλάσμα ἕνα ἑτερώνυμό του κλάσμα μικρότερό του ἤ ἴσο;

ε΄) Πῶς ἀφαιροῦμε ἀπό ἕνα μεικτό ἕναν ἄλλο μεικτό μικρότερό του ἤ ἴσο;

στ΄) Πῶς πολλαπλασιάζουμε ἕνα κλάσμα ἤ ἕνα μεικτό μέ φυσικό;
ζ΄) Πῶς πολλαπλασιάζουμε ἕναν ἀκέραιο ἤ κλάσμα ἤ μεικτό μέ κλάσμα;
η΄) Πῶς πολλαπλασιάζουμε ἕναν ἀκέραιο ἤ κλάσμα ἤ μεικτό μέ μεικτό;
θ΄) Πῶς διαιροῦμε ἕνα κλάσμα ἤ ἕνα μεικτό μέ φυσικό;
ι΄) Πῶς διαιροῦμε ἕναν ἀκέραιο ἤ ἕνα κλάσμα ἤ ἕνα μεικτό μέ κλάσμα;
ια΄) Πῶς διαιροῦμε ἕναν ἀκέραιο ἤ ἕνα κλάσμα ἤ ἕνα μεικτό μέ μεικτό;
ιβ΄) Πῶς βρίσκουμε τό μέρος δοσμένου ρητοῦ ἀριθμοῦ; καί πῶς βρίσκουμε τό ρητό ὅταν γνωρίζουμε ἕνα μέρος του;
ιγ΄) Σέ ποιές περιπτώσεις χρησιμοποιοῦμε τή μέθοδο ἀναγωγῆς στή μονάδα γιά νά λύσουμε προβλήματα τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

23) Ἡ πρόσθεση τῶν κλασμάτων εἶναι πράξη: α΄) ἀντιμεταθετική β΄) προσεταιριστική. Νά δικαιολογήσετε τίς ἰδιότητες αὐτές μέ δικά σας παραδείγματα.

24) Ὁ πολλαπλασιασμός τῶν κλασμάτων εἶναι πράξη: α΄) ἀντιμεταθετική. β΄) προσεταιριστική γ) ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεση καί ἀφαίρεση. Νά δικαιολογήσετε τίς ἰδιότητες αὐτές μέ δικά σας παραδείγματα.

25) Νά βρεῖτε τό ἐξαγόμενο τῶν παρακάτω πράξεων:

$$\left(15\frac{5}{8} + 23\frac{7}{10} + 9\frac{3}{5}\right) - 15\frac{11}{40}.$$

26) Ὅμοια νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

$$\left(3\frac{2}{4} + 18\frac{12}{20} + 34\frac{4}{5}\right) - \left(20\frac{5}{8} + 18 + 12\frac{2}{5}\right).$$

27) Ὑπολογίστε μέ δυό τρόπους τά γινόμενα:

α΄) $\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{2}\right)$ β΄) $\frac{5}{8} \cdot \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3}\right)$

28) Ὑπολογίστε μέ δυό τρόπους τά πηλίκα:

α΄) $\left(6 + 9\frac{3}{4}\right) : 3$ β΄) $\left(8\frac{4}{10} - 1\frac{3}{5}\right) : 4$

29) Νά βρεῖτε τά ἐξαγόμενα τῶν παρακάτω πράξεων:

α΄) $\left(24\frac{3}{4} : 4\right) - 3\frac{5}{8}$ β΄) $\left(36\frac{2}{5} \cdot 2\frac{3}{4} \cdot 5\right) : 12$

30) ***Συμπλήρωμα στούς συμμιγεῖς:***

α) Τροπή συμμιγῆ σέ μονάδες μιᾶς τάξεώς του ὄχι τῆς τελευταίας.

Παράδειγμα: Νά τρέψετε τό συμμιγή 5 ὧρες 20 π. λεπτά 30 δ. λεπτά σέ πρῶτα λεπτά.

Λύση. Τρέπουμε τό συμμιγή σέ μονάδες τῆς τελευταίας τάξεώς του μέ τόν τρόπο πού ξέρουμε, καί βρίσκουμε 19230 δ.λ. Ἐπειδή εἶναι 1 δ.λ. = $=\frac{1}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ. τά 19230 δ.λ. θά εἶναι $\frac{19230}{60}$ πρῶτα λεπτά.

Ὅμοια βρίσκουμε: 10 γυάρδες 2 πόδες 11 ἴντσες $=\frac{395}{36}$ γυάρδες.

β΄) Τροπή συγκεκριμένου κλάσματος σέ συμμιγή ἀριθμό

Παράδειγμα: Νά τρέψετε τό κλάσμα $\frac{11}{8}$ ὧρες σέ συμμιγή ἀριθμό.

Λύση: Διαιροῦμε τόν 11 μέ τό 8 καί βρίσκουμε πηλίκο 1 ὥρα καί ὑπόλοιπο 3 ὧρες. Τρέπουμε τίς 3 ὧρες σέ π. λεπτά πολλαπλασιάζοντας ἐπί 60 καί ἔτσι ἔχουμε 180 π.λ. Διαιροῦμε τά 180 π.λ. μέ τό 8 καί βρίσκουμε πηλίκο 22 π.λ. καί ὑπόλοιπο 4 π.λ. Ὅμοια τρέπουμε τά 4 π.λ. σέ δ. λεπτά καί βρίσκουμε 240 δ.λ. Διαιροῦμε τά 240 δ.λ. μέ τό 8 καί βρίσκουμε 30 δ.λ. Ἄρα $\frac{11}{8}$ ὧρες = 1 ὥρα 22 π.λ. 30 δ.λ.

Διάταξη τῆς πράξεως

$$\begin{array}{r|l} 11 & 8 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \text{ ὥρα } 22 \text{ π.λ. } 30 \text{ δ.λ.} \\ \times\, 60 & \\ \hline 180 & \\ 20 & \\ 4 & \\ \times\, 60 & \\ \hline 240 & \\ 000 & \end{array}$$

31) Νά τραποῦν: α΄) σέ πρῶτα λεπτά 3° 12΄ 25΄΄ β΄) σέ ὧρες: 2 ὧρες 20 π.λ. 40 δ.λ.

32) Νά τραποῦν σέ συμμιγεῖς ἀριθμούς οἱ παρακάτω ἀριθμοί:

α) $\frac{10}{9}$ ἔτη β) $8\frac{5}{20}$ ὧρες γ) $8\,\frac{5}{6}$ γυάρδες.

Παρατήρηση. Στίς ἀσκήσεις καί τά προβλήματα μέ συμμιγεῖς ἀριθμούς, μποροῦμε νά τρέπουμε τούς συμμιγεῖς σέ μονάδες τῆς τελευταίας τάξεώς τους, ἤ σέ μονάδες πού ὁρίζει τό πρόβλημα καί ἔτσι τίς πράξεις μέ συμμιγεῖς νά τίς μετατρέπουμε σέ πράξεις ἀκεραίων ἤ κλασμάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

7

Ὁμάδα Α΄

33) Ἕνα φορτηγό αὐτοκίνητο μεταφέρει 3 κιβώτια. Τό α΄ ζυγίζει $185\frac{2}{5}$ κιλά, τό β΄ ζυγίζει $10\frac{1}{4}$ κιλά περισσότερο ἀπό τό α΄ καί τό γ΄ $15\frac{3}{4}$ κιλά περισσότερο ἀπό τό β΄. Πόσο βάρος μεταφέρει τό αὐτοκίνητο αὐτό;

34) Τρεῖς ἀδελφοί μοίρασαν ἕνα κτῆμα. Ὁ α΄ ἔλαβε $12\frac{3}{5}$ στρέμματα. Ὁ β΄ ἔλαβε $2\frac{2}{3}$ στρέμματα λιγότερο ἀπό τόν α΄ καί $2\frac{5}{8}$ στρέμματα περισσότερα ἀπό τόν γ΄. Πόσα στρέμματα ἦταν τό κτῆμα;

35) Ἕνα πλοῖο σέ $10\frac{1}{5}$ ὧρες τρέχει 187 μίλια. Ἕνα ἄλλο πλοῖο τρέχει $303\frac{3}{5}$ μίλια σέ $18\frac{2}{5}$ ὧρες. Ποιό πλοῖο εἶναι ταχύτερο τήν ὥρα καί κατά πόσα μίλια;

36) Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε 600 κιλά κρασί μέ $22\frac{1}{2}$ δρχ. τό κιλό. Πούλησε τό $\frac{1}{5}$ τοῦ ποσοῦ μέ $25\frac{3}{4}$ δρχ. τό κιλό καί τό ὑπόλοιπο μέ $26\frac{1}{2}$ δρχ. τό κιλό. Πόσες δραχμές κέρδισε;

37) Ἕνας ἔμπορος ἔχει τρία τόπια ὕφασμα. Τό α΄ τόπι εἶναι 48 μέτρα, τό β΄ εἶναι τά $\frac{5}{8}$ τοῦ α΄ καί τό γ΄ τά $\frac{16}{15}$ τοῦ β΄ τοπιοῦ. Νά βρεῖτε πόσα μέτρα ἦταν τό β΄ καί πόσα μέτρα τό γ΄ τόπι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΛΥΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΣΤΗ ΜΟΝΑΔΑ

Ὁμάδα Α΄

38) Τό μέτρο ἑνός ὑφάσματος ἀξίζει τά $\frac{3}{5}$ τοῦ πεντακοσιόδραχμου. Πόσες δρχ. ἀξίζουν τά $\frac{5}{6}$ τοῦ μέτρου;

39) Τά $\frac{3}{4}$ μιᾶς ἀποστάσεως εἶναι $\frac{9}{20}$ χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα εἶναι ὅλη ἡ ἀπόσταση;

40) Νά βρεθεῖ ὁ ἀριθμός τοῦ ὁποίου τά $\frac{3}{11}$ εἶναι $\frac{3}{5}$.

41) Τά $\frac{7}{10}$ τοῦ καβουρδισμένου καφέ ἀξίζουν 196 δρχ. Πόσες δρχ. ἀξίζουν τά $2\frac{3}{5}$ τοῦ κιλοῦ καφέ;

42) Τά $\frac{2}{5}$ καί τά $\frac{3}{4}$ ἑνός ἀριθμοῦ κάνουν 138. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός αὐτός;

43) Ἕνα πρόβατο καί ἕνα ἀρνί πουλήθηκαν 3680 δρχ. Πόσο πουλήθηκε

τό καθένα χωριστά ἄν ἡ τιμή τοῦ ἀρνιοῦ εἶναι τά $\frac{3}{5}$ τῆς τιμῆς τοῦ προβάτου;

44) Ἕνα ραδιόφωνο πουλήθηκε 2255 δρχ. μέ ζημία $\frac{1}{12}$ στήν τιμή τῆς ἀγορᾶς του. Νά βρεῖτε τήν τιμή τῆς ἀγορᾶς του.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

8 *Ὁμάδα Β΄*

45) Μιά ράπτρια ἀγόρασε μιά ραπτομηχανή 8400 δρχ. Πλήρωσε τά $\frac{5}{8}$ τῆς ἀξίας της στήν παραλαβή σάν πρώτη δόση καί ἔπειτα ἀπό δύο μῆνες πλήρωσε τό $\frac{1}{3}$ τῆς α΄ δόσεως. Πόσες δραχμές ὀφείλει ἀκόμη;

46) Ἕνας γεωργός πλήρωσε στήν Α.Τ.Ε. τό $\frac{1}{6}$ τοῦ χρέους του, ἔπειτα τά $\frac{2}{9}$ καί τέλος τά $\frac{5}{12}$ αὐτοῦ, ἔτσι πλήρωσε 14500 δρχ. Ποιό ἦταν τό χρέος του καί πόσες δραχμές ὀφείλει ἀκόμη;

47) Ἕνα βαρέλι περιέχει κρασί μέχρι τά $\frac{7}{8}$ αὐτοῦ. Βγάζουμε τό $\frac{1}{7}$ ἀπό τό κρασί πού περιέχει καί μένουν στό βαρέλι 360 κιλά. Πόσα κιλά κρασί χωράει τό βαρέλι αὐτό;

48) Τρία ἀδέλφια μοίρασαν ἕνα οἰκόπεδο. Ὁ α΄ πῆρε τά $\frac{3}{8}$ τοῦ οἰκοπέδου, ὁ β΄ πῆρε τά $\frac{4}{7}$ τοῦ α΄ καί ὁ γ΄ τό ὑπόλοιπο. Ἡ διαφορά μεταξύ τῶν πρώτων μεριδίων ἦταν 180 τετ. μέτρα. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ οἰκοπέδου.

49) Ὁ πατέρας τοῦ Χρήστου ξόδεψε τόν περασμένο μήνα τά $\frac{3}{7}$ ἀπό τό μισθό του γιά διατροφή, τό $\frac{1}{5}$ ἀπό τό ὑπόλοιπο γιά τήν ἀγορά εἰδῶν ρουχισμοῦ καί τά $\frac{7}{8}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου γιά νοίκι, φωτισμό καί τηλέφωνο. Ἄν τοῦ περίσσεψαν 800 δρχ. πόσες δρχ. ἦταν ὁ μισθός του;

50) Ἀπό ἕνα τόπι ὕφασμα πουλήθηκαν τά $\frac{3}{8}$ αὐτοῦ καί ἔπειτα τά $\frac{4}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου. Ἀπόμεινε ἕνα κομμάτι πού πουλήθηκε 1190 δρχ. μέ 340 δρχ. τό μέτρο. Πόσα μέτρα ἦταν τό ὕφασμα;

9 5. Σύνθετα Κλάσματα

α΄) Ὁρισμός.

Ξέρουμε νά παριστάνουμε μέ κλάσμα τό πηλίκο ἀκεραίου διά φυσικοῦ π.χ. $4 : 7 = \frac{4}{7}$ κ.τ.λ. Ἔτσι καί τό πηλίκο δύο ρητῶν συμφωνοῦμε νά τό γράφουμε ὡς κλάσμα μέ ἀριθμητή τό διαιρετέο καί παρονομαστή τό διαιρέτη. Π.χ.

$$5 : \frac{2}{3} = \frac{5}{\frac{2}{3}}, \quad \frac{4}{7} : 8 = \frac{\frac{4}{7}}{8}, \quad \frac{3}{5} : \frac{4}{9} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{9}}, \quad \frac{5}{7} : 2\frac{1}{2} = \frac{\frac{5}{7}}{2\frac{1}{2}}$$

Τά κλάσματα αὐτά λέγονται ***σύνθετα.***

Σύνθετο κλάσμα λέγεται τό κλάσμα πού ἔχει τόν ἕνα τουλάχιστο ἀπό τούς ὅρους του κλάσμα.

Τ' ἄλλα κλάσματα, πού ἔχουν τόν ἀριθμητή ἀκέραιο καί τόν παρονομαστή φυσικό, λέγονται ***ἁπλά*** κλάσματα.

Ἡ ὁριζόντια γραμμή τοῦ σύνθετου κλάσματος γράφεται πάντοτε μεγαλύτερη ἀπό τή γραμμή, πού ἔχει κάθε κλασματικός του ὅρος.

β) Τροπή σύνθετου κλάσματος στό ἰσοδύναμο ἁπλό

Ἀντίστροφα, ἡ μετάβαση ἀπό ἕνα σύνθετο κλάσμα στό ἰσοδύναμό του ἁπλό κλάσμα γίνεται μέ τήν ἐκτέλεση τῆς διαίρεσης τῶν ὅρων τοῦ. Π.χ.:

i) $$\frac{5}{\frac{2}{3}} = 5 : \frac{2}{3} = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

ii) $$\frac{\frac{4}{7}}{8} = \frac{4}{7} : 8 = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{8} = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}$$

iii) $$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{5} : \frac{4}{9} = \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{20}$$

Ἀλλά στό ἴδιο ἀποτέλεσμα φθάνουμε ταχύτερα, ἄν τό γινόμενο τῶν ἀκραίων ὅρων τοῦ σύνθετου τό γράψουμε ἀριθμητή τοῦ ἁπλοῦ κλάσματος καί παρονομαστή τό γινόμενο τῶν μεσαίων ὅρων τοῦ συνθέτου. Τό σύνθετο κλάσμα μέ ὅρους ἁπλά κλάσματα (παράδειγμα (iii) ἔχει δύο ἀκραίους ὅρους (ἐδῶ τούς 3 καί 9) καί δύο μεσαίους (ἐδῶ τούς 5 καί 4).

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{9}} = \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 4} = \frac{27}{20}. \quad \text{Ὅμοια εἶναι} \quad \frac{3\frac{1}{2}}{8} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{8}{1}} = \frac{7}{16}.$$

Ἀπό τά παραπάνω καταλήγουμε στό ἑξῆς συμπέρασμα:

Γιά νά τρέψουμε ἕνα ***σύνθετο κλάσμα*** στό ἰσοδύναμό του ἁπλό, ***πολλαπλασιάζουμε τούς ἀκραίους ὅρους του καί τό γινόμενο γράφουμε***

ἀριθμητή ἁπλοῦ κλάσματος μέ παρονομαστή τό γινόμενο τῶν μεσαίων ὅρων τοῦ συνθέτου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

51) Νά γίνουν ἁπλά τά παρακάτω σύνθετα κλάσματα:

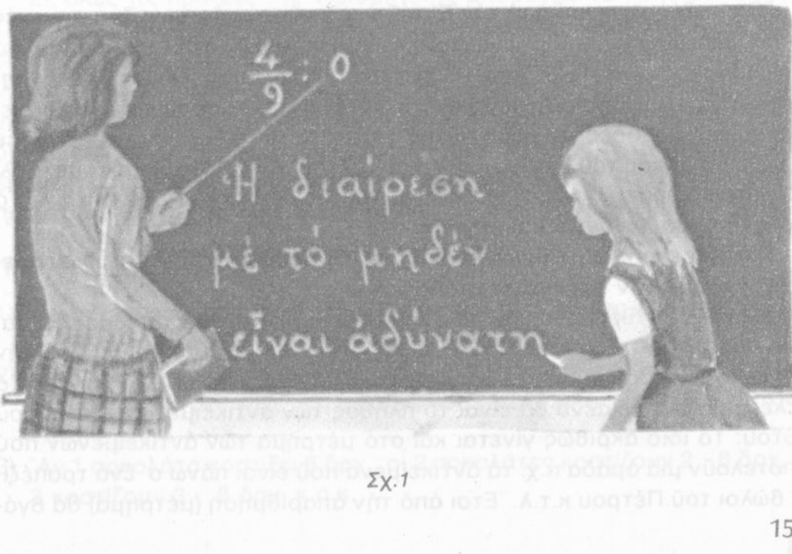
α΄) $\dfrac{12}{\frac{3}{4}}$ β΄) $\dfrac{\frac{7}{9}}{8}$ γ΄) $\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{10}{7}}$ δ΄) $\dfrac{4\cdot\frac{2}{5}}{3\frac{1}{6}}$ ε΄) $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{0}{9}}$ (Βλ. Σχ. 1)

52) Νά γίνουν ἁπλά τά κλάσματα καί νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α΄) $\dfrac{\frac{3}{5}}{8} + \dfrac{\frac{2}{3}}{4}$ β΄) $\dfrac{\frac{1}{4}}{2} \times \dfrac{8}{\frac{5}{3}}$ γ΄) $1 - \dfrac{1\frac{3}{5}}{2\frac{1}{4}}$

53) Ὅμοια νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α΄) $\dfrac{\frac{3}{4} + \frac{5}{6}}{\frac{7}{9} - \frac{2}{3}}$ β΄) $\dfrac{8\frac{1}{3} - 7\frac{1}{2}}{6\frac{1}{4} - 2\frac{5}{6}}$



Σχ. 1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β΄

ΓΕΝΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ – ΙΣΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

10

1. Τί λέγεται ποσό

Στήν καθημερινή ζωή εἶναι συνηθισμένες οἱ ἐκφράσεις: «θά ἀγοράσουμε 3 μέτρα ὕφασμα», «ἔχουμε στό σπίτι μας 5 κιλά λάδι καλῆς ποιότητας», «ἡ τάξη μας ἔχει 11 ἀθλητές», «οἱ ἐργάτες ἐργάζονται 8 ὧρες τήν ἡμέρα», «ὁ Γιάννης ἔχει 50 δραχμές» κ.τ.λ. ***Τό μῆκος, τό βάρος, ὁ χρόνος, τό πλῆθος τῶν ἐργατῶν, τό νόμισμα*** κ.τ.λ. ὀνομάζονται ***ποσά.***

Ποσό ὀνομάζεται κάθε πράγμα πού μπορεῖ νά μετρηθεῖ καί ἑπομένως νά ἐκφρασθεῖ μέ ἀριθμό.

Ἀπό τά ποσά ἄλλα ἀποτελοῦνται ἀπό πράγματα χωρισμένα μεταξύ τους, ὅπως π.χ. μιά ὁμάδα μαθητῶν, ἕνα κοπάδι πρόβατα, μιά συλλογή βιβλίων κ.τ.λ. καί λέγονται ***ἀσυνεχῆ ποσά*** καί ἄλλα διαφέρουν ἀπό αὐτά γιατί ἀποτελοῦνται ἀπό συνεχόμενα μέρη καί σχηματίζουν κάτι τό ἑνιαῖο, ὅπως εἶναι τό μῆκος τοῦ ὑφάσματος, ἡ ἐπιφάνεια τῆς αὐλῆς, ὁ ὄγκος τῆς αἴθουσας, τό βάρος ἑνός σώματος κ.τ.λ. καί λέγονται ***συνεχῆ ποσά.***

Ὅπως ξέρουμε καί ἀπό τήν Ε΄ τάξη, γιά νά μετρήσουμε ἕνα συνεχές ποσό, τό συγκρίνουμε μ' ἕνα ἄλλο ὁρισμένο καί ὁμοειδές ποσό πού τό παίρνουμε ὡς μονάδα. Ἀπό τή σύγκριση αὐτή, πού λέγεται ***μέτρηση,*** προκύπτει ἕνας ἀριθμός πού λέγεται ***«μέτρο»*** τοῦ ποσοῦ καί φανερώνει ἀπό πόσες μονάδες καί μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται τό δοσμένο ποσό. Λέμε π.χ. ὅτι τό μῆκος τοῦ διαδρόμου εἶναι 8 μέτρα, ἄν ἡ μονάδα μήκους, δηλ. τό μέτρο χωράει 8 φορές, τό βάρος τοῦ δοχείου εἶναι 8 κιλά κ.τ.λ. Τά συνεχῆ ποσά λέγονται καί ***μεγέθη.***

Γιά νά μετρήσουμε ὅμως ἕνα ἀσυνεχές ποσό ἐργαζόμαστε διαφορετικά, δηλ. μέ τόν παρακάτω τρόπο:

Μέ κάθε ἀντικείμενο πού παίρνουμε ἐκφωνοῦμε τούς ἀριθμούς: ἕνα, δύο, τρία,... μέ τή φυσική τους σειρά, ὅπως τήν ἔχουμε μάθει ἀπό τήν προσχολική μας ἡλικία. Ὁ ἀριθμός πού θά ἔχει ἐκφωνηθεῖ μαζί μέ τό τελευταῖο ἀντικείμενο θά εἶναι τό πλῆθος τῶν ἀντικειμένων τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ. Τό ἴδιο ἀκριβῶς γίνεται καί στό μέτρημα τῶν ἀντικειμένων πού ἀποτελοῦν μιά ὁμάδα π.χ. τά ἀντικείμενα πού εἶναι πάνω σ' ἕνα τραπέζι, οἱ βῶλοι τοῦ Πέτρου κ.τ.λ. Ἔτσι ἀπό τήν ἀπαρίθμηση (μέτρημα) θά βγάλουμε ὡς ἀποτέλεσμα ἕναν φυσικό ἀριθμό, πού μᾶς φανερώνει τό «πόσα ἀντικείμενα» ἀποτελοῦν τήν ὁμάδα.

Βλέπουμε ὅτι κάθε ὁμάδα ἀντικειμένων συνδυάζεται μέ κάποιο φυσικό ἀριθμό· συμβαίνει καί τό ἀντίστροφο: Κάθε φυσικός ἀριθμός μπορεῖ νά μετρᾶ τά ἀντικείμενα μιᾶς ὁμάδας.

2. Χρήση γραμμάτων γιά τήν παράσταση ἀριθμῶν – Γενικοί ἀριθμοί.

Ὅταν δέ μᾶς ἐνδιαφέρει ὁ ἀκριβής ἀριθμός τῶν ἀντικειμένων πού ἀποτελοῦν μιά ὁμάδα, τότε χρησιμοποιοῦμε γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου γιά νά παραστήσουμε τό πλῆθος τους. Λέμε π.χ. τό κουτί ἔχει α μολύβια, ἡ τάξη ἔχει β μαθητές, τό εἰσιτήριο γιά μιά διαδρομή ἔχει γ δρχ., ὁ ἐργολάβος ἔχει δ ἐργάτες, πάνω στό τραπέζι βρίσκονται ε ἀντικείμενα κ.τ.λ.

Οἱ ἀριθμοί α, β, γ, δ, ε,... λέγονται ***γενικοί ἀριθμοί.***

Οἱ γενικοί ἀριθμοί δέν εἶναι μόνο συγκεκριμένοι, ἀλλά μπορεῖ νά εἶναι καί ***ἀφηρημένοι*** (π.χ. οἱ ἀριθμοί α, β κ.τ.λ. πού δέ συνοδεύονται ἀπό καμιά ἔνδειξη γιά τή φύση τῶν ἀντικειμένων στά ὁποῖα ἀναφέρονται). Ἔτσι ὅταν λέμε ὁ ἀκέραιος, ἐννοοῦμε ἕναν ὁποιονδήποτε ἀκέραιο ἀριθμό, δηλ. τό α μπορεῖ νά εἶναι 2, 5, 12 κ.τ.λ.

Σέ ὅλες τίς πράξεις τῆς Ἀριθμητικῆς μποροῦμε νά χρησιμοποιοῦμε καί γράμματα γι' ἀριθμούς, ἀρκεῖ νά τοποθετοῦμε τά κατάλληλα σύμβολα τῶν πράξεων ἀνάμεσα στά γράμματα. Θά χρησιμοποιήσουμε τά γνωστά μας σύμβολα: τό + (σύν) γιά τήν πρόσθεση, τό − (πλήν ἤ μεῖον) γιά τήν ἀφαίρεση, τό × (ἐπί) γιά τόν πολλαπλασιασμό καί τό : (διά) γιά τή διαίρεση. Γιά νά μή γίνεται σύγχυση τοῦ συμβόλου × μέ τό γράμμα χ, στά ἑπόμενα μαθήματα τό γνωστό σύμβολο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θά τό παριστάνουμε μέ μιά τελεία: π.χ. ἀντί $5 \times 4 = 20$ θά γράφουμε $5 \cdot 4 = 20$.

Παραδείγματα

1) Ἄν ὁ Πέτρος ἔχει α δρχ. καί τοῦ δώσει ὁ πατέρας του 20 δρχ. τότε ὁ Πέτρος θά ἔχει α + 20 δρχ.
2) Ἄν σέ μιά πλατεία εἶναι σταθμευμένα α (ὅπου $α \geq 3$) αὐτοκίνητα καί φύγουν 3 αὐτοκίνητα, τότε θά μείνουν στήν πλατεία α − 3 αὐτοκίνητα.
3) Ἄν 1 σοκολάτα κοστίζει β δρχ., οἱ 2 σοκολάτες κοστίζουν $2 \cdot β$ δρχ. οἱ 3 κοστίζουν $3 \cdot β$ δρχ. κ.ο.κ.

4) Ἄν β γραμμάρια εἶναι τό βάρος ἑνός ψωμιοῦ, τό ὁποῖο χωρίζουμε σέ 5 ἴσα μέρη, τότε τό βάρος κάθε τεμαχίου θά εἶναι β : 5 ἤ $\frac{\beta}{5}$ γραμμάρια.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὁμάδα Α΄

1) Τό ἀπόβαρο ἑνός βαρελιοῦ εἶναι α κιλά καί τό βάρος τοῦ οἰνοπνεύματος πού χωράει εἶναι β κιλά. Ποιό εἶναι τό μεικτό βάρος τοῦ βαρελιοῦ;
2) Δυό μαθητές ἀναχωροῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο καί βαδίζουν ἀντίθετα. Ὁ ἕνας βάδισε α μέτρα καί ὁ ἄλλος β μέτρα. Πόσα μέτρα ἀπέχουν μεταξύ τους;
3) Ὁ Παῦλος ἔχει β δρχ. ὁ Πέτρος ἔχει 120 δρχ. περισσότερες ἀπό τόν Παῦλο. Πόσες δρχ. ἔχει ὁ Πέτρος καί πόσες καί οἱ δύο μαζί;
4) Ἄν ἕνα τετράδιο κοστίζει ν δρχ., πόσο κοστίζουν τά 8 τετράδια;
5) Τό εἰσιτήριο γιά ἕναν ποδοσφαιρικό ἀγώνα ἀξίζει α δρχ. Πόσες δραχμές θά πληρώσουν 3.000 θεατές;
6) Ἕνας τροχός κάνει α στροφές σέ 20 πρῶτα λεπτά. Πόσες στροφές κάνει σ' ἕνα πρῶτο λεπτό;

11

3. Ἴσοι καί ἄνισοι ἀριθμοί

Ἀκέραιοι ἴσοι. Ἄς πάρουμε μιά ὁμάδα ἀπό λουλούδια καί μιά ὁμάδα ἀπό γλάστρες.

Ἄν διατάξουμε σέ μιά σειρά τά λουλούδια καί κάτω ἀπό κάθε λουλούδι τοποθετήσουμε ἀπό μιά γλάστρα (Σχ. 2), τότε θά παρατηρήσουμε τά ἑξῆς:

Σχ. 2

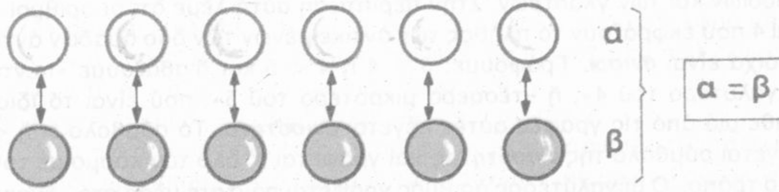
i) Σέ κάθε λουλούδι ἀντιστοιχεῖ μιά γλάστρα.

ii) Σέ κάθε γλάστρα ἀντιστοιχεῖ ἕνα λουλούδι.

Σέ κάθε τέτοια περίπτωση θά λέμε ὅτι μεταξύ τῶν ἀντικειμένων τῶν δύο ὁμάδων ὑπάρχει ***ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα*** καί ὅτι ἀπό τήν ἀντιστοιχία αὐτή προκύπτουν ***ἴσοι ἀριθμοί,*** πού μετροῦν τά ἀντικείμενα αὐτά.

Στό παραπάνω παράδειγμα ὁ ἀριθμός 5 τῶν λουλουδιῶν εἶναι ἴσος μέ τόν ἀριθμό 5 τῶν γλαστρῶν. Γράφουμε: $5 = 5$ καί διαβάζουμε «πέντε ἴσον πέντε».

Γενικά, ἄς πάρουμε μιά ὁμάδα ἀπό λευκούς βώλους μέ πλῆθος α καί μιά ἄλλη ὁμάδα ἀπό πράσινους βώλους μέ πλῆθος β καί ἄς τούς διατάξουμε ὅπως φαίνεται στήν εἰκόνα (Σχ. 3).



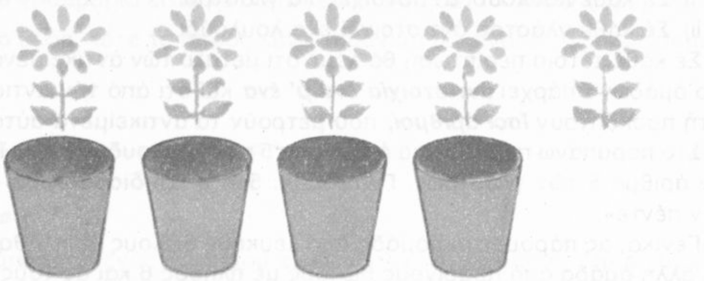
Σχ. 3

Βλέπουμε ὅτι ὑπάρχει ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα μεταξύ τῶν ἀντικειμένων τῶν δύο ὁμάδων, διότι σέ κάθε λευκό βῶλο ἀντιστοιχεῖ ἕνας πράσινος· συμβαίνει καί τό ἀντίστροφο: Σέ κάθε πράσινο βῶλο ἀντιστοιχεῖ ἕνας λευκός. Ἔτσι προκύπτει ὅτι ὁ ἀριθμός α τῶν λευκῶν βώλων εἶναι ἴσος μέ τόν ἀριθμό β τῶν πράσινων. Γράφουμε: $α = β$ καί διαβάζουμε «ἄλφα ἴσον βῆτα». Ἡ γραφή $α = β$ λέγεται ***ἀριθμητική ἰσότητα,*** οἱ ἀριθμοί α καί β μέλη τῆς ἰσότητας (ὁ α πού εἶναι στ' ἀριστερά τοῦ ἴσον (=) λέγεται πρῶτο μέλος τῆς ἰσότητας καί ὁ β πού εἶναι δεξιά, δεύτερο μέλος αὐτῆς). Ὥστε:

Δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί εἶναι ἴσοι, ὅταν ἐκφράζουν ἀντίστοιχα τό πλῆθος τῶν ἀντικειμένων δύο ὁμάδων πού τά ἀντικείμενά τους μποροῦν νά τεθοῦν σέ ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα.

Ἀκέραιοι ἄνισοι. Ἄς πάρουμε καί πάλι μιά ὁμάδα ἀπό λουλούδια καί μιά ὁμάδα ἀπό γλάστρες. Ἄς διατάξουμε τά ἀντικείμενα αὐτῶν τῶν ὁμάδων ὅπως φαίνεται στήν εἰκόνα (Σχ. 4).

Βλέπουμε ὅτι ὑπάρχουν λουλούδια πού δέν ἔχουν ἀντίστοιχες γλάστρες. Ἑπομένως δέν ὑπάρχει ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα μεταξύ τῶν λου-



Σχ. 4

λουδιῶν καί τῶν γλαστρῶν. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι οἱ ἀριθμοί 5 καί 4 πού ἐκφράζουν τό πλῆθος τῶν ἀντικειμένων τῶν δύο ὁμάδων ἀντίστοιχα εἶναι ***ἄνισοι.*** Γράφουμε: $5 > 4$ ἤ $4 < 5$ καί διαβάζουμε «πέντε μεγαλύτερο τοῦ 4», ἤ «τέσσερα μικρότερο τοῦ 5», πού εἶναι τό ἴδιο. Κάθε μιά ἀπό τίς γραφές αὐτές λέγεται ***ἀνισότητα.*** Τό σύμβολο $>$ ἤ $<$ λέγεται σύμβολο τῆς ***ἀνισότητας*** καί γράφεται σ' ὅλο τόν κόσμο μέ τόν ἴδιο τρόπο. Ὁ μεγαλύτερος ἀριθμός γράφεται πάντοτε μέσα στό «ἄνοιγμα» αὐτῆς τῆς γωνίας».

Γενικά, ἄς πάρουμε μιά ὁμάδα ἀπό ἀντικείμενα μέ πλῆθος α καί μιά ἄλλη ὁμάδα ἀπό ἀντικείμενα μέ πλῆθος β καί ἄς ἐπιχειρήσουμε νά τά τοποθετήσουμε σ' ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα. Ἄν βρεθοῦν στό τέλος μερικά ἀντικείμενα π.χ. τῆς πρώτης ὁμάδας πού δέν ἔχουν ἀντίστοιχα στήν ἄλλη ὁμάδα, τότε λέμε ὅτι δέν ὑπάρχει ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα καί οἱ ἀριθμοί α καί β πού ἐκφράζουν τό πλῆθος τῶν ἀντικειμένων τῶν δύο ὁμάδων εἶναι ἄνισοι. Γράφουμε $α > β$ ἤ $β < α$ καί διαβάζουμε «α μεγαλύτερο τοῦ β» ἤ «β μικρότερο τοῦ α», πού εἶναι τό ἴδιο. Ὥστε:

Δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί λέγονται ἄνισοι, ὅταν ἐκφράζουν ἀντίστοιχα τό πλῆθος τῶν ἀντικειμένων δύο ὁμάδων, πού τά ἀντικείμενά τους δέν μποροῦν νά τεθοῦν σέ ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα.

Ἡ ἰσότητα καί ἡ ἀνισότητα μεταξύ δύο ἀκεραίων λέγονται ***σχέσεις*** μεταξύ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

Παρατήρηση. Ὑπάρχει καί ἄλλος τρόπος γιά νά γράψουμε ὅτι δύο ἀριθμοί δέν εἶναι ἴσοι, χωρίς νά δηλώνουμε ποιός εἶναι μεγαλύτερος. Αὐτός ὁ τρόπος ἔχει σύμβολο ἕνα «ἴσον» πού τό διαπερνᾶ μιά γραμμή: $\neq$

Γράφουμε: $5 \neq 8$ καί διαβάζουμε «5 διάφορο τοῦ 8».

Ἀξίωμα τῆς τριχοτομίας. Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι ἄν α καί β είναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, τότε μεταξύ τους θά ὑπάρχει ἡ μία ἀπό τίς παρακάτω τρεῖς σχέσεις: $\alpha = \beta$ ἤ $\alpha > \beta$ ἤ $\alpha < \beta$.

Τήν παραδοχή αὐτή ὀνομάζουμε ***ἀξίωμα τῆς τριχοτομίας.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

12 *Ὁμάδα Α΄*

7) Μπορεῖ νά τεθεῖ σ' ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα ἡ ὁμάδα πού ἔχει στοιχεῖα τά ἀριθμητικά ψηφία καί ἡ ὁμάδα πού ἔχει στοιχεῖα τά φωνήεντα τοῦ ἀλφαβήτου; Γράψτε τή σχέση μεταξύ τῶν ἀριθμῶν πού ἐκφράζουν τό πλῆθος τῶν στοιχείων τῶν ὁμάδων αὐτῶν.

8) Ἄν α εἶναι ἡ ἡλικία μου, β ἡ ἡλικία τοῦ μεγαλύτερου ἀδελφοῦ μου καί γ ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα μου, γράψτε τίς ἀνισότητες πού ἐκφράζουν τή διάταξη τῶν γενικῶν ἀριθμῶν α, β, γ.

9) Ἄν $\alpha = \beta$ καί $\beta > \gamma$, ποιά σχέση ἔχει ὁ α μέ τόν γ;

10) Ἄν α = ὁ ἀριθμός τῶν ἐποχῶν τοῦ ἔτους, β = ὁ ἀριθμός τῶν τάξεων ἑνός Γυμνασίου, γ = ὁ ἀριθμός τῶν τροχῶν ἑνός μικροῦ αὐτοκινήτου Ι.Χ., δ = ὁ ἀριθμός 3, καί ε = ὁ ἀριθμός τῶν δακτύλων τοῦ ἑνός χεριοῦ σας, γράψτε τίς ἰσότητες πού ὑπάρχουν μεταξύ τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ, ε.

4. Βασικές ἰδιότητες στήν ἰσότητα ἀκεραίων

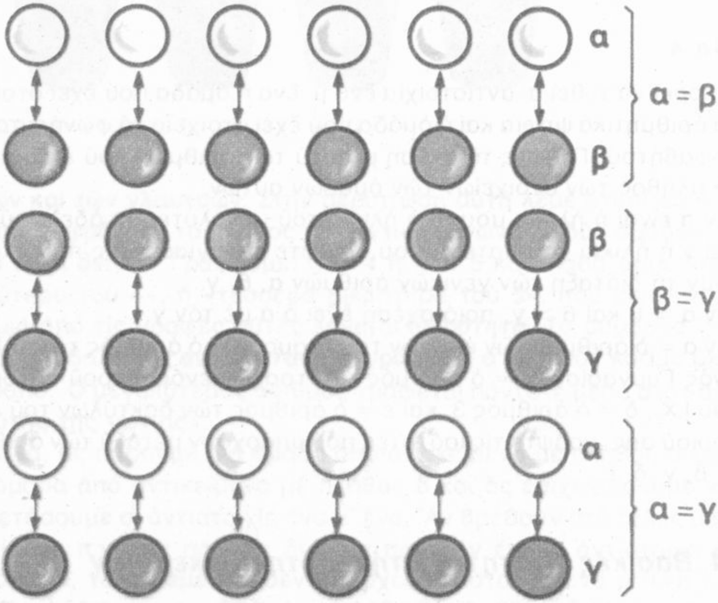
α΄) Εἶναι φανερό ὅτι κάθε ὁμάδα βώλων μέ πλῆθος α μπορεῖ νά τεθεῖ σέ ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα μέ μιά ἄλλη ὁμάδα βώλων μέ τό ἴδιο πλῆθος α. Ἔτσι προκύπτει ἡ ἰσότητα $\alpha = \alpha$. Ὥστε:

Κάθε ἀκέραιος ἀριθμός εἶναι ἴσος μέ τόν ἑαυτό του. Ἡ ἰδιότητα αὐτή λέγεται ***ἀνακλαστική.***

β΄) Στήν εἰκόνα τοῦ Σχ. 3, εἴδαμε τήν ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα τῶν λευκῶν βώλων μέ τούς πράσινους, δηλ. σέ κάθε λευκό βῶλο ἀντιστοιχεῖ ἕνας πράσινος καί σέ κάθε πράσινο βῶλο ἀντιστοιχεῖ ἕνας λευκός. Ἔτσι ἀπό τήν ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα προκύπτει ὅτι ὁ ἀριθμός α τῶν λευκῶν βώλων εἶναι ἴσος μέ τόν ἀριθμό β τῶν πράσινων, ἀλλά καί ὁ ἀριθμός β τῶν πράσινων βώλων εἶναι ἴσος μέ τόν ἀριθμό α τῶν λευκῶν. Γράφουμε: Ἄν $\alpha = \beta$, τότε $\beta = \alpha$. Ὥστε:

Ἄν ὁ ἀκέραιος ἀριθμός α εἶναι ἴσος μέ τόν ἀκέραιο β τότε καί β θά εἶναι ἴσος μέ τόν α. Ἡ ἰδιότητα αὐτή λέγεται ***συμμετρική.***

γ΄) Ἄς πάρουμε μιά ὁμάδα ἀπό λευκούς βώλους μέ πλῆθος α, μιά ὁμάδα μέ πράσινους βώλους μέ πλῆθος β καί μιά ὁμάδα ἀπό κόκκινους βώλους μέ πλῆθος γ. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχει ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα i) μεταξύ τῶν λευκῶν καί πράσινων βώλων, τότε θά ἔχουμε τήν ἰσότητα $\alpha = \beta$, ii) μεταξύ τῶν πράσινων καί τῶν κόκκινων βώλων, τότε $\beta = \gamma$.



Σχ. 5

Μποροῦμε τώρα νά τοποθετήσουμε σέ ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα τούς λευκούς βώλους μέ τούς κόκκινους, ὅπως βλέπουμε στήν εἰκόνα Σχ. 5, τότε $\alpha = \gamma$.

Ἔτσι γράφουμε: Ἄν $\alpha = \beta$ καί $\beta = \gamma$, τότε $\alpha = \gamma$. Ὥστε:

Ἄν δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί εἶναι ἴσοι μ' ἕναν ἄλλο, θά εἶναι καί μεταξύ τους ἴσοι. Ἡ ἰδιότητα αὐτή λέγεται ***μεταβατική***.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

11) Νά σχηματίσετε ὁμάδες ἀπό κέρματα τῆς 1 δρχ. τῶν 2 δρχ. καί τῶν 5

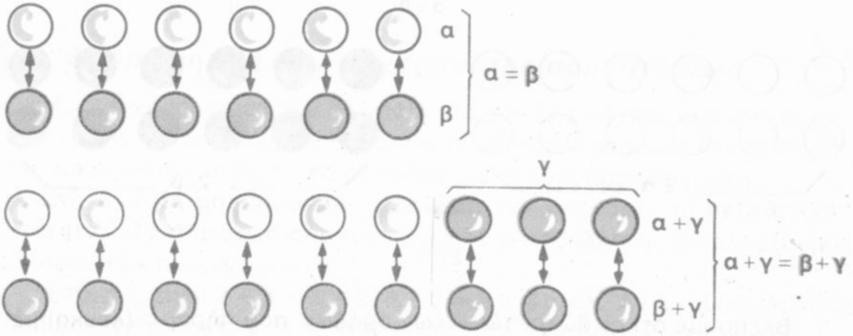
δρχ. καί νά δικαιολογήσετε τίς τρεῖς παραπάνω ἰδιότητες τῶν ἴσων ἀριθμῶν.

12) Νά ἐξετάσετε ποιές ἀπό τίς ἰδιότητες ἀνακλαστική, συμμετρική, μεταβατική, ἰσχύουν στίς ἀνισότητες ἀκεραίων.

13

5. Ἰδιότητες τῆς διαγραφῆς στήν ἰσότητα ἀκεραίων

α΄) Ἄς πάρουμε μιά ὁμάδα ἀπό λευκούς βώλους μέ πλῆθος α καί μιά ὁμάδα ἀπό πράσινους βώλους μέ πλῆθος β τέτοιες, ὥστε α = β (σχ. 6).



Σχ. 6

Ἄν σέ κάθε σειρά τῶν λευκῶν βώλων καί τῶν πράσινων βώλων τοποθετήσουμε μιά ὁμάδα ἀπό κόκκινους βώλους πού τό πλῆθος τους εἶναι γ, θά σχηματισθοῦν δυό νέες ὁμάδες πού θά ἔχουν τούς βώλους τους σ' ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα (Σχ. 6). Ἄρα α + γ = β + γ. Ἀντίστροφα ἀπό τήν ἴδια εἰκόνα (Σχ. 6) συμπεραίνουμε ὅτι ἀπό τήν ἰσότητα α + γ = β + γ προκύπτει ἡ ἰσότητα α = β. Ὥστε:

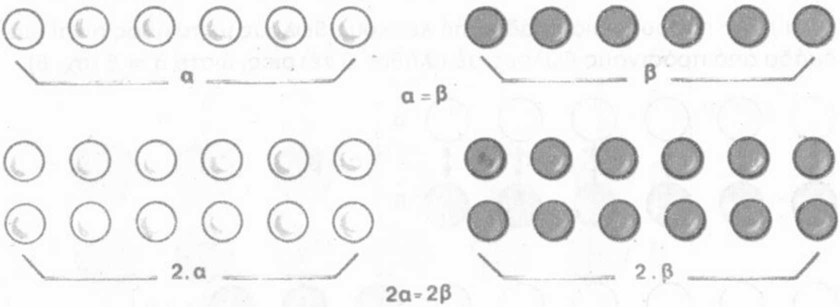
Ἄν προσθέσουμε καί στά δυό μέλη μιᾶς ἰσότητας τόν ἴδιο ἀκέραιο, προκύπτει πάλι ἰσότητα. Ἀντίστροφα, ***μποροῦμε νά διαγράψουμε καί ἀπό τά δύο μέλη μιᾶς ἰσότητας τόν ἴδιο προσθετέο*** (Ἰδιότητα τῆς διαγραφῆς).

Ἐφαρμογή. Ἀπό τήν ἰσότητα α + 3 = 5 + 3 μέ διαγραφή τοῦ 3 βρίσκουμε τήν ἰσότητα α = 5.

Παρατήρηση. α) Μέ τόν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νά ἐξηγήσουμε τήν ἰδιότητα τῆς διαγραφῆς στήν ἀφαίρεση, δηλ. ὅτι ἀπό τήν ἰσότητα α = β προκύπτει ἡ α − γ = β − γ καί ἀντίστροφα, ἀρκεῖ ἡ ἀφαίρεση α − γ νά εἶναι δυνατή.

β΄) Ἄς πάρουμε μιά ὁμάδα ἀπό λευκούς βώλους μέ πλῆθος α καί μιά ὁμάδα ἀπό πράσινους βώλους μέ πλῆθος β τέτοιες, ὥστε α = β καί ἄς τούς διατάξουμε διαδοχικά σέ μιά σειρά (Σχ. 7).

Τώρα ἄς πάρουμε μιά νέα ὁμάδα μέ διπλάσιους λευκούς βώλους, δηλ. μέ πλῆθος 2 · α, καί μιά ὁμάδα μέ διπλάσιους πράσινους βώλους μέ πλῆθος 2 · β, ὅπως βλέπουμε στήν παρακάτω εἰκόνα (Σχ. 7).



Σχ. 7

Βλέπουμε ὅτι οἱ βῶλοι τῶν νέων ὁμάδων πού πήραμε (λευκοί μέ πλῆθος 2 · α καί πράσινοι μέ πλῆθος 2 · β) μποροῦν νά τεθοῦν σέ ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα. Ἄρα θά εἶναι 2 · α = 2 · β. Μέ ἄλλες λέξεις:

Ἀπό τήν ἰσότητα α = β προκύπτει ἡ ἰσότητα 2 · α = 2 · β. Ἀπό τήν ἴδια εἰκόνα (Σχ. 7) συμπεραίνουμε ὅτι ἀπό τήν ἰσότητα 2 · α = 2 · β προκύπτει ἡ ἰσότητα α = β.

Ὅμοια ἀπό τήν ἰσότητα α = β μποροῦμε νά βροῦμε τήν 3 · α = 3 · β καί ἀντίστροφα.

Γενικά, ἄν εἶναι α = β καί μ ἕνας φυσικός ἀριθμός, θά ἔχουμε: μ · α = μ · β. Ἀντίστροφα ἀπό τή μ · α = μ · β προκύπτει ἡ α = β. Ὥστε:

Ἄν πολλαπλασιάσουμε καί τά δυό μέλη μιᾶς ἰσότητας ἐπί τόν ἴδιο ἀκέραιο, προκύπτει πάλι ἰσότητα. Ἀντίστροφα, ***μποροῦμε νά διαγράψουμε καί ἀπό τά δυό μέλη μιᾶς ἰσότητας τόν ἴδιο παράγοντα (≠ 0)*** (ἰδιότητα τῆς διαγραφῆς στόν πολλαπλασιασμό).

Ἐφαρμογή. Ἀπό τήν ἰσότητα 5 · Χ = 5 · 8 μέ διαγραφή τοῦ 5 βρίσκουμε τήν ἰσότητα Χ = 8, ἐνῶ ἀπό τήν ἰσότητα 0 · 2 = 0 · 5 μέ διαγραφή τοῦ 0, τήν ἰσότητα 2 = 5 πού εἶναι ψευδής (ἡ διαγραφή τοῦ 0 εἶναι ἀδύνατη).

Παρατήρηση. Μέ τόν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νά ἐξηγήσουμε τήν ἰδιότητα τῆς διαγραφῆς στή διαίρεση, δηλ. ἀπό τήν ἰσότητα α = β προκύπτει ἡ α : γ = β : γ καί ἀντίστροφα, ὅπου γ ≠ 0.

Ὁμάδα Α΄

13) Ἄν α, β ἀκέραιοι ἀριθμοί τέτοιοι ὥστε $α + β = α$, τί συμπεραίνετε γιά τόν ἀριθμό β;
14) Ὅμοια ἄν α, β ἀκέραιοι ἀριθμοί τέτοιοι, ὥστε $α \cdot β = α$, ὅπου $α \neq 0$, τί συμπεραίνετε γιά τόν ἀριθμό β;

14

6. Ἀριθμητική τιμή ἐγγράμματης παραστάσεως

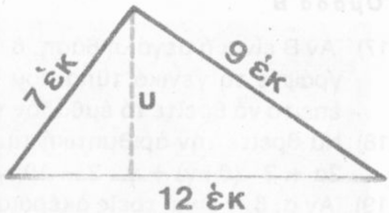
Ἀκόμη χρησιμοποιοῦμε τά γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου ἀντί τῶν ἀριθμῶν γιά νά γενικεύσουμε μιά ἰδιότητα ἤ γιά νά ἐκφράσουμε πιό σύντομα ἕνα μαθηματικό κανόνα. Ἄς ἀναφέρουμε μερικά παραδείγματα:

Στή Δ΄ τάξη μάθαμε στήν πρόσθεση τῶν ἀκεραίων τή ***μεταθετική ἰδιότητα:*** «Τό ἄθροισμα δύο ἀκεραίων δέ μεταβάλλεται, ἄν ἀλλάξουμε τή θέση τῶν προσθετέων».

Ἔτσι π.χ. εἶναι $2 + 5 = 5 + 2$, $8 + 3 = 3 + 8$ κ.τ.λ. Ἄν α καί β ἀκέραιοι ἀριθμοί, γράφουμε: $\boldsymbol{α + β = β + α}$. Τότε λέμε ὅτι γενικεύουμε τήν παραπάνω ἰδιότητα.

Ξέρουμε ἀπό τή Γεωμετρία ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου πού βλέπετε στό σχῆμα 8, μέ πλευρές πού ἔχουν μήκη α, β, γ ἐκφράζεται μέ τό ἄθροισμα $\boldsymbol{α + β + γ}$. Τό ἐμβαδό τοῦ ἴδιου τριγώνου ἐκφράζεται μέ τή γραφή $\frac{β \cdot υ}{2}$ στήν ὁποία τό γράμμα β παριστάνει τό μῆκος τῆς βάσεως καί τό υ τό ἀντίστοιχο ὕψος του.

Οἱ γραφές $\boldsymbol{α + β}$, $\boldsymbol{α + β + γ}$, $\frac{β \cdot υ}{2}$ λέγονται ***ἐγγράμματες παραστάσεις.*** Τίς ἀριθμητικές παραστάσεις ἀπαρτίζουν γράμματα ἤ γράμματα καί ἀριθμοί, πού συνδέονται μέ τά σύμβολα τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων.



Σχ. 8

Παρατήρηση. Τό σύμβολο · (ἐπί) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μεταξύ γραμμάτων ἤ γράμματος καί ἀριθμοῦ θά ἐννοεῖται, ὅταν δέν ὑπάρχει ἄλλο σύμβολο π.χ. τό αβ παριστάνει τό γινόμενο α ἐπί β κ.τ.λ.

Στήν παράσταση $α + β + γ$ ὅταν τά γράμματα ἀντικατασταθοῦν μέ τά καθορισμένα μήκη πού εἶναι σημειωμένα στό σχῆμα 8 ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου θά ἰσοῦται μέ 7 ἑκ. + 12 ἑκ. + 9 ἑκ. = 28 ἑκ.

Ἡ τιμή 28 ἑκ. λέγεται ***ἀριθμητική τιμή*** τῆς παραστάσεως $\alpha + \beta + \gamma$ γιά $\alpha = 7$ ἑκατ., $\beta = 12$ ἑκατ., $\gamma = 9$ ἑκατ. Ὥστε:

Ἀριθμητική τιμή μιᾶς ἐγγράμματης παραστάσεως εἶναι ὁ ἀριθμός πού βρίσκουμε, ὅταν ἀντικαταστήσουμε τά γράμματα μέ ἀντίστοιχα δεδομένους ἀριθμούς καί ἐκτελέσουμε τίς πράξεις πού σημειώνονται.

Ἐφαρμογές: 1) Νά βρεῖτε τήν ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως $\alpha + \beta - \gamma$, γιά $\alpha = 10$, $\beta = 12$ καί $\gamma = 8$.

Βρίσκουμε: $\alpha + \beta - \gamma = 10 + 12 - 8 = 14$.

2) Ὅμοια νά βρεῖτε τήν ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως $\alpha \cdot 2 + \beta : 4 - 5$ γιά $\alpha = 6$ καί $\beta = 8$.

Βρίσκουμε: $\alpha \cdot 2 + \beta : 4 - 5 = 6 \cdot 2 + 8 : 4 - 5 = 12 + 2 - 5 = 9$.

Σημείωση. Στήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων οἱ πολλαπλασιασμοί καί οἱ διαιρέσεις προηγοῦνται ἀπό τίς προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

15) Νά βρεῖτε τήν ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως $\alpha - \beta - \gamma$, γιά $\alpha = 19$, $\beta = 8$ καί $\gamma = 9$.

16) Νά βρεῖτε τήν ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως
$3\alpha - 8 + \beta : 5$, γιά $\alpha = 12$ καί $\beta = 20$.

Ὁμάδα Β΄

17) Ἄν Β εἶναι ἡ μεγάλη βάση, β ἡ μικρή βάση καί υ τό ὕψος τραπεζίου, γράψτε τό γενικό τύπο πού δίνει τό ἐμβαδό Ε τοῦ τραπεζίου καί ἔπειτα νά βρεῖτε τό ἐμβαδόν του γιά $B = 8$ ἑκ., $\beta = 6$ ἑκ. καί $\upsilon = 5$ ἑκ.

18) Νά βρεῖτε τήν ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως:
$2\alpha + 3 \cdot (\beta + \gamma) + \gamma : 2 - 10$, γιά $\alpha = 2,5$, $\beta = 8$ καί $\gamma = 7,2$.

19) Ἄν α, β, γ εἶναι τρεῖς ἀκέραιοι ἀριθμοί, νά συμπληρώσετε τίς ἰσότητες: i) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \dots$ ii) $\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \dots$ ὅπου $\beta \geq \gamma$. Ποιά ἰδιότητα ἐκφράζουν οἱ ἰσότητες αὐτές;

15 *7. Δυό χρήσιμα σύμβολα*

Γιά νά ἐκφράσουμε πιό σύντομα μιά μαθηματική ἰδιότητα ἤ ἕνα λογικό συμπέρασμα, χρησιμοποιοῦμε καί τά σύμβολα:

i) Τό σύμβολο $\Longrightarrow$ λέγεται ***σύμβολο τῆς συνεπαγωγῆς*** καί διαβάζεται ***«ἄρα** ἤ **τότε** ἤ **συνεπάγεται»***. Τό σύμβολο τῆς συνεπαγωγῆς τό χρησιμοποιοῦμε κάθε φορά πού ἔχουμε δυό σχέσεις, πού ἡ μία ἔχει συνεπαγωγή τήν ἄλλη. Εἴδαμε π.χ. στά προηγούμενα ὅτι ἄν α καί β ἀκέραιοι ἀριθμοί καί $α = β$, τότε καί $β = α$. Γράφουμε τώρα: $α = β \Longrightarrow β = α$ καί διαβάζουμε ἡ ἰσότητα $α = β$ συνεπάγεται τήν ἰσότητα $β = α$. Ὅμοια γράφουμε: $α + β = α \Longrightarrow β = 0$.

ii) Τό σύμβολο $\Longleftrightarrow$ λέγεται ***σύμβολο τῆς λογικῆς ἰσοδυναμίας ἤ τῆς διπλῆς συνεπαγωγῆς*** καί διαβάζεται ***«ἰσοδυναμεῖ μέ»***. Τό σύμβολο τῆς διπλῆς συνεπαγωγῆς τό χρησιμοποιοῦμε κάθε φορά πού ἔχουμε δυό σχέσεις πού ἡ καθεμιά ἔχει συνεπαγωγή τήν ἄλλη. Εἴδαμε π.χ. στήν ἰσότητα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν τίς ἰδιότητες: ἄν $α = β$, τότε $α + γ = β + γ$ καί ἀντίστροφα: ἄν $α + γ = β + γ$, τότε $α = β$. Τίς δύο αὐτές ἰδιότητες τίς γράφουμε τώρα σύντομα ὡς ἑξῆς: $\boldsymbol{α = β \Longleftrightarrow α + γ = β + γ}$ καί διαβάζουμε ἡ ἰσότητα $α = β$ ἰσοδυναμεῖ μέ τήν $α + γ = β + γ$.

Ὅμοια γράφουμε: $10 - 4 = 6 \Longleftrightarrow 6 + 4 = 10$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

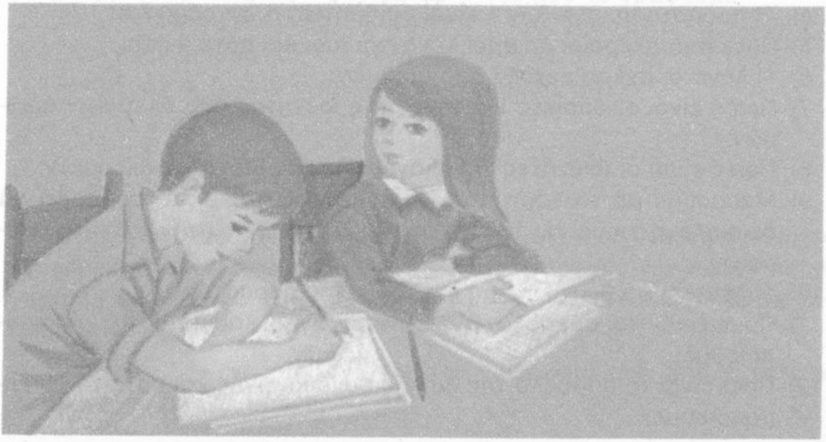
Ὁμάδα Α΄

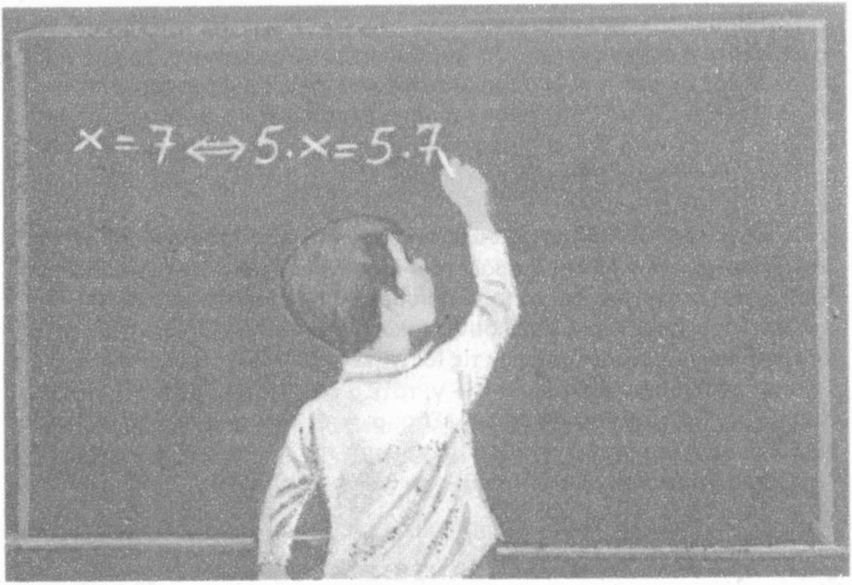
20) Ἄν $β \neq 0$, νά συμπληρώσετε τή συνεπαγωγή $αβ = β \Longrightarrow α = ...$

21) Ὅμοια νά συμπληρώσετε τή συνεπαγωγή $α = 0 \Longrightarrow α \cdot β = ...$

22) Νά συμπληρώσετε τή λογική ἰσοδυναμία $x = 3 \Longleftrightarrow 2 + x = ...$

23) Ὅμοια νά συμπληρώσετε τή λογική ἰσοδυναμία $x = 7 \Longleftrightarrow 5 \cdot x = ...$





ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Τί λέγεται ποσό; Τί λέγεται μέτρηση ἑνός ποσοῦ;
2) Ποιοί ἀριθμοί λέγονται γενικοί;
3) Ποιές γραφές λέγονται ἐγγράμματες παραστάσεις (ἤ ἐκφράσεις);
4) Ἡ παράσταση: $α + 3 - 1$ εἶναι ἀριθμητική ἤ ἐγγράμματη;
5) Πότε δυό ἀκέραιοι ἀριθμοί λέγονται ἴσοι καί πότε ἄνισοι;
6) Τί λέγεται σχέση μεταξύ δυό ἀριθμῶν;
7) Ποιές εἶναι οἱ βασικές ἰδιότητες τῆς ἰσότητας δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν;
8) Ποιές εἶναι οἱ ἰδιότητες τῆς διαγραφῆς τῆς ἰσότητας ἀκεραίων;
9) Μποροῦμε μέ τά βάρη πού κάνουν μιά ζυγαριά νά ἰσορροπεῖ νά δικαιολογήσουμε τίς ἰδιότητες τῆς διαγραφῆς στήν ἰσότητα ἀκεραίων;
10) Τί λέγεται ἀριθμητική τιμή ἐγγράμματης παραστάσεως;
11) Ποιό εἶναι τό σύμβολο τῆς συνεπαγωγῆς καί πότε τό χρησιμοποιοῦμε;
12) Ποιό εἶναι τό σύμβολο τῆς διπλῆς συνεπαγωγῆς καί πότε τό χρησιμοποιοῦμε;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ΄

ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ – – ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

16

1. Γινόμενο πολλῶν παραγόντων

Πρόβλημα. Μιά αἴθουσα ἔχει 3 ἰσομεγέθη παράθυρα, κάθε παράθυρο ἔχει 4 τζάμια καί κάθε τζάμι κοστίζει 20 δρχ. Πόσο κοστίζουν ὅλα τά τζάμια τῆς αἴθουσας αὐτῆς;

Λύση. Βρίσκουμε πρῶτα πόσα τζάμια ἔχουν τά 3 παράθυρα:

$$3 \cdot 4 \text{ τζάμια} = 12 \text{ τζάμια}$$

Σέ συνέχεια βρίσκουμε πόσο κοστίζουν τά τζάμια

$$12 \cdot 20 \text{ δρχ.} = 240 \text{ δραχμές.}$$

Ἀπάντηση. Ὅλα τά τζάμια τῆς αἴθουσας αὐτῆς κοστίζουν 240 δρχ.

Γιά νά λύσουμε τό παραπάνω πρόβλημα, πολλαπλασιάσαμε τό 3 μέ τό 4 καί τό γινόμενό τους $(3 \cdot 4)$ μέ τό 20. Τό τελικό ἐξαγόμενο 240 πού βρήκαμε λέγεται ***γινόμενο πολλῶν παραγόντων.*** Τό γράφουμε: $3 \cdot 4 \cdot 20 = (3 \cdot 4) \cdot 20 = 12 \cdot 20 = 240$. (Ἡ παρένθεση σημαίνει ὅτι τό γινόμενο $3 \cdot 4$ ἔχει βρεθεῖ).

Γενικά, ἄν α, β, γ εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, τότε $\boldsymbol{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma}$

Ὅμοια γιά περισσότερους παράγοντες εἶναι:

$2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 = 12 \cdot 5 \cdot 3 = 60 \cdot 3 = 180$ πού τό γράφουμε

$2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 = [(2 \cdot 6) \cdot 5] \cdot 3 = 60 \cdot 3 = 180$, ὅπου ἡ γραφή $[(2 \cdot 6) \cdot 5]$ δηλώνει ἕναν ἀριθμό: τό γινόμενο $12 \cdot 5 = 60$.

Γενικά, ἄν α, β, γ, δ εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, τότε:

$$\boxed{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = [(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma] \cdot \delta}$$

Ὥστε: ***γινόμενο πολλῶν ἀκεραίων, πού δίνονται σέ μιά σειρά, λέμε τό ἐξαγόμενο, πού βρίσκουμε, ὅταν πολλαπλασιάσουμε τόν πρῶτο παράγοντα μέ τό δεύτερο, τό γινόμενό τους μέ τόν τρίτο, κ.ο.κ. μέχρι καί τόν τελευταῖο.***

Προσέξτε! ***Ἄν ἕνας παράγοντας τοῦ γινομένου εἶναι μηδέν, τότε τό γινόμενο ἰσοῦται μέ μηδέν.***

Παρατήρηση. Ἡ διάταξη τῶν πράξεων στούς ἀφηρημένους ἀριθμούς τοῦ παραπάνω προβλήματος εἶναι: $(3\cdot4)\cdot20 = 240$ (1).

Ἄς λύσουμε τό ἴδιο πρόβλημα μέ ἄλλο τρόπο: Βρίσκουμε πρῶτα τήν ἀξία τῶν τζαμιῶν τοῦ ἑνός παραθύρου: 4 · 20 δρχ. = 80 δρχ. καί ἔπειτα τῶν τριῶν παραθύρων, δηλ. 3 · 80 δρχ. = 240 δρχ. Διάταξη τῶν πράξεων: $3\cdot(4\cdot20) = 240$ (2).

Ἀπό τίς (1) καί (2) προκύπτει: $(3\cdot4)\cdot20 = 3\cdot(4\cdot20)$.

Γενικά, ἄν α, β, γ ἀκέραιοι ἀριθμοί: $(α\cdotβ)\cdotγ = α\cdot(β\cdotγ)$.

Ἡ ἰδιότητα αὐτή λέγεται ***προσεταιριστική*** ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

2. Ἰδιότητες τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων

α΄) Ἀντιμεταθετική ἰδιότητα. Ἄς πάρουμε τό γινόμενο $2\cdot6\cdot5\cdot3 = 12\cdot5\cdot3 = 60\cdot3 = 180$ καί ἄς ἀλλάξουμε τή σειρά τῶν παραγόντων του Εἶναι: $\boldsymbol{5\cdot3\cdot2\cdot6 = 15\cdot2\cdot6 = 30\cdot6 = 180}$.

Βρίσκουμε δηλ. τό ἴδιο γινόμενο. Γράφουμε $2\cdot6\cdot5\cdot3 = 5\cdot3\cdot2\cdot6$.

Γενικά: $α\cdotβ\cdotγ\cdotδ = α\cdotδ\cdotγ\cdotβ$, ὅπου α, β, γ, δ ἀκέραιοι.

Τό γινόμενο πολλῶν παραγόντων δέ μεταβάλλεται, ἄν ἀλλάξουμε τή σειρά τῶν παραγόντων του.

Ἐφαρμογή: $4\cdot7\cdot25\cdot2 = 4\cdot25\cdot2\cdot7 = 100\cdot2\cdot7 = 200\cdot7 = 1400$

β΄) Στό γινόμενο $2\cdot6\cdot5\cdot3 = 12\cdot5\cdot3 = 60\cdot3 = 180$ ἄν ἀντικαταστήσουμε τούς παράγοντας 6 καί 5 μέ τό γινόμενό τους, ἔχουμε: $2\cdot(6\cdot5)\cdot3 = 2\cdot30\cdot3 = 60\cdot3 = 180$. Τό ἀποτέλεσμα δέν ἄλλαξε καί γι' αὐτό γράφουμε: $2\cdot6\cdot5\cdot3 = 2\cdot(6\cdot5)\cdot3$ καί $2\cdot(6\cdot5)\cdot3 = 2\cdot6\cdot5\cdot3$.

Γενικά $\boldsymbol{α\cdotβ\cdotγ\cdotδ = α\cdot(β\cdotγ)}$ ***καί*** $\boldsymbol{α\cdot(β\cdotγ)\cdotδ = α\cdotβ\cdotγ\cdotδ}$, ὅπου α, β, γ, δ ἀκέραιοι.

i) ***Σέ γινόμενο πολλῶν παραγόντων μποροῦμε νά ἀντικαταστήσουμε μερικούς παράγοντες μέ τό γινόμενό τους.***

ii) ***Σέ γινόμενο πολλῶν παραγόντων μποροῦμε νά ἀντικαταστήσουμε ἕνα παράγοντα μέ ἄλλους, πού τόν ἔχουν ὡς γινόμενο.***

Ἐφαρμογές: i) $8\cdot6\cdot5\cdot2 = 8\cdot30\cdot2 = 240\cdot2 = 480$.

ii) $12\cdot25\cdot2 = 3\cdot4\cdot25\cdot2 = 3\cdot100\cdot2 = 300\cdot2 = 600$.

iii) Πολλαπλασιασμός δύο γινομένων:

$$(3\cdot5)\cdot(4\cdot2) = 3\cdot5\cdot4\cdot2 = 120.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

1) Νά βρεῖτε νοερά τά γινόμενα: α΄) $3 \cdot 15 \cdot 2$ β΄) $5 \cdot 7 \cdot 6$ γ΄) $8 \cdot 9 \cdot 10$.
2) Μιά πολυκατοικία ἔχει 5 ὀρόφους. Κάθε ὄροφος ἔχει 3 διαμερίσματα καί κάθε διαμέρισμα 4 δωμάτια. Πόσα δωμάτια ἔχει ἡ πολυκατοικία;
3) Νά ὑπολογιστοῦν τά παρακάτω γινόμενα:
α΄) $9 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3$ β΄) $8 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 3$ γ΄) $7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 8$ δ΄) $20 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3$
4) Στά παραπάνω γινόμενα κάμετε ἀντικατάσταση δυό παραγόντων μέ τό γινόμενό τους.
5) Στά παρακάτω γινόμενα, ἀντικαταστήσατε ἕναν παράγοντα μέ δυό ἄλλους πού τόν ἔχουν ὡς γινόμενο. α΄) $8 \cdot 25 \cdot 6$ β΄) $12 \cdot 24 \cdot 2$ γ΄) $9 \cdot 8 \cdot 15$.
6) Νά ὑπολογιστοῦν τά παρακάτω γινόμενα μέ δυό τρόπους:
α΄) $(3 \cdot 9) \cdot (4 \cdot 5)$ β΄) $(4 \cdot 10) \cdot (8 \cdot 3)$ γ΄) $(6 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 3)$

17

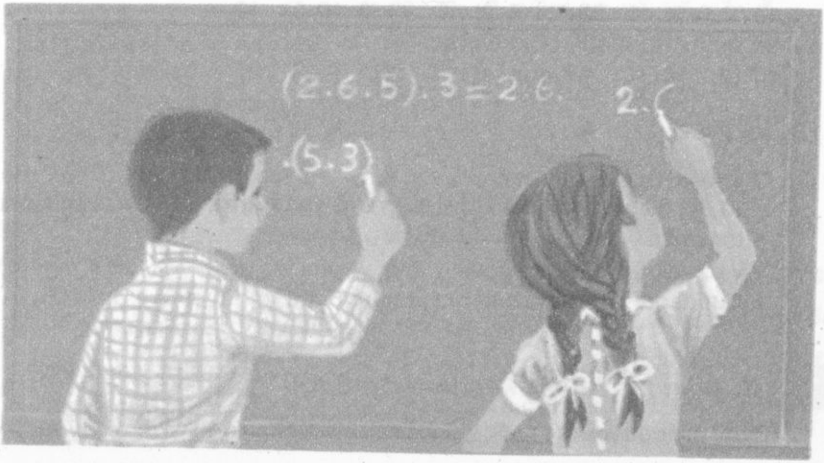
Παρατηρήσεις: 1η. Ἄς βροῦμε τό γινόμενο $(2 \cdot 6 \cdot 5) \cdot 3$ μέ δυό τρόπους. Εἶναι:

i) $(2 \cdot 6 \cdot 5) \cdot 3 = 60 \cdot 3 = 180$

ii) $(2 \cdot 6 \cdot 5) \cdot 3 = 2 \cdot 6 \cdot (5 \cdot 3) = 2 \cdot 6 \cdot 15 = 12 \cdot 15 = 180$,

δηλ. πολλαπλασιάσαμε τό 3 μ' ἕναν παράγοντα τοῦ γινομένου κι ἔτσι βρήκαμε τό ἴδιο ἀποτέλεσμα.

Γράφουμε: $(2 \cdot 6 \cdot 5) \cdot 3 = 2 \cdot 6 \cdot (5 \cdot 3)$.



Ὥστε: ***Γιά νά πολλαπλασιάσουμε ἕνα γινόμενο μ' ἕνα φυσικό ἀρκεῖ νά πολλαπλασιάσουμε ἕναν παράγοντά του μέ τό φυσικό ἀριθμό καί ν' ἀφήσουμε τούς ἄλλους ὅπως εἶναι.***

2η. Ἄς βροῦμε τό πηλίκο $(2 \cdot 6 \cdot 5) : 3$ μέ δυό τρόπους. Εἶναι:

i) $(2 \cdot 6 \cdot 5) : 3 = 60 : 3 = 20$

ii) $(2 \cdot 6 \cdot 5) : 3 = 2 \cdot (6 : 3) \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 20$, δηλ. διαιρέσαμε ἕνα μόνο παράγοντα τοῦ γινομένου τό 6 (πού εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ διαιρέτη) μέ τό 3 καί ἔτσι βρήκαμε τό ἴδιο ἀποτέλεσμα. Γράφουμε $(2 \cdot 6 \cdot 5) : 3 = 2 \cdot (6 : 3) \cdot 5$.

Ὥστε: ***Γιά νά διαιρέσουμε ἕνα γινόμενο μ' ἕνα φυσικό, ὁ ὁποῖος διαιρεῖ ἕνα τουλάχιστο παράγοντά του, ἀρκεῖ νά διαιρέσουμε τόν παράγοντα αὐτό μέ τό φυσικό καί ν' ἀφήσουμε τούς ἄλλους ὅπως εἶναι.***

Ἡ ἰδιότητα αὐτή μπορεῖ νά γραφεῖ καί ὡς ἑξῆς: $\frac{2 \cdot 6 \cdot 5}{3} = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$.

Μέ αὐτόν τόν τρόπο μᾶς εἶναι χρήσιμη στήν ἁπλοποίηση τῶν κλασματικῶν παραστάσεων, στίς ἀναλογίες, στόν τόκο κ.τ.λ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

7) Νά ὑπολογιστοῦν τά παρακάτω γινόμενα μέ δυό τρόπους:
α΄) $(5 \cdot 8 \cdot 6) \cdot 2$ β΄) $(9 \cdot 2 \cdot 5) \cdot 4$ γ΄) $(4 \cdot 7 \cdot 2) \cdot 5$

8) Νά ὑπολογιστοῦν τά παρακάτω πηλίκα μέ δυό τρόπους:
α΄) $(2 \cdot 6 \cdot 5) : 6$ β΄) $(24 \cdot 5 \cdot 8) : 6$ γ΄) $(9 \cdot 48 \cdot 3) : 12$

9) Νά συμπληρωθοῦν οἱ ἰσότητες:
α΄) $19 \cdot 12 \cdot 0 \cdot 31 = \ldots$ β΄) $15 \cdot 17 \cdot (\ldots) \cdot 35 = 0$

Ὁμάδα Β΄

10) Ἄν τό γινόμενο τῶν ἀκεραίων α, β, γ εἶναι ἴσο, μέ 36, δηλ. $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 36$, νά δώσετε κάθε δυνατή τιμή στά γράμματα, ὥστε νά ἀληθεύει ἡ ἰσότητα.

11) Ἄν τό γινόμενο τῶν ἀκεραίων α, β, γ εἶναι ἴσο μέ α, δηλ. $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \alpha$, τί συμπεραίνετε γιά τούς ἀκέραιους β καί γ; (Εἶναι $\alpha \neq 0$).

18 3. Δύναμη ἑνός ἀκεραίου ἀριθμοῦ

Ὅταν οἱ παράγοντες ἑνός γινομένου εἶναι ὅλοι ἴσοι, τότε τό γινόμενο αὐτό λέγεται δύναμη. Π.χ. τό γινόμενο $2 \cdot 2 \cdot 2$ λέγεται ***δύναμη*** τοῦ 2 καί γράφεται σύντομα 2^3.

Στή σύντομη γραφή, γράφουμε ἕνα μόνο παράγοντα τοῦ γινομένου καί δεξιά του, λίγο πιό ψηλά καί μέ μικρότερα ψηφία, γράφουμε τόν ἀκέραιο, πού φανερώνει πόσοι εἶναι οἱ παράγοντες. Ὁ ἀκέραιος 2 λέγεται ***βάση*** τῆς δυνάμεως καί ὁ 3 ***ἐκθέτης*** αὐτῆς. Ἔτσι:

Τό $5 \cdot 5$ γράφεται σύντομα 5^2 καί διαβάζεται: πέντε στή δευτέρα.

Τό $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$ γράφεται σύντομα α^3 καί διαβάζεται: ἄλφα στήν τρίτη.

Τό $\beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta$ γράφεται σύντομα β^4 καί διαβάζεται: βῆτα στήν τετάρτη κ.ο.κ.

Ἡ δεύτερη δύναμη ἑνός ἀριθμοῦ λέγεται καί ***τετράγωνο*** τοῦ ἀριθμοῦ, ἡ τρίτη δύναμη λέγεται καί ***κύβος*** τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἡ εὕρεση μιᾶς δυνάμεως ἑνός ἀκεραίου λέγεται ***ὕψωση τοῦ ἀκεραίου στή δύναμη αὐτή*** καί τό ἐξαγόμενο λέγεται ***τιμή τῆς δυνάμεως.***

Παραδείγματα: Ἔχουμε:

$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$, $\quad 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $\quad 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$, $\quad 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, $\quad 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$, $\quad 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, $\quad 5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

Προσέξτε! Δέν πρέπει νά συγχέετε τίς γραφές 2^3 καί $2 \cdot 3$, διότι:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \quad \text{ἐνῶ } 2 \cdot 3 = 6$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

12) Νά γράψετε σύντομα τά γινόμενα:
α΄) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ β΄) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$ γ΄) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$

13) Νά βρεῖτε τά τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν:
7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

14) Νά βρεῖτε τίς τιμές τῶν παραστάσεων:
α΄) $3^3 + 5^2$ β΄) $2^2 + 3^3 - 4^2$ γ΄) $5^2 + 2^3 + 3^4 - 4^3$

19 4. Ἀξιοσημείωτοι δυνάμεις

Δυνάμεις τοῦ 0. Ἐπειδή $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$, $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ κ.ο.κ. Ὥστε:

Κάθε δύναμη τοῦ μηδέν μέ ἐκθέτη φυσικό ἀριθμό ἰσοῦται μέ μηδέν.

Δυνάμεις τοῦ 1. Ἐπειδή $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$, $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ κ.ο.κ. Ὥστε:

Κάθε δύναμη τοῦ 1 μέ ἐκθέτη φυσικό ἀριθμό ἰσοῦται μέ 1.

Δυνάμεις τοῦ 10. Ἐπειδή $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$, $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$, $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$ κ.τ.λ. Ὥστε:

Κάθε δύναμη τοῦ 10 ἰσοῦται μέ ἀκέραιο, πού σχηματίζεται ἀπό τό ψηφίο 1 ἀκολουθούμενο ἀπό τόσα 0, ὅσες μονάδες ἔχει ὁ ἐκθέτης.

Ἡ χρησιμοποίηση δυνάμεων τοῦ 10 μᾶς ἐπιτρέπει νά γράφουμε μέ συντομία μεγάλους ἀκεραίους ἀριθμούς. Π.χ.

$$1000000 = 10^6,\ 40000000 = 4 \cdot 10^7 \text{ κ.τ.λ.}$$

Τά σύμβολα a^1, a^0. Δεχόμαστε ὅτι: $a^1 = a$ καί $a^0 = 1$. Τήν ἐξήγηση αὐτῶν τῶν ἰσοτήτων θά τή μάθετε ἀργότερα στό Γυμνάσιο. Τό σύμβολο 0^0 δέν ἔχει νόημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

15) Νά συμπληρωθεῖ ἡ συνεπαγωγή: $a = 1 \Rightarrow a^{12} = \ldots$

16) Νά βρεῖτε τίς τιμές τῶν παραστάσεων:
α΄) $3^2 \cdot 1^5 \cdot 2^3$ β΄) $4^2 \cdot 1^3 : 2$ γ΄) $5^3 \cdot 3^8 \cdot 0^3 \cdot 2^5$.

17) Νά γράψετε σύντομα τούς ἀκεραίους:
α΄) 6000000 β΄) 150000 γ΄) 450000000.

18) Νά βρεῖτε τίς τιμές τῶν παραστάσεων:
α΄) $10^1 + 5^0$ β΄) $8^1 - 6^0$ γ΄) $7^1 \cdot 7^0$ δ΄) $a^1 \cdot a^0$, (ὅπου $a \neq 0$).

5. Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων

α΄) Γινόμενο δυνάμεων τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ

Ἔχουμε π.χ. $2^2 \cdot 2^3 = \overbrace{(2\cdot2)}^{2^2} \cdot \overbrace{(2\cdot2\cdot2)}^{2^3} = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^5 = 2^{2+3}$. Ὅμοια βρίσκουμε $\alpha^3 \cdot \alpha^7 = \alpha^{10} = \alpha^{3+7}$, ὅπου α ἀκέραιος. Τό συμπέρασμα εἶναι γενικό, καί λέμε:

Γιά νά πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ, σχηματίζουμε μιά δύναμη μέ τήν ἴδια βάση καί μέ ἐκθέτη τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν δυνάμεων.

β΄) Ὕψωση δυνάμεως σέ δύναμη

Ἡ γραφή $(3^2)^3$ λέγεται ***ὕψωση δύναμης σέ δύναμη.***

Ἔχουμε: $(3^2)^3 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3^{2+2+2} = 3^{3.2}$

Ὅμοια βρίσκουμε: $(\alpha^5)^2 = \alpha^{10} = \alpha^{2.5}$, ὅπου α ἀκέραιος. Τό συμπέρασμα εἶναι γενικό καί λέμε:

Γιά νά ὑψώσουμε μιά δύναμη σέ ἄλλη δύναμη, σχηματίζουμε μιά δύναμη μέ τήν ἴδια βάση καί μέ ἐκθέτη τό γινόμενο τῶν ἐκθετῶν.

γ΄) Γινόμενο σέ δύναμη

Ἔχουμε π.χ. $(3\cdot5)^2 = (3\cdot5)\,(3\cdot5) = 3\cdot5\cdot3\cdot5 = 3\cdot3\cdot5\cdot5 = 3^2\cdot5^2$. Ὅμοια βρίσκουμε: $(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)^3 = \alpha^3 \cdot \beta^3 \cdot \gamma^3$, ὅπου α, β, γ ἀκέραιοι. Τό συμπέρασμα εἶναι γενικό καί λέμε:

Γιά νά ὑψώσουμε ἕνα γινόμενο σέ μιά δύναμη, ὑψώνουμε κάθε παράγοντα τοῦ γινομένου στή δύναμη αὐτή.

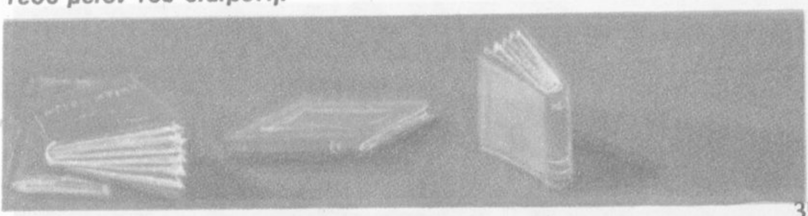
δ΄) Πηλίκο δύο δυνάμεων τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ

Ἔχουμε π.χ. $3^5 : 3^2$. Ἐπειδή $3^2 \cdot 3^3 = 3^5$, συμπεραίνουμε ὅτι ἡ δύναμη $3^3 = 3^{5-2}$ εἶναι τό ἀκριβές πηλίκο τῆς διαιρέσεως.

Γράφουμε: $3^5 : 3^2 = 3^{5-2}$

Ὅμοια βρίσκουμε: $\alpha^{10} : \alpha^6 = \alpha^{10-6} = \alpha^4$, ὅπου α ἀκέραιος $\neq 0$. Τό συμπέρασμα εἶναι γενικό καί λέμε:

Γιά νά διαιρέσουμε δυνάμεις τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ, σχηματίζουμε μιά δύναμη μέ τήν ἴδια βάση καί ἐκθέτη τή διαφορά τῶν ἐκθετῶν τοῦ διαιρετέου μεῖον τοῦ διαιρέτη.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

19) Νά ἐκφράσετε μέ μιά δύναμη τά ἐξαγόμενα τῶν πράξεων:
α΄) $7^2 \cdot 7^3$ β΄) $3^2 \cdot 3^5 \cdot 3$ γ΄) $(3^4)^3$ δ΄) $(5^4)^6$

20) Νά βρεῖτε μέ δυό τρόπους τά τετράγωνα τῶν γινομένων:
α΄) $(3 \cdot 5)^2$ β΄) $(8 \cdot 7)^2$ γ΄) $(2 \cdot 3 \cdot 5)^2$.

21) Ὅμοια νά ἐκφράσετε μέ μιά δύναμη τά ἐξαγόμενα τῶν πράξεων:
α΄) $2^8 : 2$ β΄) $11^4 : 11$ γ΄) $5^2 \cdot 5^5 : 5^4$.

22) Νά ὑπολογίσετε τίς παρακάτω δυνάμεις μέ διάσπαση σέ προσθετέους τοῦ ἐκθέτη τους:
α΄) 2^{11} β΄) 3^6 γ΄) 5^5.

21

6. *Γενικά παραδείγματα στίς πράξεις τῶν δυνάμεων*

1) Νά μετατραπεῖ ἡ δύναμη 4^3 σέ δύναμη τοῦ 2.

Λύση. Ἔχουμε: $4^3 = (2^2)^3 = 2^6$.

2) Νά ὑπολογισθεῖ σύντομα τό γινόμενο $5^3 \cdot 2^3$.

Λύση. Ἔχουμε: $5^3 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$.

3) Νά βρεθεῖ τό ἐξαγόμενο τῶν πράξεων: $4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 2^3 - 7^2$.

Λύση. Ἔχουμε: $4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 2^3 - 7^2 = 4 \cdot 25 + 3 \cdot 8 - 49 = 100 + 24 - 49 =$
$= 75$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Β΄

23) Νά ἐκφράσετε μέ μιά δύναμη τά ἐξαγόμενα τῶν πράξεων:
α΄) $3^2 \cdot 9^3 \cdot 3$ β΄) $5^3 \cdot 25^4$ γ΄) $3^8 : 9^3$ δ΄) $5 \cdot 2 \cdot 10^3$.

24) Νά βρεῖτε τίς τιμές τῶν παραστάσεων:
α΄) $10^2 \cdot 2^3 + 8 \cdot 5^2 + 1^8$ β΄) $5 \cdot 2^3 + 4 \cdot 3^2 + 10^1 - 2^0$.

25) Νά βρεῖτε τήν τιμή τῆς παραστάσεως:
$2^3 \cdot 4 + (10 \cdot 3)^2 + 5^2 : 5^0 - 1^0$.

26) Ἄν $\alpha = 2^2 \cdot 3$ καί $\beta = 2 \cdot 3^2$, νά βρεῖτε τίς τιμές τῶν παραστάσεων:
$A = \alpha^2 \cdot \beta$ καί $B = \alpha \cdot \beta^2$.

22

7. Πρῶτοι καί σύνθετοι ἀριθμοί

Ἀριθμοί πρῶτοι. ***Οἱ φυσικοί ἀριθμοί 2, 3, 5, 7, 11*** κ.τ.λ. πού ἔχουν διαιρέτες μόνο τή μονάδα καί τόν ἑαυτό τους λέγονται πρῶτοι.

Ἀριθμοί σύνθετοι. Οἱ φυσικοί ἀριθμοί 4, 6, 8, 9, 10 κ.τ.λ. πού ἐκτός ἀπό τή μονάδα καί τόν ἑαυτό τους ἔχουν κι ἄλλους διαιρέτες λέγονται ***σύνθετοι.*** Π.χ. ὁ 4 ἔχει διαιρέτες τούς ἀκεραίους: 1, 2, 4.

Κάθε σύνθετος ἀριθμός μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων. Π.χ. $10 = 2 \cdot 5$, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ κ.τ.λ.

8. Παραγοντοποίηση ἑνός σύνθετου ἀριθμοῦ

Ἔτσι λέμε τήν ἀνάλυση ἑνός σύνθετου ἀριθμοῦ στούς πρώτους παράγοντές του.

Ἡ παραγοντοποίηση ἑνός σύνθετου ἀριθμοῦ γίνεται μέ διαδοχικές τέλειες διαιρέσεις μέ διαιρέτες πρώτους ἀριθμούς 2, 3, 5, 7, 11 κ.τ.λ. Τά γνωστά, ἀπό τήν Ε΄ τάξη, κριτήρια διαιρετότητας μᾶς διευκολύνουν στήν ἐκλογή αὐτῶν τῶν διαιρετῶν.

Ἄς παραγοντοποιήσουμε τόν ἀριθμό π.χ. 180. Βρίσκουμε ἐλάχιστο πρῶτο διαιρέτη τό 2 καί, νοερά, ἀκριβές πηλίκο 90. Ἐλάχιστος πρῶτος διαιρέτης τοῦ 90 εἶναι πάλι ὁ 2 καί ἀκριβές πηλίκο 45. Ὅμοια ἐλάχιστος πρῶτος διαιρέτης τοῦ 45 εἶναι ὁ 3 καί ἀκριβές πηλίκο 15. Γιά τό σύνθετο παράγοντα 15 βρίσκουμε ἐλάχιστο πρῶτο διαιρέτη τόν 3 καί ἀκριβές πηλίκο 5. Ὁ 5 εἶναι πρῶτος ἀριθμός. Ἔτσι ὁ σύνθετος ἀριθμός 180 γράφεται:

$$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Ἡ διάταξη τῶν διαδοχικῶν αὐτῶν διαιρέσεων γίνεται ὅπως στό παραπάνω παράδειγμα.

Ὅμοια βρίσκουμε: $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

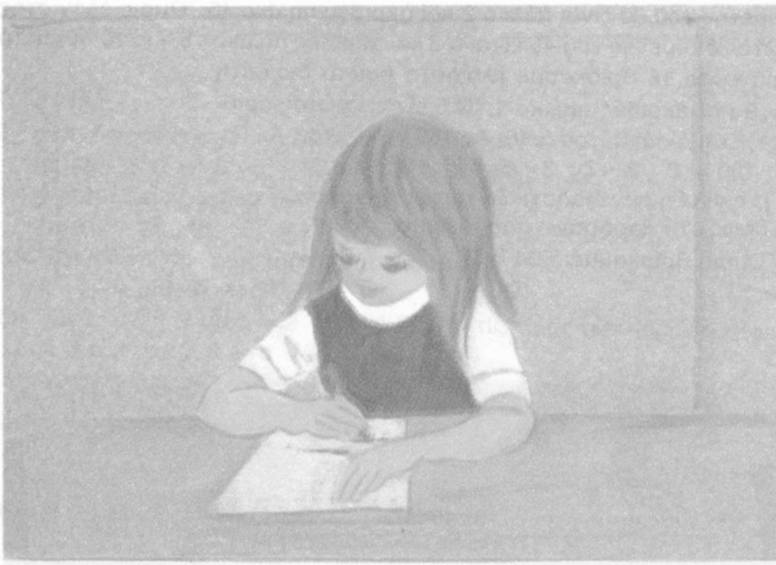
27) Ἀπό τούς παρακάτω ἀριθμούς νά χωρισθοῦν οἱ πρῶτοι: 13, 14, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

28) Νά παραγοντοποιηθοῦν οἱ ἀριθμοί: 210, 525, 756, 1008.

29) Ἀναλύοντας σέ γινόμενα πρώτων παραγόντων τούς ἀριθμούς 144, 225, 256, 324 καί 400, νά βρεῖτε ποιῶν ἀριθμῶν εἶναι τετράγωνα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Τί λέγεται γινόμενο πολλῶν παραγόντων ἀκεραίων ἀριθμῶν;
2) Ποιές εἶναι οἱ κυριότερες ἰδιότητες τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων;
3) Πότε διαιρεῖται ἕνα γινόμενο πολλῶν παραγόντων ἀκεραίων διά φυσικοῦ;
4) Τί λέγεται δύναμη ἑνός ἀκεραίου ἀριθμοῦ;
5) Πῶς ἀλλιῶς λέγεται ἡ δεύτερη καί ἡ τρίτη δύναμη ἑνός ἀκεραίου ἀριθμοῦ;
6) Τί γνωρίζετε γιά τίς δυνάμεις τοῦ 0, τοῦ 1 καί τοῦ 10;
7) Ποιές ἰσότητες ἔχουμε γιά τά σύμβολα $α^1$ καί $α^0$;
8) Ποιές εἶναι οἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων;
9) Ποιοί ἀριθμοί λέγονται πρῶτοι καί ποιοί σύνθετοι;
10) Πῶς ἀναλύουμε ἕνα σύνθετο ἀριθμό σέ γινόμενα πρώτων παραγόντων;



ΑΠΛΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ α΄ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟ

23

1. Οἱ πράξεις πρόσθεση καί ἀφαίρεση

Πρόβλημα 1ο. Ὁ Πέτρος ἔχει 8 βώλους καί ὁ Νίκος 5 βώλους. Πόσους βώλους ἔχει περισσότερους ὁ Πέτρος ἀπό τό Νίκο;

Εὔκολα βρίσκουμε ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν βώλων τοῦ Πέτρου εἶναι ὅσος τοῦ Νίκου καί 3 παραπάνω, εἶναι δηλαδή $8 = 5 + 3$ (1).

Ὅπως ξέρουμε ὁ ἀριθμός 3 λέγεται ***διαφορά*** τοῦ 5 ἀπό τόν 8 καί ἡ πράξη μέ τήν ὁποία βρίσκουμε τή διαφορά λέγεται ***ἀφαίρεση.*** Γράφουμε: $8 - 5 = 3$ (2).

Ἀμέσως καταλαβαίνουμε, ὅτι οἱ ἰσότητες (1), (2) ἔχουν τήν ἴδια σημασία, δηλαδή ἀπό τή μιά παίρνουμε τήν ἄλλη καί ἀντίστροφα. Τίς λέμε ἰσοδύναμες καί γράφουμε: $5 + 3 = 8 \Longleftrightarrow 8 - 5 = 3$.

Πρόβλημα 2ο. Ὁ Κώστας ἀγοράζει ἕνα τετράδιο πού κοστίζει 8 δραχμές καί δίνει στό βιβλιοπώλη ἕνα δεκάδραχμο. Πόσες δραχμές θά λάβει ρέστα; Ὁ βιβλιοπώλης δίνει στόν Κώστα 2 δρχ. ρέστα καί τοῦ λέγει: 8 δρχ. (τό τετράδιο) + 2 δρχ. (τά ρέστα) = 10 δρχ. πού μοῦ ἔδωσες. Ἔτσι εἴτε γράψουμε $8 + 2 = 10$, εἴτε $10 - 8 = 2$ ἐννοοῦμε τό ἴδιο, δηλ. ἔχουμε τή λογική ἰσοδυναμία:

$$8 + 2 = 10 \Longleftrightarrow 10 - 8 = 2.$$

Ὅμοια εἶναι: $\frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \Longleftrightarrow \frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$

Ἡ ἀφαίρεση παρουσιάζεται ὡς μιά πράξη στήν ὁποία δίνεται τό ἄθροισμα δύο ρητῶν ἀριθμῶν καί ὁ ἕνας ἀπό αὐτούς καί ζητεῖται ὁ ἄλλος.

Γενικά, ἄν ὀνομάσουμε α τό δοσμένο ἄθροισμα, β τόν ἕνα προσθετέο καί x τό ζητούμενο τρίτο ρητό ἀριθμό, τότε θά ἔχουμε τή (λογική) ἰσοδυναμία:

$$\boxed{\beta + x = \alpha \Longleftrightarrow \alpha - \beta = x}$$

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι:

Ἡ ***πρόσθεση καί ἡ ἀφαίρεση εἶναι πράξεις ἀντίστροφες.***

2. Ἡ ἔννοια τῆς ἐξισώσεως

Πρόβλημα. Ὁ Πέτρος καί ὁ Νίκος ἔχουν μαζί 40 δραχμές. Ἄν ὁ Πέτρος ἔχει 32 δραχμές, πόσες δραχμές ἔχει ὁ Νίκος;

Λύση. Ἄν ὁ Νίκος ἔχει x δραχμές, τότε πρέπει $32 + x = 40$ καί, ὅπως ξέρουμε ἀπό τήν προηγούμενη λογική ἰσοδυναμία, γιά νά βροῦμε τόν χ πρέπει νά ἀφαιρέσουμε τόν 32 ἀπό τόν 40. Δηλαδή $x = 40 - 32 \Longleftrightarrow \chi = 8$. Πραγματικά: $32 + 8 = 40$.

Ἀπό ὅλες τίς ἀριθμητικές τιμές πού μποροῦμε νά δώσουμε στό χ μιά, καί μόνο μιά, ἀληθεύει τήν ἰσότητα $32 + \chi = 40$, ἡ $\chi = 8$.

Μιά τέτοια ἰσότητα τή λέμε ***ἐξίσωση***. Ἔτσι:

Ἐξίσωση λέγεται μιά ἰσότητα πού περιέχει ἕνα γράμμα χ καί ἀληθεύει γιά μιά ὁρισμένη τιμή τοῦ χ.

Ὁ ζητούμενος ἀριθμός χ λέγεται ***ἄγνωστος*** τῆς ἐξισώσεως καί ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ χ πού τήν ἀληθεύει λέγεται ***λύση*** (ἤ ρίζα) τῆς ἐξισώσεως. Στό παραπάνω παράδειγμα ὁ 8 εἶναι ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως.

Ἡ ἐργασία τήν ὁποία κάνουμε γιά νά βροῦμε τή λύση μιᾶς ἐξισώσεως λέγεται ***ἐπίλυση*** αὐτῆς. Ὁ ἔλεγχος πού κάνουμε γιά νά διαπιστώσουμε, ἄν ὁ ἀριθμός πού βρήκαμε εἶναι λύση τῆς ἐξισώσεως, λέγεται ***ἐπαλήθευση***.

Ὑπάρχουν ἐξισώσεις, πού δέν ἀληθεύουν γιά καμιά ἀριθμητική τιμή τοῦ ἀγνώστου τους. Οἱ ἐξισώσεις αὐτές λέγονται ***ἀδύνατες***. Ἀδύνατη εἶναι π.χ. ἡ ἐξίσωση $\chi + 8 = 3$, μέ χ ἀκέραιο τῆς Ἀριθμητικῆς. Πραγματικά δέν ὑπάρχει κανένας ἀκέραιος πού νά προστίθεται στό 8 καί νά δίνει ἄθροισμα 3 (ἤ ἡ διαφορά $\chi = 3 - 8$ εἶναι ἀδύνατη).

Ἄς πάρουμε τώρα τήν ἰσότητα: $\chi + 3 = 3 + \chi$. Ἡ ἰσότητα αὐτή ἀληθεύει γιά κάθε ἀριθμητική τιμή τοῦ χ, π.χ. ἄν ἀντικαταστήσουμε τό χ μέ τό 5 θά ἔχουμε: $5 + 3 = 3 + 5$ ἤ $8 = 8$. Ὅμοια ἄν ἀντικαταστήσουμε τό χ μέ τό 6, θά ἔχουμε: $6 + 3 = 3 + 6$ ἤ $9 = 9$.

Μιά τέτοια ἰσότητα τή λέμε ***ταυτότητα***. Ἔτσι:

Ταυτότητα λέγεται ἡ ἐγγράμματη ἰσότητα, πού ἀληθεύει γιά κάθε ἀριθμητική τιμή τοῦ γράμματος ἤ τῶν γραμμάτων πού περιέχει.

Ταυτότητα εἶναι καί ἡ ἰσότητα $\alpha + 6 = 6 + \alpha$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Συμπληρῶστε τίς ἰσότητες στίς παρακάτω ἰσοδυναμίες:
i) $2 + 7 = \ldots \Longleftrightarrow 9 - \ldots = 7$ ii) $13 - \ldots = 3 \Longleftrightarrow \ldots + 3 = 13$.

2) Νά βρεῖτε νοερά τή λύση καθεμιᾶς ἀπό τίς παρακάτω ἐξισώσεις:
i) $\chi + 8 = 10$ ii) $\chi + 3 = 3$ καί iii) $12 + \chi = 20$.

3) Στήν ἰσότητα: $\alpha + \chi = \chi + 3$ ποιά τιμή πρέπει νά πάρει τό α, ὥστε νά γίνει ταυτότητα;

24

3. Ἐπίλυση ἁπλῶν ἐξισώσεων. Πρώτη μορφή (I)

Ἄς ἐπιλύσουμε ἁπλές ἐξισώσεις, τῶν ὁποίων ἡ λύση στηρίζεται στήν ἰσοδυναμία προσθέσεως - ἀφαιρέσεως, δηλ. στήν ἰσοδυναμία:

$$\boxed{\beta + \chi = \alpha \iff \chi = \alpha - \beta} \qquad \text{(I)}$$

Παραδείγματα

1) Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $\chi + 24 = 30$.
Ἔχουμε $\chi + 24 = 30 \iff \chi = 30 - 24 \iff \chi = 6$.
Ἐπαλήθευση: $6 + 24 = 30$.

2) Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $\chi - 12 = 15$
Ἔχουμε $\chi - 12 = 15 \iff \chi = 15 + 12 \iff \chi = 27$.
Ἐπαλήθευση: $27 - 12 = 15$

3) Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $18 - \chi = 10$.
Ἔχουμε $18 - \chi = 10 \iff 10 + \chi = 18 \iff \chi = 18 - 10 \iff \chi = 8$.
Ἐπαλήθευση: $18 - 8 = 10$.

Σημείωση. Οἱ ἐξισώσεις πού λύσαμε παραπάνω (μορφή I) εἶναι τῆς μορφῆς $\beta + \chi = \alpha$, $\chi - \beta = \alpha$, $\beta - \chi = \alpha$, ἔχουν τόν ἄγνωστο χ στήν πρώτη δύναμη καί λέγονται ***ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

4) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ παρακάτω ἐξισώσεις:
α΄) $\chi + 15 = 60$ β΄) $\chi + 12 = 15$ γ΄) $\chi + 45 = 64$
δ΄) $\chi - 8 = 21{,}50$ ε΄) $\chi - 14 = 32$ στ΄) $\chi - 21 = 80$.

5) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ παρακάτω ἐξισώσεις:
α΄) $\chi - 5 = 22{,}2$ β΄) $12 - \chi = 8$ γ΄) $18 - \chi = 6$ δ΄) $83 - \chi = 60$.

25 *Ἄλλα παραδείγματα καί ἐφαρμογές*

1) Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $8 + x = 6$.

Λύση. Ἔχουμε σύμφωνα μέ τήν ἰσοδυναμία (I) $8 + x = 6 \Longleftrightarrow x = 6 - 8$. Ἡ ἐξίσωση εἶναι ἀδύνατη, γιατί ἡ ἀφαίρεση στό δεύτερο μέλος της δέν εἶναι δυνατή.

2) Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $x + \frac{3}{4} = \frac{11}{12}$.

Λύση. Ἔχουμε $x + \frac{3}{4} = \frac{11}{12} \Longleftrightarrow x = \frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{11}{12} - \frac{9}{12} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Ἐπαλήθευση: $\frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{2}{12} + \frac{9}{12} = \frac{11}{12}$.

3) Ρώτησα κάποιον γιά τήν ἡλικία του καί ἀπάντησε, ὅτι ὕστερα ἀπό 12 ἔτη θά εἶναι 45 ἐτῶν. Ποιά εἶναι ἡ ἡλικία του σήμερα;

Λύση. Ἄν παραστήσουμε μέ x τήν ἡλικία του σήμερα, σύμφωνα μέ τό πρόβλημα ἔχουμε τήν ἐξίσωση $x + 12 = 45$. Ἐπιλύουμε τήν ἐξίσωση $x + 12 = 45 \Longleftrightarrow x = 45 - 12 \Longleftrightarrow x = 33$.

Ἐπαλήθευση: $33 + 12 = 45$.

Ἀπάντηση. Ἡ ἡλικία τοῦ κυρίου εἶναι σήμερα 33 ἔτη.

4) Ποιόν ἀριθμό πρέπει ν' ἀφαιρέσουμε ἀπό τό 62 γιά νά ἔχουμε ὑπόλοιπο 49;

Λύση. Ἄν παραστήσουμε μέ x τόν ἀριθμό αὐτό, σύμφωνα μέ τό πρόβλημα θά ἔχουμε τήν ἐξίσωση $62 - x = 49$. Ἐπιλύουμε τήν ἐξίσωση $62 - x = 49 \Longleftrightarrow 62 = 49 + x \Longleftrightarrow x = 62 - 49 \Longleftrightarrow x = 13$.

Ἐπαλήθευση : $62 - 13 = 49$.

Ἀπάντηση. Ὁ ἀριθμός εἶναι 13.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὁμάδα Α΄

6) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ παρακάτω ἐξισώσεις:

α΄) $5 + \chi = 3{,}50$ β΄) $\chi + \frac{3}{4} = \frac{7}{8}$ γ΄) $\frac{1}{2} + \chi = 1\frac{3}{8}$

δ΄) $\chi - 2\frac{1}{3} = 20\frac{1}{2}$.

7) Ποιόν ἀριθμό πρέπει νά προσθέσουμε στόν ἀριθμό 126 γιά νά βροῦμε τόν ἀριθμό 210;
8) Δύο ἀριθμοί ἔχουν διαφορά 32. Ὁ μεγαλύτερος εἶναι 59. Ποιός εἶναι ὁ ἄλλος;
9) Ἕνας πατέρας εἶναι 50 ἐτῶν καί εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τό γιό του κατά 29 ἔτη. Ποιά εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ γιοῦ;

26

4. Οἱ πράξεις πολλαπλασιασμός καί διαίρεση

Πρόβλημα. Ὁ Πέτρος ἀγόρασε 4 μολύβια καί ἔδωσε 12 δρχ. Πόσο κοστίζει τό κάθε μολύβι;

Εὔκολα βρίσκουμε ὅτι οἱ 12 δραχμές εἶναι τριπλάσιες τῶν 4 δρχ. εἶναι δηλαδή $12 = 4 \cdot 3$ (1) καί ἑπομένως τό κάθε μολύβι κοστίζει 3 δρχ. Ὅπως ξέρουμε ὁ ἀριθμός 3 λέγεται πηλίκο τοῦ ἀκεραίου 12 μέ τό φυσικό 4 καί ἡ πράξη μέ τήν ὁποία βρίσκουμε τό πηλίκο λέγεται ***διαίρεση.*** Γράφουμε $12 : 4 = 3$ (2).

Ἡ διαίρεση παρουσιάζεται ὡς μιά πράξη στήν ὁποία δίνεται τό γινόμενο δύο ρητῶν ἀριθμῶν καί ὁ ἕνας ἀπό αὐτούς καί ζητεῖται ὁ ἄλλος.

Ξέρουμε ὅτι ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ διαιρέτη, τό πηλίκο εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, ἀλλιῶς τό πηλίκο εἶναι κλάσμα, γιατί κάθε κλάσμα εἶναι τό ἀκριβές πηλίκο τοῦ ἀριθμητῆ του μέ τόν παρονομαστή του.

Καταλαβαίνουμε τώρα ὅτι οἱ ἰσότητες (1), (2) ἔχουν τήν ἴδια σημασία, δηλαδή ἀπό τή μιά παίρνουμε τήν ἄλλη καί ἀντίστροφα. Τίς λέμε ἰσοδύναμες καί γράφουμε: $4 \cdot 3 = 12 \Longleftrightarrow 3 = 12 : 4$.

Ὅμοια βρίσκουμε: $5 \cdot \frac{9}{10} = \frac{45}{10} \Longleftrightarrow \frac{45}{10} : 5 = \frac{9}{10}$

Γενικά ἄν ὀνομάσουμε α τό δοσμένο γινόμενο, $\beta \neq 0$ τόν ἕνα παράγοντα καί χ τό ζητούμενο ρητό ἀριθμό, τότε θά ἔχουμε τή (λογική) ἰσοδυναμία:

$$\boldsymbol{\beta \cdot \chi = \alpha \Longleftrightarrow \chi = \alpha : \beta}, \quad \text{ὅπου } \beta \neq 0.$$

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι:

Ὁ πολλαπλασιασμός καί ἡ διαίρεση εἶναι πράξεις ἀντίστροφες.

5. Ἐπίλυση ἁπλῶν ἐξισώσεων. Δεύτερη μορφή (II)

Ἄς ἐπιλύσουμε ἁπλές ἐξισώσεις, τῶν ὁποίων ἡ λύση στηρίζεται στήν ἰσοδυναμία πολλαπλασιασμοῦ διαιρέσεως, δηλ. στήν ἰσοδυναμία:

$$\boxed{\beta \cdot \chi = \alpha \iff \chi = \alpha : \beta, \quad \text{ὅπου } \beta \neq 0}$$

Παραδείγματα

1) Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $5 \cdot \chi = 40$
   Ἔχουμε $5\chi = 40 \iff \chi = 40 : 5 \iff \chi = 8$
   Ἐπαλήθευση: $5 \cdot 8 = 40$.
2) Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $\chi : 6 = 4$
   Ἔχουμε $\chi : 6 = 4 \iff \chi = 4 \cdot 6 \iff \chi = 24$
   Ἐπαλήθευση: $24 : 6 = 4$
3) Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $18 : \chi = 3$
   Ἔχουμε $18 : \chi = 3 \iff 18 = 3 \cdot \chi \iff \chi = 18 : 3 \iff \chi = 6$
   Ἐπαλήθευση: $18 : 6 = 3$
4) Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $7 \cdot \chi = 0$
   Ἔχουμε $7 \cdot \chi = 0 \iff \chi = 0 : 7 \iff \chi = 0$
   Ἐπαλήθευση: $7 \cdot 0 = 0$

Σημείωση. Οἱ ἐξισώσεις πού λύσαμε παραπάνω (μορφή II) εἶναι τῆς μορφῆς $\beta \cdot \chi = \alpha$, $\chi : \beta = \alpha$, $\beta : \chi = \alpha$, ἔχουν τόν ἄγνωστο χ στήν πρώτη δύναμη καί λέγονται πρώτου βαθμοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

10) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ παρακάτω ἐξισώσεις:

α΄) $6 \cdot \chi = 42$	β΄) $7 \cdot \chi = 56$	γ΄) $9 \cdot \chi = 108$
δ΄) $\chi : 8 = 5$	ε΄) $\chi : 9 = 10$	στ΄) $\chi : 15 = 20$

11) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ παρακάτω ἐξισώσεις:
   α΄) $24 : \chi = 6$, β΄) $32 : \chi = 8$, γ΄) $40 : \chi = 5$, δ΄) $48 : \chi = 16$.

27 **Ἄλλα παραδείγματα καί ἐφαρμογές**

1) Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $7 : \chi = 0$

Λύση. Ἔχουμε $7 : \chi = 0 \iff 7 = 0 \cdot \chi = 0$. Ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι ἀδύνατη, γιατί εἶναι $7 \neq 0$.

2) Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $\frac{3}{4} \cdot \chi = \frac{3}{8}$

Λύση. Ἔχουμε:

$$\frac{3}{4} \cdot \chi = \frac{3}{8} \Longleftrightarrow \chi = \frac{3}{8} : \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{3} \Longleftrightarrow \chi = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Ἐπαλήθευση: $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

3) Τό τριπλάσιο ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι 36. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός αὐτός;

Λύση. Ἄν παραστήσουμε μέ χ τόν ζητούμενο ἀριθμό, τότε τό τριπλάσιο αὐτοῦ θά εἶναι $3 \cdot \chi$ καί σύμφωνα μέ τό πρόβλημα σχηματίζουμε τήν ἐξίσωση $3\chi = 36$. Ἐπιλύουμε τήν ἐξίσωση: $3\chi = 36 \Longleftrightarrow \chi = 36 : 3$ καί $\chi = 12$.

Ἀπάντηση. Ὁ ζητούμενος ἀριθμός εἶναι 12.

4) Τά $\frac{2}{7}$ ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι 10. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός αὐτός;

Λύση. Ἄν παραστήσουμε μέ χ τόν ζητούμενο ἀριθμό, τότε τά $\frac{2}{7}$ αὐτοῦ θά εἶναι $\frac{2}{7} \cdot \chi$, ὁπότε σχηματίζουμε τήν ἐξίσωση $\frac{2}{7} \cdot \chi = 10$. Ἐπιλύουμε τήν ἐξίσωση:

$$\frac{2}{7} \cdot \chi = 10 \Longleftrightarrow \chi = 10 : \frac{2}{7} = 10 \cdot \frac{7}{2} \Longleftrightarrow \chi = \frac{70}{2} = 35.$$

Ἀπάντηση. Ὁ ζητούμενος ἀριθμός εἶναι 35.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὁμάδα Α΄

12) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ παρακάτω ἐξισώσεις:

α΄) $3 \cdot \chi = 18{,}6$ β΄) $15 : \chi = 0$

γ΄) $\frac{5}{8} \cdot \chi = \frac{6}{7}$ δ΄) $\frac{3}{4} : \chi = \frac{5}{9}$.

13) Τό πενταπλάσιο ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι 85. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός αὐτός;

14) Τό ἐμβαδό ἑνός τριγώνου εἶναι 204 τετραγωνικά μέτρα. Ἄν ἡ βάση του εἶναι 40,80 μέτρα, πόσα μέτρα εἶναι τό ὕψος του;

15) Τά $\frac{5}{8}$ ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι 30. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός αὐτός;

28 6. Ἐπίλυση ἁπλῶν ἐξισώσεων. Τρίτη μορφή (III)

Ἄς ἐπιλύσουμε ἁπλές ἐξισώσεις, τῶν ὁποίων ἡ λύση στηρίζεται στίς γνωστές ἰσοδυναμίες τῆς πρώτης καί δεύτερης μορφῆς μαζί, δηλαδή στίς ἰσοδυναμίες:

$$\boxed{\beta+\chi=\alpha \iff \chi=\alpha-\beta \ (1), \quad \beta\cdot\chi=\alpha \iff \chi=\alpha:\beta, \quad \text{ὅπου } \beta\neq 0 \ (2)} \ \text{(III)}$$

Παραδείγματα

1) Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $2\cdot\chi + 7 = 15$.

Λύση. Βλέπουμε ὅτι τό πρῶτο μέλος τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἄθροισμα τοῦ ὅρου $2\cdot\chi$ καί τοῦ 7. Ἐπειδή ἀντίστροφη πράξη τῆς προσθέσεως εἶναι ἡ ἀφαίρεση, σύμφωνα μέ τήν ἰσοδυναμία (1) ἔχουμε:

$$2\chi + 7 = 15 \iff 2\cdot\chi = 15 - 7 \text{ ἤ } 2\chi = 8.$$

Τώρα μέ τή βοήθεια τῆς ἰσοδυναμίας (2) ἔχουμε:

$$2\chi = 8 \iff \chi = 8 : 2 \iff \chi = 4$$

Ἐπαλήθευση. $2\cdot 4 + 7 = 8 + 7 = 15$, δηλ. βρίσκουμε τό β΄ μέλος πού εἶναι 15.

2) Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $3\cdot\chi - 6 = 24$.

Λύση. Σύμφωνα μέ τίς ἰσοδυναμίες (1) καί (2) ἔχουμε:

$$3\cdot\chi - 6 = 24 \iff 3\cdot\chi = 24 + 6 \text{ ἤ } 3\chi = 30 \iff \chi = 30 : 3 \iff \chi = 10.$$

Ἐπαλήθευση: $3\cdot 10 - 6 = 30 - 6 = 24$.

3) Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $5\cdot\chi + 6 = 2$.

Λύση. Σύμφωνα μέ τήν ἰσοδυναμία (1) ἔχουμε: $5\chi + 6 = 2 \iff 5\chi = 2 - 6$. Ἡ ἐξίσωση εἶναι ***ἀδύνατη***, γιατί ἡ ἀφαίρεση στό δεύτερο μέλος της δέν εἶναι δυνατή.

4) Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $\frac{5}{8} + 2\cdot\chi = \frac{3}{4}$

Λύση. Σύμφωνα μέ τίς ἰσοδυναμίες (1) καί (2) ἔχουμε:

$$\frac{5}{8} + 2\cdot\chi = \frac{3}{4} \iff 2\chi = \frac{3}{4} - \frac{5}{8} \iff 2\chi = \frac{6}{8} - \frac{5}{8} \text{ ἤ } 2\chi = \frac{1}{8} \iff$$

$$\iff \chi = \frac{1}{8} : 2 \iff \chi = \frac{1}{16}$$

Ἐπαλήθευση: $\frac{5}{8} + 2\cdot\frac{1}{16} = \frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

5) Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $\frac{\chi}{2} + \frac{3}{4} = \frac{4}{5}$.

Λύση. Τρέπουμε τά ἑτερώνυμα κλάσματα τῆς ἐξίσωσης σέ ὁμώνυμα κι ἔχουμε:

$$\frac{10\cdot\chi}{20}+\frac{15}{20}=\frac{16}{20}\iff\frac{10\chi}{20}=\frac{16}{20}-\frac{15}{20}\iff\frac{10\cdot\chi}{20}=\frac{1}{20}.$$

Ἐπειδή τά ἴσα κλάσματα ἔχουν παρονομαστές ἴσους, θά ἔχουν κι ἀριθμητές ἴσους, δηλ.

$$10\cdot\chi=1\iff\chi=\frac{1}{10}$$

Ἐπαλήθευση: $$\frac{\frac{1}{10}}{2}+\frac{3}{4}=\frac{1}{20}+\frac{3}{4}=\frac{1}{20}+\frac{15}{20}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$$

•6) Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $2\cdot\chi+3\cdot\chi+8=23{,}5$

Λύση. Ἡ ἐξίσωση γράφεται $5\chi+8=23{,}5$. Σύμφωνα μέ τίς ἰσοδυναμίες (1) καί (2) ἔχουμε: $5\chi=23{,}5-8$ ἤ $5\chi=15{,}5\iff\chi=15{,}5:5\iff\chi=3{,}1$.

Ἐπαλήθευση: $2\cdot3{,}1+3\cdot3{,}1+8=6{,}2+9{,}3+8=23{,}5$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Β΄

16) Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:
α΄) $3\cdot\chi+7=34$ β΄) $5\cdot\chi-9=31$ γ΄) $4{,}2\chi+4=20{,}8$

17) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:
α΄) $27:\chi-5=4$ β΄) $13{,}2:\chi-1{,}2=78$

18) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:
α΄) $\frac{4}{5}+2\chi=\frac{9}{10}$ β΄) $6\cdot\chi+\frac{7}{8}=\frac{7}{4}$

19) Ὅμοια νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:
α΄) $\chi+3\cdot\chi+2=14$ β΄) $\frac{\omega}{3}+\frac{2}{5}=\frac{11}{15}$

•20) Μέ ἐφαρμογή τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητας νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:
α΄) $5\cdot(\psi-1)=30$ β΄) $3\cdot(2\cdot\psi+1)=27$

29

7. Ἐφαρμογή τῶν ἐξισώσεων στή λύση προβλημάτων

Μέ τή βοήθεια ἁπλῶν ἐξισώσεων λύσαμε προβλήματα στά μαθήματα **25** καί **27**. Γενικά, γιά νά λύσουμε ἕνα πρόβλημα μέ ἐξίσωση, ἀκολουθοῦμε κατά κανόνα τά ἑξῆς βήματα:

α΄) ***Μελετοῦμε προσεκτικά τό πρόβλημα,*** γιά νά καταλάβουμε καλά τά δεδομένα καί τό ζητούμενο (ἄγνωστο).
β΄) ***Παριστάνουμε μέ χ τό ζητούμενο ἀριθμό τοῦ προβλήματος.***
γ΄) ***Σχηματίζουμε τήν ἐξίσωση,*** σύμφωνα μέ τή ***διατύπωση*** τοῦ προβλήματος.
δ΄) ***Ἐπιλύουμε τήν ἐξίσωση.***
ε΄) ***Ἐπαληθεύουμε τό πρόβλημα.***

Παρατήρηση. Ὅταν σχηματίζουμε τήν ἐξίσωση τοῦ προβλήματος, πρέπει νά προσέχουμε, ὥστε ἡ ἐξίσωσή του νά ἐκφράζει μέ σύμβολα αὐτό πού ἐκφράζει τό πρόβλημα μέ λέξεις.

Ἐφαρμογές καί Παραδείγματα

1) Νά βρεθεῖ ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τό τετραπλάσιο, ὅταν αὐξηθεῖ κατά 12, δίνει τόν ἀριθμό 72.

Λύση. Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀκέραιος ἀριθμός, τότε τό τετραπλάσιό του θά εἶναι 4χ. Σύμφωνα μέ τό πρόβλημα:

«Τό τετραπλάσιο ἀκεραίου», «ὅταν αὐξηθεῖ κατά 12» «γίνεται 72» σχηματίζουμε τήν ἐξίσωση: $4\chi + 12 = 72$.

Ἐπιλύουμε τήν ἐξίσωση

$4\chi + 12 = 72 \Longleftrightarrow 4\chi = 72 - 12 \Longleftrightarrow 4\chi = 60 \Longleftrightarrow \chi = 60 : 4 \Longleftrightarrow \chi = 15.$

Ἐπαλήθευση: $4 \cdot 15 + 12 = 60 + 12 = 72$. Λύση δεκτή.

Ἀπάντηση. Ὁ ζητούμενος ἀριθμός εἶναι 72.

2) Ὁ βιβλιοπώλης κ. Λουκᾶς ἀγόρασε 20 βιβλία μέ 65,50 δραχ. τό ἕνα. Πόσο πρέπει νά πουλήσει τό κάθε βιβλίο γιά νά κερδίσει ἀπ' ὅλα τά βιβλία 310 δρχ.;

Λύση. Ἔστω ὅτι ὁ κ. Λουκᾶς πρέπει νά πουλήσει χ δρχ. τό κάθε βιβλίο τότε ἀπ' ὅλα τά βιβλία θά εἰσπράξει $20 \cdot \chi$ δρχ. Τό ποσό αὐτό πού θά εἰσπράξει ἀπό τήν πούληση θά εἶναι ἴσο μέ τό κόστος ($20 \cdot 65{,}50$ δρχ.) σύν τό κέρδος 310 δρχ., ἐπομένως θά ἔχουμε τήν ἐξίσωση $20 \cdot \chi = 20 \cdot 65{,}50 + 310$.

Ἐπιλύουμε τήν ἐξίσωση:

$20 \cdot \chi = 1310 + 310 \Longleftrightarrow 20 \cdot \chi = 1620 \Longleftrightarrow \chi = 1620 : 20 \Longleftrightarrow \chi = 81$ δρχ.

Ἐπαλήθευση: $20 \cdot 81 = 1620$ καί $20 \cdot 65{,}50 + 310 = 1310 + 310 = 1620$.

Ἀπάντηση. Ὁ κ. Λουκᾶς θά πουλήσει κάθε βιβλίο 81 δρχ.

3) Τό ἐμβαδό ἑνός τραπεζίου εἶναι 702 τετραγωνικά μέτρα. Ἄν ἡ με-

γάλη βάση του εἶναι 65 μ. καί ἡ μικρή 13 μ., πόσα μέτρα εἶναι τό ὕψος τοῦ τραπεζίου;

Λύση. Ὅπως ξέρουμε τό ἐμβαδό τοῦ τραπεζίου δίνεται ἀπό τόν τύπο: $E = \frac{(B+\beta)\cdot \upsilon}{2}$ ὅπου Ε τό ἐμβαδό τοῦ τραπεζίου, Β ἡ μεγάλη βάση του καί β ἡ μικρή καί υ τό ὕψος του.

Ἄν στόν τύπο αὐτό ἀντικαταστήσουμε Ε = 702 τετ. μέτρα, Β = 65 μ. καί β = 13 μ. καί τό ὕψος του υ μέ χ, ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$702 = \frac{(65+13)}{2}\cdot \chi \text{ ἤ } 702 = \frac{78}{2}\chi$$

Ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως:

$$702 = \frac{78}{2}\chi \iff 702\cdot 2 = 78\cdot \chi \iff \chi = \frac{702\cdot 2}{78}$$

$\iff \chi = 18$ μέτρα.

Ἐπαλήθευση: $\frac{78}{2}\cdot 18 = 39\cdot 18 = 702.$

Ἀπάντηση. Τό ὕψος τοῦ τραπεζίου εἶναι 18 μέτρα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὁμάδα Α΄

21) Νά βρεθεῖ ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τό πενταπλάσιο, ὅταν αὐξηθεῖ κατά 20, γίνεται ἴσο μέ τόν ἀριθμό 95.

22) Νά βρεθεῖ ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τό τριπλάσιο ὅταν ἐλαττωθεῖ κατά 7, γίνεται ἴσο μέ τόν ἀριθμό 50.

23) Μέ ποιόν ἀριθμό πρέπει νά διαιρεθεῖ ὁ 5874 γιά νά δώσει πηλίκο 136 καί ὑπόλοιπο 26;

24) Ἡ μητέρα τοῦ Πέτρου ἀγόρασε ἀπό τόν παντοπώλη 3 κιλά ρύζι καί ἔδωσε ἕνα ἑκατοντάδραχμο. Ὁ παντοπώλης τῆς ἐπέτρεψε 11,50 δρχ. Πόσο ἀγόρασε τό κιλό τό ρύζι;

30

Ὁμάδα Β΄

25) Ἄν τά $\frac{3}{5}$ ἑνός ἀριθμοῦ αὐξηθοῦν κατά 18, δίνουν τόν ἀριθμό 30. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός;

26) Ἄν τά $\frac{4}{7}$ ἑνός ἀριθμοῦ ἐλαττωθοῦν κατά 11, δίνουν τόν ἀριθμό 25. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός;

27) Τά $\frac{3}{4}$ τοῦ βάρους ἑνός κιβωτίου εἶναι $22\frac{1}{2}$ κιλά. Ποιό εἶναι τό βάρος ὁλόκληρου τοῦ κιβωτίου;

28) Ἕνας βιβλιοπώλης ἀγόρασε 12 βιβλία μέ 80,50 δρχ. τό ἕνα. Πόσο πρέπει νά πουλήσει τό καθένα, γιά νά κερδίσει ἀπ' ὅλα τά βιβλία 234 δραχμές;

29) Ὁ κ. Παντελῆς ἀγόρασε 35 ἀρνιά μέ 1.200 δρχ. τό ἕνα. Πόσο πρέπει νά πουλήσει τό καθένα, γιά νά κερδίσει ἀπ' ὅλα τά ἀρνιά 7.000 δρχ.;

30) Τό ἐμβαδό ἑνός τραπεζίου εἶναι 310 τετρ. μέτρα. Ἄν ἡ μεγάλη βάση του εἶναι 18 μ. καί ἡ μικρή 13 μ. πόσα μέτρα εἶναι τό ὕψος τοῦ τραπεζίου;

Ὁμάδα Γ΄

31) Τρεῖς ἀδερφοί κληρονόμησαν τά $\frac{7}{8}$ μιᾶς περιουσίας. Καθένας ἀπ' αὐτούς πῆρε 28.000 δρχ. Πόσες δρχ. ἦταν ὁλόκληρη ἡ περιουσία;

32) Νά βρεῖτε τρεῖς διαδοχικούς ἀκεραίους ἀριθμούς, πού νά ἔχουν ἄθροισμα 99.

33) Τό λάδι πού περιέχει ἕνα δοχεῖο πιάνει τά $\frac{5}{8}$ τῆς χωρητικότητας τοῦ δοχείου. Γιά νά γεμίσει τό δοχεῖο χρειάζονται 60 κιλά λάδι. Πόσα κιλά λάδι χωράει τό δοχεῖο;

34) Μιά ἀγελάδα μαζί μέ τό μοσχάρι της πουλήθηκαν 51.200 δρχ. Ἡ ἀξία τῆς ἀγελάδας ἦταν πενταπλάσια τοῦ μοσχαριοῦ της σύν 200 δρχ. Νά βρεθεῖ ἡ ἀξία κάθε ζώου.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Ἀπό τή διπλή συνεπαγωγή: $5 + 3 = 8 \iff 5 = 8 - 3$, ποιό συμπέρασμα συνάγεται;

2) Ὅμοια ἀπό τή διπλή συνεπαγωγή: $5 \cdot 3 = 15 \iff 5 = 15 : 3$ ποιό συμπέρασμα συνάγεται;

3) Τί λέγεται ἐξίσωση καί τί λύση ἐξισώσεως;

4) Τί λέγεται ταυτότητα; Ποιά διαφορά ὑπάρχει μεταξύ ἐξισώσεως καί ταυτότητας;

5) Πότε μιά ἐξίσωση εἶναι ἀδύνατη;

6) Ποιές μορφές ἁπλῶν ἐξισώσεων ἔχουμε;

7) Ποιά βήματα ἀκολουθοῦμε γιά νά λύσουμε ἕνα πρόβλημα μέ ἐξίσωση;

8) Τί λέγεται ἐπαλήθευση μιᾶς ἐξισώσεως;

31

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε΄

ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ – ΣΥΜΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΠΟΣΑ

1. Τί εἶναι λόγος δύο ἀριθμῶν;

Παράδειγμα 1ο. Ἄς συγκρίνουμε τούς δυό ἀριθμούς 12 καί 6. Πόσες φορές εἶναι μεγαλύτερος ὁ 12 ἀπό τόν 6;

Ὁ 12 εἶναι 2 φορές μεγαλύτερος ἀπό τόν 6, γιατί $12 : 6 = 2$ ἤ $12 = 6 \cdot 2$. Ἡ ἀπάντηση ὅτι ὁ ἀριθμός 12 εἶναι 2 φορές μεγαλύτερος ἀπό τόν 6 ἐκφράζεται καί ὡς ἑξῆς: Λόγος τοῦ 12 πρός τόν 6 εἶναι τό 2. Ὥστε:

Λόγος τοῦ 12 πρός τόν 6 εἶναι ὁ ἀριθμός μέ τόν ὁποῖο πρέπει νά πολλαπλασιάσουμε τόν 6 γιά νά προκύψει ὁ 12. Μέ ἄλλα λόγια, λόγος τοῦ 12 πρός τόν 6 εἶναι τό ἀκριβές πηλίκο $12 : 6 = 2$ ἤ $\frac{12}{6} = 2$.

Παράδειγμα 2ο. Ἄς συγκρίνουμε τούς δυό ἀριθμούς 8 καί 3. Πόσες φορές εἶναι μεγαλύτερος ὁ 8 ἀπό τόν 3;

8	3
20	2,666...
20	
2	

Τό ἀκριβές πηλίκο τῆς διαιρέσεως 8 : 3 δέν εἶναι ἀκέραιο ἀλλά εἶναι μεταξύ 2 καί 3.

Γι' αὐτό δέν μποροῦμε νά ποῦμε οὔτε ὅτι ὁ 8 εἶναι 2 φορές μεγαλύτερος ἀπό τόν 3 οὔτε ὅτι εἶναι 3 φορές μεγαλύτερος ἀπό τόν 3.

Ξέρουμε ὅμως ὅτι κάθε κλάσμα παριστάνει τό ἀκριβές πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητῆ μέ τόν παρονομαστή του. Ἑπομένως μποροῦμε τό ἀκριβές πηλίκο τοῦ 8 διά τοῦ 3 νά τό παραστήσουμε μέ τό κλάσμα $\frac{8}{3}$.

Πραγματικά ἔχουμε $3 \cdot \frac{8}{3} = 8$. Ἔτσι θά λέμε ὅτι ὁ λόγος τοῦ 8 πρός τόν 3 εἶναι $\frac{8}{3}$, δηλ. στό παράδειγμά μας ὁ λόγος τοῦ 8 πρός τόν 3 εἶναι κλασματικός.

Τά παραπάνω παραδείγματα μᾶς ὁδηγοῦν στό γενικό ὁρισμό:

Λόγος ἑνός ἀριθμοῦ α πρός ἕνα ἀριθμό β $\neq 0$ λέγεται τό ἀκριβές πηλίκο τοῦ α διά τοῦ β.

Ὁ λόγος αὐτός γράφεται συνήθως μέ τή μορφή κλάσματος $\frac{α}{β}$ καί διαβάζεται «α πρός β». Οἱ ἀριθμοί α καί β λέγονται ***ὅροι*** τοῦ λόγου. Ὁ α λέγεται ***ἡγούμενος*** τοῦ λόγου καί ὁ β ***ἑπόμενος.*** Ἔτσι ὁ λόγος τοῦ 3 πρός 5,5 εἶναι $\frac{3}{5{,}5} = \frac{6}{11}$.

Ἄν ἐναλλάξουμε τούς δύο ὅρους ἑνός λόγου, ὁ λόγος πού θά προκύψει λέγεται ***ἀντίστροφος*** τοῦ ἀρχικοῦ. Π.χ. ὁ λόγος $\frac{7}{4}$ εἶναι ἀντίστροφος τοῦ $\frac{4}{7}$. Ὁ ἀντίστροφος τοῦ $\frac{6}{1} = 6$ εἶναι ὁ $\frac{1}{6}$.

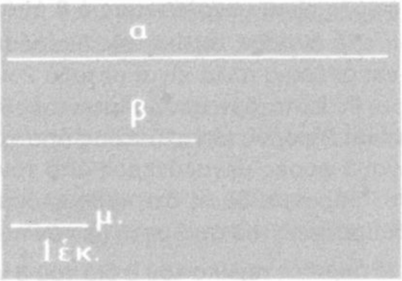
Παρατηρήσεις:

1) Ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν εἶναι γνωστός ἀπό τήν ἀρχαία Ἑλληνική ἐποχή.
2) Οἱ ὅροι ἑνός λόγου μπορεῖ νά εἶναι ἀκέραιοι, δεκαδικοί ἤ κλασματικοί ἀριθμοί, μέ μόνο περιορισμό ὁ δεύτερος ὅρος νά μήν εἶναι μηδέν. Οἱ ὅροι ὅμως ἑνός κλάσματος εἶναι ἀριθμοί ἀκέραιοι.
3) Μέ τούς λόγους μποροῦμε νά κάνουμε τίς ἴδιες πράξεις, ὅπως καί μέ τά κλάσματα.
4) Τό γινόμενο δύο ἀντιστρόφων λόγων εἶναι τό 1. Π.χ.

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{8}{5} = \frac{40}{40} = 1$$

2. Λόγος δυό ὁμοειδῶν μεγεθῶν (ποσῶν)

Ἄς συγκρίνουμε δύο ὁμοειδῆ μεγέθη, π.χ. τά εὐθύγραμμα τμήματα α καί β (Σχ. 9).



Σχ. 9

1ος τρόπος. Ὑποθέτουμε ὅτι φέρνοντας τό εὐθ. τμῆμα β πάνω στό α ἐξακριβώνουμε πώς τό β χωράει 2 φορές στό α. Μέ ἄλλα λόγια, τό εὐθ. τμῆμα α εἶναι διπλάσιο τοῦ β. Λέμε τότε ὅτι ὁ λόγος τοῦ α πρός τόν β εἶναι ὁ ἀριθμός 2. Γράφουμε $\frac{\alpha}{\beta} = 2 \Longleftrightarrow \alpha = 2 \cdot \beta$.

Γενικά: ***Λόγος ἑνός μεγέθους (ποσοῦ) πρός ἕνα ἄλλο ὁμοειδές λέγεται ὁ ἀριθμός πού βρίσκουμε, ὅταν μετρήσουμε τό πρῶτο χρησιμοποιώντας γιά μονάδα μετρήσεως τό δεύτερο.***

32 **2ος τρόπος.** Ἄς μετρήσουμε τά εὐθ. τμήματα α καί β μέ μονάδα μετρήσεως τό εὐθ. τμῆμα μ, πού εἶναι 1 ἑκατοστόμετρο· βρίσκουμε ὅτι μῆκος τοῦ α εἶναι 5 ἑκατ. καί μῆκος τοῦ β 2,5 ἑκατ. Παρατηροῦμε τώρα ὅτι ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ 5 πρός τόν 2,5 εἶναι $\frac{5}{2,5} = 2$. Τό ἀποτέλεσμα αὐτό εἶναι τό ἴδιο μέ ἐκεῖνο πού βρήκαμε μέ τόν 1ο τρόπο, δηλ. ὁ λόγος τῶν δύο μεγεθῶν ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν δύο ἀριθμῶν, πού μετροῦν τά δύο μεγέθη. Γράφουμε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{2,5} = 2.$$

Καί ἄν ἀκόμη μετρήσουμε τά εὐθ. τμήματα μέ μονάδα τό 1 χιλιοστόμετρο, πάλι θά βροῦμε ὅτι λόγος τοῦ α πρός τό β ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν δύο ἀριθμῶν πού μετροῦν τά δυό μεγέθη. Ὥστε:

Ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν μέτρων τους, ὅταν μετρηθοῦν μέ τήν ἴδια μονάδα.

Νά τώρα τά ὀνόματα μερικῶν λόγων πού χρησιμοποιοῦνται συχνά:

Ὁ ἀριθμός π εἶναι ὁ λόγος τοῦ μήκους μιᾶς περιφέρειας πρός τό μῆκος τῆς διαμέτρου της. (Βλ. Γεωμετρίας Μάθημα 9).

Ἡ κλίμακα ἑνός σχεδίου εἶναι ὁ λόγος ἑνός μήκους στό σχέδιο πρός τό πραγματικό μῆκος. (Βλ. Μάθημα 69).

Ἡ ἀπόδοση μιᾶς ἁπλῆς μηχανῆς εἶναι ὁ λόγος τῆς ἰσχύος πού παίρνουμε ἀπό τή μηχανή πρός τήν ἰσχύ πού καταναλώνει ἡ μηχανή, ὅταν δουλεύει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

1) Δύο αὐτοκίνητα τρέχουν μέ ταχύτητες 95 χιλ. τό α΄ καί 75 χιλ. τό β΄ τήν ὥρα. Νά βρεθεῖ ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων τοῦ πρώτου πρός τό δεύτερο.
2) Σέ μιά οἰκογένεια ὁ πατέρας (Π) εἶναι 56 ἐτῶν, ἡ μητέρα (Μ) 40 καί ὁ γιός (Γ) 18 ἐτῶν. Νά βρεθοῦν οἱ λόγοι τῶν ἡλικιῶν:
$$\frac{Π}{Μ}, \quad \frac{Π}{Γ}, \quad \frac{Μ}{Γ}.$$
3) Ἀπό τήν ἰσότητα $40 = 8 \cdot x$ νά βρεῖτε: α΄) τό λόγο $\frac{40}{8}$ καί β΄) τό λόγο $\frac{40}{x}$.
4) Ἕνας ἀριθμός εἶναι 7 φορές μεγαλύτερος ἀπό ἕναν ἄλλο. Ποιός εἶναι ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρός τό δεύτερο; ὁ λόγος τοῦ δεύτερου πρός τόν πρῶτο;
5) Κόβουμε μιά σιδερένια ράβδο σέ τρία κομμάτια, πού ἔχουν ἀντίστοιχα μήκη 3,5 μ., 4,80 μ. καί 0,45 μ. Ποιός εἶναι ὁ λόγος κάθε κομματιοῦ πρός τό μῆκος τῆς ράβδου;
6) Ποιός εἶναι ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο τετραγώνων μέ πλευρές 5 μ. καί 8 μ. ἀντίστοιχα;

33 3. Ἀναλογίες

Οἱ λόγοι $\frac{3}{4}$ καί $\frac{6}{8}$ εἶναι ἴσοι, γιατί εἶναι κλάσματα ἴσα. Γράφουμε $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. Αὐτή ἡ ἰσότητα λέγεται ***ἀναλογία.*** Ὥστε:

Ἀναλογία λέγεται ἡ ἰσότητα δύο λόγων.

Ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, μέ β, δ ≠ 0 διαβάζεται: «α πρός β ἴσο μέ γ πρός δ». Οἱ τέσσερις ἀριθμοί α, β, γ, δ λέγονται ***ὅροι*** τῆς ἀναλογίας, οἱ α καί γ λέγονται ***ἡγούμενοι,*** οἱ β καί δ λέγονται ***ἑπόμενοι,*** οἱ α καί δ λέγονται ***ἄκροι*** (γιατί ὁ α διαβάζεται πρῶτος καί ὁ δ τελευταῖος), οἱ β καί γ ***μέσοι.*** Ὁ τέταρτος ὅρος μιᾶς ἀναλογίας λέγεται τέταρτος ἀνάλογος τῶν τριῶν ἄλλων.

Στήν ἀναλογία $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ οἱ μέσοι ὅροι εἶναι ἴσοι. Αὐτή ἡ ἀναλογία λέγεται ***συνεχής*** καί ὁ 4 ***μέσος ἀνάλογος*** τῶν δύο ἄλλων.

4. Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν

Βασική ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν. Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \qquad (1)$$

Ἄν πολλαπλασιάσουμε καί τά δύο μέλη τῆς ἰσότητας (1) μέ τό γινόμενο 4 · 8 (δηλ. 32), θά ἔχουμε:

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 8}{4} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 8}{8}.$$

Ἁπλοποιώντας ἀριστερά διά τοῦ 4 καί δεξιά διά τοῦ 8, βρίσκουμε τήν ἰσότητα: 3 · 8 = 4 · 6 (Βλ. Κεφάλαιο Γ΄ Μάθημα 17). Τό συμπέρασμα εἶναι γενικό καί λέμε:

Σέ κάθε ἀναλογία τό γινόμενο τῶν ἄκρων ὅρων της ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῶν μέσων ὅρων της.

Ἀντίστροφα: Ἔστω ὅτι ἔχουμε τέσσερις διαδοχικούς ἀριθμούς, ὅπως π.χ. τούς: 3, 4, 6, 8 πού ἔχουν τήν ἰδιότητα: τό γινόμενο τοῦ 1ου μέ τόν 4ο νά ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τοῦ 2ου μέ τόν 3ο: 3 · 8 = 4 · 6 (2). Τότε οἱ τέσσερις αὐτοί ἀριθμοί μποροῦν ν' ἀποτελέσουν τούς τέσσερις διαδοχικούς ὅρους μιᾶς ἀναλογίας. Πραγματικά ἄν διαιρέσουμε καί τά δύο μέλη τῆς ἰσότητας (2) διά τοῦ ἀριθμοῦ 4 · 8, θά ἔχουμε:

$$\frac{3\cdot 8}{4\cdot 8}=\frac{4\cdot 6}{4\cdot 8}$$

καί μέ ἁπλοποίηση τήν ἀναλογία:

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}.$$

Τό συμπέρασμα εἶναι γενικό καί λέμε:

Ἄν τό γινόμενο δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ τό γινόμενο δύο ἄλλων, οἱ τέσσερις αὐτοί ἀριθμοί ἀποτελοῦν ἀναλογία μέ ἄκρους ὅρους τούς παράγοντες τοῦ ἑνός γινομένου καί μέσους τούς παράγοντες τοῦ ἄλλου.

Οἱ δύο παραπάνω ἀποδείξεις μᾶς ὁδηγοῦν στήν ἰσοδυναμία:

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}\Longleftrightarrow 3\cdot 8=4\cdot 6.$$

$$\text{Γενικά}\quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Longleftrightarrow \alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma \text{ μέ } \beta,\ \delta\neq 0.$$

Παρατήρηση. Ἄν διαιρέσουμε καί τά δύο μέλη τῆς ἰσότητας (2) διά τοῦ ἀριθμοῦ 6 · 8, ἔχουμε

$$\frac{3\cdot 8}{6\cdot 8}=\frac{4\cdot 6}{6\cdot 8}\quad \text{ἤ}\quad \frac{3}{6}=\frac{4}{8} \qquad (3)$$

Ἡ ἀναλογία (3) προκύπτει ἀπό τήν (1), ἄν ἐναλλάξουμε τούς δύο μέσους ὅρους της.

Μέ ὅμοιο τρόπο ἀπό τήν ἀναλογία

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$$

βρίσκουμε τήν

$$\frac{8}{4}=\frac{6}{3}\ (4).$$ Ὥστε:

Ἡ ἐναλλαγή τῶν δύο μέσων ἤ τῶν δύο ἄκρων ὅρων μιᾶς ἀναλογίας δίνει νέα ἀναλογία.

34 Ἐφαρμογές καί παραδείγματα

1) Νά βρεθεῖ ὁ ἄγνωστος ὅρος τῆς ἀναλογίας $\frac{5}{6}=\frac{10}{x}$

Ἐφαρμόζοντας τή βασική ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν βρίσκουμε τήν ἰσοδύναμή της ἐξίσωση:

$$5\cdot x=6\cdot 10\Longleftrightarrow x=\frac{6\cdot 10}{5}x\Longleftrightarrow 12.$$

2) Ὅμοια νά βρεθεῖ ὁ ἄγνωστος ὅρος τῆς ἀναλογίας

$$\frac{7{,}5}{\chi} = \frac{2{,}5}{2}$$

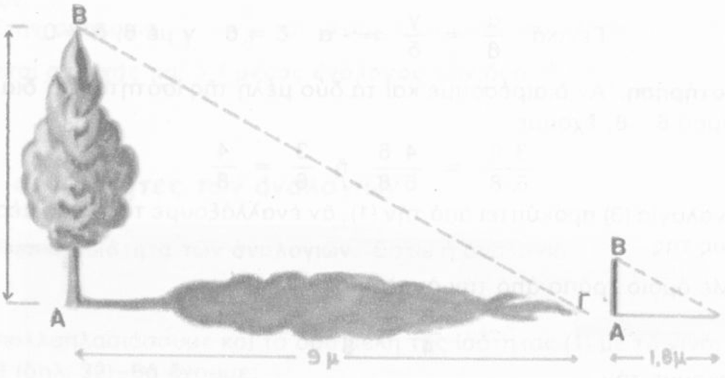
Ἐφαρμόζοντας ὅμοια τή βασική ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν, βρίσκουμε τήν ἰσοδύναμή της ἐξίσωση:

$$2{,}5 \cdot \chi = 7{,}5 \cdot 2 \iff \chi = \frac{7{,}5 \cdot 2}{2{,}5} \iff \chi = 6.$$

3) Στό σχῆμα 10 βλέπουμε ἕνα δέντρο ΑΒ πού ρίχνει σκιά ΑΓ μήκους 9 μέτρων, καί μιά κατακόρυφη ράβδο Α΄Β΄ 3 μέτρων πού ρίχνει σκιά Α΄Γ΄ μήκους 1,80 μ. Ξέροντας ὅτι οἱ λόγοι

$$\frac{AB}{A\Gamma}, \quad \frac{A'B'}{A'\Gamma'}$$

εἶναι ἴσοι, ὑπολογίστε τό κατακόρυφο ὕψος χ τοῦ δέντρου.



Σχ. 10

Λύση. Σύμφωνα μέ τήν ἐκφώνηση καί τά δεδομένα τοῦ σχήματος ἔχουμε τήν ἀναλογία:

$$\frac{\chi}{9} = \frac{3}{1{,}8}.$$

Ἐφαρμόζοντας τή βασική ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν, βρίσκουμε:

$$1{,}8\chi = 27 \iff \chi = \frac{27}{1{,}8} \iff \chi = 15\mu.$$

Ἀπάντηση. Τό ὕψος τοῦ δένδρου εἶναι 15 μέτρα.

4) Δίνεται ἡ ἀναλογία $\frac{2}{x} = \frac{x}{8}$. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ χ.

Ἐφαρμόζουμε τή βασική ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν καί βρίσκουμε:

$$x \cdot x = 2 \cdot 8 \Longleftrightarrow x^2 = 16 \Longleftrightarrow x^2 = 4^2.$$

Ἀπό τήν ἰσότητα αὐτή συμπεραίνουμε ὅτι $x = 4$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

7) Νά βρεθεῖ ὁ ἄγνωστος ὅρος χ καθεμιᾶς ἀπό τίς παρακάτω ἀναλογίες:
α΄) $\frac{4}{5} = \frac{24}{x}$ β΄) $\frac{4}{7} = \frac{x}{35}$ γ΄) $\frac{3}{15} = \frac{x}{25}$ δ΄) $\frac{x}{23} = \frac{42}{69}$.

8) Νά ὑπολογίσετε τό μέσο ἀνάλογο τῶν ἀριθμῶν:
α΄) 2 καί 32 β΄) 3 καί 27

9) Ὅμοια νά βρεθεῖ ὁ ἄγνωστος ὅρος χ τῶν παρακάτω ἀναλογιῶν:
α΄) $\frac{x}{16} = \frac{0,5}{2}$ β΄) $\frac{3}{x} = \frac{7,5}{10}$ γ΄) $\frac{8}{4,8} = \frac{x}{2,4}$

10) Ἕνα κυπαρίσι μέ ὕψος 8 μέτρα ρίχνει τό πρωί σκιά 12 μέτρα. Πόσο εἶναι τό ὕψος ἀνθρώπου, πού τήν ἴδια στιγμή ρίχνει σκιά 2,7 μέτρα;

11) Μποροῦμε νά σχηματίσουμε ἀναλογίες μέ τίς τετράδες τῶν ἀριθμῶν πού εἶναι στή σειρά
α΄) 2, 17, 6, 51 β΄) 8, 48, 4, 24;

35

5. Μερισμός ἀριθμοῦ σέ μέρη ἀνάλογα πρός δεδομένους ἀριθμούς

Προβλήματα

α΄) Ἀνάλογοι ἀριθμοί

Δυό ἤ περισσότεροι ἀριθμοί λέγονται ***ἀνάλογοι πρός ἄλλους δεδομένους ἀριθμούς, ἴσους στό πλῆθος, ὅταν σχηματίζουν μέ αὐτούς ἴσους λόγους*** π.χ. οἱ ἀριθμοί 6, 12 καί 15 εἶναι ἀνάλογοι πρός τούς ἀριθμούς 2, 4 καί 5, γιατί ἔχουμε:

$$\frac{6}{2} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5}.$$

β΄) Βασική ἰδιότητα τῶν ἀνάλογων ἀριθμῶν

Ἄς βροῦμε πρῶτα τό ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ὅρων καί ἔπειτα τό ἄθροισμα τῶν ἑπομένων ὅρων τῶν παραπάνω ἴσων ὅρων. Ἔχουμε:

$$6 + 12 + 15 = 33 \text{ καί } 2 + 4 + 5 = 11.$$

Τά δύο αὐτά ἀθροίσματα ἔχουν λόγο

$$\frac{33}{11} = \frac{3}{1},$$

δηλ. λόγο ἴσο μέ καθέναν ἀπό τούς παραπάνω λόγους.

Ὅμοια εἶναι $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{2+4+6}{5+10+15} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

Γενικά ἰσχύει ὅτι: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = \ldots = \frac{\mu}{\nu} = \frac{\alpha+\gamma+\varepsilon+\ldots+\mu}{\beta+\delta+\zeta+\ldots+\nu}$,

ὅπου οἱ παρονομαστές εἶναι ἀριθμοί διάφοροι τοῦ μηδενός. Ὥστε:

Ἄν ὁσοιδήποτε λόγοι ἀριθμῶν εἶναι ἴσοι, τότε τό ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρός τό ἄθροισμα τῶν ἑπομένων ὅρων τους ἰσοῦται μέ καθέναν ἀπό τούς ἴσους λόγους.

γ΄) Μερισμός σέ μέρη ἀνάλογα

Μερισμός ἀριθμοῦ α σέ μέρη ἀνάλογα δεδομένων ἀριθμῶν σημαίνει νά βροῦμε ἀριθμούς ἀναλόγους πρός τούς δεδομένους πού νά ἔχουν ἄθροισμα τόν ἀριθμό α.

Πρόβλημα 1ο

Νά μερισθοῦν 8.000 δρχ. σέ μέρη ἀνάλογα πρός τούς ἀριθμούς 3,7 καί 6.

Λύση. Ἄν χ, ψ, ω εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί, θά ἔχουμε:

$$\frac{\chi}{3} = \frac{\psi}{7} = \frac{\omega}{6} \text{ καί } \chi + \psi + \omega = 8.000$$

Ἐφαρμόζοντας τήν παραπάνω βασική ἰδιότητα τῶν ἴσων λόγων παίρνουμε:

$$\frac{\chi}{3} = \frac{\psi}{7} = \frac{\omega}{6} = \frac{\chi+\psi+\omega}{3+7+6} = \frac{8.000}{16} = 500$$

Ὥστε εἶναι: $\frac{\chi}{3} = 500 \iff \chi = 3.500 = 1500$ δρχ.

$$\frac{\psi}{7} = 500 \iff \psi = 7.500 = 3.500 \text{ δρχ.}$$

$$\frac{\omega}{6} = 500 \iff \omega = 6.500 = 3000 \text{ δρχ.}$$

Ἄθροισμα μεριδίων = **8000 δρχ.**

Πρόβλημα 2ο. Τρεῖς ἐργάτες γιά μιά κοινή ἐργασία πῆραν ἀμοιβή 22.200 δρχ. Ὁ α΄ ἐργάτης δούλεψε 5 ἡμέρες ἐπί 8 ὧρες τήν ἡμέρα, ὁ β΄ 6 ἡμέρες ἐπί 8 ὧρες τήν ἡμέρα καί ὁ γ΄ 10 ἡμέρες ἐπί 7 ὧρες τήν ἡμέρα. Νά βρεῖτε πόσες δρχ. πῆρε ὁ καθένας.

Λύση. Ὁ α΄ ἐργάτης ἐργάσθηκε $5 \cdot 6 = 30$ ὧρες, ὁ β΄ $6 \cdot 8 = 48$ ὧρες καί ὁ γ΄ $10 \cdot 7 = 70$ ὧρες. Εἶναι φανερό ὅτι ἄν χ, ψ, ω εἶναι τά μερίδια τῶν ἐργατῶν αὐτά θά εἶναι ἀνάλογα πρός τίς ἀντίστοιχες ὧρες ἐργασίας τους.

Θά ἔχουμε: $\dfrac{\chi}{30} = \dfrac{\psi}{48} = \dfrac{\omega}{70} = \dfrac{\chi+\psi+\omega}{30+48+70} = \dfrac{22200}{148} = 150.$

Ὥστε εἶναι: $\dfrac{\chi}{30} = 150 \Longleftrightarrow \chi = 30 \cdot 150 = 4500$ δρχ.

$\dfrac{\psi}{48} = 150 \Longleftrightarrow \psi = 48 \cdot 150 = 7200$ δρχ.

$\dfrac{\omega}{70} = 150 \Longleftrightarrow \psi = 70 \cdot 150 = 10500$ δρχ.

Ἄθροισμα μεριδίων = 22200 δρχ.

Πρόβλημα 3ο. Νά μερισθοῦν 9200 δρχ. σέ τρία μέρη ἀνάλογα πρός τούς ἀριθμούς

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{2}.$$

Λύση. Ἄν χ, ψ, ω εἶναι τά τρία μερίδια, θά ἔχουμε:

$$\frac{\chi}{\frac{2}{3}} = \frac{\psi}{\frac{3}{4}} = \frac{\omega}{\frac{1}{2}}$$

πολλαπλασιάζουμε τούς ἑπόμενους ὅρους τῶν ἴσων λόγων μέ τό Ε.Κ.Π. $(3, 4, 2) = 12$, παίρνουμε:

$$\frac{\chi}{12 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\psi}{12 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\omega}{12 \cdot \frac{1}{2}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\chi}{8} = \frac{\psi}{9} = \frac{\omega}{6} = \frac{\chi+\psi+\omega}{8+9+6} = \frac{9200}{23} = 400.$$

Ὥστε εἶναι: $\frac{\chi}{8} = 400 \iff \chi = 8 \cdot 400 = 3200$ δρχ.

$\frac{\psi}{9} = 400 \iff \psi = 9 \cdot 400 = 3600$ δρχ.

$\frac{\omega}{6} = 400 \iff \omega = 6 \cdot 400 = 2400$ δρχ.

Ἄθροισμα μεριδίων = 9200 δρχ.

Παρατήρηση. Πολλές φορές δυό ἤ περισσότεροι ἄνθρωποι ἑνώνουν τά κεφάλαιά τους καί κάνουν μιά ἐμπορική ἤ βιομηχανική ἤ ναυτική κ.τ.λ. ἐπιχείρηση. Ἡ ἐπιχείρηση λέγεται ***ἑταιρεία*** καί οἱ ἄνθρωποι πού συνεργάζονται στήν ἴδια ἑταιρεία λέγονται ***συνεταῖροι.*** Σέ μιά ἑταιρεία τά κεφάλαια τῶν συνεταίρων δέν εἶναι πάντοτε ἴσα, οὔτε καί ὁ χρόνος συμμετοχῆς κάθε συναιτέρου στήν ἑταιρεία εἶναι ὁ ἴδιος. Τό κέρδος ἤ ἡ ζημία μιᾶς ἑταιρείας μερίζεται:

i) ἀνάλογα μέ τά κεφάλαια, γιά τόν ἴδιο χρόνο συμμετοχῆς.
ii) ἀνάλογα μέ τούς χρόνους, γιά ἴσα κεφάλαια.
iii) ἀνάλογα μέ τά γινόμενα τῶν κεφαλαίων ἐπί τούς χρόνους ἄν καί τά δυό αὐτά ποσά εἶναι διαφορετικά.

Τά σχετικά μέ τήν ἑταιρεία προβλήματα λύνονται ὅπως καί τά παραπάνω προβλήματα μερισμοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὁμάδα Α΄

12) Νά βρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοί, πού συνδέονται μέ τή σχέση $\frac{\chi}{6} = \frac{\psi}{8} = \frac{\omega}{2}$ καί ἔχουν ἄθροισμα 112.

13) Νά μεριστοῦν 12400 δρχ. σέ μέρη ἀνάλογα πρός τούς ἀριθμούς 15,10 καί 6.

14) Τρεῖς κτηνοτρόφοι νοίκιασαν ἕνα λειβάδι γιά τή βοσκή τῶν προβάτων τους καί πλήρωσαν 16200 δρχ. Ὁ α΄ βόσκησε 100 πρόβατα, ὁ β΄ 80 καί ὁ γ΄ 90. Πόσες δραχμές θά πληρώσει ὁ καθένας;

15) Τρεῖς γεωργοί ἀγοράζουν μιά θεριστική μηχανή ἀξίας 600000 δρχ. Ὁ α΄ πληρώνει 248000 δρχ., ὁ β΄ 140000 δρχ., καί ὁ γ΄ τό ὑπόλοιπο. Ἀπό τό θέρισμα τοῦ σταριοῦ τῶν συγχωριανῶν τους κέρδισαν 150000 δρχ. Πόσες δραχμές ἀπό τό κέρδος θά πάρει ὁ καθένας;

37 16) Ένα χωράφι 81 στρεμμάτων μοιράσθηκε σέ τρία ἀδέλφια ἀνάλογα μέ τούς ἀριθμούς $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ καί $\frac{5}{6}$. Πόσα στρέμματα πῆρε ὁ καθένας;

17) Τρεῖς τεχνίτες γιά μιά κοινή ἐργασία πῆραν ἀμοιβή 43500 δρχ. Ὁ α΄ ἐργάσθηκε 5 ἡμέρες, ὁ β΄ τριπλάσιες ἡμέρες ἀπό τόν α΄ καί ὁ γ΄ 6 ἡμέρες λιγότερες ἀπό τόν β΄. Πόσες δραχμές πῆρε ὁ καθένας;

18) Δυό ὁδηγοί φορτηγῶν αὐτοκινήτων γιά μιά κοινή μεταφορά σιταριοῦ πῆραν ἀμοιβή 11400 δρχ. Ὁ α΄ μετέφερε 4000 κιλά σέ ἀπόσταση 25 χλμ., ὁ β΄ 3000 κιλά σέ ἀπόσταση 30 χλμ. Πόσες δρχ. πῆρε ὁ καθένας;

19) Τρεῖς συνεταῖροι κατέθεσαν σέ μιά ἐπιχείρηση τά παρακάτω ποσά: Ὁ α΄ 55000 δρχ. ὁ β΄ 45000 δρχ. καί ὁ γ΄ 65000 δρχ. Ἀπό τήν ἐπιχείρηση αὐτή κέρδισαν 66000 δρχ. Πόσες δρχ. κέρδος θά πάρει ὁ καθένας;

20) Τρεῖς συνεταῖροι κατέθεσαν σέ μιά ἐπιχείρηση τό ἴδιο ποσό. Τά χρήματα τοῦ α΄ ἔμειναν στήν ἐπιχείρηση 2 ἔτη, τοῦ β΄ 11 μῆνες καί τοῦ γ΄ 4 μῆνες λιγότερο τοῦ β΄. Ἄν τό κέρδος ἦταν 168.000 δρχ., πόσο κέρδος ἀναλογεῖ στόν καθένα;

21) Τρεῖς συνεταῖροι κέρδισαν ἀπό μιά ἐπιχείρηση 195.000 δρχ. Ὁ α΄ εἶχε καταθέσει 12000 δρχ. γιά 20 μῆνες, ὁ β΄ 15000 δρχ. γιά 14 μῆνες καί ὁ γ΄ 20000 δρχ. γιά 10 μῆνες. Πόσες δρχ. κέρδος θά πάρει ὁ καθένας;

38 *Ὁμάδα Β΄*

22) Νά μεριστοῦν 6020 δρχ. σέ 3 ἐργάτες ἔτσι, ὥστε ὁ λόγος τοῦ μεριδίου τοῦ α΄ πρός τό μερίδιο τοῦ β΄ νά εἶναι ἴσος μέ $\frac{2}{5}$ καί ὁ λόγος τοῦ μεριδίου τοῦ δευτέρου πρός τό μερίδιο τοῦ τρίτου νά εἶναι ἴσος μέ $\frac{4}{3}$.

23) Τρεῖς οἰκογένειες μοιράστηκαν 2800 κιλά πατάτες. Ἡ γ΄ πῆρε τά $\frac{3}{4}$ τοῦ μεριδίου τῆς α΄ καί ἡ β΄ τά $\frac{2}{3}$ τῶν ὅσων πῆραν ἡ α΄ καί ἡ γ΄. Πόσα κιλά πατάτες πῆρε κάθε οἰκογένεια;

24) Τρεῖς ἔμποροι ἀπό τό κέρδος μιᾶς κοινῆς ἐπιχείρησης πῆραν τά ἑξῆς ποσά: Ὁ α΄ 38400 δρχ., ὁ β΄ 57600 δρχ. καί ὁ γ΄ τό ὑπόλοιπο πού ἦταν τό $\frac{1}{5}$ τοῦ ὁλικοῦ κέρδους. Ἄν ὁ γ΄ εἶχε καταθέσει στήν ἐπιχείρηση 20000 δρχ. ποιό κεφάλαιο κατέθεσε ὁ α΄ καί ποιό ὁ β΄;

6. Ποσά συμμεταβλητά

α΄) **Μεταβλητό** λέγεται ἕνα ποσό ἤ μέγεθος, ὅταν παίρνει διαφορετικές τιμές π.χ. τό βάρος ἑνός παιδιοῦ, ἡ χρηματική ἀξία τοῦ μέτρου ὑφάσματος κ.τ.λ.

β΄) ***Σταθερό*** λέγεται ἕνα ποσό ἤ μέγεθος, ὅταν ἔχει πάντοτε τήν ἴδια τιμή. Π.χ. ἡ ἀπόσταση μεταξύ δυό τόπων, ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ στήν ὁμαλή κίνηση κτλ.

γ΄) ***Συμμεταβλητά*** λέγονται δυό ποσά ἤ μεγέθη πού ἔχουν τέτοια συσχέτιση μεταξύ τους, ὥστε ὅταν μεταβάλλεται μιά τιμή τοῦ ἑνός, νά μεταβάλλεται καί ἡ ἀντίστοιχη τιμή τοῦ ἄλλου.

Ἔτσι:

i) Ἡ μεταβολή τοῦ βάρους ἑνός ἐμπορεύματος συνεπάγεται ἀντίστοιχη μεταβολή τῆς χρηματικῆς ἀξίας του.

ii) Ἡ μεταβολή τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν συνεπάγεται ἀντίστοιχη μεταβολή τοῦ ἔργου πού ἐκτελοῦν κ.τ.λ.

39 7. Ποσά κατευθείαν ἀνάλογα

Πρόβλημα. Ἕνα μέτρο ὕφασμα ἀξίζει 60 δρχ. Πόσο ἀξίζουν τά 2 μέτρα, τά 3 μέτρα, ..., τό $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου, τό $\frac{1}{3}$ τοῦ μέτρου κ.τ.λ., ἀπό αὐτό τό ὕφασμα;

Ἐπειδή τό 1 μέτρο ὕφασμα ἀξίζει 60 δρχ., τά 2 μέτρα ἀξίζουν 120 δρχ., τά 3 μέτρα ἀξίζουν 180 δρχ., τά 4 μέτρα ἀξίζουν 240 δρχ., ..., τά χ μέτρα ἀξίζουν $60 \cdot \chi$ δρχ.

Ἐπίσης τό $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου ἀξίζει $\frac{60}{2} = 30$ δρχ., τό $\frac{1}{3}$ τοῦ μέτρου ἀξίζει $\frac{60}{3} = 20$ δρχ. κ.τ.λ.

Τά συμπεράσματα αὐτά ἄς τά γράψουμε σ' ἕναν ἀριθμητικό πίνακα:

Μῆκος σέ μέτρα	1	2	3	4	5	...	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...	χ
Ἀξία σέ δραχμές	60	120	180	240	300	...	30	20	15	...	$60 \cdot \chi$

Τό μῆκος τοῦ ὑφάσματος εἶναι ἕνα ποσό πού παίρνει διάφορες τιμές $1, 2, 3, 4, ..., \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \chi$. Ἡ ἀξία τοῦ ὑφάσματος εἶναι ἕνα ἄλλο ποσό πού παίρνει ἐπίσης διάφορες τιμές 60, 120, 180, 240, ..., 30, 20, 15, ..., $60 \cdot \chi$ πού, ὅπως βλέπουμε στόν πίνακα εἶναι ἀντίστοιχες στίς τιμές τοῦ πρώτου ποσοῦ. Τά δυό αὐτά ποσά ἔχουν τέτοια συσχέτιση μεταξύ τους, ὥστε ὅταν ἡ τιμή 1 τοῦ μήκους τοῦ ὑφάσματος διπλασιασθεῖ, τριπλασιασθεῖ κ.τ.λ. καί ἡ ἀντίστοιχη τιμή 60 δρχ. τῆς ἀξίας του διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κ.τ.λ. Ἐπίσης ὅταν ἡ τιμή 1 τοῦ μήκους τοῦ ὑφάσματος γίνει ἴση μέ τό μισό, τό τρίτο κ.τ.λ. καί ἡ ἀντίστοιχη τιμή 60 δρχ. τῆς ἀξίας του γίνεται τό μισό τό τρίτο κ.τ.λ. Σέ τέτοια περίπτωση θά λέμε ὅτι τά δυό συμμεταβλητά ποσά εἶναι ***κατευθείαν ἀνάλογα*** ἤ, ἁπλῶς, ***ἀνάλογα.*** Ὥστε:

Δυό συμμεταβλητά ποσά λέγονται ***ἀνάλογα,*** ὅταν εἶναι τέτοια, ὥστε ***ὁ πολλαπλασιασμός*** (ἤ ***ἡ διαίρεση***) ***μιᾶς τιμῆς τοῦ ἑνός μ' ἕναν ἀριθμό νά συνεπάγεται τόν πολλαπλασιασμό*** (ἤ ***τή διαίρεση***) ***τῆς ἀντίστοιχης τιμῆς τοῦ ἄλλου ποσοῦ μέ τόν ἴδιο ἀριθμό.***

Στό παραπάνω πρόβλημα ἄν παραστήσουμε μέ ψ τήν ἀξία τῶν χ μέτρων τοῦ ὑφάσματος, θά ἔχουμε τή σχέση: $\boxed{\psi = 60 \cdot \chi}$ πού συνδέει τά δυό ποσά μῆκος σέ μέτρα καί ἀξία σέ δραχμές.

Ποσά ἀνάλογα εἶναι:

Τό ***βάρος*** ἑνός ἐμπορεύματος πού πουλιέται μέ τό κιλό καί ἡ χρηματική του ***ἀξία.***

Ἡ ***ἀμοιβή*** ἑνός τεχνίτη πού πληρώνεται μέ τό κομμάτι καί ὁ ***ἀριθμός τῶν κομματιῶν*** πού παραδίνει στόν ἐργοδότη.

Ὁ ***ἀριθμός*** τῶν ἐργατῶν καί τό ***ἔργο*** πού ἐκτελοῦν.

Τό ***βάρος*** μιᾶς μεταβαλλόμενης ποσότητας νεροῦ καί ὁ ***ὄγκος*** του.

Τό ***βάρος*** ἑνός ἐμπορεύματος πού πουλιέται μέ τό κιλό καί τό ***κέρδος*** του.

Τό ***μῆκος τοῦ δρόμου (διάστημα)*** πού διατρέχει ἕνα κινητό μέ σταθερή ταχύτητα καί ὁ ***χρόνος*** πού χρειάζεται γιά νά τό διατρέξει.

Τό ***μῆκος τῆς περιφέρειας*** ἑνός κύκλου καί ἡ ***ἀκτίνα*** του κ.τ.λ.

Σημείωση. Τά ποσά ***ἡλικία*** ἑνός παιδιοῦ καί τό ***ἀνάστημά*** του δέν εἶναι ποσά ἀνάλογα. Γιατί ὅταν διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κ.τ.λ. ἡ ἡλικία τοῦ παιδιοῦ, δέ διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κτλ. τό ἀνάστημά του. Τά ποσά αὐτά εἶναι ἁπλῶς συμμεταβλητά.

Βασική ἰδιότητα τῶν ἀναλόγων ποσῶν. Ἄς πάρουμε ἀπό τόν παραπάνω πίνακα δύο τυχαῖες τιμές τοῦ ἑνός ποσοῦ (μῆκος σέ μέτρα) π.χ. 2 καί 5 πού ἔχουν λόγο $\frac{2}{5}$. Οἱ πρός αὐτές ἀντίστοιχες τιμές 120 καί 300 τοῦ ἄλλου ποσοῦ (ἀξία σέ δρχ.) ἔχουν λόγο $\frac{120}{300}$ ἤ $\frac{2}{5}$, δηλαδή ἴσο μέ τόν προηγούμενο λόγο.

Ὅμοια εἶναι $\frac{1}{60} = \frac{5}{300}$ κ.τ.λ. Ὥστε:

Ἄν δυό ποσά εἶναι ἀνάλογα, ὁ λόγος δυό τιμῶν τοῦ ἑνός ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.

Αὐτή ἡ ἰδιότητα δικαιολογεῖ τήν ὀνομασία «***ἀνάλογα***», πού δίνουμε στά δυό ποσά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

25) Ἡ περίμετρος τετραγώνου καί ἡ πλευρά του τί ποσά εἶναι; Ἄν εἶναι ἀνάλογα, νά βρεῖτε τή σχέση, πού τά συνδέει.

26) Ὁ ἀριθμός τῶν ἐργατῶν καί τό μῆκος τοῦ δρόμου, πού κατασκευάζουν γιατί εἶναι ποσά κατευθείαν ἀνάλογα; Κατασκευάσατε ἕναν πίνακα μέ ἀντίστοιχες τιμές τῶν δυό ποσῶν τῆς ἀπόλυτης ἐκλογῆς σας.

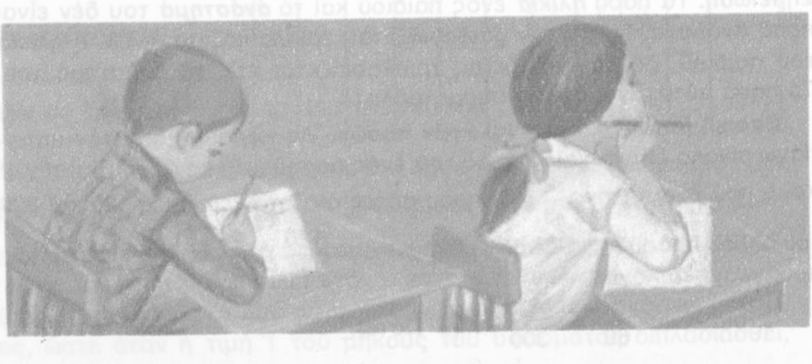
Ὁμάδα Β΄

27) Δίνεται τό μέτρο ἑνός τόξου σέ μοῖρες χ καί σέ βαθμούς ψ. Νά βρεῖτε ὅτι οἱ συμμεταβλητές ποσότητες χ καί ψ εἶναι ἀνάλογες καί τή σχέση πού τίς συνδέει.

28) Δίνονται τά συμμεταβλητά ποσά Α καί Β καί ὁ πίνακας μέ μερικές ἀντίστοιχες τιμές τους:

Α	3	6,9	4	6	...	0,24
Β	6	13,8	8	...	9	...

Νά ἐξακριβώσετε, ἄν τά ποσά εἶναι ἀνάλογα καί ἔπειτα νά συμπληρώσετε τά κενά στόν πίνακα.



8. *Ποσά ἀντιστρόφως ἀνάλογα*

Πρόβλημα. Ἕνας ἐργάτης ἐκτελεῖ ἕνα ἔργο σέ 12 ἡμέρες. Σέ πόσες ἡμέρες θά ἐκτελέσουν τό ἴδιο ἔργο 2, 3, 4, 5... ἐργάτες μέ τήν ἴδια ἀπόδοση;

Ἐπειδή ὁ 1 ἐργάτης ἐκτελεῖ τό ἔργο σέ 12 ἡμέρες, οἱ 2 ἐργάτες ἐκτελοῦν τό ἴδιο ἔργο σέ $\frac{12}{2} = 6$ ἡμέρες, οἱ 3 ἐργάτες τό ἐκτελοῦν σέ $\frac{12}{3} = 4$ ἡμέρες, ..., οἱ χ ἐργάτες τό ἐκτελοῦν σέ $\frac{12}{\chi}$ ἡμέρες.

Τά συμπεράσματα αὐτά ἄς τά γράψουμε σ' ἕναν ἀριθμητικό πίνακα:

Ἀριθμός ἐργατῶν	1	2	3	4	5	...	χ
Χρόνος σέ ἡμέρες	12	6	4	3	$\frac{12}{5}$	...	$\frac{12}{\chi}$

Ὁ ἀριθμός τῶν ἐργατῶν εἶναι ἕνα ποσό πού παίρνει διάφορες τιμές: 1, 2, 3, 4, 5, ..., χ.

Ὁ χρόνος σέ ἡμέρες εἶναι ἄλλο ποσό πού παίρνει διάφορες τιμές 12, 6, 4, 3, $\frac{12}{5}$, ..., $\frac{12}{\chi}$ πού, ὅπως βλέπουμε στόν πίνακα, εἶναι ἀντίστοιχες στίς τιμές τοῦ πρώτου ποσοῦ. Τά δυό αὐτά ποσά ἔχουν τέτοια συσχέτιση μεταξύ τους, ὥστε ὅταν ἡ τιμή 1 τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν διπλασιαστεῖ, τριπλασιαστεῖ κτλ. καί ἡ ἀντίστοιχη τιμή 12 ἡμέρες τοῦ χρόνου γίνεται τό μισό, τό τρίτο κ.τ.λ. Μέ ἄλλα λόγια ὅταν ἡ τιμή τοῦ ἑνός ποσοῦ (ἀριθμός ἐργατῶν) πολλαπλασιασθεῖ μέ 2, 3, 4,... ἡ ἀντίστοιχη τιμή 12 τοῦ ἄλλου ποσοῦ (χρόνος σέ ἡμέρες) διαιρεῖται διά 2, 3, 4, ...

Σέ κάθε τέτοια περίπτωση θά λέμε ὅτι τά δυό συμμεταβλητά ποσά εἶναι ***ἀντιστρόφως ἀνάλογα*** ἤ ἁπλῶς, ***ἀντίστροφα***. Ὥστε:

Δυό συμμεταβλητά ποσά λέγονται ἀντίστροφα, ὅταν εἶναι τέτοια, ὥστε ὁ πολλαπλασιασμός (ἤ ***ἡ διαίρεση***) ***μιᾶς τιμῆς τοῦ ἑνός μ' ἕναν ἀριθμό νά συνεπάγεται τή διαίρεση*** (ἤ ***τόν πολλαπλασιασμό***) ***τῆς ἀντίστοιχης τιμῆς τοῦ ἄλλου ποσοῦ μέ τόν ἴδιο ἀριθμό.***

Στό παραπάνω πρόβλημα ἄν παραστήσουμε μέ ψ τό χρόνο σέ ἡμέρες πού χρειάζονται οἱ χ ἐργάτες γιά νά ἐκτελέσουν τό ἔργο, θά ἔχουμε τή σχέση $\boxed{\psi = \frac{12}{\chi}}$ πού συνδέει τά ποσά ἀριθμός ἐργατῶν καί χρόνο σέ ἡμέρες.

Ποσά ἀντίστροφα εἶναι:

Τό ***βάρος*** ἑνός ἐμπορεύματος (πού ἔχει ὁρισμένη ἀξία) καί ἡ ***τιμή τῆς μονάδας*** βάρους.

Ἡ ***ταχύτητα*** ἑνός κινητοῦ πού κινεῖται ἰσοταχῶς καί ὁ ***χρόνος***, πού χρειάζεται τό κινητό γιά νά διατρέξει μιά ὁρισμένη ἀπόσταση.

Τό ***μῆκος*** καί τό ***πλάτος*** ἑνός ὑφάσματος πού χρειάζεται γιά νά κατασκευασθεῖ μιά ἐνδυμασία.

Οἱ ***ἡμέρες*** πού χρειάζονται οἱ ἐργάτες γιά νά τελειώσουν ἕνα ἔργο καί οἱ ***ὧρες*** πού πρέπει νά ἐργάζονται τήν ἡμέρα.

Ἡ ***ποσότητα τροφίμων*** (ὅταν εἶναι ὁρισμένη) καί ὁ ***χρόνος*** πού χρειάζεται γιά νά καταναλωθοῦν τά τρόφιμα αὐτά.

Ἡ ***παροχή βρύσης*** καί ὁ ***χρόνος*** πού χρειάζεται γιά νά γεμίσει μιά δεξαμενή κ.τ.λ.

Βασική ἰδιότητα τῶν ἀντιστρόφων ποσῶν. Ἄς πάρουμε ἀπό τόν παραπάνω πίνακα δύο τυχαῖες τιμές τοῦ ἑνός ποσοῦ (ἀριθμός ἐργατῶν) π.χ. 1 καί 3 πού ἔχουν λόγο $\frac{1}{3}$. Οἱ ἀντίστοιχες τιμές 12 καί 4 τοῦ ἄλλου ποσοῦ (χρόνος σέ ἡμέρες) ἔχουν λόγο $\frac{12}{4} = \frac{3}{1}$ δηλαδή ἀντίστροφος τοῦ $\frac{1}{3}$. Ὅμοια εἶναι $\frac{2}{5} = \frac{2,4}{6}$. Ὥστε:

Ἄν δύο ποσά εἶναι ἀντίστροφα, ὁ λόγος δυό τιμῶν τοῦ ἑνός ποσοῦ εἶναι ἴσος μέ τόν ἀντίστροφο λόγο τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ ἄλλου ποσοῦ.

Αὐτή ἡ ἰδιότητα δικαιολογεῖ τήν ὀνομασία «ἀντιστρόφως ἀνάλογα», πού δίνουμε στά δύο ποσά.

Σημείωση. Ἄν ἔχουμε δυό συμμεταβλητά ποσά πού τό ἕνα αὐξάνεται καί τό ἄλλο ἐλαττώνεται χωρίς νά ἔχουν τήν παραπάνω σχέση μεταξύ τους, τότε τά ποσά δέν εἶναι ἀντίστροφα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

41 *Ὁμάδα Α΄*

29) Ἡ ταχύτητα ἑνός κινητοῦ πού κινεῖται ἰσοταχῶς καί ὁ χρόνος πού χρειάζεται τό κινητό αὐτό γιά νά διατρέξει μιά ὁρισμένη ἀπόσταση γιατί εἶναι ποσά ἀντίστροφα;
Κατασκευάστε ἕναν πίνακα μέ ἀντίστοιχες τιμές τῶν ποσῶν αὐτῶν τῆς ἀπόλυτης ἐκλογῆς σας.

30) Στά παρακάτω ποσά ποιά εἶναι ἀνάλογα καί ποιά ἀντίστροφα;
α΄) Ἐπίκεντρη γωνία καί τό ἀντίστοιχο τόξο.

β΄) Ἡ ἱπποδύναμη τῆς μηχανῆς ἑνός αὐτοκινήτου καί ὁ χρόνος πού διανύει μιά σταθερή ἀπόσταση.
γ΄) Βάρος φορτίου καί ταχύτητα αὐτοκινήτου σέ ὁρισμένη διαδρομή.
δ΄) Ἡ ἡλικία καί τό βάρος ἑνός ἀνθρώπου.
ε΄) Ἡ βάση καί τό ὕψος ὀρθογωνίου μέ σταθερό ἐμβαδό.

31) Δίνονται τά συμμεταβλητά ποσά Α καί Β καί ὁ πίνακας μέ μερικές ἀντίστοιχες τιμές τους:

Α	4	2	12	1	...	0,5
Β	3	6	1	...	0,5	...

Νά ἐξακριβώσετε ἄν τά ποσά αὐτά εἶναι ἀντίστροφα καί ἔπειτα νά συμπληρώσετε τά κενά στόν πίνακα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Τί ὀνομάζουμε λόγο δύο ἀριθμῶν; Ἡ παράσταση $\frac{3,2}{5}$ εἶναι λόγος δυό ἀριθμῶν ἤ κλάσμα;
2) Τί ὀνομάζουμε λόγο δυό ὁμοειδῶν μεγεθῶν; Μέ τί ἰσοῦται ὁ λόγος αὐτός;
3) Τί ὀνομάζουμε ἀναλογία; Πότε μιά ἀναλογία λέγεται συνεχής;
4) Ποιά εἶναι ἡ βασική ἰδιότητα μιᾶς ἀναλογίας ἀριθμῶν;
5) Πότε τέσσερις διαδοχικοί ἀριθμοί ἀποτελοῦν ἀναλογία;
6) Πότε μιά ἀριθμητική ἀναλογία ἀποτελεῖ ἐξίσωση α΄ βαθμοῦ;
7) Πότε δυό ἤ περισσότεροι ἀριθμοί λέγονται ἀνάλογοι ἀντίστοιχα πρός ἄλλους δεδομένους ἀριθμούς, ἴσους στό πλῆθος;
8) Ποιά εἶναι ἡ βασική ἰδιότητα τῶν ἀναλόγων ἀριθμῶν;
9) Τί λέγεται μερισμός ἀριθμοῦ α σέ μέρη ἀνάλογα δεδομένων ἀριθμῶν;
10) Ποιά ποσά λέγονται συμμεταβλητά;
11) Ποιά ποσά λέγονται κατευθείαν ἀνάλογα καί ποιά ἀντιστρόφως ἀνάλογα;
12) Ποιά βασική ἰδιότητα ἔχουν τά κατευθείαν ἀνάλογα ποσά;
13) Ποιά βασική ἰδιότητα ἔχουν τά ἀντιστρόφως ἀνάλογα ποσά;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΤ΄

ΑΠΛΗ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ – ΠΟΣΟΣΤΑ

42 1. Ἁπλή μέθοδος τῶν τριῶν

α΄) Προβλήματα μέ ποσά ἀνάλογα

Πρόβλημα. Τά 4 μέτρα ἀπό ἕνα ὕφασμα ἀξίζουν 144 δρχ. Πόσο ἀξίζουν τά 15 μέτρα ἀπό τό ἴδιο ὕφασμα;

Λύση. ***Κατάταξη.*** Τά 4 μέτρα ἀξίζουν 144 δρχ.
15 μέτρα ἀξίζουν χ δρχ.

Μετά τήν κατάταξη, βρίσκουμε τή σχέση πού ἔχουν τά συμμεταβλητά ποσά, μῆκος ὑφάσματος (μέτρα) καί χρηματική ἀξία (δρχ.) μεταξύ τους, θά κάνουμε δηλαδή τή ***σύγκριση τῶν ποσῶν.*** Τά ποσά αὐτά εἶναι ἀνάλογα, διότι ὅταν διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κτλ. τό μῆκος τοῦ ὑφάσματος, διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κτλ. ἡ ἀξία του (ὁ ἀριθμός τῶν δραχμῶν). Σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα τῶν ἀναλόγων ποσῶν, ***ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνός ποσοῦ ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.*** Ἄρα ἔχουμε:

$$\frac{4}{15}=\frac{144}{\chi} \Longleftrightarrow 4\cdot\chi=15\cdot144 \Longleftrightarrow \chi=\frac{15\cdot144}{4}=15\cdot36 \Longleftrightarrow \chi=540$$

Ἀπάντηση. Τά 15 μέτρα ὕφασμα ἀξίζουν 540 δρχ.

Συμπεράσματα. Στό παραπάνω πρόβλημα καί στά ὅμοιά του μᾶς δίνονται οἱ ἀντίστοιχες τιμές δύο συμμεταβλητῶν ἀναλόγων ποσῶν (4 μέτρα καί 144 δρχ) καί μιά ἄλλη τιμή τοῦ ἑνός ἀπ' αὐτά τά ποσά (15 μέτρα) καί ζητεῖται ἡ πρός αὐτή ἀντίστοιχη τιμή τοῦ ἄλλου ποσοῦ, δηλ. μᾶς δίνονται τρεῖς ἀριθμοί καί ζητεῖται ὁ τέταρτος: ὁ χ. Γι' αὐτό ὁ τρόπος μέ τόν ὁποῖο λύσαμε τό πρόβλημα λέγεται ***ἁπλή μέθοδος τῶν τριῶν.***

Γιά νά λύσουμε τό πρόβλημα, πρῶτα συγκρίναμε τίς μεταβολές τῶν δύο ποσῶν καί εἴδαμε ὅτι μεταβάλλονται ἀναλόγως. Ἔπειτα σχηματίσαμε τήν ἀναλογία τοῦ προβλήματος μέ τήν παραπάνω διαδικασία, στήν ὁποία εἶναι γνωστοί οἱ τρεῖς ὅροι της καί ζητεῖται ὁ ***τέταρτος χ,*** πού ἔχουμε μάθει νά τόν βρίσκουμε στό προηγούμενο κεφάλαιο.

Σημείωση. Τό παραπάνω πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν μπορεῖ νά λυθεῖ καί μέ τήν ***ἀναγωγή στή μονάδα,*** μέθοδο πού μάθαμε στήν Ε΄ τάξη, ἀρκεῖ νά βροῦμε τήν τιμή τῆς μιᾶς μονάδας μέ διαίρεση καί ἔπειτα τήν τιμή τῶν πολλῶν μέ πολλαπλασιασμό.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὁμάδα Α΄

1) Τά 3 κιλά λάδι ἀξίζουν 225 δρχ. Πόσες δραχμές ἀξίζουν τά 16 κιλά;
2) Μιά ὑφάντρια μέ 24 κιλά νῆμα ὑφαίνει 72 μέτρα ὕφασμα. Μέ 45 κιλά νῆμα πόσα μέτρα ὕφασμα θά ὑφάνει;
3) 96 κιλά σταφύλια δίνουν 56 κιλά κρασί. Πόσα κιλά σταφυλιῶν θά χρειασθοῦν, γιά νά γεμίσουμε 14 βαρέλια, πού καθένα χωρεῖ 42,5 κιλά;
4) Ἕνας ποδηλάτης σέ 3 ὧρες ἔτρεξε 48 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα θά τρέξει σέ 7 ὧρες καί 30 π. λεπτά, ἄν τρέχει μέ τήν ἴδια ταχύτητα;

Ὁμάδα Β΄

5) Ἕνα αὐτοκίνητο καταναλώνει 8 λίτρα βενζίνη στά 152 χιλιόμετρα. Πόσα λίτρα βενζίνης χρειάζεται γιά μιά διαδρομή 180 χιλιομέτρων καί ποιά ἡ ἀξία της μέ 20,50 δραχμές τό λίτρο;
6) Οἱ 36° Κελσίου ἀντιστοιχοῦν μέ 28,8° Ρεωμύρου. Μέ πόσους βαθμούς Ρεωμύρου ἀντιστοιχοῦν 40° Κελσίου;
7) Τά 0,075 τοῦ κιλοῦ καφέ ἀξίζουν 21 δρχ. Πόσες δραχμές κοστίζουν τά 1,225 κιλά τοῦ ἴδιου καφέ;
8) Τά $\frac{7}{11}$ τοῦ κιλοῦ βουτύρου ἀξίζουν 70 δρχ. Πόσες δραχμές κοστίζουν τά $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ;

43

β΄) Προβλήματα μέ ποσά ἀντίστροφα

Πρόβλημα. 8 χτίστες χτίζουν μιά ἀποθήκη σέ 15 ἡμέρες. Σέ πόσες ἡμέρες θά χτίσουν τήν ἴδια ἀποθήκη 12 χτίστες (μέ τήν ἴδια ἀπόδοση);

Λύση. *Κατάταξη:* 8 χτίστες χτίζουν σέ 15 ἡμέρες
12 χτίστες χτίζουν σέ χ ἡμέρες

Καί τό πρόβλημα αὐτό εἶναι τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, γιατί μᾶς δίνονται, μέ τόν ἴδιο τρόπο, τρεῖς ἀριθμοί καί ζητεῖται ***τέταρτος,*** ὁ χ.

Σύγκριση τῶν ποσῶν. Ἐδῶ τά συμμεταβλητά ποσά ***ἀριθμός χτιστῶν*** καί

χρόνος ἐργασίας τους (ἡμέρες) γιά τό χτίσιμο τῆς ἀποθήκης εἶναι ἀντίστροφα, γιατί οἱ διπλάσιοι, τριπλάσιοι κ.τ.λ. τεχνίτες θά τελειώσουν τό ἴδιο ἔργο στό μισό, στό τρίτο τοῦ χρόνου κ.τ.λ.

Σχηματισμός τῆς ἀναλογίας. Σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα τῶν ἀντιστρόφων ποσῶν, ***ὁ λόγος δυό τιμῶν τοῦ ἑνός ποσοῦ ἰσοῦται μέ τόν ἀντίστροφο λόγο τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ ἄλλου,*** ἔχουμε:

$$\frac{8}{12} = \frac{x}{15} \iff 12 \cdot x = 8 \cdot 15 \iff x = \frac{8 \cdot 15}{12} = 2 \cdot 5 \iff x = 10$$

Ἀπάντηση. Οἱ 12 χτίστες θά χτίσουν τήν ἀποθήκη σέ 10 ἡμέρες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὁμάδα Α΄

9) 12 τεχνίτες τελειώνουν ἕνα ἔργο σέ 55 ἡμέρες. Γιά νά τελειώσουν τό ἴδιο ἔργο σέ 30 ἡμέρες, πόσοι τεχνίτες χρειάζονται;

10) Γιά νά κατασκευαστεῖ τό πάτωμα μιᾶς αἴθουσας, χρειάζονται 240 σανίδες, πού ἔχουν τό ἴδιο μῆκος καί πλάτος 0,2 μ. Πόσες σανίδες μέ τό ἴδιο μῆκος θά χρειασθοῦν, ἄν ἔχουν πλάτος 0,12 μέτρα;

11) Μιά ὑφάντρια, ἄν ἐργάζεται 8 ὧρες τήν ἡμέρα, ὑφαίνει ἕνα ὕφασμα σέ 18 ἡμέρες. Ἄν ἐργάζεται 9 ὧρες τήν ἡμέρα, σέ πόσες ἡμέρες ὑφαίνει τό ἴδιο ὕφασμα;

12) Μιά φρουρά ἀπό 30 στρατιῶτες ἔχει τρόφιμα γιά 28 ἡμέρες. Μερικοί στρατιῶτες πῆραν ἄδεια καί οἱ ὑπόλοιποι μέ τά ἴδια τρόφιμα πέρασαν 7 ἡμέρες ἀκόμη. Πόσοι στρατιῶτες πῆραν ἄδεια;

13) Ἕνα βιβλίο θά ἔχει 240 σελίδες, ἄν κάθε σειρά του ἔχει 64 γράμματα. Πόσες σελίδες θά ἔχει τό βιβλίο αὐτό, ἄν κάθε σειρά ἔχει 48 γράμματα;

Ὁμάδα Β΄

14) Ἕνα αὐτοκίνητο χρειάζεται 4 ὧρες καί 16 π. λεπτά γιά νά φθάσει ἀπό τήν Ἀθήνα στή Λάρισα, ὅταν τρέχει μέ μέση ταχύτητα 75 χλμ. τήν ὥρα. Πόσο χρόνο θά κάνει γιά νά διανύσει τήν ἴδια ἀπόσταση ἄν τρέχει μέ ταχύτητα 80 χλμ. τήν ὥρα;

15) Ἕνας ποδηλάτης μέ ταχύτητα 16 χλμ. τήν ὥρα χρειάζεται $\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας γιά νά φτάσει ἀπό τό χωριό του στήν πόλη. Πόσο χρόνο θά χρειαστεῖ γιά τόν ἴδιο δρόμο, ἄν αὐξήσει τήν ταχύτητά του κατά τό $\frac{1}{4}$ τῆς πρώτης;

16) Οἱ μαθητές μιᾶς κατασκηνώσεως ἔχουν τρόφιμα γιά 35 ἡμέρες. Ἄν ὁ ἀριθμός τῶν μαθητῶν αὐξηθεῖ κατά τά $\frac{2}{5}$ τους, πόσες ἡμέρες θά περάσουν μέ τά ἴδια τρόφιμα;

44

γ΄ Ἀνακεφαλαίωση – Γενικά προβλήματα

Στά προβλήματα πού λύσαμε μέ τήν ἁπλή μέθοδο τῶν τριῶν μᾶς δίνονται οἱ ἀντίστοιχες τιμές δύο συμμεταβλητῶν ποσῶν, πού εἶναι ἀνάλογα ἤ ἀντίστροφα, καί μιά ἄλλη τιμή τοῦ ἑνός ἀπό τά ποσά αὐτά καί ζητεῖται ἡ πρός αὐτήν ἀντίστοιχη τιμή τοῦ ἄλλου ποσοῦ. Στά προβλήματα μᾶς δίνονται τρεῖς ἀριθμοί καί ζητεῖται τέταρτος, ὁ χ. Γι' αὐτό ὁ τρόπος μέ τόν ὁποῖο τά λύνουμε λέγεται ***μέθοδος τῶν τριῶν,*** πού παίρνει καί τό ὄνομα ἁπλή, γιά νά διακρίνεται ἀπό τή σύνθετη μέθοδο τῶν τριῶν.

Τά προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν λύνονται εὔκολα, ἀρκεῖ νά κατατάξουμε τά ποσά, νά τά συγκρίνουμε καί ἔπειτα νά σχηματίσουμε τήν ἀναλογία τοῦ προβλήματος. Ὅταν τά ποσά μεταβάλλονται ἀναλόγως, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνός ποσοῦ ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ ἄλλου, καί ὅταν μεταβάλλονται ἀντιστρόφως, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνός ποσοῦ ἰσοῦται μέ τόν ἀντίστροφο λόγο τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ ἄλλου. Ἔτσι οἱ ἰδιότητες αὐτές μᾶς ἐπιτρέπουν σέ κάθε περίπτωση νά σχηματίσουμε τήν ἀναλογία τοῦ προβλήματος, στήν ὁποία εἶναι γνωστοί οἱ τρεῖς ὅροι της καί ζητεῖται ὁ τέταρτος χ, πού τόν βρίσκουμε μέ τήν ἐξίσωση στήν ὁποία μᾶς ὁδηγεῖ ἡ ἀναλογία.

Πρόβλημα 1ο. Μιά στρατιωτική μονάδα 160 ἀνδρῶν ἔχει τρόφιμα γιά ἕνα μήνα. Μετά ἀπό 10 ἡμέρες ἦρθαν στή μονάδα καί ἄλλοι 40 ἄνδρες, πού εἶχαν τρόφιμα γιά 5 ἡμέρες. Πόσες ἡμέρες θά περάσουν ὅλοι οἱ στρατιῶτες μέ τά τρόφιμα πού ἔχουν;

Λύση. *Βοηθητικές πράξεις:* 1) 30 ἡμερ. – 10 ἡμερ. = 20 ἡμέρες 2) 20 ἡμέρες – 5 ἡμέρ. = 15 ἡμέρες, διότι οἱ 40 στρατιῶτες πού ἦρθαν εἶχαν τρόφιμα γιά 5 ἡμέρες.

3) 160 στρατ. + 40 στρατ. = 200 στρατιῶτες.

4) Κατάταξη: 160 στρατιῶτες ἔχουν τροφές γιά 15 ἡμέρες
200 στρατιῶτες ἔχουν τροφές γιά χ ἡμέρες

Σύγκριση τῶν ποσῶν. Τά συμμεταβλητά ποσά – ἀριθμός στρατιωτῶν καί χρόνος διατροφῆς σέ ἡμέρες – εἶναι, ὅπως ξέρουμε, ποσά ἀντίστροφα.

Σχηματισμός τῆς ἀναλογίας: Ἔχουμε

$$\frac{160}{200} = \frac{x}{15} \iff 200 \cdot x = 160 \cdot 15 \iff x = \frac{160 \cdot 15}{200} = 4 \cdot 3 \iff x = 12.$$

5) 12 ἡμέρες + 5 ἡμέρες = 17 ἡμέρες.

Ἀπάντηση. Ὅλοι μαζί οἱ στρατιῶτες θά περάσουν 17 ἡμέρες μέ τά τρόφιμά τους.

Πρόβλημα 2ο. (χρήση βοηθητικοῦ ποσοῦ). Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε ὕφασμα πρός 200 δρχ. τό μέτρο. Πούλησε τό $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ μέ 260 δρχ. τό μέτρο, τό $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ μέ 250 δρχ. τό μέτρο καί τό ὑπόλοιπο μέ 300 δρχ. τό μέτρο. Ἔτσι κέρδισε ἀπ' ὅλο τό ὕφασμα 3500 δρχ. Πόσα μέτρα ἦταν τό ὕφασμα αὐτό;

Λύση. Ὑποθέτουμε ὅτι τό μῆκος τοῦ ὑφάσματος ἦταν 10 μέτρα (Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν 2 καί 5). Τότε σύμφωνα μέ τούς ὅρους τοῦ προβλήματος ἔχουμε:

1) ἀξία ὑφάσματος 10 · 200 δρχ. = 2000 δρχ.
2) 10 μέτρα · $\frac{1}{2}$ = 5 μέτρα.
3) 10 μέτρα $\frac{1}{5}$ = 2 μέτρα.
4) ὑπόλοιπα μέτρα 10 μέτρα − (5+2) μέτρα = 3 μέτρα.
5) Πούληση 5.260 δρχ. = 1300 δρχ.
6) 2.250 δρχ. = 500 δρχ.
7) 3.300 δρχ. = 900 δρχ.
8) πούληση ὑφάσματος 10 μέτρων: 1300 δρχ. + 500 δρχ. + 300 δρχ. = = 2700 δρχ.
9) Κέρδος 2700 δρχ. − 2000 δρχ. = 700 δρχ.
10) ***Κατάταξη:*** Μῆκος ὑφάσματος 10 μέτρα κέρδος 700 δρχ.
Μῆκος ὑφάσματος x μέτρα κέρδος 3500 δρχ.

Τό μῆκος τοῦ ὑφάσματος καί τό κέρδος εἶναι ποσά ἀνάλογα.

Ἔχουμε: $\frac{10}{x} = \frac{700}{3500} \iff \frac{10}{x} = \frac{1}{5} \iff x = 50.$

Ἀπάντηση. Τό ὕφασμα ἦταν 50 μέτρα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

45 ***Ὁμάδα Β΄***

17) 15 ἄνδρες ἐκτελοῦν ἕνα ἔργο σέ 24 ἡμέρες. Σέ πόσες ἡμέρες θά

ἐκτελέσουν τό ἔργο αὐτό 20 γυναῖκες, ἄν ἡ ἐργασία 4 ἀνδρῶν ἰσοδυναμεῖ μέ τήν ἐργασία 5 γυναικῶν;

18) Πλοῖο ἔχει πλήρωμα 24 ἀνδρῶν καί τρόφιμα γιά 15 ἡμέρες. Ἔπειτα ἀπό ταξίδι 5 ἡμερῶν παίρνει 6 ναυαγούς, τούς ὁποίους, διατρέφει καί ἀποβιβάζει ὕστερα ἀπό 4 ἡμέρες. Πόσες ἡμέρες θά περάσουν οἱ ἄνδρες (ναῦτες) μέ τά τρόφιμα πού ἔχουν;

19) Ἕνας ἀρτοποιός πουλάει τό ψωμί πρός 17 δρχ. τό κιλό καί μιά ἡμέρα εἰσέπραξε 5304 δρχ. ἀπό τήν πούλησή του. Νά βρεῖτε ἀπό πόσα κιλά σιτάρι ἔγινε τό ψωμί πού πουλήθηκε, ὅταν ξέρουμε ὅτι 100 κιλά σιτάρι δίνουν 80 κιλά ἀλεύρι καί 100 κιλά ἀλεύρι δίνουν 130 κιλά ψωμί.

Ὁμάδα Γ΄

20) Τρεῖς τεχνίτες μοιράστηκαν 6400 δρχ. ὡς ἑξῆς: Ὁ δεύτερος ἔλαβε τριπλάσιες δραχμές ἀπό τόν πρῶτο καί ὁ τρίτος τά $\frac{3}{5}$ τῶν δραχμῶν πού ἔλαβαν ὁ πρῶτος καί ὁ δεύτερος μαζί. Πόσες δρχ. πῆρε ὁ καθένας;

21) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε ὕφασμα μέ 400 δρχ. τό μέτρο. Πούλησε τό $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ μέ 544 δρχ. τό μέτρο, τό $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ μέ 560 δρχ. τό μέτρο καί τό ὑπόλοιπο μέ 500 δρχ. τό μέτρο. Ἔτσι κέρδισε ἀπ' ὅλο τό ὕφασμα 14760 δρχ. Πόσα μέτρα ἦταν τό ὕφασμα;

22) Ὁ διαχειριστής ἑνός οἰκοτροφείου ἀγόρασε 125 κιλά λάδι, 50 κιλά λίπος καί 40 κιλά βούτυρο, καί πλήρωσε γιά ὅλα τά εἴδη 17520 δρχ. Ποιά ἡ τιμή τοῦ κιλοῦ κάθε εἴδους, ἄν 5 κιλά λίπος κοστίζουν ὅσο 3 κιλά λάδι καί 5 κιλά βούτυρο ὅσο 8 κιλά λάδι;

46

2. Σύνθετη μέθοδος τῶν τριῶν

α΄) Προβλήματα μέ ποσά ἀνάλογα

Πρόβλημα. Μιά ὑφάντρια ἐργάζεται 8 ὧρες τήν ἡμέρα καί σέ 5 ἡμέρες ὕφανε 20 μέτρα ὕφασμα. Πόσα μέτρα θά ὑφάνει σέ 12 ἡμέρες, ἄν ἐργάζεται 6 ὧρες τήν ἡμέρα;

Λύση. ***Κατάταξη:***

Πρῶτες τιμές: 8 ὧρες τήν ἡμέρα 5 ἡμέρες ὑφαίνει 20μ. ὕφασ.
Δεύτερες τιμές: 6 ὧρες τήν ἡμέρα 12 ἡμέρες ὑφαίνει χ μ. ὕφασ.

Ἀναλύουμε τό πρόβλημα σέ δυό προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ἄν πρῶτα θεωρήσουμε σταθερό τόν ἀριθμό τῶν ἡμερῶν (= 5 ἡμέρες) καί παραστήσουμε μέ ψ τήν τιμή τῶν μέτρων, πού θά ὑφάνει ἡ ὑφάντρια, ὅταν ἐργασθεῖ 6 ὧρες τήν ἡμέρα. Ἀφοῦ βροῦμε τήν τιμή τοῦ ψ μέ τήν α΄ ἁπλή μέθοδο τῶν τριῶν, θεωροῦμε ἔπειτα σταθερό τόν ἀριθμό τῶν ὡρῶν (= 6 ὧρες), καί ὑπολογίζουμε τά χ μέτρα τοῦ ὑφάσματος πού θά ὑφάνει ἡ ὑφάντρια σέ 12 ἡμέρες μέ τή β΄ ἁπλή μέθοδο τῶν τριῶν. Ἔτσι θά εἶναι:

α΄) Κατάταξη:

Πρῶτες τιμές: 8 ὧρες τήν ἡμέρα ὑφαίνει 20 μέτρα ὕφασμα

Δεύτερες τιμές: 6 ὧρες τήν ἡμέρα ὑφαίνει ψ μέτρα ὕφασμα

Τά ποσά ἀριθμός ὡρῶν καί μῆκος ὑφάσματος εἶναι ἀνάλογα, ὁπότε θά ἔχουμε:

$$\frac{8}{6} = \frac{20}{\psi} \Longleftrightarrow 8 \cdot \psi = 20 \cdot 6 \Longleftrightarrow \psi = \frac{20 \cdot 6}{8} \text{ μέτρα ὕφασμα}$$

β΄) Κατάταξη:

Πρῶτες τιμές: 5 ἡμέρες $\frac{20 \cdot 6}{8}$ μ. ὕφασμα

Δεύτερες τιμές: 12 ἡμέρες χ μ. ὕφασμα

Ἐπειδή καί πάλι τά ποσά χρόνος (ἡμέρες) καί μῆκος ὑφάσματος (μέτρα) εἶναι ἀνάλογα, θά ἔχουμε:

$$\frac{5}{12} = \frac{20 \cdot \frac{6}{8}}{\chi} \Longleftrightarrow 5 \cdot \chi = 20 \cdot \frac{6}{8} \cdot 12 \Longleftrightarrow \boxed{\chi = 20 \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{12}{5} = 36}$$

Ἀπάντηση. Ἡ ὑφάντρια μέ 6 ὧρες ἡμερήσια ἐργασία θά ὑφάνει σέ 12 ἡμέρες 36 μέτρα ὕφασμα.

Παρατήρηση. Στό παραπάνω πρόβλημα μᾶς δίνονται τρία ποσά καί ἀναλύουμε τό πρόβλημα σέ 2 προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Γι' αὐτό ὁ τρόπος μέ τόν ὁποῖο λύνουμε τό πρόβλημα λέγεται σύνθετη μέθοδος τῶν τριῶν.

Ἡ σύγκριση τῶν ποσῶν ἀριθμός ὡρῶν καί ἀριθμός ἡμερῶν μέ τό ποσό μῆκος ὑφάσματος, πού περιέχει τόν ἄγνωστο χ (ποσά ἀνάλογα), μᾶς ὁδηγεῖ στό παρακάτω συμπέρασμα:

Γιά νά βροῦμε τήν τιμή τοῦ ἀγνώστου χ σ' ἕνα πρόβλημα τῆς σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν, πολλαπλασιάζουμε τόν πάνω ἀπό τό χ ὁμοειδή ἀριθμό μέ καθένα ἀπό τούς λόγους πού σχηματίζουν οἱ δυό τιμές κάθε ποσοῦ, ἀντεστραμμένο ἄν τό κάθε ποσό εἶναι ἀνάλογο μέ τό ποσό πού περιέχει τόν ἄγνωστο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὁμάδα Α΄

23) Μιά ὁμάδα ἀπό 8 ἐργάτες γιά ἐργασία 3 ἡμερῶν πληρώθηκε 12.000 δρχ. Πόσες δρχ. πρέπει νά πάρουν οἱ 9 ἐργάτες ἄλλης ὁμάδας (ἀπόδοση ἐργατῶν ἡ ἴδια) γιά ἐργασία 5 ἡμερῶν;

24) Σ' ἕνα σχολικό συσσίτιο 40 μαθητές γιά 15 ἡμέρες χρειάζονται 300 κιλά ψωμί. Πόσο ψωμί θά χρειασθοῦν γιά 18 ἡμέρες 25 μαθητές μέ τήν ἴδια μερίδα;

Σημείωση. Τά παραπάνω προβλήματα νά λυθοῦν μέ δύο τρόπους. Ὁ ἕνας μέ τήν ἀνάλυσή τους σέ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν καί ὁ ἄλλος μέ τόν κανόνα τῆς παρατηρήσεως.

25) Μιά ὑφάντρια μέ 8 κιλά νῆμα ὕφανε 16 μέτρα ὕφασμα μέ πλάτος 1,5 μ. Πόσα κιλά ἀπό τό ἴδιο νῆμα θά χρειαστεῖ, γιά νά ὑφάνει ὕφασμα 12 μέτρα μέ πλάτος 1,8 μέτρα;

26) Ἕνα χαλί μέ μῆκος 3,20 μέτρα καί πλάτος 1,5 μέτρα κοστίζει 6.400 δρχ. Ἄλλο χαλί τῆς ἴδιας ποιότητας μέ μῆκος 4 μέτρα καί πλάτος 2,40 μέτρα πόσο κοστίζει;

β΄) Προβλήματα μέ ποσά ἀντίστροφα

Πρόβλημα. 10 ἐργάτες, ἄν ἐργάζονται 6 ὧρες τήν ἡμέρα, σέ 12 ἡμέρες σκάβουν ἕνα ἀγρόκτημα. Σέ πόσες ἡμέρες 16 ἐργάτες θά τελειώσουν τό ἴδιο ἔργο, ἄν ἐργασθοῦν 9 ὧρες τήν ἡμέρα;

Λύση. ***Κατάταξη:***

Πρῶτες τιμές: 10 ἐργάτες 6 ὧρες τήν ἡμέρα 12 ἡμέρες
Δεύτερες τιμές: 16 ἐργάτες 9 ὧρες τήν ἡμέρα χ ἡμέρες

Ἀναλύουμε, ὅπως παραπάνω, τό πρόβλημα σέ δύο προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

α΄) ***Κατάταξη:***

Πρῶτες τιμές: 10 ἐργάτες 12 ἡμέρες

Δεύτερες τιμές: 16 ἐργάτες ψ ἡμέρες

Σύγκριση τῶν ποσῶν ἀριθμός ἐργατῶν καί χρόνος (ἡμέρες). Ἀφοῦ 10 ἐργάτες, ὅταν ἐργάζονται ὁρισμένες ὧρες τήν ἡμέρα (= 6 ὧρες), τελειώνουν τό ἔργο σέ 12 ἡμέρες, διπλάσιοι ἐργάτες θά τελειώσουν τό ἴδιο ἔργο σέ μισό ἀριθμό ἡμερῶν κ.τ.λ. Τά ποσά αὐτά εἶναι ἀντίστροφα. Ἔχουμε:

$$\frac{10}{16} = \frac{\psi}{12} \iff 16\cdot\psi = 12\cdot 10 \iff \psi = \frac{12\cdot 10}{16} \text{ ἡμέρες.}$$

β΄) ***Κατάταξη:***

Πρῶτες τιμές: 6 ὧρες τήν ἡμέρα $\frac{12\cdot 10}{16}$ ἡμέρες

Δεύτερες τιμές: 9 ὧρες τήν ἡμέρα χ ἡμέρες

Σύγκριση τῶν ποσῶν ἀριθμός ὡρῶν καί ἀριθμός ἡμερῶν. Καί τά ποσά αὐτά, ὅπως ξέρουμε, εἶναι ἀντίστροφα. Ἔτσι εἶναι:

$$\frac{6}{9} = \frac{\chi}{\frac{12\cdot 10}{16}} \iff 9\cdot\chi = \frac{12\cdot 10}{16}\cdot 6 \iff$$

$$\iff \boxed{\chi = 12\cdot\frac{10}{16}\cdot\frac{6}{9} = 5 \text{ ἡμέρες}}$$

Παρατήρηση. Ἡ σύγκριση τῶν ποσῶν ἀριθμός ἐργατῶν καί ἀριθμός ὡρῶν μέ τό ποσό ἀριθμός ἡμερῶν πού περιέχει τόν ἄγνωστο χ (ποσά ἀντίστροφα) μᾶς ὁδηγεῖ στό παρακάτω συμπέρασμα:

Γιά νά βροῦμε τήν τιμή τοῦ ἀγνώστου χ σ' ἕνα πρόβλημα τῆς σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν, πολλαπλασιάζουμε τόν πάνω ἀπό τό χ ὁμοειδή ἀριθμό μέ καθένα ἀπό τούς λόγους πού σχηματίζουν οἱ δυό τιμές κάθε ποσοῦ, ὅπως ἔχει, ἄν τό κάθε ποσό εἶναι ἀντίστροφο μέ τό ποσό πού περιέχει τόν ἄγνωστο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὁμάδα Α΄

27) Συνεργεῖο ἀπό 15 χτίστες ἐργάζονται 8 ὧρες τήν ἡμέρα καί χτίζουν ἕνα σπίτι σέ 24 ἡμέρες. Οἱ 12 ἀπ' αὐτούς τούς χτίστες, μέ καθημερινή ἐργασία 10 ὡρῶν, σέ πόσες ἡμέρες θά τελειώσουν τό ἴδιο ἔργο;

28) Γιά νά στρωθεῖ τό πάτωμα ἑνός δωματίου χρειάστηκαν 60 σανίδες, μέ μῆκος 1 μ. καί πλάτος 0,05 μ. Πόσες σανίδες μέ μῆκος 1,5 μ. καί πλάτος 0,04 μ. θά χρειαστοῦν γιά τό ἴδιο πάτωμα;

Σημείωση. Τά παραπάνω προβλήματα νά λυθοῦν μέ δυό τρόπους, ὁ ἕνας μέ τήν ἀνάλυσή τους σέ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν καί ὁ ἄλλος μέ τόν κανόνα τῆς παρατηρήσεως.

29) Ἡ μερίδα τοῦ ψωμιοῦ σέ μιά κατασκήνωση 60 μαθητῶν εἶναι 600 γραμμάρια, καί μέ τό ψωμί πού ὑπάρχει περνᾶνε 4 ἡμέρες. Σήμερα ἀπό τήν κατασκήνωση ἔφυγαν 10 μαθητές. Πόσες ἡμέρες θά περάσουν οἱ ὑπόλοιποι, ἄν ἡ μερίδα τοῦ ψωμιοῦ μειωθεῖ κατά 120 γραμμάρια τήν ἡμέρα;

48 **γ΄) Προβλήματα μέ ποσά ἀνάλογα καί ἀντίστροφα**

Πρόβλημα. Ἕνας ποδηλάτης διανύει μιά ἀπόσταση 90 χιλιομέτρων σέ 5 ὧρες μέ ταχύτητα 18 χιλιόμετρα τήν ὥρα. Σέ πόσες ὧρες ὁ ποδηλάτης θά διανύσει 120 χιλιόμετρα μέ ταχύτητα 15 χιλιόμετρα τήν ὥρα;

Λύση. *Κατάταξη:*

Πρῶτες τιμές:	90 χιλ.	5 ὧρες	ταχύτητα 18 χιλ./ὥρα
Δεύτερες τιμές:	120 χιλ.	χ ὧρες	ταχύτητα 15 χιλ./ὥρα

Ἀναλύουμε, ὅπως παραπάνω, τό πρόβλημα σέ δύο προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Πρῶτες τιμές:	90 χιλ.	5 ὡρ.	ταχύτ. 18 χιλ./ὥρα	ψ ὧρες
Δεύτερες τιμές:	120 χιλ.	ψ ὡρ.	ταχύτητα 15 χιλ./ὥρα	χ ὧρες

Σύγκριση τῶν ποσῶν. α΄) Τά ποσά ἀπόσταση (διάστημα) σέ χιλιόμετρα καί χρόνος σέ ὧρες εἶναι ἀνάλογα, γιατί σέ διπλάσιο χρόνο διανύει διπλάσια ἀπόσταση κ.τ.λ.

β΄) Τά ποσά ταχύτητα καί χρόνος εἶναι ποσά ἀντίστροφα, γιατί μέ διπλάσια ταχύτητα διανύει τήν ἴδια ἀπόσταση σέ μισό χρόνο κ.τ.λ.

Ἔτσι ἀπό τό πρῶτο πρόβλημα εἶναι:

$$\frac{90}{120} = \frac{5}{\psi} \Longleftrightarrow 90 \cdot \psi = 5 \cdot 120 \Longleftrightarrow \psi = \frac{5 \cdot 120}{90}$$

καί ἀπό τό δεύτερο

$$\frac{18}{15} = \frac{\chi}{\frac{5\cdot 120}{90}} \Longleftrightarrow 15\cdot\chi = 5\cdot\frac{120}{90}\cdot 18$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\chi = 5\ \frac{120}{90}\cdot\frac{18}{15} = 8 \text{ ὧρες.}}$$

Ἀπάντηση. Ὁ ποδηλάτης τήν ἀπόσταση 120 χιλιόμ. θά διανύσει σέ 8 ὧρες.

Συμπεράσματα: Στά παραπάνω προβλήματα τῆς σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν δίνονται οἱ ἀντίστοιχες τιμές 3 ἤ περισσοτέρων ποσῶν, πού εἶναι ἀνάλογα ἤ ἀντίστροφα, καί ζητεῖται νά βρεθεῖ ποιά τιμή ποσοῦ ἀντιστοιχεῖ σέ νέα τιμή καθενός ἀπό τά ἄλλα ποσά.

Ἡ σύγκριση κάθε ποσοῦ μέ τό ποσό πού περιέχει τόν ἄγνωστο χ μᾶς ὁδηγεῖ στό παρακάτω συμπέρασμα.

Γιά νά βροῦμε τήν τιμή τοῦ ἀγνώστου χ σ' ἕνα πρόβλημα τῆς σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν, πολλαπλασιάζουμε τόν πάνω ἀπό τό χ ὁμοειδῆ ἀριθμό μέ καθένα ἀπό τούς λόγους πού σχηματίζουν οἱ δυό τιμές κάθε ποσοῦ, ἀντεστραμμένο ἄν τό ποσό εἶναι ἀνάλογο μέ τό ποσό τοῦ ἀγνώστου ἤ ὅπως ἔχει, ἄν τό ποσό αὐτό εἶναι ἀντίστροφο μέ τό ποσό τοῦ ἀγνώστου.

Στά προβλήματα τῆς σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν πρέπει νά γράφουμε τήν κατάταξη, ἔπειτα νά κάνουμε τή σύγκριση τῶν ποσῶν καί ὕστερα νά τά λύνουμε.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ (μέ ποσά ἀνάλογα καί ἀντίστροφα)

Ὁμάδα Α΄

30) Ἕνας ἀγροτικός ταχυδρόμος, ἄν βαδίζει 10 ὧρες τήν ἡμέρα, σέ 3 ἡμέρες διανύει 120 χιλιόμετρα. Ὁ ἴδιος ταχυδρόμος, ἄν βαδίσει 6 ὧρες τήν ἡμέρα, σέ πόσες ἡμέρες θά διανύσει 144 χιλιόμετρα;

31) Αὐτοκίνητο μέ ταχύτητα 45 χιλιόμετρα τήν ὥρα διανύει σέ 3 ὧρες τά $\frac{2}{7}$ μιᾶς ἀπόστασης. Μέ ποιά ταχύτητα πρέπει νά τρέχει τήν ὥρα γιά νά διανύσει τήν ὑπόλοιπη ἀπόσταση σέ 5 ὧρες;

32) Γιά νά γίνουν 24 πουκάμισα χρειάστηκε ὕφασμα 50 μέτρα μέ πλάτος 0,9 μ. Πόσα μέτρα (μῆκος) ὕφασμα θά χρειαστεῖ γιά νά γίνουν τό $\frac{1}{3}$ ἀπό τά πουκάμισα αὐτά, ἄν τό πλάτος του εἶναι 1,20 μέτρα;

49

Ὁμάδα Α΄

33) Μιά βρύση σέ 10 ὧρες γεμίζει μιά δεξαμενή μέ μῆκος 5 μ., πλάτος 3 μ. καί ὕψος 2,5 μ. Σέ πόσες ὧρες ἡ ἴδια βρύση θά γεμίσει ἄλλη δεξαμενή μέ μῆκος 4 μ., πλάτος 2,5 μ. καί ὕψος 2 μ.;

34) Πλοῖο μέ ταχύτητα 25 μίλια τήν ὥρα διανύει τά $\frac{4}{7}$ τῆς ἀπόστασης μεταξύ δύο λιμανιῶν σέ $8\frac{2}{5}$ ὧρες. Ἐπειδή στό σημεῖο αὐτό ἡ μηχανή του ἔπαθε μικρή βλάβη, μειώνει τήν ταχύτητά του κατά 4 μίλια τήν ὥρα. Σέ πόσες ὧρες θά διανύσει τήν ὑπόλοιπη ἀπόσταση;

35) 18 τεχνίτες, ὅταν ἐργάζονται 8 ὧρες τήν ἡμέρα, τελειώνουν τά $\frac{2}{3}$ ἑνός ἔργου σέ 6 ἡμέρες. Πόσοι τεχνίτες τῆς ἴδιας ἀπόδοσης θά τελειώσουν τό ὑπόλοιπο ἔργο σέ 8 ἡμέρες, ἄν ἐργάζονται 6 ὧρες τήν ἡμέρα;

Ὁμάδα Β΄

36) 20 ἐργάτες τελειώνουν ἕνα ἔργο σέ 15 ἡμέρες. Ἔπειτα ἀπό ἐργασία 5 ἡμερῶν 4 ἐργάτες ἔφυγαν. Σέ πόσες ἡμέρες οἱ ὑπόλοιποι ἐργάτες θά ἀποτελειώσουν τό ἔργο;

37) Ἕνα πλοῖο μέ 80 ἐπιβάτες ἔχει τρόφιμα γιά 53 ἡμέρες, ὅταν κάθε ἐπιβάτης ἔχει μερίδα 1800 γραμμάρια. Τό ταξίδι ἀρχίζει καί μετά ἀπό 13 ἡμέρες μάζεψε ὁρισμένους ναυαγούς. Γιά νά φτάσουν τώρα τά τρόφιμα, συντομεύει τό ταξίδι του κατά 4 ἡμέρες καί λιγοστεύει τή μερίδα κατά 200 γραμμάρια. Πόσους ναυαγούς μάζεψε τό πλοῖο; (Εἰσιτήριες ἐξετάσεις Βαρβάκειος Σχολή 1969).

38) Ἕνας ἐργολάβος ὑπολόγισε ὅτι, γιά νά τελειώσει ἕνα ἔργο, πρέπει νά ἐργαστοῦν 15 ἐργάτες ἐπί 18 ἡμέρες. Ἡ ἐκτέλεση τοῦ ἔργου ἀρχίζει μέ 20 ἐργάτες. Τρεῖς ἡμέρες ὅμως ἀργότερα πῆρε ἐντολή νά τελειώσει τό ἔργο 5 ἡμέρες νωρίτερα. Πόσους ἐργάτες πρέπει νά πάρει ἀκόμα;

(***Ὑπόδειξη.*** Πρῶτα μέ μιά σύνθετη μέθοδο τῶν τριῶν θά βροῦμε τί μέρος τοῦ ἔργου ἐκτελοῦν οἱ 20 ἐργάτες σέ 3 ἡμέρες καί ἔπειτα μέ ἄλλη σύνθετη μέθοδο θά βροῦμε πόσοι ἐργάτες χρειάζονται γιά τό ὑπόλοιπο ἔργο κ.τ.λ.).

3. Ποσοστά

50 **α΄) Ἔννοια τοῦ ποσοστοῦ. Ὁρισμοί**

Γιά νά ἐκφράσουμε μέ ἕναν ἀριθμό ἕνα μέρος ἑνός ποσοῦ, χρησιμοποιοῦμε, ὅπως ξέρουμε, τά κλάσματα.

Παράδειγμα 1ο. Γιά νά ἐκφράσουμε ὅτι στούς 50 μαθητές οἱ 4 ἦταν ἀπόντες ἀπό μιά ἐκδρομή, γράφουμε ὅτι τά $\frac{4}{50}$ τῶν μαθητῶν ἦσαν ἀπόντες.

Ἐπειδή $\frac{4}{50} = \frac{8}{100}$ λέμε ὅτι τά $\frac{8}{100}$ τῶν μαθητῶν ἦταν ἀπόντες ἀπό τήν ἐκδρομή ἐκείνης τῆς ἡμέρας.

Συνηθίζεται σέ παρόμοιες περιπτώσεις νά παίρνουμε ὡς παρονομαστή τῶν κλασμάτων πού παριστάνουν ἕνα μέρος ἑνός ποσοῦ τό 100, γιατί ἔτσι διευκολύνονται οἱ ὑπολογισμοί.

Τήν ἔκφραση ὅτι στούς 100 μαθητές οἱ 8 ἦταν ἀπόντες γράφουμε συμβολικά 8%. Τό σύμβολο % διαβάζεται ***«τόσο στά ἑκατό»***.

Παράδειγμα 2ο. Ἄς πάρουμε ἕνα χαρτοπώλη πού ἀγοράζει τά μολύβια μπίκ 4 δρχ. τό ἕνα καί τά μεταπουλάει 5 δρχ. τό ἕνα.

Τό ποσό τῶν 4 δρχ. πού δίνει γιά νά ἀγοράσει τό κάθε μολύβι, λέγεται

τιμή ἀγορᾶς (ἤ ***κόστος***). Ἡ διαφορά 5 δρχ. − 4 δρχ. εἶναι 1 δρχ. καί ἀποτελεῖ τό ***κέρδος*** τοῦ χαρτοπώλη. Ἔτσι καταλαβαίνουμε ὅτι: τό κέρδος εἶναι τό ποσό πού προσθέτουν οἱ ἔμποροι στό κόστος τῶν ἐμπορευμάτων τους, ὅταν τά πουλοῦν. Τό κέρδος ἐδῶ εἶναι τό $\frac{1}{4}$ τῆς τιμῆς ἀγορᾶς τοῦ μολυβιοῦ. Ἐπειδή

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{25}{100},$$

λέμε ὅτι τό κέρδος εἶναι 25%. ***Γενικά*** ὅταν λέμε ὅτι ἕνας ἔμπορος πουλάει τά ἐμπορεύματά του μέ κέρδος 25% καταλαβαίνουμε ὅτι σέ ἐμπόρευμα μέ κόστος 100 δρχ. θά ἔχει κέρδος 25 δρχ. καί ἑπομένως θά τό πουλήσει 100 + 25 = 125 δρχ.

Παράδειγμα 3ο. Ἄν ὁ χαρτοπώλης ἀγοράζει τά μολύβια μπίκ 4 δρχ. τό ἕνα καί τά μεταπουλάει 3 δρχ. τό ἕνα, τότε, ὅπως βλέπουμε, ἔχει ***ζημιά*** 1 δρχ. σέ κάθε μολύβι. Ἔτσι καταλαβαίνουμε ὅτι ἡ ζημιά εἶναι τό ποσό πού χάνει ὁ ἔμπορος, ὅταν πουλάει τά ἐμπορεύματά του σέ τιμή μικρότερη ἀπό τό κόστος. Ἐπειδή καί ἐδῶ $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$ λέμε ὅτι ὁ χαρτοπώλης ἔχει ζημιά 25%. Γενικά ὅταν λέμε ὅτι ἕνας ἔμπορος πουλάει τά ἐμπορεύματά του μέ ζημιά 25%, καταλαβαίνουμε ὅτι σέ ἐμπόρευμα μέ κόστος 100 δρχ. θά ἔχει ζημιά 25 δρχ. καί ἑπομένως θά τό πουλήσει 100 − 25 = 75 δρχ.

Οἱ ἔμποροι σέ ὁρισμένη ἐποχή τοῦ ἔτους πουλοῦν τά ἐμπορεύματά τους σέ τιμή μικρότερη τῆς τιμῆς πού ἀναγράφεται στό ἐμπόρευμα, δηλ. περιορίζεται τό κέρδος τους. Τότε λέμε ὅτι πουλοῦν τά ἐμπορεύματά τους μέ ***ἔκπτωση*** π.χ. 10%, 15%, 20%, κτλ. Στήν εἰκόνα (σχ. 11) βλέπουμε ἕνα κατάστημα ποδηλάτων, πού πουλάει τά εἴδη του μέ ἔκπτωση 20%.

Παρατηρήσεις:

Ἄς ὑπολογίσουμε σ' ἕνα ἐμπόρευμα 300 δρχ. κέρδος 20%. Ἀφοῦ στίς 100 δρχ. ὁ ἔμπορος ἔχει κέρδος 20 δρχ. στίς τριπλάσιες δραχμές δηλ. στίς 300 δρχ. κόστος, θά ἔχει κέρδος 3 · 20 = 60 δρχ. καί ἑπομένως: 300 δρχ. κόστος + 60 δρχ. κέρδος = 360 δρχ. πούληση.

Ἄν ὁ ἔμπορος πουλήσει τό ἐμπόρευμα μέ ζημία 20%, ὅμοια βρίσκουμε ζημιά 60 δρχ. καί ἑπομένως:

300 δρχ. κόστος − 60 δρχ. ζημία = 240 δρχ. πούληση.

α΄) Τό ποσό τῶν 300 δρχ. λέγεται ***ἀρχικό ποσό.*** Δηλαδή:

Ἀρχικό ποσό λέγεται τό ποσό, πάνω στό ὁποῖο ***ὑπολογίζεται ἡ αὔξηση ἤ ἡ ἐλάττωση μέ βάση τό τόσο στά ἑκατό (%).***

β΄) Τό ποσό τῶν 60 δρχ. λέγεται ***ποσοστό.*** Δηλαδή:

Ποσοστό λέγεται ἡ αὔξηση ἤ ἡ ἐλάττωση πού ἀναλογεῖ στό ἀρχικό ποσό μέ βάση τό τόσο στά ἑκατό (%).

γ΄) Τό ποσό τῶν 20 δρχ. λέγεται ***ποσοστό στά ἑκατό.*** Δηλαδή:

Ποσοστό στά ἑκατό εἶναι τό ποσοστό πού ἀντιστοιχεῖ στίς 100 μονάδες τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ.

δ΄) Τό ποσό τῶν 360 δρχ. λέγεται ***αὐξημένο ποσό,*** ἐνῶ τό ποσό τῶν 240 δρχ. λέγεται ***ἐλαττωμένο ποσό,*** ἔτσι ἔχουμε:

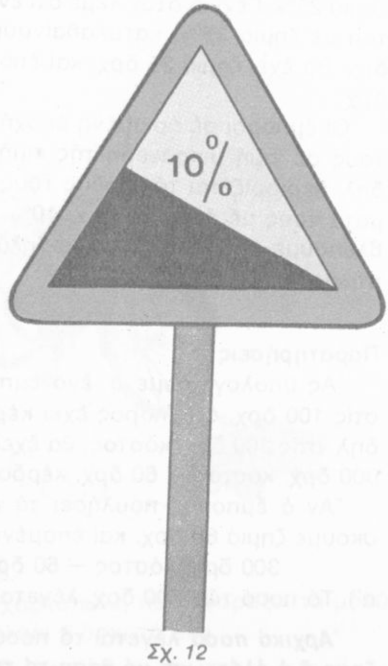
Αὐξημένο ποσό = ἀρχικό ποσό + ποσοστό

Ἐλαττωμένο ποσό = ἀρχικό ποσό − ποσοστό

Τά ποσοστά τά χρησιμοποιοῦμε σ' ὅλους τούς τομεῖς τῆς ἀνθρώπινης δραστηριότητας. Τό κέρδος ἤ ἡ ζημία στό ἐμπόριο, οἱ αὐξήσεις ἤ οἱ κρατήσεις στούς μισθούς καί τά ἡμερομίσθια, οἱ φόροι τοῦ Κράτους, ἡ αὔξηση τοῦ πληθυσμοῦ, ἡ ἀπόδοση, ἡ φύρα, τό ἀπόβαρο στά ἐμπορεύματα, τά ἀσφάλιστρα στίς ἀσφαλίσεις, οἱ προμήθειες κ.τ.λ. ὑπολογίζονται στίς 100 ἤ 1000 μονάδες τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ.

Τά ἀσφάλιστρα τῶν οἰκιῶν, καταστημάτων, πλοίων κτλ. ὑπολογίζονται συνήθως στίς 1000 δρχ. Ἔτσι ὅταν πληρώνουμε 3 δρχ. στίς χίλιες γράφουμε 3‰.

Τό σχῆμα 12 παριστάνει τό ποσοστό κατηφορικοῦ δρόμου. Ὅταν ἕνας ἄνθρωπος πουλάει ἤ ἀγοράζει ἐμπορεύματα κατ' ἐντολήν ἄλλου, λέγεται ***παραγγελιοδόχος*** καί ἡ ἀ-



Σχ. 12

μοιβή του προμήθεια, ἐνῶ ὅταν ἀγοράζει ἤ πουλάει οἰκόπεδα ἤ σπίτια λέγεται ***κτηματομεσίτης*** καί ἡ ἀμοιβή του ***μεσιτεία.***

Προβλήματα ποσοστῶν λέγονται ἐκεῖνα τά προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, πού ἡ μιά ἀπό τίς τιμές τοῦ ἑνός ποσοῦ εἶναι 100 ἤ 1000.

Στά προβλήματα τῶν ποσοστῶν τό ἀρχικό ποσό καί τό ποσοστό εἶναι πάντοτε ποσά κατ' εὐθείαν ἀνάλογα.

i) Τό ἐμπορικό κέρδος ἤ ἡ ζημία εἶναι ποσοστά μέ ἀρχικό ποσό τό κόστος ἤ τήν τιμή πουλήσεως, ἡ ὁποία ὅμως πρέπει ἀπό τήν ἀρχή νά ὁρίζεται.

ii) Τό ἀπόβαρο εἶναι ποσοστό μέ ἀρχικό ποσό τό ***μεικτό βάρος*** τοῦ ἐμπορεύματος.

Στήν κατάταξη ἑνός προβλήματος ποσοστῶν πρέπει νά προσέχουμε, ὥστε τίς τιμές τοῦ ἴδιου ποσοῦ νά τίς γράφουμε στήν ἴδια κατακόρυφη στήλη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ἀπό μνήμης)

39) Νά βρεῖτε τό 10% τῶν 500 δρχ., τῶν 800 δρχ. καί τῶν 1.800 δραχμῶν.

40) Νά βρεῖτε τό 1% τῶν 600 δρχ., τῶν 900 δρχ. καί 1.500 δραχμῶν καί ἔπειτα τό 2% τῶν δραχμῶν αὐτῶν.

41) Ὑπολογίστε τή ζημιά ἐμπορεύματος 800 δρχ. α') μέ 10% καί β') μέ 20%.

51 β') Προβλήματα στά ὁποῖα τό ποσοστό ὑπολογίζεται στό κόστος τοῦ ἐμπορεύματος

Πρόβλημα 1ο. ***(Εὕρεση τοῦ ποσοστοῦ).*** Ἕνας βιβλιοπώλης πούλησε ἕνα βιβλίο πού κοστίζει 350 δρχ. μέ κέρδος 18%. Πόσες δραχμές κέρδισε;

Λύση 1η). ***Κατάταξη:*** 100 δρχ. κόστος 18 δρχ. κέρδος
350 δρχ. κόστος χ δρχ. κέρδος

Ἔχουμε:

$$\frac{100}{350} = \frac{18}{\chi} \iff 100 \cdot \chi = 350 \cdot 8 \iff \chi = \frac{350 \cdot 18}{100} \iff \chi = 63 \text{ δρχ.}$$

Λύση 2η) Μάθαμε ὅτι ἡ γραφή 18% εἶναι συντομογραφία τοῦ κλάσματος $\frac{18}{100}$ καί γι' αὐτό τό πρόβλημα μπορεῖ νά λυθεῖ μ' ἕναν ἁπλό πολλαπλασιασμό:

$$350 \cdot \frac{18}{100} = 3{,}50 \cdot 18 = 63$$

Ἀπάντηση. Τό κέρδος του ἦταν 63 δρχ.

Πρόβλημα 2ο. ***(Εὕρεση τοῦ ποσοστοῦ στά ἑκατό (%)).*** Ἕνας βιβλιοπώλης πούλησε ἕνα βιβλίο πού κοστίζει 350 δρχ. καί κέρδισε 63 δρχ. Πόσο στά ἑκατό κέρδισε;

Κατάταξη καί Λύση: 350 δρχ. κόστος 63 δρχ. κέρδος
100 δρχ. κόστος χ δρχ. κέρδος

Ἔχουμε:

$$\frac{350}{100} = \frac{63}{\chi} \Longleftrightarrow 350 \cdot \chi = 100 \cdot 63 \Longleftrightarrow \chi = \frac{100 \cdot 63}{350} \Longleftrightarrow \chi = 18$$

Ἀπάντηση. Τό κέρδος του ἦταν 18%.

Πρόβλημα 3ο. ***(Εὕρεση τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ).*** Ἕνας βιβλιοπώλης πούλησε ἕνα βιβλίο μέ κέρδος 18% καί κέρδισε 63 δρχ. Ποιό ἦταν τό κόστος τοῦ βιβλίου;

Κατάταξη καί Λύση: 100 δρχ. κόστος 18 δρχ. κέρδος
χ δρχ. κόστος 63 δρχ. κέρδος

Ἔχουμε:

$$\frac{100}{\chi} = \frac{18}{63} \Longleftrightarrow 18 \cdot \chi = 100 \cdot 63 \Longleftrightarrow \chi = \frac{100 \cdot 63}{18} \Longleftrightarrow \chi = 350$$

Ἀπάντηση. Τό κόστος τοῦ βιβλίου ἦταν 350 δρχ.

Πρόβλημα 4ο. ***(Εὕρεση τῆς τιμῆς πουλήσεως, δηλ. τοῦ αὐξημένου ἤ ἐλαττωμένου ποσοῦ).*** Ἕνας βιβλιοπώλης πούλησε ἕνα βιβλίο πού κοστίζει 350 δρχ. μέ κέρδος 18%. Πόσες δραχμές τό πούλησε;

Λύση 1η). Ἀπό τό πρόβλημα 1ο βρήκαμε κέρδος 63 δρχ. καί ἑπομένως ἡ τιμή πουλήσεως τοῦ βιβλίου (αὐξημένο ποσό) ἦταν:

$$350 + 63 = 413 \text{ δρχ.}$$

Λύση 2η). *Κατάταξη:* 100 δρχ. κόστος 118 δρχ. πούληση
350 δρχ. κόστος χ δρχ. πούληση

Έχουμε:

$$\frac{100}{350} = \frac{118}{\chi} \Longleftrightarrow 100\cdot\chi = 350\cdot 118 \Longleftrightarrow \chi = \frac{350\cdot 118}{100} \Longleftrightarrow \chi=413$$

Απάντηση. Πούλησε τό βιβλίο 413 δρχ.

Παρατήρηση. Άν ὁ βιβλιοπώλης πούλησε τό βιβλίο μέ ζημία 18%, μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε τιμή πουλήσεως 287 δρχ.

Πρόβλημα 5ο. *(Εὕρεση τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ ἀπό τό αὐξημένο ποσό).* Ένας βιβλιοπώλης πούλησε ἕνα βιβλίο ἀντί 413 δρχ. μέ κέρδος 18%. Ποιό ἦταν τό κόστος τοῦ βιβλίου;

Λύση. Άν τό κόστος τοῦ βιβλίου ἦταν 100 δρχ. μέ τό κέρδος 18% θά τό πουλοῦσε 100 + 18 = 118 δρχ.

Κατάταξη: 100 δρχ. κόστος 118 δρχ. πούληση
χ δρχ. κόστος 413 δρχ. πούληση

Έχουμε:

$$\frac{100}{\chi} = \frac{118}{413} \Longleftrightarrow 118\cdot\chi = 100\cdot 413 \Longleftrightarrow \chi = \frac{100\cdot 413}{118} \Longleftrightarrow \chi = 350$$

Απάντηση. Τό κόστος τοῦ βιβλίου ἦταν 350 δρχ.

Πρόβλημα 6ο. *(Εὕρεση τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ ἀπό τό ἐλαττωμένο ποσό).* Ένας βιβλιοπώλης πούλησε ἕνα βιβλίο ἀντί 287 δρχ. μέ ζημία 18%. Ποιό ἦταν τό κόστος τοῦ βιβλίου;

Λύση. Άν τό κόστος τοῦ βιβλίου ἦταν 100 δρχ., μέ ζημία 18% θά τό πουλοῦσε 100 − 18 = 82 δρχ.

Κατάταξη: 100 δρχ. κόστος 82 δρχ. πούληση
χ δρχ. κόστος 287 δρχ. πούληση

Έχουμε:

$$\frac{100}{\chi} = \frac{82}{287} \Longleftrightarrow 82\cdot\chi = 100\cdot 287 \Longleftrightarrow \chi = \frac{100\cdot 287}{82} \Longleftrightarrow \chi=350$$

Απάντηση. Τό κόστος τοῦ βιβλίου ἦταν 350 δρχ.

Ὁμάδα Α΄

42) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε μιά τηλεόραση 6800 δρχ. καί τή μεταπούλησε μέ κέρδος 9% στήν τιμή τῆς ἀγορᾶς. Πόσες δραχμές κέρδισε;
43) Οἱ μισθοί τῶν δημοσίων ὑπαλλήλων αὐξήθηκαν 12% στό βασικό μισθό. Πόση αὔξηση πῆρε ἕνας ὑπάλληλος πού εἶχε βασικό μισθό 9400 δρχ.;
44) Ἕνας ἀμπελουργός ἀπό 8640 κιλά σταφύλια πῆρε 5616 κιλά κρασί. Πόσο κρασί στά ἑκατό (%) ἀπέδωσαν τά σταφύλια;
45) Ἕνας αὐτοκινητιστής ἀσφάλισε τό αὐτοκίνητό του πού κοστίζει 1300000 δρχ. ἀντί 3120 δρχ. τό χρόνο. Πόσο στά χίλια (‰) τό ἀσφάλισε;
46) Ἕνας παντοπώλης πουλάει τυρί μέ κέρδος 15% καί κερδίζει 12 δρχ. τό κιλό. Πόσες δραχμές τό ἀγοράζει τό κιλό;
47) Μεσίτης παίρνει μεσιτεία 2% καί ἀπό τήν πούληση οἰκοπέδου πῆρε μεσιτεία 17000 δρχ. Ποιά ἦταν ἡ ἀξία τοῦ οἰκοπέδου;
48) Τά 7% ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι 84. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός αὐτός;
49) Ἔμπορος ἀγοράζει ὕφασμα 350 δρχ. τό μέτρο καί τό πουλάει μέ κέρδος 22%. Πόσες δραχμές τό μέτρο τό πούλησε;
50) Λαδέμπορος ἀγοράζει τό λάδι 74,50 δρχ. τό κιλό καί τό πουλάει μέ κέρδος 12%. Πόσες δρχ. κερδίζει στό κιλό καί σέ ποιά τιμή τό πουλάει; Πόσες δρχ. θά εἰσπράξει, ἄν πουλήσει 220 κιλά;
51) Μιά νοικοκυρά ἀγόρασε 3,2 μ. ὕφασμα τῶν 450 δρχ. τό μέτρο καί τῆς ἔγινε ἔκπτωση 15%. Πόσες δρχ. πλήρωσε;
52) Ἕνα ἐμπόρευμα ἔχει καθαρό βάρος 2134 κιλά. Πόσο εἶναι τό μεικτό βάρος του, ὅταν τό ἀπόβαρο εἶναι 3%;
53) Ἠλεκτρική κουζίνα πουλήθηκε 13200 δρχ. μέ ἔκπτωση 12%. Ποιό ἦταν τό κόστος αὐτῆς καί ποιά ἡ ἔκπτωση;

53 γ΄ Προβλήματα στά ὁποῖα τά ποσοστά εἶναι δυό καί περισσότερα

Πρόβλημα 1ο. Ὁ ἀκαθάριστος μισθός ἑνός ὑπαλλήλου εἶναι 17200 δρχ. Στό μισθό του γίνονται κρατήσεις γιά τά διάφορα ἀσφαλιστικά ταμεῖα: 2% γιά τό α΄, 5% γιά τό β΄ καί 4% γιά τό γ΄ ταμεῖο. Ποιός εἶναι ὁ καθαρός μισθός τοῦ ὑπαλλήλου;

Λύση. Ὅλα τά ποσοστά ἀναφέρονται στό βασικό μισθό τῶν 17200 δρχ. καί γι' αὐτό μποροῦμε νά τά ἀθροίσουμε $2 + 5 + 4 = 11\%$ καί ἔτσι νά ὑπολογίσουμε στό ἴδιο ἀρχικό ποσό, δηλ. στίς 17200 δρχ. ἕνα μόνο ποσοστό τό 11%.

Κατάταξη: 100 δρχ. ἀκαθ. μισθός 11 δρχ. κρατήσεις
17200 δρχ. ἀκαθ. μισθός χ δρχ. κρατήσεις

Τά ποσά ἀκαθ. μισθός καί κρατήσεις εἶναι ἀνάλογα, ἄρα εἶναι

$$\frac{100}{17200} = \frac{11}{\chi} \Longleftrightarrow 100 \cdot \chi = 17200 \cdot 11 \Longleftrightarrow \chi = \frac{17200 \cdot 11}{100} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \chi = 1892 \text{ δρχ.}$$

Ἀπάντηση. Ὁ καθαρός μισθός τοῦ ὑπαλλήλου εἶναι: 17200 − 1892 = = 15308 δρχ.

Πρόβλημα 2ο. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε μιά τηλεόραση καί τήν ἐπιβάρυνε μέ ἔξοδα 15% καί ἔπειτα τή μεταπούλησε μέ κέρδος 20% στό ποσό τῶν 13800 δρχ. Πόσες δραχμές τήν ἀγόρασε;

Λύση. Ἐδῶ τά ποσοστά δέν ἀναφέρονται στό ἴδιο ἀρχικό ποσό καί γι' αὐτό ἐργαζόμαστε διαδοχικά ὡς ἑξῆς:

α΄ Κατάταξη: 100 δρχ. κόστος 120 δρχ. πούληση
ψ δρχ. κόστος 13800 δρχ. πούληση

Ἔχουμε:

$$\frac{100}{\psi} = \frac{120}{13800} \Longleftrightarrow 120\psi = 100 \cdot 13800 \Longleftrightarrow \psi = \frac{100 \cdot 13800}{120} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \psi = 11500 \text{ δρχ.}$$

β΄ Κατάταξη: 100 δρχ. ἀγορά 115 δρχ. κόστος
χ δρχ. ἀγορά 11500 δρχ. κόστος

Ἔχουμε:

$$\frac{100}{\chi} = \frac{115}{11500} \Longleftrightarrow 115 \cdot \chi = 100 \cdot 11500 \Longleftrightarrow \chi = \frac{100 \cdot 11500}{115} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \chi = 10.000$$

Ἀπάντηση: Ἀγόρασε τήν τηλεόραση 10.000 δρχ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὁμάδα Β΄

54) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε τυρί Ὁλλανδίας μέ 75 δρχ. τό κιλό. Τά

έξοδα μεταφοράς ήταν 8% καί τό μεταπούλησε μέ κέρδος 20%. Πόσες δρχ. πούλησε τό κιλό;

55) Ένας έμπορο-υπάλληλος έχει βασικό μισθό 12600 δρχ. καί έπίδομα πάνω στό μισθό του 24%. Τοῦ γίνονται όμως κρατήσεις, γιά τά διάφορα ἀσφαλιστικά ταμεῖα 8%. Ποιός εἶναι ὁ καθαρός μισθός τοῦ ὑπαλλήλου;

56) Ένας έμπορος ἀγόρασε μιά ποσότητα σιτάρι καί έδωσε 48000 δρχ. Πλήρωσε γιά μεταφορικά 12% καί γιά φόρους 3%. Πόσες δρχ. πρέπει νά πουλήσει όλο τό σιτάρι, γιά νά κερδίσει 12% στό κόστος;

57) Τό πρόβειο γάλα δίνει 24% κρέμα καί ή κρέμα 25% βούτυρο. Πόσο βούτυρο θά γίνει ἀπό 850 κιλά γάλα;

58) Ένας έμπορος πούλησε σ' ένα φίλο του ένα ραδιόφωνο μέ ζημία 5% καί πῆρε 1710 δρχ. Πόσο έπρεπε νά τό πουλήσει, γιά νά κερδίσει 20%;
(Ύπόδειξη. Θά βροῦμε πρῶτα τήν τιμή ἀγορᾶς 1800 δρχ. κτλ.).

59) Ένας έμπορος πούλησε ένα ραδιόφωνο μέ ζημία 5% καί πῆρε 1710 δρχ. Άν πουλοῦσε τό ραδιόφωνο αὐτό 2160 δρχ., πόσο στά έκατό (%) θά ήταν τό κέρδος του;

60) Ένας ψαρᾶς πούλησε τά ψάρια του μέ ζημία 10% καί πῆρε 4320 δρχ. Πόσο έπρεπε νά τά πουλήσει, γιά νά κερδίσει 25%;

61) Ένας παλαιοπώλης ἀγόρασε ένα έπιπλο 500 δρχ. καί τό μεταπούλησε μέ κέρδος 18%. Μέ τά χρήματα πού πῆρε ἀγόρασε ένα άλλο έπιπλο, πού τό μεταπούλησε μέ ζημία 10%. Τελικά ποιό εἶναι τό κέρδος του;

54 *δ΄) Προβλήματα στά όποῖα τό ποσοστό ὑπολογίζεται στήν τιμή πουλήσεως

Πρόβλημα 1ο. Ένας μικροπωλητής ἀγόρασε ένα χαλί καί έδωσε 3000 δρχ. Πόσο πρέπει νά τό πουλήσει γιά νά κερδίσει 25% στήν τιμή πουλήσεως;

Κατάταξη καί Λύση: 100 δρχ. πούληση 75 δρχ. ἀγορά
x δρχ. πούληση 3000 δρχ. ἀγορά

Έχουμε:

$$\frac{100}{x} = \frac{75}{} \Longleftrightarrow 75 \cdot x = 100 \cdot 3000 \Longleftrightarrow x = \frac{100 \cdot 3000}{75} \Longleftrightarrow x = 4000$$

Άπάντηση. Ή τιμή πουλήσεως εἶναι 4000 δρχ.

Πρόβλημα 2ο. Ένας μικροπωλητής ἀγόρασε ἕνα χαλί καί ἔδωσε 3000 δρχ. Πόσο πρέπει νά τό πουλήσει μέ ζημία 25% στήν τιμή πουλήσεως;

Κατάταξη καί Λύση: 100 δρχ. πούληση 125 δρχ. ἀγορά
χ δρχ. πούληση 3000 δρχ. ἀγορά

Ἔχουμε:

$$\frac{100}{\chi} = \frac{125}{3000} \Longleftrightarrow 125 \cdot \chi = 100 \cdot 3000 \Longleftrightarrow \chi = \frac{100 \cdot 3000}{125} \Longleftrightarrow \chi = 2400$$

Ἀπάντηση. Ἡ τιμή πουλήσεως εἶναι 2400 δρχ.

Προσοχή! α΄) Κέρδος 25% στήν τιμή πουλήσεως σημαίνει ὅτι τό ἐμπόρευμα πού πουλιέται 100 δρχ. ἔχει ἀγοραστεῖ 100 − 25 = 75 δρχ.

β΄) Ζημιά 25% στήν τιμή πουλήσεως σημαίνει ὅτι τό ἐμπόρευμα πού πουλιέται 100 δρχ. ἔχει ἀγοραστεῖ 100 + 25 = 125 δρχ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὁμάδα Α΄

62) Ἔμπορος πουλάει τηλεόραση 12000 δρχ. μέ κέρδος 20% στήν τιμή πουλήσεως. Ποιό εἶναι τό κόστος της;

63) Στήν περίοδο τῶν ἐκπτώσεων ὁ Πέτρος ἀγόρασε ἕνα κουστούμι 2880 δρχ. μέ ἔκπτωση 20% στήν τιμή πουλήσεως. Ποιά ἦταν ἡ ἀρχική τιμή πουλήσεως;

64) Ἕνας ἔμπορος πούλησε ἕνα ραδιόφωνο πού εἶχε κόστος 2250 δρχ. καί κέρδισε 750 δρχ. Πόσο % στήν τιμή πουλήσεως ἦταν τό κέρδος του;

Ὁμάδα Β΄

65) Ἕνας ἔμπορος πουλάει ἐμπόρευμα μέ κέρδος 10% στήν τιμή τῆς ἀγορᾶς. Πόσο % κερδίζει στήν τιμή πουλήσεως;

66) Ἕνας ἔμπορος πουλάει ἐμπόρευμα μέ κέρδος 10% στήν τιμή πουλήσεως. Πόσο % κερδίζει στήν τιμή τῆς ἀγορᾶς;

67) Ἕνα κατάστημα ἀγοράζει τό ὕφασμα 720 δρχ. τό μέτρο καί τό πουλάει μέ κέρδος 40% στήν τιμή τῆς ἀγορᾶς. Στήν περίοδο τῶν ἐκπτώσεων πουλάει τό ὕφασμα 25% πάνω στήν ἀναγραφόμενη τιμή. Πόσες δραχμές κερδίζει στό ἕνα μέτρο;

Ὁμάδα Β΄

68) Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε 132 κιλά πατάτες καί ἔδωσε 1782 δρχ. Πούλησε 82,5 κιλά μέ κέρδος 16% καί τά ὑπόλοιπα κιλά πούλησε μέ 10,70 δρχ. τό κιλό. Πόσες δραχμές κέρδισε;

69) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 60 μέτρα ὕφασμα μέ 500 δρχ. τό μέτρο. Τά $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ πούλησε μέ 54 δρχ. τό μέτρο καί τό ὑπόλοιπο μέ 580 δρχ. τό μέτρο. Πόσο % εἶναι τό κέρδος του;

70) Ἕνας παραγωγός πουλάει στήν ἀγορά σταφύλια, που τοῦ κοστίζουν 28000 δρχ. Τά $\frac{3}{4}$ τῆς ποσότητας πού ἔχει τά πουλάει μέ κέρδος 15% καί τά ὑπόλοιπα μέ ζημιά 7,5%. Πόσες δραχμές κέρδισε;

71) 12 στρατιῶτες ἔχουν τρόφιμα γιά 50 ἡμέρες. Ἔπειτα ἀπό 20 ἡμέρες ἦρθαν ἄλλοι 4 στρατιῶτες γιά ἐνίσχυση. Κατά πόσο στά % πρέπει νά μειωθεῖ ἡ μερίδα, γιά νά ἐπαρκέσουν τά τρόφιμα γιά τίς ὑπόλοιπες ἡμέρες;
(Εἰσιτήριες ἐξετάσεις Βαρβάκειος Σχολή 1970).

72) Ἔμπορος χονδρικῆς πουλήσεως πουλάει στούς παντοπῶλες λάδι μέ κέρδος 10% κι αὐτοί στήν κατανάλωση μέ κέρδος 15%. Ἄν οἱ παντοπῶλες πουλοῦν τό λάδι 88,55 δρχ. τό κιλό, σέ ποιά τιμή τό ἀγοράζει ὁ χονδρέμπορος ἀπό τόν παραγωγό;

Ὁμάδα Γ΄

73) Καφεκοπτεῖο ἀγοράζει τό νωπό καφέ 180 δρχ. τό κιλό. Ἄν κατά τό καβούρδισμα ὁ νωπός καφές χάνει τό $\frac{1}{5}$ τοῦ βάρους του, πόσο πρέπει νά πουλήσει τό κιλό τόν καβουρδισμένο καφέ γιά νά κερδίσει καί 20% πάνω στό κόστος;

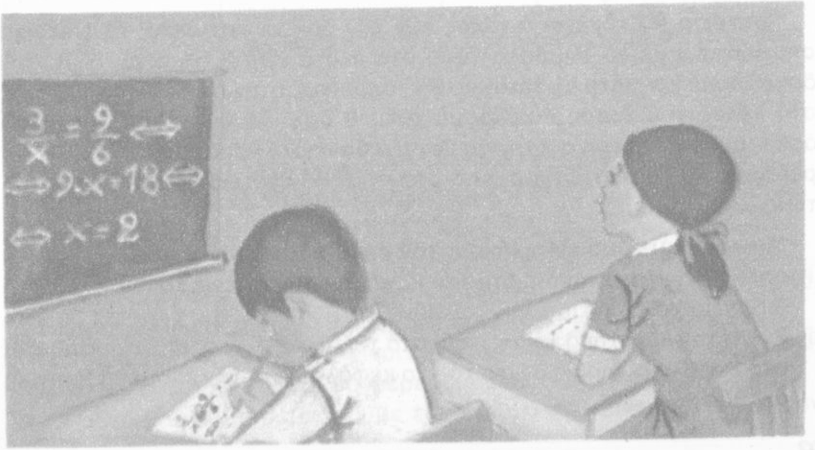
74) Ἕνα ἐμπόρευμα πουλήθηκε διαδοχικά καί ἐπί 4 φορές μέ κέρδος 10% κάθε φορά στήν τιμή τῆς ἀγορᾶς του. Ἄν τελικά τό ἐμπόρευμα πουλήθηκε 8784 δρχ., νά βρεθεῖ ἡ ἀρχική τιμή τῆς ἀγορᾶς του.

75) Τρεῖς συνεταῖροι κέρδισαν ἀπό μιά κοινή ἐργασία 14320 δρχ. Ἀπ' αὐτούς ὁ β΄ θά πάρει 20% περισσότερες δρχ. ἀπό τόν α΄ καί ὁ γ΄ 15% περισσότερες ἀπό τό β΄. Πόσες δρχ. θά πάρει ὁ καθένας; (Νά χρησιμοποιήσετε βοηθητικό ποσό).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Ποιά προβλήματα λέγονται προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν;

2) Πῶς λύνεται ἕνα πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν ὅταν τά ποσά εἶναι κατευθείαν ἀνάλογα; Πῶς ὅταν τά ποσά εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα;
3) Ποιά προβλήματα λέγονται προβλήματα τῆς σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν;
4) Σέ πόσα προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν ἀναλύεται ἕνα πρόβλημα τῆς σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν;
5) Πῶς γίνεται ἡ σύγκριση τῶν ποσῶν σ' ἕνα πρόβλημα τῆς σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν;
6) Πῶς λύνεται ἕνα πρόβλημα τῆς σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν;
7) Τί σημαίνει ὅταν λέμε ὅτι ἕνας ἔμπορος πουλάει τά ἐμπορεύματά του μέ κέρδος 20% ἤ ἀλλιῶς μέ ζημιά 10% στήν τιμή κόστους;
8) Ἕνα κατάστημα πουλεῖ τά ἐμπορεύματά του μέ ἔκπτωση 15%. Τί σημαίνει αὐτό;
9) Ποιά προβλήματα λέγονται προβλήματα ποσοστῶν;
10) Τί λέγεται ἀρχικό ποσό στά προβλήματα ποσοστῶν;
11) Τί λέγεται ποσοστό; Τί ποσοστό στά ἑκατό;
12) Πῶς ὑπολογίζεται σύντομα τό ποσοστό στήν τιμή πού κοστίζει τό ἐμπόρευμα;
13) Ποιά μέθοδο χρησιμοποιοῦμε γιά νά λύσουμε ἕνα πρόβλημα ποσοστῶν;
14) Τί σημαίνει ὅταν λέμε ὅτι ἕνας ἔμπορος πουλάει τά ἐμπορεύματά του μέ κέρδος 20% στήν τιμή πουλήσεως ἤ ἀλλιῶς μέ ζημιά 10%;
15) Τί λέγεται αὐξημένο ποσό καί τί ἐλαττωμένο ποσό στά προβλήματα ποσοστῶν;



ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ζ΄

Ο ΤΟΚΟΣ

56 **1. Ἡ ἔννοια τοῦ τόκου. Ὁρισμοί**

Πολλές φορές οἱ ἄνθρωποι βρίσκονται στήν οἰκονομική ἀνάγκη νά δανείζονται χρήματα ἀπό ἄλλους πού κερδίζουν πολλά χρήματα ἀπό τήν ἐργασία τους, ἤ ἀπό τίς Τράπεζες κτλ. μέ τήν ὑποχρέωση νά τά ἐπιστρέψουν, ἔπειτα ἀπό ἕνα ὁρισμένο χρονικό διάστημα. Ἐκεῖνος πού δανείζει χρήματα, λέγεται ***δανειστής*** καί ἐκεῖνος πού δανείζεται, λέγεται ***ὀφειλέτης***. Ὁ ὀφειλέτης, κατά τήν ἐπιστροφή τῶν χρημάτων πού δανείστηκε ***(δάνειο)*** θά πληρώσει κι ἕνα ἄλλο χρηματικό ποσό, τό ὁποῖο θ' ἀποτελεῖ τό κέρδος τοῦ δανειστῆ. Τό κέρδος τοῦ δανειστῆ λέγεται ***τόκος.***

Οἱ ἐργαζόμενοι, τά χρήματα πού τούς περισσεύουν δηλ. τίς οἰκονομίες τους, ὅπως λέμε, τίς καταθέτουν στίς Τράπεζες ἤ στό Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο καί ἔπειτα ἀπό ὁρισμένο χρόνο θά πάρουν ἕνα κέρδος, πού καί αὐτό λέγεται τόκος. Ὥστε:

Τόκος (Τ) λέγεται τό κέρδος, πού παίρνει ἐκεῖνος πού δανείζει ἤ καταθέτει χρήματα.

Κεφάλαιο (Κ) λέγεται τό δανειζόμενο χρηματικό ποσό ἤ τό ποσό πού κατατίθεται στήν Τράπεζα.

Χρόνος (Χ) λέγεται ἡ χρονική διάρκεια τοῦ δανείου.

Ἐπιτόκιο (Ε) λέγεται ὁ τόκος τῶν 100 δρχ. σ' ἕνα ἔτος. Τό ἐπιτόκιο σημειώνεται μέ τό σύμβολο τόσο στά ἑκατό (%). Ἔτσι ὅταν λέμε, ὅτι δανείζουμε χρήματα μέ ἐπιτόκιο 8%, σημαίνει, ὅτι γιά κεφάλαιο 100 δρχ. στό τέλος τοῦ ἔτους παίρνουμε τόκο 8 δρχ. Τό ὕψος τοῦ ἐπιτοκίου ὁρίζεται μέ ἰδιαίτερη συμφωνία μεταξύ δανειστῆ καί ὀφειλέτη. Δέν μπορεῖ ὅμως νά εἶναι ἀνώτερο, ἀπό ὅσο ὁρίζει ὁ σχετικός Νόμος τοῦ Κράτους.

Διακρίνουμε δύο εἴδη τόκου: τόν ***ἁπλό*** καί τό ***σύνθετο.***

i) ἁπλός λέγεται ὁ τόκος, ὅταν τό κεφάλαιο παραμένει τό ἴδιο σ' ὅλη τή διάρκεια τοῦ δανείου.

ii) Σύνθετος λέγεται ὁ τόκος, πού στό τέλος κάθε χρονιᾶς, προστίθεται στό κεφάλαιο, γιά νά δώσει τό νέο κεφάλαιο γιά τήν ἑπόμενη χρονική μονάδα.

Τότε λέμε ὅτι τό κεφάλαιο ***ἀνατοκίζεται.*** Αὐτό ἀκριβῶς γίνεται μέ τίς καταθέσεις μας στήν Τράπεζα.

Στά παρακάτω μαθήματα θά ἀσχοληθοῦμε μόνο μέ προβλήματα ἁπλοῦ τόκου.

Προσέξτε! Στά προβλήματα τοῦ ἁπλοῦ τόκου οἱ τόκοι θεωροῦνται ὅτι ἀποσύρονται κατά τήν ἡμέρα τοῦ ὑπολογισμοῦ τους καί ἔτσι τό κεφάλαιο μένει σταθερό σ' ὅλη τή διάρκεια τοῦ δανείου.

Ἕνα παράδειγμα ἁπλοῦ τόκου εἶναι τά δάνεια οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως τοῦ τόπου, πού κάνει τό Κράτος μας ἀπό τούς πολίτες του (ὁμολογιακά δάνεια). Στά δάνεια αὐτά τό κεφάλαιο εἶναι τό ἴδιο σ' ὅλη τή διάρκειά τους.

Στά προβλήματα λοιπόν τοῦ τόκου παρουσιάζονται τέσσερα ποσά: α΄) Τό Κεφάλαιο Κ. β΄) Ὁ Τόκος Τ. γ΄) Τό ἐπιτόκιο Ε. δ΄) Ὁ χρόνος Χ.

Ἐπειδή συνήθως δίνονται τά τρία ποσά καί ζητεῖται τό τέταρτο, προκύπτει, ὅτι ἔχουμε τέσσερα κύρια εἴδη προβλημάτων τόκου. Προβλήματα στά ὁποῖα ζητεῖται 1ο ὁ τόκος, 2ο τό κεφάλαιο, 3ο τό ἐπιτόκιο καί 4ο ὁ χρόνος.

2. Πῶς βρίσκουμε τόν τύπο τοῦ τόκου

Πρόβλημα (παράδειγμα). Πόσο τόκο θά μᾶς φέρουν 5000 δρχ., πού ἔχουμε καταθέσει στήν Τράπεζα γιά 3 ἔτη μέ ἐπιτόκιο 8%;

Κ = 5000 δρχ.
Ε = 8%
Χ = 3 ἔτη
Τ = ;

Λύση. Στόν πίνακα, πού γράφουμε παραπλεύρως, ἐκφράζουμε, ὅτι τά ποσά Κ, Ε, Χ εἶναι γνωστά καί ἄγνωστο ποσό εἶναι ὁ τόκος Τ. Ἄς λύσουμε τό πρόβλημα αὐτό μέ τή σύνθετη μέθοδο τῶν τριῶν:

Κατάταξη:

Πρῶτες τιμές: 100 δρχ. Κ σέ 1 ἔτος Χ φέρουν 8 δρχ. τόκο

Δεύτερες τιμές: 5000 δρχ. Κ σέ 3 ἔτη Χ φέρουν Τ δρχ. τόκο

Σύγκριση ποσῶν:

i) Τά ποσά ***Κεφάλαιο καί Τόκος*** εἶναι ἀνάλογα, γιατί τό διπλάσιο κεφάλαιο, στόν ἴδιο χρόνο θά φέρει διπλάσιο τόκο κ.τ.λ.

ii) Τά ποσά ***Χρόνος καί Τόκος*** εἶναι κι αὐτά ἀνάλογα, γιατί τό ἴδιο κεφάλαιο, σέ διπλάσιο χρόνο, θά φέρει διπλάσιο τόκο κ.τ.λ.

Γι' αὐτό θά πολλαπλασιάσουμε τόν ἀριθμό πού εἶναι πάνω ἀπό τόν ἄγνωστο, μέ τούς λόγους, πού σχηματίζουν οἱ δεύτερες τιμές τῶν δύο ἄλλων ποσῶν πρός τίς πρῶτες τους τιμές, δηλαδή

$$T = 8 \cdot \frac{5000}{100} \cdot \frac{3}{1} \text{ ἤ } \boldsymbol{T = \frac{5000 \cdot 8 \cdot 3}{100} = 1200} \textbf{ δρχ.}$$

Ἄρα γιά νά βροῦμε τόν τόκο, πολλαπλασιάσαμε τό κεφάλαιο (Κ = 5000 δρχ.) μέ τό ἐπιτόκιο (Ε = 8%) καί μέ τό χρόνο (Χ = 3 ἔτη) καί τό γινόμενό τους διαιρέσαμε μέ τό 100, δηλ.

$$T = \frac{K \cdot E \cdot X}{100} \quad (1) \quad (\text{Χ σέ ἔτη}).$$

Στήν ἴδια ἰσότητα (1) θά καταλήξουμε, ὅσα ὅμοια προβλήματα κι ἄν λύσουμε. Αὐτή ἡ ἰσότητα λέγεται ***τύπος τοῦ τόκου.***

Ἄν ὁ χρόνος δανεισμοῦ δίνεται σέ μῆνες μ, τότε, ἐπειδή οἱ μ μῆνες $= \frac{\mu}{12}$ ἔτη, ὁ τύπος (1) γίνεται:

$$T = \frac{K \cdot E \cdot \frac{\mu}{12}}{100} \Longrightarrow T = \frac{K \cdot E \cdot \mu}{1200} \quad \textbf{(2) (μ μῆνες).}$$

57 Ἄν ὁ χρόνος δανεισμοῦ δίνεται σέ ἡμέρες η, τότε ἐπειδή, οἱ η ἡμέρες $= \frac{\eta}{360}$ ἔτη, ὁ τύπος (1) γίνεται:

$$T = \frac{K \cdot E \cdot \frac{\eta}{360}}{100} \Longrightarrow T = \frac{K \cdot E \cdot \eta}{36000} \quad \textbf{(3) (η ἡμέρες).}$$

(Θεωροῦμε κάθε μῆνα μέ 30 ἡμέρες καί τό ἐμπορικό ἔτος μέ 360 ἡμέρες). Ἔτσι, ἔχουμε:

$$\boxed{T = \frac{K \cdot E \cdot X}{100} \ (1) \quad T = \frac{K \cdot E \cdot X}{1200} \ (2) \quad T = \frac{K \cdot E \cdot X}{36000} \ (3)}$$

ὅπου τό Χ ἐκφράζει: ἔτη στόν τύπο (1), μῆνες στόν τύπο (2), καί ἡμέρες στόν τύπο (3).

Ὥστε: ***Γιά νά βροῦμε τόν τόκο, πολλαπλασιάζουμε τίς τιμές τῶν τριῶν δεδομένων ποσῶν, ἤτοι κεφαλαίου Κ, ἐπιτοκίου Ε καί χρόνου Χ καί τό γινόμενό τους διαιροῦμε μέ τό 100 ἤ μέ τό 1200 ἤ μέ τό 36000, ἐφόσον ὁ χρόνος ἐκφράζεται ἀντίστοιχα σέ ἔτη ἤ σέ μῆνες ἤ σέ ἡμέρες.***

Παρατήρηση. Ἄν ὁ χρόνος Χ δίνεται ὡς συμμιγής ἀριθμός θά τόν τρέψουμε σέ μονάδες τῆς τελευταίας τάξεώς του καί θά ἐργασθοῦμε, ὅπως στά παρακάτω παραδείγματα.

Ἐφαρμογές καί παραδείγματα

Πρόβλημα 1ο. Ποιός εἶναι ὁ τόκος, πού δίνει κεφάλαιο 8400 δρχ., ἄν τοκιστεῖ μέ 7% γιά 2 ἔτη 6 μῆνες;

Κ = 8400 δρχ.
Ε = 7%
Χ = 2 ἔτ. 6 μῆνες =
= 30 μῆνες
Τ = ;

Λύση. Ἀντικαθιστοῦμε τά δεδομένα στόν τύπο (2) (ὁ χρόνος ἐκφράζεται σέ μῆνες) καί ἔχουμε:

$$T = \frac{8400 \cdot 7 \cdot 30}{1200} = 7 \cdot 7 \cdot 30 = 49 \cdot 30 = 1470$$

Ἀπάντηση. Ὁ ζητούμενος τόκος εἶναι 1470 δρχ.

Πρόβλημα 2ο. Πόσο τόκο φέρνουν 11200 δρχ., ὅταν τοκισθοῦν γιά 2 μῆνες 15 ἡμέρες μέ 9%;

Κ = 11200 δρχ.
Ε = 9%
Χ = 2 μ. 15 ἡμ. =
= 75 ἡμ.
Τ = ;

Λύση. Ἀντικαθιστοῦμε τά δεδομένα στόν τύπο (3) (ὁ χρόνος ἐκφράζεται σέ ἡμέρες) καί ἔχουμε:

$$T = \frac{11200 \cdot 9 \cdot 75}{36000} \Longleftrightarrow T = \frac{112 \cdot 75}{40} = \frac{112 \cdot 15}{8} =$$

$$= 14 \cdot 15 = 210$$

Ἀπάντηση. Ὁ ζητούμενος τόκος εἶναι 210 δρχ.

Παρατήρηση. Τά παραπάνω προβλήματα 1ο καί 2ο μποροῦν νά λυθοῦν, ὅπως καί τό πρόβλημα (παράδειγμα), μέ τή σύνθετη μέθοδο τῶν τριῶν, φτάνει νἄχουμε ὑπόψη, ὅτι ὁ τόκος Τ εἶναι ἀνάλογος μέ καθένα ἀπό τά ἄλλα τρία συμμεταβλητά ποσά Κ, Ε, Χ, ὅταν τά δύο ὑπόλοιπα μένουν σταθερά.

Τά ποσά Κ, Ε, Χ εἶναι ἀνά δύο ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὅταν τό τρίτο ἀπό αὐτά καί ὁ τόκος θεωρηθοῦν σταθερά.

Σημείωση. Ὁ τύπος (1) τοῦ τόκου μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς ἑξῆς:

$$T = \frac{K}{100} \cdot E \cdot X$$

πού σημαίνει ὅτι, γιά νά βροῦμε τόν τόκο, ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σέ ἔτη, πολλαπλασιάζουμε τό ἑκατοστό τοῦ Κεφαλαίου μέ τό ἐπιτόκιο καί μέ τό χρόνο. Αὐτός ὁ κανόνας μᾶς ἐπιτρέπει νά λύνουμε νοερά μερικά προβλήματα τόκου.

Ὁμάδα Α΄

1) Νά βρεῖτε μέ τό νοῦ σας, πόσο τόκο θά φέρουν:
   α΄) 4000 δρχ. γιά 2 ἔτη μέ 6%
   β΄) 1500 δρχ. γιά 3 ἔτη μέ 8%
   γ΄) 8000 δρχ. γιά 4 ἔτη μέ 7,5%
2) Ἕνας ἔμπορος δανείστηκε ἀπό τήν Ἐμπορική Τράπεζα 150000 δρχ. γιά 3 μῆνες μέ ἐπιτόκιο 8%. Πόσο τόκο θά πληρώσει;
3) Πόσο τόκο φέρνει κεφάλαιο 10800 δρχ. μέ ἐπιτόκιο 6,75%, σέ 1 ἔτος καί 4 μῆνες;
4) Δανείστηκε κάποιος στίς 25 Ἰουνίου 1978 80000 δρχ. μέ ἐπιτόκιο 12%. Πόσο τόκο θά πληρώσει, ἄν ξοφλήσει τό χρέος του στίς 5 Δεκεμβρίου 1978;
5) Ἕνας γεωργός πούλησε 635 κιλά σιτάρι μέ 12,60 δρχ. τό κιλό. Ἀπό τά χρήματα πού πῆρε, τά $\frac{2}{3}$ τόκισε μέ 6% καί τά ὑπόλοιπα μέ 9%. Πόσο τόκο θά λάβει καί ἀπό τά δυό μέρη ὕστερα ἀπό 4 μῆνες καί 6 ἡμέρες;
6) Ἕνας κτηνοτρόφος πῆρε ἀπό τήν πούληση ἀρνιῶν 90000 δρχ. Δάνεισε τά $\frac{2}{5}$ τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ σ' ἕνα χωριανό του μέ 6% καί τό ὑπόλοιπο κατέθεσε στήν Τράπεζα μέ 8%. Πόσο τόκο θά πάρει καί ἀπό τά δυό μέρη ὕστερα ἀπό 2 ἔτη 3 μῆνες 10 ἡμέρες;

Ὁμάδα Β΄

7) Κεφάλαιο 48000 δρχ., χωρίστηκε σέ δύο μέρη, τό δεύτερο μέρος εἶναι τά $\frac{7}{9}$ τοῦ πρώτου. Τό πρῶτο μέρος τοκίσθηκε μέ 9% καί τό δεύτερο μέρος μέ 10%. Πόση θά εἶναι ἡ διαφορά τῶν τόκων τους ὕστερα ἀπό 2 ἔτη 6 μῆνες;
8) Τά $\frac{5}{6}$ ἑνός κεφαλαίου εἶναι μεγαλύτερα ἀπό τά $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ κατά 600 δρχ. Τά $\frac{2}{5}$ τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ τοκίζονται μέ 6% γιά 2 ἔτη 4 μῆνες. Νά βρεῖτε τόν τόκο, πού ἀντιστοιχεῖ στό μέρος αὐτό.

58

3. Πῶς βρίσκουμε τό κεφάλαιο

Τό κεφάλαιο βρίσκεται μέ ἀντικατάσταση τῶν δεδομένων τιμῶν τῶν ποσῶν Τ, Ε, Χ, στόν τύπο (1) ἤ (2), ἤ (3), ἐφόσον ὁ χρόνος δίνεται ἀντίστοιχα σέ ἔτη ἤ μῆνες ἤ ἡμέρες.

Ἡ ἀντικατάσταση αὐτή μᾶς ὁδηγεῖ στήν ἐπίλυση μιᾶς ἁπλῆς ἐξισώσεως α΄ βαθμοῦ μέ ἄγνωστο τό κεφάλαιο Κ.

Πρόβλημα 1ο. Ποιό κεφάλαιο τοκιζόμενο μέ 7,5% σέ 4 ἔτη φέρνει τόκο 1350 δρχ.;

Ε = 7,5%
Χ = 4 ἔτη
Τ = 1350 δρχ.
Κ = ;

Λύση. Ἀντικαθιστοῦμε τά δεδομένα στόν τύπο (1) καί ἔχουμε τήν παρακάτω ἐξίσωση καί τή λύση της

$$1350 = \frac{K \cdot 7{,}5 \cdot 4}{100} \Longleftrightarrow 1350 = \frac{\kappa \cdot 3}{10} \Longleftrightarrow 13500 =$$

$$= 3 \cdot \kappa \Longleftrightarrow K = \frac{13500}{3} \Longleftrightarrow K = 4500$$

Ἀπάντηση. Τό ζητούμενο κεφάλαιο εἶναι 4500 δρχ.

Πρόβλημα 2ο. Ποιό κεφάλαιο τοκιζόμενο μέ 9% σέ 1 ἔτος 4 μῆνες φέρνει τόκο 1500 δρχ.;

Ε = 9%
Χ = 1 ἔτ. 4 μῆν. =
= 16 μῆν.
Τ = 1500 δρχ.
Κ = ;

Λύση. Ἀντικαθιστοῦμε τά δεδομένα στόν τύπο (2) καί ἔχουμε τήν παρακάτω ἐξίσωση καί τή λύση της.

$$1500 = \frac{K \cdot 9 \cdot 16}{1200} \Longleftrightarrow 1500 = \frac{K \cdot 3 \cdot 4}{100} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 1500 \cdot 100 = 12\ K \Longleftrightarrow K = 150000 :$$

$$: 12 \Longleftrightarrow K = 12500$$

Ἀπάντηση. Τό ζητούμενο κεφάλαιο εἶναι 12500 δρχ.

Πρόβλημα 3ο. Ποιό κεφάλαιο πρέπει νά τοκίσουμε μέ 9%, γιά νά πάρουμε σέ 2 ἔτη 2 μῆνες 20 ἡμέρες τόκο 5000 δρχ.;

Ε = 9%
Χ = 2 ἔτ. 2 μῆν.
20 ἡμ. = 800 ἡμ.
Τ = 5000 δρχ.
Κ = ;

Λύση. Ἀντικαθιστοῦμε τά δεδομένα στόν τύπο (3) καί ἔχουμε τήν παρακάτω ἐξίσωση καί τή λύση της:

$$5000 = \frac{K \cdot 9 \cdot 800}{36000} \Longleftrightarrow 5000 = \frac{\kappa}{5} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow K = 25000$$

Ἀπάντηση. Τό ζητούμενο κεφάλαιο εἶναι 25000 δρχ.

Ὁμάδα Α΄

9) Ποιό κεφάλαιο τοκιζόμενο μέ 9% σέ 8 μῆνες φέρνει τόκο 180 δρχ.;
10) Ποιό κεφάλαιο τοκιζόμενο μέ 10% σέ 40 ἡμέρες φέρνει τόκο 90 δρχ.;
11) Ἕνας ἀγροτικός συνεταιρισμός ἀγόρασε ὁμολογίες τῶν 1000 δρχ. μέ ἐπιτόκιο 7,5% καί κάθε τριμηνία παίρνει τόκο 750 δρχ. Πόσες ὁμολογίες ἀγόρασε;
12) Ποιό κεφάλαιο, ὅταν τοκιστεῖ μέ 8,75% σέ 3 ἔτη 4 μῆνες φέρνει τόν ἴδιο τόκο, πού φέρνουν 42000 δρχ. μέ 10% σέ 4 ἔτη 2 μῆνες;

Ὁμάδα Β΄

13) Τά $\frac{5}{9}$ ἑνός κεφαλαίου τοκίζονται μέ 9% καί σέ 1 ἔτος 8 μῆνες φέρνουν τόκο 4500 δρχ. Πόσο τόκο φέρνει τό ὑπόλοιπο κεφάλαιο, ἄν τοκιστεῖ μέ 8% σέ 1 ἔτος 3 μῆνες;
14) Ἕνας κτηματίας μέ τά $\frac{3}{8}$ τῶν χρημάτων του ἀγόρασε ἕνα χωράφι μέ 306 δρχ. τό τετραγωνικό μέτρο. Τά ὑπόλοιπα χρήματά του τόκισε μέ 9% καί παίρνει τόκο σέ κάθε τριμηνία 5370,30 δρχ. Νά βρεῖτε, πόσα τετραγ. μέτρα ἦταν τό χωράφι.

59

4. Πῶς βρίσκουμε τό ἐπιτόκιο

Τό ἐπιτόκιο βρίσκεται μέ ἀντικατάσταση τῶν δεδομένων τιμῶν τῶν ποσῶν Κ, Τ, Χ στόν τύπο (1) ἤ (2) ἤ (3), ἐφόσον ὁ χρόνος δίνεται ἀντίστοιχα σέ ἔτη, μῆνες, ἡμέρες. Ἔτσι ἔχουμε νά ἐπιλύσουμε μιά ἐξίσωση μέ ἄγνωστο τό ἐπιτόκιο Ε.

Πρόβλημα 1ο. Μέ ποιό ἐπιτόκιο πρέπει νά τοκιστοῦν 3200 δρχ., γιά νά φέρουν σέ 3 ἔτη τόκο 960 δρχ.;

Κ = 3200 δρχ. Τ = 960 δρχ. Χ = 3 ἔτη Ε = ;

Λύση. Ἀντικαθιστοῦμε τά δεδομένα στόν τύπο (1) καί ἔχουμε τήν παρακάτω ἐξίσωση καί τή λύση της:

$$960 = \frac{3200 \cdot E \cdot 3}{100} \iff 960 = 96E \iff E = \frac{960}{96} \iff$$
$$\iff E = 10$$

Ἀπάντηση. Τό ζητούμενο ἐπιτόκιο εἶναι 10%.

Πρόβλημα 2ο. Μέ ποιό ἐπιτόκιο πρέπει νά τοκιστοῦν 6000 δρχ., γιά νά φέρουν σέ 2 ἔτη 6 μῆνες τόκο 1350 δρχ.;

Κ = 6000 δρχ.
Τ = 1350 δρχ.
Χ = 2 ἔτη 6 μῆν. = = 30 μῆν.
Ε = ;

Λύση. Ἀντικαθιστοῦμε τά δεδομένα στόν τύπο (2) καί ἔχουμε τήν παρακάτω ἐξίσωση καί τή λύση της.

$$1350 = \frac{6000 \cdot E \cdot 30}{1200} \Longleftrightarrow 1350 = 150 \cdot E \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow E = 1350 : 150 \Longleftrightarrow E = 9$$

Ἀπάντηση. Τό ζητούμενο ἐπιτόκιο εἶναι 9%.

Πρόβλημα 3ο. Μέ ποιό ἐπιτόκιο πρέπει νά τοκιστοῦν 81000 δρχ., γιά νά φέρουν σέ 1 μῆνα καί 18 ἡμέρες τόκο 540 δρχ.;

Κ = 81000 δρχ.
Τ = 540 δρχ.
Χ = 1 μῆν. 18 ἡμ. = = 48 ἡμέρ.
Ε = ;

Λύση. Ἀντικαθιστοῦμε τά δεδομένα στόν τύπο (3) καί ἔχουμε τήν παρακάτω ἐξίσωση καί τή λύση της.

$$540 = \frac{81000 \cdot E \cdot 48}{36000} \Longleftrightarrow 540 = 108 \cdot E \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow E = 540 : 108 = 5$$

Ἀπάντηση. Τό ζητούμενο ἐπιτόκιο εἶναι 5%

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὁμάδα Α΄

15) Μέ ποιό ἐπιτόκιο πρέπει νά τοκιστοῦν 38800 δρχ., γιά νά φέρουν σέ 4 μῆνες τόκο 970 δρχ.;

16) Ἕνας ἔμπορος δανείστηκε ἀπό τήν Τράπεζα 116000 δρχ. καί ὕστερα ἀπό 26 ἡμέρες ξόφλησε τό χρέος του μέ 117200 δρχ. Μέ ποιό ἐπιτόκιο δανείστηκε τά χρήματα;

17) Μέ ποιό ἐπιτόκιο πρέπει νά τοκιστεῖ κεφάλαιο 24600 δρχ., ὥστε σέ 1 ἔτος 8 μῆνες, νά φέρει τόσο τόκο, ὅσο φέρνουν οἱ 13120 δρχ. σέ 2 ἔτη 6 μῆνες μέ 7,5%;

Ὁμάδα Β΄

18) Τά $\frac{3}{8}$ ἑνός κεφαλαίου τοκίζονται μέ 12% καί φέρνουν τόκο 510 δρχ.

σέ 1 ἔτος καί 5 μῆνες. Μέ ποιό ἐπιτόκιο πρέπει νά τοκιστεῖ τό ὑπόλοιπο κεφάλαιο, γιά νά φέρει στόν ἴδιο χρόνο τόκο 680 δρχ.;

19) Ἕνας δανείζει 3000 δρχ. μέ 6% καί 5000 δρχ. μέ 8% γιά ἕνα ἔτος. Μέ ποιό ἐπιτόκιο πρέπει νά καταθέσει τίς 8000 δρχ. σέ μιά Τράπεζα, γιά νά πάρει τόν ἴδιο τόκο σ' ἕνα ἔτος;

20) Ἕνα κεφάλαιο τοκίστηκε γιά 1 ἔτος 8 μῆνες καί ἔγινε μέ τούς τόκους του 21000 δρχ. Μέ ποιό ἐπιτόκιο τοκίστηκε, ἄν ὁ τόκος εἶναι τό $\frac{1}{6}$ τοῦ κεφαλαίου;

60 5. Πῶς βρίσκουμε τό χρόνο

Ὁ χρόνος βρίσκεται μέ ἀντικατάσταση τῶν τιμῶν τῶν δεδομένων ποσῶν Κ, Ε, Τ στόν τύπο (1) ἤ (2) ἤ (3), ἐφόσον ζητᾶμε τό χρόνο ἀντίστοιχα σέ ἔτη ἤ σέ μῆνες ἤ σέ ἡμέρες. Ἔτσι ἔχουμε νά ἐπιλύσουμε μιά ἐξίσωση α΄ βαθμοῦ μέ ἄγνωστο τό χρόνο Χ.

Πρόβλημα 1ο. Σέ πόσο χρόνο κεφάλαιο 22800 δρχ., τοκιζόμενο μέ 8,5% φέρνει τόκο 646 δρχ.;

Κ = 22800 δρχ.
Ε = 8,5%
Τ = 646 δρχ.
Χ = ;

Λύση. Ἀντικαθιστοῦμε τά δεδομένα στόν τύπο (1) καί ἔχουμε τήν παρακάτω ἐξίσωση καί τή λύση της:

$$646 = \frac{22800 \cdot 8,5 \cdot X}{100} \iff 646 = 228 \cdot 8,5 \cdot X \iff$$

$$\iff 646 = 1938 \cdot X \iff X = \frac{646}{1938} \iff X = \frac{1}{3}$$

δηλ. $\frac{1}{3}$ ἔτη = 4 μῆνες.

Τό ἴδιο ἀποτέλεσμα βρίσκουμε, ἄν χρησιμοποιήσουμε καί τόν τύπο (2).

Ἀπάντηση. Ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι 4 μῆνες.

Παρατήρηση. Ἄν ὁ χρόνος βρεθεῖ σέ κλάσμα ἔτους, μετατρέπουμε τό συγκεκριμένο αὐτό ἀριθμό σέ συμμιγή (Βλ. Συμπλήρωμα συμμιγῶν: ἄσκηση 306 Α΄ Κεφ.).

Πρόβλημα 2ο. Σέ πόσο χρόνο κεφάλαιο 7200 δρχ., τοκιζόμενο μέ 10% γίνεται μέ τούς τόκους του 8000 δρχ.;

K = 7200 δρχ. K + T = 8000 δρχ. (T = 800 δρχ.) E = 10% X = ;

Λύση. Βοηθητική πράξη: $7200 + T = 8000 \Longleftrightarrow T = 8000 - 7200$ καί $T = 800$ δρχ. Ἀντικαθιστοῦμε τίς τιμές τῶν Κ, Ε, Τ στόν τύπο (1) καί ἔχουμε τήν παρακάτω ἐξίσωση καί τή λύση της:

$$800 = \frac{7200 \cdot 10 \cdot X}{100} \Longleftrightarrow 800 = 720 \cdot X \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow X = \frac{800}{720} \Longleftrightarrow X = \frac{10}{9}, \quad \frac{10}{9} \text{ ἔτη} = 1 \text{ ἔτος } 1 \text{ μῆν. } 10 \text{ ἡμέρ.}$$

Παρατήρηση. Τό ἴδιο ἀποτέλεσμα βρίσκουμε, ἄν χρησιμοποιήσουμε τόν τύπο (3), δηλ.

$$800 = \frac{7200 \cdot 10 \cdot X}{36000} \Longleftrightarrow 800 = 2X \Longleftrightarrow X = 400.$$

Εἶναι 400 ἡμερ. = 1 ἔτος 1 μῆν. 10 ἡμέρ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὁμάδα Α΄

21) Σέ πόσο χρόνο κεφάλαιο 60000 δρχ., τοκιζόμενο, μέ 8,75% θά φέρει τόκο 17500 δρχ.;
22) Σέ πόσο χρόνο κεφάλαιο 42000 δρχ., τοκιζόμενο μέ 10% γίνεται μέ τούς τόκους του 59500 δρχ.;
23) Ἕνας βιοτέχνης δανείστηκε 36000 δρχ. μέ 10,5%, στίς 16 Νοεμβρίου 1978 πῆγε νά ξοφλήσει τό χρέος του καί πλήρωσε 38520 δρχ. Πότε ἔγινε τό δάνειο;
24) Σέ πόσα ἔτη ἕνα κεφάλαιο 5000 δρχ. τοκιζόμενο μέ 10% διπλασιάζεται;

Ὁμάδα Β΄

25) Σέ πόσο χρόνο κεφάλαιο 17500 δρχ. τοκιζόμενο μέ 9% φέρνει τόκο ἴσο μέ τά $\frac{3}{5}$ τοῦ τόκου, πού φέρνει κεφάλαιο 52500 δρχ., πού τοκίζεται μέ 6% σέ 3 μῆνες καί 10 ἡμέρες;
26) Ἑνός κεφαλαίου τά $\frac{5}{11}$ τοκιζόμενα μέ 8% σέ 10 μῆνες φέρνουν τόκο 2020 δρχ. Νά ὑπολογίσετε, γιά πόσο χρόνο πρέπει νά τοκιστεῖ τό ὑπόλοιπο κεφάλαιο μέ 5%, γιά νά φέρει τόκο τό 0,9 τοῦ τόκου τοῦ πρώτου μέρους.

61 Ἀνακεφαλαίωση

Γιά νά λύσουμε τά προβλήματα τοῦ τόκου χρησιμοποιήσαμε τόν τύπο

$$T = \frac{K \cdot E \cdot X}{100} \text{ (X σέ ἔτη)}$$

$$\text{ἤ } T = \frac{K \cdot E \cdot X}{1200} \text{ (X σέ μῆνες)}$$

$$\text{ἤ } T = \frac{K \cdot E \cdot X}{36000} \text{ (X σέ ἡμέρες).}$$

Ὁ τύπος αὐτός μᾶς ὁδηγεῖ σέ μιά ***ἐξίσωση α΄ βαθμοῦ μ' ἕναν ἄγνωστο,*** ἄν ἀντικαταστήσουμε σ' αὐτόν τίς τιμές τριῶν ἀπό τά τέσσερα ποσά του. Μέ τή βοήθεια τῶν ἁπλῶν ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ ἐπιλύουμε τά προβλήματα τοῦ τόκου ἁπλούστερα καί συντομότερα ἀπό ὅ,τι μέ τή σύνθετη μέθοδο τῶν τριῶν.

Μερικές χρήσιμες συμβουλές

1ο. Ὅταν ἔχετε νά λύσετε ἕνα πρόβλημα τόκου, πρῶτα νά σημειώνετε τά δεδομένα (γνωστά) καί τό ζητούμενο (ἄγνωστο) σ' ἕνα μικρό πίνακα καί ὕστερα νά προχωρεῖτε στήν ἀντικατάσταση τῶν τιμῶν τῶν δεδομένων ποσῶν στήν κατάλληλη μορφή τοῦ τύπου.

2ο. Νά ἁπλοποιεῖτε, ὅσο εἶναι δυνατό, τίς κλασματικές παραστάσεις, πρίν ἀρχίσετε νά ἐκτελεῖτε τίς ἀριθμητικές πράξεις, πού σημειώνονται στόν τύπο δηλ. πρίν ἐπιλύσετε τήν ἐξίσωση.

3ο. Ἡ ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως γίνεται μέ τούς γνωστούς τρόπους πού ξέρουμε ἀπό τό Δ΄ Κεφ.

ΓΕΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

Ὁμάδα Β΄

27) Ἕνας γεωργός πούλησε 1000 κιλά ρύζι μέ 28 δρχ. τό κιλό. Τί τόν συμβουλεύετε; νά καταθέσει ὅλα τά χρήματά του στήν Α.Τ.Ε. γιά 1 ἔτος μέ 8% ἤ νά δανείσει τά $\frac{5}{8}$ αὐτῶν μέ 7% καί τά ὑπόλοιπα νά τά δανείσει μέ 9%;

28) Ἕνας γεωργός δανείστηκε ἀπό τήν Α.Τ.Ε. ἕνα χρηματικό ποσό γιά 1 ἔτος 1 μην. 10 ἡμερ. μέ 7%. Τήν ἴδια ἡμέρα ὅμως ἡ Τράπεζα αὐτή λιγόστεψε τό ἐπιτόκιο καί τό ἔκανε 6,5% κι ἔτσι ὁ γεωργός ὠφελήθηκε 100 δρχ. Πόσα χρήματα πῆρε δάνειο;

29) Μέ ποιό ἐπιτόκιο πρέπει νά τοκιστεῖ ἕνα κεφάλαιο, ὥστε σέ 18 ἔτη νά φέρει τόκο διπλάσιο τοῦ κεφαλαίου;

30) Ἕνα κεφάλαιο τοκίστηκε γιά 1 ἔτος 3 μῆνες καί ἔγινε μέ τούς τόκους του 44500 δρχ. Μέ ποιό ἐπιτόκιο τοκίστηκε, ἄν ὁ τόκος εἶναι τά $\frac{9}{80}$ τοῦ κεφαλαίου;

31) Δυό κεφάλαια ἔχουν ἄθροισμα 36960 δρχ. Τό πρῶτο τοκίστηκε μέ 9% γιά 1 ἔτος 8 μῆνες καί ἔφερε τόκο 3144 δρχ. Νά βρεῖτε, σέ πόσο χρόνο τοκίστηκε τό δεύτερο κεφάλαιο μέ 8%, ὅταν φέρνει τόκο 144 δρχ. λιγότερο ἀπό τό πρῶτο.

32) Ἕνας βιοτέχνης εἶχε 40000 δρχ· τόκισε τά $\frac{4}{5}$ μέ 9% καί πῆρε τόκο τό $\frac{1}{8}$ τοῦ ὑπολοίπου. Γιά πόσο χρόνο τόκισε τά χρήματά του;

62 •33) Ποιό κεφάλαιο τοκίζεται μέ 6% καί ὕστερα ἀπό 5 ἔτη γίνεται μέ τούς τόκους του 41600 δρχ.;

Ε = 6%
Χ = 5 ἔτη
Κ + Τ = 41600 δρχ.
Κ = ;

1η Λύση. (μέ ἐξίσωση). Ἄς καλέσουμε χ τό κεφάλαιο, τότε ὁ τόκος του θά εἶναι:

$$T = \frac{X \cdot 5 \cdot 6}{100} = \frac{30X}{100} = \frac{3X}{10}.$$

Ἐπειδή κεφάλαιο σύν τόκος εἶναι ἴσο μέ 41600 δρχ., ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$X + \frac{3X}{10} = 41600 \iff \frac{10X+3X}{10} = 41600 \iff \frac{13X}{10} = 41600 \iff$$

$$\iff 13X = 41600 \cdot 10 \iff X = 416000 : 13 \iff X = 32000 \text{ (δρχ.)}$$

2η Λύση. (χρήση βοηθητικοῦ κεφαλαίου). Χρησιμοποιοῦμε βοηθητικό κεφάλαιο 100 δρχ. καί τό τοκίζουμε μέ τούς ὅρους τοῦ προβλήματος, ἔχουμε:

$$T = \frac{100 \cdot 5 \cdot 6}{100} = 30 \text{ δρχ.}$$

ἑπομένως οἱ 100 δρχ. κεφάλαιο γίνεται μέ τόν τόκο του 100 + 30 = 130 δρχ.

Οἱ 130 δρχ. (Κ+Τ) προκύπτουν ἀπό 100 δρχ. Κ

Οἱ 41600 δρχ. (Κ+Τ) προκύπτουν ἀπό χ δρχ. Κ

Ἐπειδή τό κεφάλαιο Κ καί τό τοκοκεφάλαιο Κ+Τ, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σταθερός, εἶναι ἀνάλογα, ἔχουμε:

$$\frac{130}{41600} = \frac{100}{\chi} \iff 130 \cdot \chi = 4160000 \iff \chi = 32000$$

Ἀπάντηση. Τό ζητούμενο κεφάλαιο εἶναι 32000 δρχ.

•34) Δάνεισε ἕνας χρήματα μέ 6% καί ὕστερα ἀπό 9 μῆνες πῆρε, γιά κεφάλαιο καί τόκο 7942 δρχ. Ποιό εἶναι τό ποσό πού δάνεισε;

•35) Ἕνας τεχνίτης δάνεισε τά $\frac{2}{3}$ τοῦ κεφαλαίου του μέ 6% καί πῆρε ὕστερα ἀπό 10 μῆνες γιά κεφάλαιο καί τόκο 10080 δρχ. Νά βρεῖτε τό ἀρχικό κεφάλαιο τοῦ τεχνίτη.

•36) Κάποιος τοκογλύφος δάνεισε ἕνα χρηματικό ποσό μέ 22% γιά 1 ἔτος 6 μῆνες. Ὁ τοκογλύφος κράτησε προκαταβολικά τόν τόκο κι ἔδωσε στόν ὀφειλέτη τό ὑπόλοιπο 10050 δρχ. Ποιό εἶναι τό ποσό πού δάνεισε;

Ὁμάδα Γ΄

•37) Ἕνας ἔμπορος τόκισε τά $\frac{3}{4}$ τοῦ κεφαλαίου του μέ 8% καί τό ὑπόλοιπο μέ 9% καί πῆρε ἐτήσιο τόκο 16500 δρχ. Πόσο ἦταν τό κεφάλαιό του;

Λύση. (χρήση βοηθητικοῦ κεφαλαίου). Χρησιμοποιοῦμε βοηθ. κεφάλαιο 400 δρχ. καί τοκίζουμε τά ἴδια μέρη του μέ τούς ὅρους τοῦ προβλήματος. Δηλαδή ἀπό τό πρῶτο μέρος 400 $\frac{3}{4}$ = 300 δρχ., θά ἔπαιρνε τόκο

$$T_1 = \frac{300 \cdot 8 \cdot 1}{100} = 24 \text{ δρχ.}$$

καί ἀπό τό β΄ μέρος 400 − 300 = 100 δρχ. θά ἔπαιρνε τόκο

$$T_2 = \frac{100 \cdot 9 \cdot 1}{100} = 9 \text{ δρχ.}$$

Ἔτσι ἀπό τά δύο μέρη θά ἔπαιρνε τόκο 24 + 9 = 33 δρχ. Τώρα λύνουμε τό παρακάτω πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν:

Οἱ 400 δρχ. Κ φέρνουν 33 δρχ. Τ
Οἱ χ δρχ. Κ φέρνουν 16500 δρχ. Τ

Ἔχουμε:

$$\frac{400}{\chi} = \frac{33}{16500} \text{ ἤ } \frac{400}{\chi} = \frac{1}{500} \Longleftrightarrow \chi = 400 \cdot 500 \Longleftrightarrow \chi = 200000$$

Τό κεφάλαιο ἦταν 200.000 δρχ.

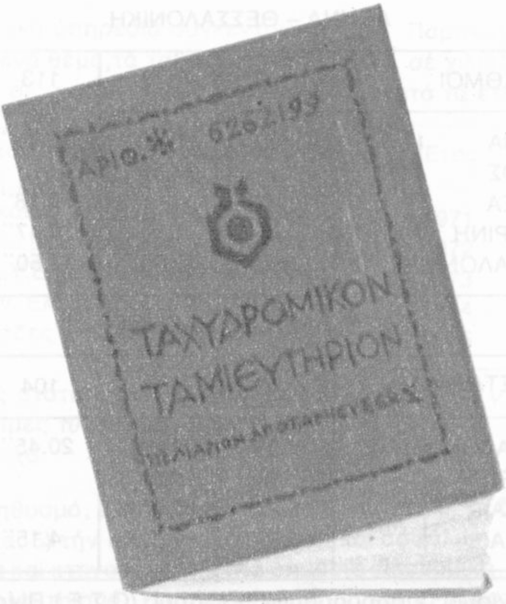
•38) Κάποιος τόκισε τά $\frac{7}{8}$ τοῦ κεφαλαίου του με 5% καί τό ὑπόλοιπο μέ 8% καί πῆρε ἐτήσιο τόκο 1290 δρχ. Πόσο ἦταν τό κεφάλαιό του;

•39) Τά $\frac{5}{7}$ ἑνός κεφαλαίου τοκιζόμενα μέ 8% δίνουν ἐτήσιο τόκο 2600 δρχ. (τόκο) περισσότερο, ἀπό ὅσο δίνει τό ὑπόλοιπο τοκιζόμενο μέ 6%. Ποιό ἦταν τό κεφάλαιο;

40) Ἕνα κεφάλαιο σέ 3 μῆνες ἔγινε μέ τούς τόκους του 61500 δρχ. Ὁ τόκος ἦταν τό $\frac{1}{40}$ τοῦ κεφαλαίου. Πόσο ἦταν τό κεφάλαιο καί πόσο τό ἐπιτόκιο;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Ἀπό τίς καταθέσεις τῶν πολιτῶν στίς Τράπεζες ἔχει ὠφέλεια τό Κράτος;
2) Τί λέγεται τόκος; Πότε εἶναι ἁπλός καί πότε σύνθετος;
3) Τί λέγεται ἐπιτόκιο; Ποιά εἶναι ἡ διαφορά μεταξύ τόκου καί ἐπιτοκίου;
4) Ποιά προβλήματα λέγονται προβλήματα τόκου; Ποιά τά εἴδη τους;
5) Τί πρέπει νά ξέρουμε, γιά νά βροῦμε ἕνα ἀπό τά ποσά στά προβλήματα τόκου;
6) Πόσες ἐξισώσεις α΄ βαθμοῦ μποροῦμε νά σχηματίσουμε ἀπό τόν τύπο τοῦ τόκου καί κάθε μιά ἀπό αὐτές, ποιό ἔχει ἄγνωστο;



ΚΕΦΑΛΑΙΟ Η΄

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

63

1. *Ἀριθμητικοί Πίνακες*

Συχνά χρειαζόμαστε ὁρισμένες πληροφορίες, ὁρισμένα ἀριθμητικά στοιχεῖα γιά νά μποροῦμε νά κατευθύνουμε τίς ἐνέργειές μας καί γιά νά ἀποδίδουμε στήν ἐργασία μας. Τά στοιχεῖα αὐτά τά παίρνουμε ἀπό ἀριθμητικούς πίνακες πού βρίσκουμε σέ ὁδηγούς, σέ καταλόγους, σέ τυπολόγια κ.τ.λ.

Ἄς ἀναφέρουμε μερικά παραδείγματα:

1. Ὅταν θέλουμε νά ταξιδέψουμε ἀπό τήν Ἀθήνα στή Θεσσαλονίκη πρέπει πρῶτα νά πληροφορηθοῦμε τά δρομολόγια τῶν λεωφορείων.

Νά ἕνας τέτοιος ἀριθμητικός πίνακας:

Ἀπόκομμα ἀπό τόν πίνακα δρομολογίων τῶν λεωφορείων Ο.Σ.Ε.
Ἀπό 25.9.1977 μέχρι 1.4.1978

ΑΘΗΝΑ – ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ				
ΣΤΑΘΜΟΙ	101	111	113	115
ΑΘΗΝΑ	7.00΄΄	8.40΄΄	9.40΄΄	11.50΄΄
ΒΟΛΟΣ		13.50΄΄		16.57΄΄
ΛΑΡΙΣΑ	12.21΄΄		15.16΄΄	
ΚΑΤΕΡΙΝΗ			16.47΄΄	
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	14.42΄΄	17.05΄΄	17.50΄΄	20.02΄΄
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ – ΑΘΗΝΑ				
ΣΤΑΘΜΟΙ	102	112	104	114
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	16.55΄΄	19.30΄΄	20.45΄΄	22.30΄΄
ΚΑΤΕΡΙΝΗ		20.27΄΄		
ΛΑΡΙΣΑ	19.28΄΄	22.20΄΄		
ΑΘΗΝΑ	0.37΄΄	3.30΄΄	4.15΄΄	6.00΄΄

Πηγή: Ὀργανισμός Σιδηροδρόμων Ἑλλάδος (Ο.Σ.Ε.) Πίνακας 1.

Ὁ παραπάνω πίνακας μᾶς ἐπιτρέπει νά ξέρουμε:

1ο. Πότε ἀρχίζει καί πότε τελειώνει, καί ἑπομένως καί πόσο διαρκεῖ μιά διαδρομή Ἀθηνῶν - Θεσ/νίκης, π.χ. ἀπό τήν Ἀθήνα στίς 7 ὥρα π.μ. μέ τό δρομολόγιο 101 φτάνουμε στή Θεσσαλονίκη στίς 14 ὥρα 42 π. λεπτά, ἀφοῦ ταξιδέψουμε 7 ὧρες καί 42 π. λεπτά.

2ο. Ὅτι ὑπάρχουν δρομολόγια πού δέ διέρχονται ἀπό τό Βόλο, π.χ. τά ὑπ' ἀριθ. 101, 113 κ τ λ.

2. Ὁ πίνακας 2 εἶναι ἀπόκομμα ἀπό ἕναν ὁδηγό μικροῦ κινητήρα, ὅπου Α εἶναι ὁ ρυθμιστής καί Β τά λίτρα πετρελαίου, πού καταναλώνει ἀνά ὥρα. Ὁ πίνακας 2 μᾶς ἐπιτρέπει νά ξέρουμε τό πετρέλαιο πού καταναλώνει ὁ κινητήρας ὅταν λειτουργεῖ.

Π.χ. ἄν ὁ ρυθμιστής εἶναι στό 3 καταναλώνει 1 λίτρο πετρέλαιο τήν ὥρα.

Ἀπόκομμα ἀπό ἕναν ὁδηγό μικροῦ κινητήρα

Α	Β
1	0,6
2	0,8
3	1
4	1,2
5	1,5

Πηγή: Ὁδηγός κινητήρα
Πίνακας 2

3. Γιά γενικά θέματα ὁρισμένες πληροφορίες καί ἀριθμητικά στοιχεῖα παίρνουμε ἀπό ἀριθμητικούς πίνακες πού ἐκδίδει ἡ Ἐθνική Στατιστική Ὑπηρεσία Ἑλλάδος (Ε.Σ.Υ.Ε.).

Ἡ στατιστική ὑπηρεσία συγκεντρώνει στοιχεῖα γιά ἕνα θέμα, τά ταξινομεῖ καί τά παρουσιάζει σέ κατάλληλους ἀριθμητικούς πίνακες, (ἔτσι ὥστε νά μποροῦν νά ἀναλυθοῦν καί νά ἑρμηνευτοῦν γιά τήν ἐξυπηρέτησή μας). Στούς πίνακες σέ μικρή ἔκταση καί μέ ἁπλό τρόπο περιέχονται τά στοιχεῖα μιᾶς ἔρευνας. π.χ. Ὁ πίνακας 3 τῆς Ε.Σ.Υ.Ε. μᾶς δίνει τήν παραγωγή σιταριοῦ στήν Ἑλλάδα, κατά τά ἔτη 1971 - 1975, σέ χιλιάδες τόνους.

Παραγωγή σιταριοῦ σέ χιλιάδες τόνους κατά τά ἔτη 1971 - 1975.

Ἔτος	Σιτάρι
1971	1946
1972	1768
1973	1682
1974	2142
1975	2140

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε. Πίνακας 3.

Ἀπό τούς στατιστικούς πίνακες παίρνουμε πολύτιμες πληροφορίες πού ἀφοροῦν ἀντίστοιχα:

1) Τόν πληθυσμό, 2) τήν ἀπασχόληση - ἀνεργία, 3) τή δημόσια ὑγεία, 4) τήν Παιδεία, 5) τήν κοινωνική ἀντίληψη καί ἀσφάλιση, 6) τό ἐμπόριο, 7) τή γεωργία καί κτηνοτροφία, 8) τά δημόσια οἰκονομικά, 9) τή βιομηχανία, 10) τόν ἠλεκτρισμό, 11) τήν οἰκοδόμηση καί τά δημοτικά καί κοινω-

νικά ἔργα, 12) τίς μεταφορές καί ἐπικοινωνία, 13) τήν ταξιδιωτική καί τουριστική κίνηση κ.τ.λ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

1) Νά κάνετε ἕναν ἀριθμητικό πίνακα γιά τά βουνά τῆς Ἑλλάδας πού ἔχουν ὕψος μεγαλύτερο ἀπό 2.400 μέτρα.
2) Καταρτίστε ἕναν ἀριθμητικό πίνακα μέ τόν ἀριθμό τῶν μαθητῶν πού ἐγγράφηκαν στήν Α΄ τάξη τοῦ σχολείου σας στό καθένα ἀπό τά 5 ἔτη 1974 - 1978.

64

2. Προσδιορισμός ἑνός σημείου στό ἐπίπεδο

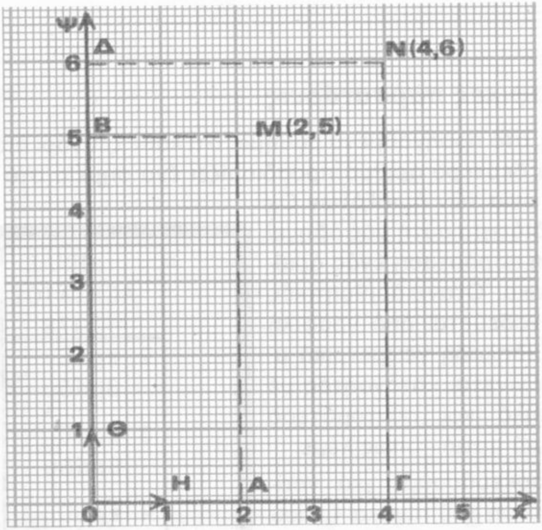
Σ' ἕνα ἐπίπεδο χαράζουμε δυό κάθετες ἡμιευθεῖες Οχ καί Οψ μέ κοινή ἀρχή τό σημεῖο 0 (δυό ἡμιάξονες, ὅπως συνηθίζεται νά λέμε), στίς ὁποῖες παίρνουμε ἀντίστοιχα μονάδες μήκους τά τμήματα ΟΗ καί ΟΘ (Σχ. 13). Στόν ἡμιάξονα Οχ παίρνουμε ἀπό τό Η διαδοχικά τμήματα ἴσα μέ τό ΟΗ καί στά ἄκρα τῶν τμημάτων αὐτῶν γράφουμε τούς ἀριθμούς 1, 2, 3, 4, ... Ὅμοια καί στόν ἡμιάξονα Οψ παίρνουμε ἀπό τό Θ, διαδοχικά τμήματα ἴσα μέ τό ΟΘ καί στά ἄκρα τους γράφουμε τούς ἀριθμούς 1, 2, 3, 4, ... Ἡ θέση σημείου Μ μέσα στήν ὀρθή γωνία χοψ τοῦ ἐπιπέδου μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ μέ δυό ἀριθμούς, τούς ὁποίους βρίσκουμε ὡς ἑξῆς:

Ἀπό τό Μ γράφουμε τίς κάθετες ΜΑ καί ΜΒ πάνω στούς ἡμιάξονες Οχ καί Οψ ἀντίστοιχα. Στό σημεῖο Α ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμός 2 (μῆκος τοῦ ΟΑ), πού λέγεται ***τετμημένη*** τοῦ σημείου Μ, καί στό σημεῖο Β ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμός 5 (μῆκος τοῦ ΟΒ), πού λέγεται ***τεταγμένη*** τοῦ σημείου Μ. Οἱ ἀριθμοί 2 καί 5 λέγονται ***συντεταγμένες*** τοῦ σημείου Μ καί γράφονται παραπλεύρως τοῦ Μ μέσα σέ μιά παρένθεση, πρῶτα ἡ τετμημένη καί ἔπειτα ἡ τεταγμένη: (Μ(2,5). (Σχ. 13).

Ἀντίστροφα: σέ κάθε δοσμένο ζευγάρι ἑνός πρώτου καί ἑνός δεύτερου ἀριθμοῦ, ἀντιστοιχεῖ ἕνα ὁρισμένο σημεῖο μέσα στή γωνία χΟψ τοῦ ἐπιπέδου. Π.χ. στό ζευγάρι (4,6) ἀντιστοιχεῖ τό σημεῖο Ν, πού τό βρίσκουμε ὡς ἑξῆς:

Πάνω στόν ἡμιάξονα τῶν χ τοποθετοῦμε τό σημεῖο Γ(4) καί πάνω στόν ἡμιάξονα Οψ τό σημεῖο Δ(6). Οἱ κάθετες πάνω στούς Οχ καί Οψ στά σημεῖα Γ καί Δ τέμνονται στό σημεῖο Ν. Ὥστε:

Κάθε σημεῖο μέσα στή γωνία χΟψ τοῦ ἐπιπέδου παριστάνεται μέ δυό ἀριθμούς, τίς συντεταγμένες του. Ἀντίστροφα· ***κάθε ζευγάρι ἀπό ἕνα πρῶτο καί ἀπό ἕνα δεύτερο ἀριθμό προσδιορίζει ἕνα σημεῖο στό ἐπίπεδο καί μέσα στή γωνία χΟψ.***



Σχ. 13

Σημείωση. Ὁ ἡμιάξονας Οχ λέγεται ἡμιάξονας τῶν τετμημένων καί ὁ ἡμιάξονας Οψ λέγεται ἡμιάξονας τῶν τεταγμένων. Τό σημεῖο Ο λέγεται ἀρχή τῶν συντεταγμένων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

3) Νά δικαιολογήσετε γιατί τά σημεῖα τοῦ ἡμιάξονα Οχ ἔχουν τεταγμένη Ο καί τά σημεῖα τοῦ ἡμιάξονα Οψ ἔχουν τετμημένη Ο.
4) Χαράξτε σέ χιλιοστομετρικό χαρτί δυό κάθετους ἡμιάξονες 0χ καί 0ψ καί πάρτε πάνω στόν ἄξονα 0χ γιά μονάδα μήκους τό 1 ἑκατ. καί στόν ἄξονα 0ψ γιά μονάδα μήκους τό 1 ἑκατ. Προσδιορίστε τίς θέσεις τῶν σημείων Μ(2,6), Ν(2,5,3), Σ(4,0).
5) Στό προηγούμενο σχέδιο, ἄν ἕνα σημεῖο Ρ ἔχει συντεταγμένες διπλάσιες ἀπό τίς ὁμώνυμες συντεταγμένες τοῦ Ν, ποιά θά εἶναι ἡ θέση τῶν τριῶν σημείων Ο, Ν, Ρ;

6) Χαράξτε σέ χιλιοστομετρικό χαρτί δυό καθέτους ἡμιάξονες Οχ καί Οψ καί πάρτε πάνω στόν ἄξονα Οχ γιά μονάδα μήκους τό 1 ἑκατ. καί στόν ἄξονα Οψ γιά μονάδα μήκους 1 ἑκατ. Τί παρατηρεῖτε γιά τίς θέσεις τῶν σημείων Ε(2, 1), Ζ(3, 1), Θ(4, 1);

65

3. Γραφικές παραστάσεις

Μάθαμε, στό προηγούμενο μάθημα, ὅτι κάθε ζευγάρι ἀπό ἕνα πρῶτο καί ἀπό ἕνα δεύτερο ἀριθμό προσδιορίζει ἕνα σημεῖο στό ἐπίπεδο καί μέσα στή γωνία τῶν ἡμιαξόνων Οχ καί Οψ. Ἡ ἰδιότητα αὐτή μᾶς ὁδηγεῖ στή γραφική παράσταση ἑνός ἀριθμητικοῦ πίνακα. Ὅταν ὁ ἀριθμητικός πίνακας συνοδεύεται ἀπό γραφική παράσταση (δηλαδή γεωμετρικά μ' ἕνα σχέδιο) γίνεται κατανοητός μέ τόν πιό ἁπλό καί συντομότερο τρόπο μέ «μιά ματιά» ὅπως λέμε.

ΜΗΝΑΣ ΑΠΡΙΛΙΟΣ 1978	Θερμοκρασία τοῦ ἀρρώστου
2 πρωΐ	$37^0 6$
βράδυ	$38^0 5$
3 πρωΐ	39^0
βράδυ	$38^0 8$
4 πρωΐ	$39^0 9$
βράδυ	38^0
5 πρωΐ	$38^0 4$
βράδυ	38^0
6 πρωΐ	37^0

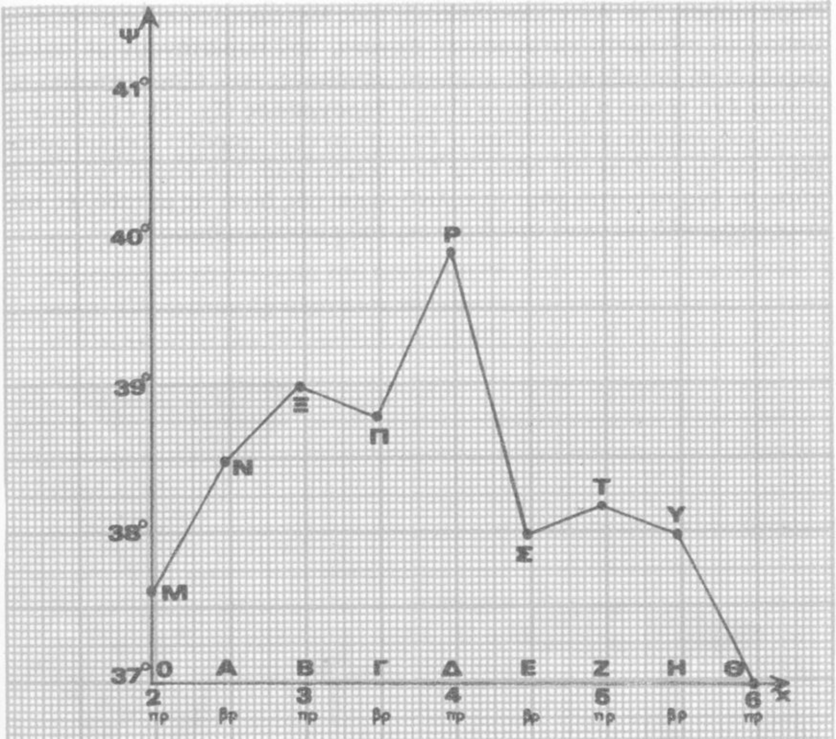
Πηγή: Ἰδιωτική κλινική

Πίνακας 4

Ἄς κατασκευάσουμε μιά γραφική παράσταση τοῦ πίνακα 4, πού παριστάνει τή θερμοκρασία ἑνός ἄρρωστου, τό πρωί καί τό βράδυ στίς 8 ἡ ὥρα κατά τά τέσσερα πρῶτα εἰκοσιτετράωρα τῆς ἀρρώστιας του ἀπό τίς 2 Ἀπριλίου τό πρωί μέχρι τίς 6 Ἀπριλίου τό πρωί.

Σέ χιλιοστομετρικό χαρτί χαράζουμε δυό κάθετους ἡμιάξονες Οχ καί Οψ. Στόν ἡμιάξονα Οχ παίρνουμε διαδοχικά 4 τμήματα ΟΒ, ΒΔ, ΔΖ, ΖΘ, ἴσα μέ 2 ἑκατ., πού τό καθένα παριστάνει ἕνα εἰκοσιτετράωρο. Χωρίζεται τό καθένα ἀπό τά τμήματα αὐτά σέ δυό ἴσα μέρη καί ἔτσι τά σημεῖα Ο, Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, πού βλέπετε στό σχῆμα 14, παριστάνουν ἀντίστοιχα τίς χρονολογίες θερμομετρήσεως τοῦ ἄρρωστου ἀπό 2 Ἀπριλίου πρωί μέχρι 6 Ἀπριλίου πρωί (θερμομετρήσεις).

Στόν ἡμιάξονα Οψ παίρνουμε διαδοχικά τμήματα ἴσα μέ 2 ἑκατ., πού τό καθένα παριστάνει θερμοκρασία 1° βαθμοῦ Κελσίου ἀπό τή θερμοκρασία 37° μέχρι 41°.

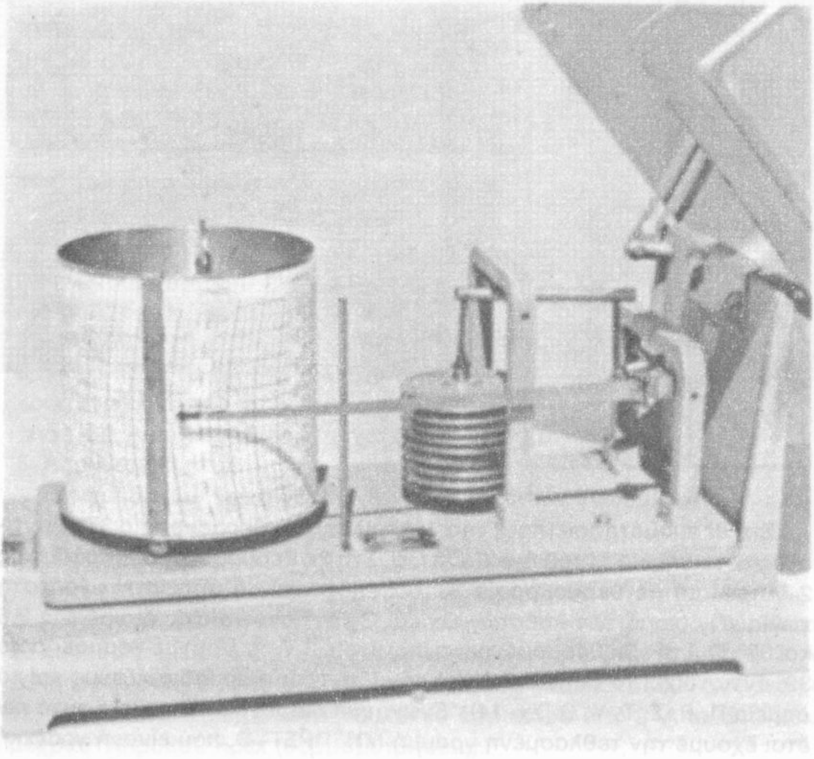


Σχ. 14

Στή θερμομέτρηση (πρωί τῆς 2 Ἀπριλίου) μέ θερμοκρασία 37°,6 ἀντιστοιχεῖ τό σημεῖο Μ τοῦ ἡμιάξονα Οψ. Στή 2η θερμομέτρηση (βράδυ τῆς 2 Ἀπριλίου) μέ θερμοκρασία 38°,5 ἀντιστοιχεῖ τό σημεῖο Ν μέσα στή γωνία xOy (τομή τῶν καθέτων Οx καί Οy ἀντίστοιχα στίς διαιρέσεις 2,5 καί 38°,5). Στήν 3η θερμομέτρηση (πρωί τῆς 3 Ἀπριλίου) μέ θερμοκρασία 39° ἀντιστοιχεῖ τό σημεῖο Ξ. Κατά τόν ἴδιο τρόπο προσδιορίζουμε καί τά σημεῖα Π, Ρ, Σ, Τ, Υ, Θ (Σχ. 14). Ἑνώνουμε διαδοχικά τά σημεῖα αὐτά καί ἔτσι ἔχουμε τήν τεθλασμένη γραμμή ΜΝΞΠΡΣΤΥΘ, πού εἶναι ἡ γραφική παράσταση τοῦ πίνακα 4.

Ἔτσι ὁ γιατρός, μέ μιά ματιά στήν παραπάνω τεθλασμένη γραμμή, καταλαβαίνει ἀμέσως τή μεταβολή τῆς θερμοκρασίας τοῦ ἄρρωστου.

Παρατήρηση. Στά Ἀστεροσκοπεῖα καί τούς Μετεωρολογικούς σταθμούς ὑπάρχουν ***αὐτόματα καταγραφικά ὄργανα,*** πού παριστάνουν μέ πολλή ἀκρίβεια τή μεταβολή ἑνός φυσικοῦ μεγέθους, πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό χρόνο· ἕνα τέτοιο π.χ. ὄργανο εἶναι ὁ ***βαρογράφος*** (Σχ. 15). Στό ὄργανο αὐτό, μιά γραφίδα πού κινεῖται μ' ἕνα μηχανισμό, χαράζει γραμμή αὐτόματα καί χωρίς διακοπή πάνω σέ ἕνα τετραγωνισμένο χαρτί, τυλιγμένο γύρω σέ ἕνα περιστρεφόμενο κύλινδρο καί μᾶς δίνει τίς μεταβολές τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως στή διάρκεια τοῦ εἰκοσιτετράωρου.



Σχ. 15 Βαρογράφος

66 *Ὁμάδα Β΄*

7) Νά κάνετε γραφική παράσταση τῶν μαθητῶν, πού ἐγγράφηκαν στήν Α΄ τάξη ἑνός Γυμνασίου κατά τό μῆνα Σεπτέμβριο στό καθένα ἀπό τά 5 ἔτη 1974 - 1978, σύμφωνα μέ τά στοιχεῖα τοῦ ἀπέναντι πίνακα. (Πάνω στόν ἡμιάξονα Οχ νά πάρετε τά ἔτη καί στόν Οψ τόν ἀριθμό τῶν μαθητῶν).

Ἀριθμός μαθητῶν πού ἐγγράφηκαν στήν Α΄ τάξη

Ἔτη	Ἀριθμός μαθητῶν
1974	90
1975	80
1976	110
1977	130
1978	120

8) Νά κάνετε γραφική παράσταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος, πού καταναλώνει μιά οἰκογένεια σέ κιλοβατῶρες κατά τούς 5 πρώτους μῆνες τοῦ ἔτους 1978, μέ τά στοιχεῖα τοῦ ἀπέναντι πίνακα.

Κατανάλωση ἠλεκτρικοῦ ρεύματος σέ κιλοβατῶρες

Μῆνες	Κιλοβατῶρες
ΙΑΝΟΥΑΡ.	420
ΦΕΒΡ.	350
ΜΑΡΤ.	450
ΑΠΡΙΛ.	380
ΜΑΪΟΣ	300

67

4. Γραφική παράσταση τῆς σχέσεως μεταξύ δυό κατευθείαν ἀναλόγων ποσῶν

Πρόβλημα (Παράδειγμα). Ἕνα μέτρο ὕφασμα ἀξίζει 60 δρχ. Τά χ μέτρα ἀπό τό ἴδιο ὕφασμα ἀξίζουν 60·χ δρχ. Ἄν τήν ἀξία τῶν χ μέτρων παραστήσουμε μέ ψ, τότε θά ἔχουμε τή σχέση:

$$ψ = 60 \cdot χ \quad (1),$$

πού συνδέει τά ἀνάλογα ποσά μῆκος ὑφάσματος καί τήν ἀξία του (Βλ. παράδειγμα ἀναλόγων ποσῶν Κεφ. Ε΄). Ζητοῦμε τή γραφική παράσταση τῆς σχέσεως αὐτῆς.

Σέ χιλιοστομετρικό χαρτί χαράζουμε τούς κάθετους ἡμιάξονες Οχ καί Οψ.

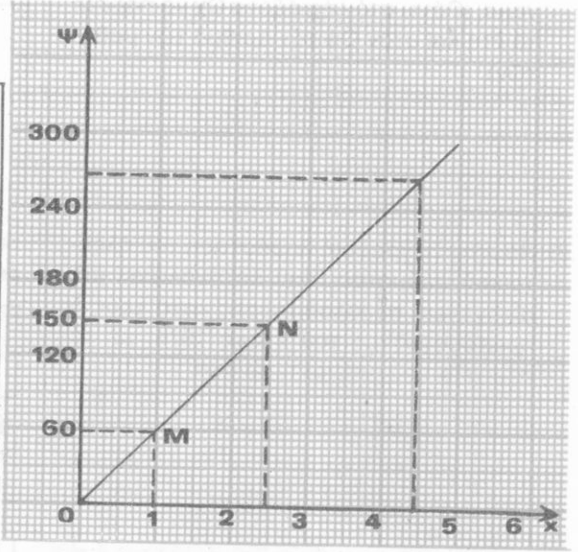
Σημειώνουμε πάνω στόν ἡμιάξονα Οχ τό μῆκος σέ μέτρα μέ ἀντιστοιχία 1 ἑκατοσ. σέ 1 μέτρο καί πάνω στόν ἡμιάξονα Οψ τήν ἀξία σέ δρχ. μέ ἀντιστοιχία 1 ἑκατοσ. σέ 60 δρχ. (ἤ καί διαφορετικές π.χ. 2cm σέ 40 δρχ.) σχ. 16.

Ἄς σχηματίσουμε τώρα ἕναν πίνακα τιμῶν τοῦ χ καί τοῦ ψ, χρησιμοποιώντας τήν παραπάνω σχέση (1). Γιά χ = 0 εἶναι ψ = 0, γιά χ = 1 εἶναι ψ = 60, γιά χ = 3 εἶναι ψ = 180 κ.ο.κ.

Πίνακας τιμῶν τῆς σχέσης ψ = 60·χ

χ μῆκος σέ μέτρα	ψ Ἀξία σέ δρχ.
0	0
1	60
2	120
3	180
4	240
.	.
.	.
.	.

Πίνακας 5



Παρατηροῦμε ὅτι στό ζευγάρι (0,0) ἀντιστοιχεῖ ἡ ἀρχή Ο, τῶν συντεταγμένων, στό ζευγάρι (1,60) τό σημεῖο Μ(1,60). Προσδιορίζουμε καί ἄλλα ζευγάρια ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ πίνακα 5 καί ἐπαληθεύουμε, ὅτι τά σημεῖα, πού παριστάνουν αὐτά, βρίσκονται πάνω στήν ἡμιευθεία ΟΜ.

Ἔτσι φθάνουμε στό συμπέρασμα ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς σχέσεως ψ = 60·χ, πού συνδέει δυό ἀνάλογα ποσά, ἀποτελεῖται ἀπό τά διάφορα σημεῖα τῆς ἡμιευθείας ΟΜ, πού ξεκινᾶ ἀπό τό Ο καί περνᾶ ἀπό τό σημεῖο Μ(1,60).

Μέ τήν παραπάνω γραφική παράσταση μποροῦμε νά ἔχουμε τήν ἀριθμητική λύση τοῦ δεδομένου προβλήματος. Π.χ. γιά νά βροῦμε, πόσο ἀξίζουν τά 2,5 μέτρα ὕφασμα, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἀπό τό σημεῖο τοῦ ἡμιάξονα Οχ, πού ἔχει τετμημένη 2,5 φέρουμε παράλληλη πρός τόν Οψ, ἡ ὁποία τέμνει στό σημεῖο Ν τήν ΟΜ. Ἀπό τό σημεῖο Ν φέρνουμε παράλληλη πρός τόν ἡμιάξονα Οχ, ἡ ὁποία τέμνει τόν Οψ σ' ἕνα σημεῖο, πού ἡ τεταγμένη του εἶναι 150, δηλαδή τά 2,5 μέτρα ὕφασμα ἀξίζουν 150 δρχ. Ὅμοια βρίσκουμε, ὅτι τά 4,5 μ. ἀξίζουν 270 δρχ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

9) Ἄν χ εἶναι ἡ πλευρά τετραγώνου σέ μέτρα καί ψ ἡ περίμετρος αὐτοῦ, νά παραστήσετε γραφικά σέ τετραγωνισμένο χαρτί τή σχέση, πού συνδέει τίς συμμεταβλητές χ καί ψ.

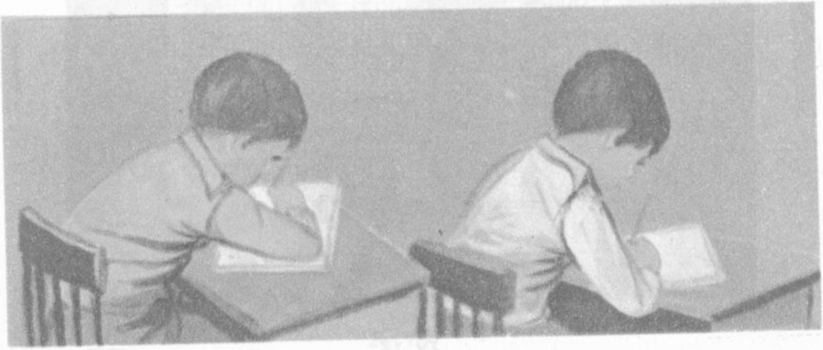
10) Ἕνα κινητό ἔχει ταχύτητα 20 μ. στό δ. λεπτό καί διανύει ψ μέτρα σέ χ δ. λεπτά.

Νά παραστήσετε γραφικά τή σχέση, πού συνδέει τά ποσά αὐτά παίρνοντας τόν ἡμιάξονα τῶν τετμημένων ὡς ἡμιάξονα τῶν χρόνων καί μέ ἀντιστοιχία 1 ἑκατ. σέ 1 δ. λεπτό καί τόν ἡμιάξονα τῶν τεταγμένων ὡς ἡμιάξονα τῶν διαστημάτων μέ ἀντιστοιχία 1 ἑκατ. μέ 20 μέτρα. Νά βρεῖτε γραφικά τό διάστημα, πού διανύει τό κινητό σέ 4,2 δ. λεπτά.

11) Δυό μεταβλητές ποσότητες χ καί ψ παίρνουν τίς τιμές, πού βλέπετε στόν πίνακα:

Νά γράψετε τή σχέση, πού συνδέει τίς συμμεταβλητές αὐτές καί νά τήν παραστήσετε γραφικά.

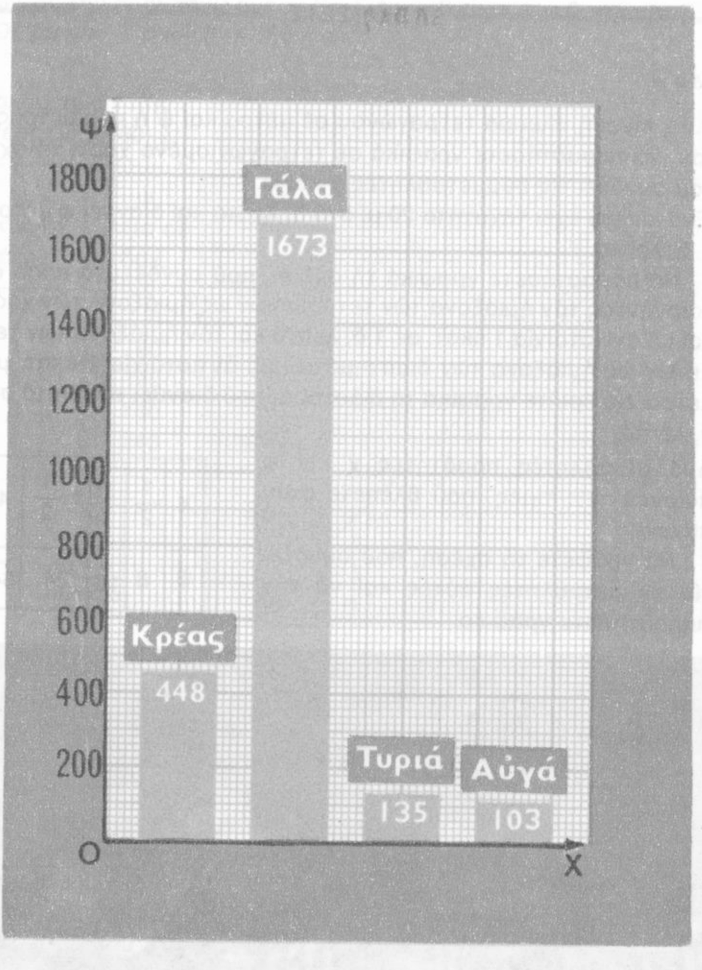
χ	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	4	5
ψ	8	16	24	64	80



68

5. Ἄλλος τρόπος παρουσιάσεως στατιστικῶν δεδομένων

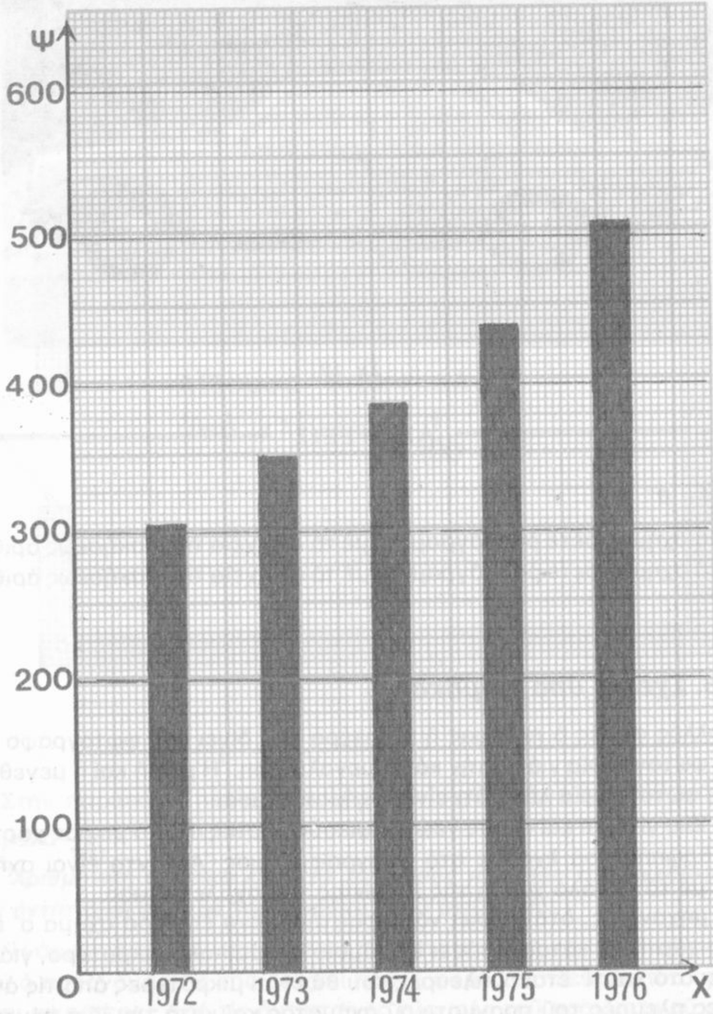
Ἄλλος τρόπος, πού ἐκφράζει γραφικά τήν ἀντιστοιχία τῶν τιμῶν μεταξύ δυό συσχετισμένων μεγεθῶν εἶναι ***τό ραβδόγραμμα.*** Τό ραβδόγραμμα ἀποτελεῖται ἀπό μιά σειρά ὀρθογώνια, πού ἔχουν ἴσες βάσεις καί στηρίζονται στόν ἴδιο ἄξονα καί ἀπέχουν ἴσο μεταξύ τους.



Σχ. 17

Τά μήκη τῶν ὀρθογωνιων αὐτῶν εἶναι ἀνάλογα μέ τίς τιμές πού παριστάνουν. Στό σχ. 17 ἔχουμε ἕνα ραβδόγραμμα, πού παριστάνει τήν παραγωγή στήν Ἑλλάδα τό ἔτος 1975 τῶν κυριότερων κτηνοτροφικῶν προϊόντων σέ χιλιάδες τόνους. (Δεδομένα Ε.Σ.Υ.Ε.).

Τό ραβδόγραμμα σχ. 18 παριστάνει τήν κυκλοφορία ἐπιβατικῶν αὐ-



Σχ. 18

τοκινήτων (σχ. 19) στήν Ἑλλάδα κατά τά 5 ἔτη 1972 - 1976 σέ χιλιάδες. (Δεδομένα Ε.Σ.Υ.Ε.).

Σχ. 19

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Β΄

12) Νά σχηματίσετε ραβδόγραμμα, μέ τά στοιχεῖα τῆς ἀσκήσεως ἀριθ. 7.
13) Νά σχηματίσετε ραβδόγραμμα, μέ τά στοιχεῖα τῆς ἀσκήσεως ἀριθ. 8.

69

6. Σχέδιο ὑπό κλίμακα

Πολλές φορές ὁ πατέρας ἤ ἡ μητέρα μας δίνει στό φωτογράφο μιά μικρή φωτογραφία γιά νά τήν κάνει μεγαλύτερη. Ἡ μικρή καί ἡ μεγεθυνσμένη φωτογραφία λέμε ὅτι εἶναι σχήματα ὅμοια.

Τό ἴδιο γίνεται καί στούς γεωγραφικούς χάρτες. Π.χ. ὁ μικρός χάρτης τῆς Εὐρώπης πού ἔχουμε στό Γεωγραφικό μας Ἄτλαντα εἶναι σχῆμα ὅμοιο μέ τό μεγάλο χάρτη τῆς Εὐρώπης τοῦ σχολείου μας.

Ὁ μηχανικός, ὅταν θέλει νά παραστήσει ἕνα ἐπίπεδο σχῆμα σ' ἕνα φύλλο χαρτί, θά κατασκευάσει ἕνα ὅμοιο σχῆμα πολύ μικρότερο, γιά νά χωράει στό χαρτί· ἔτσι οἱ πλευρές του θά εἶναι μικρότερες ἀπό τίς ἀντίστοιχες πλευρές τοῦ πραγματικοῦ σχήματος καί κατά τήν ἴδια πάντοτε ἀναλογία.

Ἡ παράσταση ἑνός ἐπίπεδου σχήματος μέ ὅμοιό του πάνω στό χαρτί λέγεται ***σχέδιο.***

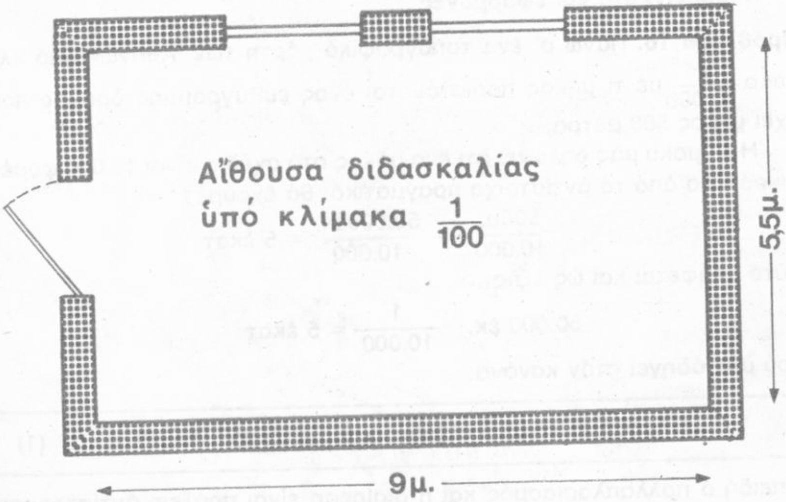
Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά παραστήσουμε πάνω σ' ἕνα φύλλο χαρτί μιά αἴθουσα διδασκαλίας πού ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιο μέ διαστάσεις 9 μέτ. ἐπί 5,5 μέτ.

Ἄν σχεδιάσουμε ἕνα ὀρθογώνιο μέ διαστάσεις π.χ. ἑκατό φορές μικρότερες τῶν πραγματικῶν διαστάσεων, θά ἔχουμε ἕνα σχέδιο τῆς αἴθουσας.

Ἔτσι, τό ὀρθογώνιο τοῦ σχ. 20 ἔχει διαστάσεις:

9μ : 100 = 0,09 μ. = 9 ἑκατ. μῆκος

καί 5,5μ : 100 = 0,055 μ. = 5,5 ἑκατ. πλάτος



Σχ. 20

Στήν παραπάνω περίπτωση λέμε ὅτι σχεδιάσαμε τήν αἴθουσα ὑπό κλίμακα $\frac{1}{100}$.

Ἀριθμητική κλίμακα λέμε τό λόγο μιᾶς πλευρᾶς τοῦ σχεδίου πρός τήν ἀντίστοιχη πλευρά τοῦ πραγματικοῦ σχήματος.

Ἡ ἀριθμητική κλίμακα δίνεται πάντοτε ἀπό μιά κλασματική μονάδα, πού ὁ παρονομαστής της δείχνει πόσες φορές οἱ πλευρές τοῦ σχεδίου εἶναι μικρότερες ἀπό τίς ἀντίστοιχες πλευρές τοῦ πραγματικοῦ σχήματος.

Οἱ κλίμακες στά ἀρχιτεκτονικά σχέδια σπιτιῶν εἶναι:

$$\frac{1}{50}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{200} \text{ κ τ λ.}$$

στά τοπογραφικά σχέδια τῶν πόλεων εἶναι:

$$\frac{1}{500}, \quad \frac{1}{1000}, \quad \frac{1}{5000} \text{ κ τ λ.}$$

καί στούς χάρτες εἶναι:

$$\frac{1}{100.000}, \quad \frac{1}{1.000.000} \text{ κ τ λ.}$$

70 Παραδείγματα καί ἐφαρμογές

Πρόβλημα 1ο. Πάνω σ' ἕνα τοπογραφικό χάρτη τῶν Ἀθηνῶν ὑπό κλίμακα $\frac{1}{10.000}$ μέ τί μῆκος παριστάνεται ἕνας εὐθύγραμμος δρόμος πού ἔχει μῆκος 500 μέτρα;

Ἡ κλίμακα μᾶς δηλώνει ὅτι ἕνα μῆκος στό σχέδιο εἶναι 10.000 φορές μικρότερο ἀπό τό ἀντίστοιχο πραγματικό, θά ἔχουμε:

$$\frac{500\text{μ.}}{10.000} = \frac{50.000\text{ἑκ.}}{10.000} = 5 \text{ ἑκατ.}$$

Αὐτό γράφεται καί ὡς ἑξῆς:

$$50.000 \text{ ἑκ.} \cdot \frac{1}{10.000} = 5 \text{ ἑκατ.}$$

πού μᾶς ὁδηγεῖ στόν κανόνα:

Μῆκος στό σχέδιο = Μῆκος πραγματικό · Κλίμακα (1)

Ἐπειδή ὁ πολλαπλασιασμός καί ἡ διαίρεση εἶναι πράξεις ἀντίστροφες (Βλ. Κεφ. Δ΄ μάθημα 26), συμπεραίνουμε ὅτι:

Μῆκος πραγματικό = Μῆκος στό σχέδιο : κλίμακα (2)

Πρόβλημα 2ο. Μιά πλευρά ἑνός σχεδίου ὑπό κλίμακα $\frac{1}{1000}$ ἔχει μῆκος 0,05 μ. Ποιό μῆκος τοῦ πραγματικοῦ σχήματος παριστάνει;

Λύση. Σύμφωνα μέ τόν κανόνα (2) ἔχουμε:

$$\text{Πραγματικό μῆκος} = 0{,}05 \text{ μ} : \frac{1}{1000} = 0{,}05 \text{ μ} \cdot 1000 = 50 \text{ μ.}$$

Πρόβλημα 3ο. Μετρῆστε καί ὑπολογίστε ἀπό τό χάρτη Σχ. 21 τήν κατευθείαν ἀπόσταση τοῦ Βελιγραδίου ἀπό τήν Ἀθήνα.

Λύση. Μετροῦμε τήν ἀπόσταση τοῦ Βελιγραδίου ἀπό τήν Ἀθήνα καί τή βρίσκουμε ἴση μέ 8 ἑκατοστόμετρα.

Σύμφωνα μέ τόν κανόνα (2) ἔχουμε: Κατευθείαν ἀπόσταση =

$$= 0{,}08\ \mu : \frac{1}{10000000} = 0{,}08\ \mu \cdot 10000000 = 800000\ \mu.$$ ἤ 800 χιλιόμετρα.

Σχ. 21. Ἡ Βαλκανική Χερσόνησος ὑπό κλίμακα 1 : 10.000.000

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

14) Ἕνα ὀρθογώνιο οἰκόπεδο ἔχει διαστάσεις 40 μέτ. καί 30 μέτ. Νά τό σχεδιάσετε μέ κλίμακα $\frac{1}{1000}$ καί ἔπειτα νά βρεῖτε τό πραγματικό μῆκος τῆς διαγωνίου τοῦ οἰκοπέδου.

15) Ἡ ἀπόσταση μεταξύ δύο χωριῶν εἶναι 6 χιλιόμετρα. Μέ ποιό μῆκος παριστάνεται σ' ἕναν ὁδικό χάρτη ὑπό κλίμακα $\frac{1}{50.000}$;

16) Μετρῆστε καί ὑπολογίστε ἀπό τό χάρτη σχ. 26 τήν κατευθείαν ἀπόσταση: α΄) τῆς Ἀθήνας ἀπό τό Ἡράκλειο β΄) τῆς Ἀθήνας ἀπό τή Σμύρνη καί γ΄) τῆς Ἀθήνας ἀπό τήν Κωνσταντινούπολη.

Ὁμάδα Β΄

17) Ἔχουμε ἕναν τοπογραφικό χάρτη μιᾶς πόλεως στόν ὁποῖο τό πραγματικό μῆκος ἑνός εὐθύγραμμου δρόμου ΑΒ εἶναι 2,4 χιλιόμετρα. Ὁ ἴδιος δρόμος πάνω στό χάρτη εἶναι 36 χιλιοστόμετρα. Ποιά εἶναι ἡ κλίμακα τοῦ χάρτη;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Τό βιβλιάριο καταθέσεων τοῦ Πέτρου στό Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο εἶναι ἕνας ἀριθμητικός πίνακας. Ποιές πληροφορίες μποροῦμε νά πάρουμε ἀπό τόν πίνακα αὐτό;
2) Γιά ποιά γενικά θέματα συντάσσει ἀριθμητικούς πίνακες ἡ Στατιστική Ὑπηρεσία;
3) Πῶς προσδιορίζουμε τή θέση ἑνός σημείου στό ἐπίπεδο μιᾶς ὀρθῆς γωνίας χΟψ;
4) Πῶς γίνεται ἡ γραφική παράσταση ἑνός πίνακα πού ἐκφράζει τήν ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν τιμῶν δύο ἀλληλοεξαρτώμενων ποσῶν στό ἐπίπεδο ὀρθῆς γωνίας χΟψ;
5) Πῶς παρουσιάζεται γραφικά ἡ σχέση μεταξύ δυό ἀναλόγων ποσῶν;
6) Μποροῦμε νά ἔχουμε τήν ἀριθμητική λύση ἑνός προβλήματος τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν μέ ποσά ἀνάλογα ἀπό τή γραφική παράσταση τῆς σχέσης μεταξύ τῶν ποσῶν του;
7) Μέ ποιόν ἄλλο τρόπο παρουσιάζονται γραφικά τά στατιστικά δεδομένα;
8) Τί λέγεται σχέδιο ἑνός ἐπίπεδου σχήματος;
9) Τί λέμε κλίμακα ἑνός σχέδιου; Πῶς ἐκφράζεται ἡ κλίμακα;

ΓΕΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

Ὁμάδα Β΄

1) Νά μοιραστοῦν 1.500 δρχ. μεταξύ τριῶν ἀπόρων μαθητῶν, ἔτσι ὥστε ὁ 1ος νά πάρει 200 δρχ. περισσότερες ἀπό τό 2ο καί ὁ 2ος 100 δρχ. περισσότερες ἀπό τόν 3ο. (Νά λυθεῖ μέ ἐξίσωση).
2) Ποιά ἡ τιμή τοῦ κιλοῦ τῆς ζάχαρης, ὅταν τά 9 κιλά κοστίζουν 84 δρχ. περισσότερο ἀπό τά 5 κιλά; (Νά λυθεῖ μέ ἐξίσωση).
3) Ἕνας πατέρας ἡλικίας 54 ἐτῶν ἔχει τρία παιδιά 13,10 καί 7 ἐτῶν. Ὕστερα ἀπό πόσα ἔτη, ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα θά εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τῶν παιδιῶν του; (Νά λυθεῖ μέ ἐξίσωση).
4) Δυό αὐτοκίνητα ξεκίνησαν τήν ἴδια στιγμή τό ἕνα ἀπό τήν Ἀθήνα καί τό ἄλλο ἀπό τήν Κόρινθο καί κατευθύνονται γιά τόν Πύργο μέ ἀντίστοιχες ταχύτητες 80 χλμ. τήν ὥρα καί 60 χλμ. τήν ὥρα. Ὕστερα ἀπό πόσο χρόνο θά συναντηθοῦν καί σέ ποιά ἀπόσταση ἀπό τήν Κόρινθο; (Ἀθήνα - Κόρινθος 80 χλμ.).
5) Ρώτησαν ἕνα βοσκό πόσα πρόβατα ἔχει καί αὐτός ἀπάντησε: Ἄν στά $\frac{3}{8}$ αὐτῶν προσθέσω 5, γίνονται 50. Πόσα πρόβατα ἔχει; (Νά λυθεῖ μέ ἐξίσωση).
6) Ὁ καφές κατά τό καβούρδισμα χάνει τό $\frac{1}{6}$ τοῦ βάρους του. Ποιός εἶναι ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ νωποῦ καφέ πρός τόν καβουρδισμένο καί ἀντίστροφα. Πόσο νωπό καφέ χρειαζόμαστε, γιά νά πάρουμε 18 κιλά καβουρδισμένο;
7) Ἀπό τήν ἀναλογία $\frac{3}{8} = \frac{15}{40}$ νά βρεῖτε τήν ἀναλογία $\frac{3+8}{8} = \frac{15+40}{40}$.
8) Δυό κτηνοτρόφοι νοίκιασαν γιά τή βοσκή τῶν προβάτων τους, ἕνα λιβάδι καί πλήρωσαν 22.000 δρχ. Ὁ α΄ βόσκησε σ' αὐτό τά πρόβατά του ἐπί 2 μῆνες καί ὁ β΄ ἐπί 5 μῆνες. Τά πρόβατα ὅμως τοῦ α΄ ἦταν πενταπλάσια ἀπό τά πρόβατα τοῦ β΄. Πόσες δρχ. πλήρωσε ὁ καθένας;
9) Νά μοιραστεῖ τό ποσό τῶν 776 δρχ. μεταξύ 4 μαθητῶν ἔτσι, πού ὁ β΄ νά λάβει τά $\frac{2}{5}$ τοῦ μεριδίου τοῦ α΄, ὁ γ΄ τά $\frac{3}{4}$ τοῦ μεριδίου τοῦ β΄ καί ὁ δ΄ τά $\frac{4}{5}$ τοῦ μεριδίου τοῦ γ΄. Πόσες δραχμές θά πάρει κάθε μαθητής;

10) Τρεῖς ἔμποροι ἄρχισαν ἐπιχείρηση καί κατέθεσαν τά ἑξῆς ποσά: Ὁ α΄ 80.000 δρχ., ὁ β΄ 50.000 δρχ. καί ὁ γ΄ 65.000 δρχ. Ὅταν μοιράστη-

καν τό κέρδος ὁ α΄ πῆρε 4.000 δρχ. Πόσες δρχ. πῆρε ὁ καθένας ἀπό τούς ἄλλους;

11) Ἕνας ἀγελαδοτρόφος ἔχει 120 ἀγελάδες καί ζωοτροφές γιά 40 ἡμέρες. Ὕστερα ἀπό 10 ἡμέρες ἀγοράζει 30 ἀκόμη ἀγελάδες καί τοῦ δίνουν καί ζωοτροφές 5 ἡμερῶν γιά τίς ἀγελάδες αὐτές. Πόσες ἡμέρες θά περάσουν ὅλες οἱ ἀγελάδες μέ τίς ζωοτροφές πού ἔχουν, ἔτσι ὥστε νά μείνει ἀμετάβλητη ἡ μερίδα κάθε ἀγελάδας;

12) Ἀπό ἕνα φορτίο πορτοκάλια πουλήθηκαν τά μισά, σάπισαν τό $\frac{1}{5}$ ὁλόκληρου τοῦ φορτίου κι ἀπέμειναν 900 πορτοκάλια. Πόσα πορτοκάλια εἶχε ὁλόκληρο τό φορτίο;
(Νά λυθεῖ α΄) μέ ἁπλή μέθοδο τῶν τριῶν ἀφοῦ γίνει χρήση βοηθητικοῦ ποσοῦ καί β΄) μέ ἐξίσωση).

13) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε ἕνα τόπι ὕφασμα μέ 350 δρχ. τό μέτρο. Πούλησε τό $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ μέ 400 δρχ. τό μέτρο καί τό ὑπόλοιπο μέ 420 δρχ. τό μέτρο. Ἔτσι κέρδισε ἀπ' ὅλο τό ὕφασμα 3.800 δρχ. Πόσα μέτρα ἦταν τό ὕφασμα;
(Νά χρησιμοποιήσετε βοηθητικό ποσό).

14) 9 ἐργάτες τελειώνουν ἕνα ἔργο σέ 25 ἡμέρες, ὅταν ἐργάζονται 8 ὧρες τήν ἡμέρα. Ὕστερα ἀπό ἐργασία 5 ἡμερῶν πῆραν καί ἄλλους 3 ἐργάτες, ἀλλά λιγόστεψε ὅμως ἡ ἐργασία τους κατά 2 ὧρες τήν ἡμέρα. Νά ὑπολογίσετε, σέ πόσες ἡμέρες τελείωσε τό ἔργο.

15) 18 ἐργάτες ἀνέλαβαν νά τελειώσουν ἕνα ἔργο σέ 1 μῆνα 10 ἡμέρες. Ὕστερα ἀπό ἐργασία 12 ἡμερῶν, 6 ἐργάτες διέκοψαν τήν ἐργασία τους καί συνέχισαν τό ἔργο οἱ ὑπόλοιποι. Νά ὑπολογίσετε, σέ πόσες ἡμέρες τελείωσε ὅλο τό ἔργο.

16) Παντοπώλης πουλάει βούτυρο μέ 110,40 δρχ. τό κιλό καί κερδίζει 15% στήν τιμή τῆς ἀγορᾶς. Πόσο στά ἑκατό (%) θά ἦταν τό κέρδος του, ἄν πουλοῦσε 4,80 δρχ. τό κιλό ἀκριβότερα;

17) Ἕνας ἠλεκτρολόγος ἀγόρασε 1.250 βίδες μέ 900 δρχ. τή χιλιάδα. Στή μεταφορά χάθηκαν 170 βίδες. Ἀπό τήν πώληση τῶν ὑπολοίπων κέρδισε 20% στήν τιμή τῆς ἀγορᾶς ὅλων. Πόσες δρχ. πούλησε καθεμιά βίδα;

18) Ἄν ἔμπορος πουλοῦσε ἕνα ἐμπόρευμα 23.000 δρχ., θά κέρδιζε 15% στό κόστος του. Πούλησε ὅμως αὐτό 19.000 δρχ. Τό ἐμπόρευμα αὐτό πουλήθηκε ἄνω ἤ κάτω τοῦ κόστους του καί πόσο στά ἑκατό;

73

19) Ἔμπορος χονδρικῆς πουλήσεως πουλάει στούς παντοπῶλες ρύζι μέ κέρδος 10% κι αὐτοί στόν καταναλωτή μέ κέρδος 20%. Ἄν οἱ παντοπῶλες πουλοῦν τό ρύζι 29,70 δρχ. τό κιλό, σέ ποιά τιμή ἀγοράζει τό ρύζι ὁ χονδρέμπορος ἀπό τόν παραγωγό;

20) Ἕνας ἐργάτης ξοδεύει τά $\frac{7}{8}$ τοῦ ἡμερομισθίου του. Ἄν ξόδευε 20% λιγότερο θά εἶχε οἰκονομία 144 δρχ. τήν ἡμέρα. Ποιό εἶναι τό ἡμερομίσθιό του; (Χρησιμοποιῆστε βοηθητικό ποσό).

21) Κατάστημα πουλάει τά παπούτσια μέ κέρδος 40% στό κόστος. Ἕνας πελάτης ἀγόρασε παπούτσια καί πλήρωσε 756 δρχ. μέ ἔκπτωση 10%. Πόσα κέρδισε ὁ καταστηματάρχης καί πόσα ὠφελήθηκε ὁ πελάτης;

22) Ἕνα ἐλαιοπαραγωγικό νησί τῆς Ἑλλάδας εἶχε τήν παρακάτω παραγωγή λαδιοῦ:

ἔτη	1973	1974	1975	1976	1977	1978
Ἀριθμός τόνων	120	160	100	200	150	180

Νά κάνετε γραφική παράσταση τῆς παραγωγῆς αὐτῆς σύμφωνα μέ τά στοιχεῖα τοῦ δοσμένου πίνακα.

23) Νά σχηματίσετε ραβδόγραμμα μέ τά στοιχεῖα τῆς ἄσκησης 22.

24) Ἕνας κτηματίας μέ τά $\frac{3}{4}$ τῶν χρημάτων του ἀγόρασε μιά οἰκία. Τά ὑπόλοιπα τόκισε μέ 9% γιά 1 ἔτος 3 μῆνες καί πῆρε τόκο 36.000 δρχ. Πόσο ἀγόρασε τήν οἰκία;

25) Τά $\frac{16}{25}$ κεφαλαίου τοκίζονται μέ 8% γιά 1 ἔτος 3 μῆνες καί φέρνουν τόκο 1600 δρχ. Μέ ποιό ἐπιτόκιο πρέπει νά τοκιστεῖ ὁλόκληρο τό κεφάλαιο, γιά νά φέρει ἐτήσιο τόκο τά $\frac{3}{2}$ τοῦ προηγούμενου τόκου;

26) Ἕνας βιοτέχνης δάνεισε ἕνα κεφάλαιο καί ὕστερα ἀπό 1 ἔτος, 8 μῆνες πῆρε κεφάλαιο καί τόκο 34.500 δρχ. Ἄν ὁ τόκος εἶναι τά $\frac{3}{20}$ τοῦ κεφαλαίου, νά βρεῖτε τό ἐπιτόκιο.

27) Ποιό κεφάλαιο τοκιζόμενο μέ 9% γίνεται ἔπειτα ἀπό 1 ἔτος 2 μῆνες μέ τούς τόκους του 19.890 δρχ.;

74

Ὁμάδα Γ΄

28) Ἕνα δοχεῖο γεμάτο νερό ζυγίζει 15 κιλά. Ἄν ἀδειάσουμε τά $\frac{5}{6}$ τοῦ περιεχομένου του, θά ζυγίζει μόνο 5 κιλά. Νά βρεθεῖ τό βάρος τοῦ δοχείου, ὅταν εἶναι ἄδειο. (Νά λυθεῖ μέ ἐξίσωση).

29) Σήμερα οἱ ἡλικίες μητέρας καί κόρης εἶναι ὅπως οἱ ἀριθμοί 13 πρός 7. Ὅταν γεννήθηκε ἡ κόρη ἡ μητέρα ἦταν 24 ἐτῶν. Πόσα ἔτη εἶναι οἱ σημερινές ἡλικίες τους;

30) Τήν 1η Ἰουνίου 1978 ἔχουμε τά ἀκόλουθα στοιχεῖα γιά τό ἐργατικό δυναμικό ἑνός χωριοῦ Α (800 ἐργάτες). Ἀπασχολοῦνται μέ τή γεωργία 320, μέ τήν κτηνοτροφία 100, μέ τή βιομηχανία 180 καί μέ ἄλλες ἐργασίες 200. Νά γίνει κυκλικό διάγραμμα αὐτῆς τῆς κατανομῆς.

31) Λαδέμπορος πουλάει μιά ποσότητα λάδι μέ κέρδος 20% στήν τιμή τῆς ἀγορᾶς. Ἄν πουλήσει τήν ἴδια ποσότητα μέ κέρδος 20% στήν τιμή πουλήσεως, τότε θά ἔχει 3.600 δρχ. περισσότερο κέρδος. Ποιά εἶναι ἡ τιμή τῆς ἀγορᾶς;

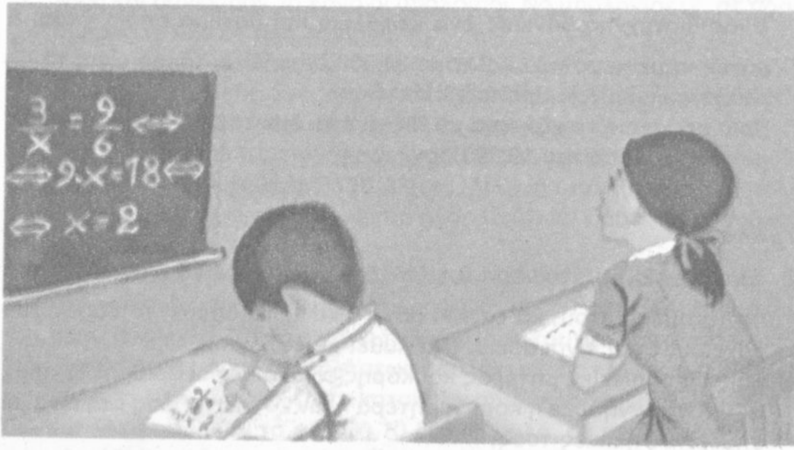
32) Φρουτέμπορος ἀγόρασε καρπούζια καί εἶχε 25% ἔξοδα μεταφορᾶς. Τά πούλησε 66.000 δρχ. καί εἶχε κέρδος 20%. Πόσο τά εἶχε ἀγοράσει;

33) Ἕνα κεφάλαιο τοκιζόμενο γιά 14 μῆνες γίνεται μέ τούς τόκους του 33.150 δρχ. Τό ἴδιο κεφάλαιο, ὅταν τοκιστεῖ 20 μῆνες γίνεται μέ τούς τόκους του 34.500 δρχ. Νά βρεθεῖ τό κεφάλαιο, καί τό ἐπιτόκιο.

34) Ἕνα κεφάλαιο τοκιζόμενο γιά 1 ἔτος 4 μῆνες φέρνει τόκο 2.560 δρχ. Ἄν ὅμως ἦταν κατά 6.000 δρχ. μεγαλύτερο στόν ἴδιο χρόνο καί μέ τό ἴδιο ἐπιτόκιο θά ἔφερνε τόκο 3.200 δρχ. Νά βρεθεῖ τό ἐπιτόκιο καί τό κεφάλαιο.

35) Τέσσερα κεφάλαια ἔχουν ἄθροισμα 144.000 δρχ. Τοκίστηκαν μέ τά ἴδια ἐπιτόκια στόν ἴδιο χρόνο κι ἔφεραν τόκους 200, 600, 700 καί 900 δρχ. ἀντίστοιχα. Ποιά ἦταν τά κεφάλαια;

36) Νά μεριστεῖ τό ποσό τῶν 57.000 δρχ. σέ δυό μέρη τέτοια, ὥστε τό ἕνα μέρος ὅταν τοκιστεῖ μέ 10% καί τό ἄλλο μέ 9% νά φέρνουν στόν ἴδιο χρόνο ἴσους τόκους.



ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1 ΣΥΝΤΟΜΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΗΣ ΥΛΗΣ ΠΟΥ ΔΙΔΑΧΤΗΚΕ ΣΤΗΝ Ε΄ ΤΑΞΗ ΜΕ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μάθημα

1. Εἴδη καί μέτρηση γωνιῶν – Εὐθύγραμμα σχήματα (Παραλληλόγραμμα)

α΄) Τί λέγεται γωνία καί ποιά εἶναι τά στοιχεῖα της;
β΄) Μέ ποιούς τρόπους μποροῦμε νά διαβάσουμε μιά γωνία;
γ΄) Ποιά γωνία λέγεται ὀρθή; Μέ ποιό ὄργανο τή χαράζουμε;
δ΄) Ποιά εἴδη γωνιῶν ἔχουμε;
ε΄) Τί λέγεται μέτρηση γωνίας; Μέ ποιό ὄργανο μετροῦμε μιά γωνία;
στ΄) Τί λέγεται εὐθύγραμμο σχῆμα; Ποιά εὐθύγραμμα σχήματα ξέρετε;
ζ΄) Τί λέγεται περίμετρος εὐθυγράμμου σχήματος;
η΄) Τί λέγεται τετράγωνο καί ποιά εἶναι τά στοιχεῖα του;
θ΄) Πῶς βρίσκουμε τήν περίμετρο τετραγώνου, ὅταν ξέρουμε τήν πλευρά του;
Ἀντίστροφα: Πῶς βρίσκουμε τήν πλευρά του, ὅταν ξέρουμε τήν περίμετρό του;
ι΄) Τί λέγεται ὀρθογώνιο (παραλληλόγραμμο) καί ποιά εἶναι τά στοιχεῖα του;

ια΄) Πῶς βρίσκουμε τήν περίμετρο ὀρθογωνίου, ὅταν ξέρουμε τίς διαστάσεις του;
ιβ΄) Τί λέγεται παραλληλόγραμμο καί ποιά εἶναι τά στοιχεῖα του;
ιγ΄) Ποιές ἰδιότητες τοῦ παραλληλογράμμου ξέρετε;
ιδ΄) Τί λέγεται ρόμβος καί ποιά εἶναι τά στοιχεῖα του;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὁμάδα Α΄

1) Νά κατασκευάσετε μιά γωνία καί νά τήν ὀνομάσετε μέ ὅλους τούς τρόπους.
2) Νά κατασκευάσετε μιά γωνία 60° καί ὕστερα μιά ἄλλη 135°.
3) Μιά γωνία εἶναι $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς. Εἶναι μικρότερη ἤ μεγαλύτερη τῆς ὀρθῆς καί πόσο; Τί εἴδους γωνία εἶναι;
4) Νά κάνετε τό ἴδιο γιά μιά γωνία, πού εἶναι ἴση μέ $1\frac{1}{3}$ τῆς ὀρθῆς.
5) Ἕνα τετραγωνικό οἰκόπεδο ἔχει πλευρά μέ μῆκος 82,40 μ. Νά βρεῖτε τήν περίμετρό του.
6) Ἕνα οἰκόπεδο, σχήματος ὀρθογωνίου, ἔχει μῆκος 72,50 μ. καί πλάτος 42 μ. Νά βρεῖτε τήν περίμετρό του.
7) Ἕνας κῆπος, σχήματος ρόμβου, ἔχει περίμετρο 45 μέτρων. Πόσο εἶναι τό μῆκος τῆς πλευρᾶς του;

Ὁμάδα Β΄

8) Χαράξτε δυό γωνίες ἄνισες. Ὕστερα, μέ ἕνα διαφανές χαρτί, κατασκευάστε τό ἄθροισμά τους καί τή διαφορά τους.
9) Ἕνα τετραγωνικό οἰκόπεδο ἔχει πλευρά μέ μῆκος 20,50 μ. περιφράχτηκε μέ 3 σειρές σύρμα, πού τό μέτρο του κοστίζει 16,50 δρχ. Πόσα μέτρα σύρμα χρειάστηκαν καί πόσες δρχ. θά στοιχίσει ἡ περίφραξη;
10) Ἕνα ὀρθογώνιο ἔχει περίμετρο 120 μέτρα. Τό πλάτος του εἶναι τό πέμπτο τοῦ μήκους του. Νά βρεῖτε τά μήκη τῶν διαστάσεών του.

2 *2. Μέτρηση τῆς ἐπιφάνειας τῶν παραλληλογράμμων*

α΄) Τί λέγεται ἐμβαδό εὐθυγράμμου σχήματος;
β΄) Ποιές εἶναι οἱ μονάδες μέτρησης τῶν ἐπιφανειῶν;
γ΄) Ποιές εἶναι οἱ ὑποδιαιρέσεις καί τά πολλαπλάσια τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου;

δ΄) Πῶς βρίσκουμε τό ἐμβαδό τοῦ τετραγώνου;

ε΄) Πῶς βρίσκουμε τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογωνίου. Νά τό παραστήσετε μέ γενικούς ἀριθμούς.

στ΄) Πῶς βρίσκουμε τό μῆκος τῆς βάσεως τοῦ ὀρθογωνίου, ὅταν ξέρουμε τό ἐμβαδό καί τό ὕψος του; Καί πῶς τό ὕψος του, ὅταν ξέρουμε τό ἐμβαδό καί τή βάση του;

ζ΄) Πῶς βρίσκουμε τό ἐμβαδό κάθε παραλληλόγραμμου;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὁμάδα Α΄

11) Ἕνας τετραγωνικός κῆπος ἔχει περίμετρο 202 μ. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό του.

12) Ἕνας γεωργός ἀγόρασε ἕνα ὀρθογώνιο χωράφι μέ μῆκος 60 μέτρα καί πλάτος 40 μέτρα μέ 115.000 δρχ. τό στρέμμα. Νά βρεῖτε πόσες δρχ. τοῦ στοίχισε τό χωράφι αὐτό.

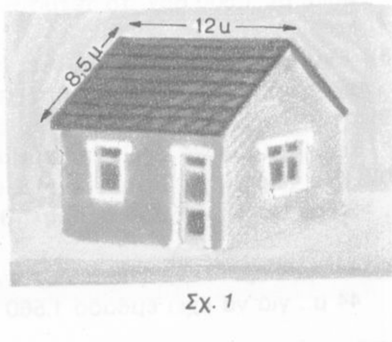
13) Ὑπολογίστε τό μῆκος ἑνός ὀρθογωνίου, πού ἔχει ἐμβαδό 312,8 τ. μέτρα καί πλάτος 8,5 μέτρα.

14) Τό ἄθροισμα τῶν μηκῶν δυό ἀπέναντι πλευρῶν ἑνός κήπου, πού ἔχει σχῆμα παραλληλογράμμου, εἶναι 26,60 μέτρα καί ἡ ἀπόστασή της εἶναι 5,50 μέτρα. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό του.

Ὁμάδα Β΄

15) Τό πάτωμα μιᾶς αἴθουσας διδασκαλίας ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου μέ διαστάσεις 10,5 μ. καί 6,4 μ. Πρόκειται νά στρωθεῖ μέ τετραγωνικές πλάκες, πού ἔχουν πλευρά μέ μῆκος 0,25 μ. Πόσες πλάκες θά χρειαστοῦν καί πόσο θά στοιχίσει ἡ ἐπίστρωση ἄν κάθε πλάκα κοστίζει 12,50 δρχ.;

16) Στό σχ. 1 βλέπετε μιά στέγη ἑνός μικροῦ σπιτιοῦ, πού ἀποτελεῖται ἀπό δύο ἴσα κεκλιμένα ὀρθογώνια μέρη μέ διαστάσεις 12 μ. καί 8,5 μ. Γιά νά σκεπάσουμε 1 τ. μέτρο ἐπιφάνεια ἀπό τή στέγη αὐτή, χρειάζονται 24 κεραμίδια. Ὑπολογίστε πόσα κεραμίδια πρέπει νά παραγγελθοῦν.



Σχ. 1

3 3. Τό τρίγωνο, τό τραπέζιο καί τό πολύγωνο – Μέτρηση τῆς ἐπιφάνειας τῶν σχημάτων αὐτῶν

α΄) Τί λέγεται τρίγωνο καί ποιά εἶναι τά κύρια στοιχεῖα του;
β΄) Ποιά εἴδη τριγώνου διακρίνουμε; i) ἀπό τίς πλευρές τους; ii) ἀπό τίς γωνίες τους;
γ΄) Πῶς βρίσκουμε τήν περίμετρο ἰσόπλευρου τριγώνου, ὅταν ξέρουμε τήν πλευρά του;
δ΄) Τί λέγεται ὕψος τριγώνου; Πόσα ὕψη ἔχει ἕνα τρίγωνο;
ε΄) Πῶς βρίσκουμε τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου; Νά τό παραστήσετε μέ γενικούς ἀριθμούς.
στ΄) Πῶς βρίσκουμε τό μῆκος τῆς βάσεως τριγώνου, ὅταν ξέρουμε τό ἐμβαδό καί τό ὕψος του; καί πῶς τό ὕψος του, ὅταν ξέρουμε τό ἐμβαδό καί τή βάση του;
ζ΄) Τί λέγεται τραπέζιο καί ποιά εἶναι τά στοιχεῖα του;
η΄) Πότε ἕνα τραπέζιο λέγεται ἰσοσκελές καί πότε ὀρθογώνιο;
θ΄) Πῶς βρίσκουμε τό ἐμβαδό τραπεζίου; Νά τό παραστήσετε μέ γενικούς ἀριθμούς.
ι΄) Τί λέγεται πολύγωνο; Ἀπό ποῦ παίρνει τό ὄνομά του;
ια΄) Τί κάνουμε, γιά νά βροῦμε τό ἐμβαδό ἑνός πολυγώνου;

Σημείωση. Ἡ ἐπανάληψη τῆς παρουσιάσεως καί ἀναγνωρίσεως τῶν κυριότερων γεωμετρικῶν στερεῶν (ὕλη Ε΄ τάξεως) γίνεται στό μάθημα 12 σελίς 151

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὁμάδα Α΄

17) Ἕνα τριγωνικό οἰκόπεδο μέ βάση 56,80 μ. καί ὕψος 32,50 μ. πουλήθηκε μέ 1.500 δρχ. τό τετραγωνικό μέτρο. Πόσες δρχ. ἦταν ἡ ἀξία του;
18) Ἕνα τριγωνικό οἰκόπεδο ἔχει ἐμβαδό 405 τ. μέτρα καί ἡ βάση του ἔχει μῆκος 30 μ. Ὑπολογίστε τό ὕψος του.
19) Ἡ μιά ἀπό τίς κάθετες πλευρές ἑνός γνώμονα εἶναι 0,25 μ. καί ἡ ἄλλη 0,14 μ. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό του.
20) Ἕνα χωράφι σχήματος τραπεζίου μέ μεγάλη βάση 112 μ, μικρή βάση 98 μ. καί ὕψος 52,50 μ. πουλήθηκε μέ 6.500 δρχ. τό στρέμμα. Ποιά ἦταν ἡ ἀξία του;
21) Τί ὕψος πρέπει νά δώσουμε σ' ἕνα τραπέζιο πού ἔχει βάσεις 60 μ. καί 44 μ., γιά νά ἔχει ἐμβαδό 1.560 τ. μέτρα;

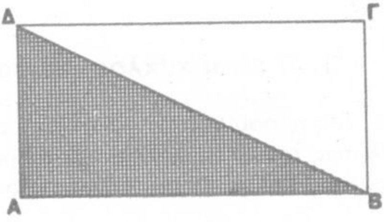
Ὁμάδα Β΄

22) Ἕνας ὀρθογώνιος κῆπος ΑΒΓΔ ἔχει περίμετρο 60 μ. Τό μῆκος του (ΑΒ) εἶναι διπλάσιο ἀπό τό πλάτος του (ΒΓ). Ὑπολογίστε τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ μέ δυό τρόπους. (σχ. 2).

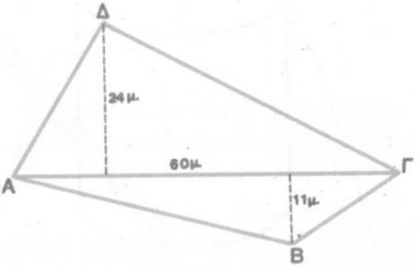
23) Ἕνας ρόμβος ἔχει περίμετρο ἴση μέ τήν περίμετρο ἑνός ἰσόπλευρου τριγώνου, πού ἔχει πλευρά 5 ἑκατοστόμετρα. Ποιό εἶναι τό μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ ρόμβου;

24) Ἕνα τραπέζιο ἔχει ἐμβαδό 72 τ. μέτρα καί ὕψος 9 μ. Ἄν ἡ μεγάλη βάση του εἶναι διπλάσια τῆς μικρῆς, νά βρεθοῦν οἱ βάσεις τοῦ τραπεζίου.

25) Ἕνα χωράφι ἔχει σχῆμα τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου ἡ μεγαλύτερη διαγώνιος εἶναι ἴση μέ 60 μ. (σχ. 3). Μιά κορυφή ἀπέχει ἀπό τή διαγώνιο αὐτή 24 μ. καί ἡ ἄλλη 11 μ. Νά βρεῖτε πόσα στρέμματα εἶναι τό χωράφι αὐτό. (Σχ. 3).



Σχ. 2



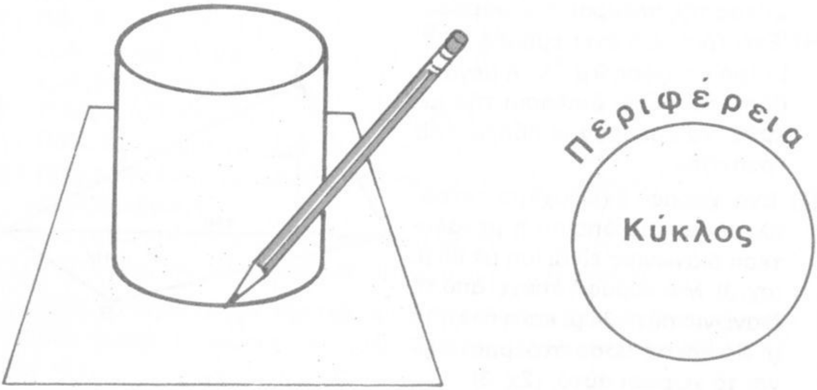
Σχ. 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α΄

Ο ΚΥΚΛΟΣ – ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

4 1. *Τί εἶναι κύκλος καί ποιά εἶναι τά στοιχεῖα του*

Ἄς πάρουμε ἕναν κύλινδρο καί ἄς τοποθετήσουμε μιά ἀπό τίς δυό βάσεις του στό ἐπίπεδο τοῦ τετραδίου μας. Μέ τή μύτη ἑνός καλά ξυσμένου μολυβιοῦ σημειώνουμε στό χαρτί τή γραμμή γύρω γύρω, στήν

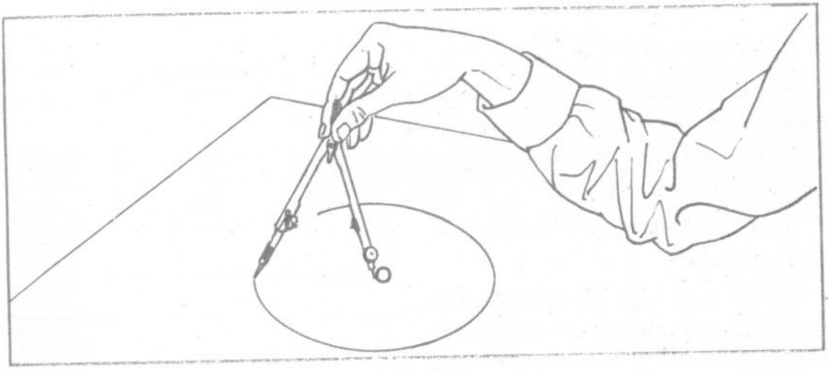


Σχ. 4

ὁποία τελειώνει ἡ βάση αὐτή τοῦ κυλίνδρου. Ἔτσι θά προκύψει τό ἐπίπεδο μέρος πού βλέπετε στό σχ. 4.

Τό ἐπίπεδο αὐτό μέρος λέγεται ***κύκλος.*** Ἡ γραμμή ἀπό τήν ὁποία περικλείεται ὁ κύκλος λέγεται ***περιφέρεια.*** Περιφέρεια κύκλου μποροῦμε νά χαράξουμε μέ τό γνωστό γεωμετρικό μας ὄργανο, τό διαβήτη (Σχ. 5).

Στερεώνουμε καλά τά σκέλη τοῦ διαβήτη μας, γιά νά μή μεταβάλλεται ἡ γωνία τους. Ὕστερα στηρίζουμε τήν αἰχμή τοῦ ἑνός σκέλους του σ' ἕνα σημεῖο Ο τοῦ ἐπίπεδου καί περιφέρουμε τό διαβήτη γύρω ἀπό τό σημεῖο, σέ τρόπο ὥστε ἡ γραφίδα τοῦ ἄλλου σκέλους νά ἀγγίζει συνεχῶς τό ἐπίπεδο. Ἔτσι ἡ γραφίδα τοῦ διαβήτη γράφει μιά καμπύλη γραμμή, (σχ. 5) τῆς ὁποίας ὅλα τά σημεῖα ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό τό σημεῖο Ο, δηλ. τήν περιφέρεια τοῦ κύκλου. Στήν περιφέρεια δέν ὑπάρχουν ἄκρα, ὅπως γενικά σέ διάφορες ἄλλες γραμμές. Γι' αὐτό ἡ περιφέρεια εἶναι μιά κλειστή καμπύλη γραμμή. Τό σημεῖο Ο, στό ὁποῖο στηρίξαμε τήν αἰχμή τοῦ διαβήτη, λέγεται ***κέντρο*** τοῦ κύκλου. Ὥστε:



Σχ. 5

Κύκλος εἶναι ἕνα ἐπίπεδο μέρος, τό ὁποῖο περικλείεται ἀπό μιά καμπύλη κλειστή γραμμή, πού τό σύνολο τῶν σημείων της ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό ἕνα ὁρισμένο σημεῖο, πού βρίσκεται μέσα σ' αὐτή καί λέγεται κέντρο τοῦ κύκλου.

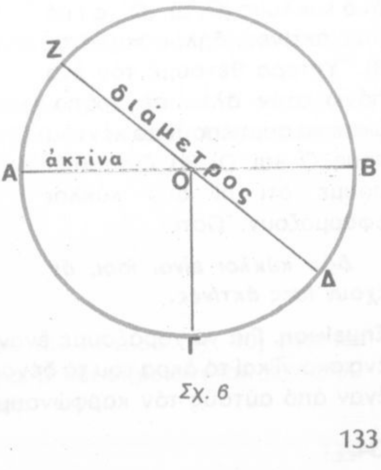
Ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου. Τά εὐθύγραμμα τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ κτλ. (Σχ. 6) ἀρχίζουν ἀπό τό κέντρο Ο καί τελειώνουν στήν περιφέρεια τοῦ κύκλου Ο. Τά τμήματα αὐτά λέγονται ***ἀκτίνες*** τοῦ κύκλου. Ἐπειδή ὅλα τά σημεῖα τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό τό κέντρο του, συμπεραίνουμε ὅτι:

Ὅλες οἱ ἀκτίνες ἑνός κύκλου εἶναι ἴσες.

Γράφουμε: ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ...
Ἀκόμη ἀκτίνα λέμε καί τό μῆκος τῶν ἴσων τμημάτων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ...

Μποροῦμε νά παραστήσουμε τήν ἀκτίνα ἑνός κύκλου μέ τό γενικό ἀριθμό α. Ἐπειδή σ' ἕνα ἐπίπεδο ἕνα καί μόνο κύκλο μποροῦμε νά γράψουμε μέ κέντρο Ο καί ἀκτίνα α, ὁ κύκλος αὐτός συμβολίζεται (Ο, α).

Ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου. Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΟΒ (σχ. 6), πού



Σχ. 6

περνάει ἀπό τό κέντρο Ο καί ἔχει τά ἄκρα του στήν περιφέρεια τοῦ κύκλου (Ο, α) λέγεται ***διάμετρος***· τήν παριστάνουμε μέ τό γράμμα δ. Ἡ διάμετρος ΑΒ ἔχει μέσο τό κέντρο Ο τοῦ κύκλου.

Αὐτό σημαίνει ὅτι: $\boxed{\delta = 2 \cdot \alpha}$

Καί τό τμῆμα ΔΟΖ εἶναι διάμετρος (σχ. 6). Ἐπειδή κάθε διάμετρος ἀποτελεῖται ἀπό δυό ἀκτίνες, συμπεραίνουμε ὅτι:

Ὅλες οἱ διάμετροι τοῦ ἴδιου κύκλου εἶναι ἴσες.

Ἄν διπλώσουμε τό ἐπίπεδο τοῦ κύκλου Ο στό μῆκος μιᾶς ἀπ' τίς διαμέτρους του. Π.χ. τῆς ΑΒ, θά διαπιστώσουμε ὅτι τά δυό μέρη, στά ὁποῖα χωρίζεται ὁ κύκλος, ἐφαρμόζουν. Ὥστε:

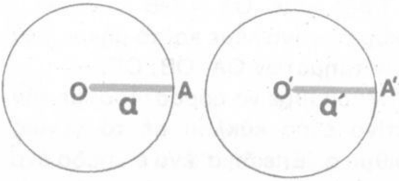
Κάθε διάμετρος χωρίζει τόν κύκλο καί τήν περιφέρειά του σέ δυό ἴσα μέρη.

Σχ. 7

Τά μέρη αὐτά τοῦ κύκλου λέγονται ***ἡμικύκλια*** (σχ. 7) καί τά μέρη τῆς περιφέρειάς του ***ἡμιπεριφέρειες.***

Κύκλοι ἴσοι. Χαράζουμε δυό κύκλους (Ο, α), (Ο΄, α΄) μέ ἴσες ἀκτίνες, δηλ. α = α΄ (σχ. 8). Ὕστερα θέτουμε τόν ἕνα πάνω στόν ἄλλο σέ τρόπο, ὥστε νά συμπέσουν τά κέντρα τους Ο καί Ο΄ θά διαπιστώσουμε ὅτι οἱ δυό κύκλοι ἐφαρμόζουν. Ὥστε:

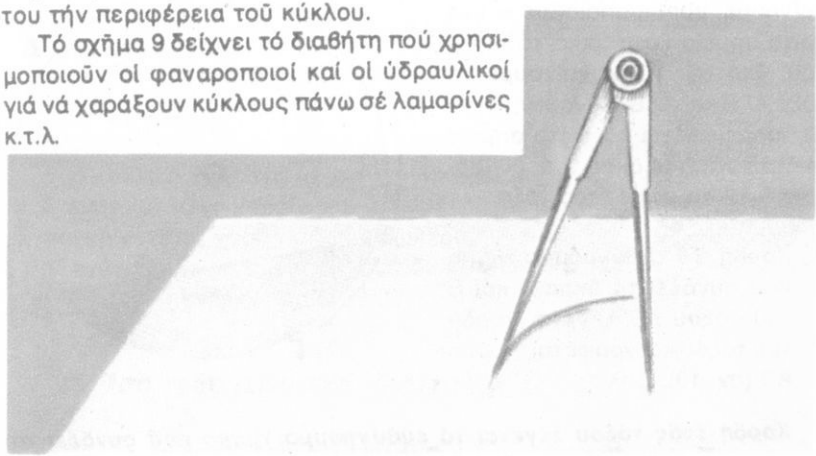
Δύο κύκλοι εἶναι ἴσοι, ἄν ἔχουν ἴσες ἀκτίνες.



Σχ. 8

Σημείωση. Γιά νά χαράξουμε ἕναν κύκλο πάνω στό ἔδαφος, παίρνουμε ἕνα σκοινί καί τά ἄκρα του τά δένουμε σέ δυό μυτερούς πασσάλους. Τόν ἕναν ἀπό αὐτούς τόν καρφώνουμε στό ἔδαφος, ἐκεῖ πού θέλουμε νά εἶναι τό κέντρο τοῦ κύκλου, καί τόν ἄλλο τόν μετακινοῦμε πάνω στό ἔδαφος, μέ τό σκοινί πάντα τεντωμένο, καί ἔτσι χαράζουμε μέ τή μύτη του τήν περιφέρεια τοῦ κύκλου.

Τό σχῆμα 9 δείχνει τό διαβήτη πού χρησιμοποιοῦν οἱ φαναροποιοί καί οἱ ὑδραυλικοί γιά νά χαράξουν κύκλους πάνω σέ λαμαρίνες κ.τ.λ.



Σχ. 9

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

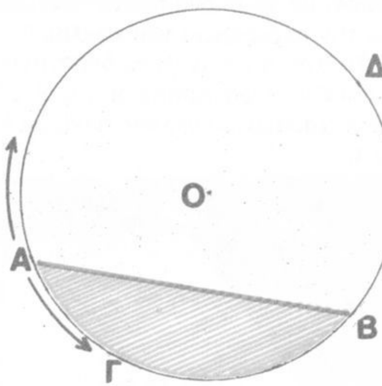
1) Νά βρεῖτε καί νά ὀνομάσετε διάφορες ἐπίπεδες ἐπιφάνειες πού ἔχουν σχῆμα κύκλου.
2) Νά γράψετε ἕναν κύκλο (0,5 ἑκατ.) καί νά βρεῖτε τό μῆκος τῆς διαμέτρου του.
3) Ἡ διάμετρος ἑνός κυκλικοῦ κήπου εἶναι 12,75 μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ ἀκτίνα του;
4) Νά γράψετε ἕναν κύκλο (Ο, ΟΑ). Ὕστερα νά πάρετε ἕνα σημεῖο Μ μέσα στόν κύκλο καί ἕνα ἄλλο Ν ἔξω ἀπό τόν κύκλο. Νά συγκρίνετε τήν ἀπόσταση ΟΜ καί ΟΝ μέ τήν ἀκτίνα ΟΑ.

5

2. Τά μέρη τοῦ κύκλου

α) **Τόξο.** Τό μέρος ΑΒ τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου (σχ. 10) λέγεται ***τόξο.*** Ὁρίζεται ἀπό τά ἄκρα του Α καί Β καί σημειώνεται: $\widehat{AB}$. Δηλ. ***τόξο εἶναι ἕνα μέρος τῆς περιφέρειας.***

Δυό σημεῖα μιᾶς περιφέρειας ὁρίζουν δυό διαφορετικά τόξα, ὅπως δείχνουν τά δυό βέλη. Γιά νά διακρίνουμε, χρησιμοποιοῦμε κι ἕνα τρίτο σημεῖο ἐσωτερικό κάθε τόξου. Στό σχ. 10 διακρίνουμε τά τόξα ΑΓΒ καί ΑΔΒ. Συνήθως, ὅταν δέ σημειώνεται τό τρίτο σημεῖο ἀνάμεσα ἀπό τά ἄκρα του, ὀνομάζουμε $\overset{\frown}{AB}$ τό μικρότερο τόξο.



Σχ. 10

β΄) Χορδή. Τό εὐθύγραμμο τμῆμα πού συνδέει τά ἄκρα Α καί Β τοῦ τόξου ΑΒ λέγεται χορδή τοῦ τόξου καί γράφεται: χορδή ΑΒ (σχ. 10). Δηλ.:

Χορδή ἑνός τόξου λέγεται τό εὐθύγραμμο τμῆμα πού συνδέει τά ἄκρα του.

Ἐνῶ κάθε τόξο ΑΓΒ ἔχει τή χορδή του ΑΒ, σέ κάθε χορδή ΑΒ ἀντιστοιχοῦν δυό τόξα τό ΑΓΒ καί τό ΑΔΒ.

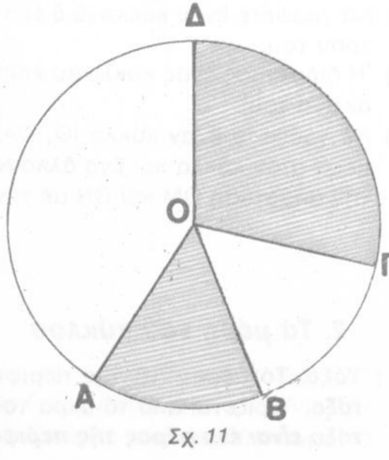
γ΄) Κυκλικό τμῆμα. Ἀνάμεσα στό τόξο ΑΓΒ καί στή χορδή του ΑΒ περιέχεται ἕνα μέρος τοῦ κύκλου, τό ΑΓΒΑ (σχ. 10). Αὐτό λέγεται ***κυκλικό τμῆμα.*** Ὥστε:

Κυκλικό τμῆμα λέγεται ἕνα μέρος τοῦ κύκλου πού περικλείεται ἀπό ἕνα τόξο κι ἀπό τή χορδή του.

δ΄) Κυκλικός τομέας. Μεταξύ τοῦ τόξου ΑΒ καί τῶν ἀκτίνων ΟΑ καί ΟΒ ὑπάρχει ἕνα μέρος τοῦ κύκλου, τό ΑΟΒΑ (σχ. 11). Τό μέρος αὐτό λέγεται ***κυκλικός τομέας.*** Ὥστε

Κυκλικός τομέας λέγεται ἕνα μέρος τοῦ κύκλου πού περικλείεται ἀπό ἕνα τόξο κι ἀπό τίς ἀκτίνες πού καταλήγουν στά ἄκρα τοῦ τόξου.

Κυκλικός τομέας εἶναι καί τό μέρος ΓΟΔΓ (σχ. 11). Τό τόξο ἑνός κυκλικοῦ τομέα λέγεται ***βάση*** αὐτοῦ.



Σχ. 11

Σημείωση. Ἡ σύγκριση δυό τόξων γίνεται μέ ἀποτύπωση σέ διαφανές χαρτί, ὅπως καί δυό γωνιῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

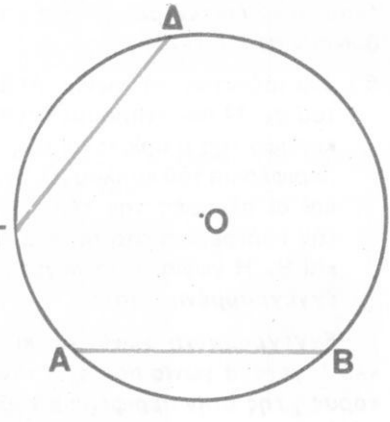
5) Νά σχεδιάσετε ἕναν κύκλο μέ ἀκτίνα 0,02 μ. καί νά τόν χωρίσετε σέ δυό κυκλικά τμήματα μέ μιά χορδή 0,03 μ.
6) Σ' ἕναν κύκλο νά χαράξετε μιά διάμετρο καί μιά χορδή του. Ὕστερα νά συγκρίνετε τή χορδή μέ τή διάμετρο.
7) Σ' ἕναν κύκλο νά χαράξετε δυό διαμέτρους ΑΒ καί ΓΔ. Σέ ποιά μέρη χωρίζεται ὁ κύκλος ἀπ' αὐτές;

3. Ἴσα τόξα – Βασική ἰδιότητα

Στήν περιφέρεια τοῦ κύκλου Ο δίνονται δυό ἴσα τόξα ΑΒ καί ΓΔ (σχ. 12) μικρότερα τῆς ἡμιπεριφέρειάς του, δηλ. $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Ἄν μέ τό διαβήτη συγκρίνουμε τίς χορδές τῶν τόξων αὐτῶν, διαπιστώνουμε ὅτι ***χορδή ΑΒ = = χορδή ΓΔ.***

Ἀντίστροφα, ἄν εἶναι χορδή ΑΒ = = χορδή ΓΔ, ἡ σύγκριση τῶν τόξων τους μέ ἀποτύπωση σέ διαφανές χαρτί μᾶς ὁδηγεῖ στήν ἰσότητα: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Γενικά, στόν ἴδιο κύκλο ἤ σέ ἴσους κύκλους.

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} \Longleftrightarrow$ ***χορδή ΑΒ = χορδή ΓΔ***



Σχ. 12

Ὥστε: ***Στόν ἴδιο κύκλο ἤ σέ ἴσους κύκλους τά ἴσα τόξα ἔχουν ἴσες χορδές*** καί, ἀντίστροφα, ***οἱ ἴσες χορδές ἔχουν ἴσα τόξα.***

Παρατήρηση. Ἡ ἰδιότητα αὐτή τῶν ἴσων τόξων εἶναι βασική, γιατί μᾶς ὁδηγεῖ στήν ἑξῆς πρακτική ἐφαρμογή: Γιά νά ὁρίσουμε δυό ἴσα τόξα στήν ἴδια ἤ σέ ἴσες περιφέρειες, ἀρκεῖ νά παίρνουμε μέ τό διαβήτη μας δυό ἴσες χορδές.

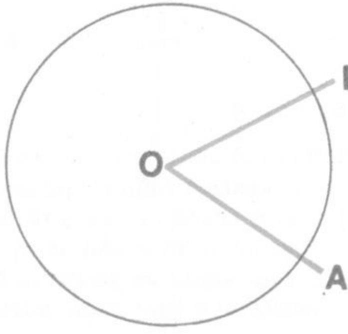
6

4. Ἐπίκεντρη καί ἐγγεγραμμένη γωνία

α΄) Ἐξετάζοντας τή γωνία ΑΟΒ τοῦ σχ. 13, παρατηροῦμε ὅτι ἡ κορυφή της Ο συμπίπτει μέ τό κέντρο τοῦ κύκλου (Ο, α). Ἡ γωνία αὐτή λέγεται ***ἐπίκεντρη γωνία.*** Ὥστε:

Ἐπίκεντρη γωνία λέγεται ἡ γωνία πού ἔχει κορυφή τό κέντρο τοῦ κύκλου.

Ἡ ἐπίκεντρη γωνία ΑΟΒ λέμε ὅτι ἔχει ἀντίστοιχο τόξο τό ΑΒ ἤ ὅτι βαίνει στό τόξο ΑΒ.

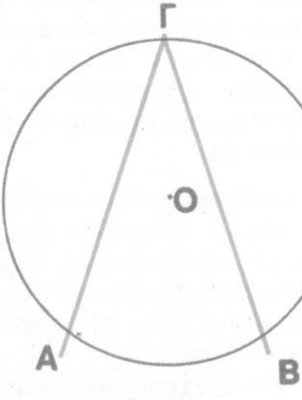


Σχ. 13

Παρατήρηση. Μέ ἀποτύπωση σέ διαφανές χαρτί μποροῦμε εὔκολα νά διαπιστώσουμε ὅτι: Στόν ἴδιο κύκλο ἤ σέ ἴσους κύκλους τά ***ἴσα τόξα ἔχουν ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες*** καί, ἀντίστροφα, ***ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες βαίνουν σέ ἴσα τόξα.***

β΄) Ἐξετάζοντας τή γωνία ΑΓΒ τοῦ σχ. 14 παρατηροῦμε ὅτι ἡ κορυφή της Γ βρίσκεται στήν περιφέρεια τοῦ κύκλου (Ο, α), καί οἱ πλευρές της τέμνουν τήν περιφέρεια στά σημεῖα Α καί Β. Ἡ γωνία αὐτή λέγεται ***ἐγγεγραμμένη.*** Ὥστε:

Ἐγγεγραμμένη γωνία σέ κύκλο λέγεται ἡ γωνία πού ἔχει τήν κορυφή της στήν περιφέρεια τοῦ κύκλου καί οἱ πλευρές της τέμνουν τήν περιφέρεια.



Σχ. 14

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

8) Γράψτε ἕναν κύκλο (Ο, α) καί χαράξτε ἕνα κυκλικό τομέα, πού ἡ βάση του νά ἔχει χορδή ἴση μέ τήν ἀκτίνα (πάρτε α = 3 ἑκατ.).

9) Γράψτε ἕναν κύκλο (0,4 ἑκατοσ.) καί πάρτε στήν περιφέρειά του δύο ἴσα τόξα $\widehat{AB}$ καί $\widehat{\Gamma\Delta}$. Νά συμπληρωθεῖ ἡ συνεπαγωγή:

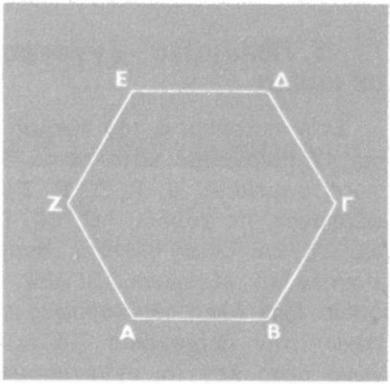
Χορδή ΑΒ = 3 ἑκατοσ. ⟹ Χορδή ΓΔ = ...

10) Γράψτε ἕναν κύκλο (Ο, α) καί χαράξτε μιά ἐγγεγραμμένη γωνία, πού νά βαίνει σέ ἡμιπεριφέρεια. Τί παρατηρεῖτε;

5. Κανονικά Πολύγωνα

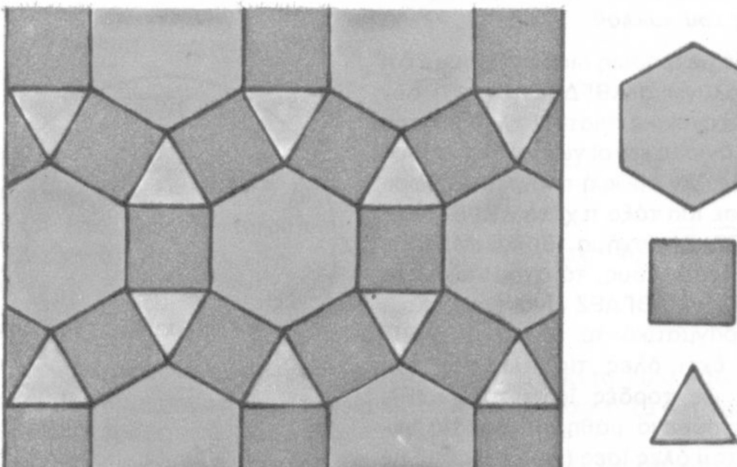
Στό ἑξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ, πού παριστάνει ἡ εἰκόνα 15, συγκρίνουμε τίς πλευρές του μέ τό διαβήτη, μετροῦμε μέ τό μοιρογνωμόνιο τίς γωνίες του καί βρίσκουμε ὅτι:

ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΕΖ = ΖΑ = = 16 χιλιοστόμετρα καί $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = \hat{E} = \hat{Z} = 120°$, δηλ. ὅλες οἱ πλευρές τοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσες μεταξύ τους καί ὅλες οἱ γωνίες ἴσες μεταξύ τους. Τό πολύγωνο ΑΒΓΔΕΖ λέγεται κανονικό. Ὥστε:



Σχ. 15

Ἕνα πολύγωνο λέγεται κανονικό, ἄν ὅλες οἱ πλευρές του εἶναι ἴσες μεταξύ τους καί ὅλες οἱ γωνίες ἴσες μεταξύ τους.



Σχ. 16

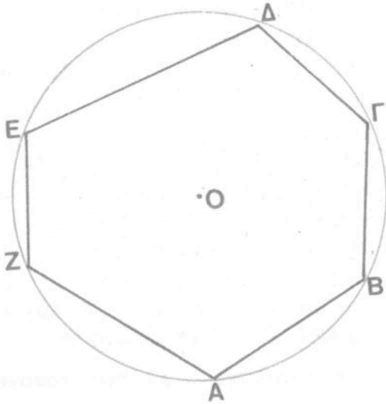
Τό τετράγωνο εἶναι ἕνα κανονικό τετράπλευρο, διότι ξέρουμε ὅτι ὅλες οἱ πλευρές του εἶναι ἴσες καί ὅλες οἱ γωνίες του ὀρθές, δηλ. ἴσες. Κι ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο εἶναι κανονικό σχῆμα.

Οἱ πλάκες μέ τίς ὁποῖες ἐπιστρώνουμε διαδρόμους, κουζίνες κ.τ.λ. εἶναι κανονικά σχήματα. Π.χ. τό σχῆμα 16 δεικνύει ἐπίστρωση μέ τριγωνικά, τετραγωνικά καί ἑξαγωνικά πλακάκια.

6. Πολύγωνα ἐγγεγραμμένα σέ κύκλο

Στήν περιφέρεια τοῦ κύκλου Ο, σχ. 17 παίρνουμε κατά σειρά διάφορα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ καί φέρνουμε τίς χορδές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ. Ὅπως βλέπετε, σχηματίστηκε τό ἑξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ, τό ὁποῖο ἔχει ὅλες τίς κορυφές του πάνω στήν περιφέρεια. Τό πολύγωνο αὐτό λέγεται ***ἐγγεγραμμένο στόν κύκλο.*** Ὥστε:

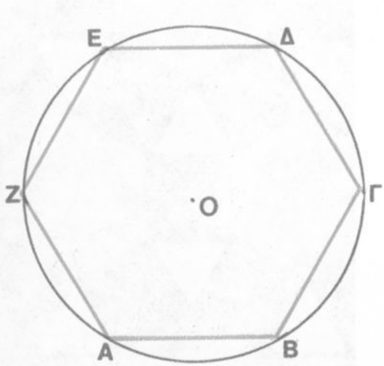
Ἕνα πολύγωνο λέγεται ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο, ἄν ὅλες οἱ κορυφές του εἶναι σημεῖα τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου.



Σχ. 17

Μέ μετρήσεις διαπιστώνουμε ὅτι τό πολύγωνο ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 17) δέν εἶναι κανονικό, γιατί οἱ πλευρές του εἶναι ἄνισες καί οἱ γωνίες του ἐπίσης ἄνισες. Ἄν ὅμως ἡ περιφέρεια χωριστεῖ σέ ἴσα τόξα π.χ. τά $\widehat{ΑΒ}$, $\widehat{ΒΓ}$, $\widehat{ΓΔ}$, $\widehat{ΔΕ}$, $\widehat{ΕΖ}$, $\widehat{ΖΑ}$ (σχῆμα 18) καί φέρουμε τίς χορδές τους, τό σχηματιζόμενο πολύγωνο ΑΒΓΔΕΖ εἶναι κανονικό.

Πραγματικά τό πολύγωνο ΑΒΓ ΔΕΖ ἔχει ὅλες τίς πλευρές του ἴσες, ὡς χορδές ἴσων τόξων (Βλ. προηγούμενο μάθημα), καί τίς γωνίες του ὅλες ἴσες (τίς μετροῦμε μέ τό μοιρογνωμόνιο καί διαπιστώνουμε ὅτι εἶναι ἴσες). Ὥστε:



Σχ. 18

Γιά νά ἐγγράψουμε σέ κύκλο ἕνα κανονικό πολύγωνο, πρέπει νά διαιρέσουμε τήν περιφέρεια σέ ἴσα τόξα καί νά φέρουμε τίς χορδές τῶν τόξων.

Τό κέντρο Ο τοῦ κύκλου λέγεται καί κέντρο τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

11) Ὁ ρόμβος εἶναι κανονικό πολύγωνο;

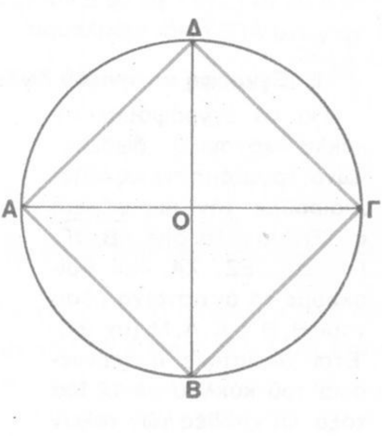
12) Τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου τοῦ σχ. 15 νά βρεῖτε τήν περίμετρο.

7

7. Ἐγγραφή μερικῶν κανονικῶν πολυγώνων σέ κύκλο

α΄) Ἐγγραφή τετραγώνου

Γιά νά ἐγγράψουμε τετράγωνο στό δοθέντα κύκλο (Ο, α) πρέπει νά διαιρέσουμε τήν περιφέρειά του σέ τέσσερα ἴσα τόξα καί νά φέρουμε τίς χορδές τῶν ἴσων τόξων. Χαράζουμε στόν κύκλο Ο δύο διαμέτρους, τίς ΑΓ καί ΒΔ ἔτσι, ὥστε ἡ μιά νά εἶναι κάθετη στήν ἄλλη, καί ὕστερα ἑνώνουμε τά ἄκρα τους μέ χορδές (σχ. 19).



Σχ. 19

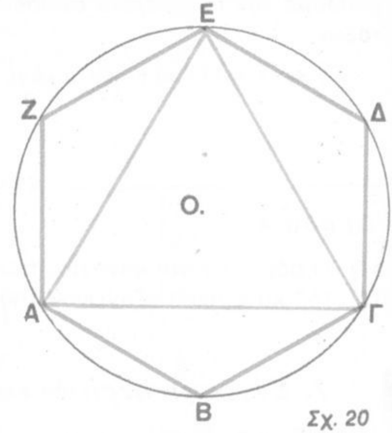
Συγκρίνουμε μέ τό διαβήτη μας τίς χορδές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ καί διαπιστώνουμε ὅτι εἶναι ἴσες. Ἄρα καί τά ἀντίστοιχα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta A}$ εἶναι ἴσα καί ἑπομένως τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνο.

β΄ Ἐγγραφή κανονικοῦ ἑξαγώνου

Γιά νά ἐγγράψουμε κανονικό ἑξάγωνο στό δοθέντα κύκλο (Ο, α), πρέπει νά διαιρέσουμε τήν περιφέρειά του σέ ἕξη ἴσα τόξα καί νά φέρουμε τίς χορδές τῶν ἴσων τόξων.

Μέ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτη ἴσο μέ τήν ἀκτίνα, παίρνουμε στήν περιφέρεια τοῦ κύκλου πέντε διαδοχικά τόξα μέ χορδές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ ἴσες μέ τήν ἀκτίνα (Σχ. 20). Παρατηροῦμε τώρα ὅτι καί ἡ χορδή ΖΑ εἶναι ἴση μέ τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου Ο.

Ἔτσι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου Ο (καί κάθε κύκλου) χωρίζεται σέ ἕξη τόξα, τά ὁποῖα ἔχουν χορδές ἴσες μέ τήν ἀκτίνα. Ἐπομένως τό ἑξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εἶναι κανονικό.



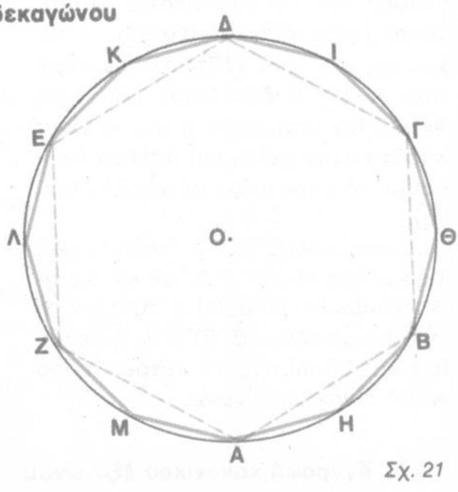
Σχ. 20

γ΄ Ἐγγραφή ἰσοπλεύρου τριγώνου

Γιά νά ἐγγράψουμε σέ κύκλο (Ο,α) ἰσόπλευρο τρίγωνο, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Διαιροῦμε τήν περιφέρεια τοῦ κύκλου σέ ἕξη ἴσα τόξα, μέ τόν παραπάνω τρόπο, δηλ. $\widehat{AB} = \widehat{B\Gamma} = \widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{\Delta E} = \widehat{EZ} = \widehat{ZA}$, καί συνδέουμε τό Α μέ τό Γ, τό Γ μέ τό Ε καί τό Ε μέ τό Α. Ἐπειδή $\widehat{A\Gamma} = \widehat{\Gamma E} = \widehat{EA}$, τό τρίγωνο ΑΓΕ εἶναι ἰσόπλευρο.

δ΄ Ἐγγραφή κανονικοῦ δωδεκαγώνου

Γιά νά ἐγγράψουμε σέ κύκλο κανονικό δωδεκάγωνο, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Διαιροῦμε τήν περιφέρεια σέ ἕξη ἴσα τόξα, δηλ. $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$, $\widehat{\Delta E}$, $\widehat{EZ}$, $\widehat{ZA}$, καί βρίσκουμε τά ἀντίστοιχα μέσα τους Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ. (σχ. 21). Ἔτσι χωρίστηκε ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου σέ 12 ἴσα τόξα. Οἱ χορδές τῶν τόξων αὐτῶν σχηματίζουν τό κανονικό δωδεκάγωνο ΑΗΒΘΓΙΔΚΕΛΖΜ (σχ. 20).



Σχ. 21

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

13) Ἡ πλατεία ἑνός χωριοῦ ἔχει σχῆμα κανονικοῦ δωδεκαγώνου μέ περίμετρο 220,80 μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ πλευρά του;

Ὁμάδα Β΄

14) Χαράξτε ἕνα τετράγωνο ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο μέ ἀκτίνα 0,03 μ. καί ὕστερα ἕνα κανονικό ὀκτάγωνο ἐγγεγραμμένο στόν ἴδιο κύκλο.

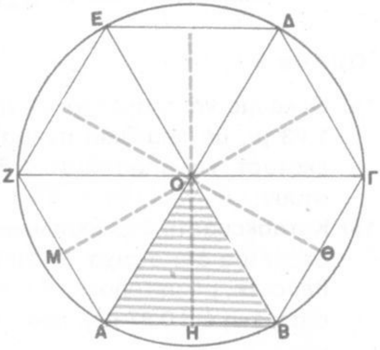
8

8. Ἐμβαδό κανονικῶν πολυγώνων

Ἄς ὑπολογίσουμε τό ἐμβαδό τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 22) τοῦ ὁποίου οἱ πλευρές εἶναι ἴσες καί καθεμιά 6 μέτρα (ὑποθέτοντας ὅτι εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο). Χαράζουμε τίς ἀκτίνες ΟΑ, ΟΒ, ..., ΟΖ. Ἔτσι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου χωρίζεται σέ 6 (ἰσοσκελῆ) τρίγωνα καί τό ἐμβαδό του Ε εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα:

$$E = (AOB) + (BO\Gamma) + \dots + (ZOA) \quad (1)$$

Μέ τό διαβήτη διαπιστώνουμε ὅτι τά ἀντίστοιχα ὕψη τῶν τριγώνων αὐτῶν εἶναι ἴσα, δηλ. ΟΗ = ΟΘ = ... = ΟΜ = υ. Καθένα ἀπό τά ὕψη λέγεται ***ἀπόστημα*** τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.



Σχ. 22

Ἄν συγκρίνουμε δυό, ὁποιαδήποτε, ἀπ' αὐτά τά τρίγωνα π.χ. τά ΑΟΒ καί ΒΟΓ, θά διαπιστώσουμε ὅτι ἔχουν τό ἴδιο ἐμβαδό $\frac{6 \cdot \upsilon}{2}$ διότι ἔχουν ἴσες βάσεις: ΑΒ = ΒΓ = 6 καί ὕψη: ΟΗ = ΟΘ = υ. Ἐπομένως τά τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ, ... ΖΟΑ εἶναι ἰσοεμβαδικά καί ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$E = 6 \cdot (AOB) = 6 \cdot \frac{6 \cdot \upsilon}{2} \Longrightarrow E = \frac{(6 \cdot 6) \cdot \upsilon}{2}.$$

Ἐπειδή 6·6 εἶναι ἡ περίμετρος Π τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, θά ἔχουμε γιά τό ἐμβαδό του τόν τύπο

$$\boxed{E = \frac{\Pi \cdot \upsilon}{2}}$$

Ὥστε:

Γιά νά βροῦμε τό ἐμβαδό κανονικοῦ πολυγώνου, πολλαπλασιάζουμε τήν περίμετρό του ἐπί τό ἀπόστημα καί διαιροῦμε τό γινόμενο διά 2.

Ἐφαρμογή

Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό ἑνός κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ κήπου μέ πλευρά 4 μ. καί ἀπόστημα 3,46 μ. περίπου.

Λύση. Βρίσκουμε πρῶτα τήν περίμετρο Π τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου: Π= = 6·4 = 24 μέτρα. Ἀντικαθιστώντας στόν τύπο τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τίς τιμές τῶν Π καί υ, ἔχουμε:

$$E = \frac{24 \cdot 3{,}46}{2} = 12 \cdot 3{,}46 \Longrightarrow E = 41{,}52 \text{ τ. μέτρα.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Β΄

15) Θέλουμε νά πλακοστρώσουμε ἕνα διάδρομο διαστάσεων 5 μ. ἐπί 1,73 μ., μέ πλακάκια σχήματος κανονικοῦ ἑξαγώνου πλευρᾶς 10 ἑκατοστ. καί ἀποστήματος 8,65 ἑκατοσ. Πόσα πλακάκια θά χρειαστοῦν;

16) Κατασκευάστε δυό ἰσόπλευρα τρίγωνα μέ πλευρά 10 καί 12 ἑκατοστόμετρα ἀντίστοιχα. Μετρῆστε τό ὕψος τοῦ καθενός καί ἐπαληθεύσετε, μέ μετρήσεις, ὅτι εἶναι ἴσο μέ τήν πλευρά του πολλαπλασιασμένη ἐπί 0,87 περίπου. Ὕστερα νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τοῦ καθενός.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

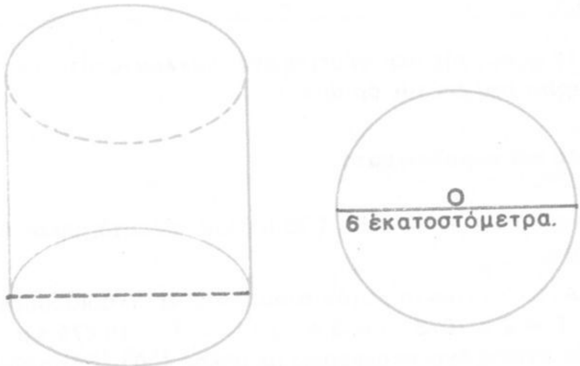
1) Τί λέγεται κύκλος καί ποιά εἶναι τά στοιχεῖα του;
2) Ποιά σχέση ἔχει ἡ διάμετρος μέ τήν ἀκτίνα ἑνός κύκλου;
3) Πῶς διαιροῦμε ἕναν κύκλο καί τήν περιφέρειά του σέ δυό ἴσα μέρη;
4) Ποιά εἶναι τά μέρη ἑνός κύκλου;
5) Πότε δυό κύκλοι εἶναι ἴσοι;
6) Πῶς ὁρίζουμε ἴσα τόξα σέ μιά περιφέρεια κύκλου;
7) Τί λέγεται ἐπίκεντρη καί τί ἐγγεγραμμένη γωνία;
8) Πότε ἕνα πολύγωνο λέγεται κανονικό;
9) Ποιά τετράπλευρα καί ποιά τρίγωνα εἶναι κανονικά σχήματα;
10) Πότε ἕνα πολύγωνο λέγεται ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο;
11) Πῶς ἐγγράφουμε σέ κύκλο τετράγωνο;
12) Πῶς ἐγγράφουμε σέ κύκλο κανονικό ἑξάγωνο καί πῶς ἰσόπλευρο τρίγωνο;
13) Τί λέγεται ἀπόστημα κανονικοῦ πολυγώνου;
14) Πῶς βρίσκουμε τό ἐμβαδό κανονικοῦ πολυγώνου;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β΄

ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

9 1. Μῆκος τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου

Ἄς πάρουμε ἕνα μικρό ξύλινο κύλινδρο μέ διάμετρο τῆς βάσης του 6 ἑκατοστόμετρα (σχ. 23). Τυλίγουμε μέ προσοχή μιά λεπτή κλωστή γύρω



Σχ. 23

ἀπό τήν περιφέρεια τῆς βάσεώς του. Φροντίζουμε ἡ κλωστή νά εἶναι τεντωμένη καί «νά κάνει ἕνα γύρο» μονάχα. Ὕστερα τεντώνουμε τήν κλωστή τή μετροῦμε καί βρίσκουμε μῆκος 18,84 ἑκατ. Ἄρα καί τό μῆκος τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου εἶναι 18,84 ἑκατ. Ὁ λόγος τοῦ μήκους τῆς περιφέρειας πρός τό μῆκος τῆς διαμέτρου της εἶναι

$$\frac{18\ 84}{6} = 3{,}14.$$

Ἄν ἐργασθοῦμε μέ τόν ἴδιο τρόπο καί μέ ἄλλους κύκλους, π.χ. μέ τήν περιφέρεια τῆς βάσεως πού ἔχει ἕνα κουτί γάλα ἤ ὁ τροχός ἑνός ποδηλάτου κτλ., βρίσκουμε ὅτι ὁ λόγος τοῦ μήκους τῆς περιφέρειας πρός τή διάμετρό του εἶναι 3,14. Ὥστε:

Ὁ λόγος τοῦ μήκους τῆς περιφέρειας ἑνός κύκλου πρός τό μῆκος τῆς διαμέτρου του εἶναι ὁ σταθερός ἀριθμός 3,14.

Ὁ σταθερός αὐτός λόγος συμβολίζεται διεθνῶς μέ τό ἑλληνικό γράμμα π.

Ἄν τό μῆκος τῆς περιφέρειας ἑνός κύκλου εἶναι Γ καί ἡ ἀκτίνα του α, ἔχουμε:

$$\frac{\Gamma}{2\cdot\alpha} = \pi.$$

Ἐπειδή ἡ διαίρεση καί ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι πράξεις ἀντίστροφες (Βλ. μάθημα Ἀριθμητικῆς ἀριθ. 26), ἔχουμε τή λογική ἰσοδυναμία:

$$\boxed{\frac{\Gamma}{2\cdot\alpha} = \pi \Longleftrightarrow \Gamma = 2\cdot\alpha\cdot\pi, \text{ ὅπου } \pi = 3{,}14}$$

Ὥστε: ***Τό μῆκος τῆς περιφέρειας ἑνός κύκλου ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῆς διαμέτρου του ἐπί τόν ἀριθμό π.***

Ἐφαρμογές καί παραδείγματα.

1) Ἡ ἀκτίνα ἑνός κύκλου εἶναι 1,70 μ. Ποιό εἶναι τό μῆκος τῆς περιφέρειάς του;

Λύση. Ἀντικαθιστώντας στόν τύπο $\Gamma = 2\cdot\alpha\cdot\pi$, βρίσκουμε:
$$\Gamma = 2\cdot 1{,}70\cdot 3{,}14 = 3{,}40\cdot 3{,}14 \Longrightarrow \Gamma = 10{,}676 \text{ τ.μ.}$$

2) Κυκλικός στίβος ἔχει περιφέρεια μέ μῆκος 400 μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίνα του;

Λύση. Ἔστω α ἡ ἀκτίνα του. Τότε $2\cdot\alpha\cdot\pi = 400 \Longleftrightarrow 2\cdot 3{,}14\alpha =$

$$= 400 \Longleftrightarrow \alpha = \frac{400}{6{,}28}, \text{ ἄρα } \alpha = 63{,}69 \text{ μ. περίπου.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

1) Ἕνα κυκλικό τραπέζι ἔχει διάμετρο 1,20 μ. Νά βρεῖτε τό μῆκος τῆς περιφέρειάς του.
2) Ἡ ἀκτίνα τῶν τροχῶν ἑνός αὐτοκινήτου εἶναι 0,35 μ. Πόσα μέτρα θά ἔχει διατρέξει τό αὐτοκίνητο, ἄν κάθε τροχός του κάνει 1.600 στροφές;
3) Σ' ἕναν κύκλο εἶναι ἐγγεγραμμένο κανονικό ἑξάγωνο μέ περίμετρο 30 μέτρα. Νά βρεθεῖ τό μῆκος τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου.

Ομάδα Β΄

4) Οἱ τροχοί ἑνός ποδηλάτου ἔχουν διάμετρο 0,80 μ. καί κάνουν 80 στροφές στό πρῶτο λεπτό τῆς ὥρας. Πόσα μέτρα θά διατρέξει τό ποδήλατο σέ μιά ὥρα καί 10 π. λεπτά;
5) Οἱ τροχοί ἑνός αὐτοκινήτου κάνουν ἀπό 5.000 στροφές, ὅταν τό αὐτοκίνητο διατρέχει ἀπόσταση 15.700 μ. Νά βρεῖτε τήν ἀκτίνα τῶν τροχῶν αὐτῶν.

• **Παρατήρηση.** Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό μῆκος τόξου 40° μιᾶς περιφέρειας μέ μῆκος 12 μέτρα. Παρατηροῦμε πρῶτα, ὅτι τό μισό τῆς περιφέρειας αὐτῆς θά ἔχει μῆκος 6 μ., τό τρίτο 4 μέτρα κ.τ.λ. Δηλ. τό μῆκος τοῦ τόξου εἶναι ἀνάλογο μέ τό μέτρο του καί ἐπομένως τά μήκη δύο τόξων τῆς ἴδιας περιφέρειας εἶναι ἀνάλογα πρός τά μέτρα τους. Ἄν τ εἶναι τό μῆκος τοῦ ζητούμενου τόξου, θά ἔχουμε:

$$\frac{\tau}{12} = \frac{40}{360} \Longleftrightarrow 360\tau = 480 \Longleftrightarrow \tau = 1{,}333 \text{ μ.}$$

(ἡ περιφέρεια θεωρεῖται τόξο 360°). Γενικά ἄν τό τόξο εἶναι μ., θά ἔχουμε:

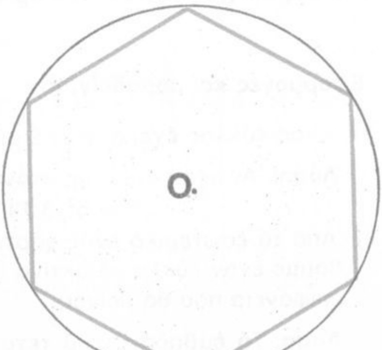
$$\frac{\tau}{\Gamma} = \frac{\mu}{360} \Longleftrightarrow \boxed{\tau = \Gamma \cdot \frac{\mu}{360}}$$

(Βλ. Κεφ. Ε΄ ἀνάλογα ποσά).

10 2. Τό ἐμβαδό κύκλου

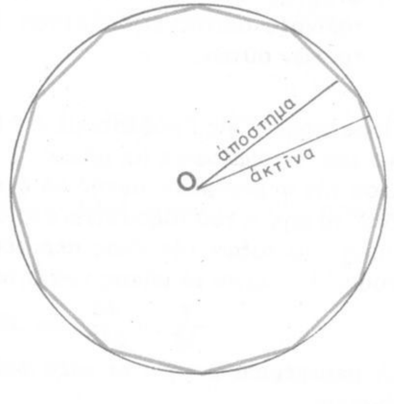
Ἄς ἐγγράψουμε σ' ἕναν κύκλο(Ο, α) ἕνα κανονικό ἑξάγωνο μέ τό γνωστό μας τρόπο (σχ. 24). Στό σχῆμα αὐτό βλέπουμε ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι πιό μικρή ἀπό τό μῆκος τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου.

Στόν ἴδιο κύκλο (Ο, α) ἐγγράφουμε κανονικό δωδεκάγωνο (σχ. 25). Παρατηροῦμε ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ δωδεκαγώνου πλησιάζει πιό πολύ τό μῆκος τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου ἀπό τήν περίμετρο τοῦ ἑξα-



Σχ. 24

γώνου. Όμοια καί τό ἀπόστημα τοῦ 12γώνου πλησιάζει πιό πολύ τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου ἀπό τό ἀπόστημα τοῦ ἑξαγώνου. Οἱ ἴδιες παρατηρήσεις ἀληθεύουν ἀκόμα πιό φανερά γιά ἕνα κανονικό πολύγωνο, μέ 24 ἤ 48 ἤ περισσότερες πλευρές, ἐγγεγραμμένο στόν ἴδιο κύκλο. Ἔτσι, τήν ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου μποροῦμε νά τή θεωροῦμε σάν τήν ἐπιφάνεια κανονικοῦ πολυγώνου μέ περίμετρο ἴση μέ τήν περιφέρειά του καί ἀπόστημα ἴσο μέ τήν ἀκτίνα. Ἑπομένως, ἄν στόν τύπο γιά τήν εὕρεση τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἀντικαταστήσουμε τήν περίμετρό του μέ τό μῆκος τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου ($Γ = 2 \cdot α \cdot π$) καί τό ἀπόστημά του μέ τό μῆκος α τῆς ἀκτίνας του, θά ἔχουμε:



Σχ. 25

$$E = \frac{2 \cdot α \cdot π \cdot α}{2} \Longrightarrow \boxed{E = α^2 \cdot π}$$

Ἄρα. ***Τό ἐμβαδό κάθε κύκλου εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτίνας του ἐπί τόν ἀριθμό π.***

Ἐφαρμογές καί παραδείγματα

1) Ἕνας κύκλος ἔχει ἀκτίνα 5 μέτρα. Ποιό εἶναι τό ἐμβαδό του;

Λύση. Ἀντικαθιστώντας στόν παραπάνω τύπο α = 5 μ., βρίσκουμε:

$$E = 5^2 \cdot 3{,}14 \Longrightarrow E = 78{,}50 \text{ τ.μ.}$$

2) Ἀπό τό ἐσωτερικό ἑνός χάρτινου τετραγώνου μέ πλευρά 0,8 μ. κόβουμε ἕναν κύκλο μέ ἀκτίνα 0,3 μ. Πόσα τετραγωνικά μέτρα εἶναι ἡ ἐπιφάνεια πού θά μείνει;

Λύση. Τό ἐμβαδό Ε τοῦ τετραγώνου εἶναι $E = 0{,}8^2 = 0{,}64$ τ.μ. Τό ἐμβαδό Ε΄ τοῦ κύκλου εἶναι: $E' = 0{,}3^2 \cdot 3{,}14 = 0{,}2826$ τ.μ. Ἑπομένως, τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας πού θά μείνει εἶναι:

$$E - E' = 0{,}64 - 0{,}2826 = 0{,}3574 \text{ τ.μ.}$$

Ὁμάδα Α΄

6) Ἕνα κυκλικό ἀλώνι ἔχει διάμετρο 12 μ. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό του.
7) Νά ὑπολογίσετε τά ἐμβαδά τῶν κύκλων πού οἱ περιφέρειές τους ἔχουν μῆκος i) 9,42 μ. ii) 34,54 μ.
8) Δυό ὁμόκεντροι κύκλοι ἔχουν ἀκτίνες 0,8 μ. καί 0,6 μ. ἀντίστοιχα. Ὑπολογίστε τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας πού εἶναι ἀνάμεσα στίς περιφέρειες τῶν δύο κύκλων.

Ὁμάδα Β΄

9) Ἡ πλακόστρωση μιᾶς κυκλικῆς αὐλῆς, πού ἡ περιφέρειά της ἔχει μῆκος 43,96 μ., κόστισε 15.386 δρχ. Πόσο κόστισε τό τ. μέτρο;
10) Γύρω ἀπυ ἕνα κυκλικό τραπέζι κάθονται 8 ἄτομα. Σέ κάθε ἄτομο ἀναλογεῖ 0,785 μ. μῆκος ἀπό τήν περιφέρεια τοῦ τραπεζιοῦ. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειάς του.

* **Παρατήρηση.** Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό ἐμβαδό ἑνός κυκλικοῦ τομέα 40° πού ἀνήκει σέ κύκλο μέ ἐμβαδό Ε = 12,56 τ. μέτρα. Παρατηροῦμε πρῶτα, ὅτι ὁ μισός κύκλος θά ἔχει ἐμβαδό 6,28 τ. μέτρα, τό τέταρτο 3,14 τ. μέτρα κ.τ.λ. Δηλ. τό ἐμβαδό τοῦ κυκ. τομέα εἶναι ἀνάλογο μέ τό μέτρο τῆς βάσεώς του καί ἐπομένως, τά ἐμβαδά δυό κυκλ. τομέων τοῦ ἴδιου κύκλου εἶναι ἀνάλογα πρός τά μέτρα τῶν βάσεών τους. Ἄν ε εἶναι τό ἐμβαδό τοῦ ζητουμένου κυκλ. τομέα, θά ἔχουμε:

$$\frac{\varepsilon}{12,56} = \frac{40^\circ}{360^\circ} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 360 \cdot \varepsilon = 12,56 \cdot 40 \Longleftrightarrow \varepsilon = 1,395 \text{ τ. μέτρα}$$

(ὁ κύκλος θεωρεῖται κυκλ. τομέας 360°). Γενικά ἄν ἡ βάση τοῦ κυκλ. τομέα εἶναι μ°, θά ἔχουμε:

$$\frac{\varepsilon}{E} = \frac{\mu}{360} \Longleftrightarrow \boxed{\varepsilon = E \cdot \frac{\mu}{360}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Ὁμάδα Β΄

11) Γύρω ἀπό ἕναν κυκλικό κῆπο ὑπάρχει κυκλικός δρόμος μέ τό ἴδιο πλάτος. Ἡ περιφέρεια τοῦ κήπου εἶναι 25,12 μ. καί ἡ ἐξωτερική

περιφέρεια 30,144 μ. Ποιό εἶναι τό πλάτος τοῦ δρόμου καί ποιό τό ἐμβαδό του;

12) Σέ μιά κυκλική πλατεία μέ περιφέρεια 251,20 μ. ὑπάρχει ἕνας ἀνθόκηπος σχήματος ὀρθογωνίου, μέ περίμετρο 53,50 μ. καί μῆκος 22,50 μ. Ποιό εἶναι τό ἐμβαδό τῆς ἐλεύθερης ἐπιφάνειας τῆς πλατείας;

13) Ἕνας κύκλος ἔχει διάμετρο 16 μ. Ποιές εἶναι οἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου πού ἔχει περίμετρο ἴση μέ τό μῆκος τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου καί μῆκος τριπλάσιο ἀπό τό πλάτος του;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Τί εἶναι στή Γεωμετρία ὁ ἀριθμός π;
2) Πῶς βρίσκουμε τό μῆκος τῆς περιφέρειας ἑνός κύκλου;
3) Πῶς βρίσκουμε τό ἐμβαδό ἑνός κύκλου;
4) Πῶς βρίσκουμε τό ἐμβαδό ἑνός κύκλου ἀπό τό μῆκος τῆς περιφέρειάς του;

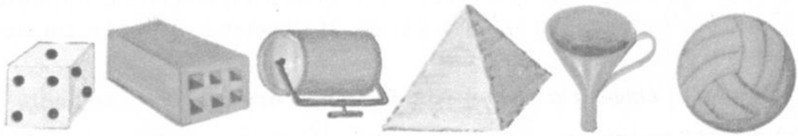
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ΄

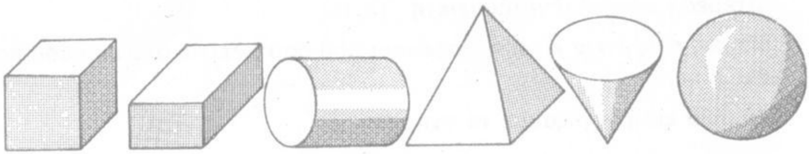
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ

12

1. Εἰσαγωγή – Ἐπανάληψη

Στήν πρώτη σειρά τῆς εἰκόνας 26 βλέπουμε μερικά ὑλικά σώματα, πού ἔχουν ὁρισμένη ἐξωτερική μορφή (σχῆμα) καί ὁρισμένο μέγεθος. Τό σχῆμα καί τό μέγεθος τῶν σωμάτων αὐτῶν μένουν ἀμετάβλητα, ὅταν οἱ ἐξωτερικές συνθῆκες δέν ἀλλάζουν αἰσθητά. Αὐτά εἶναι ***στερεά*** σώματα καί μοιάζουν μέ τά ***γεωμετρικά στερεά***, πού εἶναι στή δεύτερη σειρά τῆς εἰκόνας 26.





Σχ. 26 *Πάνω: Εἰκόνες φυσικῶν στερεῶν.*
Κάτω: Εἰκόνες γεωμετρικῶν στερεῶν

Ἀπό τήν Ε΄ τάξη ἔχετε μιά πρώτη γνωριμία μέ τά ἁπλά αὐτά γεωμετρικά στερεά, πού προέρχονται ἀπό τά ἀντίστοιχα φυσικά στερεά. Εἶναι τά γεωμετρικά στερεά: κύβος, ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, κύλινδρος, πυραμίδα, κῶνος καί σφαίρα. Τά γεωμετρικά στερεά ἐξετάζει ἡ Γεωμετρία ὡς πρός τό σχῆμα καί τό μέγεθος, χωρίς νά παίρνει ὑπόψη της τά λοιπά γνωρίσματά τους (βάρος, ὕλη, χρῶμα, ...).

Εἴδη ἐπιφανειῶν

i) ***Ἐπίπεδη ἐπιφάνεια*** ἤ ἁπλῶς ***ἐπίπεδο.*** Ξέρουμε ὅτι μιά τεντωμένη κλωστή (εὐθεία γραμμή) ἐφαρμόζει σέ ὁποιαδήποτε ἕδρα τοῦ κύβου. Τό ἴδιο θά παρατηρήσουμε, ἄν ἐφαρμόσουμε τήν τεντωμένη κλωστή (ἤ ἀκόμη καί τό χάρακά μας) στό τραπέζι πού γράφουμε, στό πάτωμα κ.τ.λ. Ὥστε:

Ἐπίπεδη ἐπιφάνεια εἶναι κάθε ἐπιφάνεια πάνω στήν ὁποία ἐφαρμόζει παντοῦ ἡ εὐθεία γραμμή.

ii) ***Τεθλασμένη ἐπιφάνεια.*** Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου (σχ. 27) ἀποτελεῖται ἀπό ἐπίπεδα μέρη, τά ὁποῖα ὅμως δέν ἀποτελοῦν ὅλα μαζί ἕνα ἐπίπεδο.

Ἡ ἐπιφάνεια αὐτή λέγεται ***τεθλασμένη.*** Τό ἴδιο καί ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καί τῆς πυραμίδας εἶναι τεθλασμένη. Ὥστε:

Τεθλασμένη ἐπιφάνεια εἶναι ἡ ἐπιφάνεια πού ἀποτελεῖται ἀπό ἐπίπεδα μέρη, ἀλλά δέν εἶναι ἐπίπεδη.

iii) ***Καμπύλη ἐπιφάνεια.*** Βλέπουμε στό σχ. 26 ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας δέν ἔχει κανένα ἐπίπεδο μέρος. Ἡ ἐπιφάνεια αὐτή λέγεται ***καμπύλη.*** Ὥστε:

Καμπύλη ἐπιφάνεια εἶναι ἡ ἐπιφάνεια πού δέν ἔχει ἐπίπεδα μέρη.

iv) ***Μεικτή ἐπιφάνεια.*** Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου καί τοῦ κώνου σχ. 26 ἀποτελεῖται ἀπό καμπύλα καί ἐπίπεδα μέρη. Γι' αὐτό ἡ ἐπιφάνεια τῶν στερεῶν αὐτῶν λέγεται ***μεικτή.*** Ὥστε:

Μεικτή ἐπιφάνεια εἶναι ἡ ἐπιφάνεια πού ἀποτελεῖται ἀπό ***ἐπίπεδα*** καί ***καμπύλα μέρη.***

Σέ ποιά εἴδη χωρίζουμε τά σχήματα.

Ξέρουμε ὅτι ὅλα τά σημεῖα τοῦ τετραγώνου, τοῦ κύκλου κτλ. βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο. Γι' αὐτό τά σχήματα αὐτά λέγονται ***ἐπίπεδα.***

Τά σημεῖα ὅμως τοῦ κύβου, τῆς σφαίρας κ.ἄ. δέ βρίσκονται ὅλα μαζί στό ἴδιο ἐπίπεδο. Γι' αὐτό τά σχήματα αὐτά λέγονται ***στερεά.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

1) Νά ἐξετάσετε τό εἶδος τῆς ἐπιφάνειας πού ἔχει μιά μαρμάρινη σκάλα, ἕνα κουτί κιμωλίας.
2) Νά ἐξετάσετε τό εἶδος τῆς ἐπιφάνειας πού ἔχει ἕνας βῶλος, τό στρογγυλό μολύβι σας.
3) Νά ὀνομάσετε διάφορα σώματα καί νά ὁρίσετε τήν ἐπιφάνειά τους.

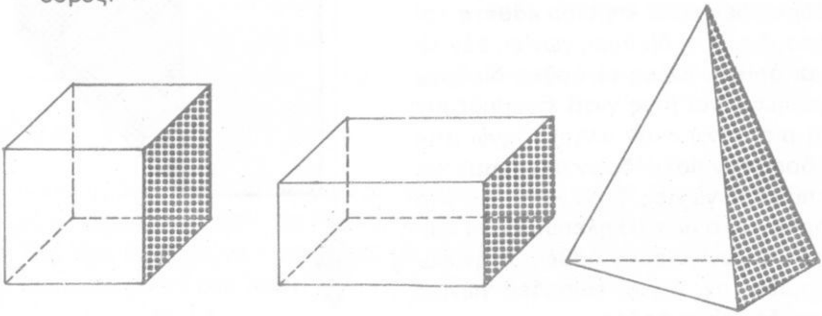
13 2. Τά πολύεδρα καί τά γεωμετρικά τους στοιχεῖα

Ἀπό τά γεωμετρικά στερεά πού ξέρουμε, ὁ κύβος, τό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καί ἡ πυραμίδα (σχ. 27) περικλείονται ἀπό ἐπίπεδα, δηλ. ἀπό κλειστή τεθλασμένη ἐπιφάνεια. Τά στερεά αὐτά λέγονται πολύεδρα. Ὥστε:

Πολύεδρο λέγεται ἕνα γεωμετρικό στερεό, ἄν κλείεται ἀπό ὅλα τά μέρη του ἀπό ἐπίπεδα.

Στά παρακάτω μαθήματα θά γνωρίσουμε κι ἄλλα εἴδη πολυέδρων, τά ***πρίσματα.***

i) ***Ἕδρες.*** Τά ἐπίπεδα μέρη τῆς ἐπιφάνειας κάθε πολυέδρου εἶναι οἱ ἕδρες.



Κύβος *Ὀρθογώνιο παραλ/δο* *Τριγωνική πυραμίδα*

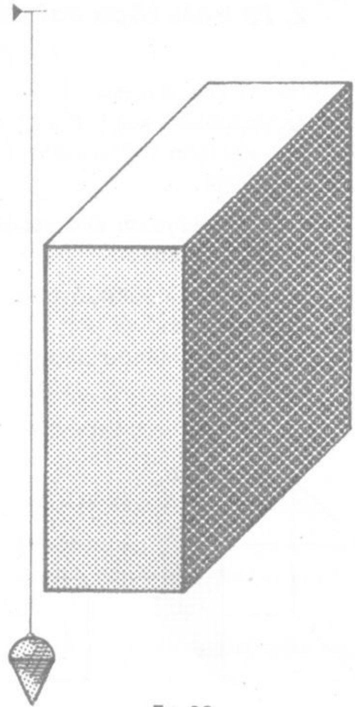
Σχ. 27. Πολύεδρα

Ὁ κύβος καί τό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχουν ἀπό 6 ἕδρες τό καθένα, ἡ τριγωνική πυραμίδα 4 ἕδρες κ.τ.λ.

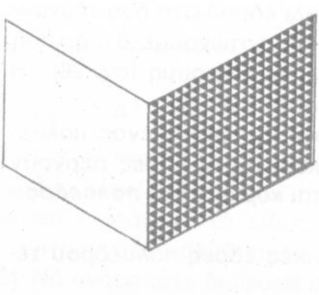
ii) ***Ἀκμές.*** Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ἕδρες ἑνός πολυέδρου ἀνά δύο τέμνονται (κόβονται). Μέ ἕνα τεντωμένο νῆμα διαπιστώνουμε ὅτι ἡ τομή δυό γειτονικῶν ἑδρῶν πολυέδρου εἶναι εὐθεία γραμμή (σχ. 28). Ἡ τομή δυό γειτονικῶν ἑδρῶν πολυέδρου λέγεται ***ἀκμή.***

iii) ***Κορυφές.*** Ἄν παρατηρήσουμε μέ προσοχή τίς ἕδρες ἑνός πολυέδρου θά διαπιστώσουμε ὅτι τρεῖς ἤ περισσότερες ἕδρες περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο. Τό σημεῖο αὐτό λέγεται ***κορυφή τοῦ πολυέδρου*** π.χ. ὁ κύβος ἔχει 8 κορυφές κ.τ.λ.

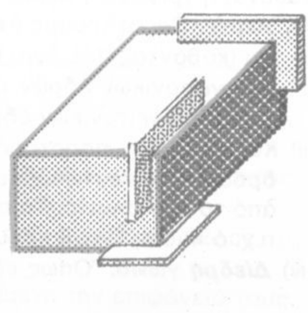
iv) ***Δίεδρη γωνία.*** Ὅπως εἴδαμε, δυό γειτονικές ἕδρες πολυέδρου τέμνονται. Τό σχῆμα τῶν ἑδρῶν αὐτῶν λέγεται ***δίεδρη γωνία*** (σχ. 29). Ἂν διπλώσουμε ἕνα χαρτόνι, ἔχουμε μιά εἰκόνα τῆς δίεδρης γωνίας. Στό σχ. 30 μ' ἕναν εἰδικό γνώμονα, σιδηρογωνιά ὅπως τό λένε οἱ τεχνίτες, διαπιστώνουμε ὅτι οἱ γειτονικές ἕδρες τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπίπεδου (τό ἴδιο καί στόν κύβο) εἶναι ἐπίπεδα ***κάθετα.*** Οἱ δίεδρες γωνίες τῶν ὁποίων τά ἐπίπεδα εἶναι κάθετα λέγονται ***ὀρθές δίεδρες γωνίες.*** Τῆς πυραμίδας (σχ. 27) οἱ γειτονικές ἕδρες δέν εἶναι ἐπίπεδα ***κάθετα*** καί ἑπομένως, οἱ δίεδρες γωνίες δέν εἶναι ὀρθές. Ὅλες οἱ ὀρθές δίεδρες γωνίες εἶναι ἴσες γιατί ἐφαρμόζουν (ἡ μιά πάνω στήν ἄλλη). Πάνω στίς ἕδρες τῶν πολυέδρων βλέπουμε καί ἐπίπεδες γωνίες. Στόν κύβο καί στό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο οἱ ἐπίπεδες γωνίες εἶναι ὀρθές. Στήν πυραμίδα (σχ. 27) οἱ ἐπίπεδες γωνίες της δέν εἶναι ὀρθές.



Σχ. 28



Σχ. 29. Δίεδρη γωνία

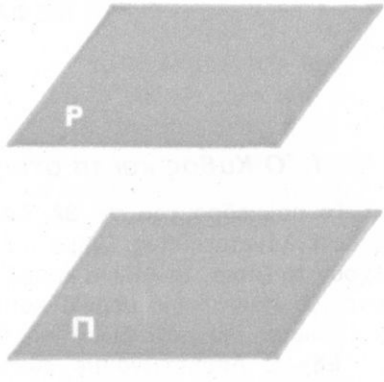


Σχ. 30. Ἐπίπεδα κάθετα

v) ***Ἔδρες παράλληλες.*** Ἄς ἐξετάσουμε τίς ἀπέναντι ἕδρες τοῦ κύβου, π.χ. τήν κάτω καί τήν πάνω ἕδρα. Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ἕδρες αὐτές δέ συναντῶνται, ὅσο κι ἄν τίς προεκτείνουμε.

Οἱ ἕδρες αὐτές λέγονται ***παράλληλες*** (σχ. 31).

Βλέπουμε ὅτι καί στό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο οἱ ἀπέναντι ἕδρες του εἶναι παράλληλες.



Σχ. 31. Ἐπίπεδα παράλληλα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

4) Νά ὀνομάσετε καί νά δείξετε τά γεωμετρικά στοιχεῖα τῆς αἴθουσας τῆς τάξεώς σας, δηλ. τίς ἕδρες, τίς ἀκμές καί τίς κορυφές της.
5) Τήν ἴδια ἐργασία νά κάνετε καί μέ μιά ξύλινη πυραμίδα, πού ἔχει ὁ δάσκαλός σας, στό κουτί τῶν γεωμετρικῶν στερεῶν.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Ποιά ὑλικά σώματα λέγονται στερεά;
2) Τί λέγονται γεωμετρικά στερεά;
3) Ποιά εἴδη ἐπιφάνειας ἔχουμε; Πῶς διακρίνεται τό κάθε εἶδος;
4) Σέ ποιά εἴδη χωρίζονται τά σχήματα;
5) Τί λέγεται πολύεδρο καί ποιά εἶναι τά στοιχεῖα του;
6) Τί λέγεται δίεδρη γωνία; Δεῖξτε μέσα στήν αἴθουσα τῆς τάξεώς σας δίεδρες γωνίες.
7) Πῶς ἐξακριβώνουμε ὅτι δυό τεμνόμενα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα;
8) Πότε δυό ἐπίπεδα λέγονται παράλληλα;

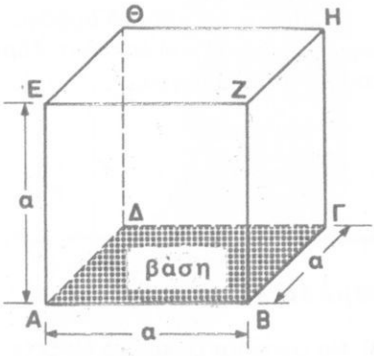
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ΄

Ο ΚΥΒΟΣ

14

1. Ὁ Κύβος καί τά στοιχεῖα του

Τό πολύεδρο τοῦ σχ. 32, ὅπως ξέρετε, λέγεται κύβος. Σχῆμα κύβου ἔχουν τά ζάρια, τά ξύλινα κομμάτια μερικῶν παιγνιδιῶν, μερικά κουτιά καί κιβώτια, ὁρισμένα δωμάτια κ.τ.λ.



Σχ. 32. Κύβος

Ἕδρες. Διαπιστώνουμε εὔκολα ὅτι ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρες πού ἀποτελοῦν τήν ἐπιφάνειά του (σχ. 32). Οἱ ἀπέναντι ἕδρες εἶναι παράλληλες· δυό ἀπό τίς ἀπέναντι ἕδρες του λέγονται ***βάσεις.***

Ὅταν ὁ κύβος ἔχει τή διάταξη τοῦ σχ. 32 ἡ ΑΒΓΔ λέγεται κάτω βάση καί ἡ ΕΖΗΘ πάνω βάση. Οἱ ἄλλες τέσσερις ἕδρες πού εἶναι γύρω γύρω λέγονται ***παράπλευρες ἕδρες*** τοῦ κύβου, ἀποτελοῦν ὅλες μαζί τήν ***παράπλευρη ἐπιφάνεια*** τοῦ κύβου.

Ὅπως εἴδαμε, στά πολύεδρα οἱ ἕδρες τοῦ κύβου, ἀνά δύο συνεχόμενες, τέμνονται καθέτως. Γι' αὐτό οἱ παράπλευρες ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι κάθετες πάνω στίς βάσεις του.

Ἀκμές. Ὁ κύβος ἔχει 12 ἀκμές, 4 στήν κάτω βάση, 4 στήν πάνω καί 4 στήν παράπλευρη ἐπιφάνειά του. Οἱ 4 παράπλευρες ἀκμές, δηλ. οἱ ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ (σχ. 32) εἶναι κάθετες στίς βάσεις καί κάθε μιά εἶναι ***ὕψος*** τοῦ κύβου.

Κορυφές. Ὁ κύβος ἔχει 8 κορυφές, 4 στήν κάτω καί 4 στήν πάνω βάση.

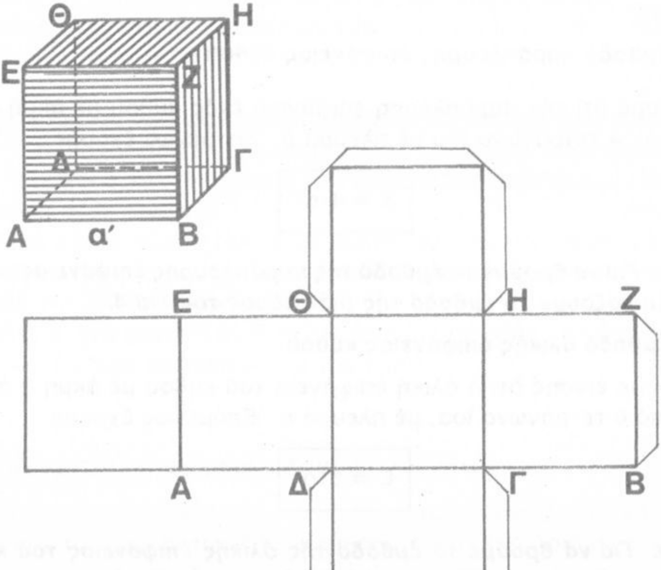
Ἰδιαίτερα γνωρίσματα τῶν ἀκμῶν καί τῶν ἑδρῶν του. Μέ τό διαβήτη συγκρίνουμε τίς ἀκμές τοῦ κύβου καί ἐξακριβώνουμε ὅτι ὅλες εἶναι ἴσες. Οἱ ἀκμές τοῦ κύβου, τέμνονται ἀνά δύο συνεχόμενες καί σχηματίζουν γωνίες. Μέ τό γνώμονα διακρίνουμε ὅτι οἱ ἐπίπεδες αὐτές γωνίες εἶναι ὀρθές. Ἔτσι διαπιστώνουμε ὅτι οἱ ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι τετράγωνα ἴσα (μέ πλευρές ἴσες καί γωνίες τους ὀρθές). Τώρα μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι:

Ὁ κύβος εἶναι ἕνα πολύεδρο, πού περικλείεται ἀπό ἕξι τετράγωνες ἴσες ἕδρες.

Ἀπό κάθε κορυφή τοῦ κύβου περνοῦν τρεῖς ἀκμές, π.χ. ἀπό τήν κορυφή Α (σχ. 32) περνοῦν οἱ ἀκμές ΑΒ, ΑΔ καί ΑΕ. Τά μήκη τῶν ἀκμῶν αὐτῶν λέγονται ***διαστάσεις τοῦ κύβου.*** Ἡ ΑΒ λέγεται ***μῆκος,*** ἡ ΑΔ πλάτος καί ἡ τρίτη ΑΕ ***ὕψος.*** Ἐπειδή εἶναι ΑΒ = ΑΔ = ΑΕ = α, συμπεραίνουμε ὅτι: ***Οἱ διαστάσεις τοῦ κύβου εἶναι ἴσες μεταξύ τους.*** Ὥστε:
Ὁ κύβος ἔχει 6 ἴσες ἕδρες, 12 ἴσες ἀκμές καί 8 κορυφές.

2. Τό ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύβου

Παίρνουμε ἕναν κύβο ἀπό χαρτόνι ΑΒΓΔΕΖΗΘ (σχ. 33α΄). Κόβουμε μέ τό ψαλίδι 3 ἀκμές στήν κάτω βάση του, π.χ. ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ, καί τίς ἀντίστοιχες στήν πάνω βάση ΕΘ, ΕΖ, ΖΗ. Ἐπίσης κόβουμε τήν παράπλευρη ἐπιφάνειά του κατά μῆκος τῆς ἀκμῆς ΒΖ, τότε οἱ ἕδρες τοῦ κύβου ἀνοίγουν



Σχ. 33 α΄ β΄ Ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύβου

καί μποροῦμε νά τίς ἀπλώσουμε πάνω στό ἐπίπεδο τῆς ἕδρας ΓΔΘΗ. Ἔτσι ἔχουμε τήν ἐπιφάνεια τοῦ κύβου ἀπλωμένη στό ἐπίπεδο (σχ. 33β´) καί αὐτό λέγεται ***ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύβου.***

Τό ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύβου ἀποτελεῖται ἀπό 6 ἴσα τετράγωνα σέ σχῆμα σταυροῦ. Ἀντίστροφα ἀπό ἕνα ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύβου ὅμοιο μέ τό σχ. 33β´ μποροῦμε νά κατασκευάσουμε τόν κύβο, ἄν διπλώσουμε τό ἀνάπτυγμά του καί κολλήσουμε στίς ἑνώσεις ταινίες ἀπό χαρτί.

15

3. Ἐμβαδό ἐπιφάνειας κύβου

Ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας ἑνός πολυέδρου λέμε τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν ἑδρῶν του. Στά παρακάτω μαθήματα, τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας ἑνός ἁπλοῦ πολυέδρου θά τό σημειώνουμε μέ τό σύμβολο ε καί τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του μέ τό σύμβολο Ε.

α´) Ἐμβαδό παράπλευρης ἐπιφάνειας κύβου

Ξέρουμε ὅτι τήν παράπλευρη ἐπιφάνεια ἑνός κύβου μέ ἀκμή α τήν ἀποτελοῦν 4 τετράγωνα ἴσα μέ πλευρά α. Ἐπομένως ἔχουμε:

$$\boxed{\varepsilon = 4\cdot \alpha^2} \qquad (1)$$

Ὥστε: ***Γιά νά βροῦμε τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας κύβου, πολλαπλασιάζουμε τό ἐμβαδό τῆς μιᾶς ἕδρας του ἐπί 4.***

β´) Ἐμβαδό ὁλικῆς ἐπιφάνειας κύβου

Ξέρουμε ἐπίσης ὅτι ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ κύβου μέ ἀκμή α ἀποτελεῖται ἀπό 6 τετράγωνα ἴσα, μέ πλευρά α. Ἐπομένως ἔχουμε:

$$\boxed{E = 6\cdot \alpha^2} \qquad (2)$$

Ὥστε: ***Γιά νά βροῦμε τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύβου πολλαπλασιάζουμε τό ἐμβαδό τῆς μιᾶς ἕδρας του ἐπί 6.***

Ἐφαρμογές καί Παραδείγματα

1) Τό μῆκος μιᾶς ἀκμῆς κύβου εἶναι 8μ. Πόσο εἶναι τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του;

Λύση. Ὁ τύπος (1) γιά $\alpha = 8$ μ. γίνεται: $\varepsilon = 4 \cdot 8^2 = 4 \cdot 64 = 256$ τ.μ.

2) Τό ὁλικό μῆκος τῶν ἀκμῶν ἑνός χαρτοκιβώτιου, πού ἔχει σχῆμα κύβου, εἶναι 6 μ. Πόσο εἶναι τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του;

Λύση. Ἐπειδή ὁ κύβος ἔχει 12 ἀκμές ἴσες, τό μῆκος μιᾶς ἀκμῆς του θά εἶναι:

$\alpha = 6 : 12 = 0{,}50$ Ἐπομένως: $E = 6 \cdot 0{,}50^2 = 1{,}50$ τ.μ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

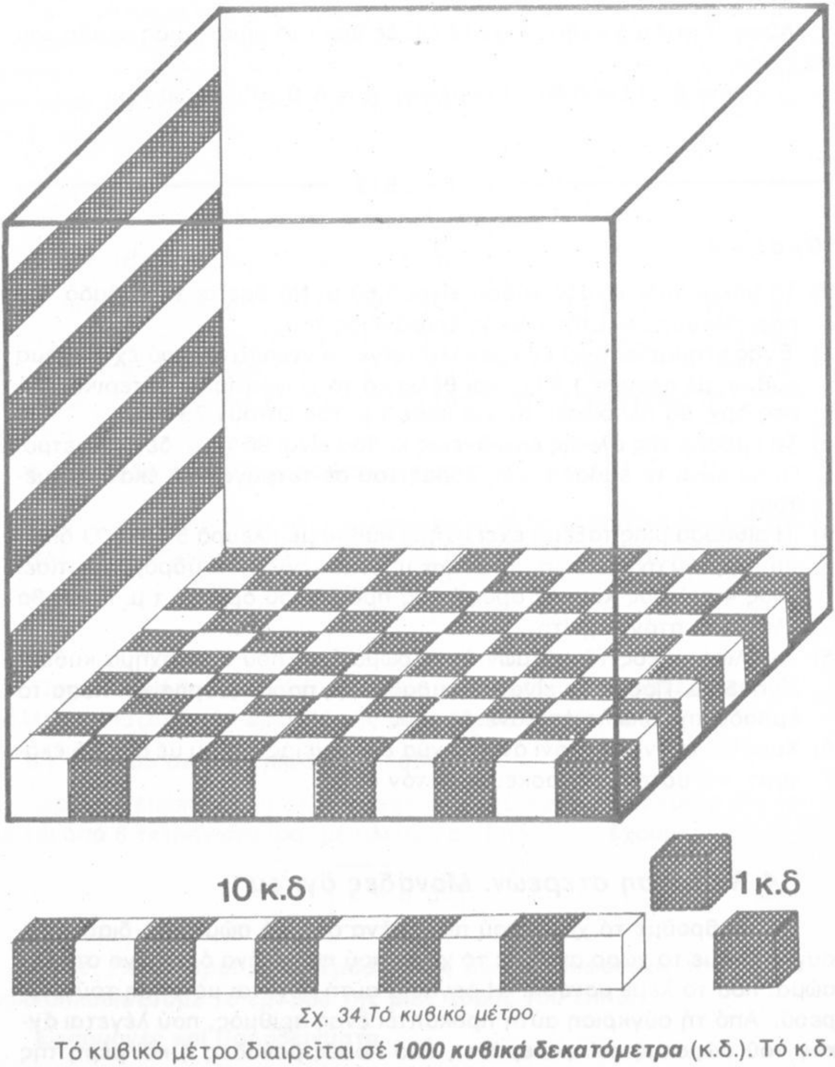
1) Τό μῆκος μιᾶς ἀκμῆς κύβου εἶναι 0,60 μ. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης καί τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του.
2) Ἕνας κτηματίας ἔχει ἕνα μεγάλο τσίγκινο ντεπόζιτο, πού ἔχει σχῆμα κύβου, μέ πλευρά 1,80 μ. καί θέλει νά τό χρωματίσει ἐξωτερικά. Πόσες δρχ. θά πληρώσει, ἄν γιά κάθε τ.μ. τοῦ ζητοῦν 75 δρχ.;
3) Τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας κύβου εἶναι 96 τετρ. δεκατόμετρα. Πόσο εἶναι τό ἐμβαδό μιᾶς ἕδρας του σέ τετραγωνικά ἑκατοστόμετρα;
4) Ἡ αἴθουσα μιᾶς τάξεως ἔχει σχῆμα κύβου μέ πλευρά 5,60 μ. Ὁ διευθυντής τοῦ σχολείου συμφώνησε μ' ἕναν τεχνίτη νά ὑδροχρωματίσει τούς 4 τοίχους καί τήν ὀροφή της πρός 32,50 δρχ. τό τ.μ. Πόσο θά πληρώσει στόν τεχνίτη;
5) Τό ὁλικό μῆκος τῶν ἀκμῶν ἑνός δωματίου, πού ἔχει σχῆμα κύβου, εἶναι 54 μ. Πόσα τ.μ. εἶναι τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης καί πόσα τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του;
6) Χαράξτε σ' ἕνα χαρτόνι ἀνάπτυγμα ἐπιφάνειας κύβου μέ ἀκμή 5 ἑκατοστ. καί ὕστερα κατασκευάστε τόν κύβο.

16

4. Μέτρηση στερεῶν. Μονάδες ὄγκου

Γιά νά βροῦμε τό χῶρο πού πιάνει ἕνα στερεό σῶμα στό διάστημα, συγκρίνουμε τό χῶρο αὐτό μέ τό χῶρο πού πιάνει ἕνα ὁρισμένο στερεό σῶμα, πού τό λέμε ***μονάδα***. Ἡ ἐργασία αὐτή λέγεται μέτρηση τοῦ στερεοῦ. Ἀπό τή σύγκριση αὐτή προκύπτει ἕνας ἀριθμός, πού λέγεται ***ὄγκος*** τοῦ σώματος καί φανερώνει, ἀπό πόσες μονάδες ἤ καί μέρη τῆς μονάδας ἀποτελεῖται τό σῶμα πού μετροῦμε. Τόν ὄγκο τοῦ στερεοῦ σώματος σημειώνουμε μέ τό σύμβολο V.

Σάν ἀρχική μονάδα μέ τήν ὁποία ἐκφράζουμε τόν ὄγκο εἶναι τό ***κυβικό μέτρο.*** Τό κυβικό μέτρο εἶναι ἕνας κύβος μέ ἀκμή ἴση μ' ἕνα μέτρο. (σχ. 34).



Σχ. 34. Τό κυβικό μέτρο

Τό κυβικό μέτρο διαιρεῖται σέ ***1000 κυβικά δεκατόμετρα*** (κ.δ.). Τό κ.δ. εἶναι ἕνας κύβος μέ ἀκμή ἴση μέ 1 δεκατόμετρο.

Τό κυβικό δεκατόμετρο διαιρεῖται σέ ***1000 κυβικά ἑκατοστόμετρα*** (κ.ε.). Τό κ.ε. εἶναι ἕνας κύβος μέ ἀκμή ἴση μέ 1 ἑκατοστόμετρο.

Τό κυβικό ἑκατοστόμετρο διαιρεῖται σέ ***1000 κυβικά χιλιοστόμετρα.*** (κ.χ.). Τό κ.χ. εἶναι ἕνας κύβος μέ ἀκμή ἴση μέ 1 χιλιοστόμετρο. Ἔτσι ἔχουμε:

1 κ.μ. = ***1000*** κ.δ. ***1*** κ.δ. = ***1000*** κ.ε. ***1*** κ.ε. = ***1000*** κ.χ.	***1*** κ.δ. = ***0,001*** κ.μ. ***1*** κ.ε. = ***0,000001*** κ.μ. ***1*** κ.χ. = ***0,000000001*** κ.μ.

Στόν παραπάνω πίνακα βλέπουμε ὅτι: κάθε μονάδα ὄγκου εἶναι 1000 φορές μικρότερη ἀπό τήν ἀμέσως ἀνώτερή της μονάδα ἤ 1000 φορές μεγαλύτερη ἀπό τήν ἀμέσως κατώτερή της. Γι' αὐτό ὅταν ὁ ὄγκος ἑνός στερεοῦ ἐκφράζεται μέ δεκαδικό ἀριθμό, τά χιλιοστά του παριστάνουν τά κυβικά δεκ., τά ἑκατομμυριοστά του τά κυβικά ἑκατ. καί τά δισεκατομμυριοστά, τά κυβικά χιλιοσ. Οἱ παραπάνω ἀριθμοί, πού παριστάνουν ὄγκους, διαβάζονται ὡς ἑξῆς:

i) 3,102305604 κ.μ. διαβάζεται: 3 κ.μ. 102 κ.δ. 305 κ.ε. 604 κ.χ.

ii) 0,16582 κ.μ. διαβάζεται: 165 κ.δ. 820 κ.ε.

Ὅταν γεμίσουμε ἕνα κυβικό μέτρο μέ νερό ἀπεσταγμένο 4° Κελσίου, τό ***βάρος τοῦ νεροῦ*** πού χωράει τό 1 κ.μ. θά εἶναι ἕνας ***τόνος*** = 1000 κιλά.

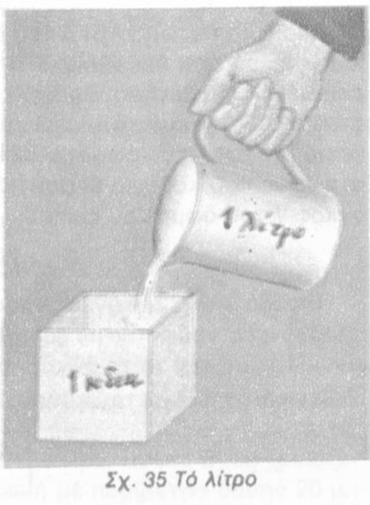
Ἐπομένως τό ***βάρος*** τοῦ νεροῦ, πού χωράει 1 κ.δ., θά εἶναι 1 κιλό καί τό ***βάρος*** πού χωράει 1 κ.ε., θά εἶναι 1 γραμμάριο.

Ὡς μονάδα χωρητικότητας τῶν δοχείων σέ ὑγρά χρησιμοποιεῖται τό ***λίτρο.*** Τό λίτρο εἶναι ἡ χωρητικότητα ἑνός κ.δ. (σχ. 35).

Σημείωση: Μέ τό σχῆμα 34 ἐξηγοῦνται εὔκολα οἱ διαιρέσεις τοῦ κυβικοῦ μέτρου.

Ἡ βάση τοῦ κυβικοῦ μέτρου, εἶναι τό τετραγωνικό μέτρο πού, ὅπως ξέρουμε, χωρίζεται σέ 100 τετρ. δεκατόμετρα.

Ἄν πάνω σέ κάθε τετραγ. δεκατόμετρο τοποθετήσουμε ἀπό ἕναν κύβο μέ ἀκμή 1 δεκατόμετρο, σχηματίζεται μιά στρώση ἀπό 100 κυβικά δεκατόμετρα.



Σχ. 35 Τό λίτρο

Ἐπειδή τό ὕψος τοῦ κυβικοῦ μέτρου εἶναι 1 μ. ἤ 10 δεκατόμετρα, θά σχηματιστοῦν μέσα στόν κύβο 10 ὅμοιες στρώσεις πού θά ἔχουν 10 ἐπί 100 κ.δ. = 1000 κ. δεκατόμετρα. Ὅμοια, κάθε κ.δ. χωρίζεται σέ 1000 κυβ. ἑκατοστόμετρα καί κάθε κυβικό ἑκατ. σέ 1000 κυβικά χιλιοστόμετρα.

Παραδείγματα: 1) Πόσα κ. ἑκατοστόμετρα μᾶς κάνουν 3 κυβικά μέτρα;

Λύση. 3 κυβ. μέτρα = $3 \cdot 1.000.000 = 3.000.000$ κυβ. ἑκατοστόμετρα.

2) Τί μέρος τοῦ κυβ. μέτρου εἶναι 2.500 κυβ. ἑκατοστόμετρα;

Λύση: εἶναι $\frac{2.500}{1.000.000} = 0,002500$ κ.μ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7) Τά 3,4 κυβικά δεκατ. νά τραποῦν σέ κ.ε. καί ὕστερα σέ κ.χ.
8) Τά 320 κ. χιλ. νά τραποῦν σέ κ.ε. καί ὕστερα σέ κ.δ.
9) Νά γραφοῦν μέ δεκαδικό ἀριθμό οἱ παρακάτω ὄγκοι:
α΄) 12 κ.μ., 26 κ.δ., 18 κ.ε., β΄) 3 κ.δ., γ΄) 8 κ.δ., 5 κ.ε., 3 κ.χ.

17

5. Ὄγκος κύβου

Πρόβλημα. Ἕνα δωμάτιο τοῦ σπιτιοῦ μου ἔχει σχῆμα κύβου μέ ἀκμή 3 μέτρα. Ποιός εἶναι ὁ ὄγκος του;

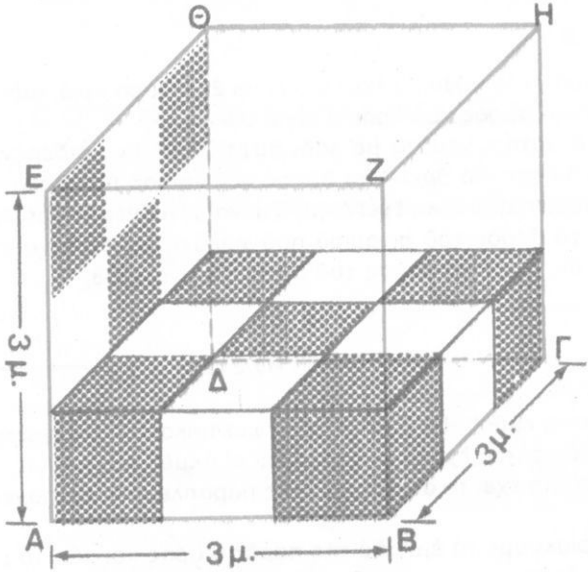
Λύση: Τό πάτωμα ΑΒΓΔ τοῦ δωματίου σχ. 36 ἔχει σχῆμα τετραγώνου καί γι' αὐτό ἔχει ἐμβαδό $3 \cdot 3 = 9$ τ.μ. Σέ κάθε τ.μ. τοῦ πατώματος μποροῦμε νά τοποθετήσουμε ἀπό ἕνα κυβικό μέτρο. Ἔτσι σχηματίζεται μιά στρώση ἀπό 9 κυβικά μέτρα πού θά ἔχει ὕψος 1 μέτρο. (σχ. 36). Καί ἐπειδή τό ὕψος τοῦ δωματίου εἶναι 3 μέτρα, μπορεῖ νά χωριστεῖ σέ τρεῖς στρώσεις πού καθεμιά θ' ἀποτελεῖται ἀπό 9 κυβικά μέτρα. Ἑπομένως ὁ ὄγκος V τοῦ δωματίου εἶναι:

$$V = 9 \cdot 3 = 27 \text{ κ.μ.}$$

Ἐπειδή $9 = 3 \cdot 3$, ὁ ὄγκος γράφεται $V = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$ (γινόμενο μέ ἴσους παράγοντες γράφεται μέ μορφή δυνάμεως), δηλ. ὁ ὄγκος τοῦ κύβου εἶναι ἴσος μέ τήν τρίτη δύναμη τῆς ἀκμῆς του.

Γενικά, ἄν ἡ ἀκμή τοῦ κύβου εἶναι α μέτρα, τότε ὁ ὄγκος του θά εἶναι:

$$\boxed{V = \alpha^3}$$



Σχ. 36 Ὄγκος κύβου

Ὥστε: ***Γιά νά βροῦμε τόν ὄγκο ἑνός κύβου μέ ἀκμή α μέτρα, βρίσκουμε τήν τρίτη δύναμη τῆς ἀκμῆς του.***

Παράδειγμα: Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος κύβου μέ ἀκμή 2,5 μ.

Λύση: Γιά $\alpha = 2{,}5$ μ. βρίσκουμε: $V = 2{,}5^3 = 15{,}625$ κ.μ.

Σημείωση. Ξέρουμε ἀπό τή φυσική ὅτι: ***εἰδικό βάρος*** τοῦ ὑλικοῦ τοῦ σώματος εἶναι τό πηλίκο τοῦ μέτρου τοῦ βάρους του διά τοῦ ὄγκου του. Ἐπομένως: ***Βάρος σώματος = Ὄγκος ἐπί εἰδικό βάρος του.*** Πίνακα τῶν εἰδικῶν βαρῶν τῶν διαφόρων σωμάτων βρίσκουμε στή Φυσική (Βλ. καί πίνακα σελ. 197).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

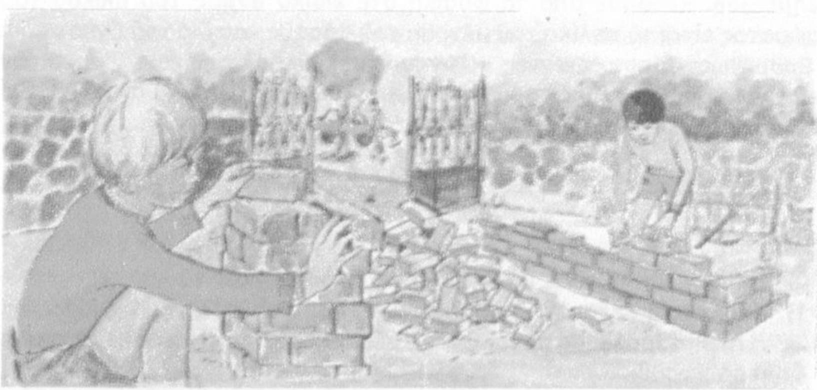
10) Ἡ ἀκμή κύβου εἶναι 0,60 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;
11) Μιά κυβική δεξαμενή ἔχει ὕψος 3,50 μ. Πόσα κιλά νερό χωράει;
12) Ἡ περίμετρος μιᾶς ἕδρας ἑνός κυβικοῦ δοχείου εἶναι 3 μ. Πόσα κιλά νερό χωράει;
13) Ἀπό μιά βρύση τρέχουν 12 κ.μ. νερό τήν ὥρα. Πόσες ὧρες χρειάζεται, γιά νά γεμίσει μιά κυβική δεξαμενή μέ περίμετρο βάσης 20 μ.;

'Ομάδα Β'

14) Ἡ ἀκμή ἑνός κυβικοῦ δοχείου εἶναι 2 μ. Πόσα κιλά λάδι χωράει, ἄν τό εἰδικό βάρος τοῦ λαδιοῦ εἶναι 0,912;
15) Σ' ἕνα ποτήρι γεμάτο μέ λάδι βαφτίζουμε ἕνα σιδερένιο κύβο μέ ἀκμή 3 ἑκατ. Νά βρεῖτε τό βάρος τοῦ λαδιοῦ πού θά χυθεῖ.
16) Μιά κυβική ἀποθήκη ἔχει ἀκμή 5 μ. καί εἶναι γεμάτη μέ σιτάρι. Πόσο εἶναι τό βάρος τοῦ σιταριοῦ πού χωράει; α') σέ τόνους καί β') σέ κιλά, ἄν τό εἰδικό βάρος τοῦ σιταριοῦ εἶναι 1,58;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Τί λέγεται κύβος; Ποιά εἶναι τά γεωμετρικά του στοιχεῖα;
2) Ποιές ἰδιότητες ἔχουν οἱ ἕδρες καί οἱ ἀκμές τοῦ κύβου;
3) Ποιό σχῆμα ἔχει τό ἀνάπτυγμα τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ κύβου;
4) Πῶς βρίσκουμε τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης καί πῶς τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύβου;
5) Τί λέγεται κυβικό μέτρο; Ποιές εἶναι οἱ ὑποδιαιρέσεις του;
6) Πῶς βρίσκουμε τόν ὄγκο τοῦ κύβου;
7) Τί εἶναι ὁ τόνος βάρους; τό κιλό; τό γραμμάριο;
8) Τί λέγεται εἰδικό βάρος τοῦ ὑλικοῦ σώματος καί μέ τί ἰσοῦται;
9) Πῶς βρίσκουμε τό βάρος ἑνός σώματος, ὅταν ξέρουμε τόν ὄγκο καί τό εἰδικό του βάρος;



Σχ. 37. Τσιμεντόλιθοι πού ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

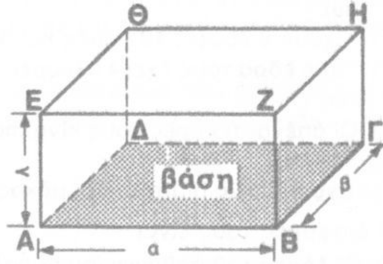
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε΄

ΤΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ

18 *1. Τό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καί τά στοιχεῖα του*

Τό πολύεδρο τοῦ σχ. 38, ὅπως ξέρετε, λέγεται ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Προσέξτε τήν κασετίνα σας, τό κουτί μέ τίς κιμωλίες, τήν αἴθουσα τῆς διδασκαλίας σας, τούς τσιμεντόλιθους τοῦ σχ. 37, θά δεῖτε ὅτι ἔχουν σχῆμα ***ὀρθογωνίου παραλ/δου.***



Σχ. 38. Ὀρθογώνιο παραλ/δο

Ἕδρες. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἀποτελεῖται, ὅπως καί τοῦ κύβου ἀπό 6 ἕδρες, οἱ ἀπέναντι ἕδρες εἶναι ἀνά δύο παράλληλες καί ἴσες καί ἀνά δύο συνεχόμενες κάθετες. Δυό ἀπό τίς ἀπέναντι ἕδρες του λέγονται ***βάσεις***. Ὅταν ἔχει τή διάταξη τοῦ σχ. 38, ἡ ΑΒΓΔ λέγεται κάτω βάση καί ἡ ΕΖΗΘ πάνω βάση. Οἱ ὑπόλοιπες 4 ἕδρες λέγονται ***παράπλευρες ἕδρες***. Αὐτές εἶναι κάθετες πάνω στίς βάσεις καί ἀποτελοῦν τήν παράπλευρη ἐπιφάνειά του.

Ἀκμές. Οἱ ἕδρες τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 38) ἀνά δύο συνεχόμενες, τέμνονται καί σχηματίζουν, ὅπως καί στόν κύβο, τίς 12 ἀκμές του. Καί οἱ ἀκμές ἀνά δύο συνεχόμενες τέμνονται καί σχηματίζουν ἐπίπεδες ὀρθές γωνίες.

Κορυφές. Τό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει, ὅπως καί ὁ κύβος, 8 κορυφές.

Ἰδιαίτερα γνωρίσματα τῶν ἀκμῶν καί τῶν ἑδρῶν του. Ἀπό κάθε κορυφή τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου περνοῦν, ὅπως καί στόν κύβο, τρεῖς ἀκμές, π.χ. ἀπό τήν κορυφή Α (σχ. 38) περνοῦν οἱ ἀκμές ΑΒ, ΑΔ καί ΑΕ. Τά μήκη τῶν ἀκμῶν αὐτῶν λέγονται διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλ/δου, μῆκος εἶναι (ΑΒ) = α, πλάτος (ΑΔ) = β καί ὕψος (ΑΕ) = γ. Ἐξακριβώνουμε εὔκολα ὅτι οἱ ἀκμές τοῦ ὀρθογωνίου παραλ/δου ἀνά 4 εἶναι ἴσες, δηλ. (ΑΒ) = (ΔΓ) = (ΕΖ) = (ΘΗ) = α, (ΒΓ) = (ΑΔ) = (ΕΘ) = (ΖΗ) = β καί (ΑΕ) = (ΒΖ) = (ΓΗ) = (ΔΘ) = γ. (σχ. 38). Ἐπομένως τό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο περικλείεται ἀπό 6 ὀρθογώνιες ἕδρες. Ὥστε:

Τό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει 6 ἕδρες ὀρθογώνιες πού εἶναι ἀνά δυό ἀπέναντι ἴσες, 12 ἀκμές ἀνά 4 ἀπέναντι ἴσες καί 8 κορυφές.

Σύγκριση τοῦ ὀρθογωνίου παραλ/δου καί τοῦ κύβου. Ἔχουν τίς παρακάτω ὁμοιότητες:

α΄) Εἶναι πολύεδρα, δηλ. περικλείονται ἀπό τεθλασμένη ἐπιφάνεια (σχ. 39).

β΄) Ἔχουν 6 ἕδρες, 12 ἀκμές καί 8 κορυφές.

γ΄) Κάθε ἕδρα τους ἔχει 4 πλευρές καί ἀνά δυό συνεχόμενες εἶναι κάθετες.

δ΄) Οἱ ἀπέναντι ἕδρες τους εἶναι παράλληλες καί ἀνά δύο συνεχόμενες κάθετες.

ε΄) Ἔχουν τρεῖς διαστάσεις: μῆκος πλάτος καί ὕψος.

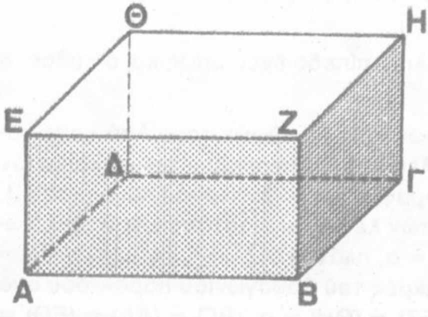
Οἱ διαφορές τους εἶναι:

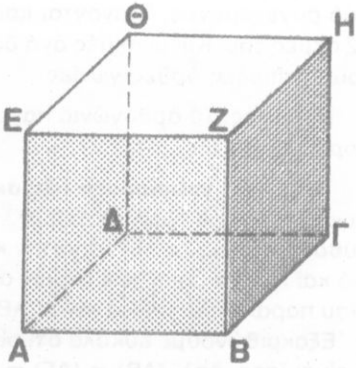
α΄) Οἱ ἕδρες τοῦ ὀρθογωνίου παραλ/δου εἶναι ὀρθογώνια, ἐνῶ τοῦ κύβου τετράγωνα.

β΄) Οἱ ἕδρες τοῦ ορθογωνίου παραλ/δου εἶναι ἴσες ἀνά δύο ἀπέναντι, ἐνῶ τοῦ κύβου ὅλες οἱ ἕδρες εἶναι ἴσες.

γ΄) Οἱ ἀκμές τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἀνά 4 ἀπέναντι ἴσες, ἐνῶ τοῦ κύβου ὅλες οἱ ἀκμές εἶναι ἴσες μεταξύ τους.

Οἱ διαφορές τους ὀφείλονται στό ὅτι οἱ ἀκμές τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου δέν εἶναι ὅλες ἴσες. Ἄν τίς ἀκμές του τίς κάνουμε ἴσες, τότε γίνεται κύβος.



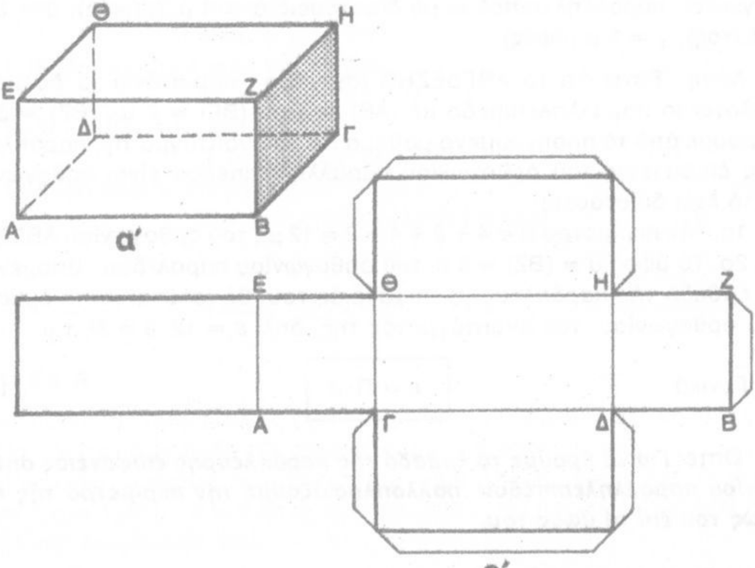


Σχ. 39. Σύγκριση ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καί κύβου

2. *Τό ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου*

Παίρνουμε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἀπό χαρτόνι ΑΒΓΔΕΖΗΘ (σχ. 40). Κόβουμε, ὅπως καί στόν κύβο, 3 ἀκμές στήν κάτω βάση του π.χ. ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ καί τίς ἀντίστοιχες στήν πάνω βάση ΕΘ, ΕΖ, ΖΗ. Κόβουμε ἀκόμη τήν παράπλευρη ἐπιφάνειά του κατά μῆκος τῆς ἀκμῆς ΒΖ. Ξεδιπλώνουμε τήν ἐπιφάνειά του καί τήν ἁπλώνουμε πάνω στό ἐπίπεδο τῆς ἕδρας ΓΔΘΗ (σχ. 40 β'). Ἔτσι ἔχουμε τήν ἐπιφάνειά του, ἁπλωμένη στό ἐπίπεδο καί αὐτό λέγεται ***ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.***

Τό ἀνάπτυγμα ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα ὀρθογώνιο πού σχηματίζουν οἱ παράπλευρες ἕδρες του καί ἀπό τά ὀρθογώνια τῶν βάσεών του.



Σχ. 40. Ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας ὀρθογωνίου παρλ/δου

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου οἱ διαστάσεις εἶναι α = 7 μ., β = 2 μ. καί γ = 3 μ. Νά βρεθεῖ τό ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀκμῶν του.
2) Ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου οἱ διαστάσεις εἶναι α = 5 μ., β = 2 μ.

καί γ = 4 μ. Νά βρεθοῦν τά μήκη τῶν περιμέτρων ὅλων τῶν ἑδρῶν του.

3) Χαράξτε σ' ἕνα χαρτόνι ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καί ἔπειτα νά τό κατασκευάσετε.

19

3. Ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

α΄) Ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του

Πρόβλημα. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μέ διαστάσεις α = 4 μ. (μῆκος), β = 2 μ. (πλάτος), γ = 3 μ (ὕψος).

Λύση. Ἔστω ὅτι τό ΑΒΓΔΕΖΗΘ (σχ. 40 α΄) παριστάνει τό δοσμένο ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μέ (ΑΒ) = 4 μ., (ΒΓ) = 2 μ., (ΒΖ) = 3 μ. Ξέρουμε ἀπό τό προηγούμενο μάθημα ὅτι τό ἀνάπτυγμα τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ὀρθογώνιο. Αὐτό ἔχει διαστάσεις:

1ο. Τήν περίμετρο $\Pi = 4 + 2 + 4 + 2 = 12$ μ., τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ.

2ο. Τό ὕψος $υ = (ΒΖ) = 3$ μ. τοῦ ὀρθογωνίου παραλ/δου. Ἐπομένως τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του, θά ἰσοῦται μέ τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογωνίου, τοῦ ἀναπτύγματός της, δηλ. $\varepsilon = 12 \cdot 3 = 36$ τ.μ.

Γενικά: $$\boxed{\varepsilon = \Pi \cdot υ} \qquad (1)$$

Ὥστε: ***Γιά νά βροῦμε τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζουμε τήν περίμετρο τῆς βάσεώς του ἐπί τό ὕψος του.***

β΄) Ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του

Γιά νά βροῦμε τό ἐμβαδό Ε τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ ἴδιου ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου πρέπει στό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του, δηλ. στό $\varepsilon = 36$ τ.μ., νά προσθέσουμε τό ἐμβαδό τῶν δυό βάσεών του πού εἶναι:

$$2 \cdot (4 \cdot 2) = 2 \cdot 8, \quad \text{δηλαδή: } Ε = 36 + 2 \cdot 8 = 52 \text{ τ.μ.}$$

Γενικά, ἄν στό ἐμβαδό ε τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθογωνίου παραλ/δου προσθέσουμε τό ἐμβαδό $2 \cdot Β$ (Β τό ἐμβαδό τῆς βάσης του), θά βροῦμε τό ἐμβαδό Ε τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του, δηλ.

$$\boxed{E = \varepsilon + 2 \cdot B} \qquad (2)$$

Ὥστε: ***Γιά νά βροῦμε τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, προσθέτουμε στό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του τό ἐμβαδό τῶν δύο βάσεών του.***

Παράδειγμα: Ὀρθογωνίου παραλ/δου οἱ διαστάσεις εἶναι α = 20 ἑκατ., β = 15 ἑκατ. καί γ = 10 ἑκατ. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης καί τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του.

Λύση. Βρίσκουμε περίμετρο τῆς βάσεώς του:

$$\Pi = 20 + 15 + 20 + 15 = 70 \text{ ἑκατ.}$$

Ἐμβαδό παράπλευρης ἐπιφάνειας:

$$\varepsilon = 70 \cdot 10 = 700 \text{ τ. ἑκ.}$$

Ἐμβαδά τῶν δυό βάσεών του:

$$2 \cdot B = 2 \cdot (20 \cdot 15) = 600 \text{ τ. ἑκ.}$$

Ἐμβαδό ὁλικῆς ἐπιφάνειας:

$$E = 700 + 600 = 1300 \text{ τ. ἑκατ.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

4) Μιά αἴθουσα διδασκαλίας ἔχει διαστάσεις α = 6 μ. β = 5 μ. καί γ = 4 μ. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς της.
5) Ἕνα κιβώτιο σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἔχει διαστάσεις α = 1,20 μ., β = 0,80 μ., καί γ = 0,60 μ. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του.

Ὁμάδα Β΄

6) Ἕνα ἔπιπλο ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μέ διαστάσεις α = 1,50 μ., β = 0,90 μ., καί γ = 0,60 μ. Θέλουμε νά καλύψουμε μέ ὕφασμα (ἐκτός ἀπό τήν κάτω βάση) πού στοιχίζει 80 δρχ. τό μέτρο. Πόσο θά στοιχίσει ἡ κάλυψή του;
7) Μιά ἀναμνηστική μαρμάρινη στήλη ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μέ μῆκος α = 1,40 μ. πλάτος β = 0,40 μ. καί ὕψος γ ἴσο μέ

τά $\frac{5}{3}$ τῆς περιμέτρου τῆς βάσεώς της. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς της.

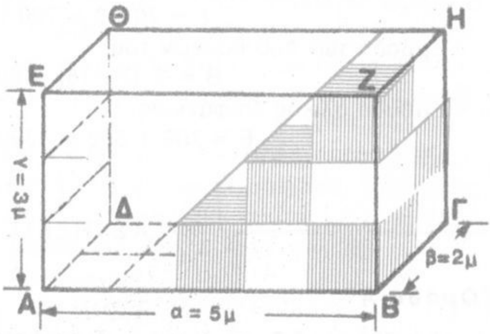
20 4. Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Πρόβλημα. Ποιός εἶναι ὁ ὄγκος ἑνός δωματίου πού ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μέ διαστάσεις $\alpha = 5$ μ., $\beta = 2$ μ. καί $\gamma = 3$ μ.

Λύση. Θά ἐργαστοῦμε μέ τόν ἴδιο τρόπο πού ἐργαστήκαμε, γιά τήν εὕρεση τοῦ ὄγκου τοῦ κύβου (μάθημα 17). Χωρίζουμε τή βάση ΑΒΓΔ τοῦ δωματίου (σχ. 41) σέ $5 \cdot 2 = 10$ τετράγωνα μέ πλευρά 1 μ. Ἄν σέ κάθε τετράγωνο τοποθετήσουμε ἀπό ἕνα κυβικό μέτρο, θά σχηματιστεῖ μιά στρώση ἀπό 10 κυβικά μέτρα, μέ ὕψος 1 μ. Καί ἐπειδή τό ὕψος τοῦ δωματίου εἶναι 3 μ., τό δωμάτιο μπορεῖ νά χωρισθεῖ σέ 3 στρώσεις ἀπό 10 κυβικά μέτρα καθεμιά.

Ἐπομένως ὁ ὄγκος V τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι: $V = 10 \cdot 3 = 30$ κ.μ., δηλ. γιά νά βροῦμε τόν ὄγκο του πολλαπλασιάζουμε τό ἐμβαδό τῆς βάσεώς του ἐπί τό ὕψος.

Ἐπειδή ὅμως $10 = 5 \cdot 2$ ὄγκος του γράφεται: $V = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$ κ.μ. Γενικά, ἄν οἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παρα-λ/δου εἶναι α, β, γ μέτρα ὁ ὄγκος του εἶναι:



Σχ. 41

$$\boxed{V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma}$$

Ὥστε: ***Γιά νά βροῦμε τόν ὄγκο ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζουμε τίς τρεῖς διαστάσεις του.***

Σημείωση. Οἱ τρεῖς διαστάσεις πρέπει νά μετριοῦνται μέ τήν ἴδια μονάδα.

Ἐφαρμογή. Ἕνα τοῦβλο ἔχει διαστάσεις $\alpha = 20$ ἑκατ., $\beta = 10$ ἑκατ. καί $\gamma = 6$ ἑκατ. Ποιός εἶναι ὁ ὄγκος του;

Λύση: Ἀντικαθιστώντας στόν τύπο τίς τιμές τῶν α, β, γ, βρίσκουμε:

$$V = 20 \cdot 10 \cdot 6 = 1200 \text{ κ.ε.} = 0{,}0012 \text{ κ.μ.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

8) Μιά δεξαμενή ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καί ἔχει διαστάσεις α = 3 μ., β = 20 μ. καί γ = 4 μ. Πόσα κιλά νερό χωράει;
9) Σέ μιά αἴθουσα μέ διαστάσεις α = 8 μ., β = 5,50 μ. καί γ = 3,20 μ. διδάσκονται 36 μαθητές. Πόσος ὄγκος ἀέρα ἀναλογεῖ σέ κάθε μαθητή;
10) Ἕνας κοινοτικός δρόμος ἔχει μῆκος 150 μ. καί πλάτος 12 μ. (ὀρθογώνιος) καί θέλουν νά τόν στρώσουν μέ χαλίκια σέ πάχος 0,12 μ. Πόσα κυβικά μέτρα χαλίκια θά χρειαστοῦν;

Ὁμάδα Β΄

11) Ἕνας χτίστης θέλει νά χτίσει μέ τοῦβλα ἕναν τοῖχο μέ διαστάσεις α = 10 μ., β = 0,25 μ. καί γ = 3,40 μ. Πόσα τοῦβλα θά χρειαστεῖ ἄν κάθε τοῦβλο πιάνει στό χτίσιμο 20 ἑκατ. μῆκος, 12 ἑκατ. πλάτος καί 8 ἑκατ. ὕψος;
12) Ἕνα δοχεῖο λαδιοῦ ἔχει διαστάσεις α = 0,24 μ., β = 0,24 μ. καί γ = 0,35 μ. Πόσα κιλά λάδι χωράει; (εἰδικό βάρος λαδιοῦ 0,912).
13) Ἕνα δοχεῖο σχήματος ὀρθογωνίου παραλ/δου ἔχει βάση μέ διαστάσεις α = 10 μ., β = 25 ἑκατ. καί ὄγκο 5 κυβ. δεκατόμετρα. Πόσα ἑκατοστόμετρα εἶναι τό ὕψος του;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Τί λέγεται ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καί ποιά εἶναι τά στοιχεῖα του;
2) Ποιές ἰδιότητες ἔχουν οἱ ἕδρες καί οἱ ἀκμές ὀρθογωνίου παραλ/δου;
3) Ὑπάρχουν ξύλινα ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα;
4) Σέ τί διαφέρει τό ὀρθογώνιο παραλ/δο ἀπό τόν κύβο;
5) Πῶς βρίσκουμε τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης καί πῶς τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθογωνίου παραλ/δου;
6) Πῶς βρίσκουμε τόν ὄγκο τοῦ ὀρθογωνίου παραλ/δου;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΤ΄

ΤΑ ΠΡΙΣΜΑΤΑ – ΟΡΘΑ ΠΡΙΣΜΑΤΑ

21

1. Τό Πρίσμα καί τά στοιχεῖα του

Τό πολύεδρο πού παριστάνεται στό σχ. 42 ἔχει τίς ἕδρες του ΑΒΓΔ καί ΕΖΗΘ παράλληλες καί ἴσες, οἱ ἄλλες του ἕδρες εἶναι παραλληλόγραμμα. Ἕνα τέτοιο πολύεδρο λέγεται πρίσμα. Ὥστε:

Πρίσμα εἶναι ἕνα πολύεδρο, πού ἔχει δυό ἕδρες παράλληλες καί ἴσες καί τίς ἄλλες ἕδρες παραλληλόγραμμα.

Οἱ ἴσες καί παράλληλες ἕδρες ἑνός πρίσματος λέγονται ***βάσεις του.*** Ἡ ἀπόσταση τῶν βάσεων ἑνός πρίσματος λέγεται ***ὕψος του.*** Π.χ. τοῦ πρίσματος σχ. 42 βάσεις εἶναι οἱ ΑΒΓΔ καί ΕΖΗΘ καί ὕψος τό ΚΛ.

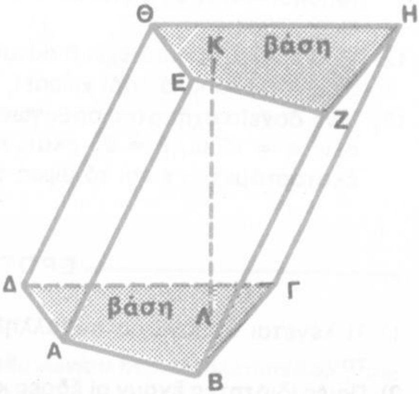
Τό πρίσμα τοῦ σχ. 43 ἔχει βάσεις τρίγωνα λέγεται ***τριγωνικό πρίσμα.***

Τό πρίσμα τοῦ σχ. 42 ἔχει βάσεις τετράπλευρα λέγεται ***τετραγωνικό πρίσμα.***

Τό πρίσμα τοῦ σχ. 44 ἔχει βάσεις πεντάγωνα λέγεται ***πενταγωνικό πρίσμα*** κ τ λ.

Οἱ ἕδρες κάθε πρίσματος πού βρίσκονται ἀνάμεσα ἀπό τίς βάσεις λέγονται ***παράπλευρες ἕδρες*** καί ἀποτελοῦν τήν παράπλευρη ἐπιφάνειά του.

Τοῦ πρίσματος σχ. 42 οἱ παράπλευρες ἕδρες δέν εἶναι κάθετες στή βάση. Τό πρίσμα αὐτό λέγεται ***πλάγιο.*** Τό τετραγωνικό πρίσμα (σχ. 42) ἔχει 12 ἀκμές, ἀπό τίς ὁποῖες οἱ 4 πού βρίσκονται ἀνάμεσα ἀπό τίς δυό βάσεις του, δηλ. οἱ ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ, λέγονται ***παράπλευρες.*** Ἔχει καί 8 κορυφές.



Σχ. 42. Τό πλάγιο πρίσμα

2. Τά ὀρθά πρίσματα

Τά πρίσματα πού ἔχουν ὅλες τίς παράπλευρες ἕδρες τους ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα λέγονται *ὀρθά*. Ὥστε:

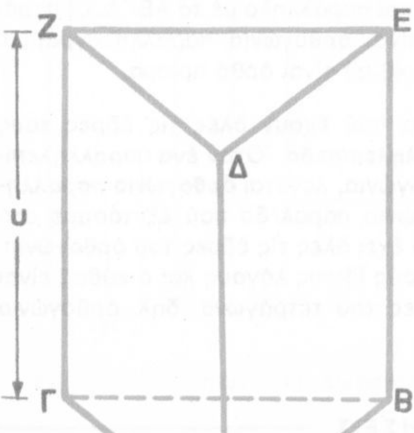
Ἕνα πρίσμα λέγεται ὀρθό, ἄν ὅλες οἱ παράπλευρες ἕδρες του εἶναι ὀρθογώνια.

Τά σχήματα 43, 44, 45 παριστάνουν ὀρθά πρίσματα. Σχῆμα ὀρθοῦ πρίσματος ἔχουν οἰκοδομές, μερικά κιβώτια, τό συντριβάνι πού βλέπετε στό σχῆμα 45.

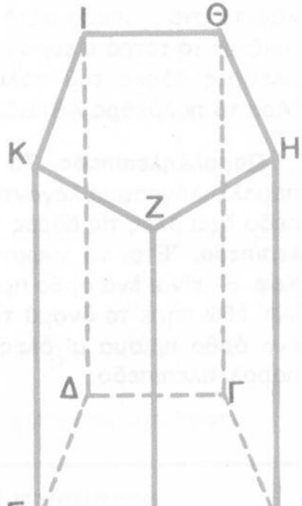
Στά ὀρθά πρίσματα κάθε πλευρική ἀκμή εἶναι καί ὕψος του. Π.χ. τό ὕψος στό ὀρθό πρίσμα τοῦ σχ. 43 εἶναι μιά ἀπό τίς ἀκμές του ΑΔ ἤ ΒΕ ἤ ΓΖ.

Κανονικά ὀρθά πρίσματα. Ἕνα ὀρθό πρίσμα λέγεται κανονικό ἄν ἡ βάση του εἶναι κανονικό πολύγωνο, π.χ. τό ὀρθό τριγωνικό πρίσμα τοῦ σχ. 43 εἶναι κανονικό, γιατί οἱ βάσεις του εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα.

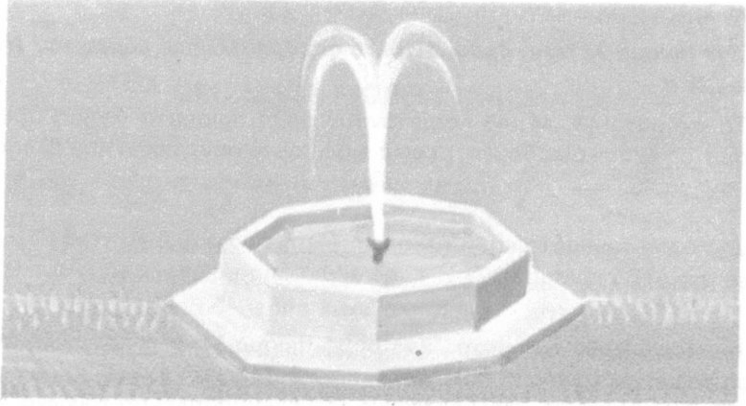
Ἰχνογράφηση ὀρθοῦ πρίσματος. Γιά νά ἰχνογραφήσουμε ἕνα ὀρθό πρίσμα π.χ. τετραγωνικό, χαράζουμε σ' ἕνα ἐπίπεδο ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ, φέρουμε ἀπό τίς κορυφές του Α, Β, Γ, Δ ἔξω ἀπό τό ἐπίπεδο καί



Σχ. 43. Ὀρθό τριγωνικό πρίσμα



Σχ. 44. Ὀρθό πενταγωνικό πρίσμα



Σχ. 45. Συντριβάνι

πρός τήν ἴδια μεριά του εὐθύγραμμα τμήματα ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ (σχ. 46 α΄) κάθετα στό ἐπίπεδο αὐτό καί ἴσα μεταξύ τους. Τά ἄκρα της Ε, Ζ, Η, Θ ὁρίζουν τό τετράπλευρο ΕΖΗΘ ἴσο καί παράλληλο μέ τό ΑΒΓΔ. Οἱ παράπλευρες ἕδρες τοῦ πολυέδρου εἶναι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα. Ἄρα τό πολύεδρο ΑΒΓΔΕΖΗΘ (σχ. 46 α΄) εἶναι ὀρθό πρίσμα.

Παραλληλεπίπεδα. Τά πρίσματα πού ἔχουν ὅλες τίς ἕδρες τους παραλληλόγραμμα λέγονται ***παραλληλεπίπεδα.*** Ὅταν ἕνα παραλληλεπίπεδο ἔχει ὅλες τίς ἕδρες του ὀρθογώνια, λέγεται ***ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.*** Ἔτσι τό γνωστό ὀρθογώνιο παραλ/δο πού ἐξετάσαμε στό Κεφ. Ε΄, εἶναι ἕνα ὀρθό πρίσμα πού ἔχει ὅλες τίς ἕδρες του ὀρθογώνια. Ἀπ᾽ ἐδῶ πῆρε τό ὄνομά του. Γιά τούς ἴδιους λόγους καί ὁ κύβος εἶναι ἕνα ὀρθό πρίσμα μ᾽ ὅλες τίς ἕδρες του τετράγωνα, δηλ. ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

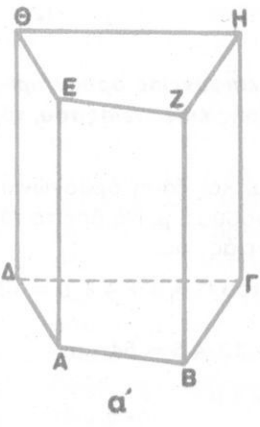
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

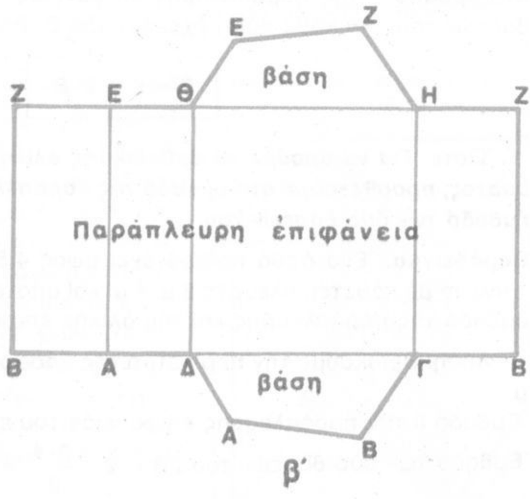
1) Νά βρεῖτε τόν ἀριθμό τῶν κορυφῶν ἑνός τριγωνικοῦ, ἑνός τετραγωνικοῦ καί ἑνός πενταγωνικοῦ πρίσματος. Τί παρατηρεῖτε;
2) Νά βρεῖτε τόν ἀριθμό τῶν ἀκμῶν τῶν ἴδιων πρισμάτων. Τί παρατηρεῖτε;
3) Ἰχνογραφῆστε τά πρίσματα τῶν σχημάτων 43, 44 καί 45.

3. Ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας ὀρθοῦ πρίσματος

Ἂς πάρουμε ἕνα ὀρθό τετραγωνικό πρίσμα ΑΒΓΔΕΖΗΘ (σχ. 46 α΄) καί ἂς ἀναπτύξουμε τήν ἐπιφάνειά του στό ἐπίπεδο τῆς ἕδρας του ΓΔΘΗ μέ τόν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο πού ἀναπτύξαμε τήν ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παραλ/δου (Μάθημα 18).

Κόβουμε στήν κάτω βάση τίς ἀκμές ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ καί στήν πάνω βάση τίς ἀκμές ΕΘ, ΕΖ, ΖΗ. Ἐπίσης κόβουμε τήν παράπλευρη ἐπιφάνειά του κατά μῆκος τῆς ἀκμῆς ΒΖ. Ξεδιπλώνουμε τήν ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος καί τήν ἁπλώνουμε πάνω στήν ἕδρα ΓΔΘΗ (σχ. 46 β΄). Ἔτσι ἔχουμε τό **ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος.** Καί ἐδῶ τό ἀνάπτυγμα τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ὀρθογώνιο.





Σχ. 46 α΄ β΄. Ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας ὀρθοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος

4. Ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας ὀρθοῦ πρίσματος

α΄) Ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του.

Τό ὀρθογώνιο τοῦ ἀναπτύγματος τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΖΗΘ (σχ. 46 α΄) ἔχει διαστάσεις:

1ο. τήν περίμετρο Π τοῦ ΑΒΓΔ.

2ο. τό ὕψος (ΒΖ) = υ τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΖΗΘ.

Ἐπομένως τό ἐμβαδό ε τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος θά ἰσοῦται μέ τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογωνίου ἀναπτύγματός της, δηλ.

$$\boxed{\varepsilon = \pi \cdot \upsilon} \qquad (1)$$

Γιά νά βροῦμε τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας ἑνός ὀρθοῦ πρίσματος, πολλαπλασιάζουμε τήν περίμετρο τῆς βάσεώς του ἐπί τό ὕψος.

β΄) Ἐμβαδό ὁλικῆς ἐπιφάνειας

Γιά νά βροῦμε τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας ὀρθοῦ πρίσματος, πρέπει νά προσθέσουμε, ὅπως καί στό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, στό ἐμβαδό ε τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του, τά ἐμβαδά τῶν δυό βάσεών του. Ἄν κάθε βάση ἔχει ἐμβαδό Β, θά ἔχουμε:

$$\boxed{\mathbf{E} = \varepsilon + 2 \cdot \mathbf{B}} \qquad (2)$$

Ὥστε: ***Γιά νά βροῦμε τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας ὀρθοῦ πρίσματος, προσθέτουμε στό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του, τό ἐμβαδό τῶν δύο βάσεών του.***

Παράδειγμα. Ἕνα ὀρθό πρίσμα ἔχει ὕψος 4,5 μ. καί βάση ὀρθογώνιο τρίγωνο μέ κάθετες πλευρές 3 μ. 4 μ. καί ὑποτείνουσα 5 μ. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης καί τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του.

Λύση. Βρίσκουμε τήν περίμετρο τῆς βάσεώς του $\Pi = 3 + 4 + 5 = 12$ μ.

Ἐμβαδό ε τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του $\varepsilon = 12 \cdot 4{,}5 = 54$ τ.μ.

Ἐμβαδό τῶν δύο βάσεών του $2B = 2 \cdot \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 12$ τ.μ.

Ἐμβαδό ὁλικῆς ἐπιφάνειας $E = 54 + 12 = 66$ τ.μ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

4) Μιά οἰκοδομή ἔχει σχῆμα ὀρθοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος μέ ὕψος 15 μ. Ἄν οἱ πλευρές τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος εἶναι 8, 4, 5 καί 7 μ., νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του.

5) Ὑπολογίστε τήν παράπλευρη ἐπιφάνεια ἑνός κανονικοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος μέ ὕψος 3,2 μ. καί μέ πλευρά βάσεως 0,5 μ.

6) Ἕνα ὀρθό κανονικό ἑξαγωνικό πρίσμα ἔχει ὕψος 4,75 μ. καί πλευρά βάσεως 2 μ. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του.

7) Ἕνα ὀρθό τετραγωνικό πρίσμα ἔχει ὕψος 7,8 μ. Ἡ βάση του εἶναι τετράγωνο μέ πλευρά 2,5 μ. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς του ἐπιφάνειας.

8) Χαράξτε σ' ἕνα χαρτόνι τό ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας ὀρθοῦ κανονικοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος μέ ὕψος 5 ἑκατ. καί πλευρά βάσεως 3 ἑκατ.

23

5. Ὄγκος ὀρθοῦ πρίσματος

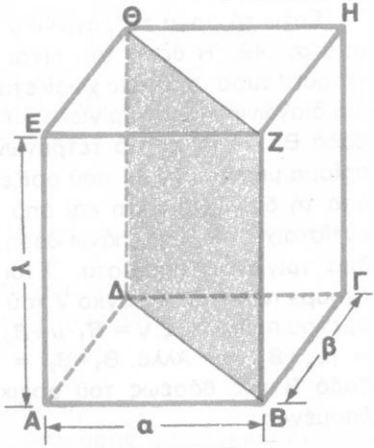
Πρῶτα θά βροῦμε τόν ὄγκο ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος καί ὕστερα τόν ὄγκο ὀρθοῦ οἱουδήποτε πολυγωνικοῦ ὀρθοῦ πρίσματος.

α΄) Ὄγκος ὀρθοῦ πρίσματος μέ βάση ὀρθογώνιο τρίγωνο.

Ἄς πάρουμε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ΑΒΓΔΕΖΗΘ μέ διαστάσεις α, β, γ (σχ. 47) καί ἄς φέρουμε τό ἐπίπεδο πού περνάει ἀπό δυό παράπλευρες ἀκμές του, πού δέ βρίσκονται στήν ἴδια ἕδρα π.χ. τίς ΒΖ καί ΔΘ. Τό παραλληλεπίπεδο, ὅπως βλέπετε στό σχῆμα 47, χωρίζεται σέ δυό ἴσα ὀρθά τριγωνικά πρίσματα μέ βάσεις ὀρθογώνια τρίγωνα. Ὁ ὄγκος V τοῦ καθενός ἰσοῦται μέ τό μισό ὄγκο τοῦ ὀρθογωνίου παραλ/δου, πού εἶναι

$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$, δηλ.

$$V = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{2} = \frac{(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma}{2}$$

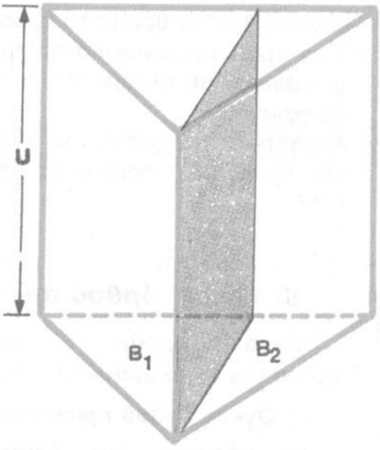


Σχ. 47

Ἀλλά $\frac{\alpha \cdot \beta}{2}$ εἶναι τό ἐμβαδό Β τῆς τριγωνικῆς βάσεως ΑΒΔ καί γ τό ὕψος τοῦ ΑΒΔΕΖΘ, ἑπομένως ἔχουμε: $V = B \cdot \upsilon$

β΄) Ἡ βάση τοῦ πρίσματος εἶναι ὁποιοδήποτε τρίγωνο

Ἔστω τό ὀρθό τριγωνικό πρίσμα (σχ. 48). Φέρουμε τό ὕψος τοῦ τριγώνου τῆς βάσεώς του ἀπό τήν κορυφή τῆς μεγαλύτερης γωνίας του. Τό τρίγωνο χωρίζεται τότε σέ δυό ὀρθογώνια τρίγωνα καί τό τριγωνικό πρίσμα σέ δυό τριγωνικά πρίσματα μέ βάσεις B_1 καί B_2 (σχ. 48) πού εἶναι ὀρθογώνια τρίγωνα. Σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη περίπτωση οἱ ὄγκοι τους θά εἶναι ἀντίστοιχα: $\boldsymbol{B_1 \cdot u}$ καί $\boldsymbol{B_2 \cdot u}$. Ἑπομένως ὁ ὄγκος V τοῦ δοσμένου πρίσματος θά εἶναι: $V = \boldsymbol{B_1 \cdot u + B_2 \cdot u = (B_1 + B_2) \cdot u}$. Ἀλλά $B_1 + B_2$ = ἐμβαδό B τῆς ἀρχικῆς τριγωνικῆς βάσεως, ὁπότε: $V = \boldsymbol{B \cdot u}$



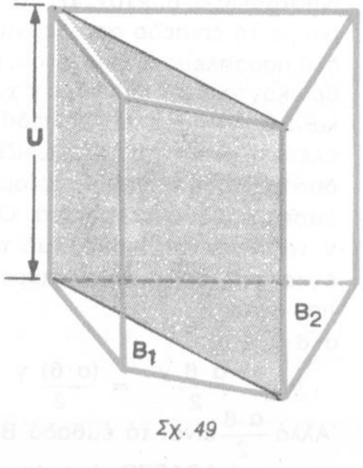
Σχ. 48

Ὥστε: ***Ὁ ὄγκος ἑνός ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπί τό ὕψος του.***

γ΄) Ἡ βάση τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι πολύγωνο

Ἔστω τό ὀρθό τετραγωνικό πρίσμα σχ. 49. Ἡ βάση του εἶναι ἕνα τετράπλευρο, τό ὁποῖο χωρίζεται μέ μιά διαγώνιό του σέ τρίγωνα, μέ ἐμβαδά B_1 καί B_2 καί τό τετραγωνικό πρίσμα μέ τό ἐπίπεδο πού ὁρίζεται, ἀπό τή διαγώνιο αὐτή καί ἀπό τήν ἀντίστοιχή της στή πάνω βάση, σέ δυό τριγωνικά πρίσματα. Ἔτσι θά ἔχουμε πάλι γιά τόν ὄγκο V τοῦ δοσμένου πρίσματος: $V = \boldsymbol{B_1 \cdot u + B_2 \cdot u = (B_1 + B_2) \cdot u}$. Ἀλλά $B_1 + B_2$ = ἐμβαδό B τῆς βάσεως τοῦ ἀρχικοῦ, ἑπομένως:

$$\boxed{V = \boldsymbol{B \cdot u}}$$



Σχ. 49

Ὥστε: ***Γιά νά βροῦμε τόν ὄγκο ἑνός ὀρθοῦ πρίσματος, πολλαπλασιάζουμε τό ἐμβαδό τῆς βάσεώς του ἐπί τό ὕψος του.***

Παράδειγμα. Ἕνα ὀρθό τριγωνικό πρίσμα ἔχει ὕψος 8 ἑκατ. καί βάση τρίγωνο τό ὁποῖο ἔχει βάση 4 ἑκατ. καί ὕψος 3 ἑκατ. Ποιός εἶναι ὁ ὄγκος του;

Λύση. Τό ἐμβαδό Β τῆς βάσεώς του εἶναι: $B = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ τ. ἐκ. ἄρα ὁ ὄγκος του εἶναι $V = 6 \cdot 8 = 48$ κ. ἑκατ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

9) Ἕνα ὀρθογώνιο τριγωνικό πρίσμα ἔχει ὕψος 15 ἑκ. καί βάση ὀρθογώνιο τρίγωνο μέ κάθετες πλευρές 5 ἑκατ. καί 8 ἑκατ. Ποιός εἶναι ὁ ὄγκος του;

10) Ἕνα δοχεῖο ἔχει σχῆμα ὀρθοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος μέ ὕψος 0,80 μ. Ἡ βάση του εἶναι τετράγωνο μέ πλευρά 0,30 μ. Ποιός εἶναι ὁ ὄγκος του;

Ὁμάδα Β΄

11) Ἕνα πρῖσμα ἔχει ὄγκο 360 κ. δεκατόμετρα καί βάση τετράγωνο μέ πλευρά 30 ἑκατ. Πόσα μέτρα εἶναι τό ὕψος του;

12) Ἕνα κωδονοστάσιο ἔχει σχῆμα κανονικοῦ ὀρθοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος μέ ὕψος 20 μ. Ἡ βάση του εἶναι κανονικό ἑξάγωνο μέ πλευρά 6 μ. καί μέ ἀπόστημα 5,19 μ. Νά βρεῖτε τόν ὄγκο του. (Βλέπε καί μάθημα 8 κανονικά πολύγωνα).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Τί λέγεται πρίσμα καί ποιά εἶναι τά στοιχεῖα του;
2) Ἀπό ποῦ παίρνει τήν ἰδιαίτερη ὀνομασία του κάθε πρίσμα;
3) Ποιά πρίσματα λέγονται ὀρθά καί ποιά πλάγια;
4) Πότε ἕνα πρίσμα λέγεται κανονικό;
5) Πότε ἕνα πρίσμα λέγεται παραλληλεπίπεδο;
6) Τί σχῆμα ἔχει τό ἀνάπτυγμα τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας ὀρθοῦ πρίσματος;
7) Πῶς βρίσκουμε τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης καί πῶς τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας ὀρθοῦ πρίσματος;
8) Πῶς βρίσκουμε τόν ὄγκο ὀρθοῦ πρίσματος;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ζ΄

Ο ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

24

1. Ὁ Κύλινδρος καί τά στοιχεῖα του

Ὁ **ὀρθός κυκλικός κύλινδρος**, ἤ **κύλινδρος** καθώς τόν λέμε, εἶναι, ὅπως ξέρετε, ἕνα στερεό σῶμα πού περικλείεται ἀπό μεικτή ἐπιφάνεια, πού ἀποτελεῖται ἀπό δυό κύκλους ἴσους καί παραλλήλους καί ἀπό μιά

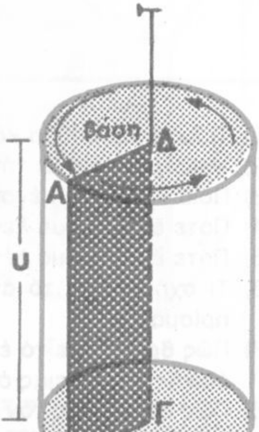
Σχ. 50. Εἰκόνες ἀπό τήν ἀρχαία Ὀλυμπία καί ἀπό τή νῆσο Ρόδο

καμπύλη ἐπιφάνεια, πού καταλήγει στίς περιφέρειες τῶν κύκλων (σχ. 51).

Σχῆμα κυλίνδρου ἔχουν οἱ κολῶνες, πού βλέπετε στήν εἰκόνα σχ. 50, ἀρχαίου ναοῦ στήν Ὀλυμπία, οἱ ἀνεμόμυλοι, οἱ ἠλεκτρικές στῆλες, τά κουτιά γάλατος καί πολλά ἄλλα ἀντικείμενα.

Πῶς γίνεται ὁ κύλινδρος

Ἄς πάρουμε ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ ἀπό χαρτόνι ἤ καί ἀπό λεπτή σανίδα καί ἄς τό περιστρέψουμε γύρω ἀπό μιά πλευρά του, π.χ. τή ΓΔ κατά τήν ἴδια φορά, μέχρι νά γυρίσει στήν ἀρχική του θέση. Ἔτσι θά προκύψει τό στερεό πού λέγεται **κύλινδρος** (σχ. 51). Οἱ πλευρές ΑΔ καί ΒΓ τοῦ ὀρθογωνίου γράφουν δυό ἴσους κύκλους σέ παράλληλα ἐπίπεδα. Οἱ κύκλοι αὐτοί λέγονται ***βάσεις τοῦ κυλίνδρου.***



Σχ. 51. Κύλινδρος

Ἡ ἀκίνητη πλευρά ΓΔ τοῦ ὀρθογωνίου λέγεται ***ἄξονας*** τοῦ κυλίνδρου. Ἡ τέταρτη πλευρά ΑΒ τοῦ ὀρθογωνίου γράφει μιά καμπύλη ἐπιφάνεια, πού λέγεται ***κυρτή ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου.*** Ἡ ΑΒ λέγεται ***γενέτειρα*** τοῦ κυλίνδρου. Ὥστε:

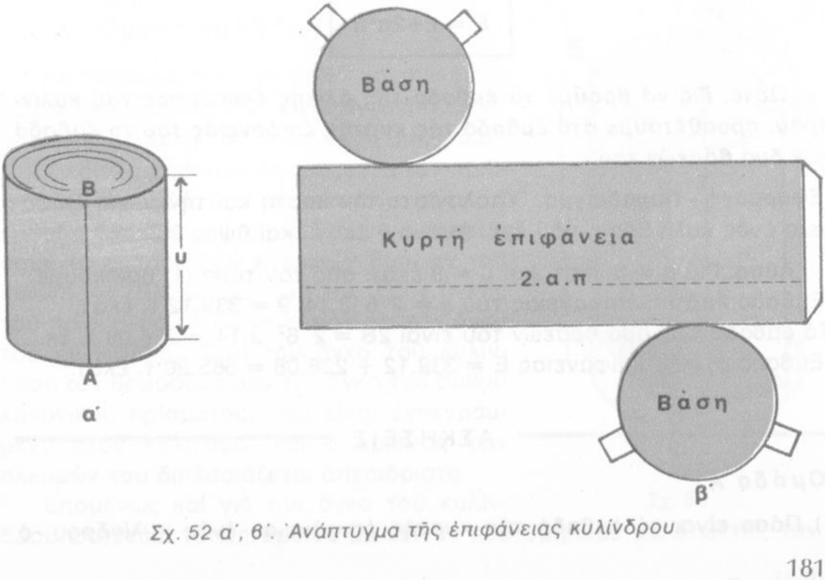
Κύλινδρος εἶναι τό στερεό πού γεννιέται μέ τήν περιστροφή ἑνός ὀρθογωνίου γύρω ἀπό μιά πλευρά του, κατά τήν ἴδια φορά, μέχρι νά γυρίσει στήν ἀρχική του θέση.

Ἡ ἀκτίνα α τῶν δυό βάσεων λέγεται καί ***ἀκτίνα*** τοῦ κυλίνδρου. ***Ὕψος υ*** τοῦ κυλίνδρου λέγεται ἡ ἀπόσταση υ τῶν δυό βάσεών του (σχ. 51).

Σημείωση. Τό ὕψος υ τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴσο μέ τή γενέτειρά του.

2. Τό ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου

Ἄς πάρουμε ἀπό χαρτόνι ἕναν κύλινδρο μέ ἀκτίνα α καί ὕψος υ (σχ. 52 α΄). Τόν κόβουμε κατά μῆκος τῶν περιφερειῶν τῶν δύο βάσεων μέ τέτοιο τρόπο, ὥστε οἱ κύκλοι νά συγκρατιοῦνται στήν κυρτή ἐπιφάνεια σ' ἕνα σημεῖο, καί κατά μῆκος μιᾶς γενέτειρας, π.χ. τῆς ΑΒ καί ἁπλώνουμε τήν ἐπιφάνειά του σ' ἕνα ἐπίπεδο. Ἔτσι σχηματίζεται ἡ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια τοῦ σχ. 52 β΄, πού λέγεται ***ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου.***



Σχ. 52 α΄, β΄. Ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας κυλίνδρου

25 3. Ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας κυλίνδρου

α΄) Ἐμβαδό τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας

Ὅπως βλέπετε στό σχῆμα 52, ἡ κυρτή ἐπιφάνεια κυλίνδρου, μέ ἀκτίνα α καί ὕψος υ ἔχει ἀνάπτυγμα ὀρθογώνιο μέ διαστάσεις:

1ο. τό μῆκος $2 \cdot \alpha \cdot \pi$ ***τῆς περιφέρειας τῆς μιᾶς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καί***

2ο. τό ὕψος υ τοῦ κυλίνδρου.

Ἐπομένως τό ἐμβαδό ε τῆς κυρτῆς του ἐπιφάνειας ἰσοῦται μέ τό μῆκος τῆς περιφέρειας τῆς μιᾶς βάσεώς του ἐπί τό ὕψος του:

$$\boxed{\varepsilon = 2 \cdot \alpha \cdot \pi \cdot \upsilon} \qquad (1)$$

Ὥστε: ***Γιά νά βροῦμε τό ἐμβαδό τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας κυλίνδρου, πολλαπλασιάζουμε τό μῆκος τῆς περιφέρειας τῆς μιᾶς βάσεώς του ἐπί τό ὕψος του.***

β΄) Ἐμβαδό ὁλικῆς ἐπιφάνειας

Γιά νά βροῦμε τό ἐμβαδό Ε τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου, πρέπει στό ἐμβαδό ε τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του νά προσθέσουμε τά ἐμβαδά τῶν δυό βάσεων. Ἐπειδή κάθε βάση Β ἔχει ἐμβαδό $\alpha^2 \cdot \pi$, θά ἔχουμε:

$$\boxed{E = \varepsilon + 2\alpha^2\pi}$$

Ὥστε: ***Γιά νά βροῦμε τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου, προσθέτουμε στό ἐμβαδό τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του τό ἐμβαδό τῶν δυό βάσεών του.***

Ἐφαρμογή - Παράδειγμα. Ὑπολογίστε τήν κυρτή καί τήν ὁλική ἐπιφάνεια ἑνός κυλίνδρου, πού ἔχει ἀκτίνα 6 ἑκατ., καί ὕψος 9 ἑκατ.

Λύση. Γιά $\alpha = 6$ ἑκατ. καί $\upsilon = 9$ ἑκατ. ἀπό τόν τύπο (1) βρίσκουμε:
Ἐμβαδό κυρτῆς ἐπιφάνειάς του $\varepsilon = 2 \cdot 6 \cdot 3{,}14 \cdot 9 = 339{,}12$ τ. ἑκατ.
Τό ἐμβαδό τῶν δυό βάσεών του εἶναι $2B = 2 \cdot 6^2 \cdot 3{,}14 = 226{,}08$ τ. ἑκ.
Ἐμβαδό ὁλικῆς ἐπιφάνειας $E = 339{,}12 + 226{,}08 = 565{,}20$ τ. ἑκατ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

1) Πόσο εἶναι τό ἐμβαδό τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας ἑνός κυλίνδρου, ὁ

όποῖος ἔχει ἀκτίνα βάσεως α = 2,5 μ. καί ὕψος υ = 1,2 μ;

2) Ἕνα κυλινδρικό ντεπόζιτο ἔχει ἀκτίνα βάσεως 0,35 μ. καί ὕψος 1,80 μ. Πόσα τετραγωνικά μέτρα λαμαρίνα χρειάστηκε γιά νά κατασκευαστεῖ;
3) Θέλουν νά χρωματίσουν ἐξωτερικά ἕνα μεταλλικό σωλήνα πού ἡ περιφέρειά του εἶναι 6,28 μ. καί τό μῆκος του (ὕψος) 8,20 μ. Πόσες δραχμές θά πληρώσουν μέ 150 δρχ. τό τ.μ.;

Ὁμάδα Β΄

4) Ἕνας κομμένος κυλινδρικός κορμός δέντρου ἔχει ὁλική ἐπιφάνεια 471 τ. ἑκ. καί ἀκτίνα βάσεως 5 ἑκατ. Νά βρεῖτε τό μῆκος του (ὕψος).
5) Κατασκευάστε μέ χαρτόνι κύλινδρο μέ ἀκτίνα βάσεως 4 ἑκατ. καί ὕψος 12 ἑκατ.

26

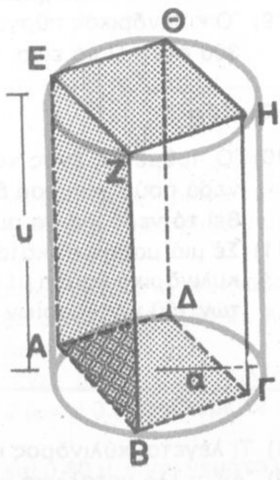
4. Ὀρθά πρίσματα ἐγγεγραμμένα σέ κύλινδρο

Ἕνα ***ὀρθό πρίσμα λέγεται ἐγγεγραμμένο σ' ἕναν κύλινδρο, ἄν οἱ βάσεις του εἶναι ἐγγεγραμμένες στίς βάσεις τοῦ κυλίνδρου.*** Τότε τό ὀρθό πρίσμα καί ὁ κύλινδρος ἔχουν τό ἴδιο ὕψος. Τό σχ. 53 παριστάνει ἕνα ὀρθό κανονικό τετραγωνικό πρίσμα πού εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύλινδρο.

5. Ὄγκος κυλίνδρου

Ἄς πάρουμε πάλι τό ὀρθό κανονικό τετραγωνικό πρίσμα, πού εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύλινδρο μέ ἀκτίνα α καί ὕψος υ (Σχ. 53).

Ἄν διπλασιάσουμε ἀπεριόριστα τόν ἀριθμό τῶν πλευρῶν τῶν βάσεών του, τότε τά ἐμβαδά τῶν βάσεών του τείνουν νά πλησιάσουν τά ἐμβαδά τῶν κυκλικῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου (Βλ. καί μάθημα 10). Ὁ δέ ὄγκος τοῦ πρίσματος τείνει νά πλησιάσει τόν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου. Ἔτσι τόν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου τόν θεωροῦμε σάν τόν ὄγκο τοῦ ὀρθοῦ κανονικοῦ πρίσματος, πού εἶναι ἐγγεγραμμένο στόν κύλινδρο· καί ὁ ἀριθμός τῶν πλευρῶν του διπλασιάζεται ἀπεριόριστα.



Σχ. 53

Ἑπομένως καί γιά τόν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου ἀληθεύει τύπος ὅμοιος μέ κεῖνον πού βρήκαμε μελετώντας τόν ὄγκο ὀρθοῦ πρίσματος, δηλ. ἰσχύει καί γιά τήν εὕρεση τοῦ ὄγκου ὁ τύπος: $V = B \cdot υ$. Ἐπειδή $B = α^2 \cdot π$ ἔχουμε:

$$\boxed{V = α^2 \cdot π \cdot υ}$$

Ὥστε: ***Γιά νά βροῦμε τόν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου, πολλαπλασιάζουμε τό ἐμβαδό τῆς βάσεώς του ἐπί τό ὕψος του.***

Παράδειγμα. Ὑπολογίστε τόν ὄγκο ἑνός κυλίνδρου, πού ἔχει ἀκτίνα 3 μ. καί ὕψος 4 μ.

Λύση. Γιά $α = 3$ μ. καί $υ = 4$ μ. βρίσκουμε: $V = 3^2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 = 113{,}04$ κ.μ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄

6) Ὑπολογίστε τόν ὄγκο ἑνός κυλινδρικοῦ δοχείου, πού ἔχει ἀκτίνα 0,40 μ. καί ὕψος 0,90 μ.
7) Νά βρεῖτε τό βάρος τοῦ λαδιοῦ πού χωράει τό προηγούμενο δοχεῖο (εἰδικό βάρος λαδιοῦ 0,912).
8) Ἕνα κυλινδρικό πηγάδι ἔχει ἀκτίνα βάσεως 1,20 μ. καί ὕψος 3,50 μ. Πόσα κιλά νερό χωράει;
9) Ὁ κυλινδρικός πύργος ἀεροδρομίου ἔχει ὄγκο 21,195 κ.μ. καί ὕψος 300 ἑκατ. Ποιό εἶναι τό ἐμβαδό τῆς βάσεώς του;

Ὁμάδα Β΄

10) Ὁ πυθμένας ἑνός κυλινδρικοῦ πηγαδιοῦ ἔχει διάμετρο 1,20 μ. Τό νερό πού ἔχει μέσα ἔχει ὕψος 2,50 μ. Σέ ποιό ὕψος πρέπει νά ὑψωθεῖ τό νερό γιά νά αὐξηθεῖ ὁ ὄγκος του κατά 0,5652 κ.μ.;
11) Σέ μιά μαθητική κατασκήνωση, γιά νά βράζουν τό γάλα, ἔχουν ἕνα κυλινδρικό καζάνι μέ διάμετρο 0,60 μ. καί ὕψος 1,5 μ. Πόσες μερίδες τῶν 100 γραμμαρίων χωράει; (εἰδικό βάρος γάλατος 1,04).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Τί λέγεται κύλινδρος καί ποιά εἶναι τά στοιχεῖα του;
2) Ἄν πολλά μεταλλικά νομίσματα τῆς ἴδιας ἀξίας καί τύπου τά τοποθετήσουμε τό ἕνα πάνω στό ἄλλο, ποιό στερεό σῶμα θά σχηματίσουμε;
3) Τί σχῆμα ἔχει τό ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου;

4) Πῶς βρίσκουμε τό ἐμβαδό τῆς κυρτῆς καί πῶς τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου;
5) Πότε ἕνα ὀρθό πρίσμα λέγεται ἐγγεγραμμένο στόν κύλινδρο;
6) Πῶς βρίσκουμε τόν ὄγκο κυλίνδρου;

27 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ Δ΄, Ε΄, ΣΤ΄ καί Ζ΄

ε ἐμβαδό παράπλευρης ἐπιφάνειας, **Π** περίμετρος βάσεως,
Ε ἐμβαδό ὁλικῆς ἐπιφάνειας, **υ** ὕψος,
α, β, γ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλ/δου, V ὄγκος,
Γ μῆκος περιφέρειας, **α** ἀκτίνα κύκλου καί $\pi = 3{,}14$

Γεωμετρικά στερεά	*ἐμβαδό παράπλευρης ἐπιφάνειας*	*ἐμβαδό ὁλικῆς ἐπιφάνειας*	*ὄγκος*
Κύβος	$\varepsilon = 4\cdot\alpha^2$	$E = 6\cdot\alpha^2$	$V = \alpha^3$
Ὀρθογώνιο παραλ/δο	$\varepsilon = \Pi\cdot\upsilon$	$E = \varepsilon+2\cdot B$	$V = B\cdot\upsilon$ ἤ $V = \alpha\cdot\beta\cdot\gamma$
ὀρθό πρίσμα	$\varepsilon = \Pi\cdot\upsilon$	$E = \varepsilon+2B$	$V = B\cdot\upsilon$
Κύλινδρος	$\varepsilon = \Gamma\cdot\upsilon$ ἤ $\varepsilon = 2\alpha\pi\upsilon$	$E = \varepsilon+2B$ ἤ $E = \varepsilon+2\alpha^2\pi$	$V = B\cdot\upsilon$ ἤ $V = \alpha^2\pi\cdot\upsilon$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Ὁμάδα Β΄

12) Μέσα σ' ἕνα ποτήρι γεμάτο μέ λάδι βαπτίζουμε ἕνα σιδερένιο κύβο μέ ἀκμή 2 ἑκατ. Νά βρεῖτε τό βάρος τοῦ λαδιοῦ πού θά χυθεῖ (εἰδ. βάρος λαδιοῦ 0,912).
13) Σέ μιά κυβική ἀποθήκη μέ ἀκμή 5 μ. θέλουν νά τοποθετήσουν κιβώτια μέ γάλα. Κάθε κιβώτιο ἔχει μῆκος 0,80 μ., πλάτος 0,50 μ., καί ὕψος 0,30 μ. Πόσα κιβώτια θά χωρέσει ἡ ἀποθήκη;
14) Τό μαρμάρινο βάθρο ἑνός ἀγάλματος ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μέ διαστάσεις 1,8 μ. 1,2 μ. καί 0,5 μ. Νά βρεῖτε τό βάρος του. (εἰδικό βάρος μαρμάρου 2,8).
15) Ἕνα κιβώτιο μέ διαστάσεις 1,2 μ., 0,40 μ. καί 0,80 μ. εἶναι γεμάτο μέ πλάκες σαπούνι. Ἡ κάθε πλάκα ἔχει μῆκος 1,2 δεκατ. πλάτος 6

ἑκατ. καί ὕψος 4 ἑκατ. Πόσες πλάκες σαπούνι περιέχει τό κιβώτιο;

16) Ἡ πλατεία ἑνός χωριοῦ, σχήματος ὀρθογωνίου, μήκους 90 μ. καί πλάτους 60 μ. στρώθηκε μέ χαλίκια σέ πάχος 0,15 μ. πρός 95 δρχ. τό κυβικό μέτρο. Πόσο στοίχισε τό στρώσιμο τῆς πλατείας;

17) Μιά οἰκοδομή, σχήματος τετραγωνικοῦ ὀρθοῦ πρίσματος, ἔχει ὕψος 13 μ. καί βάση τετράπλευρο μέ πλευρές 12, 13, 15 καί 10 μέτρα. Γιά τόν ὑδροχρωματισμό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς της οἱ τεχνίτες ζητοῦν 140 δρχ. τό τ.μ. Πόσο θά στοιχίσει ὁ ὑδροχρωματισμός της;

18) Μιά στήλη (κολώνα), σχήματος ὀρθοῦ ἑξαγωνικοῦ κανονικοῦ πρίσματος, ἔχει ὕψος 6,5 μ. καί βάση μέ πλευρά 0,20 μ. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς της.

19) Ἕνα ὀρθό τριγωνικό πρίσμα μέ ὕψος 80 ἑκατ. ἔχει βάση ὀρθογώνιο τρίγωνο μέ κάθετες πλευρές 20 ἑκατ., 15 ἑκατ. καί ὑποτείνουσα 25 ἑκατ. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας καί τόν ὄγκο του.

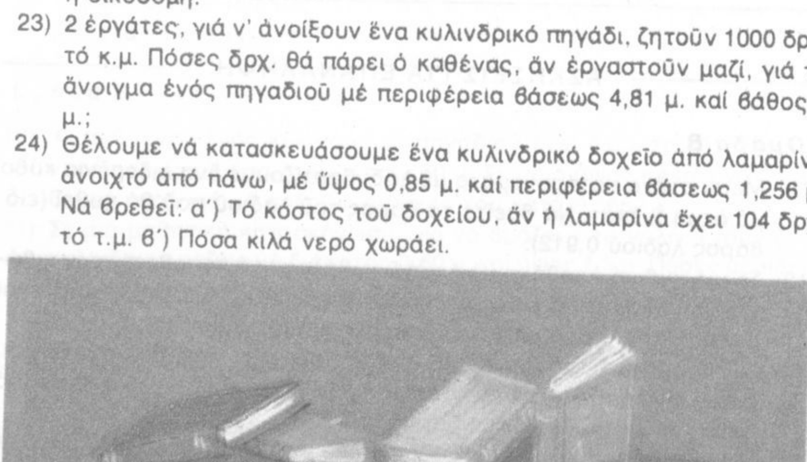
20) Ἡ κυρτή ἐπιφάνεια μιᾶς κυλινδρικῆς στήλης μέ ὕψος 3 μ. καλύφτηκε μέ 9,42 μ. ὕφασμα πλάτους 0,50 μ. Νά βρεθεῖ ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεώς της.

21) Σέ μιά κυβική ἀποθήκη μέ ἀκμή 4 μ. ἕνας ἔμπορος θέλει νά τοποθετήσει κυλινδρικά δοχεῖα μέ φυτίνη. Κάθε δοχεῖο ἔχει ἀκτίνα 20 ἑκατ. καί ὕψος 25 ἑκατ. Πόσα δοχεῖα θά χωρέσει ἡ ἀποθήκη;

22) Μιά οἰκοδομή ἔχει ὕψος 15 μ. καί βάση τετράγωνο μέ πλευρά 12,50 μ. Μέσα σ' αὐτή καί σέ ὅλο τό ὕψος της ὑπάρχει ἕνας κυλινδρικός φωταγωγός μέ διάμετρο 1,20 μ. Νά βρεῖτε τόν καθαρό ὄγκο πού ἔχει ἡ οἰκοδομή.

23) 2 ἐργάτες, γιά ν' ἀνοίξουν ἕνα κυλινδρικό πηγάδι, ζητοῦν 1000 δρχ. τό κ.μ. Πόσες δρχ. θά πάρει ὁ καθένας, ἄν ἐργαστοῦν μαζί, γιά τό ἄνοιγμα ἑνός πηγαδιοῦ μέ περιφέρεια βάσεως 4,81 μ. καί βάθος 3 μ.;

24) Θέλουμε νά κατασκευάσουμε ἕνα κυλινδρικό δοχεῖο ἀπό λαμαρίνα ἀνοιχτό ἀπό πάνω, μέ ὕψος 0,85 μ. καί περιφέρεια βάσεως 1,256 μ. Νά βρεθεῖ: α') Τό κόστος τοῦ δοχείου, ἄν ἡ λαμαρίνα ἔχει 104 δρχ. τό τ.μ. β') Πόσα κιλά νερό χωράει.



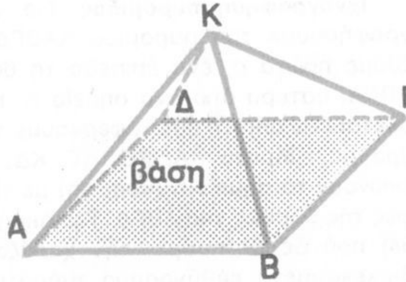
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Η΄

Η ΠΥΡΑΜΙΔΑ – Ο ΚΩΝΟΣ

28

1. Ἡ Πυραμίδα καί τά στοιχεῖα της

Τό πολύεδρο πού βλέπετε στό σχ. 54, μοιάζει μέ τή στέγη τοῦ σπιτιοῦ ἑνός ὀρεινοῦ χωριοῦ· οἱ ἕδρες τῆς στέγης πού εἶναι γύρω γύρω εἶναι τριγωνικές ἑνώνονται ψηλά σ' ἕνα σημεῖο καί ἔτσι ἔχουν κλίση, γιά νά φεύγουν τά χιόνια τό χειμώνα. Ἡ βάση τῆς στέγης εἶναι ὀρθογώνιο (ἤ τετράγωνο), τοῦ ὁποίου οἱ πλευρές εἶναι βάσεις τῶν τριγωνικῶν της ἑδρῶν. Τό πολύεδρο αὐτό, ὅπως ξέρετε, λέγεται ***πυραμίδα.*** Σχῆμα πυραμίδας ἔχουν μερικά μνημεῖα τῆς ἀρχαίας Αἰγύπτου πού σώζονται καί σήμερα. Μέσα σ' αὐτά βρέθηκαν οἱ τάφοι τῶν Φαραώ.



Σχ. 54. Πυραμίδα

Ὥστε: ***Πυραμίδα*** λέγεται ***τό πολύεδρο, τοῦ ὁποίου μιά ἕδρα εἶναι ὁποιοδήποτε πολύγωνο, κι οἱ ἄλλες ἕδρες του εἶναι τρίγωνα, τά ὁποῖα ἔχουν βάσεις τίς πλευρές τοῦ πολυγώνου καί μιά κοινή κορυφή, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό τό πολύγωνο.***

Στήν πυραμίδα τοῦ σχ. 54 τό πολύγωνο ΑΒΓΔ λέγεται ***βάση τῆς πυραμίδας.*** Οἱ ἄλλες ἕδρες τῆς πυραμίδας πού εἶναι τριγωνικές λέγονται ***παράπλευρες ἕδρες·*** καταλήγουν πρός τά πάνω σ' ἕνα σημεῖο Κ, τό ὁποῖο λέγεται ***κορυφή*** τῆς πυραμίδας. Ἡ πυραμίδα ΚΑΒΓΔ ἔχει βάση ΑΒΓΔ τετράπλευρο καί λέγεται ***τετραγωνική.*** Ἡ πυραμίδα ΚΑΒΓ (σχ. 55) ἔχει βάση τρίγωνο καί λέγεται ***τριγωνική.*** Ἡ πυραμίδα ΚΑΒΓΔΕΖ (σχ. 56) ἔχει βάση ἑξάγωνο καί λέγεται ***ἑξαγωνική*** κτλ.

Ὕψος πυραμίδας λέγεται ἡ ἀπόσταση τῆς κορυφῆς ἀπό τή βάση. Π.χ. τῆς πυραμίδας ΚΑΒΓ (σχ. 55) εἶναι τό ΚΜ.

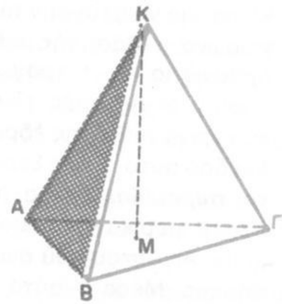
Ἀκμές τῆς πυραμίδας λέγονται τά εὐθύγραμμα τμήματα ἀπό τά ὁποῖα περικλείεται κάθε ἕδρα της. Σέ κάθε πυραμίδα διακρίνουμε ***παράπλευρες ἀκμές*** καί ***ἀκμές*** τῆς βάσεώς της. Π.χ. ἡ τριγωνική πυραμίδα

ΚΑΒΓ ἔχει 6 ἀκμές ἀπό τίς ὁποῖες οἱ 3, δηλ. οἱ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ εἶναι παράπλευρες.

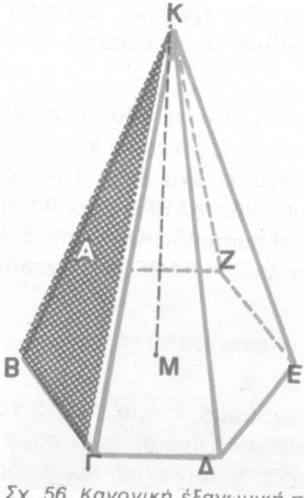
Ἡ τριγωνική πυραμίδα ΚΑΒΓ ἐπειδή ἔχει 4 ἕδρες λέγεται καί ***τετράεδρο.***

Κανονική λέγεται μιά πυραμίδα, ὅταν 1ο ἡ βάση της εἶναι κανονικό πολύγωνο· καί 2ο τό πόδι τοῦ ὕψους της συμπίπτει μέ τό κέντρο τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεώς της. Π.χ. ἡ πυραμίδα τοῦ σχ. 56 εἶναι κανονική, διότι ἔχει βάση κανονικό ἑξάγωνο καί τό πόδι Μ τοῦ ὕψους της ΚΜ εἶναι κέντρο τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ. Σέ μιά κανονική πυραμίδα οἱ παράπλευρες ἕδρες εἶναι ἰσοσκελῆ τρίγωνα, ἴσα μεταξύ τους.

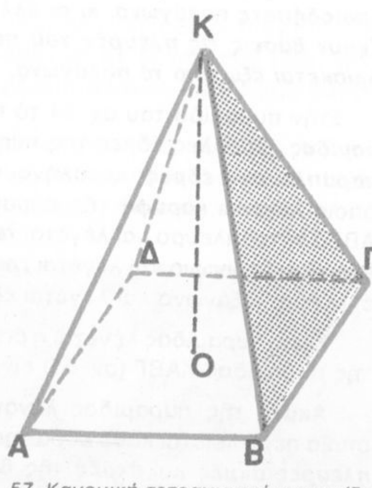
Ἰχνογράφηση πυραμίδας. Γιά νά ἰχνογραφήσουμε τήν πυραμίδα ΚΑΒΓΔ, χαράζουμε πρῶτα σ' ἕνα ἐπίπεδο τή βάση της ΑΒΓΔ, ὕστερα ἀπό ἕνα σημεῖο Κ, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό τή βάση, φέρνουμε τά εὐθύγραμμα τμήματα ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, πού νά ἑνώνουν τό σημεῖο Κ (κορυφή) μέ τίς κορυφές τῆς βάσεώς της ΑΒΓΔ. Τήν ἀκμή ΚΔ (σχ. 54) πού δέ βλέπουμε, τήν χαράζουμε μέ διακεκομμένα εὐθύγραμμα τμήματα. Ἄν ἡ πυραμίδα ΚΑΒΓΔ εἶναι κανονική (σχ. 57), ἡ βάση της ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνο. Στό κέντρο Ο ὑψώνουμε κάθετο ΟΚ καί πάνω σ' αὐτή παίρνουμε τό Κ, κτλ.



Σχ. 55. Τριγωνική πυραμίδα



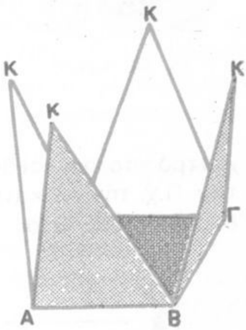
Σχ. 56. Κανονική ἑξαγωνική πυραμίδα

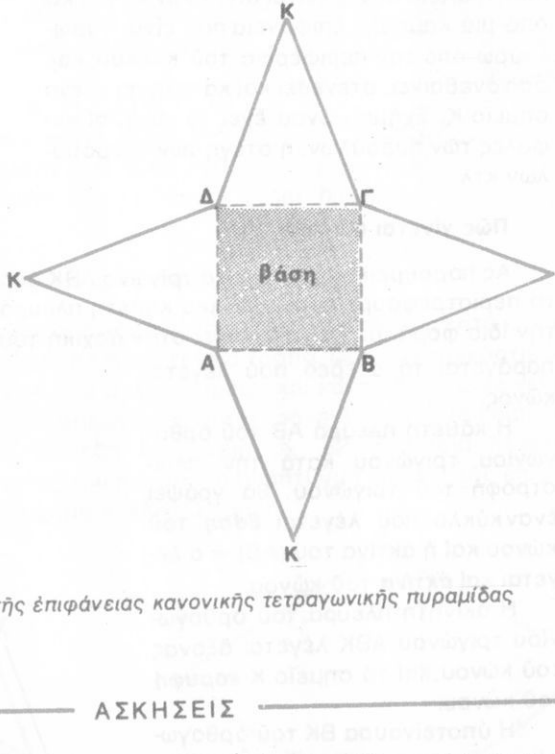


Σχ. 57. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα

2. Ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας κανονικῆς τετραγωνικῆς Πυραμίδας

Ἄς πάρουμε μιά κανονική τετραγωνική πυραμίδα ΚΑΒΓΔ (σχ. 57) ἀπό χαρτόνι. Τήν κόβουμε κατά μῆκος τῶν ἀκμῶν ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ καί ΚΔ καί ἁπλώνουμε τίς ἕδρες της στό ἐπίπεδο τῆς βάσεώς της ΑΒΓΔ. Ἔτσι σχηματίζεται ἡ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια σχ. 58, ἡ ὁποία λέγεται ***ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τῆς κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας***.





Σχ. 58. Ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας

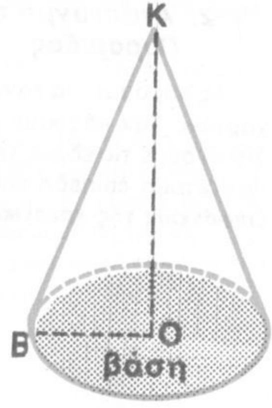
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ζωγραφίστε μιά ἑξαγωνική πυραμίδα καί ὕστερα φέρτε τό ὕψος της.
2) Πόσες ἕδρες καί πόσες κορυφές ἔχει ἡ πενταγωνική πυραμίδα;
3) Τό ἄθροισμα τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν μιᾶς κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας εἶναι 2,80 μ. Πόσο εἶναι τό μῆκος κάθε παράπλευρης ἀκμῆς της;
4) Χαράξτε σ' ἕνα χαρτόνι τό ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδας.

3. Ὁ Κῶνος καί τά στοιχεῖα του

Τό γεωμετρικό στερεό πού βλέπετε στό σχ. 59, μοιάζει μέ σκηνή μιᾶς μαθητικῆς κατασκηνώσεως, πού, ὅπως ξέρετε, λέγεται ***ὀρθός κυκλικός κῶνος, ἤ κῶνος*** καθώς τόν λέμε.

Ὁ κῶνος περικλείεται ἀπό μεικτή ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπό ἕναν κύκλο καί ἀπό μιά καμπύλη ἐπιφάνεια πού εἶναι γύρω-γύρω ἀπό τήν περιφέρεια τοῦ κύκλου καί, ὅσο ἀνεβαίνει, στενεύει καί καταλήγει σ' ἕνα σημεῖο Κ. Σχῆμα κώνου ἔχει τό χωνί, οἱ κεφαλές τῶν πυραύλων, ἡ στέγη τῶν ἀνεμόμυλων κτλ.



Σχ. 59. Κῶνος

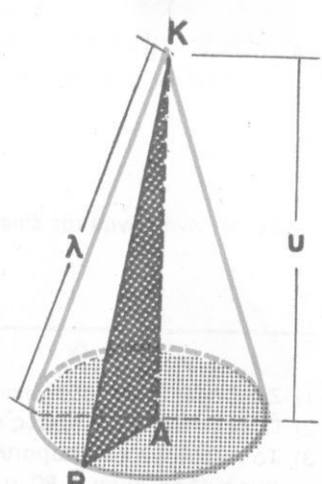
Πῶς γίνεται ὁ κῶνος

Ἄς πάρουμε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΚ ἀπό χοντρό χαρτόνι καί ἄς τό περιστρέψουμε γύρω ἀπό μιά κάθετη πλευρά του. Π.χ. τήν ΑΚ κατά τήν ἴδια φορά, μέχρι νά γυρίσει στήν ἀρχική του θέση (σχ. 60). Ἔτσι παράγεται τό στερεό πού λέγεται κῶνος.

Ἡ κάθετη πλευρά ΑΒ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου κατά τήν περιστροφή τοῦ τριγώνου, θά γράψει ἕναν κύκλο πού λέγεται ***βάση*** τοῦ κώνου καί ἡ ἀκτίνα του (ΑΒ) = α λέγεται καί ***ἀκτίνα*** τοῦ κώνου.

Ἡ ἀκίνητη πλευρά τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΚ λέγεται ἄξονας τοῦ κώνου καί τό σημεῖο Κ ***κορυφή*** τοῦ κώνου.

Ἡ ὑποτείνουσα ΒΚ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΚ, γράφει μιά καμπύλη ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία λέγεται ***κυρτή ἐπιφάνεια*** τοῦ κώνου. Ἡ ΒΚ λέγεται γενέτειρα τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας ἤ καί ***πλευρά*** τοῦ κώνου. Τή συμβολίζουμε μέ λ.



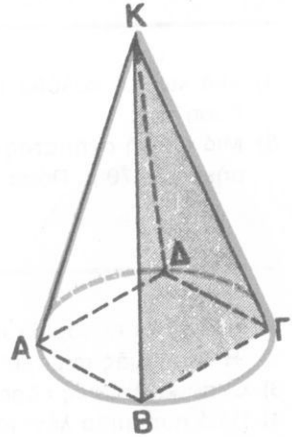
Σχ. 60. Κῶνος

Ἡ ἀπόσταση ΚΑ τῆς κορυφῆς Κ τοῦ κώνου ἀπό τή βάση του λέγεται ὕψος τοῦ κώνου. Ὥστε:

Κῶνος εἶναι ***τό στερεό πού γεννιέται μέ τήν περιστροφή ἑνός ὀρθογωνίου τριγώνου γύρω ἀπό μιά πλευρά τῆς ὀρθῆς γωνίας του, κατά τήν ἴδια φορά, μέχρι νά γυρίσει στήν ἀρχική του θέση.***

Ἡ ἰχνογράφηση τοῦ κώνου γίνεται κατά τόν ἴδιο τρόπο πού γίνεται ἡ ἰχνογράφηση κανονικῆς πυραμίδας. (βλέπε μάθημα 28).

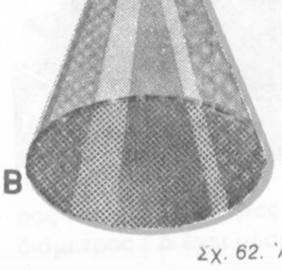
Ἡ πυραμίδα ΚΑΒΓΔ σχ. 61 ἔχει τήν ἴδια κορυφή Κ μέ τόν κῶνο καί ἡ βάση της ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένη στή βάση τοῦ κώνου. Ἡ πυραμίδα αὐτή λέγεται ***ἐγγεγραμμένη*** στόν κῶνο.



Σχ. 61. Πυραμίδα ἐγγεγραμμένη σέ κῶνο

4. Τό ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας κώνου

Ἄς πάρουμε ἕναν κῶνο ἀπό χαρτόνι (σχ. 59). Τόν κόβουμε κατά μῆκος τῆς περιφέρειας τῆς βάσεώς του μέ τέτοιο τρόπο, ὥστε νά συγκρατιέται ἀπό τήν κυρτή ἐπιφάνειά του μ' ἕνα σημεῖο, καί κατά μῆκος μιᾶς γενέτειράς του π.χ. τῆς ΚΒ καί ἁπλώνουμε τήν ἐπιφάνειά του σ' ἕνα ἐπίπεδο. Ἔτσι σχηματίζεται ἡ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια σχ. 62, ἡ ὁποία λέγεται ***ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου.*** Τό ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου, ἔχει σχῆμα κυκλικοῦ τομέα.



Σχ. 62. Ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας κώνου

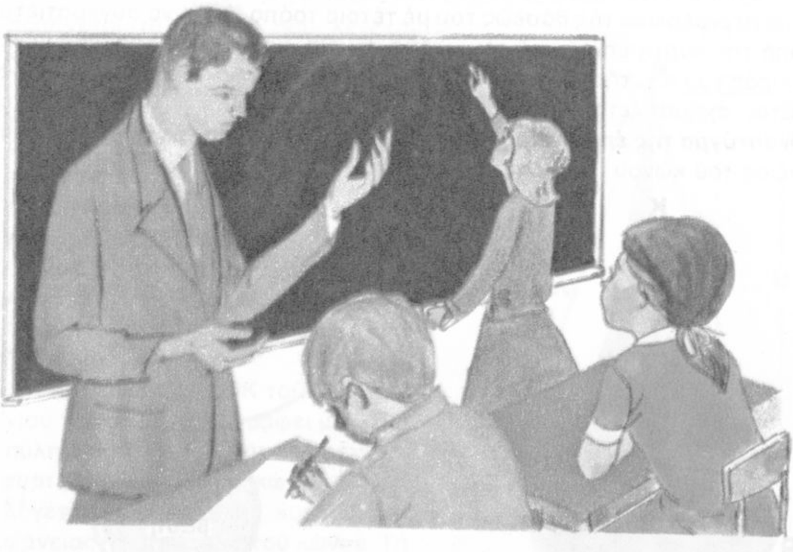
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4) Μιά κωνική καλύβα ἔχει διάμετρο βάσεως 4,5 μ. Πόσα τ.μ. εἶναι ἡ βάση της;

5) Μιά σκηνή σχήματος κώνου ἔχει τήν περιφέρεια τῆς βάσεώς της μέ μῆκος 15,70 μ. Πόσα τ.μ. εἶναι τό ἐμβαδό τῆς βάσεώς της;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Τί λέγεται πυραμίδα καί ποιά εἶναι τά στοιχεῖα της;
2) Ἡ βάση μιᾶς πυραμίδας τί σχῆμα μπορεῖ νά ἔχει;
3) Οἱ παράπλευρες ἕδρες μιᾶς πυραμίδας τί σχῆμα ἔχουν;
4) Ποιά πυραμίδα λέγεται κανονική;
5) Τί λέγεται κῶνος καί ποιά εἶναι τά στοιχεῖα του;
6) Τί σχῆμα ἔχει τό ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου;
7) Πότε μιά πυραμίδα λέγεται ἐγγεγραμμένη στόν κῶνο;

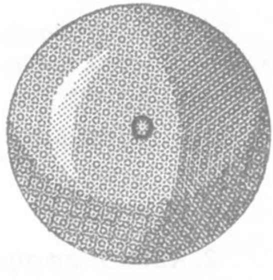


ΚΕΦΑΛΑΙΟ Θ΄

Η ΣΦΑΙΡΑ

30

1. Ἡ σφαίρα καί τά στοιχεῖα της



Σχ. 63. Σφαίρα

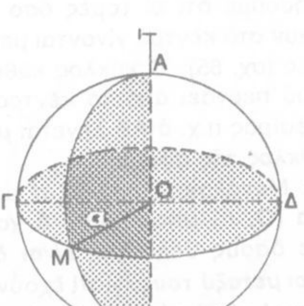
Τό στερεό τοῦ σχ. 63, ὅπως ξέρετε, λέγεται ***σφαίρα.*** Ἡ σφαίρα περικλείεται ἀπό μιά καμπύλη ἐπιφάνεια τῆς ὁποίας ὅλα τά σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπό ἕνα σημεῖο, πού βρίσκεται μέσα στή σφαίρα καί λέγεται κέντρο τῆς σφαίρας.

Σχῆμα σφαίρας ἔχουν οἱ βῶλοι, τό τόπι, ἡ μπάλα, ὁρισμένα ἐξαρτήματα μηχανῶν κ.τ.λ.

Πῶς γίνεται μιά σφαίρα

Ἄς πάρουμε ἕνα ἡμικύκλιο ΑΜΒ ἀπό χοντρό χαρτόνι καί ἄς τό περιστρέψουμε γύρω ἀπό τή διάμετρό του ΑΒ, κατά τήν ἴδια φορά, μέχρι νά γυρίσει στήν ἀρχική του θέση. Θά προκύψει ἕνα στερεό πού λέγεται ***σφαίρα*** (σχ. 64).

Ἡ ἀκτίνα ΟΜ = α τοῦ ἡμικυκλίου λέγεται ***ἀκτίνα τῆς σφαίρας.*** Ἡ ἡμιπεριφέρεια τοῦ ἡμικυκλίου κατά τήν περιστροφή του γράφει τή σφαιρική ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία γι' αὐτό εἶναι καμπύλη.



Σχ. 64. Σφαίρα

Ἐπειδή τό σχῆμα τοῦ ἡμικυκλίου κατά τήν περιστροφή του δέ μεταβάλλεται, τά σημεῖα τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας ἔχουν ἀπό τό κέντρο Ο τοῦ ἡμικυκλίου ἀπόσταση ἴση μέ τήν ἀκτίνα δηλ. ΟΓ = ΟΜ = ΟΔ = ... = α. Τό Ο λέγεται ***κέντρο τῆς σφαίρας.***

Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΓΔ περνάει ἀπό τό κέντρο Ο καί ἔχει τά ἄκρα του στήν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας λέγεται ***διάμετρος*** (σχ. 64) τήν παριστάνουμε μέ τό γράμμα δ. Ἡ διάμετρος ΓΔ ἔχει μέσο τό κέντρο Ο τῆς σφαίρας. Αὐτό σημαίνει ὅτι:

$$\boxed{\delta = 2\cdot\alpha}$$

δηλ. ***Όλες οί διάμετροι τῆς ἴδιας σφαίρας εἶναι ἴσες.***

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι:

Σφαίρα εἶναι τό στερεό πού γεννιέται μέ τήν περιστροφή ἑνός ἡμικυκλίου γύρω ἀπό τή διάμετρό του, κατά τήν ἴδια φορά μέχρι νά γυρίσει στήν ἀρχική του θέση.

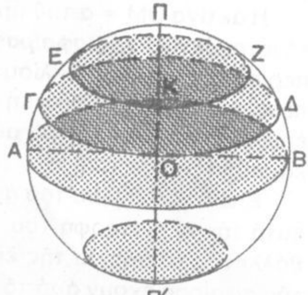
Ἡ σφαίρα συμβολίζεται, ὅπως καί ὁ κύκλος: (Ο, α).

2. Κύκλοι σφαίρας

Ἄν μέ τό μαχαίρι κόψουμε ἕνα στρογγυλό πορτοκάλι, θά παρατηρήσουμε ὅτι ἡ τομή (κοψιά) θά ἔχει σχῆμα κύκλου. Ἔτσι καί γιά ὁποιαδήποτε σφαίρα μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι:

Κάθε ἐπίπεδη τομή σφαίρας εἶναι κύκλος

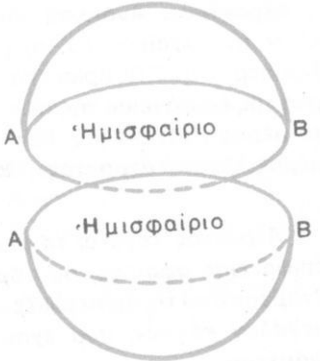
Ἄν σέ μιά σφαίρα (Ο, α) κάνουμε πολλές ἐπίπεδες τομές θά παρατηρήσουμε ὅτι οἱ τομές ὅσο πλησιάζουν στό κέντρο γίνονται μεγαλύτερες (σχ. 65). Ὁ κύκλος κάθε τομῆς πού περνάει ἀπό τό κέντρο Ο τῆς σφαίρας π.χ. ὁ ΑΒ λέγεται ***μεγάλος κύκλος τῆς σφαίρας.***



Σχ. 65. Κύκλος σφαίρας

Μεγάλους κύκλους σέ μιά σφαίρα (Ο, α) μποροῦμε νά χαράξουμε ὅσους θέλουμε, ***εἶναι δέ ὅλοι ἴσοι μεταξύ τους,*** γιατί ἔχουν ἀκτίνα ἴση μέ τήν ἀκτίνα τῆς σφαίρας. Κάθε μεγάλος κύκλος διαιρεῖ τή σφαίρα σέ δύο ἴσα μέρη, τά ὁποῖα λέγονται ἡμισφαίρια (σχ. 66). Ὅλες οἱ ἐπίπεδες τομές σφαίρας (Ο, α) πού δέν περνοῦν ἀπό τό κέντρο της Ο, λέγονται ***μικροί κύκλοι τῆς σφαίρας*** π.χ. οἱ ΓΔ, ΕΖ (σχ. 65) κ τ λ. Ἄν κόψουμε τή σφαίρα μέ παράλληλα ἐπίπεδα τότε οἱ τομές λέγονται ***παράλληλοι κύκλοι*** (σχ. 65).

Ἄξονας καί πόλοι κύκλου σφαίρας. Ἡ διάμετρος ΠΠ΄ μιᾶς σφαίρας (Ο, α), πού εἶναι κάθετη στόν κύκλο της ΓΔ (σχ. 65) λέγεται ***ἄξονας*** τοῦ κύκλου αὐτοῦ. Τά ἄκρα τοῦ ἄξονα Π καί Π΄ λέγονται πόλοι τοῦ κύκλου ΓΔ.



Σχ. 66. Ἡμισφαίρια

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

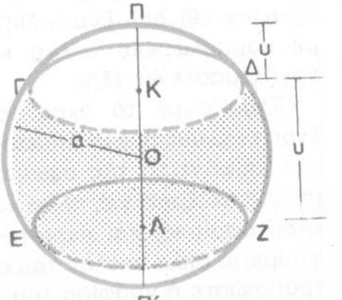
1) Ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας εἶναι 5 μ. Πόσα τ.μ. εἶναι τό ἐμβαδό ἑνός μεγάλου κύκλου της;
2) Μιά σφαίρα ἔχει ἀκτίνα 0,6 μ. Νά βρεῖτε τήν περιφέρεια καί τό ἐμβαδό ἑνός μεγάλου κύκλου της.

31

3. Μέρη τῆς ἐπιφάνειας σφαίρας

Σφαιρική ζώνη. Σέ μιά σφαίρα (Ο, α) φέρουμε δυό παράλληλους κύκλους (Κ, ΚΓ) καί (Λ, ΛΕ) (σχ. 67). Τό μέρος τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας πού εἶναι ἀνάμεσα στούς παραλλήλους αὐτούς κύκλους λέγεται ***σφαιρική ζώνη***. Ὥστε:

Σφαιρική ζώνη λέγεται τό μέρος τῆς ἐπιφάνειας μιᾶς σφαίρας, πού βρίσκεται μεταξύ τῶν περιφερειῶν δυό παραλλήλων κύκλων της.

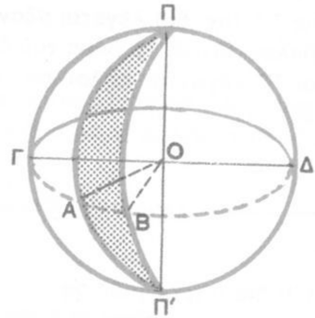


Σχ. 67. Σφαιρική ζώνη

Οἱ περιφέρειες τῶν κύκλων (Κ, ΚΓ), (Λ, ΛΕ), ἀνάμεσα στίς ὁποῖες βρίσκεται ἡ σφαιρική ζώνη, λέγονται ***βάσεις*** αὐτῆς. Ἡ ἀπόσταση ΚΛ τῶν παραλλήλων κύκλων λέγεται ***ὕψος*** τῆς ζώνης. Καί τό μέρος ΠΓΔ τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας (Ο, α) εἶναι σφαιρική ζώνη μέ μία μόνο βάση (Κ, ΚΓ) καί ὕψος ΚΠ.

Ἄτρακτος. Ἀνάμεσα ἀπό τίς ἡμιπεριφέρειες δυό μεγάλων κύκλων τῆς σφαίρας (Ο, α) μέ κοινή διάμετρο τήν ΠΠ΄ βρίσκεται ἕνα μέρος τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας π.χ. τό μέρος ΠΑΠ΄ΒΠ (σχ. 68). Αὐτό τό μέρος λέγεται ***ἄτρακτος.*** Ὥστε:

Ἄτρακτος λέγεται τό μέρος τῆς ἐπιφάνειας σφαίρας, πού βρίσκεται ἀνάμεσα ἀπό τίς ἡμιπεριφέρειες δυό μεγάλων κύκλων, πού ἔχουν κοινή διάμετρο.



Σχ. 68. Ἄτρακτος

Παρατήρηση. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς γῆς θεωρεῖται σφαίρα. Ἀπό τή γεωγραφία ξέρουμε ὅτι ἡ γῆ γυρίζει γύρω ἀπό ἕνα νοητό ἄξονα πού ἔχει καί αὐτός πόλους, τό βόρειο καί τό νότιο. Ἔχουμε καί στή γῆ παράλληλους κύκλους, μεγάλους κύκλους κτλ.

Σημείωση. Γιά νά γράψουμε στήν ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας περιφέρειες κύκλων, χρησιμοποιοῦμε τό ***σφαιρικό διαβήτη*** (σχ. 69), δηλ. ἕνα διαβήτη μέ καμπυλωμένα σκέλη καί ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Στηρίζουμε τό ἄκρο τοῦ ἑνός σκέλους σ' ἕνα σημεῖο Α τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας (πού διαλέξαμε γιά πόλο κύκλου σφαίρας) καί περιστρέφουμε τό ἄλλο σκέλος του σέ τρόπο ὥστε ἡ γραφίδα του ν' ἀγγίζει συνεχῶς τήν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, στήν ὁποία γράφει μιά περιφέρεια κύκλου.

Σχ. 69. Σφαιρικός διαβήτης

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

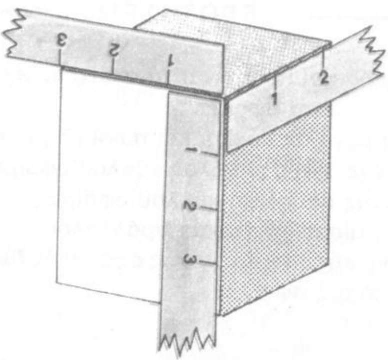
3) Ἕνα ἐπίπεδο τέμνει μιά σφαίρα μέ ἀκτίνα 8 ἑκατ. σέ κύκλο μέ ἐμβαδό 113,04 τ. ἑκατ. Νά ἐξετάσετε ἄν ὁ κύκλος αὐτός εἶναι μικρός ἤ μεγάλος κύκλος τῆς σφαίρας.
4) Σέ μιά σφαίρα μέ ἀκτίνα 5 ἑκατ., χαράξτε μιά σφαιρική ζώνη μέ ὕψος 6 ἑκατ. α΄) μέ δυό βάσεις καί β΄) μέ μιά βάση.
5) Σέ πόσους ἄτρακτους χωρίζουμε τή γῆ; Τί γνωρίζετε γιά τήν ὥρα ἀπό ἄτρακτο σέ ἄτρακτο;
6) Ἕνας μεγάλος κύκλος (μεσημβρινός) τῆς γῆς εἶναι 40.000 χιλιόμετρα. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ ἀκτίνα τῆς γῆς;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Τί λέγεται σφαίρα καί ποιά εἶναι τά στοιχεῖα της;
2) Νά ἀναφέρετε σώματα σφαιρικά.
3) Ποιοί λέγονται μεγάλοι κύκλοι καί ποιοί μικροί κύκλοι σφαίρας;
4) Ποιά ἰδιότητα ἔχει κάθε μεγάλος κύκλος σφαίρας;
5) Τί λέγεται ἄξονας καί πόλοι κύκλου σφαίρας;
6) Ποιοί κύκλοι σφαίρας λέγονται παράλληλοι;
7) Τί λέγεται σφαιρική ζώνη; Σέ πόσες σφαιρικές ζῶνες χωρίζουν τή γῆ;
8) Τί λέγεται ἄτρακτος σφαίρας;

Πίνακας εἰδικῶν βαρῶν τῶν κυριοτέρων σωμάτων

Σώματα	Εἰδικό βάρος	Σώματα	Εἰδικό βάρος
Ἀλεύρι	1,035	Μόλυβδος	11,30
Ἄργυρος (ἀσήμι)	10,30	Οἰνόπνευμα	0,974
Βούτυρο	0,94	Πάγος	0,91
Γάλα ἀγελάδας	1,03	Πετρέλαιο	0,80
Ζάχαρη	1,67	Σίδηρος	7,80
Θαλάσσιο νερό	1,026	Σιτάρι	1,58
Θεῖο	2,07	Ὑδράργυρος	13,60
Καρυδιά	0,66	Φελλός	0,24
Λάδι	0,912	Χαλκός	8,90
Μάρμαρο	2,65	Χρυσός	19,30


3
2
1
2
1
1
2
3

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α΄
ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΟΥ ΔΙΔΑΧΤΗΚΕ ΣΤΗΝ Ε΄ ΤΑΞΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β΄
ΓΕΝΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ – ΙΣΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ΄
ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ – ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ΄
ΑΠΛΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ α΄ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε΄
ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ – ΣΥΜΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΠΟΣΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΤ΄
ΑΠΛΗ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ – ΠΟΣΟΣΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ζ΄
Ο ΤΟΚΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Η΄
ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε΄
ΤΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΤ΄
ΤΑ ΠΡΙΣΜΑΤΑ – ΟΡΘΑ ΠΡΙΣΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ζ΄
Ο ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Η΄
Η ΠΥΡΑΜΙΔΑ – Ο ΚΩΝΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Θ΄
Η ΣΦΑΙΡΑ

Εικονογράφηση: ΜΑΡΘΑ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΟΥ - ΞΥΝΟΠΟΥΛΟΥ

024000019752

ΕΚΔΟΣΗ Α', 1979 (IX) — ΑΝΤΙΤ. 230.000 — ΣΥΜΒΑΣΗ : 3252/27-6-79

ΕΚΤΥΠΩΣΗ - ΒΙΒΛΙΟΔ.: «ΑΤΛΑΝΤΙΣ - Μ. ΠΕΧΛΙΒΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ» Α.Ε.