ΙΩ. Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ
ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ

ΧΡ. Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛ. ΠΑΝΕΠ. ΑΘΗΝΩΝ

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΚΛΑΣΣΙΚΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΔΙΑ ΤΗΝ ΠΕΝΤΑΕΤΙΑΝ 1932 - 1937

ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΒΔΟΜΗ

Τιμᾶται μετὰ τοῦ βιβλιοσήμου καὶ φόρου δρχ. 28,50
Βιβλιόσημον καὶ Φόρος Ἀναγκ. Δανείου Δρχ. 9.70
Ἀριθμὸς ἐγκριτικῆς ἀποφάσεως $\frac{44229/15206}{12 \text{ Αὐγούστου } 1932}$
Ἀριθμὸς ἀδείας κυκλοφορίας $\frac{29962}{14/7/39}$

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ ΚΑΙ Σ[ΙΑΣ] Α.Ε.
46 - ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ - 46
1939

ΙΩ. Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ
ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ

ΧΡ. Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛ. ΠΑΝΕΠ. ΑΘΗΝΩΝ

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΚΛΑΣΣΙΚΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΔΙΑ ΜΙΑΝ ΠΕΝΤΑΕΤΙΑΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΒΔΟΜ

Ἀριθ. ἐγκριτ. ἀποφ. 44229/15206—1

Ἀντίτυπα 1500

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ„
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ ΚΑΙ Σ[ΙΑΣ] Α.Ε.
46 - ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ - 46
1939

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ὑπογραφὴν τοῦ κ. Χρ. Μπαρμπαστάθη καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ Βιβλιοπωλείου τῆς «Ἑστίας» θεωρεῖται ἐκ τυποκλοπίας προερχόμενον.

ΤΥΠΟΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΕΚΔΟΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ Α. Ε.
ΑΘΗΝΑΙ ΠΑΠΑΔΙΑΜΑΝΤΟΠΟΥΛΟΥ 44

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τὸ τρίγωνον εἶναι τὸ ἁπλούστατον τῶν σχημάτων. Αἱ ἰδιότητες πάντων τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων ἀνάγονται εἰς ἰδιότητας τοῦ τριγώνου καὶ διὰ τῆς βοηθείας τοῦ τριγώνου ἀποδεικνύονται. Καὶ αὐτοῦ τοῦ κύκλου, καίπερ διαφορωτάτου κατὰ τὸ σχῆμα, αἱ ἰδιότητες διὰ τῶν τριγώνων ἀποδεικνύονται· ἀλλὰ καὶ ἡ μέτρησις πάντων τῶν σχημάτων ἀνάγεται εἰς τὴν μέτρησιν τριγώνων, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις τῆς Γεωμετρίας ἐμάθομεν· καὶ ἐν ἑνὶ λόγῳ τὸ τρίγωνον καὶ ἐν τῇ Θεωρητικῇ Γεωμετρίᾳ καὶ ἐν ταῖς ποικίλαις ἐφαρμογαῖς αὐτῆς (ὡς ἐν τῇ Γεωδαισίᾳ τῇ Ἀστρονομίᾳ, τῇ Ναυτικῇ κτλ.) ἔχει τὸ μέγιστον μέρος.

Αἱ πλεῖσται τῶν ἐφαρμογῶν τῆς Γεωμετρίας ἄγουσιν εἰς τὴν μέτρησιν ἑνὸς ἢ πολλῶν ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ τριγώνου (λέγω δὲ ***στοιχεῖα*** τοῦ τριγώνου τὰς γωνίας καὶ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ).

Ἀλλ᾽ ἐκ τῆς Γεωμετρίας εἶναι γνωστὸν ὅτι, ὅταν ἐκ τῶν ἓξ στοιχείων τοῦ τριγώνου δοθῶσιν

ἢ 1) ***μία πλευρὰ καὶ δύο γωνίαι***

ἢ 2) ***δύο πλευραὶ καὶ ἡ ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένη γωνία***

ἢ 3) ***δύο πλευραὶ καὶ ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνία***

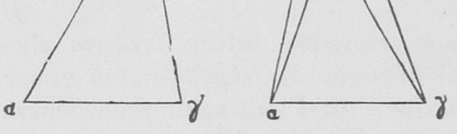
ἢ 4) ***αἱ τρεῖς πλευραί,***

καὶ τὰ λοιπὰ τοῦ τριγώνου στοιχεῖα, καίτοι ἄγνωστα εἶναι ὅμως ἐντελῶς ὡρισμένα καὶ δύνανται νὰ εὑρεθῶσι διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς. Ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ τῆς Γεωμετρίας χορηγούμεναι κατασκευαί, ἂν καὶ θεωρητικῶς εἶναι ἀκριβεῖς, ἐν τῇ ἐφαρμογῇ ὅμως οὐ μόνον ὑπόκεινται εἰς λάθη ἕνεκα τῆς ἀτελείας τῶν ὀργάνων ἡμῶν, ἀλλὰ καὶ ἀκατόρθωτοι εἶναι ὅταν, αἱ δεδομέναι γραμμαί, ὡς συμβαίνει συνήθως, ἕνεκα τοῦ μεγέθους αὐτῶν δὲν δύνανται νὰ περιληφθῶσιν ἐντὸς τοῦ σχεδίου, ἐφ᾽ οὗ ἐργαζόμεθα. Καὶ δυνατὸν μὲν εἶναι τότε νὰ σμικρύνωμεν πάσας τὰς δεδομένας γραμμὰς κατά τινα ἀναλογίαν (π. χ. ἀντὶ 10000 μέτρων νὰ λάβωμεν 1), ὥστε νὰ δύναται ἡ κατασκευὴ νὰ συμπεριληφθῇ ἐντὸς τοῦ σχεδίου, διότι τότε τὸ ἐν τῷ σχεδίῳ κατασκευασθὲν τρίγωνον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ζητούμενον καὶ ἐκ τῶν γραμμῶν αὐτοῦ, ἐὰν μεγεθυνθῶσι κατὰ τὴν τεθεῖσαν ἀναλογίαν, εὑρίσκονται αἱ γραμμαὶ τοῦ ζητουμένου˙ ἀλλὰ τότε τὰ λάθη ἀποβαίνουσι μεγάλα, διότι, ἂν εἴς τινα γραμμὴν τοῦ σχεδίου συμβῇ λάθος $\frac{1}{1000}$ τοῦ μέτρου, ἐπειδὴ θὰ πολλαπλασιασθῇ αὕτη ἐπὶ τὸν 10000, ἵνα δώσῃ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν γραμμὴν τοῦ ζητουμένου τριγώνου, θὰ συμβῇ ἐπὶ τῆς ἀληθοῦς γραμμῆς λάθος 10 μέτρων. Ἀλλ' ἔτι περισσότερον βλάπτουσι τὰ ἐπὶ τῶν γωνιῶν συμβαίνοντα λάθη, ὡς γίνεται δῆλον, ἐκ τοῦ ἑπομένου παραδείγματος.

Ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις δύο σημείων Α καὶ Β. Ἐὰν ἐμπόδιόν τι ἐμποδίζῃ τὴν ἄμεσον μέτρησιν, θὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις διὰ τριγώνου· πρὸς τοῦτο μετρεῖται ἐκ τοῦ σημείου Α μετὰ πάσης δυνατῆς ἀκριβείας γραμμή τις εὐθεῖα ἡ ΑΓ, ἥτις λέγεται βάσις. Ὡσαύτως μετροῦνται ὅσον τὸ δυνατὸν ἀκριβῶς αἱ γωνίαι ΓΑΒ καὶ ΑΓΒ·

ἔστω π. χ. ΑΓ=2000 μέτρα, $Α=79^0\ 18'$, $Γ=82^0\ 25'$.

Ἔπειτα ὁρίζεται ἡ σμίκρυνσις, ἔστω $\frac{1}{10000}$ καὶ κατασκευάζονται ἐπὶ τοῦ σχεδίου ἡ εὐθεῖα αγ ἴση πρὸς τὰ $\frac{2}{10}$ τοῦ μέτρου καὶ αἱ γωνίαι α καὶ γ ἴσαι πρὸς τὰς μετρηθείσας Α καὶ Γ καὶ γίνεται οὕτω τὸ τρίγωνον αβγ ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ· τέλος μετρεῖται ἡ αβ καὶ ἐξ αὐτῆς πολλαπλασιαζομένης ἐπὶ 10000 εὑρίσκεται ἡ ζητουμένη ἀπόστασις ΑΒ.



Σχ. 1

Ἀλλ' ἐκ τοῦ τρόπου τούτου βλέπει τις ἀμέσως, ὅτι λάθος (ἔστω καὶ ὀλίγων λεπτῶν), συμβὰν περὶ τὴν χάραξιν τῶν γωνιῶν α καὶ γ ἢ περὶ τὴν μέτρησιν τῶν Α καὶ Γ, προξενεῖ λάθος ἐπὶ τῆς αβ, τὸ ὁποῖον, ὅταν ἡ γωνία β εἶναι ἱκανῶς μικρὰ (ἤτοι τὸ ἄθροισμα α+γ πλησιάζῃ πρὸς τὰς δύο ὀρθάς), δύναται νὰ ὑπερβῇ καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς, δυνατὸν μάλιστα μηδὲ ὅλως νὰ τέμνωνται ἐντὸς τοῦ σχεδίου αἱ εὐθεῖαι αβ καὶ γβ, ὅταν ἡ γωνία β εἶναι λίαν μικρά.

Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν, ὅτι ἡ διὰ γεωμετρικῶν κατασκευῶν εὕρεσις τριγώνου, οὗτινος ἐδόθησαν τὰ εἰρημένα τρία στοιχεῖα, εἶναι ἀνεπαρκὴς ἐν τῇ πράξει καὶ ἑπομένως εἶναι ἀνάγκη νὰ ζητήσωμεν ἄλλον τρόπον διὰ τοῦ ὁποίου νὰ λύηται τὸ ῥηθὲν πρόβλημα μετὰ τῆς ἀπαιτουμένης ἀκριβείας. Ἐὰν νοήσωμεν πάντα τὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου μεμετρημένα καὶ ἐκπεφρασμένα δι᾿ ἀριθμῶν, γίνεται φανερόν, ὅτι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες μετροῦσι τὰ δεδομένα στοιχεῖα, καὶ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες μετροῦσι τὰ ζητούμενα, ἐξ ἀνάγκης ὑπάρχουσι σχέσεις τινὲς ἀριθμητικαί, διότι οἱ δεύτεροι οὗτοι ἀριθμοὶ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένοι, ὅταν δοθῶσιν οἱ πρῶτοι. Ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν τούτων σχέσεων, ὅταν εὑρεθῶσι, θὰ καταστῇ δυνατὸν νὰ εὑρίσκωμεν τὰ ζητούμενα τοῦ τριγώνου στοιχεῖα διὰ τῶν ἀριθμητικῶν μεθόδων, αἵτινες ὑπερέχουσι τῶν γεωμετρικῶν κατὰ τοῦτο, ὅτι οὖσαι αὐτοτελῆ τῆς διανοίας ἔργα, οὐδόλως παραβλάπτονται ἐκ τῆς ἀτελείας τῶν ὀργάνων ἡμῶν, ὥστε, ὅταν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι ἀκριβεῖς, δύνανται οἱ ἐξ αὐτῶν εὑρισκόμενοι διὰ τῶν ἀριθμητικῶν μεθόδων νὰ προσδιορισθῶσι μεθ᾿ ὅσης θέλομεν προσεγγίσεως.

Ἡ ἔρευνα τῶν ἀριθμητικῶν σχέσεων, αἵτινες ὑπάρχουσι μεταξὺ τῶν στοιχείων παντὸς τριγώνου, εἶναι ἔργον τῆς τριγωνομετρίας, σκοπὸς δὲ αὐτῆς εἶναι, ὅταν δοθῶσι τρία ἐκ τῶν στοιχείων τούτων (οὐχὶ αἱ τρεῖς γωνίαι), ***ἡ διὰ τῶν ἀριθμῶν εὕρεσις τῶν λοιπῶν.***

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

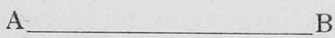
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι΄.

ΠΕΡΙ ΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

1. **Ὁρισμοί.** Τμῆμα εὐθείας, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται γραφὲν ὑπὸ σημείου κινηθέντος ἐπ᾽ αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τοῦ τμήματος πρὸς τὸ ἄλλο, λέγεται ***ἄνυσμα.***

Ἐπὶ παντὸς ἀνύσματος, διακρίνομεν τὴν ἀρχὴν (τὸ σημεῖον ἀφ᾽ οὗ ἐξεκίνησε τὸ κινητόν), τὸ τέλος (τὸ σημεῖον εἰς ὃ κατέληξε τὸ κινητὸν) καὶ τὴν φοράν, ἥτις εἶναι ἡ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς πρὸς τὸ τέλος. Ἀπαγγέλλεται δὲ πρῶτον τὸ γράμμα τῆς ἀρχῆς.

Κατὰ ταῦτα τὸ ἄνυσμα ΑΒ ἔχει ἀρχὴν τὸ Α, τέλος τὸ Β καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, τὸ δὲ ἄνυσμα ΒΑ ἔχει ἀρχὴν τὸ Β, τέλος τὸ Α καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α.

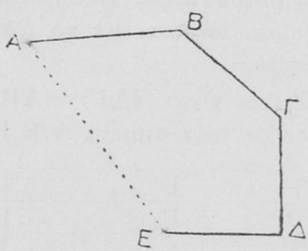


Σχ. 2

2. Δύο ἀνύσματα, ὧν ἡ ἀρχὴ τοῦ ἑνὸς εἶναι πέρας τοῦ ἄλλου, λέγονται ***ἀντίθετα·*** τοιαῦτα εἶναι τὰ ΑΒ καὶ ΒΑ.

3. Δύο ἀνύσματα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἢ ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν κείμενα, ἂν μὲν ἔχωσι τὴν αὐτὴν φορὰν λέγονται ***ὁμόρροπα,*** ἂν δὲ ἀντίθετον λέγονται ***ἀντίρροπα.***

4. Δύο ἀνύσματα παράλληλα (δηλ. κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἢ ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν), τὰ ὁποῖα ἐφαρμόζουσι, λέγονται ὁμορρόπως ἴσα, ἂν εἶναι ὁμόρροπα, ἂν ὅμως εἶναι ἀντίρροπα, λέγονται ἀντιρρόπως ἴσα.



Σχ. 3

5. Δύο ἢ περισσότερα ἀνύσματα λέγονται ***διαδοχικά,*** ὅταν τὸ τέλος τοῦ πρώτου εἶναι ἀρχὴ τοῦ δευτέρου, τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἀρχὴ τοῦ τρίτου κ. ο. κ.

Τοιαῦτα εἶναι τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ.

6. ***Γεωμετρικὸν ἄθροισμα*** δοθέντων διαδοχικῶν ἀνυσμάτων λέγεται τὸ ἄνυσμα, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου καὶ τέλος τὸ τέλος τοῦ τελευταίου ἀνύσματος. Οὕτω τὸ ΑΕ εἶναι τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀνυσμάτων, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ (σχ. 3).

7. **Μῆκος ἀνύσματος.** Ἔστω ἄνυσμα ΑΒ κείμενον ἐπὶ εὐθείας χ′χ· ἐὰν ἐπὶ ταύτης (ἢ ἐπὶ ἄλλης εὐθείας παραλλήλου τῇ χ′χ) λάβωμεν αὐθαιρέτως ἄνυσμά τι ΟΜ καὶ θεωρήσωμεν τοῦτο ὡς μονάδα, ὁ λόγος $\frac{AB}{OM}$

Σχ. 4

λέγεται μῆκος τοῦ ἀνύσματος ΑΒ καὶ παρίσταται συμβολικῶς οὕτω (ΑΒ)· εἶναι δηλαδὴ $\frac{AB}{OM} = (AB)$.

Ἂν τὸ ἄνυσμα ΑΒ εἶναι ὁμόρροπον τῷ ΟΜ, τὸ μῆκος (ΑΒ) εἶναι ἀριθμὸς θετικός· εἶναι δὲ ἀρνητικός, ἂν εἶναι ἀντίρροπον.

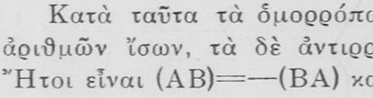
Κατὰ ταῦτα τὰ ὁμορρόπως ἴσα ἀνύσματα παρίστανται ὑπὸ ἀριθμῶν ἴσων, τὰ δὲ ἀντιρρόπως ἴσα ὑπὸ ἀριθμῶν ἀντιθέτων. Ἤτοι εἶναι $(AB) = -(BA)$ καὶ $(AB) + (BA) = 0$.

Ἐπίσης ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι πᾶν ἄνυσμα τῆς εὐθείας χ′χ (ἢ παραλλήλου πρὸς αὐτὴν) παρίσταται δι᾿ ἀριθμοῦ ἐντελῶς ὡρισμένου καὶ ἀντιστρόφως πᾶς πραγματικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ παριστᾷ ἄνυσμα ὡρισμένον κατὰ μέγεθος καὶ φοράν.

1

8. Θεώρημα. ***Τὸ μῆκος τοῦ γεωμετρικοῦ ἀθροίσματος δύο διαδοχικῶν ἀνυσμάτων ΑΒ καὶ ΒΓ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν δύο ἀνυσμάτων.***

Ἤτοι εἶναι $(A\Gamma) = (AB) + (B\Gamma)$, οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχωσι τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ ἐπὶ τῆς εὐθείας.



Σχ. 5

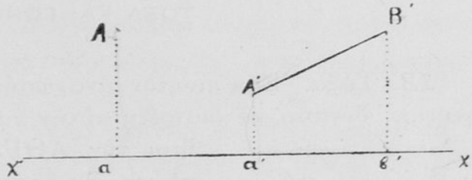
Διότι ἐκ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ, ἓν πάντως εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων· καὶ ἂν μὲν τὸ Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ, τὰ ἀνύσματα ΑΒ, ΒΓ εἶναι ὁμόρροπα καὶ ἡ ἰσότης $(AB) + (B\Gamma) = (A\Gamma)$ εἶναι προφανής· ἂν δὲ τὸ σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ Α καὶ Β, θὰ εἶναι πάλιν (ΑΓ)+(ΓΒ)=(ΑΒ) ἢ (ΑΓ)+(ΓΒ)+(ΒΓ)=(ΑΒ)+(ΒΓ)· ἤτοι (ΑΓ)=(ΑΒ)+(ΒΓ)· ἂν δὲ τέλος τὸ Α κεῖται μεταξὺ Β καὶ Γ, θὰ εἶναι (ΒΑ)+(ΑΓ)=(ΒΓ) ἢ (ΑΒ)+(ΒΑ)+(ΑΓ)=(ΑΒ)+(ΒΓ)· ἤτοι (ΑΓ)=(ΑΒ)+(ΒΓ).

Ὥστε εἰς πᾶσαν περίπτωσιν εἶναι (ΑΓ)=(ΑΒ)+(ΒΓ).

9. **Ἄξων.** Πᾶσα εὐθεῖα, ἐφ' ἧς ἡ θετικὴ φορὰ εἶναι ὡρισμένη, λέγεται ***ἄξων.***

10. Ὀρθὴ προβολὴ σημείου καὶ ἀνύσματος ἐπὶ ἄξονα.

Ὀρθὴ προβολὴ σημείου ἐπὶ ἄξονα λέγεται ὁ ποὺς τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὸν ἄξονα. Οὕτω τοῦ σημείου Α ἡ ὀρθὴ προβολὴ ἐπὶ τὸν ἄξονα χ'χ λέγεται ὁ ποὺς α τῆς καθέτου Αα ἐπὶ τὸν δοθέντα ἄξονα.



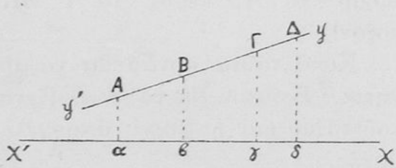
Σχ. 6

Ὀρθὴ προβολὴ ἀνύσματος ἐπὶ ἄξονα λέγεται τὸ ἄνυσμα τοῦ ἄξονος τούτου, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν καὶ πέρας τὰς προβολὰς τῆς ἀρχῆς καὶ τοῦ πέρατος τοῦ ἀνύσματος.

Οὕτως ὀρθὴ προβολὴ τοῦ ἀνύσματος Α'Β' ἐπὶ τὸν ἄξονα χ'χ εἶναι τὸ ἄνυσμα α'β'.

2 *11.* **Θεώρημα.** ***Ὁ λόγος δύο παραλλήλων ἀνυσμάτων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα.***

Ἔστωσαν αβ καὶ γδ αἱ προβολαὶ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα χ'χ τῶν ἀνυσμάτων ΑΒ καὶ ΓΔ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ψ'ψ. Αἱ εὐθεῖαι ψ'ψ καὶ χ'χ τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν Αα, Ββ, Γγ, Δδ κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῆς Γεωμετρίας· ὥστε ἔχομεν $\frac{ΑΒ}{ΓΔ}=\frac{αβ}{γδ}$ τῶν τμημάτων ΑΒ, ΓΔ, αβ, γδ ἀπολύτως θεωρουμένων. Ἐπειδὴ ὅμως, ἂν τὰ ἀνύσματα ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι τῆς αὐτῆς ἢ ἀντιθέτου φορᾶς, θὰ εἶναι καὶ αἱ



Σχ. 7

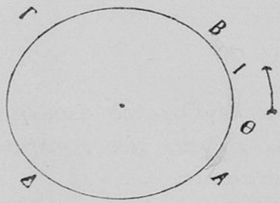
προβολαὶ αὐτῶν ἀνύσματα τῆς αὐτῆς ἢ ἀντιθέτου φορᾶς, ἕπεται ὅτι εἶναι $\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$ καὶ ὅταν τὰ ΑΒ, ΓΔ, αβ, γδ εἶναι ἀνύσματα.

Σημ. Ἐὰν τὰ ἀνύσματα ΑΒ καὶ ΓΔ κεῖνται ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν, αἱ παράλληλοι Γγ, Δδ, προσεκβαλλόμεναι, ὁρίζουσιν ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐφ᾽ ἧς κεῖται τὸ ἄνυσμα ΑΒ, ἕτερον ἄνυσμα Γ′Δ′, οὗ προβολὴ εἶναι ἡ γδ.

Πόρισμα. ***Αἱ προβολαὶ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα δύο ἀνυσμάτων ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσων εἶναι ἀνύσματα ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσα.***

ΤΟΞΑ ΚΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

12. **Τόξα.** Ἐὰν κινητὸν ἀναχωρήσῃ ἔκ τινος σημείου περιφερείας, δύναται νὰ διατρέξῃ αὐτὴν κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς, ἤτοι τὴν ΑΘΓΔΑ καὶ τὴν ΑΔΓΘΑ· ἡ πρώτη, ἣν δεικνύει τὸ παρακείμενον βέλος καὶ ἥτις εἶναι ἡ ἀντίθετος πρὸς τὴν κίνησιν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, ἂς λέγεται θετικὴ φορά, ἡ δὲ δευτέρα ἀρνητική.



Σχ. 8

13. Ἐὰν κινητὸν ἀναχωρήσῃ ἔκ τινος σημείου Α περιφερείας καὶ κινούμενον ἐπ᾽ αὐτῆς κατά τινα φοράν, ἔστω τὴν θετικήν, σταματήσῃ εἰς τὸ Ι, λέγομεν, ὅτι ἔγραψε τὸ τόξον ΑΙ, ἔχον ἀρχὴν τὸ Α, πέρας τὸ Ι καὶ φορὰν θετικὴν (θετικὸν τόξον)· ἐνῷ ἂν ἐκινήθη κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν, λέγομεν, ὅτι ἔγραψε τὸ τόξον ΑΙ ἔχον ἀρχὴν τὸ Α, πέρας τὸ Ι καὶ φορὰν ἀρνητικὴν (ἀρνητικὸν τόξον).

Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τόξα θετικὰ καὶ ἀρνητικά· ἕκαστον δὲ τόξον ὁρίζεται, ὅταν δοθῇ ἡ ἀρχή, τὸ πέρας τοῦ τόξου καὶ ἡ φορά· ἀπαγγέλλεται δὲ πρῶτον τὸ γράμμα τῆς ἀρχῆς.

14. **Μέτρησις τόξου.** Προκειμένου νὰ μετρήσωμεν τὸ τόξον ΑΙ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας (ἢ ἄλλης ἴσης) αὐθαιρέτως τόξον τι ΑΘ, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως καὶ συγκρίνομεν πρὸς αὐτό, τὸ ΑΙ. Ὁ λόγος $\frac{\text{τοξ. ΑΙ}}{\text{τοξ. ΑΘ}}$, ὅστις παρίσταται συμβολικῶς διὰ τοῦ (ΑΙ), λέγεται ***μέτρον*** τοῦ τόξου ΑΙ. Εἶναι δὲ ἀριθμὸς θετικὸς μέν, ἂν τὰ τόξα ΑΙ καὶ ΑΘ ἔχωσι τὴν αὐτὴν φορὰν (ὁμόρροπα τόξα), [ἀρνητικὸς δέ, ἂν ἔχωσιν ἀντιθέτους φορὰς (ἀντίρροπα τόξα).]

Ὡς μονάδας τόξου λαμβάνομεν συνήθως α) τὴν ***μοῖραν***, ἤτοι τὸ 1/360 τῆς περιφερείας καὶ ἥτις, ὡς γνωρίζομεν, διαιρεῖται εἰς 60 πρῶτα λεπτά, ἐνῷ ἓν πρῶτον λεπτὸν διαιρεῖται εἰς 60 δεύτερα· β) τὸ ***ἀκτίνιον***, ἤτοι τὸ τόξον, οὗ τὸ μῆκος ἰσοῦται πρὸς τὸ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ, ὁπότε τὸ μὲν μέτρον τῆς περιφερείας εἶναι 2π, τῆς ἡμιπεριφερείας π καὶ τοῦ τεταρτημορίου αὐτῆς $\frac{\pi}{2}$ καὶ γ) τὸν ***βαθμόν***, ἤτοι τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς περιφερείας. Ὁ βαθμὸς διαιρεῖται εἰς 100 πρῶτα λεπτά, τὸ δὲ πρῶτον λεπτὸν εἰς 100 δεύτερα λεπτά.

Σημείωσις. Πολλάκις εἶναι ἀνάγκη ἐκ τοῦ μέτρου τόξου τινός, εἰς σύστημά τι μονάδων, νὰ εὕρωμεν τὸ μέτρον τοῦ αὐτοῦ τόξου εἰς ἄλλο σύστημα μονάδων. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἔστω τὸ μέτρον τόξου τινὸς ΑΒ εἰς μοίρας μ, εἰς ἀκτίνια α καὶ εἰς βαθμοὺς β· ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν ἰσοῦται, ὡς γνωστόν, μὲ τὸν λόγον τῶν παριστώντων αὐτὰ ἀριθμῶν, ὅταν μετρηθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος, ἕπεται, ὅτι ὁ λόγος τοῦ τόξου ΑΒ πρὸς τὴν περιφέρειαν εἶναι εἰς μοίρας $\frac{\mu}{360}$, εἰς ἀκτίνια $\frac{\alpha}{2\pi}$ καὶ εἰς βαθμοὺς $\frac{\beta}{400}$.

εἶναι ἄρα $\frac{\mu}{360}=\frac{\alpha}{2\pi}=\frac{\beta}{400}$ ἢ ἁπλούστερον

$$\frac{\mu}{180}=\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{200}.$$

Ἐὰν ἑπομένως δίδεται τὸ μέτρον α τοῦ τόξου ΑΒ, εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ ἄλλα μέτρα αὐτοῦ εἶναι $\mu=\frac{180\alpha}{\pi}$ καὶ $\beta=\frac{200\alpha}{\pi}$.

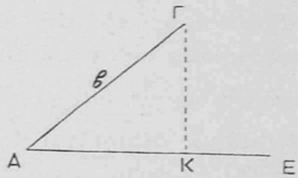
15. Δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας λέγονται ***ἴσα*** μέν, ὅταν ἔχωσι τὸ αὐτὸ μέτρον, ἀντίθετα δέ, ἂν τὰ μέτρα αὐτῶν εἶναι ἀντίθετα· (ἐννοεῖται ὅτι, ὅταν μετρῶνται διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος).

16. ***Διαδοχικὰ*** λέγονται δύο ἢ περισσότερα τόξα, ὅταν τὸ πέρας τοῦ πρώτου εἶναι ἀρχὴ τοῦ δευτέρου, τὸ πέρας τοῦ δευτέρου εἶναι ἀρχὴ τοῦ τρίτου κ. ο. κ.

Ἄθροισμα διαδοχικῶν τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας λέγεται τὸ τόξον, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ τελευταίου τόξου.

Οὕτως εἶναι $(AB)+(BA)=0$, $(AB)+(B\Gamma)=(A\Gamma)$.

***17.* Γωνίαι.** Ἔστω ἡ γωνία ΕΑΓ, τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν γραφεῖσαν ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΕ, περιστραφείσης, περὶ τὴν κορυφὴν Α, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς γωνίας, μέχρις οὗ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΓ, κατὰ φορὰν ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν ὡρολογίου. Τὴν οὕτω γραφομένην γωνίαν καλοῦμεν θετικήν· ἀρνητικὴν δὲ καλοῦμεν αὐτήν, ἐὰν ἡ ΑΕ περιστραφῇ κατὰ φορὰν ἀντίθετον τῆς προηγουμένης. Ἑπομένως γωνία τις ὁρίζεται ἐντελῶς, ὅταν δοθῇ ἡ ἀρχικὴ θέσις τῆς περιστραφείσης πλευρᾶς, ἡ τελικὴ καὶ ἡ φορὰ καθ' ἣν περιεστράφη.



Σχ. 9

Ἐὰν γωνία τις καταστῇ ἐπίκεντρος, τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχόμενον τόξον εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, καθ' ὅσον ἡ γωνία αὕτη εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἀντιστρόφως δὲ γωνία τις ἐπίκεντρος εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, καθ' ὅσον τὸ εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦν τόξον εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν· ὥστε ἂν ὡς μονάδα τῶν γωνιῶν λάβωμεν τὴν γωνίαν, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ τόξον, ὅπερ λαμβάνομεν ὡς μονάδα τῶν τόξων τοῦ κύκλου, ἡ εἰς τυχὸν τόξον ΑΒ αὐτοῦ ἀντιστοιχοῦσα ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΒ, παρίσταται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ καὶ τὸ τόξον ἀριθμοῦ.

Ἀσκήσεις.

1) Πόσων ἀκτινίων καὶ πόσων βαθμῶν εἶναι τόξον 60°, 150°, 330°;

2) Πόσων ἀκτινίων εἶναι τόξον 20°, 30°, $138^\circ 45'$, $225^\circ 40'$;

3) Ὁμοίως πόσων ἀκτινίων εἶναι τόξον $37^\circ\, 32'\, 25''$, $175^\circ\, 35'\, 46''$;

4) Πόσων μοιρῶν εἶναι τόξον $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ ἀκτινίων;

5) Ὁμοίως πόσων μοιρῶν εἶναι τόξον $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{7}$ ἀκτινίων;

6) Πόσων βαθμῶν εἶναι τόξον $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{7\pi}{8}$ ἀκτινίων;

7) Τριγώνου τινὸς ἡ μία γωνία εἶναι $48^\circ\,37'$, ἡ δὲ ἄλλη $\frac{5\pi}{12}$ ἀκτινίων. Πόσων μοιρῶν ἢ πόσων ἀκτινίων εἶναι ἡ τρίτη γωνία;

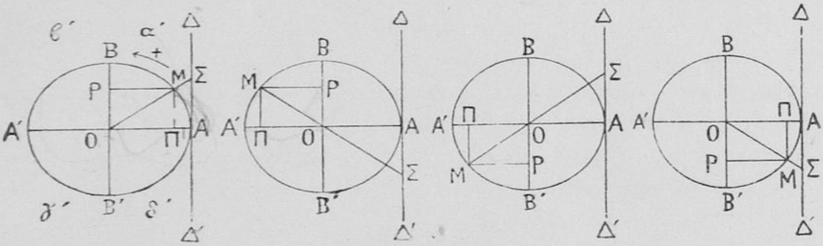
8) Πόσων μοιρῶν εἶναι τόξον κύκλου, οὗ τὸ μῆκος ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ'.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΞΟΥ Ἢ ΓΩΝΙΑΣ

18. **Τριγωνομετρικὸς κύκλος.** ***Τριγωνομετρικὸς κύκλος*** λέγεται πᾶς κύκλος, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ὁποίου ἡ θετικὴ φορὰ εἶναι ὡρισμένη καὶ οὗ ἡ ἀκτὶς λαμβάνεται ὡς μονὰς μήκους.

19. **Ἡμίτονον, συνημίτονον καὶ ἐφαπτομένη τόξου.** Ἔστω τριγωνομετρικὸς κύκλος Ο καὶ τόξον τι αὐτοῦ ΑΜ. Φέρομεν τὴν διάμετρον Α΄Α διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς Α τοῦ δοθέντος τόξου, ἐφ' ἧς ὁρίζομεν ὡς θετικὴν φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ Α. Τὴν διάμετρον ταύτην νοοῦμεν στρεφομένην



Σχ. 10

περὶ τὸ σημεῖον Ο, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου, κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, μέχρις ὅτου διαγράψῃ γωνίαν ὀρθήν, ὁπότε θὰ λάβῃ τὴν θέσιν Β΄Β· ἡ περιφέρεια τότε θὰ εὑρεθῇ διῃρημένη εἰς τέσσαρα τεταρτημόρια, τὰ ΑΒ, ΒΑ΄, Α΄Β΄ καὶ Β΄Α, (τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν ἀντιστοίχως α΄ (πρῶτον), β΄ (δεύτερον), γ΄ (τρίτον) καὶ δ΄ (τέταρτον)· τέλος φέρομεν τὴν Δ΄ΑΔ ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τόξου Α καὶ ἧς ὡς θετικὴν φορὰν ὁρίζομεν τὴν αὐτὴν μὲ τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ Β′ΟΒ, δηλ. τὴν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Δ. Κατόπιν τούτων φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΜ, τὴν διερχομένην διὰ τοῦ πέρατος τοῦ δοθέντος τόξου. Ταύτης ὀρθὴ προβολὴ ἐπὶ μὲν τῆς διαμέτρου Β′Β εἶναι ἡ ΟΡ, ἐπὶ δὲ τῆς διαμέτρου Α′Α εἶναι ἡ ΟΠ· ἐὰν δὲ ἡ ΟΜ προεκταθῇ, τέμνει τὴν ἐφαπτομένην Δ′ΑΔ εἰς τὸ Σ.

Ἤδη τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος ΟΡ μετρηθέντος διὰ τοῦ ΟΒ λέγεται ***ἡμίτονον*** τοῦ τόξου ΑΜ· τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος ΟΠ μετρηθέντος διὰ τοῦ ΟΑ λέγεται ***συνημίτονον*** αὐτοῦ, τὸ δὲ μῆκος τοῦ ἀνύσματος ΑΣ μετρηθέντος διὰ τοῦ ΟΒ λέγεται ***ἐφαπτομένη*** τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΜ.

Ἤτοι εἶναι $\eta\mu(\mathrm{AM})=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OB}}=(\mathrm{OP})$, $\sigma\upsilon\nu(\mathrm{AM})=\frac{\mathrm{O\Pi}}{\mathrm{OA}}=(\mathrm{O\Pi})$ καὶ $\varepsilon\varphi(\mathrm{AM})=\frac{\mathrm{A\Sigma}}{\mathrm{OB}}=(\mathrm{A\Sigma})$. Γενικῶς δέ.

α′) Ἡμίτονον τόξου κύκλου τινὸς λέγεται τὸ μῆκος τῆς ὀρθῆς προβολῆς τοῦ ἀνύσματος, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ τόξου, ἐπὶ τὴν διάμετρον τὴν εἰς τὸ πέρας τοῦ α′ τεταρτημορίου (ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ τόξου) μετρηθείσης διὰ τοῦ ἀνύσματος (ὡς μονάδος), ὅπερ ἔχει ἀρχὴν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ α′ τεταρτημορίου.

β′) Συνημίτονον τόξου κύκλου τινὸς λέγεται τὸ μῆκος τῆς ὀρθῆς προβολῆς τοῦ ἀνύσματος, τοῦ ἔχοντος ἀρχὴν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ τόξου, ἐπὶ τὴν διάμετρον τὴν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τόξου, μετρηθείσης διὰ τοῦ ἀνύσματος (ὡς μονάδος), ὅπερ ἔχει ἀρχὴν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ πέρας τὴν ἀρχὴν τοῦ τόξου.

γ′) Ἐφαπτομένη τόξου κύκλου τινὸς λέγεται τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος, ὅπερ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τόξου καὶ ὅπερ ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ τόξου καὶ πέρας τὸ σημεῖον, εἰς ὃ ἡ προέκτασις τῆς ἀκτῖνος, τῆς ἀγομένης εἰς τὸ πέρας τοῦ τόξου, τέμνει τὴν ἐφαπτομένην, μετρηθέντος διὰ τοῦ ἀνύσματος (ὡς μονάδος), ὅπερ ἔχει ἀρχὴν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ α′ τεταρτημορίου.

Τὸ ημ(ΑΜ), κατὰ τὰ ἐν τῷ ἐδ. 7 λεχθέντα, εἶναι θετικὸν μέν, ἂν τὸ τόξον ΑΜ περατοῦται εἰς τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον τεταρτημόριον καὶ ἀρνητικόν, ἂν περατοῦται εἰς τὸ τρίτον καὶ τέταρτον· ὡς πρὸς τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου ΑΜ παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι θετικὸν μέν, ἂν τὸ τόξον περατοῦται εἰς τὸ πρῶτον καὶ τέταρτον τεταρτημόριον, ἀρνητικὸν δέ, ἂν περατοῦται εἰς τὰ δύο ἄλλα, ἐνῷ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ΑΜ εἶναι θετική, ἂν περατοῦται τὸ ΑΜ εἰς τὸ πρῶτον καὶ τρίτον καὶ ἀρνητική, ἂν περατοῦται εἰς τὸ δεύτερον καὶ τέταρτον τεταρτημόριον.

Ἐπίσης παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ τόξα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὸ αὐτὸ πέρας, ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον, τὸ αὐτὸ συνημίτονον καὶ τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην.

Σημ. α΄. Τὸ ἄνυσμα ΟΡ, ὅπερ μετρούμενον ὡς ἀνωτέρω, δίδει τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου ΑΜ, λέγεται καὶ αὐτὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου ΑΜ· ὁμοίως καὶ τὸ ἄνυσμα ΟΠ λέγεται συνημίτονον τοῦ αὐτοῦ τόξου, ὡς καὶ τὸ ΑΣ λέγεται ἐφαπτομένη αὐτοῦ· λέγονται δὲ τὰ ἀνύσματα ταῦτα ΟΡ, ΟΠ, ΑΣ ***τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ*** τοῦ τόξου ΑΜ, ἐνῷ τὰ ημ(ΑΜ), συν(ΑΜ) καὶ εφ(ΑΜ) λέγονται ***τριγονομετρικοὶ ἀριθμοὶ*** αὐτοῦ.

Σημ. β΄. Ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΜ, μετρουμένη κατὰ τοὺς ὅρους τοῦ ἐδ. 17, παρίσταται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ καὶ τὸ τόξον ΑΜ ἀριθμοῦ. Διὰ τοῦτο ὁ ἀριθμὸς (ΟΡ) λέγεται ἡμίτονον καὶ τῆς γωνίας ΑΟΜ, ὁ (ΟΣ) συνημίτονον αὐτῆς καὶ ὁ (ΑΣ) ἐφαπτομένη.

Γενικῶς ἡμίτονον, συνημίτονον καὶ ἐφαπτομένη γωνίας λέγεται τὸ ἡμ., τὸ συν. καὶ ἡ ἐφ. τοῦ τόξου τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν γωνίαν ταύτην.

Σημ. γ΄. Ἡ διάμετρος Α΄Α, ἐφ᾽ ἧς κεῖνται τὰ συνημίτονα τῶν τόξων ἀρχῆς Α λέγεται συνήθως ***ἄξων τῶν συνημιτόνων***, ἡ διάμετρος Β΄Β, δι᾽ ἀνάλογον λόγον λέγεται ***ἄξων τῶν ἡμιτόνων*** καὶ ἡ ἐφαπτομένη Δ΄ΑΔ ***ἄξων τῶν ἐφαπτομένων***.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΗΜΙΤΟΝΟΥ, ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΥ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΠΑΝΤΟΣ ΤΟΞΟΥ

3 ***20.*** Ἔστω τυχὸν τόξον τὸ ΑΜ (σχ. 10), δι᾽ ὃ ἔχομεν (ΑΜ)=α καὶ οὗ εἶναι ημα=(ΟΡ), συνα=(ΟΠ) καὶ εφα=(ΑΣ).

α) Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΜΠ λαμβάνομεν $(ΠΜ)^2+(ΟΠ)^2=(ΟΜ)^2$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἀνύσματα ΠΜ καὶ ΟΡ εἶναι ὁμορρόπως ἴσα, ἔχομεν (ΟΡ)=(ΠΜ)=ημα· ἑπομένως ἡ εὑρεθεῖσα σχέσις γίνεται $(\eta\mu\alpha)^2+(\sigma\upsilon\nu\alpha)^2=1$ ἢ $\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1$ ἥτις προδήλως εἶναι ἀληθής, εἰς οἱονδήποτε τεταρτημόριον καὶ ἂν περατοῦται τὸ τόξον ΑΜ.

β) Ἤδη ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΠΜ καὶ ΟΑΣ λαμβάνομεν, εἰς οἱονδήποτε τεταρτημόριον καὶ ἂν περατοῦται τὸ τόξον ΑΜ, $\frac{\mathrm{A\Sigma}}{\Pi\mathrm{M}}=\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{O\Pi}}$ ἢ $\frac{|\mathrm{A\Sigma}|}{|\eta\mu\alpha|}=\frac{1}{|\sigma\upsilon\nu\alpha|}$, ἤτοι $|\mathrm{A\Sigma}|=\frac{|\eta\mu\alpha|}{|\sigma\upsilon\nu\alpha|}$· ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ τὸ (ΑΣ) καὶ τὸ $\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$ εἶναι θετικά, ὅταν τὸ Μ **κεῖται** ἐν τῷ πρώτῳ ἢ **τρίτῳ** τεταρτημορίῳ, ἀρνητικὰ δὲ ἀμφότερα, ὅταν τὸ Μ κεῖται ἐν τῷ δευτέρῳ ἢ τετάρτῳ τεταρτημορίῳ, ἕπεται, ὅτι ἔχομεν πάντοτε $(\mathrm{A\Sigma})=\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$, ἤτοι $\varepsilon\varphi\alpha=\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$.

Ὥστε τὸ ημ., τὸ συν. καὶ ἡ εφ. τόξου τινὸς α συνδέονται διὰ τῶν δύο ἐξισώσεων

$$\boldsymbol{\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1} \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{\varepsilon\varphi\alpha=\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}.$$

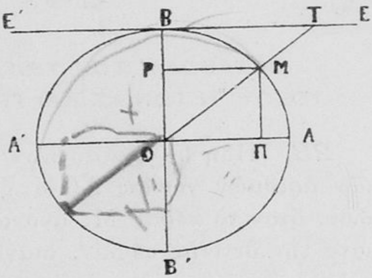
21. Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω τριῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τόξου τινὸς ἢ γωνίας α, οἵτινες εἶναι θεμελιώδεις, ὑπάρχουσι καὶ τρεῖς ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου α· εἶναι δὲ οὗτοι ἀντίστροφοι τῶν προηγουμένων· λέγεται δέ, ὁ μὲν ἀντίστροφος τῆς ἐφαπτομένης τοῦ α συνεφαπτομένη αὐτοῦ, ὁ ἀντίστροφος τοῦ συνημιτόνου του τέμνουσα αὐτοῦ καὶ ὁ ἀντίστροφος τοῦ ἡμιτόνου του συνδιατέμνουσα αὐτοῦ. Ἤτοι εἶναι

$$\sigma\varphi\alpha=\frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}, \quad \tau\varepsilon\mu\nu\alpha=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \sigma\upsilon\nu\delta\alpha=\frac{1}{\eta\mu\alpha}.$$

Ἐκ τῶν νέων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ὡς ἴδιος τριγωνομετρικὸς ἀριθμὸς χρησιμοποιεῖται μόνον ἡ συνεφαπτομένη, τῆς ὁποίας δίδομεν κατωτέρω τὴν γεωμετρικὴν παράστασιν.

22. Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν συνεφαπτομένων. Ἔστω τόξον τι ΑΠ, δι' ὃ ἔχομεν (ΑΜ)=α καὶ οὗ εἶναι ημα=(ΟΡ) καὶ συνα=(ΟΠ).

Φέρομεν ἤδη τὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας εἰς τὸ πέρας Β τοῦ πρώτου τεταρτημορίου τὴν Ε'ΒΕ, ἧς ὁρίζομεν ὡς θετικὴν φορὰν τὴν αὐτὴν μὲ τὴν τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων, δηλαδὴ τὴν ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Ε· κατόπιν δὲ προεκτείνομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΜ, ἥτις ἂς τέμνῃ τὴν ἀχθεῖσαν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Τ, ὁπότε σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΟΒΤ ὅμοιον πρὸς τὸ ΟΡΜ· ἐκ τῶν ὁμοίων δὲ τούτων τριγώνων λαμβάνομεν $\frac{BT}{PM}=\frac{OB}{OP}$ ἤτοι $\frac{|BT|}{|\text{συν}\alpha|}=\frac{1}{|\eta\mu\alpha|}$ ἢ $|BT|=\frac{|\text{συν}\alpha|}{|\eta\mu\alpha|}$· ἀλλὰ καὶ τὸ (ΒΤ) καὶ τὸ $\frac{\text{συν}\alpha}{\eta\mu\alpha}$ εἶναι ἀμφότερα θετικὰ μέν, ὅταν τὸ Μ κεῖται ἐν τῷ πρώτῳ ἢ τρίτῳ τεταρτημορίῳ, ἀρνητικὰ δέ, ὅταν τὸ Μ κεῖται ἐν τῷ δευτέρῳ ἢ τετάρτῳ· ἑπομένως εἰς οἱονδήποτε τεταρτημόριον καὶ ἂν κεῖται τὸ Μ, ἀληθεύει ἡ σχέσις $(BT)=\frac{\text{συν}\alpha}{\eta\mu\alpha}$, ἤτοι (ΒΤ)= σφα.



Σχ. 11

Οὕτως ὁ ἀριθμὸς σφα συμπίπτει μὲ τὸν ἀριθμόν, ὃν παριστᾷ τὸ ἄνυσμα ΒΤ μετρηθὲν διὰ τῆς ἀκτῖνος. Ἕνεκα τούτου καὶ τὸ ἄνυσμα ΒΤ λέγεται συνεφαπτομένη τοῦ τόξου α, ἡ δὲ ἐφαπτομένη εἰς τὸ πέρας τοῦ πρώτου τεταρτημορίου λέγεται συνήθως ἄξων τῶν συνεφαπτομένων.

Ἀσκήσεις.

9) Νὰ δειχθῇ, ὅτι δύο τόξα τοῦ αὐτοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, τὰ ὁποῖα, μετρηθέντα διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος, ἔχουσι τὸ αὐτὸ μέτρον, ἔχουσιν ἴσα ἡμίτονα, συνημίτονα, ἐφαπτομένας καὶ συνεφαπτομένας.

10) Ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη τοῦ αὐτοῦ τόξου ἔχουσι πάντοτε τὸ αὐτὸ σημεῖον.

11) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\eta\mu^2\alpha-\text{συν}^2\alpha=1-2\text{συν}^2\alpha=2\eta\mu^2\alpha-1$.

12) Ὁμοίως νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{συν}^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=2\text{συν}^2\alpha-1=1-2\eta\mu^2\alpha$.

13) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{συν}^4\alpha-\eta\mu^4\alpha=\text{συν}^2\alpha-\eta\mu^2\alpha$.

14) Ὁμοίως, ὅτι $\frac{\eta\mu\alpha}{1+\text{συν}\alpha}=\frac{1-\text{συν}\alpha}{\eta\mu\alpha}$.

15) Ὁμοίως νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\eta\mu^2\alpha.\text{συν}^2\beta-\text{συν}^2\alpha.\eta\mu^2\beta=\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta$.

16) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{συν}^2\alpha.\text{συν}^2\beta-\eta\mu^2\alpha.\eta\mu^2\beta=\text{συν}^2\alpha+\text{συν}^2\beta-1$.

17) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{1-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{\sigma\varphi\alpha-1}{\sigma\varphi\alpha+1}$.

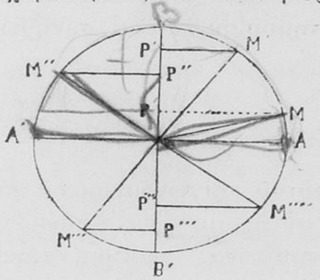
18) Δείξατε, ὅτι εἶναι $1-2\eta\mu^2\alpha = \frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$.

+19) Ὁμοίως, ὅτι $\frac{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\sigma\varphi^2\alpha} = \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$.

ΜΕΤΑΒΟΛΑΙ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΟΞΟΥ Ἢ ΓΩΝΙΑΣ ΚΑΙ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΑΥΤΩΝ

23. Ἤδη θὰ ἐξετάσωμεν τὰς μεταβολὰς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν γωνίας ΑΟΜ ἢ τόξου ΑΜ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, ὅταν τὸ πέρας Μ, ἀναχωροῦν ἀπὸ τοῦ Α καὶ κινούμενον κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, διαγράφῃ ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν, δηλαδὴ ὅταν ἡ γωνία ἢ τὸ τόξον αὐξάνῃ συνεχῶς ἀπὸ 0° μέχρι 360°.

***24.* Μεταβολαὶ τοῦ ἡμιτόνου.** Ὅταν τὸ Μ εἶναι εἰς τὸ Α, ἔχομεν (ΑΜ)=0° καὶ ἡ ὀρθὴ προβολὴ τῆς ἀκτῖνος ΟΜ εἶναι 0· εἶναι ἄρα ημ0°=0· ὅταν τὸ Μ, ἀρχόμενον ἐκ τοῦ Α καὶ κινούμενον συνεχῶς, διαγράψῃ τὸ πρῶτον τεταρτημόριον, ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ σημείου Μ θὰ διαγράψῃ τὸ ἄνυσμα ΟΒ· ὥστε τὸ ἡμίτονον αὐξάνει συνεχῶς ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ +1, ἤτοι εἶναι ημ90°=1. Ἐὰν τὸ Μ ἐξακολουθήσῃ τὴν κίνησίν του καὶ φθάσῃ εἰς τὸ πέρας Α′ τοῦ δευτέρου τεταρτημορίου, ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ σημείου Μ θὰ διαγράψῃ τὸ ἄνυσμα ΟΒ, ἑπομένως τὸ ἡμίτονον ἐλαττοῦται μέχρι τοῦ 0 καὶ ἔχομεν ημ180°=0.



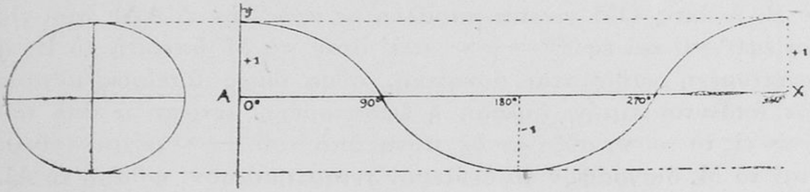
Σχ. 12

Ἐὰν τὸ Μ διαγράψῃ τὸ τρίτον τεταρτημόριον καὶ φθάσῃ εἰς τὸ πέρας αὐτοῦ Β′, εὑρίσκομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὅτι τὸ ἡμίτονον ἐλαττοῦται μέχρι τοῦ —1 καὶ ὅτι εἶναι ημ270°=—1, ἐνῷ, ὅταν τὸ Μ διαγράψῃ τὸ τέταρτον τεταρτημόριον καὶ ἐπανέλθῃ εἰς τὸ Α, τὸ ἡμίτονον αὐξάνει ἀπὸ —1 μέχρι τοῦ 0, ἤτοι εἶναι ημ360°=0=ημ0°.

Ὁ κατωτέρω πίναξ δεικνύει συνοπτικῶς τὰς ἀνωτέρω παρατηρηθείσας μεταβολὰς τοῦ ἡμιτόνου.

α	0°	αὔξ.	90°	αὔξ.	180°	αὔξ.	270°	αὔξ.	360°
ημα	0	αὔξ.	1	ἐλατ.	0	ἐλατ.	—1	αὔξ.	0

25. **Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τοῦ ἡμιτόνου.** Αἱ ἀνωτέρω σημειωθεῖσαι μεταβολαὶ τοῦ ἡμιτόνου τόξου,



Σχ. 13

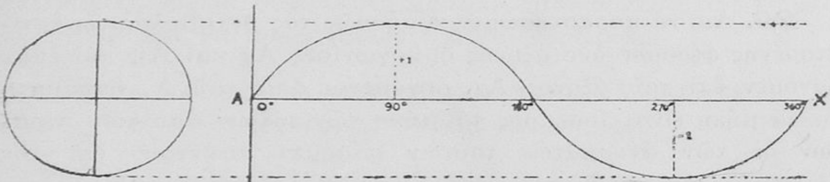
ὅταν τοῦτο αὐξάνηται συνεχῶς ἀπὸ 0° μέχρι 360°, παρίστανται γραφικῶς. Λαμβάνομεν δὲ τὴν γραφικὴν παράστασιν αὐτῶν ὡς ἑξῆς:

Φέρομεν δύο ἄξονας ὀρθογωνίους, ἔστω τοὺς Αχ καὶ Αψ. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος Αχ λαμβάνομεν ἀνύσματα ἀρχῆς Α, ὧν τὰ μήκη εἶναι ἴσα πρὸς τὰ μήκη τῶν ἀντιστοίχων τόξων· ἀπὸ τῶν περάτων δὲ τῶν ἀνυσμάτων τούτων ὑψοῦμεν καθέτους καὶ ἐπ᾽ αὐτῶν λαμβάνομεν ἀνύσματα, ἀρχὴν ἔχοντα τὰ πέρατα τῶν προηγουμένων, ὁμορρόπως ἴσα πρὸς τὰ ἀνύσματα τῶν ἡμιτόνων τῶν ἀντιστοίχων τόξων. Τὰ πέρατα τῶν ἀντιστοίχων τούτων ἀνυσμάτων εἶναι τὰ σημεῖα μιᾶς καμπύλης, ἥτις δεικνύει τὰς μεταβολὰς τοῦ ἡμιτόνου καὶ ἥτις καμπύλη δεικνύεται εἰς τὸ ἀνωτέρω σχῆμα.

26. **Μεταβολαὶ τοῦ συνημιτόνου.** Αἱ μεταβολαὶ τοῦ συνημιτόνου γωνίας ἢ τόξου, ὅταν τοῦτο αὐξάνηται ἀπὸ 0° μέχρι 360°, εὑρίσκονται εὐκόλως καθ᾽ ὃν τρόπον εὑρέθησαν καὶ αἱ μεταβολαὶ τοῦ ἡμιτόνου. Συνοψίζονται δὲ εἰς τὸν κάτωθι πίνακα.

α	0°	αὔξ.	90°	αὔξ.	180°	αὔξ.	270°	αὔξ.	360°
συνα	1	ἐλατ.	0	ἐλατ.	—1	αὔξ.	0	αὔξ.	1

27. **Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τοῦ συνημιτόνου.** Ἡ κάτωθη καμπύλη, ἥτις παριστᾷ τὰς ἀνωτέρω μεταβολὰς τοῦ συνημιτόνου, κατασκευάζεται ὁμοίως μὲ τὴν προηγουμένην.



Σχ. 14

28. **Μεταβολαὶ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς συνεφαπτομένης.** Προκειμένου περὶ τῆς ἐφαπτομένης παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν τὸ Μ διαγράφῃ τὸ α΄ τεταρτημόριον (σχ. 10), αὕτη αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$ (διότι, ὅταν τὸ Μ φθάσῃ εἰς τὸ Β, ἡ ἀκτὶς ΟΜ γίνεται παράλληλος πρὸς τὴν Δ΄ΑΔ)· ἤτοι εἶναι $\varepsilon\varphi 0^\circ = 0$ καὶ $\varepsilon\varphi 90^\circ = +\infty$· ἀλλ᾽ ὅταν τὸ Μ ὑπερβῇ τὸ Β, ἡ ἐφαπτομένη καθίσταται ἀρνητική, οὖσα ὅμως ἀπείρως μεγάλη κατ᾽ ἀπόλυτον τιμήν· δηλαδὴ ἡ ἐφαπτομένη μεταπηδᾷ ἀπὸ τοῦ $+\infty$ εἰς τὸ $-\infty$, αὐξάνει δὲ αὕτη ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ 0, ὅταν τὸ Μ, διαγράφον τὸ δεύτερον τεταρτημόριον, φθάσῃ τὸ Α΄.

Ὅταν τὸ Μ διαγράψῃ τὸ τρίτον καὶ τέταρτον τεταρτημόριον, παρατηροῦνται αἱ αὐταὶ ὡς ἄνω μεταβολαὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

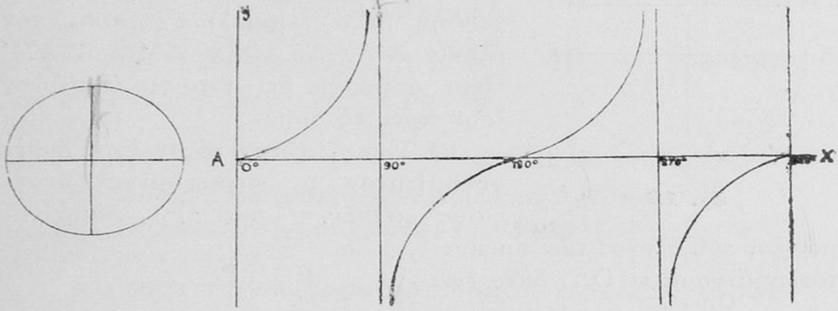
Αἱ μεταβολαὶ τῆς συνεφαπτομένης εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς μεταβολὰς τῆς ἐφαπτομένης· ἀλλ᾽ ἡ συνεφαπτομένη μεταβάλλεται ἀντιθέτως τῇ ἐφαπτομένῃ, ἤτοι ἐνῷ ἡ ἐφαπτομένη αὐξάνεται πάντοτε, ἡ συνεφαπτομένη ἐλαττοῦται πάντοτε.

Σημ. Αἱ ἀνωτέρω σημειωθεῖσαι μεταβολαὶ φαίνονται καὶ ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$, $\varepsilon\varphi\alpha . \sigma\varphi\alpha = 1$.

Ὁ κατωτέρω πίναξ δεικνύει συνοπτικῶς τὰς μεταβολὰς τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς συνεφαπτομένης τῆς γωνίας ἢ τοῦ τόξου α.

α	0°	αὐξ.	90°	αὐξ.	180°	αὐξ.	270°	αὐξ.	360°
εφα	0	αὐξ.	$\dfrac{+\infty}{-\infty}$	αὐξ.	0	αὐξ.	$\dfrac{+\infty}{-\infty}$	αὐξ.	0
σφα	$+\infty$	ἐλατ.	0	ἐλατ.	$\dfrac{-\infty}{+\infty}$	ἐλατ.	0	ἐλατ.	$-\infty$

29. Διὰ νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὰς μεταβολὰς τῆς ἐφαπτομένης φέρομεν δύο ἄξονας ὀρθογωνίους Αχ καὶ Αψ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος Αχ, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Α, ἀνύσματα ὧν τὰ μήκη εἶναι ἴσα πρὸς τὰ μήκη τῶν τόξων· ἀπὸ τῶν περάτων δὲ τῶν ἀνυσμάτων τούτων φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὸν ἄξονα Αχ· ἐπὶ δὲ τῶν καθέτων τούτων λαμβάνομεν ἀνύσματα ὧν αἱ ἀρχαὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος Αχ, ὁμορρόπως ἴσα πρὸς τὰ ἀνύσματα τῶν ἐφαπτομένων τῶν ἀντιστοίχων τόξων· τὰ πέρατα τῶν τελευταίων τούτων ἀνυσμάτων εἶναι σημεῖα τῆς καμ-



Σχ. 15

πύλης (ἀσυνεχοῦς), ἥτις δεικνύει τὰς μεταβολὰς τῆς ἐφαπτομένης, ὅταν τὸ τόξον μεταβάλληται ἀπὸ 0° μέχρι 360°. Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν τὴν καμπύλην, ἥτις δεικνύει τὰς μεταβολὰς τῆς συνεφαπτομένης τόξου, ὅταν τοῦτο μεταβάλληται ἀπὸ 0° μέχρι 360°.

Ἀσκήσεις.

20) Νὰ εὑρεθῶσι τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ἑκάστου τῶν τόξων —90°, —180°, —270°, —360°.

21) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ μεταβολαὶ τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου τόξου, ὅταν τοῦτο μεταβάλληται συνεχῶς ἀπὸ 0° μέχρι —360° καὶ νὰ παρασταθῶσιν αὗται γραφικῶς.

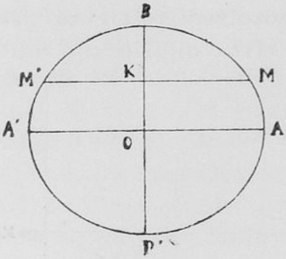
22) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη ἑκάστου τῶν τόξων —90°, —180°, —270°, —360°.

23) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ μεταβολαὶ τῆς ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης τόξου, ὅταν τοῦτο μεταβάλληται συνεχῶς ἀπὸ 0° μέχρι —360° καὶ νὰ παρασταθῶσιν αὗται γραφικῶς.

ΤΟΞΑ ΚΑΙ ΓΩΝΙΑΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥΣΑΙ ΕΙΣ ΔΟΘΕΝΤΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ

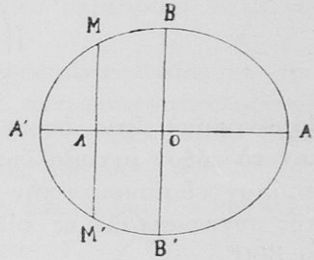
30. 1) Ἔστω, ὅτι ζητεῖται τόξον, ἔχον δοθὲν ἡμίτονον μ, ἀναγκαίως περιεχόμενον μεταξὺ —1 καὶ 1.

Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων ἄνυσμα ΟΚ, ὅπερ ἔχει μῆκος $\frac{ΟΚ}{ΟΒ}$ ἴσον πρὸς μ καὶ ἐκ τοῦ Κ φέρομεν τὴν χορδὴν Μ′Μ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Α′Α. Τὰ τόξα ΑΜ καὶ ΑΜ′ εἶναι φανερόν, ὅτι ἔχουσιν ἡμίτονον ἴσον πρὸς τὸ δοθέν.



Σχ. 16

2) Ἐὰν ζητῆται τόξον ἔχον δοθὲν συνημίτονον μ, περιεχόμενον ἀναγκαίως μεταξὺ —1 καὶ +1, λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων ἄνυσμά τι ΟΛ, ὅπερ ἔχει μῆκος $\frac{ΟΛ}{ΟΑ}$ ἴσον πρὸς μ καὶ ἐκ τοῦ Λ φέρομεν χορδὴν Μ′Μ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Β′Β. Τὰ τόξα ΑΜ καὶ ΑΜ′ ἔχουσι προδήλως τὸ δοθὲν συνημίτονον.

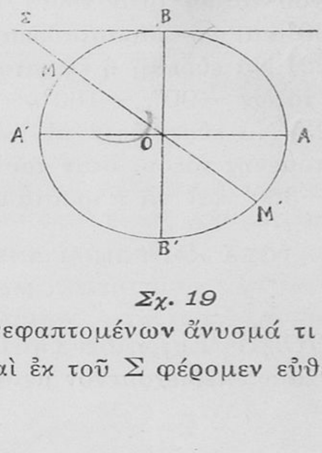


Σχ. 17

3) Ἔστω, ὅτι ζητεῖται τόξον ἔχον δοθεῖσαν ἐφαπτομένην μ. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἐφαπτομένων ἄνυσμα ΑΕ ἔχον μῆκος $\frac{ΑΕ}{ΟΒ}$ ἴσον πρὸς μ καὶ ἐκ τοῦ Ε φέρομεν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου Ο, τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ Μ καὶ Μ′. Τὰ τόξα ΑΜ καὶ ΑΜ′ ἔχουσι προδήλως τὴν δοθεῖσαν ἐφαπτομένην.

4) Ἐὰν ζητῆται τόξον ἔχον δοθεῖσαν συνεφαπτομένην μ,

Σχ. 18



Σχ. 19

λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνεφαπτομένων ἄνυσμά τι ΒΣ ἔχον μῆκος $\frac{ΒΣ}{ΟΑ}$ ἴσον πρὸς τὸ μ καὶ ἐκ τοῦ Σ φέρομεν εὐθεῖαν διὰ τοῦ κέντρου Ο τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ Μ καὶ Μ′. Τὰ τόξα ΑΜ καὶ ΑΜ′ εἶναι φανερόν, ὅτι ἔχουσι τὴν δοθεῖσαν συνεφαπτομένην.

Ἀσκήσεις.

24) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ τόξα κοινῆς ἀρχῆς, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἡμίτονον ἴσον πρὸς τὸ $\frac{3}{5}$ ἢ $-\frac{3}{7}$.

25) Ὁμοίως τὰ ἔχοντα συνημίτονον $\frac{2}{3}$ ἢ $-\frac{3}{4}$.

26) Ὁμοίως τὰ ἔχοντα ἐφαπτομένην 2 ἢ -3.

27) Ὁμοίως τὰ ἔχοντα συνεφαπτομένην 1 ἢ -1.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΟΞΟΥ ΔΟΘΕΝΤΟΣ ΤΟΥ ΕΝΟΣ ΕΞ ΑΥΤΩΝ

31. Αἱ εὑρεθεῖσαι ἐξισώσεις
$ημ^2α + συν^2α = 1$, $εφα = \frac{ημα}{συνα}$, ὡς καὶ ἡ $σφα = \frac{συνα}{ημα}$, καθιστῶσι δυνατὴν τὴν εὕρεσιν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τόξου ἢ γωνίας, ὅταν δοθῇ εἷς ἐξ αὐτῶν. Διότι, ἐὰν δοθῇ τὸ ημα, εὑρίσκομεν ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων τὸ συνα καὶ κατόπιν ἐκ τῶν δύο ἄλλων τὴν εφα καὶ σφα· ἔχομεν δὲ οὕτω:

$$συνα = \pm\sqrt{1 - ημ^2α}, \quad εφα = \frac{ημα}{\pm\sqrt{1-ημ^2α}},$$

$$σφα = \frac{\pm\sqrt{1-ημ^2α}}{ημα}$$

ἐνῷ, ὅταν δοθῇ τὸ συνα, εὑρίσκομεν

$$ημα = \pm\sqrt{1 - συν^2α}, \quad εφα = \frac{\pm\sqrt{1-συν^2α}}{συνα}$$

$$σφα = \frac{συνα}{\pm\sqrt{1-συν^2α}}$$

Παρατήρησις. Ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν, ὅτι ἐκ τοῦ ἡμιτόνου τόξου τινὸς ἢ ἐκ τοῦ συνημιτόνου του δὲν ὁρίζονται ἐντελῶς οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ αὐτοῦ· διότι εἰς τὸ ἡμίτονον α π. χ. βλέπομεν, ὅτι ἀντιστοιχοῦσι δύο σειραὶ τιμῶν τῶν ἄλλων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν

$$\text{ἢ} \quad +\sqrt{1-\eta\mu^2\alpha},\ \frac{\eta\mu\alpha}{+\sqrt{1-\eta\mu^2\alpha}},\quad \frac{+\sqrt{1-\eta\mu^2\alpha}}{\eta\mu\alpha} \quad \text{καὶ ἢ}$$

$$-\sqrt{1-\eta\mu^2\alpha},\quad \frac{\eta\mu\alpha}{-\sqrt{1-\eta\mu^2\alpha}},\quad \frac{-\sqrt{1-\eta\mu^2\alpha}.}{\eta\mu\alpha}$$

Ἵνα ὅμως ὁρισθῶσιν ἐντελῶς οἱ ζητούμενοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί, πρέπει νὰ δοθῇ καὶ τὸ τεταρτημόριον, εἰς ὃ περατοῦται τὸ τόξον.

32. Ὅταν ἡ ἐφαπτομένη τόξου δοθῇ, καὶ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον αὐτοῦ εἶναι ὡρισμένα κατὰ τὴν ἀπόλυτον τιμήν, διότι συνδέονται διὰ τῶν ἐξισώσεων

Δυο εξισώσεις με δύο αγνώστους.

$$\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1$$

$$\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\alpha.$$

εφα = γνωστ

Ἵνα ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων εὕρωμεν τὰς τιμὰς τῶν ημα καὶ συνα (ὑποθέτοντες γνωστὴν τὴν εφα), ἀπαλλάσσομεν τὴν δευτέραν ἀπὸ τοῦ παρανομαστοῦ, ὅτε γίνεται ημα=συνα.εφα καὶ ἀντικαθιστῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ ημα εἰς τὴν πρώτην· οὕτω προκύπτει

$$(\varepsilon\varphi\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha)^2+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1 \quad \text{ἢ}$$

$$\varepsilon\varphi^2\alpha.\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1, \quad \text{ἐξ ἧς}$$

$$(1+\varepsilon\varphi^2\alpha)\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1.$$

Ὅθεν $\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$ καὶ $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\alpha}=\pm\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}}}$

ἐπειδὴ δὲ ημα=συνα.εφα, ἕπεται $\boldsymbol{\eta\mu\alpha}=\pm\frac{\boldsymbol{\varepsilon\varphi\alpha}}{\sqrt{\boldsymbol{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}}}$ (ε)

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα δύναται νὰ ληφθῇ καὶ θετικῶς καὶ ἀρνητικῶς, ἀλλ' ἐν ἀμφοτέροις τοῖς τύποις δέον νὰ ληφθῇ μετὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, διότι ἐξ αὐτῶν διαιρουμένων πρέπει νὰ προκύπτῃ ἡ σχέσις $\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\alpha$.

Ὅτι δὲ τὸ σημεῖον τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου δὲν δύναται νὰ ὁρισθῇ ἐκ τῆς ἐφαπτομένης, γίνεται φανερὸν ἐκ τούτου, ὅτι πρὸς ἑκάστην δοθεῖσαν ἐφαπτομένην ἀντιστοιχοῦσι δύο τόξα, περατούμενα εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου καὶ ἔχοντα διὰ τοῦτο ἀντίθετα ἡμίτονα καὶ ἀντίθετα συνημίτονα· οἱ δὲ τύποι (ε) πρέπει νὰ δίδωσιν ἀμφοτέρων τῶν τόξων τούτων τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα.

Τὸ σημεῖον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ὁρίζομεν, ἐὰν ἠξεύρωμεν εἰς ποῖον τεταρτημόριον περατοῦται τὸ τόξον· διὰ τόξα π.χ. μικρότερα τῶν 90°, ἡ ρίζα πρέπει νὰ λαμβάνηται θετικῶς, διότι ταῦτα ἔχουσι θετικὸν συνημίτονον.

Ἡ σφα ἐκ τῆς εφα ὁρίζεται ἀμέσως.

Παρατήρησις. Οἱ τέσσαρες τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ παντὸς τόξου εἴδομεν, ὅτι συνδέονται διὰ τῶν τριῶν ἑπομένων ἐξισώσεων

$$\text{ημ}^2\alpha + \text{συν}^2\alpha = 1$$
$$\text{εφα} = \frac{\text{ημα}}{\text{συνα}} \quad \text{καὶ} \quad \text{σφα} = \frac{\text{συνα}}{\text{ημα}} \qquad (\varepsilon')$$

καὶ ὅτι, δοθέντος τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν προσδιορίζονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων καὶ οἱ τρεῖς ἄλλοι (κατὰ τὴν ἀπόλυτον τιμήν)· πᾶσα δὲ ἄλλη ἐξίσωσις, τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ τυχόντος τόξου συνδέουσα, πρέπει ἢ νὰ καταντᾷ ταυτότης ἢ νὰ δίδῃ τὴν πρώτην $\text{ημ}^2\alpha + \text{συν}^2\alpha = 1$, ὅταν ἐν αὐτῇ ἀντικατασταθῶσι καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι καὶ αἱ συνεφαπτόμεναι ὑπὸ τῶν τιμῶν αὐτῶν, διότι μεταξὺ τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου τοῦ τυχόντος τόξου αὐτὴ μόνη ἡ ἐξίσωσις ὑπάρχει. Εὑρίσκομεν δὲ ἐξισώσεις τοιαύτας ὁσασδήποτε, ἐὰν πολλαπλῶς συνδυάσωμεν τὰς τρεῖς ἀρχικὰς ἐξισώσεις (ε')· ἀναγράφομεν δὲ ἐνταῦθα μόνον τὰς πρωτευούσας ἐξ αὐτῶν

$$\text{εφα}.\text{σφα} = 1$$
$$1 + \text{εφ}^2\alpha = \frac{1}{\text{συν}^2\alpha}$$
$$1 + \text{σφ}^2\alpha = \frac{1}{\text{ημ}^2\alpha}$$
$$\text{εφα} + \text{σφα} = \frac{1}{\text{ημα}.\text{συνα}}$$

τῶν ὁποίων ἡ ἀλήθεια εὐκόλως ἀποδεικνύεται διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τῶν εφα καὶ σφα διὰ τῶν τιμῶν αὐτῶν.

Ἀσκήσεις.

28) Εὑρεῖν τοὺς λοιποὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ τόξου α, ὅταν εἶναι ημα$=\frac{3}{8}$.

29) Δίδεται συνβ$=\frac{12}{13}$. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου β.

30) Τὸ τόξον α περατοῦται εἰς τὸ β′ τεταρτημόριον, εἶναι δε ημα$=\frac{12}{17}$· Εὑρεῖν τοὺς λοιποὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς αὐτοῦ.

31) Ἐὰν ημα$=\frac{3}{5}$ καὶ συνβ$=\frac{40}{41}$ καὶ τὰ τόξα α καὶ β περατοῦνται εἰς τὸ α′ τεταρτημόριον, εὑρεῖν τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως ημα.συνβ$+$ημβ.συνα.

32) Ἐὰν συνα$=\frac{7}{25}$ καὶ συνβ$=\frac{40}{41}$, εὑρεῖν τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως συνα.συνβ$-$ημα.ημβ.

33) Δίδεται εφα$=\frac{7}{19}$. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ λοιποὶ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου α.

34) Τὸ τόξον α περατοῦται εἰς τὸ γ′ τεταρτημόριον καὶ εἶναι εφα$=\frac{9}{11}$· Εὑρεῖν τοὺς λοιποὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ τόξου α.

35) Ἐὰν εφα$=\frac{3}{4}$, εὑρεῖν τὴν τιμὴν τῶν παραστάσεων 2ημα.συνα, συν^{2}α$-$ημ^{2}α καὶ $\sqrt{\frac{1-\text{συνα}}{2}}$.

36) Ὁμοίως, ἐὰν εφβ$=\frac{11}{60}$, εὑρεῖν τὴν τιμὴν τῶν παραστάσεων 2ημβ.συνβ, συν^{2}β$-$ημ^{2}β καὶ $\sqrt{\frac{1+\text{συνβ}}{2}}$.

37) Ἐὰν εφα$=\frac{3}{4}$ καὶ εφβ$=\frac{60}{11}$ καὶ τὰ τόξα α καὶ β περατοῦνται εἰς τὸ α′ τεταρτημόριον, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων ημα.συνβ$-$ημβ.συνα καὶ συνα.συνβ$+$ημα.ημβ.

38) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου α ἐκ τῆς συνεφαπτομένης αὐτοῦ.

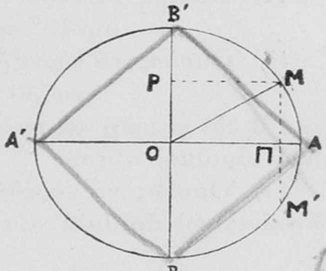
39) Ἐὰν σφα $= \frac{14}{9}$, νὰ εὑρεθῶσιν οἱ λοιποὶ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου α.

40) Ἐὰν σφα $= \frac{8}{15}$ καὶ σφβ $= \frac{12}{5}$ καὶ τὰ τόξα α καὶ β περατοῦνται εἰς τὸ α′ τεταρτημόριον, εὑρεῖν τὴν τιμὴν τῶν παραστάσεων ημα.συνβ+ημβ.συνα καὶ συνα.συνβ—ημα.ημβ.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΟΞΩΝ ΤΙΝΩΝ

33. Θεώρημα. ***Τὸ ἡμίτονον παντὸς τόξου θετικοῦ καὶ μικροτέρου τῶν 90^0 εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου τόξου.***

Ἔστω τὸ τόξον ΑΜ, ὅπερ εἶναι μικρότερον τῶν 90^0 καὶ ΟΡ, ΟΠ αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΜ ἐπὶ τοὺς ἄξονας ΟΒ, ΟΑ ἀντιστοίχως. Τὰ ἀνύσματα ΟΡ καὶ ΠΜ εἶναι ὁμορρόπως ἴσα· ἐπομένως εἶναι ημ(ΑΜ)=(ΠΜ)· ἀλλ᾽ ἐὰν τὸ ΠΜ ἐκβληθῇ πέραν τῆς διαμέτρου, ἐφ᾽ ἣν εἶναι κάθετον, μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Μ′, τὸ Π εἶναι τὸ μέσον τῆς Μ′Μ καὶ τὸ Α μέσον τοῦ τόξου ΜΑΜ′. Ὥστε ἀπεδείχθη ἡ πρότασις.



Σχ. 20

Στηριζόμενοι ἤδη εἰς τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, εὑρίσκομεν εὐκόλως τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τόξων τινῶν, ἐπὶ π. δ. τοῦ τόξου 45^0. Διότι πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν (ΑΜ)= 45^0, τὸ τόξον Μ′ΑΜ εἶναι 90^0 καὶ ἡ Μ′ΠΜ εἶναι πλευρὰ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν τριγωνομετρικὸν κύκλον τετραγώνου, ἐπομένως εἶναι (Μ′ΠΜ)$=\sqrt{2}$ καὶ (ΠΜ)$=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ἤτοι ημ$45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$· ἤδη οἱ λοιποὶ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ αὐτοῦ εὑρίσκονται εὐκόλως καὶ εἶναι:

$$\sigma\upsilon\nu\ 45^0 = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \varepsilon\varphi 45^0 = 1 \text{ καὶ } \sigma\varphi 45^0 = 1.$$

Ἐργαζόμενοι κατὰ τὸν αὐτὸν ὡς ἄνω τρόπον, εὑρίσκομεν εὐκόλως, ὅτι τὰ ἡμίτονα τῶν τόξων 30^0, 60^0 εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ἡμίση τῶν πλευρῶν κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου ἐν τῷ τριγωνομετρικῷ κύκλῳ, δηλαδὴ εἶναι $\eta\mu 30^0 = \frac{1}{2}$ καὶ $\eta\mu 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ἀσκήσεις.

41) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου 30^0,

42) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου 60^0.

43) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων

$$\eta\mu^2 30^0 + \eta\mu^2 45^0 + \eta\mu^2 60^0.$$

καὶ
$$\eta\mu 30^0.\sigma\upsilon\nu 60^0 + \sigma\upsilon\nu 30^0.\eta\mu 60^0.$$

44) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$$\sigma\upsilon\nu 45^0.\sigma\upsilon\nu 60^0 + \eta\mu 45^0.\eta\mu 60^0.$$

45) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

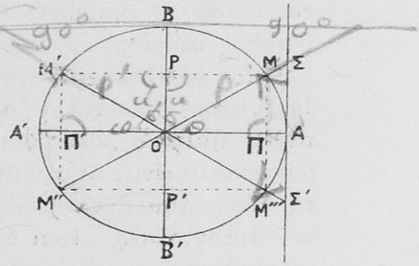
$$\varepsilon\varphi^2 30^0 + \varepsilon\varphi^2 45^0 + \varepsilon\varphi^2 60^0.$$

46) Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\eta\mu 18^0$ καὶ κατόπιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ αὐτοῦ.

47) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ τὸ $\eta\mu 36^0$ καὶ κατόπιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ αὐτοῦ.

ΑΠΛΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΤΟΞΩΝ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥΣΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΑΥΤΩΝ

34. Ἔστω τυχὸν τόξον ΑΜ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου Ο· ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ τὰ σημεῖα Μ′, Μ″ Μ‴, συμμετρικὰ τοῦ Μ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας Α′Α, Β′Β καὶ τὸ κέντρον Ο, παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι τὰ τόξα ΑΜ, ΑΜ′ ἔχουσιν ἄθροισμα ***180°***, ἤτοι εἶναι ***παραπληρωματικά***· ὅτι τὰ τόξα ΑΜ, ΑΜ″ διαφέρουσι κατὰ ***180°***, τὰ τόξα ΑΜ, ΑΜ‴ ἔχουσιν ἄθροισμα 360°, ἐνῷ τὰ τόξα ΑΜ καὶ τὸ ἀντιθέτου φορᾶς ΑΜ‴ εἶναι ἀντίθετα, ὅλα δὲ τὰ τόξα ταῦτα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α καὶ πέρατα τὰ οὕτω ληφθέντα σημεῖα Μ, Μ′, Μ″, Μ‴, παρατηροῦμεν, ὅτι ἔχουσι τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ἴσους μὲν κατ᾽ ἀπόλυτον τιμήν, μὲ σημεῖα ὅμως διάφορα· εἰδικῶς δὲ συνάγομεν εὐκόλως ἐκ τοῦ σχήματος, ὅτι α′) διὰ τὰ παραπληρωματικὰ τόξα ἔχομεν, ἐὰν (ΑΜ) = α, ὁπότε (ΑΜ′) = $= 180^\circ - \alpha$.



Σχ. 21

$$\eta\mu\,(180^\circ - \alpha) = \eta\mu\alpha$$
$$\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \alpha) = -\sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\varepsilon\varphi\,(180^\circ - \alpha) = -\varepsilon\varphi\alpha \qquad \text{ὥστε καὶ}$$
$$\sigma\varphi\,(180^\circ - \alpha) = -\sigma\varphi\alpha$$

β′) διὰ τὰ διαφέροντα κατὰ ἡμιπεριφέρειαν (ΑΜ)=α, (ΑΜ″)= $= 180^\circ + \alpha$ ἔχομεν

$$\eta\mu\,(180^\circ + \alpha) = -\eta\mu\alpha$$
$$\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha) = -\sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\varepsilon\varphi\,(180^\circ + \alpha) = \varepsilon\varphi\alpha \qquad \text{ἄρα καὶ}$$
$$\sigma\varphi\,(180^\circ + \alpha) = \sigma\varphi\alpha$$

γ′) διὰ τὰ ἔχοντα ἄθροισμα ὁλόκληρον περιφέρειαν (ΑΜ)=α, (ΑΜ‴)$= 360^\circ - \alpha$, εὑρίσκομεν

$$\eta\mu\,(360^\circ - \alpha) = -\eta\mu\alpha$$
$$\sigma\upsilon\nu(360^\circ - \alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\varepsilon\varphi\,(360^\circ - \alpha) = -\varepsilon\varphi\alpha \qquad \text{ὥστε καὶ}$$
$$\sigma\varphi\,(360^\circ - \alpha) = -\sigma\varphi\alpha$$

καὶ δ′) διὰ τὸ (ΑΜ)=α καὶ τὸ ἀρνητικῆς φορᾶς (ΑΜ‴)=$-\alpha$, ἤτοι διὰ τὰ ἀντίθετα τόξα ἔχομεν

$$\eta\mu\,(-\alpha) = -\eta\mu\alpha$$
$$\sigma\upsilon\nu(-\alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\varepsilon\varphi\,(-\alpha) = -\varepsilon\varphi\alpha \qquad \text{ἄρα καὶ}$$
$$\sigma\varphi\,(-\alpha) = -\sigma\varphi\alpha$$

35. Αἱ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαι σχέσεις ἐπιτρέπουσι τὴν ἀναγωγὴν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν παντὸς τόξου εἰς τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τόξου μικροτέρου τῶν 90°· διότι ἂν μὲν εἶναι μεταξὺ 90° καὶ 180°, τὸ παραπληρωματικὸν αὐτοῦ εἶναι μεταξὺ 0° καὶ 90°· ἔχουσι δὲ ταῦτα ἴσα μὲν ἡμίτονα, ἀντίθετα δὲ τὰ συν, εφ, καὶ σφ.

Ἂν δὲ εἶναι μεταξὺ 180° καὶ 270°, ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτοῦ 180°, ὅτε μένει τόξον μικρότερον τῶν 90°· ἔχουσι δὲ τὰ τόξα ταῦτα ἡμίτονα καὶ συνημίτονα ἀντίθετα, ἐφαπτομένας δὲ καὶ συνεφαπτομένας ἴσας· ἂν δὲ τέλος εἶναι μεταξὺ 270° καὶ 360°, τὸ πέρας τοῦ ἀντιθέτου αὐτοῦ τόξου ἔχει τὸ αὐτὸ πέρας μετὰ τοῦ τόξου, ὅπερ εἶναι διαφορὰ τοῦ δοθέντος ἀπὸ τῶν 360°. Τὸ τόξον δὲ τοῦτο καὶ τὸ δοθὲν ἔχουσι συνημίτονα ἴσα· ἀντίθετα δὲ ημ, εφ καὶ σφ.

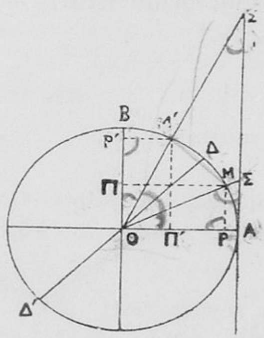
***Παραδείγματα*:**

1) 137°· τούτου παραπληρωματικὸν εἶναι τὸ τόξον 43°.
Ὅθεν $ημ137°=ημ43°$ $εφ137°=-εφ43°$
$συν\,137°=-συν43°$, $σφ137°=-σφ43°$.

2) 252°. Τοῦτο διαφέρει τοῦ 180° κατὰ 72°.
Ὅθεν $ημ\,252°=-ημ\,72°$, $εφ\,252°=εφ\,72°$
$συν\,252°=-συν\,72°$, $σφ\,252°=σφ\,72°$.

3) 336°. Λαμβάνομεν τὸ τόξον $360°-336°=24°$.

36. Ἀλλὰ καὶ οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν μεταξὺ 45° καὶ 90° περιλαμβανομένων τόξων ἀνάγονται εἰς τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν μεταξὺ τῶν 0° καὶ 45° περιλαμβανομένων, ὡς συνάγεται ἐκ τῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν ***συμπληρωματικῶν τόξων,*** ἤτοι δύο τόξων ἐχόντων ἄθροισμα 90° καὶ τὰς ὁποίας δεικνύομεν κατωτέρω.



Σχ. 22

Ἔστωσαν δύο συμπληρωματικὰ τόξα τὰ (ΑΜ)=α καὶ (ΑΜ′)=90°—α. Ἐὰν φέρωμεν τὴν διχοτόμον Δ′ΟΔ τῆς πρώτης θετικῆς γωνίας ΑΟΒ καὶ παρατηρήσωμεν, ὅτι τὰ τόξα ΑΜ καὶ Μ′Β εἶναι ἴσα (διότι καὶ τὰ ΑΜ′ καὶ Μ′Β εἶναι συμπληρωματικά), εὐκόλως συνάγεται, ὅτι εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον ταύτην Δ′ΟΔ. Ἀλλ' εἶναι ημ(ΑΜ)=(ΡΜ), ημ(ΑΜ′)=(ΟΡ′), συν(ΑΜ)=

150° 135°

=(ΟΡ) καὶ συν(ΑΜ′)=(ΟΠ′)=(Ρ′Μ′), ἂν δὲ περιστραφῇ τὸ ἓν ἡμικύκλιον περὶ τὴν Δ′Δ, μέχρις ὅτου ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἄλλου, θὰ πέσῃ τὸ Μ ἐπὶ τοῦ Μ′, τὸ Α ἐπὶ τοῦ Β καὶ τὸ Ρ ἐπὶ τοῦ Ρ′, τὸ δὲ Ο θὰ μείνῃ ἀκίνητον, ἑπομένως οἱ ἀριθμοὶ (ΟΡ) καὶ (ΟΡ′) εἶναι ἴσοι κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν καὶ κατὰ τὸ σημεῖον, ὡς καὶ οἱ (ΡΜ) καὶ (Ρ′Μ′)· εἶναι ἄρα

ημ(ΑΜ′)=συν(ΑΜ) καὶ συν(ΑΜ′)=ημ(ΑΜ)

ἤτοι **ημ(90°—α)=συνα**

συν(90°—α)=ημα.

Διὰ τὰς εφα=(ΑΣ) καὶ εφ(90°—α)=ΑΣ′ παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΟΣ καὶ ΑΟΣ′, τὰ ὁποῖα εἶναι ὀρθογώνια ἔχουσι τὴν γωνίαν ΑΟΣ ἴσην τῇ γωνίᾳ ΑΣ′Ο, ἐπειδὴ ἀμφότεραι εἶναι συμπληρώματα τῆς αὐτῆς γωνίας ΑΟΣ′· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια, οἱ δὲ λόγοι $\frac{ΑΣ}{ΟΑ}$, $\frac{ΟΑ}{ΑΣ'}$ εἶναι ἴσοι καὶ κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν καὶ κατὰ σημεῖον· ἔχομεν ἑπομένως $\frac{(ΑΣ)}{(ΟΑ)}=\frac{(ΟΑ)}{(ΑΣ')}$, ἤτοι $(ΑΣ).(ΑΣ')=1$ εφα.εφ(90°—α)=1· ἐξ αὐτῆς δὲ λαμβάνομεν **εφ(90°—α)=σφα** καὶ

σφ(90°—α)=εφα.

Ὥστε ***ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν τόξων, ἅτινα περιέχονται μεταξὺ 0° καὶ 45°.***

Ἀσκήσεις.

48) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων 120°, 135°, 150°.

49) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων 225°, 240°, 300°, 330°.

50) Ὁμοίως ἑκάστου τῶν τόξων —30°, —45°, —60°.

51) Ὁμοίως ἑκάστου τῶν τόξων —150°, —240°, —315°.

52) Ὁμοίως ἑκάστου τῶν τόξων 72°, 54°, —72°, —54°.

53) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐν παντὶ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι ημΑ=ημ(Β+Γ), συνΒ=—συν(Γ+Α) καὶ εφΓ=—εφ(Α+Β).

54) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἐν παντὶ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι

$$ημ\frac{Α}{2}=συν\frac{Β+Γ}{2},\quad συν\frac{Β}{2}=ημ\frac{Γ+Α}{2}$$

$$εφ\frac{Γ}{2}=σφ\frac{Α+Β}{2}.$$

55) Νὰ δειχθῇ, ὅτι
$ημ120^\circ.συν330^\circ+συν(-300^\circ).ημ(-330^\circ)=1$.

56) Ὁμοίως, ὅτι
$συν210^\circ.ημ.150^\circ-ημ330^\circ.συν150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

57) Ὁμοίως, ὅτι
$ημ150^\circ.συν240^\circ-συν300^\circ.ημ210^\circ=0$.

58) Ὁμοίως, ὅτι
$σφ120^\circ+εφ210^\circ+εφ240^\circ+εφ300^\circ=0$.

59) Νὰ δειχθῇ ὁμοίως, ὅτι
$εφ225^\circ.σφ135^\circ-εφ315^\circ.σφ225^\circ=0$.

60) Ποῖον εἶναι τὸ σημεῖον ἑκάστου τῶν ἀθροισμάτων $ημ160^\circ+συν160^\circ$, $ημ128^\circ+συν128^\circ$, $ημ(-310^\circ)+συν(-310^\circ)$;

61) Ποῖον εἶναι τὸ σημεῖον ἑκάστης τῶν διαφορῶν $ημ220^\circ-συν220^\circ$, $ημ115^\circ-συν115^\circ$, $ημ(-100^\circ)-συν(-100^\circ)$;

62) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι διὰ τόξα διαφέροντα κατὰ 90° εἶναι $ημ(90^\circ+α)=συνα$, $συν(90^\circ+α)=-ημα$, $εφ(90^\circ+α)=-σφα$ καὶ $σφ(90^\circ+α)=-εφα$.

63) Ὁμοίως νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι διὰ τόξα ἔχοντα ἄθροισμα 270°, εἶναι $ημ(270^\circ-α)=-συνα$, $συν(270^\circ-α)=-ημα$, $εφ(270^\circ-α)=σφα$ καὶ $σφ(270^\circ-α)=εφα$.

64) Ὁμοίως νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι διὰ τόξα διαφέροντα κατὰ 270° εἶναι $ημ(270^\circ+α)=-συνα$, $συν(270^\circ+α)=ημα$, $εφ(270^\circ+α)=-σφα$ καὶ $σφ(270^\circ+α)=-εφ\,α$.

65) Νὰ δειχθῇ, ὅτι
$ημα+ημ(90^\circ-α)+ημ(180^\circ+α)+ημ(270^\circ-α)=0$.

66) Ὁμοίως, ὅτι
$συνα+συν(90^\circ+α)+συν(180^\circ+α)+συν(270^\circ+α)=0$.

67) Νὰ δειχθῇ ὁμοίως, ὅτι
$συνα+ημ(270^\circ+α)-ημ(270^\circ-α)+συν(180^\circ+α)=0$.

68) Ὁμοίως ὅτι
$σφα+εφ(180^\circ+α)+εφ(90^\circ+α)+εφ(360^\circ-α)=0$.

69) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ τόξα, μεταξὺ 0° καὶ 360°, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἡμίτονα $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}$

70) Ὁμοίως τὰ ἔχοντα συνημίτονα $-\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

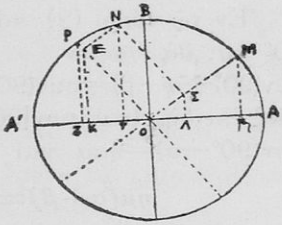
71) Ὁμοίως τὰ ἔχοντα ἐφαπτομένας $-1, \frac{1}{\sqrt{3}}$.

72) Ὁμοίως τὰ ἔχοντα συνεφαπτομένας $-\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ Ἢ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΔΥΟ ΤΟΞΩΝ

37. **Πρόβλημα.** ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ συνημίτονον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο τόξων α καὶ β, ἑκάστου τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον.***

Ἔστω ἓν οἱονδήποτε τόξον α, ἀρχῆς Α καὶ πέρατος Μ, δι' ὃ ἔχομεν συνα=(ΟΠ) καὶ ημα=(ΠΜ) καὶ ὁμοίως ἔστω ἕτερον τόξον β, ἀρχῆς Μ καὶ πέρατος Ν· ἐὰν ἤδη λάβωμεν δύο ἄξονας ὀρθογωνίους μεταξύ των, τοὺς ΟΜ καὶ ΟΡ, καὶ τοιούτους, ὥστε ἡ θετικὴ φορὰ τοῦ ΟΜ νὰ εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ Μ, θὰ ἔχωμεν συνβ = (ΟΣ) καὶ ημβ = (ΣΝ) = (ΟΕ)· τέλος τὸ συν. τοῦ τόξου α+β, οὗ ἡ ἀρχὴ εἶναι τὸ Α καὶ πέρας τὸ Ν, εἶναι (ΟΤ)· ἤτοι εἶναι συν(α+β)=(ΟΤ).



Σχ. 23

Ἀλλ' ἐὰν ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ Σ ἐπὶ τὸν ἄξονα Α'Α εἶναι τὸ σημεῖον Λ, θὰ ἔχωμεν (ΟΤ)=(ΟΛ)+(ΛΤ) (8). Ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΛΣ καὶ ΟΠΜ λαμβάνομεν (τὰ ΟΛ, ΟΠ, εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα καθ' ὅσον καὶ τὰ ΟΣ, ΟΜ εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα), $\frac{(ΟΛ)}{(ΟΠ)} = \frac{(ΟΣ)}{(ΟΜ)}$ ἢ $\frac{(ΟΛ)}{συνα} = \frac{συνβ}{1}$. ἤτοι (ΟΛ)=συνα.συνβ.

Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ ἀνύσματα ΣΝ καὶ ΟΕ εἶναι ὁμορρόπως ἴσα· ἄρα καὶ αἱ προβολαὶ αὐτῶν ΛΤ καὶ ΟΚ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα Α'Α εἶναι ὁμορρόπως ἴσαι (11)· ἐὰν δὲ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ Ρ ἐπὶ τὸν ἄξονα Α'Α εἶναι τὸ σημεῖον Ζ, θὰ ἔχωμεν ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΕΚ καὶ ΟΡΖ (τὸ ΟΚ καὶ τὸ ΟΖ εἶναι ὁμόρροπα, ὡς καὶ τὰ ΟΕ καὶ ΟΡ)

$$\frac{(ΟΚ)}{(ΟΖ)} = \frac{(ΟΕ)}{(ΟΡ)} \text{ ἢ } \frac{(ΟΚ)}{συν(90^\circ+α)} = \frac{ημβ}{1}, \text{ ἤτοι}$$

(ΟΚ)=(ΛΤ)=συν(90°+α)ημβ. Ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι συν(90°+α)

$=συν[90^0-(-α)]$ θὰ εἶναι $συν(90^0+α)=ημ(-α)=-ημα$· ὥστε εἶναι $(ΛΤ)=-ημαημβ$.

Ἐπειδὴ δὲ ἀνωτέρω ἔχομεν εὕρει $(ΟΤ)=(ΟΛ)+(ΛΤ)$, λαμβάνομεν τελικῶς

$$\boldsymbol{συν(α+β)=συνασυνβ-ημαημβ} \qquad (1)$$

38. Ἤδη τὸ συνημίτονον τῆς διαφορᾶς $α-β$ εὑρίσκεται, ἂν ἐν τῷ τύπῳ (1) ἀντικαταστήσωμεν τὸ $β$ διὰ τοῦ $-β$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $συν(α-β)=συνασυν(-β)-ημαημ(-β)$, ἤτοι

$$\boldsymbol{συν(α-β)=συνασυνβ+ημαημβ} \qquad (2)$$

ἐπειδὴ γνωρίζομεν, ὅτι εἶναι $συν(-β)=συνβ$ καὶ $ημ(-β)=-ημβ$.

Ἐν τῷ τύπῳ (2) πάλιν, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸ $α$ διὰ τοῦ $90^0-α$, θὰ ἔχωμεν

$συν(90^0-α-β)=συν(90^0-α)συνβ+ημ(90^0-α)ημβ$·

ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι $συν[90^0-(α+β)]=ημ(α+β)$,

$συν(90^0-α)=ημα$ καὶ $ημ(90^0-α)=συνα$, θὰ ἔχωμεν τελικῶς

$$\boldsymbol{ημ(α+β)=ημασυνβ+ημβσυνα} \qquad (3)$$

Τέλος ἐν τῷ τύπῳ (3) ἀντικαθιστῶμεν τὸ $β$ διὰ τοῦ $-β$ καὶ ἔχομεν

$$ημ(α-β)=ημασυν(-β)+ημ(-β)συνα, \text{ ἤτοι}$$

$$\boldsymbol{ημ(α-β)=ημασυνβ-ημβσυνα} \qquad (4)$$

39. Ἐὰν οἱ τύποι (3) καὶ (1) διαιρεθῶσι κατὰ μέλη, προκύπτει $\dfrac{ημ(α+β)}{συν(α+β)}=\dfrac{ημασυνβ+ημβσυνα}{συνασυνβ-ημαημβ}$ καὶ ἂν τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος ταύτης διαιρέσωμεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν διὰ τοῦ $συνα.συνβ$, προκύπτει

$$\frac{ημ(α+β)}{συν(α+β)}=\frac{\dfrac{ημα}{συνα}+\dfrac{ημβ}{συνβ}}{1-\dfrac{ημα}{συνα}\cdot\dfrac{ημβ}{συνβ}}$$

καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὰ πηλίκα ὑπὸ τῶν ἴσων αὐτοῖς ἐφαπτομένων, εὑρίσκομεν τὸν τύπον

$$εφ(α+β)=\frac{εφα+εφβ}{1-εφα.εφβ} \qquad (5)$$

διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἀθροίσματος α+β τῶν δύο τόξων α καὶ β, ὅταν ἔχωμεν τὰς ἐφαπτομένας αὐτῶν.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν ἐκ τῶν τύπων 4 καὶ 2 τὸν ἑπόμενον τύπον

$$εφ(α-β)=\frac{εφα-εφβ}{1+εφα.εφβ} \qquad (6)$$

διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὴν ἐφαπτομένην τῆς διαφορᾶς α—β τῶν δύο τόξων α καὶ β, ὅταν ἔχωμεν τὰς ἐφαπτομένας αὐτῶν.

Ἀσκήσεις.

73) Ἐὰν ημα= $\frac{3}{5}$ καὶ συνβ= $\frac{9}{41}$ καὶ τὰ τόξα α καὶ β περατοῦνται εἰς τὸ α´ τεταρτημόριον, εὑρεῖν τὰ ημ(α+β) καὶ συν(α—β).

74) Ὁμοίως εὑρεῖν τὰ ημ(α—β), καὶ συν(α+β), ἐὰν ημα= $\frac{15}{17}$ καὶ συνβ= $\frac{12}{13}$.

75) Ἐὰν τὸ πέρας τοῦ τόξου α κεῖται εἰς τὸ α´ τεταρτημόριον καὶ εἶναι ημα= $\frac{5}{13}$, εὑρεῖν τὰ συν(60°—α) καὶ ημ(60°+α).

76) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου 75° (75°=45°+30°).

77) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου 15° (15°=60°—45°).

78) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$συν(α+β)συνβ+ημ(α+β)ημβ=συνα.$$

79) Ὁμοίως ν' ἀποδειχθῇ ὅτι

$$ημ(α+β)ημ(α-β)=ημ^2α-ημ^2β.$$

80) Ὁμοίως ν' ἀποδειχθῇ ὅτι

$$συν(α+β)συν(α-β)=συν^2α+συν^2β-1.$$

81) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ημ(45°—α)=συν(45°+α).

82) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι

$συν(45^\circ - α)συν(45^\circ - β) - ημ(45^\circ - α)ημ(45 - β) = ημ(α + β)$.

83) Ὁμοίως ν' ἀποδειχθῇ ὅτι

$ημ(45^\circ + α)συν(45^\circ - β) + συν(45^\circ + α)ημ(45^\circ - β) = συν(α - β)$.

84) Ἐὰν $εφα = \frac{1}{70}$ καὶ $εφβ = \frac{1}{99}$, νὰ εὑρεθῇ ἡ $εφ(α - β)$

85) Ἐὰν τὰ πέρατα τῶν τόξων α καὶ β εἶναι εἰς τὸ α΄ τεταρτημόριον καὶ εἶναι $εφα = \frac{1}{2}$ καὶ $εφβ = \frac{1}{3}$, νὰ εὑρεθῇ πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ τόξον $α + β$.

86) Νὰ δειχθῇ ὅτι $εφ(α + β)εφ(α - β) = \frac{εφ^2α - εφ^2β}{1 - εφ^2α . εφ^2β}$.

87) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἐν παντὶ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι

$$ημΓσυνΑ + συνΓημΑ = ημΒ$$
$$συνΒσυνΓ - ημΒημΓ = -συνΑ.$$

88) Ὁμοίως ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐν παντὶ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι

$$ημ\frac{Β}{2}\ συν\frac{Γ}{2} + συν\frac{Β}{2}\ ημ\ \frac{Γ}{2} = συν\frac{Α}{2}$$
$$συν\frac{Α}{2}\ συν\frac{Β}{2} - ημ\frac{Α}{2}\ ημ\ \frac{Β}{2} = ημ\frac{Γ}{2}.$$

89) Νὰ δειχθῇ ὅτι $συν70^\circ συν15^\circ + συν20^\circ συν75^\circ = συν55^\circ$.

90) Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι $σφ(α + β) = \frac{σφα . σφβ - 1}{σφα + σφβ}$.

91) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $σφ(α - β)$ συναρτήσει τῶν σφα καὶ σφβ.

92) Ἐὰν $σφα = \frac{3}{2}$ καὶ $σφβ = \frac{5}{4}$, εὑρεῖν τὰς $σφ(α + β)$ καὶ $σφ(α - β)$.

93) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $εφα + εφβ = \frac{ημ(α + β)}{συνα . συνβ}$.

94) Ὁμοίως ὅτι $σφα + σφβ = \frac{ημ(α + β)}{ημα . ημβ}$.

95) Ὁμοίως ὅτι $εφα + σφβ = \frac{συν(α - β)}{συνα . ημβ}$.

96) Ὁμοίως ὅτι $σφα - εφβ = \frac{συν(α + β)}{ημα . συνβ}$.

97) Νὰ δειχθῇ ὅτι

$$εφ(α + β + γ) = \frac{εφα + εφβ + εφγ - εφα . εφβ . εφγ}{1 - εφβ . εφγ - εφγ . εφα - εφα . εφβ}.$$

ΕΚ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΟΥ α ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΟΥ 2α ΚΑΙ ΤΟΥ $\frac{\alpha}{2}$

40. Ἐὰν ὑποτεθῇ ἐν τοῖς τύποις 3, 1 καὶ 5 $\alpha=\beta$, προκύπτουσιν οἱ ἑπόμενοι τύποι

1 $$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha . \sigma\upsilon\nu\alpha$$
2 $$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \qquad (7)$$
3 $$\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$$

δι' ὧν εὑρίσκομεν τὸ ἡμίτονον, τὸ συνημίτονον καὶ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ διπλασίου τόξου, ὅταν ἔχωμεν τὸ ἡμίτονον, τὸ συνημίτονον καὶ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ τόξου.

41. Ὁ δεύτερος τῶν τύπων 7 γράφεται ὡς ἑξῆς.

4 $$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - (1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha) = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \qquad \text{ἢ}$$
5 $$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = (1-\eta\mu^2\alpha) - \eta\mu^2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$$

ἐκ τῶν τελευταίων δὲ τούτων εὑρίσκομεν

6 $$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$
7 $$\eta\mu^2\alpha = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \qquad (8)$$

καὶ ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν

8 $$\varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$$

ἤ, ἐὰν θέσωμεν $\frac{\alpha}{2}$ ἀντὶ α,

9 $$\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2} \quad \text{ἤτοι} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}$$
10 $$\eta\mu^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2} \quad \text{»} \quad \eta\mu\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}$$
11 $$\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} \quad \text{»} \quad \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}}$$

εὑρίσκομεν δὲ οὕτως ἐκ τοῦ συνημιτόνου τοῦ τόξου τὸ ἡμίτονον, τὸ συνημίτονον καὶ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἡμίσεος τόξου.

42. Ἐὰν ἐν τοῖς τύποις (7) ἀντικαταστήσωμεν τὸ α διὰ τοῦ $\frac{\alpha}{2}$, λαμβάνομεν

$$\eta\mu\alpha = 2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} - \eta\mu^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$$

Ἀλλ' οἱ δύο πρῶτοι τύποι ἐκ τούτων δύνανται νὰ γραφῶσιν

$$\eta\mu\alpha = \frac{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}+\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}},\quad \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}-\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}+\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}$$

ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς καὶ τοὺς παρονομαστὰς διὰ $\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}$, λαμβάνομεν

$$\eta\mu\alpha = \frac{\dfrac{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}}\qquad \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}\quad\dfrac{\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}}$$

ἤτοι $\boldsymbol{\eta\mu\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\alpha = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}}$

Διὰ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν, ὅτι εὑρίσκομεν τὴν εφα, ημα, συνα συναρτήσει τῆς $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$.

Ἀσκήσεις.

98 Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον 2α, ὅταν εἶναι 1ον) $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{3}{4}$ καὶ 2ον) $\boxed{\eta\mu\alpha = \frac{7}{11}}$.

Μιὰ Οἰκονόμου.—

99) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ τὸ συν2α, ὅταν εἶναι,

1ον) $\eta\mu\alpha = \frac{4}{5}$ καὶ 2ον) $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{15}{17}$.

100) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων 60° καὶ 90° ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων 30° καὶ 45°.

101) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου 36° ἐκ τῶν τοῦ 18°.

102) Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι

$$2\eta\mu 40^\circ . \eta\mu 50^\circ = \eta\mu 80^\circ$$
$$\sigma\upsilon\nu^2 20^\circ - \sigma\upsilon\nu^2 70^\circ = \sigma\upsilon\nu 40^\circ.$$

103) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου $\frac{45^\circ}{2}$ ἐκ τοῦ $\sigma\upsilon\nu 45^\circ$.

104) Ἐκ τοῦ συνημιτόνου τῶν $\left(\frac{90^\circ}{4}\right)$ νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{90^\circ}{8}\right)$, $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{90^\circ}{16}\right)$, ὡς καὶ τὰ ἡμίτονα, αἱ ἐφαπτόμεναι καὶ αἱ συνεφαπτόμεναι αὐτῶν.

105) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων $\frac{30^\circ}{2}$, $\frac{30^\circ}{4}$, $\frac{30^\circ}{8}$.

106) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ημ2α, ὅταν εἶναι $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{16}{63}$.

107) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ τὸ συν2α, ὅταν εἶναι $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{9}{16}$.

108) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι $2\eta\mu(45^\circ - \alpha)\sigma\upsilon\nu(45^\circ - \alpha) = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$.

109) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι $2\sigma\upsilon\nu^2(45^\circ - \alpha) - 1 = \eta\mu 2\alpha$.

110) Ὁμοίως ὅτι $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$.

111) Ὁμοίως ὅτι $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \sigma\varphi\alpha$.

112) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $\varepsilon\varphi\alpha - \sigma\varphi\alpha = -2\sigma\varphi 2\alpha$.

113) Ὁμοίως ὅτι $\sigma\varphi 2\alpha = \frac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\sigma\varphi\alpha}$.

114) Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι $\eta\mu 3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$.

115) Ὁμοίως νὰ δειχθῇ ὅτι $\sigma\upsilon\nu 3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$.

116) Ὁμοίως νὰ δειχθῇ ὅτι $\varepsilon\varphi 3\alpha = \frac{3\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi^3\alpha}{1-3\varepsilon\varphi^2\alpha}$.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

43. Ἐκ τῶν θεμελιωδῶν τύπων (3), (4), (1), (2) τῶν ἐδαφίων 38 καὶ 37

$$ημ(α+β)=ημα.συνβ+ημβ.συνα$$
$$ημ(α-β)=ημα.συνβ-ημβ.συνα$$
$$συν(α+β)=συνα.συνβ-ημα.ημβ$$
$$συν(α-β)=συνα.συνβ+ημα.ημβ$$

εὑρίσκομεν εὐκόλως τοὺς ἑξῆς τύπους διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως

(α′) $ημ(α+β)+ημ(α-β)=2ημα.συνβ$
(β′) $ημ(α+β)-ημ(α-β)=2συνα.ημβ$
(γ′) $συν(α+β)+συν(α-β)=2συνα.συνβ$ (1)
(δ′) $συν(α-β)-συν(α+β)=2ημα.ημβ$

Διὰ τῶν ἀνωτέρω τύπων, οἱ ὁποῖοι γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς

$$2ημα.συνβ=ημ(α+β)+ημ(α-β)$$
$$2συνα.ημβ=ημ(α+β)-ημ(α-β)$$
$$2συνα.συνβ=συν(α+β)+συν(α-β)$$
$$2ημα.ημβ=συν(α-β)-συν(α+β)$$

παρατηροῦμεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν γινόμενα ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων εἰς ἀθροίσματα καὶ διαφοράς. Ἀλλ' ὁ μετασχηματισμός, τοῦ ὁποίου γίνεται μεγαλυτέρα χρῆσις, εἶναι ἐκεῖνος, διὰ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ μετατρέψωμεν ἀθροίσματα ἢ διαφορὰς εἰς γινόμενα· καὶ τοῦτο διότι ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος ἐπιτρέπει εὔκολον ἐφαρμογὴν τοῦ λογισμοῦ διὰ τῶν λογαρίθμων.

Πρὸς τοῦτο δίδομεν εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους (1) διάφορον μορφὴν ὡς ἑξῆς:

Θετομεν $α+β=A$ καὶ $α-β=B$, ὁπότε προκύπτει

$$α=\frac{A+B}{2} \quad \text{καὶ} \quad β=\frac{A-B}{2}.$$

οἱ δὲ ἀνωτέρω τύποι γίνονται

(α′) $$ημA+ημB=2ημ\frac{A+B}{2}.συν\frac{A-B}{2}$$

(β′) $$ημA-ημB=2ημ\frac{A-B}{2}.συν\frac{A+B}{2}.$$

(γ') $$\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B=2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$$

(δ') $$\sigma\upsilon\nu B-\sigma\upsilon\nu A=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\cdot\eta\mu\frac{A-B}{2}$$

44. Ἐκ τῶν δύο πρώτων προκύπτει ὁ ἑξῆς τύπος διὰ τῆς διαιρέσεως

$$\frac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\eta\mu A+\eta\mu B}=\frac{2\eta\mu\frac{A-B}{2}\ \sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}}{2\eta\mu\frac{A+B}{2}\ \sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}}=\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}\,\sigma\varphi\frac{A+B}{2},$$

$$= \varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}}$$

ἤτοι $$\frac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\eta\mu A+\eta\mu B}=\frac{\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}}{\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}}$$

Σημ. Παραδείγματα μετασχηματισμοῦ ἀθροισμάτων ἢ διαφορῶν ἐφαπτομένων κ. τ. λ. εἰς γινόμενα δίδουσιν αἱ ἀσκήσεις 93—96.

Ἐφαρμογή. Νὰ μετασχηματισθῶσιν εἰς γινόμενα τὰ ἀθροίσματα $1+\sigma\upsilon\nu\alpha$, $1+\varepsilon\varphi\alpha$.

1ον) Ἐπειδὴ $1=\sigma\upsilon\nu 0^\circ$, ἔχομεν

$$1+\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\upsilon\nu 0^\circ+\sigma\upsilon\nu\alpha=2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}$$

2ον) $$1+\varepsilon\varphi\alpha=\varepsilon\varphi 45^\circ+\varepsilon\varphi\alpha=\frac{\eta\mu(45^\circ+\alpha)}{\sigma\upsilon\nu 45^\circ\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{2\eta\mu(45^\circ+\alpha)}{\sqrt{2}\,.\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\ \eta\mu(45^\circ+\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\alpha}.$$

Ἀσκήσεις.

117) Νὰ μετασχηματισθῶσιν εἰς ἀθροίσματα τὰ γινόμενα:

$2\eta\mu 35^\circ.\sigma\upsilon\nu 25^\circ$ $\quad$ $2\sigma\upsilon\nu 40^\circ.\eta\mu 50^\circ$

$2\sigma\upsilon\nu 85^\circ.\sigma\upsilon\nu 35^\circ$ $\quad$ $2\eta\mu 68^\circ.\eta\mu 22^\circ$

118) Ὁμοίως τὰ

$\eta\mu 12^\circ.\sigma\upsilon\nu 18^\circ$ $\quad$ $\sigma\upsilon\nu 70^\circ.\eta\mu 20^\circ$

$\sigma\upsilon\nu 22^\circ 45'.\sigma\upsilon\nu 97^\circ 15'$ $\quad$ $\eta\mu 78^\circ 40'.\eta\mu 71^\circ 20'$

119) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι

$$2\text{συν}50^\circ.\text{ημ}10^\circ+2\text{ημ}5^\circ.\text{συν}35^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

120) Ὁμοίως ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι

$$2\text{ημ}40^\circ.\text{συν}20^\circ+2\text{ημ}50^\circ.\text{ημ}20^\circ=\sqrt{3}.$$

121) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$$2\text{ημ}52^\circ30'.\text{ημ}37^\circ30'$$

122) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐν παντὶ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι

$$2\text{ημ}\frac{\Gamma}{2}\,\text{συν}\frac{A-B}{2}=\text{συν}A+\text{συν}B.$$

123) Νὰ μετασχηματισθῶσιν εἰς γινόμενα τὰ

$\text{ημ}30^\circ+\text{ημ}20^\circ$ $\qquad$ $\text{συν}64^\circ+\text{συν}24^\circ$

$\text{ημ}45^\circ-\text{ημ}25^\circ$ $\qquad$ $\text{συν}45^\circ-\text{συν}105^\circ$.

124) Ὁμοίως νὰ μετασχηματισθῶσιν εἰς γινόμενα τὰ

$\text{συν}66^\circ+\text{συν}21^\circ$ $\qquad$ $\text{συν}82^\circ30'+\text{συν}9^\circ30'$.

125) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ $\text{ημ}75^\circ+\text{ημ}15^\circ$.

126) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ $\dfrac{\text{ημ}75^\circ-\text{ημ}15^\circ}{\text{συν}75^\circ+\text{συν}15^\circ}$.

127) Νὰ μετασχηματισθῶσιν εἰς γινόμενα τὰ

$$1-\text{συν}\alpha,\ 1+\text{ημ}\alpha,\ 1-\text{ημ}\alpha.$$

128) Νὰ δειχθῇ ὅτι $\dfrac{\text{ημ}5\alpha-\text{ημ}3\alpha}{\text{συν}5\alpha+\text{συν}3\alpha}=\text{εφ}\alpha$.

129) Ὁμοίως νὰ δειχθῇ ὅτι $\dfrac{\text{ημ}5\alpha-\text{ημ}3\alpha}{\text{συν}3\alpha+\text{συν}5\alpha}=\text{εφ}\alpha$.

130) Ὁμοίως νὰ δειχθῇ ὅτι $\dfrac{\text{ημ}\alpha+\text{ημ}2\alpha}{\text{συν}\alpha-\text{συν}2\alpha}=\text{σφ}\dfrac{\alpha}{2}$.

131) Ὁμοίως νὰ δειχθῇ ὅτι $\dfrac{\text{συν}2\beta-\text{συν}2\alpha}{\text{ημ}2\beta+\text{ημ}2\alpha}=\text{εφ}(\alpha-\beta)$.

132) Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι $\text{ημ}50^\circ-\text{ημ}70^\circ+\text{ημ}10^\circ=0$.

133) Ὁμοίως ὅτι εἶναι

$$\text{ημ}10^\circ+\text{ημ}20^\circ+\text{ημ}40^\circ+\text{ημ}50^\circ=\text{ημ}70^\circ+\text{ημ}80^\circ$$

134) Νὰ μετασχηματισθῶσιν εἰς γινόμενα τὰ

$$\text{σφ}\alpha+\text{σφ}\beta,\ \text{εφ}\alpha-\text{σφ}\beta,\ 1-\text{εφ}\alpha.$$

135) Νὰ μετασχηματισθῶσιν εἰς γινόμενα τὰ

$\text{ημ}\alpha+\text{συν}\beta$, $\text{ημ}\alpha-\text{συν}\beta$ (θέτομεν $\beta=90^\circ-\beta'$)

136) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι

$$\frac{\text{συν}\alpha+\text{συν}\beta}{\text{συν}\beta-\text{συν}\alpha}=\text{σφ}\frac{\alpha+\beta}{2}.\ \text{σφ}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

137) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι

$$\text{εφ}2\alpha-\text{εφ}\alpha=\frac{\text{εφ}\alpha}{\text{συν}2\alpha}$$

138) Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta+\eta\mu\gamma=4\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2}.$$

139) Ὁμοίως ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\gamma-1=4\eta\mu\frac{\alpha}{2}\eta\mu\frac{\beta}{2}\eta\mu\frac{\gamma}{2}.$$

140) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐν παντὶ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι

$$\eta\mu 2A+\eta\mu 2B+\eta\mu 2\Gamma=4\eta\mu A.\eta\mu B.\eta\mu\Gamma.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Κατασκευὴ τῶν πινάκων.

45. Πίναξ περιέχων τὰς χορδὰς τῶν τόξων (τοὐτέστι τὰ ἡμίτονα διπλᾶ), ἀπὸ μοίρας εἰς μοίραν προχωρούντων, εὑρίσκεται ἤδη ἐν τῇ Μαθηματικῇ Συντάξει τοῦ Ἕλληνος ἀστρονόμου Πτολεμαίου.

Οἱ σήμερον ἐν χρήσει τελειότεροι πίνακες εἶναι οἱ τοῦ Λαλάνδου, ἐν οἷς τὰ τόξα προχωροῦσι κατὰ λεπτὸν καὶ οἱ τοῦ Καλλέτου ἐν οἷς προχωροῦσι κατὰ 10″.

Ὁ λογισμὸς τῶν τοιούτων πινάκων στηρίζεται ἐπὶ τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων (31)· ἐὰν τῷ ὄντι εὑρεθῇ τὸ ημ1′, ἐξ αὐτοῦ εὑρίσκεται ἀμέσως καὶ τὸ συνημίτονον αὐτοῦ, ἐκ δὲ τούτων διὰ τῶν θεμελιωδῶν τύπων (1), (3) τῶν ἐδαφίων 38, 39 εὑρίσκεται τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου τῶν 2′· ἐκ τούτων πάλιν διὰ τῶν αὐτῶν τύπων εὑρίσκεται τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ ἀθροίσματος $2'+1'$ ἤτοι 3′. Ἔπειτα τοῦ ἀθροίσματος $3'+1'$ καὶ οὕτω καθεξῆς, ἐφ᾽ ὅσον θέλομεν. Ἔχοντες οὕτω τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα, εὑρίσκομεν καὶ τὰς ἐφαπτομένας καὶ τὰς συνεφαπτομένας τῶν αὐτῶν τόξων.

46. Ἐπειδὴ οἱ λογισμοὶ γίνονται συνήθως διὰ τῶν λογαρίθμων, ἀναγκαιοῦσιν ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς σπανιώτατα οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ αὐτοί, συχνότατα δὲ οἱ λογάριθμοι αὐτῶν· διὰ τοῦτο οἱ πίνακες περιέχουσιν ἀμέσως τοὺς λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

ΔΙΑΤΑΞΙΣ ΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ ΤΟΥ ΛΑΛΑΝΔΟΥ

47. Αὔτη φαίνεται ἐκ τοῦ ἑπομένου πίνακος.

18°

43		42		39		38	
1''	0,72	1	0,7	1	0,65	1	0,63
2	1,43	2	1,4	2	1,30	2	1,27
3	2,15	3	2,1	3	1,95	3	1,90
4	2,87	4	2,8	4	2,60	4	2,53
5	3,58	5	3,5	5	3,25	5	3,17
6	4,30	6	4,2	6	3,90	6	3,80
7	5,02	7	4,9	7	4,55	7	4,43
8	6,73	8	5,6	8	5,20	8	5,07
9	6,45	9	6,3	9	5,85	9	5,70

	Sin.	D	Tang.	D	Cotg.	Cos.	D	
0	$\bar{1}$,48998	39	$\bar{1}$,51178	43	0,48822	$\bar{1}$,97821	4	**60**
1	9037	39	1221	43	8779	7817	5	59
2	9076	39	1264	42	8736	7812	4	58
3	9115	38	1306	43	8694	7808	4	57
4	9153	39	1349	43	8641	7804	4	56
5	9192	39	1392	43	8608	7800	4	55
6	9231	38	1435	43	8565	7796	4	54
7	9269	39	1478	42	8522	7792	4	53
8	9308	39	1520	43	8480	7788	4	52
9	9347	38	1563	43	8437	7784	5	51
10	9385	39	1606	42	8394	7779	4	**50**
11	9424	38	1648	43	8352	7775	4	49
12	9462	38	1691	43	8309	7771	4	48
13	9500	39	1734	42	8266	7767	4	47
14	9539	38	1776	43	8224	7763	4	46
15	9577	38	1819	42	8181	7759	5	45
16	9615	39	1861	42	8139	7754	4	44
17	9654	38	1903	43	8097	7750	4	43
18	9692	38	1946	43	8054	7746	4	42
19	9730	38	1998	42	8012	7742	4	41
20	9768	38	2031	42	7969	7738	4	**40**
21	9806	38	2073	42	7927	7734	5	39
22	9844	38	2115	42	7885	7729	4	38
23	9882	38	2157	43	7843	7725	4	37
24	9920	38	2200	42	7800	7721	4	36
25	9958	38	2242	42	7758	7717	4	35
26	$\bar{1}$,49996	38	2284	42	7716	7713	5	34
27	$\bar{1}$,50034	38	2326	42	7674	7708	4	33
28	0072	38	2368	42	7632	7704	4	32
29	0110	38	2410	42	7590	7700	4	31
30	$\bar{1}$,50148		$\bar{1}$,52452		0,47548	$\bar{1}$,97696		**30**
	Cos.		Cotg.		Tang.	Sin.		

Αἱ μοῖραι τῶν τόξων τῶν μικροτέρων τῶν 45° εἶναι γραμμέναι εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς σελίδος, τὰ δὲ πρῶτα λεπτὰ ἐν τῇ πρώτῃ πρὸς τ' ἀριστερᾷ στήλῃ, ἐν ᾗ ταῦτα προχωροῦσι πρὸς τὰ κάτω αὐξανόμενα· φέρει δὲ ἡ στήλη αὕτη ἐπὶ κεφαλῆς τὸ σημεῖον ′. Ὁ δὲ λογάριθμος ἑκάστου τῶν τεσσάρων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν δοθέντος τόξου εὑρίσκεται γραμμένος ἐν τῷ τόπῳ, ἔνθα ἡ τὰ πρῶτα λεπτὰ τοῦ δοθέντος τόξου ἔχουσα ὁριζοντία σειρὰ διασταυροῦται μετὰ τῆς στήλης, ἐφ' ἧς εὑρίσκεται ἐπιγεγραμμένον τὸ ὄνομα τοῦ ἀριθμοῦ. Ἡ τοὺς λογαρίθμους τῶν ἡμιτόνων ἔχουσα στήλη φέρει ἐπὶ κεφαλῆς τὰ γράμματα sin. (=sinus)· ἡ δὲ τοὺς τῶν ἐφαπτομένων τὰ γράμματα tang. (=tangentes), ἡ τοὺς τῶν συνεφαπτομένων τὰ cotg. (cotangentes) καὶ ἡ τοὺς τῶν συνημιτόνων τὰ cos. (cosinus). Ἐπειδὴ δὲ πολλοὶ ἐφεξῆς λογάριθμοι ἔχουσι κοινὰ τὰ δύο πρῶτα ψηφία (τὸ χαρακτηριστικὸν καὶ τὰ δέκατα), γράφονται ταῦτα ἅπαξ καὶ νοοῦνται ἐπαναλαμβανόμενα τὰ αὐτά, μέχρις οὗ ἀλλαχθῶσιν. Ἐπαναλαμβάνονται ὅμως πρὸς εὐκολίαν τῆς εὑρέσεως αὐτῶν εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ εἰς τὸ τέλος ἑκάστης σελίδος. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον βλέπομεν ὅτι εἶναι

$$\text{λογ ημ}(18^\circ\ 10')=\overline{1},49385$$
$$\text{λογ εφ}(18^\circ\ 13')=\overline{1},51734$$
$$\text{λογ σφ}(18^\circ\ 0')=0,48822$$
$$\text{λογ συν}(18^\circ\ 30')=\overline{1},97696$$

Τῶν τόξων τῶν μεγαλυτέρων τῶν 45° αἱ μὲν μοῖραι εὑρίσκονται εἰς τὸ κάτω μέρος τῆς σελίδος, τὰ δὲ πρῶτα λεπτὰ αὐτῶν εἰς τὴν τελευταίαν στήλην πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ προχωροῦσι πρὸς τὰ ἄνω αὐξανόμενα· ἐγράφησαν δὲ οὕτω τὰ τόξα ταῦτα, ὥστε ἕκαστον νὰ εὑρίσκηται μετὰ τοῦ συμπληρώματος αὐτοῦ εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ οἱ λογάριθμοι τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἀμφοτέρων τῶν συμπληρωματικῶν τόξων νὰ εὑρίσκωνται ἐν μιᾷ καὶ τῇ αὐτῇ ὁριζοντίᾳ σειρᾷ. Τὸ εἶδος τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τὰ τόξα ταῦτα ἐγράφη ὑποκάτω τῶν στηλῶν, ἐγράφη δὲ cos ὑπὸ τὴν στήλην τῶν sin καὶ sin ὑπὸ τὴν στήλην τῶν cos, διότι τὸ ἡμίτονον τοῦ ἑτέρου τῶν συμπληρωματικῶν τόξων ἰσοῦται πρὸς τὸ συνημίτονον τοῦ ἄλλου· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἐγράφη cotg ὑπὸ τὴν στήλην τῶν tang καὶ τἀνάπαλιν tang ὑπὸ τὴν στήλην τῶν cotg.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον βλέπομεν ὅτι εἶναι

λογ συν(71° 50′)=$\bar{1}$,49385=λογ ημ(18° 10′)
λογ σφ(71° 47′)=1,51734=λογ ημ(18° 13′)
λογ εφ(71° 60′)=$\bar{0}$,48822=λογ σφ(18° 0′)
λογ ημ(71° 30′)=$\bar{1}$,97696=λογ συν(18° 30′)

48. Οἱ λογάριθμοι τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων εἶναι ἀρνητικοὶ ἀριθμοί, διότι ταῦτα εἶναι μικρότερα τῆς μονάδος· ἐν τοῖς πίναξιν ἐτράπησαν εἰς ἄλλους, ἔχοντας μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν ἀρνητικὸν [1] (Στοιχεῖα Ἀλγέβρας).

Πρὸς τὰ δεξιὰ ἑκάστης στήλης λογαρίθμων ὑπάρχει ἄλλη στενωτέρα, ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ γράμμα D (Différences)· ἐν αὐτῇ εὑρίσκονται γραμμέναι αἱ διαφοραὶ δύο ἐφεξῆς λογαρίθμων, τουτέστιν ἡ αὔξησις ἢ ἡ ἐλάττωσις ἑκάστου λογαρίθμου, ἡ πρὸς τὴν αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ 1′ ἀντιστοιχοῦσα. Τὴν χρῆσιν τῶν διαφορῶν τούτων θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

49. Οἱ λογάριθμοι τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν συνεφαπτομένων ἔχουσι τὰς αὐτὰς διαφοράς· καὶ ὄντως ἐκ τῆς ἰσότητος εφα. σφα=1 ἕπεται

λογεφα+λογσφα=0 ἢ λογσφα=−λογεφα·

τουτέστιν οἱ λογάριθμοι τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς συνεφαπτομένης τοῦ αὐτοῦ τόξου εἶναι πάντοτε ἀντίθετοι ἀριθμοί· ἑπομένως, ἐὰν αὐξηθῇ ὁ ἕτερος αὐτῶν κατὰ δ, θὰ ἐλαττωθῇ ὁ ἄλλος κατὰ δ.

ΧΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

50. Ἡ χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἑπομένων δύο προβλημάτων.

Πρόβλημα 1ον. ***Δοθέντος τόξου εὑρεῖν τὸν λογάριθμον ἑνὸς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν αὐτοῦ.***

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου περιλαμβάνει δύο περιπτώσεις.

α′) Ἂν τὸ δοθὲν τόξον περιέχῃ μόνον μοίρας καὶ πρῶτα

---

(1) Εἰς τοὺς πίνακας τοῦ Καλλέτου προσετέθησαν 10 θετικαὶ μονάδες εἰς ἕκαστον τῶν ἀρνητικῶν λογαρίθμων, ἵνα καταστῶσι θετικοί, τοῦτο ὅμως βλάπτει ἢ ὠφελεῖ εἰς τὰς ἐφαρμογάς.

λεπτά, ὁ ζητούμενος λογάριθμος εὑρίσκεται ἀμέσως ἐν τοῖς πίναξιν.

Οὕτως εὑρίσκεται λογ ημ(75° 18′)= $\overline{1}$,98555
λογ συν(83° 15′)= $\overline{1}$,07018
λογ εφ(14° 16′)= $\overline{1}$,40531
λογ σφ(87° 14′)= $\overline{2}$,68417

β′) Ἂν τὸ δοθὲν τόξον ἔχῃ καὶ μέρη τοῦ πρώτου λεπτοῦ.

Ὑποθέσωμεν, π. χ. ὅτι ζητεῖται ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου τοῦ τόξου 44°17′22″. Ἐπειδὴ τὸ τόξον τοῦτο περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν 44° 17′ καὶ 44° 18′ καὶ τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ἡμιτόνων τῶν τόξων τούτων καὶ ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου ὡσαύτως· εἶναι δὲ

λογ ημ (44° 17′)= $\overline{1}$,84398
λογ ημ (44° 18′)= $\overline{1}$,84411

Ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων τούτων εἶναι 13 (μονάδες τῆς τελευταίας τάξεως), ἀλλὰ καὶ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἑπομένων εἶναι πάλιν 13 καὶ ἡ διαφορὰ αὕτη δύο ἐφεξῆς λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων ἐπὶ πολὺ διατηρεῖται· ὥστε δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν, ὅτι ἡ ***αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν τόξων,*** ὅτε σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Δι᾽ αὔξησιν ἑνὸς λεπτοῦ ἀπὸ τόξου 44° 17′ εἰς τόξον 44° 18′ ηὐξήθη ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου κατὰ 13 (ἑκατοντάκις χιλιοστά)· δι᾽ αὔξησιν 22′, ἤτοι $\frac{22}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ ἀπὸ τοῦ τόξου 44° 17′ εἰς τὸ δοθὲν τόξον 44° 17′ 22″, ὁ εἰρημένος λογάριθμος θὰ αὐξηθῇ κατὰ $\frac{22}{60} \cdot 13$, ἤτοι κατὰ 5 (ὡς ἔγγιστα)· ὥστε πρέπει νὰ προσθέσωμεν 5 μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως εἰς τὸν λογημ(44° 17′), ἵνα εὕρωμεν τὸν λογημ (44° 17′ 22″), ἑπομένως εἶναι

λογημ (44° 17′ 22″)= 1,84403.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον εὑρίσκονται καὶ οἱ ἑπόμενοι λογάριθμοι.

1) λογεφ (14° 38′ 40″)·

ἔχομεν λογεφ (14° 38′)= $\overline{1}$,41681, διαφορὰ 52·

διὰ 40″ προστίθενται $\frac{40}{60} \cdot 52 = 35$, ὅθεν λογεφ$(14^\circ\ 38'\ 40'') = \overline{1},41716$

2) λογσφ$(8^\circ\ 9'\ 10'')$

ἔχομεν λογσφ$(8^\circ\ 9') = 0,84402$, διαφορὰ 90

διὰ 10″ ἀφαιροῦνται $\dfrac{10}{60}\ 90 = 15$

ὅθεν λογσφ$(8^\circ\ 9'\ 10'') = 0,84387$

3) λογσυν$(69^\circ\ 14'\ 25'')$

ἔχομεν λογσυν$(69^\circ\ 14') = \overline{1},54969$, διαφορὰ 33

διὰ 25″ ἀφαιροῦνται $\dfrac{25}{60} \cdot 33 = 14$

ὅθεν λογ συν $(69^\circ\ 14'\ 25'') = \overline{1},54955$.

Παρατήρησις. Τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν ἐφαπτομένων οἱ λογάριθμοι προβαίνουσιν ἐν τοῖς πίναξιν αὐξανόμενοι, τῶν συνημιτόνων καὶ τῶν συνεφαπτομένων ἐλαττούμενοι.

Πρόβλημα 2ον. ***Δοθέντος τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, εὑρεῖν τὸ ἀντιστοιχοῦν τόξον·*** (τὸ τόξον τοῦτο ὑποτίθεται πάντοτε μικρότερον τῶν 90°).

Ἂν ὁ δοθεὶς λογάριθμος περιέχηται ἐν τοῖς πίναξι ἐν τῇ οἰκείᾳ στήλῃ, τὸ τόξον εὑρίσκεται ἀμέσως· ἂν π. χ. δοθῇ

$$\text{λογσυνα} = \overline{1},97615$$

εὑρίσκομεν ἐκ τῶν πινάκων ἀμέσως $\alpha = 18^\circ\ 49'$.

Ὁμοίως ἂν δοθῇ λογεφχ$=0,03060$

εὑρίσκομεν ἐκ τῶν πινάκων $\chi = 47^\circ\ 1'$.

Ἂν δὲ ὁ δοθεὶς λογάριθμος δὲν ὑπάρχῃ ἐν τοῖς πίναξι, θὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ δύο ἐφεξῆς λογαρίθμων τοῦ ρηθέντος ἀριθμοῦ καὶ ἑπομένως τὸ ζητούμενον τόξον θὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ τῶν πρὸς αὐτοὺς ἀντιστοιχούντων τόξων, ὧν ἡ διαφορὰ εἶναι 1′.

Ἂν π. χ. δοθῇ λογημα$= \overline{1},40891$

εὑρίσκομεν ἐν τῇ στήλῃ τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων

$$\overline{1},40873 = \text{λογημ}\ (14^\circ\ 51')$$
$$\overline{1},40921 = \text{λογημ}\ (14^\circ\ 52')$$

ὁ δοθεὶς λογάριθμος $\overline{1},40891$ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τούτων, οἵτινες διαφέρουσι κατὰ 48· παραδεχόμενοι δέ, ὡς καὶ πρίν, ὅτι ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν τόξων, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς· ἂν ὁ λογάριθμος τοῦ ημ(14°51), ὅστις εἶναι $\overline{1},40873$, αὐξηθῇ κατὰ 38 (μονάδας τῆς κατωτάτης τάξεως), τὸ τόξον αὐξάνεται κατὰ 1′, ἤτοι 60″· ἂν δὲ ὁ αὐτὸς λογάριθμος αὐξηθῇ μόνον κατὰ 18 (ὅτε γίνεται ἴσος τῷ δοθέντι), τὸ τόξον θὰ αὐξηθῇ κατὰ $60''.\frac{18}{48}$, ἤτοι κατὰ 22″ ὡς ἔγγιστα· ὥστε εἶναι $\alpha = 14^\circ\, 51'\, 22''$.

Ὁμοίως, ἂν δοθῇ λογ συνβ$=\overline{1},89885$,

εὑρίσκομεν $\overline{1},89888$=λογ συν(37° 36′)

καὶ $\overline{1},89879$=λογ συν(37° 37′)

ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων τούτων εἶναι 9, ὁ δὲ δοθεὶς διαφέρει τοῦ πρώτου κατὰ 3, ἕπεται, ὅτι πρέπει νὰ αὐξηθῇ τὸ τόξον 37° 36′ κατὰ τὰ $\frac{3}{9}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ, ἤτοι κατὰ 20″, ἵνα γίνῃ ἴσον τῷ τόξῳ β· ὥστε εἶναι $\beta = 37^\circ\, 36'\, 20''$.

Ὁμοίως, ἂν δοθῇ λογεφχ=1,25849,

εὑρίσκομεν 1,25708=λογ εφ (86° 50′).

1,25937=λογ εφ (86° 51′).

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ἂν ὁ λογάριθμος 1,25708 αὐξηθῇ κατὰ 229 (ὅτε γίνεται 1,25937), τὸ ἀντιστοιχοῦν τόξον 86°50′, αὐξάνεται κατὰ 1′· ὥστε, ἂν ὁ αὐτὸς λογάριθμος αὐξηθῇ μόνον κατὰ 141 (ὅτε γίνεται ἴσος τῷ δοθέντι), θὰ αὐξηθῇ τὸ τόξον κατὰ $60''.\ \frac{141}{229}$, ἤτοι κατὰ 37″ περίπου· ὥστε εἶναι $\chi = 86^\circ 50' 37''$.

Ἔστω πρὸς τούτοις λογσφω=0,11101.

Ἔχομεν 0,11110=λογσφ(37° 45′)· διαφορὰ 26·

διὰ διαφορὰν 9 (ἐπὶ ἔλαττον) πρέπει νὰ αὐξηθῇ τὸ τόξον κατὰ $60''.\ \frac{9}{26}$, ἤτοι κατὰ 21″ περίπου, ὥστε εἶναι $\omega = 37^\circ\, 45'\, 21''$.

51. Παρατήρησις. Ἐνίοτε, ἀντὶ νὰ δοθῇ ὁ λογάριθμος τριγωνομετρικοῦ τινος ἀριθμοῦ, δίδεται αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς καὶ ζητεῖται τὸ ἀντιστοιχοῦν τόξον· τότε διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

1η) Ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι θετικός, εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ (ἐκ τοῦ πίνακος, ὅστις περιέχει τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν) καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ τόξον.

Ἂν π. χ. ζητῆται τὸ τόξον χ, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι ημχ$= \frac{1}{5}$,

ἔχομεν λογημχ=λογ $\left(\frac{1}{5}\right) = -$λογ$5 = \overline{1},30103$.

Ὅθεν κατὰ τὰ προηγούμενα εὑρίσκομεν $\chi = 11^\circ\ 32'\ 13''$.

Ὁμοίως, ἂν ζητῆται τὸ τόξον φ, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{8}{\sqrt{45}}$$

θὰ ἔχωμεν $\lambda o\gamma \varepsilon\varphi\varphi = \lambda o\gamma 8 - \frac{1}{2} \lambda o\gamma\, 45$

$$\lambda o\gamma 8 = 0{,}90309$$

$\lambda o\gamma 45 = 1{,}65321$ $\qquad \frac{1}{2}\lambda o\gamma 45 = 0{,}82660$

Ὅθεν $\qquad \lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\varphi = 0{,}07649$

καὶ κατὰ τὰ προηγουμένως ἐκτεθέντα εὑρίσκομεν ἐκ τῶν πινάκων

$$\varphi = 50^\circ\ 1'\ 12''.$$

2α) Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι ἀρνητικός, τότε, ἀντὶ τοῦ ζητουμένου τόξου, εὑρίσκομεν τὸ παραπλήρωμα αὐτοῦ, ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι συνημίτονον ἢ ἐφαπτομένη ἢ συνεφαπτομένη· διότι τὸ παραπλήρωμα θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν θετικόν· εὑρεθέντος δὲ τοῦ παραπληρώματος αὐτοῦ, εὑρίσκεται ἀμέσως τὸ ζητούμενον τόξον.

Ἐὰν π. χ. δοθῇ $\varepsilon\varphi\omega = -4$

παριστῶντες τὸ παραπλήρωμα τοῦ ω διὰ φ θὰ ἔχωμεν

$$\varepsilon\varphi\varphi = \varepsilon\varphi(180^\circ - \omega) = 4$$

Ὅθεν $\qquad \lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\varphi = \lambda o\gamma 4 = 0{,}60206$

καὶ $\qquad \varphi = 75^\circ\ 57'\ 50''$

ἑπομένως $\qquad \omega = 104^\circ\ 2'\ 10''$

Ἐὰν δὲ ὁ δοθεὶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι ἡμίτονον, τὸ ἀντιστοιχοῦν πρὸς αὐτὸν τόξον θὰ ὑπερβαίνῃ τὰς 180° καὶ ἀφαιροῦντες ἀπ᾿ αὐτοῦ τὰς 180° θὰ ἔχωμεν τόξον, οὗτινος τὸ ἡμίτονον θὰ εἶναι (34, β) θετικὸν καὶ ἴσον τῷ δοθέντι. Εὑρόντες δὲ τὸ τόξον τοῦτο προσθέτομεν εἰς αὐτὸ τὰς 180° καὶ ἔχομεν τὸ ζητούμενον.

Ἐὰν π. χ. δοθῇ $\quad \eta\mu\chi = -\frac{1}{8}$,

θέτομεν $\quad \chi = 180^\circ + \omega$· $\quad$ ὅτε ἔχομεν $\quad \omega = \chi - 180^\circ$

καὶ $\qquad \eta\mu\omega = \eta\mu(\chi - 180^\circ) = \frac{1}{8}$

ὅθεν $\qquad \lambda o\gamma\, \eta\mu\omega = \lambda o\gamma\left(\frac{1}{8}\right) = -\lambda o\gamma 8$

ἤτοι $\quad$ λογημω $= \overline{1},09691$

ὅθεν $\quad$ $\omega = 7^\circ\, 10'\, 51''$

καὶ $\quad$ $\chi = 187^\circ\, 10'\, 51''$

Σημ. Πρὸς ἑκάστην τιμὴν ἑνὸς οἱουδήποτε τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἀντιστοιχοῦσι δύο τόξα μικρότερα περιφερείας· ἐκ τούτων τὸ μικρότερον εὑρίσκεται κατὰ τὴν προηγουμένως ἐκτεθεῖσαν μέθοδον, ἐκ δὲ τούτου εὑρίσκεται καὶ τὸ ἄλλο εὐκόλως διὰ τῶν γνωστῶν ἰδιοτήτων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις.

Νὰ εὑρεθῇ

141) ὁ λογ ημ$(29^\circ\, 14'\, 32'')$ $\quad$ 145) ὁ λογ εφ$(22^\circ\, 37'\, 22'')$

142) ὁ λογ συν$(16^\circ\, 27'\, 47'')$ $\quad$ 146) ὁ λογ σφ$(17^\circ\quad 45'')$

143) ὁ λογ ημ$(57^\circ\, 45'\, 28'')$ $\quad$ 147) ὁ λογ εφ$(61^\circ\, 2'\, 48'')$

144) ὁ λογ συν$(65^\circ\, 24'\, 37'')$ $\quad$ 148) ὁ λογ σφ$(58^\circ\, 42'\, 35'')$

Νὰ εὑρεθῶσι τὰ τόξα (τὰ μικρότερα τῶν 90°) δι' ἃ δίδεται.

149) λογ ημα $= \overline{1},41745$ $\quad$ 154) συνα $= \frac{5}{9}$

150) λογσυνα $= \overline{1},25807$ $\quad$ 155) εφα $= 2\frac{1}{4}$

151) λογ εφα $= 0,31370$ $\quad$ 156) σφα $= 0,875$

152) λογ σφα $= \overline{1},05490$ $\quad$ 157) ημα $= -\frac{7}{15}$

153) ημα $= \frac{3}{8}$ $\quad$ 158) σφα $= -3$.

159) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων

$\beta = 89,25.$ ημ $18^\circ\, 50'$ $\quad$ $\gamma = 112,35.$ συν $35^\circ\, 25'\, 30''$

$\beta = 5147,8.$ εφ $52^\circ\, 37'\, 20''$ $\quad$ $\gamma = 6009,6.$ σφ $29^\circ\, 87'\, 20''$

160) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων:

$$\alpha = 58.\ \text{ημ}\ 49^\circ.\ \text{συν}\ 27^\circ\, 45'$$

$$\beta = 419.\ \text{ημ}\ 65^\circ\, 20'.\ \text{ημ}\ 39^\circ\, 22'\, 40''$$

$$\gamma = 708.\ \text{συν}\ 51^\circ\, 18'.\ \text{σφ}\ 19^\circ\, 32'\, 35''.$$

161) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων

$$E = \frac{1}{2}.\ 317,5.\ 429.\ \text{ημ}\ 33^\circ\, 27'$$

$$\chi = \frac{4753.\ \text{ημ}\ 45^\circ\, 40'.\ \text{συν}\ 19^\circ\, 9'}{91,8}$$

162) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$$\psi = \frac{31,2^2.\ \text{ημ}\ 73^\circ\, 10'\, 30''}{\text{ημ}\ 46^\circ\, 54'.\ \text{ημ}\ 30^\circ\, 28'}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

52. **Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις.** *Ἐξίσωσις περιέχουσα τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ἀγνώστων γωνιῶν ἢ τόξων καλεῖται τριγωνομετρική.*

Λύσις δὲ ταύτης καλεῖται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν γωνιῶν ἢ τῶν τόξων, αἵτινες τὴν ἐπαληθεύουσιν.

Παραδείγματα. Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις
$ημχ = 0,2664$· ἔχομεν $λογ\, ημχ = \overline{1},42553$ καὶ

$$χ = 15^\circ\, 27' \quad ἢ \quad 164^\circ\, 33'$$

ἐπειδὴ τὰ παραπληρωματικὰ τόξα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ἡμίτονα, ἢ $χ = -344^\circ\, 33'$ ἢ $-195^\circ\, 27'$.

2) Ὁμοίως ἔστω ἡ $2ημ^2χ - 3ημχ - 2 = 0$.

Ἐὰν θέσωμεν $ημχ = ψ$, ἔχομεν $2ψ^2 - 3ψ - 2 = 0$
ἐκ τῆς λύσεως τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $ψ = 2$ ἢ $-\frac{1}{2}$·
ἀλλ' ἡ λύσις $ψ = 2$, ἤτοι $ημχ = 2$, προφανῶς ἀπορρίπτεται καὶ μένει ἡ $ημχ = -\frac{1}{2}$·
ἤτοι εἶναι $χ = -30^\circ$ ἢ 210°, ἢ $χ = 330^\circ$ ἢ 150°.

3) Ἔστω πάλιν $2ημχ - εφχ = 0$.

Ἔχομεν $2ημχ - \frac{ημχ}{συνχ} = 0$ ἢ $ημχ\left(2 - \frac{1}{συνχ}\right) = 0$·
ὥστε εἶναι $ημχ = 0$ ἢ $συνχ = \frac{1}{2}$·
ἐκ τῆς πρώτης λαμβάνομεν $χ = 0$ ἢ $\pm 180^\circ$ καὶ
ἐκ τῆς δευτέρας λαμβάνομεν $χ = \pm 60^\circ$ ἢ $\pm 300^\circ$.

4) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $2συν^2χ + 5ημχ - 4 = 0$·
εἰς ταύτην θέτομεν $1 - ημ^2χ$ ἀντὶ $συν^2χ$ καὶ ἔχομεν $2ημ^2χ - 5ημχ + 2 = 0$. Λύοντες ἤδη ταύτην καθ' ὃν τρόπον ἐλύθη ἡ ἐξίσωσις τοῦ παραδ. 2 εὑρίσκομεν $ημχ = 2$ ἢ $\frac{1}{2}$·
ἀλλ' ἐκ τῶν λύσεων τούτων ἡ $ημχ = 2$ ἀπορρίπτεται καὶ μένει ἡ $ημχ = \frac{1}{2}$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν $χ = 30^\circ$ ἢ 150° ἢ $χ = -330^\circ$ ἢ -210°.

Ἐν τῇ λύσει τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα, ἥτις περιέχει δύο τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς μετεσχηματίσθη εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον περιέχουσαν ἕνα τοιοῦτον ἀριθμόν. Αἱ λύσεις, τὰς ὁποίας ἔδωκεν ἡ τελευταία, εἶναι λύσεις καὶ τῆς δοθείσης.

5) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha.\sigma\upsilon\nu\chi+\beta.\eta\mu\chi=\gamma$.
Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης διὰ α, λαμβάνομεν $\sigma\upsilon\nu\chi+\frac{\beta}{\alpha}\eta\mu\chi=\frac{\gamma}{\alpha}$, ἐὰν δὲ τεθῇ $\frac{\beta}{\alpha}=\epsilon\varphi\omega$,

ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu\chi+\epsilon\varphi\omega.\eta\mu\chi=\frac{\gamma}{\alpha}$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\chi+\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\eta\mu\chi=\frac{\gamma}{\alpha}$

ἢ $\sigma\upsilon\nu\chi.\sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\chi.\ \eta\mu\omega=\frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\omega$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\,(\chi-\omega)=\frac{\gamma}{\alpha}\ \sigma\upsilon\nu\omega$.

Ἀλλ' ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\epsilon\varphi\omega=\frac{\beta}{\alpha}$ εὑρίσκομεν τὴν ω καὶ συνεπῶς καὶ τὸ συνω καὶ τὸ συν(χ—ω)· ἑπομένως καὶ τὴν χ.

Γωνίαι, ὡς ἡ ω, αἵτινες εἰσάγονται, ἵνα εὐκολύνωσι τὴν λύσιν τῶν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων, λέγονται βοηθητικαί.

53. **Συστήματα.** Κατωτέρω δίδομεν παραδείγματα λύσεως τριγωνομετρικῶν συστημάτων.

1) Ἔστω τὸ σύστημα
$$\chi+\psi=73^\circ$$
$$\eta\mu\chi+\eta\mu\psi=1,182$$

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις γράφεται $2\eta\mu\frac{\chi+\psi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\chi-\psi}{2}=1,182$

ἢ $$\sigma\upsilon\nu\frac{\chi-\psi}{2}=\frac{1,182}{2\eta\mu 36^\circ 30'}$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων εὑρίσκεται $\eta\mu\ 36^\circ\ 30'=0,59483$, ἡ τελευταία ἐξίσωσις γράφεται

$\sigma\upsilon\nu\frac{\chi-\psi}{2}=0,99356$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\frac{\chi-\psi}{2}=6^\circ 30'$
καὶ $\chi-\psi=13^\circ$ ἢ $\chi-\psi=347^\circ$.

Ἐκ τῆς λύσεως δὲ τῶν συστημάτων

$$\begin{matrix}\chi+\psi=73^\circ \\ \chi-\psi=13^\circ\end{matrix} \quad \text{ἢ} \quad \begin{matrix}\chi+\psi=73^\circ \\ \chi-\psi=347^\circ\end{matrix}$$

λαμβάνομεν τὰς τιμὰς τῶν χ καὶ ψ.

2) Ἔστω προσέτι τὸ σύστημα

$$\chi+\psi=\alpha$$
$$\frac{\eta\mu\chi}{\eta\mu\psi}=\beta.$$

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις γράφεται $\frac{\eta\mu\chi-\eta\mu\psi}{\eta\mu\chi+\eta\mu\psi}=\frac{\beta-1}{\beta+1}$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\frac{\eta\mu\chi-\eta\mu\psi}{\eta\mu\chi+\eta\mu\psi}=\frac{\varepsilon\varphi\frac{\chi-\psi}{2}}{\varepsilon\varphi\frac{\chi+\psi}{2}}$

ἡ τελευταία ἐξίσωσις γράφεται $\varepsilon\varphi\frac{\chi-\psi}{2}=\frac{\beta-1}{\beta+1}.\ \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τόξα ἅτινα ἔχουσιν ἐφαπτομένην $\frac{\beta-1}{\beta+1}.\ \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$

Γνωρίζοντες ἑπομένως τὰ $\frac{\chi-\psi}{2}$ καὶ $\frac{\chi+\psi}{2}$ εὑρίσκομεν τὰ χ, ψ.

Ἀσκήσεις.

Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις

163) $\eta\mu\chi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ $\eta\mu\chi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

164) $\sigma\upsilon\nu\chi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\chi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

165) $\varepsilon\varphi\chi=-1$ καὶ $\sigma\varphi\chi=1$.

166) $\varepsilon\varphi^2\chi=\frac{1}{3}$ καὶ $\sigma\varphi^2\chi=3$

167) $\eta\mu\chi+\eta\mu5\chi=\eta\mu3\chi$.

168) $\sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu3\chi=2\sigma\upsilon\nu2\chi$.

169) $2\eta\mu^2\chi-5\eta\mu\chi-3=0$.

170) $2\sigma\upsilon\nu^2\chi-(2+\sqrt{3}).\sigma\upsilon\nu\chi+\sqrt{3}=0$.

171) $\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu^2\chi}=\frac{2}{3}$.

172) $2\eta\mu^2\chi+\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu\chi+1=0$.

173) $4\sigma\upsilon\nu^2\chi-4\eta\mu\chi-1=0$.

174) $2\eta\mu\chi=\varepsilon\varphi\chi$.

175) $6\sigma\upsilon\nu^2\chi-5\sigma\upsilon\nu\chi+1=0$.

176) $2\sqrt{3}\,.\,\sigma\upsilon\nu^2\chi-\eta\mu\chi=0$.

177) $\varepsilon\varphi^2\chi - \varepsilon\varphi\chi - 2 = 0$

178) $3\varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2} + 2\varepsilon\varphi\frac{\chi}{2} - 1 = 0.$

179) $\varepsilon\varphi^2\chi - (1+\sqrt{3})\,\varepsilon\varphi\chi + \sqrt{3} = 0.$

180) $\sqrt{3}.\varepsilon\varphi\chi + \sqrt{3}.\sigma\varphi\chi = 2.$

181) $\varepsilon\varphi^2\chi + \sigma\varphi^2\chi - 2 = 0.$

182) $\varepsilon\varphi 2\chi.\varepsilon\varphi\chi = 1.$

183) $\alpha.\eta\mu\chi + \beta.\sigma\upsilon\nu\chi = \gamma.$

184) $\alpha.\sigma\upsilon\nu\chi - \beta.\eta\mu\chi = \gamma.$

185) $5\sigma\upsilon\nu\chi - 2\eta\mu\chi = 2.$

186) $\sqrt{3}.\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi = \sqrt{2}.$

187) $(2+\sqrt{3})\sigma\upsilon\nu\chi = 1 - \eta\mu\chi.$

188) $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \sqrt{2}.$

189) $1 + \eta\mu^2\chi = 3\eta\mu\chi.\sigma\upsilon\nu\chi.$

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

$\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta}$

$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\gamma}{\gamma+\delta} - \frac{\delta}{\gamma+\delta}$

Νὰ λυθῶσι τὰ συστήματα.

190) $\eta\mu(\chi-\psi) = \frac{1}{2}.$

$\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi) = \frac{1}{2}.$

191) $\sigma\upsilon\nu(2\chi+3\psi) = \frac{1}{2}$

$\sigma\upsilon\nu(3\chi+2\psi) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

192) $\chi+\psi=\alpha$

$\eta\mu\chi + \eta\mu\psi = \beta.$

193) $\chi+\psi=75^\circ$

$\frac{\eta\mu\chi}{\eta\mu\psi} = \sqrt{2}.$

194) $\chi-\psi=60^\circ$

$\frac{\eta\mu\chi}{\eta\mu\psi} = 2.$

195) $\chi+\psi=45^\circ$

$\varepsilon\varphi\chi + \varepsilon\varphi\psi = 1.$

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$

$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\delta}{\gamma}$

$\frac{\alpha}{\beta} = \gamma$

$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$

$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\gamma}{\gamma+1} - \frac{1}{\gamma+1}$

$(\gamma+1)(\alpha-\beta) = (\gamma-1)(\alpha+\beta)$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

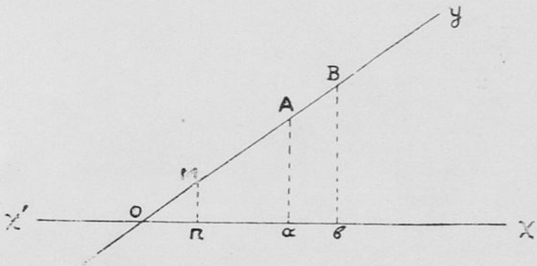
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

54. **Θεώρημα.** ***Τὸ μῆκος τῆς προβολῆς ἀνύσματος ἐπὶ ἄξονα ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ ἀνύσματος ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ θετικὴ φορὰ τοῦ ἄξονος προβολῆς μετὰ τῆς θετικῆς φορᾶς τοῦ ἄξονος, ἐφ᾽ οὗ κεῖται τὸ ἄνυσμα.***

Ἔστω ψ΄ψ ὁ ἄξων, ἐφ᾽ οὗ κεῖται τὸ ἄνυσμα AB, καὶ αβ ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἄξονα χ΄χ· ἔστω δὲ θετικὴ φορὰ τοῦ μὲν πρώτου ἡ ἐκ τοῦ ψ΄ πρὸς τὸ ψ, τοῦ δὲ δευτέρου ἡ ἀπὸ τοῦ χ΄ πρὸς τὸ χ· ἔστω δὲ τέλος OM ἄνυσμα ἐπὶ τοῦ ψ΄ψ, δι᾽ ὃ θέτομεν (OM)=+1 καὶ οὗ ἡ προβολὴ ἐπὶ τοῦ ἄξονος χ΄χ εἶναι ἡ ΟΠ· ἀλλὰ κατὰ τὸ



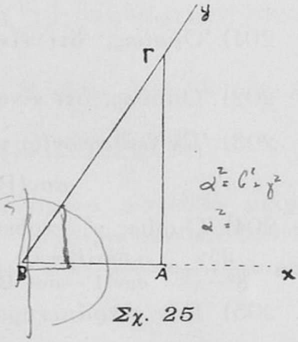
Σχ. 24

θεώρημα (11) ἔχομεν $\dfrac{(AB)}{(OM)} = \dfrac{(\alpha\beta)}{(O\Pi)}$ ἢ

(αβ)=(AB).(ΟΠ)· ἀλλὰ πάλιν (ΟΠ) εἶναι τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας Οχ, Οψ· ὥστε εἶναι ***(αβ)=(AB)συν(Οχ, Οψ).***

Σημ. Τὰς γωνίας τριγώνου θὰ παριστῶμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις διὰ τῶν γραμμάτων Α,Β,Γ, τὰ δὲ μήκη τῶν πλευρῶν διὰ τῶν α,β,γ· διὰ τοῦ α τὴν ἀπέναντι τῆς γωνίας Α πλευράν, διὰ τοῦ β τὴν ἀπέναντι τῆς Β καὶ διὰ τοῦ γ τὴν ἀπέναντι τῆς Γ.

55. **Θεώρημα.** *Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ μία τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἰσοῦται 1) μὲ τὴν ὑποτείνουσαν πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας ἢ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς προσκειμένης ἢ 2) μὲ τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀπέναντι γωνίας ἢ ἐπὶ τὴν συνεφαπτομένην τῆς προσκειμένης.*



Σχ. 25

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, οὗ ὀρθὴ γωνία εἶναι ἡ Α· ἐὰν τὰς πλευρὰς ΒΑ καὶ ΒΓ θεωρήσωμεν ὡς κειμένας ἐπὶ τῶν ἀξόνων Βχ καὶ Βψ, ὧν θετικαὶ φοραὶ εἶναι, τοῦ μὲν ἡ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸ Α, τοῦ δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸ Γ, τὸ ἄνυσμα ΒΑ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ ἀνύσματος ΒΓ ἐπὶ τὸν ἄξονα Βχ· ἐπομένως, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἔχομεν (ΒΑ)=(ΒΓ)συν(Βχ,Βψ) ἢ (ΒΓ)συνΒ· ἤτοι εἶναι **γ=α.συνΒ·** ἐπειδὴ δὲ εἶναι $B+\Gamma=90^\circ$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται **γ=α.ημΓ·** κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν

$$\boldsymbol{\beta=\alpha.\text{συν}\Gamma}$$
$$\boldsymbol{\beta=\alpha.\text{ημ}B.}$$

Ἤδη ἐκ τῶν εὑρεθεισῶν ἰσοτήτων λαμβάνομεν

$\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha.\text{ημ}B}{\alpha.\text{συν}B}=\text{εφ}B$, ἤτοι **β=γ.εφΒ** ἢ **β=γ.σφΓ.**

Ὡσαύτως λαμβάνομεν

$\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha.\text{ημ}\Gamma}{\alpha.\text{συν}\Gamma}=\text{εφ}\Gamma$ ἢ **γ=β.εφΓ** ἢ **γ=β.σφΒ.**

Ἀσκήσεις.

196) Ἐν τριγώνῳ ΑΒΓ ἄγεται ἡ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ ἡ ΔΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι

$$\Gamma E=\beta\ \text{συν}^2\Gamma.$$

197) Ἐὰν ἡ ΑΒ εἶναι διάμετρος κύκλου ἀκτῖνος ρ καὶ Γ σημεῖόν τι τῆς ἡμιπεριφερείας καὶ ἡ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ, ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι $A\Gamma+\Gamma\Delta=2\rho\ \text{ημ}\omega(1+\text{συν}\omega)$, ἐὰν εἶναι γωνία ΑΒΓ=ω.

198) Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΒΓ ν᾿ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι

$$\beta^2 \eta\mu 2\Gamma + \gamma^2 \eta\mu 2B = 2\beta\gamma.$$

199) Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΒΓ ν᾿ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι

$$\frac{\beta}{\alpha+\gamma} = \varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right).$$

200) Ὁμοίως, ὅτι εἶναι $\sigma\upsilon\nu 2B = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\alpha^2}$.

201) Ὁμοίως, ὅτι εἶναι $\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2} = \frac{\beta-\gamma}{\alpha.\sqrt{2}}$.

202) Ὁμοίως, ὅτι εἶναι $\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha\sqrt{2}}$.

203) Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΒΓ ν᾿ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) = \frac{2\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}.$$

204) Ὁμοίως ν᾿ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι $\frac{2\beta\gamma}{\beta^2-\gamma^2} = \frac{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu^2\Gamma - \sigma\upsilon\nu^2 B} = \frac{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu 2\Gamma}$.

205) Ἐὰν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, ν᾿ ἀποδειχθῇ, ὅτι $(A\Gamma)\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2} = (\Gamma\Delta).\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\,\eta\mu\frac{\Delta}{2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II.

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

56. **Ἐπίλυσις τριγώνου** λέγεται ἡ διὰ τῶν ἀριθμῶν εὕρεσις τῶν στοιχείων αὐτοῦ, ὅταν δοθῶσιν ἀρκετὰ ἐξ αὐτῶν (ἴδε εἰσαγωγήν).

57. **Ἐπίλυσις τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων**. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ὁρίζεται ἐντελῶς, ὅταν δοθῶσιν ἡ μία πλευρὰ αὐτοῦ (ἡ ὑποτείνουσα ἢ μία τῶν καθέτων) καὶ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἢ αἱ δύο πλευραὶ αὐτοῦ, αἵτινες δυνατὸν νὰ εἶναι ἢ αἱ δύο κάθετοι ἢ μία κάθετος καὶ ἡ ὑποτείνουσα. Διὰ τοῦτο ἐν τῇ ἐπιλύσει τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων διακρίνομεν τὰς ἑπομένας τέσσαρας περιπτώσεις.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 1η

58. ***Δοθείσης τῆς ὑποτεινούσης α ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ μιᾶς τῶν ὀξειῶν αὐτοῦ γωνιῶν, ἔστω τῆς B, εὑρεῖν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.***

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων ἔχομεν τοὺς τύπους τοῦ ἐδ. 55,

$$\Gamma = 90^\circ - B,\quad \beta = \alpha.\eta\mu B,\quad \gamma = \alpha.\sigma\upsilon\nu B.$$

Ἐκ τοῦ πρώτου εὑρίσκομεν ἀμέσως τὴν γωνίαν Γ, ἐκ δὲ τῶν ἄλλων, λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν

$$\lambda o\gamma\beta = \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\eta\mu B, \qquad \lambda o\gamma\gamma = \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu B$$

ἐξ ὧν λογιζόμεθα τὰς πλευρὰς β καὶ γ τῇ βοηθείᾳ τῶν λογαρίθμων.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τούτου Ε εἶναι $E = \frac{\beta\gamma}{2}$ καὶ ἐπειδὴ β=α.ημΒ, γ=α.συνΒ, ἔχομεν $\cancel{E} = \frac{\alpha^2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B}{2}$.

Παραδείγματα. 1ον) Ἔστωσαν δεδομένα α=1598 μέτρα καὶ Β=32° 18′30″. Πρὸς εὕρεσιν τῆς Γ ἀφαιροῦμεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Β ἀπὸ 89° 59′60″ (τουτέστιν ἀπὸ 90°) καὶ εὑρίσκομεν Γ=57° 41′ 30″.

Λογισμὸς τῆς πλευρᾶς β

	β=αημΒ
λογα	= 3,20358
λογημΒ	= $\bar{1}$,72793
λογβ	= 2,93151
καὶ β	= 854,1

Λογισμὸς τῆς πλευρᾶς γ

	γ =ασυνΒ
λογα	= 3,20358
λογσυνΒ	= $\bar{1}$,92695
λογγ	= 3,13053
καὶ γ	= 1350,6

Σημ. Ἕκαστος τῶν λογαρίθμων, τοὺς ὁποίους λαμβάνομεν ἀμέσως ἐκ τῶν πινάκων, δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ἀληθοῦς τὸ πολὺ κατὰ ἡμίσειαν μονάδα τῆς τελευταίας τάξεως· διὰ τοῦτο ὁ λογβ, ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ δύο τοιούτων λογαρίθμων εὑρεθείς, δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ἀληθοῦς τὸ πολὺ κατὰ μίαν μονάδα τῆς ῥηθείσης τάξεως, τοιαύτη δὲ διαφορὰ προξενεῖ (ὡς ἐκ τῶν πινάκων βλέπομεν) λάθος ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ β τὸ πολὺ $\frac{1}{5}$ τοῦ τελευταίου ψηφίου 1 (ὅπερ σημαίνει δέκατα)· ὥστε τὸ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς β συμβαῖνον λάθος δὲν ὑπερβαίνει τὰ $\frac{2}{100}$ τοῦ μέτρου. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς γ συμβαῖνον λάθος δὲν εἶναι μεγαλύτερον τῶν $\frac{3}{100}$ τοῦ μέτρου.

2ον) Ἔστωσαν δεδομένα $\alpha = 3955,8$ μ. καὶ $B = 76^\circ 40' 25''$.

$$\begin{array}{r} 89^\circ\ 59'\ 60'' \\ 76^\circ\ 40'\ 25'' \\ \hline \Gamma = 13^\circ\ 19'\ 35'' \end{array}$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς β		***Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ***	
λογα	$= 3,59724$	λογα	$= 3,59724$
λογημB	$= \bar{1},98814$	λογσυνB	$= \bar{1},36267$
λογβ	$= 3,58538$	λογγ	$= 2,95991$
καὶ β	$= 3849,2$	καὶ γ	$= 911,82$
κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου.		κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ τοῦ μέτρου.	

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 2α

59. Δοθείσης μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, ἔστω τῆς β, καὶ μιᾶς τῶν ὀξειῶν αὐτοῦ γωνιῶν, εὑρεῖν τὰ λοιπὰ αὐτοῦ στοιχεῖα.

Ἐκ τῆς δοθείσης ὀξείας γωνίας εὑρίσκεται ἀμέσως καὶ ἡ ἄλλη· ἑπομένως ἀμφότεραι αἱ ὀξεῖαι γωνίαι δύνανται νὰ ὑποτεθῶσι γνωσταί.

Αἱ ἄγνωστοι πλευραὶ α καὶ γ, θὰ εὑρεθῶσιν ἐκ τῶν τύπων

$$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B} \quad \text{καὶ} \quad \gamma = \beta.\sigma\varphi B = \frac{\beta}{\varepsilon\varphi B},$$

οἵτινες δίδουσι $\lambda o\gamma\alpha = \lambda o\gamma\beta - \lambda o\gamma\eta\mu B$, $\lambda o\gamma\gamma = \lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\sigma\varphi B$.

Τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι

$$E = \frac{\beta\gamma}{2} = \frac{\beta^2 \sigma\varphi B}{2}.$$

Παραδείγματα. 1ον) Ἔστωσαν δεδομένα $\beta = 895,5$ μ. καὶ $\Gamma = 43^\circ 18' 20''$.

$$\begin{array}{r} 89^\circ 59' 60'' \\ 43^\circ 18' 20'' \\ \hline B = 46^\circ 41' 40'' \end{array}$$

Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης α

$$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$$

λογ β $= 2,95207$
λογ ημΒ $= \bar{1},86196$
λογ α $= 3,09011$
καὶ α $= 1230,57$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{3}{100}$ τοῦ μέτρου.

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ

$$\gamma = \beta . \sigma\varphi B$$

λογ β $= 2,95207$
λογ σφΒ $= \bar{1},97430$
λογ γ $= 2,92637$
καὶ γ $= 844,06$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{2}{100}$ τοῦ μέτρου.

2) Ἔστωσαν δεδομένα $\beta = 8530,4$ μ. καὶ $B = 32^\circ\ 15'$

$$
\begin{array}{r}
89^\circ\ 60' \\
32^\circ\ 15' \\
\hline
\Gamma = 57^\circ\ 45'.
\end{array}
$$

Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης α

$$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$$

λογ β $= 3,93097$
λογ ημΒ $= \bar{1},72723$
λογ α $= 4,20374$
καὶ α $= 15986$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{4}{10}$ τοῦ μέτρου.

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ

$$\gamma = \beta\ \sigma\varphi B$$

λογ β $= 3,93097$
λογ σφΒ $= 0,20000$
λογ γ $= 4,13097$
καὶ γ $= 13520$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{3}{10}$ τοῦ μέτρου.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 3η

60. Δοθεισῶν τῶν δύο καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, εὑρεῖν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ τὰς δύο ὀξείας αὐτοῦ γωνίας.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων ἔχομεν τοὺς τύπους

$$\varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma},\quad \Gamma = 90^\circ - B,\ \text{καὶ}\ \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2.$$

Ἐκ τοῦ πρώτου ἕπεται λογεφΒ = λογβ—λογγ.

Ἐκ δὲ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν διὰ τῶν λογαρίθμων τὴν γωνίαν Β, ἐξ ἧς καὶ τὴν Γ.

Ὁ τὴν ὑποτείνουσαν δίδων τύπος $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ δὲν εἶναι κατάλληλος διὰ τὴν χρῆσιν τῶν λογαρίθμων· διὰ τοῦτο, ἀφοῦ εὑρεθῇ ἡ γωνία Β, προσδιορίζεται καὶ ἡ ὑποτείνουσα α ἐκ τοῦ τύπου

$$α = \frac{β}{ημB}$$

ὅστις δίδει λογα = λογβ—λογημΒ.

Τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $E = \frac{βγ}{2}$.

Παραδείγματα. 1ον. Ἔστωσαν δεδομένα β = 1593,8 μ., γ = 8907,3 μ.

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

$$εφB = \frac{β}{γ}$$

$$\begin{aligned}
λογ\ β &= 3,20244 \\
λογ\ γ &= 3,94974 \\
λογ\ εφB &= \bar{1},25270 \\
καὶ\ \ B &= 10^\circ\ 8'\ 42'' \\
ὅθεν\ καὶ\ \ Γ &= 79^\circ\ 51'\ 18''.
\end{aligned}$$

Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης

$$α = \frac{β}{ημB}$$

$$\begin{aligned}
λογ\ β &= 3,20244 \\
λογ\ ημB &= \bar{1},24585 \\
λογ\ α &= 3,95659 \\
ὅθεν\ καὶ\ α &= 9048,8\ μ.
\end{aligned}$$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{2}{10}$ τοῦ μέτρου.

2ον. Ἔστωσαν δεδομένα β = 450,8 μ. καὶ γ = 854,6 μ.

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β

$$εφB = \frac{β}{γ}$$

$$\begin{aligned}
λογ\ β &= 2,65398 \\
λογ\ γ &= 1,93176 \\
λογ\ εφB &= \bar{1},72223 \\
καὶ\ \ B &= 27^\circ\ 48'\ 42'' \\
ὅθεν\ καὶ\ \ Γ &= 62^\circ\ 11'\ 18''.
\end{aligned}$$

Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης

$$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$$

λογ β	$= \bar{1},65398$
λογ ημΒ	$= \bar{1},66892$
λογ α	$= 2,98506$
καὶ α	$= 966,18$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{2}{100}$ τοῦ μέτρου.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 4η

61. Δοθείσης τῆς ὑποτεινούσης α καὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἔστω τῆς β, εὑρεῖν τὴν ἄλλην πλευρὰν καὶ τὰς ὀξείας γωνίας.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς γ ἔχομεν τὸν τύπον

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\cdot$$

ὅθεν $\quad 2\lambda o\gamma\gamma = \lambda o\gamma(\alpha+\beta) + \lambda o\gamma(\alpha-\beta)$

καὶ $\quad \lambda o\gamma\gamma = \frac{1}{2}\,[\lambda o\gamma(\alpha+\beta) + \lambda o\gamma(\alpha-\beta)].$

Πρὸς εὕρεσιν τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν τὸν τύπον (ἐδ. 55)

$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} \qquad \text{ἢ} \qquad \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\beta}{\alpha}\cdot$$

ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν Γ καὶ ὡς ἑξῆς·

Ἐπειδὴ εἶναι (40)

$$\eta\mu\left(\frac{1}{2}\,\Gamma\right) = \sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\Gamma}{2}} \text{ καὶ } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}\,\Gamma\right) = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\Gamma}{2}},$$

ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ συνΓ εἰς τοὺς τύπους τούτους λαμβάνομεν

$$\eta\mu\left(\frac{1}{2}\,\Gamma\right) = \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{2\alpha}},\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}\,\Gamma\right) = \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}}.$$

Ὅθεν καὶ $\quad \varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}\,\Gamma\right) = \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$

καὶ $\quad \lambda o\gamma\,\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}\,\Gamma\right) = \frac{1}{2}\,[\lambda o\gamma(\alpha-\beta) - \lambda o\gamma(\alpha+\beta)].$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν $\frac{1}{2}$ Γ, ὅθεν καὶ τὴν Γ (χρειαζόμεθα δὲ πρὸς τοῦτο τοὺς αὐτοὺς λογαρίθμους, τοὺς ὁποίους μετεχειρίσθημεν πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς γ)· εὑρεθείσης δὲ τῆς Γ, εὑρίσκεται καὶ ἡ Β ἀμέσως.

Τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $B = \frac{\beta\gamma}{2}$.

Παρατηρήσεις. Ἐκ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς προσδιορίζεται ἀκριβέστερον ἡ γωνία ἢ ἐκ τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου αὐτῆς, διότι μικρόν τι σφάλμα, περὶ τὴν ἐφαπτομένην συμβάν, προξενεῖ μικρόν τι λάθος ἐπὶ τῆς γωνίας· τοὐναντίον μικρὸν σφάλμα, συμβὰν περὶ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας (μάλιστα ἂν ἡ γωνία ὀλίγον διαφέρῃ τῶν 90°) ἢ περὶ τὸ συνημίτονον (μάλιστα ἂν ἡ γωνία εἶναι μικρά), δύναται νὰ προξενήσῃ μέγα λάθος ἐπὶ τῆς γωνίας. Ὅπως πεισθῇ τις περὶ τούτου, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσῃ ἐν τοῖς πίναξιν, ὅτι ἡ διαφορὰ Δ δύο ἐφεξῆς λογαρίθμων τῶν ἐφαπτομένων ὑπερβαίνει πάντοτε τὰς διαφορὰς δ καὶ θ δύο ἐφεξῆς λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων τοῦ αὐτοῦ τόξου. Ἐὰν λοιπὸν ὁ δοθεὶς λογάριθμος τῆς ἐφαπτομένης ἔχῃ σφάλμα ἴσον πρὸς μίαν μονάδα τῆς τελευταίας τάξεως, τὸ ἐπὶ τῆς γωνίας προξενούμενον λάθος θὰ εἶναι $\frac{60''}{\Delta}$ περίπου, (διότι εἰς λάθος Δ μονάδων τῆς εἰρημένης τάξεως ἀντιστοιχεῖ λάθος 60″ ἐπὶ τῆς γωνίας), ἐνῷ τὸ αὐτὸ σφάλμα, εἰς τὸν λογάριθμον τοῦ ἡμιτόνου συμβάν, θὰ προξενήσῃ ἐπὶ τῆς γωνίας λάθος $\frac{60''}{\delta}$ περίπου, εἰς δὲ τὸν λογάριθμον τοῦ συνημιτόνου συμβάν, θὰ προξενήσῃ λάθος ἐπὶ τῆς γωνίας $\frac{60''}{\vartheta}$ περίπου, ταῦτα δὲ εἶναι μεγαλύτερα· διότι, ὡς εἴπομεν, εἶναι $\delta < \Delta$ καὶ $\vartheta < \Delta$.

Ὁ δὲ λόγος, δι' ὃν αἱ διαφοραὶ Δ τῶν λογαρίθμων τῶν ἐφαπτομένων ὑπερβαίνουσι τὰς διαφορὰς τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων, εἶναι ὁ ἀκόλουθος.

Ἐπειδὴ εἶναι
$$\text{εφφ} = \frac{\text{ημφ}}{\text{συνφ}}$$

ἕπεται
$$\text{λογ εφφ} = \text{λογ ημφ} - \text{λογ συνφ}.$$

Ἐὰν δὲ ἡ γωνία αὐξηθῇ κατὰ 1′, ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου της θὰ αὐξηθῇ κατὰ δ, τοῦ δὲ συνημιτόνου θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ θ, ἑπομένως ὁ λογάριθμος τῆς ἐφαπτομένης (ὅστις εἶναι πάντοτε ἴσος τῇ διαφορᾷ τῶν δύο πρώτων) θὰ αὐξηθῇ κατὰ $\delta + \vartheta$· εἶναι λοιπὸν $\Delta = \delta + \vartheta$.

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι πρέπει πάντοτε, ὅταν πρόκειται νὰ εὑρεθῇ γωνία τις ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν αὐτῆς ἀριθμῶν, νὰ μεταχειριζώμεθα, εἰ δυνατόν, τὴν ἐφαπτομένην.

Παραδείγματα. 1ον. Ἔστωσαν δεδομένα $\alpha = 7450,6$ μ. $\beta = 2971,8$ μ.

$$\alpha + \beta = 10422,4$$
$$\alpha - \beta = 4478,8$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ

$\gamma = \sqrt{(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)}$

λογ(α—β)	=3,65116
λογ(α+β)	=4,01797
ἄθροισμα	=7,66913
λογ γ	=3,83456
γ	= 6832,2

κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου.

Εὕρεσις τῆς γωνίας Γ

$$\varepsilon\varphi\frac{1}{2}\Gamma = \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$$

λογ(α—β)	=3,65116
λογ(α+β)	=4,01797
διαφορὰ	$=\overline{1},63319$
λογ εφ$\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)$	$=\overline{1},81659$

καὶ $\frac{1}{2}\Gamma = 33^\circ 14' 15''$ προσ. $\frac{1''}{28}$

ὅθεν $\Gamma = 66^\circ 29' 30''$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{1''}{14}$

καὶ $B = 23^\circ 30' 30''$.

2ον Ἔστωσαν δεδομένα $\alpha = 487$ μ. $\beta = 408,5$ μ.

$$\alpha + \beta = 895,5 \text{ μ.}$$
$$\alpha - \beta = 78,5 \text{ μ.}$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ

λογ(α—β)	=1,89487
λογ(α+β)	=2,95207
ἄθροισμα	=4,84694
λογ γ	=2,42347
ὅθεν γ	= 265,14

Εὕρεσις τῆς γωνίας Γ

λο (α—β)	=1,89487
λογ(α+β)	=2,95207
διαφορὰ	=2,94280
λογ εφ$\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)$	$=\overline{1},47140$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ τοῦ μέτρου.

ὅθεν $\frac{1}{2}$ $\Gamma = 16^\circ 29' 34''$ $\left(\text{προσεγγ. } 1'' \frac{1}{2}\right)$

καὶ $\Gamma = 32^\circ 59' 8''$ (προσ. $3''$)

ὅθεν καὶ $B = 57^\circ 0' 52''$.

Ἀσκήσεις.

206) Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 428,75 μ, καὶ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν εἶναι $40^\circ 32' 45''$. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

207) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 188μ., μία δὲ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν εἶναι $18^\circ 14'$. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ ὡς καὶ τὸ ἐμβαδόν.

208) Ὀρθογωνίου τριγώνου μία τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι 1592,8 μ., ἡ δὲ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία εἶναι $\frac{7}{10}$ τῆς ὀρθῆς. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.

209) Ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι 587,8 μ. ἡ μία καὶ 798 μ. ἡ ἄλλη. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι καὶ ἡ ὑποτείνουσα.

210) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι διπλασία μιᾶς τῶν ἄλλων πλευρῶν. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

211) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι τετραπλασία τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐπὶ ταύτην ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου.

212) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 404 μ. ἡ δὲ ἑτέρα τῶν καθέτων πλευρῶν 125 μ. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου τούτου.

213) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 480 μ., ὁ δὲ λόγος τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι $\frac{7}{12}$. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.

214) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 550 μ., ὁ δὲ λόγος τῶν ἄλλων πλευρῶν εἶναι $\frac{3}{4}$. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

215) Χορδὴ τόξου μήκους 173,854 μ. ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου 100 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ τόξον.

216) Αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ εἶναι 100 μ. καὶ 104 μέτρα, ἡ δὲ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἶναι 96 μ. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου καὶ ἡ τρίτη πλευρά.

217) Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ΑΒ=25 μ., ΒΓ=34 μ. καὶ τὸ ὕψος ΑΔ=7 μ. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου καὶ ἡ τρίτη πλευρά.

218) Ἡ πλευρὰ ρόμβου εἶναι 37 μ. καὶ ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος 72 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη διαγώνιος καὶ αἱ γωνίαι τοῦ ρόμβου.

219) Ἰσοσκελές τι τρίγωνον ἔχει τὴν βάσιν του ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ ἑκατέρας τῶν ἄλλων πλευρῶν· νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

220) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ βάσις εἶναι 890 μ., ἡ δὲ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι 18^{0}. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ λοιπὰ στοιχεῖα καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

221) Ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 50^{0} καὶ τὸ ὕψος, τὸ ἀγόμενον ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας ταύτης, εἶναι 146,75. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

222) Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἡ διχοτόμος τῆς Γ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἄλλαι πλευραὶ αὐτοῦ, ὅταν γνωρίζωμεν, ὅτι (ΓΑ)=125 μ. καὶ (ΑΔ)=50 μ.

223) Εἰς περιφέρειαν ἀκτῖνος 30 μ. ἄγονται αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῆς ἀπὸ σημείου ἀπέχοντος ἀπὸ τῆς περιφερείας 16 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τῶν ἀχθεισῶν ἐφαπτομένων.

224) Τῆς γωνίας ΑΟΓ ἡ ΟΑ προβάλλεται ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ταύτης· ἡ δὲ προβολὴ τῆς ΟΑ προβάλλεται ἐπὶ τὴν ΟΓ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία ΑΟΓ, δεδομένου, ὅτι ἡ τελευταία προβολὴ εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ΟΑ.

225) Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 673,12 μ., ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἄλλων πλευρῶν εἶναι 412,373 μ. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

226) Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 627,5 μ., τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἄλλων πλευρῶν εἶναι 878,5 μ. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

227) Ὀρθογωνίου τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 30 τ. μ., ἡ δὲ ὀξεῖα γωνία Α=$67^{0}\ 22'\ 48''$. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

228) Ὀρθογωνίου τριγώνου τὸ ἄθροισμα τῶν δύο καθέτων πλευρῶν εἶναι 119 μ., μία δὲ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ $64^{\circ}\,40''$. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

229) Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἡ περίμετρος εἶναι 120 μ., ἡ δὲ ὀξεῖα γωνία $B = 22^{\circ}\,37'\,12''$. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

230) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ διαφορὰ τῶν δύο καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 47 μ., μία δὲ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ $32^{\circ}\,46'\,45''$. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

231) Ἡ πλευρὰ κανονικοῦ δωδεκαγώνου εἶναι 20 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένου κύκλου, ὡς καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν αὐτῷ.

232) Τοῦ ὡς ἄνω δωδεκαγώνου νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδόν.

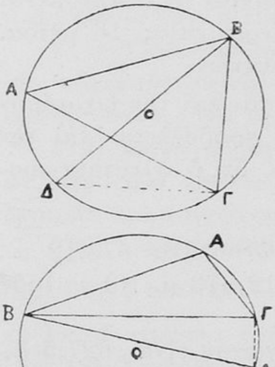
233) Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος κανονικοῦ δωδεκαγώνου, ὅταν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἶναι 10 μ.

234) Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος κανονικοῦ δωδεκαγώνου, ὅταν ἡ ἀκτὶς τοῦ περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι 1 μέτρον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΠΑΝΤΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

62. **Θεώρημα.** ***Ἐν παντὶ τριγώνῳ αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν.***



Σχ. 26

Ἤτοι εἶναι $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\beta}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$.

Ἔστω Ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου Ο καὶ ΓΔ διάμετρος τοῦ κύκλου τούτου, ἡ ὁποία ἢ θὰ τέμνει τὸ τρίγωνον (ἐὰν ἡ Α εἶναι ὀξεῖα) ἢ θὰ εἶναι ἐκτὸς αὐτοῦ (ἐὰν ἡ Α εἶναι ἀμβλεῖα). Ἑπομένως αἱ γωνίαι Α καὶ Δ ἢ θὰ εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαὶ (Στ. Γεωμ.), ἀλλὰ εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις θὰ ἔχωμεν $\eta\mu A = \eta\mu \Delta$.

᾿Αλλ᾿ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΓΔ λαμβάνομεν

$$\alpha = 2\mathrm{P}\,\eta\mu\Delta \quad \text{ἢ} \quad \alpha = 2\mathrm{P}\,\eta\mu\mathrm{A}\cdot \quad \text{τουτέστι} \quad 2\mathrm{P} = \frac{\alpha}{\eta\mu\mathrm{A}}.$$

῾Ομοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι $2\mathrm{P} = \dfrac{\beta}{\eta\mu\mathrm{B}}$ καὶ $2\mathrm{P} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu\mathrm{A}}$.

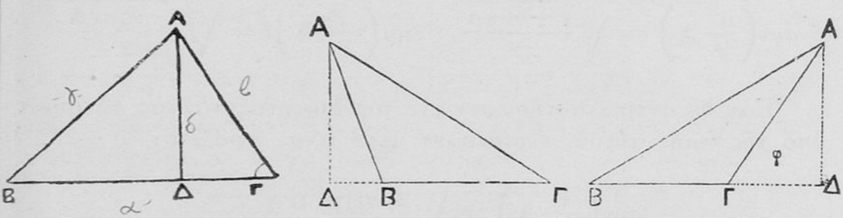
῾Επομένως εἶναι $$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}. \qquad (1)$$

63. **Θεώρημα.** ***᾿Εν παντὶ τριγώνῳ τὸ τετράγωνον τῆς τυχούσης πλευρᾶς ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλὴν τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν πλευρῶν τούτων, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς ὑπ᾿ αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.***

῎Εστω τυχὸν τρίγωνον, τὸ ΑΒΓ.

Καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς Α κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ ἡ ΑΔ.

᾿Εὰν ἡ γωνία Γ εἶναι ὀξεῖα, κατά τι θεώρημα τῆς Γεωμετρίας εἶναι $(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{B\Gamma})^2 + (\mathrm{A\Gamma})^2 - 2(\mathrm{B\Gamma}).(\Delta\Gamma)$.



Σχ. 27

᾿Αλλ᾿ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ εὑρίσκεται

$$(\Delta\Gamma) = (\mathrm{A\Gamma})\,\sigma\upsilon\nu\Gamma.$$

῞Οθεν ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ πρώτῃ ἰσότητι τὴν ΔΓ ὑπὸ τοῦ ἴσου αὐτῆς, εὑρίσκομεν:

$$(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{B\Gamma})^2 + (\mathrm{A\Gamma})^2 - 2(\mathrm{B\Gamma}).(\mathrm{A\Gamma})\sigma\upsilon\nu\Gamma, \text{ ἤτοι}$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma.$$

᾿Εὰν δὲ ἡ γωνία Γ εἶναι ἀμβλεῖα, ἡ κάθετος ΑΔ πίπτει ἐκτὸς τοῦ τριγώνου καὶ τότε ἔχομεν ἐκ τῶν στοιχείων τῆς Γεωμετρίας τὴν ἰσότητα $(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{B\Gamma})^2\ (\mathrm{A\Gamma})^2 + 2(\mathrm{B\Gamma}).(\Gamma\Delta)$. (ι)

᾿Αλλ᾿ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ ἕπεται $(\Gamma\Delta) = (\mathrm{A\Gamma})$ συνφ καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία φ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς Γ, εἶναι

$\sigma\upsilon\nu\varphi = -\sigma\upsilon\nu\Gamma$, ἑπομένως $(\Gamma\Delta) = (\mathrm{A}\Gamma).(-\sigma\upsilon\nu\,\Gamma) = -(\mathrm{A}\Gamma).\sigma\upsilon\nu\Gamma$ καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην τῆς ΓΔ εἰς τὴν ἰσότητα (ι), εὑρίσκομεν πάλιν

$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma.$$

Ἐπειδὴ ἡ πρότασις ἐφαρμόζεται ἐφ' ἑκάστης τῶν πλευρῶν, ἕπεται ὅτι εἶναι:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha^2}&\boldsymbol{=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A}\\ \boldsymbol{\beta^2}&\boldsymbol{=\gamma^2+\alpha^2-2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B}\\ \boldsymbol{\gamma^2}&\boldsymbol{=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma}\end{aligned}\qquad(2)$$

Τοὺς τύπους τούτους δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ὑπὸ μορφὴν καταλληλοτέραν πρὸς χρῆσιν τῶν λογαρίθμων. Πρὸς τοῦτο λύομεν τὸν πρῶτον ὡς πρὸς τὸ συνΑ, ὅτε εὑρίσκομεν:

$$\sigma\upsilon\nu\mathrm{A} = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$$

ἀλλ' εἶναι (41)

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{A}\right) = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}}{2}},\quad \eta\mu\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{A}\right) = \sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}}{2}}$$

Ἐὰν δὲ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὰς ἰσότητας ταύτας τὸ συνΑ ὑπὸ τῆς τιμῆς αὐτοῦ, εὑρίσκομεν μετά τινας πράξεις:

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{A}\right) = \sqrt{\frac{2\beta\gamma+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{4\beta\gamma}}$$

$$\eta\mu\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{A}\right) = \sqrt{\frac{2\beta\gamma-\beta^2-\gamma^2+\alpha^2}{4\beta\gamma}}.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι

$$2\beta\gamma+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2=(\beta+\gamma)^2-\alpha^2=(\alpha+\beta+\gamma).(-\alpha+\beta+\gamma)$$
$$2\beta\gamma-\beta^2-\gamma^2+\alpha^2=\alpha^2-(\beta-\gamma)^2=(\alpha+\beta-\gamma).(\alpha-\beta+\gamma)$$

ἕπεται $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{A}\right) = \sqrt{\frac{(\alpha+\beta+\gamma).(-\alpha+\beta+\gamma)}{4\beta\gamma}}$

$$\eta\mu\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{A}\right) = \sqrt{\frac{(\alpha-\beta+\gamma).(\alpha+\beta-\gamma)}{4\beta\gamma}}\qquad(3)$$

Ἐὰν δὲ πρὸς συντομίαν θέσωμεν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ (ὅτε τ σημαίνει τὴν ἡμίσειαν περίμετρον τοῦ τριγώνου) καὶ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς τεθείσης ἰσότητος πρῶτον τὸ 2α, εἶτα τὸ 2β καὶ τέλος τὸ 2γ, εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned} -\alpha+\beta+\gamma&=2(\tau-\alpha)\\ \alpha-\beta+\gamma&=2(\tau-\beta)\\ \alpha+\beta-\gamma&=2(\tau-\gamma) \end{aligned} \qquad (4)$$

καὶ διὰ τῆς βοηθείας τῶν ἰσοτήτων τούτων οἱ τύποι (3) γράφονται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}A\right)&=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}\\ \eta\mu\left(\frac{1}{2}A\right)&=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}\,. \end{aligned} \qquad (5)$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ἐκ τῆς δευτέρας τῶν ἰσοτήτων (2)

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}B\right)&=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{\gamma\alpha}}\\ \eta\mu\left(\frac{1}{2}B\right)&=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\gamma\alpha}} \end{aligned}$$

καὶ ἐκ τῆς τρίτης

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)&=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{\alpha\beta}}\\ \eta\mu\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)&=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta}} \end{aligned} \qquad (6)$$

Ἐὰν νῦν διαιρέσωμεν ἀνὰ δύο τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν:

$$\begin{aligned} \varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}A\right)&=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}\\ \varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}B\right)&=\sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\tau(\tau-\beta)}}\\ \varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)&=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}}\,. \end{aligned} \qquad (7)$$

Αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι πρέπει ἐν τοῖς τύποις τούτοις νὰ λαμβάνωνται θετικῶς· διότι τὰ ἡμίση τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου, ἤτοι αἱ γωνίαι $\frac{1}{2}$Α, $\frac{1}{2}$Β, $\frac{1}{2}$Γ, εἶναι μικρότεραι τῶν 90^0· ἑπομένως οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ αὐτῶν εἶναι πάντες θετικοί.

Σημ. Ἐὰν ἐν τριγώνῳ τρέψωμεν τὰ γράμματα τῶν κορυφῶν ἀπὸ Α, Β, Γ, εἰς Β, Γ, Α (τὸ Α εἰς Β, τὸ Β εἰς Γ καὶ τὸ Γ εἰς Α), θὰ τραπῶσιν ὁμοίως καὶ τὰ γράμματα τῶν πλευρῶν ἀπὸ α, β, γ, εἰς β, γ, α, ἀλλ' οἱ εὑρεθέντες γενικοὶ τύποι (1) (2), (3), (7), οἱ ἐπὶ τοῦ τυχόντος τριγώνου ἰσχύοντες, πρέπει προφανῶς νὰ ἀληθεύωσι καὶ μετὰ τὴν τροπὴν ταύτην· τρέποντες ἄρα τὰ γράμματα, ὡς εἴπομεν, δυνάμεθα ἐξ ἑνὸς τῶν τύπων τούτων νὰ εὕρωμεν τοὺς ὁμοίους του.

64. ***Ἐν παντὶ τριγώνῳ ἡ διαφορὰ δύο πλευρῶν ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, ὃν ἔχει καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν ἀπέναντι γωνιῶν πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἡμιαθροίσματος αὐτῶν.***

Τοὐτέστιν εἶναι

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\text{εφ}\,\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\text{εφ}\,\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})}.$$

Πρὸς τοῦτο γράφομεν τὴν ἰσότητα

$$\frac{\alpha}{\text{ημ}\mathrm{A}}=\frac{\beta}{\text{ημ}\mathrm{B}}$$

καὶ παριστῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἑτέρου τῶν ἴσων λόγων διὰ τοῦ λ, ὅτε ἔχομεν

$$\alpha=\lambda.\text{ημ}\mathrm{A}$$
$$\beta=\lambda.\text{ημ}\mathrm{B}$$

Ἐκ τούτων ἕπεται $\alpha-\beta=\lambda.(\text{ημ}\mathrm{A}-\text{ημ}\mathrm{B})$

$$\alpha+\beta=\lambda.(\text{ημ}\mathrm{A}+\text{ημ}\mathrm{B}).$$

Ὅθεν $$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\text{ημ}\mathrm{A}-\text{ημ}\mathrm{B}}{\text{ημ}\mathrm{A}+\text{ημ}\mathrm{B}}$$

καὶ κατὰ τὸν τύπον τοῦ ἐδ. 45

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\varepsilon\varphi\,\frac{1}{2}(A-B)}{\varepsilon\varphi\,\frac{1}{2}(A+B)}. \qquad (8)$$

65. ***Παρατήρησις.*** Τὰ ἓξ στοιχεῖα παντὸς τριγώνου συνδέονται διὰ τῶν ἑπομένων τριῶν ἐξισώσεων

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma=180^\circ$$

$$\frac{\alpha}{\eta\mu \mathrm{A}}=\frac{\beta}{\eta\mu \mathrm{B}}=\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \qquad (\varepsilon)$$

Πᾶσα δὲ ἄλλη ἐξίσωσις, τὰ ἓξ αὐτὰ στοιχεῖα συνδέουσα, πρέπει νὰ καταντᾷ ταυτότης, ὅταν ἐν αὐτῇ ἀντικατασταθῶσι τὰ Γ,α,β, ὑπὸ τῶν τιμῶν αὐτῶν

$$\Gamma=180^\circ-\mathrm{A}-\mathrm{B},\ \alpha=\frac{\gamma\ \eta\mu \mathrm{A}}{\eta\mu(\mathrm{A}+\mathrm{B})},\quad \beta=\frac{\gamma.\eta\mu \mathrm{B}}{\eta\mu(\mathrm{A}+\mathrm{B})}$$

ἃς παρέχουσιν αἱ ἐξισώσεις (ε)· διότι ἂν μὴ ἐγίνετο ταυτότης, θὰ συνέδεε τὰ ἐν αὐτῇ περιεχόμενα γ, Α, Β, ὅπερ ἄτοπον· διότι ταῦτα οὐδαμῶς συνδέονται πρὸς ἄλληλα καὶ δύνανται νὰ μεταβάλλωνται κατὰ τὸ δοκοῦν.

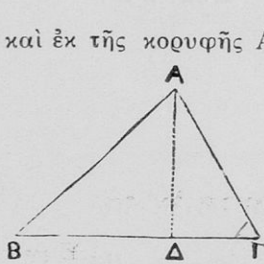
Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι πᾶσα ἄλλη ἐξίσωσις τὰ ἓξ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου συνδέουσα πρέπει νὰ εἶναι ἀκολούθημα τῶν ἐξισώσεων (ε), τουτέστι νὰ προκύπτῃ ἐξ αὐτῶν ἁρμοδίως συνδυαζομένων καὶ τοῦ τριγώνου μηδαμῶς παρεμβαίνοντος· διότι ἄν, εἰς τὴν ταυτότητα, τὴν ὁποίαν δίδει, τεθῶσιν ἐν αὐτῇ αἱ τιμαὶ τῶν Γ, α, β, ἀντικαταστήσωμεν πάλιν τὰς τιμὰς ταύτας ὑπὸ τῶν γραμμάτων Γ,α,β, θὰ εὕρωμεν πιθανῶς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

66. Ἔστω τυχὸν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς Α κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ ἡ ΑΔ· ἐὰν παραστήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου διὰ τοῦ Ε, θὰ εἶναι

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}.(\mathrm{B}\Gamma).(\mathrm{A}\Delta)=\frac{1}{2}\alpha\,(\mathrm{A}\Delta)$$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ εὑρίσκομεν $(\mathrm{A}\Delta)=(\mathrm{A}\Gamma).\eta\mu\Gamma=\beta.\eta\mu\Gamma$



Σχ. 28

ὅθεν ἕπεται $$E = \frac{1}{2}\alpha\beta.\eta\mu\Gamma. \qquad (9)$$

Τοῦτέστι ***τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται τῷ ἡμίσει τοῦ γινομένου δύο τῶν πλευρῶν αὐτοῦ πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.***

Ἐπειδὴ εἶναι (ἐδ. 42) $\eta\mu\Gamma = 2\eta\mu\left(\frac{1}{2}\Gamma\right).\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)$,

ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰ $\eta\mu\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)$, $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)$

ὑπὸ τῶν τιμῶν αὐτῶν (6), εὑρίσκομεν

$$\eta\mu\Gamma = \frac{2}{\alpha\beta}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

καὶ ἂν ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ ημΓ τεθῇ εἰς τὴν ἰσότητα (9), προκύπτει

$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}\cdot \qquad (10)$$

διὰ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Σημ. α'. Ἐὰν τυχὸν τετράπλευρον διαιρεθῇ εἰς τρίγωνα διὰ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ καὶ ἐφαρμοσθῇ ἐπ' αὐτῶν ὁ τύπος (9), εὑρίσκεται ἡ ἑξῆς πρότασις:

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου ἰσοῦται τῷ ἡμίσει τοῦ γινομένου τῶν διαγωνίων αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.

Σημ. β'. Ἐκ τῆς ἰσότητος

$$2P = \frac{\alpha}{\eta\mu A}$$

ἕπεται καὶ

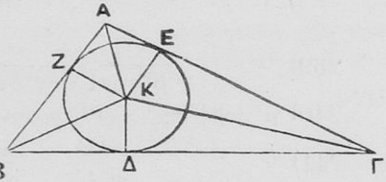
$$2P = \frac{\alpha.\beta.\gamma}{\beta.\gamma.\eta\mu A}$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\beta\gamma.\eta\mu A = 2.E$, συνάγεται

$$4.E.P = \alpha.\beta.\gamma \quad \text{ἢ} \quad E = \frac{\alpha.\beta.\gamma.}{4P}. \qquad (11)$$

ΑΚΤΙΣ ΤΟΥ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

67. Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου Κ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἀχθῶσιν ἐπὶ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ, τοῦ τριγώνου αἱ εὐθεῖαι ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, διαιρεῖται τὸ τρίγωνον εἰς τρία, ἔχοντα βάσεις μὲν τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, ὕψη δὲ τὰς ἀκτῖνας ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ τοῦ κύκλου (αἵτινες εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας)· ἑπομένως τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν εἶναι



Σχ. 29

$$\frac{1}{2}\alpha.\varrho \qquad \frac{1}{2}\beta.\varrho \qquad \frac{1}{2}\gamma.\varrho\cdot$$

ϱ οὔσης τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου. Ἐντεῦθεν ἕπεται

$$E=\frac{1}{2}\varrho(\alpha+\beta+\gamma)=\varrho.\tau.$$

ὅθεν καὶ
$$\varrho=\frac{E}{\tau}.$$

ἀντικαθιστῶντες δὲ τὸ Ε ὑπὸ τῆς τιμῆς αὐτοῦ (10), εὑρίσκομεν

$$\varrho=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}} \qquad (12)$$

Ἀσκήσεις·

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἐν παντὶ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι

235) $$\varepsilon\varphi B=\frac{\beta.\eta\mu\Gamma}{\alpha-\beta.\sigma\upsilon\nu\Gamma}\cdot$$

236) $$\frac{\eta\mu(B-\Gamma)}{\eta\mu(B+\Gamma)}=\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2}.$$

237) $$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}=\frac{\eta\mu\frac{A}{2}}{\eta\mu\left(\Gamma+\frac{A}{2}\right)}.$$

238) $$\frac{\alpha}{\beta-\gamma}=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{\sigma\upsilon\nu\left(\Gamma+\frac{A}{2}\right)}.$$

239) $$\frac{1}{\beta.\sigma\upsilon\nu\Gamma-\gamma.\sigma\upsilon\nu B}=\frac{\alpha}{\beta^2-\gamma^2}.$$

240) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2(\beta\gamma.\sigma\upsilon\nu A+\gamma\alpha.\sigma\upsilon\nu B+\alpha\beta.\sigma\upsilon\nu\Gamma)$.

241) $$\frac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi\Gamma}=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}.$$

242) Ἐὰν μ εἶναι τὸ μῆκος τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ, περατουμένης εἰς τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΒΓ, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι $\mu(\beta+\gamma)\eta\mu\frac{A}{2}=\beta\gamma.\eta\mu A$.

243) Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου εἶναι $\alpha=13$, $\beta=14$, $\gamma=15$, νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\eta\mu\frac{A}{2}$, $\eta\mu\frac{B}{2}$, $\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$.

244) Ὁμοίως ἐκ τῶν ἄνω δεδομένων νὰ εὑρεθῶσι τὰ

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2},\quad \sigma\upsilon\nu\frac{B}{2},\quad \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}.$$

245) Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου εἶναι $\alpha=8$, $\beta=6$, $\gamma=4$, νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$.

246) Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου εἶναι $\alpha=25$, $\beta=52$ καὶ $\gamma=63$, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$.

247) Ὁμοίως εὑρεῖν τὰς $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$, ὅταν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $\alpha=287$, $\beta=816$, $\gamma=865$.

248) Τριγώνου τινὸς αἱ γωνίαι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρὸς ἀλλήλας σχέσις τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

249) Ἐὰν τριγώνου αἱ γωνίαι τῆς βάσεως εἶναι $112^\circ\ 30'$ καὶ $22^\circ\ 30'$, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ὕψος αὐτοῦ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως.

250) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐν παντὶ τριγώνῳ εἶναι

$$\alpha=\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma+\gamma\sigma\upsilon\nu B$$
$$\beta=\gamma\sigma\upsilon\nu A+\alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma$$
$$\gamma=\alpha\sigma\upsilon\nu B+\beta\sigma\upsilon\nu A$$

251) Ἐὰν Δ εἶναι σημεῖόν τι τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΔ, οὗ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι Ε, ἡ δὲ γωνία ΑΔΓ παρασταθῇ διὰ τοῦ ω, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι

$$(\mathrm{A}\Delta)=\frac{2\mathrm{E}}{\alpha\eta\mu\omega}.$$

252) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι $\mathrm{E}=2\mathrm{P}\eta\mu\mathrm{A}\eta\mu\mathrm{B}\eta\mu\Gamma$.

253) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι

$$\mathrm{E}=4\mathrm{P}\varrho\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{B}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}.$$

254) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι $\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}=\dfrac{1}{2\mathrm{P}\varrho}$.

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΕΝ ΓΕΝΕΙ

68. Τὸ εὐθύγραμμον τρίγωνον ὁρίζεται ἐντελῶς, ὅταν δοθῶσιν ἡ μία πλευρὰ αὐτοῦ καὶ δύο γωνίαι (καὶ ἡ πρὸς τὴν πλευρὰν θέσις αὐτῶν) ἢ δύο πλευραὶ καὶ μία γωνία (ἥτις δύναται νὰ εἶναι ἢ ἡ ὑπὸ τῶν δύο πλευρῶν περιεχομένη ἢ ἡ ἀντικειμένη εἰς τὴν μεγαλυτέραν ἐξ αὐτῶν) ἢ αἱ τρεῖς πλευραὶ αὐτοῦ.

Διὰ ταῦτα ἐν τῇ ἐπιλύσει τῶν τριγώνων διακρίνομεν τὰς ἑπομένας τέσσαρας περιπτώσεις.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 1η

69. Δοθείσης μιᾶς πλευρᾶς α καὶ δύο γωνιῶν τοῦ τριγώνου, εὑρεῖν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

Ἡ τρίτη γωνία εὑρίσκεται ἀμέσως ἐκ τῆς ἰσότητος $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma=180^{\circ}$, αἱ δὲ ζητούμεναι πλευραὶ β καὶ γ δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων τοῦ ἐδ. 62

$$\beta=\frac{\alpha\eta\mu\mathrm{B}}{\eta\mu\mathrm{A}}\qquad\qquad\gamma=\frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu\mathrm{A}}$$

ἐξ ὧν λαμβάνομεν τοὺς πρὸς χρῆσιν τῶν λογαρίθμων καταλλήλους τύπους:

$$\lambda o\gamma\beta=\lambda o\gamma\alpha+\lambda o\gamma\eta\mu\mathrm{B}-\lambda o\gamma\eta\mu\mathrm{A}$$
$$\lambda o\gamma\gamma=\lambda o\gamma\alpha+\lambda o\gamma\eta\mu\Gamma-\lambda o\gamma\eta\mu\mathrm{A}$$

Παράδειγμα. Ἔστωσαν δεδομένα

$\alpha=752{,}8$ μ., $\mathrm{B}=67^{\circ}\ 33'\ 10''$, $\Gamma=79^{\circ}\ 40'$

ζητοῦνται δὲ αἱ πλευραὶ β, γ καὶ ἡ γωνία Α καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

Ἐν πρώτοις εἶναι

$$B+\Gamma=147^{\circ}\ 13'\ 10''$$

ὅθεν

$$A=32^{\circ}\ 46'\ 50''$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς α

$$\beta=\frac{\alpha\,\eta\mu B}{\eta\mu A}$$

λογ α	= 2,87668
λογ ημΒ	= $\bar{1}$,96578
ἄθροισμα	= 2,84246
λογ ημΑ	= $\bar{1}$,73354
λογ β	= 3,10892
καὶ β	= 1285,06

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ

$$\gamma=\frac{\alpha\,\eta\mu \Gamma}{\eta\mu A}$$

λογ α	= 2,87668
λογ ημΓ	= $\bar{1}$,99290
ἄθροισμα	= 2,86958
λογ ημΑ	= $\bar{1}$,73354
λογ γ	= 3,13604
καὶ γ	= 1367,84

κατὰ προσέγγισιν $\frac{3}{100}$ τοῦ μέτρου.

Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ.

$$E=\frac{1}{2}\,\alpha\beta\,\eta\mu\Gamma$$

λογ α	= 2,87668
λογ β	= 3,10892
λογ ημΓ	= $\bar{1}$,99290
λογ (2Ε)	= 5,97850
καὶ 2Ε	= 951700 τετραγ. μέτρα.
ὅθεν Ε	= 475850 τετραγ. μέτρα.

Σημ. Ὁ λογ(2Ε) δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ἀληθοῦς (ἐδ. 58, σημ.) τὸ πολὺ κατὰ $2\frac{1}{2}$ μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως. Ἐπειδὴ δὲ (ὡς ἐκ τῶν πινάκων βλέπομεν), ἂν αὐξηθῇ ὁ λογάριθμος οὗτος κατὰ πέντε μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως, ὁ ἀριθμὸς 2Ε αὐξάνει κατὰ 100, ἕπεται, ὅτι τὸ ἐπὶ τοῦ 2Ε συμβαῖνον λάθος εἶναι μικρότερον τῶν 50 τ. μ. καὶ ἑπομένως τὸ ἐπὶ τοῦ Ε συμβαῖνον λάθος εἶναι μικρότερον τῶν 25 τ. μ.

Παρατήρησις. Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $E = \frac{1}{2} \alpha\beta\eta\mu\Gamma$ ἀντικαταστήσωμεν τὸ β ὑπὸ τῆς τιμῆς αὐτοῦ $\beta = \frac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu A}$

εὑρίσκομεν
$$E = \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{\eta\mu B\ \eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$$

τὸν δὲ τύπον τοῦτον μεταχειριζόμεθα, ὅταν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν E ἀμέσως ἐκ τῶν δεδομένων καὶ πρὶν εὕρωμεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 2α

70. Δοθεισῶν δύο πλευρῶν α, β τοῦ τριγώνου καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας Γ, εὑρεῖν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων, μεταχειριζόμεθα τὸν τύπον τοῦ ἐδ. 64

$$\frac{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A-B)}{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A+B)} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$$

ἐπειδὴ ἐδόθη ἡ γωνία Γ, εἶναι δὲ $A+B+\Gamma=180^\circ$,

ἕπεται
$$A+B=180^\circ-\Gamma$$

καὶ
$$\frac{1}{2}(A+B)=90^\circ-\frac{1}{2}\Gamma\cdot$$

ὥστε ὁ προκείμενος τύπος γίνεται

$$\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\cdot\sigma\varphi\frac{1}{2}\Gamma.$$

Ὅθεν $\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A-B)=\lambda o\gamma(\alpha-\beta)+\lambda o\gamma\sigma\varphi\frac{1}{2}\ \Gamma-\lambda o\gamma(\alpha+\beta)$.

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν γωνιῶν A καὶ B, παριστῶντες δὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν ταύτην διὰ Δ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{2}(A-B)=\Delta$$

ἀλλὰ καὶ $$\frac{1}{2}(A+B)=90^\circ-\frac{1}{2}\Gamma.$$

Ὅθεν $$A=90^\circ-\frac{1}{2}\Gamma+\Delta$$

καὶ $$B=90^\circ-\frac{1}{2}\Gamma-\Delta.$$

Μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν γωνιῶν Α καὶ Β εὑρίσκομεν καὶ τὴν πλευρὰν γ ἐκ τοῦ τύπου

$$\gamma=\frac{\alpha\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}.$$

Σημ. Ὑπεθέσαμεν, ὅτι αἱ δεδομέναι πλευραὶ α, β εἶναι ἄνισοι· ἂν εἶναι ἴσαι, τὸ πρόβλημα λύεται ἁπλούστατα· διότι εἶναι

$$A=B=90^\circ-\frac{1}{2}\Gamma$$

καὶ $$\gamma=2\alpha\eta\mu\frac{1}{2}\Gamma.$$

Παράδειγμα. Ἔστωσαν δεδομένα $\alpha=5897,2\mu.$, $\beta=1409,9\mu.$, $\Gamma=39^\circ\ 15'$.

$$\alpha+\beta=7307$$
$$\alpha-\beta=4487,4$$
$$\frac{1}{2}\Gamma=19^\circ\ 37'\ 30''.$$

Εὕρεσις τῶν γωνιῶν Α καὶ Β

$$\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}.\ \sigma\varphi\frac{1}{2}\Gamma$$

$$\lambda o\gamma(\alpha-\beta)=3,65200$$
$$\lambda o\gamma\sigma\varphi\frac{1}{2}\Gamma=0,44785$$
$$\text{ἄθροισμα}\quad 4,09985$$
$$\lambda o\gamma(\alpha+\beta)=3,86374$$

$$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A-B)=0,23611$$

ἐξ οὗ $\frac{1}{2}(A-B)=59^\circ\ 51'\ 35''$ (προσέγγισις 4″)

ἐπειδὴ δὲ $\frac{1}{2}(A+B)=70^\circ 22' 30''=90^\circ-\frac{1}{2}\Gamma$,

εὑρίσκομεν $A=130^\circ\, 14'\, 5''$

$B=\ 10^\circ\, 30'\, 55''$.

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ.

$$\gamma=\frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$$

$$\begin{array}{ll} \lambda o\gamma\alpha & = 3{,}77064 \\ \lambda o\gamma\eta\mu\Gamma & = \overline{1}{,}80120 \\ \hline \text{ἄθροισμα} & = 3{,}57184 \\ \lambda o\gamma\eta\mu A & = \overline{1}{,}88275 \\ \hline \lambda o\gamma\gamma & = 3{,}68909 \\ \text{καὶ } \gamma & = 4887{,}56 \end{array}$$

Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ Ε.

$$2E=\alpha\beta\eta\mu\Gamma$$

$$\begin{array}{ll} \lambda o\gamma\alpha & = 3{,}77064 \\ \lambda o\gamma\beta & = 3{,}14916 \\ \lambda o\gamma\eta\mu\Gamma & = \overline{1}{,}80120 \\ \hline \lambda o\gamma\ (2E) & = 6{,}72100 \\ 2E & = 5260120 \text{ τ. μ.} \end{array}$$

$E=2630060$ τ. μ. προσέγγισις 94 τ. μ.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 3η

71. Δοθεισῶν δύο πλευρῶν α καὶ β τοῦ τριγώνου καὶ τῆς γωνίας Α, ἥτις εἶναι ἀπέναντι μιᾶς τῶν πλευρῶν τούτων, εὑρεῖν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων ἔχομεν τοὺς τύπους

$$\eta\mu B=\frac{\beta\eta\mu A}{\alpha},\quad A+B+\Gamma=180^\circ,\quad \gamma=\frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}.$$

Ἐκ τοῦ πρώτου εὑρίσκεται ἡ γωνία Β, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου ἡ Γ καὶ ἐκ τοῦ τρίτου, μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς Γ, εὑρίσκεται ἡ πλευρὰ γ.

Ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν, πρέπει ἡ τιμὴ τοῦ ἡμιτόνου Β νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν μονάδα, τουτέστι νὰ εἶναι $\frac{\beta\eta\mu A}{\alpha}\leqq 1$

ἤτοι $\beta\eta\mu A \leqslant \alpha$, (ϑ)

τούτου δὲ συμβαίνοντος, ἂν παραστήσωμεν διὰ Δ τὴν μικροτέραν τῶν 90^0 γωνίαν, τὴν ἔχουσαν ἡμίτονον τὸ $\frac{\beta\eta\mu A}{\alpha}$, πρέπει νὰ λάβωμεν (διότι μόνον τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας Β ἐδόθη)

$$\text{ἢ } B = \Delta \text{ καὶ ἑπομένως } \Gamma = 180^0 - A - \Delta$$
$$\text{ἢ } B = 180^0 - \Delta \text{ καὶ ἑπομένως } \Gamma = \Delta - A.$$

Ἀλλ' ἂν μὲν εἶναι $\beta < \alpha$, θὰ εἶναι καὶ $\beta\eta\mu A < \alpha$, διότι τὸ $\beta\eta\mu A$ δὲν ὑπερβαίνει τὸ β, ἑπομένως τὸ πρόβλημα εἶναι τότε δυνατόν· ἔχει ὅμως μίαν μόνην λύσιν, διότι ἐκ τῆς ἰσότητος

$$\eta\mu\Delta = \frac{\beta\eta\mu A}{\alpha}$$

ἕπεται (ἐπειδὴ $\beta < \alpha$), $\eta\mu\Delta < \eta\mu A$.
ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἡ ὀξεῖα γωνία Δ εἶναι τότε μικροτέρα τῆς Β, ἥτις θὰ παρεῖχεν ἀρνητικὴν τιμὴν τῆς Γ· ὥστε ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ θὰ λάβωμεν

$$B = \text{τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ } \Delta$$
$$\Gamma = 180^0 - A - \Delta\cdot$$

ὅτι δὲ ἡ τιμὴ αὕτη τῆς Γ εἶναι θετικὴ καὶ ὅταν ἡ Α εἶναι ἀμβλεῖα, φαίνεται ἐκ τῆς ἀνισότητος (ϑ), ἥτις δεικνύει, ὅτι ἡ ὀξεῖα γωνία $180^0 - B$ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Δ.

Ἐὰν εἶναι $\beta = \alpha$, θὰ εἶναι καὶ $B = A$· ὅθεν $\Gamma = 180^0 - 2A$, ἡ δὲ λύσις αὕτη εἶναι παραδεκτή, ἐὰν ἡ δοθεῖσα γωνία Δ εἶναι ὀξεῖα.

Ἐὰν τέλος εἶναι $\beta > \alpha$, εἶναι ἀνάγκη νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης $\beta\eta\mu A \leqq \alpha$, τούτου δὲ συμβαίνοντος, αἱ τιμαὶ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ εἶναι ἢ $B =$ τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ Δ καὶ ἑπομένως $\Gamma = 180^0 - A - \Delta$, ἢ $B = 180^0 - \Delta$ καὶ ἑπομένως $\Gamma = \Delta - A$· εἶναι δὲ ἀμφότεραι αἱ λύσεις αὗται παραδεκταί, ἐὰν ἡ δοθεῖσα γωνία Α εἶναι ὀξεῖα· διότι τότε εἶναι μικρότεραι τῆς ὀξείας Δ (ἐπειδὴ $\eta\mu\Delta > \eta\mu A$), ἑπομένως αἱ τιμαὶ ἀμφοτέρων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ περιλαμβάνονται, ὡς πρέπει, μεταξὺ 0^0 καὶ 180^0.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι αἱ δύο αὗται λύσεις καταντῶσιν εἰς μίαν, ἐὰν εἶναι $\beta\eta\mu A = \alpha$· διότι τότε ἡ γωνία Δ γίνεται ὀρθή· ὥστε αἱ δύο τιμαὶ τῆς Β (ἑπομένως καὶ τῆς Γ) γίνονται ἴσαι.

Ὁ περιορισμὸς ὁ ἀπαιτούμενος, ἵνα τὸ πρόβλημα λυθῇ, δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ γεωμετρικῶς ὡς ἕπεται.

Ἔστω ἡ γωνία ΓΑΕ (σχ. σελ. 12) ἴση τῇ δοθείσῃ Α καὶ ἡ ΑΓ ἴση τῇ β· καὶ ἐκ τοῦ Γ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΕ ἡ ΓΚ· ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΚ εὑρίσκομεν (ΓΚ)=(ΑΓ)ημΑ=βημΑ. Ὥστε ὁ ῥηθεὶς περιορισμὸς εἶναι $ΓΚ \leqq α$, τουτέστιν ἡ πλευρὰ α, ἡ εἰς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ὑποτείνουσα, πρέπει νὰ μὴ εἶναι μικροτέρα τῆς καθέτου, ἥτις καταβιβάζεται ἐκ τοῦ πέρατος τῆς μιᾶς πλευρᾶς, ἥτις ἐλήφθη ἴση τῇ β, ἐπὶ τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς δοθείσης γωνίας.

Τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα εἶναι γνωστὰ καὶ ἐκ τῶν στοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

Παραδείγματα. 1ον Ἔστωσαν δεδομένα α=893,8 μ.

β=697,4 μ., $A=58^\circ\ 13'\ 20''$·

ζητοῦνται δὲ αἱ γωνίαι Β, Γ καὶ ἡ πλευρὰ γ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

Ἐπειδὴ εἶναι $α > β$, τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπιδέχεται μίαν καὶ μόνην λύσιν.

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

$$ημB = \frac{βημA}{α}$$

$$\begin{array}{ll} λογ\ β & = 2,84348 \\ λογ\ ημA & = \underline{\bar{1},92947} \\ ἄθροισμα & = 2,77295 \\ λογ\ α & = \underline{2,95124} \\ λογ\ ημB & = \bar{1},82171 \end{array}$$

καὶ $B=41^\circ\ 33'\ 8''$, προσέγγισις $6''$.

Εὕρεσις τῆς γωνίας Γ.

$$\begin{array}{rl} A & = 58^\circ\ 13'\ 20'' \\ \underline{B} & \underline{= 41^\circ\ 33'\ \ 8''} \\ \text{ὅθεν}\ A+B & = 99^\circ\ 46'\ 28'' \\ Γ & = 80^\circ\ 13'\ 32'' \end{array}$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ.

$$γ = \frac{αημΓ}{ημA}$$

$$
\begin{aligned}
\lambda o\gamma\ \alpha &= \bar{2},95124 \\
\lambda o\gamma\ \eta\mu\Gamma &= \bar{1},99365 \\
\overline{} \\
\check{\alpha}\vartheta\varrho o\iota\sigma\mu\alpha &= \bar{2},94489 \\
\lambda o\gamma\ \eta\mu A &= \bar{1},92947 \\
\lambda o\gamma\gamma &= 3,01542
\end{aligned}
$$

καὶ $\gamma = 1036,14$ μ., προσέγγισις $\dfrac{1}{100}$

Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ Ε.

$$
\begin{aligned}
2E &= \beta\gamma\eta\mu A \\
\lambda o\gamma\ \beta &= 2,84348 \\
\lambda o\gamma\ \gamma &= 3,01542 \\
\lambda o\gamma\ \eta\mu A &= \bar{1},92947 \\
\lambda o\gamma(2E) &= 5,78837
\end{aligned}
$$

καὶ $2A = 614286$, προσέγγισις 36 τ. μ.

ὅθεν $E = 307143$, προσέγγισις 18 τ. μ.

2ον. Ἔστωσαν δεδομένα

$\alpha = 1873,5$ μ $\qquad \beta = 2954$ μ

$A = 35^\circ\ 12'\ 40''$.

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

$$
\eta\mu B = \frac{\beta\eta\mu A}{\alpha}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda o\gamma\ \beta &= 3,47041 \\
\lambda o\gamma\eta\mu A &= \bar{1},76087 \\
\check{\alpha}\vartheta\varrho o\iota\sigma\mu\alpha &= 3,23128 \\
\lambda o\gamma\ \alpha &= 3,27265 \\
\lambda o\gamma\ \eta\mu B &= \bar{1},95863
\end{aligned}
$$

ὅθεν $B = 65^\circ\ 25'\ 10''$, προσέγγισις $15''$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\beta > \alpha$, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν καὶ

$$B = 114^\circ\ 36'\ 50'',$$

ἤτοι τὴν παραπληρωματικὴν τῆς προηγουμένης τιμῆς· ὥστε ἔχομεν δύο λύσεις.

1η λύσις

$$B = 65^\circ\ 23'\ 10''$$
$$A = 35^\circ\ 12'\ 40''$$
$$A + B = 100^\circ\ 35'\ 50''$$
ὅθεν $\Gamma = 79^\circ\ 24'\ 10''$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ

$$\gamma = \frac{\alpha \eta\mu \Gamma}{\eta\mu A}$$

λογ α	$= 3,27265$
λογημΓ	$= \bar{1},99253$
ἄθροισμα	$= 3,26518$
λογημΑ	$= \bar{1},76087$
λογγ	$= 3,50431$
καὶ γ	$= 3193,9$

2α λύσις

$$B = 114^\circ\ 36'\ 50''$$
$$A = 35^\circ\ 12'\ 40''$$
$$A + B = 149^\circ\ 49'\ 30''$$
ὅθεν $\Gamma = 30^\circ\ 10'\ 40''$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ

$$\gamma = \frac{\alpha \eta\mu \Gamma}{\eta\mu A}$$

λογ α	$= 3,27265$
λογημΓ	$= \bar{1},70126$
ἄθροισμα	$= 2,97391$
λογημΑ	$= \bar{1},76087$
λογγ	$= 3,21304$
καὶ γ	$= 1633,2$

3ον. Ἔστωσαν τὰ δεδομένα

$$\alpha = 397,5\ \mu\ ,\ \beta = 2549\ \mu.,\ A = 58^\circ\ 12'$$

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

λογ β	$= 3,40637$
λογημΑ	$= \bar{1},92936$
ἄθροισμα	$= 3,33573$
λογ α	$= 2,59934$
λογ ημΒ	$= 0,73639.$

Ἐπειδὴ ὁ εὑρεθεὶς λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου τῆς Β εἶναι θετικὸς (ὅπερ σημαίνει, ὅτι ἡ παράστασις $\frac{\beta \eta\mu A}{\alpha}$, ἤτοι τὸ ημΒ, ὑπερβαίνει τὴν μονάδα), ἡ γωνία Β δὲν ὑπάρχει καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 4η

72. ***Δοθεισῶν τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, εὑρεῖν τὰς γωνίας αὐτοῦ.***

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων μεταχειριζόμεθα τοὺς ἀκολούθους τύπους:

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}A\right) = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$$

$$\text{εφ}\left(\frac{1}{2}\,\text{Β}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\tau(\tau-\beta)}}$$

$$\text{εφ}\left(\frac{1}{2}\,\Gamma\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}}$$

οἵτινες δίδουσι τοὺς πρὸς χρῆσιν τῶν λογαρίθμων καταλλήλους τύπους

$$\text{λογεφ}\left(\frac{1}{2}\text{Α}\right)=\frac{1}{2}\Big[\text{λογ}(\tau-\beta)+\text{λογ}(\tau-\gamma)-\text{λογ}\tau-\text{λογ}(\tau-\alpha)\Big]$$

$$\text{λογεφ}\left(\frac{1}{2}\text{Β}\right)=\frac{1}{2}\Big[\text{λογ}(\tau-\gamma)+\text{λογ}(\tau-\alpha)-\text{λογ}\tau-\text{λογ}(\tau-\beta)\Big]$$

$$\text{λογεφ}\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)=\frac{1}{2}\Big[\text{λογ}(\tau-\alpha)+\text{λογ}(\tau-\beta)-\text{λογ}\tau-\text{λογ}(\tau-\gamma)\Big]$$

Παρατηρητέον δὲ ὅτι, ἵνα τὸ πρόβλημα ᾖ δυνατόν, ἀνάγκη καὶ τὰ τρία ὑπόρριζα νὰ εἶναι θετικά· ἐπειδὴ δὲ εἶναι

$$\tau=\frac{1}{2}\,(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$\tau-\alpha=\frac{1}{2}\,(-\alpha+\beta+\gamma)$$

$$\tau-\beta=\frac{1}{2}\,(\alpha-\beta+\gamma)$$

$$\tau-\gamma=\frac{1}{2}\,(\alpha+\beta-\gamma),$$

ἐὰν ἐκ τῶν δοθεισῶν πλευρῶν ἡ α μηδετέρας τῶν ἄλλων εἶναι μικροτέρα, οἱ παράγοντες $(\tau-\beta)$, $(\tau-\gamma)$ καὶ ὁ τ θὰ εἶναι θετικοὶ καὶ τὰ ὑπόρριζα θὰ ἔχωσιν ἑπομένως τὸ σημεῖον τοῦ παράγοντος $\tau-\alpha$, ὅστις διὰ τοῦτο ἀνάγκη νὰ εἶναι θετικός, ἤτοι $\alpha<\beta+\gamma$· ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι, ἵνα τὸ πρόβλημα λυθῇ, πρέπει μηδεμία τῶν δοθεισῶν πλευρῶν νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, τούτου δὲ συμβαίνοντος, ἐμάθομεν ἐν τοῖς στοιχείοις τῆς Γεωμετρίας, ὅτι τὸ τρίγωνον πάντοτε ὑπάρχει.

Παράδειγμα. Ἔστωσαν δεδομένα:

$\alpha=597{,}8$ μ. $\quad\beta=398{,}1$ μ. $\quad\gamma=206$ μ.

Ἐν πρώτοις εἶναι

$$\alpha+\beta+\gamma=1201,9$$

ὅθεν $$\tau=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)=600,95$$

$$\tau-\alpha=3,15$$
$$\tau-\beta=202,85$$
$$\tau-\gamma=394,95$$

καὶ $$\lambda o\gamma\ \tau=2,77883$$
$$\lambda o\gamma(\tau-\alpha)=0,49831$$
$$\lambda o\gamma(\tau-\beta)=2,30718$$
$$\lambda o\gamma(\tau-\gamma)=2,59654$$

Εὕρεσις τῆς γωνίας Α.

$$\left(\varepsilon\varphi\frac{1}{2}A\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$$

λογ(τ—β) = 2,30718
λογ(τ—γ) = 2,59654
ἄθροισμα = 4,90372

λογ τ = 2,77883
λογ(τ—α) = 0,49831
ἄθροισμα = 3,27714

4,90372
3,27714
διαφορὰ 1,62658

$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}A\right)=0,81329$$

καὶ $\frac{1}{2}A=81^\circ\,15'\,40'',7$ προσέγγισις $\frac{3''}{4}$

καὶ $A=162^\circ\,31'\,21'',4$ προσέγγισις $1''\frac{1}{2}$.

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}B\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\tau(\tau-\beta)}}$$

λογ (τ—γ) = 2,59654
λογ (τ—α) = 0,49831
ἄθροισμα = 3,09485

λογ τ = 2,77883
λογ (τ—β) = 2,30718
ἄθροισμα = 5,08601

$$\begin{array}{r} 3,09485 \\ \underline{5,08601} \\ \text{διαφορὰ} \quad \bar{2},00884 \end{array}$$

$$\text{λογεφ}\left(\frac{1}{2}B\right) = \bar{1},00442$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{1}{2}B = 5^{\circ}\,46'\,7'' \text{ προσέγγισις } \frac{1''}{2}$$

$$\text{καὶ} \quad B = 11^{\circ}\,32'\,14'' \text{ προσέγγισις } 1''.$$

Εὕρεσις τῆς γωνίας Γ.

$$\text{εφ}\left(\frac{1}{2}\Gamma\right) = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}}$$

$$\begin{array}{ll} \text{λογ}\,(\tau-\alpha) = 0,49831 & \text{λογ}\,\tau = 2,77883 \\ \text{λογ}\,(\tau-\beta) = \underline{2,30718} & \text{λογ}\,(\tau-\gamma) = \underline{2,59654} \\ \text{ἄθροισμα} = 2,80549 & \text{ἄθροισμα} = 5,37537 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2,80549 \\ \underline{5,37537} \\ \text{διαφορὰ} \quad \bar{3},43012 \end{array}$$

$$\text{λογ εφ}\left(\frac{1}{2}\Gamma\right) = \bar{2},71506$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{1}{2}\Gamma = 2^{\circ}\,58'\,13'' \text{ προσέγγισις } \frac{1''}{3}$$

$$\Gamma = 5^{\circ}\,56'\,26'' \text{ προσέγγισις } \frac{2''}{3}.$$

Σημ. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν πρέπει νὰ εἶναι ἴσον μὲ 180°, δυνάμεθα νὰ βασανίσωμεν τὰς προηγουμένας πράξεις, ἀθροίζοντες τὰς εὑρεθείσας τιμὰς αὐτῶν καὶ παρατηροῦντες τὴν διαφορὰν τοῦ ἀθροίσματος ἀπὸ 180°.

$$\begin{array}{rl} A = & 162^{\circ}\,31'\,21'',4 \\ B = & 11^{\circ}\,32'\,14'' \\ \Gamma = & \underline{5^{\circ}\,56'\,26''} \\ A+B+\Gamma = & 180^{\circ}\;\;0'\;\;1'',4 \end{array}$$

Τὸ κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς Α συμβὰν λάθος ἦτο μικρότερον τοῦ 1'' ½, τὸ δὲ κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς Β μικρότερον τοῦ 1'', τὸ δὲ κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς Γ μικρότερον τοῦ $\frac{2''}{3}$· ὥστε τὸ εἰς τὸ ἄθροισμα Α+Β+Γ ὑπάρχον λάθος δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὰ $3''\frac{1}{6}$, ὅπερ ἀληθῶς συμβαίνει.

Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ Ε.

$$Ε = \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$$

$$\begin{aligned} λογ\ τ &= 2,77883 \\ λογ\ (τ-α) &= 0,49831 \\ λογ\ (τ-β) &= 2,30718 \\ λογ\ (τ-γ) &= 2,59654 \\ \hline ἄθροισμα &= 8,18086 \\ λογ\ Ε &= 4,09043 \end{aligned}$$

καὶ Ε = 12814,8, τ. μ., προσέγγισις $\frac{3}{10}$ τοῦ τ. μ.

Ἀσκήσεις.

255) Τριγώνου ΑΒΓ δίδονται α=145 μ.. Β=74° 40′ καὶ Γ=38° 25′. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

256) Τριγώνου ΑΒΓ δίδονται Β=76° 43′, Γ=85° 20′ καὶ α=475,65 μέτρα. Νὰ λυθῇ τὸ τρίγωνον.

257) Τρίγωνόν τι ἔχει μίαν πλευρὰν ἴσην μὲ 12,5 μ. αἱ δὲ δύο προσκείμεναι γωνίαι εἶναι 18° ἡ μία καὶ 98° 12′ ἡ ἄλλη. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

258) Τριγώνου τινὸς μία γωνία εἶναι 45°, αἱ δὲ περιέχουσαι αὐτὴν πλευραὶ εἶναι, ἡ μία 104 μ., ἡ δὲ ἄλλη 892. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

259) Τριγώνου τινὸς μία γωνία εἶναι 120°, ἐκ δὲ τῶν πλευρῶν, οἵτινες περιέχουσιν αὐτήν, ἡ μία εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι τοῦ τριγώνου.

260) Ἐὰν α=242,5, β=143,3 καὶ Γ=54° 36′, νὰ λυθῇ τὸ τρίγωνον.

261) Ἐὰν β=130 μ., γ=63 μ., καὶ Β=42° 15′ 30′ νὰ λυθῇ τὸ τρίγωνον.

262) Ἐὰν $\alpha = 5374,5$, $\gamma = 1586$ καὶ $B = 15^\circ\ 11'$, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἄλλαι γωνίαι τοῦ τριγώνου.

263) Τριγώνου τινὸς δίδονται αἱ δύο πλευραὶ $\alpha = 1542,7$ μ., $\beta = 894,3$ μ. καὶ ἡ γωνία, ἡ ἀπέναντι μιᾶς ἐξ αὐτῶν, $A = 18^\circ\ 42'$. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

264) Τριγώνου τινὸς δίδονται αἱ δύο πλευραὶ $\alpha = 16$ μ. καὶ $\beta = 25$ μ. καὶ ἡ γωνία $A = 33^\circ\ 15'$. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ λοιπαὶ γωνίαι αὐτοῦ.

265) Τριγώνου τινὸς δίδονται αἱ δύο πλευραὶ $\alpha = 45$ μ., $\beta = 78$ μ. καὶ $\eta\mu A = \frac{2}{3}$. Νὰ λυθῇ τὸ τρίγωνον.

266) Τριγώνου τινὸς αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι 56 μ., 65 μ. καὶ 33 μ. Να εὑρεθῇ ἡ μικροτέρα γωνία αὐτοῦ.

267) Τριγώνου τινος αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι 15 μ., 12 μ. καὶ 30 μ. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι αὐτοῦ καὶ αἱ ἀκτῖνες τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου.

268) Αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι 8 μ., 9., $\sqrt{217}$ μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγαλυτέρα γωνία τοῦ τριγώνου.

269) Τριγώνου τινὸς αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι $\alpha = 1,723$ μ., $\beta = 0,985$ μ., $\gamma = 0,816$ μ. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

270) Αἱ γωνίαι τριγώνου τινὸς εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 9, 13, 14, ἡ δὲ πλευρά, ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας, γωνίας εἶναι 150 μ. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἄλλαι πλευραί.

271) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, οὗ αἱ πλευραὶ εἶναι 287 μ., 816 μ. καὶ 865 μ.

272) Τετραπλεύρου τινὸς αἱ διαγώνιοι εἶναι ἡ μία 840 μ., ἡ δὲ ἄλλη 895 μ., ἡ δὲ ἑτέρα τῶν ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένων γωνιῶν εἶναι 87°. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου τούτου.

273) Τριγώνου τινὸς τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 15489 τ. μ., ἡ δὲ περίμετρος 18455 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου.

274) Ἡ βάσις τριγώνου εἶναι 20 μ., ἡ περίμετρος αὐτοῦ 42 μ. καὶ ἡ γωνία, ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως, $126^\circ\ 52'$. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἄλλαι πλευραὶ τοῦ τριγώνου.

275) Ἐκ τῶν τριῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου καὶ ἐκ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ νὰ εὑρεθῶσιν αἱ πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

276) Δίδονται τριγώνου τινὸς τὸ ἐμβαδὸν E, μία τῶν γωνιῶν A καὶ ἡ ἑτέρα τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν πλευρῶν, ἡ β. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.

277) Ἡ περίμετρος τριγώνου εἶναι 20 μ., τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ $10\sqrt{3}$ τ. μ. καὶ μία τῶν γωνιῶν 60°. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

278) Τριγώνου τινὸς μία πλευρὰ α εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ μιᾶς ἄλλης β καὶ ἡ τρίτη γ εἶναι τὰ $\frac{5}{6}$ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς β. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

279) Τετραπλεύρου τινὸς εἶναι γνωσταὶ αἱ τέσσαρες πλευραὶ καὶ μία γωνία. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ λοιπαὶ γωνίαι αὐτοῦ καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

280) Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι Α=53° 30′ καὶ Β=98° 40′, ἡ δὲ ἀκτὶς τοῦ περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι 43,75 μ. Νὰ λυθῇ τὸ τρίγωνον.

281) Τριγώνου ΑΒΓ ἡ περίμετρος εἶναι 286 μ., ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι 82 μ., ἡ δὲ γωνία Α=52° 12′. Νὰ λυθῇ τὸ τρίγωνον.

282) Ἡ ἀκτὶς τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι 10,15μ., ἡ μία πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι 15,23μ καὶ μία τῶν εἰς ταύτην προσκειμένων γωνιῶν 47°. Νὰ λυθῇ τὸ τρίγωνον.

283) Τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον εἶναι γνωσταὶ αἱ τέσσαρες πλευραί. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι αὐτοῦ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

284) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραπλεύρου, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον καὶ οὗ αἱ πλευραὶ εἶναι 3μ., 5, 7, 12μ.

285) Κανονικοῦ δεκαγώνου ἡ πλευρὰ εἶναι 2 μ. Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

286) Ἐὰν υ εἶναι τὸ ὕψος τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρὸς τὴν πλευρὰν α, ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι $υ=\frac{α.ημΒ\,ημΓ}{ημΑ}$.

287) Ἐὰν δ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ, ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι $δ=\frac{2βγ}{β+γ}.\ συν\frac{Α}{2}=\frac{α.ημΒ.ημΓ}{ημ\frac{Α}{2}\,(ημΒ+ημΓ)}$.

288) Ἐὰν μ εἶναι ἡ διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς Α, ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$μ=\frac{1}{2}\sqrt{2β^2+2γ^2-α^2}=\frac{1}{2}\sqrt{β^2+γ^2+2βγσυνΑ}.$$

289) Ἐὰν ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου κύκλου, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $\rho=\alpha.\dfrac{\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}$.

290) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗ γνωρίζομεν δύο γωνίας Α καὶ Β καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

291) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗ γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν α, τὴν γωνίαν Α καὶ τὸ ἄθροισμα $\beta+\gamma$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

292) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗ γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν α, τὴν γωνίαν Α καὶ τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν $\beta-\gamma$.

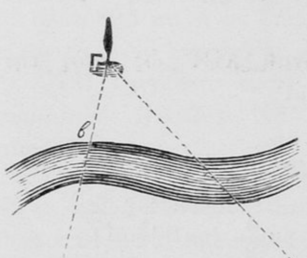
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ.

Προβλήματα.

1ον

73. Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν σημείου προσιτοῦ ἀπό τινος ἀπροσίτου, ἀλλ' ὁρατοῦ.

Ἔστω Γ τὸ ἀπρόσιτον σημεῖον καὶ Α τὸ προσιτόν, τὸ ὁποῖον κεῖται μετὰ τοῦ Γ ἐπὶ ὁριζοντίου εὐθείας.



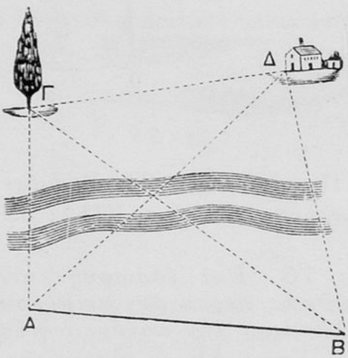
Σχ. 30

Ἐὰν λάβωμεν ἕτερον προσιτὸν σημεῖον Β, κείμενον μετὰ τῶν Α καὶ Γ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Τοῦ τριγώνου αὐτοῦ μετροῦμεν μετὰ τῆς μεγαλυτέρας ἀκριβείας τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ διὰ γωνιομετρικοῦ ὀργάνου τὰς γωνίας ΓΑΒ καὶ ΓΒΑ. Ἔχοντες λοιπὸν τοῦ τριγώνου αὐτοῦ μίαν πλευρὰν γ καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας Α καὶ Β, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὰ ἄλλα στοιχεῖα αὐτοῦ. Διὰ τὴν ΑΓ ἔχομεν τὸν τύπον $ΑΓ = ΑΒ \frac{ημΒ}{ημ(Α+Β)}$.

2ον

74. *Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν δύο σημείων Γ καὶ Δ ἀπροσίτων, ἀλλ' ὁρατῶν.*

Λαμβάνομεν δύο σημεῖα Α καὶ Β προσιτὰ καὶ κείμενα μετὰ τῶν Γ καὶ Δ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου καὶ κατόπιν μετροῦμεν μετὰ τῆς μεγαλυτέρας ἀκριβείας τὴν ἀπόστασιν ΑΒ καὶ τὰς γωνίας ΔΒΑ, ΓΒΑ, ΓΑΒ καὶ ΔΑΒ. Ἔχοντες τότε ἑκατέρου τῶν τριγώνων ΔΑΒ καὶ ΓΑΒ μίαν πλευρὰν ΑΒ καὶ τὰς προσκειμένας αὐτῇ γωνίας, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς πλευρὰς ΑΔ καὶ ΑΓ· ἐκ τούτων δὲ καὶ ἐκ τῆς γωνίας ΓΑΔ ὁρίζεται τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ἐντελῶς καὶ εὑρίσκεται ἡ ζητουμένη ἀπόστασις ΓΔ.

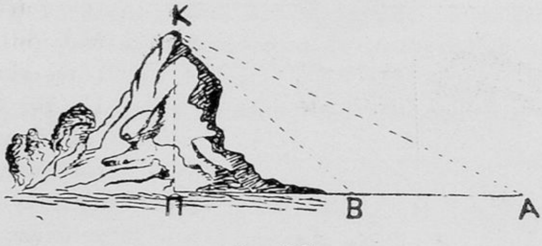


Σχ. 31

3ον

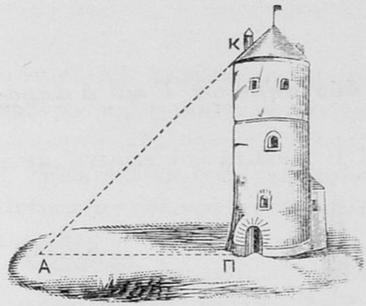
75. *Εὑρεῖν τὸ ὕψος βουνοῦ. Τουτέστι τὴν ἀπόστασιν τῆς κορυφῆς αὐτοῦ Κ ἀπὸ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ ἱστάμεθα.*

Ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐδάφους, ἐφ' οὗ ἱστάμεθα καὶ ἐξ οὗ φαίνεται ἡ κορυφὴ τοῦ βουνοῦ, μετροῦμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ κειμένην μετὰ τοῦ Κ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου, καὶ τὰς γωνίας ΚΑΒ καὶ ΚΒΑ· εὑρίσκομεν δὲ ἐξ αὐτῶν τὴν ἀπόστασιν ΑΚ. Ἐὰν ἤδη νοήσωμεν



Σχ. 32

τὴν κατακόρυφον ἐκ τοῦ Κ, αὕτη θὰ συναντήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ εἴς τι σημεῖον, ἔστω τὸ Π. Τοῦ ὀρθογωνίου λοιπὸν τριγώνου ΑΚΠ γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΑΚ καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Α· ὥστε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὴν πλευρὰν ΚΠ, ἥτις εἶναι τὸ ὕψος τοῦ βουνοῦ, ὑπεράνω τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ ἱστάμεθα.



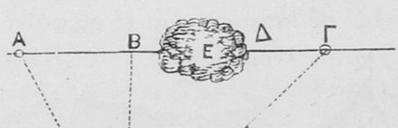
Σχ. 33

Παρατήρησις. Ἂν τὸ μετρητέον ὕψος ΚΠ φαίνηται, ὡς π.χ. εἰς τὸν πύργον, εἶναι δὲ καὶ τὸ ἔδαφος ὁμαλὸν καὶ ὁριζόντιον, ἀρκεῖ νὰ μετρηθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΠ καὶ ἡ γωνία ΠΑΚ· διότι ἐκ τούτων προσδιορίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΠΑ, οὗ πλευρὰ εἶναι τὸ ζητούμενον ὕψος.

4ον

76. Ἐπὶ ἐδάφους ἐπιπέδου εὑρεῖν τὴν προσεκβολὴν εὐθείας πέραν ἀντικειμένου οἱουδήποτε, ὅπερ ἐμποδίζει νὰ βλέπωμεν τὴν συνέχειαν τῆς εὐθείας.

Ἔστω ΑΒ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἡ προσεκβολὴ ὄπισθεν τοῦ ἐμποδίου Ε. Μετροῦμεν τὸ μῆκος ΑΒ, ἔπειτα ἐκλέγομεν ὡς σταθμὸν σημεῖόν τι Μ, ἐξ οὗ φαίνεται καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ ὁ ὄπισθεν τοῦ ἐμποδίου τόπος, εἰς ὃν θὰ εὑρίσκηται ἡ προσεκβολὴ τῆς εὐθείας. Μετὰ ταῦτα μετροῦμεν τὰς γωνίας Α καὶ Β τοῦ τριγώνου ΑΒΜ, καὶ ἐκ τούτων καὶ ἐκ τῆς ΑΒ προσδιορίζομεν τὴν πλευρὰν ΑΜ. Σύρομεν ἔπειτα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους γραμμὴν ἐκ τοῦ Μ πρὸς τὸ μέρος τῆς προσεκβολῆς, ἔστω τὴν ΗΜ, καὶ μετροῦμεν τὴν γωνίαν αὐτῆς πρὸς τὴν ΜΑ, ἤτοι τὴν ΗΜΑ. Ἐὰν τότε νοήσωμεν τὴν τομὴν Γ τῆς προσεκβολῆς καὶ τῆς γραμμῆς ΜΗ, ἔχομεν τοῦ τριγώνου ΓΑΜ μίαν πλευρὰν ΑΜ καὶ τὰς προσκειμένας αὐτῇ γωνίας· ὥστε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος ΜΓ, ἐξ οὗ καὶ τὸ σημεῖον Γ προσδιορίζεται· τέλος ἐκ τοῦ



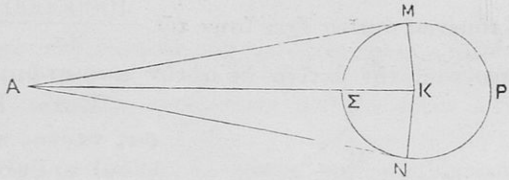
Σχ. 34

Γ σύρομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τὴν γραμμὴν ΓΔ, ἥτις σχηματίζει μετὰ τῆς ΓΜ γωνίαν ἴσην τῇ τοῦ τριγώνου ΑΓΜ, καὶ ἔχομεν τὴν προσεκβολὴν τῆς ΑΒ.

5ον

77. ***Ἐκ τῆς ἀποστάσεως δοθέντος σημείου ἀπὸ σφαίρας καὶ ἐκ τῆς γωνίας, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἡ σφαῖρα ἀπὸ τοῦ σημείου, εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.***

Ἐὰν διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ διὰ τοῦ σημείου Α νοήσωμεν τυχὸν ἐπίπεδον, τοῦτο τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον αὐτῆς κύκλον, ἔστω τὸν ΜΣΝΡ. Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ κύκλου τούτου ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι ἐκ τοῦ Α, αἱ ΑΜ καὶ ΑΝ, καὶ αἱ ἀκτῖνες ΚΝ καὶ ΚΜ, γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΚΜΑ, οὗτινος ἔχομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΑΚ καὶ τὴν γωνίαν ΚΑΜ, ἥτις εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης ΜΑΝ (=ω), ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἡ σφαῖρα ἐκ τοῦ Α.



Σχ. 35

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου τριγώνου εὑρίσκομεν νῦν

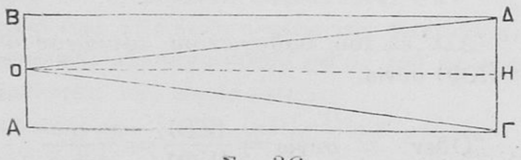
$$(\text{KM}) = (\text{AK})\,\eta\mu\left(\frac{1}{2}\omega\right).$$

Σημ. Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης εὑρίσκομεν τοὐναντίον καὶ τὴν ἀπόστασιν ΑΚ τῆς σφαίρας ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὅταν ἔχομεν τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας καὶ τὴν γωνίαν ω, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἐκ τοῦ σημείου Α.

6ον

78. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος μιᾶς λεωφόρου ἧς τὸ πλάτος εἶναι γνωστὸν καὶ ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται τὸ πέρας αὐτῆς ἐκ τῆς ἀρχῆς.***

Ἂν ΑΒ εἶναι ἡ ἀρχὴ καὶ ΓΔ τὸ πέρας τῆς λεωφόρου καὶ Ο τὸ μέσον τῆς ΑΒ, ἔχομεν γνωστὰ τὴν ΓΔ (=ΑΒ) καὶ τὴν γωνίαν ΔΟΓ· ἐὰν δὲ ἀχθῇ καὶ ὁ ἄξων ΟΗ τῆς ὁδοῦ, ἔχο-



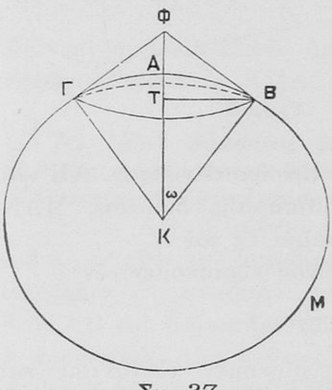
Σχ. 36

μεν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΔΗ $(ΟΗ) = (ΔΗ)σφ \frac{1}{2} (ΔΟΓ)$.

7ον

79. Γνωστοῦ ὄντος τοῦ ὕψους φάρου ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης, εὑρεῖν ἐπ᾽ αὐτῆς τὴν μεγίστην ἀπόστασιν, ἀπὸ τῆς ὁποίας φαίνεται τὸ φῶς αὐτοῦ.

Γνωστόν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς θαλάσσης ἀποτελεῖ σφαῖραν, τῆς ὁποίας ὁ μέγιστος κύκλος ἔχει περιφέρειαν 40000000 μέτρων, ἐπομένως ἀκτῖνα ἔχει ἴσην τῷ $\frac{40000000}{2\pi}$, ἤτοι 6366198 μέτρα περίπου, τὴν ἀκτῖνα δὲ αὐτὴν παριστῶμεν διὰ ϱ.



Σχ. 37

Ἔστω Κ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ταύτης καὶ Φ τὸ φῶς καὶ ΦΑ (=υ) τὸ ὕψος αὐτοῦ εἰς μέτρα ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Ἐὰν διὰ τῆς ἀκτῖνος ΚΑ νοηθῇ τυχὸν ἐπίπεδον, θὰ τέμνῃ τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον, ἔστω τὸν ΑΒΜ· καὶ ἂν ἀχθῇ ἐκ τοῦ Φ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου τούτου ἡ ΒΦ καὶ περιστραφῇ ἔπειτα ὁ μέγιστος κύκλος περὶ τὴν ΚΦ, φανερὸν εἶναι, ὅτι ἡ ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΒ γραφομένη ζώνη περιέχει πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἀφ᾽ ὧν τὸ φῶς φαίνεται· ὥστε ἡ μεγίστη ἀπόστασις, ἀπὸ τῆς ὁποίας τὸ φῶς φαίνεται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, εἶναι ἡ ΑΒ.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόξου ΑΒ, ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ ἡ κεντρικὴ γωνία ω, διότι εἶναι

$$\frac{\text{τόξ.}ΑΒ}{40000000} = \frac{ω}{360} \qquad (1)$$

Ἀλλ᾽ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΦΚΒ εὑρίσκομεν $(ΚΒ) = (ΚΦ)\,συνω$.

Ὅθεν $$συνω = \frac{(ΖΒ)}{(ΚΦ)} = \frac{ϱ}{ϱ + υ}$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἕπεται

$$\sigma\upsilon\nu\left[\frac{1}{2}.\omega\right]=\sqrt{\frac{2\varrho+\upsilon}{2\varrho+2\upsilon}}$$

$$\eta\mu\left[\frac{1}{2}.\omega\right]=\sqrt{\frac{\upsilon}{2\varrho+2\upsilon}}$$

Ὅθεν
$$\varepsilon\varphi\left[\frac{1}{2}.\ \right]=\sqrt{\frac{\upsilon}{2\varrho+\upsilon}}$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν $\frac{1}{2}.\omega$ ὅθεν καὶ τὴν ω· ταύτης δὲ εὑρεθείσης, εὑρίσκομεν καὶ τὸ τόξον ΑΒ ἐκ τῆς ἰσότητος (1).

Ἐπειδὴ τὸ ὕψος υ εἶναι συνήθως ἐλάχιστον πρὸς τὴν ἀκτῖνα ρ, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ τόξον ΑΒ εὐκολώτερον ὡς ἑξῆς:

Τὸ τόξον ΑΒ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης ΦΒ καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ ΑΒ· ἑπομένως διαφέρει ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΦΒ ὀλιγώτερον ἢ ὅσον διαφέρει ἡ χορδή, ἤτοι ὀλιγώτερον ἢ ΦΒ—ΒΑ, ἢ καὶ ὀλιγώτερον τοῦ ὕψους υ (διότι ἐν τῷ τριγώνῳ ΦΑΒ ἡ μία πλευρὰ ΑΦ ὑπερβαίνει τὴν διαφορὰν τῶν ἄλλων).

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΕΦ εὑρίσκομεν τὴν ἐφαπτομένην ΦΒ

$$(\mathrm{B\Phi})=\sqrt{(\mathrm{K\Phi})^2-(\mathrm{KB})^2}=\sqrt{(\varrho+\upsilon)^2-\varrho^2}=\sqrt{2\varrho\upsilon+\upsilon^2}$$

ὥστε εἶναι (τοξ. ΑΒ) $=\sqrt{2\varrho\upsilon+\upsilon^2}-\mu\upsilon$, ἔνθα $0<\mu<1$.

Ἀλλ' εἶναι καὶ $\sqrt{2\varrho\upsilon}+\mu'\upsilon=\sqrt{2\varrho\upsilon+\upsilon^2}$ ἔνθα $0<\mu'<1$,

Ὅθεν (τόξ. ΑΒ) $=\sqrt{2\varrho\upsilon}+(\mu'-\mu)\upsilon$.

Ἑπομένως ἐὰν θέσωμεν (τόξ. ΑΒ) $=\sqrt{2\varrho\upsilon}$, ποιοῦμεν λάθος μικρότερον τοῦ ὕψους υ.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ***ἡ μεγίστη ἀπόστασις, ἀπὸ τῆς ὁποίας φαίνεται τὸ φῶς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, εἶναι περίπου ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ὕψους αὐτοῦ ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης.***

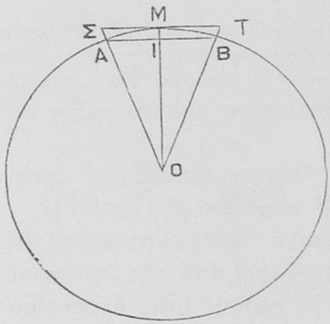
Διὰ υ=1 μέτρον, εὑρίσκομεν (τόξον ΑΒ)=3568 μέτρα περίπου.

Σημ. Ἐν τῇ λύσει τοῦ προβλήματος τούτου δὲν ἐλήφθη ὑπ' ὄψιν ἡ διάθλασις τοῦ φωτὸς ἐν τῷ ἀέρι.

8ον

80. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ Γῆ εἶναι σφαῖρα, τῆς ὁποίας ὁ μέγιστος κύκλος ἔχει περιφέρειαν 40000000 μέτρα, εὑρεῖν τὸ μῆκος τοῦ τόξου μιᾶς μοίρας καὶ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς αὐτοῦ καὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ.

Ἔστω ΑΒ ἡ χορδὴ καὶ ΣΤ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ εἰρημένου τόξου. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΟΤ ἔχομεν ἐν πρώτοις



Σχ. 38

$$(\text{ΜΤ}) = \varrho.\text{εφ}30' = \frac{40000000}{2\pi}, \text{εφ}\,30'$$

λογ 40000000	$= 7{,}6020599$[1]
λογ 2π	$= 0{,}7981798$
λογ ϱ	$= 6{,}8038801$
λογ εφ30′	$= \overline{3}{,}9408584$
λογ (ΜΤ)	$= 4{,}7447385$
Ὅθεν (ΜΤ)	$= 55556{,}96$
Ὅθεν (ΣΤ)	$= 111113{,}92$ μ.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΙΟΒ εὑρίσκομεν

$$(\text{ΙΒ}) = \varrho\ \text{ημ}30'$$

	λογ ϱ	$= 6{,}8038801$
	λογ ημ 30′	$= \overline{3}{,}9408419$
	λογ(ΙΒ)	$= 4{,}7447220$
Ὅθεν	(ΙΒ)	$= 55554{,}85$μ.
Ὅθεν	(ΑΒ)	$= 111109{,}70$μ.

Τὸ τόξον ΑΒ τῆς μιᾶς μοίρας εἶναι $\frac{40000000}{360} = 111111{,}11.$

Ἐντεῦθεν ἕπεται (τοξ.ΑΒ)—(ΑΒ)=1,41

καὶ (ΣΤ)—(τοξ. ΑΒ)=2,81·

ὥστε τὸ τόξον τῆς μιᾶς μοίρας τῆς μὲν χορδῆς αὐτοῦ ὑπερέχει κατὰ 1 μέτρον καὶ $\frac{41}{100}$ τοῦ μέτρου περίπου, τῆς δὲ ἐφαπτομένης αὐτοῦ εἶναι μικρότερον κατὰ 2,81 περίπου μέτρα.

---

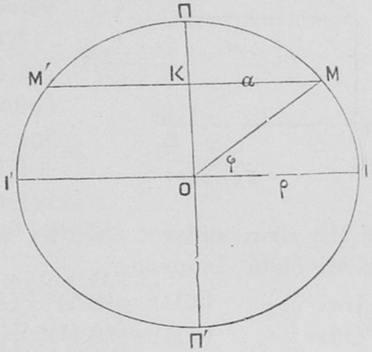
[1]) Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ μετεχειρίσθημεν τοὺς ἑπταψηφίους λογαρίθμους τοῦ Καλλέτου διὰ τὴν μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν αὐτῶν.

9ον

81. Εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα τοῦ παραλλήλου κύκλου τῆς γηίνης σφαίρας, οὗτινος τὸ γεωγραφικὸν πλάτος εἶναι γνωστόν.

(Εὑρεῖν τοῦ αὐτοῦ κύκλου τὸ μῆκος τοῦ τόξου μιᾶς μοίρας.)

Ἐὰν διὰ τοῦ ἄξονος τῆς Γῆς ΠΠ′ νοήσωμεν ἐπίπεδον, τοῦτο θὰ τέμνῃ τὴν Γῆν μὲν κατὰ μέγιστον κύκλον αὐτῆς, τὸ δὲ ἐπίπεδον τοῦ ἰσημερινοῦ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΙΙ′, τὸ δὲ ἐπίπεδον τοῦ παραλλήλου κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΜΜ′ παράλληλον τῇ ΙΙ′, θὰ εἶναι δὲ ἡ γωνία ΜΟΙ ἴση τῷ δοθέντι πλάτει φ καὶ ἡ ζητουμένη ἀκτὶς τοῦ παραλλήλου κύκλου εἶναι ἡ ΜΚ=α.



Σχ. 39

Ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΟΜ, γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΚΜ, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν (ΚΜ)= =α=ρ.συνφ.

Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου τούτου εἶναι 2π.ρ.συνφ καὶ τὸ τόξον μιᾶς μοίρας τοῦ παραλλήλου τούτου ἔχει μῆκος $\frac{2\pi\rho}{360}$συνφ, ἤτοι $\frac{40000000}{360}$.συνφ ἢ 111111,11 συνφ.

Ὡς παράδειγμα ἔστω φ=38°.

Διὰ τὴν ἀκτῖνα α ἔχομεν α=ρ.συν38°.

λογρ	$=\underline{6},80388$ (ἴδε προηγ. πρόβλημα)
λογσυν38°	$=\underline{\bar{1},89653}$
λογα	$=6,70041$
α	=5016625 μέτρα.

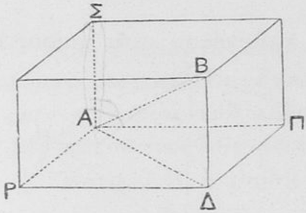
Διὰ τὸ μῆκος τοῦ τόξου 1° ἔχομεν

$$\text{μῆκος τόξου } 1^\circ = \frac{40000000}{360}\text{συνφ}$$

λογ 40000000	$=7,60206$
λογ 360	$=\underline{2,55630}$
διαφορὰ	$=\underline{5},04576$
λογσυν38°	$=\underline{\bar{1},89653}$
	4,94229
καὶ τόξον 1°	=87556 μέτρα.

10ον

82. ***Ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, οὗτινος εἶναι γνωσταὶ αἱ τρεῖς ἀκμαὶ ΑΠ, ΑΡ, ΑΣ εὑρεῖν τὴν διαγώνιον ΑΒ καὶ τὰς γωνίας αὐτῆς πρὸς τὰς ἀκμάς.***



Σχ. 40

Ἐὰν νοήσωμεν τὴν διαγώνιον ΑΔ τῆς ἕδρας ΑΠΔΡ, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΠ (διότι ἡ ἕδρα εἶναι ὀρθογώνιον) $(ΑΔ)^2=(ΑΠ)^2+(ΠΔ)^2=(ΑΠ)^2+(ΑΡ)^2$. Ἀλλὰ καὶ τὸ τρίγωνον ΒΑΔ εἶναι ὀρθογώνιον, διότι ἡ ΒΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΠΔΡ· ὥστε ἡ γωνία ΒΔΑ εἶναι ὀρθή, ἐπομένως

εἶναι $\quad (ΑΒ)^2=(ΒΔ)^2+(ΑΔ)^2=(ΑΣ)^2+(ΑΔ)^2$

Ὅθεν $\quad (ΑΒ)^2=(ΑΠ)^2+(ΑΡ)^2+(ΑΣ)^2$

ἐξ οὗ $\quad (ΑΒ)=\sqrt{(ΑΠ)^2+(ΑΡ)^2+(ΑΣ)^2}.$

Ἐκ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου ΑΒΔ εὑρίσκομεν

$$(ΒΔ)=(ΑΒ)συν(ΑΒΔ)$$

καὶ ἐπειδὴ $\quad (ΒΔ)=(ΑΣ)$ καὶ γων.ΑΒΔ=γων. ΒΑΣ,

ἔχομεν $\quad (ΑΣ)=(ΑΒ).συν(ΒΑΣ).$

ὅθεν $\quad συν(ΒΑΣ)=\frac{ΑΣ}{ΑΒ}.$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκεται ἡ γωνία τῆς διαγωνίου ΑΒ πρὸς τὴν ἀκμὴν ΑΣ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$συν(ΒΑΠ)=\frac{ΑΠ}{ΑΒ} \text{ καὶ } συν(ΒΑΡ)=\frac{ΑΡ}{ΑΒ}.$$

Ἔστω π.χ.

$$(ΑΠ)=3. \qquad (ΑΡ)=1, \qquad (ΑΣ)=2$$

τότε εἶναι $\quad (ΑΒ)=\sqrt{3^2+1^1+2^2}=\sqrt{14}.$

Ὅθεν (Dupuis, σελ. 147), ΑΒ=3,74165.

Εὕρεσις τῆς γωνίας ΒΑΠ.

$$συν(ΒΑΠ)=\frac{ΑΠ}{ΑΒ}=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\lambda o\gamma\ 3 = 0{,}47712$$
$$\lambda o\gamma\ 14 = 1{,}14613 \qquad {}^1/_2\,\lambda o\gamma\ 14 = 0{,}57306$$
$$\lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu(\mathrm{BA\Pi}) = \bar{1}{,}90406$$

καὶ $\mathrm{BA\Pi} = 36^\circ\, 41'\, 54''$

Εὕρεσις τῆς γωνίας ΒΑΡ.

$$\sigma\upsilon\nu\,(\mathrm{BAP}) = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\lambda o\gamma\ 1 = 0$$
$$\frac{1}{2}\lambda o\gamma\ 14 = 0{,}57306$$
$$\lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\,(\mathrm{BAP}) = \bar{1}{,}42694$$

καὶ $\mathrm{BAP} = 74^\circ\, 29'\, 55''$

Εὕρεσις τῆς γωνίας ΒΑΣ.

$$\sigma\upsilon\nu\,(\mathrm{BA\Sigma}) = \frac{\mathrm{A\Sigma}}{\mathrm{AB}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

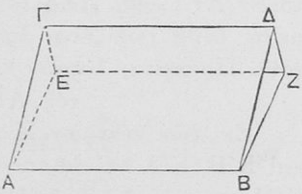
$$\lambda o\gamma\ 2 = 0{,}30103$$
$${}^1/_2\,\lambda o\gamma\ 14 = 0{,}57306$$
$$\lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu(\mathrm{BA\Sigma}) = \bar{1}{,}72797$$

καὶ $\mathrm{BA\Sigma} = 57^\circ\, 41'\, 18''$

11ον

83. Οἰκόπεδον, ἐπὶ τῆς πλευρᾶς λόφου κείμενον, ἔχει ὀρθογώνιον σχῆμα καὶ βάσιν ὁριζοντίαν. Ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι β πήχεις, τὸ δὲ ὕψος υ, ἡ δὲ κλίσις τοῦ ἐδάφους πρὸς τὸν ὁρίζοντα εἶναι φ μοιρῶν. Ζητεῖται πόσων τετραγωνικῶν πήχεων θὰ εἶναι τὸ ὁριζόντιον ἔδαφος αὐτοῦ.

Ἐὰν ἐκ τῆς ὁριζοντίας βάσεως ΑΒ νοήσωμεν ὁριζόντιον ἐπίπεδον καὶ καταβιβάσωμεν ἐπ᾽ αὐτὸ τὰς καθέτους ΓΕ καὶ ΔΖ ἀπὸ τῶν κορυφῶν τοῦ ὀρθογωνίου, φανερὸν εἶναι, ὅτι τὸ ὁριζόντιον ἔδαφος τοῦ οἰκοπέδου εἶναι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΕΖ, τουτέστιν ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς προβολῆς ταύτης εἶναι ἴσον τῷ



Σχ. 41

(ΑΒ).(ΑΕ), ἤτοι β. (ΑΕ)· ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΕΓ ἔχομεν

$$(\text{ΑΕ}) = (\text{ΑΓ})\ \text{συνφ} = \text{υ.συνφ}\cdot$$

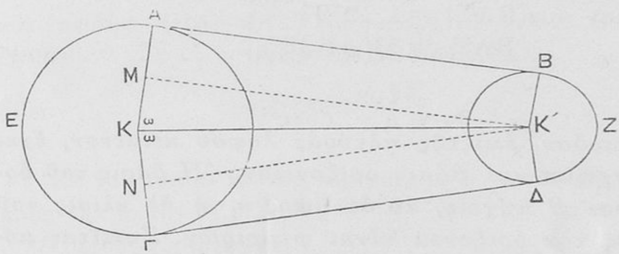
(διότι ἡ γωνία ΓΑΕ ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΕΖ, τουτέστι τῇ φ).

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΕΖ εἶναι β.υ.συνφ, ἤτοι ἡ προβολὴ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον ἰσοῦται τῷ ὀρθογωνίῳ τούτῳ πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας αὐτοῦ πρὸς τὸν ὁρίζοντα.

12ον

84. Δύο τροχοί, τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες εἶναι παράλληλοι, πρόκειται νὰ περιβληθῶσι δι' ἱμάντος, ὥστε ἡ κίνησις τοῦ ἑνὸς νὰ μεταδίδεται καὶ εἰς τὸν ἄλλον. Ζητεῖται τὸ μῆκος τοῦ καταλλήλου πρὸς τοῦτο ἱμάντος· εἶναι δὲ γνωσταὶ αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο τροχῶν ρ καὶ ρ΄ καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν ἀξόνων αὐτῶν α.

Νοήσωμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τοὺς ἄξονας τῶν τροχῶν· τοῦτο θὰ τέμνῃ αὐτοὺς κατὰ δύο κύκλους ΑΕΓ καὶ ΒΖΔ, ὧν τινων εἶναι γνωσταὶ αἱ ἀκτῖνες καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων· τὸν δὲ ἱμάντα θὰ τέμνῃ κατὰ γραμμήν, ἥτις ἀποτελεῖται ἐκ



Σχ. 42

τῶν δύο κοινῶν ἐφαπτομένων ΑΒ, ΓΔ τῶν κύκλων καὶ ἐκ τῶν τόξων ΑΕΓ καὶ ΒΖΔ (διότι ὁ ἱμὰς εἶναι τεταμένος, ὥστε εἰς τὰ μέρη, ἔνθα χωρίζεται ἀφ' ἑκατέρου τῶν τροχῶν, ἐφάπτεται αὐτοῦ). Πρόκειται λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος

$$\text{τόξ. ΑΕΓ} + \text{τόξ. ΒΖΔ} + \text{ΑΒ} + \text{ΓΔ}.$$

Ἐκ τῶν κέντρων Κ καὶ Κ΄ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΓ καὶ Κ΄Β, Κ΄Δ καὶ ἐκ τοῦ Κ΄, κέντρου τοῦ μικροτέρου κύκλου, ἡ Κ΄Μ παράλληλος τῇ ΒΑ καὶ Κ΄Ν τῇ ΔΓ. Ἐπειδὴ τὸ σχῆμα ΑΒΜΚ΄ εἶναι ὀρθογώνιον (ὡς ἔχον ὀρθὰς τὰς γωνίας αὐτοῦ), εἶναι ΑΜ=Κ'Β=ϱ'· ὥστε ΚΜ=ϱ—ϱ' καὶ ἐκ τοῦ ὀϱθογωνίου τϱιγώνου Κ'ΚΜ εὑϱίσκομεν

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\varrho - \varrho'}{\alpha}$$

ἐξ οὗ εὑϱίσκεται ἡ γωνία ω.

Τῆς γωνίας ω εὑϱεθείσης, εὑϱίσκομεν τὸ τόξον ΑΕΓ ἐκ τῆς ἰσότητος

$$\frac{2\pi\varrho}{360} = \frac{\tau o\xi.\,\text{ΑΕΓ}}{360 - 2\omega}$$

διότι τὰ τόξα παντὸς κύκλου εἶναι ἀνάλογα τῶν ἐπικέντϱων γωνιῶν καὶ εἰς τὸ τόξον ΑΕΓ ἀντιστοιχεῖ ἡ ἐπίκεντϱος γωνία $360^{\circ} - 2\omega$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης εὑϱίσκομεν

$$(\tau o\xi.\text{ΑΕΓ}) = \frac{180 - \omega}{90}\,\pi\varrho.$$

Ὁμοίως εὑϱίσκομεν (διότι ἡ γωνία ΒΚ'Δ εἶναι ἴση τῇ ΑΚΓ)

$$(\tau o\xi.\ \text{ΒΖΔ}) = \frac{\omega}{90}\pi\varrho'.$$

Ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὀϱθογωνίου τϱιγώνου ΜΚΚ' εὑϱίσκομεν

$$(\text{Κ'Μ}) = \sqrt{\alpha^2 - (\varrho - \varrho')^2}$$

εἶναι δὲ Κ'Μ =ΑΒ=ΓΔ.

Ὥστε τὸ ζητούμενον μῆκος εἶναι

$$2\sqrt{\alpha^2 - (\varrho - \varrho')^2} + \frac{180 - \omega}{90}.\pi\varrho + \frac{\omega}{90}.\pi\varrho'.$$

Ἔστω ὡς παϱάδειγμα:

ϱ=0,5 μέτϱα ϱ'=0,2 μέτϱα α=8 μέτϱα

ἔχομεν ἐν πϱώτοις

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{80}$$

λογ 3	= 0,47712
λογ 80	= 1,90309
λογ συν ω	= $\overline{2}$,57403

καὶ $\omega = 87^\circ 51'$ καὶ $180^\circ - \omega = 92^\circ 9'$

$$(\text{τοξ.}\,\text{ΑΕΓ}) = \frac{92 + \frac{9}{60}}{90}\pi.\ 0{,}5 = 1{,}608$$

$$(\text{τοξ.}\,\text{ΒΖΔ}) = \frac{87 + \frac{51}{60}}{90}\pi.\ 0{,}2 = 0{,}613$$

$$\sqrt{8^2 - \left(\frac{3}{10}\right)^2} = \frac{1}{10}\sqrt{6400 - 9} = \frac{1}{10}\sqrt{6391} = 7{,}994.$$

Ὥστε τὸ ζητούμενον μῆκος τοῦ ἱμάντος θὰ εἶναι

$$\begin{array}{ll} & 1{,}608 = (\text{τοξ. ΑΕΓ}) \\ & 0{,}613 = (\text{τοξ. ΒΑΔ}) \\ & \underline{15{,}988} = (\text{ΑΒ}) + (\text{ΓΔ}) \\ \text{Τὸ ὅλον} & 18{,}209 \end{array}$$

ΤΕΛΟΣ