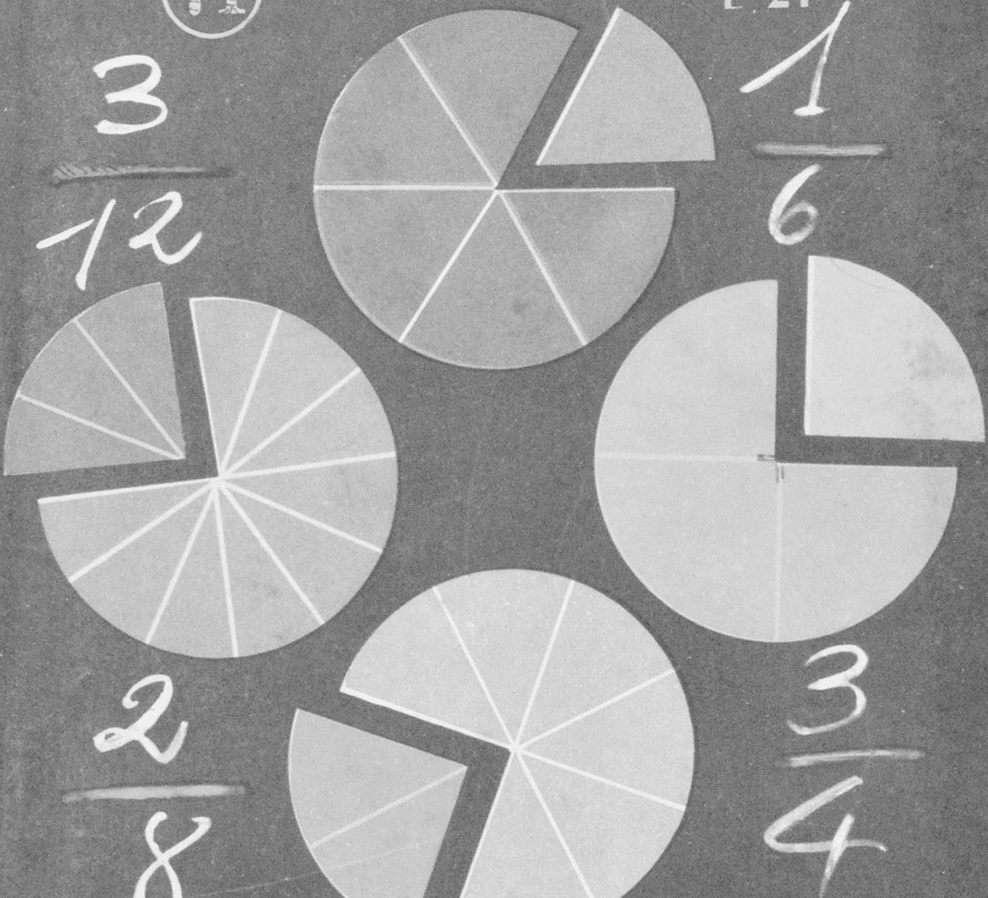
ΣΠΥΡ. Δ. ΡΑΛΛΗ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

71

ΤΑΞΙΣ
Ε΄-ΣΤ΄



ΕΚΔΟΣΕΙΣ: Μ. ΠΕΧΛΙΒΑΝΙΔΗΣ & Σια — ΑΤΛΑΝΤΙΣ — ΟΔΟΣ ΚΟΡΑΗ ΑΡ. 8 - ΑΘΗΝΑΙ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΣΠΥΡ. Δ. ΡΑΛΛΗ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ
ΚΑΙ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΔΙΑ ΤΗΝ Ε' ΚΑΙ ΣΤ' ΤΑΞΙΝ
ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

ΜΕ ΝΕΑ ΜΕΤΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑΘΜΑ

★

Ἐγκεκριμένη διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 61330/52 Διαταγῆς
Ὑπουργείου Παιδείας

ΕΚΔΟΣΕΙΣ : Μ. ΠΕΧΛΙΒΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ

"ΑΤΛΑΝΤΙΣ" ΚΟΡΑΗ 8

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΙΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

Ἀρ. Πρωτ. 61330 — Ἐν Ἀθήναις τῇ 20-6-52

Πρὸς

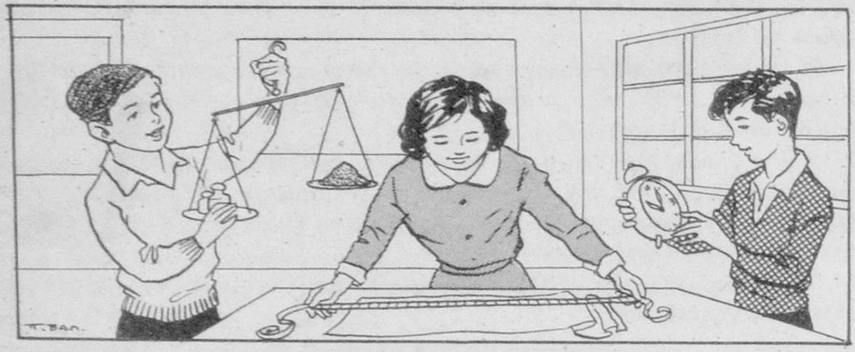
τὸν κ. Σπυρ. Δ. Ράλλην, κλπ.

Ἐνταῦθα

Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν ὅτι διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 61452]12-6-52 ἀποφάσεως τοῦ Ὑπουργείου μετὰ σύμφωνον γνωμοδότησιν τοῦ Κ.ΓΔ.Σ.Ε. ἐνεκρίθη τὸ ὑπὸ τὸ τίτλον **«Ἀριθμητικὴ καὶ Προβλήματα»** βιβλίον σας ὡς βοηθητικὸν τοῦ μαθήματος τῆς Ἀριθμητικῆς διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν Ε' καὶ ΣΤ' τάξεων τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου ἐπὶ μίαν τριετίαν ἀρχομένην ἀπὸ 1-9-52.

Παρακαλοῦμεν ὅθεν ὅπως μεριμνήσητε διὰ τὴν ἔγκαιρον ἐκτύπωσιν τοῦ βιβλίου τούτου συμμορφούμενοι πρὸς τὰς ὑποδείξεις τοῦ Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου καὶ τὸν κανονισμὸν ἐκδόσεως βοηθητικῶν βιβλίων τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου.

Ἐντολῇ Ὑπουργοῦ
Ὁ Διευθυντὴς
Χ. ΜΟΥΣΤΡΗΣ



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ὁ πατέρας τοῦ Τάκη εἶναι κτηνοτρόφος. Ἐπώλησε προχθὲς τὸ Σάββατο στὸν κρεοπώλη τοῦ χωριοῦ πέντε κατσίκια. Τὸ πρῶτο βγῆκε καθαρὸ κρέας 7 χιλιόγραμμα*, τὸ δεύτερο 8 χλγρ. 400 γραμμάρια, τὸ τρίτο 6 χλγρ. 150 γραμ., τὸ τέταρτο 9 χλγρ. 450 γραμ. καὶ τὸ πέμπτο 10 χλγρ. Ὁ κρεοπώλης ὑπελόγισε τὸ κρέας πρὸς 24 δρχ. τὸ χιλιόγραμμο. Πόσα χρήματα ἐπῆρε ὁ πατέρας τοῦ Τάκη ;

2. Ὁ κ. Νῖκος, ὁ ξυλουργός, κατεσκεύασε τὴν στέγη, τὴν ὀροφή, τὶς θύρες καὶ τὰ παράθυρα τοῦ σχολείου. Μετέφερε τρεῖς φορὲς ξυλεία. Τὴν πρώτη φορὰ μετέφερε 4 κυβικὰ ξυλείας καὶ τὰ ἐπλήρωσε πρὸς 1.850 δρχ. τὸ κυβικό. Τὴν δευτέρα φορὰ μετέφερε 6 κυβικὰ ξυλείας πρὸς 2.200 τὸ κυβικό, καὶ τὴν τρίτη, 2 κυβικὰ πρὸς 1.935 δρχ. τὸ κυβικό. Γιὰ μεταφορικὰ ἐπλήρωσε 500 δρχ. Πόσα χρήματα ἔδωσε ;

3. Τρεῖς κτηνοτρόφοι ἕνωσαν τὰ πρόβατά τους. Ὁ πρῶτος εἶχε 145 πρόβατα, ὁ δεύτερος 207 καὶ ὁ τρίτος 256, καὶ τὰ ἔδωσαν σ' ἕνα τσοπάνο νὰ τὰ βόσκῃ. Πόσα πρόβατα βόσκει ὁ τσοπάνος ;

4. Ὁ Γιῶργος καὶ ὁ Τάκης ἐξεκίνησαν ἀπὸ τὴν Ἀθήνα γιὰ τὴν Κόρινθο μὲ διαφορετικὸ αὐτοκίνητο. Τὸ πρῶτο διέτρεξε τὴν ἀπόστασι

* ΣΗΜ. Τὸ χιλιόγραμμο λέγεται καὶ κιλό.

σὲ 2 ὧρες 35′ 28″. Τὸ δεύτερο, σὲ 3 ὧρες 7′ 15″. Πόσην ὥρα ἀργότερα ἔφθασε τὸ δεύτερο ;

5. Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησε αὐτὸ τὸ καλοκαίρι ἀπὸ ἕνα τόπι ἀνδρικὸ ὕφασμα 27 μέτρα 60 πόντους. Ὅλο τὸ τόπι ἦταν 40 μ. Πόσο ὕφασμα ἀπέμεινε στὸ τόπι ;

6. Ἡ χρυσῆ λίρα Ἀγγλίας ἔχει σήμερα 280 δραχμές. Ἕνας ἔμπορος εἰδοποιήθηκε ἀπὸ τὰς Ἀθήνας νὰ στείλῃ ἀμέσως 38 λίρες γιὰ τὴν ἐξόφλησι τῶν ἐμπορευμάτων ποὺ παρήγγειλε. Δὲν εἶχε ὅμως λίρες κι' ἔστειλε δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἔστειλε ;

7. Ἐφέτος εἴχαμε τὴν ἑξῆς παραγωγὴν σουλτανίνας στὶς διάφορες πόλεις τῆς χώρας μας :

α′.	Χανιὰ	Σουλτανίνα	2.500	τόννοι	70	χλγρ.	240	γραμ.
β′.	Ἡράκλειον	»	33.000	»	150	»	320	»
γ′.	Σητεία	»	1.500	»	40	»	80	»
δ′.	Κόρινθος	»	6.350	»	90	»	200	»
ε′.	Κιάτον	»	580	»	360	»	290	»
στ′.	Ξυλόκαστρον	»	165	»	600	»	320	»
ζ′.	Αἴγιον	»	5.300	»	120	»	550	»

Πόση εἶναι ἡ παραγωγὴ ὅλης τῆς χώρας σὲ σουλτανίνα ;

(ΣΗΜ. 1 τόννος = 1000 χλγρ., 1 χλγρ. = 1000 γραμμάρια).

8. Γιὰ νὰ ράψῃ ἡ μητέρα στὰ τέσσαρα παιδιά της ὑποκάμισα, ἐχρειάσθηκε γιὰ κάθε ὑποκάμισο 3,50 μ. Πόσο ὕφασμα θὰ χρειασθῇ καὶ πόσα χρήματα θὰ πληρώσῃ ἂν τὸ κάθε μέτρο ἔχει 20 δραχμές ;

9. Ἡ μητέρα σου, σοῦ ἔδωσε 50 δραχμὲς γιὰ νὰ πᾶς στὴν ἀγορὰ νὰ ψωνίσῃς. Ἀγόρασες 2 χλγρ. τομάτες πρὸς 3,50 δρχ. τὸ χλγρ., 3 χλγρ. πατάτες πρὸς 4,60 δρχ. τὸ χλγρ., 3 λεμόνια πρὸς 0,40 δρχ. τὸ ἕνα. Μὲ τὰ ὑπόλοιπα ἀγόρασες 14 σοκολάτες. Πόσες δραχμὲς ἔδωσες στὰ ψώνια καὶ πόσο ἐστοίχισε κάθε σοκολάτα ;

10. Ὁ κῆπος τοῦ σχολείου μας ἔχει μῆκος 86,40 μ. Οἱ μαθητικὲς ὁμάδες κήπου εἶναι 5. Πόσα μέτρα μῆκος σχολικοῦ κήπου ἀναλογεῖ σὲ κάθε ὁμάδα;

11. Ὁ κ. Ἠλίας, ὁ κτηνοτρόφος, ἐπώλησε 52,5 δοχεῖα μὲ βούτυρο. Τὸ κάθε δοχεῖο ζυγίζει 16 χιλγρ. Ἐπώλησε τὸ βούτυρο πρὸς 40 δρχ. τὸ χλγρ. Μὲ τὰ χρήματα αὐτὰ ἀγόρασε ζωοτροφὲς γιὰ τὸ χειμῶνα: 500 χλγρ. βαμβακόπιττα πρὸς 10 δρχ. τὸ χλγρ., 350 χλγρ. κτηνοτροφικὰ κουκιὰ πρὸς 5 δρχ. τὸ χλγ. καὶ 675 χλγρ. λαθούρια πρὸς 4,50 δρχ. τὸ χλγρ. Ὅσα χρήματα ἐπῆρε ἀπὸ τὸ βούτυρο τὰ ἔδωσε ὅλα, ἢ τοῦ περίσσευσαν καὶ πόσα ;

12. Ἕνας ἐλαιοπαραγωγὸς παρήγαγε τὴν περασμένη χρονιὰ 248,60 χλγρ. λάδι καὶ γιὰ νὰ τὸ τοποθετήσῃ κατεσκεύασε 6 μεγάλες ὅμοιες λίμπες. Πόσο λάδι θὰ χωρέσῃ ἡ κάθε μία ;

13. Ἡ ναυμαχία τῆς Σαλαμῖνος ἔγινε στὰ 480 π.Χ. Πόσα χρόνια ἔχουν περάσει μέχρι σήμερα ;

14. Ἕνας μαθητὴς γεννήθηκε στὶς 14 Δεκεμβρίου 1947. Πόσων ἐτῶν, μηνῶν καὶ ἡμερῶν εἶναι σήμερα ;

15. Ἡ Εὐρώπη ἔχει ἔκτασι 10.000.000 τετρ. χλμ., ἡ Ἀσία 44.000.000 τετρ. χλμ,, ἡ Ἀφρικὴ 30.000.000 τετρ. χλμ., ἡ Αὐστραλία 9.000.000 τετρ. χλμ. Ἂν προσθέσωμε καὶ τὴν ἔκτασι τῆς Ἀμερικῆς θὰ ἰδοῦμε ὅτι καὶ αἱ πέντε Ἤπειροι ἔχουν ἔκτασι 133.000.000 τετρ. χλμ. Πόση, λοιπόν, ἔκτασι ἔχει ἡ Ἀμερική ;

16. Ἕνας σταφιδοπαραγωγὸς ἐφόρτωσε στὸ ζῶον του 83,5 χλμ. σταφίδα καὶ τὴν ἐπώλησε πρὸς 6,50 δρχ. τὸ χλγρ. Μὲ τὰ χρήματα αὐτὰ ἀγόρασε 12,50 χλγρ. πατάτες πρὸς 3,50 δρχ. τὸ χλγρ., 6,50 χλγρ. βακαλάο πρὸς 11 δρχ. τὸ χλγρ. Μὲ τὰ ὑπόλοιπα ἀγόρασε τρία ζεύγη πέδιλα γιὰ τὰ παιδιά του. Πόσα ἐπῆρε ἀπὸ τὴ σταφίδα, πόσα ἔδωσε στὰ ψώνια καὶ πόσα στοίχισε κάθε ζεῦγος πέδιλα ;

17. Ὅταν μπαίνῃ ξένος στόλος στὸ λιμάνι τοῦ Πειραιῶς ρίχνει κανονιές. Ἐνῶ πλέουν, ρίχνουν κι ἀπὸ μιὰ κανονιά. Πρῶτα βλέπω τὴ λάμψι κι ὕστερα ἀκούω τὸν ἦχο. Ξεύρω ὅτι ὁ ἦχος τρέχει 340 μέτρα στὸ δευτερόλεπτο, ἐνῶ τὴ λάμψι τὴν βλέπω ἀμέσως. Ὑπολογίζω, λοιπόν, κρατώντας τὸ ρολόγι μου στὸ χέρι, πόσο μακρυὰ εἶναι τὸ καράβι ἀπὸ ἐμένα, κάθε φορὰ ποὺ ρίχνει κανονιά. Τὴν πρώτη κανονιὰ τὴν ἄκουσα ἔπειτα ἀπὸ 12'', τὴν δευτέρα ἔπειτα ἀπὸ 9'', τὴν τρίτη ἔπειτα ἀπὸ 7'', τὴν τετάρτη ἔπειτα ἀπὸ 4'' καὶ τὶς ὑπόλοιπες, ὡς τὶς εἴκοσι μία, τὶς ἄκουα πάντα ἔπειτα ἀπὸ 2''. Πόσα μέτρα μακρυά μου ἦταν κάθε φορὰ τὸ καράβι ;

18. Ὁ κρεοπώλης τῆς συνοικίας μας ἔσφαξε τρία μοσχάρια κι εἰσέπραξε 1.380 δρχ. Τὸ κρέας επωλήθηκε 30 δρχ. τὸ χλγρ. Πόσα χλγρ. ἦταν τὸ βάρος ὅλου τοῦ κρέατος ;

19. Ἕνας βιβλιοπώλης ἐπώλησε ἐφέτος 17.600 βιβλία πρὸς 10 δρχ. τὸ ἕνα. Ἀπ' αὐτὰ ἦσαν ἔξοδα χαρτιοῦ, τυπογραφείου καὶ ἐκπτώσεων 6,20 δρχ. κάθε βιβλίο. Πόσα ἦταν τὸ κέρδος του ἀπὸ τὰ βιβλία ποὺ ἐπώλησε ;

20. Μία χωρικὴ κατέβασε στὴν ἀγορὰ 300 αὐγὰ καὶ τὰ ἐπώλησε πρὸς 2 δρχ. τὸ ζευγάρι. Πόσα χρήματα ἐπῆρε ;

21. Ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ ὡς τὴν Θεσσαλονίκη ἡ σιδηροδρομικὴ ἀπόστασι εἶναι 520 χλμ. Πόσες ὧρες κάνει ὁ σιδηρόδρομος νὰ φθάσῃ στὴν Θεσσαλονίκη, ὅταν τρέχῃ μὲ 40 χλμ. τὴν ὥρα ;

22. Ἕνας ἔμπορος εἰσήγαγε ἀπὸ τὴν Τσεχοσλοβακία 225 γυαλιὰ ἁλιείας πυριάντοχα, ποὺ ἐστοίχισαν 1.200 δολλάρια. Τὸ δολλάριο ἔχει 30 ἑλληνικὲς δραχμές. Ἐπλήρωσε φόρο στὸ τελωνεῖο 18.000. Πόσο πρέπει νὰ πωλήσῃ κάθε γυαλὶ γιὰ νὰ κερδίσῃ στὸ καθένα 20 δρχ. ;

23. Σ' ἕνα ἐλαιοπαραγωγικὸ χωριὸ τὸ Κοινοτικὸ Συμβούλιο ἐπέβαλε φόρο στὸ λάδι 1,20 δρχ. τὸ χλγρ. Ὅλο τὸ χωριὸ παρήγαγε 36.000 χλγρ. Πόσον φόρο θὰ εἰσπράξῃ ἡ Κοινότης ;

24. Στὴν ἑβδομαδιαία ἀγορὰ μιᾶς πόλεως οἱ χωρικοὶ τοποθετοῦν τὰ κάστανα πρὸς πώλησι. Σὲ κάθε χλγρ. πληρώνουν φόρο στὸν Δῆμο 0,2 δρχ. Τὸ περασμένο Σάββατο ὁ Δῆμος τῆς πόλεως εἰσέπραξε 246 δρχ. Πόσα χλγρ. κάστανα ἦλθαν στὴν ἀγορά ;

25. Ἕνας ἔμπορος μήλων ἐφόρτωσε 105.840 χλγρ. μῆλα καὶ τὰ ἐπλήρωσε πρὸς 2,40 δρχ. τὸ χλγρ. Διὰ νὰ τὰ συσκευάσῃ ἐπλήρωσε 0,05 δρχ. τὸ χλγρ. καὶ γιὰ νὰ τὰ μεταφέρῃ ἐπλήρωσε 1,30 δρχ. τὸ χλγρ. Εἶχε ὅμως ζημίες. Τοῦ ἐσάπισαν 2.120 χλγρ. μῆλα. Τὰ ὑπόλοιπα τὰ ἐπώλησε χονδρικῶς καὶ εἰσέπραξε 793.800 δρχ. Ἐζημιώθηκε ἀπὸ τὸ ἐμπόριο, ἢ ἐκέρδισε καὶ πόσα ;

26. Μιὰ ὑφάντρια ὑφαίνει 9 μέτρα ὕφασμα τὴν ἡμέρα. Ἐργάζεται 26 ἡμέρες τὸν μῆνα καὶ σὲ κάθε μέτρο παίρνει 4,50 δρχ. ὑφαντικά. Πόσα χρήματα κερδίζει ὅλον τὸν μῆνα ;

27. Ἡ τιμὴ ἀσφαλείας τοῦ σιταριοῦ ὡρίσθη σὲ 2,80 δρχ. τὸ χλγρ. Ἡ Ἀγροτικὴ Τράπεζα θὰ συγκεντρώσῃ μ' αὐτὴν τὴν τιμὴ 100.000 τόννους σιταριοῦ ἀπὸ τοὺς παραγωγούς. Ἂν συγκεντρωθῇ ὅλη ἡ ποσότης, πόσα χρήματα θὰ πάρουν οἱ παραγωγοί; (1 τόννος = 1.000 χλγρ.).

28. Τὰ περασμένα Χριστούγεννα ἀγόρασα 2,90 μ. μάλλινο ὕφασμα πρὸς 280 τὸ μέτρο. Πόσα ἐπλήρωσα ;

29. Ἐπλήρωσα στὴν Ἑταιρεία Ὑδάτων Ἀθηνῶν γιὰ κατανάλωσι νεροῦ τῆς προηγουμένης τριμηνίας δρχ. 83,65. Ἡ Ἑταιρεία ὑπολογίζει τὸ νερὸ πρὸς 4,35 δρχ. τὸ κυβικὸ μέτρο. Πόσα κ. μ. νερὸ ἐξώδευσα τὴν προηγουμένη τριμηνία ;

30. Ἡ ἠλεκτρικὴ Ἑταιρεία Ἀθηνῶν — Πειραιῶς ὥρισε τὴν τιμὴ τοῦ συνηθισμένου ρεύματος πρὸς 1,50 δρχ. τὸ κιλοβάτ. Στὸ σπίτι μας κατηναλώσαμε τὸν προηγούμενο μῆνα 29 κιλοβάτ. Πόσα θὰ πληρώσωμε στὴν Ἑταιρεία ;

31. Ἡ λίμνη τοῦ Μαραθῶνος στὶς 9 Ἀπριλίου 1959 περιεῖχε 17.355.000 κυβικὰ μέτρα νερό, ἐνῶ στὶς 9 Ἀπριλίου 1958 περιεῖχε 15.790.000 κυβικά. Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ νεροῦ ἀπὸ τὴ μία ἡμερομηνία στὴν ἄλλη;

32. Ἕνα ταχυδρομικὸ γραφεῖο ἐπώλησε σήμερα: 150 γραμματόσημα τῶν 2,50 δρχ., 120 γραμματόσημα τῶν 0,50 δρχ., 100 γραμματόσημα τῶν 0,20 δρχ. καὶ 460 γραμματόσημα τῶν 1,50 δρχ. Ἐπίσης εἰσέπραξε ἀπὸ τὴν ἀποστολὴ ταχυδρομικῶν δεμάτων 680 δρχ. Πόσες εἶναι αἱ σημεριναὶ εἰσπράξεις αὐτοῦ τοῦ ταχυδρομικοῦ γραφείου;

33. Παραμονὴ ἑορτῆς. Τὸ κρεοπωλεῖον τῆς συνοικίας μου ἔκαμε τὴν ἑξῆς πώλησι: 126 χλγρ. κρέας ἀμνοῦ πρὸς 34 δρχ. τὸ χλγρ., 93,5 χλγρ. κρέατος μόσχου πρὸς 30 δρχ. τὸ χλγρ. Πόσα χρήματα εἰσέπραξε;

34. Μεγάλην, ἐπίσης, κίνησι ἔχουν καὶ τὰ παντοπωλεῖα. Τὸ παντοπωλεῖο τῆς συνοικίας μας ἔκαμε τὴν ἑξῆς πώλησι: Βούτυρο γάλακτος 24,5 χλγρ. πρὸς 40 δρχ. τὸ χλγρ., 18,4 χλγρ. τυρὶ φέτα πρὸς 20 δρχ. τὸ χλγρ. καὶ 12,7 χλγρ. κασέρι πρὸς 25 δρχ. τὸ χλγρ. Πόσα εἰσέπραξε;

35. Ἀκόμη μεγαλυτέραν κίνησι εἶχε ἕνα κατάστημα παιδικῶν παιχνιδιῶν: Ἐπώλησε 56 κοῦκλες πρὸς 25 δρχ. τὴ μία, 47 παιδικὰ καροτσάκια πρὸς 48 δρχ. τὸ ἕνα, 27 σιδηροδρόμους πρὸς 150 δρχ. τὸν ἕνα. Πόσα εἰσέπραξε;

36. Τὰ παιδιὰ τοῦ σχολείου μας εἶπαν πέρυσι τὰ κάλανδα καὶ συνεκέντρωσαν 1.786 δρχ. τὶς ὁποῖες ἐμοίρασαν ὡς ἑξῆς: Γιὰ γλυκὰ στὸ Νοσοκομεῖον Παίδων δρχ. 325 καὶ γιὰ τὴ βιβλιοθήκη τοῦ σχολείου 765 δρχ. Μὲ τὰ ὑπόλοιπα ἀγόρασαν 6 ζεύγη παπουτσάκια γιὰ τὰ πτωχὰ παιδιὰ τοῦ σχολείου. Πόσο ἐστοίχισε κάθε ζεῦγος παπούτσια;

37 Ὁ Ἐρυθρὸς Σταυρὸς Νεότητος ἔχει σήματα ΕΣΝ μὲ 0,50 δρχ. τὸ ἕνα. Ἐστείλαμε 196,50 δρχ. Πόσα σήματα θὰ μᾶς στείλῃ;

38. Τὸ σιτάρι στοιχίζει 3 δρχ. τὸ χλγρ. Τὸ ἀλεῦρι στοιχίζει 4,50 δρχ. τὸ χλγρ. Ἔχω 675 δρχ. Πόσα χλγρ. σιτάρι, ἢ πόσα χλγρ. ἀλεῦρι μπορῶ ν' ἀγοράσω μ' αὐτὰ τὰ χρήματα;

39. Εἰσπράττω κάθε μῆνα 2.800 δρχ. κι' ἐξοδεύω 1.752 δρχ. Σὲ πόσους μῆνες θὰ ἔχω οἰκονομίες 5.470 δρχ.;

40. Ἡ χρυσῆ λίρα Ἀγγλίας ἔχει σήμερα 280 δρχ. Πόσες δρχ. θὰ πάρω ἂν ἐξαργυρώσω 8 λίρες καὶ 15 σελίνια;

41. Ἕνας ἐμπορορράπτης εἶχε ἕνα τόπι ὕφασμα μάλλινο, μήκους 40,6 μέτρα. Γιὰ κάθε ἀνδρικὴ φορεσιὰ ἀπαιτοῦνται 2,9 μέτρα ὕφασμα.

Ἡ ἀξία τοῦ ὑφάσματος καὶ τῶν ραπτικῶν ἀνέρχονται σὲ 1.650 δρχ. Πόσες φορεσιὲς ἔβγαλε ὁ ράπτης ἀπ' ὅλο τὸ τόπι τοῦ ὑφάσματος καὶ πόσα χρήματα εἰσέπραξε ;

42. Ἕνας συνεταιρισμὸς ἐλαιοπαραγωγῶν συνεκέντρωσε στὶς ἀποθῆκες του πέρυσι 17.000 χλγρ. λάδι, τὸ ὁποῖον ἐπώλησε πρὸς 18,50 τὸ χλγρ. Ἀλλ' ἐκράτησε γιὰ ἔξοδα ἀποθήκης, κλπ. 25.500 δρχ. Πόσα χρήματα ἔδωσε στοὺς παραγωγούς ;

43. Ἕνας ἔλαβε ἀπὸ τὴν Ἀμερικὴ ἕνα τσὲκ 35 δολλαρίων. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρῃ, ὅταν ἐξαργυρώσῃ τὸ τσὲκ πρὸς 30 δρχ. τὸ δολλάριο ;

44. Τὸ σχολεῖο μας παρήγγειλε στὸν σιδηρουργὸ τὴν σιδερένια ἐξώθυρα τῆς αὐλῆς, ἡ ὁποία ζυγίζει 157 χλγρ. καὶ τὴν ἐπληρώσαμε πρὸς 11 δρχ. τὸ χλγρ. Πόσα χρήματα θὰ πληρώσῃ τὸ σχολικὸν ταμεῖον γιὰ τὴν ἐξώθυρα ;

45. Τὰ μαθήματα καὶ διαλείμματα στὸ σχολεῖο μας ἔχουν αὐτὲς τὶς ὧρες: Πρῶτο μάθημα 8 ἕως 8 καὶ 50'. Δεύτερο μάθημα 9 ἕως 9 καὶ 50'. Τρίτο μάθημα 10 καὶ 5' ἕως 10 καὶ 55'. Τέταρτο μάθημα 11 καὶ 10' ἕως 12. Πέμπτο μάθημα 12 καὶ 10' ἕως 12 καὶ 55'. Πόσες ὧρες κάνομε μάθημα καὶ πόσες ὧρες διαρκοῦν τὰ διαλείμματα ;

46. Ἕνα σιδερένιο βαρέλι πετρελαίου ποὺ περιεῖχε 144 χλγρ. πετρελαίου τὸ ἀδειάσαμε, κι' ἐβάλαμε τὸ πετρέλαιο σὲ δοχεῖα ποὺ παίρνουν 16 χλγρ. Πόσα δοχεῖα ἐχρησιμοποιήσαμε ;

47. Ἕνας ἔμπορος ἐτοποθέτησε 314,5 χλγρ. μῆλα σὲ καφάσια. Τὸ κάθε καφάσι χωρεῖ 18,5 χλγρ. μῆλα. Πόσα καφάσια ἐγέμισε ;

48. Γιὰ τὰ 314,5 χλγρ. μῆλα ἐπλήρωσε 1.572,5 δρχ. Πόσα, δηλαδή, ἐπλήρωσε τὸ χλγρ. ;

49. Ὁ Ραδιοφωνικὸς Σταθμὸς Ἀθηνῶν ἀρχίζει τὶς ἐκπομπές του στὶς 7 τὸ πρωὶ καὶ διακόπτει στὶς 10 καὶ 35'. Ξαναρχίζει στὶς 12 καὶ 30' καὶ σταματάει στὶς 24. Πόσες ὧρες στὸ εἰκοσιτετράωρο ἐργάζεται καὶ πόσες κάνει διακοπή ;

50. Τὸ σχολικὸν ἔτος ἀρχίζει στὶς 10 Σεπτεμβρίου. Τὰ μαθήματα διακόπτονται ἀπὸ τὶς 23 Δεκεμβρίου μέχρι τὶς 7 Ἰανουαρίου. Ξαναρχίζουν στὶς 8 Ἰανουαρίου καὶ διακόπτονται ἀπὸ τὴ Μεγάλη Δευτέρα μέχρι τὴν Κυριακὴ τοῦ Θωμᾶ. Ξαναρχίζουν τὴν Δευτέρα τοῦ Θωμᾶ μέχρι τὶς 30 Ἰουνίου. Διακόπτονται πάλι τὰ μαθήματα γιὰ τὶς θερινὲς διακοπὲς μέχρι τὶς 9 Σεπτεμβρίου. Πόσους μῆνες σὲ κάθε σχολικὸν ἔτος γίνονται μαθήματα καὶ πόσους μῆνες ἔχομε διακοπές ;

51. Ἡ Κοινοπραξία Συνεταιριστικῶν Ὀργανώσεων Σταφιδοπαρα-

γωγῶν μιᾶς περιοχῆς τῆς χώρας μας συνεκέντρωσε στὶς ἀποθῆκες τὶς παρακάτω ποσότητες σταφίδος:

α΄	ἡμέρα	650.000	χλγρ.
β΄	»	147.334	»
γ΄	»	422.650	»
δ΄	»	316.182	»
ε΄	»	269.314	»

Πόσα χλγρ. σταφίδα συνεκέντρωσε στὶς ἀποθῆκες της σ' αὐτὸ τὸ χρονικὸ διάστημα; Πόσοι τόννοι εἶναι αὐτὰ τὰ χιλιόγραμμα;

52. Ἕνας καπνέμπορος συνεκέντρωσε στὶς ἀποθῆκες του ἐφέτος 125.210 χλγρ. καπνά. Τὰ ἀγόρασε πρὸς 22 δρχ. τὸ χλγρ. Κατὰ τὴν ἐπεξεργασία εἶχε φύρα 5.840 χλγρ. Τὰ καπνὰ τὰ ἐπώλησε πρὸς 40 δρχ. τὸ χλγρ. Ἐζημιώθηκε, ἢ ἐκέρδισε, καὶ τί ποσόν;

53. Ἕνας βιβλιοπώλης εἶχε τὴν πρώτην Ὀκτωβρίου τὴν ἑξῆς πώλησι:

α΄	Ἀλφαβητάρια		120	πρὸς	8,50	δρχ.	τὸ	ἕνα
β΄	Ἀναγνωστικὰ	Β΄	75	»	9	»	»	»
γ΄	»	Γ΄	82	»	9,50	»	»	»
δ΄	»	Δ΄	28	»	10	»	»	»
ε΄	»	Ε΄	35	»	10,50	»	»	»
στ΄	»	ΣΤ΄	64	»	11	»	»	»

Πόσα χρήματα εἰσέπραξε τὴν ἡμέραν ἐκείνη;

54. Στὴ γειτονιά μου εἶναι ἕνα μικρὸ καρβουνιάρικο. Ὁ ἰδιοκτήτης ἀγόρασε 2.000 χλγρ. ξυλοκάρβουνα πρὸς 2,80 δρχ. τὸ χλγρ. Ἀλλὰ τὸ κάρβουνο εἶχε μέσα 250 χλγρ. καρβουνόσκονη. Τὴν καρβουνόσκονη τὴν ἐπώλησε πρὸς 1,30 δρχ. τὸ χλγρ. καὶ τὰ καλὰ κάρβουνα τὰ ἐπώλησε πρὸς 3,60 δρχ. τὸ χλγρ. Ἐζημιώθηκε, ἢ ἐκέρδισε, καὶ πόσα;

55. Ἕνας αὐγοπώλης ἔφερε ἀπὸ τὴν ὕπαιθρο πρὸς πώλησι στὴν ἀγορὰ τοῦ Πειραιῶς 15.000 αὐγά, τὰ ὁποῖα ἀγόρασε πρὸς 1,80 τὸ ζευγάρι. Ὅταν τὰ ἔβγαζε ἀπὸ τὰ κιβώτια τοῦ ἔσπασαν 850 αὐγά. Ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα, τὰ μισὰ τὰ ἐπώλησε πρὸς 3 δρχ. τὸ ζεῦγος καὶ τὰ ἄλλα μισὰ πρὸς 3,40 δρχ. τὸ ζεῦγος. Ἐζημιώθηκε, ἢ ἐκέρδισε, καὶ τί ποσόν;

56. Ἕνα πετρελαιοκίνητο μετέφερε ἀπὸ τὰ Βάτικα στὸν Πειραιᾶ 23 τόννους καὶ 500 χλγρ. κρεμμύδια. Στὸ ταξίδι ὅμως ἔπιασε φοβερὴ τρικυμία κι' ἀναγκάσθηκε νὰ ρίψῃ στὴ θάλασσα 7.850 χλγρ. κρεμμύδια. Τί φορτίο ἔφερε στὸν Πειραιᾶ;

√57. Ἕνα ἐργοστάσιο ἐπεξεργασίας χυμοῦ πορτοκαλιῶν ὑπολογίζει ὅτι σὲ 3,5 χλγρ. πορτοκάλια βγάζει ἕνα χλγρ. χυμὸ πορτοκαλιοῦ. Τὸν περασμένο χειμῶνα ἀγόρασε 17.500 χλγρ. πορτοκάλια πρὸς 3 δρχ. τὸ χλγρ. Τὸν χυμὸ τοῦ πορτοκαλιοῦ ποὺ ἔβγαλε ἀπὸ τὴν ποσότητα αὐτή, τὸν ἐπώλησε πρὸς 18 δρχ. τὸ χλγρ. Ἂν ἀφαιρέσῃ 37.500 δρχ. γιὰ ἔξοδα (μισθοὺς ἐργατῶν, φιάλες, κλπ.) τί κέρδος εἶχε ;

√ 58. Σὲ κάθε 7 χλγρ. γάλα νωπὸ βγάζουν ἕνα χλγρ. γάλα συμπεπυκνωμένο. Σ' ἕνα ἐργοστάσιο τῆς Ὁλλανδίας συνεκέντρωσαν μιὰ μέρα 10.500 χλγρ. νωπὸ γάλα, ἔκαμαν τὴν ἐπεξεργασία κι' ἐτοποθέτησαν τὸ συμπεπυκνωμένο γάλα σὲ κουτιὰ τῶν 250 γραμμαρίων. Πόσα κουτιὰ ἐγέμισαν ;

√ 59. Οἱ τυροκόμοι, σὲ κάθε 16 χλγρ. γάλα βγάζουν ἕνα χλγρ. βούτυρο. Σ' ἕνα τυροκομεῖο συνεκέντρωσαν 576 χλγρ. γάλα. Πόσο βούτυρο ἔβγαλαν ;

60. Στὸν μύλο κρατοῦν ἀλεστικὰ δικαιώματα 6 χλγρ. στὰ 100. Ὁ πατέρας ἑνὸς μαθητοῦ ἐπῆγε στὸν μύλο 250 χλγρ. σιτάρι. Πόσα χλγρ. θὰ τοῦ κρατήσῃ ὁ μυλωνᾶς καὶ πόσο ἀλεῦρι θὰ πάῃ στὸ σπίτι ;

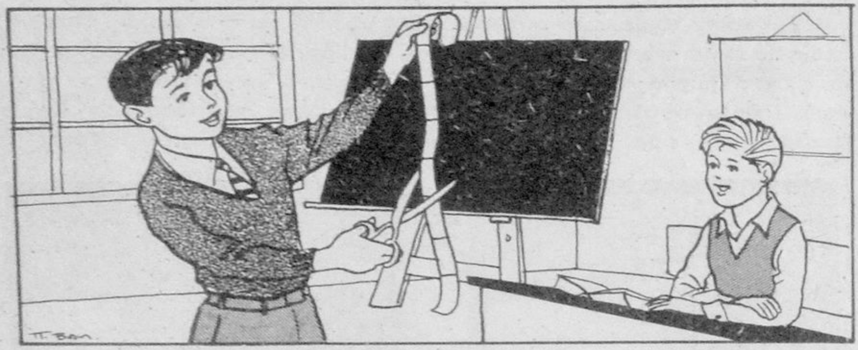
61. Ἀπὸ μιὰ σιδηρόβεργα μήκους 4,380 μέτρα ὁ σιδηρουργὸς ἔκοψε 2,896 μέτρα. Τὸ ὑπόλοιπο τὸ ἔκαμε τέσσαρες μικρὲς ἴσες βέργες. Πόσο μῆκος εἶχε κάθε μικρὴ σιδηρόβεργα ;

62. Ἕνας ὑπάλληλος παίρνει μισθὸ 2.380 δρχ. τὸ μῆνα. Αὐτὸν τὸ μῆνα εἶχε τὰ ἑξῆς ἔξοδα :

α') Γιὰ φαγητὸ	1.214,50	δρχ.
β') Γιὰ ἐνοίκιο	560	δρχ.
γ') Γιὰ φῶς	24,40	δρχ.
δ') Γιὰ νερὸ	52,80	δρχ.
ε') Γιὰ ροῦχα	163	δρχ. καὶ
στ') Γιὰ παπούτσια	98	δρχ.

Πόσα ἦσαν ὅλα τὰ ἔξοδα καὶ πόσα τοῦ ἐπερίσσευσαν ;

63. Οἱ κάτοικοι ἑνὸς χωριοῦ παρήγαγαν ἐφέτος 723.200 χλγρ. σταφίδα. Στὴν Κοινοπραξία Συνεταιρισμῶν παρέδωσαν 650 τόννους. Πόση σταφίδα ἔμεινε ἀκόμη στὰ χέρια τῶν παραγωγῶν τοῦ χωριοῦ ;

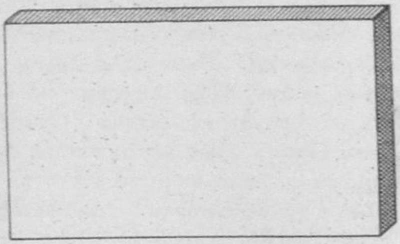


ΚΛΑΣΜΑΤΑ

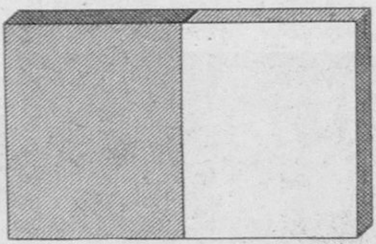
1. Αἰσθητοποίησις $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$.

(Ὑλικό: τέσσερα φύλλα χαρτὶ ὅμοια)

1. Πάρετε ὅλοι στὰ χέρια σας ἕνα φύλλο χαρτί. Διπλώσατέ το στὴ μέση. Πόσα ἴσα κομμάτια ἔγινε τὸ φύλλο; Κάθε κομμάτι εἶναι ὁλόκληρο τὸ φύλλο ἢ ὄχι; Πῶς λέγεται τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δύο κομμάτια; (μισὸ ἢ



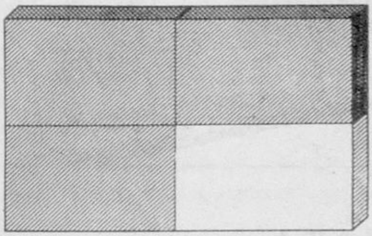
1. Ὁλόκληρον



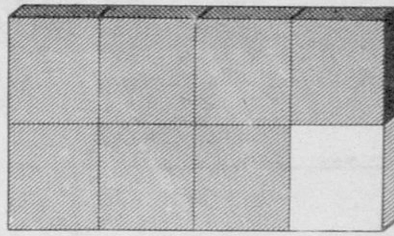
2. Ἥμισυ ἢ δεύτερον

ἕνα δεύτερον). Πῶς λέγονται τὰ δύο κομμάτια; Καὶ τὰ δύο μαζί, εἶναι ὁλόκληρο τὸ φύλλο, ἢ ὄχι; Λοιπόν, πόσα δεύτερα εἶναι τὸ φύλλο; Αὐτό, γράψατέ το: ὁλόκληρο τὸ φύλλο εἶναι .2. δεύτερα.

2. Πάρετε τὸ δεύτερο φύλλο καὶ διπλώσατέ το δύο φορές. Πόσα ἴσα κομμάτια ἔγινε τώρα τὸ φύλλο; Κάθε κομμάτι εἶναι ὁλόκληρο τὸ φύλλο, ἢ ὄχι; Πῶς λέγεται τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ τέσσερα κομμάτια; (ἕνα τέταρτον). Πῶς λέγονται τὰ δύο κομμάτια; τὰ τρία; τὰ τέσσερα; Καὶ τὰ τέσσερα μαζὶ εἶναι ὁλόκληρο τὸ φύλλο, ἢ ὄχι; Λοιπόν, πόσα τέ-



3. Τέταρτον

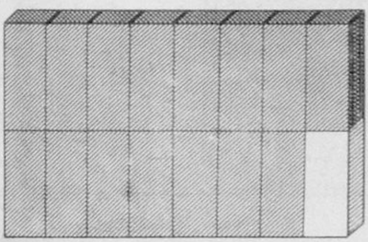


4. Ὄγδοον

ταρτα εἶναι ὁλόκληρο τὸ φύλλο; Αὐτό, γράψατέ το: ὁλόκληρο τὸ φύλλο εἶναι . . . . τέταρτα.

3. Πάρετε τὸ τρίτο φύλλο καὶ διπλώσατέ το τρεῖς φορές. Πόσα ἴσα κομμάτια ἔγινε τώρα τὸ φύλλο; Κάθε κομμάτι, εἶναι ὁλόκληρο τὸ φύλλο, ἢ ὄχι; Πῶς λέγεται τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ὀκτὼ κομμάτια; (ἕνα ὄγδοον). Πῶς λέγονται τὰ δύο κομμάτια; τὰ τρία; τὰ τέσσερα; τὰ πέντε; τὰ ἕξι; τὰ ἑπτά; τὰ ὀκτώ; Καὶ τὰ ὀκτὼ κομμάτια εἶναι ὁλόκληρο τὸ φύλλο, ἢ ὄχι; Λοιπόν, πόσα ὄγδοα εἶναι ὁλόκληρο τὸ φύλλο; Αὐτὸ γράψατέ το: ὁλόκληρο τὸ φύλλο εἶναι . . . . ὄγδοα.

4. Πάρετε τὸ τέταρτο φύλλο καὶ διπλώσατέ το τέσσαρες φορές. Πόσα ἴσα κομμάτια ἔγινε τώρα τὸ φύλλο; Κάθε κομμάτι, εἶναι ὁλόκληρο τὸ φύλλο, ἢ ὄχι; Πῶς λέγεται τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δεκαέξι κομμάτια; (ἕνα δέκατον ἕκτον). Πῶς λέγονται τὰ δύο κομμάτια; τὰ τρία; τὰ ἑπτά; τὰ ἕνδεκα; τὰ δεκαπέντε; τὰ δεκαέξι; Καὶ τὰ δεκαέξι κομμάτια εἶναι ὁλόκληρο τὸ φύλλο, ἢ ὄχι; Λοιπόν, πόσα δέκατα ἕκτα εἶναι ὁλόκληρο τὸ φύλλο; Αὐτό, γράψατέ το: ὁλόκληρο τὸ φύλλο εἶναι . . . . δέκατα ἕκτα.

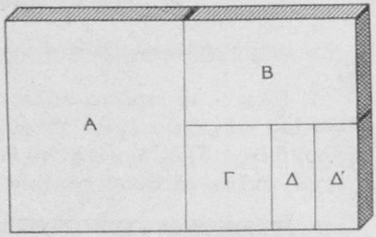


5. Δέκατον ἕκτον

5. Πάρετε, τώρα, ὅπως τὰ ἐδιπλώσαμε, τὸ πρῶτο καὶ δεύτερο φύλ-

λο. Βάλετε ἐπάνω στὸ ἕνα δεύτερον, τὸ ἕνα τέταρτον. Τὸ ἐσκέπασε, ἢ ὄχι; Πόσα τέταρτα θὰ βάλωμε γιὰ νὰ σκεπάσωμε τὸ ἕνα δεύτερον; Αὐτό, γράψατέ το: ἕνα δεύτερον εἶναι ἴσον μέ.... τέταρτα.

6. Πάρετε τώρα, ἔτσι ὅπως εἶναι διπλωμένα, τὸ πρῶτο καὶ τρίτο φύλλο. Βάλετε ἐπάνω στὸ ἕνα δεύτερον, τὸ ἕνα ὄγδοον. Τὸ ἐσκέπασε, ἢ ὄχι; Πόσα ὄγδοα θὰ βάλωμε γιὰ νὰ σκεπάσωμε τὸ ἕνα δεύτερον; Αὐτό, γράψατέ το: ἕνα δεύτερον εἶναι ἴσον μέ.... ὄγδοα.



6. Σύγκρισις

Α = Ἥμισυ Β = Τέταρτον
Γ = Ὄγδοον Δ, Δ΄ = Δέκατον ἕκτον

7. Πάρετε τώρα, πάλι ἔτσι ὅπως εἶναι διπλωμένα, τὸ πρῶτο καὶ τὸ τέταρτο φύλλο. Βάλετε ἐπάνω στὸ ἕνα δεύτερο, τὸ ἕνα δέκατον ἕκτον. Τὸ ἐσκέπασε, ἢ ὄχι; Πόσα δέκατα ἕκτα θὰ βάλωμε γιὰ νὰ σκεπάσωμε τὸ ἕνα δεύτερον; Αὐτό, γράψατέ το: ἕνα δεύτερον εἶναι ἴσον μέ.... δέκατα ἕκτα.

8. Πάρετε τώρα τὸ δεύτερο καὶ τρίτο φύλλο. Βάλετε ἐπάνω στὸ ἕνα τέταρτον, τὸ ἕνα ὄγδοον. Τὸ ἐσκέπασε ἢ ὄχι; Πόσα ὄγδοα θὰ βάλωμε γιὰ νὰ σκεπάσωμε τὸ ἕνα τέταρτο; Αὐτό, γράψατέ το: ἕνα τέταρτο εἶναι ἴσον μέ.... ὄγδοα.

9. Πάρετε τώρα τὸ δεύτερο καὶ τέταρτο φύλλο. Βάλετε ἐπάνω στὸ ἕνα τέταρτον, τὸ ἕνα δέκατον ἕκτον. Τὸ ἐσκέπασε, ἢ ὄχι; Πόσα δέκατα ἕκτα θὰ βάλωμε γιὰ νὰ σκεπάσωμε τὸ ἕνα τέταρτο; Αὐτό, γράψατέ το: ἕνα τέταρτον εἶναι ἴσον μέ.... δέκατα ἕκτα.

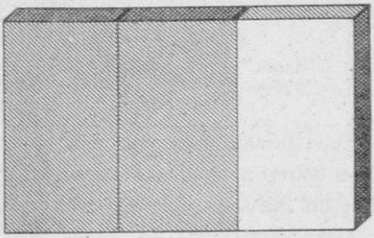
10. Πάρετε τώρα τὸ τρίτο καὶ τέταρτο φύλλο. Βάλετε ἐπάνω στὸ ἕνα ὄγδοον, τὸ ἕνα δέκατον ἕκτον. Τὸ ἐσκέπασε; Πόσα δέκατα ἕκτα θὰ βάλωμε γιὰ νὰ σκεπάσωμε τὸ ἕνα ὄγδοον; Αὐτὸ γράψατέ το: ἕνα ὄγδοον εἶναι ισον μέ.... δέκατα ἕκτα.

11. Βάλετε μπροστά σας τὰ φύλλα τὸ χαρτὶ ἔτσι ὅπως εἶναι διπλωμένα: Πρῶτα τὸ πρῶτο, κοντά του τὸ δεύτερο, κοντὰ σ' αὐτὸ τὸ τρίτο καὶ κοντὰ στὸ τρίτο τὸ τέταρτο. Ποιό εἶναι μεγαλύτερο κομμάτι; Ὀνομάσατέ τα μὲ τὴ σειρὰ ἀπὸ τὸ μεγαλύτερο ὡς τὸ μικρότερο καὶ γράψατέ τα ἔτσι: Τὸ μεγαλύτερο εἶναι τό.... Μικρότερο ἀπ' αὐτὸ εἶναι τὸ.... κλπ.

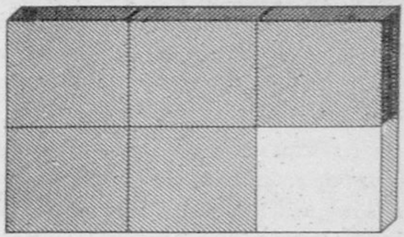
2. Αἰσθητοποίησις $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$.

(Ὑλικό: Τρία φύλλα χαρτὶ ὅμοια μὲ τὰ πρῶτα)

1. Πάρετε τὸ πρῶτο φύλλο στὸ χέρι καὶ διπλώσατέ το στὰ τρία. Πόσα ἴσα κομμάτια ἔγινε τὸ φύλλο; Κάθε κομμάτι εἶναι ὁλόκληρο τὸ φύλλο, ἢ ὄχι; Πῶς λέγεται τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ τρία κομμάτια; (ἕνα τρίτον). Πῶς λέγονται τὰ δύο; τὰ τρία; Καὶ τὰ τρία μαζὶ εἶναι ὁλόκληρο τὸ



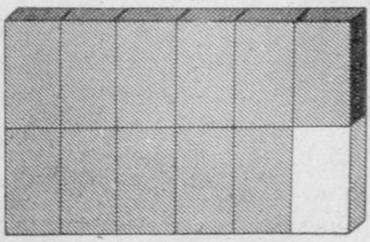
7. Τρίτον



8. Ἕκτον

φύλλο, ἢ ὄχι; Πόσα τρίτα εἶναι τὸ φύλλο; Γράψατέ το: ὁλόκληρο τὸ φύλλο εἶναι . . . . τρίτα.

2. Πάρετε τὸ δεύτερο φύλλο καὶ διπλώσατέ το στὰ τρία κι' ἔτσι ὅπως εἶναι τσακίσατέ το στὴ μέση. Πόσα ἴσα κομμάτια ἔγινε τὸ φύλλο; Κάθε κομμάτι εἶναι ὁλόκληρο τὸ φύλλο, ἢ ὄχι; Πῶς λέγεται τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ἕξι; (ἕνα ἕκτον). Πῶς λέγονται τὰ δύο; τρία; τέσσαρα; πέντε; ἕξι; Καὶ τὰ ἕξι μαζὶ εἶναι ὅλόκληρο τὸ φύλλο, ἢ ὄχι; Πόσα ἕκτα εἶναι τὸ φύλλο; Γράψατέ το: ὁλόκληρο τὸ φύλλο εἶναι . . . . ἕκτα.



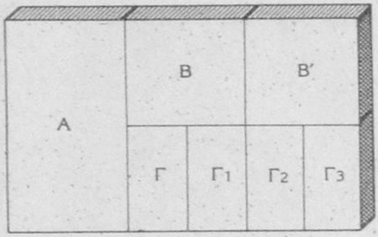
9. Δωδέκατον

3. Πάρετε τὸ τρίτο φύλλο. Διπλώσατέ το ὅπως ἐδιπλώσατε τὸ δεύτερο, πρῶτα στὰ τρία, κατόπι στὴ μέση, καὶ τώρα, ὅπως εἶναι διπλωμένο τσακίσατέ το πάλι στὴ μέση. Πόσα ἴσα κομμάτια ἔγινε τὸ φύλλο; Πῶς λέγεται τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δώδεκα; (ἕνα δωδέκατον). Πῶς λέγονται τὰ δύο; τρία; πέντε; ἐννέα; ἕνδεκα; δώδεκα; Καὶ τὰ δώδεκα, εἶναι ὁλόκληρο τὸ φύλλο, ἢ ὄχι; Πόσα δωδέκατα, λοιπόν, εἶναι τὸ φύλλο; Γράψατέ το: ὁλόκληρο τὸ φύλλο εἶναι . . . . δωδέκατα.

4. Πάρετε τώρα ὅπως τὰ ἐδιπλώσαμε, τὸ πρῶτο καὶ δεύτερο φύλλο. Βάλετε ἐπάνω στὸ ἕνα τρίτον, τὸ ἕνα ἕκτον. Τὸ ἐσκέπασε, ἢ ὄχι; Πόσα ἕκτα θὰ βάλωμε γιὰ νὰ σκεπάσωμε τὸ ἕνα τρίτον; τὰ δύο τρίτα; Γράψατέ το:

— Τὸ ἕνα τρίτον εἶναι ἴσον μέ.....ἕκτα.

— Τὰ δύο τρίτα εἶναι ἴσα μέ.....ἕκτα.



10. Σύγκρισις
Α = Τρίτον, Β, Β′ = ἕκτα
Γ, $Γ_1$, $Γ_2$, $Γ_3$ = δωδέκατα

5. Πάρετε τὸ πρῶτο καὶ τρίτο φύλλο, διπλωμένα. Βάλετε ἐπάνω στὸ ἕνα τρίτον, τὸ ἕνα δωδέκατον. Τὸ ἐσκέπασε ἢ ὄχι; Πόσα δωδέκατα θὰ βάλωμε γιὰ νὰ σκεπάσωμε τὸ ἕνα τρίτον; τὰ δύο τρίτα; Αὐτό, γράψατέ το:

— Τὸ ἕνα τρίτον εἶναι ἴσον μέ....... δωδέκατα.

— Τὰ δύο τρίτα εἶναι ἴσα μέ....... δωδέκατα.

6. Πάρετε τὸ δεύτερο καὶ τρίτο φύλλο, διπλωμένα. Βάλετε ἐπάνω στὸ ἕνα ἕκτον, τὸ ἕνα δωδέκατον. Τὸ ἐσκέπασε; Πόσα δωδέκατα θὰ βάλωμε γιὰ νὰ σκεπάσωμε τὸ ἕνα ἕκτον; τὰ δύο; τὰ τρία; τὰ τέσσαρα; τὰ πέντε; Αὐτό, γράψατέ το:

— Τὸ ἕνα ἕκτον εἶναι ἴσον μέ....... δωδέκατα.

— Τὰ δύο ἕκτα εἶναι ἴσα μέ....... δωδέκατα.

— Τὰ τρία ἕκτα εἶναι ἴσα μέ....... δωδέκατα.

— Τὰ τέσσερα ἕκτα εἶναι ἴσα μέ....... δωδέκατα.

— Τὰ πέντε ἕκτα εἶναι ἴσα μέ....... δωδέκατα.

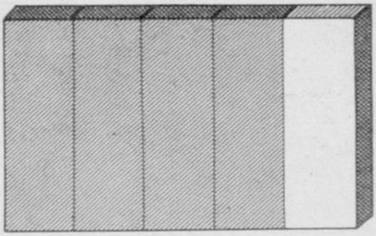
7. Βάλετε μπροστά σας καὶ τὰ τρία φύλλα, ὅπως εἶναι διπλωμένα. Ποιό εἶναι μεγαλύτερο κομμάτι; Ὀνομάσατέ τα μὲ τὴ σειρά, ἀπὸ τὸ μεγαλύτερο ὡς τὸ μικρότερο καὶ γράψατέ τα ἔτσι: Τὸ μεγαλύτερο εἶναι τό...., μικρότερο ἀπ' αὐτὸ εἶναι τό.... κλπ.

3. Αἰσθητοποίησις $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$.

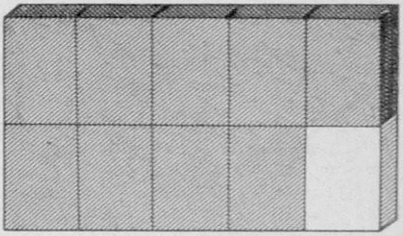
(Ὑλικό: δύο φύλλα χαρτὶ ὅμοια μὲ τὰ πρῶτα)

1. Πάρετε τὸ πρῶτο φύλλο καὶ διπλώσατέ το ἔτσι, ὥστε νὰ χωρισθῇ σὲ πέντε ἴσια κομμάτια. Κάθε κομμάτι εἶναι ὁλόκληρο τὸ φύλλο; Πῶς λέγεται τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ πέντε; (ἕνα πέμπτον). Πῶς λέγονται τὰ δύο;

τρία ; τέσσαρα ; πέντε ; Πόσα πέμπτα εἶναι ὁλόκληρο τὸ φύλλο ; Γράψατέ το : ὁλόκληρο τὸ φύλλο εἶναι . . . . πέμπτα.

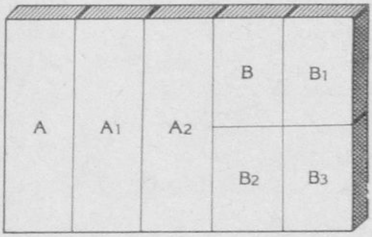


11. Πέμπτον



12. Δέκατον

2. Πάρετε τὸ δεύτερο φύλλο καὶ διπλώσατέ το ὅπως καὶ τὸ πρῶτο, ὥστε νὰ γίνουν πέντε ἴσα κομμάτια καὶ κατόπι τσακίσατέ το στὴ μέση. Πόσα ἴσα κομμάτια ἔγιναν ; Κάθε κομμάτι, εἶναι ὁλόκληρο τὸ φύλλο ; Πῶς λέγεται τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δέκα ; (ἕνα δέκατον). Πῶς λέγονται τὰ δύο ; τρία ; ἕξι ; ἐννέα ; δέκα ; Πόσα δέκατα εἶναι ὁλόκληρο τὸ φύλλο ; Γράψατέ το : ὁλόκληρο τὸ φύλλο εἶναι . . . . δέκατα.



13. Σύγκρισις
A, A_1, A_2 = Πέμπτα,
B, B_1, B_2, B_3 = Δέκατα

3. Πάρετε τώρα καὶ τὰ δύο φύλλα διπλωμένα καὶ βάλετε, ἐπάνω στὸ ἕνα πέμπον, τὸ ἕνα δέκατον. Τὸ ἐσκέπασε ; Πόσα δέκατα θὰ βάλωμε γιὰ νὰ σκεπάσωμε τὸ ἕνα πέμπτον ; τὰ δύο ; τὰ τρία ; τὰ τέσσερα ; Γράψατέ το :

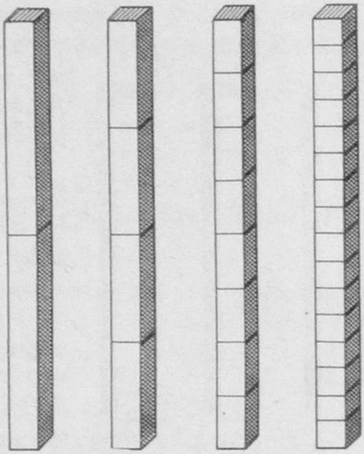
— Ἕνα πέμπτο εἶναι ἴσο μὲ . . . . δέκατα.
— Δύο πέμπτα εἶναι ἴσα μὲ . . . . δέκατα.
— Τρία πέμπτα εἶναι ἴσα μὲ . . . . δέκατα.
— Τέσσερα πέμπτα εἶναι ἴσα μὲ . . . . δέκατα.

4. Βάλετε τώρα μπροστά σας καὶ τὰ δύο φύλλα ἔτσι διπλωμένα. Ποιό εἶναι μεγαλύτερο κομμάτι ; Ὀνομάσατέ τα, μὲ τὴ σειρά, ποιό εἶναι μεγαλύτερο καὶ ποιό μικρότερο καὶ γράψατέ τα ἔτσι :

— Μεγαλύτερο κομμάτι εἶναι τὸ . . . ., μικρότερο εἶναι τὸ . . . . .

4. Σύγκρισις τῶν διαφόρων κομματιῶν τοῦ χαρτιοῦ

1. Ὅσα φύλλα χαρτὶ ἐδιπλώσαμε ἀπὸ τὴν ἀρχή, τοποθετήσατέ τα μπροστά σας ἀνοιγμένα, ὄχι διπλωμένα. Ὅλα τὰ φύλλα, βέβαια, εἶναι ἴσα: Κι' αὐτὸ ποὺ εἶναι χωρισμένο στὰ δύο, κι' αὐτὸ ποὺ εἶναι χωρισμένο στὰ τρία, στὰ τέσσερα, κλπ. κομμάτια, ὡς αὐτὸ ποὺ εἶναι χωρισμένο σὲ δεκαέξι κομμάτια. Ὥστε τὸ φύλλο τὸ χαρτί, ποὺ εἶναι χωρισμένο σὲ δύο δεύτερα, εἶναι ἴσο καὶ μ' αὐτὸ ποὺ εἶναι χωρισμένο σὲ τρία τρίτα, καθὼς καὶ μ' ἐκεῖνο ποὺ εἶναι χωρισμένο σὲ τέσσερα τέταρτα, κι' ἔτσι πᾶμε ὡς τὸ τελευταῖο φύλλο. Ὥστε, ἢ δύο δεύτερα ποῦμε, ἢ τρία τρίτα, ἢ πέντε πέμπτα, ἢ δέκα δέκατα, ἢ δεκαέξι δέκατα ἕκτα εἶναι τὸ ἴδιο πρᾶγμα. Πάντοτε, δηλαδή, ὁμιλοῦμε γιὰ ἕνα ὁλόκληρο φύλλο χαρτιοῦ.



14. Σύγκρισις

2. Κόψατε ἀπὸ κάθε φύλλο χαρτιοῦ, ὅπως τὰ εἴχαμε διπλώσει, τὸ ἕνα κομμάτι. Βάλετέ τα μὲ τὴ σειρά, τὸ ἕνα δίπλα στὸ ἄλλο, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ μεγαλύτερο μέχρι τὸ μικρότερο. Ὀνομάσατέ τα. Κολλήσατέ τα στὸ τετράδιο τῆς Ἀριθμητικῆς, ἔτσι, μὲ τὴ σειρά, καὶ γράψατε κάτω ἀπὸ καθένα τί κομμάτι εἶναι.

3. Κάμετε τὴν ἴδια σύγκρισι μὲ τὰ σχέδια τοῦ σχήματος 14.

Ὁρισμοὶ

1. Κλασματικὴ μονάδα λέγεται καθένα ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ἀκεραία μονάδα.

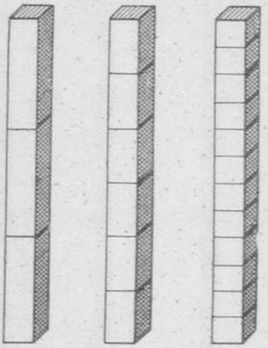
2. Κλάσμα λέγεται ἕνα πλῆθος ἀπὸ ἴδιες κλασματικὲς μονάδες, ἢ καὶ μία μόνη κλασματικὴ μονάδα.

3. Προσθέτοντας στὴν μία κλασματικὴ μονάδα ἄλλη μίαν ἴδιαν, καὶ σ' αὐτὲς τρίτην, τετάρτην, πέμπτην, κλπ. σχηματίζομε πλῆθος ἀπὸ κλασματικὲς μονάδες, ὅπως ἀπὸ πλῆθος ἀκεραίων μονάδων σχηματίζομε τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς.

5. Γραφὴ κλασμάτων

1. Ὅσα εἴπαμε ὡς τώρα μὲ τὰ λόγια θὰ μάθωμε νὰ τὰ γράφωμε μὲ τοὺς ἀριθμούς. Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δύο ἴσα κομμάτια τῆς κόλλας, τὸ εἴπαμε ἕνα δεύτερο, καὶ τὸ γράφομε ἔτσι: $\frac{1}{2}$. Τὰ δύο κομμάτια τῆς κόλλας, πῶς τὰ εἴπαμε καὶ πῶς θὰ τὰ γράψωμε; Γράψατέ τα.

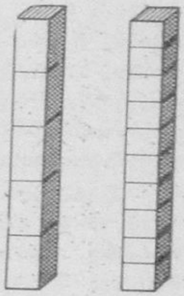
2. Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ τρία ἴσα κομμάτια τῆς κόλλας τὸ εἴπαμε ἕνα τρίτον, καὶ τὸ γράφομε ἔτσι: $\frac{1}{3}$. Τὰ δύο κομμάτια πῶς τὰ εἴπαμε, καὶ πῶς θὰ τὰ γράψωμε; Τὰ τρία κομμάτια πῶς τὰ εἴπαμε καὶ πῶς θὰ τὰ γράψωμε; Γράψατέ τα. Κάμετε τὴν σύγκρισι μὲ τὰ σχέδια τοῦ σχήματος 15.



Τρίτα   Ἕκτα   Δωδέκατα

15. Σύγκρισις

3. Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ τέσσερα ἴσα κομμάτια τῆς κόλλας πῶς τὰ εἴπαμε; Πῶς θὰ τὸ γράψωμε; Ἐπίσης τὰ δύο, τὰ τρία, τὰ τέσσερα κομμάτια πῶς τὰ εἴπαμε; Πῶς θὰ τὰ γράψωμε; Γράψατέ τα. Συγκρίνετε τὰ σχέδια στὸ σχῆμα 14.



Πέμπτα   Δέκατα

16. Σύγκρισις

4. Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ πέντε ἴσα κομμάτια τῆς κόλλας πῶς τὸ εἴπαμε καὶ πῶς θὰ τὸ γράψωμε; Ἐπίσης τὰ δύο, τρία, τέσσερα, πέντε κομμάτια πῶς τὰ εἴπαμε καὶ πῶς θὰ τὰ γράψωμε; Γράψατέ τα. Συγκρίνετε τὰ σχέδια στὸ σχῆμα 16.

5. Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ἕξι ἴσα κομμάτια τῆς κόλλας πῶς τὸ εἴπαμε καὶ πῶς θὰ τὸ γράψωμε; Ὀνόμασε καὶ γράψε τὰ δύο, τρία, τέσσερα, πέντε ἕξι κομμάτια. Σύγκρινε τὰ σχέδια στὸ σχῆμα 15.

6. Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ὀκτὼ ἴσα κομμάτια τῆς κόλλας πῶς τὸ εἴπαμε καὶ πῶς θὰ τὸ γράψωμε; Ὀνόμασε καὶ γράψε τὰ δύο, τρία, τέσσερα, πέντε ἕξι, ἑπτά, ὀκτὼ κομμάτια. Σύγκρινε τὰ σχέδια στὸ σχῆμα 14.

7. Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δέκα ἴσα κομμάτια τῆς κόλλας πῶς τὸ εἴπαμε καὶ πῶς θὰ τὸ γράψωμε; Ὀνόμασε καὶ γράψε τὰ δύο, τρία, τέσσερα κλπ. μέχρι τὰ δέκα κομμάτια. Σύγκρινε τὰ σχέδια στὸ σχῆμα 16.

8. Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δώδεκα ἴσα κομμάτια τῆς κόλλας πῶς τὸ εἴπαμε;

Γράψατέ το. Ἐπίσης ὀνομάσατε καὶ γράψατε τὰ δύο, τρία κλπ. μέχρι τὰ δέκα ἕξι κομμάτια. Συγκρίνατε τὰ σχέδια στὰ σχήματα 15 καὶ 16.

9. Στὸ τετράδιό μας εἴχαμε κολλήσει μὲ τὴ σειρά, ἀπὸ τὸ μεγαλύτερο ὡς τὸ μικρότερο, τὰ κομμάτια ποὺ εἴχαμε κόψει ἀπὸ τὶς κόλλες. Εἴχαμε πῆ μάλιστα, νὰ γράψωμε καὶ μὲ τὰ λόγια ἐκεῖ ποὺ πρέπει: ἕνα δεύτερον, ἕνα τρίτον, ἕνα τέταρτον κλπ.

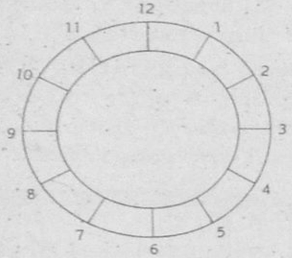
Τώρα νὰ γράψετε, κάτω ἀπὸ τὰ γράμματα, καὶ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς τὸ κάθε κομμάτι, ἔτσι: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4},$ κλπ.

10. Ὁ Κωστάκης δὲν ἤξευρε νὰ τὰ τοποθετήση μὲ τὴ σειρὰ καὶ τὰ ἔγραφε ἀνακατεμένα. Νά, ἔτσι: $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}$.

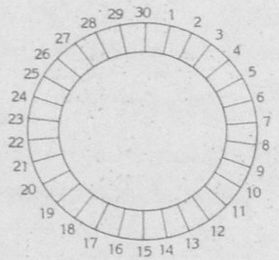
Ἐσεῖς μπορεῖτε νὰ τὰ τοποθετήσετε στὴ σωστὴ σειρά;

6. Κλάσματα χρόνου, μέτρων, χρημάτων, βαρῶν.

1. Τὸ ἔτος ἔχει 12 μῆνες. Ὁ ἕνας μήνας τί μέρος τοῦ ἔτους εἶναι καὶ πῶς θὰ τὸ γράψωμε; Ἐπίσης οἱ τρεῖς, πέντε, ἑπτά, ὀκτώ, δέκα, δώδεκα μῆνες, τί μέρος τοῦ ἔτους εἶναι καὶ πῶς θὰ τὸ γράψωμε;



17. Ἔτος — Μῆνες

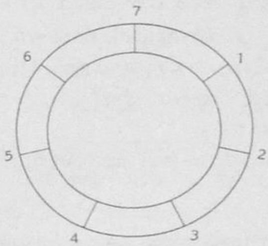


18. Μὴν — Ἡμέραι

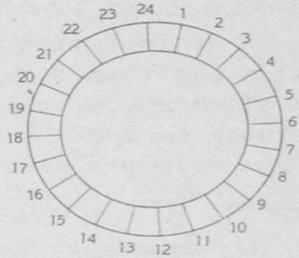
2. Στὴν Ἀριθμητική, ὁ μήνας ὑπολογίζεται μὲ 30 ἡμέρες. Ἡ μία ἡμέρα, τί μέρος τοῦ μηνὸς εἶναι; Ἐπίσης οἱ πέντε, ὀκτώ, εἴκοσι, τριάντα ἡμέρες, τί μέρος τοῦ μηνὸς εἶναι καὶ πῶς θὰ τὸ γράψωμε;

3. Ἡ ἑβδομάδα ἔχει 7 ἡμέρες. Ἡ μία ἡμέρα, τί μέρος τῆς ἑβδομάδος εἶναι; Πῶς θὰ τὸ γράψωμε; Οἱ δύο, τρεῖς, πέντε, ἑπτὰ ἡμέρες, τί μέρος τῆς ἑβδομάδος εἶναι καὶ πῶς θὰ τὸ γράψωμε;

4. Τὸ ἡμερονύκτιο ἔχει 24 ὧρες. Ἡ μία ὥρα, τί μέρος τοῦ ἡμερονυκτίου εἶναι ; Πῶς τὸ γράφομε ; Ἐπίσης οἱ ἕξι, δώδεκα, εἴκοσι τέσσαρες ὧρες τί μέρος τοῦ ἡμερονυκτίου εἶναι καὶ πῶς θὰ τὸ γράψωμε ;

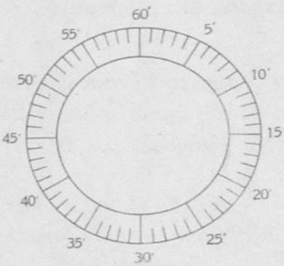


19. Ἑβδομὰς — Ἡμέραι



20. Ἡμερονύκτιον — Ὧραι

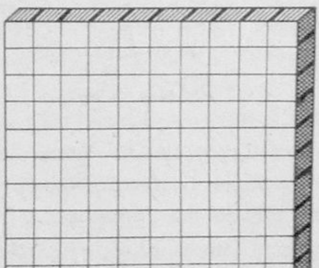
5. Ἡ ὥρα ἔχει 60 πρῶτα λεπτά. Τὸ ἕνα πρῶτο λεπτό, τί μέρος τῆς ὥρας εἶναι ; Πῶς γράφεται ; Τὰ 15, 30, 45, 60 πρῶτα λεπτά, τί μέρος τῆς ὥρας εἶναι καὶ πῶς γράφονται ;



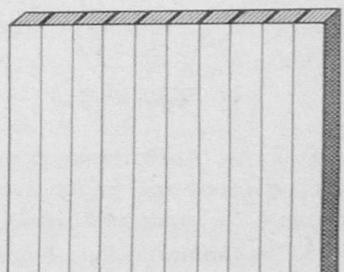
21. Ὥρα — Πρῶτα λεπτά

6. Ἕνα μέτρο χωρίζεται σὲ 100 δακτύλους, ἢ πόντους. Ὁ ἕνας δάκτυλος, τί μέρος τοῦ μέτρου εἶναι ; Πῶς γράφεται ; Οἱ 7, 10, 35, 50, 100 δάκτυλοι, τί μέρος τοῦ μέτρου εἶναι καὶ πῶς γράφονται ;

7. Ἕνα μέτρο χωρίζεται σὲ 10 παλάμες. Ἡ μία παλάμη, τί μέρος τοῦ μέτρου εἶναι καὶ πῶς θὰ γραφῆ ; Ἐπίσης οἱ 2, 6, 9, 10 παλάμες, τί μέρος τοῦ μέτρου εἶναι καὶ πῶς γράφονται ;



22. Μέτρον — Δάκτυλοι



23. Μέτρον — Παλάμαι

8) Ἕνα μέτρο χωρίζεται σὲ 1000 γραμμές. Ἡ μία γραμμή, τί μέρος τοῦ μέτρου εἶναι καὶ πῶς θὰ γραφῆ; Ἐπίσης οἱ 4, 10, 50, 100, 500, 1000 γραμμές, τί μέρος τοῦ μέτρου εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

9. Στὸ ἐμπόριο πολλὰ εἴδη, ὅπως οἱ κάλτσες, τὰ μανδήλια, οἱ πετσέτες, πωλοῦνται μὲ τὴν δωδεκάδα. Μιὰ δωδεκάδα εἶναι 12 μανδήλια. Τὸ ἕνα μανδήλι, τί μέρος τῆς δωδεκάδος εἶναι καὶ πῶς θὰ γραφῆ; Ἐπίσης τὰ 2, 5, 7, 10, 11, 12 μανδήλια, τί μέρος τῆς δωδεκάδος εἶναι καὶ πῶς γράφονται;


Δωδεκὰς

10 Ἡ δραχμὴ ἔχει 100 λεπτά. Τὸ ἕνα λεπτὸν τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι; Πῶς γράφεται; Ἐπίσης τὰ 5, 10, 20, 50, 100 λεπτά, τί μέρος εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

11. Τὸ δίδραχμο ἔχει δύο δραχμές. Ἡ μία δραχμή, τί μέρος τοῦ διδράχμου εἶναι καὶ πῶς γράφεται; Ἐπίσης οἱ δύο δραχμὲς τί μέρος τοῦ διδράχμου εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

12. Ἡ δραχμὴ ἔχει δύο πενηντάλεπτα. Τὸ ἕνα πενηντάλεπτο, τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι; Πῶς γράφεται; Τὰ δύο πενηντάλεπτα τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

13. Ἡ δραχμὴ ἔχει πέντε εἰκοσάλεπτα. Τὸ ἕνα εἰκοσάλεπτο, τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι καὶ πῶς γράφεται; Ἐπίσης τὰ δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε εἰκοσάλεπτα, τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

14. Ἡ δραχμὴ ἔχει 10 δεκάλεπτα. Τὸ ἕνα δεκάλεπτο, τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι; Τὰ δύο, πέντε, ἐννέα, δέκα δεκάλεπτα, τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

15. Ἡ δραχμὴ ἔχει 20 πεντάλεπτα. Τὰ 6, 8, 15, 20 πεντάλεπτα, τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

16. Τὸ τάλληρον ἔχει πέντε δραχμές. Οἱ 2, 3, 5, δραχμές, τί μέρος τοῦ ταλλήρου εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

17. Τὸ δεκάδραχμον ἔχει 10 δραχμές. Οἱ 1, 4, 7, 10 δραχμές, τί μέρος τοῦ δεκαδράχμου εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

18. Τὸ εἰκοσάδραχμον ἔχει 20 δραχμές. Οἱ 1, 6, 11, 17, 20 δρχ., τί μέρος τοῦ εἰκοσαδράχμου εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

19. Τὸ πενηντάδραχμον ἔχει 50 δραχμές. Οἱ 1, 10, 30, 45, 50, δρχ., τί μέρος τοῦ πενηνταδράχμου εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

20. Τὸ ἑκατοντάδραχμον ἔχει 100 δραχμές. Οἱ 1, 25, 50, 75, 100 δρχ., τί μέρος τοῦ ἑκατονταδράχμου εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

21. Τὸ πεντακοσιόδραχμον ἔχει 500 δραχμές, Οἱ 1, 10, 50, 100, 300, 500, δραχμὲς τί μέρος τοῦ πεντακοσιοδράχμου εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

22. Τὸ χιλιόδραχμον ἔχει 1000 δραχμές. Οἱ 1, 2, 5, 10, 50, 100, 500, 1000 δραχμές, τί μέρος τοῦ χιλιοδράχμου εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

Τὸ χιλιόγραμμον (ἢ κιλὸν) ἔχει 1000 γραμμάρια. Τί μέρος τοῦ χιλιογράμμου εἶναι τὰ 1, 10, 50, 100, 999, 1000 γραμμάρια καὶ πῶς θὰ τὰ γράψωμε;

7. Σύγκρισις κλασμάτων

Στὴν ἀριθμητική, κάθε κομμάτι, κάθε μέρος, ἀπὸ μίαν ὁλόκληρην ἀκεραία μονάδα, ἢ ἀπὸ μίαν ὁλόκληρη ποσότητα, τὸ λέμε κλάσμα.

Γράψατε στὸ τετράδιό σας καὶ βρῆτε τὶς παρακάτω ἀσκήσεις.

1. Μελετήσατε καλὰ τὶς πρῶτες ἀσκήσεις, ποὺ ἐκάναμε μὲ τὰ διπλωμένα φύλλα καὶ πέστε μας ποιό εἶναι, σὲ κάθε σειρά, τὸ μεγαλύτερο κλάσμα.

α') $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{8}{16}$ β') $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{4}{12}$

γ') $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{12}$ δ') $\frac{1}{5}, \frac{2}{10}$

ε') $\frac{2}{5}, \frac{4}{10}$ στ') $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}$ ζ') $\frac{4}{5}, \frac{8}{10}$

2. Ἀφοῦ εὑρήκατε τὶς παραπάνω ἀσκήσεις, τώρα νὰ βρῆτε:

α') Πόσες δραχμὲς εἶναι τὸ $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{8}{16}$ τοῦ χιλιοδράχμου;

β') Πόσες ἡμέρες εἶναι τὸ $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{4}{12}$ τοῦ μηνός;

γ') Πόσοι μῆνες εἶναι τὰ $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{12}$ τοῦ ἔτους;

δ') Πόσα γραμμάρια εἶναι τὸ $\frac{1}{5}, \frac{2}{10}$ τοῦ χιλιογράμμου;

ε') Πόσοι δάκτυλοι εἶναι τὰ $\frac{2}{5}, \frac{4}{10}$ τοῦ μέτρου;

στ') Πόσες δραχμὲς εἶναι τὰ $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}$ τοῦ χιλιοδράχμου;

ζ') Πόσες δραχμὲς εἶναι τᾶ $\frac{4}{5}, \frac{8}{10}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου;

3. Ἀφοῦ προσέξετε καλὰ αὐτὲς τὶς ἀσκήσεις, νὰ εὕρετε τὶς παρακάτω, μελετώντας, ἄλλη μιὰ φορά, πολὺ καλὰ τὶς ἀσκήσεις, ποὺ ἐκάναμε μὲ τὰ διπλωμένα φύλλα.

Νὰ εὕρετε ποιό εἶναι, σὲ κάθε σειρά, τὸ μεγαλύτερο κλάσμα.

α') $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ β') $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$ γ') $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}$.

4. Ἀφοῦ εὑρήκατε ποιό εἶναι τὸ μεγαλύτερο, νὰ εὕρετε τώρα:

α') Πόσες δραχμὲς εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ τοῦ χιλιοδράχμου;

β') Πόσες ἡμέρες εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ τοῦ μηνός;

γ') Πόσα γραμμάρια εἶναι τὸ $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ τοῦ χιλιογράμμου:

5. Ἀφοῦ βρῆτε αὐτὲς τὶς ἀσκήσεις κι' ἀφοῦ ξαναμελετήσετε τὶς ἀσκήσεις ποὺ ἐκάναμε στὴν ἀρχὴ μὲ τὰ διπλωμένα φύλλα, νὰ εὕρετε ποιό εἶναι, σὲ κάθε σειρά, τὸ μεγαλύτερο κλάσμα.

α') $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{16}{16}$ β') $\frac{3}{3}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{12}{12}$ γ') $\frac{5}{5}$, $\frac{10}{10}$.

6. Τώρα νὰ εὕρετε:

α') Πόσες δραχμὲς εἶναι τὰ $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{16}{16}$ τοῦ χιλιοδράχμου; δηλαδὴ πόσα χιλιόδραχμα;

β') Πόσες ἡμέρες εἶναι τὰ $\frac{3}{3}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{12}{12}$ τοῦ μηνός; δηλαδὴ πόσοι μῆνες;

γ') Πόσα γραμμάρια εἶναι τὰ $\frac{5}{5}$, $\frac{10}{10}$ τοῦ χιλιογράμμου; δηλαδὴ πόσα χιλιόγραμμα;

Ὅροι τοῦ κλάσματος

Ἂς κάνωμε τώρα καὶ λίγη διδασκαλία:

Γιὰ νὰ γράψωμε ἕνα κλάσμα, σύρομε τὴν εὐθεῖα γραμμὴ (—), ἡ ὁποία λέγεται ***κλασματικὴ γραμμή***. Ὁ ἀριθμὸς ποὺ γράφομε ἐπάνω ἀπὸ τὴν κλασματικὴ γραμμὴ φανερώνει πόσα κομμάτια ἐπήραμε ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα, ποὺ ἐκόψαμε, καὶ λέγεται ***ἀριθμητής***. Ὁ ἀριθμός, ποὺ γράφομε κάτω ἀπὸ τὴν κλασματικὴ γραμμή, φανερώνει σὲ πόσα κομμάτια ἐκόψαμε τὴν ἀκεραία μονάδα καὶ λέγεται ***παρονομαστής***. Κι' οἱ δύο μαζὶ λέγονται ***ὅροι τοῦ κλάσματος***.

8. Σύγκρισις τῶν κλασμάτων μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα

1. Ὁ Γιῶργος ἔχει 100 δραχμές. Πόσα δεύτερα τοῦ ἑκατονταδράχμου εἶναι οἱ 100 δραχμές; Γράψατέ το.

2. Ὁ Τάκης ἔχει κι' αὐτὸς 100 δραχμές. Πόσα τέταρτα τοῦ ἑκατονταδράχμου εἶνοι οἱ 100 δραχμές ;

3. Ἡ Ἑλενίτσα ἔχει κι' αὐτὴ 100 δραχμές. Πόσα ὄγδοα τοῦ ἑκατονταδράχμου εἶναι οἱ 100 δραχμές ;

Ὥστε ἔχομε : $\frac{2}{2}$ = 1 ἑκατοντάδραχμο.

$\frac{4}{4}$ = 1 ἑκατοντάδραχμο.

$\frac{8}{8}$ = 1 ἑκατοντάδραχμο.

Κοιτάξετε τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸν παρονομαστὴ καθενὸς ἀπὸ τὰ παραπάνω κλάσματα. Τί βλέπετε ;

Ὥστε: Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος εἶναι........ τὸ κλάσμα εἶναι ἴσο μὲ........ ἀκεραίαν μονάδα.

4. Ὁ Μανωλάκης ἔχει 50 δραχμές. Πόσα δεύτερα τοῦ ἑκατονταδράχμου εἶναι οἱ 50 δραχμές ;

5. Ἡ Κατίνα ἔχει κι αὐτὴ 50 δραχμὲς. Πόσα τέταρτα τοῦ ἑκατονταδράχμου εἶναι οἱ 50 δραχχμές ;

6. Κι' ὁ Γιαννάκης ἔχει 50 δραχμές. Πόσα ὄγδοα τοῦ ἑκατονταδράχμου εἶναι οἱ 50 δραχμές ;

Ὥστε ἔχομε : $\frac{1}{2}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου = 50 δραχμὲς

$\frac{2}{4}$ τοῦ » = 50 »

$\frac{4}{8}$ τοῦ » = 50 »

Κοιτάξετε τὸ ἀριθμητὴ καὶ τὸν παρονομαστὴ καθενὸς ἀπὸ τὰ παραπάνω κλάσματα. Τί βλέπετε ;

Ὥστε: Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι........ ἀπὸ τὸν παρονομαστή, τὸ κλάσμα εἶναι........ ἀπὸ μίαν ἀκεραία μονάδα καὶ λέγεται γνήσιο.

7. Ἡ Σοφία ἔχει 150 δραχμές. Πόσα δεύτερα τοῦ ἑκατονταδράχμου εἶναι οἱ 150 δραχμές ;

8. Ἡ Παρασκευὴ ἔχει κι' αὐτὴ 150 δραχμές. Πόσα τέταρτα τοῦ ἑκατονταδράχμου εἶναι οἱ 150 δραχμές ;

9. Κι' ὁ Βασίλης ἔχει 150 δραχμές. Πόσα ὄγδοα τοῦ ἑκατονταδράχμου εἶναι οἱ 150 δραχμές;

῞Ωστε ἔχομε: $\frac{3}{2}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου = 150 δρχ. (περισσότερα ἀπὸ ἕνα ἑκατοντάδραχμο)

$\frac{6}{4}$ τοῦ » = 150 δρχ. »

$\frac{12}{8}$ τοῦ » = 150 δρχ. »

Κοιτάξετε τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸν παρονομαστὴ καθενὸς ἀπὸ τὰ παραπάνω κλάσματα. Τί βλέπετε;

῞Ωστε: ῞Οταν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι.......... ἀπὸ τὸν παρονομαστὴ τὸ κλάσμα εἶναι.......... ἀπὸ μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ λέγεται καταχρηστικόν.

᾿Ασκήσεις

᾿Απὸ τὰ παρακάτω κλάσματα νὰ ξεχωρίσης: α') Ποιά εἶναι γνήσια, β') Ποιά εἶναι ἴσα μὲ μίαν ἀκεραία μονάδα καὶ γ') Ποιά εἶναι καταχρηστικά.

1.— $\frac{4}{10}$, $\frac{20}{20}$, $\frac{15}{12}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{500}{100}$, $\frac{1000}{1000}$, $\frac{4}{2}$.

2.— $\frac{35}{100}$, $\frac{10}{10}$, $\frac{60}{50}$, $\frac{10}{100}$, $\frac{40}{40}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{7}{7}$.

3.— $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{12}{10}$, $\frac{10}{10}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{9}{6}$.

9. ᾿Εξαγωγὴ ἀκεραίων μονάδων ἀπὸ τὰ καταχρηστικὰ κλάσματα

1. Εἴπαμε ὅτι: ῾Η Σοφία ἔχει $\frac{3}{2}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου δηλ. $1\frac{1}{2}$ ἑκατ.

῾Η Παρασκευὴ ἔχει $\frac{6}{4}$ τοῦ » δηλ. $1\frac{2}{4}$ ἑκατ.

῾Ο Βασίλης ἔχει $\frac{12}{8}$ τοῦ » δηλ. $1\frac{4}{8}$ ἑκατ.

Ξεύρομε ὅτι $\frac{2}{2}$ εἶναι 1 ἑκατοντάδραχμο. Μέχρι τὰ $\frac{3}{2}$ περισσεύει ἀκόμα $\frac{1}{2}$. ῎Ετσι ἔχομε: $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου.

'Επίσης ξεύρομε ὅτι $\frac{4}{4}$ εἶναι 1 ἑκατοντάδραχμο. Μέχρι τὰ $\frac{6}{4}$ περισσεύουν ἀκόμα $\frac{2}{4}$. Ἔτσι ἔχομε : $\frac{6}{4} = 1\frac{2}{4}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου.

'Επίσης ξεύρομε ὅτι $\frac{8}{8}$ εἶναι 1 ἑκατοντάδραχμο. Μέχρι τὰ $\frac{12}{8}$ περισεύουν ἀκόμα $\frac{4}{8}$. Ἔτσι ἔχομε: $\frac{12}{8} = 1\frac{4}{8}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου.

Ὅταν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο σκεπτώμεθα, μποροῦμε εὔκολα νὰ κάνωμε ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων ἀπὸ τὰ καταχρηστικὰ κλάσματα. Μόνοι σας μπορεῖτε νὰ ἐξαγάγετε τὶς ἀκέραιες μονάδες ἀπὸ τὰ παρακάτω κλάσματα.

$\frac{15}{6} =$, $\frac{8}{4} =$, $\frac{25}{6} =$, $\frac{30}{10} =$, $\frac{4}{3} =$, $\frac{28}{7} =$, $\frac{16}{5} =$,

$\frac{1000}{100} =$, $\frac{70}{30} =$, $\frac{450}{80} =$, $\frac{9}{4} =$, $\frac{70}{50} =$, $\frac{36}{9} =$, $\frac{10}{3} =$, $\frac{60}{25} =$,

Μ' ἕνα εὔκολον τρόπο μποροῦμε νὰ ἐξαγάγωμε τὶς ἀκέραιες μονάδες :

$$\frac{15}{6} = \quad \begin{array}{r|l} 15 & 6 \\ \hline 3 & 2 \end{array} \quad = 2\frac{3}{6}$$

Διαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Τὸ πηλίκον φανερώνει τὶς ἀκέραιες μονάδες. Τὸ ὑπόλοιπον εἶναι κλάσμα.

10. Μικτοὶ ἀριθμοὶ

Ὁ ἀριθμὸς $2\frac{3}{6}$ καθὼς καὶ οἱ ἄλλοι ἀριθμοὶ ποὺ εὑρήκατε, ὅταν ἐκάματε τὴν ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων ἀπὸ τὰ καταχρηστικὰ κλάσματα τῆς παραπάνω ἀσκήσεως, δὲν εἶναι σκέτοι ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἢ σκέτα κλάσματα. 'Αποτελοῦνται ἀπὸ ἀκέραιον καὶ ἀπὸ κλάσμα καὶ λέγονται **μικτοὶ ἀριθμοί**.

1. Γράψατε μὲ μικτοὺς ἀριθμοὺς τὰ ἑξῆς ποσά.

— 15 μέτρα καὶ 35 δάκτυλοι =
— 28 μέτρα καὶ 6 δάκτυλοι =
— 20 δραχμὲς καὶ 50 λεπτὰ =
— 125 χιλιόγραμμα καὶ 250 γραμμάρια =
— 6 ἔτη καὶ 3 μῆνες =
— 18 ἔτη καὶ 9 μῆνες =
— 8 μῆνες καὶ 25 ἡμέρες =
— 11 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες =
— 4 ὧρες καὶ 20 πρῶτα λεπτὰ =

11. Τροπὴ μικτῶν εἰς κλάσματα

Ὁ ἀριθμὸς $7\frac{2}{10}$ μέτρα εἶναι μικτὸς ἀριθμός. Γιὰ νὰ τὸν τρέψωμε σὲ κλάσμα, λέμε ὅτι τὸ κάθε μέτρο ἔχει $\frac{10}{10}$, τὰ 7 μέτρα ἔχουν 7 φορὲς περισσότερα δέκατα, δηλαδὴ $\frac{70}{10}$. Καὶ $\frac{2}{10}$ τὸ κλάσμα, γίνονται ὅλα $\frac{72}{10}$. Λοιπὸν $7\frac{2}{10} = \frac{72}{10}$.

Ἀλλὰ γιὰ εὐκολία μας, κάθε φορά, ποὺ ἔχομε ἕνα μικτὸν νὰ τὸν τρέψωμε σὲ κλάσμα, θὰ λέμε: Δέκατα θὰ γίνῃ; $10 \times 7 = 70$ καὶ 2 κλασματικὲς μονάδες ποὺ ἔχει ὁ ἀριθμητής, γίνονται 72. Ὁ ἀριθμὸς 72 θὰ γραφῇ ὡς ἀριθμητής. Καὶ ὡς παρονομαστὴς θὰ γραφῇ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος.

Ὥστε: Γιὰ νὰ τρέψωμε ἕνα μικτὸν εἰς κλάσμα, πῶς σκεπτόμεθα καὶ τί ἐνέργειες κάνομε; Γράψατε μόνοι σας τὸ συμπέρασμα στὸ τετράδιο.

Ἀσκήσεις

1. Οἱ παρακάτω μικτοὶ νὰ τραποῦν εἰς κλάσματα.

α΄) $12\frac{1}{5} =$, $30\frac{2}{3} =$, $25\frac{1}{4} =$, $16\frac{4}{10} =$, $100\frac{1}{10} =$, $53\frac{2}{8} =$

β΄) $6\frac{1}{2} =$, $29\frac{4}{7} =$, $50\frac{3}{15} =$, $18\frac{7}{12} =$, $31\frac{6}{40} =$, $11\frac{1}{20} =$

γ΄) $14\frac{4}{25} =$, $27\frac{15}{60} =$, $150\frac{3}{9} =$, $2\frac{50}{200} =$, $7\frac{10}{1000} =$, $4\frac{10}{500} =$

12. Τροπὴ ἀκεραίων εἰς κλάσματα

Ξεύρομε ὅτι μία ἀκεραία μονάδα εἶνα ἴση μὲ $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{10}{10}$, $\frac{100}{100}$, κλπ.

Ἂν τώρα, 2 ἀκέραιες μονάδες τὶς κάνωμε δεύτερα, θὰ γίνουν $\frac{4}{2}$.

Ἂν 6 ἀκέραιες μονάδες τὶς κάνωμε τρίτα, θὰ γίνουν $\frac{18}{3}$.

Ἂν 10 ἀκέραιες μονάδες τὶς κάνωμε δέκατα, θὰ γίνουν $\frac{100}{10}$.

Ἂν 5 ἀκέραιες μονάδες τὶς κάνωμε ἑκατοστά, θὰ γίνουν $\frac{500}{100}$.

Ἀσκήσεις

Τὶς παρακάτω ἀκέραιες μονάδες νὰ τὶς κάμετε κλάσματα.

α) Οἱ ἀκέραιες μονάδες 9, 16, 5, 8, 27 νὰ γίνουν τρίτα.
β) Οἱ » » 100, 7, 25, 90, 10 νὰ γίνουν δέκατα.
γ) Οἱ » » 12, 4, 50, 15, 40 νὰ γίνουν ὄγδοα.
δ) Οἱ » » 6, 52, 3, 17, 28 νὰ γίνουν ἑκατοστά.
ε) Οἱ » » 23, 14, 60, 51, 32 νὰ γίνουν τέταρτα.

13. Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων

1. Γράψατε στὸ τετράδιό σας τὰ κλάσματα:

$$\frac{2}{100}, \frac{4}{100}, \frac{8}{100}, \frac{16}{100}, \frac{32}{100}, \frac{64}{100}.$$

Τὸ κλάσμα $\frac{4}{100}$ εἶναι μικρότερο, ἴσο, ἢ μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{100}$; Ἂν εἶναι μεγαλύτερο, πόσες φορὲς εἶναι μεγαλύτερο;

Τὸ κλάσμα $\frac{8}{100}$ εἶναι μικρότερο, ἴσο, ἢ μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{100}$ καὶ πόσες φορές;

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπο νὰ συγκρίνετε ὡς τὸ τέλος ὅλα τὰ κλάσματα μὲ τὸ πρῶτο καὶ νὰ μᾶς πῆτε πόσες φορὲς μεγαλύτερο εἶναι, καθένα ἀπ' αὐτά, ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{100}$.

Εὑρήκαμε προηγουμένως ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{4}{100}$ εἶναι δύο φορὲς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{100}$. Γιά κυττάξετε: ὁ ἀριθμητὴς 4 πόσες φορὲς μεγαλύτερος εἶναι ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴ 2;

Ἐπίσης εὑρήκαμε ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{8}{100}$ εἶναι τέσσαρες φορὲς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{100}$. Ὁ ἀριθμητὴς 8 εἶναι τέσσαρες φορὲς μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴ 2.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο, συγκρίνοντας ὅλα τὰ κλάσματα, βλέπομε ὅτι:

Ὅταν πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ 2, 4, 8, 16, 32, τὸ κλάσμα γίνεται 2, 4, 8, 16, 32 φορὲς μεγαλύτερο: $\frac{2 \times 16}{100} = \frac{32}{100}$.

Γράψατε αὐτὸν τὸν κανόνα. Εἶναι ἡ πρώτη ἰδιότης τῶν κλασμάτων.

Ἀσκήσεις

Τὰ παρακάτω κλάσματα νὰ γίνουν μεγαλύτερα, πολλαπλασιάζοντας τὸν ἀριθμητή:

α) $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{10}$ τὸ καθένα νὰ γίνῃ 4 φορὲς μεγαλύτερο.

β) $\frac{3}{50}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{16}{100}$ τὸ καθένα νὰ γίνῃ 6 φορὲς μεγαλύτερο.

γ) $\frac{4}{100}$, $\frac{15}{60}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{17}{40}$ τὸ καθένα νὰ γίνῃ 10 φορὲς μεγαλύτερο.

2. Γράψατε στὸ τετράδιό σας τὰ παρακάτω κλάσματα:

$$\frac{2}{4}, \frac{2}{8}, \frac{2}{16}, \frac{2}{32}, \frac{2}{64}.$$

Συγκρίνατε τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$ μὲ τὸ $\frac{2}{4}$ καὶ πέστε ποιό εἶναι μικρότερο καὶ πόσες φορές. Συγκρίνατε τὸν παρονομαστὴν 8 καὶ τὸν παρονομαστὴν 4 καὶ πέστε ποιός εἶναι μεγαλύτερος;

Ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$ εἶναι 2 φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{4}$. Κι' ὁ παρονομαστής του εἶναι δύο φορὲς μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν παρονομαστὴν τοῦ πρώτου κλάσματος.

Συγκρίνατε ὅλα τὰ κλάσματα μὲ τὸ πρῶτο καὶ πέστε πόσες φορὲς μικρότερο εἶναι τὸ καθένα ἀπὸ τὸ πρῶτο καὶ πόσες φορὲς μεγαλύτερος εἶναι ὁ παρονομαστής του.

Ἔτσι φθάνομε στὸ συμπέρασμα:

Ὅταν πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ 2, 4, 8, 16, τὸ κλάσμα γίνεται 2, 4, 8, 16 φορὲς μικρότερο: $\frac{2}{4 \times 8} = \frac{2}{32}$.

Γράψατε αὐτὸν τὸν κανόνα. Εἶναι ἡ δευτέρα ἰδιότης τῶν κλασμάτων.

'Ασκήσεις

Τὰ παρακάτω κλάσματα νὰ γίνουν μικρότερα, πολλαπλασιάζοντας τὸν παρονομαστή:

α) $\frac{3}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{15}$ τὸ καθένα νὰ γίνῃ 6 φορὲς μικρότερο.

β) $\frac{4}{10}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ τὸ καθένα νὰ γίνῃ 10 φορὲς μικρότερο.

γ) $\frac{5}{25}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{18}{20}$, $\frac{12}{50}$ τὸ καθένα νὰ γίνῃ 4 φορὲς μικρότερο.

3. Γράψατε στὸ τετράδιό σας τὰ παρακάτω κλάσματα.

$$\frac{80}{100},\ \frac{40}{100},\ \frac{20}{100},\ \frac{10}{100},\ \frac{5}{100}.$$

Συγκρίνατε τὸ πρῶτο καὶ τὸ δεύτερο κλάσμα. Ποιό εἶναι μικρότερο καὶ πόσες φορές; Ποιός ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος καὶ πόσες φορές;

Συγκρίνατε ἐπίσης ὅλα τὰ ὑπόλοιπα κλάσματα μὲ τὸ πρῶτο καὶ πέστε πόσες φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ πρῶτο εἶναι κάθε κλάσμα καὶ πόσες φορὲς μικρότερος εἶναι ὁ ἀριθμητής του ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πρώτου κλάσματος.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο φθάνομε στὸ συμπέρασμα:

Ὅταν διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς κλάσματος διὰ 2, 4, 8, 16 τὸ κλάσμα γίνεται 2, 4, 8, 16 φορὲς μικρότερο:

$$\frac{80:8}{100} = \frac{10}{100}$$

Γράψατε αὐτὸν τὸν κανόνα. Εἶναι ἡ τρίτη ἰδιότης τῶν κλασμάτων.

'Ασκήσεις

Τὰ παρακάτω κλάσματα νὰ γίνουν μικρότερα, διαιρῶντας τὸν ἀριθμητή:

α) $\frac{18}{100}$, $\frac{27}{50}$, $\frac{300}{1000}$, $\frac{51}{60}$ τὸ καθένα νὰ γίνῃ 3 φορὲς μικρότερο.

β) $\frac{25}{40}$, $\frac{60}{70}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{80}{100}$ τὸ καθένα νὰ γίνῃ 5 φορὲς μικρότερο.

γ) $\frac{48}{60}$, $\frac{24}{30}$, $\frac{16}{25}$, $\frac{128}{200}$ τὸ καθένα νὰ γίνῃ 8 φορὲς μικρότερο.

4. Γράψατε στὸ τετράδιό σας τὰ παρακάτω κλάσματα:

$$\frac{4}{80},\ \frac{4}{40},\ \frac{4}{20},\ \frac{4}{10},\ \frac{4}{5}.$$

Συγκρίνατε τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον κλάσμα. Ποιό εἶναι μεγαλύτερο καὶ πόσες φορές ; Ποιός παρονομαστὴς εἶναι μικρότερος καὶ πόσες φορές ;

Συγκρίνατε, ἐπίσης, ὅλα τὰ ὑπόλοιπα κλάσματα μὲ τὸ πρῶτον καὶ πέστε πόσες φορὲς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ πρῶτον εἶναι τὸ καθένα, καὶ πόσες φορὲς μικρότερος εἶναι ὁ παρονομαστής του ἀπὸ τὸν παρονομαστὴν τοῦ πρώτου κλάσματος.

Ἔτσι καταλήγομε στὸ ἑξῆς συμπέρασμα :

Ὅταν διαιρέσωμε τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς κλάσματος διὰ 2, 4, 8, 16 τὸ κλάσμα γίνεται 2, 4, 8, 16 φορὲς μεγαλύτερο :

$$\frac{4}{80:8}=\frac{4}{10}$$

Γράψατε αὐτὸν τὸν κανόνα. Εἶναι ἡ τετάρτη ἰδιότης τῶν κλασμάτων :

Ἀσκήσεις

Τὰ παρακάτω κλάσματα νὰ γίνουν μεγαλύτερα, διαιρώντας τὸν παρονομαστήν :

α) $\frac{3}{70}$, $\frac{4}{35}$, $\frac{5}{42}$, $\frac{14}{105}$ τὸ καθένα νὰ γίνη 7 φορὲς μεγαλύτερο.

β) $\frac{6}{48}$, $\frac{15}{120}$, $\frac{8}{96}$, $\frac{4}{24}$ τὸ καθένα νὰ γίνη 12 φορὲς μεγαλύτερο.

γ) $\frac{4}{60}$, $\frac{8}{240}$, $\frac{3}{45}$, $\frac{1}{30}$ τὸ καθένα νὰ γίνη 15 φορὲς μεγαλύτερο.

5. Γράψατε στὸ τετράδιο τὰ παρακάτω κλάσματα :

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{4},\ \frac{4}{8},\ \frac{8}{16},\ \frac{16}{32}.$$

Συγκρίνατε τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον κλάσμα. Ποιό εἶναι μεγαλύτερο, ἢ μικρότερο ; Συγκρίνατε τοὺς ἀριθμητὰς καὶ τοὺς παρονομαστάς των. Συγκρίνατε, ἐπίσης, καθένα ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα κλάσματα μὲ τὸ πρῶτον, καὶ πέστε πόσες φορὲς μεγαλύτερο, ἢ μικρότερο ἀπὸ τὸ πρῶτον εἶναι τὸ καθένα ἀπ' αὐτά. Κάθε φορά, κοιτάζετε καλὰ καὶ τοὺς δύο ὅρους τῶν κλασμάτων ποὺ συγκρίνετε.

Σὲ τί συμπέρασμα καταλήγετε ;

Ὅταν πολλαπλασιάσωμε καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμό, τὸ κλάσμα ποὺ εὑρίσκομε εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ πρῶτο : $\frac{1 \times 8}{2 \times 8}=\frac{8}{16}$

Γράψατε αὐτὸν τὸν κανόνα. Εἶναι ἡ πέμπτη ἰδιότης τῶν κλασμάτων.

ΣΗΜ: Τὰ κλάσματα ποὺ εἶναι ἴσα, ποὺ ἔχουν ἴσην δύναμι λέγονται ἰσοδύναμα.

Ἀσκήσεις

Στὰ παρακάτω κλάσματα νὰ πολλαπλασιάσετε καὶ τοὺς δύο ὅρους:

α) $\frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{8}{10}, \frac{6}{15}$ ἐπὶ 8

β) $\frac{4}{12}, \frac{25}{100}, \frac{9}{25}, \frac{3}{8}$ ἐπὶ 10

γ) $\frac{60}{80}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{9}{30}$ ἐπὶ 5

6. Γράψατε στὸ τετράδιο τὰ παρακάτω κλάσματα:

$$\frac{32}{80}, \frac{16}{40}, \frac{8}{20}, \frac{4}{10}, \frac{2}{5}.$$

Συγκρίνατε τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον κλάσμα. Ποιό εἶναι μεγαλύτερο, ἢ μικρότερο; Συγκρίνατε καὶ τοὺς δύο ὅρους κάθε κλάσματος. Συγκρίνατε, ἐπίσης, καθένα ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα κλάσματα μὲ τὸ πρῶτον καὶ τὶ παρατηρεῖτε, δίνοντας κάθε φορὰ ἰδιαίτερη προσοχὴ καὶ στοὺς δύο ὅρους τῶν κλασμάτων ποὺ κάθε φορὰ συγκρίνετε.

Ποιό εἶναι τὸ συμπέρασμά σας;

Ὅταν διαιρέσωμε καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, τὸ κλάσμα ποὺ εὑρίσκομε εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ πρῶτο: $\frac{32:8}{80:8} = \frac{4}{10}$

Γράψατε κι' αὐτὸν τὸν κανόνα. Εἶναι ἡ ἕκτη ἰδιότης τῶν κλασμάτων.

Σᾶς συμβουλεύω νὰ μελετήσετε πολλὲς φορὲς τὶς ἰδιότητες τῶν κλασμάτων. Θὰ σᾶς βοηθήσουν πολὺ στὸ νὰ καταλάβετε τὴν παραπέρα ὕλην.

Ἀσκήσεις

Στὰ παρακάτω κλάσματα νὰ διαιρέσετε καὶ τοὺς δύο ὅρους:

α) $\frac{35}{40}, \frac{80}{120}, \frac{75}{200}, \frac{5}{10}$ διὰ 5

β) $\frac{50}{100}, \frac{125}{500}, \frac{400}{1000}, \frac{75}{225}$ διὰ 25

γ) $\frac{81}{90}, \frac{36}{63}, \frac{90}{180}, \frac{45}{72}$ διὰ 9

14. Ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων

Ἁπλοποιῶ στὴν κυριολεξία θὰ πῆ: κάνω ἕνα πρᾶγμα πιὸ ἁπλό. Ἁπλοποιῶ ἕνα κλάσμα θὰ πῆ: κάνω ἕνα κλάσμα πιὸ ἁπλό, ὥστε νὰ καταλαβαίνω τὴν ἀξία του καλύτερα.

Στὶς παραπάνω ἀσκήσεις, ὅταν ἐδιαιρούσαμε καὶ τοὺς δύο ὅρους τῶν πρώτων κλασμάτων διὰ 5, τῶν δευτέρων διὰ 25 καὶ τῶν τρίτων διὰ 9, δὲν ἐκάναμε τίποτε ἄλλο ἀπὸ ἁπλοποίησι. Καὶ ὅπως εἴπαμε, τὰ κλάσματα ποὺ εὑρίσκαμε, διαιρώντας καὶ τοὺς δύο ὅρους κάθε κλάσματος μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμό, ἦσαν ἰσοδύναμα μὲ τὰ ἁπλοποιούμενα· εἶχαν, δηλαδή, τὴν ἴδιαν ἀξία.

Γιὰ ν' ἁπλοποιήσωμε ὁποιοδήποτε κλάσμα ὀφείλομε, κατ' ἀρχήν, νὰ γνωρίζωμε πολὺ καλὴ διαίρεσιν. Κατόπιν θὰ εὑρίσκωμε μὲ ποιόν ἀριθμὸ διαιροῦνται ἀκριβῶς (νὰ μὴ ἀφήνουν ὑπόλοιπο) καὶ οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος. Αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὁ κοινὸς διαιρέτης καὶ τῶν δύο ὅρων τοῦ κλάσματος. Δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ καὶ ἄλλος κοινὸς διαιρέτης. Δυνατόν, ἀκόμη, νὰ ὑπάρχῃ καὶ τρίτος καὶ τέταρτος κοινὸς διαιρέτης. Συμφέρον μας εἶναι, ὅταν κάνωμε ἁπλοποίησιν κλασμάτων, νὰ εὑρίσκωμε τὸν πιὸ μεγάλον, τὸν ***μέγιστον,*** ὅπως λέμε, κοινὸν διαιρέτην.

Ἕνα παράδειγμα:

Ἔχομε ν' ἁπλοποιήσωμε τὸ κλάσμα $\frac{150}{300}$. Καὶ οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος διαιροῦνται μὲ τοὺς παρακάτω ἀριθμούς: 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 150. Ὅλοι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοὶ εἶναι κοινοὶ διαιρέται καὶ τῶν δύο ὅρων τοῦ κλάσματος, καὶ τοῦ 150 καὶ τοῦ 300. Γιὰ νὰ κάμωμε ὅμως τὴν ἁπλοποίησιν θὰ πάρωμε τὸν ***Μέγιστον Κοινὸν Διαιρέτην*** (Μ.Κ.Δ.): τὸν ἀριθμὸν 150. Ἔτσι ἔχομε: $\frac{150 : 150}{300 : 150} = \frac{1}{2}$.

Τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ κλάσμα $\frac{150}{300}$, διότι ξεύρομε ἀπὸ τὶς ἰδιότητες τῶν κλασμάτων ὅτι: ὅταν διαιρέσωμε καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμό, τὸ κλάσμα ποὺ εὑρίσκομε εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρῶτο. Οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{1}{2}$ δὲν ἁπλοποιοῦνται περισσότερο, διότι δὲν ὑπάρχει ἄλλος ἀριθμός, ποὺ νὰ διαιρῇ καὶ τοὺς δύο ὅρους. Τὸ κλάσμα λέγεται ***ἀνάγωγο***, καὶ οἱ ὅροι του εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

'Ασκήσεις

Ν' άπλοποιηθοῦν τὰ παρακάτω κλάσματα μὲ τὸν Μ.Κ.Δ.

$\frac{24}{60}$, $\frac{15}{75}$, $\frac{40}{200}$, $\frac{18}{72}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{16}{40}$, $\frac{100}{350}$, $\frac{42}{63}$, $\frac{25}{100}$, $\frac{90}{135}$, $\frac{40}{50}$, $\frac{32}{96}$, $\frac{48}{80}$,

$\frac{75}{175}$, $\frac{30}{120}$, $\frac{100}{1000}$, $\frac{500}{800}$, $\frac{45}{75}$, $\frac{240}{400}$, $\frac{225}{300}$, $\frac{63}{105}$, $\frac{42}{70}$, $\frac{250}{450}$, $\frac{57}{95}$, $\frac{4}{8}$

"Αν δυσκολεύεστε, κάμετε δύο καὶ τρεῖς ἀπλοποιήσεις, συνέχεια, γιὰ κάθε κλάσμα, ὥσπου νὰ φθάσετε σὲ κλάσμα ἀνάγωγο.

Μερικὲς ὑποδείξεις γιὰ νὰ εὐκολυνώμεθα στὴν γρήγορη διαίρεσι:

—Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2, ὅταν λήγῃ σὲ 0, 2, 4, 6, 8.

—Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 3, 9, ὅταν τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ διαιρεῖται διὰ 3, 9.

—Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 4, ὅταν λήγῃ σὲ 00, ἢ ὅταν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του ἀποτελοῦν ἀριθμὸν ποὺ διαιρεῖται διὰ 4.

—Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 5, ὅταν λήγῃ σὲ 0 ἢ 5.

—Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 6, ὅταν διαιρῆται τοὐλάχιστον καὶ μὲ τὸ 2 καὶ μὲ τὸ 3.

—Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 8, ὅταν λήγῃ σὲ 000 ἢ τὰ τρία τελευταῖα του ψηφία ἀποτελοῦν ἀριθμὸν ποὺ διαιρεῖται διὰ 8.

—Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 10, ὅταν λήγῃ τοὐλάχιστον σὲ 0.

—Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 100, ὅταν λήγῃ τοὐλάχιστον σὲ 00.

—Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 1000, ὅταν λήγῃ τοὐλάχιστον σὲ 000.

'Ασκήσεις

1. 'Απὸ τοὺς παρακάτω ἀριθμοὺς νὰ ξεχωρίσετε ποιοί διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 2, 4, 3, 9:

   4617, 5892, 8904, 15435, 476, 261, 9342, 7000.

2. Νὰ ξεχωρίσετε ποιοί ἀριθμοὶ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 5, 6:

   830, 2316, 593, 3815, 928, 7590, 3618, 7384.

3. Νὰ ξεχωρίσετε ποιοί ἀριθμοὶ διαιρουνται ἀκριβῶς διὰ 10, 100, 1000:

   8310, 6710, 90300, 65120, 3000, 7690, 3800, 14000.

15. Κλάσματα ὁμώνυμα

1. Γράψατε στὸ τετράδιο τὰ παρακάτω κλάσματα:

$$\frac{10}{20}, \frac{3}{20}, \frac{8}{20}, \frac{5}{20}, \frac{14}{20}, \frac{9}{20}, \frac{18}{20}, \frac{2}{20}$$

Αὐτὰ τὰ κλάσματα ὁμοιάζουν σὲ τίποτε; Κοιτάξετε καὶ πέστε μου.

Αὐτὰ τὰ κλάσματα ἔχουν τὸ ἴδιον ὄνομα, ὅπως πολλὰ παιδιὰ ἀπὸ σᾶς ἔχουν τὸ ἴδιο ἐπώνυμο, καὶ τὰ λέμε ***ὁμώνυμα*** κλάσματα.

Ἀπὸ τί τὸ καταλαβαίνομε ὅτι δύο, ἢ περισσότερα κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα;

Γράψατε αὐτὸν τὸν κανόνα στὸ τετράδιο, ἀφοῦ πρῶτα τὸν συμπληρώσετε:

> **Ὁμώνυμα κλάσματα λέγονται τὰ κλάσματα ἐκεῖνα, ποὺ ἔχουν**
> ....

2. Στὰ ὁμώνυμα κλάσματα εὔκολα καταλαβαίνομε ποιό κλάσμα εἶναι μεγαλύτερο καὶ ποιὸ εἶναι μικρότερο.

Ἐσεῖς μπορεῖτε τὰ κατατάξετε τὰ παραπάνω κλάσματα μὲ τὴ σειρά, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ μικρότερο ὡς τὸ μεγαλύτερο, καὶ ἀπὸ τὸ μεγαλύτερο ὡς τὸ μικρότερο; Κάμετε αὐτὲς τὶς δύο ἀσκήσεις. (Σημ. Ὅταν λέμε $\frac{2}{20}$ τοῦ μήλου καὶ $\frac{18}{20}$ τοῦ μήλου καταλαβαίνομε ὅτι τὰ $\frac{2}{20}$ εἶναι μικρότερο κομμάτι ἀπὸ τὰ $\frac{18}{20}$).

Ἀσκήσεις

3. Ἀπὸ τὰ παρακάτω κλάσματα νὰ ταξινομήσετε σὲ κατηγορίες τὰ ὁμώνυμα καὶ νὰ τὰ κατατάξετε στὴ σειρά, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ μικρότερο ὡς τὸ μεγαλύτερο.

$$\frac{3}{8}, \frac{1}{3}, \frac{8}{15}, \frac{4}{20}, \frac{5}{8}, \frac{16}{20}, \frac{1}{5}, \frac{7}{12}, \frac{9}{15}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3},$$

$$\frac{19}{20}, \frac{6}{8}, \frac{3}{3}, \frac{9}{12}, \frac{4}{15}, \frac{2}{8}, \frac{3}{5}, \frac{2}{12}, \frac{8}{15}, \frac{14}{20}, \frac{7}{8},$$

$$\frac{5}{20}, \frac{2}{8}, \frac{6}{100}, \frac{15}{20}, \frac{25}{100}, \frac{6}{8}, \frac{90}{100}, \frac{3}{30}, \frac{13}{15}, \frac{11}{12}, \frac{10}{20}.$$

16. Κλάσματα ἑτερώνυμα

1. Γράψατε στὸ τετράδιο τὰ παρακάτω κλάσματα:

$\frac{10}{15}, \frac{3}{4}, \frac{9}{10}, \frac{2}{3}, \frac{8}{20}, \frac{17}{50}, \frac{2}{5}, \frac{1}{8}.$

Αὐτὰ τὰ κλάσματα ὁμοιάζουν σὲ τίποτε; Κοιτάξετε καὶ πέστε.

Αὐτὰ δὲν ἔχουν τὸ ἴδιο ὄνομα. Ἔχουν ***ἕτερον*** (διαφορετικὸ) ὄνομα τὸ καθένα, γι' αὐτὸ λέγονται ***ἑτερώνυμα***.

Ἀπὸ τί καταλαβαίνομε ὅτι δύο, ἢ περισσότερα κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα; Γράψατε τὸν παρακάτω κανόνα στὸ τετράδιο, ἀφοῦ πρῶτα τὸν συμπληρώσετε:

Ἑτερώνυμα κλάσματα λέγονται τὰ κλάσματα ποὺ ....

Γράψατε στὸ τετράδιο τὰ παρακάτω ἑτερώνυμα κλάσματα:

$\frac{1}{7}, \frac{1}{4}, \frac{1}{20}, \frac{1}{15}, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{100}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{6}.$

Καὶ σ' αὐτὰ τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα, στὰ ὁποῖα ὁ ἀριθμητὴς εἶναι ὁ ἴδιος, εὔκολα μποροῦμε νὰ καταλάβωμε ποιό εἶναι τὸ μεγαλύτερο καὶ ποιό εἶναι τὸ μικρότερο.

Ἐσεῖς μπορεῖτε νὰ κατατάξετε τὰ παραπάνω κλάσματα μὲ τὴ σειρά, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ μικρότερο ὡς τὸ μεγαλύτερο, καὶ ἀπὸ τὸ μεγαλύτερο ὡς τὸ μικρότερο; Κάμετε αὐτὲς τὶς δύο ἀσκήσεις. (Σημ. Ὅταν λέμε $\frac{1}{7}$ τοῦ μήλου καὶ $\frac{1}{100}$ τοῦ μήλου, καταλαβαίνομε ὅτι ἂν δύο μῆλα τὰ κόψωμε, τὸ πρῶτο σὲ ἑπτὰ κομμάτια καὶ τὸ δεύτερο σὲ ἑκατὸ κομμάτια, τὸ $\frac{1}{7}$ θὰ εἶναι πολὺ μεγαλύτερο κομμάτι ἀπὸ τὸ $\frac{1}{100}$).

Ἀσκήσεις

3. Τὰ παρακάτω ἑτερώνυμα κλάσματα νὰ τὰ ταξινομήσετε σὲ κατηγορίες καὶ νὰ τὰ κατατάξετε στὴ σειρά, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ μικρότερο κλάσμα ὡς τὸ μεγαλύτερο, καὶ ἀπὸ τὸ μεγαλύτερο ὡς τὸ μικρότερο. (Πρώτη ταξινόμησις, ὅσα κλάσματα ἔχουν ἀριθμητὴν 1· δευτέρα, ὅσα ἔχουν ἀριθμητὴν 2, κλπ.).

$\frac{3}{20}, \frac{1}{4}, \frac{10}{100}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{3}{12}, \frac{10}{50}, \frac{1}{8}, \frac{4}{15}, \frac{10}{60}, \frac{3}{30}, \frac{1}{3}, \frac{4}{8},$

$\frac{10}{35}, \frac{3}{9}, \frac{4}{25}, \frac{1}{2}, \frac{10}{16}, \frac{4}{80}, \frac{1}{45}, \frac{3}{75}, \frac{10}{500}, \frac{3}{65}.$

17. Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα

1. Γράψατε στὸ τετράδιό σας τὰ παρακάτω ἑτερώνυμα κλάσματα:

$$\frac{2}{4}, \frac{3}{12}.$$

Αὐτὰ τὰ κλάσματα γιὰ νὰ γίνουν ὁμώνυμα, ἢ πρέπει νὰ γίνουν δωδέκατα, ὅπως λέει ὁ μεγαλύτερος παρονομαστής, ἢ κάτι παραπάνω. Τὸ πρῶτο κλάσμα, γιὰ νὰ γίνῃ δωδέκατα, δὲν ἔχομε παρὰ νὰ κάνωμε τὸν παρονομαστήν του τρεῖς φορὲς μεγαλύτερον. Γιὰ νὰ μὴ χάσῃ ὅμως τὸ κλάσμα τὴν ἀξία του, πρέπει καὶ ὁ ἀριθμητὴς νὰ γίνῃ τρεῖς φορὲς μεγαλύτερος, διότι ξεύρομε ἀπὸ τὶς ἰδιότητες τῶν κλασμάτων ὅτι «ὅταν πολλαπλασιάσωμε καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμό, τὸ κλάσμα ποὺ εὑρίσκομε εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρῶτο».

Ἔτσι ἔχομε: $\frac{2}{4}, \frac{3}{12} = \frac{2 \times 3}{4 \times 3}, \frac{3}{12} = \frac{6}{12}, \frac{3}{12}.$

- Τώρα ἔγιναν καὶ τὰ δύο ὁμώνυμα.

2. Γράψατε στὸ τετράδιο τὰ παρακάτω ἑτερώνυμα κλάσματα:

$$\frac{4}{5}, \frac{3}{8}, \frac{2}{4}, \frac{6}{10}.$$

Ἐδῶ ἔχομε τέσσερα ἑτερώνυμα κλάσματα νὰ γίνουν ὁμώνυμα. Γιὰ νὰ εὐκολυνθοῦμε πρέπει νὰ εὕρωμε ἕνα ἀριθμόν, ποὺ νὰ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον ὅλων τῶν παρονομαστῶν. Ποιός εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός;

Προσέξατε πῶς θὰ τὸν εὕρωμε. Παίρνομε τὸν μεγαλύτερον ἀπὸ τοὺς τέσσαρας παρονομαστάς. Εἶναι τὸ 10. Ὁ ἀριθμὸς 10 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον ὅλων τῶν παρονομαστῶν; Ὄχι! Εἶναι μόνον τοῦ 5 ($2 \times 5 = 10$) καὶ τοῦ 10 ($1 \times 10 = 10$).

Τότε διπλασιάζομε τὸ 10 καὶ γίνεται 20. Ὁ ἀριθμὸς 20 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον ὅλων τῶν παρονομαστῶν; Ὄχι! Εἶναι μόνον τοῦ 5 ($4 \times 5 = 20$), τοῦ 4 ($5 \times 4 = 20$) καὶ τοῦ 10 ($2 \times 10 = 20$).

Τότε τριπλασιάζομε τὸ 10 καὶ γίνεται 30. Ὁ ἀριθμὸς 30 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον μόνον δύο παρονομαστῶν. Τότε τετραπλασιάζομε τὸ 10 καὶ γίνεται 40. Ὁ ἀριθμὸς 40 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον ὅλων τῶν παρονομαστῶν ($8 \times 5 = 40$), ($5 \times 8 = 40$), ($10 \times 4 = 40$) καὶ ($4 \times 10 = 40$).

Ἀλλὰ δὲν εἶναι μόνον τὸ 40. Εἶναι καὶ τὸ 80, καὶ τὸ 120, καὶ τὸ 160, καὶ τὸ 200 καὶ πλῆθος ἄλλα. Τὸ 40 ὅμως εἶναι τὸ μικρότερον, τὸ ***ἐλάχιστον,*** ὅπως λέμε, ***κοινὸν πολλαπλάσιον*** (Ε. Κ. Π.) τῶν ἀριθμῶν 5, 8, 4, 10. Αὐτό, λοιπόν, συμφέρει νὰ πάρωμε κι' ἐμεῖς.

Ἡ ἐργασία, ἀπὸ δῶ καὶ πέρα, εἶναι ἁπλῆ καὶ εὔκολη. Γράφομε, πέρα ἀπὸ τὰ κλάσματα, τὰ γράμματα Ε. Κ. Π. = 40. Σύρομε καμπύλες γραμμὲς πάνω ἀπὸ τοὺς ἀριθμητὰς καὶ κατόπιν λέμε: Ὁ ἀριθμὸς 5 εἰς τὸ 40 πάει 8 φορές. Τὸν ἀριθμὸν 8, τὸν γράφομε πάνω ἀπὸ τὴν καμπύλη γραμμὴ τοῦ κλάσματος $\frac{4}{5}$. Τὸ ἴδιο κάνομε γιὰ ὅλα τὰ κλάσματα, καὶ κατόπιν πολλαπλασιάζομε καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος μὲ τὸν ἀριθμὸ ποὺ εὑρίσκεται πάνω ἀπὸ τὴν καμπύλη γραμμή. Τὸ ἴδιο κάνομε καὶ μὲ τὰ ὑπόλοιπα κλάσματα. Κάθε νέο κλάσμα ποὺ εὑρίσκομε εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἀντίστοιχό του. Ξεύρετε τὸν λόγο, ἀπὸ τὴν σχετικὴν ἰδιότητα τῶν κλασμάτων. Πέστε τὴν ἰδιότητα αὐτήν.

$$\text{Ἔτσι ἔχομε:}\quad \frac{\overset{8}{\frown}\,4}{5},\ \frac{\overset{5}{\frown}\,3}{8},\ \frac{\overset{10}{\frown}\,2}{4},\ \frac{\overset{4}{\frown}\,6}{10}\quad \text{Ε.Κ.Π.} = 40$$

$$\frac{32}{40},\ \frac{15}{40},\ \frac{20}{40},\ \frac{24}{40}$$

Τὰ κλάσματα ἔγιναν ὁμώνυμα χωρὶς νὰ χάσουν τὴν ἀξία των.

2. Καὶ μὲ ἄλλον τρόπον μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον. Ὁ τρόπος αὐτὸς ἐφαρμόζεται προπαντὸς ὅταν ἔχωμε μεγάλους παρονομαστάς.

Ὁ τρόπος αὐτὸς εἶναι ὁ ἑξῆς: Θὰ τὸν γράψωμε πρῶτα καὶ θὰ τὸν ἐξηγήσωμε ἀμέσως. Παίρνομε τοὺς ἰδίους παρονομαστὰς τῶν προηγουμένων κλασμάτων καὶ τοὺς γράφομε:

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 8 & 4 & 10 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$2 \times 2 \times 5 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 = 40 \quad \text{Ε.Κ.Π.} = 40$$

Κατόπι σύρομε μία κατακόρυφη γραμμή. Κοιτάζομε τώρα ἂν ὑπάρχουν δύο, τοὐλάχιστον, ἀριθμοί, ποὺ νὰ διαιροῦνται διὰ 2. Ὑπάρχουν. Γράφομε τὸν διαιρέτη 2 δίπλα, ἐκεῖ στὴν κατακόρυφη γραμμή, καὶ λέμε: Ὁ ἀριθμὸς 5 δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ τὸ 2. Γράφομε πάλι τὸ 5 στὴν δευτέρα σειρά. Ὁ ἀριθμὸς 8 διαιρεῖται διὰ 2. Τὸ 2 στὸ 8 πάει 4 φορές. Τὸν ἀριθμὸ 4 τὸν γράφομε κάτω ἀπὸ τὸ 8. Συνεχίζομε κατόπι:

Ὁ ἀριθμὸς 4 τῆς πρώτης σειρᾶς διαιρεῖται διὰ 2. Τὸ 2 εἰς τὸ 4 πάει 2 φορές. Τὸ 2 τὸ γράφομε κάτω ἀπὸ τὸ 4 τῆς πρώτης σειρᾶς. Ὁ ἀριθμὸς 10 διαιρεῖται διὰ 2. Τὸ 2 εἰς τὸ 10 πάει 5 φορές. Γράφομε τὸ 5 κάτω ἀπὸ τὸ 10.

Στὴν δευτέρα σειρὰ ἔχομε τοὺς ἀριθμοὺς 5, 4, 2, 5. Ἔχομε πάλι δύο τοὐλάχιστον ἀριθμοὺς ποὺ διαιροῦνται διὰ 2. Γράφομε δίπλα στὴν κατακόρυφη γραμμή, καὶ κάτω ἀπὸ τὸ πρῶτο, τὸ δεύτερο 2, καὶ λέμε: Τὸ 5 δὲν διαιρεῖται διὰ 2. Τὸ ξαναγράφομε ἀπὸ κάτω. Τὸ 2 εἰς τὸ 4 πάει 2 φορές. Τὸ γράφομε κάτω ἀπὸ τὸ 4. Τὸ 2 εἰς 2 πάει 1 φορά. Τὸ γράφομε κάτω ἀπὸ τὸ 2. Τὸ 5 δὲν διαιρεῖται διὰ 2. Τὸ ξαναγράφομε ἀπὸ κάτω.

Στὴν τρίτη σειρὰ ἔχομε τοὺς ἀριθμοὺς 5, 2, 1, 5. Ἐδῶ, δὲν ἔχομε δύο τοὐλάχιστον ἀριθμοὺς ποὺ νὰ διαιροῦνται διὰ 2, ἢ διὰ 3, ἢ διὰ 4. Ἔχομε δύο ἀριθμούς, ποὺ διαιροῦνται διὰ 5. Τὸν ἀριθμὸ 5 γράφομε δίπλα στὴν κατακόρυφη στήλη καὶ κάτω ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ 2, καὶ συνεχίζομε. Τὸ 5 εἰς τὸ 5 πάει 1 φορά. Τὸ πηλίκον 1 τὸ γράφομε κάτω ἀπὸ τὸ 5. Ξαναγράφομε τὸ 2 καὶ τὸ 1 στὴν τετάρτη σειρά, γιατὶ δὲν διαιροῦνται διὰ 5, καὶ συνεχίζομε: Τὸ 5 εἰς τὸ 5 πάει 1 φορά. Τὸ πηλίκον 1, τὸ γράφομε κάτω ἀπὸ τὸ 5.

Στὴν τετάρτη σειρὰ ἔχομε τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 1, 1. Ἄλλη διαίρεσις δὲν γίνεται. Τότε πολλαπλασιάζομε τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ εὑρήκαμε δεξιὰ ἀπὸ τὴν κατακόρυφη στήλη καὶ τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ εὑρήκαμε στὴν τελευταία σειρά.

Ἔτσι ἔχομε: $2 \times 2 \times 5 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 = 40$. Ε.Κ.Π. $= 40$

3. Ὅταν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ ἔχουν κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα, τότε οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι ***πρῶτοι*** πρὸς ἀλλήλους καὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.

Ἔχομε π.χ. τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{3}{4}, \frac{2}{7}, \frac{6}{9}$.

Οἱ παρονομασταὶ 4, 7, 9 ἔχουν κοινὸν διαιρέτην μόνον τὴ μονάδα. Ἑπομένως Ε.Κ.Π. τῶν τριῶν αὐτῶν ἀριθμῶν εἶναι τὸ γινόμενόν τους: $4 \times 7 \times 9 = 252$.

$$\text{Ἔτσι ἔχομε: } \overbrace{\frac{3}{4}}^{63}, \overbrace{\frac{2}{7}}^{36}, \overbrace{\frac{6}{9}}^{28} \quad \text{Ε.Κ.Π.} = 252$$

$$\frac{189}{252}, \frac{72}{252}, \frac{168}{252}$$

Τὸν ἴδιον ἀριθμὸν — 252 — θὰ εὑρίσκαμε ἂν ἐπιχειρούσαμε νὰ τὸν βροῦμε καὶ μὲ τὸν τρόπο ποὺ ὑπεδείξαμε στὴν παραπάνω παράγραφον 2. Δοκιμάσατε μόνοι σας.

Ἀσκήσεις

4. Νὰ γίνουν ὁμώνυμα τὰ παρακάτω ἑτερώνυμα κλάσματα:

α) $\frac{4}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{3}$

β) $\frac{6}{15}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{9}{12}$

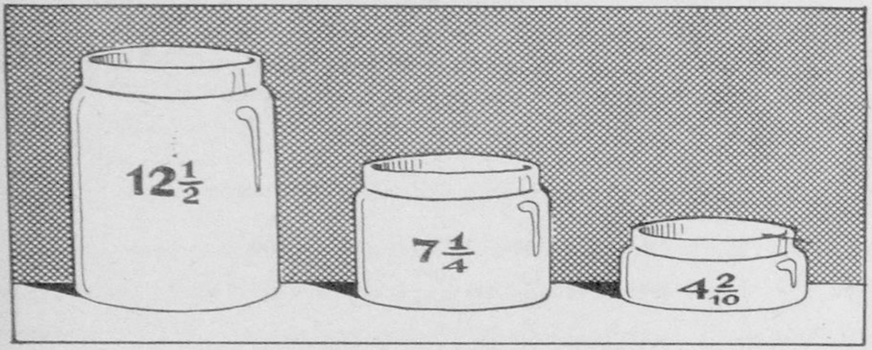
γ) $\frac{10}{20}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{2}{5}$

Προβλήματα

1. Ὁ Τάκης πάει στὴν Πέμπτη τάξι. Ξεύρει καλὰ τὰ κλάσματα. Γιὰ νὰ πειράξῃ ὅμως τὸν ἀδελφό του καὶ τὰ δύο ἐξαδέλφια του, τοὺς λέει: Θὰ κόψω ἕνα μῆλο: στὸν πρῶτον θὰ δώσω τὸ $\frac{1}{5}$, στὸν δεύτερον τὰ $\frac{3}{8}$ καὶ στὸν τρίτον τὰ $\frac{6}{20}$. Ἐκεῖνοι κλαῖνε καὶ δὲν ξεύρουν ποιός θὰ πάρῃ τὸ μεγαλύτερο κομμάτι. Νὰ τὸ εὕρετε σεῖς.

2. Δῶσε μου $\frac{8}{10}$ τῆς δραχμῆς γιὰ τὸ σέλινο ποὺ ἀγόρασες, λέει ὁ λαχανοπώλης στὸν Κωστάκη. Ὁ Κωστάκης ὅμως ξεύρει καλὰ τὰ κλάσματα, καὶ γιὰ νὰ τὸν πειράξῃ, τοῦ λέει: —Θὰ σᾶς δώσω μόνον $\frac{4}{5}$ τῆς δραχμῆς, γιατὶ δὲν ἔχω ἄλλα. Ὁ λαχανοπώλης ἐθύμωσε. Τί λέτε; Εἶχε δίκιο νὰ θυμώσῃ;

3. Ὁ Χρῖστος ἀγόρασ' ἐφέτος τέσσερα βιβλία: α) Ἀριθμητικὴν κι' ἔδωσε $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκαδράχμου, β) Ἱστορίαν κι' ἔδωσε $\frac{9}{10}$ τοῦ δεκαδράχμου. γ) Φυσικὴν Πειραματικὴν κι' ἔδωσε $\frac{3}{4}$ τοῦ δεκαδράχμου καὶ καὶ δ) Θρησκευτικὰ κι' ἔδωσε $\frac{1}{2}$ τοῦ δεκαδράχμου. Ποιό ἦταν τὸ ἀκριβώτερο βιβλίο;



ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

1. Πρόσθεσις ὁμωνύμων κλασμάτων

1. Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησε ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα τὴν πρώτην ἡμέρα τὰ $\frac{4}{20}$, τὴν δευτέραν ἡμέρα τὰ $\frac{7}{20}$, τὴν τρίτην ἡμέρα τὰ $\frac{2}{20}$ καὶ τὴν τετάρτην ἡμέρα τὰ $\frac{5}{20}$. Πόσο ὕφασμα ἐπώλησε ;

Λύσις

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ κάμωμε πρόσθεσιν :

$$\frac{4}{20} + \frac{7}{20} + \frac{2}{20} + \frac{5}{20}$$

Καὶ τὰ τέσσερα κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα. Μποροῦμε, λοιπόν, ἀμέσως νὰ κάνωμε τὴν πρόσθεσιν. Ὅπως θὰ ἐλέγαμε, 4 μέτρα καὶ 7 μέτρα καὶ 2 μέτρα καὶ 5 μέτρα ὑφάσματος, κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο θὰ ποῦμε :

$$\frac{4}{20} + \frac{7}{20} + \frac{2}{20} + \frac{5}{20} = \frac{18}{20} \text{ τοῦ ὑφάσματος}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν ποῦ τὸ ἐγράψαμε ; Παρονομαστὴν ποιὸν ἐγράψαμε; Μπορούσαμε νὰ γράψωμε ἄλλον παρονομαστήν; Γιατί;

Ἑπομένως, καταλήγομε στὸ συμπέρασμα : Συμπληρώσατέ το :

Ὅταν ἔχωμε νὰ προσθέσωμε ὁμώνυμα κλάσματα ....

....

Καμμιὰ φορὰ οἱ προσθετέοι δυνατὸν νὰ μᾶς δώσουν ἄθροισμα ἕνα καταχρηστικὸν κλάσμα. Θὰ κάνωμε ἀμέσως ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων, ὅπως ἐμάθαμε στὰ προηγούμενα κεφάλαια.

Ἀσκήσεις

Νὰ προσθέσετε τὰ παρακάτω ὁμώνυμα κλάσματα:

α) $\frac{4}{100}+\frac{15}{100}+\frac{80}{100}+\frac{35}{100}+\frac{20}{100}=$

β) $\frac{6}{25}+\frac{14}{25}+\frac{20}{25}+\frac{15}{25}+\frac{8}{25}=$

γ) $\frac{8}{10}+\frac{7}{10}+\frac{9}{10}+\frac{4}{10}+\frac{2}{10}=$

δ) $\frac{7}{15}+\frac{12}{15}+\frac{6}{15}+\frac{3}{15}+\frac{5}{15}=$

2. Πρόσθεσις μικτῶν καὶ κλασμάτων μὲ ὁμώνυμα κλάσματα

1. Ἕνας κηπουρὸς συνέλεξε αὐτὴν τὴν ἑβδομάδα ἀπὸ τὸ περιβόλι του διάφορες ποσότητες φασολάκια. Τὴν Δευτέρα $3\frac{100}{1000}$ χλγρ., τὴν Τρίτη μόνο $\frac{500}{1000}$ χλγρ., τὴν Πέμπτη $5\frac{300}{1000}$ χλγρ., τὴν Παρασκευὴ μόνον $\frac{700}{1000}$ χλγρ. καὶ τὸ Σάββατο $7\frac{800}{1000}$ χλγρ. Πόσα χιλιόγραμμα φασολάκια συνέλεξε ὅλην τὴν ἑβδομάδα;

Λύσις

Οἱ ἀριθμοὶ ποὺ ἔχομε νὰ προσθέσωμε εἶναι μικτοὶ καὶ κλασματικοί. Ὅλα τὰ κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα. Ἂν ὑπῆρχον μόνον ἀκέραιοι, τί θὰ ἐκάναμε; Σ' αὐτούς, λοιπὸν τοὺς ἀριθμούς, ποὺ ὑπάρχουν καὶ ἀκέραιοι καὶ κλάσματα, τί ἐνέργειες θὰ κάνωμε;

Καταλήξατε στὸ συμπέρασμα πῶς γίνεται ἡ πρόσθεσις μικτῶν καὶ κλασμάτων, ὅταν ὅλα τὰ κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα, καὶ γράψατέ το κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον, ἀλλ' ἀφοῦ τὸ συμπληρώσετε:

Ὅταν ἔχωμε νὰ προσθέσωμε μικτοὺς ἀριθμοὺς καὶ κλασματικοὺς μὲ κλάσματα ὁμώνυμα, πρῶτα προσθέτομε ....
καὶ κατόπιν ....

Ἂν στὸν μικτὸν τοῦ ἀθροίσματος ἔχωμε καταχρηστικὸν κλάσμα, τότε θὰ βγάλωμε τὶς ἀκέραιες μονάδες, τὶς ὁποῖες θὰ προσθέσωμε στὶς ἄλλες ἀκέραιες μονάδες, ποὺ ἔχομε βρῆ.

Ἔχομε, λοιπόν: $3\frac{100}{1000} + \frac{500}{1000} + 5\frac{300}{1000} + \frac{700}{1000} + 7\frac{800}{1000} = 15\frac{2400}{1000} = 17\frac{400}{1000}$ χιλιόγραμμα.

Προβλήματα

2. Ἕνας μικροπωλητὴς γυρίζει στὰ χωριὰ καὶ πωλεῖ ὑφάσματα: Στὸ πρῶτο χωριὸ ἐπώλησε $16\frac{25}{100}$ μέτρα ὕφασμα, στὸ δεύτερο $22\frac{40}{100}$ μέτρ., στὸ τρίτο $11\frac{80}{100}$ μέτρα καὶ στὸ τέταρτο $20\frac{50}{100}$ μέτρα. Πόσα μέτρα ὕφασμα ἐπώλησε καὶ στὰ τέσσερα χωριά;

3. Ἄλλος μικροπωλητὴς γυρίζει στὴν συνοικία μας καὶ πωλεῖ ψιλικά. Ἀπὸ τὸ πρῶτο σπίτι εἰσέπραξε $18\frac{4}{5}$ δραχμές, ἀπὸ τὸ δεύτερο $15\frac{2}{5}$ δραχ., ἀπὸ τὸ τρίτο $24\frac{3}{5}$ δραχ., καὶ ἀπὸ τὸ τέταρτο $17\frac{1}{5}$ δραχ. Πόσες δραχμὲς εἰσέπραξε ἐν ὅλῳ;

4. Στὴν γωνία τῆς ἀγορᾶς κάθεται ἕνας γέρος καὶ πωλεῖ τσιγάρα, σπίρτα, κλπ. εἴδη. Προχθὲς εἰσέπραξε $65\frac{1}{4}$ δραχμές, χθὲς εἰσέπραξε $10\frac{3}{4}$ δραχ., καὶ σήμερα εἰσέπραξε $30\frac{2}{4}$ δραχ. Πόσα εἰσέπραξε καὶ τὶς τρεῖς ἡμέρες;

5. Ἕνας παραγωγὸς ἐπώλησε, κατὰ διαστήματα, τὶς παρακάτω ποσότητες σταφίδος. Τὴν πρώτη φορὰ ἐπώλησε $150\frac{5}{10}$ χλγρ., τὴν δευτέρα φορὰ $240\frac{7}{10}$ χλγρ., τὴν τρίτη φορὰ ἐπώλησε $195\frac{6}{10}$ χλγρ. καὶ τὴν τετάρτη φορὰ ἐπώλησε $310\frac{8}{10}$ χλγρ. Πόση σταφίδα ἐπώλησε ἐν ὅλῳ;

3. Πρόσθεσις ἑτερωνύμων κλασμάτων

1. Τέσσαρες χωρικὲς ἐμπῆκαν σ' ἕνα κατάστημα νὰ ψωνίσουν βαφὲς γιὰ τὶς μάλλινες κουβέρτες των. Ἡ πρώτη ἀγόρασε $\frac{200}{1000}$ τοῦ χλγρ., ἡ δευτέρα $\frac{4}{10}$ τοῦ χλγρ., ἡ τρίτη $\frac{3}{4}$ τοῦ χλγρ. καὶ ἡ τετάρτη $\frac{1}{2}$ τοῦ χλγρ. Πόσο ἦταν τὸ ὁλικὸ βάρος τῆς βαφῆς ποὺ ἀγόρασαν καὶ οἱ τέσσαρες χωρικές;

Λύσις

Ἐδῶ, ἔχομε νὰ προσθέσωμε ἑτερώνυμα κλάσματα. Μποροῦν, ὅμως, νὰ προστεθοῦν προτοῦ νὰ γίνουν ὁμώνυμα; Ὄχι! Λοιπόν, ἡ πρώτη μας δουλειὰ εἶναι νὰ κάνωμε τὰ κλάσματα ὁμώνυμα. Ὅλοι ξεύρομε πῶς θὰ γίνουν ὁμώνυμα. Ἐγὼ γράφω μόνον τὴν ἄσκησιν καὶ σεῖς νὰ τὴν δικαιολογήσετε.

$$\overbrace{\frac{200}{1000}}^{1} + \overbrace{\frac{4}{10}}^{100} + \overbrace{\frac{3}{4}}^{250} + \overbrace{\frac{1}{2}}^{500} = \qquad \text{Ε.Κ.Π.} = 1000$$

$$= \frac{200}{1000} + \frac{400}{1000} + \frac{750}{1000} + \frac{500}{1000} = \frac{1850}{1000} = 1\frac{850}{1000} \text{ χλγρ.}$$

Ἔτσι καταλήγομε στὸν ἑξῆς κανόνα, τὸν ὁποῖον, ἀφοῦ συμπληρώσετε, νὰ γράψετε στὸ τετράδιο:

Γιὰ νὰ προσθέσωμε ἑτερώνυμα κλάσματα, πρῶτα θὰ τὰ .... καὶ κατόπι θὰ ....

2. Νὰ γράψετε προβλήματα μὲ λόγια, παίρνοντας τοὺς παρακάτω ἀριθμούς:

α) $\frac{2}{10}$ δραχ. + $\frac{3}{4}$ δραχ. + $\frac{10}{20}$ δραχ. + $\frac{50}{100}$ δραχ. =

β) $\frac{7}{10}$ μέτρ. + $\frac{3}{4}$ μέτρ. + $\frac{1}{5}$ μέτρ. =

γ) $\frac{45}{60}$ ὥρας + $\frac{2}{4}$ ὥρας + $\frac{1}{2}$ ὥρας =

δ) $\frac{70}{100}$ χλγρ. + $\frac{9}{10}$ χλγρ. + $\frac{3}{4}$ χλγρ. =

ε) $\frac{3}{4}$ ἔτη + $\frac{6}{12}$ ἔτη + $\frac{1}{2}$ ἔτη =

4. Πρόσθεσις μικτῶν καὶ κλασματικῶν ἀριθμῶν μὲ κλάσματα ἑτερώνυμα

1. Ἕνας παντοπώλης ἔλαβε χθὲς ἀπὸ τὸ Κρανίδι τρία βαρέλια λάδι καὶ δύο φιάλες λάδι γιὰ δεῖγμα. Τὸ πρῶτο βαρέλι περιεῖχε $63\frac{3}{4}$ χλγρ. λάδι, τὸ δεύτερο $68\frac{5}{10}$ χλγρ. λάδι, καὶ τὸ τρίτο $64\frac{1}{2}$ χλγρ. λάδι. Ἐπί-

σης ἡ πρώτη φιάλη περιεῖχε $\frac{3}{5}$ χλγρ. λάδι καὶ ἡ δευτέρα $\frac{50}{100}$ χλγρ. λάδι. Πόσα χλγρ. λάδι ἔλαβε ἐν ὅλῳ ὁ παντοπώλης ;

Λ ύ σ ι ς

Οἱ ἀριθμοί, ποὺ ἔχομε νὰ προσθέσωμε, εἶναι μικτοὶ καὶ κλασματικοί, μὲ κλάσματα ἑτερώνυμα. Ἂν εἴχαμε μόνον ἀκεραίους ἀριθμούς, τί θὰ ἐκάναμε ; Ἂν εἴχαμε μόνον ἑτερώνυμα κλάσματα, τί θὰ ἐκάναμε ; Τώρα ποὺ ἔχομε καὶ ἀκεραίους καὶ ἑτερώνυμα κλάσματα, πῶς θὰ γίνῃ ἡ ἐργασία μας ;

Ἐγὼ κάνω τὴν ἄσκησι καὶ σεῖς νὰ τὴν δικαιολογήσετε.

$$63\overbrace{\tfrac{3}{4}}^{25} + 68\overbrace{\tfrac{5}{10}}^{10} + 64\overbrace{\tfrac{1}{2}}^{50} + \overbrace{\tfrac{3}{5}}^{20} + \overbrace{\tfrac{50}{100}}^{1} = \quad \text{Ε.Κ.Π.} = 100$$

$$= 63\frac{75}{100} + 68\frac{50}{100} + 64\frac{50}{100} + \frac{60}{100} + \frac{50}{100} = 195\frac{285}{100} = 197\frac{85}{100}$$

Λίγη προσοχή. Ὅταν κάνωμε τὰ κλάσματα ὁμώνυμα, τοὺς ἀκεραίους τοὺς ἀφήνομε ὅπως εἶναι. Ὅταν ὁ μικτὸς τοῦ ἀθροίσματος τύχῃ νὰ ἔχῃ κλάσμα καταχρηστικό, τότε βγάζομε τὶς ἀκέραιες μονάδες καὶ τὶς προσθέτομε μὲ τὶς ἄλλες ἀκέραιες. Τὸ ὑπόλοιπο — ἂν ὑπάρχῃ — τὸ γράφομε ὡς κλάσμα.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

2. Ἀπὸ τὸ ἡμερολόγιο ἑνὸς τυροκομείου ἀντιγράφω :

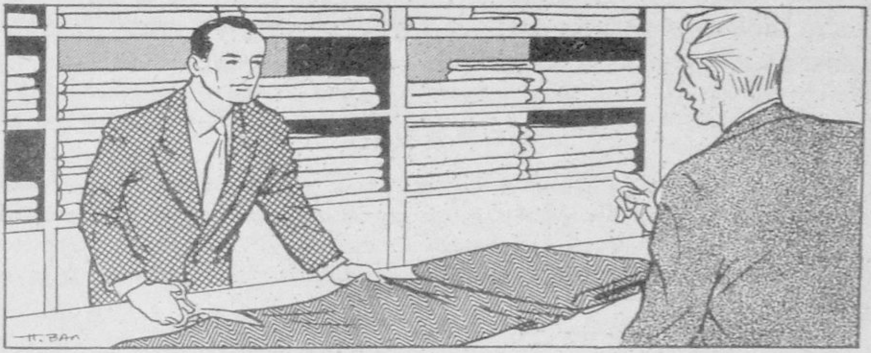
25 Μαΐου 1960. Παραγωγή : $75\frac{1}{2}$ χλγρ. τυρί, $28\frac{2}{5}$ χλγρ. βούτυρο, $12\frac{3}{10}$ χλγρ. μυζῆθρες.

26 Μαΐου 1960. Παραγωγή : $84\frac{1}{5}$ χλγρ. τυρί, $16\frac{5}{20}$ χλγρ. βούτυρο, $14\frac{50}{100}$ χλγρ. μυζῆθρες.

27 Μαΐου 1960. Παραγωγή : $60\frac{15}{20}$ χλγρ. τυρί, $20\frac{5}{8}$ χλγρ. βούτυρο, $18\frac{3}{5}$ χλγρ. μυζῆθρες.

Πόσα χιλιόγραμμα τυρί, πόσα, βούτυρο καὶ πόσα, μυζῆθρες, χωριστά, παρήγαγε τὸ τυροκομεῖον σ' αὐτὲς τὶς τρεῖς ἡμέρες ;

3. Συντάξατε μόνοι σας τέτοια προβλήματα ἀπὸ τὴ ζωὴ τοῦ σπιτιοῦ σας, τῶν συγγενῶν σας, τοῦ σχολείου σας.



ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων ἔχει πολλὲς περιπτώσεις· δώσατε μόνον περισσότερη προσοχὴ καὶ δὲν θὰ δοκιμάσετε καμμία δυσκολία.

1. Ἀφαίρεσις ὁμωνύμων κλασμάτων καὶ μικτῶν μὲ ὁμώνυμα κλάσματα

1. Ὁ Τάσος εἶχε $\frac{80}{100}$ τῆς δραχμῆς κι' ἔδωσε γιὰ καραμέλλες τὰ $\frac{50}{100}$. Πόσα τοῦ ἔμειναν;

Λύσις

Ἡ σκέψις μᾶς λέγει ὅτι τοῦ ἔμειναν $\frac{30}{100}$. Καὶ οἱ ἀριθμοὶ τὸ ἴδιο πρέπει νὰ δείξουν:

$$\frac{80}{100} - \frac{50}{100} = \frac{30}{100} \text{ τῆς δραχμῆς.}$$

Ποῦ ἐγράψαμε τὸ ὑπόλοιπον ἀπὸ τὴν ἀφαίρεσι τῶν δύο ἀριθμητῶν; Ποιὸν ἀριθμὸ ἐγράψαμε ὡς παρονομαστήν; Ἦταν δυνατὸν νὰ γράψωμε ἄλλον παρονομαστήν; Ναί, ἢ ὄχι καὶ γιατί;

Τὸ συμπέρασμα νὰ τὸ ἀντιγράψετε, συμπληρωμένο, στὸ τετράδιο.

Γιὰ νὰ ἀφαιρέσωμε κλάσμα ἀπὸ ἄλλο κλάσμα ὁμώνυμο ἀφαιροῦμε ....

ΣΗΜ.: Ὅταν τελειώνῃ κάθε πρᾶξις νὰ κάνετε τὴν δοκιμή, προσθέτοντας τὸ ὑπόλοιπον καὶ τὸν ἀφαιρετέον κι' εὑρίσκοντας τὸν μειωτέον.

2. Γιὰ νὰ συντομεύωμε τὶς περιπτώσεις:

$$16\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = 16\frac{2}{8}.$$

Τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ $\frac{5}{8}$. Ὁ ἀκέραιος μένει ὅπως εἶναι.

Κάμετε τὴν δοκιμή.

$$3. \quad 24\frac{2}{4} - \frac{3}{4} = 23\frac{6}{4} - \frac{3}{4} = 23\frac{3}{4}$$

Τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{4}$. Παίρνομε μίαν ἀκεραία μονάδα ἀπὸ τὶς 24 καὶ μένουν 23. Τὴν ἀκεραία μονάδα τὴν κάνομε $\frac{4}{4}$ καὶ $\frac{2}{4}$ ποὺ ἔχομε στὸν μειωτέον, γίνονται $\frac{6}{4}$. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὁ ἀριθμὸς $24\frac{2}{4}$ ἔγινε $23\frac{6}{4}$, πρᾶγμα ποὺ εἶναι τὸ ἴδιο, γιατὶ τὸ κλάσμα $\frac{6}{4}$ εἶναι $1\frac{2}{4}$. Ἂν ξαναπροστεθῇ, λοιπόν, στὸν ἀκέραιον 23, τότε ξαναγίνεται ὁ ἀρχικὸς μειωτέος. Ἀπὸ τὸν ἀριθμόν, λοιπόν, $23\frac{6}{4}$ ἀφαιρεῖται τό κλάσμα $\frac{3}{4}$. Ὁ ἀκέραιος θὰ μείνῃ ὅπως εἶναι, κι' ἔτσι θὰ ἔχωμε ὑπόλοιπον $23\frac{3}{4}$.

Κάμετε τὴν δοκιμή.

$$4. \quad 50\frac{4}{5} - 25\frac{1}{5} = 25\frac{3}{5}$$

Ὁ ἀκέραιος ἀπὸ τὸν ἀκέραιον ἀφαιρεῖται καὶ τὸ κλάσμα ἀπὸ τὸ κλάσμα ἀφαιρεῖται. Ἡ πρᾶξις δὲν παρουσιάζει καμμία δυσκολία.

Κάμετε τὴν δοκιμή.

$$5. \quad 17\frac{2}{10} - 8\frac{4}{10} = 16\frac{12}{10} - 8\frac{4}{10} = 8\frac{8}{10}$$

Ὁ ἀκέραιος ἀπὸ τὸν ἀκέραιον ἀφαιρεῖται, ἀλλὰ τὸ κλάσμα ἀπὸ τὸ κλάσμα δὲν ἀφαιρεῖται. Παίρνομε μίαν ἀκεραία μονάδα ἀπὸ τὶς 17 καὶ μένουν 16. Τὴν ἀκεραία μονάδα τὴν κάνομε $\frac{10}{10}$ καὶ $\frac{2}{10}$ ποὺ ἔχομε στὸν μειωτέον, γίνονται $\frac{12}{10}$. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὁ ἀριθμὸς $17\frac{2}{10}$ ἔγινε $16\frac{12}{10}$. πρᾶγμα ποὺ εἶναι τὸ ἴδιο, ὅπως διεπιστώσαμε καὶ στὴν περίπτωσιν 3. Ὅπως ἔγιναν οἱ ἀριθμοί, ὁ ἀκέραιος ἀπὸ τὸν ἀκέραιον ἀφαιρεῖται καὶ τὸ κλάσμα ἀπὸ τὸ κλάσμα ἀφαιρεῖται.

Κάμετε τὴν δοκιμὴ καὶ βρῆτε τὸν ἀρχικὸν μειωτέον.

$$6. \quad 25 - \frac{3}{4} = 24\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = 24\frac{1}{4}$$

Γιὰ νὰ γίνῃ αὐτὴ ἡ ἀφαίρεσις πρέπει κι' ὁ μειωτέος ν' ἀποκτήσῃ ἕνα κλάσμα. Παίρνομεν μίαν ἀκεραία μονάδα ἀπὸ τὶς 25 καὶ τὴν κάνομε $\frac{4}{4}$ γιατὶ καὶ τὸ ἄλλο κλάσμα εἶναι τέταρτα. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, ὁ ἀκέραιος 25 ἔγινε ὁ μικτὸς $24\frac{4}{4}$ ποὺ εἶναι τὸ ἴδιο, ὅπως διεπιστώσαμε καὶ στὶς περιπτώσεις 3 καὶ 5. Ἡ πρᾶξις τώρα δὲν παρουσιάζει καμμίαν δυσκολία: θὰ γίνῃ ὅπως στὴν περίπτωσιν 2.

Κάμετε τὴν δοκιμὴ καὶ βρῆτε τὸν ἀρχικὸν μειωτέον.

$$7. \quad 40 - 20\frac{2}{6} = 39\frac{6}{6} - 20\frac{2}{6} = 19\frac{4}{6}$$

Γιὰ νὰ γίνῃ αὐτὴ ἡ ἀφαίρεσις πρέπει ὁ μειωτέος νὰ γίνῃ μικτὸς ἀφοῦ κι' ὁ ἀφαιρετέος εἶναι μικτός. Ὁ ἀκέραιος θὰ γίνῃ μικτὸς ὅπως ἀκριβῶς ἀνεφέραμε στὴν παραπάνω περίπτωσιν. Κατόπιν ἡ ἀφαίρεσις γίνεται ὅπως στὴν περίπτωσιν 4 χωρὶς καμμίαν δυσκολία.

Κάμετε τὴν δοκιμὴ καὶ βρῆτε τὸν ἀρχικὸν μειωτέον.

$$8. \quad 25\frac{5}{10} - 15 = 15\frac{5}{10}$$

Ἀφαιροῦμε τὸν ἀκέραιον ἀπὸ τὸν ἀκέραιον καὶ κατόπιν γράφομε καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου.

Κάμετε τὴν δοκιμή.

Προβλήματα

1. Ἀπὸ $24\frac{400}{1000}$ χλγρ. λάδι ποὺ εἴχαμε στὸ σπίτι ἐκαταναλώσαμε αὐτὸν τὸν μῆνα $5\frac{600}{1000}$ χλγρ. Πόσο λάδι ἀπέμεινε;

2. Στὸ πανηγύρι τοῦ Συνοικισμοῦ ὁ Βαγγελάκης ἀπὸ τὶς 20 δραχ. ποὺ τοῦ ἔδωσε ὁ μπαμπάς του, ἐξώδευσε γιὰ καραμέλλες καὶ λουκούμια $7\frac{1}{4}$ δραχ. Πόσες δραχμὲς τοῦ ἔμειναν;

3. Στὸν κουμπαρά της ἡ Ἀφροδίτη εἶχε $145\frac{3}{10}$ δραχ., ἔδωσε ὅμως γιὰ τὰ βιβλία της $126\frac{4}{10}$ δραχ. Πόσες δραχμὲς ἀπέμειναν;

4. Ἀπὸ ἕνα τόπι ὑφάσματος $24\frac{1}{4}$ μέτρων ἐπωλήθησαν $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου. Πόσο ὕφασμα ἀπέμεινε;

5. Ἡ Κικὴ ἀγόρασε $2\frac{90}{100}$ μέτρα κορδέλλα καὶ ἡ Ἄννα $7\frac{50}{100}$ μέτρα κορδέλλα. Πόσα μέτρα περισσότερη κορδέλλα ἀπὸ τὴν Κικὴ ἀγόρασε ἡ Ἄννα;

2. Ἀφαίρεσις ἑτερωνύμων κλασμάτων καὶ μικτῶν μὲ ἑτερώνυμα κλάσματα

Στὴν προηγουμένην παράγραφον συναντήσαμε ὀκτὼ περιπτώσεις ἀφαιρέσεως. Ἀλλὰ στὴν ἀφαίρεσι ἑτερωνύμων κλασμάτων καὶ μικτῶν μὲ ἑτερώνυμα κλάσματα, θὰ συναντήσωμε πέντε περιπτώσεις. Στὶς περιπτώσεις αὐτές, προτοῦ γίνῃ ἡ ἀφαίρεσις, πρέπει τὰ κλάσματα νὰ γίνουν ὁμώνυμα. Κατόπι, σὲ κάθε περίπτωσιν θὰ συμβουλευώμεθα τί ἐκάναμε μὲ τὰ ὁμώνυμα κλάσματα.

Ἂς λύσωμε μαζὶ ἕνα πρόβλημα.

1. Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησε χθὲς ἀπὸ ἕνα τόπι ὑφάσματος μήκους $40\frac{1}{2}$ μέτρων, τὰ $17\frac{3}{4}$ μέτρα. Πόσο ὕφασμα ἀπέμεινε;

Λύσις

$$40\overbrace{\frac{1}{2}}^{2} - 17\overbrace{\frac{3}{4}}^{1} = \qquad \text{Ε.Κ.Π.} = 4$$

$$= 40\frac{2}{4} - 17\frac{3}{4} = 39\frac{6}{4} - 17\frac{3}{4} = 22\frac{3}{4}$$

Σκέψις

Ἐδῶ ἔχομε νὰ ἀφαιρέσωμε μικτὸν ἀπὸ μικτὸν μὲ κλάσματα ἑτερώνυμα. Γιὰ νὰ γίνῃ ἡ ἀφαίρεσις πρέπει τὰ κλάσματα νὰ γίνουν ὁμώνυμα. Γιὰ νὰ γίνουν ὁμώνυμα πρέπει νὰ εὕρωμε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον. Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον παίρνομε τὸν μεγαλύτερον παρονομαστὴν καὶ βλέπομε ἂν διαιρῆται μὲ τὸν ἄλλον παρονομαστήν. Ἂν δὲν διαιρῆται τὸν διπλασιάζομε, ἢ τὸν τριπλασιάζομε, κλπ., ὡς ὅτου εὕρωμε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον καὶ τῶν δύο παρονομαστῶν. Ἂν διαιρῆται, ὅπως τοῦτο συμβαίνει στὸ πρόβλημά μας, τότε τὸν γράφομε ὡς Ε.Κ.Π. Κατόπι κάνομε τὰ κλάσματα ὁμώνυμα. Ἀφοῦ γίνουν τὰ κλάσματα ὁμώνυμα, κοιτάζομε νὰ ἰδοῦμε ἂν τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου ἀφαιρῆται ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου. Ἂν ἀφαιρῆται, τότε προχωροῦμε κανονικὰ στὴ ἀφαίρεσι, ἀφαιρώντας, πρῶτα, ἀκέραιον ἀπὸ ἀκέραιον καὶ κατόπιν κλάσμα ἀπὸ κλάσμα.

Ἂν ὅμως τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου δὲν ἀφαιρῆται ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου, ὅπως τοῦτο συμβαίνει στὸ πρόβλημά μας, τότε δανειζόμεθα μίαν ἀκεραίαν μονάδα ἀπὸ τὸν ἀκέραιον τοῦ μειωτέου καὶ μένουν 39. Τὴν ἀκεραία μονάδα τὴν κάνομε $\frac{4}{4}$ καὶ $\frac{2}{4}$ ποὺ ἔχει ὁ μειωτέος γίνονται $\frac{6}{4}$. Ὁ μειωτέος $40\frac{2}{4}$ ἔγινε τώρα $39\frac{6}{4}$, πρᾶγμα ποὺ εἶναι τὸ ἴδιο, ὅπως ἀπεδείξαμε σὲ προηγούμενες περιπτώσεις. Τώρα ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὸν $39\frac{6}{4}$ τὸν ἀφαιρετέον $17\frac{3}{6}$ κι᾽ ἔχομε ὑπόλοιπον ὑφάσματος $22\frac{3}{4}$ μέτρα.

Κάμετε τὴν δοκιμὴ καὶ νὰ φθάσετε στὸν ἀρχικὸν μειωτέον.

Ὅταν πρόκειται νὰ κάμετε ἀφαίρεσιν μικτοῦ ἀπὸ μικτόν, ἢ κλάσματος ἀπὸ μικτόν, ἢ κλάσματος ἀπὸ κλάσμα, μὲ κλάσματα, ἐννοεῖται, ἑτερώνυμα, ν᾽ ἀκολουθῆτε τὴν παραπάνω σκέψι. Αὐτὴ ἡ σκέψις μᾶς βοηθεῖ νὰ φθάσωμε ἀπὸ τὴ μιὰν ἄκρη τοῦ προβλήματος στὴν ἄλλη καὶ νὰ ξαναγυρίσωμε ἀπὸ ἐκεῖ ποὺ ξεκινήσαμε, γιὰ νὰ ἐπιτύχωμε, μ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον, τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Προβλήματα

2. Ὁ Νῖκος ἐργάσθηκε $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας, ἐνῶ ὁ Γιῶργος ἐργάσθηκε $\frac{30}{60}$ τῆς ὥρας. Ποιός ἀπὸ τοὺς δύο ἐργάσθηκε περισσότερο καὶ πόσο ;

3. Ἀπὸ ἕνα σακκὶ ἀλεῦρι ποὺ ζυγίζει $50\frac{3}{10}$ χλγρ. ἐπώλησεν ὁ παντοπώλης τὸ $\frac{1}{2}$ χλγρ. Πόσο ἀλεῦρι ἔμεινε ἀκόμη στὸ σακκί ;

4. Ἕνα αὐτοκίνητο τρέχει μὲ $45\frac{80}{100}$ χλμ. τὴν ὥρα, ἐνῶ ἕνα δεύτερο αὐτοκίνητο τρέχει μὲ $60\frac{1}{4}$ χλμ. τὴν ὥρα. Πόσα χλμ. τὴν ὥρα περισσότερο τρέχει τὸ δεύτερο αὐτοκίνητο ;

5. Δύο ἀδέλφια ἔχουν τὴν ἑξῆς ἡλικία: ὁ πρῶτος εἶναι $11\frac{3}{4}$ ἐτῶν ἐνῶ ὁ δεύτερος εἶναι $8\frac{6}{12}$ ἐτῶν. Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ ἡλικίας τοῦ πρώτου ἀπὸ τὸν δεύτερον ;

6. Τὸ δοχεῖον πετρελαίου περιέχει $16\frac{7}{10}$ χλγρ. Ἐχρησιμοποιήσαμε στὴν γκαζιέρα $\frac{2}{4}$ τοῦ χλγρ. πετρέλαιο. Πόσο πετρέλαιο ἀπέμεινε στὸ δοχεῖον;

3. Προβλήματα μὲ πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν

1. Ὁ πατέρας τῆς Ἑλένης πῆγε στὴν ἀγορὰ νὰ ψωνίσῃ. Εἶχε στὸ πορτοφόλι του $84\frac{1}{2}$ δραχ. Ἔδωσε γιὰ κρέας $32\frac{1}{4}$ δραχ., γιὰ ρύζι $7\frac{2}{10}$ δραχ., γιὰ μπάμιες $5\frac{4}{5}$ δραχ. καὶ γιὰ τομάτες $4\frac{10}{100}$ δραχ. Πόσα ἔδωσε στὰ ψώνια καὶ πόσα τοῦ ἔμειναν;

2. Ἕνας παντοπώλης γιὰ νὰ κάμῃ ἕνα μῖγμα μαγειρικοῦ λίπους 100 χλγρ., ἀνέμιξε $36\frac{1}{4}$ χλγρ. λίπος, $53\frac{2}{5}$ χλγρ. μαργαρίνη καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ὡς τὰ 100 χλγρ. ἦταν βούτυρο. Πόσο βάρος εἶχε τὸ βούτυρο;

3. Ἕνα μεγάλο δοχεῖον τοματοπελτὲ ζυγίζει $22\frac{6}{10}$ χλγρ. Ὁ παντοπώλης ἐπώλησε τὴν μίαν ἡμέρα $2\frac{1}{2}$ χλγρ. καὶ τὴν ἄλλη $6\frac{3}{5}$ χλγρ. τοματοπελτέ. Πόσο εἶναι τὸ βάρος τοῦ τοματοπελτὲ ποὺ ἀπέμεινε στὸ δοχεῖον;

4. Ἀγοράσαμε γιὰ τὶς ἀνάγκες τοῦ σπιτιοῦ ἕνα δοχεῖον λάδι βάρους $16\frac{3}{4}$ χλγρ. Τὴν πρώτην ἑβδομάδα ἐξωδεύσαμε $2\frac{1}{5}$ χλγρ., τὴν δευτέρα ἑβδομάδα $1\frac{1}{4}$ χλγρ. τὴν τρίτην ἑβδομάδα $3\frac{6}{10}$ χλγρ. καὶ τὴν τετάρτην ἑβδομάδα $2\frac{50}{100}$ χλγρ. Πόσα χλγρ. λάδι ἀπέμεινε στὸ δοχεῖον;

5. Ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ ὡς τὴν Θεσσαλονίκη κάνομε, σιδηροδρομικῶς, $14\frac{30}{60}$ ὧρες. Ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ ὡς τὴ Λαμία ἐκάναμε $7\frac{1}{4}$ ὧρες. Ἀπὸ τὴ Λαμία ὡς τὴ Λάρισα ἐκάναμε $3\frac{10}{20}$ ὧρες. Πόσες ὧρες θὰ ταξιδεύωμε ἀκόμη, γιὰ νὰ φθάσωμε στὴ Θεσσαλονίκη.

6. Ἕνας μεγαλέμπορος ἔκαμε εἰσαγωγὴν 5.000 τόννων σακχάρεως. Ἔστειλε στοὺς ἀντιπροσώπους του τὶς παρακάτω ποσότητες: Θεσσαλονίκην $163\frac{1}{5}$ τόννους. Λάρισαν $72\frac{3}{4}$ τόννους, Ἰωάννινα $87\frac{6}{10}$ τόννους, Κόρινθον $26\frac{10}{20}$ τόννους καὶ Πάτρας $98\frac{15}{40}$ τόννους. Πόσοι τόννοι σακχάρεως ἀπέμειναν στὴν κεντρικὴν ἀποθήκην του;

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

(῾Υλικά: Τετράδια, μολύβια, πέννες, γομολάστιχες, καραμέλλες, σοκολάτες, κονδυλοφόροι, κόλλες διαγωνισμοῦ. Ἕνας μαθητὴς εἶναι πωλητὴς κι᾽ ἄλλος, ἀγοραστής. Κάθε φορά, ἀγοραστὴς καὶ πωλητὴς ἀλλάσσουν).

1. ῾Ο Παῦλος ἔρχεται ν᾽ ἀγοράσῃ 5 μολύβια. Τὸ κάθε μολύβι ἔχει $\frac{80}{100}$ τῆς δραχμῆς. Πόσα χρήματα θὰ δώσῃ;

Σκέψις

῾Ο πωλητὴς σκέπτεται. Ξεύρει πόσο ἔχει τὸ ἕνα μολύβι καὶ θέλει νὰ εὕρῃ πόσο ἔχουν τὰ πολλά. Θὰ κάμῃ πολλαπλασιασμόν. Πρῶτα τὸ κάνει μὲ τὴ σκέψι του καὶ λέγει: Τὸ ἕνα μολύβι ἔχει ὀγδόντα ἑκατοστὰ τῆς δραχμῆς, τὰ δύο ἔχουν ἑκατὸν ἑξήντα, τὰ τρία ἔχουν διακόσια σαράντα, τὰ τέσσερα ἔχουν τριακόσια εἴκοσι καὶ τὰ πέντε μολύβια ἔχουν τετρακόσια ἑκατοστὰ τῆς δραχμῆς. ῾Η μία δραχμὴ ἔχει ἑκατὸ ἑκατοστά, ἑπομένως τὰ τετρακόσια ἑκατοστὰ εἶναι τέσσαρες δραχμές.

Τώρα πιάνει τὸ χαρτὶ καὶ τὸ μολύβι. ῾Ο ἀγοραστὴς γράφει στὸν πίνακα καὶ οἱ ὑπόλοιποι μαθηταὶ στὰ τετράδια.

Λύσις

$$\frac{80}{100} \times 5 = \frac{400}{100} = 4 \text{ δραχμές.}$$

Πρέπει, δηλαδή, τὸ κλάσμα $\frac{80}{100}$ νὰ γίνῃ 5 φορὲς μεγαλύτερο. Ξεύρομε ἀπὸ τὶς ἰδιότητες τῶν κλασμάτων ὅτι ἕνα κλάσμα γίνεται μεγαλύτερον, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμητήν του.

Τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ποῦ τὸ ἐγράψαμε ; Ποιόν ἀριθμὸν ἐγράψαμε ὡς παρονομαστήν ;

Συμπληρώσατε τὸν παρακάτω κανόνα καὶ γράψατέ τον στὸ τετράδιο.

Ὅταν ἔχωμε νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομε..

2. Ἡ Χρυσάνθη ἔρχεται ν' ἀγοράσῃ $\frac{5}{10}$ τῆς σοκολάτας, γιατὶ δὲν ἔχει πολλὰ χρήματα. Κάθε σοκολάτα ἔχει 5 δραχμές. Πόσα χρήματα θὰ δώσῃ ;

Σκέψις

Ὁ πωλητὴς σκέπτεται : ὁλόκληρη ἡ σοκολάτα, ἢ τὰ δέκα δέκατα, ἔχουν πέντε δραχμές. Τὸ ἕνα δέκατο ἔχει δέκα φορὲς λιγώτερο, δηλαδὴ ἔχει πενήντα λεπτά. Ἑπομένως τὰ πέντε δέκατα ἔχουν διακόσια πενήντα λεπτά, ἢ δυόμιση δραχμές.

Μετὰ τὴ σκέψι, εἰς ἐνέργεια τετράδια, μολύβια, κιμωλίες.

Λύσις

$$5 \times \frac{5}{10} = \frac{25}{10} = 2\frac{5}{10} \text{ δραχμές.}$$

Πῶς ἔγινε ὁ πολλαπλασιασμός ; Ποῦ ἐγράφη κάθε ποσόν ; Τί ἀριθμοὶ εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστής ;

Συμπληρώσατε τὸν κανόνα καὶ ἀντιγράψατέ τον στὸ τετράδιο.

Ὅταν ἔχωμε νὰ πολλαπλασιάσωμε ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομε..

ΣΗΜ. : Προσέξατε αὐτὲς τὶς δύο περιπτώσεις : Στὴν πρώτη περίπτωσι ἐγνωρίζαμε πόσο ἔχει τὸ ἕνα μολύβι καὶ θέλαμε νὰ μάθωμε πόσο ἔχουν τὰ πολλά. Ἐκάναμε πολλαπλασιασμό. Στὴν δευτέρα περίπτωσι ἐγνωρίζαμε πόσο ἔχει ἡ μία σοκολάτα καὶ θέλαμε νὰ μάθωμε πόσο ἔχει ἕνα μέρος τῆς σοκολάτας. Ἐκάναμε πολλαπλασιασμό.

"Ωστε: Πολλαπλασιασμὸν κάνομε, ὅταν ξεύρωμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων, ἢ ἑνὸς μέρους τῆς μονάδος.

Μὴν ξεχνᾶτε τὸν παραπάνω κανόνα!

3. Ὁ Νῖκος ἔρχεται ν' ἀγοράσῃ 6 γομολάστιχες. Ἡ κάθε γομολάστιχα ἔχει $2\frac{3}{5}$ δραχμές. Πόσα χρήματα θὰ δώσῃ;

Σκέψις

Ὁ πωλητὴς σκέπτεται: Μὲ δύο δραχμὲς ἡ μία, οἱ ἕξι γομολάστιχες κοστίζουν δώδεκα δραχμές. Μὲ τρία πέμπτα ἡ μία, οἱ ἕξι γομολάστιχες κοστίζουν δέκα ὀκτὼ πέμπτα, δηλαδὴ τρεῖς δραχμὲς καὶ τρία πέμπτα. Ἔχομε, λοιπόν: δώδεκα δραχμὲς καὶ τρεῖς δραχμὲς καὶ τρία πέμπτα, γίνονται ὅλες δέκα πέντε δραχμὲς καὶ τρία πέμπτα.

Ἐτελείωσεν ἡ σκέψις του. Ὅλοι πιάνουν τὸ χαρτὶ καὶ τὸ μολύβι κι' ὁ ἀγοραστὴς τὴν κιμωλία.

Λύσις

$$2\frac{3}{5} \times 6 = 12\frac{18}{5} = 15\frac{3}{5} \text{ δραχμές.}$$

Ἕνας μαθητὴς λέγει: Ἐγὼ τὸ λύω καὶ μὲ ἄλλον τρόπο: Νά, ἔτσι:

Λύσις

$$2\frac{3}{5} \times 6 = \frac{13}{5} \times 6 = \frac{78}{5} = 15\frac{3}{5} \text{ δραχμές.}$$

Πῶς ἔγινε ἡ πρώτη λύσις, καὶ πῶς ἡ δευτέρα; Τί ἀριθμοὶ εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστής;

Συμπληρώσατε τὸν παρακάτω κανόνα καὶ ἀντιγράψατέ τον στὸ τετράδιο.

Ὅταν ἔχωμε νὰ πολλαπλασιάσωμε μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον χρησιμοποιοῦμε δύο τρόπους:
α) Πολλαπλασιάζομε ....
β) Τρέπομε τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ πολλαπλασιάζομε ....

4. Ὁ Παναγιώτης ἔχει ἀνάγκη ἀπὸ $7\frac{1}{2}$ δεκάρια χαρτί. Τὸ κάθε δεκάρι ἔχει 3 δραχμές. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ δώσῃ ;

Σκέψις

Ὁ πωλητὴς σκέπτεται : τὰ ἑπτὰ δεκάρια μὲ τρεῖς δραχμὲς τὸ ἕνα κοστίζουν εἴκοσι μία δραχμή. Τὸ ἕνα δεύτερον τοῦ δεκαριοῦ κοστίζει μία καὶ μισὴ δραχμή. Ἑπομένως, ὅλα μαζὶ γίνονται εἴκοσι δύο καὶ μισὴ δραχμές.

Ὅλοι γράφουν :

Λύσις

$$3 \times 7\frac{1}{2} = 21\frac{3}{2} = 22\frac{1}{2} \text{ δραχμές.}$$

Μιὰ μαθήτρια λέγει : Ὑπάρχει κι' ἄλλος τρόπος λύσεως : ὁ ἑξῆς :

Λύσις

$$3 \times 7\frac{1}{2} = 3 \times \frac{15}{2} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2} \text{ δραχμές.}$$

Πῶς ἔγινε ἡ πρώτη λύσις καὶ πῶς ἡ δευτέρα ; Τί ἀριθμοὶ εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστής ;

Συμπληρώσατε τὸν παρακάτω κανόνα καὶ ἀντιγράψατέ τον στὸ τετράδιο.

Ὅταν ἔχωμε νὰ πολλαπλασιάσωμε ἀκέραιον ἐπὶ μικτόν, χρησιμοποιοῦμε δύο τρόπους :
α) Πολλαπλασιάζομε ....
β) Τρέπομε τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ πολλαπλασιάζομε
....

Ἡ λύσις τοῦ τετάρτου προβλήματος ὁμοιάζει μὲ τὴν λύσι τοῦ τρίτου ; Ὁ κανόνας τοῦ τετάρτου προβλήματος ὁμοιάζει μὲ τὸν κανόνα τοῦ τρίτου ; Ἂν ὑπάρχῃ, ἀνάμεσα στὶς δύο περιπτώσεις, διαφορά, ποιά εἶναι ἡ διαφορὰ αὐτή ;

5. Ἡ Κούλα ἔχει ἰδιαίτερη συμπάθεια στὶς σοκολάτες. Οὔτε πολλὲς θέλει, οὔτε καὶ ἀκριβές. Προτιμᾶ $\frac{1}{10}$ τῆς σοκολάτας ἀπ' αὐτὲς ποὺ ἔχουν $\frac{1}{10}$ τοῦ δεκαδράχμου ἡ μία. Πόσα χρήματα θὰ δώσῃ ;

Σκέψις

Ὁ πωλητὴς συλλογίζεται. Νοιώθει μιὰ μικρὴ δυσκολία. Θὰ τὴν ξεπεράση. Μία ὁλόκληρη σοκολάτα ἔχει ἕνα δέκατον τοῦ δεκαδράχμου, δηλαδὴ ἔχει μία δραχμή. Τὸ ἕνα δέκατον τῆς σοκολάτας θὰ ἔχῃ δέκα φορὲς λιγώτερο, δηλαδὴ θὰ ἔχῃ δέκα λεπτὰ τῆς δραχμῆς.

Μετὰ τὴν σκέψι, ὅλοι γράφουν:

Λύσις

$$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} \text{ τοῦ δεκαδράχμου} = 10 \text{ λεπτά.}$$

Πῶς ἔγινε ὁ πολλαπλασιασμός; Τί ἀριθμοὶ ἦσαν καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστής;

Συμπληρώσατε τὸν παρακάτω κανόνα καὶ ἀντιγράψατέ τον.

Ὅταν ἔχωμε νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομε..

6. Ὁ Γιῶργος ἔχει ἀνάγκην ἀπὸ ἕνα τετράδιο περιλήψεως μὲ εἴκοσι πέντε φύλλα. Ὑπολογίζει ὅτι θὰ τοῦ χρειασθοῦν $12\frac{1}{2}$ κόλλες. Προτίμησε ν' ἀγοράσῃ ἀπὸ τὶς κόλλες ποὺ ἔχουν $\frac{1}{10}$ τῆς δραχμῆς ἡ μία. Πόσα χρήματα θὰ δώσῃ;

Σκέψις

Ὁ πωλητής, ὁ ἀγοραστὴς κι' ὅλα τὰ παιδιὰ σκέπτονται: Οἱ δώδεκα κόλλες ἀπὸ ἕνα δέκατον τῆς δραχμῆς ἡ μία, κοστίζουν δώδεκα δέκατα τῆς δραχμῆς, δηλαδὴ μία δραχμὴ καὶ δύο δέκατα. Ἀφοῦ ἡ μία κόλλα ἔχει ἕνα δέκατον τῆς δραχμῆς, ἡ μισὴ κόλλα θὰ ἔχῃ τὰ μισὰ λεπτά. Τὸ μισὸ τοῦ ἑνὸς δεκάτου, ἢ τῆς μιᾶς δεκάρας, εἶναι μία πεντάρα ἢ ἕνα εἰκοστὸν τῆς δραχμῆς. Ἔχομε, λοιπόν: μίαν δραχμὴ καὶ δύο δέκατα καὶ ἄλλο ἕνα εἰκοστὸν τῆς δραχμῆς: Ἀλλὰ γιὰ νὰ προσθέσωμε τὰ δύο δέκατα καὶ τὸ ἕνα εἰκοστόν, πρέπει νὰ τρέψωμε καὶ τὰ δέκατα σὲ εἰκοστά. Δύο δέκατα εἶναι τέσσερα εἰκοστά. (Γνωρίζομε ἀπὸ τὶς ἰδιότητες τῶν κλασμάτων ὅτι ὅταν πολλαπλασιάσωμε καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, τὸ κλάσμα, ποὺ εὑρίσκομε εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρῶτο. Ἀλλὰ καὶ πρακτικὰ σκεπτόμενοι, ξεύρομε ὅτι δύο δεκάρες (δέκατα) εἶναι ἴσες μὲ τέσσαρες πεντάρες (εἰκοστὰ τῆς δραχμῆς).

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἔχομεν ἄθροισμα μίαν δραχμὴν καὶ πέντε εἰκοστά, ἢ μίαν δραχμὴν καὶ εἴκοσι πέντε λεπτὰ (ἀφοῦ ξεύρομε ὅτι μία πεντάρα εἶναι πέντε λεπτά).

Ὅλοι γράφουν:

Λύσις

$$\frac{1}{10} \times 12\frac{1}{2} = (\frac{1}{10} \times 12 = \frac{12}{10} = 1\frac{2}{10}) + (\frac{1}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}) =$$

$$= 1\underbrace{\frac{2}{10}}_{2} + \underbrace{\frac{1}{20}}_{1} = \qquad \text{Ε.Κ.Π.} = 20$$

$$= 1\frac{4}{20} + \frac{1}{20} = 1\frac{5}{20} \text{ δραχμές.}$$

Βλέπετε πόσες ἐνέργειες ἐκάνομε;

Ἕνας μαθητὴς λέγει: «Μπορῶ νὰ κάμω ἀλλιῶς τὶς πράξεις.» Σηκώθηκε στὸν πίνακα κι' ἔγραψε:

Λύσις

$$\frac{1}{10} \times 12\frac{1}{2} = \frac{1}{10} \times \frac{25}{2} = \frac{25}{20} = 1\frac{5}{20} \text{ δραχμές.}$$

Συμφωνεῖτε; Ἂν συμφωνῆτε, κοιτάξατε τί ἀριθμοὶ εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς καί, ἀφοῦ συμπληρώσετε τὸν παρακάτω κανόνα, νὰ τὸν ἀντιγράψετε στὸ τετράδιό σας:

Ὅταν ἔχωμε νὰ πολλλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ μικτόν, χρησιμοποιοῦμε δύο τρόπους:

α) Πολλαπλασιάζομε ....

β) Τρέπομε τὸν πολλαπλασιαστὴν εἰς ....

7. Ἡ Καίτη, μιά κι' ἔχει τώρα πολλὰ χρήματα, ἔρχεται ν' ἀγοράσῃ $24\frac{5}{10}$ κόλλες μπλὲ ἀπ' αὐτὲς ποὺ ἔχουν $2\frac{1}{2}$ δραχμές. Πόσα χρήματα θὰ δώσῃ;

Σκέψις

Ὅλοι ἔχουν πέσει σὲ βαθειὰ σκέψι:

α) Οἱ εἴκοσι τέσσαρες κόλλες, μὲ δύο δραχμὲς ἡ μία, κοστίζουν σαράντα ὀκτὼ δραχμές.

β) Οἱ εἴκοσι τέσσαρες κόλλες, μὲ ἕνα δεύτερον τῆς δραχμῆς ἢ μία, κοστίζουν εἴκοσι τέσσερα δεύτερα, ἢ δώδεκα δραχμές.

γ) Τά πέντε δέκατα τῆς κόλλας, δηλαδὴ ἡ μισὴ κόλλα, μὲ δύο δραχμὲς ἡ κόλλα, στοιχίζουν τὰ μισὰ χρήματα, δηλαδὴ στοιχίζουν μία δραχμή.

δ) Τὰ πέντε δέκατα τῆς κόλλας, δηλαδὴ ἡ μισὴ κόλλα, μὲ ἕνα δεύτερον τῆς δραχμῆς ἢ μία, κοστίζουν τὰ μισὰ χρήματα, δηλαδὴ κοστίζουν εἴκοσι πέντε λεπτά.

Τώρα τὰ προσθέτομε ὅλα μαζί : σαράντα ὀκτὼ δραχμὲς καὶ δώδεκα δραχμὲς καὶ μία δραχμὴ καὶ εἴκοσι πέντε λεπτά, γίνονται ὅλα : ἑξήντα μία δραχμὴ καὶ εἴκοσι πέντε λεπτά.

Τὸ μολύβι καὶ τὸ χαρτὶ καὶ ἡ κιμωλία στὸν πίνακα θ' ἀποδείξουν ἂν ἐκάναμε σωστὴ σκέψι :

Γράφουν, λοιπόν, ὅλοι :

$$2\frac{1}{2}\times 24\frac{5}{10} = (2\times 24 = 48) + (2\times\frac{5}{10} = \frac{10}{10} = 1) + \frac{1}{2}\times 24 = \frac{24}{2} = 12)$$

$$+\left(\frac{1}{2}\times\frac{5}{10} = \frac{5}{20}\right) = 48 + 12 + 1 + \frac{5}{20} = 61\frac{5}{20}\left(\frac{5}{20}\text{ τῆς δραχμῆς } = \frac{25}{100}\right)$$

Εἴδατε πόσες ἐνέργειες ἐκάναμε; Ὁ Σπῦρος ὅμως λέγει: «Ἐγὼ μπορῶ νὰ τὸ λύσω καὶ μὲ ἄλλον τρόπον!» Πλησιάζει στὸν πίνακα καὶ γράφει :

Λύσις

$$2\frac{1}{2}\times 24\frac{5}{10} = \frac{5}{2}\times\frac{245}{10} = \frac{1225}{20} = 61\frac{5}{20}\text{ δραχμές.}$$

Συμφωνεῖτε ; Εἴδατε καὶ τοὺς δύο τρόπους ; Ποιός εἶναι ὁ συντομώτερος ; Ἐγὼ προτιμῶ νὰ ξεύρετε καὶ τοὺς δύο. Ὁ δεύτερος εἶναι, βέβαια, σύντομος, ὁ πρῶτος ὅμως ξυπνάει τὸ μυαλό.

Τί εἶναι οἱ ἀριθμοὶ ποὺ ἐπολλαπλασιάσαμε, τοὺς ξεύρετε ;

Συμπληρώσατε τὸν παρακάτω κανόνα κι' ἀντιγράψατέ τον στὸ τετράδιο :

Ὅταν ἔχωμε νὰ πολλαπλασιάσωμε μικτὸν ἐπὶ μικτόν, χρησιμοποιοῦμε δύο τρόπους.
1) Πολλαπλασιάζομε : α') .... β') .... κλπ.
1) Τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς..............................

Προβλήματα

1. Τὸ πρατήριον τῆς Ἑταιρείας ΕΒΓΑ στὴν συνοικία μας πωλεῖ κάθε πρωῒ 236 φιάλες γάλα. Ἡ κάθε φιάλη περιέχει $\frac{1}{2}$ τοῦ χλγρ. γάλα. Πόσα χλγρ. γάλα πωλεῖ κάθε πρωὶ τὸ πρατήριον;

2. Στὸ σπίτι μας τρῶμε κάθε μέρα $2\frac{1}{4}$ χλγρ. ψωμί. Πόσα χλγρ. ψωμὶ τρῶμε ὅλον τὸν μῆνα; (30 ἡμέρες;)

3. Ἕνας ὑδρόμυλος ἀλέθει στὴν ὥρα $82\frac{1}{5}$ χλγρ. σιτάρι. Πόσα χλγρ. σιτάρι θὰ ἀλέσῃ σὲ $7\frac{3}{4}$ ὧρες;

4. Ὅλοι οἱ κάτοικοι τοῦ Συνοικισμοῦ Κορίνθου εἶναι 4.000. Ὁ καθένας χρειάζεται κατὰ μέσον ὅρον $2\frac{1}{4}$ χλγρ. μακαρόνια τὸν μῆνα. Πόσα χιλιόγραμμα μακαρόνια καταναλίσκουν ὅλοι οἱ κάτοικοι κάθε μῆνα; Πόσα χιλιόγραμμα τὸ χρόνο;

5. Ἕνας δενδροκόμος ἐψέκασε τὶς 120 μηλιές του, καὶ γιὰ κάθε μία ἐχρειάσθηκε $\frac{20}{60}$ τῆς ὥρας. Σὲ πόσες ὧρες ἐτελείωσεν ὁ ψεκασμός;

6. Ἐπισκεφθήκαμε ἕνα ἐργοστάσιον κονσερβοποιΐας καὶ μὲ τὴν εὐκαιρίαν αὐτὴ ἐκάμαμε τοὺς ἑξῆς λογαριασμούς:

α) Κάθε μικρὸ δοχεῖο τοματοπελτὲ ζυγίζει $3\frac{1}{2}$ χλγρ. Πόσο ζυγίζουν τὰ 300 δοχεῖα;

β) Κάθε δοχεῖο μπάμιες ζυγίζει $\frac{9}{10}$ τοῦ χλγρ. Πόσο ζυγίζουν τὰ 160 δοχεῖα;

γ) Κάθε δοχεῖο φασολάκια ζυγίζει $\frac{4}{5}$ τοῦ χλγρ. Πόσο ζυγίζουν τὰ 180 δοχεῖα;

7) Ἕνα λεωφορεῖον τρέχει μὲ $52\frac{3}{5}$ χλμ. τὴν ὥρα. Πόσα χλμ. θὰ τρέξῃ σὲ $3\frac{1}{2}$ ὧρες;

8. Ἕνα ὑπερωκεάνειο πλέει μὲ ταχύτητα $22\frac{5}{10}$ μίλλια τὴν ὥρα. Πόσα μίλια θὰ πλεύσῃ σὲ $\frac{1}{2}$ ὥρας; Πόσα σὲ 15 ὧρες; Πόσα σὲ $20\frac{3}{4}$ ὧρες;

9. Ἕνας παντοπώλης ἐψώνισε γιὰ τὸ παντοπωλεῖον του τὰ παρακάτω εἴδη:

α) Ζάχαρι $15\frac{1}{2}$ χλγρ. πρὸς 10 δρχ. τὸ χλγρ. β) Μακαρόνια $20\frac{2}{5}$ χλγρ. πρὸς $8\frac{1}{10}$ δρχ. τὸ χλγρ. γ) Καφφὲ $\frac{8}{10}$ τοῦ χλγρ. πρὸς $70\frac{10}{100}$ δρχ. τὸ χλγρ. καὶ δ) ρύζι $12\frac{1}{4}$ χλγρ. πρὸς $10\frac{1}{20}$ δρχ. τὸ χλγρ. Πόσα ἔδωσε γιὰ ὅλα του τὰ ψώνια ;

10. Στοὺς ὑπαλλήλους ἑνὸς Κ.Τ.Ε.Λ. ἔγινε διανομὴ $2\frac{9}{10}$ μέτρων ὑφάσματος γιὰ φορεσιὰ τοῦ καθενός. Οἱ ὑπάλληλοι εἶναι 160. Πόσα μέτρα ὑφάσματος μοιράστηκαν στοὺς ὑπαλλήλους αὐτούς ;

11. Συντάξατε μόνοι σας δέκα σχετικὰ προβλήματα ἀπὸ τὴ ζωὴ τοῦ σπιτιοῦ σας, τοῦ σχολείου σας.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

(Ὑλικὰ γιὰ τὴν διδασκαλία τῆς διαιρέσεως κλασμάτων. Ἡ τάξις γίνεται μικρὸ παντοπωλεῖο μὲ μικροποσὰ ἀπὸ ζάχαρι, ρύζι, μακαρόνια, καφφέ, τσάι, φασόλια, κουκιά, καραμέλλες καὶ διάφορα εἴδη γραφικῆς ὕλης. Μιὰ μικρὴ ζυγαριὰ μὲ τὰ σταθμά της, καθὼς καὶ πραγματικὰ χρήματα, κρίνονται ἀπαραίτητα. Εἴπαμε ὅτι κάθε φορὰ ἀλλάσσουν οἱ πωληταὶ καὶ οἱ ἀγορασταί).

Ὅταν γνωρίζωμε πόσο ἔχουν οἱ πολλὲς μονάδες, ἢ μέρος τῆς μονάδος καὶ ζητοῦμε νὰ εὕρωμε πόσο ἔχει ἡ μία μονάδα, τότε κάνομε διαίρεσιν.

1. Ἡ Ἀσημίνα πλησιάζει καὶ μὲ $\frac{5}{10}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζει 5 καραμέλλες. Πόσο ἔχει ἡ μία καραμέλλα;

Σκέψις

Ὁ πωλητής, ὁ ἀγοραστὴς κι᾿ ὅλα τὰ παιδιὰ σκέπτονται: ἀφοῦ ξεύρωμε πόσο ἔχουν οἱ πολλὲς καραμέλλες καὶ θέλομε νὰ μάθωμε πόσο ἔχει ἡ μία, πρέπει νὰ κάμωμε διαίρεσιν. Ἐδῶ ἔχομε νὰ διαιρέσωμε τὰ πέντε δέκατα διὰ πέντε. Ξεύρομε ἀπὸ τὶς ἰδιότητες τῶν κλασμάτων ὅτι: ἕνα κλάσμα γίνεται μικρότερο, ἂν διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητήν, ἢ πολλαπλασιάσωμε τὰν παρονομαστήν του. Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος πέντε δέκατα διαιρεῖται διὰ πέντε, κι᾿ ἔχομε πηλίκον ἕνα δέκατον. Ἑπομένως ἡ κάθε μία καραμέλλα κοστίζει ἕνα δέκατον τῆς δραχμῆς, ἢ δέκα λεπτά.

Μετὰ τὴν σκέψι, ὅλοι γράφουν:

Λύσις

$\frac{5}{10} : 5 = \frac{1}{10}$ τῆς δραχμῆς = 10 λεπτὰ τῆς δραχμῆς.

Τί ἀριθμὸς εἶναι ὁ διαιρετέος καὶ τί ὁ διαιρέτης; Πῶς ἔγινε ἡ διαίρεσις;

Ὅταν ἔχωμε νὰ διαιρέσωμε κλάσμα δι' ἀκεραίου, μὲ ἀριθμητὴν διαιρούμενον διὰ τοῦ ἀκεραίου, τότε ....

Μόλις τελειώνῃ κάθε πρᾶξις, νὰ κάνετε ἀμέσως τὴν δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως, πολλαπλασιάζοντας τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην κι' εὑρίσκοντας τὸν διαιρετέον.

2. Ὁ Θανασάκης πλησιάζει καὶ μὲ $\frac{8}{10}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζει 10 χαρτοφάκελλα. Πόσο ἔχει τὸ ἕνα χαρτοφάκελλο ;

Σκέψις

Ἀφοῦ ξεύρωμε πόσο ἔχουν τὰ πολλὰ καὶ ζητοῦμε νὰ εὕρωμε πόσο ἔχει τὸ ἕνα, θὰ κάνωμε διαίρεσιν, ἀλλὰ ἐδῶ δὲν διαιρεῖται ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἀκεραίου. Τότε θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, ὅπως ἀνεφέραμε καὶ παραπάνω. Πρακτικὰ ἂν σκεφθοῦμε, θὰ φθάσωμε στὸ ἑξῆς συμπέρασμα: ἀφοῦ τὰ δέκα χαρτοφάκελλα ἔχουν ὀκτὼ δέκατα ἢ ὀκτὼ δεκάρες, ποὺ εἶναι ὀγδόντα λεπτὰ τῆς δραχμῆς, τὸ ἕνα χαρτοφάκελλο θὰ ἔχῃ δέκα φορὲς λιγώτερο, δηλαδὴ θὰ ἔχῃ ὀκτὼ λεπτὰ (ἢ ἑκατοστὰ) τῆς δραχμῆς.

Ὅλοι γράφουν :

Λύσις

$\frac{8}{10} : 10 = \frac{8}{100}$ τῆς δραχμῆς.

Τί ἀριθμὸς εἶναι ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ; Ὁμοιάζει ἡ προηγουμένη περίπτωσις μ' αὐτὴν ἐδῶ, ἢ διαφέρει καὶ σὲ τί διαφέρει ; Πῶς ἔγινε ἡ διαίρεσις ;

Συμπληρώσατε τὸν κανόνα καὶ ἀντιγράψατέ τον :

Ὅταν ἔχωμε νὰ διαιρέσωμε κλάσμα δι' ἀκεραίου, μὲ ἀριθμητὴν μὴ διαιρούμενον διὰ τοῦ ἀκεραίου, τότε ....

Κάμετε τὴν δοκιμή. Πολλαπλασιάσατε τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην κι' εὕρετε τὸν διαιρετέον. Προσέξατε: ξεύρομε ἀπὸ τὶς ἰδιότητες τῶν κλασμάτων ὅτι ἕνα κλάσμα γίνεται μεγαλύτερον, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμητήν του, ἢ διαιρέσωμε τὸν παρονομαστήν του. Προσέξατε αὐτὴν τὴν ἰδιότητα, στὴν δοκιμὴν αὐτῆς ἐδῶ τῆς διαιρέσεως.

3. Ἡ Ντίνα μὲ $24\frac{6}{10}$ δραχμὲς ἀγόρασε 3 χλγρ. μακαρόνια. Πόσο ἔχει τὸ χιλιόγραμμο;

Σκέψις

α) Τὰ τρία χλγρ. ἔχουν εἴκοσι τέσσαρες δραχμές. Τὸ ἕνα χλγρ. ἔχει ὀκτὼ δραχμές.

β) Τὰ τρία χλγρ. ἔχουν ἕξι δέκατα τῆς δραχμῆς, τὸ ἕνα ἔχει δύο δέκατα τῆς δραχμῆς. Ὅλα - ὅλα γίνονται ὀκτὼ δραχμὲς καὶ δύο δέκατα τῆς δραχμῆς. Τόσο κοστίζει τὸ ἕνα χιλιόγραμμο τὰ μακαρόνια.

Ὅλοι γράφουν:

Λύσις

$$24\frac{6}{10} : 3 = 8\frac{2}{10} \text{ δραχμές.}$$

Τί ἀριθμοὶ εἶναι ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης; Πῶς ἔγινε ἡ διαίρεσις; Τί πρέπει νὰ προσέξωμε γιὰ νὰ μὴ τὰ μπερδέψωμε; Νὰ σᾶς βοηθήσω: Ὁ ἀκέραιος 24, διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 3; Ὁ ἀριθμητὴς 6, διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 3;

Μὴ ξεχνᾶτε νὰ κάνετε πάντοτε τὴν δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως.

Συμπληρώσατε τὸν κανόνα καὶ ἀντιγράψατέ τον:

Ὅταν ἔχωμε νὰ διαιρέσωμε μικτὸν δι' ἀκεραίου, μὲ ἀκέραιον καὶ ἀριθμητὴν διαιρουμένους ἀκριβῶς διὰ τοῦ διαιρέτου, τότε διαιροῦμε ....

4. Ὁ Σταῦρος μὲ $40\frac{2}{5}$ δραχμὲς ἀγοράζει 4 χλγρ. ρύζι. Πόσο ἔχει τὸ χιλιόγραμμο;

Σκέψις

Ὅλοι σκέπτονται: τὰ τέσσερα χλγρ. ἔχουν σαράντα δραχμές. Τὸ ἕνα χλγρ. ἔχει δέκα δραχμές. Τὰ τέσσερα χλγρ. ἔχουν δύο πέμπτα τῆς δραχμῆς ἢ τέσσαρες δεκάρες, ἢ ὀκτὼ πεντάρες. Τὰ τέσσερα χλγρ. ἔχουν μία δεκάρα, ἢ δύο πεντάρες. Ὅλα - ὅλα, τὸ ἕνα χλγρ. ἔχει δέκα δραχμὲς καὶ δύο πεντάρες (δύο εἰκοστὰ τῆς δραχμῆς).

Ὅλοι γράφουν:

$$40\frac{2}{5} : 4 = 10\frac{2}{20} \text{ δραχμές.}$$

Τί ἀριθμοὶ εἶναι ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης; Συγκρίνατε τὴν προηγουμένην περίπτωσιν μὲ τούτην ἐδῶ. Πῶς ἔγινε στὸ προηγούμενο πρόβλημα ἡ διαίρεσις; Πῶς ἔγινε ἐδῶ; Γιατί, ἀντὶ νὰ διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, ἐπολλαπλασιάσαμε τὸν παρονομαστήν του; Σὲ ποιάν ἰδιότητα τῶν κλασμάτων στηρίζεται ἡ ἐνέργειά μας αὐτή; Δικαιολογήσατε τὴν ἐνέργειά μας, συμπληρώσατε τὸν κανόνα καὶ ἀντιγράψατέ τον:

Ὅταν ἔχωμε νὰ διαιρέσωμε μικτὸν δι' ἀκεραίου, μὲ ἀκέραιον τοῦ διαιρετέου διαιρούμενον, ἀλλὰ μὲ ἀριθμητὴν κλάσματος μὴ διαιρούμενον διὰ τοῦ ἀκεραίου, τότε ....

5. Ἡ Γεωργία μὲ $31\frac{2}{4}$ δραχμὲς ἀγόρασε 3 χλγρ. φασόλια. Πόσο ἔχει τὸ χιλιόγραμμο;

Σκέψις

Ἂν ἐδίναμε μόνον τριάντα μία δραχμή, τότε γιὰ κάθε χιλιόγραμμο θ' ἀναλογοῦσαν δέκα δραχμὲς καὶ θὰ περίσσευε καὶ μία δραχμή. Ἡ μία δραχμὴ εἶναι τέσσερα τέταρτα καὶ δύο τέταρτα ποὺ ἔχομε ἀκόμη στὸν διαιρετέον, γίνονται ἕξι τέταρτα. Τὰ τρία χλγρ. ἔχουν ἕξι τέταρτα, τὸ ἕνα χλγρ. ἔχει δύο τέταρτα. Ὅλα - ὅλα γίνονται δέκα δραχμὲς καὶ δύο τέταρτα τῆς δραχμῆς. Τόσο κοστίζει τὸ ἕνα χιλιόγραμμο.

Ὅλοι γράφουν:

Λύσις

$$31\frac{2}{4} : 3 = \frac{126}{4} : 3 = \frac{42}{4} = 10\frac{2}{4} \text{ δραχμές.}$$

Ἐνῶ μὲ τὴ σκέψι ἀκολουθήσαμε ἄλλον δρόμο, μὲ τὸ μολύβι ἀκολουθήσαμε τοῦτον τὸν τρόπον λύσεως. Γιατί; Κοιτάξετε ἂν διαιρῆται ὁ ἀκέραιος τοῦ διαιρετέου μὲ τὸν διαιρέτην. Ἐφ' ὅσον δὲν διαιρῆται, τότε ὁ μικτὸς θὰ γίνῃ κλάσμα. Ἐφ' ὅσον ὁ ἀριθμητὴς τοῦ νέου κλάσματος διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ διαιρέτου, θὰ προχωρήσωμε κανονικὰ στὴν διαίρεσιν, ἄλλως θὰ ἀφήσωμε τὸν ἴδιον ἀριθμητὴν καὶ θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστήν. Ὥστε ; ...Ἀντιγράψατε τὸν κανόνα:

Ὅταν ἔχωμε νὰ διαιρέσωμε μικτὸν δι' ἀκεραίου, καὶ ὁ ἀκέραιος τοῦ διαιρετέου δὲν διαιρῆται, τότε τρέπομε τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα, καί, ἂν διαιρῆται ὁ ἀριθμητής, προχωροῦμε στὴν διαίρεσιν, ἄλλως πολλαπλασιάζομε τὸν παρονομαστήν.

Μελετήσατε τὶς περιπτώσεις 3, 4 καὶ 5 καὶ συντάξατε ἕνα γενικὸν κανόνα, τί κάνομε ὅταν ἔχωμε νὰ διαιρέσωμε μικτὸν δι' ἀκεραίου.

6. Ὁ Ἀνδρέας πλησιάζει καὶ μὲ $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκαδράχμου ἀγοράζει $\frac{8}{10}$ τοῦ χιλιογράμμου ζάχαρι. Πόσο ἔχει τὸ χιλιόγραμμο ;

Σκέψις

Ἐδῶ χρειάζεται λίγη προσοχή:

Ἀφοῦ τὰ $\frac{8}{10}$ τοῦ χλγρ. κοστίζουν $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκαδράχμου τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ χλγρ. κοστίζει ὀκτὼ φορὲς λιγώτερο: δηλαδὴ $\frac{4}{5} : 8 = \frac{4}{5 \times 8}$

(Ἂς θυμηθοῦμε τὴν σχετικὴν ἰδιότητα τῶν κλασμάτων: ὅταν δὲν διαιρῆται ὁ ἀριθμητής, πολλαπλασιάζομε τὸν παρονομαστήν).

Τὰ $\frac{10}{10}$ (δηλ. τὸ 1 χλγρ.) κοστίζουν $\frac{4 \times 10}{5 \times 8} = \frac{40}{40} = 1$ δεκάδρχ. $= 10$ δραχ.

Ἀπὸ τὴν σκέψιν αὐτὴ καταλήγομε στὴν ἑξῆς λύσιν:

Ὅλοι γράφουν:

Λύσις

$$\frac{4}{5} : \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \times \frac{10}{8} = \frac{40}{40} = 1 \text{ δεκάδραχμον.}$$

Πῶς διαιροῦμε, λοιπόν, κλάσμα διὰ κλάσματος ; Συμπληρώσατε τὸν κανόνα καὶ ἀντιγράψατέ τον:

Ὅταν ἔχωμε νὰ διαιρέσωμε κλάσμα διὰ κλάσματος, τότε ἀντιστρέφομε τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου καὶ ἀντὶ διαιρέσεως ....

....

Προσοχή : Διαιρετέος θὰ μπαίνῃ πάντοτε τὸ κλάσμα ποὺ παριστάνει τὴν τιμή. Μὴ ξεγελασθῆτε ἀπὸ τὴν σύμπτωσι τοῦ παραπάνω παραδείγματος, ποὺ ὅποιο κλάσμα κι' ἂν γράψωμε ὡς διαιρετέον θὰ φθάσωμε στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα! Σὲ ἄλλες περιπτώσεις δὲν συμβαίνει τὸ ἴδιο.

7. Ὁ Γιαννάκης μὲ $53\frac{4}{10}$ δραχμὲς ἀγοράζει $\frac{3}{4}$ τοῦ χλγρ. καφφέ. Πόσο ἔχει τὸ χιλιόγραμμο;

Σ κ έ ψ ι ς

Ἡ περίπτωσις αὐτὴ ὁμοιάζει μὲ τὴν προηγουμένην. Γιὰ νὰ μὴν ἀργοποροῦμε λοιπὸν καὶ γιὰ νὰ εὐκολυνθοῦμε στὴν διαίρεσι, θὰ τρέψωμε τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα. Ἔτσι θὰ ἔχωμε νὰ διαιρέσωμε κλάσμα διὰ κλάσματος. Θὰ ἀντιστρέψωμε τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου καὶ ἀντὶ διαιρέσεως θὰ κάνωμε πολλλαπλασιασμό.

Ὅλοι γράφουν:

Λ ύ σ ι ς

$53\frac{4}{10} : \frac{3}{4} = \frac{534}{10} : \frac{3}{4} = \frac{534}{10} \times \frac{4}{3} = \frac{2136}{30} = 71\frac{6}{30}$ δρχ. τὸ χιλιόγραμμο.

Συμπληρώσατε καὶ ἀντιγράψατε τὸν κανόνα:

Ὅταν ἔχωμε νὰ διαιρέσωμε μικτὸν διὰ κλάσματος, τότε ....

8. Ὁ Στρατῆς μὲ $56\frac{1}{10}$ δραχμὲς ἀγοράζει $5\frac{1}{2}$ χλγρ. μακαρόνια. Πόσο ἔχει τὸ χιλιόγραμμο;

Σ κ έ ψ ι ς

Ἐδῶ ἔχομε νὰ διαιρέσωμε μικτὸν διὰ μικτοῦ. Θὰ τρέψωμε τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα. Κατόπιν θὰ ἀντιστρέψωμε τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου καὶ ἀντὶ διαιρέσεως θὰ κάνωμε πολλαπλασιασμό.

Αὐτὸς εἶναι καὶ ὁ κανόνας. Ἀντιγράψατέ τον.

Λ ύ σ ι ς

$56\frac{1}{10} : 5\frac{1}{2} = \frac{561}{10} : \frac{11}{2} = \frac{561}{10} \times \frac{2}{11} = \frac{1122}{110} = 10\frac{22}{110} = 10\frac{1}{5}$ δραχ. τὸ χλγρ.

9. Ἡ Ἰσμήνη μὲ 4 δραχμὲς ἀγόρασε $\frac{8}{10}$ τοῦ μέτρου κορδέλλα γιὰ τὰ μαλλιά της. Πόσο ἔχει τὸ μέτρο;

Σκέψις

Ὅλοι σκέπτονται:

Ἀφοῦ τὰ $\frac{8}{10}$ τοῦ μέτρου κοστίζουν 4 δραχμές, τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου θὰ κοστίζῃ 8 φορὲς λιγώτερο: δηλαδὴ $\frac{4}{8}$. Τὰ $\frac{10}{10}$ (δηλαδὴ τὸ 1 μέτρο) θὰ κοστίζῃ 10 φορες περισσότερο: δηλαδὴ $\frac{4 \times 10}{8} = \frac{40}{8} = 5$ δραχμές.

Ἀπὸ τὴν σκέψιν αὐτήν, καταλήγομε στὴν ἑξῆς λύσιν:

Λύσις

$$4 : \frac{8}{10} = 4 \times \frac{10}{8} = \frac{40}{8} = 5 \text{ δραχμές.}$$

Πῶς διαιροῦμε, λοιπόν, ἀκέραιον διὰ κλάσματος; Συμπληρώσατε τὸν παρακάτω κανόνα καὶ ἀντιγράψατέ τον:

Ὅταν ἔχωμε νὰ διαιρέσωμε ἀκέραιον διὰ κλάσματος, τότε ....

Κάμετε τὴν δοκιμὴν νὰ ἰδῆτε ἂν θὰ βρῆτε τὸν διαιρετέον: Θὰ πολλαπλασιάσετε τὸ πηλίκον -5- ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{8}{10}$ καὶ πρέπει νὰ εὕρετε τὸν διαιρετέον -4-.

10. Ἡ Ρούλα, μὲ 14 δραχμὲς ἀγόρασε $2\frac{2}{4}$ μέτρα δαντέλλα. Πόσο ἔχει τὸ μέτρο;

Σκέψις

Ἐδῶ γιὰ νὰ εὐκολυνθοῦμε πρέπει ὁ μικτὸς $4\frac{2}{4}$ νὰ γίνῃ κλάσμα. Ἔπειτα καταλήγομε στὴν ἴδια περίπτωσι μὲ τὸ πρόβλημα -9-. Θὰ λυθῇ, λοιπόν, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον:

Λύσις

$$14 : 2\frac{2}{4} = 14 : \frac{10}{4} = 14 \times \frac{4}{10} = \frac{56}{10} = 5\frac{6}{10} \text{ δραχμές.}$$

Πῶς διαιροῦμε, λοιπόν, ἀκέραιον διὰ μικτοῦ; Συμπληρώσατε τὸν παρακάτω κανόνα καὶ ἀντιγράψατέ τον:

"Όταν ἔχωμε νὰ διαιρέσωμε ἀκέραιον διὰ μικτοῦ, τότε ....

Προβλήματα

1. Ἐμοιράσαμε $16\frac{8}{10}$ χλγρ. τυρὶ τοῦ συσσιτίου σὲ 24 παιδιά. Πόσα χιλιόγραμμα τυρὶ ἀναλογεῖ σὲ κάθε παιδί ;

2. Ἐμοιράσαμε $63\frac{3}{5}$ δρχ. σὲ 6 παιδιά. Πόσα θὰ πάρη τὸ καθένα ;

3. Ἕνα δοχεῖο πετρελαίου βάρους $16\frac{1}{2}$ χλγρ. κοστίζει $53\frac{1}{2}$ δρχ. Πόσο κοστίζει τὸ χιλιόγραμμον ;

4. Μὲ $61\frac{1}{8}$ δραχμὲς ἀγοράζω $\frac{3}{4}$ τοῦ χλγρ. καφφέ. Πόσο ἔχει τὸ χιλιόγραμμον ;

5. Πόσα χλγρ. σταφύλια ἀγοράζω μὲ $24\frac{1}{2}$, ὅταν τὸ κάθε χλγρ. κοστίζη $3\frac{1}{2}$ δραχμές ;

6. Πόσα κουτιὰ συμπεπυκνωμένο γάλα ἀγοράζω μὲ $67\frac{1}{5}$ δρχ., ὅταν τὸ κάθε κουτὶ κοστίζη $5\frac{3}{5}$ δραχμές ;

7. Μὲ $\frac{9}{10}$ τοῦ δεκαδράχμου ἀγοράζω $\frac{6}{8}$ τοῦ χλγρ. ζάχαρι. Πόσο ἔχει τὸ χιλιόγραμμο ;

8. Μὲ $\frac{5}{10}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζω ἕνα λεμόνι. Πόσα λεμόνια θ' ἀγοράσω μὲ $4\frac{1}{2}$ δραχμές ;

9. Γράψατε καὶ μόνοι σας τέτοια προβλήματα ἀπὸ τὴ ζωὴ τοῦ σχολείου καὶ τοῦ σπιτιοῦ σας.

1. Προβλήματα ὅλων τῶν πράξεων τῶν κλασμάτων

1. Ἡ μητέρα μου εἶχε $280\frac{2}{20}$ δραχμὲς καὶ πῆγε στὴν ἀγορὰ νὰ ψωνίση. Ἀγόρασε 4 φανελλίτσες πρὸς $18\frac{1}{4}$ δρχ. τὴ μία, 5 ζεύγη κάλτσες πρὸς $17\frac{2}{10}$ δρχ. τὸ ζεῦγος, $6\frac{2}{10}$ μέτρα λινὸ πρὸς $14\frac{1}{2}$ δρχ. τὸ μέτρο. Μὲ τὰ ὑπόλοιπα ἀγόρασε 3 χλγρ. ρύζι. Πόσα ἔδωσε στὰ ψώνια καὶ πόσα ἐκόστισε τὸ χλγρ. τὸ ρύζι ;

2. Ἕνας παραγωγὸς ἐπώλησε 140 χλγρ. πατάτες πρὸς $3\frac{1}{2}$ δρχ. τὸ χλγρ. Μὲ τὰ χρήματα ἀγόρασε $4\frac{1}{2}$ χλγρ. μακαρόνια πρὸς $10\frac{1}{5}$ δρχ. τὸ χλγρ., $\frac{1}{2}$ χλγρ. ρύζι πρὸς $11\frac{1}{4}$ δρχ. τὸ χλγρ. καὶ 5 χλγρ. σαπούνι πρὸς $12\frac{2}{5}$ δρχ. τὸ χλγρ. Μὲ τὰ ὑπόλοιπα ἀγόρασε 2 ζεύγη παπούτσια γιὰ τὰ παιδιά του. Πόσα πῆρε ἀπὸ τὶς πατάτες, πόσα ἔδωσε στὰ ψώνια καὶ πόσα ἐκόστισε κάθε ζεῦγος παπούτσια ;

3. Ἕνας ἔμπορος διέθεσε 350 χρυσὲς λίρες Ἀγγλίας κι' ἀγόρασε διάφορα ὑφάσματα γιὰ τὸ ἐμπορικόν του κατάστημα. Ἀπὸ τὸ ἐργοστάσιον Δημητριάδη ἐπῆρε $6\frac{1}{2}$ τόπια ὕφασμα πρὸς $18\frac{1}{5}$ λίρες τὸ τόπι. Ἀπὸ τὸ ἐργοστάσιον Λαναρᾶ ἐπῆρε $4\frac{1}{4}$ τόπια ὕφασμα πρὸς 16 λίρες τὸ τόπι. Μὲ τὶς ὑπόλοιπες λίρες ἐπῆρε ἀπὸ τὸ ἐργοστάσιον «Μπριτάνια» 16 τόπια ὕφασμα. Πόσες λίρες ἔδωσε στὰ δύο πρῶτα ἐργοστάσια καὶ πόσες λίρες ἐκόστισε κάθε τόπι ὑφάσματος τοῦ τελευταίου ἐργοστασίου ;

4. Ἕνας ἐκδοτικὸς οἶκος διέθεσεν ἐφέτος γιὰ τὴν ἀγορὰ χάρτου γιὰ τὴν ἐκτύπωσιν τῶν βιβλίων 20.000 δρχ. Ἀγόρασε $10\frac{1}{2}$ δεσμίδες χάρτου πρὸς 240 δρχ. τὴν δεσμίδα, $50\frac{1}{2}$ δεσμίδες πρὸς $200\frac{1}{5}$ δρχ. τὴν δεσμίδα καὶ $5\frac{1}{2}$ δεσμίδες πρὸς 300 δρχ. τὴ μία. Μὲ τὰ ὑπόλοιπα ἀγόρασε 15 δεσμίδες χαρτὶ γιὰ ἐξώφυλλα. Πόσα ἔδωσε στὶς τρεῖς ποσότητες τοῦ χάρτου καὶ πόσα ἐκόστισε κάθε δεσμίδα ἐξωφύλλου ;

5. Ἕνας πατέρας ἄφησε διαθήκη νὰ τὸν κληρονομήσουν τὰ πέντε παιδιά του τὰ 84 στρέμματα τῆς περιουσίας του ὡς ἑξῆς : ὁ πρῶτος νὰ πάρῃ τὰ $\frac{2}{7}$· ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{4}$· ὁ τρίτος τὰ $\frac{5}{14}$ καὶ οἱ δύο τελευταῖοι νὰ μοιρασθοῦν τὰ ὑπόλοιπα ἀπὸ μισὰ ὁ καθένας. Πόσα στρέμματα ἐκληρονόμησε ὁ καθένας ;

6. Ἕνας μεγάλος ἐλαιοπαραγωγὸς παρήγαγε ἐφέτος 41.976 χλγρ. λάδι. Ἐτοποθέτησε σὲ 4 μεγάλες δεξαμενὲς ἀπὸ $8350\frac{1}{2}$ χλγρ. λάδι σὲ κάθε μία. Σὲ 16 μεγάλα βαρέλια ἀπὸ $250\frac{1}{8}$ χλγρ. στὸ καθένα. Σὲ 100 δοχεῖα ἀπὸ $16\frac{1}{4}$ χλγρ. στὸ καθένα καὶ τὸ ὑπόλοιπο τὸ τακτοποίησε σὲ 32 σιδεροβάρελα. Πόσο λάδι ἐτοποθέτησε στὶς δεξαμενές, στὰ βαρέλια καὶ στὰ δοχεῖα καὶ πόσα χλγρ. λάδι σὲ κάθε σιδεροβάρελο ;

ΤΡΟΠΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΕΙΣ ΔΕΚΑΔΙΚΟΝ ΚΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΕΙΣ ΚΛΑΣΜΑ

1. Κάθε διαίρεσιν ἑνὸς ἀριθμοῦ δι' ἑνὸς ἄλλου ἀριθμοῦ μποροῦμε νὰ τὴν παραστήσωμε ὡς κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην. Τὸ ἀντίστροφο συμβαίνει στὸ κλάσμα. Π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ θὰ πῇ, νὰ διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴν 3 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 4. Ἂς κάνωμε τὴν διαίρεσιν.

$$\begin{array}{r|l} \dot{3}0 & \underline{\;4\;\;\;\;} \\ 20 & 0,75 \\ 0 & \end{array}$$

Εἴδαμε ὅτι τὸ 4 εἰς τὸ 3 δὲν εἰσχωρεῖ. Βάζομε -0- εἰς τὸ πηλίκον, καὶ γιὰ νὰ προχωρήσωμε στὴν εὕρεσιν δεκαδικῶν, βάζομε ὑποδιαστολὴν στὸ -0- ποὺ εἶναι ἀκέραιος καὶ προχωροῦμε γιὰ δέκατα, γράφοντας ἕνα μηδὲν στὸ τέλος τοῦ 3. Κατόπιν γιὰ νὰ βροῦμε ἑκατοστὰ προσθέτομε κι' ἄλλο μηδὲν στὸ τέλος τοῦ ὑπολοίπου. Ἂν ἔχωμε ὑπόλοιπο μηδέν, σταματᾶμε· ἄλλως προσθέτομε κι' ἄλλο μηδὲν καὶ προχωροῦμε γιὰ χιλιοστά. Ἂν δὲν θέλωμε νὰ προχωρήσωμε, τότε σταματᾶμε ὡς ἐκεῖ καὶ λέμε ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$, π.χ., εἶναι ἴσον μὲ τὸν δεκαδικὸν 0,714 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ.

Στὴν παραπάνω μετατροπὴ εἴχαμε $\frac{3}{4} = 0,75$

2. Ἂν εἴχαμε τὸν μικτὸν $8\frac{1}{5}$ νὰ τὸν κάνωμε δεκαδικόν, θὰ ἐκάναμε πρῶτα τὸ κλάσμα δεκαδικόν, κατόπιν θὰ προσεθέταμε καὶ τὸν ἀκέραιον - 8 - καὶ θὰ εἴχαμε:

$\dot{1}0$	5
0	0,2

$$8 + 0{,}2 = 8{,}2$$

$$8\frac{1}{5} = 8{,}2$$

3. Τὰ κλάσματα ποὺ ἔχουν παρονομαστὴν δέκατα, ἑκατοστά, χιλιοστά, κλπ. εἶναι εὔκολο νὰ τὰ τρέψωμε ἀμέσως σὲ δεκαδικοὺς ἀριθμούς, γιατὶ ξεύρομε πῶς γράφονται τὰ δεκαδικὰ ψηφία τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν. Ξεύρομε, π.χ., ὅτι τὰ δέκατα εἶναι τὸ πρῶτο ψηφίον, τὰ ἑκατοστὰ τὸ δεύτερον, τὰ χιλιοστὰ τὸ τρίτον ψηφίον, κλπ., μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, ἡ ὁποία χωρίζει τὸν ἀκέραιον ἀπὸ τὰ δεκαδικὰ ψηφία.

α) Τὸ κλάσμα, π.χ., $\frac{4}{10}$ εἶναι ἴσον πρὸς 0,4, ἐνῶ ὁ μικτὸς $5\frac{4}{10}$ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 5,4.

β) Τὸ κλάσμα $\frac{15}{100}$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 0, 15, ἐνῶ ὁ μικτὸς $20\frac{15}{100}$ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν δεκαδικὸν 20,15.

γ) Τὸ κλάσμα $\frac{48}{1000}$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 0, 048, ἐνῶ ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $250\frac{48}{1000}$ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 250, 048.

4. Ἡ τροπὴ ἑνὸς δεκαδικοῦ εἰς κλάσμα εἶναι ἀκόμα εὐκολωτέρα.

α) Ὁ δεκαδικὸς 0,75 εἶναι ἴσος μὲ τὸ κλάσμα $\frac{75}{100}$. Ὁ ἀριθμὸς 75 θὰ γραφῇ ὡς ἀριθμητής, ἐνῶ τὸ ἑκατὸν θὰ γραφῇ ὡς παρονομαστής. Τὸ μηδὲν ἀκέραιος, ἐφ᾽ ὅσον εἶναι μηδὲν δὲν γράφεται μπροστὰ ἀπὸ τὸ κλάσμα, ἐφ᾽ ὅσον ξεύρωμε ὅτι $\frac{75}{100}$ εἶναι μικρότερον ἀπὸ μίαν ἀκεραίαν μονάδα.

β) Ὁ δεκαδικὸς 15,75 εἶναι ἴσος πρὸς τὸν μικτὸν ἀριθμὸν $15\frac{75}{100}$.

γ) Οἱ δεκαδικοὶ 0,4 καὶ 5,4 εἶναι ἴσοι πρὸς τὸ κλάσμα $\frac{4}{10}$ καὶ τὸν μικτὸν $5\frac{4}{10}$.

δ) Οἱ δεκαδικοὶ 0,15 καὶ 20,15 εἶναι ἴσοι πρὸς τὸ κλάσμα $\frac{15}{100}$ καὶ τὸν μικτὸν $20\frac{15}{100}$.

ε) Οἱ δεκαδικοὶ 0,048 καὶ 250,048 εἶναι ἴσοι πρὸς τὸ κλάσμα $\frac{48}{1000}$ καὶ τὸν μικτὸν $250\frac{48}{1000}$.

Συγκρίνατε τὶς περιπτώσεις α, β, γ τῆς ἀσκήσεως -3- μὲ τὶς περιπτώσεις γ, δ, ε, τῆς ἀσκήσεως -4- καὶ πέστε τί διαπιστώνετε.

Ἀσκήσεις

1. Οἱ παρακάτω κλασματικοὶ καὶ μικτοί, νὰ γίνουν δεκαδικοί.

$\frac{24}{100}$, $\frac{3}{5}$, $12\frac{7}{8}$, $39\frac{5}{10}$, $\frac{65}{1000}$, $14\frac{1}{4}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{40}{50}$

2. Οἱ παρακάτω δεκαδικοὶ νὰ γίνουν κλασματικοὶ καὶ μικτοί.

18,4 | 0,27 | 56,08 | 23,800 | 0,005 | 39,6 | 0,02

Προβλήματα μὲ κλασματικοὺς καὶ δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς

(Γιὰ νὰ λυθοῦν αὐτὰ τὰ προβλήματα, ἢ ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ πρέπει νὰ γίνουν κλασματικοί, ἢ ὅλοι δεκαδικοί).

1. Ἡ μητέρα μου τὴν πρωτοχρονιὰ ἔκαμε ἕνα γλύκισμα κι' ἐχρησιμοποίησε αὐτὰ τὰ ὑλικά. Ἀλεῦρι $1\frac{3}{4}$ χλγρ., γάλα 0,75 χλγρ., βούτυρο $\frac{4}{8}$ χλγρ., χυμὸ πορτοκαλλιοῦ 0,125 χλγρ. Πόσο ἦταν ὅλο τὸ βάρος τῶν ὑλικῶν;

2. Ἕνα μέτρο μεταξωτοῦ ὑφάσματος κοστίζει 28,50 δραχμές. Πόσο κοστίζουν τὰ $7\frac{4}{10}$ μέτρα;

3. Ἀπὸ ἕνα βαρέλι τυρὶ βάρους $44\frac{2}{4}$ χλγρ. ὁ παντοπώλης ἐπώλησε τὴν πρώτην ἡμέρα $5\frac{1}{4}$ χλγρ. καὶ τὴν δευτέραν ἡμέρα 12,60 χλγρ. Πόσα χλγρ. τυρὶ ἀπέμεινε στὸ βαρέλι;

4. Ἕνα αὐτοκίνητο διέτρεξε μίαν ἀπόστασιν $135\frac{1}{2}$ χλμ. σὲ 3,50 ὧρες; Μὲ πόσα χιλιόμετρα τὴν ὥρα ἔτρεχε τὸ αὐτοκίνητο;

Πῶς εὑρίσκομε μὲ πόσες μονάδες ἰσοῦται ἕνα κλάσμα τοῦ ἀκεραίου

1. Πόσες δραχμὲς εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ χιλιοδράχμου ;

Λύσις

$$1000 \times \frac{3}{4} = \frac{3000}{4} = 750 \text{ δραχμές.}$$

2. Πόσα γραμμάρια εἶναι τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ χιλιογράμμου ;

Λύσις

$$1000 \times \frac{5}{8} = \frac{5000}{8} = 625 \text{ γραμμάρια.}$$

3. Πόσες δραχμὲς εἶναι τὰ $\frac{6}{30}$ τοῦ δεκαδράχμου ;

Λύσις

$$10 \times \frac{6}{30} = \frac{60}{30} = 2 \text{ δραχμές.}$$

4, Ἀπὸ μίαν ποσότητα 1500 χλγρ. ἀλεύρου ἐζύμωσαν, σ' ἕνα ἀρτοποιεῖον τὰ $\frac{2}{10}$. Πόσα χλγρ. ἀλεῦρι ἀπέμεινε ;

Λύσις

$$1500 \times \frac{2}{10} = \frac{3000}{10} = 300 \text{ χλγρ.}$$

$$\begin{array}{r} 1500 - \\ 300 \\ \hline 1200 \text{ χλγρ.} \end{array}$$

5. Πόσοι μῆνες εἶναι τὰ $\frac{15}{60}$ τοῦ ἔτους ;

Λύσις

$$12 \times \frac{15}{60} = \frac{180}{60} = 3 \text{ μῆνες.}$$

Ἀσκήσεις

Συντάξατε δέκα παρόμοια προβλήματα καὶ εὕρετε τὴν λύσιν των. Δικαιολογήσατε γιατί κάνομε πολλαπλασιασμόν. Θυμηθῆτε πότε κάνομε πολλαπλασιασμόν.

ΑΝΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΟΝΑΔΑ

1. 24 τετράδια ἔχουν 36 δραχμές. Πόσο ἔχουν τὰ 15 τετράδια ;

Σκέψις

α) Ἐδῶ ἔχομε νὰ λύσωμε ἕνα πρόβλημα ποὺ δὲν ὁμοιάζει μὲ ὅσα προβλήματα ἐλύσαμε ὡς τώρα. Ἐδῶ μᾶς λέγει τὸ πρόβλημα πόσο ἔχουν τὰ πολλὰ τετράδια καὶ μᾶς ζητοῦν νὰ εὕρωμε πόσο ἔχουν τὰ πολλά, ἐπίσης, τετράδια, ἀδιάφορο ἂν εἶναι περισσότερα, ἢ λιγώτερα ἀπὸ τὸ πρῶτον ποσόν.

Ἡ σκέψις μας, λοιπόν, πρέπει νὰ εἶναι διαφορετική. Ξεύρομε πόσο ἔχουν τὰ πολλὰ τετράδια. Γιὰ νὰ εὕρωμε πόσο ἔχουν ἐπίσης τὰ πολλά, πρέπει ἀπαραιτήτως νὰ εὕρωμε πρῶτα πόσο ἔχει τὸ ἕνα. Ξεύρομε ὅτι ὅταν γνωρίζωμε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν, γιὰ νὰ εὕρωμε τὴν τιμὴ τοῦ ἑνὸς κάνομε διαίρεσιν. Ξεύρομε, ἐπίσης, ὅτι ὅταν γνωρίζωμε τὴν τιμὴν τοῦ ἑνός, γιὰ νὰ εὕρωμε τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν κάνομε πολλαπλασιασμόν.

Ὥστε, στὸ παραπάνω πρόβλημα ὀφείλομε νὰ πραγματοποιήσωμε δύο πράξεις: μίαν διαίρεσιν γιὰ νὰ εὕρωμε τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς τετραδίου: $36 : 24 = 1{,}50$. Κι' ἕνα πολλαπλασιασμὸ γιὰ νὰ εὕρωμε τὴν τιμὴν τῶν 15 τετραδίων: $1{,}50 \times 15 = 22{,}50$ δραχμές.

β) Ἐκτὸς ὅμως ἀπὸ τὸν παραπάνω τρόπον λύσεως τοῦ προβλήματος ὑπάρχει κι' ἄλλος τρόπος, ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται ***ἀναγωγὴ εἰς τὴν***

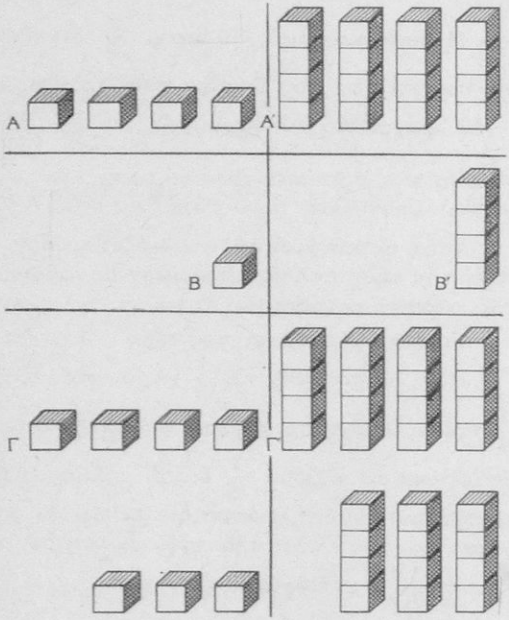
μονάδα. Δηλαδή, ἀπὸ τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν ἀναγόμεθα — πᾶμε νὰ εὕρωμε — τὴν τιμὴν τῆς μονάδος, τοῦ ἑνός. Κι' ὅταν εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ ἑνός, εὑρίσκεται καὶ ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν.

Στὴν ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα κάνομε τὴν ἴδια σκέψιν ποὺ ἐκάναμε καὶ λίγο παραπάνω. Λέμε, λοιπόν:

Ξεύρομε ὅτι τὰ εἴκοσι τέσσερα τετράδια ἔχουν τριάντα ἕξι δραχμές. Τὸ ἕνα τετράδιο ἔχει εἴκοσι τέσσαρες φορὲς λιγώτερο. Πρέπει, λοιπόν, νὰ διαιρέσωμε τὸ τριάντα ἕξι διὰ εἴκοσι τέσσερα. Αὐτὸ ὅμως μποροῦμε νὰ τὸ γράψωμε ὡς κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν τὸ τριάντα ἕξι καὶ παρονομαστὴν τὸ εἴκοσι τέσσερα: $\frac{36}{24}$. Τόσο ἔχει τὸ ἕνα τετράδιο.

Τώρα τὰ δέκα πέντε τετράδια ἔχουν δέκα πέντε φορὲς περισσότερο ἀπὸ ὅσα ἔχει τὸ ἕνα. Ἔτσι ἔχομε: $\frac{36}{24} \times 15 = \frac{540}{24} =$ 22,50 δραχμές.

Εὑρήκαμε τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα, γιατὶ καὶ στὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα δὲν κάνομε τίποτ' ἄλλο ἀπὸ μία διαίρεσιν κι' ἕνα πολλαπλασιασμό.



24. Ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα

γ) Στὴν μέθοδο τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ἡ κατάταξις λαμβάνει τὴν παρακάτω μορφήν:

Τὰ 24 τετράδια κοστίζουν 36 δραχ.

Τὸ 1 τετράδιο κοστίζει 36 : 24 ἢ $\frac{36}{24}$ δραχ.

Τὰ 15 τετράδια κοστίζουν $\frac{36}{24} \times 15 = \frac{540}{24} = 22{,}50$ δραχ.

2. Μὲ $\frac{9}{10}$ τοῦ δεκαδράχμου ἀγοράζομε $\frac{3}{4}$ τοῦ χλγρ. ρύζι. Πόσο ἔχει τὸ χιλιόγραμμο;

Λ ύ σ ι ς

Τὰ $\frac{3}{4}$ χλγρ. ρύζι κοστίζουν $\frac{9}{10}$ δραχ.

Τὸ $\frac{1}{4}$ » » » $\frac{9}{10\times3}$ »

Τὰ $\frac{4}{4}$ » » » $\frac{9\times4}{10\times3}=\frac{36}{30}=1\frac{6}{30}$ τοῦ δεκαδρχ.

(1 δεκάδραχμον = 10 δραχ. $\frac{6}{30}$ δεκαδράχμου = 2 δραχ. Θυμηθῆτε τὶς περιπτώσεις ποὺ ἐλύσαμε στὸ προηγούμενο κεφάλαιον. $1\frac{6}{30}$ δεκαδρ. = 12 δραχμὲς τὸ χιλιόγραμμο).

Σ κ έ ψ ι ς

Στὴν παραπάνω λύσι χρειάζεται λίγη προσοχή. Ἐδῶ δὲν μᾶς δίνουν τὴν τιμὴ πολλῶν ἀκεραίων μονάδων, ἀλλὰ τὴν τιμὴν κλάσματος τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴν τῆς μονάδος.

Γι' αὐτὸ χρειάζεται προσοχή.

Λέμε, λοιπόν, ὅτι τὰ $\frac{3}{4}$ χλγρ. ρύζι κοστίζουν $\frac{9}{10}$ τῆς δραχμῆς. Τὸ $\frac{1}{4}$ πρέπει νὰ ἔχῃ τρεῖς φορὲς λιγώτερο ἀπὸ τὰ $\frac{3}{4}$. Ἑπομένως πρέπει νὰ διαιρέσωμε τὸ κλάσμα $\frac{9}{10}$ διὰ 3... Ξεύρομε ὅμως ἀπὸ τὶς ἰδιότητες τῶν κλασμάτων ὅτι ἕνα κλάσμα διαιρεῖται ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστήν του. Πολλαπλασιάζομε, λοιπόν, τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος $\frac{9}{10\times3}$. Τόσο ἔχει τὸ $\frac{1}{4}$.

Ἀφοῦ εὑρήκαμε πόσο ἔχει τὸ $\frac{1}{4}$, μποροῦμε νὰ εὕρωμε πόσο ἔχει ὁλόκληρον τὸ χιλιόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{4}{4}$. Τὰ $\frac{4}{4}$ ἔχουν τέσσαρες φορὲς περισσότερο ἀπ' ὅσο ἔχει τὸ ἕνα. Θὰ πολλαπλασιάσωμε τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς τετάρτου, ἡ ὁποία εἶναι $\frac{9}{10\times3}$ ἐπὶ 4. Ἔτσι ἔχομε: $\frac{9\times4}{10\times3}=\frac{36}{30}=6\frac{6}{30}$ τοῦ δεκαδράχμου = 12 δραχμές.

3. Μὲ 18 $\frac{4}{10}$ δρχ. ἀγοράζομε $5\frac{3}{4}$ μέτρα κορδέλλα. Πόσο ἔχει τὸ μέτρον; $\left(18\frac{4}{10}=\frac{184}{10},\ 5\frac{3}{4}=\frac{23}{4}\right)$.

Τὰ $\frac{23}{4}$ κορδέλλας κοστίζουν $\frac{184}{10}$ δρχ.

Τὸ $\frac{1}{4}$ » » $\frac{184}{10 \times 23}$ δρχ.

Τὰ $\frac{4}{4}$ (1 μ.) » » $\frac{184 \times 4}{10 \times 23} = \frac{736}{230} = 3\frac{46}{230} = 3\frac{1}{5}$ δρχ.

4. Μὲ $36\frac{8}{10}$ δρχ. ἀγοράζω $11\frac{2}{4}$ μέτρα δαντέλλα. Πόσα μέτρα θ' ἀγοράσω μὲ $44\frac{4}{5}$ δρχ.

Λύσις

$$\left(36\frac{8}{10} = \frac{368}{10},\ 11\frac{2}{4} = \frac{46}{4},\ 44\frac{4}{5} = \frac{224}{5}\right)$$

Ἐπειδὴ τὰ δύο κλάσματα ποὺ παριστάνουν τὴν τιμὴ τῶν μέτρων εἶναι ἑτερώνυμα, γιὰ νὰ προχωρήσωμε στὴν λύσι τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ γίνουν ὁμώνυμα.

$$\overbrace{\frac{368}{10}}^{1},\ \overbrace{\frac{224}{5}}^{2} \qquad \text{Ε.Κ.Π.} = 10$$

$$\frac{368}{10},\ \frac{448}{10}$$

Μὲ $\frac{368}{10}$ δρχ. ἀγοράζω $\frac{46}{4}$ μέτρα δαντέλλα

μὲ $\frac{1}{10}$ » » $\frac{46}{4 \times 368}$

μὲ $\frac{448}{10}$ » » $\frac{46 \times 448}{4 \times 368} = \frac{20608}{1472} = 14$ μέτρα.

5. Τὰ $4\frac{1}{2}$ χλγρ. λαχανικὰ ἔχουν $28\frac{4}{5}$ δρχ. Πόσο ἔχουν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ χιλιογράμμου ;

$$\left(4\frac{1}{2} = \frac{9}{2},\ 28\frac{4}{5} = \frac{144}{5},\ \frac{3}{4}\right)$$

Ἐδῶ μᾶς ἐνδιαφέρουν τὰ κλάσματα τῶν χιλιογράμμων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἑτερώνυμα καὶ τὰ ὁποῖα, γιὰ νὰ προχωρήσωμε στὴν λύσι τοῦ προβλήματος, πρέπει νὰ γίνουν ὁμώνυμα.

$$\overbrace{\frac{9}{2}}^{2},\ \overbrace{\frac{3}{4}}^{1} \qquad \text{Ε.Κ.Π.} = 4$$

$$\frac{18}{4},\ \frac{4}{3}$$

Λύσις

Τὰ $\frac{18}{4}$ χλγρ. λαχανικὰ κοστίζουν $\frac{144}{5}$ δρχ.

τὸ $\frac{1}{4}$ » » » $\frac{144}{5 \times 18}$

τὰ $\frac{3}{4}$ » » » $\frac{144 \times 3}{5 \times 18} = \frac{432}{90} = 4\frac{72}{90} = 4\frac{8}{10}$ δρχ.

6. Ἡ περιουσία ἑνὸς ἀποθανόντος ἦταν 30.000 δρχ. Τὴν ἐκληρονόμησαν οἱ τρεῖς γυιοί του. Ὁ πρῶτος ἐπῆρε τὰ $\frac{4}{15}$ τοῦ ποσοῦ, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{3}{10}$ καὶ ὁ τρίτος τὰ ὑπόλοιπα. Πόσα πῆρε ὁ καθένας;

Σκέψις

Γιὰ νὰ προχωρήσωμε στὴ λύσι πρέπει τὰ κλάσματα νὰ γίνουν ὁμώνυμα.

$$\overbrace{\frac{4}{15}}^{2}, \quad \overbrace{\frac{3}{10}}^{3} \qquad \text{Ε.Κ.Π.} = 30$$

$$\frac{8}{30}, \quad \frac{9}{30}$$

Ὁ α′ θὰ λάβῃ $\frac{8}{30}$, ὁ β′ $\frac{9}{30}$ καὶ ὁ τρίτος τὰ ὑπόλοιπα $\frac{13}{30}$.

Λύσις

Ὁ πρῶτος: Τὰ $\frac{30}{30}$ τῆς περιουσίας εἶναι 30.000

τὸ $\frac{1}{30}$ » » » $\frac{30.000}{30}$

τὰ $\frac{8}{30}$ » » » $\frac{30.000}{30} \times 8 = \frac{240.000}{30} = 8.000$

Ὁ δεύτερος: Τὰ $\frac{30}{30}$ τῆς περιουσίας εἶναι 30.000

τὸ $\frac{1}{30}$ » » » $\frac{30.000}{30}$

τὰ $\frac{9}{30}$ » » » $\frac{30.000}{30} \times 9 = \frac{270.000}{30} = 9.000$

Ὁ τρίτος : Τὰ $\frac{30}{30}$ τῆς περιουσίας εἶναι 30.000

τὸ $\frac{1}{30}$ » » » $\frac{30.000}{30}$

τὰ $\frac{13}{30}$ » » » $\frac{30.000}{30} \times 13 = \frac{390.000}{30} = 13.000$

Προβλήματα

1. 5 βιβλία ἀριθμητικῆς κοστίζουν 62,50 δραχ. Πόσο ἔχουν τὰ 24 βιβλία. ;

2. 16 χλγρ. σιτάρι ἔχουν 51,20 δραχ. Πόσο ἔχουν τὰ 45 χλγρ. ;

3. Μὲ $63\frac{1}{4}$ δραχ. ἀγοράζομε $5\frac{1}{2}$ χλγρ. ρύζι. Πόσο ἔχουν τὰ $12\frac{1}{4}$ χιλιόγραμμα ;

4. Μὲ $107\frac{8}{10}$ δραχ. ἀγοράζω $3\frac{1}{2}$ χλγρ. κρέας. Πόσο κρέας ἀγοράζω μὲ $246\frac{4}{10}$ δραχμές ;

5. Ἕνας κτηματίας ἄφησε στὰ παιδιά του 960 ἐλαιόδενδρα κι' ἔγραψε στὴν διαθήκη του νὰ πάρουν, ὁ πρῶτος τὰ $\frac{4}{24}$ τῶν ἐλαιοδένδρων, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{3}{8}$, ὁ τρίτος τὰ $\frac{3}{12}$ καὶ ὁ τέταρτος τὰ ὑπόλοιπα. Πόσα ἀναλογοῦν στὸν καθένα ;

6. Τρία ἀδέλφια ἐδέχθησαν ἀπὸ τὸν πατέρα τους 100 δραχ. μὲ τὴν προϋπόθεσιν νὰ πάρουν ὁ πρῶτος τὰ $\frac{6}{20}$, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ ὁ τρίτος τὰ ὑπόλοιπα. Πόσες δραχμὲς πῆρε ὁ καθένας ;

7. 56 μολύβια ἔχουν 84 δραχμές. Πόσο ἔχουν τὰ 42 μολύβια ;

8. Μὲ $\frac{24}{50}$ τοῦ πενηνταδράχμου ἀγοράζομε $\frac{3}{4}$ τοῦ χιλιογράμ. κρέας. Πόσο κοστίζουν τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ χιλιογράμμου ;

9. Ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὰς Ἀθήνας εἰς τὴν Κόρινθον εἶναι 81 χλμ. Ὡς τὰ Μέγαρα τό αὐτοκίνητο ἔχει διανύσει τὰ $\frac{4}{9}$ τῆς ἀποστάσεως. Πόσα χλμ. εἶναι ἀπὸ τὰς Ἀθήνας ὡς τὰ Μέγαρα ;

Ὁ ἦχος τρέχει 340 μέτρα στὸ δευτερόλεπτο. Πόσην ἀπόστασιν τρέχει σὲ $\frac{4}{20}$ τοῦ δευτερολέπτου ;

11. Νὰ εὕρετε πρῶτα ἀπὸ μνήμης καὶ κατόπιν γραπτῶς τὶς παρακάτω ἀσκήσεις:

$\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας, πόσα πρῶτα λεπτὰ εἶναι;

$\frac{2}{5}$ τοῦ χιλιομέτρου, πόσα μέτρα εἶναι;

$\frac{1}{4}$ τοῦ μέτρου, πόσοι δάκτυλοι εἶναι;

$\frac{3}{10}$ τοῦ ἰσημερινοῦ, πόσα χλμ. εἶναι; (ἰσημερινὸς = 40.000 χλμ.)

$\frac{7}{12}$ τοῦ εἰκοσιτετραώρου, πόσες ὧρες εἶναι;

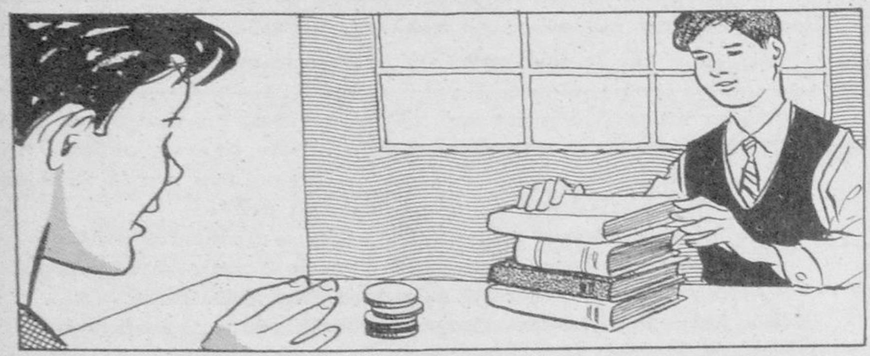
$\frac{6}{15}$ τοῦ μηνός, πόσες ἡμέρες εἶναι; (1 μὴν = 30 ἡμέρες)

$\frac{4}{5}$ τοῦ χιλιογράμμου, πόσα γραμμάρια εἶναι;

$\frac{15}{20}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου, πόσες δραχμὲς εἶναι;

$\frac{6}{10}$ τῆς δραχμῆς, πόσα λεπτὰ εἶναι;

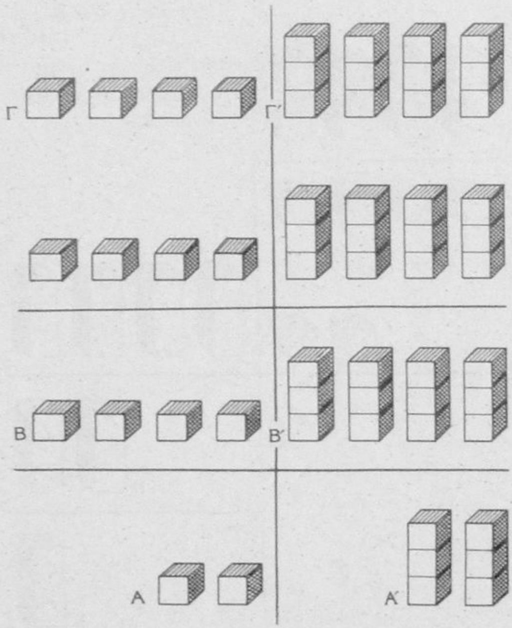
$\frac{9}{10}$ τῆς λίρας, πόσα σελίνια εἶναι; (1 λίρα = 20 σελίνια)



ΠΟΣΑ ΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΟΣΩΝ

1. Ἕνα σύνολον πολλῶν ὁμοειδῶν πραγμάτων λέμε ὅτι ἀποτελεῖ ἕνα ποσόν. Ἔχοντας 500 δραχμὲς λέμε ὅτι ἔχομε ἕνα ποσὸν δραχμῶν. Ἂν εἰς αὐτὸ τὸ ποσὸν προσθέσω καὶ ἄλλες 300 δρχ., τότε τὸ ποσόν μου θὰ αὐξηθῇ καὶ θὰ γίνῃ 800 δραχμές. Ἂν ὅμως ἀπὸ τὸ ποσὸν τῶν 500 δραχ. ἀφαιρέσω τὶς 300 δραχ., τότε τὸ ποσόν μου θὰ μειωθῇ. Τὴν πρώτη φορὰ ἔπαθε αὔξησιν, ἐνῶ τὴν δευτέρα φορὰ ἔπαθε μείωσιν.

Αὐτὴ εἶναι μία ἰδιότης τοῦ ποσοῦ: νὰ παθαίνῃ αὐξομείωσιν. Πλέον συγκεκριμένα, λοιπόν:



25. Ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα.

Ποσὸν λέγεται τὸ σύνολον πολλῶν ὁμοειδῶν πραγμάτων, τὸ ὁποῖον παθαίνει αὐξομείωσιν.

Ἂν τώρα πάρω δύο ποσὰ καὶ τὰ συσχετίσω, θὰ ἰδῶ ὅτι κι' αὐτὰ ἀποκτοῦν, ἀνάλογα μὲ τὶς περιστάσεις, δύο εἰδῶν σχέσεις μεταξύ των.

α) Παίρνω π.χ., δύο ποσά: ἕνα ποσὸν δρχ. κι' ἕνα ποσὸν βιβλίων.

Δίνω 100 δραχμὲς καὶ ἀγοράζω 8 ὅμοια βιβλία.

Ἂν δώσω διπλάσιες δραχμὲς θ' ἀγοράσω διπλάσια βιβλία.

Ἂν δώσω τριπλάσιες δραχμὲς θ' ἀγοράσω τριπλάσια βιβλία.

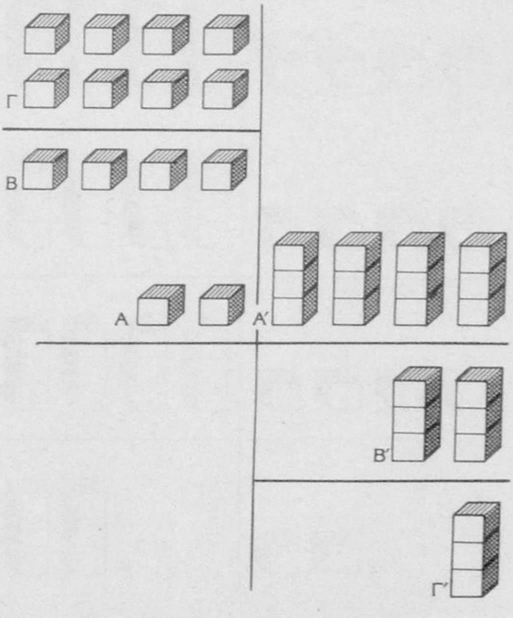
Ἂν δώσω μισὲς δραχμὲς θ' ἀγοράσω μισὰ βιβλία.

Βλέπω, λοιπόν, ὅτι ὅταν ἐδιπλασιάσθησαν, ἐτριπλασιάσθησαν, ἢ ἔγιναν μισὲς οἱ δραχμές, ἐδιπλασιάσθησαν, ἐτριπλασιάσθησαν, ἢ ἔγιναν μισὰ καὶ τὰ βιβλία.

Λέμε, συνεπῶς, ὅτι μεταξὺ αὐτῶν τῶν δύο ποσῶν ὑπάρχει ***εὐθεῖα ἀναλογία***. Λέμε, ἐπίσης, ὅτι αὐτὰ τὰ δύο ποσὰ εἶναι ***εὐθέως ἀνάλογα***.

Ἀντιγράψατε τὸν παρακάτω κανόνα:

Δύο ποσὰ λέγονται εὐθέως ἀνάλογα, ὅταν, πολλαπλασιαζομένου, ἢ διαιρουμένου τοῦ ἑνὸς μὲ ἕνα ἀριθμόν, πολλαπλασιάζεται, ἢ διαιρεῖται καὶ τὸ ἄλλο μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν.



26. Ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

β) Παίρνω τώρα δύο ἄλλα ποσά: ἕνα ποσὸν ἐργατῶν κι' ἕνα ποσὸν ἡμερῶν.

8 ἐργάτες σκάβουν τὸ κτῆμα μου σὲ 10 ἡμέρες.

Ἂν πάρω διπλασίους ἐργάτες θὰ σκάψουν τὸ κτῆμα μου σὲ μισὲς ἡμέρες.

Ἂν πάρω μισοὺς ἐργάτες θὰ σκάψουν τὸ κτῆμα μου σὲ διπλάσιες ἡμέρες.

Ἐδῶ διαπιστώνω ὅτι ὅταν οἱ ἐργάτες ἔγιναν διπλάσιοι, οἱ ἡμέρες ἔγιναν μισές. Κι' ὅταν οἱ ἐργάτες ἔγιναν μισοί, οἱ ἡμέρες ἐδιπλασιάσθησαν.

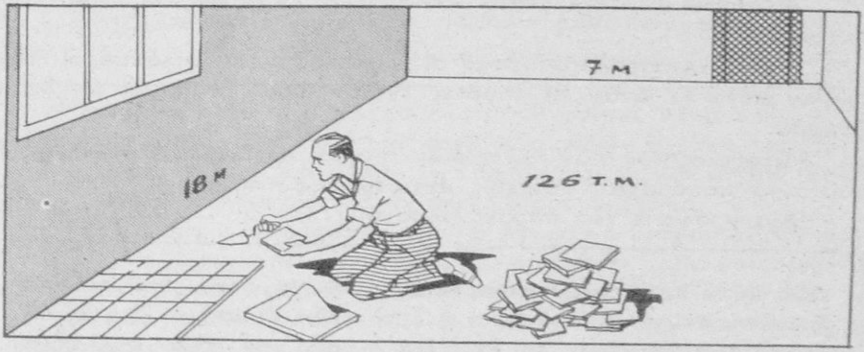
Μεταξὺ αὐτῶν τῶν δύο ποσῶν ὑπάρχει ***ἀντίστροφος ἀναλογία.*** Τὰ δύο αὐτὰ ποσὰ εἶναι, συνεπῶς, ***ἀντιστρόφως ἀνάλογα.***

Ἀντιγράψατε τὸν παρακάτω κανόνα:

Δύο ποσὰ λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὅταν, πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ἐπὶ 2, π.χ., τὸ ἄλλο διαιρεῖται διὰ 2. Ἢ, ὅταν, διαιρουμένου τοῦ ἑνὸς διὰ 2, π.χ., τὸ ἄλλο πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 2.

Ἀσκήσεις

1. Εὕρετε πέντε περιπτώσεις ποσῶν εὐθέως ἀναλόγων.
2. Εὕρετε πέντε περιπτώσεις ποσῶν ἀντιστρόφως ἀναλόγων.



ΑΠΛΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

Ὅσα προβλήματα ἐλύσαμε μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα, μποροῦμε νὰ τὰ λύσωμε μὲ μία νέα μέθοδον, ἡ ὁποία ὀνομάζεται ***ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.*** Σ' αὐτὴν τὴν μέθοδο μᾶς δίνουν τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ ζητοῦμε νὰ εὕρωμε ἕνα τέταρτον, ***ἄγνωστον*** ἀριθμόν. Ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς παίρνει, στὴν Ἀριθμητική, τὸ ὄνομα ***Χὶ*** καὶ γράφεται μὲ τὸ κεφαλαίον γράμμα ***Χ***.

Ἄς πάρωμε ἕνα πρόβλημα καὶ νὰ τὸ λύσωμε μὲ τὴν παραπάνω μέθοδον.

1. Μὲ 56 δραχμὲς ἀγοράζω 4 μέτρα λινό. Μὲ 140 δραχμὲς πόσα μέτρα λινὸ ἀγοράζω ;

Σκέψις

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ μπορεῖ νὰ λυθῇ μὲ τρεῖς τρόπους. Ὁ πρῶτος εἶναι: μὲ διαίρεσιν νὰ εὕρω πόσο ἔχει τὸ ἕνα μέτρον καὶ κατόπιν νὰ εὕρω πόσα μέτρα θ' ἀγοράσω μὲ τὶς 140 δραχμές.

$56 : 4 = 14$ δρχ. $\qquad 140 : 14 = 10$ μέτρα.

Ὁ δεύτερος τρόπος εἶναι νὰ λύσω τὸ πρόβλημα μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα ;

Μὲ 56 δρχ.	ἀγοράζω	4	μ.
μὲ 1 »	»	$\frac{4}{56}$	μ.
μὲ 140 »	»	$\frac{4}{56} \times 140 = \frac{560}{56} = 10$	μ.

Καὶ ὁ τρίτος τρόπος εἶναι μὲ τὴν ***ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν.***

Μὲ $\overline{56}$ δρχ. ἀγοράζω $\overline{4}$ μ. λινοῦ ὑφάσματος
μὲ 140 » » Χ; μ. » »

Αὐτή, ἡ πρώτη φάσις τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος, ὀνομάζεται ***κατάταξις τῶν ποσῶν.***

Ἐδῶ ἔχω δύο ποσά: δραχμὲς καὶ μέτρα λινοῦ ὑφάσματος.

Τὶς 140 δραχ. τὶς ἔγραψα κάτω ἀπὸ τὶς 56 δραχ. καὶ κάτω ἀπὸ τὸ 4 ἔγραψα τὸν ἄγνωστον, γιατὶ αὐτὸς εἶναι ὁ ἄγνωστος: πόσα μέτρα λινοῦ ὑφάσματος θ' ἀγοράσω.

Ἡ δευτέρα φάσις τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ ***σύγκρισις τῶν ποσῶν,*** μὲ τὴν ὁποίαν εἶναι ἀνάγκη νὰ διαπιστώσω τί σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν δύο ποσῶν: εἶναι εὐθέως ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα; Συγκρίνω, λοιπόν:

Μὲ 56 δραχμὲς ἀγοράζω 4 μέτρα λινοῦ ὑφάσματος.
Μὲ διπλάσιες δραχμὲς θ' ἀγοράσω διπλάσια μέτρα ὑφάσματος.
Μὲ μισὲς δραχμὲς θ' ἀγοράσω μισὰ μέτρα ὑφάσματος.
Ἑπομένως, τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα.
Τώρα ἀρχίζει ἡ τελικὴ φάσις τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος.

Ἀφοῦ διεπίστωσα ὅτι τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, γιὰ νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς θὰ πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμὸν ποὺ εὑρίσκεται πάνω ἀπὸ τὸ - Χ - ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ ἄλλου ποσοῦ ***ἀντεστραμμένον.***

Ξαναγράφω, λοιπόν, τὰ ποσά:

Λύσις

Μὲ $\overline{56}$ δραχ. ἀγοράζω $\overline{4}$ μ. λινοῦ ὑφάσματος
Μὲ 140 Χ; μ.

$$X = 4 \times \frac{140}{56} = \frac{560}{56} = 10 \text{ μ.}$$

Συγκρίνατε τοῦτο τὸ τελευταῖον σημεῖον μὲ τὴν τελικὴν λύσιν τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Δὲν κατελήξαμε στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα;

Ὅταν σᾶς παρουσιάζωνται τοιούτου εἴδους προβλήματα νὰ προτιμᾶτε νὰ τὰ λύνετε καὶ μὲ τοὺς τρεῖς τρόπους. Μὲ αὐτὸ τὸ σύστημα ἐπαληθεύετε κάθε φορὰ τὴν ὀρθότητα τοῦ ἀποτελέσματος.

2. 32 μαθηταὶ σκάβουν τὸν σχολικὸν κῆπο σὲ 6 ὧρες. 48 μαθηταὶ σὲ πόσες ὧρες θὰ σκάψουν τὸν κῆπον;

Σκέψις

α) 32 μαθηταὶ σκάβουν τὸν κῆπον σὲ 6 ὧρες.
Διπλάσιοι μαθηταὶ θὰ σκάψουν τὸν κῆπον σὲ μισὲς ὧρες.
Μισοὶ μαθηταὶ θὰ σκάψουν τὸν κῆπον σὲ διπλάσιες ὧρες.

β) Ἑπομένως, τὰ ποσὰ εἶναι ***ἀντιστρόφως ἀνάλογα.***

γ) Γιὰ νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος ἀριθμός, θὰ πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμὸν ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸ -Χ- ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ ἄλλου ποσοῦ *ὅπως εἶναι.*

Λύσις

32	μαθηταὶ	σκάβουν	τὸν	κῆπον	σὲ	6	ὧρες.
48	»	»	»	»	»	Χ;	ὧρες.

$$Χ = 6 \times \frac{32}{48} = \frac{192}{48} = 4 \text{ ὧρες.}$$

Προσοχή:

> **1. Ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς εὑρίσκεται ὅταν πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμὸν ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸ -Χ- ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ ἄλλου ποσοῦ ἀντεστραμμένον.**
>
> **2. Ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς εὑρίσκεται ὅταν πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμὸν ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸ -Χ- ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ ἄλλου ποσοῦ ὅπως εἶναι.**

Προβλήματα

1. 9 μέτρα κασμήρι ἀξίζουν 2520 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν τὰ 24 μέτρα ;

2. 56 χλγρ. μακαρόνια ἀξίζουν 560 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν τὰ 80 χιλιόγραμμα ;

3. 100 χλγρ. ἀλεῦρι γίνονται 135 χλγρ. ψωμί. Τὰ 75 χλγρ. ἀλεῦρι, πόσο ψωμὶ θὰ γίνουν ;

4. Ὁ ἐργολάβος ποὺ ἔκτισε ἕνα σχολεῖο, ἐπληρώθηκε, στὰ 15 κυβικὰ μέτρα τοιχοποιΐας, 1800 δραχμές. Πόσα χρήματα θὰ πάρῃ στὰ 216 κυβικὰ μέτρα, ποὺ εἶναι ὅλη ἡ τοιχοποιΐα τοῦ σχολείου ;

5. Ὁ ξυλουργός, ποὺ κατεσκεύασε τὴν ὀροφὴ τοῦ σχολείου, ἐπληρώθηκε, στὰ 7 τετρ. μέτρα, 126 δραχμές. Πόσα χρήματα θὰ πάρῃ γιὰ τὰ 189 τετρ. μέτρα τῆς ὀροφῆς ;

6. Ὁ ἀμμοκονιαστής, γιὰ 25 τ. μ. ἀμμοκονίαμα ἐπῆρε 312,50 δρχ. Πόσα χρήματα θὰ πάρῃ στὰ 378 τ. μ. ἀμμοκονιάματος;

7. Ἐστρώσαμε τὸ δάπεδον τοῦ σχολείου μὲ πλακάκια. Κάθε 3 τετρ. μέτρα ἐτοποθετήσαμε 75 πλακάκια. Πόσα πλακάκια θὰ τοποθετηθοῦν στὰ 126 τ. μέτρα;

8. Γιὰ τοὺς ὑαλοπίνακες τοῦ διδακτηρίου ἐπληρώσαμε, σὲ κάθε 5 τετρ. μέτρα, 210 δραχμές. Πόσα θὰ πληρώσωμε γιὰ τὰ 60 τ. μ. ὑαλοπινάκων;

9. Στὸ μαθητικὸ συσσίτιον διαθέτομε στὶς 6 ἡμέρες 9 κουτιὰ σκόνης γάλακτος. Στὶς 26 ἡμέρες, πόσα κουτιὰ γάλα θὰ διαθέσωμε;

- 10. Ὁ ἐργολάβος τῆς τοιχοποιΐας εἶχε 8 ἐργάτες κι' ἐτελείωσε τὴν τοιχοποιΐαν σὲ 36 ἡμέρες. Ἂν ἐχρησιμοποιοῦσε 12 ἐργάτες, σὲ πόσες ἡμέρες θὰ ἐτελείωνε ἡ τοιχοποιΐα;

- 11. Ὁ ξυλουργὸς ποὺ κατεσκεύασε τὴν ὀροφὴ ἐργαζόταν 8 ὧρες τὴν ἡμέρα κι' ἐτελείωσε τὴν ἐργασία σὲ 20 ἡμέρες. Ἂν ἐργαζόταν 10 ὧρες τὴν ἡμέρα, σὲ πόσες ἡμέρες θὰ ἐτελείωνε τὴν ἐργασίαν αὐτήν;

- 12. Ἕνας κτηματίας ἐχρησιμοποίησε 6 ἐργάτες κι' ἔσκαψαν τὰ κτήματά του σὲ 21 ἡμέρες. Ἂν ἐχρησιμοποιοῦσε 9 ἐργάτες, σὲ πόσες ἡμέρες θὰ ἔσκαβαν τὰ κτήματά του;

ΠΕΡΙ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

Α΄ Περίπτωσις

Τὰ ἐργοστάσια, οἱ ἐπιχειρήσεις, οἱ βιομηχανίες, οἱ ἀποθῆκες ὑφασμάτων καὶ ἐμπορευμάτων, οἱ ἀποθῆκες τροφίμων, τὰ μεγάλα καταστήματα, τὰ μεγάλα ἐμπορικά, ὅταν πωλοῦν τὰ εἴδη των σὲ μικρότερα καταστήματα γιὰ μεταπώλησιν, κάνουν ὑπὲρ τοῦ ἀγοραστοῦ μίαν ἔκπτωσιν, δηλαδὴ ἐλαττώνουν τὴν τιμὴ τῶν ἐμπορευμάτων κατὰ ἕνα ποσοστὸν 15% — 30%.

Ὅλα τὰ βιβλιοπωλεῖα ποὺ ἐκδίδουν τὰ βιβλία ποὺ διαβάζομε, κάνουν εἰς τοὺς βιβλιοπώλας τῶν ἐπαρχιῶν μίαν ἔκπτωσιν ἀπὸ 20% — 30%.

Κάθε κατάστημα εὑρισκόμενο στὴν ἐπαρχία προσθέτει, ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν εἰδῶν, ποὺ ἀγόρασε ἀπὸ τὶς μεγάλες ἀποθῆκες τῶν Ἀθηνῶν, ἕνα ποσοστὸν ἀπὸ 10% — 30% γιὰ ἔξοδα μεταφορᾶς, φύρας κλπ.

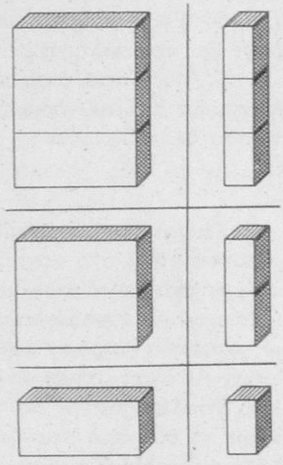
Ἡ ἔκπτωσις αὐτή, ἢ ἡ ἐπιβάρυνσις τῆς τιμῆς λέγεται ***ποσοστὸν ἐπὶ τοῖς ἑκατόν.*** 10% διαβάζεται δέκα τοῖς ἑκατὸν καὶ σημαίνει, ὅτι, «στὶς 100 δραχμὲς γίνεται ἔκπτωσις, ἢ ἐπιβάρυνσις δέκα δραχμῶν».

Γιατί ὅμως οἱ ἄνθρωποι διάλεξαν τὶς - 100 - δραχμὲς ἐπὶ τῶν ὁποίων νὰ κάμουν τὶς ἐκπτώσεις, ἢ καὶ τὶς - 1000 - δραχ. καμμιὰ φορά, καὶ δὲν ἐδιάλεξαν τὶς 35, ἢ τὶς 67, ἢ τὶς 97, ἢ τὶς 468 κλπ. ; Διότι χρησιμοποιώντας τοὺς ἀριθμοὺς 100 ἢ 1000 γίνεται εὐκολώτερος ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ἐκπτώσεως, ὅταν τὸν κάνωμε μὲ τὴν σκέψιν. Ἀλλὰ καὶ στὸ χαρτὶ παρουσιάζει μεγάλην εὐκολίαν στὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων.

Τὰ παρουσιαζόμενα προβλήματα λύνονται εὔκολα μὲ τὴν σκέψιν. Κι' ὅταν χρησιμοποιήσωμε τὸ μολύβι, λύνονται μὲ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν.

Προβλήματα

1. Ἕνας βιβλιοπώλης ἀγόρασε ἀπὸ τὰς Ἀθήνας βιβλία ἀξίας 850 δραχμῶν καὶ τοῦ ἔκαμαν ἔκπτωσιν 30%. Πόση εἶναι ἡ ἔκπτωσις καὶ πόσα χρήματα θὰ πληρώση;



27. Εἰς τὰ προβλήματα Ποσοστῶν καὶ τὰ δύο ποσὰ εἶναι μεταξύ των, εὐθέως ἀνάλογα.

Σκέψις

α) Στὶς 100 δραχ. γίνεται ἔκπτωσις 30 δραχ. Στὶς διπλάσιες δραχμὲς θὰ γίνῃ ἔκπτωσις διπλασία (εὐθέως ἀνάλογα).
Στὶς 850 δραχ. ποὺ εἶναι $8\frac{1}{2}$ φορὲς περισσότερες θὰ γίνῃ καὶ $8\frac{1}{2}$ φορὲς μεγαλυτέρα ἔκπτωσις. Θὰ γίνῃ ἔκπτωσις 255 δραχμές.

β) Ἂν ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὶς 850, τὶς 255 δραχ. θὰ μείνουν 595 δραχμές. Αὐτὸ τὸ ποσὸν θὰ πληρώσῃ.

Λύσις

Ἡ ὅλη ἐργασία θ' ἀκολουθήσῃ τὴν διαδικασίαν τῆς λύσεως διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν: κατάταξις ποσῶν, σύγκρισις ποσῶν καὶ εὕρεσις ἀγνώστου.

Στὶς $\overline{100}$ δραχ. ἔκπτωσις $\underline{30}$ δραχ.
Στὶς 850 » » X »

$$X = 30 \times \frac{850}{100} = \frac{25500}{100} = 225 \text{ δραχ.}$$

$$\begin{array}{r} 850 - \\ 255 \\ \hline 595 \end{array}$$

Κάμετε μόνοι σας τὶς τρεῖς ἐνέργειες ποὺ ἀνέφερα καὶ δικαιολογήσατε τὸ ἀποτέλεσμα.

(ΣΗΜ. Εἰς ὅλα τὰ προβλήματα τῶν ποσοστῶν, τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα· ἐπομένως, ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς θὰ εὑρίσκεται πάντοτε ἀφοῦ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸν ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸ - X - ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ ἄλλου ποσοῦ ἀντεστραμμένον. Τὰ προβλήματα, νὰ τὰ λύνετε πρῶτα ἀπὸ μνήμης κι' ὕστερα γραπτῶς).

2. Ἕνας ἄλλος βιβλιοπώλης ἐπρομηθεύτηκε βιβλία ἀξίας 3.200 δρχ. Γιὰ ἔξοδα μεταφορᾶς, κλπ., θὰ πωλήσῃ τὰ βιβλία μὲ κέρδος 15%. Τί

ποσὸν θὰ εἰσπράξῃ ἀπὸ τὴν πώλησιν ὅλων τῶν βιβλίων ;

3. Ἕνας παντοπώλης ἐπρομηθεύτηκε γιὰ τὸ παντοπωλεῖον του τρόφιμα ἀξίας 2.500 δραχμῶν καὶ τοῦ ἔκαμαν ἔκπτωσιν 12%. Πόση εἶναι ἡ ἔκπτωσις καὶ τί ποσὸν θὰ πληρώσῃ ;

4. Ἕνα ἐμπορικὸν κατάστημα ἀγόρασε ὑφάσματα ἀξίας 16.400 δρχ., τὰ ὁποῖα θὰ μεταπωλήσῃ μὲ κέρδος 18%. Πόσο θὰ εἶναι τὸ κέρδος καὶ πόσα θὰ εἰσπράξῃ ἐν ὅλῳ ;

5. Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε λάδι Κρήτης κι' ἐπλήρωσε 10.000 δρχ. Θὰ τὸ πωλήσῃ μὲ κέρδος 15%. Πόσο θὰ εἶναι τὸ κέρδος του ;

6. Ἀγόρασα ἀπὸ τὸ ἐργοστάσιον ἕνα κιβώτιο σαπούνι ἀξίας 450 δραχμῶν καὶ μοῦ ἔκαμαν ἔκπτωσιν 12%. Πόση εἶναι ἡ ἔκπτωσις καὶ τί ποσὸν θὰ πληρώσω ;

Β' Περίπτωσις

Τὰ προβλήματα τῶν ποσοστῶν παρουσιάζονται σὲ ἄπειρες περιπτώσεις τῆς ζωῆς μας. Οἱ Δῆμοι καὶ Κοινότητες ἐπιβάλλουν φορολογία στὴν παραγωγὴ τῶν προϊόντων. Ἡ φορολογία στὰ εἰσοδήματα κανονίζεται ἀπὸ τὴν Ἐφορία κατὰ ποσοστὸν ἐπὶ τοῖς ἑκατόν. Οἱ θάνατοι, οἱ γεννήσέις ὑπολογίζονται σὲ ποσοστὰ ἐπὶ τοῖς ἑκατόν, ἢ ἐπὶ τοῖς χιλίοις. Αἱ στατιστικὲς στὶς ἑταιρεῖες, στὶς δημόσιες ὑπηρεσίες, στὰ σχολεῖα ὑπολογίζονται εἰς ποσοστὰ ἐπὶ τοῖς ἑκατόν. Αἱ κρατήσεις ποὺ κάνουν τὰ διάφορα ταμεῖα ἀπὸ τοὺς μισθοὺς τῶν ἐργατῶν καὶ τῶν ὑπαλλήλων ὑπολογίζονται εἰς ποσοστὰ ἐπὶ τῶν ἑκατὸν δραχμῶν, κλπ.

Προβλήματα

1. Τὸ εἰσιτήριον εἰς τὸ θέατρον τῆς Ἐπιδαύρου εἶναι : Α' θέσις δρχ. 120. Β' θέσις δρχ. 40, Γ' θέσις δρχ. 20 καὶ Δ' θέσις δρχ. 10. Ὁ φόρος ποὺ εἰσπράττει τὸ κράτος εἶναι 45 %. Πόσον φόρον εἰσπράττει τὸ κράτος ἀπὸ κάθε εἰσιτήριον σὲ κάθε θέσιν τοῦ θεάτρου ;

2. Σ' ἕνα Δημοτικὸν Σχολεῖον φοιτοῦν 380 μαθηταί. Πέρυσι ἔμειναν στὴν ἴδια τάξι 5%. Πόσοι ἀπερρίφθησαν καὶ πόσοι προήχθησαν ;

3. Ἕνα Κοινοτικὸν Συμβούλιον ἐπέβαλε φορολογίαν ἐπὶ τῆς παραγωγῆς τοῦ λαδιοῦ 3‰ (τρία τοῖς χιλίοις). Ὅλο τὸ χωριὸ εἶχε παραγωγὴν 658.000 χλγρ. λάδι. Πόση εἶναι ἡ φορολογία τῆς Κοινότητος ;

4. Ὁ πληθυσμὸς τῆς Κορίνθου εἶναι 20.000. Τὸ προηγούμενο ἔτος εἴχαμε γεννήσεις 2%. Πόσα παιδιὰ ἐγεννήθησαν ;

5. Ἕνας ὑπάλληλος παίρνει μισθὸν 1.500 δρχ. Τοῦ κρατοῦν γιὰ τὸ Μετοχικὸν Ταμεῖον 3%. Πόσα εἶναι τὰ χρήματα ποὺ τοῦ κρατοῦν γιὰ τὸ Ταμεῖον αὐτό ;

6. Ἡ πατρίδα μας ἔχει ἔκτασιν 132.000 τετρ. χιλιόμετρα. Τὰ ἑλληνικὰ δάση καταλαμβάνουν τὰ 10 % τῆς ἐκτάσεως, οἱ πεδιάδες τὰ 21% καὶ οἱ φυτεῖες (καπνοῦ — βάμβακος) 9%. Πόσα τετρ. χλμ. ἔκτασιν καταλαμβάνουν τὰ δάση, οἱ πεδιάδες, οἱ φυτεῖες ;

7. Ὅλη ἡ ἔκτασις τῆς Γῆς εἶναι περίπου 540 ἑκατομμύρια τετρ. χλμ. Ἡ ξηρὰ καταλαμβάνει τὰ 25% τῆς ὅλης ἐκτάσεως. Πόσα, δηλαδή, τετραγωνικὰ χιλιόμετρα εἶναι ἡ ἔκτασις τῆς ξηρᾶς ;

Γ' Περίπτωσις

Πολλὲς φορὲς μᾶς δίδουν τὰ ποσὰ καὶ μᾶς ζητοῦν νὰ εὕρωμε τὸ ποσοστόν.

1. Σ' ἕνα Δημοτικὸν Σχολεῖον φοιτοῦν 300 μαθηταί. Πέρυσι ἀπερρίφθησαν 15. Πόσον εἶναι τὸ ποσοστὸν τῶν ἀπορριφθέντων ;

Σκέψις

Ἀφοῦ στοὺς 300 μαθητὰς ἀπερρίφθησαν 15 μαθηταί, στοὺς 100 μαθητὰς ποὺ εἶναι εἶναι τρεῖς φορὲς λιγώτεροι θὰ ἀπερρίφθησαν καὶ τρεῖς φορὲς λιγώτεροι. Ἑπομένως ἀπερρίφθησαν 5 μαθηταί. Τὸ ποσοστόν, λοιπόν, τῶν ἀπορριφθέντων εἶναι 5%. Τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα.

Λύσις

Στοὺς 300 μαθητὰς ἀπερρίφθησαν 15 μαθηταὶ
στοὺς 100 » » Χ; »

$$X = 15 \times \frac{100}{300} = \frac{1500}{300}\ 5\ \%.$$

2. Σ' ἕνα σχολεῖο φοιτοῦν 160 μαθηταί. Οἱ νεοεγγραφέντες εἶναι 32. Τί ποσοστὸν νέων μαθητῶν ἦλθε στὸ σχολεῖον ;

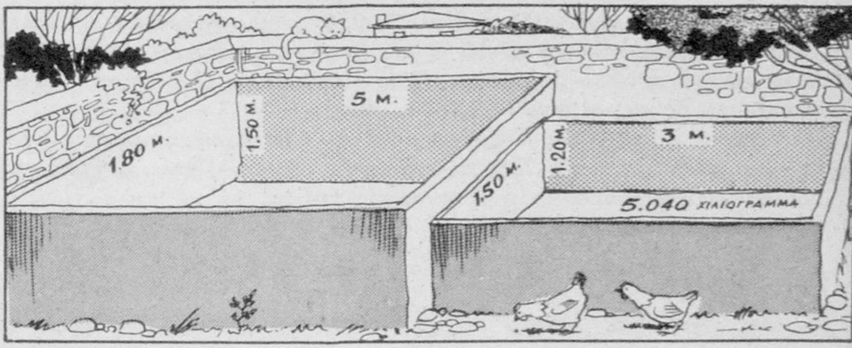
3. Ἕνας μικροέμπορος μετέφερε 1800 αὐγά. Τοῦ ἔσπασαν ὅμως 54 αὐγά. Πόσο εἶναι τὸ ποσοστὸν τῶν σπασμένων αὐγῶν ;

4. Ἕνα σχολεῖο ἔχει 310 μαθητὰς κι' ἠσθένησαν ἀπὸ γρίππη 124. Ποιό εἶναι τὸ ποσοστὸν τῶν ἀσθενησάντων μαθητῶν ;

5. Ἡ μαθητική μας Κοινότης ἔχει στὸ ταμεῖο της 520 δραχμές. Προσέφερε στὰ πτωχὰ παιδιὰ 390 δρχ. Τί ποσοστὸν χρημάτων προσέφερε ;

6. Ἕνας ἔμπορος λαχανικῶν μετέφερε στὴν ἀγορὰ τῶν Ἀθηνῶν 400 κιλὰ τομάτες. Ἀπ' αὐτὲς ἐπέταξε, ὡς σάπιες, 20 κιλά. Τί ποσοστὸν τομάτας ἐσάπισε ;

7. Στὰ 408 χλγρ. γάλα βγαίνουν 24,48 χλγρ. βούτυρο. Τί ποσοστὸν βούτυρο βγαίνει ;



ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

Εἰς ὅσα προβλήματα ἐλύσαμε μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα καὶ μὲ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν συναντήσαμε πάντοτε δύο ποσά. Ὑπάρχουν, ὅμως, καὶ προβλήματα μὲ τρία καὶ τέσσαρα ποσά. Αὐτὰ τὰ προβλήματα τὰ λύνομε μὲ τὴν ***σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν.***

Κατὰ τὴν διαδικασίαν τῆς μεθόδου αὐτῆς κάνομε τὶς ἴδιες ἐνέργειες μὲ τὴν ἁπλῆν μέθοδον: κατάταξιν τῶν ποσῶν, σύγκρισιν καὶ εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου.

Ἀπαιτεῖται μόνον λίγη προσοχὴ στὸν τρόπον τῆς συγκρίσεως. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι περισσότερα ἀπὸ δύο, ἡ σύγκρισις θὰ γίνεται ἀνὰ δύο. Κάθε φορά, δηλαδή, θὰ συγκρίνωμε τὸν ἄγνωστον μὲ ***ἕνα*** ἀπὸ τ' ἄλλα ποσά. Κατὰ τὴν διενέργεια τῆς συγκρίσεως τὰ ὑπόλοιπα ποσὰ δὲν θὰ ***αὐξομειοῦνται,*** ἀλλὰ θὰ παραμένουν σταθερά. Κατόπιν θὰ πάρωμε τὸ δεύτερον ποσὸν καὶ θὰ τὸ συγκρίνωμε μὲ τὸν ἄγνωστον. Μὲ τὴ σειρά του τώρα τὸ πρῶτο ποσὸν θὰ παραμένῃ σταθερόν. Κατόπιν θὰ πάρωμε τὸ τρίτον ποσόν, ἂν ὑπάρχῃ καὶ θὰ συνεχισθῇ ἡ ἰδία ἐργασία.

Ἡ σύγκρισις γίνεται, ὅπως γνωρίζομε, γιὰ νὰ διαπιστώσωμε τὴν εὐθεῖαν, ἢ ἀντίστροφον ἀναλογίαν μεταξὺ τῶν ποσῶν. Ὅπου, λοιπόν, διαπιστώσωμεν ὅτι τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, τὸ κλάσμα κατὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου, θὰ γράφεται ἀντεστραμμένον, κι' ὅπου διαπιστώσωμεν ὅτι τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, τὸ κλάσμα θὰ γράφεται ὅπως εἶναι.

Προβλήματα

1. 10 ἐργάτες ἐργαζόμενοι 8 ὧρες τὴν ἡμέρα τελειώνουν τὸ κτίσιμο μιᾶς οἰκοδομῆς σὲ 30 ἡμέρες. Ἂν ἦσαν 16 ἐργάτες κι' ἐργάζονταν 5 ὧρες τὴν ἡμέρα, σὲ πόσες ἡμέρες θὰ ἐτελείωναν τὸ κτίσιμο τῆς οἰκοδομῆς ;

Λύσις

(Κατάταξις)	10 ἐργάτες	8 ὧρες	30 ἡμέρες
	16 »	5 »	Χ ; »

Σύγκρισις α) 10 ἐργάτες τελειώνουν τὴν ἐργασία σὲ 30 ἡμέρες.
Διπλάσιοι ἐργάτες τελειώνουν τὴν ἐργασίαν σὲ μισὲς ἡμ.
Μισοὶ ἐργάτες τελειώνουν τὴν ἐργασίαν σὲ διπλάσιες ἡμ.
— Τὰ ποσὰ ἐργάτες καὶ ἡμέρες εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα.
(Πῶς θὰ γραφῇ τὸ κλάσμα ;)

Σύγκρισις β) Οἱ ἐργάτες, ἐργαζόμενοι 8 ὧρες τὴν ἡμ., τελειώνουν σὲ 30 ἡμ.
Ἂν ἐργασθοῦν διπλάσιες ὧρες τὴν ἡμ. θὰ τελ. σὲ μισὲς ἡμ.
Ἂν ἐργασθοῦν μισὲς ὧρες τὴν ἡμ. θὰ τελ. σὲ διπλάσιες ἡμ.
— Τὰ ποσὰ ὧρες καὶ ἡμέρες εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα.
(Πῶς θὰ γραφῇ τὸ κλάσμα ;)

Ἡ σύγκρισις ἐτελείωσε. Βλέπετε ὅτι κάθε φορὰ ἔπαιρνα δύο ποσά.

Ἀφοῦ διεπιστώσαμε τί σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ ἀγνώστου καὶ καθενὸς ἀπὸ τ' ἄλλα ποσά, προχωροῦμε στὴν εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου, ὁ ὁποῖος θὰ εὑρεθῇ ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμόν, ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸ - Χ - ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ πρώτου ποσοῦ ὅπως εἶναι (γιατί ;), καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ δευτέρου ποσοῦ ὅπως εἶναι (γιατί ;).

Λύσις.

Οἱ 10 ἐργ. ἐργαζόμενοι 8 ὧρες τελ. σὲ 30 ἡμ.
οἱ 16 ἐργ. » 5 ὧρες » » Χ ; ἡμ.

$$X = 30 \times \frac{10}{16} \times \frac{8}{5} = \frac{2400}{80} = 30 \text{ ἡμέρες.}$$

2. Σ' ἕνα ἐργοστάσιον ὑφαντουργίας ἐργάζονται 125 ἐργάτριες 8 ὧρες τὴν ἡμέρα καὶ παράγουν 1250 μέτρα ὕφασμα. Ἂν οἱ ἐργάτριες γίνουν 180 κι' ἐργάζονται 6 ὧρες τὴν ἡμέρα πόσα μέτρα ὕφασμα θὰ παραγάγουν ;

3. Γιὰ τὴν κατασκευὴ τῆς ὀροφῆς ἑνὸς δωματίου ὁ ξυλουργὸς ἐχρησιμοποίησε 360 μικρὲς σανίδες μήκους 3 μ. καὶ πλάτους 0,05 μ. Ἂν οἱ σανίδες εἶχαν μῆκος 4 μ. καὶ πλάτος 0,06, πόσες σανίδες θὰ ἐχρησιμοποιοῦσε ;

4. Ἕνα τεπόζιτον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον πλάτους 1,50 μ., ὕψους 1,20 καὶ μήκους 3 μ. χωρεῖ μέσα 5.400 χλγρ. νεροῦ. Ἂν τὸ τεπόζιτον εἶχε πλάτος 1,80 μ., ὕψος 1,50 μ. καὶ μῆκος 5 μ., πόσα χλγρ. νεροῦ θὰ ἐχωροῦσε ;

5. Μία αἴθουσα τοῦ σχολείου μας ποὺ ἔχει μῆκος 9 μ. πλάτος 7 μ. καὶ ὕψος 4 μ. ἔχει χωρητικότητα 252 κυβικὰ μέτρα ἀέρος. Μία ἄλλη αἴθουσα ἔχει μῆκος 7 μ. πλάτος 5 μ. καὶ ὕψος 4 μ. Πόση χωρητικότητα ἀέρος ἔχει ;

6. Γιὰ νὰ πλακοστρώσωμε τὸ δάπεδον τοῦ σχολείου μας· ποὺ ἔχει μῆκος 18 μ. καὶ πλάτος 7 μ., ἐπληρώσαμε 6.300 δραχμές. Ἂν τὸ δάπεδον εἶχε μῆκος 54 μέτρα καὶ πλάτος 6 μέτρα, πόσα χρήματα θὰ ἐπληρώναμε ;

7. Στὸν σχολικὸν κῆπο ποὺ ἔχει μῆκος 38 μ. καὶ πλάτος 3 μ. ἐφυτεύσαμε 456 καλλωπιστικὰ φυτά. Ἂν ὁ κῆπος εἶχε μῆκος 70 μ. καὶ πλάτος 2,50 μ. πόσα καλλωπιστικὰ φυτὰ θὰ ἐφυτεύαμε ;

8. Σ' ἕνα σχολεῖο φοιτοῦν 100 μαθηταὶ καὶ γιὰ τὸ συσσίτιό τους διατίθεται, ἐπὶ 10 ἡμέρες, τυρὶ βάρους 2,5 χλγρ. Σ' ἕνα ἄλλο σχολεῖο ποὺ φοιτοῦν 250 μαθηταὶ πόσο τυρὶ θὰ διατεθῇ ἐπὶ 15 ἡμέρες ;

.9 Τὸ φιλόπτωχον ταμεῖον τῆς ἐνορίας μας διέθεσε εἰς 120 πτωχὰ παιδιὰ 480 μ. ὕφασμα πλάτους 0,90 μ. γιὰ φορεματάκια. Ἂν διέθετε 720 μ. ὕφασμα πλάτους 1,20 μ. σὲ πόσα πτωχὰ παιδιὰ θὰ ἐμοίραζε ἀπὸ ἕνα φόρεμα ;

10. Σ' ἕνα ἐργοστάσιο, 86 ἐργάτες ἐργαζόμενοι 8 ὧρες τὴν ἡμέρα παράγουν 172 κ.μ. τσιμέντου. Πόσοι ἐργάτες, ἐργαζόμενοι 10 ὧρες τὴν ἡμέρα θὰ παρήγαγαν 500 κ. μ. τσιμέντου ;

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

Ὅταν ἐνοικιάζῃ κανεὶς τὸ σπίτι του σὲ ἄλλον, παίρνει, ἀπὸ τὸν ἐνοικιαστήν, κάποιο κέρδος, τὸ ὁποῖον λέγεται ἐνοίκιον. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, ὅταν δανείζῃ κανεὶς χρήματα σὲ ἄλλον, παίρνει ἀπ' αὐτὸν κάποιο κέρδος, ὡς εἶδος ἐνοικίου τῶν χρημάτων, ποὺ ἐδάνεισε. Τὸ κέρδος αὐτὸ ὀνομάζεται ***τόκος***.

Ὁ τόκος ὑπολογίζεται ἐπὶ τῶν ἑκατὸν δραχμῶν καὶ γιὰ ἕνα ἔτος. Ἂν ἕνας, π. χ., δανεισθῇ χρήματα ἀπὸ κάποιον ἄλλον, ἢ ἀπὸ τὴν Τράπεζαν, ὀφείλει νὰ συμφωνήσῃ μαζί της πόσον τόκον θὰ πληρώνῃ σὲ κάθε 100 δραχμὲς καὶ γιὰ ἕνα ἔτος. Συνεφώνησαν, π.χ., ὅτι θὰ πληρώνῃ 10% (δέκα τοῖς ἑκατόν): ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν γιὰ ἕνα ἔτος ὀνομάζεται ***ἐπιτόκιον***.

Ὅλον τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων ποὺ δανείζομεν, ἢ δανειζόμεθα, λέγεται ***κεφάλαιον***. Τὸ χρονικὸν διάστημα, γιὰ τὸ ὁποῖον δανείζομεν, ἢ δανειζόμεθα τὰ χρήματα, λέγεται ***χρόνος***.

Πολλοὶ ἄνθρωποι συνηθίζουν νὰ καταθέτουν, ὅσα χρήματα τοὺς περισσεύουν, στὸ Ταχυδρομικὸ Ταμιευτήριο, ἢ στὶς Τράπεζες. Τὸ Ταχ. Ταμιευτήριον, ἢ οἱ Τράπεζες δίνουν στὸ τέλος τοῦ ἔτους ἕνα ὡρισμένον τόκον.

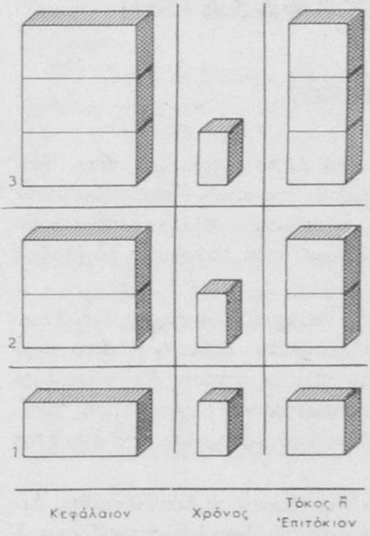
Τὰ προβλήματα ποὺ μᾶς παρουσιάζονται στὴν χρησιμοποίησιν τῶν κεφαλαίων τὰ λέμε ***προβλήματα τόκου***. Σ' αὐτὰ τὰ προβλήματα παρουσιάζονται περισσότερα ἀπὸ δύο ποσά, γι' αὐτὸ θὰ τὰ λύνωμε μὲ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν.

Στὸν τόκο θὰ συναντήσωμε τέσσερα εἴδη προβλημάτων: α) Ὅταν ζητοῦμε τὸν τόκον, β) ὅταν ζητοῦμε τὸ ἐπιτόκιον, γ) ὅταν ζητοῦμε τὸν χρόνον καὶ δ) ὅταν ζητοῦμε τὸ κεφάλαιον.

Τὶς περισσότερες φορὲς ἡ χρονικὴ διάρκεια τοῦ δανείου εἶναι ἕνα, ἢ δύο, ἢ τρία συμπληρωμένα ἔτη, ἀλλὰ μπορεῖ νὰ εἶναι καὶ ἕνας, ἢ τρεῖς, ἢ δέκα μῆνες, ἢ ἀκόμη καὶ 30, ἢ 60, ἢ 90 ἡμέρες, κλπ. Ἡ χρονικὴ διάρκεια τοῦ δανείου μπορεῖ ἐπίσης νὰ εἶναι γιὰ ἕνα ἔτος καὶ λίγους μῆνες, ἢ γιὰ ἕνα ἔτος, λίγους μῆνες καὶ λίγες ἡμέρες. Πάντως θὰ ὑπολογίζωμε στὰ προβλήματα ὅτι: 1 ἔτος = 12 μῆνες, 1 ἔτος = 360 ἡμέρες, 1 μῆνας = 30 ἡμέρες. Ἐπίσης θὰ λαμβάνωμε πάντοτε ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν, δηλαδὴ τὸ ἐπιτόκιον, ὑπολογίζεται σὲ 1 ἔτος, ἢ σὲ 12 μῆνες, ἢ σὲ 360 ἡμέρες.

α) Σύγκρισις Τόκου ἢ Ἐπιτοκίου μὲ τὸ Κεφάλαιον (Ἄγνωστος ὁ τόκος ἢ τὸ Ἐπιτόκιον).

β) Σύγκρισις Κεφαλαίου μὲ τὸν Τόκον ἢ τὸ Ἐπιτόκιον (Ἄγνωστον τὸ Κεφάλαιον).



28. Ὅταν ζητῆται ὁ Τόκος: Κεφάλαιον καὶ Τόκος = ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα. Ὅταν ζητῆται τὸ Κεφάλαιον: Τόκος καὶ Κεφάλαιον = ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα. Ὅταν ζητῆται τὸ Ἐπιτόκιον: Κεφάλαιον καὶ Ἐπιτόκιον = ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα.

(ΣΗΜ. Αὐξομειοῦται ὁ τόκος (τὸ ἐπιτόκιον), ἢ τὸ κεφάλαιον, ἐνῶ ὁ χρόνος παραμένει ὁ ἴδιος. Οἱ ἴδιες ἀναλογίες ἰσχύουν καὶ γιὰ τὰ προβλήματα τῆς Ὑφαιρέσεως).

Α' Περίπτωσις: Πῶς εὑρίσκομεν τὸν τόκον

1. Ἕνας γεωργὸς ἐπῆρε ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴν Τράπεζαν καλλιεργητικὸν δάνειον 800 δρχ. πρὸς 12%. Πόσον τόκον θὰ πληρώσῃ σὲ 3 ἔτη;

Σκέψις

Σύγκρισις: α) Στὶς 100 δραχ. σὲ 1 ἔτος δίνει τόκον 12 δρχ. Στὶς 800 δρχ. σὲ 1 ἔτος δίνει τόκον $12 \times 8 = 96$ »

β) Ἀφοῦ σὲ 1 ἔτος δίνει τόκον 96 δρχ. σὲ 3 ἔτη δίνει τόκον $96 \times 3 = 288$.

Λύσις

	Κ.	Χ.	Τ.
α) Κατάταξις	100 δ.	1 ἔτος	12 δ.
	800 δ.	3 ἔτη	Χ; δ.

Ἄγνωστος εἶναι ὁ τόκος. Θὰ συγκρίνωμε πρῶτα τὸ κεφάλαιον καὶ τὸν τόκον (ὁ χρόνος θὰ μένῃ ἴδιος). Ὕστερα θὰ συγκρίνωμε τὸν χρόνο καὶ τὸν τόκο (τὸ κεφάλαιον θὰ μένῃ ἴδιο).

β) Σύγκρισις 1. Κεφάλαιον 100 δρχ. σὲ 1 ἔτος δίδει 12 δρχ. τόκον. Διπλάσιον κεφάλαιον σὲ 1 ἔτος δίνει διπλάσιον τόκον. Τριπλάσιον κεφάλαιον σὲ 1 ἔτος δίνει τριπλάσιον τόκον. Μισὸ κεφάλαιον σὲ 1 ἔτος δίνει μισόν τόκον.

Ἑπομένως κεφάλαιον καὶ τόκος εἶναι ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα (Γιατί;)

2. Κεφάλαιον 100 δρχ. σὲ 1 ἔτος δίνει 12 δρχ. τόκον. Τὸ ἴδιον κεφάλαιον σὲ 2 ἔτη δίνει διπλάσιον τόκον. Τὸ ἴδιον κεφάλαιον σὲ 3 ἔτη δίνει τριπλάσιον τόκον. Τὸ ἴδιον κεφάλαιον σὲ μισὸ ἔτος δίνει μισὸν τόκον.

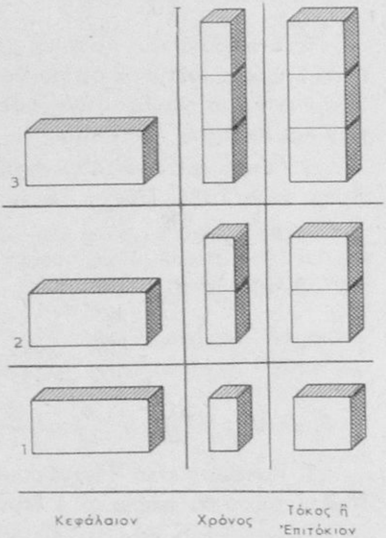
Ἑπομένως χρόνος καὶ τόκος εἶναι ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα (γιατί;)

γ) Εὕρεσις ἀγνώστου: Ὅταν ζητοῦμε τὸν τόκον.

Κανών: Ἀφοῦ κεφάλαιον καὶ τόκος, καθὼς ἐπίσης χρόνος καὶ τόκος εἶναι ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα, γιὰ νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸν ποὺ εὑρίσκεται πάνω ἀπὸ τὸ - Χ - ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ κεφαλαίου ἀντεστραμμένον καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ χρόνου ἀντεστραμμένον.

α) Σύγκρισις Τόκου ἢ Ἐπιτοκίου μὲ τὸν Χρόνον (Ἄγνωστος ὁ Τόκος ἢ τὸ Ἐπιτόκιον).

β) Σύγκρισις Χρόνου μὲ τὸν Τόκον ἢ τὸ Ἐπιτόκιον (Ἄγνωστος Χρόνος).



29. Ὅταν ζητῆται ὁ Τόκος: Χρόνος καὶ Τόκος = ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα.

Ὅταν ζητῆται ὁ Χρόνος: Τόκος καὶ Χρόνος = ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα.

Ὅταν ζητῆται τὸ Ἐπιτόκιον: Χρόνος καὶ Ἐπιτόκιον = ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα.

(ΣΗΜ. Αὐξομειοῦται ὁ Τόκος (τὸ Ἐπιτόκιον), ἢ ὁ Χρόνος, ἐνῶ τὸ Κεφάλαιον παραμένει τὸ ἴδιο. Οἱ ἴδιες ἀναλογίες ἰσχύουν καὶ γιὰ τὰ προβλήματα Ὑφαιρέσεως).

Ὁ κανὼν αὐτὸς ἰσχύει γιὰ ὅλα τὰ προβλήματα τῆς εὑρέσεως τοῦ τόκου.

Λύσις

Κ.	Χ.	Τ.
100 δρχ.	1 ἔτος	12 δρχ.
800	3 ἔτη	Χ ;

$$X = 12 \times \frac{800}{100} \times \frac{3}{1} = \frac{12 \times 800 \times 3}{100 \times 1} = \frac{28800}{100} = 288 \text{ δρχ. τόκον}$$

Στὰ παρακάτω προβλήματα, στὰ ὁποῖα θ' ἀλλάσῃ μόνον ἡ χρονικὴ διάρκεια καὶ στὰ ὁποῖα θὰ ζητῆται ὁ τόκος, θὰ δώσωμε μόνον τὴν λύσιν καὶ σεῖς νὰ δικαιολογήσετε τὶς ἐνέργειές μας, πρῶτα μὲ τὴν σκέψιν καὶ κατόπιν γραπτῶς.

2. Ἕνας ἔμπορος ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν Ἐμπορικὴν Τράπεζαν 2.000 δραχ. πρὸς 10%. Πόσον τόκον θὰ δώσῃ σὲ 6 μῆνες ;

(ΣΗΜ. : Ἀφοῦ ὁ χρόνος δίδεται σὲ μῆνες, τότε ἀντὶ νὰ γράψωμε ὅτι : οἱ 100 δρχ. σὲ 1 ἔτος δίνουν 10 δρχ. τόκον, θὰ γράψωμε ὅτι : οἱ 100 δρχ. σὲ 12 μῆνες δίνουν 10 δρχ. τόκον).

Κ.	Χ.	Τ.
100 δρχ.	12 μ.	10 δρχ.
2.000 δρχ.	6 μ.	Χ ;

$$X = 10 \times \frac{2000}{100} \times \frac{6}{12} = \frac{10 \times 2000 \times 6}{100 \times 12} = \frac{120.000}{1200} = 100 \text{ δρχ. τόκον.}$$

3. Κατέθεσα στὸ Ταχυδρομικὸν Ταμιευτήριον 500 δρχ. πρὸς 8%. Πόσον τόκον θὰ πάρω σὲ 1 ἔτος καὶ 6 μῆνες ;

(ΣΗΜ. : 1 ἔτος 6 μῆνες = 18 μῆνες).

Λύσις

Κ.	Χ.	Τ.
100 δρχ.	12 μῆνες	8 δρχ.
500	18 μῆνες	Χ ;

$$X = 8 \times \frac{500}{100} \times \frac{18}{12} = \frac{8 \times 500 \times 18}{100 \times 12} = \frac{72.000}{1200} = 60 \text{ δρχ. τόκον.}$$

4. Ἐδανείσθηκα ἀπὸ ἕνα χρηματιστηριακὸν γραφεῖον 1500 δρχ. πρὸς 12 %. Πόσον τόκον θὰ δώσω σὲ 120 ἡμέρες ;

(ΣΗΜ. : Ἀφοῦ ὁ χρόνος δίδεται σὲ ἡμέρες, τότε ἀντὶ νὰ γράψωμε : οἱ 100 δρχ. σὲ 1 ἔτος δίνουν 12 δρχ. τόκον, θὰ γράψωμε ὅτι : οἱ 100 δρχ. σὲ 360 ἡμέρες δίνουν 12 δραχμὲς τόκον).

Λ ύ σ ι ς

Κ.		Χ.		Τ.	
100	δρχ.	360	ἡμέρες	12	δρχ.
1500	δρχ.	120	ἡμέρες	Χ ;	

$$X = 12 \times \frac{1500}{100} \times \frac{120}{360} = \frac{12 \times 1500 \times 120}{100 \times 360} = \frac{2160.000}{36.000} = 60 \text{ δρχ. τόκον.}$$

5. Κατέθεσα στὴν Τράπεζαν 1800 δρχ. πρὸς 9 %. Πόσον τόκον θὰ πάρω σὲ 1 ἔτος 6 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες ;

(ΣΗΜ. : 1 ἔτος = 360 ἡμ. 6 μῆνες = 180 ἡμ. 360 + 180 + 20 = 560).

Λ ύ σ ι ς

Κ.		Χ.		Τ.	
100	δρχ.	360	ἡμ.	9	δρχ.
1800	δρχ.	560	ἡμ.	Χ ;	

$$X = 9 \times \frac{1800}{100} \times \frac{560}{360} = \frac{8 \times 1800 \times 560}{100 \times 360} = \frac{8.064.000}{36.000} = 224 \text{ δρχ. τόκον.}$$

6. Ἕνας κτηματίας ἐπῆρε ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴν Τράπεζαν λιπάσματα ἀξίας 400 δρχ. πρὸς 12 %. Πόσον τόκον θὰ πληρώση σὲ 1 ἔτος καὶ 25 ἡμέρες ;

(ΣΗΜ. : 1 ἔτος = 360 ἡμ. + 25 ἡμ. = 385 ἡμέρες).

Λ ύ σ ι ς

Κ.		Χ.		Τ.	
100	δρχ.	360	ἡμ.	12	δρχ.
400		385	ἡμ.	Χ ;	

$$X = 12 = \frac{400}{100} \times \frac{385}{360} = \frac{12 \times 400 \times 385}{100 \times 360} = \frac{1.848.000}{36.000} = 51\frac{12}{36} = 51\frac{1}{3} = 51,33 \text{ δρ. τόκον.}$$

7. Κατέθεσα στὴν Τράπεζα 1600 δρχ. πρὸς 8 %. Πόσον τόκον θὰ πάρω σὲ 8 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες ;

(ΣΗΜ. : 8 μῆνες = 240 ἡμ. + 20 ἡμ. = 260 ἡμέρες).

Λ ύ σ ι ς

Κ.		Χ.		Τ.	
100	δρχ.	360	ἡμ.	8	δρχ.
1600	δρχ.	260	ἡμ.	Χ ;	

$$X = 8 \times \frac{1600}{100} \times \frac{260}{360} = \frac{8 \times 1600 \times 260}{100 \times 360} = \frac{3.328.000}{36.000} = 92\frac{16}{32} = 92\frac{1}{2} = 92,50 \text{ δρχ. τόκον.}$$

'Από τὰ ἑπτὰ προβλήματα ποὺ ἐλύσαμε θὰ ἐξαγάγωμε τώρα ἕνα γενικὸ συμπέρασμα. Παρατηρήσατε ὅλα τὰ προβλήματα. Θὰ διαπιστώσετε ὅτι σ' ὅλα ἐπολλαπλασιάσαμε τὸ ***'Επιτόκιον*** (Ε.) ἐπὶ τὸ ***Κεφάλαιον*** (Κ.), ἐπὶ τὸν ***Χρόνον*** (Χ) κι' ἐδιαιρέσαμε: α) στὸ πρῶτο, ποὺ ὁ Χρόνος εἶναι σὲ ἔτη, διὰ 100, β) στὸ δεύτερον καὶ τρίτον, ποὺ ὁ Χρόνος εἶναι σὲ μῆνες, διὰ 1200, γ) καὶ στὰ τέσσερα τελευταῖα, ποὺ ὁ Χρόνος εἶναι σὲ ἡμέρες, διὰ 36.000.

Αὐτὰ θὰ τὰ παραστήσωμε μὲ ἕνα τύπον. (Ἡ τελεία, ἀνάμεσα στὰ γράμματα, ἀντικαθιστᾷ τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐπὶ -Χ-).

α) Ὁ Χρόνος σὲ ἔτη $T = \frac{E \cdot K \cdot X}{100}$

β) Ὁ Χρόνος σὲ μῆνες $T = \frac{E \cdot K \cdot X}{1200}$

γ) Ὁ Χρόνος σὲ ἡμέρες $T = \frac{E \cdot K \cdot X}{36.000}$

Προβλήματα

(Ὅλα τὰ προβλήματα νὰ λύνωνται πρῶτα ἀπὸ μνήμης καὶ κατόπιν γραπτῶς).

1. Ἕνας 'Εκδοτικὸς Οἶκος ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν 'Εμπορικὴν Τράπεζαν 3.500 δρχ. πρὸς 12 %. Πόσον τόκον θὰ πληρώσῃ σὲ 3 μῆνες;

2. Ἡ Ἑταιρεία «Χρυσαλλὶς» κατέθεσε στὴν 'Ιονικὴν Τράπεζαν 16.000 δρχ. πρὸς 9%. Πόσον τόκον θὰ πάρῃ σὲ 150 ἡμέρες;

3. Ἕνας ὑπάλληλος τῆς 'Εθνικῆς ἐπῆρε οἰκοδομικὸν δάνειον 20.000 δρχ. πρὸς 6 %. Πόσον τόκον θὰ πληρώσῃ σὲ 5 ἔτη;

4. Ἕνας δημοδιδάσκαλος ἐζήτησε δάνειον ἀπὸ τὸ Ταμεῖον 'Αλληλοβοηθείας δρχ. 4.000 πρὸς 3%. Πόσον τόκον θὰ πληρώσῃ σὲ 1 ἔτος καὶ 6 μῆνες;

5. Ἕνας δανείστηκε ἀπὸ κάποιον τοκιστὴν 1.200 δρχ. πρὸς 18 %. Πόσον τόκον θὰ πληρώσῃ σὲ 6 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες;

6. Ἕνας μαθητὴς κατέθεσε στὸ Ταμιευτήριον Νεότητος τῆς 'Εθνικῆς Τραπέζης δρχ. 400 πρὸς 9 %. Πόσον τόκον θὰ πάρῃ σὲ 3 ἔτη 6 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες;

7. Ἡ Ἕνωσις Συνεταιρισμῶν Κιάτου ἐπέτυχε γιὰ τοὺς συνεταίρους της τὴν χορήγησιν δανείου δρχ. 50.000 πρὸς 6%. Πόσον τόκον θὰ πληρώσῃ σὲ 2 ἔτη καὶ 20 ἡμέρες;

8. 'Εζήτησα οἰκοδομικὸν δάνειον ἀπὸ τὸ Ταχυδρ. Ταμιευτήριον 24.000 δρχ. πρὸς 10 %. Πόσον τόκον θὰ πληρώσω σὲ 1 ἔτος καὶ 9 μῆνες;

9. Ἕνας μικρέμπορος ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν 'Εμπορικὴν Τράπεζαν 6.000 δρχ. πρὸς 12 %. Πόσον τόκον θὰ πληρώσῃ σὲ 25 ἡμέρες;

10. Ἕνας ἰχθυέμπορος κατέθεσε στὴν Τράπεζα 3.000 δρχ. πρὸς 10 %. Πόσον τόκον θὰ πάρῃ σὲ 2 μῆνες καὶ 12 ἡμέρες;

Β΄ Περίπτωσις. Πῶς εὑρίσκομε τὸ Ἐπιτόκιον

(Ἰδέτε σχήματα 28 καὶ 29)

Στὰ προβλήματα ποὺ ἐλύσαμε ὡς ἐδῶ ἐζητούσαμε τὸν Τόκον ὅλου τοῦ ποσοῦ σὲ ἕνα ὡρισμένον χρονικὸν διάστημα. Τώρα θὰ ζητοῦμε τὸν Τόκο τῶν 100 δραχμῶν σὲ 1 ἔτος, θὰ ζητοῦμε, δηλαδή, τὸ Ἐπιτόκιον.

Ἡ διαδικασία τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος θὰ εἶναι ἡ ἰδία, ὅπως καὶ στὰ προβλήματα τῆς εὑρέσεως τοῦ Τόκου. Ἡ μόνη διαφορὰ θὰ εἶναι στὴν κατάταξιν.

1. Κατέθεσα στὸ Ταχυδρ. Ταμιευτήριον 500 δρχ. καὶ σὲ 6 μῆνες ἐπῆρα τόκον 15 δρχ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθησαν τὰ χρήματα;

Σκέψις

Σύγκρισις: α) Στὶς 500 δρχ. σὲ 6 μῆνες ἐπῆρα 15 δρχ. τόκο
στὶς 100 δρχ. σὲ 6 μῆνες θὰ πάρω 3 δρχ. τόκο.
β) Στοὺς 6 μῆνες ἐπῆρα 3 δρχ. τόκο
Στοὺς 12 μῆνες θὰ πάρω 6 δρχ. τόκο (6 %).

Λύσις

	Κ.		Χ.		Τ.	
α) Κατάταξις:	500	δρχ.	6	μῆνες	15	δρχ.
	100	δρχ.	12	μῆνες	Χ;	

Ὅπως βλέπομε, ἡ κατάταξις ἐδῶ ἄλλαξε μορφήν. Ὁλόκληρον τὸ Κεφάλαιον, ὁλόκληρη ἡ Χρονικὴ διάρκεια καὶ ὁλόκληρος ὁ Τόκος ἐγράφησαν στὸ ἐπάνω μέρος, γιατὶ αὐτὰ εἶναι γνωστά, ἐνῶ κάτω ἀπ' αὐτὰ ἐγράφη ὁ ἄγνωστος, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν σὲ ἕνα ἔτος (ἢ 12 μῆνες, ἂν ἡ χρονικὴ διάρκεια εἶναι σὲ μῆνες, ἢ 360 ἡμέρες, ἂν ἡ χρονικὴ διάρκεια εἶναι σὲ ἡμέρες).

Ἡ σύγκρισις τῶν ποσῶν θὰ μᾶς ἀποδείξῃ ὅτι ὅλα τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα πρὸς τὸν τόκον. (Κάμετε τὴν σύγκρισιν).

Καὶ γιὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ Ἐπιτοκίου ἰσχύει ὁ ἴδιος κανὼν ποὺ ἰσχύει καὶ γιὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ τόκου.

῞Οταν ζητοῦμε τὸ ᾽Επιτόκιον, γιὰ νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸν ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸ -Χ-, ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ Κεφαλαίου ἀντεστραμμένον καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ Χρόνου ἀντεστραμμένον.

Λύσις

῎Ετσι θὰ ἔχωμε:

Κ.	Χ.	Τ.
500 δρχ.	6 μ.	15 δρχ.
100 δρχ.	12 μ.	Χ; δρχ.

$$X = 15 \times \frac{100}{500} \times \frac{12}{6} = \frac{15 \times 100 \times 12}{500 \times 6} = \frac{18000}{3000} = 6\%$$

Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον θὰ λύσωμε ὅλα τὰ σχετικὰ μὲ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐπιτοκίου προβλήματα. ῞Οταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἔτη, θὰ ζητοῦμε τὸν τόκον τῶν 100 δραχ. σε 1 ἔτος. ῞Οταν εἶναι σὲ μῆνες, θὰ ζητοῦμε τὸν τόκον τῶν 100 δραχ. σὲ 12 μῆνες. Κι᾽ ὅταν εἶναι σὲ ἡμέρες, θὰ ζητοῦμε τὸν τόκον τῶν 100 δραχ. σὲ 360 ἡμέρες.

῎Ας δώσωμε, τώρα, τὸν τύπον, πῶς νὰ λύνωμε αὐτὰ τὰ προβλήματα. Κοιτάξατε τὸ πρόβλημα: ᾽Επολλαπλασιάσαμε τὸν Τόκον ἐπὶ 1200 (γιατὶ ὁ χρόνος ἦταν σὲ μῆνες) κι᾽ ἐδιαιρέσαμε διὰ τοῦ Κεφαλαίου ἐπὶ τὸν Χρόνον.

῾Ο τύπος εἶναι ὁ ἑξῆς:

α) ῾Ο χρόνος σὲ ἔτη $E = \frac{T \cdot 100}{K \cdot X}$

β) ῾Ο χρόνος σὲ μῆνες $E = \frac{T \cdot 1200}{K \cdot X}$

γ) ῾Ο χρόνος σὲ ἡμέρες $E = \frac{T \cdot 36000}{K \cdot X}$

Προβλήματα

(Νὰ λυθοῦν πρῶτα μὲ τὴν σκέψιν κι᾽ ὕστερα γραπτῶς).

1. ῾Η ᾽Αγροτικὴ Τράπεζα ἐκοινοποίησε στοὺς ὀφειλέτες της νὰ ἐξοφλήσουν τὸν τόκον τῶν καλλιεργητικῶν δανείων ποὺ εἶχαν πάρει κατὰ τὸν τελευταῖον καιρόν.

α) Α΄ ᾽Οφειλέτης δάνειον 700 δραχμῶν γιὰ 9 μῆνες, θὰ πληρώσῃ τόκον 42 δρχ. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ὑπελογίσθη τὸ ἐπιτόκιον;

β) Β΄ ᾽Οφειλέτης δάνειον 640 δραχμῶν γιὰ 1 ἔτος καὶ 3 μῆνες, θὰ πληρώσῃ τόκον 80 δρχ. Πόσον ἦτο τὸ ἐπιτόκιον;

γ) Γ' Ὀφειλέτης δάνειον 960 δραχμῶν γιὰ 9 μῆνες καὶ 15 ἡμέρες, θὰ πληρώσῃ τόκον 91,20 δρχ. Ποῖον ἦτο τὸ ἐπιτόκιον ;

δ) Δ' Ὀφειλέτης δάνειον 1200 δραχμῶν γιὰ 1 ἔτος, 4 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες, θὰ πληρώσῃ τόκον 168 δρχ. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ὑπελογίσθη τὸ ἐπιτόκιον ;

ε) Ε' Ὀφειλέτης δάνειον 900 δραχμῶν γιὰ 1 ἔτος καὶ 10 μῆνες, θὰ πληρώσῃ τόκον 132 δρχ. Ποῖον ἦτο τὸ ἐπιτόκιον ;

στ) ΣΤ' Ὀφειλέτης δάνειον 500 δραχμῶν γιὰ 2 ἔτη, θὰ πληρώσῃ τόκον 120 δρχ. Πόσον ἦτο τὸ ἐπιτόκιον ;

Γ' Περίπτωσις : Πῶς εὑρίσκομε τὸν Χρόνον

1. Ἕνας ἔμπορος ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν Τράπεζαν 600 δραχμὲς πρὸς 12%. Σὲ πόσον χρόνον θὰ πληρώσῃ τόκον 144 δραχμές ;

Σκέψις

Σύγκρισις : α) Στὶς 100 δρχ. σὲ 1 ἔτος δίνει 12 δρχ. τόκον. Στὶς 600 δρχ. σὲ 1 ἔτος δίνει 72 δραχ. τόκον.

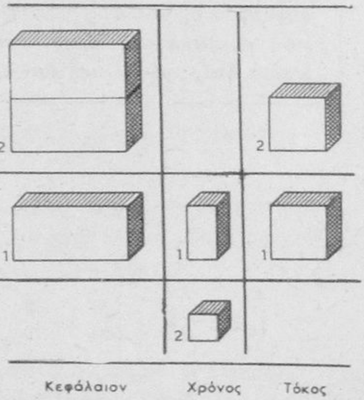
β) Ἀφοῦ σὲ 1 ἔτος δίνει 72 δραχ. τόκον, γιὰ νὰ πληρώσῃ 144 δραχ. θὰ πῇ ὅτι ἐπέρασαν 144 : 72 = 2 ἔτη.

Λύσις

	Κ.	Χ.	Τ.
α) Κατάταξις:	100 δρχ.	1 ἔτος	12 δρχ.
	600 »	Χ ;	144 »

Ἄγνωστος εἶναι ὁ χρόνος. Θὰ συγκρίνωμε πρῶτα τὸ Κεφάλαιον καὶ τὸν Χρόνον (ὁ Τόκος θὰ μένῃ ἴδιος). Ὕστερα θὰ συγκρίνωμε τὸν Τόκον καὶ τὸν Χρόνον (τὸ Κεφάλαιον θὰ μένῃ ἴδιον).

Σύγκρισις Κεφαλαίου μὲ τὸν Χρόνον (Ἄγνωστος ὁ Χρόνος).



30. Ὅταν ζητῆται ὁ Χρόνος : Χρόνος καὶ Κεφάλαιον εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

(ΣΗΜ. Αὐξομειοῦται ὁ Χρόνος ἐνῶ ὁ Τόκος παραμένει ὁ ἴδιος.
Οἱ ἴδιες ἀναλογίες ἰσχύουν καὶ γιὰ τὰ προβλήματα τῆς Ὑφαιρέσεως).

β) Σύγκρισις: 1. Οἱ 100 δραχμὲς σὲ 1 ἔτος μᾶς δίνουν 12 δραχ. τόκον.

- Διπλάσιες δραχμές, γιὰ νὰ μᾶς δώσουν τὸν ἴδιον τόκον, πρέπει νὰ περάσῃ μισὸς χρόνος.
- Τριπλάσιες δραχμές, διὰ νὰ μᾶς δώσουν τὸν ἴδιον τόκον, πρέπει νὰ περάσῃ τὸ ἕνα τρίτον τοῦ χρόνου.
- Μισὲς δραχμές, γιὰ νὰ μᾶς δώσουν τὸν ἴδιον τόκον, πρέπει νὰ περάσῃ διπλάσιος χρόνος.
- Ἑπομένως: Κεφάλαιον καὶ Χρόνος εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα. (Γιατί;)

2. Οἱ 100 δραχμὲς σὲ 1 ἔτος μᾶς δίνουν 12 δραχμὲς τόκον.
Οἱ 100 δραχμὲς σὲ διπλάσια ἔτη μᾶς δίνουν διπλάσιον τόκον.
Οἱ 100 δραχμὲς σὲ τριπλάσια ἔτη μᾶς δίνουν τριπλάσιον τόκον.
Οἱ 100 δραχμὲς σὲ μισὰ ἔτη μᾶς δίνουν μισὸν τόκον.

- Ἑπομένως Τόκος καὶ Χρόνος εἶναι ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα (Γιατί;)

γ) Εὕρεσις ἀγνώστου: Ὅταν ζητοῦμε τὸν χρόνον.

Κανών: Ἀφοῦ κεφάλαιον καὶ χρόνος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, καὶ τόκος καὶ χρόνος εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, γιὰ νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸν ποὺ εὑρίσκεται πάνω ἀπὸ τὸ - Χ - ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ Κεφαλαίου ὅπως εἶναι καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ Τόκου ἀντεστραμμένον.

Λύσις

Κ.	Χ.	Τ.
100 δρχ.	1 ἔτος	12 δρχ.
600 »	Χ; ἔτη	144 »

$$X = 1 \times \frac{100}{600} \times \frac{144}{12} = \frac{1 \times 100 \times 144}{600 \times 12} = \frac{14.400}{7.200} = 2 \text{ ἔτη}$$

Προσέξατε τώρα νὰ εὕρωμε τὸν τύπον αὐτῶν τῶν προβλημάτων. Τί ἐκάναμε; Ἐπολλαπλασιάσαμε τὸ 100 ἐπὶ τὸν Τόκον καὶ ἐδιαιρέσαμε διὰ τοῦ Κεφαλαίου ἐπὶ τὸ Ἐπιτόκιον. (Τὸ 1 δὲν τὸ ἀναφέρομε, γιατὶ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 1 δὲν αὐξάνει τὸ γινόμενον).

Ὁ τύπος, λοιπόν, τῆς εὑρέσεως τοῦ Χρόνου εἶναι:

$$X = \frac{100 \cdot T}{K \cdot E}$$

Προβλήματα

(Νὰ λυθοῦν ἀπὸ μνήμης καὶ κατόπιν γραπτῶς).

1. Τὸ Ταχυδρομικὸν Ταμιευτήριον εἰδοποίησε τοὺς ἑξῆς καταθέτας του νὰ πᾶνε νὰ πάρουν τοὺς τόκους τῶν χρημάτων ποὺ εἶχαν καταθέσει πρὸς 10%.

α) Α' Καταθέτης μὲ κατάθεσιν 485 δραχ. νὰ πάρῃ τόκους 97 δραχ. Γιὰ πόσα ἔτη ἦσαν οἱ τόκοι αὐτοί;

β) Β' Καταθέτης μὲ κατάθεσιν 580 δραχ. νὰ πάρῃ τόκους 29 δραχ. Γιὰ πόσα ἔτη ἦσαν οἱ τόκοι αὐτοί;

γ) Γ' Καταθέτης μὲ κατάθεσιν 1.120 δρχ. νὰ πάρῃ τόκους 295 δρχ. Γιὰ πόσα ἔτη ἦσαν οἱ τόκοι αὐτοί;

δ) Δ' Καταθέτης μὲ κατάθεσιν 596 δρχ. νὰ πάρῃ τόκους 178,80 δρχ. Γιὰ πόσα ἔτη ἦσαν οἱ τόκοι αὐτοί;

ε) Ε' Καταθέτης μὲ κατάθεσιν 680 δρχ. νὰ πάρῃ τόκους 68 δρχ. Γιὰ πόσα ἔτη ἦσαν οἱ τόκοι αὐτοί;

στ) ΣΤ' Καταθέτης μὲ κατάθεσιν 420 δρχ. νὰ πάρῃ τόκους 238 δρχ. Γιὰ πόσα ἔτη ἦσαν οἱ τόκοι αὐτοί;

ζ) Ζ' Καταθέτης μὲ κατάθεσιν 750 δρχ. νὰ πάρῃ τόκους 25 δρχ. Γιὰ πόσα ἔτη ἦσαν οἱ τόκοι αὐτοί;

Δ' Περίπτωσις: Πῶς εὑρίσκομε τὸ Κεφάλαιον

1. Ἕνας συμβολαιογράφος ἐπῆρε δάνειον ἀπὸ τὸ Ταμεῖον Συντάξεως Νομικῶν πρὸς 8% κι' ἔπειτα ἀπὸ 5 ἔτη ἐπλήρωσε 200 δρχ. τόκον. Πόσο κεφάλαιον εἶχε δανεισθῆ;

Σκέψις

Σύγκρισις: α) Στὰ 5 ἔτη ἐπλήρωσε τόκον 200 δρχ.
Στὸ 1 ἔτος θὰ πληρώσῃ τόκον $200 : 5 = 40$ δρχ.

β) Ἀφοῦ 8 δρχ. τόκο πληρώνει, σὲ 1 ἔτος, στὶς 100 δρχ., 40 δρχ. τόκο τὶς πληρώνει, σὲ 1 ἔτος, σὲ πενταπλάσιον κεφάλαιον: $100 \times 5 = 500$ δρχ. Αὐτὸ εἶναι τὸ κεφάλαιον ποὺ εἶχε δανεισθῆ.

Λύσις

	Κ.	Χ.	Τ.
α) Κατάταξις:	100 δρ.	1 ἔτος	8 δρ.
	Χ;	5 ἔτη	200 »

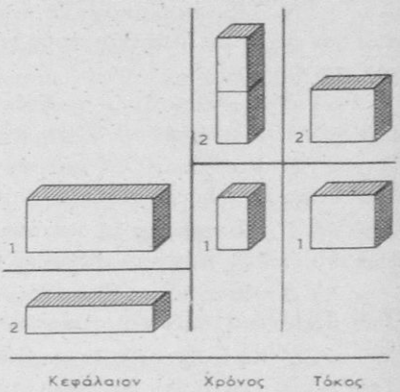
Ἄγνωστον εἶναι τὸ Κεφάλαιον. Θὰ συγκρίνωμε πρῶτα τὸ Κεφάλαιον καὶ τὸν Τόκον (ὁ Χρόνος θὰ μένῃ ἴδιος), Ὕστερα θὰ συγκρίνωμε τὸ Κεφάλαιον καὶ τὸν Χρόνον (ὁ Τόκος θὰ μένῃ ἴδιος).

β) Σύγκρισις: 1. Σὲ 1 ἔτος οἱ 100 δρχ. μᾶς δίνουν τόκον 8 δρχ.
- Σὲ 1 ἔτος διπλάσιον κεφάλαιον μᾶς δίνει διπλάσιον τόκον.
- Σὲ 1 ἔτος μισὸ κεφάλαιον μᾶς δίνει μισὸν τόκον.
- Ἑπομένως: κεφάλαιον καὶ τόκος εἶναι ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα (Γιατί;)

2. Οἱ 100 δρχ. σὲ 1 ἔτος μᾶς δίνουν τόκον 8 δρχ.
- Γιὰ νὰ δώσω τὸν ἴδιον τόκον σὲ 2 ἔτη πρέπει νὰ δανεισθῶ μισὸ κεφάλαιον.
- Γιὰ νὰ δώσω τὸν ἴδιον τόκον σὲ μισὸ ἔτος πρέπει νὰ δανεισθῶ διπλάσιον κεφάλαιον.
- Ἑπομένως κεφάλαιον καὶ χρόνος εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα. (Γιατί;)

γ) Εὕρεσις ἀγνώστου: Ὅταν ζητοῦμε τὸ Κεφάλαιον.

Σύγκρισις Χρόνου μὲ τὸ Κεφάλαιον (Ἄγνωστον τὸ Κεφάλαιον).



31. Ὅταν ζητῆται τὸ Κεφάλαιον: Κεφάλαιον καὶ Χρόνος εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

(ΣΗΜ. Αὐξομειοῦται τὸ Κεφάλαιον, ἐνῷ ὁ Τόκος παραμένει ὁ ἴδιος.
Οἱ ἴδιες ἀναλογίες ἰσχύουν καὶ γιὰ τὰ προβλήματα τῆς Ὑφαιρέσεως).

Κανών: Ἀφοῦ κεφάλαιον καὶ τόκος εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, καὶ κεφάλαιον καὶ χρόνος ἀντιστρόφως ἀνάλογα, γιὰ νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸν ποὺ εὑρίσκεται πάνω ἀπὸ τὸ - Χ - ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ χρόνου ὅπως εἶναι καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ τόκου ἀντεστραμμένον.

Λύσις

Κ.		Χ.		Τ.	
100	δρχ.	1	ἔτος	8	δρχ,
Χ ;	δρχ.	5	ἔτη	200	δρχ.

$$X = 100 \times \frac{1}{5} \times \frac{200}{8} = \frac{100 \times 1 \times 200}{5 \times 8} = \frac{20.000}{40} = 500 \text{ δρχ. κεφάλαιον.}$$

Ἂς εὕρωμε τώρα τὸν τύπον αὐτῶν τῶν προβλημάτων. Τί ἐκάναμε; Ἐπολλαπλασιάσαμε τὸ 100 ἐπὶ 1 ἐπὶ τὸν Τόκον, κι' ἐδιαιρέσαμε διὰ τοῦ Χρόνου ἐπὶ τὸ Ἐπιτόκιον. Ὅταν ὁ Χρόνος εἶναι σὲ μῆνες, τότε θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ $100 \times 12 = 1200$ ἐπὶ τὸν Τόκον καὶ θὰ διαιρέσωμε διὰ τοῦ Χρόνου ἐπὶ τὸ Ἐπιτόκιον. Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἡμέρες, τότε θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ $100 \times 360 = 36.000$ ἐπὶ τὸν Τόκον καὶ θὰ διαιρέσωμε διὰ τοῦ Χρόνου ἐπὶ τὸ Ἐπιτόκιον.

Ὁ τύπος εἶναι ὁ ἑξῆς:

α) Ὁ χρόνος σὲ ἔτη $K = \frac{100 \cdot T}{X \cdot E}$

β) Ὁ χρόνος σὲ μῆνες $K = \frac{1200 \cdot T}{X \cdot E}$

γ) Ὁ χρόνος σὲ ἡμέρες $K = \frac{36.000 \cdot T}{X \cdot E}$

Προβλήματα

1. Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον ποὺ ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν Τράπεζαν ἕνας ἔμπορος πρὸς 12% κι' ἐπλήρωσε σὲ 3 μῆνες τόκον 120 δρχ.;

2. Ποῖον κεφάλαιον ἐδανείσθηκα ἀπὸ τὸ Μετοχικὸν Ταμεῖον πρὸς 10% κι' ἐπλήρωσα σὲ 1 ἔτος καὶ 6 μῆνες τόκον 37,50 δρχ.;

3. Ποῖον κεφάλαιον ἐδανείσθηκε ἕνας διδάσκαλος ἀπὸ τὸ Ταμεῖον Ἀλληλοβοηθείας πρὸς 4% κι' ἐπλήρωσε ἔπειτα ἀπὸ 3 μῆνες καὶ 15 ἡμέρες 35 δρχ. τόκον;

4. Ποῖον κεφάλαιον ἐδανείσθηκε ἀπὸ τὴν Τράπεζαν ἕνας παραγωγὸς πρὸς 12% κι' ἐπλήρωσε μετὰ 1 ἔτος 6 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες 560 δραχμὲς τόκον;

5. Ποῖον κεφάλαιον κατέθεσα στὸ Ταχυδρ. Ταμιευτήριον πρὸς 8% καὶ εἰσέπραξα μετὰ 4 ἔτη 256 δρχ. τόκον;

6. Ποῖον κεφάλαιον κατετέθη γιὰ μίαν ἄπορον κορασίδα πρὸς 8% καὶ σὲ 10 ἔτη θὰ εἰσπράξῃ τόκον 1600 δρχ.;

7. Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον ποὺ κατετέθη στὸ Ταμιευτήριον νέων τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης πρὸς 8% καὶ σὲ 5 ἔτη καὶ 6 μῆνες θὰ δώσῃ τόκον 1320 δραχμές;

ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ

('Ισχύουν αἱ ἴδιες συγκρίσεις ποὺ ἔγιναν διὰ τὰ προβλήματα τόκου. Συμβουλευθῆτε τὰ σχήματα 28, 29, 30 καὶ 31).

Στὸ ἐμπόριον, ὅσοι ἔχουν οἰκονομικὴν εὐχέρειαν, πληρώνουν ἀμέσως τὰ ἐμπορεύματα ποὺ ἀγοράζουν. Ὅσοι ὅμως δυσκολεύονται νὰ ἐξοφλήσουν τὸν λογαριασμὸν ἐκείνην τὴν στιγμή, ὑπογράφουν γραμμάτιον, ἢ συναλλαγματικήν, στὴν ὁποίαν δίνουν τὴν ὑπόσχεσιν ὅτι σὲ ὡρισμένον χρονικὸν διάστημα θὰ ἐξοφλήσουν τὸ ποσόν. Εἶναι ὅμως ὑποχρεωμένοι νὰ πληρώσουν καὶ τὸν τόκον τῶν χρημάτων.

Ἂς δώσωμε ἕνα παράδειγμα:

Ἕνας ἐκδότης βιβλίων ἀγόρασε στὶς 20 Ἀπριλίου 1960 ἀπὸ ἕνα χαρτέμπορον, τυπογραφικὸ χαρτὶ ἀξίας 3.000 δραχμῶν. Δὲν ἐπλήρωσεν, ὅμως, ἀμέσως τὴν ἀξίαν τοῦ τυπογραφικοῦ χάρτου καὶ ὑπεσχέθη νὰ τὰ πληρώσῃ μετὰ 6 μῆνες, δηλαδὴ στὶς 20 Ὀκτωβρίου 1960 καὶ μὲ τόκον 12%.

Προτοῦ συντάξουν τὸ γραμμάτιον, ἢ τὴν συναλλαγματικὴν ὑπελόγισαν πόσος τόκος ἀναλογεῖ στὶς 3.000 δρχ. πρὸς 12% γιὰ 6 μῆνες κι' εὗρῆκαν ὅτι εἶναι 180 δραχμές. Ὁ τόκος αὐτὸς προσετέθη στὸ κεφάλαιον κι' ἔγινε: $3.000 + 180 = 3.180$.

Γιὰ τὸ ποσὸν αὐτὸ θὰ συνταχθῇ τὸ γραμμάτιον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν ἑξῆς τύπον:

'Εν 'Αθήναις τῇ 20ῇ 'Απριλίου 1960

Διὰ δραχμὰς 3.180

Μετὰ 6 μῆνας ἀπὸ σήμερον ὑπόσχομαι καὶ ὑποχρεοῦμαι νὰ πληρώσω εἰς τὸν κ. Π . . . , ἢ εἰς διαταγήν του, τρεῖς χιλιάδας ἑκατὸν ὀγδοήκοντα δραχμὰς (3.180), τὰς ὁποίας ἔλαβον παρ' αὐτοῦ εἰς ἐμπορεύματα.

Ὑπογραφή

Λῆξις 20 'Οκτωβρίου 1960 Ε. Κ. ΖΑΦΕΙΡΙΟΥ

Τὸ ποσὸν ποὺ ἀναγράφεται εἰς τὸ γραμμάτιον λέγεται ***'Ονομαστικὴ ἀξία*** τοῦ γραμματίου. Ἡ ἡμερομηνία κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληρωθῇ τὸ γραμμάτιον λέγεται ***λῆξις*** τοῦ γραμματίου.

Τὶς περισσότερες, ὅμως, φορὲς ὁ δανειστὴς εὑρίσκεται στὴν ἀνάγκη νὰ προεξοφλήσῃ τὸ γραμμάτιον σὲ καμμία Τράπεζα καὶ νὰ πάρῃ τὰ χρήματα. Ἡ Τράπεζα τὸ προεξοφλεῖ, ἀλλὰ κρατάει ἕνα ποσοστὸν 6 %, ἢ 8 %, ἢ 10 %, γιὰ δικό της κέρδος, τὸ ὁποῖον ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου.

Ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου ὀνομάζεται ***ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις***, καὶ τὸ ποσὸν ποὺ ἀπομένει, μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν αὐτοῦ τοῦ τόκου, λέγεται ***πραγματικὴ ἀξία*** τοῦ γραμματίου.

Προεξόφλησις γραμματίου

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ παραπάνω γραμμάτιον τὸ ἐπῆγε ὁ κ. Π... στὴν Τράπεζα πρὸς προεξόφλησιν 4 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του. Ἡ Τράπεζα τὸ προεξώφλησε κι' ἐκράτησε ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν (ἢ τόκον ὅπως ἀλλιῶς θὰ τὸν ἐλέγαμε) 8 %. Πόσην ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἐκράτησε ἡ Τράπεζα καὶ ποιό εἶναι τὸ ποσὸν τῆς πραγματικῆς ἀξίας, ποὺ ἔδωσε στὸν κ. Π. ;

Λύσις

'Ον. 'Αξ.	Χ.	'Εξ. Ὑφ.
100 δρχ.	12 μ.	8 δρχ.
3.180 δρχ.	4 μ.	Χ ;

Ἡ κατάταξις τῶν ποσῶν, ἡ σύγκρισις καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ ἀγνώστου ἀκολουθοῦν τὴν ἴδιαν διαδικασίαν ποὺ ἀκολουθοῦν καὶ τὰ προβλήματα τοῦ τόκου. Τὸ Κεφάλαιον τώρα λέγεται Ὀνομαστικὴ Ἀξία, ὁ Χρόνος παραμένει Χρόνος καὶ ὁ Τόκος λέγεται Ἐξωτερικὴ Ὑφαίρεσις.

Ἂν σ' ἕνα πρόβλημα εἶναι ἄγνωστος ἡ Ἐξωτερικὴ Ὑφαίρεσις, τὸ πρόβλημα θὰ λυθῇ ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τοῦ Τόκου στὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ Τόκος. (Ἐπαναλάβατε τὸν κανόνα καὶ συντάξατε νέον).

Ἂν εἶναι ἄγνωστον τὸ Ἐπιτόκιον, τὸ πρόβλημα θὰ λυθῇ ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τοῦ Τόκου, στὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ Ἐπιτόκιον (Ἐπαναλάβατε τὸν κανόνα καὶ συντάξατε νέον).

Ἂν εἶναι ἄγνωστος ἡ Ὀνομαστικὴ Ἀξία, τὸ πρόβλημα θὰ λυθῇ ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τοῦ Τόκου, στὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ Κεφάλαιον, (Ἐπαναλάβατε τὸν κανόνα καὶ συντάξατε νέον).

Ὑπάρχει κι' ἄλλο εἶδος ὑφαιρέσεως, ποὺ λέγεται ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις. Αὐτὴ εἶναι δυσκολωτέρα, ἀλλὰ δικαιοτέρα. Οἱ ἔμποροι, ὅμως, προτιμοῦν γιὰ εὐκολίᾳ τὴν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν. Μ' αὐτὴν θὰ λύνωμε κι' ἐμεῖς τὰ σχετικὰ προβλήματα.

Καὶ τώρα ἐπανερχόμεθα στὸ πρόβλημά μας.

Ζητεῖται ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις.

Τὰ ποσὰ ὀνομαστικὴ ἀξία καὶ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι εὐθέως ἀνάλογα. (Κάμετε τὴν σύγκρισιν).

Τὰ ποσὰ Χρόνος καὶ Ἐξωτερικὴ Ὑφαίρεσις εἶναι ἐπίσης εὐθέως ἀνάλογα. (Κάμετε τὴν σύγκρισιν).

Ἑπομένως: $X = 8 \times \frac{3180}{100} \times \frac{4}{12} = \frac{8 \times 3180 \times 4}{100 \times 12} = \frac{101760}{1200} = 84{,}80$ δρχ.

Ἀπὸ τὴν Ὀνομαστικὴν ἀξίαν 3180 δρχ. ἀφαιροῦμε τὴν ἐξωτ. ὑφαίρεσιν 84,80 δρχ. κι' ἔχομε πραγματικὴν ἀξίαν 3.095,20 δρχ. Αὐτὸ τὸ ποσὸν θὰ πάρῃ στὰ χέρια του, κατὰ τὴν προεξόφλησιν τοῦ γραμματίου, ὁ κ. Π.

Προβλήματα

1. Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 460 δρχ. προεξωφλήθη 5 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 10 %. Πόση εἶναι ἡ ἐξωτερική του ὑφαίρεσις;

2. Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 315 δρχ. προεξωφλήθη πρὸς 8 % κι' ἔδωσε ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 8,40 δρχ. Πόσον χρόνον πρὸ τῆς λήξεώς του ἔγινε ἡ προεξόφλησις;

3. Ἕνα γραμμάτιον προεξωφλήθη, πρὸς 12%, 7 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του κι' ἔδωσε ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 42 δρχ. Πόση ἦταν ἡ ὀνομαστική του ἀξία;

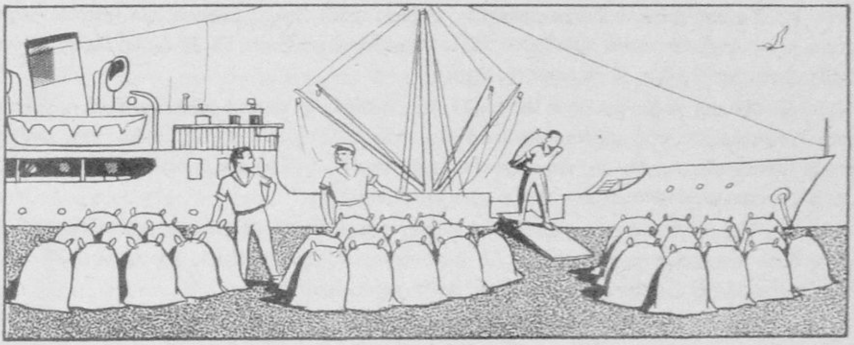
4. Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 450 δρχ. προεξωφλήθη 9 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του κι' ἔδωσε ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσι 33,75 δρχ. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἔγινε ἡ προεξόφλησις ;

5. Ἕνας ἐκδοτικὸς οἶκος προεξώφλησε στὴν Τράπεζα ἕνα γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 860 δρχ., πρὸς 12%, 10 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του. Πόση ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἐκράτησεν ἡ Τράπεζα καὶ πόσα τοῦ ἔδωσε ; (πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου).

6. Ἕνας ἔμπορος προεξώφλησε, πρὸς 15%, 3 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του ἕνα γραμμάτιον καὶ τοῦ ἐκράτησαν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσι 75 δρχ. Ποία ἦταν ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ;

7. Ἕνας ἐργοστασιάρχης προεξώφλησε στὴν Τράπεζα ἕνα γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 4.500 δρχ. 6 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του καὶ τοῦ ἐκράτησαν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσι 225 δρχ. Πρὸς πόσο τοῖς ἑκατὸν ἔγινε ἡ προεξόφλησις ;

8. Ἕνας τυπογράφος προεξώφλησε στὴν Τράπεζα γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 750 δρχ. πρὸς 12 % καὶ τοῦ ἐκράτησαν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσι 37,50 δρχ. Πόσον χρόνον πρὸ τῆς λήξεώς του προεξωφλήθη τὸ γραμμάτιον ;



ΣΥΝΕΤΑΙΡΙΣΜΟΙ

Στὴν σημερινὴν δύσκολην ἐποχή, οἱ περισσότεροι ἄνθρωποι καὶ ἰδιαιτέρως οἱ ἐργαζόμενοι, οἱ ὑπάλληλοι, οἱ παραγωγοὶ ἱδρύουν συνεταιρισμούς, γιὰ νὰ διευκολυνθοῦν στὴν εὕρεσιν τῆς ἐργασίας, ἢ γιὰ νὰ προμηθευθοῦν τρόφιμα, ὑπόδησιν κι' εὔθυνὸν ρουχισμόν, ἢ γιὰ νὰ διαθέσουν σὲ ἱκανοποιητικὲς τιμὲς τὰ προϊόντα των, νὰ προμηθευθοῦν λιπάσματα, νὰ συνάψουν δάνεια.

Τὰ μέλη κάθε συνεταιρισμοῦ λέγονται ***συνεταῖροι***. Τὸ κέρδος ἀπὸ τὴν ἐργασίαν των, ἢ ἀπὸ τὰ εἴδη ποὺ ἐπρομηθεύθησαν, ἢ ἀπὸ τὰ προϊόντα ποὺ διέθεσαν, λέγεται ***μερίδιον*** ἢ ***μέρισμα*** καὶ μοιράζεται ἀναλόγως σὲ κάθε συνεταῖρον.

Τὰ προβλήματα ποὺ παρουσιάζονται στὶς παραπάνω περιπτώσεις λύνονται μὲ τὴν ***μέθοδον τοῦ μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα***.

Ἂς λύσωμε μερικὰ προβλήματα:

1. Τέσσαρες ξυλουργοὶ ἵδρυσαν ἕναν συνεταιρισμόν. Τὴν περασμένην ἑβδομάδα εἰργάσθησαν, ὁ πρῶτος 48 ὧρες, ὁ δεύτερος 36 ὧρες, ὁ τρίτος 42 ὧρες κι' ὁ τέταρτος 32 ὧρες. Εἰσέπραξαν ἀπὸ τὶς ξυλουργικές των ἐργασίες 1.264 δρχ. Τί ποσὸν ἀναλογεῖ σὲ κάθε συνεταῖρον;

Σκέψις

1. Ἂν οἱ τέσσαρες ξυλουργοὶ εἰργάζοντο τὶς ἴδιες ὧρες ὁ καθένας, τότε δὲν θὰ ὑπῆρχε καμμία δυσκολία στὴν κατανομὴν τοῦ ποσοῦ. Θὰ ἐδιαιροῦσαμε τὸ ποσὸν διὰ 4 καὶ ὁ καθένας θὰ ἔπαιρνε ἀπὸ ἕνα τέταρ-

τον. Ἀλλὰ τώρα τὸ ποσὸν θὰ μοιρασθῇ εἰς μερίδια, ἀνάλογα μὲ τὶς ὧρες, ποὺ ἐδούλεψε κάθε ξυλουργός.

2) Καὶ οἱ τέσσαρες ξυλουργοὶ εἰργάσθησαν $48 + 36 + 42 + 32 = 158$ ὧρες. Γιὰ νὰ εὕρωμε τί ποσὸν ἀναλογεῖ σὲ κάθε ὥραν ἐργασίας θὰ διαιρέσωμε τὸ $1264 : 158 = 8$ δρχ.

3) Ἀφοῦ σὲ κάθε ὥραν ἐργασίας ἀναλογοῦν 8 δρχ.

α) Ὁ πρῶτος	ποὺ εἰργάσθη	48 ὧρες	θὰ πάρῃ	$48 \times 8 = 384$ δρχ.
β) Ὁ δεύτερος	» »	36 »	» »	$36 \times 8 = 288$ δρχ.
γ) Ὁ τρίτος	» »	42 »	» »	$42 \times 8 = 336$ δρχ.
δ) Ὁ τέταρτος	» »	32 »	» »	$32 \times 8 = 256$ δρχ.
			Σύνολον	$158 \times 8 = 1264$ δρχ.

Τὰ ποσὰ 384, 288, 336 καὶ 256 λέμε ὅτι εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 48, 36, 42 καὶ 32 καὶ ὁ μερισμὸς ποὺ ἐκάμαμε λέγεται, ὅπως εἴπαμε, ***μερισμὸς εἰς μέρη ἀνάλογα.***

Αὐτὸς εἶναι ἕνας τρόπος νὰ λύνωμε τὰ προβλήματα αὐτοῦ τοῦ εἴδους. Ἄλλος τρόπος εἶναι ὁ ἑξῆς:

Λύσις

Προσθέτομε ὅλες τὶς ὧρες ἐργασίας. Εἶναι 158. Ὁ πρῶτος, ποὺ εἰργάσθη 48 ὧρες, θὰ πάρῃ τὰ $\frac{48}{158}$ τοῦ ποσοῦ τῶν 1264 δρχ. Ὁ δεύτερος, ποὺ εἰργάσθη 36 ὧρες θὰ πάρῃ τὰ $\frac{36}{158}$ τοῦ ποσοῦ. Ὁ τρίτος, ποὺ εἰργάσθη 42 ὧρες, θὰ πάρῃ τὰ $\frac{42}{158}$ τοῦ ποσοῦ. Καὶ ὁ τέταρτος, ποὺ εἰργάσθη 32 ὧρες, θὰ πάρῃ τὰ $\frac{32}{158}$ τοῦ ποσοῦ.

Κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ κάμωμε πολλαπλασιασμὸν τοῦ ποσοῦ ἐπὶ κάθε κλάσμα:

$$\begin{array}{r} 48 \\ 36 \\ 42 \\ 32 \\ \hline 158 \end{array}$$

α) $1264 \times \frac{48}{158} = \frac{60.672}{158} = 384$ δρχ.

β) $1264 \times \frac{36}{158} = \frac{45.504}{158} = 288$ »

γ) $1264 \times \frac{42}{158} = \frac{53.088}{158} = 336$ »

δ) $1264 \times \frac{32}{158} = \frac{40.448}{158} = 256$ »

Σύνολον 1.264 δρχ.

2. Σὲ μία συνεργατικὴ ὑποδηματοποιῶν ἐργάζονται πέντε ὑποδη-

ματοποιοί. Τὴν περασμένην ἑβδομάδα εἰργάσθησαν ὁ πρῶτος $\frac{3}{5}$ τῶν ὅλων ὡρῶν ἐργασίας, ὁ δεύτερος $\frac{9}{10}$ τῶν ὡρῶν, ὁ τρίτος $\frac{3}{4}$ τῶν ὡρῶν ἐργασίας, ὁ τέταρτος $\frac{5}{8}$ τῶν ὡρῶν ἐργασίας καὶ ὁ πέμπτος $\frac{10}{20}$ τῶν ὡρῶν ἐργασίας. Ἀπὸ τὴν πώλησιν ὑποδημάτων εἰσέπραξαν 1350 δρχ. Τί ποσὸν ἀναλογεῖ σὲ καθένα ;

Σκέψις

Κατ' ἀρχὴν θὰ τρέψωμε τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα.

$$\overbrace{\frac{3}{5}}^{8} + \overbrace{\frac{9}{10}}^{4} + \overbrace{\frac{3}{4}}^{10} + \overbrace{\frac{5}{8}}^{5} + \overbrace{\frac{10}{20}}^{2} = \qquad \text{Ε.Κ.Π.} = 40$$

$$= \frac{24}{40} + \frac{36}{40} + \frac{30}{40} + \frac{25}{40} + \frac{20}{40} = \frac{135}{40}$$

Ὁ πρῶτος, λοιπόν, θὰ πάρῃ τὰ 24 μέρη ἀπὸ τὰ 135, δηλαδὴ τὰ $\frac{24}{135}$, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{36}{135}$, ὁ τρίτος τὰ $\frac{30}{135}$, ὁ τέταρτος τὰ $\frac{25}{135}$ καὶ ὁ πέμπτος τὰ $\frac{20}{135}$ τοῦ ποσοῦ τῶν 1350 δρχ.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ ἔχωμε τὴν ἑξῆς λύσιν.

Λύσις

$$\begin{array}{r} 24\ + \\ 36 \\ 30 \\ 25 \\ 20 \\ \hline 135 \end{array}$$

α) $1.350 \times \frac{24}{135} = \frac{32.400}{135} =$ 240 δραχ.

β) $1.350 \times \frac{36}{135} = \frac{48.600}{135} =$ 360 »

γ) $1.350 \times \frac{30}{135} = \frac{40.500}{135} =$ 300 »

δ) $1.350 \times \frac{25}{135} = \frac{33.750}{135} =$ 250 »

ε) $1.350 \times \frac{20}{135} = \frac{27.000}{135} =$ 200 »

Σύνολον 1.350 »

3. Ἕνας συνεταιρισμὸς ἀνθρακέων ἐδέχθη τὴν περασμένην ἑβδομάδα στὶς ἀποθῆκες του τὶς ἑξῆς ποσότητες ξυλανθράκων ἀπὸ ἕξι συνεταίρους του. Ὁ πρῶτος ἔφερε 250 χλγρ., ὁ δεύτερος 180 χλγρ., ὁ τρίτος 340 χλγρ., ὁ τέταρτος 175 χλγρ., ὁ πέμπτος 420 χλγρ. καὶ ὁ ἕκτος 380

χλγρ. Ὁ ἔμπορος ποὺ προηγόρασε τὶς ποσότητες ἔδωσε στὸν πρόεδρον τοῦ συνεταιρισμοῦ μία προκαταβολὴ ἀπὸ 2.792 δρχ. Τί ποσὸν ἀναλογεῖ σὲ κάθε συνεταῖρον ;

4. Ὁ συνεταιρισμὸς δημοσίων ὑπαλλήλων μιᾶς ἐπαρχιακῆς πόλεως περιλαμβάνει 18 διδασκάλους, 2 δικαστικούς, 3 ἀγρονομικούς, 4 ταχυδρομικούς, 7 ταμειακοὺς καὶ 2 ἐφοριακοὺς ὑπαλλήλους. Ὁ συνεταιρισμὸς ἐπρομηθεύθη 432 χλγρ. λάδι. Πόσα χλγρ. λάδι ἀναλογοῦν σὲ κάθε ὑπαλληλικὸν κλάδον τοῦ συνεταιρισμοῦ αὐτοῦ ;

5. Ἡ Ἕνωσις Συνεταιρισμῶν σταφιδοπαραγωγῶν μιᾶς περιοχῆς συνεκέντρωσε στὶς ἀποθῆκες της ἀπὸ διαφόρους συνεταιρισμοὺς τὶς ἑξῆς ποσότητες : Α' Συνεταιρισμὸς χλγρ. 3.750. Β' Συνεταιρισμὸς χλγρ. 6.140. Γ' Συνεταιρισμὸς χλγρ. 14.380. Δ' Συνεταιρισμὸς χλγρ. 7.150 καὶ Ε' Συνεταιρισμὸς χλγρ. 5.400. Ἡ Ἕνωσις ἔδωσε προκαταβολὴν 60.958 δρχ. Τί ποσὸν ἀναλογεῖ σὲ κάθε συνεταιρισμόν ;

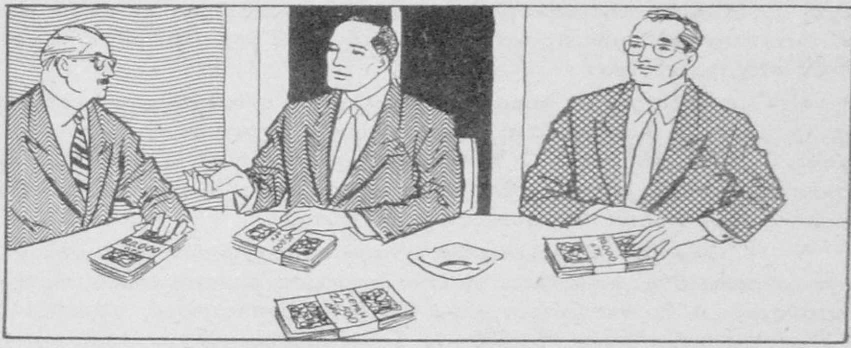
6. Πέντε κτῖσται ἐργάζονται συνεταιρικῶς σὲ μίαν οἰκοδομήν. Τὸν περασμένον μῆνα εἰργάσθησαν, ὁ πρῶτος 25 ἡμέρες, ὁ δεύτερος 19 ἡμέρες, ὁ τρίτος 22 ἡμέρες, ὁ τέταρτος 18 ἡμέρες καὶ ὁ πέμπτος 16 ἡμέρες. Ἀπὸ τὸν ἰδιοκτήτη ἐπῆραν 7.000 δρχ. Τί ποσὸν ἀναλογεῖ σὲ κάθε κτίστην ;

7. Ὁ Σύλλογος ἀχθοφόρων περιφερείας μας ἔστειλε τέσσαρες ἀχθοφόρους νὰ ἐκφορτώσουν ἀπὸ τὸ αὐτοκίνητο τὰ τσιμέντα τοῦ σχολείου. Ὁ πρῶτος ἐξεφόρτωσε 45 σάκκους τσιμέντο, ὁ δεύτερος 38, ὁ τρίτος 51 καὶ ὁ τέταρτος 26. Τοὺς ἐδώσαμε 240 δραχμές. Τί ποσὸν ἀναλογεῖ σὲ κάθε ἀχθοφόρον ;

8. Ὁ Ε.Ε.Σ.Ν. ἔστειλε τὰ ἑξῆς δῶρα γιὰ τέσσερα σχολεῖα τῆς περιφερείας μας : 930 μολύβια, 1.550 τετράδια, 620 γομολάστιχες καὶ 2480 χρώματα. Τὸ πρῶτο σχολεῖο ἔχει 108 Ἐρυθροσταυρῖτες, τὸ δεύτερο ἔχει 39, τὸ τρίτο 91 καὶ τὸ τέταρτο 72. Τί ποσόν, ἀπὸ τὰ παραπάνω δῶρα, ἀναλογεῖ σὲ κάθε σχολεῖον ;

9. Ἡ Ἐπιτροπὴ διαχειρίσεως χορτονομῆς ἑνὸς κοινοτικοῦ λειβαδιοῦ ἐνοικίασε ἐφέτος τὸ κοινοτικὸ λειβάδι ἀντὶ 18.000 δρχ. σὲ τρεῖς κτηνοτρόφους. Ὁ πρῶτος εἶχε 689 πρόβατα, ὁ δεύτερος 734 καὶ ὁ τρίτος 577. Τί ποσὸν ἀναλογεῖ, σὲ κάθε κτηνοτρόφον, νὰ πληρώση ;

10. Σὲ μία σεισμοπαθῆ περιοχὴ διενεμήθησαν σὲ τέσσερα χωριὰ 400.000 δρχ. ἀναλόγως τοῦ πληθυσμοῦ. Τὸ πρῶτο χωριὸ ἔχει πληθυσμὸ 670 κατοίκους, τὸ δεύτερο 1310 κατοίκους, τὸ τρίτο 584 κατοίκους καὶ τὸ τέταρτο 1436 κατοίκους. Τί ποσὸν ἀναλογεῖ σὲ κάθε χωριό ;



ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Εἴπαμε ὅτι πολλοὶ ἄνθρωποι ποὺ ἔχουν χρήματα, τὰ καταθέτουν στὶς Τράπεζες, ἢ στὸ Ταχυδρομικὸν Ταμιευτήριον καὶ παίρνουν κάθε χρόνο τοὺς τόκους τῶν χρημάτων τους. Πολλοί, ὅμως, ἄνθρωποι διαθέτουν τὰ χρήματά τους στὸ ἐμπόριον. Ἐκτὸς τῶν ἐμπορικῶν ἐργασιῶν, ποὺ μπορεῖ νὰ κάμη καθένας μόνος του, ὑπάρχουν ἄνθρωποι, οἱ ὁποῖοι καταθέτουν, τρεῖς — τέσσαρες μαζί, τὰ χρήματά τους καὶ ἱδρύουν μίαν Ἑταιρείαν.

Στὴν Ἑταιρείαν καταθέτει καθένας ὅσα κεφάλαια θέλει. Στὸ τέλος τοῦ ἑξαμήνου, ἢ τοῦ ἔτους, συνέρχονται οἱ συνεταῖροι καὶ διαπιστώνουν ἂν εἶχαν κέρδη, ἢ ζημίες καὶ σὲ τί ποσὸν ἀνέρχονται αὐτές. Τὰ κέρδη, ἢ οἱ ζημίες κατανέμονται τότε στοὺς συνεταίρους, ἀναλόγως τοῦ ποσοῦ ποὺ ἔχει καταθέσει καθένας, καθὼς καὶ ἀναλόγως τοῦ χρονικοῦ διαστήματος ποὺ εἶναι συνεταῖρος. Τὸ μερίδιον, ποὺ ἀναλογεῖ σὲ κάθε συνεταῖρον ἀπὸ τὸ κέρδος, ἢ τὴν ζημίαν, λέγεται ***μέρισμα***.

Τὰ προβλήματα τῆς Ἑταιρείας λύνονται μὲ τὴν μέθοδον τοῦ μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα. Στὰ προβλήματα αὐτὰ συναντοῦμε τρεῖς διαφορετικὲς περιπτώσεις.

α) Ὅταν οἱ συνεταῖροι ἔχουν καταθέσει διαφορετικὰ ποσὰ γιὰ τὸ ἴδιον χρονικὸν διάστημα.

β) Ὅταν οἱ συνεταῖροι ἔχουν καταθέσει τὰ ἴδια ποσὰ γιὰ διαφορετικὸν χρονικὸν διάστημα.

γ) Ὅταν οἱ συνεταῖροι ἔχουν καταθέσει διαφορετικὰ ποσὰ σὲ διαφορετικὸν χρονικὸν διάστημα.

Θὰ λύσωμε, τώρα, ἕνα πρόβλημα ἀπὸ κάθε περίπτωσιν.

Α΄ Τὰ κεφάλαια διαφορετικά. Τὸ χρονικὸν διάστημα ἴδιον.

1. Τέσσαρες συνεταῖροι ἵδρυσαν μίαν Ἑταιρείαν. Ἀπὸ τὴν πρώτην στιγμὴν τῆς ἱδρύσεως κατέθεσαν ὁ α΄ 108 χρυσὲς λίρες Ἀγγλίας, ὁ β΄ 75 λίρες, ὁ γ΄ 215 λίρες καὶ ὁ δ΄ 102 λίρες. Στὸ τέλος τοῦ ἔτους ἔκαμαν ἰσολογισμὸν καὶ εἶδαν ὅτι εἶχαν κέρδος 250 χρυσὲς λίρες. Τί μερίδιον κέρδους ἀναλογεῖ σὲ κάθε συνεταῖρον;

Σκέψις

Ἀφοῦ τὸ χρονικὸν διάστημα εἶναι τὸ ἴδιον, τότε τὸ κέρδος πρέπει νὰ κατανεμηθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τοῦ ποσοῦ τῶν λιρῶν ποὺ κατέθεσε καθένας. Τὸ ὅλον ποσὸν ποὺ κατετέθη ἀνέρχεται σὲ 500 λίρες. Ὁ α΄ δικαιοῦται νὰ πάρῃ τὰ $\frac{108}{500}$ τῶν 250 λιρῶν, ὁ β΄ τὰ $\frac{75}{500}$, ὁ γ΄ τὰ $\frac{215}{500}$ καὶ ὁ δ΄ τὰ $\frac{102}{500}$, ὅπως ἐδιδαχθήκαμε στὰ προβλήματα τοῦ συνεταιρισμοῦ.

Κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ ἔχωμε τὴν ἑξῆς λύσιν:

Λύσις

$$\begin{array}{r} 108 \\ 75 \\ 215 \\ 102 \\ \hline 500 \end{array}$$

α) $250 \times \frac{108}{500} = \frac{27.000}{500} = 54$ λίρες

β) $250 \times \frac{75}{500} = \frac{18.750}{500} = 37{,}5$ »

γ) $250 \times \frac{215}{500} = \frac{53.750}{500} = 107{,}5$ »

δ) $250 \times \frac{102}{500} = \frac{25.500}{500} = 51$ »

Σύνολον 250 »

Β′ Τὰ κεφάλαια ἴδια.
Τὸ χρονικὸν διάστημα διαφορετικόν.

2. Ὁ διευθυντὴς ἑνὸς καταστήματος ἤρχισε τὶς ἐργασίες του μὲ κεφάλαιον 500 χρυσῶν λιρῶν. Μετὰ 6 μῆνες προσέλαβε συνεταῖρον τὸν κ. Α. μὲ τὸ ἴδιον ποσόν. Καὶ 3 μῆνες μετὰ τὸν δεύτερον (δηλαδὴ σὲ 9 μῆνες, ἀφ' ὅ,του ἄνοιξε τὸ κατάστημα) προσέλαβε συνεταῖρον καὶ τὸν κ. Σ. μὲ τὸ ἴδιον χρηματικὸν ποσόν. 24 μῆνες, ἀπὸ τὴν ἡμέρα, ποὺ ἤνοιξε τὸ κατάστημα, ἔκαμαν ἰσολογισμὸ καὶ εἶχαν κέρδος 456 χρυσὲς λίρες. Τί μέρισμα κέρδους ἀναλογεῖ σὲ κάθε συνεταῖρον ;

Σκέψις

Ἀφοῦ τὸ κεφάλαιον εἶναι ἴδιον, τὸ κέρδος θὰ κατανεμηθῇ ἀναλόγως τοῦ χρονικοῦ διαστήματος, ποὺ εἶχε κατατεθειμένα τὰ χρήματά του ὁ κάθε συνεταῖρος. Ὁ πρῶτος εἶχε τὰ χρήματά του κατατεθειμένα ὅλον τὸ χρονικὸν διάστημα, δηλαδὴ 24 μῆνες. Ὁ δεύτερος 6 μῆνες λιγώτερο, δηλαδὴ 18 μῆνες, καὶ ὁ τρίτος 9 μῆνες λιγώτερο δηλαδὴ 15 μῆνες. Τὸ ποσόν, λοιπόν, τοῦ κέρδους θὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $24 + 18 + 15 = 57$. Ὁ πρῶτος θὰ πάρῃ τὰ $\frac{24}{57}$ τῶν 456 λιρῶν, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{18}{57}$ τοῦ ποσοῦ καὶ ὁ τρίτος τὰ $\frac{15}{57}$.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ ἔχωμε τὴν ἑξῆς λύσιν :

Λύσις

$$\begin{array}{r} 24 \\ 18 \\ 15 \\ \hline 57 \end{array}$$

α) $456 \times \frac{24}{57} = \frac{10.944}{57} =$ 192 λίρες

β) $456 \times \frac{18}{57} = \frac{8.208}{57} =$ 144 »

γ) $456 \times \frac{15}{57} = \frac{6.840}{57} =$ 120 »

Σύνολον 456 »

Γ′ Τὰ κεφάλαια διαφορετικά.
Τὸ χρονικὸν διάστημα διαφορετικόν.

3. Ἕνας χαρτέμπορος ἤρχισε τὴν ἐπιχείρησίν του μὲ 250 χρυσὲς λίρες. 3 μῆνες ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως προσέλαβε συνεταῖρον τὸν κ. Β., ὁ ὁποῖος

κατέθεσε 320 λίρες, καὶ 10 μῆνες ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως προσέλαβε συνεταῖρον τὸν κ. Ν. ὁ ὁποῖος κατέθεσε 430 λίρες. Στοὺς 15 μῆνες ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως ἔκαμαν ἰσολογισμὸ καὶ εἶχαν κέρδος 974 λίρες. Τί μερίδιον ἀναλογεῖ σὲ κάθε συνεταῖρον ;

Σκέψις

α) 1) Ὁ πρῶτος συνεταῖρος κατέθεσε τὰ χρήματα ἐπὶ 15 μῆνες
2) Ὁ δεύτερος » » » » » 12 μῆνες
3) Ὁ τρίτος » » » » » 5 μῆνες

β) 1) Ὁ πρῶτος κατέθεσε 250 λίρες $\times$ 15 μῆνες $=$ 3.750
2) Ὁ δεύτερος » 320 » $\times$ 12 μῆνες $=$ 3.840
3) Ὁ τρίτος » 430 » $\times$ 5 μῆνες $=$ 2.150
Σύνολον 9.740

Τὸ κέρδος, λοιπόν, τῶν 974 λιρῶν πρέπει νὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3.750, 3.840 καὶ 2.150

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ ἔχωμε τὴν ἑξῆς λύσιν :

Λύσις

$250 \times 15 = 3750$
$320 \times 12 = 3840$
$430 \times 5 = 2150$
9.750

α) $974 \times \frac{3.750}{9.750} = \frac{3.652.500}{9.750} =$ 375 λίρες

β) $974 \times \frac{3.840}{9.750} = \frac{3.740.160}{9.750} =$ 384 »

γ) $974 \times \frac{2.150}{9.750} = \frac{2.094.100}{9.750} =$ 215 »

Σύνολον 974 »

Προβλήματα

1. Στὴν Ἑταιρείαν τσιμέντων κατέθεσαν : ὁ κ. Ἀ. 300 λίρες. 10 μῆνες ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως ὁ κ. Μ. κατέθεσε τὸ ἴδιο ποσόν. Καὶ 15 μῆνες ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως ὁ κ. Γ. κατέθεσε τὸ ἴδιο ποσόν. 24 μῆνες ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως ἔγινε ἰσολογισμὸς κι' εὑρῆκαν κέρδος 141 λίρες. Τί μερίδιον κέρδους ἀναλογεῖ σὲ κάθε συνεταῖρον ;

2. Τρεῖς χαρτέμποροι ἵδρυσαν μιὰν Ἑταιρείαν. Ὁ πρῶτος κατέθεσε 365 λίρες, ὁ δεύτερος 287 λίρες καὶ ὁ τρίτος 248 λίρες. Μετὰ ἕνα ἔτος ἔκαμαν ἰσολογισμὸ κι' εὑρῆκαν ζημίαν 540 λίρες. Τί μερίδιον ζημίας ἀναλογεῖ σὲ κάθε συνεταῖρον ;

3. Μία Ἑταιρεία ζαχαροπλαστικῆς ἱδρύθηκε μὲ τὰ ἑξῆς κεφάλαια. Ὁ κ. Γρ. κατέθεσεν 107 λίρες. 2 μῆνες ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως ὁ κ. Δ. κατέθεσεν 263 λίρες καὶ 6 μῆνες ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως ὁ κ. Χρ. κατέθεσε 230 λίρες. Μετὰ 16 μῆνες ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως τῆς Ἑταιρείας ἔκαμαν ἰσολογισμὸ κι' εὑρῆκαν κέρδος 800 λίρες. Τί μερίδιον κέρδους ἀναλογεῖ σὲ κάθε συνεταῖρον ;

4. Πέντε ἔμποροι ἵδρυσαν μίαν Ἑταιρείαν ἐκμεταλλεύσεως ἐλαιωδῶν προϊόντων. Κατέθεσαν : ὁ πρῶτος 5.800 δρχ. Μετὰ 1 μῆνα ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως κατέθεσεν ὁ δεύτερος 6.700 δρχ. Μετὰ 3 μῆνες ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως κατέθεσεν ὁ τρίτος 4.200 δρχ. Μετὰ 5 μῆνες ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως κατέθεσεν ὁ τέταρτος 7.300 δρχ. Καὶ μετὰ 10 μῆνες ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως κατέθεσεν ὁ πέμπτος 6.000 δρχ. Μετὰ 24 μῆνες ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως ἔκαμαν ἰσολογισμὸ κι' εὑρῆκαν ζημίαν 7.200 δρχ. Τί μερίδιον ζημίας ἀναλογεῖ σὲ κάθε συνεταῖρον ;

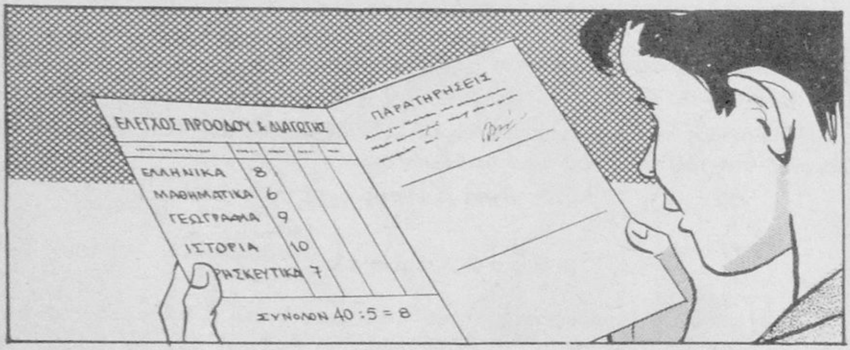
5. Τρεῖς βιβλιοπῶλαι ἔκαμαν μιὰν Ἑταιρείαν. Ὁ πρῶτος κατέθεσε 25.000 δρχ., ὁ δεύτερος 36.000 δρχ. κι' ὁ τρίτος 39.000 δρχ. Μετὰ 6 μῆνες ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως ἔκαμαν ἰσολογισμὸ κι' εὑρῆκαν κέρδος 50.000 δρχ. Πόσον μερίδιον ἀναλογεῖ σὲ κάθε συνεταῖρον ;

6. Μία μεγάλη Ἑταιρεία κλωστοβιομηχανίας ἱδρύθηκε μὲ τὰ ἑξῆς ποσά. Ὁ κ. Τσ. κατέθεσε 120.000 δρχ. Μετὰ 3 μῆνες ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως ὁ κ. Δοξ. κατέθεσε 60.000 δρχ. Μετὰ 8 μῆνες ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως ὁ κ. Παπ. κατέθεσε 180.000 δρχ. Μετὰ 12 μῆνες ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως ἔκαμαν ἰσολογισμὸ κι' εὑρῆκαν ζημίαν 180.000 δρχ. Τί μερίδιον ζημίας ἀναλογεῖ σὲ κάθε συνεταῖρον ;

7. Μία ἀνώνυμος ἑταιρεία ἱδρύθηκε ἀπὸ τέσσαρες συνεταίρους οἱ ὁποῖοι κατέθεσαν ὁ καθένας ἀπὸ 10.000 δρχ. ὁ πρῶτος γιὰ 12 μῆνες, ὁ δεύτερος γιὰ 10 μῆνες, ὁ τρίτος γιὰ 8 μῆνες καὶ ὁ τέταρτος γιὰ 6 μῆνες. Τὸ κέρδος τους ἦταν 144.000. Τί μερίδιον κέρδους ἀναλογεῖ σὲ κάθε συνεταῖρον ;

8. Τέσσαρες κτηνοτρόφοι ἔσμιξαν τὰ γίδια τους. Ὁ α΄ εἶχε 180 γίδια, ὁ β΄ 205, ὁ γ΄ 86 καὶ ὁ δ΄ 69. Στὸ τέλος τοῦ καλοκαιριοῦ ἐπώλησαν τὸ τυρὶ κι' ἐπῆραν 64.800 δραχμές. Τί ποσὸν ἀναλογεῖ σὲ κάθε κτηνοτρόφον ;

9. Ἕνας κτηνοτρόφος τυροκομᾷ μόνος του τὰ 120 πρόβατά του. Μετὰ 11 ἡμέρες, ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως, τοῦ φέρνει ὁ κ. Κ. 32 δικά του πρόβατα. Μετὰ 19 ἡμέρες, ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως, τοῦ φέρνει ὁ κ. Τσ. 28 δικά του πρόβατα. 30 ἡμέρες, ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς τυροκομίας, ἐπῆραν ἀπὸ τὴν πώλησιν τοῦ τυροῦ 9.000 δρχ. Τί μερίδιον ἀναλογεῖ σὲ κάθε συνεταῖρον ;



ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ

Ἐρωτοῦμε τὸν διδάσκαλόν μας μὲ τί βαθμὸ θὰ προβιβασθοῦμε καὶ μᾶς λέγει : Κατὰ μέσον ὅρον μὲ 7. Τὸ καλοκαῖρι ποὺ κάνει πολλὴ ζέστη λέγομε ὅτι : ὁ μέσος ὅρος τῆς θερμοκρασίας ἦτο σήμερα 26 βαθμοί. Τὸν χειμῶνα ποὺ κάνει πολὺ κρύο, λέγομε ὅτι : ὁ μέσος ὅρος τῆς θερμοκρασίας ἦταν σήμερα 8 βαθμοί. Τὸ αὐτοκίνητον, ὁ σιδηρόδρομος, ἡ μοτοσυκλέττα δὲν τρέχουν ὅλες τὶς ὧρες μὲ τὴν ἴδιαν ταχύτητα, λέγομε ὅτι : κατὰ μέσον ὅρον τρέχουν μὲ 30, 40, 50 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Τὰ ἔξοδα ποὺ κάνει μία οἰκογένεια γιὰ νὰ ζήση ἐπὶ ἕνα μῆνα, δὲν εἶναι τὰ ἴδια κάθε ἡμέρα, ἀλλ' ἄλλοτε εἶναι λιγώτερα κι' ἄλλοτε περισσότερα : λέμε ὅμως ὅτι ἡ οἰκογένεια αὐτὴ ἐξοδεύει κατὰ μέσον ὅρον 55 δραχμὲς τὴν ἡμέραν.

Βλέπομε, λοιπόν, ὅτι πολὺ συχνὰ μεταχειριζόμεθα τὴν φράσιν «κατὰ μέσον ὅρον».

Τὰ προβλήματα ποὺ παρουσιάζονται στὶς περιπτώσεις αὐτὲς εἶναι εὔκολα καὶ λύνονται μὲ ἁπλὸν τρόπον.

Ἂς λύσωμε ἕνα τέτοιο πρόβλημα.

1. Οἱ βαθμοὶ τοῦ Γιώργου στὰ διάφορα μαθήματα, εἶναι : Ἑλληνικὰ 8, Μαθηματικὰ 6, Γεωγραφία 9, Ἱστορία 10, Θρησκευτικὰ 7, Φυσικὴ Ἱστορία 9, Πειραματικὴ καὶ Χημεία 4, Ἰχνογραφία 9, Καλλιγραφία 6, Χειροτεχνία 10, Ὠδικὴ 5 καὶ Γυμναστικὴ 8. Ποιός εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν βαθμῶν του ;

Λύσις

Θὰ προσθέσωμε ὅλους τοὺς βαθμούς:

$$8 + 6 + 9 + 10 + 7 + 9 + 4 + 9 + 6 + 10 + 5 + 8 = 96$$

Ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθημάτων εἶναι 12. Τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν θὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ συνόλου τῶν μαθημάτων:

96 : 12 = 8. Αὐτὸς εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν βαθμῶν.

Προβλήματα

1. Ἡ χθεσινὴ θερμοκρασία στὴν πόλι μας ἦταν: Τὸ πρωῒ 14 βαθμοί, τὸ μεσημέρι 22 βαθμοί, τὸ ἀπόγευμα 26 βαθμοὶ καὶ τὸ βράδυ 18 βαθμοί. Πόση ἦταν κατὰ μέσον ὅρον ἡ χθεσινὴ θερμοκρασία τῆς πόλεώς μας;

2. Ἡ οἰκογένειά μας ἐξώδευσε τὴν πρώτην ἑβδομάδα 286,20 δρχ., τὴν δευτέραν ἑβδομάδα 323,40 δρχ., τὴν τρίτην ἑβδομάδα 407,80 δρχ. καὶ τὴν τετάρτην ἑβδομάδα 305,60 δρχ. Πόσα ἐξώδευσε κατὰ μέσον ὅρον καθ' ἑβδομάδα;

3. Τὸ λεωφορεῖον Ἀθηνῶν — Πατρῶν διέτρεξε τὴν ἀπόστασι σὲ πέντε ὥρες. Τὴν α' ὥραν ἔτρεχε μὲ 45 χλμ. τὴν ὥραν, τὴν β' ὥραν ἔτρεχε μὲ 63 χλμ., τὴν γ' μὲ 39 χλμ. τὴν δ' μὲ 58 χλμ. καὶ τὴν ε' ὥραν ἔτρεχε μὲ 70 χλμ. Μὲ πόσα χιλιόμετρα ἔτρεξε κατὰ μέσον ὅρον τὴν ὥραν;

4. Στὸ μαθητικό μας συσσίτιο διεθέσαμε τὸν προηγούμενον μῆνα τὶς παρακάτω ποσότητες γάλακτος: Τὴν α' ἑβδομάδα 36 χλγρ., τὴν β' ἑβδομάδα 32 χλγρ., τὴν γ' ἑβδομάδα 40 χλγρ. καὶ τὴν δ' ἑβδομάδα 28 χλγρ. Πόσα χιλιόγραμμα γάλακτος διεθέσαμε κατὰ μέσον ὅρον καθ' ἑβδομάδα;

5. Στὰς Ἀθήνας στὶς τέσσαρες τελευταῖες ἡμέρες ἐγεννήθησαν: τὴν α' ἡμέραν 128 παιδιά, τὴν β' ἡμέραν 160, τὴν γ' ἡμέραν 200 καὶ τὴν δ' ἡμέραν 132. Πόσα παιδιὰ ἐγεννήθησαν κατὰ μέσον ὅρον αὐτὲς τὶς τέσσαρες ἡμέρες;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΙΞΕΩΣ

Ὅταν οἱ ἔμποροι ἔχουν διάφορες ποιότητες ἀπὸ ἕνα εἶδος τροφίμων, π.χ. ἀπὸ βούτυρο, λάδι, καφφέ, καὶ δὲν μποροῦν νὰ πωλήσουν εὔκολα κάθε ποιότητα χωριστά, γιατὶ ἡ μία εἶναι ἀκριβὴ καὶ ἡ ἄλλη ὄχι καὶ τόσο καλή, ἢ ὅταν θέλουν νὰ κατασκευάσουν σκοπίμως ἕνα εὐθηνὸ μῖγμα πρὸς κατανάλωσιν, τότε ἀναμιγνύουν διάφορες ποιότητες κι' ἔτσι πωλοῦν εὐκολώτερα τὸ ἐμπόρευμά τους.

Αὐτὰ τὰ προβλήματα λέγονται προβλήματα *μίξεως* καὶ χωρίζονται σὲ δύο κατηγορίες, ἢ σὲ δύο εἴδη ὅπως λέγονται.

Ἂς λύσωμε, τώρα, ἕνα πρόβλημα ἀπὸ κάθε εἶδος γιὰ νὰ τὰ καταλάβωμε καλύτερα :

Α' Προβλήματα πρώτου εἴδους

1. Ἕνας καφφεπώλης ἀνέμιξε τρεῖς ποιότητες καφφέ. Ἀπὸ τὴν πρώτην ποιότητα, ἡ ὁποία ἐτιμᾶτο 60 δρχ. κατὰ χλγρ. ἐπῆρε 8 χλγρ. Ἀπὸ τὴν δευτέραν, ἡ ὁποία ἐτιμᾶτο 52 δρχ. κατὰ χλγρ. ἐπῆρε 15 χλγρ. Καὶ ἀπὸ τὴν τρίτην ποιότητα, ἡ ὁποία ἐτιμᾶτο 66 δρχ. κατὰ χλγρ. ἐπῆρε 17 χλγρ. Πόσο πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ χλγρ. τοῦ μίγματος ὥστε νὰ μὴ ζημιωθῇ ;

Σκέψις

Στὸ πρόβλημα τοῦτο μᾶς δίδουν τὶς ποσότητες ἀπὸ τρεῖς διαφορετικὲς ποιότητες καφφὲ καθὼς καὶ τὴν τιμὴν τῆς κάθε ποιότητος κατὰ χλγρ. καὶ ζητοῦμε νὰ εὕρωμε πόσο πρέπει νὰ πωληθῇ τὸ χλγρ. τοῦ μίγματος, ὥστε ὁ καφφεπώλης νὰ μὴ ζημιωθῇ.

Λύσις

Ἂν ἐπωλοῦσε χωριστὰ τὰ χλγρ. κάθε ποιότητος θὰ εἰσέπραττε:

α) Α΄ ποιότης καφφέ:	χλγρ.:	8 × 60 =	480 δρχ.
β) Β΄ ποιότης καφφέ:	χλγρ.:	15 × 50 =	750 »
γ) Γ΄ ποιότης καφφέ:	χλγρ.:	17 × 66 =	1122 »
Σύνολον:	χλγρ.:	40	2352 δρχ.

Ἀφοῦ τὰ 40 χλγρ. στοιχίζουν 2352 δρχ., γιὰ νὰ εὕρωμε πόσο πρέπει νὰ πωλῆται τὸ κάθε χλγρ. μίγματος, πρέπει νὰ διαιρέσωμε τὸ 2352 : 40 = 58,8 δρχ. τὸ χλγρ.

Αὐτὴ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ μίγματος κατὰ χλγρ.

Προβλήματα

2. Ἕνας βουτυρέμπορος ἀνέμιξε τρία εἴδη βουτύρου. Ἀπὸ τὸ πρῶτο, ποὺ ἐτιμᾶτο κατὰ χλγρ. 35 δρχ. ἐπῆρε 12 χλγρ. Ἀπὸ τὸ δεύτερο, ποὺ ἐτιμᾶτο κατὰ χλγρ. 40 δρχ. ἐπῆρε 16 χλγρ. Ἀπὸ τὸ τρίτον ποὺ ἐτιμᾶτο κατὰ χλγρ. 42 δρχ. ἐπῆρε 10 χλγρ. Πόσο πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ χλγρ. τοῦ μίγματος ὥστε νὰ μὴ ζημιωθῇ;

3. Ἕνας ἔμπορος λαδιοῦ ἀγόρασε διάφορες ποσότητες καὶ ποιότητες λαδιοῦ ἀπὸ διαφόρους ἐλαιοπαραγωγούς. Ἀπὸ τὸν πρῶτον ἀγόρασε 165 χλγρ. πρὸς 21 δρχ. τὸ χλγρ. Ἀπὸ τὸν δεύτερον 107 χλγρ. πρὸς 20 δρχ. τὸ χλγρ. Ἀπὸ τὸν τρίτον 180 χλγρ. πρὸ 20,50 δρχ. τὸ χλγρ. καὶ ἀπὸ τὸν τέταρτον 148 χλγρ. πρὸς 21,50 τὸ χλγρ. Αὐτὸ τὸ λάδι τὸ ἔκαμε ἕνα μῖγμα. Πόσο στοιχίζει τὸ χλγρ. τοῦ μίγματος;

Β΄ Προβλήματα δευτέρου εἴδους

1. Οἱ ἀλευρόμυλοι Ἁγίου Γεωργίου κάνουν ἕνα μῖγμα ἀλεύρου ἀπὸ σιτάρι καὶ κριθάρι. Τὸ ἀλεῦρι τοῦ σιταριοῦ στοιχίζει 5 δρχ. τὸ χλγρ., ἐνῷ τοῦ κριθαριοῦ στοιχίζει 2 δρχ. τὸ χλγρ. Πόσα χιλιόγραμμα ἀλεῦρι πρέπει νὰ πάρουν ἀπὸ κάθε εἶδος γιὰ κάμουν ἕνα μῖγμα 12.000 χλγρ. καὶ νὰ πωλῆται τὸ χλγρ. τοῦ μίγματος πρὸς 4 δρχ.;

Σκέψις

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ μᾶς λέγουν πόσο στοιχίζει τὸ χλγρ. τοῦ ἀλεύρου ἀπὸ κάθε εἶδος, καὶ ζητοῦμε νὰ εὕρωμε πόσα χιλιόγραμμα θὰ πάρωμε ἀπὸ κάθε εἶδος, γιὰ νὰ κατασκευάσωμε ἕνα μῖγμα ποὺ νὰ ἔχῃ ὡρισμένον βάρος (12.000 χλγρ.), τὸ ὁποῖον νὰ πωληθῇ μὲ ὡρισμένην τιμὴν (4 δρχ.).

α) Τὸ ἀλεῦρι τοῦ σιταριοῦ πωλεῖται, χωριστά, πρὸς 5 δρχ. τὸ χλγρ. Ὅταν ὅμως μπῇ εἰς τὸ μῖγμα, πωλεῖται πρὸς 4 δρχ. τὸ χλγρ. Δηλαδή, τὸ ἐργοστάσιον θὰ ζημιώνεται 1 δρχ. κατὰ χλγρ.

β) Τὸ ἀλεῦρι τοῦ κριθαριοῦ πωλεῖται, χωριστά, πρὸς 2 δρχ. τὸ χλγρ. Ὅταν, ὅμως, μπῇ εἰς τὸ μῖγμα, πωλεῖται πρὸς 4 δρχ. τὸ χλγρ. Ἑπομένως τὸ ἐργοστάσιον θὰ κερδίζῃ 2 δρχ. κατὰ χλγρ.

γ) Ἂν πάρωμε 2 χλγρ. ἀλεῦρι σιταρένιο (ὅσες, δηλαδή, εἶναι οἱ δραχμὲς ποὺ κερδίζει σὲ κάθε χλγρ. ἀλεῦρι κριθαρένιο), θὰ ἔχωμε ζημίαν $2 \times 1 = 2$ δρχ.

δ) Ἂν πάρωμε 1 χλγρ. ἀλεῦρι κριθαρένιο (ὅσες, δηλαδή, εἶναι οἱ δραχμὲς ποὺ χάνει σὲ κάθε χλγρ. ἀλεῦρι σιταρένιο) θὰ ἔχωμε κέρδος $1 \times 2 = 2$ δραχ.

Ὥστε ὅταν πάρωμε 2 χλγρ. ἀλεῦρι σιταρένιο καὶ 1 χλγρ. ἀλεῦρι κριθαρένιο, οὔτε ζημία θὰ ἔχωμε, οὔτε κέρδος.

Αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ παραστήσωμε μὲ τὸ παρακάτω σχῆμα:

Λύσις

Τιμὴ ἀλεύρου σίτου δρχ. 5 \ / 1 δρχ. ζημία

4 δρχ. μῖγμα

Τιμὴ ἀλεύρου κριθ. δρχ. 2 / \ 2 δρχ. κέρδος

2 χλγρ. ἀλεῦρι σιταρένιο καὶ 1 χλγρ. ἀλεῦρι κριθαρένιο = 3 χλγρ. μῖγμα.

Τώρα μὲ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν θὰ εὕρωμε πόσα χλγρ. ἀλεῦρι ἀπὸ κάθε εἶδος ἀναλογεῖ στὸ μῖγμα.

α) Ἀλεῦρι σιταρένιο:

Στὰ 3 χλγρ. μῖγμα ἀναλογοῦν 2 χλγρ. ἀλεῦρι σιταρένιο.
Στὰ 12.000 » » » Χ;

Τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα.

$$X = 2 \times \frac{12.000}{3} = \frac{24.000}{3} = 8.000$$ χλγρ. ἀλεῦρι σιταρένιο.

β) Ἀλεῦρι κριθαρένιο:

Στὰ 3 χλγρ. μῖγμα ἀναλογεῖ 1 χλγρ. ἀλεῦρι κριθαρένιο.
Στὰ 12.000 » » » X;

Κι' ἐδῶ τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα.

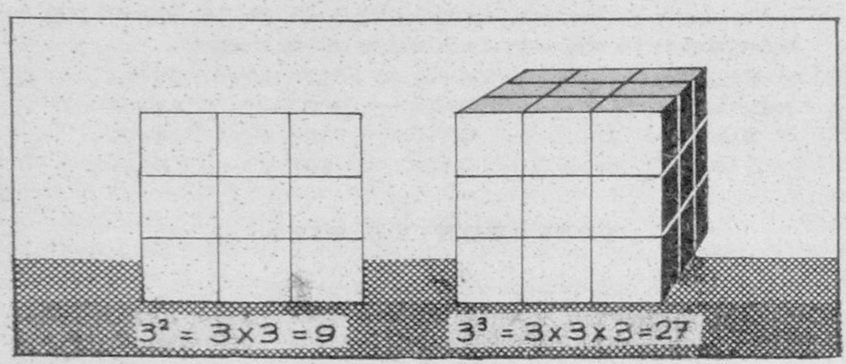
$$X = 1 \times \frac{12.000}{3} = \frac{12.000}{3} = 4.000$$ χλγρ. ἀλεῦρι κριθαρένιο.

Προβλήματα

2. Ἕνας βουτυρέμπορος ἐπῆρε γιδινὸν βούτυρον καὶ μαγειρικὸν λῖπος κι' ἔκαμε ἕνα μῖγμα. Τὸ βούτυρον κοστίζει 40 δρχ. τὸ χλγρ. ἐνῷ τὸ μαγειρικὸν λῖπος στοιχίζει 24 δρχ. τὸ χλγρ. Πόσα χλγρ. θὰ πάρῃ ἀπὸ κάθε εἶδος γιὰ νὰ κατασκευάσῃ μῖγμα 200 χλγρ. καὶ νὰ πωλῆται πρὸς 36 δρχ. τὸ χλγρ.;

3. Ἕνας ἐλαιέμπορος ἀνέμιξε δύο ποιότητες λαδιοῦ. Ἡ πρώτη ποιότης στοιχίζει 22 δρχ. τὸ χλγρ. καὶ ἡ δευτέρα 18 δρχ. τὸ χλγρ. Πόσα χλγρ. πρέπει νὰ πάρῃ ἀπὸ κάθε ποιότητα γιὰ νὰ κάμῃ μῖγμα 400 χλγρ. καὶ τὸ μῖγμα νὰ πωλῆται 21 δρχ. τὸ χλγρ.;

4. Ἕνας καφφεπώλης ἀνέμιξε δύο ποιότητες καφφέ. Ἡ πρώτη τιμᾶται 70 δρχ. τὸ χλγρ. καὶ ἡ δευτέρα 64 δρχ. τὸ χλγρ. Πόσα χλγρ. πρέπει νὰ πάρῃ ἀπὸ κάθε ποιότητα γιὰ νὰ κάμῃ μῖγμα 120 χλγρ. καὶ τὸ μῖγμα νὰ πωλῆται 67 δρχ. τὸ χλγρ.;



ΜΕΡΙΚΑ ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Στὸν πολλαπλασιασμό, ὅταν ἔχωμε νὰ πολλαπλασιάσωμε ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του, τὸ γινόμενον τὸ λέγομε τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

Π.χ. $5 \times 5 = 25$. Ὁ ἀριθμὸς 25 εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ 5. Τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ 5 ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του μποροῦμε νὰ τὸν παραστήσωμε καὶ ἔτσι: -5^2-, τὸ ὁποῖον διαβάζεται: πέντε εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν, ἢ πέντε εἰς τὸ τετράγωνον, δηλ. 5×5.

Ὅταν ἔχωμε νὰ πολλαπλασιάσωμε ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του καὶ πάλιν ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του, τὸ γινόμενον τὸ λέγομε κύβον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

Π.χ. $5 \times 5 \times 5 = 125$. Ὁ ἀριθμὸς 125 εἶναι ὁ κύβος τοῦ ἀριθμοῦ 5. Τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ 5 ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του καὶ πάλιν ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του μποροῦμε νὰ τὸν παραστήσωμε ἔτσι: -5^3-, τὸ ὁποῖον διαβάζεται: Πέντε εἰς τὴν τρίτην δύναμιν, ἢ πέντε εἰς τὸν κύβον, δηλ. $5 \times 5 \times 5$.

Τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ $5 \times 5 \times 5 \times 5$ τὸ λέγομε 5^4 (ἢ πέντε εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν).

Τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ τὸ λέγομε 5^5 (ἢ πέντε εἰς τὴν πέμπτην δύναμιν, κλπ.).

Ἀσκήσεις

1. Νὰ εὑρεθῇ τὸ τετράγωνον τῶν ἀριθμῶν 9, 100, 25, 4, 12, 60, 15, 8, 20, 50, 14, 1.000.

2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ κύβος τῶν ἀριθμῶν 10, 3, 15. 24, 16, 20, 50, 100.

3. Διαβάσατε τὰ παρακάτω καὶ εὕρετε πόσο εἶναι:

$8^2 =$	. $6^3 =$	. $20^2 =$	$17^3 =$	$25^2 =$
$12^2 =$	. $16^3 =$	. $50^2 =$	. $100^3 =$	$14^3 =$
$8^4 =$	$3^5 =$	$9^6 =$	$10^5 =$	$4^4 =$
$5^4 =$	$6^4 =$	$7^5 =$	$10^6 =$	$6^5 =$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ

Εἴπαμε ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ 5 εἶναι τὸ 25.

Τὸ τετράγωνον τοῦ 10 εἶναι τὸ 100. Τὸ τετράγωνον τοῦ 7 εἶναι τὸ 49.

Ἀντιθέτως τώρα λέμε ὅτι: ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 25 εἶναι τὸ 5. Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 100 εἶναι τὸ 10. Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 49 εἶναι τὸ 7.

Τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ, λέγεται ὁ ἀριθμὸς ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του, μᾶς δίνει τὸν πρῶτον ἀριθμόν.

Πῶς μποροῦμε νὰ εὕρωμε τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 4225. Ποιά εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ;

Χωρίζομε τὸν ἀριθμὸν κατὰ διψήφια τμήματα, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ τέλος. Ἂν ὁ ἀριθμὸς ἔχει ζυγὰ ψηφία (δηλαλὴ 2, 4, 6, 8, 10 κ λ.π.) τότε θὰ εἶναι ἀκριβῶς σὲ διψήφια τμήματα χωρισμένος. Ἂν ὅμως ὁ ἀριθμὸς ἔχει μονὰ ψηφία (δηλαδή, 1, 3, 5, 7, 9 κ.λ.π.) τότε τὸ πρῶτο ψηφίο θὰ εἶναι μόνο του.

Ἔχομε λοιπόν:

```
 ,  ,      65
4225 √  125 ×          65 ×
 625      5            65
 625    625           325
 ===                 390
                    4225
```

Παίρνομε τὸ πρῶτον διψήφιον τμῆμα: τὸ 42. Ποιός ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του μᾶς δίνει γινόμενον 42 ἢ λιγώτερον — ὄχι περισσότερον — ἀπὸ 42; Εἶναι ὁ ἀριθμὸς 6. Τόν ἀριθμὸν 6 γράφομε πάνω ἀπὸ τὴν γραμμήν. Καὶ λέμε: $6 \times 6 = 36$, ἀπὸ 42 μένει ὑπόλοιπον 6 τὸ ὁποῖον γράφομε κάτω ἀπὸ τὸ 42. Δίπλα στὸ ὑπόλοιπον 6 κατεβάζομε καὶ τὸ ἄλλο διψήφιον τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ καὶ γίνεται

625. Τὸν ἀριθμὸν 6 ποὺ ἐγράψαμε πάνω ἀπὸ τὴν γραμμήν, τὸν διπλασιάζομε καὶ γίνεται 12. Τώρα λέμε: τὸ 12 στὸ 62 πάει 5 φορές. Τὸν ἀριθμὸν 5 τὸν γράφομε δίπλα στὸ 12 καὶ γίνεται 125. Τὸν ἀριθμὸν 125 τὸν πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸ ψηφίον ποὺ προσθέσαμε στὸ τέλος του, δηλαδὴ ἐπὶ 5. Τὸ γινόμενον τοῦ $125 \times 5 = 625$. Ἀφαιροῦμε τὸ 625 ἀπὸ τὸ 625 κι' ἔχομε ὑπόλοιπον μηδέν. Ἂν ἐτύχαινε νὰ ἔχωμε λιγώτερο ἀπὸ 625 κι' ἐπομένως δὲν ἐγίνετο ἡ ἀφαίρεσις, τότε θὰ ἐγράφαμε δίπλα στὸ 12, τὸν ἀριθμὸν 4 καὶ θὰ ἐπολλαπλασιάζαμε τὸ 124 ἐπὶ 4. Ἐδῶ ὅμως ἔχομε ἀριθμὸν ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἀφαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ μάλιστα δὲν ἀφήνει ὑπόλοιπον. Τὸ 5, λοιπόν, ποὺ ἐγράψαμε δίπλα στὸ 12, τώρα θὰ τὸ γράψωμε δίπλα στὸ 6 καὶ θὰ γίνῃ 65. Ὁ ἀριθμὸς 65 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 4225. Κάνομε τὴν δοκιμήν, πολλαπλασιάζομε 65×65 κι' εὑρίσκομε 4225. Ἑπομένως ἡ πρᾶξις μας εἶναι σωστή.

Ἕνα δεύτερον παράδειγμα: Νὰ εὕρωμε τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 140.

		11,8		
1,40	1	21 ×	228 ×	11,8 ×
−40		1	8	11,8
21		21	1824	944
1900				118
1824				118
==76				139,24 +
				76
				140,00

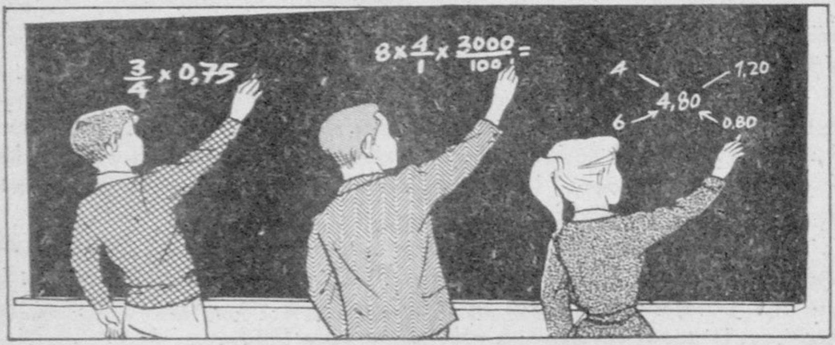
Χωρίζομε τὸν ἀριθμὸν 140 σὲ διψήφια τμήματα, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ τέλος. Στὴν ἀρχὴ ἀπομένει τὸ 1. Ποιὸς ἀριθμός, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του μᾶς δίνει γινόμενον 1; Τὸ 1. Γράφομε, λοιπόν, τὸ 1 πάνω ἀπὸ τὴν γραμμήν. Καὶ λέμε: Ἕνα ἐπὶ ἕνα ἴσον ἕνα, ἀπὸ ἕνα μηδέν. Κατεβάζομε καὶ τὸ διψήφιον τμῆμα, κι' ἔχομε 40. Τὸν ἀριθμὸν 1 τὸν διπλασιάζομε καὶ γίνεται 2. Τὸ 2 τὸ γράφομε κάτω ἀπὸ τὸ ἕνα καὶ λέμε: Τὸ 2 εἰς τὸ τὸ 4 πάει 2, ἀλλ' ἂν τὸ 2 τὸ γράψωμε δίπλα στὸ 2 θὰ γίνῃ 22 καὶ 2 φορὲς 22 γίνεται 44, ἐνῷ ἐδῶ ἔχομε μόνον 40. Γι' αὐτὸ θὰ πάρω μόνον 1 φορά. Τὸ 1 θὰ τὸ γράψωμε δίπλα στὸ 2 καὶ θὰ γίνῃ 21. Αὐτὸ θὰ τὸ πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ 1. $1 \times 21 = 21$ ἀπὸ 40 μένουν 19. Γράφομε τώρα τὸ δεύτερον 1 δίπλα στὸ πρῶτον, ἐπάνω ἀπὸ τὴν γραμμήν. Ἐδῶ ἔγινε τώρα 11. Διπλασιάζομε τὸ 11 καὶ γίνεται 22 καὶ προχωροῦμε γιὰ δέκατα. Προσθέτομε 2 μηδενικὰ στὸ 19 καὶ γίνεται 1900. Λέμε τώρα: τὸ 2 στὸ 19 πάει 9 φορές, ἀλλὰ θὰ πάρωμε 8. Γράφομε τὸ 8 δίπλα στὸ 22 καὶ γίνεται 228, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζομε ἐπὶ 8. Τὸ γινόμενον εἶναι 1824, τὸ ὁποῖον ἀφαιρούμενον ἀπὸ τὸ 1900, ἀφήνει ὑπόλοιπον 76. Τώρα βάζομε ὑποδιαστολὴν στὸ 11 καὶ γράφομε τὸ τρίτον ψηφίον ποὺ εὑρήκαμε: τὸ 8. Ἂν θέλωμε νὰ προχωρήσωμε γιὰ ἑκατοστά, θὰ διπλασιάσωμε τὸ 118, θὰ προσθέσωμε δύο μηδενικὰ στὸ 76 καὶ θὰ προχωρήσωμε ὅπως καὶ προηγουμένως.

Σταματοῦμε ὡς ἐδῶ καὶ λέμε ὅτι ὁ ἀριθμὸς 11,8 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 140, κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς δεκάτου, γιατὶ ὅπως εἴδαμε, ἡ πρᾶξις ἄφησε ὑπόλοιπον.

Κάνομε τὴν δοκιμήν: πολλαπλασιάζομε 11,8 × 11,8 κι' εὑρίσκομε 139,24 προσθέτομε καὶ τὸ 76 τὰ ὁποῖα εἶναι κι' αὐτὰ ἑκατοστὰ (γιατί, ὅπως θυμᾶσθε, προσεθέσαμε δύο μηδενικὰ στὸ τέλος τοῦ ἀκεραίου 19), κι' ἔχομε ἄθροισμα 140.

Ἀσκήσεις

1. Εὕρετε τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῶν ἀριθμῶν 625, 225, 14.400, 1890, 5640, 18, 39, 120, 3216, 23.104, 15, 10.



ΓΕΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
ΕΦ' ΟΛΗΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

1. Ἕνας ἔμπορος ἐπῆγε στὴν Πορταριὰ γιὰ τὴν ἀγορὰ μήλων. Εἶχε μαζί του 40.000 δρχ. Στὴν ἀρχὴ ἀγόρασε 1500 χλγρ. μῆλα πρὸς 3,85 δρχ. τὸ χλγρ. Ἀργότερα 2350 χλγρ. πρὸς 4,40 δρχ. τὸ χλγρ. καὶ ἀργότερα τρίτην παρτίδα 4180 χλγρ. πρὸς 4,80 δρχ. τὸ χλγρ. Γιὰ τὴν τοποθέτησιν τῶν μήλων στὰ κιβώτια ἐπλήρωσε 0,10 δρχ. τὸ χλγρ. Γιὰ ἀγώγια μέχρι τὰς Ἀθήνας ἐπλήρωσε 0,70 δρχ. τὸ χλγρ. Στὰς Ἀθήνας ἐκαθάρισε τὰ σάπια κι' εἶχε ζημία 5%.

Τὰ ὑπόλοιπα χρήματα, ἀπὸ τὶς 40.000 ποὺ εἶχε, τὰ ἐτόκισε πρὸς 12% γιὰ 6 μῆνες.

Νὰ κάμετε ὅλους τοὺς λογαριασμοὺς καὶ νὰ εὕρετε πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ χλγρ. γιὰ νὰ ἔχῃ κέρδος 0,50 δρχ. κατὰ χλγρ. Ἐπίσης νὰ εὕρετε πόσον τόκον θὰ πάρῃ ἀπὸ τὰ χρήματα ποὺ ἐτόκισε.

2. Στὴν συγκέντρωσιν σίτου τῆς Ἀγροτικῆς Τραπέζης ἕνας παραγωγὸς ἔστειλε 30.000 χλγρ. σιτάρι. Ἡ Τράπεζα θὰ τὸ πληρώσῃ πρὸς 3 δρχ. τὸ χλγρ. γιὰ τὴν ἐξόφλησιν τῶν χρεῶν, καὶ 2,30 δρχ. κατὰ χλγρ. θὰ πληρώσῃ τὸ ὑπόλοιπον. Ὁ παραγωγὸς αὐτὸς ὀφείλει στὴν Τράπεζαν 42.000 δρχ. Ἐπλήρωσε γιὰ μεταφορικὰ 0,10 δρχ. κατὰ χλγρ. Πόσα χρήματα θὰ πάρῃ στὰ χέρια του ὁ παραγωγός; Ἂν τὰ καταθέσῃ στὸ Ταχυδρ. Ταμιευτήριον πρὸς 8%, πόσον τόκον θὰ πάρῃ σὲ 8 μῆνες;

3. Ἕνας ὑπάλληλος μὲ βαθμὸν Εἰσηγητοῦ παίρνει μισθὸν 2100 δρχ.

τὸν μῆνα. Ἀπὸ τὸν μισθὸν κρατοῦν 3% γιὰ Μετοχικὸν Ταμεῖον, 2% γιὰ Ταμεῖον Προνοίας.

Ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα ἐξοδεύει 70% γιὰ διατροφήν, 8% γιὰ ὑπόδησιν καὶ 15% γιὰ ἔκτακτα ἔξοδα. Τὰ ὑπόλοιπα τὰ διαθέτει γιὰ νὰ ἐξοφλῇ ὅσα εἴδη ἔχει ἀγοράσει μὲ δόσεις. Πόσα τοῦ κρατοῦν γιὰ κάθε ταμεῖον, πόσα πληρώνει γιὰ διατροφήν, ὑπόδησιν, ἔκτακτα ἔξοδα καὶ πόσα διαθέτει στὴν πληρωμὴ τῶν δόσεων;

4. Ὁ προϋπολογισμὸς τοῦ Κράτους ἀνῆλθε πέρυσι σὲ 17.000.000.000. Ἀπ' αὐτά, γιὰ τὸν στρατὸ διατίθενται 30%, γιὰ τοὺς ὑπαλλήλους 25%, γιὰ τὴν Ἐκπαίδευσιν 7% καὶ τὰ ὑπόλοιπα γιὰ τὶς ἄλλες ἀνάγκες τοῦ Κράτους. Τί ποσὸν διετέθη γιὰ κάθε κατηγορία ἐξόδων;

5. Ἡ Σχολικὴ Ἐφορεία τοῦ σχολείου μας ἔκαμε τὸν προϋπολογισμό της. Τὰ ἔξοδα θὰ ἀνέλθουν σὲ 25.000 δρχ. Ἀπ' αὐτὰ θὰ διατεθοῦν: 25% γιὰ τὴν ἐπισκευὴν τοῦ διδακτηρίου, 4% γιὰ γραφικὴν ὕλην, 8% γιὰ καθαριότητα, 30% γιὰ τὴν βιβλιοθήκην, 10% γιὰ σχολικὸν κῆπον, 15% γιὰ προμήθεια διδακτικῶν ὀργάνων, 6% γιὰ ἀγορὰ ἐπίπλων καὶ 2% γιὰ τὴν μαθητικὴν πρόνοια. Τί ποσὸν θὰ διατεθῇ γιὰ κάθε ἄρθρον τοῦ προϋπολογισμοῦ;

6. Μία ἀντιπροσωπεία ραδιοφώνων διέθεσε αὐτὸν τὸ μῆνα 8 ραδιόφωνα κι' εἰσέπραξε 14.600 δρχ. Ὁ φόρος τοῦ κράτους στὰ ραδιόφωνα εἶναι 45%. Σὲ κάθε ραδιόφωνον ἡ ἀντιπροσωπεία ἐκέρδισε 300 δρχ. Πόσο ἐχρέωνε τὸ ἐργοστάσιο κάθε ραδιόφωνο;

7. Ἡ τιμὴ τοῦ δολλαρίου εἶναι 30 δρχ. Ἕνας φίλος μου ἀπὸ τὴν Ἀμερικὴ μοῦ ἔστειλε ἕνα στυλογράφον ἀξίας 12 δολλαρίων καὶ μοῦ ἔγραψε νὰ δώσω τὴν ἀξία τοῦ στυλογράφου σὲ δραχμὲς στὸν ἐδῶ ἀδελφό του. Πόσες δραχμὲς θὰ τοῦ δώσω;

8. Ἡ τιμὴ τῆς χρυσῆς λίρας Ἀγγλίας εἶναι 280 δρχ. Ἕνας ἔμπορος χρωστοῦσε σ' ἕνα χρηματιστηριακὸ γραφεῖο 4.760 δρχ. καὶ τὶς ἔδωσε σὲ χρυσὲς λίρες. Πόσες λίρες ἔδωσε;

9. Ἕνα ἐργοστάσιο ἀσφαλισμένον σὲ μίαν ἀσφαλιστικὴν ἑταιρείαν ἀντὶ 12.500 χρυσῶν λιρῶν, ἐκάηκε ἀπὸ πυρκαϊά. Ἡ Ἑταιρεία τοῦ ἔδωσε προκαταβολὴ 280.000 δρχ. Πόσες λίρες τοῦ χρωστάει ἀκόμη;

10. Τὸ Ὑπερωκεάνειον «Φρειδερίκη» ἔπλευσε τὸν τελευταῖο μῆνα 3150 ναυτικὰ μίλλια, ἐνῶ τὸ ὑπερωκεάνειον «Ὀλυμπία» ἔπλευσε τὸν ἴδιον καιρὸ 3240 ἀγγλικὰ μίλλια. Ποιό ἀπὸ τὰ δύο πλοῖα ἔπλευσε περισσοτέραν ἀπόστασιν;

(Ναυτικὸ μίλλιον = 1852 μ. Ἀγγλικὸν μίλλιον = 1608,64 μ.)

11. Ἡ βιβλιοθήκη τοῦ σχολείου μας ἔχει 160 βιβλία. Τὰ $\frac{5}{8}$ εἶναι παιδικὰ βιβλία. Πόσα εἶναι τὰ παιδικὰ βιβλία;

12. Λέγει ὁ Γιάννης στὸν Γιῶργο: εἶμαι 12 ἐτῶν. Ὁ Γιῶργος ἀπαντᾶ: ἐγὼ εἶμαι τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν χρόνων σου πιὸ μεγάλος ἀπὸ σένα. Πόσων χρόνων εἶναι ὁ Γιῶργος;

13. Ὁ Τάκης κατέθεσε στὸ Ταχυδρ. Ταμιευτήριον ἕνα ποσὸν γιὰ 6 μῆνες πρὸς 8 % κι' ἐπῆρε τόκον 240 δρχ. Ὁ Βασίλης κατέθεσε κι' αὐτὸς ἕνα ποσὸν γιὰ 8 μῆνες πρὸς 6 % κι' ἐπῆρε κι' ἐκεῖνος τόκον 240 δρχ. Ποιός ἀπὸ τοὺς δύο κατέθεσε μεγαλύτερο ποσόν;

14. Στὸν Κωστάκη ἔδωσε ἡ θεία του γιὰ καραμέλλες $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκαδράχμου, ἐνῶ στὴν Ἀφροδίτη ἔδωσε $\frac{4}{10}$ τοῦ εἰκοσαδράχμου. Ποιός ἐπῆρε περισσότερα;

15. Τὸ ὡρολόγι μου λέγει 11.45' ἐνῷ τὸ ὡρολόγι τοῦ σχολείου λέγει δώδεκα παρὰ τέταρτο. Ποιό ἀπὸ τὰ δύο ὡρολόγια πάει πίσω;

16. Μιὰν ἡμέρα περνοῦσε ἔξω ἀπὸ τὸ σχολεῖο ἕνας γέρος. Τὸν ἐρώτησα πόσων χρόνων εἶναι καὶ μοῦ ἀπήντησε: Ὁ παππούς μου ἐπολέμησε τὸν Δράμαλη στὰ Δερβενάκια μαζὶ μὲ τὸν Κολοκοτρώνη στὰ 1822. Ὁ πατέρας μου γεννήθηκε 20 χρόνια ἀργότερα. Σὲ ἡλικίαν 30 χρόνων παντρεύτηκε καὶ μετὰ 1 ἔτος ἐγεννήθηκε ἡ ἀφεντιά μου. Τώρα βρὲς ἐσὺ μόνος σου πόσων ἐτῶν εἶμαι σήμερα. Ἐσεῖς μπορεῖτε νὰ τὸ βρῆτε;

17. Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν ἔλεγχο τὸ βράδυ στὸ ταμεῖο τους κι' εὑρῆκαν ὅτι εἰσέπραξαν: ὁ πρῶτος 35 λίρες, ὁ δεύτερος 700 σελίνια κι' ὁ τρίτος 84000 πέννες. Ποιός ἀπὸ τοὺς τρεῖς εἶχε τὴν μεγαλυτέραν εἴσπραξιν;

18. Ἕνα φορτηγὸν αὐτοκίνητον μετέφερε 4 τόννους σταφύλια, ἐνῷ ἕνα ἄλλο φορτηγὸ μετέφερε 4.000 χλγρ. Ποιό ἀπὸ τὰ δύο αὐτοκίνητα μετέφερε περισσότερον βάρος;

19. Τέσσαρες φίλοι εὑρῆκαν ἕνα 500δραχμο καὶ τὸ ἐμοίρασαν ἀνάλογα μὲ τὴν ἡλικία τους. Ὁ πρῶτος ἦτο 35 ἐτῶν, ὁ δεύτερος 20, ὁ τρίτος 27 καὶ ὁ τέταρτος 18 ἐτῶν. Τί μέρος τοῦ 500δράχμου ἐπῆρε ὁ καθένας;

20. Στὸ πρῶτο ἑξάμηνο ἐπῆρες τοὺς βαθμούς σου: Ἀριθμητικὴν 10, Γεωμετρίαν 8, Ἑλληνικὰ 6, Ἱστορίαν 9, Θρησκευτικὰ 8, Φυσικὴ 6, Πειραματικὴν 7, Γεωγραφίαν 10, Ἰχνογραφίαν 6, Καλλιγραφίαν 8, Χειροτεχνίαν 9, Ὠδικὴν 8 καὶ Γυμναστικὴν 9. Ποιός εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῆς προόδου σου στὸ πρῶτον ἑξάμηνον;

21. Ἀπὸ 4 χλγρ. ἐλιὲς βγαίνει ἕνα χλγρ. λάδι. Ἕνα ἐλαιοτριβεῖον παρήγαγεν ἐφέτος 12.000 χλγρ. λάδι ἀπὸ ἐλιὲς ποὺ ἐπῆγαν οἱ παραγωγοί. Ἕνα ἄλλο ἐλαιοτριβεῖον ἄλεσε 60.000 χλγρ. ἐλιές. Πόσα χλγρ. ἐλιὲς ἄλεσε τὸ πρῶτο καὶ πόσα χλγρ. λάδι ἔβγαλε τὸ δεύτερο ;

22. Στὰ ἐλαιοτριβεῖα κρατοῦν γιὰ δικαιώματα 10% στὸ λάδι. Ἀπ' αὐτὸ 5% παίρνει τὸ ἐλαιοτριβεῖον, 1% ὁ ἰδιοκτήτης τοῦ ἀλόγου ποὺ γυρίζει τὴν πέτρα καὶ τὰ ὑπόλοιπα τὰ μοιράζονται οἱ ἐργάτες. Σ' ἕνα ἐλαιοτριβεῖον εἰργάσθησαν ἐφέτος 6 ἐργάτες καὶ παρήγαγαν 25.600 χλγρ. λάδι. Ἀπ' αὐτὰ ἐκράτησαν, ὅπως γράφομε, τὰ δικαιώματά των 10% καὶ τὰ ἐμοιράσθησαν. Νὰ εὕρετε πόσα χιλιόγραμμα λάδι θὰ πάρῃ τὸ ἐλαιοτριβεῖον, πόσα ὁ ἰδιοκτήτης τοῦ ἀλόγου καὶ πόσα κάθε ἐργάτης.

23. Ἕνας τύπος ἀλεύρου γίνεται μὲ τὰ παρακάτω μίγματα: 78% σιτάρι, 12% κριθάρι, 6% ἀραβόσιτον καὶ 4% σόγιαν. Πόσα χλγρ. ἀπὸ κάθε εἶδος χρειάζονται γιὰ νὰ ἑτοιμασθοῦν 40 σάκκοι τῶν 50 χιλιογράμμων ὁ καθένας ;

24. Γιὰ τὴν παρασκευὴν τῆς σοκολάτας χρησιμοποιοῦνται τὰ ἑξῆς εἴδη: 45% γάλα, 15% ζάχαρι καὶ 40% κακάο. Πόσα χιλιόγραμμα ἀπὸ κάθε εἶδος πρέπει ν' ἀναμίξουν στὸ ἐργοστάσιον γιὰ νὰ παραγάγουν 2500 τεμάχια τῶν 100 γραμμαρίων ;

25. Τὸ σπορέλαιον τιμᾶται 14 δρχ. τὸ χλγρ. Τὸ λάδι τιμᾶται 20 δρχ. τὸ χλγρ. Πόσα χλγρ. ἀπὸ κάθε εἶδος πρέπει ν' ἀναμίξῃ ὁ ἔμπορος γιὰ νὰ κάμῃ μῖγμα 100 ὀκάδων καὶ νὰ τὸ πωλῇ 18 δρχ. τὸ χλγρ. ;

26. Στὸ Ταχυδρομ. Ταμιευτήριον εἶχα καταθέσει, στὶς 10 Μαρτίου 1960 δρχ. 1000 πρὸς 8%. Στὶς 10 Ἰουνίου 1960 ἀπέσυρα 500 δρχ. Στὶς 10 Σεπτεμβρίου 1960 κατέθεσα ἄλλες 1500 δρχ. Πόσους τόκους θὰ πάρω στὶς 10 Μαρτίου 1961 γιὰ ὅλον τὸ ποσὸν ποὺ ἔχω καταθέσει ;

27. Μιὰ Ἀμερικανικὴ Ἑταιρεία ἀνέλαβε νὰ διορθώσῃ τοὺς δρόμους. Κατέθεσε κεφάλαια 5.916.300 δολλάρια. Ἀπὸ τὸ Κράτος μας ἐπῆρε ἀποζημίωσιν 2.250.000 χάρτινες λίρες Ἀγγλίας. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησιν αὐτὴ ἐκέρδισεν, ἢ ἐζημιώθηκε ἡ ἑταιρεία ; Καὶ πόσα ;

(Τιμὴ δολλαρίου = 30 δρχ. Τιμὴ χάρτινης λίρας = 80 δρχ.).

28. Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ $\frac{1}{4}$ τῆς περιουσίας τοῦ κ. Α. Ν. ἐπωλήθη ἀντὶ 2000 χαρτίνων λιρῶν Ἀγγλίας. Πόση εἶναι ἡ ἀξία τῆς ὅλης περιουσίας τοῦ κ. Α. Ν. σὲ δραχμές ;

29. Ὁ κ. Δ.Ε. ἐργάζεται μὲ ποσοστὰ στὰ καταστήματα τοῦ κ. Τ. Δικαιοῦται 25 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν εἰδῶν, ποὺ πωλεῖ. Ἐφέτος ἐπώλησε

εἴδη ἀξίας 10.000. Ἀπὸ τὰ ποσοστά του διέθεσε 50 % γιὰ διατροφήν, 20 % γιὰ ρουχισμὸν καὶ ὑπόδησιν καὶ τὰ ὑπόλοιπα τὰ διέθεσε γιὰ τὴν ἐξόφλησιν τοῦ χρέους του. Πόσα διέθεσε γιὰ κάθε κατηγορίαν ἐξόδων ;

30. Ἡ ἀγορὰ ἑνὸς ὑφάσματος γιὰ ἀνδρικὴν ἐνδυμασίαν ἐστοίχισε 12 χάρτινες λίρες 5 σελλίνια καὶ 6 πέννες καὶ τὰ ραπτικὰ ἐστοίχισαν 30 δολλάρια. Πόσες δραχμὲς ἐστοίχισε αὐτὴ ἡ ἐνδυμασία ;

31. Τρεῖς νέοι ἵδρυσαν μίαν Ἑταιρείαν. Ὁ πρῶτος κατέθεσε 12.000 δρχ. Ὁ δεύτερος 7.000 δρχ. καὶ ὁ τρίτος 5.000 δρχ. Μετὰ τρεῖς μῆνες ἔκαμαν ἰσολογισμὸ κι' εὑρῆκαν ὅτι εἶχαν κέρδος 25 % ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου. Τί κέρδος ἀναλογεῖ σὲ κάθε συνεταῖρον ;

32. Δύο ἄλλοι συνεταῖροι ποὺ ἵδρυσαν μίαν ἑταιρείαν μὲ κεφάλαια, ὁ πρῶτος 10.000 δρχ. καὶ ὁ δεύτερος μὲ κεφάλαια κατὰ $\frac{2}{5}$ λιγώτερα ἀπὸ τὸν πρῶτον, εἶχαν ζημία 15 % ἐπὶ τῶν κεφαλαίων. Τί ζημία ἀναλογεῖ σὲ κάθε συνεταῖρον ;

33. Ὁ παντοπώλης κ. Π. εἶχε αὐτὴν τὴν ἑβδομάδα τὶς παρακάτω εἰσπράξεις: Δευτέρα 410,25 δρχ. Τρίτη 286,10 δρχ. Τετάρτη 307,90 δρχ. Πέμπτη 106 δρχ. Παρασκευὴ 372,45 δρχ. καὶ Σάββατον 2.185,30 δρχ. Πόσες ἦσαν οἱ εἰσπράξεις κάθε ἡμέρας κατὰ μέσον ὅρον ;

34. Ὁ ὑποδηματοποιὸς κ. Ν., ἀπὸ ἕνα πετσὶ βάρους 12 χλγρ. καὶ 500 γραμμαρίων ἔβγαλε 36 ζεύγη σόλλες τῶν 200 γραμμαρίων κάθε ζεῦγος. Πόσα χλγρ. πετσὶ παραμένει ἄθικτον ;

35. Τὸ λεωφορεῖον Ἀθηνῶν—Κιάτου ἐξεκίνησε ἀπὸ τὰς Ἀθήνας στὶς 6.15' τὸ πρωΐ. Μέχρι τὰ Μέγαρα ἔκαμε 1 ὥρα 6' 30''. Ἀπὸ τὰ Μέγαρα ὡς τοὺς Ἁγίους Θεοδώρους ἔκαμε 29' 30''. Ἀπὸ τοὺς Ἁγίους Θεοδώρους ὡς τὴν Κόρινθο ἔκαμε 25'. Ἀπὸ τὴν Κόρινθον ὡς τὸ Κιᾶτον ἔκαμε 28'. Ποιά ὥρα ἔφθασε τὸ λεωφορεῖον στὸ Κιᾶτον ;

36. Δύο αὐτοκίνητα ἐξεκίνησαν μαζὶ ἀπὸ τὰς Ἀθήνας γιὰ τὴν Λάρισα στὶς 8 τὸ πρωΐ. Ἡ ἀπόστασις Ἀθηνῶν—Λαρίσης εἶναι 400 χλμ. Τὸ πρῶτο αὐτοκίνητο τρέχει μὲ 40 χλμ. τὴν ὥρα, ἀλλ' εἶχε τὶς ἑξῆς στάσεις: Στὴν Θήβα 30' γιὰ φαγητό. Στὸν Μπράλλο 1 ὥρα 50' γιὰ ἐπιδιόρθωσιν, στὰ Φάρσαλα 10'. Τὸ δεύτερον αὐτοκίνητον τρέχει μὲ 32 χιλιόμετρα τὴν ὥρα. Ποιό ἀπὸ τὰ δύο αὐτοκίνητα θὰ φθάσῃ πρῶτο στὴν Λάρισα καὶ σὲ πόσες ὧρες ;

37. Ἡ βιβλιοθήκη τοῦ σχολείου μας ἔχει 480 βιβλία. Ἀπ' αὐτὰ 25% εἶναι γιὰ τοὺς διδασκάλους, 40% γιὰ τοὺς μεγάλους μαθητὰς καὶ

τὰ ὑπόλοιπα γιὰ τοὺς μικροὺς μαθητάς. Πόσα βιβλία εἶναι γιὰ τοὺς διδασκάλους, πόσα γιὰ τοὺς μεγάλους μαθητὰς καὶ πόσα γιὰ τοὺς μικροὺς μαθητάς ;

38. Σ' ἕνα σχολεῖον φοιτοῦν 300 μαθηταί. Ὁ σχολίατρος ἐξήτασε τὰ παιδιὰ κι' εὗρῆκε : 150 μαθητὰς ὑγιεῖς, 25 ἀναιμικούς, 75 νὰ πάσχουν ἀπὸ τραχηλικοὺς ἀδένες, 10 τραχωματικοὺς καὶ 40 νὰ πάσχουν ἀπὸ διόγκωσιν σπλήνας. Τί ποσοστὸν ἀντιπροσωπεύει κάθε κατηγορία μαθητῶν ;

39. Τὸ σχολεῖον μας κατέθεσε στὸ Ταχ. Ταμιευτήριον 15.000 δρχ. πρὸς 8%. Ἔπειτα ἀπὸ ἕνα ὡρισμένον χρονικὸν διάστημα ὁ Ταμίας τῆς Σχολικῆς Ἐφορείας ἐπῆρε ὅλα τὰ χρήματα μαζὶ μὲ τοὺς τόκους κι' ἦσαν ὅλα—ὅλα 16.200 δρχ. Πόσον χρονικὸν διάστημα ἔμειναν τὰ χρήματα στὸ Ταχ. Ταμιευτήριον ;

40. 10 ἐργάτες ἐργάζονται 6 ἡμέρες καὶ σκάβουν 25 στρέμματα ἀμπέλι. Ἂν τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῶν τῶν ἐργατῶν ἐργασθοῦν τριπλάσιες ἡμέρες, πόσα στρέμματα θὰ σκάψουν ;

41. Τρεῖς ἀγορασταὶ ἐμπῆκαν σ' ἕνα ἐμπορικὸν κατάστημα κι' ἀγόρασαν : ὁ πρῶτος $4\frac{2}{8}$ μέτρα ὕφασμα, ὁ δεύτερος 4,25 μέτρα ὕφασμα καὶ ὁ τρίτος 4 μέτρα καὶ 25 πόντους ὕφασμα. Ποιός ἀπὸ τοὺς τρεῖς ἀγόρασε περισσότερο ὕφασμα ;

42. Τέσσερα παιδιὰ ἐκληρονόμησαν ἀπὸ τὸν πατέρα τους περιουσίαν 300.000 δρχ. Ἡ διαθήκη τοῦ πατέρα ἔγραφε νὰ πάρουν : ὁ πρῶτος τὰ $\frac{3}{15}$. Ὁ δεύτερος τὰ $\frac{3}{4}$ ἀπ' ὅσα θὰ πάρῃ ὁ πρῶτος. Ὁ τρίτος τὰ $\frac{12}{14}$ ἀπ' ὅσα θὰ πάρουν οἱ δύο πρῶτοι μαζί. Καὶ ὁ τέταρτος νὰ πάρῃ τὰ ὑπόλοιπα. Τί μερίδιον ἐπῆρε ὁ καθένας ;

43. Ποιός ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 25 μᾶς δίνει γινόμενον 625 ;

44. Ποιός ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 8 καὶ πάλιν ἐπὶ 8 μᾶς δίνει γινόμενον 512 ;

45. Μὲ ποιούς ἀριθμοὺς διαιρεῖται ἀκριβῶς ὁ ἀριθμὸς 1000 ;

46. Μὲ ποιούς ἀριθμοὺς διαιρεῖται ἀκριβῶς ὁ ἀριθμὸς 600 ;

47. Μὲ ποιούς ἀριθμοὺς διαιρεῖται ἀκριβῶς ὁ ἀριθμὸς 490 ;

48. Γραμμάτιον προεξοφληθὲν πρὸς 15% 3 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του ἔδωσε ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 112,50 δρχ. Πόση ἦταν ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου;

49. Ἂν ἀναμίξω καφφὲ καὶ ρεβίθι, ποὺ κοστίζουν, ὁ πρῶτος 70 δρχ. καὶ τὸ δεύτερον 20 δρχ, πόσα χιλιόγραμμα πρέπει νὰ πάρω ἀπὸ κάθε εἶδος γιὰ νὰ κάμω μῖγμα 50 χιλιογράμμων καὶ νὰ πωλῆται τὸ μῖγμα 60 δρχ. τὸ χιλιόγραμμον;

50. Εὕρετε ἂν ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 47.056 εἶναι τὸ 74, ἢ ὄχι.

ΤΕΛΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

71

ΑΤΛΑΝΤΙΣ

ΒΟΗΘΗΤΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ
ΝΕΑ ΣΕΙΡΑ

ΤΑΞΙΣ Α΄

10 ΜΑΘΑΙΝΩ ΑΠ' ΟΛΑ (Πατριδογνωσία)
11 Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΟΥ

ΤΑΞΙΣ Β΄

20 ΜΑΘΑΙΝΩ ΑΠ' ΟΛΑ (Πατριδογνωσία)
21 Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΟΥ

ΤΑΞΙΣ Γ΄

30 ΠΑΛΑΙΑ ΔΙΑΘΗΚΗ
31 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ
32 ΙΣΤΟΡΙΑ (Μυθικὰ Χρόνια)
33 ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗ
34 ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ
35α ΠΑΤΡΙΔΟΓΝΩΣΙΑ — ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ('Αθῆναι-Πειραιεὺς 'Αττικὴ—Στερεὰ 'Ελλὰς)
35β ΠΑΤΡΙΔΟΓΝΩΣΙΑ — ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ Θεσ/νίκη — Μακεδονία)

ΤΑΞΙΣ Δ΄

40 ΚΑΙΝΗ ΔΙΑΘΗΚΗ
41 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ
42 ΙΣΤΟΡΙΑ ΑΡΧ. ΕΛΛΑΔΟΣ
43 ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗ
44 ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ
45 ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ ΕΛΛΑΔΟΣ
46 ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΤΑ ΓΥΡΙΣΜΑΤΑ (Μικρὰ ἀναγνώσματα — 'Εκθέσεις)
47 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ
48 ΙΣΤΟΡΙΑ

ΤΑΞΕΙΣ Γ΄ — Δ΄
Συνδ/λία

42α ΙΣΤΟΡΙΑ (Α΄ἔτος συνδ/λίας)
42β ΙΣΤΟΡΙΑ (Β΄ἔτος συνδ/λίας)
45 ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ ΕΛΛΑΔΟΣ (Α΄ καὶ Β΄ ἔτος συνδ/λίας)

ΤΑΞΙΣ Ε΄

50 ΕΚΚΛΗΣ. ΙΣΤΟΡΙΑ ('Εγκ.)
52 ΒΥΖΑΝΤΙΝΗ ΙΣΤΟΡΙΑ »
54 ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ
55 ΓΕΩΓΡ. ΗΠΕΙΡΩΝ ('Εγκ.) (Παπασπύρου)
55α ΓΕΩΓΡ. ΗΠΕΙΡΩΝ » (Οἰκονομίδη)
57 ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΧΗΜΕΙΑ »
70 ΕΥΑΓ. ΠΕΡΙΚΟΠΑΙ »
71 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ »
73 ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗ »
78 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ »
59 ΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΟΥ

ΤΑΞΙΣ ΣΤ΄

60 ΚΑΤΗΧ. ΛΕΙΤΟΥΡ. ('Εγκ.)
62 ΙΣΤ. ΝΕΩΤ. ΕΛΛΑΔΟΣ »
64 ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ
65 ΓΕΩΓΡ. ΕΥΡΩΠΗΣ ('Εγκ.)
67 ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΧΗΜΕΙΑ »
70 ΕΥΑΓ. ΠΕΡΙΚΟΠΑΙ »
71 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ »
73 ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗ »
78 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ »

ΤΑΞΕΙΣ Ε΄ — ΣΤ΄
Συνδ/λία

70 ΕΥΑΓ.ΠΕΡΙΚΟΠΑΙ ('Εγκ.)
71 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ »
73 ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗ » (Α΄ καὶ Β΄ ἔτος συνδ/λίας)
74α ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ (Α΄ ἔτος συνδιδασκαλίας)
74β ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ (Β΄ ἔτος συνδιδασκαλίας)
77α ΦΥΣΙΚΗ & ΧΗΜΕΙΑ ('Εγκ.) (Α΄ ἔτος συνδιδασκαλίας)
77β ΦΥΣΙΚΗ & ΧΗΜΕΙΑ ('Εγκ.) (Β΄ ἔτος συνδιδασκαλίας)
78 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ('Εγκεκριμ.)
59 ΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΟΥ (Α΄ ἔτος συνδιδασκαλί ς) .

ΕΚΔΟΣΕΙΣ «ΑΤΛΑΝΤΙΔΟΣ» ΑΘΗΝΑΙ