

ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ



$$2\alpha\beta$$

$$\frac{2x}{3}$$

$$\frac{\alpha\beta}{2}$$

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha}$$

$$\gamma \frac{1-\beta}{4}$$

$$(3\gamma\delta)$$

$$-\psi$$

$$7+x$$

002
ΚΛΣ
ΣΤ2Β
1085

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1972

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α

ΑΛΓΕΒΡΑ Δ, Ε, ΣΤ / Γ

ΔΩΡΕΑ
ΕΘΝΙΚΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

ΑΛΕΞΑΝΔΡΑ

ΑΛΕΞΑΝΔΡΑ
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΚΥΒΕΡΝΗΣΙΣ

ΣΤ 89 ΣΧΒ
ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ, ΝΕΙΛΟΥ
ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου



Α Λ Γ Ε Β Ρ Α

(Συμπληρωθεῖσα διὰ τοῦ κεφαλαίου περὶ Παραγώγων κ.τ.λ.
ἐκ τοῦ ἔργου τοῦ Καθηγητοῦ Δ. ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΥ)

Δ' Ε' καὶ ΣΤ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΛΛΑΣ

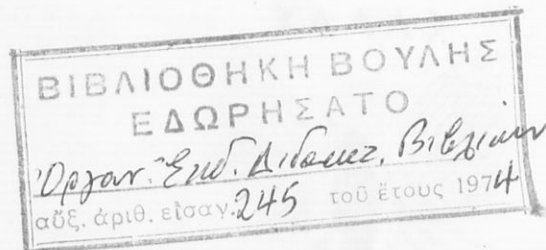


21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1973

002
ΚΛΣ
ΣΤ2Β
1085

Λεῖψις ἐπὶ λείψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ
ὑπαρξιν, λείψις δὲ ἐπὶ ὑπαρξιν ποιεῖ λείψιν.
(Πλὴν ἐπὶ πλὴν ἴσον σύν, πλὴν ἐπὶ σύν ἴσον πλὴν).
Διοφάντου Ἀριθμητικῶν Α'



Τὸ παρὸν βιβλίον δεόν νά διαφυλαχθῇ καί
διὰ τὴν Ε' καὶ ΣΤ' τάξιν εἰς τὴν ὁποίαν ἐπίσης
δὰ χρησιμοποιηθῇ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Α' ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ * ΚΑΙ ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΙΣ ΑΥΤΗΣ

§ 1. Ἡ ἙΑλγεβρα εἶναι κλάδος τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης ὅπως καὶ ἡ Ἀριθμητικὴ, ἀλλ' εἶναι γενικωτέρα αὐτῆς ἀσχολεῖται δὲ κατὰ τρόπον γενικὸν μὲ τὴν λύσιν ζητημάτων, τὰ ὅποια ἀναφέρονται ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον εἰς γενικοὺς ἀριθμοὺς (τοὺς ὁποίους χρησιμοποιοῖ ἐνίοτε καὶ ἡ Ἀριθμητικὴ, καθὼς π. χ. διὰ τὴν παράστασιν ἐνὸς χρηματικοῦ κεφαλαίου K , τοῦ τόκου T κ.λ.π.).

§ 2. Εἰς τὴν ἙΑλγεβραν χρησιμοποιοῦνται κυρίως, ἐκτὸς τῶν ἀραβικῶν συμβόλων, 0, 1, 2, 3, 4,... κ.τ.λ., γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου διὰ τὴν παράστασιν ἀριθμῶν ἢ ποσοτήτων. Λέγομεν π.χ. α δραχμαί, ἀντὶ νὰ εἴπωμεν εἰς ὠρισμένος ἀριθμὸς δραχμῶν. Ἡ τοιαύτη χρησιμοποίησις τῶν γραμμάτων εἶναι μὲν αὐθαίρετος, δυνάμεθα δηλαδὴ νὰ παραστήσωμεν ὠρισμένον ἀριθμὸν ἢ ὠρισμένην ποσότητα μὲ ἓν γράμμα, τὸ α π.χ. ἢ τὸ β ἢ τὸ γ κ.τ.λ., ἀλλὰ τὸ ὠρισμένον αὐτὸ γράμμα, τὸ ὅποῖον χρησιμοποιοεῖται καθ' ὅλην τὴν ἑκτασιν τοῦ ζητήματος, παριστάνει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν

* Ἡ λέξις ἙΑλγεβρα ὀφείλει τὴν προέλευσίν της εἰς τὸν τίτλον ἐνὸς ἀρχαιοτάτου ἀραβικοῦ μαθηματικοῦ βιβλίου « AL — JEBR W'AL MUGABALAH ».

Ὡς πρὸς τὴν ἐξέλιξιν τῆς ἙΑλγέβρας διακρίνομεν κυρίως τρεῖς περιόδους.

Κατὰ τὴν πρώτην περίοδον ἡ ὅποια καλεῖται ρητορική, ἐπικρατεῖ ἡ χρῆσις λέξεων καὶ τῆς ἀφηγήσεως, χωρὶς νὰ χρησιμοποιῶνται σύμβολα. Κατὰ τὴν περίοδον αὐτὴν συχὴν μόνον ἐπαναληπτικὴ ἀφήγησις ἀσκεῖ τὸν ἀσχολούμενον μὲ τὸ μάθημα τῆς ἙΑλγέβρας. Εἰς τὸ κατώτατον αὐτὸ στάδιον τῆς ἀναπτύξεως τοῦ μαθήματος αὐτοῦ παρέμειναν καὶ αὐτοὶ οἱ Ἑλληγες μέχρι τοῦ 1ου αἰῶνος μ. Χ., ἐνῶ οἱ Ἀραβες, οἱ Ἀρχαῖοι Ἱταλοὶ καὶ Γερμανοὶ παρέμειναν μέχρι τοῦ 13ου αἰῶνος μ. Χ.

Ἡ δευτέρα περίοδος ἐξελίξεως τῆς ἙΑλγέβρας, ἡ ὅποια καλεῖται **συγκεκριμένη**, ἀρχίζει ἀφ' ὅτου μερικαὶ ἐκφράσεις ἤρχισαν νὰ παρουσιάζωνται συγκε-

ή την αυτήν ποσότητα. Κατὰ συνήθειαν, ή όποία έπεκράτησε, χρησιμοποιοϋνται τὰ πρῶτα μικρά γράμματα τοϋ (έλληνικοϋ ή ξένου) άλφαβήτου, τὰ α, β, γ, δ..., διὰ τήν παράστασιν γνωστών αριθμών ή ποσοτήτων, τὰ δέ τελευταία χ, ψ, ω, φ... διὰ τήν παράστασιν άγνωστών ή ζητουμένων ποσοτήτων. Π.χ. λέγομεν: άν α όκάδες έμπορεύματός τινος τιμῶνται β δραχμάς, καί ζητῶμεν τήν τιμήν γ όκάδων τοϋ αϋτοϋ έμπορεύματος, παριστάνομεν τόν ζητούμενον αριθμόν π.χ. με χ καί θα έχωμεν, ότι $\chi = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \gamma$ δρχ.

Ένίοτε χρησιμοποιοϋμεν εις τήν "Άλγεβραν διαδοχικά γράμματα διὰ τήν παράστασιν ίσαριθμών όμοειδών αριθμών ή ποσοτήτων. Π.χ. λέγομεν: άν ποσόν Α δραχμών μερισθή εις τέσσαρα πρόσωπα άναλόγως τεσσάρων διαφόρων αριθμών, π.χ. τών κ, λ, μ, ν καί ζητῶνται τὰ μερίδια αϋτών, παριστάνομεν τὰ ζητούμενα μερίδια π.χ. με χ, ψ, z, ω καί θα έχωμεν:

$$\chi = \frac{A \cdot \kappa}{\kappa + \lambda + \mu + \nu}, \quad \psi = \frac{A \cdot \lambda}{\kappa + \lambda + \mu + \nu}, \quad z = \frac{A \cdot \mu}{\kappa + \lambda + \mu + \nu}, \quad \omega = \frac{A \cdot \nu}{\kappa + \lambda + \mu + \nu}.$$

Ένίοτε χρησιμοποιοϋμεν έν μόνον γράμμα με δείκτας μικρούς άκεραίους αριθμούς, 1, 2, 3,... (ή με ένα, δύο, τρεις τόνους).

κομμένοι εις βιβλία. Πρῶτος έκπρόσωπος τής περιόδου αϋτής είναι ό "Έλλην μαθηματικός Διόφαντος τής 'Άλεξανδρείας τὸ δεύτερον ήμισυ τής τρίτης έκατονταετηρίδος μ.Χ., ό όποίος έχρησιμοποίησε σημαντικήν συντομίαν εις μαθηματικές έκφράσεις εις τὸ έργον του περί 'Άλγέβρας, θεωρείται δέ οϋτος καί θεμελιωτής αϋτής.

Η τρίτη περίοδος τής 'Άλγέβρας χαρακτηρίζεται ως **συμβολική**. Πρῶτοι οί άρχαίοι Αιγύπτιοι παρουσιάζονται χρησιμοποιοϋντες μερικους συμβολισμούς εις τās μαθηματικές έκφράσεις, αί όποίαι παρελήφθησαν καί έπεξετάθησαν βαθμηδόν υπό τών 'Ινδών.

Κατά τὰ μέσα τοϋ 15ου αιώνος μ.Χ. φαίνεται πλέον έπικρατοϋσα ή συμβολική γραφή τής 'Άλγέβρας καί τών Μαθηματικών έν γενεί. Οϋτω τὸ 1494 χρησιμοποιοϋνται ως σύμβολα υπό τοϋ 'Ιταλοϋ LUCA PACIOLI γράμματα τοϋ άλφαβήτου, τὰ όποία βραδύτερον άντικατεστάθησαν υπό τοϋ I. WIDMANN με τὰ + καί -. Η γενικωτέρα καί εύρυτέρα όμως χρησιμοιγοίσεις τοϋ συμβολισμοϋ όφειλεται εις τόν Γάλλον F. VIÈTE (1591), ή όποία συνεπληρώθη κατὰ τήν έποχήν δύο δισήμων μαθηματικών, τοϋ Γερμανοϋ LEIBNITZ καί τοϋ "Άγγλου NEWTON. Οϋτοι συνετέλεσαν σπουδαίως όχι μόνον εις τήν μεγάλην προαγωγήν τών Μαθηματικών έν γενεί, αλλά καί εις τήν διεθνοποίησιν των, με τήν χρησιμοποίησιν συμβόλων διεθνούς μορφής.

διὰ τὴν παράστασιν ἀριθμῶν ἢ ποσοτήτων. Π.χ. ἂν τοκίσῃ τις τρία διάφορα ποσὰ μὲ ἀντίστοιχα διάφορα ἐπιτόκια καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν πόσα χρήματα θὰ λάβῃ ἐν ὧρ (ἀπὸ κεφάλαια καὶ τόκους) μετὰ π.χ. ἐν ἔτος, παριστάνομεν τὰ τοκιζόμενα κεφάλαια π.χ. μὲ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, τὰ ἐπιτόκια π.χ. διὰ τῶν τ_1, τ_2, τ_3 καὶ τὸ ζητούμενον ποσὸν διὰ τοῦ χ .

$$\text{Οὕτω θὰ ἔχωμεν } \chi = \alpha_1 \cdot \left(1 + \frac{\tau_1}{100}\right) + \alpha_2 \cdot \left(1 + \frac{\tau_2}{100}\right) + \alpha_3 \cdot \left(1 + \frac{\tau_3}{100}\right).$$

Εἰς τὴν Ἀλγεβραν χρησιμοποιοῦμεν τὰ γνωστὰ σύμβολα ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, τὸ + (σὺν) διὰ τὴν πρόσθεσιν ἀριθμῶν ἢ ποσοτήτων, τὸ - (πλὴν ἢ μείον) διὰ τὴν ἀφαίρεσιν, τὸ $\times$ ἢ $\cdot$ (ἐπί) διὰ τὸν πολλαπλασιασμόν, τὸ : (διὰ ἢ πρὸς) διὰ τὴν διαίρεσιν, ἐπίσης τὸ $\sqrt{\quad}$ (ριζικόν) διὰ τὴν ἐξαγωγήν τῆς (τετραγωνικῆς) ρίζης κ.τ.λ. καθὼς καὶ ἄλλα σύμβολα, περὶ τῶν ὁποίων θὰ γίνῃ λόγος εἰς τὰ ἐπόμενα.

Ὅταν ἐν ζήτημα ἐκτίθεται μὲ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν συμβόλων καὶ τῶν ἐκφράσεων τῶν χρησιμοποιουμένων ὑπὸ τῆς Ἀλγεβρας, τότε λέγομεν συνήθως, ὅτι τὸ ζήτημα ἐκτίθεται μὲ τὴν γλῶσσαν τῆς Ἀλγεβρας ἢ μὲ ἀλγεβρικὴν γλῶσσαν ἢ καὶ ἀπλῶς ἐκτίθεται ἀλγεβρικῶς.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

1. Ἄν 10 χιλιόγρ. ἐμπορεύματος τιμῶνται 100 δραχμάς, πόσον τιμῶνται 120 χιλιόγρ. αὐτοῦ ; Λύσατε τὸ πρόβλημα καὶ ἀκολουθῶς νὰ τὸ γενικεύσῃτε χρησιμοποιοῦντες γενικοὺς ἀριθμοὺς (γράμματα) καὶ νὰ λύσῃτε τὸ γενικευμένον πρόβλημα.

2. Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ 5, $\frac{3}{4}$, 13,5. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀντίστροφοί των ; Γενικεύσατε τὸ πρόβλημα χρησιμοποιοῦντες γράμματα καὶ λύσατε αὐτό.

3. Γράψατε τρεῖς ἀριθμοὺς γενικοὺς καὶ εὑρετε τὰ διπλάσιά των, τὰ τριπλάσιά των, τὰ νιπλάσιά των.

4. Δίδεται εἰς ἀριθμὸς π.χ. ὁ α. Πῶς παριστάνονται τὰ $\frac{5}{8}$, τὰ $\frac{\mu}{\nu}$ αὐτοῦ;

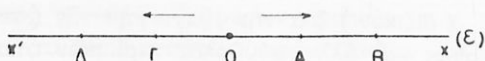
5. Σημειώσατε τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν α καὶ β, τὴν διαφορὰν τοῦ δευτέρου ἀπὸ τὸν πρῶτον, τὸ γινόμενόν των, τὸ πηλίκον τοῦ πρῶτου διὰ τοῦ δευτέρου.

6. Γράψατε μὲ τί ἰσοῦται τὸ κεφάλαιον K δρχ., τὸ ὁποῖον, τοκιζόμενον ἐπὶ X ἔτη πρὸς E%, δίδει τόκον T καὶ εὑρετε πόσον εἶναι τὸ K, ὅταν, ἀντὶ τῶν X, E, T, θέσῃτε ὠρισμένους ἀριθμοὺς.

Β' ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ *

§ 3. Καθώς γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, **μέτρησις** ἑνὸς ποσοῦ ἢ μεγέθους λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ μὲ ἄλλο ὁμοειδές του, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ὡς μονὰς μετρήσεως. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως ἑνὸς ποσοῦ ἢ μεγέθους εἶναι ἀριθμὸς τις, ὁ ὁποῖος λέγομεν, ὅτι παριστάνει τὴν τιμὴν τοῦ μετρηθέντος ἢ αὐτὸ τὸ μετρηθέν.

*Ἐστω εὐθεῖα τις (ϵ), ἐπὶ τῆς ὁποίας διακρίνομεν δύο φοράς (σχ. 1), μίαν τὴν ἀπὸ τοῦ σημείου αὐτῆς π.χ. Ο πρὸς τὸ σημεῖον της Α, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **θετικὴν** φοράν καὶ ἄλλην ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ σημεῖον της Γ, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **ἀρνητικὴν** φοράν.



Σχ. 1

Καλοῦμεν **θετικὸν** μὲν τμήμα τῆς (ϵ) πᾶν μέρος αὐτῆς, ἂν θεωρῇται διαγραφόμενον ὑπὸ κινητοῦ κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, **ἀρνητικὸν** δέ, ἂν κατὰ τὴν ἀρνητικὴν. Οὕτως, ἐπὶ τῆς εὐθείας (ϵ) διακρίνομεν τμήματα αὐτῆς θετικὰ ὡς τὰ ΟΑ, ΟΒ, ΑΒ καὶ ἀρνητικὰ ὡς τὰ ΟΓ, ΟΔ, ΓΔ. Τὰ μὲν θετικὰ τμήματα τῆς εὐθείας μετροῦμενα ὑπὸ τῆς μονάδος μετρήσεως (ἥτοι ὑπὸ ἑνὸς τμήματος θετικοῦ, τὸ ὁποῖον ὀρίζομεν αὐτοβούλως), ἔστω τοῦ ΟΑ, παριστῶνται ὑπὸ ἀριθμῶν, τοὺς ὁποῖους καλοῦμεν **θετικούς**, τὰ δὲ ἀρνητικὰ ὑπὸ ἀριθμῶν, τοὺς ὁποῖους καλοῦμεν **ἀρνητικούς**. Πρὸς παράστασιν τῶν τιμῶν ποσῶν ἢ μεγεθῶν, τὰ ὁποῖα διακρίνομεν εἰς θετικὰ καὶ ἀρνητικά, μεταχειριζόμεθα τοὺς καλουμένους θετικούς καὶ ἀρνητικούς ἀριθμούς, καὶ δεχόμεθα ὅτι :

Εἰς ἕκαστον θετικὸν ἀριθμὸν παριστάνοντα τὴν τιμὴν ποσοῦ ἢ μεγέθους τινὸς θετικοῦ, ἀντιστοιχεῖ εἰς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς παριστάνων τὴν τιμὴν ἀρνητικοῦ ποσοῦ ἢ μεγέθους ἀντιστοίχου τοῦ θετικοῦ. Καὶ ἀντιστρόφως : Εἰς ἕκαστον ἀρνητικὸν ἀριθμὸν, παριστάνοντα ἀρνητικὸν ποσὸν ἢ μέγεθος, ἀντιστοιχεῖ εἰς θετικὸς, ὃν τὰ ποσὰ ἢ μέγεθῃ ἐπιδέχωνται ἀντίθεσιν.

* Ὁ Ἕλλην μαθηματικὸς Διόφαντος τῆς (Ἀλεξανδρείας) ἐχρησιμοποίησεν ἀρνητικούς ἀριθμούς.

Οἱ τοιοῦτοι ἀντίστοιχοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ λέγονται, ὅτι ἔχουν τὴν ιδιότητα νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ μὲν πλῆθος μονάδων, ἀλλ' ἕκαστος χαρακτηρίζεται ὡς **ἀντίθετος** τοῦ ἄλλου. Π.χ. ἔστω, ὅτι εἰς τὸν ἀριθμὸν 6 δρχ. δίδομεν τὸ γνῶρισμα, ὅτι εἶναι κέρδος ἑνὸς ἀνθρώπου, ἔχομεν δὲ καὶ ἄλλον ἀριθμὸν 6 δρχ., ὁ ὁποῖος παριστάνει ζημίαν τοῦ αὐτοῦ ἀνθρώπου. Οἱ δύο αὐτοὶ ἀριθμοὶ 6 δρχ. κέρδος καὶ 6 δρχ. ζημία τοῦ ἀνθρώπου αὐτοῦ θεωροῦνται ὡς **ἀντίθετοι ἀριθμοί**.

Ὅμοιόν τι συμβαίνει καὶ εἰς ἄλλας περιπτώσεις. Π.χ. ἂν διανύσῃ τις ἐπ' εὐθείας ὁδοῦ, ἀπὸ ἐν ὠρισμένον σημεῖον αὐτῆς ἕνα ἀριθμὸν μέτρων, π.χ. 200 μ., πρὸς τὴν θετικὴν φορὰν τῆς εὐθείας (ἔστω πρὸς βορρᾶν) καὶ ἔπειτα τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 200 μ. πρὸς τὴν ἀντίθετον φορὰν (ἔστω πρὸς νότον) ἀπὸ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἐφθασε προηγουμένως καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, τότε οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, 200 μ. πρὸς τὴν θετικὴν φορὰν καὶ 200 μ. πρὸς τὴν ἀρνητικὴν φορὰν τῆς εὐθείας, λέγονται **ἀντίθετοι ἀριθμοί**.

Γενικώτερον δεχόμεθα, ὅτι εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς (ἀκεραίων, κλασματικῶν, ἀσυμμέτρων), ἀντιστοιχεῖ εἰς ἄλλος ἀντίθετος αὐτοῦ, καὶ διὰ νὰ ἐκφράσωμεν συμβολικῶς τὴν ἀντίθεσιν δύο τοιούτων ἀριθμῶν γράφομεν πρὸ τοῦ ἑνὸς ἐκ τούτων, τοῦ μέχρι τοῦδε γνωστοῦ, τὸ σύμβολον + (σύν), πρὸ δὲ τοῦ ἄλλου, τὸ σύμβολον - (πλήν). Τὸ σύμβολον + τιθέμενον πρὸ τοῦ ἀριθμοῦ (ἀριστερά του) λέγεται **θετικὸν πρόσσημον** (ἢ **σῆμα**), τὸ δὲ - **ἀρνητικὸν πρόσσημον** (ἢ **σῆμα**). Οὕτως οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοί, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει 6 μονάδας, γράφονται + 6 καὶ - 6, ἀπαγγέλλονται δὲ ὡς ἑξῆς σύν ἑξ καὶ πλήν ἑξ. Συνήθως παραλείπεται τὸ + εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἀριθμοῦ. Ἐπομένως, ὅταν εἰς ἀριθμὸς τῆς Ἀριθμητικῆς δὲν ἔχη πρὸ αὐτοῦ σύμβολον, ὑποτίθεται, ὅτι ἔχει τὸ +.

Κατὰ ταῦτα, οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοὶ + 6 καὶ - 6 γράφονται καὶ οὕτως: 6 καὶ - 6. Ὅμοιως, ἀντίθετοι εἶναι οἱ ἀριθμοί:

23 καὶ - 23, οἱ $\frac{3}{5}$ καὶ $-\frac{3}{5}$, οἱ 6,15 καὶ - 6,15, οἱ - 5 καὶ 5, οἱ - 3,6 καὶ 3,6 κ.τ.λ.

Ἄν εἰς ἀριθμὸς παριστάνεται π.χ. μὲ α, ὁ ἀντίθετός του παριστάνεται μὲ - α.

§ 4. Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται **ὁμόσημοι**, ἂν ἔχουν τὸ αὐτὸ πρόσημον (εἴτε τὸ + εἶναι εἴτε τὸ -). Οὕτως ὁμόσημοι λέγονται οἱ ἀριθμοὶ +3, +12, ἐπίσης οἱ 5, 23, 5, 15, 17, 3, καθὼς καὶ οἱ -7 , $-\frac{3}{4}$, $-2\frac{1}{2}$, -6 .

Δύο ἀριθμοὶ λέγονται **ἐτερόσημοι**, ἐὰν ὁ μὲν εἰς ἔχη πρόσημον + ἢ οὐδὲν τοιοῦτον, ὁ δὲ ἄλλος τὸ -. Οὕτως οἱ ἀριθμοὶ +8 καὶ -3 λέγονται ἐτερόσημοι. Ὅμοίως ἐτερόσημοι λέγονται οἱ -15 καὶ $+\frac{5}{9}$, οἱ 2,15 καὶ $-6\frac{3}{4}$, οἱ 7 καὶ -12.

Οἱ μὲν ἀριθμοὶ, οἱ ὅποιοι ἔχουν τὸ αὐτὸ πρόσημον + (ἢ οὐδὲν τοιοῦτον) λέγονται **θετικοὶ ἀριθμοί**, οἱ δὲ ἔχοντες τὸ - λέγονται **ἀρνητικοὶ ἀριθμοί**, καὶ ὑποτίθεται ὅτι, ἂν οἱ θετικοὶ παριστάνουν ποσὰ ἢ μεγέθη θετικά, οἱ ἀρνητικοὶ θὰ παριστάνουν ἀρνητικὰ τοιαῦτα, ἂν τὰ παριστώμενα ποσὰ ἐπιδέχωνται ἀντίθεσιν. Οἱ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ καὶ τὸ 0 (μηδὲν) λέγονται μὲ ἓν ὄνομα **σχετικοὶ** (πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τοὺς κατωτέρω καλομένους ἀπολύτους ἀριθμούς). Ὡστε :

Καλοῦμεν θετικὸν ἀριθμὸν οἰονδήποτε ἀριθμὸν (τῆς Ἀριθμητικῆς) διάφορον τοῦ μηδενός 0, ἔχοντα τὸ πρόσημον + ἢ οὐδὲν τοιοῦτον. Καλοῦμεν ἀρνητικὸν ἀριθμὸν οἰονδήποτε ἀριθμὸν (τῆς Ἀριθμητικῆς), διάφορον τοῦ 0, τοῦ ὁποίου τὸ πρόσημον εἶναι τὸ -.

Ὅταν λέγωμεν, ἔστω ἀριθμὸς α, ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς δύναται νὰ εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἢ καὶ μηδέν.

§ 5. Καλοῦμεν **ἀπόλυτον ἀριθμὸν** ἢ **ἀπόλυτον τιμὴν** ἢ καὶ μέτρον ἑνὸς θετικοῦ μὲν ἀριθμοῦ ἢ τοῦ 0 αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν, ἑνὸς ἀρνητικοῦ δὲ τὸν ἀντίθετόν του (θετικόν). Οὕτως οἱ ἀπόλυτοι ἀριθμοὶ τῶν ἀριθμῶν +3, +5, $+\frac{1}{2}$, +0,45 εἶναι οἱ 3, 5, $\frac{1}{2}$, 0,45, τῶν δὲ -1, $-4\frac{3}{4}$, -8,5 εἶναι οἱ 1, $4\frac{3}{4}$, 8,5· τοῦ 0 ἀπόλυτος εἶναι τὸ 0. Τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν -6, +2, -3,5, $-3\frac{1}{2}$ ἀντίστοιχοι ἀπόλυτοι εἶναι οἱ 6, 2, 3,5, $3\frac{1}{2}$.

Τὴν ἀπόλυτον τιμὴν ἢ τὸ μέτρον ἑνὸς ἀριθμοῦ π.χ., τοῦ -5, σημειώνομεν συμβολικῶς οὕτως: $|-5|$, ἥτοι τὸ σύμβολον παρα-

στάσεως τῆς ἀπολύτου τιμῆς εἶναι δύο μικραὶ εὐθεΐαι $| \quad |$, μεταξὺ τῶν ὁποίων γράφεται ὁ ἀριθμός. Γράφομεν λοιπὸν $|-5| = 5$.

Ὅμοιως ἔχομεν $|+6| = 6$, $|-7\frac{1}{2}| = 7\frac{1}{2}$ κ.τ.λ.

Ἐν γένει τὴν ἀπόλυτον τιμὴν ἀριθμοῦ α παριστάνομεν οὕτως: $|\alpha|$. Καὶ ἂν μὲν ὁ α εἶναι θετικὸς ἢ 0, τότε $|\alpha| = \alpha$, ἐὰν δὲ εἶναι α ἀρνητικὸς τότε $|\alpha| = -\alpha$.

Οἱ ἀπόλυτοι καὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 1, 2, 3, κ.τ.λ., λέγονται **φυσικοὶ ἀριθμοί**.

Δύο σχετικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται **ἀπολύτως ἴσοι ἢ ἀπολύτως ἰσοδύναμοι**, ἂν αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι ἢ ἰσοδύναμοι, καθὼς π.χ. οἱ 5 καὶ -5, καὶ συμβολίζομεν τοῦτο οὕτως:

$|5| = |-5|$. Ἐπίσης οἱ $3\frac{1}{4}$ καὶ $-\frac{13}{4}$ εἶναι ἀπολύτως ἰσοδύναμοι, διότι $|3\frac{1}{4}| = |-\frac{13}{4}|$. Ὡστε:

Οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοὶ εἶναι ἀπολύτως ἴσοι.

Τὸ σύμβολον τῆς μὴ ἰσότητος (καὶ τῆς μὴ ἰσοδυναμίας) δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ $\neq$ καὶ ἀπαγγέλλεται: **διάφορον**. Ἦτοι, ἂν ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς α δὲν εἶναι ἴσος (οὔτε ἰσοδύναμος) πρὸς ἄλλον β , συμβολίζομεν αὐτὸ οὕτως: $\alpha \neq \beta$ καὶ ἀπαγγέλλομεν, α διάφορον τοῦ β .

Γενικῶς, ἂν δύο σχετικοὶ ἀριθμοί, π.χ. α καὶ β , εἶναι ἀπολύτως ἴσοι, γράφομεν $|\alpha| = |\beta|$.

§ 6. Ἰσοὶ ἢ ἰσοδύναμοι λέγονται δύο ἀριθμοί, ἂν εἶναι ὁμόσημοι καὶ ἔχουν ἴσας ἢ ἰσοδυναμούς ἀπολύτους τιμὰς, καθὼς π.χ. οἱ 3 καὶ $\frac{6}{2}$, οἱ -4 καὶ $-\frac{12}{3}$, διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ πρόσθημον, αἱ δ' ἀπόλυτοι τιμαὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι, π.χ. τῶν 3 καὶ $\frac{6}{2}$, καθὼς καὶ τῶν -4 καὶ $-\frac{12}{3}$, σημειώνομεν δὲ τοῦτο μὲ τὸ σύμβολον $=$ (ἴσον) τιθέμενον μεταξὺ αὐτῶν, ἦτοι γράφομεν $3 = \frac{6}{2}$, ἐπίσης $-4 = -\frac{12}{3}$. Σημειωτέον, ὅτι διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερονύμους κλασματικούς ἀριθμούς εἰς ἀντιστοίχους ἰσοδυναμούς αὐτῶν ὁμωνύμους, ἀρκεῖ νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμωνύμους τὰς ἀπολύτους των τιμὰς καὶ νὰ διατηρήσωμεν τὰ πρόσθημα αὐτῶν. Οὕτω π.χ., ἀντὶ τῶν $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{8}$, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τοὺς ἰσοδυναμούς των $\frac{4}{8}$, $-\frac{6}{8}$, $-\frac{1}{8}$.

Ἀσκήσεις

7. Εὑρετε ποσὰ ἐπιδεχόμενα ἀντίθεσιν, καὶ ἀριθμούς ἀντιθέτους παριστάνοντας αὐτὰ (ἐνεργητικὸν καὶ παθητικὸν ἐπιχειρήσεως, κέρδος καὶ ζημία, περιουσία καὶ χρέος, μέλλων καὶ παρελθὼν χρόνος κ.τ.λ.).

8. Ποιοὶ εἶναι οἱ ἀντίθετοι τῶν ἀριθμῶν 5, 12, -3, -8, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{7}$, $-\frac{4}{9}$, 6, 15, 7, 45, 0, 12, -34, 85.

9. Γράψατε διαφόρους ὁμοσημοὺς ἀριθμούς καὶ τρεῖς μὴ ὁμοσημοὺς. Γράψατε δύο ἀντιθέτους ἀριθμούς καὶ τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν.

10. Ποῖαι αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν 3, -13, -15, 28, -3, 5, $13\frac{5}{8}$, $-\frac{7}{9}$, 17, 2, -42, 18, $-\frac{6}{9}$, $2\frac{1}{5}$. Συμβολίσατε αὐτάς.

11. Σημειώσατε τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν α , $-\alpha$, $-\beta$, $+\beta$.

12. Εὑρετε δύο ἴσους ἢ ἰσοδυνάμους πρὸς τὸν $-\frac{1}{2}$, τὸν $\frac{1}{5}$ τὸν 2, τὸν 6 καὶ τὸν -3.

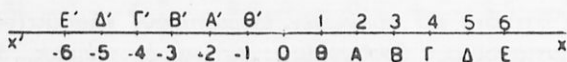
13. Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ 6, -2, 5, -6, 15, -3 $\frac{1}{4}$. Εὑρετε δι' ἕκαστον αὐτῶν ἓνα ἰσοδύναμόν του.

14. Ἐπὶ τίνος εὐθείας λαμβάνομεν ἀπὸ τίνος σημείου αὐτῆς Ὁ τὰ θετικὰ τμήματα τῆς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ..., καὶ παριστάνομεν αὐτὰ μὲ τοὺς θετικοὺς ἀριθμούς 1, 2, 3, 4, ..., ἂν τὰ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσα μὲ τὸ ΟΑ. Πῶς θὰ παρασταθοῦν τὰ ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ'..., ἴσα ἀπολύτως μὲν πρὸς τὰ προηγούμενα, ἀλλ' ἔχοντα φορὰν ἐπὶ τῆς εὐθείας ἀντίθετον τῆς ΟΑ;

15. Εὑρετε τὰ μεγέθη ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὡς ἄνω εὐθείας, τὰ ὅποια θὰ παριστάνουν οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, 0, 45, καθὼς καὶ οἱ ἀντίθετοι τούτων.

1. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 7. Ἐστω εὐθεῖα τις $x'x$. Ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν ἓν σημεῖον, ἔστω τὸ Ο, τὸ ὅποιον ὀρίζομεν ἐκ τῶν προτέρων νὰ παριστάνῃ



Σχ. 2

τὸ μηδέν (0). Ὅρίζομεν ὡς θετικὴν μὲν φορὰν ἐπ' αὐτῆς π.χ. τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ x , ὡς ἀρνητικὴν δὲ τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ x' .

Ἄν λάβωμεν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΟΘ ὡς μονάδα μετρήσεως καὶ τὸ μήκος αὐτοῦ ἴσον πρὸς 1 μ. π.χ., τότε τὸ μὲν τμήμα ΟΘ θὰ λέγωμεν, ὅτι παριστάνεται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ + 1, ὁ δὲ ἀριθμὸς οὗτος θὰ λέγωμεν, ὅτι παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΘ (σχ. 2).

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁδοιπὸρος διατρέχει δύο μέτρα ἐπὶ τῆς Οχ ἀπὸ τὸ Ο. Θὰ παριστάνωμεν τὸν δρόμον αὐτὸν μὲ τὸ τμήμα ΟΑ, τὸ ὁποῖον ἔχει μήκος δύο μονάδων τῆς εὐθείας χ'χ. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν, ἂν καὶ ἄλλος ὁδοιπὸρος διατρέξῃ δύο μέτρα ἀπὸ τοῦ Ο ἐπὶ τῆς Οχ' Ὁ δρόμος αὐτὸς θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΑ'. Οὕτω προχωροῦντες δυνάμεθα νὰ παριστάνωμεν τοὺς σχετικὸς ἀριθμοὺς μὲ τμήματα τῆς εὐθείας χ'χ. τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **εὐθεῖαν τῶν ἀριθμῶν** ἢ **ἄξονα** ἢ καὶ **εὐθεῖαν τῶν τετμημένων**, τοῦ μήκους αὐτῶν μετρούμενου ἀπὸ ὠρισμένου σημείου ταύτης, π.χ. ἀπὸ τοῦ Ο, τὸ ὁποῖον καλεῖται **ἀρχὴ** ἢ **ἀφετηρία ἐπὶ τοῦ ἄξονος**. Τὸ μήκος τμήματος παριστάνοντος ὠρισμένον ἀριθμὸν εἶναι ἴσον μὲ τόσας μονάδας μήκους, ὅσας ἔχει ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς. Κατὰ ταῦτα, ἂν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν ἓν χρονικὸν διάστημα, π.χ. μετὰ δύο ἔτη (+ 2 ἔτη), λαμβάνομεν ἐκ τοῦ σημείου Ο ἐπὶ τῆς ἐν λόγω εὐθείας ἐν τμήμα ΟΑ ἔχον μήκος δύο μονάδων καὶ τὸ τμήμα αὐτὸ ΟΑ λέγομεν ὅτι παριστάνει τὸ διάστημα + 2 ἐτῶν. Ὁμοίως χρονικὸν διάστημα πρὸ 3 ἐτῶν (- 3 ἔτη) παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΒ', τῆς εὐθείας, ἔχοντος (ἀπόλυτον) μήκος 3 μονάδων.

Ἐὰν δύο ὁδοιπόροι ἀναχωροῦν ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον εὐθείας, ἔστω τὸ Ο, καὶ διευθύνωνται ἐπ' αὐτῆς ἀντιθέτως, ὁ μὲν εἰς μετὰ χύτητα π.χ. 5 χλμ. πρὸς τὴν θετικὴν φορὰν, ὁ δὲ πρὸς τὴν ἀρνητικὴν φορὰν μὲ ταχύτητα 4 χιλμ., ἡ μὲν ταχύτης τοῦ πρώτου θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος π.χ. ΟΔ, ἴσου μὲ 5 μονάδας μήκους καὶ κειμένου ἐπὶ τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς εὐθείας τῶν τετμημένων, ἡ δὲ ταχύτης τοῦ δευτέρου ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΓ', ἀντιθέτου φορᾶς τοῦ πρώτου καὶ ἔχοντος μήκος (ἀπολύτως λαμβανόμενον) ἴσον πρὸς 4 μονάδας μήκους.

Ἀνάλογα παρατηροῦμεν διὰ τὴν παράστασιν ἀριθμῶν τῆς θερμοκρασίας ἄνω ἢ κάτω τοῦ μηδενὸς εἰς τὸ θερμομέτρον κ.τ.λ.

Δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τοὺς σχετικὸς ἀριθμοὺς καὶ μὲ

σημεία τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν. Πράγματι, ἂν ὀρίσωμεν τὸ σημείον π.χ. Θ , ἄκρον τοῦ τμήματος αὐτῆς $\Theta\Theta'$ ἔχοντος μῆκος $+1$, ὅτι παριστάνει τὴν $+1$, εὐρίσκομεν, ὅτι τὰ σημεία $A, B, \Gamma, \dots$ παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς $+2, +3, +4, \dots$ ἐὰν τὰ $A, B, \Gamma, \dots$ εἶναι τὰ ἄκρα τῶν τμημάτων $OA, OB, OG, \dots$, τῶν ὁποίων τὰ μήκη εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα μὲ $+2, +3, +4, \dots$

Ἐὰν ἐκ τοῦ O καὶ πρὸς τὴν ἀντίθετον φορὰν τῆς προηγουμένης, τὴν ἐκ τοῦ O πρὸς x' , λάβωμεν ὁμοίως τὸ τμήμα OO' μὲ μῆκος (ἀπολύτως λαμβανόμενον) μιᾶς μονάδος, τὸ Θ' παριστάνει τὸν -1 . Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὐρίσκομεν τὰ σημεία $A', B', \Gamma', \dots$ τὰ ὅποια παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς $-2, -3, -4, \dots$ (σχ. 2).

Ὁμοίως εὐρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὅποιον παριστάνει ἓνα κλασματικὸν ἀριθμὸν, π.χ. τὸν $\frac{1}{2}$. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν τμήμα αὐτῆς μὲ μῆκος ἴσον πρὸς τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, π.χ. ἴσον μὲ $\frac{1}{2}$ τῆς μονάδος μήκους, καὶ πρὸς τὴν φορὰν Ox μὲν ἀπὸ τὸ O , ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι θετικὸς, πρὸς τὴν Ox' δὲ ἂν εἶναι ἀρνητικὸς. Τὸ μέρος Ox τῆς εὐθείας $x'x$ λέγεται **θετικὸν μέρος** τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν (ἢ ἡμιευθεῖα Ox) ἢ τοῦ ἄξονος ἢ τῆς εὐθείας τῶν τετμημένων καὶ ἐπ' αὐτοῦ κεῖνται πάντα τὰ σημεία, τὰ ὅποια παριστάνουν τοὺς θετικοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὸ μηδέν. Τὸ Ox' τῆς εὐθείας $x'x$ λέγεται **ἀρνητικὸν μέρος** (ἢ ἡμιευθεῖα Ox') καὶ ἐπ' αὐτοῦ κεῖνται πάντα τὰ σημεία, τὰ ὅποια παριστάνουν τοὺς ἀρνητικούς ἀριθμοὺς καὶ τὸ μηδέν. Ἡ φορὰ ἐκ τοῦ O πρὸς τὸ x λέγεται θετική, ἡ δὲ ἐκ τοῦ O πρὸς τὸ x' ἀρνητική, ἐκάστη δὲ σημειοῦται μὲ ἓν βέλος, παρακείμενον εἰς τὴν ἀντίστοιχον ἡμιευθεῖαν καθὼς εἰς τὸ σχ. 1.

2. ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΤΙΚΗΣ ΜΟΝΑΔΟΣ

§ 8. Δεχόμεθα ὅτι: Πᾶς ἀπόλυτος ἢ θετικὸς ἀριθμὸς τῆς Ἀριθμητικῆς δύναται νὰ γίνῃ ἐκ τῆς μονάδος ἢ ἐξ ἑνὸς τῶν μερῶν αὐτῆς διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῆς ὡς προσθετέου.

$$\text{Π.χ. } \delta \ 3 = 1 + 1 + 1. \quad \text{Ὁ } 2\frac{3}{5} = 1 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}.$$

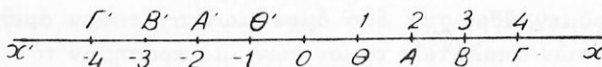
Καθ' ὅμοιον τρόπον δεχόμεθα ὅτι:

Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ γίνη ἐκ τῆς ἀρνητικῆς μονάδος ἢ ἐξ ἑνὸς τῶν μερῶν αὐτῆς διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῆς ὡς προσθετέου.

Οὕτω δεχόμεθα π.χ., ὅτι ὁ -3 γίνεται ἐκ τῆς -1 , ἐὰν τὴν ἐπαναλάβωμεν τρεῖς φορές. Ὁ $-\frac{3}{5}$ π.χ. γίνεται ἐκ τοῦ $\frac{1}{5}$ τῆς -1 , ἐὰν ἐπαναλάβωμεν αὐτὸ τρεῖς φορές.

Ἐστω ἀρνητικὸς τις ἀριθμὸς, π.χ. ὁ -4 , ὅστις παριστάνει ἀρνητικὸν τι μέγεθος, π.χ. τὸ $ΟΓ'$ ἐπὶ τῆς εὐθείας $x'x$, μετρηθὲν ὑπὸ τῆς μονάδος μετρήσεως, ἔστω τῆς $ΟΘ$. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως ταύτης τοῦ $ΟΓ'$ ὑπὸ τῆς $ΟΘ$ παριστάνομεν μὲ $\frac{ΟΓ'}{ΟΘ} = -4$ (σχ. 3).

Ἀλλὰ τὸ $ΟΓ'$ γίνεται ἐκ τοῦ $ΟΘ$ (δηλαδή ἐκ τοῦ $ΟΘ$ ἀφοῦ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ $ΟΘ$) καθὼς καὶ ὁ ἀριθμὸς -4 ἐκ τῆς ἀρ-



σχ. 3

νητικῆς μονάδος -1 , διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῆς τέσσαρας φορές.

Ἐκ τούτου ὁδηγούμενοι δεχόμεθα ὅτι :

Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ γίνη ἀπὸ τὴν θετικὴν μονάδα, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ πρόσημον αὐτῆς καὶ ταύτην ἢ μέρος ταύτης ἐπαναλάβωμεν ὡς προσθετέον.

Οὕτω δεχόμεθα, ὅτι ὁ -7 γίνεται ἐκ τῆς $+1$, ἐὰν πρῶτον λάβωμεν τὴν ἀντίθετον αὐτῆς -1 καὶ τὴν ἐπαναλάβωμεν ἑπτὰ φορές ὡς προσθετέον. Ὁ $-\frac{3}{8}$ γίνεται ἀπὸ τὴν $+1$, ἐὰν πρῶτον λάβωμεν τὴν ἀντίθετον αὐτῆς -1 καὶ τὸ ὄγδοον ταύτης ἐπαναλάβωμεν τρεῖς ὡς προσθετέον.

Ἀσκήσεις

16. Πῶς σχηματίζεται ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν -5 , -6 , -10 , -50 ἐκ τῆς ἀρνητικῆς μονάδος καὶ πῶς ἐκ τῆς θετικῆς ;

17. Πῶς σχηματίζεται ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν $-\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{8}$, $-\frac{4}{9}$ ἐκ τῆς ἀρνητικῆς καὶ πῶς ἐκ τῆς θετικῆς μονάδος ;

18. Πώς σχηματίζεται εκ της θετικής μονάδος έκαστος τῶν ἀριθμῶν 0,4, 0,45, 0,385, 1,25 καὶ πῶς έκαστος τῶν ἀντιστοίχων ἀντιθέτων αὐτῶν ;

Γ'. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΧΕΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

1. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

§ 9. Ἐστω, ὅτι εἷς ἔμπορος ἐκέρδισεν ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησίν του ἐντὸς μιᾶς ἡμέρας 15 000 δρχ. καὶ ἄλλην ἡμέραν ἐκέρδισεν 40 000 δρχ.

Προφανῶς ἐκέρδισεν ἐν ὅλῳ 55 000 δρχ. Ἄν παραστήσωμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἀλγεβρικῶς, ἥτοι με $+ 15\,000$ δρχ. καὶ $+ 40\,000$ δρχ., θὰ καλοῦμεν ἄθροισμα αὐτῶν τὸ $(15\,000 + 40\,000)$ δρχ. = 55 000 δρχ. Ἄν ἔχωμεν δύο ἄλλους ὁμοσήμους ἀριθμοὺς π.χ. $- 35$ καὶ $- 15$, θὰ καλοῦμεν ἄθροισμα τούτων τὸν ἀριθμὸν $-(35 + 15)$, ἥτοι τὸν $- 50$.

Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι δίδομεν τὸν ἐξῆς ὁρισμόν :

Καλοῦμεν ἄθροισμα δύο ὁμοσήμων σχετικῶν ἀριθμῶν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν των, με πρόσημον τὸ πρόσημον τῶν ἀριθμῶν.

Ἐστω, ὅτι ἔμπορος μίαν ἡμέραν ἐξημιώθη ἀπὸ μίαν πώλησιν 50 000 δρχ. καὶ ἐντὸς τῆς αὐτῆς ἡμέρας ἐκέρδισεν ἀπὸ μίαν ἄλλην πώλησιν 15 000 δρχ. Ἀπὸ τὰς δύο αὐτὰς πωλήσεις ὁ ἔμπορος ἐξημιώθη $(50\,000 - 15\,000)$ δρχ. Ἦτοι ἐξημιώθη 35 000 δρχ. Ἄν παραστήσωμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἀλγεβρικῶς, ἥτοι με $- 50\,000$ δρχ. τὴν ζημίαν καὶ με $+ 15\,000$ δρχ. τὸ κέρδος, θὰ καλοῦμεν ἄθροισμά των τὸν ἀριθμὸν $-(50\,000 - 15\,000)$ δρχ. = $- 35\,000$ δρχ. Ὅμοιως θὰ λέγωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα π.χ. $+ 40$ καὶ $- 30$ εἶναι ὁ $(+ 40 - 30) = + 10$. Ἦτοι :

Καλοῦμεν ἄθροισμα δύο ἑτεροσήμων σχετικῶν ἀριθμῶν, τὴν διαφορὰν (τῆς μικροτέρας ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν) τῶν ἀπολύτων τιμῶν, με πρόσημον τὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἔχοντος τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμὴν.

Ἄν δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἀντίθετοι, τὸ ἄθροισμά των εἶναι τὸ μηδέν.

Π.χ. τὸ ἄθροισμα τῶν $- 40$ καὶ $+ 40$ εἶναι τὸ 0.

Ἐστω, ὅτι ἔχομεν τοὺς ἀριθμοὺς π.χ. $+ 24$ καὶ 0. Ἐπειδὴ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ 0 εἶναι 0, ἔπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα $+ 24 + 0 = + 24$.

τό $-6 + 0 = -6$, τό ἄθροισμα τῶν 0 καί -25 ἰσοῦται μέ -25 κ.τ.λ.
 Ἡτοι :

Τό ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἰς εἶναι μηδέν, ἰσοῦται μέ τὸν ἄλλον ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν.

Ἡ πρᾶξις, μέ τὴν ὁποίαν εὐρίσκομεν τὸ ἄθροισμα δύο ἢ καὶ περισσοτέρων σχετικῶν ἀριθμῶν, λέγεται **πρόσθεσις**, συμβολίζεται δὲ ὅπως καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν μέ τὸ $+$ (σύν ἢ καί) τιθέμενον μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι λέγονται **προσθετέοι**.

Διὰ τὴν ἀποφεύγεται ἡ σύγχυσις μεταξὺ τοῦ συμβόλου $+$ τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ προδήμου $+$ ἢ $-$ τῶν προσθετέων ἀριθμῶν, συνήθως τίθεται ὁ ἀριθμὸς μέ τὸ πρόσημόν του ἐν παρενθέσει, οὕτω δὲ ἐμφανίζεται ἕκαστος ἀριθμὸς μέ τὸ πρόσημόν του ὡς ἐν ὅλον. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν :

$$\begin{aligned} (+5) + (+3) &= (+8) = +8 = 8, & (-6) + (+10) &= (+4) = +4 = 4, \\ & & (-8) + 0 &= (-8) = -8, \\ (+8) + (-9) &= (-1) = -1, & (+7) + 0 &= (+7) = +7 = 7, \\ & & 0 + (-9) &= (-9) = -9. \end{aligned}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι, ἂν α καὶ β παριστάνουν δύο **σχετικούς ἀριθμούς**, θὰ ἔχωμεν $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Διότι εἰς τοὺς ἀνωτέρω ὁρισμοὺς οὐδεὶς περιορισμὸς τίθεται ποῖος ἐκ τῶν δύο προσθετέων θὰ τεθῇ πρῶτος, τὸ δὲ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀπολύτων τιμῶν των δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν σειρὰν ἢ ἀπὸ τὴν θέσιν τῶν ἀριθμῶν.

Κατὰ ταῦτα, τὸ νὰ προστεθῇ ἀριθμὸς π.χ. β εἰς τὸν α , δηλαδή νὰ εὐρεθῇ τὸ $\alpha + \beta$, εἶναι τὸ αὐτὸ μέ τὸ νὰ προστεθῇ ὁ α εἰς τὸν β , ἥτοι μέ τὸ νὰ εὐρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\beta + \alpha$.

10. Δοθέντων περισσοτέρων τῶν δύο σχετικῶν ἀριθμῶν, π.χ. τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ κ.τ.λ. καλοῦμεν ἄθροισμα τούτων καὶ παριστάνομεν μέ $\alpha + \beta + \gamma + \delta$, τὸν ἀριθμὸν τὸν ὁποῖον εὐρίσκομεν, ἂν εὐρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν α καὶ β , εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέσωμεν τὸν γ , εἰς τὸ νέον ἐξαγόμενον προσθέσωμεν τὸν δ κ.τ.λ.

Σημειώνομεν μέ $(\alpha + \beta)$ τὸ εὐρισκόμενον ἄθροισμα τῶν α καὶ β , ἥτοι θέτομεν $\alpha + \beta = (\alpha + \beta)$.

Οὕτως ἔχομεν $\alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Παριστάνομεν μέ $(\alpha + \beta + \gamma)$ τὸ εὐρισκόμενον ἄθροισμα τῶν

α, β, γ ἤτοι θέτομεν $\alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta + \gamma)$ ἢ καὶ
 $(\alpha + \beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma$ καὶ ἔχομεν

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = (\alpha + \beta) + \gamma + \delta = [(\alpha + \beta) + \gamma] + \delta = (\alpha + \beta + \gamma + \delta).$$

Οὕτω λοιπὸν ἔχομεν $\alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma = (\alpha + \beta + \gamma)$.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = (\alpha + \beta + \gamma) + \delta = (\alpha + \beta + \gamma + \delta).$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) + \epsilon = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon).$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν καὶ $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + \beta + \gamma$ κ.τ.λ.

Π. χ.

$$(-3) + (+5) = +2 = 2,$$

$$(-3) + (+5) + (+7) = (+2) + (+7) = +9 = 9,$$

$$\text{ἄρα καὶ } (-3) + (5) + (+7) + (+1) = (+9) + (+1) = 10.$$

Παρατήρησις. Ὅταν οἱ διὰ τὴν πρόσθεσιν ὀριζόμενοι ἀριθμοὶ δὲν δίδωνται μὲ γράμματα, διὰ νὰ σημειώσωμεν τὸ ἄθροισμὰ των, δεχόμεθα πρὸς εὐκολίαν νὰ γράψωμεν αὐτοὺς κατὰ σειρὰν τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον καὶ ἕκαστον μὲ τὸ πρόσθημόν του, παραλείποντες τὸ σύμβολον τῆς προσθέσεως. Οὕτω π.χ., ἀντὶ νὰ ἔχωμεν τὸ $(+4) + (+7) + (-6) + (-7) + (+1)$.

γράφομεν τὸ $+4 + 7 - 6 - 7 + 1$ καὶ εὐρίσκομεν

$$+4 + 7 - 6 - 7 + 1 = 11 - 6 - 7 + 1 = +5 - 7 + 1 = -2 + 1 = -1.$$

Ὅμοίως, ἀντὶ π.χ. τοῦ $(-4) + \left(+\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{4}{9}\right) + (-2)$, γράφομεν $-4 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} - 2$ καὶ εὐρίσκομεν $-4 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} - 2 =$
 $-3\frac{1}{3} - \frac{4}{9} - 2 = -\frac{10}{3} - \frac{4}{9} - 2 = -\frac{30}{9} - \frac{4}{9} - 2 = -\frac{34}{9} - \frac{18}{9} = -\frac{52}{9} = -5\frac{7}{9}.$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὅμὰς πρώτη. 19. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ ἄθροισματα :

$$\alpha') 5 + (+3)$$

$$\beta') (+7) + (+1,4)$$

$$\gamma') (+4) + (+6) + (+8)$$

$$\delta') \frac{4}{9} + \left(+\frac{2}{3}\right) \quad \epsilon') \left(+7\frac{1}{3}\right) + \left(+3\frac{1}{5}\right) \quad \sigma\tau') (+3) + \left(+4\frac{1}{2}\right) + \left(+8\frac{1}{4}\right)$$

$$\zeta') (-4) + (-6) \quad \eta') (-10) + \left(-8\frac{1}{2}\right) \quad \theta') (-4) + \left(-3\frac{1}{2}\right) + \left(-7\frac{1}{3}\right)$$

$$\iota') \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{5}{8}\right) \quad \iota\alpha') (-4,5) + (-5,3) \quad \iota\beta') (-4) + (-5) + (+8) + \left(-3\frac{1}{2}\right)$$

Ὁ μὰς δευτέρα. 20. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα :

$$\begin{array}{lll} \alpha') -5+3 & \beta') +5-8-7+3 & \gamma') -3\frac{1}{2} + 5\frac{1}{4} - 2\frac{1}{5} \\ \delta') -3-5+6-7-8 & \epsilon') -3+5\frac{1}{2} - 3+4-7 & \sigma\tau') +4-8-6+7\frac{1}{2} - 8\frac{1}{2} - 9 \\ \zeta') -3,5+7,4-8,5+6\frac{1}{2} - \frac{3}{4} & \eta') -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} & -0,25+3,7. \end{array}$$

Ὁ μὰς τρίτη. 21. Κερδίζει τις 234 000 δρχ., ἔπειτα χάνει 216 400 δρχ. Κερδίζει πάλιν 215 700 δρχ. καὶ χάνει ἐκ νέου 112 000 δρχ. Γράψατε τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἀλγεβρικῶς καὶ εὑρετε ἂν ἐκέρδισεν ἢ ἔχασε τελικῶς καὶ πόσον.

22. Ἐμπορος αὐξάνει τὸ ἐνεργητικόν του κατὰ 128 000 δρχ., τὸ δὲ παθητικὸν κατὰ 312 400 δρχ. Γράψατε τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἀλγεβρικῶς καὶ εὑρετε ποίαν μεταβολὴν παθαίνει τὸ κεφάλαιόν του.

23. Σῶμα θερμανθὲν ἀπὸ 0° ἔλαβε θερμοκρασίαν 17,6°. Ἐπειτα ἐψύχθη κατὰ 19,1° καὶ τέλος ἐθερμάνθη κατὰ 3,1°. Γράψατε τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἀλγεβρικῶς καὶ εὑρετε ἂν ἠϋξήθη ἢ ἡλαττώθη τελικῶς ἡ ἀρχικὴ του θερμοκρασία καὶ πόσον.

24. Ἐμπορος ἔχει εἰς τὸ ταμεῖον του 250 000 δρχ. Ὁφείλει μὲν εἰς διαφόρους 174 500 δρχ., 136 000 δρχ., καὶ 19 450 δρχ., τοῦ ὀφείλουν δὲ 34 000 δρχ., καὶ 14 500 δρχ. καὶ 29 000 δρχ. Γράψατε τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἀλγεβρικῶς καὶ εὑρετε τὸ ἄθροισμά των. Τί ποσὸν θὰ τοῦ μείνῃ, ἂν εἰσπράξῃ καὶ πληρώσῃ τὰ ὀφειλόμενα;

25. Ἐμπορος εἶχεν 180 000 δρχ. καὶ ἐπλήρωσεν 120 000 δρχ., εἰσέπραξεν 74 000 δρχ., ἐπλήρωσε 14 800 δρχ. καὶ εἰσέπραξε 39 400 δρχ. Γράψατε τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἀλγεβρικῶς καὶ εὑρετε τὸ ἄθροισμά των. Τί ποσὸν τοῦ ἔμεινεν ἢ πόσῃν ζημίαν ἔχει ;

26. Κινητὸν ἀνεχώρησεν ἀπὸ ἓν σημεῖον Ὁ ὠρισμένης εὐθείας καὶ διήνυσεν ἐπ' αὐτῆς διάστημα +58,4 μ., ἔπειτα ἀπὸ τὴν θέσιν αὐτὴν -19,3 μ. ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἀπ' ἐκεῖ +23,7 μ. καὶ πάλιν ἀπὸ τὴν τελευταίαν θέσιν -95,8 μ. πάντοτε ἐπὶ τῆς εὐθείας. Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς τελευταίας θέσεώς του ἀπὸ τὸ Ο ;

I. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

§ 11. Τὸ ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλάχθῃ ἡ θέσις τῶν προσθετέων.

Ἐστω τὸ ἄθροισμα τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$,
Ἐχομεν : $\alpha + \beta + \gamma + \delta = (\alpha + \beta) + \gamma + \delta = (\alpha + \beta + \gamma) + \delta$. Ἄλλ' εἶναι $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, ἄρα καὶ $(\alpha + \beta) = (\beta + \alpha) = \beta + \alpha$. Ἐπομένως $\alpha + \beta + \gamma + \delta = (\alpha + \beta) + \gamma + \delta = (\beta + \alpha) + \gamma + \delta = (\beta + \alpha + \gamma) + \delta = \beta + \alpha + \gamma + \delta$.

Ὅμοιως ἔχομεν :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = (\beta + \alpha + \gamma) + \delta = \delta + (\beta + \alpha + \gamma) = \delta + \beta + \gamma + \alpha.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι :

Εἰς τὸ ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τινὰς ἐξ αὐτῶν μὲ τὸ ἄθροισμά των, καὶ ἀντιστρόφως.

Διότι, ἂν θέλωμεν π.χ. νὰ ἔχωμεν

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = (\alpha + \gamma + \epsilon) + \beta + \delta$$

παρατηροῦμεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ θέσωμεν

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = \alpha + \gamma + \epsilon + \beta + \delta = (\alpha + \gamma + \epsilon) + \beta + \delta. \text{ Ὡστε :}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν ἔχει τὰς αὐτὰς ιδιότητες μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς, ἤτοι ἰσχύει ὁ νόμος τῆς ἀλλαγῆς τῶν θέσεων τῶν προσθετέων καὶ τῆς ἀντικαταστάσεως μερικῶν ἐξ αὐτῶν μὲ τὸ ἄθροισμά των.

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἔπεται ἐπίσης ὅτι :

Διὰ νὰ προσθέσωμεν περισσοτέρους τῶν δύο μὴ ὁμοσημοὺς ἀριθμοὺς δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τοὺς ἔχοντας τὸ πρόσσημον +, χωριστὰ τοὺς ἔχοντας τὸ —, οὕτω δὲ προκύπτουν δύο ἐτερόσημοι ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους προσθέτομεν, ὡς ἀνωτέρω καὶ τὸ ἄθροισμα τούτων παριστάνει καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Κατὰ ταῦτα, διὰ τὸ ἄθροισμα π.χ.

$$-3 + (-5) + (+2) + (+3) + (-7) + (+6)$$

ἢ διὰ τὸ ἴσον του $-3 - 5 + 2 + 3 - 7 + 6$ ἔχομεν :

$$-3 - 5 - 7 = -15, \quad +2 + 3 + 6 = 11 \quad \text{καὶ τέλος} \quad -15 + 11 = -4,$$

ἤτοι : $-3 - 5 + 2 + 3 - 7 + 6 = -4$

$$\text{ἢ } (-3) + (-5) + (+2) + (+3) + (-7) + (+6) = (-4) = -4.$$

Ὁμοίως διὰ τὸ ἄθροισμα π.χ.

$$(+4) + (-5) + 0 + \left(-\frac{4}{5}\right) + (+6)$$

ἢ διὰ τὸ ἴσον του $4 - 5 + 0 - \frac{4}{5} + 6$ ἔχομεν :

$$4 - 5 + 0 - \frac{4}{5} + 6 = 4 + 0 + 6 - 5 - \frac{4}{5} = 10 - 5 - \frac{4}{5} = 5 - \frac{4}{5} = 4 \frac{1}{5}.$$

Ὁμοίως ἔχομεν π.χ.

$$-6 + 4 + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + 2 = 4 + \frac{1}{7} + 2 - \frac{1}{5} - 6 = \frac{43}{7} - \frac{31}{5} = \frac{215}{35} - \frac{217}{35} = -\frac{2}{35}.$$

Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως αὐτῆς δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ γρά-

φωμεν χωριστὰ ὅλους τοὺς ἐνδιαμέσους θετικούς καὶ ὅλους τοὺς ἀρνητικούς προσθετούς, ἀλλὰ σχηματίζομεν κατ' εὐθείαν τὰ μερικά ἄθροισματα τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν καὶ ἀκολουθῶς τὸ τελικὸν ἄθροισμα τούτων π.χ. $+3+0-1-2+1-6+4=8-9=-1$,

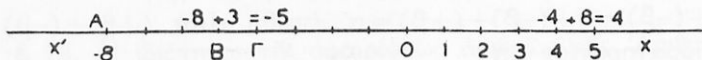
$$2-1+6-\frac{1}{3}+5-\frac{1}{4}-2=13-3\frac{7}{12}=9\frac{5}{12}.$$

Ἐπίσης (ἂν εὐκολυνώμεθα) εὐρίσκομεν τὸ ἐξαγόμενον προσθέσεως σχετικῶν ἀριθμῶν, προσθέτοντες εἰς τὸν πρῶτον προσθετόν τὸν δεύτερον, εἰς τὸ ἐξαγόμενον τὸν τρίτον κ.τ.λ. καὶ γράφομεν τὸ τελικὸν ἄθροισμα χωρὶς νὰ γράψωμεν τὰ ἐνδιάμεσα (μερικά ἐξαγόμενα).

Π.χ. διὰ τὸ $3-5+6-7+2-1$ λέγομεν $+3-5$ ἴσον -2 (χωρὶς νὰ τὸ γράψωμεν), ἀκολουθῶς λέγομεν $-2+6$ ἴσον $+4$ (χωρὶς νὰ τὸ γράψωμεν) καὶ ἐν συνεχείᾳ λέγομεν $+4-7$ ἴσον -3 · ἀκολουθῶς λέγομεν $-3+2$ ἴσον -1 , ἀκολουθῶς $-1-1$ ἴσον -2 . Ἄρα, λέγομεν, τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι -2 .

II. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

§ 12. Δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν γεωμετρικῶς τὴν πρόσθεσιν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων. Διὰ νὰ παραστήσωμεν π.χ. τὸ ἄθροισμα $-8+(+3)$, ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον ἔστω Α, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν -8 ἐπὶ τοῦ ἄξονος καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ κατὰ $+3$ μονάδας μήκους. Τὸ οὕτως εὐρισκόμενον σημεῖον, ἔστω Β, παριστάνει τὸ ἄθροισμα $-8+(+3)=-5$ (σχ. 4).



Σχ. 4

Διὰ νὰ εὐρώμεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει π.χ. τὸ ἄθροισμα $-4+(+8)$, ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον τοῦ ἄξονος, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν -4 , ἔστω τὸ Γ, καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ κατὰ ὀκτὼ μονάδας μήκους, ὅτε εὐρίσκομεν τὸ σημεῖον, ἔστω Δ, παριστάνον τὸ $-4+8=+4$.

" Α σ κ η σ ι ς

27. Εύρετε τὰ κατωτέρω εξαγόμενα κατὰ τὸν συντομότερον τρόπον καὶ ἀπεικονίσατε αὐτά :

$$\alpha') -3 + 5 - 8 - 7 - 11 - 15 + 6 + 0 - 3 \quad \beta') 16 - 53 + 47 - 5 - 6 - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + 11$$

$$\gamma') -\frac{4}{5} + \frac{2}{8} - \frac{3}{4} - 5 - 7 - 2 + 1 - 13 \quad \delta') -13,5 + 17,18 - 5,6 - 7,8 - 15$$

$$\epsilon') -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 5\frac{1}{4} - 25,4 - 2.$$

2. Α Φ Α Ι Ρ Ε Σ Ι Σ

§ 13. Ἐστώσαν π.χ. δύο σχετικοὶ ἀριθμοὶ $+7$ καὶ -5 . Σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα $(+7) + (+5)$, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται, ἂν εἰς τὸν $(+7)$ προσθέσωμεν τὸν $(+5)$, ἀντίθετον τοῦ (-5) . Ἄν εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτὸ $(+7) + (+5)$ προσθέσωμεν τὸν δευτέρον ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, τὸν -5 , θὰ εὕρωμεν

$$(+7) + (+5) + (-5) = (+7)$$

ἥτοι τὸν πρῶτον ἀριθμὸν ἐκ τῶν δοθέντων. Ἐν γένει :

Δοθέντων δύο σχετικῶν ἀριθμῶν, ὑπάρχει εἰς τρίτος σχετικὸς ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸν ἓνα τῶν δοθέντων, δίδει τὸν ἄλλον.

Πράγματι, ἂν α , β εἶναι δύο δοθέντες σχετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸν β π.χ. νὰ δίδῃ ἄθροισμα τὸν α , σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα $\alpha + (-\beta)$ ἀπὸ τὸν πρῶτον καὶ τὸν ἀντίθετον τοῦ δευτέρου β , τὸν $-\beta$. Παρατηροῦμεν τώρα, ὅτι αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς $\alpha + (-\beta)$ εἶναι ὁ ζητούμενος. Διότι, ἂν αὐτὸς προστεθῇ εἰς τὸν β , θὰ ἔχωμεν

$$\beta + \alpha + (-\beta) = \alpha + (-\beta) + (+\beta) = \alpha, \text{ ἐπεὶδὴ εἶναι } (+\beta) + (-\beta) = 0.$$

Παρατηρήτεον ὅτι :

Δοθέντος οἰουδήποτε σχετικοῦ ἀριθμοῦ, ὑπάρχει εἰς καὶ μόνον ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος, προστιθέμενος εἰς τὸν δοθέντα, δίδει ἄθροισμα τὸν ἴδιον. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι τὸ 0.

Πράγματι, ἔχομεν π.χ. $\alpha + 0 = \alpha$, $\beta + 0 = \beta$ κ.τ.λ. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι :

Τὸ μηδὲν εἶναι ὁ ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος, προστιθέμενος εἰς οἰονδήποτε ἄλλον, δίδει ἄθροισμα τὸν ἄλλον.

§ 14. Καλοῦμεν διαφοράν σχετικοῦ ἀριθμοῦ β ἀπὸ ἄλλον α, τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος, προστιθέμενος εἰς τὸν β, δίδει ἄθροισμα τὸν α.

Ὁ ἀριθμὸς αὐτός, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, εἶναι ὁ $\alpha + (-\beta) = \alpha - \beta$.

Ὡστε ἡ διαφορά τοῦ β ἀπὸ τὸν α εἶναι $\alpha - \beta$. Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι :

Ἡ διαφορά α μείον β εὐρίσκεται, ἂν εἰς τὸν α προσθέσωμεν τὸν ἀντίθετον τοῦ β.

Ἡ πράξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὐρίσκομεν τὴν διαφοράν σχετικοῦ ἀριθμοῦ β ἀπὸ ἄλλον α, καλεῖται **ἀφαίρεσις**. ὁ α καλεῖται **μειντέος**, ὁ β **ἀφαιρετέος**, τὸ δὲ σύμβολον τῆς ἀφαίρεσεως εἶναι τὸ $-$ (πλήν), τιθέμενον μεταξὺ τοῦ α καὶ β, ἥτοι γράφομεν $\alpha - \beta$.

Παραδείγματα : $(+8) - (+5) = (+8) + (-5) = (+3) = 3$,
 $(-5) - (-6) = (-5) + (+6) = 1$, $(-3) - 0 = (-3) + 0 = (-3) = -3$.
 $(-\frac{2}{3}) - (+\frac{1}{6}) = (-\frac{2}{3}) + (-\frac{1}{6}) = (-\frac{4}{6}) + (-\frac{1}{6}) = (-\frac{5}{6}) = -\frac{5}{6}$
 $0 - (-7) = 0 + (+7) = (+7) = +7 = 7$, $0 - (+5) = 0 + (-5) = (-5) = -5$.

§ 15. *Παρατήρησις.* Ἡ διαφορά ἀριθμοῦ τινος π.χ. α ἀπὸ τὸ 0 ἰσοῦται μὲ $0 - \alpha = -\alpha$, ἥτοι μὲ τὸν ἀντίθετον τοῦ α. Ἄρα :

Ἐνῶ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ἡ ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ τινος διὰ φόρου τοῦ 0. π.χ. τοῦ 3 ἀπὸ τὸ 0, εἶναι ἀδύνατος, μὲ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἡ ἀφαίρεσις αὕτη καὶ πᾶσα ὁμοία εἶναι δυνατὴ.

Π.χ. $0 - (+3) = 0 + (-3) = -3$, $0 - (+1) = 0 + (-1) = -1$,
 $0 - 4 = -4$, $0 - (+3,25) = 0 + (-3,25) = -3,25$.

§ 16. Αἱ ιδιότητες τῆς ἀφαίρεσεως ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς ἀληθεύουν καὶ διὰ τὴν ἀφαίρεσιν σχετικῶν ἀριθμῶν, ἀποδεικνύονται δὲ εὐκόλως.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὅμας πρώτη. 28. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ διαφοραὶ :

α') $8 - (-4)$ β') $-18 - (+19)$ γ') $-14 - (-7)$ δ') $0,9 - (-9,13)$

$$\epsilon') 2,25 - (-1,65) \quad \sigma\tau') 2 \frac{5}{6} - \left(-3 \frac{1}{3}\right) \quad \zeta') 9 \frac{1}{7} - \left(-7 \frac{1}{3}\right)$$

η') Δείξτε, ότι είναι $\alpha - \beta = (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$.

Ό μ α ς δ ε υ τ έ ρ α. 29. Εύρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

$$\alpha') 120 + 19 - (-18) \quad \beta') -17 - (-4) + (+8) \quad \gamma') -5 \frac{1}{2} + \left(-6 \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{5}\right)$$

δ') Δείξτε, ότι είναι $\alpha - \beta = (\alpha - \gamma) - (\beta - \gamma)$.

30. Εύρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

$$\alpha') 2 - 7 \quad \beta') 8 - 10 \quad \gamma') 1,5 - 2,2 \quad \delta') 15 - 230 \quad \epsilon') 1,25 - 9,65$$

στ') Δείξτε, ότι είναι $\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma$.

Ό μ α ς τ ρ ί τ η. 31. Αύξάνει τις τὸ ἐνεργητικὸν του καὶ ἐλαττώνει τὸ παθητικὸν του κατὰ 1 564,20 δρχ. Τίνα μεταβολὴν παθαίνει ἡ περιουσία του ;

32. Ἐλαττώνει τις τὸ ἐνεργητικὸν του κατὰ 15 484,3 δρχ. καὶ αὐξάνει τὸ παθητικὸν του κατὰ 162 384,70 δρχ. Ποίαν μεταβολὴν παθαίνει ἡ περιουσία του ;

33. Ἀναχωρεῖ τις ἐκ τινος ὠρισμένου σημείου Α. Βαδίζει ἐπ' εὐθείας ὁδοῦ 238 μέτρα πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ φθάνει εἰς τὸ σημεῖον Β. Πόσα μέτρα πρέπει νὰ βαδίσῃ ἐκ τοῦ Β πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον Γ, ἀπέχον ἀπὸ τοῦ Α 4 846 μέτρα :

34. Χάνει τις 15 016,3 δρχ. Πόσα πρέπει νὰ κερδίσῃ διὰ νὰ ἔχῃ 8 958 ,65 δρχ. περισσοτέρας τῶν ὧν εἶχεν ἀρχικῶς ;

I. ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ

§ 17. Ἐστω τὸ $(+5) - (+3) - (-4)$. Διὰ νὰ εὐρωμεν αὐτὸ ἀρκεῖ ἀπὸ τὸ $(+5)$ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ $(+3)$, ὅτε εὐρίσκομεν $(+2)$. Ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο $(+2)$ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ (-4) καὶ εὐρίσκομεν $(+2) - (-4) = (+2) + (+4) = +6$.

Ἡ ἄνωτέρω ἔκφρασις καὶ ἄλλαι παρόμοιαι λέγονται **ἀλγεβρικά ἀθροίσματα**. Ἡτοι :

Ἀλγεβρικὸν ἀθροῖσμα λέγεται μία ἀκολουθία προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων, αἱ ὁποῖαι σημειώνονται ἐπὶ σχετικῶν ἀριθμῶν.

§ 18. Ἐστω τὸ ἀλγεβρικὸν ἀθροῖσμα $\alpha - (+\beta) + (-\gamma) - (-\delta)$
Θὰ δείξωμεν, ὅτι τοῦτο ἰσοῦται μὲ $\alpha + (-\beta) + (-\gamma) + (+\delta)$

Διότι

$$\begin{aligned} &\Delta\acute{\iota}\alpha\ \tau\acute{\eta}\nu\ \epsilon\ddot{\upsilon}\rho\epsilon\sigma\iota\nu\ \tau\omicron\upsilon\ \\ &\alpha - (+\beta) + (-\gamma) - (-\delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Delta\acute{\iota}\alpha\ \tau\acute{\eta}\nu\ \epsilon\ddot{\upsilon}\rho\epsilon\sigma\iota\nu\ \tau\omicron\upsilon\ \\ &\alpha + (-\beta) + (-\gamma) + (+\delta) \end{aligned}$$

1) 'Από τὸ α θὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ $(+β)$.

2) Εἰς τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον θὰ εὗρεθῇ, θὰ προσθέσωμεν τὸ $(-γ)$.

3) 'Απὸ τὸ νέον ἐξαγόμενον θὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ $(-δ)$

1) Εἰς τὸ α θὰ προσθέσωμεν τὸ $(-β)$ · ἀλλὰ τοῦτο εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ α τὸ $(+β)$ (κατὰ τὸν ὅρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως).

2) Εἰς τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον θὰ εὗρεθῇ θὰ προσθέσωμεν τὸ $(-γ)$.

3) Εἰς τὸ νέον ἐξαγόμενον θὰ προσθέσωμεν τὸ $(+δ)$ · ἀλλὰ τοῦτο εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τὸ $(-δ)$.

Ἐπομένως εἶναι: $α - (+β) + (-γ) - (-δ) = α + (-β) + (-γ) + (+δ)$.

Ἦτοι, ἐν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἄλλο ἴσον τοῦ ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν, καὶ ἀντιστρόφως. Π.χ.

$$α + (-β) + (+γ) + (-δ) = α - (+β) + (+γ) - (+δ).$$

Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι :

"Όταν εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἀριθμὸς τις ἔχη πρὸ αὐτοῦ τὸ $+$ τότε ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς προστίθεται, ἐνῶ ὅταν ἔχη πρὸ αὐτοῦ τὸ $-$ τότε ἡ ἀφαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ἢ προστίθεται ὁ ἀντίθετός του.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὀδηγούμενοι δεχόμεθα ὅτι, ἂν α εἶναι ἀριθμὸς τις (διάφορος τοῦ 0), τὸ $+α$ παριστάνει τὸν α, ἐνῶ τὸ $-α$ παριστάνει τὸν ἀντίθετον τοῦ α. Οὕτως ἔχομεν: $+(+5) = +5$.

$$- (+7) = -7, \quad + (-3) = -3, \quad - (-6) = 6.$$

Ἡ ἀνωτέρω συνθήκη δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

Δύο διαδοχικὰ σύμβολα εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἐκ τῶν $+$ καὶ $-$, δύναται νὰ ἀντικατασταθοῦν μὲ ἓν μόνον, τὸ $+$ μὲν, ἂν τὰ δύο διαδοχικὰ σύμβολα εἶναι τὰ αὐτά, μὲ τὸ $-$ δέ, ἂν τὰ διαδοχικὰ σύμβολα δὲν εἶναι τὰ αὐτά.

Ἦτοι: 1) Ἄν τὰ διαδοχικὰ σύμβολα (εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα) εἶναι μὲ τὴν σειρὰν $++$, θὰ ἀντικατασταθοῦν μὲ $+$.

2) Ἄν τὰ διαδοχικὰ σύμβολα (εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα) εἶναι μὲ τὴν σειρὰν $--$, θὰ ἀντικατασταθοῦν μὲ $+$.

3) Ἄν τὰ διαδοχικὰ σύμβολα (εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα) εἶναι μὲ τὴν σειρὰν $+-$, θὰ ἀντικατασταθοῦν μὲ $-$, καὶ

4) Ἐν τὰ διαδοχικὰ σύμβολα (εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα) εἶναι μὲ τὴν σειράν $- +$, θὰ ἀντικατασταθοῦν μὲ $-$.

Οὕτως ἔχομεν $(+3)-(-6)+(-8)-(+7)-(-1)=$

$$(+3)+(+6)+(-8)+(-7)+(+1)=3+6-8-7+1=10-15=-5$$

§ 19. Καλοῦμεν ὅρους ἀλγεβρικοῦ ἄθροίσματος τοὺς ἀριθμοὺς, οἱ ὅποιοι τὸ ἀποτελοῦν, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει τὸ πρόσθημόν του $+$ ἢ $-$.

Οὕτως εἰς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα $\alpha-\beta+\gamma-\delta-\epsilon$ οἱ ὅροι του εἶναι $\alpha, -\beta, \gamma, -\delta, -\epsilon$. Κατὰ ταῦτα.

Πᾶν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα εἶναι ἄθροισμα τῶν ὁρων του.

Π.χ. τὸ $(+5)-(-4)+\left(+\frac{2}{5}\right)-(-8)$ εἶναι ἄθροισμα τῶν $(+5), -(-4), \left(+\frac{2}{5}\right), -(-8)$, ἥτοι τῶν $+5, +4, +\frac{2}{5}, +8$, καὶ ἔχομεν $(+5)-(-4)+\left(+\frac{2}{5}\right)-(-8)=5+4+\frac{2}{5}+8=17+\frac{2}{5}=17\frac{2}{5}$.

Συμφώνως μὲ τὰς ιδιότητες διὰ τοὺς προσθετέους μιᾶς προσθέσεως σχετικῶν ἀριθμῶν, ἔχομεν ὅτι :

Εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ὁρων του. Π.χ. εἶναι $\alpha-\beta+\gamma-\delta+\epsilon-\eta=\epsilon-\beta+\gamma-\eta+\alpha-\delta$.

Εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν μερικοὺς ὅρους του μὲ τὸ ἄθροισμά των, καὶ ἀντιστρόφως, δυνάμεθα εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἓνα ὅρον μὲ τὸ ἄθροισμα ἄλλων, τῶν ὁποίων αὐτὸς εἶναι ἄθροισμα.

Ἦτοι :

Ἰσχύει καὶ δι' ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ὁ νόμος τῆς ἀλλαγῆς τῆς θέσεως τῶν προσθετέων καὶ τῆς ἀντικαταστάσεως προσθετέων διὰ τοῦ ἄθροίσματός των.

$$\begin{aligned} \text{Π.χ. } -(-5)+(-7)-(+4) &= 5-7-4=(5-7)-4=-2-4=-6, \\ 10-(+7)+(-3) &= (7+3)-(+7)+(-3)=7+3-7-3=10-10=0. \end{aligned}$$

Ἀφοῦ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἄλλο ἴσον του ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀντιστρόφως, ἔπεται ὅτι :

Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα εἰς σχετικὸν ἀριθμὸν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν σχετικὸν ἀριθμὸν τοὺς ὅρους τοῦ ἄθροίσματος, ἕκαστον ὅπως εἶναι εἰς τὸ ἄθροισμα

$$\Pi. \chi. \alpha + (\beta - \gamma + \delta - \varepsilon) = \alpha + \beta - \gamma + \delta - \varepsilon.$$

Διὰ νὰ προσθέσωμεν δοθέντα ἀλγεβρικά ἀθροίσματα, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν ἓν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα μὲ ὅρους τοὺς τῶν δοθέντων ἀθροισμάτων καὶ ἕκαστον ὅπως εἶναι εἰς τὸ δοθὲν ἄθροισμα, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει.

$$\Pi. \chi. (\alpha + \beta - \gamma + \delta) + (-\varepsilon + \zeta - \eta) = \alpha + \beta - \gamma + \delta - \varepsilon + \zeta - \eta.$$

§ 20. Ὅταν εἰς δοθὲν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἀλλάξωμεν τὰ πρόσημα τῶν ὅρων του, προκύπτει ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἀντίθετον τοῦ δοθέντος (ἦτοι τὸ ἐξαγόμενόν του θὰ εἶναι ἀριθμὸς ἀντίθετος τοῦ ἐξαγομένου ἀριθμοῦ ἐκ τοῦ δοθέντος ἀθροίσματος).

Διότι, διὰ νὰ εὗρωμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦ δοθέντος ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος, θὰ εὗρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν ὅρων του, ἔστω δὲ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τούτου Α. Ἐπειτα θὰ εὗρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρνητικῶν ὅρων του, καὶ ἔστω ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τούτου Β. Ἄν μὲν εἶναι Α μεγαλύτερον τοῦ Β, τὸ δοθὲν ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ $+(A - B)$. Ἄν δὲ εἶναι τὸ Α μικρότερον τοῦ Β, τὸ δοθὲν ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ $-(B - A)$.

Ἄν εἶναι $A = B$, τότε τὸ δοθὲν ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ 0.

Ὅταν ἀλλάξωμεν τὸ σῆμα ἐκάστου ὅρου τοῦ δοθέντος ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος, οἱ θετικοὶ ὅροι θὰ γίνουν ἀρνητικοὶ καὶ οἱ ἀρνητικοὶ θὰ γίνουν θετικοί. Εἰς τὸ νέον αὐτὸ ἄθροισμα, τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν ὅρων του θὰ ἔχη ἀπόλυτον τιμὴν Β, τὸ δὲ τῶν ἀρνητικῶν ὅρων αὐτοῦ θὰ ἔχη ἀπόλυτον τιμὴν Α.

Ἄν λοιπὸν εἶναι ὁ Α μεγαλύτερος τοῦ Β, τὸ ἐξαγόμενον (τοῦ νέου ἀθροίσματος) θὰ ἰσοῦται μὲ $-(A - B)$, ἂν δὲ τὸ Α εἶναι μικρότερον τοῦ Β, τὸ ἐν λόγῳ ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ $+(B - A)$, ἂν δὲ εἶναι $A = B$, τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ 0.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι, καὶ κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις τὸ ἐξαγόμενον τοῦ δι' ἀλλαγῆς τοῦ προσήμου τῶν ὅρων προκύπτοντος ἀθροίσματος εἶναι ἀντίθετον τοῦ ἐξαγομένου τοῦ δοθέντος ἀθροίσματος, ὅταν δὲ $A = B$, ἔχομεν ἐξαγόμενον 0, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίθετον τὸ 0.

§ 21. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἀπὸ σχετικὸν ἀριθμὸν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τοὺς

ὅρους τοῦ ἄθροίσματος καὶ καθένα μὲ ἡλλαγμένον τὸ πρόσημον.

Π.χ. ἔχομεν $-\alpha-(\beta-\gamma+\delta)=-\alpha-\beta+\gamma-\delta$.

Διότι (κατὰ τὸν ὀρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως) ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ $-\alpha$ τὸ ἀντίθετον τοῦ $\beta-\gamma+\delta$, τὸ ὁποῖον εἶναι, ὡς ἀνωτέρω εἶδομεν, τὸ $-\beta+\gamma-\delta$.

§ 22. Ἐνίστε παραλείπομεν παρένθεσιν, ἐντὸς τῆς ὁποίας ὑπάρχει ἄθροισμα ἀριθμῶν, καὶ ἂν μὲν πρὸ αὐτῆς ὑπάρχη τὸ $+$, γράφομεν τοὺς ὅρους τοῦ ἄθροίσματος ἕκαστον μὲ τὸ πρὸ αὐτοῦ σῆμα, ἂν δὲ πρὸ αὐτῆς ὑπάρχη τὸ $-$, τότε γράφομεν τοὺς ὅρους τοῦ ἄθροίσματος, ἀλλ' ἕκαστον μὲ ἀντίθετον τοῦ πρὸ αὐτοῦ προσήμου. Π.χ. ἔχομεν :

$$\begin{aligned} + (3-5+6-7) &= 3-5+6-7, & (-\alpha-\beta+\gamma-\delta) &= -\alpha-\beta+\gamma-\delta, \\ -(3-5+6-7) &= -3+5-6+7, & -(-\alpha-\beta+\gamma-\delta) &= \alpha+\beta-\gamma+\delta. \end{aligned}$$

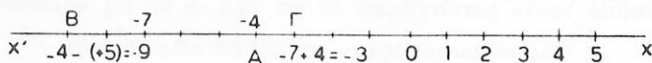
Ἀντιστόφως. Ἐνίστε εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα γράφομεν τοὺς ὅρους τοῦ ἐντὸς παρενθέσεως (ἢ ἀγκυλῶν []), καὶ ἂν μὲν πρὸ αὐτῆς θέσωμεν τὸ $+$, ἕκαστος ὅρος ἐντὸς αὐτῆς θὰ ἔχη τὸ πρόσημον, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ εἰς τὸ δοθὲν ἄθροισμα, ἂν δὲ θέσωμεν πρὸ αὐτῆς τὸ $-$, ἕκαστος τῶν ἐντὸς αὐτῆς ὁρῶν θὰ ἔχη τὸ ἀντίθετον ἐκείνου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ δοθὲν ἄθροισμα.

$$\begin{aligned} \text{Π.χ. ἔχομεν } -3+5-7-8+15-6 &= -3+5-7+(-8+15-6) \\ -3+5-7-8+15-6 &= -3+5-7-(8-15+6) \\ \alpha+\beta-\gamma+\delta-\epsilon &= \alpha+\beta+(-\gamma+\delta-\epsilon). \\ \alpha+\beta-\gamma+\delta-\epsilon &= \alpha+\beta-(\gamma-\delta+\epsilon). \end{aligned}$$

II. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ Ἡ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

§ 23. Δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν γεωμετρικῶς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς :
Ἐστω, ὅτι ἔχομεν τὴν διαφορὰν $-4-(+5)=-4-5=-9$.
Εὐρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν -4 , ἔστω τὸ Α, ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν καὶ προχωροῦμεν ἐπ' αὐτῆς ἀριστερὰ αὐτοῦ κατὰ 5 μονάδας, ὅτε εὐρίσκομεν, ἔστω τὸ σημεῖον Β,

τὸ ὅποῖον παριστάνει τὴν διαφορὰν $-4 - (+5) = -9$ (σχ. 5). Διὰ νὰ παραστήσωμεν τὴν διαφορὰν π.χ. $-7 - (-4) = -7 + 4 = -3$, προχωροῦμεν ἐκ τοῦ σημείου, ἔστω Δ, ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν, τὸ ὅποῖον παριστάνει τὸν -7 κατὰ τέσσαρας μονάδας πρὸς τὰ δεξιά αὐτοῦ ἐπὶ τῆς εὐθείας καὶ εὐρίσκομεν σημεῖον, ἔστω Γ, παριστάνον τὴν διαφορὰν -3 .



Σχ. 5

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα διὰ νὰ παραστήσωμεν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις

35. Εὑρετε τὰ κάτωθι ἐξαγόμενα καὶ παραστήσατε αὐτὰ γεωμετρικῶς.

$$\alpha') 2 - 3 + 5 - 7 - 6 + 7 - 11$$

$$\beta') -3 - 2\frac{1}{2} + 4 - 8 - 7 - \frac{4}{5}$$

$$\gamma') (-4 + 5 - 8) + (3 - 2 - 7 + 4) \quad \delta') \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 4\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 5 - 8\right)$$

$$\varepsilon') \left(3 - 5 - 6 - 7\frac{1}{2} - 3\right) - \left(2 - 6 + 4 - \frac{1}{2}\right) \quad \sigma\tau') -\left(3\frac{1}{2} - 4 - 6\right) + 7 - \left(3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - 3\right).$$

36. Εἰς τὸ $3 - 5 - 4 + 7 - 8 - 1 - 15$ θέσατε μόνον τοὺς ὅρους τρίτον, πέμπτον καὶ ἕκτον ἐντὸς παρενθέσεως καταλλήλως, ὥστε πρὸ αὐτῆς νὰ τεθῇ τὸ $+$ καὶ ἔπειτα πρὸ τῆς ἄλλης παρενθέσεως τὸ $-$.

37. Εἰς τὸ ἄθροισμα $-6\frac{1}{2} + 7 - 12 - 7 + 5 - \frac{3}{4}$ θέσατε μόνον τοὺς ὁρους πρῶτον, τρίτον καὶ τελευταῖον καταλλήλως ἐντὸς παρενθέσεως, ὥστε πρὸ αὐτῆς νὰ τεθῇ τὸ $-$, καὶ ἔπειτα πρὸ τῆς ἄλλης παρενθέσεως νὰ τεθῇ τὸ $+$.

3. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

§ 24. Πολλαπλασιασμὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ α ἐπὶ ἄλλον β λέγεται ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν σχηματίζεται ἐκ τοῦ α τρίτος ἀριθμὸς, ὅπως ὁ β δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐκ τῆς θετικῆς μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς.

Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται παράγοντες (ὁ α πολλαπλα-

σιαστέος καὶ ὁ β **πολλαπλασιαστής**). Ὁ προκύπτων ἀριθμὸς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ λέγεται **γινόμενον**, τὸ δὲ σύμβολον τῆς πράξεως εἶναι τὸ $\cdot$ ἢ τὸ $\times$ (ἐπί), τιθέμενον μεταξύ τῶν παραγόντων. Οὕτως ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν α καὶ β συμβολίζεται μὲ $\alpha \times \beta$ ἢ $\alpha \cdot \beta$, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν μὲ $\alpha\beta$. Ὄταν ὁ εἰς τῶν παραγόντων εἶναι 0, τὸ γινόμενον ὀρίζεται ἴσον μὲ 0. Ἦτοι π.χ. $\alpha \cdot 0 = 0$, $0 \cdot \alpha = 0$, $(-3) \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 0 = 0$.

α') Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον θετικόν.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, τὸ γινόμενον, π.χ. τοῦ $(+4)$ ἐπὶ ἄλλον π.χ. τὸν $(+3)$, ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τρίτου ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος σχηματίζεται ἐκ τοῦ πρώτου $(+4)$, ὅπως ὁ δεύτερος $(+3)$ δύναται νὰ σχηματισθῇ ἀπὸ τὴν $+1$. Ἐπειδὴ ὁ $(+3) = 1+1+1$, θὰ ἔχωμεν $(+4) \cdot (+3) = (+4) + (+4) + (+4) = +12$.

Ὁμοίως $(-8) \cdot (+3) = (-8) + (-8) + (-8) = -24$.

Π.χ. τὸ $(-9) \cdot \frac{3}{4}$ σημαίνει νὰ εὕρωμεν τὸ τέταρτον τοῦ -9 καὶ τοῦτο νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3. Ἦτοι ἔχομεν: $(-9) \cdot \frac{3}{4} = -\frac{9}{4} \cdot 3 = \left(-\frac{27}{4}\right) = -6\frac{3}{4}$. Ἐπομένως:

Τὸ γινόμενον σχετικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον θετικόν ἔχει ἀπόλυτον μὲν τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων, πρόσημον δὲ τὸ τοῦ πολλαπλασιαστέου.

β) Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον ἀρνητικόν.

Ἐστω, ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον $(+8) \cdot (-3)$.

Τὸ (-3) δύναται νὰ γίνῃ ἐκ τῆς $+1$, ἐὰν λάβωμεν τὴν ἀντίθετον τῆς -1 καὶ ταύτην ἐπαναλάβωμεν ὡς προσθετέον τρίς. Ἀρα, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(+8) \cdot (-3)$, θὰ λάβωμεν τὸν ἀντίθετον τοῦ $(+8)$, δηλαδὴ τὸν (-8) , καὶ τοῦτον θὰ ἐπαναλάβωμεν τρίς ὡς προσθετέον. Ἦτοι θὰ εἶναι:

$$(+8) \cdot (-3) = (-8) \cdot (+3) = (-8) + (-8) + (-8) = -24.$$

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον λέγομεν, ὅτι $(-8) \cdot (-3) = (+8) \cdot 3 = 24$. Ἀρα:

Τὸ γινόμενον σχετικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον ἀρνητικόν ἔχει ἀπόλυτον μὲν τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων, πρόσημον δὲ τὸ ἀντίθετον τοῦ πολλαπλασιαστέου.

$$\text{Π.χ. είναι } (+9) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{45}{6}, \quad (-5) \cdot (-6) = 30.$$

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα :

§ 25. Διὰ τὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο σχετικούς ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν τὰς ἀπολύτους τιμὰς των καὶ τὸ γινόμενον λαμβάνομεν μὲ τὸ + μὲν ἂν οἱ παράγοντες εἶναι ὁμόσημοι, μὲ τὸ - δὲ ἂν εἶναι ἐτερόσημοι.

§ 26. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται, ὅτι $\alpha\beta = \beta\alpha$. Διότι κατὰ τὴν εὗρεσιν τοῦ γινομένου τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο παραγόντων α , β εἶναι ἀδιάφορον ποίος ἐκ τῶν παραγόντων λαμβάνεται κατὰ σειρὰν πρῶτος ἢ δευτερος. Ἐπομένως, ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως τῶν παραγόντων (δι' ἀριθμούς τῆς Ἀριθμητικῆς), ἰσχύει καὶ διὰ δύο σχετικούς παράγοντας.

§ 27 Γινόμενον πολλῶν παραγόντων ὀρίζομεν καθὼς καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν.

$$\text{Π. χ. } 3 \cdot (-5) \cdot (-4) = [3 \cdot (-5)] \cdot (-4) = (-15) \cdot (-4) = 60.$$

$$\text{Ἐν γένει ἔχομεν : } \alpha\beta\gamma = (\alpha\beta) \cdot \gamma$$

$$\alpha\beta\gamma\delta = (\alpha\beta) \cdot \gamma \cdot \delta = (\alpha\beta\gamma) \cdot \delta = (\alpha\beta\gamma\delta)$$

$$\text{Ἦτοι : } \alpha') (-3) \cdot (+5) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot (-5) = (-15) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot (-5) = (+30) \cdot (-1) \cdot (-5) = (-30) \cdot (-5) = +150.$$

$$\beta') (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot (+5) = (+6) \cdot (-1) \cdot (+5) = (-6) \cdot (+5) = -30$$

Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι :

Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἔχει ἀπόλυτον μὲν τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων, πρόσημον δὲ τὸ + μὲν ἂν τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς ἢ 0, τὸ - δὲ ἂν τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἀριθμὸς περιττός.

Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ γινόμενον πολλῶν σχετικῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλάχθῃ ἡ θέσις τῶν παραγόντων.

Ἄν εἰς τῶν παραγόντων γινομένου πολλῶν παραγόντων εἶναι 0 τὸ γινόμενον εἶναι 0.

$$\text{Π. χ. } (+5) \cdot (-3) \cdot 0 \cdot (+6) = (-5) \cdot 0 \cdot (+6) = 0 \cdot (+6) = 0.$$

§ 28. Παρατηρούμεν ὅτι, πολλαπλασιασμός σχετικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ + 1 μὲν σημαίνει αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν, ἐπὶ - 1 δὲ τὸν ἀντίθετόν του. Οὕτως ἔχομεν $\alpha \cdot (+1) = \alpha$, $\alpha \cdot (-1) = -\alpha \cdot (+1) = -\alpha$,

$$1 \cdot (+\alpha) = (+\alpha) \cdot (+1) = +\alpha,$$

$$(-1) \cdot (+\alpha) = (+\alpha) \cdot (-1) = (-\alpha) \cdot (+1) = -\alpha,$$

$$(-1) \cdot (-\alpha) = (-\alpha) \cdot (-1) = (+\alpha) \cdot (+1) = +\alpha,$$

$$\text{Π.χ. εἶναι: } (-4) \cdot 1 = 1 \cdot (-4) = (-1) \cdot 4 = -4, (+5) \cdot 1 = 1 \cdot (+5) = 5$$

$$(-5) \cdot (-1) = (-1) \cdot (-5) = +5, \frac{7}{5} \cdot (-1) = (-1) \cdot \left(+\frac{7}{5}\right) = -\frac{7}{5}$$

Αἱ ιδιότητες τοῦ γινομένου ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς ἀληθεύουν καὶ ὅταν οἱ παράγοντες εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί, ἢ ἀπόδειξις δὲ εἶναι εὐκόλος.

Οὕτω π.χ., ἂν $\alpha = \beta$, θὰ εἶναι καὶ $\rho\alpha = \rho\beta$, ὅπου α , β , ρ εἶναι οἰοδήποτε ἀριθμοί.

Ἀσκήσεις

Ὅμοιες πρώτη. 38. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα :

$$\alpha) (-5) \cdot (+8)$$

$$\beta) (+18) \cdot (-4)$$

$$\gamma) (-7) \cdot (+15)$$

$$\delta) (-7) \cdot (-7)$$

$$\epsilon) (8,4) \cdot (-6,6)$$

$$\sigma\tau) (-9,8) \cdot (8,5) \cdot (4,3) \cdot (2,3)$$

ζ) Δείξατε ὅτι $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = \gamma \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \delta$, ὅταν α , β , γ , δ εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί.

Ὅμοιες δευτέρη 39. Ὅμοιως εὑρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

$$\alpha) (-3,9) \cdot (-7,6)$$

$$\beta') (+9,46) \cdot (-3,5)$$

$$\gamma') (-9) \cdot (-7) \cdot (-3)$$

$$\delta') \left(+4\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-3\frac{1}{6}\right) \cdot (-6,8)$$

40. Ὅμοιως τὰ :

$$\alpha') (-16) \cdot 14 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-3\frac{3}{8}\right)$$

$$\beta') (-3,1) \cdot (+6) \cdot (+8) \cdot (-7)$$

$$\gamma') (+7) \cdot (-4) \cdot (+8) \cdot (+5)$$

$$\delta') 0,6 \cdot \left[(+9,74) - 0,9 \cdot (+6,5) \right] \cdot 0,3$$

41. Εὑρετε τὰ ἐξαγόμενα :

$$\alpha') (-3) \cdot (-4,1) \cdot (-2) + 8 \cdot (-2,4) \cdot (-5)$$

$$\beta') (-5,1) \cdot (-3,2) \cdot (-1) - 12 \cdot (-3,2) \cdot (-4) \cdot (-7) - 20$$

$$42. \text{Εὑρετε τὰ: } \alpha') \frac{5}{8} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (2+5-8)$$

$$\beta') (-32) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0,4\right) - \frac{4}{5} \left[0,01 + 0,01 \cdot (-5,4) \right]$$

43. Εύρετε τὸ $0,53 \cdot (-12) \cdot (-3-4) + 19 \cdot (-0,45)$.

44. Εύρετε τὰ :

$$\alpha') (-5) \cdot (-8) \qquad \beta') \left(-\frac{53}{4}\right) \cdot 1 \qquad \gamma') \left(-1\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$\delta') (-3) \cdot (-5) \cdot 4 \cdot 0 \qquad \epsilon') (-3) \cdot 6 \cdot 0 \cdot (-7)$$

στ') Δείξατε, ὅτι εἶναι $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \epsilon = (\alpha \cdot \epsilon) \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta$, ὅπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί.

ζ') Δείξατε, ὅτι $(\alpha\beta\gamma) \cdot (\delta\epsilon\zeta) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \epsilon \cdot \zeta$, ὅπου οἱ παράγοντες α, β, γ καὶ οἱ δ, ϵ, ζ , εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί.

4. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

§ 29. Ὡς γνωστόν, ἀντίστροφος ἀριθμὸς π.χ. τοῦ 5 (τῆς Ἀριθμητικῆς) καλεῖται τὸ $\frac{1}{5}$, ὁ ὁποῖος, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν 5, δίδει γινόμενον $\frac{1}{5} \times 5 = 1$. Ἐστω σχετικὸς ἀριθμὸς α , διάφορος τοῦ μηδενός. Τὴν ἔκφρασιν **διάφορος** θὰ παριστάνωμεν μὲ τὸ συμβολὸν $\neq$, θὰ γράφωμεν δὲ $\alpha \neq 0$ καὶ θὰ ἀπαγγέλλωμεν : α διάφορον τοῦ μηδενός. Καλοῦμεν **ἀντίστροφον** τοῦ α ($\neq 0$) τὸν ἀριθμὸν, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν ἀντίστροφον τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ α καὶ πρόσθετον τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τοῦ α , ἥτοι τὸν $\frac{1}{\alpha}$. Π.χ. ἀντίστροφος τοῦ $-\frac{1}{8}$ εἶναι ὁ -8 , τοῦ -6 ὁ $-\frac{1}{6}$, τοῦ $-3,4$ ὁ $-\frac{1}{3,4} = -\frac{10}{34} = -\frac{5}{17}$, τοῦ $+1$ ὁ $+1$ καὶ τοῦ -1 ὁ -1 .

Τὸ γινόμενον σχετικοῦ ἀριθμοῦ ($\neq 0$) ἐπὶ τὸν ἀντίστροφόν του ἰσοῦται μὲ 1. Π.χ. τὸ γινόμενον $8 \cdot \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$, τοῦ $-\frac{1}{8} \cdot (-8) = +\frac{8}{8} = +1$ κ.τ.λ.

Δοθέντων δύο σχετικῶν ἀριθμῶν α καὶ β (ἐνῶ εἶναι $\beta \neq 0$) ὑπάρχει τρίτος σχετικὸς ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν β , δίδει γινόμενον τὸν α .

Πράγματι, ἂν παραστήσωμεν μὲ γ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν, πρέπει νὰ ἔχωμεν $\gamma \cdot \beta = \alpha$. Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἴσους αὐτοὺς ἀριθμοὺς ἐπὶ $\frac{1}{\beta}$, ὅτε λαμβάνομεν :

$$\gamma \cdot \beta \cdot \frac{1}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \quad \text{ἢ} \quad \gamma \cdot \left(\beta \cdot \frac{1}{\beta}\right) = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}, \quad \text{ἢ} \quad \gamma = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Καὶ τῶ ὄντι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν γ ἢ τὸν ἴσον τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐπὶ β , ἔχομεν $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta = \alpha \cdot \frac{\beta}{\beta} = \alpha$.

§ 30. Διαίρεσις σχετικοῦ ἀριθμοῦ α δι' ἄλλου β ($\neq 0$) λέγεται ἡ πρᾶξις, μετὰ τὴν ὁποίαν εὐρίσκεται τρίτος σχετικὸς ἀριθμὸς γ , ὁ ὁποῖος, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν β , δίδει γινόμενον τὸν α .

Ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὁ α λέγεται διαιρετέος, ὁ β διαιρέτης, καὶ ὁ ζητούμενος γ πηλίκον, τὸ δὲ σύμβολον τῆς διαιρέσεως εἶναι τὸ $(:)$ (διὰ ἢ πρὸς) καὶ γράφεται μετὰ τῶν α καὶ β . Τὸ πηλίκον τοῦ $\alpha : \beta$ συμβολίζομεν καὶ μετὰ $\frac{\alpha}{\beta}$, λέγεται δὲ ἡ παράστασις αὕτῃ κλασματικὴ ἢ ἀλγεβρικὸν κλάσμα μετὰ ἀριθμητὴν τὸν α καὶ παρονομαστὴν τὸν β , καὶ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \frac{1}{\beta}$.

Ἐστω, ὅτι ζητεῖται τὸ πηλίκον π.χ. $(+8) : (+2)$. Παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ ἔχη πρόσημον $+$. Διότι τὸ γινόμενον τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν διαιρέτην $(+2)$ πρέπει νὰ εἶναι θετικόν, ἀφοῦ ὁ διαιρετέος $(+8)$ εἶναι θετικὸς. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πηλίκου πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ 2 πρέπει νὰ διδῇ γινόμενον 8, θὰ εἶναι ἴση μετὰ $8 : 2 = 4$.

Ἦτοι ἔχομεν $(+8) : (+2) = (+4)$.

Ἐστω, ὅτι ζητεῖται $(+8) : (-2)$. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ ἔχη τὸ πρόσημον $-$. Διότι τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν διαιρέτην (-2) πρέπει νὰ εἶναι θετικόν, ἔπειδὴ ὁ διαιρετέος $(+8)$ εἶναι θετικὸς.

Ἄρα ἔχομεν $(+8) : (-2) = (-4)$. Ἐπίσης εὐρίσκομεν, σκεπτόμενοι ὁμοίως, ὅτι εἶναι :

$$(-8) : (-2) = +4, \quad (-5) : 2 = -\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2}. \quad \text{Ἄρα :}$$

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο δοθέντων σχετικῶν ἀριθμῶν ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν τὸ πηλίκον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου, καὶ πρόσημον θετικὸν μὲν ἂν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι ὁμόσημοι, ἀρνητικὸν δὲ ἂν εἶναι ἑτερόσημοι.

$$\begin{aligned} \text{Παραδείγματα : } & (-5) : (+6) = -\frac{5}{6}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right) : \left(+\frac{5}{6}\right) = \\ & -\frac{1}{2} : \frac{5}{6} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{6}{5} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}, \quad (-15) : (-5) = +\frac{15}{5} = +3 \end{aligned}$$

Ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 0 εἶναι ἀδύνατος. Διότι ἂν π.χ. ἔχωμεν τὴν διαίρεσιν $(-6) : 0$, ζητεῖται ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0, δίδει γινόμενον τὸ -6 . Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον, διότι πᾶς ἀριθμός πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0 δίδει γινόμενον 0.

Ἄλλ' οὐδὲ νὰ δημιουργήσωμεν νέον εἶδος ἀριθμῶν εἶναι δυνατόν, ὥστε νὰ καταστήσωμεν τὴν διαίρεσιν διὰ τοῦ 0 δυνατὴν. Διότι, ἂν π.χ. ὑπῆρχε νέος τοιοῦτος ἀριθμός, ἔστω ὁ α , ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι πηλίκον τοῦ $-6 : 0$, θὰ ἔχωμεν $-6 = 0 \cdot \alpha$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἴσους τούτους ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἔστω τὸν 5, προκύπτουν ἴσοι. Ἦτοι $-6 \cdot 5 = 0 \cdot \alpha \cdot 5$. Ἀλλάσσοντες τὴν θέσιν τῶν δύο τελευταίων παραγόντων, εὐρίσκομεν $-6 \cdot 5 = 0 \cdot 5 \cdot \alpha = 0 \cdot \alpha$ (ἐπεὶ δὲ εἶναι $0 \cdot 5 = 0$). Ἀλλὰ τὸ μὲν $-6 \cdot 5 = -30$, τὸ δὲ $0 \cdot \alpha = -6$ (ἐξ ὑποθέσεως), ὅρα θὰ ἔχωμεν $-30 = -6$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον.

Ἡ διαίρεσις τοῦ 0 διὰ τινος ἀριθμοῦ ($\neq 0$) δίδει πηλίκον 0. Οὕτως π.χ. $0 : (-7) = 0$. Διότι εἶναι $0 \cdot (-7) = 0$.

Αἱ ιδιότητες τῆς διαιρέσεως ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς ἀληθεύουν καὶ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι σχετικοί, ἀποδεικνύονται δὲ εὐκόλως.

Ἀσκήσεις

Ὅμας πρώτη. 45. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλικά :

$$\alpha') (+2) : (-7) \quad \beta') (-45) : (+9) \quad \gamma') (-49) : 49 \quad \delta') (-1944) : (-36)$$

$$\epsilon') (+0,95) : (+0,5) \quad \sigma\tau') (-349) : 1,8 \quad \zeta') (-1425) : (-32,1)$$

η') Νὰ δεიχθῇ ὅτι $\alpha : \beta = (\alpha \cdot \gamma) : (\beta \cdot \gamma)$, ἂν τὰ α, β, γ εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί.

Ὅμας δευτέρα. 46. Εὑρετε τὰ ἐξαγόμενα :

$$\alpha') 3 \frac{2}{3} : \left(-1 \frac{4}{9}\right) : 8 \quad \beta') (-9,6) : 0,7 : 6 \frac{1}{2}$$

$$\gamma') (-1) : 4 : (-3) : \left(-\frac{1}{3}\right) : (+2)$$

47. Ὁμοίως τὰ :

$$\alpha') (-34) : (-9-8), \quad \beta') (-18) : 9-(-4) : 2, \quad \gamma') (-25) : (-5) : (-5) : (-5)$$

48. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀγνωστος x . ὥστε νὰ εἶναι :

$$\alpha') (-40) \cdot x = 160 \quad \beta') (-6) \cdot x = 24 \quad \gamma') 12 \cdot x = 48$$

$$\delta') (-3) \cdot x = (-15) \quad \epsilon') (3,14) \cdot x = -18,84 \quad \sigma\tau') \left(-\frac{36}{7}\right) \cdot x = \frac{7}{12}$$

49. Νὰ δεიχθῇ ὅτι :

$$\alpha') \alpha : \beta = (\alpha \cdot \rho) : (\beta \cdot \rho), \text{ ἔνθα } \alpha, \beta, \rho, \text{ εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοὶ } (\rho \neq 0).$$

$$\beta') (\alpha\beta\gamma) : \alpha = \beta\gamma \quad \gamma') \alpha : (\beta \cdot \gamma) = (\alpha : \beta) : \gamma.$$

Δ' ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ *

§ 31. Τὰ κλάσματα με ὅρους σχετικούς ἀριθμούς, τὰ ὁποῖα καλοῦμεν **ἀλγεβρικά κλάσματα**, ἔχουν τὰς ιδιότητες τῶν κλασμάτων με ὅρους ἀριθμούς τῆς Ἀριθμητικῆς ἀποδεικνύονται δὲ αὐταὶ εὐκόλως καὶ διὰ τοῦτο ἀναγράφομεν κατωτέρω τὰς κυριωτέρας ἐξ αὐτῶν.

1η. Πᾶς σχετικὸς ἀριθμὸς α π.χ. δυνατόν νὰ θεωρηθῇ ὡς κλάσμα με παρονομαστήν 1, διότι $\frac{\alpha}{1} = \alpha$.

2α. Ἐὰν εἰς κλάσμα ὁ παρονομαστής του εἶναι ἴσος με τὸν ἀριθμητὴν του, τὸ κλάσμα ἰσοῦται με 1, ἥτοι ἔχομεν π.χ. $\frac{\alpha}{\alpha} = 1$.

3η. Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἢ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους κλάσματος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ($\neq 0$) χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος.

$$\text{Οὕτως ἔχομεν π.χ. } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \gamma}, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\left(\frac{\beta}{\beta}\right)}, \quad \gamma \neq 0.$$

4η. Δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὰ πρόσημα τῶν δύο ὄρων κλάσματος χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία του. Διότι ἀλλαγὴ τῶν σημάτων τῶν δύο ὄρων τοῦ κλάσματος εἶναι τὸ αὐτὸ με τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐκάστου ὄρου ἐπὶ (-1) .

Οὕτως ἔχομεν π.χ.

$$\frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}, \quad \frac{3}{-5} = \frac{-3}{5}, \quad \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}, \quad \frac{-\frac{4}{9}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{3}.$$

5η. Δυνάμεθα νὰ ἀπλοποιήσωμεν ἓν κλάσμα διὰ διαιρέσεως τῶν ὄρων του με τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ($\neq 0$), ἂν διαιροῦνται ἀκριβῶς.

$$\begin{aligned} \text{Οὕτως ἔχομεν π.χ. } -\frac{6}{4} &= -\frac{6:2}{4:2} = -\frac{3}{2}, \\ \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{\alpha \cdot \delta} &= \frac{\beta \cdot \gamma}{\delta}, \quad \frac{4 \cdot \alpha \cdot \beta}{\alpha \cdot \delta \cdot \gamma} = \frac{4 \cdot \beta}{\delta \cdot \gamma}. \end{aligned}$$

* Πρῶτος ὁ Ἑλλήν μαθηματικὸς Διόφαντος (τῆς Ἀλεξανδρείας) ἔδωκεν αὐτοτελῇ σημασίαν εἰς τὰ κλάσματα.

6η. Δοθέντων κλασμάτων (περισσοτέρων τοῦ ἑνός) με διαφόρους παρονομαστές, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἰσάριθμα αὐτῶν καὶ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς αὐτά, ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους ἐκάστου τῶν δοθέντων με τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων.

Π.χ. ἔχομεν γιὰ τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \beta_1 \cdot \beta_2}{\beta \cdot \beta_1 \cdot \beta_2}, \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_1 \cdot \beta \cdot \beta_2}{\beta_1 \cdot \beta \cdot \beta_2}, \quad \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_2 \cdot \beta \cdot \beta_1}{\beta_2 \cdot \beta \cdot \beta_1},$$

εἶναι δὲ τὰ εὐρεθέντα ὁμώνυμα.

Εἶναι φανερόν, ὅτι δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν δοθέντα ἑτερόνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, διὰ τῆς χρησιμοποίησεως τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου τῶν παρονομαστῶν τοῦ (ἂν εἶναι τοῦτο σκόπιμον).

7η. Τὸ γινόμενον δύο κλασμάτων εἶναι κλάσμα με ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴν τὸ τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων.

Π.χ. ἔχομεν $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$, $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \gamma = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{1} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta}$.

8η. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ἀντίστροφον κλάσμα τοῦ δοθέντος.

$$\begin{aligned} \text{Οὕτως ἔχομεν } \frac{\gamma}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} &= \gamma \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma \cdot \beta}{\alpha}, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) : \left(\frac{\alpha'}{\beta'}\right) = \left(\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\alpha'}{\beta'}}\right) = \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\alpha \cdot \beta'}{\beta \cdot \alpha'}, \end{aligned}$$

$$1 : \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{\alpha}{\beta} : \gamma = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\gamma} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\left(\frac{\gamma}{1}\right)} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta \cdot \gamma}.$$

Ἀσκήσεις

50. Εὑρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν

$$\frac{-25}{-15} \quad \frac{-3}{48} \quad \frac{-121}{-4.11} \quad \frac{5}{-8} \cdot \frac{4}{-9} \cdot \frac{1}{2} \quad \frac{3}{-2} \cdot \frac{-8}{5} \cdot \frac{2}{-11} \cdot \frac{11}{-120}$$

51. Τρέψατε εἰς ὁμώνυμα τὰ ἐπόμενα κλάσματα με τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῶν :

$$\begin{array}{ll}
 \alpha') \quad \frac{2}{-3}, \quad \frac{-5}{8}, \quad \frac{1}{-2}, & \delta') \quad \frac{-3}{8}, \quad \frac{4}{-25}, \quad \frac{2}{9}, \quad \frac{1}{3} \\
 \beta') \quad \frac{-3}{4}, \quad \frac{-4}{9}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{5} & \epsilon') \quad \frac{-5}{7}, \quad \frac{4}{21}, \quad \frac{-2}{3}, \quad \frac{-5}{8}, \quad \frac{1}{2} \\
 \gamma') \quad \frac{-11}{15}, \quad \frac{32}{-45}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{7}{5} & \sigma\tau') \quad \frac{-1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{-5}{6}, \quad \frac{-7}{8}, \quad \frac{1}{4}
 \end{array}$$

Ε'. ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΑΣ ΦΥΣΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

§ 32. Καθώς (εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν), τὸ γινόμενον παραγόντων ἴσων μὲ ἓνα ἀριθμὸν, π.χ. 3·3·3·3, καλοῦμεν **τετάρτην δύναμιν** τοῦ 3 καὶ παριστάνομεν αὐτὸ μὲ τὸ 3⁴, οὕτω καὶ τὸ γινόμενον ἴσων παραγόντων, π.χ. τὸ (-5)·(-5), καλεῖται **δευτέρα δύναμις** τοῦ (-5) καὶ παριστάνεται μὲ τὸ (-5)². Ὁμοίως τὸ (-3)·(-3) λέγεται **δευτέρα δύναμις** τοῦ (-3) καὶ παριστάνεται μὲ τὸ (-3)². Τὸ (+9)·(+9) παριστάνεται μὲ (+9)² καὶ λέγεται **τρίτη δύναμις** τοῦ (+9). Τὸ (-7)·(-7)·(-7) = (-7)³ καὶ λέγεται **τρίτη δύναμις** τοῦ (-7). Ἐν γένει :

Καλοῦμεν δύναμιν ἐνὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ, τὸ γινόμενον παραγόντων ἴσων μὲ αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν.

Ὁ μὲν ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν ἴσων παραγόντων τοῦ γινομένου καλεῖται **ἐκθέτης τῆς δυνάμεως**, ὁ δὲ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου ἔχομεν τὴν δύναμιν λέγεται **βάσις τῆς δυνάμεως**. Ἡ **δευτέρα δύναμις** ἐνὸς ἀριθμοῦ λέγεται καὶ **τετράγωνον** τοῦ ἀριθμοῦ, ἡ δὲ **τρίτη δύναμις** καὶ **κύβος** τοῦ ἀριθμοῦ. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν, ὅτι

$$(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49, \quad (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^4.$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}.$$

Ἐν γένει, τὸ $\alpha^{\mu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{\mu \text{ παράγοντες}}$, ὅπου τὸ α φανερώνει σχετικὸν

ἀριθμὸν, τὸ δὲ μ φυσικόν. Τὸ α^μ καλεῖται **μιοστή (μ^η) δύναμις** τοῦ α.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν :

$$(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1, \quad (-1)^{2n} = +1, \quad (-1)^{2n+1} = -1.$$

ὅπου τὸ ν παριστάνει ἀριθμὸν φυσικόν. Ἦτοι :

Πᾶσα δύναμις τῆς -1 με ἐκθέτην ἄρτιον ἀριθμόν, ἰσοῦται με 1 , με ἐκθέτην δὲ περιττὸν ἰσοῦται με -1 .

Ἐπομένως εἶναι $(-1)^n = \pm 1$ καὶ εἶναι $+1$ μὲν ἂν n ἄρτιος, -1 δὲ ἂν n περιττός.

Ἀσκήσεις

52. Εὑρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων :

α') $(-6)^3$ β') $(-9)^2$ γ') $(+8)^6$ δ') $(-3)^3$ ε') $(-7)^6$ στ') $(-1)^3$

53. Δείξατε διὰ παραδειγμάτων, ὅτι πᾶσα δύναμις ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην ἄρτιον καὶ φυσικόν, εἶναι ἀριθμὸς θετικός· περιττὸν δὲ ἐκθέτην ἔχουσα εἶναι ἀρνητικός.

2. ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ α^1 ΚΑΙ α^0 ΩΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

§ 33. Κατὰ τον ὅρισμόν τῆς δυνάμεως ἀριθμοῦ ἔχομεν ὅτι π.χ.

$$\alpha^5 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha, \quad \alpha^4 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha, \quad \alpha^3 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha, \quad \alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$$

Ἐκ τούτων διακρίνομεν ὅτι, ὅταν ὁ ἐκθέτης μιᾶς δυνάμεως τοῦ α ἐλαττωῖται κατὰ μονάδα, τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον ὀρίζει τὴν δύναμιν ταύτην διαιρεῖται δι' ἑνὸς τῶν ἴσων παραγόντων αὐτοῦ. Ἄν δεχθῶμεν ὅτι τοῦτο ἰσχύει καὶ δι' ἐκθέτας (ἀκεραίους) μικρότερους τοῦ 2, θὰ ἔχωμεν ὅτι $\alpha^{2-1} = (\alpha \cdot \alpha) : \alpha$.

Ἀλλὰ τὸ α^{2-1} ἰσοῦται με α^1 τὸ δὲ $(\alpha \cdot \alpha) : \alpha = \alpha$. Ἄρα εἶναι $\alpha^1 = \alpha$. Τοῦτο ὁδηγεῖ εἰς τὸν ἐξῆς ὅρισμόν τοῦ α^1 .

Ἡ πρώτη δύναμις ἑνὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ, ἰσοῦται με αὐτὸν τοῦτον τὸν ἀριθμόν.

Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τ' ἀνωτέρω, θὰ ἔχωμεν, ὅτι $\alpha^{1-1} = \alpha : \alpha = 1$ ἀλλὰ ὁ $\alpha^{1-1} = \alpha^0$. Ἄρα εἶναι $\alpha^0 = 1$, ὅταν εἶναι τὸ $\alpha \neq 0$.

Οὕτως ἔχομεν τὸν ἐξῆς ὅρισμόν τοῦ α^0 :

Τὸ α^0 , ὅπου τὸ α εἶναι ἀριθμὸς $\neq 0$, ἰσοῦται με τὴν μονάδα.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν :

$$(-3)^0 = 1, \quad 47^0 = 1, \quad (-10)^0 = 1, \quad \left(-\frac{3}{5}\right)^0 = 1$$

$$(-2)^1 = -2, \quad \left(-\frac{3}{5}\right)^1 = -\frac{3}{5}, \quad 4,3^1 = 4,3$$

3. ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

§ 34. Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι :

Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων ἐνὸς ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις αὐτοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων.

Ἡ ιδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ ἂν ἡ βᾶσις εἶναι σχετικὸς ἀριθμὸς, οἱ δὲ ἐκθέται φυσικοὶ ἀριθμοί. Πράγματι, ἐὰν ἔχωμεν τὸ γινόμενον π.χ. $\alpha^3 \cdot \alpha^2$ θὰ εἶναι $\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$, $\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$ καὶ ἐπομένως τὸ

$$\alpha^3 \cdot \alpha^2 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^5.$$

Ὅμοιως εὐρίσκομεν, ὅτι π.χ. εἶναι $\chi^4 \cdot \chi^2 = \chi^6$ καὶ ἐν γένει τὸ γινόμενον $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu$, ὅπου τὸ μ καὶ ν εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ τὸ δὲ α σχετικὸς τις ἀριθμὸς, ἰσοῦται μὲ τὸ $\alpha^{\mu+\nu}$.

Διότι ἔχομεν, ὅτι $\alpha^\mu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \alpha}_\mu \text{ παράγοντες}, \quad \alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \alpha}_\nu \text{ παράγοντες}$

ἐπομένως εἶναι $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \dots \alpha}_\mu \cdot \underbrace{\alpha \cdot \alpha \dots \alpha}_\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \alpha}_{(\mu+\nu) \text{ παράγοντες}} = \alpha^{\mu+\nu}$.

Ὅμοιως ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ γινόμενον $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu \cdot \alpha^\rho \dots \alpha^\lambda = \alpha^{\mu+\nu+\rho+\dots+\lambda}$, ὅπου τὸ α εἶναι σχετικὸς τις ἀριθμὸς, τὰ δὲ $\mu, \nu, \rho, \dots, \lambda$ φυσικοί.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι :

Τὸ γινόμενον ὅσωνδῆποτε δυνάμεων ἐνὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων.

Ἀ σ κ ῆ σ ε ι ς

54. Εὑρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων :

$$\alpha') (-2)^2 \cdot (-2)^3 \quad \beta') (-3)^4 \cdot (-3)^2 \quad \gamma') (-5)^2 \cdot (-5)^3$$

$$\delta') (1,5)^3 \cdot (1,5)^2 \quad \epsilon') \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\sigma\tau') (-5,1)^3 \cdot (5,1)^4 \quad \zeta') (0,5)^5 \cdot (0,5)^{10} \cdot (0,5)^3$$

* Ἡ 4η δύναμις ἀριθμοῦ καλεῖται ὑπὸ τοῦ Διοφάντου εἰς τὸν ἔργον του «Ἀριθμητικὰ βιβλία» VI, καθὼς καὶ ὑπὸ τοῦ Ἡρώωνος, **δυναμοδύναμις**, ἡ 5η δύναμις καλεῖται **δυναμόκυβος**, ἡ 6η **κυβόκυβος**, τὸ $\frac{1}{x}$ λέγεται **ἀριθμοστόν**, τὸ $\frac{1}{x^2}$ **δυναμοστόν**, τὸ $\frac{1}{x^3}$ **κυβοστόν**, καὶ τὸ $\frac{1}{x^5}$ **κυβοκυβοστόν**.

§ 35. Έστω, ότι ζητούμεν τὸ $[(-5)^3]^2$. Τοῦτο ἰσοῦται $(-5)^8$.
 $(-5)^3 = (-5)^{3+5} = (-5)^8$.

Έστω, ότι θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ $(2^3)^2$. Τοῦτο σημαίνει νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον δύο παραγόντων ἴσων μὲ τὸ 2^3 , ἤτοι τὸ $2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3} = 2^6$. Ὁμοίως εὐρίσκομεν, ὅτι εἶναι $(\alpha^3)^4 = \alpha^{3 \cdot 4}$ καὶ ἐν γένει, ὅτι $(\alpha^m)^n = \alpha^{m \cdot n}$, ὅπου α εἶναι μὲν σχετικός τις ἀριθμός, μ καὶ ν δὲ φυσικοὶ ἀριθμοί.

Έκ τούτων ἔπεται ὅτι :

Ἄν δύναμις τις ἀριθμοῦ σχετικοῦ ὑψωθῇ εἰς δύναμιν, προκύπτει δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐκθετῶν.

Ἀ σ κ ῆ σ ε ι ς

55. Εὐρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν :

$$\begin{array}{lll} \alpha') [(-2)^2]^3 & \beta') [(-3)^2]^2 & \gamma') [(-1)^2]^3 \\ \delta') [(-1)^3]^3 & \epsilon') \left[\left(-\frac{3}{5} \right)^2 \right]^2 & \sigma\tau') \left[[(-10)^2]^3 \right]^6 \end{array}$$

56. Εὐρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν :

$$\begin{array}{lll} \alpha') [(0,2)^2]^4 & \beta') [(0,4)^2]^2 & \gamma') [(1,5)^2]^3 \\ \delta') [(0,5)^2]^3 \cdot [(-3)^4]^2, \left[\left(-\frac{4}{5} \right)^2 \right]^3 & \epsilon') \left[[(-5)^2]^3 \right]^2 & \sigma\tau') \left[\left[\left(-\frac{4}{5} \right)^2 \right]^3 \right]^6 \end{array}$$

§ 36. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι :

Διὰ νὰ ὑψώσωμεν γινόμενον σχετικῶν παραγόντων εἰς δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου εἰς τὴν δύναμιν αὐτὴν καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα.

Πράγματι ἔχομεν, ὅτι (ἂν τὸ ν εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς)

$$(2 \cdot 3)^2 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$\begin{aligned} [(-5) \cdot (-3)]^3 &= (-5) \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot (-3) = \\ &= (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-5)^3 \cdot (-3)^3 \end{aligned}$$

καὶ γενικῶς, ὅτι

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^n &= \underbrace{(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) \cdot (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) \cdots (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)}_{n \text{ παράγοντες}} = \\ &= \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ παράγοντες}} \cdot \underbrace{\beta \cdot \beta \cdot \beta \cdots \beta}_{n \text{ παράγοντες}} \cdot \underbrace{\gamma \cdot \gamma \cdot \gamma \cdots \gamma}_{n \text{ παράγοντες}} = \alpha^n \cdot \beta^n \cdot \gamma^n \end{aligned}$$

§ 37. Ἐπίσης ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι :

Κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὄροι εἶναι **σχετικοὶ ἀριθμοί**, ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν ἕκαστος τῶν ὄρων τοῦ ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.

Οὕτως ἔχομεν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = \frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}$, διότι τὸ

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = \frac{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}{\beta \cdot \beta \cdot \beta \cdots \beta} = \frac{\overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}^{\mu \text{ παράγοντες}}}{\overbrace{\beta \cdot \beta \cdot \beta \cdots \beta}^{\mu \text{ παράγοντες}}} = \frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}$$

ὅπου τὸ μ φανερώνει ἀριθμὸν φυσικόν, τὰ δὲ α καὶ β ἀριθμούς σχετικούς.

Ἀσκήσεις

57. Εὑρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων :

$$\alpha') [(-2) \cdot (-3)]^2$$

$$\beta') [(+1) \cdot (-2)]^4$$

$$\gamma') [(-1) \cdot (-2) \cdot (-3)]^2$$

$$\delta') [2 \cdot 3 \cdot (-4) \cdot (-2)]^2$$

$$\epsilon') [(-2) \cdot (-3) \cdot 4 \cdot 1 \cdot 0,5]^3$$

$$\sigma\tau') [(-1) \cdot (-2) \cdot (+3)]^4$$

$$\zeta') \left[\left(-\frac{5}{8}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \right]^3$$

$$\eta') \left[\left(\frac{5}{8}\right) \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) \right]^2$$

$$\theta') \left[(-5)^2 \cdot (-6)^3 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) \right]^2$$

$$\iota') \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right]^2$$

$$\iota\alpha') \left[2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{9} \cdot (-0,1) \right]^2$$

$$\iota\beta') \left[\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{-3}{7} \cdot 0,4 \right]^3$$

$$\iota\gamma') \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)^4 \right]^4$$

§ 38. Ἐστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὗρωμεν τὸ πηλίκον τῆς δυνάμεως 2^5 διὰ τῆς 2^2 . Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς), ὅτι τὸ πηλίκον τοῦτο $2^5 : 2^2 = 2^{5-2} = 2^3$. Ἦτοι ὅτι :

Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων ἐνὸς ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν τοῦ διαιρετέου μεῖον τοῦ διαιρέτου.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ ὅταν ἡ βᾶσις τῶν δυνάμεων εἶναι σχετικὸς τις ἀριθμὸς, οἱ ἐκθέται φυσικοὶ ἀριθμοί, ἐκ τούτων δὲ ὁ τοῦ διαιρετέου μεγαλύτερος ἢ ἴσος μὲ τὸν τοῦ διαιρέτου. Οὕτω τὸ πηλίκον,

$$(-5)^4 : (-5)^2 = \frac{(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)}{(-5) \cdot (-5)} = (-5) \cdot (-5) = (-5)^2 = (-5)^{4-2}$$

$$\text{ὁμοίως τὸ } (-3)^6 : (-3)^3 = \frac{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)}{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)} =$$

$$(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^3 = (-3)^{6-3}.$$

Ἐν γένει τὸ πηλίκον

$$\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \frac{\overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \alpha}^{\mu \text{ παράγοντες}}}{\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \alpha}_{\mu - \nu \text{ παράγοντες}} = \alpha^{\mu - \nu}$$

ὅπου α παριστάνει σχετικόν τινα ἀριθμὸν καὶ μ, ν φυσικούς, ὁ δὲ μ εἶναι μεγαλύτερος ἢ ἴσος μὲ τὸν ν.

Παρατήρησις. Ἡ εἰς τὴν § 34 σημασία τοῦ α⁰ καὶ α¹ προκύπτει καὶ ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἰσχύει ἡ θεμελιώδης ιδιότης τοῦ γινομένου δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, θεωρουμένων τῶν α⁰ καὶ α¹ ὡς δυνάμεων τοῦ α. Πράγματι, ἔχομεν τότε α⁰ · α^μ = α^{0+μ} = α^μ. Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὰ ἴσα α⁰ · α^μ καὶ α^μ διὰ τοῦ α^μ, εὐρίσκομεν ὅτι εἶναι α⁰ = 1.

Ὅμοιως ἔχομεν α¹ · α^μ = α^{1+μ} = α^μ · α, καὶ διαιροῦντες τὰ ἴσα ταῦτα διὰ τοῦ α^μ ἔχομεν α¹ = α.

Ἀσκήσεις

58. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ γινόμενα :

$$\begin{array}{llllll} \alpha') x^6 \cdot x^3 & \beta') \psi^3 \cdot \psi^4 & \gamma') x^6 \cdot x & \delta') (-x^4)^2 & \epsilon') (-\beta^5)^3 & \sigma\tau') x^2 \cdot x \\ \zeta') x^{2\nu} \cdot x & \eta') x^{2\nu-1} \cdot x & \theta') x^{2\nu} \cdot (-x)^3 & \iota') x^{2\nu-1} \cdot x^{2\nu} & & \end{array}$$

$$\psi^{3\mu-1} \cdot \psi^2.$$

59. Ὅμοιως τὰ :

$$\begin{array}{llllll} \alpha') (4\alpha\beta)^2 & \beta') (-3\chi\psi)^3 & \gamma') (5x^2)^2 & \delta') (-x\psi\omega)^1 & \epsilon') \left(-\frac{2}{3} x^2\psi\right)^2 \\ \sigma\tau') \left(-\frac{1}{5} x\psi^2\right)^3 & \zeta') \left(-\frac{3}{4} x^2\right)^6 & \eta') \left(\frac{5}{8} x^{2\nu}\right)^0 \\ \theta') \left(\frac{5}{8} x^2\psi\right)^3 \cdot (4\alpha\beta)'' \cdot (3\alpha^2\beta^3)^2. \end{array}$$

60. Νὰ εὐρετε τὰ :

$$\begin{array}{llll} \alpha') 2^6 : 2^3 & \beta') (-2)^6 : (-2)^3 & \gamma') (-7)^9 : (-7)^6 \\ \delta') (-3)^6 : (-3)^2 & \epsilon') \left(-\frac{3}{7}\right)^6 : \left(-\frac{3}{7}\right)^3 & \sigma\tau') (-5,3)^6 : (-5,3) \\ \zeta') [(-3) \cdot 5 \cdot 7]^7 : (-3 \cdot 5 \cdot 7)^4 & \eta') [(-1) \cdot (-3) \cdot 5 \cdot 7]^{10} : [(-1) \cdot (-3) \cdot 5 \cdot 7]^6 \end{array}$$

4. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΑΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

§ 39. Έστω, ότι θέλουμε να εϋρωμεν τί παριστάνει τὸ σύμβολον α^{-1} , ὅπου τὸ α εἶναι σχετικὸς τις ἀριθμὸς $\neq 0$.

Ἄν δεχθῶμεν, ὅτι ἡ θεμελιώδης ιδιότης τοῦ γινομένου δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ εἷς ἐκ τῶν ἐκθετῶν εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς π.χ. -1 , θὰ ἔχωμεν $\alpha^1 \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{1-1} = \alpha^0 = 1$.

Διαιροῦντες τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $\alpha^1 \cdot \alpha^{-1} = 1$ διὰ τοῦ α^1 , εϋρίσκομεν $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha^1}$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἔχομεν $\alpha^{-2} = \frac{1}{\alpha^2}$, $\alpha^{-3} = \frac{1}{\alpha^3}$ καὶ γενικῶς $\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$, ὅπου τὸ n παριστάνει ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμὸν, τὸ δὲ α σχετικὸν $\neq 0$. Ἐκ τούτου ὀδηγοῦμενοι διδομεν τὸν ἐξῆς ὁρισμὸν τῆς σημασίας δυνάμεως μὲ ἀκέραιον ἀρνητικὸν ἐκθέτην.

Δύναμις τις ἀριθμοῦ ($\neq 0$), μὲ ἐκθέτην δοθέντα ἀκέραιον ἀρνητικὸν ἀριθμὸν, παριστάνει κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὴν μονάδα, παρονομαστὴν δὲ δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσιν ἐκθέτην τὸν ἀντίθετον τοῦ δοθέντος.

$$\begin{aligned} \text{Κατὰ ταῦτα εἶναι : } 5^{-1} &= \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}, & 5^{-2} &= \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} &= \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16, & \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} &= \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{-\frac{1}{8}} = -8. \end{aligned}$$

Γενικῶς $\alpha^{-|v|} = \frac{1}{\alpha^{|v|}}$, ἔνθα v σχετικὸς ἀκέραιος ἀριθμὸς.

§ 40. Αἱ ιδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας φυσικοὺς ἀριθμοὺς ἀληθεύουν καὶ ἀποδεικνύονται εὐκόλως καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται εἶναι οἱοιδήποτε ἀκέραιοι σχετικοὶ ἀριθμοί.

$$\begin{aligned} \text{Οὕτω π.χ. ἔχομεν } \alpha^3 \cdot \alpha^{-5} &= \alpha^3 \cdot \frac{1}{\alpha^5} = \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^{-2} \\ \alpha^{-3} \cdot \alpha^{-5} &= \frac{1}{\alpha^3} \cdot \frac{1}{\alpha^5} = \frac{1}{\alpha^8} = \alpha^{-8} = \alpha^{-3-5} \\ \alpha^{-|u|} : \alpha^{-|v|} &= \frac{1}{\alpha^{|u|}} : \frac{1}{\alpha^{|v|}} = \frac{1}{\alpha^{|u|}} \cdot \alpha^{|v|} = \alpha^{|v|} \cdot \alpha^{-|u|} = \alpha^{|v|+(-|u|)} = \alpha^{-|u|+(-|v|)} \end{aligned}$$

Ἐπίσης ἔχομεν, ὅτι $(\alpha \cdot \beta)^{-|v|} = \frac{1}{(\alpha \cdot \beta)^{|v|}} = \frac{1}{\alpha^{|v|} \cdot \beta^{|v|}}$, ὅπου v παριστάνει σχετικὸν ἀριθμὸν ἀκέραιον.

Παρατήρησης: Μετά την παραδοχήν τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀρνητικούς ἀκεραίους, ἡ ἰδιότης τοῦ πηλίκου δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους ἰσχύει πάντοτε, ἄνευ οὐδεμιᾶς ἐξαιρέσεως (δηλαδή καὶ ὅταν ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρέτου εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν τοῦ διαιρέτου). Οὕτω π.χ. ἔχομεν :

$$\alpha^5 : \alpha^7 = \frac{\alpha^5}{\alpha^7} = \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^{-2} = \alpha^{5-7}.$$

$$\text{'Ομοίως } \alpha^{-2} : \alpha^3 = \frac{1}{\alpha^2} : \alpha^3 = \frac{1}{\alpha^2 \cdot \alpha^3} = \alpha^{-5} = \alpha^{-2-3}.$$

Ἀσκήσεις

61. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων :

$$5^{-3}, (3,5)^{-2}, 7^{-2}, 20^{-2}, \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}, \left(-\frac{1}{8}\right)^{-2}, (-1)^{-2v}, (-1)^{-(2v+1)}$$

$$62. \text{'Ομοίως τῶν: } (-1)^{-3}, (-0,01)^{-4}, \frac{1}{2^{-3}}, \frac{1}{5^{-2}}, \frac{1}{(-7)^{-4}}$$

63. Θέσατε κατωτέρω ὅπου $x=1, -2, -3$ καὶ εὑρετε μὲ τί ἰσοῦνται τὰ ἐξαγόμενα τῶν : α') $5x^{-1} + 7x + 3x^{-1}$ β') $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{4x}$

$$64. \text{Νὰ εὑρεθῇ μὲ τί ἰσοῦνται τά: } 2^5 \cdot 2 \cdot 2^0 \cdot 2^{-2}, 4^{-3} \cdot 4^3, \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{0,1}\right)^{-3}$$

65. Ὅμοιως τά :

$$\begin{array}{llll} \alpha') \alpha^{-2} \cdot \alpha^{-4} \cdot \alpha^0 \cdot \alpha^5 & \beta') 2^3 \cdot 2 \cdot 2^4 \cdot 2^{-8} & \gamma') (7^{-3} : 7^{-9}) \cdot 3^{-3} & \delta) (2\alpha\beta)^{-2} \\ \epsilon') x^v \cdot x^{2v} : x^v & \sigma\tau') 5^2 : 5^{-4} & \zeta') (3\alpha^{-3} \cdot \beta^{-2} \cdot \gamma^{-4})^{-2} \cdot (-2\alpha^2\beta^{-2})^2 \end{array}$$

66. Εὑρετε τά :

$$\begin{array}{l} \alpha') 5 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^3 + 13 \cdot 2^3 - 11 \cdot 2^3 \\ \beta') 4 \cdot 6^3 - 5 \cdot (-6)^3 + 7 \cdot (-6)^3 + 9 \cdot (-6)^3 + 13 \cdot 6^3 \\ \gamma') 5 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^3 + 11 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^3 \\ \delta') 0,75 \cdot \alpha^5 - 0,5 \cdot \alpha^4 - 0,9 \cdot \alpha^5 + 0,7 \cdot \alpha^4 + 0,8 \cdot \alpha^5 - 1,2 \cdot \alpha^4, \text{ ὅταν } \alpha = 5 \end{array}$$

67. Εὑρετε τά :

$$\begin{array}{llll} \alpha') 32 \cdot 4^{-3} & \beta') 81 \cdot 3^{-3} & \gamma') \frac{2^{-6}}{4^{-3}} & \delta') \frac{3^{-3}}{9^{-3}} \\ \epsilon') \frac{10^{-3}}{10^{-2}} & \sigma\tau') \frac{(-6)^{-2}}{(-9)^{-2}} & \zeta') \frac{(-10)^{-5}}{(-15)^{-2}} & \eta') \frac{5}{5^{-2}} + \frac{10}{10^{-1}} + \frac{-10^2}{10^{-3}} - 100^2 \end{array}$$

ΣΤ'. ΠΕΡΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 41. Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς), ὅτι ἂν δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἀνισοί, π.χ. οἱ 5 καὶ 8, σημειώνομεν τὴν σχέσιν των αὐτῇν μὲ τὸ 5 $\langle$ 8 ἢ 8 $\rangle$ 5, ἡ ὁποία καλεῖται ἀνισότης, τὸ δὲ σύμβολον τῆς

ανισότητος είναι τὸ $\langle \eta \rangle$. Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι, ἂν εἰς ἀνίσους (θετικούς) ἀριθμούς προσθέσωμεν ἴσους, ἡ ἀνισότης δὲν μεταβάλλει φοράν. Δεχόμενοι, ὅτι ἡ ιδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ προστιθέμενος ἀριθμὸς εἶναι σχετικός, ἔχομεν, προσθέτοντες τὸν -5 π.χ. εἰς τοὺς δύο ἀνίσους ἀριθμούς 5 καὶ 8 , ὅτι $5+(-5) \langle 8+(-5)$ ἢ $0 \langle 3$. Ἐὰν εἰς τοὺς αὐτοὺς ἀνίσους ἀριθμούς 5 καὶ 8 προσθέσωμεν τὸν -8 , θὰ ἔχωμεν $5+(-8) \langle 8+(-8)$ ἢ $-3 \langle 0$.

Ἐκ τούτων ὁδηγοῦμενοι ὀρίζομεν ὅτι :

Τὸ 0 εἶναι μικρότερον μὲν παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ, μεγαλύτερον δὲ παντὸς ἀρνητικοῦ.

Οὕτως, ἂν ὁ σχετικός ἀριθμὸς α εἶναι θετικός, θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ $\alpha > 0$, ἂν δὲ τὸ α εἶναι ἀρνητικός ἀριθμὸς, θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ $\alpha < 0$. Κατὰ ταῦτα εἶναι πάντοτε $|\alpha| > 0$, $-|\alpha| < 0$.

§ 42. Ἐστω, ὅτι ἔχομεν τὴν ἀνισότητα $5 > 0$. Ἐὰν εἰς τοὺς ἀνίσους 5 καὶ 0 προσθέσωμεν τὸ (-7) π.χ., εὐρίσκομεν : $5+(-7) > 0+(-7)$ ἢ $-2 > -7$. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων παραδειγμάτων ὁδηγοῦμενοι ὀρίζομεν ὅτι :

Ἐκ δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀπολύτως μικρότερος, ἐνῶ εἶναι γνωστὸν, ὅτι ἐκ δύο θετικῶν μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀπολύτως μεγαλύτερος.

§ 43. Ἐστω, ὅτι ἔχομεν τὴν ἀνισότητα $8 > 0$. Ἐὰν εἰς τοὺς ἀνίσους 8 καὶ 0 προσθέσωμεν π.χ. τὸν -3 , εὐρίσκομεν $8+(-3) > 0+(-3)$ ἢ $5 > -3$.

Ὅριζομεν λοιπὸν ὅτι : **πᾶς θετικός ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος παντὸς ἀρνητικοῦ, π.χ. $+5 > -13$, $+0,3 > -25$.**

§ 44. Λέγομεν, ὅτι **σχετικός τις ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος μὲν ἄλλου, ἂν ἡ διαφορά τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ πρώτου εἶναι θετική, μικρότερος δὲ ἂν εἶναι ἀρνητική.**

Κατὰ ταῦτα, ἂν δύο σχετικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἄνισοι, καὶ ὁ α μεγαλύτερος τοῦ β , σημειώνομεν τὴν σχέσιν ταύτην συμβολικῶς μὲ $\alpha > \beta$ ἢ $\beta < \alpha$, ἡ ὁποία καλεῖται **ἀνισότης** καὶ τότε ἡ διαφορά $\alpha - \beta$ εἶναι θετικός ἀριθμὸς. Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β λέγονται **μέλη τῆς ἀνισότητος**. Παρατηρητέον, ὅτι ἂν $\alpha > \beta$, ὁ β εἶναι μικρό-

τερος τοῦ α , ἤτοι εἶναι $\beta < \alpha$. Διότι, ἂν $\alpha - \beta = \text{θετικός}$, τὸ $(\beta - \alpha) = \text{ἀρνητικός ἀριθμός}$. Διὰ ταῦτα αἱ ἀνισότητες $\alpha > \beta$ καὶ $\beta < \alpha$ λέγονται **ισοδύναμοι**.

Κατὰ τ' ἀνωτέρω, δοθέντων σχετικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ τοποθετήσωμεν αὐτοὺς κατὰ σειράν, ὥστε νὰ βαίνουν ἀπὸ τοῦ μικροτέρου πρὸς τὸν μεγαλύτερόν των. Π.χ. ἂν ἔχωμεν τοὺς σχετικούς ἀριθμοὺς $+5, -\frac{2}{3}, +6, -7, -15, +\frac{3}{4}, 0, -1, -6$, ἔχομεν τὴν κατωτέρω τοποθέτησιν αὐτῶν, παρατηροῦντες, ὅτι ὁ μικρότερος εἶναι ὁ -15 καὶ ὁ μεγαλύτερος ὁ $+6$.

$$-15 < -7 < -6 < -1 < -\frac{2}{3} < 0 < +\frac{3}{4} < +5 < +6.$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

§ 45. Ἐστώσαν αἱ ἀνισότητες $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > \delta$, ὅτε θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω $\alpha - \beta = \text{θετικός ἀριθμός}$ καὶ $\gamma - \delta = \text{θετικός ἀριθμός}$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἀφοῦ $\alpha - \beta$ εἶναι θετικός ἀριθμός, καὶ $\gamma - \delta$ ὁμοίως θετικός, τὸ $\alpha - \beta + \gamma - \delta$ θὰ εἶναι θετικός, ἤτοι τὸ $(\alpha + \gamma) - (\beta + \delta) = \text{θετικός}$. Ἐπομένως εἶναι καὶ $\alpha + \gamma > \beta + \delta$.

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι :

Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν ἀνίσους, οὕτως ὥστε ὁ μεγαλύτερος νὰ προστεθῇ εἰς τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος εἰς τὸν μικρότερον, ἡ ἀνισότης δὲν μεταβάλλει φορὰν.

Οὕτω π.χ. ἂν ἔχωμεν τὰς $-5 > -12$ καὶ $-3 > -10$, προσθέτοντες τοὺς μεγαλυτέρους καὶ τοὺς μικροτέρους χωριστά, εὐρίσκομεν :

$$-5 - 3 > -12 - 10 \quad \eta \quad -8 > -22.$$

§ 46. Ἐστω, ὅτι ἔχομεν $\alpha > \beta$, ὅτε θὰ εἶναι $\alpha - \beta = \text{θετικός}$. Ἐπειδὴ εἶναι $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) = \text{θετικός}$, ἔπεται ὅτι $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$. Ἦτοι :

Ἐὰν εἰς ἀνίσους σχετικούς ἀριθμοὺς προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν σχετικὸν ἀριθμόν, ἡ ἀνισότης δὲν μεταβάλλει φορὰν.

Ἐὰν εἶναι $\alpha > \beta$, $\gamma < \delta$, θὰ εἶναι $\alpha - \gamma > \beta - \delta$. Διότι ἔχομεν $\alpha - \beta = \text{θετικός ἀριθμός}$, $\delta - \gamma = \text{θετικός ἀριθμός}$. Ἄλλ' εἶναι $(\alpha - \beta) + (\delta - \gamma) = \text{θετικός ἀριθμός} = \alpha - \beta + \delta - \gamma = (\alpha - \gamma) - (\beta - \delta) = \text{θετικός ἀριθμός}$, ἄρα $\alpha - \gamma > \beta - \delta$, π.χ. $+5 > -2$, $-9 < -4$ καὶ $5 + 9 > -2 + 4$ ἢ $+14 > +2$.

*Αν δοθοῦν ἀνισότητες σχετικῶν ἀριθμῶν, π.χ. $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$, $\epsilon > \zeta$, $\eta > \theta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha + \gamma + \epsilon + \eta > \beta + \delta + \zeta + \theta$.

Διότι εἶναι $\alpha - \beta =$ θετικὸς ἀριθμὸς, $\gamma - \delta =$ θετικὸς ἀριθμὸς. $\epsilon - \zeta =$ θετικὸς ἀριθμὸς, $\eta - \theta =$ θετικὸς ἀριθμὸς. *Αρα $(\alpha - \beta) + (\gamma - \delta) + (\epsilon - \zeta) + (\eta - \theta) =$ θετικὸς ἀριθμὸς ἢ $\alpha - \beta + \gamma - \delta + \epsilon - \zeta + \eta - \theta =$ θετικὸς ἢ $\alpha + \gamma + \epsilon + \eta - \beta - \delta - \zeta - \theta =$ θετικὸς ἢ $(\alpha + \gamma + \epsilon + \eta) - (\beta + \delta + \zeta + \theta) =$ θετικὸς, δηλαδὴ $\alpha + \gamma + \epsilon + \eta > \beta + \delta + \zeta + \theta$. Π.χ. εἶναι $+5 > 0$, $+6 > -15$, $-8 > -20$, ἀρα $+5 + 6 + (-8) > 0 + (-15) + (-20)$ ἢ $+3 > -35$.

§ 47. *Εστω, ὅτι ἔχομεν $\alpha > \beta$, ὅτε εἶναι $\alpha - \beta =$ θετικὸς ἀριθμὸς. *Αν $\lambda > 0$ καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο πρῶτα ἴσα ἐπὶ λ , θὰ ἔχωμεν $(\alpha - \beta) \cdot \lambda =$ θετικὸς $\times$ θετ. = θετικὸς ἀριθμὸς, ἢ $\alpha\lambda - \beta\lambda =$ θετικὸς ἀριθμὸς. *Επομένως εἶναι $\alpha\lambda > \beta\lambda$.

*Εστω τώρα, ὅτι εἶναι $\lambda < 0$. *Αν τὰ ἴσα $\alpha - \beta =$ θετικὸς ἀριθμὸς, πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀρνητικὸν λ , θὰ εὗρωμεν $(\alpha - \beta) \cdot \lambda =$ θετικὸς $\times$ ἀρν. = ἀρνητικὸς ἀριθμὸς. *Επομένως εἶναι $\alpha\lambda - \beta\lambda =$ ἀρν. ἥτοι $\alpha\lambda < \beta\lambda$. *Ητοι :

*Εὰν τὰ μέλη ἀνισότητος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ θετικὸν μὲν ἀριθμὸν, ἡ ἀνισότης δὲν μεταβάλλει φορὰν, ἐπὶ ἀρνητικὸν δὲ ἀντιστρέφεται.

Οὕτως ἐκ τῆς ἀνισότητος $-5 > -8$ ἔχομεν $-5 \cdot 4 > -8 \cdot 4$, ἥτοι $-20 > -32$, ἐνῶ ἐκ τῆς $6 < 10$ εὗρίσκομεν μὲ πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ -2 τὴν $6 \cdot (-2) > 10 \cdot (-2)$ ἢ $-12 > -20$. *Αν $\alpha < \beta$, εἶναι $\alpha \cdot [-|\lambda|] > \beta \cdot [-|\lambda|]$.

*Εκ τῆς ἀνωτέρω ιδιότητος ἔχομεν ὅτι :

*Εὰν τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ -1 , ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται.

Π.χ. ἐκ τῆς $3 < 5$ ἔχομεν $3 \cdot (-1) > 5 \cdot (-1)$ ἢ $-3 > -5$.

§ 48. *Εὰν εἶναι $\alpha > \beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha^{\mu} > \beta^{\mu}$, ἂν οἱ α καὶ β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, τὸ δὲ μ φυσικὸς. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι, ἂν ἔχωμεν $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > \delta$, εἶναι δὲ α , β , γ , δ , θετικοί, θὰ εἶναι καὶ $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$. Διότι ἀφοῦ εἶναι $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > \delta$, θὰ ἔχωμεν ὅτι

$$\alpha - \beta = \text{θετ. ἀριθ.} \quad \eta \quad \alpha = \beta + \text{θετ. ἀριθ.}$$

$$\gamma - \delta = \text{θετ. ἀριθ.} \quad \eta \quad \gamma = \delta + \text{θετ. ἀριθ.}$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς τελευταίας ἰσότητας κατὰ μέλη εὐ-

ρίσκομεν $\alpha\gamma = \beta\delta + \beta \cdot \text{θετικόν} + \delta \cdot \text{θετ.} + \text{θετ.} \times \text{θετικόν}$. Δηλαδή :

$\alpha\gamma - \beta\delta = \text{θετικός αριθμός}$. 'Επομένως είναι $\alpha\gamma > \beta\delta$.

Κατά ταῦτα, ἐπειδὴ εἶναι $\alpha > \beta$, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω : $\alpha \cdot \alpha > \beta \cdot \beta$ ἢ $\alpha^2 > \beta^2$. 'Ομοίως εὐρίσκομεν $\alpha^3 > \beta^3$ καὶ γενικῶς $\alpha^m > \beta^m$, (μ φυσικός ἀριθμός).

'Εὰν εἶναι $\alpha > \beta$, θὰ εἶναι $\alpha^{-m} < \beta^{-m}$, ἂν α καὶ β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, τὸ δὲ μ φυσικός ἀριθμός.

Διότι, ἀφοῦ εἶναι $\alpha > \beta$, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ $\frac{1}{\alpha\beta}$, εὐρίσκομεν $\frac{\alpha}{\alpha \cdot \beta} > \frac{\beta}{\alpha \cdot \beta}$ ἢ $\frac{1}{\beta} > \frac{1}{\alpha}$ ἢ $\alpha^{-1} < \beta^{-1}$. 'Ομοίως εὐρίσκομεν $\alpha^{-2} < \beta^{-2}$, καὶ γενικῶς $\alpha^{-m} < \beta^{-m}$, (μ φυσικός).

Οὕτως ἂν $|\alpha| > |\beta|$, θὰ εἶναι $|\alpha|^m > |\beta|^m$ καὶ $|\alpha|^{-m} < |\beta|^{-m}$.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

68. Δείξτε ὅτι, ἰὰν τὰ μέλη ἀνισότητος εἶναι ἀριθμοὶ θετικοὶ καὶ τὰ ὑψώσωμεν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν μὲ ἐκθέτην ἀρνητικόν, ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται. Τί συμβαίνει, ἂν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀρνητικοί ;

69. α') Δείξτε ὅτι, ἰὰν εἶναι $\alpha > 1$, θὰ εἶναι $\alpha^m < 1$, ἂν τὸ μ < 0 .

β') 'Εὰν εἶναι $0 < \alpha < 1$, θὰ εἶναι $\alpha^m > 1$, ἂν τὸ μ < 0 .

γ') 'Εὰν εἶναι $\alpha > 1$, θὰ εἶναι $\alpha^{-3} < \alpha^{-2} < \alpha^{-1} < \alpha^0 < \alpha < \alpha^2 < \alpha^3$.

70. Δείξτε ὅτι, ἂν εἶναι $\alpha > 0$, ἀλλὰ $\alpha < 1$, θὰ εἶναι $\alpha^{-3} > \alpha^{-2} > \alpha^{-1} > \alpha^0 > \alpha > \alpha^2 > \alpha^3$.

71. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ πηλίκα καὶ ποία ἀνισότης συνδέει αὐτά, τὰ προκύπτοντα ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν μελῶν τῆς $-8 > -23$ διὰ $2, \frac{-1}{5}, -0,58$.

72. Νὰ εὐρεθῇ διὰ τίνος τιμᾶς τοῦ x ἰσχύουν αἱ $-5x < 30, 3x < 39, (-3) \cdot (-2) \cdot x < -4,8 \cdot (-22)$.

73. Νὰ εὐρεθῇ τίνος τιμᾶς πρέπει νὰ ἔχη τὸ x, ἵνα ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης

$$\frac{3}{4} \cdot x < -\frac{5}{8}, -0,6x < -32, -0,8 \cdot (-3) \cdot x < 120 \cdot \frac{4}{5},$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-0,6) \cdot x < -\frac{2}{5} \cdot (0,4) \cdot (-0,2).$$

Περίληψις περιεχομένων Κεφαλαίου I.

'Ορισμός τῆς Ἀλγέβρας

Σύμβολα

καὶ σύντομος ἱστορικὴ ἐπισκόπησης αὐτῆς (διάκρισις τριῶν περιόδων ἀναπτύξεως τῆς Ἀλ-

+ (σύν ἢ καὶ) προσθέσεως
- (πλήν) ἀφαιρέσεως
+ σῆμα ἢ πρόσημον θετ. ἀριθ.

γέβρας· περίοδος ρητορική, συγ-
κεκομμένη, συμβολική).

Διόφαντος. "Ελλην μαθη-
ματικός (4ον αἰῶνα π.Χ.), ὁ
θεμελιωτής τῆς 'Αλγέβρας.

Θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀρι-
θμοί, $|α|$ θετικός, $-|α|$ ἀρνητικός
'Ορισμός σχετικῶν ἀριθμῶν
(τὸ σύνολον τῶν θετικῶν, ἀρνη-
τικῶν καὶ τὸ 0).

— σῆμα ἢ πρόσημον ἀρν. ἀριθμ.
 $|α|$ ἀπόλυτος τιμὴ σχετ. ἀριθμ. α
 $|α|$ = θετικός ἀριθμός
 $-|α|$ = ἀρνητικός ἀριθμός
= ἴσον, $\neq$ διάφορον

$$+ \cdot + = +, \quad - \cdot - = +, \quad + \cdot - = -$$

$$- \cdot + = -$$

$$+ : + = +, \quad - : - = +, \quad + : - = -$$

$$- : + = -$$

'Ορισμός ἀθροίσματος σχετικῶν ἀριθμῶν. 'Ιδιότητες τῆς
προσθέσεως.

$$1) \alpha + \beta = \beta + \alpha,$$

$$2) \alpha + \beta + \gamma + \delta = \beta + \delta + \alpha + \gamma = \dots$$

$$3) \alpha + \beta + \gamma + \delta = (\delta + \beta) + \gamma + \alpha = \dots \quad 4) \alpha + (\beta + \gamma) + \delta = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

'Ο ὁρισμός τῆς ἀφαιρέσεως σχετικοῦ ἀριθμοῦ β ἀπὸ ἄλλον
α, ἥτοι $\alpha - \beta$, $0 - \alpha = -\alpha$.

'Ακολουθία δύο συμβόλων + ἢ -: ἂν εἶναι τὰ αὐτὰ = +,
ἂν εἶναι ἀντίθετα = -.

'Ορισμός ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος $\alpha - (+\beta) - (+\gamma) - (-\delta) =$
 $= \alpha - \beta - \gamma + \delta$.

Τοῦτο τρέπεται εἰς ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν $\alpha - \beta - \gamma + \delta =$
 $= \alpha + (-\beta) + (-\gamma) + (+\delta)$.

Δι' ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσε-
ως. Σημασία παρενθέσεως ἢ ἀγκύλης μὲ προσθετέους ἐντὸς αὐτῆς

$$\alpha - (\beta - \gamma + \delta) = \alpha - \beta + \gamma - \delta = \alpha + (-\beta + \gamma - \delta).$$

Πολλαπλασιασμός δύο σχετικῶν ἀριθμῶν. Τὸ γινόμενον
δύο ὁμοσήμων εἶναι θετικόν. Τὸ γινόμενον δύο ἑτεροσήμων εἶναι
ἀρνητικόν. 'Ιδιότητες τοῦ γινομένου σχετικῶν ἀριθμῶν.

$$1) \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \text{ (νόμος τῆς ἀλλαγῆς τῆς θέσεως τῶν παραγόντων).}$$

$$2) (\alpha + \beta + \gamma) \rho = \alpha \rho + \beta \rho + \gamma \rho \text{ (ἐπιμεριστικός νόμος).}$$

$$3) \alpha \beta \gamma \delta = (\alpha \beta) : \gamma \delta = (\alpha \gamma) \cdot \beta \delta. \quad 4) \alpha \cdot (\beta \gamma) \cdot \delta = \alpha \beta \gamma \delta.$$

$$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0, \quad \alpha \cdot 1 = \alpha, \quad \alpha \cdot (-1) = -\alpha.$$

Διαιρέσεις σχετικοῦ ἀριθμοῦ α δι' ἄλλου β ($\neq 0$) $\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta}$

Τὸ πηλίκον ὁμοσήμεων σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι θετικόν,
τὸ πηλίκον ἑτεροσήμεων εἶναι ἀρνητικόν.

Διαίρεσις διὰ τοῦ 0 εἶναι ἀδύνατος.

Ὁρισμός δυνάμεως σχετικοῦ ἀριθμοῦ.

$\alpha^{\mu} = \alpha \cdot \alpha \dots \alpha$, μ παράγοντες

$\alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^{\mu}}$, $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$, μ, ν ἀκέρατοι ἀριθμοί.

$\alpha^0 = 1$, ($\alpha \neq 0$), $\alpha^1 = \alpha$, $(-1)^2 = +1$, $(-1)^{2\nu+1} = -1$,

$(-1)^{\nu} = \pm 1$ (+ ἂν ν ἄρτιος, - ἂν ν περιττός)

$\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$, μ, ν , σχετικοὶ ἀκέρατοι.

Ἀνισότητες μεταξὺ σχετικῶν ἀριθμῶν.

$|\alpha| > 0$, $-|\alpha| < 0$, ἂν $\alpha - \beta > 0$, $\alpha > \beta$, ἂν $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$, τότε

$\alpha + \gamma > \beta + \delta$, ἂν $\alpha > \beta$, τότε $-\alpha < -\beta$, ἂν $\alpha > \beta$, $\alpha|\lambda| > \beta|\lambda|$.

ἂν $\alpha > \beta$, $\alpha \cdot (-|\lambda|) < \beta \cdot (-|\lambda|)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Α'. ΠΕΡΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

§ 49. Ἀλγεβρική παράστασις καλεῖται τὸ σύνολον ἀριθμῶν ἢ γραμμάτων (χρησιμοποιουμένων ὑπὸ τῆς Ἀλγέβρας πρὸς παράστασιν ἀριθμῶν ἢ ποσοτήτων) ἢ ἀριθμῶν καὶ γραμμάτων συνδεομένων μετὰ ἀλγεβρικά σύμβολα τῶν πράξεων.

Ἐὰν δοθοῦν οἱ σχετικοὶ γενικοὶ ἀριθμοὶ π.χ. α , β , γ , καὶ προστεθοῦν οἱ α , καὶ β , εἰς δὲ τὸ ἄθροισμα τούτων προστεθῇ ὁ γ , θὰ ἔχωμεν (ὡς γνωστόν,) ἐξαγόμενον $(\alpha+\beta)+\gamma$, τὸ ὁποῖον λέγεται καὶ **ἀλγεβρικός τύπος**.

Ἐὰν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν α καὶ β ἀφαιρεθῇ ὁ γ , θὰ ἔχωμεν $(\alpha+\beta)-\gamma$, τὸ ὁποῖον καλεῖται ἐπίσης ἀλγεβρικός τύπος.

Τὸ $\alpha-(\beta-\gamma)$ λέγεται ἀλγεβρικός τύπος, φανερώνει δέ, ὅτι ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν α θὰ ἀφαιρεθῇ ἡ διαφορὰ $\beta-\gamma$.

Π.χ. τὸ ἄθροισμα $\alpha+\alpha+\alpha$ παριστάνομεν συντόμως μετὰ τὸν ἀλγεβρικὸν τύπον 3α . Ὁμοίως γράφομεν ἐπίσης $\alpha+\alpha+\dots+\alpha=\alpha\mu$,

$$\text{τό δὲ } \underbrace{\alpha-\alpha-\alpha\dots-\alpha}_{\nu \text{ προσθετέοι}} = -\nu\alpha, \text{ τὸ } -\frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{3} = -\frac{5}{3}\alpha$$

μ προσθετέοι

Τὰ διάφορα σύμβολα, τὰ ὁποῖα μεταχειρίζομεθα εἰς τὴν Ἀλγεβραν διὰ νὰ παραστήσωμεν τὸ πρόσημον ἑνὸς ἀριθμοῦ, τὸ σύν (+) ἢ τὸ πλὴν (-), τὸ γινόμενον ($\cdot$), τὸ πηλίκον ($:$), τὸ ἄθροισμα (+), τὴν διαφορὰν (-), τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ($\sqrt{}$) ἀριθμῶν, τὸ ἴσον (=), τὸ διάφορον ($\neq$), τὸ μεγαλύτερον ($>$) κ.τ.λ. καλοῦμεν **ἀλγεβρικά σύμβολα**.

Οὕτως ἀλγεβρिकाὶ παραστάσεις εἶναι αἱ: $(\alpha+\beta)$, $6\alpha+\beta-8\gamma$, α , 5α , $\beta\cdot\gamma$, $\alpha+\beta-(\gamma+\delta)$, $(-5-3):6+13-10$, $6\alpha^2-\alpha$.

Ἐκ τούτων ἡ $\alpha+\beta$ φανερώνει τὸν ἀριθμὸν, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἂν εἰς τὸν α προστεθῇ ὁ β . Ἡ $\alpha+\beta-(\gamma+\delta)$ φανερώνει, τὸν ἀριθμὸν, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἂν εἰς τὸν α προστεθῇ ὁ β καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ ἀφαιρεθῇ τὸ $\gamma+\delta$. Ἡ παράστασις α παριστάνει τὸν ἀριθμὸν α , κ.τ.λ.

§ 50. Δύο άλγεβρικοί παραστάσεις λέγονται **ισοδύναμοι**, εάν προκύπτει ή μία από τήν άλλην διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ιδιοτήτων τῶν πράξεων. Οὕτω π.χ. αἱ $\alpha^2 + \alpha\beta$ καὶ $\alpha(\alpha + \beta)$ εἶναι ἰσοδύναμοι. Διότι, ἂν εἰς τὴν δευτέραν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν τοῦ α ἐπὶ τὸ $(\alpha + \beta)$, εὐρίσκομεν τὴν πρώτην $\alpha^2 + \alpha\beta$. Ἐπίσης αἱ $\alpha + \beta$ καὶ $\beta + \alpha$ εἶναι ἰσοδύναμοι. Τὴν ἰσότητα δύο ἰσοδυνάμων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων καλοῦμεν **ταυτότητα** καὶ σημειώομεν αὐτὴν ἐνίοτε καὶ μὲ τὸ σύμβολον $\equiv$ τιθέμενον μεταξὺ τῶν ἰσοδυνάμων παραστάσεων, π.χ. $\alpha^2 + \alpha\beta \equiv \alpha(\alpha + \beta)$, $\alpha + \beta \equiv \beta + \alpha$, ἀπαγγέλλομεν δὲ οὕτως, α^2 σὺν $\alpha\beta$ ἰσοδύναμον τοῦ α ἐπὶ α σὺν β , τὸ α σὺν β ἰσοδύναμον τοῦ β σὺν α .

1. ΕΙΔΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

§ 51. Ἀλγεβρική παράστασις λέγεται **ρητή***, εάν ἐπὶ οὐδενὸς τῶν γραμμάτων τῆς εἶναι σημειωμένη ρίζα τις. Καθὼς αἱ :

$$\alpha, \quad 3\alpha\sqrt{3}, \quad \frac{\alpha}{\gamma} + \alpha^2\beta, \quad \frac{x}{3\sqrt{13}} + \psi.$$

Παράστασις ἀλγεβρική λέγεται **ἄρρητος***, εάν δὲν εἶναι ρητή. Π.χ. αἱ $\alpha + \sqrt{\beta}$, $\alpha - \sqrt{\alpha^5 \cdot \beta}$, $6\sqrt{\chi + \psi}$ εἶναι παραστάσεις ἄρρητοι.

Ἀλγεβρική παράστασις λέγεται **ἀκέραια**, εάν δὲν περιέχῃ διαίρεσιν δι' ἑνὸς ἢ καὶ περισσοτέρων τῶν γραμμάτων τῆς π.χ. αἱ παραστάσεις $\alpha + \beta$, $8\alpha^3 - \frac{3}{4}\alpha^2\beta + \gamma$, $\frac{4}{5}\alpha^2$ λέγονται ἀκέραιαι.

Κλασματική λέγεται μία ρητὴ παράστασις ἀλγεβρική, ἂν περιέχῃ διαίρεσιν τοῦλάχιστον δι' ἑνὸς τῶν γραμμάτων τῆς π.χ.

$$\text{αἱ κατωτέρω : } \frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{12\alpha^2 - \beta}{\alpha + \beta}, \quad \frac{3\alpha^2}{5} + \frac{\beta^2}{\alpha^2}, \quad \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}, \quad 3\alpha^{-2}$$

λέγονται **κλασματικά** ἢ **ἀλγεβρικά κλάσματα**, ἐπεὶδὴ ἡ πρώτη περιέχει διαίρεσιν διὰ τοῦ β , ἡ δευτέρα διὰ τοῦ $\alpha + \beta$, ἡ τρίτη διὰ τοῦ α^2 κ.ο.κ.

Ἀσκήσεις

74. Τίνες ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων εἶναι ρηταί; ἄρρητοι, ἀκέραιαι; κλασματικά; Διατί;

* Εἰς Θεόδωρον τὸν Κυρηναιὸν ὀφείλονται αἱ ὀνομασίαι ρητή, ἄρρητος.

$$\alpha') 9\alpha^3\beta - \alpha\beta^2 \quad \beta') \sqrt{28\alpha^2\beta} \quad \gamma') 8\sqrt{\chi\psi} - 9\alpha \quad \delta') \frac{\alpha}{\beta} + \frac{19\beta}{\gamma}$$

$$75. \text{ΑΙ παραστάσεις } \alpha') \sqrt{\alpha^2} \quad \beta') \sqrt{(\alpha + \beta)^2} \quad \gamma') \frac{7\gamma}{\sqrt[3]{\delta^3}} \text{ είναι ρηταί ἢ ἄρ-}$$

ρητοί ; Διατί ; δ') Εὑρετε παραστάσεις, αἱ ὁποῖαι φαινομενικῶς εἶναι ἄρρητοι.

76. Αἱ κατωτέρω παραστάσεις εἶναι ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί ; Διατί ;

$$\alpha') \frac{9\alpha^2\beta}{5\alpha} \quad \beta') \frac{16\alpha(\alpha - \beta)^2}{(\alpha - \beta)} \quad \gamma') \frac{6\gamma^2 \cdot x \cdot \psi^2}{5\gamma \cdot x \cdot \psi^2} \quad \delta') \frac{3\alpha^2 + \beta}{\alpha\beta}$$

2. ΠΕΡΙ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ

§ 52. Μονώνυμον λέγεται ἀλγεβρική παράστασις, εἰς τὴν ὁποῖαν οὔτε πρόσθεσις οὔτε ἀφαιρέσις εὐρίσκεται σημειωμένη.

Π. χ. αἱ παραστάσεις : α , $-6\chi\psi^2$, $\frac{3}{7}\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta$, $-\frac{8\alpha\beta}{9\gamma\delta}$ λέγονται μονώνυμα.

Ἀκέραιον λέγεται ἓν μονώνυμον, ἂν μόνον πολλαπλασιασμόν ἐπὶ τῶν γραμμάτων του περιέχῃ. Ἐὰν δὲ περιέχῃ καὶ διαίρεσιν τοῦλάχιστον δι' ἑνὸς τῶν γραμμάτων του, λέγεται **κλασματικὸν** μονώνυμον. Οὕτως, ἐκ τῶν ἀνωτέρω μονωνύμων τὰ μὲν τρία πρῶτα εἶναι ἀκέραια, τὸ δὲ τελευταῖον κλασματικόν.

Ρητὸν λέγεται ἓν μονώνυμον, ἂν δὲν ἔχῃ ρίζαν εἰς ἓν τοῦλάχιστον τῶν γραμμάτων του. Οὕτω τὰ $\frac{3\alpha^2\beta}{\gamma}$, $\sqrt{5\alpha^2\beta}$ εἶναι ρητὰ μονώνυμα.

Ἀρρητον λέγεται ἓν μονώνυμον, ἂν δὲν εἶναι ρητόν.

Ἐὰν εἰς τὸ μονώνυμον ὑπάρχῃ ἀριθμητικὸς τις παράγων γράφεται οὗτος πρῶτος καὶ λέγεται (**ἀριθμητικὸς**) **συντελεστής** τοῦ μονωνύμου. Οὕτως, εἰς τὰ ἀνωτέρω μονώνυμα οἱ συντελεσταὶ κατὰ σειρὰν εἶναι οἱ :

$$1, -6, \frac{3}{7}, -\frac{8}{9}.$$

Τὸ ἄλλο μέρος τοῦ μονωνύμου δύναται νὰ λέγεται **κύριον ποσὸν** αὐτοῦ, εἶναι δὲ αὐτό, εἰς τὰ ἀνωτέρω μονώνυμα κατὰ σειρὰν

$$\alpha, \chi\psi^2, \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta, \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}.$$

Εἰς τὰ μονώνυμα, τὰ (φαινομενικῶς) μὴ ἔχοντα (ἀριθμητικόν) συντελεστήν, ἐννοοῦμεν τοιοῦτον τὸν $+1$, ἢ -1 . Π. χ. τοῦ

α (ἀριθμητικός) συντελεστής είναι $+1$, διότι ο α δύναται νὰ γροφῇ $1 \cdot \alpha$, ἐνῶ τοῦ $-\alpha$ εἶναι ὁ -1 , ἐπεὶ γράφεται $-1 \cdot \alpha$.

Ἄν ὑπάρχουν περισσότεροι τοῦ ἐνὸς ἀριθμητικοὶ παράγοντες εἰς ἓν μονώνυμον, ἀντικαθιστῶμεν αὐτοὺς μὲ τὸ γινόμενόν των τὸ ὁποῖον γράφεται ὡς πρῶτος παράγων αὐτοῦ καὶ εἶναι ὁ ἀριθμητικός συντελεστής τοῦ μονωνύμου. Οὕτως, ἂν ἔχωμεν $-\alpha^2\beta \cdot \frac{4}{5}\gamma$ γράφομεν $(-1) \cdot \frac{4}{5}\alpha^2\beta \cdot \gamma$ ἢ $-\frac{4}{5}\alpha^2\beta\gamma$ καὶ ὁ $-\frac{4}{5}$ εἶναι ὁ ἀριθμητικός συντελεστής τοῦ μονωνύμου τούτου.

Καλοῦμεν συντελεστήν ἐνὸς γράμματος (ἢ τοῦ γινομένου περισσότερων παραγόντων μονωνύμου) τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων παραγόντων αὐτοῦ, π.χ. εἰς τὸ $\alpha^3\chi^2$, συντελεστής τοῦ χ^2 εἶναι ὁ α^3 , εἰς τὸ $-3\alpha^2\beta\chi\psi$ συντελεστής τοῦ $\chi\psi$ εἶναι τὸ $-3\alpha^2\beta$.

Δύο μονώνυμα λέγονται ἀντίθετα, ἂν διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ σῆμα τῶν (ἀριθμητικῶν) συντελεστῶν αὐτῶν, ὡς τὰ $25\alpha^2$ καὶ $-25\alpha^2$.

Βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου ὡς πρὸς ἓν γράμμα του καλεῖται ὁ ἐκθέτης, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ γράμμα τοῦτο εἰς τὸ μονώνυμον.

Π.χ. τοῦ $7\alpha^3\beta$ ὁ βαθμὸς ὡς πρὸς τὸ α εἶναι 3, ὡς πρὸς τὸ β ὁ 1, τοῦ $\frac{3}{4}\alpha^3\beta^2\gamma$ ὁ βαθμὸς ὡς πρὸς τὸ α εἶναι 3, ὡς πρὸς τὸ β ὁ 2, καὶ ὡς πρὸς τὸ γ ὁ 1.

Ἐὰν ἐν μονώνυμον δὲν περιέχῃ γράμμα τι, θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ βαθμὸς του ὡς πρὸς τὸ γράμμα αὐτὸ εἶναι 0. Π.χ. τὸ μονώνυμον $3\alpha^2$ εἶναι 0 βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ β . Διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἀντὶ τοῦ $3\alpha^2$ τὸ $3\alpha^2\beta^0$, ἐπεὶ εἶναι $\beta^0 = 1$. Καὶ τῷ ὄντι, εἶναι $3\alpha^2\beta^0 = 3\alpha^2 \cdot 1 = 3\alpha^2$.

Βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου ὡς πρὸς περισσότερα τοῦ ἐνὸς γράμματά του, λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχουν τὰ γράμματα αὐτὰ εἰς τὸ μονώνυμον.

Π.χ. τὸ μονώνυμον $\frac{3}{4}\alpha^2\beta^3\gamma$ εἶναι πέμπτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ γράμματα α καὶ β , τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ β καὶ γ , τρίτου ὡς πρὸς τὰ α καὶ γ , καὶ ἕκτου ὡς πρὸς τὰ α , β , γ .

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

77. Εὑρετε τὸν συντελεστὴν καὶ τὸ κύριον ποσὸν ἐκάστου τῶν κάτωθι μονωνύμων :

$$\begin{array}{llll} \alpha) 3\alpha^2\beta^3 & \beta) -5\alpha^4\beta^6 & \gamma) -\alpha & \delta) -3x\psi^2 \\ \epsilon) 2x^2 & \sigma\tau) -\frac{4}{5}x^3 & \zeta) -\frac{x^3}{4} & \eta) 0,1 \cdot x^2 \\ \theta) -4,56x^3 & \iota) -\frac{3}{4}\alpha^2 & \iota\alpha) -\frac{5}{8}\alpha^2 5\beta \cdot (-8)\beta \end{array}$$

78. Ὅμοίως τὸν (ἀριθμητικὸν) συντελεστὴν τῶν κάτωθι, καθὼς καὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ α , τοῦ x^3 , τοῦ β^2 :

$$\alpha') \frac{5}{8}\alpha\beta \quad \beta') -\frac{x}{3} \quad \gamma') -\frac{21}{4}x^3 \quad \delta') 3,4x^2 \quad \epsilon') \frac{5}{6}\alpha\beta^2$$

79. Ὅμοίως τῶν κάτωθι, τὸν (ἀριθμητικὸν) συντελεστὴν καὶ τὸν συντελεστήν τοῦ α , τοῦ x , τοῦ β , τοῦ ψ , τοῦ x^2 :

$$\begin{array}{llll} \alpha') 2 \cdot (-3) \cdot 4\psi & \beta') -25\alpha \cdot 6 \cdot \beta & \gamma') 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)x \cdot (-7)\psi & \delta') \frac{3\alpha^2\beta}{4\alpha\gamma} \\ \epsilon') -\frac{4x}{\psi} & \sigma\tau') -\frac{5x^2}{\psi^2} & \zeta') -\frac{2}{5}x^2 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)\psi & \eta') \frac{2}{3}x \cdot (-4) \cdot (3\alpha x) \end{array}$$

80. Τίνος βαθμοῦ εἶναι καθέν τῶν κάτωθι μονωνύμων ὡς πρὸς α , ὡς πρὸς β , ὡς πρὸς γ , ὡς πρὸς α καὶ β , ὡς πρὸς α , β , γ :

$$\alpha) 15\alpha^2\beta\gamma^2 \quad \beta') 121\alpha^3\beta^2\gamma \quad \gamma) -24\alpha\beta^3\gamma^4 \quad \delta) -13\alpha^3\beta^2\gamma^4$$

81. Ὅρίσατε ποῖα ἐκ τῶν ἀνωτέρω μονωνύμων τῶν ἀσκήσεων 79 εἶναι ἀκέραια καὶ ὀρίσατε τίνος βαθμοῦ εἶναι καθέν : $\alpha')$ ὡς πρὸς α , $\beta')$ ὡς πρὸς β , $\gamma')$ ὡς πρὸς x , $\delta')$ ὡς πρὸς ψ , $\epsilon')$ ὡς πρὸς α καὶ β , $\sigma\tau')$ ὡς πρὸς x καὶ ψ .

Ι. ΟΜΟΙΑ ΜΟΝΩΝΥΜΑ

§ 53. Δύο ἢ περισσότερα μονώνυμα λέγονται ὅμοια, ἐὰν ἔχουν τὸ αὐτὸ κύριον ποσόν, διαφέρουν δὲ κατὰ τοὺς (ἀριθμητικούς) συντελεστές των (ἂν διαφέρουν). Οὕτω τὰ μονώνυμα

6α , $\frac{2}{8}\alpha$, -23α εἶναι ὅμοια, ὡς διαφέροντα μόνον κατὰ τοὺς (ἀριθμητικούς) συντελεστές των. Ἐπίσης τὰ $-\frac{39}{47}\beta$, 6β , -17β εἶναι ὅμοια, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, καθὼς καὶ τὰ $12\alpha^2\beta$, $-15\alpha^2\beta$, $23\alpha^2\beta$, $-\alpha^2\beta$, ὡς ἔχοντα τὸ αὐτὸ κύριον ποσὸν $\alpha^2\beta$.

Μονώνυμα λέγονται ὅμοια, ὡς πρὸς ἓν ἢ περισσότερα γράμματα αὐτῶν, ἂν ἔχουν τὰ γράμματα ταῦτα μὲ τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας.

Οὕτω τὰ μονώνυμα $5\alpha^2\beta\gamma$, $-6\alpha^2\beta\delta^2$, $218\alpha^2\beta\delta$ εἶναι ὅμοια ὡς πρὸς τὰ γράμματα αὐτῶν α καὶ β .

II. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ

§ 54. Καλοῦμεν **ἄθροισμα** δοθέντων μονωνύμων (ἢ καὶ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων) τὴν ἀλγεβρικήν παράστασιν, ἡ ὁποία προκύπτει, ὅταν γράψωμεν τὰ δοθέντα μονώνυμα (ἢ τὰς δοθείσας παραστάσεις) τὸ ἐν παρὰ τὸ ἄλλο, καθέν μὲ τὸ πρὸ αὐτοῦ σῆμα.

Οὕτως ἡ πρόσθεσις τῶν μονωνύμων $4\alpha^2$, $-15\beta^2$, $\frac{6}{\gamma^2}$ δίδει ὡς ἄθροισμα τὸ $4\alpha^2 - 15\beta^2 + \frac{6}{\gamma^2}$.

Ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὐρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν λόγῳ μονωνύμων (ἢ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων) λέγεται **πρόσθεσις** αὐτῶν.

§ 55. Τὸ **ἄθροισμα** δοθέντων ὁμοίων μονωνύμων εἶναι **μονώνυμον ὅμοιον** πρὸς αὐτά, ἔχον **συντελεστήν** τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν δοθέντων.

Ἔστω π.χ., ὅτι ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων 3α καὶ 4α . Παρατηροῦμεν, ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ $3\alpha + 4\alpha$, τὸ ὁποῖον $=$ μὲ $(3+4)\alpha$. Διότι, ἂν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν τοῦτον (κατὰ τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον), εὐρίσκομεν $(3+4)\alpha = 3\alpha + 4\alpha$.

Ἐπίσης ἔχομεν π.χ. $-3\alpha + 4\alpha + \frac{2}{3}\alpha - 13\alpha = (-3+4+\frac{2}{3}-13)\alpha$, καί, ἐπειδὴ εἶναι $-3+4+\frac{2}{3}-13 = -12+\frac{2}{3} = -\frac{36}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{34}{3}$, ἔπεται ὅτι ἔχομεν ἐξαγόμενον τὸ $-\frac{34}{3}\alpha$.

Τὸ ἄθροισμα π.χ. τῶν $-\frac{3}{4}\alpha^2$, $\frac{5}{8}\alpha^2$, $4\alpha^2$, $-7\alpha^2$ εἶναι :

$$-\frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{5}{8}\alpha^2 + 4\alpha^2 - 7\alpha^2 = \left(-\frac{6}{8} + \frac{5}{8} - 3\right)\alpha^2 = \left(-\frac{1}{8} - 3\right)\alpha^2 = -3\frac{1}{8}\alpha^2.$$

Ὁμοίως ἔχομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα π.χ. τῶν $\chi^2\psi$, $-3\chi^2\psi$, $7\chi^2\psi$ $-\frac{4}{9}\chi^2\psi$ εἶναι :

$$\chi^2\psi - 3\chi^2\psi + 7\chi^2\psi - \frac{4}{9}\chi^2\psi = \left(1-3+7-\frac{4}{9}\right)\chi^2\psi = \left(5-\frac{4}{9}\right)\chi^2\psi = 4\frac{5}{9}\chi^2\psi.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὐρίσκομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων $+2\alpha^2\beta$, $-6\alpha^2\beta$, $+13\alpha^2\beta$, $-\alpha^2\beta$ εἶναι :

$$2\alpha^2\beta - 6\alpha^2\beta + 13\alpha^2\beta - \alpha^2\beta = (2 - 6 + 13 - 1)\alpha^2\beta = 8\alpha^2\beta.$$

Ἡ ἀνωτέρω πράξις μεταξύ τῶν ὁμοίων μονωνύμων, με τὴν ὁποῖαν ἀντικαθιστῶνται αὐτὰ με ἓν τοιοῦτο ἴσον με τὸ ἄθροισμὰ των καλεῖται **ἀναγωγή ὁμοίων μονωνύμων**.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

82. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

α') $9\mu + 4\mu$	β') $-10\mu + (-6\mu)$	γ') $-4\mu + 6\mu$	δ') $5\mu + (-9\mu)$
ε) $8\alpha + \alpha + 9\alpha$	στ) $\rho - 7\rho + (6\rho - 3\rho)$	ζ') $7x + (-8x) + 6x + x$	
	η') $9\alpha + (-6\alpha + \alpha)$	θ') $-x + 9x + [(-6x) + 9x]$	

83. Εὐρετε τὸ ἐξαγόμενον τῶν :

α') $3x^2 - 5x^2 + 8x^2 - 3x^2$	β') $4\alpha x^3 - 4\beta x^3 - 5\gamma x^3$
γ') $3a^2\beta x^2 - 2a^2\beta x^3 - 6a^2\beta x$	δ') $4x\psi^3 - 5x^2\psi^3 + 3x^3\psi^3 - 10x^4\psi^3$

$$\epsilon') \frac{5}{2} x^2 + 3\alpha x - \frac{7}{2} \alpha^2 - 2x^2 + \alpha x + 1 \frac{1}{2} \alpha^2$$

84. Ἐκτελέσατε τὴν ἀναγωγήν μεταξύ τῶν ὁμοίων μονωνύμων ἐκ τῶν κάτωθι καὶ εὐρετε τὸ ἄθροισμὰ των :

$$7 \frac{3}{4} x^2\psi, -x, 19 \frac{3}{8} \phi^2, 1,75x, -8 \frac{3}{8} \psi.$$

$$5 \frac{5}{12} x, -1,125\psi, -0,25x^2\psi, 0,625\phi^2.$$

85. Νὰ γίνῃ ἡ ἀναγωγή μεταξύ τῶν ὁμοίων μονωνύμων ἐκ τῶν κάτωθι

$$\alpha') 3\alpha^2\beta, -8\chi\psi^3, 3\alpha^2\beta, 32\chi\psi^3, 0,35\alpha^2\beta, -0,25\chi\psi^3, -0,5\alpha^2\beta.$$

$$\beta') 30\chi\psi^2, -24\alpha^2\beta^3\gamma, 16x\psi^2, -12,3\alpha^2\beta^3\gamma, -0,75\alpha^2\beta^3\gamma,$$

$$\gamma') -6\alpha^2\beta\gamma, 12\alpha^2\beta\gamma, -7\alpha^2\beta\gamma, -3,6\alpha^2\beta\gamma, 0,3\alpha^2\beta\gamma, 7,5\alpha^2\beta\gamma.$$

3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΙΜΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΣ

§ 56. Καλοῦμεν **ἀριθμητικὴν τιμὴν** ἀλγεβρικῆς παραστάσεως, τὸ ἐξαγόμενον τὸ προκύπτει, ἂν τὰ εἰς τὴν παράστασιν ὑπάρχοντα γράμματα ἀντικαταστήσωμεν, με ἀριθμοὺς ὠρισμένους καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι σημειοῦνται εἰς αὐτήν.

(Ὑποτίθεται, ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν γραμμάτων θὰ εἶναι τοιαῦται, ὥστε ὁ μὲν παρονομαστής τῆς παραστάσεως, ἂν ἔχη τοιοῦτον, νὰ μὴ λαμβάνῃ τὴν τιμὴν μηδέν, ἡ δὲ ὑπὸ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ποσότης νὰ λαμβάνῃ τιμὴν θετικὴν ἢ μηδέν).

Ούτω, εάν είναι $\alpha = 3$, ή παράστασις 4α έχει την τιμήν $4 \cdot 3 = 12$.

Ἡ παράστασις $\alpha^4 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$, όταν $\alpha = 3$, έχει την τιμήν $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

Ἐάν είναι $\alpha = 5$, $\beta = 6$, $\gamma = 7$, ή παράστασις $\frac{9}{14} \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ έχει την τιμήν $\frac{9}{14} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 135$.

Ἐάν είναι $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\gamma = 5$, ή παράστασις $3\alpha^2 + 2\gamma - 5\beta$ έχει την τιμήν $3 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot 5 - 5 \cdot 1 = 12 + 10 - 5 = 17$.

Ἐάν είναι $x = 2$, $\psi = 3$, $\omega = 4$, ή παράστασις $\frac{8x^2\psi}{3\omega^3}$ έχει την τιμήν $\frac{8 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{2}$

Δύο ἀλγεβρिकाὶ παραστάσεις ἰσοδύναμοι δίδουν ἴσους ἀριθμούς, όταν τὰ γράμματά των ἀντικατασταθοῦν μὲ τὰς αὐτάς, ἀλλὰ ὅποιασδήποτε τιμὰς.

Π.χ. αἱ $\alpha + \beta$ καὶ $\beta + \alpha$ εἶναι ἰσοδύναμοι παραστάσεις καὶ δίδουν ἴσους ἀριθμούς, ἂν τεθῇ π.χ. $\alpha = 1$, $\beta = -5$, ὅτε $\alpha + \beta = 1 - 5 = -4 = -5 + 1$.

Ἀσκήσεις

86. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ αἱ τιμαὶ διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων :

$$\alpha') -6x + 7\psi + (-3x), \quad \text{ὅταν εἶναι } x = 3, \psi = 4$$

$$\beta') -9x + (-7\psi) + (-3\psi) + (-6x) \quad \text{ὅταν εἶναι } x = 3, \psi = -4$$

87. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν παραστάσεων :

$$\alpha') \alpha^3 - 6\alpha^2\beta + \beta^3, \quad \text{ὅταν εἶναι } \alpha = 2, \beta = 6.$$

$$\beta') \frac{(\alpha + \beta)(\alpha - 3\beta)}{6\alpha - 2\beta}, \quad \text{ὅταν εἶναι } \alpha = 2, \beta = 5.$$

88. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν παραστάσεων :

$$\alpha') (\alpha + \beta) \cdot [\alpha^2 - (\beta^2 - 6\alpha\gamma)], \quad \text{ὅταν εἶναι } \alpha = -5, \beta = 2, \gamma = -3$$

$$\beta') \sqrt{\alpha^3 - 2\beta - 4\gamma - 2\sqrt{4\alpha^2 + \beta}} \cdot (\alpha + \gamma) \quad \text{ὅταν εἶναι } \alpha = 9, \beta = -4, \gamma = 3$$

89. Ἐάν τεθῇ $\varphi(x) = 3x$, νὰ δειχθῇ, ὅτι εἶναι $\varphi(2) \cdot \varphi(4) = \varphi(6)$

90. Ἐάν τεθῇ $\varphi(x) = 4x^2 + 4x - 3$ καὶ $\psi(x) = 9(x + 8)$, δείξατε, ὅτι $\varphi(5) = \psi(5)$

91. Ἐάν $\varphi(x, \psi, z) = (x + \psi + z)(x + \psi - z)(x - \psi - z)$ δείξατε ὅτι :

$$\varphi(0, 1, 2) + \varphi(0, -1, -2) = 0.$$

4. ΠΕΡΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

§ 57. Καλοῦμεν πολυώνυμον τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα μονωνύμων (τὰ ὅποια δὲν εἶναι πάντα ὅμοια).

Π.χ. τὸ $\frac{3\alpha\beta}{\gamma} + 5\alpha^3 - \frac{6\alpha^3\gamma}{3\beta} + 15$ εἶναι πολυώνυμον καὶ εἶναι ἄθροισμα τῶν μονωνύμων $\frac{3\alpha\beta}{\gamma}$, $5\alpha^3$, $-\frac{6\alpha^3\gamma}{3\beta}$, 15 .

Ἐν πολυώνυμον λέγεται **ρητόν**, ἐὰν ἕκαστον τῶν προσθετέων του μονωνύμων εἶναι ρητόν.

Ἀκέραιον λέγεται ἐν πολυώνυμον, ἐὰν ὅλοι οἱ προσθετέοι του εἶναι ἀκέραια μονώνυμα. **Ἄρρητον** λέγεται ἐν πολυώνυμον, ἂν τουλάχιστον εἷς τῶν προσθετέων του εἶναι μονώνυμον ἄρρητον, καὶ τέλος **κλασματικὸν** λέγεται, ἐὰν τοῦλάχιστον εἷς τῶν προσθετέων του εἶναι κλασματικὸν μονώνυμον.

Οὕτω τὸ $3\alpha^2 + 5\alpha\beta\gamma - 13\gamma^2$ λέγεται ἀκέραιον πολυώνυμον, εἶναι δὲ ἄθροισμα τῶν μονωνύμων: $3\alpha^2$, $5\alpha\beta\gamma$, $-13\gamma^2$.

Τὸ $\frac{3}{4}x^2\psi + \frac{5}{8}\frac{x^3}{\psi} - \frac{4}{9}\psi^2 + 6$ λέγεται ρητόν πολυώνυμον.

Τὸ $\sqrt{x} + 4x^2 - 6\sqrt{x-7}$ λέγεται ἄρρητον πολυώνυμον.

Ὅμοίως τὸ $-\frac{3}{4x} - \frac{5}{8}x^2 + \frac{4}{9}\frac{x}{\psi} - 7$ λέγεται κλασματικὸν πολυώνυμον.

Ἐκαστον μονώνυμον πολυωνύμου λέγεται καὶ **ὅρος** αὐταῦ, δύναται δὲ εἷς ὅρος νὰ εἶναι ἀριθμὸς τις σχετικὸς.

Εἷς τοιοῦτος ὅρος δύναται νὰ ὑποτεθῇ, ὅτι ἔχει γράμματα καὶ καθὲν μὲ ἐκθέτην μηδέν, ἢ νὰ θεωρηθῇ ὡς μονώνυμον βαθμοῦ 0 ὡς πρὸς οἰαδήποτε γράμματα.

Ὁρος πολυωνύμου λέγεται συνήθως θετικὸς μὲν ἐὰν ἔχη ἀριθμητικὸν συντελεστήν θετικόν, ἀρνητικὸς δὲ ἐὰν ἔχη ἀρνητικὸν ἀριθμητικὸν συντελεστήν.

Πολυώνυμον ἀκέραιον λέγεται **διώνυμον** μὲν, ἐὰν ἔχη δύο ὅρους, καθὼς τὰ $\alpha + \beta$, $\alpha^2 + \beta^2$, $x^2 + 6$, **τριώνυμον** δέ, ἐὰν ἔχη τρεῖς ὅρους, καθὼς τὰ $x^2 + \lambda x - 8$, $\alpha + \beta - \gamma$, $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.

§ 58. Δοθέντος ἀκεραίου πολυωνύμου καλοῦνται **ὅμοιοι ὅροι**, τὰ ὅμοια μονώνυμα αὐτοῦ.

Δοθέντος άκεραίου πολυωνύμου με όμοίους όρους δυνάμεθα ν' άντικαταστήσωμεν αυτούς με τὸ άλγεβρικόν άθροισμά των.

Οὕτω π.χ. εἰς τὸ άκεραῖον πολυώνυμον $6\alpha\psi^3 + \frac{3}{5}\alpha\psi^3 - 2\alpha^3\psi - \psi^4 - 7\alpha\psi^3 + 2\alpha^2\psi^2$ οἱ όροι $6\alpha\psi^3$, $\frac{3}{5}\alpha\psi^3$, $-7\alpha\psi^3$ εἶναι όμοιοι καὶ ἔχουν άλγεβρικόν άθροισμα $(6 + \frac{3}{5} - 7)\alpha\psi^3 = -\frac{2}{5}\alpha\psi^3$. Ἀντικαθίστων ἑνὸς εἰς τὸ δοθέν πολυώνυμον τοὺς τρεῖς όμοίους όρους του με τὸ $-\frac{2}{5}\alpha\psi^3$ καὶ ἔχομεν, ἀντὶ τοῦ δοθέντος, τὸ άκεραῖον πολυώνυμον $-\frac{2}{5}\alpha\psi^3 - 2\alpha^3\psi - \psi^4 + 2\alpha^2\psi^2$, τὸ όποῖον λέγεται **ἀνηγμένον** πολυώνυμον τοῦ δοθέντος καὶ εἶναι ἰσοδύναμον αὐτοῦ.

Τὴν ἰσοδυναμίαν συμβολίζομεν ἐνίστε καὶ με τὸ $\equiv$ (σύμβολον τῆς ταυτοτήτος), ἥτοι θέτομεν :

$$6\alpha\psi^3 + \frac{3}{5}\alpha\psi^3 - 2\alpha^3\psi - \psi^4 - 7\alpha\psi^3 + 2\alpha^2\psi^2 \equiv -\frac{2}{5}\alpha\psi^3 - 2\alpha^3\psi - \psi^4 + 2\alpha^2\psi^2$$

$$\begin{aligned} \text{Ὁμοίως ἔχομεν π.χ. } 5\chi^3\psi + \chi^4 - 3\chi^3\psi + 2\chi^4 - 5\chi^2\psi^2 + \chi^3\psi - 2\chi^2\psi^2 &\equiv \\ (1+2)\chi^4 + (5-3+1)\chi^3\psi + (-5-2)\chi^2\psi^2 &\equiv 3\chi^4 + 3\chi^3\psi - 7\chi^2\psi^2. \end{aligned}$$

§ 59. Βαθμὸς άκεραίου πολυωνύμου ὡς πρὸς ἓν γράμμα του, λέγεται ὁ μέγιστος τῶν ἐκθετῶν τοὺς όποίους ἔχει τὸ γράμμα τοῦτο εἰς τοὺς όρους τοῦ πολυωνύμου. Ἐὰν ὁ ἐκθέτης οὗτος εἶναι 1, 2, 3, τὸ πολυώνυμον λέγεται **πρώτου, δευτέρου, τρίτου... βαθμοῦ** ὡς πρὸς τὸ γράμμα τοῦτο. Οὕτω τὸ $3\alpha^2 - 5\alpha\beta\gamma - 12\gamma^3$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς α καὶ τρίτου ὡς πρὸς γ, πρώτου δὲ ὡς πρὸς β.

Βαθμὸς άκεραίου πολυωνύμου ὡς πρὸς δύο, τρία . . . γράμματα αὐτοῦ, καλεῖται ὁ μέγιστος τῶν βαθμῶν τῶν μονωνύμων του ὡς πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα.

Οὕτω τὸ $3\chi^2 - 2\chi\psi + 2\chi - 7$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ χ καὶ ψ. Τὸ $5\alpha^2 - 3\alpha\beta^2\gamma + 13\beta\gamma$ εἶναι τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, β, γ, καὶ τρίτου ὡς πρὸς β, γ.

Ἐστω τὸ άκεραῖον πολυώνυμον $8\chi + \chi^2 + 16$. Ἐὰν γράψωμεν αὐτό, ὥστε οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος χ νὰ βαίνουν αύξανόμενοι ἀπὸ όρου εἰς όρον, δηλαδή ὡς ἐξῆς : $16 + 18\chi + \chi^2$, λέγομεν ὅτι τὸ πολυώνυμον τοῦτο εἶναι **διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος χ**. Ὁμοίως, ἐὰν γράψωμεν αὐτό, ὥστε οἱ

ἐκθέται τοῦ χ νὰ βαίνουν ἐλαττούμενοι ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον, δηλαδή οὕτω : $\chi^2 + 8\chi + 16$, λέγομεν, ὅτι τοῦτο εἶναι **διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος χ , ἀνηγμένον.**

Ἐν γένει πᾶν πολυώνυμον δύναται νὰ διαταχθῇ, ὡς τὸ ἀνωτέρω, κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἐνὸς γράμματος αὐτοῦ.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

92. Τὰ κάτωθι πολυώνυμα τίνος βαθμοῦ εἶναι ὡς πρὸς α , ὡς πρὸς x ; ὡς πρὸς α καὶ x ; Διατάξατε αὐτὰ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ α καὶ τὰς κατιούσας τοῦ x , μετὰ τὰς δυνατὰς ἀναγωγάς.

$$\alpha') 3\alpha^2x^4 - 6\alpha x^5 - 28\alpha^3x^3 + 27\alpha^6 + x^6 - 54\alpha^5x + 9\alpha^4x^2$$

$$\beta') -3x^6 - \alpha^6 + 7\alpha x^5 + 27\alpha^5x + 0,7\alpha^4x^2 - 0,7\alpha^2x^4 - \alpha^3x^3$$

$$\gamma') 16x^6 + \frac{2}{3}\alpha x^5 + 15\alpha^5x + 7\alpha^6 - 7\alpha^4x^2 + \frac{1}{12}\alpha^2x^4 - 11\alpha^3x^3$$

$$\delta') -2\alpha^6x - 3x^6 + 13\alpha^5x + 3\alpha^6 - \frac{5}{2}\alpha^2x^4 + 6\alpha^3$$

Β'. ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

1. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

§ 60. Καλοῦμεν **ἄθροισμα δοθέντων πολυωνύμων**, τὸ πολυώνυμον τὸ ἔχον ὡς ὅρους τοὺς ὅρους τῶν δοθέντων καὶ ἕκαστον μὲ τὸ σῆμα του.

Τὸ ἄθροισμα π.χ. τῶν $3\alpha^2x + \beta^3 + 6 + \alpha^4$ καὶ $-\beta^3 - 8 + 2\alpha^4 + 2\alpha^2x$, τὸ ὁποῖον παριστάνομεν καὶ ὡς ἑξῆς :

$$(3\alpha^2x + \beta^3 + 6 + \alpha^4) + (-\beta^3 - 8 + 2\alpha^4 + 2\alpha^2x)$$

εἶναι τὸ πολυώνυμον $3\alpha^2x + \beta^3 + 6 + \alpha^4 - \beta^3 - 8 + 2\alpha^4 + 2\alpha^2x$.

Ἐπειδὴ ὑπάρχουν ὅμοιοι ὅροι εἰς τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο, ἐκτελοῦντες τὴν ἀναγωγήν αὐτῶν, εὐρίσκομεν ἐξαγόμενον τὸ $5\alpha^2x + 3\alpha^4 - 2$.

Ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὐρίσκομεν τὸ ἄθροισμα δοθέντων πολυωνύμων, λέγεται **πρόσθεσις** αὐτῶν.

Ὅμοίως εὐρίσκομεν τὸ ἄθροισμα καὶ περισσοτέρων τῶν δύο πολυωνύμων, (τὰ ὁποῖα πρὸς εὐκολίαν ὑποθέτομεν ἀνηγμένα), ἐκτελοῦμεν δὲ ἀναγωγήν τῶν ὁμοίων ὁρων εἰς τὸ ἐξαγόμενον, ἐὰν ὑπάρχουν τοιοῦτοι.

Συνήθως, όταν πρόκειται να εὑρωμεν τὸ ἄθροισμα (ἀνηγμένων) πολυωνύμων, ἐχόντων μεταξύ των ὁμοίους ὅρους, γράφομεν τὸ ἐν κάτωθι τοῦ ἄλλου, ὥστε οἱ ὁμοιοὶ ὅροι νὰ εὐρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην (καθ' ὅσον τοῦτο εἶναι δυνατὸν) διὰ νὰ εὐκολύνεται ἡ ἀναγωγή τούτων. Οὕτω π.χ., ἐὰν ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων

$$\begin{aligned} & 5\alpha^5 - 4\alpha^3\beta^2 + 8\alpha^4\beta - 7\alpha\beta^4\gamma^2 + 2\alpha^2\beta^3\gamma + \gamma^3 \\ & 2\alpha^2\beta^3\gamma + 6\alpha^5 - 12\alpha^4\beta + 2\alpha^3\beta^2 - \alpha\beta^4\gamma^2 - 3\gamma^3 \\ & - 2\alpha^5 - 6\alpha^4\beta + 9\alpha^2\beta^3\gamma - 12\alpha^3\beta^2 + \alpha\beta^4\gamma^2 - 7\gamma^3 \end{aligned}$$

γράφομεν πρῶτον αὐτὰ ὡς ἐξῆς :

$$\begin{aligned} & 5\alpha^5 + 8\alpha^4\beta - 4\alpha^3\beta^2 + 2\alpha^2\beta^3\gamma - 7\alpha\beta^4\gamma^2 + \gamma^3 \\ & 6\alpha^5 - 12\alpha^4\beta + 2\alpha^3\beta^2 + 2\alpha^2\beta^3\gamma - \alpha\beta^4\gamma^2 - 3\gamma^3 \\ & - 2\alpha^5 - 6\alpha^4\beta - 12\alpha^3\beta^2 + 9\alpha^2\beta^3\gamma + \alpha\beta^4\gamma^2 - 7\gamma^3 \end{aligned}$$

Ἀκολουθῶς κάμνομεν τὴν ἀναγωγήν ὁμοίων ὁρων, τῶν κειμένων εἰς τὰς αὐτὰς στήλας καὶ εὐρίσκομεν ἐξαγόμενον

$$9\alpha^5 - 10\alpha^4\beta - 14\alpha^3\beta^2 + 13\alpha^2\beta^3\gamma - 7\alpha\beta^4\gamma^2 - 9\gamma^3$$

Ὁμοίως ὡς ἀνωτέρω ὀρίζομεν τὴν πρόσθεσιν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

” Α Σ Κ Η Σ Ι Σ

93. Νὰ προστεθοῦν τὰ κάτωθι πολυώνυμα :

$$\begin{array}{lll} \alpha') 2\alpha - 5\beta + 2\gamma, & 2\alpha + 3\beta + \gamma, & -3\alpha - 2\gamma \\ \beta') 2x^2 - 2x\psi + 3\psi^2, & -x^2 + 5x\psi + 4\psi^2, & x^2 - 2x\psi - 6\psi^2 \\ \gamma') 2\alpha\beta + 3\alpha\gamma + 6\alpha\beta\gamma, & -5\alpha\beta + 2\beta\gamma - 5\alpha\beta\gamma, & 3\alpha\beta - 2\beta\gamma \\ \delta') \frac{2x^2}{3} + \frac{1}{3}x\psi - \frac{1}{4}\psi^2, & -x^2 - \frac{2x\psi}{3} + 2\psi^2, & \frac{2x^2}{3} - x\psi - \frac{5}{4}\psi^2 \\ \epsilon') \frac{5x^2}{8} - \frac{x\psi}{3} + \frac{3\psi^2}{8}, & -\frac{3x^2}{4} + \frac{14x\psi}{15} - \psi^2, & \frac{x^2}{2} - x\psi + \frac{\psi^2}{5} \end{array}$$

2. ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

§ 61. Καλοῦμεν ἀφαίρεσιν ἀλγεβρικῆς παραστάσεως, ἔστω Β ἀπὸ ἄλλης Α, τὴν εὐρεσιν τρίτης Γ, ἡ ὁποία προστιθεμένη εἰς τὴν Β δίδει ἄθροισμα τὴν Α. Τὸ ἐξαγόμενον Γ τῆς ἀφαιρέσεως λέγεται **διαφορά** τῶν Α καὶ Β.

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μονώνυμόν τι ἀπὸ δοθεῖσαν παράστασιν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς ταύτην τὸ ἀντίθετον τοῦ δοθέντος.

Διότι, ἐὰν π.χ. θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν τοῦ $-α^3$ ἀπὸ τοῦ $α^3ψ$ καὶ παραστήσωμεν αὐτὴν μὲ $Δ$, θὰ εἶναι

$$Δ = α^3ψ - (-α^3).$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸν ὅρισμόν τῆς ἀφαιρέσεως θὰ ἔχωμεν

$$Δ + (-α^2) = α^3ψ$$

Προσθέτοντες εἰς τὰ ἴσα τὸ $α^2$ εὐρίσκομεν $Δ + (-α^2) + α^2 = α^3ψ + α^2$ καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν $-α^2$ καὶ $α^2$, ἔχομεν $Δ = α^3ψ + α^2$

Ὅμοίως εὐρίσκομεν ὅτι ἡ διαφορὰ π.χ. τοῦ $α^2β$ ἀπὸ τοῦ $3α^2β + 6αβ^2 - β^3$ εἶναι $3α^2β + 6αβ^2 - β^3 - α^2β = 2α^2β + 6αβ^2 - β^3$.

Ἐὰν ζητεῖται π.χ. ἀπὸ τὸ πολυνώνμιον $α^3χ - α^2ψ + α^3$ νὰ ἀφαιρεθοῦν περισσότερα τοῦ ἐνὸς μονώνυμα, ἔστω τὰ $α^3χ$, $-3α^2ψ^3$, $-α^4$ $2αψ^2$ ἢ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ δοθὲν πολυνώνμιον τὸ πρῶτον μονώνυμον, ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τὸ δεύτερον καὶ ἀκολουθῶς ἀπὸ τὸ νέον ἐξαγόμενον τὸ τρίτον καὶ οὕτω καθεξῆς, ἢ (συντομώτερον) προσθέτομεν εἰς τὸ δοθὲν πολυνώνμιον τὸ ἄθροισμα τῶν πρὸς ἀφαίρεσιν δοθέντων μονωνύμων, ἕκαστον μὲ ἀντίθετον σῆμα. Ἦτοι ἔχομεν κατὰ ταῦτα :

$$α^3χ - α^2ψ + α^3 - α^2χ + 3α^2ψ^3 + α^4 - 2αψ^2.$$

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ δοθείσης παραστάσεως δοθὲν πολυνώνμιον, γράφομεν κατόπιν αὐτῆς τοὺς ὅρους τοῦ ἀφαιρετέου, καθένα μὲ τὸ ἀντίθετον πρόσημόν του.

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται καθ' ὅμοιον τρόπον, καθὼς καὶ ἀνωτέρω. Οὕτω ἡ διαφορὰ τοῦ $9α^3χ - 9α^3χ^2 - 6α^2χ^2$ ἀπὸ τοῦ $9α^2χ + 18α^3χ^2 - α^2χ^2$, τὴν ὁποίαν σημειώνομεν ὡς ἐξῆς :

$$(9α^2χ + 18α^3χ^2 - α^2χ^2) - (9α^3χ - 9α^3χ^2 - 6α^2χ^2)$$

$$\text{εἶναι} \quad 9α^2χ + 18α^3χ^2 - α^2χ^2 - 9α^3χ + 9α^3χ^2 + 6α^2χ^2$$

καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὄρων

$$6α^2χ + 27α^3χ^2 + 5α^2χ^2.$$

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ δοθὲν πολυνώνμιον ἄλλο τοιοῦτο, ἐν πρῶτοις δι' ἕκαστον εὐρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον αὐτοῦ ἀνηγμένον, ἐὰν δὲ ἔχουν μεταξύ των ὁμοίους ὅρους, συνήθως διατάσσομεν ταῦτα κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος καὶ γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον, καθὼς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν, ἀλλὰ μὲ ἡλλαγμένα τὰ πρόσημα τῶν ὄρων των.

Οὕτω π.χ., ἐὰν ζητοῦμεν τὴν διαφορὰν τοῦ

$$9α^3 - 8α^2β + 5αβ^2 - 7β^3 \text{ ἀπὸ τοῦ } 7α^3 + 2α^2β + 9αβ^2 - 11β^3 - 4γ^2.$$

γράφομεν

$$7\alpha^3 + 2\alpha^2\beta + 9\alpha\beta^2 - 11\beta^3 - 4\gamma^2 \\ - 9\alpha^3 + 8\alpha^2\beta - 5\alpha\beta^2 + 7\beta^3$$

καὶ ἐκτελοῦντες τὴν ἀναγωγὴν ὁμοίων ὄρων εὐρίσκομεν τὴν διαφορὰν

$$-2\alpha^3 + 10\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2 - 4\beta^3 - 4\gamma^2.$$

Ἀσκήσεις

94. α') Νὰ εὐρεθῇ ἡ διαφορὰ τοῦ $4x^2 + 3x\psi + 3\psi^2$ ἀπὸ τὸ $x^2 - x\psi + 2\psi^2$

β') Νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ τὸ $\alpha^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

γ') Ἀπὸ τὸ $\alpha^2x^2 + 4\alpha x\psi - 3\alpha\beta\psi^2$ τὸ $4\alpha\beta\psi^2 - 5\alpha x\psi - 2\alpha^2x^2$

δ') Ἀπὸ τὸ $10\alpha\mu - 15\beta\nu - \gamma\rho + 5\delta\lambda$ τὸ $-9\alpha\mu + 2\beta\nu - 5\delta\lambda - \gamma\rho$

ε') Ἀπὸ τὸ $4\psi^2 + x^2 - 4x\psi - 3x + 4$ τὸ $\psi^2 + x^2 + 2x\psi - 4\psi - 2x$

95. Νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ $2,5x^2 + 3\alpha x - \frac{7}{9}\alpha^2$ τὸ $2x^2 - \alpha x - 0,5\alpha$

96. Νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ $\frac{x^2}{4} - 6x + \frac{9}{15}$ τὸ $-\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{3x}{9} + \frac{1}{5}$.

3. ΠΕΡΙ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΓΚΥΛΩΝ

§ 62. Τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν δύο πολυωνύμων παριστάνομεν, ὡς εἶδομεν, κλείοντες ἕκαστον αὐτῶν ἐντὸς παρενθέσεως (ἢ ἀγκύλης) καὶ συνδέοντες ταύτας μὲ τὸ + ἢ - τῆς πράξεως.

Π.χ. τὸ ἄθροισμα τῶν $2\alpha^2 + 3\alpha\beta - \beta^2$ καὶ $-\alpha^2 - \alpha\beta + \gamma$ παριστάνομεν μὲ $(2\alpha^2 + 3\alpha\beta - \beta^2) + (-\alpha^2 - \alpha\beta + \gamma)$

καὶ ἰσοῦται τοῦτο μὲ $2\alpha^2 + 3\alpha\beta - \beta^2 - \alpha^2 - \alpha\beta + \gamma$

Ἡ διαφορὰ τῶν παραστάσεων παριστάνεται μὲ

$$(2\alpha^2 + 3\alpha\beta - \beta^2) - (-\alpha^2 - \alpha\beta + \gamma)$$

καὶ ἰσοῦται μὲ $2\alpha^2 + 3\alpha\beta - \beta^2 + \alpha^2 + \alpha\beta - \gamma$.

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι :

Ἐὰν μὲν πρὸ παρενθέσεως ἢ ἀγκύλης ἐντὸς τῆς ὁποίας ἔχομεν ὄρους, ὑπάρχῃ τὸ +, δυνάμεθα νὰ τὴν παραλείψωμεν χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὰ πρόσημα τῶν ἐντὸς αὐτῆς ὄρων, ἐὰν δὲ ὑπάρχῃ τὸ -, τὴν παραλείπομεν, ἀφοῦ προηγουμένως ἀλλάξωμεν τὸ πρόσημον καθενὸς τῶν ἐντὸς αὐτῆς ὄρων.

Οὕτως ἔχομεν $\alpha - (\beta - \gamma + \delta) = \alpha - \beta + \gamma - \delta$

Διότι τὸ -, τὸ πρὸ τῆς παρενθέσεως, σημαίνει, νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ $\beta - \gamma + \delta$ ἀπὸ τὸ α καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἀρκεῖ νὰ προσθέ-

σωμεν εἰς τὸ α τοὺς ὅρους τῆς παρενθέσεως καθένα μὲ ἡλλαγμένον τὸ πρόσημόν του.

Ὅμοιως ἔχομεν :

$$\alpha - [-(\beta + \gamma) + (\alpha - \beta) - \gamma + \alpha] = \alpha + (\beta + \gamma) - (\alpha - \beta) + \gamma - \alpha = \\ = \alpha + \beta + \gamma - \alpha + \beta + \gamma - \alpha = -\alpha + 2\beta + 2\gamma.$$

Ἀντιστρόφως, δυνάμεθα νὰ θέτωμεν ὅρους ἀθροίσματος ἐντὸς παρενθέσεως ἢ ἀγκύλης, καὶ ἂν μὲν θέτωμεν τὸ σῆμα + πρὸ αὐτῆς ἕκαστος ὅρος διατηρεῖ τὸ σῆμα του ἐντὸς ταύτης, ἂν δὲ τὸ -, οἱ ὅροι γράφονται ἕκαστος μὲ ἡλλαγμένον τὸ σῆμα του ἐντὸς αὐτῆς. Οὕτω π.χ. ἔχομεν :

$$\alpha - \beta - \gamma = \alpha + (-\beta - \gamma) = \alpha - (\beta + \gamma).$$

Ἀ σ κ ῆ σ ε ι ς κ α ἰ π ρ ο β λ ῆ μ α τ α

Ὁ μ ἄ ς π ρ ὶ τ η. 97. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ αἱ τιμαὶ τῶν διὰ τὰς σημειούμενας τιμὰς τῶν γραμμάτων :

α') $3x - (7x - 5\psi)$

ὅταν $x = \psi = 3$.

β') $3x + 6\psi - 9\omega + (14x - 7\psi + 9\omega)$

ὅταν $x = 6, \psi = 3, \omega = 4$.

γ') $\theta - (\mu - \nu)$ ἔαν εἶναι $\theta = x + 9\psi - 6\omega, \mu = 4x - 7\psi + 2\omega, \nu = x + \psi + \omega$.

Ὁ μ ἄ ς δ ε υ τ ῆ ρ α. 98. Ἐκτελέσατε τὰς κατωτέρω πράξεις, ὥστε νὰ ἐξαλειφθοῦν αἱ παρενθέσεις καὶ αἱ ἀγκύλαι καὶ εὐρετε τὰς τιμὰς τῶν ἐξαγομένων διὰ τὰς δεδομένας τιμὰς τῶν γραμμάτων :

α') $\alpha - [\alpha - \{\alpha - (\alpha - 1)\}]$

ὅταν $\alpha = 1$

β') $5,8\alpha^2 - 8,2\alpha^2 - (\alpha^2 - 0,4) + 0,6$

ὅταν $\alpha = 2$

γ') $-[-(-(-x))][-(-(-\psi))]$

ὅταν $x = \psi = -1$

δ') $-[+(-(-x))][-(-(-x))]$

ὅταν $x = 2$

ε') $-[-(-((\beta + \gamma - \alpha)))] + [-(-(\alpha - \beta + \gamma))]$

ὅταν $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -1$.

99. Δίδονται τὰ πολυώνυμα :

$$2 - 2x + 7x^3 - x^4 + x^5, \quad x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - x^5 \quad \text{καὶ} \quad x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 4x^5.$$

Νὰ εὐρεθῇ : α) Τὸ ἀθροῖσμα αὐτῶν, β) τὸ ἀθροῖσμα τῶν δύο πρώτων καὶ ἀκολουθῶς ἡ διαφορά τούτου ἀπὸ τοῦ τρίτου, γ') νὰ προστεθῇ ἡ διαφορά τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ πρώτου εἰς τὸ τρίτον.

Ὁ μ ἄ ς τ ρ ῖ τ η. 100. Γράψατε καταλλήλως τὰς κατωτέρω παραστάσεις, ὥστε οἱ ὅροι τῶν ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἑξῆς νὰ εἶναι εἰς παρένθεσιν ἢ ἀγκύλην ἔχουσιν πρὸ αὐτῆς : α') τὸ σῆμα +, β') τὸ σῆμα - :

$x^3 + 7x^2 - 3x - 5, \quad -5x^4 - (3x^3 - 8x^2) - 6x + 9,$

$13x - 16x^2 + 19x^3 - 14\alpha + 5\gamma$

101. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ :

α') $x + \psi + \omega + \phi, \quad \beta') x - \psi - \omega + \phi, \quad \gamma') \psi - (x + \omega - \phi),$ ὅταν τεθῇ :
 $x = 3\alpha^2 - 2\alpha\beta + 5\beta^2, \quad \psi = 7\alpha^2 - 8\alpha\beta + 5\beta^2, \quad \omega = 9\alpha^2 - 5\alpha\beta + 3\beta^2, \quad \phi = 11\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta$

Ὁ μ ἄ ς τ ε τ ἄ ρ τ η. 102. Εἰς τὴν πρώτην τάξιν σχολείου τινὸς φοιτοῦν α μαθηταί, εἰς τὴν δευτέραν β ὀλιγώτεροι, εἰς δὲ τὴν τρίτην 2β ὀλιγώτεροι τῶν

εις την πρώτην. Πόσους μαθητὰς ἔχουν ἐν ὄλῳ αἱ τρεῖς τάξεις ; Πόσους ἔχουν αἱ δύο πρῶται τάξεις περισσοτέρους τῆς τρίτης :

103. Ἐκ δύο ἀνθρώπων Α καὶ Β, ὁ Α ἔχει x δρχ. καὶ οἱ δύο ὁμοῦ μ δρχ. Ἄν ὁ Α δώσῃ εἰς τὸν Β 3 δρχ., πόσας θὰ ἔχη ἕκαστος ;

104. Ὁ Β ἔχει τριπλασίας δρχ. ἢ ὁ Α, ὁ Γ διπλασίας τοῦ Β, ὁ δὲ Α ἔχει μ δρχ. Πόσας ἔχουν καὶ οἱ τρεῖς ;

4. ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ

§ 63. Καλοῦμεν γινόμενον δοθεῖσῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων τὴν παράστασιν, ἣ ὁποία ἔχει παράγοντας τὰς δοθείσας παραστάσεις.

Ἡ πράξις, μετὰ τὴν ὁποίαν εὐρίσκομεν τὸ γινόμενον ἀλγεβρικῶν παραστάσεων λέγεται **πολλαπλασιασμός** αὐτῶν.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὐρώμεν τὸ γινόμενον τῶν μονωνύμων $5\alpha^2\beta^2\gamma$ καὶ $3\beta\gamma^2$. Κατὰ τὸν ὀρισμὸν τὸ γινόμενόν των, τὸ ὁποῖον σημειώνομεν οὕτω : $(5\alpha^2\beta^2\gamma) \cdot (3\beta\gamma^2)$, ἰσοῦται μετὰ $5\alpha^2\beta^2\gamma \cdot 3\beta\gamma^2$. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι γινόμενον τῶν ἀλγεβρικῶν παραγόντων τῶν μονωνύμων καὶ ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν αὐτῶν θὰ ἔχωμεν

$$5\alpha^2\beta^2\gamma \cdot 3\beta\gamma^2 = 5 \cdot 3 \cdot \alpha^2 \cdot \beta^2 \cdot \gamma \cdot \gamma^2 = 15\alpha^2\beta^3\gamma^3.$$

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ὁδηγούμενοι λέγομεν ὅτι :

Διὰ νὰ εὐρώμεν τὸ γινόμενον ἀκεραίων μονωνύμων, **πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμητικοὺς συντελεστὰς των καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου των γράφομεν καθένα γράμμα, ὑπάρχον εἰς τὰ δοθέντα μονώνυμα, μετὰ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχει τοῦτο εἰς τὰ δοθέντα.**

Εἶναι φανερόν ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου μονωνύμων ὥς πρὸς ἐν ἡ περισσότερα γράμματά του, ἰσοῦται μετὰ τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων του ὥς πρὸς τὰ γράμματα αὐτά. Π.χ. τὸ $(5\alpha^2\beta\gamma) \cdot (-2\alpha\beta^2\gamma^3\delta) = -10\alpha^3\beta^3\gamma^4\delta$ εἶναι βαθμοῦ ὥς πρὸς α , β , γ , δ $4+7=11$, ὅπου 4 εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ πρώτου παράγοντος καὶ 7 ὁ τοῦ δευτέρου ὥς πρὸς τὰ α , β , γ , δ .

Ἄσκησεις

105. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ γινόμενα :

$$\alpha') x^2 \cdot (-x^3) \cdot \psi^4 \cdot \psi^4 \quad \beta') (-x^4 \cdot x) \cdot \alpha^3 \cdot \alpha^6 \cdot \alpha^2 \quad \gamma') (x^2)^3 \cdot (\beta^3)^4 \quad \delta') x^{n+2} \cdot x^{2n} \cdot x$$

ε') $x^{3v+1} \cdot x \cdot x^{2v-2} \cdot x^2$, στ') $(7x\psi\omega) \cdot (4x^2\psi^2)$ ζ') $(-x \cdot \psi\omega) \cdot (x^2 \cdot \psi^2 \cdot \omega^2)$
 106. Εύρετε τὰ α') $(-2,5\alpha^2\beta x)^2$, β') $(-0,3\alpha\beta\gamma^2)^3$, γ') $(-2\alpha\beta^2\gamma x^2)^4$
 107. Εύρετε τὰ :

α') $\alpha^x (-\alpha^{2x-1})$, β') $(-x^{v-1}\psi\mu^{-3}) (-x^{v-1}\psi\mu^{-1})$, γ') Πῶς ὑψοῦμεν μονώνυμον εἰς τὸ τετράγωνον ἢ εἰς τὸν κύβον ἢ εἰς δύναμιν μὲ ἀκέραιον ἐκθέτην ; Π.χ. μὲ τι ἰσοῦται τὸ $(6\alpha\beta^2)^2$, τὸ $(-\frac{3}{4} x^3\psi)^3$, τὸ $(25\alpha^2\beta^2\gamma)^5$;

5. ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΕΠΙ ΜΟΝΩΝΥΜΟΝ

§ 64. Ἐστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον
 $(\alpha^2 - 3\alpha\beta + \beta^2) \cdot 2\alpha$.

Ἐπειδὴ τὸ πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὄρων του, θὰ ἔχωμεν $(\alpha^2 - 3\alpha\beta + \beta^2) \cdot 2\alpha = [\alpha^2 + (-3\alpha\beta) + \beta^2] \cdot 2\alpha$.

Ἐπειδὴ ἔχομεν πολλαπλασιασμὸν ἄθροίσματος σχετικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ ἄλλον ἀριθμὸν, εὐρίσκομεν ὅτι τὸ ἀνωτέρω γινόμενον ἰσοῦται μὲ $\alpha^2 \cdot 2\alpha + (-3\alpha\beta) \cdot 2\alpha + \beta^2 \cdot 2\alpha = 2\alpha^3 - 6\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2$.

Ὅμοίως εὐρίσκομεν ὅτι :

$(5\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 + 7\beta^3) \cdot (-3\alpha\beta) = -15\alpha^3\beta^2 + 9\alpha^2\beta^3 - 21\alpha\beta^4$. Ὡστε :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυώνυμον ἐπὶ μονώνυμον, πολλαπλασιάζομεν καθένα τῶν ὄρων τοῦ πολυωνύμου ἐπὶ τὸ μονώνυμον καὶ προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα.

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν μονώνυμον ἐπὶ πολυώνυμον, δυνάμεθα νὰ ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων (θεωροῦντες τὸ πολυώνυμον ὡς ἓνα σχετικὸν ἀριθμὸν, ἐπειδὴ εἶναι ἄθροισμα τῶν ὄρων αὐτοῦ) καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυώνυμον ἐπὶ ἀκέραιον μονώνυμον. Π.χ. τὸ γινόμενον

$\alpha \cdot (\beta + \gamma - \alpha) = (\beta + \gamma - \alpha) \cdot \alpha$ καὶ τοῦτο $= \alpha\beta + \alpha\gamma - \alpha^2$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὁ μὲς πρώτη. 108. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα καὶ τῶν ἐξαγόμενων αἱ ἀριθμ. τιμαὶ διὰ τὰς διδομένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

α') $3\alpha x(\alpha^2 - 4\alpha x + x^2)$	ὅταν $x = -1$, $\alpha = 2$
β') $(3\alpha + 7\beta)\alpha - (9\beta - 5\alpha)\beta$	» $\alpha = 2$, $\beta = -3$
γ') $(3\alpha^2 + 7\beta^2)\alpha\beta - (9\alpha^2 - 8\beta^2)\alpha\beta$	» $\alpha = -1$, $\beta = -2$
δ') $(3\alpha^2\beta^3 + 7\beta^2) \cdot 3\alpha^2\beta^2 - (9\alpha^2\beta^3 - 8\beta^2) \cdot 2\alpha^2\beta^2$	» $\alpha = -1$, $\beta = -2$

Ὁ μὰς δευτέρα. Λύσατε τὰ ἑξῆς προβλήματα :

109. Ἐκ τινος τόπου ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο ταχυδρόμοι προχωροῦντες ἐπ' εὐθείας πρὸς ἀντιθέτους φοράς. Ὁ α' διανύει καθ' ἡμέραν α+μ χλμ. καὶ ὁ β' 2 χλμ. ὀλιγώτερα τοῦ α'. Πόσον θὰ ἀπέχουν μετὰ τ ἡμ. ;

110. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων διψηφίου τινὸς ἀριθμοῦ εἶναι α. Τὸ ψηφίον τῶν μονάδων του εἶναι μ. Πότε καὶ πόσον θὰ αὐξηθῇ ὁ ἀριθμὸς ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων του ;

111. Ἐκ τινος τόπου ἀναχωρεῖ ταχυδρόμος διανύων 30 χλμ. ἡμερησίως. μ ἡμέρας βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλλος διανύων γ χλμ ἡμερησίως καὶ διευθύνεται πρὸς τὸν α'. Πόσον θὰ ἀπέχουν μετὰ τ ἡμέρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ α' ;

6. ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

§ 65. Καλοῦμεν γινόμενον δύο πολυωνύμων, τὸ πολυώνυμον τὸ προκύπτει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν, ἥτοι τὸ ἔχον παράγοντας τὰ δύο πολυώνυμα.

Ἐπειδὴ ἕκαστον πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὄρων του, ἔπεται ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καθένα ὄρον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ πάντας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων συνήθως διατάσσομεν αὐτὰ κατὰ τὰς κατιούσας ἢ ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των καὶ ἀκολουθῶς ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, πρὸς εὐκολίαν εἰς τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὄρων, ὡς φαίνεται εἰς τὰ ἐπόμενα παραδείγματα.

1ον. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ γινόμενον	$(2x^2 - x + 3)(x - 4).$
Γράφομεν	$\begin{array}{r} 2x^2 - x + 3 \\ \times \quad x - 4 \\ \hline 2x^3 - x^2 + 3x \\ - 8x^2 + 4x - 12 \\ \hline 2x^3 - 9x^2 + 7x - 12 \end{array}$
(1) μερικὸν γινόμενον	$2x^3 - x^2 + 3x$
(2) » »	$- 8x^2 + 4x - 12$
(3) τελικὸν »	$2x^3 - 9x^2 + 7x - 12$

Τὰ (1), (2) εὐρίσκονται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ x καὶ ἐπὶ -4 , λέγονται δὲ μερικὰ γινόμενα.

Τὸ (3) προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) καὶ λέγεται τελικὸν γινόμενον.

2ον. Ἐστω τὸ γινόμενον $(4x^5-3x^4+x^2-1)(x^3-x+2)$. Ὅμοιως
ὥς ἀνωτέρω ἔχομεν $4x^5-3x^4+x^2-1$
 x^3-x+2

$4x^8-3x^7$	$+ x^5$	$-x^3$			
	$-4x^6$	$+ 3x^5$	$-x^3$	$+x$	μερικὸν γινόμενον
		$+ 8x^5-6x^4$	$+2x^2$	-2	» »
$4x^8-4x^7-4x^6$	$+12x^5-6x^4-2x^3$	$+2x^2$	$+x-2$		τελικὸν »

§ 66. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ α' ὅρου $4x^5$ τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν α' ὅρον x^3 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ δίδει τὸν α' ὅρον $4x^8$ τοῦ γινομένου. Ὅμοιως τὸ γινόμενον τῶν δύο τελευταίων ὅρων αὐτῶν -1 καὶ 2 δίδει τὸν τελευταῖον ὅρον -2 τοῦ γινομένου. Ἐπομένως :

"Όταν οἱ παράγοντες γινομένου δύο ἀκεραίων πολυωνύμων (ἀνηγμένων) εἶναι διατεταγμένοι κατὰ τὰς κατιούσας ἢ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις ἐνὸς γράμματός των, τὰ γινόμενα τῶν ἀντιστοιχῶν ἄκρων ὅρων (τῶν πρώτων καὶ τελευταίων) δίδουν τοὺς ἀντιστοιχοὺς ἄκρους ὅρους τοῦ γινομένου διατεταγμένου ὁμοίως ὥς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα.

Ἄρα τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων θὰ ἔχη τοῦλάχιστον δύο ὅρους καὶ δὲν δύναται νὰ εἶναι μονώνυμον.

§ 67. Ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου δύο ἀκεραίων πολυωνύμων ὥς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα των ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

112. Εὑρετε τὰ κάτωθι γινόμενα καὶ τὰ ἐξαγόμενα τῶν δοθέντων ὥς καὶ τῶν ἐξαγομένων διὰ τὰς δεδομένας τιμὰς τῶν γραμμάτων :

α') $(x^2+4x+3) \cdot (1-x^2)$	ἀν τεθῇ ὅπου $x=-1$
β') $(x^2+2x+2) \cdot (x^2-5x+3)$	» » » $x=-1$
γ') $(x^3-2x^2+8) \cdot (x^2-2x-2)$	» » » $x=3$
δ') $(3a^2-2a+5a^3-1) \cdot (a-3-4a^2)$	» » » $a=3$

113. Ὅμοιως :

α') $(4a^{2n+1}+6a^{n+3}+9a^2) \cdot (2a^{n+4}-3a^3)$
 β') $(x^{12}-x^4\psi^2+x^6\psi^4-x^3\psi^6) \cdot (x^3+\psi^2)$

$$\begin{aligned} \gamma') & (\alpha^\mu - \beta \cdot \alpha^{\mu-1} \cdot x + \gamma \cdot \alpha^{\mu-2} \cdot x^2)(x^2 - \mu + \beta \cdot \alpha^{1-\mu} \cdot x - \gamma \cdot \alpha^\mu \cdot x^2) \\ \delta') & ([x\alpha(\beta-1)] + \psi\beta(\alpha-1))[x\alpha(\beta-1)] - \psi\beta(\alpha-1)] \\ \epsilon') & (x^4 + x^3 - x^2 + x + 1)(x-1)(x+2)(x+1) \\ \sigma\tau') & (2\alpha + \beta - 3\gamma)(2\alpha + \beta + 3\gamma)(\beta - 3\gamma - 2\alpha) \\ & \text{θέτοντες εις όλα όπου } \alpha = 1, \beta = 2, x = \psi = -1. \end{aligned}$$

7. ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΙ

§ 68. Παραστάσεις τῆς μορφῆς :

$$(\alpha + \beta)^2, (\alpha - \beta)^2, (\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta), (\alpha + \beta)^3, (\alpha - \beta)^3, \dots$$

παρουσιάζονται συχνὰ καὶ εἶναι καλὸν νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης τὰ ἐξαγόμενα τὰ εὐρισκόμενα, ἔαν εἰς ἐκάστην ἐξ αὐτῶν ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Οὕτως ἔχομεν :

$$1ον. (\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2.$$

$$2ον. (\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2. \text{ Ἦτοι:}$$

Τὸ τετράγωνον τοῦ ἁθροίσματος (ἢ τῆς διαφορᾶς) δύο σχετικῶν ἀριθμῶν, ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ σὺν (ἢ πλὴν) τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν ἀριθμῶν σὺν τῷ τετραγώνῳ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ.

$$3ον. \text{ Ἐπίσης εὐρίσκομεν: } (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta - \alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2. \text{ Ἦτοι}$$

Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφορὰν των, ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ τετραγώνου τοῦ μειωτέου πλὴν τὸ τετράγωνον τοῦ ἀφαιρετέου.

$$4ον. \text{ Ἐπίσης εὐκόλως εὐρίσκομεν ὅτι: } (\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta)^2 \cdot (\alpha + \beta) \\ = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) \cdot (\alpha + \beta) = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3.$$

$$5ον. \text{ Ἐὰν εἰς τὴν τελευταίαν ἰσότητα γράψωμεν } -\beta \text{ ἀντὶ τοῦ } +\beta, \\ \text{προκύπτει } (\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2(-\beta) + 3\alpha(-\beta)^2 + (-\beta)^3$$

$$\text{ἢ } (\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3.$$

Εὐκόλως εὐρίσκομεν δι' ἐκτελέσεως τῶν πράξεων ἀκόμη ὅτι :

$$6ον. (\chi + \alpha)(\chi + \beta) = \chi^2 + (\alpha + \beta)\chi + \alpha\beta.$$

$$7ον. (\chi + \alpha)(\chi + \beta)(\chi + \gamma) = \chi^3 + (\alpha + \beta + \gamma)\chi^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\chi + \alpha\beta\gamma$$

$$8ον. (\alpha^2 + \beta^2)(\chi^2 + \psi^2) - (\alpha\chi + \beta\psi)^2 = (\alpha\psi - \beta\chi)^2.$$

$$9ον. (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\chi^2 + \psi^2 + \zeta^2) - (\alpha\chi + \beta\psi + \gamma\zeta)^2 = \\ = (\alpha\psi - \beta\chi)^2 + (\beta\zeta - \gamma\psi)^2 = (\gamma\chi - \alpha\zeta)^2$$

Αἱ δύο ἀνωτέρω ἰσότητες 8 καὶ 9 λέγονται ταυτότητες τοῦ Lagrange.

' Α σ κ ή σ ε ι ς

114. Δείξατε, ότι είναι :

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) = (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = (\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2.$$

115. 'Εάν τεθῇ $x = 2\psi + 3\omega$, δείξατε ότι είναι $x^3 - 8\psi^3 - 27\omega^3 - 18x\psi\omega = 0$.

116. 'Εάν τεθῇ $\alpha + \gamma = 2\beta$, δείξατε, ότι είναι $(\alpha - \beta)^2 + 2\beta^2 + (\beta - \gamma)^2 = \alpha^2 + \gamma^2$

117. 'Εάν τεθῇ $x + \psi = 1$, δείξατε, ότι είναι $x^3(\psi + 1) - \psi^3(x + 1) - x + \psi = 0$.

118. 'Εάν τεθῇ $x = \alpha - \beta$, θά είναι $(x - \alpha)^2 + (x - \alpha)(2\beta - \gamma) - \beta\gamma + \beta^2 = 0$.

119. 'Εάν τεθῇ $\varphi(x_1) = 3x_1^2 - x_1 + 1$, δείξατε ότι είναι

$$\varphi(x_1 + 1) - \varphi(x_1) - 2\varphi(0) = 6x_1.$$

120. 'Εάν τεθῇ $\varphi(x) = 3x^2 + 7x$ καὶ $\psi(x) = 6x + 10$, δείξατε ὅτι εἶναι

$$\alpha') \varphi(x+1) - \varphi(x) = \psi(x), \quad \beta') \psi(x+1) - \psi(x) = 6.$$

121. 'Εάν $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$, δείξατε ὅτι :

$$\alpha') (\tau - \alpha)^2 + (\tau - \beta)^2 + (\tau - \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \tau^2$$

$$\beta') (\tau - \alpha)^3 + (\tau - \beta)^3 + (\tau - \gamma)^3 + 3\alpha\beta\gamma = \tau^3$$

$$\gamma') 2(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma) + \alpha(\tau - \beta)(\tau - \gamma) + \beta(\tau - \alpha)(\tau - \gamma) + \gamma(\tau - \beta)(\tau - \alpha) = \alpha\beta\gamma$$

122. Δείξατε ὅτι $\alpha^4 + \beta^4 + (\alpha + \beta)^4 = 2\alpha^2\beta^2 + 2(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta)^2$.

123. 'Ομοίως : $\alpha')$ $\alpha^5 + \beta^5 = (\alpha^3 + \beta^3)(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)$

$\beta')$ $(\psi - \omega)^3 + (x - \psi)^3 + 3(x - \psi)(x - \omega)(\psi - \omega) = (x - \omega)^3$.

124. 'Ομοίως : $(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$

125. 'Ομοίως : $x^2(\psi - \omega) + \psi^2(\omega - x) + \omega^2(x - \psi) + (\psi - \omega)(\omega - x)(x - \psi) = 0$.

8. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ

§ 69. Λέγομεν ὅτι ἀκέραιόν τι μονώνυμον εἶναι **διαίρετόν** δι' ἄλλον, ἂν δύναται νὰ εὐρεθῇ τρίτον τοιοῦτο, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ β' δίδει γινόμενον τὸ α'. Τὸ οὕτως εὐρισκόμενον μονώνυμον καλεῖται **πηλίκον** τῆς διαιρέσεως τῶν δύο δοθέντων, τὰ ὅποια λέγονται **διαιρετέος** καὶ **διαιρέτης**.

*Εστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ πηλίκον τοῦ $24\alpha^7$ διὰ τοῦ $8\alpha^5$, τὸ ὁποῖον σημειώνομεν οὕτως $24\alpha^7 : 8\alpha^5$.

'Εάν παραστήσωμεν τὸ πηλίκον μὲ Π, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸν ὀρισμὸν $\Pi \cdot 8\alpha^5 = 24\alpha^7$. Διαιροῦντες τὰ ἴσα ταῦτα διὰ τοῦ 8, εὐρίσκομεν $\Pi \cdot \alpha^5 = 24\alpha^7 : 8$ ἢ $\Pi \cdot \alpha^5 = 3\alpha^7$. Διαιροῦντες καὶ τὰ ἴσα αὐτὰ διὰ τοῦ α^5 , ἔχομεν $\Pi = 3\alpha^7 : \alpha^5 = 3\alpha^{7-5} = 3\alpha^2$, ἥτοι $\Pi = 3\alpha^2$.

*Ομοίως εὐρίσκομεν π.χ. ὅτι $20\alpha^5\beta^6 : (-4\alpha\beta^5) = -5\alpha^4\beta$.

*Εκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι :

"Ἵνα γινόμενόν τι σχετικῶν παραγόντων εἶναι διαίρετόν δι' ἄλλον, ἀρκεῖ νὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας αὐτοῦ καὶ καθένα μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μεγαλύτερον.

Προσέτι ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως δύο ἀκεραίων μονωνύμων διαιροῦμεν τὸν (ἀριθμητικὸν) συντελεστὴν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ (ἀριθμητικοῦ) συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου καὶ δεξιὰ τοῦ πηλίκου τούτου γράφομεν τὰ γράμματα τοῦ διαιρετέου καθὲν μὲ ἐκθέτην ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχει εἰς τὸν διαιρετὸν καὶ διαιρέτην.

§ 70. Ἐὰν ὁ διαιρετέος δὲν διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ διαιρέτου, παραλείπομεν τοὺς κοινούς παράγοντάς των, ἐὰν ὑπάρχουν, καὶ σχηματίζομεν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν μένοντα, ὡς διαιρετὸν καὶ παρονομαστὴν τὸν μένοντα, ὡς διαιρέτην. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ πηλίκον τῶν δοθέντων μονωνύμων εἶναι **κλασματικὸν** ἢ παράστασις **κλασματικὴ**. Οὕτω διὰ τὴν διαίρεσιν $20\alpha^2\beta^2\gamma^4 : -5\alpha\beta^3\gamma^7$ παραλείπομεν τοὺς κοινούς παράγοντας 5, α , β^2 , γ^4 τοῦ διαιρέτου καὶ διαιρετέου καὶ θὰ ἔχωμεν :

$$4\alpha : - \beta\gamma^3 = \frac{4\alpha}{-\beta\gamma^3} = - \frac{4\alpha}{\beta\gamma^3}.$$

" Α σ κ η σ ι ς

126. Νὰ εὕρεθοῦν τὰ πηλικά τῶν κάτωθι διαιρέσεων :

$$\begin{array}{lll} \alpha') 9\mu^4\psi^5 : -3\mu^2\psi^2 & \beta') -12x^5\psi^5 : 11x^2\psi^4 & \gamma') 0,5x^2\psi^3 : -0,2x\psi \\ \delta') 0,45\alpha^2\beta^3\gamma^4 : 0,9\beta^3\gamma^3 & \epsilon') -12\mu^4\nu^5 : 16\mu^4\nu & \sigma\tau') 4\alpha\beta^4 : 0,25\alpha\beta^3\gamma\delta^4 \\ \zeta') - \frac{7}{9} \alpha^5\beta^4\gamma^2 : 0,8\alpha^5\beta^5 \end{array}$$

9. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΔΙΑ ΜΟΝΩΝΥΜΟΥ

§ 71. Καλοῦμεν διαίρεσιν δοθέντος πολυνύμου (διαιρετέου) διὰ μονωνύμου (διαιρέτου) τὴν πρᾶξιν, μὲ τὴν ὁποίαν εὕρισκομεν (ἂν ὑπάρχῃ) πολυνύμον (πηλίκον), τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον τὸν διαιρετὸν.

Ἐπειδὴ πᾶν πολυνύμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὄρων του, ἔπεται ὅτι :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν πολυνύμον (διαιρετὸν) διὰ μονωνύμου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν καθένα ὅρον του διὰ τοῦ μονωνύμου καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν :

$$(1) (7\alpha^2\beta^3+6\alpha^3\beta^2-15\alpha^3\beta^3):\alpha\beta = 7\alpha\beta^2+6\alpha^2\beta-15\alpha^2\beta^2$$

$$(2) (42\alpha\chi-48\alpha\psi+18\alpha\omega):(-6\alpha) = -7\chi+8\psi-3\omega$$

$$(3) (-80\alpha^5-24\alpha^{10}):8\alpha^3 = -10\alpha^2-3\alpha^7$$

Ἐάν πολυώνυμον διαιρῇται διὰ μονωνύμου, θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν. Οὕτως ἔχομεν διὰ τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα :

$$(1) 7\alpha^2\beta^3+6\alpha^3\beta^2-15\alpha^3\beta^3 = \alpha\beta \cdot (7\alpha\beta^2+6\alpha^2\beta-15\alpha^2\beta^2)$$

$$(2) 42\alpha\chi-48\alpha\psi+18\alpha\omega = (-6\alpha) \cdot (-7\chi+8\psi-3\omega)$$

$$(3) -80\alpha^5-24\alpha^{10}=8\alpha^3 \cdot (-10\alpha^2-3\alpha^7) = -8\alpha^3 \cdot (10\alpha^2+3\alpha^7)$$

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι :

Ἄν πάντες οἱ ὅροι δοθέντος πολυωνύμου ἔχουν κοινόν τινα διαιρέτην, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν αὐτὸν ἐκτὸς παρενθέσεως ὡς παράγοντα γινομένου, τοῦ ὁποίου ὁ ἄλλος παράγων εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ δοθέντος πολυωνύμου διὰ τοῦ τεθέντος ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως κοινοῦ παράγοντος.

Π.χ. εἰς τὸ ἀνωτέρω πρῶτον πολυώνυμον ὡς κοινὸς διαιρέτης ἐλήφθη τὸ $\alpha\beta$ καὶ ἐτέθη ἐκτὸς παρενθέσεως εἰς τὸ β' μέλος τῆς (1). Εἰς τὸ δεύτερον πολυώνυμον ἐλήφθη ὡς διαιρέτης τὸ -6α καὶ εἰς τὸ τρίτον τὸ $-8\alpha^3$ καὶ ἐτέθησαν ἐκτὸς τῶν παρενθέσεων εἰς τὰ δεύτερα μέλη τῶν (2) καὶ (3).

Ἀσκήσεις

127. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλικά τῶν κάτωθι διαιρέσεων καὶ νὰ τραπῇ ἀκούτως ὁ διαιρετέος εἰς γινόμενον δύο παραγόντων. Ἐπαληθεύσατε καὶ τὰς ἰσότη-
τας, αἱ ὁποῖαι θὰ προκύψουν διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων:

$$\alpha') (14x^3\psi^2-28x^4\psi^2):(2x^2\psi^2)$$

$$\text{ὅταν } x=2, \psi=-2$$

$$\beta') (x+\psi) \cdot (\alpha-\beta):(x+\psi)$$

$$» x=\psi=4, \alpha=\beta=1$$

$$\gamma') (8\alpha^4\beta^2-16\alpha^3\beta^3+24\alpha^2\beta^4-12\alpha^2\beta^2):(-4\alpha^2\beta^2)$$

$$» \alpha=3, \beta=2$$

$$\delta') (x\mu+z\cdot\psi\nu+2x\mu+1+\psi\nu+1-x\mu\psi\nu+z):x\mu\psi\nu$$

$$» x=4, \psi=1, \mu=\nu=-1$$

128. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα δύο παραγόντων τὰ

$$\alpha') \alpha\chi + \beta\chi, \beta') 49\alpha\beta + 63\alpha, \gamma') 56x\psi - 72x\omega, \delta') 0,35\alpha\beta - 0,49\alpha\gamma.$$

$$\epsilon') 2,3\alpha^4\beta^5 - 2,5\alpha^5\beta^4, \sigma\tau') \alpha^3x^3\psi + 3\alpha^2\beta x^2\psi + 3\alpha\beta^2x\psi^2 - x\psi^4,$$

$$\zeta') 12 \frac{2}{3} \alpha^2\beta - 14,25\alpha^5\beta^5 - 15 \frac{5}{6} \alpha^5\beta^5 \quad 11 \frac{1}{12} \alpha^5\beta^1$$

9. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ * ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΔΙΑ ΜΟΝΩΝΥΜΟΥ

§ 72. Καλοῦμεν διαίρεσιν (ἄκεραίου) πολυωνύμου (διαιρετέου) διὰ (ἄκεραίου) πολυωνύμου (διαιρέτου) τὴν πράξιν, μὲ τὴν ὁποίαν εὐρίσκομεν, ἂν ὑπάρχῃ, τρίτον πολυώνυμον (πηλίκον), τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον.

*Εστω ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ $\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1$ διὰ τοῦ $\alpha + 1$.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὰ πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ α , ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου (μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην τοῦ α), τὸν ὁποῖον ζητοῦμεν, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον α τοῦ διαιρέτου, πρέπει νὰ δίδῃ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου α^3 . Ἐπομένως ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου θὰ εἶναι $\alpha^3 : \alpha = \alpha^2$. Ἀλλὰ τὸ α^2 δὲν δύναται νὰ εἶναι ὁλόκληρον τὸ πηλίκον. Διότι, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν δοκιμὴν τῆς διαίρεσεως αὐτῆς. εὐρίσκομεν :

$$\alpha^2(\alpha + 1) = \alpha^3 + \alpha^2.$$

Τοῦτο ἀφαιρούμενον ἀπὸ τὸν διαιρετέον δίδει

$$(\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1) - (\alpha^3 + \alpha^2) = 2\alpha^2 + 3\alpha + 1.$$

Πρέπει λοιπὸν εἰς τὸν εὐρεθέντα πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου νὰ προστεθῇ παράστασις τις ἀκόμη, ἥ ὁποία πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ $\alpha + 1$ νὰ δίδῃ $2\alpha^2 + 3\alpha + 1$. *Ἡτοι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν ἀκόμη τὸ $2\alpha^2 + 3\alpha + 1$ διὰ τοῦ $\alpha + 1$. Ἐχομεν πάλιν νὰ διαιρέσωμεν δύο πολυώνυμα. Ἀλλ' ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι ἀπλουστερά τῆς δοθείσης, διότι ὁ διαιρετέος ταύτης εἶναι προφανῶς ἀπλουστερος. Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν αὐτὴν πορείαν καὶ διὰ τὴν διαίρεσιν αὐτὴν καὶ εὐρίσκομεν ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου αὐτῆς εἶναι $2\alpha^2 : \alpha = 2\alpha$. Ἐὰν τὸ γινόμενον τοῦ 2α ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\alpha + 1$, δηλαδὴ τὸ $2\alpha \cdot (\alpha + 1) = 2\alpha^2 + 2\alpha$, ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον $2\alpha^2 + 3\alpha + 1$, εὐρίσκομεν ὑπόλοιπον $(2\alpha^2 + 3\alpha + 1) - (2\alpha^2 + 2\alpha) = \alpha + 1$

Παρατηροῦμεν ὅτι δὲν εὐρέθη ὁλόκληρον τὸ πηλίκον ἄλλ' ὅτι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν ἀκόμη τὸ $\alpha + 1$ διὰ τοῦ $\alpha + 1$.

Ἀλλὰ τὸ πηλίκον τῆς νέας αὐτῆς διαίρεσεως εἶναι 1, τὸ δὲ

*Ἡ διαίρεσις διὰ πολυωνύμου δὲν παρουσιάσθη πρὸ τοῦ 16ου αἰῶνος.

υπόλοιπον 0. "Ωστε τὸ πηλίκον τῆς δοθείσης διαιρέσεως εἶναι $\alpha^2 + 2\alpha + 1$, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 0.

Συνήθως ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς ἀκολουθῶς :

Γράφομεν τὸν διαιρετέον, δεξιὰ αὐτοῦ τὸν διαιρέτην, κάτωθι τούτου τὸ πηλίκον καὶ ὑπὸ τὸν διαιρετέον τὰ γινόμενα ἐκάστου ὅρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην μὲ ἀντίθετον πρόσημον καὶ προσθέτομεν. Εἰς τὴν αὐτὴν στήλην γράφομεν καὶ τὰ ἐκάστοτε ὑπόλοιπα ἀφαιρέσεων.

(διαιρετέος)	$\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1$		$\alpha + 1$ (διαιρέτης)
	$-\alpha^3 - \alpha^2$		$\alpha^2 + 2\alpha + 1$
πρῶτον μερικὸν ὑπόλοιπον	$2\alpha^2 + 3\alpha + 1$	(1)	(πηλίκον)
	$-2\alpha^2 - 2\alpha$		
δεύτερον μερικὸν ὑπόλοιπον	$\alpha + 1$	(2)	
	$-\alpha - 1$		
τελικὸν ὑπόλοιπον	0	(3)	

Αἱ παραστάσεις (1), (2) λέγονται μερικὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν διαιρέσεων, τὸ δὲ ὑπόλοιπον, τελικὸν ὑπόλοιπον τῆς ὅλης διαιρέσεως.

§ 73. Ἐν γένει διὰ τὴν διαίρεσιν δύο ἀκεραίων πολυωνύμων, ὅταν εἶναι δυνατὴ ἡ διαίρεσις, ἀποδεικνύεται ὅτι :

α) Ἐὰν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι διατεταγμένοι* κατὰ τὰς κατιούσας (ἢ ἀνιούσας) δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου, διατεταγμένου ὁμοίως, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου.

Διότι ἔστω $\Delta + \Delta' + \Delta'' + \dots$ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρῶν τοῦ διαιρετέου καὶ $\delta + \delta' + \delta'' + \dots$ τῶν τοῦ διαιρέτου, διατεταγμένων π.χ. κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των. Παριστάνομεν μὲ $\Pi + \Pi' + \Pi'' + \dots$ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρῶν τοῦ

* Ἡ διάταξις πολυωνύμων κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ κατιούσας δυνάμεις γράμματός των διὰ τὴν διαίρεσιν αὐτῶν, συναντᾶται τὸ πρῶτον εἰς τὸ ἔργον* τοῦ NEWTON « Arithmetica Universalis » (1707). Τὸ 1760 παρουσιάζεται τὸ θέμα βελτιωμένον ἀπὸ διδακτικῆς πλευρᾶς.

πηλίκου διατεταγμένου όμοίως ως πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα. Κατὰ τὸν ὀρισμὸν τῆς διαιρέσεως ἔχομεν ὅτι

$$\Delta + \Delta' + \Delta'' \dots = (\delta + \delta'' + \delta''' + \dots) \cdot (\Pi + \Pi' + \Pi'' \dots)$$

Ἄλλὰ τὸ γινόμενον $\delta \cdot \Pi$ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος ταύτης παριστάνει τὸν ὅρον, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην τοῦ γράμματος, ως πρὸς τὸ ὁποῖον ὑπετέθησαν διατεταγμένα τὰ πολυώνυμα, ἐπομένως θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον ὅρον Δ τοῦ πρώτου μέλους. Ἦτοι ἔχομεν ὅτι : $\delta \cdot \Pi = \Delta$ καὶ $\Pi = \Delta : \delta$, ἦτοι τὸ Π εἶναι πηλίκον τοῦ Δ διὰ τοῦ δ . Ἄρα :

Διὰ νὰ εὗρωμεν τὸν α' ὅρον τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως δύο (ἄκεραίων) πολυωνύμων διατεταγμένων κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματός των, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν α' ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ α' ὅρου τοῦ διαιρέτου.

Θὰ συμβῇ τὸ αὐτό, ἂν τὰ τρία πολυώνυμα (τοῦ διαιρετέου, διαιρέτου καὶ πηλίκου) εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν οἱ πρῶτοι κατὰ σειρὰν ὅροι των, θὰ εἶναι οἱ τοῦ κατωτάτου βαθμοῦ καὶ ὁ ὅρος τοῦ κατωτάτου βαθμοῦ τοῦ διαιρετέου θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ὅρου κατωτάτου βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν τοῦ κατωτάτου βαθμοῦ τοῦ πηλίκου.

β) Ἐὰν ἔχωμεν ἓνα ἢ περισσοτέρους κατὰ σειρὰν ἐκ τῶν πρώτων ὅρων τοῦ πηλίκου, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον, εὐρίσκομεν διαφοράν, ἡ ὁποία καλεῖται μερικὸν ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως. Ἄν τούτου, διατεταγμένου ὁμοίως, διαιρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου θὰ δώσῃ τὸν ἐπόμενον ὅρον τοῦ πηλίκου.

Διότι, ἂν παραστήσωμεν μὲ Π μὲν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου (ἢ τὸ ἄθροισμα τῶν γνωστῶν κατὰ σειρὰν ἐκ τῶν πρώτων ὅρων αὐτοῦ), μὲ P τὸ ἄθροισμα τῶν λοιπῶν ὅρων τούτου, μὲ Δ τὸν διαιρετέον καὶ μὲ Δ' , τὸν διαιρέτην (διατεταγμένων ὅλων ὁμοίως), θὰ ἔχωμεν $\Delta = \Delta' \cdot (\Pi + P) = \Delta' \cdot \Pi + \Delta' \cdot P$. Ἀφαιροῦντες τὸ $\Delta' \cdot \Pi$ ἀπὸ τὰ ἴσα, εὐρίσκομεν $\Delta - \Delta' \cdot \Pi = \Delta' \cdot P$ (τὸ ὁποῖον καλοῦμεν μερικὸν ὑπόλοιπον τῆς γενομένης διαιρέσεως). Ἄλλ' ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἔπεται $(\Delta - \Delta' \cdot \Pi) : \Delta' = P$. Δηλαδή τὸ P , ἦτοι οἱ λοιποὶ ὅροι τοῦ πηλίκου, θὰ εὗρεθῶν ἂν διαιρέσωμεν τὸ

$\Delta - \Delta' \cdot \Pi$ διὰ τοῦ διαιρέτου Δ' . Κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν, ἂν διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ $\Delta - \Delta' \cdot \Pi$ διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ Δ' , θὰ εὕρωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ P , ἥτοι τὸν ἀμέσως ἐπόμενον μετὰ τὸν Π , ὅρον τοῦ πηλίκου.

§ 74. Καλοῦμεν **πρῶτον μερικὸν υπόλοιπον** τῆς διαιρέσεως δύο πολυωνύμων τὸ εὐρισκόμενον, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου.

Δεύτερον μερικὸν υπόλοιπον, τῆς ἐν λόγῳ διαιρέσεως λέγεται τὸ εὐρισκόμενον, ἂν ἀπὸ τὸ πρῶτον μερικὸν υπόλοιπον ἀφαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὀρίζομεν **τρίτον μερικὸν υπόλοιπον**, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται, ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν τρίτον ὅρον τοῦ πηλίκου ἀπὸ τὸ δεύτερον μερικὸν υπόλοιπον· καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἄν τὸ τελευταῖον υπόλοιπον διαιρέσεως εἶναι 0, ἡ διαίρεσις λέγεται **τελεία**, ἄλλως λέγεται **ἀτελής**.

§ 75. Ἐν γένει ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν ἓν (ἀκέραιον) πολυώνυμον Δ διὰ τοῦ Δ' , διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των, καὶ ὅτι ὁ διαιρετέος δὲν εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ διαιρέτου ὡς πρὸς τὸ γράμμα τοῦτο. Καὶ ὅταν δὲν γνωρίζωμεν ἂν ἡ διαίρεσις αὐτῶν εἶναι τελεία, ἀρχίζομεν τὴν ἐκτέλεσιν αὐτῆς κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον καὶ θὰ εὕρωμεν μίαν σειρὰν ὅρων τοῦ πηλίκου καθὼς καὶ μίαν σειρὰν πολυωνύμων, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι **πρῶτον, δεύτερον** κ.τ.λ. μερικὰ υπόλοιπα τῆς διαιρέσεως. Ὁ βαθμὸς τῶν υπολοίπων, ὡς πρὸς τὸ ἐν λόγῳ γράμμα, θὰ βαίνει ἐλαττούμενος. Διότι μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πηλίκου καὶ τοῦ πρώτου υπολοίπου π.χ. δὲν θὰ ὑπάρχῃ εἰς αὐτὸ ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου. Ἐπειδὴ ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρέτου, δίδει γινόμενον ἴσον μὲ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου, ὅταν ἀφαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀπὸ τὸν διαιρετέον, οἱ ὅροι τοῦ ἀνωτέρου βαθμοῦ, δὲν θὰ ὑπάρχουν εἰς τὴν διαφοράν, ἥτοι

τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον θὰ εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ διαιρέτου. Ὁμοίως τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ὅρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἀφαιρούμενον ἀπὸ τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον, δίδει τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ πρώτου ὑπολοίπου, τοῦ ὁποίου ὁ πρῶτος ὅρος, διαιρούμενος διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, δίδει τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου.

Ὁμοίως προχωροῦντες παρατηροῦμεν ὅτι ὁ βαθμὸς ἑκάστου ὑπολοίπου εἶναι μικρότερος τοῦ προηγουμένου του τοῦλάχιστον κατὰ μίαν μονάδα.

Ὁμοίως παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ εὗρωμεν ὅρους τινὰς τοῦ πηλίκου, ἂν θέλωμεν νὰ συνεχίσωμεν τὴν πράξιν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ἀντιστοίχου ὑπολοίπου νὰ εἶναι διαιρέτὸς διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου. Πρὸς τοῦτο, πρέπει ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ὑπολοίπου τούτου νὰ μὴ εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου. Ἐπειδὴ οἱ βαθμοὶ τῶν διαδοχικῶν ὑπολοίπων βαίνουν ἐλαττούμενοι, θὰ καταλήξωμεν μετὰ τινὰς πράξεις ἢ εἰς ὑπόλοιπον μηδὲν ἢ εἰς ὑπόλοιπον βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ διαιρέτου.

Ἐπομένως, δοθέντων δύο ἀκεραίων πολυωνύμων ὡς πρὸς χ , π.χ. τῶν Δ καὶ Δ' , μὲ βαθμὸν τοῦ Δ ὄχι κατώτερον τοῦ βαθμοῦ τοῦ Δ' ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα των χ , ὑπάρχει ἓν πολυώνυμον ἔστω Π , τοιοῦτον ὥστε, νὰ εἶναι τὸ $\Delta - \Delta' \cdot \Pi$ πολυώνυμον ἀκέραιον ὡς πρὸς χ καὶ βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ Δ' . Τὸ Π εὐρίσκεται, ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν πράξιν τῆς διαιρέσεως τοῦ Δ διὰ τοῦ Δ' ὡς ἀνωτέρω ἐξετέθη.

Ἄν τεθῇ $\Delta - \Delta' \cdot \Pi = Y$, θὰ εἶναι $\Delta = \Delta' \cdot \Pi + Y$. Τὰ οὕτως εὐρισκόμενα Π καὶ Y καλοῦνται **πηλίκον** καὶ **ὑπόλοιπον** τῆς **μὴ τελείας** ἢ **ἀτελοῦς** ταύτης διαιρέσεως. Ἐὰν τὸ $Y = 0$, ἔχομεν περίπτωσιν τελείας διαιρέσεως.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι εἰς μὲν τὴν τελείαν διαίρεσιν ἔχομεν ὅτι :

Ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον.
Εἰς δὲ τὴν ἀτελεῖ ὅτι :

Ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ.

*Εστω π.χ. ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 19x - 8 \quad \text{διὰ τοῦ} \quad x^2 - 4x - 2$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν, ἔχομεν :

(διαιρετέος)	$x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 19x - 8$	$x^2 - 4x - 2$ (διαιρέτης)
	$-x^4 + 4x^3 + 2x^2$	$x^2 + 2x + 3$ (πηλίκον)
πρῶτον μερικὸν ὑπόλοιπον	$2x^3 - 5x^2 - 19x - 8$	
	$-2x^3 + 8x^2 + 4x$	
δεύτερον μερικὸν ὑπόλοιπον	$3x^2 - 15x - 8$	
	$-3x^2 + 12x + 6$	
τελικὸν ὑπόλοιπον	$-3x - 2$	

Ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον $-3x - 2$ εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου $x^2 - 4x - 2$, ἔπεται ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀκέραιον μονώνυμον ἢ πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην $x^2 - 4x - 2$, νὰ δίδῃ γινόμενον τὸ $-3x - 2$. Διὰ τοῦτο πρέπει νὰ διακόψωμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην καὶ τὸ $-3x - 2$ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀτελοῦς ταύτης διαίρεσεως, τὸ δὲ $x^2 + 2x + 3$ πηλίκον αὐτῆς.

§ 76. Παρατηρήσεις. Πολυώνυμόν τι δὲν εἶναι διαιρετὸν δι' ἄλλου, διατεταγμένων καὶ τῶν δύο ὁμοίως πρὸς ἓν γράμμα των :

1ον. Ὅταν ὁ α' ὅρος τοῦ διαιρετέου ἢ ἑνὸς ἐκ τῶν εὐρισκομένων μερικῶν ὑπολοίπων δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ α' ὅρου τοῦ διαιρέτου.

2ον. Ὅταν ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ διαιρέτου δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ διαιρέτου.

3ον. Ὅταν εἶναι διαιρετὸς μὲν ὁ α' ὅρος καὶ ὁ τελευταῖος τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ α' καὶ τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ διαιρέτου ἀντιστοίχως, ἀλλὰ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως δὲν εὐρίσκομεν ὑπόλοιπον 0.

Ἀσκήσεις καὶ Προβλήματα

Ὁ μᾶς πρώτη. 129. Νὰ γίνουν αἱ ἑξῆς διαίρεσεις μετὰ τῶν δοκιμῶν των :

α') $(2x^3 - 7x^2 - 7x + 4) : (2x - 1)$

β') $(6x^3 + 2x^2 + 11x + 10) : (3x - 2)$

$$\begin{array}{ll}
 \gamma') (x^4+x^2+1):(x^2+x+1) & \delta') (x^3-6x^2+12x-18):(x^2-4x+4) \\
 \epsilon') (10x^5-21x^4-10x^2-40x):(5x^2-3x+8) & \sigma\tau) (1+\alpha^5+\alpha^{10}):(\alpha^2+\alpha+1) \\
 \zeta') (\alpha^4+\beta^4):(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2) & \eta') (1-6x^5+x^6):(1-2x+x^2) \\
 & \theta') (x^5-41x-120):(x^2+4x+5).
 \end{array}$$

Ὁ μὰς δευτέρα. 130. Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις :

$$\alpha') (x^{3\nu}-3x^{2\nu}\psi\nu+3x^\nu\psi^{2\nu}-\psi^{3\nu}): (x^\nu-\psi^\nu).$$

$$\beta') (9\alpha x+3\alpha^4x+14\alpha^3x+2): (\alpha^{2x}+5\alpha^x+1),$$

$$\gamma') (x^{8\nu}-\psi^{8\nu}): (x^{5\nu}-x^{4\nu}\psi\rho+x^\nu\psi^{4\rho}-\psi^{5\rho}),$$

$$\delta') (\alpha^4\mu+4\alpha^2\mu x^{2\nu}+16x^{4\nu}): (\alpha^{2\mu}+2\alpha^\mu x^\nu+4x^{2\nu}),$$

$$\epsilon') (x\mu+\nu\psi\nu-4x\mu+\nu-1\psi^{2\nu}-27x\mu+\nu-2\psi^{3\nu}+42x\mu+\nu-3\psi^{4\nu}):$$

$$(x\mu+3x\mu-1\psi\nu-6x\mu-2\psi^{2\nu}).$$

Ὁ μὰς τρίτη. 131. Δείξτε ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ πηλίκου δύο ἀκεραίων (ἀνηγμένων) πολυωνύμων ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρετέου πλην τὸν τοῦ διαιρέτου. Ἐξηγήσατε τοῦτο μὲ τρία διάφορα παραδείγματα.

1. ΥΠΟΛΟΙΠΟΝ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΝΤΟΣ ΤΟ x ΔΙΑ ΤΟΥ $x \pm \alpha$ ἢ ΔΙΑ ΤΟΥ $\alpha x \pm \beta$

§ 77. Ἐστω π.χ. ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $(x^3-3x^2+3x+2):(x-1)$.

Ἐὰν μὲ ρ παραστήσωμεν τὸ πηλίκον καὶ μὲ τὸ ν τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, θὰ ἔχωμεν :

$$(x^3-3x^2+3x+2) = \rho(x-1) + \nu \quad (1)$$

Τὸ ὑπόλοιπον ν δὲν περιέχει τὸ x εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην, διότι ὁ διαιρέτης εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x (τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ διαιρετέου).

Ἡ σχέση (1) ἰσχύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x , ἄρα καὶ διὰ τὴν $x=1$. Θέτοντες εἰς αὐτὴν $x=1$, εὕρισκομεν

$$1^3-3\cdot 1^2+3\cdot 1+2=\nu, \text{ ἥτοι } \nu=3.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν καὶ ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν.

Ἐν γένει ἔστω, ὅτι $\Pi(x)$, τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται, ὅτι εἶναι πολυώνυμον περιέχον τὸ x , παριστάνει τὸν διαιρετέον, τὸ $\rho(x)$ τὸ πηλίκον καὶ τὸ ν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ $(x-\alpha)$, τὸ ὁποῖον δὲν θὰ περιέχῃ τὸν x .

Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ν εἶναι ἴσον μὲ $\Pi(\alpha)$, δηλαδὴ μὲ τὸ ἐξαγόμενον τὸ προκύπτει, ἐὰν εἰς τὸ πολυώνυμον τοῦ διαιρετέου γράψωμεν ἀντὶ τοῦ x , τὸ α , ἥτοι τὴν τιμὴν, διὰ τὴν ὁποίαν τὸ $x-\alpha$ λαμβάνει τὴν τιμὴν 0.

Πράγματι ἔχομεν ὅτι $\Pi(x) = \rho(x) \cdot (x - \alpha) + u$.

Ἐὰν θέσωμεν ὅπου x τὸ α λαμβάνομεν :

$$\Pi(\alpha) = \rho(\alpha) \cdot (\alpha - \alpha) + u \quad \eta \quad \Pi(\alpha) = \rho(\alpha) \cdot 0 + u = u.$$

*Ἐστω ἡ διαίρεσις $(x^6 - \alpha^6) : (x + \alpha)$

Τὸ ὑπόλοιπον εὐρίσκεται, ἐὰν εἰς τὸν διαιρετέον θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x , τὸ $(-\alpha)$, ἥτοι τὴν τιμὴν τοῦ x , διὰ τὴν ὁποίαν τὸ $x + \alpha$ λαμβάνει τὴν τιμὴν 0. Διότι τὸ $x + \alpha = x - (-\alpha)$. Ὡστε ἀντὶ τῆς δοθείσης διαιρέσεως ἔχομεν τὴν $(x^6 - \alpha^6) : [x - (-\alpha)]$. Ἐὰν κάμωμεν τὴν ἀντικατάστασιν $x = (-\alpha)$ εἰς τὸν διαιρετέον, εὐρίσκομεν ὅτι τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $(-\alpha)^6 - \alpha^6 = \alpha^6 - \alpha^6 = 0$.

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως πολυωνύμου περιέχοντος τὸ x , διὰ τοῦ $x \pm \alpha$, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν ὅπου x τὸ $-\alpha$ ἢ τὸ α εἰς τὸ πολυώνυμον καὶ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τούτου, ἥτοι νὰ θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x , διὰ τὴν ὁποίαν μηδενίζεται τὸ $x \pm \alpha$.

Οὕτω τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $(x^4 + \alpha^4) : (x + \alpha)$ εἶναι τὸ $(-\alpha)^4 + \alpha^4 = \alpha^4 + \alpha^4 = 2\alpha^4$.

Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $\Pi(x)$ διὰ $\alpha x + \beta$ εὐρίσκεται, ἂν τεθῇ εἰς τὸν διαιρετέον ἡ τιμὴ $x = -\frac{\beta}{\alpha}$, διὰ τὴν ὁποίαν μηδενίζεται τὸ $\alpha x + \beta$. Διότι, ἂν $\Pi(x)$ παριστάνῃ τὸν διαιρετέον, $\rho(x)$ τὸ πηλίκον καὶ u τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν

$$\Pi(x) = \rho(x) \cdot (\alpha x + \beta) + u.$$

Θέτοντες $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν, εὐρίσκομεν

$$\Pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = \rho\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) \cdot (-\beta + \beta) + u = u, \quad \eta \text{τοι} \quad \Pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = u.$$

§ 78. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν ὅτι :

Πολυώνυμόν τι $\Pi(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $\alpha x \pm \beta$, ἂν τὸ $\Pi\left(\mp \frac{\beta}{\alpha}\right)$ εἶναι ἴσον μὲ 0.

Οὕτω τὸ $x^m - \alpha^m$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $x - \alpha$, διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι $\alpha^m - \alpha^m = 0$, ($\alpha \neq 0$).

Τὸ $x^\mu + \alpha^\mu$ δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ $x - \alpha$, διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι $\alpha^\mu + \alpha^\mu = 2\alpha^\mu \neq 0$.

Τὸ $x^\mu - \alpha^\mu$ διαιρεῖται μὲν διὰ τοῦ $x + \alpha$, ὅταν τὸ μ ἄρτιος ἄριθμός, ἀλλὰ δὲν διαιρεῖται δι' αὐτοῦ, ὅταν τὸ μ εἶναι περιττός.

Διότι, εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $(-\alpha)^\mu - \alpha^\mu = \alpha^\mu - \alpha^\mu = 0$.

εἰς δὲ τὴν δευτέραν εἶναι $(-\alpha)^\mu - \alpha^\mu = -2\alpha^\mu \neq 0$.

Τὸ $x^\mu + \alpha^\mu$ διαιρεῖται μὲν διὰ τοῦ $x + \alpha$, ὅταν τὸ μ εἶναι περιττός, διότι τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $(-\alpha)^\mu + \alpha^\mu = -\alpha^\mu + \alpha^\mu = 0$. ἀλλ' ὅχι ὅταν τὸ μ εἶναι ἄρτιος, διότι τότε τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $(-\alpha)^\mu + \alpha^\mu = \alpha^\mu + \alpha^\mu = 2\alpha^\mu \neq 0$.

Ἀσκήσεις

Ὁ μὰς πρώτη. 132. Εὑρετε τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις.

$$\alpha') (2x^2 + x - 9) : (x - 2)$$

$$\beta') (x^2 + 6x + 7) : (x + 2)$$

$$\gamma') (x^4 + 17x^3 - 68x - 33) : (x - 0,5)$$

$$\delta') (27x^3 + 1) : (3x + 1)$$

Ὁ μὰς δευτέρα. 133. Εὑρετε τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαίρεσεις.

$$\alpha') (81x^4 - 256) : (3x - 4)$$

$$\beta') (8\alpha^3 + \beta^3) : (2\alpha + \beta)$$

$$\gamma') (32x^6 + 243) : (2x + 3)$$

$$\delta') (64x^6 - 1) : (2x + 1)$$

$$\epsilon') (1 + x^2) : (1 + x)$$

$$\sigma\tau') (\alpha^{10} + \beta^{10}) : (\alpha^2 + \beta^2)$$

$$\zeta') (\alpha^{12} - \beta^{12}) : (\alpha^4 - \beta^4)$$

$$\eta') (x^{16} + \psi^{16}) : (x^8 + \psi^8)$$

$$\theta') (x^{15} + \psi^{15}) : (x^3 + \psi^3)$$

$$ι) (x^{18} - \psi^{18}) : (x^6 - \psi^6)$$

Ὁ μὰς τρίτη. 134. Εὑρετε τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαίρεσεις.

$$\alpha') (\psi^{\mu\nu} - 1) : (\psi^\nu - 1) \quad \beta') (\mu^2 - \nu^2) : (\mu^2 - \nu^2) \quad \gamma') (\alpha^{2\nu} + \mu + \beta^{2\nu} + \mu) : (\alpha + \beta)$$

$$\delta') (\psi^{12} - \omega^4) : (\psi^3 + \omega)$$

$$\epsilon') (x^{4\pi} - 1) : (x^\pi - 1).$$

12. ΠΗΛΙΚΑ ΤΩΝ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΝ ($x^\mu \pm \alpha^\mu$) : ($x \pm \alpha$)

§ 79. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν διαίρεσιν τοῦ $x^\mu - \alpha^\mu$ ἢ τοῦ $x^\mu + \alpha^\mu$ διὰ τοῦ $x - \alpha$, ὅπου $\mu > 0$ καὶ ἀκέρατος. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν πράξιν, εὐρίσκομεν πηλίκον τὸ $x^{\mu-1} + \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} + \alpha^3 x^{\mu-4} + \dots + \alpha^{\mu-1}$ καὶ ὑπόλοιπον 0 διὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, $2\alpha^\mu$ δὲ διὰ τὴν δευτέραν.

Ὁμοίως εὐρίσκομεν διὰ τὴν διαίρεσιν $(x^{2\mu} - \alpha^{2\mu}) : (x + \alpha)$ ὡς πηλίκον $x^{2\mu-1} - \alpha x^{2\mu-2} + \dots - \alpha^{\mu-1}$ καὶ ὑπόλοιπον 0.

Διὰ τὴν διαίρεσιν $(x^{2v+1} + \alpha^{2v+1}) : (x + \alpha)$ εὐρίσκομεν πηλίκον $x^{2v} - \alpha x^{2v-1} + \dots + \alpha^{2v}$ καὶ ὑπόλοιπον 0.

Διὰ τὴν διαίρεσιν $(x^{2v-1} - \alpha^{2v-1}) : (x + \alpha)$ εὐρίσκομεν πηλίκον $x^{2v} - \alpha x^{2v-1} + \dots + \alpha^{2v}$ καὶ ὑπόλοιπον $-2\alpha^{2v+1}$.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν :

$$(x^4 - \alpha^4) : (x - \alpha) = x^3 + \alpha x^2 + \alpha^2 x + \alpha^3$$

$$(x^6 - \alpha^6) : (x + \alpha) = x^5 - \alpha x^4 + \alpha^2 x^3 - \alpha^3 x^2 + \alpha^4 x - \alpha^5$$

$$(x^3 + \alpha^3) : (x - \alpha) = x^2 + \alpha x + \alpha^2 \quad \text{καὶ ὑπόλοιπον } 2\alpha^3$$

$$(x^3 + \alpha^3) : (x + \alpha) = x^2 - \alpha x + \alpha^2$$

§ 80. Λέγομεν ὅτι πολυώνυμόν τι εἶναι ὁμογενὲς βαθμοῦ τινὸς ὡς πρὸς ὠρισμένα γράμματά του ἔαν πάντες οἱ ὅροι του εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα. Π.χ. τὸ $x^3 + 5\alpha x^2 - 12\alpha x^2 + \alpha^3$ εἶναι ὁμογενὲς γ' βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ α καὶ x . Τὸ $5x\psi - 8x^2 + 4\psi^2$ εἶναι ὁμογενὲς β' βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ x καὶ ψ .

Ὅμογενὲς γραμμικὸν λέγεται πολυώνυμόν τι ὡς πρὸς ὠρισμένα γράμματα αὐτοῦ, ἔαν εἶναι ὁμογενὲς α' βαθμοῦ ὡς πρὸς αὐτά, π.χ. τὸ $3\alpha x - 5\beta\psi + 8\gamma\omega$ ὡς πρὸς τὸ α, β, γ ἢ ὡς πρὸς τὰ x, ψ, ω .

Οὕτω τὰ ἀνωτέρω πηλικά τῶν διαιρέσεων $(x^\mu \pm \alpha^\mu) : (x \pm \alpha)$ εἶναι πολυώνυμα ὁμογενῆ καὶ βαθμοῦ $\mu-1$ ὡς πρὸς x καὶ α .

Π.χ. τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(x^4 - \alpha^4) : (x - \alpha)$ εἶναι τὸ $x^3 + \alpha x^2 + \alpha^2 x + \alpha^3$ ὁμογενὲς πολυώνυμον γ' βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ α .

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

135. Εὑρετε τὰ πηλικά καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων ἀπὸ μνήμης :

$$\alpha') (x^3 + \beta^3) : (\alpha + \beta) \quad \beta') (\alpha^3 - \beta^3) : (\alpha - \beta) \quad \gamma') (\alpha^2 - \beta^2) : (\alpha + \beta)$$

$$136. \alpha') (\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3) : (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)$$

$$\beta') (\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3) : (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)$$

137. Εὑρετε ἀπὸ μνήμης τὰ πηλικά καὶ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων :

$$\alpha') (x^5 + \psi^5) : (x + \psi) \quad \beta') (x^6 - \psi^6) : (x - \psi) \quad \gamma') (x^3 + \psi^3) : (x + \psi)$$

$$\delta') (x^5 + \psi^5) : (x - \psi) \quad \epsilon') (x^7 + 1) : (x + 1) \quad \sigma\tau') (x^3 + \alpha^3) : (x - \alpha)$$

138. Εὑρετε τίνων διαιρέσεων τῆς μορφῆς $(x^\mu \pm \alpha^\mu) : (x \pm \alpha)$ εἶναι τέλεια πηλικά τὰ κάτωθι :

$$\alpha') x^2 + \alpha x + \alpha^2 \quad \beta') x^2 - x + 1$$

$$\delta') \alpha^3 + \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 + \beta^3$$

$$\gamma') x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\epsilon') x^4 - \alpha x^3 + \alpha^2 x^2 - \alpha^3 x + \alpha^4$$

139. Εύρετε τὸ πηλίκοι τῆς διαιρέσεως $(\alpha^{5n} - \beta^{5n}) : (\alpha^n - \beta^n)$, χωρὶς νὰ ἐκτελέσητε τὴν πράξιν (τὸ ν ὑποτίθεται ἀκέραιος > 0).

140. Ὅμοίως τῆς διαιρέσεως $(7\rho + 1) : 8$, ἂν τὸ ρ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ περιττός. Παρατηρήσατε ὅτι τὸ $8 = 7 + 1$. Εὑρετε καὶ ἄλλα τοιαῦτα παραδείγματα τελείων διαιρέσεων.

141. Δείξατε ὅτι τὸ $(\alpha + \beta + \gamma)^\mu - \alpha^\mu - \beta^\mu - \gamma^\mu$ διαιρεῖται διὰ τῶν $\alpha + \beta$, $\alpha - \gamma$, $\beta + \gamma$, ὅταν τὸ μ εἶναι περιττός καὶ θετικὸς ἀριθμὸς.

142. Δείξατε ὅτι ἵνα ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς x , διαιρῇται διὰ τοῦ $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$, ($\alpha \neq \beta \neq \gamma$), πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διαιρῇται διὰ τοῦ $x - \alpha$, διὰ τοῦ $x - \beta$ καὶ διὰ τοῦ $x - \gamma$.

13. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΑΚΕΡΑΙΑΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΣ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

§ 81. Ἐστω μονώνυμον ἀκέραιον, πχ. τὸ $24\alpha^2\beta^3\gamma$.

Ἐὰν τὸν ἀριθμὸν 24 ἀναλύσωμεν εἰς τοὺς πρώτους τοῦ παράγοντας, θὰ εὕρωμεν ὅτι εἶναι $24 = 2^3 \cdot 3$. Ἄρα τὸ $24\alpha^2\beta^3\gamma = 2^3 \cdot 3\alpha^2 \cdot \beta^3\gamma$. Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ παράγοντες τοῦ ἀνωτέρω μονώνυμου εἶναι οἱ 2, 3, α , β , γ . Ἡ ἀνάλυσις λοιπὸν ἀκεραίου τινὸς μονώνυμου, ἔχοντος (ἀριθμητικὸν) συντελεστήν ἀκέραιον ἀριθμὸν, γίνεται εὐκόλως, διότι πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἀναλύσωμεν τὸν (ἀριθμητικὸν) συντελεστήν του εἰς πρώτους παράγοντας.

Τούναντίον, ἡ τροπὴ πολυωνύμου τινὸς εἰς γινόμενον παράγοντων κατὰ τρόπον μᾶλλον ἀπλοῦν, εἶναι δυνατὴ εἰς ὠρισμένης περιπτώσεις καὶ ἐκ τούτων ἀναφερόμεν τινὰς κατωτέρω.

1η περίπτωση. Ἐὰν πάντες οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου εἶναι γινόμενα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὸν τινὰ παράγοντα, τρέπεται τοῦτο εὐκόλως εἰς γινόμενον παραγόντων.

Οὕτω τὸ $\alpha\mu + \beta\mu - \gamma\mu = \mu(\alpha + \beta - \gamma)$.

Ὅμοίως τὸ $\mu\alpha + \mu = \mu(\alpha + 1)$.

Ἐπίσης τὸ $2x^3 + 6x\psi = 2x(x^2 + 3\psi)$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν, ὅτι θέτομεν τὸν κοινὸν παράγοντα ἐκτὸς παρενθέσεως.

143. Τρέψατε εις γινόμενα τὰς κάτωθι παραστάσεις :

α') $8\alpha^2\beta - 6\alpha^3 + 4\alpha\beta$	β') $4\alpha x^2\psi - 82\psi^2 - 4x\psi$
γ') $8\alpha^3\beta^2\gamma^2 - 4\alpha^2\beta^3\gamma^3 + 2\alpha^2\beta^2\gamma^3$	δ') $15\alpha^3x - 10\alpha^2\psi + 5\alpha^3\omega$
ε') $\alpha^3\gamma\psi^3 + 2\alpha^2\gamma^2\psi^2 - \alpha^2\gamma\psi^2$	στ') $3\beta^3\gamma^3 + 2\beta^2\gamma^2 - 6\beta\gamma^3$
ζ') $x^2\psi^2\omega^2 - x^2\psi^3\omega^3 + x^2\psi^3\omega$	η') $\alpha\beta^2\gamma^3 - 2\alpha^2\beta^2\gamma + 3\alpha^2\beta^3\gamma$
θ') $6\alpha^2 - 12\alpha^3$	ι') $3x^2 - 7x^4$
	ια') $8x^2\psi^2 + 16x\psi\omega - 24x^2\psi^2\omega^2$

2α περίπτωσις. Ἐὰν εἶναι δυνατόν νὰ διαταχθοῦν οἱ ὅροι πολυωνύμου καθ' ὁμάδας, ὥστε εἰς ἐκάστην τούτων νὰ ὑπάρχη ὁ αὐτὸς παράγων, τότε τρέπεται ἐν γένει τοῦτο εἰς γινόμενον παραγόντων.

Π.χ. τὸ πολυώνυμον $\alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$ εἶναι ἴσον μὲ
 $(\alpha\gamma + \alpha\delta) + (\beta\gamma + \beta\delta) = \alpha(\gamma + \delta) + \beta(\gamma + \delta) = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta).$

Ἄσκησις

144. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις :

α') $\alpha x^2 + \alpha^2 x + \alpha + x$	β') $x^3 - x^2\omega - x\psi^2 + \psi^2\omega$
γ') $\alpha\beta x - \alpha\beta\psi + \gamma\delta x - \gamma\delta\psi$	δ') $\alpha x^2 - \beta x^2 + \alpha - \beta$
ε') $\alpha^2\gamma \pm \beta^2\delta \pm \beta^2\gamma + \alpha^2\delta$	στ') $\alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2 \pm \alpha\beta\gamma \pm \beta\gamma^2$
ζ') $1 + \gamma - \gamma^2 x\psi - \gamma^3 x\psi$	η') $6x^3 - 10x\psi^3 - 15\psi^4 + 9x^2\psi$
θ') $2x(x - \psi) - 6\alpha(x - \psi)$	ι') $x^3 + 2(x^2 - 1) - 1$
ια') $\alpha x + \beta x - \gamma x + \alpha\psi + \beta\psi - \gamma\psi$	ιβ') $\alpha^5 + 2(\alpha^3 + 1) + 1$

3η περίπτωσις. Ἐὰν τριώνυμόν τι ἰσοῦται μὲ τέλειον τετράγωνον διωνύμου, τρέπεται εἰς γινόμενον παραγόντων. Οὕτω τὸ
 $x^2 + 2x\psi + \psi^2 = (x + \psi)(x + \psi) = (x + \psi)^2.$

Ὅμοίως ἔχομεν

$$16\alpha^2 - 24\alpha\beta + 9\beta^2 = (4\alpha - 3\beta)^2 = (4\alpha - 3\beta)(4\alpha - 3\beta).$$

Ἐπίσης ἔχομεν

$$x^4 - 2x^2\psi + \psi^2 = (x^2 - \psi)^2 = (x^2 - \psi)(x^2 - \psi).$$

Ἄσκησις

145. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις :

α') $\mu^2\nu^2 \pm 16\mu\nu\alpha^2 + 64\alpha^4$	β') $\alpha^2\beta^6\gamma^6 \pm 2\alpha\beta^2\gamma^3x^8 + x^{16}$	γ') $x^6 \pm 34x^3 + 289$
δ') $(x + \psi)^2 - 4\omega(x + \psi) + 4\omega^2$	ε') $(\alpha - \beta)^2 - 6(\alpha - \beta)\gamma^3 + 9\gamma^6$	
στ') $(\phi + \omega^2)^2 + 8\phi + 8\omega^2 + 16$		

4η περίπτωσις. Ἐὰν διώνυμόν τι εἶναι διαφορὰ δύο τετρα-

γώνων, τρέπεται εἰς γινόμενον τοῦ ἄθροίσματος ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν δοθέντων τετραγώνων καθ' ἣν τάξιν εὐρίσκονται τὰ δοθέντα τετράγωνα.

$$\text{Οὕτως ἔχομεν} \quad 16x^2 - 9\psi^2 = (4x + 3\psi)(4x - 3\psi).$$

$$\text{'Ομοίως τὸ} \quad 25 - 16\alpha^2 = (5 + 4\alpha)(5 - 4\alpha).$$

Ἀ σ κ η σ ι ς

146. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις :

α') $\alpha^2\beta^2 - 1$	β') $4\alpha^2 - 49\beta^2$	γ') $121\alpha^2 - 36\beta^2$	δ') $49x^{14} - \psi^{12}$
ε') $81\alpha^4\beta^2 - \gamma^4$	στ') $4\alpha^2\gamma - 9\gamma^3$	ζ') $20\alpha^3\beta^2 - 5\alpha\beta^2$	η') $3\alpha^6 - 12\alpha^3\gamma^2$
θ') $1 - 400x^4$	ι') $4x^{16} - \psi^{20}$	ια') $9x^2 - \alpha^6$	ιβ') $16x^{17} - 9x\psi^6$

5η περίπτωση. Ἐνίοτε δυνάμεθα νὰ διατάξωμεν τοὺς ὅρους τοῦ δοθέντος πολυωνύμου καθ' ὁμάδας, οὕτως ὥστε αἱ ὁμάδες αὗται νὰ δύνανται νὰ γραφοῦν ὡς διαφορὰ τετραγώνων δύο παραστάσεων. Οὕτως ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν. Π.χ. ἔχομεν ὅτι : $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - 9\gamma^2 = (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) - 9\gamma^2 = (\alpha - \beta)^2 - 9\gamma^2 = (\alpha - \beta + 3\gamma)(\alpha - \beta - 3\gamma)$. Ὁμοίως $12\alpha\beta + 9x^2 - 4\alpha^2 - 9\beta^2 = 9x^2 - (4\alpha^2 - 12\alpha\beta + 9\beta^2) = 9x^2 - (2\alpha - 3\beta)^2 = (3x - 2\alpha + 3\beta)(3x + 2\alpha - 3\beta)$.

Ἀ σ κ η σ ι ς

146α. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις :

α') $\beta^2 - x^2 + 4\alpha x - 4\alpha^2$	β') $\alpha^2 - x^2 - \psi^2 - 2x\psi$
γ') $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 16\alpha^2\beta^2$	δ') $4x^2 - 9\alpha^2 + 6\alpha - 1$
ε') $x^4 - x^2 - 2x - 1$	στ') $2x\psi - x^2 + \alpha^2 - \psi^2$
ζ') $\alpha^{4\nu} + 2\alpha^{2\nu}\beta^{2\nu} - \gamma^{2\nu} + \beta^{1\nu}$	η') $x^{2\nu} - 2x\psi^\nu + \psi^{2\nu} - 4\omega^{2\nu}$
ς') $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 + 2\alpha\beta - 2\gamma\delta$	ι') $\alpha^2 - x^2 + 2(\alpha\beta - 3x\psi) + \beta^2 - 9\psi^2$
ια') $\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2 - 2(\alpha\delta - \beta\gamma)$	ιβ') $4(\alpha\delta + \beta\gamma)^2 - (\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2)^2$

6η περίπτωση. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4$, παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\begin{aligned} \alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 &= \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - \alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha^2\beta^2 = \\ &= (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Π.χ. τὸ } x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = \\ &= (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x). \end{aligned}$$

7η περίπτωση. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶναι τῆς μορφῆς $x^2 + \beta x + \gamma$ καὶ τὸ μὲν β εἶναι ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δύο ἀρι-

θμῶν, ἔστω τῶν ρ καὶ ρ' , τὸ δὲ γ τὸ γινόμενον τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, θὰ ἔχωμεν $\beta = \rho + \rho'$, $\gamma = \rho\rho'$. Ἀρα :

$$x^2 + \beta x + \gamma = x^2 + (\rho + \rho')x + \rho\rho' = x^2 + \rho x + \rho'x + \rho\rho' = (x^2 + \rho x) + (\rho'x + \rho\rho') = x(x + \rho) + \rho'(x + \rho) = (x + \rho)(x + \rho').$$

Π.χ. ἐὰν ἔχωμεν τὸ τριώνυμον $x^2 + 8x + 15$, παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι $8 = 5 + 3$ καὶ $15 = 3 \cdot 5$. Διὰ τοῦτο ἔχομεν :

$$x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5).$$

8η περίπτωσης. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶναι τῆς μορφῆς $ax^2 + \beta x + \gamma$, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν αὐτὴν εἰς γινόμενον φέροντες πρῶτον αὐτὴν εἰς τὴν προηγουμένην μορφήν, ἥτοι γράφοντες αὐτὴν οὕτως : $\alpha \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \right)$, ὅτε ἀρκεῖ νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τὸ $x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha}$. Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς :

Γράφομεν $ax^2 + \beta x + \gamma = \frac{1}{\alpha} (\alpha^2 x^2 + \alpha\beta x + \alpha\gamma)$. Θέτομεν $\alpha x = \omega$ ὅτε ἔχομεν, ἀντὶ τῆς δοθείσης παραστάσεως, τὴν $\frac{1}{\alpha} (\omega^2 + \beta\omega + \alpha\gamma)$.

Ζητοῦμεν τώρα νὰ τρέψωμεν τὸ $\omega^2 + \beta\omega + \alpha\gamma$ εἰς γινόμενον. Ἔστω λοιπὸν ὅτι εὐρέθη $\omega^2 + \beta\omega + \alpha\gamma = (\omega - \rho_1)(\omega - \rho_2)$. Θέτομεν $\omega = \alpha x$ καὶ εὐρίσκομεν $(\alpha x - \rho_1)(\alpha x - \rho_2)$, ἄρα ἡ δοθεῖσα παράστασις τρέπεται εἰς τὴν $\frac{1}{\alpha} (\alpha x - \rho_1)(\alpha x - \rho_2)$.

Ἔστω π.χ. ἡ παράστασις $3x^2 - x - 2$.

Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς : $\frac{1}{3} (3 \cdot 3x^2 - 3x - 3 \cdot 2)$. Ἐὰν γράψωμεν ἀντὶ $3x$ τὸ ω , δηλαδὴ ἂν θέσωμεν $3x = \omega$, εὐρίσκομεν

$$3x^2 - x - 2 = \frac{1}{3} (\omega^2 - \omega - 6).$$

Ἀναλύομεν τὸ $\omega^2 - \omega - 6$ εἰς τὸ $(\omega - 3)(\omega + 2)$ καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν :

$$3x^2 - x - 2 = \frac{1}{3} (\omega - 3)(\omega + 2).$$

Γράφομεν ἀντὶ τοῦ ω τὸ ἴσον αὐτοῦ $3x$ καὶ ἔχομεν :

$$\frac{1}{3} (3x - 3)(3x + 2) = \frac{3}{3} (x - 1)(3x + 2) = (x - 1)(3x + 2)$$

Ἦτοι : $3x^2 - x - 2 = (x - 1)(3x + 2)$.

9η περίπτωσης. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶναι ἄθροισμα ἢ

διαφορά δύο κύβων, ἀναλύεται εἰς γινόμενον ἐπὶ τῇ βάσει τῆς διαίρεσεως πολωνύμου διὰ τοῦ $x+\alpha$ ἢ τοῦ $x-\alpha$. Οὕτω π.χ. τὸ $\alpha^3-\beta^3$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $\alpha-\beta$ καὶ δίδει πηλίκον $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$.

Ἐπομένως εἶναι: $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$.

Ὁμοίως τὸ $\alpha^3+\beta^3$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $\alpha+\beta$ καὶ δίδει πηλίκον $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$. Ἄρα εἶναι $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$.

Κατὰ ταῦτα τὸ $x^6+\psi^9=(x^2+\psi^3)(x^4-x^2\psi^3+\psi^6)$.

Τὸ $(x-\psi)^3+\omega^3=(x-\psi+\omega)[(x-\psi)^2-(x-\psi)\omega+\omega^2]=$
 $(x-\psi+\omega)(x^2+\psi^2-2x\psi-x\omega+\psi\omega+\omega^2)$.

Ἀσκήσεις

Ὁ μᾶς πρῶτη. 147. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις.

α')	$9\alpha^4+26\alpha^2\beta^2+25\beta^4$	στ')	$\alpha^8+\beta^4$	ια')	$16\alpha^4-17\alpha^2+1$
β')	$4x^4-21x^2\psi^2+9\psi^4$	ζ')	$\alpha^4+\alpha^2\psi^2+\psi^4$	ιβ')	$16\lambda^4+\gamma^4$
γ')	$\lambda^2+\lambda^2+1$	η')	$25x^4+31x^2\psi^2+16\psi^4$	ιγ')	$\alpha^2+17\alpha-390$
δ')	$4\alpha^4-13\alpha^2+1$	θ')	$\alpha^4+4\beta^4$	ιδ')	$\alpha^2-7\alpha\beta+10\beta^2$
ε')	$4x^4-37x^2\psi^2+9\psi^4$	ι')	$9\alpha^8-15\alpha^4+1$		

Ὁ μᾶς δευτέρη. 148. Ἐπίσης νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις.

α')	$4x^2+13x+3$	δ')	$x^3\pm 64$	ζ')	$8\alpha^3\pm\beta^6$
β')	$6x^2+17x+12$	ε')	$343\pm x^3$	η')	$216\mu^3\pm\nu^6$
γ')	$11\alpha^2-23\alpha\beta+2\beta^2$	στ')	$\alpha^2\beta^3\pm 343$		

Ὁ μᾶς τρίτη. 149. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα αἱ κατωτέρω παραστάσεις διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθεισῶν περιπτώσεων.

α')	$(x+\psi)^2-1-x\psi(x+\psi+1)$	β')	$\alpha^4-\beta^4+2\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)$
γ')	$(x^2-4)^2-(3x-2)(x+2)^2$	δ')	$\alpha^2\gamma^2+\beta\gamma-\alpha^2\gamma-\beta$
ε')	$x(2+x)-\psi(2+\psi)$	στ')	$\alpha^3-\beta^3+\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\alpha+\beta$
ζ')	$4x+4\alpha\nu+x^2-4\alpha^2-\nu^2+4$	η')	$x^4\psi^4-4x^2+4-\psi^2-4x^2\psi^2+4x\psi$
θ')	$x^2\psi-3x\psi^2-3x^3-\psi^3$	ι')	$\alpha\beta(x^2+1)+x(\alpha^2+\beta^2)$
ια)	$\pi\nu(\mu^2+1)+\mu(\pi^2+\nu^2)$		

4. ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ ΚΟΙΝΟΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

§ 82. Καλοῦμεν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην (μ.κ.δ.) δοθέντων ἀκεραίων μονωνύμων με ἀριθμητικούς συντελεστάς ἀκεραίους, τὸν μ.κ.δ. τῶν κυρίων ποσῶν των, με συντελεστὴν τὸν μ.κ.δ. τῶν συντελεστῶν των.

Ὁ κανὼν τῆς εὐρέσεως τοῦ μ.κ.δ. ἀκεραίων ἀριθμῶν (τῆς Ἀρι-

ριθμητικῆς) δι' ἀναλύσεως αὐτῶν εἰς πρώτους παράγοντας, ἰσχύει καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μ.κ.δ. ἀκεραίων σχετικῶν ἀριθμῶν ἢ παραστάσεων, μὲ συντελεστὰς ἀκεραίους, ὅταν αὗται τρέπωνται εἰς γινόμενα, καὶ ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως. Οὕτω ὁ μ.κ.δ. τῶν $6\alpha^2\beta^3 = 2 \cdot 3 \cdot \alpha^2\beta^3$, $9\alpha^3\beta^2 = 3^2\alpha^3\beta^2$, $16\alpha^4\beta^3 = 2^4 \cdot \alpha^4\beta^3$, εἶναι τὸ $\alpha^2\beta^2$

Ὁ μ.κ.δ. τῶν $\alpha^2 - \alpha\beta = (\alpha - \beta)\alpha$, $\alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha(\alpha - \beta)^2$ καὶ $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ εἶναι τὸ $\alpha - \beta$.

§ 83. Καλοῦμεν ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον (ἐ.κ.π.) ἀκεραίων μονωνύμων μὲ ἀριθμητικοὺς συντελεστὰς ἀκεραίους, τὸ ἐ.κ.π. τῶν κυρίων ποσῶν αὐτῶν, μὲ συντελεστὴν τὸ ἐ.κ.π. τῶν συντελεστῶν του.

Ὁ κανὼν τῆς εὐρέσεως τοῦ ἐ.κ.π. ἀκεραίων ἀριθμῶν (τῆς Ἀριθμητικῆς) δι' ἀναλύσεως εἰς πρώτους παράγοντας ἰσχύει καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐ.κ.π. ἀκεραίων σχετικῶν ἀριθμῶν ἢ καὶ ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων (μὲ συντελεστὰς ἀκεραίους), ὅταν αὗται τρέπωνται εἰς γινόμενα, ἡ δὲ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως

Οὕτω τὸ ἐ.κ.π. τῶν $18\alpha^3\beta^2 = 2 \cdot 3^2\alpha^3\beta^2$, $9\alpha\beta^2 = 3^2 \cdot \alpha\beta^2$, $12\alpha\beta = 2^2 \cdot 3\alpha\beta$, εἶναι τὸ γινόμενον $2^2 \cdot 3^2\alpha^3\beta^2 = 36\alpha^3\beta^2$.

Ἀ σ κ ῆ σ ε ι ς

150. Νὰ εὐρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν παραστάσεων:

$$\alpha') 121\alpha^2 \quad 168\alpha^4\beta^2$$

$$\beta') 36\alpha^3x, \quad 28x^3\psi$$

$$\delta) (x-1)^2(x+2)^3, \quad (x-1)(x+3)^3$$

$$\delta') 35x^2(\mu+\nu)^2, \quad (\mu+\nu)^3, \quad 20x^3(\mu+\nu)^2(\mu-\nu)^2, \quad 45x^4(\mu+\nu)^3(\mu-\nu)^3$$

$$\epsilon') x^3+2x^2-3x, \quad 2x^3+5x^2-3x$$

$$\sigma\tau') 1-x, \quad (1-x^2)^2, \quad (1-x)^3$$

$$\zeta') x^4+\alpha x^3+\alpha^3x+\alpha^4, \quad x^4+\alpha^2x^2+\alpha^4$$

151. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παραστάσεων

$$\alpha') 18x(\alpha+2\beta)^2, \quad 9x\psi(\alpha+\beta)^2(\alpha-2\beta), \quad 18x^2\psi^2(\alpha-2\beta)^2$$

$$\beta') 3x^4+3x, \quad 5x^3-5x, \quad 10x^2+10x$$

$$\gamma') 14\alpha^4(\alpha^3-\beta^3), \quad 21\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)^2, \quad 6\alpha^3\beta(\alpha-\beta)(\alpha^2-\beta^2)$$

$$\delta') \mu^3\nu-\mu\nu^3, \quad \mu^2+\mu\nu-2\nu^2, \quad \mu^2-\mu\nu-2\nu^2$$

$$\epsilon') x^4-(\pi^2+1)x^2+\pi^2, \quad x^4-(\pi+1)^2x^2+2(\pi+1)\pi x-\pi$$

Γ'. ΠΕΡΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΡΗΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 84. Καθώς τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο σχετικῶν ἀριθμῶν παριστάνεται μὲ κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην, οὕτω καὶ τὸ πηλίκον δύο ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, π.χ. τῶν ἀκεραίων τοιούτων $-5\alpha^2 + \beta^3$ καὶ $8\gamma^3 + 9\alpha$ παριστάνεται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν κλάσμα $\frac{-5\alpha^2 + \beta^3}{8\gamma^3 + 9\alpha}$.

Τοῦτο, ὡς καὶ πᾶν κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι ἐν γένει ἀκέραια πολυώνυμα, λέγεται **ρητὸν ἀλγεβρικὸν κλάσμα**.

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΗΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 85. Ἐπειδὴ οἵαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι αἱ ἀκέραιαι ἀλγεβρικοὶ καὶ παραστάσεις, αἱ ἀποτελοῦσαι τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ρητοῦ ἀλγεβρικοῦ κλάσματος, οἱ ὅροι αὐτοῦ παριστάνουν σχετικούς ἀριθμούς (διὰ τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων των, διὰ τὰς ὁποίας δὲν μηδενίζεται ὁ παρονομαστής των) ἔπεται ὅτι καὶ τὰ κλάσματα ταῦτα ἔχουν τὰς ιδιότητες τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.

Οὕτως, ἐὰν τοὺς ὅρους ἀλγεβρικοῦ τινὸς κλάσματος πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ($\neq 0$), ἡ ἀξία του δὲν μεταβάλλεται.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν π.χ. $\frac{37\alpha^3\beta\gamma^2}{38\alpha^2\beta^3\gamma^4} = \frac{3 \cdot 19\alpha^3\beta\gamma^2}{2 \cdot 19\alpha^2\beta^3\gamma^4} = \frac{3\alpha}{2\beta^2\gamma^2}$.

Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀνωτέρω ιδιότητα δυνάμεθα ἐνίστε νὰ τρέψωμεν δοθὲν ἀλγεβρικὸν ρητὸν κλάσμα εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ αὐτὸ καὶ ἔχον ὅρους ἀπλουστέρους τοῦ δοθέντος. Πρὸς εὐκολίαν χρησιμοποιοῦμεν, ἂν εἶναι δυνατόν, τὸν μ.κ.δ. τῶν ὁρῶν του, τρέποντες αὐτοὺς εἰς γινόμενα, ἂν εἶναι δυνατόν.

§ 86. Ἀπλοποιήσις ἀλγεβρικοῦ τινὸς ρητοῦ κλάσματος λέγεται ἡ εὑρεσις ἄλλου κλάσματος ἰσοδύναμου του καὶ ἔχοντος ὅρους ἀπλουστέρους. Ἡ ἀπλοποίησης καὶ τῶν ρητῶν κλασμάτων ἀνάγεται εἰς τὴν ἀντίστοιχον ἀπλοποίησιν τῶν ἀλγεβρικῶν τοιούτων. Ἦτοι :

Διὰ νὰ ἀπλοποιήσωμεν ρητὸν ἀλγεβρικὸν κλάσμα, διαι-

ροῦμεν τοὺς ὅρους του διὰ τινος κοινοῦ διαιρέτου των τρέποντες τούτους εἰς γινόμενα, ἂν εἶναι δυνατόν.

Οὕτως ἔχομεν π.χ. διὰ τὸ κλάσμα

$$\frac{\alpha^2+8\alpha+15}{\alpha^2+5\alpha+6} \quad \text{ἔχομεν} \quad \frac{\alpha^2+8\alpha+15}{\alpha^2+5\alpha+6} = \frac{(\alpha+5)(\alpha+3)}{(\alpha+2)(\alpha+3)} = \frac{\alpha+5}{\alpha+2}.$$

Τοῦτο εὐρέθη, ἀφοῦ πρῶτον οἱ ὅροι τοῦ δοθέντος ἐτράπησαν εἰς γινόμενα καὶ ἀκολουθῶς οἱ ὅροι τοῦ προκύψαντος ἰσοδυνάμου κλάσματος διηρέθησαν διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου τῶν ὁρων του ἥτοι μὲ τὸ $\alpha + 3$.

§ 87. Ἀνάγωγον λέγεται ἓν κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι δὲν ἔχουν κοινὸν παράγοντα καὶ ἐπομένως δὲν ἀπλοποιεῖται. Ὁ κανὼν καθ' ὃν τρέπεται ἀλγεβρικὸν κλάσμα εἰς ἀνάγωγον ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ἀλγεβρικὰ ρητὰ κλάσματα καὶ πρὸς εὐκολίαν χρησιμοποιεῖται ὁ μ.κ.δ. τῶν ὁρων του, ἐκάστου τούτων τρεπομένου εἰς γινόμενον παραγόντων (ἂν εἶναι δυνατόν). Οὕτως ἔχομεν π.χ.

$$\frac{4\alpha^2\beta^2\gamma}{6\alpha\beta^2\gamma^3} = \frac{2^2 \cdot \alpha^2 \beta^2 \gamma}{2 \cdot 3 \alpha \beta^2 \gamma^3} = \frac{2\alpha}{3\gamma^2} \quad (\mu.κ.δ. \text{ εἶναι } \delta \ 2\alpha\beta^2\gamma).$$

Ἐπίσης εὐρίσκομεν

$$\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-\alpha} = \frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)} = \frac{\alpha+1}{\alpha} \quad (\delta \ \mu.κ.δ. \text{ εἶναι } \tau \ \alpha-1).$$

Ἐπίσης εὐρίσκομεν ὅτι

$$\frac{(x+\alpha)^2-\beta^2}{(x+\beta)^2-\alpha^2} = \frac{(x+\alpha+\beta) \cdot (x+\alpha-\beta)}{(x+\alpha+\beta) \cdot (x+\beta-\alpha)} = \frac{x+\alpha-\beta}{x+\beta-\alpha} \\ (\mu.κ.δ. \ \delta \ x+\alpha+\beta).$$

* Ασκήσεις

152. Νὰ τραποῦν εἰς ἀνάγωγα τὰ κλάσματα :

$$\begin{array}{llll} \alpha') \frac{16\alpha^2\beta^2}{18\alpha\beta^2} & \beta') \frac{45\alpha^2\beta^2\gamma^3}{9\alpha^2\beta^2\gamma} & \gamma') \frac{46x^2\psi^2}{39x^3\psi^5} & \delta') \frac{98x\psi-24\psi^3}{24x^2-32x\psi} \\ \epsilon') \frac{x^3-\psi^3}{x^2-\psi^2} & \sigma\tau') \frac{x^2-\psi^2}{x^3+\psi^3} & \zeta') \frac{x^4-6561}{x^2-81} & \eta') \frac{\alpha\beta\gamma+9\beta\gamma-5\gamma^2}{2\alpha\beta\delta\rho+18\beta\delta\rho-10\gamma\delta\rho} \\ \theta') \frac{\alpha x+\beta\psi+\alpha\psi+\beta x}{\alpha\psi+2\beta x+2\alpha x+\beta\psi} & \iota') \frac{\alpha\beta}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} + \frac{\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\gamma\alpha}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)} & & \\ & \iota\alpha') \frac{\alpha(\alpha-\beta)^2+4\alpha^2\beta+\beta(\alpha+\beta)^2}{\alpha(\alpha-\beta)+2\alpha\beta+\beta(\alpha+\beta)} & \iota\beta') \frac{x^3+2x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x+1} & \end{array}$$

§ 88. Διὰ νὰ τρέψωμεν εἰς ἰσοδύναμά των ὁμώνυμα ἀλγε-

βρικὰ ρητὰ κλάσματα, ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ διὰ τὰ ἀριθμητικὰ κλάσματα.

Ἔστωσαν π.χ. τὰ κλάσματα $\frac{\beta}{6\alpha}$, $\frac{\alpha}{9\beta}$, $\frac{1}{4\alpha^2\beta}$, $\frac{1}{18\alpha^2\beta^3}$ Τὸ ἐ. κ. π.

παρονομαστῶν εἶναι τὸ $3^2 \cdot 2^2 \cdot \alpha^2 \cdot \beta^3$. Διαιροῦντες αὐτὸ δι' ἐκάστου τῶν παρονομαστῶν εὐρίσκομεν κατὰ σειρὰν $6\alpha\beta^3$, $4\alpha^3\beta^2$, $9\beta^2$, 2 .

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους ἐκάστου τῶν δοθέντων κλασμάτων κατὰ σειρὰν ἐπὶ τὰ πηλικά ταῦτα, εὐρίσκομεν (ἰσοδύναμα τῶν δοθέντων) τὰ ὁμώνυμα κλάσματα

$$\frac{6\alpha\beta^4}{36\alpha^2\beta^3}, \quad \frac{4\alpha^3\beta^2}{36\alpha^2\beta^3}, \quad \frac{9\beta^2}{36\alpha^2\beta^3}, \quad \frac{2}{36\alpha^2\beta^3}.$$

Ἔστωσαν τὰ κλάσματα

$$\frac{1}{4(\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3)}, \quad \frac{5}{8(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-\beta)}, \quad \frac{9}{5(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)}.$$

Τρέπομεν τοὺς παρονομαστὰς τούτων εἰς γινόμενα καὶ ἔχομεν, ἀντὶ τῶν δοθέντων κλασμάτων, τὰ ἐξῆς ἰσοδύναμά των ἀντιστοιχῶς

$$\frac{1}{4(\alpha+\beta)^3}, \quad \frac{5}{8(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)}, \quad \frac{9}{5(\alpha-\beta)^2}, \quad (2)$$

Τὸ ἐ.κ.π. τούτων εἶναι $8 \cdot 5(\alpha+\beta)^3(\alpha-\beta)^2$. Τὰ πηλικά τούτων δι' ἐκάστου τῶν παρονομαστῶν εἶναι κατὰ σειρὰν $2 \cdot 5(\alpha-\beta)^2$, $5(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$, $8(\alpha+\beta)^3$. Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους τῶν ἀνωτέρω κλασμάτων (2) ἐπὶ τὰ πηλικά αὐτὰ ἀντιστοιχῶς, εὐρίσκομεν τὰ ἰσοδύναμα τῶν δοθέντων κλασμάτων

$$\frac{2 \cdot 5(\alpha-\beta)^2}{8 \cdot 5(\alpha+\beta)^3(\alpha-\beta)^2}, \quad \frac{5 \cdot 5(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{8 \cdot 5(\alpha+\beta)^3(\alpha-\beta)^2}, \quad \frac{9 \cdot 8(\alpha+\beta)^3}{5 \cdot 8(\alpha+\beta)^3(\alpha-\beta)^2}.$$

Ἀ σ κ η σ ι ς

153. Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κάτωθι κλάσματα μὲ κοινὸν παρονομαστὴν τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων :

$$\begin{aligned} \alpha') & \frac{1}{x^2+1}, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x-1}, \quad \frac{1}{x+1}, & \beta') & \frac{\mu}{3x^2\psi^2}, \quad \frac{\nu}{8x\psi^3}, \quad \frac{\rho}{9x^4\psi^3}, \quad \frac{6}{24x^2\psi^4}. \\ \gamma') & \frac{\alpha^2}{(x^2-4)(x-1)}, \quad \frac{\alpha}{(x+2)(x+1)}, \quad \frac{3}{x^2-4x+3}, \\ \delta') & \frac{x^2}{\rho(\alpha\mu+\mu^2)}, \quad \frac{x}{\rho^2(\alpha^2-\alpha\mu)}, \quad \frac{1}{\rho^3(\alpha^2-\mu^2)}. \end{aligned}$$

2. ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ $\frac{0}{0}$ ΚΑΙ $\frac{\alpha}{0}$

§ 89. Καθώς εἶδομεν εἰς τὰ προηγούμενα, ἂν τύχη νὰ ἔχωμεν διαίρεσιν τοῦ $0 : 0$, τὸ πηλίκον εἶναι ἀόριστον, δηλαδὴ τὸ πηλίκον δύναται νὰ εἶναι οἷοσδήποτε σχετικὸς ἀριθμὸς, ἔστω α , διότι $\alpha \cdot 0 = 0$. Διὰ τοῦτο, ὅταν καὶ οἱ δύο ὅροι ρητοῦ κλάσματος λαμβάνουν τὴν τιμὴν 0 δι' ὠρισμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων των, ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος διὰ τὰς τιμὰς ταύτας θεωρεῖται, ὅτι εἶναι **ἀόριστος**.

Ἐστω π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha}$. Ἄν θέσωμεν εἰς αὐτὸ $x = \alpha$ εὐρίσκομεν $\frac{\alpha^2-\alpha^2}{\alpha-\alpha} = \frac{0}{0}$. Διὰ τοῦτο ἡ παράστασις $\frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha}$, ὅταν $x = \alpha$, παρουσιάζεται ὡς ἀόριστος διὰ τὴν τιμὴν α τοῦ x .

Παρατηροῦμεν ὁμῶς, ὅτι, ἂν εἶναι τὸ $x \neq \alpha$, ἔχομεν $\frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha} = x + \alpha$, καὶ ἂν εἰς τοῦτο τεθῇ $x = \alpha$, ἔχομεν ἐξαγόμενον 2α καὶ ὄχι $\frac{0}{0}$. Ἡ εὐρεθεῖσα αὕτη τιμὴ 2α εἶναι καὶ ἡ (ἀληθής) τιμὴ τοῦ κλάσματος $\frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha}$, ὅταν $x = \alpha$. Διὰ ταῦτα, ὅταν συμβαίνει ρητὸν ἐν γένει ἀλγεβρικὸν κλάσμα νὰ γίνεταί $\frac{0}{0}$ διὰ τινὰ δοθεῖσαν τιμὴν γράμματός του, ἵνα εὕρωμεν τὴν ἀληθεῖ τιμὴν του, ἀντικαθιστῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ γράμματος εἰς τὸ προκύπτον ἐκ τοῦ δοθέντος μετὰ τὴν ἀπλοποίησιν τῶν ὁρῶν του. Ἐὰν καὶ εἰς τὸ προκύπτον κλάσμα παρουσιάζεται παρόμοιον φαινόμενον, ἐργαζόμεθα καὶ ἐπ' αὐτοῦ ὁμοίως.

Ἄν θέλωμεν τὴν τιμὴν π.χ. διὰ τὸ $\frac{\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-1}{\alpha^3-4\alpha^2+5\alpha-2}$, ὅταν $\alpha = 1$, παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ ὅροι τούτου, ὅταν $\alpha = 1$, λαμβάνουν ἕκαστος τὴν τιμὴν 0. Ἀλλὰ καὶ ἐκ τούτου διακρίνομεν, ὅτι οἱ ἐν λόγῳ ὅροι διαιροῦνται διὰ τοῦ $\alpha-1$, (ἀφοῦ, ὅταν $\alpha = 1$, μηδενίζονται). Διαιροῦμεν λοιπὸν ἕκαστον τῶν ὁρῶν του μὲ $\alpha-1$ καὶ εὐρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον κλάσμα τοῦ δοθέντος $\frac{\alpha^2-2\alpha+1}{\alpha^2-3\alpha+2}$. Παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ τούτου οἱ ὅροι ἔχουν τὴν τιμὴν 0 ἕκαστος, ὅταν $\alpha = 1$. Καὶ τούτου οἱ ὅροι διαιροῦνται διὰ τοῦ $\alpha-1$, καὶ ἐκτελοῦντες τὰς

διαιρέσεις εἰς ἕκαστον τῶν ὁρῶν, εὐρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον κλάσμα $\frac{\alpha-1}{\alpha-2}$.

Θέτομεν εἰς τοῦτο $\alpha = 1$ καὶ εὐρίσκομεν $\frac{0}{1-2} = 0$. Αὕτη εἶναι ἡ ἀληθῆς τιμὴ τοῦ δοθέντος κλάσματος, ὅταν $\alpha = 1$.

Ὅταν ἐργαζώμεθα ὡς εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα καὶ εὐρίσκομεν, ἀντὶ τοῦ δοθέντος κλάσματος, ἰσοδύναμόν του, διὰ τὸ ὅποιον δὲν ὑπάρχει διὰ τὰς θεωρουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων, ἀόριστος τιμὴ τούτου, τότε λέγομεν ὅτι **αἶρομεν τὴν ἀοριστίαν** τοῦ δοθέντος κλάσματος.

Ἄν δοθὲν ἀλγεβρικὸν κλάσμα δὲν εἶναι ρητόν, τότε δὲν ἔχομεν ὠρισμένον ἀπλοῦν κανόνα διὰ νὰ ἄρωμεν τὴν ἀοριστίαν του. Ἀλλὰ συνήθως ἐπιδιώκομεν (ἂν εἶναι δυνατόν) νὰ εὕρωμεν ἰσοδύναμον κλάσμα τοῦ δοθέντος μὲ ρητὸν παρονομαστήν καὶ νὰ ἐπιτύχωμεν ὁμοίως τὴν ἀποβολὴν τῆς ἀοριστίας. Π. χ. $\frac{\alpha-5}{\sqrt{\alpha-1}-2}$, ὅπου $\alpha = 5$, λαμβάνει τιμὴν ἀόριστον. Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν τοὺς ὁρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ $\sqrt{\alpha-1} + 2$, ὅτε λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον παράστασιν τοῦ δοθέντος.

$$\frac{(\alpha-5)(\sqrt{\alpha-1} + 2)}{\alpha-5} = \sqrt{\alpha-1} + 2. \text{ Αὕτη, ὅταν } \alpha = 5, \text{ λαμβάνει τὴν τιμὴν}$$

ἡ ὅποια εἶναι καὶ (ἀληθῆς) τιμὴ καὶ τοῦ δοθέντος κλάσματος, ὅταν $\alpha = 5$.

§ 90. Ἡ παράστασις $\sqrt{\alpha-1} + 2$ λέγεται **συζυγῆς** τῆς $\sqrt{\alpha-1} - 2$.

Ἐν γένει δύο διώνυμα λέγονται **συζυγῇ**, ὅταν οἱ πρῶτοι ὅροι αὐτῶν εἶναι ἴσοι, οἱ δὲ δεῦτεροι ἀντίθετοι· δηλαδὴ ὅταν εἶναι τῆς μορφῆς $A + B$ καὶ $A - B$.

Π.χ. αἱ $-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$ καὶ $-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$ εἶναι συζυγῇ διώνυμα ἢ συζυγεῖς παραστάσεις.

§ 91. Ἐστω ὅτι ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος $\frac{9x^3}{x-2}$, ὅταν $x = 2$. Ἄν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτό, τὸ x μὲ τὸ 2, εὐρίσκομεν

$$\frac{9 \cdot 2^3}{2-2} = \frac{9 \cdot 8}{0} = \frac{72}{0}$$

Ἐκ τούτου παρατηροῦμεν, ὅτι ἐνίοτε ἡ τιμὴ ἀλγεβρικοῦ ρητοῦ κλάσματος διὰ τινὰ δοθεῖσαν τιμὴν γράμματός τινος λαμβάνει μορφήν κλάσματος μὲν, ἀλλ' ἔχοντος παρονομαστήν τὸ 0 καὶ ἀριθμητὴν ὠρισμένον τινὰ ἀριθμὸν $\neq 0$.

Ἐν γένει ἔστω, ὅτι ἡ τιμὴ κλάσματος τινος εἶναι ἡ $\frac{\alpha}{0}$, ὅπου α παριστάνει ἀριθμὸν τινὰ ὠρισμένον ($\neq 0$). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι :

Ἡ παράστασις $\frac{\alpha}{0}$ οὐδεμίαν ἔχει ἔννοιαν ἢ ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ $\frac{\alpha}{0}$ εἶναι ἀπολύτως μεγαλύτερα παντὸς ἀριθμοῦ θετικοῦ (ὅσον-δὴποτε μεγάλου).

Καὶ ὅτι μὲν τὸ $\frac{\alpha}{0}$ δὲν ἔχει καμμίαν ἔννοιαν, φαίνεται ἐκ τούτου : οὐδεὶς ἀριθμὸς ὑπάρχει, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0 δύναται νὰ δώσῃ γινόμενον τὸ α , ἀφοῦ τὸ 0 ἐπὶ οἷονδὴποτε ἀριθμὸν πολλαπλασιαζόμενον δίδει γινόμενον 0.

Ἐξ ἄλλου ὅμως, ἂν ὁ παρονομαστὴς ἐνὸς κλάσματος ἔχοντος ἀριθμητὴν ὠρισμένον $\alpha \neq 0$ ἐλαττωταί, τότε τὸ κλάσμα αὐξάνεται ἀπολύτως. Οὕτω π.χ. τὸ $\frac{\alpha}{0,001} = 1000\alpha$, ἐνῶ τὸ $\frac{\alpha}{0,0001} = 10\,000\alpha$ εἶναι δὲ τὸ δεύτερον τοῦτο μεγαλύτερον τοῦ προηγουμένου του, ἐνῶ ὁ παρονομαστὴς τούτου εἶναι μικρότερος τοῦ προηγουμένου του.

Οὕτως, ὅσον ὁ παρονομαστὴς ἐλαττώνεται καὶ πλησιάζει νὰ γίνῃ 0, τόσοι ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος γίνεταί ἀπολύτως μεγαλύτερα καὶ τείνει νὰ ὑπερβῇ πάντα θετικὸν ἀριθμὸν. Ἄν συμβαίῃ τοῦτο διὰ τὸ $\frac{\alpha}{0}$, τότε λέγομεν, ὅτι τὸ $\frac{\alpha}{0}$ τείνει εἰς τὸ θετικὸν ἄπειρον ἢ εἰς τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον, καθ' ὅσον εἶναι τὸ $\alpha > 0$ ἢ τὸ $\alpha < 0$. Τὸ θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἄπειρον παριστάνομεν μὲ τὸ σύμβολον $\pm \infty$ (θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἄπειρον).

Διὰ τοῦτο πάντοτε εἰς πᾶσαν διαίρεσιν ὑποθέτομεν τὸν διαιρέτην διάφορον τοῦ 0.

" Α σ κ η σ ι ς

154. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι κλασμάτων διὰ τὰς σημειούμενας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

$$\alpha') \frac{x^3+2x}{x}, \text{ όταν } x=0, \beta') \frac{\psi^4-\alpha^4}{\psi^2-\alpha^2}, \text{ όταν } \psi=\alpha, \gamma') \frac{x^2-\alpha^2}{x^3-\alpha^3}, \text{ όταν } x=\alpha,$$

$$\delta') \frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^2-\beta^2}, \text{ όταν } \alpha=\beta, \epsilon') \frac{(x^2+2\alpha x+\alpha^2)(x-\alpha)}{x^2-\alpha^2}, \text{ όταν } x=\alpha,$$

$$\sigma\tau') \frac{x^4-\alpha^4}{x-\alpha}, \text{ όταν } x=\alpha, \zeta') \frac{x^2-3x+5}{x^2-2x+1}, \text{ όταν } x=1, \eta') \frac{\alpha^3+1}{\alpha^2-1}, \text{ όταν } \alpha=1,$$

$$\theta') \frac{\sqrt[3]{\alpha \cdot \sqrt{\alpha-\beta} + \sqrt{\alpha^2-\beta^2}}}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2} + \alpha^2(\alpha-\beta)}, \text{ όταν } \alpha=\beta.$$

3. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

§ 92. Ὁ κανὼν τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως ἀριθμητικῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων ἰσχύει καὶ διὰ τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν ρητῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.

Ἄν τὰ δοθέντα ρητὰ ἐν γένει κλάσματα εἶναι ἑτερόνυμα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα μὲ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν (ἀφοῦ τρέψωμεν τούτους εἰς γινόμενα) καὶ ἀκολουθῶς ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν, ὅπως καὶ εἰς τοὺς κλασματικούς ἀριθμούς.

Ἐστω π.χ., ὅτι ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα $\frac{2\alpha+3\beta}{2\alpha-3\beta} + \frac{2\alpha-3\beta}{2\alpha+3\beta} + \frac{2(4\alpha^2+9\beta^2)}{4\alpha^2-9\beta^2}$. Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι τὸ $4\alpha^2-9\beta^2 = (2\alpha+3\beta)(2\alpha-3\beta)$. Τὰ πηλίκα τούτου δι' ἐκάστου τῶν παρονομαστῶν εἶναι κατὰ σειρὰν $2\alpha+3\beta$, $2\alpha-3\beta$ καὶ 1. Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ἐκάστου κλάσματος ἐπὶ τὰ πηλίκα αὐτὰ ἀντιστοίχως καὶ εὐρίσκομεν

$$\frac{(2\alpha+3\beta)^2}{4\alpha^2-9\beta^2} + \frac{(2\alpha-3\beta)^2}{4\alpha^2-9\beta^2} + \frac{2(4\alpha^2+9\beta^2)}{4\alpha^2-9\beta^2} = \frac{(2\alpha+3\beta)^2 + (2\alpha-3\beta)^2 + 2(4\alpha^2+9\beta^2)}{4\alpha^2-9\beta^2}.$$

Ἀσκήσεις

155. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ αἱ τιμαὶ αὐτῶν, καθὼς καὶ τῶν διδομένων, διὰ τὰς σημειούμενας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

$$\alpha') \frac{2}{2x+5} + \frac{4}{3x+17} - \frac{2(5x+12)}{(2x+5)(3x+17)}, \quad \text{ὅταν } x=2,$$

$$\beta') \frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} - \frac{\alpha\gamma}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \frac{\beta\gamma}{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)}, \quad \text{ὅταν } \alpha=1, \beta=-1, \gamma=2,$$

$$\gamma') \frac{1-2x}{3(x^2-2x+1)} + \frac{1+x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{6(x+1)}, \quad \text{ὅταν } x=2.$$

$$\delta') \frac{\alpha^2 + \alpha\gamma}{\alpha^2\gamma - \gamma^3} - \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2\gamma + 2\alpha\gamma^2 + \gamma^3} + \frac{28}{\gamma^2 - \alpha^2} - \frac{3}{\alpha + \gamma},$$

$$\epsilon') \frac{x^3\psi - x\psi^3}{x^6 - \psi^6} + \frac{x}{x^3 - \psi^3} - \frac{\psi}{x^3 + \psi^3},$$

$$\sigma\tau') \frac{x^2 - (2\psi - 3\omega)^2}{(3\omega + x)^2 - 4\psi^2} + \frac{4\psi^2 - (3\omega - x)^2}{(x + 2\psi)^2 - 9\omega^2} + \frac{\omega^2 - x^2}{x + \omega},$$

$$\zeta') \frac{x}{x - \psi} - \frac{\psi}{x + \psi} - \frac{x^2}{x^2 + \psi^2} + \frac{\psi^2}{\psi^2 - x^2}.$$

$$\eta') \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^4 - \beta^4} - \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{1}{\alpha - \beta} \right).$$

156. 'Εάν θέσωμεν $\varphi(x) \equiv x + 2$, $\pi(x) \equiv x^2 + 2x + 4$, $\psi(x) \equiv x - 2$ και

$$\omega(x) \equiv x^2 - 2x + 4, \text{ δείξτε ότι είναι } \frac{\pi(x) \cdot \omega(x)}{\varphi(x) \cdot \omega(x) - \pi(x) \cdot \psi(x)} = \frac{x^4 + 4x^2 + 16}{16}.$$

4. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 93. 'Ο κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀλγεβρικῶν κλασμάτων ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ρητὰ ἀλγεβρικά κλάσματα. Οὕτω π.χ.

$$\text{ἔχομεν} \quad \frac{12x^2\psi \cdot 14\omega^2\varphi}{7\omega\varphi^2 \cdot 3x\psi^2} = \frac{12x^2\psi \cdot 14\omega^2\varphi}{7\omega\varphi^2 \cdot 3x\psi^2} = \frac{12 \cdot 14x^2\psi\omega^2\varphi}{7\omega\varphi^2 \cdot 3x\psi^2} = \frac{8x\omega}{\psi\varphi}.$$

Παρατηρητέον, ὅτι εἰς γινόμενον κλασμάτων δυνάμεθα νὰ ἀπλοποιοῦμεν τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς τῶν παραγόντων, μὲ τὸν παρονομαστήν ἑνὸς ἐξ αὐτῶν πρὸ τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἂν τοῦτο εἶναι δυνατόν (τρέποντες πρὸς εὐκολίαν τοὺς ὅρους τῶν κλασμάτων εἰς γινόμενα). Π.χ. εἶναι

$$\frac{\alpha + x}{\alpha - x} \cdot \frac{\alpha - x}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\alpha + x}{\alpha^2 + x^2}$$

$$\text{'Επίσης} \quad \frac{x(\alpha + x)}{\alpha(\alpha - x)} \cdot \frac{\alpha^2(\alpha - x)^2}{x^2(\alpha + x)^2} = \frac{x(\alpha + x)}{\alpha(\alpha - x)} \cdot \frac{\alpha^2(\alpha - x)(\alpha - x)}{x^2(\alpha + x)(\alpha + x)} = \frac{\alpha(\alpha - x)}{x(\alpha + x)}.$$

'Ο κανὼν διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ ἰσχύει καὶ διὰ τὴν διαιρέσιν ἀλγεβρικῆς παραστάσεως δι' ἀλγεβρικοῦ ρητοῦ κλάσματος ἐν γένει. Οὕτω π.χ. τὸ

$$\frac{12\alpha^2}{\beta^2} : \frac{3\alpha\beta^2}{10} = \frac{12\alpha^2}{\beta^2} \cdot \frac{10}{3\alpha\beta^2} = \frac{120\alpha^2}{3\alpha\beta^4} = \frac{40\alpha}{\beta^4}.$$

$$\text{Τὸ} \quad \frac{15(\alpha + \beta)}{22(\alpha - \beta)} : \frac{5(\alpha + \beta)^2}{11(\alpha - \beta)} = \frac{15(\alpha + \beta)}{22(\alpha - \beta)} \cdot \frac{11(\alpha - \beta)}{5(\alpha + \beta)^2} = \frac{3}{2(\alpha + \beta)}.$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὁ μᾶς πρώτη. 157. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα :

$$\alpha') \frac{\alpha\chi + \alpha\psi}{\gamma\chi - \gamma\psi} \cdot \frac{\gamma\chi^2 - \gamma\psi^2}{\beta\chi + \beta\psi} \quad \beta') \frac{3\chi^2 - 6\chi\psi + 3\psi^2}{\chi + \psi} \cdot \frac{\chi^3 + \psi^3}{6(1-\psi)},$$

$$\gamma') \left(1 + \frac{\chi^4 - 2\chi^2\psi^2 + \psi^4}{4\chi^2\psi^2}\right) (\chi^4 - 2\chi^2\psi^2 + \psi^4).$$

$$\delta') \left(\frac{\alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta}{\alpha\gamma - \beta\gamma - \alpha\delta + \beta\delta}\right) \cdot \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\gamma + \alpha\delta - \beta\delta}{\alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha\delta - \beta\delta}\right), \quad \epsilon') \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta}{\alpha^2 + 4\beta^2} \cdot \frac{\alpha\beta - 2\beta^2}{\alpha^2 - 4\beta^2},$$

$$\sigma\tau') \left(\alpha^4 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) \cdot \frac{\alpha^2 x^2 + \alpha\beta x^2}{\alpha x + 1} \cdot \frac{\alpha x}{\alpha^2 - \beta^2},$$

$$\zeta') \left(\alpha + 1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \left(\alpha - 1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \frac{\alpha^2(\alpha^2 - 1)}{\alpha^6 - 1},$$

$$\eta') \left(2 + \frac{\mu}{\mu - 3}\right) \left(\frac{9 - \mu^2}{4 - \mu^2}\right) \left(\frac{2 - \mu}{\mu^2 + \mu - 6}\right) - \left(\frac{2}{\mu + 2}\right)$$

Ὁ μᾶς δευτέρα. 158. Ἐχει τις 5λ δραχ. Ἐκ τούτων ἐξοδεύει πρῶτον τὸ τρίτον, ἔπειτα τὸ ἑβδομον καὶ τέλος τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ. Πόσα τοῦ ἔμειναν ;

159. Ἐχει τις $\beta - 1$ δραχμάς καὶ ἐξοδεύει τὸ τέταρτον αὐτῶν καὶ $\frac{3}{7}$ τοῦ ὑπολοίπου. Πόσα τοῦ ἔμειναν ;

160. Ἐχει τις α δραχμάς καὶ ἐξοδεύει πρῶτον 90 δραχ. καὶ ἔπειτα τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ ὑπολοίπου. Πόσαι δραχ. τοῦ μένουν ;

161. Ἐχει τις γ δραχμάς καὶ χάνει πρῶτον τὰ δύο ἑβδομα αὐτῶν, ἔπειτα τὰ δύο πέμπτα τοῦ ὑπολοίπου καὶ 1 δραχμὴν. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν ;

162. Ἀπὸ μίαν βρύσην τρέχουν 7 ὁκ. ὕδατος εἰς 5δ. Ἀπὸ ἄλλην 9 ὁκ. εἰς 4δ Πόσαι ὁκάδες θὰ τρέξουν καὶ ἐκ τῶν δύο, ἂν ἡ μὲν πρώτη τρέχη, ἐπὶ τδ, ἡ δὲ ἄλλη ἀνοιχθῇ 2δ βραδύτερον, κλείσουν δὲ συγχρόνως ;

Ὁ μᾶς τρίτη. 163. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ αἱ τιμαὶ αὐτῶν, καθὼς καὶ τῶν διδομένων διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων των.

$$\alpha') \frac{12\chi\psi^2}{7\alpha^2\beta} : \frac{8\chi^2\psi}{25\alpha\beta^2}, \quad \beta') \frac{12\alpha^2}{5\gamma^3\beta^2} : \frac{3\alpha\beta^2}{10\gamma^2}, \quad \text{ὅταν } \chi = \psi = 1, \alpha = 2, \beta = \gamma = 3,$$

$$\gamma') \alpha^3 : \left(\alpha^2 : \frac{\alpha}{\beta}\right), \quad \delta') \frac{9\gamma^2}{28\alpha^3\beta^2} : \left(\frac{12\alpha^2\beta}{7\gamma^2} : 4\beta^2\gamma\right), \quad \text{ὅταν } \alpha = \beta = \gamma = -3,$$

$$\epsilon') \frac{\alpha}{\alpha^3 + \beta^3} : \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{\alpha}{\beta} + 1\right), \quad \sigma\tau') \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{x^2 - \psi^2}\right) : \left(\frac{\alpha^4 - \beta^4}{x^4 - 2\chi^2\psi^2 + \psi^4}\right),$$

$$\zeta') \frac{\alpha^2 + \alpha\chi + \alpha\psi + \chi\psi}{\alpha^2 - \alpha\chi - \alpha\psi - \chi\psi} : \frac{\alpha^2 - \alpha\chi + \alpha\psi - \chi\psi}{\alpha^2 + \alpha\chi - \alpha\psi - \chi\psi}, \quad \text{ὅταν } \alpha = 1, \chi = \psi = 3,$$

$$\begin{aligned} \eta') & \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2-1} \right) : \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2-1} \right), \\ \theta') & \left[\frac{\alpha^3}{\beta^3} - \frac{\beta^3}{\alpha^3} - 3 \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) + 5 \right] : \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right)^2, \\ \iota') & \left[\frac{x-\alpha}{(x+\alpha)^2} + \frac{x+\alpha}{(x-\alpha)^2} \right] : \left[\frac{1}{(x+\alpha)^2} - \frac{1}{x^2-\alpha^2} + \frac{1}{(x-\alpha)^2} \right], \\ \iota\alpha') & \left(\frac{\alpha}{\alpha+2\beta} + \frac{\alpha}{\alpha-2\beta} \right) : \frac{2\alpha^2}{\alpha^2-4\beta^2} \end{aligned}$$

Ὁ μὰς τετάρτη. 164. Ἐχει τις α δραχμὰς. Τὸ ποσὸν τοῦτο αὐξάνει κατὰ τὸ πέμπτον αὐτοῦ. Ἐξοδεύει τὰ 0,25 τῶν ὧν οὕτως ἔχει καὶ αὐξάνει ὅσα τοῦ μένου κατὰ τὰ 0,5 αὐτῶν. Πόσα ἔχει εἰς τὸ τέλος;

165. Ἐχων τις α δραχμὰς, τὰς αὐξάνει κατὰ τὰ 0,25 αὐτῶν. Ἐξοδεύει ἔπειτα 5.000 δραχμὰς καὶ τὸ ὑπολειφθὲν αὐξάνει κατὰ τὰ 0,25 αὐτοῦ, ἐξοδεύει δὲ πάλιν 5.000 δραχμὰς. Πόσας δραχμὰς ἔχει εἰς τὸ τέλος;

166. Χωρικός τις ἔφερεν εἰς τὴν ἀγορὰν $16\alpha + 30$ αὐγὰ πρὸς πώλησιν. Ἐν πρώτοις ἐπώλησε τὰ 0,5 τῶν ὧν ἔφερε καὶ ἓν αὐγὸν ἐπὶ πλεόν· ἔπειτα ἐκ τοῦ ὑπελοίπου τὰ 0,5 καὶ ἀκόμη ἓν αὐγὸν. Ὁμοίως ἐπώλησε καὶ διὰ τρίτην καὶ τετάρτην φορὰν. Πόσα αὐγὰ τοῦ ἔμειναν εἰς τὸ τέλος;

5. ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

§ 94. Δοθέν κλάσμα λέγεται **σύνθετον**, ἂν τουλάχιστον εἰς τῶν ὄρων του δὲν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς ἢ ἀκεραία ἀλγεβρική παράστασις. **Ἀπλοῦν** λέγεται ἓν κλάσμα, ὅταν δὲν εἶναι σύνθετον.

Οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{3x}{\frac{4x-1}{4\psi}}$ εἶναι σύνθετον, διότι ὁ παρονομαστής

αὐτοῦ εἶναι κλασματικὴ παράστασις.

Ἐπειδὴ πᾶν κλάσμα εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του, ἔπεται ὅτι ἔχομεν

$$\frac{3x}{\frac{4x-1}{4\psi}} = 3x : \frac{4x-1}{4\psi} = 3x \cdot \frac{4\psi}{4x-1} = \frac{12x\psi}{4x-1}$$

Ἐν γένει :

Ἵνα κλάσμα σύνθετον καταστήσωμεν ἀπλοῦν, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.

Συντομώτερος τρόπος διὰ νὰ καταστήσωμεν σύνθετόν τι κλάσμα ἀπλοῦν εἶναι ὁ ἐξῆς :

Εὐρίσκομεν τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων τοῦ

ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δοθέντος κλάσματος καὶ ἐπ' αὐτὸ πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ δοθέντος κλάσματος

$$\text{Ἔστω π.χ. τὸ κλάσμα } \frac{\frac{\alpha}{\alpha-x} - \frac{\alpha}{\alpha+x}}{\frac{x}{\alpha-x} + \frac{x}{\alpha+x}}. \text{ Τὸ ἐ.κ.π. τῶν } \alpha-x \text{ καὶ } \alpha+x$$

εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν $(\alpha-x)(\alpha+x)$. Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους τοῦ δοθέντος κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τοῦτο, εὐρίσκομεν

$$\frac{\alpha(\alpha+x) - \alpha(\alpha-x)}{x(\alpha+x) + (\alpha-x)x} = \frac{\alpha^2 + \alpha x - \alpha^2 + \alpha x}{\alpha x + x^2 + \alpha x - x^2} = \frac{2\alpha x}{2\alpha x} = 1$$

Ἀσκήσεις

167. Νὰ τραποῦν εἰς ἀπλᾶ τὰ κάτωθι κλάσματα καὶ νὰ εὕρεθῶν αἱ τιμαὶ των διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

$$\alpha') \frac{\frac{x}{\mu} + \frac{\psi}{\mu}}{\frac{\omega}{\mu}}, \quad \beta') \frac{\frac{2\mu+v}{\mu+v} + 1}{1 + \frac{v}{\mu+v}}, \quad \gamma') \frac{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} + 1}, \quad \delta') \frac{\frac{x+1}{x-1}}{x - \frac{1}{x}}$$

ὅταν $x = \psi = \omega = \mu = 4$, $v = 2$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$.

$$\epsilon') \frac{\frac{x+\psi}{1}}{x+\psi + \frac{1}{x+\psi + \frac{1}{x-\psi}}}, \quad \sigma\tau') \frac{\left(x-\psi - \frac{4\psi^2}{x-\psi}\right)\left(x+\psi - \frac{4x^2}{x+\psi}\right)}{3(x+\psi) - \frac{8x\psi}{x+\psi}}$$

ὅταν $x = 2$, $\psi = 1$.

168. Νὰ ἀπλοποιηθῶν τὰ κλάσματα.

$$\alpha') \frac{\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma} - \frac{\beta-\gamma}{\alpha-\beta}}{\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta} - \frac{\beta-\gamma-1}{\beta-\gamma}}, \quad \beta') \frac{\frac{1-(x\psi-\psi\omega)^2}{(x\psi-1)^2 - \psi^2\omega^2}}{\frac{(\psi\omega-1)^2 - x^2\psi^2}{(x\psi-\omega\psi)^2 - 1}}, \quad \gamma') \frac{\frac{x+1}{x} - \frac{\psi-1}{\psi} + \frac{\omega+1}{\omega}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\omega}}$$

169. Ἐὰν τεθῇ

$$(\varphi)x = \frac{x-1}{x+1} \text{ καὶ } (\psi) = \frac{\psi-1}{\psi+1}, \text{ εὑρετε τὸ } \frac{\varphi(x) - \varphi(\psi)}{1 + \varphi(x) \cdot \varphi(\psi)}$$

Περίληψις περιεχομένων Κεφαλαίου II.

Ὁρισμός ἀλγεβρικῆς παραστάσεως (ἀκεραία, κλασματική, ρητή, ἄρρητος παράστασις).

Σύμβολα : $\sqrt{\quad}$ ριζικόν, $\equiv$ ταυτότητος ἢ ἰσοδυναμίας ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

Ἰσοδύναμοι παραστάσεις. Ὅρισμός ταυτότητος παραστάσεων

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$

(αἱ ταυτότητες ἀληθεύουν δι' οἰασδήποτε τιμὰς τῶν γραμμάτων των).

Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως.

Ὅρισμός μονωνύμου, διωνύμου, πολωνύμου (ἀκέραιον, κλασματικόν, ρητόν, ἄρρητον μονώνυμον ἢ πολυνύμον).

Ἀριθμητικὸς συντελεστής μονωνύμου, συντελεστής μονωνύμου, ὡς πρὸς γράμμα του ἢ ὡς πρὸς γινόμενον παραγόντων του.

Ὅμοια μονώνυμα (ἀντίθετα μονώνυμα). Ἀναγωγή ὁμοίων μονωνύμων. Αἱ 4 πράξεις μὲ μονώνυμα.

Βαθμὸς ἀκεραίου πολωνύμου πρὸς ἓν ἢ περισσότερα γράμματά του. Ὅμογενές ἀκέραιον πολυνύμον, ὡς πρὸς γράμματά του.

Ὅμογενές γραμμικόν. Διατεταγμένον ἀκέραιον πολυνύμον κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ κατιούσας δυνάμεις γραμμάτων του. Ἀνηγμένον (ἀκέραιον) πολυνύμον.

Αἱ 4 πράξεις μὲ (ἀκεραία) πολυνύμα καὶ μονώνυμα ἢ μὲ πολυνύμα.

Αἱ πράξεις στηρίζονται ἐπὶ τῶν πράξεων καὶ ἰδιοτήτων τῶν ἀλγεβρικῶν ἀθροισμάτων.

Διαιρέσεις (ἀκεραίου) πολωνύμου δι' ἄλλου διατεταγμένου ὁμοίως. Εὐρίσκομεν τὸν ἀ' ὅρον τοῦ πηλίκου ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀ' ὅρου τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀ' ὅρου τοῦ διαιρέτου. Εὗρεσις τῶν λοιπῶν ὅρων τοῦ πηλίκου μετὰ τὸν ἀ' ὅρον.

Σχέσις διαιρετέου, διαιρέτου, πηλίκου καὶ ὑπολοίπου. Σχέσις ὑπολοίπου καὶ διαιρέτου, ὡς πρὸς τὸν βαθμὸν των.

Ἀξιοσημεῖωτοι ταυτότητες

$$1) (\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$2) (\alpha \pm \beta)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3$$

$$3) (x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

$$4) (x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma) = x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x + \alpha\beta\gamma$$

$$5) (x^2 + \psi^2)(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha x + \beta \psi)^2 = (\alpha\psi - \beta x)^2$$

$$6) (x^2 + \psi^2 + \omega^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha x + \beta \psi + \gamma \omega)^2 =$$

$$= (\alpha\psi - \beta x)^2 + (\beta\omega - \gamma\psi)^2 + (\gamma x - \alpha\omega)^2$$

Αἱ δύο τελευταῖαι λέγονται ταυτότητες τοῦ Lagrange.

Υπόλοιπον ν διαιρέσεως πολωνύμου $\Pi(x) : (x \pm \alpha)$ είναι
 $\nu = \Pi(\mp \alpha)$

Υπόλοιπον ν διαιρέσεως πολωνύμου $\Pi(x) : (\alpha x \pm \beta)$ είναι
 $\nu = \Pi(\mp \frac{\beta}{\alpha})$

Πηλίκον (π) διαιρέσεως

$$(x^\mu - \alpha^\mu) : (x - \alpha) = x^{\mu-1} + \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} + \dots + \alpha^{\mu-1}$$

Πηλίκον (π) διαιρέσεως

$$(x^{2\nu+1} + \alpha^{2\nu+1}) : (x \pm \alpha) = x^{2\nu} \mp \alpha x^{2\nu-1} + \dots + \alpha^{2\nu}$$

Τροπή άκεραίας άλγεβρικῆς παραστάσεως εἰς γινόμενον παραγόντων (διάκρισις ἑννέα περιπτώσεων).

Όρισμός ρητοῦ άλγεβρικοῦ κλάσματος (με ὅρους άλγεβρικὰς παραστάσεις).

Παραστάσεις, τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ παρουσιάζεται, ὡς άόριστος

$$\frac{0}{0} \cdot \text{Άρσις τῆς άοριστίας. Συζυγεῖς παραστάσεις } A + B \text{ καὶ } A - B$$

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} \text{ καὶ } \sqrt{A} - \sqrt{B}.$$

Όρισμός συνθέτου κλάσματος, άπλοποίησις αὐτοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

Α'. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

1. ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ *

§ 95. Ἐστω ὅτι ἔχομεν τὴν ἰσότητα $3x = 15$. Παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν τὸ x γίνῃ 5, ἡ ἰσότης ἐπαληθεύεται. Πράγματι, ὅταν $x=5$, εἶναι $3 \cdot 5 = 15$, ἥτοι $15 = 15$. Διὰ πᾶσαν ἄλλην τιμὴν τοῦ x ἢ ἐν λόγῳ ἰσότης δὲν δίδει ἀριθμοὺς ἴσους, ἥτοι δὲν ἀληθεύει. Ὁμοίως παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ $3x=12$ ἀληθεύει διὰ μόνην τὴν τιμὴν $x=4$. Ἐὰν ἐξ ἄλλου εἰς τὴν ἰσότητα $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ἀντικαταστήσωμεν τὸ α καὶ β δι' οἷωνδήποτε ἀριθμῶν π.χ. μὲ $\alpha = 1$ καὶ $\beta = 3$ ἢ μὲ $\alpha = 5$ καὶ $\beta = -7$, παρατηροῦμεν ὅτι προκύπτουν ἀριθμοὶ ἴσοι ἀντιστοίχως, ἥτοι $4 = 4$ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν καὶ $-2 = -2$ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν. Ἐκ τούτου συνάγομεν, ὅτι ὑπάρχουν ἰσότητες ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύονται μόνον, ὅταν τὸ γράμμα ἢ ὠρισμένα γράμματά των λάβουν ἀρμοδίας τιμὰς καὶ ἄλλαι, αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων των. Τὰς πρώτας καλοῦμεν **ἐξισώσεις** τὰς δὲ ἄλλας **ταυτότητας**. Ὡστε :

Ἐξίσωσις λέγεται ἡ ἰσότης, ἡ ὁποία ἀληθεύει μόνον, ὅταν ἐν γράμμα ἢ ὠρισμένα γράμματα αὐτῆς λάβουν ἀρμοδίας τιμὰς

Καλοῦμεν ἀγνώστους ἐξισώσεως τὰ γράμματά της, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ λάβουν ὠρισμένας τιμὰς, διὰ νὰ ἀληθεύῃ αὐτή.

§ 96. Τιμαὶ τῶν ἀγνῶστων λέγονται οἱ ἀριθμοὶ (ἢ αἱ ποσότητες), οἱ ὁποῖοι ἀντικαθιστῶντες τοὺς ἀγνῶστους ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν λέγονται δὲ αὗται καὶ **ρίζαι** αὐτῆς. Συνήθως παριστάνομεν τοὺς ἀγνῶστους ἐξισώσεως μὲ τελευταῖα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου χ, ψ, ω κ.τ.λ.

* Ἡ χρῆσις ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ μὲ ἓνα ἀγνώστον ἐμφανίζεται τὸ πρῶτον εἰς τὸ βιβλίον τοῦ Αἰγυπτίου Ahmes ἀλλὰ μόνον μὲ παραδείγματα. Ἡ ἐπιστημονικὴ διαμόρφωσις τοῦ ζητήματος ὀφείλεται εἰς τὸν Ἑλληνα Διόφαντον καὶ τὸν Ἑρωνα (1ον αἰῶνα π.Χ.).

Λύσεις δὲ ἐξισώσεως λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν ριζῶν τῆς.

§ 97. Δύο ἐξισώσεις λέγονται **ισοδύναμοι**, ἐὰν ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας, ἥτοι : ἐὰν πᾶσα ρίζα τῆς α' ἐξισώσεως εἶναι ρίζα καὶ τῆς β' καὶ πᾶσα τῆς β' εἶναι καὶ τῆς α'.

Αἱ ἐκατέρωθεν τοῦ σημείου τῆς ισότητος παραστάσεις λέγονται **μέλη** αὐτῆς (πρῶτον καὶ δεύτερον). Ἐκαστον μέλος ἐξισώσεως εἶναι ἐν γένει ἄθροισμα προσθετέων, ἕκαστος τῶν ὁποίων λέγεται **ὅρος** τῆς ἐξισώσεως.

§ 98. Ἐξισώσεις τις λέγεται **ἀριθμητικὴ** μὲν, ἐὰν οὐδεὶς τῶν ὁρῶν τῆς περιέχῃ γράμματα ἐκτὸς τῶν ἀγνώστων, **ἐγγράμματος** δὲ ἐὰν δὲν συμβαίνει τοῦτο. Οὕτως ἡ $8x+12x=3-4x$ εἶναι ἀριθμητικὴ, ἐνῷ ἡ $3x-5a=8b+2$ εἶναι ἐγγράμματος.

§ 99. Μία ἐξισώσεις λέγεται **ἀκεραία**, ἂν οἱ ὅροι τῆς εἶναι παραστάσεις ἀκεραῖαι, ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους τῆς, καθὼς π.χ. ἡ $\alpha \sqrt{\alpha - \beta x^2 - 2\beta x} = \gamma$.

Κλασματικὴ λέγεται μία ἐξισώσεις, ἂν τουλάχιστον εἰς τῶν ὁρῶν τῆς εἶναι κλασματικὴ παράστασις, ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους τῆς, π.χ. ἡ $\frac{3}{x+1} - \frac{7}{x^2-1} + 4 = 0$.

Ρητὴ μὲν λέγεται μία ἐξισώσεις, ἂν οὐδεὶς τῶν ὁρῶν τῆς ἔχῃ ρίζαν ἐπὶ τῶν ἀγνώστων τῆς. **Ἀρρητὸς** δὲ, ἂν δὲν εἶναι ρητὴ, π.χ. ἡ $\sqrt{x^2+2} = 6$ εἶναι ἄρρητος.

§ 100. Θ' ἀποδείξωμεν τὴν ἐξῆς ιδιότητα τῶν ἐξισώσεων :

Ἐὰν εἰς τὰ δύο μέλη ἐξισώσεως προσθέσωμεν (ἢ ἀφαιρέσωμεν) τὴν αὐτὴν ποσότητα, προκύπτει ἐξισώσεις ἰσοδύναμος.

Πράγματι ἔστω π.χ. ἡ ἐξισώσεις $8x=32$. (1)

Ἐὰν εἰς τὰ μέλη αὐτῆς προσθέσωμεν πχ. τὸν 6, προκύπτει ἡ $8x+6=32+6$ (2), ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν (1). Διότι ἡ (1) ἔχει τὴν ρίζαν 4, ἐπεὶδὴ εἶναι $8 \cdot 4 = 32$ (1'). Ἀλλ' ἂν εἰς τοὺς ἴσους τούτους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν τὸν 6, προκύπτουν ἀριθμοὶ ἴσοι $8 \cdot 4 + 6 = 32 + 6$ (2'). Θέτομεν εἰς τὴν (2) $x=4$ καὶ εὗρισκομεν ἐκ μὲν τοῦ α' μέλους $8 \cdot 4 + 6$, ἐκ δὲ τοῦ β' $32 + 6$.

είναι αδύνατος, έπεται ότι ή άνωτέρω ιδιότης δέν ισχύει, όταν ό αριθμός, μέ τόν όποϊον πολλαπλασιάζομεν ή διαιρούμεν τά μέλη έξισώσεως, είναι ή γίνεται 0. Διά τοῦτο, άν ό πολλαπλασιαστής ή ό διαιρέτης είναι παράστασις περιέχουσα γράμματα διάφορα τών άγνωστων τής δοθείσης έξισώσεως, ή προκύπτουσα έξίσωσις είναι ίσοδύναμος μέ τήν δοθείσαν μόνον διά τās τιμές αὐτῶν τῶν γραμμάτων, αἱ όποῖαι δέν μηδενίζουν τήν παράστασιν. Π.χ. άν ό πολλαπλασιαστής ή ό διαιρέτης είναι $\alpha-\beta$, πρέπει νά είναι $\alpha-\beta \neq 0$ (σημειώνομεν αὐτό καί οὕτως $\alpha \neq \beta$). Διότι, άν είναι $\alpha-\beta=0$, έπα-
νερχόμεθα εἰς τήν προηγούμενην έξετασθεϊσαν περίπτωσηιν.

Ἄν ό πολλαπλασιαστής ή ό διαιρέτης είναι παράστασις ἔ-
χουσα ένα ή περισσότερους άγνωστους τής δοθείσης έξισώσεως ή προκύπτουσα έξίσωσις δέν είναι πάντοτε ίσοδύναμος μέ τήν δο-
θείσαν. Π.χ. ή έξίσωσις $3x=4$ καί ή προκύπτουσα έκ ταύτης μέ
πολλαπλασιασμόν τῶν μελῶν της ἐπὶ $(x-2)$, ήτοι ή $3x(x-2) =$
 $=4(x-2)$ δέν είναι ίσοδύναμοι. Διότι ή β' ἔχει καί τήν ρίζαν 2 (κα-
θώς φαίνεται, άν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὸ 2 εἰς αὐτήν), ἐνῶ ή α' δέν
τήν ἔχει.

Ἐξ ἄλλου, άν ἔχωμεν π.χ. τήν έξίσωσιν $(x+5)(x-4)=0$ καί
διαιρέσωμεν τά μέλη της διά $x+5$, εύρίσκομεν τήν $x-4=0$, ή όποία
δέν ἔχει τήν ρίζαν $x=-5$ τής δοθείσης.

2. ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΤΩΝ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ

§ 103. Καλοῦμεν ἀπαλοιφήν τῶν παρονομαστῶν έξισώσεως
τήν εύρεσιν ίσοδυνάμου πρὸς αὐτήν έξισώσεως άνευ παρονομαστῶν.

$$\text{*Εστω ή έξίσωσις } \frac{x}{3} - \frac{x-1}{11} = x-9.$$

Ἐάν τά δύο ἴσα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρο-
νομαστῶν 3 καί 11, δηλαδή ἐπὶ 33 καί ἀπλοποιήσωμεν, λαμβά-
νομεν τήν $11x-3x+3=33x-297$. Ἡ έξίσωσις αὕτη είναι ἀπηλ-
λαγμένη παρονομαστῶν καί ίσοδύναμος μέ τήν δοθείσαν. Ἐν γένει :

Ἐάν δοθεῖσα έξίσωσις είναι κλασματική (ρητή) δυνάμε-
θα νά εύρωμεν ίσοδύναμόν της ἀκεραίαν, εάν πολλαπλασιάσω-

μεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν της καὶ ἀπλοποιήσωμεν τοὺς ὅρους τῶν κλασμάτων.

Πράγματι, ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ β' μέλος μιᾶς τοιαύτης ἐξισώσεως εἶναι τὸ μηδέν, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸ α' μέλος αὐτῆς ὑπὸ τὴν μορφήν $\frac{A}{B}$, ἀντὶ δὲ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως νὰ ἔχωμεν τὴν $\frac{A}{B} = 0$ (1), ὅπου A, B εἶναι πολυώνυμα ἀκέραια ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους. Ἐν δὲ οὐδεμίαν τιμὴν τῶν ἀγνώστων μηδενίζονται συγχρόνως τὸ A καὶ B, τότε διὰ νὰ εἶναι $\frac{A}{B} = 0$, ἀρκεῖ νὰ εἶναι $A=0$ (2), ὅτε αἱ (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἐν ὅμως ὑπάρχουν τιμαὶ τῶν ἀγνώστων, δι' ἐκάστην τῶν ὁποίων μηδενίζεται τὸ A καὶ B, τότε αἱ τιμαὶ αὗται ἐπαληθεύουν τὴν (2), ἀλλὰ δυνατὸν νὰ μὴ ἐπαληθεύουν τὴν (1). Διότι διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς τὸ $\frac{A}{B}$ παρουσιάζεται ὅτι ἔχει τιμὴν ἀόριστον καὶ ἡ ἀληθὴς τιμὴ του δύναται νὰ μὴ εἶναι μηδέν.

Ἐστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις: $\frac{x-4}{x-5} - \frac{x-5}{x-6} = \frac{x-7}{x-8} - \frac{x-8}{x-9}$ (2). Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι $(x-5)(x-6)(x-8)(x-9)$. Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. καὶ ἀπλοποιοῦντες εὐρίσκομεν: $(x-4)(x-6)(x-8)(x-9) - (x-5)^2(x-8)(x-9) - (x-7)(x-5)(x-6)(x-9) + (x-8)^2(x-5)(x-6) = 0$, ἡ ὁποία εἶναι ἀκεραία καὶ ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν, διότι δὲν ὑπάρχει τιμὴ τοῦ x ἐπαληθεύουσα αὐτὴν καὶ τὴν $(x-5)(x-6)(x-8)(x-9) = 0$.

Πρὸς συντομίαν διὰ τὴν ἀπαλοιφήν τῶν παρονομαστῶν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καθένα ἀριθμητὴν τῶν ὁρῶν τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ ἐ.κ.π. διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ὅρου τούτου καὶ νὰ παραλείψωμεν τοὺς παρονομαστές. Π.χ. διὰ τὴν ἐξίσωσιν $\frac{3x}{4} - \frac{2x-1}{5} - 1 = \frac{2}{3}$ παρατηροῦμεν ὅτι ἐ.κ.π. τῶν παρο-

νομαστῶν της εἶναι τὸ 60 καὶ τὰ 15, 12, 60, 20 εἶναι τὰ ἀντίστοιχα πηλικά τοῦ 60 διὰ καθενὸς τῶν παρονομαστῶν 4, 5, 1, 3. Ἐπὶ τὰ πηλικά αὐτὰ θὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀντιστοίχους ἀριθμητὰς τῶν ὁρῶν, χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν πλέον τοὺς παρονομαστές. Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πολλαπλασιασμῶν εὐρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$45x - 24x + 12 - 60 = 40.$$

§ 104. Καλοῦμεν βαθμὸν ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $A = 0$, τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον μέλος εἶναι (ἀκέραιον ἀνηγμένον) πολυώνυμον, περιέχον ἓνα ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους, τὸν βαθμὸν τοῦ πολυωνύμου τούτου ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους. Π.χ. ἡ $3x^2 - 6x + 2 = 0$ εἶναι β' βαθμοῦ ὡς πρὸς x , ἡ $3x^2y - 4y^2 + 2x - 1 = 0$ εἶναι γ' βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y , ἡ $2x - 3 = 0$ εἶναι α' βαθμοῦ ὡς πρὸς x .

3. ΛΥΣΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ Α' ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

§ 105. Ἐστω ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$3x - 7 = 14 - 4x.$$

Ἐὰν τὸν ὅρον $-4x$ μεταφέρωμεν καταλλήλως εἰς τὸ α' μέλος, τὸ δὲ -7 εἰς τὸ β', εὐρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν τῆς δοθείσης

$$3x + 4x = 14 + 7.$$

Ἐκτελοῦντες εἰς τὸ α' καὶ β' μέλος αὐτῆς τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, εὐρίσκομεν $7x = 21$. Ἐὰν τὰ μέλη ταύτης διαιρέσωμεν διὰ τοῦ συντελεστοῦ 7 τοῦ x , προκύπτει ἡ $x = 3$, ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν καὶ ἀληθεύει, ὅταν $x = 3$. Ἄρα καὶ ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι ἡ 3.

$$\text{Ἐστω ἡ ἐξίσωσις } \frac{x}{3} - \frac{x-1}{11} = x-9.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν ταύτην, εὐρίσκομεν ἰσοδύναμον αὐτῆς ἄνευ παρονομαστῶν. Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ταύτης κατὰ σειρὰν ἐπὶ 11, 3, 33, 33, (ὅπου τὸ 33 εἶναι τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῆς) καὶ εὐρίσκομεν $11x - 3x + 3 = 33x - 297$.

Ἐργαζόμενοι ἐπ' αὐτῆς ὡς ἀνωτέρω, εὐρίσκομεν $x = 12$. Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι :

Διὰ νὰ λύσωμεν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ μὲ ἓνα ἄγνωστον, 1ον ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς αὐτῆς, ἂν ἔχῃ (ἤτοι εὐρίσκομεν ἰσοδύναμον αὐτῆς ἄνευ παρονομαστῶν), 2ον ἐκτελοῦμεν τὰς σημειουμένας πράξεις εἰς τὴν ἰσοδύναμον, 3ον χωρίζομεν τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν ἄγνωστον ἀπὸ τοὺς μὴ ἔχοντας αὐτὸν εἰς τὴν νέαν ἐξίσωσιν γράφοντες τοὺς μὲν εἰς τὸ ἓν μέλος, τοὺς δὲ εἰς τὸ ἄλλο μέλος, 4ον ἐκτελοῦμεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ 5ον διαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως μὲ τὸν συντελεστήν τοῦ ἀγνώστου.

Ἀσκήσεις

Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

170. α') $x + 17 = 8x + 1$,

β') $5x - 4 = 38 - x$.

171. α') $6x + 25 = 31 + 2x$,

β') $4(3x + 5) - 60 = 2x$

172. α') $11(2x - 15) - x = 6$,

β') $\alpha x = \alpha + 1 + x$.

173. α') $4\alpha^2 x - 1 = x + 2\alpha$,

β') $\beta x + \alpha x = 1$.

174. α') $\frac{3x-1}{4} - \frac{2x+1}{3} - \frac{4x-5}{5} = 4$,

β') $2 - \frac{7x-1}{6} = 3x - \frac{19x+3}{4}$.

175. $\frac{5x+1}{3} + \frac{19x+7}{9} - \frac{3x-1}{2} = \frac{7x-1}{6}$.

176. $11 - \left(\frac{3x-1}{4} + \frac{2x+1}{3} \right) = 10 - \left(\frac{2x-5}{3} + \frac{7x+1}{8} \right)$.

4. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x + \beta = 0$

§ 106. Ἐὰν ἀπὸ δοθεῖσαν ἀκεραίαν ἢ κλασματικὴν (ρητὴν) ἐξίσωσιν ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον x μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν, τὴν μεταφορὰν πάντων τῶν ὄρων εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὄρων προκύπτει ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον x , αὕτη θὰ ἔχῃ τὴν μορφήν $\alpha x + \beta = 0$. ὅπου τὰ α , β εἶναι ἀριθμοὶ γνωστοὶ ἢ παραστάσεις γνωσταί.

Ὅταν λέγωμεν θὰ **διερευνήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x + \beta = 0$** , ἐννοοῦμεν ὅτι θὰ ζητήσωμεν νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τὰς ἐξῆς ἐρωτήσεις :

1ον. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει μίαν ρίζαν ἢ δύναται νὰ ἔχῃ καὶ περισσότερας ἢ καὶ οὐδεμίαν ;

2ον. Τί πρέπει νὰ εἶναι τὰ α καὶ β , διὰ νὰ ἔχῃ μίαν ρίζαν καὶ τι διὰ νὰ ἔχῃ περισσότερας ἢ οὐδεμίαν ;

Ἐκ τῆς $\alpha x + \beta = 0$ εὐρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμόν της $\alpha x = -\beta$

1ον. Ἄν εἶναι $\alpha \neq 0$, θὰ ἔχωμεν $x = -\frac{\beta}{\alpha}$, ἥτοι ἡ τιμὴ τοῦ x εἶναι ὠρισμένη καὶ λέγομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις **ἔχει μίαν μόνην ρίζαν ἢ μίαν μόνην λύσιν**.

2ον. Ἐὰν εἶναι $\alpha = 0$ καὶ $\beta \neq 0$, θὰ ἔχωμεν $0x = -\beta$ ἢ $0 = -\beta$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον, ἐπειδὴ ὑπετέθη $\beta \neq 0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι **ἀδύνατος** ἢ ὅτι **οὐδεμίαν ἔχει λύσιν**.

Ἐστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\frac{x}{2} - 3 - \frac{x}{3} = 1 + \frac{x}{6} - \frac{1}{3}$. Ἀντ' αὐτῆς

εὐρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμόν της $3x-18-2x=6+x-2$ ἢ τὴν $0x=22$ ἢ $0=22$, ἡ ὁποία εἶναι ἀδύνατος, ἄρα καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος.

3ον. Ἐὰν εἶναι $\alpha = 0$ καὶ $\beta = 0$, θὰ ἔχωμεν ὅτι $0 \cdot x = 0$ ἢ $0 = 0$ καὶ προφανῶς τὸ x δύναται νὰ λάβῃ οἰανδήποτε τιμὴν. Λέγομεν δὲ ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι **ταυτότης** πρὸς x ἢ ὅτι εἶναι **ἀόριστος**.

§ 107. Παρατήρησις. Ὄταν τὸ α εἶναι θετικὸν καὶ ἐλαττοῦμενον πλησιάσῃ διηλεκῶς πρὸς τὸ 0, τότε λέγομεν ὅτι ὁ συντελεστής τοῦ x τείνει εἰς τὸ 0, συμβολίζομεν δὲ αὐτὸ οὕτως: $\alpha \rightarrow 0$. Ἀλλὰ τότε, ἂν τὸ β εἶναι ὠρισμένος ἀριθμὸς $\neq 0$, τὸ $\frac{\beta}{\alpha}$ διηλεκῶς αὐξάνεται ἀπολύτως, καὶ λέγομεν ὅτι τείνει εἰς τὸ $+\infty$ μέν, ἂν εἶναι $\beta > 0$, εἰς τὸ $-\infty$ δέ, ἂν εἶναι $\beta < 0$, λέγομεν δὲ τότε ὅτι ἡ ρίζα τῆς ἐξίσωσεως τείνει εἰς τὸ θετικὸν ἢ τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον, καθ' ὃσον $\beta > 0$ ἢ $\beta < 0$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΛΥΣΕΩΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x + \beta = 0$

§ 108. Πρὸς εὐκολίαν παραθέτομεν τὸν κατωτέρω πίνακα τῶν περιπτώσεων τῆς λύσεως τῆς ἐξίσωσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ $\alpha x + \beta = 0$.

1ον. Ἄν εἶναι $\alpha \neq 0$, ὑπάρχει μία ρίζα, ἡ $x = -\frac{\beta}{\alpha}$.

2ον. Ἄν εἶναι $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ δὲν ὑπάρχει ρίζα.

Ὄταν εἶναι $\beta \neq 0$ καὶ ὠρισμένον, ἀλλὰ τὸ α εἶναι θετικὸν καὶ $\rightarrow 0$, ἡ ρίζα τείνει πρὸς τὸ $+\infty$, ἂν $\beta > 0$ ἢ εἰς τὸ $-\infty$, ἂν $\beta < 0$.

3ον. Ἄν εἶναι $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀόριστος· ἀληθεύει μὲ κάθε x .

Ἀσκήσεις

Ὅμας πρώτη. 177. Εὑρετε τὰς ρίζας τῶν κάτωθι ἐξίσωσεων:

$$\alpha') \frac{3}{2}x - 5 + x = \frac{x-10}{2} + 2x,$$

$$\delta') \frac{x}{\alpha} + \frac{x}{\beta} + 1 = \frac{(\alpha+\beta)x + \alpha\beta}{\alpha\beta},$$

$$\beta') 2x - 5 = \frac{x+7}{2} + \frac{3x}{2},$$

$$\epsilon') \frac{x}{3} - \frac{x}{5} - 3 = 2x - 7,$$

$$\gamma') \frac{x-\alpha}{2} + \frac{x+\beta}{3} = \frac{5x}{6} - 1,$$

$$\sigma\tau') \frac{x}{3} + \frac{x}{2} + 5 = \frac{5x}{6} + 2.$$

178. Ποίας σχέσεις πρέπει να πληρούν τὸ α καὶ β, ἵνα ἡ $\frac{\alpha x - \beta}{3} + \frac{x}{2} = 3x - \alpha$, ἔχη μίαν λύσιν, οὐδεμίαν ἢ εἶναι ἀόριστος.

179. Προσδιορίσατε τὸ α, ὥστε ἡ $\frac{\alpha x - 1}{3} + \frac{x+1}{2} = 4$ νὰ εἶναι ἀδύνατος.

Ὁ μ ἄ ς δ ε υ τ έ ρ α. 180. Νὰ γίνη ἡ λύσις καὶ ἡ ἐπαλήθευσις τῶν ἐξισώσεων: α') $27x - 5(2x - 4) = 6(3x - 5) + 5(2x - 1)$.

$$\beta') \frac{2(3x-5)}{3} - \frac{25(x+2)}{12} = \frac{5(3x+2)}{2} + 33$$

$$\gamma') x - \left(\frac{x}{2} - \frac{2x}{3} \right) - \left(\frac{3x}{4} + \frac{2x}{3} \right) - \frac{5x}{6} = 65$$

$$\delta') \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 = \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{1}{6} \right)$$

$$\epsilon') \frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{(x-1)(x-3)} + \frac{19}{(x-3)(x-4)} = \frac{19}{(x-2)(x-4)},$$

$$\sigma\tau') \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{4(x-1)}{x^2(x-2)^2} + \frac{4}{x^2(x-2)} = 0.$$

Ὁ μ ἄ ς τ ρ ί τ η. 181. Λύσατε καὶ ἐπαλήθεύσατε τὰς ἐξισώσεις:

$$\alpha') (\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)x = 2\alpha^2, \quad \beta') (\alpha^2 + \beta^2)x + 2\alpha\beta x = \alpha^3 + \beta^3,$$

$$\gamma') 2\mu(x-\mu) - 2\nu(\nu-x) = (\mu+\nu)^2 - (\mu-\nu)^2,$$

$$\delta') (x+1)^2 - \alpha(5-3\alpha+2x) = (x-2\alpha)^2 + 5, \quad \epsilon') \frac{x}{\alpha} + \frac{x}{\alpha+\beta} = 2\alpha + \beta.$$

$$\sigma\tau') \frac{\beta x + \alpha}{2\alpha^2\beta} + \frac{x-1}{3\beta^2} = \frac{3\beta^2 + 7\alpha^2}{6\alpha^2\beta(\alpha-\beta)}, \quad \zeta') \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1} = \frac{\alpha x + \beta}{\alpha_1 x + \beta_1},$$

$$\eta') \frac{8\alpha}{(x+2)^2} + \frac{8\beta}{(x-2)^2} - \frac{(\alpha+\beta)x^4}{(x^2-4)^2} = -(\alpha+\beta).$$

5. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

§ 109. Πρόβλημα λέγεται πρότασις, εἰς τὴν ὁποίαν ζητεῖται νὰ εὕρεθῇ ἓν ἢ περισσότερα ἄγνωστα ἐξαρτώμενα ἀπὸ ἄλλα γνωστά ἢ δεδομένα. Τὰ διδόμενα καὶ τὰ ζητούμενα τοῦ προβλήματος εἶναι ἓν γένει σχετικοὶ ἀριθμοί, τὰ δὲ περιεχόμενα εἰς αὐτὸ ποσὰ μετρούμενα μὲ τὴν μονάδα αὐτοῦ ἕκαστον παριστάνονται μὲ ἀριθμούς.

§ 110. Λύσις ἑνὸς προβλήματος λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν ζη-

τουμένων αγνώστων αὐτοῦ, τὰ ὅποια παριστάνομεν συνήθως μὲ γράμματα $\chi, \psi, \omega, \dots$, τὰ δὲ γνωστὰ μὲ ἀριθμούς ἢ μὲ γράμματα $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Διὰ τὴν λυθῆν ἐν πρόβλημα, πρέπει τὰ ζητούμενα αὐτοῦ νὰ πληροῦν ὠρισμένας τινὰς ἀπαιτήσεις, τὰς ὁποίας καλοῦμεν **ὅρους** τοῦ προβλήματος. Ἐκείνους ἐκ τῶν ὁρῶν, οἱ ὅποιοι ὀρίζουν τὰς σχέσεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἔχουν τὰ ζητούμενα πρὸς τὰ δεδομένα, καλοῦμεν **ἐπιτάγματα**.

Τὰ ἐπιτάγματα γίνονται γνωστὰ κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος π.χ. εἰς τὸ πρόβλημα:

Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον νὰ τὸν ὑπερβαίνει κατὰ 6. Τὸ ἐπίταγμα εἶναι ὅτι: τὸ διπλάσιον εἶναι μεγαλύτερον αὐτοῦ κατὰ 6.

Ἐπομένως, ἂν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παρασταθῇ μὲ x , τὸ διπλάσιον αὐτοῦ θὰ εἶναι $2x$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ $2x$ θὰ ὑπερβαίνει τὸ x κατὰ 6, πρέπει αἱ δύο παραστάσεις $2x$ καὶ $x+6$ νὰ εἶναι ἴσαι. Οὕτως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $2x = x + 6$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x = 6$.

Ἐνίοτε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παριστάνει τὴν τιμὴν ποσοῦ τινός, τὸ ὁποῖον ἔνεκα τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος ὑπόκειται εἰς ὅρους τινάς, τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ πληροῖ. Τοὺς τοιοῦτους ὅρους καλοῦμεν **περιορισμούς**. Π.χ. ἂν διὰ τῆς λύσεως προβλήματος τινος ζητῇται τὸ πλῆθος ἀνθρώπων, δυνάμεθα ἐκ τῶν προτέρων νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς.

Ἐν γένει διὰ τὴν λύσιν προβλήματος τινος ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

1ον Εὐρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος καὶ τοὺς περιορισμοὺς αὐτοῦ, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ πρῶται ἐκφράζουν τὰς σχέσεις τὰς συνδεούσας τὰ ζητούμενα μὲ τὰ δεδομένα αὐτοῦ.

2ον. Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις καὶ οὕτως εὐρίσκομεν τίνες εἶναι οἱ ἀριθμοί, οἱ ὅποιοι δύνανται νὰ λύσουν τὸ πρόβλημα.

3ον. Ἐξετάζομεν ἂν οἱ ἐκ τῆς λύσεως εὑρεθέντες ἀριθμοὶ πληροῦν καὶ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος.

§ 111. α') Τὸ τετραπλάσιον ἀριθμοῦ τινος εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν αὐξηθέντα κατὰ 60. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ;

Ἐστω ὅτι x εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς. Τὸ τετραπλάσιον αὐτοῦ θὰ εἶναι $4x$, τὸ δὲ $x+60$ παριστάνει τὸν ἀριθμὸν ηὐξημένον κατὰ 60. Κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ εἶναι $4x=x+60$ ἢ $3x=60$. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὐρίσκομεν $x=20$ καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτὴ.

β') Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 25, τὸ δὲ ἐξαπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου ἐλαττωθὲν κατὰ τὸ τετραπλάσιον τοῦ μικροτέρου δίδει 50. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί ;

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὸν μεγαλύτερον τῶν ἀριθμῶν, ὁ μικρότερος θὰ εἶναι $25-x$, τὸ ἐξαπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου $6x$, τὸ δὲ τετραπλάσιον τοῦ μικροτέρου $4(25-x)$. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος ἡ διαφορὰ $6x-4(25-x)$ πρέπει νὰ εἶναι ἴση μὲ 50, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $6x-4(25-x)=50$ ἢ $6x+4x-100=50$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x=15$. Ἀρα οἱ ἀριθμοὶ εἶναι 15 καὶ $25-15=10$.

γ') Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{7}{11}$ κάμνει αὐτὸ ἴσον μὲ $\frac{1}{4}$.

Ἄν παραστήσωμεν μὲ x τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν, θὰ ἔχωμεν : $\frac{7-x}{11+x} = \frac{1}{4}$, ἐκ τῆς λύσεως, τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x = -5\frac{2}{3}$, ἡ δὲ λύσις εἶναι δεκτὴ.

Π ρ ο β λ ῆ μ α τ α

182. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον αὐξηθὲν κατὰ 5 ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ μείον 19.

183. Εὑρετε ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε τὸ τετραπλάσιον αὐτοῦ ἐλαττούμενον κατὰ 2 νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον του σὺν 17.

184. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{6}{17}$ τὸ κάμνει ἴσον μὲ $\frac{1}{3}$.

185. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τοὺς $-5, 6, 8$, δίδει ἀριθμούς, ἐκ τῶν ὁποίων οἱ δύο πρῶτοι ἔχουν λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τοῦ τρίτου πρὸς τὸν ζητούμενον.

186. Νά εύρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐλαττούμενος κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ καὶ κατὰ 4 γίνεται ἴσος μὲ τὰ $\frac{5}{6}$ αὐτοῦ μείον 8.

187. Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{29}{42}$ διὰ νὰ γίνῃ ἴσον μὲ 0,5 ;

188. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποῖου τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ κάμνουν 170 ;

II. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ Ο ΑΓΝΩΣΤΟΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΘΕΤΙΚΟΣ

§ 112. α') Ὁ Ἰωάννης ἔχει τετραπλάσια μῆλα ἢ ἡ Μαρία καὶ οἱ δύο δὲ μαζὶ ἔχουν 45. Πόσα ἔχει ἕκαστος ;

Περιορισμός. Προφανῶς οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι θετικοί.

Ἄν μὲ x παραστήσωμεν τὰ μῆλα τῆς Μαρίας, τὰ τοῦ Ἰωάννου θὰ παρασταθοῦν μὲ τὸ $4x$ καὶ τῶν δύο μὲ τὸ $4x+x$ καὶ πρέπει νὰ εἶναι $4x+x=45$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x=9$. Ἦτοι ἡ Μαρία εἶχεν 9 καὶ ὁ Ἰωάννης $4 \cdot 9=36$ μῆλα καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτὴ.

β') Ὁρθογωνίου τινὸς ἡ μὲν βάση εἶναι 4 μ. μεγαλύτερα τῆς πλευρᾶς τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτό, τὸ δὲ ὕψος 3 μ. μικρότερον. Νά εύρεθoῦν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ.

Περιορισμός. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι θετικοί.

Ἐὰν μὲ x παραστήσωμεν τὴν πλευρὰν τετραγώνου, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶναι $x \cdot x=x^2$. Ἡ βάση τοῦ ὀρθογωνίου θὰ παρασταθῇ τότε μὲ $x+4$, τὸ ὕψος του μὲ $x-3$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν του εἶναι $(x+4)(x-3)$. Πρέπει νὰ εἶναι :

$(x+4)(x-3)=x^2$ ἢ $x^2+4x-3x-12=x^2$. Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης εὐρίσκομεν $x=12$.

Ὡστε ἡ μὲν βάση τοῦ ὀρθογωνίου ἔχει μῆκος $12+4=16$ μ. τὸ δὲ ὕψος $12-3=9$ μ. καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτὴ.

γ') Ὁ Α ἔκτελεῖ ἓν ἔργον εἰς 7 ἡμέρας. Ὁ Β ἐκτελεῖ αὐτὸ εἰς 5 ἡμέρας. Ἐὰν ἐργασθοῦν καὶ οἱ δύο μαζὶ, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐκτελέσουν τὸ ἔργον ;

Ἐὰν μὲ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν (ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ εἶναι θετικὸς καὶ μικρότερος τοῦ 5), παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ εἰς x ἡμέρας ἐκτελοῦν καὶ οἱ δύο μαζὶ ἐργαζόμενοι τὸ ἔργον,

εἰς μίαν ἡμέραν θὰ ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{x}$ τοῦ ἔργου. Ἀφοῦ ὁ Α εἰς 7 ἡμέρας ἐκτελεῖ τὸ ἔργον, εἰς 1 ἡμέραν θὰ ἐκτελῇ τὸ $\frac{1}{7}$. Ὁ Β ἐκτελεῖ εἰς 1 ἡμέραν τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου. Καὶ οἱ δύο μαζὶ εἰς μίαν ἡμέραν ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{7} + \frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου. Ἐπομένως πρέπει νὰ εἶναι $\frac{1}{7} + \frac{1}{5} = \frac{1}{x}$ ἢ $5x + 7x = 35$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x = 2\frac{11}{12}$.

Ὡστε καὶ οἱ δύο μαζὶ ἐργαζόμενοι θὰ ἐκτελέσουν τὸ ἔργον εἰς $2\frac{11}{12}$ ἡμέρας καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτὴ.

Π ρ ο β λ ῆ μ α τ α

189. Ἐχει τις 100 ὀκάδας οἴνου τῶν 9,50 δρχ. κατ' ὀκᾶν. Πόσον οἶνον τῶν 9 δρχ. κατ' ὀκᾶν πρέπει νὰ ἀναμίξῃ, διὰ νὰ κοστίζῃ, ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος 9,2 δρχ.;

190. Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν ἐκ δύο τόπων συγχρόνως κινούμενα ὁμαλῶς καὶ ἀντιθέτως ὥστε νὰ συναντηθοῦν. Τὸ μὲν διανύει 5 χλμ. τὴν ὥραν, τὸ δὲ 5,5 χλμ. Εἰς τίνα ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν πρῶτον τόπον θὰ συναντηθοῦν, ἂν ἡ ἀπόστασις τῶν τόπων εἶναι 60 χλμ.;

191. 40 ὀκάδες ἄλμυρῴ ὕδατος περιέχουν 3,4 ὀκ. ἁλατος. Πόσον καθαρὸν ὕδωρ πρέπει νὰ ρίψωμεν εἰς αὐτό, ἵνα 30 ὀκ. τοῦ νέου μίγματος περιέχουν 2 ὀκ. ἁλατος.;

192. Πόσον κοστίζει ἓν κτῆμα, ἂν τὰ τρία πέμπτα τῆς ἀξίας αὐτοῦ σὺν 250 000 δρχ. ἀποτελοῦν τὰ τρία τέταρτα αὐτῆς μείον 200 000 δρχ.;

193. Ἀτμάμαξα διανύουσα 48 χλμ. τὴν ὥραν ἀνεχώρησεν 20π βραδύτερον ἄλλης (ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου) καὶ διευθυνομένη ὁμοίως, συνηντήθη δὲ μὲ αὐτὴν μετὰ 2 ὥρας καὶ 20π μετὰ τὴν ἀναχώρησίν της. Ποία εἶναι ἡ ταχύτης τῆς ἄλλης.;

194. Κρουνὸς πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 12 ὥρας, ἄλλος πληροῖ αὐτὴν εἰς 10 ὥρας καὶ τρίτος πληροῖ αὐτὴν εἰς 30 ὥρας. Ἄν καὶ οἱ τρεῖς ἀνοιχθοῦν συγχρόνως, εἰς πόσον χρόνον θὰ πληρωθῇ ἡ δεξαμενὴ.;

195. Ὑπὲρτης λαμβάνει ἐτήσιον μισθὸν 6.000 δρχ. καὶ μίαν ἐνδυμασίαν. Ἄν διὰ 8 μῆνας ἔλαβε 5.000 δρχ. πόσον ἐτιμᾶτο ἡ ἐνδυμασία.;

III. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ Ο ΑΓΝΩΣΤΟΣ ΕΙΝΑΙ ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΘΕΤΙΚΟΣ

§ 113. α') Δέκα ἄτομα, ἄνδρες καὶ γυναῖκες, ἐπλήρωσαν

500 δρχ. Ἄν ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν ἐπλήρωσεν 60 δρχ. καὶ ἐκάστη τῶν γυναικῶν 40 δρχ. πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες ;

Περιορισμός. Παρατηρητέον, ὅτι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοί, ἄλλως ἢ λύσις δὲν δύναται νὰ εἶναι δεκτή.

Ἄν μὲ x παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν γυναικῶν, ὁ τῶν ἀνδρῶν θὰ εἶναι $10-x$. Ὅλοι οἱ ἄνδρες ἐπλήρωσαν $60(10-x)$ δρχ. ἔλαι δὲ αἱ γυναῖκες $40x$ δρχ.

Πρέπει νὰ εἶναι $60(10-x) + 40x = 500$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει $x = 5$ γυναῖκες, ὁπότε οἱ ἄνδρες, εἶναι $10-5 = 5$, ἡ δὲ λύσις εἶναι δεκτή.

β') Ἀπὸ 80 ἄτομα, ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδιά, αἱ μὲν γυναῖκες ἦσαν τὰ 0,8 τῶν ἀνδρῶν, τὰ δὲ παιδιά τὰ ἐπτὰ πέμπτα τῶν ἀνδρῶν. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδιά ;

Ἄν x παριστάνῃ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνδρῶν, ὁ τῶν γυναικῶν θὰ εἶναι $0,8x$ καὶ ὁ τῶν παιδιῶν $\frac{7}{5}x$. Ἀρα πρέπει νὰ εἶναι $x + 0,8x + \frac{7}{5}x = 80$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x = 25$.

Ὡστε οἱ ἄνδρες ἦσαν 25, αἱ γυναῖκες $25 \cdot 0,8 = 20$ καὶ τὰ παιδιά διὰ $25 \cdot \frac{7}{5} = 35$, ἡ δὲ λύσις εἶναι δεκτή.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

196. Εἰς μίαν ἐκλογὴν μεταξὺ δύο ὑποψηφίων ἐψήφισαν 12 400 ἐκλογεῖς καὶ ἔλαβεν ὁ ἐκλεγείς 5 153 ψήφους περισσότερας τοῦ ἀποτυχόντος, εὐρέθησαν δὲ καὶ 147 λευκαὶ ψήφοι. Πόσας ψήφους ἔλαβεν ἕκαστος ;

197. Ἐὰν ὁμιλὸς τις εἶχε τὸ ἑβδομον τῶν μελῶν τοῦ ὀλιγώτερον τῶν ὅσων ἔχει, θὰ εἶχεν 120 μέλη. Πόσα μέλη ἔχει ;

198. Τὸ τριπλάσιον τοῦ πέμπτου ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ ηὔξημένον κατὰ 7 δίδει τὸ 34. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ;

199. Τίς εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ τρίτον αὐξηθὲν κατὰ 2 δίδει τὸ 23 ;

200. Νὰ εὐρεθῇ ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος διὰ 7 ἢ διὰ 9 ἀφίνει ὑπόλοιπον 3, τὰ δὲ πηλικά διαφέρουν κατὰ 4.

201. Εἶχέ τις πορτοκάλια καὶ ἐπώλησε τὰ τρία πέμπτα αὐτῶν ἡγόρασεν ἔπειτα 33 πορτοκάλια καὶ εἶχεν οὕτως 9 περισσότερα τῶν ὅσων εἶχεν ἐξ ἀρχῆς. Πόσα εἶχε ;

IV. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ Ο ΑΓΝΩΣΤΟΣ ΠΕΡΙΕΧΕΤΑΙ
ΜΕΤΑΞΥ ΟΡΙΩΝ

§ 114. α') 'Η ηλικία ενός πατρός είναι τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ του. Πρὸ 8 ἐτῶν ἡ ηλικία τοῦ πατρός ἦτο τετραπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ του. Ποῖαι αἱ ηλικίαι των ;

Ἄν μὲ x παρασταθῇ ἡ ηλικία τοῦ υἱοῦ εἰς ἔτη, ἡ τοῦ πατρός θὰ εἶναι $3x$ ἔτη, πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ x καὶ $3x$ νὰ εἶναι θετικοὶ καὶ νὰ μὴ ὑπερβαίνουν τὴν δυνατὴν ἀνθρωπίνην ηλικίαν.

Πρὸ 8 ἐτῶν ἡ ηλικία τοῦ μὲν υἱοῦ ἦτο $x-8$ ἔτη, τοῦ δὲ πατρός $3x-8$ ἔτη καὶ πρέπει νὰ εἶναι $3x-8=4(x-8)$, ἐκ τῆς λύσεως τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x=24$. Ἄρα ἡ ηλικία τοῦ μὲν υἱοῦ εἶναι 24, τοῦ δὲ πατρός $24 \cdot 3 = 72$ ἔτη καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτὴ.

β') Ἐκ δύο ἀνθρώπων, ὁ μὲν ἔχει 1800 δρχ. καὶ δαπανᾷ 50 δρχ. καθ' ἑκάστην ἡμέραν, ὁ δὲ ἔχει 1000 δρχ. καὶ δαπανᾷ 30 δρχ. ἡμερησίως. Μετὰ πόσας ἡμέρας θὰ ἔχουν ἴσα ποσά ;

Ἄν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παρασταθῇ μὲ x , ὁ μὲν θὰ δαπανήσῃ $50x$ δρχ. καὶ θὰ τοῦ μείνουν $(1800-50x)$ δρχ., ὁ δὲ $30x$ καὶ θὰ τοῦ μείνουν $(1000-30x)$ δρχ. Ἄρα πρέπει νὰ εἶναι: $1800-50x=1000-30x$ ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x=40$. Ἄλλ' ἡ λύσις αὕτη ἀπορρίπτεται, διότι μετὰ 40 ἡμέρας καὶ οἱ δύο ἄνθρωποι δὲν θὰ ἔχουν τίποτε.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

202. Ὁ Ἕλλην μαθηματικὸς, συγγραφεὺς τῆς Ἀλγέβρας, Διόφαντος ἐζησε τὸ ἕκτον τῆς ζωῆς του ὡς παιδίον, τὸ δωδέκατον αὐτῆς ὡς νεανίας, τὸ ἑβδόμον αὐτῆς, μετὰ τὸν γάμον του καὶ πέντε ἔτη ἀκόμη, ὅτε ἀπέκτισε υἱόν, ὁ ὁποῖος ἐζησε τὸ ἡμῖς ἢ ὅσον ὁ πατήρ του· ἐζησε δὲ ὁ Διόφαντος ἀκόμη 4 ἔτη μετὰ τὸν θάνατον τοῦ υἱοῦ του. Πόσα ἔτη ἐζησεν ὁ Διόφαντος ;

203. Ἐχει τις ηλικίαν τριπλασίαν τῆς κόρης του· αἱ ηλικίαι καὶ τῶν δύο εἶναι 28 ἔτη ὀλιγώτερον τοῦ διπλασίου τῆς ηλικίας τοῦ πατρός. Πόσῃν ηλικίαν ἔχει ἕκαστος ;

204. Τρεῖς ἀδελφοὶ ἔχουν ὁμοῦ ηλικίαν 24 ἐτῶν, ἐνῶ ἕκαστος εἶναι κατὰ δύο ἔτη μεγαλύτερος τοῦ ἀμέσως ἐπομένου του. Ποῖοι εἶναι αἱ ηλικίαι των ;

205. Εἶναι τις 40 ἐτῶν καὶ ἔχει θυγατέρα 16 ἐτῶν· πότε ἡ ηλικία τῆς θυγατρὸς θὰ εἶναι ἡ ἦτο τὸ τρίτον τῆς ηλικίας τοῦ πατρός ;

206. Τρεις αριθμοί έχουν άθροισμα 70. 'Ο δεύτερος διαιρούμενος διὰ τοῦ πρώτου δίδει πηλίκον 2 καὶ υπόλοιπον 1. 'Ο τρίτος διαιρούμενος διὰ τοῦ δευτέρου δίδει πηλίκον 3 καὶ υπόλοιπον 3. Ποιοὶ εἶναι οἱ ἀριθμοί ;

207. 16 ἐργάται ἐκτελοῦν τὰ δύο πέμπτα ἐνὸς ἔργου ἐργαζόμενοι 9 ἡμέρας ἐπὶ 4 ὥρας καθ' ἑκάστην. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζονται 15 ἐργάται καθ' ἡμέραν, διὰ νὰ τελειώσουν τὸ ἔργον εἰς τρεῖς ἡμέρας ;

208. Πατήρ τις εἶναι 58 ἐτῶν καὶ ἔχει υἱὸν 28 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ὁ πατήρ θὰ ἔχη ἡλικίαν διπλάσιαν τῆς τοῦ υἱοῦ του ;

209. Διψηφίου ἀκεραίου ἀριθμοῦ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι διπλάσιον τοῦ τῶν δεκάδων. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων του, προκύπτει ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ πρώτου κατὰ 36. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ;

210. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων διψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι 12. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἐλαττωθῇ κατὰ 18, προκύπτει ὁ δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του εὐρίσκόμενος ἀριθμὸς. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ;

V. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΝΙΚΑ

§ 115. α') Πατήρ εἶναι α ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ β ἐτῶν. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι ἡ ἦτο τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ.

*Ἐστω ὅτι τὸ ζητούμενον θὰ γίνῃ μετὰ x ἔτη. Τότε ὁ πατήρ θὰ εἶναι $\alpha + x$ ἐτῶν καὶ ὁ υἱὸς $\beta + x$ ἐτῶν. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι:

$$\alpha + x = 3(\beta + x) \quad (1) \text{ καὶ } x > 0.$$

*Ἀν τὸ ζητούμενον εἶχε γίνῃ πρὸ x ἐτῶν, ὁ πατήρ θὰ ἦτο τότε $\alpha - x$, ὁ δὲ υἱὸς $\beta - x$ ἐτῶν. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι:

$$\alpha - x = 3(\beta - x) \quad (2) \text{ καὶ } x > 0.$$

*Ἄλλ' ἡ ἐξίσωσις (2) προκύπτει ἀπὸ τὴν (1), ἂν τὸ x ἐκείνης γίνῃ $-x$. Τοῦτο φανερώνει ὅτι αἱ ἀρνητικαὶ ρίζαι τῆς (1) εἶναι αἱ θετικαὶ τῆς (2) καὶ ἐπομένως ἡ (1) εἶναι ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος.

Εἰς τὰς θετικὰς ρίζας τῆς (1) ἀντιστοιχεῖ λύσις τοῦ προβλήματος πραγματοποιουμένη εἰς τὸ μέλλον· εἰς τὰς ἀρνητικὰς ρίζας τῆς (1) ἀντιστοιχεῖ λύσις τοῦ προβλήματος πραγματοποιηθεῖσα εἰς τὸ παρελθόν.

$$\text{Λύοντες τὴν (1) εὐρίσκομεν } x = \frac{\alpha - 3\beta}{2}.$$

*Ἀντίστοιχοι ἡλικίαι εἶναι τοῦ μὲν πατρὸς $\alpha + \frac{\alpha - 3\beta}{2}$ δηλ. $\frac{3(\alpha - \beta)}{2}$ τοῦ δὲ υἱοῦ $\beta + \frac{\alpha - 3\beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2}$ ἐτῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι θετικαί, διότι ὑποτίθεται $\alpha > \beta$.

Ὡστε ἡ τιμὴ τοῦ x γίνεται δεκτὴ.

Καὶ ἂν μὲν $\alpha - 3\beta > 0$, εἶναι $x > 0$ καὶ τὸ ζητούμενον θὰ συμβῇ εἰς τὸ μέλλον. Ἄν $\alpha - 3\beta < 0$, εἶναι $x < 0$ καὶ τὸ ζητούμενον συνέβη εἰς τὸ παρελθόν. Ἄν $\alpha - 3\beta = 0$, εἶναι $x = 0$ καὶ τὸ ζητούμενον συμβαίνει εἰς τὸ παρόν.

β') Ἄν ἡ ἡλικία τοῦ Πέτρου εἶναι α καὶ τοῦ Παύλου β ἐτῶν, τότε ἡ τοῦ Πέτρου θὰ εἶναι ἡ ἴση διπλασία τῆς τοῦ Παύλου;

ὑποτίθεται ὅτι α, β, μ εἶναι θετικοὶ καὶ $\mu \neq 1$, $\alpha \neq \beta$. Ἐστω ὅτι τὸ ζητούμενον θὰ γίνῃ μετὰ x ἔτη.

Πρέπει νὰ εἶναι $\alpha + x = \mu(\beta + x)$ (1) καὶ $x > 0$.

Ἄν τὸ ζητούμενον εἶχε γίνῃ πρὸ x ἐτῶν, πρέπει νὰ εἶναι:

$$\alpha - x = \mu(\beta - x) \quad (2) \quad \text{καὶ } x > 0.$$

Ἄλλ' ἐπειδὴ ἡ (2) προκύπτει ἐκ τῆς (1) ἔαν τὸ x ἐκείνης γίνῃ $-x$, συνάγεται ὅτι αἱ ἀρνητικαὶ ρίζαι τῆς (1) εἶναι θετικαὶ τῆς (2) καὶ συνεπῶς ἡ (1) εἶναι ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος.

Ἡ (1) ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν $(\mu - 1)x = \alpha - \mu\beta$, ἐκ τῆς ὁποίας, ἐπειδὴ $\mu - 1 \neq 0$ διότι ὑποτίθεται $\mu \neq 1$, εὐρίσκομεν $x = \frac{\alpha - \mu\beta}{\mu - 1}$.

Ἀντίστοιχοι ἡλικίαι εἶναι, τοῦ μὲν Πέτρου $\alpha + \frac{\alpha - \mu\beta}{\mu - 1}$ δηλ. $\frac{\mu(\alpha - \beta)}{\mu - 1}$ τοῦ δὲ Παύλου $\beta + \frac{\alpha - \mu\beta}{\mu - 1}$ δηλ. $\frac{\alpha - \beta}{\mu - 1}$ ἐτῶν, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ εἶναι θετικαὶ καὶ νὰ μὴ ὑπερβαίνουν τὰ ὅρια τῆς ἀνθρωπίνης ἡλικίας.

Διερεύνησις. Ἐπειδὴ $\mu \neq 1$ ἐξ ὑποθέσεως, διακρίνομεν τὰς ἐξῆς περιπτώσεις: Ἐστω $\mu > 1$ τότε πρέπει νὰ εἶναι $\alpha > \beta$, διὰ νὰ εἶναι θετικαὶ αἱ ἡλικίαι $\frac{\mu(\alpha - \beta)}{\mu - 1}$, $\frac{\alpha - \beta}{\mu - 1}$. Ἄλλως, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Καὶ ἂν μὲν εἶναι καὶ $\alpha > \mu\beta$ θὰ εἶναι $x > 0$ καὶ τὸ ζητούμενον θὰ συμβῇ εἰς τὸ μέλλον. Ἄν $\alpha < \mu\beta$, θὰ εἶναι $x < 0$ καὶ τὸ ζητούμενον συνέβη εἰς τὸ παρελθόν, ἂν δὲ $\alpha = \mu\beta$, θὰ εἶναι $x = 0$ καὶ τὸ ζητούμενον συμβαίνει εἰς τὸ παρόν.

Ἐστω $\mu < 1$ τότε πρέπει νὰ εἶναι $\alpha < \beta$ διὰ νὰ εἶναι θετικαὶ αἱ ἀνωτέρω ἡλικίαι, θὰ συμβαίνουν δὲ τὰ ἀντίθετα ἂν $\alpha > \mu\beta$ ἢ $\alpha < \mu\beta$.

γ') Ἀπὸ τόπον Α ἀναχωρεῖ κινητὸν κινούμενον ἐπὶ εὐθείας ΑΓ ὁμαλῶς μὲ ταχύτητα τ μέτρων κατὰ 1^η πρὸς τὴν φορὰν ΑΓ. Μετὰ α^ς ἀναχωρεῖ ἀπὸ τόπον Β κείμενον μ μέτρα ὀπισθεν τοῦ Α, ἄλλο κινητὸν κινούμενον ὁμαλῶς πρὸς τὴν αὐτὴν φο-

ρὰν μὲ τὸ πρῶτον καὶ μὲ ταχύτητα τ' μέτρων κατὰ 1° . Πότε θὰ συναντηθοῦν τὰ δύο κινήτά ;

'Υποτίθεται ὅτι $\tau' > \tau$, διότι ἄλλως οὐδέποτε τὸ δεύτερον θὰ φθάσῃ τὸ πρῶτον.

Ἐστω ὅτι θὰ συναντηθοῦν μετὰ x δευτερόλεπτα ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου. Τότε, χρόνος κινήσεως εἶναι τοῦ μὲν πρώτου x τοῦ δὲ ἄλλου $x - \alpha$ δευτερόλεπτα. Διανυθέντα διαστήματα κατὰ τοὺς χρόνους αὐτοὺς εἶναι τx μέτρα ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ $\tau'(x - \alpha)$ ὑπὸ τοῦ ἄλλου. Πρέπει τὸ β' διάστημα νὰ ὑπερβαίνει τὸ πρῶτον κατὰ μ μέτρα, δηλ. πρέπει νὰ εἶναι $\tau'(x - \alpha) = \tau x + \mu$ (1) καὶ $x > 0$.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $\tau' - \tau = 0$, διότι $\tau' > \tau$ ἐξ ὑποθέσεως, εὐρίσκομεν $x = \frac{\mu + \tau'\alpha}{\tau' - \tau}$.

Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι θετική, ἀφοῦ $\tau' > \tau$ ἐξ ὑποθέσεως καὶ μ, τ', α ἐπίσης θετικά. Ἐπομένως γίνεται δεκτὴ.

Π ρ ο β λ ῆ μ α τ α

Ὁ μ ἄ ς π ρ ὠ τ η. (Γενικά). 211. Ἐργάτης τελειώνει ἔργον τι εἰς α ἡμέρας, δεύτερος εἰς β ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας τελειώνουν τὸ ἔργον καὶ οἱ δύο μαζὶ ἐργαζόμενοι ;

212. Οἱ μὲν ἐμπρόσθιοι τροχοὶ ἀμάξης ἔχουν περιφέρειαν μήκους α μέτρων, οἱ δὲ ὀπίσθιοι β μέτρων. Ποίαν ἀπόστασιν θὰ διανύσῃ ἡ ἀμαξά, ἂν οἱ ἐμπρόσθιοι κᾶνουν ν περιστροφὰς περισσοτέρας τῶν ὀπισθίων ;

213. Δαπανᾷ τις τὸ νιοστὸν τοῦ εἰσοδήματός του διὰ τροφήν, τὸ $\frac{1}{\alpha}$ αὐτοῦ διὰ κατοικίαν, τὸ $\frac{1}{\beta}$ δι' ἐνοίκιον, τὸ $\frac{1}{\gamma}$ δι' ἄλλα ἐξοδα καὶ τοῦ περισσεύουν μ δραχμαί. Ποῖον εἶναι τὸ εἰσόδημά του ; (μερικὴ περίπτωσις $\nu = 3$, $\alpha = 4$, $\beta = 6$, $\gamma = 8$, $\mu = 30\,000$).

214. Ταξιδιώτης θέλει νὰ διανύσῃ α χιλιόμετρα εἰς η ἡμέρας. Μετὰ ταξείδιον β ἡμερῶν λαμβάνει ἐντολὴν νὰ ἐπιστρέψῃ γ ἡμέρας ἐνωρίτερον. Πόσον διάστημα ὀφείλει νὰ διανύσῃ καθ' ἡμέραν ; (μερικὴ περίπτωσις $\alpha = 300$, $\eta = 18$, $\beta = 7$ καὶ $\gamma = 3$).

215. Ποσὸν τι α διανεμήθῃ μεταξὺ τῶν Α, Β, Γ, εἰς τρόπον, ὥστε τὸ μέρος τοῦ Α πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β ἔχῃ λόγον ἴσον μὲ $\mu : \nu$, τὸ δὲ τοῦ Β πρὸς τὸ τοῦ Γ ἴσον μὲ $\rho : \lambda$. Τίνα τὰ τρία μέρη ;

216. Δύο κεφάλαια ἐτοκίσθησαν τὸ μὲν πρὸς $\epsilon\%$, τὸ δὲ πρὸς $\epsilon'\%$ καὶ δίδουν ἐτήσιον τόκον τ . Τίνα τὰ κεφάλαια ἂν τὸ ἄθροισμά των εἶναι K ;

217. Έργατης τελειώνει ἐν ἔργον εἰς 2 ἡμέρας, ἄλλος εἰς ν ἡμέρας καὶ τρίτος εἰς $(μ + \frac{ν}{2})$ ἡμ. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον ἐργαζόμενοι καὶ οἱ τρεῖς μαζί ;

218. Κεφάλαιόν τι προεξοφλούμενον διὰ ν ἡμέρας μὲ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν πρὸς 2% ὑφίσταται ἐκπτώσιν α δραχμῶν πρισσότερον ἢ ἂν προεξωφελεῖτο μὲ ἔσωτερικὴν ὑφαίρεσιν. Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον ;

Ὁ μ ἄ ς δ ε υ τ ἔ ρ α. 219. Χωρική ἐπώλησε τὸ ἥμισυ τῶν αὐγῶν, τὸ ὅποιον εἶχε καὶ ἥμισυ αὐγόν, χωρὶς νὰ θραύσῃ κανέν. Ἐπώλησεν πάλιν τὸ ἥμισυ τῶν ὑπολοίπων καὶ ἥμισυ αὐγόν, χωρὶς νὰ θραύσῃ κανέν. Τρίτην καὶ τετάρτην φορὰν ἐπώλησεν ὁμοίως. Πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς, ἂν εἰς τὸ τέλος τῆς ἔμεινεν 1 αὐγόν ;

220. Χωρική ἐσκόττει νὰ πωλήσῃ ὅσα αὐγὰ εἶχε πρὸς 1,50 δρχ. ἕκαστον. Ἐπειδὴ ἔσπασαν 3, ἐπώλησε τὰ ὑπόλοιπα πρὸς 1,60 δρχ. ἕκαστον καὶ δὲν ἐξημῶθη. Πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς ;

221. Βρύσις πληροὶ δεξαμενὴν εἰς τρεῖς ὥρας· ἄλλη τὴν πληροὶ εἰς 4 ὥρας καὶ τρίτη εἰς 6 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας τὴν πληροῦν, ἂν ρέουν καὶ αἱ τρεῖς συγχρόνως ;

Ὁ μ ἄ ς τ ρ ῖ τ η (Κινήσεως). 222. Ἐκ τίνος τόπου ἀνεχώρησε πεζὸς διατρέχων 60 χλμ. καθ' ἡμέραν. Μετὰ 4 ἡμέρας ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλλος μὲ τὴν ἐντολὴν νὰ φθάσῃ τὸν πρῶτον εἰς 8 ἡμέρας. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει νὰ διανύσῃ αὐτὸς καθ' ἡμέραν ;

223. Ἐκ δύο τόπων ἀπεχόντων 525 χιλ. ἀναχωροῦν δύο ταχυδρόμοι διευθυνόμενοι πρὸς συνάντησίν των. Ἐὰν ὁ μὲν εἰς διανύσῃ 50 χλμ., ὁ δὲ ἄλλος 55 χιλ. καθ' ἡμέραν, πότε θὰ συναντηθοῦν ;

224. Ἀπὸ σημείου Α κινεῖται εὐθυγράμμως σῶμά τι διανῶν 32 μ. εἰς 4δ καὶ διευθύνεται πρὸς Β. Μετὰ 3δ ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α ἄλλο σῶμα πρὸς τὴν φορὰν ΑΒ κινούμενον καὶ διανῶν 60 μέτρα εἰς 5δ. Πότε καὶ ποῦ θὰ συναντήσῃ τὸ πρῶτον σῶμα ;

225. Ἀπὸ τόπον Α ἀναχωρεῖ ἀμαξοστοιχία καὶ διευθύνεται πρὸς τὸν Β διανύουσα 30 χιλ. καθ' ὥραν. Μίαν ὥραν βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α διευθυνομένη πρὸς τὸν Β ἀμαξοστοιχία διανύουσα 50 χλμ. καθ' ὥραν. Μετὰ πόσας ὥρας καὶ εἰς ποῖαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν Α θὰ φθάσῃ ἡ δευτέρα τὴν πρώτην ;

226. Ποδηλάτης ἀναχωρεῖ ἀπὸ τίνος τόπου διανύων 12 χλμ. τὴν ὥραν. Τρεῖς ὥρας βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλλος διανύων 16 χλμ. τὴν ὥραν. α') Πότε θὰ προηγήται ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου 12 χλμ ; β') Πότε θὰ προηγήται ὁ δεύτερος τοῦ πρῶτου 50 χιλιόμετρα ;

227. Τὴν 10ην πρωϊνὴν ὥραν ἀναχωρεῖ ποδηλάτης ἀπὸ τόπου Α διανύων 12 χλμ. καθ' ὥραν. Ποῖαν ὥραν πρέπει ν' ἀναχωρήσῃ δεύτερος ἐκ τοῦ Α, ὥστε διανύων 16 χλμ. καθ' ὥραν νὰ φθάσῃ τὸν πρῶτον εἰς τρεῖς ὥρας ;

228. Ἀπὸ σημείου περιφερείας κύκλου ἀναχωροῦν δύο κινητὰ καὶ διανύουν ἀντιστοίχως α^ο καὶ β^ο (α'β') εἰς 1δ. Πότε θὰ συναντηθοῦν ἂν διευθύνωνται α') ἀντιθέτως β') πρὸς τὴν αὐτὴν φορὰν ;

229. Ἀπὸ σημείου περιφερείας ἀναχωροῦν δύο κινητὰ διανύοντα ταύτην εἰς

χρόνους τ_1 και τ_2 (τ_1) τ_2). Πότε θα συναντηθούν δια 1ην, 2αν,...ην φοράν, ἂν κινούνται πρὸς τὴν αὐτὴν ἢ τὴν ἀντίθετον φοράν ;

230. Μετὰ πόσῃν ὥραν ἀπὸ τῆς μεσημβρίας συμπίπτουν οἱ δείκται τῶν ὤρων καὶ τῶν πρώτων λεπτῶν ὥρολογίου ;

231. Πότε μετὰ μεσημβρίαν οἱ αὐτοὶ δείκται (τοῦ προηγουμένου προβλήματος) σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν δια 1ην, 2αν, 3ην, τελευταίαν φοράν ;

232. Πότε μετὰ τὴν μεσημβρίαν οἱ δείκται τοῦ προηγουμένου προβλήματος σχηματίζουν γωνίαν α° δια 1ην, 2αν, 3ην,... τελευταίαν φοράν ;

233. Πότε μετὰ μεσημβρίαν ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἄλλων δια 1ην φοράν ;

234. Κύων δίδωκει ἀλώπεκα, ἡ ὁποία ἀπέχει τοῦ κυνὸς 60 πηδήματα αὐτῆς. Ὅταν αὕτη κάμῃ 9 πηδήματα, ὁ κύων κάμνει 6. Ἀλλὰ τρία πηδήματα αὐτοῦ ἰσοδυναμοῦν μὲ 7 ἐκείνης. Μετὰ πόσα πηδήματα αὐτοῦ θὰ τὴν φθάσῃ ὁ κύων ;

Β'. ΠΕΡΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

§ 116. α') Ταξιδεύων τις λαμβάνει μαζί του 350000 δραχ. καὶ ἐξοδεύει καθ' ἡμέραν 8000 δραχ.

Ἐὰν ταξιδεύσῃ ἐπὶ δύο ἡμέρας, θὰ ἐξοδεύσῃ $8.000 \cdot 2$ δραχ., ἔὰν ἐπὶ τρεῖς, τέσσαρας ἡμέρας, θὰ ἐξοδεύσῃ $8.000 \cdot 3$ δραχ., $8.000 \cdot 4$ δραχ. καὶ ἐπὶ x ἡμέρας, θὰ ἐξοδεύσῃ $8.000 \cdot x$ δραχ., θὰ τοῦ μείνουν δὲ καὶ $350.000 - 8.000x$ δραχ.

Καθὼς βλέπομεν, θὰ εὕρωμεν πόσαι δραχμαὶ θὰ τοῦ μείνουν, ἂν γνωρίζωμεν πόσας ἡμέρας διήρκεσε τὸ ταξίδιον. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ψ τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν, αἱ ὁποῖαι θὰ τοῦ μείνουν μετὰ x ἡμέρας, θὰ ἔχωμεν ὅτι $\psi = 350.000 - 8.000x$ δραχ. καὶ ἔὰν εἶναι τὸ $x=5$, τὸ $\psi = 350.000 - 8.000 \cdot 5 = 350.000 - 40.000 = 310.000$ δραχ.

β') Εἰς ποδηλάτης διήνυσεν 21 χιλ. διὰ νὰ φθάσῃ εἰς ἓνα ὠρισμένον τόπον. Ἀπὸ τοῦτον ἐξηκολούθησε τὸν δρόμον του καὶ διήνυσεν 17 χιλμ. καθ' ὥραν.

Μετὰ x ὥρας διήνυσεν $17x$ χιλμ. ἀπὸ τὸν τόπον, ἀπ' ἀρχῆς δὲ ἐν ὅλῳ $21 + 17x$ χιλμ. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ψ τὸν διανυθέντα δρόμον, θὰ ἔχωμεν ὅτι $\psi = 21 + 17x$. (1)

Ἐὰν γνωρίζωμεν πόσας ὥρας ἐξηκολούθησε τὸν δρόμον του ἀπὸ

τόν ώρισμένον τόπον, δηλαδή, αν γνωρίζωμεν τήν τιμήν τοῦ x , δυνάμεθα νά εὑρωμεν τήν τιμήν τοῦ ψ ἐκ τῆς ἰσότητος (1).

Π.χ. αν τὸ $x = 2$, θά ἔχωμεν $\psi = 21 + 17 \cdot 2 = 21 + 34 = 55$. Αν εἶναι $x = 3$, τότε $\psi = 21 + 17 \cdot 3 = 21 + 51 = 72$.

Αἱ ποσότητες x καὶ ψ , αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν διαφόρους τιμὰς εἰς καθέν τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων, λέγονται **μεταβληταί**. Ἐνῶ αἱ ποσότητες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μίαν καὶ τήν αὐτὴν τιμήν εἰς ἕν πρόβλημα λέγονται **σταθεραί**. Π.χ. τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων, τὸ ὁποῖον ἔλαβεν ὁ ἀνωτέρω ταξειδιώτης μαζί του καὶ ἡ ἀπόστασις, τήν ὁποίαν διήνυσεν ὁ ποδηλάτης κατ' ἀρχάς, διὰ νά φθάσῃ εἰς τὸν ὁρισμένον τόπον, εἶναι σταθεραὶ ποσότητες.

Εἰς καθέν τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων ἡ μεταβλητὴ ποσότης ψ συνδέεται μὲ τήν x οὕτως, ὥστε, ὅταν δώσωμεν εἰς τήν x τιμήν τινα ὠρισμένην, εὐρίσκομεν καὶ τήν τιμήν τῆς ψ . Ἡ μεταβλητὴ x , εἰς τήν ὁποίαν δίδομεν αὐθαιρέτως τήν τιμήν, τήν ὁποίαν θέλομεν, καλεῖται **ανεξάρτητος μεταβλητὴ**, ἡ δὲ ψ , τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τιμῆς τῆς x , καλεῖται **συνάρτησις τῆς x** . Ἐν γένει:

Ἐὰν δύο μεταβληταὶ x καὶ ψ , συνδέωνται μεταξὺ των κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε εἰς καθεμίαν δοθεῖσαν τιμήν τῆς x νά εὐρίσκωμεν ἀντιστοιχοῦς τιμὰς τῆς ψ , τότε ἡ ψ θά λέγεται **συνάρτησις τῆς x , ἡ δὲ x **ανεξάρτητος μεταβλητὴ**.**

Κατὰ ταῦτα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου εἶναι συνάρτησις τῆς ἀκτίνος αὐτοῦ. Διότι αν μὲ x παραστήσωμεν τήν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου καὶ ψ τὸ ἐμβαδὸν του, θά ἔχωμεν ὅτι εἶναι $\psi = \pi x^2$ καὶ τὸ μὲν π εἶναι ἀριθμὸς ὠρισμένος (ἴσος μὲ 3,141 μὲ προσέγγισιν), τὸ δὲ ψ εὐρίσκεται, ὅταν δοθῇ εἰς τὸ x ὠρισμένη τις τιμή. Ὅμοιως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν ὠρισμένην a , εἶναι συνάρτησις τοῦ ὕψους αὐτοῦ. Διότι ἔχομεν ὅτι $\psi = \frac{1}{2} ax$, αν τὸ x παρίστανῃ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου καὶ τὸ ψ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

235. Εὑρετε παραδείγματα ἐξαρτήσεως δύο ποσῶν, τὰ ὁποῖα παρουσιάζονται εἰς τὸν κοινὸν βίον, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν νά εἶναι συνάρτησις τοῦ ἄλλου (χρόνος ἐργασίας καὶ ἀμοιβή, ἀξία ἐμπορεύματος καὶ βάρος κ.τ.λ.).

236. Εὑρετε παραδείγματα συναρτήσεων ἐκ τῆς Φυσικῆς (τὸ διαννόμενον

διάστημα και ή ταχύτης εις τὸ κενόν, τὸ διάστημα και ή ταχύτης κ.τ.λ.). Ὅμοίως ἐκ τῆς Γεωμετρίας.

§ 117. Πίναξ τιμῶν συναρτήσεως. Ἐστω μία συνάρτησις ψ , ή οποία εἶναι ἴση με $13+5x$. Ἦτοι ἔστω ὅτι ἔχομεν $\psi=13+5x$. (1)

Ἐάν εις τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x δώσωμεν κατὰ σειρὰν τὰς τιμὰς $0, 1, 2, 3, \dots$ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς ψ , ἂν θέσωμεν εις τὴν (1) ἀντὶ τοῦ x τὰς τιμὰς του. Οὕτως ἔχομεν ὅτι :

$$\text{ὅταν εἶναι } x = 0, \quad \text{τὸ } \psi = 13 + 5 \cdot 0 = 13,$$

$$\text{ὅταν εἶναι } x = 1, \quad \text{τὸ } \psi = 13 + 5 \cdot 1 = 18,$$

$$\text{ὅταν εἶναι } x = -2, \quad \text{τὸ } \psi = 13 + 5 \cdot (-2) = 3.$$

Ὅμοίως διὰ τὴν συνάρτησιν $\psi = 144 - 6x$ ἔχομεν ὅτι :

$$\text{ὅταν εἶναι } x = 0, \quad \psi = 144 - 6 \cdot 0 = 144,$$

$$\text{ὅταν εἶναι } x = -1, \quad \psi = 144 + 6 \cdot 1 = 150.$$

Ἐν γένει, ἐὰν δοθῇ μία συνάρτησις π.χ. ή ψ μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἔστω τῆς x , καὶ διὰ δοθείσας τιμὰς τοῦ x γράψωμεν, τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς ψ , καθὼς εις τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα, λέγομεν ὅτι σχηματίζομεν πίνακα τῶν τιμῶν τούτων τῆς συναρτήσεως αὐτῆς.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

237. Σχηματίσατε διὰ τὰς τιμὰς $x = 1, 2, 3, 4, 5, -1, x = -2, -3, -\frac{1}{2}$

τὸν πίνακα τῶν τιμῶν τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

$$\alpha) \psi = 3x + 5, \quad \beta) \psi = 8x - 25, \quad \gamma) \psi = x, \quad \delta) \psi = -x.$$

238. Ὅμοίως τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

$$\alpha') \psi = \frac{3}{4}x - 62, \quad \beta') \psi = \frac{x^2}{2} - 3x - 7.$$

239. Ὅμοίως τῶν $\alpha')$ $\psi = \frac{4}{19}x^2 + \frac{3}{8}x + 9$, $\beta')$ $\psi = 600 - 35x^2 + \frac{13}{15}x$.

2. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

§ 118. Καθὼς τοὺς σχετικούς ἀριθμοὺς παριστάνομεν με σημεῖα τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν ή τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων, οὕτω δυνάμεθα νὰ παριστάνωμεν με σημεῖα τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου

μεταβλητῆς καὶ τῆς συναρτήσεως ταύτης. Ἐστω ὅτι ἔχομεν τὴν συνάρτησιν $\psi = 2x + 1$. (1)

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν x τὴν τιμὴν 1, ἔχομεν $\psi = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.

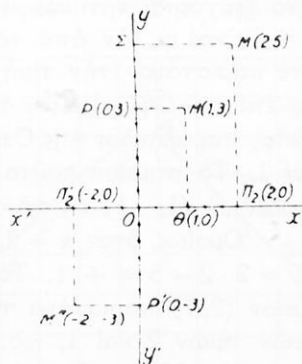
Λαμβάνομεν τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων $x'x$ καὶ ἐπ' αὐτοῦ εὐρίσκομεν τὸ σημεῖον Θ (ὅπου $O\Theta = 1$), τὸ ὁποῖον παριστάνει τὴν τιμὴν $x = 1$. Τὴν τιμὴν τῆς ψ θὰ παριστάνωμεν κατ' ἀνάλογον τρόπον μὲ ἓν σημεῖον μιᾶς ἄλλης εὐθείας $\psi'\psi$, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν συνήθως κάθετον ἐπὶ τὴν $x'x$ εἰς τὸ σημεῖον O . Ταύτης τὸ μὲν $O\psi$ εἶναι τὸ τμήμα τῶν θετικῶν τιμῶν τῆς ψ , τὸ δὲ $O\psi'$, τὸ τῶν ἀρνητικῶν (σχ. 6).

Οὕτως ἡ τιμὴ τῆς $\psi = 3$ θὰ παριστάνηται ὑπὸ τοῦ σημείου P τῆς $O\psi$, ἐνῶ εἶναι $(OP) = 3$. Ἐὰν ἐκ τοῦ Θ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν $O\psi$ καὶ ἐκ τοῦ P πρὸς τὴν Ox , αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον, ἔστω τὸ M . Θὰ λέγωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον M παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν τοῦ $x = 1$ καὶ $\psi = 3$ τῆς συναρτήσεως $\psi = 2x + 1$. Καθ' ὅμοιον τρόπον εὐρίσκομεν τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $x = 2$ καὶ $\psi = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, ἡ ὁποία εὐρίσκεται ἐκ τῆς (1), ἐὰν θέσωμεν ὅπου x τὸ 2. Τοῦτο παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου M' , τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ τομὴ τῆς εὐθείας $\Pi_2 M'$, παραλλήλου πρὸς τὴν $O\psi$ ἐκ τοῦ σημείου Π_2 τῆς $x'x$, παριστάνοντος τὸν ἀριθμὸν $x = 2$ καὶ τῆς $\Sigma M'$, παραλλήλου πρὸς τὴν Ox ἐκ τοῦ σημείου Σ , τοῦ παριστάνοντος τὴν τιμὴν $\psi = 5$. Διὰ τὴν τιμὴν $x = -2$ ἔχομεν ἐκ τῆς (1)

$$\psi = 2 \cdot (-2) + 1 = -4 + 1 = -3.$$

Εὐρίσκομεν δὲ τὸ σημεῖον Π'_2 ἐπὶ τῆς $x'x$, τὸ P' ἐπὶ τῆς $\psi'\psi$ καὶ τὸ M'' τομὴν τῆς ἐκ τοῦ Π'_2 , παραλλήλου πρὸς τὴν $\psi'\psi$ καὶ τῆς ἐκ τοῦ P' παραλλήλου πρὸς τὴν $x'x$, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $x = -2$, $\psi = -3$ τῆς x καὶ τῆς συναρτήσεως (1).

Ἐν γένει καθὲν ζεῦγος τῶν ἀντιστοιχοῦσων τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καὶ τῆς συναρτήσεως θὰ παριστάνηται μὲ ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι τομὴ δύο εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς



Σχ. 6.

τὰς εὐθείας $x'x$ καὶ $\psi'\psi$. Ἐκ τούτων ἡ μὲν παράλληλος πρὸς τὴν $\psi'\psi$ ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τοῦ x ἐπὶ τῆς εὐθείας $x'x$, ἡ δὲ πρὸς τὴν $x'x$ ἐκ τοῦ σημείου τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τῆς ψ ἐπὶ τῆς εὐθείας $\psi'\psi$.

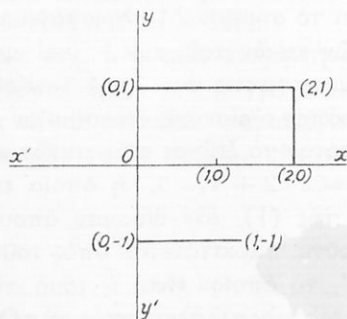
Δυνάμεθα ταχύτερον νὰ εὗρωμεν τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον ὡς ἑξῆς :

Ἐκ τοῦ σημείου τῆς $x'x$ (ἢ τῆς $\psi'\psi$) τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τῆς x (ἢ τῆς ψ) φέρομεν τμήμα εὐθείας παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν $\psi'\psi$ (ἢ τὴν $x'x$) καὶ ἴσον μὲ τόσας μονάδας μήκους, ὅση εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ψ (ἢ τῆς x) πρὸς τὰ ἄνω μὲν (ἢ δεξιὰ), ἂν ἡ τιμὴ τῆς ψ (ἢ τῆς x) εἴναι θετική, πρὸς τὰ κάτω δὲ (ἢ ἀριστερά), ἂν εἴναι ἀρνητική.

Ἐὰν ἔχωμεν τὴν συνάρτησιν $\psi = 2x - 3$, ὅταν $x = 1$, θὰ εἶναι $\psi = 2 \cdot 1 - 3 = -1$. Εὐρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν 1, καὶ -1 τῆς x καὶ ψ , ἐὰν ἀπὸ τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὴν τιμὴν -1 τῆς ψ ἐπὶ τοῦ $O\psi'$ φέρωμεν τμήμα εὐθείας παράλληλον τῆς Ox καὶ ἴσον μὲ 1. Τὸ σημεῖον τοῦτο σημειώνομεν μὲ (1, -1) εἰς τὸ σχῆμα 7.

Ὅμοίως, ὅταν $x = 2$, θὰ εἶναι $\psi = 2 \cdot 2 - 3 = +1$. Τὸ δὲ σημεῖον (2, 1) παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν 2 καὶ 1, κ.ο.κ.

Τὴν εὐθεῖαν $x'x$ καλοῦμεν συνήθως **ἄξονα τῶν x** ἢ **τῶν τετμημένων**, τὴν δὲ εὐθεῖαν $\psi'\psi$ **ἄξονα τῶν ψ** ἢ **τῶν τεταγμένων** τοὺς δύο δὲ ἄξονας μὲ ἓν ὄνομα **ἄξονας τῶν συντεταγμένων x καὶ ψ** . Συνήθως λαμβάνομεν τὸν ἄξονα τῶν x ὀριζόντιον, τὸν δὲ τῶν ψ κάθετον ἐπὶ τὸν πρῶτον. Τὴν τιμὴν τῶν x καὶ ψ καλοῦμεν ἀντιστοίχως **τετμημένην** καὶ **τεταγμένην** τοῦ σημείου τοῦ παριστάνοντος τὸ ζεῦγος τῶν δύο τούτων τιμῶν καὶ τὰς δύο δὲ μὲ ἓν ὄνομα καλοῦμεν **συντεταγμένας τοῦ σημείου**.



Σχ. 7.

Ἀσκήσεις

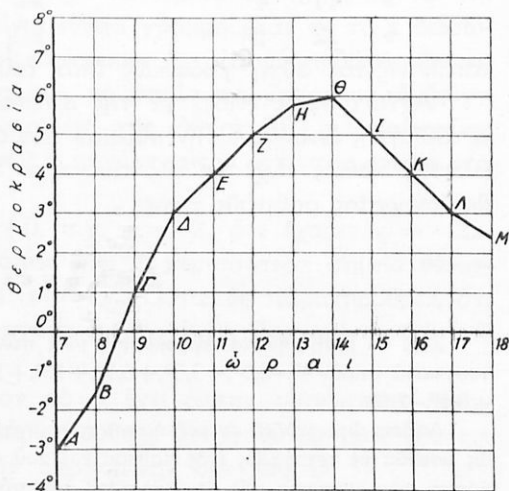
240. Παραστήσατε με σημεία τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν τῆς x καὶ ψ τῶν κάτωθι συναρτήσεων διὰ τὰς σημειούμενας τιμὰς τοῦ x :

α') $\psi = x + 2$, β') $\psi = \frac{1}{2}x + 1$ γ') $\psi = \frac{3}{4}x - 2$, ὅταν $x = 0, 1, 2, -1, -2$

241. $\psi = \frac{3}{4}x - \frac{2}{5}x^2$, ὅταν $x = 0, 1, 3, 4$.

242. α') $\psi = \frac{1}{2}x^2 - x^3$, β') $\psi = -\frac{3}{4}x^2 + 5$, ὅταν $x = 0, -1, -2, 2, 3$.

§ 119. Παρατήρησης. Τὸν ἀνωτέρω τρόπον τῆς παραστάσεως ζεύγους τιμῶν μεταχειρίζονται συχνὰ διὰ νὰ συγκρίνουν μεταξύ των πλῆθος παρατηρήσεων. Ἐστω π.χ. ὅτι γνωρίζομεν τὴν θερμοκρασίαν, τὴν ὁποίαν δεικνύει τὸ θερμότερον τὴν 8ην πρωϊνὴν ὥραν καθ' ἡμέραν ἐπὶ ἓνα μῆνα. Λαμβάνομεν ἓν ὠρισμένον τμήμα, ὡς μονάδα μήκους, ἢ ὁποῖα θὰ παριστάνη, τὴν μίαν ἡμέραν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x , ἔστω ἴσον με 0,01 μ. Ἐπίσης ἓνα ἄλλο ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ψ , ἔστω τὸ 0,01 μ, τὸ ὁποῖον θὰ παριστάνη τὸν ἓνα βαθμὸν (ἢ περισσοτέρους) τοῦ θερμομέτρου. Ἀφοῦ εὗρωμεν τὰ σημεία, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν (τῶν



Σχ. 8

ἡμερῶν τοῦ μηνὸς καὶ τῶν ἀντιστοίχων βαθμῶν τοῦ θερμομέτρου), συνδέομεν τὰ διαδοχικὰ σημεία ἀπὸ τοῦ πρώτου καὶ ἐξῆς με τμήματα εὐθειῶν. Ἡ γραμμὴ, τὴν ὁποίαν οὕτως εὕρισκομεν, δίδει μίαν εἰκόνα τῶν μεταβολῶν τῆς θερμοκρασίας κατὰ τὸν θεωρούμενον μῆνα. Ἡ γραμμὴ αὕτη καλεῖται συνήθως **γραμμὴ τῆς θερμοκρασίας** τοῦ ἐν λόγῳ μηνός. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀπεικονίζομεν τὴν μεταβολὴν

τῆς θερμοκρασίας τοῦ σώματος ἑνὸς ἀσθενοῦς παρατηροῦντες αὐτὴν π.χ. δις τῆς ἡμέρας (τὴν πρωΐαν καὶ ἑσπέραν συνήθως) καὶ λαμβάνοντες τὸν μέσον ὅρον τῶν, διὰ τὸ ἔχωμεν τὴν μέσθιν θερμοκρασίαν τῆς ἡμέρας. Τὴν γραμμὴν, τὴν ὁποίαν οὕτω θὰ εὕρωμεν, καλοῦμεν συνήθως **γραμμὴν τοῦ πυρετοῦ τοῦ ἀσθενοῦς**.

Ταύτας κατασκευάζομεν συνήθως ἐπὶ τετραγωνισμένου χάρτου, ἐνίοτε δὲ παραλείπονται οἱ ἄξονες, ὥς εἰς τὸ ἀνωτέρω σχῆμα. Π.χ. ἂν ἡ θερμοκρασία ἑνὸς τόπου κατὰ τινὰ ἡμέραν δίδεται ὡς ἑξῆς :

ὥρα	7	-3^0	ὥρα	13	$5,7^0$
»	8	$-1,5^0$	»	14	6^0
»	9	1^0	»	15	5^0
»	10	3^0	»	16	4^0
»	11	4^0	»	17	3^0
»	12	5^0	»	18	$2,4^0$

ἀπεικονίζεται αὕτη γραφικῶς ὑπὸ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος 8.

Ἀντιστρόφως ἐνίοτε ἐκ τῆς ἀπεικονίσεως τῆς μεταβολῆς μιᾶς μεταβλητῆς ἐννοοῦμεν τὴν πορείαν τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς καθὼς π.χ. ἐκ τῆς ἀνωτέρω εἰκόνης τῆς μεταβολῆς τῆς θερμοκρασίας ἀσθενοῦς τινος.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

243. Ἡ μέση μηνιαία θερμοκρασία μιᾶς πόλεως εἶναι διὰ τοὺς μῆνας ἑνὸς ἔτους κατὰ σειρὰν $4^0, -2,3^0, +3,3^0, +6,5^0, +13^0, +16,6^0, +17,8^0, +19,5^0, +13,9^0, +9^0, +3,1^0, -2,6^0$.

Λάβετε ὡς μονάδα μὲν μετρήσεως τοῦ μηνὸς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x τὸ 0,01μ. ὡς μονάδα δὲ μετρήσεως ἑνὸς βαθμοῦ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y ἐπίσης τὸ 0,01 μ. Εὕρετε τὴν γραμμὴν τῆς θερμοκρασίας τῆς πόλεως.

244. Ἡ αὐξησης τοῦ πληθυσμοῦ μιᾶς πόλεως κατὰ τὸ 1890 ἦτο 54 χιλιάδες καὶ κατὰ τὰ ἐπόμενα ἔτη κατὰ σειρὰν μέχρι τοῦ 1903 ἦτο 56, 46, 38, 32, 35, 37, 48, 52, 87, 79, 69, 90, 97 χιλιάδες. Λάβετε ὡς μονάδα μήκους πρὸς παράστασιν τοῦ ἔτους ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῆς χιλιάδος ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ y τὸ 0,05 μ. Ἀπεικονίσате τὴν πορείαν τῆς αὐξήσεως τοῦ πληθυσμοῦ τῆς πόλεως.

3. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $\psi = ax + b$

§ 120. Ἡ συνάρτησις $\psi = ax + b$, ὅπου τὸ a εἶναι σταθε-

ρά τις ποσότης $\neq 0$ και $\beta = 0$, παριστάνει εὐθείαν γραμμὴν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων O .

Διότι ἔστω πρῶτον τὸ $\alpha > 0$, π.χ. $\alpha = 1$, ὅτε ἡ συνάρτησις εἶναι $\psi = x$. Ἐὰν εἰς τὴν x δώσωμεν κατὰ σειρὰν τὰς τιμὰς $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ (1), τὸ ψ λαμβάνει τὰς τιμὰς $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ (2)

Ἐὰν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x (σχ. 9) τὰ σημεῖα τὰ παριστάνοντα τὰς τιμὰς (1) τῆς x καὶ τὰ σημεῖα ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ψ τὰ παριστάνοντα τὰς τιμὰς (2) τῆς ψ , παρατηροῦμεν ὅτι, τὰ σημεῖα τὰ παριστάνοντα τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$,... κεῖνται ἐπὶ μιᾷς εὐθείας γραμμῆς, ἔστω τῆς OG .

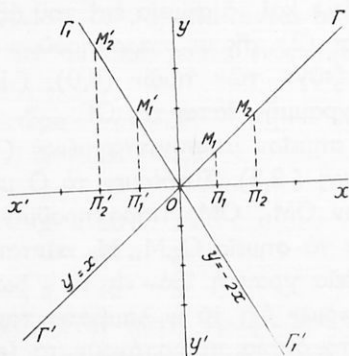
Διότι ἔστω ὅτι M_1 εἶναι τὸ σημεῖον μὲ συντεταγμένας $(1,1)$ καὶ M_2 τὸ σημεῖον μὲ συντεταγμένας $(2,2)$. Συνδέομεν τὸ O μὲ τὰ M_1, M_2 δι' εὐθυγράμμων τμημάτων OM_1, OM_2 . Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι $\gamma\omega\nu xOM_1 = \gamma\omega\nu xOM_2$, ἄρα τὰ σημεῖα O, M_1, M_2 κεῖνται ἐπὶ εὐθείας, δηλαδὴ ἡ OM_1M_2 εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ. Ἐὰν εἰς τὸ x δώσωμεν τὰς τιμὰς $-1, -2, -3, \dots$, εὐρίσκομεν ὅτι τὸ ψ λαμβάνει τὰς τιμὰς $-1, -2, -3, \dots$, τὰ δὲ σημεῖα, τὰ ὅποια παριστάνουν τὰ ζεύγη $(-1, -1), (-2, -2), \dots$, κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας OG' , ἡ ὅποια εἶναι προέκτασις τῆς OG . Ἐπομένως ἡ συνάρτησις $\psi = x$, παριστάνει τὴν εὐθεῖαν GG' (σχῆμα 9).

Ἐστὼ, ὅτι εἶναι τὸ $\alpha < 0$, π.χ. $\alpha = -2$, ὅτε ἔχομεν $\psi = -2x$. Εὐρίσκομεν καθ' ὁμοίον τρόπον δύο ἢ περισσότερα σημεῖα θέτοντες π.χ. $x = 0$, ἔπειτα $x = 1, x = -1, \dots$ Οὕτω δὲ παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις $\psi = -2x$ παριστάνει εὐθεῖαν $G_1G'_1$ διερχομένην διὰ τοῦ σημείου O .

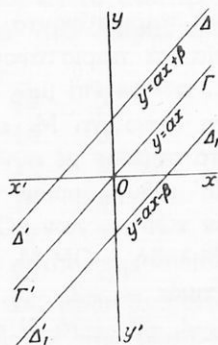
Ὅμοίως ἐργαζόμεθα, ἐὰν τὸ α ἔχη ἄλλην οἰανδήποτε τιμὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $\psi = \alpha x$ παριστάνει εὐθεῖαν γραμμὴν διερχομένην διὰ τοῦ O .

§ 121. Τὴν συνάρτησιν $\psi = \alpha x + \beta$ (ἂν εἶναι $\alpha, \beta \neq 0$) δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν γραφικῶς, ἐὰν εἰς τὴν τεταγμένην ἐκάστου σημείου τῆς εὐθείας, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ $\psi = \alpha x$, προσθῶμεν τὴν ποσότητα β . Ἀλλὰ τοῦτο σημαίνει νὰ μεταφέρωμεν τὴν εὐθεῖαν $\psi = \alpha x$ παραλλήλως πρὸς ἑαυτὴν ἄνω ἢ κάτω, καθ' ὅσον τὸ β εἶναι ἀριθμὸς θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς. Ἐπομένως ἡ συνάρτησις $\psi = \alpha x + \beta$ παριστάνει εὐθεῖαν γραμμὴν (σχ. 10).

Ἡ ἐξίσωσις $\psi = \beta$ παριστάνει τὰ σημεῖα τὰ ἔχοντα τεταγμένην β . Προφανῶς ταῦτα κείνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x καὶ ἀπέχουσιν ἀπόστασιν β ἀπ' αὐτοῦ. Ἄρα, ἡ ἐξίσωσις $\psi = \beta$ παριστάνει εὐθεῖαν γραμμὴν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x .



Σχ. 9



Σχ. 10

Ὅμοιως εὐρίσκομεν ὅτι ἡ $x = \alpha$ παριστάνει εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν ψ καὶ ἀπέχουσιν ἀπόστασιν α ἀπὸ αὐτόν.

Ἡ $\psi = 0$ παριστάνει τὸν ἄξονα τῶν x , ἡ δὲ $x = 0$ τὸν ἄξονα τῶν ψ . Ἡ ἐξίσωσις $\psi = x$ παριστάνει τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διχοτομεῖ τὴν γωνίαν $xO\psi$, ἡ δὲ $\psi = -x$ τὴν διχοτομοῦσαν τὴν γωνίαν $x'O\psi$ (σχ. 9).

Ἀσκήσεις

Εὑρετε τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ κάτωθι συναρτήσεις :

245. α) $\psi = 3x$

β') $\psi = x + 3$,

γ') $\psi = 0,5x$.

246. α') $\psi = x - \frac{2}{3}$,

β') $\psi = \frac{x}{2} - x$,

γ') $\psi = -\frac{5x}{6} - \frac{1}{8}$

247. α') $\psi = -\frac{3}{2}$,

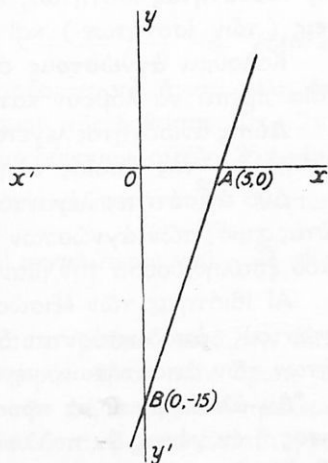
β') $\psi = 5 - 2x$,

γ') $\psi - 3 = \frac{x-1}{2}$.

4. ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ 122. Έστω μία εξίσωσις τοῦ α' βαθμοῦ π.χ. ἡ $3x-15=0$ (1)
Ἐὰν τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς παραστήσωμεν μὲ ψ , ἔχομεν τὴν συνάρ-
τησιν $\psi = 3x-15$. Θέτομεν π.χ. $x=0$,
ὅτε εὐρίσκομεν $\psi = -15$. Θέτομεν $x=1$,
ὅτε εὐρίσκομεν $\psi = 3 \cdot 1 - 15 = -12$.

Οὕτως ἔχομεν τὰ σημεῖα $(0, -15)$
καὶ $(1, -12)$ τῆς εὐθείας. Ἄρα δυ-
νάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν αὐτὴν
(σχ. 11). Εὐρίσκομεν τὸ σημεῖον, εἰς
τὸ ὁποῖον ἡ εὐθεῖα αὐτὴ τέμνει τὸν
ἄξονα τῶν x , ἥτοι τὴν τετμημένην
τοῦ σημείου αὐτοῦ. Οὕτως εὐρίσκο-
μεν, ὅτι τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον ἔχει
τετμημένην 5. Αὕτῃ εἶναι ἡ ρίζα
τῆς δοθείσης εξίσωσεως, διότι εἰς
αὐτὴν ἀντιστοιχεῖ τεταγμένη $\psi = 0$.
Ὡστε ρίζα εἶναι ὁ 5. Τοῦτο ἐπα-
ληθεύομεν καὶ μὲ τὴν λύσιν τῆς δοθεί-
σης εξίσωσεως. Ἐκ τούτου καὶ ἄλ-
λων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι :



Σχ. 11

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὴν ρίζαν ἐξι-
σώσεως α' βαθμοῦ $\alpha x + \beta = 0$, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν
εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ συνάρτησις $\psi = \alpha x + \beta$ καὶ νὰ
εὕρωμεν τὴν τομὴν ταύτης καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x .

Γ'. ΠΕΡΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ἘΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

§ 123. Έστω π.χ. ἡ ἀνισότης $3x > 15$. Προφανῶς ἀληθεύει αὐ-
τὴ, μόνον, ὅταν τὸ x λάβῃ τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ 5, ἐνῶ ἡ $\alpha^2 + \beta > 2\alpha\beta$
ἀληθεύει δι' οἰασδήποτε τιμὰς τῶν α καὶ β , διοφορετικὰς μεταξὺ
των. Π.χ. ἂν εἶναι $\alpha = 2$ καὶ $\beta = 1$, ἔχομεν :

$$2^2 + 1 > 2 \cdot 2 \cdot 1, \text{ ἢ } 5 > 4.$$

Ὅπως τὰς ἰσότητας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν γράμματα, διακρίνο-
μεν εἰς ταυτότητας καὶ εἰς ἐξισώσεις, οὕτω καὶ τὰς ἀνισότητας,
αἱ ὁποῖαι ἔχουν γράμματα, διακρίνομεν εἰς δύο εἴδη : Ἐκείνας ἐκ

τούτων, αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν δι' οἰασδήποτε τιμὰς τῶν γραμμάτων των καὶ ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν μόνον, ὅταν ὠρισμένα γράμματα τῶν λαμβάνουν καταλλήλους τιμὰς. Τὰς πρώτας καλοῦμεν **ταυτότητες ἀνισοτήτων** ἢ λέγομεν ὅτι αὗται **ἀντιστοιχοῦν εἰς ταυτότητας** ἰσοτήτων, ἐνῶ αἱ ἄλλαι **ἀντιστοιχοῦν εἰς ἐξισώσεις** (τῶν ἰσοτήτων) καὶ ἰσχύουν ὑπὸ συνθήκας.

Καλοῦμεν **ἀγνώστους** ἀνισότητος τὰ γράμματα αὐτῆς, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ λάβουν καταλλήλους τιμὰς διὰ νὰ ἀληθεύῃ αὕτη.

Λύσεις ἀνισότητος λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων αὐτῆς, διὰ τὰς ὁποίας ἀληθεύει αὕτη.

Δύο ἀνισότητες λέγονται **ισοδύναμοι**, ἐὰν ἀληθεύουν διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν, ἤτοι ἂν οἰασδήποτε τιμὴ ἀγνώστου ἐπαληθεύουσα τὴν μίαν ἐκ τῶν δύο ἐπαληθεύῃ καὶ τὴν ἄλλην.

Αἱ ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων ἰσχύουν καὶ δι' ἀνισότητος μὲ ἀγνώστους, ἀποδεικνύονται δὲ εὐκόλως μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀνισοτήτων, μὲ τὴν παρατήρησιν ὅτι :

Ἄν ἀλλάξωμεν τὰ πρόσημα πάντων τῶν ὅρων μιᾶς ἀνισότητος ἢ ἐν γένει, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ ἀριθμὸν ἀρνητικόν, προκύπτει ἀνισότης ἰσοδύναμος μὲν τῆς δοθείσης, ἀλλ' ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ ἀνιστραφῇ ἡ φορὰ αὐτῆς.

Π.χ. ἡ $3x - 5 > 6x$ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $-3x + 5 < -6x$, ἢ ὁποῖα προκύπτει ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν, ἂν τὰ μέλη τῆς πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ -1 . Διὰ τοῦτο ἐπιδιώκομεν κατὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστικῶν ἀνισότητος νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ θετικὴν ποσότητα π.χ. ἐπὶ τὸ κατάλληλον τετράγωνον ποσότητος.

Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα ἀντὶ δοθείσης ἀνισότητος μὲ ἀγνώστους νὰ θεωροῦμεν ἰσοδύναμόν της τῆς μορφῆς $A > 0$, ὅπου A εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους τῆς ἀνισότητος.

Βαθμὸς ἀνισότητος, τῆς ὁποίας τὸ μὲν ἐν μέρος εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους αὐτῆς, τὸ δὲ ἄλλο εἶναι 0 , λέγεται ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους π.χ. ἡ ἀνισότης $3x^2 - 5x + 1 < 0$ εἶναι β' βαθμοῦ ὡς πρὸς x .

Διὰ τὴν λύσιν ἀνισότητος τοῦ α' βαθμοῦ ἐργαζόμεθα κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν λύσιν ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ.

Ἔστω π.χ. πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης $2x + 3 - (x + 1) > 5$. Ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμόν της $2x + 3 - x - 1 > 5$. Ἐκ ταύτης μετὰ

τὴν μεταφορὰν τῶν 3 καὶ -1 εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ τὴν ἀναγωγὴν, ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον τῆς δοθείσης $x > 3$. Ἄρα πάντες οἱ ἀριθμοί, οἱ ὅποιοι εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ 3, ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα.

Ἔστω πρὸς λύσιν καὶ ἡ ἀνισότης $x + \frac{x}{4} > \frac{x}{5} - 4$. Ἀπαλείφωμεν τοὺς παρονομαστὰς πολλαπλασιάζοντες τὰ ἄνισα μέλη ἐπὶ $4 \cdot 5 = 20$ καὶ λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον τῆς δοθείσης $20x + 5x > 4x - 80$. Ἐκ ταύτης εὐρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον αὐτῆς $25x - 4x > -80$ ἢ τὴν $21x > -80$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x > -\frac{80}{21}$. Ἐκ ταύτης συνάγομεν, ὅτι πάντες οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ $-\frac{80}{21}$ εἶναι λύσεις τῆς δοθείσης ἀνισότητος.

Ἐν γένει ἡ ἀνισότης μὲ ἓνα ἄγνωστον α' βαθμοῦ μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν, τὴν μεταφορὰν ὅλων τῶν ὄρων τῆς εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σημειουμένων πράξεων, ἀνάγεται εἰς τὴν μορφήν $\alpha x + \beta > 0$, ὅπου, α, β ὑποτίθενται γνωστοὶ ποσότητες. Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $\alpha x > -\beta$. Ἐάν μὲν εἶναι $\alpha > 0$, εὐρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμόν της $x > -\frac{\beta}{\alpha}$, ἐάν δὲ εἶναι $\alpha < 0$, ἔχομεν τὴν $x < -\frac{\beta}{\alpha}$. Ἄν εἶναι $\alpha = 0$, ἡ δοθεῖσα ἀνισότης $\alpha x + \beta > 0$ γίνεται $\beta > 0$, ἐπαληθευομένη διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x , ἂν εἶναι τὸ $\beta > 0$, δηλαδὴ ἡ δοθεῖσα ἀνισότης εἶναι τότε ταυτοτῆς ἀνισότητος. Ἄν ὅμως εἶναι $\beta < 0$, ἡ ἀνισότης εἶναι ἀδύνατος.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

Ὁ μ ᾱ ς π ρ ὶ τ η. 284. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες

$$\begin{array}{lll} \alpha') -3x > \frac{5}{3}, & \beta') -4x - 9 > 0, & \gamma') 0,5x + 5 > 0, \\ \delta') -9x - 18 < 0, & \epsilon') 9x + 7 > 0, & \sigma\tau') -7x - 48 > 0, \\ \zeta') 0,6x - 5 > 0,25(x - 1), & \eta') -9x + 32 > 0, & \theta') 0,5x - 1 > 0,7x - 1, \\ \iota') (x + 1)^2 < x^2 + 3x - 5. & \kappa\alpha') \frac{x - 3}{x - 4} > 0. \end{array}$$

249. Εὑρετε τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς τοὺς ἐπαληθεύοντας τὰς ἀνισότητας $2x + 3 < 4$ καὶ $x - 5 > -8$.

250. Δύο σημεῖα Α καὶ Β ἀπέχουν ἀπόστασιν $(AB) = 2\gamma$. Τρίτον σημεῖον

ἔχει θέσιν τοιαύτην, ὥστε νὰ εἶναι $(AM) + (BM) = 2\alpha$, ὅπου $\alpha > \gamma$. Πῶς μεταβάλλονται αἱ ἀποστάσεις (AM) καὶ (BM) , ἂν τὸ M κινῆται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ABM ;

251. Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ τῶν σημείων A καὶ B , διευθύνονται δὲ πρὸς συνάντησίν των. Ἄν ἡ ταχύτης των μεταβάλλεται μεταξύ τῶν t_1 καὶ t'_1 τοῦ ἐνὸς καὶ t_2 καὶ t'_2 τοῦ ἄλλου, μεταξύ τίνων χρόνων θὰ γίνη ἡ συνάντησις καὶ εἰς τίνα ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ A , ἂν εἶναι $(AB) = \alpha$.

Ὁ μ ἄ ς δ ε υ τ έ ρ α. 252. α') Ἐὰν ἀπὸ τὰ μέλη ἰσότητος ἀφαιρέσωμεν τὰ μέλη ἀνισότητος, προκύπτει ἀνισότης ἀντίστροφος τῆς δοθείσης.

$$\beta') \text{ Ἐὰν εἶναι } \alpha\beta > 0 \text{ καὶ } \alpha \neq \beta, \text{ δείξατε ὅτι εἶναι } \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} > 2.$$

253. Ἐὰν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος, τὰ ὁποῖα εἶναι θετικά, διαιρέσωμεν μὲ τὰ μέλη ἀνισότητος, προκύπτει ἀνισότης ἀντίστροφος τῆς δοθείσης, ἂν τὰ μέλη αὐτῆς εἶναι ὁμόσημα· ἄλλως, ἡ φορὰ τῆς ἀνισότητος δὲν μεταβάλλεται.

254. Λύσατε τὴν κάτωθι ἀνισότητα μὲ ἄγνωστον τὸν x ,

$$\frac{\mu x + \nu}{\alpha + \beta} - \frac{\kappa x - \lambda}{\alpha - \beta} < \frac{\mu x - \nu}{\alpha - \beta} + \frac{\kappa x - \lambda}{\alpha + \beta}$$

ἐὰν εἶναι $(\alpha^2 - \beta^2)(\beta\mu + \alpha\kappa) < 0$, ἢ > 0

255. α') Δείξατε ὅτι εἶναι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ ἂν α, β, γ δὲν εἶναι ὅλοι ἴσοι.

β') Ἄν, α, β, γ εἶναι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου, θὰ εἶναι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$.

Περίληψις περιεχομένων Κεφαλαίου III.

Ὁρισμός ἐξισώσεως, ἄγνωστων ἐξισώσεων, ριζῶν ἐξισώσεως. Ορισμός λύσεως μιᾶς ἐξισώσεως. Ἐπαλήθευσις ἐξισώσεως. Ἐξισώσεις ἀριθμητικῆ, ἐγγράμματος, ρητῆ, ἀκεραία, κλασματικῆ (ὡς πρὸς τοὺς ἄγνωστους αὐτῆς).

Ἰσοδύναμοι ἐξισώσεις (ἂν τᾶσα ρίζα ἐκάστης τῶν ἐξισώσεων εἶναι ρίζα καὶ τῶν ἄλλων). Ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων:

1ον αἱ ἐξισώσεις $A = B$, $A + \lambda = B + \lambda$ εἶναι ἰσοδύναμοι,

2ον αἱ ἐξισώσεις $A = B$, $A\rho = B\rho$ ($\rho \neq 0$) εἶναι ἰσοδύναμοι,

Ὁρισμός ἀπαλοιφῆς παρονομαστῶν ἐξισώσεως. Ἀναγωγή ἐξισώσεως εἰς τὴν μορφήν $A = 0$. Ὁρισμός βαθμοῦ ἐξισώσεως (ὡς πρὸς τοὺς ἄγνωστους της). Λύσις ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ $\alpha x + \beta = 0$, $x = -\beta : \alpha$ (ἂν $\alpha \neq 0$), ἀδύνατος ἂν $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, ἀόριστος ἂν $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Ὁρισμός προβλήματος, ἐπιτάγματος, περιορισμοῦ. Διάκρι-

στις γενικοῦ προβλήματος ἀπὸ ἀριθμητικοῦ. Ὁρισμὸς διερευνήσεως προβλήματος.

Ὁρισμὸς σταθερᾶς καὶ μεταβλητῆς ποσότητος. Ὁρισμὸς συναρτήσεως τοῦ x (παραδείγματα ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, τῆς Γεωμετρίας, τῆς Φυσικῆς).

Πίναξ τιμῶν συναρτήσεως καὶ ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

Ἀπεικόνις τιμῶν συναρτήσεως. Τετμημένη, τεταγμένη (συντεταγμένοι σημείου). Ἀξονες συντεταγμένων (ὀρθογώνιοι).

Γραφικὴ παράστασις τῆς ἐξισώσεως $\psi = \alpha x$ (εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων).

Γραφικὴ παράστασις τῆς ἐξισώσεως $\psi = \alpha x + \beta$ (εὐθεῖα τέμνουσα τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον $(0, \beta)$ καὶ τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὸ σημεῖον $(-\frac{\beta}{\alpha}, 0)$).

Γραφικὴ παράστασις τῆς $x = \alpha$ (εὐθεῖα παράλληλος τοῦ ἄξονος τῶν ψ).

Γραφικὴ παράστασις τῆς $\psi = \beta$. (εὐθεῖα παράλληλος τοῦ ἄξονος τῶν x). Ἡ $x = 0$ παριστάνει τὸν ἄξονα ψ , ἡ $\psi = 0$ τὸν ἄξονα τῶν x , ἡ $\psi = x$ τὴν διχοτόμον εὐθεῖαν τῆς γωνίας $xO\psi$ τῶν ἀξόνων, ἡ $\psi = -x$ τὴν διχοτόμον τῆς ψ γωνίας $x'O\psi$.

Γραφικὴ λύσις ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ.

Ἀνισότητες πρώτου βαθμοῦ μὲ ἓνα ἄγνωστον. (Ὁρισμὸς ἀνισότητος, ταυτότητος ἀνισότητος, ἀγνώστων ἀνισότητος, λύσεως ἀνισότητος, ἰσοδυνάμων ἀνισοτήτων, βαθμοῦ ἀνισότητος)
Λύσις τῆς ἀνισότητος $\alpha x + \beta > 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Α'. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ 124. Ἐστώσαν δύο ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ, ἐκάστη τῶν ὁποίων ἔχει δύο ἀγνώστους x καὶ ψ καὶ ἕκαστον εἰς πρῶτον βαθμόν, αἱ

$$x + \psi = 10, \quad x - \psi = 2.$$

Αὗται ἀληθεύουν διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν ἑκάστου τῶν ἀγνώστων $x = 6$ καὶ $\psi = 4$: λέγομεν τότε, ὅτι ἀποτελοῦν **σύστημα** δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους. Ἐν γένει:

Καλοῦμεν σύστημα ἐξισώσεων τὸ σύνολον δύο ἢ περισσοτέρων ἐξισώσεων, τὰς ὁποίας ἐπαληθεύουν αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων αὐτῶν.

Ἐὰν αἱ ἐξισώσεις συστήματος περιέχουν τοὺς ἀγνώστους εἰς πρῶτον βαθμόν, λέγεται τοῦτο σύστημα **πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων** ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους αὐτοῦ.

Καλοῦμεν **λύσιν** συστήματός τινος ἐξισώσεων τὴν εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος.

Δύο ἢ περισσότερα συστήματα ἐξισώσεων λέγονται ἰσοδύναμα, ἐὰν ἐπαληθεύωνται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, ἤτοι ἂν πᾶσαι αἱ λύσεις ἑκάστου ἐκ τῶν συστημάτων αὐτῶν εἶναι λύσεις καὶ ὅλων τῶν ἄλλων.

Εἶναι φανερόν ὅτι, ἐὰν εἰς σύστημα ἀντικαταστήσωμεν μίαν ἢ περισσοτέρας τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ δι' ἰσοδυναμίων των, προκύπτει σύστημα ἰσοδύναμον. Κατὰ ταῦτα τὸ τυχόν σύστημα

$$A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2, \quad A_3 = B_3,$$

ὅπου τὰ $A_1, B_1, \dots$, παριστάνουν τὰ μέλη τῶν ἀντιστοίχων ἐξισώσεων, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύστημα

$$A_1 - B_1 = 0, \quad A_2 - B_2 = 0, \quad A_3 - B_3 = 0.$$

Λέγομεν, ὅτι ἐξίσωσίς τις εἶναι **λελυμένη** ὡς πρὸς ἓνα τῶν ἀγνώστων αὐτῆς, π.χ. πρὸς τὸν x , ἂν εἶναι τῆς μορφῆς $x = A$, ὅπου τὸ A δὲν περιέχει τὸν ἀγνώστον x .

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

§ 125. α') Θὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἐξῆς ιδιότητα τῶν συστημάτων

Ἐὰν εἰς σύστημα ἐξισώσεων προσθέσωμεν δύο ἢ περισσότερας αὐτῶν κατὰ μέλη καὶ ἀντικαταστήσωμεν μίαν τῶν προστεθεισῶν μὲ τὴν προκύπτουσαν, εὐρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθέν.

$$\text{Ἐστω π.χ. τὸ σύστημα} \quad \begin{cases} 2x - 3\psi = 1, \\ x + \psi = 3. \end{cases} \quad (1)$$

Ἄν προσθέσωμεν τὰς (1) κατὰ μέλη καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὴν μίαν, ἔστω τὴν πρώτην, ἐκ τῶν προστεθεισῶν μὲ τὴν προκύπτουσαν $2x + x - 3\psi + \psi = 1 + 3$, εὐρίσκομεν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x + x - 3\psi + \psi = 1 + 3 \\ x + \psi = 3, \end{cases} \quad (2)$$

τὸ ὁποῖον λέγομεν, ὅτι εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ (1). Διότι παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ $x = 2$ καὶ $\psi = 1$ ἐπαληθεύουν τὸ (1) καὶ τιθέμεναι εἰς αὐτὸ δίδουν ἐξαγόμενα τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς.

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1, \\ 2 + 1 = 3. \end{cases} \quad (1')$$

Ἄν τὰς ἰσότητες αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν προσθέσωμεν κατὰ μέλη, εὐρίσκομεν $2 \cdot 2 + 2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 + 3$. (2')

Ἀντικαθιστῶμεν τώρα καὶ εἰς τὸ σύστημα (2) τὰ x καὶ ψ μὲ τὸ 2 καὶ 1, εὐρίσκομεν δὲ ἀπὸ τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ $2 \cdot 2 + 2 - 3 \cdot 1 + 1$ καὶ $2 + 1$. Ἀλλὰ οἱ ἀριθμοὶ αὗτοι εἶναι ἴσοι ἀντιστοίχως μὲ $1 + 3$ καὶ 3, ὥς φαίνεται εἰς τὴν (2') καὶ τὴν δευτέραν τῶν (1'). Ἐπομένως αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ ψ , αἱ ἐπαληθεύουσαι τὸ (1), ἐπαληθεύουν καὶ τὸ (2). Ὅμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x καὶ ψ , αἱ ἐπαληθεύουσαι τὸ (2), ἐπαληθεύουν καὶ τὸ (1). Ἄρα τὸ (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμα.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ ιδιότης καὶ διὰ πᾶν ἄλλο σύστημα.

β') Θὰ ἀποδείξωμεν καὶ τὴν ἐξῆς ιδιότητα:

Ἐὰν εἰς σύστημα ἐξισώσεων μία ἐξ αὐτῶν εἶναι λελυμένη ὡς πρὸς ἓνα τῶν ἀγνώστων καὶ ἀντικαταστήσωμεν αὐτὸν μὲ

την τιμήν του εἰς τὰς ἄλλας (ἢ εἰς τινας μόνον), εὐρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν.

$$\text{Ἐστω π.χ. τὸ σύστημα} \quad \begin{cases} x = 2\psi + 1 \\ x - \psi = 2, \end{cases} \quad (1)$$

τοῦ ὁποῖου ἡ πρώτη ἐξίσωσις εἶναι λευμένη ὡς πρὸς x . Ἐὰν τὴν τιμήν $2\psi + 1$ τοῦ x ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν,

$$\text{εὐρίσκομεν τὸ σύστημα} \quad \begin{cases} x = 2\psi + 1 \\ 2\psi + 1 - \psi = 2, \end{cases} \quad (2)$$

τὸ ὁποῖον λέγομεν, ὅτι εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ (1). Διότι παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ $x=3$, $\psi=1$ ἐπαληθεύουν τὸ (1) καὶ τιθέμεναι εἰς αὐτὸ δίδουν ἐξαγόμενα τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς

$$3 = 2 \cdot 1 + 1, \quad 3 - 1 = 2. \quad (1')$$

Ἄν τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν x καὶ ψ θέσωμεν εἰς τὸ (2), εὐρίσκομεν ἕκ μὲν τῆς πρώτης ἐξίσωσεως τοῦ συστήματος αὐτοῦ ἴσους ἀριθμοὺς, διότι εἶναι αὐτὴ ἡ πρώτη τοῦ (1), ἕκ δὲ τοῦ πρώτου μέλους τῆς δευτέρας τοῦ συστήματος (2) προκύπτει ὁ ἀριθμὸς (2') $2 \cdot 1 + 1 - 1$ ἢ ὁ $3 - 1$, ἐπειδὴ τὸ $2 \cdot 1 + 1$ ἰσοῦται μὲ τὴν τιμὴν τοῦ 3 τοῦ x . Ἐπομένως τὸ ἐξαγόμενον (2') ἰσοῦται μὲ 2, ὡς φαίνεται καὶ ἕκ τῆς δευτέρας τῶν (1'). Ἄρα αἱ τιμαὶ τοῦ x καὶ ψ , αἱ ἐπαληθεύουσιν τὸ (1), ἐπαληθεύουν καὶ τὸ (2). Ὅμοίως δεικνύεται ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ ψ , αἱ ἐπαληθεύουσιν τὸ (2), ἐπαληθεύουν καὶ τὸ (1). Ἄρα τὰ (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμα.

Ὅμοίως ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης καὶ διὰ πᾶν ἄλλο σύστημα.

2. ΜΕΘΟΔΟΙ ΛΥΣΕΩΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΔΥΟ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

1. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΔΙΑ ΤΩΝ ΑΝΤΙΘΕΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

§ 126. Ἐστω, ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν π.χ. τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

τοῦ x νὰ εἶναι ἀντίθετοι. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν (ἥτοι τὰ μέλη αὐτῆς) ἐπὶ τὸν 3 (συντελεστήν τοῦ x εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν) καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ τὸν -2 (ἀντίθετον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x εἰς τὴν πρώτην). Τὸν πολλαπλασιασμόν τοῦτον σημειώνομεν γράφοντες παραπλεύρως ἐκάστης τῶν ἐξισώσεων τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη αὐτῆς, ὡς κατωτέρω.

$$\begin{cases} 2x + 3\psi = 8 & 3 \\ 3x + 4\psi = 11 & -2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{καὶ εὐρίσκομεν τὸ σύστημα} \begin{cases} 6x + 9\psi = 24 \\ -6x - 8\psi = -22 \end{cases} \quad (2)$$

Προφανῶς τὰ συστήματα (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμα. Προσθέτομεν τώρα τὰς ἐξισώσεις τοῦ (2) κατὰ μέλη καὶ εὐρίσκομεν $\psi = 2$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη μὲ μίαν τῶν προστεθεισῶν τοῦ (2) ἢ μὲ μίαν τοῦ (1), ἔστω μὲ τὴν πρώτην, ἀποτελεῖ σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$(2) \text{ καὶ τὸ (1). Δηλαδή τὸ σύστημα } \begin{cases} 2x + 3\psi = 8 \\ \psi = 2 \end{cases} \quad (3) \text{ εἶναι ἰσο-}$$

δύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ λυθῇ τὸ (3) καὶ αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ ψ , αἱ ὁποῖαι θὰ εὑρεθοῦν, θὰ ἐπαληθεύουν καὶ τὸ (1).

Ἄλλ' ἐπεὶδὴ ἔχομεν τὴν τιμὴν τοῦ $\psi = 2$, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν $2x + 3\psi = 8$ τὸ ψ μὲ τὸ 2, εὐρίσκομεν $2x + 3 \cdot 2 = 8$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x = 1$. Ὡστε αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ ψ εἶναι αἱ $x = 1$, $\psi = 2$. Πράγματι, ἂν θέσωμεν εἰς τὸ (1) ἀντὶ τοῦ $x = 1$ καὶ $\psi = 2$, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἐξισώσεις ἐπαληθεύονται.

Ὁ ἀνωτέρω τρόπος τῆς λύσεως συστήματος λέγεται **μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν ἢ διὰ τῆς προσθέσεως**.

Διότι δι' αὐτῆς ἐπιτυγχάνομεν α') νὰ μετασχηματίσωμεν τὰς ἐξισώσεις εἰς ἰσοδυνάμους τῶν, ὥστε οἱ συντελεσταὶ ἑνὸς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν νὰ εἶναι ἀντίθετοι καὶ β') διὰ τῆς προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη νὰ προκύπτῃ μία ἐξίσωσις μὲ ἓνα μόνον ἄγνωστον, ἥτοι ἀπαλείφομεν τὸν ἄλλον ἄγνωστον.

Διὰ νὰ μετασχηματίσωμεν τὰς δύο ἐξισώσεις δοθέντος συστήματος εἰς τρόπον, ὥστε οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ἀγνώστων νὰ εἶναι ἀντίθετοι, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀντιστοίχως τὰ

μέλη τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ τὰ πηλίκια τοῦ ἐ.κ.π. τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν συντελεστῶν τοῦ ἐν λόγῳ ἀγνώστου δι' ἐκάστου ἐξ αὐτῶν λαμβανομένων καταλλήλως τῶν προσήμων αὐτῶν.

$$\text{Π.χ. ἂν ἔχωμεν τὸ σύστημα} \begin{cases} 12x + 5\psi = 17 \\ -8x + 7\psi = -1 \end{cases} \quad (1'')$$

τὸ ἐ.κ.π. τῶν 12 καὶ 8 εἶναι τὸ 24. Πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ 24 : 12 = 2 καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ 24 : 8 = 3.

$$2 \quad 12x + 5\psi = 17$$

$$3 \quad -8x + 7\psi = -1$$

καὶ λαμβάνομεν τὸ κατωτέρω σύστημα (2'') ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$\text{δοθὲν (1'')} \quad \begin{cases} 24x + 10\psi = 34 \\ -24x + 21\psi = -3 \end{cases} \quad (2'')$$

Διὰ προσθέσεως τῶν ἐξισώσεων τοῦ (2'') κατὰ μέλη προκύπτει ἐξίσωσις $31\psi = 31$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $\psi = 1$ καὶ ἀκολουθῶς ἐργαζόμενοι ὥς ἄνωτέρω, εὐρίσκομεν $x = 1$.

Ἀσκήσεις

Ὁ μ ἄ ς π ρ ὶ τ η. 256. Νὰ λυθοῦν τὰ ἐπόμενα συστήματα καὶ νὰ γίνη ἡ ἐπαλήθευσις μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνῶστων.

$$\alpha') \begin{cases} 3x + 4\psi = 10 \\ 4x + \psi = 9 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{\psi}{4} = 6 \\ \frac{x}{4} + \frac{\psi}{6} = \frac{17}{3} \end{cases} \quad \gamma') \begin{cases} \frac{x}{13} - \frac{\psi}{7} = \\ = 6x - 10\psi - 8 = 0 \end{cases}$$

$$257. \alpha') \begin{cases} 6\psi - 5x = 18 \\ 12x - 9\psi = 0 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} 7,2x + 3,6\psi = 54 \\ 2,3x - 5,9\psi = 22 \end{cases}$$

$$258. \alpha') \begin{cases} (x+5)(\psi+7) - (x+1)(\psi-9) = 12 \\ 2x + 10 - (3\psi+1) = 0 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} 0,3x - 0,2\psi = 0,01 \\ 1,2x - 0,6\psi = 0,6 \end{cases}$$

$$259. \begin{cases} \alpha x + \beta \psi = \alpha^3 + 2\alpha^2\beta - \beta^3 \\ \beta x + \alpha \psi = \alpha^3 + \beta^3 \end{cases} \quad 260. \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{\psi}{4} = 3x - 7\psi - 37 = 0. \end{cases}$$

$$261. \begin{cases} \frac{x+3}{5} = \frac{8-\psi}{4} = \frac{3(x+\psi)}{8} \end{cases} \quad 262. \begin{cases} \frac{x}{0,2} + \frac{\psi}{0,5} = 12,3 \\ \frac{x}{0,6} + \frac{\psi}{0,8} = 5,55 \end{cases}$$

Ὁ μὲν δὲ δευτέρᾳ. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ ἐπόμενα συστήματα :

$$263. \begin{cases} \alpha x + \beta \psi = \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 \\ \beta x + \alpha \psi = \alpha^2 + \beta^2 \end{cases}$$

$$264. \begin{cases} (\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)\psi = \alpha^2 + \beta^2 \\ (\alpha - \beta)x + (\alpha + \beta)\psi = \alpha^2 - \beta^2 \end{cases}$$

$$265. \begin{cases} \alpha(x - \psi) + \beta(x + \psi) = 4\alpha\beta \\ (\alpha - \beta)x - \beta\psi = \alpha\psi \end{cases}$$

$$266. \begin{cases} \alpha(x + \beta) = 2\beta\psi \\ \beta(x + \alpha) - \beta^2 = \beta\psi \end{cases}$$

$$267. \begin{cases} (\alpha + \beta)x - \alpha\psi = \alpha^2 \\ \beta x - (\alpha - \beta)\psi = \beta^2 \end{cases}$$

II. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΔΙ' ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ

§ 127. Ἐστω π.χ. πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 3\psi = 8 \\ 3x + 4\psi = 11 \end{cases} \quad (1)$$

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτό, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς : Ἀπομονώνομεν τὸν ἓνα τῶν ἀγνώστων π.χ. τὸν x , ἔστω εἰς τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων. Ἦτοι λύομεν αὐτὴν ὡς πρὸς x θεωροῦντες τὸν ψ ὡς γνωστόν. Οὕτω λαμβάνομεν $x = \frac{8-3\psi}{2}$.

Αὕτη μὲ τὴν ἄλλην τῶν ἐξισώσεων τοῦ (1) ἀποτελοῦν τὸ κατωτέρω σύστημα (2) ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν (1)

$$\begin{cases} x = \frac{8-3\psi}{2} \\ 3x + 4\psi = 11. \end{cases} \quad (2)$$

Τὴν τιμὴν τοῦ x τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων τούτων ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων τοῦ (1) ἢ τοῦ (2) καὶ εὐρίσκομεν $3 \cdot \frac{8-3\psi}{2} + 4\psi = 11$, ἢ ὁποῖα μετὰ τῆς προηγουμένης ἀποτελεῖ σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (2) καὶ τὸ (1).

Λύομεν τὴν τελευταίαν ταύτην ὡς πρὸς τὸ ψ καὶ εὐρίσκομεν $\psi = 2$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x ἀντικαθιστῶμεν τὸ ψ μὲ τὸ 2 εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν ἢ εἰς τὴν $x = \frac{8-3\psi}{2}$, ὅτε εὐρίσκομεν $x = \frac{8-6}{2} = 1$.

Τὸν ἀνωτέρω τρόπον τῆς λύσεως συστήματος καλοῦμεν συνήθως μέθοδον ἀπαλοιφῆς διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως.

Άσκησεις

268. Λύσατε τὰ κάτωθι συστήματα καὶ ἐπαληθεύσατε αὐτά :

$$\alpha') \begin{cases} 7x = 18 + \frac{5\psi}{3} \\ 0,75x + 2\psi = 15 \end{cases}$$

$$\beta') \begin{cases} x = \alpha + \psi \\ \lambda x + \mu\psi = \nu \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} \alpha x = \alpha^2 - \beta\psi \\ \alpha x - \beta\psi = \beta^2 \end{cases}$$

$$269. \alpha') \begin{cases} \psi = 3\alpha - \frac{x}{2} \\ \frac{2\psi}{5} - x = 2\beta \end{cases}$$

$$\beta') \begin{cases} x = 4\alpha - \psi \\ \frac{x+\psi}{3} - \frac{x-\psi}{2} = \alpha \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} \frac{x}{9} = \frac{\psi}{3} \\ 2x + 3\psi = 5 \end{cases}$$

III. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΔΙΑ ΤΗΣ ΣΥΓΚΡΙΣΕΩΣ

§ 128. Ἐστω ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 3\psi = 8 \\ 3x + 4\psi = 11 \end{cases} \quad (1)$$

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτὸ δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἐξῆς : Ἀπομονώνομεν τὸν ἓνα τῶν ἀγνώστων π.χ. τὸν x εἰς τὴν πρώτην καὶ εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος. Ἦτοι λύομεν κάθε μίαν τῶν ἐξισώσεων τούτων ὡς πρὸς τὸν x θεωροῦντες τὸν ψ ὡς γνωστὸν καὶ εὐρίσκομεν ἐκ μὲν τῆς πρώτης $x = \frac{8-3\psi}{2}$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας $x = \frac{11-4\psi}{3}$.

Ἐπειδὴ αἱ δύο αὐταὶ τιμαὶ τοῦ x πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{8-3\psi}{2} = \frac{11-4\psi}{3}$, ἡ ὁποία μὲ μίαν ἐκ τῶν δοθεῖσῶν ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ εὐρίσκομεν $\psi = 2$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x , ἐργαζόμεθα καθὼς καὶ εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα καὶ εὐρίσκομεν $x = 1$.

Τὸν τρόπον τοῦτον τῆς λύσεως συστημάτων καλοῦμεν συνήθως **μέθοδον ἀπαλοιφῆς διὰ τῆς συγκρίσεως**.

Παρατήρησις. Καθὼς διακρίνομεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ὅταν λέγωμεν, ὅτι μεταξὺ δύο ἐξισώσεων ἑνὸς συστήματος ἀπαλείφομεν τὸν ἓνα ἀγνώστον, ἐννοοῦμεν μὲ αὐτό, ὅτι ἐκφράζομεν τὸ ὅτι αἱ δύο ἐξισώσεις ἀληθεύουν διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τοῦ ἐν λόγῳ ἀγνώστου.

Άσκησης

Όμας πρώτη. 270. Να λυθούν τα κάτωθι συστήματα και να γίνη ή έπαλήθευσις αὐτῶν :

$$\begin{array}{lll} \alpha') \begin{cases} 3x + 5\psi = 20 \\ 3x + 10\psi = 0 \end{cases} & \beta') \begin{cases} \frac{x}{\alpha} + \frac{\psi}{\beta} = 1 \\ \frac{x}{\alpha} - \frac{\psi}{\beta} = 1 \end{cases} & \gamma') \begin{cases} \alpha x - \beta \psi = \gamma(\alpha - \beta) \\ x + \psi = \gamma \end{cases} \\ \delta') \begin{cases} \frac{x}{\alpha + \beta} + \frac{\psi}{\alpha - \beta} = 2\alpha \\ \frac{x - \psi}{2\alpha\beta} = \frac{x + \psi}{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases} & \epsilon') \begin{cases} x + \psi = \alpha + \beta \\ \beta x + \alpha \psi = 2\alpha\beta \end{cases} & \sigma\tau') \begin{cases} (x : \alpha) - (\psi : \beta) = \alpha^2\beta \\ (x : \alpha^2) + (\psi : \beta^2) = -\beta^2 \end{cases} \end{array}$$

Όμας δευτέρα. 271. Να λυθούν τα κάτωθι συστήματα διά της καταλληλοτέρας μεθόδου και να γίνη ή έπαλήθευσις αὐτῶν ;

$$\begin{array}{ll} \alpha') \begin{cases} 2(x + 2\psi) = 3(2x - 3\psi) + 10 \\ 2(2x - \psi) = 8(3\psi - x) + 3 \end{cases} & \beta') \begin{cases} (5x + 7\psi) : (3x + 11) = 13 : 7 \\ (11x + 27) : (7x + 5\psi) = 19 : 11 \end{cases} \\ \gamma') \begin{cases} (\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)\psi = 2\alpha\beta \\ (\alpha + \gamma)x + (\alpha - \gamma)\psi = 2\alpha\gamma \end{cases} & \delta') \begin{cases} \alpha x + \beta \psi = \alpha^2 \\ \beta x + \alpha \psi = \beta^2 \end{cases} \\ \epsilon') \begin{cases} \frac{x}{\alpha + \beta} - \frac{\psi}{\beta - \alpha} = 2\alpha^2\beta \\ \frac{x}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{\psi}{\beta^2 - \alpha^2} = 2\alpha\beta \end{cases} & \sigma\tau') \begin{cases} \alpha x + \beta \psi = \alpha^2 \\ \alpha x - \beta \psi = \beta^2 \end{cases} \\ \zeta') \begin{cases} \alpha x + \beta \psi = \gamma \\ \lambda x - \mu \psi = \delta \end{cases} & \eta') \begin{cases} \frac{13}{x + 2\psi + 4} + \frac{3}{4x - 7\psi + 6} = 0 \\ \frac{3}{6x - 5\psi + 1} - \frac{15}{3x + 2\psi + 5} = 0 \end{cases} \end{array}$$

Όμας τρίτη. 272. Να λυθούν και να επαλήθευθουν τα συστήματα :

$$\begin{array}{lll} \alpha') \begin{cases} 2(3x - \psi) = 3(4x + \psi) + 5 \\ 3(x - 3\psi) = 5(3\psi - x) \end{cases} & \beta') \begin{cases} \alpha x + 1 = \alpha\psi + \beta x \\ \beta\psi + 1 = \alpha\psi + \beta x \end{cases} & \gamma') \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{4}{\psi} = \frac{10}{x\psi} \\ \frac{5}{3x} + \frac{3}{4\psi} = \frac{49}{12x\psi} \end{cases} \\ \delta') \begin{cases} (\alpha^2 + \beta^2)x + (\alpha^2 - \beta^2)\psi = 2\alpha^2\beta^2 \\ (\alpha^2 + \gamma^2)x + (\alpha^2 - \gamma^2)\psi = 2\alpha^2\gamma^2 \end{cases} & \epsilon') \begin{cases} \frac{x}{\alpha + \beta} + \frac{\psi}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\alpha - \beta} \\ \frac{x}{\alpha - \beta} + \frac{\psi}{\alpha + \beta} = \frac{1}{\alpha + \beta} \end{cases} \\ \sigma\tau') \begin{cases} \frac{0,1}{x + 7\psi + 5} + \frac{3,5}{7x - 9\psi + 19} = 0 \\ \frac{3,5}{6x - 5\psi + 3} - \frac{0,9}{0,1x - 4,5\psi - 1} = 0 \end{cases} & \zeta') \begin{cases} \gamma x + \alpha \psi = \alpha(\beta + 1) + \gamma(\beta - 1) \\ x = \frac{\alpha(\beta - \gamma\psi) + \gamma(2\alpha\beta - \gamma)}{\alpha\gamma} \end{cases} \end{array}$$

3. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

$$\begin{cases} \alpha x + \beta \psi = \gamma \\ \alpha_1 x + \beta_1 \psi = \gamma_1 \end{cases} \quad (1)$$

§ 129. Υποθέτομεν ὅτι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων δὲν εἶναι ὅλοι μηδενικοί. Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι $\alpha \neq 0$.

Τότε ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ συστήματος λυομένη πρὸς x , τοῦ ὁποῖου ὁ συντελεστὴς εἶναι $\neq 0$, δίδει $x = \frac{\gamma - \beta \psi}{\alpha}$.

Καὶ ὅταν ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ x εἰσαχθῇ εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν, ἡ ἐξίσωσις αὕτη γίνεται $\alpha_1 \frac{\gamma - \beta \psi}{\alpha} + \beta_1 \gamma = \gamma_1$, ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὴν $(\alpha \beta_1 - \alpha_1 \beta) \psi = \alpha \gamma_1 - \alpha_1 \gamma$.

Οὕτω, τὸ σύστημα (1) ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} x &= \frac{\gamma - \beta \psi}{\alpha} \\ (\alpha \beta_1 - \alpha_1 \beta) \psi &= \alpha \gamma_1 - \alpha_1 \gamma \end{aligned} \quad (2)$$

Διακρίνομεν τώρα δύο περιπτώσεις :

1ον. $\alpha \beta_1 - \alpha_1 \beta \neq 0$. Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ (2) θὰ ἔχῃ τότε μίαν μόνην λύσιν, τὴν $\psi = \frac{\alpha \gamma_1 - \alpha_1 \gamma}{\alpha \beta_1 - \alpha_1 \beta}$.

Ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ ψ εἰσαγομένη εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τοῦ (2) δίδει τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ x , τὴν $x = \frac{\gamma \beta_1 - \beta \gamma_1}{\alpha \beta_1 - \alpha_1 \beta}$.

Οὕτω, τὸ σύστημα (2), καὶ συνεπῶς καὶ τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ (1) ἔχει μίαν λύσιν, εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν.

Παρατηροῦμεν ὅμως, ὅτι, ὅταν $\alpha \beta_1 - \alpha_1 \beta \neq 0$ ἀποκλείεται νὰ εἶναι μηδενικοὶ οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων καὶ ἐπομένως παρέλκει ἡ ὑπόθεσις τοῦ νὰ μὴ εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων ὅλοι μηδενικοί.

Ἡ παράστασις $\alpha \beta_1 - \alpha_1 \beta$ λέγεται **ὀρίζουσα** τοῦ συστήματος (1). Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ λέγωμεν :

Ἄν ἡ ὀρίζουσα τοῦ συστήματος (1) εἶναι $\neq 0$, τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνην λύσιν.

2ον. $\alpha \beta_1 - \alpha_1 \beta = 0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ (2) γίνεται μετὰ κάθε ψ . $0 = \alpha \gamma_1 - \alpha_1 \gamma$.

Καὶ ἂν μὲν εἶναι πράγματι ἡ $\alpha \gamma_1 - \alpha_1 \gamma$ ἴση μετὰ μηδέν, ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ (2) ἀληθεύει μετὰ κάθε ψ καὶ οὕτω τὸ σύστημα (2) ἀνάγεται εἰς μόνην τὴν $x = \frac{\gamma - \beta \psi}{\alpha}$.

Αυτή έχει άπειρους λύσεις, διότι δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τυχοῦσαν τιμὴν εἰς τὸν ψ καὶ νὰ εὐρεθῇ ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐκφράσεως τοῦ x , ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ x .

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι τὸ σύστημα (2) καὶ συνεπῶς καὶ τὸ ἰσοδύναμόν του (1) εἶναι **ἀόριστον**.

Ἄν ὅμως ἡ παράστασις $\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma$ εἶναι $\neq 0$, ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ (2) εἶναι ἀδύνατος, ὁπότε καὶ τὸ σύστημα (2) καθὼς καὶ τὸ (1) εἶναι **ἀδύνατον**.

Ὅταν ὅμως εἶναι $\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma \neq 0$, τότε $\alpha\gamma_1 \neq \alpha_1\gamma$. Καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ α , τὸ ὁποῖον εἶναι $\neq 0$, εὐρίσκομεν ὅτι $\gamma_1 \neq \frac{\alpha_1\gamma}{\alpha}$, ὁπότε $\beta\gamma_1 \neq \frac{\alpha_1\gamma \cdot \beta}{\alpha}$.

$$\text{Ἄρα καὶ } \beta\gamma_1 - \beta_1\gamma \neq \frac{\alpha_1\beta\gamma}{\alpha} - \beta_1\gamma.$$

$$\text{δηλ. } \beta\gamma_1 - \beta_1\gamma \neq \gamma \frac{(\alpha_1\beta - \alpha\beta_1)}{\alpha} \text{ ἤτοι } \beta\gamma_1 - \beta_1\gamma \neq 0$$

διότι $\frac{\gamma(\alpha_1\beta - \alpha\beta_1)}{\alpha} = 0$, ἀφοῦ $\alpha_1\beta - \alpha\beta_1 = 0$ ἐξ ὑποθέσεως.

Ὅμοιως συλλογίζόμενοι εὐρίσκομεν, ὅτι ἂν $\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma = 0$, τότε καὶ $\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma = 0$.

Ὡστε :

Ὅταν ἡ ὀρίζουσα τοῦ συστήματος (1) εἶναι μηδενική, χωρὶς νὰ εἶναι μηδενικοὶ ταῦτοχρόνως καὶ ὅλοι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων, τὸ σύστημα εἶναι ἢ ἀόριστον ἢ ἀδύνατον. Καὶ ἀόριστον μὲν θὰ εἶναι ὅταν εἶναι ταῦτοχρόνως μηδενικὴ καὶ μία οἰαδήποτε ἐκ τῶν παραστάσεων $\alpha_1\gamma - \alpha_1\gamma$ ἢ $\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma$, ἀδύνατον δὲ ὅταν μία ἐκ τῶν παραστάσεων αὐτῶν εἶναι $\neq 0$.

Παρατήρησις I. Εἶναι δυνατόν ἡ λύσις ἐνὸς γενικοῦ προβλήματος νὰ ὀδηγήσῃ εἰς σύστημα δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων καὶ νὰ εἰσαχθῇ ἡ ὑπόθεσις ὅτι ὅλοι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων εἶναι μηδενικοί. Τότε τὸ (1) γίνεται $0 = \gamma$.

$$0 = \gamma_1.$$

μὲ κάθε x καὶ κάθε ψ .

Καὶ τότε φαίνεται ὅτι ἂν οἱ γ , γ_1 εἶναι μηδενικοὶ καὶ οἱ δύο, τὸ σύστημα ἀληθεύει μὲ κάθε x καὶ κάθε ψ .

Λέγομεν ὅτι εἶναι **ἀόριστον μὲ πλήρη ἀοριστίαν**. Ἄν ὅμως εἰς ἐκ τῶν γ ἢ γ_1 εἶναι $\neq 0$, τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

Παρατήρησις II. Ἡ παράστασις $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$ εὐρίσκεται ὡς ἐξῆς

Γράφονται αὶ ἐξισώσεις ὥστε οἱ συντελεσταὶ τοῦ αὐτοῦ ἀγνώστου νὰ εἶναι εἰς τὴν αὐτὴν στήλην. Τότε πολρίζονται οἱ συντελεσταὶ αὐτοὶ τῆς πρώτης, ἕκαστος ἐπὶ τὸν διαγωνίως ἀπέναντι τῆς δευτέρας καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον ἀφαιρεῖται τὸ δεύτερον.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὐρίσκονται καὶ οἱ ἀριθμηταὶ τῶν τύπων τῶν ἀγνώστων x , ψ , ἀφοῦ πρῶτον μεταφερθοῦν εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ οἱ ὅροι οἱ ἀνεξάρτητοι τῶν ἀγνώστων.

Διὰ τὸν καταρτισμὸν τοῦ ἀριθμητοῦ ἐκάστου ἀγνώστου θὰ παραλείπεται νοερῶς ἡ στήλη αὐτοῦ τοῦ ἀγνώστου καὶ θὰ πολρίζονται οἱ ὅροι τῆς ἐπομένης στήλης, ἕκαστος ἐπὶ τὸν διαγωνίως ἀπέναντι τῆς ἄλλης στήλης, παραλειπομένου τοῦ ἀγνώστου ποὺ περιέχεται εἰς τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν τῶν στηλῶν, ἀπὸ τὸ πρῶτον δὲ γινόμενον θὰ ἀφαιρῇται τὸ δεύτερον. Παρονομαστής εἶναι ἡ ὀρίζουσα τοῦ συστήματος. Πχ. *Ἐστω τὸ σύστημα

$$0,3x + 0,1\psi = 1,2$$

$$2x = 5\psi - 5,6$$

Μεταφέροντες ὅλους τοὺς ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος ἔχομεν

$$0,3x + 0,1\psi - 1,2 = 0$$

$$2x - 5\psi + 5,6 = 0$$

$$\text{Τοῦτο ἀληθεύει ὅταν } x = \frac{0,1 \cdot 5,6 - (-5) \cdot (-1,2)}{0,3 \cdot (-5) - 2 \cdot (0,1)} = \frac{-5,44}{-1,7} = 3,2.$$

$$\psi = \frac{-1,2 \cdot 2 - 0,3 \cdot 5,6}{0,3 \cdot (-5) - 2 \cdot (0,1)} = \frac{-4,08}{-1,7} = 2,4.$$

$$\text{ΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ } \begin{cases} ax + b\psi = \gamma \\ a_1x + b_1\psi = \gamma_1 \end{cases}$$

§ 130. Ἀνακεφαλαιοῦντες τὰ ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τὴν λύσιν ἐνὸς ἐγγραμμάτου συστήματος δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους εὐρίσκομεν τὴν ὀρίζουσαν αὐτοῦ. Καὶ τότε, λαμβάνοντες τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ὀρίζουσα αὐτὴ εἶναι $\neq 0$ θὰ ἔχωμεν ὑπ' ὅψιν ὅτι τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνον λύσιν, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ καταρτίσωμεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω μηχανισμόν. (Παρατ. II).

*Ἐπειτα λαμβάνομεν τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν, ἡ ὀρίζουσα τοῦ συστήματος εἶναι μηδενικὴ καὶ εὐρίσκομεν τὰς τιμὰς, αἱ ὁποῖαι τὴν μηδενίζουν. Ἀντικαθιστῶντες τότε εἰς τὸ σύστημα

τὰ γράμματα μὲ τὰς τιμὰς αὐτάς, ἀναγνωρίζομεν εὐκόλως ἂν αἱ δύο ἐξισώσεις ἀνάγονται εἰς μίαν, ὁπότε ἔχομεν **ἀοριστίαν**, ἥ ἂν εἶναι **ἀσυμβίβαστοι**, ἐπότε τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἐφαρμογή. Ἐστω τὸ σύστημα $\lambda x + \psi = 2$.

$$x + \psi = 2\lambda.$$

Μεταφέροντες ὅλους τοὺς ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος, ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα $\lambda x + \psi - 2 = 0$.

$$x + \psi - 2\lambda = 0.$$

Ὅριζουσα τοῦ συστήματος εἶναι $\lambda - 1$.

1ον. Ἐὰν $\lambda - 1 \neq 0$, τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνην λύσιν,

$$\text{τὴν } x = \frac{-2\lambda + 2}{\lambda - 1} = \frac{-2(\lambda - 1)}{\lambda - 1} = -2$$

$$\psi = \frac{-2 + 2\lambda^2}{\lambda - 1} = \frac{2(\lambda^2 - 1)}{\lambda - 1} = 2(\lambda + 1)$$

2ον. Ἐὰν $\lambda - 1 = 0$, τότε $\lambda = 1$ καὶ τὸ σύστημα γίνεται, ἂν τεθῇ ἀντὶ λ τὸ 1, $x + \psi = 2$ $x + \psi = 2$

Ἦτοι τὸ σύστημα ἀνάγεται εἰς μίαν μόνην ἐξίσωσιν :

τὴν $x + \psi = 2$ καὶ ἀληθεύει ὅταν $x = 2 - \psi$ ὅπου ψ αὐθαίρετος.

Εἶναι ἐπομένως ἀόριστον.

Παρατήρησις. Ποσότης τις, ὡς π.χ. ἡ λ , ἡ ὁποία δύναται νὰ λαμβάνῃ διαφόρους τιμὰς εἰς μίαν ἢ περισσότερας ἐξισώσεις ἀνεξαρτήτως τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων, καλεῖται **παράμετρος**.

Ἀσκήσεις

Ὅμας πρώτη 273. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα καὶ νὰ διερευνηθοῦν διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ :

$$\begin{array}{lll} \alpha') \begin{cases} \lambda x + \psi = 2 \\ x + \lambda \psi = 2\lambda + 1 \end{cases} & \beta') \begin{cases} \lambda x - 2\psi = \lambda \\ (\lambda - 1)x - \psi = 1 \end{cases} & \gamma') \begin{cases} x + (3\lambda - 1)\psi = 0 \\ \lambda \psi - 4x = \lambda - 4 \end{cases} \\ \delta') \begin{cases} \psi = \lambda + 2x \\ 3\psi - \lambda = x + 3 \end{cases} & \epsilon') \begin{cases} x + \psi = 1 \\ \lambda x + \psi = 1 \end{cases} & \sigma\tau') \begin{cases} (\lambda^2 - 1)x - \psi = \lambda \\ 2x - \psi = \lambda - 1 \end{cases} \end{array}$$

274. Τίνα τῶν κάτωθι συστημάτων ἔχουν μίαν λύσιν, εἶναι ἀόριστα ἢ ἀδύνατα ;

$$\begin{array}{lll} \alpha') \begin{cases} 3x - 5\psi = 2 \\ -3x + 5\psi = 7 \end{cases} & \beta') \begin{cases} 2x + 7\psi - 4 = 0 \\ 5x + 21\psi - 12 = 0 \end{cases} & \gamma') \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\psi}{3} = 1 \\ 7x + 2\psi = 6 \end{cases} \\ \delta') \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{\psi}{4} = -1 \\ \frac{2x}{3} + \frac{\psi}{2} = 5 \end{cases} & \epsilon') \begin{cases} 2\alpha x - \beta \psi = 3 \\ \frac{\alpha x}{2} - \frac{\beta \psi}{6} = 2 \end{cases} & \sigma\tau') \begin{cases} \frac{x}{\alpha} + \frac{\psi}{\beta} = 1 \\ \beta x + \alpha \psi = \alpha \beta \end{cases} \end{array}$$

Ὁ μ α ς δ ε υ τ έ ρ α. 275. Λύσατε καὶ διερευνήσατε τὰ κατωτέρω συστήματα:

$$\begin{array}{ll} \alpha') \begin{cases} 2x-3\psi=5\beta-\alpha \\ 3x-2\psi=\alpha+5\beta \end{cases} & \beta') \begin{cases} \alpha(x-\psi)+\beta(x+\psi)=4\alpha\beta \\ (\alpha-\beta)x-\beta\psi=\alpha\psi \end{cases} \\ \gamma') \begin{cases} 3x-\psi=2(\alpha+\beta)^2 \\ 3\psi-x=2(\alpha-\beta)^2 \end{cases} & \delta') \begin{cases} \alpha(x-\psi+\beta)+\beta^2=\beta\psi \\ \alpha(\psi-\alpha-\beta)+\beta x=\beta\psi \end{cases} \\ \epsilon') \begin{cases} \frac{x}{x-\alpha}+\frac{\psi}{\psi-\beta}=2 \\ \alpha x+\beta\psi=2\alpha\beta \end{cases} & \sigma\tau') \begin{cases} x+\psi=\frac{2\beta\gamma(\alpha^3-2\alpha^2\beta+3\alpha^2\gamma)}{\alpha\beta\gamma-2\beta^2\gamma+3\beta\gamma^2} \\ \alpha(x-\alpha^2)+\beta(\psi+\beta^2)=\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)^2 \end{cases} \end{array}$$

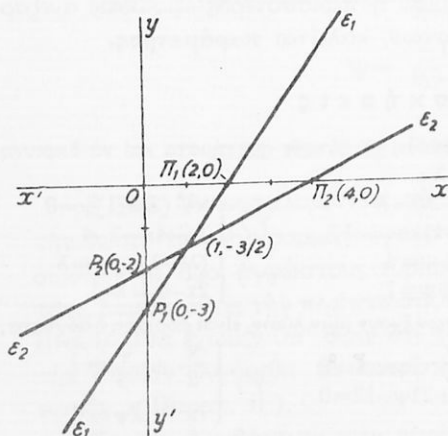
4. ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΔΥΟ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

§ 131. Ἐστω τὸ σύστημα
$$\begin{cases} 3x-2\psi=6 \\ x-2\psi=4 \end{cases} \quad (1)$$

Λύοντες αὐτὸ εὐρίσκομεν $x=1$, $\psi=-\frac{3}{2}$. Τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ζεύγος τῶν τιμῶν $(1, -\frac{3}{2})$, κεῖται ἐπὶ ἐκάστης

τῶν εὐθειῶν ϵ_1 καὶ ϵ_2 , τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος. Ἐπομένως αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς τομῆς Μ τῶν εὐθειῶν ϵ_1 καὶ ϵ_2 ἐπαληθεύουν τὸ σύστημα (1).



Σχ. 12

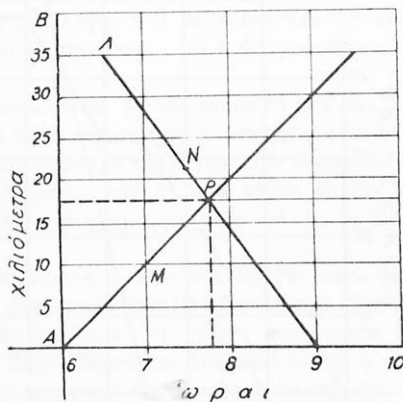
Ἄρα διὰ νὰ λύσωμεν ἓν σύστημα α' βαθμοῦ δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων γραφικῶς, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰς συντεταγμέναις τοῦ σημείου τῆς τομῆς Μ τῶν εὐθειῶν τῶν παριστανόμενων ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (σχ. 12).

Ἐφαρμογαί. 1η) Ἰππεὺς ἀναχωρεῖ τὴν 6ην πρωϊνὴν ὥραν ἀπὸ τοῦ τόπου Α, διὰ νὰ μεταβῇ εἰς τὸν Β. Ἡμίσειαν ὥραν βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Β ποδηλάτης διευθυνόμενος πρὸς

τὸν Α διὰ τοῦ αὐτοῦ δρόμου ὡς ὁ ἰππεὺς. Ποίαν ὥραν καὶ εἰς

ποίαν απόστασιν από τοῦ Α θὰ συναντηθοῦν, ἂν ὁ μὲν ἵππεὺς διανύη 10 χλμ. τὴν ὥραν, ὁ δὲ ποδηλάτης 14 χλμ. τὴν ὥραν καὶ ἡ απόστασις ΑΒ εἶναι 35 χλμ.

Παριστάνομεν τὰς ὥρας μὲ σημεῖα τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τὰς ἀποστάσεις μὲ σημεῖα τοῦ ἄξονος τῶν y (τῶν ἄξωνων τεμνομένων ἐνταῦθα εἰς τὸ Α). Δεχόμεθα ὅτι ἐκάστη ὑποδιαίρεσις ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x θὰ παριστάνῃ χρόνον διαφέροντα κατὰ 1 ὥραν τῆς παρακειμένης τῆς καὶ ἐκάστη ἐπὶ τοῦ y κατὰ 5 χλμ. Οὕτω μετὰ 1 ὥραν ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του ὁ ἵππεὺς θὰ εὑρίσκηται εἰς θέσιν παριστανομένην ὑπὸ τοῦ Μ ἔχοντος τετμημένην 7 ὥρ. καὶ τεταγμένην 10 χλμ., ἐνῶ ἡ πορεία του παριστάνεται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΜ



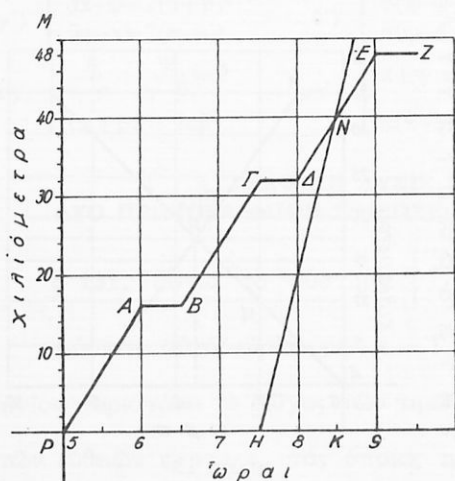
Σχ. 13

Ἡ θέσις τοῦ ποδηλάτου κατὰ τὴν ἀναχώρησίν του παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου Λ (6,5, 35) καὶ εἰς τὸ τέλος 1 ὥρ. μετ' αὐτὴν ὑπὸ τοῦ Ν μὲ τεταγμένην $35-14=21$ χλμ. Ἡ πορεία τούτου παριστάνεται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΝ. Τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως τῶν δύο κινήτων ἐπὶ τοῦ δρόμου ΑΒ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου Ρ (7, 7,5 ὥρ. 17,5 χλμ.). Ἀρα ἡ συνάντησις θὰ γίνῃ εἰς τὰς 7 ὥρ. 45 καὶ εἰς ἀπόστασιν 17,5 χλμ. ἀπὸ τοῦ Α (σχ. 13).

2) Ποδηλάτης ἀναχωρεῖ τὴν 5ην πρωϊνὴν ὥραν ἐκ τόπου Ρ διευθυνόμενος πρὸς τὸν Μ διανύων 16 χλμ. τὴν ὥραν καὶ σταθεύων πάντοτε ἐπὶ 30λ μετὰ ἀπὸ πορείαν 1 ὥρας. Ζητεῖται : α') ποίαν ὥραν θὰ ἔχῃ διανύσῃ 48 χλμ. ἀπὸ τοῦ Ρ, β') ποίαν ὥραν καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Ρ θὰ συναντηθῇ μὲ αὐτοκίνητον ἀναχωρήσαν ἐκ τοῦ Ρ τὴν 7ην ὥραν 30λ πρωϊνὴν, τὸ ὁποῖον κινεῖται πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν διανύων 40 χλμ. τὴν ὥραν

Ἐργαζόμενοι καθὼς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα παρατηροῦμεν ὅτι ὁ δρόμος τοῦ ποδηλάτου ἀπὸ τῆς 5ης ὥρας μέχρι

τῆς 6ης ὥρας παριστάνεται ὑπὸ τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος PA (σχ. 14), ὅπου τὸ P παριστάνει τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων. Ὁ δρόμος ἀπὸ τῆς 6,5ης ὥρας μέχρι τῆς 7,5ης ὥρας παριστάνεται ὑπὸ τοῦ



Σχ. 14

Ἡ πορεία τοῦ αὐτοκινήτου δίδεται ὑπὸ τῆς εὐθείας HN, ἐνῶ ἔχομεν H (7,5, 0) καὶ τέμνει ἡ HN τὴν τεθλασμένην γραμμὴν εἰς τὸ σημεῖον N ἔχον τετμημένην 8,5 ὥρας καὶ τεταγμένην 40 χλμ. Ἐπομένως ἡ συνάντησις θὰ γίνῃ τὴν 8ην ὥραν 30λ εἰς ἀπόστασιν 40 χλμ. ἀπὸ τοῦ τόπου P.

Προβλήματα γραφικῶν κατασκευῶν

276. Παραστήσατε γραφικῶς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος τὰς πορείας α') ἐνὸς αὐτοκινήτου καὶ μιᾶς ἀμαξοστοιχίας, β) μιᾶς δευτέρας ἀμαξοστοιχίας καὶ μιᾶς τρίτης. Τὰ μὲν δύο πρῶτα κινητὰ ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου P, τὰ δὲ δύο ἄλλα ἐκ τοῦ M. Τὸ αὐτοκίνητον ἀναχωρεῖ τὴν 13ην ὥραν 5λ καὶ φθάνει εἰς τὸ M τὴν 15ην ὥρ. 57λ μετὰ σταθμεύσει 5λ, 4λ, 2λ, 1λ εἰς ἕκαστον τῶν ἐνδιαμέσων σταθμῶν A, B, Γ, Δ, Ε. Ἡ ἐκ τοῦ P ἀμαξοστοιχία ἀναχωροῦσα τὴν 15ην ὥραν 25λ φθάνει εἰς τὸ M ἀνευ σταθμεύσεως τὴν 16ην ὥρ. 5λ. Ἡ ἐκ τοῦ M ἀναχωροῦσα τὴν 13ην ὥρ. 20λ φθάνει εἰς τὸ P τὴν 16ην ὥρ. 45λ μετὰ σταθμεύσει 2λ, 3λ, 4λ, 5λ εἰς τοὺς ἐνδιαμέσους σταθμοὺς Δ, Γ, Β, Α. Ἡ τρίτη ἀμαξοστοιχία ἀναχωροῦσα ἐκ τοῦ M τὴν 14ην ὥραν φθάνει εἰς τὸ P τὴν 15ην ὥραν 55λ μετὰ στάθμεισιν 3λ

ΒΓ καὶ ἀπὸ τῆς 8ης μέχρι τῆς 9ης ὥρας ὑπὸ τοῦ ΔΕ. Τὰ εὐθύγραμμα AB, ΓΔ, ΕΖ (παράλληλα τοῦ ἀξονος τῶν x) ἀντιστοιχοῦν πρὸς τοὺς χρόνους τῶν σταθμεύσεων. Οὕτως ἡ ὅλη πορεία μετὰ σταθμεύσεων τοῦ ποδηλάτου παριστάνεται ὑπὸ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς PABΓΔΕΖ. Ἡ ἀπόστασις 48 χλμ. ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον Ε ἔχον τετμημένην 9 ὥρας. Ἀρα τὴν 9ην ὥραν θὰ ἀπέχῃ ὁ ποδηλάτης 48 χλμ. ἀπὸ τοῦ P.

εις τὸν Α. Ἡ ἀπόστασις ΡΜ εἶναι 131 χλμ., ἡ δὲ τῶν ἐνδιαμέσων σταθμῶν ἀπὸ τοῦ Ρ εἶναι 51 χλμ., 66 χλμ., 80 χλμ., 95 χλμ., 122 χλμ., καὶ αἱ κινήσεις ὑποτίθενται ὁμαλαί. Εὗρετε γραφικῶς ποῦ συναντῶνται τὰ κινητὰ ἀνὰ δύο καὶ νὰ γίνουν αἱ πρέπουσαι ἐπαληθεύσεις.

277. Ἐκ δύο προσώπων τὸ ἓν ἔχει 63 500 δρχ. τὸ ἄλλο 125 000 δρχ. Κατ' ἔτος τοῦ μὲν α' αὐξάνεται τὸ ποσὸν κατὰ 8 000 δρχ. τοῦ δὲ β' ἐλαττοῦται κατὰ 12 500 δρχ. Μετὰ πόσα ἔτη αἱ περιουσίαι θὰ εἶναι ἴσαι; Νὰ λυθῇ γραφικῶς καὶ καὶ νὰ ἐπαληθευθῇ δι' ὑπολογισμοῦ.

278. Δύο ποδηλάται Α καὶ Β ἀναχωροῦν ὁ μὲν ἐκ τοῦ τόπου Μ τὴν 8ην ὥραν, ὁ δὲ ἐκ τοῦ Ν τὴν 9ην ὥραν 48λ καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησιν ὁ εἰς τοῦ ἄλλου. Ὁ Α συναντᾷ τὸν Β τὴν 11ην ὥραν φθάνει εἰς τὸν Ν τὴν 13ην ὥραν. Ἄν ἡ ἀπόστασις ΜΝ εἶναι 60 χλμ., νὰ εὗρεθῇ ὁ χρόνος, καθ' ὃν ὁ Β φθάνει εἰς τὸν Μ καὶ ἡ ταχύτης ἐκάστου ποδηλάτου. Ἡ λύσις νὰ γίνῃ, γραφικῶς καὶ νὰ ἐπαληθευθῇ διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ.

279. Μία τροchioδρομικὴ γραμμὴ ΑΒ μήκους 8 χλμ. διατρέχεται κατὰ δύο ἀντιθέτους φορὰς ὑπὸ ἁμαξῶν, αἱ ὁποῖαι ἀναχωροῦν ἀνὰ 10 λ διανύουσιν 12 χλμ. τὴν ὥραν περιλαμβανομένων καὶ τῶν σταθμεύσεων. Ἡ πρώτη ἀναχώρησις ἐκ τῶν Α καὶ Β γίνεται συγχρόνως τὴν 6ην ὥραν. Πεζοπόρος ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α τὴν 8ην ὥραν 12λ διευθυνόμενος πρὸς τὸ Β μετὰ ταχύτητα 4 χλμ. τὴν ὥραν. Νὰ εὗρεθῇ α') πόσας ἁμάξας θὰ συναντήσῃ ἐρχομένης ἐκ τοῦ Β, β') πόσαι ἁμάξαι ἐρχόμεναι ἐκ τοῦ Α θὰ τὸν συναντήσουν. Ἡ λύσις νὰ γίνῃ γραφικῶς καὶ ἡ ἐπαληθευσις λογιστικῶς.

280. Εὗρετε τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν :

$$\alpha') 2x + 3\psi = 1,$$

$$\text{καὶ } \psi - 3x = 4.$$

$$\beta') 0,3x + 0,1\psi = 1,2$$

$$\gg 2x - 5\psi + 5,6 = 0.$$

$$\gamma') 0,4x + 0,3\psi - 0,45 = 0,$$

$$\gg 1,6x + 0,4\psi + 1 = 0.$$

$$\delta') \frac{x-1}{3} = \frac{\psi+4}{7}$$

$$\gg x - 2\psi = 0.$$

$$\epsilon') \frac{x-\psi}{3} - \frac{\psi-x}{7} + 1 = 10,$$

$$\gg x - 7\psi = 0.$$

$$\sigma\tau') \frac{1}{x} - \frac{2}{\psi} = \frac{2}{x\psi},$$

$$\gg x + \psi = 3.$$

5. ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΥΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΩΝ

§ 132. Ἐὰν ἔχωμεν ἓν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων πρωτοβαθμίων μετὰ τρεῖς ἀγνώστους π.χ. τὸ

$$\begin{cases} x + 2\psi + 3\omega = 14 \\ 2x + \psi + \omega = 7 \\ 3x + 2\psi + 2\omega = 13 \end{cases} \quad (1)$$

δυνάμεθα νὰ λύσωμεν αὐτὸ μὲ μίαν ἀπὸ τὰς μεθόδους, τὰς ὁποίας ἐγνώρισαμεν. Οὕτω μὲ τὴν μέθοδον ἀπαλοιφῆς διὰ τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν ἀπαλείφομεν π.χ. τὸν x μεταξὺ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων τῶν (1) καὶ ἔχομεν :

$$\begin{array}{r|l} 2 & x+2\psi+3\omega=14 \\ -1 & 2x+\psi+\omega=7 \\ \hline & 3\psi+5\omega=21 \end{array}$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν μίαν τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων τοῦ δοθέντος συστήματος (1), ἔστω τὴν δευτέραν, μὲ τὴν οὕτως εὑρεθεῖσαν $3\psi+5\omega=21$, προκύπτει σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν τὸ

$$\begin{cases} x+2\psi+3\omega=14 \\ 3\psi+5\omega=21 \\ 3x+2\psi+2\omega=13 \end{cases} \quad (2)$$

Ἀπαλείφομεν τώρα τὸν x μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τρίτης τῶν (2) καὶ ἔχομεν

$$\begin{array}{r|l} 3 & x+2\psi+3\omega=14 \\ -1 & 3x+2\psi+2\omega=13 \\ \hline & 4\psi+7\omega=29 \end{array}$$

Δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν πρώτην ἢ τὴν τρίτην ἐξίσωσιν τοῦ (2) μὲ τὴν προκύψασαν $4\psi+7\omega=29$. Ἄς ἀντικαταστήσωμεν τὴν τρίτην καὶ ἔχομεν τὸ κατωτέρω σύστημα (3) ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (2) καὶ τὸ (1)

$$\begin{cases} x+2\psi+3\omega=14 \\ 3\psi+5\omega=21 \\ 4\psi+7\omega=29 \end{cases} \quad (3)$$

Μεταξὺ τῶν τελευταίων ἐξισώσεων τοῦ (3) ἀπαλείφομεν τὸν ψ καὶ εὐρίσκομεν $\omega=3$. Ἀντικαθιστῶμεν τὴν μίαν ἐκ τῶν δύο τελευταίων τοῦ (3), ἔστω τὴν τρίτην, μὲ τὴν $\omega=3$ καὶ ἔχομεν τὸ κατωτέρω σύστημα (4)

$$\begin{aligned} x+2\psi+3\omega &= 14 \\ 3\psi+5\omega &= 21 \\ \omega &= 3 \end{aligned} \quad (4)$$

τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὰ προηγούμενα. Ἀντικαθιστῶμεν

τὸ ω μὲ τὴν τιμὴν τοῦ εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων (4) καὶ εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ $\psi=2$. Τέλος, ἔὰν τὰς τιμὰς τοῦ ω καὶ ψ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν πρώτην τοῦ (1) ἢ τοῦ (4), εὐρίσκομεν εὐκόλως καὶ τὴν τιμὴν τοῦ $x=1$. Ἄρα αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων εἶναι $x=1$, $\psi=2$ καὶ $\omega=3$.

Τὸ ἀνωτέρω σύστημα (1) λύομεν καὶ δι' ἀπαλοιφῆς μὲ ἀντικατάστασιν ὡς ἐξῆς : Λύομεν τὴν μίαν τοῦ (1), ἔστω τὴν πρώτην, ὡς πρὸς τὸν ἓνα τῶν ἀγνώστων π.χ. ὡς πρὸς x θεωροῦντες τοὺς ἄλλους δύο ὡς γνωστούς. Οὕτως εὐρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x=14-2\psi-3\omega \quad (2')$$

Αὕτῃ μὲ τὰς δύο ἄλλας ἐξισώσεις τοῦ (1) ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς αὐτό. Τὴν τιμὴν ταύτην θέτομεν εἰς τὰς ἄλλας δύο ἐξισώσεις τοῦ (1) καὶ οὕτως εὐρίσκομεν τὰς κάτωθι δύο ἐξισώσεις

$$\text{μὲ δύο ἀγνώστους} \quad \begin{cases} 2(14-2\psi-3\omega) + \psi + \omega = 7 \\ 3(14-2\psi-3\omega) + 2\psi + 2\omega = 13 \end{cases}$$

$$\text{καὶ μετὰ τὴν κατάλληλον διάταξιν} \quad \begin{cases} 3\psi + 5\omega = 21 \\ 4\psi + 7\omega = 29 \end{cases}$$

Αὗται μὲ τὴν (2') ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἀνωτέρω ἐξισώσεων εὐρίσκομεν, κατὰ τὰ γνωστά, τὰς τιμὰς τῶν ψ καὶ ω , ἥτοι $\psi=2$ καὶ $\omega=3$. Ἀκούθως τὰς τιμὰς τούτων ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2') καὶ εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ $x=1$.

Τὸ δοθέν σύστημα (1) δυνάμεθα νὰ λύσωμεν εὐκόλως καὶ δι' ἀπαλοιφῆς ἀγνώστων μεταχειριζόμενοι τὴν μέθοδον τῆς συγκρίσεως.

Ἀ σ κ η σ ι ς

281. Λύσατε τὸ ἀνωτέρω σύστημα (1) διὰ τῆς μεθόδου ἀπαλοιφῆς διὰ συγκρίσεως.

$$\S 133. \text{ Ἐστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα } \begin{cases} 4x-5\omega+2\varphi = 0 \\ 3x+2\omega+7\varphi = 28 \quad (1) \\ x-\omega+2\varphi = 5 \end{cases}$$

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα αὐτὸ δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἐξῆς: Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς μὲν πρώτης ἐξισώσεως ἐπὶ κ_1 , τῆς δὲ δευτέρας ἐπὶ κ_2 καὶ προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα κατὰ μέλη,

μέ τα μέλη ἀντιστοιχῶς τῆς τρίτης ἐξίσωσως, ὅτε λαμβάνομεν τὴν

$$(4\kappa_1 + 3\kappa_2 + 1)x - (5\kappa_1 - 2\kappa_2 + 1)\omega + (2\kappa_1 + 7\kappa_2 + 2)\phi = 28\kappa_2 + 5. \quad (2)$$

Αὐτὴ μὲ τὰς δύο πρώτας, π.χ. τοῦ δοθέντος συστήματος, ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον αὐτοῦ. Ἄν θέσωμεν ἴσον μὲ 0 ἕκαστον τῶν συντελεστῶν τῶν ω καὶ ϕ τῆς ἀνωτέρω ἐξίσωσως (2)

$$\begin{cases} 5\kappa_1 - 2\kappa_2 + 1 = 0 \\ 2\kappa_1 + 7\kappa_2 + 2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

καὶ λύνοντες τὸ σύστημα αὐτὸ ὡς πρὸς κ_1 καὶ κ_2 , εὐρίσκομεν

$$\kappa_1 = -\frac{11}{93}, \quad \kappa_2 = -\frac{8}{39}.$$

Εἰσάγομεν τὰς τιμὰς αὐτὰς εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (2) καὶ εὐρίσκομεν $\left(-\frac{44}{39} - \frac{24}{39} + 1\right)x = -\frac{224}{39} + 5$ καὶ $x = 1$.

Ἄν θέσωμεν τοὺς συντελεστὰς τῶν x καὶ ϕ τῆς ἀνωτέρω ἐξίσωσως (2) ἴσον μὲ 0 ἕκαστον, θὰ ἔχωμεν

$$\begin{cases} 4\kappa_1 + 3\kappa_2 + 1 = 0 \\ 2\kappa_1 + 7\kappa_2 + 2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος (4) εὐρίσκομεν

$$\kappa_1 = -\frac{1}{22}, \quad \kappa_2 = -\frac{3}{11}.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς αὐτὰς εἰς τὴν (2), εὐρίσκομεν

$$\left(-\frac{5}{22} + \frac{6}{11} + 1\right)\omega = \frac{84}{11} - 5 \quad \text{καὶ} \quad \omega = 2.$$

Ὅμοιως ἐργαζόμεθα διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ ϕ καὶ εὐρίσκομεν, ἂν θέσωμεν ἴσον μὲ 0 ἕκαστον τῶν συντελεστῶν τοῦ x καὶ ω

$$\begin{cases} 4\kappa_1 + 3\kappa_2 + 1 = 0 \\ 5\kappa_1 - 2\kappa_2 + 1 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

ἐκ τῆς λύσεως δὲ τούτου εὐρίσκομεν $\kappa_1 = -\frac{5}{23}, \kappa_2 = -\frac{1}{23}$ καὶ τέλος $\phi = 3$.

Ἡ μέθοδος αὕτη, ἡ ὁποία εἶναι γενικωτέρα τῆς μεθόδου ἀπαλοιφῆς ἀγνώστου διὰ τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν, δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ διὰ τὴν λύσιν συστήματος καὶ μὲ περισσοτέρους τῶν τριῶν ἀγνώστους, καλεῖται δὲ μέθοδος τοῦ Bézout.

§ 134. Ἐν τέλει διὰ νὰ λύσωμεν σύστημα μ ἐξισώσεων πρωτοβαθμίων μὲ μ ἀγνώστους, ἀπαλείφομεν μεταξὺ τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν καὶ ἐκάστης τῶν μ - 1 ἄλλων ἐξισώσεων ἓνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀγνώστον. Οὕτω προκύπτουν μ-1 νέαι ἐξισώσεις μὲ μ-1 ἀγνώστους. Αὗται μὲ τὴν πρώτην τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ἐργαζόμεθα ὁμοίως λαμβάνοντες τὰς νέας μ-1 ἐξισώσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς δευτέρας καὶ ἐξῆς. Οὕτω προκύπτουν μ-2 ἐξισώσεις μὲ μ-2 ἀγνώστους. Αὗται μὲ τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου συστήματος ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Οὕτω προχωροῦντες θὰ εὕρωμεν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν μὲ μ ἐξισώσεις. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἡ τελευταία θὰ ἔχῃ ἓνα ἀγνώστον, ἡ προτελευταία δύο, ἡ πρὸ αὐτῆς τρεῖς καὶ οὕτω καθ' ἐξῆς, ἡ δὲ πρώτη θὰ ἔχῃ μ ἀγνώστους. Λύοντες τὴν τελευταίαν εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου. Εἰσάγομεν τὴν τιμὴν τούτου εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν καὶ λύομεν αὐτὴν ὡς πρὸς τὸν ἄλλον ἀγνώστον, προχωροῦμεν ὁμοίως εἰς τὴν ἀμέσως προηγουμένην ἐξίσωσιν καὶ οὕτω καθ' ἐξῆς μέχρι τῆς πρώτης, ὅτε εὐρίσκομεν τὰς τιμὰς ὅλων τῶν ἀγνώστων.

Ἀ σ κ ῆ σ ε ι ς

Ὅ μ ἄ ς π ρ ὶ τ η. 282. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

$$\alpha') \begin{cases} 2x+7\psi-11\omega=10 \\ 5x-10\psi+3\omega=-15 \\ -6x+12\psi-\omega=31 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} \frac{x+2\psi}{5x+6\omega} = \frac{1}{20} \\ \frac{3\psi+4\omega}{x+2\psi} = \frac{11}{4} \\ x+\psi+\omega=12 \end{cases} \quad \gamma') \begin{cases} x-2\psi+3\omega-3\phi=2 \\ \psi-2\omega+3\phi-4x=4 \\ \omega-2\phi+3x-4\psi=-4 \\ \phi-2x+3\psi-4\omega=-8 \end{cases}$$

$$\delta') \begin{cases} x-\psi+\omega=7 \\ 2x=\omega \\ 8\psi=5\omega \end{cases} \quad \epsilon') \begin{cases} 3x+6\psi-2\omega+9\phi=20 \\ 4\psi-6x+5\omega-5\phi=-5 \\ 2\omega-3x+8\psi-3\phi=-1 \\ 9\phi+10\psi+3\omega-6x=24 \end{cases} \quad \sigma\tau') \begin{cases} 0,5x+0,3\psi=0,15 \\ 0,4x-0,2\omega=-0,22 \\ 0,3\psi+0,4\omega=0,95 \end{cases}$$

$$\zeta') \left\{ x + \frac{\psi}{2} = \psi + \frac{\omega}{3} = \omega + \frac{x}{4} = 100 \right.$$

Ὅ μ ἄ ς δ ε υ τ ῆ ρ α. 283. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

$$\alpha') \begin{cases} \alpha x + \psi + \omega = \alpha^2 \\ x + \alpha \psi + \omega = 3\alpha \\ x + \psi + \alpha \omega = 2 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} \alpha x + \psi = (\alpha + \beta)(\alpha + 1) \\ \psi - \omega = \gamma \\ x + (\alpha + \beta)\omega = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1) \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} \alpha x + \beta \psi + \gamma \omega = 3\alpha\beta\gamma \\ \frac{x}{\alpha-1} = \frac{\psi}{\beta-1} = \frac{\omega}{\gamma-1} \end{cases}$$

$$\delta') \begin{cases} \alpha x = \beta \psi = \gamma \omega \\ x + \psi + \omega = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma} \end{cases}$$

$$\epsilon') \begin{cases} x + \alpha(\psi + \omega) = \kappa \\ \psi + \beta(\omega + x) = \lambda \\ \omega + \gamma(x + \psi) = \mu \end{cases}$$

$$\sigma\tau') \begin{cases} x + \kappa\psi + \lambda\omega = \alpha \\ \psi + \kappa\omega + \lambda x = \beta \\ \omega + \kappa x + \lambda\psi = \gamma \end{cases}$$

$$\zeta') \begin{cases} x + \psi + \omega = 0 \\ (\beta + \gamma)x + (\gamma + \alpha)\psi + (\alpha + \beta)\omega = 0 \\ \beta\gamma x + \alpha\gamma\psi + \alpha\beta\omega = 1 \end{cases}$$

$$\eta') \begin{cases} x + \psi + \omega = 1 \\ \alpha x + \beta\psi + \gamma\omega = \kappa \\ \alpha^2 x + \beta^2\psi + \gamma^2\omega = \kappa^2 \end{cases}$$

6. ΛΥΣΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑ ΤΕΧΝΑΣΜΑΤΩΝ

§ 135. Ἐνίοτε πρὸς λύσιν συστήματός τινος πρὸ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν γνωστῶν μεθόδων μεταχειριζόμεθα τεχνάσματά τινα στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν θεμελιωδῶν νόμων καὶ τῶν ιδιοτήτων τῶν πράξεων. Τὸ εἶδος τῶν τεχνασμάτων αὐτῶν δέν εἶναι ὠρισμένον καὶ φανερόν διὰ κάθε σύστημα, ἀλλ' ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς συνηθείας καὶ τῆς δεξιότητος τοῦ νοῦ περὶ τὴν λύσιν.

$$\text{Οὕτω π.χ. πρὸς λύσιν τοῦ συστήματος} \begin{cases} x + 6\psi + 7\omega = 30 \\ x : \psi : \omega = 6 : 8 : 3 \end{cases} \quad (1)$$

γράφομεν τὰς δευτέρας ἐξισώσεις ὡς ἐξῆς : $\frac{x}{6} = \frac{\psi}{8} = \frac{\omega}{3}$, ὅτε θὰ εἰ-
ναι $\frac{x}{6} = \frac{6\psi}{48} = \frac{7\omega}{21} = \frac{x+6\psi+7\omega}{75} = \frac{30}{75} = \frac{2}{5}$. Ἐκ τούτων εὐρίσκομεν
 $\frac{x}{6} = \frac{2}{5}$ καὶ $x = \frac{12}{5}$, $\frac{6\psi}{48} = \frac{2}{5}$, $\psi = \frac{2 \cdot 48}{5 \cdot 6} = \frac{16}{5}$, $\frac{7\omega}{21} = \frac{2}{5}$, $\omega = \frac{2 \cdot 21}{5 \cdot 7} = \frac{6}{5}$.

Τὸ αὐτὸ ἀνωτέρω σύστημα δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ ὡς ἐξῆς :

Θέτομεν $\frac{x}{6} = \frac{\psi}{8} = \frac{\omega}{3} = \tau$. Ἐκ τούτων εὐρίσκομεν $x = 6\tau$,
 $\psi = 8\tau$, $\omega = 3\tau$. Τὰς τιμὰς τῶν x, ψ, ω θέτομεν εἰς τὴν πρώτην τῶν
δοθεισῶν ἐξισώσεων καὶ εὐρίσκομεν $6\tau + 6 \cdot 8\tau + 7 \cdot 3\tau = 30$ ἢ
 $75\tau = 30$, $\tau = \frac{30}{75} = \frac{2}{5}$. Οὕτως ἔχομεν $x = 6\tau = \frac{6 \cdot 2}{5} = \frac{12}{5}$,
 $\psi = 8\tau = 8 \cdot \frac{2}{5} = \frac{16}{5}$, $\omega = 3\tau = 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$.

$$\text{Ἐστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα} \quad \begin{cases} x + \psi = 5 \\ \psi + \omega = 8 \\ \omega + \phi = 9 \\ \phi + \tau = 11 \\ \tau + x = 9 \end{cases} \quad (2)$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη καὶ εὐρίσκομεν

$$2x + 2\psi + 2\omega + 2\phi + 2\tau = 42, \quad \text{ἄρα } x + \psi + \omega + \phi + \tau = 21.$$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὴν πρώτην καὶ τρίτην τῶν ἐξισώσεων τῶν (2) καὶ εὐρίσκομεν $x + \psi + \omega + \phi = 14$. Τὰ μέλη ταύτης ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰ τῆς προηγουμένης καὶ εὐρίσκομεν $\tau = 21 - 14$ ἢ $\tau = 7$. Θέτομεν εἰς τὴν τετάρτην $\tau = 7$ καὶ εὐρίσκομεν $\phi + 7 = 11$, ἄρα $\phi = 4$. Θέτομεν εἰς τὴν τελευταίαν $\tau = 7$ καὶ εὐρίσκομεν $7 + x = 9$, ἄρα $x = 2$. Θέτομεν εἰς τὴν πρώτην $x = 2$ καὶ εὐρίσκομεν $\psi = 3$. Θέτομεν εἰς τὴν δευτέραν $\psi = 3$ καὶ εὐρίσκομεν $\omega = 5$.

$$\text{Ἐστω ἀκόμη πρὸς λύσιν τὸ σύστημα} \quad \begin{cases} x + \psi + \omega = 15 \\ x + \psi + \tau = 16 \\ x + \omega + \tau = 18 \\ \psi + \omega + \tau = 30 \end{cases} \quad (3)$$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος καὶ εὐρίσκομεν $3(x + \psi + \omega + \tau) = 79$, ἄρα

$$x + \psi + \omega + \tau = \frac{79}{3} \quad (4)$$

Ἀφαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων ἀπὸ τὰ μέλη τῆς (4) καὶ εὐρίσκομεν $\tau = \frac{79}{3} - 15 = \frac{79-45}{3} = \frac{34}{3}$

Ἀφαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς δευτέρας τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων ἀπὸ τὰ τῆς (4) καὶ εὐρίσκομεν $\omega = \frac{79}{3} - 16 = \frac{79-48}{3} = \frac{31}{3}$.

Ἀφαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς τρίτης τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων ἀπὸ τὰ τῆς (4) καὶ εὐρίσκομεν $\psi = \frac{79}{3} - 18 = \frac{79-54}{3} = \frac{25}{3}$.

Τέλος ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς (4) τὰ τῆς τελευταίας τῶν δοθεισῶν καὶ εὐρίσκομεν $x = \frac{79}{3} - 30 = \frac{79-90}{3} = -\frac{11}{3}$.

Άσκησεις

Όμως πρώτη. 284. Να λυθούν τα κάτωθι συστήματα :

$$\alpha') \begin{cases} \frac{x}{6} = \frac{\psi}{3} = \frac{\omega}{18} \\ 3x + 2\psi + \omega = 34 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{\psi} = 5 \\ \frac{x}{2} + \frac{\psi}{3} = 2x\psi \end{cases} \quad \gamma') \begin{cases} \frac{x}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{\phi}{\delta} \\ \alpha x + \beta\psi + \gamma\omega + \delta\phi = \frac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

$$\delta') \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{\psi} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\omega} = \frac{1}{20} \\ \frac{1}{\omega} + \frac{1}{x} = \frac{1}{15} \end{cases} \quad \epsilon') \begin{cases} \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{\psi} - \frac{\gamma}{\omega} = \lambda \\ \frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{\psi} + \frac{\gamma}{\omega} = \mu \\ -\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{\psi} + \frac{\gamma}{\omega} = \nu \end{cases} \quad \zeta') \begin{cases} \mu x = \nu \psi = \rho \omega \\ \alpha x + \beta\psi + \gamma\omega = \delta \end{cases}$$

$$\eta') \begin{cases} \psi\omega + x\omega + x\psi = 12x\psi\omega \\ 3\psi\omega - 4x\omega + 5x\psi = 15x\psi\omega \\ 4\psi\omega - 3x\omega + 12x\psi = 13x\psi\omega \end{cases} \quad \theta') \begin{cases} \frac{1}{3x-2\psi+1} + \frac{1}{x+2\psi-3} = \frac{5}{12} \\ \frac{1}{x+2\psi-3} - \frac{1}{3x-2\psi+1} = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$\iota') \begin{cases} \frac{x\psi}{5x+4\psi} = 3 \\ \frac{\psi\omega}{3\psi+5\omega} = 7 \\ \frac{\omega x}{2\omega+3x} = 6 \end{cases} \quad \kappa') \begin{cases} 3x + 7\psi = 23x\psi \\ 3\omega + 8x = 38x\omega \\ 5\psi - 6\omega = 2\psi\omega \end{cases}$$

Όμως δεύτερα. 285. Λύσατε τα κάτωθι συστήματα :

$$\alpha') \begin{cases} (p+\mu)x - (p-\mu)\psi = 2\nu\rho \\ (\mu+\nu)\psi - (\mu-\nu)\omega = 2\mu\rho \\ (\nu+\rho)\omega - (\nu-\rho)x = 2\mu\nu \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} (\omega+x)\mu - (\omega-x)\nu = 2\psi\omega \\ (x+\psi)\nu - (x-\psi)\rho = 2x\omega \\ (\psi+\omega)\rho - (\psi-\omega)\mu = 2\psi x \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} 3\psi\omega + 2x\omega - x\psi = x\psi\omega \\ 30\psi\omega + 12x\psi - 18x\omega = 13x\psi\omega \\ 18x\psi + 24\psi\omega - 42x\omega = 5x\psi\omega \end{cases} \quad \delta') \begin{cases} \frac{10}{2x+3\psi} - \frac{49}{2x-3\omega} = -4\frac{7}{8} \\ \frac{2}{2x+3\psi} - \frac{6}{5\psi-4\omega} = -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} \left(\frac{4}{2x-3\omega} \right) - \frac{3}{5\psi-4\omega} = 0 \end{cases}$$

Ὁ μὰς τρίτη. 286. Ἐξηγήσατε τὴν διερεύνησιν τοῦ συστήματος

$$\begin{cases} \alpha x + \beta \psi = \gamma \\ \alpha_1 x + \beta_1 \psi = \gamma_1 \end{cases}$$

γραφικῶς, ἥτοι τί σημαίνει γεωμετρικῶς τὸ ὅτι τὸ σύστημα ἐπιδέχεται μίαν λύσιν, ἄπειρον πλῆθος λύσεων ἢ ὅτι εἶναι ἀδύνατον.

287. Τί σημαίνει γεωμετρικῶς τὸ ὅτι τρεῖς ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους x καὶ ψ ἐπαληθεύονται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν;

7. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

§ 136. Λέγομεν ὅτι πρόβλημά τι εἶναι πρωτοβαθμίου συστήματος ὡς πρὸς δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους, ἂν ἡ λύσις αὐτοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν συστήματος πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους. Διὰ τὴν λύσιν τοιοῦτου προβλήματος σχηματίζομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτοῦ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἐπιταγμάτων, λύομεν τὸ σύστημα αὐτῶν καὶ ἐξετάζομεν, ἂν ἡ λύσις πληροῖ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος, ἵνα αὕτη εἶναι δεκτὴ.

Ι. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

α') Ἄν ὁ Α δώσῃ 10000 δρχ. εἰς τὸν Β, θὰ ἔχῃ οὗτος τριπλάσια τοῦ Α. Ἐὰν ὁ Β δώσῃ 20000 δρχ. εἰς τὸν Α, θὰ ἔχῃ ὁ Α διπλάσια τοῦ Β. Πόσας δρχ. ἔχει ὁ καθεὶς;

Περιορισμός. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι θετικοί.

Ἐὰν μὲ x παραστήσωμεν τὰς δρχ. τοῦ Α καὶ ψ τὰς τοῦ Β, δώσῃ δὲ 10000 δρχ. ὁ Α εἰς τὸν Β, τὰ μὲν ἀπομένοντα χρήματα εἰς τὸν Α θὰ εἶναι $(x-10000)$ δραχμαί, τὰ δὲ τοῦ Β θὰ εἶναι $(\psi+10000)$ δραχμαί καὶ θὰ ἔχωμεν $3(x-10000) = \psi+10000$.

Ἐὰν ὁ Β δώσῃ 20 000 δρχ. εἰς τὸν Α, θὰ εἶναι $x+20000=2(\psi-20000)$.

$$\text{"Ὡστε ἔχομεν τὸ σύστημα"} \quad \begin{cases} 3(x-10000) = \psi+10000 \\ x+20000 = 2(\psi-20000), \end{cases}$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὐρίσκομεν $x=28000$ δρχ., $\psi=44000$ δρ. καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτὴ.

β') Νὰ εὐρεθῇ διψήφιος ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 10, ἐὰν δὲ ἀλλάξωμεν τὰ ψηφία του νὰ προκύπτῃ τὸ τριπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ.

Περιορισμός. Ἄν μὲ ψ παραστήσωμεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ μὲ τὸ x τὸ τῶν μονάδων τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι $10\psi+x$, τὰ δὲ x καὶ ψ πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιοι μονοψήφιοι > 0 .

Κατὰ τὰ ἐπιτάγματα θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} x + \psi = 10 \\ 10\psi + x = 3(10x + \psi). \end{cases}$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὐρίσκομεν $\psi = 8 \frac{1}{18}$, $x = 1 \frac{17}{18}$. Ἐπομένως ἡ λύσις ἀπορρίπτεται, ἦτοι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

γ') Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ θὰ ἀπέχουν τὸ ἐν τοῦ ἄλλου 12 μέτρα μὲν ἐὰν κινηθοῦν ἐπὶ 12^ς πρὸς τὴν αὐτὴν φορὰν, 204 μέτρα δὲ ἐὰν πρὸς ἀντιθέτους φοράς. Πόση εἶναι ἡ ταχύτης καθενὸς (κινουμένων ὁμαλῶς) ;

Ἐστω x μέτρα ἡ ταχύτης τοῦ α' καὶ ψ ἡ τοῦ β' κατὰ δευτερόλεπτον. Μετὰ 12^ς τὸ α' θὰ διατρέξῃ $12x$ μ. καὶ τὸ β' 12ψ μ. ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν θὰ εἶναι $(12x - 12\psi)$ μ. ἐὰν ἔχουν τὴν αὐτὴν καὶ $(12x + 12\psi)$ μ. ἐὰν τὴν ἀντίθετον. Κατὰ τὰ ἐπιτάγματα θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 12x - 12\psi = 12 \\ 12x + 12\psi = 204 \end{cases} \quad \text{ἢ τὸ ἰσοδύναμον} \quad \begin{cases} x - \psi = 1 \\ x + \psi = 17 \end{cases}$$

Ἐκ τῆς λύσεως τούτου εὐρίσκομεν $x = 9$ μ., $\psi = 8$ μ. καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτὴ.

δ') Ἐχει τις οἶνον δύο ποιοτήτων· τῆς μὲν α' ἡ ὁκᾶ τιμᾶται α δρχ. τῆς δὲ β', β δρχ. Πόσας ὁκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἐκάστης ποιότητος, ὥστε νὰ σχηματίσῃ κρᾶμα μ ὁκάδων τιμώμενον γ δρχ. κατ' ὁκᾶν (χωρὶς κέρδος ἢ ζημίαν) ;

Ἐστω ὅτι θὰ λάβῃ x ὁκάδας ἐκ τῆς πρώτης ποιότητος καὶ ψ ἐκ τῆς δευτέρας. Θὰ ἔχωμεν προφανῶς τὸ σύστημα

$$\begin{cases} x + \psi = \mu \\ \alpha x + \beta \psi = \gamma \mu \end{cases}$$

Ἐκ τῆς λύσεως τούτου εὐρίσκομεν $x = \frac{(\beta - \gamma)\mu}{\beta - \alpha}$, $\psi = \frac{(\gamma - \alpha)\mu}{\beta - \alpha}$.

Διερεύνησις. Ἵνα ὑπάρχῃ μία μόνη λύσις, πρέπει $\beta - \alpha \neq 0$ ἢ $\beta \neq \alpha$. Καὶ ἂν εἶναι $\beta > \alpha$, πρέπει νὰ εἶναι $\alpha < \gamma < \beta$, ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ ψ νὰ εἶναι θετικάι. Ἄν εἶναι $\beta < \alpha$, πρέπει νὰ εἶναι $\beta < \gamma < \alpha$, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἄν εἶναι $\beta = \alpha$, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον ἄλλως τε τότε δὲν δύναται νὰ γίνῃ λόγος περὶ μίγματος.

Ἐν γένει διὰ νὰ ἐπιδέχεται λύσιν τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ εἶναι $\beta > \gamma > \alpha$ ἢ $\beta < \gamma < \alpha$.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

288. Παιδίον λέγει εις άλλο: «'Εάν μοῦ δώσης τὸ ἡμισυ τῶν μῆλων σου, θὰ ἔχω 40 μῆλα». Τὸ ἄλλο ἀπαντᾷ: «Δὸς μου σὺ τὸ ἡμισυ τῶν ἰδικῶν σου, διὰ νὰ ἔχω 35». Πόσα μῆλα ἔχει καθέν;

289. Νὰ εὐρεθοῦν δύο ἀριθμοί, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ α' εἶναι τριπλάσιος τοῦ β' καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ α' μείον τὸ τριπλάσιον τοῦ β' νὰ ἰσοῦται μὲ 42.

290. Νὰ εὐρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου μείον τὸ τριπλάσιον τοῦ δευτέρου νὰ ἰσοῦται μὲ 5 καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου μείον 25 νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ δεκαπενταπλάσιον τοῦ δευτέρου.

291. Ὁ Ἱέρων τῶν Συρακουσῶν ἔδωκε νὰ τοῦ κατασκευάσουν στέφανον ἀπὸ χρυσὸν βάρους 7 465 γραμ. Ἵνα εὖρη ὁ Ἀρχιμήδης, ἐρωτηθεὶς μήπως ὁ χρυσοχὸς ἀντικατέστησε χρυσὸν δι' ἀργύρου, ἐβύθισε τὸν στέφανον εἰς ὕδωρ καὶ ἔχασεν οὗτος 467 γραμ. τοῦ βάρους του. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ χρυσὸς χάνει εἰς τὸ ὕδωρ τὰ 0,052 καὶ ὁ ἀργυρὸς 0,095 τοῦ βάρους του, πόσος ἦτο ὁ χρυσὸς τοῦ στεφάνου καὶ πόσος ὁ ἀργυρὸς;

292. Δίδει ὁ Α εἰς τὸν Β μ δραχ. καὶ ἔχει ὁ Β διπλάσια τοῦ Α. Δίδει ὁ Β εἰς τὸν Α μ δραχ. καὶ ἔχει ὁ Α διπλάσια τοῦ Β. Πόσα εἶχεν ἕκαστος ἐξ ἀρχῆς;

293. Δύο κινητὰ ἀπέχοντα α μέτρα μεταξύ των κινουῦνται ὁμαλῶς καὶ ἀντιθέτως ἀναχωρήσαντα συγχρόνως. Ὅταν μετὰ τ δευτερόλεπτα συνηντήθησαν τὸ ἐν εἶχεν διατρέξει β μέτρα περισσότερα τοῦ ἄλλου. Ποίᾳ ταχύτητι εἶχον;

294. Ἐκ δύο τόπων ἀπεχόντων α μέτρα ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο κινητὰ κινούμενα ὁμαλῶς. Ἄν μὲν κινουῦνται ἀντιθέτως, συναντῶνται μετὰ λ₁ ὥρας, ἂν δὲ πρὸς τὴν αὐτὴν φορὰν, συναντῶνται μετὰ λ₂ ὥρας. Ποίᾳ ταχύτητι εἶχον;

295. α ἄνδρες καὶ γυναικες ἐπλήρωσαν ἐν ὧν β δραχ. Ἐκ τῶν ἀνδρῶν ἕκαστος ἐπλήρωσε γ δραχ. καὶ ἐκ τῶν γυναικῶν ἕκαστη δ δραχ. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες; Μερικὴ περίπτωσις α=6, β=260, γ=50, δ=30.

II. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΥΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

§ 137. α') Νὰ εὐρεθῇ τριψήφιος ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 21 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ψηφίων διπλάσιον τοῦ μεσαίου· ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ ψηφία τῶν ἑκατοντάδων καὶ δεκάδων του, ὁ ἀριθμὸς ἐλαττώνεται κατὰ 90.

Ἐὰν μὲ x παραστήσωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων, μὲ ψ τῶν δεκάδων καὶ μὲ ω τὸ τῶν μονάδων (ἐνῷ τὰ x, ψ, ω πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιοι θετικοὶ μονοψήφιοι), ὁ ἀριθμὸς παριστάνεται μὲ $100x + 10\psi + \omega$ καὶ θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} x + \psi + \omega = 21 \\ x + \omega = 2\psi \\ 100x + 10\psi + \omega - 90 = 100\psi + 10x + \omega, \end{cases}$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὐρίσκομεν $x=8$, $\psi=7$, $\omega=6$. Ἀρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι 876.

β') Ὁ Α καὶ ὁ Β μαζὶ ἐργαζόμενοι τελειώνουν ἐν ἔργον εἰς 5 ἡμέρας, ὁ Α καὶ ὁ Γ εἰς 6 ἡμέρας, ὁ δὲ Β καὶ Γ εἰς 5,5 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας καθεὶς μόνος τῶν Α, Β, Γ δύναται νὰ ἐκτελέσῃ τὸ ἔργον ;

Περιορισμός. Οἱ ζητούμενοι πρέπει νὰ εἶναι θετικοί.

Λύσις. Ἐστώσαν x, ψ, ω οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί. Ὁ Α εἰς μίαν ἡμέραν θὰ ἐκτελέσῃ τὸ $\frac{1}{x}$ τοῦ ἔργου, ὁ Β τὸ $\frac{1}{\psi}$ καὶ ὁ Γ τὸ $\frac{1}{\omega}$. Ἀρα οἱ Α καὶ Β εἰς μίαν ἡμέραν ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{x} + \frac{1}{\psi}$ τοῦ ἔργου καὶ αὐτὸ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ. Διότι ἀφοῦ εἰς 5 ἡμέρας ἐκτελοῦν τὸ ἔργον, εἰς μίαν ἡμέραν ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου. Ὡστε ἔχομεν

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\psi} = \frac{1}{5}.$$

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὐρίσκομεν τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{\psi} = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{\omega} = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\omega} = \frac{1}{5,5} \end{cases} \quad (1)$$

Προσθέτοντες τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις κατὰ μέλη καὶ διαιροῦντες τὰ ἐξαγόμενα διὰ 2 εὐρίσκομεν $\frac{1}{x} + \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\omega} = \frac{181}{660}$.

Ἀφαιροῦντες ἀπ' αὐτῆς τὴν πρώτην τῶν (1) εὐρίσκομεν $\frac{1}{\omega} = \frac{49}{660}$. Ἀρα $\omega = \frac{660}{49} = 13 \frac{23}{49}$.

Ὁμοίως εὐρίσκομεν $\psi = 9 \frac{21}{71}$ καὶ $x = 10 \frac{50}{61}$.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α.

Ὁ μ α ς π ρ ώ τ η. 296. Τρεῖς ἀνθρώποι εἶχον ποσὸν τι χρημάτων ἕκαστος καὶ συνεφώνησαν κατὰ σειρὰν νὰ διπλασιάσῃ καθεὶς τὰ χρήματα τῶν δύο ἄλλων. Εἰς τὸ τέλος εὐρέθη ἕκαστος μὲ 1600 δρχ. Τί ποσὸν εἶχεν ἕκαστος κατ' ἀρχάς ;

297. Τρεις άνθρωποι ήγόρασαν κτήμα αντί 64 000 δρχ. 'Ο πρώτος θὰ ἡ-
δύνατο νὰ πληρώσῃ ὁλόκληρον τὸ ποσόν, ἂν ὁ δεύτερος τοῦ ἔδιδε τὰ $\frac{5}{8}$
τῶν ὧν εἶχεν. 'Ο δεύτερος θὰ ἡδύνατο νὰ πληρώσῃ τὸ ποσόν, ἂν ὁ τρίτος
τοῦ ἔδιδε τὰ $\frac{8}{9}$ τῶν ἰδικῶν του. 'Ο τρίτος διὰ νὰ πληρώσῃ, τοῦ ἔλλειπε τὸ
ἡμισυ τῶν ὧν εἶχεν ὁ πρῶτος καὶ τὰ $\frac{3}{16}$ τῶν ὧν εἶχεν ὁ δεύτερος. Πόσα
εἶχεν ἕκαστος ;

298. Τρεῖς γυναῖκες πωλοῦν αὐγά. 'Εὰν ἡ πρώτη ἔδιδε τὸ $\frac{1}{7}$ καὶ ἡ τρίτη τὸ
 $\frac{1}{13}$ τῶν ἰδικῶν της εἰς τὴν δευτέραν, θὰ εἶχον καὶ αἱ τρεῖς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν αὐ-
γῶν. 'Εὰν καὶ αἱ τρεῖς ἐξ ἀρχῆς εἶχον 360 αὐγά, πόσα εἶχεν ἕκαστη ;

299. Νὰ εὐρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων
εἶναι 17, τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων εἶναι διπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων,
καὶ ὅταν ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ ὁ 396 εὐρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν τὸν προκύπτοντα
δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός ;

300. Νὰ εὐρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ τοιοῦτοι ὥστε ὁ πρῶτος καὶ τὸ ἡμίθροισμα
τῶν δύο ἄλλων νὰ εἶναι 120, ὁ δὲ δεύτερος καὶ τὸ δέκατον πέμπτον τῆς διαφορᾶς
τοῦ τρίτου ἀπὸ τοῦ πρώτου νὰ ἰσοῦται μὲ 62, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν νὰ ἰσοῦ-
ται μὲ 190.

'Ο μ ἄ ς δ ε υ τ έ ρ α. (Διάφορα). 301. 'Εχει τις κεφάλαιον 54 000 δρχ. καὶ
65 000 δρχ., λαμβάνει δὲ κατ' ἔτος τόκον 3 840 δρχ. καὶ ἐκ τῶν δύο. 'Εὰν τὸ πρῶ-
τον ἐτοκίζετο πρὸς τὸ ἐπιτόκιον τοῦ δευτέρου καὶ ἀντιστρόφως, θὰ ἐλάμβανε
55 δρχ. περισσοτέρας ὥς τόκον ἢ πρίν. Πεῖα τὰ ἐπιτόκια ;

302. Ποσὸν 8100 δρχ. νὰ μοιρασθῇ εἰς τρία πρόσωπα, ὥστε τὰ μερίδια τῶν
μὲν α' καὶ β' νὰ εἶναι 2 : 3, τῶν δὲ β' καὶ γ' 3 : 4. Ποῖα τὰ μερίδια ;

303. 'Αγοράζει τις δύο εἶδη ὑφασμάτων, ἐκ τοῦ μὲν πρώτου 5 μ. ἐκ δὲ τοῦ
δευτέρου 6 μ. ἀντὶ 1220 δρχ. 'Επειδὴ ὁ ἔμπορος ἐνήλλαξε τὰ δύο εἶδη, ἐξημ-
θη ὁ ἀγοραστής 20 δρχ. Πόσον ἐτιμᾶτο τὸ μέτρον καθενὸς εἶδους ;

304. Δύο δυνάμεις ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ὁμορρόπως μὲν ἔχουν
συνισταμένην 16 kg. ἀντιρρόπως δὲ 2 kg. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις καθεμιάς τούτων ;

305. 'Ο Α λέγει εἰς τὸν Β : δός μου 10 ἐκ τῶν μῆλων σου καὶ θὰ ἔχω 1,5 τῶν
ἰδικῶν σου. 'Ο Β ἀπαντᾷ : δός μου 10 ἐκ τῶν ἰδικῶν σου, διὰ νὰ ἔχω τετραπλάσια
τῶν ἰδικῶν σου. Πόσα εἶχεν ὁ καθείς ;

'Ο μ ἄ ς τ ρ ί τ η (Κινήσεως). 306. 'Εκ δύο σημείων ἀπεχόντων 1500 μ.
ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο κινητὰ ὁμαλῶς καὶ ἀντιθέτως κινούμενα. 'Όταν συν-
ηντήθησαν τὸ πρῶτον εἶχε διατρέξει 300 μ. περισσότερον τοῦ ἄλλου. Ποῖος εἶναι
ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων των ;

307. 'Απὸ δύο τόπων ἀπεχόντων 8 μ ἀναχωροῦν δύο κινητὰ καὶ συναντῶν-
ται μετὰ t_1 δ. 'Εὰν μὲν ἠϋζάνετο ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου κατὰ $\lambda\%$, ἡ δὲ τοῦ δευ-
τέρου ἡλαττώνετο κατὰ $\lambda_1\%$, θὰ συνηντῶντο μετὰ t_2 δ. Ποῖαι εἶναι αἱ ταχύτη-
τες αὐτῶν ; Νὰ γίνῃ διερεύνησις.

308. Ἀπὸ τῶν ἄκρων τόξου κύκλου 45° κινουῦνται ἐπ' αὐτοῦ δύο κινητὰ ἀντιθέτως καὶ συναντῶνται μετὰ 3δ. Ἐὰν κινουῦνται πρὸς τὴν αὐτὴν φορὰν συναντῶνται μετὰ 5δ. Πόσων μοιρῶν τόξον διανύει κάθε κινητὸν εἰς 1δ ;

Ἄς τ ε τ ἄ ρ τ η. 309. Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι δύο τρίτα τοῦ τῶν μονάδων. Ἄν γραφοῦν τὰ ψηφία αὐτοῦ κατ' ἀντίστροφον τάξιν, προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 18 μεγαλύτερος του.

310. Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμὸς περιεχόμενος μεταξὺ 400 καὶ 500, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων νὰ εἶναι 9. Ἄν ἀντιστραφῇ ἡ τάξις τῶν ψηφίων του, προκύπτει ἀριθμὸς ἴσος μὲ τριάκοντα ἐξ τεσσαρακοστὰ ἑβδομα τοῦ ἀριθμοῦ.

311. Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, τὸ δὲ τῶν δεκάδων εἶναι τὸ ἡμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Ἄν γραφοῦν τὰ ψηφία του κατ' ἀντίστροφον τάξιν, προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 198 μεγαλύτερος αὐτοῦ.

312. Ἐὰν παρεμβάλωμεν μεταξὺ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ δεκάδων διψηφίου ἀριθμοῦ τὸ 4, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι 604. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν δεύτερον ἀριθμὸν διὰ τοῦ πρώτου, εὐρίσκομεν πηλίκον 9 καὶ ὑπόλοιπον 34. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς.

Περίληψις περιεχομένων Κεφαλαίου IV.

Ὁρισμὸς συστήματος ἐξισώσεων (σύνολον δύο ἢ περισσοτέρων ἐξισώσεων, τὰς ὁποίας ἐπαληθεύουν αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων).

Ὁρισμὸς τῆς λύσεως συστήματος ἐξισώσεων.

Ὁρισμὸς ἰσοδυνάμων συστημάτων (ἂν πᾶσαι αἱ λύσεις οἰουδήποτε ἐξ αὐτῶν εἶναι λύσεις καὶ τῶν ἄλλων συστημάτων.).

Ἰδιότητες τῶν συστημάτων.

$$\begin{array}{l} \text{1ον Τὰ συστήματα π.χ.} \quad \begin{array}{lll} A=B. & A_1=B_1 & A_2=B_2 \\ A=B, & A_1=B_1, & A_1+A_2=B_1+B_2 \end{array} \end{array}$$

εἶναι ἰσοδύναμα.

2ον Τὰ συστήματα π.χ.

$$A(x, \psi, \omega) = B(x, \psi, \omega), \quad x = \varphi(\psi, \omega), \quad \Gamma(x, \psi, \omega) = \Delta(x, \psi, \omega)$$

$$A[\varphi(\psi, \omega), \psi, \omega] = B[\varphi(\psi, \omega), \psi, \omega], \quad x = \varphi(\psi, \omega),$$

$$\Gamma[\varphi(\psi, \omega), \psi, \omega] = \Delta[\varphi(\psi, \omega), \psi, \omega]$$

εἶναι ἰσοδύναμα.

Ὁρισμὸς βαθμοῦ συστήματος ἐξισώσεων (ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους του).

Λύσις συστήματος δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους α' βα-

θμοῦ (μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν ἀγνώστου, δι' ἀντικαταστάσεως, διὰ συγκρίσεως).

$$\text{Διερεύνησις τοῦ συστήματος} \quad \begin{cases} \alpha x + \beta \psi = \gamma \\ \alpha_1 x + \beta_1 \psi = \gamma_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{*Αν } \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0 \text{ μία λύσις} \quad & x = \frac{\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} \\ & \psi = \frac{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} \end{aligned}$$

*Αν $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$ τὸ σύστημα εἶναι ἢ ἀδύνατον ἢ ἀόριστον.

Τί ἐννοοῦμεν ὅταν λέγωμεν « ἀπαλείφομεν ἓνα ἄγνωστον π.χ. μεταξύ δύο ἐξισώσεων ».

Ὅρισμός τῆς παραμέτρου μιᾶς ἐξισώσεως, χρησιμοποίησις αὐτῆς διὰ τὴν διερεύνησιν ἐξισώσεως ἢ συστήματος ἐξισώσεων.

Γραφικὴ λύσις συστήματος δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους (κατασκευὴ τῶν παριστανομένων εὐθειῶν καὶ τομῇ αὐτῶν.)

Λύσις συστήματος μὲ τὴν μέθοδον τοῦ Bézout.

Λύσις συστήματος μ ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ μ ἀγνώστους. Λύσις συστημάτων α' βαθμοῦ μὲ τεχνάσματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Α'. ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 138. Καλοῦμεν δευτέραν, τρίτην,, νιοστήν (ἢ νιοστῆς τάξεως) ρίζαν δοθέντος ἀριθμοῦ, τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὴν δευτέραν, τρίτην,, νιοστήν δύναμιν δίδει τὸν δοθέντα.

Τὴν δευτέραν*, τρίτην,, νιοστήν ρίζαν ἑνὸς ἀπολύτου ἀριθμοῦ π.χ. τοῦ α συμβολίζομεν μὲ $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{\alpha}$,, $\sqrt[n]{\alpha}$ καὶ εἶναι κατὰ τὸν ὀρισμὸν $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$, $(\sqrt[3]{\alpha})^3 = \alpha$,, $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$.

Τὸ σύμβολον $\sqrt{\alpha}$ λέγεται **ριζικόν**, ἢ ὑπ' αὐτὸ ποσότης **ὑπόρριζος ποσότης**, ὁ δὲ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δεικνύει τὴν τάξιν τῆς ρίζης τῆς ὑπόρριζου ποσότητος, λέγεται **δείκτης τῆς ρίζης**. Οὕτως εἰς

τὴν παράστασιν $\sqrt[n]{\alpha}$ ὑπόρριζος ποσότης εἶναι τὸ α καὶ δείκτης ὁ ν. Εἰς τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἐννοεῖται δείκτης ὁ 2.

Ρίζα τις λέγεται **ἄρτίας** ἢ **περιττῆς τάξεως**, ἂν ὁ δείκτης αὐτῆς εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος ἢ περιττός. Οὕτως αἱ ρίζαι $\sqrt[5]{\alpha}$, $\sqrt[3]{\alpha}$ εἶναι τάξεως περιττῆς, αἱ δὲ $\sqrt[6]{\alpha}$, $\sqrt[8]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\alpha}$ εἶναι τάξεως ἄρτίας.

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ

§ 139. Ἀποδεικνύομεν πρῶτον τὴν ἐξῆς βοηθητικὴν πρότασιν.

Ἄν αἱ μισταὶ δυνάμεις δύο ὁμοσήμεων ἀριθμῶν εἶναι ἴσαι, οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι.

* Ὁ Rafaello Rombelli τὸ 1572 εἰς τὸ βιβλίον του « Algebra » ἔκαμε χρῆσιν τῶν $\sqrt{-\alpha}$, $-\sqrt{-\alpha}$.

Διότι, ἂν π.χ. εἶναι $\alpha^{\mu} = \beta^{\mu}$, ὅπου μ εἶναι ἀκεραῖος καὶ θετικός καὶ α, β ὁμόσημοι, θὰ ἔχωμεν $\alpha^{\mu} : \beta^{\mu} = 1$, ἢ

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = 1$, ἄρα $\frac{\alpha}{\beta} = 1$, ἀφοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι θετικός, καὶ συνεπῶς $\alpha = \beta$.

§ 140. α') Πᾶς θετικός ἀριθμὸς ἔχει δύο μὲν ρίζας ἀρτίας τάξεως ἀντιθέτους, μίαν δὲ περιττῆς τάξεως (θετικὴν).

Διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν θετικός ἢ ἀρνητικός ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς ἀρτίαν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον θετικὸν ἀριθμὸν, ἐνῶ ἀφ' ἑτέρου μόνον θετικός ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς περιττὴν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον θετικὸν ἀριθμὸν.

Ἐκ τῶν δύο ριζῶν μιᾶς ἀρτίας τάξεως θετικοῦ ἀριθμοῦ, ἡ θετικὴ συμβολίζεται κατὰ συνθήκην μὲ τὸ οἰκεῖον ρίζικὸν ἄνευ προσήμου, ἡ δὲ ἀρνητικὴ μὲ τὸ αὐτὸ ρίζικὸν ἔχον ἀριστερὰ τὸ πρόσημον —. Οὕτω, ἂν α εἶναι θετικός ἀριθμὸς, τὸ σύμβολον $\sqrt{\alpha}$ σημαίνει: ἡ θετικὴ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ α . Ἡ ἀρνητικὴ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ α συμβολίζεται μὲ τὸ $-\sqrt{\alpha}$.

β') Πᾶς ἀρνητικός ἀριθμὸς ἔχει μόνον μίαν ρίζαν περιττῆς τάξεως, ἀρνητικὴν, οὐδεμίαν δὲ ἀρτίας τάξεως.

Διότι μόνον ἀρνητικός ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς περιττὴν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικὸν ἀριθμὸν. ἐνῶ οὐδεὶς ἐκ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν (θετικός ἢ ἀρνητικός) ὑψούμενος εἰς δύναμιν ἀρτίαν δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικὸν ἀριθμὸν.

Ἐστω π.χ. ἡ $\sqrt[3]{-8}$. Αὕτῃ εἶναι -2 , διότι εἶναι $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι εἶναι $\sqrt[3]{8} = 2$, διότι εἶναι $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Ἐπομένως ἔχομεν $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$.

Ἡ εὕρεσις τῆς κυβικῆς ρίζης ἀριθμοῦ ἐδημιουργήθη κατὰ τὰ μέσα τῆς 5ης ἐκατονταετηρίδος π.χ. κυρίως ἀπὸ τὴν ἀναζήτησιν τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου, τὸ ὁποῖον καλεῖται «Δήλιον πρόβλημα», δηλα-

δὴ τῆς εὕρεσεως τοῦ x , ὥστε νὰ εἶναι $x^3 = 2a^3$ ἢ $x = a\sqrt[3]{2}$ καὶ τοῦ προβλήματος τῆς τριχοτομήσεως μιᾶς οἰασδῆποτε γωνίας. Τὰ προβλήματα αὐτὰ καθὼς καὶ τὸ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, ἀπησχόλησαν ὄχι μόνον τοὺς μαθηματικούς τῆς παλαιᾶς ἐποχῆς, ἀλλὰ καὶ τοὺς τότε μορφωμένους κύκλους, ἐπὶ πλείον δὲ καὶ διασήμους μαθηματικούς ὄλων τῶν προηγμένων χωρῶν. Ἀπεδείχθη ὅτι τὰ προβλήματα αὐτὰ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ λυθοῦν μὲ μαθηματικὴν ἀκρίβειαν καὶ μάλιστα μόνον μὲ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν κυρίως γεωμετρικῶν ὀργάνων, τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου.

Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι:

Ἡ ρίζα περιττῆς τάξεως ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἀπολύτως ἰση μὲ τὴν ρίζαν τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ ἀντιστοίχου ἀπολύτου ἀριθμοῦ.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

313. Δείξτε ὅτι πᾶσα ρίζα τῆς 1 εἶναι $+1$ ἢ -1 . Διατί; Πᾶσα ρίζα τοῦ 0 εἶναι 0. Διατί;

314. Εὑρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{36}$, $\sqrt[3]{\pm 125}$, $\sqrt[3]{+64}$.

315. Εὑρετε τὰ $3-\sqrt[3]{4}$, $\alpha+\sqrt[3]{\alpha^2}$, $\alpha+\sqrt[3]{\beta^3}$.

316. Ἡ ἰσότης $\sqrt[3]{\alpha^2} = \alpha$ πότε εἶναι ἀκριβής; Διατί;

317. Ἡ ἰσότης $\sqrt[6]{(\alpha^2)^6} = \alpha^2$ εἶναι ἀκριβής καὶ διατί;

318. α') Εὑρετε τὸ ἐξαγόμενον $\sqrt[4]{4} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[5]{-27} - \sqrt[5]{-32}$.

Ὁμοίως τά: β') $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{16}$, γ') $\sqrt[3]{27} - \sqrt[5]{-32}$, δ') $\sqrt[3]{(\alpha\beta)^3}$
 ε') $\sqrt[3]{x^4y^4}$, στ') $\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{-8}$, ζ') $\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{64}$, η') $(3+\sqrt[3]{2})(3-\sqrt[3]{2})$, θ') $\sqrt[3]{\alpha^6}$.

§ 141. Ἵνα ρίζα ἀπολύτου ἀριθμοῦ ὑψωθῇ εἰς δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψωθῇ ἡ ὑπόρριζος ποσότης εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.

Λέγομεν δηληδὴ ὅτι εἶναι $(\sqrt[p]{\alpha})^p = \sqrt[p]{\alpha^p}$. (1) Διότι ἂν τὰς παραστάσεις αὐτὰς ὑψώσωμεν εἰς τὴν μ δύναμιν, εὐρίσκομεν ἐξαγόμενα ἴσα, ἄρα καὶ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ (ὡς ὁμόσημοι) εἶναι ἴσοι. Πράγματι εἶναι

$$\left[(\sqrt[p]{\alpha})^p \right]^\mu = (\sqrt[p]{\alpha})^{p\mu} = \left[(\sqrt[p]{\alpha})^\mu \right]^p = \alpha^p \text{ καὶ } (\sqrt[p]{\alpha^p})^\mu = \alpha^p.$$

Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω ιδιότης δέν ἀληθεύει ἂν πρόκειται διὰ τὴν ἀρνητικὴν ρίζαν ἐκάστης ἀρτίας τάξεως θετικοῦ ἀριθμοῦ. Διότι τότε, ἂν ὑψωθῇ ἡ ρίζα αὐτὴ εἰς ἀρτίαν δύναμιν γίνεται θετικὸς ἀριθμὸς, ἐνῶ ἂν ὑψωθῇ μόνον τὸ ὑπόρριζον εἰς αὐτὴν τὴν δύναμιν, μένει ἀριστερὰ τοῦ ριζικοῦ τὸ πρόσημον — καὶ ἔχομεν ἀρνητικὸν ἀποτέλεσμα.

Κατωτέρω τὴν ὑπόρριζον ποσότητα θὰ ὑποθέτωμεν θετικὴν, ἐκ τῶν δύο δὲ ριζῶν ἐκάστης ἀρτίας τάξεως θετικοῦ ἀριθμοῦ θὰ θεωροῦμεν μόνον τὴν θετικὴν.

§ 142. "Αν εἰς τὸν δείκτην τῆς ρίζης καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ὑπορρίζου ποσότητος (θετικῆς) ὑπάρχῃ κοινὸς παράγων, δυνάμεθα νὰ τὸν παραλείψωμεν.

Π.χ. εἶναι $\sqrt[3.2]{\alpha^{5.2}} = \sqrt[3]{\alpha^5}$ ἂν $\alpha > 0$. Διότι ὑψοῦντες τὰ μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς εἰς τὴν 3·2 δύναμιν εὐρίσκομεν ἴσα ἐξαγόμενα, ἄρα καὶ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ ὡς ὁμόσημοι εἶναι ἴσοι. Πράγματι ἔχομεν $(\sqrt[3.2]{\alpha^{5.2}})^{3.2} = \alpha^{5.2}$ καὶ $(\sqrt[3]{\alpha^5})^{3.2} = (\alpha^{5 \cdot \frac{1}{3}})^{3.2} = \alpha^{5.2}$. Ὀμοίως ἔχομεν $\sqrt[\mu]{\alpha^{\rho\mu}} = (\sqrt[\mu]{\alpha^\rho})^\mu = \alpha^\rho$. Καὶ ἀντιστρόφως :

Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δείκτην τῆς ρίζης καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς ὑπορρίζου ποσότητος (θετικῆς) ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς ιδιότητος αὐτῆς γίνεται, ὅπως καὶ τῆς προηγούμενης.

§ 143. "Αν εἰς τὴν ὑπόρριζον παράστασιν ὑπάρχῃ παράγων θετικὸς μὲ ἐκθέτην διαιρετὸν διὰ τοῦ δείκτου τῆς ρίζης, δύναται νὰ ἐξαχθῇ οὗτος ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ, ἀφοῦ ὁ ἐκθέτης διαιρεθῇ διὰ τοῦ δείκτου.

Π.χ. εἶναι $\sqrt[\mu]{\alpha^\mu \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt[\mu]{\beta}$ ἂν $\alpha > 0$. Διότι ἔχομεν $(\sqrt[\mu]{\alpha^\mu \beta})^\mu = \alpha^\mu \cdot \beta$ καὶ $(\alpha \sqrt[\mu]{\beta})^\mu = \alpha^\mu (\sqrt[\mu]{\beta})^\mu = \alpha^\mu \cdot \beta$. Καὶ ἀντιστρόφως :

Παράγων τις θετικὸς ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ δύναται νὰ εἰσαχθῇ ἐντὸς αὐτοῦ, ἂν ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν τὴν ὀριζομένην ὑπὸ τοῦ δείκτου τῆς ρίζης.

Π.χ. εἶναι $3 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$, $\alpha \cdot \sqrt[\mu]{\beta} = \sqrt[\mu]{\alpha^\mu \cdot \beta}$ καὶ ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως, ὡς ἄνωτέρω.

Ἀσκήσεις

319. Ἀπλοποιήσατε τὰς κάτωθι παραστάσεις :

$$\alpha') \sqrt{\alpha^5}, \sqrt[3]{\alpha^6}, \sqrt[5]{\alpha^{25}}, \sqrt[7]{\alpha^{28}}, \sqrt[3]{5^4}, \sqrt[3]{4^6}.$$

$$\beta') \sqrt[5]{9^{10}}, \sqrt[11]{8^{22}}, \sqrt[7]{\alpha^{4v}}, \sqrt[4]{\alpha^{4v+2}}.$$

$$\gamma') \sqrt[3]{64^2}, \sqrt[9]{125^4}, \sqrt[5]{\pm 32^3}.$$

$$\delta') \sqrt[3]{(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)^3}, \sqrt[3]{(\alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2)^4}, \sqrt[3]{(4\alpha^2 + 20\alpha\beta + 25\beta^2)^6}.$$

$$\epsilon') \sqrt[3]{(\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3)^2}, \sqrt[3]{(8\alpha^3 + 12\alpha^2\beta + 6\alpha\beta^2 + \beta^3)^3}.$$

$$\sigma\tau') 7:\sqrt[3]{7}, 11:\sqrt[3]{11}, \alpha:\sqrt[3]{\alpha}, (\alpha+\beta):\sqrt[3]{\alpha+\beta}, (\alpha-1):\sqrt[3]{\alpha-1}.$$

§ 144. Διὰ τὴν ἐξαγάγωμεν τὴν ρίζαν ἄλλης ρίζης ποσότητος τινος θετικῆς, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δείκτας τῶν ριζῶν καὶ νὰ ἀφήσωμεν ὡς ὑπόρριζον ποσότητα τὴν αὐτὴν.

Π.χ. εἶναι $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\alpha}} = \sqrt[4 \cdot 3]{\alpha} = \sqrt[12]{\alpha}$. Διότι ἂν αἱ δύο αὐταὶ παραστάσεις ὑψωθοῦν εἰς τὴν 4·3 δύναμιν, δίδουν ἴσα ἐξαγόμενα, ἄρα καὶ αἱ παραστάσεις αὐταὶ (ὡς παριστάνουσαι ἀριθμοὺς ὁμοσήμους) εἶναι ἴσαι. Πράγματι ἔχομεν :

$$\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\alpha}}\right)^{4 \cdot 3} = \left(\sqrt[4]{(\sqrt[3]{\alpha})^3}\right)^4 = (\sqrt[3]{\alpha})^3 = \alpha \quad \text{καὶ} \quad (\sqrt[4]{\alpha})^{4 \cdot 3} = \alpha.$$

§ 145. Ρίζας θετικῶν ἀριθμῶν μὲ διαφόρους δείκτας δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν εἰς ἄλλας ἴσας πρὸς αὐτὰς μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην.

Ἐστώσαν π.χ. αἱ ρίζαι $\sqrt[3]{\alpha}, \sqrt[4]{\beta}, \sqrt[5]{\gamma}$ ὅπου α, β, γ, θετικοί. Ἐπειδὴ τὸ ἐ.κ.π. τῶν δεικτῶν 2, 3, 4 τῶν ριζῶν εἶναι ὁ 12, ἂν τοὺς ἐκθέτας τῶν ὑπορριζῶν καὶ τοὺς δείκτας τῶν ριζῶν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ σειρὰν ἐπὶ 6, 4, 3, ἀντὶ τῶν δοθέντων λαμβάνομεν τὰ ἴσα τῶν ἀντιστοίχως

$$\sqrt[12]{\alpha^6}, \sqrt[12]{\beta^4}, \sqrt[12]{\gamma^3}.$$

Ἐν γένει, ἡ τροπὴ ριζικῶν εἰς ἄλλα ἔχοντα τὸν αὐτὸν δείκτην γίνεταί καθὼς καὶ ἡ τροπὴ τῶν ἐτερονύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

Π.χ. τὰ $\sqrt[3]{\alpha}$ καὶ $\sqrt[4]{\beta}$ τρέπονται εἰς τὰ $\sqrt[12]{\alpha^6}$ καὶ $\sqrt[12]{\beta^4}$. Τὰ $\sqrt[5]{\alpha}$ καὶ $\sqrt[6]{\beta}$ τρέπονται εἰς τὰ $\sqrt[30]{\alpha^6}$, $\sqrt[30]{\beta^5}$ κ.ο.κ.

§ 146. Τὸ γινόμενον ἢ τὸ πηλίκον ριζῶν θετικῶν ἀριθμῶν μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην ἰσοῦται μὲ ρίζαν τοῦ γινομένου ἢ τοῦ πηλίκου τῶν ὑπορριζῶν ποσοτήτων καὶ μὲ δείκτην τὸν τῶν παραγόντων.

Π.χ. $\sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\beta} = \sqrt[3]{\alpha\beta}$. Διότι, ἂν αἱ (ὁμόσημοι) αὐταὶ πα-

ραστάσεις ύψωθούν εις τὴν μ δύναμιν, δίδουν ἐξαγόμενα ἴσα.

Πράγματι ἔχομεν $(\sqrt[m]{\alpha} \cdot \sqrt[m]{\beta} \cdot \sqrt[m]{\gamma})^m = (\sqrt[m]{\alpha})^m \cdot (\sqrt[m]{\beta})^m \cdot (\sqrt[m]{\gamma})^m = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$.

καὶ $(\sqrt[m]{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma})^m = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$. Ὅμοίως ἔχομεν $\sqrt[m]{\alpha} : \sqrt[m]{\beta} = \frac{\sqrt[m]{\alpha}}{\sqrt[m]{\beta}} = \sqrt[m]{\frac{\alpha}{\beta}}$,

ἢ δὲ ἀποδείξεις γίνεται ὁμοίως. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν :

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{30}, \quad \sqrt{32} : \sqrt{2} = \sqrt{32:2} = \sqrt{16} = 4.$$

§ 147. α') Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον ἢ τὸ πηλί-
κον ριζικῶν ἐχόντων διαφόρους δείκτας καὶ θετικὰ ἢ ἀπόλυτα ὑπόρ-
ριζα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ἄλλα ἴσα των, ἔχοντα τὸν αὐτὸν δείκτην
καὶ ἀκολούθως ἐφαρμόζομεν τὴν ἀνωτέρω ιδιότητα. Οὕτω θὰ ἔ-
χωμεν π.χ.

$$\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{5^4 \cdot 2^3} = \sqrt[12]{5^3 \cdot 2^4}, \quad \sqrt[3]{20^2} : \sqrt{5} = \sqrt[6]{20^4} : \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{20^4 : 5^3}.$$

Ἡ ἐξαγωγή τῆς ρίζης κλάσματος ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξαγωγήν
τῆς ρίζης ἀκεραίας παραστάσεως ἐν γένει, ἂν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσμα-
τος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ κατάλληλον ἀριθμόν, ὥστε ὁ παρονο-
μαστής νὰ ἔχῃ ὑπόρριζον ποσότητα δύναμιν μὲ ἐκθέτην τὸν δείκτην
τῆς ρίζης. Οὕτως ἔχομεν π.χ.

$$\sqrt[4]{\frac{5}{8}} = \sqrt[4]{\frac{5}{2^3}} = \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 2}{2^4}} = \sqrt[4]{\frac{10}{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{10}}{2}$$

Γενικῶς, ἂν ὁ παρονομαστής κλασματικῆς παραστάσεως ἔχῃ
ριζικόν, πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους αὐτῆς ἐπὶ κατάλληλον
παραστάσιν, δυνάμεθα νὰ μετατρέψωμεν τὴν δοθεῖσαν εἰς ἄλλην
μὲ παρονομαστὴν ἄνευ ριζικοῦ. Π.χ. ἂν ἔχωμεν τὴν παράστασιν
 $\frac{\gamma}{\alpha + \sqrt{\beta}}$ καὶ πολλαπλασιάζωμεν τοὺς ὅρους αὐτῆς ἐπὶ τὴν **συζυγῇ**
παράστασιν τῆς $\alpha + \sqrt{\beta}$, ἥτοι ἐπὶ τὴν $\alpha - \sqrt{\beta}$, (ἐνῶ ὑποτίθεται
 $\alpha - \sqrt{\beta} \neq 0$), εὐρίσκομεν

$$\frac{\gamma}{\alpha + \sqrt{\beta}} = \frac{\gamma(\alpha - \sqrt{\beta})}{(\alpha + \sqrt{\beta})(\alpha - \sqrt{\beta})} = \frac{\gamma(\alpha - \sqrt{\beta})}{\alpha^2 - \beta}$$

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

320. Νὰ ἀπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

$$\alpha') \sqrt{54} + 3\sqrt{24} - \sqrt{6}, \quad \beta') \sqrt{45\alpha^3} + \sqrt{124\alpha^3} - \sqrt{320\alpha^3},$$

$$\gamma') \sqrt{\frac{11^4 \cdot 5}{7^2}} + \sqrt{\frac{12^2 \cdot 5^3}{7^3 \cdot 13^4}} \cdot 13^2 - \sqrt{\frac{11^2 \cdot 13^2}{7 \cdot 5^2}}.$$

321. Εις τὰς κάτωθι παραστάσεις ὁ πρὸ τοῦ ριζικοῦ παράγων νὰ εἰσαχθῇ καταλλήλως ἐντὸς αὐτοῦ.

$$\alpha') x\sqrt{x-1}, \quad \beta') 3\sqrt{5}, \quad \gamma') \alpha \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad \delta') 2\sqrt{\frac{6}{2}}, \quad \epsilon') 7\sqrt{\frac{1}{49}}.$$

322. Νὰ τραποῦν αἱ κάτωθι ρίζαι εἰς ἰσοδυνάμους αὐτῶν ἐχούσας ἐλάχιστον κοινόν δείκτην :

$$\alpha') \sqrt[3]{\alpha}, \sqrt[6]{\alpha}, \sqrt[4]{\alpha}, \sqrt[6]{\alpha}, \sqrt[12]{\alpha}, \gamma') \sqrt[3]{\alpha}, \sqrt[6]{\beta}, \sqrt[7]{\gamma}.$$

323. Νὰ γίνῃ ἀπλοποίησης τῶν ριζῶν.

$$\alpha') \sqrt[4]{64}, \quad \beta') \sqrt[6]{48}, \quad \gamma') \sqrt[3]{64}, \quad \delta') \sqrt[2\mu]{\alpha^\mu}.$$

324. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα :

$$\alpha') \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}, \quad \beta') \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}, \quad \gamma') \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{30}, \quad \delta') \sqrt[4]{\alpha^2} \cdot \sqrt[5]{\alpha},$$

$$\epsilon') \sqrt{x\psi} \cdot \sqrt{\frac{\psi}{x}}, \quad \sigma\tau') \sqrt[3]{2\alpha} \cdot \sqrt[4]{5\alpha\beta} \cdot \sqrt[3]{3\beta}, \quad \zeta') \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2}.$$

325. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα :

$$\alpha') \sqrt{24} : \sqrt{2}, \quad \beta') \sqrt[3]{7000} : \sqrt[3]{875}, \quad \gamma') \sqrt[3]{x^4} : \sqrt[3]{x}, \quad \delta') \sqrt[3]{6\alpha^4} : \sqrt[3]{2\alpha}.$$

326. Νὰ εὑρεθῇ τό : $\alpha') (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma})^2$, $\beta') (2\sqrt{x} + 8\sqrt{x^2}) \cdot \sqrt{x}$

$$\gamma') (\sqrt{\alpha} + \sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[4]{\alpha}) \cdot \sqrt[4]{\alpha}.$$

327. Τὰ κάτωθι κλάσματα νὰ τραποῦν εἰς ἰσοδύναμα αὐτῶν μὲ ρητοὺς παρονομαστὰς.

$$\alpha') \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad \beta') \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \quad \gamma') \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}, \quad \delta') \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \epsilon') \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}.$$

2. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΑΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΥΣ

§ 148. Ἐστω ὅτι ἔχομεν τὸν $\alpha^{\frac{1}{2}}$, ὅπου τὸ α παριστάνει ἄριθμὸν τινα θετικόν. Ὅρίζομεν ὅτι τὸ $\alpha^{\frac{1}{2}}$ παριστάνει τὴν θετικὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ α, ἥτοι θέτομεν $\alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha}$, ὅτε $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$, ἄρα $\left(\alpha^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \alpha$.

Κατὰ ταῦτα :

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4} = 2, \quad 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = 3.$$

Ἄν δοθῇ τὸ $\alpha^{\frac{1}{v}}$, ἐνῶ εἶναι $v > 0$ καὶ ἀκέραιος, ὀρίζομεν ὅτι $\alpha^{\frac{1}{v}} = \sqrt[v]{\alpha}$, ὑποθέτοντες ὅμως $\alpha > 0$ ὅταν ὁ v εἶναι ἄρτιος, ὅτε ἔχομεν $(\alpha^{\frac{1}{v}})^v = (\sqrt[v]{\alpha})^v = \alpha$, ἄρα $(\alpha^{\frac{1}{v}})^v = \alpha$.

Ἄν ἔχωμεν τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{v}}$, ἐνῶ εἶναι μ καὶ v ἀκέραιοι καὶ θετικοί, θέτομεν $\alpha^{\frac{\mu}{v}} = \sqrt[v]{\alpha^\mu}$, ὑποθέτοντες $\alpha > 0$ ἂν v ἄρτιος, ὅτε ἔχομεν $(\alpha^{\frac{\mu}{v}})^v = (\sqrt[v]{\alpha^\mu})^v = \alpha^\mu$, ἥτοι : $(\alpha^{\frac{\mu}{v}})^v = \alpha^\mu$.

Ἐξ ἄλλου παρατηροῦμεν ὅτι τὸ

$$\alpha^{\frac{\mu}{v}} = \alpha^{\mu \cdot \frac{1}{v}} = \alpha^{\frac{1}{v} \cdot \mu} \quad \eta \quad \alpha^{\frac{\mu}{v}} = (\alpha^\mu)^{\frac{1}{v}} = (\alpha^{\frac{1}{v}})^\mu, \quad \eta \quad \alpha^{\frac{\mu}{v}} = \sqrt[v]{\alpha^\mu} = (\sqrt[v]{\alpha})^\mu.$$

Ἡ τελευταία ἰσότης ἰσχύει ἄνευ περιορισμοῦ, ἐπειδὴ θεωροῦμεν ἐκ τῶν δύο ριζῶν ἐκάστης ἀρτίας τάξεως μόνον τὴν θετικὴν.

$$\text{Οὕτως ἔχομεν } 100^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{100^3} = \sqrt[2]{1\,000\,000} = 1000.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὀδηγούμενοι δίδομεν τὸν ἐξῆς ὀρισμὸν τῆς δυνάμεως σχετικοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην θετικὸν κλάσμα.

Ἡ δύναμις ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην κλάσμα ἔχον ὄρους ἀκεραίους καὶ θετικούς παριστάνει ἢ τὴν ρίζαν τὴν ἔχουσαν δείκτην τὸν παρονομαστήν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπόρριζον τὸν ἀριθμὸν μὲ ἐκθέτην τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἢ τὴν δύναμιν μὲ βάσιν τὴν ρίζαν τοῦ ἀριθμοῦ τὴν ἔχουσαν δείκτην τὸν παρονομαστήν τοῦ κλάσματος καὶ μὲ ἐκθέτην τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ.

§ 149. Ἄν ὁ ἐκθέτης τῆς $\alpha^{\frac{\mu}{v}}$ ἀντικατασταθῇ μὲ τὸν ἰσοδύναμόν του $\frac{\mu\rho}{\nu\rho}$ τοῦ ρ παριστάνοντος ἀριθμὸν ἀκέραιον καὶ θετικόν, εἶναι δὲ ἐπὶ πλεόν καὶ ὁ α θετικός, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha^{\frac{\mu}{v}} = \alpha^{\frac{\mu\rho}{\nu\rho}}, \quad \text{διότι εἶναι } \alpha^{\frac{\mu}{v}} = \sqrt[v]{\alpha^\mu} \quad (\S 148)$$

$$\text{ἀλλὰ καὶ } \alpha^{\frac{\mu\rho}{\nu\rho}} = \sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} \quad (\S 148)$$

$$= \sqrt[v]{\alpha^\mu} \quad (\S 142).$$

Ἡ ἰσότης αὐτὴ ὁμως δὲν ἀληθεύει ἂν $\alpha < 0$. Οὕτω π.χ.
 $(-2)^{\frac{1}{3}} \neq (-2)^{\frac{2}{6}}$, διότι $(-2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2} < 0$, ἐνῶ $(-2)^{\frac{2}{6}} =$
 $= \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4} > 0$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ δείξωμεν καὶ ἄλλας ιδιότητες τῶν ριζῶν, καθὼς καὶ νὰ τρέψωμεν ρίζας εἰς ἄλλας ἐχούσας τὸν αὐτὸν δείκτην, ὑποθέτοντες ὁμως τὴν βάσιν α θετικὴν πρὸς ἀποφυγὴν χονδροειδῶν σφαλμάτων.

§ 150. α') Ἐστω ὅτι θέλομεν νὰ ὀρίσωμεν τὸ $\alpha^{-\frac{1}{2}}$. Δεχόμενοι τοῦτο ὡς δυνάμιν τοῦ α καὶ ὑποθέτοντες ὅτι ἡ ιδιότης τοῦ γινομένου τῶν δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἰσχύει καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται εἶναι θετικοὶ ἢ ἀρνητικοὶ κλασματικοὶ ἀριθμοί, ἔχομεν

$$\alpha^{+\frac{1}{2}} \cdot \alpha^{-\frac{1}{2}} = \alpha^{+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \alpha^0 = 1.$$

Διαιρουντες τὰ ἴσα μέλη τῆς ἰσότητος $\alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha^{-\frac{1}{2}} = 1$ διὰ τοῦ $\alpha^{\frac{1}{2}}$, εὐρίσκομεν $\alpha^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, ἥτοι $\alpha^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Ὅμοίως εὐρίσκο-

μεν $\alpha^{-\frac{1}{v}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{v}}} = \frac{1}{\sqrt[v]{\alpha}}$ (ὅπου τὸ v εἶναι θετικὸς καὶ ἀκέραιος ἀρι-

θμός). Καὶ γενικῶς $\alpha^{-\frac{\mu}{v}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{v}}} = \frac{1}{\sqrt[v]{\alpha^\mu}}$ (ἂν τὰ μ καὶ v εἶναι θετικοὶ

καὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ διάφοροι τοῦ 0). Ἦτοι :

Ἡ δύναμις ἀριθμοῦ ($\neq 0$) μὲ ἐκθέτην δοθὲν ἀρνητικὸν κλάσμα παριστάνει κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὴν μονάδα παρονομαστὴν δὲ τὴν δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσας ἐκθέτην τὸν ἀντίθετον τοῦ δοθέντος.

Οὕτω π.χ. ἔχομεν

$$\alpha^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{\alpha^5}}, \quad 4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4^3}} = \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}.$$

Ἀσκήσεις

328. Τί σημαίνει α') $\alpha^{\frac{1}{2}}$; β') $\alpha^{\frac{1}{2^2}}$; γ') $\alpha^{-\frac{3}{8}}$; δ') $32^{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{12}}$;

329. Εὑρετέ τὰ : α') $(3-2^{-\frac{1}{3}}) \cdot (3+2^{-\frac{1}{3}})$, β') $(\alpha+\beta-\frac{1}{2}) \cdot (\alpha-\beta-\frac{1}{2})$,
 γ') $(2^{-\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}) \cdot (2^{-\frac{1}{2}}-3^{-\frac{1}{2}})$, δ') $(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}+1)^2$,
 ε') $\alpha^{0,8} \cdot \alpha^{1,4} \cdot \alpha^{-0,2}$, στ') $x^{\frac{3}{4}} : x^{-\frac{2}{3}}$, ζ') $x^{-\frac{2}{3}} : x^{\frac{4}{5}}$, η') $\alpha^{4,2} \cdot \alpha^{-0,8}$

θ') $\alpha^{-1,4} : \alpha^{1,2}$, ι') $8^{\frac{4}{5}} \cdot 4^{-\frac{1}{5}}$.

330. Ὁμοίως τὰ : α') $(\alpha^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}$, β') $(\alpha^{\frac{2}{3}})^{(-\frac{3}{4})}$, γ') $(\alpha^{-\frac{5}{6}})^{(-\frac{4}{5})} \cdot \alpha^{-\frac{3}{4}}$
 δ') $25^{3\frac{1}{2}} \cdot 16^{-3\frac{1}{4}}$, ε') $49^{-2\frac{1}{2}} \cdot 9^{-5\frac{1}{2}}$, στ') $49^{-3\frac{1}{2}} \cdot 5^{-4\frac{1}{3}} : 256^{3\frac{1}{4}} \cdot 256^{-4\frac{1}{2}}$
 ζ') $\frac{36^{-5\frac{1}{2}} + 169^{-4\frac{1}{2}}}{8^{-5\frac{1}{3}} + 27^{-4\frac{1}{3}}}$, η') $\frac{125^{-2\frac{1}{3}} + 49^{6\frac{1}{2}}}{144^{-3\frac{1}{2}} - 64^{2\frac{1}{2}}}$.

331. Νά τροποῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις εἰς ἰσοδυνάμους τῶν μὲ ρητοὺς παρονομαστές.

α') $\frac{x+\sqrt{\psi}}{x-\sqrt{\psi}}$, β') $\frac{\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}}{\alpha+\sqrt{\beta}}$, γ') $\frac{x\psi}{\sqrt{\psi^3-\sqrt{x\psi^2}}}$, δ') $\frac{\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}-\sqrt{\alpha-\beta}}$
 ε') $\frac{4\sqrt{5}-20}{\frac{2}{3}\sqrt{10}-5\sqrt{\frac{1}{2}}}$, στ') $\frac{5-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$, ζ') $\frac{8\sqrt{12}-12\sqrt{6}}{4\sqrt{3}}$, η') $\frac{6}{1+\sqrt{2}}$

3. ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΡΙΖΗΣ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ

§ 151. Γνωρίζομεν ὅτι, διὰ νὰ ὑψωθῇ γινόμενον παραγόντων εἰς δύναμιν τινα, ἀρκεῖ νὰ ὑψωθῇ ἕκαστος τῶν παραγόντων εἰς τὴν δύναμιν ταύτην καὶ νὰ πολλαπλασιάσθοῦν τὰ ἐξαγόμενα. Κατὰ ταῦτα, ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον μονωνύμου τινὸς εὐρίσκεται, ἂν διπλασιάσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἔπεται ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀκεραίου τινὸς μονωνύμου ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν παραγόντων αὐτοῦ διὰ τοῦ 2.

Οὕτως ἔχομεν $\sqrt{25\alpha^4\beta^2\gamma^6} = 25^{\frac{1}{2}} \cdot (\alpha^4)^{\frac{1}{2}} \cdot (\beta^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \gamma^{(\frac{6}{2})} = 5\alpha^2\beta\gamma^3$.
 Ὁμοίως $\sqrt{16\alpha^2\beta^4} = 4\alpha\beta^2$

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐξάγεται καὶ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κλάσματικοῦ μονωνύμου, ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ ρίζα ἐκάστου τῶν ὅρων αὐτοῦ.

Οὕτω π.χ. ἔχομεν
$$\sqrt{\frac{9\alpha^6\beta^2\gamma^4}{16\delta^2\epsilon^4}} = \frac{3\alpha^3\beta\gamma^2}{4\delta\epsilon^2}$$

Ἐὰν παράγοντός τινος δὲν ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀκριβῶς (δηλαδή, ἂν ὁ ἐκθέτης του δὲν διαιρῇται διὰ τοῦ 2), ἀφήνομεν ἐπ' αὐτοῦ σημειουμένην τὴν πρᾶξιν ἥ, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς παράγοντας, ὥστε νὰ ἐξάγεται ἡ ρίζα του τοῦλάχιστον ἑνός.

Οὕτω π.χ. ἔχομεν
$$\sqrt{24\alpha^2\beta^3\gamma} = \sqrt{4 \cdot 6 \cdot \alpha^2 \cdot \beta^2 \cdot \beta \cdot \gamma} = 2\alpha\beta\sqrt{6\gamma}.$$

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

332. Νὰ εὐρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν ἐξῆς μονωνύμων :

α') $64\alpha^4\gamma^2\beta^8$, β') $\frac{4}{9}\alpha^2\beta^2\gamma$, γ') $\frac{\beta^3\gamma^3\delta^5}{4\alpha^4}$, δ') $\frac{32\alpha^2\beta^4\gamma^2}{45\delta^4\epsilon^6}$,
 ε') $\frac{125}{64}\alpha^3\beta^4\gamma$, στ') $\frac{9\chi^2\psi^4}{64\alpha^4\beta^2}$, ζ') $\frac{3\alpha^2\beta^3\gamma\eta^6}{16\epsilon^3\delta^3\theta^8}$.

333. Νὰ εὐρεθῇ ἡ κυβικὴ ρίζα τῶν ἐξῆς μονωνύμων :

α') $8\alpha^3\beta^3\gamma^3$, β') $64\alpha^2\beta^3\gamma^3$, γ') $-\frac{8\alpha^3\beta^3\gamma^6}{125\delta^3\epsilon}$, δ') $\frac{8\alpha^3\beta\gamma^6}{27\beta^4\epsilon^4}$.

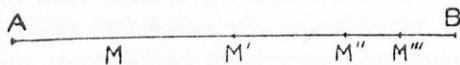
Β' ΠΕΡΙ ΟΡΙΩΝ

§ 152. Ὅρισμός. α') Μέγεθος ἡ ποσότης λέγεται μεταβλητὴ μὲν, ἂν λαμβάνῃ διαφόρους τιμὰς, **σταθερὰ** δέ, ἂν μὲν ἄμετάβλητος, ἐνῶ ἄλλαι, μετὰ τῶν ὁποίων συνδέεται μεταβάλλονται. Π.χ. ἡ ἀκτίς ἑνὸς κύκλου, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τριγώνου τινὸς εἶναι σταθεραὶ ποσότητες, ἐνῶ τὸ μῆκος τόξου κύκλου ἡ ἡ ἀξία ἑνὸς ἐμπορεύματος ἐξαρτᾶται ἀντιστοιχῶς ἀπὸ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου ἡ ἀπὸ τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος αὐτοῦ.

β') Λέγομεν, ὅτι ποσότης τις μεταβλητὴ λαμβάνουσα ἅπειρον πλῆθος τιμῶν ἔχει ὄριον ἢ τείνει εἰς ποσότητά τινα σταθεράν, ἐὰν αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς ἀπὸ τινος καὶ ἐφ' ἐξῆς ἀπολύτως θεωρούμεναι, διαφέρουσιν ἐκάστη τῆς σταθερᾶς κατὰ ποσότητα, ὅσον θέλομεν μικράν.

Ἐὰν συμβαίῃ τοῦτο, ἡ σταθερὰ αὕτη ποσότης λέγεται ὄριον τῆς μεταβλητῆς.

Παραδείγματα : 1ον. Υποθέτομεν, ὅτι ἐν κινητὸν Μ, κινούμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας AB (σχ. 15) ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α διευθυνόμενον πρὸς τὸ Β καὶ διαγράφει εἰς 1^ο τὸ ἡμῖς τῆς AB, φθάνει δὲ εἰς τὸ σημεῖον Μ' κείμενον εἰς τὸ μέσον τῆς AB.



Σχ. 15

Κινούμενον ὁμοίως φθάνει μετὰ 1^ο ἀκόμη εἰς τὸ Μ'' μέσον τῆς Μ'Β', μετὰ 1^ο φθάνει εἰς τὸ μέσον Μ''' τῆς Μ'Β' καὶ προχωρεῖ ὁμοίως. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ κινητόν, προχωροῦν οὕτω πρὸς τὸ Β, πλησιάζει αὐτὸ διηνεκῶς, ἀλλ' οὐδέποτε φθάνει εἰς τὸ Β. Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Α ἀπὸ τὸ κινούμενον σημεῖον εἶναι ποσότης μεταβλητῇ, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ αὐξάνεται διηνεκῶς καὶ πλησιάζει τὴν σταθερὰν ἀπόστασιν AB, ἔχει δηλαδὴ ὄριον τὴν AB. Τούναντίον ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Β ἀπὸ τὸ κινούμενον σημεῖον εἶναι ἐπίσης μεταβλητῇ ποσότης ἀλλ' αἱ τιμαὶ τῆς ἐλαττοῦνται κατὰ τὴν κίνησιν καὶ πλησιάζουν διηνεκῶς τὸ 0, ἥτοι ἔχει ὄριον τὸ 0.

2ον. Ἐστω ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 0,3333....., ὁ ὁποῖος δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$

Ἡ τιμὴ ἐκάστου τῶν κλασμάτων τούτων μετὰ τὸ πρῶτον εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ προηγουμένου του. Ἐπομένως ὅταν θεωροῦμεν τὰ κλάσματα ταῦτα, δυνάμεθα προχωροῦντες ἀρκούντως νὰ εὕρωμεν ἐν κλάσμα, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅσον θέλομεν μικρόν. Ἦτοι αἱ τιμαὶ τῶν διαδοχικῶν τούτων κλασμάτων ἐλαττοῦνται καὶ ἔχουν ὄριον τὸ μηδέν (θεωρούμενον ὡς ἐν ἄπειρον πλῆθος τιμῶν).

Τὸ ἄθροισμα κλασμάτων τινῶν ἐκ τούτων εἶναι, ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, μικρότερον τοῦ $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ καὶ ὅσον περισσότερους ὅρους προσθέτομεν τόσον πλησιάζομεν πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$.

Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι ποσότης τις μεταβλητῇ x (λαμβάνουσα ἄπειρον πλῆθος τιμῶν) ἔχει ὄριον ποσότητά τινα σταθερὰν α ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς καὶ τῆς σταθερᾶς ἀπὸ τινος αὐτῶν καὶ ἐξῆς :

α) Δύναται νά γίνη ἀπολύτως μικροτέρα οἰουδήποτε ἀριθμοῦ θετικοῦ ὅσονδήποτε μικροῦ.

β') Ἡ διαφορὰ αὐτὴ δὲν δύναται νά γίνη (ἀπολύτως) ἴση μὲ τὸ μηδέν.

Συμβολίζομεν τὸ ὅτι ὅριον τῆς x εἶναι τὸ α ὡς ἑξῆς :

$$\text{or } x = \alpha \quad \eta \quad x \rightarrow \alpha.$$

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

§ 153. α') Ἐὰν τὸ ὅριον μεταβλητῆς τινὸς x εἶναι τὸ 0, τὸ $\text{or}(\lambda x)$, ὅπου λ εἶναι ποσότης σταθερὰ ($\lambda \neq 0$), εἶναι ἴσον μὲ 0.

Διότι ἀφοῦ αἱ τιμαὶ τοῦ x δύνανται νά γίνουν ἀπὸ τινος καὶ ἐφ' ἑξῆς, ἀπολύτως θεωρούμεναι, ὅσονδήποτε μικραὶ καὶ τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ λ θὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν ιδιότητα.

β') Τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος πεπερασμένου ἀριθμοῦ μεταβλητῶν ποσοτήτων $x, \psi, \omega, \dots$ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρίων τῶν προσθετέων.

Ἔστω, ὅτι τὰ ὅρια τῶν $x, \psi, \omega, \dots$ εἶναι ἀντιστοιχῶς, $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Τότε δεικνύεται, ὅτι τὸ ὅριον $(x + \psi + \omega + \dots) = \text{or } x + \text{or } \psi + \text{or } \omega + \dots = \alpha + \beta + \gamma + \dots$, ἂν τὰ $x, \psi, \omega, \dots$ εἶναι πεπερασμένα τὸ πλῆθος.

γ') Ἐὰν ὅριον μεταβλητῆς τινὸς x εἶναι α , τὸ ὅριον τοῦ λx , ὅπου λ εἶναι σταθερὰ τις ($\neq 0$) εἶναι ἴσον μὲ $\lambda \alpha$.

Διότι ἀφοῦ $\text{or } x = \alpha$, θὰ εἶναι $\text{or}(x - \alpha) = 0$, ἐπομένως τὸ $\text{or}(\lambda(x - \alpha)) = 0$, ἥτοι $\text{or}(\lambda x - \lambda \alpha) = 0$, δηλαδὴ $\text{or}(\lambda x) = \lambda \alpha$.

δ') Ἐὰν τὸ ὅριον μεταβλητῆς τινος x ἰσοῦται μὲ α , τὸ ὅριον τοῦ $\frac{x}{\lambda}$, ὅπου λ εἶναι ποσότης σταθερὰ ($\neq 0$), ἰσοῦται μὲ $\frac{\alpha}{\lambda}$.

$$\text{Διότι εἶναι } \frac{x}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot x, \text{ καὶ } \text{or } \frac{x}{\lambda} = \text{or } \frac{1}{\lambda} \cdot x = \frac{1}{\lambda} \cdot \alpha = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

ε') Τὸ ὅριον γινομένου δύο ἢ περισσοτέρων (πεπερασμένων τὸ πλῆθος) μεταβλητῶν ποσοτήτων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων των.

Ἔστω, ὅτι x καὶ ψ εἶναι μεταβληταὶ ποσότητες καὶ α, β τὰ ὅρια των ἀντιστοιχῶς. Θὰ εἶναι τότε $\text{or}(x \cdot \psi) = \text{or } x \cdot \text{or } \psi = \alpha \cdot \beta$.

Ἡ ιδιότης ἰσχύει καὶ διὰ περισσοτέρους παράγοντας, ἀλλὰ πεπερασμένους τὸ πλῆθος.

στ') Το όριον τῆς νῆς δυνάμεως ποσότητος μεταβλητῆς ἰσοῦται μέ τὴν νῆν δύναμιν τοῦ όρίου τῆς μεταβλητῆς.

Διότι, ἂν εἶναι $ορ x = \alpha$, θὰ ἔχωμεν $ορ(x^n) = ορ(x \cdot x \dots x) = ορ x \cdot ορ x \dots$
 $= (ορ x)^n = \alpha \cdot \alpha \dots \alpha = \alpha^n$, ἥτοι $ορ(x^n) = (ορ x)^n = \alpha^n$.

ζ') Το όριον τῆς νῆς ρίζης μεταβλητῆς τινος ποσότητος ἰσοῦται μέ τὴν νῆν ρίζαν τοῦ όρίου τῆς μεταβλητῆς.

η') Ἐὰν δύο μεταβληταὶ ποσότητες λαμβάνουν ἴσας τιμὰς ἀντιστοίχως καὶ ἐκάστη ἔχη όριον, τὰ όριά των εἶναι ἴσα.

*Εστω, ὅτι αἱ μεταβληταὶ x, ψ λαμβάνουν ἴσας τιμὰς ἀντιστοίχως καὶ $ορ x = \alpha$, $ορ \psi = \beta$, τότε εἶναι $\alpha = \beta$, ἥτοι $ορ x = ορ \psi$.

θ') Ἐὰν αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ μεταβλητῶν ποσοτήτων ἔχουν σταθερόν λόγον, ἐκάστη δὲ τούτων ἔχη όριον ($\neq 0$), ὁ λόγος οὗτος ἰσοῦται μέ τὸν λόγον τῶν όρίων των.

*Εστωσαν x, ψ δύο μεταβληταὶ ποσότητες καὶ $ορ x = \alpha (\neq 0)$
 $ορ \psi = \beta (\neq 0)$. Ἄν εἶναι $\frac{x}{\psi} = \rho$ σταθερόν, τότε εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \rho$, ἥτοι:

$$\rho = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{ορ x}{ορ \psi}.$$

Γ' ΠΕΡΙ ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 154. *Εστω, ὅτι ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2. Αὕτη δὲν εἶναι ἀκέραιός τις ἀριθμός. Διότι, $1^2=1$ καὶ $2^2=4$. Ἄλλ' οὔτε ὑπάρχει ἄλλος τις ἀριθμός ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν, τοῦ όποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μέ 2. Διότι, ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει τοιοῦτος ἀριθμός δεκαδικὸς κοινὸς ἢ περιοδικός, αὐτὸς δύναται νὰ

παρασταθῇ μέ κλάσμα ἀνάγωγον, ἔστω δὲ τοῦτο τὸ $\frac{\lambda}{\mu}$. Τότε

θὰ εἶναι $\frac{\lambda^2}{\mu^2} = 2$, τὸ όποῖον εἶναι ἀδύνατον, ἐπειδὴ, ἀφοῦ τὸ $\frac{\lambda}{\mu}$ εἶναι ἀνάγωγον, τὸ $\frac{\lambda^2}{\mu^2}$ εἶναι ἀνάγωγον καὶ δὲν δύναται νὰ ἰσοῦται μέ 2.

Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὴν $\sqrt{5}$, τὴν $\sqrt{7}$ κ.τ.λ.

*Αναζητοῦντες τὴν $\sqrt{2}$ σχηματίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς 1,1, 1,2 1,3....1,7 1,8 1,9 2 καὶ σχηματίζομεν ἀκολουθίως τὰ τετράγωνα τούτων 1 1,21 1,44 1,69 2,25... Παρατηροῦμεν, ὅτι οὐδὲν ἐκ τῶν τετραγώνων αὐτῶν ἰσοῦται μέ τὸν 2 καὶ ὅτι ὁ 2 πριέχεται μεταξὺ

τῶν 1,96 καὶ 2,25 τετραγώνων τῶν 1,4 καὶ 1,5 δύο διαδοχικῶν τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν. "Ἦτοι εἶναι $1,4^2 < 2 < 1,5^2$.

Σχηματίζομεν τώρα τοὺς ἀριθμοὺς 1,4 1,41 1,42 1,43..... 1,49 1,5. Ἐπειδὴ ὁ 2 δὲν δύναται νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον ἑνὸς ἐκ τούτων, περιέχεται μεταξύ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἐκ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Πράγματι, ἂν σχηματίσωμεν τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν τούτων, εὐρίσκομεν, ὅτι εἶναι $1,41^2 < 2 < 1,42^2$. Ἐπομένως ἡ $\sqrt{2}$ περιέχεται μεταξύ 1,41 καὶ 1,42. Ὁμοίως προχωροῦμεν καὶ εὐρίσκομεν, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ περιέχεται μεταξύ τῶν 1,414 καὶ 1,415, ἐνῶ οἱ ἀριθμοὶ αὗτοι διαφέρουν κατὰ ἓν χιλιοστόν. Ἄν προχωρήσωμεν ἀκόμη, εὐρίσκομεν, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ περιέχεται μεταξύ δύο ἀριθμῶν, οἱ ὅποιοι διαφέρουν κατὰ ἓν δέκατον χιλιοστοῦ, ἓν ἑκατοστόν χιλιοστοῦ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐν γένει, λοιπόν, ἂν προχωρήσωμεν ὁμοίως, θὰ εὕρωμεν, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ περιέχεται μεταξύ δύο ἀριθμῶν, οἵτινες διαφέρουν ἀπολύτως κατὰ μίαν δεκαδικὴν μονάδα τῆς τελευταίας τάξεως, τὴν ὁποίαν περιέχουν καὶ ἐπομένως ἡ διαφορὰ αὕτη δύναται νὰ γίνῃ ὅσον θέλομεν μικρὰ (ἂν ἐξακολουθήσωμεν ἀρκούντως). Ἄρα, ἕκαστος τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν κατὰ μείζονα λόγον θὰ διαφέρῃ ἀπολύτως ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τὸν παριστάνοντα τὴν $\sqrt{2}$ κατὰ ποσότητα ὅσον καὶ ἂν θέλωμεν μικράν. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ = μὲ ὄριον ἑνὸς τῶν ὡς ἄνω εὐρισκομένων ἀριθμῶν, ἥτοι θεωροῦμεν ὡς $\sqrt{2}$ τὸν ἕνα ἐκ τῶν ὡς ἀνωτέρω εὐρισκομένων ἀριθμῶν· ἔχει δὲ αὐτὸς ἅπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά, διότι ἄλλως ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς θὰ ἠδύνατο νὰ παρασταθῇ μὲ κλάσμα, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον.

Τὸν ἀριθμὸν αὐτόν, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὴν $\sqrt{2}$ καλοῦμεν **ἀσύμμετρον**.

Τοιοῦτους ἀριθμοὺς εὐρίσκομεν καὶ εἰς τὴν Γεωμετρίαν κατὰ τὴν μέτρησιν τῶν καλουμένων **ἀσυμμέτρων μεγεθῶν** πρὸς τὴν μονάδα μετρήσεως αὐτῶν.

Ἐν γένει καλοῦμεν **ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς ἐκείνους**, οἵτινες ἔχουν ἅπειρον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων μὴ περιοδικῶν. Καὶ εἶναι θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί, ἂν ἔχουν πρὸ αὐτῶν τὸ σῆμα + (ἢ οὐδὲν πρόσσημον) ἢ τὸ -. **Συμμέτρους** δὲ καλοῦμεν τοὺς μέχρι τοῦδε γνωστοὺς ἀριθμοὺς (ἀκεραίους ἢ κλασματικούς ἐν γένει).

Κατὰ ταῦτα ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος, ὁ 1,41421 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοντάκις χιλιοστοῦ. Ὅμοίως οἱ ἀριθμοὶ 2,14159... καὶ 2,71828... εἶναι ἀσύμμετροι (ἔχοντες ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά).

Καθὼς γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, δεχόμεθα συνήθως, ὅτι οἱ σύμμετροι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ γίνουν ἀπὸ τὴν μονάδα ἢ καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτῆς 0,1. 0,01. 0,001... διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῶν ὡς προσθετέων, πρὸς δέ, ὅτι ὑπάρχουν κλάσματα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα μὲ ἀριθμοὺς ἔχοντας μὲν ἄπειρον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα ὅμως ἐπαναλαμβάνονται ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς ὁμοίως καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν. Οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ λέγομεν, ὅτι σχηματίζονται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως ὡς προσθετέων τῶν (ἀπείρων τὸ πλῆθος) δεκαδικῶν μονάδων 0,1. 0,01. 0,001 κ.τ.λ.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον δεχόμεθα ὅτι :

Σύνολον πλήθους ἐκ τῶν αὐτῶν ἀπείρων δεκαδικῶν μονάδων, ἐξ ἐκάστης τῶν ὁποίων δὲν εἶναι περισσότεραι τῶν ἑννέα, θεωροῦνται ὡς ἀριθμοί, ὅσαδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὰ ψηφία, διὰ τῶν ὁποίων γράφονται οὗτοι.

Καὶ μετὰ τὴν παραδοχὴν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν δεχόμεθα ὅτι διατηροῦνται οἱ ὁρίσμοι τῶν πράξεων ἐπ' αὐτῶν, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν συμμέτρων, δεικνύεται δὲ ὅτι εἶναι δυνατὴ ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις, ὁ πολλαπλασιασμός (καὶ ἡ ὑψωσις εἰς δύναμιν) καὶ ἡ διαίρεσις δύο οἰωνδήποτε ἀριθμῶν $\alpha:\beta$ ($\beta \neq 0$). Ἐπίσης δεικνύεται, ὅτι ἰσχύουν καὶ ἐπ' αὐτῶν αἱ θεμελιώδεις ιδιότητες πράξεων.

Εἰς τὰς πράξεις τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν παραλείπομεν τὰ δεκαδικὰ ψηφία αὐτῶν ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς. Οὕτως ἔχομεν συμμέτρους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι μόνον κατὰ προσέγγισιν ἴσοι μὲ τοὺς ἀσυμμέτρους. Ἐπὶ τῶν συμμέτρων δὲ τούτων ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνας.

Ἀριθμὸς τις θετικὸς σύμμετρος (γραμμένος ὡς δεκαδικὸς) λέγεται **μεγαλύτερος** ἄλλου τοιούτου, ὁ ὁποῖος λέγεται **μικρότερος** τοῦ πρώτου, ἂν περιέχῃ τὸ σύνολον τῶν μονάδων ἐκάστης δεκαδικῆς τάξεως τοῦ δευτέρου καὶ ἄλλας ἀκόμη, καθὼς ὁ 2,5349 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 2,53439856.

§ 155. Δύο ἀριθμοὶ θετικοὶ ἀσύμμετροι λέγονται **ἴσοι**, ἂν πᾶς

ἀριθμός ἀκέραιος ἢ κλασματικός, ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος τοῦ ἑνὸς ἐκ τούτων, εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ ἄλλου. Οὕτω οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 0,9999.... εἶναι ἴσοι. Διότι ἔστω ἀριθμὸς τις μικρότερος τῆς 1 π.χ. ὁ $\frac{147}{148}$. Αὐτὸς εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ $\frac{999}{1000}$, ἐπεὶδὴ ὁ μὲν $\frac{999}{1000}$ διαφέρει ἀπὸ τὴν 1 κατὰ $\frac{1}{1000}$. ὁ δὲ $\frac{147}{148}$ κατὰ $\frac{1}{148}$, ἥτοι περισσότερον. Ἐπομένως ὁ $\frac{147}{148}$, ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος τοῦ 0,999, εἶναι ἀκόμη μικρότερος καὶ τοῦ 0,9999. Ὁμοίως δεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον τούτου· ὅσαδήποτε ψηφία τοῦ 0,99999.... καὶ ἂν λάβωμεν, προκύπτει ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος, ἄρα εἶναι $1 = \delta\text{ριον } 0,9999\text{....}$ καὶ θέτομεν $1 = 0,9999\text{...}$ καὶ $0,01 = 0,009999\text{...}$ κ.τ.λ.

Κατὰ ταῦτα δύο ἀριθμοὶ θετικοὶ σύμμετροι γραμμένοι ὡς δεκαδικοὶ θὰ εἶναι ἴσοι : 1ον. Ἐν πάντα τὰ δεκαδικὰ ψηφία των τῆς αὐτῆς τάξεως εἶναι τὰ αὐτὰ ἢ 2ον, ἂν τινὰ μὲν ψηφία των ἀπὸ τοῦ πρώτου καὶ ἐφ' ἑξῆς εἶναι κατὰ σειρὰν τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ἀμέσως ἐπόμενον ψηφίον τούτων τοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ διαφέρει ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχόν του (τῆς αὐτῆς τάξεως) τοῦ ἄλλου κατὰ μονάδα, τὰ δὲ ἐπόμενα ψηφία τοῦ μὲν ἔχοντος τὸ μικρότερον ἐκ τῶν ἀνίσων ψηφίων εἶναι πάντα 9, τοῦ δὲ ἄλλου πάντα εἶναι 0 (τὰ ὁποῖα καὶ παραλείπονται). Ἐν δὲν συμβαίνει τοῦτο, οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι. Οὕτω π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 3,1539999, καὶ 3,154 θεωροῦνται, ὅτι εἶναι ἴσοι, καθὼς καὶ οἱ 0,54327 καὶ 0,54326999, ἐνῶ οἱ 3,1452.... καὶ 3,1478... εἶναι ἄνισοι καὶ 3,1478... > 3,1452...

Παρατηρήσεις. α') Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν προηγουμένων δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν τὴν ἰσότητα καὶ ἀνισότητα καὶ μὲ ἀσύμμετρους ἀριθμούς. Π.χ. ἐκ τῶν ἀσύμμετρων 3,14153... καὶ 3,141298... ὁ α' εἶναι μεγαλύτερος τοῦ β'.

β') Οἱ ἀριθμοὶ $\alpha + \sqrt{\beta}$ καὶ $\gamma + \sqrt{\delta}$, ὅπου α, γ , σύμμετροι οἱ δὲ β, δ θετικοὶ καὶ σύμμετροι ἀλλὰ μὴ τέλεια τετράγωνα εἶναι ἴσοι μόνον ὅταν $\alpha = \gamma$ καὶ $\beta = \delta$.

Πράγματι. Ἡ ἰσότης $\alpha + \sqrt{\beta} = \gamma + \sqrt{\delta}$ ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν $(\alpha - \gamma) + \sqrt{\beta} = \sqrt{\delta}$. Ἐπομένως, διὰ νὰ ἀληθεύῃ πρέπει ὅπωςδήποτε νὰ εἶναι $((\alpha - \gamma) + \sqrt{\beta})^2 = \delta$, δηλ. $(\alpha - \gamma)^2 + \beta + 2(\alpha - \gamma)\sqrt{\beta} = \delta$ ἢ $2(\alpha - \gamma)\sqrt{\beta} = \delta - \beta - (\alpha - \gamma)^2$. Ἐν ἦτο $\alpha \neq \gamma$, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὰ δύο μέλη διὰ $\alpha - \gamma$ καὶ συμπεραίνομεν, ὅτι θὰ ἔπρεπε νὰ ἀλη-

θεύη ή $\sqrt{\beta} = \frac{\delta - \beta - (\alpha - \gamma)^2}{\alpha - \gamma}$. Τοῦτο σημαίνει, ὅτι θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς $\sqrt{\beta}$ ἴσος μὲ ἓνα σύμμετρον $\frac{\delta - \beta - (\alpha - \gamma)^2}{\alpha - \gamma}$, πράγμα ἀδύνατον. Κατ' ἀνάγκην λοιπὸν πρέπει νὰ εἶναι $\alpha = \gamma$. Καὶ τότε διὰ νὰ εἶναι ἴσοι οἱ $\alpha + \sqrt{\beta}$, $\gamma + \sqrt{\delta}$ πρέπει νὰ εἶναι καὶ $\sqrt{\beta} = \sqrt{\delta}$ καὶ συνεπῶς $\beta = \delta$, ἀφοῦ β, δ θετικοί. Τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ προφανῶς.

Ἀ σ κ ῆ σ ε ι ς

334. Δείξατε, ὅτι ἀφοῦ δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς ἀκέραιος, τοῦ ὁποῖου ἡ τρίτη δύναμις ἰσοῦται μὲ 7 δὲν ὑπάρχει τοιοῦτος οὔτε κλασματικὸς καὶ ὅτι ὑπάρχει ἀσύμμετρος. Εὑρετε τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ (κατὰ τὰ ἀνωτέρω) τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ τὰ τρία πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία.

335. Δείξατε κατ' ἀναλογίαν ὅτι, ἂν ἀριθμὸς ἀκέραιος θετικὸς δὲν ἔχη ὡς νιοστήν ρίζαν (ν ἀκέραιος καὶ θετικὸς) ἀκέραιον δὲν ἔχει οὔτε κλασματικὸν ἀλλ' ἔχει ἀσύμμετρον ἀριθμόν.

336. Δείξατε ὅτι εἶναι $op\ 3,567999... = 3,568$

Ποῖος ἐκ τῶν 18,1557... καὶ 18,1452921... εἶναι μεγαλύτερος καὶ διατί;

337. Εὑρετε τὸ ἄθροισμα τῶν 3,14124... 0.68456... 1,72345... καὶ 12,53652 μὲ προσέγγισιν δεκάκις χιλιοστοῦ.

338. Εὑρετε τὸ $\sqrt{19} \pm \sqrt{3}$ μὲ προσέγγισιν χιλιοστοῦ.

339. Εὑρετε τὴν διαφορὰν 3,542754... - 6,37245... μὲ προσέγγισιν δεκάκις χιλιοστοῦ.

340. Εὑρετε τὴν διαφορὰν $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ καὶ τὴν $\sqrt{2} - \sqrt{7}$ μὲ προσέγγισιν χιλιοστοῦ.

Δ'. ΠΕΡΙ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 156. Καθὼς εἶδομεν, οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν ρίζαν ἀρτίας τάξεως. Ἄν θέλωμεν νὰ ἔχουν καὶ οἱ ἀρνητικοὶ τετραγωνικὴν ρίζαν, παραδεχόμεθα νέον εἶδος ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι νὰ γίνωνται ἀπὸ νέαν μονάδα, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον ὀρίζομεν ἴσον μὲ -1. Τοὺς νέους τούτους ἀριθμοὺς θὰ καλοῦμεν **φανταστικούς**, τοὺς δὲ μέχρι τοῦδε γνωστοὺς πρὸς διάκρισιν θὰ καλοῦμεν **πραγματικούς**. Τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῆς ἀρνητικῆς μονάδος καλοῦμεν **φανταστικὴν μονάδα** καὶ τὴν παριστάνομεν μὲ τὸ σύμβολον* i , τὴν δὲ

* Ὁ συμβολισμὸς $i = \sqrt{-1}$ ἐχρησιμοποιήθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Γερμανοῦ μαθηματικοῦ F. Gauss ἀλλ' ὁ Euler (2777) εἰσήγαγεν ὀριστικῶς τὴν παράστασιν αὐτήν.

ἀντίθετόν της i με $-i$. Οὕτως ἂν ἔχωμεν $x^2 = -1$, ὁρίζομεν τὸ $x^2 = -1 = i^2$ καὶ $x = \sqrt{-1} = i$, εἶναι δέ κατὰ σειρὰν $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$. Ἐκ τῆς i ἡ μέρους αὐτῆς δεχόμεθα, ὅτι σχηματίζονται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως ὡς προσθετέον οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοί.

Π. χ. ἔχομεν ὅτι $2i = i + i$, $3i = i + i + i$, $\frac{4}{9} i = \frac{1}{9} i + \frac{1}{9} i + \frac{1}{9} i + \frac{1}{9} i$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον δεχόμεθα, ὅτι σχηματίζονται καὶ οἱ χαρακτηριζόμενοι ὡς ἀρνητικοὶ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ ἐκ τῆς $-i$. ὅπως καὶ οἱ ἀρνητικοὶ πραγματικοὶ ἐκ τῆς -1 , ἢ ἐκ τῆς $+1$, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ σῆμα της. Π.χ. εἶναι $-4i = (-i) + (-i) + (-i) + (-i)$.

Οὕτω, κάθε ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο ρίζας, φανταστικὰς μὲ ἀντίθετα πρόσημα. Π.χ. ὁ -25 ἔχει τετραγ. ρίζαν τοὺς $5i$ καὶ $-5i$ διότι $(5i)^2 = 25i^2 = 25 \cdot (-1) = -25$. Καὶ $(-5i)^2 = (-5)^2 \cdot i^2 = 25 \cdot (-1) = -25$.

Ἐκ τῶν δύο τετραγ. ριζῶν ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ἔχουσα πρόσημον $+$ ὀνομάζεται **πρωτεύουσα** τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ καὶ συμβολίζεται μὲ τὸ οἰκτεῖον ριζικὸν χωρὶς πρόσημον ἀριστερά, ἂν ὁ ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Οὕτω ὁ συμβολισμὸς $\sqrt{-2}$ σημαίνει: ἡ πρωτεύουσα τετραγ. ρίζα τοῦ -2 καὶ ἔχομεν $\sqrt{-2} = i\sqrt{2}$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶναι αἱ τετραγ. ρίζαι τοῦ ἀντιθέτου ἀριθμοῦ συνοδευόμεναι μὲ τὸ σύμβολον i .

§ 157. Καὶ διὰ τὸ νέον τοῦτο σύστημα τῶν ἀριθμῶν δεχόμεθα, ὅτι ἰσχύουν, οἱ θεμελιώδεις νόμοι τῶν πράξεων. ἦτοι ὁ νόμος τῆς ἀλλαγῆς τῆς θέσεως τῶν προσθετέων ἢ τῶν παραγόντων, ὁ νόμος τῆς ἀντικαταστάσεως τινῶν ἐξ αὐτῶν μὲ τὸ ἄθροισμά των καὶ ἀντιστρόφως καὶ ὁ ἐπιμεριστικὸς νόμος.

Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα πραγματικοῦ καὶ φανταστικοῦ ἀριθμοῦ καλεῖται **μιγαδικὸς ἀριθμὸς** ἢ ἀπλῶς **μιγάς**.

Οὕτως οἱ $7+6i$, $3-5i$, $-9-7i$ εἶναι μιγαδικοὶ ἀριθμοί.

§ 158. Ἡ γενικὴ μορφή τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι $\alpha + \beta i$ ἢ συμβολικῶς (α, β) , ἥτοι ὑποτίθεται, ὅτι εἶναι $(\alpha, \beta) = \alpha + \beta i$. Ἄν

εἶναι $\alpha=0$, τότε $(0,\beta)=\beta i$, ἥτοι φανταστικὸς ἀριθμὸς. Ἄν εἶναι $\beta=0$, τότε $(\alpha,0)=\alpha$, ἥτοι πραγματικὸς ἀριθμὸς. Ὁ $(0,0)=0$.

§ 259. Δύο μιγάδες, ἕκαστος τῶν ὁποίων λέγεται ἐνίοτε καὶ ἀπλῶς φανταστικὸς, λέγονται συζυγεῖς ἐὰν διαφέρουν κατὰ τὸ πρόσημον τοῦ φανταστικοῦ μέρους αὐτῶν. Π.χ. οἱ $7+3i$ καὶ $7-3i$ λέγονται συζυγεῖς (μιγάδες), καθὼς καὶ οἱ $-5i$ καὶ $5i$, καὶ ἐν γένει οἱ (α,β) καὶ $(\alpha,-\beta)$ εἶναι συζυγεῖς φανταστικοὶ ἀριθμοί, ὅπου α καὶ β εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ οἰοιδήποτε.

1. ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 160. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν γίνεται καθὼς καὶ τῶν πραγματικῶν καὶ δίδει ἄθροισμα πραγματικὸν ἢ φανταστικὸν ἢ μιγαδικὸν ἀριθμὸν ἢ μηδέν.

Π.χ. εἶναι: $8i+5i=13i$, $(0,\beta)+(0,\delta)=0+\beta i+0+\delta i=0+(\beta+\delta)i=(\beta+\delta)i$. Ὀμοίως $-17i-6i=-23i$, $5+3i+6-3i=11$, $18i-5i=13i$, ἐνῶ $15i-15i=0$, $(0,\beta)-(0,\beta)=\beta i-\beta i=0$.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς φανταστικῶν ἀριθμῶν δίδει γινόμενον πραγματικὸν ἀριθμὸν, ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν φανταστικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιον. Οὕτως ἔχομεν ὅτι:

$$(0,1)\cdot(0,1)=i\cdot i=i^2=-1, \quad (-i)\cdot(-i)=(-i)^2=i^2=-1, \\ \text{ἢ } (0,-1)^2=(-i)\cdot(-i)=i^2=-1, \quad (0,1)^3=i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i, \\ (0,1)^4=i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=+1.$$

$$\text{Γενικῶς εἶναι } (0,1)^{4v}=i^{4v}=(i^4)^v=1, \quad i^{4v+1}=i^{4v}\cdot i=1\cdot i=i, \\ (0,1)^{4v+2}=i^{4v+2}=i^{4v}\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1, \\ (0,1)^{4v+3}=i^{4v+3}=i^{4v}\cdot i^3=1\cdot(-i)=-i.$$

Ἡ διαίρεσις καὶ τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν θεωρεῖται, ὡς συνήθως, ἀντίστροφος πράξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, εἶναι δὲ

$$(0,\alpha):(0,\beta)=\alpha i:\beta i=\frac{\alpha i}{\beta i}=\frac{\alpha}{\beta}, \\ (\alpha,0):(0,\beta)=\alpha:\beta i=\frac{\alpha}{\beta i}=\frac{\alpha i}{\beta i^2}=\frac{\alpha i}{\beta i^2}=-\frac{\alpha}{\beta}i.$$

§ 161. Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν τεσσάρων πράξεων ἐπὶ μιγάδων ἀριθμῶν δίδει ἐξαγόμενα ἐν γένει μιγάδας ἀριθμούς. Οὕτως ἔχομεν ὅτι:

$$(\alpha,\beta)+(\gamma,\delta)=(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=\alpha+\gamma+(\beta+\delta)i=(\alpha+\gamma,\beta+\delta),$$

$$\begin{aligned}
 (\alpha, \beta) - (\gamma, \delta) &= (\alpha + \beta i) - (\gamma + \delta i) = \alpha - \gamma + (\beta - \delta)i = (\alpha - \gamma, \beta - \delta), \\
 (\alpha, \beta) \cdot (\gamma, \delta) &= (\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) = \alpha\gamma + \beta\gamma i + \alpha\delta i + \beta\delta i^2 = \\
 &= \alpha\gamma - \beta\delta + (\beta\gamma + \alpha\delta)i = (\alpha\gamma - \beta\delta, \beta\gamma + \alpha\delta). \\
 (\alpha, \beta) : (\gamma, \delta) &= (\alpha + \beta i) : (\gamma + \delta i) = \\
 &= \frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{(\alpha + \beta i)(\gamma - \delta i)}{(\gamma + \delta i)(\gamma - \delta i)} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta + (\beta\gamma - \alpha\delta)i}{\gamma^2 + \delta^2} = \left(\frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2}, \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} \right).
 \end{aligned}$$

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 162. Τὸ ἄθροισμα δύο συζυγῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς πραγματικὸς.

$$\begin{aligned}
 \text{Οὕτω τὸ ἄθροισμα: } (\alpha, \beta) + (\alpha, -\beta) &= (\alpha + \beta i) + (\alpha - \beta i) = \\
 &= \alpha + \beta i + \alpha - \beta i = 2\alpha = (2\alpha, 0).
 \end{aligned}$$

§ 163. Ἐὰν ζητῇται τὸ γινόμενον τῶν συζυγῶν (α, β) , $(\alpha, -\beta)$, ἦτοι τῶν $\alpha + \beta i$ καὶ $\alpha - \beta i$, ἔχομεν $(\alpha + \beta i) \cdot (\alpha - \beta i) = \alpha^2 - (\beta i)^2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2, 0)$. Ἦτοι:

Τὸ γινόμενον δύο συζυγῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶναι πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τοῦ ἑνὸς τούτων.

Καλοῦμεν μέτρον μιγάδος ἢ φανταστικοῦ ἀριθμοῦ, ἔστω τοῦ $(\alpha, \beta) = \alpha + \beta i$, τὴν (θετικὴν) τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ γινομένου τοῦ δοθέντος καὶ τοῦ συζυγοῦς αὐτοῦ $(\alpha, -\beta) = \alpha - \beta i$. Κατὰ ταῦτα τὸ μέτρον τοῦ $(\alpha, \beta) = \alpha + \beta i$ καὶ τοῦ $(\alpha, -\beta) = \alpha - \beta i$ εἶναι τὸ $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, τοῦ $(0, \beta) = \beta i$ καὶ τοῦ $(0, -\beta) = -\beta i$ εἶναι τὸ $\sqrt{\beta^2} = \beta > 0$. Π.χ. τὸ μέτρον $(4, -3) = 4 - 3i$ εἶναι τὸ $\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$, τοῦ $(0, \pm 3) = \pm 3i = 0 \pm 3i$ τὸ $\sqrt{3^2} = 3$.

§ 164. Ἐὰν δύο μιγάδες ἀριθμοὶ $(\alpha, \beta) = \alpha + \beta i$ καὶ $(\gamma, \delta) = \gamma + \delta i$ εἶναι μεταξύ των ἴσοι, θὰ ἔχωμεν $\alpha + \beta i = \gamma + \delta i$.

$$\begin{aligned}
 \text{Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης προκύπτει } (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i &= 0 \\
 \text{ἢ } (\alpha - \gamma) &= -(\beta - \delta)i = (\delta - \beta)i.
 \end{aligned}$$

Ὑποῦντες εἰς τὸ τετράγωνον τὰ δύο ἴσα $\alpha - \gamma$ καὶ $(\delta - \beta)i$, εὐρίσκομεν $(\alpha - \gamma)^2 = (\delta - \beta)^2 i^2 = (\delta - \beta)^2 \cdot (-1) = -(\delta - \beta)^2$.

Ἄλλ' ἡ ἰσότης αὐτὴ ἀληθεύει μόνον, ὅταν εἶναι $\alpha = \gamma$ καὶ $\beta = \delta$, ὁπότε καὶ τὰ δύο μέλη εἶναι ἴσα μὲ 0, ἐνῶ εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν, ὅτι θετικὸς τις ἀριθμὸς ἰσοῦται μὲ ἀρνητικόν, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον. Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι:

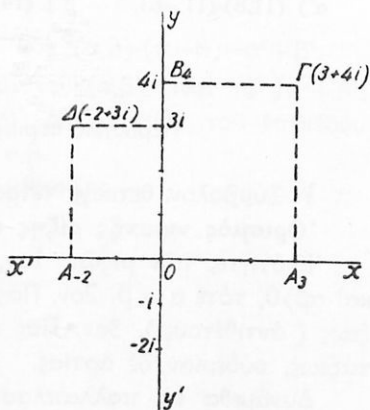
Ἐὰν δύο μιγάδες ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι μεταξύ των θὰ εἶναι χωριστὰ ἴσα τὰ πραγματικά καὶ τὰ φανταστικά μέρη αὐτῶν καὶ ὅτι μία ἰσότης μεταξύ δύο μιγάδων ἀριθμῶν ἄγει εἰς δύο ἰσότητας μὲ πραγματικούς ἀριθμούς.

3. ΣΗΜΕΙΑ ΟΡΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΜΙΓΑΔΑΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

§ 165. Καθὼς οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοί, ἂν θέλωμεν, ὀρίζουν σημεῖα καὶ παριστάνονται ὑπ' αὐτῶν, οὕτω καὶ οἱ φανταστικοὶ καὶ οἱ μιγάδες ἀριθμοὶ δύνανται νὰ ὀρίζουν σημεῖα καὶ παριστάνονται ὑπ' αὐτῶν ὡς ἑξῆς :

Λαμβάνομεν τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων καὶ ὀρίζομεν, ὅτι τὸ ἄκρον τμήματος τοῦ ἄξονος τῶν ψ μήκους μιᾶς μονάδος ἀρχομένου ἀπὸ τοῦ O καὶ πρὸς τὴν φορὰν $O\psi$ παριστάνει τὴν φανταστικὴν μονάδα i . Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὀρίζομεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς $2i, 3i, \dots \beta i \dots (\beta > 0)$, ἂν λάβωμεν ἀπὸ τοῦ O τμήμα ἴσον μὲ $2, 3, \dots \beta \dots$ μονάδας μήκους πρὸς τὴν φορὰν $O\psi$, τὰ ὁποῖα λέγομεν, ὅτι ὀρίζονται ὑπὸ τῶν φανταστικῶν τούτων ἀριθμῶν. Ἐὰν λάβωμεν τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα πρὸς τὴν φορὰν $O\psi'$, θὰ λέγωμεν, ὅτι αὐτὰ ὀρίζονται ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν $-i, -2i, -3i, \dots, -\beta i, \dots$ καὶ παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους (σχ. 15α).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον, τὸ ὀριζόμενον ὑπὸ μιγάδος τινὸς ἀριθμοῦ, π.χ. ὑπὸ τοῦ $(3,4)=3+4i$, εὐρίσκομεν τὸ σημεῖον A_3 ἐπὶ τῆς $x'x$ τὸ παριστάνον τὸν ἀριθμὸν 3, τὸ B_4 παριστάνον τὸν $4i$ ἐπὶ τῆς $\psi'\psi$ καὶ ἀκολουθῶς σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον $OA_3\Gamma B_4$, τούτου δὲ ἡ τετάρτη κορυφή Γ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν ἀριθμὸν $(3,4)=3+4i$. Καθὼς βλέπομεν, τὸ σημεῖον Γ ἔχει τετμημένην 3 καὶ τεταγμένην 4. Ἐν γένει, θὰ λέγωμεν, ὅτι ὁ μιγάς ἀριθμὸς $(\alpha, \beta)=\alpha+\beta i$ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου ἢ ὅτι ὀρίζει τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον



Σχ. 15α

ἔχει τετμημένην α καὶ τεταγμένην β ὡς πρὸς ἄξονας $x'x$ καὶ $\psi'\psi$.

Σημειώσεις. Καλοῦμεν **ὄρισμα** τοῦ μιγάδος π.χ. $(3,4)=3+4i$ τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεΐα Ox μέ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα OG , τὸ ὁποῖον συνδέει τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὸν ἀριθμὸν $(3,4)=3+4i$. Κατ' ἀνάλογον τρόπον τὸ ὄρισμα τοῦ $(\alpha,\beta)=\alpha+\beta i$ εἶναι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ Ox μέ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα OM , ἂν τὸ M παριστάνῃ τὸν $(\alpha,\beta)=\alpha+\beta i$.

Ἀσκήσεις

341. Παραστήσατε με σημεία τοὺς μιγάδας :

$$\alpha') \ 2-0,74i \quad \beta') \ 5+3i \quad \gamma') \ 6-3i \quad \delta') \ -0,75-0,62i \quad \epsilon') \ (2,4)=2+4i$$

$$\sigma') \ (3,-4) \quad \zeta') \ (2,-0,64) \quad \eta') \ (5,2) \quad \theta') \ (6,-3).$$

342. Εὑρετε τὰ ἀθροίσματα, διαφοράς, γινόμενα, πηλίκα τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν ἀνά δύο.

343. Νὰ εὕρεθῶν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ νὰ παρασταθῶν αὐτὰ διὰ τῶν σημείων :

$\alpha') (5,3) \cdot (7,3), \beta') (2,2)^2, \gamma') (2,-7) \cdot (9,-2), \delta') (6,7) \cdot (6,-7).$

344. Ὁμοίως τῶν κάτωθι :

$$\alpha') (11,8) \cdot (11,-8), \quad \beta') (14,15) \cdot (14,-15), \quad \gamma') (3+i\sqrt{2}) \cdot (4-3i\sqrt{2}).$$

Περίληψις περιεχομένων Κεφαλαίου V.

V^- Σύμβολον θετικής τετραγωνικής ρίζης.

Ὁρισμός νιοστῆς ρίζης σχετικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἰδιότητες τῶν ριζῶν. 1ον. Ἐν $\alpha^{\mu} = \beta^{\mu}$, μ ἀκέραιος καὶ θετικὸς καὶ $\alpha\beta > 0$, τότε $\alpha = \beta$. 2ον. Πᾶς ἀριθμὸς $|a|$ ἔχει δύο ρίζας ἄρτίας τάξεως (ἀντιθέτους). 3ον. Πᾶς ἀριθμὸς $-|a|$ ἔχει μίαν ρίζαν περιττῆς τάξεως, οὐδεμίαν δέ ἄρτίας.

Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δείκτην τῆς ρίζης καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς ὑπορρίζου ποσότητος μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ὅταν ἡ ὑπόρριζος ποσότης εἶναι θετική. Ἐξαγωγή ρίζης ἄλλης ρίζης ποσότητός τινος θετικῆς. Τροπὴ ριζῶν μὲ διαφόρους δείκτας εἰς ἄλλας ἴσας μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην. Γινόμενον ἡ πηλίκον ριζῶν, ὅταν τὰ ὑπόρριζα εἶναι θετικά.

Όρισμός δυνάμεων με κλασματικών εκθέτην.

Πότε λέγομεν $ορ x = 0$ ἢ $ορ x = α (α \neq 0)$,

Ἰδιότητες τῶν ὀρίων : ἂν $ορ x = 0$, τότε $ορ(λx) = 0$, $λ =$ σταθερόν, ἂν $ορ x = α$, τότε $ορ(λx) = λα$, $ορ(x + ψ + ω + \dots + φ) = ορ x + ορ ψ + ορ ω + \dots + ορ φ$, $ορ(x \cdot ψ) = ορ x \cdot ορ ψ$, ὅριον $(x : ψ) = ορ x : ορ ψ$,
(ἂν $ορ ψ \neq 0$), $ορ(x^ν) = (ορ x)^ν$, $(ορ \sqrt[n]{x}) = \sqrt[n]{ορ x}$.

Όρισμός ασυμμέτρου ἀριθμοῦ (παριστανομένου ὑπὸ μορφήν δεκαδικοῦ :μέ ἀπειρα τὸ πλῆθος δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά.)

Όρισμός φανταστικοῦ ἀριθμοῦ.

$$i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1.$$

Όρισμός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ. $α + βi = (α, β)$.

Όρισμός συζυγῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν $(α, β)$ καὶ $(α, -β)$.

Πράξεις με μιγάδας ἀριθμούς :

$$1ον \quad (α, β) + (γ, δ) = (α + γ, β + δ) \quad 2ον \quad (α, β) - (γ, δ) = (α - γ, β - δ)$$

$$3ον \quad (α, β) \cdot (γ, δ) = (αγ - βδ, βγ + αδ). \quad 4ον \quad (α, β) : (γ, δ) =$$

$$\left(\frac{αγ + βδ}{γ^2 + δ^2}, \frac{βγ - αδ}{γ^2 + δ^2} \right).$$

Ἰδιότητες μιγάδων ἀριθμῶν :

$$1ον \quad \text{ἂν } (α, β) = 0, \text{ τότε } α = 0, β = 0. \quad 2ον \quad (α, β) \cdot (α, -β) = α^2 + β^2.$$

Όρισμός μέτρου μιγάδος. Μέτρον τοῦ $(α, β)$ εἶναι τὸ $\sqrt{α^2 + β^2}$.
Γεωμετρικὴ παράστασις μιγάδος $(α, β)$ διὰ σημείου τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἄξόνων $xOψ$ με συντεταγμένας $α, β$.

Όρισμός ὀρίσματος μιγάδος ἀριθμοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Α'. ΠΕΡΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ*

§ 166. Ἡ γενικὴ μορφή τῆς ἐξίσωσews δευτέρου βαθμοῦ μετὰ ἓνα ἄγνωστον τὸν x εἶναι ἡ $ax^2 + bx + \gamma = 0$ (1), ὅπου τὰ a, b, γ παριστάνουν ἀριθμοὺς πραγματικοὺς ἢ παραστάσεις γνωστὰς, καλοῦνται δὲ **συντελεσταί**, τὸ δὲ γ καὶ σταθερὸς ὅρος τῆς (1) ἢ τοῦ τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$. Ὑποτίθεται ὅτι εἶναι $a \neq 0$, διότι ἂν $a = 0$, τότε ἡ (1) θὰ ἦτο a' βαθμοῦ.

Ἡ (1) λέγεται **πλήρης**, ἐὰν οἱ a, b, γ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενὸς [συμβολίζομεν δὲ τοῦτο οὕτως: $(a, b, \gamma) \neq (0, 0, 0)$]. Ἄν εἶναι $b = 0$, ἡ (1) θὰ ἔχη τὴν μορφήν $ax^2 + \gamma = 0$, ἂν $\gamma = 0$, γίνεται $ax^2 + bx = 0$, ἂν δὲ εἶναι $b, \gamma = 0$, ἡ (1) θὰ εἶναι μορφῆς $ax^2 = 0$.

Ἐκάστη τῶν ἀνωτέρω τριῶν τελευταίων μορφῶν λέγεται ἐξίσωσις μὴ **πλήρης**.

Αἱ ρίζαι ἐξίσωσews λέγονται **σύμμετροι** ἢ **ἀσύμμετροι**, ἂν αὐταὶ εἶναι ἀριθμοὶ σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι. Αἱ ρίζαι ἐξίσωσews λέγονται **πραγματικαὶ** ἢ **φανταστικαὶ** (ἢ **μιγαδικαὶ**), ἂν εἶναι ἀριθμοὶ πραγματικοὶ ἢ φανταστικοὶ (ἢ **μιγάδες**).

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

§ 167. Ἐὰν ἐξίσωσews ὑψώσωμεν τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, προκύπτει ἐξίσωσις ἔχουσα τὰς ρίζας τῆς δοθείσης καὶ τῆς προκυπτούσης ἐκ τῆς δοθείσης, ἂν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον τοῦ ἐνὸς τῶν δύο μελῶν αὐτῆς.

Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $A = B$ (1), ὅπου τὰ A καὶ B παριστάνουν τὰ δύο μέλη αὐτῆς. Ἐὰν ταύτης ὑψώσωμεν τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $A^2 = B^2$ (2).

* Τὰς ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ μετὰ ἓνα ἄγνωστον ἀνέπτυξε τὸ πρῶτον ὁ Ἕλλην μαθηματικὸς Διόφαντος.

Θὰ δείξωμεν ὅτι αὕτη ἔχει τὰς ρίζας τῆς $A=B$ καὶ τῆς $A = -B$.

Πράγματι πᾶσαι αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι ρίζαι καὶ τῆς (2). Διότι, ἂν εἰς τὴν (1) θέσωμεν ἀντὶ τῶν ἀγνώστων τὰς ρίζας αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν, ὅτι ἡ οὕτω προκύπτουσα τιμὴ τοῦ A εἶναι ἴση μὲ τὴν ὁμοίως προκύπτουσαν τιμὴν τοῦ B . Ἄρα καὶ (ἡ τιμὴ τοῦ A)²=(μὲ τὴν τοῦ B)². Παρατηροῦμεν τῶρα, ὅτι ἡ (2) εἶναι προφανῶς ἰσοδύναμος μὲ τὴν $A^2-B^2=0$, ἡ ὁποία γράφεται καὶ οὕτως: $(A-B)(A+B)=0$. Ἰνα αὕτη ἐπαληθεύηται, πρέπει καὶ ἀρκεῖ εἰς τῶν παραγόντων $A-B$ ἢ $A+B$ νὰ εἶναι ἴσος μὲ 0. Ἐὰν μὲν εἶναι $A-B=0$, ἐπαληθεύεται ἡ (1), ἂν δὲ εἶναι $A+B=0$, ἐπαληθεύεται ἡ $A=-B$. Ἄρα ἡ $A^2=B^2$ ἔχει τὰς ρίζας τῆς $A=B$ καὶ τῆς $A=-B$.

2. ΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x^2 + \gamma = 0$

§ 168. Ἐστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $5x^2-48=2x^2$ (1)

Ἐκ ταύτης εὐρίσκομεν εὐκόλως τὴν ἰσοδύναμόν της $3x^2=48$, ἢ τὴν $x^2=16$. Αὕτη προκύπτει ἐκ τῆς $x=4$, ἂν ὑψώσωμεν τὰ μέλη της εἰς τὸ τετράγωνον. Ἄρα ἡ $x^2=16$ ἔχει τὰς ρίζας τῆς $x=4$ καὶ τῆς $x=-4$. Δηλαδή αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι αἱ 4 καὶ -4.

Ἐν γένει πρὸς λύσιν τῆς ἐξίσωσεως $\alpha x^2 + \gamma = 0$ (ἐνῶ εἶναι $\alpha \neq 0$) ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμόν της $\alpha x^2 = -\gamma$ ἢ τὴν $x^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}$. Ἐπειδὴ αὖ-

τη προκύπτει ἀπὸ τὴν $x = \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$, ἂν τὰ μέλη της ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον, αἱ ρίζαι ταύτης, ἄρα καὶ τῆς $\alpha x^2 + \gamma = 0$, εἶναι αἱ $x = \pm \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$.

Ἐὰν εἶναι $-\frac{\gamma}{\alpha} > 0$, αἱ ρίζαι θὰ εἶναι πραγματικά, ἐνῶ ἂν $-\frac{\gamma}{\alpha} < 0$, θὰ εἶναι φανταστικά συζυγεῖς.

Δηλαδή ἂν παραστήσωμεν μὲ ρ_1, ρ_2 τὰς ρίζας θὰ εἶναι

$$\rho_1 = \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}, \quad \rho_2 = -\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}} \quad \text{εἰς τὴν } \alpha' \text{ περίπτωσιν, εἰς δὲ τὴν } \beta'$$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}} = \pm \sqrt{(-1)\frac{\gamma}{\alpha}} = \pm \sqrt{i^2 \frac{\gamma}{\alpha}},$$

$$\text{ἥτοι } \rho_1 = i \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}, \quad \rho_2 = -i \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

*Εστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $5x^2+25=0$. Εἶναι $\alpha=5$, $\gamma=25$ καὶ
 $x=\pm\sqrt{-5}$ δηλ. $x=\pm i\sqrt{5}$.

Παρατήρησις. Ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2=0$, ὅπου $\alpha \neq 0$, προφανῶς ἔχει
 ρίζαν τὴν $x=0$

Ἀσκήσεις

345. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

$$\alpha') 4x^2-3=x^2+6, \quad \beta') 9x^2-0,2=3x^2+15, \quad \gamma') \frac{9x}{4} + \frac{x-1}{x} = 1.$$

346. Ὅμοίως αἱ :

$$\alpha') \frac{x^2-\alpha^2}{5} - \frac{x^2-\beta^2}{2} = \frac{1}{3}, \quad \beta') (x+7)(x-7)=32, \quad \gamma') 7(2x+5)(2x-5)=44,$$

$$\delta') 8\left(3x + \frac{1}{2}\right)\left(3x - \frac{1}{2}\right) = 946, \quad \epsilon') x^2-12-2\sqrt{11}=0.$$

347. Ὅμοίως αἱ :

$$\alpha') \left(\frac{2x}{3}\right)^2 - \left(\frac{3x}{5}\right)^2 = 171, \quad \beta') (7+x)(9-x) + (7-x)(9+x) = 76,$$

$$\gamma') \frac{1+x^2}{1-x^2} - \frac{1}{1-x^4} = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

3. ΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x^2 + \beta x = 0$

§ 169. *Εστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $3x^2+5x=0$ (1)

Γράφομεν αὐτὴν οὕτω : $x(3x+5)=0$. Τὸ γινόμενον $x(3x+5)$
 γίνεται 0, ὅταν ὁ εἷς τῶν παραγόντων αὐτοῦ εἶναι ἴσος μὲ 0. Δη-
 λαδῇ, ὅταν εἶναι $x=0$ καὶ ὅταν $3x+5=0$.

*Εκ ταύτης εὐρίσκομεν $x=-\frac{5}{3}$. Ἐπομένως αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι
 0 καὶ $-\frac{5}{3}$.

*Εν γένει, ἔστω ἡ μὴ πλήρης ἐξίσωσις $\alpha x^2 + \beta x = 0$ (ἐνῶ εἶναι
 $\alpha \neq 0$), Γράφομεν αὐτὴν οὕτω : $x(\alpha x + \beta) = 0$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύ-
 πτει, ὅτι αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης εἶναι αἱ 0 καὶ $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Ἀσκήσεις

348. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις : $\alpha') 6x^2-8x+7x^2=12x-8x$.

$$\beta') \frac{3}{4} x^2 = \frac{7x}{3} - \frac{x}{3}$$

$$\gamma') \frac{x^2}{\alpha} + \frac{x}{\alpha} = \frac{x^2 + \alpha x}{\alpha \beta},$$

$$\delta') \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{x}{\alpha + \beta} = \frac{x^2 - x}{\alpha - \beta},$$

$$\varepsilon') \frac{(\alpha - x)^4 - (x - \beta)^4}{(\alpha - x)^2 - (x - \beta)^2} = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

$$349. \text{ 'Ομοίως αι: } \alpha') 1,6x^2 - 0,8x + 1,7x^2 = 1,2x - 8x, \beta') 2,2x^2 - 7x = 1,4x$$

4. ΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

§ 170. Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1) ($\alpha \neq 0$), θεωροῦμεν τὴν ἰσοδύναμόν της $\alpha x^2 + \beta x = -\gamma$.

Προσπαθοῦμεν τώρα νὰ καταστήσωμεν τέλειον τετράγωνον τὸ πρῶτον μέλος ταύτης. Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη της ἐπὶ 4α καὶ προσθέτομεν εἰς αὐτὰ τὸ β^2 , ὅτε εὐρίσκομεν τὴν $4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, ἢ ὅποια γράφεται καὶ οὕτω: $(2\alpha x + \beta)^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος μέ τὴν (1), προκύπτει δὲ ἀπὸ τὴν $2\alpha x + \beta = \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$, ἂν ὑψώσωμεν τὰ μέλη της εἰς τὸ τετράγωνον· ἄρα ἔχει τὰς ρίζας τῶν $2\alpha x + \beta = \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$.

Ἐκ τούτων εὐρίσκομεν $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$. Ἦτοι, ἂν καλέσωμεν ρ_1 καὶ ρ_2 τὰς ρίζας τῆς (1), θὰ ἔχωμεν

$$\rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \quad \rho_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Ἐφαρμόζοντες τοὺς τύπους τούτους εὐρίσκομεν τὰς ρίζας οἵαςδήποτε μορφῆς ἐξίσωσεως τοῦ β' βαθμοῦ.

*Εστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $3x^2 - 5x + 2 = 0$.

Εἶναι τὸ $\alpha = 3$, τὸ $\beta = -5$ καὶ τὸ $\gamma = 2$. Ἐπομένως εὐρίσκομεν $\rho_1 = \frac{5 + \sqrt{25 - 24}}{6}$, $\rho_2 = \frac{5 - \sqrt{25 - 24}}{6}$. Ἦτοι $\rho_1 = 1$ καὶ $\rho_2 = \frac{2}{3}$.

*Εστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $4x^2 + 25 = 0$.

*Ἐχομεν $\alpha = 4$, $\beta = 0$, $\gamma = 25$. Ἐπομένως εὐρίσκομεν

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{-4 \cdot 4 \cdot 25}}{2 \cdot 4}, \quad \rho_2 = \frac{-\sqrt{-4 \cdot 4 \cdot 25}}{2 \cdot 4} \quad \eta \quad \rho_1 = \frac{4 \cdot 5 \cdot i}{2 \cdot 4} = \frac{5}{2} i, \quad \rho_2 = -\frac{5}{2} i.$$

Ἀσκήσεις

Ὅμας πρώτη. 350. Λύσατε καὶ ἐπαληθεύσατε τὰς ἐξισώσεις:

$$\alpha') 3x^2 - 3x = 8, \quad \beta') 3x^2 - \frac{2}{3}x = 25, \quad \gamma') x^2 - \frac{3}{4}x = 3x + 1, \quad \delta') x^2 - x - 2 = 0.$$

351. 'Ομοίως τὰς : α') $x^2-12x-1+27=0$, β') $9x^2-21x-1+12=0$,
 γ') $(x-1)(x-2)=0$, δ') $x^2=\sqrt{3}(2x-\sqrt{3})$, ε') $\sqrt{3}x^2+\sqrt{19}x+\sqrt{5}=0$,
 στ') $(x-1)^2-(3x+8)^2=(2x+5)^2$, ζ') $(6x-1)^2+(3x+4)^2-(5x-2)(5x+2)=53$,
 η') $\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x-1}\right)-\left(\frac{1}{x-1}\right)^2=0$, θ') $\frac{x(2x+8)}{2}-\left(\frac{x}{2}\right)^2=320$,
 ι') $x+\frac{2}{x}=2(1+\sqrt{6})$.

'Ο μ ἄ ς δ ε υ τ έ ρ α. 352. Λύσατε καὶ ἐπαληθεύσατε τὰς ἐξισώσεις :

α') $x^2+9ax-10a^2=0$, β) $x^2-2ax-3a^2=0$ γ') $x^2=5a(10a+x)$
 δ') $x(\alpha+x)=\alpha^2\beta(\beta-1)$, ε') $x^2-2(\alpha+8)x+32a=0$, στ') $x^2-2(\alpha+\beta)x+4a\beta=0$
 ζ') $x+\frac{1}{x}=\alpha+\beta+1$, η') $\frac{(2x-\beta)^2}{2x-\alpha+\beta}=\beta$, θ') $\left(\frac{\alpha x}{\beta}\right)^2-\frac{1}{\gamma}\left(2\alpha x-\frac{\beta^2}{\gamma}\right)=0$,
 ι') $\frac{\alpha^2+\alpha x+x^2}{\alpha^2-\alpha x+x^2}=\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$, ια') Δείξατε, ὅτι, ἵνα αἱ ἐξισώσεις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$,

$\alpha_1 x^2+\beta_1 x+\gamma_1=0$ ἔχουν μίαν ρίζαν κοινήν, πρέπει (καὶ ἀρκεῖ) νὰ ἔχωμεν :
 $(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)=(\gamma\alpha_1-\gamma_1\alpha)^2$. (Ἐν ρ_1 ἡ κοινὴ ρίζα, εὑρετὲ τὰ ρ_1^2 , ρ_1 , ἐκ τῶν
 $\alpha\rho_1^2+\beta\rho_1+\gamma=0$, $\alpha_1\rho_1^2+\beta_1\rho_1+\gamma_1=0$, καὶ ἂν εὑρεθῇ $\rho_1^2=\kappa$, $\rho_1=\lambda$, θέσατε $\lambda^2=\kappa$)

'Ο μ ἄ ς τ ρ ί τ η. 353. α') Ἐὰν ὁ συντελεστής τοῦ x^2 τῆς ἐξίσωσως β' βαθμοῦ εἶναι τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου, προσθέτομεν εἰς τὰ μέλη αὐτῆς τὸ τετράγωνον τοῦ πληκίου τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x διὰ τοῦ διπλασίου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x^2 κ.τ.λ. Λύσατε οὕτω τὴν ἐξίσωσιν

$$4x^2-23x=-30.$$

β') Ἐὰν ὁ συντελεστής τοῦ x^2 δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, πολλαπλασιάσομεν τὰ μέλη τῆς ἐξίσωσως ἐπὶ κατάλληλον ἀριθμόν, ὥστε ὁ συντελεστής τοῦ x^2 νὰ γίνῃ τέλειον τετράγωνον κ.τ.λ. Λύσατε οὕτω τὴν ἐξίσωσιν $-3x^2+5x=2$

§ 171. Ἐνίστε λύομεν τὴν ἐξίσωσιν β' βαθμοῦ δι' ἀμέσου ἀναλύσεως τοῦ τριωνύμου αὐτῆς εἰς γινόμενον παραγόντων, ἂν τοῦτο εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ εὐκόλως. Ἔστω π.χ. ὅτι ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x^2+7x-60=0$. Τρέποντες τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς εἰς γινόμενον παραγόντων ἔχομεν τὴν $(x+12)(x-5)=0$. Ἀλλ' ἵνα τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου μέλους ἰσοῦται μὲ 0, ἀρκεῖ $x+12=0$ ἢ $x-5=0$, ἐκ τῶν ὁποίων εὐρίσκομεν $x=-12$, $x=5$.

Μὲ τὴν προηγουμένην πορείαν δυνάμεθα ἐνίστε νὰ εὑρωμεν τὰς ρίζας καὶ ἐξισώσεων ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου βαθμοῦ. Π.χ. ἂν ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x^3-x^2-6x=0$, γράφομεν αὐτὴν οὕτω: $x(x^2-x-6)=0$ ἢ $x(x-3)(x+2)=0$. Αὕτη δὲ ἔχει ρίζας τὰς $x=0$, $x=3$, $x=-2$.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^3-8=0$. Ἀντ' αὐτῆς ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμόν

της $x^3-2^3=0$, η την $(x-2)(x^2+2x+4)=0$ και θα έχουμε τὰς ρίζας, ἂν λύσωμεν τὰς ἐξισώσεις $x-2=0$, $x^2+2x+4=0$. Ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν $x=2$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας $x=-1 \pm i\sqrt{3}$.

Ἀσκήσεις

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις διὰ τροπῆς τοῦ πρώτου μέλους ἐκάστης εἰς γινόμενον παραγόντων :

$$354. \alpha') x^3-x^2-2x=0, \beta') 4x^3-4x^2-x+1=0, \gamma') x^3+9x^2+27x+27=0,$$

$$355. \alpha') x^3+ax^2+ax+1=0, \beta') x^3-\lambda x^2+2\lambda x-(\lambda+1)=0$$

$$\gamma') x^3+8+3(x^2-4)=0.$$

$$356. \alpha') x^3+ax^2+ax+a^2=0 \quad \beta') x^4+4x^3+4x^2+x=0,$$

$$\gamma') \alpha^4(\alpha+x)^4-\alpha^4x^4=0.$$

$$357. \alpha') x^5-x^4-x+1=0, \beta') x^6-12x^4+48x^2-64=0,$$

$$\gamma') x^3+ax \pm (\alpha+1)=0.$$

5. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΛΥΟΜΕΝΑΙ ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΟΥΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

§ 172. Ἐνίοτε ἐξισώσεις τινές β' βαθμοῦ ἢ καὶ ἀνωτέρου ἀνάγονται εἰς τὴν λύσιν ἀπλουστείων ἐξισώσεων β' βαθμοῦ μὲ τὴν χρησιμοποίησιν βοθητικῶν ἀγνώστων. Ἐστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις

$$(x^2-5x)^2-8(x^2-5x)-84=0.$$

Διὰ τὴν λύσιν αὐτῆς θέτομεν $x^2-5x=\omega$, ὅτε εὐρίσκομεν $\omega^2-8\omega-84=0$.

Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης εὐρίσκομεν $\omega=4 \pm 10$, ἥτοι $\omega_1=14$, $\omega_2=-6$.

Ἀντικαθιστῶμεν τὰς τιμὰς τοῦ ω εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2-5x=\omega$ καὶ ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις $x^2-5x=14$, $x^2-5x=-6$. Ἐκ τῆς λύσεως ἐκάστης τούτων εὐρίσκομεν $x=7$ καὶ $x=-2$ ἐκ τῆς α' καὶ $x=3$, $x=2$ ἐκ τῆς β' . Ἀρα αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $-2, 2, 3, 7$.

Ἀσκήσεις

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

$$358. (6x-1)^2-11(6x-1)+28=0. \quad 359. 2(x-7)^2+4(x-7)-2=0.$$

$$360. (x+1)^2+2 \frac{(x^2-0,25)}{2x-1}+0,5=8,75. \quad 361. (2x-\alpha)^2-\beta(2x-\alpha)-2\beta^2=0.$$

$$362. (3x-2\alpha+\beta)^2+2\beta(3x-2\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2. \quad 363. (x^2+3)^2-7(x^2+3)-60=0.$$

$$364. (x^2+7x)^2-6(x^2+7x)-16=0, \quad 365. (x^2-7x)^2-13(x^2-7x+18)+270=0.$$

$$366. \left(2x+4-\frac{3}{x}\right)\left(2x-\frac{3}{x}+2\right)-35=0. \quad 367. \left(\frac{x-1}{2x+3}\right)^2-\frac{26}{5}\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)+1=0.$$

6. ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΙΔΟΥΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ $ax^2+bx+\gamma=0$

§ 173. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ρ_1 καὶ ρ_2 τὰς ρίζας τῆς ἐξίσωσως $ax^2+bx+\gamma=0$, θὰ ἔχωμεν, ὡς εἶδομεν.

$$\rho_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a\gamma}}{2a}, \quad \rho_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a\gamma}}{2a}.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν εἶναι τὸ $b^2 - 4a\gamma > 0$, αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικά καὶ ἄνιστοι.

Ἐὰν τὸ $b^2 - 4a\gamma = 0$, αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικά καὶ ἴσαι μὲ $-\frac{b}{2a}$.

Ἐὰν εἶναι τὸ $b^2 - 4a\gamma < 0$, αἱ ρίζαι εἶναι μιγάδες ἐν γένει, ἐπεὶ δὴ δὲ τὸ $b^2 - 4a\gamma$ γράφεται καὶ οὕτω: $-(4a\gamma - b^2) = i^2(4a\gamma - b^2)$, ἔπεται ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ ρίζαι εἶναι συζυγεῖς φανταστικά, ἦτοι:

$$\rho_1 = \frac{-b + i\sqrt{4a\gamma - b^2}}{2a}, \quad \rho_2 = \frac{-b - i\sqrt{4a\gamma - b^2}}{2a}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἐξῆς πίνακα:

1ον. Ἐὰν εἶναι $b^2 - 4a\gamma > 0$, αἱ ρ_1, ρ_2 εἶναι πραγματικά καὶ ἄνιστοι

2ον. Ἐὰν εἶναι $b^2 - 4a\gamma = 0$, αἱ ρ_1, ρ_2 εἶναι πραγματικά καὶ ἴσαι μὲ $-\frac{b}{2a}$.

3ον. Ἐὰν εἶναι $b^2 - 4a\gamma < 0$, αἱ ρ_1, ρ_2 εἶναι μιγάδες (ἢ φανταστικά) συζυγεῖς.

*Ἐστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Εἶναι $a=1, b=-5, \gamma=6, b^2 - 4a\gamma = 25 - 24 = 1$. Ἐπομένως αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι πραγματικά καὶ ἄνιστοι.

*Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $3x^2 - 12x + 12 = 0$.

Εἶναι $a=3, b=-12, \gamma=12, b^2 - 4a\gamma = 144 - 144 = 0$. Ἀρα αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι πραγματικά καὶ ἴσαι.

Διὰ τὴν ἐξίσωσιν $2x^2 - 3x + 4 = 0$ εἶναι $a=2, b=-3, \gamma=4, b^2 - 4a\gamma = 9 - 32 = -23$. Ἀρα αἱ ρίζαι ταύτης εἶναι μιγάδες συζυγεῖς.

Ἀσκήσεις

*Ὁ μὲς πρῶτη. 368. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων χωρὶς νὰ λυθοῦν:

$$\alpha') x^2 - 15x + 16 = 0 \quad \beta') x^2 + 4x + 17 = 0 \quad \gamma') x^2 + 9x - 7 = 0$$

$$\delta') x^2 - 3x - 21 = 0, \quad \epsilon') x^2 = 1 - 7x, \quad \sigma') 2x + 3 = x^2.$$

369. Δείξτε, ότι αι ρίζαι τῶν κάτωθι ἐξισώσεων εἶναι πραγματικά, ἂν οἱ ἀριθμοὶ α , β , γ , δ εἶναι πραγματικοί :

$$\alpha') \frac{\alpha^2}{x-\gamma} + \frac{\beta^2}{x-\delta} = 1, \quad \beta') \alpha^2 x^2 + \beta \gamma x - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0,$$

$$\gamma') x^2 = \pi (x + 2\pi). \quad \delta') \frac{\alpha}{x-\alpha} + \frac{\beta}{x-\beta} + \frac{\gamma}{x-\gamma} = 0.$$

370. Δείξτε, ότι, ἐὰν αἱ ρίζαι τῆς $ax^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ εἶναι πραγματικά, τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν $x^2 + 2(\alpha + \beta + \gamma)x + 2\beta(\alpha + \gamma) + 3\alpha\gamma = 0$.

371. Ἐὰν ἡ $ax^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ ἔχῃ ρίζας πραγματικάς, δείξτε, ότι καὶ ἡ ἐξίσωσις $\beta^2 x^2 - \alpha\gamma(x-1)^2 + \alpha\gamma - 1 = 0$ ἔχει ρίζας πραγματικάς.

372. Δείξτε, ότι αἱ ρίζαι τῶν κάτωθι ἐξισώσεων εἶναι ρηταί, ἐφ' ὅσον καὶ οἱ ἀριθμοὶ α , β , γ , δ εἶναι ρητοί :

$$\alpha') x^2 - 5\alpha x + 4\alpha^2 = 0, \quad \beta') x(x + 2\beta) - 24\beta^2 = 0, \quad \gamma') \alpha\beta\gamma x^2 - (\alpha^2\beta^2 + \gamma^2)x + \alpha\beta\gamma = 0.$$

$$373. \text{Ὁμοίως τῶν : } \alpha') (\alpha + \beta + \gamma)x^2 - 2(\alpha + \beta)x + (\alpha + \beta - \gamma) = 0.$$

$$\beta') (4\alpha^2 - 9\gamma^2\delta^2)x^2 + 4\alpha(\alpha\gamma^2 + \beta\delta^2)x + (\alpha\gamma^2 + \beta\delta^2)^2 = 0.$$

374. Δείξτε, ότι αἱ κάτωθι ἐξισώσεις ἔχουν συμμετρους ρίζας, ἐφ' ὅσον καὶ οἱ ἀριθμοὶ α , β , γ , δ , κ εἶναι ἀριθμοὶ σύμμετροι :

$$\alpha') x^2 = \alpha^2(2\alpha^2 - x), \quad \beta') 2x^2 + (\gamma + 4)x + 2\gamma = 0, \quad \gamma') 2\gamma x^2 - c\beta(x - 2\delta) = 4\gamma\delta x.$$

$$\delta') 2x^2 + (6\alpha - 10\kappa)x - 30\alpha\kappa = 0.$$

375. Δείξτε, ότι ἡ ἐξίσωσις $x^2 + \pi x + \kappa = 0$ ἔχει συμμετρους ρίζας, ὅταν :

$$\alpha') \kappa = \left(\frac{\pi + \lambda}{2}\right) \left(\frac{\pi - \lambda}{2}\right). \quad \beta') \pi = \lambda + \frac{\kappa}{\lambda} \text{ μὲ } \lambda, \kappa \text{ συμμετρους.}$$

376. Δείξτε, ότι αἱ ρίζαι τῶν κάτωθι ἐξισώσεων εἶναι φανταστικά, ἂν α, β, γ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ $\neq 0$ καὶ $\beta \neq \gamma$.

$$\alpha') \alpha^2\beta x^2 - 2\alpha\beta x + 2\beta = 0, \quad \beta') x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

$$\gamma') x^2 - 2\sqrt{\alpha\beta}x + 17\alpha\beta = 0, \quad \delta') x^2 \pm 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2 = 0$$

377. Δείξτε, ότι ἡ ἐξίσωσις $(\alpha x + \beta)^2 + (\alpha_1 x + \beta_1)^2 = 0$ ἔχει ρίζας φανταστικάς ἐὰν $\beta\alpha_1 - \alpha\beta_1 \neq 0$.

378. Ἐὰν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $ax^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ εἶναι φανταστικά, δείξτε, ότι καὶ αἱ τῆς $ax^2 + 2(\alpha + \beta)x + 2\beta + \gamma + \alpha = 0$ εἶναι ἐπίσης φανταστικά.

379. Δείξτε, ότι, ἐὰν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $8\alpha^2 x(2x - 1) + \beta^2 = 0$ εἶναι φανταστικά, αὐτῆς $4\alpha^2 x^2 + \beta^2(4x + 1) = 0$ θὰ εἶναι πραγματικά καὶ ἄνισοι.

Ὁ μὲς δευτέρᾳ. 380. Διὰ τίνας τιμὰς τοῦ μ αἱ κατωτέρω ἐξισώσεις ἔχουν ρίζας πραγματικάς καὶ ἴσας :

$$\alpha') 2\mu x^2 + (5\mu + 2)x + 4\mu + 1 = 0, \quad \beta') 0,5\mu x^2 - (2\mu - 1)x = 3\mu - 2,$$

$$\gamma') (\mu + 1)x^2 + 3(\mu - 1)x + \mu - 1 = 0, \quad \delta') (2\mu - 3)x^2 + \mu x + \mu - 1 = 0.$$

7. ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΚΑΙ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$

§ 174. Ἐκ τοῦ τύπου τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$

$$\text{ἔχομεν : } \rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \quad \rho_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad (1)$$

Ἐάν μὲν τὰς ἰσοτήτας αὐτὰς προσθέσωμεν κατὰ μέλη, εὐρίσκομεν $\rho_1 + \rho_2 = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$, ἐάν δὲ τὰς πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη, εὐρίσκομεν $\rho_1 \rho_2 = \frac{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})(-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}{4\alpha^2}$

Εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς συζυγεῖς ποσότητας $-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$, $-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$, ἥτοι τὸ ἄθροισμα ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν $-\beta$ καὶ $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$, ἐπομένως τὸ γινόμενον αὐτὸ εἶναι $\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma) = 4\alpha\gamma$. Ἀρα ἔχομεν $\rho_1 \rho_2 = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$. Π.χ. τῆς ἐξισώσεως $3x^2 - 5x + 6 = 0$ τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ριζῶν εἶναι $\frac{5}{3}$, τὸ δὲ γινόμενον $\frac{6}{3} = 2$.

§ 175. Δοθέντος τοῦ ἄθροίσματος καὶ τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν αὐτοὺς διὰ τῆς λύσεως ἐξισώσεως β' βαθμοῦ.

Πράγματι, ἂν β εἶναι τὸ ἄθροισμα καὶ γ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ θὰ εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί. Διότι, ἂν x παριστάνῃ τὸν ἓνα ἀριθμὸν, ὁ ἄλλος θὰ εἶναι $\beta - x$. Οὕτω θὰ ἔχωμεν $x(\beta - x) = \gamma$ ἢ $x^2 - \beta x + \gamma = 0$. (1)

Ὁ εἰς τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι μία τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως (1). Ὁ ἄλλος ἀριθμὸς θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην ἡ ἄλλη ρίζα τῆς (1), διότι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ριζῶν αὐτῆς εἶναι β , ὅσον καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν. Π.χ. ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν εἶναι -4 καὶ τὸ γινόμενον -45 , οἱ ἀριθμοὶ θὰ εἶναι ρίζαι τῆς $x^2 + 4x - 45 = 0$, ἥτοι οἱ 5 καὶ -9 .

§ 176. Παρατήρησις. Τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἰσοῦται μὲ $-\frac{\beta}{\alpha}$. Ἄν τὸ α τείνῃ εἰς τὸ 0 , ἀλλὰ $\beta \neq 0$, ἡ ἐξίσωσις ἀνάγεται εἰς τὴν $\beta x + \gamma = 0$, τῆς ὁποίας ἡ ρίζα εἶναι $-\frac{\gamma}{\beta}$. Ἡ ἄλλη ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως θὰ τείνῃ εἰς τὸ $\pm \infty$. Πράγματι

ἐπειδὴ τὸ $-\frac{\beta}{\alpha}$ τείνει εἰς τὸ $(\pm)$ ἄπειρον, ἡ δὲ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως
 τείνει εἰς τὸ $-\frac{\gamma}{\beta}$, ἡ ἄλλη θὰ τείνη εἰς τὸ $\pm \infty$.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

Ὁ μ ᾶ ς π ρ ὶ τ η. 381. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν
 τῶν κάτωθι ἐξισώσεων χωρὶς νὰ λυθοῦν :

$$\alpha') 2x^2 - 4x - 3 = 0 \quad \beta') 3x^2 + 8x - 12 = 0, \quad \gamma') x^2 - 7x + 10 = 0.$$

$$382. \text{Ὁμοίως τῶν: } \alpha') x^2 + 2\alpha x = 3\alpha^2 \quad \beta') x^2 - 4\alpha x = -3\alpha^2.$$

383. Εὑρετε τὴν ἄλλην ρίζαν τῶν ἐξισώσεων :

$$\alpha') x^2 - 5x + 6 = 0, \quad \text{ἂν ἡ μία εἶναι 2,}$$

$$\beta') x^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0. \quad \text{ἂν ἡ μία εἶναι } \frac{1}{3},$$

$$\gamma') x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \quad \text{ἂν ἡ μία εἶναι } \alpha.$$

Ὁ μ ᾶ ς δ ε υ τ ῆ ρ α. 384. α') Ἄν ρ_1, ρ_2 εἶναι ρίζαι τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ εὑ-
 ρετε τὸ $\rho_1 - \rho_2$ διὰ τῶν α, β, γ .

β') Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\rho_1^2 + \rho_2^2$ τῶν ριζῶν ρ_1, ρ_2 τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ καὶ ἀκολου-
 θῶς τὸ $\rho_1^3 + \rho_2^3$ διὰ τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως.

385. Εὑρετε τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμενον, τὴν διαφορὰν, τὸ ἄθροισμα τῶν τε-
 τραγώνων καὶ τῶν κύβων τῶν ριζῶν τῆς $x^2 + px + k = 0$, χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη.

386. Εὑρετε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων
 χωρὶς νὰ λυθοῦν αὗται :

$$\alpha') x^2 - 9x + 10 = 0, \quad \beta') x^2 + 5x - 7 = 0, \quad \gamma') 3x^2 + 7x - 6 = 0.$$

387. Προσδιορίσατε τὸ λ , ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν
 τῆς ἐξισώσεως $x^2 + (\lambda - 2)x - (\lambda + 3) = 0$ νὰ εἶναι μ .

388. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν β καὶ γ , ἵνα αἱ ρίζαι τῆς ἐξ-
 ισώσεως $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχουν λόγον λ .

389. Εὑρετε σχέσιν τῶν α, β, γ , ἵνα, αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$
 εἶναι ἀνάλογοι τῶν μ καὶ ν .

390. Προσδιορίσατε τὰ β καὶ γ , ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως
 $x^2 + \beta x + \gamma = 0$, εἶναι 4, τῶν δὲ κύβων τῶν 208.

391. Προσδιορίσατε τὸν ν , ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως
 $(\alpha - \beta)x^2 + 2(\alpha^2 - \beta^2)x + \nu = 0$ νὰ εἶναι ἴσαι ἢ νὰ ἔχουν γινόμενον 1.

392. Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ γ , ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως
 $3x^2 - 10x + \gamma = 0$ νὰ εἶναι μιγαδικαί ; Νὰ ἔχουν γινόμενον $-0,75$;

393. Προσδιορίσατε τὸ γ , ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 8x + \gamma = 0$ νὰ
 πληροῦν τὰς ἐξῆς σχέσεις. α') $\rho_1 = \rho_2$, β') $\rho_1 = 3\rho_2$, γ') $\rho_1 \rho_2 = \pm 1$.

394. Τὸ αὐτὸ διὰ τὰς σχέσεις : α') $3\rho_1 = 4\rho_2 + 3$, β') $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 40$.

8. ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΠΡΟΣΗΜΟΥ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ $ax^2+bx+\gamma=0$

§ 177. Δοθείσης τῆς ἐξισώσεως $ax^2+bx+\gamma=0$, δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν, ποῖον εἶναι τὸ πρόσημον ἐκάστης τῶν ριζῶν αὐτῆς, ἂν εἶναι πραγματικά, χωρὶς νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι, ἀφοῦ εἶναι $\rho_1\rho_2=\frac{\gamma}{\alpha}$ καὶ $\rho_1+\rho_2=-\frac{\beta}{\alpha}$, ἔπεται, ὅτι ἔχομεν τὸν ἑξῆς πίνακα.

Πρόσημα τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $ax^2+bx+\gamma=0$.
 ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma > 0$.

1ον. Ἄν εἶναι $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$, αἱ ρίζαι εἶναι ὁμόσημοι· θετικοὶ μὲν ἂν εἶναι καὶ $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$, ἀρνητικοὶ δέ, ἂν εἶναι τὸ $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$.

2ον. Ἄν εἶναι $-\frac{\gamma}{\alpha} < 0$, αἱ ρίζαι εἶναι ἐτερόσημοι· ἀπολύτως μεγαλύτερα ἢ θετικὴ μὲν, ἂν εἶναι καὶ $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$, ἢ ἀρνητικὴ δέ, ἂν τὸ $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$.

3ον. Ἄν εἶναι $\frac{\gamma}{\alpha} = 0$, ἡ μία ρίζα εἶναι ἴση μὲ 0, ἡ δὲ ἄλλη μὲ $-\frac{\beta}{\alpha}$.

*Ἐστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $x^2+8x+12=0$.

*Ἐχομεν $\beta^2-4\alpha\gamma=64-48=16$ θετικός. Ἄρα αἱ ρίζαι ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι πραγματικά. Ἐπειδὴ δὲ $\rho_1\rho_2=12 > 0$ καὶ $\rho_1+\rho_2=-8 < 0$, θὰ εἶναι ἀρνητικά.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

395. Εὑρετε τὸ σῆμα τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων, χωρὶς νὰ λυθοῦν αὐται :

$$\alpha') x^2-8x+12=0, \quad \beta') 6x^2-15x-50=0, \quad \gamma') 7x^2+14x-1=0.$$

396. Ὅμοιως τῶν ἑξῆς :

$$\alpha') 7x^2-5x-1=0, \quad \beta') x^2-3x-4=0, \quad \gamma') 3x^2-4x-2=0,$$

$$\delta') x^2-3x+2=0, \quad \epsilon') x^2+3x+1=0, \quad \sigma\tau') 5x^2-15x-1=0.$$

9. ΤΡΟΠΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $ax^2+bx+\gamma$

ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ Χ

§ 178. Ἐστω ὅτι ζητεῖται νὰ τραπῇ τὸ τριώνυμον $ax^2+bx+\gamma$

εἰς γινόμενον παραγόντων. Ἄν ρ_1, ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, αἱ ὁποῖαι λέγονται καὶ ρίζαι τοῦ δοθέντος τριωνύμου, θὰ εἶναι

$$\rho_1 + \rho_2 = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad (1)$$

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha}. \quad (2)$$

Ὑποθέτοντες τὸ $\alpha \neq 0$ γράφομεν τὸ τριώνυμον ὡς ἐξῆς :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \right).$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ $\frac{\beta}{\alpha}$ μὲ τὸ ἴσον αὐτοῦ $-(\rho_1 + \rho_2)$ ἐκ τῆς (1)

καὶ τὸ $\frac{\gamma}{\alpha}$ μὲ τὸ $\rho_1 \rho_2$ ἐκ τῆς (2) εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \alpha [x^2 - (\rho_1 + \rho_2)x + \rho_1 \rho_2] = \alpha (x^2 - \rho_1 x - \rho_2 x + \rho_1 \rho_2) = \\ &= \alpha [(x - \rho_1)x - \rho_2(x - \rho_1)] = \alpha (x - \rho_1)(x - \rho_2). \end{aligned}$$

Ἦτοι τὸ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha (x - \rho_1)(x - \rho_2)$.

Διακρίνομεν τώρα τὰς ἐξῆς περιπτώσεις :

1ον. Ἄν αἱ ρίζαι ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνιστοι, θὰ ἔχωμεν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha (x - \rho_1)(x - \rho_2)$.

2ον. Ἄν εἶναι $\rho_1 = \rho_2$, θὰ ἔχωμεν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha (x - \rho_1)^2$.

3ον. Ἄν εἶναι $\rho_1 = \lambda + \delta i$, $\rho_2 = \lambda - \delta i$ (μιγάδες συζυγεῖς), θὰ ἔχωμεν $x - \rho_1 = (x - \lambda) - \delta i$, $x - \rho_2 = (x - \lambda) + \delta i$, καὶ $\alpha (x - \rho_1)(x - \rho_2) = \alpha [(x - \lambda) - \delta i][(x - \lambda) + \delta i] = \alpha [(x - \lambda)^2 + \delta^2]$.

Ἄρα : $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha [(x - \lambda)^2 + \delta^2]$. Ἦτοι :

Τὸ τριώνυμον $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ τρέπεται εἰς γινόμενον μὲν τοῦ α ἐπὶ δύο πρωτοβαθμίους παράγοντας ὡς πρὸς x , ἂν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνιστοι, εἰς γινόμενον δὲ τοῦ α ἐπὶ ἓν τέλειον τετράγωνον ἢ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἂν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἴσαι ἢ μιγάδες (συζυγεῖς).

Π.χ. διὰ τὸ $2x^2 - 3x - 2$, τοῦ ὁποῖου αἱ ρίζαι εἶναι 2 καὶ $-0,5$, ἔχομεν $2x^2 - 3x - 2 = 2(x - 2)(x + 0,5)$.

Διὰ τὸ $2x^2 - 12x + 18$, τοῦ ὁποῖου αἱ ρίζαι εἶναι ἴσαι μέ 3, ἔχομεν $2x^2 - 12x + 18 = 2(x - 3)^2$.

10. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ Β' ΒΑΘΜΟΥ ΕΚ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΑΥΤΟΥ

§ 179. Ὅταν δοθοῦν αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 ἐνὸς τριωνύμου β' βαθμοῦ ὡς πρὸς x , τοῦτο θὰ ἰσοῦται μὲ $(x - \rho_1)(x - \rho_2) = x^2 - (\rho_1 + \rho_2)x + \rho_1 \rho_2$

πολλαπλασιασμένον τὸ πολὺ ἐπὶ παράγοντά τινα σταθερόν. Ἦτοι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ τριώνυμον τοῦτο (παραλείπομένου τοῦ σταθεροῦ παράγοντος) ἐκ τῶν ριζῶν αὐτοῦ.

Π.χ. τὸ τριώνυμον, τὸ ἔχον ρίζας τὰς 3 καὶ $\frac{1}{2}$, θὰ εἶναι ἴσον με $(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right) = (x-3)\left(\frac{2x-1}{2}\right) = \frac{2x^2-7x+3}{2}$, τὰ δὲ 3 καὶ $\frac{1}{2}$ θὰ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $2x^2-7x+3=0$.

Ἀσκήσεις

Ὁ μᾶς πρώτη 397. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα τὰ τριώνυμα :

$$\alpha') x^2-9x+18 \quad \beta') x^2+4x+3, \quad \gamma') 2x^2+3x-2,$$

$$\delta') 2x^2+12x+18 \quad \epsilon') x^2-4x-5, \quad \sigma\tau') x^2-5x+6,$$

398. Νὰ ἀπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα :

$$\alpha') \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}, \quad \beta') \frac{x^2+4x+3}{x^2-4x-5}, \quad \gamma') \frac{x^2+10x+21}{2x^2+12x+18}.$$

Ὁ μᾶς δευτέρα 399. Εὑρετε ἐξίσωκιν β' βαθμοῦ με συντελεστὰς ἀκεραίους ἔχουσιν ρίζας :

$$\alpha') 3 \text{ καὶ } 0,5 \quad \beta') 3 \pm \sqrt{2}, \quad \gamma') 4 \pm \sqrt{5}, \quad \delta') \pm i\sqrt{2}$$

$$\epsilon) \alpha \pm \beta, \quad \sigma\tau') \alpha \pm \sqrt{\beta}, \quad \zeta') \alpha \pm i\sqrt{\beta}, \quad \eta') \alpha \pm \sqrt{\alpha}.$$

400. Σχηματίσατε τὰς ἐξισώσεις τὰς ἔχουσας ρίζας τὸ ἀθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων :

$$\alpha') \frac{2x-5}{9x} - \frac{8}{x-15} = 1, \quad \beta') x^2 = \sqrt{3}(2x-\sqrt{3}),$$

$$\gamma') x^2 + \beta \left(\frac{x-\alpha}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}} \right) = 2\alpha\beta(x-\alpha\beta).$$

401. Σχηματίσατε τὴν ἐξίσωσιν τὴν ἔχουσιν ρίζας τὰ τετράγωνα τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{17}x + \sqrt{5} = 0$.

402. Σχηματίσατε τὰς ἐξισώσεις τὰς ἔχουσας ρίζας τοὺς κύβους τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων : $\alpha') 2x(x-\alpha) = \alpha^2$, $\beta') x^2 + \alpha x = \alpha^2\beta(\beta+1)$.

403. Σχηματίσατε τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ συντελεστὴς τοῦ δευτεροβαθμίου ὁρου τῆς εἶναι 7, τοῦ πρωτοβαθμίου -14 καὶ ἡ μία τῶν ριζῶν -5.

404. Ἐὰν x_1, x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $ax^2+bx+\gamma=0$ ἡ τῆς $x^2+px+q=0$, σχηματίσατε τὰς ἐξισώσεις τὰς ἔχουσας τὰς κάτωθι ρίζας :

$$\alpha') x_1^2, x_2^2, \quad \beta') -x_1^2, -x_2^2, \quad \gamma') x_1^2x_2, x_1x_2^2, \quad \delta') x_1+2x_2, 2x_1+x_2,$$

$$\epsilon') x_1-2x_2, x_2-2x_1, \quad \sigma\tau') x_1^2+x_2, x_1+x_2^2, \quad \zeta') \frac{x_1+x_2}{2x_2}, \frac{x_1+x_2}{2x_1},$$

$$\eta') \alpha x_1^2 + \beta x_1x_2 + \gamma x_2^2, \gamma x_1^2 - \beta x_1x_2 + \alpha x_2^2, \quad \theta') \frac{x_1}{x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2}.$$

405. 'Εάν x_1, x_2 είναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $ax^2+bx+\gamma=0$, ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τῶν παραστάσεων, χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\alpha') (ax_1+\beta)^2+(ax_2+\beta)^2, \quad \beta') (\beta x_1^2+\gamma)(\beta x_2^2+\gamma),$$

$$\gamma') (\gamma x_1+\beta)^{-2}+(\gamma x_2+\beta)^{-2}$$

406. 'Εάν x_1, x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $5x^2-12x+1=0$, ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως $x_1^3-x_1^2x_2+x_1x_2^2-x_2^3$, χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.

407. 'Εάν x_1, x_2 εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-2x-35=0$, ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως $\frac{x_1+x_2}{x_1}-\frac{x_1+x_2}{x_2}$, χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.

11. ΠΡΟΣΗΜΑ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $ax^2+bx+\gamma$ ΔΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑΣ ΤΙΜΑΣ ΤΟΥ x

§ 180. Ἐστω τὸ τριώνυμον $ax^2+bx+\gamma$ καὶ ὅτι τὸ x λαμβάνει πραγματικὰς τιμὰς. Ἄν αἱ ρίζαι αὐτοῦ ρ_1, ρ_2 εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνιστοι (ἔστω δὲ ὅτι εἶναι $\rho_1(\rho_2)$, θὰ ἔχωμεν

$$ax^2+bx+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2).$$

α') Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶναι μικρότεραι τοῦ ρ_1 , ἐπομένως καὶ τοῦ ρ_2 . Τότε τὰ $x-\rho_1, x-\rho_2$ εἶναι ἀρνητικὰ, τὸ δὲ $(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ (ὡς γινόμενον ἀρνητικῶν παραγόντων) εἶναι θετικόν, καὶ τὸ $\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ θὰ ἔχη τὸ πρόσημον τοῦ α .

β') Ἐστω, ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶναι μεγαλύτεραι τοῦ ρ_2 , ἐπομένως καὶ τοῦ ρ_1 . Τότε τὰ $x-\rho_1$ καὶ $x-\rho_2$ εἶναι θετικά, ἐπίσης καὶ τὸ $(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ εἶναι θετικόν, τὸ δὲ γινόμενον $\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ θὰ ἔχη τὸ πρόσημον τοῦ α .

γ') Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶναι μεγαλύτεραι τοῦ ρ_1 , ἀλλὰ μικρότεραι τοῦ ρ_2 , ἥτοι $\rho_1 < x < \rho_2$. Τότε τὸ $x-\rho_1$ εἶναι θετικόν, τὸ $x-\rho_2$ ἀρνητικόν, τὸ δὲ $(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ εἶναι ἀρνητικόν (ὡς γινόμενον δύο ἑτεροσήμεων παραγόντων), ἄρα τὸ $\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ ἔχει πρόσημον ἀντίθετον τοῦ α .

δ') Ἄν αἱ ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι ἴσαι ἢ μιγάδες ἀριθμοὶ ἐν γένει, διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x πραγματικὴν καὶ διάφορον τῶν ριζῶν, τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ α . Διότι, ἂν μὲν εἶναι $\rho_1 = \rho_2$ τὸ $ax^2+bx+\gamma = \alpha(x-\rho_1)^2$. Ἦτοι ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ α διὰ κάθε $x \neq \rho_1$. Ἄν δὲ αἱ ρίζαι εἶναι μιγάδες ἐν γένει, τὸ $ax^2+bx+\gamma$ τρέπεται εἰς γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἐπομένως ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ α . Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Όταν τὸ x λάβῃ τιμὴν πραγματικὴν κειμένην ἐκτὸς τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ α , ἐνῶ διὰ τιμὴν τοῦ x κειμένην, μεταξὺ τῶν ριζῶν ἔχει πρόσημον ἀντίθετον τοῦ α .

Ἀσκήσεις

408. Διὰ ποίας πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x τὰ κάτωθι τριώνυμα θὰ ἔχουν τιμὰς θετικάς ; ἀρνητικάς ;

α') $2x^2 - 16x + 24$, β') $-2x^2 + 16x - 24$, γ') $2x^2 - 16x + 32$, δ') $0,75x^2 - 6x + 1$.
 ε') $x^2 - 7x - 1$, στ') $x^2 + x - 1$, ζ') $2x^2 - 6x - 3$,

409. Ὁμοίως τὰ τριώνυμα :

α') $-2x^2 - 16x - 32$, β') $2x^2 - 16x + 40$, γ') $-2x^2 + 16x - 40$, δ') $-x^2 - 3x + 2$.

12. ΘΕΣΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΑΣ ΡΙΖΑΣ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

§ 181. Δοθέντος τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ καὶ ἀριθμοῦ πραγματικοῦ ἔστω λ , ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν θέσιν αὐτοῦ ὡς πρὸς καθεμίαν τῶν (ὑποτιθεμένων πραγματικῶν) ριζῶν τῆς ἐξίσωσως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, χωρὶς νὰ λυθῇ αὐτή.

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν τεθῇ $x = \lambda$ εἰς τὸ τριώνυμον, ἔαν τὸ $\alpha \lambda^2 + \beta \lambda + \gamma$ ἔχῃ πρόσημον ἀντίθετον τοῦ προσήμου τοῦ α , τότε αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικά καὶ ἄνισοι, ὁ δὲ λ περιέχεται μεταξὺ τούτων.

Ἐὰν ὅμως τὸ $\alpha \lambda^2 + \beta \lambda + \gamma$ ἔχῃ τὸ πρόσημον τοῦ α , τότε ὁ λ κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου, ἔστω ρ_1, ρ_2 (ἐνῶ ὑποτίθεται $\rho_1 < \rho_2$). Μένει νὰ εὕρωμεν, ἂν ὁ λ εἶναι μικρότερος τῆς μικροτέρας ρίζης ρ_1 ἢ μεγαλύτερος τῆς μεγαλυτέρας ρ_2 .

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εὕρεθῇ, ἂν εἶναι μικρότερος ἢ μεγαλύτερος ἀπὸ ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος νὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν. Διότι ἂν εἶναι μικρότερος ἀπὸ τοιοῦτον ἀριθμόν, τότε, δεδομένου, ὅτι εἶναι ὁ λ ἐκτὸς τῶν ριζῶν, θὰ εἶναι προφανῶς πρὸ αὐτῶν. Ἐνῶ ἂν εἶναι μεγαλύτερος τοιούτου ἀριθμοῦ, θὰ εἶναι ὁ λ μετὰ τὰς ρίζας.

Ἀριθμὸς ὅμως περιεχόμενος μεταξὺ τῶν ριζῶν ρ_1, ρ_2 εἶναι ὁ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ δηλ. τὸ ἡμίαθροισμα αὐτῶν, διότι ἐκ τῆς $\rho_1 < \rho_2$ προκύπτουν, αἱ $2\rho_1 < \rho_1 + \rho_2$ καὶ $\rho_1 + \rho_2 < 2\rho_2$, δηλ. $2\rho_1 < \rho_1 + \rho_2 < 2\rho_2$, ὁπότε $\rho_1 < \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} < \rho_2$.



*Αν λοιπόν είναι $\lambda < -\frac{\beta}{2\alpha}$, ό λ θα είναι πρό τών ριζών, και αν $\lambda > -\frac{\beta}{2\alpha}$, ό λ θα είναι μετά τās ριζας.

Έκ τούτων όρίζεται ή θέσις του λ ως πρός τās ριζας.

Παραδείγματα. 1ον. Έστω, ότι δίδεται τó τριώνυμον x^2+3x-2 και ζητούμεν νά εύρωμεν τήν θέσιν του -1 π.χ. ως πρός τās ριζας του τριωνύμου, χωρίς νά εύρεθούν αὐται.

Εύρίσκομεν πρώτον τó σημείον του $(-1)^2+3(-1)-2$. Τοῦτο δίδει έξαγόμενον $1-3-2=-4$, δηλαδή έτερόσημον του συντελεστοῦ 1 του x^2 εἰς τó δοθέν τριώνυμον. Άρα ό -2 περιέχεται μεταξύ τών ριζών του δοθέντος τριωνύμου.

Έστω, ότι διὰ τó αὐτό τριώνυμον ζητούμεν τήν θέσιν π.χ. του αριθμοῦ 1 ως πρός τās ριζας του, χωρίς νά εύρεθούν αὐται. Εἶναι $1^2+3\cdot 1-2=2$, δηλαδή όμόσημον του συντελεστοῦ 1 του x^2 . Έπειτα παρατηροῦμεν, ότι αἱ ριζαι εἶναι πραγματικαί και άνισοι,

διότι $\Delta = 9+8 > 0$. Τó ήμίαθροισμα τών ριζών εἶναι $-\frac{3}{2}$. Καί έπει-
δή $1 > -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{3}{2}$, ό 1 θα εἶναι μετά τās ριζας, δηλ. μεγαλύτερος τῆς μεγαλύτερας ριζης.

2ον. Έστω τó τριώνυμον $-3x^2+2x+1$ και ότι ζητούμεν τήν θέσιν του 0, ως πρός τās ριζας του, χωρίς νά εύρεθούν αὐται.

Θέτομεν $x=0$ εἰς τó τριώνυμον και εύρίσκομεν $-3\cdot 0^2+2\cdot 0+1=1$, ήτοι έξαγόμενον έτερόσημον του $\alpha=-3$ συντελεστοῦ του x^2 εἰς τó δοθέν τριώνυμον. Άρα τó 0 περιέχεται μεταξύ τών ριζών του τριωνύμου. Διὰ τó αὐτό τριώνυμον, αν ζητούμεν τήν θέσιν του αριθμοῦ 2, έχομεν $-3\cdot 2^2+3\cdot 2+1=-12+6+1=-5$, ήτοι όμόσημον του $\alpha=-3$. Έπειτα εύρίσκομεν, ότι αἱ ριζαι εἶναι πραγματικαί και άνισοι, διότι $\Delta = 4+12 > 0$. Άρα τó 2 κείται έκτός τών ριζών του τριωνύμου. Εἶναι $-\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{2}{2(-3)} = \frac{1}{3}$ και $2 > \frac{1}{3}$, άρα τó 2 εἶναι μετά τās ριζας, δηλ. μεγαλύτερον τῆς μεγαλύτερας ριζης του τριωνύμου.

Ά σ κ ή σ ε ι ς

410. Τis ή θέσις τών 1, 7, 5, -5 , -1 ως πρός τās ριζας τών έξισώσεων :

α') $x^2+3x-4=0$,

β') $2x^2+7x-1=0$,

γ') $x^2-4x+3=0$.

411. Εύρετε τήν θέσιν τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha')$ $\frac{3}{4}$ $\beta')$ -1 , $\gamma')$ $0,5$ $\delta')$ $-0,25$ ὡς πρὸς τὰς ρίζας ἐκάστου τῶν τριωνύμων :

$$\alpha') 2x^2-6x+1,$$

$$\beta') -x^2+x-4,$$

$$\gamma') 7x^2-4x-1,$$

$$\delta') \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} - 1,$$

$$\epsilon') 3x^2+6x-4,$$

$$\sigma\tau') -x^2-7x-2,$$

$$\zeta') \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - 1,$$

$$\eta') 4x^2-7x+1,$$

$$\theta') 0,5x^2+0,6x-1.$$

13. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΙΝ

§ 182. Ἐάν, ὅταν $x=\lambda_1$ καὶ $x=\lambda_2$ (ὅπου οἱ λ_1, λ_2 εἶναι ἀριθμοὶ πραγματικοὶ καὶ διάφοροι μεταξὺ των), τὸ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ λαμβάνῃ τιμὰς ἑτεροσήμους, τότε ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους ἐπειδὴ, ἂν αἱ ρίζαι ἦσαν ἴσαι ἢ μιγαδικαὶ τὸ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ οὐδέποτε θὰ ἠλλαζέετο πρόσημον, ὥστε νὰ ἐλάμβανε τιμὰς ἑτεροσήμους· πάντοτε θὰ ἦτο ὁμόσημον τοῦ α (§ 180 δ').
Μεταξὺ δὲ τῶν λ_1 καὶ λ_2 περιέχεται μία τῶν ριζῶν τῆς ἐξίσωσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Διότι, ἂν ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ἐπειδὴ διὰ $x=\lambda_1, x=\lambda_2$ αἱ τιμαὶ τοῦ τριωνύμου εἶναι ἑτερόσημοι ἐξ ὑποθέσεως, μία ἐκ τῶν τιμῶν αὐτῶν θὰ εἶναι ὁμόσημος τοῦ α καὶ ἡ ἄλλη ἑτερόσημος τοῦ α .

Ἄρα, εἰς ἐκ τῶν λ_1, λ_2 θὰ εἶναι ἐντὸς τῶν ριζῶν καὶ ὁ ἄλλος ἐκτὸς αὐτῶν.

Οὕτως ἂν $\lambda_2 > \lambda_1$ καὶ $\rho_2 > \rho_1$ θὰ ἔχωμεν ἢ τὴν διάταξιν $\rho_1 \lambda_1 \rho_2 \lambda_2$ ἢ τὴν $\lambda_1 \rho_1 \lambda_2 \rho_2$ ἐκ τῶν ὁποίων φαίνεται, ὅτι μεταξὺ λ_1, λ_2 περιέχεται μία μόνον ρίζα, εἴτε ἡ ρ_2 εἴτε ἡ ρ_1 .

Ἐπὶ τῆς ιδιότητος αὐτῆς στηριζόμενοι ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς (πραγματικὰς) ρίζας ἐξίσωσεως κατὰ προσέγγισιν (ἂν δὲν εὕρισκωνται ἀκριβῶς).

Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $8x^2-2x-3=0$.

Θέτομεν ἀντὶ τοῦ x δύο ἀριθμοὺς (πραγματικούς), ὥστε τὰ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα θὰ εὕρωμεν ἐκ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ x εἰς τὸ $8x^2-2x-3$, νὰ εἶναι ἑτερόσημα. Ὄταν $x=0$, εὕρισκομεν -3 , ὅταν $x=1$, εὕρισκομεν 3 . Ἐπομένως μεταξὺ 0 καὶ 1 περιέχεται μία

ρίζα τῆς ἐξίσωσως. Λαμβάνομεν τώρα τὴν μέσην τιμὴν μεταξύ τοῦ 0 καὶ 1, δηλαδή θέτομεν $x=0,5$, ὅτε εὐρίσκομεν $2-4=-2$. ἑπομένως ἡ ἄνωτέρω ρίζα περιέχεται μεταξύ τοῦ 0,5 καὶ τοῦ 1. Ἡ μέση τιμὴ μεταξύ τοῦ 0,5 καὶ 1 εἶναι 0,75 καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν $x=0,75$ εὐρίσκομεν, ὅτι ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ x εἶναι ρίζα τῆς ἐξίσωσως. Ὄταν $x=-1$, ἔχομεν $8+2-3=7$. Ἀρα ἡ ἄλλη ρίζα περιέχεται μεταξύ 0 καὶ -1 . (Προσεγγίσατε περισσότερο, ἢ εὑρετε αὐτήν). Τὸν τρόπον αὐτὸν τῆς εὐρέσεως πραγματικῶν ριζῶν κατὰ προσέγγισιν δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν ὁμοίως καὶ εἰς ἐξισώσεις ἄνωτέρου βαθμοῦ.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

412. Εὑρετε μὲ προσέγγισιν τὰς πραγματικὰς ρίζας τῶν κάτωθι ἐξισώσεων διὰ τῆς μεθόδου τῆς προσεγγίσεως (ἐὰν δὲν εὐρίσκωνται ἀκριβῶς καὶ μὲ εὐκολίαν).

- | | | |
|---------------------------|------------------------|---------------------|
| α') $x^2-5x+3=0$, | β') $3x^2-6x+2=0$, | γ') $2x^2+3x-8=0$, |
| δ') $x^3-3x^2+5x-1=0$, | ε') $2x^2+6x-5=0$, | στ') $x^3+x-1=0$, |
| ζ') $x^4-3x^3+4x^2-3=0$, | η') $x^4-3x^2-x+1=0$. | |

14. ΛΥΣΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ 183. Πᾶσα ἀνισότης τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς ἓνα ἄγνωστον, ἔστω τὸν x , εἶναι ἐν γένει τῆς μορφῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$, ἢ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ (ὅπου ὑποτίθεται ὅτι εἶναι $\alpha \neq 0$).

Ἡ δευτέρα μορφή ἀνάγεται εἰς τὴν πρώτην, ἂν ἀλλάξωμεν τὰ σήματα πάντων τῶν ὄρων, ὅτε ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται. Ὡστε πᾶσα ἀνισότης τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὅτι εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$, ὅπου τὸ α δύναται νὰ εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἀνισότητα $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ (1) παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν παραστήσωμεν μὲ ρ_1, ρ_2 τὰς ρίζας τοῦ τριωνύμου τῆς (1) καὶ ὑποθέσωμεν, ὅτι εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι (ἔστω $\rho_1 < \rho_2$), θὰ ἔχωμεν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$. Ζητοῦμεν νὰ εὐρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ x , διὰ τὰς ὁποίας τὸ $\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ εἶναι θετικόν.

Ἄν εἶναι τὸ $\alpha > 0$, τὸ ἄνωτέρω γινόμενον, ὡς γνωστόν, γίνεται θετικόν διὰ $x < \rho_1$ καὶ $x > \rho_2$. Ἀρα αἱ τιμαὶ τοῦ x , αἱ ἐπαληθεύουσαι τὴν

άνισότητα, είναι πάντες οί πραγματικοί αριθμοί οί μικρότεροι τῆς μικροτέρας ρίξης ρ_1 καί οί μεγαλύτεροι τῆς μεγαλυτέρας ρ_2 τοῦ τριωνύμου.

*Αν εἶναι $\alpha < 0$, τότε διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x , αἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξύ τῶν ρ_1 καί ρ_2 , τὸ γινόμενον $\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ ἔχει σημα ἀντίθετον τοῦ α , δηλαδὴ θετικόν. Ἐπομένως αἱ τιμαὶ τοῦ x αἱ ἐπαληθεύουσαι τὴν (1) εἶναι πάντες οἱ πραγματικοί αριθμοί, οἱ ὅποιοι περιέχονται μεταξύ ρ_1 καί ρ_2 .

*Αν αἱ ρίζαι ρ_1 καί ρ_2 εἶναι ἴσαι καὶ εἶναι τὸ $\alpha > 0$, τότε διὰ πᾶσαν τιμὴν διάφορον τῆς ρίξης τοῦ τριωνύμου τὸ γινόμενον $\alpha(x-\rho_1)^2$ εἶναι θετικόν. Δηλαδὴ τότε πάντες οἱ πραγματικοί αριθμοί ἐκτὸς τῆς ρ_1 ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα.

*Αν ὅμως εἶναι τὸ $\alpha < 0$, ἡ ἀνισότης δὲν ἐπαληθεύεται διὰ καμμίαν τιμὴν πραγματικὴν τοῦ x . Διότι τότε εἶναι $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-\rho_1)^2$ καὶ ἀφοῦ τὸ α εἶναι ἀρνητικόν, τὸ $\alpha(x-\rho_1)^2$ εἶναι ἀρνητικόν διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x , ἐκτὸς τῆς ρ_1 , διὰ τὴν ὁποίαν μηδενίζεται.

*Αν αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 εἶναι μιγάδες ἐν γένει, ἡ ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν μὲν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x , ἂν εἶναι $\alpha > 0$, δι' οὐδεμίαν δέ, ἂν εἶναι $\alpha < 0$. Διότι τὸ τριώνυμον τῆς (1) ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἥτοι ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x .

*Ἐστω π.χ., ὅτι ζητεῖται νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $x^2 - 2x + 8 > 0$.

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $x^2 - 2x + 8$ εἶναι μιγάδες καὶ εἶναι $\alpha = 1 > 0$. Ἀρα ἡ ἀνισότης ἀληθεύει διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x .

*Ἐστω πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης $x^2 - x - 6 > 0$.

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $x^2 - x - 6$ εἶναι αἱ -2 καὶ 3 καὶ τὸ $\alpha = 1 > 0$. Ἐπομένως αἱ πραγματικαὶ τιμαὶ τοῦ x αἱ ἐπαληθεύουσαι τὴν ἀνισότητα εἶναι αἱ $x > 3$ καὶ $x < -2$.

§ 184. *Ἐστω, ὅτι ἔχομεν π.χ. τὴν ἀνισότητα.

$$x(x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 7x + 3)(x^2 + x + 1) > 0$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ $x^2 + x + 1$ ἔχει ρίζας φανταστικὰς, ἄρα ἔχει τιμὴν θετικὴν δι' οἰανδήποτε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x . Ἐπομένως ἡ δοθεῖσα ἀνισότης εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ἐπομένην,

$$x(x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 7x + 3) > 0. \quad (2)$$

Ο πρώτος παράγων x μηδενίζεται όταν $x = 0$, ο δε δεύτερος $x^2 - 3x + 2$, όταν $x = 1$, $x = 2$ και ο τρίτος παράγων $2x^2 + 7x + 3$, όταν $x = -\frac{1}{2}$, $x = -3$

Αί πέντε αὐταί τιμαὶ τοποθετούμεναι κατὰ σειράν μεγέθους εἶναι $-3 < -\frac{1}{2} < 0 < 1 < 2$.

α') Όταν $x < -3$, ο πρώτος παράγων τῆς ἀνισότητος (2) εἶναι ἀρνητικός, ὁ $(x^2 - 3x + 2)$ θὰ ἔχῃ τὸ σῆμα τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x^2 , όταν $x < 1$, ἐπομένως καὶ όταν $x < -3 < 1$, τὸ $x^2 - 3x + 2$ θὰ ἔχῃ τὸ πρόσημον θετικόν. Ὁμοίως, ὁ τρίτος παράγων τῆς ἀνισότητος (2) ὁ $2x^2 + 7x + 3$, όταν $x < -3$, θὰ ἔχῃ τὸ πρόσημον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x^2 , ἥτοι θετικόν. Ὅθεν τὸ γινόμενον τῶν τριῶν παραγόντων τῆς (2) εἶναι ἀρνητικόν.

β') Όταν εἶναι $-3 < x < -\frac{1}{2}$, ὁ πρώτος παράγων εἶναι ἀρνητικός ὁ δεύτερος θετικός (διότι τὸ x ἔχει τιμὴν κειμένην ἐκτὸς τῶν ριζῶν του) καὶ ὁ τρίτος εἶναι ἀρνητικός (διότι ὁ x ἔχει τιμὴν κειμένην μεταξὺ τῶν ριζῶν του). Ἐπομένως τὸ γινόμενον τῶν τριῶν παραγόντων εἶναι θετικόν.

γ') Όταν εἶναι $-\frac{1}{2} < x < 0$, ὁ πρώτος παράγων εἶναι ἀρνητικός οἱ ἄλλοι δύο θετικοί καὶ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἀρνητικόν.

δ') Όταν $0 < x < 1$, ὁ πρώτος παράγων εἶναι θετικός, ὁ δεύτερος θετικός καὶ ὁ τρίτος θετικός, ἄρα τὸ γινόμενόν των εἶναι θετικόν.

ε') Όταν ληφθῇ $1 < x < 2$, ὁ πρώτος καὶ τρίτος παράγων τῆς ἀνισότητος (2) εἶναι θετικοί, ὁ δεύτερος ἀρνητικός, ἄρα τὸ γινόμενον τῶν τριῶν παραγόντων εἶναι ἀρνητικόν.

στ') Τέλος ἂν ληφθῇ $x > 2$, οἱ τρεῖς παράγοντες τῆς (2) εἶναι θετικοί καὶ τὸ γινόμενον εἶναι θετικόν.

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἐπαληθεύεται, όταν $-3 < x < -\frac{1}{2}$ ἢ όταν $0 < x < 1$ ἢ όταν $x > 2$.

Ἐν γένει, ἂν ἔχωμεν ἀνισότητα τῆς μορφῆς $A \cdot B \cdot \Gamma > 0$, ὅπου A, B, Γ , παριστάνουν πολυώνυμα ὡς πρὸς x πρώτου ἢ δευτέρου βαθμοῦ, εὐρίσκομεν πρῶτον διὰ τίνας τιμὰς τοῦ x ἕκαστον τῶν A, B, Γ , γίνεται θετικόν καὶ διὰ τίνας γίνεται ἀρνητικόν. Τοῦτο εὐρίσκομεν βοηθούμενοι ἀπὸ τὰς ρίζας ἑκάστου τῶν A, B, Γ .

Ἀκολουθῶς ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ x κρατοῦμεν ὡς λύσεις τῆς ἀνισότητος ἐκείνας, διὰ τὰς ὁποίας τὸ γινόμενον $A \cdot B \cdot \Gamma$ γίνεται θετικόν.

§ 185. Ἄν ἔχωμεν ἀνισότητα τῆς μορφῆς $\frac{A}{B} > 0$, ἀνάγωμεν αὐτὴν εἰς τὴν ἰσοδύναμόν της ἀνισότητα τῆς μορφῆς $A \cdot B > 0$, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἄνισα ἐπὶ B^2 , ὅτε λαμβάνομεν $\frac{A \cdot B^2}{B} > 0$ ἢ $A \cdot B > 0$, τὴν ὁποίαν ἐξετάζομεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω.

Δυνάμεθα ὁμῶς νὰ ἐξετάσωμεν χωριστὰ πότε εἶναι $A > 0$ καὶ $A < 0$, καθὼς καὶ πότε εἶναι $B > 0$ καὶ $B < 0$ καὶ ἀκολουθῶς νὰ κρήσωμεν ἐκείνας ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας τὸ $\frac{A}{B}$ εἶναι θετικόν.

Ἐστω π.χ. πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης $1 + \frac{x-4}{x-3} > \frac{x-2}{x-1}$.

Ἐξ αὐτῆς ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμόν της $1 + \frac{x-4}{x-3} - \frac{x-2}{x-1} > 0$ ἢ τὴν
$$\frac{(x-3)(x-1) + (x-4)(x-1) - (x-2)(x-3)}{(x-3)(x-1)} > 0$$
, καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμείων ὄρων (εἰς τὸν ἀριθμητὴν) ἔχομεν τὴν
$$\frac{x^2 - 4x + 1}{(x-3)(x-1)} > 0$$
.

Αἱ ρίζαι τοῦ $x^2 - 4x + 1$ εἶναι $2 \pm \sqrt{3}$, αἱ δὲ τοῦ παρονομαστοῦ τῆς τελευταίας ἀνωτέρω ἀνισότητος αἱ 1 καὶ 3. Θέτοντες $x=1$ εἰς τὸν ἀριθμητὴν τῆς ἀνισότητος εὐρίσκομεν ἐξαγόμενον $-2 < 0$. Ἄρα τὸ 1 περιέχεται μετὰ τῶν ριζῶν τοῦ ἀριθμητοῦ. Θέτομεν $x=3$ εἰς τὸν ἀριθμητὴν τῆς ἀνισότητος καὶ εὐρίσκομεν $9 - 12 + 1 = -2 < 0$. Ἄρα ἡ ρίζα 3 τοῦ παρονομαστοῦ περιέχεται μετὰ τῶν ριζῶν τοῦ ἀριθμητοῦ. Οὕτως ἔχομεν $2 - \sqrt{3} < 1 < 3 < 2 + \sqrt{3}$.

Παρατηροῦμεν τώρα, ὅτι, ὅταν εἶναι $x < 2 - \sqrt{3}$, ἢ $x > 2 + \sqrt{3}$ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τῆς ἀνωτέρω ἀνισότητος εἶναι θετικοί, ἥτοι αὕτη ἐπαληθεύεται. Ἐπίσης ἐπὶ, ὅταν $1 < x < 3$ καὶ οἱ δύο ὅροι εἶναι ἀρνητικοί, ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{x^2 - 4x + 1}{(x-3)(x-1)}$ εἶναι θετικόν καὶ ἡ ἀνισότης ἐπαληθεύεται. Ἐνῶ ὅταν $2 - \sqrt{3} < x < 1$ ἢ $3 < x < 2 + \sqrt{3}$, ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης δὲν ἐπαληθεύεται, διότι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι ἐτερόσημοι καὶ ἐπομένως τὸ κλάσμα γίνεται ἀρνητικόν.

Άσκησης

Όμως πρώτη. 413. Να λυθούν οι κάτωθι ανισότητες :

$$\alpha') x^2 + 3x - 4 > 0, \quad \beta') x^2 + 3x - 6 > 0, \quad \gamma') \frac{x^2 - 3x}{2} - \frac{3x}{4} < -2.$$

414. Εύρετε τις τιμές του x τις επαληθευούσας τις δύο ανισότητες :
 $\alpha') x^2 - 12x + 32 > 0$ και $x^2 - 13x + 22 < 0$, $\beta') x^2 - 3x + 2 > 0$ και $4x^2 + 5x + 1 < 0$
 , 415. Να λυθούν οι ανισότητες :

$$\alpha') \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} > 1, \quad \beta') \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 2} > 0, \quad \gamma') 3 + \frac{1}{3-x} > \frac{1}{5x+1}.$$

Όμως δεύτερη. 416. Να λυθούν οι κατωτέρω ανισότητες, αν είναι
 $\alpha(\beta(\gamma(\delta : \alpha') (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) > 0, \quad \beta') (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) > 0.$

417. Να λυθούν οι ανισότητες :

$$\alpha') 4x^3 - 10x^2 + 18x < 0, \quad \beta') 3x^3 - 5x^2 + 2x > 0, \quad \gamma') x^3 - x^2 + 4x > 0.$$

418. Μεταξύ τίνων αριθμών πρέπει να περιέχεται ο μ , ίνα η εξίσωση
 $\mu x^2 + (\mu - 1)x + 2 = 8$ έχει ρίζες πραγματικές ; μιγάδας ;

419. Ποίαν τιμήν πρέπει να έχει ο λ , ίνα η $x^2 + (2\lambda + 1)x > -19$ επαληθευτείται
 δια πάσαν πραγματικήν τιμήν του x ;

15. ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $ax^2 + bx + \gamma$ ΔΙΑ ΠΑΣΑΣ ΤΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑΣ ΤΙΜΑΣ ΤΟΥ x

§ 186. Έστω π.χ. το τριώνυμον $7x^2 - 5x + 6$.

Αν παραστήσωμεν αυτό με ψ , θα έχωμεν την συνάρτησιν
 $\psi = 7x^2 - 5x + 6$ (1)

Αν το x αντικαταστήσωμεν με μίαν τιμήν πραγματικήν π.χ.
 με $x=3$, το τριώνυμον λαμβάνει την τιμήν $7 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6$. (2)

Αν εις την (1) θέσωμεν αντί του x την τιμήν $3+\epsilon$, όπου το
 ϵ παριστάνει ποσότητά τινα πραγματικήν, θα έχωμεν ως τιμήν
 του ψ την $\psi = 7(3+\epsilon)^2 - 5(3+\epsilon) + 6 = 7(3^2 + 2 \cdot 3\epsilon + \epsilon^2) - 5 \cdot 3 - 5\epsilon + 6 =$
 $(7 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6) + 7 \cdot 2 \cdot 3\epsilon + 7\epsilon^2 - 5\epsilon$. (3)

Εάν από την τιμήν αυτήν (3) του ψ αφαιρέσωμεν την προ-
 ηγουμένην τιμήν αυτού (2), εύρισκομεν διαφοράν την

$$7(3+\epsilon)^2 - 5(3+\epsilon) + 6 - 7 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \epsilon + 7\epsilon^2 - 5\epsilon. \quad (4)$$

Αν τώρα υποθέσωμεν, ότι το ϵ είναι ποσότης όσον θέλομεν
 μικρά απόλυτως, τότε και η ποσότης (4) γίνεται όσον θέλομεν
 μικρά (απόλυτως). Διότι έκαστος τῶν ὄρων της περιέχει το ϵ , το
 όποιον δυνάμεθα να ἐλαττώσωμεν, όσον θέλομεν (απόλυτως). Πα-

ρατηρούμεν λοιπόν, ὅτι εἰς ἐλαχίστην (ἀπολύτως) μεταβολὴν τῆς τιμῆς 3 τοῦ x ἀντιστοιχεῖ ἐλαχίστη (ἀπολύτως) μεταβολή τῆς συναρτήσεως (1). Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι :

Τὸ τριώνυμον (1) εἶναι συνεχές ὡς πρὸς x ἢ συνεχῆς συνάρτησις τοῦ x διὰ τὴν τιμὴν τοῦ $x = 3$.

Ἄλλ' οἰανδήποτε πραγματικὴν τιμὴν καὶ ἂν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x εἰς τὴν (1), εὐρίσκομεν, ὅτι τὸ τριώνυμον εἶναι συνεχῆς συνάρτησις τοῦ x διὰ πᾶσαν τοιαύτην τιμὴν τούτου.

Ὅμοιως εὐρίσκομεν, ὅτι πᾶν τριώνυμον τῆς μορφῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶναι συνεχῆς συνάρτησις διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x .

Καθ' ὅμοιον τρόπον ὀρίζομεν τὴν συνέχειαν οἰασδήποτε συναρτήσεως τοῦ x . Ἄν δὲ συνάρτησις τις δὲν εἶναι συνεχῆς διὰ τινα τιμὴν τοῦ x , λέγεται **ἀσυνεχῆς** διὰ τὴν τιμὴν αὐτήν.

Ἐκ τούτων ἔπεται, ὅτι, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ τινος πραγματικῆς τιμῆς λ εἰς ἄλλην μ λαμβάνον συνεχῶς τὰς ἐνδιαμέσους τιμὰς τὰς κειμένας μεταξὺ τῶν λ καὶ μ , τὸ τριώνυμον θὰ μεταβάλλεται ἀπὸ τῆς τιμῆς $\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$ εἰς τὴν τιμὴν $\alpha\mu^2 + \beta\mu + \gamma$ λαμβάνον τιμὰς ἐν συνεχείᾳ.

β') Ἐὰν μεταβλητὴ τις x λαμβάνῃ ἄπειρον πλῆθος πραγματικῶν τιμῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπὸ τινος καὶ ἑξῆς ὑπερβαίνουν πάντα ἀριθμὸν θετικὸν (ὅσονδήποτε μεγάλον), τότε λέγομεν ὅτι αὕτη **τείνει εἰς τὸ θετικὸν ἄπειρον** ($+\infty$) καὶ τὸ σημειώνομεν μὲ $\rightarrow \infty$. Ἐὰν δὲ αἱ τιμαὶ αὐτῆς ἀπὸ τινος καὶ ἑφ' ἑξῆς εἶναι μικρότεραί παντὸς ἀριθμοῦ ἀρνητικοῦ (ὅσονδήποτε μικροῦ), λέγομεν, ὅτι ἡ x **τείνει εἰς τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον** ($-\infty$) καὶ τὸ σημειώνομεν μὲ $x \rightarrow -\infty$.

Ἐστω τὸ τριώνυμον $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ὅπου $\alpha \neq 0$. Θέλομεν νὰ εὕρωμεν πῶς μεταβάλλεται τοῦτο, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$ λαμβάνον ἐν συνεχείᾳ πάσας τὰς ἐνδιαμέσους πραγματικὰς τιμὰς. Γράφομεν τὸ τριώνυμον ὡς ἑξῆς :

$$\begin{aligned}\alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \alpha \left(x^2 + \frac{\beta x}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \right) = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \right] \\ &= \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \right].\end{aligned}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν μὲν εἶναι $\alpha > 0$, τὸ τριώνυμον θὰ ἔχῃ τὸ πρόσσημον τῆς ποσότητος, ἢ ὁποῖα εἶναι ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν· ἂν δὲ εἶναι $\alpha < 0$, θὰ ἔχῃ ἀντίθετον πρόσσημον αὐτῆς.

1ον. *Εστω, ὅτι εἶναι τὸ $\alpha > 0$. *Όταν τὸ $x \rightarrow -\infty$, τὸ $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \rightarrow +\infty$, ἐὰν δὲ ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ ὁ ὠρισμένος ἀριθμὸς $\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$, μένει διαφορά, ἡ ὁποία τείνει εἰς τὸ $+\infty$.

*Ὡστε, ὅταν $x \rightarrow -\infty$, τὸ τριώνυμον τείνει εἰς τὸ $+\infty$.

*Ἐὰν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ $-\infty$ λαμβάνον τιμὰς μικροτέρας τοῦ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ $x + \frac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι ἀρνητικόν, ἀλλὰ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ εἶναι θετικόν καὶ ἐλαττοῦται συνεχῶς

*Όταν τὸ x γίνῃ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ $x + \frac{\beta}{2\alpha}$ γίνεται 0, τὸ δὲ τριώνυμον γίνεται $-\alpha \cdot \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$. *Όταν τὸ x αὐξάνεται ἀπὸ τῆς τιμῆς $-\frac{\beta}{2\alpha}$ συνεχῶς τείνουν εἰς τὸ $+\infty$ ἡ ποσότης $x + \frac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι θετική καὶ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τὸ 0 τείνουσα εἰς τὸ $+\infty$.

*Ἀρα καὶ ἡ τιμὴ τοῦ τριωνύμου αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τῆς τιμῆς $-\alpha \cdot \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$ τείνουσα εἰς τὸ $+\infty$.

2ον. *Εστω, ὅτι εἶναι τὸ $\alpha < 0$. *Όταν τὸ $x \rightarrow -\infty$, τὸ τριώνυμον τείνει εἰς τὸ $-\infty$, διότι τὸ μὲν $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$ τείνει εἰς τὸ $+\infty$, ἀλλὰ τὸ γινόμενον $\alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \right] \rightarrow -\infty$, ἐπεὶ εἶναι $\alpha < 0$.

*Όταν τὸ $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ τριώνυμον γίνεται $-\alpha \cdot \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$.

*Όταν τὸ $x \rightarrow +\infty$, τὸ τριώνυμον τείνει πάλιν εἰς τὸ $-\infty$, ἔνεκα τοῦ ὅτι εἶναι $\alpha < 0$. *Ἦτοι:

*Όταν τὸ $\alpha > 0$ καὶ τὸ x μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty \dots -\frac{\beta}{2\alpha} \dots +\infty$, τὸ τριώνυμον ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$, μέχρι τοῦ $-\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$ καὶ ἔπειτα αὐξάνεται συνεχῶς μέχρι τοῦ $+\infty$, ὅταν δὲ εἶναι τὸ $\alpha < 0$, διὰ τὴν αὐτὴν συνεχῇ μεταβολὴν τοῦ x , τὸ τριώνυμον αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$, γίνεται $-\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$ καὶ ἐλαττοῦται πάλιν συνεχῶς μέχρι $-\infty$.

γ') *Όταν μία τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνει μεταβλητὴ ποσότης, εἶναι μεγαλυτέρα πασῶν τῶν ἄλλων τιμῶν πλησίον αὐτῆς, τότε λέγομεν, ὅτι αὕτη εἶναι μέγιστον τῆς μεταβλητῆς.

Τούναντίον, ἐὰν μία τῶν τιμῶν μεταβλητῆς ποσότητος εἶναι μικρότερα τῶν ἄλλων γειτονικῶν τιμῶν αὐτῆς, καλοῦμεν αὐτὴν ἐλάχιστον τῆς μεταβλητῆς

δ') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν, ὅτι :

Ἐὰν εἶναι τὸ $\alpha > 0$, τὸ τριώνυμον $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ἔχει ἐλάχιστον ὅταν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, εἶναι δὲ ἡ ἐλάχιστη τιμὴ του ἢ $-\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$.

Ἐὰν εἶναι τὸ $\alpha < 0$, τὸ τριώνυμον ἔχει μέγιστον, ὅταν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, εἶναι δὲ ἡ μέγιστη τιμὴ του ἢ $-\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$.

*Εστω π.χ. τὸ τριώνυμον $3x^2 - 6x + 7$. Τὸ $\alpha = 3 > 0$. ἄρα τὸ τριώνυμον ἔχει ἐλάχιστον, ὅταν $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{6}{6} = 1$.

Θέτοντες $x = 1$ εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ἐλάχιστον τοῦ τριωνύμου εἶναι 4.

Ἀ σ κ η σ ι ς

420. Δι' ἑκαστον τῶν κάτωθι τριωνύμων νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον καὶ διὰ τίνα τιμὴν τοῦ x συμβαίνει τοῦτο :

α') $-x^2 + 4x + 3$,

β') $19x^2 - 7x + 3$,

γ') $x^2 - 7x - 13$,

δ') $15x^2 + x - 7$,

ε') $-x^2 + 3x - 6$,

στ') $9,5x^2 - 0,25x - 2$.

16. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

§ 187. *Εστω τὸ τριώνυμον $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (ὅπου εἶναι $\alpha \neq 0$)
Διὰ νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν μεταβολὴν αὐτοῦ θέτομεν
$$\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad (1)$$

καὶ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, ὑποθέτοντες, ὅτι ἑκαστον ζευγὸς τῶν τιμῶν τοῦ x καὶ ψ παριστάνεται μὲ ἓν σημεῖον ἔχον τετμημένην τὴν τιμὴν τοῦ x καὶ τεταγμένην τὴν τιμὴν τοῦ ψ ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους $x'Ox$ καὶ $\psi'O\psi$.

1ον. Ὅταν εἶναι τὸ $\alpha > 0$.

Γνωρίζομεν, ὅτι, ὅταν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ ψ ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$.

Διὰ τοῦτο λέγομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) παριστάνεται μὲ μίαν καμπύλην γραμμὴν, τῆς ὁποίας ἑκαστον σημεῖον ἔχει τετμημένην καὶ τεταγμένην ἀντιστοίχως τιμὰς τῶν x καὶ ψ τῆς ἐξισώσεως (1). Ἦτοι

ή έν λόγω γραμμή θά έχη κλάδον συνεχή (άνευ διακοπής τινος), ό όποιος θά άρχίζη άπό έν σημείον, τό όποιον κείται είς τήν γωνίαν $\psi 0x'$ και είναι πολύ μεμακρυσμένον (τετμημένην $x \rightarrow -\infty$ και τεταγμένην $\psi \rightarrow +\infty$), κατερχόμενος δέ διέρχεται άπό τό σημείον Α (άνω ή κάτω τής Ox), έχον

τετμημένην $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τεταγμένην δέ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ (σχ. 16).

Όταν τό x άπό τής τιμής $-\frac{\beta}{2\alpha}$ αύξάνεται συνεχώς τείνουν είς τό $+\infty$, ή έξίσωσις (1) λέγομεν, ότι παριστάνει άλλον συνεχή κλάδον γραμμής, ό όποιος άνέρχεται άπό τό σημείον Α και άπομακρύνεται πρός έν σημείον πολύ μεμακρυσμένον, τό όποιον κείται είς τήν γωνίαν $x0\psi$, μέ τετμημένην και τεταγμένην τεινούσας είς τό $+\infty$.

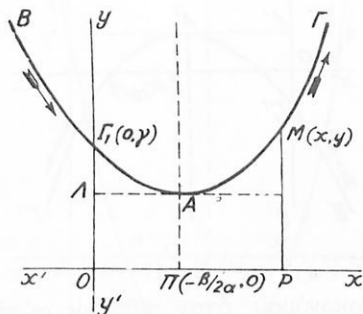
Έκ τών άνωτέρω έπεται, ότι ή έξίσωσις (1), όταν τό α είναι θετικόν, παριστάνει τήν καμπύλην ΒΑΓ (σχ. 16).

2ον. Όταν τό $\alpha < 0$.

Είς τήν περίπτωσην αύτήν, όταν τό x αύξάνεται συνεχώς άπό $-\infty$ μέχρι τοῦ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τό ψ αύξάνεται συνεχώς άπό $-\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$.

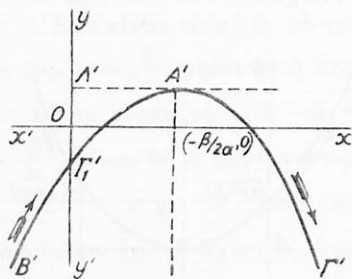
Έπομένως διά τās τιμās αύτās ή έξίσωσις (1) παριστάνει ένα συνεχή κλάδον, ό όποιος άρχίζει άπό έν σημείον πολύ μεμακρυσμένον και κείμενον είς τήν γωνίαν $x'0\psi'$, τοῦ όποίου ή τετμημένη και τεταγμένη τείνουν είς τό $-\infty$, καταλήγει δέ είς τό σημείον Α' (άνω ή κάτω τής Ox), τοῦ όποίου ή μέν τετμημένη ίσοῦται μέ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, ή δέ τεταγμένη μέ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ (σχ. 17).

Όταν τό x αύξάνεται συνεχώς άπό $-\frac{\beta}{2\alpha}$ μέχρι τοῦ $+\infty$, τό τριώνυμον, άρα και τό ψ , έλαττοῦται συνεχώς άπό $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ μέχρι τοῦ $-\infty$ και ή έξίσωσις (1) διά τās τιμās αύτās λέγομεν ότι παριστάνει



Σχ. 16

συνεχῆ κλάδον (καμπύλης) γραμμῆς, ὁ ὁποῖος κατέρχεται ἀπὸ τὸ σημείον A' καὶ ἀπομακρύνεται πρὸς ἓν σημεῖον πολὺ μεμακρυσμένον κείμενον εἰς τὴν γωνίαν $xO\psi'$ μὲ τετμημένην καὶ τεταγμένην τείνουσας εἰς τὸ $+\infty$ καὶ $-\infty$ (σχ. 17) ἀντιστοίχως.



Σχ. 17

Διὰ νὰ εὐρώμεν ποῦ ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν ψ , παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς θὰ ἔχωμεν $x=0$. Ἀλλ' ἂν θέσωμεν $x=0$, εἰς τὴν (1), εὐρίσκομεν $\psi=\gamma$. Ὡστε ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα $\psi O\psi$ εἰς τὸ σημεῖον Γ ἢ Γ' , ἔχον τεταγμένην ἴσην μὲ γ .

Ἄν ρ_1, ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου, ὅταν τεθῇ εἰς αὐτὸ $x=\rho_1$, ἢ $x=\rho_2$, ἔχομεν $\psi=0$.

Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεῖα τὰ ἔχοντα τετμημένας ρ_1 καὶ ρ_2 . Ἄν τὰ ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι φανταστικοὶ ἢ μιγάδες ἀριθμοί, ἡ καμπύλη (πραγματικῶς) δὲν τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x .

Δυνάμεθα νὰ εὐρώμεν τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης θέτοντες $x=1, 2, 3, \dots$ ὅτε εὐρίσκομεν $\psi=\alpha+\beta+\gamma$, $\psi=4\alpha+2\beta+\gamma$, $\psi=9\alpha+3\beta+\gamma, \dots$ Οὕτως εὐρίσκομεν τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης.

$$(1, \alpha+\beta+\gamma), \quad (2, 4\alpha+2\beta+\gamma), \quad (3, 9\alpha+3\beta+\gamma) \dots$$

Ἐπίσης θέτομεν $x=-1, -2, -3$ καὶ εὐρίσκομεν ἄλλα σημεῖα τῆς καμπύλης. Ἄν θέλωμεν, θέτομεν x ἴσον μὲ ἄλλας τιμὰς π.χ. $x=\pm 0,1, \pm 0,2, \dots$ $x=\pm 2,1 \pm 2,2 \dots$ καὶ εὐρίσκομεν ἄλλα σημεῖα τῆς καμπύλης.

§ 188. Παρατήρησις. Ἡ καμπύλη, τὴν ὁποῖαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις (1), καλεῖται **παραβολή**, τῆς ὁποῖας ἡ θέσις ἀλλάσσει μετὰ τοῦ προσήμου τοῦ α καὶ τῶν συντελεστῶν τοῦ τριωνύμου.

Ἐφαρμογή. Ἐστω τὸ τριωνύμον $\psi = x^2 - 5x + 4$. Ἐχομεν

$$\psi = x^2 - 5x + 4 + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 4 - \frac{25}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

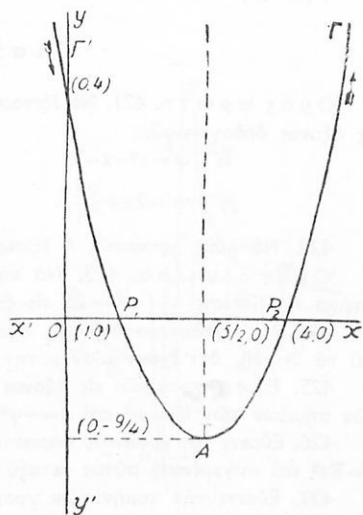
Ὅταν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{5}{2}$, τὸ $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$

ελαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ 0, τὸ δὲ ψ ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ $-\frac{9}{4}$. Οὕτως ἡ καμπύλη ἔχει συνεχῇ κλάδον

Γ'Α ἀρχόμενον ἀπὸ σημεῖον μὲ τετμημένην καὶ τεταγμένην τεινούσας εἰς τὸ $-\infty$ καὶ $+\infty$ καὶ φθάνει εἰς τὸ σημεῖον $A\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ (σχ. 18).

Ὅταν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $\frac{5}{2}$ μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ δὲ ψ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\frac{9}{4}$ μέχρι τοῦ $+\infty$.

Ἡ καμπύλη λοιπὸν ἔχει καὶ δεύτερον συνεχῇ κλάδον ΑΓ, ὁ ὁποῖος ἀνέρχεται ἐκ τοῦ σημείου Α $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ καὶ ἀπομακρύνεται εἰς τὸ ἄπειρον μέχρι τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας τεινούσας εἰς $+\infty$.



Σχ. 18

Ὅταν τὸ $x=0$, τὸ ψ εἶναι ἴσον μὲ 4. Ἀρα ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον Γ' (0,4). Ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεία (1,0) καὶ (4,0), ἐπειδὴ εἶναι $\rho_1=1$ καὶ $\rho_2=4$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ ἄλλα σημεία τῆς καμπύλης θέτομεν π.χ. $x=2$ καὶ εὐρίσκομεν $\psi=4-10+4=-2$, $x=-2$, ὅτε $\psi=4+10+4=18$, $x=3$, ὅτε $\psi=9-15+4=-2$, $x=-3$, ὅτε $\psi=9+15+4=28$.

Οὕτως ἔχομεν ὡς σημεία τῆς καμπύλης τὰ :

$$(2, -2) \quad (-2, 18), \quad (3, -2), \quad (-3, 28).$$

Παρατήρησις. Ἡ εὕρεσις τῶν σημείων, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ παριστανομένη γραμμὴ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x , θὰ ὀρίσῃ τὰ σημεία αὐτὰ μὲ τὰς τετμημένας των. Ἀλλ' αὐταὶ θὰ εἶναι ρίζαι τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ἐπειδὴ θὰ ἔχωμεν $\psi=0$.

Ἡ εὕρεσις τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς κατὰ τὸν τρόπον

αυτόν, δηλαδή, όταν κατασκευάσωμεν τὴν καμπύλην $\psi = ax^2 + bx + \gamma$ καὶ εὕρωμεν τὰς τετμημένας τῶν σημείων τομῆς τῆς καμπύλης μὲ τὸν ἄξονα τῶν x , λέγεται **γραφικὴ λύσις τῆς ἐξίσωσως**
 $ax^2 + bx + \gamma = 0$

Ἀσκήσεις

Ὁ μ ἄ ς π ρ ὡ τ η. 421. Νὰ ἐξετασθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τῶν συναρτήσεων εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους :

$$\alpha') \psi = x^2 - x - 3,$$

$$\beta') \psi = 3x^2 - 7x + 3,$$

$$\gamma') \psi = 2x + \frac{x^2}{4},$$

$$\delta') \psi = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{5}x - 1.$$

422. Νὰ λυθῇ γραφικῶς ἡ ἐξίσωσις $x^2 - 7x + 11 = 0$ (Θέσατε $\psi = x^2 - 7x + 11$)

Ὁ μ ἄ ς δ ε υ τ ἔ ρ α. 423. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ γραμμὴ, τὴν ὁποίαν παρίστανει ἡ ἐξίσωσις $x^2 + \psi^2 = 25$ εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους.

424. Νὰ κατασκευασθοῦν εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους αἱ γραμμαὶ $\psi = x^2$, $x = \psi^2$ καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι ἔχουν μίαν μόνην κοινὴν χορδὴν.

425. Εὗρετε γραφικῶς εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους τὰς συντεταγμένας τῶν κοινῶν σημείων τῶν $8\psi = x^2$ καὶ $x = -\psi^2$.

426. Εὗρετε τὰς γραφικὰς παραστάσεις εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους τῶν $\psi = x^2$ καὶ $\psi = 8x^2$ καὶ συγκρίνατε αὐτὰς μεταξὺ τῶν.

427. Εὗρετε τὴν τομὴν τῶν γραμμῶν $x^2 + \psi^2 = 100$ καὶ $x + \psi = 5$ εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους.

17. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $\psi = \frac{ax + \beta}{\gamma x + \delta}$

§ 189. Ἐστω πρῶτον ἡ $\psi = \frac{1}{x}$. (1)

Θέτομεν εἰς τὴν (1) $x = 1, 2, 3, 4, \dots$ καὶ εὐρίσκομεν $\psi = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ Λαμβάνομεν ἄξονας ὀρθογωνίους $x'Ox$, $\psi'O\psi$ (σχ. 19) καὶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $O\Theta$, $O\Lambda$, ἐπὶ τῶν Ox καὶ $O\psi$ παριστάνοντα τὸ $+1$ ἐπὶ ἐκάστου ἄξονος. Ἀκολουθῶς εὐρίσκομεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν συντεταγμένας $(1, 1), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3}), (4, \frac{1}{4}), \dots$, ἔστωσαν δὲ αὐτὰ κατὰ σειρὰν τὰ $M_1, M_2, M_3, M_4, \dots$ (σχ. 19).

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν τὸ x λαμβάνη τιμὰς θετικὰς αὐξανόμενας, τὸ ψ λαμβάνει τιμὰς θετικὰς καὶ ἐλαττουμένας, ὅταν δὲ τὸ $x \rightarrow +\infty$, τὸ $\psi \rightarrow 0$. Τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας

($x \rightarrow +\infty, \psi \rightarrow 0$) τείνει νὰ εἶναι ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ox , ἀλλ' εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ O . Θέτομεν τώρα εἰς τὴν (1) $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ καὶ εὐρίσκομεν $\psi = 2, 3, 4, \dots$, ἀκολουθῶς δὲ εὐρίσκομεν τὰ σημεῖα μὲ συν-

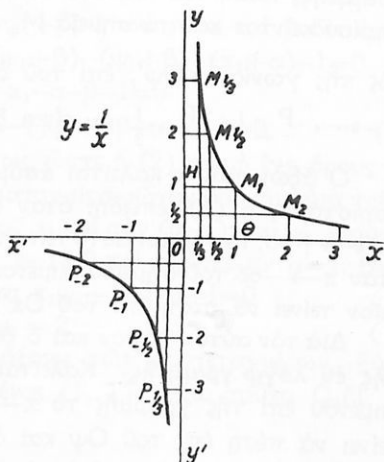
τεταγμένας $(\frac{1}{2}, 2), (\frac{1}{3}, 3),$

$(\frac{1}{4}, 4), \dots$, ἔστωσαν δὲ αὐτὰ

κατὰ σειρὰν τὰ $M_{\frac{1}{2}}, M_{\frac{1}{3}},$

$M_{\frac{1}{4}}, \dots$,

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν τὸ x λαμβάνη τιμὰς θετικὰς ἐλαττωμένας, καὶ τὸ ψ λαμβάνει τιμὰς θετικὰς, ἀλλ' αὐξανόμενας, ὅταν δὲ $x \rightarrow 0$, τὸ $\psi \rightarrow +\infty$. Τὸ σημεῖον μὲ συντεταγμένας ($x \rightarrow 0, \psi \rightarrow +\infty$) τείνει νὰ εἶναι ἐπὶ τοῦ ἄξονος Oy , ἀλλ' εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ O . Θέτοντες εἰς τὴν (1) $x = \alpha > 0$ εὐρίσκομεν $\psi = \frac{1}{\alpha} > 0$. Ἡ ἐξίσωσις



Σχ. 19

λοιπὸν (1) λέγομεν, ὅτι παριστάνει μίαν γραμμὴν διερχομένην ἀπὸ τὰ σημεῖα $M_1, M_2, M_3, M_4, \dots M$ ($x \rightarrow +\infty, \psi \rightarrow 0$), καθὼς καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα $M_{\frac{1}{2}}, M_{\frac{1}{3}}, M_{\frac{1}{4}}, \dots M'$ ($x \rightarrow 0, \psi \rightarrow +\infty$) καὶ ἔχει τὸ σχ. 19.

Θέτομεν εἰς τὴν (1) $x = -1, -2, -3, \dots, x \rightarrow -\infty$ καὶ εὐρίσκομεν ὅτι $\psi = -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \psi \rightarrow 0$ (ἀπὸ ἀρνητικὰς τιμὰς). Οὕτω ἔχομεν τὰ σημεῖα

$P_{-1}(-1, -1), P_{-2}(-2, -\frac{1}{2}), P_{-3}(-3, -\frac{1}{3}), \dots, P$ ($x \rightarrow -\infty, \psi \rightarrow 0$), κεῖνται δὲ τὰ σημεῖα αὐτὰ ἐπὶ τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ (1), ἐνῶ τὸ σημεῖον ($x \rightarrow -\infty, \psi \rightarrow 0$) τείνει νὰ εἶναι ἐπὶ τοῦ Ox' .

Θέτομεν εἰς τὴν (1) $x = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, x \rightarrow 0$ (ἀπὸ ἀρνητικὰς τιμὰς), ὅτε εὐρίσκομεν $\psi = -2, -3, -4, \dots, \psi \rightarrow -\infty$. Τὰ ση-

μεία $P_{-\frac{1}{2}}, P_{-\frac{1}{3}}, P_{-\frac{1}{4}}, \dots, P(x \rightarrow 0, \psi \rightarrow -\infty)$ κείνται ἐπὶ τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ (1),

Οὕτω λοιπὸν λέγομεν, ὅτι ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ (1), ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται **κλάδοι τῆς γραμμῆς**, τὸ ἓν τῶν ὁποίων κείται ἐντὸς τῆς γωνίας $xO\psi$, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κείνται καὶ τὰ σημεῖα $M_1, M_2, \dots, M_{\frac{1}{2}}, M_{\frac{1}{3}}, \dots$, καὶ τὸ ἄλλο ἐντὸς τῆς γωνίας $x'O\psi'$, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κείνται καὶ τὰ σημεῖα $P_{-1}, P_{-2}, \dots, P_{-\frac{1}{2}}, P_{-\frac{1}{3}}, \dots$ εἶναι δὲ διὰ $x = \alpha < 0$ τὸ $\psi = \frac{1}{\alpha} < 0$.

Ὁ ἄξων τῶν x καλεῖται **ἀσύμπτωτος** τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν παριστάνει, ἡ (1), ἐπειδὴ, ὅταν σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὸ $x \rightarrow +\infty$, τὸ σημεῖον αὐτὸ τείνει νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Ox , καθὼς ἐπίσης, ὅταν $x \rightarrow -\infty$ τοῦ σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς γραμμῆς, τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον τείνει νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Ox' .

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὁ ἄξων τῶν ψ καλεῖται **ἀσύμπτωτος** τῆς ἐν λόγῳ γραμμῆς. Καλεῖται δὲ οὕτως ἐπειδὴ, ὅταν σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὸ $x \rightarrow 0$ (ἐκ θετικῶν τιμῶν), τὸ σημεῖον τείνει νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ $O\psi$ καὶ ὅταν σημείου ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὸ $x \rightarrow 0$ (ἀπὸ ἀρνητικὰς τιμὰς), τὸ σημεῖον τείνει νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ $O\psi'$.

Κατὰ ταῦτα λέγομεν, ὅτι ἡ (1) παριστάνεται ἀπὸ δύο κλάδους, οἱ ὁποῖοι θεωροῦνται ὡς ἓν ὅλον, ὡς μία γραμμή, ἡ ὁποία καλεῖται **ὑπερβολή**, οἱ δὲ ἄξονες τῶν συντεταγμένων εἶναι **ἀσύμπτωτοι** αὐτῆς καὶ λέγονται **ἄξονες τῆς ὑπερβολῆς** αὐτῆς.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὐρίσκομεν τὴν παράστασιν π.χ. τῆς $\psi = \frac{2}{x}$, τῆς $\psi = -\frac{2}{x}$ καὶ ἐν γένει τῆς $\psi = \frac{\beta}{x}$, ὅπου $\beta > 0$ ἢ $\beta < 0$, καλεῖται δὲ πᾶσα γραμμή παριστανομένη ὑπὸ τοιαύτης ἐξισώσεως **ὑπερβολῆς**, ἡ ὁποία ἔχει ἀσύμπτωτους τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

428. Εὐρετε τὴν γραφικὴν παράστασιν τῶν συναρτήσεων :

$$\alpha') \psi = -\frac{1}{x},$$

$$\beta') \psi = \frac{2}{x},$$

$$\gamma') \psi = -\frac{2}{x}$$

$$\delta') \psi = \frac{3}{x},$$

$$\epsilon') \psi = -\frac{3}{x},$$

$$\sigma\tau') x\psi = 10.$$

429. Όμοιως τῶν :

$$\alpha') x = \frac{1}{\psi}, \quad \beta') x = -\frac{1}{\psi}, \quad \gamma') x = \frac{2}{\psi}, \quad \delta') x = -\frac{5}{\psi}, \quad \epsilon') x\psi = -4.$$

$$\S 190. \text{ Ἐστω ἡ συνάρτησις } \psi = \frac{x+1}{x-1} \quad (1)$$

Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἐξῆς : $\psi(x-1) = (x+1)$ ἢ $x\psi - \psi - x - 1 = 0$.
Θέτομεν εἰς αὐτὴν $x = x_1 + \alpha$, $\psi = \psi_1 + \beta$, ὅπου τὸ α καὶ β δὲν ἔχουν
ὀρισθῇ καὶ εὐρίσκομεν $(x_1 + \alpha) \cdot (\psi_1 + \beta) - (\psi_1 + \beta) - (x_1 + \alpha) - 1 = 0$

$$\text{ἢ } x_1\psi_1 + \alpha\psi_1 + \beta x_1 + \alpha\beta - \psi_1 - x_1 - \alpha - \beta - 1 = 0$$

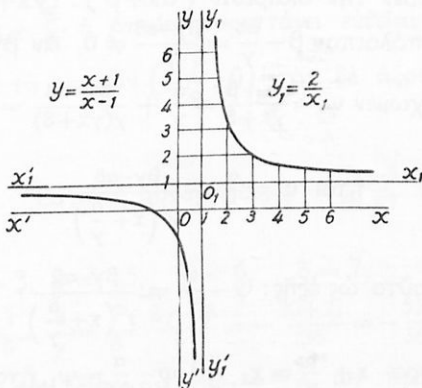
$$\text{ἢ } x_1\psi_1 + (\beta - 1)x_1 + (\alpha - 1)\psi_1 + \alpha\beta - \alpha - \beta - 1 = 0. \quad (2)$$

Προσδιορίζομεν τώρα τὰ α, β οὕτως, ὥστε ἡ (2) νὰ μὴ ἔχη ὄρους πε-
ριέχοντας μόνον τὸν x_1 , ψ_1 καὶ ἕκαστον εἰς πρῶτον βαθμὸν. Διὰ τοῦτο
θέτομεν τὸν συντελεστὴν $(\beta - 1)$ τοῦ x_1 καὶ τὸν $(\alpha - 1)$ τοῦ ψ_1 , ἕκαστον
ἴσον μὲ 0. Οὕτω θέτομεν $\alpha - 1 = 0$, $\beta - 1 = 0$ καὶ εὐρίσκομεν $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

$$\text{Τοιοιυτοτρόπως ἡ (2) γίνεται } x_1\psi_1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0 \quad (3)$$

$$\text{ἢ } x_1\psi_1 = 2 \quad (4)$$

Ἐστωσαν $x'Ox$, $\psi'O\psi$ οἱ ἄξονες τῶν συντεταγμένων. Εὐρί-
σκομεν τὸ σημεῖον μὲ συντεταγμένας $(1, 1)$, ἔστω τοῦτο $O_1(1, 1)$



Σχ. 20

Διὰ τοῦ O_1 φέρομεν εὐθείας παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας ἔστω
τὰς $x_1'O_1x_1$ (παράλληλον τοῦ ἄξονος $x'Ox$) καὶ $\psi_1'O_1\psi_1$ (παράλ-
ληλον τοῦ ἄξονος $\psi'O\psi$) (σχ. 20).

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἐξίσωσις (4) γράφεται καὶ ὡς ἐξῆς :

$$\psi_1 = \frac{2}{x_1} \quad (5)$$

Ἐὰν λοιπὸν ληθθοῦν ὡς ἄξονες συντεταγμένων αἱ εὐθεῖαι $x'_1 O_1 x_1$, $\psi'_1 O_1 \psi_1$ καὶ ἀναφέρεται εἰς τοὺς ἄξονας αὐτοὺς ἢ (5), αὕτη παριστάνει ὑπερβολὴν μὲ ἀσυμπτώτους τῆς, τοὺς ἄξονας αὐτοὺς $x'_1 O_1 x_1$, $\psi'_1 O_1 \psi_1$, Ἀλλ' ἡ ἐν λόγω ὑπερβολὴ εἶναι ἡ ἰδίᾳ καὶ ἂν ἔχωμεν ἄξονας τοὺς $x'Ox$, $\psi'O\psi$

Ἐπομένως ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (1) παριστάνει ὑπερβολὴν μὲ ἀσυμπτώτους τοὺς νέους ἄξονας $x'_1 O_1 x_1$, $\psi'_1 O_1 \psi_1$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἄξονος $x'_1 O_1 x_1$, ἔχει τεταγμένην ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας $x'Ox$, $\psi'O\psi$ ἴσην μὲ 1, διὰ τοῦτο ὁ ἄξων $x'_1 O_1 x_1$ ἔχει ἐξίσωσιν $\psi = 1$ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας $x'Ox$, $\psi'O\psi$. Ἐπίσης ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἄξονος $\psi'_1 O_1 \psi_1$ ἔχει τετμημένην $x=1$ ὡς πρὸς τὸ ἀρχικὸν σύστημα τῶν ἄξόνων.

§ 191. Ἐστω τώρα ἡ συνάρτησις $\psi = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ (1) ἀναφερομένη πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους $x'Ox$, $\psi'O\psi$.

Ἄν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $(\alpha x + \beta) : (\gamma x + \delta)$, θὰ εὕρωμεν πηλίκον $\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ ὑπόλοιπον $\beta - \frac{\alpha\delta}{\gamma} = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma} \neq 0$, ἂν $\beta\gamma - \alpha\delta \neq 0$

$$\text{Οὕτω θὰ ἔχωμεν } \psi = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma(\gamma x + \delta)} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 \left(x + \frac{\delta}{\gamma}\right)},$$

$$\text{ἥτοι } \psi = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 \left(x + \frac{\delta}{\gamma}\right)}.$$

$$\text{Γράφομεν τοῦτο ὡς ἐξῆς: } \psi - \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 \left(x + \frac{\delta}{\gamma}\right)}.$$

$$\text{Θέτομεν τώρα } x + \frac{\delta}{\gamma} = x_1 \text{ καὶ } \psi - \frac{\alpha}{\gamma} = \psi_1, \text{ ἥτοι}$$

$$x = x_1 - \frac{\delta}{\gamma}, \quad \psi = \psi_1 + \frac{\alpha}{\gamma}.$$

$$\text{Οὕτως, ἀντὶ τῆς δοθείσης ἐξίσωσεως, ἔχομεν τὴν } \psi_1 = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 x_1}$$

$$\text{ἢ } x_1 \psi_1 = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2} \quad (2) \text{ ἢ } x_1 \psi_1 = u_1, \text{ ἂν τεθῇ } \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2} = u_1.$$

Εύρισκομεν τὸ σημεῖον μὲ συντεταγμένας $(-\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\gamma})$, ἔστω τοῦτο $O_1(-\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\gamma})$ καὶ δι' αὐτοῦ φέρομεν εὐθείας $x'_1O_1x_1$, $\psi'_1O_1\psi_1$ ἀντιστοιχῶς παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων $x'Ox$, $\psi'O\psi$

Οὕτως ἡ $\psi_1 = \frac{\psi_1}{x_1}$ ἀναφερομένη πρὸς τοὺς νέους αὐτοὺς ἄξονας $x'_1O_1x_1$, $\psi'_1O_1\psi_1$, παριστάνει ὑπερβολὴν μὲ ἀσυμπτώτους τοὺς ἄξονας αὐτοὺς. Ἡ δοθεῖσα συνάρτησις (1) ἀναφερομένη πρὸς ἄξονας τοὺς ἀρχικοὺς $x'Ox$, $\psi'O\psi$ παριστάνει τὴν ὑπερβολὴν μὲ ἀσυμπτώτους τοὺς νέους ἄξονας, ἥτοι τὰς εὐθείας μὲ ἐξισώσεις ὡς πρὸς τοὺς ἀρχικοὺς ἄξονας, $x = -\frac{\delta}{\gamma}$, $\psi = \frac{\alpha}{\gamma}$.

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν εἶναι $\beta\gamma - \alpha\delta = 0$, τότε θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\psi = \frac{\alpha}{\gamma}$, ἡ ὁποία παριστάνει εὐθεῖαν παράλληλον τοῦ ἄξονος τῶν x , τέμνουσαν τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον $(0, \frac{\alpha}{\gamma})$.

*Ἄν εἶναι $\gamma = 0$ καὶ $\alpha, \beta, \delta \neq 0$, ἔχομεν $\psi = \frac{\alpha x + \beta}{\delta} = \frac{\alpha}{\delta} x + \frac{\beta}{\delta}$, δηλαδὴ $\psi = \frac{\alpha}{\delta} x + \frac{\beta}{\delta}$, ἡ ὁποία παριστάνει εὐθεῖαν τέμνουσαν τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὸ σημεῖον $(-\frac{\beta}{\alpha}, 0)$, τὸν δὲ ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον $(0, \frac{\beta}{\delta})$

Παράδειγμα. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \frac{3x-5}{6x+7}$ ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους.

*Ἐχομεν $\alpha = 3$, $\beta = -5$, $\gamma = 6$, $\delta = 7$,

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{3}{6}, \quad \frac{\delta}{\gamma} = \frac{7}{6}, \quad \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma} = -\frac{30+21}{36} = -\frac{51}{36} = -\frac{17}{12}.$$

*Ἀρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x_1\psi_1 = -\frac{17}{12}$ ὡς πρὸς νέους ἄξονας $x'_1O_1x_1$, $\psi'_1O_1\psi_1$, Ἡ ἀρχὴ τῶν νέων ἄξόνων ἔχει συντεταγμένας ὡς πρὸς τοὺς ἀρχικοὺς ἄξονας $(-\frac{7}{6}, \frac{1}{2})$, ἡ δὲ δοθεῖσα ἐξίσωσις παριστάνει ὑπερβολὴν μὲ ἀσυμπτώτους τοὺς ἄξονας, οἱ ὁποῖοι ἀγονται ἀπὸ τὸ σημεῖον $O_1(-\frac{7}{6}, \frac{1}{2})$ παράλληλοι πρὸς τοὺς ἀρχικοὺς.

Άσκησις

430. Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν συναρτήσεων :

$$\alpha') \psi = \frac{2x-1}{2x+1},$$

$$\beta') \psi = \frac{2x-3}{4x+1},$$

$$\gamma') x = \frac{2\psi-4}{3\psi+1}$$

$$\delta') x = \frac{2}{\psi+4},$$

$$\epsilon') x = \frac{-3\psi+4}{2\psi+1},$$

$$\sigma\tau') x\psi + 2x - 3\psi + 1 = 0.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

Α'. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΑΓΟΜΕΝΑΙ ΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Β' ΒΑΘΜΟΥ

1. ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 192. Καλοῦμεν ἐξίσωσιν τινὰ μὲ ἓνα ἄγνωστον (ἔστω τὸν x) διτετράγωνον, ἔάν, μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν, τὴν μεταφορὰν τῶν ὁρῶν εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τὰς ἀναγωγὰς, ἔχῃ τὴν μορφήν $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, ($\alpha \neq 0$) (1)

*Ἐστω πρὸς λύσιν ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$. Ἄν τὸ x^2 ἀντικαταστήσωμεν μὲ τὸ ψ καὶ ἐπομένως τὸ x^4 μὲ τὸ ψ^2 , θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\psi^2 - 25\psi + 144 = 0$.

Λύοντες ταύτην εὐρίσκομεν $\psi = \frac{25 \pm 7}{2}$, ἥτοι τὰς ρίζας αὐτῆς $\psi_1 = 16$ καὶ $\psi_2 = 9$.

*Ἀρα εἶναι $x^2 = 16$ καὶ $x^2 = 9$, ἐξ ὧν εὐρίσκομεν ὡς ρίζας τῆς δοθείσης $x = \pm 4$ καὶ $x = \pm 3$.

Ἐν γένει πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως (1) ἀντικαθιστῶμεν εἰς αὐτὴν $x^2 = \psi$, ὅτε θὰ εἶναι $x^4 = \psi^2$, καὶ ἀντὶ τῆς (1) ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha \psi^2 + \beta \psi + \gamma = 0$. (2)

Ἐὰν λύσωμεν τὴν (2), θὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ ψ καὶ ἔστωσαν αὗται αἱ ψ_1 καὶ ψ_2 . Διὰ τὰς εὕρωμεν τὰς ρίζας τῆς (1), δηλαδή τὰς τιμὰς τοῦ x , θέτομεν εἰς τὴν ἰσότητά $x^2 = \psi$, ὅπου ψ τὰς τιμὰς αὐτοῦ ψ_1, ψ_2 , ὅτε ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις $x^2 = \psi_1$, καὶ $x^2 = \psi_2$, ἐκ τῶν ὁποίων εὐρίσκομεν $x = \pm \sqrt{\psi_1}$ καὶ $x = \pm \sqrt{\psi_2}$. Ἥτοι αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶναι

$$\sqrt{\psi_1}, -\sqrt{\psi_1}, \sqrt{\psi_2}, -\sqrt{\psi_2}.$$

Ἄλλ' αἱ τιμαὶ ψ_1 καὶ ψ_2 εἶναι, καθὼς γνωρίζομεν, αἱ

$$\psi_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \quad \psi_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Ἐπομένως, ἂν παραστήσωμεν μὲ ρ_1, ρ_2, ρ_3 καὶ ρ_4 τὰς ρίζας τῆς
(1), θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \sqrt{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}}, & \rho_2 &= -\sqrt{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}}, \\ \rho_3 &= \sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}}, & \rho_4 &= -\sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}}.\end{aligned}$$

Παραδείγματα. 1ον. Ἐστω πρὸς λύσιν ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις
 $x^4 - 10x^2 = -9$. Ἐχομεν $\alpha = 1, \beta = -10, \gamma = 9$.

Ἐπομένως $\rho_1 = \sqrt{\frac{10 + \sqrt{64}}{2}} = 3, \rho_2 = -3, \rho_3 = 1, \rho_4 = -1$.

2ον. Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$. Ἐχομεν $\alpha = 1, \beta = -3, \gamma = 3$.

Ἐπομένως εἶναι $\rho_1 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{9 - 8}}{2}} = \sqrt{2}, \rho_2 = -\sqrt{2}, \rho_3 = 1, \rho_4 = -1$.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

431. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

$$\begin{aligned}\alpha') \quad 9x^4 + 1 &= 10x^2, & \beta') \quad x^4 - 26x^2 &= -25, & \gamma') \quad 10x^4 - 21 &= x^2, \\ \delta') \quad (x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 &= 40, & \epsilon') \quad x^2 + 9x^{-2} &= 6,25, & \sigma\tau') \quad 9 + x^{-4} - 10x^{-2} &= 0\end{aligned}$$

$$\zeta') \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x + \frac{2}{x}} = \frac{x}{2}, \quad \eta') \quad \frac{(x+2)(x-2)}{5} = \left(\frac{2}{x}\right)^2$$

$$\theta') \quad \frac{(x^2+1)(x^2+2)}{5} - \frac{(x^2-1)(x^2-2)}{2} = 3.$$

$$\begin{aligned}432. \quad \alpha') \quad \alpha x^4 - (\alpha^2 \beta^2 + 1)x^2 + \alpha \beta^2 &= 0, & \beta') \quad \alpha^4 + \beta^4 + x^4 &= 2(\alpha^2 \beta^2 + \alpha^2 x^2 + \beta^2 x^2). \\ \gamma') \quad 4(x^4 + \gamma^6) - 17\gamma^3 x^2 &= 0, & \delta') \quad \alpha^2(\alpha^2 - 2x^2) + \beta^2(\beta^2 - 2x^2) + x^4 &= 0.\end{aligned}$$

$$433. \quad \alpha') \quad \alpha^2 \left[1 \pm \left(\frac{\beta}{x} \right)^2 \right] = \beta^2 + x^2, \quad \beta') \quad \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} \right)^2 \left(\frac{1}{x^2} - 2\beta \right) = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2,$$

$$\gamma') \quad \left[59 - 2 \left(\frac{x}{\alpha} \right)^2 \right] \left(\frac{x}{\alpha} \right)^2 = 225, \quad \delta') \quad x^4 - 2(\mu^2 \nu^2 + \rho^2)x^2 + (\mu^2 \nu^2 - \rho^2)^2 = 0.$$

$$\epsilon') \quad x^4 - \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta\gamma)x^2 + (\alpha\beta\gamma)^3 = 0.$$

μέ το 0 δίδει τήν αντίστροφον ἐξίσωσιν

$$\alpha x^4 + (\alpha + \beta)x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha = 0,$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀντίστροφος δ' βαθμοῦ καί γνωρίζομεν νά λύσωμεν.

Παραδείγματα. 1ον. Ἐστω ἡ ἐξίσωσις

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$$

Γράφομεν αὐτήν ὡς ἐξῆς: (ὑποθέτοντες τὰς τιμὰς τοῦ $x \neq 0$)

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0.$$

Θέτομεν $x + \frac{1}{x} = \psi$, ὅτε εὐρίσκομεν

$$6(\psi^2 - 2) - 35\psi + 62 = 0 \quad \text{ἢ} \quad 6\psi^2 - 35\psi + 50 = 0.$$

Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι αἱ $\frac{5}{2}$ καὶ $\frac{10}{3}$. Ἐπομένως αἱ ρίζαι τῆς δο-

θείσης ἐξισώσεως θὰ εὐρεθοῦν, ἐὰν λύσωμεν τὰς ἐξισώσεις

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \quad \text{καὶ} \quad x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \quad \text{ἢ} \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \text{καὶ} \quad 3x^2 - 10x + 3 = 0.$$

Αἱ ρίζαι τούτων εἶναι αἱ 2 καὶ $\frac{1}{2}$, 3 καὶ $\frac{1}{3}$. Ἄρα, ἀνά δύο οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀντίστροφοι.

2ον. Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Γράφομεν αὐτήν οὕτω: $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$.

Θέτομεν $x + \frac{1}{x} = \psi$, ὅτε $x^2 + \frac{1}{x^2} = \psi^2 - 2$, καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀνωτέρω εὐρίσκομεν $\psi^2 - 2 + \psi + 1 = 0$ ἢ $\psi^2 + \psi - 1 = 0$.

Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. Ἄρα, αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως θὰ εὐρεθοῦν ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων

$$2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + 2 = 0, \quad 2x^2 + (1 + \sqrt{5})x + 2 = 0.$$

Ἀσκήσεις

445. Νά λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

$$\alpha') x^3 + x^2 + x + 1 = 0, \quad \beta') x^3 + x^2 - x - 1 = 0, \quad \gamma') x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0,$$

$$\delta') x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0, \quad \epsilon') x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0, \quad \sigma\tau') x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0,$$

$$\zeta') x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0, \quad \eta') 3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0, \quad \theta') 2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 = 0,$$

$$\iota') 5x^4 + 26x^3 - 26x - 5 = 0, \quad \iota\alpha') x^4 - 4x^3 + 4x - 1 = 0,$$

$$\iota\beta') x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0, \quad \iota\gamma') 3x^4 + x^3 - 24x^2 + x + 3 = 0.$$

435. Εὑρετε τὴν διτετράγωνον ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία ἔχει ρίζας :

$$\alpha') \pm 3, \pm 1, \beta') \pm \alpha, \pm \sqrt{\alpha}, \gamma') \pm 0,5, \pm 4i, \delta') \pm 3, \pm i.$$

Ὁ μᾶς δευτέρᾳ. 436. Εὑρετε τριώνυμα ἔχοντα ὡς ρίζας τὰς :

$$\alpha') \pm i \text{ καὶ } \pm \frac{2}{3}, \beta') \pm 0,2 \text{ καὶ } \pm 0,75, \gamma') \pm \alpha, \pm 2\alpha, \delta') \pm (\alpha-i), \pm (\alpha+i), \\ \epsilon') \pm 0,75 \text{ καὶ } \pm 2i, \sigma\tau') \pm 2, \pm 3i.$$

Ὁ μᾶς τρίτῃ. 437. Εὑρετε τὸ πρόσημον τοῦ τριωνύμου $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$, ὅταν τὸ x εἶναι ἐκτὸς τῶν (πραγματικῶν) ριζῶν αὐτοῦ $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$. (ἂν εἶναι $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$), δηλ. ἂν $x < \rho_1$ ἢ $x > \rho_4$ καὶ ὅταν τὸ x κεῖται μεταξὺ δύο ριζῶν, δηλ. ἂν εἶναι $\rho_1 < x < \rho_2, \rho_2 < x < \rho_3$ καὶ $\rho_3 < x < \rho_4$. (Διακρίνατε δύο περιπτώσεις, ὅταν εἶναι $\alpha > 0$ καὶ ὅταν $\alpha < 0$. Ἐξετάσατε τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ δύο ρίζαι π.χ. αἱ ρ_3, ρ_4 εἶναι συζυγεῖς φανταστικαὶ ἢ μιγαδικαὶ καὶ ὅταν καὶ αἱ τέσσαρες ρίζαι εἶναι φανταστικαὶ ἢ μιγαδικαί, ὅτε δύο εἶναι συζυγεῖς καὶ ἄλλαι δύο πάλιν συζυγεῖς).

438. α') Διερευνήσατε ὡς πρὸς τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ λ τὴν ἐξίσωσιν $(\lambda-2)x^4 + 4(\lambda+3)x^2 + \lambda - 1 = 0$.

β') Ὁμοίως τὴν ἐξίσωσιν $x^4 - (3\lambda+4)x^2 + (\lambda+1)^2 = 0$.

439. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $2x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda^2+3=0$ ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχη τὸ λ , διὰ νὰ διαφέρουν αἱ ρίζαι κατὰ 1;

3. ΤΡΟΠΗ ΔΙΠΛΩΝ ΤΙΝΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ ΕΙΣ ΑΠΛΑ

§ 194. Ἐστω πρὸς λύσιν ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$. Ἐπειδὴ εἶναι $\alpha=1, \beta=-6, \gamma=1$, ἔχομεν ὡς ρίζας

$$\pm \sqrt{\frac{6+\sqrt{36-4}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{6+\sqrt{32}}{2}} \text{ καὶ } \pm \sqrt{\frac{6-\sqrt{32}}{2}}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι κατελήξαμεν εἰς παραστάσεις μὲ διπλὰ ριζικά τῆς μορφῆς $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

Ζητοῦμεν νὰ μάθωμεν, πότε εἶναι δυνατόν τὰς τοιαύτας παραστάσεις νὰ τρέψωμεν εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους αὐτῶν μὲ ἀπλὰ ριζικά

$$\Theta\alpha \text{ δείξωμεν ὅτι } \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}} \quad (1)$$

ἂν εἶναι $A > 0$ καὶ τὸ $A^2 - B$ εἶναι (τέλειον τετράγωνον), ἔστω $= \Gamma^2$.

* Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\psi} + \sqrt{\omega}$ (2) ὅπου ψ, ω θετικοὶ σύμμετροι καὶ ὁ εἰς τοῦλάχιστον μὴ τέλειον τετράγωνον.

Τότε ἡ (2) ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐκείνην, τὴν ὁποίαν εὐρίσκομεν τετραγωνίζοντες τὰ μέλη της, δηλ. μὲ τὴν

$$A + \sqrt{B} = \psi + \omega + 2\sqrt{\psi\omega} \quad (3)$$

‘Αλλ’ ἡ (3), εἰς τὴν ὁποίαν οἱ $A, \psi + \omega$ εἶναι σύμμετροι ὁ δὲ B θετικός καὶ $\sqrt{B}$ ἀσύμμετρος, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀληθεύῃ παρὰ μόνον ἂν εἶναι :

$$\begin{aligned} A &= \psi + \omega \\ B &= 4\psi\omega \end{aligned} \quad (4) \quad (\S 155 \text{ Παρ. β}')$$

Τότε θὰ ἀληθεύῃ καὶ ἡ $\sqrt{B} = 2\sqrt{\psi\omega}$ καὶ ἐν συνεχείᾳ ἡ $A - \sqrt{B} = \psi + \omega - 2\sqrt{\psi\omega} = (\sqrt{\psi} - \sqrt{\omega})^2$.

Συνεπῶς θὰ ἀληθεύῃ καὶ ἡ

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = |\sqrt{\psi} - \sqrt{\omega}|$$

Διὰ νὰ τραποῦν λοιπὸν αἱ παραστάσεις τῆς μορφῆς $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ ὅπου $A > 0, B > 0$ εἰς ἰσοδυνάμους μὲ ἀπλᾶ ριζικά, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἀληθεύῃ τὸ σύστημα (4), τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ :

$$\begin{aligned} A &= \psi + \omega \\ \frac{B}{4} &= \psi\omega \end{aligned} \quad (5)$$

μὲ ψ, ω θετικούς καὶ συμμέτρους

Λύσεις τοῦ συστήματος (5) εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$x^2 - Ax + \frac{B}{4} = 0 \quad (6)$$

Αἱ ρίζαι αὐτῆς ὅμως εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνιστοι ὅταν $A^2 - B > 0$

Θὰ εἶναι καὶ σύμμετροι, ὅταν $A^2 - B$ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Τέλος ἐπειδὴ ἔχουν γινόμενον $\frac{B}{4}$ θετικόν, ἀφοῦ $B > 0$, θὰ εἶναι καὶ θετικά, ὅταν τὸ A , ἄθροισμα τῶν δύο ριζῶν, εἶναι θετικόν.

Ὡστε : αἱ παραστάσεις τῆς μορφῆς $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ τρέπονται εἰς ἰσοδυνάμους μὲ ἀπλᾶ ριζικά, ὅταν $A > 0$ καὶ τὸ $A^2 - B$, δηλαδὴ τὸ γινόμενον τοῦ ὑπορριζίου ἐπὶ τὸ συζυγές, εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Ἐπειδὴ αἱ ρίζαι τῆς (6) εἶναι αἱ $\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}, \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$, ὅταν $A^2 - B$ εἶναι τέλειον τετράγωνον π.χ. ἴσον μὲ Γ^2 , γράφονται $\frac{A + \Gamma}{2}, \frac{A - \Gamma}{2}$ καὶ ἔχομεν τοὺς τύπους μετατροπῆς :

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}},$$

διότι αἱ ἀνωτέρω ρίζαι ἀντιπροσωπεύουν τοὺς ψ καὶ ω καὶ εἶναι ἢ $\frac{A+\Gamma}{2}$ ἢ μεγαλυτέρα. Κατὰ ταῦτα, διὰ τὴν παράστασιν $\sqrt{6 \pm \sqrt{32}}$, ὅπου τὸ γινόμενον τοῦ ὑπορρίζου ἐπὶ τὸ συζυγές εἶναι $36-32=4$ καὶ συνεπῶς ἡ θετικὴ τετραγωνικὴ ρίζα αὐτοῦ ἴση μὲ 2 θὰ ἔχωμεν

$$\sqrt{6 \pm \sqrt{32}} = \sqrt{\frac{6+2}{2}} \pm \sqrt{\frac{6-2}{2}} = \sqrt{4} \pm \sqrt{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Ἐστω ἀκόμη ἡ παράστασις $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Εἶναι $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$ καὶ $\sqrt{1}=1$. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

Ἀ σ κ η σ ι ς

440. Τρέψατε τὰς κάτωθι παραστάσεις εἰς ἄλλας ἐχούσας ἀπλὰ ριζικά :

$$\alpha') \sqrt{5+\sqrt{24}}, \quad \beta') \sqrt{7+4\sqrt{3}}, \quad \gamma') \sqrt{8+4\sqrt{3}}, \quad \delta') \sqrt{\alpha^2+\beta+2\alpha\sqrt{\beta}}.$$

$$\epsilon') \sqrt{2\alpha+2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}, \quad \sigma\tau') \sqrt{\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}}, \quad \zeta') \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\gamma}{2} \sqrt{\alpha^2-\gamma^2}},$$

$$\eta') \sqrt{x+x\psi-2x\sqrt{\psi}}, \quad \theta') \sqrt{3+\sqrt{5}}.$$

4. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ Β' ΤΑΞΕΩΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΑΥΤΗΣ

§ 195. Ἐστω π.χ. ἡ ἄρρητος ἐξίσωσις $5-x=\sqrt{x-5}$, ἡ ὁποία ἔχει εἰς τὸ ἓν μέλος τῆς ριζικὸν β' τάξεως μὲ ὑπόρριζον παράστασιν ἔχουσαν τὸν ἄγνωστον x .

Ἄν ὑψώσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς εἰς τὸ τετράγωνον, εὐρίσκομεν $(5-x)^2=x-5$, ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $(x-5)^2-(x-5)=0$ ἢ μὲ τὴν $(x-5)(x-5-1)=0$ ἢ τὴν $(x-5)(x-6)=0$. Αὕτη ἔχει τὰς

ρίζας $x=5$ καὶ $x=6$. Ἐκ τούτων μόνον ἡ $x=5$ ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἐνῶ ἡ $x=6$ ἐπαληθεύει τὴν $5-x=-\sqrt{x-5}$.

Ἐξίσωσις τις λέγεται **μέ τετραγωνικὴν ρίζαν ἢ μέ ριζικὸν δευτέρας τάξεως**, ἂν (μετὰ τὴν ἀπαλοιφήν τῶν παρονομαστῶν, τὴν μεταφορὰν τῶν ὁρῶν εἰς τὸ ἓν μέλος καὶ τὰς ἀναγωγὰς) ἔχη τουλάχιστον ἓν ριζικὸν μέ δείκτην 2 καὶ οὐδὲν μέ δείκτην ἀνώτερον τοῦ 2, ὑπὸ τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ὁ ἄγνωστος.

$$\text{Ἔστω ἡ ἐξίσωσις } 4 + \sqrt{x^2+5} = x-1. \quad (1)$$

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτήν, ἐπιδιώκομεν νὰ ἀπαλλαγῶμεν ἀπὸ τὸ ριζικόν, δηλαδὴ νὰ εὕρωμεν ἄλλην ἐξίσωσιν χωρὶς ριζικόν. Πρὸς τοῦτο ἀπομονώνομεν τὸ ριζικόν, δηλαδὴ μετασχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν εἰς ἄλλην, ἡ ὁποία νὰ ἔχη εἰς τὸ ἓν μέλος αὐτῆς μόνον τὸ ριζικόν. Οὕτως ἔχομεν

$$\sqrt{x^2+5} = x-1-4 \quad \text{ἢ} \quad \sqrt{x^2+5} = x-5 \quad (1')$$

Ὑψοῦντες τὰ μέλη ταύτης εἰς τὸ τετράγωνον λαμβάνομεν

$$x^2+5 = (x-5)^2 \quad \text{ἢ} \quad x^2+5 = x^2-10x+25 \quad \text{ἢ} \quad 10x = 20 \quad (2)$$

$$\text{ἡ ὁποία ἔχει τὰς ρίζας τῆς (1) καὶ τῆς } -\sqrt{x^2+5} = (x-5) \quad (3)$$

Λύοντες τὴν (2) εὐρίσκομεν $x = 2$. Ἀντικαθιστῶντες τὴν $x = 2$ εἰς τὴν (1) εὐρίσκομεν, ὅτι δὲν ἐπαληθεύεται, ἐνῶ ἐπαληθεύεται ἡ (3).

Ἔστω ἀκόμη ἡ ἐξίσωσις μέ ριζικά β' τάξεως

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7 \quad (1)$$

Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον εὐρίσκομεν (ἀφοῦ ἀπομονώσωμεν τὸ νέον ριζικόν) (2) $\sqrt{(x+5)(2x+8)} = 36-3x$.

Ὑψοῦντες πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον εὐρίσκομεν

$$4(x+5)(2x+8) = (36-3x)^2$$

καὶ μετὰ τὰς πράξεις καὶ τὴν ἀναγωγὴν εὐρίσκομεν

$$x^2-288x+1136 = 0.$$

Αἱ ρίζαι ταύτης εἶναι 4 καὶ 284. Θέτοντες διαδοχικῶς $x = 4$ καὶ $x = 284$ εἰς τὴν δοθεῖσαν (1) εὐρίσκομεν, ὅτι μόνον ἡ 4 τὴν ἐπαληθεύει, ἐνῶ ἡ 284 εἶναι ρίζα τῆς $2\sqrt{(x+5)(2x+8)} = -(36-3x)$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι :

Διὰ νὰ λύσωμεν ἐξίσωσιν μέ ριζικὸν β' τάξεως, ἀπομονώνομεν αὐτό, ὥστε ὑψοῦντες τὰ μέλη τῆς νέας ἐξισώσεως εἰς τὸ τετράγωνον νὰ λαμβάνωμεν ἐξίσωσιν χωρὶς ριζικόν. ἀκολουθῶς

λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ δοκιμάζομεν, ἂν αἱ ρίζαι τῆς εἶναι ρίζαι τῆς δοθείσης.

§ 196. Ἐν γένει ἔαν, διὰ νὰ εὕρωμεν ἀπὸ δοθείσαν ἄρρητον ἐξίσωσιν ἄλλην ρητὴν, κάμνωμεν διαδοχικὰς ὑψώσεις εἰς τὸ τετράγωνον, τότε ἡ τελικῶς προκύπτουσα ἐξίσωσις ἔχει τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων, ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πρώτων μελῶν των (τοῦ δευτέρου ἐκάστης μέλους ὑποτιθεμένου 0).

*Εστω π.χ. ὅτι ἔχομεν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} = 0 \quad (1)$$

ὅπου τὰ A, B, C περιέχουν τοὺς ἀγνώστους τῆς ἐξισώσεως.

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐξ αὐτῆς ἄλλην ρητὴν ἐξίσωσιν ὡς ἐξῆς :

*Απὸ τὴν δοθείσαν λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμόν της.

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = -\sqrt{C}.$$

*Υψώνομεν τὰ μέλη αὐτῆς εἰς τὸ τετράγωνον καὶ εὐρίσκομεν $A + B + 2\sqrt{AB} = C$, καὶ ἀντ' αὐτῆς ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμόν της

$$2\sqrt{AB} = C - A - B.$$

*Υψώνομεν τὰ μέλη αὐτῆς εἰς τὸ τετράγωνον καὶ εὐρίσκομεν τὴν

$$4AB = A^2 + B^2 + C^2 - 2AC + 2AB - 2BC$$

ἢ τὴν ἰσοδύναμον ταύτης $A^2 + B^2 + C^2 - 2AC - 2AB - 2BC = 0$ (2)

*Ἡ (2) ἔχει τὰς ρίζας τῶν ἐξῆς τεσσάρων ἐξισώσεων

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} &= 0, & \sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C} &= 0 \\ \sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C} &= 0, & \sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

*Αν πολλαπλασιάσωμεν ταύτας κατὰ μέλη εὐρίσκομεν τὴν (2). Πράγματι, ἔχομεν ἀπὸ τὰς δύο πρώτας ἐκ τῶν (3) με πολλαπλασιασμόν τῶν μελῶν των $A - (\sqrt{B} + \sqrt{C})^2 = 0$

$$\text{ἢ } (A - B - C) - 2\sqrt{BC} = 0 \quad (4)$$

Με πολλαπλασιασμόν τῶν μελῶν τῶν δύο τελευταίων ἐκ τῶν (3) εὐρίσκομεν $(A - B - C) + 2\sqrt{BC} = 0$ (5)

*Αν δὲ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς (4) καὶ (5), εὐρίσκομεν τὴν (2).

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $A = B$ καὶ ὑψώσωμεν τὰ μέλη της π.χ. εἰς τὴν μὴν δύναμιν, ὅτε λαμβάνομεν τὴν

$A^m = B^m$, αὕτη ἔχει τὰς ρίζας τῆς $A=B$ μόνον, ὅταν τὸ m εἶναι περιττὸς ἀριθμὸς, ἐνῶ ὅταν τὸ m εἶναι ἄρτιος ἢ $A^m = B^m$ ἔχει τὰς ρίζας τῆς $A=B$ καὶ τῆς $A=-B$ (ὑποτιθεμένου ὅτι χρησιμοποιοῦμεν μόνον πραγματικούς ἀριθμούς).

Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ ἐν μέλος δοθείσης ἐξίσωσως εἶναι 0, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις μετὰ τὴν ὑψωσιν τῶν μελῶν τῆς δοθείσης εἰς δύναμιν οἰανδήποτε ἔχει τὰς ρίζας τῆς δοθείσης. Διότι διὰ νὰ εἶναι π.χ. ἡ δύναμις A^m ἴση μὲ 0, πρέπει νὰ εἶναι $A=0$. Δηλαδή πᾶσα ρίζα τῆς $A^m = 0$, εἶναι ρίζα καὶ τῆς $A=0$, καὶ ἀντιστρόφως

Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{x+15} + \sqrt{x} = 15$.

Ὑψώνομεν τὰ μέλη τῆς εἰς τὸ τετράγωνον καὶ εὐρίσκομεν τὴν

$$x+15+2\sqrt{x^2+15x}+x=225.$$

ἢ τὴν ἰσοδύναμον ταύτης $2\sqrt{x^2+15x} = 210-2x$

$$\text{ἢ } \sqrt{x^2+15x} = 105-x$$

Ὑψώνομεν τὰ μέλη ταύτης εἰς τὸ τετράγωνον καὶ εὐρίσκομεν

$$x^2+15x=11025-210x+x^2$$

ἢ τὴν ἰσοδύναμόν τῆς $225x=11025$ καὶ $x=49$. Θέτομεν εἰς τὴν δοθεῖσαν $x=49$ καὶ εὐρίσκομεν ὅτι ἐπαληθεύεται.

§ 197. Γενικώτερον, ὅταν δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἄρρητος, δυνάμεθα μὲ ὑψώσεις τῶν μελῶν τῆς εἰς καταλήλους δυνάμεις νὰ εὕρωμεν ἐξίσωσιν, τῆς ὁποίας ἡ λύσις νὰ εἶναι εὐκολος, ἀλλ' αὕτη δὲν εἶναι πάντοτε ἰσοδύναμος τῆς δοθείσης.

Ἐστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[4]{x-3}+x+3 = x+5$.

Ἀπομονώνομεν τὸ ριζικὸν καὶ εὐρίσκομεν $\sqrt[4]{x-3}=2$. Ὑψώνομεν εἰς τὴν 4ην δύναμιν καὶ εὐρίσκομεν $x-3=16$ καὶ $x=19$.

Πρέπει νὰ θέσωμεν $x=19$ εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν, ἂν εἶναι ρίζα αὐτῆς τὸ 19. Πράγματι παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ $x=19$ ἐπαληθεύει καὶ τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

Ἀσκήσεις

441. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐπόμεναι ἐξισώσεις :

$$\alpha') 2\sqrt{x+8}=28, \quad \beta') \sqrt[3]{3x+7}=3, \quad \gamma') \sqrt[3]{4x-40}=10,$$

$$\delta') \sqrt{x+9} = 5\sqrt{x-3}, \quad \epsilon') \sqrt[3]{10x-4} = \sqrt[3]{7x+11}.$$

442. Ὅμοιως αἱ ἐξῆς ἐξισώσεις :

$$\begin{aligned} \alpha') \sqrt{32+x} &= 16-\sqrt{x}, & \beta') \sqrt{\frac{15}{4}+x} &= \frac{3}{2}+x, & \gamma') \sqrt{x}-\sqrt{x-5} &= \sqrt{5}, \\ \delta') \sqrt{x+20}-\sqrt{x-1} &= 3, & \epsilon') \sqrt{x+15}-7 &= 7-x-13, \\ \sigma\tau') \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}} &= \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}, & \zeta') \frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}} &= 3. \end{aligned}$$

443. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐπόμεναι ἐξισώσεις :

$$\begin{aligned} \alpha') \sqrt{\alpha+\sqrt{x}} + \sqrt{\alpha-\sqrt{x}} &= \sqrt{x}, & \beta') \frac{\sqrt{x-\alpha} + \sqrt{x-\beta}}{\sqrt{x-\alpha} - \sqrt{x-\beta}} &= \frac{2x-\alpha-\beta}{2\alpha}, \\ \gamma') \sqrt{x^2+3x+10}-x &= 2, & \delta') 6x-\sqrt{(3x+4)(12x-23)} &= 4, \\ \epsilon') \sqrt{x+7}-\sqrt{x+5} &= 2, & \sigma\tau') \sqrt{29x+6} + \sqrt{29x-9} &= 15, \\ \zeta') 9x-2 &= 5\sqrt{6x^2-7x-8}, & \eta') \sqrt{8x+13}-8\sqrt{x^2-11x+14} &= 9. \\ \theta') \sqrt{13} + \sqrt{7+3\sqrt{x}} &= 4, & \iota') \sqrt{1-\sqrt{1-x}} + \sqrt{x} &= 1. \\ \text{ια}') \sqrt[3]{x-\alpha} + \sqrt[3]{x+\alpha} - 1 &= \sqrt{x^2-\alpha^2} \end{aligned}$$

444. Ὅμοιως αἱ κάτωθι :

$$\begin{aligned} \alpha') \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+7} &= \sqrt[3]{8x+19}, & \beta') \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+2} &= 0, \\ \gamma') (1-\alpha x) \sqrt{1+\beta x} &= (1+\alpha x) \sqrt{1-\beta x}, & \delta') \sqrt[3]{\alpha x} - 1 &= -0.125 + 0.5\sqrt[3]{\alpha x - 0.5} \end{aligned}$$

5. ΠΕΡΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

§ 198. α') Ἐξίσωσίς τις μὲ ἓνα ἄγνωστον (τῆς ὁποίας τὸ μὲν δεῦτερον μέλος εἶναι μηδέν, τὸ δὲ πρῶτον εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον διατεταγμένον κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου) λέγεται **ἀντίστροφος**, ἂν οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων της, τῶν ἀπεχόντων ἴσον ἐκ τῶν ἄκρων, εἶναι ἴσοι ἢ ἀντίθετοι· ὅταν ὁμως τὸ πολυώνυμον εἶναι ἀρτίου βαθμοῦ καὶ ἐπὶ πλέον ἔχη μεσαῖον ὅρον, οἱ ἐν λόγῳ συντελεσταὶ πρέπει νὰ εἶναι μόνον ἴσοι.

Οὕτως ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = 0$ καλεῖται ἀντίστροφος τοῦ τρίτου βαθμοῦ, καθὼς καὶ ἡ $\alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x - \alpha = 0$.

* Ἡ ἔννοια τῆς ἀντιστροφῆς ἐξισώσεως ὀφείλεται κυρίως εἰς τὸν A. De Moivre (1667-1754), Γάλλον μαθηματικὸν μετανάστην εἰς Λονδίνον.

Ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ καὶ ἡ $\alpha x^4 + \beta x^3 - \beta x - \alpha = 0$ καλοῦνται ἀντίστροφοι τοῦ τετάρτου βαθμοῦ.

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν εἰς ἐξίσωσιν ἀντίστροφον, π.χ. εἰς τὴν $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$, τεθῇ $\frac{1}{x}$ ὅπου x καὶ ἀπαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς τῆς προκυπτούσης $\frac{\alpha}{x^4} + \frac{\beta}{x^3} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\beta}{x} + \alpha = 0$, προκύπτει ἡ ἀρχικῶς δοθεῖσα ἐξίσωσις

Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι, ἂν ἐξίσωσις ἀντίστροφος ἔχῃ ρίζαν ἀριθμόν τινα, $\neq \pm 1$ θὰ ἔχῃ ρίζαν καὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

Θὰ δείξωμεν κατωτέρω, ὅτι ἡ λύσις τῶν ἀντιστρόφων ἐξισώσεων τρίτου, τετάρτου καὶ πέμπτου βαθμοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων β' βαθμοῦ.

β') Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν $\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = 0$, παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν $x = -1$, ἐπαληθεύεται. Ἀρα τὸ πρῶτον μέλος ταύτης διαιρεῖται διὰ τοῦ $(x+1)$. Ἄν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ $\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha$ διὰ τοῦ $x+1$, εὐρίσκομεν πηλίκον τὸ $\alpha x^2 + (\beta - \alpha)x + \alpha$. Ἐπομένως ἔχομεν

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = (x+1)[\alpha x^2 + (\beta - \alpha)x + \alpha] = 0.$$

Ἡ μία ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι προφανῶς ἡ $x = -1$, αἱ δὲ δύο ἄλλαι θὰ εὐρεθοῦν, ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\alpha x^2 + (\beta - \alpha)x + \alpha = 0$.

γ') Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x - \alpha = 0$, παρατηροῦμεν, ὅτι ἐπαληθεύεται διὰ $x = 1$. Ἀρα τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς διαιρεῖται διὰ $x-1$. Ἄν κάμωμεν τὴν διαίρεσιν, εὐρίσκομεν ὅτι $\alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x - \alpha = (x-1)[\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha]$.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ μὲν μία ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι ἡ $x = 1$, αἱ δὲ δύο ἄλλαι θὰ εὐρεθοῦν, ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha = 0$.

$$\delta') \text{ Ἐστω ἡ ἐξίσωσις } \alpha x^4 + \beta x^3 - \beta x - \alpha = 0$$

$$\text{Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἐξῆς: } \alpha(x^4 - 1) + \beta x(x^2 - 1) = 0.$$

$$\eta \alpha(x^2 - 1)(x^2 + 1) + \beta x(x^2 - 1) = 0 \quad \eta \quad (x^2 - 1)[\alpha(x^2 + 1) + \beta x] = 0.$$

Εἶναι φανερόν ὅτι δύο μὲν ρίζαι ταύτης, ἄρα καὶ τῆς δοθείσης, θὰ εὐρεθοῦν ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 1 = 0$, αἱ δὲ δύο ἄλλαι ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $\alpha(x^2 + 1) + \beta x = 0$.

ε') *Εστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ (1)

Διαιροῦμεν τὰ μέλη αὐτῆς διὰ τοῦ x^2 ὑποθέτοντες τὰς τιμὰς

τοῦ $x \neq 0$ καὶ εὐρίσκομεν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma + \frac{\beta}{x} + \frac{\alpha}{x^2} = 0$

$$\eta \alpha \left(x + \frac{1}{x^2} \right) + \beta \left(x + \frac{1}{x} \right) + \gamma = 0 \quad (2)$$

Θέτομεν* $x + \frac{1}{x} = \psi$ ὅτε $\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 = \psi^2$ ἢ $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = \psi^2$ καὶ $x^2 + \frac{1}{x^2} = \psi^2 - 2$.

*Αν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὰς τιμὰς τῶν $x^2 + \frac{1}{x^2}$ καὶ $x + \frac{1}{x}$, εὐρίσκομεν $\alpha(\psi^2 - 2) + \beta\psi + \gamma = 0$, ἡ ὁποία εἶναι β' βαθμοῦ ὡς πρὸς ψ . *Αν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν, εὐρίσκομεν ἐν γένει δύο τιμὰς τοῦ ψ , τὰς ὁποίας ἂς παραστήσωμεν μὲ ψ_1 καὶ ψ_2 .

*Αντικαθιστῶμεν κάθε μίαν τῶν τιμῶν τοῦ ψ εἰς τὴν $x + \frac{1}{x} = \psi$ καὶ ἔχομεν $x + \frac{1}{x} = \psi_1$ καὶ $x + \frac{1}{x} = \psi_2$ ἢ $x^2 - x\psi_1 + 1 = 0$, $x^2 - x\psi_2 + 1 = 0$, ἥτοι δύο ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x . *Εὰν λύσωμεν αὐτάς, θὰ εὕρωμεν τὰς τέσσαρας ρίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως (1).

στ') *Εστω ἡ ἀντίστροφος ἐξίσωσις πέμπτου βαθμοῦ

$$\alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0.$$

Αὕτη, ὅταν τεθῇ $x = -1$, ἐπαληθεύεται, ἄρα ἔχει τὴν ρίζαν $x = -1$ καὶ τὸ α' μέλος τῆς διαιρεῖται διὰ τοῦ $x + 1$. *Εκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν εὐρίσκομεν πηλίκον.

$$\alpha x^4 + (\beta - \alpha)x^3 + (\alpha - \beta + \gamma)x^2 + (\beta - \alpha)x + \alpha$$

Τοῦτο τιθέμενον ἴσον μὲ 0, δίδει ἀντίστροφον ἐξίσωσιν τετάρτου βαθμοῦ, τὴν ὁποίαν γνωρίζομεν νὰ λύσωμεν

ζ') *Αν ἔχωμεν πρὸς λύσιν τὴν ἐξίσωσιν.

$$\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 - \gamma x - \beta x - \alpha = 0,$$

παρατηροῦμεν, ὅτι αὕτη ἔχει ρίζαν $x = 1$, ἄρα τὸ πρῶτον μέλος τῆς διαιρεῖται διὰ $x - 1$. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τιθέμενον ἴσον

* Ἡ ἀντικατάστασις $x + \frac{1}{x} = \psi$ ἐγένετο τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Γάλλου Lagrange.

** Τὸ ὄνομα ἀντίστροφος ἐξίσωσις ὀφείλεται εἰς τὸν Euler (1707 - 1781).

2. ΤΡΟΠΗ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

§ 193. Ἐάν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν τὸ τριώνυμον $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν τεθῇ $x^2 = \psi$, θὰ ἔχωμεν ἀντὶ τοῦ δοθέντος τὸ $\alpha \psi^2 + \beta \psi + \gamma$. Ἐάν αἱ ρίζαι τούτου παρασταθοῦν μὲ ψ_1, ψ_2 , θὰ εἶναι $\alpha \psi^2 + \beta \psi + \gamma = \alpha(\psi - \psi_1)(\psi - \psi_2)$. Ἄρα, ἂν τεθῇ εἰς τοῦτο $\psi = x^2$, θὰ ἔχωμεν $\alpha(x^2 - \psi_1)(x^2 - \psi_2) = \alpha(x - \sqrt{\psi_1})(x + \sqrt{\psi_1})(x - \sqrt{\psi_2})(x + \sqrt{\psi_2})$.

Ἐπομένως, ἂν $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ παριστάνουν τὰς ρίζας τοῦ δοθέντος τριωνύμου (ἥτοι τεθῇ $\sqrt{\psi_1} = \rho_1, -\sqrt{\psi_1} = \rho_2, \sqrt{\psi_2} = \rho_3, -\sqrt{\psi_2} = \rho_4$), θὰ ἔχωμεν $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)(x - \rho_4)$, ἥτοι τὸ διτετράγωνον τριώνυμον $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$ τρέπεται εἰς γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τέσσαρας πρωτοβαθμίους παράγοντας ὡς πρὸς x .

Π.χ. ἂν ἔχωμεν τὸ τριώνυμον $x^4 + x^2 - 12$, ἐπεὶ εἶναι $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -12$, εὐρίσκομεν $\psi_1 = 3, \psi_2 = -4$. Ἄρα $\rho_1 = \sqrt{3}, \rho_2 = -\sqrt{3}, \rho_3 = 2i, \rho_4 = -2i$, ἥτοι κατὰ τάξιν μεγέθους αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου (αἱ πραγματικαὶ μόνον, διότι αἱ φανταστικαὶ δὲν διακρίνονται κατὰ μέγεθος) εἶναι $-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -2i, 2i$ καὶ τὸ τριώνυμον εἶναι ἴσον μὲ $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + 2i)(x - 2i)$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται, ὅτι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ διτετράγωνον τριώνυμον, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς τέσσαρας ρίζας του. Ἐάν αὗται εἶναι π.χ. $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$, τὸ τριώνυμον θὰ εἶναι τὸ $(x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)(x - \rho_4)$ πολλαπλασιασμένον ἐπὶ σταθερὸν τινα παράγοντα

Π.χ. τὸ τριώνυμον μὲ ρίζας $-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -i, i$ θὰ εἶναι τὸ προκύπτον ἐκ τοῦ $\alpha \left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + i)(x - i)$ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων, ὅπου τὸ α παριστάνει σταθερὸν τινα παράγοντα.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

Ὁ μ ᾱ ς π ρ ὶ τ η. 434. Νὰ τραποῦν τὰ ἐπόμενα τριώνυμα εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων.

α') $4x^4 - 10x^2 + 4$, β') $7x^4 - 35x^2 + 28$, γ') $\alpha^2\beta^2\psi^4 - (\alpha^4 + \beta^4)\psi^2 + \alpha^2\beta^2$
δ') $\psi^4 - 4\alpha\beta\psi^2 - (\alpha^2 - \beta^2)^2$, ε') $\lambda^4\psi^4 + \lambda^2(\alpha^2 - \beta^2)\psi^2 - \alpha^2\beta^2$, στ') $\psi^4 - (\alpha + 1)\alpha\psi^2 + \alpha^3$

$$\text{ιδ') } 2x^4 + x^3 - 17x^2 + x + 2 = 0,$$

$$\text{ιε') } x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0,$$

$$\text{ιστ') } x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0,$$

446. Όμοίως νά λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

$$\alpha') \frac{(x^2+1)^2}{(x^2+x+1)(x+1)^2} = \frac{25}{18} \quad \beta') x^5 = \frac{35x-6}{35-6x}, \quad \gamma') x^4 = \frac{11x-6}{6x-11},$$

$$\delta') \frac{x^2(x+1)}{(x^2+1)(x^3+1)} = \frac{4}{15} \quad \epsilon') \frac{(x^2-x+1)^2}{x^4-x^3+x^2-x+1} = \frac{9}{5}.$$

6. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΩΝΥΜΟΙ

§ 199. Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $x^4-1=0$. Ἀντ' αὐτῆς ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον $x^4=1$. Παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη ἔχει προφανῶς τὴν ρίζαν $x=1$, ἔχει δὲ καὶ τὴν $x=-1$, διότι $(-1)^4=1$.

Ἐστω ἡ $x^3+1=0$. Θεωροῦμεν τὴν ἰσοδύναμον τῆς $x^3=-1$. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ -1 εἶναι ρίζα τῆς ἐξίσωσως, ἐπειδὴ $(-1)^3=-1$. Ἐκάστη τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων ἔχουσα δύο ὅρους εἰς τὸ α' μέλος τῆς (τοῦ β' ὄντος 0) καλεῖται **διώνυμος ἐξίσωσις**.

Ἐξίσωσιν διώνυμον καλοῦμεν ἐν γένει μίαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς ἓνα ἄγνωστον π.χ. τὸν x , ἂν ἔχη μόνον δύο ὅρους εἰς τὸ α' μέλος τῆς (τοῦ β' ὑποτιθεμένου 0). Πᾶσα διώνυμος ἐξίσωσις εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha x^k + \beta x^l = 0$. (1), ὅπου k, l , εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ($\alpha, \beta \neq 0$) πραγματικοί. Ἐὰν εἶναι $k > l$ γράφομεν τὴν (1) ὡς ἐξῆς :

$$x^l (\alpha x^{k-l} + \beta) = 0$$

Αὕτη ἔχει τὴν ρίζαν $x=0$ καὶ τὰς ρίζας τῆς $\alpha x^{k-l} + \beta = 0$. Θετομεν πρὸς εὐκολίαν $k-l = n$, $-\frac{\beta}{\alpha} = \gamma$ καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x^n = \gamma$. Διὰ τὴν λύσιν ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι :

$\alpha')$ Ἄν τὸ n εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς, ἡ ἐξίσωσις ἔχει τοῦλάχιστον δύο ρίζας (πραγματικὰς), ἂν εἶναι $\gamma > 0$.

Διότι, ὡς γνωστόν, ἂν π.χ. τεθῇ $n=2\lambda$, θὰ ἔχωμεν $x^{2\lambda} = \gamma$. Ἀλλ' αὕτη προκύπτει ἀπὸ τὴν $x^\lambda = \sqrt{\gamma}$, ἂν τὰ μέλη ταύτης ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον. Ἀρα ἔχει τὰς ρίζας τῆς $x^\lambda = \sqrt{\gamma}$ καὶ τῆς $x^\lambda = -\sqrt{\gamma}$.

Οὕτως αἱ ρίζαι τῆς $x^n = \gamma$ εἶναι αἱ $x = \sqrt[n]{\gamma} = \sqrt[n]{\gamma}$, $x = -\sqrt[n]{\gamma} = -\sqrt[n]{\gamma}$, ἂν τὸ $\gamma > 0$ καὶ τὸ $n=2\lambda$ (ἄρτιος).

Ἀλλ' ἂν εἶναι $\gamma < 0$, ἡ ἐξίσωσις $x^n = \gamma$ δὲν ἔχει καμμίαν πραγματικὴν ρίζαν. Πράγματι παρατηροῦμεν ὅτι, ἐν ὅσῳ τὸ n εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς, ἔχομεν $(-|x|)^n = |x|^n > 0$.

β') *Αν τὸ γ εἶναι ἀριθμὸς περιττὸς καὶ τὸ $\gamma > 0$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει μόνον θετικὴν ρίζαν, ἐπειδὴ πᾶσα δύναμις ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην περιττὸν ἀριθμὸν ἔχει τὸ σῆμα τοῦ ἀριθμοῦ. Ἐπομένως μόνον θετικὸς ἀριθμὸς ὑφούμενος εἰς τὴν νιοστὴν περιττὴν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον θετικόν, δηλαδὴ ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν πραγματικὴν ρίζαν τὴν $\sqrt[n]{\gamma}$ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν. Ἐὰν εἶναι τὸ $\gamma < 0$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει μόνον ἀρνητικὴν ρίζαν, διότι ἂν τεθῇ τὸ $-x_1$, ἀντὶ τοῦ x , θὰ ἔχωμεν $(-x_1)^n = \gamma$, ἢ $(x_1)^n = -\gamma$.

Οὕτως ἐπανήλθομεν εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, διότι εἶναι $-\gamma > 0$, ἡ δὲ ἐξίσωσις $(x_1)^n = -\gamma$ ἔχει μίαν μόνον πραγματικὴν ρίζαν τὴν $\sqrt[n]{-\gamma}$, ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει τὴν ρίζαν $x = -\sqrt[n]{\gamma}$.

Παραδείγματα. 1ον. Ἡ ἐξίσωσις $x^6 - 1 = 0$ ἔχει ρίζας (πραγματικὰς) τὰς $x = \pm 1$, ἄρα τὸ $x^6 - 1$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν $x^6 - 1$ διὰ τοῦ $x^2 - 1$, εὐρίσκομεν πηλίκον $x^4 + x^2 + 1$. Ἄρα αἱ ἄλλαι ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως θὰ εὐρεθοῦν ἐκ τῆς λύσεως τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως $x^4 + x^2 + 1 = 0$, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι εἶναι φανταστικάι.

2ον. Ἡ ἐξίσωσις $x^3 + 8 = 0$ ἔχει μίαν ρίζαν (πραγματικὴν) τὴν $x = \sqrt[3]{-8} = -2$. Ἄρα τὸ $x^3 + 8$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $x + 2$. Τὸ πηλίκον τῆς διαίρεσεως αὐτῆς εἶναι $x^2 - 2x + 4$. Ἄρα αἱ ἄλλαι ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως θὰ εὐρεθοῦν ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 2x + 4 = 0$.

3ον. Ἡ ἐξίσωσις $x^4 + 16 = 0$, ἢ $x^4 = -16$ δὲν ἔχει ρίζαν (πραγματικὴν), ἐπειδὴ ἀρτία δύναμις πραγματικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἀριθμὸς θετικός.

Ἀσκήσεις

447. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

$$\alpha') x^3 \pm 343 = 0, \quad \beta') 8x^3 \pm 125 = 0, \quad \gamma') x^3 \pm 1331 = 0$$

$$\delta') \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{7}{9} \cdot \frac{x + 1}{x - 1}, \quad \epsilon') \frac{2 - x^2}{2 + x^2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^3 + 4x^2 + 9},$$

$$\sigma\tau') \frac{9x^3 + 7}{2} - \left[x^3 - \frac{(x^3 - 2)}{7} \right] = 36.$$

448. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

$$\alpha') x^5 - (x^3 + 8)(x^2 + 5) + 4x^2(x + 2) + 32 = 0, \quad \beta') \frac{3x^3 + 20}{16} = \frac{4x^3 - 3}{2x^3 - 4} + \frac{x^3}{4}.$$

449. Όμοιως αί κάτωθι :

$$\alpha') \frac{1}{1-\alpha\gamma} + \frac{1}{1-\alpha-\gamma} = \left(\frac{\alpha}{x}\right)^3, \quad \beta') (1-\alpha\gamma)^{-1}x^3 + \frac{(1-\alpha-\gamma)^{-1}}{x-3} = 1.$$

$$\begin{aligned} \gamma') x^4 \pm 1 &= 0 \text{ (γράψατε } x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = 0), & \delta') x^5 \pm 1024 &= 0, & \varepsilon') x^5 \pm 1 &= 0, \\ \sigma\tau') x^6 \pm 729 &= 0, & \zeta') x^{2\nu+1} \pm 1 &= 0, & \eta') x^7 \pm 1 &= 0, & \theta') x^{2\nu} \pm 1 &= 0, \\ \iota') x^4 \pm 256 &= 0 \text{ (θέσατε } x=4\psi), & \iota\alpha') x^5 \pm 3125 &= 0, & \iota\beta') x^{10} \pm 1 &= 0, \\ \gamma\gamma') x^6 \pm 1 &= 0, & \iota\delta') x^4 \pm 14641 &= 0, & \iota\epsilon') x^{12} \pm 1 &= 0, \end{aligned}$$

7. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΑΠΟΛΥΤΟΝ ΤΙΜΗΝ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ

§ 200. α') Έστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $3|x|-5=0$, ὅπου $|x|$ παριστάνει τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ ἀγνώστου x , τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν νὰ εὑρωμεν τὰς τιμὰς τὰς ἐπαληθευούσας τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν

Ἐκ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον αὐτῆς $3|x|=5$, καὶ $|x| = \frac{5}{3}$. Ἡ τιμὴ $x = \frac{5}{3}$ ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν, καθὼς καὶ ἡ $x = -\frac{5}{3}$, διότι $|- \frac{5}{3}| = \frac{5}{3}$. Ὡστε ἡ δοθεῖσα ἔχει ρίζας τὰς $\pm \frac{5}{3}$, ταύτας δὲ ἔχει καὶ ἡ $(x - \frac{5}{3})(x + \frac{5}{3}) = 0$. Ἐπομένως ἡ δοθεῖσα εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $(x - \frac{5}{3})(x + \frac{5}{3}) = 0$ ἢ τὴν $x^2 = \frac{25}{9}$.

Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha|x| + \beta = 0$ ($\alpha, \beta \neq 0$) (1)

Ἄν α, β εἶναι ὁμόσημοι, ὅτε $\alpha\beta > 0$, τότε τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) εἶναι πάντοτε θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, ἥτοι $\neq 0$, ἐπομένως ἡ (1) οὐδεμίαν λύσιν ἔχει ὡς πρὸς x .

Ἄν εἶναι $\alpha\beta < 0$, θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς (1), $|x| = -\frac{\beta}{\alpha} > 0$. Οὕτως ἡ (1), (ἐὰν $\alpha\beta < 0$), ἔχει ρίζας τὰς $-\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\frac{\beta}{\alpha}$, ἄρα εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $x^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Παράδειγμα. Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $-4|x| + 12 = 0$.

Ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν $|x| = 3$ καὶ αὕτῃ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $x^2 = 3^2$.

β') Ἐστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις
 $\alpha|x| + \beta x + \gamma = 0, (\alpha, \beta, \gamma \neq 0)$ (2)

*Αν θέλωμεν νὰ εἶναι $x > 0$, ἐπειδὴ $|x| = x$, ἡ (2) γράφεται καὶ οὕτως: $\alpha x + \beta x + \gamma = 0$ (2'), ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x = \frac{-\gamma}{\alpha + \beta}$ (ἂν εἶναι $\alpha + \beta \neq 0$), ἡ τιμὴ αὐτὴ ἱκανοποιεῖ τὴν $x > 0$, ἂν εἶναι $-\frac{\gamma}{\alpha + \beta} > 0$ ἢ $\frac{\gamma}{\alpha + \beta} < 0$, ἢ $\gamma(\alpha + \beta) < 0$.

*Αν θέλωμεν νὰ εἶναι $x < 0$, τότε ἐπειδὴ $|x| = -x$, ἡ (2) γράφεται οὕτως: $-\alpha x + \beta x + \gamma = 0$ (2''), ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x = -\frac{\gamma}{\beta - \alpha}$, (ἂν $\beta - \alpha \neq 0$). Αὕτῃ ἱκανοποιεῖ τὴν $x < 0$ ἂν εἶναι $-\frac{\gamma}{\beta - \alpha} < 0$.

$$\eta \quad -\gamma(\beta - \alpha) < 0, \eta \quad \gamma(\beta - \alpha) > 0$$

*Αρα, ἂν $\alpha \neq -\beta$ καὶ $\gamma(\alpha + \beta) < 0$, ἡ (2) ἔχει τὴν ρίζαν $x_1 = -\frac{\gamma}{\alpha + \beta} > 0$, ἂν δὲ εἶναι $\gamma(\beta - \alpha) > 0$, τότε ἔχει τὴν $x_2 = -\frac{\gamma}{\beta - \alpha}$, ἂν $\alpha \neq \beta$.

*Αν $\alpha = \beta$, τότε ἔχει ρίζαν τὴν $x = -\frac{\gamma}{2\alpha}$ ἂν $\alpha\gamma < 0$.

Παρατήρησις. Διὰ $x = 0$, ἡ (2) δὲν ἐπαληθεύεται, ἂν εἶναι $\gamma \neq 0$.

*Αν $\gamma = 0$, $\beta = 1$ ἡ (2) γίνεται $\alpha|x| + x = 0$ (3) καὶ $|x| = -\frac{x}{\alpha}$, ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι $|x| = x$, ὅταν εἶναι $x > 0$ καὶ $|x| = -x$, ὅταν εἶναι $x < 0$, ἔπεται ὅτι ἡ $|x| = -\frac{x}{\alpha}$ ἀνάγεται εἰς τὴν $x = -\frac{x}{\alpha}$ μὲν κατὰ τὴν α' περίπτωσιν ($x > 0$), εἰς τὴν $x = \frac{x}{\alpha}$ δὲ κατὰ τὴν β' ($x < 0$), ἔχουν δὲ αὗται μόνον ρίζαν $x = 0$, ἂν εἶναι $\alpha^2 \neq 1$. *Αν $\alpha = +1$, τότε ἡ $|x| = \frac{x}{\alpha}$ γίνεται $|x| = x$ καὶ ἔχει ρίζαν πᾶσαν ἀρνητικὴν τιμὴν τοῦ x καὶ τὴν $x = 0$. *Αν $\alpha = -1$, ἔχομεν $|x| = x$ καὶ αὕτη ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ x καὶ διὰ $x = 0$.

Παραδείγματα. 1ον. *Εστω, ἡ ἐξίσωσις $2|x| + 3x - 4 = 0$.

*Εχομεν $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = -4$, $\gamma(\alpha + \beta) = -20 < 0$. *Αρα ἡ ἐξίσωσις ἔχει τὴν ρίζαν $x = \frac{-\gamma}{\alpha + \beta} = \frac{4}{5}$.

2ον. *Εστω ἡ ἐξίσωσις $-2|x| + x + 1 = 0$.

Εἶναι $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $\gamma(\alpha + \beta) = 1 \cdot (-2 + 1) = -1 < 0$, ἄρα $x = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως. *Αλλ' εἶναι καὶ $\gamma(\beta - \alpha) = 1(1 + 2) = 3 > 0$

$x = -\frac{1}{3}$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως.

ΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $|x|^2 + 2\beta|x| + \gamma = 0$, ($\beta, \gamma \neq 0$)

§ 201. Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως θέτομεν $|x| = \omega$ καὶ εὐρίσκομεν $\omega^2 + 2\beta\omega + \gamma = 0$, $\omega = |x| = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \gamma}$ ἵνα αὕτη καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχῃ λύσιν πραγματικήν, πρέπει, $\beta^2 - \gamma > 0$ ἐπὶ πλεόν δέ, ἂν εἶναι $-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \gamma} > 0$, ἔχομεν τέσσαρας ρίζας ἀνὰ δύο ἀντιθέτους. Διότι ἂν τεθῇ $-\beta + \sqrt{\beta^2 - \gamma} = \kappa_1 > 0$ καὶ $-\beta - \sqrt{\beta^2 - \gamma} = \kappa_2 > 0$, αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι αἱ $x_1 = \kappa_1$, $x_2 = -\kappa_1$, $x_3 = \kappa_2$, $x_4 = -\kappa_2$.

* Ἄν $\beta^2 - \gamma = 0$ καὶ $-\beta > 0$, ἔχομεν $|x| = -\beta$ καὶ αἱ $x_1 = -\beta$, $x_2 = \beta$ εἶναι ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως

Παραδείγματα. 1ον. Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $|x|^2 - 8|x| + 7 = 0$.

Εὐρίσκομεν $|x| = 4 \pm \sqrt{4^2 - 7} = 4 \pm 3$, ἥτοι $|x| = 7$ καὶ $|x| = 1$, ἄρα $x_1 = -7$, $x_2 = 7$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

2ον. Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $|x|^2 - 10|x| - 24 = 0$, $|x| = 5 \pm \sqrt{25 + 24} = 5 \pm 7$, ἥτοι $|x| = 12$, $|x| = -2$. Οὕτως ἔχομεν μόνον δύο ρίζας τὰς $x_1 = 12$, $x_2 = -12$, διότι ἡ $|x| = -2$ εἶναι ἀδύνατος.

3ον. Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $|x|^2 + 10|x| + 24 = 0$, $|x| = -5 \pm \sqrt{25 - 24} = -5 \pm 1$, ἄρα προκύπτει $|x| = -4$, $|x| = -6$ καὶ ἡ ἐξίσωσις δέν ἔχει ρίζαν. Τοῦτο διακρίνει τις ἀμέσως, διότι τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως εἶναι θετικὸν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x (πραγματικήν).

Παρατήρησις. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὴν λύσιν συστημάτων ἐχόντων ἀπολύτους τιμὰς τῶν ἀγνώστων των.

Ἀσκήσεις

450. Νὰ εὐρεθῶν αἱ ρίζαι τῶν κάτωθι ἐξισώσεων :

$$\alpha') 3|x| - 7 = 0 \quad \beta') -6|x| + 5 = 0, \quad \gamma') \frac{3}{4}|x| = -1, \quad \delta') 2|x| + 7x - 3 = 0,$$

$$\epsilon') x + |x| + 4 = 0, \quad \sigma\tau') |x| + x - 4 = 0,$$

451. Νὰ λυθῶν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

$$\alpha') |x|^2 - 5|x| - 3 = 0, \quad \beta') |x|^2 - 5|x| + 6 = 0, \quad \gamma') 4|x|^2 - 5|x| - 1 = 0,$$

$$\delta') |x|^2 - \frac{3}{4}|x| - 2 = 0.$$

452. Ἐξετάσατε τὴν ἐξίσωσιν $\alpha|x| + x + \gamma = 0$, ($\alpha, \gamma \neq 0$), παρατηροῦντες ὅτι εἶναι $\alpha|x| = -(\gamma + x)$, $\alpha^2 x^2 = (\gamma + x)^2$.

Β'. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΚΑΙ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ 202. Καλοῦμεν σύστημα (ἐξισώσεων) δευτέρου βαθμοῦ τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ μίαν ἐξίσωσιν β' βαθμοῦ καὶ ἀπὸ οἰονδήποτε ἀριθμὸν ἐξισώσεων α' βαθμοῦ μὲ ἰσαριθμούς ἀγνώστους τῶν ἐξισώσεών του.

Ἐστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα β' βαθμοῦ $x-\psi=5$, $x\psi=-4$.

Ἐκ τῆς α' τούτων ἔχομεν $\psi=x-5$, εἰσάγοντες δὲ τὴν τιμὴν αὐτὴν εἰς τὴν β' λαμβάνομεν $x(x-5)=-4$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμόν της $x^2-5x+4=0$ Λύοντες ταύτην εὐρίσκομεν $x=1$, $x=4$. Ἀντικαθιστῶμεν τὰς τιμὰς αὐτὰς εἰς τὴν $\psi=x-5$ καὶ εὐρίσκομεν $\psi=-4$, $\psi=-1$. Ὡστε αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώντων εἶναι $x=1$ καὶ 4 , $\psi=-4$ καὶ -1 ἀντιστοιχῶς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν ἔχωμεν σύστημα β' βαθμοῦ μὲ δύο ἐξισώσεις καὶ δύο ἀγνώστους, λύομεν ὡς πρὸς τὸν ἓνα ἀγνώστον τὴν ἐξίσωσιν τοῦ α' βαθμοῦ, ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν αὐτὴν εἰς τὴν ἄλλην ἐξίσωσιν, ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἓνα ἀγνώστον Μετὰ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εὐρίσκομεν τὰς τιμὰς καὶ τοῦ ἄλλου ἀγνώστου.

Ἐν γένει, ἂν ἔχωμεν σύστημα β' βαθμοῦ μὲ n ἐξισώσεις καὶ n ἀγνώστους, εὐρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθὲν καὶ εὐκολώτερον πρὸς λύσιν ὡς ἑξῆς: Λύομεν τὰς $(n-1)$ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, αἱ ὁποῖαι εἶναι α' βαθμοῦ, ὡς πρὸς μόνον τοὺς $n-1$ ἀγνώστους αὐτοῦ καὶ εὐρίσκομεν τὰς τιμὰς μόνον τῶν $n-1$ ἀγνώντων ἐκφραζομένης συναρτήσῃ τῆς ἀπομενούσης ἀγνώστου, ἔστω τῆς x . Ἀκολουθῶς εἰσάγομεν τὰς τιμὰς τῶν $n-1$ ἀγνώντων εἰς τὴν μοναδικὴν ἐξίσωσιν β' βαθμοῦ τοῦ δοθέντος συστήματος. Οὕτω θὰ εὐρεθῇ ἰσοδύναμος ταύτης β' βαθμοῦ ὡς πρὸς x , ἡ ὁποία λυομένη δίδει τὰς τιμὰς τοῦ x . Ἀντικαθιστῶμεν τὰς οὕτως εὐρισκομένας τιμὰς τοῦ x εἰς τὰς ἐκφράσεις τῶν $n-1$ ἄλλων ἀγνώντων καὶ θὰ εὐρίσκωμεν τὰς τιμὰς τούτων.

Παραδείγματα. 1ον. Ἐστω τὸ σύστημα $x+\psi=\alpha$, $x\psi=\gamma$ (1)

Ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων εὐρίσκομεν $\psi=\alpha-x$ (2). Εἰσάγοντες τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ ψ εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων (1) εὐρίσκομεν $x(\alpha-x)=\gamma$ ἢ $x^2-\alpha x-\gamma=0$ (3). Ἡ ἐξίσωσις (3) ἔ-

χει ἓν γένει δύο ρίζας, ἔστω τὰς x_1, x_2 . Θέτομεν ἀντὶ τοῦ x τὰς τιμὰς του εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) καὶ εὐρίσκομεν ἓν γένει δύο τιμὰς διὰ τὸ ψ , ἥτοι τὰς $\psi = \alpha - x_1 = \psi_1$, $\psi = \alpha - x_2 = \psi_2$. Οὕτως ἔχομεν δύο ζεύγη λύσεων τοῦ δοθέντος συστήματος, τὰ $x = x_1$, $\psi = \alpha - x_1 = \psi_1$ καὶ $x = x_2$, $\psi = \alpha - x_2 = \psi_2$.

Ἐπειδὴ ὁμως εἶναι [ἔνεκα τῆς (3)] $x_1 + x_2 = \alpha$, ἔπεται, ὅτι $\alpha - x_1 = x_2$, $\alpha - x_2 = x_1$. ἄρα τὰ ζεύγη τῶν λύσεων τοῦ (1) εἶναι τὰ $x = x_1$, $\psi = x_2$ καὶ $x = x_2$, $\psi = x_1$.

2ον. Ἐστω τὸ σύστημα $x - \psi = \beta$, $x\psi = \gamma$ (1'). Εὐρίσκομεν $\psi = x - \beta$ καὶ εἰσάγοντες τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ ψ εἰς τὴν β' τῶν (1') εὐρίσκομεν $x^2 - \beta x - \gamma = 0$. (2')

Ἡ ἐξίσωσις αὕτῃ ἔχει ἓν γένει δύο ρίζας, ἔστω τὰς $x = x_1$, $x = x_2$. ἐπομένως ἔχομεν $x = x_1$, $\psi = x_1 - \beta$ καὶ $x = x_2$, $\psi = x_2 - \beta$.

Ἐπειδὴ, ἔνεκα τῆς (2'), εἶναι $x_1 + x_2 = \beta$, εὐρίσκομεν ὅτι τὰ ζεύγη τῶν λύσεων τοῦ (1') εἶναι τὰ $x = x_1$, $\psi = -x_2$ καὶ $x = x_2$, $\psi = -x_1$.

3ον. Ἐστω τὸ σύστημα $x^2 + \psi^2 - \rho^2 = 0$, $\alpha x + \beta \psi + \gamma = 0$ (1). Ὑποθέτομεν $\beta \neq 0$ καὶ εὐρίσκομεν ἐκ τῆς β' τοῦ (1) $\psi = -\frac{\gamma + \alpha x}{\beta}$ (2). Εἰσάγοντες τὴν τιμὴν αὐτὴν εἰς τὴν α' τῶν (1) καὶ εὐρίσκομεν

$$(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + 2\alpha\gamma x + \gamma^2 - \beta^2\rho^2 = 0 \quad (3)$$

ἵνα αἱ ρίζαι τῆς (3) εἶναι πραγματικά, πρέπει νὰ ἔχωμεν $\alpha^2\gamma^2 - (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 - \beta^2\rho^2) \geq 0$ ἢ $\gamma^2 \leq (\alpha^2 + \beta^2)\rho^2$.

Ἐὰν πληροῦται ἡ συνθήκη αὕτη, θὰ εὐρωμεν δύο τιμὰς τοῦ x πραγματικάς, ἔστω τὰς x_1, x_2 , καὶ ἀκολουθῶς δύο τιμὰς τοῦ ψ , ἥτοι θὰ ἔχωμεν τὰ ἐξῆς ζεύγη λύσεων τοῦ (1)

$$x = x_1, \psi = -\frac{\alpha x_1 + \gamma}{\beta} \quad \text{καὶ} \quad x = x_2, \psi = -\frac{\alpha x_2 + \gamma}{\beta},$$

τὰ ὁποῖα περιορίζονται εἰς ἓν μόνον, ἂν εἶναι $\gamma^2 = (\alpha^2 + \beta^2)\rho^2$.

*Ἀν αἱ ρίζαι τῆς (3) εἶναι φανταστικά, θὰ συμβαίνει τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς τιμὰς τοῦ ψ

$$4ον. \text{ Ἐστω τὸ σύστημα } \begin{cases} x^2 + \psi^2 + \omega^2 = 14 \\ x + \psi + \omega = 6 \\ x - \psi + \omega = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων εὐκόλως εὐρίσκομεν $2\psi = 6$, ἄρα $\psi = 3$, ὅτε ἐκ τῆς γ' τῶν δοθεισῶν εὐρίσκομεν $\omega = 3 - x$. Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς τῶν ψ καὶ ω εἰς τὴν πρώτην τῶν (1) εὐρίσκομεν

$$x^2+9+(3-x)^2=14 \quad \eta \quad x^2-3x+2=0 \quad (2)$$

Ἐκ ταύτης εὐρίσκομεν $x=1$, $x=2$. Οὕτως εὐρίσκομεν ἀκολουθῶς $\omega=2$, $\omega=1$ καὶ ἔχομεν τὰς ἐξῆς τριάδας λύσεων τοῦ (1) $x=1$ $\psi=3$, $\omega=2$ καὶ $x=2$, $\psi=3$, $\omega=1$.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$453. \quad \begin{array}{ll} \alpha') \begin{cases} 12x\psi+13\psi^2=25 \\ 4x-3\psi=1 \end{cases} & \beta') \begin{cases} (x+\psi)(2x+3\psi)=180 \\ x-2\psi=3 \end{cases} \\ \gamma') \begin{cases} x^2-x\psi+4\psi^2=1,5 \\ x-\psi=1,25 \end{cases} & \delta') \begin{cases} (2-x)(9+\psi)=91 \\ x+\psi=9 \end{cases} \\ \epsilon') \begin{cases} x^2+2(x\psi-24)+\psi^2=0 \\ x-\psi=1 \end{cases} & \sigma\tau') \begin{cases} x\psi-7(3x-\psi)+3=0 \\ 2x-\psi=0. \end{cases} \\ \zeta') \begin{cases} x(\psi+1)+4=0 \\ \psi(x+1)+9=0 \end{cases} & \eta') \begin{cases} 5=19 \cdot \frac{1-\psi-\psi^2}{1-x-x^2} \\ 2x-3\psi=2 \end{cases} & \theta') \begin{cases} \psi \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{9}{2} \\ \psi \cdot \frac{x-10}{x+10} + 1 = 0 \end{cases} \end{array}$$

$$454. \quad \begin{array}{ll} \alpha') \begin{cases} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{\beta}\right)^2 = 2 \\ \alpha\psi + \beta x = 0 \end{cases} & \beta') \begin{cases} \alpha x^2 + (\alpha + \beta)x\psi + \beta\psi^2 = 0. \\ \alpha x - \beta\psi = 2\alpha\beta \end{cases} \\ \gamma') \begin{cases} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{\beta}\right)^2 = 1 \\ \frac{x}{\beta} - \frac{\psi}{\alpha} = 0 \end{cases} & \delta') \begin{cases} (2\alpha - \beta)x^2 + (2\alpha + \beta)\psi^2 = 4\alpha^3 \\ x + \psi = 2\alpha \end{cases} \\ \epsilon') \begin{cases} x^2 + 2\alpha\psi^2 = \alpha^2 + 1 \\ x + \psi = \alpha \end{cases} & \sigma\tau') \begin{cases} 2x^2 - 3x\psi = 15\alpha - 10\alpha^2 \\ 3x + 2\psi = 12\alpha - 13 \end{cases} \end{array}$$

$$455. \quad \alpha') \begin{cases} (x+\alpha)^2 - (\psi-\beta)^2 = 4(\alpha^2 - \beta^2) \\ x - \psi = \alpha + \beta \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} (x+\alpha)^2 + (\psi+\beta)^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2) \\ x + \psi = \alpha + \beta \end{cases}$$

$$456. \quad \alpha') \begin{cases} x^2 - x\psi = 2\alpha\beta + 2\beta^2 \\ x\psi - \psi^2 = 2\beta(\alpha - \beta) \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} (\beta x^2 + \alpha\psi^2)(\alpha^3 + \beta^3) = \alpha\beta\gamma^2 \\ \alpha x + \beta\psi = \gamma \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} \psi^2 = \frac{\alpha}{2} \left(x - \frac{\alpha}{2}\right) \\ (x+1)x + \psi^2 = \frac{\alpha}{4}(5\alpha + 4) \end{cases}$$

Ἐπίσης τὰ κατωτέρω :

$$457. \quad \alpha) \begin{cases} \psi^2 + 2\alpha \left(x^2 - \frac{\alpha}{2}\right) = 0 \\ x^2 + 2\alpha\psi^2 = \alpha \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} \psi^2 = 2\alpha(\lambda+1) \left(x + \frac{\alpha\lambda}{2}\right) \\ 2\alpha x = \left(\frac{\psi}{\lambda+1}\right)^2 \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} \frac{\alpha^2}{x^2} + \frac{\psi^2}{2\beta^2\gamma^2x} = 2 \\ \psi^2 = \beta^2\gamma^2x \end{cases}$$

$$\delta') \begin{cases} \psi - x = 2\beta \\ \frac{x^2}{\alpha - \beta} + \frac{\psi^2}{\alpha + \beta} = x + \psi \end{cases}$$

$$458. \quad \alpha') \begin{cases} \beta^2x^2 - \alpha^2\psi^2 = \alpha^2\beta^2 \\ \left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2 = 2\gamma\left(\psi + \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\gamma}\right) \end{cases}$$

$$\beta') \begin{cases} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 (\beta\gamma)^2x + \psi^2 = 2\beta^2\gamma^2x \\ \left(\frac{\psi}{\beta\gamma}\right)^2 = x \end{cases}$$

$$459. \quad \alpha') \begin{cases} \alpha\psi^2 - 2\beta^2\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) = 0 \\ \alpha\psi^2 + 2\beta^2\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\beta') \begin{cases} \alpha(\psi^2 - \beta^2) - 2\beta^2x = 0. \\ 2\frac{x^2}{\alpha} + \frac{\psi}{2\sqrt{2}} = \frac{\alpha + \beta}{2} \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} \left(\frac{x}{\alpha + \beta}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{\alpha - \beta}\right)^2 = x \\ \psi^2 = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)^2 x \end{cases}$$

$$460. \quad \alpha') \begin{cases} x^2 + \psi^2 = 100 \\ x : \psi = 3 : 5 \end{cases}$$

$$\beta') \begin{cases} x^2 - \psi^2 = 56 \\ x : \psi = 9 : 5 \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} 24\psi(x - 5\psi) = (x + 2\psi)(5x - 24\psi) \\ 5x^2 - 72\psi^2 = 32 \end{cases}$$

$$461. \quad \alpha') \begin{cases} x^2 + x\psi + \psi^2 = 79 \\ (x + \psi) : (x - \psi) = 5 : 2 \end{cases}$$

$$\beta') \begin{cases} x^2 - x\psi + \psi^2 = 91 \\ (x + \psi) : (x - \psi) = 8 : 3 \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} (x + 4)^2 = x\psi \\ \psi^2 = (\psi + 9)(x + 4) \end{cases}$$

$$\delta') \begin{cases} (x^2 + \psi^2)(x + \psi) = 1080 \\ (x^2 + \psi^2)(x - \psi) = 540 \end{cases}$$

$$\epsilon') \begin{cases} (x^2 - \psi^2)(2x - 3\psi) = 192 \\ (x^2 - \psi^2)(3x + \psi) = 1344 \end{cases}$$

§ 203. Ἡ λύσις συστημάτων β' ἢ καὶ ἀνωτέρου βαθμοῦ ἀνάγεται συνήθως εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων α' καὶ β' βαθμοῦ, ἀλλὰ δὲν ὑπάρχει ὠρισμένος κανὼν διὰ τὴν λύσιν. Ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἐπιδιώκεται ἡ λύσις τῶν ἀπλουστείων ἐκ τῶν ἐξισώσεων, ὡς πρὸς ἀριθμὸν τινα ἀγνώστων συναρτήσῃ τῶν λοιπῶν. Τὰς οὕτως εὕρισκομένας τιμὰς ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς λοιπὰς ἐξισώσεις καὶ ἐπιδιώκομεν νὰ εὕρωμεν μίαν μόνον ἐξίσωσιν β' βαθμοῦ μὲ ἓνα ἀγνώστον, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν, ὅτε διευκολύνεται καὶ ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν λοιπῶν ἀγνώστων.

Παραδείγματα. 1ον. Ἐστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$x^3 + \psi^3 + 2x^2 - \psi = 9.$$

$$x + \psi = 3$$

Ἐκ τῆς δευτέρας εὐρίσκομεν $\psi=3-x$. Εἰσάγοντες τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ ψ εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν $x^3+(3-x)^3+2x^2-3+x=9$ ἢ τὴν $11x^2-26x+15=0$. Λύοντες αὐτὴν εὐρίσκομεν $x_1=1$ $x_2=\frac{15}{11}$, ἀκολουθῶς δὲ εὐρίσκομεν καὶ $\psi_1=2$, $\psi_2=\frac{18}{11}$.

Οὕτως ἔχομεν τὰ ἐξῆς ζεύγη: $x_1=1$, $\psi_1=2$, $x_2=\frac{15}{11}$, $\psi_2=\frac{18}{11}$.

2ον. Ἐστω τὸ σύστημα $x^2+\psi^2=\alpha^2$, $x\psi=\beta^2$.

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὴν πρώτην τῶν δοθεισῶν καὶ τὴν $2x\psi=2\beta^2$, ὅτε εὐρίσκομεν $(x+\psi)^2=\alpha^2+2\beta^2$. Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν τὰ μέλη τῆς $2x\psi=2\beta^2$ καὶ εὐρίσκομεν $(x-\psi)^2=\alpha^2-2\beta^2$, ἀκολουθῶς εὐρίσκομεν $x+\psi=\pm\sqrt{\alpha^2+2\beta^2}$, $x-\psi=\pm\sqrt{\alpha^2-2\beta^2}$, καὶ ἀναγόμεθα εἰς τὰ συστήματα :

$$\begin{aligned} x+\psi &= \sqrt{\alpha^2+2\beta^2} & x+\psi &= -\sqrt{\alpha^2+2\beta^2} & x+\psi &= \sqrt{\alpha^2+2\beta^2} & x+\psi &= -\sqrt{\alpha^2+2\beta^2} \\ x-\psi &= \sqrt{\alpha^2-2\beta^2} & x-\psi &= -\sqrt{\alpha^2-2\beta^2} & x-\psi &= \sqrt{\alpha^2-2\beta^2} & x-\psi &= -\sqrt{\alpha^2-2\beta^2} \end{aligned}$$

εὐκόλως λυόμενα.

Ἐνίστε εἰς σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους β' βαθμοῦ ὡς πρὸς ἕκαστον τῶν ἀγνώστων, οἱ συντελεσταὶ τῶν ὄρων τοῦ β' βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον. Τότε διὰ καταλλήλου ἀπαλοιφῆς τῶν ἰσοβαθμίων τούτων δυνάμεων τῶν ἀγνώστων, εὐρίσκομεν ἐξίσωσιν α' βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς δύο ἀγνώστους. Αὕτῃ μὲ μίαν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος ἀποτελοῦν σύστημα β' βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους τοῦ δοθέντος συστήματος. Οὕτως ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος ἀνάγεται ἐνίστε εἰς τὴν λύσιν ἀπλουστέρου συστήματος β' βαθμοῦ.

Παραδείγματα. 1ον. Ἐστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 3x^2-5x\psi+4\psi^2-8x+7\psi=8 \\ 9x^2-15x\psi+12\psi^2+11x-3\psi=12. \end{cases}$$

Ἀπαλείφομεν τὸ x^2 μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων καὶ εὐρίσκομεν $35x-24\psi=-12$, ἡ ὁποία μὲ μίαν τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦν σύστημα δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ψ , τὸ ὁποῖον λύεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω.

2ον. Ἐστω τὸ σύστημα $\begin{cases} x^2+2x\psi-6\psi^2=208 \\ x\psi-2\psi^2=16. \end{cases}$

Διαιρούντες τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος κατὰ μέλη εὐρίσκομεν

$$\frac{x^2+2x\psi-6\psi^2}{x\psi-2\psi^2} = \frac{208}{16} \quad \eta \quad \frac{\frac{x^2}{\psi^2} + 2\frac{x}{\psi} - 6}{\frac{x}{\psi} - 2} = \frac{26}{2} = 13.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι β' βαθμοῦ ὡς πρὸς $\frac{x}{\psi}$. Λύοντες αὐτὴν εὐρίσκομεν τιμὰς τοῦ $\frac{x}{\psi}$, ἅρα δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὸ ψ π.χ. συναρτήσῃ τοῦ x καὶ ἀκολουθῶν ἢ οὕτως εὐρισκομένη πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις ὡς πρὸς x, ψ μὲ μίαν τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦν σύστημα δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ψ , τὸ ὁποῖον λύεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω.

3ον. Ἐστω τὸ σύστημα $x^3 + \psi^3 = 9$, $x + \psi = 3$. Ὑποϋντες τὰ μέλη τῆς β' ἐξισώσεως εἰς τὴν τρίτην δύναμιν εὐρίσκομεν

$$x^3 + 3x^2\psi + 3x\psi^2 + \psi^3 = 27.$$

Ἐνεκα τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν ἡ ἀνωτέρω γίνεται $3x\psi(x + \psi) = 27 - 9 = 18$ καὶ ἔνεκα τῆς δευτέρας τῶν δοθεισῶν αὕτη γίνεται $x\psi = 2$. Αὕτη μὲ τὴν δευτέραν τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦν σύστημα β' βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ψ , τὸ ὁποῖον λύεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω.

Ἀσκήσεις

Ὁ μὲν πρῶτη. 462. Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα:

$$\alpha') \begin{cases} x^2 - x\psi = 14 \\ x\psi - \psi^2 = 10 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} x^2 + \psi^2 = 73 \\ x\psi - \psi^2 = 15 \end{cases} \quad \gamma') \begin{cases} x^2 + \psi^2 = 157 \\ x\psi = 66 \end{cases}$$

$$\delta') \begin{cases} x^2 + x\psi = 125 \\ x\psi = 50 \end{cases} \quad \epsilon') \begin{cases} x^2 + \psi x = 169 \\ x\psi = 60 \end{cases} \quad \sigma\tau') \begin{cases} x^2 + \psi^2 = \frac{25}{36} \\ 3x\psi = 1 \end{cases}$$

$$\zeta') \begin{cases} x^2 + x\psi + \psi = 121 \\ x^2 + x\psi + x = 126 \end{cases} \quad \eta') \begin{cases} x^2 + x\psi = 187 \\ \psi^2 + x\psi = 102 \end{cases}$$

463. Ὁμοίως τὰ κάτωθι:

$$\alpha') \begin{cases} x^2 + 9\psi^2 = 136 \\ x - 3\psi = 4 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} 4(x + \psi)^2 - 5(x + \psi) = 50 \\ 5(x - \psi)^2 + 6(x - \psi) = 11 \end{cases} \quad \gamma') \begin{cases} x^3 - \psi^3 = 7 \\ x - \psi = 1 \end{cases}$$

$$\delta') \begin{cases} x^3 - \psi^3 = \alpha \\ x - \psi = \beta \end{cases} \quad \epsilon') \begin{cases} x^4 + \psi^4 = 17 \\ x + \psi = 3 \end{cases} \quad \sigma\tau') \begin{cases} x^4 + \psi^4 = \alpha \\ x + \psi = \beta \end{cases}$$

$$\zeta') \begin{cases} x^4 + \psi^4 = \lambda \\ x - \psi = \mu \end{cases} \quad \eta') \begin{cases} x^5 + \psi^5 = \alpha \\ x + \psi = \beta \end{cases}$$

Ὁ μὲν δευτέρα. 464. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

$$\alpha') \begin{cases} x + \psi = 21 - \sqrt{x\psi} \\ x^2 + \psi^2 = 257 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} 2(x^2 + \psi^2) + 7(x + \psi)^2 = 1049 \\ 3x^2\psi^2 - \left(2 + \frac{1}{2}\right)x\psi = 275 \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} x + \psi + \sqrt{x + \psi - 2} = 14 \\ \frac{x^2 \psi^2}{2} - \frac{3x\psi}{4} = 175,5 \end{cases} \quad \delta') \begin{cases} (x^2 + \psi^2)(x - \psi) = 41 \\ x\psi(x - \psi) = 30 \end{cases}$$

465. Ὁμοίως τὰ ἐξῆς :

$$\alpha') \begin{cases} x^2 + \psi^2 = \sqrt{x^2 \psi^2 + 273} \\ \frac{x}{\psi} + \frac{\psi}{x} = 4 + \frac{1}{4} \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} x^2 - \psi^2 = 21(x - \psi) \\ \frac{x-3}{\psi} = \frac{x\psi-26}{x\psi+2\psi} \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} \frac{2(x+\psi)-3}{5(x+\psi-4)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{-3}{x+\psi} \\ x:\psi = 40\psi:(x+3\psi) \end{cases}$$

466. Ἐπίσης τὰ κάτωθι :

$$\alpha') \begin{cases} x^3 + \psi^3 = 973 \\ (x - \psi)^2 - 7(x + \psi) = 90 - x\psi \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} \sqrt{x(\sqrt{x^3} + \sqrt{\psi^3})} = 273 \\ x\sqrt{x\psi} + \psi^2 = 364 \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} x\psi = 72, x^2 + \psi^2 + \omega^2 = 289 \\ x + \psi + \omega = 29 \end{cases}$$

467. Ἐπίσης τὰ :

$$\alpha') \begin{cases} x^2 - \psi\sqrt{x\psi} = 585 \\ \psi^2 = x\sqrt{x\psi} - 234 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} x^2 + \psi^2 = 40 \\ x\psi = \omega \\ x + \psi = 8 \end{cases} \quad \gamma') \begin{cases} x^2 + \omega^2 - x(\psi + \omega) = 25 \\ \omega^2 + \psi^2 - \psi(x + \omega) = 16 \\ x^2 + \psi^2 - \omega(x + \psi) = 9 \end{cases}$$

1. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ 204. Καλοῦμεν προβλήματα ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ τὰ προβλήματα τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων ἢ συστημάτων δευτέρου βαθμοῦ. Διὰ τὴν λύσιν τοιούτων προβλημάτων ἀκολουθοῦμεν πορείαν ὁμοίαν πρὸς ἐκείνην τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν καὶ διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων τῶν ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ.

1ον. Τίνος ἀριθμοῦ τὸ ἄθροισμα τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ ἡῤῥημένον κατὰ 1 ἰσοῦται μὲ 86 ;

Λύσις. Ἐστω x ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τοῦ x εἶναι τὸ x^2 , τὸ μὲν τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ θὰ εἶναι $3x^2$, τὸ δὲ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι τὸ $2x$. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $3x^2 + 2x + 1 = 86$. Λύοντες ταύτην εὐρίσκομεν $x = 5$ καὶ $x = -\frac{17}{3}$.

2ον. Διὰ τίνος ἀριθμοῦ πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 96, ἵνα τὸ πηλίκον ὑπερβαίῃ κατὰ 4 τὸν διαιρέτην ;

Λύσις. Ἐὰν μὲ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν $\frac{96}{x} - x = 4$ ἢ $x^2 + 4x - 96 = 0$. Λύοντες αὐτὴν εὐρίσκομεν $x = 8$ καὶ $x = -12$

3ον. Τὸ γινόμενον τῶν ὄρων κλάσματος εἶναι 120. Οἱ ὅροι θὰ ἦσαν ἴσοι, ἐὰν ἀφηροῦμεν 1 ἀπὸ τὸν παρονομαστήν καὶ προσεθέτομεν 1 εἰς τὸν ἀριθμητήν. Ποῖοι εἶναι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος ;

Λύσις. Ἐὰν μὲ τὸ x παραστήσωμεν τὸν ἀριθμητήν τοῦ κλάσματος ὁ παρονομαστής του θὰ εἶναι $\frac{120}{x}$ καὶ θὰ ἔχωμεν $x + 1 = \frac{120}{x} - 1$ ἢ $x^2 + x = 120 - x$ ἢ $x^2 + 2x - 120 = 0$ καὶ ἐκ τῆς λύσεως εὐρίσκομεν $x = 10$ καὶ $x = -12$. Ἐπομένως οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος θὰ εἶναι οἱ 10 καὶ 12 ἢ -12 καὶ -10.

4ον. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ 0,75 αὐξανόμενα κατὰ 1 δίδουν τὸν 16 διηρημένον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ 0,8 τοῦ ζητουμένου πλὴν 15 ;

Λύσις. Ἐὰν μὲ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $0,75x + 1 = \frac{16}{0,8x - 15}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x = 20$ καὶ $x = -\frac{31}{12}$.

5ον. Νὰ εὐρεθοῦν δύο ἀκέραιοι περιττοὶ διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν νὰ εἶναι 8000.

Λύσις. Ἐστωσαν $2x-1$ καὶ $2x+1$ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι. Κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν $(2x+1)^2 - (2x-1)^2 = 8000$ ἢ $8x = 8000$ καὶ $x = 1000$. Ἐπομένως οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶναι 2001 καὶ 1999.

6ον. Τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογοι τῶν 3, 2, 5, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι ἴσον μὲ 342 νὰ εὐρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

Λύσις. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x, ψ, ω , τοὺς ζητούμενους ἀριθμούς, θὰ ἔχωμεν $x^2 + \psi^2 + \omega^2 = 342$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ x, ψ , καὶ ω εἶναι

ανάλογοι τῶν 3, 2 καὶ 5 θὰ εἶναι $\frac{x}{3} = \frac{\psi}{2} = \frac{\omega}{5}$. Ἐκ τούτου ἔχομεν, ἂν παραστήσωμεν τοὺς ἴσους λόγους μὲ ρ , $x=3\cdot\rho$, $\psi=2\cdot\rho$, $\omega=5\cdot\rho$.

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν $9\rho^2+4\rho^2+25\rho^2=342$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $\rho=\pm 3$ · ἄρα οἱ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ $\pm 9, \pm 6, \pm 15$.

7ον. Ἐγευμάτισαν 15 ἄτομα· οἱ ἄνδρες ἐπλήρωσαν 360 δρχ. ἐν ὅλῳ καὶ αἱ γυναῖκες ὁμοίως 360 δρχ. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες καὶ πόσα ἐξώδευσαν ὁ καθείς, ἐὰν κάθε γυνὴ ἐδαπάνησεν 20 δρχ. ὀλιγώτερον καθενὸς ἀνδρός ;

Λύσις. Ἐστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν, ὅτε $15-x$ θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν γυναικῶν. Ἡ δαπάνη καθενὸς μὲν ἀνδρὸς θὰ εἶναι $\frac{360}{x}$, καθεμιᾶς δὲ γυναικὸς $\frac{360}{15-x}$ δραχ.

Πρέπει νὰ εἶναι $\frac{360}{15-x} = \frac{360}{x} - 20$ καὶ x θετικὸς καὶ < 15 . Λύοντες εὐρίσκομεν $x^2-51x+2700=0$ καὶ $x = \frac{51 \pm 39}{2} = \begin{matrix} \rightarrow 45 \\ \rightarrow 6 \end{matrix}$.

Ἐκ τῶν δύο τιμῶν ἡ $x=45$ ἀποκλείεται, διότι δὲν εἶναι < 15 . Ὡστε εὐρίσκομεν 6 ἄνδρας καὶ $15-6=9$ γυναῖκας. Ἀκολουθῶς εὐρίσκομεν, ὅτι ἕκαστος ἀνὴρ ἐδαπάνησε $360:6=60$ δρχ., ἐκάστη δὲ γυνὴ ἐδαπάνησε $360:9=40$ δρχ.

8ον. Εἰς κύκλον διαμέτρου 25 μ. νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ ἔχουν διαφορὰν 17 μ.

Λύσις. Ἄν μὲ x καὶ ψ παραστήσωμεν τὰς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου, θὰ ἔχωμεν $x-\psi=17$, $x^2+\psi^2=25^2=625$.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τούτου εὐρίσκομεν $x=24$ καὶ $\psi=7$.

9ον. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ προσδιορισθῇ σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ, ὥστε, ἂν ἀπὸ τούτου ἀχθῇ παράλληλος ΔΕ πρὸς τὴν ἀπέναντι τῆς κορυφῆς Α πλευράν, νὰ χωρίζεται τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

Λύσις Παριστάνομεν μὲ α τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ μὲ x

τὴν ζητούμενην ἀπόστασιν (ΑΔ). Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἀφοῦ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΓ, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἀνὰ μίαν ἴσας. Ἐπομένως τὰ ἐμβαδὰ τούτων θὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν μηκῶν τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των. Ἦτοι θὰ εἶναι $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{x^2}{\alpha^2}$. Ἀλλ' ὁ λόγος αὐτὸς πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{2}$, κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος· ἦτοι πρέπει νὰ εἶναι $\frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{1}{2}$ καὶ $x^2 = \frac{\alpha^2}{2}$, $x = \frac{\alpha/\sqrt{2}}$, ἐπειδὴ πρέπει $x > 0$.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

468. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμενον καὶ τὸ πηλίκον νὰ εἶναι ἴσα.

469. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὰ 0,5 αὐξανόμενα κατὰ 5 δίδουν, τὸν 35,1 διηρημένον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὅποιον ἀποτελοῦν τὰ 0,3 τοῦ ζητούμενου μείον 2,5.

470. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀκέραιοι διαδοχικοὶ περιττοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των νὰ εἶναι 202.

471. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ ἀκέραιοι τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ πενταπλάσιον τοῦ ἀθροίσματός των.

472. Νὰ χωρισθῇ ὁ 27 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ τετραπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου καὶ τὸ πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου νὰ ἀποτελοῦν τὸν 1620.

473. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἔχοντος διαγώνιον 17 μ. καὶ ἐμβαδὸν 120 μ².

474. Εἰς κύκλον διαμέτρου 25 μ. νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἔχουν λόγον 3 : 4.

475. Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι 14 καὶ τὸ γινόμενόν των 1632. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί ;

476. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος ἐλαττούμενος κατὰ τὸ πενταπλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης του γίνεται 500;

477. Ἡρωτήθη τις ποία εἶναι ἡ ἡλικία του καὶ ἀπεκρίθη : Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐτῶν τῆς ἡλικίας μου ἰσοῦται μὲ τὸ δεκαεξαπλάσιον τῆς ἡλικίας, τὴν ὁποίαν θὰ ἔχω μετὰ 12 ἔτη. Ποία εἶναι ἡ ἡλικία του ;

478. Δύο κρουνοί, ρέοντες συγχρόνως, πληροῦν δεξαμενὴν εἰς 18 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας ἕκαστος δύναται νὰ τὴν πληρώσῃ, ἂν ὁ εἰς τούτων χρειάζεται μόνος 27 ὥρας ἐπὶ πλέον τοῦ ἄλλου μόνου ;

479. Νὰ εὑρεθῶν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἰσοδυνάμου πρὸς τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 99 μ., καὶ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι τὰ ἐννέα δέκατα ἑκτα τῆς ἄλλης.

480. Νά εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις (βάσις καὶ ὕψος) ὀρθογωνίου τριγώνου, ἂν ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ εἶναι 51 μ. καὶ ὁ λόγος τῶν δύο ἄλλων του πλευρῶν ὀκτῶ δέκατα πέμπτα.

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΝΙΚΑ

1ον. (Τῆς χρυσοῦς Τομῆς)*. Δοθεῖσαν εὐθεῖαν νὰ χωρίσωμεν εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Λύσις. Ὡς παραστήσωμεν μὲ α τὸ μήκος τῆς δοθείσης εὐθείας AB καὶ ἄς θεωρήσωμεν ἀρχὴν αὐτῆς τὸ A. Ἐστω Γ τὸ σημεῖον διαιρέσεως. Θέτομεν $AG = x$ ὁπότε $BG = \alpha - x$, καὶ πρέπει νὰ ἔχωμεν $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\alpha - x}$ ἥτοι $x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0$. Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης εὐρίσκομεν

$$x = \frac{-\alpha \pm \sqrt{5}\alpha^2}{2} = \frac{-\alpha \pm \alpha\sqrt{5}}{2} = \frac{\alpha(\pm\sqrt{5}-1)}{2}.$$

Διευρύνσεις. Αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι πραγματικαὶ καὶ μὲ σήματα ἀντίθετα, ἐπεὶδὴ τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι $-\alpha^2$. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ $\sqrt{5}$ περιέχεται μεταξὺ τῶν 2 καὶ 3. Ἐπομένως ἡ ρίζα ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ σῆμα + τοῦ ριζικοῦ θὰ εἶναι θετικὴ καὶ μικροτέρα τοῦ α , ἄρα δίδει τὴν ζητούμενην λύσιν. Ἡ ἄλλη ρίζα ἀπορρίπτεται ὡς ἀρνητικὴ. Ὡστε ἔχομεν $x = \frac{\alpha(\sqrt{5}-1)}{2}$. Τὸ σημεῖον Γ κεῖται πέραν τοῦ μέσου τῆς AB, ἀπὸ τοῦ A, διότι τὸ x ἔχει τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ $\frac{\alpha}{2}$.

2ον. Σῶμα τι ἐρρίφθη κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω (εἰς τὸ κενόν) μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα α . Μετὰ πόσον χρόνον θὰ φθάσῃ εἰς ὕψος ν ;

Λύσις. Καθὼς γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Φυσικῆς), τὸ σῶμα κινεῖται πρὸς τὰ ἄνω μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην. Ἄν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ t τὸν ζητούμενον χρόνον, θὰ ἔχωμεν τοὺς ἐξῆς τύπους γνωστούς ἐκ τῆς Φυσικῆς :

$$\nu = \alpha t - \frac{1}{2} g t^2, \quad t = \alpha - g t \quad (1)$$

* Ἡ ὀνομασία *χρυσὴ τομὴ* ἐπεκράτησεν, ἐπεὶδὴ ἡ τομὴ αὕτη θεωρεῖται ὡς ἀρχὴ τοῦ ὠραίου εἰς τὴν ζωγραφικὴν, ἀρχιτεκτονικὴν καὶ τὴν πλαστικὴν τέχνην.

όπου τ παριστάνει τὴν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ κατὰ τὴν στιγμήν t καὶ g τὴν ἐπιτάχυνσιν ἴσην μὲ 9,81 μ. ἀνὰ δλ. (κατὰ προσέγγισιν).

Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὐρίσκομεν $gt^2 - 2\alpha t + 2v = 0$ (2)
ἐκ τῆς λύσεως δὲ αὐτῆς τὴν τιμὴν τοῦ t .

Διερεύνησις. Ἡ συνθήκη διὰ νὰ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς (2) πραγματικά εἶναι $\alpha^2 - 2gv \geq 0$ ἢ $v \leq \frac{\alpha^2}{2g}$. Ἐπομένως $v = \frac{\alpha^2}{2g}$ εἶναι τὸ μέγιστον ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον δύναται νὰ φθάσῃ κινητὸν, ἂν ριφθῇ μὲ ταχύτητα ἀρχικὴν α . Ἐὰν εἶναι $v = \frac{\alpha^2}{2g}$, αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι ἴσαι μὲ $\frac{\alpha}{g}$. Ἐπομένως τὸ κινητὸν χρειάζεται $\frac{\alpha}{g}$ χρόνον, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ μέγιστον ὕψος. Εἰς τὸ ἀνώτατον αὐτὸ σημεῖον θὰ ἔχῃ τὸ κινητὸν ταχύτητα ἴσην μὲ 0.

Πράγματι, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων (1) τὸ t μὲ τὸ $\frac{\alpha}{g}$ εὐρίσκομεν ἐξαγόμενον 0, ἥτοι $t = \alpha - \frac{\alpha g}{g} = 0$.

Ἐὰν εἶναι $v < \frac{\alpha^2}{2g}$, αἱ δύο ρίζαι τῆς πρώτης τῶν (1) εἶναι πραγματικά, ἄνισοι καὶ θετικά, ὁ δὲ τύπος, ὁ ὁποῖος δίδει αὐτὰς, εἶναι $\delta \ t = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 2gv}}{g}$. Αἱ δύο αὗται τιμαὶ τοῦ t ἀρμόζουν εἰς τὸ πρόβλημα. Διότι τὸ σῶμα διέρχεται δύο φορὰς δι' ἐκάστου σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς εὐθείας, τὴν ὁποῖαν παριστάνει τὸ ὕψος v , μίαν ἀνερχόμενον καὶ μίαν κατερχόμενον.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ μὲν μία τῶν τιμῶν τούτων τοῦ t εἶναι μεγαλύτερα, ἡ δὲ ἄλλη μικρότερα τοῦ $\frac{\alpha}{g}$ κατὰ $\frac{\sqrt{\alpha^2 - 2gv}}{g}$. Εἶναι εὐκὸλον νὰ ἴδωμεν, ὅτι αἱ ταχύτητες [δηλαδή αἱ τιμαὶ τοῦ τ τῆς δευτέρας τῶν (1)] εἶναι ἀντίθετοι. Ἄν τεθῇ $v=0$, θὰ ἔχωμεν $t=0$, καὶ $t = \frac{2\alpha}{g}$. Τὸ $\frac{2\alpha}{g}$ παριστάνει τὸν χρόνον, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ κινητὸν ἐπαναπίπτει εἰς τὸ σημεῖον, ἐκ τοῦ ὁποῖου ἀνεχώρησεν. Ὄθεν ὁ χρόνος, καθ' ὃν γίνεται ἡ ἀνάβασις, ἰσοῦται μὲ τὸν χρόνον, καθ' ὃν γίνεται ἡ κατάβασις τοῦ κινητοῦ.

3ον. Νὰ εὐρεθῇ τὸ βάθος φρέατος, ἂν ἐπέρασαν t^0 ἀφ' ὅτου ἀφρέθῃ νὰ πέσῃ λίθος ἐκ τοῦ στομίου αὐτοῦ, μέχρις ὅτου ἡκού-

σθη ὁ ἥχος ὁ παραχθεὶς ἐκ τῆς πτώσεως τοῦ λίθου εἰς τὸν πυθμένα τοῦ φρέατος (ἢ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος παραβλέπεται).

Λύσις. Παριστάνομεν μὲ x τὸ βάθος τοῦ φρέατος καὶ μὲ τ τὴν ταχύτητα τοῦ ἥχου εἰς τὸν ἀέρα. Ὁ χρόνος t ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη: 1ον. Ἀπὸ τὸν χρόνον t_1 , τὸν ὁποῖον χρειάζεται ὁ λίθος διὰ νὰ πέσῃ. 2ον. Ἀπὸ τὸν χρόνον t_2 , τὸν ὁποῖον χρειάζεται ὁ ἥχος διὰ νὰ ἀνέλθῃ ἐκ τοῦ πυθμένος τοῦ φρέατος εἰς ἀπόστασιν x .

Ἐχομεν τὸν ἐξῆς τύπον (ἐκ τῆς Φυσικῆς) $x = \frac{1}{2} g t_1^2$, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ διάστημα, ὅταν δίδεται ὁ χρόνος κατὰ τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν, ὁποία εἶναι καὶ ἡ κίνησις κατὰ τὴν πτώσιν τοῦ λίθου. Ἐκ ταύτης προκύπτει $t_1 = \sqrt{\frac{2x}{g}}$ (1)

Ἐκ τοῦ $x = \tau t_2$, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ διάστημα ἐκφραζόμενον μὲ τὴν ταχύτητα τ καὶ τὸν χρόνον t_2 κατὰ τὴν ὁμαλὴν κίνησιν τοῦ ἥχου, εὐρίσκομεν $t_2 = \frac{x}{\tau}$. Ἐχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{\tau} = t, \quad \eta \quad \sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{\tau} \quad (2)$$

Ἐκ ταύτης εὐρίσκομεν ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον καὶ διατάσσοντες κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x

$$gx^2 - 2\tau(gt + \tau)x + g\tau^2 t^2 = 0 \quad (3)$$

Ἐπειδὴ τὸ t_1 εἶναι θετικὸν καὶ τὸ κατὰ τὴν (1) καὶ (2) ἴσον αὐτοῦ $t - \frac{x}{\tau}$ πρέπει νὰ εἶναι θετικόν, ἥτοι $t - \frac{x}{\tau} > 0$ ἢ $x < \tau t$ (4)

ἵνα αἱ ρίζαι τῆς (3) εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, πρέπει νὰ εἶναι θετικὸν τὸ $\tau^2(gt + \tau)^2 - g^2\tau^2 t^2$ ἢ τὸ $\tau^3(\tau + 2gt) > 0$, τὸ ὁποῖον πράγματι συμβαίνει Ἐξ ἄλλου παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μὲν γινόμενον τῶν ριζῶν, εἶναι $\tau^2 t^2$, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν $\frac{2\tau(gt + \tau)}{g}$, τὰ ὁποῖα εἶναι θετικά. Ἐπομένως αἱ ρίζαι εἶναι θετικά. Ἄλλ' ἐπειδὴ πρέπει νὰ εἶναι, κατὰ τὴν (4), τὸ $x < \tau t$ καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι $\tau t \cdot \tau t$ εἶναι δὲ αὗται ἄνισοι, ἔπεται, ὅτι ἡ μία τῶν ριζῶν εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τt καὶ ἡ ἄλλη μικροτέρα τούτου, ἡ ὁποία καὶ θὰ εἶναι δεκτὴ διὰ τὸ πρόβλημα, διὰ νὰ πληροῦται ἡ ἀνισότης (4). Ἐκ τῆς λύσεως τῆς (3) εὐρίσκομεν τὴν ζητουμένην τιμὴν, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σῆμα — τοῦ ριζικοῦ. Ἦτοι ἔχομεν $x = \frac{\tau}{g} [gt + \tau - \sqrt{\tau(\tau + 2gt)}]$.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

Ὁ μ ἄ ς π ρ ῶ τ η. (Γενικά). 481. *Αν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μιστὸν μέρος ἐπὶ τὸ νιοστὸν μέρος ἑνὸς ἀριθμοῦ, εὐρίσκομεν α. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ; (Διερευνήσις).

482. *Αν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μιπλάσιον ἐπὶ τὸ νιπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ, εὐρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν α. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ; (Διερευνήσις).

483. Κεφάλαιον α δρχ. δίδει τόκον τ δρχ., ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν τῆς διαρκείας τοῦ δανείου εἶναι κατὰ δ μεγαλύτερος τοῦ ἐπιτοκίου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάρκεια τοῦ δανείου. (Διερευνήσις· μερική περίπτωσις $\alpha=5400$ $\delta=2$, $\tau=1296$).

484. Κεφάλαιον α δρχ. ἔφερε τόκον τ δρχ. καὶ θὰ ἔδιδε τὸν αὐτὸν τόκον, ἂν ἐτοκίζετο μὲ ἐπιτόκιον κατὰ ε ὀλιγώτερον, ἀλλ' ἐπὶ μ ἔτη περισσότερα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον. (Διερευνήσις· μερική περίπτωσις $\alpha=2100$, $\epsilon=1$, $\mu=1$, $\tau=420$).

485. Ἐκ δύο κεφαλαίων τὸ ἓν ἦτο κατὰ δ μικρότερον, ἀλλ' ἐτοκίσθη μὲ ἐπιτόκιον κατὰ ε μεγαλύτερον τοῦ ἄλλου καὶ ἔφερε τόκον ἐπὶ v_1 ἔτη τ_1 δρχ. ἐνῶ τὸ ἄλλο εἰς v_2 ἔτη ἔφερε τ_2 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια (Διερευνήσις· μερική περίπτωσις $\delta=6000$, $\epsilon=1$, $v_1=6$, $v_2=5$, $\tau_1=9000$, $\tau_2=7200$).

486. Ἦγοράσθη ὕφασμα ἀντὶ α δρχ. Ἐὰν ἕκαστον μέτρον τούτου ἐτιμᾶτο β δραχ. ὀλιγώτερον, θὰ ἠγοράζοντο γ μέτρα ἐπὶ πλεόν. Πόσα μέτρα ἠγοράσθησαν καὶ πρὸς πόσας δρχ. τὸ μέτρον ; (Διερευνήσις).

487. Δίδεται τρίγωνον μὲ πλευρὰς α, β, γ. Νὰ εὑρεθῇ μῆκος τοιοῦτον ὥστε, ἂν αἱ πλευραὶ τοῦ αὐξηθοῦν ἢ ἐλαττωθοῦν κατ' αὐτό, νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ ὀρθογωνίου τριγώνου.

488. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ (ἀπεράντου) εὐθείας AB σημεῖον, ὥστε νὰ φωτίζεται ἐξ ἴσου ἀπὸ δύο φωτεινὰς ἐστίας κειμένας εἰς τὰ σημεῖα Σ, Σ' τῆς εὐθείας, ἂν ἡ ποσότης τοῦ φωτός, τὸ ὁποῖον δέχεται ἡ ἐπιφάνεια ἀπὸ φωτεινῆς ἐστίας, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς ἀπὸ τῆς ἐστίας (Διερευνήσις).

489. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἡμικύκλιον τραπέζιον ἔχον περίμετρον 2τ.

490. Δοθέντος τριγώνου ὀρθογωνίου ABΓ νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας αὐτοῦ ΒΓ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε α') τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ ἐκ τῶν τριῶν κορυφῶν νὰ εἶναι ἴσον μὲ α²· β') τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τῶν καθέτων πλευρῶν νὰ ἰσοῦται μὲ λ²· γ') τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ ἀπὸ τῶν δύο καθέτων πλευρῶν τοῦ νὰ ἰσοῦται μὲ μ². (Διερευνήσις).

491. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου α') ἂν δοθῇ ἡ ὑποτείνουσα καὶ τὸ ἄθροισμα λ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ, β') ἡ ὑπὸτείνουσα καὶ τὸ ὕψος υ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτήν, γ') ἡ περίμετρος 2τ καὶ τὸ ὕψος υ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ὑποτείνουσαν.

Ὁ μ ἄ ς δ ε υ τ έ ρ α. 492. Ποῖος εἶναι ὁ μικρότερος ἐκ δύο ἀριθμῶν διαφερόντων κατὰ 3, ἂν ἔχουν γινόμενον 54 ;

493. Ποίος άκέραιος άριθμός είναι κατά 29 μικρότερος του τετραγώνου του κατά μονάδα μικροτέρου αυτού;

494. Εύρετε δύο άριθμούς έχοντας γινόμενον 2, άν το άθροισμα τών αντίστροφών αυτών ίσουται με $1\frac{5}{12}$.

495. Εύρετε κλάσμα, του οποίου ό άριθμητής είναι κατά 4 μικρότερος του παρονομαστού. Έάν αύξηθῇ ό άριθμητής κατά 7 και έλαττωθῇ ό παρονομαστής κατά 5, διαφέρει του προηγούμενου κατά $1\frac{1}{15}$.

496. Έπληρώσέ τις 1600 δρχ. δια καφέ, 1800 δρχ. δια τείιον, έλαβε δέ 40 χιλιογρ. καφέ επί πλέον του τείιου. Πόσον εκόστιζε τό χιλιόγραμμα του καφέ, άν του τείιου εκόστιζε 50 δρχ. επί πλέον;

497. Είς εκδρομήν αι γυναίκες ήσαν 3 όλιγώτεροι τών άνδρών. *Αν οί μέν άνδρες έπληρώσαν έν όλω 1750 δρχ. αι δέ γυναίκες 800 δρχ., πόσοι ήσαν οί άνδρες και αι γυναίκες, εάν καθείς τών άνδρών έπλήρωσε 50 δρχ. περισσότερο η καθεμία γυνή;

498. Είς 27 άνδρας και γυναίκας έπληρώθησαν 2100 δρχ. δια τούς άνδρας και 4200 δρχ. δια τās γυναίκας. Πόσαι ήσαν αι γυναίκες, άν καθεμία έπληρώνετο 150 δρχ. όλιγώτερον του άνδρός;

499. Νά εύρεθῇ άριθμός άκέραιος, του οποίου τό άθροισμα με την τετραγωνικήν ρίζαν αυτού είναι 32.

*Ο μ ά ς τ ρ ί τ η. (Γεωμετρικά). 500. Πόσον είναι τό πλήθος σημείων μεταξύ, τών οποίων δυνάμεθα νά φέρωμεν 78 εύθείας συνδεουσας αυτά ανά δύο,

501. Ποίον έπίπεδον κυρτόν πολύγωνον έχει 104 διαγωνίους;

502. Έκ δύο έπίπέδων πολυγώνων τό α' έχει 6 πλευράς επί πλέον του β' και τρεις και έν τρίτον φοράς περισσοτέρας διαγωνίους· πόσας πλευράς έχει καθέν;

503. Έάν αι πλευραι τετραγώνου αύξηθούν κατά 3 μ, τό έμβαδόν του νέου θα είναι 2,25 φορές του άλλου. Πόση είναι ή πλευρά αυτού;

504. Πόσον είναι τό μήκος τών πλευρών όρθογωνίου τριγώνου έχοντος έμβαδόν 150 μ², άν ό λόγος τών καθέτων πλευρών αυτού είναι 0,75;

505. Ίσοσκελους τριγώνου ή μέν βάσις είναι κατά 19 μ. μεγαλυτέρα του ύψους του, εκαστον δέ τών σκελών του κατά 8 μ. μεγαλυτερον του ύψους του. Πόση είναι ή βάσις και πόσον τό ύψος του;

506. Τίνες αι διαστάσεις όρθογωνίου έχοντος έμβαδόν 192 μ², άν διαφέρουν κατά 4 μ.;

507. Ρόμβου ή μέν πλευρά έχει μήκος 17 μ. αι δέ διαγώνιοι έχουν διαφοράν 14 μ. Πόσον μήκος έχει ή μικροτέρα διαγώνιός του;

508. Ποίαι αι διαστάσεις όρθογωνίου έγγεγραμμένου εις κύκλον άκτινος 12,5 μ, άν ή διαφορά αυτών είναι 17 μ;

509. Εύρετε τās πλευράς δύο τετραγώνων έχόντων άθροισμα έμβαδών 8621 μ², άν τό γινόμενον τών διαγωνίων αυτών είναι 8540.

*Ο μ ά ς τ ε τ ά ρ τ η. (Συστημάτων). 510. Δύο κρουνοί ρέουν συγχρό-

νωσ και πληροῦν δεξαμενὴν εἰς 2,4 ὥρας. Ὁ β' μόνος χρειάζεται 2 ὥρας ἐπὶ πλέον τοῦ α'. Εἰς πόσον χρόνον ἕκαστος τὴν πληροῖ μόνος ;

511. Δύο ἐπιχειρηματίαι κατέθεσαν ὁμοῦ 20 000 δρχ. ὁ α' διὰ 2 μῆνας καὶ ὁ β' διὰ 8 μῆνας. Ὁ μὲν α' ἔλαβεν ἐν ὄλῳ 18 000 δρχ., ὁ δὲ 9 000. Πόσα ἐκέρδισεν ἕκαστος ;

512. Δύο κεφάλαια ἔχοντα ἄθροισμα 30 000 δρχ. ἐτοκίσθησαν πρὸς 6%. Τὸ μὲν α' ἔμεινε 4 μῆνας ἐπὶ πλέον καὶ ἔδωκε τόκον 1 280 δρχ. τὸ δὲ β' 840 δρχ. Ποῖα τὰ κεφάλαια ;

513. Νὰ εὕρεθῶν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες ἀναλογίαν, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι 62,5 καὶ ὁ μὲν α' ὑπερβαίνει τὸν β' κατὰ 4. ὁ δὲ γ' τὸν δ' κατὰ 3.

514. Εὕρετε διψήφιον ἀριθμὸν, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος μὲν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ψηφίων αὐτοῦ δίδει πέντε καὶ ἐν τρίτον, ἐλαττούμενος δὲ κατὰ 9 δίδει τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν δι' ἀντιστροφῆς τῆς σειρᾶς τῶν ψηφίων αὐτοῦ.

515. Εὕρετε τριψήφιον ἀριθμὸν, τοῦ ὁποῖου τὸ μὲν β' ψηφίον εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο ἄλλων, ὁ δὲ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τούτου εἶναι ὡς 124 : 7. Δι' ἀντιστροφῆς τῆς σειρᾶς τῶν ψηφίων αὐτοῦ προκύπτει ἀριθμὸς ἡῤῥημένος κατὰ 594.

516. Εὕρετε τρεῖς ἀριθμούς, ἂν ὁ β' εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν ἄλλων, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 21 τῶν δὲ τετραγώνων τῶν 189.

517. Εἰς δεξαμενὴν τρέχει τὸ ὕδωρ βρύσεως ἐπὶ τρία πέμπτα τοῦ χρόνου. καθ' ὃν ἄλλη βρύσις μόνη θὰ τὴν ἐπλήρῳ. Κλείεται ἡ α' βρύσις καὶ ἀνοίγεται ἡ β', μέχρις ὅτου πληρωθῇ ἡ δεξαμενὴ. Ἐὰν καὶ αἱ δύο ἡνοίγοντο μαζί θὰ ἐπληρῳτο εἰς 6 ὥρας, θὰ ἔτρεχον δὲ ἐκ τῆς α' τὰ δύο τρίτα τοῦ ἐκ τῆς β', ἀφ' ὅτου ἐκλείσθῃ ἡ α'. Εἰς πόσον χρόνον καθεμία βρύσις πληροῖ τὴν δεξαμενὴν ;

Ὁ μ α ς π έ μ π τ η. (Φυσικῆς). 518. Πόσον χρόνον χρειάζεται λίθος διὰ νὰ πέσῃ εἰς τὸν πυθμένα φρέατος βάθους 44,1 μ. ἀφίεμενος ἐκ τοῦ στομίου αὐτοῦ ; (Παραβλέπεται ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος).

519. Πόσον χρόνον χρειάζεται λίθος ριπτόμενος ἄνω κατακορύφως (εἰς τὸ κενόν), ἵνα ἀνέλθῃ εἰς ὕψος 122,5 μ. καὶ καταπέσῃ ;

520. Πόσῃ ἀρχικῇ ταχύτητι πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς λίθον, ἂν ριφθῇ κατακορύφως ἄνω (εἰς τὸ κενόν), ἵνα ἀνέλθῃ εἰς ὕψος 122,5 μ ;

521. Πότε θὰ φθάσῃ εἰς ὕψος 1 460 μ. σφαῖρα ριπτομένη κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω (εἰς τὸ κενόν) καὶ ἀναχωροῦσα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 185 μ ;

522. Ποῖαν πίεσιν ἐξασκεῖ σφαῖρα 41 χιλιογράμμων ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἔαν ἰσορροπῇ δυνάμιν 9 χιλιογράμμων ;

523. Ἐπὶ πόσα δευτερόλεπτα κυλίστα σφαῖρα ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου εἰς μῆκος 39,2 μ. καὶ ὕψος 10 μ. ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω ;

Περίληψις περιεχομένων κεφαλαίου VII.

Ὁρισμὸς διτετραγώνου ἐξισώσεως $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, ($\alpha \neq 0$).
Ἀναγωγή αὐτῆς εἰς τὴν $\alpha \psi^2 + \beta \psi + \gamma = 0$, ($x^2 = \psi$), ρίξει τῆς αἰ

$$\rho_1, \rho_2 = \pm \sqrt{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}} \quad \rho_3, \rho_4 = \pm \sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$$

$\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)(x - \rho_4)$, $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$, αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου.

Τὸ πρόσημον τοῦ τριωνύμου σπουδάζεται μετὰ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ ἀνωτέρου γινομένου.

Τροπὴ διπλῶν ριζικῶν $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ εἰς ἀπλᾶ,

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}}, \quad \text{ἂν } \Gamma^2 = A^2 - B.$$

Ἐξισώσεις μετὰ ριζικὰ β' καὶ ἀνωτέρας τάξεως. Ἀπομόνωσις τοῦ ριζικοῦ καὶ ἀπαλλοτρίωσις ἀπ' αὐτοῦ, ὅτε ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις ἔχει τὰς ρίζας τῆς δοθείσης καὶ τῆς συζυγοῦς αὐτῆς.

Ἄν δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἐν γένει ἄρρητος, ὑψοῦμεν τὰ μέλη τῆς εἰς καταλλήλους δυνάμεις, ἵνα προκύψῃ ἐξίσωσις ἀπηλλαγμένη ριζικῶν, ἀλλ' αὕτη δὲν εἶναι ἐν γένει ἰσοδύναμος τῆς δοθείσης, καὶ πρέπει νὰ δοκιμάζωμεν, ἂν αἱ ρίζαι αὐτῆς ἐπαληθεύουν καὶ τὴν δοθεῖσαν.

Ὁρισμὸς ἀντιστρόφου ἐξισώσεως. Αἱ γ' βαθμοῦ

$$\alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x - \alpha = 0, \quad \alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = 0$$

ἔχουν ἡ α' τὴν ρίζαν $x=1$ καὶ ἡ β' τὴν $x=-1$, ἀνάγονται δὲ εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων β' βαθμοῦ (μετὰ διαίρεσιν τῶν μελῶν τῶν ἐξισώσεων διὰ $x-1$, $x+1$ ἀντιστοίχως).

Διὰ τὴν λύσιν τῆς $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ τὴν θέτομεν ὑπὸ τὴν μορφήν $\alpha \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + \beta \left(x + \frac{1}{x} \right) + \gamma = 0$ καὶ $x + \frac{1}{x} = \psi$, ὅτε ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων β' βαθμοῦ.

Ἡ $\alpha x^4 + \beta x^3 - \beta x - \alpha = 0$ ἔχει ρίζας τὰς $x=1$, $x=-1$ καὶ ἀνάγεται εἰς ἐξίσωσιν β' βαθμοῦ μετὰ τὴν διαίρεσιν τοῦ α' μέλους διὰ τοῦ x^2-1 .

Ἡ $\alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 \pm \gamma x^2 + \beta x \pm \alpha = 0$ ἔχει τὴν ρίζαν $x = \pm 1$ καὶ ἀνάγεται εἰς ἀντίστροφον ἐξίσωσιν δ' βαθμοῦ.

Ὁρισμὸς διωνύμου ἐξισώσεως $\alpha x^k + \beta x^\lambda = 0$, ($\alpha, \beta \neq 0$, k, λ ἀκέραιοι θετικοί).

Τίθεται ὑπὸ μορφήν $x^\lambda (\alpha x^{k-\lambda} + \beta) = 0$, ($k > \lambda$) καὶ ἔχει ρίζας $x = 0$

καὶ τὰς τῆς $\alpha x^{\kappa-\lambda} + \beta = 0$ ἢ τῆς $x^{\nu} = \gamma$, ($\gamma = -\frac{\beta}{\alpha}$, $\kappa - \lambda = \nu$). Διακρίνομεν περιπτώσεις α'), ἂν $\nu = 2\mu$, β') ἂν $\nu = 2\mu + 1$, ὅπου μ φυσικός.

Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha|x| + \beta = 0$, εἶναι ἰσοδύναμος μετὰ τὴν $x^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ ἂν $\alpha\beta < 0$, ἐνῶ, ἂν $\alpha\beta > 0$ δέν ἔχει ρίζαν.

Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha|x| + \beta x + \gamma = 0$, ($\alpha, \beta, \gamma \neq 0$). Ἐάν $\gamma(\beta - \alpha) > 0$, ἢ $\gamma(\alpha + \beta) < 0$, ἔχομεν μίαν λύσιν δι' ἐκάστην περίπτωσιν.

Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha|x|^2 + \beta|x| + \gamma = 0$, ($\alpha \neq 0$).

Ἡ $|x|^2 + 2\beta|x| + \gamma = 0$ ἔχει 4 ρίζας ἀνὰ δύο ἀντιθέτους, ἂν $\beta^2 - \gamma > 0$ καὶ $(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \gamma}) > 0$.

Ὁρισμός συστήματος ἐξισώσεων β' βαθμοῦ (ἂν ἔχη μόνον ἰάν ἐξίσωσιν β' βαθμοῦ καὶ τὰς ἄλλας α' βαθμοῦ).

Λύσις συστήματος ἐξισώσεων β' βαθμοῦ ἢ ἀνωτέρου (μετὰ δύο ἢ περισσότερους ἀγνώστους).

Προβλήματα ἐξισώσεων καὶ συστημάτων β' βαθμοῦ (ἀριθμητικά, γενικά καὶ μετὰ διερεύνησιν).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

Α' ΠΕΡΙ ΠΡΟΟΔΩΝ

1. ΠΡΟΟΔΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

§ 205. Ἀριθμητικὴ πρόοδος* καλεῖται διαδοχὴ ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Οἱ μὲν ἀποτελοῦντες τὴν πρόοδον ἀριθμοὶ λέγονται **ὄροι** αὐτῆς, ὁ δὲ προστιθέμενος ἀριθμὸς εἰς καθένα ὄρον διὰ τὴν δώσῃ τὸν ἐπόμενον αὐτοῦ, καλεῖται **διαφορὰ** ἢ **λόγος** τῆς προόδου.

Ἄν μὲν ἡ διαφορὰ τῆς προόδου εἴναι ἀριθμὸς θετικός, οἱ ὄροι βαίνουν ἀυξανόμενοι καὶ ἡ πρόοδος λέγεται **αὐξουσα**, ἐὰν δὲ εἴναι ἀρνητικός ἀριθμὸς, οἱ ὄροι βαίνουν ἐλαττούμενοι (φθίνοντες) καὶ λέγεται **φθίνουσα**. Π.χ. ἡ διαδοχὴ τῶν ἀριθμῶν, 1, 2, 3, 4,... 48 εἶναι πρόοδος ἀριθμητικὴ αὐξουσα μὲ διαφορὰν 1, καθὼς καὶ ἡ 1, 2, 5,... 53 μὲ διαφορὰν 2, ἡ δὲ 35, 30, 25,..., 0 εἶναι φθίνουσα μὲ διαφορὰν -5.

Ἐὰν μὲ α παραστήσωμεν τὸν πρῶτον ὄρον ἀριθμητικῆς προόδου καὶ μὲ ω τὴν διαφορὰν αὐτῆς, ὁ δεῦτερος, τρίτος,... ὄρος θε παριστάνεται μὲ $\alpha + \omega$, $\alpha + 2\omega$, $\alpha + 3\omega$, $\alpha + 4\omega$,... (1) Ἄρα:

Ἐκαστος ὄρος ἀριθμητικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον ὄρον αὐτῆς, αὐξηθέντα κατὰ τὸ γινόμενον τῆς διαφορᾶς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦ πλήθους τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὄρων.

Οὕτως ὁ ὄρος τῆς προόδου (1) ὁ ἔχων π.χ. τὴν τριακοστὴν τάξιν ἰσοῦται μὲ $\alpha + 29\omega$, ὁ τὴν ἑξηκοστὴν ἐμπτην τάξιν μὲ $\alpha + 64\omega$ κ.τ.λ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι:

Ὅταν δοθῇ ὁ πρῶτος ὄρος καὶ ἡ διαφορὰ ἀριθμητικῆς προ-

* Ἡ χρῆσις ἀριθμητικῶν προόδων χρονολογεῖται ἀπὸ 2000 - 1700 π.Χ. εἰς τὸ βιβλίον Ἀριθμητικῆς τοῦ Αἰγυπτίου *Ahmes* μὲ τὸ πρόβλημα νὰ χωρισθοῦν 100 ἄρτοι εἰς 5 πρόσωπα, ὥστε τὰ μερίδια νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

όδου, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν, οἷα πᾶς ὅποτε τάξεως ὄρον αὐτῆς, καὶ λέγομεν ὅτι τότε ἡ πρόοδος εἶναι ὠρισμένη.

Ἐὰν ν παριστάνη τὸ πλήθος τῶν ὄρων τῆς (1) καὶ τ τὸν ἔχοντα τὴν νιοστὴν τάξιν ὄρον αὐτῆς, οἱ προηγούμενοι τούτου θὰ εἶναι $n-1$ τὸ πλήθος καὶ θὰ ἔχωμεν $\tau = \alpha + (n-1)\omega$ (2)

Ἄν ἡ (2) λυθῇ ὡς πρὸς ω , εὐρίσκομεν $\omega = \frac{\tau - \alpha}{n-1}$. Ἄν ἡ (2) λυθῇ ὡς πρὸς α , εὐρίσκομεν $\alpha = \tau - (n-1)\omega$, ἂν δέ λυθῇ πρὸς n , εὐρίσκομεν $n = 1 + \frac{\tau - \alpha}{\omega} = \frac{\omega + \tau - \alpha}{\omega}$, πρέπει δὲ νὰ εἶναι τὸ n ἀριθμὸς ἀκέραιος καὶ θετικός.

Παρατηρητέον, ὅτι ἡ διαφορὰ ἀριθμητικῆς προόδου μὲ ὄρους $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ δίδεται ὑπὸ τῶν $\beta - \alpha, \gamma - \beta, \delta - \gamma, \dots$

Ἐπομένως, ἂν παραστήσωμεν τὴν διαφορὰν αὐτὴν μὲ ω , θὰ ἔχωμεν $\omega = \beta - \alpha, \omega = \gamma - \beta$ καὶ προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη εὐρίσκομεν $2\omega = \gamma - \alpha$, ἄρα $\omega = \frac{\gamma - \alpha}{2}$.

Παραδείγματα. 1ον. Ὁ ὄρος, ὁ ἔχων τὴν δεκάτην τρίτην τάξιν εἰς ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ πρῶτον ὄρον 3 καὶ διαφορὰν 5, ἰσοῦται μὲ $3 + (13-1)5 = 3 + 12 \cdot 5 = 3 + 60 = 63$.

2ον. Ἐστὼ, ὅτι ζητεῖται ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος, τῆς ὁποίας ὁ ὄρος τῆς δεκάτης τάξεως εἶναι 31 καὶ τῆς εἰκοστῆς 61. Ἐχομεν, ὅτι ὁ δέκατος εἶναι $\alpha + 9\omega = 31$, ὁ εἰκοστός $\alpha + 19\omega = 61$, ἀφαιροῦντες δὲ ἐκ τῆς β' ἰσότητος τὴν α' εὐρίσκομεν

$$10\omega = 61 - 31 = 30 \quad \eta \quad 10\omega = 30 \quad \text{καὶ} \quad \omega = 3.$$

Ἐπομένως εἶναι $\alpha + 9 \cdot 3 = 31$ καὶ $\alpha = 4$. Ἄρα ἡ πρόοδος εἶναι 4, 7, 10, 13,

Ι. ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΟΡΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 206. Δοθέντων δύο ἀριθμῶν ζητεῖται νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ των ἄλλους, οἱ ὁποῖοι μετὰ τῶν δοθέντων νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Ἐὰν α καὶ τ εἶναι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ καὶ n τὸ πλήθος τῶν παρεμβληθησομένων, τὸ πλήθος, τῶν ὄρων τῆς σχηματισθησομένης προόδου θὰ εἶναι $n+2$, ὁ πρῶτος ὄρος α καὶ ὁ τελευταῖος τ . Ἐπομένως

θά έχωμεν $t = \alpha + (v+1)\omega$, άν τὸ ω παριστάνη τὴν διαφορὰν τῆς προόδου. Ἐπομένως ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῆς εὐρίσκομεν $\omega = \frac{t-\alpha}{v+1}$. Οὕτω σχηματίζεται ἡ πρόοδος ἐκ τοῦ α , τοῦ τελευταίου ὅρου t καὶ ἐκ τῆς διαφορᾶς αὐτῆς.

Ἄν π.χ. ζητῆται μεταξὺ τῶν 1 καὶ 4 νὰ παρεμβληθοῦν 16 ἀριθμοί, ὥστε μετ' αὐτῶν νὰ ἀποτελέσουν πρόοδον ἀριθμητικὴν, ἔχομεν $\alpha=1$, $t=4$, $v=16$, $\omega = \frac{4-1}{16+1} = \frac{3}{17}$ καὶ ἡ ζητούμενη πρόοδος εἶναι ἡ $1, 1\frac{3}{17}, 1\frac{6}{17}, \dots, 4$.

Ἀσκήσεις

524. Διὰ τὰς κάτωθι ἀριθμητικὰς προόδους εὑρετε ποῖα εἶναι αὐξουσαι, ποῖα φθίνουσαι καὶ διατί ;

α') 3, 5, 7, 9... β') -15, -10, -5, 0, 5... γ') 0,5, 1,5, 2,5...
δ') 0,75, 1, 1,25, 1,5... ε') 68, 64, 60... στ') -5, -5,3, -5,6, -5,9.

525. Εὑρετε τὸν δέκατον ὅρον τῆς α') 9, 13, 17... β') -3, -1, 1...
γ') τὸν ὀγδοὺν τῆς α, $\alpha+3\beta$, $\alpha+6\beta$

526. Εὑρετε τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ ὅρον τῆς δεκάτης τάξεως 231 καὶ τῆς εἰκοστῆς 2681.

527. Εὑρετε τὴν διαφορὰν τῆς προόδου, μὲ α' ὅρον α καὶ νιοστὸν t . Μερικὴ περίπτωσις $\alpha=0,2$, $t=3,2$ καὶ $v=6$.

528. Εὑρετε τὸν α' ἐκ 10 ὁρων προόδου μὲ διαφορὰν 0,75 καὶ τελευταῖον 6,25.

529. Εὑρετε τὸ πλῆθος τῶν ὁρων προόδου μὲ α' ὅρον 3, τελευταῖον 9 καὶ διαφορὰν 2.

530. Εὑρετε τὸν ὅρον τῆς εἰκοστῆς τάξεως μὲ α' ὅρον 6,35 καὶ διαφορὰν -0,25.

531. Μεταξὺ τῶν 4 καὶ 25 νὰ παρεμβληθοῦν 6 ἀριθμοί, ὥστε νὰ σχηματισθῇ ἀριθμητικὴ πρόοδος.

532. Μεταξὺ τῶν 1 καὶ 2 νὰ παρεμβληθοῦν 9 ἀριθμοί, ὥστε νὰ ἀποτελέσουν πρόοδον ἀριθμητικὴν.

533. Ὡρολόγιον κτυπᾷ τὰς ὥρας ἀπὸ τῆς πρώτης μέχρι τῆς δωδεκάτης. Πόσα κτυπήματα κάνει τὸ ἡμερονύκτιον ;

II. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ὉΡΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 207. Διὰ νὰ εὐρωμεν τύπον δίδοντα τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρων ἀριθμητικῆς προόδου ἐχούσης ὠρισμένον ἀριθμὸν ὁρων, στηριζόμεθα (πρὸς εὐκολίαν) εἰς τὴν ἐξῆς ιδιότητα :

Εἰς πᾶσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον, μὲ ὠρισμένον πλήθος ὄρων, τὸ ἄθροισμα δύο ὄρων ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων ὄρων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὄρων.

Πράγματι, ἔστω ἡ πρόοδος $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \kappa, \lambda, \tau$, (1) ἡ διαφορὰ αὐτῆς ω καὶ τὸ πλήθος τῶν ὄρων ν . Ἔχομεν ὅτι $\beta = \alpha + \omega$, $\gamma = \alpha + 2\omega$. $\tau = \lambda + \omega$ καὶ $\tau = \kappa + 2\omega$. Ἐπομένως $\lambda = \tau - \omega$ καὶ $\kappa = \tau - 2\omega$. Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς $\beta = \alpha + \omega$ καὶ $\lambda = \tau - \omega$, εὐρίσκομεν $\beta + \lambda = \alpha + \tau$, Ὅμοίως ἐκ τῶν $\gamma = \alpha + 2\omega$ καὶ $\kappa = \tau - 2\omega$ εὐρίσκομεν $\gamma + \kappa = \alpha + \tau$ κ.ο.κ., ἥτοι $\alpha + \tau = \beta + \lambda = \gamma + \kappa \dots$

Ἄς παραστήσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων τῆς προόδου μὲ Σ , ἥτοι: $\Sigma = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \kappa + \lambda + \tau$, ὅτε εἶναι καὶ $\Sigma = \tau + \lambda + \kappa + \dots + \gamma + \beta + \alpha$.

Προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη εὐρίσκομεν:

$$2\Sigma = (\alpha + \tau) + (\beta + \lambda) + (\gamma + \kappa) \dots + (\tau + \alpha)$$

$$2\Sigma = (\alpha + \tau)\nu. \text{ Ἐπομένως } \Sigma = \frac{(\alpha + \tau)\nu}{2} \quad (2), \text{ Ἥτοι:}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων ἀριθμητικῆς τινος προόδου μὲ ὠρισμένον πλήθος ὄρων ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιἄθροισμα τῶν ἄκρων ὄρων τῆς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦ πλήθους τῶν ὄρων αὐτῆς.

Ἐὰν εἰς τὴν (2) γράψωμεν ἀντὶ τοῦ τ τὸ ἴσον αὐτοῦ $\alpha + (\nu - 1)\omega$, ὅπου ω παριστάνει τὴν διαφορὰν τῆς προόδου, εὐρίσκομεν*

$$\Sigma = \frac{[\alpha + \alpha + (\nu - 1)\omega]\nu}{2} = \frac{2\alpha + (\nu - 1)\omega}{2} \cdot \nu, \text{ ἥτοι } \Sigma = \frac{2\alpha + (\nu - 1)\omega}{2} \cdot \nu.$$

Π.χ. ἂν ζητῆται τὸ ἄθροισμα τῶν δέκα πρώτων ὄρων τῆς 2, 5, 8, ... ἔχομεν $\alpha = 2$, $\omega = 3$, $\nu = 10$. καὶ $\Sigma = \frac{(2 \cdot 2 + 9 \cdot 3) \cdot 10}{2} = \frac{31 \cdot 5}{1} = 155$.

Ἐφαρμογή. Νὰ εὐρεθῇ ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ 3 ὄρους, τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἄθροισμα εἶναι 33, τὸ δὲ γινόμενον 1287.

Ἄν μὲ x παραστήσωμεν τὸν β' ὄρον τῆς προόδου καὶ μὲ ω τὴν διαφορὰν τῆς, οἱ τρεῖς ὄροι θὰ εἶναι $x - \omega$, x , $x + \omega$, τὸ ἄθροισμα τούτων $x - \omega + x + x + \omega = 3x = 33$, ἄρα $x = 11$. τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ὄρων $(x - \omega)x(x + \omega) = (x^2 - \omega^2)x$.

Ἔχομεν λοιπὸν $x(x^2 - \omega^2) = 1287$. Θέτοντες $x = 11$ εὐρίσκομεν

* Οἱ τύποι $\Sigma = \nu(\alpha + \tau) : 2$, $\tau = \alpha + (\nu - 1)\omega$, $\Sigma = \alpha\nu + [\nu\omega(\nu - 1)] : 2$ ἀναφέρονται τὸ πρῶτον εἰς τὸ βιβλίον Synopsis parlamariorum τοῦ W. Jones.

$$11(121-\omega^2)=1287, \quad 121-\omega^2=117, \quad \omega^2=121-117=4, \quad \omega=\pm\sqrt{4} \\ \omega=\pm 2.$$

*Αρα η αριθμητική πρόοδος είναι 9, 11, 13, ή 13, 11, 9. Γενικότερον, όταν εις παρόμοια προβλήματα ἔχωμεν περιττὸν πλῆθος ὄρων καὶ χρησιμοποιοῦμεν τὸ ἄθροισμά των, παριστάνομεν τὸν μεσαῖον ὄρον μὲ x π.χ., τὴν διαφορὰν μὲ ω , ἐνῷ ἂν τὸ πλῆθος τῶν ὄρων εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς, παριστάνομεν τοὺς δύο μεσαίους διαδοχικοὺς ὄρους μὲ $x-\omega$ καὶ $x+\omega$, ἥτοι ἡ διαφορὰ παριστάνεται μὲ 2ω , ὅτε εὐκόλως εὐρίσκομεν τὴν παράστασιν καὶ ἄλλων ὄρων τῆς προόδου.

Παραδείγματα. 1ον. Ζητοῦνται πέντε διαδοχικοὶ ὄροι ἀριθμητικῆς προόδου, τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἄθροισμα εἶναι α , τὸ δὲ γινόμενον γ . Παριστάνομεν κατὰ σειρὰν τὸν τρίτον ὄρον μὲ x , τὴν διαφορὰν μὲ ω , ὅτε ἔχομεν τοὺς ὄρους $x-2\omega$, $x-\omega$, x , $x+\omega$, $x+2\omega$. Ἐπομένως θὰ εἶναι ἄφ' ἑνὸς μὲν $x-2\omega+x-\omega+x+x+\omega+x+2\omega=\alpha$ ἢ $5x=\alpha$ $x=\frac{\alpha}{5}$, ἄφ' ἑτέρου ἔχομεν $(x-2\omega)(x-\omega)x(x+\omega)(x+2\omega)=\gamma$ ἢ $x(x^2-\omega^2)(x^2-4\omega^2)=\gamma$. Θέτομεν $x=\frac{\alpha}{5}$, ὅτε $\frac{\alpha}{5}\left(\frac{\alpha^2}{25}-\omega^2\right)\left(\frac{\alpha^2}{25}-4\omega^2\right)=\gamma$.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι διτετράγωνος ὡς πρὸς ω καὶ λύοντες αὐτὴν εὐρίσκομεν τὰς τιμὰς τοῦ ω καὶ ἀκολουθῶς ἔχομεν τοὺς ζητούμενους ἀριθμοὺς.

2ον. Ζητοῦνται τέσσαρες διαδοχικοὶ ὄροι ἀριθμητικῆς προόδου μὲ ἄθροισμα α καὶ γινόμενον γ .

Παριστάνομεν τοὺς ὄρους μὲ $x-3\omega$, $x-\omega$, $x+\omega$, $x+3\omega$, ὅτε θὰ ἔχωμεν $x-3\omega+x-\omega+x+\omega+x+3\omega=\alpha$ καὶ $x=\frac{\alpha}{4}$. Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν $(x-3\omega)(x-\omega)(x+\omega)(x+3\omega)=\gamma$ ἢ $(x^2-\omega^2)(x^2-9\omega^2)=\gamma$. Θέτομεν $x=\frac{\alpha}{4}$ καὶ εὐρίσκομεν $\left(\frac{\alpha^2}{16}-\omega^2\right)\left(\frac{\alpha^2}{16}-9\omega^2\right)=\gamma$.

Αὕτη λυομένη δίδει τὰς τιμὰς τοῦ ω , ἀκολουθῶς δὲ εὐρίσκομεν τοὺς ζητούμενους ἀριθμοὺς.

3ον. Ἐστω ὅτι ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων θετικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ n , ἥτοι τὸ $1+2+3+4+\dots+n$. Ἄν

*Ἡ σχολὴ τῶν Πυθαγορείων (6η καὶ 5η ἑκατονταετηρὶς π.Χ.) ἐγνώριζε τοὺς τύπους $1+2+3+\dots+n=n(n+1):2$, $2+4+6+\dots+2n=n(n+1)$, $1+3+5+\dots+2n-1=n^2$.

Σ , παριστάνη τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, θὰ ἔχωμεν $\Sigma_1 = \frac{(1+v)v}{2}$.

4ον. Ἐστω, ὅτι ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων διαδοχικῶν περιπτῶν ἀριθμῶν 1, 3, 5, 7, ..., $(2v-1)$, ἥτοι τὸ $1+3+5+7+\dots+2v-1$. Ἡ διαφορὰ τῆς προόδου εἶναι 2, ὁ πρῶτος ὅρος 1 καὶ ὁ τελευταῖος $2v-1$. Ἀρα ἔχωμεν $1+3+\dots+2v-1 = \frac{v(1+2v-1)}{2} = v^2$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὅμως πρώτη. 534. Νὰ εὑρεθῇ τὸ $1^2+2^2+3^2+\dots+v^2$.

Παρατηροῦμεν ὅτι $(\alpha+1)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1^3$. Θέτομεν διαδοχικῶς $\alpha=0, \alpha=1, \alpha=2, \alpha=3, \dots, \alpha=v$ εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν καὶ προσθέτοντες τὰς προκύπτουσας ἰσότητας κατὰ μέλη, εὐρίσκομεν μετὰ τὴν ἀπλοποίησιν.

$$(v+1)^3 = 3(1^2+2^2+\dots+v^2) + 3(1+2+\dots+v) + v+1.$$

Ἄν παραστήσωμεν μὲ Σ_2 , τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, θέσωμεν δὲ $\Sigma_1 = 1+2+\dots+v$ εὐρίσκομεν $(v+1)^3 = 3\Sigma_2 + 3\Sigma_1 + v+1$ ἢ $\Sigma_2 = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6}$.

535. Νὰ εὑρεθῇ τὸ $1^3+2^3+3^3+\dots+v^3 = \Sigma_3$. Λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα $(1+\alpha)^4 = \alpha^4 + 4\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha + 1$. Θέτομεν $\alpha=0, \alpha=1, \alpha=2, \dots, \alpha=v$ καὶ προχωροῦμεν ὁμοίως, ὅπως καὶ διὰ τὴν εὑρεσιν τοῦ Σ_2 , ὑποθέτοντες γνωστὰς τὰς τιμὰς Σ_1, Σ_2 .

536. Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα α') τῶν 25 πρώτων διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν; β') τῶν 30 πρώτων διαδοχικῶν περιπτῶν ἀριθμῶν; γ') τῶν 40 πρώτων διαδοχικῶν ἀρτίων ἀριθμῶν;

537. Εὑρετε τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ -1 μέχρι τοῦ $-v$.

538. Πόσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὀρων ἀριθμητικῆς προόδου μὲ α' ὅρον 12, τελευταῖον 144 καὶ ἄθροισμα αὐτῶν 1014;

539. Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ ἀριθμητικῆς προόδου ἐκ 14 ὀρων, ἂν ὁ α' εἶναι 8 καὶ τὸ ἄθροισμα 567.

540. Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ ἀριθμητικῆς προόδου μὲ 16 ὀρους, τῆς ὁποίας ὁ τελευταῖος ὅρος εἶναι 63 καὶ τὸ ἄθροισμα 728;

541. Πόσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὀρων ἀριθμητικῆς προόδου μὲ ἄθροισμα 456, διαφορὰν -12 καὶ τελευταῖον ὅρον 15;

542. Πόσον ἀξίζει ἐμπόρευμα, ἂν πληρώνεται εἰς 12 δόσεις καὶ ἡ α' δόσις εἶναι 100 δραχμάς, ἡ β' 150 δρχ. ἡ γ' 200 δρχ. κ.ο.κ.;

543. Ἄν ὁ 2ος καὶ ὁ 7ος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου ἔχουν ἄθροισμα 92, ὁ δὲ 4ος καὶ 11ος 71, τίνες εἶναι οἱ τέσσαρες ὅροι;

544. Ποία εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ 12 ὀρους, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων μέσων ὀρων εἶναι 74, τὸ δὲ γινόμενον τῶν ἄκρων 70;

545. Εὑρετε τοὺς πέντε ὀρους ἀριθμητικῆς προόδου ἔχοντας γινόμενον 12320 καὶ ἄθροισμα 40.

*Ο μ α ς δ ε υ τ έ ρ α. 546. Νά εὑρεθῇ ὁ νιοστός ὅρος καί τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὁρων τῆς προόδου $1, \frac{v-1}{v}, \frac{v-2}{v}, \frac{v-3}{v}, \dots$

547. Νά εὑρεθῶν τέσσερες ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἂν τὸ ἄθροισμά των εἶναι 20 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων των εἶναι $1 \frac{1}{24}$.

548. Δείξατε, ὅτι εἶναι $\Sigma_1^2 = \Sigma_3$, ὅταν $\Sigma_1 = 1+2+\dots+v$, $\Sigma_3 = 1^3+2^3+\dots+v^3$.

549.. Εὑρετε τὸ $1^2+4^2+7^2+\dots+(3n-2)^2$. (Χρησιμοποιήσατε τὴν ἰσότητα $(3\alpha-2)^2=9\alpha^2-12\alpha+4$ καὶ θέσατε $\alpha=1,2,\dots,n$).

550. Εὑρετε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ν πρώτων διαδοχικῶν περιττῶν ἀριθμῶν. (Χρησιμοποιήσατε τὴν ἰσότητα $(2\alpha-1)^2=4\alpha^2-4\alpha+1$ θέτοντες $\alpha=1, 2,\dots,n$).

551. Εὑρετε τὸ ἄθροισμα $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\dots+v(v+1)$. (Χρησιμοποιήσατε τὴν ἰσότητα $\alpha(\alpha+1)=\alpha^2+\alpha$ θέτοντες $\alpha=1, 2,\dots,n$).

552. Εὑρετε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ν πρώτων διαδοχικῶν ἀρτίων ἀριθμῶν.

2. ΠΡΟΟΔΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ

§ 208. Γεωμετρικὴ πρόοδος* καλεῖται διαδοχὴ ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του μὲ πολλαπλασιασμόν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Οἱ μὲν ἀποτελοῦντες τὴν πρόοδον ἀριθμοὶ λέγονται **ὄροι** αὐτῆς, ὁ δὲ ἀριθμὸς, ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζεται ὁρος τις, διὰ νὰ δώσῃ τὸν ἐπόμενον αὐτοῦ, λέγεται **λόγος** τῆς προόδου.

Ἐὰν μὲν ὁ λόγος τῆς προόδου **ἀπολύτως** θεωρούμενος εἶναι μεγαλύτερος τῆς 1, οἱ ὄροι **ἀπολύτως** θεωρούμενοι βαίνουν αὐξανόμενοι καὶ ἡ πρόοδος λέγεται (ἀπολύτως) **αὐξουσα**, ἐὰν δὲ ὁ λόγος **ἀπολύτως** θεωρούμενος εἶναι μικρότερος τῆς 1, οἱ ὄροι ἀπολύτως θεωρούμενοι βαίνουν ἐλαττούμενοι (φθίνοντες) καὶ ἡ πρόοδος λέγεται (ἀπολύτως) **φθίνουσα**.

Κατὰ ταῦτα, ἡ διαδοχὴ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 4, 8, 16..., 64 ἀποτελεῖ πρόοδον γεωμετρικὴν αὐξουσαν μὲ λόγον 2.

Ὅμοιως οἱ ἀριθμοὶ -5, -10, -20, -40, -80,... ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον (ἀπολύτως) αὐξουσαν μὲ λόγον τὸν 2, ἐνῶ οἱ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ καὶ οἱ $-2, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{27}, \dots$

* Αἱ γεωμετρικαὶ πρόοδοι ἐμφανίζονται τὸ πρῶτον εἰς τὸ βιβλίον Ἀριθμητικῆς τοῦ Αἰγυπτίου Ahmes, ὅπου ζητεῖται νὰ προστεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ «7, 49, 343, 2401, 16 807 καὶ εὑρίσκεται ἄθροισμα 19 607».

ἀποτελοῦν (ἀπολύτως) φθινούσας γεωμετρικὰς προόδους με ἀντιστοίχους λόγους τοὺς $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{1}{3}$.

Ἄν με α παραστήσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον γεωμετρικῆς τινος προόδου καὶ με ω τὸν λόγον αὐτῆς, ὁ ὅρος ταύτης ὁ ἔχων τὴν β' τάξιν θὰ εἶναι $\alpha\omega$, ὁ ἔχων τὴν γ' τάξιν θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ $\alpha\omega\omega = \alpha\omega^2$ κ.ο.κ., ὥστε ἡ πρόοδος θὰ παριστάνεται οὕτως :

$$\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \alpha\omega^3, \alpha\omega^4, \dots$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι :

Ὅταν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ὁ λόγος τῆς γεωμετρικῆς προόδου, τότε ἡ πρόοδος δύναται νὰ θεωρηται ὡρισμένη.

Ἐπίσης παρατηροῦμεν, ὅτι :

Ὁ τυχὼν ὅρος γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται με τὸν α' ὅρον αὐτῆς ἐπὶ τὴν δύναμιν τοῦ λόγου, τὴν ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων.

Ἐὰν με τ παραστήσωμεν τὸν ὅρον τῆς νιοστῆς τάξεως γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης α' ὅρον α καὶ λόγον ω , θὰ ἔχωμεν $\tau = \alpha\omega^{v-1}$

Ἐκ ταύτης εὐρίσκομεν $\alpha = \frac{\tau}{\omega^{v-1}}$, καὶ $\omega = \sqrt[v-1]{\frac{\tau}{\alpha}}$. Π.χ. ὁ ἔχων τὴν δεκάτην τάξιν ὅρος τῆς προόδου 2, 6, 18, ... εἶναι $2 \cdot 3^9$, διότι εἶναι $\alpha=2$, $\omega=3$, $v=10$.

Ἄν οἱ διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου παρασταθοῦν με $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \lambda, \tau$ καὶ ὁ λόγος τῆς με ω , θὰ ἔχωμεν $\beta = \alpha\omega$, $\gamma = \beta\omega, \dots$, ἄρα $\omega = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} = \dots = \frac{\tau}{\lambda}$ καὶ $\alpha = \frac{\beta}{\omega}$, $\beta = \frac{\gamma}{\omega}, \dots, \lambda = \frac{\tau}{\omega}$. Ἀρα $\beta = \alpha\omega$, $\beta = \frac{\gamma}{\omega}$ καὶ $\beta^2 = \alpha\gamma$.

§ 209. Τὸ γινόμενον δύο ὁρων γεωμετρικῆς προόδου ἰσάκεις ἀπεχόντων ἐκ τῶν ἄκρων ὁρων, ἰσοῦται με τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὁρων.

Ἐστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος με ὅρους κατὰ σειρὰν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \kappa, \lambda, \tau$, καὶ λόγον τὸν ω .

Ἐχομεν $\begin{cases} \beta = \alpha\omega \\ \lambda = \frac{\tau}{\omega} \end{cases}$. Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἰσότητες αὐτὰς κατὰ

μέλη, εύρισκομεν $\beta\lambda = \alpha\tau$. 'Επίσης έχομεν $\begin{cases} \gamma = \alpha\omega^2 \\ \kappa = \frac{\tau}{\omega^2} \end{cases}$ καὶ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμόν τούτων κατὰ μέλη $\gamma\kappa = \alpha\tau$. Οὕτως έχομεν $\alpha\tau = \beta\lambda = \gamma\kappa \dots$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν τὸ πλήθος τῶν ὄρων εἶναι ἀριθμὸς περिटτός, τότε θὰ ὑπάρχη εἰς ὅρος ἀπέχων ἐξ ἴσου ἐκ τῶν ἄκρων ὄρων, ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι μεσαῖος ὅρος τῆς προόδου (ὡς ἐκ τῆς θέσεώς του). Ἄν παρασταθῇ αὐτὸς μὲ μ , θὰ εἶναι κατὰ τὰ ἀνωτέρω.

$$\mu\mu = \beta\lambda = \alpha\tau \quad \eta \quad \mu^2 = \alpha\tau \quad \text{καὶ} \quad \mu = \sqrt{\alpha\tau}.$$

1. ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΟΡΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 210. Δίδονται δύο ἀριθμοί, α , β καὶ ζητεῖται νὰ παρεμβάλωμεν μετὰξὺ αὐτῶν n ἄλλους, οἱ ὁποῖοι μετὰ τῶν δοθέντων n ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ω , τὸν λόγον τῆς προόδου, ἡ ὁποία θὰ σχηματισθῇ, ἐπειδὴ τὸ πλήθος τῶν ὄρων αὐτῆς θὰ εἶναι $n+2$, ὁ τελευταῖος ὅρος $\beta = \alpha\omega^{n+1}$. Ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῆς εύρισκομεν :

$$\omega^{n+1} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \omega = \sqrt[n+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$$

(ἂν $n+1 = \text{ἄρτιος}$, πρέπει $\frac{\beta}{\alpha} > 0$, διὰ νὰ ἔχωμεν ὁρους πραγματικoὺς ἀριθμούς.). Ἐπομένως ἡ ζητούμενη πρόοδος θὰ εἶναι

$$\alpha, \alpha \sqrt[n+1]{\frac{\beta}{\alpha}}, \alpha \sqrt[n+1]{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}, \dots$$

Π.χ. ἂν ζητῆται νὰ παρεμβληθοῦν ἐννέα ἀριθμοὶ μετὰξὺ τῶν 1 καὶ 2, οἵτινες μετὰ τῶν δοθέντων n ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόο-

δον, έχομεν $n=9$ καὶ $\omega = \sqrt[10]{2} = 2^{\frac{1}{10}}$. Ἐπομένως ἡ πρόοδος εἶναι

$$1, 2^{\frac{1}{10}}, 2^{\frac{2}{10}}, 2^{\frac{3}{10}}, \dots$$

Ἀσκήσεις

553. Ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι προόδων εἶναι αὐξουσai, ποῖαι φθίνουσai καὶ διατί ;
 α') 5, 10, 20... β') 3, -6, 12,... γ') 7, -28, 112... δ') 135, 27, 5,4....

$$\epsilon') \frac{32}{81}, \frac{16}{27}, \frac{8}{9} \dots \sigma\tau') -4, \frac{8}{3}, -\frac{16}{9}, \dots$$

554. Νά εὑρεθῇ ὁ ὅρος τῆς ἐβδόμης τάξεως τῆς γεωμετρικῆς προόδου 2, 6, 18...

555. Νά εὑρεθῇ ὁ λόγος γεωμετρικῆς προόδου μέ πρῶτον ὅρον τὸν 9 καὶ πέμπτον τὸν 144.

556. Νά εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς προόδου, ὅταν ὁ πρῶτος ὅρος τῆς εἶναι 2, ὁ τελευταῖος 512 καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὀρων 9.

557. Νά εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ τελευταῖος ὅρος εἶναι 156,25, ὁ προτελευταῖος 62,5 καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὀρων 6.

558. Πόσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὀρων γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 6, ὁ δεύτερος 12 καὶ ὁ τελευταῖος 3 072 ;

559. Εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ὀρων γεωμετρικῆς προόδου μέ α' ὅρον 23,75, λόγον -0,925 καὶ τελευταῖον -7,375 ;

560. Εὑρετε τὸ πλῆθος τῶν ὀρων γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης τετάρτης τάξεως ὅρον 13, ἑκτῆς 117 καὶ τελευταῖον 9 477.

561. Εὑρετε τὸν λόγον γεωμετρικῆς προόδου, ἐχούσης τρίτης τάξεως ὅρον τὸν 12 καὶ ὀγδὸς τὸν 384.

II. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 211. *Εστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος, α, αω, αω², ..., αωⁿ⁻¹ ἐκ n ὀρων. Ἐὰν ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρων αὐτῆς καὶ παραστήσωμεν αὐτὸ μέ Σ, θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^{n-1} \quad (1)$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ ω, ἀφαιρέσωμεν δὲ ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον Σω=αω+αω²+...+αωⁿ τὴν (1) (κατὰ μέλη), προκύπτει Σω-Σ=αωⁿ-α ἢ Σ·(ω-1)=αωⁿ-α, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν διαιροῦντες τὰ ἴσα διὰ τοῦ ω-1, (τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται ≠ 0, δηλαδή ω ≠ 1) Σ = $\frac{\alpha\omega^n - \alpha}{\omega - 1}$ (2)

*Αν εἰς τὴν ἰσότητα ταύτην θέσωμεν τὸ τ ἀντὶ τοῦ αωⁿ⁻¹, τὸ ὁ-

* Ἡ Γενικὴ ἄθροις ὀρων γεωμετρικῆς προόδου ὀφείλεται εἰς τοὺς Ἕλληνας κατ' ἐπέκτασιν τῆς ἀναλογίας α:χ=x:γ, ἐκρησιμοποιεῖτο δὲ τὸ πρῶτον ἢ α, αβ, αβ²... Γενικώτερα μορφή ἄθροίσεως παρουσιάζεται τὸ πρῶτον εἰς τὸ ἔργον «Algorithmus de Integris» (1410) τυπωθὲν ἐν Παδοῦν (1483) καὶ ἐν Βενετίᾳ (1540) ὑπὸ τοῦ Ἰταλοῦ Prosdócimo de Beldomanti, ὁ ὁποῖος ἐκρησιμοποίησε τὸν τύπον α+αφ+αφ²+...+αφⁿ⁻¹=αφⁿ⁻¹+(αφⁿ⁻¹-βα):(φ-1), ὅχι μὲ σύμβολα, ἀλλὰ μὲ παραδείγματα μόνον. Γενικὸν τύπον προσθέσεως ὀρων γεωμετρικῆς προόδου δίδει ὁ Γάλλος F. Viète (1540 - 1603, Παρίσιοι).

ποῖον παρίστανει τὸν τελευταῖον ὅρον τῆς (1), θὰ ἔχωμεν τὸ ζητούμενον ἄθροισμα.

$$\Sigma = \frac{\alpha\omega^{n-1} \cdot \omega - \alpha}{\omega - 1} = \frac{\tau\omega - \alpha}{\omega - 1} \text{ καὶ } \frac{\alpha\omega^n - \alpha}{\omega - 1} = \frac{\alpha}{1 - \omega} - \frac{\alpha\omega^n}{1 - \omega} \quad (3)$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ὡς ἑξῆς :

Ἔχομεν $\alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^{n-1} = \alpha(1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1})$.

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1}$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(\omega^n - 1) : (\omega - 1)$, ἄρα :

$$\alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^{n-1} = \alpha \cdot \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = \alpha \cdot \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = \frac{\alpha}{1 - \omega} - \frac{\alpha\omega^n}{1 - \omega}.$$

III. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΑΠΕΙΡΩΝ ΟΡΩΝ ΦΘΙΝΟΥΣΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 212. Ἄν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα γεωμετρικὴ πρόοδος εἶναι φθίνουσα * μὲ ἀπείρουν πλῆθος ὄρων, δηλαδή ὅτι ἔχομεν τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον (1') $\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \alpha\omega^3, \dots$ (ἐπ' ἀπείρουν), ἐνῶ τὸ ω εἶναι ἀπολύτως < 1 , τότε τὸ ω^n θὰ εἶναι ἀριθμὸς πολὺ μικρὸς, ὅταν τὸ n εἶναι πολὺ μεγάλος (θετικὸς). Ὅταν δὲ τὸ n ὑπερβαίνει πάντα δοθέντα θετικὸν ἀριθμὸν καὶ τείνῃ εἰς τὸ ∞ , τὸ ω^n καθὼς καὶ τὸ $\alpha\omega^n$ γίνεται ἀπολύτως μικρότερον παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ καὶ λέγομεν, ὅτι **τείνει** εἰς τὸ 0.

Ἐὰν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὄρων τῆς προόδου, τὸ $\Sigma = \frac{\alpha\omega^n - \alpha}{\omega - 1}$ γράψωμεν οὕτω: $\Sigma = \frac{\alpha - \alpha\omega^n}{1 - \omega} = \frac{\alpha}{1 - \omega} - \frac{\alpha\omega^n}{1 - \omega}$ καὶ ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ $n \rightarrow \infty$, τότε λέγομεν, ὅτι προσθέτομεν τοὺς ἀπείρους ὁρους τῆς προόδου, ἐπεὶ δὲ τὸ μὲν $\frac{\alpha}{1 - \omega}$ εἶναι ἀριθμὸς ὠρισμένος, τὸ δὲ $\alpha\omega^n \rightarrow 0$, θὰ ἔχωμεν ὡς ἄθροισμα τῆς (1') τὸ $\frac{\alpha}{1 - \omega}$, δηλαδή ἔχομεν:

$$\alpha + \alpha\omega + \dots + \alpha\omega^{n-1} = \frac{\alpha}{1 - \omega}, \quad \omega < 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad \text{Ἡτοι:}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων τῶν πλῆθος ὄρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν

* Ἡ φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος $1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$, ἐμφανίζεται τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Ἑλληνος μαθηματικοῦ Ἀρχιμήδους (287-212 π.Χ., Συρακοῦσαι).

πρώτον ὄρον, παρονομαστήν δὲ τὴν μονάδα ἡλαττωμένην κατὰ τὸν λόγον τῆς προόδου.

Κατὰ ταῦτα τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων τῆς $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots$, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι $\omega = \frac{1}{2}$ καὶ $\alpha = 1$, εἶναι $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων τῆς προόδου $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$ εἶναι $\frac{4}{1 - \frac{1}{2}} = 8$.

Ἀσκήσεις καὶ Προβλήματα

Ὁ μᾶς πρώτη. 562. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων γεωμετρικῆς προόδου, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι :

α') $\alpha=25, \omega=-3, v=7, \beta')$ $\alpha=7, \tau=5103, v=7, \gamma')$ $\tau=0,0625, \omega=0,5, v=13$.

563. Πόσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὄρων γεωμετρικῆς προόδου μέ

α') $\alpha=4, \omega=4$, καὶ ἄθροισμα $\Sigma=5460$, β') $\alpha=4,6, \omega=108, \Sigma=54\,155,8$.

γ') $\alpha=5, \tau=1280, \Sigma=2\,555$.

564. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἐκάστης τῶν ἐπομένων προόδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀπείρους ὄρους :

α') $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \dots$ β') $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$ γ') $2, -1\frac{1}{3}, \frac{8}{9}, \dots$ δ') $0,86\,86\dots$

565. Εὑρετε τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων τῶν γεωμετρικῶν προόδων, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν, ἂν μεταξὺ α') τῶν 13,7 καὶ 3507,2 παρεμβληθοῦν 7 γεωμ. μέσοι, β') τῶν 48,6 καὶ 0,2 παρεμβληθοῦν 4 γεωμ. μέσοι.

566. Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὄρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων γεωμετρικῆς προόδου, εἰς τὴν ὁποίαν $\tau=384, \omega=2, v=8$.

567. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα α') $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots$ (ἐπ' ἀπειρον).

(Παρατηρήσατέ ὅτι εἶναι $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} + \dots$ (ἐπ' ἀπειρον).

β') $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots$ (ἐπ' ἀπειρον).

* Ὁ Stiffel (1544) εἰς τὸ ἔργον του «Arithmetica Integra» ἐθεώρησε τὸ ἄθροισμα ὄρων γεωμετρικῆς προόδου $1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81}$ καὶ προσέθεσε πεπερασμένον πλῆθος ὄρων.

Ὁ μᾶς δευτέρᾳ. 568. Ἐν $\alpha > \beta > 0$, νὰ εὕρεθω τὰ ἀθροίσματα

$$\alpha') \alpha^n + \beta\alpha^{n-1} + \beta^2\alpha^{n-2} + \dots \quad \beta') \alpha + \beta + \frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\beta^3}{\alpha^2} + \dots$$

569. Εἰς τετράγωνον (ἢ ἰσοπλευρον τρίγωνον) μὲ μήκος τῆς πλευρᾶς του α , συνδέομεν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ εὐρίσκομεν νέον τοιοῦτο. Τὸ αὐτὸ ἐπαναλαμβάνομεν εἰς τὸ νέον τοῦτο καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Νὰ εὕρεθῇ τὸ ἀθροίσμα τῶν ἐμβαδῶν καὶ τῶν περιμέτρων τῶν ἀπείρων τούτων τετραγώνων (ἢ τριγώνων).

570. Εἰς κύκλον μὲ μήκος τῆς ἀκτίνος ρ ἐγγράφομεν τετράγωνον, εἰς τοῦτο κύκλον, εἰς τὸν κύκλον τετράγωνον κ.ο.κ. Νὰ εὕρεθῇ τὸ ἀθροίσμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἀπείρων τούτων κύκλων καὶ τετραγώνων.

571. Νὰ εὕρεθω αἱ γωνίαι τετραπλευροῦ, ἂν ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ ἡ τετάρτη εἶναι ἑννεαπλασία τῆς δευτέρας.

572. Νὰ μερισθῇ ὁ 221 εἰς τρία μέρη ἀποτελοῦντα γεωμετρικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας ὁ γ' ὅρος νὰ ὑπερβαίνει τὸν α' κατὰ 136.

573. Τὸ μὲν ἀθροίσμα τριῶν διαδοχικῶν ὄρων γεωμετρικῆς προόδου εἶναι 248, ἡ δὲ διαφορά τῶν ἄκρων ὄρων εἶναι 192. Τίνες οἱ τρεῖς ὄροι;

574. Δείξατε, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ὄρων γεωμετρικῆς προόδου μὲ n ὄρους καὶ ἄκρους ὄρους α καὶ τ ἰσοῦται μὲ $\sqrt[n]{(\alpha\tau)^n}$.

3. ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

§ 213. Καλεῖται **ἀρμονικὴ** πρόοδος διαδοχὴ ἀριθμῶν, ἂν οἱ ἀντίστροφοι τούτων κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον. Π.χ. ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 5, 7, ... ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, οἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$ λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ἀρμονικὴν πρόοδον.

Ὁμοίως οἱ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ἀποτελοῦν ἀρμονικὴν πρόοδον, ἐπεὶ δὴ οἱ 1, 2, 3, ... ὀρίζουσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Ἐὰν α, β, γ εἶναι τρεῖς διαδοχικοὶ ὄροι ἀρμονικῆς προόδου οὐδεὶς ἐξ αὐτῶν εἶναι 0, διότι οἱ ἀντίστροφοὶ τῶν οἱ $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ θὰ εἶναι διαδοχικοὶ ὄροι ἀριθμητικῆς προόδου δηλ. ἀριθμοὶ ὠρισμένοι, καὶ θὰ ἔχωμεν $\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}$ ἢ $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$ καὶ $\beta = \frac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}}$. Ὁ

β καλεῖται **μέσος ἀρμονικὸς** τῶν α, β, γ , εἶναι δὲ καὶ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\beta}$ ἢ $\beta\gamma + \alpha\beta = 2\alpha\gamma$, $\alpha\gamma - \beta\gamma = \alpha\beta - \alpha\gamma$, $(\alpha - \beta)\gamma = (\beta - \gamma)\alpha$ καὶ $\frac{\alpha - \beta}{\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma}$

*Αν δοθοῦν δύο ἀριθμοὶ π.χ. α, β καὶ ζητεῖται νὰ παρεμβληθοῦν μεταξὺ αὐτῶν n ἀριθμοί, οἱ ὅποιοι μετὰ τῶν δοθέντων νὰ ἀποτελέσουν ἀρμονικὴν πρόοδον, παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ θὰ εἶναι οἱ ἄκροι ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου μὲ $n + 2$ ὅρους, καὶ οἱ ἐνδιάμεσοι αὐτῶν εἶναι οἱ ἀντίστροφοι ἀριθμοὶ τῶν ζητούμενων. Εὐρίσκουμεν τὸν λόγον, ἔστω ω , τῆς ἐν λόγω ἀριθμητικῆς προόδου, ὅτε

$$\omega = \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}}{n+1},$$

σχηματίζουμεν τοὺς ὅρους τῆς ἀριθμητικῆς προόδου καὶ οἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί. Π.χ. ὁ ἐπόμενος τοῦ ὅρου $\frac{1}{\alpha}$ τῆς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι ὁ $\frac{1}{\alpha} + \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right) : (n+1) = \frac{1}{\alpha} + (\alpha - \beta) : (n+1)\alpha\beta$, ὁ δὲ ἀντίστροφος τούτου ἀριθμὸς εἶναι ὁ μετὰ τὸ πρῶτον ὅρος τῆς ἀρμονικῆς προόδου.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

575. Εὑρετε τὴν ἀρμονικὴν πρόοδον μὲ 20 ὅρους, τῆς ὁποίας οἱ δύο πρῶτοι ὅροι εἶναι α') 1, $\frac{1}{2}$. β') $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, γ') 1, $\frac{1}{3}$.

576. Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 0,25 καὶ 0,025 νὰ παρεμβληθοῦν 18 ἀριθμοί, ὥστε μετὰ τῶν δοθέντων νὰ ἀποτελέσουν ἀρμονικὴν πρόοδον.

Β' ΠΕΡΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

§ 214. Καλοῦμεν **λογάριθμον** ἀριθμοῦ τινὸς A ὡς πρὸς βάσιν τὸν ἀριθμὸν 10, τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τοῦ 10, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ τὸν A^* . Ἦτοι ἂν εἶναι $10^a = A$, τὸ a λέγεται **λογάριθμος** τοῦ A ὡς

* Καλοῦμεν **νεπέριον** **λογάριθμον** ἀριθμοῦ τὸν **λογάριθμον** αὐτοῦ ὡς πρὸς βάσιν τὸν ἀσύμμετρον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος παριστάνεται μὲ τὸ γράμμα e καὶ εἶναι $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1,2} + \frac{1}{1,2 \cdot 3} + \dots$ (ἐπ' ἀπειρον) ἢ $e = 2,718281828\dots$ Ὁ e δὲν εἶναι ρίζα ἀλγεβρικῆς ἐξίσωσως καὶ διὰ τοῦτο λέγεται καὶ **ὑπερβατικὸς** ἀριθμὸς (ὡς καὶ ὁ ἀριθμὸς $\pi = 3,14159\dots$). Ἡ ἐφεύρεσις τῶν νεπερίων **λογαρίθμων** ὀφείλεται εἰς τὸν John Naper (1614), ὀλίγον δὲ βραδύτερον ὁ Briggs (1624) ἐδημοσίευσεν πίνακα δεκαδικῶν **λογαρίθμων** ἀπὸ 1 μέχρι 20 000.

Μία ἐξίσωσις λέγεται **ἀλγεβρικὴ**, ἂν τὸ πρῶτον μέλος τῆς εἶναι ἀκέραιον πο-

πρὸς βάσιν 10 ἢ ἀπλῶς λογάριθμος τοῦ A καὶ σημειώνεται συμβολικῶς ὡς ἐξῆς: $\alpha = \log A$ ἢ $\log A = \alpha$, ἀπαγγέλλεται δὲ ἡ ἰσότης αὕτη οὕτως:

Ὁ λογάριθμος τοῦ A εἶναι ἴσος μὲ α .

Ἐπειδὴ εἶναι $10^0 = 1$ καὶ $10^1 = 10$, ἔπεται ὅτι:

Λογάριθμος τοῦ μὲν 1 εἶναι τὸ 0, τοῦ δὲ 10 ἡ 1.

Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι:

Δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ ὑπάρχει εἰς μόνος λογάριθμος αὐτοῦ.

1ον. Ἐστω ἀριθμὸς $A > 0$. Λαμβάνομεν ἓνα ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμὸν ν καὶ σχηματίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς $0, \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \frac{3}{\nu}, \dots$ καὶ τὰς δυνάμεις $10^0, 10^{\frac{1}{\nu}}, 10^{\frac{2}{\nu}}, 10^{\frac{3}{\nu}}, \dots$, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν πρόοδον γεωμετρικὴν αὐξουσαν, ἐπειδὴ εἶναι $10^{\frac{1}{\nu}} > 1$ (διότι ἂν ἦτο $10^{\frac{1}{\nu}} \leq 1$ ὑποῦντες τὰ ἄνισα αὐτὰ εἰς τὴν ν δύναμιν, θὰ εἶχομεν $10 \leq 1$). Οἱ ὅροι τῆς προόδου ταύτης βαίνουν αὐξανόμενοι ἀπὸ τοῦ α' καὶ ἐξῆς, καὶ ἂν μὲν τύχη εἰς ἐξ αὐτῶν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν A, ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως ταύτης εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ A, ἂν δὲ δὲν συμβαίῃ τοῦτο, θὰ περιέχεται ὁ A μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὄρων τῆς προόδου, ἔστω τῶν $10^{\frac{\mu}{\nu}}$ καὶ $10^{\frac{\mu+1}{\nu}}$, ἥτοι θὰ εἶναι $10^{\frac{\mu}{\nu}} < A < 10^{\frac{\mu+1}{\nu}}$.

Οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοί, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ A, διαφέρουν κατὰ $10^{\frac{\mu+1}{\nu}} - 10^{\frac{\mu}{\nu}} = 10^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot 10^{\frac{1}{\nu}} - 10^{\frac{\mu}{\nu}} = 10^{\frac{\mu}{\nu}} (10^{\frac{1}{\nu}} - 1)$.

Ἄλλ' ἡ διαφορά αὕτη δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ θετικοῦ, ἂν λάβωμεν καταλλήλως τὸ ν . Διότι τὸ $10^{\frac{1}{\nu}} - 1$ δύναται νὰ γίνῃ ἀπολύτως μικρότερον παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ, ὅταν τὸ ν ὑπερβαίῃ κατάλληλον ἀριθμὸν. Τοῦτο συμβαίνει, διότι τὸ $10^{\frac{1}{\nu}}$ διηλεκῶς ἐλαττοῦται, ὅταν αὐξάνεται τὸ ν , πλησιάζει δὲ τὸ $10^{\frac{1}{\nu}}$ πρὸς τὴν 1.

λυώνυμον ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους αὐτῆς, ἔνῳ τὸ δεύτερον μέλος της εἶναι μηδέν. Ἡ ρίζα ἀλγεβρικής ἐξίσωσης πραγματικῇ ἢ μιγαδικῇ λέγεται **ἀλγεβρικός ἀριθμός**.

Οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ δύναται νὰ εἶναι ρητοὶ ἢ ἀσύμμετροι, ἀλλὰ δὲν ἔπεται ὅτι κάθε ἀσύμμετρος εἶναι ἀλγεβρικός ἀριθμός. Παράδειγμα οἱ ἀνωτέρω ἀριθμοὶ e καὶ π .

ὅταν τὸ n τείνει εἰς τὸ ∞ . Ἀφοῦ λοιπὸν οἱ δύο ἀριθμοί, μεταξύ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ A , διαφέρουν ἀπολύτως κατὰ ποσότητα ὅσον θέλομεν μικρὰν (ὅταν λάβωμεν τὸ n ἀρκούντως μέγα), κατὰ μείζονα λόγον ὁ A θὰ διαφέρῃ ἀπολύτως ἀπὸ ἑκάστον τῶν ἀριθμῶν τούτων κατὰ ποσότητα ὅσον θέλομεν μικρὰν. Ἦτοι εἶναι ὁ A ὄριον ἐκάστου τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ λάβωμεν (κατὰ προσέγγισιν) τὸν A ἴσον μὲ ἑκάστον τῶν ἀριθμῶν τούτων (ὅταν τὸ n ληφθῇ ἀρκούντως μέγα), ἥτοι νὰ θέσωμεν $A = 10^{\frac{\mu}{\nu}}$, ὅτε εἶναι $\log A = \frac{\mu}{\nu}$ ἢ $10^{\frac{\mu+1}{\nu}} = A$, ὅτε $\log A = \frac{\mu+1}{\nu}$. Οἱ δύο οὗτοι λογάριθμοι τοῦ A διαφέρουν κατὰ $\frac{1}{\nu}$, τὸ ὅποιον τείνει εἰς τὸ 0, ὅταν τὸ n τείνῃ εἰς ∞ .

2ον. Ἐστω ὅτι εἶναι $0 < A < 1$. Παρατηροῦμεν ὅτι θὰ εἶναι $\frac{1}{A} > 1$. Ἐπομένως ὁ $\frac{1}{A}$ θὰ ἔχῃ λογάριθμον, ἔστω τὸν $\frac{\kappa}{\lambda}$, δηλαδὴ θὰ εἶναι $\frac{1}{A} = 10^{\frac{\kappa}{\lambda}}$. Ἀντιστρέφοντες τὰ ἴσα, θὰ ἔχωμεν $A = \frac{1}{10^{\frac{\kappa}{\lambda}}} = 10^{-\frac{\kappa}{\lambda}}$, ἐπομένως $\log A = -\frac{\kappa}{\lambda}$. Λέγομεν τώρα, ὅτι εἷς μόνος λογάριθμος τοῦ A ὑπάρχει. Διότι, ἐὰν εἶχομεν π.χ. $v = \log A$ καὶ $\rho = \log A$, θὰ ἦτο $10^v = A$, $10^\rho = A$ καὶ $10^v = 10^\rho$, ἄρα καὶ $10^{v-\rho} = 1$, ἐπομένως $v - \rho = 0$ ἢ $v = \rho$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι :

Πᾶς ἀριθμὸς $A > 0$ ἔχει ἓνα μόνον λογάριθμον, θετικὸν μὲν ἂν $A > 1$, ἀρνητικὸν δὲ ἂν $A < 1$.

Παρατηρήσεις. Ἀρνητικὸς ἀριθμὸς τις δὲν ἔχει (πραγματικόν) λογάριθμον, ἐπειδὴ δι' οὐδεμίαν (πραγματικὴν) τιμὴν τοῦ x ἡ δύναμις 10^x δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικόν, διότι τὸ $10^x = \text{θετ. ἀριθμ.}$, τὸ $10^{-x} = \frac{1}{10^{|x|}} = \text{θετικὸς ἀριθμ.}$

2α. Ἀριθμὸς τις σύμμετρος α δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς λογάριθμος τοῦ 10^α , εἶναι δὲ οὗτος ὁ μόνος, ὅστις ἔχει λογάριθμον τὸν α .

3η. Πᾶσα δύναμις τοῦ 10 μὲ ἐκθέτην ἀριθμὸν σύμμετρον ἔχει λογάριθμον τὸν σύμμετρον τοῦτον ἐκθέτην, πᾶς δὲ ἄλλος ἀριθμὸς ἔχει λογάριθμον ἀσύμμετρον ἀριθμὸν.

Διότι, ἂν εἶχε λογάριθμον σύμμετρον ἀριθμόν, θὰ ἦτο οὗτος ἴσος μὲ δύναμιν τοῦ 10 ἔχουσιν ἐκθέτην τὸν σύμμετρον τοῦτον, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν γενομένην ὑπόθεσιν.

Οἱ ἀριθμοὶ $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots, 10^n$, ὅπου n ἀκέραιος, ἔχουν ἀντιστοίχως λογαρίθμους $0, 1, 2, 3, \dots, n$.

Οἱ ἀριθμοὶ $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots, 10^{-n}$ ἢ οἱ ἴσοι των ἀντιστοίχως $0,1, 0,01, 0,001, \dots, 0,00\dots 01$ ἔχουν ἀντιστοίχως λογαρίθμους $-1, -2, -3, \dots, -n$.

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

§ 215. α') Ὁ λογάριθμος γινομένου ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων αὐτοῦ.

Ἐστω, ὅτι εἶναι $\log A = \alpha, \log B = \beta, \log \Gamma = \gamma$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\log(A \cdot B \cdot \Gamma) = \alpha + \beta + \gamma = \log A + \log B + \log \Gamma$.

Διότι κατὰ τὸν ὅρισμόν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν

$$10^\alpha = A, 10^\beta = B, 10^\gamma = \Gamma$$

καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰ ἴσα ταῦτα μέλη εὐρίσκομεν

$$10^\alpha \cdot 10^\beta \cdot 10^\gamma = A \cdot B \cdot \Gamma \quad \eta \quad 10^{\alpha+\beta+\gamma} = A \cdot B \cdot \Gamma.$$

Ἀλλ' ἡ ισότης αὕτη ὁρίζει, ὅτι :

$$\log(A \cdot B \cdot \Gamma) = \alpha + \beta + \gamma = \log A + \log B + \log \Gamma.$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον δεικνύεται ἡ ιδιότης καὶ διὰ περισσοτέρας παραγόντας.

Συνήθως, ὅταν δοθῇ ἀκέραιος ἀριθμός, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς γινόμενον πρῶτων (ἢ μὴ) παραγόντων καὶ ἐπὶ τοῦ γινομένου αὐτῶν ἐφαρμόζομεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα περὶ λογαρίθμου γινομένου.

Π.χ. ἔχομεν $\log 420 = \log(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4) = \log 3 + \log 5 + \log 7 + \log 4$.

β') Ὁ λογάριθμος πηλίκου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρετέου μείον τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου.

Ἐστω, ὅτι εἶναι $\log A = \alpha, \log B = \beta$. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$. Διότι κατὰ τὸν ὅρισμόν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν $10^\alpha = A, 10^\beta = B$, διαιροῦντες δὲ τὰς ἰσότητας κατὰ μέλη εὐρίσκομεν

$$\frac{10^\alpha}{10^\beta} = \frac{A}{B} \quad \eta \quad 10^{\alpha-\beta} = \frac{A}{B}. \quad \text{Ἀλλ' ἡ ισότης αὕτη ὁρίζει ὅτι :}$$

$$\log \frac{A}{B} = \alpha - \beta = \log A - \log B.$$

$$\text{Οὕτως ἔχομεν π.χ. } \log 5^{\frac{2}{3}} = \log \frac{17}{3} = \log 17 - \log 3$$

γ') 'Ο λογάριθμος οἰασδήποτε δυνάμεως ἀριθμοῦ ἰσοῦται μετὰ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως αὐτῆς.

*Εστω, ὅτι εἶναι $\log A = \alpha$ καὶ ὅτι ἔχομεν τὴν δύναμιν A μετὰ ἐκθέτην μ οἰονδήποτε. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\log A^\mu = \mu \cdot \log A$.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $\log A = \alpha$, θὰ ἔχωμεν $10^\alpha = A$ καὶ ὑψοῦντες τὰ ἴσα εἰς τὴν μ δύναμιν εὐρίσκομεν $(10^\alpha)^\mu = A^\mu$ ἢ $10^{\mu \cdot \alpha} = A^\mu$. Ἀλλὰ ἡ ἰσότης αὕτη ὀρίζει, ὅτι $\log A^\mu = \mu \cdot \alpha = \mu \log A$.

$$\text{Κατὰ ταῦτα ἔχομεν } \log A^{\frac{1}{v}} = \frac{1}{v} \log A \text{ ἢ } \log \sqrt[v]{A} = \frac{\log A}{v}, \text{ ἥτοι:}$$

δ') 'Ο λογάριθμος ρίζης ἀριθμοῦ ἰσοῦται μετὰ τὸν λογάριθμον τοῦ ὑπορρίζου, διηρημένον διὰ τοῦ δείκτου τῆς ρίζης.

ε') Ἐὰν εἶναι A, B δύο ἀριθμοὶ (θετικοὶ) καὶ $A > B$, θὰ εἶναι καὶ $\log A > \log B$, ἐὰν ἡ βᾶσις τῶν λογαρίθμων εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος. Διότι ἀφοῦ εἶναι $A > B$, θὰ ἔχωμεν διαιροῦντες τὰ ἄνισα μετὰ $\frac{A}{B} > 1$. Ἀλλ' ἀφοῦ ὁ $\frac{A}{B}$ εἶναι > 1 ἔχει λογάριθμον θετικόν, ἥτοι ἔχομεν $\log \frac{A}{B} > 0$, ἢ $\log A - \log B > 0$, ἄρα $\log A > \log B$.

* Α Σ Κ Η Σ Ι Σ

577. Νὰ δεიχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν κάτωθι ἰσοτήτων:

$$\alpha') \log 15 = \log 3 + \log 5,$$

$$\beta') \log 55 = \log 5 + \log 11.$$

$$\gamma') \log 2^{\frac{1}{3}} = \log 7 - \log 3,$$

$$\delta') \log 49 = 2 \log 7,$$

$$\epsilon') \log \sqrt{20} = (\log 20):2,$$

$$\sigma\tau') \log \sqrt[647]{3} = 3(\log 647):2,$$

$$\zeta') 6 \log 32 = \log 32^6,$$

$$\eta') \log 5 + \log 7 + \log 4 = \log 140.$$

2. ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΥ ΤΟΥ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ

§ 216. Καλοῦμεν **χαρακτηριστικὸν** λογαρίθμου τινός, τὸν μικρότερον ἐκ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ λογάριθμος αὐτός.

*Εστω ἀριθμὸς τις, περιεχόμενος μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 10 π.χ. ὁ 7. Ἐπειδὴ $1 < 7 < 10$, ἔχομεν $\log 1 < \log 7 < \log 10$ ἢ $0 < \log 7 < 1$. *Η-

τοί ο λογάριθμος αριθμοῦ περιεχομένου μεταξύ 1 καὶ 10 ἔχει χαρακτηριστικὸν 0.

Ἄν ἀριθμὸς τις περιέχεται μεταξύ τῶν 10 καὶ 100, π.χ. ὁ 47, ἐπεὶδὴ $10 < 47 < 100$, θὰ ἔχωμεν $\log 10 < \log 47 < \log 100$ ἢ $1 < \log 47 < 2$. Ἦτοι πᾶς τοιοῦτος ἀριθμὸς ἔχει λογάριθμον μὲ χαρακτηριστικὸν 1 κ.ο.κ. Ἐπειδὴ ὁμως πᾶς ἀριθμὸς περιεχόμενος α') μεταξύ 1 καὶ 10 ἔχει ἀκέραιον μέρος μονοψήφιον, β') μεταξύ 10 καὶ 100 ἔχει ἀκέραιον μέρος διψήφιον κ.ο.κ., ἔπεται ὅτι :

Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ $A > 1$ ἔχει τόσας ἀκεραίας μονάδας, ὅσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου του μέρους ἡλαττωμένον κατὰ 1.

Π.χ. τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ $\log 235$ εἶναι 2, τοῦ 12,4 εἶναι 1, τοῦ 3 835,24 εἶναι 3 κ.τ.λ.

Ἔστω τώρα ἀριθμὸς τις περιεχόμενος μεταξύ τῶν 0,1 καὶ 1, π.χ. ὁ 0,34. Ἐπειδὴ εἶναι $0,1 < 0,34 < 1$, ἔχομεν $\log 0,1 < \log 0,34 < \log 1$ ἢ $-1 < \log 0,34 < 0$. Ἦτοι ὁ λογάριθμος παντὸς τοιοῦτου ἀριθμοῦ περιέχεται μεταξύ τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων -1 καὶ 0 καὶ ἔχει συνεπῶς χαρακτηριστικὸν -1 ,

Ἄν ἀριθμὸς περιέχεται μεταξύ τῶν 0,01 καὶ 0,1 π.χ. ὁ 0,047, ἐπεὶδὴ εἶναι $0,01 < 0,047 < 0,1$ θὰ ἔχωμεν $\log 0,01 < \log 0,047 < \log 0,1$ ἢ $-2 < \log 0,047 < -1$, ἦτοι ὁ λογάριθμος παντὸς τοιοῦτου ἀριθμοῦ περιέχεται μεταξύ τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων -2 καὶ -1 καὶ ἔχει χαρακτηριστικὸν τὸν -2 .

Ἐπειδὴ ὁμως πᾶς ἀριθμὸς περιεχόμενος α') μεταξύ 0,1 καὶ 1, ὅταν γραφῇ ὡς δεκαδικὸς θὰ ἔχη ἓνα μηδενικὸν εἰς τὴν ἀρχὴν, β') μεταξύ 0,01 καὶ 0,1, ὅταν γραφῇ ὡς δεκαδικὸς, θὰ ἔχη δύο μηδενικά εἰς τὴν ἀρχὴν μαζὺ μὲ τὸ μηδενικὸν τοῦ ἀκεραίου μέρους κ.ο.κ. ἔπεται ὅτι :

Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου (θετικοῦ) ἀριθμοῦ $A < 1$ γραμμένου ὡς δεκαδικοῦ, ἔχει τόσας ἀρνητικὰς μονάδας, ὅσα καὶ τὰ μηδενικά ποῦ ἔχει εἰς τὴν ἀρχὴν μαζὺ μὲ τὸ μηδενικὸν τοῦ ἀκεραίου μέρους.

Π.χ. τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ $\log 0,3$ εἶναι -1 , τοῦ $\log 0,0147$ ὁ -2 , τοῦ $\log 0,0076$ ὁ -3 κ.τ.λ.

Ἀντιστρόφως, ἐκ τῶν προηγουμένων ἔπεται ὅτι :

Ἄν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἐνὸς ἀριθμοῦ A

είναι θετικὸν ἢ 0, ὁ ἀριθμὸς A θὰ ἔχῃ τόσα ψηφία εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἂν αὐξηθοῦν κατὰ 1.

Ἄν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ A εἶναι ἀρνητικόν, ὁ A γραφόμενος ὡς δεκαδικὸς θὰ ἔχῃ τόσα μηδενικά εἰς τὴν ἀρχὴν μαζὺ μὲ τὸ μηδενικὸν τοῦ ἀκεραίου μέρους, ὅσαι καὶ αἱ ἀρνητικαὶ μονάδες τοῦ χαρακτηριστικοῦ του.

Οὕτως, ἂν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ εἶναι 3, τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει τέσσαρα ψηφία· ἂν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 0, τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει ἓν ψηφίον· ἂν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι -2, ὁ ἀριθμὸς εἶναι δεκαδικὸς μὲ 2 μηδενικά εἰς τὴν ἀρχὴν μαζὺ μὲ τὸ μηδενικὸν τοῦ ἀκεραίου μέρους.

§ 217. Ἐστω, ὅτι εἶναι $10^{\alpha} = A$. Ἄν πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἴσα ταῦτα ἐπὶ δύνάμιν τινα τοῦ 10, ἔστω τὴν 10^3 , θὰ ἔχωμεν $10^{\alpha} \cdot 10^3 = A \cdot 10^3$ ἢ $10^{\alpha+3} = A \cdot 10^3$, καὶ κατὰ τὸν ὅρισμόν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν ὅτι $\log(A \cdot 10^3) = \alpha + 3$. Ἀλλ' ἔχομεν $\alpha = \log A$. Ἐπομένως εἶναι $\log(A \cdot 10^3) = \alpha + 3 = \log A + 3$.

Ὅμοίως, ἂν διαιρέσωμεν π.χ. διὰ τοῦ 10^3 τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $10^{\alpha} = A$, εὐρίσκομεν ὅτι $\log(A : 10^3) = \log A - 3$. Ἥτοι:

Ἐὰν ἀριθμὸς τις πολλαπλασιασθῇ (ἢ διαιρεθῇ) ἐπὶ τὸν 10, 100, 1000, ... ὁ λογάριθμος αὐτοῦ αὐξάνεται (ἢ ἐλαττοῦται) κατὰ 1, 2, 3, . . . δηλ. κατὰ ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ ἐπομένως μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ μεταβάλλεται.

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι:

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἔχουν τὰ αὐτὰ ψηφία καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, διαφέρουν δὲ μόνον ὡς πρὸς τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, οἱ λογάριθμοι αὐτῶν διαφέρουν μόνον κατὰ τὰ χαρακτηριστικά αὐτῶν.

Π.χ. ὁ λογάριθμος τοῦ	5	εἶναι	0,69897
	τοῦ 50	εἶναι	1,69897
	τοῦ 500	εἶναι	2,69897
ὁ λογάριθμος	τοῦ 0,5	εἶναι	-1 + 0,69897
	τοῦ 0,05	εἶναι	-2 + 0,69897 κ.λ.π.

Ἀσκήσεις

578. Νὰ εὕρεθῇ τὸ χαρακτηριστικόν: α') λογ35. β') λογ4 513.
 γ') λογ9,5, δ') λογ0,80, λογ0,0003, λογ800, λογ8 000,
 ε') λογ0,00132, λογ132, λογ1320, στ') λογ397,451, λογ 3 974,51, λογ39,
 ζ') λογ $\frac{13}{3}$, η') λογ $\frac{1}{50}$, θ') λογ62 $\frac{2}{3}$, ι') λογ2 $\frac{1}{7}$, λογ0,5, λογ40.

579. Πόσα ἀκέραια ψηφία ἔχει ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικὸν 3, 5, 7, 1, 0, 12 ;

580. Ποία εἶναι ἡ τάξις τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικὸν -1, -2, -3, -5, -9;

581. Ὁ λογάριθμος τοῦ 80 εἶναι 1,90309. Ποιοὶ ἄλλοι ἀριθμοὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν ψηφίον τῶν λογαρίθμων των ;

582. Ποῖον γινώρισμα ἔχει ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος εἶναι ὁ 0,70586 ὁ 1,70586. ὁ -1+0,70586, ὁ -2+0,70586, ὁ -3+0,70586 καὶ διατί ;

3. ΤΡΟΠΗ ΑΡΝΗΤΙΚΟΥ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΕΙΣ ἘΝ ΜΕΡΕΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΝ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

§ 218. Ἐκ τοῦ ὀρισμοῦ τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ τινος προκύπτει, ὅτι ὁ λογάριθμος ὑπερβαίνει τὸ χαρακτηριστικὸν του, ἀλλ' ἡ διαφορὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ 1. Ἡ διαφορὰ αὕτῃ ἐκφράζεται συνήθως μὲ δεκαδικὸν ἀριθμὸν (κατὰ προσέγγισιν) καὶ λέγεται **δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου**, εἶναι δὲ θετικὸς ἀριθμός.

Ἐπειδὴ τῶν μικροτέρων τῆς 1 (θετικῶν) ἀριθμῶν ὁ λογάριθμος εἶναι ἀρνητικὸς, τρέπομεν αὐτὸν εἰς ἄλλον ἴσον του μὲ ἀρνητικὸν μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος.

*Ἐστω π.χ. ὁ (ὅλως) ἀρνητικὸς λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος ὁ -2,54327 ἦτοι ὁ -2-0,54327.

Ἐὰν εἰς αὐτὸν προσθέσωμεν τὸν -1 καὶ τὸν +1, εὐρίσκομεν,
 $-2-1+1-0,54327=-3+1-0,54327=-3+1,00000$
 $0,54327$
 $-3+0,45673$

τὸν ὁποῖον γράφομεν $\overline{3,45673}$ · δηλαδὴ γράφομεν τὸ - ὑπεράνω τοῦ ἀκεραίου μέρους, ἵνα δηλώσωμεν, ὅτι τοῦτο μόνον εἶναι ἀρνητικόν. Ὑπὸ τὴν μορφήν αὐτὴν φαίνεται, ὅτι χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος -3, διότι ὁ λογάριθμος περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων -3 καὶ -2, καὶ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου, τὸ ἀναγραφόμενον δεκαδικὸν μέρος, διότι τοῦτο εἶναι ἡ διαφορὰ πού προκύπτει, ἂν ἀπὸ τὸν λογάριθμον -3+0,45673 ἀφαιρεθῇ τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ -3.

Παρατηρούμεν, ὅτι διὰ τὴν τρέψωμεν λογάριθμον ἀρνητικὸν εἰς ἓν μέρος ἀρνητικόν, αὐξάνομεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ ἀκεραίου κατὰ 1 καὶ γράφομεν τὸ — ὑπεράνω τοῦ ἐξαγομένου, δεξιὰ δὲ τοῦ του γράφομεν ὡς δεκαδικὰ ψηφία τὰς διαφορὰς τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος, τοῦ μὲν τελευταίου (σημαντικοῦ) ἀπὸ τὸ 10 τῶν δὲ ἄλλων ἀπὸ τὸ 9.

Παρατήρησις. Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν λογαρίθμων γίνονται, καθὼς καὶ αἱ ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν σχετικῶν ἀριθμῶν, μὲ παραλλαγὰς τινὰς ὅταν οἱ λογάριθμοι ἔχουν ἀρνητικὸν χαρακτηριστικόν, καὶ αἱ ὁποῖαι φαίνονται ἐκ τῶν κατωτέρω παραδειγμάτων.

Πρόσθεσις. Ἐστω ὅτι ζητεῖται π.χ. τὸ $2,57834 + 1,67943$. Τοὺς μὲν δεκαδικοὺς προσθέτομεν ὡς συνήθως, ὅταν δὲ φθάσωμεν εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων λέγομεν: 1 τὸ κρατούμενον καὶ $2=3$ καὶ $-1=2$ Οὕτως εὐρίσκομεν ἄθροισμα 2,25777.

Ἐστω ὅτι ζητεῖται τὸ ἄθροισμα

$$\overline{2},85643 + 2,24482 + \overline{3},42105 + 1,24207$$

Γράφομεν τοὺς προσθετέους ὡς κατωτέρω πρὸς εὐκολίαν καὶ ἀκολούθως προσθέτομεν τὰ ψηφία ὡς συνήθως

$$\begin{array}{r} \overline{2},85643 \\ 2,24482 \\ \overline{3},42105 \\ 1,24207 \\ \hline 3,76437 \end{array}$$

Ὅταν φθάσωμεν εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων λέγομεν: 1 τὸ κρατούμενον καὶ $-1=0$ καὶ -3 ἴσον -3 καὶ 2 ἴσον -1 καὶ -2 ἴσον -3 . οὕτω δὲ εὐρίσκομεν ἄθροισμα $\overline{3},76437$.

Ἀφαίρεσις. Ἐστω, ὅτι ζητεῖται ἡ διαφορὰ $\overline{5},67893 - \overline{8},75928$. Τοὺς μὲν δεκαδικοὺς ἀφαιροῦμεν ὡς συνήθως, ὅταν δὲ φθάσωμεν εἰς τοὺς ἀκεραίους λέγομεν: 1 τὸ κρατούμενον καὶ -8 ἴσον -7 , διὰ τὴν ἀφαίρεσιν γίνεται $+7$ καὶ συν -5 ἴσον 2. Ἐπομένως ἡ διαφορὰ εἶναι 2,91965.

Πολλαπλασιασμός ἐπὶ ἀκεραίων. Ἐστω, ὅτι ζητοῦμεν τὸ $\overline{5},62893 \cdot 3$ Ἐχομεν $\overline{5},62893 \cdot 3 = -5 \cdot 3 + 0,62893 \cdot 3 = -15 + 1,88679 = \overline{14},88679$.

Διαιρέσεις δι' ἀκεραίου. Ἐστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ πηλίκον π.χ. τοῦ $\overline{5},62891 : 3$. Παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι $\overline{5},62891 : 3 = (-5 + 0,62891) : 3 = (-5 - 1 + 1 + 0,62891) : 3 = (-6 + 1,62891) : 3 = -2 + 0,54297 =$

$= 2,54297$. Ἐπειδὴ ὁ ἀρνητικὸς ἀκέραιος τοῦ διαιρετέου δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ διαιρέτου, ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτὸν καὶ προσθέτομεν περαιτέρω τὰς ἀπαιτουμένας μονάδας, ἵνα καταστῇ διαιρετός, καὶ ἀκολουθῶς ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν.

$$\begin{aligned} & \text{Ὁμοίως διὰ τὴν διαίρεσιν π.χ. } \overline{4,67837}:9 \text{ ἔχομεν } \overline{4,67837}:9 = \\ & = (-4+0,67837):9 = (-4-5+5+0,67837):9 = \\ & = (-9+5,67837):9 = -1+0,63093 \text{ ἢ } \overline{1,63093}. \end{aligned}$$

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

583. Νὰ προστεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ 2,34987, $\overline{6,97852}$, 9,82057.

584. Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ $\overline{3,98090}$ ἀπὸ $\overline{8,30457}$, ὁ $\overline{9,93726}$ ἀπὸ τὸν $\overline{3,86565}$

585. Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ $\overline{9,30942}$ ἐπὶ 3, 7, 42.

586. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα μὲ 5 δεκαδικὰ ψηφία τοῦ $\overline{9,93642}$ διὰ 8, 9, 12.

4. ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΙΝ

§ 219. Καλοῦμεν λογάριθμον ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἢ κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἢ 0,01 ἢ 0,001... τὸν μικρότερον τῶν ἐκθετῶν δύο δυνάμεων τοῦ 10, μεταξύ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ ἀριθμός, καὶ οἵτινες (ἐκθέται) διαφέρουν κατὰ 1 ἢ 0,1 ἢ 0,01 ἢ 0,001... Οὕτως, ἐὰν ἔχωμεν $10^p < A < 10^{p+1}$ ἐνῶ τὸ p εἶναι ἀκέραιος, τὸ p λέγεται λογάριθμος τοῦ A κατὰ προσέγγισιν μονάδος· ἤτοι τὸ p εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ A .

Ἄν ἔχωμεν $10^{\frac{\lambda}{10}} < A < 10^{\frac{\lambda+1}{10}}$, τὸ $\frac{\lambda}{10}$ λέγεται λογάριθμος τοῦ A κατὰ προσέγγισιν 0,1 κ.ο.κ.

Ἐστω, ὅτι ζητεῖται ὁ $\log A$ κατὰ προσέγγισιν 0,1 Ἄν παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον λογάριθμον μὲ $\frac{x}{10}$, θὰ ἔχωμεν

$$10^{\frac{x}{10}} < A < 10^{\frac{x+1}{10}}$$

Ὑποῦμεν τὰ ἄνισα εἰς τὴν δεκάτην δύναμιν καὶ εὐρίσκομεν

$$10^x < A^{10} < 10^{x+1}$$

Ἄλλ' ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ x εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ A^{10}

Ὅμοιως ἐργαζόμεθα, ἂν ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,01 ἢ 0,001... Ἐπομένως :

Διὰ τὰ εὐρωμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἢ 0,01. . . , ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τὴν 10ην ἢ εἰς τὴν 100ην. . . δύναμιν, τοῦ ἐξαγομένου διὰ τὰ εὐρωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ καὶ τοῦτο νὰ διαιρέσωμεν διὰ 10 ἢ 100 . . .

Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ εὐρωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ ὅσα-δήποτε δεκαδικὰ ψηφία τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ. Π.χ. ἂν δοθῇ ἀριθμὸς τις A καὶ θέλωμεν νὰ εὐρωμεν δύο δεκαδικὰ ψηφία τοῦ λογαρίθμου του, ὑψώνομεν τὸν A εἰς τὴν 100ην δύναμιν καὶ εὐρίσκομεν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ A^{100} , δηλαδή τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων ψηφίων τοῦ A^{100} ἡλαττωμένον κατὰ μονάδα, καὶ αὐτὸ τὸ χαρακτηριστικὸν θὰ τὸ θεωρήσωμεν ὡς σύνολον ἑκατοστῶν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου.

5. ΠΕΡΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

§ 220. Ἐνῶ, ὡς εἶδομεν, δυνάμεθα νὰ εὐρωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ ὅσαδήποτε δεκαδικὰ ψηφία θέλομεν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἐν τούτοις ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι λίαν μακρὰ καὶ ἐπίπνοος. Διὰ τοῦτο ὑπάρχουν πίνακες, οἱ ὅποιοι λέγονται **λογαριθμικοὶ πίνακες**, περιέχοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ἐξῆς μέχρι τινός. Ἐπειδὴ τὸ χαρακτηριστικὸν λογαρίθμου δοθέντος ἀριθμοῦ εὐρίσκεται εὐκόλως, οἱ πίνακες περιέχουν ἑκάστου λογαρίθμου τὸ δεκαδικὸν μέρος μὲ ἀρκετὰ δεκαδικὰ ψηφία.

Συνήθως μεταχειριζόμεθα πίνακας μὲ πέντε δεκαδικὰ ψηφία, ἡ δὲ διάταξις αὐτῶν φαίνεται ἐκ τοῦ ἐπομένου πίνακος (ληφθέντος ἐκ τῆς γαλλικῆς ἐκδόσεως τοῦ J. Dupuis).

Τὸ μὲν σύνολον τῶν δεκάδων τῶν ἀριθμῶν εἶναι γραμμένον εἰς τὴν πρώτην στήλην, εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ γράμμα N (Nombres), τὸ δὲ ψηφίον τῶν μονάδων αὐτῶν εἰς τὴν ὀριζοντίαν σειρὰν μετὰ τὸ N . Ὁ λογάριθμος ἑκάστου ἀριθμοῦ εὐρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς γραμμῆς τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ συνόλου τῶν δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐπειδὴ πολλοὶ ἐφεξῆς ἀριθμοὶ ἔχουν τὰ δύο πρῶτα ψηφία τῶν

λογαρίθμων αὐτῶν κοινά, γράφονται ταῦτα ἅπαξ μόνον καὶ νοοῦνται ἐπαναλαμβανόμενα τὰ αὐτά, μέχρις ὅτου ἀλλαχθοῦν.

Ὁ ἀστερίσκος, ὁ ὁποῖος ἐνιαχοῦ ἀπαντᾷ εἰς τοὺς πίνακας, σημαίνει, ὅτι τὰ παραλειπόμενα δύο πρῶτα ψηφία ἥλλαξαν καὶ πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ ἀμέσως ἐπόμενα. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν, ὅτι : $\log 500 = 2,69897$, $\log 5000 = 3,69897$, $\log 5017 = 3,70044$, $\log 6053 = 3,70441$, $\log 5129 = 3,71003$.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	69897	906	914	923	923	940	949	958	966	975
1	984	292	*001	010	*018	027	*036	*044	053	062
2	70070	079	088	096	105	114	122	131	140	148
3	157	165	174	183	191	200	209	217	226	234
4	243	252	260	269	278	286	295	303	312	321
5	329	338	346	355	364	372	381	389	398	406
6	415	424	432	441	449	458	467	475	484	492
7	501	509	518	526	535	544	552	561	569	578
8	586	595	603	612	621	629	638	646	655	663
9	672	680	689	697	706	714	723	731	740	749
510	757	766	774	783	791	800	808	817	825	834
1	842	851	859	868	876	885	893	902	910	919
2	927	935	944	952	961	969	978	986	995	*003

Τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας μεταχειριζόμεθα κατὰ τὰς ἐξῆς δύο περιπτώσεις :

1ον. "Ὅταν δοθέντος ἀριθμοῦ τινος θέλωμεν νὰ εὑρωμεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ.

2ον. "Ὅταν δοθέντος λογαρίθμου τινὸς θέλωμεν νὰ εὑρωμεν τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς αὐτὸν ἀριθμόν.

1η περίπτωση. α') Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δέν ἔχη περισσότερα τῶν τεσσάρων ψηφία, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ ὑπάρχει εἰς τοὺς πίνακας καὶ εὐρίσκωμεν αὐτὸ ὡς εἶδομεν ἄνωτέρω.

β') Ἐστω, ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς, τοῦ ὁποῖου ζητεῖται ὁ λογάριθμος, ἔχει δύο ψηφία περισσότερα τῶν τεσσάρων, π.χ. ὁ 507356.

Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου εἶναι 5, χωρίζοντες δὲ τὰ τέσσαρα πρῶτα ψηφία δι' ὑποδιαστολῆς, ἔχομεν τὸν

ἀριθμὸν 5073,56. Ἐπειδὴ, ὡς εἶναι γνωστόν, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ τοῦ δοθέντος εἶναι τὸ αὐτό, ἔπεται, ὅτι ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 5073,56. Ἀλλ' αὐτὸς περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν 5073 καὶ 5074. Ἀρα ὁ λογάριθμος τοῦ 5073,56 θὰ περιέχεται μεταξύ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 5073 καὶ 5074. Ἐν τῶν πινάκων εὐρίσκομεν, ὅτι $\log 5073 = 3,70526$ καὶ $\log 5074 = 3,70535$.

Ἡ διαφορὰ τῶν δύο τούτων λογαρίθμων εἶναι 9 ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστοῦ. Τώρα δεχόμεθα ὅτι :

Αἱ μεταβολαὶ τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς μεταβολὰς τῶν ἀριθμῶν (κατὰ προσέγγισιν, ὅταν αἱ μεταβολαὶ τῶν ἀριθμῶν εἶναι μικρότεροι τῆς μονάδος) καὶ ἀντιστρόφως.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι, ὅταν ὁ ἀριθμὸς ἀπὸ 5073 αὐξηθῇ κατὰ 1 καὶ γίνῃ 5074, ὁ λογάριθμος αὐξάνεται κατὰ 9 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς αὐξηθῇ κατὰ 0,56 διὰ νὰ γίνῃ 5073,56, ὁ λογάριθμος αὐτοῦ θὰ αὐξηθῇ κατὰ $9 \times 0,56 = 5,04$ ἢ κατὰ 5 περίπου ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστοῦ.

Ὡστε πρέπει εἰς τὸν λογάριθμον 3,70526 νὰ προσθέσωμεν 5 ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστοῦ, ἵνα ἔχωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 5073,56 Ἐκτελοῦντες τὴν πρόσθεσιν εὐρίσκομεν, ὅτι $\log 5073,56 = 70531$. Ἀρα ὁ $\log 507356 = 5,70531$.

Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι 5,07356, τὸ μὲν χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ θὰ εἶναι 0, τὸ δὲ δεκαδικὸν μέρος τούτου θὰ εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ 507356. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν $\log 5,07356 = 0,70531$.

2α περίπτωσις. α') Ἐὰν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εὐρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας, σχηματίζομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὅποιος ἔχει ψηφίον τῶν μονάδων, τὸ εὐρισκόμενον εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς στήλης, εἰς τὴν ὁποίαν εὐρίσκεται τὸ δεκαδικὸν μέρος, καὶ σύνολον δεκάδων τὸν ἀριθμόν, τὸν εὐρισκόμενον εἰς τὴν ἀρχὴν (ἀριστερὰ) τῆς γραμμῆς, εἰς τὴν ὁποίαν εὐρίσκεται τὸ δεκαδικὸν μέρος.

Π.χ. ἂν ὁ δοθεὶς λογάριθμος εἶναι 3,70140, τὸ δεκαδικὸν μέρος 0,70140 εὐρίσκεται εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα καὶ ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 5028. Ἐπειδὴ τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 3, ὁ ἀντίστοιχος, ἀριθμὸς ἔχει τέσσαρα ἀκέραια ψηφία· ἄρα εἶναι ἀκριβῶς ὁ 5028.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὐρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸν λογάριθμον π.χ. 1,70552 ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 0,5076. Εἰς τὸν λογάριθμον 0,70995 ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 5,128.

β') Ἐστω, ὅτι δίδεται π.χ. ὁ λογάριθμος 2,70169 καὶ ζητεῖται ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς αὐτὸν ἀριθμὸς. Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου ἀναζητούμενον εἰς τοὺς πίνακας εὐρίσκεται μετὰ τοῦ 0,70165 καὶ τοῦ 0,70174, εἰς τοὺς ὁποίους ἀντιστοιχοῦν οἱ ἀριθμοὶ 5031 καὶ 5032· καὶ οἱ μὲν λογάριθμοι τούτων διαφέρουν κατὰ 9 μονάδας, τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως, οἱ δὲ ἀριθμοὶ κατὰ 1.

Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ἄν ὁ λογάριθμος τοῦ 5031, ὁ ὁποῖος εἶναι 3,70165, αὐξηθῇ κατὰ 9 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως, ὁ ἀριθμὸς αὐξάνεται κατὰ 1. Ἄν ὁ λογάριθμος αὐξηθῇ κατὰ 4 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως καὶ γίνῃ 3,70169, ὁ ἀριθμὸς θὰ αὐξηθῇ κατὰ $\frac{4}{9}$ τῆς μονάδος, ἥτοι κατὰ 0,44... Ὡστε ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ δεκαδικὸν μέρος εἶναι 0,70169, θὰ εἶναι ὁ 5031,44... ἔπειδὴ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εἶναι 2, ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς ἔχει τρία ἀκέραια ψηφία. Ἄρα εἶναι ὁ 503, 144.

Ἀ σ κ ῆ σ ε ι ς

587. Νὰ εὐρεθῶν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν :

0,003817, 1,141, 0,0845, 107,3 1 203, 13,07, 0,0004124.

588. Νὰ εὐρεθῶν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν :

α') 95,348, β') 6,8372, γ') 0,98629, δ') $968\frac{3}{8}$ ε') 0,0364598,
στ') 6,3347. ζ') 326,537 η') 5278,37. θ') 15389,45.

589. Νὰ εὐρεθῇ ὁ x ἐκ τοῦ δεδομένου κατωτέρω λογαρίθμου αὐτοῦ :

α') $\log x = 0,63147$. β') $\log x = 1,72127$. γ') $\log x = 0,68708$.
δ') $\log x = 3,92836$. ε') $\log x = 4,38221$. στ') $\log x = 3,70032$.

6. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

§ 221. Μὲ τὴν χρῆσιν τῶν λογαρίθμων δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀριθμῶν εἰς τὴν πρόσθεσιν ἄλλων ἀριθμῶν,

τὴν διαίρεσιν ἀριθμῶν εἰς τὴν ἀφαίρεσιν, τὴν ὕψωσιν εἰς δύναμιν εἰς πολλαπλασιασμόν καὶ τὴν ἐξαγωγὴν ρίζης εἰς διαίρεσιν.

Πράγματι, ἂν ζητοῦμεν π.χ. τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, εὐρίσκομεν τοὺς λογαριθμοὺς τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ προσθέτομεν τούτους. Τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον θὰ εὕρωμεν, θὰ εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν. Εὐρίσκομεν ἀκολούθως ἐκ τοῦ εὐρεθέντος λογαρίθμου τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς τοῦτον ἀριθμόν. Οὕτως θὰ παριστάνη προφανῶς τὸ ζητούμενον γινόμενον.

1ον. Νὰ εὐρεθῇ τὸ γινόμενον $-908,4 \times 0,05392 \times 2,117$.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ γινομένου μετὰ x καὶ λάβωμεν τοὺς λογαριθμοὺς τῶν ἴσων, εὐρίσκομεν

$$\log x = \log 908,4 + \log 0,05392 + \log 2,117.$$

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν, ὅτι :

$$\log. 908,4 = 2,95828, \quad \log 0,05392 = 2,73175, \quad \log 2,117 = 0,32572$$

Μετὰ πρόσθεσιν τούτων προκύπτει, ὅτι $\log x = 2,01575$.

Ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς τοῦ λογαρίθμου τούτου εἶναι ὁ 103,693, ἐπεὶ δὲ τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι ἀρνητικόν, θὰ εἶναι τοῦτο $-103,693$.

2ον. Νὰ εὐρεθῇ ὁ x , ἐὰν εἶναι $x = \frac{7,56 \times 4667 \times 567}{899,1 \times 0,00337 \times 23435}$.

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαριθμοὺς τῶν δύο ἴσων, ἔχομεν

$$\begin{aligned} \log x &= \log 7,56 + \log 4667 + \log 567 \\ &\quad - \log 899,1 - \log 0,00337 - \log 23435 \end{aligned}$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὐρίσκομεν :

$\log 7,56$	$= 0,87852$	$\log 899,1$	$= 2,95381$
$\log 4667$	$= 3,66904$	$\log 0,00337$	$= 3,52763$
$\log 567$	$= 2,75358$	$\log 23435$	$= 4,36986$

Μετὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀνωτέρω εὐρίσκομεν

$$\begin{aligned} \log 7,56 + \log 4667 + \log 567 &= 7,30114 \\ \log 899,1 + \log 0,00337 + \log 23435 &= 4,85130 \end{aligned}$$

Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν προκύπτει $\log x = 2,44984$ καὶ εὐρίσκοντες τὸν ἀντίστοιχον τούτου ἀριθμόν ἔχομεν $x = 281,73$.

3ον. Νὰ εὐρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 0,000043461.

Ἐὰν θέσωμεν $x = \sqrt[4]{0,000043461}$ καὶ λάβωμεν τοὺς λογαριθμοὺς

τῶν ἴσων, εὐρίσκομεν $\log x = \frac{1}{2} \log 0,000043461$ ἢ $\log x = \frac{1}{2} \cdot \overline{5},63810$

ἢ $\log x = \overline{3},81905$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἔπεται $x = 0,0065925$.

4ον. Νὰ εὐρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ x ἐκ τῆς ἰσότητος $81^x = 10$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων ἔχομεν

$$\log 81^x = \log 10, \text{ ἢ } x \cdot \log 81 = \log 10 = 1.$$

$$^* \text{Άρα } x = \frac{1}{\log 81} \text{ ἢ } x = \frac{1}{1,90849} = \frac{100000}{190849} = 0,52397. \text{ Ἡτοι } x = 0,52397.$$

Ἀ σ κ ῆ σ ε ι ς

590. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι παραστάσεων διὰ τῶν λογαρίθμων :

$\alpha') 0,4326^3,$	$\beta') \sqrt[3]{12},$	$\gamma') \sqrt[5]{0,07776},$	$\delta') \sqrt[5]{13},$
$\epsilon') -875,6348 \times 62,82407,$	$\sigma\tau') \sqrt[5]{25 \times 3696} : 0,0893462.$		

591. Νὰ εὐρεθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος ἔχει μῆκος 2,51075 δακτύλους.

592. Νὰ παρεμβληθοῦν 8 ἀριθμοὶ μεταξύ τῶν 12 καὶ 23437500, ὥστε νὰ ἀποτελεσθῇ γεωμετρικὴ πρόοδος.

593. Νὰ εὐρεθῇ ἡ διάρκεια τῆς πτώσεως σώματος πίπτοντος εἰς τὸ κενὸν ἀνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ἀπὸ ὕψους 4810 μ. (τῆς κορυφῆς τοῦ Λευκοῦ ὄρους).

7. ΑΛΛΑΓΗ ΤΗΣ ΒΑΣΕΩΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

§ 222. Ἄν ἔχωμεν $a^x = A$, τὸ x καλεῖται λογάριθμος τοῦ A , ὡς πρὸς βάσιν a καὶ σημειώνεται συμβολικῶς $\log_a A = x$.

Ἐστω, ὅτι ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον τοῦ A , ὡς πρὸς ἄλλην βάσιν, ἔστω β .

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους, ὡς πρὸς β τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος $a^x = A$ εὐρίσκομεν $\log_\beta (a^x) = \log_\beta A$ ἢ $x \log_\beta a = \log_\beta A$. θέτοντες ἀντὶ τοῦ x τὸ ἴσον του $\log_a A$, εὐρίσκομεν $\log_a A \cdot \log_\beta a = \log_\beta A$. Ἡτοι :

Ὅταν γνωρίζωμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ ὡς πρὸς βάσιν α π.χ. καὶ θέλωμεν τὸν λογάριθμόν του, ὡς πρὸς βάσιν β , πολλαπλασιάζομεν τὸν γνωστὸν λογάριθμον (ὡς πρὸς βάσιν α) ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως α , ὡς πρὸς τὴν βάσιν β .

Κατὰ ταῦτα, ἂν ἔχωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν, ὡς πρὸς βάσιν 10, εὐρίσκομεν τοὺς νεπερίους λογαρίθμους αὐτῶν (ὡς πρὸς βάσιν τὸν e), ἂν τοὺς γνωστοὺς λογαρίθμους των πολλαπλασιάσωμεν

ἐπὶ $\log_e 10$ καὶ ἀντιστρόφως, ἐκ τοῦ νεπερίου λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ εὐρίσκεται ὁ λογάριθμος αὐτοῦ, ὡς πρὸς βάσιν 10 μὲ πολλαπλασιασμόν τοῦ νεπερίου ἐπὶ $\log_{10} e$.

Παρατηρητέον, ὅτι εἶναι $\log_\beta \alpha \cdot \log_\alpha \beta = 1$. Διότι ὡς ἄνωτέρω εἶναι $\log_\beta A = \log_\alpha A \cdot \log_\beta \alpha$ καὶ ὁμοίως $\log_\alpha A = \log_\beta A \cdot \log_\alpha \beta$ καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη εὐρίσκομεν $\log_\beta A \cdot \log_\alpha A = \log_\beta A \cdot \log_\alpha A \cdot \log_\beta \alpha \cdot \log_\alpha \beta$ ἢ $1 = \log_\beta \alpha \cdot \log_\alpha \beta$

Ἐπομένως εἶναι καὶ $\log_\beta \alpha = \frac{1}{\log_\alpha \beta}$.

Κατὰ ταῦτα, ἂν γνωρίζωμεν τὸν λογάριθμον (ὡς πρὸς βάσιν 10) τοῦ ἀριθμοῦ $e = 2,718281828\dots$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀπὸ τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ, ὡς πρὸς βάσιν 10 τὸν νεπερίον λογάριθμόν του μὲ πολλαπλασιασμόν τοῦ λογαρίθμου του ἐπὶ τὸν $\frac{1}{\log_{10} e}$, ὁ ὁποῖος ἰσοῦται μὲ 0,434294481...

Σημείωσις. Καλοῦμεν **συλλογάριθμον** ἀριθμοῦ τινος τὸν λογάριθμον τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ ἀριθμοῦ.

Οὕτως εἶναι $\text{συλλογα} = \log \frac{1}{\alpha} = -\log \alpha$. Ἦτοι ὁ συλλογάριθμος ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀντίθετον τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ.

Γ' ΠΕΡΙ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

§ 223. Καλοῦμεν **ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν** τὴν ἐξίσωσιν, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ἄγνωστος ὑπάρχει εἰς τὸν ἐκθέτην δυνάμεως, ἐχούσης βάσιν ἀριθμόν τινα ἢ παράστασιν γνωστὴν $\neq 0$.

Π.χ. ἐκθετικά ἐξισώσεις εἶναι αἱ $5^{x^2-2x+2}=1$, $\alpha^{x+3}=\alpha^2$.

Τὰς μέχρι τοῦδε γνωστὰς ἐξισώσεις καλοῦμεν **ἀλγεβρικὰς** πρὸς διάκρισιν αὐτῶν ἀπὸ τῶν ἐκθετικῶν.

Λύσις ἐκθετικῆς ἐξισώσεως λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι τὴν ἐπαληθεύουν.

Ἡ λύσις ἐκθετικῆς ἐξισώσεως ἀνάγεται ἐνίοτε εἰς τὴν λύσιν ἀλγεβρικῆς. Τοῦτο γίνεται κυρίως, ὅταν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον τῆς δοθείσης μὲ ἓν μέλος τῆς τὴν 1, τὸ δὲ ἄλλο δύναμιν ἀριθμοῦ τινος ἢ παραστάσεως γνωστῆς $\neq 0$, τῆς ὁποίας ὁ ἐκθέτης περιέχει ἄγνωστον τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

*Εστω πρὸς λύσιν π.χ. ἡ ἐκθετική ἐξίσωσις $3^{3x} = \frac{1}{27}$.

Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ 27 εὐρίσκομεν
 $3^{3x} \cdot 27 = 1$ ἢ $3^{3x} \cdot 3^3 = 1$ ἢ $3^{3x+3} = 1$ ἢ $3^{3x+3} = 3^0$ (ἐπεὶδὴ $3^0 = 1$)

Ἐκ ταύτης ἔχομεν (ἐπεὶδὴ ἴσαι δυνάμεις ἴσων βάσεων $\neq 0$ θὰ ἔχουν καὶ ἐκθέτας ἴσους) $3x+3=0$, ἐξ ἧς εὐρίσκομεν $x=-1$.

*Εστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $2^{x-1} - 2^{x-3} = 3^{x-3} + 3^{x-4}$

*Ἀπ' αὐτὴν εὐκόλως εὐρίσκομεν $\frac{2^{x-1}-2^{x-3}}{3^{x-3}+3^{x-4}} = \frac{2 \cdot 2^{x-2}-2^{x-3}}{3^x \cdot 3^{-3}+3^x \cdot 3^{-4}} = 1$

$$\eta \frac{2^x \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)}{3^x \cdot \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{81}\right)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot 2^x}{\frac{4}{81} \cdot 3^x} = \frac{3 \cdot 81 \cdot 2^x}{4 \cdot 8 \cdot 3^x} = \frac{3^5 \cdot 2^x}{2^5 \cdot 3^x} = \frac{2^x \cdot 2^{-5}}{3^x \cdot 3^{-5}} = \frac{2^{x-5}}{3^{x-5}} = 1$$

$$\eta \left(\frac{2}{3}\right)^{x-5} = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \text{ ἐξ ἧς ἔχομεν } x-5=0 \text{ καὶ } x=5$$

*Εστω ἀκόμη πρὸς λύσιν ἡ ἐκθετικὴ ἐξίσωσις $a^{(\beta-x)x} = a^x$, ἐνῶ ὑποτίθεται, ὅτι εἶναι τὸ $a \neq$ τοῦ 0 καὶ τῆς 1. Διὰ νὰ εἶναι τότε αἱ δύο δυνάμεις τοῦ a ἴσαι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι οἱ ἐκθέται αὐτῶν ἴσοι.

Ἐξισοῦντες τοὺς ἐκθέτας τῶν δυνάμεων τοῦ a ἔχομεν

$$(\beta-x)x = x \quad \eta \quad x^2 + x - \beta x = 0.$$

ἐκ τῆς λύσεως δὲ ταύτης εὐρίσκομεν $x=0$ καὶ $\beta-1$.

§ 224. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὀρίζεται καὶ σύστημα ἐκθετικῶν ἐξισώσεων μὲ δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους, καθὼς καὶ ἡ λύσις αὐτοῦ.

$$\text{*Εστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα } \begin{cases} \alpha^x \cdot \alpha^\psi = \alpha^3 \\ \frac{\alpha^x}{\alpha^\psi} = \frac{1}{\alpha^2} \end{cases} \quad \text{ὅπου } \alpha \neq 0 \text{ καὶ } \alpha \neq 1$$

Γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν μορφήν

$$\begin{cases} \alpha^{x+\psi} = \alpha^3 \\ \alpha^{x-\psi} = \alpha^{-2} \end{cases} \quad \text{Τοῦτο ἀληθεύει ὅταν } \begin{cases} x+\psi = 3 \\ x-\psi = -2. \end{cases}$$

ἐκ τῆς λύσεως, τοῦ ὁποίου εὐρίσκομεν $\psi = \frac{5}{2}$ καὶ $x = \frac{1}{2}$.

Ἐνίοτε ἡ λύσις ἐκθετικῆς ἐξισώσεως ἢ συστήματος τοιούτων

ἐξισώσεων ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων μὲ τὴν βοήθειαν τῶν λογαρίθμων.

*Ἐστω π.χ. πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $2^{x^2-9x-24}=4096$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων ἔχομεν

$$(x^2-9x-24) \cdot \log 2 = \log 4096.$$

Διαιροῦντες τὰ ἴσα ταῦτα διὰ $\log 2$ εὐρίσκομεν

$$x^2-9x-24 = \frac{\log 4096}{\log 2} = \frac{3,61236}{0,30103} = 12.$$

*Ἦτοι $x^2-9x-24=12$, ἐξ ἧς $x=12$ καὶ $x=-3$.

*Ἐστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $\begin{cases} 3^x \cdot 4^y = 3981312 \\ 2^y \cdot 5^x = 400000 \end{cases}$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων εὐρίσκομεν τὸ ἴσο-

δύναμον σύστημα πρὸς τὸ δοθὲν $\begin{cases} x \cdot \log 3 + y \cdot \log 4 = \log 3981312 \\ y \cdot \log 2 + x \cdot \log 5 = \log 400000 \end{cases}$

Θέτοντες $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2$ καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἐπὶ 2, εὐρίσκομεν

$$\begin{aligned} x \cdot \log 3 + 2y \cdot \log 2 &= \log 3981312 \\ 2y \cdot \log 2 + 2x \cdot \log 5 &= 2 \log 400000 \end{aligned}$$

Ἐὰν τὴν πρώτην τούτων ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν δευτέραν, εὐρίσκομεν $x(2 \log 5 - \log 3) = 2 \log 400000 - \log 3981312$, ἐκ τῆς ὁ-

$$\begin{aligned} \text{ποίας ἔχομεν } x &= \frac{2 \log 400000 - \log 3981312}{2 \log 5 - \log 3} = \frac{2 \log (2^5 \cdot 10^5) - \log (2^{14} \cdot 3^6)}{2 \log 5 - \log 3} = \\ &= \frac{10 - 10 \log 2 - 5 \log 3}{2 \log 5 - \log 3} = \frac{10 - 10 \log 2 - 5 \log 3}{2 - 2 \log 2 - \log 3} = 5 \end{aligned}$$

*Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x εἰς τὴν δευτέραν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων εὐρίσκομεν

$$2^y = \frac{400000}{5^5} = \frac{4 \cdot 10^5}{5^5} = \frac{2^2 \cdot 2^5 \cdot 5^6}{5^5} = 2^7.$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $y=7$.

§ 225. Καλοῦμεν **λογαριθμικὴν** ἐξίσωσιν τὴν ἔχουσαν λογαρίθμους τῶν ἀγνώστων αὐτῆς. Ὁμοίως ὀρίζεται καὶ σύστημα λογαριθμικῶν ἐξισώσεων.

Ἐστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα τῶν λογαριθμικῶν ἐξισώσεων

$$\begin{cases} 2\log\psi - \log x = 0,12494 \\ \log 3 + 2\log x + \log\psi = 1,73239. \end{cases}$$

Τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων τούτων γράφομεν καὶ ὡς ἐξῆς :
 $2\log x + \log\psi = 1,73239 - \log 3 = 1,73239 - 0,47712 = 1,25527.$

Μεταξὺ ταύτης καὶ τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν ἀπαλείφομεν τὸ $\log x$ καὶ εὐρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $5\log\psi = 1,50515$ καὶ μετὰ τὴν διαίρεσιν τῶν ἴσων διὰ 5 εὐρίσκομεν $\log\psi = 0,30103$, ἐξ ἧς καὶ $\psi = 2$.
 Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ $x = 3$.

Ἀ σ κ ῆ σ ε ι ς

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

$$\begin{aligned} 594. \quad \alpha') & \alpha^x + \mu = \alpha^{2\mu}, & \beta') & \alpha^{3x+2} = \alpha^{x+4}, & \gamma') & \gamma^{2-5x} = \gamma^{x+3}. \\ & \delta') \beta(2x+1)(3x+4) = \beta(3x+1)(2x+5), & \epsilon') & (\alpha^x)(x+3) = \alpha^{x+2}. \\ 595. \quad \alpha') & \alpha^{2x+3} \cdot \alpha^{3x+4} = \alpha^{4x+5}, & \beta') & 2^x = 32, & \gamma') & (-2)^x = 16. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta') 5^x + 7 \cdot 5^x = 450, & \epsilon') \sqrt{\alpha} = \alpha^x, & \sigma\tau') & 2x^{+3} + 4x^{+1} = 320. \\ 596. \quad \alpha') & 2x + 4x = 272, & \beta') & \log x = \log 24 - \log 3, & \gamma') & 2x^{+1} + 4x = 80. \\ & \delta') 5 \cdot \log x = \log 288 + 3 \log \frac{x}{2}, & \epsilon') & \log x = \log 192 + \log \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα :

$$\begin{aligned} 597. \quad \alpha') & \begin{cases} \alpha^{2x} \cdot \alpha^{3\psi} = \alpha^8 \\ \frac{\alpha^{2x}}{\alpha^{3\psi}} = \frac{1}{\alpha^6} \end{cases} & \beta') & \begin{cases} 5^{3x} \cdot 5^4\psi = 5^{18} \\ \frac{5^{2x}}{5^{7\psi}} = 5^{-17} \end{cases} & \gamma') & \begin{cases} x + \psi = 95 \\ \log(x - \psi) = 3 \end{cases} \\ 598. \quad \alpha') & \begin{cases} x^2 + \psi^2 = 425 \\ \log x + \log \psi = 2 \end{cases} & \beta') & \begin{cases} 5x^2 - 3\psi^2 = 11\,300 \\ \log x + \log \psi = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

$$\begin{aligned} 599. \quad \alpha') & 3x = 177147, & \beta') & 3^{\frac{x}{2}} = 768, & \gamma') & 3^{\sqrt{x}} = 243. \\ 600. \quad \alpha') & 24^x - 2 = 10\,000, & \beta') & 5^{x^2-3x} = 625, & \gamma') & x^{x^2-7x+12} = 1, \\ 601. \quad \alpha') & 6x^{4-18x^2+86} = 7\,776, & \beta') & (\alpha \cdot \alpha^3 \cdot \alpha^6 \cdot \alpha^7) \alpha^{2x-1} = \nu. \\ 602. \quad \alpha') & \begin{cases} x^4 + \psi^4 = 641 \\ \log(x\psi)^2 = 2 \end{cases} & \beta') & \begin{cases} \log \frac{x}{\psi} = 0,5 \\ \log x\psi = 1,5 \end{cases} & \gamma') & \begin{cases} \log x\psi = 3 \\ 5x^2 - 3\psi^2 = 11\,300 \end{cases} \\ 603. \quad \alpha') & \begin{cases} \log \sqrt{x} - \log \sqrt{5} = 0,5 \\ 3\log x + 2\log \psi = 1,50515 \end{cases} & \beta') & \begin{cases} \log \frac{x}{5} = \log 10 \\ \log x^3 + \log \psi^2 = \log 32 \end{cases} \end{aligned}$$

Δ'. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ

§ 226. Προβλήματα ανατοκισμού ή συνθέτου τόκου λέγονται εκείνα, εις τὰ ὅποια ὁ τόκος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον εἰς τὸ τέλος καθεμιᾶς χρονικῆς μονάδος καὶ ἀποτελεῖ μετ' αὐτοῦ τὸ κεφάλαιον τῆς ἐπομένης χρονικῆς μονάδος.

Ὁ τόκος (καὶ τὰ προβλήματα τόκου), τὸν ὅποιον ἐξετάζει ἡ Ἀριθμητικὴ, καλεῖται ἀπλοῦς, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τοῦ συνθέτου.

1ον. Δανεῖζει τις ποσὸν α δραχμῶν μὲ ἀνατοκισμὸν καὶ μὲ τόκον τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα (εἰς ἓν ἔτος ἢ μίαν ἑξαμηνίαν, τριμηνίαν κ.τ.λ.) τ δραχμᾶς· πόσας δραχμᾶς θὰ λάβῃ ἐν ὄλῳ μετὰ ν χρονικὰς μονάδας;

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου παρατηροῦμεν, ὅτι, ἀφοῦ ἡ 1 δρχ. εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα δίδει τόκον τ δραχμᾶς, αἱ α δραχμαὶ εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα θὰ δώσουν τόκον $\alpha \cdot \tau$ δραχμᾶς.

Ἐπομένως τὸ κεφάλαιον α δραχμῶν καὶ ὁ τόκος αὐτοῦ εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης χρονικῆς μονάδος θὰ εἶναι $\alpha + \alpha \tau = \alpha(1 + \tau)$ δρχ.

Ἦτοι τὸ κεφάλαιον α πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν παράγοντα $(1 + \tau)$, ἵνα δώσῃ τὸ ζητούμενον ποσὸν εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης χρονικῆς μονάδος.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὐρίσκομεν, ὅτι τὸ κεφάλαιον $\alpha(1 + \tau)$ εἰς τὸ τέλος μιᾶς ἀκόμῃ χρονικῆς μονάδος θὰ γίνῃ μετὰ τοῦ τόκου αὐτοῦ $\alpha(1 + \tau) \cdot (1 + \tau)$ ἢ $\alpha(1 + \tau)^2$.

Ὡστε τὸ ἀρχικὸν ποσὸν τῶν α δραχμῶν θὰ γίνῃ μετὰ τοῦ τόκου αὐτοῦ εἰς τὸ τέλος τῆς δευτέρας χρονικῆς μονάδος $\alpha(1 + \tau)^2$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον προχωροῦντες εὐρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸ τέλος ν χρονικῶν μονάδων τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον α θὰ γίνῃ $\alpha(1 + \tau)^\nu$. Ἄν τὸ ποσὸν τοῦτο παραστήσωμεν μὲ Σ , θὰ ἔχωμεν $\Sigma = \alpha(1 + \tau)^\nu$.

Ἐκ ταύτης δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἓν ἐκ τῶν Σ , α , ν , τ , μὲ τὴν βοήθειαν τῶν λογαρίθμων (ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν), ὅταν γνωρίζωμεν τὰ τρία ἐξ αὐτῶν.

Ἄν κατὰ τὸν ἀνατοκισμὸν ὡς χρονικὴ μονὰς ληφθῇ τὸ ἔτος, ἡ δὲ διάρκεια τοῦ δανείου εἶναι ν ἔτη καὶ η ἡμέραι, παρατηροῦμεν, ὅτι μετὰ ν ἔτη τὸ κεφάλαιον α δρχ. θὰ γίνῃ $\alpha(1 + \tau)^\nu$. Τοῦτο τοκίζόμενον μὲ ἀπλοῦν τόκον πρὸς 100% (ὥστε τόκος τῆς 1 δρχ. εἰς 1 ἔτος νὰ εἶναι τ δρχ.) ἐπὶ η ἡμέρας δίδει τόκον

$$\frac{\alpha(1+\tau)^v \cdot 100\tau \cdot \eta}{36000} = \frac{\alpha(1+\tau)^v \tau \cdot \eta}{360}$$

Οὕτω τὸ τελικὸν ποσὸν ἐκ τοῦ ἀνατοκισμοῦ θὰ εἶναι

$$\Sigma = \alpha(1+\tau)^v + \frac{\alpha(1+\tau)^v \tau \eta}{360} = \alpha(1+\tau)^v \cdot \left[1 + \frac{\eta \tau}{360} \right]$$

Σημείωσις. Ἀντὶ τοῦ τύπου τούτου χρησιμοποιοῦμεν (συνήθως) τὸν τύπον

$\Sigma = \alpha(1+\tau)^{v + \frac{\eta}{360}}$. Τοῦτο δικαιολογεῖται ἐκ τῶν ἐξῆς: Ἄν ὑποθεθῇ, ὅτι ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται ὄχι κατ' ἔτος ἀλλὰ καθ' ἡμέραν, τότε ὁ χρόνος ἀνατοκισμοῦ εἶναι v ἔτη καὶ η ἡμέραι $= (360 \cdot v + \eta)$ ἡμέραι, τοῦ ἔτους λογιζομένου 360 ἡμέρας. Ὁ τόκος καθ' ἡμέραν ἔστω, ὅτι εἶναι ψ , τότε ὁ τόκος καὶ τὸ κεφάλαιον μιᾶς μονάδος μετὰ 360 ἡμέρας θὰ γίνῃ $(1+\psi)^{360}$, ἀλλὰ τοῦτο $=$ με $1+\tau$, ἀφοῦ ἡ μία μονὰς δίδει τόκον τ εἰς ἓν ἔτος.

Ἄρα ἔχομεν $(1+\psi)^{360} = (1+\tau)$, $(1+\psi) = (1+\tau)^{\frac{1}{360}}$. Τὸ κεφάλαιον α δρχ. ἀνατοκίζομενον καθ' ἡμέραν ἐπὶ $(360v + \eta)$ ἡμέρας με τ τόκον ψ μιᾶς δρχ. εἰς μίαν ἡμέραν γίνεται $\alpha(1+\psi)^{360v + \eta}$ καὶ θέτοντες ἀντὶ τοῦ $(1+\psi)$ τὸ ἴσον του $(1+\tau)^{\frac{1}{360}}$ εὐρίσκομεν $\alpha(1+\tau)^{\frac{360v + \eta}{360}} = \alpha(1+\tau)^{v + \frac{\eta}{360}}$, $\Sigma = \alpha(1+\tau)^{v + \frac{\eta}{360}}$

Εφαρμογαί. 1η. Δανερίζει τις 150000 δρχ. με ἀνατοκισμὸν πρὸς 4 % κατ' ἔτος· πόσας δραχ. θὰ λάβῃ ἐν ὄλῳ μετὰ 6 ἔτη ;

Ζητεῖται τὸ Σ καὶ ἔχομεν $\alpha = 150000$, $v = 6$, $\tau = 0,04$. Ἐπομένως ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν $\Sigma = 150000 \cdot 1,04^6$. Λαμβάνοντες τοὺς λογαριθμοὺς τῶν ἴσων μελῶν ἔχομεν

$$\log \Sigma = \log 150000 + 6 \log 1,04.$$

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν

$\log 150000 = 5,17609$, $6 \log 1,04 = 6 \cdot 0,1703 = 0,10218$, ἐξ ὧν προκύπτει διὰ προσθέσεως $\log \Sigma = 5,27827$ καὶ ἐκ τούτου $\Sigma = 189787$.

Ἡτοι ὁ τοκίσας τὰς 150000 δραχμὰς με ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 4% θὰ λάβῃ μετὰ 6 ἔτη ἐν ὄλῳ 189787 δρχ.

2α. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ τοκίσῃ τις με ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 6%, ἵνα μετὰ 15 ἔτη λάβῃ ἐν ὄλῳ 500000 δρχ. ;

Ἐχομεν $\Sigma = 500000$, $\tau = 0,06$, $1+\tau = 1,06$ $v = 15$ καὶ ζητεῖται τὸ α .

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) εὐρίσκομεν $500000 = \alpha \cdot 1,06^{15}$.

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων τούτων εὐρίσκομεν
 $\log 500\,000 = \log \alpha + 15 \cdot \log 1,06$.

Ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν $\log \alpha = \log 500\,000 - 15 \log 1,06$. Ἐκ τῶν πινάκων εὐρίσκομεν $\log 500\,000 = 5,69897$ καὶ $15 \log 1,06 = 15 \cdot 0,2631 = 0,37965$ καὶ ἐξ αὐτῶν δι' ἀφαιρέσεως $\log \alpha = 5,31932$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἔπεται, ὅτι $\alpha = 208604,8$ δρχ.

3η. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον 86200 δρχ. ἀνατοκιζόμεναι κατ' ἔτος γίνονται μετὰ 5 ἔτη 104870 δραχμαί ;

Ἐχομεν $\alpha = 86\,200$, $n = 5$, $\Sigma = 104\,870$ καὶ ζητεῖται τὸ τ .

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς εἰς τὴν (1) εὐρίσκομεν :
 $104870 = 86\,200(1+\tau)^5$. Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων τούτων εὐρίσκομεν $\log 104\,870 = \log 86\,200 + 5 \log(1+\tau)$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἔπεται, ὅτι $5 \log(1+\tau) = \log 104\,870 - \log 86\,200$. Ἐκ τῶν πινάκων εὐρίσκομεν

$\log 104\,870 = 5,02065$, $\log 86\,200 = 4,93551$,
 ἐκ τῶν ὁποίων ἔχομεν $\log 104\,870 - \log 86\,200 = 0,08514$
 καὶ $\log(1+\tau) = 0,08514 : 5 = 0,01703$. ἤτοι $(1+\tau) = 1,04$ καὶ $\tau = 0,04$.
 Αὐτὸς εἶναι ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος, ἄρα ὁ ἐτήσιος τόκος εἶναι 0,04 τοῦ κεφαλαίου. Τοῦτο σημαίνει, ὅτι τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4%.

4η. Μετὰ πόσον χρόνον 208600 δρχ. ἀνατοκιζόμεναι κατ' ἔτος πρὸς 6% γίνονται 503750 δρχ ;

Ἐχομεν $\alpha = 208\,600$, $\tau = 0,06$, $\Sigma = 503750$ καὶ ζητεῖται τὸ n .
 Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) εὐρίσκομεν $503750 = 208600 \cdot 1,06^n$.

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων, εὐρίσκομεν
 $\log 503750 = \log 208600 + n \cdot \log 1,06$, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει

$$n = \frac{\log 503750 - \log 208600}{\log 1,06}.$$

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν $\log 503\,750 = 5,70222$, $\log 208\,600 = 4,31931$
 $\log 1,06 = 0,02531$. Ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων εἶναι 0,38291.

Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν $n = \frac{0,38291}{0,02531} = 15$ ἔτη καὶ κάτι ἐπὶ πλέον < 1 .

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀπαιτούμενον μέρος τοῦ 16ου ἔτους, παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ 15ου ἔτους αἱ 208 600 δρχ. γίνονται $208\,600 \cdot 1,06^{15} = 500\,000$ δρχ., ἐπομένως αἱ 503 750 δρχ. — 500 000 δρχ.

$= 3\,750$ δρχ, είναι τόκος άπλοϋς τῶν $500\,000$ δρχ. πρὸς 6% εἰς τὸν ζητούμενον χρόνον. Λύομεν λοιπὸν τὸ πρόβλημα τοῦτο τοῦ άπλοϋ τόκου καὶ εὐρίσκομεν 45 ἡμ. τοῦ ἔτους λογιζομένου με 360 ἡμ.

Παρατήρησις. Ἄν ποσὸν α ἀνατοκίζεται κατ' ἔτος με τόκον τ τῆς μονάδος κατ' ἔτος, θὰ γίνη μετὰ n ἔτη $\alpha(1+\tau)^n$ καὶ τοῦτο μετὰ η ἡμέρας ἀκόμη φέρει άπλοϋν τόκον $\frac{\alpha(1+\tau)^n \cdot 100\eta\tau}{100 \cdot 360}$. Ἄρα γίνεται ἐν ὅλῳ μετὰ n ἔτη καὶ η ἡμέρας $\Sigma = \alpha(1+\tau)^n \left(1 + \frac{\eta\tau}{360}\right)$, ἐξ οὗ

$$\log \Sigma = \log \alpha + n \log(1+\tau) + \log \left(1 + \frac{\eta\tau}{360}\right),$$

ἐπειδὴ δὲ εἶναι $1 + \frac{\eta\tau}{360} < 1 + \tau$, ἔχομεν $\log \left(1 + \frac{\eta\tau}{360}\right) < \log(1+\tau)$. Ἄρα ἡ διαίρεσις $(\log \Sigma - \log \alpha) : \log(1+\tau)$ δίδει πηλίκον n καὶ ὑπόλοιπον $u = \log \left(1 + \frac{\eta\tau}{360}\right)$.

Πράγματι ἔχομεν τότε $\log \Sigma - \log \alpha = n \log(1+\tau) + u$ ἢ

$$\log \Sigma - \log \alpha = n \log(1+\tau) + \log \left(1 + \frac{\eta\tau}{360}\right), \text{ ἥτοι τὴν ἀνωτέρω σχέσιν}$$

$$\log \Sigma = \log \alpha + n \cdot \log(1+\tau) + \log \left(1 + \frac{\eta\tau}{360}\right).$$

Ἐκ τῆς $u = \log \left(1 + \frac{\eta\tau}{360}\right)$, ἐπειδὴ ἐκ τῆς διαιρέσεως εὐρίσκεται τὸ u (κατὰ προσέγγισιν), εὐκόλως προσδιορίζεται τὸ η .

Σημείωσις. Ἐνίστε ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται καθ' ἑξαμηνίαν ἢ τριμηνίαν, ἐνῶ τὸ ἐπιτόκιον ὀρίζεται κατ' ἔτος. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς ὁ τόκος τῆς μονάδος τοῦ κεφαλαίου καθ' ἑξαμηνίαν εὐρίσκεται ὡς ἑξῆς:

Ἄν τ_1 εἶναι ὁ τόκος τῆς 1 μονάδος κεφαλαίου καθ' ἑξαμηνίαν καὶ τ ὁ τόκος αὐτῆς κατ' ἔτος, παρατηροῦμεν, ὅτι μία μονὰς κεφαλαίου μετὰ δύο χρονικὰς μονάδας, δηλαδὴ μετὰ δύο ἑξαμηνίας, θὰ γίνη ἀνατοκίζομένη $(1+\tau_1)^2$ καὶ τοῦτο ἰσοῦται με $1+\tau$, διότι ἡ μία μονὰς μετὰ ἓν ἔτος δίδει τόκον τ καὶ γίνεται με τὸν τόκον $1+\tau$, ἄρα ἔχομεν $(1+\tau_1)^2 = 1+\tau$ καὶ $\tau_1 = \sqrt{1+\tau} - 1$.

Ἄν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται κατὰ τριμηνίαν, ἐπειδὴ τὸ ἔτος ἔχει 4 τριμηνίας, ἂν τ_2 παριστάνη τὸν τόκον τῆς μιᾶς μονάδος κεφαλαίου κατὰ τριμηνίαν, θὰ ἔχωμεν

$$\text{σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω } (1+\tau_2)^4 = 1+\tau \text{ καὶ } \tau_2 = \sqrt[4]{1+\tau} - 1.$$

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

604. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ τις, ἂν ἀνατοκίσῃ κατ' ἔτος 5 600 δρχ. ἐπὶ 10 ἔτη πρὸς 5%;

605. Πατὴρ τις κατέθεσεν εἰς Τράπεζαν 7500 δρχ. κατὰ τὴν γέννησιν τοῦ υἱοῦ αὐτοῦ μὲ ἀνατοκισμόν κατ' ἔτος πρὸς 4,5%. Πόσα θὰ λάβῃ ὁ υἱὸς του εἰς τὸ τέλος τοῦ 20οῦ ἔτους τῆς ἡλικίας αὐτοῦ;

606. Πόσῃν αὐξήσειν παθαίνει κεφάλαιον 1 000 000 δρχ. εἰς 8 ἔτη καὶ 8 μῆ- νας ἀνατοκίζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 4%;

607. Ποῖον κεφάλαιον γίνεται μετὰ τῶν τόκων αὐτοῦ ἀνατοκίζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 3,5% εἰς 20 ἔτη 3 730 850 δρχ.;

608. Τίς ἡ παροῦσα ἀξία κεφαλαίου 45 896 000 δρχ. πληρωτέου μετὰ 15 ἔτη καὶ 210 ἡμ. μὲ ἀνατοκισμόν κατ' ἔτος πρὸς 8%;

609. Πόσον ποσὸν πρέπει νὰ τοκίσωμεν μὲ ἀνατοκισμόν καθ' ἑξαμηνίαν πρὸς 4%. Ἴνα μετὰ 18 ἔτη γίνῃ 20 000 000 δρχ.;

610. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐτοκίσθῃ μὲ ἀνατοκισμόν κατ' ἔτος κεφάλαιον 625 000 δρχ. ἐπὶ 15 ἔτη καὶ ἔγινεν 1 166 900 δρχ.;

611. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν λογαριάζεται ὁ τόκος, ἂν 10 000 δρχ. εἰς 22 ἔτη γίνωνται 224 770 δρχ. ἀνατοκίζομεναι;

612. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει ν' ἀνατοκισθῇ ἓν κεφάλαιον κατ' ἔτος διὰ νὰ τετραπλασιασθῇ μετὰ 31 ἔτη;

613. Εἰς πόσον χρόνον ἀνατοκίζόμενον κατ' ἔτος κεφάλαιον 3 580 000 δρχ. πρὸς 4,5% γίνεται 56 000 000 δρχ.;

614. Πότε κατετέθησαν 630 000 δρχ. εἰς Τράπεζαν τινα μὲ ἀνατοκισμόν πρὸς 4%, ἂν τὴν 1ην Ἀπριλίου 1956 εἶχον γίνει 969 800 δρχ.;

615. Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει ν' ἀνατοκισθῇ κατ' ἔτος ποσὸν τι πρὸς 3,5% διὰ νὰ διπλασιασθῇ ἡ τριπλασιασθῇ ἡ τετραπλασιασθῇ;

616. Ὁ πληθυσμὸς ἐνὸς Κράτους αὐξάνεται κατ' ἔτος κατὰ τὸ ὄγδοηκοστὸν τοῦ προηγουμένου ἔτους. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ διπλασιασθῇ ἡ θὰ τριπλασιασθῇ ὁ πληθυσμὸς αὐτοῦ;

617. Μία πόλις ἔχει 8 000 κατοίκους καὶ ὁ πληθυσμὸς αὐτῆς ἐλαττοῦται ἐτη- σίως κατὰ 160 κατοίκους. Ἐὰν ἡ ἐλάττωσις ἐξακολουθήσῃ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλο- γίαν, μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἔχῃ 5 000 κατοίκους;

Ε'. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΙΣΩΝ ΚΑΤΑΘΕΣΕΩΝ

§ 227. 1ον. Καταθέτει τις εἰς τὴν Τράπεζαν μὲ ἀνατοκισμόν κατ' ἔτος 4,5% ποσὸν 205.000 δρχ. εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔ- τους. Πόσα θὰ λάβῃ μετὰ 15 ἔτη;

Ἡ πρώτη κατάθεσις τῶν 205 000 δραχμῶν θὰ μείνῃ 15 ἔτη ἀνα- τοκίζομένη πρὸς 4,5%. Ἐπομένως θὰ γίνῃ 205 000·1,045¹⁵.

Ἡ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου ἔτους γινομένη κατάθεσις θὰ

μείνη μόνον 14 ἔτη εἰς τὸν τόκον· ἄρα θὰ γίνη 205 000·1,045¹⁴.
 Ὅμοίως ἢ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τρίτου ἔτους κατάρθεις θὰ γίνη
 205 000·1,045¹³ κ.ο.κ., ἡ τελευταία θὰ μείνη μόνον ἓν ἔτος καὶ θὰ
 γίνη 205 000·1,045.

Ὡστε τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τῶν 15 ἐτῶν
 θὰ εἶναι 205 000·1,045¹⁵ + 205 000·1,045¹⁴ + ... + 205 000·1,045 ἢ
 205 000·1,045 + 205 000·1,045² + 205 000·1,045³ + ... + 205 000·1,045¹⁵

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶναι ἄθροισμα τῶν ὁ-
 ρων γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι 1,045.

Ἐφαρμόζοντες λοιπὸν τὸν τύπον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὁρων
 γεωμετρικῆς προόδου, εὐρίσκομεν ὅτι τὸ ποσόν, ἔστω Σ, τὸ ὁποῖον
 θὰ λάβῃ, εἶναι $\Sigma = \frac{205000 \cdot 1,045^{15} \cdot 1,045 - 205000 \cdot 1,045}{1,045 - 1 = 0,045}$

$$\text{ἢ} \quad \Sigma = 205\,000 \cdot 1,045 \cdot \frac{1,045^{15} - 1}{0,045}$$

Μὲ τοὺς λογαρίθμους εὐρίσκομεν πρῶτον τὸ 1,045¹⁵. Πρὸς
 τοῦτο ἔχομεν, ἐὰν θέσωμεν $x = 1,045^{15}$, $\log x = 15 \log 1,045 = 0,28680$,
 ἐκ τοῦ ὁποίου ἔπεται, ὅτι $x = 1,93552$. Ὡστε θὰ ἔχωμεν:

$$\Sigma = 205\,000 \cdot 1,045 \cdot \frac{0,93552}{0,045} \quad \text{ἢ} \quad \Sigma = 205\,000 \cdot \frac{1,045 \cdot 935,52}{45}$$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων ἔχομεν:

$$\log \Sigma = \log 205\,000 + \log 1,045 + \log 935,52 - \log 45$$

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν: $\log 205\,000 = 5,31175$

$$\log 1,045 = 0,01912$$

$$\log 935,52 = 2,97105$$

$$\text{ἄθροισμα} = 8,30192$$

$$\log 45 = 1,65321$$

καὶ ἀφαιροῦντες εὐρίσκομεν $\log \Sigma = 6,64871$, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει
 $\Sigma = 4\,453\,600$, ἥτοι μετὰ 15 ἔτη θὰ λάβῃ 4 453 600 δρχ.

Ἐν γένει, ἐὰν καταθέσῃ τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστης χρονικῆς μονά-
 δος α δραχμὰς εἰς τινὰ Τράπεζαν μὲ ἀνατοκισμόν καὶ τόκον τ τῆς
 μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα, ζητεῖται δὲ πόσας δραχμὰς
 θὰ λάβῃ μετὰ ν χρονικὰς μονάδας, παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ πρώτη κατάρ-
 θεις θὰ γίνη $\alpha(1+\tau)^0$, ἡ δευτέρα $\alpha(1+\tau)^1$ κ.ο.κ. ἡ τελευταία
 $\alpha(1+\tau)^{n-1}$, ὥστε εἰς τὸ τέλος τῶν ν χρονικῶν μονάδων θὰ λάβῃ
 $\alpha(1+\tau)^0 + \alpha(1+\tau)^1 + \dots + \alpha(1+\tau)^{n-1}$. Ἄν παραστήσωμεν τὸ ἄθροι-

σμα αὐτὸ διὰ τοῦ Σ , θὰ ἔχωμεν $\Sigma = \alpha(1+\tau) \frac{(1+\tau)^v - 1}{\tau}$, ἐκ τοῦ ὁποίου προσδιορίζεται τὸ Σ διὰ τῶν λογαρίθμων ἢ τὸ α , ἐὰν δοθῇ τὸ Σ , τὸ τ καὶ τὸ v .

2ον. Καταθέτει τις εἰς τὸ τέλος ἐκάστης χρονικῆς μονάδος α δραχμὰς μὲ ἀνατοκισμὸν καὶ μὲ τόκον τ τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ μετὰ v χρονικὰς μονάδας ;

Ἡ πρώτη κατάθεσις θὰ μείνῃ ἐπὶ $v-1$ χρονικὰς μονάδας. Ἄρα θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{v-1}$. Ἡ δευτέρα θὰ μείνῃ ἐπὶ $v-2$ χρονικὰς μονάδας, ἄρα θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{v-2}$ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ἡ τελευταία θὰ εἶναι μόνον α . Ὡστε θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma = \alpha + \alpha(1+\tau) + \alpha(1+\tau)^2 + \dots + \alpha(1+\tau)^{v-1}.$$

ἢ $\Sigma = \frac{\alpha(1+\tau)^v - \alpha}{\tau} = \alpha \frac{(1+\tau)^v - 1}{\tau}$, ἐκ τοῦ ὁποίου προσδιορίζεται τὸ Σ διὰ τῶν λογαρίθμων, ὅταν δοθῇ ἡ τιμὴ τῶν α , τ , v . Ἐκ τοῦ αὐτοῦ τύπου εὐρίσκομεν εὐκόλως διὰ τῶν λογαρίθμων τὸ α , ὅταν γνωρίζωμεν τὰ Σ , τ , v .

ΣΤ'. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΧΡΕΩΛΥΣΙΑΣ

§ 228. Χρεωλυσία λέγεται ἡ ἐντὸς ὠρισμένου χρόνου ἀπόσβεσις χρέους δι' ἴσων δόσεων, αἱ ὁποῖαι πληρώνονται κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα. Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πληρώνεται εἰς τὸ τέλος ἐκάστου χρονικοῦ διαστήματος λέγεται **χρεωλύσιον** καὶ χρησιμεύει μέρος μὲν αὐτοῦ διὰ τὴν πληρωμὴν τῶν τόκων τοῦ χρέους, τὸ δὲ ἄλλο μέρος διὰ τὴν βαθμιαίαν ἀπόσβεσιν τοῦ χρέους.

Τὸ χρέος ἐξοφλεῖται, ὅταν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν χρεωλυσίων μετὰ τῶν συνθέτων τόκων αὐτῶν ἀποτελέσῃ ποσότητα ἴσην μὲ τὴν τελικὴν ἀξίαν τοῦ ἀνατοκιζομένου ἀρχικοῦ κεφαλαίου.

1ον. Ἐδανείσθη τις 1850000 δραχμὰς πρὸς 4,5% μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος, μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος αὐτοῦ διὰ 12 ἴσων χρεωλυσίων, τὰ ὁποῖα θὰ πληρώνωνται εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους· πόσον εἶναι τὸ χρεωλύσιον ;

Τὸ ἀρχικὸν ποσόν τῶν 1 850 000 δραχμῶν θὰ γίνῃ μετὰ 12 ἔτη 1 850 000·1,045¹². Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸ ζητούμενον

χρεωλύσιον, ή πρώτη δόσις έκ x δραχμῶν θά γίνη $x \cdot 1,045^{11}$ μετά 11 ἔτη, κατά τὰ ὁποῖα ὑποτίθεται, ὅτι ἔμεινεν εἰς τὸν τόκον. Ἡ δευτέρα δόσις θά γίνη $x \cdot 1,045^{10}$, ή τρίτη $x \cdot 1,045^9$ κ.ο.κ., ή δὲ τελευταία θά μείνη x . Ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν, τὰ ὁποῖα θά πληρωθοῦν μετά τῶν τόκων αὐτῶν, θά εἶναι

$$x + x \cdot 1,045 + x \cdot 1,045^2 + \dots + x \cdot 1,045^{11} \text{ ἢ } x \cdot \frac{1,045^{12} - 1}{0,045}.$$

Ἀλλὰ τὸ ποσὸν αὐτὸ πρέπει νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀφειλόμενον συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα. Ἦτοι θά ἔχωμεν :

$$x \cdot \frac{1,045^{12} - 1}{0,045} = 1\,850\,000 \cdot 1,045^{12}.$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ x διὰ τῶν λογαρίθμων.

Πρὸς τοῦτο εὐρίσκομεν πρῶτον τὴν δύναμιν $1,045^{12}$ θέτοντες αὐτὴν ἴσην π.χ. μὲ τὸ ψ , ὅτε εἶναι $\psi = 1,045^{12}$ καὶ $\log \psi = 12 \log 1,045 = 0,22944$, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ὅτι $\psi = 1,696$.

Λύοντες τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὡς πρὸς x μετά τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ $1,045^{12}$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτοῦ $1,696$ εὐρίσκομεν ὅτι :

$$x = \frac{1\,850\,000 \times 0,045 \times 1696}{696}, \text{ ἐκ τοῦ ὁποίου διὰ λογαριθμήσεως λαμβά-}$$

$$\text{νομεν } \log x = \log 1\,850\,000 + \log 0,045 + \log 1696 - \log 696.$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὐρίσκομεν

$$\log 1\,850\,000 = 6,26717$$

$$\log 0,045 = 2,65321$$

$$\log 1\,696 = 3,22943$$

$$\text{ἄθροισμα} = 8,14981$$

$$\log 696 = 2,84261$$

$$\text{Ἐπομένως } \log x = 5,30720.$$

ἐκ τοῦ ὁποίου ἔπεται, ὅτι $x = 202\,861,9$ δραχμαί.

Ἐν γένει, ἐὰν μὲ α παραστήσωμεν τὸ δανειζόμενον ποσὸν μὲ ἀνατοκισμόν καθ' ὠρισμένην χρονικὴν μονάδα, μὲ τ τὸν τόκον τῆς 1 δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα καὶ μὲ ν τὸ πλῆθος τῶν χρονικῶν μονάδων, τὸ μὲν κεφάλαιον θά γίνη $\alpha(1+\tau)^\nu$, ή δὲ ὀλική ἀξία τῶν δόσεων ἐκ x δραχ. ἐκάστη θά εἶναι μετά ν χρονικὰς μονάδας

$$x(1+\tau) + x(1+\tau)^2 + \dots + x(1+\tau)^{\nu-1} \text{ ἢ } x \frac{(1+\tau)^\nu - 1}{\tau}.$$

$$\text{Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν } x \frac{(1+\tau)^v - 1}{\tau} = \alpha(1+\tau)^v \quad (1)$$

ἐκ τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x .

Ἐνίοτε ἡ πρώτη καταβολὴ τοῦ χρεωλυσίου γίνεται ἔτη τινὰ μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου π.χ. μετὰ κ ἔτη. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἔχωμεν $x \frac{(1+\tau)^{v-\kappa+1}-1}{\tau} = \alpha(1+\tau)^v$.

Διότι ἡ πρώτη χρεωλυτικὴ δόσις θὰ μείνῃ ἐπὶ $v-\kappa$ ἔτη ἐπὶ ἀνατοκισμῷ καὶ θὰ γίνῃ $x(1+\tau)^{v-\kappa}$ ἡ ἐπομένη χρεωλυτικὴ δόσις θὰ γίνῃ $x(1+\tau)^{v-\kappa-1}$ κ.τ.λ. Οὕτω θὰ ἔχωμεν:

$$x + x(1+\tau) + \dots + x(1+\tau)^{v-\kappa-1} + x(1+\tau)^{v-\kappa} = \frac{x(1+\tau)^{v-\kappa+1}-x}{\tau},$$

τὸ ὁποῖον θὰ ἰσοῦται μὲ $\alpha(1+\tau)^v$, ἥτοι ἔχομεν τὴν ἐξῆς σχέσιν:

$$x \frac{(1+\tau)^{v-\kappa+1}-1}{\tau} = \alpha(1+\tau)^v.$$

2ον. Ποῖον κεφάλαιον δύναται νὰ δανεισθῇ τις, ἐὰν θέλῃ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος αὐτοῦ εἰς 6 ἔτη δι' ἑτησίου χρεωλυσίου 800000 δραχ., ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4%;

Ἐχομεν $x=800\,000$, $v=6$, $\tau=0,04$, ζητεῖται δὲ τὸ α . Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰς τιμὰς τῶν x , v , τ εὕρισκομεν τὴν σχέσιν $800000 \cdot \frac{1,04^6-1}{0,04} = \alpha \cdot 1,04^6$. Λύοντες αὐτὴν ὡς πρὸς α εὕρισκομεν

$$\alpha = \frac{800000(1,04^6-1)}{0,04 \cdot 1,04^6}.$$

Ὑπολογίζομεν ἐν πρώτοις τὴν δύναμιν $1,04^6$ καὶ ἀκολουθῶς εὕρισκομεν διὰ τῶν λογαρίθμων $\alpha=4\,193\,636,3$ δραχμάς.

3ον. Εἰς πόσα ἔτη ἐξοφλεῖται δάνειον 2 000 000 δραχμῶν μὲ χρεωλυσίον 130 000 δραχμῶν ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 3%;

Ἐχομεν $\alpha=2\,000\,000$, $x=130\,000$, $\tau=0,03$. Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν (1) εὕρισκομεν:

$$130\,000 \cdot \frac{1,03^v-1}{0,03} = 2\,000\,000 \cdot 1,03^v$$

Ἐκ ταύτης ἔχομεν: $130\,000 \cdot 1,03^v - 130\,000 = 0,03 \cdot 2\,000\,000 \cdot 1,03^v$

$$\eta \quad 1,03^v \cdot (130\,000 - 0,03 \cdot 2\,000\,000) = 130\,000$$

$$\text{καὶ } 1,03^v = \frac{130\,000}{70\,000} = \frac{13}{7}.$$

Λαμβάνοντες τούς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων μελῶν ἔχομεν :
 $\nu \cdot \log 1,03 = \log 13 - \log 7$ ἢ $0,01284\nu = 1,11394 - 0,84510 = 0,26884$, ἐκ
 τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $\nu = 20,937$ ἔτη. *Ἦτοι ἡ ἐξόφλησις θὰ γίνη μετὰ
 21 ἔτη, ἀλλ' ἡ τελευταία δόσις θὰ εἶναι κατὰ τι μικροτέρα τῶν ἄλλων.
 Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν εἰκοστήν πρώτην δόσιν, εὐρίσκομεν πόσον γίνεται
 τὸ δάνειον τῶν 2 000 000 δρχ. εἰς 21 ἔτη, δηλαδή τὸ $2\,000\,000 \cdot 1,03^{21}$
 δρχ., τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ 3 720 590 δρχ., ἀκολουθῶς εὐρίσκομεν
 ὅτι αἱ δόσεις ἐκ 130 000 δρχ. ἐκάστη εἰς τὸ τέλος τοῦ 21οῦ ἔτους
 γίνονται $130\,000 \cdot \frac{1,03^{20}-1}{0,03} \cdot 1,03 = 3\,597\,945$ δρχ. Ἡ διαφορὰ
 $3\,720\,590 - 3\,597\,945$ δρχ. = 122 645 δρχ. παριστάνει τὴν τελευ-
 ταίαν δόσιν.

Π ρ ο β λ ῆ μ α τ α

618. *Εμπορὸς τις καταθέτει εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔτους 350 000 δρχ. ἐκ
 τῶν κερδῶν αὐτοῦ εἰς τὴν τράπεζαν μὲ ἀνατοκισμόν κατ' ἔτος 4%. Πόσα θὰ λάβῃ
 εἰς τὸ τέλος τοῦ εἰκοστοῦ ἔτους ἀπὸ τῆς πρώτης καταθέσεως ;

619. Καταθέτει τις κατ' ἔτος μὲ σύνθετον τόκον 10000 δρχ. πρὸς 5%.
 Μετὰ πόσον χρόνον θὰ λάβῃ 130000 δρχ. ;

620. Ἡ διατροφή καὶ τὰ ἐξοδα τῶν σπουδῶν τέκνου κατεγράφησαν ὑπὸ τοῦ
 πατρὸς του εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους, ἀνήρχοντο δὲ κατὰ μέσον ὅρον 20 000
 δρχ. ἑτησίως. Πόσα θὰ ἐγίνοντο αὐτὰ μετὰ 3 ἔτη, ἐὰν ἀνετοκίζοντο κατ' ἔτος πρὸς
 3,5% ;

621. Πατήρ τις ἀποκτήσας κόρην θέλει νὰ καταθέτῃ κατ' ἔτος ποσόν τι ὡ-
 ρισμένον δι' αὐτήν, ἵνα αὐτὰ ἀνατοκίζόμενα κατ' ἔτος πρὸς 5% γίνουιν μετὰ 21 ἔτη
 250 000 δρχ. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἑτησία κατάθεσις ;

622. Πόσον εἶναι τὸ χρεωλύσιον, διὰ τοῦ ὁποίου ἐξοφλεῖται χρέος 100 000
 δρχ. ἀνατοκίζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 4%, ἂν πληρώνεται δι' ἑτησίων δόσεων ;

623. Χρέος ἐξοφλεῖται δι' ἴσων ἑτησίων δόσεων ἐντὸς 30 ἐτῶν. Πόσον ἦτο τὸ
 ἀρχικὸν κεφάλαιον, ἐὰν καθεμία δόσις εἶναι 318 000 δρχ. καὶ τὸ ἐπιτόκιον 4,5% ;

624. *Εμπορὸς τις ἑδανείσθη 45 000 000 δρχ. ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος 5%.
 Ἐὰν πληρῶνῃ ἐτήσιον χρεωλύσιον 3 000 000 δρχ., μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἐξοφληθῇ
 τὸ χρέος αὐτοῦ ;

625. Ἡ ἐξόφλησις χρέους πρέπει νὰ γίνη εἰς 20 ἔτη χρεωλυτικῶς. Καθεμία
 δόσις (ἐτησία) θὰ εἶναι 46 130 δρχ. θὰ ἀρχίσῃ δὲ ἡ πληρωμὴ μετὰ τὸ 5ον
 ἔτος ἀπὸ τοῦ δανείου. Πόσον εἶναι τὸ ἀρχικῶς δανεισθέν ποσόν, ἂν τὸ ἐπιτόκιον
 εἶναι 4,5% ;

626. Κράτος ἑδανείσθη ποσόν τι πρὸς 3,75%. Ἡ χρεωλυτικὴ ἐξόφλησις του
 ἀρχεῖται 3 ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου καὶ θὰ πληρώνεται 158 800 000 δρχ.
 ἑτησίως ἐπὶ 10 ἔτη. Πόσον ἦτο τὸ δανεισθέν ποσόν ;

627. Χρέος ἐξ 1,5 ἑκατομμυρίου δρχ. πρέπει νὰ ἐξοφληθῇ διὰ 15 ἴσων ἐτησίων δανείων ἀρχομένων 5 ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου. Πόσον θὰ εἶναι τὸ χρεωλύσιον, ἂν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 3,75% ;

628. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ ἐξοφλήσῃ τις χρεωλυτικῶς δάνειον 20000000 δρχ. διὰ 16 ἐτησίων δόσεων ἐξ 1780300 δρχ. ἐκάστην ;

(Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν εὐρεθεῖσαν ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν

$$\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau(1+\tau)^{16}} = \frac{20\,000\,000}{1\,780\,300} \quad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη περιέχει τὸν ἄγνωστον τ εἰς τὸν 17ον βαθμόν. Διὰ τοῦτο ἡ λύσις αὐτῆς δέν εἶναι γνωστὴ καὶ καταφεύγομεν εἰς προσεγγίσεις. Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξίσωσεως θὰ εἶναι μεγαλύτερον, ὅσον τὸ τ εἶναι μικρότερον. Ἐὰν ἀντικατασταθῇ τὸ τ μὲ μικρότερον ἀριθμὸν τῆς ζητουμένης τιμῆς του, τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\frac{20\,000\,000}{1\,780\,300}$.

Θέτοντες π.χ. $\tau=0,04$ εὐρίσκομεν

$$\frac{1}{0,04} \left(1 - \frac{1}{1,04^{16}} \right) = \left(1 - \frac{1}{1,04^{16}} \right) \cdot 25 = 11,6523$$

ἐνῶ ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (1) εὐρίσκομεν 11,234. Θέτομεν λοιπὸν τώρα $\tau=0,045$ ἔπειτα $\tau=0,0475$ κ.ο.κ. προχωροῦντες προσεγγίζομεν περισσότερον πρὸς τὴν ζητουμένην τιμὴν τοῦ τ).

629. Κατέθεσέ τις ἐπὶ 5 συνεχῆ ἔτη πρὸς 4% εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔτους ποσὸν τι καὶ εἰσέπραξεν ἔξ ἔτη μετὰ τὴν καταβολὴν τῆς τελευταίας καταθέσεως 20 000 000 δρχ. Πόση ἦτο ἡ κατάθεσις ;

630. Καταθέτει τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔτους 1 250 000 δρχ. ἐπὶ 7 ἔτη πρὸς 6%. Τί ποσὸν θὰ εἰσπράξῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ δωδεκάτου ἔτους ἀπὸ τῆς πρώτης καταθέσεως ;

631. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ὀκτῶ ἐτήσια καταθέσεις ἐξ 1 000 000 δρχ. ἐκάστη ἀποτελοῦν ποσὸν 102000000 δραχμῶν ;

632. Πόσαι καταθέσεις ἐξ 1 000 000 δρχ., αἱ ὁποῖαι γίνονται εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους, ἀπαιτοῦνται, ἵνα ἀποτελεσθῇ ποσὸν 2 457 839 000 δρχ. τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος $5 \frac{1}{2}\%$;

633. Δικαιοῦται τις νὰ εἰσπράξῃ μετὰ 5 ἔτη ποσὸν 10 000 000 δρχ. Ἀντὶ τούτου ἐπιθυμεῖ νὰ εἰσπράξῃ εἰς τὸ τέλος ἐκάστου τῶν 5 ἐτῶν τὸ αὐτὸ πάντοτε ποσόν. Ποῖον εἶναι τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον θὰ εἰσπράττῃ τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 5% ;

634. Ὅφειλει τις 15 000 000 δρχ. πληρωτέας τὴν 1ην Ἰουλίου 1949. Νὰ ἀντικατασταθῇ ἡ ὑποχρέωσις αὕτη μὲ τρεῖς ἄλλας πρὸς ἴσας ἀλλήλας πληρωτέας τὴν 1ην Ἰουλίου 1950, 1951, καὶ 1952 (ἐπιτόκιον 6%).

635. Μὲ πόσας ἐξαμηνιαίας χρεωλυτικὰς δόσεις θὰ ἐξοφληθῇ δάνειον 20 000 000 δρχ. ἐὰν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεταί πρὸς 3% καθ' ἐξαμηνίαν, τὸ δὲ χρεωλύσιον εἶναι 1 000 000 δρχ. ;

636. Συνῆψε τις δάνειον χρεωλυτικὸν 25 000 000 δρχ. πρὸς 7% ἐξοφλητέον

έντος 8 ἐτῶν. Τρεῖς μῆνας μετὰ τὴν κατάθεσιν τῆς πέμπτης χρεωλυτικῆς δόσεως θέλει νὰ ἐξοφλήσῃ τοῦτο ἐξ ὀλοκλήρου. Πόσα πρέπει νὰ καταβάλῃ ;

637. Ἐδανείσθη τις τὸν Ἀπρίλιον 1942 ποσὸν 20 008 000 δρχ. ἐξοφλήτέον ἐντὸς 20 ἐτῶν πρὸς 6%. Καταβάλλων κανονικῶς τὰ μέχρι τοῦ 1950 χρεωλύσια ἐπιθυμεῖ τὴν 1ην Ὀκτωβρίου 1950 νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του τελείως. Τί ποσὸν θὰ χρειασθῇ ;

638. Διὰ πόσων χρεωλυτικῶν δόσεων ἐξοφλεῖται δάνειον 100 000 000 δρχ., ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 7%, διατίθεται δὲ ἐτησίως χρεωλύσιον 10 000 000 δρχ. ;

639. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον δάνειον 250 000 000 δρχ. ἐξοφλεῖται ἐντὸς 15 ἐτῶν δι' ἐτησίων χρεωλυσίων 24 553 000 δραχμῶν ;

640. Ἐταιρεία τις δύναται νὰ διαθέτῃ ἐκ τῶν κερδῶν αὐτῆς 10 000 000. Ποῖον κεφάλαιον δύναται νὰ δανεισθῇ διαθέτουσα ἐπὶ εἰκοσαετιᾶν τὸ ἄνω ποσὸν διὰ χρεωλυσίων τοῦ δανείου τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 5% ;

641. Εἰσπράττει τις ἐπὶ μίαν πενταετιᾶν καὶ εἰς τὸ μέσον ἐκάστου ἔτους 210 000 δραχμῶν αὐξανόμενον τοῦ ποσοῦ τούτου ἀπὸ ἔτους εἰς ἔτος κατὰ 7,5% (ἄνευ ἀνατοκισμοῦ). Κατὰ τὴν ἐπομένην πενταετιᾶν εἰσπράττει ὁμοίως τὸ προηγούμενον ποσὸν 210 000 δρχ. ἡῤῥξημένον κατὰ τὸ τρίτον αὐτοῦ, ἐνῶ ἀπὸ πενταετίας εἰς πενταετιᾶν ἐξακολουθεῖ ἡ αὐξησης τοῦ ποσοῦ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ ἀρχικοῦ καὶ κατὰ 7,5% ἐτησίως (ἄνευ ἀνατοκισμοῦ). Πόσον θὰ εἰσπράξῃ εἰς τὸ τέλος τῆς 1ης, 2ας, 3ης, 4ης πενταετίας, ἂν ἀνετοκίζετο κατ' ἔτος πρὸς 5% ;

Περίληψις περιεχομένων κεφαλαίου VIII.

Ὅρισμός ἀριθμητικῆς προόδου (αὐξουσα, φθίνουσα πρόοδος, ἂν ἡ διαφορὰ ἢ ὁ λόγος αὐτῆς $\omega > 0$ ἢ < 0). Ὁ νιοστός ὅρος $\tau = \alpha + (n-1)\omega$ (α = πρῶτος, ω ἡ διαφορὰ). Ἡ πρόοδος ὀρίζεται, ἂν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ἡ διαφορὰ.

Ὅρισμός παρεμβολῆς n ὄρων ἀριθμητικῆς προόδου μεταξὺ ἀριθμῶν α, β . Ἔχομεν $\omega_1 = (\beta - \alpha) : (n+1)$, ἂν ω_1 εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς προόδου. Ἰδιότης τῶν ὄρων ἀριθμητικῆς προόδου $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ κ.τ.λ., εἶναι $\alpha + \tau = \beta + \lambda = \gamma + \kappa \dots$

Ἀθροισμα Σ τῶν ὄρων ἀριθμητικῆς προόδου $\Sigma = (\alpha + \tau) \cdot n : 2$ ἢ $\Sigma = [2\alpha + (n-1)\omega]n : 2$.

Ὅρισμός γεωμετρικῆς προόδου (ἀπολύτως αὐξουσα ἢ φθίνουσα, ἂν ὁ λόγος ω εἶναι $|\omega| > 1$ ἢ < 1).

Ὁ νιοστός ὅρος $\tau = \alpha\omega^{n-1}$, α ὁ πρῶτος ὅρος, ω ὁ λόγος.

Ἄν $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \kappa, \lambda, \tau$ εἶναι γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ λόγον ω , εἶναι $\beta^2 = \alpha\gamma, \beta\lambda = \gamma\kappa = \alpha\tau$.

Παρεμβολὴ n ὄρων γεωμετρικῆς προόδου μεταξὺ δύο ἀριθμῶν α, β . Ἡ σχηματιζομένη πρόοδος θὰ ἔχη λόγον $\omega_1 = \sqrt[n+1]{\beta : \alpha}$.

*Αθροισμα n ὄρων γεωμετρικῆς προόδου $\alpha, \beta, \gamma, \dots \lambda, \kappa, \tau$, τὸ $\Sigma = (\alpha\omega^n - \alpha) : (\omega - 1) = (\tau\omega - \alpha) : (\omega - 1) = \frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\alpha\omega^n}{1-\omega}$. *Αθροισμα Σ τῶν ὄρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου (μέ ἄπειρον πλῆθος ὄρων) $\Sigma = \frac{\alpha}{1-\omega}$.

***Ορισμός ἁρμονικῆς προόδου** (ἂν οἱ ἀντίστροφοι τῶν ὄρων τῆς ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον).

***Ορισμός λογαρίθμου ἀριθμοῦ ὡς πρὸς βάσιν 10 ἢ τὸν ἀριθμὸν e** ($e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$). Ὁ e εἶναι ἀσύμμετρος καὶ ὑπερβατικὸς (καθὼς καὶ ὁ $\pi = 3,141\dots$)

*Ιδιότητες τῶν λογαρίθμων. Πᾶς ἀριθμὸς $A > 0$ ἔχει λογάριθμον θετικὸν μὲν, ἂν $A > 1$, ἀρνητικὸν δέ, ἂν $A < 1$ (ἀρνητικὸς ἀριθμὸς δὲν ἔχει λογάριθμον πραγματικόν).

$\log(A \cdot B) = \log A + \log B$, $\log(A:B) = \log A - \log B$, $\log(A^n) = n \log A$.

Χαρακτηριστικὸν λογαρίθμου. Τροπὴ ἀρνητικοῦ εἰς ἓν μέρει ἀρνητικόν.

Αἱ 4 πράξεις μὲ ἀριθμοὺς ἓν μέρει ἀρνητικούς. Λογαριθμικοὶ πίνακες, χρήσις αὐτῶν. Ἐφαρμογαὶ τῶν λογαρίθμων. Ἀλλαγὴ τῆς βάσεως συστήματος λογαρίθμων.

***Ορισμός ἐκθετικῶν ἐξισώσεων** (αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀγνώστους εἰς τοὺς ἐκθέτας δυνάμεων). Λύσις ἐκθετικῶν ἐξισώσεων.

Συστήματα ἐκθετικῶν ἐξισώσεων καὶ λύσεις αὐτῶν.

***Ορισμός λογαριθμικῆς ἐξισώσεως** Λύσεις λογαριθμικῶν ἐξισώσεων.

***Ορισμός τοῦ ἀνατοκισμοῦ.** Ἀξία Σ κεφαλαίου α ἀνατοκίζομένου ἐπὶ n ἔτη $\Sigma = \alpha(1+\tau)^n$, τ = τόκος μιᾶς μονάδος εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα. Εὗρεσις α') τοῦ Σ , β') τοῦ α , γ') τοῦ n (περίπτωσης καθ' ἣν τὸ n δὲν εἶναι ἀκέραιος, ὅτε ἐφαρμόζεται ὁ τύπος

$$\Sigma = \alpha(1+\tau)^n \cdot (1+\eta\tau : 360).$$

Περίπτωσης ἀνατοκισμοῦ καθ' ἑξαμηνίαν $\tau_1 = \sqrt[4]{1+\tau} - 1$, περίπτωσης ἀνατοκισμοῦ κατὰ τριμηνίαν $\tau_2 = \sqrt[4]{1+\tau} - 1$.

***Ορισμός προβλημάτων ἴσων καταθέσεων.** Τελικὴ ἀξία Σ ἴσων καταθέσεων α μετὰ n ἔτη $\Sigma = (1+\tau)\alpha [(1+\tau)^n - 1] : \tau$ (ἂν ἡ ἐκάστοτε κατάθεσις γίνεταί εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς χρονικῆς μονάδος)

ή $\Sigma = \alpha [(1 + \tau)^v - 1] : \tau$ (αν ή κατάθεσις γίνεται είς τὸ τέλος τῆς χρονικῆς μονάδος).

Ὁρισμός χρεωλυσίας. Τύπος εύρέσεως τοῦ χρεωλυσίου x εἶναι :

$$x [(1 + \tau)^v - 1] : \tau = \alpha (1 + \tau)^v$$

ή γενικώτερον $x[(1 + \tau)^{v-k} - 1] : \tau = \alpha(1 + \tau)^v$, αν ή πρώτη καταβολή χρεωλυσίου γίνεται k ἔτη μετὰ τήν σύναψιν τοῦ δανείου α ποσοῦ διά v ἔτη ($v > k$) μετ τόκον μιᾶς μονάδος είς τήν μονάδα τοῦ χρόνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΧ

Α'. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ (ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ) ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 229. Ὡς γνωστόν, ἂν εἶναι $\alpha > 0$, ἢ $\alpha = 0$ ἔχομεν $|\alpha| = \alpha$, ἐνῶ
ἂν $\alpha < 0$, $|\alpha| = -\alpha$. Π.χ. $|15| = 15$, $|-6| = 6$, $|0| = 0$.

Διὰ τὰς ἀπολύτους τιμὰς (πραγματικῶν) ἀριθμῶν ἔχομεν τὰς
ἐξῆς ιδιότητας :

1η. Ἐστω π.χ. ὁ -12 . Ἐχομεν $|-12| = 12 = |12|$. Ἐπίσης $|-7| = 7 = |7|$. Γενικῶς, ἂν α εἶναι σχετικὸς ἀριθμὸς, ἔχομεν $|\alpha| = |\alpha|$.

2αν. Ἐστω π.χ. ὁ 15 . Ἐχομεν $|15| = 15$, ἐνῶ $-|15| = -15$. Ἄλλ' εἶναι $-15 < 15 = |15|$, ἄρα $-|15| < |15|$, ἐνῶ $|0| = 0 = -|0|$. Ἐν γένει ἔχομεν λοιπὸν $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$.

3η. Ἐστω π.χ. ἡ 3 < 6 . Παρατηροῦμεν ὅτι $-6 = -6$, $-6 < 3 < 6 = 6$. Ὀμοίως $-5 = -5$ καὶ $-5 < -5 < 5 = 5$, ἥτοι $-5 < 5$. Ἐν γένει, ἂν εἶναι $|\alpha| \leq |\beta|$, θὰ ἔχωμεν $-|\beta| \leq \alpha \leq |\beta|$. Διότι ἐκ τῆς $|\alpha| \leq |\beta|$ εὐρίσκομεν (πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς ἐπὶ -1), $-|\alpha| \geq -|\beta|$, ἥτοι $-|\beta| \leq -|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$ (κατὰ τὴν 2αν ιδιότητα) καὶ $-|\beta| \leq -|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha| \leq |\beta|$ (ἐξ ὑποθέσεως), ἥτοι $-|\beta| \leq \alpha \leq |\beta|$. Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν ἰσχύῃ αὕτη, θὰ ἔχωμεν $|\alpha| \leq |\beta|$.

Π.χ. εἶναι $-|-8| < -3 < |-8|$ ἢ $-8 < -3 < 8$ καὶ $|-3| < |-8|$ ἢ $3 < 8$.

1. ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΤΙΜΗ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

α') Ἐστω, ὅτι ζητεῖται ἡ $|5+8|$. Ἐχομεν $|5+8| = |13| = 13 = 5+8 = |5|+|8|$. Ἐστω ἡ $|-15-6|$. Ἐχομεν $|-15-6| = |-21| = |21| = 21 = 15+6 = |-15|+|-6|$. Ἐστω ἡ $|-20+8|$. Ἐχομεν $|-20+8| = |-12| = |12| = 12 < 20+8 = |-20|+|8|$, ἥτοι $|-20+8| < |-20|+|8|$.

Ἄν α , β εἶναι ὁμόσημοι, ἔχομεν $|\alpha+\beta| = |\alpha|+|\beta|$. Διότι, διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ $\alpha+\beta$, προσθέτομεν τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν α , β κ.τ.λ., ἥτοι :

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $\alpha + \beta$ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν α καὶ β , ἂν εἶναι ὁμόσημοι.

Ἄν α , β εἶναι ἐτερόσημοι, ἔχομεν $|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$. Διότι, διὰ τὴν εὐρεσιν τοῦ $\alpha + \beta$, θὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν ἐκ τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν α , β τὴν μικροτέραν αὐτῶν κ.τ.λ. ὥστε :

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος εἶναι μικρότερα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων, ἂν εἶναι ἐτερόσημοι.

Ἦτοι γενικῶς ἔχομεν :

Ἄν οἱ α , β εἶναι πραγματικοί, ἔχομεν $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, τὴν μὲν ἰσότητα δι' ὁμοσήμους (ἢ 0), τὴν δὲ ἀνισότητα δι' ἐτεροσήμους προσθετέους.

Ὁμοίως εὐρίσκομεν, ὅτι :

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|.$$

Τὴν αὐτὴν ιδιότητα δεῖκνύομεν καὶ ὡς ἑξῆς :

Ἔχομεν $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$.

Ἐπίσης ἔχομεν $-|\beta| \leq \beta \leq |\beta|$. Μὲ τὴν πρόσθεσιν τούτων κατὰ μέλη εὐρίσκομεν $-|\alpha| - |\beta| \leq \alpha + \beta \leq |\alpha| + |\beta|$

ἢ $-(|\alpha| + |\beta|) \leq \alpha + \beta \leq |\alpha| + |\beta|$, ἐπομένως εἶναι καὶ $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, δηλαδή $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

β') **Θὰ δείξωμεν ὅτι :** $|\alpha \pm \beta| \geq ||\alpha| - |\beta||$. Ἔχομεν : $|\alpha| = |\alpha + \beta + (-\beta)| = |(\alpha + \beta) + (-\beta)| \leq |\alpha + \beta| + |-\beta| = |\alpha + \beta| + |\beta|$, ἥτοι $|\alpha| \leq |\alpha + \beta| + |\beta|$, ἐπομένως $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha + \beta|$.

Ὁμοίως ἔχομεν $|\beta| = |\beta + \alpha + (-\alpha)| \leq |\alpha + \beta| + |-\alpha| = |\alpha + \beta| + |\alpha|$ καὶ $|\beta| - |\alpha| \leq |\alpha + \beta|$, ἄρα $- (|\alpha| - |\beta|) \leq |\alpha + \beta|$.

Ἐν γένει λοιπὸν ἔχομεν $|\alpha + \beta| \geq ||\alpha| - |\beta||$. Ἐπίσης ἔχομεν $|\alpha - \beta| = |\alpha + (-\beta)| \geq ||\alpha| - |-\beta|| = ||\alpha| - |\beta||$ (ἐνεκα τῆς προηγουμένης σχέσεως), ἥτοι $|\alpha - \beta| \geq ||\alpha| - |\beta||$. Ὡστε γενικῶς ἔχομεν

$$|\alpha \pm \beta| \geq ||\alpha| - |\beta||.$$

γ') Ἄν εἶναι $|x - \psi| < \alpha$, $|\psi - \omega| < \alpha$ θὰ δείξωμεν ὅτι $|x - \omega| < 2\alpha$.

Διότι μετὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν δοθεῶν ἀνισοτήτων κατὰ μέλη εὐρίσκομεν $|x - \psi| + |\psi - \omega| < 2\alpha$. Ἀλλ' εἶναι $|x - \omega| = |(x - \psi) + (\psi - \omega)| \leq |x - \psi| + |\psi - \omega| < 2\alpha$, ἥτοι $|x - \omega| < 2\alpha$.

Ὅταν χρησιμοποιοῦμεν τὴν ιδιότητα αὐτὴν, λέγομεν συνήθως, ὅτι ἀπαλείφομεν τὸν ψ ἐκ τῶν x , ψ , ω μεταξὺ τῶν δοθεῶν ἀνισοτήτων.

2. ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΤΙΜΗ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΑΡΙΘΜΩΝ

Έχουμε $|8 \cdot 7| = |56| = 8 \cdot 7 = |8| \cdot |7|$. Επίσης $|-5 \cdot 9| = |-45| = 45 = 5 \cdot 9 = |-5| \cdot |9|$.

Έν γένει $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$, διότι οίοιδήποτε και α είναι οί σχετικοί αριθμοί α, β (όμόσημοι ή ετερόσημοι), διὰ νὰ εὐρώμεν τὸ γινόμενον τῶν, θὰ εὐρώμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν α, β κ.τ.λ., ἥτοι :

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ γινομένου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων.

3. ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΤΙΜΗ ΠΗΛΙΚΟΥ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἐστω $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right|$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} = |\alpha| : |\beta|$, ($\beta \neq 0$).

Διότι, ἂν τεθῇ $\frac{\alpha}{\beta} = \omega$, ἔχομεν $\alpha = \beta \cdot \omega$, $|\alpha| = |\beta \cdot \omega| = |\beta| \cdot |\omega|$

Ἐπομένως $|\omega| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$, ἥτοι $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} = |\alpha| : |\beta|$.

4. ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΤΙΜΗ ΔΥΝΑΜΕΩΣ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ἐστω, ὅτι ἔχομεν $|\alpha^{|v|}|$, ὅπου v ἀκέραιος ($|v| > 0$).

Ἐχομεν $\alpha^{|v|} = \alpha \cdot \alpha \dots \alpha$, $|\alpha^{|v|}| = |\alpha \cdot \alpha \dots \alpha| = |\alpha| |\alpha| \dots |\alpha| = |\alpha|^{|v|}$.

Ἄν ἔχωμεν $|\alpha^{-|v|}|$, θὰ εἶναι $|\alpha^{-|v|}| = |\alpha|^{-|v|}$. Διότι εἶναι $\alpha^{-|v|} = \frac{1}{\alpha^{|v|}}$,

$$|\alpha^{-|v|}| = \left| \frac{1}{\alpha^{|v|}} \right| = \frac{1}{|\alpha^{|v|}|} = |\alpha|^{-|v|} \text{ ἥτοι } |\alpha^{-|v|}| = |\alpha|^{-|v|}$$

Β'. ΠΕΡΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

§ 230. α') Τυχαῖοι ἀριθμοὶ π.χ. οἱ 3, -5, -6, 12, 7, $\frac{1}{3}$, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἀντιστοιχεῖ εἰς ἓνα ἀριθμὸν τῆς φυσικῆς σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4..., λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν μίαν ἀκολουθίαν ἀριθμῶν. Συνήθως ἕκαστος τῶν διδομένων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἐξῆς γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενόν του κατὰ τινα ὠρισμένον τρόπον π.χ. οἱ $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$

Διὰ τοῦτο ἀκολουθία ἀριθμῶν καλεῖται τὸ σύνολον ἀριθμῶν ἀντιστοιχοῦντων εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, . . ., ἕκαστος τῶν ὁποίων (ἀπὸ τοῦ β' καὶ ἐξῆς) γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του κατὰ τινὰ ὠρισμένον τρόπον.

Οἱ ἀποτελοῦντες τὴν ἀκολουθίαν ἀριθμοὶ λέγονται καὶ ὅροι τῆς ἀκολουθίας.

β') Ἀκολουθία τις ἀριθμῶν λέγεται **πεπερασμένου πλήθους** ἢ **πεπερασμένη** μὲν, ἂν ἀποτελῇται ἀπὸ πεπερασμένον πλήθος ὁρων, **ἀπέραντος** δέ, ἂν εἰς πάντα ἀκέραιον (θετικὸν ἀριθμὸν) ἀντιστοιχῇ εἰς τοιοῦτος τῆς ἀκολουθίας, ὅτε αὕτη ἔχει ἄπειρον πλήθος ὁρων.

Παριστάνομεν συμβολικῶς τὴν ἀκολουθίαν μὲ $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ ἢ μὲ (x_v) καὶ λέγομεν: ἡ ἀκολουθία τῶν ἀριθμῶν ἢ τῶν ὁρων x_v , ὅπου ὑπατίθεται ὅτι τὸ $v=1, 2, 3, \dots$ Π.χ. ἡ ἀκολουθία τῶν ὁρων

$$(x_v) = \left(\frac{1}{v}\right) \text{ εἶναι (ὅταν } v=1, 2, 3, \dots) \text{ ἡ } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{p}, \dots \quad (1)$$

$$\text{'Η ἀκολουθία τῶν ὁρων } (x_v) = (2^v) \text{ εἶναι ἡ } 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^p, \dots \quad (2)$$

Ἐὰν ἔχωμεν $(x_v) = \left(\frac{v+1}{v}\right)$, οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι

$$\frac{1+1}{1}, \frac{2+1}{2}, \frac{3+1}{3}, \dots \text{ ἢ } \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{p+1}{p}, \dots \quad (3)$$

Ἐὰν ἔχωμεν $(x_v) = \left(\frac{(-1)^{v-1}}{v}\right)$, οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι

$$\frac{(-1)^{1-1}}{1}, \frac{(-1)^{2-1}}{2}, \frac{(-1)^{3-1}}{3}, \frac{(-1)^{4-1}}{4}, \frac{(-1)^{5-1}}{5}, \dots, \text{ ἥτοι οἱ } 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \quad (4)$$

Ἐὰν εἶναι $(x_v) = (-v)$, οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι

$$-1, -2, -3, -4, \dots \quad (5)$$

Ἡ ἀκολουθία τῶν ὁρων $(x_v) = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4, \dots$$

$$\text{ἥτοι ἐκ τῶν } 2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \dots \quad (6)$$

γ') Ἀκολουθία τις λέγεται **περιωρισμένη**, ἂν ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἑκάστου τῶν ὁρων τῆς εἶναι μικρότερα ἢ ἴση ἀριθμοῦ τινος $(A > 0)$,

ήτοι αν είναι $|x_n| \leq A$ ή $-A \leq x_n \leq A$, οτε ο A καλεϊται **φραγμός** ή **φράγμα** των απολύτων τιμών των όρων της ακολουθίας.

Εάν υπάρχει αριθμός τις A_1 , τοιοῦτος, ὥστε να ἔχωμεν $A_1 \leq x_n$, ο A_1 καλεϊται **ἀριστερός** ή **πρός τὰ κάτω φραγμός** της ακολουθίας (x_n), ἐνῶ αν υπάρχει αριθμός τις A_2 , τοιοῦτος, ὥστε να είναι $x_n \leq A_2$, ο A_2 καλεϊται **δεξιός** ή **πρός τὰ ἄνω φραγμός** της ακολουθίας.

Π.χ. διὰ τὴν (1) ἔχομεν $\frac{1}{v} < 1$, ἥτοι ή 1 εἶναι φραγμός αὐτῆς πρὸς τὰ ἄνω· φραγμός ταύτης εἶναι καὶ πᾶς ἀριθμός $\kappa > 1$. Διὰ τὴν (2) ἔχομεν $2 \leq 2^n$ καὶ εἶναι αὕτη περιορισμένη πρὸς τὰ ἀριστερά. Διὰ τὴν (4) ἔχομεν $\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \left| \frac{\pm 1}{n} \right| \leq 1$ καὶ εἶναι αὕτη περιορισμένη πρὸς τὰ δεξιὰ. Διὰ τὴν (5) ἔχομεν $-n \leq -1$, τὸ δὲ -1 εἶναι φραγμός ταύτης πρὸς τὰ ἄνω.

δ') Ἀκολουθία τις (x_n) λέγεται **μονοτόνως αὐξουσα** ή **φθίνουσα**, ἐὰν διὰ πάντας τοὺς ὅρους αὐτῆς ἔχωμεν $x_n \leq x_{n+1}$ ή $x_n \geq x_{n+1}$ ἀντιστοίχως. Οὕτως ἐκ τῶν ἄνωτέρω ἀκολουθιῶν ή μὲν (2) εἶναι μονοτόνως αὐξουσα, διότι εἶναι π.χ. $2 < 2^2$, ή $2^2 < 2^2 \cdot 2$ ή $2^n < 2^{n+1}$, ή δὲ (1) εἶναι μονοτόνως φθίνουσα, ἐπειδὴ εἶναι $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$.

Παρατήρησις. 1η. Ἀκολουθία τις (x_n), διὰ τὴν ὁποίαν ή διαφορά ($x_{n+1} - x_n$) εἶναι σταθερὰ $\lambda \neq 0$, εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος, αὐξουσα μὲν, αν $\lambda > 0$, φθίνουσα δέ, αν εἶναι $\lambda < 0$. Π.χ. ή $5 + 3$, $5 + 3 \cdot 2, \dots$, ($5 + 3 \cdot n$),... ἔχει $\lambda = x_{n+1} - x_n = 5 + 3(n+1) - (5 + 3n) = 3$.

2α. Ἀκολουθία τις ἀριθμῶν θετικῶν (x_n), διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν πηλίκον $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ σταθερὸν $= \omega \neq 1$, εἶναι γεωμετρικὴ πρόοδος, αὐξουσα μὲν, αν $|\omega| > 1$, φθίνουσα δέ, αν $|\omega| < 1$. Π.χ. ή $\frac{6}{2}, \frac{6}{4}, \dots$ εἶναι γεωμ. πρόοδος φθίνουσα ἔχουσα $\omega = \frac{6}{2^{n+1}} : \frac{6}{2^n} = \frac{1}{2}$.

2. ΠΟΤΕ ΜΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΕΙΝΕΙ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΗΔΕΝ

§ 231. α') Ἐστω ή ἀπέραντος ἀκολουθία $\left(\frac{1}{10^n} \right) = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$

Ἐὰν δοθέντος οἰουδήποτε ἀριθμοῦ, π.χ. 0,0000001 δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν ὄρον τῆς ἀκολουθίας, ὥστε ἕκαστος τῶν ἐπομένων του (ἀπειρών εἰς πλῆθος) νὰ εἶναι ἀπολύτως μικρότερος οἰουδήποτε δοθέντος ἀριθμοῦ π.χ. τοῦ 0,0000001 = ε , τότε λέγομεν ὅτι ἡ $\left(\frac{1}{10^n}\right)$ τείνει εἰς τὸ 0 καὶ συμβολίζομεν τοῦτο οὕτως $\left(\frac{1}{10^n}\right) \rightarrow 0$ ἢ $\text{op}\left(\frac{1}{10^n}\right) = 0$. Πράγματι ἕκαστος τῶν ὄρων μετὰ τὸν 0,0000001, οἱ 0,00000001, 0,000000001,... εἶναι μικρότερος τοῦ ε καὶ οὕτως ἔχομεν ὅτι

$$\left(\frac{1}{10^n}\right) \rightarrow 0 \text{ ἢ } \text{op}\left(\frac{1}{10^n}\right) = 0.$$

Ἐπίσης ἡ ἀκολουθία $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) = 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ (διὰ $n = 1, 2, 3, \dots$) τείνει εἰς τὸ μηδέν, διότι ἂν π.χ. $\varepsilon = \frac{1}{900}$, ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἑκάστου τῶν ὄρων $\frac{1}{901}, -\frac{1}{902}, \dots$ εἶναι μικρότερα τοῦ $\frac{1}{900}$.

Ἐν γένει λέγομεν, ὅτι **ἀπέραντος ἀκολουθία ἀριθμῶν** (x_n) $\rightarrow 0$ ἢ **ἔχει ὄριον τὸ 0**. ἂν δοθέντος οἰουδήποτε ἀριθμοῦ $\varepsilon > 0$, (ὅσονδήποτε μικροῦ) δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν ἄλλον $\eta > 0$ καὶ ἀκέραιον τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἔχωμεν $|x_{\eta}| < \varepsilon$, $|x_{\eta+1}| < \varepsilon$, $|x_{\eta+2}| < \varepsilon$, ἥτοι $|x_n| < \varepsilon$ διὰ πᾶσαν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ $n \geq \eta$.

$$\beta') \text{ Ἐστω ἡ ἀπέραντος ἀκολουθία } (x_n) = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2},$$

$$\text{ἥτοι ἡ } \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \dots$$

* Ἄν δοθῇ $\varepsilon > 0$ καὶ θέλωμεν νὰ εἶναι $|x_n| < \varepsilon$, ἀρκεῖ νὰ εὗρωμεν τὸ n , ὥστε νὰ ἔχωμεν $|x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} < \varepsilon$ ἢ $(n+1)^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, $n+1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ καὶ $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1$.

Ὡστε διὰ τιμὰς ἀκεραίας τοῦ $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1$ θὰ ἔχωμεν $|x_n| < \varepsilon$

καὶ ἐπομένως ἡ δοθεῖσα ἀκολουθία τείνει εἰς τὸ 0 ἢ ἔχει ὄριον τὸ 0.

γ') Λέγομεν ὅτι **ἀπέραντος ἀκολουθία ἀριθμῶν** x_n **τείνει ἢ ἔχει ὄριον τὸ ἀπειρον** καὶ σημειώνομεν τοῦτο μὲ $(x_n) \rightarrow \infty$ ἢ $\text{op}(x_n) = \infty$, ἂν δοθέντος οἰουδήποτε ἀριθμοῦ $M > 0$ (ὅσονδήποτε μεγάλου)

δυνάμεθα νὰ εὐρωμεν ἄλλον ἀκέραιον $H_M > 0$ τοιοῦτον, ὥστε διὰ $n > H_M$ νὰ ἔχωμεν $x_n > M$.

Π.χ. ἡ ἀκολουθία 1, 2, 3, 4, ... τείνει εἰς τὸ ∞ . Διότι ἂν π.χ. $M=315\,687$, ἔχομεν $H=315\,688$ καὶ διὰ $n > 315\,688$ εἶναι οἱ 315\,688, 315\,689, ... $> 315\,687$. ἥτοι ἡ ἀκολουθία $(x_n) \rightarrow \infty$ ἢ $\text{or}(x_n) = \infty$.

Λέγομεν ὅτι ἀκολουθία τις ἀριθμῶν (x_n) τείνει ἢ ὅτι ἔχει ὄριον ἀριθμὸν ὠρισμένον A , ἐὰν ἡ ἀκολουθία $(x_n - A) \rightarrow 0$.

Π.χ. ἡ ἀκολουθία $(x_n) = \frac{n+1}{n}$ (διὰ $n = 1, 2, 3, \dots$) τείνει εἰς τὴν 1.

Διότι ἡ ἀκολουθία $\left(\frac{n+1}{n} - 1\right) \rightarrow 0$. Πράγματι ἔχομεν $\left(\frac{n+1}{n} - 1\right) = \frac{1}{n}$ καὶ ἡ $\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$, ἄρα $\left(\frac{n+1}{n}\right) \rightarrow 1$.

Ἡ ἀκολουθία $5\frac{1}{2}, 5\frac{1}{4}, \dots, 5\frac{1}{2n}, \dots$ ἔχει ὄριον τὸ 5. Διότι ἡ ἀκολουθία $5\frac{1}{2} - 5, 5\frac{1}{4} - 5, \dots, 5\frac{1}{2n} - 5, \dots$, ἥτοι ἡ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2n}, \dots$ ἔχει ὄριον τὸ 0.

Ὅμοιως ἡ ἀκολουθία $-11, -11\frac{1}{2}, -11\frac{2}{3}, -11\frac{3}{4}, \dots$ ἔχει ὄριον τὸ -12 . Διότι ἡ $-11 - (-12), -11\frac{1}{2} - (-12), -11\frac{2}{3} - (-12)$, ἥτοι ἡ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ἔχει ὄριον τὸ 0.

3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

α') Ἐὰν ἡ ἀπέραντος ἀκολουθία ἀριθμῶν $(x_n) \rightarrow 0$, τότε ἡ $|x_n| \rightarrow 0$ καὶ ἀντιστρόφως. Τοῦτο ἐπεταὶ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ, καθ' ὃν ἡ ἀκολουθία $(x_n) \rightarrow 0$.

β') Ἐὰν ἡ ἀκολουθία $(x_n) \rightarrow 0$ τότε ἡ $\left(\frac{1}{x_n}\right) \rightarrow \infty$.

Ἔστω ἀριθμὸς $M > 0$ (ὅσονδῆποτε μεγάλος). Λέγομεν ὅτι ὑπάρχει ἀριθμὸς $n_M > 0$ θετικὸς ἀκέραιος, ὥστε διὰ $n_M > 0$ νὰ εἶναι $\left|\frac{1}{x_n}\right| > M$. Πράγματι, ἀφοῦ $(x_n) \rightarrow 0$. ὑπάρχει ἀριθμὸς $n_M > 0$, ὥστε ἂν $n > n_M$, νὰ ἔχωμεν $|x_n| < \frac{1}{M}$, ἄρα εἶναι καὶ $M \cdot |x_n| < 1$, ἢ $M < \frac{1}{|x_n|}$.

Δηλαδή διὰ $n > \eta_M$ ἔχομεν $\left| \frac{1}{x_n} \right| > M$. Οὕτως, ἡ μὲν ἀκολουθία $\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots \right) \rightarrow 0$, ἡ δὲ $(1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots) \rightarrow \infty$.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καὶ ὅτι, ἂν $\text{op}(x_n) = \infty$, ἡ $\left(\frac{1}{x_n} \right) \rightarrow 0$.

Ἐὰν $(x_n) \rightarrow 0$, καὶ $(\lambda x_n) \rightarrow 0$, ἂν λ σταθερὰ ποσότης. Διότι, ἀφοῦ $|x_n| < \varepsilon$ διὰ $n > \eta$, θὰ εἶναι $|\lambda x_n| = |\lambda| \cdot |x_n| < |\lambda| \cdot \varepsilon$, τὸ δὲ $|\lambda| \cdot \varepsilon$ δύναται νὰ γίνῃ ὅσονδήποτε μικρόν, ὅταν γίνεταί τὸ ε ὅσον θέλομεν μικρόν, ἥτοι $(\lambda x_n) \rightarrow 0$.

γ') Ἐὰν αἱ ἀκολουθίαι $(x_n) \rightarrow 0$ ἢ $\text{op}(x_n) = 0$, $(x'_n) \rightarrow 0$ ἢ $\text{op}(x'_n) = 0$, θὰ εἶναι :

$$1\text{ον. } (x_n + x'_n) \rightarrow 0 \text{ ἢ } \text{op}(x_n + x'_n) = 0.$$

$$2\text{ον. } (x_n - x'_n) \rightarrow 0 \text{ ἢ } \text{op}(x_n - x'_n) = 0.$$

$$3\text{ον. } (x_n \cdot x'_n) \rightarrow 0 \text{ ἢ } \text{op}(x_n \cdot x'_n) = 0.$$

1ον. Διότι, ἂν θέσωμεν $x_n + x'_n = \psi_n$, θὰ ἔχωμεν προφανῶς $|\psi_n| = |x_n + x'_n| \leq |x_n| + |x'_n|$. Ἐὰν δοθῇ ἀριθμὸς $\varepsilon > 0$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, δυνάμεθα δὲ νὰ εὕρωμεν ἂνὰ ἓνα ἀριθμὸν $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, ὥστε νὰ ἔχωμεν $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ διὰ $n > \eta_1$ καὶ $|x'_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ διὰ $n > \eta_2$, ἀφοῦ $(x_n) \rightarrow 0$ καὶ $(x'_n) \rightarrow 0$. Ἄν παρασταθῇ μὲ η ὁ μεγαλύτερος τῶν η_1, η_2 , θὰ ἔχωμεν διὰ $n > \eta$ τὸ $|\psi_n| \leq |x_n| + |x'_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ἥτοι $|\psi_n| \rightarrow 0$, δηλαδή $(x_n + x'_n) \rightarrow 0$.

2ον. Ἐπειδὴ εἶναι $|x_n - x'_n| = |x_n + (-x'_n)| \leq |x_n| + |-x'_n| = |x_n| + |x'_n|$, ἥτοι $|x_n - x'_n| \leq |x_n| + |x'_n| < \varepsilon$, ἔπεται ὅτι καὶ $(x_n - x'_n) \rightarrow 0$ ἢ $\text{op}(x_n - x'_n) = 0$.

3ον. Προφανῶς ἔχομεν $|x_n \cdot x'_n| = |x_n| \cdot |x'_n|$, καὶ ἂν $\varepsilon > 0$ εἶναι καὶ $\sqrt{\varepsilon} > 0$. Ἄν λοιπὸν δοθέντος τοῦ $\varepsilon > 0$ εὐρεθοῦν οἱ $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ τοιοῦτοι, ὥστε νὰ εἶναι $|x_n| < \sqrt{\varepsilon}$ διὰ $n > \eta_1$, καὶ $|x'_n| < \sqrt{\varepsilon}$ διὰ $n > \eta_2$, τὸ δὲ η παριστάνῃ τὸν μεγαλύτερον ἐκ τῶν η_1, η_2 , θὰ ἔχωμεν διὰ $n > \eta$ τὸ $|x_n| < \sqrt{\varepsilon}$ καὶ $|x'_n| < \sqrt{\varepsilon}$. Ἄρα καὶ $|x_n| \cdot |x'_n| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$.

Ἐπομένως εἶναι $|x_n| \cdot |x'_n| < \varepsilon$, ἥτοι ἔχομεν $(x_n \cdot x'_n) \rightarrow 0$ ἢ $\text{op}(x_n \cdot x'_n) = 0$.

Π.χ. ἂν ἔχωμεν τὰς ἀκολουθίας $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ καὶ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ ἐκάστη τῶν ὁποίων τείνει εἰς τὸ 0, τότε ἡ $\left(1 \pm \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2^2}\right), \left(\frac{1}{3} \pm \frac{1}{2^3}\right), \dots, \left(\frac{1}{n} \pm \frac{1}{2^n}\right), \dots$ καθὼς καὶ ἡ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2 \cdot 2^2}, \frac{1}{3 \cdot 2^3}, \dots, \frac{1}{n \cdot 2^n}, \dots$ τείνουν εἰς τὸ 0.

Ἀσκήσεις

642. Νὰ εὐρεθῇ εἰς κατώτερος φραγμὸς τῆς ἀκολουθίας $1, 3, 9, 27, \dots, 3^n, \dots$ ὕπάρχει πεπερασμένος ἀριθμὸς, ὅστις νὰ εἶναι ἀνώτερος φραγμὸς τῆς ἀκολουθίας ταύτης καὶ διατί;

643. Αἱ ἀκολουθίαι, αἱ ὁποῖαι τείνουν εἰς τὸ $+\infty$, ἔχουν ἀνωτέρους φραγμοὺς; Διατί; Ἡ ἀκολουθία $-1, +1, -1, +1, \dots, (-1)^n, \dots$ τείνει πρὸς ἀριθμὸν τινα;

644. Νὰ εὐρεθῇ:

α) Ὁ 10ος ὅρος τῆς ἀκολουθίας $5, 100, 1125, \dots, n^2 \cdot 5^n, \dots$

β') Ὁ 5ος » » » $\frac{3}{2}, \frac{9}{\sqrt{2}-1}, \frac{27}{\sqrt{3}+1}, \dots, \frac{3^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}, \dots$

γ') Ὁ 7ος » » » $2, 1, \frac{3}{5}, \dots, \frac{n+3}{n^2+1}, \dots$

645. Δίδεται ἡ ἀκολουθία $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$ Νὰ εὐρεθῇ ἀριθμὸς η , ὥστε ἂν $n > \eta$, νὰ ἔχωμεν $\frac{1}{n^2} < 0,35$. Ἐπίσης νὰ ἔχωμεν $\frac{1}{n^2} < 0,00001$.

646. Δείξατε ὅτι, ἂν $(x_n) \rightarrow \alpha$ ἢ $\text{op}(x_n) = \alpha$, $(\lambda x_n) \rightarrow \lambda \alpha$ ἢ $\text{op}(\lambda x_n) = \lambda \alpha$, ἂν λ σταθερὰ ποσότης. Δείξατε ὅτι, ἂν $(x_n) \rightarrow \alpha$ ἢ $\text{op}(x_n) = \alpha$, $(x'_n) \rightarrow \beta$ ἢ $\text{op}(x'_n) = \beta$.

1ον) Τότε $(x_n + x'_n) \rightarrow \alpha + \beta$ ἢ $\text{op}(x_n + x'_n) = \text{op} x_n + \text{op} x'_n$.

2ον.) Εἶναι $(x_n \cdot x'_n) \rightarrow \alpha \cdot \beta$ ἢ $\text{op}(x_n \cdot x'_n) = \alpha \cdot \beta = \text{op} x_n \cdot \text{op} x'_n$.

3ον) $\left(\frac{x_n}{x'_n}\right) \rightarrow \frac{\alpha}{\beta}$ ἢ $\text{op}\left(\frac{x_n}{x'_n}\right) = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\text{op} x_n}{\text{op} x'_n}$ ἂν $(\beta \neq 0)$.

647. Δίδεται ἡ ἀκολουθία $6\frac{1}{2}, 6\frac{2}{3}, \dots, 6 + \frac{n}{n+1}, \dots$ Νὰ εὐρεθῇ ἀριθμὸς $\eta > 0$ ὥστε, ἂν $n \geq \eta$, νὰ εἶναι $|6 + \frac{n}{n+1} - 7| < 0,0025$.

648. Γενικώτερον εὑρετε τὸν η , ὥστε νὰ εἶναι $|6 + \frac{n}{n+1} - 7| < \varepsilon$, ὅπου $\varepsilon > 0$ ὅσονδῆποτε μικρὸς. Τὶ συμπεραίνετε περὶ τῆς μεταβλητῆς, ἡ ὁποία λαμβάνει τὰς τιμὰς τῆς ἀκολουθίας ταύτης;

649. Δίδονται αἱ ἀκολουθίαι $x_n = 5 + \frac{1}{n}$ καὶ $\psi_n = 6 - \frac{1}{n^2}$. Δείξατε ὅτι αὗται τείνουν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 5 καὶ 6, ὅταν $n \rightarrow \infty$ καὶ $m \rightarrow \infty$.

4. ΠΕΡΙ ΟΡΙΟΥ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΟΣ

§ 232. 'Ορισμοί. α') 'Εάν μεταβλητή ποσότης, ἔστω x , λαμβάνη διαδοχικῶς ὡς τιμὰς τοὺς ὅρους μιᾶς ἀπεράντου ἀκολουθίας ἀριθμῶν (x_n) , λέγομεν, ὅτι ὄριον τῆς x εἶναι τὸ 0, ἂν $(x_n) \rightarrow 0$ ἢ $\text{or}(x_n) = 0$, σημειώνομεν δὲ τοῦτο μὲ $x \rightarrow 0$ ἢ $\text{or} x = 0$. Π.χ., ἂν ἡ x λαμβάνη τὰς τιμὰς $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, ἐπειδὴ εἶναι $(\frac{1}{n}) \rightarrow 0$, λέγομεν, ὅτι $x \rightarrow 0$ ἢ $\text{or} x = 0$.

β') Λέγομεν, ὅτι ὄριον μεταβλητῆς x εἶναι ἀριθμὸς τις ὠρισμένος α , ἂν ἡ x λαμβάνη διαδοχικῶς ὡς τιμὰς τοὺς ὅρους μιᾶς ἀπεράντου ἀκολουθίας ἀριθμῶν (x_n) καὶ ἡ $(x_n - \alpha) \rightarrow 0$ ἢ $\text{or}(x_n - \alpha) = 0$. Σημειώνομεν δὲ τοῦτο μὲ $(x - \alpha) \rightarrow 0$ ἢ $x \rightarrow \alpha$ ἢ $\text{or} x = \alpha$.

Ἄν $x \rightarrow 0$ ἢ $\text{or} x = 0$, τότε καὶ $kx \rightarrow 0$ ἢ $\text{or}(kx) = 0$, ὅπου τὸ k εἶναι ἀριθμὸς τις ὠρισμένος (σταθερός). Διότι ὅταν ἡ $(x_n) \rightarrow 0$ ἢ $\text{or} x = 0$ καὶ ἡ $(kx_n) \rightarrow 0$ ἢ $\text{or}(kx) = 0$.

Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι, ἂν $x \rightarrow \alpha$ ἢ $\text{or} x = \alpha$, τὸ $kx \rightarrow k\alpha$ ἢ $\text{or}(kx) = k\alpha$, ὅπου k παριστάνει ὠρισμένον τινὰ (σταθερὸν) ἀριθμόν. Διότι ὅταν $x \rightarrow \alpha$, τὸ $(x - \alpha) \rightarrow 0$ καὶ $k(x - \alpha) \rightarrow 0$ ἢ $(kx - k\alpha) \rightarrow 0$, ἄρα $kx \rightarrow k\alpha$ ἢ $\text{or}(kx) = k\alpha$.

γ') Λέγομεν, ὅτι ὄριον μεταβλητῆς x εἶναι τὸ ἄπειρον (∞) , ἂν ἡ x λαμβάνη διαδοχικῶς τὰς τιμὰς τῶν ὁρῶν ἀπεράντου ἀκολουθίας ἀριθμῶν, ἡ ὁποία τείνει εἰς τὸ ἄπειρον, τὸ σημειώνομεν δὲ μὲ $x \rightarrow \infty$ ἢ $\text{or} x = \infty$. Εἶναι προφανὲς ὅτι, ἂν $x \rightarrow 0$ ἢ $\text{or} x = 0$, θὰ ἔχωμεν τὸ $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ ἢ $\text{or} \frac{1}{x} = \infty$, καὶ ἀντιστρόφως, ἂν $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ ἢ $\text{or} \frac{1}{x} = \infty$, θὰ ἔχωμεν καὶ $x \rightarrow 0$ ἢ $\text{or} x = 0$.

5. ΠΕΡΙ ΟΡΙΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ, ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ, ΠΗΛΙΚΟΥ, ΔΥΝΑΜΕΩΣ, ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ

§ 233. α') 'Εάν $x \rightarrow \alpha$ ἢ $\text{or} x = \alpha$, $\psi \rightarrow \beta$ ἢ $\text{or} \psi = \beta$, τότε $(x + \psi) \rightarrow (\alpha + \beta)$ ἢ $\text{or}(x + \psi) = \text{or} x + \text{or} \psi$

Διότι ἂν x_n καὶ ψ_n εἶναι αἱ ἀκολουθίαι τῶν τιμῶν τοῦ x καὶ ψ , ἐπειδὴ αἱ $(x_n - \alpha) \rightarrow 0$ καὶ $(\psi_n - \beta) \rightarrow 0$, καὶ ἡ $(x_n + \psi_n - \alpha - \beta) \rightarrow 0$, ἤτοι ἔχομεν $(x + \psi - \alpha - \beta) \rightarrow 0$, ἄρα $(x + \psi) \rightarrow (\alpha + \beta)$ ἢ $\text{or}(x + \psi) = \text{or} \psi + \text{or} x$. Ἡ ιδιότης αὕτη ἰσχύει δι' ὅσαςδήποτε

μεταβλητὰς $x, \psi, \omega, \dots$ έχουσας ὅρια, ἀλλ' ὅταν τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶναι πεπερασμένον. Διότι ἂν ἔχωμεν π.χ. τὸ ἄθροισμα μὲ ἀπείρουν πλῆθος προσθετέων $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \dots$, ὅπου $x \rightarrow \infty$ ἢ $\text{or } x = \infty$, τὸ $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ ἢ $\text{or } \frac{1}{x} = 0$. Ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων τὸ πλῆθος προσθετέων θὰ ἔτεινε πρὸς τὸ 0, ἂν ἴσχυεν ἡ ιδιότης, ἐνῶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο (τοῦ x αὐξανομένου διηλεκτῶς) δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ $\frac{x}{x} = 1$.

β') "Αν $x \rightarrow 0$ ἢ $\text{or } x = 0$, $\psi \rightarrow 0$ ἢ $\text{or } \psi = 0$, θὰ ἔχωμεν καὶ $(x\psi) \rightarrow 0$ ἢ $\text{or}(x\psi) = \text{or } x \cdot \text{or } \psi$. Διότι, ἀφοῦ $x \rightarrow 0, \psi \rightarrow 0$, ἔαν (x_v) καὶ (ψ_v) εἶναι αἱ ἀκολουθίαι τῶν τιμῶν τοῦ x καὶ ψ , θὰ τεῖνῃ ἐκάστη τούτων εἰς τὸ 0, ἄρα καὶ $(x_v \psi_v) \rightarrow 0$, ἥτοι $x\psi \rightarrow 0$ ἢ $\text{or}(x\psi) = \text{or } x \cdot \text{or } \psi$.

"Αν ἔχωμεν $x \rightarrow \alpha$, $\psi \rightarrow \beta$, ὅπου α, β εἶναι σταθεραὶ ποσότητες, θὰ εἶναι $(x\psi) \rightarrow \alpha\beta$ ἢ $\text{or}(x\psi) = \text{or } x \cdot \text{or } \psi = \alpha\beta$. Διότι, ἀφοῦ $x \rightarrow \alpha$ καὶ $\psi \rightarrow \beta$, ἂν (x_v) καὶ (ψ_v) εἶναι αἱ ἀκολουθίαι τῶν τιμῶν τῶν x, ψ , θὰ εἶναι $(x_v - \alpha) \rightarrow 0$ καὶ $(\psi_v - \beta) \rightarrow 0$. Ἀρα καὶ ἡ ἀκολουθία $[(x_v - \alpha)(\psi_v - \beta)] \rightarrow 0$ ἢ $[(x_v \psi_v) - (\alpha\psi_v) - (\beta x_v) + \alpha\beta] \rightarrow 0$.

Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα περὶ ὀρίου ἄθροίσματος ἔχομεν

$$\text{or}(x_v \psi_v) + \text{or}[-(\alpha\psi_v)] + \text{or}[-(\beta x_v)] + \alpha\beta = 0.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\text{or}(\beta x_v) = \beta\alpha$ καὶ $\text{or}(\alpha\psi_v) = \alpha\beta$, ἔπεται ὅτι :

$$\text{or}(x_v \psi_v) = \alpha\beta + \alpha\beta - \alpha\beta = \alpha\beta \quad \text{ἢ} \quad \text{or}(x_v \psi_v) = \alpha\beta = \text{or } x \cdot \text{or } \psi.$$

Ἡ ιδιότης αὕτη περὶ τοῦ γινομένου μεταβλητῶν ποσοτήτων ἰσχύει καὶ διὰ περισσοτέρους παράγοντας, ἀλλὰ πεπερασμένους τὸ πλῆθος.

γ') Τὸ ὄριον τοῦ πηλίκου δύο μεταβλητῶν ποσοτήτων ἔχουσιν ὅρια, ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ ὀρίου τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ὀρίου τοῦ διαιρετέου (ὅταν τὸ ὄριον τούτου εἶναι $\neq 0$).

Ἐστω ὅτι $\text{or } x = \alpha$, $\text{or } \psi = \beta (\neq 0)$. Θὰ δεῖξωμεν ὅτι $\text{or } \frac{x}{\psi} = \frac{\text{or } x}{\text{or } \psi} = \frac{\alpha}{\beta}$. Διότι ἂν x_v, ψ_v εἶναι ἀκολουθίαι τῶν x, ψ ἀντιστοίχως, θὰ εἶναι $\text{or}(x_v) = \alpha$, $\text{or}(\psi_v) = \beta$ καὶ $\text{or}(\psi_v - \beta) = 0$, ἄρα $|\psi_v - \beta| < \varepsilon = \frac{1}{2} |\beta|$.

Ἀλλὰ ἔχομεν $|\psi_v| = |\beta + (\psi_v - \beta)| \geq |\beta| - |\psi_v - \beta|$ καὶ

$|\psi_v| > |\beta| - \frac{1}{2} |\beta| = \frac{1}{2} |\beta|$, ήτοι $|\psi_v| > \frac{1}{2} |\beta|$ και $|\frac{1}{\psi_v}| < \frac{2}{|\beta|}$. Ούτως, ο αριθμός $\frac{2}{|\beta|}$ είναι (δεξιός) φραγμός της ακολουθίας $\frac{1}{\psi_v}$.

Σχηματίζομεν την διαφοράν

$$\frac{x_v}{\psi_v} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta x_v - \alpha \psi_v}{\beta \psi_v} = \frac{\beta(x_v - \alpha) - \alpha(\psi_v - \beta)}{\beta \psi_v}$$

και παρατηρούμεν, ότι ο (αριθμητής) $\beta(x_v - \alpha) - \alpha(\psi_v - \beta)$ είναι ακολουθία τείνουσα εις τὸ μηδέν, διότι $\text{op}[\beta(x_v - \alpha) - \alpha(\psi_v - \beta)] = \beta \text{op}(x_v - \alpha) - \alpha \text{op}(\psi_v - \beta) = 0$, ἕκαστος δὲ ὅρος της πολλαπλασιάζεται

ἀντιστοίχως ἐπὶ $\frac{1}{\beta \cdot \psi_v} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\psi_v}$. τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον ὠρισμένου ἀριθμοῦ, τοῦ $\frac{1}{\beta} \cdot \frac{2}{|\beta|}$. Ἄρα εἶναι $\text{op}(\frac{x_v}{\psi_v} - \frac{\alpha}{\beta}) = 0$ και

$$\text{op} \frac{x_v}{\psi_v} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\text{op} x_v}{\text{op} \psi_v} \quad \text{ἢ} \quad \text{op} \frac{x}{\psi} = \frac{\text{op} x}{\text{op} \psi}.$$

Εὐκόλως δεικνύεται, ὅτι ἂν $x \rightarrow \alpha$ ἢ $\text{op} x = \alpha$, τότε $(x^\mu) \rightarrow \alpha^\mu$ ἢ $\text{op}(x^\mu) = \alpha^\mu = (\text{op} x)^\mu$.

*Ἐστω α' ὁ μ ἀκέραιος καὶ θετικός. Ἐχομεν $x^\mu = x \cdot x \cdots x$. Ἄρα $\text{op}(x^\mu) = \text{op}(x \cdot x \cdots x) = \text{op} x \cdot \text{op} x \cdots \text{op} x = (\text{op} x)^\mu = \alpha^\mu$.

β') Ἄν ὁ μ εἶναι ἀρνητικός, ἔστω $\mu = -|\nu|$, ἔχομεν $x^{-|\nu|} = \frac{1}{x^{|\nu|}}$ και $\text{op}(x^{-|\nu|}) = \text{op}(\frac{1}{x^{|\nu|}}) = \frac{1}{\text{op}(x^{|\nu|})} = \frac{1}{(\text{op} x)^{|\nu|}} = (\text{op} x)^{-|\nu|} = (\text{op} x)^\mu = \alpha^\mu$.

γ') Ἄν τὸ μ εἶναι κλασματικός ἀριθμός, π.χ. $\mu = \frac{\kappa}{\lambda}$, θέτομεν $\psi = x^{\frac{\kappa}{\lambda}}$, ὅτε (ὑποϋ:τες τὰ ἴσα εἰς τὴν λ δύναμιν) εὐρίσκομεν $\psi^\lambda = x^\kappa$ καὶ $\text{op}(\psi^\lambda) = \text{op}(x^\kappa)$ ἢ $(\text{op} \psi)^\lambda = (\text{op} x)^\kappa$, ἐκ τοῦ ὁποῖου εὐρίσκομεν $\text{op} \psi = (\text{op} x)^{\frac{\kappa}{\lambda}}$ ἢτοι $\text{op}(x^{\frac{\kappa}{\lambda}}) = (\text{op} x)^{\frac{\kappa}{\lambda}} = (\text{op} x)^\mu$. Κατὰ ταῦτα $\text{op} \sqrt[\lambda]{x} = \sqrt[\lambda]{\text{op} x}$. Ἄν λοιπὸν εἶναι $\text{op} x = \alpha$, τότε $\text{op} \sqrt[\lambda]{x} = \sqrt[\lambda]{\text{op} x} = \sqrt[\lambda]{\alpha}$.

6. ΠΩΣ ΔΙΑΚΡΙΝΟΜΕΝ ΑΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΠΟΣΟΤΗΣ ΕΧΗ ΟΡΙΟΝ

§ 234. Ἐὰν αἱ ἀπειροὶ εἰς τὸ πλῆθος τιμαὶ μεταβλητῆς ποσότητος βαίνουν αὐξανόμεναι, μένουں δὲ (ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς) μικρότεραι δοθέντος ἀριθμοῦ, ἢ μεταβλητῇ ἔχει ὅριον ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ, ἢτοι, ἂν $x^\nu < A$, ἢ ἀκολουθία $(x_v) \rightarrow \alpha \leq A$.

Ἐστω ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς x βαίνουν αὐξανόμεναι, ἀλλὰ μένουν μικρότεροι ἀριθμοῦ τινος A .

Ἄν ὁ A περιλαμβάνεται, π.χ. μεταξύ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 5 καὶ 6, αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς δύνανται νὰ ὑπερβαίνουν τινὰς ἐκ τῶν 0, 1, 2, 3, 4, 5, ἀλλὰ θὰ μένουν μικρότεροι τοῦ 6, ἐπεὶ αὗται μένουν μικρότεροι τοῦ $A < 6$.

Ἄς ὑποθέσωμεν λοιπόν, ὅτι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος, τὸν ὁποῖον ὑπερβαίνουν αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς, εἶναι ὁ 5. Σχηματίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς 5, 5,1, 5,2, 5,3, 5,4, 5,5, 5,6, 5,7, 5,8, 5,9, 6.

Ἐπεὶ αἱ τιμαὶ τοῦ x βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ εἶναι μεγαλύτεραι τοῦ 5, θὰ ὑπερβαίνουν ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς ἀριθμοὺς τινὰς ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ἔστω καὶ τὸν 5,7, ἀλλὰ ὅτι θὰ εἶναι μικρότεροι π.χ. τοῦ 5,8.

Σχηματίζομεν τώρα τοὺς ἀριθμοὺς 5,7, 5,71, 5,72, 5,73, 5,74, 5,75, 5,76, 5,77, 5,78, 5,79, 5,8.

Παρατηροῦμεν πάλιν ὅτι, ἐπεὶ αἱ τιμαὶ τοῦ x βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ εἶναι ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς μεγαλύτεραι τοῦ 5,7, θὰ ὑπερβαίνουν αὗται ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς τινὰς ἐκ τῶν ἀνωτέρω τελευταίων ἀριθμῶν, ἀλλὰ δὲν φθάνουν τὸ 5,8 (ὡς εἶδομεν).

Ἐστω ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς ἐκ τῶν ἀνωτέρω τελευταίων, τὸν ὁποῖον ὑπερβαίνουν αἱ ἐν λόγῳ τιμαὶ ὁ 5,73, καὶ ὅτι αὗται θὰ μένουν μικρότεροι τοῦ 5,74.

Ἐξακολουθοῦμεν καθ' ὅμοιον τρόπον καὶ θὰ ἔχωμεν π.χ. ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x ὑπερβαίνουν τὸν ἀριθμὸν 5,738426, ἀλλὰ δὲν φθάνουν τὸν 5,738427, ὅστις διαφέρει τοῦ 5,738426 κατὰ ἓν ἑκατομμυριοστόν. Ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν ὁμοίως ὅσον θέλομεν, θὰ εὕρωμεν ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς περιέχονται μεταξύ δύο ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ εἶναι ἴση μὲ μίαν δεκαδικὴν μονάδα τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξεως, τὴν ὁποίαν περιέχουν οἱ ἐν λόγῳ ἀριθμοί.

Ἄν τὸ μικρότερον τῶν ἀριθμῶν τούτων παραστήσωμεν μὲ α , αἱ τιμαὶ τοῦ x (ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς) διαφέρουν ἀπολύτως ἀπὸ τὸν α κατὰ ποσότητα ὅσον θέλομεν μικράν, ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν ὅσον θέλομεν διὰ τὸν προσδιορισμὸν περισσοτέρων δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ α . Ἐπομένως εἶναι ὅριον τοῦ $x = \alpha$, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τοῦ A ἢ τὸ πολὺ ἴσον μὲ A .

Τὸ τελευταῖον τοῦτο θὰ συμβαίη, ἐὰν αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπὸ τινος

καὶ ἐξῆς διαφέρουν ἀπολύτως τοῦ Α κατὰ ποσότητα ὅσον θέλομεν μικρὰν, ὥστε θὰ ἔχωμεν ἐν γένει, ὅτι ὄριον τοῦ $x \leq A$.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις, ἂν ἀντὶ τῶν ἀκεραίων 5 καὶ 6 ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ Α περιλαμβάνεται μεταξύ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων π.χ. τῶν ρ καὶ $\rho+1$ (ἐνῶ ὁ ρ δύναται νὰ εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἢ 0).

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν αἱ ἄπειροι εἰς πληθος τιμαὶ μεταβλητῆς ποσότητος βαίνουν ἐλαττούμεναι, ἀλλὰ μένουν (ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς) μεγαλύτεραι δοθέντος ἀριθμοῦ Β, ἥτοι ἂν $x_n \geq \beta$, τότε ἡ ἀκολουθία $(x_n) \rightarrow \beta \geq B$.

Διότι, ἂν π.χ. αἱ τιμαὶ τοῦ x βαίνουν ἐλαττούμεναι καὶ εἶναι πάντοτε μεγαλύτεραι τοῦ Β (ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς), τότε αἱ τιμαὶ τοῦ $-x$ θὰ βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ θὰ μένουν μικρότεραι τοῦ $-B$. Ἄρα θὰ ἔχωμεν $\text{op}(-x) \leq -B$ καὶ $\text{op}x \geq B$.

Ἀσκήσεις

650. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὅρια τῶν ἐξῆς μεταβλητῶν ποσοτήτων :

$$\alpha') 1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}, \quad \text{ἂν } x \rightarrow 1. \quad \beta') 1 + \frac{7}{x^2}, \quad \text{ἂν } x \rightarrow 2,$$

$$\gamma') 3x^3 + 6x^2, \quad \text{ἂν } x \rightarrow 0. \quad \delta') \frac{x^2+1}{x+3}, \quad \text{ἂν } x \rightarrow -2.$$

651. Ὁμοίως τῶν ἐξῆς :

$$\alpha') \frac{(x-k)^2 - 2kx^3}{x(x+k)}, \quad \text{ἂν } x \rightarrow 0. \quad \beta') \frac{5}{3x^2+5x}, \quad \text{ἂν } x \rightarrow \infty.$$

$$\gamma') \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \text{ἂν } x \rightarrow \infty. \quad \delta') -\alpha^2 x^3 + \beta x + \gamma, \quad \text{ἂν } x \rightarrow \infty.$$

$$\epsilon') \frac{2x^3 + 3x^2}{x^3}, \quad \text{ἂν } x \rightarrow 0. \quad \sigma\tau') \frac{5x^2 - 5x}{x}, \quad \text{ἂν } x \rightarrow \infty.$$

652. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὄριον τοῦ $\frac{1}{x-5}$, ἂν $x \rightarrow 5$ μὲ τιμὰς $\alpha') x < 5$, $\beta') x > 5$

653. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὄριον τῆς μεταβλητῆς $3x^2 - 5$, ἂν $x \rightarrow 3$, τῆς $\frac{2}{\psi^2} + 4\psi$, ἂν $\psi \rightarrow 2$ καὶ τῆς $2\omega^2 - 4\omega - 5$, ἂν $\omega \rightarrow 0$. Ἐκ τῶν εὑρεθέντων ὁρίων νὰ εὑρεθῇ τὸ ὄριον $\left(3x^2 - 5 + \frac{2}{\psi^2} + 4\psi + 2\omega^2 - 4\omega - 5\right)$.

654. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὄριον $\left(\frac{2}{x} - \frac{5}{\psi^2} + 4\omega^2\right)$, ἂν $x \rightarrow \infty$, $\psi \rightarrow 2$ καὶ $\omega \rightarrow 3$

655. Ποῖον τὸ ὄριον τῆς παραστάσεως $\frac{3x^2 - 5\omega^2 + 4\psi}{2x^2 - 5}$, ἂν $x \rightarrow -5$, $\omega \rightarrow 0$

καὶ $\psi \rightarrow -3$.

656. "Αν $x \rightarrow 3$, ποῖον θὰ εἶναι τὸ ὄριον τοῦ

$$\alpha') \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \frac{(x-3)(x-2)}{x-3}, \quad \beta') \frac{x^3 + x - 1}{x^2 - 4x + 3}$$

7. ΠΕΡΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 235. *Ὁρισμοί.* "Αν α καὶ β παριστάνουν δύο πραγματικούς ἀριθμούς (ὑποτιθεμένου τοῦ $\alpha < \beta$), καλοῦμεν κλειστὸν διάστημα ἀπὸ α ἕως β , τὸ σύνολον τῶν (πραγματικῶν) ἀριθμῶν τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν α καὶ β , εἰς τοὺς ὁποίους περιλαμβάνονται καὶ οἱ α , β καὶ σημειώνομεν μὲ $\alpha \cdots \beta$ ἢ (α, β) . "Όταν μεταβλητὴ τις x λαμβάνη πάσας τὰς τιμὰς τοῦ διαστήματος τούτου, σημειώνομεν τοῦτο ὡς ἐξῆς: $\alpha \leq x \leq \beta$.

"Αν τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς x τὰς ἀνηκούσας εἰς ἓν διάστημα παριστάνωμεν μὲ σημεῖα μιᾶς εὐθείας (τῶν ἀριθμῶν ἢ τοῦ ἄξονος τῶν x), τὸ κλειστὸν διάστημα $\alpha \leq x \leq \beta$ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος AB , ὅπου τὸ A παριστάνει τὸν α , τὸ B τὸν β , ἀνήκουν δὲ εἰς τὸ AB καὶ τὰ ἄκρα αὐτοῦ.

Καλοῦμεν **περιοχὴν τῆς τιμῆς x_1** τοῦ σημείου $M_1(x_1)$ (ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν τιμὴν $x = x_1$) μὲ μήκος 2ϵ , τὸ διάστημα $x_1 - \epsilon < x_1 + \epsilon$.

Συνάρτησίς τις $\psi = \varphi(x)$ λέγεται ὠρισμένη μὲν $\alpha')$ διὰ τινὰ τιμὴν τοῦ x , π.χ. τὴν $x=2$, ἂν ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι ὠρισμένη διὰ $x=2$, δηλαδή ἂν εἶναι ὠρισμένη ἡ τιμὴ $\varphi(2)$, $\beta')$ εἰς τὴν περιοχὴν δὲ τινὰ τοῦ x , ἂν εἶναι ὠρισμένη δι' ἐκάστην τιμὴν τῆς περιοχῆς αὐτῆς.

"Εστω συνάρτησίς τις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x , ἡ $\psi = \varphi(x)$ ὠρισμένη εἰς τινὰ περιοχὴν τῆς τιμῆς $x = x_0$. "Αν $x_0 + (\epsilon_v)$ παριστάνη ἀκολουθίαν ἀριθμῶν τῆς περιοχῆς τοῦ x_0 διαφόρων τοῦ x_0 καὶ ἡ $[x_0 + (\epsilon_v)] \rightarrow x_0$, αἱ δὲ τιμαὶ $\varphi[x_0 + (\epsilon_v)]$ τείνουν εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὄριον, π.χ. τὸ λ , οἷαδῆποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ ἀκολουθία (ϵ_v) , τότε λέγομεν ὅτι $\varphi(x) \rightarrow \lambda$ ἢ $\text{ορ}\varphi(x) = \lambda$ ὅταν $x \rightarrow x_0$ ἢ $\text{ορ}x = x_0$.

"Εστω π.χ. ἡ συνάρτησις $\psi = x^2$. "Αν ὑποθέσωμεν ὅτι $x=3$, ἔχομεν $\varphi(3) = 3^2$.

"Αν θέσωμεν $x = 3 + (\epsilon_v)$, ὅπου (ϵ_v) παριστάνει μίαν ἀκολουθίαν ἀριθμῶν τείνουσαν εἰς τὸ 0, ἥτοι $\text{ορ}(\epsilon_v) = 0$, θὰ ἔχωμεν $\varphi[3 + (\epsilon_v)] = [3 + (\epsilon_v)]^2$.

Όταν $\epsilon_n \rightarrow 0$ ή $\text{or}(\epsilon_n) = 0$, τότε $\text{or}[3 + (\epsilon_n)] \rightarrow 3$, ήτοι $\text{or}[3 + (\epsilon_n)] = 3$, $\text{or}[3 + (\epsilon_n)]^2 \rightarrow 3^2$, ήτοι $\text{or}[3 + (\epsilon_n)]^2 = 3^2$. Έπομένως έχουμε, ότι $\text{or}[3 + (\epsilon_n)] = [3 + (\epsilon_n)]^2$ τείνει εις τὸ 3^2 , δηλαδή $\text{or}[3 + (\epsilon_n)] = \text{or}(3) = 3^2$.

Ἐπειδὴ συμβαίνει τοῦτο διὰ τὴν συνάρτησιν $\varphi(x) = x^2$ καὶ διὰ τὴν τιμὴν $x=3$, λέγομεν ὅτι $\varphi(x) = x^2$ εἶναι **συνεχῆς**, ὅταν $x=3$. Ὅμοίως δεικνύεται, ὅτι ἡ $\varphi(x) = x^2$ εἶναι συνεχῆς καὶ δι' οἴανδήποτε ἄλλην τιμὴν τοῦ x .

Ἐν γένει **συνεχῆς** λέγεται συνάρτησις τις $\psi = \varphi(x)$ διὰ τινα τιμὴν τῆς $x = x_0$, ἂν εἶναι ὠρισμένη εἰς περιοχὴν τῆς x_0 καὶ ἂν δι' ἐκάστην ἀκολουθίαν (x_n) τείνουσαν πρὸς τὴν τιμὴν x_0 , ὅταν $n \rightarrow \infty$, ἡ ἀντίστοιχος ἀκολουθία τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x_n)$ τείνει πρὸς τὴν τιμὴν $\varphi(x_0)$. Τοῦτο ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Λέγομεν ὅτι ἡ $\psi = \varphi(x)$ εἶναι συνεχῆς διὰ $x=x_0$, ἂν δοθέντος οἴουδήποτε ἀριθμοῦ $\epsilon > 0$ (ὅσονδήποτε μικροῦ) ἔχωμεν ὅτι:

$$\text{or}[\varphi(x_0 + \epsilon) - \varphi(x_0)] = 0 \text{ ὅταν } \text{or} \epsilon = 0, \text{ ἢ } \begin{cases} \text{or} \varphi(x_0 + \epsilon) = \varphi(x_0) \\ \text{or} \epsilon = 0. \end{cases}$$

Ἐστω π.χ. ἡ συνάρτησις $\psi = 3x^2$. Θέλομεν νὰ ἴδωμεν, ἂν αὕτη εἶναι συνεχῆς διὰ $x=1$. Ἐχομεν $\varphi(1) = 3 \cdot 1^2$. Θέτομεν $x = 1 + \epsilon$, ὅτε $\varphi(1 + \epsilon) = 3(1 + \epsilon)^2$ καὶ $\varphi(1 + \epsilon) - \varphi(1) = 3(1 + \epsilon)^2 - 3 \cdot 1^2 = 3(1^2 + 2 \cdot \epsilon + \epsilon^2) - 3 \cdot 1^2 = 3 \cdot 2 \cdot \epsilon + 3 \cdot \epsilon^2$.

Όταν $\epsilon \rightarrow 0$ ή $\text{or} \epsilon = 0$, τότε $\varphi(1 + \epsilon) - \varphi(1)$ δηλαδή τὸ ἴσον αὐτοῦ $3 \cdot 2 \cdot \epsilon + 3 \cdot \epsilon^2$ ἔχει ὄριον τὸ 0 (κατὰ τὸν κανόνα περὶ ὁρίου ἀθροίσματος), ήτοι $\text{or}[\varphi(1 + \epsilon) - \varphi(1)] = 0$ ή $\text{or} \varphi(1 + \epsilon) = \varphi(1)$, ὅταν $\text{or} \epsilon = 0$.

Ἐπομένως ἡ $\varphi(x) = 3x^2$ εἶναι συνεχῆς διὰ $x=1$.

Ἀσυνεχῆς λέγεται συνάρτησις τις $\psi = \varphi(x)$ διὰ $x=x_0$ ὅταν, καὶ ἂν εἶναι ὠρισμένη εἰς περιοχὴν τῆς τιμῆς x_0 , δὲν εἶναι συνεχῆς διὰ τὴν τιμὴν ταύτην.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι :

1ον. Ὅταν ἡ $\varphi(x)$ ἔχη σταθερὰν τιμὴν, π.χ. 5, εἶναι συνεχῆς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x .

2ον. Ἄν δύο συναρτήσεις $\varphi_1(x)$ καὶ $\varphi_2(x)$ εἶναι συνεχεῖς διὰ μίαν τιμὴν τοῦ x , εἶναι συνεχῆς καὶ ἡ $\varphi_1(x) \pm \varphi_2(x)$ διὰ τὴν αὐτὴν τι-

μήν, καθώς και ή $\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x)$ και ή $\varphi_1(x) : \varphi_2(x)$, όταν ή $\varphi_2(x)$ είναι διάφορος του 0 διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x .

Συνάρτησις τῆς μορφῆς $\psi = x, x^2, x^3, \dots$ εἶναι συνεχῆς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x .

Πᾶσα συνάρτησις τῆς μορφῆς ax^u , ὅπου τὸ a εἶναι σταθερὰ ποσότης, τὸ δὲ u ἀκέραιος καὶ θετικός, εἶναι συνεχῆς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x . Πᾶσα δὲ συνάρτησις ἄθροισμα ὄρων τῆς μορφῆς ax^u εἶναι συνεχῆς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x . Π.χ. ή $3x^2 - 5x + 6$.

Πᾶσα ρητὴ συνάρτησις, ἥτοι τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων ὡς πρὸς x , εἶναι συνεχῆς συνάρτησις διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x , διὰ τὴν ὁποίαν ὁ παρονομαστής εἶναι διάφορος τοῦ 0.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Χ

Α'. ΠΕΡΙ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ *

1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

§ 236. Έστω τυχούσα συνάρτησις τοῦ x ἢ $\psi = \sigma(x)$ συνεχῆς εἰς τὸ ὠρισμένον διάστημα (α, β) καὶ ἥτις διὰ τινὰ τιμὴν τοῦ x , τὴν x_0 , περιεχομένην ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ λαμβάνει τὴν ὠρισμένην τιμὴν ψ_0 τοῦ ψ , ἥτοι εἶναι $\psi_0 = \sigma(x_0)$. Ἐὰν εἰς τὴν τιμὴν x_0 δώσωμεν αὐξησίν τινα ϵ , ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ψ θὰ λάβῃ αὐξησίν τινα η , ἥτοι θὰ εἶναι $\psi_0 + \eta = \sigma(x_0 + \epsilon)$ καὶ ἐπομένως:

$$\eta = \sigma(x_0 + \epsilon) - \sigma(x_0).$$

Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ ὑπετέθη συνεχῆς ἐν τῷ διαστήματι (α, β) ἔπεται, ὅτι δι' ὅρ $\epsilon = 0$ θὰ εἶναι καὶ ὀρ $\eta = 0$.

Ἐὰν ὁ λόγος $\frac{\eta}{\epsilon} = \frac{\sigma(x_0 + \epsilon) - \sigma(x_0)}{\epsilon}$ ἔχῃ ὄριον ὠρισμένον, ὅταν ἡ μὲν τιμὴ $x = x_0$ μένῃ σταθερά, ἡ δὲ αὐξησις ϵ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, τὸ ὄριον τοῦτο καλεῖται **παράγωγος** τῆς συναρτήσεως $\psi = \sigma(x)$ διὰ $x = x_0$ καὶ σημειοῦται οὕτω: ψ' ἢ $\sigma'(x)$. Ἦτοι:

Παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως $\psi = \sigma(x)$ διὰ τινὰ τιμὴν τοῦ x καλεῖται τὸ ὄριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ λόγος τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως πρὸς τὴν ἀντίστοιχον αὐξησίν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ὅταν ἡ αὐξησις αὐτῆς τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ ἔχῃ παράγωγον διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x , τότε σημειοῦμεν αὐτὴν οὕτω: ψ' ἢ $\sigma'(x)$.

§ 237. Κατὰ τὸν ὀρισμὸν τῆς παραγωγῆς συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς x , διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν παράγωγον αὐτῆς, δίδομεν πρῶτον εἰς τὸ x μίαν αὐξησίν, τὴν ὁποῖαν καὶ παριστῶμεν δὲ τοῦ

*Τὰ ἀπὸ τῆς § 236 καὶ ἐξῆς ἐλήφθησαν ἐκ τοῦ ὑπὸ τοῦ κ. Λεων. Ἀδαμοπούλου ὑποβληθέντος βιβλίου τῆς Ἀλγέβρας.

συμβόλου Δx και υπολογίζομεν την αντίστοιχον αύξησιν τῆς συναρτήσεως, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ $\Delta\psi$ καὶ κατόπιν εὐρίσκομεν τὸ ὄριον τοῦ λόγου $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$, ὅταν $\text{ορ}\Delta x=0$. Διὰ νὰ ἔχωμεν παράγωγον πρέπει δι' $\text{ορ}\Delta x=0$ νὰ εἶναι καὶ $\text{ορ}\Delta\psi=0$. διότι ἐὰν $\text{ορ}\Delta\psi=\alpha'\neq 0$, τότε $\text{ορ}\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\infty$ Ἦτοι :

Ἵνα μία συνάρτησις ἔχῃ παράγωγον, πρέπει νὰ εἶναι συνεχής, χωρὶς ὅμως καὶ ὁ ὅρος αὐτὸς νὰ εἶναι ἐπαρκής.

Διότι ἐκ τοῦ $\text{ορ}\Delta x=0$ καὶ $\text{ορ}\Delta\psi=0$ δὲν ἔπεται, ὅτι ἀναγκαίως ὑπάρχει καὶ τὸ $\text{ορ}\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$.

Παράδειγματα : 1ον. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi=x$. Τότε $\Delta\psi=x+\Delta x-x=\Delta x$, ἐπομένως $\psi'=\text{ορ}\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\text{ορ}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$. Ὡστε :

Ἡ παράγωγος τοῦ x εἶναι ἡ μονάς.

2ον. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi=5x^2$. Ἐὰν εἰς τὸ x δώσωμεν τὴν αύξησιν Δx , θὰ ἔχωμεν

$$\Delta\psi=5(x+\Delta x)^2-5x^2=5x^2+10x\Delta x+5(\Delta x)^2-5x^2=10x\Delta x+5(\Delta x)^2$$

καὶ $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\frac{10x\Delta x+5(\Delta x)^2}{\Delta x}=10x+5\Delta x$.

Ὅταν δὲ $\text{ορ}\Delta x=0$, τότε $\text{ορ}\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=10x$ ἢ $\psi'=10x$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὐρίσκομεν, ὅτι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\psi=\alpha x^5$ εἶναι $\psi'=5\alpha x^4$ καὶ γενικῶς τῆς $\psi=\alpha x^\mu$ (μ θετικὸς καὶ ἀκέραιος) ἡ παράγωγος εἶναι $\psi'=\alpha\cdot\mu\cdot x^{\mu-1}$.

3ον. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi=\sqrt{x}$. Θὰ εἶναι $\psi+\Delta\psi=\sqrt{x+\Delta x}$,

$$\text{καὶ } \Delta\psi=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x} \text{ καὶ } \frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} \text{ ἢ (§ 85)}$$

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\frac{[\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}][\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}]}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} \quad \eta$$

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x[\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}]}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \text{ καὶ ἐπομένως διὰ } \text{ορ}\Delta x=0,$$

$$\text{θὰ εἶναι } \text{ορ}\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ Ὡστε: } (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

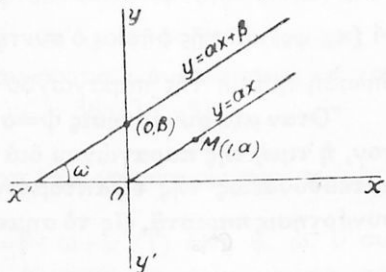
4ον. Ἐστω ὅτι ἡ συνάρτησις ψ εἶναι σταθερά. Τότε ἡ αύξησις

$\Delta\psi$ είναι μηδέν, συνεπώς $\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = 0$ και έπομένως $\text{or } \frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \psi' = 0$. Ήτοι:

Ή παράγωγος σταθερᾶς είναι μηδέν.

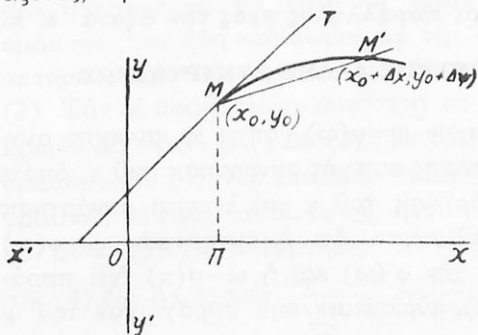
2. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

§ 238. Έστω ἡ συνάρτησις $\psi = ax + \beta$. Γνωρίζομεν, ὅτι αὕτη παριστᾷ εὐθεῖαν τέμνουσαν τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον $(0, \beta)$ καὶ παράλληλον πρὸς τὴν διὰ τῆς ἀρχῆς διερχομένην εὐθεῖαν $\psi = ax$, ἣτις ὀρίζεται ὑπὸ τοῦ σημείου $O(0,0)$ καὶ τοῦ σημείου $M(1, \alpha)$ (σχ. 21). Ἐὰν κληθῇ ω ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τοῦ θετικοῦ ἄξονος Ox , θὰ ἔχωμεν $\epsilon\phi\omega = \alpha$. Τὸ α λέγεται καὶ **συντελεστής κατευθύνσεως** τῆς εὐθείας $\psi = ax + \beta$.



Σχ. 21.

Έστω ἤδη τυχούσα συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ συνεχῆς ἔχουσα παράγωγον διὰ τὴν τιμὴν $x = x_0$. Έστω δὲ MM' καμπύλη εἰς ὀρθογωνίους ἄξονας, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ (σχ. 22).



Σχ. 22.

Εἰς τὴν τιμὴν $x = x_0$, τῆς μεταβλητῆς ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ ψ_0 , τῆς συναρτήσεως, ὁπότε τὸ σημεῖον $M(x_0, \psi_0)$ θὰ εἶναι σημεῖον τῆς καμπύλης. Ἐὰν εἰς τὸ x δώσωμεν μίαν αὐξησιν Δx , ἡ συνάρτησις θὰ λάβῃ μίαν αὐξησιν $\Delta\psi$ καὶ τὸ σημεῖον $M'(x_0 + \Delta x, \psi_0 + \Delta\psi)$ θὰ εἶναι σημεῖον τῆς κα-

μπύλης. Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων M καὶ M' θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\psi = ax + \beta$ ἐπαληθευομένη ὑπὸ τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων M καὶ M' , ὥστε θὰ ἔχωμεν $\psi_0 + \Delta\psi = a(x_0 + \Delta x) + \beta$ καὶ $\psi_0 = ax_0 + \beta$. ἀφαιροῦντες δὲ τὰς ἐξισώσεις κατὰ

μέλη ἔχομεν $\Delta\psi = \alpha \Delta x$ ἢ $\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \alpha$, ἥτοι ὁ συντελεστής κατευθύνσεως τῆς εὐθείας MM' εἶναι ὁ λόγος $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$. Ἀλλὰ ὅταν $\text{op}\Delta x = 0$, ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις εἶναι συνεχής, θὰ εἶναι καὶ $\text{op}\Delta\psi = 0$. Καὶ ἐπειδὴ ὑπείκῃ, ὅτι ἔχει παράγωγον, θὰ εἶναι $\text{op}\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \psi'$, τὸ δὲ σημεῖον M' τείνει νὰ συμπίσῃ μετὰ τοῦ M , ὁπότε ἡ χορδὴ MM' θὰ ἔχη ὡς ὁρικὴν θέσιν τὴν ἐφαπτομένην MT τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον $M(x_0, \psi_0)$ καὶ τῆς ὁποίας ὁ συντελεστής κατευθύνσεως εἶναι τὸ $\text{op}\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$, δηλαδὴ ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως διὰ $x = x_0$. Ἀρα :

Ὅταν μία συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ διὰ τιμὴν $x = x_0$ ἔχη παράγωγον, ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου διὰ $x = x_0$ ἰσοῦται μετὰ τὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν ἡ συνάρτησις παριστᾷ, εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς, τὸ ἔχον τετμημένην x_0 .

Ἐπειδὴ ὁ συντελεστής κατευθύνσεως μιᾶς εὐθείας ἰσοῦται καὶ μετὰ τὴν εφω, ἔνθα ω ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τοῦ ἄξονος $x'x$, ἐπεταὶ ὅτι :

Ἐὰν ἡ παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως διὰ τινα τιμὴν τοῦ $x = x_0$ εἶναι μηδέν· ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον, τὸ ἔχον τετμημένην x_0 , εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα $x'x$.

3. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΑΛΛΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

§ 239. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \varphi(\omega)$, ὅπου ψ συνεχὴς συνάρτησις τῆς ω καὶ $\omega = \sigma(x)$ ἐπίσης συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x , ὁπότε καὶ ψ θὰ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x καὶ λέγεται συνάρτησις συναρτήσεως. Ἐὰν ἤδη ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις $\psi = \varphi(\omega)$ ἔχει παράγωγον ὡς πρὸς ω τὴν $\varphi'(\omega)$ καὶ ἡ $\omega = \sigma(x)$ ἔχει παράγωγον ὡς πρὸς x τὴν $\sigma'(x)$, εὐρίσκομεν τὴν παράγωγον τοῦ ψ ὡς πρὸς x ὡς ἑξῆς :

Ἐὰν εἰς τὸ x δοθῇ ἡ αὐξησης Δx , τότε ἡ $\psi'(x)$ θὰ εἶναι τὸ ὅριον τοῦ λόγου $\frac{\varphi(\omega + \Delta\omega) - \varphi(\omega)}{\Delta x}$, ὅταν $\text{op}\Delta x = 0$.

Ἀλλὰ πρὸς τὴν αὐξησην Δx ἀντιστοιχεῖ αὐξησης $\Delta\omega$ τῆς ω , ἥτοι εἶναι $\Delta\omega = \sigma(x + \Delta x) - \sigma(x)$ καὶ ἐπομένως

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(\omega+\Delta\omega)-\varphi(\omega)}{\Delta x} &= \frac{\varphi(\omega+\Delta\omega)-\varphi(\omega)}{\Delta x} \cdot \frac{\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)}{\Delta\omega} = \\ &= \frac{\varphi(\omega+\Delta\omega)-\varphi(\omega)}{\Delta\omega} \cdot \frac{\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)}{\Delta x},\end{aligned}$$

ἀλλὰ ὅταν $\text{ord}x=0$ εἶναι καὶ $\text{ord}\omega=0$ καὶ $\text{ord}\psi=0$, καθότι αἱ συναρτήσεις ψ , ω ὑπετέθησαν συνεχεῖς καὶ ὅτι ἔχουσι παράγωγον.

Ἀλλὰ εἶναι $\text{ord} \frac{\varphi(\omega+\Delta\omega)-\varphi(\omega)}{\Delta\omega} = \varphi'(\omega)$, $\text{ord} \frac{\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)}{\Delta x} = \sigma'(x) = \omega'_x$ καὶ $\text{ord} \frac{\varphi(\omega+\Delta\omega)-\varphi(\omega)}{\Delta x} = \psi'(x)$ ὅθεν $\psi'(x) = \varphi'(\omega) \cdot \omega'_x$.

Π.χ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς $\psi = (3x^2 - 5)^6$. Θέτοντες $3x^2 - 5 = \omega$ θὰ ἔχωμεν $\psi = \omega^6$, ἥτοι συνάρτησιν συναρτήσεως ὅποτε $\psi' = 6\omega^5 \cdot \omega'_x$ ἢ $\psi' = 6(3x^2 - 5)^5 \cdot 6x$ ἢ $\psi' = 36x(3x^2 - 5)^5$.

4. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ Χ

§ 240. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \varphi + \omega + \upsilon$ (1) ἔνθα φ , ω , υ συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ x ἔχουσι ἀντιστοιχῶς παραγώγους τὰς φ' , ω' , υ' , καὶ τῆς ὁποίας ζητοῦμεν τὴν παράγωγον ψ' . Ἐὰν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x λάβῃ ἀπὸ τινος τιμῆς αὐτῆς μίαν αὐξησιν Δx , αἱ συναρτήσεις φ , ω , υ θὰ λάβωσιν ἀντιστοιχῶς αὐξήσεις $\Delta\varphi$, $\Delta\omega$, $\Delta\upsilon$. Ἐπειδὴ αἱ συναρτήσεις φ , ω , υ ὑπετέθησαν συνεχεῖς ἔχουσαι παράγωγον, θὰ εἶναι δι' $\text{ord}x=0$ καὶ $\text{ord}\Delta\varphi=0$, $\text{ord}\Delta\omega=0$, $\text{ord}\Delta\upsilon=0$. Ἐὰν ἤδη καλέσωμεν $\Delta\psi$ τὴν ἀντίστοιχον αὐξησιν τῆς συναρτήσεως ψ , θὰ ἔχωμεν $\psi + \Delta\psi = (\varphi + \Delta\varphi) + (\omega + \Delta\omega) + (\upsilon + \Delta\upsilon)$ (2). Ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἀπὸ τὴν (2), θὰ ἔχωμεν $\Delta\psi = \Delta\varphi + \Delta\omega + \Delta\upsilon$ (3). Ἐκ ταύτης ἔπεται, ὅτι $\text{ord}\Delta\psi = \text{ord}\Delta\varphi + \text{ord}\Delta\omega + \text{ord}\Delta\upsilon$ (4). Καὶ ἐπειδὴ δι' $\text{ord}x=0$ εἶναι καὶ $\text{ord}\Delta\varphi=0$, $\text{ord}\Delta\omega=0$, $\text{ord}\Delta\upsilon=0$, θὰ εἶναι καὶ $\text{ord}\Delta\psi=0$ ἥτοι ἡ συνάρτησις $\psi = \varphi + \omega + \upsilon$ εἶναι καὶ αὕτῃ συνεχῆς συνάρτησις τοῦ x . Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (4) διὰ Δx ἔχομεν $\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} + \frac{\Delta\omega}{\Delta x} + \frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}$ καὶ δι' $\text{ord}x=0$ εἶναι :

$$\text{ord} \frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \text{ord} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} + \text{ord} \frac{\Delta\omega}{\Delta x} + \text{ord} \frac{\Delta\upsilon}{\Delta x} \quad \text{ἢ} \quad \psi' = \varphi' + \omega' + \upsilon'. \quad \text{Ὡστε:}$$

Ἡ παράγωγος τοῦ ἀθροίσματος πολλῶν συναρτήσεων τοῦ x , ἔχουσῶν παραγώγους, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν παραγώγων τῶν συναρτήσεων.

5. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ Χ

§ 241. Έστω ή συνάρτησις $\psi = \omega \cdot \phi$, ένθα ω και ϕ συνεχείς συναρτήσεις του x έχουσαι παράγωγον. Έργαζόμεναι ώς προηγουμένως έχομεν $\psi + \Delta\psi = (\phi + \Delta\phi)(\omega + \Delta\omega)$ και $\psi = \phi\omega$, συνεπώς

$$\Delta\psi = \omega\Delta\phi + \phi\Delta\omega + \Delta\phi\Delta\omega, \quad (1)$$

διαιροῦντες δέ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) διὰ Δx έχομεν:

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \omega \frac{\Delta\phi}{\Delta x} + \phi \frac{\Delta\omega}{\Delta x} + \frac{\Delta\phi}{\Delta x} \cdot \Delta\omega \quad \text{και έπομένως}$$

$$\text{ορ} \frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \omega \cdot \text{ορ} \frac{\Delta\phi}{\Delta x} + \phi \cdot \text{ορ} \frac{\Delta\omega}{\Delta x} + \text{ορ} \frac{\Delta\phi}{\Delta x} \cdot \text{ορ} \Delta\omega. \quad (2)$$

Έάν δέ $\text{ορ} \Delta x = 0$, έξ ύποθέσεως θά είναι $\text{ορ} \frac{\Delta\phi}{\Delta x} = \phi'$, $\text{ορ} \frac{\Delta\omega}{\Delta x} = \omega'$

και $\text{ορ} \Delta\omega = 0$ και ή (2) γίνεται $\psi' = \omega\phi' + \omega'\phi$. Έάν είναι $\psi = \omega \cdot \phi$ και θεωρήσωμεν τὸ $\omega \cdot \phi$ ώς ένα παράγοντα, θά έχωμεν κατά τὸ προηγούμενον $\psi = (\omega\phi)u' + u(\omega\phi)'$ ή $\psi' = \omega\phi u' + \omega u\phi' + u\phi\omega'$.
 "Ωστε :

Η παράγωγος του γινομένου πολλῶν συναρτήσεων τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς x , έχουσῶν παραγώγους, ισοῦται με τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῆς παραγώγου ἐκάστης τούτων ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων συναρτήσεων.

6. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΣΤΑΘΕΡΑΣ ΕΠΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΝ ΤΟΥ Χ

§ 242. Έστω ή συνάρτησις $\psi = \alpha\omega$ (α σταθερά). Θά έχωμεν $\psi' = \alpha\omega' + \alpha'$, ἀλλά $\alpha' = 0$ ἄρα $\psi' = \alpha\omega'$. "Ητοι :

Η παράγωγος του γινομένου σταθεράς ἐπὶ συνάρτησιν του x ισοῦται με τὸ γινόμενον τῆς σταθεράς ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως.

Έστω $\psi = \omega^n$, ένθα ω συνεχῆς συνάρτησις του x και n ἀκέραιος και θετικός. Έπειδὴ $\psi = \omega \cdot \omega \dots \omega$, θά είναι κατά τὰ προηγούμενα $\psi' = \omega' \cdot \omega^{n-1} + \omega' \cdot \omega^{n-1} + \dots + \omega' \cdot \omega^{n-1}$ (n προσθετέοι) ή $\psi' = n\omega^{n-1} \cdot \omega'$.
 "Ητοι :

Η παράγωγος δυνάμεως μιᾶς συναρτήσεως του x ισοῦται με τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν κατά μονάδα μικροτέραν δύναμιν τῆς συναρτήσεως του x και ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς βάσεως.

Ἐὰν ἡ βᾶσις εἶναι ὁ x , τότε ἡ σχέσις ἀπλοποιεῖται· ἦτοι ἔαν $\psi = x^\mu$, τότε $\psi' = \mu x^{\mu-1}$, ἐπεὶ δὴ $x' = 1$.

Παραδείγματα : 1ον. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = 5x^3$ · ἡ παράγωγος εἶναι $\psi' = 5 \cdot (x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$.

2ον. Ἐστω $\psi = (5x^2 + 2)^3$ · ἡ παράγωγος εἶναι

$$\psi' = 3(5x^2 + 2)^2 \cdot (5x^2 + 2)' = 3(5x^2 + 2)^2 \cdot 10x = 30x(5x^2 + 2)^2$$

3ον. Ἐστω $\psi = (3x^3 - 2x^2 + 3x - 6)^3$ · ἡ παράγωγος εἶναι

$$\psi' = 3(3x^3 - 2x^2 + 3x - 6)^2 \cdot (9x^2 - 4x + 3).$$

4ον. Ἐστω $\psi = (3x^2 + 2)(5x + 1)$ · ἡ παράγωγος εἶναι

$$\psi' = (3x^2 + 2)(5x + 1)' + (5x + 1)(3x^2 + 2)' \quad \eta$$

$$\psi' = (3x^2 + 2)5 + (5x + 1)6x \quad \eta$$

$$\psi' = 15x^2 + 10 + 30x^2 + 6x \quad \eta \quad \psi' = 45x^2 + 6x + 10.$$

7. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΠΗΛΙΚΟΥ ΔΥΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ x

§ 243. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \frac{\omega}{\phi}$, ἔνθα ω καὶ ϕ συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ x ἔχουσαι παραγώγους τὰς ω' καὶ ϕ' . Ἐὰν εἰς τὸ x δώσωμεν τὴν αὐξήσιν Δx αἱ συναρτήσεις ω , ϕ , ψ λαμβάνουν ἀντιστοιχῶς αὐξήσεις $\Delta\omega$, $\Delta\phi$, $\Delta\psi$, εἶναι δὲ $\psi + \Delta\psi = \frac{\omega + \Delta\omega}{\phi + \Delta\phi}$. Ἐκ ταύτης

$$\text{καὶ τῆς } \psi = \frac{\omega}{\phi} \text{ προκύπτει } \Delta\psi = \frac{\omega + \Delta\omega}{\phi + \Delta\phi} - \frac{\omega}{\phi} \quad \eta \quad \Delta\psi = \frac{\phi\Delta\omega - \omega\Delta\phi}{(\phi + \Delta\phi)\phi},$$

$$\text{ὅθεν } \frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\phi \frac{\Delta\omega}{\Delta x} - \omega \frac{\Delta\phi}{\Delta x}}{(\phi + \Delta\phi)\phi}, \text{ ἔαν δὲ } \text{op } \Delta x = 0, \text{ θὰ εἶναι ἐξ ὑποθέ-}$$

$$\text{σεως } \text{op } \frac{\Delta\omega}{\Delta x} = \omega', \text{ op } \frac{\Delta\phi}{\Delta x} = \phi', \text{ καὶ } \text{op}(\phi + \Delta\phi) = \phi + \text{op } \Delta\phi = \phi, \text{ ὁπότε}$$

$$\text{θὰ εἶναι } \text{op } \frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\phi \cdot \text{op } \frac{\Delta\omega}{\Delta x} - \omega \cdot \text{op } \frac{\Delta\phi}{\Delta x}}{\text{op}(\phi + \Delta\phi) \cdot \phi} \quad \eta \quad \psi' = \frac{\phi\omega' - \omega\phi'}{\phi^2}. \quad \text{Ἦτοι :}$$

Ἡ παράγωγος πηλίκου δύο συνεχῶν συναρτήσεων τοῦ x , ἔχουσῶν παραγώγους, εἶναι κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τοῦ παρονομαστοῦ ἐπὶ τὴν παράγωγον τοῦ ἀριθμητοῦ, ἡλαττωμένον κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ τὴν παράγωγον τοῦ παρονομαστοῦ, παρονομαστήν δὲ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ.

Παράδειγμα. Νά εύρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως
 $\psi = \frac{x^2-5x+3}{5x-1}$. Θά εἶναι $\psi' = \frac{(5x-1)(x^2-5x+3)' - (x^2-5x+3)(5x-1)'}{(5x-1)^2}$ ἢ

$$\psi' = \frac{(5x-1)(2x-5) - (x^2-5x+3) \cdot 5}{(5x-1)^2} = \frac{5x^2-2x-10}{(5x-1)^2}.$$

8. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΤΟΥ Χ

§ 244. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \sqrt{\omega}$, ἔνθα ω συνάρτησις τις τοῦ x , ἔχουσα παράγωγον τὴν ω' . Ἐάν εἰς τὸ x δώσωμεν τὴν αὐξησιν Δx , αἱ συναρτήσεις ψ καὶ ω λαμβάνουσιν ἀντιστοίχως αὐξήσεις $\Delta\psi$ καὶ $\Delta\omega$, αἱ ὁποῖαι τείνουσι πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν ἡ Δx τείνη πρὸς τὸ μηδέν. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\psi + \Delta\psi = \sqrt{\omega + \Delta\omega}$ καὶ $\psi = \sqrt{\omega}$ προκύπτει ὅτι $\Delta\psi = \sqrt{\omega + \Delta\omega} - \sqrt{\omega}$ ἢ

$$\Delta\psi = \frac{[\sqrt{\omega + \Delta\omega} - \sqrt{\omega}][\sqrt{\omega + \Delta\omega} + \sqrt{\omega}]}{\sqrt{\omega + \Delta\omega} + \sqrt{\omega}} = \frac{\Delta\omega}{\sqrt{\omega + \Delta\omega} + \sqrt{\omega}}. \text{ ὅθεν}$$

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta\omega}{\Delta x}}{\sqrt{\omega + \Delta\omega} + \sqrt{\omega}} \text{ καὶ ὅρ } \frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\text{ὅρ } \frac{\Delta\omega}{\Delta x}}{\text{ὅρ}[\sqrt{\omega + \Delta\omega} + \sqrt{\omega}]} \text{ ἢ } \psi' = \frac{\omega'}{2\sqrt{\omega}}.$$

Σημείωσις. Τοῦτο ἰσχύει διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x , αἱ ὁποῖαι δὲν μηδενίζουν τὴν συνάρτησιν ω .

Ἄρα :

Ἡ παράγωγος τετραγωνικῆς ρίζης συναρτήσεως τινος τοῦ x , ἐχούσης παράγωγον, ἰσοῦται μὲ τὴν παράγωγον τοῦ ὑπορρίζου διὰ τοῦ διπλασίου τῆς ρίζης.

Π.χ. Νά εύρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς $\psi = \sqrt{x^2-4x+1}$. Θά εἶναι

$$\psi' = \frac{(x^2-4x+1)'}{2\sqrt{x^2-4x+1}} = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+1}}.$$

Ἀσκησις

657. Νά εύρεθῶν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

$$\alpha') \psi = (x^3-2x+5) + (3x^2-8x-1). \quad \beta') \psi = (5x^3+2x^2-3x+1) - (2x^2-4x+6),$$

$$\gamma') \psi = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) + (\alpha x^2 - \beta x) + (\alpha x^2 + \gamma) + (\alpha^2 - \beta \gamma),$$

$$\delta') \psi = (x-3)(x+4), \quad \epsilon') \psi = (x^2+3)(2x^2-3x+1), \quad \sigma\tau') \psi = (2x-1)(3x+1)(4x-2),$$

$$\zeta') \psi = x^3(2x^2-5)(3x^3-1), \quad \eta') \psi = \frac{x}{x^2-1}, \quad \theta') \psi = \frac{x}{x+1}, \quad \iota') \psi = \frac{3x-3}{4x-6},$$

$$\iota\alpha') \psi = \frac{x(x-3)}{(3x-1)^2}, \quad \iota\beta') \psi = \sqrt{x^2-3x-5}, \quad \iota\gamma') \psi = 3x-4\sqrt{x}, \quad \iota\delta') \psi = 2x^2-3+3\sqrt{x^2-2x}.$$

9. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΑΞΕΩΝ

§ 245. Έστω ή συνάρτησις $\psi=2x^5$ ή παράγωγος της είναι $\psi'=10x^4$. 'Αλλά παρατηρούμεν, ότι ή παράγωγος αὕτη είναι νέα συνάρτησις τοῦ x ἔχουσα καὶ αὕτη παράγωγον, ἥτις λέγεται **δευτέρα παράγωγος** τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως καὶ σημειοῦται ψ'' , ἥτοι $\psi''=(10x^4)'=40x^3$. 'Αλλά καὶ ή παράγωγος αὕτη ἔχει παράγωγον. ἥτις καλεῖται **τρίτη παράγωγος** τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως καὶ σημειοῦται ψ''' κ.ο.κ. Καὶ γενικῶς, ἐὰν μία συνάρτησις $\psi=\varphi(x)$ ἔχη παράγωγον ψ' διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἐν τινι διαστήματι (α, β) , εἶναι δὲ ή παράγωγος αὕτη συνάρτησις τοῦ x , εἶναι δυνατὸν καὶ αὕτη νὰ ἔχη παράγωγον καλουμένην **δευτέραν παράγωγον** τῆς δοθείσης καὶ σημειοῦται ψ'' . 'Ομοίως δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν καὶ τρίτην, τετάρτην κ.ο.κ. παράγωγον τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως.

Ἀ σ κ η σ ι ς

658. Να εὑρεθοῦν ή πρώτη καὶ ή δευτέρα παράγωγος τῶν κάτωθι συναρτήσεων: α') $\psi = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 6$, β') $\psi = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 6$, γ') $\psi = (2x-3)^3$,

$$\delta') \psi = \sqrt{1-x}, \quad \epsilon') \psi = \frac{x^2+3}{x+2}, \quad \sigma\tau') \psi = \sqrt{3x^2+5}.$$

10. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 246. Αἱ συναρτήσεις $\psi = \eta\mu x$, $\psi = \sigma\upsilon\nu x$, $\psi = \epsilon\varphi x$, $\psi = \sigma\varphi x$, $\psi = \tau\epsilon\mu x$, $\psi = \sigma\tau\epsilon\mu x$ καλοῦνται **κυκλικαὶ συναρτήσεις**. Ἡ μεταβλητὴ x εἶναι τὸ ὀλγεβρικὸν εἰς ἀκτίνια μέτρον τοῦ τόξου.

Συνέχεια κυκλικῶν συναρτήσεων. Ἐκ τῆς τριγωνομετρίας γνωρίζομεν ὅτι τὸ $\eta\mu x$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ τόξον x τείνη εἰς τὸ μηδέν.

1. **Συνέχεια συναρτήσεως τοῦ ἡμιτόνου.** Ἐὰν εἰς αὐξήσιν ϵ τοῦ x ἀντιστοιχῇ αὐξήσις η τοῦ $\eta\mu x$, θὰ εἶναι

$$\eta = \eta\mu(x+\epsilon) - \eta\mu x = 2\eta\mu \frac{\epsilon}{2} \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $|\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right)| \leq 1$ καὶ $\eta\mu \frac{\epsilon}{2}$ τείνει εἰς τὸ μηδέν μετὰ τοῦ ϵ , ἔπεται ὅτι δι' $\sigma\rho\epsilon=0$, θὰ εἶναι καὶ $\sigma\rho\eta=0$. ἄρα ή συνάρτησις $\psi = \eta\mu x$ εἶναι συνεχής.

II. Συνέχεια συναρτήσεως τοῦ συνημιτόνου. Ἐὰν εἰς αὐξήσιν ε τοῦ x ἀντιστοιχῇ αὐξήσις η τοῦ $\sin x$, θὰ εἶναι

$$\eta = \sin(x+\varepsilon) - \sin x = -2\eta \frac{\varepsilon}{2} \eta \left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

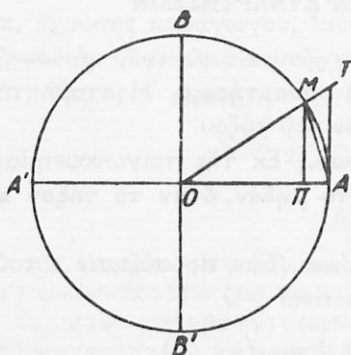
Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $|\eta \left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)| \leq 1$ καὶ $\eta \frac{\varepsilon}{2}$ τείνει μετὰ τοῦ ε εἰς τὸ μηδέν, ἔπεται ὅτι δι' $\text{ορ}\varepsilon=0$, θὰ εἶναι καὶ $\text{ορ}\eta=0$. ἄρα ἡ συνάρτησις $\psi = \sin x$ εἶναι συνεχής.

III. Συνέχεια τῶν ἄλλων κυκλικῶν συναρτήσεων. Ἐπειδὴ $\varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sin x}$ ἤτοι ἡ $\varepsilon\phi x$ εἶναι πηλίκον δύο συνεχῶν συναρτήσεων, ἔπεται ὅτι θὰ εἶναι συνεχὴς δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x ἐκτὸς ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι μηδενίζουν τὸν παρονομαστήν. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς ἄλλας συναρτήσεις.

$$\sigma\phi x = \frac{\sin x}{\eta\mu x}, \quad \tau\epsilon\mu x = \frac{1}{\sin x}, \quad \sigma\tau\epsilon\mu x = \frac{1}{\eta\mu x}.$$

I. ΟΡΙΟΝ ΤΟΥ $\frac{x}{\eta\mu x}$ ΟΤΑΝ $\text{ορ}x = 0$.

§ 247. 1ον. Ἐστω, ὅτι τὸ τόξον $(\widehat{AM}) = x$ τείνει εἰς τὸ μηδέν ἐκ τιμῶν θετικῶν. Εἶναι $\eta\mu x = (\overline{PM})$ καὶ $\varepsilon\phi x = (\overline{AT})$.



Σχ. 23

Ὡς ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται ἔμ. τριγ. $(OAM) < \text{ἔμ. κυκ. τομ } (OAM) < \text{ἔμ. τριγ. } (OAT)$ ἢ $\frac{1}{2} (OA) \eta\mu x < \frac{1}{2} (OA)x < \frac{1}{2} (OA) \varepsilon\phi x$ ἢ $\eta\mu x < x < \varepsilon\phi x$, καὶ ἔπειδὴ $\eta\mu x > 0$, ἔπεται ὅτι $1 < \frac{x}{\eta\mu x} < \frac{1}{\sin x}$. Ἀλλ' ὅταν $\text{ορ}x = 0$, ἔπειδὴ ἡ συνάρτησις $\sin x$ εἶναι συνεχὴς καὶ $\sin 0 = 1$, θὰ εἶναι $\text{ορ}\sin x = 1$. Ἐπομένως καὶ ὁ λόγος $\frac{x}{\eta\mu x}$,

ὅστις περιέχεται μεταξὺ δύο ἀριθμῶν τεινόντων πρὸς τὴν μονάδα, θὰ ἔχη ὅριον τὴν μονάδα, ἤτοι $\text{ορ} \frac{x}{\eta\mu x} = 1$, ὅταν $\text{ορ}x = 0$.

2ον. Ἐστω ὅτι τὸ τόξον $(\widehat{AM}) = x$ τείνει εἰς τὸ μηδέν ἐξ ἀρνητικῶν τιμῶν. Τότε, ἐὰν γράψωμεν $x = -x'$, θὰ εἶναι $x' > 0$, ὁπότε θὰ εἶναι $\frac{x}{\eta\mu x} = \frac{-x'}{\eta\mu(-x')} = \frac{-x'}{-\eta\mu x'} = \frac{x'}{\eta\mu x'}$, ὅταν δὲ τὸ x τείνη εἰς τὸ μηδέν ἐξ ἀρνητικῶν τιμῶν, τὸ x' τείνει εἰς τὸ μηδέν ἐκ θετικῶν τιμῶν, ὁπότε ὡς $\frac{x'}{\eta\mu x'} = 1$ καὶ συνεπῶς ὡς $\frac{x}{\eta\mu x} = 1$. Ὡστε :

$$\text{ὡς } \frac{x}{\eta\mu x} = 1, \text{ ὅταν } \text{ορ} x = 0.$$

II. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ ΗΜΙΤΟΝΟΥ

§ 248. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \eta\mu x$, θὰ εἶναι:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\psi}{\Delta x} &= \frac{\eta\mu(x + \Delta x) - \eta\mu x}{\Delta x} \\ \text{ἢ } \frac{\Delta\psi}{\Delta x} &= \frac{2\eta\mu \frac{\Delta x}{2} \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\eta\mu \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right), \end{aligned}$$

ἐὰν δὲ ὡς $\Delta x = 0$, θὰ εἶναι ὡς $\frac{\Delta x}{2} = 0$, ἄρα ὡς $\frac{\eta\mu \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$ καὶ

ὡς $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu x$ ὥστε $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$. Ἦτοι :

Ἡ παράγωγος τοῦ $\eta\mu x$ εἶναι $\sigma\upsilon\nu x$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x .

III. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΥ

§ 249. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \sigma\upsilon\nu x$, θὰ εἶναι

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\psi}{\Delta x} &= \frac{\sigma\upsilon\nu(x + \Delta x) - \sigma\upsilon\nu x}{\Delta x} \\ \text{ἢ } \frac{\Delta\psi}{\Delta x} &= \frac{-2\eta\mu \frac{\Delta x}{2} \eta\mu\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = -\frac{\eta\mu \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \eta\mu\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right), \end{aligned}$$

ἐκ ταύτης δὲ προκύπτει εὐκόλως, ὅτι $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$. Ἦτοι :

Ἡ παράγωγος τοῦ $\sigma\upsilon\nu x$ εἶναι $-\eta\mu x$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x .

IV. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

§ 250. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \epsilon\phi x$. Ἐπειδὴ $\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$, ἔπεται, ὅτι $(\epsilon\phi x)' = \frac{\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x)' - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ ἢ $(\epsilon\phi x)' = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, ἄρα $(\epsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$. Ἦτοι :

Ἡ παράγωγος τῆς $\epsilon\phi x$ εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ $\sigma\upsilon\nu^2 x$.

V. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ $\sigma\phi x$, $\tau\epsilon\mu x$, $\sigma\tau\epsilon\mu x$.

§ 251. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐργαζόμενοι εὐρίσκομεν, ὅτι $(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, $(\tau\epsilon\mu x)' = \frac{\epsilon\phi x}{\sigma\upsilon\nu x}$, $(\sigma\tau\epsilon\mu x)' = -\frac{\sigma\phi x}{\eta\mu x}$.

Ἄ σ κ η σ ι ς

659. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων :

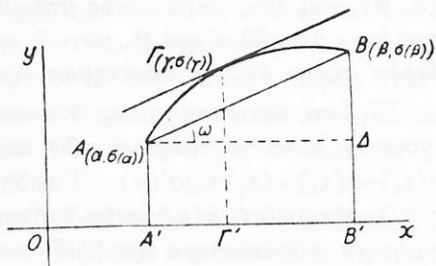
- α') $\psi = \alpha\eta\mu x$, β') $\psi = \eta\mu 2x$, γ') $\psi = \sigma\upsilon\nu 7x$, δ') $\psi = \epsilon\phi 3x$, ε') $\psi = \sigma\phi 4x$,
 στ') $\psi = \tau\epsilon\mu^2 x$, ζ') $\psi = \sigma\tau\epsilon\mu^2 x$, η') $\psi = \eta\mu^2 x$, θ') $\psi = \sigma\upsilon\nu^2 x$, ι') $\psi = x^2 \eta\mu 3x$
 α') $\psi = x^2 \sigma\upsilon\nu^2 x$, ιβ') $\psi = x^2 \epsilon\phi 3x$, ιγ') $\psi = \sqrt{\eta\mu x}$, ιδ') $\psi = \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}$,
 ιε') $\psi = \sigma\upsilon\nu \sqrt{x^2 + 1}$.

Β' ΧΡΗΣΙΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΔΙΑ ΤΗΝ ΣΠΟΥΔΗΝ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΑΥΞΗΣΕΩΝ

§ 252. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$, ὠρισμένη, συνεχῆς καὶ ἔχουσα παράγωγον διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς περιεχομένας εἰς τὸ διάστημα (α, β) . Ὡς γνωστὸν ἡ συνάρτησις αὕτη $\psi = \sigma(x)$ παρίσταται ὑπὸ καμπύλης. Ἐὰν ἐπὶ ταύτης θεωρήσωμεν τὰ σημεῖα $A(\alpha, \sigma(\alpha))$ καὶ $B(\beta, \sigma(\beta))$ καὶ φέρωμεν τὴν χορδὴν AB καὶ τὴν AD παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Ox (σχ. 24), τότε θὰ εἶναι πρὸφανεῶς $AD = \beta - \alpha$ καὶ $DB = \sigma(\beta) - \sigma(\alpha)$. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ADB εὐρίσκομεν, ὅτι $\frac{DB}{AD} = \frac{\sigma(\beta) - \sigma(\alpha)}{\beta - \alpha} = \epsilon\phi\omega = \sigma\upsilon\nu\tau\epsilon\lambda\epsilon\sigma\tau\eta\varsigma$ κατευθύνσεως τῆς χορδῆς AB . Εἶναι φανερόν, ὅτι ἐπὶ τοῦ τόξου AB τῆς καμπύλης $\psi = \sigma(x)$ ὑπάρχει ἓνα τοῦλάχιστον σημεῖον Γ ἔχον τε-

τμημένην γ περιεχομένην μεταξύ α καὶ β καὶ τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν AB . Ἀλλ' ἡ ἐφαπτομένη αὕτη ἔχει συντελεστήν κατευθύνσεως τὴν τιμὴν τῆς παραγώγου $\sigma'(x)$ διὰ $x = \gamma$, ἥτοι $\sigma'(\gamma)$, ἐπειδὴ δὲ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν χορδὴν AB πρέπει νὰ εἶναι $\frac{\sigma(\beta) - \sigma(\alpha)}{\beta - \alpha} = \sigma'(\gamma)$ ἢ



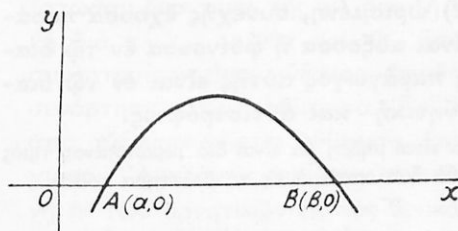
$\sigma(\beta) - \sigma(\alpha) = (\beta - \alpha)\sigma'(\gamma)$. Ὡστε :

Σχ. 24

Ὅταν μία συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ εἶναι ὠρισμένη καὶ συνεχῆς ἐν τινι διαστήματι (α, β) ἔχουσα παράγωγον δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς περιεχομένας ἐν τῷ διαστήματι (α, β) , ὑπάρχει εἰς τουλάχιστον ἄριθμὸς γ μεταξύ α καὶ β περιεχόμενος τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶναι $\sigma(\beta) - \sigma(\alpha) = (\beta - \alpha)\sigma'(\gamma)$.

2. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ROLLE

§ 253. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ ὠρισμένη, συνεχῆς καὶ ἔχουσα παράγωγον ἐν τῷ διαστήματι (α, β) καὶ ἔστω ὅτι ἡ καμπύλη



Σχ. 25

ἢ παριστρωμένη ὑπὸ τῆς συναρτήσεως τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεῖα $A(\alpha, 0)$ καὶ $B(\beta, 0)$. Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων θὰ ὑπάρχῃ μία τουλάχιστον τιμὴ τοῦ x μεταξύ α καὶ β τοιαύτη, ὥστε $\sigma(\beta) - \sigma(\alpha) = (\beta - \alpha)\sigma'(\gamma)$.

ἀλλὰ ἐπειδὴ $\sigma(\beta) = 0$, $\sigma(\alpha) = 0$ καὶ $\beta - \alpha \neq 0$, ἔπεται ὅτι θὰ εἶναι $\sigma'(\gamma) = 0$. Ἦτοι :

Ἐὰν μία συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ ὠρισμένη καὶ συνεχῆς ἔχουσα παράγωγον ἐν τινι διαστήματι (α, β) μηδενίζεται διὰ $x = \alpha$ καὶ $x = \beta$, ὑπάρχει μία τουλάχιστον τιμὴ γ τοῦ x μεταξύ α καὶ β , διὰ τὴν ὁποῖαν ἡ παράγωγος μηδενίζεται.

§ 254. Θεώρημα. Ἐὰν μία συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ εἶναι ὠρισμένη καὶ συνεχὴς ἔχουσα παράγωγον ἐν τινι διαστήματι (α, β) , καὶ ἥτις παράγωγος μηδενίζεται διὰ πᾶσαν τιμὴν περιεχόμενῃν μεταξὺ α καὶ β , τότε ἡ συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ ἔχει σταθερὰν τιμὴν ἐν τῷ διαστήματι (α, β) .

Τῷ ὄντι, ἔστωσαν x_1, x_2 , δύο τιμαὶ τοῦ x μεταξὺ α καὶ β περιεχόμεναι· κατὰ τὸ θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων θὰ εἶναι $\sigma(x_2) - \sigma(x_1) = (x_2 - x_1)\sigma'(\gamma)$. Ἐπειδὴ ὅμως $\sigma'(\gamma) = 0$, ἔπεται ὅτι $\sigma(x_2) - \sigma(x_1) = 0$ ἢ $\sigma(x_2) = \sigma(x_1)$, ἥτοι ἡ συνάρτησις ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν εἰς τὸ διάστημα (α, β) .

§ 255. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ ὠρισμένη, συνεχὴς ἔχουσα παράγωγον ἐν τῷ διαστήματι (α, β) . Ἐστωσαν δὲ δύο τιμαὶ τοῦ x αἱ x_2 καὶ x_1 , ἐνθα $x_2 > x_1$, μεταξὺ α καὶ β περιεχόμεναι. Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων θὰ εἶναι :

$$\sigma(x_2) - \sigma(x_1) = (x_2 - x_1)\sigma'(\gamma).$$

Ἐπειδὴ δὲ $x_2 - x_1 > 0$, ἔπεται, ὅτι $\sigma(x_2) - \sigma(x_1)$ καὶ $\sigma'(\gamma)$ θὰ εἶναι ὁμόσημα, ἥτοι, ἐὰν μὲν $\sigma(x_2) - \sigma(x_1) > 0$ ἢ τὸ αὐτό, ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι αὐξουσα, τότε καὶ $\sigma'(\gamma) > 0$, ἐὰν δὲ $\sigma(x_2) - \sigma(x_1) < 0$ ἢ τὸ αὐτό, ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι φθίνουσα, τότε καὶ $\sigma'(\gamma) < 0$. Ὡστε :

Μία συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ ὠρισμένη, συνεχὴς ἔχουσα παράγωγον ἐν τινι διαστήματι, εἶναι αὐξουσα ἢ φθίνουσα ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ, καθ' ὅσον ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶναι ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ· καὶ ἀντιστρόφως.

Σημείωσις. Ἡ παράγωγος ἐὰν εἶναι μηδέν, θὰ εἶναι διὰ μεμονωμένας τιμὰς τοῦ x , διότι ἄλλως ἡ συνάρτησις θὰ ἦτο σταθερὰ εἰς τὸ διάστημα τοῦτο.

§ 256. Ἐστω, ἡ συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ συνεχὴς εἰς τι διάστημα (α, β) ἔχουσα παράγωγον ψ' , ἥτις εἶναι ἐπίσης συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x .

Ιον. Ἐστω, ὅτι ἡ συνάρτησις μέχρι τῆς τιμῆς τοῦ $x = x_0$ εἶναι αὐξουσα, ὁπότε καὶ ἡ παράγωγός της θὰ εἶναι θετικὴ, ἀπὸ δὲ τῆς τιμῆς x_0 καὶ ἐκεῖθεν ἡ συνάρτησις γίνεται φθίνουσα. Τότε ἡ παράγωγός της καθίσταται ἀπὸ θετικὴ ἀρνητικὴ· καὶ ἐπειδὴ ἡ παράγωγος ὑπετέθη συνεχὴς συνάρτησις, ἔπεται ὅτι, διὰ νὰ γίνῃ ἀπὸ θετικὴ ἀρνητικὴ,

θὰ διέλθῃ διὰ τῆς τιμῆς 0, ἤτοι $\sigma'(x_0) = 0$, ὅτε ἡ συνάρτησις διὰ τὴν τιμὴν $x=x_0$ γίνεται μεγίστη.

2ον. Ἐστω ὅτι ἡ συνάρτησις μέχρι τῆς τιμῆς $x = x_0$ εἶναι φθίνουσα, ὁπότε ἡ παράγωγός της θὰ εἶναι ἀρνητική, ἀπὸ δὲ τῆς τιμῆς x_0 καὶ ἐκείθεν ἡ συνάρτησις γίνεται αὐξουσα. Τότε ἡ παράγωγός της ἀπὸ ἀρνητικὴ καθίσταται θετικὴ· ἐπομένως, ὡς καὶ προηγουμένως ἐλέχθη, θὰ εἶναι $\sigma'(x_2)=0$, ὅτε ἡ συνάρτησις διὰ τὴν τιμὴν $x=x_0$ γίνεται ἐλαχίστη. Ἦτοι:

Ἔστω μία συνάρτησις $\sigma(x)$ συνεχῆς εἰς τι διάστημα (α, β) ἔχουσα παράγωγον διέρχεται διὰ τινὰ τιμὴν τοῦ x τὴν x_0 δι' ἑνὸς μεγίστου ἢ ἐλαχίστου, ἡ παράγωγος αὐτῆς μηδενίζεται διὰ τὴν τιμὴν ταύτην, δηλαδὴ $\sigma'(x_0)=0$, ἂν συμβαίῃ νὰ εἶναι καὶ συνεχῆς διὰ τὴν τιμὴν αὐτήν.

Καὶ ἀντιστρόφως:

Ἐὰν ἡ παράγωγος συνεχοῦς τινος συναρτήσεως $\sigma(x)$ εἰς τι διάστημα (α, β) μηδενίζεται διὰ τινὰ τιμὴν τοῦ x τὴν x_0 , ἡ συνάρτησις αὕτη διὰ τὴν τιμὴν x_0 διέρχεται διὰ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου, καθ' ὅσον ἡ παράγωγος μηδενίζεται ἐκ θετικῶν ἢ ἀρνητικῶν τιμῶν.

Γῶ ὄντι, ἔστω ὅτι ἡ παράγωγος ψ' μηδενίζεται διὰ τὴν τιμὴν $x=x_0$ μεταβαίνουσα ἐκ τῶν θετικῶν τιμῶν εἰς τὰς ἀρνητικὰς καὶ ἔστωσαν δύο τιμαὶ τῆς ψ' , ἤτοι ἡ θετικὴ διὰ $x=x_0-\epsilon$ καὶ ἡ ἀρνητικὴ διὰ $x=x_0+\epsilon$, ἐνθα $\sigma(x_0)=0$. Ἐπειδὴ $\sigma'(x_0-\epsilon) > 0$, ἔπεται ὅτι ἡ συνάρτησις ψ εἶναι αὐξουσα, ἐπειδὴ δὲ $\sigma'(x_0+\epsilon) < 0$, ἔπεται ὅτι ἡ συνάρτησις ψ εἶναι φθίνουσα. Ἐφ' ὅσον δὲ ἡ ψ ὑπετέθη συνεχῆς καὶ ἀπὸ αὐξουσα γίνεται φθίνουσα, ἔπεται ὅτι αὕτη ἔχει διὰ $x=x_0$ μέγιστον. Ἀναλόγως ἀποδεικνύεται ὅτι, ὅταν ἡ παράγωγος μεταβαίῃ ἐκ τῶν ἀρνητικῶν εἰς τὰς θετικὰς τιμὰς, ἡ συνάρτησις διέρχεται δι' ἐλαχίστου διὰ τὴν τιμὴν τοῦ $x=x_0$.

§ 257. Ἐστω 1ον) ὅτι ἡ συνάρτησις $\psi=\sigma(x)$ ὠρισμένη, συνεχῆς εἰς τι διάστημα (α, β) , ἔχουσα παράγωγον ψ' , ἔχει μέγιστον διὰ τὴν τιμὴν $x=x_1$ ἡ δὲ παράγωγος ψ' εἶναι συνεχῆς διὰ τὴν τιμὴν αὐτήν, τότε θὰ εἶναι $\sigma'(x_1)=0$ μεταβαίνουσα ἐκ τῶν θετικῶν τιμῶν εἰς τὰς ἀρνητικὰς, ἄρα ἡ ψ εἶναι φθίνουσα συνάρτησις καὶ ἐπομένως ἡ παράγωγός της ψ'' , ἣτις εἶναι ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς δοθείσης, εἶναι ἀρνητικὴ.

Ἔστω 2ον) ὅτι ἡ συνάρτησις διὰ τινὰ τιμὴν $x=x_2$ ἔχει ἐλάχιστον ἡ δὲ παράγωγος αὐτῆς εἶναι συνεχῆς διὰ τὴν τιμὴν αὐτήν, τότε θὰ εἶναι $\sigma'(x_2)=0$, μεταβαίνουσα ἐκ τῶν ἀρνητικῶν εἰς τὰς θετικὰς ἄρα, ἡ ψ' εἶναι συνάρτησις αὐξοῦσα καὶ ἐπομένως ἡ παράγωγος τῆς ψ'' εἶναι θετική. Ὡστε:

Ἐὰν μία συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ συνεχῆς εἰς τι διάστημα (α, β) ἔχουσα παράγωγον ψ' , ἔχῃ διὰ $x=x_1$ μέγιστον, τότε ἡ δευτέρα αὐτῆς παράγωγος ψ'' εἶναι ἀρνητικὴ διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x , ἐὰν δὲ ἡ ψ ἔχῃ διὰ $x=x_2$ ἐλάχιστον, τότε ἡ δευτέρα παράγωγος ψ'' εἶναι θετικὴ διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x .

Τὸ ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

Παραδείγματα: 1ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως $\psi = x^2 - 8x + 5$. Τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως ταύτης λαμβάνει χώραν διὰ τὴν τιμὴν τοῦ x , διὰ τὴν ὁποίαν μηδενίζεται ἡ πρώτη παράγωγος $\psi' = 2x - 8$, ἥτοι διὰ $x=4$, ἐπειδὴ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x ἡ ψ' εἶναι συνεχῆς. Ἄρα ἡ συνάρτησις $\psi = x^2 - 8x + 5$ διὰ $x=4$ ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ δευτέρα παράγωγος $\psi'' = 2$ εἶναι πάντοτε θετικὴ, ἔπεται ὅτι ἡ συνάρτησις διὰ $x=4$ ἔχει ἐλάχιστον $\psi = -11$.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως $\psi = \frac{x^3}{3} - 9x + 12$. Ἡ $\psi' = x^2 - 9$, τῆς ὁποίας ρίζαι εἶναι $x_1=3, x_2=-3$, ἔχει $\psi'' = 2x$, ἥτις διὰ $x=3$ εἶναι $\psi'' = 6 > 0$ διὰ καὶ $x=-3$ εἶναι $\psi'' = -6 < 0$. Ἄρα ἡ συνάρτησις διὰ $x=3$ ἔχει ἐλάχιστον ὅπερ ἰσοῦται μὲ -6 καὶ διὰ $x=-3$ ἔχει μέγιστον, ὅπερ ἰσοῦται μὲ 30.

§ 258. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi = \frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$, ἔνθα $\sigma(x)$ καὶ $\varphi(x)$ συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ x καὶ ἔστω ὅτι διὰ $x=\alpha$ ἡ συνάρτησις λαμβάνει τὴν ἀόριστον μορφήν $\frac{0}{0}$, ἥτοι $\frac{\sigma(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = \frac{0}{0}$. Ἐπειδὴ $\sigma(\alpha) = 0$

καὶ $\varphi(\alpha) = 0$, ἡ ψ γράφεται $\psi = \frac{\sigma(x)}{\varphi(x)} = \frac{\sigma(x) - \sigma(\alpha)}{\varphi(x) - \varphi(\alpha)}$ ἢ $\frac{\frac{\sigma(x) - \sigma(\alpha)}{x - \alpha}}{\frac{\varphi(x) - \varphi(\alpha)}{x - \alpha}}$. Καὶ

ἐὰν ὑποθεθῇ ὅτι $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sigma(x) - \sigma(\alpha)}{x - \alpha} = 0$, τότε τὸ κλάσμα $\frac{\sigma(x) - \sigma(\alpha)}{x - \alpha}$, τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὸ πηλίκον τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως διὰ τῆς αὐξήσεως τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἔχει ὅριον τὴν παρά-

γωνον διὰ $x = \alpha$, ἤτοι τὴν $\sigma'(\alpha)$, τὸ δὲ κλάσμα $\frac{\varphi(x) - \varphi(\alpha)}{x - \alpha}$ ἔχει ὅριον $\varphi'(\alpha)$. Ἄρα ἐὰν $\sigma\rho x = \alpha$ καὶ $\varphi'(\alpha) \neq 0$, ἔχομεν

$$\sigma\rho\psi = \sigma\rho. \frac{\sigma(x)}{\varphi(x)} = \frac{\sigma'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}. \text{ Ὡστε:}$$

Ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος $\psi = \frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$, τὸ ὁποῖον διὰ $x = \alpha$ λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφήν $\frac{0}{0}$, εἶναι ὁ λόγος $\frac{\sigma'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$ τῶν παραγώγων διὰ τὴν τιμὴν ταύτην, ὅταν $\varphi'(\alpha) \neq 0$.
(Κανὼν τοῦ Hospital).

Σημείωσις. Ἐὰν καὶ ὁ λόγος τῶν παραγώγων διὰ τὴν τιμὴν $x = \alpha$ λαμβάνῃ τὴν ἀόριστον μορφήν $\frac{0}{0}$, τότε λαμβάνομεν τὸν λόγον τῶν δευτέρων παραγώγων διὰ τὴν τιμὴν $x = \alpha$ κ.ο.κ.

Παράδειγμα: Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος $\psi = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9x + 14}$ διὰ $x = 2$. Τὸ κλάσμα τοῦτο διὰ $x = 2$ λαμβάνει τὴν ἀόριστον μορφήν $\frac{0}{0}$. Ἄρα ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος τούτου ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν παραγώγων τῶν ὅρων τοῦ διὰ $x = 2$, ὅποτε ἔχομεν $\psi = \frac{2x-5}{2x-9}$, θέτοντες δὲ $x = 2$ εὐρίσκομεν $\psi = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$.

3. ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΠΟΥΔΗΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

§ 259. Πρὸς σπουδὴν τῶν μεταβολῶν μιᾶς συναρτήσεως, 1ον καθορίζομεν τὰ διαστήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ συνάρτησις εἶναι ὠρισμένη καὶ συνεχής· 2ον εὐρίσκομεν τὴν παράγωγον, τῆς ὁποίας καθορίζομεν τὸ σημεῖον· 3ον εὐρίσκομεν τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα τῆς συναρτήσεως· 4ον εὐρίσκομεν τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως διὰ $x = \pm \infty$ καὶ $x = 0$ καὶ ἐὰν εἶναι δυνατόν καθορίζομεν τὰς τιμὰς τοῦ x , αἵτινες μηδενίζουν τὴν συνάρτησιν· 5ον σχηματίζομεν συνοπτικὸν πίνακα ὅλων τῶν ἀνωτέρω· 6ον κατασκευάζομεν τὴν καμπύλην τὴν παριστῶσαν τὴν συνάρτησιν.

Ἐφαρμογαί: α') Συνάρτησις $\psi = ax + \beta$. 1ον. Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ὠρισμένη διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x . 2ον. Ἡ παράγωγος ψ' εἶναι ἴση πρὸς α ἤτοι $\psi' = \alpha$, ἐπομένως διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

1η περίπτωση: $\alpha > 0$. Ο πίναξ τῶν μεταβολῶν τῆς ψ εἶναι ὁ ἀκόλουθος.

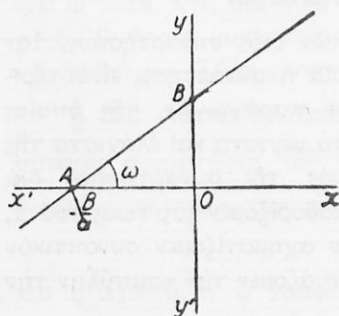
x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{\alpha}$	$+\infty$		
ψ'		+	+		
ψ	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ἡ γραμμὴ τῶν μεταβολῶν εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ σχηματίζουσα μετὰ τοῦ θετικοῦ ἄξονος τῶν x γωνίαν ω ὀξεῖαν, διότι $\psi' = \epsilon\phi\omega = \alpha > 0$ (σχ. 26).

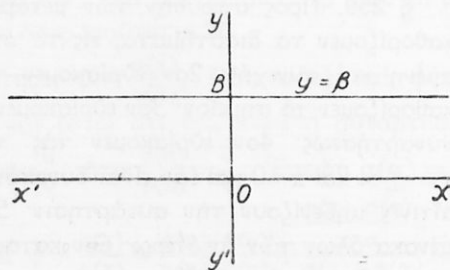
2α περίπτωση: $\alpha < 0$. Ο πίναξ τῶν μεταβολῶν τῆς ψ εἶναι ὁ ἀκόλουθος.

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{\alpha}$	$+\infty$		
ψ'		-	-		
ψ	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Ἡ γραμμὴ ἢ παριστῶσα τὰς μεταβολὰς εἶναι εὐθεῖα σχηματίζουσα μετὰ τοῦ θετικοῦ ἄξονος τῶν x γωνίαν ω ἀμβλείαν, διότι $\psi' = \epsilon\phi\omega = \alpha < 0$.



Σχ. 26



Σχ. 27

3η περίπτωση: $\alpha = 0$. Ἡ συνάρτησις εἶναι σταθερὰ καὶ παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x (σχ. 27).

β') 'Η συνάρτησις $\psi = ax^2 + \beta x + \gamma$. 1ον. 'Η συνάρτησις αὕτη εἶναι ὠρισμένη καὶ συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x .

2ον. 'Η παράγωγος αὐτῆς εἶναι $\psi' = 2ax + \beta$, ἥτις, ἐὰν τὸ $\alpha > 0$, εἶναι ἀρνητικὴ εἰς τὸ διάστημα $(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha})$ καὶ θετικὴ εἰς τὸ διάστημα $(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty)$ ἐὰν δὲ τὸ $\alpha < 0$, εἶναι θετικὴ εἰς τὸ διάστημα $(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha})$ καὶ ἀρνητικὴ εἰς τὸ διάστημα $(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty)$.

3ον. Αἱ ρίζαι τῆς πρώτης παραγώγου $\psi' = 2ax + \beta$ εἶναι $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, ἄρα διὰ τὴν τιμὴν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον. 'Η δὲ δευτέρα παράγωγος $\psi'' = 2\alpha$ εἶναι θετικὴ δι' $\alpha > 0$, ἀρνητικὴ δὲ δι' $\alpha < 0$. ἐπομένως ἡ συνάρτησις, ὅταν $\alpha > 0$, ἔχει διὰ $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ ἐλάχιστον $\psi = \frac{4a\gamma - \beta^2}{4a}$ καὶ ὅταν $\alpha < 0$, ἔχει διὰ $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ μέγιστον $\psi = \frac{4a\gamma - \beta^2}{4a}$.

4ον. Διὰ $x = \pm\infty$, ἐὰν $\alpha > 0$, $\psi = +\infty$, ἐὰν δὲ $\alpha < 0$, $\psi = -\infty$.

Πίναξ τῶν μεταβολῶν

$\alpha > 0$	x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
	ψ'	-	0	+
	ψ''	+		
	ψ	$+\infty$	$\frac{4a\gamma - \beta^2}{4a}$ ἐλάχιστον	$+\infty$
$\alpha < 0$	x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
	ψ'	+	0	-
	ψ''	-		
	ψ	$-\infty$	$\frac{4a\gamma - \beta^2}{4a}$ μέγιστον	$-\infty$

Παράδειγμα. Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $\psi = x^2 - 6x + 8$.

Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ὠρισμένη διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x .
 Ἡ παράγωγος $\psi' = 2x - 6$ διὰ $x < 3$ εἶναι $\psi' < 0$, διὰ $x > 3$ εἶναι $\psi' > 0$. Διὰ $x = 3$ εἶναι $\psi' = 0$, ἐπειδὴ δὲ $\psi'' = 2 > 0$, ἔπεται ὅτι διὰ $x = 3$ ἡ συνάρτησις ἔχει ἐλάχιστον $\psi = \frac{32-36}{4} = -1$.

Διὰ $x = \pm \infty$ ἐπειδὴ $\alpha > 0$, $\psi = +\infty$.

Διὰ $x = 0$, $\psi = 8$, διὰ $x = 2$ καὶ $x = 4$, $\psi = 0$.

Ἀσκήσεις

660. Νὰ ἐξετασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῶν συναρτήσεων:

$$\begin{array}{llll} \alpha') \psi = x + 3, & \beta') \psi = -3x + 1, & \gamma') \psi = x^3 + 3, & \delta') \psi = x^2 - 5x + 6, \\ \epsilon') \psi = x^3 - 8, & \sigma') \psi = x(x-1)^2, & \zeta') \psi = x^2 + 3x + 2, & \eta') \psi = x^3 - 5x - 4. \end{array}$$

661. Νὰ εὑρεθοῦν τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῶν συναρτήσεων:

$$\alpha') \psi = x^2 - 3x + 2, \quad \beta') \psi = 3x^3 + 2x^2, \quad \gamma') \psi = x^3 - 36x.$$

662. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῶν κάτωθι κλασμάτων:

$$\begin{array}{llll} \alpha') \psi = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^3 + 7x^2 - 5x - 3} & \text{διὰ } x = 1, & \beta') \psi = \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - x^2 - 5x - 3} & \text{διὰ } x = 3, \\ \gamma') \psi = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} & \text{διὰ } x = 2, & \delta') \psi = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{3x^3 - 18x^2 + 36x - 24} & \text{διὰ } x = 2. \end{array}$$

4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΜΙΑΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟΥ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

§ 260. Ἐστω τυχοῦσα συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x , ἡ ψ . Ἐὰν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x λάβῃ ἐλάχιστην αὐξησιν Δx , ἡ συνάρτησις λαμβάνει ὁμοίως ἀντίστοιχον αὐξησιν $\Delta \psi$. Γνωρίζομεν ὅτι, ἂν $\text{ord} x = 0$ εἶναι καὶ $\text{ord} \Delta \psi = 0$ καὶ $\text{ord} \frac{\Delta \psi}{\Delta x} = \psi'$, συνεπῶς καὶ $\text{ord} \left(\frac{\Delta \psi}{\Delta x} - \psi' \right) = 0$.

Ἐκ ταύτης ἔπεται ὅτι $\frac{\Delta \psi}{\Delta x} - \psi' = \epsilon$ (1), ἂν $\text{ord} \epsilon = 0$. Λύομεν τὴν (1) ὡς πρὸς $\Delta \psi$ καὶ ἔχομεν $\Delta \psi = \psi' \Delta x + \epsilon \cdot \Delta x$. Ἦτοι:

Ἡ αὐξησις συνεχοῦς συναρτήσεως τοῦ x ἐχούσης παράγωγον ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς ἐλάχιστην αὐξησιν Δx τοῦ x , ἀποτελεῖται ἀφ' ἐνὸς ἀπὸ τὸ γινόμενον τῆς παραγώγου ἐπὶ Δx καὶ ἀφ' ἐτέρου ἀπὸ τὸ γινόμενον τοῦ Δx ἐπὶ ἀριθμὸν ϵ , ὁ ὁποῖος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν αὐξησιν Δx καὶ ἔχει ὄριον μηδέν, ὅταν $\text{ord} \Delta x = 0$.

Τὸ γινόμενον $\psi' \Delta x$ καλεῖται διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως ψ καὶ σημειοῦται $d\psi = \psi' \Delta x$. (1)

Ἐὰν $\psi=x$ εἶναι $\psi'=1$, ὁπότε ἐκ τῆς (1) προκύπτει $dx=\Delta x$ καὶ ἡ ἰσότης (1) γράφεται $d\psi=\psi' dx$. (2)

Ἐκ τῆς (2) παρατηροῦμεν· 1ον ὅτι, ἵνα μία συνάρτησις ἔχῃ διαφορικόν, πρέπει νὰ ἔχῃ παράγωγον καὶ 2ον ὅτι πρὸς εὐρεσιν τοῦ διαφορικοῦ μιᾶς συναρτήσεως πολλαπλασιάζομεν τὴν παράγωγον αὐτῆς ἐπὶ dx . Οὕτως ἐὰν $\psi=2x^3$, θὰ εἶναι $d\psi=6x^2 dx$.

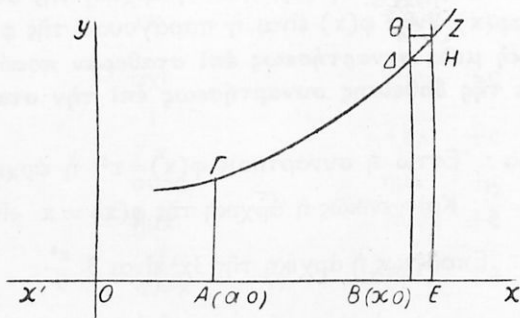
Ἀ σ κ η σ ι ς

663. Νὰ εὐρεθῇ τὸ διαφορικόν τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

$$\begin{array}{lll} \alpha') \psi = 3x, & \beta') \psi = 7x^3, & \gamma') \psi = 3x^2 - 5x + 6, \\ \delta') \psi = \frac{3x}{x+1}, & \epsilon') \psi = \frac{x^2-3}{x^2+1}, & \sigma\tau') \psi = \sqrt{3x^2}, \quad \zeta') \psi = \sqrt{x^2-2x+1}. \end{array}$$

5. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΝ ΕΜΒΑΔΟΥ

§ 261. Ἐστω $\psi=\sigma(x)$ συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x καὶ MN ἡ καμπύλη, τὴν ὁποίαν αὕτη παριστᾷ. Ἄς λάβωμεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x τὸ σταθερὸν σημεῖον $A(\alpha, 0)$ καὶ τὸ μεταβλητὸν $B(x, 0)$, καὶ τῶν ὁποίων φέρομεν τὰς τεταγμένας AG καὶ BD τῶν σημείων Γ καὶ Δ τῆς καμπύλης οὕτω δὲ ὀρίζεται τὸ χωρίον $AB\Gamma\Delta$, τοῦ ὁποίου ἔστω E τὸ ἐμβαδὸν (σχ. 28).



Σχ. 28

Εἶναι προφανές, ὅτι μετατιθεμένου τοῦ μεταβλητοῦ σημείου B , ἤτοι μεταβαλλομένου τοῦ x , μεταβάλλεται καὶ τὸ ἐμβαδὸν E , ἐπομένως τὸ E εἶναι συνάρτησις τοῦ x . Ἐπίσης εἶναι φανερόν ὅτι, ἐφ' ὅ-

σον ή συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ είναι συνεχής δι' αύξησιν του x κατά $\Delta x = (BE)$, ή αύξησις ΔE του έμβασδου είναι τὸ έμβασδὸν του χωρίου $B\Delta ZE$ καὶ ὅτι δι' $\sigma\Delta x = 0$ θὰ είναι καὶ $\sigma\Delta E = 0$, ἤτοι τὸ E είναι καὶ αὐτό, συνεχής συνάρτησις του x . Ὡς ἐκ του σχήματος φαίνεται, είναι $(B\Delta HE) < (B\Delta ZE) < (B\Theta ZE)$ ἢ ἐὰν τεθῇ $(\Delta\Theta) = \Delta\psi$, θὰ είναι $\psi \cdot \Delta x < \Delta E < (\psi + \Delta\psi) \cdot \Delta x$ διαιροῦντες δὲ διὰ Δx ἔχομεν :

Ἐὰν μὲν $\Delta x > 0$, $\psi > \frac{\Delta E}{\Delta x} < \psi + \Delta\psi$, ἐὰν δὲ $\Delta x < 0$, $\psi > \frac{\Delta E}{\Delta x} > \psi + \Delta\psi$,

Ἐπειδὴ δὲ, ὅταν $\sigma\Delta x = 0$, είναι καὶ $\sigma\Delta\psi = 0$, ἔπεται ὅτι $\sigma\frac{\Delta E}{\Delta x} = \psi$.

Ἀλλὰ $\sigma\frac{\Delta E}{\Delta x} = E'$, ἄρα $E' = \psi$, ἐκ ταύτης δὲ ἔπεται ὅτι $E'dx = \psi dx$.

6. ΑΡΧΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΣ ΑΥΤΩΝ

§ 262. Ἐστω ή συνάρτησις $\psi = 5x^2 - 7x$ ἔχουσα παράγωγον $\psi' = 10x - 7$. Ἡ συνάρτησις $\psi = 5x^2 - 7x$ λέγεται **ἀρχική** συνάρτησις ἢ καὶ **παράγουσα** τῆς $\psi' = 10x - 7$. Ἦτοι :

Ἀρχική συνάρτησις δοθείσης συναρτήσεως $\varphi(x)$ λέγεται μία ἄλλη συνάρτησις, ἐὰν ὑπάρχη, ἥτις, ἔχει ὡς παράγωγον τὴν δοθεῖσαν.

§ 263. Ἐστω ή συνάρτησις $\alpha\varphi(x)$, ἔνθα α σταθερά. Ἡ παράγωγος αὐτῆς είναι $(\alpha\varphi(x))' = \alpha\varphi'(x)$, ἤτοι ἡ ἀρχική τῆς συναρτήσεως $\alpha\varphi'(x)$ είναι $\alpha\varphi(x)$, ἔνθα $\varphi(x)$ είναι ἡ παράγουσα τῆς $\varphi'(x)$. Ὡστε

Ἡ ἀρχική μιᾶς συναρτήσεως ἐπὶ σταθερὰν ποσότητα είναι ἡ παράγουσα τῆς δοθείσης συναρτήσεως ἐπὶ τὴν σταθερὰν ποσότητα.

Παράδειγμα : Ἐστω ή συνάρτησις $\varphi(x) = x^4$. ἡ ἀρχική αὐτῆς : είναι ἡ $f(x) = \frac{x^5}{5}$. Καὶ γενικῶς ἡ ἀρχική τῆς $\varphi(x) = x$ είναι $f(x) = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$ ($\mu \neq -1$) : Ἐπομένως ἡ ἀρχική τῆς $3x^4$ είναι $3 \cdot \frac{x^5}{5}$.

§ 264. Ἐστω ή συνάρτησις $\psi = \varphi(x) + \sigma(x) + f(x)$ ἔχουσα ὡς παράγωγον τὴν $\psi' = \varphi'(x) + \sigma'(x) + f'(x)$ · συνεπῶς ἡ ἀρχική τῆς $\psi' = \varphi'(x) + \sigma'(x) + f'(x)$ είναι ἡ $\psi = \varphi(x) + \sigma(x) + f(x)$. Ἀλλὰ αἱ $\varphi(x)$, $\sigma(x)$, $f(x)$ είναι ἀντιστοιχῶς αἱ ἀρχικαὶ τῶν $\varphi'(x)$, $\sigma'(x)$, $f'(x)$. Ὅθεν :

Ἡ ἀρχικὴ συνάρτησις τοῦ ἀθροίσματος δύο ἢ περισσοτέρων συναρτήσεων ἔχουσῶν ἀρχικὰς, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρχικῶν τῶν δοθεισῶν συναρτήσεων.

Παράδειγμα : Ἐπειδὴ αἱ ἀρχικαὶ τῶν $3x^2$, $6x$, 5 εἶναι ἀντιστοιχῶς αἱ x^2 , $3x^2$, $5x$, ἔπεται ὅτι ἡ ἀρχικὴ τῆς $\psi = 3x^2 - 6x + 5$ εἶναι ἡ $x^2 - 3x^2 + 5x$.

§ 265. Ἐστω μία συνάρτησις τοῦ x ἡ $\varphi(x)$ ὠρισμένη ἐν τινι διαστήματι καὶ ἔχουσα ὡς ἀρχικὴν τὴν συνάρτησιν $f(x)$. Κατὰ τὸν ὀρισμὸν τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως πρέπει $f'(x) = \varphi(x)$ · ἀλλὰ καὶ $(f(x) + c)' = \varphi(x)$, ἐνθα c σταθερά. Ἄρα ἡ $\varphi(x)$ θὰ ἔχη ὡς ἀρχικὰς καὶ τὰς συναρτήσεις $f(x) + c$, ἐνθα c εἶναι οἷοσδήποτε σταθερὸς ἀριθμὸς.

7. ΑΡΧΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΩΡΙΣΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 266. Εἰς τὸ περὶ παραγῶγων κεφάλαιον εἶχομεν εὖρει τὰς παραγῶγους ὠρισμένων συναρτήσεων· τῇ βοηθείᾳ αὐτῶν εὐκόλως εὐρίσκομεν τὰς ἀρχικὰς ὠρισμένων τοιούτων, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς τὸν κάτωθι πίνακα.

Συναρτήσεις	Ἀρχικαὶ
x^μ	$\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + c$
αx^μ	$\frac{\alpha x^{\mu+1}}{\mu+1} + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
$\sin x$	$\eta \mu x + c$
$\eta \mu x$	$-\sin x + c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\epsilon \varphi x + c$
$-\frac{1}{\eta \mu^2 x}$	$\sigma \varphi x + c$

§ 267. Ἡ ἀρχικὴ συνάρτησις ἡ παράγουσα μιᾶς συναρτήσεως $\sigma(x)$ καλεῖται καὶ ὁλοκλήρωμα τοῦ διαφορικοῦ $\sigma(x)dx$ καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου $\int \sigma(x)dx$.

Κατὰ ταῦτα εἶναι $\int \sigma'(x)dx = \sigma(x) + c$ καὶ $d \int \sigma'(x)dx = \sigma'(x)dx$
 ἥτοι:

Ἡ ὁλοκλήρωσις καὶ ἡ διαφορίσις εἶναι πράξεις ἀντίστροφοι.

Ἐκ τούτου καθίσταται φανερόν ὅτι ἐξ ἐκάστου κανόνος διαφορίσεως προκύπτει ἀντίστοιχος κανὼν ὁλοκληρώσεως καὶ ἀντιστρόφως μόνον, ὅτι κατὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν πρέπει νὰ προσθέσωμεν ποσότητα c ἀνεξάρτητον τῆς ἐκάστοτε μεταβλητῆς.

Ἀσκήσεις

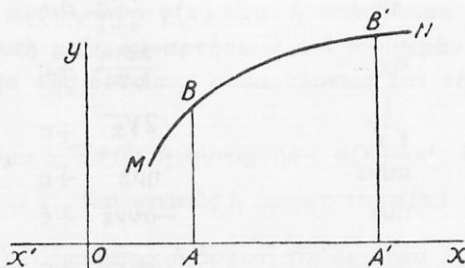
664. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ὁλοκληρώματα :

$$\begin{aligned} \alpha') \int 3x dx, & \quad \beta') \int 9x^2 dx, & \quad \gamma') \int x^{-4} dx, & \quad \delta') \int x^{-5} dx, \\ \epsilon') \int -\frac{1}{x^3} dx, & \quad \sigma\tau') \int \frac{7}{x^6} dx, & \quad \zeta') \int (3x^3 + 2x^2 - 5x + 6) dx, & \quad \eta') \int (6x^3 - 7x^2 - 3x) dx, \\ \theta') \int (x+2)^2 dx, & \quad \iota') \int (x-1)^3 dx, & \quad \iota\alpha') \int \quad \iota\beta') \int (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) dx, & \quad \int \sigma\upsilon\nu 2x dx, \\ \gamma') \int \eta\mu 2x dx, & \quad \iota\delta') \int \sigma\upsilon\nu 3x dx, & \quad \iota\epsilon') \int \eta\mu 3x dx. \end{aligned}$$

8. ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΣ ΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 268. Ἐστω μία συνεχὴς συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ καὶ MN ἡ καμπύλη, τὴν ὁποίαν αὕτη παριστᾷ.

Ἀς ὑποθέσωμεν, ὅτι $\int \sigma(x)dx = f(x) + c$. Ἐστώσαν δὲ $(\overline{OA}) = \alpha$



Σχ. 29

καὶ $(\overline{OA'}) = x$. Ἄν κληθῇ E τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου χωρίου $ABB'A'$ (σχ.29) θὰ εἶναι $dE = \sigma(x)dx$, συνεπῶς

$$E = \int \sigma(x)dx = f(x) + c \quad (1)$$

οἰοῦνται ὅτι ὅταν $x = \alpha$ θὰ εἶναι $E = 0$, ἡ ἰσότης

(1) γίνεται $0=f(\alpha)+c$, εκ τῆς ὁποίας προκύπτει ὅτι $c=-f(\alpha)$, ὁπότε $E=f(x)-f(\alpha)$. Αὕτη διὰ $x=(OA')=\beta$ δίδει $(ABB'A')=f(\beta)-f(\alpha)$. Ἡ διαφορὰ $f(\beta)-f(\alpha)$ παρίσταται συμβολικῶς

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x) dx,$$

ἐὰν $f'(x)=\sigma(x)$ καὶ καλεῖται **ὠρισμένον ὀλοκλήρωμα**.

Τὰ α καὶ β καλοῦνται **ὄρια** τοῦ ὀλοκληρώματος, τὸ μὲν α κατώτερον, τὸ δὲ β ἀνώτερον, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ $\int \sigma(x) dx$, τὸ ὁποῖον καλεῖται **ἀόριστον ὀλοκλήρωμα**. "Ωστε :

Ἐὰν δοθῇ καμπύλη παριστωμένη ὑπὸ τῆς συναρτήσεως $\psi=\sigma(x)$, ὀρισθῶσι δὲ ἐπ' αὐτῆς δύο σημεία B καὶ B' ἔχοντα ἀντιστοίχως τετμημένας α καὶ β , τὸ ἐμβαδὸν E τοῦ καμπυλογράμμου χωρίου $(ABB'A')$ θὰ εἶναι :

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x) dx = f(\beta) - f(\alpha), \text{ ἐὰν } f'(x) = \sigma(x).$$

Ἀσκήσεις

665. Δίδεται ἡ συνάρτησις $\psi = x^2 - 5x + 6$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου χωρίου, τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τοῦ τόξου τῆς καμπύλης τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν τομῶν τῆς x' καὶ τῆς καμπύλης ταύτης.

666. Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν συνάρτησιν $x^2 - 6x + 5$.

667. Ἐὰν B εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ συνάρτησις $\psi = x^2 + 2x - 3$ τέμνει τὸν ἄξονα $\psi'\psi$, καὶ A' καὶ A αἱ τομαὶ μέ τὸν ἄξονα $x'x$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν $A'OB$ καὶ OBA .

668. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἡμιτονοειδοῦς $\psi = \eta\mu x$ ἀπὸ 0 ἕως π .

669. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς συνημιτονοειδοῦς $\psi = \sigma\upsilon\nu x$ ἀπὸ θ ἕως $\frac{\pi}{2}$.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

	Σελίς
Ὅρισμός τῆς Ἀλγέβρας καὶ σύντομος ἱστορικὴ ἐπισκόπησις αὐτῆς	5 - 7
Θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ	8 - 12
Γραφικὴ παράστασις τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν	12 - 14
Σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν ἐκ τῆς θετικῆς μονάδος	14 - 15
Πράξεις μὲ σχετικοὺς ἀριθμοὺς (Πρόσθεσις)	16 - 19
Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως	19 - 21
Γεωμετρικὴ ἀπεικόνισις ἀθροίσματος	21 - 22
Ἀφαίρεσις	22 - 24
Ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα	24 - 28
Γεωμετρικὴ ἀπεικόνισις διαφορᾶς σχετικῶν ἀριθμῶν ἢ καὶ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος	28 - 29
Πολλαπλασιασμὸς	29 - 31
Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ $+1$ ἢ ἐπὶ -1	32 - 33
Διαίρεσις	33 - 35
Κλάσματα ἀλγεβρικὰ	36 - 38
Περὶ δυνάμεων μὲ ἐκθέτας φυσικοὺς ἀριθμοὺς	38 - 39
Περὶ τῶν συμβόλων a^1 καὶ a^0 ὡς δυνάμεων	39
Θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν δυνάμεων	40 - 43
Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους ἀρνητικοὺς	44 - 45
Περὶ ἀνισοτήτων μεταξὺ σχετικῶν ἀριθμῶν	45 - 47
Ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων	47 - 49
Περίληψις περιεχομένων κεφαλαίου I	49 - 51

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

Περὶ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων	52 - 53
Εἶδη ἀλγεβρικῶν παραστάσεων	53 - 54
Περὶ μονωνύμων	54 - 56
Ὅμοια μονώνυμα	56 - 57
Πρόσθεσις μονωνύμων	57 - 58
Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως	58 - 59
Περὶ πολυνυμῶν	60 - 62
Πράξεις ἐπὶ τῶν πολυνυμῶν (Πρόσθεσις πολυνυμῶν)	62 - 63

	Σελίς
Ἀφαίρεσις ἀλγεβρικῶν παραστάσεων	63 - 65
Περὶ παρενθέσεως καὶ ἀγκυλῶν	65 - 67
Γινόμενον ἀκεραίων μονωνύμων	67 - 68
Γινόμενον πολυνύμου ἐπὶ μονωνύμου	68 - 69
Γινόμενον πολυνύμων	69 - 71
Ἀξιοσημείωτοι πολλαπλασιασμοὶ	71 - 72
Διαιρέσις ἀκεραίων μονωνύμων	72 - 73
Διαιρέσις πολυνύμου διὰ μονωνύμου	73 - 74
Διαιρέσις πολυνύμου διὰ πολυνύμου	75 - 81
Ὑπόλοιπον διαιρέσεως πολυνύμου περιέχοντος τὸ x διὰ τῶν $x \pm \alpha$ ἢ διὰ τοῦ $ax \pm \beta$	81 - 83
Πηλικά τῶν διαιρέσεων $x^m \pm \alpha^m$ διὰ $x \pm \alpha$	83 - 85
Ἀνάλυσις ἀκεραίας ἀλγεβρικῆς παραστάσεως εἰς γινόμενον παραγόν- των (περιπτώσεις ἐννέα)	85 - 89
Μ κ δ. καὶ ἐ.κ.π. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων	89 - 90
Περὶ ρητῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων	91
Ἰδιότητες ρητῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων	91 - 93
Περὶ τῶν παραστάσεων $\frac{0}{0}$ καὶ $\frac{\alpha}{0}$	94 - 97
Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις ἀλγεβρικῶν κλασμάτων	97 - 98
Πολλαπλασιασμός καὶ διαιρέσις ἀλγεβρικῶν κλασμάτων	98 - 100
Σύνθετα κλάσματα	100 - 101
Περίληψις περιεχομένων κεφαλαίου II	101 - 103

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ μὲ ἓνα ἄγνωστον—Ὅρισμοὶ καὶ ἰδιότητες ἐξισώσεων	104 - 108
Ἀπαλοιφή τῶν παρονομαστῶν ἐξισώσεως	108 - 110
Λύσις ἐξισώσεως Α' βαθμοῦ μὲ ἓνα ἄγνωστον	110 - 111
Διερεύνησις τῆς ἐξισώσεως $ax + \beta = 0$	111 - 112
Λύσις τῆς ἐξισώσεως $ax + \beta = 0$	112 - 113
Ἐφαρμογὴ τῶν ἐξισώσεων εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων	113 - 114
Προβλήματα τῶν ὁποίων ὁ ἄγνωστος δὲν ἔχει περιορισμόν	115 - 116
Προβλήματα τῶν ὁποίων ὁ ἄγνωστος πρέπει νὰ εἶναι θετικὸς	116 - 117
Προβλήματα τῶν ὁποίων ὁ ἄγνωστος περιέχεται μεταξὺ ὁρίων	117 - 118
Προβλήματα γενικὰ	119 - 120
Περὶ συναρτήσεων.—Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως	120 - 124
Πίναξ τιμῶν συναρτήσεως	124 - 126
Ἀπεικόνισις τιμῶν συναρτήσεως	126
Ἀπεικόνισις τιμῶν συναρτήσεως	126 - 130

Γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $\psi = \alpha x + \beta$	130 - 132
Γραφική λύσις τῆς ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ	133
Περὶ ἀνισοτήτων πρώτου βαθμοῦ μὲ ἓνα ἄγνωστον	133 - 136
Περίληψις περιεχομένων κεφαλαίου III	136 - 137

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Συστήματα ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ	138
Ἰδιότητες τῶν συστημάτων	139 - 140
Μέθοδοι λύσεως συστήματος δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἄγνωστους	140
Μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν	140 - 143
Μέθοδος ἀπαλοιφῆς δι' ἀντικαταστάσεως	143 - 144
Μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ συγκρίσεως	144 - 145
Διερεύνησις τοῦ συστήματος τῆς μορφῆς $\begin{cases} \alpha x + \beta \psi = \gamma \\ \alpha_1 x + \beta_1 \psi = \gamma_1 \end{cases}$	146 - 148
Λύσις τοῦ συστήματος $\begin{cases} \alpha x + \beta \psi = \gamma \\ \alpha_1 x + \beta_1 \psi = \gamma_1 \end{cases}$	148 - 149
Γραφικὴ λύσις συστήματος δυο ἐξισώσεων α' βαθμοῦ μὲ δύο ἄγνωστους	149 - 153
Συστήματα πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ περισσοτέρους τῶν δύο ἄγνωστους	153 - 157
Λύσις συστημάτων διὰ τεχνασμάτων	157 - 160
Προβλήματα συστημάτων α' βαθμοῦ	160
Προβλήματα συστημάτων α' βαθμοῦ μὲ δύο ἄγνωστους	160 - 163
Προβλήματα συστημάτων α' βαθμοῦ μὲ περισσοτέρους τῶν δύο ἄγνωστους	163 - 165
Περίληψις περιεχομένου κεφαλαίου IV	165 - 167

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Περὶ τῶν ριζῶν σχετικῶν ἀριθμῶν	168
Ἰδιότητες τῶν ριζῶν	168 - 174
Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας κλασματικοῦς	174 - 177
Περὶ τῆς ρίζης μονωνύμων	177 - 178
Περὶ ὁρίων	178 - 180
Ἰδιότητες τῶν ὁρίων	180 - 181
Περὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν	182 - 185
Περὶ φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν	185 - 186
Πράξεις ἐπὶ φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν	186 - 187
Ἰδιότητες τῶν φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν	187 - 188

Σημεία ὀριζόμενα με μιγάδας ἀριθμοὺς	Σελίς 188 - 190
Περίληψις περιεχομένων κεφαλαίου V	190 - 191

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Περὶ ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ	192
Ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων	192 - 193
Λύσις τῆς ἐξισώσεως $ax^2 + \gamma = 0$	193 - 194
Λύσις τῆς ἐξισώσεως $ax^2 + \beta x = 0$	194 - 195
Λύσις τῆς ἐξισώσεως $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$	195 - 197
Ἐξισώσεις λυόμεναι με βοηθητικούς ἀγνώστους	197
Περὶ τοῦ εἶδους τῶν ριζῶν τῆς $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$	198 - 199
Σχέσεις συντελεστῶν καὶ ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$	199 - 201
Περὶ τοῦ προσήμου τῶν ριζῶν τῆς $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$	202
Τροπὴ τοῦ τριωνύμου $ax^2 + \beta x + \gamma$ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων πα- ραγόντων ὡς πρὸς x	202 - 203
Εὑρεσις τριωνύμου β' βαθμοῦ ἐκ τῶν ριζῶν αὐτοῦ	203 - 205
Πρόσημα τοῦ τριωνύμου $ax^2 + \beta x + \gamma$ διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x ..	205 - 206
Θέσις ἀριθμοῦ (πραγματικοῦ) ὡς πρὸς τὰς ρίζας τριωνύμου	206 - 208
Εὑρεσις τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῆς $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ κατὰ προσέγγισιν	208 - 209
Λύσις ἀνισότητος δευτέρου βαθμοῦ	209 - 213
Περὶ τῶν τιμῶν τοῦ τριωνύμου $ax^2 + \beta x + \gamma$ διὰ πάσας τὰ πρα- γματικὰς τιμὰς τοῦ x	213 - 216
Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $\psi = ax^2 + \beta x + \gamma$	216 - 220
Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $\psi = \frac{ax + \beta}{\gamma x + \delta}$	220 - 226
Περίληψις περιεχομένων κεφαλαίου VI	226 - 227

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

Ἐξισώσεις ἀναγόμεναι εἰς ἐξισώσεις β' βαθμοῦ	228
Διτετράγωνοι ἐξισώσεις	228 - 229
Τροπὴ τοῦ τριωνύμου $ax^4 + \beta x^2 + \gamma$ εἰς γινόμενον παραγόντων	229 - 231
Τροπὴ διπλῶν τινῶν ριζικῶν εἰς ἀπλᾶ	231 - 232
Ἐξισώσεις με ριζικά β' καὶ ἀνωτέρας τῆς β' τάξεως	232 - 236
Περὶ ἀντιστρόφων ἐξισώσεων	236 - 240
Ἐξισώσεις διώνυμοι	240 - 242
Ἐξισώσεις α' καὶ β' βαθμοῦ ὡς πρὸς τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ ἀγνώ- στου	242 - 244
Λύσεις τῆς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $\alpha x ^2 + \beta x + \gamma = 0$	244
Συστήματα δευτέρου καὶ ἀνωτέρου βαθμοῦ	245 - 251

Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ	251 - 255
Προβλήματα γενικά	255 - 260
Περίληψις περιεχομένων κεφαλαίου VII	260 - 262

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

Περὶ προόδων.—Πρόοδοι ἀριθμητικαὶ	263 - 264
Παραβολὴ ὄρων ἀριθμητικῆς προόδου	264 - 265
Ἄθροισμα ὄρων ἀριθμητικῆς προόδου	265 - 269
Πρόοδοι γεωμετρικαὶ	269 - 271
Παραβολὴ ὄρων γεωμετρικῆς προόδου	271 - 272
Ἄθροισμα ὄρων γεωμετρικῆς προόδου	272 - 273
Ἄθροισμα ἀπείρων ὄρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου	273 - 275
Ἀρμονικὴ πρόοδος	275 - 276
Περὶ λογαρίθμων	276 - 279
Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων	279 - 280
Περὶ τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοῦ λογαρίθμου	280 - 283
Τροπὴ ἀρνητικοῦ δεκαδικοῦ εἰς ἓν μέρει ἀρνητικόν	283 - 285
Λογάρισμος ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν	285 - 286
Περὶ λογαριθμικῶν πινάκων	286 - 289
Ἐφαρμογαὶ τῶν λογαρίθμων	289 - 291
Ἀλλαγὴ τῆς βάσεως τῶν λογαρίθμων	291 - 292
Περὶ ἐκθετικῶν καὶ λογαριθμικῶν ἐξισώσεων	292 - 295
Προβλήματα ἀνατοκισμοῦ	296 - 300
Προβλήματα ἴσων καταθέσεων	300 - 302
Προβλήματα χρεωλυσίας	302 - 307
Περίληψις περιεχομένων κεφαλαίου VIII	307 - 309

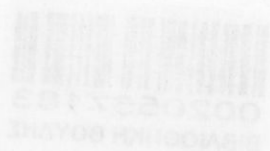
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

Ἰδιότητες τῶν ἀπολύτων τιμῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν	310
Ἀπόλυτος τιμὴ ἀθροίσματος ἀριθμῶν	310 - 311
Ἀπόλυτος τιμὴ γινομένου ἀριθμῶν	312
Ἀπόλυτος τιμὴ πηλίκου δύο ἀριθμῶν	312
Ἀπόλυτος τιμὴ δυνάμεως ἀριθμοῦ	312
Περὶ ἀκολουθίας ἀριθμῶν	312 - 314
Πότε μία ἀκολουθία τείνει πρὸς τὸ μηδέν	314 - 315
Ἰδιότητες τῶν ἀκολουθιῶν	316 - 319
Περὶ ὁρίου μεταβλητῆς ποσότητος	319
Περὶ ὁρίου ἀθροίσματος, γινομένου, πηλίκου, δυνάμεως μεταβλητῶν ποσοτήτων	319 - 321

Πῶς διακρίνομεν ἂν μεταβλητὴ ποσότης ἔχῃ ὄριον	321 - 324
Περὶ συνεχείας τῶν συναρτήσεων	324 - 326

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

Περὶ παραγῶγων	327 - 329
Γεωμετρικὴ σημασία τῆς παραγῶγου	329 - 330
Παράγωγος συναρτήσεως ἄλλης συναρτήσεως	330 - 331
Παράγωγος ἀθροίσματος συναρτήσεων τοῦ x	331
Παράγωγος γινομένου συναρτήσεως τοῦ x	332
Παράγωγος γινομένου σταθερᾶς ἐπὶ συνάρτησιν τοῦ x	332 - 333
Παράγωγος πηλίκου δύο συναρτήσεων τοῦ x	333 - 334
Παράγωγος τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ x	334
Παράγωγοι διαφόρων τάξεων	335
Παράγωγοι κυκλικῶν συναρτήσεων	335 - 336
Ὁριον τοῦ $\frac{x}{\eta\mu x}$, ὅταν $\sigma\rho x = 0$	336 - 337
Παράγωγος ἡμιτόνου, συνημιτόνου, ἐφαπτομένης, $\sigma\phi x$, $\tau\epsilon\mu x$, $\sigma\tau\epsilon\mu x$	337 - 338
Χρήσις τῶν παραγῶγων διὰ τὴν σπουδὴν τῶν συναρτήσεων	338
Θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων	338 - 339
Θεώρημα τοῦ Roll	339 - 343
Μέθοδος σπουδῆς τῶν μεταβολῶν συναρτήσεων τῇ βοήθειᾳ τῶν παραγῶγων	343 - 346
Διαφορικὸν συναρτήσεως μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς	346 - 347
Παράγωγος καὶ διαφορικὸν ἐμβαδοῦ	347 - 348
Ἀρχικαὶ συναρτήσεις καὶ χρησιμότης αὐτῶν	348 - 349
Ἀρχικαὶ συναρτήσεις ὠρισμένων συναρτήσεων	349 - 350
Χρησιμότης ἀρχικῶν συναρτήσεων	350 - 351
Πίναξ περιεχομένων	353



ΕΛΛΑΣ



21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ



0020557183
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΒΟΥΛΗΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΙΕ' 1973 (VII)- ANT 75 000 - ΣΥΜΒΑΣΙΣ 2314/5-3-1973

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ: ΑΛ. & ΑΝΝΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ - ΒΙΒΛ. Π. ΟΚΤΩΡΑΤΟΣ - Κ. ΚΟΥΚΙΑ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

