ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α/Γ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΣΤ. ΚΑΤΣΑΡΛΙΝΟΥ - ΜΑΤΘ. ΜΠΑΪΜΠΑ



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1970

Δ 1 ΜΜΚ

Καϊσαρλινός (Στ.)

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



ΔΩΡΕΑ
ΕΘΝΙΚΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΣΤ. ΚΑΤΣΑΡΛΙΝΟΥ — ΜΑΤΘ. ΜΠΑ·Ι·ΜΠΑ

ΕΛΛΑΣ
21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1970

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

# ΕΚ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

### 1. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ



#### 1. 1. Εἰσαγωγή

Εἰς τὴν καθημερινὴν ζωὴν ὁμιλοῦμεν διά:

Τὴν ἀθλητικὴν ὁ μ ά δ α τῆς τάξεώς μας.

Τὴν σ υ λ λ ο γ ὴ ν τῶν γραμματοσήμων μας.

Τὸν σ ύ λ λ ο γ ο ν τῶν καθηγητῶν τοῦ γυμνασίου μας.

Τὸ σ ύ ν ο λ ο ν τῶν ἀντικειμένων, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὴν σάκκαν μας.

Ἤτοι χρησιμοποιοῦμεν τὰς λέξεις

ὁ μ ά ς, σ υ λ λ ο γ ή, σ ύ λ λ ο γ ο ς, σ ύ ν ο λ ο ν,

ὅταν θέλωμεν νὰ ὁμιλήσωμεν δι' ἀντικείμενα, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν ὡς μίαν ὁ λ ό τ η τ α.

Εἰς τὰ Μαθηματικά, ὅταν ἀναφερώμεθα εἰς ἀντικείμενα*, ὡ ρ ι σ μ έ ν α καὶ δ ι α κ ε κ ρ ι μ έ ν α μεταξύ των, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν ὡς μίαν ὁ λ ό τ η τ α, χρησιμοποιοῦμεν τὴν λέξιν σ ύ ν ο λ ο ν.

Τὰ ἀντικείμενα ἐκ τῶν ὁποίων ἀπαρτίζεται ἓν σύνολον τὰ ὀνομάζομεν σ τ ο ι χ ε ῖ α ἢ μ έ λ η αὐτοῦ. Π.χ. ἡ ἄνοιξις εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου τῶν ἐποχῶν τοῦ ἔτους. Ἢ ὅπως λέγομεν ἡ ἄνοιξις ἀ ν ή κ ε ι εἰς τὸ σύνολον τῶν ἐποχῶν τοῦ ἔτους.

#### 1. 2. Πότε ἓν σύνολον εἶναι καθωρισμένον

Εἰς τὸ κατωτέρω σχέδ. 1 εἰκονίζεται ἡ οἰκογένεια Σαμπάνη κατὰ τὴν ὥραν τοῦ φαγητοῦ. Ἡ οἰκογένεια αὐτὴ ἀποτελεῖ ἓν σύνολον τὸ ὁποῖον, ἄς ὀνομάσωμεν σύνολον Α.

Ἐὰν μᾶς ἐρωτήσουν:

Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον Α;

Θὰ ἀπαντήσωμεν: Τὸ σύνολον Α ἀ π α ρ τ ί ζ ε τ α ι ἀπὸ τὸν πατέρα α, τὴν μητέρα β, τὸν υἱὸν γ, καὶ τὴν θυγατέρα δ. Ἢ ὅτι εἶναι τὸ σύνολον τ ῶ ν μ ε λ ῶ ν τ ῆ ς ο ἰ κ ο γ ε ν ε ί α ς Σ α μ π ά ν η.

---

* Ἡ λέξις ἀντικείμενον χρησιμοποιεῖται μὲ εὐρεῖαν σημασίαν· π.χ. ὡς ἀντικείμενα λαμβάνονται καὶ ἀριθμοί, σχήματα κλπ.

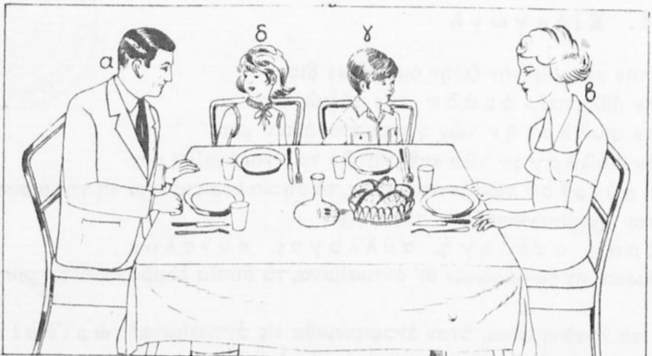
Εἰς τὴν α' περίπτωσιν διὰ νὰ καθορίσωμεν τὸ σύνολον Α, ἀνεφέραμεν ἀκριβῶς ἀπὸ ποῖα στοιχεῖα ἀπαρτίζεται τοῦτο. Εἰς τὴν β' περίπτωσιν ἐχρησιμοποιήσαμεν ἓν χαρακτηριστικὸν γνώρισμα τῶν στοιχείων αὐτοῦ· τὸ γνώρισμα «μέλος τῆς οἰκογενείας Σαμπάνη».

Γενικῶς, **λέγομεν ὅτι ἓν σύνολον Α εἶναι καθωρισμένον :**

**α) Ὅταν γνωρίζωμεν ἀκριβῶς ἀπὸ ποῖα στοιχεῖα ἀπαρτίζεται τοῦτο.**

**β) Ὅταν γνωρίζωμεν ἓν χαρακτηριστικὸν γνώρισμα τῶν στοιχείων αὐτοῦ.**

Ἤτοι, ἓν γνώρισμα, τὸ ὁποῖον μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἀποφανθῶμεν, ἐὰν ἓν ὁποιοδήποτε ἀντικείμενον εἶναι ἢ δὲν εἶναι στοιχεῖον τοῦ θεωρουμένου συνόλου.



Σχ. 1. Οἰκογένεια Σαμπάνη.

Π.χ. τὸ σύνολον «οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεώς μας μὲ ἀνάστημα ἄνω τοῦ 1,60m», εἶναι καθωρισμένον. Πράγματι· τὸ γνώρισμα «μαθητὴς τῆς τάξεώς μας μὲ ἀνάστημα ἄνω τοῦ 1,60m» μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἀπαντήσωμεν χωρὶς δισταγμούς, ἐὰν εἷς, οἱοσδήποτε, μαθητὴς τῆς τάξεώς μας ἔχῃ ἢ δὲν ἔχῃ ἀνάστημα ἄνω τοῦ 1,60m καὶ συνεπῶς εἶναι ἢ δὲν εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου τούτου.

Ἀντιθέτως· τὸ σύνολον «οἱ ὑψηλοὶ μαθηταὶ τῆς τάξεώς μας» δὲν εἶναι καθωρισμένον. Πράγματι· τὸ γνώρισμα «ὑψηλὸς μαθητὴς τῆς τάξεώς μας», εἰς ὡρισμένας τοὐλάχιστον περιπτώσεις, δὲν μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἀπαντήσωμεν, χωρὶς δισταγμούς, ἐὰν εἷς τυχὼν μαθητὴς τῆς τάξεώς μας εἶναι ἢ δὲν εἶναι ὑψηλός.

### 1. 3. Εἰδικὰ σύνολα

**α) Μονομελῆ σύνολα. Τὸ κενὸν σύνολον.**

Ὅταν μίαν ἡμέραν ἀπουσιάζουν ἀπὸ τὴν τάξιν μας δύο μαθηταὶ π.χ. ὁ Καλῆς καὶ ὁ Σαμπάνης, τότε τὸ σύνολον τῶν ἀπόντων μαθητῶν ἀπαρτίζεται ἀπὸ τοὺς δύο αὐτοὺς μαθητάς. Ἐὰν μίαν ἄλλην ἡμέραν ἀπουσιάζῃ μόνον ὁ Σαμπάνης, ποῖον θὰ εἶναι τότε τὸ σύνολον τῶν ἀπόντων μαθητῶν ;

Εἶναι ἓν σύνολον μὲ μοναδικὸν στοιχεῖον τὸν Σαμπάνην.

Μίαν τρίτην ἡμέραν οὐδεὶς μαθητὴς ἀπουσιάζει. Ποῖον θὰ εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀπόντων μαθητῶν ἐκείνης τῆς ἡμέρας ;

Ἴσως νὰ εἴπωμεν ὅτι δὲν ὑπάρχει τότε σύνολον. Δυνάμεθα ὅμως νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν ἀπόντων εἶναι σύνολον χωρὶς στοιχεῖα : Εἶναι τὸ κενὸν σύνολον.

Διὰ νὰ γενικεύσωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ συνόλου δεχόμεθα ὅτι ὑπάρχουν σύνολα μὲ ἓν μόνον στοιχεῖον (Μονομελῆ). Δεχόμεθα ἐπίσης ὅτι ὑπάρχει ἓν κενὸν σύνολον.

**β) Βασικὸν σύνολον.**

Ὡς ἐνθυμούμεθα ἀπὸ τὸ Δημοτικὸν Σχολεῖον εἰς τὴν Φυτολογίαν δὲν ἀσχολούμεθα μὲ ὅλα τὰ ἀντικείμενα ἀλλὰ μόνον μὲ τὰ φυτά. Ὁμοίως εἰς τὴν Ζωολογίαν ἐξετάζομεν ἀποκλειστικῶς τὰ ζῷα.

Γενικῶς, ὅταν ἀσχολούμεθα μὲ ἓν θέμα, ἓν πρόβλημα, χρησιμοποιοῦμεν ἀποκλειστικῶς στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου : ἑνὸς συνόλου εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκουν ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματός μας. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σύνολον τοῦτο λέγεται βασικὸν σύνολον, συμβολίζεται δὲ μὲ $\Omega$. Τοιουτοτρόπως, εἰς τὴν Φυτολογίαν ἔχομεν ὡς βασικὸν σύνολον τὸ σύνολον τῶν φυτῶν, ἐνῶ εἰς τὴν Ζωολογίαν τὸ σύνολον τῶν ζώων.

## 2. ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ

### 2.1. Δι' ἀναγραφῆς

α) Διὰ νὰ παραστήσωμεν συμβολικῶς τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων γράφομεν

$$\{ \alpha, \varepsilon, \eta, o, \omega, \upsilon, \iota \}$$

Ἤτοι ἀναγράφομεν ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἐντὸς ἀγκίστρου, ($\{\ \}$), χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν σειρὰν ἀναγραφῆς αὐτῶν. Διαβάζομεν δέ : Σύνολον μὲ στοιχεῖα α, ε, η, ο, ω, υ, ι.

Ὁ τρόπος αὐτὸς συμβολισμοῦ τοῦ συνόλου λέγεται δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του ἢ συντόμως δι' ἀναγραφῆς.

Μάλιστα, ἐπειδὴ τὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου πρέπει νὰ εἶναι ἀνὰ δύο διαφορετικὰ (διακεκριμένα), δὲν ἀναγράφομεν δύο φορὰς τὸ αὐτὸ στοιχεῖον. Π.χ. τὸ σύνολον τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ 122 γράφεται

$$\{ 1, 2 \} \text{ ἢ } \{ 2, 1 \} \text{ ἀλλὰ ὄχι } \{ 1, 2, 2 \}.$$

β) Ἂς λάβωμεν ἤδη τὸ σύνολον τῶν λεγομένων φυσικῶν* ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι

* Φυσικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4...

εἶναι μικρότεροι τοῦ 1000. Ἐπειδὴ τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου τούτου ἔχουν μίαν διάταξιν (σειρὰν ἀναγραφῆς), δυνάμεθα νὰ τὸ παραστήσωμεν ὡς ἑξῆς:

$$\{1, 2, 3, \ldots 999\}$$

Ἤτοι, ἀναγράφομεν ἐντὸς ἀγκίστρου κατὰ σειρὰν τὰ τρία πρῶτα στοιχεῖα, ἔπειτα τρεῖς τελείας καὶ τέλος τὸ τελευταῖον στοιχεῖον 999.

## 2. 2. Διὰ περιγραφῆς

Τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων δυνάμεθα νὰ τὸ παραστήσωμεν συμβολικῶς καὶ ὡς ἑξῆς:

{ Ὅλα τὰ στοιχεῖα χ, ὅπου χ εἶναι φωνῆεν }

ἢ συντόμως { χ ὅπου χ φωνῆεν }

ἢ { χ | χ φωνῆεν }

(Τὸ διαχωριστικὸν | σημαίνει ὅ π ο υ).

Διαβάζομεν δὲ «σύνολον μὲ στοιχεῖα χ ὅπου χ φωνῆεν».

Ὁ τρόπος αὐτὸς τοῦ συμβολισμοῦ ἑνὸς συνόλου λέγεται διὰ περιγραφῆς τῆς χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῶν στοιχείων του. Ἢ συντόμως διὰ περιγραφῆς.

**Παραδείγματα**

α) Διὰ τὸ σύνολον τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ 1969 ἔχομεν τοὺς συμβολισμούς: { 1, 9, 6 } ἢ { χ | χ ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ 1969 }.

β) Διὰ τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τοῦ γυμνασίου μας ἔχομεν τὸν συμβολισμὸν { χ | χ μαθητὴς τοῦ γυμνασίου μας }.

(Διατί δὲν χρησιμοποιοῦμεν καὶ τὸν ἄλλον συμβολισμόν;)

γ) Διὰ τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον ἀπαρτίζεται ἀπὸ τοὺς μῆνας Ἰούνιον, Ἰούλιον καὶ Αὔγουστον ἔχομεν τοὺς συμβολισμούς:

{ Ἰούνιος, Ἰούλιος, Αὔγουστος } { χ | χ μὴν τοῦ θέρους }

Εἰδικῶς τὸ κενὸν σύνολον * τὸ συμβολίζομεν { } ἢ $\emptyset$

## 2. 3. Ὁ συμβολισμὸς τοῦ «ἀνήκειν»

Ἂς ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ σύνολον τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ 122 ἢ συμβολικῶς εἰς τὸ σύνολον $A = \{1, 2\}$. Τὰ ψηφία 1, 2 εἶναι τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου τούτου. Ἢ κατ' ἄλλον τρόπον τὰ στοιχεῖα 1,2 ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον Α. Ἡ σχέσις «1 ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον Α» συμβολίζεται $1 \in A$.

---

* Δὲν πρέπει νὰ συγχέωμεν τὰς γραφὰς { 0 } καὶ $\emptyset$ · ἡ πρώτη γραφὴ παριστάνει ἓν μονομελὲς σύνολον μὲ στοιχεῖον τὸ 0, ἐνῷ ἡ δευτέρα τὸ κενὸν σύνολον. Ἐπίσης σημειώνομεν ὅτι τὸ σύνολον { 0 } εἶναι διάφορον ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 0.

Ἡ σχέσις «3 δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον Α» συμβολίζεται $3 \notin A$.
Εἶναι φανερὸν ὅτι δι' ἕκαστον στοιχεῖον δύο μόνον δυνατότητες ὑπάρχουν: Νὰ ἀνήκῃ ἢ νὰ μὴ ἀνήκῃ εἰς ἓν σύνολον. Τοιουτοτρόπως ἔχομεν:

$$1 \in \{1, 2\}, \quad 2 \in \{1, 2\}, \quad 3 \notin \{1, 2\}, \quad 4 \notin \{1 2\} \ldots$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Παραστήσατε μὲ ἀναγραφὴν καὶ περιγραφὴν τὸ σύνολον τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδος, τῶν ὁποίων τὸ ὄνομα ἀρχίζει ἀπὸ Π. Γράψατε ἔπειτα συμβολικῶς ποῖαι ἡμέραι τῆς ἑβδομάδος ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον αὐτὸ καὶ ποῖαι δὲν ἀνήκουν.
2. Νὰ παραστήσετε διὰ περιγραφῆς τὰ σύνολα

   Α = { Ἰανουάριος, Ἰούνιος, Ἰούλιος } καὶ $B = \{1, 2 \ldots 9\}$
3. Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων, οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξὺ 4 καὶ 5;
4. Ἐὰν $A = \{0, 1, \{2\}\}$, τότε ποῖαι ἀπὸ τὰς σχέσεις $0 \in A$, $1 \in A$, $2 \in A$ εἶναι ἀληθεῖς;
5. Τί δύνασθε νὰ εἴπετε διὰ τὸ σύνολον { x|x ὡραῖον ποίημα }.

## 3. ΥΠΟΣΥΝΟΛΟΝ ΣΥΝΟΛΟΥ

### 3.1. Ὁρισμοί.

Ἂς λάβωμεν ὡς βασικὸν σύνολον $\Omega$ τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τοῦ γυμνασίου μας καὶ τὰ δύο σύνολα:

Α = { x|x μαθητὴς τῆς τάξεώς μας }.

καὶ Β = { x|x ἀριστοῦχος μαθητὴς τῆς τάξεώς μας }.

Παρατηροῦμεν ὅτι:

Ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ Β εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ Α. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι τὸ σύνολον Β εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου Α.

Γράφομεν δὲ συμβολικῶς

$$B \subseteq A$$

καὶ διαβάζομεν: Β εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Α.

Γενικῶς: **Ἓν σύνολον Β λέγεται ὑποσύνολον ἑνὸς συνόλου Α, ἐὰν ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ Β εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ Α.**

Ἤτοι, ὅταν $B \subseteq A$, τότε δὲν ὑπάρχει στοιχεῖον τοῦ Β τὸ ὁποῖον νὰ μὴ εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ Α.

Ἡ σχέσις «Β εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Α» διατυπώνεται καὶ ὡς ἑξῆς:

«Τὸ Β περιέχεται ἢ ἐγκλείεται εἰς τὸ Α».

Ἢ «Τὸ Α περιέχει ἢ ἐγκλείει τὸ Β».

Σημειοῦμεν ὅτι αἱ σχέσεις

«Β ἐγκλείεται εἰς τὸ σύνολον Α» (1) καὶ «α ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον Α» (2) ἔχουν διαφορετικὴν σημασίαν. Ἡ (1) εἶναι σχέσις συνόλου πρὸς σύνολον, ἐνῷ ἡ (2) εἶναι σχέσις στοιχείου πρὸς σύνολον.

**Παραδείγματα**

α) Τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου τῶν γραμμάτων.

β) Τὸ σύνολον τῶν κατοίκων τῶν Ἀθηνῶν εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου τῶν κατοίκων τῆς Ἑλλάδος.

γ) Τὸ σύνολον τῶν μηνῶν τῆς ἀνοίξεως εἶναι ὑποσύνολον τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους.

δ) Τὸ σύνολον $\{1, 2\}$ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ $\{1, 2, 5\}$, ἀλλὰ δὲν εἶναι ὑποσύνολον τοῦ $\{1, 3, 4, 5\}$ (Διατί ;)

$$\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 5\}, \quad \{1, 2\} \nsubseteq \{1, 3, 4, 5\}$$

## 3. 2. Εἰδικαὶ περιπτώσεις

ι) Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ὑποσυνόλου προκύπτει ὅτι :

**Ἕκαστον σύνολον εἶναι ὑποσύνολον τοῦ ἑαυτοῦ του.**

$$\Sigma \subseteq \Sigma \qquad \text{(Ἐγκλεισμὸς μὲ εὐρεῖαν ἔννοιαν)}$$

**Παράδειγμα.** Ἄς λάβωμεν τὸ σύνολον Σ τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς μας καὶ τὸ ὑποσύνολον αὐτοῦ Α τῶν μαθητῶν, οἱ ὁποῖοι μαθαίνουν Γαλλικά.

Ἤτοι $A \subseteq \Sigma$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὅλοι οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεώς μας μαθαίνουν Γαλλικά, τότε τὸ σύνολον Σ ταυτίζεται μὲ τὸ ὑποσύνολον αὐτοῦ Α.

ιι) Ἐπίσης ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ὑποσυνόλου προκύπτει ὅτι :

**Τὸ κενὸν σύνολον εἶναι ὑποσύνολον παντὸς συνόλου.**

$$\varnothing \subseteq \Sigma$$

Πράγματι· δὲν ὑπάρχει στοιχεῖον τοῦ κενοῦ συνόλου, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ ἀνήκῃ εἰς ἓν σύνολον Σ.

**Παράδειγμα.** Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι οὐδεὶς μαθητὴς τῆς τάξεώς μας μαθαίνει Γαλλικά, τότε τὸ σύνολον Α, ὑποσύνολον τοῦ Σ, εἶναι τὸ κενὸν σύνολον.

## 3. 3. Γνήσιον ὑποσύνολον συνόλου

Ἄς λάβωμεν τὰ σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}$ καὶ $B = \{1, 2\}$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἶναι : $B \subseteq A$. Τὸ σύνολον Α ἔχει καὶ ἄλλα στοιχεῖα ἐκτὸς τῶν στοιχείων τοῦ ὑποσυνόλου του Β. Διὰ τοῦτο τὸ σύνολον Β λέγεται γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Α.

**Ἐὰν σύνολον Α ἔχῃ τοὐλάχιστον ἓν στοιχεῖον, ἐκτὸς τῶν στοιχείων ἑνὸς ὑποσυνόλου του Β, τότε λέγομεν ὅτι τὸ Β εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Α.**

Γράφομεν δὲ $B \subset A$. (Ἐγκλεισμὸς μὲ στενὴν ἔννοιαν).

Π.χ. τὰ σύνολα $\{1\}$, $\{1, 2\}$ καὶ $\{2\}$ εἶναι γνήσια ὑποσύνολα τοῦ συνόλου $\{1, 2, 3\}$. Ἀντιθέτως τὸ σύνολον $\{1, 2, 3,\}$ δὲν εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ ἑαυτοῦ του.

**3.4. Ἰδιότητες**

α) Καθὼς εἴδομεν εἰς τὴν 3,2 ἕκαστον σύνολον $\Sigma$ εἶναι ὑποσύνολον (ὄχι γνήσιον) τοῦ ἑαυτοῦ του

$$\boxed{\Sigma \subseteq \Sigma}$$

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ σχέσις ἐγκλεισμοῦ (μὲ εὐρεῖαν σημασίαν) ἔχει τὴν ἀνακλαστικὴν ἰδιότητα.

β) Ἐὰν σᾶς εἴπουν ὅτι μεταξὺ τριῶν συνόλων Α, Β, Γ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$A \subseteq B \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad B \subseteq \Gamma \quad (2)$$

Τί συμπεραίνετε ἀπὸ αὐτὰς διὰ τὴν σχέσιν τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ Γ ;

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) συμπεραίνομεν ὅτι τὸ Α περιέχεται εἰς τὸ Γ, $A \subseteq \Gamma$. Τὰ ἀνωτέρω διατυπώνονται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς :

$$\boxed{(A \subseteq B \quad \text{καὶ} \quad B \subseteq \Gamma) \Longrightarrow A \subseteq \Gamma\,^{*}} \qquad (3)$$

Ἤτοι : Ἐὰν $A \subseteq B$ καὶ $B \subseteq \Gamma$, τότε θὰ εἶναι καὶ $A \subseteq \Gamma$

Ἢ $A \subseteq B$ καὶ $B \subseteq \Gamma$ συνεπάγεται ὅτι $A \subseteq \Gamma$.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ τῆς σχέσεως ἐγκλεισμοῦ λέγεται μεταβατικὴ ἰδιότης.

Ὥστε ὁ ἐγκλεισμός, μὲ εὐρεῖαν σημασίαν, ἔχει τὴν ἀνακλαστικὴν καὶ τὴν μεταβατικὴν ἰδιότητα.

## 4. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΣΥΝΟΛΟΥ **

**4.1.** Καθὼς γνωρίζετε εἰς πολλὰς περιπτώσεις χρησιμοποιοῦνται διαγράμματα. Π.χ. χρησιμοποιοῦμεν διαγράμματα διὰ νὰ ἔχωμεν μίαν σύντομον καὶ παραστατικὴν εἰκόνα τῆς πορείας τοῦ πυρετοῦ ἑνὸς ἀσθενοῦς, τῶν μεταβολῶν τῆς θερμοκρασίας κατὰ μίαν περίοδον, τῆς κινήσεως τῶν κερδῶν μιᾶς ἐπιχειρήσεως . . .

---

* Τὸ σύμβολον $\Longrightarrow$ εἶναι γνωστὸν ὡς σύμβολον τῆς συνεπαγωγῆς.

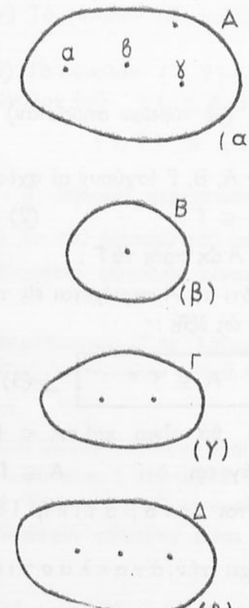
** Ἡ συστηματικὴ χρῆσις διαγραμμάτων διὰ τὴν γραφικὴν παράστασιν συνόλων ὀφείλεται εἰς τὸν Ἄγγλον μαθηματικὸν J. Venn (1834-1923). Διὰ τοῦτο εἶναι γνωστὰ ὡς διαγράμματα τοῦ Venn.

Διαγράμματα χρησιμοποιοῦμεν, διὰ νὰ ἔχωμεν μίαν παραστατικὴν εἰκόνα συνόλων καὶ τῶν μεταξὺ αὐτῶν σχέσεων.

**4. 2.** Πῶς θὰ παραστήσωμεν γραφικῶς ἓν σύνολον ; Π.χ. τὸ σύνολον $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ;

Πρὸς τοῦτο παριστάνομεν ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ συνόλου μὲ ἓν σημεῖον καὶ ἔπειτα ἐγκλείομεν ὅλα τὰ σημεῖα αὐτὰ καὶ μόνον αὐτά, ἐντὸς μιᾶς ἁπλῆς κλειστῆς γραμμῆς, (σχ. 2α.)

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω : ἓν μονομελὲς σύνολον Β, ἓν διμελὲς Γ, ἓν τριμελὲς Δ, ἔχουν τὰ παραπλεύρως ἀντίστοιχα διαγράμματα σχ. 2β, 2γ καὶ 2δ.




Σχ. 2

Διὰ νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς ὅτι τοῦ συνόλου $A = \{1, 2, 3\}$ βασικὸν σύνολον εἶναι π.χ. τὸ $\Omega = \{1, 2, 3 \ldots 9\}$, σχηματίζομεν τὸ διάγραμμα τοῦ σχεδ. 3. Ἀπὸ τὸ διάγραμμα τοῦτο ἐννοοῦμεν ὅτι :

$$A \subseteq \Omega, \quad 1 \in A, \quad 2 \in A, \quad 3 \in A,$$
$$4 \notin A, \quad 5 \notin A \ldots$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

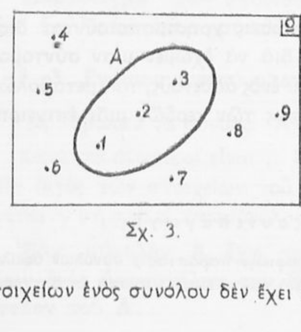
6. Ἀναφέρατε παραδείγματα ὑποσυνόλων τοῦ συνόλου τῶν μαθημάτων τῆς τάξεώς σας.

7. Ἐὰν $A = \{1,2,3 \ldots 99\}$, $B = \{1,2,3 \ldots\}$ καὶ $\Gamma = \{1,2,3 \ldots 999\}$ νὰ σχηματίσετε τὰς σχέσεις ἐγκλεισμοῦ μεταξὺ αὐτῶν.

8. Ἐὰν $A = \{x | x$ Εὐρωπαῖος$\}$, $B = \{x | x$ Ἕλλην$\}$, $\Gamma = \{x | x$ Καναδὸς$\}$ καὶ $\Delta = \{x | x$ Βέλγος$\}$ νὰ ἐξετάσετε ποῖα ἀπὸ τὰ σύνολα Β, Γ, Δ εἶναι ὑποσύνολα τοῦ Α.

9. Νὰ ἐξετάσετε ἐὰν ἡ σχέσις ἐγκλεισμοῦ, μὲ στενὴν σημασίαν, ἔχει τὴν ἀνακλαστικὴν ἰδιότητα.

10. Ποῖα εἶναι τὰ ὑποσύνολα τοῦ συνόλου $\{0,1\}$ καὶ ποῖα τὰ γνήσια ὑποσύνολα τοῦ συνόλου $\{0, 1, 2\}$.




Σχ. 3.

## 5. ΙΣΑ ΣΥΝΟΛΑ

### 5. 1. Ὁρισμός

Εἴδομεν ὅτι ἡ σειρὰ ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου δὲν ἔχει σημασίαν. Ἤτοι οἱ συμβολισμοὶ $A = \{1, 2\}$

καὶ $B = \{2, 1\}$ παριστάνουν τὸ αὐτὸ σύνολον * ἢ καθὼς λέγομεν παριστάνουν δύο ἴ σ α σύνολα.

Ἐὰν προσέξωμεν τὰ στοιχεῖα τῶν δύο αὐτῶν συνόλων Α καὶ Β, διακρίνομεν ὅτι:

Ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ Α εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ Β ἀλλὰ καὶ
» » Β » » Α

**Ἓν σύνολον Α λέγεται ἴ σ ο ν μὲ ἓν σύνολον Β, ἐὰν ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ Α εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ Β καὶ ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ Β εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ Α.**

Γράφομεν δὲ $A = B$ (1)

Ἡ σχέσις (1) λέγεται ἰ σ ό τ η ς. Τὰ ἑκατέρωθεν τοῦ συμβόλου (=) μέρη αὐτῆς λέγονται μ έ λ η τῆς ἰσότητος. Π ρ ῶ τ ο ν μέλος τὸ ἐξ ἀριστερῶν καὶ δ ε ύ τ ε ρ ο ν τὸ ἐκ δεξιῶν.

**Παραδείγματα**

α) Τὰ σύνολα $\Gamma = \{3, 5, 7\}$ καὶ $\Delta = \{7, 5, 3\}$ εἶναι ἴσα καὶ γράφομεν $\Gamma = \Delta$. Ἀντιθέτως τὰ σύνολα $\Gamma = \{3, 5, 7\}$ καὶ $E = \{3, 5, 7, 9\}$ δὲν εἶναι ἴσα (Διατί;) καὶ γράφομεν $\Gamma \neq E$.

β) Τὰ σύνολα $K = \{5, 6, 4\}$ καὶ $\Lambda = \{ x \mid x$ ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ 4665 $\}$ εἶναι ἴσα (Διατί;)

## 5. 2. Ἰδιότητες

ι) Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος ἐννοοῦμεν ὅτι ἕκαστον σύνολον Α εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἑαυτόν του.

$A = A$ Ἀ ν α κ λ α σ τ ι κ ὴ ἰ δ ι ό τ η ς.

ιι) Εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι, ἐὰν εἶναι $A = B$, τότε θὰ εἶναι καὶ $B = A$

Ἢ συμβολικῶς: $A = B \Rightarrow B = A$ Σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ὴ ἰ δ ι ό τ η ς.

Ἡ ἰδιότης αὕτη μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐναλλάσσωμεν τὸ α′ μέλος τῆς ἰσότητος μὲ τὸ β′ μέλος αὐτῆς.

Π.χ. γράφομεν $\{3,5,6\} = \{5,3,6\}$ ἢ $\{5,3,6\} = \{3,5,6\}$

ιιι) Ἐὰν γνωρίζετε ὅτι $A = B$ καὶ $B = \Gamma$, τί συνάγετε διὰ τὰ σύνολα Α καὶ Γ;

Ἐὰν εἶναι $A = B$ καὶ $B = \Gamma$, τότε σ υ μ π ε ρ α ί ν ο μ ε ν ὅτι θὰ εἶναι καὶ $A = \Gamma$. Ἢ συμβολικῶς:

$(A = B$ καὶ $B = \Gamma) \Rightarrow A = \Gamma$ – Μ ε τ α β α τ ι κ ὴ ἰ δ ι ό τ η ς.

Ἡ μεταβατικὴ ἰδιότης μᾶς ἐπιτρέπει ἐμμέσους συγκρίσεις. Π.χ. χάρις εἰς

* Εἰς τὰ Μαθηματικὰ εἶναι δυνατὸν τὸ ἴδιον ἀντικείμενον (ἔννοια) νὰ παριστάνεται μὲ δύο διαφορετικὰ σύμβολα.

αὐτὴν εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν ἐὰν δύο σύνολα Α καί Γ εἶναι ἴσα χωρὶς ἀπ' εὐθείας σύγκρισιν αὐτῶν ἀλλὰ μόνον διὰ συγκρίσεως πρὸς ἓν ἄλλο σύνολον Β.

Ὥστε ἡ ἰσότης συνόλων ἔχει τὰς ἰδιότητας :

| | | |
|---|---|---|
| 1. Ἀνακλαστικὴν | $A = A$ | |
| 2. Συμμετρικὴν | $A = B$ | $\Longrightarrow B = A$ |
| 3. Μεταβατικὴν | $\left.\begin{array}{l} A = B \\ B = \Gamma \end{array}\right\}$ | $\Longrightarrow A = \Gamma$ |

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

11. Ποῖα ἐκ τῶν συνόλων $\{12\}$, $\{1,2\}$, $\{2,1\}$, $\{1,2,0\}$ εἶναι ἴσα μεταξύ των ;

12. Πόσας συγκρίσεις πρέπει νὰ κάνετε, διὰ νὰ εὕρετε,ἐὰν τρία σύνολα εἶναι ἴσα μεταξύ των; Ὁμοίως, ὅταν τὰ σύνολα εἶναι τέσσαρα;

## 6. ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑ

**6.1.** Πολὺ συχνὰ τὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου σχετίζονται μὲ στοιχεῖα ἑνὸς ἄλλου συνόλου.

Ἂς εἶναι Α τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς μας καὶ Β τὸ σύνολον τῶν θρανίων τῆς αἰθούσης μας. Ὅταν λέγωμεν νὰ καθήσουν οἱ μαθηταὶ εἰς τὰς θέσεις των, ἀντιστοιχίζομεν ἕκαστον μαθητήν (στοιχεῖον τοῦ Α), μὲ ἓν θρανίον (στοιχεῖον τοῦ Β). Τὸ ὡρισμένον θρανίον εἰς τὸ ὁποῖον κάθεται ὁ μαθητής.

Ἂς λάβωμεν ἀκόμη δύο σύνολα : τὸ σύνολον Γ τῶν μαθητῶν τοῦ γυμνασίου μας καὶ τὸ σύνολον Τ τῶν 6 τάξεων αὐτοῦ. Ὅταν λέγωμεν οἱ μαθηταὶ νὰ μεταβοῦν εἰς τὰς τάξεις των, ἀντιστοιχίζομεν ἕκαστον μαθητήν, στοιχεῖον τοῦ Γ, μὲ μίαν τάξιν, στοιχεῖον τοῦ Τ, τὴν τάξιν εἰς τὴν ὁποίαν φοιτᾷ οὗτος.

**6.2** Ἂς προσέξωμεν τὰς κατωτέρω ἀντιστοιχίας (α) καὶ (β) τὰς ὁποίας ἔχομεν σημειώσει μὲ βέλη.

$A = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ $\qquad$ $\Gamma = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ $\qquad$ $E = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$

$B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ $\qquad$ $\Delta = \{1,\ 2,\}$ $\qquad$ $Z = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

(α) $\qquad$ (β) $\qquad$ (γ)

Καὶ αἱ δύο ἔχουν ἓν κοινὸν γνώρισμα : Ὅτι εἰς ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ συνόλου Α (ἢ Γ) ἀντιστοιχεῖ ἓ ν  κ α ὶ  μ ό ν ο ν  ἓ ν  σ τ ο ι χ ε ῖ ο ν τοῦ Β (ἢ Δ). Π.χ. εἰς τὴν ἀντιστοιχίαν (α) καθὼς δεικνύουν τὰ βέλη παρατηροῦμεν ὅτι :

Εἰς τὸ στοιχεῖον α τοῦ συνόλου Α ἀντιστοιχεῖ τὸ 1 τοῦ Β
» » » β » » 2 » Β
» » » γ » » 3 » Β

**Ἡ ἀντιστοιχία, εἰς τὴν ὁποίαν εἰς ἕκαστον στοιχεῖον συνόλου Α ἀντιστοιχεῖ ἓν καὶ μόνον ἓν στοιχεῖον τοῦ συνόλου Β, λέγεται μονοσήμαντος ἀντιστοιχία τοῦ Α εἰς τὸ Β.**

Ἀντιθέτως· ἡ ἀνωτέρω ἀντιστοιχία (γ) δὲν εἶναι μονοσήμαντος. Διατί;

Παραδείγματα μονοσημάντων ἀντιστοιχιῶν ἔχομεν πολλά. Ἡ ἀντιστοιχία «μαθητὴς → μὴν γεννήσεως αὐτοῦ» εἶναι μία μονοσήμαντος ἀντιστοιχία τοῦ συνόλου τῶν μαθητῶν εἰς τὸ σύνολον τῶν μηνῶν.

## 7. ΑΜΦΙΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΣΥΝΟΛΑ

### 7.1. Ὁρισμοὶ

Ἂς προσέξωμεν ἤδη τὴν παραπλεύρως ἀντιστοιχίαν (Ι).

$$(\mathrm{I})\quad \begin{array}{c} A=\{\,1,\ \beta,\ \gamma\,\} \\ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow \\ B=\{\,1,\ 2,\ 3\,\} \end{array}$$

Εἶναι μία μονοσήμαντος ἀντιστοιχία τοῦ συνόλου Α εἰς τὸ σύνολον Β. Ἐπὶ πλέον ὅμως εἰς τὸ (ΙΙ) βλέπομεν καὶ μίαν ἄλλην μονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν ἀπὸ τὸ Β εἰς τὸ Α.

$$(\mathrm{II})\quad \begin{array}{c} A=\{\,\alpha,\ \beta,\ \gamma\,\} \\ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow \\ B=\{\,1,\ 2,\ 3\,\} \end{array}$$

Ἤτοι: Μεταξὺ τῶν δύο συνόλων Α καὶ Β ὑπάρχει μία ἀντιστοιχία τοιαύτη, ὥστε:

$$(\mathrm{III})\quad \begin{array}{c} A=\{\,\alpha,\ \beta,\ \gamma\,\} \\ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow \\ B=\{\,1,\ 2,\ 3\,\} \end{array}$$

Εἰς ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ Α νὰ ἀντιστοιχῇ ἓν καὶ μόνον ἓν στοιχεῖον τοῦ Β, καὶ ἐπὶ πλέον εἰς ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ Β νὰ ἀντιστοιχῇ ἓν καὶ μόνον ἓν στοιχεῖον τοῦ Α. Ἡ ἀνωτέρω διπλῆ ἀντιστοιχία λέγεται ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν συνόλων Α καὶ Β. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σύνολον Α λέγεται ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύνολον Β.

Γράφομεν δὲ $\quad A \sim B.$

**Ἓν σύνολον Α εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ἓν σύνολον Β, ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ θέσωμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ Α εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μὲ τὰ στοιχεῖα τοῦ Β.**

Τὸ σύμβολον $\sim$ λέγεται σύμβολον τῆς ἰσοδυναμίας μεταξὺ δύο συνόλων.

**Παραδείγματα**

α) Ὅταν τὸ μικρὸ παιδὶ μετρᾷ μὲ τὰ δάκτυλα τῆς μιᾶς χειρός του ἀπὸ τὸ 1 ἕως καὶ τὸ 5, σχηματίζει μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τοῦ συνόλου τῶν δακτύλων τῆς μιᾶς χειρός του καὶ τοῦ συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

β) Τὸ σύνολον τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδος εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων τῆς ἀλφαβήτου μας.

**Ἀντιπαράδειγμα**

Τὸ σύνολον $A=\{\alpha, \beta\}$ δὲν εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύνολον $B=\{1, 2, 3\}$.

Πράγματι: ἐνῶ ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ Α εἶναι δυνατὸν νὰ ἀντιστοιχισθῇ κατὰ μοναδικὸν τρόπον, μὲ ἓν στοιχεῖον τοῦ Β,

π.χ. $\alpha \to 1, \quad \beta \to 2,$

ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ Β δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀντιστοιχισθῇ κατὰ τρόπον μοναδικόν, μὲ ἓν στοιχεῖον τοῦ Α.

$$1 \to \alpha, \quad 2 \to \beta, \quad 3 \to ;$$

## 7.2. Παρατηρήσεις

α) Τὰ στοιχεῖα δύο ἰσοδυνάμων συνόλων δυνάμεθα νὰ τὰ ἀντιστοιχίσωμεν ἀμφιμονοσημάντως κατὰ διαφόρους τρόπους.

Π.χ. διὰ τὰ ἰσοδύναμα σύνολα $A = \{1, 2\}$ καὶ $B = \{\alpha, \beta\}$

ἔχομεν $\begin{matrix} \alpha \longleftrightarrow 1 \\ \beta \longleftrightarrow 2 \end{matrix}$ $\quad$ $\begin{matrix} \alpha & & 1 \\ & \times & \\ \beta & & 2 \end{matrix}$ (2 τρόποι)

Ἐπίσης διὰ τὰ ἰσοδύναμα σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$ καὶ $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ἔχομεν:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1 \longleftrightarrow \alpha$ | $1 \longleftrightarrow \alpha$ | $1 \longleftrightarrow \beta$ | $1 \longleftrightarrow \beta$ | $1 \longleftrightarrow \gamma$ | $1 \longleftrightarrow \gamma$ | |
| $2 \longleftrightarrow \beta$ | $2 \longleftrightarrow \gamma$ | $2 \longleftrightarrow \gamma$ | $2 \longleftrightarrow \alpha$ | $2 \longleftrightarrow \beta$ | $2 \longleftrightarrow \alpha$ | (6 τρόποι) |
| $3 \longleftrightarrow \gamma$ | $3 \longleftrightarrow \beta$ | $3 \longleftrightarrow \alpha$ | $3 \longleftrightarrow \gamma$ | $3 \longleftrightarrow \alpha$ | $3 \longleftrightarrow \beta$ | |

β) Δύο ἴσα σύνολα εἶναι πάντοτε ἰσοδύναμα, ἐνῶ δύο ἰσοδύναμα δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην ἴσα.

## 7.3. Ἰδιότητες ἰσοδυναμίας

α) Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἰσοδυνάμων συνόλων συνάγομεν ὅτι

$\boxed{A \sim A}$ Ἀνακλαστικὴ ἰδιότης.

β) Ἐὰν ὑπάρχῃ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν στοιχείων συνόλου Α μὲ τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Β, τότε ἡ αὐτὴ ἀντιστοιχία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ Β μὲ τὰ στοιχεῖα τοῦ Α.

$\boxed{A \sim B \Rightarrow B \sim A}$ Συμμετρικὴ ἰδιότης

γ) Ἐὰν ὑπάρχῃ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν συνόλων Α καὶ Β, $A \sim B$ καὶ ὑπάρχῃ ἀκόμη μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν συνόλων Β καὶ Γ, $B \sim \Gamma$, τότε θὰ ὑπάρχῃ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν συνόλων Α καὶ Γ, $A \sim \Gamma$.

$\boxed{(A \sim B \text{ καὶ } B \sim \Gamma) \Rightarrow A \sim \Gamma}$ Μεταβατικὴ ἰδιότης.

Ὥστε ἡ σχέσις ἰσοδυναμίας μεταξὺ συνόλων ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας:

| | | |
|---|---|---|
| 1. Ἀνακλαστικὴν | $A \sim A$ | |
| 2. Συμμετρικὴν | $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ | |
| 3. Μεταβατικὴν | $\left.\begin{matrix} A \sim B \\ B \sim \Gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \sim \Gamma$ | |

Ποία ἄλλη σχέσις συνόλων ἔχει τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας ;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

13. Ἀναφέρατε παραδείγματα μονοσημάντων ἀντιστοιχιῶν καὶ ἀμφιμονοσημάντων ἀντιστοιχιῶν.

14. Ποῖαι ἐκ τῶν σχέσεων :

$\emptyset \sim \{0\}$ $\qquad \{\emptyset, \{\alpha\}, \beta\} \sim \{\alpha, \beta, 1\}$

$\emptyset \sim 0$ $\qquad \{\alpha, \beta, 1\} \sim \{\{\alpha, \beta\}, 1\}$

εἶναι ἀληθεῖς καὶ ποῖαι ψευδεῖς ;

15. Οἱ μαθηταὶ Τζιτζᾶς, Παγώνης καὶ Νίκας κάθονται εἰς τρεῖς θέσεις α, β, γ. Κατὰ πόσους καὶ ποίους τρόπους εἶναι δυνατὸν νὰ σχηματίσετε ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τοῦ συνόλου τῶν μαθητῶν αὐτῶν καὶ τοῦ συνόλου τῶν θέσεών των ;

## 8. ΤΟΜΗ ΣΥΝΟΛΩΝ

### 8.1. Ὁρισμός

Εἰς τὸ σύνολον Σ τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς μας οἱ μαθηταὶ Νίκας, Σαμπάνης, Δουζίνας καὶ Σχοινᾶς εἶναι ἀριστοῦχοι εἰς τὰ Ἑλληνικά. Οἱ μαθηταὶ Κυριαζῆς, Κουμαντᾶνος, Νίκας, Δουζίνας καὶ Μανιάτης εἶναι ἀριστοῦχοι εἰς τὰ Μαθηματικά.

Καθὼς παρατηροῦμεν οἱ δύο μαθηταὶ Νίκας καὶ Δουζίνας εἶναι ἀριστοῦχοι καὶ εἰς τὰ δύο μαθήματα : Εἰς τὰ Μαθηματικὰ καὶ εἰς τὰ Ἑλληνικά. Ἂς διατυπώσωμεν τ' ἀνωτέρω εἰς τὴν γλῶσσαν τῶν συνόλων.

Θέτομεν Α = { Νίκας, Σαμπάνης, Δουζίνας, Σχοινᾶς }
Β = { Κυριαζῆς, Κουμαντᾶνος, Νίκας, Δουζίνας, Μανιάτης }
Γ = { Νίκας, Δουζίνας }

**Τὸ σύνολον Γ, τὸ ὁποῖον ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὰ κοινὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων Α, Β καὶ μόνον ἀπὸ αὐτά, λέγεται τομὴ τοῦ συνόλου Α μὲ τὸ σύνολον Β.**

Γράφομεν δέ

$\boxed{A \cap B = \Gamma}$ ($\cap$ εἶναι τὸ σύμβολον τῆς τομῆς)

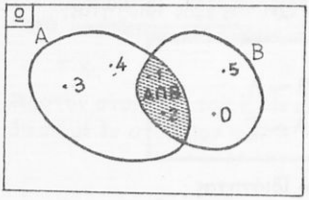
καὶ διαβάζομεν : Α τομὴ Β ἴσον Γ.

Ἤτοι ἕκαστον στοιχεῖον τῆς τομῆς $A \cap B$ ἀνήκει εἰς τὸ Α καὶ εἰς τὸ Β.

Ἢ συμβολικῶς : $\boxed{A \cap B = \{ \chi / \chi \in A \text{ καὶ } \chi \in B \}}$

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς τομῆς ἐννοοῦμεν ὅτι :

$$A \cap B \subseteq A \quad \text{καὶ} \quad A \cap B \subseteq B,$$



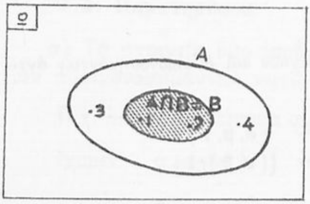

(α)

**Παραδείγματα**

α) Ἐὰν $A = \{1, 2, 3, 4\}$ καὶ $B = \{0, 1, 2, 5\}$,

τότε $A \cap B = \{1,2\}$.

Ἡ τομὴ αὕτη εἰς τὸ σχ. 4α παριστάνεται ὑπὸ τῆς σκιερᾶς ἐπιφανείας.

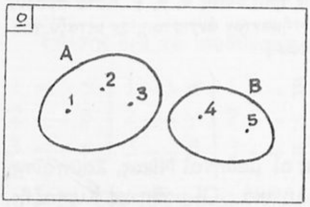



(β)

β) Ἐὰν $A = \{1,2,3,4\}$ καὶ $B = \{1, 2\}$,

τότε $A \cap B = \{1, 2\}$

Ἡ τομὴ αὕτη εἰς τὸ σχ. 4β παριστάνεται ὑπὸ τῆς σκιερᾶς ἐπιφανείας.




(γ)

Σχ. 4.

γ) Ἐὰν $A = \{1,2,3\}$ καὶ $B = \{4, 5\}$, τότε παρατηροῦμεν ὅτι τὰ A καὶ B οὐδὲν κοινὸν στοιχεῖον ἔχουν.

Συνεπῶς $A \cap B = \varnothing$. (σχ. 4γ.)

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι τὰ σύνολα A καὶ B εἶναι ξ έ ν α* μεταξύ των,

## 8.2. Ἰδιότητες τῆς τομῆς

**α) Μεταθετική**

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς τομῆς ἐννοοῦμεν ὅτι

$$\boxed{A \cap B = B \cap A.}$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς τομῆς δυὸ συνόλων δὲν ἔχει σημασίαν ἡ σειρὰ (διάταξις) κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ λάβωμεν τὰ δύο αὐτὰ σύνολα. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ τομὴ δύο συνόλων εἶναι πρᾶξις μ ε τ α θ ε τ ι κ ὴ ἢ κατ' ἄλλον τρόπον, ἔχει τὴν μ ε τ α θ ε τ ι κ ὴ ν ἰ δ ι ό τ η τ α.

**β) Προσεταιριστική**

Εἰς τὰ προηγούμενα ὡρίσαμεν τὴν τομὴν δυὸ συνόλων. Τί θὰ ὀνομάσωμεν τομὴν τριῶν συνόλων κατὰ σειρὰν A, B, Γ ;

**Τομὴν τριῶν συνόλων, κατὰ τὴν σειρὰν A, B, Γ ὀνομάζομεν τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον προκύπτει, ἐὰν σχηματίσωμεν: α) τὴν τομὴν τῶν συνόλων A καὶ B, $A \cap B$, καὶ β) τὴν τομὴν τοῦ συνόλου $A \cap B$ μὲ τὸ σύνολον Γ.**

---

* Καθὼς βλέπομεν χάρις εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ κενοῦ συνόλου κατέστη δυνατὴ ἡ τομὴ δύο συνόλων ξένων μεταξύ των.

Γράφομεν δὲ $\boxed{(A \cap B) \cap \Gamma.}$

Ἤτοι διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς τομῆς τῶν τριῶν συνόλων, κατὰ τὴν σειρὰν Α, Β, Γ, ὅπου $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2,3,4\}$ καὶ $\Gamma = \{2,4,6,8\}$ ἐκτελοῦμεν κατὰ σειρὰν τὰς ἀκολούθους δύο πράξεις :

$$A \cap B = \{2,3\},$$

$$(A \cap B) \cap \Gamma = \{2,3\} \cap \{2,4,6,8\} = \{2\}$$

Ὥστε $\quad (A \cap B) \cap \Gamma = \{2\} \qquad (1)$

Ἂς εὕρωμεν ἤδη καὶ τὴν τομὴν τῶν δύο συνόλων Α καὶ $B \cap \Gamma$

Ἔχομεν : $\quad B \cap \Gamma = \{2, 4\},$

$$A \cap (B \cap \Gamma) = \{1,2,3\} \cap \{2,4\}$$

ἢ $\quad A \cap (B \cap \Gamma) = \{2\} \qquad (2)$

Ἀπὸ τὰς (1) καὶ (2) ἔχομεν ὅτι :

$$\boxed{(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)} \qquad (3)$$

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ τομὴ τῶν συνόλων ἔχει τὴν προσεταιριστικὴν ἰδιότητα. Ἢ ὅτι εἶναι πρᾶξις προσεταιριστική.

Ὥστε ἡ τομὴ συνόλων ἔχει τὰς ἰδιότητας :

| | |
|---|---|
| 1. Μεταθετικὴν | $A \cap B = B \cap A$ |
| 2. Προσεταιριστικὴν | $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$ |

**Σημειώσεις**

1) Μὲ συνδυασμὸν τῆς προσεταιριστικῆς καὶ τῆς μεταθετικῆς ἰδιότητος εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τομὴ τῶν τριῶν συνόλων δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς σειρᾶς αὐτῶν.

Π.χ. $\quad (A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$ Προσεταιρ. ἰδιότης

$= A \cap (\Gamma \cap B)$ Μεταθετική.

$= (A \cap \Gamma) \cap B$ Προσεταιριστική.

2) Ἐὰν ζητοῦμεν τὴν τομὴν περισσοτέρων συνόλων, εὑρίσκομεν τὴν τομὴν τῶν τριῶν πρώτων, ἔπειτα τὴν τομὴν τοῦ ἀποτελέσματος αὐτοῦ μὲ τὸ τέταρτον σύνολον κ.ο.κ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

16. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τομαὶ $A \cap B$, $A \cap \Gamma$, $(A \cap \Gamma) \cap B$, ὅπου $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $B = \{x | x$ γράμμα τῆς λέξεως « διὰ » $\}$ καὶ $\Gamma = \{x | x$ φωνῆεν$\}$ καὶ νὰ παρασταθοῦν μὲ διαγράμματα.

17. Ἐπαληθεύσατε ὅτι $(A \cap B) \cap \Gamma = (\Gamma \cap A) \cap B$ (Χρησιμοποιήσατε ἰδικά σας σύνολα).

18) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τομὴ $A \cap \phi$, ὅπου Α εἶναι τυχὸν σύνολον.
Ἐὰν $A \cap B = \phi$, τί συνάγετε διὰ τὰ σύνολα Α καὶ Β; Ὁμοίως ἐὰν $A \cap B = B$.

## 9. ΕΝΩΣΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

### 9.1. Ὁρισμός

Ἄς ἐπανέλθωμεν εἰς τά σύνολα* Α = {Νίκας, Σαμπάνης, Δουζίνας, Σχοινᾶς} καί Β = {Κυριαζῆς, Κουμαντᾶνος, Νίκας, Δουζίνας, Μανιάτης}. Ἤτοι εἰς τά σύνολα τῶν ἀριστούχων μαθητῶν τῆς τάξεώς μας εἰς τά Ἑλληνικά (σύνολον Α) καί εἰς τά Μαθηματικά (σύνολον Β). Ἐάν ζητήσωμεν τό σύνολον Γ, τῶν ἀριστούχων μαθητῶν τῆς τάξεώς μας εἰς τά Ἑλληνικά ἤ εἰς τά Μαθηματικά ἤ εἰς ἀμφότερα θά ἔχωμεν :

Γ = {Νίκας, Σαμπάνης, Δουζίνας, Σχοινᾶς, Κυριαζῆς, Κουμαντᾶνος, Μανιάτης}.

**Τό σύνολον Γ, τοῦ ὁποίου ἕκαστον στοιχεῖον ἀνήκει εἰς τό σύνολον Α ἤ εἰς τό σύνολον Β ἤ εἰς ἀμφότερα, λέγεται ἕνωσις** τοῦ συνόλου Α μέ τό σύνολον Β.**

Γράφομεν δέ

$$\boxed{A \cup B = \Gamma}$$ (∪ εἶναι τό σύμβολον τῆς ἑνώσεως)

καί διαβάζομεν Α ἕνωσις Β ἴσον Γ.

Κατά τόν ὁρισμόν ἡ ἕνωσις $A \cup B$ δύναται νά ἐκφρασθῇ καί ὡς ἑξῆς διά τῶν στοιχείων τῶν συνόλων Α καί Β.

$$\boxed{A \cup B = \{x \mid x \in A \ \text{εἴτε}^{***} \ x \in B\}}$$

Ἐπίσης ἀπό τόν ὁρισμόν τῆς ἑνώσεως ἐννοοῦμεν ὅτι :

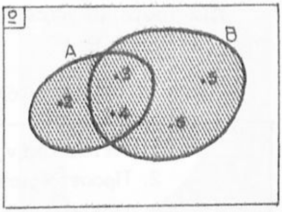
$$A \subseteq A \cup B \quad \text{καί} \quad B \subseteq A \cup B$$

* Ἐννοεῖται ἐνταῦθα ὡς βασικόν σύνολον τό σύνολον τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς μας.

** Ἐννοεῖται ὅτι ἕκαστον κοινόν στοιχεῖον τῶν Α καί Β δέν ἐμφανίζεται δύο φοράς εἰς τήν ἕνωσιν.

*** Τό «εἴτε» σημαίνει εἰς τό Α ἤ εἰς τό Β ἤ εἰς ἀμφότερα.

**Παραδείγματα:**

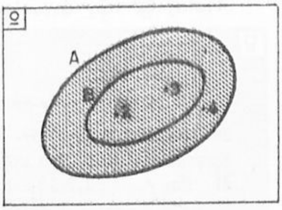



Σχ. 5.

'Εάν $A = \{2, 3, 4\}$ καὶ $B = \{3, 4, 5, 6\}$, τότε $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Εἰς τὸ σχ. 5 ἡ ἕνωσις αὐτὴ παριστάνεται ὑπὸ τῆς σκιερᾶς ἐπιφανείας.

β) 'Εάν $A = \{2, 3, 4\}$ καὶ $B = \{5, 6\}$, τότε
$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ (Σχ. 7).

γ) 'Εάν $A = \{2, 3, 4\}$ καὶ $B = \{2, 3\}$, τότε
$A \cup B = \{2, 3, 4,\} = A$ (Σχ. 6)




Σχ. 6.

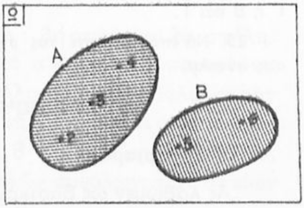
### 9.2. 'Ιδιότητες

**α) Μεταθετική**

Εἶναι φανερὸν ὅτι:

$A \cup B = B \cup A$ Μεταθετικὴ ἰδιότης

**β) Προσεταιριστική**




Σχ. 7.

Ὅπως καὶ εἰς τὴν τομήν, ἕνωσις τριῶν συνόλων κατὰ σειράν, Α, Β, Γ, λέγεται ἡ ἕνωσις τῶν δύο συνόλων $A \cup B$ καὶ Γ. 'Εὰν συνεπῶς εἶναι:

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ καὶ $\Gamma = \{3, 4, 5\}$,

τότε θὰ ἔχωμεν

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\},$$
$$(A \cup B) \cup \Gamma = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5\}$$
ἢ
$$(A \cup B) \cup \Gamma = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad (1)$$

Εἶναι ὅμως:

$$B \cup \Gamma = \{2, 3, 4, 5\}$$
καὶ
$$A \cup (B \cup \Gamma) = \{1, 2, 3,\} \cup \{2, 3, 4, 5\}$$
ἢ
$$A \cup (B \cup \Gamma) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad (2)$$

'Εκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ 2) ἔχομεν ὅτι:

$$\boxed{(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)}$$

Ἤτοι ἡ ἕνωσις συνόλων εἶναι πρᾶξις προσεταιριστική.

**γ) Οὐδέτερον στοιχεῖον**

Τὸ κενὸν σύνολον ἔχει ἕνα ἰδιαίτερον ρόλον εἰς τὴν πρᾶξιν τῆς ἑνώσεως. Εἶναι

$$\boxed{A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A.}$$

Διὰ τοῦτο τὸ κενὸν σύνολον λέγεται οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς τὴν ἕνωσιν συνόλων.

Ὥστε ἡ ἕνωσις συνόλων ἔχει τάς ἰδιότητας:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Μεταθετικὴν | $A \cup B = B \cup A$ |
| 2. | Προσεταιριστικὴν | $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$ |
| 3. | Οὐδέτερον στοιχεῖον | $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$ |

Ποίας ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων ἔχει ἡ τομὴ συνόλων;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

19. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἑνώσεις: $\{1,2,5\} \cup \{2,4,6\}$, $\{1,3,4\} \cup \{2,5,6\}$

20. Νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι $A \cup (\Gamma \cup B) = (A \cup B) \cup \Gamma$
Χρησιμοποιήσατε ἰδικά σας σύνολα

21. Ἐὰν $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$ καὶ $\Gamma = \{0,1,2\}$ νὰ ἐξετάσετε, ἐὰν ἰσχύη ἡ σχέσις

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma).$$

22. Ἐὰν διὰ τρία σύνολα Α, Β, Γ εἶναι $A \cup B \subset \Gamma$, ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ ἢ Β καὶ Γ.

23. Νὰ ἐπαληθεύσετε τὰς σχέσεις: $A \cup (A \cap B) = A$ καὶ $A \cap (A \cup B) = A$ μὲ ἰδικά σας σύνολα.

## 10. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ (ἢ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΝ) ΣΥΝΟΛΟΥ

### 10.1 Ὁρισμὸς

Ἄς λάβωμεν ὡς βασικὸν σύνολον Ω τὸ σύνολον τῶν γραμμάτων τῆς ἀλφαβήτου μας καὶ ἄς ὁρίσωμεν ἓν ὑποσύνολον αὐτοῦ: Τὸ σύνολον Α τῶν φωνηέντων. Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν ὁρίζεται καὶ ἓν ἄλλο σύνολον Β: Τὸ σύνολον τῶν συμφώνων. Ἤτοι τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ Ω, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ Α. Τὸ σύνολον Β λέγεται συμπλήρωμα (ἢ συμπληρωματικόν) τοῦ συνόλου Α ὡς πρὸς βασικὸν σύνολον Ω.

Γενικῶς: **Συμπλήρωμα συνόλου Α ὡς πρὸς βασικὸν σύνολον Ω λέγεται τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ Ω, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ Α.**

Τὸ συμπλήρωμα τοῦ συνόλου Α ὡς πρὸς τὸ βασικὸν σύνολον Ω σημειώνεται Α'.

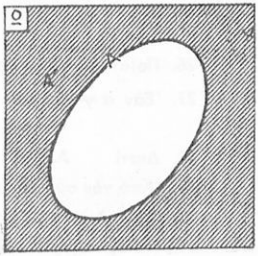
Ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τοῦ συμπληρώματος τοῦ συνόλου Α ὡς πρὸς βασικὸν σύνολον Ω, ἔχομεν:

$$\boxed{A \cap A' = \varnothing} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{A \cup A' = \Omega}$$

### 10.2 Γραφικὴ παράστασις

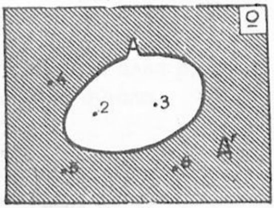
Ἡ γραφικὴ παράστασις τοῦ συμπληρώματος Α' ἑνὸς συνόλου Α ὡς πρὸς ασικὸν σύνολον Ω ἀποδίδεται εἰς τὸ σχ. 8. Σκιερὰ ἐπιφάνεια).

Εἶναι τὸ μέρος, τὸ ὁποῖον ἀπομένει ἀπὸ τὸ ιάγραμμα τοῦ Ω, ὅταν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ αὐτὸ ὸ μέρος, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ Α.



Σχ. 8.

**Παράδειγμα** : Ἐὰν λάβωμεν ὡς βασικὸν σύολον Ω τὸ σύνολον { 2,3,4,5,6 } καὶ τὸ σύολον Α = {2,3 }, τότε τὸ συμπλήρωμα τοῦ Α ς πρὸς τὸ Ω εἶναι τὸ Α′ = { 4,5,6 }. (Σχ. 9).



Σχ. 9.

ΑΣΚΗΣΙΣ

24. Ἐὰν Ω = { 1, 2, 3, 4 }, νὰ εὕρετε τὸ συμπλή- ωμα : α) Α′ τοῦ Α = { 1, 3 } β) Τοῦ $\phi$. γ) Ἑκάστου ιμελοῦς ὑποσυνόλου τοῦ Ω.

## 11. ΖΕΥΓΟΣ

Προσέξατε εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα τοῦ σχ. 10.

Πῶς θὰ ὁρίσωμεν τὴν θέσιν τοῦ Α ;

Θὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ Α εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς 3ης σειρᾶς καὶ τῆς 2ας στήλης. Θέσις τοῦ Α : 3η σειρὰ καὶ 2α στήλη. Ἢ συντόμως Α (3,2). Ἤτοι εἰς τὴν παράστασιν (3,2) ὁ α′ ὅρος, τὸ 3, παριστάνει τὸν ἀριθμὸν σειρᾶς καὶ ὁ β′ ὅρος, τὸ 2, τὸν ἀριθμὸν στήλης. Ἐὰν μεταβάλωμεν τὴν σειρὰν τῶν ὅρων τῆς παρενθέσεως, δὲν ὁρίζομεν πλέον τὴν θέσιν τοῦ Α ἀλλὰ τοῦ Β.

Θέσις τοῦ Β : 2α σειρά 3η στήλη ἢ συντόμως Β (2, 3). Καταστάσεις ὡς ἀνωτέρω μᾶς ὁδηγοῦν εἰς τὴν χρησιμοποίησιν διμελῶν συνόλων, τῶν ὁποίων ὰ στοιχεῖα ἔχουν ὡρισμένην σειρὰν μεταξύ των.

**Τὸ σύνολον δύο στοιχείων α, β, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ α πρῶτον καὶ τὸ β δεύτερον, λέγεται διατεταγμένον ζεῦγος ἢ συντόμως ζεῦγος.**

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | Δ | Β | Γ |
| 3 | | Α | Ε | |
| 4 | | | | |

Σχ. 10.

Γράφομεν δὲ (α, β).

Ἤτοι ἡ γραφὴ (3, 2) παριστάνει ἓν ζεῦγος μὲ π ρ ῶ τ ο ν στοιχεῖον τὸ 3 καὶ δ ε ύ τ ε ρ ο ν τὸ 2. Δὲν ἀποκλείεται τὰ στοιχεῖα ἑνὸς ζεύγους νὰ εἶναι ἴσα. Π.χ. διὰ τὴν θέσιν Δ ἔχομεν τὸ ζεῦγος (2,2). Κατὰ τὰ ἀνωτέρω :

1) Ἀπὸ ἓν διμελὲς σύνολον { α,β } γεννῶνται δύο ζεύγη τὰ (α, β) καὶ (β, α).

2) Εἶναι (α, β) = (γ, δ), ὅταν καὶ μόνον ὅταν α = γ καὶ β = δ.

Ἤτοι (α,β) ≠ (β,α) ἐκτὸς ἐὰν α = β.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

25. Εἰς τὸν πίνακα τοῦ σχεδίου 10 νὰ προσδιορίσετε τὰς θέσεις τῶν σημείων Γ, Ε μὲ ζεύγη. Εἰς τὸν αὐτὸν πίνακα νὰ εὕρετε ποῖα τετραγωνίδια ὁρίζουν τὰ ζεύγη (1,2), (2,1),(1,1) (2,2).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

26. Ποῖαι ἐκ τῶν σχέσεων : $\chi = \{\chi\}$, $\chi \in \{\chi\}$, $\chi \neq \{\chi\}$ εἶναι ἀληθεῖς ;
27. Ἐὰν $\alpha \neq \beta$ καὶ $\chi \neq \psi$, τότε δικαιολογήσατε τὴν συνεπαγωγὴν
$$\{\alpha, \chi\} = \{\beta, \psi\} \Longrightarrow (\alpha = \psi \text{ καὶ } \beta = \chi)$$
28. Διατὶ $A \nsubseteq B \Longrightarrow A \not\subset B$
29. Ἀπὸ τὸν σύνολον $A = \{1, 2, 3, 4\}$ πόσα γνήσια ὑποσύνολα σχηματίζονται ;
30. Ἐὰν $A \subseteq \emptyset$, τότε δείξατε ὅτι $A = \emptyset$
31. Νὰ ἐξετασθῇ ἐὰν ἀληθεύει ἡ σχέσις $(A \cap B) \cup \Gamma = (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma)$
32. Ποῖα ζεύγη δύνασθε νὰ σχηματίσετε μὲ τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\{1, 2, 3\}$ ;

# ΠΙΝΑΞ

## Τῶν κυριωτέρων συμβολισμῶν

| | |
|---|---|
| $\alpha \in A$ | : Τὸ στοιχεῖον α ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον A |
| $\alpha \notin A$ | : » » δὲν ἀνήκει » » » A |
| $\{\ \}$ | : Ἄγκιστρον διὰ τὴν παράστασιν συνόλου |
| $\chi : \chi \cdots$ | : χ ὅπου χ ...... |
| $\chi \mid \chi \cdots$ | : » » » |
| $\emptyset$ | : τὸ κενὸν σύνολον |
| $A \subseteq B$ | : A εἶναι ὑποσύνολον τοῦ B |
| $A \subset B$ | : A » γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ B |
| $\Longrightarrow$ | : Τὸ σύμβολον τῆς συνεπαγωγῆς |
| $\Longleftrightarrow$ | : » » » διπλῆς συνεπαγωγῆς. |
| $A \cap B$ | : A τομὴ B |
| $A \cup B$ | : A ἕνωσις B |
| $\Omega$ | : Βασικὸν σύνολον |

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

# ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

## 12. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

**12. 1.** Ἐπὶ τῆς ἕδρας τοποθετοῦμεν ἀντικείμενον α. Ἔπειτα ἄλλο β, ἄλλο γ, κ.ο.κ. Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν σχηματίζονται κατὰ σειρὰν τὰ σύνολα

$$\{\alpha\}$$
$$\{\alpha, \beta\}$$
$$\{\alpha, \beta, \gamma\} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Ἐὰν προσέξωμεν τὸ σύνολον $\{\alpha\}$ καὶ ὅλα τὰ πρὸς αὐτὸ ἰσοδύναμα

π.χ. $\{+\}, \{-\}, \{\times\} \ldots$

γεννᾶται εἰς τὴν σκέψιν μας ἡ ἰδέα τοῦ ἀριθμοῦ ἕνα.

Ἀπὸ τὸ σύνολον $\{\alpha, \beta\}$ καθὼς καὶ ὅλα τὰ ἰσοδύναμά του,

π. χ. $\{*, +\}, \{O, \Delta\}, \{\times, \Psi\} \ldots$

γεννᾶται εἰς τὴν σκέψιν μας ἡ ἰδέα τοῦ ἀριθμοῦ δύο. Ὁμοίως ἀπὸ τὸ σύνολον $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ καὶ ὅλα τὰ ἰσοδύναμα πρὸς αὐτό, ἡ ἰδέα τοῦ ἀριθμοῦ τρία κ.ο.κ.

Οἱ ἀριθμοὶ ἕν, δύο, τρία, . . . δηλοῦν συγχρόνως τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων ἑκάστου τῶν ἀνωτέρω συνόλων. Διὰ τοῦτο λέγονται πληθικοὶ ἀριθμοὶ τούτων. Π.χ. πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου $\{\alpha, \beta\}$ ὡς καὶ ἑκάστου τῶν ἰσοδυνάμων πρὸς αὐτὸ συνόλων εἶναι ὁ ἀριθμὸς δύο. Ὁμοίως, πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ ἑκάστου τῶν ἰσοδυνάμων πρὸς αὐτὸ συνόλων, εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3.

**12.2** Παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\{\alpha\} \cup \{\beta\} = \{\alpha, \beta\}$$
$$\{\alpha, \beta\} \cup \{\gamma\} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$
$$\{\alpha, \beta, \gamma\} \cup \{\delta\} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Ἤτοι τὸ σύνολον $\{\alpha, \beta\}$ παράγεται ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τοῦ προηγουμένου του συνόλου $\{\alpha\}$ μὲ τὸ ξένον πρὸς αὐτὸ σύνολον $\{\beta\}$. Ὁμοίως τὸ σύνολον $\{\alpha,\beta,\gamma,\}$ παράγεται ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τοῦ συνόλου $\{\alpha, \beta\}$ μὲ τὸ ξένον πρὸς αὐτὸ σύνολον $\{\gamma\}$ κ.ο.κ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐννοοῦμεν ὅτι καὶ ἕκαστος ἐκ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4... προκύπτει ἐκ τοῦ προηγουμένου του 1, 2, 3, ... ἀντιστοίχως, ἐὰν οὗτος αὐξηθῇ κατὰ τὸν ἀριθμὸν ἕνα (1). Εἶναι φανερὸν ὅτι μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν δυνάμεθα νὰ συνεχίσωμεν ἀπεριορίστως καὶ νὰ σχηματίσωμεν τὴν σειρὰν τῶν φ υ σ ι κ ῶ ν ἀ ρ ι θ μ ῶ ν.

$$1, 2, 3, 4, 5 \ldots$$

Ἡ σειρὰ αὕτη ἔχει ἓν ἀρχικὸν στοιχεῖον καὶ οὐδὲν τελευταῖον. Τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν τὸ παριστάνομεν μὲ τὸ γράμμα Ν.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$$

## 13. ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΙΣ

**13.1** Ἐκ τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν $N = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$ σχηματίζομεν τὰ ὑποσύνολα

$$N_1 = \{1\}$$
$$N_2 = \{1, 2\}$$
$$N_3 = \{1, 2, 3\} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Καθὼς παρατηροῦμεν, τὸ τελευταῖον στοιχεῖον (ἀριθμὸς) ἑκάστου ἐκ τῶν συνόλων $N_1$, $N_2$, $N_3 \ldots$ εἶναι καὶ ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς αὐτοῦ.

**13.2** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου π.χ. τοῦ συνόλου $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, λέγομεν ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, δεικνύοντες ἓν πρὸς ἓν τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ μέχρις ὅτου τελειώσουν. Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν ἀντιστοιχίζομεν ἀμφιμονοσημάντως τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Α μὲ τὰ στοιχεῖα ἑνὸς ὑποσυνόλου τοῦ Ν καὶ συγκεκριμένως εἰς τὴν περίπτωσίν μας τοῦ $N_4$

$$\begin{array}{ccccccc} A = \{ & \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta & \} & \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\ N = \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \ldots & \} \end{array}$$

Ὁ 4, τελευταῖος ἀριθμὸς τοῦ $N_4$ εἶναι ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Α.

Ἡ εὕρεσις τοῦ πληθικοῦ ἀριθμοῦ ἑνὸς συνόλου λέγεται ἀ π α ρ ί θ μ η σ ι ς τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου τούτου.

## 14. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΚΑΙ ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΥΝΟΛΑ

**14.1** Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $A = \{\chi | \chi$ ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος$\}$ εἶναι φανερὸν ὅτι δύνανται νὰ τεθοῦν εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μὲ τὸ ἀρχικὸν ἀπόκομμα

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

τῆς σειρᾶς τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Τὸ σύνολον Α καὶ γενικῶς ἕκαστον σύνολον, τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα δύνανται νὰ τεθοῦν εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μὲ τὰ στοιχεῖα ἑνὸς ἀρχικοῦ ἀποκόμματος τῆς σειρᾶς τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, λέγομεν ὅτι ἔχει *πεπερασμένον* πλῆθος στοιχείων ἢ ὅτι εἶναι *πεπερασμένον σύνολον*.

**14.2** Ἂς προσπαθήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν πληθικὸν ἀριθμὸν τοῦ συνόλου

$$N = \{1, 2, 3 \ldots\}.$$

Θὰ διαπιστώσωμεν ὅτι δὲν δυνάμεθα. Ὁποιον φυσικὸν ἀριθμὸν καὶ ἐὰν σκεφθῶμεν, θὰ ὑπάρχῃ πάντοτε ὁ ἀμέσως ἑπόμενός του, ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι καὶ αὐτὸς στοιχεῖον τοῦ συνόλου N. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι τὸ σύνολον N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι *μὴ πεπερασμένον* σύνολον ἢ *ἀπειροσύνολον*.

Παραθέτομεν κατωτέρω ἄλλα παραδείγματα πεπερασμένων καὶ μὴ πεπερασμένων συνόλων.

| Πεπερασμένα σύνολα | Μὴ πεπερασμένα. |
|---|---|
| 1) Οἱ κάτοικοι τῆς γῆς | 1) Οἱ ἄρτιοι ἀριθμοί. |
| 2) Αἱ λέξεις ἑνὸς ὡρισμένου λεξικοῦ | 2) Οἱ περιττοὶ ἀριθμοί. |
| 3) Τὰ κυκλοφοροῦντα αὐτοκίνητα | 3) Τὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας. |

## 15. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

**15.1** Τὸν πληθικὸν ἀριθμὸν τοῦ κενοῦ συνόλου τὸν καλοῦμεν *μηδέν*(0). Ἡ ἕνωσις τοῦ συνόλου $\{0\}$ μὲ τὸ σύνολον N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὀνομάζεται *σύνολον τῶν ἀκεραίων τῆς ἀριθμητικῆς*.

$$\{0\} \cup \{1, 2, 3 \ldots\} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$$

Τὸ νέον τοῦτο σύνολον παριστάνομεν συντόμως μὲ $N_0$.

Ἤτοι : $$N_0 = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$$

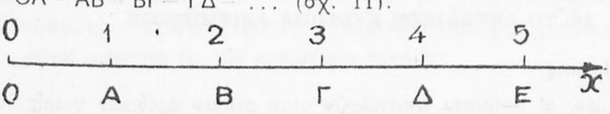
Τὰ σύμβολα μὲ τὰ ὁποῖα παριστάνομεν τοὺς ἀκεραίους λέγονται *ψηφία*. Εἰδικῶς τὰ ψηφία

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

ὀνομάζονται *ἀραβικὰ* ψηφία, διότι πρῶτοι οἱ Ἄραβες τὰ ἐχρησιμοποίησαν καὶ ἀπὸ αὐτοὺς τὰ παρέλαβον περὶ τὸν 9ον αἰῶνα οἱ λαοὶ τῆς Δύσεως.

### 15.2 Παράστασις τῶν ἀκεραίων ἐπὶ ἡμιευθείας

Χαράσσομεν ἡμιευθεῖαν Οχ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς διαδοχικῶς ἴσα τμήματα ΟΑ = ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ... (σχ. 11).




Σχ. 11.

Τοὺς ἀριθμοὺς 0, 1, 2, 3, 4, ... τοὺς παριστάνομεν μὲ τὰ σημεῖα Ο, Α, Β, Γ ...

ἀντιστοίχως. Διὰ τοῦτο τὰ σημεῖα Α, Β, Γ... ὀνομάζονται εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Ἡ ἡμιευθεῖα Οχ λέγεται ἡμιευθεῖα διατάξεως τοῦ συνόλου τῶν ἀκεραίων.

## 15.3. Συγκεκριμένοι, ἀφῃρημένοι, γενικοὶ ἀριθμοί

α) Ἀρχικῶς ὁ ἄνθρωπος ἔκανε χρῆσιν μόνον συγκεκριμένων ἀριθμῶν. Π. χ. 1 δένδρον, 2 ζῶα, 3 παιδιά...

Ἡ παρατήρησις ὅμως ὅτι

2 δένδρα + 3 δένδρα = 5 δένδρα
2 παιδιὰ + 3 παιδιὰ = 5 παιδιὰ
2 ζῶα + 3 ζῶα = 5 ζῶα

δηλαδὴ ὅτι τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τοῦ ἀθροίσματος δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ὑλικὴν φύσιν ἑκάστου προσθετέου ἀλλὰ μόνον ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων αὐτοῦ, πιθανῶς ὡδήγησεν εἰς τὴν ἰδέαν τῶν ἀφῃρημένων ἀριθμῶν.

β) Καθὼς εἴδομεν, διὰ νὰ συμβολίσωμεν τὸ σύνολον τῶν μονοψηφίων φυσικῶν ἀριθμῶν, γράφομεν

$$\{ \chi | \chi \text{ μονοψήφιος φυσικὸς ἀριθμὸς} \}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ χ χρησιμοποιεῖται διὰ νὰ παραστήσῃ ἕνα ὡρισμένον μὲν ἀλλὰ ὁποιονδήποτε ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1,2,3...9.

Γνωρίζομεν ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος αὐτοῦ. Ὁ ἴδιος κανὼν ἀποδίδεται συντόμως ὑπὸ τοῦ γνωστοῦ τύπου

$$E = \alpha \cdot \beta$$

ὅπου τὰ γράμματα α καὶ β παριστάνουν τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος ὀρθογωνίου. Ἤτοι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν χρησιμοποιοῦμεν γράμματα διὰ νὰ παραστήσωμεν ὡρισμένους μὲν ἀλλὰ ὁποιουσδήποτε ἀριθμούς. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν λέγομεν ὅτι τὰ γράμματα α καὶ β παριστάνουν γενικοὺς ἀριθμούς.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

33. Τὸ σύνολον $A = \{ \chi | \chi$ μὴν τοῦ ἔτους $\}$ μὲ ποῖον ἐκ τῶν συνόλων $N_1$, $N_2$, $N_3$ .... εἶναι ἰσοδύναμον ; Ποῖος ὁ πληθ. ἀριθμὸς αὐτοῦ;
34. Ἀναφέρατε παραδείγματα πεπερασμένων καὶ μὴ πεπερασμένων συνόλων.
35. Νὰ εὑρεθοῦν γνήσια ὑποσύνολα τοῦ $N_0$ τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα μὲ αὐτό.

# 16. ΤΟ ΔΕΚΑΔΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΕΩΣ

## 16.1 Ἀρίθμησις

Καθὼς εἴδομεν, οἱ ἀκέραιοι ἀποτελοῦν μίαν σειρὰν ἀριθμῶν χωρὶς τέλος. Εἶναι δηλαδὴ ἄπειροι εἰς πλῆθος. Ἐὰν δι' ἕκαστον ἀκέραιον εἴχομεν διαφορετικὸν ὄνομα, ἄσχετον μὲ τὰ ὀνόματα τῶν ἄλλων, θὰ ἐχρειαζόμεθα ἀπείρους λέξεις ἢ καὶ ἄπειρα σύμβολα διὰ νὰ ὀνομάσωμεν καὶ νὰ γράψωμεν αὐτούς. Ἐκτὸς τούτου θὰ ἦτο ἀδύνατος ἡ ἀπομνημόνευσις καὶ χρησιμοποίησις τῶν ἀριθμῶν.

Προέκυψεν οὕτω τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Πῶς εἶναι δυνατὸν μὲ συνδυασμὸν ὀλίγων λέξεων καὶ συμβόλων νὰ ὀνομάζωμεν καὶ νὰ γράφωμεν ὅλους τοὺς ἀκεραίους.

Τὴν ἀπάντησιν εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ τὴν δίδει ἡ ἀ ρ ί θ μ η σ ι ς (προφορικὴ καὶ γραπτή).

## 16.2 Προφορικὴ ἀρίθμησις

Ἡ ἀπαρίθμησις τῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου μᾶς δίδει ἕνα ἀριθμόν. Θὰ ἴδωμεν κατωτέρω μὲ ποῖον τρόπον δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν εἰς τὸ δ ε κ α δ ι κ ὸ ν σ ύ σ τ η μ α.

Ἄς λάβωμεν ἓν σύνολον βώλων :

α) Ἐὰν οἱ βῶλοι εἶναι ὀλιγώτεροι τῶν δέκα, χρησιμοποιοῦμεν ἓν ἐκ τῶν ἐννέα ὀνομάτων τῶν ἀριθμῶν, ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα.

β) Ἐὰν οἱ βῶλοι εἶναι περισσότεροι ἀπὸ δέκα, σχηματίζομεν ἐκ τούτων ὅσας δεκάδας βώλων εἶναι δυνατόν.

Οὕτω ὁ ἀριθμὸς τῶν βώλων θὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ δ ε κ ά δ α ς καὶ πιθανῶς ἀπὸ μ ο ν ά δ α ς, π.χ. 3 μονάδας. Ἑκάστη δεκὰς λέγεται μ ο ν ὰ ς 2ας τ ά ξ ε ω ς, ἐνῶ ἑκάστη μονὰς λέγεται ἁ π λ ῆ μ ο ν ὰ ς ἢ μ ο ν ὰ ς 1ης τ ά ξ ε ω ς.

γ) Ἐὰν τὰ ὑποσύνολα τῶν δεκάδων τὰ ὁποῖα εὕρομεν εἶναι περισσότερα τῶν δέκα, ἑνώνομεν αὐτὰ ἀνὰ δέκα καὶ οὕτω δημιουργεῖται μία νέα μονὰς ἢ ἑ κ α τ ο ν τ ὰ ς ἢ μ ο ν ὰ ς 3ης τ ά ξ ε ω ς. Αἱ δεκάδες τῶν βόλων αἱ ὁποῖαι πιθανῶς θὰ μείνουν θὰ εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν δέκα, π.χ. 5. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον συνεχίζομεν μέχρις ὅτου αἱ μονάδες ἑκάστης τάξεως αἱ ὁποῖαι θὰ σχηματισθοῦν εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν δέκα. Οὕτω, ἐὰν εὕρωμεν π.χ. 7 ἑκατοντάδας, λέγομεν :

7 ἑκατοντάδες, 5 δεκάδες, 3 μονάδες

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐννοοῦμεν ὅτι εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως :

**ι) Δέκα μονάδες μιᾶς τάξεως σχηματίζουν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.**

**ιι) Ἕκαστος ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ μονάδας διαφόρων τάξεων.**

Ἐὰν ὑπάρχουν πολλαὶ τάξεις, τὰς χωρίζομεν διαδοχικῶς, ἀνὰ τρεῖς, εἰς κ λ ά σ ε ι ς, ὅπως φαίνεται εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα.

| Τάξις | Ὀνόματα τάξεων | Γραφὴ μὲ ψηφία | Κλάσεις |
|---|---|---|---|
| 1η | Ἁπλῆ μονὰς | 1 | 1η κλάσις (μονάδων) |
| 2α | Δεκὰς | 10 | |
| 3η | Ἑκατοντὰς | 100 | |
| 4η | Χιλιὰς | 1000 | 2α κλάσις (χιλιάδων) |
| 5η | Δεκὰς χιλιάδων | 10000 | |
| 6η | Ἑκατοντὰς χιλιάδων | 100000 | |
| 7η | Ἑκατομμύριον | 1000000 | 3η κλάσις (ἑκατομμυρίων) |
| 8η | Δεκὰς ἑκατομμυρίων | 10000000 | |
| 9η | Ἑκατοντὰς ἑκατομμυρίων | 100000000 | |

Βάσις ἑνὸς συστήματος ἀριθμήσεως εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τὰς ὁποίας πρέπει νὰ λάβωμεν διὰ νὰ δημιουργήσωμεν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Ἡ βάσις ἑνὸς συστήματος δύναται νὰ εἶναι δέκα, ὅπως εἰς τὰ ἀνωτέρω, 5 (πενταδικὸν σύστημα), 12 (δωδεκαδικὸν σύστημα) κ.ο.κ..

### 16.3. Γραπτὴ ἀρίθμησις

Διὰ νὰ γράψωμεν ἕνα ἀριθμὸν εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἀπαιτοῦνται ἐν ὅλῳ δέκα διαφορετικὰ σύμβολα. Μὲ τὰ ἀραβικὰ ψηφία

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς ἀκολουθοῦντες τὰς ἑξῆς συμφωνίας.

α) Ἕκαστος ἀκέραιος γράφεται μὲ ἓν ἢ περισσότερα ψηφία τὰ ὁποῖα τίθενται τὸ ἓν παραπλεύρως τοῦ ἄλλου. Ἕκαστον ψηφίον ἀναλόγως τῆς θέσεως του παριστάνει μονάδας μιᾶς τάξεως. Τὸ πρῶτον ψηφίον δεξιὰ παριστάνει μονάδας 1ης τάξεως (ἁπλᾶς μονάδας) ἕκαστον δὲ ψηφίον, τὸ ὁποῖον γράφεται ἀμέσως ἀριστερὰ ἄλλου ψηφίου, παριστάνει μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

β) Ὅταν δὲν ὑπάρχουν μονάδες μιᾶς τάξεως, τοποθετοῦμεν εἰς τὴν θέσιν των τὸ μηδέν.

Π.χ. διὰ τὸ σύνολον τῶν βώλων τοῦ παραδείγματος ἀντὶ 7 ἑκατοντάδες, 5 δεκάδες,, 3 μονάδες γράφομεν 753.

## 17. Η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐχρησιμοποίουν τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως ἀλλ' ἀντὶ τῶν ἀραβικῶν συμβόλων μετεχειρίζοντο τὰ γράμματα τῆς ἀλφαβήτου καὶ τὰ σύμβολα ϛ' (στίγμα), ϟ' (κόππα) καὶ ϡ (σαμπί).

Οὕτω διὰ τὰς ἁπλᾶς μονάδας 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

εἶχον τὰ σύμβολα α' β' γ' δ' ε' ϛ', ζ' η' θ' ἀντιστοίχως.

διὰ τὰς δεκάδας 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90

τὰ σύμβολα ι', κ', λ', μ', ν', ξ', ο', π', ϟ'

διὰ τὰς ἑκατοντάδας 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900

τὰ σύμβολα ρ', σ', τ', υ', φ', χ', ψ', ω', ϡ'

Διὰ τὰς χιλιάδας μετεχειρίζοντο τὰ ἴδια γράμματα ἀλλὰ μὲ τόνον ἀριστερὰ καὶ κάτω.

Π. χ. ἀντὶ τῶν 1000 2000 3000

εἶχον τὰ σύμβολα ͵α, ͵β ͵γ ἀντιστοίχως

Ἡ γραφὴ τῶν ἄλλων ἀκεραίων γίνεται μὲ τὴν συμφωνίαν :

**«Ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος σχηματίζεται, ὅταν γράψωμεν γράμματα εἰς τὴν σειράν, παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων ὅλων τῶν ψηφίων».**

Π. χ. ια' σημαίνει 10 + 1 = 11

ξη' σημαίνει 60 + 8 = 68

Ὁ ἀριθμὸς 1821 γράφεται ͵αωκα'

## 18. Η ΡΩΜΑΪΚΗ ΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Οἱ Ρωμαῖοι ἐχρησιμοποίουν ἐπίσης τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως καὶ ἔγραφον τοὺς ἀριθμοὺς χρησιμοποιοῦντες ὡς ψηφία τὰ γράμματα

I, V, X, L, C, D, M

ἀντὶ τῶν 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000 ἀντιστοίχως

Διὰ τὴν γραφὴν τῶν ἄλλων ἀριθμῶν εἶχον τοὺς ἑξῆς κανόνας.

α) Ὅμοια γράμματα, ὅταν γραφοῦν τὸ ἓν παραπλεύρως τοῦ ἄλλου, προστίθενται

Π.χ. XX = 10 + 10 = 20

CCC = 100 + 100 + 100 = 300

β) Ὅταν ἓν γράμμα γράφεται ἀριστερὰ μεγαλυτέρου του ἀφαιρεῖται ἀπὸ αὐτό, ἀ ν τ ι θ έ τ ω ς ὅταν γράφεται δεξιὰ μεγαλυτέρου του, προστίθεται.

Π.χ. IV = 4 XL = 40 XC = 90

VI = 6 LX = 60 CCXVI = 216

γ) Ἕκαστον ψηφίον τοποθετημένον μεταξὺ δύο ἄλλων μεγαλυτέρων του, ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται δεξιά του καὶ ἡ διαφορὰ προστίθεται εἰς τὸ ἀριστερὸν ψηφίον

Π.χ $\quad XIV = 10 + (5 - 1) = 14.$

δ) Ὅταν ἓν γράμμα ἔχῃ μίαν ὁριζοντίαν γραμμὴν ἐπάνω παριστάνει χιλιάδας, δύο γραμμὰς ἑκατομμύρια κ.ο.κ.

$\overline{V} = 5.000 \qquad \overline{\overline{XIX}} = 19.000.000$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

36. α) Πόσας μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας ἔχει ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 200, 8.000, 32.000, 1.000.000 ; β) Πόσους διψηφίους, τριψηφίους ἀριθμοὺς δύνασθε νὰ γράψετε μὲ ψηφίον μονάδος 3 ;

37. Νὰ εὕρετε ἕνα διψήφιον ἀριθμὸν τοιοῦτον ὥστε, ἐὰν παρεμβάλωμεν τὸ 0 μεταξὺ τῶν ψηφίων του, νὰ αὐξηθῇ κατὰ 4 ἑκατοντάδας καὶ νὰ ἐλαττωθῇ κατὰ 4 δεκάδας.

38. Γράψατε διαφόρους διψηφίους ἀριθμοὺς καὶ ἔπειτα ἐναλλάξατε εἰς ἕκαστον τούτων τὸ ψηφίον τῶν μονάδων μὲ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων. Τί παρατηρεῖτε διὰ τὴν μεταβολὴν τῶν ἀριθμῶν τούτων ;

39) Νὰ γράψετε μὲ ἀραβικὰ ψηφία τοὺς ἀριθμοὺς κγ´ ρογ´, αωκα´ XC, CLX, MCCX, MXV.

## 19. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΟΣ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

### 19.1 Ἴσοι καὶ ἄνισοι ἀριθμοί

Ὅταν εἰσέλθωμεν εἰς ἓν λεωφορεῖον καὶ παρατηρήσωμεν τὰ δύο σύνολα, «ἐπιβάται» καὶ «καθίσματα» αὐτοῦ, εἶναι δυνατὸν νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι :

I. Οἱ ἐπιβάται εἶναι ὅσοι καὶ τὰ καθίσματα. Ἤτοι τὸ πεπερασμένον σύνολον «ἐπιβάται» εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ πεπερασμένον σύνολον «καθίσματα».

II. Ἕκαστος ἐπιβάτης κατέχει ἓν κάθισμα καὶ μένουν κενὰ καθίσματα.

III. Ὑπάρχει εἰς ἕκαστον κάθισμα εἷς ἐπιβάτης καὶ ἐπὶ πλέον ὄρθιοι ἐπιβάται.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α τὸν πληθικὸν ἀριθμὸν τοῦ συνόλου «ἐπιβάται» καὶ μὲ β τὸν πληθικὸν ἀριθμὸν τοῦ συνόλου «καθίσματα», τότε :

Εἰς τὴν 1ην περίπτωσιν λέγομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἴ σ ο ι μεταξύ των καὶ γράφομεν $\quad α = β$

Εἰς τὴν 2αν περίπτωσιν λέγομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς α εἶναι μ ι κ ρ ό τ ε ρ ο ς τοῦ β καὶ γράφομεν $\quad α < β.$

Εἰς τὴν 3ην περίπτωσιν λέγομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς α εἶναι μ ε γ α λ ύ τ ε ρ ο ς τοῦ β καὶ γράφομεν $\quad α > β.$

Εἰς τὰς δύο τελευταίας περιπτώσεις οἱ ἀριθμοὶ εἶναι μεταξύ των ἄ ν ι σ ο ι

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν δοθοῦν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β, μία καὶ μόνον μία ἀπὸ τὰς τρεῖς ἀνωτέρω σχέσεις θὰ ἰσχύη.

Γενικῶς: **α) Δύο ἀριθμοὶ α, β λέγονται ἴσοι, ὅταν εἶναι πληθικοὶ ἀριθμοὶ ἰσοδυνάμων πεπερασμένων συνόλων.**

**β) Εἷς ἀκέραιος α λέγεται μεγαλύτερος ἄλλου ἀκεραίου β, ἐὰν ὁ α εἶναι πληθικὸς ἀριθμὸς ἑνὸς πεπερασμένου συνόλου A καὶ ὁ β ἑνὸς γνησίου ὑποσυνόλου B αὐτοῦ.**

Ἐὰν ὁ α εἶναι μεγαλύτερος τοῦ β τότε λέγομεν ὅτι καὶ ὁ β εἶναι μικρότερος τοῦ α.

Ἡ σχέσις $\alpha = \beta$, διὰ τῆς ὁποίας δηλώνομεν ὅτι ὁ ἀκέραιος α εἶναι ἴσος μὲ τὸν β, λέγεται ἰσότης. Τὰ ἑκατέρωθεν τοῦ συμβόλου = τῆς ἰσότητος γραφόμενα λέγονται μέλη τῆς ἰσότητος· τὸ μὲν πρὸς τὰ ἀριστερὰ λέγεται πρῶτον μέλος τὸ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ δεύτερον μέλος αὐτῆς.

Αἱ σχέσεις $\alpha < \beta$, καὶ $\alpha > \beta$ λέγονται ἀνισότητες μὲ πρῶτον μέλος πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ δεύτερον μέλος πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν συμβόλων ἀνισότητος ($<$ $>$)

Σημειώνομεν ὅτι αἱ σχέσεις $\alpha < \beta$ καὶ $\beta > \alpha$ ἔχουν τὴν αὐτὴν σημασίαν.

### 19.2. Ἰδιότητες ἰσότητος

Εἶναι φανερὸν ὅτι:

1. Ἕκαστος ἀκέραιος α εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἑαυτόν του.

$$\alpha = \alpha \qquad \text{Ἀνακλαστικὴ ἰδιότης.}$$

2. Ἐὰν ὁ ἀκέραιος α εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀκέραιον β, τότε καὶ ὁ ἀκέραιος β εἶναι ἴσος μὲ τὸν α.

$$\alpha = \beta \implies \beta = \alpha \qquad \text{Συμμετρικὴ ἰδιότης.}$$

3. Ἐὰν μεταξὺ τῶν ἀκεραίων, α, β, γ εἶναι:

$$\alpha = \beta \text{ καὶ } \beta = \gamma, \text{ τότε θὰ εἶναι καὶ } \alpha = \gamma$$

Ἢ συμβολικῶς

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \beta\\ \beta = \gamma\end{array}\right\} \implies \alpha = \gamma \qquad \text{Μεταβατικὴ ἰδιότης}$$

Ἡ συμμετρικὴ ἰδιότης μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐναλλάσσωμεν τὸ 1ον μέλος μιᾶς ἰσότητος μὲ τὸ 2ον, ἡ μεταβατικὴ μᾶς ἐπιτρέπει ἐμμέσους συγκρίσεις.

Αἱ ἀνωτέρω τρεῖς ἰδιότητες τῆς ἰσότητος ἀκεραίων εἶναι συνέπειαι τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἰσοδυνάμων συνόλων.

### 19.3. Ἰδιότητες ἀνισότητος

Ἡ σχέσις $5 > 5$ δὲν εἶναι ἀληθής.

Ὁμοίως δὲν εἶναι ἀληθὲς ὅτι

$$5 > 3 \implies 3 > 5$$

Γενικῶς: Εἰς τὴν ἀνισότητα ἀκεραίων δὲν ἰσχύει ἡ ἀνακλαστικὴ καὶ ἡ συμμετρικὴ ἰδιότης· ἰσχύει ὅμως ἡ μεταβατική.

Πράγματι : Ἐὰν εἶναι $\alpha > 4$ καὶ $4 > \beta$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha > \beta$

Γενικῶς ἐὰν α, β, γ, ἀκέραιοι, τότε

$$\left.\begin{array}{r} \alpha > \beta \\ \text{καὶ} \quad \beta > \gamma \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha > \gamma$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

40. Γράψατε τὴν σχέσιν μεταξὺ α καὶ β ὅταν :

α) α = ὁ ἀριθμὸς τῶν δραχμῶν καὶ β = ὁ ἀριθμὸς τῶν διδράχμων εἰς ἓν εἰκοσάδραχμον.

β) α = πληθ. ἀριθμὸς τοῦ συνόλου $A = \{ \chi | \chi$ ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ $35 \}$, β = πληθ. ἀριθμὸς τοῦ συνόλου $B = \{ \chi | \chi$ ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ $15673 \}$.

41. Ἐὰν α, β, γ εἶναι τὰ βάρη τριῶν κιβωτίων Α, Β, Γ ἀντιστοίχως πόσας τὸ ὀλιγώτερον μετρήσεις χρειάζεσθε, διὰ νὰ συγκρίνετε τὰ βάρη αὐτά ;

## 20. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΩΣ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟΝ ΣΥΝΟΛΟΝ

### 20.1. Διάταξις

Εἰς ἓν λεξικὸν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν εὐκόλως ὁποιανδήποτε λέξιν θελήσωμεν, διότι αἱ λέξεις εἶναι τοποθετημέναι κατ' ἀλφαβητικὴν σειράν.

Ὅταν ἡ τοποθέτησις ἀντικειμένων γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει κάποιου κανόνος, τότε λέγομεν ὅτι τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ εἶναι διατεταγμένα.

Οἱ μαθηταὶ κατὰ τὴν ὥραν τῆς γυμναστικῆς εἶναι διατεταγμένοι κατ' ἀνάστημα.

**20.2.** Εἰς τὰ προηγούμενα ἐθεωρήσαμεν τὰ σύνολα ἀνεξαρτήτως τῆς διατάξεως τῶν στοιχείων των, $\{1,2,\} = \{2, 1\}$.

Κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν τὸ σύνολον $N_0$ ὡς διατεταγμένον σύνολον. Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $N_0 = \{0, 1, 2, 3\ldots\}$ ὡς ἐκ τοῦ τρόπου τῆς κατασκευῆς των παρουσιάζονται εἰς διάταξιν αὔξοντος μεγέθους.

Συγκεκριμένως :

ι) Ὑπάρχει εἰς τὸ σύνολον $N_0$ ἓν πρῶτον στοιχεῖον, τὸ μηδέν, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἐλάχιστον στοιχεῖον καὶ δὲν ὑπάρχει τελευταῖον (μέγιστον).

ιι) Ἕκαστον στοιχεῖον αὐτοῦ, ἐκτὸς τοῦ πρώτου, ἔχει ἀριστερά του ἓν ὡρισμένον προηγούμενον στοιχεῖον τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον αὐτοῦ καὶ δεξιά του ἓν ὡρισμένον ἑπόμενον τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ μεγαλύτερόν του. Π.χ. τὸ στοιχεῖον 5 ἔχει προηγούμενον τὸ 4 καὶ ἑπόμενον τὸ 6 καὶ εἶναι $4 < 5 < 6$.

Τὸ αὐτὸ σύνολον $N_0$ δυνάμεθα νὰ τὸ διατάξωμεν καὶ κατὰ τάξιν φθίνοντος (ἐλαττουμένου) μεγέθους :

$$N_0 = \{\ldots 3, 2, 1, 0\}$$

Εἰς τὴν διάταξιν αὐτήν:

ι) Ὑπάρχει ἓν τελευταῖον στοιχεῖον τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ τὸ μικρότερον καὶ δὲν ὑπάρχει πρῶτον στοιχεῖον (μέγιστον).

ιι) Ἕκαστον στοιχεῖον αὐτοῦ, ἐκτὸς τοῦ τελευταίου, ἔχει ἀριστερὰ ἓν ὡρισμένον προηγούμενον τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ μεγαλύτερον του καὶ δεξιὰ ἓν ὡρισμένον ἑπόμενον μικρότερόν του. Π. χ. τὸ στοιχεῖον 5 ἔχει προηγούμενον τὸ 6, ἑπόμενον τὸ 4 καὶ εἶναι $6 > 5 > 4$.

**20.3**. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἕκαστον πεπερασμένον ὑποσύνολον τοῦ $N_0$ δυνάμεθα νὰ τὸ διατάξωμεν κατὰ τάξιν αὔξοντος ἢ φθίνοντος μεγέθους. Π.χ. ἂς λάβωμεν τὸ σύνολον $\{2,5,6,4\}$. Τοῦτο γράφεται κατὰ τάξιν αὔξοντος μεγέθους ὡς ἑξῆς:

$$\{2,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

Τοιουτοτρόπως διατεταγμένον τὸ σύνολον αὐτὸ ἔχει: Ἓν πρῶτον στοιχεῖον, τὸ 2, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ τὸ μικρότερον στοιχεῖον τοῦ συνόλου, ἓν τελευταῖον στοιχεῖον, τὸ 6, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ τὸ μεγαλύτερον. Τὸ αὐτὸ σύνολον δυνάμεθα νὰ τὸ διατάξωμεν κατὰ τάξιν φθίνοντος μεγέθους:

$$\{6,\ 5,\ 4,\ 2\}$$

Καὶ εἰς τὴν διάταξιν αὐτὴν διακρίνομεν ἓν πρῶτον στοιχεῖον, τὸ ὁποῖον ὅμως εἶναι μεγαλύτερον ὅλων τῶν ἄλλων καὶ ἓν τελευταῖον στοιχεῖον τὸ μικρότερον ὅλων.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

42. Νὰ διατάξετε κατὰ τάξιν αὔξοντος μεγέθους τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $A = \{3, 8, 12, 5, 18\}$

43. Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Α $\{ \chi | \chi$ περιττὸς ἀκέραιος $\}$ νὰ διαταχθοῦν κατὰ τάξιν αὔξοντος μεγέθους, τὰ δὲ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $B = \{ \chi | \chi$ ἄρτιος ἀκέραιος $\}$ κατὰ τάξιν φθίνοντος μεγέθους.

44. Οἱ ἀριθμοὶ 41532 καὶ 12345 ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος ψηφίων. Ποῖον ἐξ αὐτῶν δύνασθε νὰ ἀπομνημονεύσετε εὐκολώτερον καὶ διατί;

### Νέοι συμβολισμοί

$N$ Τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν

$N_0$ » » » ἀκεραίων τῆς Ἀριθμητικῆς

$>$ Τὸ... εἶναι μεγαλύτερον τοῦ...

$<$ Τὸ... εἶναι μικρότερον τοῦ...

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

# ΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

## 21. Η ΠΡΑΞΙΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

### 21.1. Ὁρισμός

Τὰ σύνολα $A = \{+, -, X\}$ καὶ $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ εἶναι ξένα μεταξύ των καὶ ἔχουν πληθικοὺς ἀριθμοὺς 3 καὶ 4 ἀντιστοίχως. Ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τῆς ἑνώσεως $A \cup B = \{+, -, X, \alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, δηλαδὴ τὸ 7, ὀνομάζεται ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων 3 καὶ 4.

Γενικῶς: **Ἐὰν $A, B$ εἶναι δύο σύνολα ξένα μεταξύ των μὲ πληθικοὺς ἀριθμοὺς $\alpha, \beta$ ἀντιστοίχως, τότε ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς $\gamma$ τῆς ἑνώσεως $A \cup B$ λέγεται ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν $\alpha$ καὶ $\beta$.**

Γράφομεν δὲ $$\alpha + \beta = \gamma$$

Ἤτοι: Πληθ. ἀριθμὸς τοῦ A + Πληθ. ἀριθμὸς τοῦ B = Πληθ. ἀριθ. τοῦ $A \cup B$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$\alpha \quad + \quad \beta \quad = \quad \gamma$$

**Ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εἰς τὸ ζεῦγος $(\alpha, \beta)$ ἀντιστοιχίζομεν τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta$, λέγεται πρόσθεσις * τῶν ἀριθμῶν $\alpha$ καὶ $\beta$.**

$$\boxed{(\alpha, \beta) \xrightarrow{+} \alpha + \beta}$$

Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β λέγονται ὅροι τῆς προσθέσεως ἢ προσθετέοι.

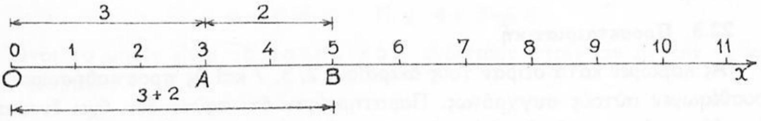
Ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως ἀναφέρεται πάντοτε εἰς δύο ἀκεραίους. Διὰ τοῦτο λέγεται διμελὴς πρᾶξις.

### 21.2. Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς προσθέσεως

Χαράσσομεν τὴν ἡμιευθείαν διατάξεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

---

* Δὲν πρέπει νὰ συγχέωμεν τὴν «πρόσθεσιν» μὲ τὸ «ἄθροισμα». Ἡ πρόσθεσις εἶναι πρᾶξις ἐνῶ τὸ ἄθροισμα τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως (ἀριθμός).




Σχ. 12.

ι) Τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΑ, σχ. 12, ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία ἴσα διαστήματα καὶ παριστάνει τὸν ἀκέραιον 3. Τὸ διαδοχικὸν πρὸς αὐτὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἴσα διαστήματα καὶ παριστάνει τὸν ἀκέραιον 2. Τὸ εὐθ. τμῆμα $OB = OA + AB$ παριστάνει τὸ ἄθροισμα $3 + 2$

ιι) Ἡ πρόσθεσις τοῦ 2 εἰς τὸ 3 δυνατὸν νὰ ἑρμηνευθῇ καὶ ὡς μετατόπισις τοῦ σημείου Α, εἰκόνος τοῦ 3, πρὸς τὰ δεξιὰ κατὰ 2 διαστήματα.

## 22. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

### 22.1. Ὕπαρξις ἀθροίσματος, μονότιμον

Ἄς ἐκτελέσωμεν μερικὰς προσθέσεις μὲ στοιχεῖα τοῦ συνόλου

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

Π.χ. τὰς προσθέσεις : $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$, $2 + 3 = 5$.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ δύο πρῶτα ἀθροίσματα $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$ εἶναι στοιχεῖα τοῦ ἰδίου συνόλου, ἐνῶ τὸ τρίτον ἄθροισμα $2 + 3 = 5$ δὲν εἶναι. Τὸ τελευταῖον τοῦτο δὲν παρουσιάζεται εἰς τὸ σύνολον $N_0$.

Πράγματι ἀπὸ τὴν πεῖραν σας γνωρίζετε ὅτι : ἐὰν δοθοῦν δύο τυχόντες ἀκέραιοι α, β ὑ π ά ρ χ ε ι εἷς καὶ μ ό ν ο ν εἷς ἀκέραιος, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως εἰς τὸ σύνολον $N_0$ εἶναι πάντοτε δ υ ν α τ ὴ καὶ μ ο ν ό τ ι μ ο ς.

### 22.2. Μεταθετική

α) Παρατηροῦμεν ὅτι $2 + 3 = 3 + 2$, $3 + 4 = 4 + 3$, $5 + 6 = 6 + 5 \ldots$

β) Ἄς εἶναι Α,Β δύο σύνολα ξένα μεταξύ των καὶ α, β οἱ πληθικοὶ ἀριθμοὶ αὐτῶν ἀντιστοίχως.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀθροίσματος ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τῆς ἑνώσεως $A \cup B$ εἶναι $\alpha + \beta$ καὶ τῆς ἑνώσεως $B \cup A$ εἶναι $\beta + \alpha$.

Ἀλλὰ $A \cup B = B \cup A$ (Διατί ;)

Ἄρα $\boxed{\alpha + \beta = \beta + \alpha.}$

Ἤτοι, ἡ ἀλλαγὴ τῆς τάξεως τῶν προσθετέων δὲν μεταβάλλει τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ πρόσθεσις τῶν ἀκεραίων εἶναι πρᾶξις μ ε τ α θ ε τ ι κ ή.

**22.3. Προσεταιριστική**

Ἂς λάβωμεν κατὰ σειρὰν τοὺς ἀκεραίους 2, 3, 7 καὶ ἂς προσπαθήσωμεν νὰ προσθέσωμεν αὐτοὺς συγχρόνως. Παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο δὲν ἔχει ἔννοιαν Ἡ πρόθεσις εἶναι πρᾶξις διμελής : ἤτοι δύο μόνον ἀκεραίους δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν συγχρόνως. Εἶναι δυνατὸν ὅμως νὰ προχωρήσωμεν μὲ δ ύ ο προσθέσεις ὡς ἑξῆς :

$2+3=5$ (1η πρόσθεσις)

$5+7=12$ (2α πρόσθεσις)

Ἢ συντόμως $(2+3)+7=12$ * (1)

Εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα καταλήγομεν καὶ ἐὰν ἐκτελέσωμεν κατὰ σειρὰν τὰς ἑξῆς προσθέσεις :

$3+7=10$ (1η πρόσθεσις)

$2+10=12$ (2α πρόσθεσις)

Ἢ συντόμως $2+(3+7)=12$ (2)

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν :

$$(2+3)+7=2+(3+7)$$

Γενικῶς δ ι' ἑ κ ά σ τ η ν τ ρ ι ά δ α ἀ κ ε ρ α ί ω ν α, β, γ ἔ χ ο μ ε ν :

$$\boxed{(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)}$$

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ πρόσθεσις ἀκεραίων εἶναι πρᾶξις π ρ ο σ ε τ α ι ρ ι σ τ ι κ ή.

**Σημείωσις**

Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης προκύπτει ἐκ τῆς προσεταιριστικῆς ἰδιότητος τῆς ἑνώσεως συνόλων.

**22.4. Ὕπαρξις οὐδετέρου στοιχείου**

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας

$$2+0=2, \quad 0+2=2, \quad 3+0=3, \quad 0+3=3$$

καὶ γενικῶς $\boxed{\alpha+0=\alpha, \quad 0+\alpha=\alpha \quad \text{ὅπου } \alpha\in N_0}$

συνάγομεν ὅτι εἰς τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων ὑπάρχει ἓν στοιχεῖον, τὸ μηδὲν τὸ ὁποῖον προστιθέμενον εἰς οἱονδήποτε ἀκέραιον τὸν ἀφήνει ἀμετάβλητον. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι τὸ μηδὲν εἶναι ο ὐ δ έ τ ε ρ ο ν σ τ ο ι χ ε ῖ ο ν τ ῆ ς π ρ ο σ θ έ σ ε ω ς ἀ κ ε ρ α ί ω ν.

---

* Ἡ παρένθεσις δηλοῖ ὅτι πρέπει νὰ εὑρεθῇ πρῶτον τὸ ἄθροισμα 2+3.

'Εὰν λάβωμεν οἱονδήποτε ἄλλον ἀκέραιον $\beta \neq 0$ εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ ἔχωμεν

$$\alpha + \beta \neq \alpha \quad \text{Π. χ.} \quad 4 + 3 \neq 4.$$

Ἤτοι τὸ μηδὲν εἶναι τὸ μ ο ν α δ ι κ ὸ ν οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς τὴν πρόσθεσιν ἀκεραίων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

45. Συμπληρώσατε τὰς συνεπαγωγὰς

$$\alpha + \beta = \beta \implies \alpha = \ldots \text{ καὶ } \alpha + \beta = \alpha \implies \beta = \ldots$$

46. 'Εὰν $\alpha, \beta \in N_0$ καὶ $\alpha + \beta = 1$ ποῖαι εἶναι αἱ δυναταὶ τιμαὶ τῶν α καὶ β;

47. Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 100. Πόσα ψηφία δύναται νὰ ἔχῃ ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν τούτων; ('Εξετάσατε διαφόρους περιπτώσεις)

## 23. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΡΙΩΝ Ἢ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΠΡΟΣΘΕΤΕΩΝ

### 23.1. Ὁρισμὸς

Εἰς ἓν καλάθιον ἔχομεν 2 μῆλα. Θέτομεν διαδοχικῶς εἰς αὐτὸ 3 μῆλα, 4 μῆλα καὶ 5 μῆλα. Πόσα μῆλα ἔχομεν τελικῶς εἰς τὸ καλάθιον; Τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὰς ἑξῆς κατὰ σειρὰν πράξεις μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4 καὶ 5

$$2 + 3 = 5$$
$$5 + 4 = 9$$
$$9 + 5 = 14$$

Ὁ ἀριθμὸς 14 εἰς τὸν ὁποῖον κατελήξαμεν τοιουτοτρόπως, λέγεται ἄ θ ρ ο ι σ μ α τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 5

γράφομεν δὲ $\quad 2 + 3 + 4 + 5 = 14.$

Ἤτοι: $\quad 2 + 3 + 4 + 5 = [\,(2 + 3) + 4\,] + 5 = 14$

Ὅπου ἡ γραφὴ $(2+3)$ δηλώνει ἕ ν α ἀριθμόν: Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3. Ὁμοίως ἡ γραφὴ $[\,(2 + 3) + 4\,]$ δηλώνει ἕ ν α ἀριθμόν: Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν $(2 + 3)$ καὶ 4.

Γενικῶς: **Ἄθροισμα τριῶν ἢ περισσοτέρων ἀκεραίων δοθέντων εἰς μίαν σειρὰν λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ὅταν εἰς τὸν πρῶτον ἐξ αὐτῶν προσθέσωμεν τὸν δεύτερον, εἰς τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα τὸν τρίτον κ.ο.κ. μέχρις ὅτου τελειώσουν ὅλοι οἱ ἀκέραιοι.**

Ἢ συμβολικῶς: 'Εὰν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \in N_0$.

τότε $\quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = [\,(\alpha + \beta) + \gamma\,] + \delta$

### 23.2. Ἰδιότητες

α) Ἐὰν εἰς τὸ καλάθιον θέσωμεν πρῶτα τὰ 5 μῆλα, ἔπειτα τὰ 3 καὶ τελευταῖα τὰ 4 εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ ἔχωμεν θέσει πάλιν τὸ αὐτὸ πλῆθος μήλων. Ἀπὸ τὴν παρατήρησιν αὐτὴν ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ σειρὰ μὲ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν τοὺς προσθετέους, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμά των, δὲν μεταβάλλει τὸ τελικὸν ἄθροισμα. Π.χ.

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\alpha+\delta+\gamma+\beta=\alpha+\gamma+\beta+\delta=\ldots,\quad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in N_0$$

Ἤτοι: **Ἡ μεταθετικὴ ἰδιότης ἰσχύει καὶ ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι τρεῖς ἢ περισσότεροι.**

β) Εἰς τὸ παράδειγμά μας ἐλαττώνομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐργασιῶν μας, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν μήλων, τὰ ὁποῖα ἔχομεν εἰς τὸ καλάθιον, ἐὰν θέσωμεν 7 μῆλα συγχρόνως ἀντὶ νὰ θέσωμεν 3 μῆλα τὴν μίαν φορὰν καὶ 4 τὴν ἑπομένην. Ἡ παρατήρησις αὕτη μᾶς ὁδηγεῖ νὰ γράψωμεν:

$$\begin{aligned}2+3+4+5&=2+(3+4)+5\\&=2+7+5\end{aligned}$$

καὶ γενικῶς $\quad \alpha+\beta+\gamma+\delta=\alpha+(\beta+\gamma)+\delta \quad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in N_0$

Ἤτοι: **Τὸ ἄθροισμα δοθέντων ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους τῶν προσθετέων μὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.**

γ) Προφανῶς θὰ ἔχωμεν εἰς τὸ καλάθιον τὸ αὐτὸ πλῆθος μήλων, ἐὰν ἀντὶ τῶν 5 μήλων, τὰ ὁποῖα ἐθέσαμεν τὴν τελευταίαν φοράν, ἐθέτομεν διαδοχικῶς 3 μῆλα καὶ 2 μῆλα. Ἡ παρατήρησις αὕτη μᾶς ὁδηγεῖ νὰ γράψωμεν:

$$2+3+4+5=2+3+4+3+2$$

καὶ γενικῶς $\quad \alpha+\beta+(\gamma+\delta)=\alpha+\beta+\gamma+\delta \quad \alpha,\beta,\gamma,\delta,\in N_0$

Ἤτοι: **Δυνάμεθα εἰς ἓν ἄθροισμα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἕνα προσθετέον μὲ δύο ἢ περισσοτέρους ἄλλους, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν αὐτὸν ὡς ἄθροισμα.**

Αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ συντομεύσωμεν τοὺς ὑπολογισμοὺς ἀθροισμάτων.

**Παραδείγματα**

**1.** $56+75+44+25 = (56+44)+(75+25) = 100 + 100 = 200$

**2.** $115+36+14+985 = 100+15+36+14+985$
$= 100+(15+985)+(36+14)$
$= 100+1000+50 = 1150$

**23.3.** Παραθέτομεν κατωτέρω πίνακα τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως.

> **Ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι τυχόντες ἀκέραιοι τότε :**
>
> **1.** $\alpha + \beta \in N_0$
>
> **2.** $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
>
> **3.** $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
>
> **4.** $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$
>
> **5.** $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \alpha + \gamma + \beta + \delta = \alpha + \delta + \gamma + \beta = \ldots$
>
> **6.** $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \alpha + (\beta + \gamma) + \delta = \alpha + (\beta + \delta) + \gamma = \ldots$
>
> **7.** $\alpha + (\beta + \gamma) + \delta = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

48. Χρησιμοποιήσατε ἰδιότητας τῆς προσθέσεως διὰ νὰ ὑπολογισθῇ συντομώτερον τὸ ἄθροισμα

$$17 + (2 + 83) + 98$$

49. Νὰ ὑπολογισθοῦν μὲ τὸν συντομώτερον τρόπον τὰ ἀθροίσματα :

α. $= (5 + 20 + 4) + (95 + 80 + 996)$

β. $= 24 + (52 + 35) + (65 + 48) + 976$

50. Χρησιμοποιήσατε τὴν μεταθετικὴν καὶ τὴν προσεταιριστικὴν ἰδιότητα διὰ νὰ δικαιολογήσετε ὅτι :

$$(\alpha + \beta) + \gamma = (\alpha + \gamma) + \beta$$

## 23. 4. Ἐξισώσεις, ταυτότητες

Ἄς προσέξωμεν τὰς κατωτέρω ἰσότητας :

$$3 + 4 = 7 \quad (1) \qquad 5 + 3 = 9 \quad (2) \qquad 5 + 9 = 14 \quad (3)$$

Ἀπὸ αὐτὰς ἡ (1) καὶ ἡ (3) εἶναι ἀληθεῖς, ἐνῶ ἡ (2) εἶναι ψευδής.

Τί δυνάμεθα ὅμως νὰ εἴπωμεν διὰ τὰς κατωτέρω ἐ γ γ ρ α μ μ ά τ ο υ ς ἰσότητας ;

$$\chi + 3 = 5 \quad (4) \qquad \chi + 3 = 3 + \chi \quad (5)$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ (4) εἶναι ἀληθὴς μ ό ν ο ν διὰ τὴν τιμὴν $\chi = 2$, ἐνῶ ἡ (5) ἀληθεύει διὰ π ᾶ σ α ν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ χ.

Π.χ. διὰ $\chi = 1$ ἔχομεν $1 + 3 = 3 + 1$ $(4 = 4)$

» $\chi = 2$ » $2 + 3 = 3 + 2$ $(5 = 5) \ldots$

Ἡ ἰσότης (5) ὡς καὶ πᾶσα ἐγγράμματος ἰσότης ἡ ὁποία ἀληθεύει δ ι ὰ π ᾶ σ α ν τιμὴν τοῦ γράμματος τὸ ὁποῖον περιέχει λέγεται τ α υ τ ό τ η ς.

Ἡ ἰσότης (4) ὡς καὶ πᾶσα ἄλλη ἐγγράμματος ἰσότης ἡ ὁποία δὲν εἶναι ταυτότης λέγεται ἐξίσωσις.

Ἡ τιμὴ τοῦ χ διὰ τὴν ὁποίαν ἀληθεύει ἡ ἐξίσωσις λέγεται ρίζα ἢ λύσις τῆς ἐξισώσεως.

Π.χ. ὁ ἀριθμὸς $\chi = 2$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως (4) διότι $2 + 3 = 5$. Ἡ ἐργασία διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ρίζης μιᾶς ἐξισώσεως καλεῖται ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως.

Εἶναι δυνατὸν μία ἐξίσωσις νὰ μὴ ἔχῃ λύσιν εἰς ἕν ὡρισμένον σύνολον. Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\chi + 4 = 3$ δὲν ἔχει λύσιν εἰς τὸ σύνολον $N_0$. Πράγματι δὲν ὑπάρχει ἀκέραιος, στοιχεῖον τοῦ συνόλου $N_0$, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸ 4 δίδει ἄθροισμα 3. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐξίσωσις λέγεται ἀδύνατος εἰς τὸ σύνολον $N_0$.

### Παραδείγματα

| Ἐξισώσεις | Ταυτότητες |
|---|---|
| $\chi + 5 = 5$ | $\chi + 5 = 3 + 2 + \chi$ |
| $7 + \chi = 12$ | $\chi + 2 = 2 + \chi$ |
| $\alpha + 1 = 9$ | $5 + (1 + \chi) = \chi + 6$ |

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

51. Ἐὰν χ λαμβάνῃ τιμὰς ἐκ τοῦ συνόλου $\{1, 2, 3 \ldots 10\}$, νὰ εὑρεθῇ ἡ ρίζα ἑκάστης τῶν κατωτέρω ἐξισώσεων.

$\chi + 7 = 12$ $\qquad$ $4 + \chi = 10$

$\chi + 5 = 17$ $\qquad$ $\chi + 0 = 10$

Ποία ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων δὲν ἔχει λύσιν εἰς τὸ θεωρούμενον σύνολον τιμῶν τοῦ χ;

52. Ποῖαι ἐκ τῶν κατωτέρω ἐγγραμμάτων ἰσοτήτων εἶναι ἐξισώσεις καὶ ποῖαι ταυτότητες;

$\chi + 8 = 12$ $\qquad$ $\chi + 7 = 7 + \chi$

$2 + (\chi + 1) = 3 + \chi$, $\qquad$ $9 + \chi = 20$

## 24. Η ΠΡΑΞΙΣ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

### 24.1. Ὁρισμὸς

Ὅταν δίδωμεν 100 δρχ. διὰ νὰ πληρώσωμεν εἰς ἕν κατάστημα ἀντικείμενα ἀξίας 53 δρχ., ἡ ταμίας διὰ νὰ μᾶς δώσῃ τὰ ὑπόλοιπα χρήματα (ρέστα) σκέπτεται νὰ εὕρῃ πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ προσθέσῃ εἰς τὰς 53 δρχ. διὰ νὰ γίνουν αὗται 100 δρχ.

Ἤτοι, ἐὰν παραστήσωμεν μὲ χ τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν τὰς ὁποίας θὰ λάβωμεν πρέπει:

$$53 + \chi = 100 \qquad (1)$$

Ὁ ἀριθμὸς $\chi = 47$ ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὸ 53 διὰ νὰ δώσῃ ἄθροισμα 100 λέγεται διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν 100 καὶ 53 γράφομεν δέ

$$100 - 53 = \chi \qquad (= 47) \tag{2}$$

Γενικῶς: **Ἐὰν $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0$ καὶ ὑπάρχῃ ἀκέραιος $\chi$ ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸ $\beta$ δίδει ἄθροισμα $\alpha$**

$$\beta + \chi = \alpha \tag{3}$$

**οὗτος λέγεται διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν $\alpha$ καὶ $\beta$.**

Γράφομεν δέ:

$$\alpha - \beta = \chi \tag{4}$$

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἐννοοῦμεν ὅτι:

α) Αἱ (3) καὶ (4) εἶναι ταυτόσημοι*, (ἔχουν τὴν αὐτὴν σημασίαν). Ἤτοι, ἐὰν ἰσχύῃ ἡ μία ἀπ' αὐτάς, θὰ ἰσχύῃ καὶ ἡ ἄλλη.

$$\beta + \chi = \alpha \implies \alpha - \beta = \chi$$
$$\alpha - \beta = \chi \implies \beta + \chi = \alpha$$

Διὰ τοῦτο λέγονται ἰσοδύναμοι μεταξύ των ἢ ἁπλῶς ἰσοδύναμοι.

Γράφομεν δέ

$$\boxed{\beta + \chi = \alpha \iff \alpha - \beta = \chi} \tag{5}$$

Τὸ σύμβολον $\iff$ λέγεται σύμβολον τῆς ἰσοδυναμίας δύο σχέσεων.

β) Ὑπάρχει εἰς τὸ σύνολον $N_0$ διαφορὰ $\alpha - \beta$ ὁσάκις μόνον εἶναι

$$\alpha \geqslant \beta.$$

**Ἡ πρᾶξις μὲ τὴν ὁποίαν εἰς τὸ ζεῦγος $(\alpha, \beta)$, ὅπου $\alpha \geqslant \beta$, ἀντιστοιχίζομεν τὴν διαφορὰν $\alpha - \beta$ λέγεται ἀφαίρεσις.**

$$(\alpha, \beta) \longrightarrow \alpha - \beta$$

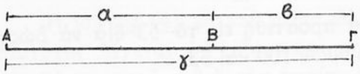
Οἱ ἀκέραιοι α, β λέγονται ὅροι τῆς ἀφαιρέσεως. Εἰδικῶς ὁ μὲν α λέγεται μειωτέος ὁ δὲ β ἀφαιρετέος. Ἡ διαφορὰ λέγεται καὶ ὑπόλοιπον.

## 24.2. Ἰσοδυναμία τῶν σχέσεων $\alpha + \beta = \gamma$, $\gamma - \beta = \alpha$, $\gamma - \alpha = \beta$

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαφορᾶς ἔχομεν:

$$3 + 4 = 7 \iff 7 - 4 = 3$$
$$3 + 4 = 7 \iff 7 - 3 = 4$$

* Συνεπῶς δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἑκάστην τούτων μὲ τὴν ἄλλην ὁσάκις τοῦτο μᾶς διευκολύνει.




Σχ. 13.

Γενικῶς, ὅπως φαίνεται παραστατικῶς καὶ εἰς τὸ σχ. 13, ἐὰν μεταξὺ τριῶν ἀκεραίων α, β, γ εἶναι $\alpha+\beta=\gamma$, θὰ εἶναι $\gamma-\beta=\alpha$ καὶ $\gamma-\alpha=\beta$.

Ἐπίσης, ἐὰν εἶναι $\gamma-\beta=\alpha$ (ἢ $\gamma-\alpha=\beta$), θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\beta=\gamma$.

Ἢ συμβολικῶς:

$$\alpha+\beta=\gamma \Longleftrightarrow \begin{cases} \gamma-\beta=\alpha \\ \gamma-\alpha=\beta \end{cases}$$

**Παραδείγματα :**

1) Ἀφοῦ εἶναι $5+7=12$ εἶναι καὶ $12-7=5$ καθὼς καὶ $12-5=7$

2) Ἀφοῦ εἶναι $15-6=9$ εἶναι καὶ $9+6=15$, καθὼς καὶ $15-9=6$

### 24.3. Ἡ ἀφαίρεσις ὡς πρᾶξις ἀντίστροφος τῆς προσθέσεως

Ἐὰν εἰς τὸ 3 προσθέσωμεν τὸ 4, εὑρίσκομεν τὸ 7. Ἐὰν δὲ ἀκολούθως ἀφαιρέσωμεν τὸ 4 ἀπὸ τὸ 7, ἐπανευρίσκομεν 3.

$$3+4=7 \qquad\qquad 7-4=3$$

$$3 \underset{\text{Ἀφαίρεσις τοῦ 4}}{\overset{\text{Πρόσθεσις τοῦ 4}}{\rightleftarrows}} 7$$

Ἤτοι: $(3+4)-4=3$

Γενικῶς ἔχομεν: $(\alpha+\beta)-\beta=\alpha$,

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ ἀφαίρεσις εἶναι ἡ ἀ ν τ ί σ τ ρ ο φ ο ς π ρ ᾶ ξ ι ς τῆς προσθέσεως.

### 24.4. Εἰδικαὶ περιπτώσεις.

ι) Ἡ διαφορὰ $\alpha-0=\chi$.

Εἶναι $\alpha-0=\chi \Longleftrightarrow 0+\chi=\alpha$ ἢ $\chi=\alpha$

Ὥστε $\alpha-0=\alpha$

ιι) Διαφορὰ δύο ἴσων ἀριθμῶν $\alpha=\beta$

Ἔχομεν: $\alpha=\beta \Longleftrightarrow \alpha=\beta+0$ (Οὐδέτερον στοιχεῖον)

$\Longleftrightarrow \alpha-\beta=0$ (Διατί ;)

Ὥστε, ἐὰν $\alpha=\beta$ τότε $\alpha-\beta=0$ καὶ ἀντιστρόφως

» $\alpha-\beta=0$ » $\alpha=\beta$

## 25. ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΑΠΛΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

### 25.1. Πρόβλημα

Ὁ Λεωνίδας εἶναι 29 ἐτῶν καὶ μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν Νῖκον κατὰ 12 ἔτη. Πόσων ἐτῶν εἶναι ὁ Νῖκος ;

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ χ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐτῶν τοῦ Νίκου, θὰ πρέπει

$$\chi + 12 = 29 \qquad (1)$$

Ἡ (1) παριστάνει μίαν ἐξίσωσιν τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν, ἐὰν σκεφθῶμεν ὅτι :

$$\alpha + \beta = \gamma \iff \alpha = \gamma - \beta$$

Συνεπῶς $\chi + 12 = 29 \iff \chi = 29 - 12$. Ἤτοι $\chi = 17$

Ὥστε ὁ Νῖκος εἶναι 17 ἐτῶν.

### 25.2. Πρόβλημα

Ἀπὸ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν 43 διὰ νὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 24;

Ἐὰν χ παριστάνῃ τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, πρέπει :

$$\chi - 43 = 24 \qquad (3)$$

Ἡ (3) εἶναι μία ἐξίσωσις. Διὰ νὰ τὴν ἐπιλύσωμεν, σκεπτόμεθα ὅτι :

$$\gamma - \beta = \alpha \iff \gamma = \alpha + \beta \qquad (4)$$

Συνεπῶς $\chi - 43 = 24 \iff \chi = 24 + 43$. Ἤτοι $\chi = 67$

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι 67.

### 25.3. Πρόβλημα

Κατὰ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ ἐλαττώσωμεν τὸ 324 διὰ νὰ εὕρωμεν 169;

Ἐὰν χ παριστάνῃ τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, τότε συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα ἔχομεν :

$$324 - \chi = 169 \qquad (5)$$

Διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (5), σκεπτόμεθα ὅτι :

$$\alpha - \beta = \gamma \iff \beta = \alpha - \gamma$$

Ἤτοι $324 - \chi = 169 \iff \chi = 324 - 169$. Ὥστε $\chi = 155$

### 25.4. Γενικῶς

Διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $\chi + \beta = \gamma$,

σκεπτόμεθα ὅτι : $\alpha + \beta = \gamma \iff \alpha = \gamma - \beta$

Συνεπῶς ἔχομεν $\chi + \beta = \gamma \iff \chi = \gamma - \beta$

Μὲ ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\chi - \alpha = \beta \Longleftrightarrow \chi = \beta + \alpha$$
$$\alpha - \chi = \beta \Longleftrightarrow \chi = \alpha - \beta$$

| Ἐξίσωσις | | Λύσις |
|---|---|---|
| $\chi - \alpha = \beta$ | $\longrightarrow$ | $\chi = \beta + \alpha$ |
| $\chi + \beta = \alpha$ | $\longrightarrow$ | $\chi = \alpha - \beta$ |
| $\alpha - \chi = \beta$ | $\longrightarrow$ | $\chi = \alpha - \beta$ |

Φυσικὰ αἱ ἀνωτέρω σχέσεις ἰσχύουν, ὅταν αἱ ἐξισώσεις εἶναι ἐπιλύσιμοι εἰς τὸ σύνολον $N_0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

53. Συμπληρώσατε τὰς ἰσοδυναμίας

α) $5 + 7 = 12 \Longleftrightarrow$ γ) $\alpha + \beta = 10 \Longleftrightarrow$

β) $5 + 7 = 12 \Longleftrightarrow$ δ) $\alpha + \beta = 10 \Longleftrightarrow$

54. Ἐπιλύσατε τὰς ἐξισώσεις :

$\chi + 7 = 19$, $18 - \chi = 11$, $\chi - 24 = 36$, ὅπου $\chi \in N_0$

55. Ἠρωτήθη κάποιος διὰ τὴν ἡλικίαν του καὶ ἀπήντησεν ὅτι μετὰ 24 ἔτη θὰ εἶναι 89 ἐτῶν. Πόση εἶναι ἡ σημερινή του ἡλικία ;

56. Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 76. Ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁ 37. Ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος ἀριθμός;

## 26. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

**26.1** Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐνῷ ἡ ἀφαίρεσις 7-4 εἶναι δυνατή, δὲν ὑπάρχει ἡ διαφορὰ 4-7 εἰς τὸ σύνολον $N_0$. Ἤτοι ἡ ἀφαίρεσις ἀκεραίων δὲν εἶναι πρᾶξις μεταθετική.

**26.2** Μήπως εἶναι πρᾶξις προσεταιριστική ; Παρατηροῦμεν ὅτι :

α) $10 - 6 = 4$, $4 - 1 = 3$ β) $6 - 1 = 5$, $10 - 5 = 5$

Ἢ $(10 - 6) - 1 = 3$ Ἢ $10 - (6 - 1) = 5$

Ἤτοι : $(10 - 6) - 1 \neq 10 - (6 - 1)$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ ἀφαίρεσις ἀκεραίων δὲν εἶναι πρᾶξις προσεταιριστική.

**26.3. Θεμελιώδης ἰδιότης**

Ὁ Νῖκος εἶναι 18 ἐτῶν καὶ ἡ Κλαίρη 12. Ἤτοι αἱ ἡλικίαι των διαφέρουν κατὰ 6 ἔτη.

$$18 - 12 = 6 \qquad (1)$$

Μετὰ 5 ἔτη ὁ Νῖκος θὰ εἶναι 23 ἐτῶν καὶ ἡ Κλαίρη 17. Καὶ πάλιν αἱ ἡλικίαι των θὰ διαφέρουν κατὰ 6 ἔτη.

$$(18 + 5) - (12 + 5) = 6 \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ἔχομεν:

$$18 - 12 = (18 + 5) - (12 + 5)$$

Πρὸ 5 ἐτῶν ὁ Νῖκος ἦτο 13 ἐτῶν ἡ δὲ Κλαίρη 7 ἐτῶν καὶ εἶχον πάλιν διαφορὰν ἡλικίας 6 ἔτη.

Ἤτοι $\quad 18 - 12 = (18 - 5) - (12 - 5)$

Γενικῶς διὰ τοὺς ἀκεραίους α, β, γ ἔχομεν:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \alpha - \beta = (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) & \alpha \geq \beta \\ \alpha - \beta = (\alpha - \gamma) - (\beta - \gamma) & \alpha \geq \beta, \ \beta \geq \gamma \end{array}}$$

**Παράδειγμα**

$$7 - 4 = (7 + 2) - (4 + 2) = (7 - 2) - (4 - 2) = 3$$

### 26.4. Ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄθροισμα.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς $(17 + 6) - 7$ παρατηροῦμεν ὅτι:

α) $17 + 6 = 23$
$\quad 23 - 7 = 16$

Ἤ $\quad (17 + 6) - 7 = 16$

β) $17 - 7 = 10$
$\quad 10 + 6 = 16$

Ἤ $\quad (17 - 7) + 6 = 16$

Ὥστε $\quad (17 + 6) - 7 = (17 - 7) + 6$

Γενικῶς ἔχομεν

$$\boxed{(\alpha + \beta) - \gamma = (\alpha - \gamma) + \beta \qquad \alpha, \beta, \gamma \in N_0 \text{ καὶ } \alpha \geq \gamma}$$

### 26.5 Ἀφαίρεσις ἑνὸς ἀθροίσματος

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς $15 - (5 + 7)$ παρατηροῦμεν ὅτι:

α) $5 + 7 = 12$
$\quad 15 - 12 = 3$

Ἤ $\quad 15 - (5 + 7) = 3$

β) $15 - 5 = 10$
$\quad 10 - 7 = 3$

Ἤ $\quad (15 - 5) - 7 = 3$

Ὥστε $\quad 15 - (5 + 7) = (15 - 5) - 7$

Γενικῶς

$$\boxed{\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma}$$

Ὅπου $\alpha, \beta, \gamma \in N_0$ καὶ αἱ σημειούμεναι ἀφαιρέσεις εἶναι δυναταί.

**26.6. Πρόσθεσις μιᾶς διαφορᾶς**

Ὁμοίως διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος $4 + (6 - 5)$ παρατηροῦμεν ὅτι:

α) $6 - 5 = 1$, $4 + 1 = 5$ — Ἤ $4 + (6 - 5) = 5$

β) $4 + 6 = 10$, $10 - 5 = 5$ — Ἤ $(4 + 6) - 5 = 5$

Ἤτοι
$$4 + (6 - 5) = (4 + 6) - 5$$

Γενικῶς

$$\boxed{\alpha + (\beta - \gamma) = (\alpha + \beta) - \gamma \quad \text{ὅπου } \alpha, \beta, \gamma \in N_0 \text{ καὶ } \beta \geq \gamma}$$

**26.7. Ἀφαίρεσις μιᾶς διαφορᾶς.**

Ὁμοίως διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς $15 - (10 - 4)$ παρατηροῦμεν ὅτι:

α) $10 - 4 = 6$, $15 - 6 = 9$ — Ἤ $15 - (10 - 4) = 9$

β) $15 + 4 = 19$, $19 - 10 = 9$ — Ἤ $(15 + 4) - 10 = 9$

Ὥστε
$$15 - (10 - 4) = (15 + 4) - 10$$

Γενικῶς

$$\boxed{\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha + \gamma) - \beta}$$

ὅπου $\alpha, \beta, \gamma \in N_0$ καὶ αἱ σημειούμεναι ἀφαιρέσεις εἶναι δυναταί.

**26.8. Παρατηρήσεις**

ι) Θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἀποδείξωμεν τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας μὲ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν γνωστῶν ἰσοδυναμιῶν (παρ. 24.2.). Π.χ. διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἰδιότητα $\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma$ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Θέτομεν $\chi = \alpha - (\beta + \gamma)$, ὁπότε ἔχομεν:

$$\begin{aligned} \chi = \alpha - (\beta + \gamma) &\iff \chi + (\beta + \gamma) = \alpha \qquad (\text{Διατί;}) \\ &\iff (\chi + \gamma) + \beta = \alpha \\ &\iff \chi + \gamma = \alpha - \beta \\ &\iff \chi = (\alpha - \beta) - \gamma \end{aligned}$$

ιι) Αἱ προηγούμεναι ἰδιότητες μᾶς διευκολύνουν συχνὰ εἰς τὸν ἀπὸ μνήμης λογισμόν.

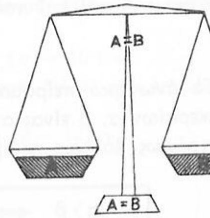
Π.χ. διὰ τὴν ἀπὸ μνήμης εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς σκεπτόμεθα ὅτι :

$$192 - (50 - 8) = (192 + 8) - 50$$
$$= 200 - 50 = 150$$

## 26.9 Ἰδιότητες τῆς διαγραφῆς

ι) Ὁ ζυγὸς τοῦ σχ. 14 ἰσορροπεῖ, ὅταν τεθοῦν ἐπὶ τῶν δίσκων του τὰ βάρη Α καὶ Β. Ἄρα

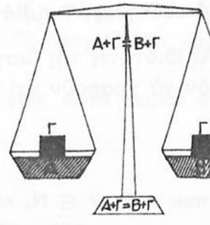
$$Α = Β$$



Σχ. 14.

Εἰς τὸν ζυγὸν τοῦ σχ. 15 ἔχομεν τοποθετήσει ἐπὶ τῶν δίσκων του καὶ ἓν νέον βάρος Γ, βλέπομεν δὲ ὅτι καὶ πάλιν ἔχομεν ἰσορροπίαν. Ἄρα

$$Α + Γ = Β + Γ$$



Σχ. 15.

Τὸ ἀνωτέρω πείραμα μᾶς διευκολύνει νὰ κατανοήσωμεν τὴν ἀκόλουθον ἰδιότητα τῶν ἀριθμῶν.

Ἐὰν $\alpha = \beta$ τότε εἶναι καὶ $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$

Καὶ ἀντιστρόφως. Ἐὰν εἶναι $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$

τότε $\alpha = \beta$

Ἤ συμβολικῶς: $\boxed{\alpha = \beta \iff \alpha + \gamma = \beta + \gamma \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma \in N_0}$

**Ἐὰν προσθέσωμεν (ἢ ἀφαιρέσωμεν) τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἰς τὰ μέλη μιᾶς ἰσότητος, λαμβάνομεν πάλιν ἰσότητα.**

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀφαιρέσεως ἡ ἀφαίρεσις θὰ πρέπει νὰ εἶναι δυνατὴ εἰς τὸ $N_0$.

Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν ὡς ἑξῆς :

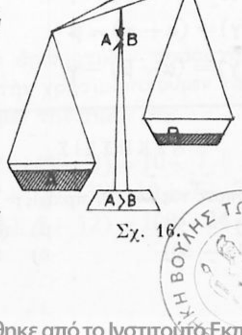
Κατὰ τὴν 24.4, ἔχομεν

$$\alpha = \beta \iff \alpha - \beta = 0$$
$$\iff (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) = 0 \quad \text{(Κατὰ τὴν 26.3)}$$
$$\iff \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

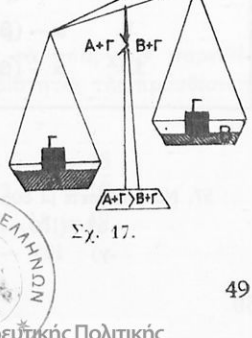
ιι) Εἰς τὸν ζυγὸν τοῦ σχ. 16 τὸ βάρος Α εἶναι μεγαλύτερον τοῦ βάρους Β

$$Α > Β \qquad (1)$$

Εἰς τὸ ζυγὸν τοῦ σχ. 17 ἔχομεν τοποθετήσει ἐπὶ



Σχ. 16.



Σχ. 17.

τοῦ βάρους Α καὶ ἐπὶ τοῦ βάρους Β τὸ αὐτὸ βάρος Γ. Παρατηροῦμεν ὅτι :

$$Α + Γ > Β + Γ \qquad (2)$$

Τὸ ἀνωτέρω πείραμα μᾶς διευκολύνει νὰ κατανοήσωμεν ὅτι, ἐὰν μεταξὺ δύο ἀκεραίων α, β εἶναι $\alpha > \beta$ τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$, ὅπου $\gamma \in N_0$ καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha > \beta$.

$$\boxed{\alpha > \beta \iff \alpha + \gamma > \beta + \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in N_0}$$

**Ἐὰν προσθέσωμεν (ἢ ἀφαιρέσωμεν) τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἰς τὰ μέλη μιᾶς ἀνισότητος, λαμβάνομεν πάλιν ἀνισότητα τῆς αὐτῆς φορᾶς.**

Αἱ ἰδιότητες τῆς διαγραφῆς εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν εἶναι δυνατὸν νὰ γραφοῦν καὶ ὡς ἑξῆς.

$$\alpha = \beta \iff \alpha - \gamma = \beta - \gamma$$
$$\alpha > \beta \iff \alpha - \gamma > \beta - \gamma$$

ὅπου $\alpha, \beta, \gamma \in N_0$ καὶ $\beta \geqq \gamma$

Παραθέτομεν κατωτέρω συγκεντρωτικὸν πίνακα τῶν ἰδιοτήτων τῆς ἀφαιρέσεως.

**Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma \in N_0$ τότε**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $\alpha - \beta = (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$ | $\alpha \geqq \beta$ |
| **2.** | $\alpha - \beta = (\alpha - \gamma) - (\beta - \gamma)$ | $\alpha \geqq \beta, \beta \geqq \gamma$ |
| **3.** | $\alpha = \beta \iff \alpha + \gamma = \beta + \gamma$ | |
| **4.** | $\alpha = \beta \iff \alpha - \gamma = \beta - \gamma$ | $\alpha \geqq \gamma$ |
| **5.** | $\alpha > \beta \iff \alpha + \gamma > \beta + \gamma$ | |
| **6.** | $\alpha > \beta \iff \alpha - \gamma > \beta - \gamma$ | $\beta \geqq \gamma$ |
| **7.** | $(\alpha + \beta) - \gamma = (\alpha - \gamma) + \beta$ | $\alpha \geqq \gamma$ |
| **8.** | $\alpha + (\beta - \gamma) = (\alpha + \beta) - \gamma$ | $\beta \geqq \gamma$ |
| **9.** | $\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha + \gamma) - \beta$ | $\alpha \geqq \beta - \gamma$ |
| **10.** | $\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma$ | $\alpha \geqq \beta + \gamma$ |

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

57. Νὰ ἐκτελέσετε μὲ δύο τρόπους τὰς κάτωθι πράξεις :

α) $(100 - 60) + 59$ β) $(80 - 50) - 25$
γ) $105 - (80 - 50)$ δ) $80 + (40 - 30)$

58. Χρησιμοποιήσατε τὴν ἰδιότητα προσθέσεως μιᾶς διαφορᾶς εἰς ἀριθμὸν διὰ νὰ συμπληρώσετε τὰς ἰσότητας.

α) $20 + (\alpha - 2) =$ β) $60 + (\alpha - 10) =$

59. Χρησιμοποιήσατε τὴν ἰδιότητα ἀφαιρέσεως μιᾶς διαφορᾶς διὰ νὰ συμπληρώσετε τὰς ἑξῆς ἰσότητας.

α) $30 - (\alpha - 10) =$ β) $\alpha - (\beta - 12) =$

γ) $\alpha - (\ldots - 5) = \alpha + 5 - \beta$

60. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ $(5 + \alpha) - (3 + \alpha) =$

## 27. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Εἷς ταμίας ἔχει εἰς τὸ ταμεῖον του 800 δραχ. Ἐν συνεχείᾳ εἰσπράττει 120 δραχ., πληρώνει 50 δραχ. καὶ τέλος εἰσπράττει 70 δραχ. Πόσα χρήματα θὰ ἔχῃ τελικῶς εἰς τὸ ταμεῖον του ;

Οἱ ὑπολογισμοὶ τοῦ ταμίου μᾶς ὁδηγοῦν εἰς τὰς ἑξῆς κατὰ σειρὰν πράξεις μεταξὺ ἀριθμῶν :

$$800 + 120 = 920$$
$$920 - 50 = 870$$
$$870 + 70 = 940$$

Αἱ τρεῖς αὐταὶ διαδοχικαὶ πράξεις σημειώνονται χάριν συντομίας ὡς ἑξῆς :

$$800 + 120 - 50 + 70 \qquad (1)$$

Ἡ γραφὴ (1) ἡ ὁποία παριστάνει μίαν διαδοχὴν προσθέσεων εἴτε ἀφαιρέσεων, ὀνομάζεται *ἀριθμητικὴ παράστασις*.

Οἱ ἀριθμοὶ 80, 120, 50 καὶ 70 λέγονται *ὅροι* τῆς παραστάσεως αὐτῆς. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς διαδοχικῆς ἐκτελέσεως τῶν πράξεων λέγεται *τιμὴ* τῆς *ἀριθμητικῆς* παραστάσεως.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἡ ἀριθμητικὴ παράστασις

$$25 - 8 + 5 - 12$$

δηλώνει τὴν ἑξῆς διαδοχὴν πράξεων :

$$25 - 8 = 17, \qquad 17 + 5 = 22 \qquad \text{καὶ} \qquad 22 - 12 = 10$$

Συνεπῶς ἔχει ἀριθμητικὴν τιμὴν 10.

**Παρατήρησις**

Εἶναι δυνατὸν εἰς μίαν ἀριθμητικὴν παράστασιν νὰ ὑπάρχουν παρενθέσεις. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν χρησιμοποιοῦμεν τὰς ἰδιότητας τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμήν της.

Π.χ.
$$10 + 7 - (5 - 3) = 10 + 7 + 3 - 5 = 15$$
$$10 + 7 + (5 - 3) = 10 + 7 + 5 - 3 = 19$$
$$100 - (34 + 5 + 12) = 100 - 34 - 5 - 12 = 49$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

61. Νὰ εὕρετε τὰς τιμὰς τῶν ἀριθμητικῶν παραστάσεων :

α) $20 - 5 + 15 + 30 - 22 - 7$ β) $12 - 10 + 30 - 8 + 7$

62. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις :

α) $13 - (6 - 1) - (9 - 8 + 1)$ β) $8 + [3 + (7 - 5) - (5 - 2)]$

63. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $\chi - 4 + 6 + 2 = 28$

64. Ἐὰν $\alpha + \beta = 12$ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$$30 + (\alpha + 3) - (10 - \beta)$$

## 28. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

### 28.1. Ὁρισμός

Τὸ ἄθροισμα

$$12 + 12 + 12 + 12 + 12$$

ἀποτελεῖται ἀπὸ ἴσους προσθετέους. Συνεπῶς διὰ νὰ τὸ ὁρίσωμεν ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν ποῖον προσθετέον λαμβάνομεν καὶ πόσας φοράς.

Διὰ τοῦτο ἀντὶ νὰ γράφωμεν

$$12 + 12 + 12 + 12 + 12 \quad \text{γράφομεν} \quad 5 \cdot 12$$

Τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα ὀνομάζεται γινόμενον 5 ἐπὶ 12.

Εἰς τὸ γινόμενον τοῦτο ὁ ἀριθμὸς 5, ὁ ὁποῖος δηλώνει τὸ πλῆθος τῶν ἴσων ὅρωνὀνομάζεται πολλαπλασιαστής, ὁ δὲ 12 πολλαπλασιαστέος. Ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος ὀνομάζονται ὅροι ἢ παράγοντες τοῦ γινομένου.

Ὁμοίως τὸ ἄθροισμα

$$\beta + \beta + \beta + \beta$$

λέγεται γινόμενον τοῦ 4 ἐπὶ τὸ β καὶ γράφεται $4.\beta$

Γενικῶς τὸ ἄθροισμα

$$\beta + \beta + \ldots . + \beta \qquad (\alpha \text{ φορὰς})$$

λέγεται γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸ β

Γράφεται δὲ $\alpha \cdot \beta$ ἢ $\alpha \times \beta$.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ α παριστάνει ἀκέραιον μεγαλύτερον τῆς μονάδος $(\alpha > 1)$.

**Ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εἰς τὸ ζεῦγος (α, β) ἀντιστοιχίζομεν τὸ γινόμενον α · β ὀνομάζεται πολλαπλασιασμὸς τοῦ α ἐπὶ τὸ β.**

$$(\alpha, \beta) \xrightarrow{\times} \alpha \cdot \beta$$

---

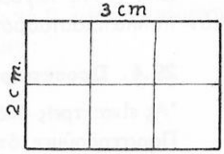
* Δὲν πρέπει νὰ συγχέωμεν τὸ «γινόμενον» μὲ τὸν «πολλαπλασιασμόν». Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις, ἐνῶ τὸ γινόμενον εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως (ἀριθμός).

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὅπως ἡ πρόσθεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι διμε-
.ἡς πρᾶξις.

### 28.2. Εἰδικαὶ περιπτώσεις

Διὰ νὰ γενικεύσωμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ εἰς τὴν πε-
ρίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι 1 ἢ 0 συμφωνοῦμεν ὅτι :

$$\left.\begin{array}{l} 1\cdot\beta=\beta, \\ 0\cdot\beta=0 \end{array}\right\} \quad \beta\in N_0$$

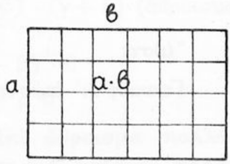


Σχ. 18

### 28. 3. Γεωμετρικὴ παράστασις τοῦ γινομένου

Τὸ παραπλεύρως ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, σχ. 18 ἔχει διαστάσεις 2cm καὶ 3cm καὶ εἶναι χω-ρισμένον εἰς τετράγωνα πλευρᾶς 1cm. Τὸ γινόμε-νον $2.3=6$, εἶναι ἴσον μὲ τὸ πλῆθος τῶν τετραγώ-νων τούτων.

Γενικῶς : Ἐὰν $\alpha, \beta\in N_0$, τότε τὸ γινόμενον $\alpha.\beta$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ πλῆθος τῶν τετραγώνων πλευρᾶς 1cm εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ἓν ὀρθογώνιον μὲ διαστά-σεις α cm καὶ β cm, σχ. 19.



Σχ. 19.

## 29. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

### 29. 1. Ὕπαρξις γινομένου, μονότιμον

Ἐὰν σκεφθῶμεν ὅτι ἕκαστον γινόμενον εἶναι ἓν ἄθροισμα :

Π.χ. $\quad 3.4=4+4+4$

$\quad\quad 5.\beta=\beta+\beta+\beta+\beta+\beta$

ἐννοοῦμεν ὅτι, ἐὰν δοθοῦν δύο ἀκέραιοι, α, β τότε ὑπάρχει εἷς καὶ μόνον εἷς ἀκέραιος ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ γινόμενον α.β αὐτῶν.

### 29. 2. Μεταθετικὴ

Εἶναι $\quad 3.5=5+5+5=15$

Ἀλλὰ καὶ $\quad 5.3=3+3+3+3+3=15$

Ἤτοι $\quad 3.5=5.3$

Γενικῶς ἐὰν $\alpha, \beta\in N_0$ τότε $\boxed{\alpha.\beta=\beta.\alpha}$

**Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις μεταθετική**

**29. 3. Οὐδέτερον στοιχεῖον**

Καθὼς εἴδομεν : $3 \cdot 1 = 1 . 3 = 3$

$5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = 5$

Γενικῶς δι' ἕκαστον ἀκέραιον α εἶναι :

$$\boxed{\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha}$$

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ μονὰς εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ μάλιστα τὸ μοναδικόν.

**29.4. Προσεταιριστικὴ**

Ἄς εἶναι τρεῖς ἀκέραιοι κατὰ σειράν, π.χ. οἱ ἀκέραιοι 2, 5, 6.
Παρατηροῦμεν ὅτι :

$$2 \cdot 5 = 10 \qquad\qquad 5 \cdot 6 = 30$$
$$10 \cdot 6 = 60 \qquad\qquad 2 \cdot 30 = 60$$

Ἤ $(2 \cdot 5) \cdot 6 = 60$ Ἤ $2 \cdot (5 \cdot 6) = 60$

Ὥστε $(2 \cdot 5) \cdot 6 = 2 \cdot (5 \cdot 6)$

Γενικῶς δι' ἑκάστην τριάδα ἀκεραίων α,β,γ, εἶναι :

$$\boxed{(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)}$$

**Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις προσεταιριστικὴ**

**29. 5. Ἐπιμεριστικὴ**

α) Ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν:

Εἶναι $3 \cdot (2+5) = (2+5) + (2+5) + (2+5)$

ἢ $3 \cdot (2+5) = (2+2+2) + (5+5+5)$

ἢ $3 \cdot (2+5) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5$

(Μὲ τὴν γραφὴν $2 \cdot 3 + 3 \cdot 5$ ἐννοοῦμεν τὸ ἄθροισμα $(2 \cdot 3) + (3 \cdot 5)$)

Γενικῶς δι' ἑκάστην τριάδα ἀκεραίων α, β, γ εἶναι :

$$\boxed{\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma}$$

**Ὁ πολλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν.**

β) Ὡς πρὸς τὴν ἀφαίρεσιν:

Παρατηροῦμεν ὅτι : $3 \cdot (7-5) = 3 \cdot 2 = 6$

Ἀλλὰ καὶ $3 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = 21 - 15 = 6$

Ἄρα $3 \cdot (7-5) = 3 \cdot 7 - 3 \cdot 5$

Γενικῶς ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma \in N_0$ καὶ $\beta > \gamma$

τότε $\boxed{\alpha\cdot(\beta-\gamma)=\alpha\cdot\beta-\alpha\cdot\gamma}$

**Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν ἀφαίρεσιν.**

**Ἐφαρμογαὶ**

1) Ἡ ἰσότης $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$

γράφεται $\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta+\gamma)$ Διατί ;

Τὸ α΄ μέλος αὐτῆς εἶναι ἄθροισμα δυὸ γινομένων, ἐνῶ τὸ β΄ μέλος γινόμενον ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ ἓν ἄθροισμα. Συμφώνως πρὸς αὐτὴν ἔχομεν :

α) $$5\cdot4+5\cdot6=5\cdot(4+6)$$
$$=5\cdot10$$

β) $$2\cdot\alpha+3\cdot\alpha=(2+3)\cdot\alpha$$
$$=5\cdot\alpha$$

2) Ἡ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ γινόμενον : $(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta)$ (ἄθροισμα ἐπὶ ἄθροισμα).

$$(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta)=(\alpha+\beta)\cdot\gamma+(\alpha+\beta)\cdot\delta$$

Ἢ $$(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta)=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma+\alpha\cdot\delta+\beta\cdot\delta$$

Ἤτοι : **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἄθροισμα πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἑνὸς ἀθροίσματος μὲ ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἄλλου ἀθροίσματος καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα.**

Π. χ. διὰ τὸ γινόμενον $(2+4)\cdot(3+5)$

ἔχομεν : $$(2+4)\cdot(3+5)=2\cdot3+2\cdot5+4\cdot3+4\cdot5$$
$$=6+10+12+20=48$$

## 29. 6. Ἰδιότητες διαγραφῆς

α) Ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἰσοδυναμίαν

$$\alpha=\beta \iff \alpha+\gamma=\beta+\gamma \quad \text{ὅπου } \alpha,\beta,\gamma\in N_0$$

ἔχομεν $$\alpha=\beta \iff \alpha+\alpha=\beta+\alpha$$
$$\alpha=\beta \iff \alpha+\alpha=\beta+\beta \quad \text{ἐπειδὴ } \alpha=\beta$$

ἢ $$\alpha=\beta \iff 2.\alpha=2.\beta$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἐὰν συνεχίσωμεν ὁμοίως, εὑρίσκομεν

$$\alpha=\beta \iff 3\cdot\alpha=3\cdot\beta$$

Γενικῶς, ἐὰν $\gamma\in N$

τότε $\boxed{\alpha=\beta \iff \alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma}$

Ὑπογραμμίζομεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἰσοδυναμία ἰσχύει ὅταν ὁ γ εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ ὄχι μηδέν.

Π.χ. Ἐκ τῆς ἰσότητος $6 \cdot x = 6 \cdot 7$

ἕπεται ὅτι $x = 7$

ἐνῶ ἐκ τῆς ἰσότητος $0 \cdot 6 = 0 \cdot 3$

δὲν ἕπεται ὅτι $6 = 3$

β) Σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω, ἐκ τῆς σχέσεως

$$\alpha > \beta \iff \alpha + \gamma > \beta + \gamma$$

ὁδηγούμεθα εἰς τὴν σχέσιν

$$\boxed{\alpha > \beta \iff \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma \quad \text{ὅπου } \gamma \in N}$$

Π.χ. Ἐκ τῆς ἀνισότητος $3 > 2$ συνάγομεν ὅτι καὶ $3.1524 > 2.1524$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

65. Συμπληρώσατε τὰς ἰσότητας

$6 \, . \, 9 = 9 + 9 + \ldots\ldots$ $\qquad$ $4 \, . \, \alpha = \alpha + $

66) Συμπληρώσατε τὴν συνεπαγωγὴν $\alpha \, . \, \beta = \alpha \Longrightarrow \beta = ;$
ὅπου $\alpha \neq 0$. Τί δύνασθε νὰ εἴπετε ὅταν $\alpha = 0$

67. Συμπληρώσατε τὰς ἰσότητας

$4 \, . \, \beta = \beta \, . \, \ldots\ldots$ $\qquad$ $3 \, . \, (5 \, . \, \alpha) = 15 \ldots\ldots$

68. Νὰ εὕρετε κατὰ δύο τρόπους τὰ γινόμενα

α) $3 \, (4 + 7)$ $\quad$ β) $(3 + 2) . (5 + 4)$ $\quad$ γ) $(8 + 3) . (12 + 5)$

69. Νὰ γράψετε ὑπὸ μορφὴν γινομένου τὰ ἀθροίσματα

α) $3 \, . \, \alpha + 5.\alpha$, $\quad$ $7 \, . \, \alpha + 3 \, . \, \alpha + 2 \, . \, \alpha$, $\quad$ $6 + 9$

70. Τί παθαίνει τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων ὅταν ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται κατὰ μονάδα.
(Χρησιμοποιήσατε ἀριθμητικὰ παραδείγματα καὶ ἔπειτα γενικοὺς ἀριθμούς).

## 30. ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

Μία πόλις ἔχει 3 Γυμνάσια. Ἕκαστον Γυμνάσιον ἔχει 6 τάξεις. Ἑκάστη τάξις ἔχει 2 τμήματα. Ἕκαστον τμῆμα ἔχει 50 μαθητάς. Πόσους μαθητὰς ἔχουν τὰ Γυμνάσια τῆς πόλεως αὐτῆς :

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν συνολικὸν ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν τῶν τριῶν αὐτῶν Γυμνασίων δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς :

Ἀριθμὸς τάξεων $3 \cdot 6 = 18$

» τμημάτων $18 \cdot 2 = 36$ ἢ $(3 \cdot 6) \cdot 2 = 36$

» μαθητῶν $36 \cdot 50 = 1800$ ἢ $[\,(3 \cdot 6) \cdot 2\,] . 50 = 1800$

Ὁ ἀριθμὸς 1800 λέγεται γ ι ν ό μ ε ν ο ν τῶν ἀριθμῶν 3,6, 2, 50 κατὰ τὴν σειρὰν αὐτήν·

γράφομεν δὲ $3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 50 = 1800$

Ἤτοι $3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 50 = [\,(3 \cdot 6) \cdot 2\,] \cdot 50$

Σημειώνομεν ὅτι ἡ γραφὴ (3 · 6) δηλώνει ἕνα ἀριθμόν: τὸ γινόμενον 3·6 = 18, ἡ δὲ γραφὴ [ (3·6)·2 ] δηλώνει ἕνα ἀριθμόν: τὸ γινόμενον 18.2.

Γενικῶς ὀνομάζομεν γινόμενον τριῶν ἢ περισσοτέρων ἀκεραίων δοθέντων ς μίαν σειράν, τὸν ἀριθμὸν τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν ὅταν πολλαπλασιάσωμεν όν π ρ ῶ τ ο ν ἐπὶ τὸν δ ε ύ τ ε ρ ο ν, τὸ γ ι ν ό μ ε ν ο ν ἐπὶ τὸν τ ρ ί τ ο ν .ο.κ. μέχρι καὶ τοῦ τελευταίου.

Ἢ συμβολικῶς: Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \in N_0$ τότε $\alpha.\beta.\gamma.\delta = [(\alpha.\beta).\gamma].\delta$

## 31 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

### 31.1. Μεταθετικὴ ἰδιότης

Εἶναι $2.3.4.5. = 6.4.5. = 24.5 = 120$

Ἀλλὰ καὶ $2.5.3.4 = 10.3.4 = 30.4 = 120$

Ἤτοι $2.3.4.5 = 2.\ 5.\ 3.\ 4$

ενικῶς $\boxed{\alpha.\beta.\gamma.\delta = \alpha.\delta.\beta.\gamma = \gamma.\alpha.\beta.\delta = \ldots, \text{ ὅπου } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in N_0}$

### 31.2. Συνθετική, ἀναλυτικὴ

Εἶναι $2.\ 3.\ 4.\ 5 = 6.\ 4.\ 5 = 24.\ 5 = 120$

ἀλλὰ καὶ $2.\ (3.\ 4).\ 5 = 2.\ 12.\ 5 = 24.\ 5 = 120$

Ἤτοι $2.\ 3.\ 4.\ 5 = 2.\ (3.\ 4)\ .\ 5$

ενικῶς $\boxed{\alpha.\beta.\gamma.\delta = \alpha.(\beta.\gamma).\delta = \alpha.(\beta.\delta).\gamma \ldots \text{ ὅπου } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in N_0}$

Ἤτοι εἰς τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δυνάμεθα:

**α) Νὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο (ἢ περισσοτέρους) παράγοντας μὲ τὸ γινόμενον αὐτῶν.**

**β) Νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἕνα παράγοντα μὲ δύο (ἢ περισσοτέρους) ἄλλους οἱ ὁποῖοι ἔχουν αὐτὸν ὡς γινόμενον.**

Ἐφαρμογαί. i) $6 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 2 = 6 \cdot 100 \cdot 2 = 1200$

ii) $20 \cdot 25 \cdot 3 = 5 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 3 = 5 \cdot 100 \cdot 3 = 1500$

### 31.3. Γινόμενον ἐπὶ ἀριθμὸν

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον (2.3.5) ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 4.

Ἔχομεν $(2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4$ (Ἀναλυτικὴ ἰδιότης)

καὶ $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot (5 \cdot 4)$ (Συνθετικὴ ἰδιότης)

Ἤτοι $(2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot (5 \cdot 4)$

Γενικῶς
$$\boxed{\begin{aligned}(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)\cdot\delta &= \alpha\cdot\beta\cdot(\gamma\cdot\delta)\\ &= \alpha\cdot(\beta\cdot\delta)\cdot\gamma \quad \text{ὅπου } \alpha,\beta,\gamma,\delta\in N_0\\ &= (\alpha\cdot\delta)\cdot\beta\cdot\gamma\end{aligned}}$$

**Διὰ νὰ πολλασιάσωμεν ἓν γινόμενον μὲ ἕνα ἀριθμὸν ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα μόνον παράγοντα τοῦ γινομένου μὲ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.**

Ἐφαρμογή. $(2\cdot\alpha)\cdot 3=(2\cdot 3)\cdot\alpha=6\cdot\alpha$

**31. 4. Γινόμενον ἐπὶ γινόμενον**

Ἄς πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον 2.3 ἐπὶ τὸ γινόμενον 4.5.

Ἔχομεν: $(2\cdot 3)\cdot(4\cdot 5)=2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$ (Ἀναλυτικὴ ἰδιότης)

Γενικῶς $\boxed{(\alpha\cdot\beta)\cdot(\gamma\cdot\delta)=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta \quad \text{ὅπου } \alpha,\beta,\gamma,\delta\in N_0}$

**Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο γινόμενα ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν ἓν νέον γινόμενον τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς παράγοντας τῶν δύο γινομένων καὶ μόνον αὐτούς.**

Ἐφαρμογή: $(2\cdot\alpha)\cdot(3\cdot\beta)=2\cdot\alpha\cdot 3\cdot\beta=(2\cdot 3)\,\alpha\cdot\beta=6\cdot\alpha\cdot\beta$ ὅπου $\alpha,\beta\in N_0$

## 32. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

Οἱ ἀριθμοὶ 0, 7, 14, 21, 28 προκύπτουν ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ 7 ἐπὶ 0, 1, 2, 3, 4 ἀντιστοίχως. Διὰ τοῦτο λέγονται π ο λ λ α π λ ά σ ι α τοῦ 7.

Γενικῶς τὸ γινόμενον ἑνὸς ἀκεραίου α μὲ οἱονδήποτε ἀκέραιον λέγεται π ο λ λ α π λ ά σ ι ο ν τοῦ α.

Ἤτοι τὰ πολλαπλάσια τοῦ $\alpha\in N_0$ εἶναι: 0.α, 1.α, 2.α 3.α....

Τὸ σύνολον $\Pi(7)=\{0, 7, 14, 21, 28 \ldots\}$

τὸ ὁποῖον ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 7, λέγεται σύνολον τῶν π ο λ λ α π λ α σ ί ω ν τοῦ ἀκεραίου 7.

Τοιουτοτρόπως τὸ σύνολον τῶν πολλαπλασίων τοῦ α εἶναι:

$$\Pi(\alpha)=\{0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha \ldots\}$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ σύνολον τῶν πολλαπλασίων ἑνὸς ἀκεραίου εἶναι ἓν ἀπειροσύνολον.

**Παρατηρήσεις**

1) Ἐπειδὴ $0\cdot\alpha=0$, ὅπου $\alpha\in N_0$, ἕπεται ὅτι τὸ 0 εἶναι πολλαπλάσιον οἱουδήποτε ἀκεραίου.

2) Ἐπειδὴ $\alpha\cdot 1=\alpha$, ὅπου $\alpha\in N_0$, ἕπεται ὅτι ἕκαστος ἀκέραιος εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ἑαυτοῦ του.

# ΠΙΝΑΞ

## Ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

| | | |
|---|---|---|
| 1. Ἐὰν $\alpha, \beta \in N_0$, | τότε ὑπάρχει εἷς καὶ μόνον εἷς ἀκέραιος $\gamma = \alpha \cdot \beta \cdot$ | |
| 2. Ἐὰν $\alpha, \beta \in N_0$, | τότε | $\alpha . \beta = \beta . \alpha$ |
| 3. Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma \in N_0$, | τότε | $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ |
| 4. » » | τότε | $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ |
| 5. » $\alpha \in N_0$ | τότε | $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$ |
| 6. » $\alpha, \beta, \gamma \in N_0$ | τότε | $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = \alpha \cdot \gamma \cdot \beta \cdot \delta = \alpha \cdot \delta \cdot \beta \cdot \gamma \cdot$ |
| 7. » $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in N_0$ | τότε | $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \cdot \delta = \alpha \cdot (\delta \cdot \beta) \cdot \gamma$ |
| 8. » » | τότε | $(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) \cdot \delta = \alpha \cdot \beta \cdot (\gamma \cdot \delta)$ |
| 9. » » | τότε | $(\alpha \cdot \beta) \cdot (\gamma \cdot \delta) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta$ |
| 10. » $\alpha, \beta \in N_0, \gamma \in N$ » | | $\alpha = \beta \Longleftrightarrow \alpha . \gamma = \beta . \gamma$ |
| 11. » » | » | $\alpha > \beta \Longleftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ |

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

71. Εἰς τὰς ἰσότητας ι) $\alpha . \beta . \gamma = 24$ ιι) $\alpha . \beta . \gamma = 72$ νὰ δώσετε ἑκάστην δυνατὴν τιμὴν εἰς τὰ γράμματα α, β, γ ὥστε νὰ ἀληθεύουν αὗται.

72. Ποῖαι ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ γράψωμεν :

ι) $2 . 7 . 9 . 4 = 8 . 63 = 2 . 7 . 36$ ιι) $25 . 4 . 5 . = 100 . 5 = 25 . 20$

73. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι 50. Πῶς θὰ μεταβληθῇ τοῦτο :

α) Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἕνα παράγοντα ἐπὶ 3, β) ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἕνα παράγοντα ἐπὶ 5 καὶ τὸν ἄλλον ἐπὶ 2.

74. Συμπληρώσατε τὰς κατωτέρω σχέσεις :

$\chi = 3 \Longleftrightarrow 5 . \chi = ;$ $\chi < 4 \Longleftrightarrow 7 . \chi < \dots$

75. α) Γράψατε τὸ σύνολον τῶν πολλαπλασίων τοῦ 6 τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ 20 καὶ 76.

β) Γράψατε 3 διψήφια καὶ 4 τριψήφια πολλαπλάσια τοῦ 15.

## 33. Η ΠΡΑΞΙΣ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

### 33. 1. Ὁρισμὸς

Ὁ ἐπιστάτης τοῦ Γυμνασίου διὰ νὰ δώσῃ 5 κιμωλίας εἰς ἕκαστον τῶν 12 τμημάτων αὐτοῦ λαμβάνει ἐν ὅλῳ κιμωλίας $12 \cdot 5 = 60$.

Ὅταν φθάνῃ εἰς τὴν Α' τάξιν λησμονεῖ πόσας κιμωλίας πρέπει νὰ δώσῃ εἰς ἕκαστον τμῆμα. Τοιουτοτρόπως γεννᾶται τὸ ἑξῆς πρόβλημα :

Τὸ γινόμενον τοῦ 12 μὲ «κάποιον» ἀκέραιον ἰσοῦται μὲ 60. Ποῖος εἶναι ὁ ἀκέραιος οὗτος;

Ἤτοι, ἐὰν παραστήσωμεν μὲ χ τὸν ζητούμενον ἀκέραιον θὰ πρέπει

$$12 \cdot \chi = 60 \qquad (1)$$

Ὁ ἀριθμὸς $\chi = 5$ μὲ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 12 διὰ νὰ δώσῃ γινόμενον 60 λέγεται ἀ κ ρ ι β ὲ ς  π η λ ί κ ο ν  τῶν ἀριθμῶν 60 καὶ 12

Γράφομεν δὲ $$60 : 12 = \chi \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἐννοοῦμεν ὅτι αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) ἐκφράζουν τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἔχουν τὴν αὐτὴν σημασίαν (εἶναι ταυτόσημοι). Ἤτοι : Ἐὰν ἰσχύῃ ἑκάστη ἀπὸ αὐτὰς θὰ ἰσχύῃ καὶ ἡ ἄλλη. Διὰ τοῦτο γράφομεν

$$12 . \chi = 60 \iff 60 : 12 = \chi$$

Γενικῶς : **Ἐὰν $\beta \in \mathbf{N}_0$, $\alpha \in \mathbf{N}$ καὶ ὑπάρχῃ ἀκέραιος $\chi$ τοιοῦτος ὥστε**

$$\alpha \cdot \chi = \beta$$

**τότε λέγομεν ὅτι ὁ $\chi$ εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τοῦ $\beta$ διὰ $\alpha$.**

Γράφομεν δὲ $$\beta : \alpha = \chi$$

**Ἡ πρᾶξις μὲ τὴν ὁποίαν εἰς τὸ ζεῦγος $(\beta, \alpha)$ ἀντιστοιχίζομεν τὸ ἀκριβὲς πηλίκον $\beta : \alpha$, ἐὰν ὑπάρχῃ, ὀνομάζεται τελεία διαίρεσις.**

$$(\beta, \alpha) \xrightarrow{\;:\;} \beta : \alpha$$

$\beta$ εἶναι ὁ δ ι α ι ρ ε τ έ ο ς αὐτῆς καὶ ὁ $\alpha$ δ ι α ι ρ έ τ η ς. Τὸ σύμβολον τῆς διαιρέσεως εἶναι :

**33.2.** Ἄς ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ παράδειγμά μας.

Ὁ ἐπιστάτης ἐγνώριζεν ὅτι ὁ 60 ἦτο πολλαπλάσιον τοῦ 12. Ἐλησμόνησεν ὅμως ποῖον πολλαπλάσιον.

Ἄς ἴδωμεν πρὸς τοῦτο τὰ διαδοχικὰ πολλαπλάσια τοῦ 12

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $0 \cdot 12$ | $1 \cdot 12$ | $2 \cdot 12$ | $3 \cdot 12$ | $4 \cdot 12$ | $5 \cdot 12$ | . . . |
| Ἤ | 0 | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | . . . |

Μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχει τὸ 60. Εἶναι δὲ $60 = 5 \cdot 12$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ 5 εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τοῦ 60 διὰ 12.

Γενικῶς, ἐὰν $\alpha$ καὶ $\beta$ εἶναι δύο ἀκέραιοι, $\alpha \neq 0$, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀκριβὲς πηλίκον $\beta : \alpha$ σχηματίζομεν τὸ σύνολον τῶν διαδοχικῶν πολλαπλασίων τοῦ $\alpha$. $$\{ 0 \cdot \alpha,\ 1 \cdot \alpha,\ 2 \cdot \alpha,\ 3 \cdot \alpha,\ \ldots\ldots\ \pi . \alpha \ldots . \}$$

Ὑπάρχουν τότε δύο περιπτώσεις :

ι) Ὁ $\beta$ νὰ εἶναι στοιχεῖον τοῦ ἀνωτέρω συνόλου· π.χ. νὰ εἶναι $\beta = \pi . \alpha$. Τότε ὑπάρχει εἰς τὸ σύνολον $N_0$ ἀκριβὲς πηλίκον τοῦ $\beta$ διὰ $\alpha$· εἶναι τὸ $\pi$.

ιι) Ὁ $\beta$ νὰ μὴ εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου τούτου. Τότε δ ὲ ν  ὑ π ά ρ χ ε ι ἀκριβὲς πηλίκον τοῦ $\beta$ διὰ $\alpha$ εἰς τὸ $N_0$.

Ὥστε: **Ἡ τελεία διαίρεσις β διὰ α εἶναι δυνατὴ εἰς τὸ σύνολον $N_0$ μόνον ὅταν ὁ β εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ α.**

**33.3. Ἰσοδυναμία σχέσεων $\alpha\cdot\beta=\gamma$, $\gamma:\beta=\alpha$, $\gamma:\alpha=\beta$.**

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως ἔχομεν:

$$3\cdot4=12 \iff 12:4=3$$
$$4\cdot3=12 \iff 12:3=4$$

Γενικῶς, ὅπως φαίνεται παραστατικῶς καὶ εἰς τὸ σχ. 19, ἐὰν μεταξὺ τριῶν ἀκεραίων α, β, γ εἶναι $\alpha.\beta=\gamma$, θὰ εἶναι ἐπίσης καὶ $\gamma:\beta=\alpha$ καὶ $\gamma:\alpha=\beta$

Ἐπίσης, ἐὰν εἶναι $\gamma:\beta=\alpha$ (ἢ $\gamma:\alpha=\beta$) θὰ εἶναι καὶ $\alpha.\beta=\gamma$

Ἢ συμβολικῶς:

$$\boxed{\begin{array}{ccc}\alpha\cdot\beta=\gamma & \iff & \gamma:\beta=\alpha\\ \alpha\cdot\beta=\gamma & \iff & \gamma:\alpha=\beta\end{array}}$$

**Παραδείγματα**

α) Ἀφοῦ εἶναι $4\cdot5=20$ εἶναι ἐπίσης $20:4=5$ καὶ $20:5=4$

β) Ἀφοῦ εἶναι $36:12=3$ εἶναι ἐπίσης $3\cdot12=36$ καὶ $36:3=12$

**33.4. Ἐπίλυσις ἁπλῶν ἐξισώσεων**

α) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς χ τοιοῦτος ὥστε $8.\chi=56$

Διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν σκεπτόμεθα ὅτι:

$$\alpha\cdot\beta=\gamma \iff \beta=\gamma:\alpha$$

Ἄρα $8\cdot\chi=56 \iff \chi=56:8$ Ἤτοι $\chi=7$

Ἐπαλήθευσις $8.7=56$

β) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς χ τοιοῦτος ὥστε $\chi:7=4$

Σκεπτόμεθα ὅτι $\gamma:\beta=\alpha \iff \gamma=\alpha\cdot\beta$

Ἄρα $\chi:7=4 \iff \chi=7\cdot4$ Ἤτοι $\chi=28$

Ἐπαλήθευσις $28:7=4$

γ) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς χ τοιοῦτος ὥστε $72:\chi=8$

Σκεπτόμεθα ὅτι $\alpha:\gamma=\beta \iff \alpha:\beta=\gamma$

Ἄρα $72:\chi=8 \iff 72:8=\chi$ Ἤτοι $\chi=9$

Ἐπαλήθευσις $72:9=8$

Γενικῶς, ἑκάστη ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\alpha.\chi=\beta$ ἔχει τὴν λύσιν $\chi=\beta:\alpha$

Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\chi:\alpha=\beta$ ἔχει τὴν λύσιν $\chi=\beta\cdot\alpha$

καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\beta:\chi=\alpha$ ἔχει τὴν λύσιν $\chi=\beta:\alpha$

ὅπου $\alpha\in N$, $\beta\in N_0$ καὶ αἱ ἐξισώσεις ἔχουν λύσιν εἰς τὸ σύνολον $N_0$.

| Ἐξίσωσις | | Λύσις |
|---|---|---|
| $\alpha . \chi = \beta$ | $\longrightarrow$ | $\chi = \beta : \alpha$ |
| $\chi : \alpha = \beta$ | $\longrightarrow$ | $\chi = \beta . \alpha$ |
| $\beta : \chi = \alpha$ | $\longrightarrow$ | $\chi = \beta : \alpha$ |

**33.5. Ἡ διαίρεσις ὡς πρᾶξις ἀντίστροφος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.**

Ἐὰν τὸν ἀριθμὸν 4 πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 5 λαμβάνομεν 20. Ἐὰν τὸν 20 διαιρέσωμεν διὰ 5 ἐπανευρίσκομεν 4

$$4.5 = 20 \quad \text{καὶ} \quad 20 : 5 = 4$$

Ἦτοι: $(4 \cdot 5) : 5 = 4$

Γενικῶς $\boxed{(\alpha \cdot \beta) : \beta = \alpha}$

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ διαίρεσις εἶναι ἀντίστροφος πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

### 34. ΕΙΔΙΚΑΙ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

**34.1. Ἡ διαίρεσις $0 : \alpha$, ὅπου $\alpha \in N$.**

Θέτομεν $0 : \alpha = \chi \iff 0 = \chi \cdot \alpha$

Ἐπειδὴ $\alpha \neq 0$, τὸ γινόμενον $\chi . \alpha$ εἶναι 0 μόνον ὅταν $\chi = 0$.

Ἄρα $0 : \alpha = 0$

**34.2. Ἡ διαίρεσις $0 : 0$**

Θέτομεν $0 : 0 = \chi \iff 0 = 0 \cdot \chi$

Ἡ ἰσότης $0 = 0 . \chi$ ἀληθεύει δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ $\chi$. (Διατί ;)

Συνεπῶς, ἕκαστος ἀριθμὸς δύναται νὰ εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως $0 : 0$ Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ διαίρεσις $0 : 0$ εἶναι ἀόριστος.

**34.3. Ἡ διαίρεσις $\alpha : 0$, ὅπου $\alpha \in N$**

Θέτομεν $\alpha : 0 = \chi \iff \alpha = 0 \cdot \chi$

Ἡ ἰσότης $\alpha = 0 . \chi$ δι' οὐδεμίαν τιμὴν τοῦ $\chi$ ἀληθεύει (Διατί) ;

Συνεπῶς ἡ διαίρεσις $\alpha : 0$ εἶναι ἀδύνατος.

**34.4. Ἡ διαίρεσις $\alpha : 1$, ὅπου $\alpha \in N_0$**

Θέτομεν $\alpha : 1 = \chi \iff \alpha = \chi \cdot 1 \iff \alpha = \chi$

Ἄρα $\alpha : 1 = \alpha$

## 34.5. Ἡ διαίρεσις $\alpha : \alpha$ ὅπου $\alpha \in N$

Θέτομεν $\quad \alpha : \alpha = \chi \Longleftrightarrow \alpha = \alpha \cdot \chi$

Ἡ ἰσότης $\alpha = \alpha . \chi$ ἀληθεύει μόνον ὅταν $\chi = 1$ (Διατί ;)

Ἄρα $\quad \alpha : \alpha = 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

76) Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $325 = 13.25$ ποίας τελείας διαιρέσεις συνάγετε;

77. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

α) $20 . \chi = 80$
β) $\chi : 19 = 21$
γ) $63 : \chi = 7$

78. Ποῖαι ἀπὸ τὰς κατωτέρω ἰσότητας εἶναι ἀληθεῖς καὶ ποῖαι δὲν εἶναι;

| | | | |
|---|---|---|---|
| $0 : 5 = 5$ | $0 : 3 = 0$ | $0 : 0 = 2$ | $3 : 0 = 3$ |
| $3 : 1 = 0$ | $3 : 1 = 3$ | $6 : 6 = 1$ | $6 : 6 = 0$ |

# 35. Η ΑΤΕΛΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

## 3.5.1 Ὁρισμὸς

Καθὼς εἴδομεν ἡ ἐξίσωσις $12 \cdot \chi = 60$ ἔχει τὴν λύσιν $\chi = 5$ διότι ὁ 60 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 12.

Ἄς λάβωμεν ἀντὶ τοῦ 60 τὸν ἀκέραιον 67· ἤτοι ἄς λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$12 \cdot \chi = 67$$

Διὰ νὰ ἴδωμεν ἐὰν ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ἔχῃ λύσιν εἰς τὸ σύνολον $N_0$ ἀρκεῖ νὰ ἴδωμεν ἐὰν τὸ 67 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 12. Διὰ τοῦτο γράφομεν τὸ σύνολον τῶν διαδοχικῶν πολλαπλασίων τοῦ 12.

$$A = \{ 12 \cdot 0,\ 12 \cdot 1,\ 12 \cdot 2,\ 12 \cdot 3,\ 12 \cdot 4,\ 12 \cdot 5,\ 12 \cdot 6, \ldots \}$$

Ἤ $\quad A = \{ 0,\ 12,\ 24,\ 36,\ 48,\ 60,\ 72 \ \ldots \}$

Καθὼς παρατηροῦμεν τὸ 67 δὲν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 12. Τοῦτο σημαίνει ὅτι δὲν ὑπάρχει εἰς τὸ σύνολον $N_0$ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως 67 διὰ 12. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἡ διαίρεσις εἶναι **ἀτελὴς εἰς τὸ σύνολον** $N_0$. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 67 περιέχεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν πολλαπλασίων τοῦ 12. Συγκεκριμένως μεταξὺ τοῦ 60 καὶ τοῦ 72.

$$60 < 67 < 72$$

Ἤ $\quad 5 \cdot 12 < 67 < 6 \cdot 12$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω διπλῆν ἀνισότητα ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 5 εἶναι ὁ **μέγιστος** ἀκέραιος μὲ τὸν ὁποῖον εἶναι δυνατὸν νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 12 καὶ νὰ δώσῃ γινόμενον μικρότερον τοῦ 67. Τὸν ἀκέραιον 5 ὀνομάζομεν **ἀκέραιον πηλίκον** τῆς ἀτελοῦς διαιρέσεως 67 διὰ 12· τὴν δὲ διαφορὰν

$$67 - 5 \cdot 12 = 67 - 60 = 7$$

ὀνομάζομεν **ὑπόλοιπον** αὐτῆς.

Γενικῶς : Ἐὰν εἶναι $\alpha$ καὶ $\beta$ δύο ἀκέραιοι $\alpha \neq 0$, $\beta > \alpha$ τότε, ἐὰν τὸ $\beta$ δὲν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ $\alpha$, θὰ περιέχεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν πολλαπλασίων $\pi\,\alpha$ καὶ $(\pi + 1).\alpha$ αὐτοῦ.

Ἤτοι : $$\pi.\alpha < \beta < (\pi + 1)\cdot\alpha \qquad (1)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἡ διαίρεσις $\beta$ διὰ $\alpha$ εἶναι ἀ τ ε λ ή ς εἰς τὸ σύνολον $N_0$.

Ἀπὸ τὴν διπλῆν ἀνισότητα (1) ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ ἀκέραιος $\pi$ εἶναι ὁ μέγιστος ἀκέραιος τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ $\alpha$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\beta$. Διὰ τοῦτο ὁ ἀκέραιος $\pi$ λέγεται ἀ κ έ ρ α ι ο ν π η λ ί κ ο ν τῆς ἀτελοῦς διαιρέσεως $\beta$ διὰ $\alpha$.

Ἡ διαφορὰ $$\beta - (\pi\,.\,\alpha) = \upsilon \qquad (2)$$

εἶναι μικροτέρα τοῦ $\alpha$ (διατί ;) καὶ ὀνομάζεται ὑ π ό λ ο ι π ο ν τῆς ἀτελοῦς διαιρέσεως $\beta$ διὰ $\alpha$.

Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν

$$\left.\begin{array}{r}\beta = (\pi\,\alpha) + \upsilon\\ \upsilon < \alpha\end{array}\right\} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ δὲ συνήθως παριστάνομεν μὲ $\Delta$ τὸν διαιρετέον, $\delta$ τὸν διαιρέτην, $\pi$ τὸ πηλίκον καὶ $\upsilon$ τὸ ὑπόλοιπον, αἱ ἀνωτέρω σχέσεις (3) γράφονται :

$$\left.\begin{array}{l}\Delta = \delta.\pi + \upsilon\\ \upsilon < \delta\end{array}\right\} \qquad (4)$$

Αἱ σχέσεις (4), ὡς εἶναι γραμμέναι, ἀποτελοῦν τὰς βασικὰς συνθήκας τῆς ἀτελοῦς διαιρέσεως. Μᾶς ἐπιτρέπουν δὲ ἐκ τῶν $\Delta$ καὶ $\delta$ νὰ εὕρωμεν κατὰ ἕνα μόνον τρόπον * δύο ἄλλους ἀριθμούς : τὸ ἀκέραιον πηλίκον $\pi$ καὶ τὸ ὑπόλοιπον $\upsilon$ τῆς ἀτελοῦς διαιρέσεως $\Delta$ διὰ $\delta$.

Εἰς τὸ παράδειγμά μας ἡ σχέσις

$$67 = 5\,.\,12 + 7$$

δηλώνει ὅτι ὁ 5 εἶναι τὸ ἀκέραιον πηλίκον, ὁ 12 διαιρέτης καὶ ὁ $7 < 12$ τὸ ὑπόλοιπον.

Ἡ ἰδία σχέσις δὲν μᾶς ἐπιτρέπει νὰ λάβωμεν τὸν 12 ὡς πηλίκον καὶ τὸν 5 ὡς διαιρέτην, διότι τότε τὸ ὑπόλοιπον 7 θὰ ἦτο μεγαλύτερον τοῦ διαιρέτου 5.

**Παρατηρήσεις**

ι) Ἐὰν εἰς τὰς συνθήκας (4) εἶναι $\upsilon = 0$, ἔχομεν $\Delta = \delta.\pi$.

Ἤτοι ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία καὶ ὁ ἀκέραιος $\pi$ εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον αὐτῆς

ιι) Ἐὰν λάβωμεν $\Delta = 2$ καὶ $\delta = 3$ ἤτοι $\Delta < \delta$ παρατηροῦμεν ὅτι αἱ συνθῆκαι (4) ἀληθεύουν μόνον ὅταν $\pi = 0$.

---

* Πράγματι $(\pi.\,\delta) + \upsilon < (\pi\,\delta) + \delta$ διότι $\upsilon < \delta$
ἢ $\Delta < (\pi + 1)\,\delta$
Δηλαδὴ ὁ ἀκέραιος $\pi$ εἶναι ὁ μοναδικὸς μέγιστος ἀκέραιος διὰ τὸν ὁποῖον εἶναι $\pi\,.\,\delta < \Delta$.

$$2 = 0 \cdot 3 + 2 \quad \text{καὶ} \quad 2 < 3$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι τὸ ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως 2 διὰ 3 εἶναι τὸ μηδέν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

79. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο διαδοχικὰ πολλαπλάσια τοῦ 15 μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ ἀριθμὸς 80. Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἀποτέλεσμα μὲ μίαν διπλῆν ἀνισότητα· νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀκέραιον πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως.

80. Νὰ γραφῇ τὸ σύνολον τῶν ὑπολοίπων τῶν διαιρέσεων αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὡς διαιρέτην:

ι) 4 ιι) 9 ιιι) $\gamma \in N_0$

81. Συμπληρώσατε τὸν ἀκέραιον ὁ ὁποῖος λείπει εἰς τὰς ἰσότητας:

$$\ldots\ldots = 97 . 122 + 38$$
$$615 = \ldots\ldots 30 + 15$$

82. Ὁ διαιρέτης μιᾶς διαιρέσεως εἶναι ἴσος μὲ 7 ποῖαι εἶναι αἱ δυναταὶ τιμαὶ τοῦ ὑπολοίπου;

## 36. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

**36.1.** Παρατηροῦμεν ὅτι ἐνῶ $35 : 7 = 5$, δὲν ὑπάρχει ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως $7 : 35$ εἰς τὸ σύνολον $N_0$.

Ὥστε: **Δὲν ἰσχύει ἡ μεταθετικὴ ἰδιότης.**

**36.2.** Ἂς λάβωμεν τὰς διαιρέσεις $(40 : 10) : 2$ καὶ $40 : (10 : 2)$

Ἔχομεν: α) $40 : 10 = 4$ καὶ $4 : 2 = 2$

Ἤτοι $(40 : 10) : 2 = 2$ (1)

β) $10 : 2 = 5$ καὶ $40 : 5 = 8$

Ἤτοι $40 : (10 : 2) = 8$ (2)

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι

$$(40 : 10) : 2 \neq 40 : (10 : 2)$$

Ὥστε: **Δὲν ἰσχύει ἡ προσεταιριστικὴ ἰδιότης.**

**36.3. Πολλαπλασιασμὸς τῶν ὅρων διαιρέσεως μὲ τὸν αὐτὸν φυσικὸν ἀριθμόν.**

Εἰς τὸν παραπλεύρως πίνακα ἔχομεν συγκεντρώσει στοιχεῖα ἀπὸ τέσσαρας διαιρέσεις. Ἂς προσέξωμεν τὸν διαιρετέον (Δ), τὸ διαιρέτην (δ), τὸ πηλίκον (π) καὶ τὸ ὑπόλοιπον (υ). Παρατηροῦμεν ὅτι:

Ὅταν πολλαπλασιάζεται ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἐπὶ 2, 3, 4 τότε τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 2,3,4 ἀντιστοίχως.

| Δ | δ | π | υ |
|---|---|---|---|
| 23 | 5 | 4 | 3 |
| 46 | 10 | 4 | 6 |
| 69 | 15 | 4 | 9 |
| 92 | 20 | 4 | 12 |

Γενικῶς, ἄς λάβωμεν τὰς συνθήκας διαιρέσεως

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon, \qquad \upsilon < \delta$$

καὶ ἄς πολλαπλασιάσωμεν ἑκάστην τούτων μὲ τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν μ.

Ἔχομεν $\Delta \cdot \mu = (\delta \cdot \pi + \upsilon) \cdot \mu, \qquad \mu \cdot \upsilon < \mu \cdot \delta$

ἤ $\Delta \cdot \mu = \mu \cdot \delta \cdot \pi + \mu \cdot \upsilon, \qquad \mu \cdot \upsilon < \mu \cdot \delta$

» $\Delta \cdot \mu = (\mu \cdot \delta) \cdot \pi + \mu \cdot \upsilon \qquad \mu \cdot \upsilon < \mu \cdot \delta \qquad (1)$

Ἐκ τῶν συνθηκῶν (1) συνάγομεν ὅτι τὸ γινόμενον $\mu \cdot \upsilon$ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εἰς τὴν ὁποίαν διαιρετέος εἶναι τὸ γινόμενον $\Delta \cdot \mu$, διαιρέτης τὸ γινόμενον $\delta \cdot \mu$ καὶ πηλίκον τὸ π.

Ὥστε: **Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους μιᾶς διαιρέσεως μὲ τὸν αὐτὸν φυσικὸν ἀριθμὸν τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.**

Τοιουτοτρόπως, μία τελεία διαίρεσις παραμένει τελεία καὶ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ὅρων της μὲ τὸν αὐτὸν φυσικὸν ἀριθμόν.

**36.4. Διαίρεσις διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ἑνὸς ἀθροίσματος μὲ ὅρους πολλαπλάσια τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.**

Εἰς τὸ ἄθροισμα $12 + 20 + 16$ ὅλοι οἱ ὅροι του εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 4.

Ἤτοι ἔχομεν:

$$12 = 4.3 \iff 12 : 4 = 3$$
$$20 = 4.5 \iff 20 : 4 = 5$$
$$\underline{16 = 4.4} \iff \underline{16 : 4 = 4}$$

Ἀπὸ τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἀνωτέρω ἰσοδυναμιῶν ἔχομεν

$$12 + 20 + 16 = 4.3 + 4.5 + 4.4$$

Ἤ $12 + 20 + 16 = 4.(3 + 5 + 4)$ (Διατί;)

Ἤ $(12 + 20 + 16) : 4 = 3 + 5 + 4 \qquad (1)$

Ἀπὸ τὰ δεύτερα μέλη ἔχομεν

$$(12 : 4) + (20 : 4) + (16 : 4) = 3 + 5 + 4 \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$(12 + 20 + 16) : 4 = (12 : 4) + (20 : 4) + (16 : 4)$$

Γενικῶς: Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma, \in N_0$ καὶ πολλαπλάσια τοῦ $\nu$ τότε

$$\boxed{(\alpha + \beta + \gamma) : \nu = (\alpha : \nu) + (\beta : \nu) + (\gamma : \nu)}$$

Ὥστε: **Ἡ διαίρεσις εἶναι ἐπιμεριστικὴ πρᾶξις ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν ὅταν αἱ μερικαὶ διαιρέσεις εἶναι δυναταὶ εἰς τὸ $N_0$.**

**36.5. Διαίρεσις διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ μιᾶς διαφορᾶς μὲ ὅρους πολλαπλάσια τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.**

Οἱ ἀκέραιοι 28 καὶ 21 εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 7.

Ἤτοι ἔχομεν $28 = 4 \cdot 7 \iff 28 : 7 = 4$

καὶ $21 = 3 \cdot 7 \iff 21 : 7 = 3$

Ἀπὸ τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἀνωτέρω ἰσοδυναμιῶν ἔχομεν

$$28 - 21 = 7 \cdot 4 - 7 \cdot 3 = 7 \cdot (4 - 3) \qquad \text{(Διατί ;)}$$

Ἤτοι $$(28 - 21) : 7 = 4 - 3 \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰδίων ἰσοδυναμιῶν ἔχομεν

$$(28 : 7) - (21 : 7) = 4 - 3 \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν :

$$(28 - 21) : 7 = (28 : 7) - (21 : 7)$$

Γενικῶς, ἐὰν οἱ ἀκέραιοι α, β εἶναι πολλαπλάσια τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν καὶ

$\alpha > \beta$ τότε $$\boxed{(\alpha - \beta) : \nu = (\alpha : \nu) - (\beta : \nu)}$$

Ὥστε : **Ἡ διαίρεσις εἶναι ἐπιμεριστικὴ πρᾶξις ὡς πρὸς τὴν ἀφαίρεσιν ὅταν ὅλαι αἱ μερικαὶ διαιρέσεις εἶναι δυναταὶ εἰς τὸ $N_0$.**

**36.6. Διαίρεσις διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ἑνὸς γινομένου τὸ ὁποῖον ἔχει ἕνα τοὐλάχιστον παράγοντα πολλαπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.**

Ἔστω τὸ γινόμενον $13 \cdot 12 \cdot 5$ τοῦ ὁποίου ὁ παράγων 12 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4.

Ἔχομεν $$13 \cdot 12 \cdot 5 = 13 \cdot (3 \cdot 4) \cdot 5$$
$$= 4 \cdot (13 \cdot 3 \cdot 5) \qquad \text{(Διατί ;)}$$

Ἢ $$(13.12.5) : 4 = 13 \cdot 3 \cdot 5$$
$$= 13 \cdot (12 : 4) \cdot 5$$

Γενικῶς, ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma \in N_0$, $\nu \in N$ καὶ β = πολλαπλάσιον τοῦ ν τότε

$$\boxed{(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) : \nu = \alpha \cdot (\beta : \nu) \cdot \gamma} \qquad (1)$$

**Εἰδικὴ περίπτωσις**

Ἐὰν $\nu = \beta$, ἡ σχέσις (1) γίνεται

$$(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) : \beta = \alpha \cdot (\beta : \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot 1 \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma$$

Ὥστε: **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἓν γινόμενον δι' ἑνὸς ἐκ τῶν παραγόντων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτὸν ἀπὸ τὸ γινόμενον.**

Ἐφαρμογή : $(25.38.13) : 38 = 25.13$

**36.7. Πηλίκον ἀριθμοῦ διὰ γινομένου**

Διὰ τὸ πηλίκον $50 : (2.5)$ ἔχομεν

$$2.5 = 10 \quad \text{καὶ} \quad 50 : 10 = 5$$

Ἤτοι $\qquad 50 : (2.5) = 5 \qquad (1)$

Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι

$$50 : 2 = 25 \quad \text{καὶ} \quad 25 : 5 = 5$$

Ἤτοι $\qquad (50 : 2) : 5 = 5 \qquad (2)$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν ὅτι

$$50 : (2.5) = (50 : 2) : 5$$

Γενικῶς, ἐὰν $\alpha \in N$ καὶ $\beta, \gamma, \delta \in N_0$, ἔχομεν:

$$\boxed{\alpha : (\beta . \gamma . \delta .) = [\, (\alpha : \beta) : \gamma \,] : \delta}$$

μὲ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὅλαι αἱ σημειούμεναι διαιρέσεις εἶναι δυναταὶ εἰς τὸ $N_0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

83. Ὑπολογίσατε μὲ διαφόρους τρόπους τὰ ἑξῆς πηλίκα:

| | |
|---|---|
| $36 : (3 . 4) =$ | $(36 + 24) : 12$ |
| $(24 - 8) : 2 =$ | $(53 . 14) : 7$ |
| $(12 . 19 . 5) : 19 =$ | $(12 . 19 . 5) : 38$ |

84) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις:

$(27 . \alpha - 12) : 3, \quad 36\alpha : (3\alpha . 4) = \quad (120 . \alpha + 8\alpha + 24) : 8$

85. Ἐπαληθεύσατε ὅτι, ἐὰν εἰς τὸν διαιρετέον μιᾶς διαιρέσεως προσθέσωμεν ἓν πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δὲν μεταβάλλεται.

## 37. ΑΛΛΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

**37. 1.** Ἐκτὸς τῶν ἀριθμητικῶν παραστάσεων αἱ ὁποῖαι περιέχουν προσθέσεις εἴτε ἀφαιρέσεις συνηντήσαμεν ἤδη καὶ ἄλλας ἀριθμητικὰς παραστάσεις, ἤτοι ἀριθμητικὰς παραστάσεις εἰς τὰς ὁποίας εἶναι σημειωμέναι καὶ ἄλλαι πράξεις (πολλαπλασιασμὸς ἢ διαίρεσις).

**37.2.** Ὡς γνωστὸν ἡ γραφὴ $\quad 3 + (8 : 2) \qquad (1)$

δηλώνει τὰς ἑξῆς κατὰ σειρὰν πράξεις:

α) $8 : 2 = 4$ καὶ β) $3 + 4 = 7$

Ἤτοι $\qquad 3 + (8 : 2) = 3 + 4 = 7$

Ὁμοίως ἡ γραφὴ $\qquad 23 - (8.2) \qquad (2)$

δηλώνει: α) $8.2 = 16$ καὶ β) $23 - 16 = 7$

Ἤτοι $\qquad 23 - (8.2) = 23 - 16 = 7$

**Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν τὴν γραφὴν τῶν παραστάσεων (1) καὶ (2) παραλείπομεν τὰς παρενθέσεις καὶ συμφωνοῦμεν τὰ ἑξῆς:**

**Ὅταν εἰς μίαν ἀριθμητικὴν παράστασιν εἶναι σημειωμένοι καὶ πολλαπλασιασμοὶ ἢ διαιρέσεις ἐκτελοῦμεν πρῶτα τὰς πράξεις αὐτὰς καὶ**

ἔπειτα τὰς προσθέσεις ἢ ἀφαιρέσεις κατὰ σειρὰν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά.

**Παραδείγματα**

Ἀντὶ $7+(4.5)$ γράφομεν $7+4.5$ καὶ εὑρίσκομεν $7+20=27$

» $(20:5)-2$ » $20:5-2$ » $4-2=2$

» $(60:2)+(5\cdot 3)$ » $60:2+5\cdot 3$ » $30+15=45$

» $3+(7\cdot 2)-(2+3.2)$ » $3+7\cdot 2-(2+6)$

ἢ $3+14-8$ » $17-8=9$

Ὁμοίως ἡ γραφὴ $6\cdot 5-7\cdot 3+1$ σημαίνει $(6\cdot 5)-(7\cdot 3)+1=30-21+1=10$

» » $12:2+3.2-1$ » $(12:2)+(3\cdot 2)-1=6+6-1=11$

» » $3\cdot 4:2+5$ » $(3\cdot 4):2+5=12:2+5=11$

**Ἀντιπαράδειγμα**

Ἡ παράστασις $(7+4)\cdot 5$ δὲν γράφεται $7+4\cdot 5$

Πράγματι $(7+4)\cdot 5=11\cdot 5=55$ ἐνῶ $7+4\cdot 5=7+20=27$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

86. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι ἀριθμητικαὶ παραστάσεις:

α) $6.5-3.2$ β) $6.5-3.2-2$

γ) $88:4.2+3.4-5$ δ) $120:8-2.4+2$

ε) $3+4.2+8.(12-4)$

## ΠΙΝΑΞ

### Ἰδιοτήτων τῆς διαιρέσεως

1. $\Delta:\delta=\pi \iff \Delta=\delta.\pi$ (τελεία διαίρεσις)
2. $\Delta=\delta.\pi+\upsilon$ καὶ $\upsilon<\delta$ (ἀτελὴς διαίρεσις)
3. Ἐάν $\Delta=\delta.\pi+\upsilon$ καὶ $\upsilon<\delta$
   τότε $\mu.\Delta=(\mu.\delta)\pi+\mu.\upsilon$ καὶ $\mu.\upsilon<\mu.\delta$
4. $(\alpha+\beta+\gamma):\delta=(\alpha:\delta)+(\beta:\delta)+(\gamma:\delta)$
5. $(\alpha-\beta):\gamma=(\alpha:\gamma)-(\beta:\gamma)$
6. $(\alpha.\beta):\gamma=(\alpha:\gamma).\beta$
7. $\alpha:(\beta.\gamma)=(\alpha:\beta):\gamma$
8. $0:\alpha=0$, $0:0$ ἀόριστος,
   $\alpha:\alpha=1$ $\alpha:0=$ ἀδύνατος,



Ἐννοεῖται ὅτι αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες ἰσχύουν ὑπὸ τοὺς ἑξῆς περιορισμούς:

α) Οἱ διαιρέται νὰ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός.

β) Αἱ σημειωμέναι διαιρέσεις νὰ εἶναι δυναταὶ εἰς τὸ $N_0$.

## 38. ΤΕΧΝΙΚΗ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΕΙΣ ΤΟ ΔΕΚΑΔΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ

Καθὼς εἴδομεν εἰς τὸν κεφάλαιον τῆς ἀριθμήσεως ἕκαστος ἀριθμὸς εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἀποτελεῖται ἀπὸ μονάδας διαφόρων τάξεων. Π.χ. ὁ ἀριθμὸς 2537 ἀποτελεῖται ἀπὸ 7 μονάδας (Μ), 3 δεκάδας (Δ), 5 ἑκατοντάδας (Ε) καὶ 2 χιλιάδας (Χ), γράφεται δὲ κατὰ τρόπον ἀνεπτυγμένον ὡς ἑξῆς :

$$2537 = 2\,X + 5\,E + 3\,\Delta + 7M$$

Ὁμοίως $$4052 = 4\,X + 0\,E + 5\,\Delta + 2M$$

Ἡ ἀνωτέρω ἀνεπτυγμένη γραφὴ καὶ αἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων θὰ μᾶς βοηθήσουν εἰς τὴν κατανόησιν τῆς τεχνικῆς τῆς ἐκτελέσεως αὐτῶν.

## 39. ΕΚΤΕΛΕΣΙΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

**39.1.** Διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

α) Οἱ ἀριθμοὶ εἶναι μονοψήφιοι.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα δύο μονοψηφίων, π.χ. τὸ ἄθροισμα 5 σὺν 3, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν μετὰ τὸ 5 τοὺς τρεῖς διαδοχικοὺς ἀκεραίους 6, 7, 8 καὶ νὰ λάβωμεν τὸν τελευταῖον ἐξ αὐτῶν. Τὸ ἄθροισμα δύο μονοψηφίων ὀφείλομεν νὰ τὸ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης.

Ὁ κατωτέρω πίναξ μᾶς βοηθεῖ εἰς τὴν ἄσκησιν τῆς προσθέσεως μονοψηφίων ἀριθμῶν.

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 6 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 7 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 8 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 9 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |

Ὁ τρόπος συντάξεως τοῦ πίνακος γίνεται ἀμέσως φανερός, ὅταν προσέξωμεν κατὰ ποῖον τρόπον εἶναι γραμμέναι αἱ διαδοχικαὶ σειραὶ τῶν ἀριθμῶν. Τὸ ἄθροισμα π.χ. 5+ 3 εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς σειρᾶς μὲ ἐπικεφαλίδα 5 καὶ τῆς στήλης μὲ ἐπικεφαλίδα 3. Τὸ ἴδιον ἄθροισμα εὑρίσκομεν εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς σειρᾶς μὲ ἐπικεφαλίδα 3 καὶ τῆς στήλης μὲ ἐπικεφαλίδα 5. Διατί ;

β) Οἱ ἀριθμοὶ εἶναι πολυψήφιοι.

Ἡ πρόσθεσις πολυψηφίων ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν μονοψηφίων ὡς ἑξῆς :

Ἔστω τὸ ἄθροισμα $235 + 528$

$$\left.\begin{array}{l} 235 = 2\,E + 3\,\Delta + 5\,M \\ 528 = 5\,E + 2\,\Delta + 8\,M \end{array}\right\} \quad \text{(Πρόσθεσις ἀθροισμάτων)}$$

$$7\,E + 5\,\Delta + 13M = 7\,E + 6\,\Delta + 3M \quad (\text{Διότι } 10\,M = 1\Delta)$$
$$= 763$$

Συντομώτερον ἡ ἀνωτέρω διαδικασία ἐκτελεῖται μὲ τὴν γνωστὴν πρακτικὴν διάταξιν τῆς προσθέσεως. Θέτομεν τὰς μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ μεταφέρομεν νοερῶς τὸ κρατούμενον μιᾶς τάξεως εἰς τὴν ἀμέσως ἑπομένην τάξιν.

$$\begin{array}{r} 235 \\ + \ 528 \\ \hline 763 \end{array}$$

**39.2.** Δι' ἐφαρμογῆς τῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως εἶναι δυνατὸν νὰ ἐλέγξωμεν ἐὰν ἓν ἄθροισμα εὑρέθη ὀρθῶς (δοκιμὴ) ἢ καὶ νὰ ἐκτελέσωμεν πολλάκις ἀσφαλέστερον μίαν πρόσθεσιν.

$$\begin{array}{r} 895 \\ 379 \\ + \quad 27 \\ 1521 \\ \hline 2822 \end{array}$$

Ἡ πρόσθεσις ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω καὶ ἀντιστρόφως πρέπει νὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα (Διατί ;)

$$\begin{array}{r|l} \left.\begin{array}{r} 124 \\ 7832 \end{array}\right\} & \text{Μερικὰ ἀθροίσματα} \\ & 7956 \\ \hline \left.\begin{array}{r} 28 \\ 589 \\ 375 \end{array}\right\} & 992 \\ \hline 8948 & = 8948 \end{array}$$

Ἡ ἀντικατάστασις προσθετέων μὲ τὸ ἄθροισμα των διευκολύνει ἢ ἐλέγχει τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα (Διατί;)

## 40. ΕΚΤΕΛΕΣΙΣ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

**40.1.** Διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

α) Οἱ ἀριθμοὶ εἶναι μονοψήφιοι

$$9 - 5 = 4 \qquad \text{διότι} \qquad 4 + 5 = 9$$

β) Ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ ψηφίου τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ μειωτέου.

$$\left.\begin{array}{l} 678 = 6\,E + 7\,\Delta + 8\,M \\ 375 = 3\,E + 7\,\Delta + 5\,M \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Ἀφαίρεσις ἀθροίσματος} \\ \text{ἀπὸ ἄθροισμα}\end{array}$$
$$3\,E + 0\Delta + 3\,M = 303$$

Συντόμως

$$\begin{array}{r} 678 \\ - \ 375 \\ \hline 303 \end{array}$$

γ) Μερικὰ ψηφία τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερα τῶν ἀντιστοίχων ψηφίων τοῦ μειωτέου.

| | |
|---|---|
| $\begin{array}{r} 4827 = 4X + 8E + 2\Delta + 7M \\ -\ 369 = \quad 3E + 6\Delta + 9M \\ \hline ; \quad ; \end{array}$ | Προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἤτοι προσθέτομεν: Εἰς τὸν μειωτέον 10Μ, 10Δ Εἰς τὸν ἀφαιρετέον 1Δ, 1Ε |

$$\begin{array}{r} 4X + 8E + \overset{10}{2\Delta} + \overset{10}{7M} \\ {}^{1}3E + {}^{1}6\Delta + 9M \\ \hline 4X + 4E + 5\Delta + 8M = 4458 \end{array}$$

Ἢ συντόμως

$$\begin{array}{r} 4827 \\ -\ 369 \\ \hline 4458 \end{array}$$

**40.2.** Δοκιμή

Διὰ τὴν δοκιμὴν τῆς ἀφαιρέσεως, χρησιμοποιοῦμεν μίαν ἀπὸ τὰς γνωστὰς ἰσοδυναμίας.

$$\alpha - \beta = \gamma \iff \alpha = \beta + \gamma \iff \alpha \quad \gamma \quad \beta$$

Π.χ. $837 - 253 = 584 \iff 584 + 253 = 837 \iff 837 \quad 584 \quad 253$

## 41. ΕΚΤΕΛΕΣΙΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

**41.1.** Διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις:

α) Γινόμενον μονοψηφίων

Π.χ. $3 . 5 = 5 + 5 + 5$
$= 10 + 5 = 15$

Τὰ γινόμενα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν δύο οἱουσδήποτε μονοψηφίους ἀριθμοὺς εἶναι συγκεντρωμένα εἰς τὸν κατωτέρω Πυθαγόρειον* πίνακα:

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 0 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 0 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 0 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

*Πυθαγόρας: Ἕλλην φιλόσοφος καὶ μαθηματικός, γεννηθεὶς εἰς Σάμον περὶ τὸ 580 π.χ. Ἱδρυτὴς τῆς Πυθαγορείου Σχολῆς, ἥτις ἀπετέλεσεν κέντρον ἀναπτύξεως τῶν Μαθηματικῶν καὶ ἰδίως τῆς Γεωμετρίας.

Ὁ τρόπος τῆς κατασκευῆς τοῦ πίνακος γίνεται ἀμέσως φανερός, ἐὰν προσέξωμεν ὅτι ι) ἡ πρώτη στήλη ἔχει μόνον μηδενικά. ιι) Εἰς τὴν δευτέραν στήλην οἱ ἀριθμοὶ αὐξάνονται κατὰ ἕν, εἰς τὴν τρίτην κατὰ δύο, εἰς τὴν τετάρτην κατὰ τρία κ.ο.κ.

Τὸ γινόμενον 5 · 7 εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς σειρᾶς μὲ ἐπικεφαλίδα 5 καὶ τῆς στήλης μὲ ἐπικεφαλίδα 7 ἢ ....

β) Ὁ εἷς παράγων εἶναι 10, 100, 1000 κ.ο.κ.

Π.χ. 15 · 10 = 15 δεκάδες
= 150 μονάδες
15 · 100 = 15 ἑκατοντάδες
= 1500 μονάδες

Ὥστε : ...

γ) Ὁ εἷς παράγων μονοψήφιος καὶ ὁ ἄλλος πολυψήφιος

Π.χ.

| | | |
|---|---|---|
| 218 | 2Ε + 1Δ + 8Μ | (Ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης) |
| 3 | 3 | |
| 654 | 6Ε + 3Δ + 24Μ = | 6Ε + 5Δ + 4Μ = 654 |

δ) Καὶ οἱ δύο παράγοντες πολυψήφιοι

Π.χ. 318 . 253 = 318 . (2Ε + 5Δ + 3Μ)
= 318 . 200 + 318 . 50 + 318 . 3 (Ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης)

Ὑπολογίζομεν τὰ μερικὰ γινόμενα καὶ προσθέτομεν :

| | | |
|---|---|---|
| 318 . 200 = (318 . 2) . 100 = 636 . 100 = 63600 | (Γινόμενον ἐπὶ 200) | |
| 318 . 50 = (318 . 5) . 10 = 1590 . 10 = 15900 | » » | 50 |
| 318 . 3 = 954 | » » | 3 |

318 . 200 + 318 . 50 + 318 . 3 = 80454

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως γίνεται κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον ὡς ἑξῆς :

| | |
|---|---|
| 318 | |
| × 253 | |
| 954 | (Γινόμενον 318 ἐπὶ 3) |
| 1590 | ( » » » 50) |
| 636 | ( » » » 200) |
| 80454 | |

Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἔχῃ ἐνδιάμεσα μηδενικὰ ἔχομεν τὴν ἑξῆς συντομίαν :

$$\begin{array}{r} 3768 \\ \times\ 1007 \\ \hline 26376 \\ 0000\phantom{0} \\ 0000\phantom{00} \\ 3768\phantom{000} \\ \hline 3794376 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3768 \\ \times\ 1007 \\ \hline 26376 \\ 3768\phantom{000} \\ \hline 3794376 \end{array}$$

**41.2. Δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ**

Διὰ τὴν δοκιμὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ χρησιμοποιοῦμεν τὴν μεταθετικὴν ἰδιότητα, ἐναλλάσσοντες τὸν πολλαπλασιαστὴν μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον.

**41.3. Συντομίαι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ**

Εἰς πολλὰς περιπτώσεις ἡ ἐφαρμογὴ τῶν γνωστῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μᾶς ὁδηγεῖ συντομώτερον εἰς τὸ ἀποτέλεσμα.

α) Ὁ εἷς τῶν παραγόντων εἶναι, 9, 99, 999, . . . . .

Π.χ. $35 \cdot 9 = 35 \cdot (10 - 1) = 35 \cdot 10 - 35 \cdot 1 = 350 - 35 = 315$ $\qquad 28 \cdot 99 = 28 \cdot (100 - 1) = 2800 - 28 \cdot 1 = 2800 - 28 = 2772$

β) Ὁ εἷς τῶν παραγόντων εἶναι 11, 101, 1001 . . . . .

Π.χ. $32 . 11 = 32 \cdot (10 + 1) = 32 \cdot 10 + 32 \cdot 1 = 320 + 32 = 352$ $\qquad 175 . 101 = 175 . (100 + 1) = 17500 + 175 . 1 = 17500 + 175 = 17675$

## 42. ΕΚΤΕΛΕΣΙΣ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

Διὰ τὴν κατανόησιν τοῦ τρόπου ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως, ὑπενθυμίζομεν τὰς βασικὰς συνθήκας.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = \delta\pi + \upsilon \\ \upsilon < \delta \end{array}\right\}$$

Διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

**42.1. Ὁ διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιοι**

Ἔστω ἡ διαίρεσις τοῦ 65 διὰ 7. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ πυθαγορείου πίνακος εὑρίσκομεν

$$65 = 7.9 + 2$$

Ἄρα $\qquad \pi = 9 \quad$ καὶ $\quad \upsilon = 2$

Αἱ διαιρέσεις αὗται ἐκτελοῦνται συνήθως ἀπὸ μνήμης.

**42. 2. Ὁ διαιρέτης μονοψήφιος καὶ τὸ πηλίκον πολυψήφιον.**

Ἔστω ἡ διαίρεσις 953 διὰ 7.

Εἶναι : $7.100 < 953 < 7.1000$

Ἄρα τὸ πηλίκον θὰ εἶναι τριψήφιος ἀριθμός.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ψηφίων του ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

α) Ψηφίον ἑκατοντάδων (Ε) : Ὁ Διαιρετέος γράφεται

$$\begin{aligned} 953 &= 9E + 5\Delta + 3M \\ &= (7E + 2E) + 5\Delta + 3M \end{aligned}$$

Ἡ διαίρεσις 7Ε : 7 εἶναι τελεία καὶ δίδει πηλίκον 1. Ἄρα $E = 1$.

β) Ψηφίον δεκάδων (Δ) : Ἀπὸ τὴν προηγουμένην διαίρεσιν ἔχομεν ὑπόλοιπον

$$\begin{aligned} 2E + 5\Delta + 3M &= 25\Delta + 3M \\ &= (21\Delta + 4\Delta) + 3M \end{aligned}$$

Αἱ 21Δ διαιρούμεναι διὰ 7 δίδουν ἀκριβὲς πηλίκον 3. Ἄρα $\Delta = 3$.

γ) Ψηφίον μονάδων (Μ) : Ἡ προηγουμένη διαίρεσις ἀφήνει ὑπόλοιπον

$$\begin{aligned} 4\Delta + 3M &= 43M \\ &= 42M + 1M \end{aligned}$$

Αἱ 42Μ διαιρούμεναι διὰ 7 δίδουν ἀκριβὲς πηλίκον 6. Ἄρα $M = 6$.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι

$$1E + 3\Delta + 6M = 136$$

Τὸ τελικὸν ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εἶναι 1.

Εἰς τὴν χώραν μας ἡ ἀνωτέρω διαδοχὴ τῶν πράξεων γίνεται συντόμως μὲ τὴν γνωστὴν πρακτικὴν διάταξιν τῆς διαιρέσεως

$$\begin{array}{r|l} 953 & 7 \\ \cline{2-2} 25 & 136 \\ 43 & \\ 1 & \end{array}$$

**42.3. Ὁ διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιοι.**

Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου, ἐν συνεχείᾳ ὑπολογίζομεν τὰ ψηφία αὐτοῦ, ὡς ἀνωτέρω.

Παράδειγμα 1ον: Εἰς τὴν διαίρεσιν 3763 διὰ 23 τὸ πηλίκον εἶναι τριψήφιον, διότι

$$23 \cdot 100 < 3763 < 23.1000$$

Διὰ τὴν ἔναρξιν τῆς πραξεως, γράφομεν:

$$3763 = 3Χ + 7Ε + 6Δ + 3Μ$$
$$= 37Ε + 6Δ + 3Μ$$

Παράδειγμα 2ον: Εἰς τὴν διαίρεσιν 3763:52 τὸ πηλίκον εἶναι διψήφιον, διότι

$$52 \cdot 10 < 3763 < 52 \cdot 100$$

Διὰ τὴν ἔναρξιν τῆς πράξεως γράφομεν

$$3763 = 3Χ + 7Ε + 6Δ + 3Μ$$
$$= 37Ε + 6Δ + 3Μ$$
$$= 376Δ + 3Μ$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἀρχίζομεν ἀπὸ τὰς δεκάδας τοῦ διαιρετέου, διότι αἱ ἑκατοντάδες του (37) δὲν διαιροῦνται διὰ τοῦ 52.

Εἰς τὴν πρακτικὴν διάταξιν τῆς διαιρέσεως τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἐνῷ ὁ διαιρέτης ἔχει δύο ψηφία, χωρίζομεν τρία ψηφία ἀπὸ τὸν διαιρετέον διὰ νὰ ἀρχίσωμεν τὴν διαίρεσιν.

Διὰ τὴν δοκιμὴν τῆς διαιρέσεως χρησιμοποιοῦμεν τὰς συνθήκας.

$$\left.\begin{array}{c} Δ = δπ + υ \\ υ < δ \end{array}\right\}$$

Π.χ. εἰς τὴν διαίρεσιν μὲ $Δ = 953$ καὶ $δ = 7$

ἡ εὕρεσις τοῦ $π = 136$ καὶ $υ = 1$, εἶναι ὀρθή, διότι $1 < 7$ καὶ $953 = 7.136 + 1$.

## 43. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

### 43.1. Πρόσθεσις

Πρόβλημα: Ἡ ΣΤ΄ τάξις ἑνὸς Γυμνασίου ἔχει 48 μαθητάς, ἡ Ε΄ 15 περισσοτέρους ἀπὸ τὴν ΣΤ΄ καὶ ἡ Δ΄ 12 περισσοτέρους ἀπὸ τὴν Ε΄. Πόσους μαθητὰς ἔχουν συνολικῶς αἱ 3 αὗται τάξεις;

Κατὰ τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν:

| | | |
|---|---|---|
| Ἀριθμὸς μαθητῶν | ΣΤ΄ τάξεως | 48 |
| | Ε΄ » | 48 + 15 |
| | Δ΄ » | (48 + 15) + 12 |

Συνολικὸς ἀριθμὸς μαθητῶν: $48 + (48 + 15) + (48 + 15) + 12$

ἢ $$48 + 63 + 75 = 186$$

Ὥστε αἱ 3 τελευταῖαι τάξεις ἔχουν συνολικῶς 186 μαθητάς.

**43.2. Ἀφαίρεσις.**

Ἡ ἀφαίρεσις χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων τῶν ἑξῆς δύο τύπων :

α) Ἔχει τις α δρχ. καὶ δαπανᾷ ἐξ αὐτῶν β δρχ. Πόσαι δραχμαὶ ἀπομένουν ;

β) Ἔχει τις α δραχμὰς καὶ εἷς ἄλλος β δρχ. Πόσας δραχμὰς περισσοτέρας ἀπὸ τὸν δεύτερον ἔχει ὁ πρῶτος ; (Ἐννοεῖται βεβαίως ὅτι $\alpha > \beta$).

Εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις θὰ πρέπει ἀπὸ τὸ α νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ β. Εἰς τὴν πρώτην ὅμως περίπτωσιν τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἀφαιρέσεως αὐτῆς δεικνύει πόσαι δρχ. ἀπέμειναν· διὰ τοῦτο καὶ ὀνομάζεται ὑ π ό λ ο ι π ο ν τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ α πλὴν β.

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἀφαιρέσεως δεικνύει τὴν ὑ π ε ρ ο χ ὴ ν τῶν χρημάτων τοῦ πρώτου ὡς πρὸς τὰ χρήματα τοῦ δευτέρου· διὰ τοῦτο ὀνομάζεται δ ι α φ ο ρ ὰ μεταξὺ α καὶ β.

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Σημειοῦμεν ὅτι, ὁσάκις ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν συγκεκριμένους ἀριθμούς, πρέπει νὰ προσέχωμεν νὰ εἶναι οὗτοι ὁμοειδεῖς (νὰ ἀναφέρωνται εἰς πράγματα μὲ τὴν ἰδίαν ὀνομασίαν).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

87. Τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν εἶναι 53775. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων εἶναι 43253 καὶ ὁ δεύτερος εἶναι 17473. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἄλλοι ἀριθμοί.

88. Εἷς ἔμπορος ὀφείλει 300.000 δρχ. καὶ κατέβαλεν ἔναντι τοῦ χρέους του διαδοχικῶς 27450 δρχ. 65880 δρχ. 84978 δρχ. Πόσα χρήματα ὀφείλει ἀκόμη ;

89. Εἰς ἓν ἐργοστάσιον ἐργάζονται 100 ἄτομα, ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδιά. Οἱ ἄνδρες καὶ τὰ παιδιὰ μαζὺ εἶναι 70, ἐνῷ οἱ γυναῖκες καὶ τὰ παιδιὰ μαζὺ 40. Πόσοι εἶναι οἱ ἄνδρες, πόσαι αἱ γυναῖκες καὶ πόσα τὰ παιδιά ;

90. Ἐὰν ἐλαττώσωμεν κατὰ 35 τὸν μειωτέον μιᾶς διαφορᾶς καὶ αὐξήσωμεν τὸν ἀφαιρετέον κατὰ 16, ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται ἡ διαφορά ;

## 44. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Καθὼς εἶναι γνωστὸν ὁ πολλαπλασιασμὸς χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων τοῦ ἑξῆς τύπου.

Δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων. Π.χ. ἓν αὐτοκίνητον τρέχει μὲ σταθερὰν ταχύτητα 60 km/h. Εἰς 4 h πόσα χιλιόμετρα θὰ διανύσῃ ;

Ἔχομεν $60\text{ km} + 60\text{ km} + 60\text{ km} + 60\text{ km}$

ἢ $4 \cdot 60\text{ km} = 240\text{ km}.$

Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ ἀνωτέρω τύπου πολλαπλασιάζομεν ἕνα συγκεκριμένον ἀριθμὸν (πολλαπλασιαστέος) μὲ ἕνα ἄλλον, τὸν ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς ἀφῃρημένον (πολλαπλασιαστής). Ὡς τόσον ὑπάρχουν προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο συγκεκριμένους ἀριθμούς· τότε τὸ ἐξαγόμενον εἶναι ἑτεροειδὲς καὶ πρὸς τοὺς δύο παράγοντας.

Π.χ. διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις 3 m καὶ 4 m, ἔχομεν

$$3\text{m} \cdot 4\text{m} = 12\,\text{m}^2 \qquad (\text{m} \neq \text{m}^2).$$

## 45. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

1ον Πρόβλημα: Θέλομεν νὰ μοιράσωμεν 3.600 δραχ. εἰς 8 ἀπόρους μαθητάς. Πόσας δραχμὰς θὰ δώσωμεν εἰς ἕκαστον;

Καθὼς γνωρίζομεν, ὅταν δίδεται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ὁμοειδοῦς πρὸς αὐτὰς μονάδος, ἐκτελοῦμεν διαίρεσιν.

Συγκεκριμένως διὰ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἔχομεν:

$$3.600 \text{ δρχ.} : 8 = 450 \text{ δρχ.}$$

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι: Διαιρετέος εἶναι ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων (3.600 δρχ.), διαιρέτης εἶναι ὁ ἀφῃρημένος ἀριθμὸς 8, ὁ ὁποῖος δεικνύει εἰς πόσα ἴσα μέρη μερίζεται ὁ διαιρετέος, τὸ δὲ πηλίκον εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὸν διαιρετέον ὡς μέρος αὐτοῦ.

2ον Πρόβλημα: Θέλομεν νὰ τοποθετήσωμεν 1.300 kg. σάπωνος εἰς κιβώτια χωρητικότητος 25 kg. Πόσα κιβώτια θὰ χρειασθῶμεν;

Καθὼς γνωρίζωμεν, ὅταν δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος (χωρητικότης ἑνὸς κιβωτίου) καὶ ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν ὁμοειδῶν πρὸς αὐτὴν μονάδων, ζητοῦμεν δὲ νὰ εὕρωμεν τὸ πλῆθος τῶν πολλῶν αὐτῶν μονάδων, ἐκτελοῦμεν διαίρεσιν

Συγκεκριμένως εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἔχομεν:

$$1300 \text{ kg.} : 25 \text{ kg.} = 52$$

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι:

Διαιρετέος εἶναι ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων (1300 kg.), διαιρέτης ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος (25 kg.) καὶ πηλίκον ὁ ἀφῃρημένος ἀριθμός 52, ὁ ὁποῖος δηλώνει πόσας φορὰς περιέχεται ὁ διαιρέτης εἰς τὸν διαιρετέον.

Τὰ ἀνωτέρω δύο προβλήματα εἶναι ἀντιπροσωπευτικὰ τῶν δύο γνωστῶν τύπων διαιρέσεως: Μερισμοῦ (1ον πρόβλημα) καὶ μετρήσεως (2ον πρόβλημα).

Καθὼς εἴδομεν εἰς τὴν διαίρεσιν μερισμοῦ, μερίζομεν ἓν μέγεθος (Διαιρετέος) εἰς ἴσα μέρη (τὸ πλῆθος των καθορίζει ὁ διαιρέτης). Εἰς τὴν διαίρεσιν μετρήσεως εὑρίσκομεν πόσας τὸ πολὺ φορὰς ἓν μέγεθος (διαιρέτης) περιέχεται εἰς ἓν ἄλλο ὁμοειδὲς πρὸς αὐτὸ μέγεθος (διαιρετέος).

Καὶ εἰς τὰ δύο εἴδη διαιρέσεως, ἐὰν ὑπάρχῃ ὑπόλοιπον, εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὸν διαιρετέον.

Τὸ εἶδος τῆς διαιρέσεως καθορίζεται ἑκάστην φορὰν ἐκ τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

91. Δύο έργάται είργάσθησαν μερικὰς ἡμέρας καὶ ἔλαβον ὁ μὲν πρῶτος 750 δρχ., ὁ δὲ δεύτερος 525 δρχ. Ὁ πρῶτος ἐλάμβανεν 15 δρχ. τὴν ἡμέραν περισσότερον ἀπὸ τὸν δεύτερον. Ζητεῖται: α) Πόσας ἡμέρας εἰργάσθησαν, β) τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου.

92. Ἠγόρασε κάποιος ἀπὸ τὸν παντοπώλην 11 kg. ἐλαίου καὶ ἔδωσεν εἰς αὐτὸν ἓν χιλιόδραχμον. Ὁ παντοπώλης τοῦ ἐπέστρεψεν 769 δρχ. Πόσον ἠγόρασεν τὸ κιλὸν τοῦ ἐλαίου;

93. 12 ἄτομα, ἄνδρες καὶ γυναῖκες, ἐπλήρωσαν μαζὺ δι' ἓν γεῦμα 364 δρχ. Ἕκαστος ἐκ τῶν ἀνδρῶν ἐπλήρωσεν 32 δρχ. καὶ ἑκάστη ἐκ τῶν γυναικῶν 28 δρχ. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

94. Εἰς τὸ γινόμενον 427 . 25 αὐξάνομεν τὸν πολλαπλασιαστέον κατὰ 36. Νὰ εὑρεθῇ πόσον αὐξάνει τὸ γινόμενον, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν κανονικῶς τὸν πολλαπλασιασμόν.

95. Μία ἀγελὰς μετὰ τοῦ μόσχου της ἐπωλήθησαν ἀντὶ 4800 δρχ. Ἡ ἀξία τῆς ἀγελάδος ἦτο 8πλασία τῆς ἀξίας τοῦ μόσχου σὺν 300 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία ἑκάστου ζώου.

96. Ὑπάλληλος ὑπελογίσθη ὅτι, ἐὰν δαπανᾷ 5520 δρχ. τὸν μῆνα, εἰς ἓν ἔτος θὰ ἔχῃ ἔλλειμα 6.720 δρχ. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ δαπανᾷ τὸν μῆνα, διὰ νὰ ἔχῃ περίσσευμα 4.320 δρχ.;

97. Ἓν ἀτμόπλοιον, κινούμενον μὲ ταχύτητα 14 κόμβων τὴν ὥραν, διέτρεξε τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ δύο λιμένων εἰς 9 ὥρας. Μὲ ποίαν ταχύτητα ἔπρεπε νὰ κινηθῇ διὰ νὰ φθάσῃ 2 ὥρας ἐνωρίτερον.

98. Εἷς ἔμπορος ἠγόρασεν 180 kg καφὲ πρὸς 56 δρχ. τὸ kg. Ἐπώλησεν ἔπειτα ἓν μέρος αὐτοῦ πρὸς 72 δρχ. τὸ kg καὶ τὸ ἄλλο τοῦ ἔμεινε κέρδος. Ποσα kg τοῦ ἔμειναν ὡς κέρδος;

## ΠΙΝΑΞ

### Βασικῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων εἰς τὸ $N_0$

| | | |
|---|---|---|
| 1. Ὑπάρξεως, μονότιμον | Ἐὰν $\alpha, \beta \in N_0$ ὑπάρχει εἷς καὶ μόνον εἷς, ἀριθμὸς γ ἴσος μὲ $\alpha + \beta$, καὶ εἷς καὶ μόνον εἷς ἀριθμὸς δ ἴσος μὲ $\alpha . \beta$. | |
| 2. Μεταθετική | $\alpha + \beta = \beta + \alpha$<br>$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ | $\alpha, \beta \in N_0$ |
| 3. Προσεταιριστική | $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$<br>$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ | $\alpha, \beta, \gamma \in N_0$ |
| 4. Ἐπιμεριστική | $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$ | » |
| 5. Οὐδέτερον στοιχεῖον | $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$<br>$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$ | $\alpha \in N_0$ |
| 6. Διαγραφῆς | $\alpha = \beta \Longleftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$ | $\alpha, \beta, \gamma \in N_0$ |
| | $\alpha = \beta \Longleftrightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ | $\alpha, \beta \in N_0, \gamma \in N$ |
| | $\alpha > \beta \Longleftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$ | $\alpha, \beta, \gamma \in N_0$ |
| | $\alpha > \beta \Longleftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ | $\alpha, \beta \in N_0, \gamma \in N$ |

99. Οἱ μικροὶ τροχοὶ μιᾶς ἁμάξης κάμνουν 56 στροφὰς ἀνὰ λεπτόν, ἐνῶ οἱ μεγάλοι 42. Πόσας ὀλιγωτέρας στροφὰς θὰ κάμουν οἱ μεγάλοι τροχοὶ εἰς 2 ὥρας.

100. Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ 4227 διὰ νὰ εὕρωμεν πηλίκον 13 καὶ ὑπόλοιπον 171 ;

101. 9 ἐργάται καὶ 5 ἐργάτριαι δι' ἐργασίαν 6 ἡμερῶν ἔλαβον 11340 δρχ. Ἐὰν ἑκάστη ἐργάτρια λαμβάνῃ 70 δρχ. τὴν ἡμέραν ὀλιγώτερον ἀπὸ ἕκαστον ἐργάτην, πόσον εἶναι τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου ἐργάτου ;

102. Τρεῖς ἀδελφοὶ ἐπλήρωσαν ἓν χρέος ἐξ 125.000 δρχ. Οἱ δύο μεγαλύτεροι ἐπλήρωσαν ἕκαστος κατὰ 12.500 δρχ. ὀλιγώτερα ἀπὸ τὸ διπλάσιον τῶν ὅσων ἐπλήρωσεν ὁ τρίτος. Πόσα χρήματα ἐπλήρωσεν ἕκαστος ;

103. Ἔμπορος ἐχώρισεν ὕφασμα εἰς δύο τεμάχια, τὰ ὁποῖα διέφερον εἰς μῆκος κατὰ 42 m. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν τεμαχίων, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι τὸ μῆκος τοῦ πρώτου ἦτο τετραπλάσιον ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ δευτέρου.

104. Κάποιος ἠγόρασεν 360 ὠὰ πρὸς 27 δρχ. τὰ 15 καὶ ἄλλα 360 πρὸς 21 δρχ. τὰ 18. Ἀπὸ τὰ ὠὰ αὐτὰ 72 κατεστράφησαν καὶ τὰ ὑπόλοιπα τὰ ἐπώλησεν πρὸς 45 δρχ. τὰ 27. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισεν οὗτος ;

105. Τὸ ἡμερομίσθιον ἑνὸς τεχνίτου εἶναι 3/πλάσιον τοῦ ἡμερομισθίου τοῦ βοηθοῦ του. Εἰς 5 ἡμέρας ἐργασίας ἔλαβον καὶ οἱ δύο 1200 δρχ. Ποῖον εἶναι τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου ;

106. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

$$3\chi + (5\chi + 1) = 33, \qquad 2 . (3\chi + 4) = 20$$

107. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως

$$10\alpha - 2\beta + 3(\gamma - \alpha) + 2(\alpha + 3\beta - \gamma) \qquad \text{ὅταν } \alpha = 5,\ \beta = 9,\ \gamma = 10$$

108. Ποίου ἀριθμοῦ τὸ πενταπλάσιον ἠλαττωμένον κατὰ 30 ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν ηὐξημένον κατὰ 10 ;

109. Μία μητέρα ἔχει ἡλικίαν τριπλασίαν τῆς κόρης της. Αἱ ἡλικίαι καὶ τῶν δύο μαζὺ εἶναι 80 ἔτη. Ποία εἶναι ἡ ἡλικία τῆς κόρης καὶ ποία τῆς μητέρας ;

110. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι πάντοτε πολλαπλάσιον τοῦ 3

111. Εἰς τὰς σχέσεις $\alpha - 15 = \beta$, $\alpha - 15 < \beta$ ποῖαι εἶναι αἱ μικρότεραι δυναταὶ τιμαί, τὰς ὁποίας δύνανται νὰ λάβουν τὰ α καὶ β ;

112. Ποίας τιμὰς πρέπει νὰ λάβῃ ὁ α, ἵνα αἱ παραστάσεις

$$\alpha . (7 - \beta) \quad \text{καὶ} \quad \alpha . 7 - \beta$$

εἶναι ἴσαι μεταξύ των ;

113. Ἔστω ὅτι Β = 25.8.28 χωρὶς νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ Β, νὰ εὕρετε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Β διὰ 28, 100, 56.

114. Διαιρέσατε τὸ 353 διὰ 43. Κατὰ πόσας μονάδας δυνάμεθα νὰ αὐξήσωμεν τὸν διαιρετέον, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ πηλίκον.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

### 46. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

#### 46.1. Ὁρισμὸς

Μία πολυκατοικία ἔχει 5 ὀρόφους. Ἕκαστος ὄροφος ἔχει 5 διαμερίσματα καὶ ἕκαστον διαμέρισμα 5 δωμάτια. Πόσα διαμερίσματα καὶ πόσα δωμάτια ἔχει ἡ πολυκατοικία;

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ μὲν ἀριθμὸς τῶν διαμερισμάτων εἶναι $5.5=25$
ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν δωματίων εἶναι $5\cdot5\cdot5=125$

Τὸ γινόμενον 5.5 ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο παράγοντας ἴ σ ο υ ς μὲ τὸν ἀριθμὸν 5, λέγεται δὲ δ ε υ τ έ ρ α  δ ύ ν α μ ι ς τοῦ 5 καὶ γράφεται συντόμως $5^2$.

Τὸ γινόμενον 5.5.5 ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς παράγοντας ἴ σ ο υ ς μὲ τὸν ἀριθμὸν 5, λέγεται δὲ τ ρ ί τ η  δ ύ ν α μ ι ς τοῦ 5 καὶ γράφεται συντόμως $5^3$.

Ὥστε ἐὰν $\alpha\in N_0$, τότε:

Τὸ γινόμενον $\alpha\cdot\alpha$ λέγεται δευτέρα δύναμις τοῦ α καὶ γράφεται $\alpha^2$

Τὸ γινόμενον $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha$ λέγεται τρίτη δύναμις τοῦ α καὶ γράφεται $\alpha^3$

Τὸ γινόμενον $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha$ λέγεται τετάρτη δύναμις τοῦ α καὶ γράφεται $\alpha^4$.

κ.ο.κ.

Γενικῶς: **Ἐὰν ν ἀριθμὸς μεγαλύτερος τῆς μονάδος, τὸ γινόμενον ν παραγόντων ἴσων μὲ α, λέγεται ν ι ο σ τ ὴ  δ ύ ν α μ ι ς τοῦ α.** Γράφομεν δὲ $\alpha^\nu$.

$$\boxed{\alpha^\nu = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdots\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}} \qquad \text{Ὅπου} \quad \nu\in N \text{ καὶ } \nu>1}$$

Ὁ ἀριθμὸς α λέγεται β ά σ ι ς τῆς δυνάμεως. Ὁ ἀριθμὸς ν, τὸν ὁποῖον γράφομεν δεξιὰ καὶ ὀλίγον ὑψηλότερον τῆς βάσεως, λέγεται ἐ κ θ έ τ η ς τῆς δυνάμεως.

$$\text{Δύναμις} \rightarrow \alpha^{\nu} \quad \begin{matrix} \swarrow \text{ἐκθέτης} \\ \nwarrow \text{βάσις} \end{matrix}$$

Ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν εὑρίσκομεν τὴν νιοστὴν δύναμιν αὐτοῦ $\alpha^{\nu}$, λέγεται ὕ ψ ω σ ι ς τοῦ α εἰς τὴν ν, τὸ δὲ ἐξαγόμενον λέγεται τ ι μ ὴ τῆς δυνάμεως $\alpha^{\nu}$.

**Παραδείγματα**

$3^2=3\cdot3=9$ $\qquad$ $2\cdot2\cdot2\cdot2=2^4$

$2^3=2\cdot2\cdot2=8$ $\qquad$ $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=3^5$

$5^4=5\cdot5\cdot5\cdot5=625$ $\qquad$ $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha=\alpha^6$

### 46.2. Παρατηρήσεις

α) Ἡ ἀντιμετάθεσις τῆς βάσεως μὲ τὸν ἐκθέτην εἰς μίαν δύναμιν $\alpha^{\nu}$ μεταβάλλει τὴν τιμὴν τῆς δυνάμεως, ὅταν $\alpha\neq\nu$.

Π.χ. $\qquad 5^2=25$ ἐνῷ $2^5=32$

β) Δὲν πρέπει νὰ συγχέωμεν τὰς γραφὰς $2^3$ καὶ $2\cdot3$, διότι

$$2^3=2\cdot2\cdot2=8 \quad \text{ἐνῷ} \quad 2\cdot3=3+3=6.$$

γ) Ἡ δευτέρα δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται καὶ τ ε τ ρ ά γ ω ν ο ν αὐτοῦ, ἐνῷ ἡ τρίτη δύναμις κ ύ β ο ς αὐτοῦ.

### 46. 3. Εἰδικαὶ περιπτώσεις

**I. Δυνάμεις τοῦ 0**

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς δυνάμεως ἔχομεν

$$0^2=0\cdot0=0, \qquad 0^3=0\cdot0\cdot0=0$$

Γενικῶς $0^{\nu}=\underbrace{0\cdot0\cdot\ldots0}_{\nu \text{ παράγοντες}}=0,$ ὅπου $\nu\in N,\ \nu\geq2$

**II. Δυνάμεις τοῦ 1**

$$1^2=1\cdot1=1, \qquad 1^3=1\cdot1\cdot1=1$$

Γενικῶς: $1^{\nu}=\underbrace{1\cdot1\cdot1\ldots1}_{\nu \text{ παράγοντες}}=1$ ὅπου $\nu\in N,\ \nu\geq2$

**III. Δυνάμεις τοῦ 10**

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς δυνάμεως ἔχομεν

$10^2=10\cdot10=100$ $\qquad$ $10^3=10\cdot10\cdot10=1000$

$10^4=10\cdot10\cdot10\cdot10=10\ 000$ $\qquad$ $10^5=10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=100000$

Γενικῶς: **Ἑκάστη δύναμις τοῦ 10 ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἐκθέτης.**

Ἡ χρησιμοποίησις δυνάμεων τοῦ 10 συντομεύει τὴν γραφὴν καὶ τὴν ἐκτέλεσιν πράξεων μὲ μεγάλους ἀριθμούς.

**Παραδείγματα**

α) $10.000.000 = 10^7$

β) $36.000.000 = 36.1000.000 = 36.10^6$

γ) Ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἶναι 299.00000000 cm ἀνὰ sec ἢ $299 \cdot 10^8$ cm ἀνὰ sec.

## 47. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

### 47. 1. Γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ

Ἄς λάβωμεν τὰ γινόμενα $3^2 \cdot 3^3$ καὶ $\alpha^3 \cdot \alpha^4$. Ἔχομεν:

$$3^2 \cdot 3^3 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 3^{2+3}$$

$$\alpha^3 \cdot \alpha^4 = (\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha) \cdot (\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha) = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^7 = \alpha^{3+4}$$

Γενικῶς: $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$ ὅπου $\alpha \in N_0$ $\mu, \nu, \rho \in N$

$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu \cdot \alpha^\rho = \alpha^{\mu+\nu+\rho}$ καὶ $\mu, \nu, \rho > 1$

**Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δυνάμεις μὲ τὴν αὐτὴν βάσιν, σχηματίζομεν μίαν δύναμιν μὲ τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.**

### 47. 2. Δύναμις γινομένου

Ἄς λάβωμεν τὰς δυνάμεις $(3.5)^2$ καὶ $(\alpha.\beta.\gamma)^3$. Ἔχομεν:

$$(3 \cdot 5)^2 = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5^2$$

$$(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^3 = (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) \cdot (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) \cdot (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) = \alpha\beta\gamma \cdot \alpha\beta\gamma \cdot \alpha\beta\gamma = \alpha\alpha\alpha \cdot \beta\beta\beta \cdot \gamma\gamma\gamma = \alpha^3 \cdot \beta^3 \cdot \gamma^3$$

Γενικῶς: $(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu \cdot \gamma^\nu$ ὅπου $\alpha, \beta, \gamma \in N_0$, $\nu \in N$ καὶ $\nu > 1$

**Διὰ νὰ ὑψώσωμεν ἓν γινόμενον εἰς μίαν δύναμιν ὑψώνομεν ἕκαστον παράγοντα τοῦ γινομένου εἰς τὴν δύναμιν αὐτήν.**

### 47. 3. Ὕψωσις δυνάμεως εἰς δύναμιν

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς δυνάμεως, τὸ γινόμενον $3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2$ δύναται νὰ γραφῇ $(3^2)^3$. Ἡ γραφὴ αὐτὴ λέγεται ὕψωσις δυνάμεως εἰς δύναμιν.

Ὥστε $(3^2)^3 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3^{2+2+2} = 3^{3 \cdot 2}$

Γενικῶς $\boxed{(\alpha^{\mu})^{\nu}=\alpha^{\mu\cdot\nu} \quad \text{ὅπου} \quad \alpha\in N_0 \quad \mu,\nu\in N \quad \text{καὶ} \quad \mu,\nu>1}$

**Διὰ νὰ ὑψώσωμεν μίαν δύναμιν εἰς ἄλλην δύναμιν, σχηματίζομεν μίαν δύναμιν μὲ τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν ἐκθετῶν.**

### 47. 4. Πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα

$$5^3.5^4=5^7$$

συνάγομεν ὅτι $5^3$ εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως $5^7$ διὰ $5^4$

Ἤτοι $5^7:5^4=5^3$

Ἢ $5^7:5^4=5^{7-4}$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι, $\alpha^7:\alpha^4=\alpha^{7-4}$

Γενικῶς $\boxed{\alpha^{\mu}:\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu-\nu} \quad \text{ὅπου} \quad \mu,\nu\in N \quad \text{καὶ} \quad \mu>\nu}$

**Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν (Διαιρετέου μεῖον διαιρέτου).**

### 47. 5. Ἐφαρμογαὶ

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις

$$3\cdot5^2, \quad 3\cdot5^2+2, \quad 3\cdot5+2^2, \quad 3\cdot(5+2)^2$$

Ἔχομεν

$$3\cdot5^2=3\cdot25=75$$
$$3\cdot5^2+2=3\cdot25+2=77$$
$$3\cdot5+2^2=3\cdot5+4=19$$
$$3\cdot(5+2)^2=3\cdot7^2=3.49=147$$

## 48. ΕΠΕΚΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΕΩΣ ΔΙΑ $\nu=1$ ΚΑΙ $\nu=0$

### 48. 1. Τὸ σύμβολον $\alpha^1$, $\alpha\in N_0$

Εἶναι δυνατόν, κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἰδιότητος 47. 4, νὰ εὕρωμεν:

$$\alpha^3:\alpha^2=\alpha^{3-2}$$

ἢ $$\alpha^3:\alpha^2=\alpha^1$$

Ἡ γραφὴ $\alpha^1$, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς δυνάμεως, δὲν ἔχει ἔννοιαν, διότι ὁ ἐκθέτης της εἶναι μικρότερος τοῦ 2. Διὰ νὰ γενικεύσωμεν τὴν ἰσχὺν τῆς ἰδιότητος 47. 4 δεχόμεθα ὅτι καὶ τὸ σύμβολον $\alpha^1$ παριστᾷ δύναμιν. Ἤτοι ἐπεκτείνομεν τὴν ἔννοιαν τῆς δυνάμεως, καὶ ὅταν $\nu=1$

Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὴν τιμὴν τῆς δυνάμεως αὐτῆς, σκεπτόμεθα ὅτι :

$$\alpha^3:\alpha^2=(\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha):(\alpha\cdot\alpha)$$

ἢ $$\alpha^3:\alpha^2=\alpha$$

Διὰ τοῦτο θέτομεν

$$\boxed{\alpha^1=\alpha, \qquad \alpha\in N}$$

Ἤτοι : **Ἡ πρώτη δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι ὁ ἴδιος ὁ ἀριθμός.**

**Παραδείγματα**

$$8^1=8, \quad 2^3\cdot2^1=2^{3+1}=2^4, \quad (\alpha^5)^1=\alpha^{5\cdot1}=\alpha^5$$

### 48. 2. Τὸ σύμβολον $\alpha^0$, $\alpha\in N$

Σκεπτόμενοι ὅπως προηγουμένως, εὑρίσκομεν :

$$\alpha^3:\alpha^3=\alpha^{3-3}=\alpha^0 \qquad (1)$$
$$\alpha^3:\alpha^3=1 \qquad (2)$$

Διὰ νὰ ἰσχύῃ γενικῶς ἡ ἰδιότης 47. 4 δεχόμεθα ὅτι τὸ σύμβολον $\alpha^0$ παριστᾶ δύναμιν καὶ θέτομεν

$$\boxed{\alpha^0=1, \qquad \alpha\in N}$$

**Ἡ μηδενικὴ δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα.**

**Παραδείγματα**

$$7^0=1, \quad (3.5)^0=1, \quad (\alpha^3)^0=1$$

Παραθέτομεν κατωτέρω πίνακα ἰδιοτήτων τῶν δυνάμεων

| | |
|---|---|
| 1. $\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu=\alpha^{\mu+\nu}$ | ὅπου $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in N_0$ |
| 2. $(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)^\nu=\alpha^\nu\cdot\beta^\nu\cdot\gamma^\nu$ | $\nu\in N$ |
| 3. $(\alpha^\mu)^\nu=\alpha^{\mu\cdot\nu}$ | |
| 4. $\alpha^\mu:\alpha^\nu=\alpha^{\mu-\nu}$ | $\mu>\nu$ |
| 5. $\alpha^1=\alpha,\ \alpha^0=1$ | |

**Σημείωσις**

Δὲν ὁρίζομεν τὸ σύμβολον $0^0$. Ἡ ἐξέτασις αὐτοῦ θὰ γίνῃ εἰς ἄλλην τάξιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

115. Γράψατε ὑπὸ μορφὴν δυνάμεων τὰ γινόμενα :

$3\cdot3\cdot3\cdot3$, $\qquad 1\cdot1\cdot1\cdot1$, $\qquad 0\cdot0\cdot0\cdot0\cdot0\cdot0$, $\qquad \alpha\cdot\alpha\cdot\alpha$

116. Νὰ εὕρετε τὰς τιμὰς τῶν παραστάσεων

$3^4-2^3+1^{15}$, $7^3-2^2.2^3+1$, $(2^3\cdot 3^2)^2-5^2$

$5\cdot 2^7:4$, $7\cdot 3^4:9$

117. Νὰ εὕρετε τὰ τετράγωνα καὶ τοὺς κύβους τῶν ἀριθμῶν:
10, 20, 30, 40 Τί παρατηρεῖτε;

118. Χρησιμοποιήσατε ἰδιότητας τῶν δυνάμεων διὰ νὰ ὑπολογίσετε συντόμως τὰ γινόμενα

$2^3\cdot 5^3$, $4^2\cdot 25^2$, $2^4\cdot 8^2\cdot 125^2\cdot 5^4$

119. Τί παθαίνει τὸ τετράγωνον ἑνὸς ἀκεραίου, ὅταν διπλασιάζωμεν, τριπλασιάζωμεν... τοῦτον. Χρησιμοποιήσατε παραδείγματα.

## 49. ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

### 49. 1. Τετράγωνον ἀθροίσματος

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος 3+5 δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς:

$(5+3)^2=(5+3)\cdot(5+3)$ (Ὁρισμὸς δυνάμεως)

$=5\cdot 5+5\cdot 3+3\cdot 5+3\cdot 3$ (Ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης)

$=5^2+2\cdot(5\cdot 3)+3^2$

$=25+30+9=64$

Γενικῶς, διὰ δύο ἀκεραίους α, β ἔχομεν

$(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)$

$=\alpha\cdot\alpha+\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha+\beta\cdot\beta$

$=\alpha^2+2.\alpha\cdot\beta+\beta^2$

Ἤτοι, ἔχομεν τὸν τύπον

$$\boxed{(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot\beta+\beta^2} \quad (1)$$

Ὁ τύπος οὗτος συχνὰ εἶναι χρήσιμος διὰ τὴν συντόμευσιν τῶν ὑπολογισμῶν μας.

Π.χ. $1001^2=(1000+1)^2$

$=1000^2+2.1000.1+1^2$

$=1000.000+2000+1=1002001$

### 49. 2. Τετράγωνον διαφορᾶς

Διὰ τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς 8 −3, ἔχομεν

$(8-3)^2=5^2=25$ (1)

Ἀλλὰ καὶ $8^2-2\cdot 8\cdot 3+3^2=64-48+9=25$ (2)

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν

$(8-3)^2=8^2-2\cdot(8\cdot 3)+3^2$

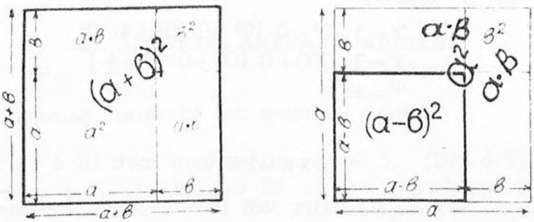
Γενικῶς, δι' οἱουσδήποτε ἀκεραίους α, β, ὅπου $\alpha > \beta$, εἶναι :

$$\boxed{(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\cdot\alpha\cdot\beta+\beta^2} \qquad (2)$$

**Ἐφαρμογή**

$$\begin{aligned} 999^2 &= (1000-1)^2 \\ &= 1000^2-2.1000.1+1 \\ &= 1000000-2000+1=998001 \end{aligned}$$

Παραθέτομεν κατωτέρω γεωμετρικὴν παράστασιν τῶν ἀνωτέρω δύο τύπων




ΑΣΚΗΣΕΙΣ

120. Νὰ εὕρετε συντόμως τὰ τετράγωνα τῶν ἀκεραίων : 102, 98, 998, 1002.

121. Νὰ εὕρετε τὰ τετράγωνα τῶν παραστάσεων :

$$2+\alpha, \quad \alpha+3, \quad 2\alpha+3$$

122. Μὲ ἀριθμητικὰ παραδείγματα ἐπαληθεύσατε ὅτι :

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2 \qquad \alpha,\beta\in N_0 \qquad \alpha > \beta$$

## 50. ΧΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΤΟΥ 10 ΕΙΣ ΤΟ ΔΕΚΑΔΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΕΩΣ

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 1265 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἀποτελεῖται ἀπὸ 1 χιλιάδα, 2 ἑκατοντάδας, 6 δεκάδας καὶ 5 μονάδας, γράφεται δὲ

$$1265=1X+2E+6\Delta+5M$$

ἢ

$$1265=1\cdot1000+2\cdot100+6\cdot10+5\cdot1 \qquad (1)$$

Οἱ ἀκέραιοι 1000, 100, 10, 1 εἶναι ὅλοι δυνάμεις τοῦ 10. Συγκεκριμένως εἶναι : $1000=10^3$, $100=10^2$, $10=10^1$ καὶ $1=10^0$

Ἐὰν θέσωμεν τὰς ἀνωτέρω δυνάμεις τοῦ 10 εἰς τὴν (1), ἔχομεν

$$1265=1\cdot10^3+2\cdot10^2+6\cdot10^1+5\cdot10^0$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὑπὸ τὴν μορφὴν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν οἱονδήποτε ἄλλον ἀκέραιον, γραμμένον εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως.

**Παραδείγματα**

$$36723 = 3\cdot10^4 + 6\cdot10^3 + 7\cdot10^2 + 2\cdot10^1 + 3\cdot10^0$$
$$52001 = 5\cdot10^4 + 2\cdot10^3 + 0\cdot10^2 + 0\cdot10^1 + 1\cdot10^0$$

Ἀντιστρόφως, ὅταν δοθῇ ἓν ἄθροισμα διαδοχικῶν δυνάμεων τοῦ 10 πολλαπλασιασμένων μὲ ἀκεραίους μικροτέρους τοῦ 10, ὅπως εἶναι τὸ ἄθροισμα

$$\chi = 3\cdot10^3 + 2\cdot10^2 + 9\cdot10^1 + 5\cdot10^0$$

ἔχομεν: $\chi = 3\cdot1000 + 2\cdot100 + 9\cdot10 + 5\cdot1$

ἤ $\chi = 3\ \mathrm{X} + 2\mathrm{E} + 9\ \Delta + 5\mathrm{M}$

ἤ $\chi = 3295$

Ὁμοίως διὰ τὸ ἄθροισμα

$$\Psi = 3\cdot10^3 + 0\cdot10^2 + 0\cdot10^1 + 4\cdot10^0$$

ἔχομεν: $\Psi = 3\cdot1000 + 0\cdot100 + 0\cdot10 + 4\cdot1$

ἤ $\Psi = 3004$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

123. Νὰ γράψετε τοὺς ἀκεραίους 2378, 3005 10709 ὑπὸ μορφὴν ἀθροίσματος δυνάμεων τοῦ 10 πολλαπλασιασμένων μὲ 0, 1, 2 . . . 9.

124. Τὰ κατωτέρω ἀθροίσματα

$$\alpha = 8\cdot10^4 + 0\cdot10^3 + 2\cdot10^2 + 1\cdot10^1 + 2\cdot10^0$$
$$\beta = 5\cdot10^5 + 3\cdot10^2 + 7\cdot10^0$$
$$\gamma = 7\cdot10^9 + 5\cdot10^5 + 3\cdot2^2$$

ποίους ἀκεραίους παριστάνουν;

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

125. Ἐὰν $\alpha = 2^3\cdot3$, $\beta = 2^4\cdot3^2$ καὶ $\gamma = 2^3\cdot5\cdot7$, νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν ἀριθμητικῶν παραστάσεων:

$$\alpha^2\cdot\beta, \quad (\alpha^2\cdot\beta^2)^2, \quad (\alpha\cdot\beta^2\cdot\gamma)^3, \quad \beta:\alpha, \quad \beta^2:\alpha$$

126. Νὰ εὕρετε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως:

$$(3^4.3^2.5^3) : (9^2.25)$$

127. Νὰ ἐκφράσετε ὑπὸ μορφὴν δυνάμεως τὰ ἀθροίσματα:

$$9 + 6.\beta + \beta^2, \qquad 4\alpha^2 - 4\alpha + 1$$

128. Νὰ ἐκφράσετε ὑπὸ μορφὴν γινομένου τὴν διαφορὰν $25\alpha^2 - 9$. (ἄσκ. 122).

129. Ποίων ἀριθμῶν εἶναι τετράγωνα οἱ ἀριθμοί:

$$2^6\cdot3^2, \quad 5^4\cdot7^2, \quad 3^2\cdot2^4\cdot5^2, \quad 9\cdot5^4, \quad 36\cdot2^8\cdot3^{10}$$

130. Τί παθαίνει ὁ κύβος ἑνὸς ἀριθμοῦ α ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν α ἐπὶ 2, 3, 4; Χρησιμοποιήσατε παραδείγματα.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

# ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΣ

## 51. ΔΙΑΙΡΕΤΑΙ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

### 51. 1. Ἀκέραιος διαιρετὸς διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ

Ὡς γνωστὸν ὁ 20 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5, $(20=4\cdot5)$.

Πολλὰς φορὰς ἀντὶ νὰ λέγωμεν 20 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5 λέγομεν

20 εἶναι διαιρετὸς διὰ 5

ἢ 5 εἶναι διαιρέτης τοῦ 20

Γενικῶς, ἐὰν ὁ ἀκέραιος α εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ β, τότε λέγομεν ὅτι ὁ α εἶναι διαιρετὸς διὰ β ἢ ὅτι ὁ β εἶναι διαιρέτης τοῦ α.

### 51.2. Πρῶτοι καὶ σύνθετοι ἀριθμοί

Ἄς εὕρωμεν τοὺς διαιρέτας τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Διαιρέται τοῦ 2 εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 2
Διαιρέται τοῦ 3 εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 3
Διαιρέται τοῦ 4 εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 2, 4
Διαιρέται τοῦ 5 εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 5
Διαιρέται τοῦ 6 εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 6
Διαιρέται τοῦ 7 εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 7
Διαιρέται τοῦ 8 εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 2, 4, 8
Διαιρέται τοῦ 9 εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 3, 9

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι:

α) Ὑπάρχουν ἀκέραιοι, οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουν ἄλλους διαιρέτας ἐκτὸς τοῦ ἑαυτοῦ των καὶ τῆς μονάδος. Ὅπως π.χ. οἱ ἀκέραιοι 2, 3, 5, 7.

β) Ὑπάρχουν ἀκέραιοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν καὶ ἄλλους διαιρέτας ἐκτὸς τοῦ ἑαυτοῦ των καὶ τῆς μονάδος.

Ἀπὸ τὰς παρατηρήσεις αὐτὰς ὁδηγούμεθα εἰς τὸν ἑξῆς ὁρισμόν:

Ἕκαστος φυσικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τῆς μονάδος λέγεται, **πρῶτος** ἐὰν ἔχῃ δύο μόνον διαιρέτας, **σύνθετος*** ἐὰν ἔχῃ ἕνα τοὐλάχιστον διαιρέτην, ἐκτὸς τῆς μονάδος καὶ τοῦ ἑαυτοῦ του.

**Σημείωσις**

Σημειοῦμεν ὅτι ὁ δεύτερος εἰς σειρὰν διαιρέτης ἑκάστου τῶν ἀνωτέρω ἀκεραιων 2, 3,...9, εἶναι πρῶτος ἀριθμός. Τὸ αὐτὸ δυνάμεθα νὰ διαπιστώσωμεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν οἱουδήποτε ἀκεραίου.

### 51. 3. Κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους

Γεννᾶται τὸ ἐρώτημα: Πόσοι εἶναι οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ καὶ κατὰ ποῖον τρόπον θὰ τοὺς εὕρωμεν;

Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον ὅτι δὲν ὑπάρχει μέγιστος **πρῶτος** ἀριθμός· ἤτοι τὸ σύνολον τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι μὴ πεπερασμένον.

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13 \ldots\}$$

Ἐγνώριζον ἀκόμη, ὅτι δὲν ὑπάρχει ἁπλοῦς κανὼν ὁ ὁποῖος νὰ μᾶς δίδῃ τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον τοὺς διαφόρους πρώτους ἀριθμούς. Εἶχον ὅμως ἀνακαλύψει μίαν μέθοδον διὰ νὰ εὑρίσκωμεν τοὺς πρώτους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι μικρότεροι ἀπὸ ἕνα δεδομένον ἀκέραιον. Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι γνωστὴ **ὡς κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους**** καὶ ἔχει συντόμως ὡς ἑξῆς.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν πρώτων ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι εἶναι μικρότεροι π.χ. τοῦ 100, γράφομεν ὅλους τοὺς ἀκεραίους 1, 2, 3 . . . . 100. Ἐν συνεχείᾳ διαγράφομεν :

1) τὴν μονάδα
2) τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2 ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ $2^2=4$
3) τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3 ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ $3^2=9$
4) τὰ πολλαπλάσια τοῦ 5 ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ $5^2=25$
5) τὰ πολλαπλάσια τοῦ 7 ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ $7^2=49$

Οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι ἀπομένουν εἶναι ὅλοι οἱ πρῶτοι, οἱ μικρότεροι τοῦ 100. Εἶναι δὲ οἱ : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

131. Εἰς τὸ σύνολον $A=\{2, 4, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 21, 29\}$ ποῖα ἐκ τῶν στοιχείων του εἶναι πρῶτοι καὶ ποῖα σύνθετοι ἀριθμοί ;

132. Τὸ διπλάσιον ἑνὸς πρώτου ἀριθμοῦ εἶναι πρῶτος ἢ σύνθετος ἀριθμός;

---

* Ἡ ὀνομασία σύνθετος ἀριθμὸς δικαιολογεῖται ἐκ τοῦ ὅτι ἕκαστος σύνθετος ἀριθμὸς δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γινόμενον πρώτων παραγόντων. Π.χ. $6=2 \cdot 3.$, $30=2 \cdot 3 \cdot 5$

** Ὁ Ἐρατοσθένης (276 – 195 π.Χ.) ὑπῆρξεν εἷς ἐκ τῶν ἐπιστημόνων καὶ λογίων τῆς ἀρχαιότητος. Διεκρίθη ὡς μαθηματικός, φιλόλογος, γεωγράφος, ἱστορικὸς καὶ ποιητής.

133. Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν διαιρετῶν τῶν ἀριθμῶν:

$25=5^2$, $49=7^2$, $11^2$, $13^2$; Τί παρατηρεῖτε;

134. Μία δύναμις $\alpha^\nu$ ἑνὸς ἀκεραίου $\alpha > 1$, ἠμπορεῖ ἄράγε νὰ εἶναι πρῶτος ἀριθμός, ὅταν $\nu > 1$;

## 52. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΙΡΕΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΟΥ

**52. 1.** Ὡς γνωστὸν ὁ 5 διαιρεῖ ἕκαστον πολλαπλάσιον αὐτοῦ. Ἤτοι διαιρεῖ τοὺς ἀριθμούς: $0\cdot5=0$, $1\cdot5=5$, $2\cdot5=10$, $3\cdot5=15\ldots$

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν ὁ 5 διαιρῇ ἕνα ἀριθμὸν α, οὗτος θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5.

$$\alpha:5=\beta \iff \alpha=5\cdot\beta \qquad \alpha,\ \beta\in N_0$$

Ὥστε: ὁ 5 διαιρεῖ ὅλα τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ καὶ μόνον αὐτά.

Γενικῶς ἐκ τῆς γνωστῆς ἰσοδυναμίας

$$\alpha:\beta=\gamma \iff \alpha=\beta\cdot\gamma$$

ἐννοοῦμεν ὅτι:

**Ἕκαστος φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ καὶ μόνον αὐτά.**

**52. 2.** Ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς 5 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 15 καὶ 30, διότι εἶναι πολλαπλάσια αὐτοῦ.

Ἤτοι ἔχομεν $\quad 15=3\cdot5$

$\qquad\qquad\qquad 30=6\cdot5$

Ἄρα $\quad 15+30=3\cdot5+6\cdot5$

$\qquad\qquad =5\cdot(3+6)$ (ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης)

$\qquad\qquad =5\cdot9=$ πολλαπλάσιον 5

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα $15+30$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5 καὶ συνεπῶς διαιρετὸν διὰ 5. Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα $15+30+40$ εἶναι διαιρετὸν διὰ 5.

Ἀπὸ τὰς παρατηρήσεις αὐτὰς συνάγομεν ὅτι:

**Ἐὰν εἷς φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἢ περισσοτέρους ἄλλους, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.**

**Ἐφαρμογή:** Διαιρεῖ ὁ ἀριθμὸς 6 τὸν 324;

Γράφομεν $\quad 324=300+24$

Εὐκόλως διακρίνομεν ὅτι ὁ 6 διαιρεῖ τὸ 300 καὶ τὸ 24, ἄρα θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $300+24=324$.

**52. 3.** Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα ὁ ἀριθμὸς 5, ἀφοῦ διαιρεῖ τὸν ἀριθμὸν 15, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα $15+15+15$, ἤτοι τὸ γινόμενον $3\cdot15$.

Ὥστε: **Ἐὰν εἷς φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρῇ ἕνα ἄλλον, θὰ διαιρῇ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ.**

**Ἐφαρμογή:** Διαιρεῖ ὁ ἀριθμὸς 4 τὸν ἀριθμὸν 280; Ἀφοῦ ὁ 4 διαιρεῖ τὸ 28 θὰ διαιρῇ καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ $28\cdot10=280$.

**52. 4.** Ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς 5 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 60 καὶ 35. Θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν των 60 – 35;

Εἶναι :

$$60 = 5 \cdot 12$$
$$35 = 5 \cdot 7$$

Ἄρα
$$60 - 35 = 5 \cdot 12 - 5 \cdot 7 = 5 \cdot (12 - 7) = 5 \cdot 5 = \text{πολλαπλάσιον } 5$$

Ὥστε: **Ἐὰν εἷς φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.**

**Ἐφαρμογή:** Διαιρεῖ ὁ ἀριθμὸς 2 τὸν ἀριθμὸν 196;

Γράφομεν
$$196 = 200 - 4$$

Εὐκόλως διακρίνομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 2 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 200 καὶ 4. Συνεπῶς διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν $200 - 4 = 196$.

**52. 5.** Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀκέραιον 78 διὰ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ 9 εὑρίσκομεν πηλίκον 8 καὶ ὑπόλοιπον 6.

Ἤτοι: $78 = 9 \cdot 8 + 6 \qquad 6 < 9$

ἢ $78 - 9 \cdot 8 = 6$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ διαιρετέος 78 καὶ ὁ διαιρέτης 9 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 3. Ὁ 3 ὡς διαιρῶν τὸ 9 ὀφείλει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ $9 \cdot 8$. Ἐπειδὴ δὲ διαιρεῖ καὶ τὸ 78 θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν $78 - 9 \cdot 8 = 6$.

Ὁμοίας παρατηρήσεις δυνάμεθα νὰ κάνωμεν εἰς ὅλας τὰς ἀτελεῖς διαιρέσεις.

Ὥστε: **Ἐὰν εἷς φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρῇ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην μιᾶς ἀτελοῦς διαιρέσεως, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς.**

**Ἐφαρμογή:** Οἱ ἀκέραιοι 69 καὶ 9 εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ 3. Καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν 6 εἶναι διαιρετὸν διὰ 3. Σημειώνομεν ὅτι τὸ πηλίκον 7 τῆς διαιρέσεως τοῦ 69 διὰ 9 δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην διαιρετὸν διὰ 3.

## ΣΥΝΟΨΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ

| | | |
|---|---|---|
| Ἐὰν ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς α διαιρῇ τοὺς ἀκεραίους β καὶ γ, τότε θὰ διαιρῇ καὶ τούς : | 1) $\beta + \gamma$ | |
| | 2) $\beta - \gamma$, | $\beta > \gamma$ |
| | 3) $\beta \cdot \lambda$ ἢ $\gamma \cdot \lambda$ | $\lambda \in N$ |
| | 4) $\upsilon = \beta. - \gamma \cdot \pi$ | $\upsilon < \gamma$ |

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

135. Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β, ὅπου $\alpha > \beta$, εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 5. Νὰ σχηματίσετε μὲ αὐτοὺς ἄλλους ἀριθμοὺς διαιρετοὺς διὰ 5.

136. Νὰ ἐξετάσετε ἐὰν οἱ ἀριθμοί: $A=7\cdot\alpha+21$ καὶ $B=28\cdot\alpha+14$, $\alpha\epsilon N$, εἶναι διαιρετοὶ διὰ 7.

137. Νὰ ἐξετάσετε ἐὰν ὁ ἀριθμὸς $X=18\alpha^2.\beta$ εἶναι διαιρετὸς διὰ 9.

138. Ὁ 9 εἶναι διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 27, 45 καὶ 81. Αἰτιολογήσατε διατὶ θὰ εἶναι διαιρέτης καὶ τῶν ἀριθμῶν 153, 243, 378.

## 53. ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ

**53. 1.** Διὰ νὰ διαπιστώσωμεν ἐὰν ὁ ἀκέραιος α εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ β, δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ α διὰ β καὶ νὰ ἴδωμεν ἐὰν αὕτη εἶναι τελεία ἢ ὄχι.

Ἐν τούτοις εἶναι δυνατόν, δι' ὡρισμένας τιμὰς τοῦ β, νὰ διακρίνωμεν ἐὰν ὁ α εἶναι ἢ ὄχι διαιρετὸς διὰ β, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν. Αἱ ἰδιότητες τῶν διαιρετῶν θὰ μᾶς ὁδηγήσουν εἰς κανόνας, κριτήρια διαιρετότητος, τὰ ὁποῖα θὰ μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ διακρίνωμεν συντόμως πότε ὁ ἀκέραιος α εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ β. Τὰ ἑπόμενα κριτήρια ἰσχύουν διὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα γραφῆς τῶν ἀκεραίων.

### 53. 2. Τρόπος ἐργασίας

Εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν κριτηρίων διαιρετότητος θὰ ἀκολουθήσωμεν κατωτέρω τὴν ἑξῆς γενικὴν μέθοδον. Διὰ νὰ διακρίνωμεν π.χ., ἐὰν ὁ ἀκέραιος 2630 εἶναι διαιρετὸς διὰ 25, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς δύο μέρη

$$2630=2500+130$$

τοιαῦτα, ὥστε τὸ πρῶτον μέρος νὰ φαίνεται ἀμέσως ὅτι εἶναι διαιρετὸν διὰ 25, ὁπότε ἡ προσοχή μας περιορίζεται εἰς τὸ δεύτερον μέρος αὐτοῦ.

Γενικῶς διὰ νὰ διακρίνωμεν ἐὰν ὁ ἀκέραιος α εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ φυσικοῦ β, ἀναλύομεν τὸ α κατὰ τὸν τύπον

$$\boxed{\alpha = \text{πολλαπλάσιον } \beta + \upsilon} \qquad (1)$$

### 53. 3. 1ον κριτήριον. Ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 10, 100, 1000 . . .

Ἄς λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν 3567 καὶ ἂς ἀναλύσωμεν αὐτὸν κατὰ τὸν τύπον (1).

Συγκεκριμένως ἔχομεν:

$$3567=3560+7$$
ἢ
$$3567=356\cdot10+7$$
ἢ
$$3567=\text{πολλαπλάσιον } 10+7$$

Ἀνωτέρω ὁ ἀριθμὸς 3567 ἀνελύθη εἰς δύο μέρη (προσθετέους). Τὸ πρῶτον μέρος διαιρεῖται διὰ 10, ὡς πολλαπλάσιον αὐτοῦ. Συνεπῶς, ἐὰν καὶ τὸ δεύτερον μέρος (7) διαιρῆται διὰ 10, ὁλόκληρος ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 10.

Ἤτοι εἷς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 10, ἐὰν τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτοῦ διαιρῆται διὰ 10, δηλαδὴ ἐὰν εἶναι 0.

Μὲ ὅμοιον τρόπον ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι 100, 1000....

Π.χ. $3567=3500+67$

ἢ $3567=35\cdot 100+67$

ἢ $3567=$ πολλαπλάσιον $100+67$

Ὥστε: **Εἷς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 10, 100, 1000 . . . , ἐὰν λήγῃ τοὐλάχιστον εἰς ἕν, δύο, τρία, . . . μηδενικὰ ἀντιστοίχως.**

**Ἐφαρμογή:** Ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς: 175, 15360, 38600, 1867 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 10 οἱ 15360, 38600 ἐνῷ διὰ 100 εἶναι διαιρετὸς ὁ 38600

**53. 4. 2ον κριτήριον. Ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 2 ἢ διὰ 5**

Ἂς λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν 1536 καὶ ἂς ἀναλύσωμεν αὐτὸν κατὰ τὸν τύπον (1).

Συγκεκριμένως ἐπειδὴ $2\cdot 5=10$

γράφομεν $1536=153\cdot 10+6$

ἢ $1536=$ πολλαπλάσιον $10+6$ (2)

Ἂς προσέξωμεν εἰς τὸ δεύτερον μέρος τῆς (2). Ἕκαστος τῶν ἀκέραιων 2 καὶ 5 διαιρεῖ τὸν 10 ὡς πολλαπλάσιον αὐτοῦ. Ἄρα θὰ διαιρῇ καὶ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 10. Ἐὰν καὶ ὁ 6, τελευταῖον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ, διαιρῆται διὰ 2 ἢ 5, ὁλόκληρος ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 2 ἢ 5 ἀντιστοίχως.

Ὥστε: **Εἷς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 2 ἢ 5, ἐὰν τὸ τελευταῖον ψηφίον του εἶναι διαιρετὸν διὰ 2 ἢ 5 ἀντιστοίχως.**

**Παράδειγμα**

Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 172, 57, 1160, 475 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2 οἱ 172, 1160 καὶ διὰ 5 οἱ 1160, 475.

**Σημείωσις**

Οἱ ἀκέραιοι, οἱ ὁποῖοι εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2, λέγονται ἄρτιοι ἀριθμοί. Ἤτοι ἄρτιοι εἶναι ὅλα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2. Διὰ τοῦτο ὁ συμβολισμὸς

$$\alpha=2\cdot\nu \text{ ὅπου } \nu\in N_0$$

σημαίνει ὅτι ὁ ἀκέραιος α εἶναι ἄρτιος ἀριθμός. Οἱ ἀκέραιοι, οἱ ὁποῖοι δὲν εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2, λέγονται περιττοὶ ἀριθμοί. Οὗτοι διαιρούμενοι διὰ 2 ἀφήνουν ὑπόλοιπον πάντοτε 1. Διὰ τοῦτο ὁ συμβολισμὸς

$$\alpha=2\cdot\nu+1 \text{ ὅπου } \nu\in N_0$$

σημαίνει ὅτι ὁ α εἶναι περιττὸς ἀριθμός.

**53. 5. 3ον κριτήριον. Ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 4 ἢ διὰ 25**

Ἂς λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν 6575 καὶ ἂς ἀναλύσωμεν αὐτὸν κατὰ τὸν τύπον (1).

Συγκεκριμένως ἐπειδὴ $4 \cdot 25 = 100$

γράφομεν $6575 = 65 \cdot 100 + 75$

ἢ $6575 = \text{πολλαπλάσιον } 100 + 75 \quad (3)$

Εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς (3) παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 100 εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 καὶ 25 ἄρα καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ 65.100. Συνεπῶς ἐὰν ὁ 75 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 4 ἢ 25, ὁλόκληρος ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 ἢ 25 ἀντιστοίχως.

Ὥστε: **Εἷς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 ἢ 25, ἐὰν τὸ τελευταῖον διψήφιον τμῆμα του ἀποτελῇ ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ τοῦ 4 ἢ 25 ἀντιστοίχως.**

**Παραδείγματα**

Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 6736, 2300, 638, 3275, οἱ ἀριθμοὶ 6736, 2300 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 4, ἐνῶ οἱ 2300, 3275 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 25.

**53. 6. 4ον. Κριτήριον Ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 9 ἢ διὰ 3**

Ἂς λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν 7382.

Ἐπειδὴ

$$10 = 9 + 1 = \text{πολ/σιον } 9 + 1$$
$$100 = 99 + 1 = 9 \cdot 11 + 1 = \text{πολ/σιον } 9 + 1$$
$$1000 = 999 + 1 = 9 \cdot 111 + 1 = \text{πολ/σιον } 9 + 1$$

κ.ο.κ.

γράφομεν $7382 = 7 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 2$

Ἀλλὰ

$$\begin{aligned} 7 \cdot 1000 &= 7 \cdot (\text{πολ. } 9 + 1) = 7. (\text{πολ. } 9) + 7 = \text{πολ. } 9 + 7 \\ 3 \cdot 100 &= 3 \cdot (\text{πολ. } 9 + 1) = 3. (\text{πολ. } 9) + 3 = \text{πολ. } 9 + 3 \\ 8 \cdot 10 &= 8 \cdot (\text{πολ. } 9 + 1) = 8. (\text{πολ. } 9) + 8 = \text{πολ. } 9 + 8 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

Ἄρα: $7 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 2 = \text{πολ. } 9 + (7 + 3 + 8 + 2) \quad (4)$

Ἐκ τῆς (4) εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν καὶ τὸ ἄθροισμα $(7+3+8+2)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ 9 ἢ 3, ὁλόκληρος ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 9 ἢ 3 ἀντιστοίχως.

Ὥστε: **Εἷς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 9 ἢ 3, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι διαιρετὸν διὰ 9 ἢ 3 ἀντιστοίχως.**

**Παρατήρησις**

Ἐπειδὴ ὁ 9 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3, ἕκαστος ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 9 θὰ εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ 3. Τὸ ἀντίστροφον ὅμως δὲν ἰσχύει. Εἶναι δυνατὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἑνὸς ἀριθμοῦ νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ 3 ὄχι ὅμως καὶ διὰ 9, π.χ. ὁ ἀριθμὸς 33.

**Παραδείγματα**

Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 561, 783, 75234, 11342 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 9 μόνον ὁ ἀριθμὸς 783 ἐνῷ διὰ 3 οἱ ἀριθμοὶ 561, 75234, 783.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

139. Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 216, 7852, 189756, 810, 3775, 328 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2, 5, 4, 25, 3, 9;

140. Εἰς τὸ τέλος τῶν ἀριθμῶν 13, 63, 22 νὰ θέσετε ἓν ψηφίον, ὥστε νὰ προκύψουν ἀριθμοὶ διαιρετοὶ συγχρόνως διὰ 5 καὶ 9

141. Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ 10802, 180540· ἀντικαταστήσατε τὰ μηδὲν μὲ ἄλλα ψηφία, ὥστε νὰ προκύψουν ἀριθμοὶ διαιρετοὶ συγχρόνως διὰ 4 καὶ 9.

142. Νὰ ἀντικαταστήσετε τὸ τετραγωνίδιον μὲ ἓν ψηφίον, ὥστε ὁ ἀριθμὸς 35 ☐ , ἐὰν διαιρεθῇ διὰ 9, νὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 4.

## 54. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΦΥΣΙΚΟΥ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΡΩΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

**54. 1.** Ἂς προσέξωμεν τὰς ἰσότητας

$$3\cdot 4=12$$

$$2\cdot 3\cdot 5=30$$

Τὰ πρῶτα μέλη αὐτῶν παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς 12 καὶ 30 ὑπὸ μίαν ἄλλην μορφήν. Ὑπὸ μορφὴν γινομένου παραγόντων.

Ἡ γραφὴ ἑνὸς ἀριθμοῦ ὑπὸ τὴν μορφὴν αὐτὴν λέγεται ἀνάλυσις τοῦ ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον παραγόντων ἢ παραγοντοποίησις αὐτοῦ.

Εἰς τὴν δευτέραν ἰσότητα παρατηροῦμεν ὅτι ὅλοι οἱ παράγοντες εἰς τοὺς ὁποίους ἀνελύθη ὁ ἀριθμὸς 30 εἶναι πρῶτοι ἀριθμοί. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἀνελύσαμεν τὸν ἀριθμὸν 30 εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων ἢ ὅτι ἔχομεν πλήρη παραγοντοποίησιν αὐτοῦ.

Πολὺ συχνὰ εἰς τὰ μαθηματικὰ μᾶς διευκολύνει ἡ παράστασις ἑνὸς ἀριθμοῦ ὑπὸ μορφὴν γινομένου πρώτων παραγόντων. Διὰ νὰ ἀναλύσωμεν ἕνα σύνθετον ἀριθμὸν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, π.χ. τὸν ἀριθμὸν 150, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

| | | |
|---|---|---|
| $150=2\cdot 75$ | Διότι | $2\cdot 75=150$ |
| $=2\cdot 3\cdot 25$ | » | $3\cdot 25=75$ |
| $=2\cdot 3\cdot 5\cdot 5$ | » | $5\cdot 5=25$ |
| $=2\cdot 3\cdot 5^2$ | | |

Ἤτοι εὑρίσκομεν τὸν ἐλάχιστον πρῶτον παράγοντα (δεύτερον διαιρέτην) τοῦ 150, τὸν 2, ἔπειτα τὸν ἐλάχιστον πρῶτον παράγοντα τοῦ πηλίκου 150:2=75, τὸν 3, τὸν ἐλάχιστον πρῶτον παράγοντα τοῦ πηλίκου 75:3=25, τὸν 5.

Τοιουτοτρόπως καταλήγομεν εἰς τὸ γινόμενον $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2.3.5^2$ τοῦ ὁποίου ὅλοι οἱ παράγοντες εἶναι πρῶτοι. Ἡ ἀνωτέρω διαδικασία γράφεται συντόμως κατὰ τὴν κατωτέρω διάταξιν

$$\begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 150:2=75 \\ 75:3=25 \\ 25:5=5 \\ 5:5=1 \end{array}$$

Ἤτοι $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

**Ἄλλα παραδείγματα**

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

ἤτοι $60 = 2^2.3.5$ ἤτοι $72 = 2^3 \cdot 3^2$ ἤτοι $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

**54. 3. Ἐφαρμογαί**

Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον $72 \cdot 2^5 \cdot 7$

Ἔχομεν $72 = 2^3 \cdot 3^2$

Ἄρα
$$\begin{aligned} 72 \cdot 2^5 \cdot 7 &= (2^3 \cdot 3^2) \cdot (2^5 \cdot 7) \\ &= (2^3 \cdot 2^5) \cdot 3^2 \cdot 7 \\ &= 2^8 \cdot 3^2 \cdot 7 \\ &= 256 \cdot 9 \cdot 7 = 16128 \end{aligned}$$

Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον $(2^{10} \cdot 3^2) : 256$

Ἔχομεν $256 = 2^8$

Ἄρα
$$\begin{aligned} (2^{10} \cdot 3^2) : 256 &= (2^{10} \cdot 3^2) : 2^8 \\ &= (2^{10} : 2^8) \cdot 3^2 \\ &= 2^2 \cdot 3^2 = 36 \end{aligned}$$

Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον $12^3 : (2 \cdot 6^3)$

Ἔχομεν $12^3 = (2^2 \cdot 3)^3 = 2^6 \cdot 3^3$, $\quad 2 \cdot 6^3 = 2 \cdot (2 \cdot 3)^3 = 2^4 \cdot 3^3$

Ἄρα
$$\begin{aligned} 12^3 : (2 \cdot 6^3) &= (2^6 \cdot 3^3) : (2^4 \cdot 3^3) \\ &= 2^2 = 4 \end{aligned}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

143. Νὰ συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοὶ

$$216 \quad \text{καὶ} \quad 2^3 \cdot 3^3$$

144. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων οἱ ἀκέραιοι

580, 612, 1245, 1440

145. Ἐὰν $\alpha = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7^2$, $\beta = \alpha^4 \cdot 3^5 \cdot 7$ καὶ $\gamma = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 7$ νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα

$$\alpha \cdot \beta, \quad \alpha . \gamma, \quad (\alpha^2 \cdot \beta) \cdot \gamma$$

καὶ τὰ πηλίκα $\alpha : \beta$, $(\alpha . \beta) : \gamma$

146. Ἀφοῦ ἀναλύσετε εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων τοὺς ἀκεραίους 6, 15, 18, 30 νὰ εὕρετε τὰ τετράγωνα αὐτῶν. Τί παρατηρεῖτε διὰ τοὺς ἐκθέτας; Στηριζόμενοι εἰς τὴν παρατήρησίν σας, νὰ εὕρετε ποίων ἀκεραίων τὰ τετράγωνα εἶναι οἱ ἀκέραιοι $2^6 \cdot 3^4$, $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^4$ καὶ 256.

## 55. ΚΟΙΝΟΙ ΔΙΑΙΡΕΤΑΙ ΚΑΙ Μ.Κ.Δ. ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

**55. 1.** Ἂς λάβωμεν δύο ἀριθμούς, τοὺς 16 καὶ 24 καὶ ἂς εὕρωμεν τὰ σύνολα τῶν διαιρετῶν αὐτῶν. Ἔχομεν:

Σύνολον τῶν διαιρετῶν τοῦ 16 : $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$

» » 24 : $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

Ἂς σχηματίσωμεν καὶ τὴν τομὴν τῶν συνόλων A καὶ B

$$A \cap B = \{1, 2, 4, 8\}$$

Εἰς τὸ σύνολον $A \cap B$ παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς:

ι) Ἔχει ὡς στοιχεῖα του τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν 16 καὶ 24. Διὰ τοῦτο καὶ λέγεται σύνολον τῶν κ ο ι ν ῶ ν διαιρετῶν τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

ιι) Εἶναι πεπερασμένον σύνολον καὶ ἔχει ὡς ἐλάχιστον στοιχεῖον τὸ 1 καὶ μέγιστον τὸ 8. Τὸν ἀκέραιον 8, μέγιστον στοιχεῖον τοῦ συνόλου τῶν κοινῶν διαιρετῶν, ὀνομάζομεν μ έ γ ι σ τ ο ν κ ο ι ν ὸ ν δ ι α ι ρ έ τ η ν τῶν ἀριθμῶν 16 καὶ 24, σημειώνομεν δὲ συντόμως Μ.Κ.Δ. (16, 24)=8.

ιιι) Τὸ σύνολον Γ τῶν διαιρετῶν τοῦ Μ.Κ.Δ., $\Gamma = \{1, 2, 4, 8\}$, ταυτίζεται μὲ τὸ σύνολον $A \cap B = \{1, 2, 4, 8\}$.

Ἤτοι: $A \cap B = \Gamma$

Μὲ ἐντελῶς ἀνάλογον τρόπον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν Μ.Κ.Δ. τριῶν ἢ περισσοτέρων ἀκεραίων.

Π.χ. διὰ τοὺς ἀκεραίους 12, 20, 28 ἔχομεν:

Σύνολον διαιρετῶν τοῦ 12 : $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Σύνολον διαιρετῶν τοῦ 20 : $B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

Σύνολον διαιρετῶν τοῦ 28 : $\Gamma = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$

Σύνολον κοινῶν διαιρετῶν:

$$\Delta = A \cap B \cap \Gamma = \{1, 2, 4\}$$

Ὥστε Μ.Κ.Δ. (12, 20, 28) εἶναι ὁ 4.

Αἱ ἀνωτέρω παρατηρήσεις μᾶς διευκολύνουν εἰς τὴν κατανόησιν τῶν ἑξῆς γενικῶν προτάσεων.

Ἂς εἶναι α, β, γ... δύο ἢ περισσοτέροι ἀκέραιοι, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς τοὐλάχιστον εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Π.χ. $\alpha \neq 0$.

Τὸ σύνολον Δ τῶν κοινῶν διαιρετῶν αὐτῶν:

ι) Δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι τὸ κενὸν σύνολον

Γνωρίζομεν ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ ἔχουν διαιρέτην τὴν μονάδα.

Ἄρα καὶ ἡ τομὴ Δ θὰ ἔχῃ ἓν τοὐλάχιστον στοιχεῖον, τὴν μονάδα.

ιι) Εἶναι πεπερασμένον σύνολον, διότι ὅλα τὰ στοιχεῖα του εἶναι μικρότερα (ἢ ἴσα) μὲ α. Συνεπῶς ὑπάρχει ἓν μέγιστον στοιχεῖον: ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

ιιι) Ταυτίζεται μὲ τὸ σύνολον τῶν διαιρετῶν τοῦ Μ.Κ.Δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

### 55. 2. Ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους

Ἂς ζητήσωμεν τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 8. Ἔχομεν:

Σύνολον διαιρετῶν τοῦ 5 : $A = \{1, 5\}$

Σύνολον διαιρετῶν τοῦ 8 : $B = \{1, 2, 4, 8\}$

Ἄρα Μ.Κ.Δ. (5, 8) εἶναι ἡ μονάς.

Ὅταν δύο ἢ περισσότεροι ἀκέραιοι, ὅπως οἱ 5 καὶ 8, ἔχουν ὡς Μ.Κ.Δ. τὴν μονάδα, λέγονται π ρ ῶ τ ο ι  π ρ ὸ ς  ἀ λ λ ή λ ο υ ς.

### 55. 3. Παρατήρησις

Δὲν πρέπει νὰ συγχέωμεν τὰς ἐννοίας:

1) «Πρῶτος ἀριθμὸς» π.χ. ὁ 7 εἶναι πρῶτος ἀριθμός.

2) «Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ» π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 6, 4, 9 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους χωρὶς ἕκαστος τούτων νὰ εἶναι πρῶτος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

147. Εὕρετε τὰ σύνολα τῶν διαιρετῶν τῶν ἀριθμῶν 15, 20, 30 καὶ τὸν Μ.Κ.Δ. αὐτῶν.

148. Ὁ Μ.Κ.Δ. τριῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁ 17. Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν κοινῶν διαιρετῶν τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν;

149. Εὕρετε τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν 3, 8, 30.

150. Δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ὁ εἷς εἶναι ἄρτιος. Εἶναι δυνατὸν καὶ ὁ ἄλλος νὰ εἶναι ἄρτιος ἢ ὄχι καὶ διατί;

## 56. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ Μ.Κ.Δ.

### 56. 1. 1η Ἰδιότης

Ἂς θεωρήσωμεν τὸν Μ.Κ.Δ. $(36, 14) = 2$ καὶ ἂς ἀντικαταστήσωμεν τὸν 36 μὲ τὴν διαφορὰν $36 - 14 = 22$

Παρατηροῦμεν ὅτι Μ.Κ.Δ. (22, 14)=2

Ὥστε Μ.Κ.Δ. (36, 14)=Μ.Κ.Δ. (36−14, 14).

Εἰς τὴν ἀνωτέρω παρατήρησιν δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν, ἐὰν σκεφθῶμεν ὅτι οἱοσδήποτε κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 36 καὶ 14, συνεπῶς καὶ ὁ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν, ὀφείλει νὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν 36−14 (§ 52. 4).

Γενικῶς: **Ὁ Μ.Κ.Δ. δύο ἢ περισσοτέρων ἀκεραίων δὲν ἀλλάζει, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν μὲ τὴν διαφορὰν αὐτοῦ καὶ ἑνὸς ἄλλου ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.**

**Ἐφαρμογή.** Ἂς ἐφαρμόσωμεν διαδοχικῶς τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν 42 καὶ 18.

Ἐπειδὴ 42−18=24, 24−18=6, 18−6=12, 12−6=6

Ἔχομεν: Μ.Κ.Δ. (42, 18)=Μ.Κ.Δ. (24, 18)=Μ.Κ.Δ. (6, 18)=Μ.Κ.Δ. (6, 12)=Μ.Κ.Δ. (6, 6)=6

Ἡ εὕρεσις τοῦ Μ.Κ.Δ. διὰ τῆς μεθόδου αὐτῆς εἶναι ἐπίπονος, ἰδίως ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι μεγάλοι.

### 56. 2. 2α Ἰδιότης

Ἂς ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ παράδειγμα τῆς 1ης ἰδιότητος καὶ ἂς ἀντικαταστήσωμεν τὸν 36 μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 14 δηλ. 8. Παρατηροῦμεν ὅτι καὶ πάλιν Μ.Κ.Δ. (8, 14)=2

Ἤτοι: Μ.Κ.Δ. (36, 14)=Μ.Κ.Δ. (8, 14)

Εἰς τὴν ἀνωτέρω παρατήρησιν ὁδηγούμεθα, ἐὰν σκεφθῶμεν ὅτι ὁ οἱοσδήποτε κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 36 καὶ 14, συνεπῶς καὶ ὁ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν, ὀφείλει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 36 διὰ 14. (§ 52. 5).

Γενικῶς: **Ὁ Μ.Κ.Δ. δύο ἢ περισσοτέρων ἀκεραίων δὲν ἀλλάζει, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν ἕνα ἐξ αὐτῶν μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ δι' ἑνὸς ἄλλου ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.**

## 57. ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ* ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

Εἰς τὴν 2αν ἰδιότητα τοῦ Μ.Κ.Δ. στηρίζεται μία σύντομος μέθοδος διὰ τὴν εὕρεσιν Μ.Κ.Δ. δύο ἀκεραίων. Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται Εὐκλείδειος ἀλγόριθμος ἐκ τοῦ ὀνόματος τοῦ μεγάλου Ἕλληνος μαθηματικοῦ Εὐκλείδου ὁ ὁποῖος τὴν ἐδίδαξεν.

* Ἡ λέξις ἀλγόριθμος εἶναι ἀραβικῆς προελεύσεως καὶ σημαίνει μίαν σειρὰν πράξεων, ἡ ὁποία ἐπαναλαμβανομένη μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ τελικοῦ ἀποτελέσματος π.χ. τὴν εὕρεσιν τοῦ Μ.Κ.Δ.

**Παράδειγμα**

Νὰ εὑρεθῇ ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν 256 καὶ 120.

Ἔχομεν : Μ.Κ.Δ. (256, 120) = Μ.Κ.Δ. (16, 120) διότι $256 = 2 \cdot 120 + 16$
= Μ.Κ.Δ. (16, 8) διότι $120 = 7 \cdot 16 + 8$
= Μ.Κ.Δ. (8, 0) διότι $16 = 2 \cdot 8 + 0$

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται σχηματικῶς ὡς ἑξῆς.

| Πηλίκα | | 2 | 7 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| Ἀριθμοὶ | 256 | 120 | 16 | 8 Μ.Κ.Δ. |
| Ὑπόλοιπα | 16 | 8 | 0 | 8 |

Γενικῶς ἔχομεν τὸν ἑξῆς κανόνα

**Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν Μ.Κ.Δ. δύο ἀκεραίων α καὶ β, ὅταν $\alpha > \beta$, διαιροῦμεν τὸ α διὰ β :**

**ι) Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 0, τότε Μ.Κ.Δ. $(\alpha, \beta) = \beta$**

**ιι) Ἐὰν ἡ διαίρεσις τοῦ α διὰ β δίδῃ ὑπόλοιπον $\upsilon_1 \neq 0$, διαιροῦμεν τὸ β διὰ $\upsilon_1$. Ἐὰν τὸ προκῦπτον ὑπόλοιπον $\upsilon_2$ τῆς νέας διαιρέσεως εἶναι μηδὲν ($\upsilon_2 = 0$), τότε Μ.Κ.Δ. $(\alpha, \beta) = \upsilon_1$. Ἐὰν $\upsilon_2 \neq 0$, διαιροῦμεν τὸ $\upsilon_1$ διὰ $\upsilon_2$ κ.ο.κ. μέχρις ὅτου εὕρωμεν μίαν διαίρεσιν μὲ ὑπόλοιπον 0. Αὐτὸ θὰ συμβῇ κατ' ἀνάγκην, διότι οἱ ἀκέραιοι β, $\upsilon_1$, $\upsilon_2$, γίνονται διαρκῶς μικρότεροι $\beta > \upsilon_1 > \upsilon_2 \ldots$**

**Ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας διαιρέσεως εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀκεραίων α καὶ β.**

## 58. ΕΥΡΕΣΙΣ Μ.Κ.Δ. ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΤΩΝ ΔΥΟ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

**58. 1.** Ἄς εὕρωμεν τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν 96, 72 καὶ 24. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ μικρότερος τούτων, ὁ 24, εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν 96 καὶ 72. Ἐὰν σκεφθῶμεν δὲ ὅτι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν τριῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν 96, 72, 24, δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 24, (Διατί;), ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ 24 εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν.

**58. 2.** Ἄς εὕρωμεν τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν 36, 48, 60.

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν κοινῶν διαιρετῶν τῶν ἀριθμῶν 60 καὶ 48 ταυτίζεται μὲ τὸ σύνολον τῶν διαιρετῶν τοῦ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν. Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς 48 καὶ 60 διὰ τοῦ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν, δηλαδὴ τὸν 12. Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν καταλήγωμεν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ Μ.Κ.Δ. δύο ἀριθμῶν τοῦ 36 καὶ 12.

Ἤτοι Μ. Κ. Δ. (36, 48, 60) = Μ.Κ.Δ. (36, 12) = 12.

Ἐντελῶς ἀναλόγως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι περισσότεροι τῶν τριῶν. Τοὺς ἀντικαθιστῶμεν ἀνὰ δύο μὲ τὸν Μ.Κ.Δ αὐτῶν ἕως ὅτου καταλήξωμεν εἰς τὴν περίπτωσιν εὑρέσεως Μ.Κ.Δ. δύο ἀριθμῶν.

**58.3.** Πολλὰς φορὰς εἰς τὴν πρᾶξιν ἐφαρμόζομεν καὶ τὴν ἑξῆς σύντομον διάταξιν, ἡ ὁποία εἶναι μία ἐφαρμογὴ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ Μ.Κ.Δ.

| | | | |
|---|---|---|---|
| α) Γράφομεν εἰς μίαν σειρὰν τοὺς δοθέντας ἀριθμούς. | 240 | 48 | 64 |
| β) Τὸν μικρότερον ἐξ αὐτῶν (48) τὸν γράφομεν πάλιν εἰς τὴν ἰδίαν στήλην· κάτωθι δὲ τῶν ἄλλων ἀριθμῶν γράφομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑκάστου διὰ τοῦ 48. | 0 | 48 | 16 |
| | 0 | 0 | 16 |

γ) Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν ἰδίαν διαδικασίαν μέχρις ὅτου εὕρωμεν εἰς μίαν σειρὰν μηδενικὰ καὶ ἕνα μὴ μηδενικὸν ἀριθμὸν (16).

Οὗτος θὰ εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Μ.Κ.Δ. (240, 48, 64) = 16

## 59. ΕΥΡΕΣΙΣ Μ. Κ. Δ. ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΔΙ' ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΤΟΥΤΩΝ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΩΝ ΠΡΩΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

Ποῖος εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀκεραίων 120, 360, 36;

Ἂς ἀναλύσωμεν κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Ἔχομεν :

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$
$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

Παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

α) Οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 3 εἶναι οἱ μόνοι κοινοὶ πρῶτοι παράγοντες εἰς τὰ ἀνωτέρω γινόμενα, ἄρα θὰ εἶναι κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν 120, 360 καὶ 36.

β) Ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν 120, 360, 36 δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ ἄλλους πρώτους παράγοντας ἐκτὸς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ 3· μάλιστα θὰ περιέχῃ ἕκαστον τούτων μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην τὸν ὁποῖον ἔχει οὗτος εἰς τὰς ἀναλύσεις.

Εἰς τὸν Μ.Κ.Δ. δὲν δυνάμεθα νὰ συμπεριλάβωμεν τὸν παράγοντα 5, διότι ὁ 5 δὲν διαιρεῖ τὸν 36, οὔτε τὰς δυνάμεις $2^3$ ἢ $3^2$, διότι τὸ $2^3$ δὲν διαιρεῖ τὸν 36 καὶ τὸ $3^2$ τὸν 120.

Ὥστε : Μ.Κ.Δ. (120, 360, 36) $= 2^2 \cdot 3$
$= 4 \cdot 3 = 12$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁδηγούμεθα εἰς τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

**Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν Μ.Κ.Δ. ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν κοινῶν πρώτων παραγόντων αὐτῶν λαμβάνοντες ἕκαστον παράγοντα μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην.**

**Ἐφαρμογή:** Ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν $2^2.5^2.7^3$, $2^2.3.5^3.7$, $2^3.5^2.7^2.11$ εἶναι $2^2.5^2.7$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

151. Νὰ εὕρετε τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν: α) 78, 104, β) 504, 576, 1140 γ) 24, 72, 108

152. Ποῖος εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν:

α) $2^2.5$, 300, $2^2.3.5^2$ β) $3.5.7$, $2^2.5.11$, $2.3^2.11^2$

153. Μία χορῳδία ἀποτελεῖται ἀπὸ 60 ὑψιφώνους, 120 μέσους καὶ 40 βαθυφώνους. Πόσας τὸ πολὺ ὁμοίας ὁμάδας δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν καὶ πόσους ὑψιφώνους, μέσους καὶ βαθυφώνους θὰ ἔχῃ ἑκάστη ὁμάς;

154. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $33=11.3$, $132=11.12$, $154=11.14$ νὰ εὕρετε ἕνα κοινὸν διαιρέτην τῶν ἀριθμῶν 33, 132 καὶ 154.

155. Δύο ἀριθμοὶ ἔχουν τὸν 15 ὡς κοινὸν διαιρέτην. Δείξατε ὅτι οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ θὰ ἔχουν καὶ ἄλλους κοινοὺς διαιρέτας.

## 60. ΚΟΙΝΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ ΦΥΣΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ἂς λάβωμεν δύο ἀριθμοὺς π.χ. τοὺς 3 καὶ 5 καὶ ἂς σχηματίσωμεν τὰ σύνολα τῶν πολλαπλασίων αὐτῶν. Ἔχομεν:

Σύνολον πολλαπλασίων τοῦ 3: $\Pi_1 =\{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 \cdots\}$

Σύνολον πολλαπλασίων τοῦ 5: $\Pi_2 =\{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30 \cdots\}$.

Ἡ τομὴ τῶν συνόλων $\Pi_1$ καὶ $\Pi_2$

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{0, 15, 30 \cdots\}$$

εἶναι ἓν νέον σύνολον τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς στοιχεῖα τὰ κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 5. Τὸ ἐλάχιστον στοιχεῖον, ἐκτὸς τοῦ μηδενός, τοῦ συνόλου τούτου εἶναι ὁ ἀκέραιος 15. Διὰ τοῦτο ὁ ἀκέραιος 15 ὀνομάζεται ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 5.

Σημειώνεται δὲ συντόμως Ε.Κ.Π. (3, 5)

Ἂς σχηματίσωμεν τὸ σύνολον

$$\Pi = \{x | x \text{ πολλαπλάσιον τοῦ Ε.Κ.Π.}\} = \{0, 15, 30, 45 \cdots\}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο ταυτίζεται μὲ τὸ σύνολον

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{0, 15, 30 \cdots\}$$

Ἤτοι: $$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \Pi$$

Ὁμοίας παρατηρήσεις δυνάμεθα νὰ κάμωμεν καὶ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι τρεῖς ἢ περισσότεροι.

Π.χ. διὰ τὸ Ε.Κ.Π. (12, 15, 20) ἔχομεν:

Σύνολον πολλαπλασίων 12: $\Pi_1 =\{0, 12, 24, 36, 48, 60 \cdots\}$

Σύνολον πολλαπλασίων 15: $\Pi_2 =\{0, 15, 30, 45, 60, 75 \cdots\}$

Σύνολον πολλαπλασίων 20: $\Pi_3 =\{0, 20, 60, 80 \cdots\}$

καὶ ἑπομένως

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \{0, 60, 120 \cdots\}$$
$$= \{x | x \text{ πολ/σιον τοῦ } 60\}$$

Αἱ ἀνωτέρω παρατηρήσεις μᾶς διευκολύνουν εἰς τὴν κατανόησιν τῶν ἑξῆς γενικῶν προτάσεων:

Ἐὰν δοθοῦν δύο ἢ περισσότεροι φυσικοὶ ἀριθμοί, τότε τὸ σύνολον τῶν κοινῶν πολλαπλασίων των:

1) Εἶναι ἓν ἀπειροσύνολον, διότι μεταξὺ τῶν ἄλλων στοιχείων του περιέχει τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν ὡς καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, τὰ ὁποῖα εἶναι εἰς ἄπειρον πλῆθος (Διατί;)

2) Ἔχει ἓν ἐλάχιστον στοιχεῖον, διάφορον τοῦ μηδενός, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

3) Ταυτίζεται μὲ τὸ σύνολον τῶν πολλαπλασίων τοῦ Ε.Κ.Π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

## 61. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ Ε.Κ.Π. ΔΥΟ Ή ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον ἐγνωρίσαμεν μίαν γενικὴν μέθοδον εὑρέσεως τοῦ Ε.Κ.Π. δύο ἢ περισσοτέρων φυσικῶν ἀριθμῶν. Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι ἐπίπονος, ἰδίως ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι μεγάλοι.

Τὰ κατωτέρω παραδείγματα μᾶς ὁδηγοῦν εἰς δύο ἄλλους τρόπους εὑρέσεως τοῦ Ε.Κ.Π., οἱ ὁποῖοι μᾶς εἶναι χρήσιμοι εἰς τοὺς ὑπολογισμούς.

**Παράδειγμα 1ον**

Νὰ εὑρεθῇ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 20 καὶ 24.

Ἔχομεν:

Σύνολον πολ/σίων τοῦ 20: $\Pi_1 = \{0, 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140 \cdots\}$

Σύνολον πολ/σίων τοῦ 24: $\Pi_2 = \{0, 24, 48, 72, 96, 120 \cdots\}$

Σύνολον $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{0, 120, 240, \cdots\}$

Ὥστε Ε.Κ.Π. $(20, 24) = 120$

Ἂς ἀναλύσωμεν ἤδη τοὺς ἀριθμοὺς 20, 24 καὶ τὸ Ε.Κ.Π. αὐτῶν 120, εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων.

Ἔχομεν

$$20 = 2^2 \cdot 5$$
$$24 = 2^3 \cdot 3$$
$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Ἄρα ἀντὶ Ε.Κ.Π. $(20, 24) = 120$

ἔχομεν Ε.Κ.Π. $(2^2 \cdot 5,\ 2^3 \cdot 3) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ (1)

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι:

Ε.Κ.Π. $(2^3 \cdot 7,\ 2 \cdot 3 \cdot 5) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ (2)

Ε.Κ.Π. $(2 \cdot 3,\ 2 \cdot 5,\ 3^2 \cdot 7) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ (3)

Αἱ ἀνωτέρω ἰσότητες (1), (2), (3) μᾶς ὁδηγοῦν εἰς τὸν ἑξῆς κανόνα:

**Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ Ε.Κ.Π. ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν μεγίστων δυνά-**

**μεων τῶν κοινῶν καὶ μὴ κοινῶν παραγόντων, οἱ ὁποῖοι ὑπάρχουν εἰς τὰς ἀναλύσεις τῶν ἀριθμῶν.**

**Παράδειγμα 2ον**

Νὰ εὑρεθῇ ὁ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 12, 14, 42.

Γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς εἰς μίαν σειρὰν καὶ φέρομεν κατακόρυφον εὐθεῖαν δεξιὰ τοῦ τελευταίου. Ἐὰν ὑπάρχουν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἕνα κοινὸν πρῶτον διαιρέτην, γράφομεν αὐτὸν δεξιὰ τῆς κατακορύφου γραμμῆς καὶ διαιροῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς δι' αὐτοῦ. Κάτωθι τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι διαιροῦνται ἀκριβῶς, γράφομεν τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων, τοὺς δὲ ἄλλους μεταφέρομεν ὡς ἔχουν.

$$
\begin{array}{ccc|c}
12 & 14 & 42 & 2 \\
6 & 7 & 21 & 3 \\
2 & 7 & 7 & 7 \\
2 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

$$\text{Ε.Κ.Π. } (12, 14, 42) = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

Τοιουτοτρόπως λαμβάνομεν μίαν νέαν σειρὰν ἀριθμῶν· εἰς αὐτὴν ἐργαζόμεθα ὁμοίως, ἕως ὅτου φθάσωμεν εἰς σειρὰν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἀνὰ δύο εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Τὸ Ε.Κ.Π., ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν διαιρετῶν, τοὺς ὁποίους ἐγράψαμεν δεξιὰ τῆς κατακορύφου, πολλαπλασιασμένον ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τῆς τελευταίας σειρᾶς.

**Παρατήρησις**

Τὸ Ε.Κ.Π. δοθέντων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ὁ μεγαλύτερος ἐξ αὐτῶν εἶναι διαιρετὸς δι' ὅλων τῶν ἄλλων, εἶναι ὁ μεγαλύτερος οὗτος ἀριθμός (Διατί;)

Π.χ. Ε.Κ.Π. (6, 12, 48) = 48

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

156. Νὰ εὕρετε τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν:
α) 6, 18 β) 8, 20, 30 γ) 14, 31, 24, 48

157. Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς: 885, 1670, 8976, 336 καὶ 2340 εἶναι κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 5;

158. Ποῖον εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν $2^2 \cdot 5 \cdot 7$ καὶ 644;

159. Τρεῖς ποδηλάται ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἑνὸς κυκλικοῦ στίβου καὶ κινοῦνται κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν. Ὁ πρῶτος διανύει τὸν στίβον εἰς 25 sec, ὁ δεύτερος εἰς 36 sec καὶ ὁ τρίτος εἰς 45 sec. Μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς των θὰ συναντηθοῦν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀφετηρίας καὶ πόσους γύρους θὰ ἔχῃ κάνει ἕκαστος ἐξ αὐτῶν;

160. Οἱ μαθηταὶ μιᾶς τάξεως δύνανται νὰ παραταχθοῦν εἰς τριάδας ἢ τετράδας ἢ πεντάδας χωρὶς νὰ περισσεύσῃ κανείς, εἶναι δὲ ὀλιγώτεροι ἀπὸ 80. Πόσους μαθητὰς ἔχει ἡ τάξις;

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

161. Ὅλα τὰ ψηφία ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 5. Εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι διαιρετὸς ὁ ἀριθμὸς διὰ 2 ἢ 3 ἢ 4 ἢ 5 ἢ 9;

162. Εἷς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 9. Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν σειρὰν τῶν ψηφίων των, ὁ νέος ἀριθμὸς θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 9;

163. Δίδεται ὁ ἀριθμὸς 7254;; Ἀντικαταστήσατε τὰ ἐρωτηματικὰ μὲ ψηφία ὥστε ὁ προκύπτων ἀριθμὸς νὰ εἶναι διαιρετὸς συγχρόνως διὰ 4 καὶ 9.

164. Ἡ διαίρεσις ἑνὸς ἀκεραίου α διὰ 72 ἀφήνει ὑπόλοιπον 64. Ποῖος εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν α καὶ 72;

165. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν ἄθροισμα 288 καὶ Μ.Κ.Δ. 24.

166. Δικαιολογήσατε διατί, ὅταν ἕνας ἀκέραιος διαιρῇ δύο ἄλλους ἀκεραίους, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν Μ.Κ.Δ. αὐτῶν.

167. Νὰ εὕρετε τὸν Μ.Κ.Δ. καὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν: $A=2\cdot3\cdot5^2\cdot7$ καὶ $B=2^2\cdot3^4\cdot5$. Ἔπειτα νὰ συγκρίνετε τὸ γινόμενον $A\cdot B$ μὲ τὸ γινόμενον τοῦ Μ.Κ.Δ. ἐπὶ τὸ Ε.Κ.Π. Τί παρατηρεῖτε;

168. Οἱ μαθηταὶ ἑνὸς σχολείου εἶναι τόσοι ὥστε, ἐὰν τοποθετηθοῦν κατὰ 10 δας λείπει εἷς, ἐνῷ ἐὰν τοποθετηθοῦν κατὰ 9 δας περισσεύουν 7. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν τοῦ σχολείου τούτου, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι εἶναι περισσότεροι ἀπὸ 300 καὶ ὀλιγώτεροι ἀπὸ 400;

169. Θέλομεν νὰ μοιράσωμεν 8800 δρχ., 200 ζεύγη κάλτσες καὶ 80 φανέλλες ἐξ ἴσου εἰς πτωχὰς οἰκογενείας. Πόσας τὸ πολὺ οἰκογενείας δυνάμεθα νὰ βοηθήσωμεν καὶ πόσα ἀπὸ ἕκαστον εἶδος θὰ λάβῃ ἑκάστη οἰκογένεια;

170. Τρία ἀτμόπλοια ἐκτελοῦντα τὰ δρομολόγιά των ἀνεχώρησαν συγχρόνως μίαν ἡμέραν ἐκ Πειραιῶς. Τὸ πρῶτον ἀτμόπλοιον ἐπανέρχεται καὶ ἀναχωρεῖ πάλιν ἐκ Πειραιῶς ἀνὰ 18 ἡμέρας, τὸ δεύτερον ἀνὰ 20 ἡμέρας καὶ τὸ τρίτον ἀνὰ 24 ἡμέρας.

Μετὰ πόσας τὸ ὀλιγώτερον ἡμέρας θὰ συναντηθοῦν καὶ πάλιν εἰς τὸν Πειραιᾶ;

171. Εἰς μίαν ἀτελῆ διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5 καὶ ὁ διαιρέτης 25. Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν δυνατῶν τιμῶν τοῦ ὑπολοίπου;

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄.

# ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

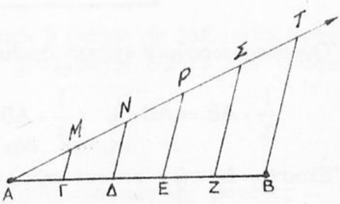
## 62. ΚΛΑΣΜΑΤΑ

### 62. 1. Διαίρεσις εὐθ. τμήματος διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ

α) Εἰς τὸ παραπλεύρως σχεδ. 20 διακρίνομεν πῶς χωρίζομεν γεωμετρικῶς τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἰς 5 ἴσα μέρη.

Ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου Α φέρομεν ἡμιευθεῖαν Αχ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν διαδοχικῶς 5 ἴσα εὐθ. τμήματα.

ΑΜ=ΜΝ=ΝΡ=ΡΣ=ΣΤ




Σχ. 20

Φέρομεν τὸ εὐθ. τμῆμα ΤΒ καὶ ἐκ τῶν σημείων Μ, Ν, Ρ, Σ παραλλήλους πρὸς ΤΒ. Μὲ τὸν διαβήτην μας ἐπαληθεύομεν ὅτι αὗται χωρίζουν τὸ τμῆμα ΑΒ εἰς 5 ἴσα τμήματα.

ΑΓ=ΓΔ=ΔΕ=ΕΖ=ΖΒ

Μὲ ὅμοιον τρόπον ἐργαζόμεθα διὰ νὰ χωρίσωμεν τὸ ΑΒ εἰς ν (ν∈Ν) ἴσα τμήματα.

β) Ἄς προσέξωμεν ἓν ἀπὸ τὰ 5 ἴσα τμήματα τοῦ ΑΒ, π.χ. τὸ ΑΓ.

Εἶναι 5.ΑΓ=ΑΒ

Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΓ λέγεται πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ΑΒ διὰ 5.

Γράφομεν δὲ ΑΒ : 5=ΑΓ

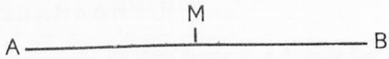
Ἤτοι 5. ΑΓ=ΑΒ ⟺ ΑΒ : 5=ΑΓ

Γενικῶς: **Ὀνομάζομεν πηλίκον διαιρέσεως ἑνὸς τμήματος α διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν ἓν εὐθ. τμῆμα β τοιοῦτον, ὥστε ν·β=α**

$$\boxed{\alpha : \nu = \beta \iff \nu \cdot \beta = \alpha \qquad \nu \in N}$$

Εἰδικῶς διὰ $\nu=1$ θέτομεν $\alpha:1=\alpha$

### 62. 2. Κλασματικὴ μονὰς



Σχ. 21

Εἰς τὸ σχ. 21 εἶναι ΑΜ=ΑΒ:2.

Ἄλλος τρόπος νὰ δηλώσωμεν τοῦτο εἶναι νὰ εἴπωμεν ΑΜ εἶναι «ἓν δεύτερον τοῦ ΑΒ» ἢ «ἓν δεύτερον ἐπὶ ΑΒ», νὰ γράψωμεν δὲ

$$AM = \frac{1}{2} \cdot AB$$

Ἤτοι ἡ γραφὴ $\frac{1}{2}$ παριστάνει ἕνα «νέον» ἀριθμὸν τοιοῦτον ὥστε τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ ΑΒ νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον ΑΒ:2

$$\boxed{\frac{1}{2} \cdot AB = AB : 2}$$

Ὁμοίως θεωροῦμεν «νέους» ἀριθμοὺς $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ τοιούτους ὥστε :

$$\frac{1}{3} \cdot AB = AB:3, \quad \frac{1}{4} \cdot AB = AB:4, \quad \frac{1}{5} \cdot AB = AB:5 \cdots$$

Ἕκαστος ἐκ τῶν «νέων» αὐτῶν ἀριθμῶν

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{\nu} \qquad \nu \in N$$

λέγεται κλασματικὴ μονάς.

Κατὰ τ' ἀνωτέρω : Ἐὰν $\frac{1}{\nu}$ εἶναι μία κλασματικὴ μονὰς καὶ ΑΒ ἓν εὐθ. τμῆμα, τότε

$$\boxed{\frac{1}{\nu} \cdot AB = AB : \nu}$$

### 62. 3. Κλασματικοὶ ἀριθμοὶ

α) Ὅπως ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα σχηματίζομεν τοὺς ἀκεραίους ἀρι- ἀριθμούς, π.χ. $1+1=2 \cdot 1=2$, $1+1+1=3 \cdot 1=3$, τοιουτοτρόπως ἀπὸ ἑκάστην κλασματικὴν μονάδα σχηματίζομεν «νέους» ἀριθμούς, τοὺς κλασματικούς.

Συγκεκριμένως: Ἀντὶ «2 φορὰς τὸ $\frac{1}{7}$» λέγομεν «γινόμενον 2 ἐπὶ $\frac{1}{7}$» ἢ «κλάσμα δύο ἕβδομα».

Γράφομεν δὲ $2 \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$

Ἐπίσης $3 \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$, $3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$, $5 \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

Γενικῶς, ἀντὶ «α φορὰς τὸ $\frac{1}{\beta}$» λέγομεν «γινόμενον α ἐπὶ $\frac{1}{\beta}$» ἢ «κλάσμα α διὰ β».

Γράφομεν δὲ

$$\boxed{\alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{ὅπου } \alpha \in N_0 \text{ καὶ } \beta \in N.}$$

Ἤτοι: **Ἕκαστον κλάσμα εἶναι γινόμενον ἑνὸς ἀκεραίου ἐπὶ μίαν κλασματικὴν μονάδα.**

Εἰς τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς α (ὑπεράνω τῆς ὁριζοντίας γραμμῆς) λέγεται ἀ ρ ι θ μ η τ ή ς, ἐνῶ ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς β (κάτω τῆς ὁριζοντίας γραμμῆς) π α ρ ο ν ο μ α σ τ ή ς. Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β λέγονται ὅ ρ ο ι τοῦ κλάσματος αὐτοῦ.

## 62. 4. Γινόμενον κλάσματος ἐπὶ εὐθ. τμῆμα

Ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, τὸ γινόμενον μιᾶς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{\nu}$ ἐπὶ εὐθ. τμῆμα ΑΒ ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον ΑΒ:ν. Κατωτέρω θὰ ὁρίσωμεν τὸ γινόμενον ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ εὐθ. τμῆμα.

Χαράσσομεν ἓν εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ εὑρίσκομεν:

α) Τὸ πηλίκον αὐτοῦ διὰ 4

β) Τὸ γινόμενον τοῦ 3 ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον, σχ. 22.

Σχ. 22

Τὸ ἀποτέλεσμα τῶν δύο ἀνωτέρω διαδοχικῶν πράξεων ἤτοι τὸ τμῆμα

$$EZ = 3.\Gamma\Delta$$

ἢ

$$EZ = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\, AB\right)$$

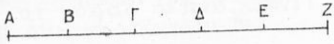
λέγεται **γινόμενον τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$ ἐπὶ τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ.**

Γράφομεν δέ: $EZ = \frac{3}{4} \cdot AB$

Ὥστε: $\frac{3}{4} \cdot AB = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\, AB\right)$

Γενικῶς: **Γινόμενον κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐπὶ εὐθ. τμῆμα ΑΒ λέγεται τὸ γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸ τμῆμα $\frac{1}{\beta} \cdot$ ΑΒ.**

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} \cdot AB = \alpha \cdot \left(\frac{1}{\beta} \cdot AB\right)}$$



Σχ. 23

Π.χ. εἰς τὸ σχέδιον 23 ἔχομεν

$$A\Gamma = \frac{2}{5} \cdot AZ, \quad AE = \frac{4}{5} \cdot AZ, \quad A\Delta = \frac{3}{4} \cdot AE \ldots$$

### 62. 5. Ἡ ἀκεραία μονὰς ὡς κλάσμα

Εἰς τὸ σχ. 23 εἶναι

$$AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E + EZ = AZ$$

ἢ

$$\frac{1}{5} \cdot AZ + \frac{1}{5} \cdot AZ + \frac{1}{5} \cdot AZ + \frac{1}{5} \cdot AZ + \frac{1}{5} \cdot AZ = AZ$$

ἢ

$$5 \cdot \left(\frac{1}{5} AZ\right) = AZ$$

ἢ

$$\frac{5}{5} \cdot AZ = 1 \cdot AZ$$

Ἡ τελευταία ἰσότης μᾶς ὁδηγεῖ νὰ γράψωμεν

$$\frac{5}{5} = 1$$

Ὁμοίως $\quad \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \qquad \alpha \in N$

Κατ' ἐπέκτασιν δὲ σημειώνομεν καὶ $\quad \frac{1}{1} = 1$

Ἤτοι: **Ἕκαστον κλάσμα μὲ ἴσους ὅρους ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

172. Ποῖον κλάσμα τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι μία γωνία $40^0$, $50^0$;

173. Νὰ γράψετε ἓν εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ ἔπειτα τμήματα ἴσα πρὸς $\frac{1}{3} \cdot AB$, $\frac{1}{4} \cdot AB$, $\frac{2}{3} \cdot AB$, $\frac{3}{4} \cdot AB$.

174. Ποῖα γινόμενα παριστοῦν τὰ κλάσματα $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{7}{9}$;

175. Ἐὰν $\chi \epsilon N_0$, νὰ εὕρετε διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ $\chi$ τὸ κλάσμα $\frac{5}{\chi+3}$ ἰσοῦται μὲ 1.

176. Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ $\chi \epsilon N_0$ τὸ κλάσμα $\frac{2 \cdot \chi+3}{9}$ ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα;

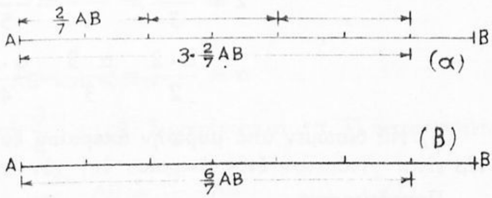
## 63. ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΕΠΙ ΚΛΑΣΜΑ

### 63. 1. Ὁρισμὸς

Ἄς προσπαθήσωμεν νὰ ὁρίσωμεν τὸ γινόμενον $3 \cdot \frac{2}{7}$

Εἰς τὸ σχ. 24α ἐσχηματίσαμεν ἀρχικῶς τὸ γινόμενον $\frac{2}{7} \cdot AB$ καὶ ἔπειτα τὸ γινόμενον $3 \cdot \left(\frac{2}{7} AB\right)$.

Εἰς τὸ σχ. 24β ἐσχηματίσαμεν τὸ γινόμενον $\frac{6}{7} \cdot AB$




Σχ. 24

Παρατηροῦμεν ὅτι καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις κατελήξαμεν εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα. Ἤτοι ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ $\frac{2}{7}$ ἐπὶ AB καὶ ἔπειτα τὸ 3 ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν γινόμενον, θὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\frac{6}{7} \cdot AB$.

$$3 \cdot \left(\frac{2}{7} \cdot AB\right) = \frac{6}{7} \cdot AB$$

Ἡ παρατήρησις αὐτὴ μᾶς ὁδηγεῖ νὰ λάβωμεν

$$3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{7} \quad \text{ἢ} \quad 3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7}$$

Γενικῶς:

$$\boxed{\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma} \qquad \alpha,\ \beta \epsilon N_0,\ \gamma \epsilon N} \qquad (1)$$

**Τὸ γινόμενον ἀκεραίου α ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{\beta}{\gamma}$ ἰσοῦται πρὸς τὸ κλάσμα $\frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma}$.**

**63. 2. Ἐφαρμογαί**

ι) Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (1) θέσωμεν $\gamma=\beta$, θὰ ἔχωμεν $\alpha \cdot \frac{\beta}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta}$.

Ἤ
$$\boxed{\alpha = \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta}} \qquad (2)$$

Ὁ τύπος (2) μᾶς ἐπιτρέπει :

α) Νὰ θέσωμεν τὸν **ἀκέραιον α ὑπὸ μορφὴν κλάσματος**.

Παραδείγματα :

$$2 = \frac{2 \cdot 3}{3} = \frac{2 \cdot 4}{4} = \frac{2 \cdot 5}{5} \ldots$$

$$\alpha = \frac{\alpha \cdot 2}{2} = \frac{\alpha \cdot 3}{3} = \frac{\alpha \cdot 4}{4} = \frac{\alpha \cdot 5}{5} \ldots$$

β) Νὰ θέσωμεν **ὑπὸ μορφὴν ἀκεραίου ἓν κλάσμα** τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι γινόμενον ἑνὸς ἀκεραίου ἐπὶ τὸν παρονομαστήν.

Παραδείγματα :

$$\frac{2 \cdot 3}{3} = 2, \quad \frac{3 \cdot 3}{3} = 3, \quad \frac{4 \cdot 3}{3} = 4 \ldots$$

$$\frac{2 \cdot \alpha}{\alpha} = 2, \quad \frac{3 \cdot \alpha}{\alpha} = 3, \quad \frac{4 \cdot \alpha}{\alpha} = 4 \ldots \qquad \alpha \in N$$

ιι) Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (1) θέσωμεν $\gamma=\alpha$ θὰ ἔχωμεν

$$\alpha \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha} \text{ καὶ ἐπειδὴ } \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha} = \beta$$

θὰ ἔχωμεν
$$\boxed{\alpha \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \beta} \qquad (3)$$

Ὁ τύπος (3) δηλοῖ ὅτι **τὸ γινόμενον ἑνὸς φυσικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα μὲ παρονομαστὴν τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος**.

Παραδείγματα :

$$3 \cdot \frac{2}{3} = 2, \quad 4 \cdot \frac{3}{4} = 3, \quad 5 \cdot \frac{3}{5} = 3$$

$$\alpha \cdot \frac{2}{\alpha} = 2, \quad \alpha \cdot \frac{3}{\alpha} = 3, \quad \alpha \cdot \frac{4}{\alpha} = 4 \qquad \text{ὅπου } \alpha \in N$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

177. Ἐὰν αὐξήσωμεν τὸν ἀριθμὸν 36 κατὰ τὰ 3/9 αὐτοῦ πόσος θὰ γίνῃ;

178. Νὰ γραφοῦν ὡς ἀκέραιοι τὰ κλάσματα :

$$\frac{12}{4}, \quad \frac{5 \cdot \alpha}{5}, \quad \frac{5 \cdot \alpha}{\alpha} \qquad \text{ὅπου } \alpha \in N$$

179. Εἰς τὰς κατωτέρω ἰσότητας ἀντικαταστήσατε τὸ χ μὲ κατάλληλον ἀκέραιον ὥστε αὗται νὰ εἶναι ἀληθεῖς

$$4 = \frac{11 + \chi}{5}, \qquad \chi = \frac{24}{4}, \qquad 9 = \frac{3\chi + 3}{6}$$

## 64. Η ΣΧΕΣΙΣ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ

### 64. 1. Ὁρισμός

Χαράξατε ἓν εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ εὕρετε :

α) τὰ $\frac{6}{8}$ αὐτοῦ καὶ β) τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ. Συγκρίνατε αὐτά. Τί παρατηρεῖτε;

Εἶναι $$\frac{3}{4} \cdot AB = \frac{6}{8} \cdot AB \qquad (1)$$

Ἡ ἀνωτέρω ἰσότης μᾶς ὁδηγεῖ νὰ λάβωμεν τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{6}{8}$ ἴσα μεταξύ των.

Ἤτοι : $$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

Γενικῶς : **Ἐὰν** $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \mathbf{AB} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \mathbf{AB}$, **ὅπου** $\alpha, \gamma \in \mathbf{N}_0$, $\beta, \delta \in \mathbf{N}$, **τότε λέγομεν ὅτι τὰ κλάσματα** $\frac{\alpha}{\beta}$ **καὶ** $\frac{\gamma}{\delta}$ **εἶναι ἴσα μεταξύ των ἢ ἁπλῶς ἴσα· γράφομεν δὲ**

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

### 64. 2. Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης

Ἂς ἴδωμεν πῶς εἶναι δυνατὸν ἕκαστον τῶν ἴσων κλασμάτων $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{6}{8}$ νὰ προκύψῃ ἀπὸ τὸ ἄλλο. Παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν μὲν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ 2 θὰ εὕρωμεν $\frac{6}{8}$. Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{6}{8}$ διὰ 2 εὑρίσκομεν $\frac{3}{4}$.

$$\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{6}{8}, \qquad \frac{6}{8}=\frac{6:2}{8:2}=\frac{3}{4}.$$

Ἀπὸ τὴν παρατήρησιν αὐτὴν ὁδηγούμεθα εἰς τὴν ἑξῆς θεμελιώδη ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων.

**Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ τὸν αὐτὸν φυσικὸν ἀριθμὸν ἢ ἐὰν τοὺς διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ, ὅταν εἶναι δυναταὶ αἱ διαιρέσεις, τότε προκύπτει κλάσμα ἴσον πρὸς τὸ ἀρχικόν.**

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\gamma}, \quad \frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\gamma}=\frac{(\alpha\cdot\gamma):\gamma}{(\beta\cdot\gamma):\gamma}=\frac{\alpha}{\beta} \qquad \begin{matrix}\alpha\in N_0\\ \beta,\gamma\in N\end{matrix}}$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐὰν δοθῇ ἓν κλάσμα, π.χ. τὸ $\frac{3}{4}$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μὴ πεπερασμένον πλῆθος κλασμάτων ἴσων πρὸς αὐτό.

Ἦτοι: $$\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{3\cdot 4}{4\cdot 4}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\dots$$
$$=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\frac{15}{20}=\dots$$

Τὸ σύνολον ὅλων αὐτῶν τῶν ἴσων κλασμάτων λέγομεν ὅτι ἀποτελεῖ μίαν κλάσιν ἰσοδυναμίας.

Ὁμοίως τὸ σύνολον τῶν κλασμάτων τῶν ἴσων πρὸς τὸ 1/2, ἤτοι τὸ σύνολον

$$\left\{\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{6}, \quad \frac{4}{8} \dots\right\}$$

ἀποτελεῖ μίαν ἄλλην κλάσιν ἰσοδυναμίας.

Γενικῶς τὸ σύνολον ὅλων τῶν κλασμάτων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα πρὸς δοθὲν κλάσμα, ἀποτελεῖ μίαν κλάσιν ἰσοδυναμίας.

## 65. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

### 65. 1. Ἀνάγωγα κλάσματα

ι) Ἂς προσέξωμεν τὰ κλάσματα μιᾶς κλάσεως ἰσοδυναμίας, π.χ. τῆς κλάσεως

$$\left\{\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{6}, \quad \frac{4}{8} \dots\right\}$$

Μεταξὺ ὅλων αὐτῶν τῶν κλασμάτων πλέον εὔχρηστον εἶναι τὸ κλάσμα

$\frac{1}{2}$. (Διατί;). Οἱ ὅροι τούτου εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ λέγεται ἀ ν ά γ ω γ ο ν κλάσμα.

Γενικῶς : **Ὅταν ἓν κλάσμα ἔχῃ τοὺς ὅρους του πρώτους πρὸς ἀλλήλους λέγεται ἀνάγωγον.**

**Παραδείγματα**

Τὰ κλάσματα $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{11}$ εἶναι ἀνάγωγα. Ἀντιθέτως τὰ κλάσματα $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{36}$ δὲν εἶναι ἀνάγωγα. (Διατί;)

### 65. 2. Ἁπλοποίησις κλάσματος

Ἐὰν μᾶς δοθῇ ἓν ἀνάγωγον κλάσμα, π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$, τότε δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ 2, 3, 4 . . . καὶ νὰ εὕρωμεν τὰ μὴ ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$ . . . τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα πρὸς αὐτό.

Ἀντιστρόφως ἐὰν μᾶς δοθῇ ἓν μὴ ἀνάγωγον κλάσμα, π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{24}{60}$, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους του διὰ τοῦ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν,

$$\text{Μ.Κ.Δ. } (24 \text{ καὶ } 60) = 12, \qquad \frac{24}{60} = \frac{24:12}{60:12} = \frac{2}{5}$$

καὶ νὰ εὕρωμεν τὸ ἴσον πρὸς αὐτὸ ἀνάγωγον κλάσμα.

Τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{2}{5}$ ἔχει τοὺς ὅρους του μικροτέρους ἀπὸ τοὺς ἀντιστοίχους ὅρους τοῦ ἴσου πρὸς αὐτὸ κλάσματος $\frac{24}{60}$· εἶναι ὅπως λέγομεν ἁπλούστερον. Διὰ τοῦτο ἡ ἀνωτέρω ἐργασία λέγεται ἁ π λ ο π ο ί η σ ι ς τοῦ κλάσματος $\frac{24}{60}$.

Γενικῶς: **Ἁπλοποίησις ἑνὸς κλάσματος λέγεται ἡ εὕρεσις ἄλλου κλάσματος ἴσου πρὸς αὐτὸ ἀλλὰ μὲ μικροτέρους ὅρους.**

**Παραδείγματα ἁπλοποιήσεως**

$$\frac{125}{1500} = \frac{125:125}{1500:125} = \frac{1}{12}$$

Διότι Μ.Κ.Δ. (125, 1500) = 125

$$\frac{2\cdot\alpha}{5\cdot\alpha} = \frac{(2\cdot\alpha):\alpha}{(5\cdot\alpha):\alpha} = \frac{2\cdot(\alpha:\alpha)}{5\cdot(\alpha:\alpha)} = \frac{2}{5} \qquad \alpha\in N$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

180. Γράψατε τὸ σύνολον τῶν κλασμάτων τὰ ὁποῖα ἔχουν παρονομαστὴν 30 ἢ 50 καὶ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ κλάσμα $\frac{5}{6}$.

181. Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἴσον πρὸς τὸ $\frac{3}{5}$ καὶ τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι ἔχουν Μ.Κ.Δ. τὸν ἀριθμὸν 7.

182. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα

$$\frac{3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 10}{15}, \quad \frac{3^5 \cdot 5^8 \cdot 7^4}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^5}, \quad \frac{2 \cdot \alpha + 3 \cdot \alpha}{6 \cdot \alpha} \quad \alpha \in N$$

183. Μία ὁποιαδήποτε κλασματικὴ μονὰς εἶναι ἀνάγωγον κλάσμα; Διατί;

184. Νὰ προσδιορίσετε τὸν ἀκέραιον $\chi$ εἰς τρόπον ὥστε

$$\frac{2\chi + 2}{5} = \frac{8}{10}.$$

## 66. Ο ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΩΣ ΠΗΛΙΚΟΝ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

**66. 1.** Ἔχομεν ὁρίσει τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha \in N_0$, $\beta \in N$ ὡς γινόμενον τοῦ ἀκεραίου α ἐπὶ τὴν κλασματικὴν μονάδα $\frac{1}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$.

Κατωτέρω θὰ ἴδωμεν μίαν ἄλλην σημασίαν τοῦ κλάσματος αὐτοῦ.

**66. 2.** Ἂς ζητήσωμεν τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως 2:3. Ἤτοι ἂς ζητήσωμεν ἕνα ἀριθμὸν τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ 3 νὰ ἰσοῦται μὲ 2. Ὡς γνωστὸν δὲν ὑπάρχει τοιοῦτος ἀκέραιος. Ὑπάρχει ὅμως κλάσμα

Πράγματι $$3 \cdot \frac{2}{3} = 2$$

Ἡ ἀνωτέρω ἰσότης μᾶς ἐπιτρέπει νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως 2:3. (Διατί ; Ἐνθυμηθῆτε ὅτι $\delta \cdot \pi = \Delta \iff \Delta : \delta = \pi$)

Ὥστε $$2 : 3 = \frac{2}{3}$$

Γενικῶς διὰ τὸ κλάσμα $$\frac{\alpha}{\beta} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha \in N_0 \\ \beta \in N\,; \end{array}\right\}$$

ἔχομεν $$\beta \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \alpha$$

Ἤτοι $$\boxed{\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} \quad \alpha \in N_0, \quad \beta \in N} \qquad (1)$$

### 66. 3. Συμπέρασμα

Χάρις εἰς τὰ κλάσματα ἑκάστη διαίρεσις κατέστη δυνατὴ καὶ τελεία ἐκτὸς βεβαίως τῆς περιπτώσεως εἰς τὴν ὁποίαν ὁ διαιρέτης εἶναι μηδέν. Τὸ ἀκριβὲς πηλίκον ἑκάστης διαιρέσεως, μὲ διαιρέτην διάφορον τοῦ μηδενός, εἶναι κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην.

$$\left.\begin{array}{lll}\text{Ἀριθμητὴς} & \alpha & = \text{Διαιρετέος} \\ \text{Παρανομαστὴς} & \beta & = \text{διαιρέτης}\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{ἀκριβὲς πηλίκον}$$

### 66. 4. Λόγος δύο ἀκεραίων

Τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως 2 διὰ 3, ἤτοι τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$, λέγεται καὶ λόγος τοῦ 2 πρὸς τὸ 3.

Γενικῶς, ἐὰν $\alpha \in N_0$ καὶ $\beta \in N$, τότε λόγος τοῦ α πρὸς τὸ β λέγεται τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$.

### 66. 5. Ἡ ἐξίσωσις $\alpha \cdot \chi = \beta$ ὅπου $\alpha \in N$, $\beta \in N_0$.

Τὸ συμπέρασμα τῆς 66·3 μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐπιλύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha \cdot \chi = \beta$ ὅπου $\alpha \in N$, $\beta \in N_0$, καὶ ὅταν ἀκόμη β δὲν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ α.

Π.χ. διὰ τὴν ἐξίσωσιν $2 \cdot \chi = 3$ συμφώνως πρὸς τὴν γνωστὴν ἰσοδυναμίαν

$$\alpha \cdot \beta = \gamma \Longleftrightarrow \beta = \gamma : \alpha$$

ἔχομεν

$$2 \cdot \chi = 3 \Longleftrightarrow \chi = 3 : 2 = \frac{3}{2}$$

Γενικῶς διὰ τὴν ἐξίσωσιν $\alpha \cdot \chi = \beta$ ὅπου $\alpha \in N$, $\beta \in N_0$, ἔχομεν

$$\alpha \cdot \chi = \beta \Longleftrightarrow \chi = \beta : \alpha$$

Ἢ

$$\alpha \cdot \chi = \beta \Longleftrightarrow \chi = \frac{\beta}{\alpha}$$

### 66. 6. Παρατηρήσεις

α) Τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{1}$, $\alpha \in N_0$.

Κατὰ τὸν τύπον $\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta}$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{ἔχομεν} & 3 : 1 = \frac{3}{1} \\ \text{Ἀλλὰ} & 3 : 1 = 3\end{array}\right\} \text{Ἄρα} \quad 3 = \frac{3}{1}$$

'Ομοίως $\quad 4 = \frac{4}{1}, \; 5 = \frac{5}{1}, \; 6 = \frac{6}{1}, \ldots$

καὶ γενικῶς :
$$\boxed{\alpha = \frac{\alpha}{1} \quad \text{ὅπου} \quad \alpha \in N_0}$$

β) Τὸ κλάσμα $\frac{0}{\alpha}$, $\alpha \in N$

εἶναι $\quad 0:2 = \frac{0}{2}$

ἀλλὰ $\quad 0:2 = 0$

$\Big\}$ Ἄρα $\frac{0}{2} = 0$

'Ομοίως $\quad \frac{0}{3} = 0, \quad \frac{0}{4} = 0, \quad \frac{0}{5} = 0 \cdots,$

Γενικῶς :
$$\boxed{\frac{0}{\alpha} = 0 \quad \text{ὅπου} \quad \alpha \in N}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

185. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀκριβῆ πηλίκα τῶν διαιρέσεων 5:9, $\quad 3\alpha^2:5.\alpha$ ὅπου $\alpha \in N$.

186. Εἰς μίαν ἐκδρομὴν ἐκ τῶν 48 μαθητῶν τῆς τάξεως ἀπουσίαζον οἱ 2. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν ἀριθμῶν τῶν ἀπόντων μαθητῶν α) πρὸς τὸν συνολικὸν ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν τῆς τάξεως, β) πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν τῆς τάξεως οἱ ὁποῖοι ἦσαν παρόντες εἰς τὴν ἐκδρομήν;

187. Ἐπιλύσατε τὰς ἐξισώσεις :

$$2 \cdot x = 5, \quad \frac{x}{3} = 4, \quad \frac{x}{2} = 0, \quad \frac{2x+1}{3} = 3$$

188. Ποῖαι ἐκ τῶν κατωτέρω ἰσοτήτων εἶναι ἀληθεῖς;

$$\frac{0}{4} = 0, \quad \frac{0}{4} = 4, \quad \frac{5}{5} = 0, \quad \frac{5}{1} = 5, \quad \frac{6}{0} = 6$$

## 67. ΟΜΩΝΥΜΑ, ΕΤΕΡΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

### 67. 1. 'Ορισμοί

Τὰ κλάσματα $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$, ἔχουν ἓν κοινὸν γνώρισμα : Ἔχουν ἴσους παρονομαστάς. Διὰ τοῦτο λέγονται ὁ μ ώ ν υ μ α.

Τὰ κλάσματα $\frac{3}{8}$ καὶ $\frac{4}{7}$ ἔχουν διαφορετικοὺς παρονομαστάς. Διὰ τοῦτο λέγονται ἑ τ ε ρ ώ ν υ μ α.

### 67. 2. Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα

Συχνὰ εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς εἶναι ἀνάγκη νὰ ἔχωμεν ὁμώνυμα κλάσματα. Γεννᾶται συνεπῶς τὸ πρόβλημα: Πῶς θὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ἴσα πρὸς αὐτὰ ὁμώνυμα.

Ἂς λάβωμεν δύο κλάσματα, π.χ. τὰ κλάσματα $\frac{9}{10}$, $\frac{7}{8}$ καὶ ἂς προσπαθήσωμεν νὰ τὰ τρέψωμεν εἰς ἄλλα ἴσα πρὸς αὐτὰ ἀλλὰ ὁμώνυμα. Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὰ ἴσα πρὸς αὐτὰ κλάσματα:

$$\frac{9}{10} = \frac{18}{20} = \frac{27}{30} = \frac{36}{40} = \frac{45}{50} \ldots$$

$$\frac{7}{8} = \frac{14}{16} = \frac{21}{24} = \frac{28}{32} = \frac{35}{40} = \frac{42}{48} \ldots$$

Ἂς προσέξωμεν τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{36}{40}$ καὶ $\frac{35}{40}$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα πρὸς τὰ κλάσματα $\frac{9}{10}$ καὶ $\frac{7}{8}$ ἀντιστοίχως

$$\frac{9}{10} = \frac{36}{40}, \qquad \frac{7}{8} = \frac{35}{40}$$

Παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς:

α) Ὁ κοινὸς παρονομαστὴς 40 εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν 10 καὶ 8.

β) Ἕκαστον πολλαπλάσιον τοῦ 40, ἤτοι ἕκαστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν 8 καὶ 10, δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς κοινὸς παρονομαστὴς ὁμωνύμων κλασμάτων ἀντιστοίχως ἴσων πρὸς τὸ κλάσματα $\frac{9}{10}$ καὶ $\frac{7}{8}$

$$\frac{9}{10} = \frac{72}{80} = \frac{108}{120} = \ldots$$

$$\frac{7}{8} = \frac{70}{80} = \frac{105}{120} = \ldots$$

Εἶναι ὅμως προτιμότερον νὰ χρησιμοποιοῦμεν τὸ Ε.Κ.Π. διὰ νὰ ἔχωμεν κλάσματα μὲ τοὺς μικροτέρους δυνατοὺς ὅρους.

Ἐκ τῆς πρώτης παρατηρήσεως ὁδηγούμεθα εἰς τὸν γνωστὸν τρόπον τροπῆς ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα ἴσα πρὸς αὐτά.

**67. 3. Παραδείγματα**

1) Διὰ τὰ κλάσματα $\frac{2}{15}$ καὶ $\frac{7}{9}$ ἔχομεν:

α) Ε.Κ.Π. $(15, 9) = 45$ β) $45 : 15 = 3$, $45 : 9 = 5$

$$\gamma)\ \frac{2}{15} = \frac{2 \cdot 3}{15 \cdot 3} = \frac{6}{45}, \quad \frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 5}{9 \cdot 5} = \frac{35}{45}$$

2) Διὰ τὰ κλάσματα $\frac{4}{15}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{2}{3}$ ἔχομεν:

α) Ε.Κ.Π. $(15, 12, 3) = 60$ β) $60 : 15 = 4$, $60 : 12 = 5$, $60 : 3 = 20$

$$\gamma)\ \frac{4}{15} = \frac{4 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{16}{60}, \quad \frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{25}{60}, \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 20}{3 \cdot 20} = \frac{40}{60}.$$

3) Διὰ τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, τῶν ὁποίων οἱ παρονομασταὶ εἶναι ἀνὰ δύο πρῶτοι μεταξύ των, ἔχομεν:

α) Ε.Κ.Π. $(2, 3, 5) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, β) $(2 \cdot 3 \cdot 5) : 2 = 3 \cdot 5$, $(2.3 \cdot 5) : 3 = 2 \cdot 5$, $(2 \cdot 3 \cdot 5) : 5 = 2 \cdot 3$

$$\gamma)\ \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 3}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{15}{30}, \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{20}{30}, \quad \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{5 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{18}{30}$$

**67. 4. Μία ἄλλη ἰδιότης τῶν ἴσων κλασμάτων**

ι) Ἂς λάβωμεν δύο ἴσα κλάσματα, π.χ. τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{6}{9}$, καὶ ἂς σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμητοῦ ἑκάστου τούτων μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου. Ἤτοι τὰ γινόμενα $2 \cdot 9$ καὶ $6 \cdot 3$. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ γινόμενα αὐτὰ εἶναι ἴσα

$$2 \cdot 9 = 6 \cdot 3 \quad (= 18).$$

Ὁμοίως διὰ τὰ ἴσα κλάσματα $\frac{3}{7}$, $\frac{12}{28}$ ἔχομεν

$$3 \cdot 28 = 7 \cdot 12$$

Γενικῶς ἂς λάβωμεν δύο τυχόντα ἴσα κλάσματα

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \qquad \left.\begin{matrix} \alpha,\ \gamma \in N_0 \\ \beta,\ \delta \in N \end{matrix}\right\} \qquad (1)$$

καὶ ἂς τρέψωμεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \delta}, \quad \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma \cdot \beta}{\delta \cdot \beta}$$

Θὰ εἶναι $$\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\delta}=\frac{\gamma\cdot\beta}{\delta\cdot\beta} \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος (2) ἐννοοῦμεν ὅτι $\alpha.\delta=\beta.\gamma$

Ὥστε: $$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Longrightarrow \alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma, \quad \left.\begin{matrix}\alpha,\ \gamma\in N_0\\ \beta,\ \delta\in N\end{matrix}\right\} \qquad (3)$$

ιι) Εἶναι εὔκολον νὰ ἐπαληθεύσωμεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω συνεπαγωγὴ ἰσχύει καὶ ἀντιστρόφως.

Π.χ. ἐκ τῆς ἰσότητος $3\cdot 4=6\cdot 2$ προκύπτει ὅτι $\frac{3}{6}=\frac{2}{4}$

Ὁμοίως ἐκ τῆς ἰσότητος $7\cdot 8=4\cdot 14$ » » $\frac{7}{4}=\frac{14}{8}$

Γενικῶς $$\alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma \Longrightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \quad \left.\begin{matrix}\alpha,\ \gamma\in N_0\\ \beta,\ \delta\in N\end{matrix}\right\} \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν (3) καὶ (4) ἔχομεν ὅτι

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Longleftrightarrow \alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma \qquad \beta,\ \delta\in N, \quad \alpha,\ \gamma\in N_0}$$

Ἡ ἀνωτέρω σχέσις μᾶς δίδει ἕνα ἄλλον τρόπον διὰ νὰ ἐξακριβώσωμεν ἐὰν δύο κλάσματα εἶναι ἴσα.

**Παραδείγματα**

Τὰ κλάσματα $\frac{3}{10}$, $\frac{21}{70}$ εἶναι ἴσα, διότι $3\cdot 70=10\cdot 21$ $(=210)$

Ἀντιθέτως τὰ κλάσματα $\frac{7}{9}$ καὶ $\frac{20}{27}$ δὲν εἶναι ἴσα, διότι $7\cdot 27\neq 9\cdot 20$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

189. Νὰ τρέψετε εἰς ὁμώνυμα τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα

$$\frac{3}{10}, \quad \frac{2}{2^3\cdot 5} \quad \frac{1}{4}$$

190. Ὁμοίως τὰ κλάσματα $\frac{14}{35}$, καὶ $\frac{18}{27}$.

191. Ποῖα ἐκ τῶν κατωτέρω ζευγῶν κλασμάτων ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἴσα κλάσματα;

α) $\frac{7}{75}, \frac{35}{375}$ β) $\frac{3}{29}, \frac{7}{90}$ γ) $\frac{2}{11}; \frac{14}{77}$

Ἐργασθῆτε χωρὶς νὰ τρέψετε τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα.

192. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\alpha\cdot 4=2.18$ ποίας ἰσότητας κλασμάτων συνάγετε; $\alpha\in N_0$

## 68. Η ΣΧΕΣΙΣ ΤΗΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΟΣ

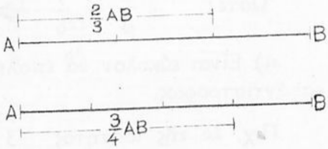
### 68. 1. Ὁρισμὸς

Ἂς λάβωμεν ἓν εὐθ. τμῆμα καὶ ἂς σχηματίσωμεν:

α) τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ καὶ β) τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ,

σχ. 25. Παρατηροῦμεν ὅτι

$$\frac{3}{4} \cdot AB > \frac{2}{3} \cdot AB$$



Σχ. 25

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι τὸ $\frac{3}{4}$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\frac{2}{3}$ ἢ ὅτι τὸ $\frac{2}{3}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{3}{4}$.

Γράφομεν δὲ ἀντιστοίχως

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{3} \qquad \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$

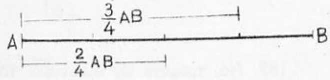
Γενικῶς: **Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta} \cdot AB > \frac{\gamma}{\delta} \cdot AB$ ὅπου $\alpha, \gamma \in N_0$ καὶ $\beta, \delta \in N$ τότε λέγομεν ὅτι $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\frac{\gamma}{\delta}$.**

Γράφομεν δὲ $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$.

### 68. 2. Ὁμώνυμα κλάσματα

Εἶναι φανερὸν ὅτι

$\frac{3}{4} \cdot AB > \frac{2}{4}$ AB, σχ. 26



Σχ. 26

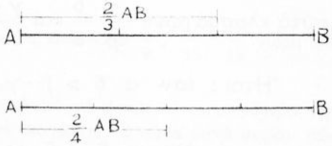
Ἄρα $\frac{3}{4} > \frac{2}{4}$.

Γενικῶς: **Μεταξὺ δύο ὁμωνύμων κλασμάτων μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἔχον μεγαλύτερον ἀριθμητήν.**

$$\boxed{\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma} \quad \text{ἐὰν} \quad \alpha > \beta \quad \left.\begin{matrix}\alpha, \beta \in N_0 \\ \gamma \in N\end{matrix}\right\}}$$

### 68. 3. Κλάσματα μὲ ἴσους ἀριθμητὰς

Εἶναι φανερὸν ὅτι



Σχ. 27

$$\frac{2}{3}\,AB > \frac{2}{4}\,AB, \text{ σχ. 27}$$

Ἄρα $\quad \frac{2}{3} > \frac{2}{4}$

Γενικῶς: **Μεταξὺ δύο κλασμάτων μὲ ἴσους ἀριθμητὰς μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἔχον μικρότερον παρονομαστὴν**

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha}{\gamma} \quad \text{ἐὰν} \quad \beta < \gamma \qquad \left.\begin{matrix}\alpha \in N_0 \\ \beta,\ \gamma \in N\end{matrix}\right\}}$$

### 68. 4. Τυχόντα κλάσματα

α) Ἂς προσπαθήσωμεν νὰ εὕρωμεν ποῖον ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{2}{3}$ εἶναι μεγαλύτερον.

Τὰ κλάσματα αὐτὰ οὔτε ὁμώνυμα εἶναι οὔτε ἴσους ἀριθμητὰς ἔχουν. Ἂς τὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα. Ἔχομεν

$$\frac{3}{5} = \frac{3\cdot 3}{5\cdot 3}, \qquad \frac{2}{3} = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{3\cdot 3}{5\cdot 3}$ καὶ $\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}$ εἶναι $3\cdot 3 < 2\cdot 5$· τοῦτο σημαίνει ὅτι

$$\frac{3\cdot 3}{5\cdot 3} < \frac{2\cdot 5}{3\cdot 5} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$$

β) Ἂς λάβωμεν ἤδη τὰ τυχόντα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ ἂς τρέψωμεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\delta}, \qquad \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma\cdot\beta}{\delta\cdot\beta}$$

Παρατηροῦμεν τότε ὅτι ἡ σύγκρισις τῶν κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ ἀνάγεται εἰς τὴν σύγκρισιν τῶν ἀριθμητῶν $\alpha\cdot\delta$ καὶ $\beta\cdot\gamma$ τῶν ἀντιστοίχως ἴσων πρὸς αὐτὰ κλασμάτων $\dfrac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\delta}$ καὶ $\dfrac{\gamma\cdot\beta}{\delta\cdot\beta}$

Ἤτοι : ἐὰν $\alpha\cdot\delta > \beta\cdot\gamma$, τότε $\dfrac{\alpha}{\beta} > \dfrac{\gamma}{\delta}$

ἐὰν $\alpha\cdot\delta < \beta\cdot\gamma$, τότε $\dfrac{\alpha}{\beta} < \dfrac{\gamma}{\delta}$

Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἰσχύει καὶ ἀντιστρόφως. Ἤτοι :

Ἐὰν $\dfrac{\alpha}{\beta} > \dfrac{\gamma}{\delta}$, τότε καὶ $\alpha\cdot\delta > \beta\cdot\gamma$ $\quad \alpha, \gamma \in N_0$

» $\dfrac{\alpha}{\beta} < \dfrac{\gamma}{\delta}$, » » $\alpha\cdot\delta < \beta\cdot\gamma$ $\quad \beta, \delta \in N$

**68. 5. Ἐφαρμογαὶ**

**1) Σύγκρισις μὲ τὴν μονάδα**

Παρατηροῦμεν ὅτι : $\dfrac{3}{5} < \dfrac{5}{5}$ ἢ $\dfrac{3}{5} < 1$

$$\frac{6}{5} > \frac{5}{5} \quad \text{ἢ} \quad \frac{6}{5} > 1$$

Γενικῶς : Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος. Ἀντιστρόφως· ἐὰν τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος τότε ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ.

$$\boxed{\alpha < \beta \iff \frac{\alpha}{\beta} < 1}$$

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος καὶ ἀντιστρόφως.

$$\boxed{\alpha > \beta \iff \frac{\alpha}{\beta} > 1}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ κλάσμα λέγεται καταχρηστικόν

**2) Νὰ συγκριθοῦν τὰ κλάσματα** $\dfrac{327}{421}$, $\dfrac{79}{85}$

Ἔχομεν $\quad 327\cdot85=27795 \quad 421\cdot79=33259$

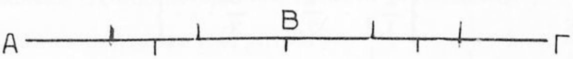
Εἶναι $\quad 27795 < 33259$ ἄρα $\dfrac{327}{421} < \dfrac{79}{85}$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

193. Νὰ διατάξετε κατὰ σειρὰν αὔξοντος μεγέθους τὰ κλάσματα $\frac{8}{9}$, $\frac{27}{35}$, $\frac{15}{19}$ χωρὶς νὰ τρέψετε αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα.

194. Νὰ εὕρετε τὸ σύνολον τῶν ἀναγώγων κλασμάτων τὰ ὁποῖα εἶναι μικρότερα τῆς μονάδος καὶ ἔχουν παρονομαστὴν μικρότερον τοῦ 5, νὰ διατάξετε δὲ αὐτὰ κατὰ σειρὰν αὔξοντος μεγέθους.

## 69. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ




Σχ. 28

**69. 1.** Διὰ τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ τοῦ σχ. 28 δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{2}$ ἢ τὰ $\frac{2}{4}$ ἢ τὰ $\frac{3}{6}$ τοῦ ΑΓ.

$$\text{ΑΒ} = \frac{1}{2} \cdot \text{ΑΓ} \quad \text{ἢ} \quad \text{ΑΒ} = \frac{2}{4} \cdot \text{ΑΓ} \quad \text{ἢ} \quad \text{ΑΒ} = \frac{3}{6} \cdot \text{ΑΓ} \ldots$$

Ἡ παρατήρησις αὐτὴ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ εἴπωμεν ὅτι τὰ κλάσματα

$$\frac{1}{2},\quad \frac{2}{4},\quad \frac{3}{6},\quad \frac{4}{8},\quad \frac{5}{10} \ldots$$

δὲν εἶναι διαφορετικοὶ ἀριθμοί, ἀλλὰ μόνον διαφορετικαὶ παραστάσεις, «ἀντιπρόσωποι» ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Μὲ ἄλλους λόγους : Ἡ κλάσις ἰσοδυναμίας $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8} \ldots\right\}$ ὁρίζει ἕνα καὶ μόνον ἕνα ἀριθμὸν τὸν ὁποῖον καὶ ὀνομάζομεν ρητὸν ἀριθμὸν τῆς ἀριθμητικῆς ἢ ἁπλῶς ρητόν.

Ὁμοίως ἑκάστη τῶν κλάσεων ἰσοδυναμίας $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12} \ldots\right\}$, $\left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12} \ldots\right\}$, $\left\{\frac{1}{5}, \frac{2}{10}, \frac{3}{15} \ldots\right\}$, ὁρίζει ἕνα ρητὸν ἀριθμόν. Εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς εἷς ρητὸς «ἀντιπροσωπεύεται» μὲ ἓν ὁποιοδήποτε ἀπὸ τὰ κλάσματα τῆς κλάσεως ἰσοδυναμίας ἡ ὁποία ὁρίζει αὐτόν, συνήθως ὅμως μὲ τὸ ἐξ αὐτῶν ἀνάγωγον κλάσμα. Π.χ. ὁ ρητὸς τὸν ὁποῖον ὁρίζει ἡ κλάσις ἰσοδυναμίας

$$\left\{\frac{3}{7}, \frac{6}{14}, \frac{9}{21} \ldots\right\},$$

δύναται νὰ ἀντιπροσωπευθῇ μὲ ἓν ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{7}, \frac{6}{14}, \frac{9}{21} \dots$ συνήθως ὅμως ἀντιπροσωπεύεται μὲ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{3}{7}$.

Ἐξ ἄλλου εἶναι φανερὸν ὅτι ἕκαστος ἀκέραιος ἢ κλάσμα δύναται νὰ ἀντιπροσωπεύσῃ ἕνα καὶ μόνον ἕνα ρητόν.

Π.χ. ὁ ἀκέραιος 2 δύναται νὰ ἀντιπροσωπεύσῃ τὸν ρητὸν τὸν ὁποῖον ὁρίζει ἡ κλάσις ἰσοδυναμίας

$$\left\{\frac{2}{1}, \quad \frac{4}{2}, \quad \frac{6}{3} \dots\right\}$$

καὶ οὐδένα ἄλλον. (Διατί;).

Εἰς τὰ ἑπόμενα ἡ ἔκφρασις «ρητὸς $\frac{1}{2}$» σημαίνει «κλάσμα $\frac{1}{2}$ καὶ οἱονδήποτε ἄλλο κλάσμα ἴσον πρὸς αὐτό». Μὲ τὴν σημασίαν αὐτὴν τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ θὰ χρησιμοποιῆται ὡς ἀντιπρόσωπος τοῦ ρητοῦ

$$\left\{\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{6} \dots\right\}$$

Κατὰ τ' ἀνωτέρω ἡ γραφὴ $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ δηλώνει ὅτι τὰ κλάσματα εἶναι ἴσα. Δηλώνει ἐπίσης καὶ ὅτι $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{2}{4}$ εἶναι διαφορετικαὶ γραφαὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ρητοῦ.

Τὸ σύνολον τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς παριστάνεται συνήθως μὲ τὸ σύμβολον $Q_0^+$. Γεννᾶται τὸ ἐρώτημα: Ποίαν σχέσιν ἔχουν μεταξύ των τὰ δύο σύνολα $N_0$ καὶ $Q_0^+$;

Ὡς γνωστὸν ἕκαστος ἀκέραιος εἶναι ρητός.

Π.χ. $\quad 3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} \dots, \qquad 0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} \dots$

Ἐξ ἄλλου ὑπάρχουν ρητοὶ οἱ ὁποῖοι δὲν εἶναι ἀκέραιοι. Π.χ. $\frac{2}{3} \notin N_0$.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ σύνολον $N_0$ εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ συνόλου $Q_0^+$.

$$N_0 \subset Q_0^+$$

## 69. 2. Ἡμιευθεῖα διατάξεως τοῦ συνόλου $Q_0^+$

Γνωρίζομεν νὰ παριστάνωμεν ἀκεραίους μὲ σημεῖα μιᾶς ἡμιευθείας. Ἂς ἴδωμεν πῶς δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν ρητοὺς μὲ σημεῖα ἡμιευθείας.


Σχ. 29

Ἐπὶ ἡμιευθείας Οχ σημειώνομεν ἴσα τμήματα ΟΑ = ΑΒ = ΒΓ . . ., σχ. 29. Εἶναι φυσικὸν νὰ παραστήσωμεν τοὺς ρητοὺς $0 = \frac{0}{1}$, $1 = \frac{1}{1}$, $2 = \frac{2}{1}$, $3 = \frac{3}{1}$, μὲ τὰ σημεῖα Ο, Α, Β, Γ ἀντιστοίχως.

Τὸν ρητὸν $\frac{1}{2}$ τὸν παριστάνωμεν μὲ τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΟΑ. Ὁμοίως τὸν ρητὸν $\frac{3}{2}$ παριστάνομεν μὲ τὸ μέσον Μ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ.

Διὰ νὰ παραστήσωμεν τὸν ρητὸν $\frac{3}{4}$ χωρίζομεν τὸ τμῆμα ΟΑ εἰς 4 ἴσα τμήματα. Τὸ τρίτον κατὰ σειρὰν πρὸς τὰ δεξιὰ σημεῖον διαιρέσεως τοῦ ΟΑ παριστάνει τὸν ρητὸν τοῦτον.

Εἶναι φανερὸν ὅτι μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν ἕκαστον ρητὸν μὲ ἓν καὶ μόνον ἓν σημεῖον τῆς ἡμιευθείας Οχ.

Διὰ τὴν παράστασιν αὐτὴν τῶν ρητῶν παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

α) Ὁ ρητὸς $\frac{3}{2}$ εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ τμήματος ΟΜ, σχ. 29, μὲ μονάδα μετρήσεως τὸ τμῆμα ΟΑ.

Γενικῶς ἕκαστος ρητὸς α παριστάνεται μὲ ἓν σημεῖον Μα τῆς Οχ τοιοῦτον ὥστε ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ τμήματος ΟΜα νὰ εἶναι α. (Μονὰς εἶναι πάντοτε τὸ τμῆμα ΟΑ).

β) Δύο ἄνισοι ρητοὶ α, β παριστάνονται μὲ δύο διαφορετικὰ σημεῖα Μα, Μβ τοιαῦτα ὥστε, ἐὰν α εἶναι μεγαλύτερος β, τότε τὸ Μα κεῖται «δεξιὰ» τοῦ Μβ.

Ἤτοι τὸ σύνολον τῶν ρητῶν $Q_0^+$ εἶναι διατεταγμένον ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Οχ. Διὰ τοῦτο ἡ ἡμιευθεῖα Οχ λέγεται καὶ ἡ μ ι ε υ θ ε ῖ α δ ι α τ ά ξ ε ω ς τοῦ συνόλου τῶν ρητῶν.

### Σημείωσις

Καθὼς εἴδομεν ἕκαστος ρητὸς παριστάνεται μὲ ἓν καὶ μόνον ἓν σημεῖον τῆς ἡμιευθείας διατάξεως Οχ.

Γεννᾶται τὸ ἐρώτημα: Ἕκαστον σημεῖον τῆς ἡμιευθείας Οχ παριστάνει ἕνα ρητόν;

Ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο εἶναι ἀρνητική. Εἰς ἄλλην τάξιν θὰ μάθωμεν ὅτι ὑπάρχουν σημεῖα τῆς Οχ τὰ ὁποῖα οὐδένα ρητὸν παριστάνουν. Τὰ σημεῖα αὐτὰ θὰ «συμπληρωθοῦν» μὲ «νέους» ἀριθμούς, τοὺς ἀ σ υ μ μ έ τ ρ ο υ ς.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

195. Νὰ γραφῇ μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον $\left\{ x \mid x = \frac{3}{5} \right\}$.

196. Πῶς ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας διατάξεως φαίνεται ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$ . . . ἀντιπροσωπεύουν τὸν ἴδιον ρητόν;

197. Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας διατάξεως νὰ τοποθετήσετε τοὺς ρητοὺς

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad 1\,\frac{1}{4}.$$

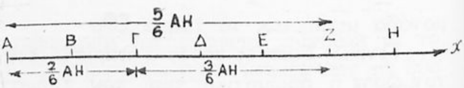
## ΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

### 70. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

**70. 1. Ὅταν οἱ ρητοὶ ἀντιπροσωπεύωνται ὑπὸ ὁμωνύμων κλασμάτων.**

1) Εἰς τὸ σχ. 30 ὅπου ἐλάβομεν

ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΕΖ = ΖΗ εἶναι




ΑΓ + ΓΖ = ΑΖ

Ἢ $\frac{2}{6} \cdot ΑΗ + \frac{3}{6} \cdot ΑΗ = \frac{5}{6} \cdot ΑΗ$

Σχ. 30

Ἡ ἀνωτέρω ἰσότης μεταξὺ τῶν τμημάτων αὐτῶν μᾶς ὁδηγεῖ νὰ λάβωμεν τὸν ρητὸν $\frac{5}{6}$ ὡς ἄ θ ρ ο ι σ μ α τῶν ρητῶν $\frac{2}{6}$ καὶ $\frac{3}{6}$,

γράφομεν δέ: $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$ ἢ $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{6}$

Γενικῶς: **Ὀνομάζομεν ἄθροισμα δύο ρητῶν $\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ τὸν ρητὸν $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$**

Γράφομεν δέ
$$\boxed{\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma} \qquad \left.\begin{array}{l}\alpha,\beta\in N_0\\ \gamma\in N\end{array}\right\}}$$

**70. 2. Ὅταν οἱ ρητοὶ ἀντιπροσωπεύωνται ὑπὸ ἑτερωνύμων κλασμάτων**

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τρέπομεν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα (ἐπιλέγομεν ὡς ἀντιπροσώπους τῶν ρητῶν ὁμώνυμα κλάσματα) καὶ ἐργαζόμεθα ὡς προηγουμένως.

**Παραδείγματα:** α) $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{3\cdot7}{5\cdot7}+\frac{2\cdot5}{7\cdot5},\quad \frac{3\cdot7+2\cdot5}{5\cdot7}=\frac{31}{35}$

β) $\frac{2\cdot\alpha}{11}+\frac{3\cdot\alpha}{22}=\frac{4\cdot\alpha}{22}+\frac{3\cdot\alpha}{22}=\frac{(4+3)\cdot\alpha}{22}=\frac{7\cdot\alpha}{22}$.

Γενικῶς :
$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\delta}+\frac{\gamma\cdot\beta}{\delta\cdot\beta}=\frac{\alpha\cdot\delta+\gamma\cdot\beta}{\beta\cdot\delta} \qquad \left.\begin{array}{l}\alpha,\ \gamma\in N_0\\ \beta,\ \delta\in N\end{array}\right\}}$$

**70. 3. Μεικτοί**

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα $2+\frac{3}{4}$ γράφεται συντόμως $2\,\frac{3}{4}$ καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν αὐτὴν λέγεται μ ε ι κ τ ὸ ς  ἀ ρ ι θ μ ό ς.

Ἤτοι $\quad 2\,\frac{3}{4}=2+\frac{3}{4}=\frac{2}{1}+\frac{3}{4}$

ἢ $\quad 2\,\frac{3}{4}=\frac{2\cdot4+3}{4}=\frac{11}{4}$

Ἀντιστρόφως ἕκαστον κλάσμα μεγαλύτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ μορφὴν μεικτοῦ. Π.χ. διὰ τὸ κλάσμα $\frac{22}{5}$ ἔχομεν :

$$22=4\cdot5+2$$
$$\frac{22}{5}=\frac{4\cdot5+2}{5}=\frac{4\cdot5}{5}+\frac{2}{5}$$

ἢ $\quad \frac{22}{5}=4+\frac{2}{5}=4\,\frac{2}{5}$

Ὁμοίως διὰ τὸ κλάσμα $\frac{9}{5}$ ἔχομεν $9 = 1 \cdot 5 + 4$

$$\frac{9}{5} = \frac{1 \cdot 5}{5} + \frac{4}{5}$$

$$= 1 + \frac{4}{5} = 1\,\frac{4}{5}$$

Γενικῶς ἐὰν $\alpha \in N_0$, $\beta \in N$ καὶ $\alpha > \beta$ τότε κατὰ τὸν γνωστὸν τύπον $\Delta = \delta . \pi + \upsilon$, $\upsilon < \delta$ ἔχομεν

$$\alpha = \beta \cdot \pi + \upsilon, \qquad \upsilon < \beta$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta \cdot \pi}{\beta} + \frac{\upsilon}{\beta} = \pi + \frac{\upsilon}{\beta}$$

ὅπου $\pi$ εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ὥστε: **Ἕκαστος μεικτὸς δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ μορφὴν κλάσματος.**
**Ἀντιστρόφως· ἕκαστον κλάσμα μεγαλύτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ μορφὴν μεικτοῦ.**

### 70. 4. Διατήρησις τῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως εἰς τὸ σύνολον $Q_0^+$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πρόσθεσις δύο ρητῶν ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀριθμητῶν δύο ὁμωνύμων κλασμάτων· δηλαδὴ εἰς τὴν πρόσθεσιν ἀκεραίων. Τοῦτο σημαίνει ὅτι αἱ γνωσταὶ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως ἀκεραίων ἰσχύουν καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν ρητῶν. Τοιουτοτρόπως διὰ τὰς βασικὰς ἰδιότητας τῆς προσθέσεως ἔχομεν:

**ι) Ὕπαρξις ἀθροίσματος, μονότιμον**

Ἐὰν $\alpha, \beta \in N_0$ καὶ $\pi \in N$, τότε τὸ ἄθροισμα $\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\beta}{\pi}$ εἶναι εἷς καὶ μόνον εἷς ρητὸς ἀριθμός.

**ιι) Μεταθετικότης**

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\beta}{\pi} &= \frac{\alpha+\beta}{\pi} \\ \frac{\beta}{\pi} + \frac{\alpha}{\pi} &= \frac{\beta+\alpha}{\pi} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\beta}{\pi} = \frac{\beta}{\pi} + \frac{\alpha}{\pi} \qquad \left.\begin{aligned} &\alpha, \beta \in N_0 \\ &\pi \in N \end{aligned}\right\}$$

**ιιι) Προσεταιριστικότης**

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{\alpha}{\pi}+\dfrac{\beta}{\pi}\right)+\dfrac{\gamma}{\pi}=\dfrac{\alpha+\beta}{\pi}+\dfrac{\gamma}{\pi}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\pi}\\ \dfrac{\alpha}{\pi}+\left(\dfrac{\beta}{\pi}+\dfrac{\gamma}{\pi}\right)=\dfrac{\alpha}{\pi}+\dfrac{\beta+\gamma}{\pi}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\pi}\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\beta}{\pi}\right)+\frac{\gamma}{\pi}=\frac{\alpha}{\pi}+\left(\frac{\beta}{\pi}+\frac{\gamma}{\pi}\right)\qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma\in N_0 \text{ καὶ } \pi\in N$$

**ιν) Οὐδέτερον στοιχεῖον**

$$\frac{\alpha}{\pi}+0=\frac{\alpha}{\pi}+\frac{0}{\pi}=\frac{\alpha+0}{\pi}\Longrightarrow\frac{\alpha}{\pi}+0=\frac{\alpha}{\pi}\qquad \left.\begin{array}{l}\alpha\in N_0\\ \pi\in N\end{array}\right\}.$$

**ν) Γενίκευσις τῆς προσεταιριστικότητος**

Εἰς τὸ σύνολον $Q_0^+$ τὸ ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων ὁρίζεται ὅπως καὶ εἰς τὸ σύνολον $N_0$. Εἶναι δὲ εὔκολον νὰ ἐπαληθεύσωμεν ὅτι:

1) Ἓν ἄθροισμα ρητῶν εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπὸ τὴν σειρὰν τῶν προσθετέων.

2) Εἰς ἓν ἄθροισμα ρητῶν δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν:

α) Δύο ἢ περισσοτέρους προσθετέους μὲ τὸ ἄθροισμά των.

β) Ἕνα προσθετέον μὲ ἄλλους ἔχοντας ἄθροισμα αὐτόν.

**Παραδείγματα**

$$2\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=2+\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\right)=2\frac{5}{7}$$

$$2+\frac{3}{7}+5=(2+5)+\frac{3}{7}=7\frac{3}{7}$$

$$2\frac{1}{4}+3\frac{5}{8}+5=(2+3+5)+\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\right)=10\frac{7}{8}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

198. Νὰ ὑπολογισθοῦν κατὰ τὸν ἁπλούστερον τρόπον τὰ ἀθροίσματα:

$$\alpha=\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{3}{5}\right),\qquad \beta=\left(2\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{3}{8}+4\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{4}\right)$$

199. Νὰ τεθῇ ὑπὸ μορφὴν μεικτοῦ ἕκαστον τῶν κλασμάτων $\frac{17}{9}$, $\frac{35}{11}$, $\frac{23}{8}$.

200. Μία γωνία εἶναι ἴση μὲ τὰ $\frac{3}{9}$ τῆς ὀρθῆς, μία ἄλλη μεγαλυτέρα αὐτῆς κατὰ τὰ $\frac{2}{13}$ τῆς ὀρθῆς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο αὐτῶν γωνιῶν.

201. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τριῶν δοχείων α,β,γ ἐὰν εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ α΄ ζυγίζει $10\frac{2}{5}$ kg, τὸ β΄ $1\frac{3}{4}$ kg περισσότερον τοῦ α΄ καὶ τὸ γ΄ $2\frac{4}{5}$ kg, περισσότερον ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν α΄ καὶ β΄.

## 71. ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

### 71. 1. Ὁρισμός

Ἡ ἀφαίρεσις εἰς τὸ σύνολον τῶν ρητῶν $Q_0^+$ ὁρίζεται ὅπως καὶ εἰς τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων $N_0$.

Π.χ. λέγομεν ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ρητῶν $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{3}{7}$ εἶναι $\frac{2}{7}$ καὶ γράφομεν

$$\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2}{7} \quad \text{διότι} \quad \frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$$

Γενικῶς $\frac{\alpha}{\pi}-\frac{\beta}{\pi}=\frac{\chi}{\pi}$ σημαίνει ὅτι $\frac{\chi}{\pi}+\frac{\beta}{\pi}=\frac{\alpha}{\pi}$ $\left.\begin{matrix}\alpha,\ \beta,\ \chi\in N_0\\ \pi\in N\end{matrix}\right\}$

Ἤτοι $$\boxed{\frac{\alpha}{\pi}-\frac{\beta}{\pi}=\frac{\chi}{\pi} \iff \frac{\chi}{\pi}+\frac{\beta}{\pi}=\frac{\alpha}{\pi}}$$

### 71. 2. Εὕρεσις τῆς διαφορᾶς

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν δύο ρητῶν π.χ. τὴν διαφορὰν $\frac{7}{13}-\frac{4}{13}$ σκεπτόμεθα ὅτι πρέπει νὰ εὕρωμεν ἕνα ρητὸν $\frac{\chi}{13}$ τοιοῦτον ὥστε $\frac{\chi}{13}+\frac{4}{13}=\frac{7}{13}$

Ἤτοι $$\frac{7}{13}-\frac{4}{13}=\frac{\chi}{13} \iff \frac{\chi}{13}+\frac{4}{13}=\frac{7}{13} \quad (1)$$

$$\iff \frac{\chi+4}{13}=\frac{7}{13} \quad (2)$$

Ἀλλὰ ἐκ τῆς (2) ἐννοοῦμεν ὅτι $\chi+4=7 \iff \chi=7-4$

Ὥστε $$\frac{7}{13}-\frac{4}{13}=\frac{7-4}{13}$$

Γενικῶς $$\frac{\alpha}{\pi}-\frac{\beta}{\pi}=\frac{\alpha-\beta}{\pi} \quad (3)$$

Ἐκ τῆς (3) εἶναι φανερὸν ὅτι

ὑπάρχει διαφορὰ $\frac{\alpha}{\pi}-\frac{\beta}{\pi}$ ὅταν καὶ μόνον ὅταν $\alpha \geqslant \beta$.

Ὥστε $\boxed{\dfrac{\alpha}{\pi} - \dfrac{\beta}{\pi} = \dfrac{\alpha - \beta}{\pi}, \quad \text{ὅπου} \quad \begin{matrix}\alpha, \beta \in N_0 \\ \pi \in N\end{matrix} \quad \text{καὶ } \alpha \geqslant \beta}$

Ἐὰν οἱ ρητοὶ τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τὴν διαφορὰν παριστάνωνται ὑπὸ ἑτερωνύμων κλασμάτων, τότε τρέπομεν τὰ κλάσματα αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω.

Π.χ. $$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 4} - \frac{1\cdot 3}{4\cdot 3} = \frac{2\cdot 4 - 1\cdot 3}{3\cdot 4}$$

Ἤ $$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{8}$$

Γενικῶς : $$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\delta} - \frac{\gamma\cdot\beta}{\delta\cdot\beta}$$

$$= \frac{\alpha\cdot\delta - \gamma\cdot\beta}{\beta\cdot\delta} \quad \text{ὅπου} \quad \begin{matrix}\alpha, \gamma \in N_0 \\ \beta, \delta \in N\end{matrix} \quad \text{καὶ } \alpha\cdot\delta > \beta\cdot\gamma$$

### 71. 3. Ἰδιότητες

Καθὼς βλέπομεν, ἡ ἀφαίρεσις ρητῶν «μεταφέρεται» εἰς ἀφαίρεσιν τῶν ἀριθμητῶν δύο ὁμωνύμων κλασμάτων· ἤτοι εἰς ἀφαίρεσιν δύο ἀκεραίων.

Ἀπὸ τὴν παρατήρησιν αὐτὴν ἐννοοῦμεν ὅτι ὅλαι αἱ γνωσταὶ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως εἰς τὸ σύνολον $N_0$ ἰσχύουν καὶ εἰς τὸ σύνολον $Q_0^+$.

### 71. 4. Παραδείγματα

1. $$5\,\frac{1}{2} - 3 = \left(5 + \frac{1}{2}\right) - 3 = (5-3) + \frac{1}{2} = 2\,\frac{1}{2}$$

[Κατὰ τὸν τύπον $(\alpha+\beta)-\gamma=(\alpha-\gamma)+\beta$]

2. $$5\,\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \left(5 + \frac{7}{8}\right) - \frac{3}{8} = 5 + \left(\frac{7}{8} - \frac{3}{8}\right) = 5\,\frac{4}{8}.$$

[Κατὰ τὸν τύπον $(\alpha+\beta)-\gamma=\alpha+(\beta-\gamma)$].

3. $$9\,\frac{4}{7} - 5\,\frac{3}{7} = 9\,\frac{4}{7} - \left(5 + \frac{3}{7}\right)$$

$$= \left(9\,\frac{4}{7} - 5\right) - \frac{3}{7}$$

$$= 4\,\frac{4}{7} - \frac{3}{7} = 4\,\frac{1}{7}.$$

[Κατὰ τὸν τύπον $\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\beta)-\gamma$]

4. $9\frac{4}{7} - 5\frac{4}{7} = \left(9 + \frac{4}{7}\right) - \left(5 + \frac{4}{7}\right) = 9 - 5 = 4$

Κατὰ τὸν τύπον $(\alpha \pm \mu) - (\beta \pm \mu) = \alpha - \beta$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

202. Νὰ ἐκτελεσθοῦν κατὰ δύο τρόπους αἱ πράξεις

$$\frac{25}{8} - \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right), \quad \frac{25}{8} - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\right)$$

203. Ποῖον ρητὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ $\frac{4}{9}$ διὰ νὰ εὕρωμεν ἄθροισμα $1\frac{1}{3}$;

204. Ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$, ἐὰν προσθέσωμεν τὴν μονάδα α) εἰς τὸν ἀριθμητὴν β) εἰς τὸν παρανομαστὴν γ) καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ;

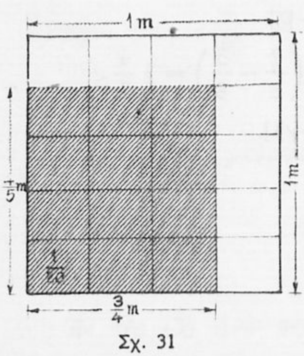
205. Τρεῖς ἀδελφοὶ α, β, γ διένειμον ἕνα ἀγρόν. Ὁ α΄ ἔλαβε $4\frac{2}{5}$ στρέμματα ὀλιγώτερα ἀπὸ τὸν β΄ καὶ $3\frac{1}{2}$ στρέμματα ὀλιγώτερα ἀπὸ τὸν γ΄. Νὰ εὕρετε πόσα στρέμματα ἔλαβεν ἕκαστος, ἐὰν γνωρίζετε ὅτι ὁ γ΄ ἔλαβεν $7\frac{1}{2}$ στρέμματα.

206. Κατὰ ποῖον ρητὸν πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ ὁ $2\frac{3}{7}$ διὰ νὰ γίνῃ ἴσος μὲ $1\frac{8}{9}$;

## 72. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

### 72. 1. Ὁρισμός

Ὡς γνωστὸν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E = \alpha.\beta$, ὅπου α, β εἶναι αἱ διαστάσεις (εἰς ὁμοειδεῖς μονάδας) τοῦ ὀρθογωνίου, καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἰς τετραγωνικὰς μονάδας τῶν διαστάσεων αὐτοῦ.



Σχ. 31

Π.χ. ἐὰν $\alpha = 2$ cm, $\beta = 3$ cm, τότε $E = 2 \cdot 3$ cm².

Ἂς ἴδωμεν ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν Ε ἑνὸς ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις $\frac{4}{5}$ m καὶ $\frac{3}{4}$ m. Τὸ τετράγωνον τοῦ σχ. 31 πλευρᾶς 1 m (μία τετραγωνικὴ μονὰς) εἶναι χωρισμένον εἰς 5 ἴσας ταινίας ὁριζοντίως καὶ εἰς 4 ἴσας ταινίας κατακορύφως. Τοιουτοτρόπως τὸ τετράγωνον αὐτὸ εἶναι χωρισμένον εἰς $5 \cdot 4 = 20$ ἴσα ὀρθογώνια, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ 1/20 τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς τετραγωνικῆς μονάδος (1 m²). Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι τὸ ὀρθογώνιον μὲ διαστάσεις $\frac{4}{5}$ m καὶ $\frac{3}{4}$ m, (σκιερὰ ἐπιφάνεια τοῦ σχ. 31) καλύπτει ἀκριβῶς 12 ἀπὸ τὰ 20 ἴσα ὀρθογώνια τῆς τετραγωνικῆς αὐτῆς μονάδος.

Ἄρα $$E = \frac{3}{4}\,m \cdot \frac{4}{5}\,m = \frac{12}{20}\,m^2.$$

ἢ $$E = \frac{3}{4}\,m \cdot \frac{4}{5}\,m = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 5}\,m^2. \qquad (1)$$

Μὲ ὅμοιον τρόπον, ἀπὸ τὸ αὐτὸ σχέδιον, εὑρίσκομεν π.χ. ὅτι

$$\frac{3}{4}\,m \cdot \frac{2}{5}\,m = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5}\,m^2. \qquad (2)$$

$$\frac{1}{4}\,m \cdot \frac{4}{5}\,m = \frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 5}\,m^2. \qquad (3)$$

Αἱ ἀνωτέρω ἰσότητες (1), (2), (3), μᾶς ὁδηγοῦν εἰς τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τοῦ γινομένου δύο ρητῶν.

**Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι δύο ρητοὶ τότε ὀνομάζομεν γινόμενον αὐτῶν τὸν ρητὸν $\frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$.**

Γράφομεν δὲ

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta} \qquad \left.\begin{array}{r} \alpha, \gamma \in N_0 \\ \beta,\ \delta \in N \end{array}\right\}}$$

**Παραδείγματα**

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

### 72. 2. Διατήρησις τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

Καθὼς εἴδομεν, ὁ πολλαπλασιαμὸς ρητῶν ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀριθμητῶν καὶ τῶν παρονομαστῶν δύο κλασμάτων τὰ ὁποῖα ἀντιπροσωπεύουν τοὺς ρητούς· ἤτοι εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀκεραίων. Διὰ τοῦτο ὅλαι αἱ γνωσταὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὸ σύνολον $N_0$ ἰσχύουν καὶ εἰς τὸ σύνολον $Q_0^+$.

ι) Ὕπαρξις γινομένου, μονότιμον

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν προκύπτει ὅτι τὸ γινόμενον δύο ρητῶν εἶναι πάντοτε εἷς καὶ μόνον εἷς ρητός.

ιι) **Μεταθετικότης**

$$\left.\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}&=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}\\ \frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}&=\frac{\gamma\cdot\alpha}{\delta\cdot\beta}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$$

ιιι) **Προσεταιριστικότης**

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}&=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha\cdot\gamma\cdot\varepsilon}{\beta\cdot\delta\cdot\zeta}\\ \frac{\alpha}{\beta}\cdot\left(\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)&=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma\cdot\varepsilon}{\delta\cdot\zeta}=\frac{\alpha\cdot\gamma\cdot\varepsilon}{\beta\cdot\delta\cdot\zeta}\end{aligned}\right| \Longrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\left(\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)$$

ιν) **Οὐδέτερον στοιχεῖον**

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{1}=\frac{\alpha\cdot 1}{\beta\cdot 1}\,. \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{1}=\frac{\alpha}{\beta}$$

ν) **Ἐπιμεριστικότης ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν ἢ ἀφαίρεσιν**

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\left(\frac{\gamma}{\delta}\pm\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\pm\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}$$

νι) **Γινόμενον πολλῶν παραγόντων**

Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ὁρίζεται ὅπως καὶ εἰς τὸ σύνολον $N_0$. Ἤτοι ἔχομεν:

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}\cdot\frac{\eta}{\theta}=\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}\right]\cdot\frac{\eta}{\theta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}\cdot\frac{\eta}{\theta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\eta}{\theta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}=\ldots$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}\cdot\frac{\eta}{\theta}=\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)\cdot\frac{\eta}{\theta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\left(\frac{\eta}{\theta}\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\ldots$$

Ὅπου $\alpha,\ \gamma,\ \varepsilon,\ \eta\in N_0$ καὶ $\beta,\ \delta,\ \zeta,\ \theta\in N$

**72. 3. Ἐφαρμογαί**

α) **Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ διαιρέτην τοῦ παρανομαστοῦ.**

$$3\cdot\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 5}{6}=\frac{(3\cdot 5):3}{6:3}=\frac{5}{2}=2\,\frac{1}{2}$$

$$\alpha \cdot \frac{\beta}{\alpha\cdot\gamma} = \frac{\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\gamma} = \frac{\beta}{\gamma} \quad \left.\begin{matrix} \beta\in N_0 \\ \alpha,\ \gamma\in N \end{matrix}\right\} \quad \text{Ἄρα} \cdots$$

**β) Μεικτὸς ἐπὶ κλάσμα**

$$6\,\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \left(6+\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{2}{3} = 6\cdot\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \cdots$$

**γ) Μεικτὸς ἐπὶ μεικτὸν**

$$36\,\frac{2}{5}\cdot 2\,\frac{3}{4} = \left(36+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(2+\frac{3}{4}\right)$$

$$= 36\cdot 2 + 36\cdot\frac{3}{4} + \frac{2}{5}\cdot 2 + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$$

$$= 72 + 27 + \frac{4}{5} + \frac{3}{10} = 100\,\frac{1}{10}$$

(Διπλῆ ἐφαρμογὴ τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος)

## 72. 4. Ἀντίστροφοι ἀριθμοί

α) Προσέξατε τὰ γινόμενα

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}, \qquad 2\cdot\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{7}\cdot 7$$

Ἕκαστον τούτων ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα.

β) Ποῖοι ρητοὶ ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις

$$\frac{3}{7}\cdot\chi = 1, \qquad \frac{1}{5}\cdot\psi = 1$$

Εἶναι $\chi = \frac{7}{3}$ καὶ $\psi = 5$

**Ἐὰν δύο ρητοὶ α, β ἔχουν γινόμενον ἴσον μὲ 1, τότε λέγομεν ὅτι ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀντίστροφος τοῦ ἄλλου.**

Γεννᾶται τὸ ἐρώτημα: Ἕκαστος ρητὸς ἔχει ἕνα, πολλοὺς ἢ οὐδένα ἀντίστροφον;

Εἶναι εὔκολον νὰ διακρίνωμεν ὅτι:

α) Τὸ μηδὲν οὐδένα ἀντίστροφον ἔχει (Διατί; Εἶναι δυνατὸν τὸ γινόμενον τοῦ μηδενὸς μὲ οἱονδήποτε ρητὸν νὰ ἰσοῦται μὲ 1;)

β) Ἐὰν μᾶς δοθῇ εἷς ρητός, π.χ. ὁ $\frac{4}{9}$, τότε ὁ ρητὸς $\frac{9}{4}$ εἶναι ἀντίστροφος αὐτοῦ καὶ μάλιστα ὁ μοναδικός.

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{4} = 1$$

Γενικῶς : **Ἕκαστος ρητὸς $\frac{\alpha}{\beta}$, διάφορος τοῦ μηδενός, ἔχει ἕνα καὶ μόνον ἕνα ἀντίστροφον· τὸν ρητὸν $\frac{\beta}{\alpha}$**

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta \cdot \alpha} = 1 \qquad \alpha,\ \beta \in N}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

207. Ἐπαληθεύσατε ὅτι $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \cdot 4}$ καὶ ἐπὶ τῇ βάσει αὐτῶν νὰ εὕρετε ὅτι :

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha \cdot (\alpha+1)} \qquad \alpha \in N$$

208. Δύο ἀδελφοὶ α, β διένειμον μίαν περιουσίαν. Ὁ α΄ ἔλαβεν τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτῆς καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ὑπολοίπου. Ποῖον κλάσμα τῆς περιουσίας ἔλαβεν ὁ β΄;

209. Ὑπολογίσατε μὲ δύο τρόπους τὰ γινόμενα

α) $\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{2}\right)$ β) $\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{5}{9} - \frac{1}{2}\right)$

γ) $3\frac{1}{2} \cdot 5\frac{2}{3}$ δ) $4\frac{3}{4} \cdot 3\frac{4}{5}$.

210. Συμπληρώσατε τὰς ἰσότητας $1\frac{4}{9} \cdot \ldots = 1$, $\frac{3}{8} \cdot \ldots = 0$, $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{9} \cdot \ldots = \frac{5}{24}$

211. Ὑπολογίσατε μὲ τὸν συντομώτερον τρόπον τὰ γινόμενα :

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{7}, \qquad \frac{4}{5} \cdot \frac{10}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{24}{22}$$

## 73. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

### 73. 1. Ὁρισμός

Ἡ διαίρεσις εἰς τὸ σύνολον $Q_0^+$ ὁρίζεται ὅπως καὶ εἰς τὸ σύνολον $N_0$.

Π.χ. λέγομεν ὅτι τὸ (ἀκριβὲς) πηλίκον τοῦ ρητοῦ $\frac{8}{9}$ διὰ τοῦ ρητοῦ 4 εἶναι ὁ ρητὸς $\frac{2}{9}$ καὶ γράφομεν

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{2}{9} \qquad \text{διότι} \qquad \frac{2}{9} \cdot 4 = \frac{8}{9}$$

Γενικῶς $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \chi$ σημαίνει ὅτι $\frac{\gamma}{\delta} \cdot \chi = \frac{\alpha}{\beta}$

$$\text{Ήτοι:}\quad \boxed{\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \chi \iff \frac{\gamma}{\delta} \cdot \chi = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}, \chi \in Q_0^+}$$

### 73. 2. Εὕρεσις τοῦ πηλίκου

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ (ἀκριβοῦς) πηλίκου μιᾶς διαιρέσεως, π.χ. τῆς διαιρέσεως $4 : \frac{2}{3}$ σκεπτόμεθα ὅτι πρέπει νὰ εὕρωμεν ἕνα ρητὸν χ τοιοῦτον ὥστε

$\frac{2}{3} \cdot \chi = 4$

$$\text{Ήτοι}\qquad 4 : \frac{2}{3} = \chi \iff \frac{2}{3} \cdot \chi = 4 \qquad (1)$$

Ἃς προσπαθήσωμεν νὰ ἐπιλύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{2}{3} \cdot \chi = 4$

$$\frac{2}{3} \cdot \chi = 4 \iff \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \chi\right) = \frac{3}{2} \cdot 4 \qquad \left(\text{Πολ/σμὸς ἐπὶ } \frac{3}{2}\right)$$

$$\iff \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \chi = 4 \cdot \frac{3}{2} \qquad (\text{Προσεταιριστικὴ ἰδιότης})$$

$$\iff \chi = 4 \cdot \frac{3}{2} \qquad \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1\right)$$

$$\text{Ὥστε}\qquad 4 : \frac{2}{3} = 4 \cdot \frac{3}{2}$$

Μὲ ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{5}{8} : \frac{4}{7} = \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{4}$

$$\frac{5}{8} : 3 = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\text{Γενικῶς}\quad \boxed{\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} \qquad \text{ὅπου} \quad \left.\begin{array}{r} \alpha \in N_0 \\ \beta, \gamma, \delta \in N \end{array}\right\}}$$

**Τὸ (ἀκριβὲς) πηλίκον ἑνὸς ρητοῦ δι' ἄλλου, μὴ μηδενικοῦ, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ διαιρέτου.**

**Παρατήρησις**

Ὅπως γνωρίζομεν, εἰς τὸ σύνολον $N_0$ ἡ διαίρεσις εἶναι δυνατὴ καὶ τελεία μόνον ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Εἰς τὸ σύνολον $Q_0^+$ ἡ διαίρεσις εἶναι δυνατὴ καὶ τελεία ἐκτὸς μόνον τῆς περιπτώσεως εἰς τὴν ὁποίαν ὁ διαιρέτης εἶναι μηδέν.

### 73. 3. Διατήρησις τῶν ἰδιοτήτων

Εἶναι εὔκολον νὰ ἐννοήσωμεν ὅτι ὅλαι αἱ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως εἰς τὸ σύνολον $N_0$ ἰσχύουν καὶ εἰς τὸ σύνολον $Q_0^+$ καὶ μάλιστα μὲ ὀλιγωτέρους περιορισμούς.

Παραθέτομεν κατωτέρω σύντομον πίνακα τούτων.

1. $\left(\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\beta}{\pi'}\right):\frac{\gamma}{\pi''}=\left(\frac{\alpha}{\pi}:\frac{\gamma}{\pi''}\right)+\left(\frac{\beta}{\pi'}:\frac{\gamma}{\pi''}\right)$

2. $\left(\frac{\alpha}{\pi}-\frac{\beta}{\pi'}\right):\frac{\gamma}{\pi''}=\left(\frac{\alpha}{\pi}:\frac{\gamma}{\pi''}\right)-\left(\frac{\beta}{\pi'}:\frac{\gamma}{\pi''}\right)$

3. $\left(\frac{\alpha}{\pi}\cdot\frac{\beta}{\pi'}\right):\frac{\gamma}{\pi''}=\left(\frac{\alpha}{\pi}:\frac{\gamma}{\pi''}\right)\cdot\frac{\beta}{\pi'}$

4. $\frac{\alpha}{\pi}:\left(\frac{\beta}{\pi'}\cdot\frac{\gamma}{\pi''}\right)=\left(\frac{\alpha}{\pi}:\frac{\beta}{\pi'}\right):\frac{\gamma}{\pi''}$

5. $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{\pi'} \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{\pi}\cdot\frac{\gamma}{\pi''}=\frac{\beta}{\pi'}\cdot\frac{\gamma}{\pi''}$

6. $\frac{\alpha}{\pi}>\frac{\beta}{\pi'} \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{\pi}\cdot\frac{\gamma}{\pi''}>\frac{\beta}{\pi'}\cdot\frac{\gamma}{\pi''}$

### 73. 4. Ἐφαρμογαί

**1. Διαίρεσις διὰ διαιρέτου τοῦ ἀριθμητοῦ**

$$\frac{4\cdot 5}{3}:5=\frac{4\cdot 5}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma}:\beta=\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma\cdot\beta}=\frac{\alpha}{\gamma}$$

Ἤτοι $\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma}:\beta=\frac{\alpha}{\gamma}$ $\qquad \left.\begin{array}{l}\alpha \ \in N_0\\ \beta,\ \gamma\in N\end{array}\right\}.$

**2. Μεικτὸς διὰ ἀκεραίου**

$$24\,\frac{3}{4}:4=(24:4)+\left(\frac{3}{4}:4\right)=6+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=6\,\frac{3}{16}$$

**3. Μεικτὸς διὰ κλάσματος**

$$3\,\frac{1}{2} : \frac{4}{5} = 3\,\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4} = \left(3\cdot\frac{5}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\right) = 4\,\frac{3}{8}$$

**4. Μεικτὸς διὰ μεικτοῦ**

$$6\,\frac{2}{3} : 2\,\frac{3}{6} = 6\,\frac{2}{3} : \frac{15}{3} = 6\,\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{15} = 2\,\frac{2}{3}$$

(Χρησιμοποιήσατε καὶ ἄλλους τρόπους)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

212. Ἐὰν πολλαπλασιάσετε ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ $\frac{2}{3}$ θὰ εὕρετε 48. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

213. Ὁ λόγος ἑνὸς ρητοῦ πρὸς $\frac{7}{8}$ ἰσοῦται μὲ $\frac{7}{8}$. Ποῖος εἶναι ὁ ρητὸς αὐτός;

214. Ὑπολογίσατε μὲ δύο τρόπους τὰ ἐξαγόμενα $\left(8+6\,\frac{4}{9}\right) : 2$, $\left(3\,\frac{6}{7} - 1\,\frac{4}{5}\right) : 3$

215. Πόσον αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται ὁ ρητὸς $\frac{3}{5}$ ἐὰν τὸν διαιρέσωμεν διὰ $\frac{3}{4}$;

216. Μὲ ποῖον ρητὸν πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν $\frac{4}{9}$ διὰ νὰ λάβωμεν πηλίκον 8;

## 74. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΡΗΤΩΝ

### 74. 1. Ὁρισμοί

Ὅπως ἀντὶ $2\cdot2\cdot2$ γράφομεν $2^3$ ὁμοίως ἀντὶ $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}$ γράφομεν $\left(\frac{2}{5}\right)^3$

Ἤτοι: $$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$$

καὶ γενικῶς: $$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\ \cdots (\nu \text{ παράγοντες}) \quad \left.\begin{matrix}\alpha\in N_0\\ \beta\in N\end{matrix}\right\}$$

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν ἔχομεν

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot2}{3\cdot3\cdot3\cdot3} = \frac{2^4}{3^4}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3\cdot3\cdot3}{4\cdot4\cdot4} = \frac{3^3}{4^3}$$

Γενικῶς :

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdots \quad (\nu \text{ παράγοντες})$$

$$= \frac{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha \quad \cdots \quad (\nu \text{ παράγοντες})}{\beta\cdot\beta\cdot\beta \quad \cdots \quad (\nu \text{ παράγοντες})}$$

Ἤ

$$\boxed{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}} \qquad \left.\begin{matrix}\alpha\in N_0\\ \beta,\ \nu\in N\end{matrix}\right\}}$$

**74. 2.** Ὅπως εἰς τὸ σύνολον $N_0$, ἐλάβομεν $\alpha^0=1$ ὅπου $\alpha\in N$, ὁμοίως λαμβάνομεν

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{0} = 1 \qquad \text{ὅπου} \quad \alpha,\ \beta\in N.$$

**74. 3. Ἰδιότητες**

Εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι :

1. $$\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{2^3}{3^3} = \frac{2^2\cdot 2^3}{3^2\cdot 3^3} = \frac{2^{2+3}}{3^{2+3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3}$$

Γενικῶς :

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu+\nu} \qquad \left.\begin{matrix}\alpha\in N_0\\ \beta,\ \mu,\ \nu\in N\end{matrix}\right\}.$$

2. $$\left(\frac{2}{3}\right)^{5} : \left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right] : \left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3}.$$

Γενικῶς :

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} : \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu-\nu} \qquad \left.\begin{matrix}\alpha\in N_0\\ \beta,\ \mu,\ \nu\in N,\quad \mu\geqq\nu\end{matrix}\right\}$$

3. $$\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\right)^{2} = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{2}$$

Γενικῶς :

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\mu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}\cdot\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\mu} \qquad \left.\begin{matrix}\alpha,\ \gamma\in N_0\\ \beta,\ \delta,\ \mu\in N\end{matrix}\right\}$$

4. $$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+2+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3.2}$$

Γενικῶς :

$$\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}\right]^{\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu.\nu} \qquad \left.\begin{matrix}\alpha\in N_0\\ \beta,\ \nu,\ \mu\in N\end{matrix}\right\}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

217. Ὑπολογίσατε τὰς δυνάμεις :

$$\left(\frac{2}{5}\right)^4, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^6, \quad \left(\frac{3}{5}\right)^3, \quad \left(\frac{5}{9}\right)^3$$

218. Προσδιορίσατε τὸν ἀκέραιον α ὥστε νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης

$$\frac{\alpha}{625} = \left(\frac{7}{25}\right)^2$$

219. Γράψατε ὑπὸ μορφὴν μιᾶς δυνάμεως τὰ κάτωθι γινόμενα ἢ πηλίκα

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^2, \quad \frac{2^3}{5^3} \cdot \left(\frac{8}{125}\right)^2, \quad \left(\frac{4}{9}\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)^2, \quad \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^0 : \frac{9}{16}$$

## 75. ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

### 75. 1. Ὁρισμὸς

Ὅπως γράφομεν $\quad 2:3 = \frac{2}{3}, \quad 3:5 = \frac{3}{5},$

κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν συμφωνοῦμεν νὰ γράφωμεν

$$\frac{2}{3}:5 = \frac{\frac{2}{3}}{5}, \qquad 3:\frac{2}{5} = \frac{3}{\frac{2}{5}}, \qquad \frac{2}{3}:\frac{4}{5} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$$

Γενικῶς τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta}$ τῶν ρητῶν $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ γράφεται καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} \qquad \text{ὅπου} \quad \alpha \in N_0, \quad \beta, \gamma, \delta \in N$$

Ὑπὸ τὴν μορφὴν αὐτὴν δὲ λέγεται σύνθετον κλάσμα.

Γενικῶς : **Σύνθετον κλάσμα λέγεται τὸ κλάσμα τοῦ ὁποίου εἷς τοὐλάχιστον ὅρος εἶναι κλάσμα.**

Πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεως ἡ γραμμὴ τοῦ συνθέτου κλάσματος γράφεται πάντοτε μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν γραμμὴν ἑκάστου κλάσματος — ὅρου αὐτοῦ.

Π.χ. διὰ τὸ πηλίκον $\frac{2}{3} : 4$ γράφομεν $\dfrac{\frac{2}{3}}{4}$ καὶ ὄχι $\frac{\frac{2}{3}}{4}$

Διὰ νὰ διακρίνωμεν τὰ κλάσματα τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμητὴς εἶναι ἀκέραιος καὶ ὁ παρονομαστὴς φυσικὸς ἀπὸ τὰ σύνθετα κλάσματα, ὀνομάζομεν τὰ πρῶτα ἁ π λ ᾶ κ λ ά σ μ α τ α.

### 75. 2. Τροπὴ συνθέτου κλάσματος εἰς ἁπλοῦν

Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν πράξεις μὲ σύνθετα κλάσματα πρέπει νὰ τὰ τρέψωμεν πρῶτα εἰς ἁπλᾶ.

Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὅτι ἓν σύνθετον κλάσμα παριστάνει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ.

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5}$$

Ἤτοι:
$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5}$$

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

Ἤτοι:
$$\boxed{\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma} \quad \text{ὅπου} \quad \left.\begin{array}{r} \alpha \in N_0 \\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in N \end{array}\right\}}$$

Δυνάμεθα ὅμως νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 7}{\frac{5}{7} \cdot 3 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3}, \qquad \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta \cdot \delta}{\frac{\gamma}{\delta} \cdot \beta \cdot \delta} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

Ἤτοι στηριζόμενοι εἰς τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῶν κλασμάτων πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ συνθέτου κλάσματος ἐπὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τῶν ἁπλῶν κλασμάτων αὐτοῦ.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

220. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:

$$\frac{\frac{3}{4}}{5} + \frac{1}{\frac{2}{3}}, \qquad \frac{4}{7} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}, \qquad \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot 2} + 1, \qquad \frac{2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{8}\right)^2}$$

221) Ποῖον ἐκ τῶν κατωτέρω δύο συνθέτων κλασμάτων εἶναι τὸ μεγαλύτερον;

$$\frac{2}{\frac{2}{2}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\frac{2}{2}}{2}$$

## 76. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙΛΥΟΜΕΝΑ ΔΙΑ ΤΩΝ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΜ

**76. 1.** Εἰς τὰ προβλήματα τεσσάρων πράξεων, τὰ ὁποῖα ἔχομεν ἐπιλύσει, ὡς βασικὸν σύνολον ἀριθμῶν εἴχομεν τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων $N_0$. Ἤδη ἡ ἐπέκτασις τῶν τεσσάρων πράξεων καὶ εἰς τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐπιλύσωμεν καὶ νέους τύπους προβλημάτων.

### 76. 2. Πρόσθεσις — Ἀφαίρεσις

**Πρόβλημα**

Θέλει τις νὰ διανύσῃ μίαν ἀπόστασιν 25 km εἰς τρεῖς ἡμέρας. Τὴν α' ἡμέραν διήνυσε $8\frac{1}{3}$ km καὶ τὴν β' ἡμέραν 3 km περισσότερα τῆς α'. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει νὰ διανύσῃ τὴν τρίτην ἡμέραν;

**Ἐπίλυσις**

Κατὰ τὸ πρόβλημα ἔχομεν τὴν ἑξῆς σειρὰν προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων:

Ἀριθμὸς km διανυθέντων τὴν α' ἡμέραν: $8\frac{1}{3}$

Ἀριθμὸς km διανυθέντων τὴν β' ἡμέραν: $8\frac{1}{3} + 3 = 11\frac{1}{3}$

Ἀριθμὸς km διανυθέντων τὴν α' καὶ β' ἡμέραν: $8\frac{1}{3} + 11\frac{1}{3} = 19\frac{2}{3}$

Ἀριθμὸς km τὰ ὁποῖα θὰ διανύσῃ τὴν γ' ἡμέραν:

$$25 - 19\frac{2}{3} = 24\frac{3}{3} - 19\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$$

Ὥστε τὴν τρίτην ἡμέραν πρέπει νὰ διανύσῃ $5\frac{1}{3}$ km.

### 76. 3. Πολλαπλασιασμὸς

**Πρόβλημα 1ον**

Τὸ 1 m ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται $60\frac{1}{2}$ δρχ. Πόσον τιμῶνται τὰ 5 m τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

**Ἐπίλυσις**

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ γνωρίζομεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητοῦμεν τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν ὁμοειδῶν πρὸς αὐτὴν μονάδων. Ὡς γνωστὸν θὰ ἐκτελέσωμεν πολλαπλασιασμόν. Πολλαπλασιαστέος εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τὴν τιμήν.

Ἔχομεν $$5 \cdot 60\frac{1}{2} = 302\frac{1}{2}$$

Ἤτοι τὰ 5 m ὑφάσματος τιμῶνται $302\frac{1}{2}$ δρχ.

**Πρόβλημα 2ον**

Τὸ 1 m ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 60 δρχ. Πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{7}{10}$ m τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;

**Ἐπίλυσις**

Ἐὰν φαντασθῶμεν ὅτι τὸ ἓν μέτρον, ὅπως καὶ ἡ ἀξία αὐτοῦ, χωρίζεται εἰς 10 ἴσα μέρη, τότε τὸ 1/10 τοῦ μέτρου θὰ ἔχῃ ἀξίαν τὸ 1/10 τῶν 60 δρχ. Ἑπομένως τὰ 7/10 τοῦ μέτρου θὰ ἀξίζουν τὰ 7/10 τῶν 60 δρχ. Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ 7/10 τοῦ 60 πολλαπλασιάζομεν τὸ 7/10 ἐπὶ 60.

$$\frac{7}{10} \cdot 60 = 42.$$

Ἤτοι τὰ 7/10 m. ὑφάσματος ἀξίζουν 42 δρχ.

**Πρόβλημα 3ον**

Τὸ 1 m ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται $60\frac{1}{2}$ δρχ. Πόσον τιμῶνται τὰ $5\frac{1}{4}$ m τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

**Ἐπίλυσις**

Σκεπτόμενοι ὅπως καὶ προηγουμένως εὑρίσκομεν ὅτι

τὰ $5\frac{1}{4}$ m $= \frac{21}{4}$ m ὑφάσματος ἀξίζουν τὰ $\frac{21}{4}$ τῶν $60\frac{1}{2}$ δρχ.

$$5\frac{1}{4} \cdot 60\frac{1}{2} = 317\frac{5}{8}.$$

Ὥστε, τὰ $5\frac{1}{4}$ m ὑφάσματος ἀξίζουν $317\frac{5}{8}$ δρχ.

Ἀπὸ τὴν ἐπίλυσιν τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων συνάγομεν ὅτι:

**Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς ἀκεραίας μονάδος καὶ θέλωμεν τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν ὁμοειδῶν πρὸς αὐτὴν μονάδων ἢ μέρους αὐτῆς, ἐκτελοῦμεν πολλαπλασιασμόν.**

Πολλαπλασιαστέος εἶναι, πάντοτε, ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ἀκεραίας μονάδος καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ ἀριθμὸς τῶν πολλῶν μονάδων ἢ τῶν μερῶν τῆς μονάδος.

**Σημείωσις**

Εἶναι γνωστὸν ὅτι καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν μέρους ἑνὸς ἀριθμοῦ πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ ζητούμενον μέρος αὐτοῦ. Π. χ. τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ 30 εἶναι $\frac{3}{5} \cdot 30 = 18.$

**76. 4. Διαίρεσις**

**Πρόβλημα 1ον**

Τὰ 4 kg ἑνὸς ἐμπορεύματος τιμῶνται $20\frac{2}{5}$ δρχ. Πόσον τιμᾶται τὸ 1 kg αὐτοῦ;

**Ἐπίλυσις**

Ἐπειδὴ γνωρίζομεν τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων καὶ ζητοῦμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς, ὁμοειδοῦς πρὸς αὐτάς, μονάδος, θὰ ἐκτελέσωμεν, κατὰ τὰ γνωστά, διαίρεσιν.

$$20\frac{2}{5} : 4 = 5\frac{1}{10}$$

Ἤτοι τὸ 1 kg τοῦ ἐμπορεύματος ἀξίζει $5\frac{1}{10}$ δρχ.

**Πρόβλημα 2ον**

Τὰ $\frac{5}{7}$ kg ἑνὸς ἐμπορεύματος τιμῶνται 20 δρχ. Πόσον τιμᾶται τὸ 1 kg αὐτοῦ;

**Ἐπίλυσις**

Σκεπτόμεθα ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ 1 kg ἐπὶ 5/7, θὰ πρέπει νὰ εὕρωμεν 20 δρχ. Συνεπῶς, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς τελείας διαιρέσεως, ἡ τιμὴ τοῦ 1 kg, θὰ εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως 20 διὰ 5/7.

$$20 : \frac{5}{7} = 20 \cdot \frac{7}{5} = 28$$

Ὥστε τὸ 1 kg τοῦ ἐμπορεύματος τιμᾶται 28 δρχ.

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων συνάγομεν ὅτι:

**Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν ἢ μέρους καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς (ἀκεραίας μονάδος), ὁμοειδοῦς πρὸς τὰς πολλάς, ἐκτελοῦμεν διαίρεσιν.**

Διαιρετέος εἶναι πάντοτε ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων ἢ τοῦ μέρους. Τὴν διαίρεσιν αὐτὴν ἔχομεν ὀνομάσει μ ε ρ ι σ μ ό ν.

**Πρόβλημα 3ον**

Τὸ 1 kg ἑνὸς ἐμπορεύματος τιμᾶται $10\frac{2}{5}$ δρχ. Πόσα kg ἐμπορεύματος ἀγοράζομεν μὲ $33\frac{4}{5}$ δρχ;

**'Επίλυσις**

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν kg τὰ ὁποῖα θέλομεν νὰ ἀγοράσωμεν, ἐπὶ τὴν τιμὴν τοῦ 1 kg, θὰ πρέπει νὰ εὕρωμεν $33\frac{4}{5}$ δρχ. Συνεπῶς ὁ ἀριθμὸς τῶν ζητουμένων kg θὰ εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως $33\frac{4}{5}$ διὰ $10\frac{2}{5}$

$$33\frac{4}{5} : 10\frac{2}{5} = 3\frac{1}{4}$$

Ἤτοι, θὰ ἀγοράσωμεν $3\frac{1}{4}$ kg ἐμπορεύματος.

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος συνάγομεν ὅτι :

**Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος καὶ τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν ὁμοειδῶν ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν μονάδων καὶ ζητοῦμεν πόσαι εἶναι αὗται, ἐκτελοῦμεν διαίρεσιν.**

Διαιρετέος εἶναι πάντοτε ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων. Τὴν διαίρεσιν αὐτὴν ἔχομεν ὀνομάσει μέτρησιν.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

222. Τρία πρόσωπα ἐμοιράσθησαν ἓν τεμάχιον ὑφάσματος. Τὸ α' ἔλαβεν $12\frac{3}{5}$ m, τὸ β' ἔλαβε $2\frac{2}{3}$ m ὀλιγώτερα τοῦ α' καὶ $2\frac{5}{8}$ m περισσότερα τοῦ γ'. Πόσον ἦτο τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος;

223. Εἷς ἔμπορος ἠγόρασε ἐμπορεύματα ἀξίας 72000 δρχ. καὶ κατέβαλε ἀμέσως τὰ 3/4 τῆς ἀξίας των. Πόσα ὀφείλει ἀκόμη;

224. Ὁ σῖτος δίδει τὰ 11/12 τοῦ βάρους του εἰς ἄλευρον καὶ τὸ ἄλευρον δίδει τὰ 13/10 τοῦ βάρουςτου εἰς ἄρτον. Πόσον ἄρτον θὰ λάβωμεν ἀπὸ 150 kg σίτου;

225. Ἓν ὡρολόγιον εἰς $15\frac{1}{2}$ h μένει ὀπίσω $\frac{6}{60}$ h. Πόσον μένει ὀπίσω εἰς μίαν ὥραν;

226. Μία ἐλαστικὴ σφαῖρα ἀφέθη νὰ πέσῃ ἐλευθέρως εἰς τὸ πάτωμα καὶ ἀναπηδᾶ ἑκάστην φορὰν εἰς τὰ 2/3 τοῦ προηγουμένου ὕψους. Ἀφοῦ προσέκρουσεν 3 φορὰς εἰς τὸ πάτωμα ἀνῆλθεν εἰς ὕψος 48 cm. Ἀπὸ ποῖον ὕψος ἀφέθη νὰ πέσῃ ;

## 77. ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΟΝΑΔΑ

**Πρόβλημα 1ον**

Τὰ 5 kg ἀλεύρου τιμῶνται 30 δρχ. Πόσον τιμῶνται τὰ 8 kg ἀλεύρου;

**'Επίλυσις**

Δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν τὸ πρόβλημα εἰς τὰ ἑξῆς δύο ἁπλᾶ προβλήματα:

α) Τὰ 5 kg ἀλεύρου ἀξίζουν 30 δρχ.

Τὸ 1 kg ἀλεύρου πόσον ἀξίζει;

Εἶναι $\frac{30}{5} = 6$. Συνεπῶς τὸ 1 kg ἀλεύρου ἀξίζει 6 δρχ.

β) Τὸ 1 kg ἀλεύρου ἀξίζει 6 δρχ. Τὰ 8 kg πόσον ἀξίζουν;

Εἶναι $8 \cdot 6 = 48$. Συνεπῶς τὰ 8 kg ἀλεύρου ἀξίζουν 48 δρχ.

Κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἀνάλυσιν διὰ νὰ εὕρωμεν ἐκ τῆς τιμῆς τῶν 5 kg τὴν τιμὴν τῶν 8 kg εὑρήκαμεν πρῶτον τὴν τιμὴν τοῦ 1 kg καὶ ἔπειτα τὴν τιμὴν τῶν 8 kg ἀλεύρου.

Διὰ τοῦτο ὁ τρόπος αὐτὸς ἐργασίας λέγεται *μέθοδος ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα*.


Αἱ ἐπιλύσεις τῶν δύο ἁπλῶν προβλημάτων γράφονται συντόμως ὡς ἑξῆς.

Τὰ 5 kg ἀλεύρου ἀξίζουν 30 δρχ.

Τὸ 1 kg » ἀξίζει $\frac{30}{5}$ δρχ.

Τὰ 8 kg » ἀξίζουν $8 \cdot \frac{30}{5}$ δρχ. $= 48$ δρχ.

**Πρόβλημα 2ον**

Τὰ 2/3 μιᾶς ἀποστάσεως εἶναι 24 km. Πόσα km εἶναι τὰ 3/5 τῆς ἀποστάσεως ταύτης;

**Ἐπίλυσις**

Χάριν συντομίας τρέπομεν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα 2/3 καὶ 3/5. Λαμβάνομεν 10/15 καὶ 9/15.

Σκεπτόμεθα ὅτι

τὰ $\frac{10}{15}$ τῆς ἀποστάσεως εἶναι 24 km

τὸ $\frac{1}{15}$ » » » $\frac{24}{10}$ km

τὰ $\frac{9}{15}$ » » » $9 \cdot \frac{24}{10}$ km $= 21\frac{3}{5}$ km

Παρατηροῦμεν ὅτι καὶ εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ εὑρήκαμεν πρῶτον τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς κλασματικῆς μονάδος (1/15) καὶ ἐν συνεχείᾳ τῶν πολλῶν κλασματικῶν μονάδων (9/15).

**Πρόβλημα 3ον**

Τὰ 2/3 καὶ τὰ 3/4 ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 51. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

**Ἐπίλυσις**

Εἶναι $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$

Τὰ $\frac{17}{12}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 51

Τὸ $\frac{1}{12}$ » » » $\frac{51}{17}=3$

Τὰ $\frac{12}{12}$ » » » $3 \cdot 12=36$

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 36.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

227. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὰ 7/12 εἶναι 21;

228. Ἐὰν τὸ 1/5 ἑνὸς ἀριθμοῦ τὸ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ 1/2 αὐτοῦ εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 7. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

229. Τὰ 3/4 kg ἐλαίου ἔχουν 18 δρχ. Πόσον ἔχουν τὰ $2\frac{4}{5}$ kg αὐτοῦ;

230. Μία δεξαμενὴ περιέχει 216 kg. ὕδατος καὶ εἶναι γεμάτη κατὰ τὰ 3/7 αὐτῆς. Πόσα kg ὕδατος ἀπαιτοῦνται ἀκόμη διὰ νὰ γεμίσῃ;

231. Τὸ τριπλάσιον καὶ τὰ 2/3 ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀποτελοῦν τὸν ἀριθμὸν 11. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

## 78. ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΔΙ' ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

### Πρόβλημα 1ον

Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$ διὰ νὰ λάβωμεν ἄθροισμα $1\frac{6}{11}$;

Σχηματισμὸς τῆς ἐξισώσεως.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ χ τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν

$$\frac{4}{7}+\chi=1\frac{6}{11}$$

Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως.

$$\frac{4}{7}+\chi=1\frac{6}{11} \iff \chi=1\frac{6}{11}-\frac{4}{7} \text{ ἢ } \chi=\frac{75}{77}$$

Ἐπαλήθευσις. $\frac{4}{7}+\frac{75}{77}=\frac{119}{77}=1\frac{42}{77}=1\frac{6}{11}$

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι $\frac{75}{77}$

**Πρόβλημα 2ον**

Ἓν δοχεῖον ἔχει $18\frac{3}{4}$ kg ἐλαίου. Πόσα kg αὐτοῦ πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν διὰ νὰ μείνουν $6\frac{4}{5}$ kg ἐλαίου εἰς τὸ δοχεῖον;

Σχηματισμὸς τῆς ἐξισώσεως.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ χ τὸ ἀριθμὸν kg. ἐλαίου τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν, θὰ ἔχωμεν

$$18\frac{3}{4} - \chi = 6\frac{4}{5}$$

Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως.

$$18\frac{3}{4} - \chi = 6\frac{4}{5} \Longleftrightarrow 18\frac{3}{4} - 6\frac{4}{5} = \chi \text{ ἢ } \chi = 11\frac{19}{20}.$$

Ἐπαλήθευσις $\quad 18\frac{3}{4} - 11\frac{19}{20} = 17\frac{35}{20} - 11\frac{19}{20} = 6\frac{4}{5}.$

Ὥστε πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν $11\frac{19}{20}$ kg

**Πρόβλημα 3ον**

Τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ βάρους ἑνὸς κιβωτίου εἶναι $30\frac{1}{2}$ kg. Ποῖον εἶναι τὸ βάρος ὁλοκλήρου τοῦ κιβωτίου;

Σχηματισμὸς τῆς ἐξισώσεως.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ χ τὴν ἀριθ. τιμὴν τοῦ βάρους τοῦ κιβωτίου θὰ ἔχωμεν

$$\frac{2}{5} \cdot \chi = 30\frac{1}{2}$$

Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως.

$$\frac{2}{5} \cdot \chi = 30\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \chi = 30\frac{1}{2} : \frac{2}{5} \text{ ἢ } \chi = 76\frac{1}{4}$$

Ἐπαλήθευσις. $\quad \frac{2}{5} \cdot 76\frac{1}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{305}{4} = \frac{305}{10} = 30\frac{1}{2}$

Ὥστε τὸ βάρος ὁλοκλήρου τοῦ κιβωτίου εἶναι $76\frac{1}{4}$ kg

**Παρατηρήσεις**

α) Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα γίνεται φανερὸν ὅτι διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν ἓν πρόβλημα μὲ τὴν βοήθειαν ἐξισώσεων, ἀκολουθοῦμεν γενικῶς τὰ ἑξῆς στάδια :

1) Παριστάνομεν μὲ χ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τοῦ προβλήματος.

2) Σχηματίζομεν μίαν ἐξίσωσιν διὰ τῆς ὁποίας ἐκφράζομεν μὲ μαθηματικὰς σχέσεις τὴν λεκτικὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος.

3) Ἐπιλύομεν τὴν ἐξίσωσιν.

4) Ἐπανερχόμεθα εἰς τὸ πρόβλημα καὶ δίδομεν τὴν ἀπάντησιν εἰς αὐτὸ προσέχοντες πάντοτε ποῖον στοιχεῖον τοῦ προβλήματος ὠνομάσαμεν εἰς τὴν ἀρχὴν μὲ χ.

5) Εἶναι δυνατὸν ὡρισμένας φορὰς ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος νὰ μὴ εἶναι ἐπιλύσιμος εἰς τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν τοὺς ὁποίους χρησιμοποιοῦμεν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι τὸ πρόβλημά μας δὲν ἔχει λύσιν εἰς τὸ θεωρούμενον σύνολον ἀριθμῶν.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

232. Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ $\frac{3}{5}$ διὰ νὰ λάβωμεν ἄθροισμα $7\frac{2}{3}$;

233. Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν $2\frac{3}{4}$ kg ἀπὸ ἓν δοχεῖον βενζίνης, θὰ μείνουν εἰς αὐτὸ $8\frac{1}{5}$ kg. Πόσα kg βενζίνης περιέχει τὸ δοχεῖον;

234. Δύο ἀριθμοὶ ἔχουν γινόμενον 32. Ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶναι $18\frac{2}{5}$. Ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος;

235. Ἐὰν ἀπὸ τὸ διπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀφαιρέσετε τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$, θὰ εὕρετε $7\frac{3}{5}$. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ

236. Κρουνὸς γεμίζει μίαν δεξαμενὴν εἰς 8 h, δεύτερος εἰς 12 h καὶ τρίτος εἰς 15 h. Ἐὰν ἀνοίξωμεν ταὐτοχρόνως τοὺς τρεῖς κρουνοὺς εἰς πόσον χρόνον θὰ γεμίσῃ ἡ δεξαμενή; Ποῖον μέρος αὐτῆς θὰ ἔχῃ γεμίσῃ ἕκαστος κρουνός;

237. Τρεῖς ἀδελφοὶ ἐκληρονόμησαν τὰ 8/9 μιᾶς περιουσίας. Ἕκαστος τούτων ἔλαβεν 2400 δρχ. Πόση ἦτο ὁλόκληρος ἡ περιουσία;

238. Ἡ ἀξία ἑνὸς οἰκοπέδου ηὐξήθη κατὰ τὰ 3/20 τῆς ἀξίας τοῦ προηγουμένου ἔτους καὶ ἀνῆλθεν εἰς 325.000 δρχ. Πόση ἦτο ἡ ἀξία τοῦ οἰκοπέδου πρὸ τῆς αὐξήσεως;

239. Ἓν ἐμπόρευμα κατὰ τὴν μεταφοράν του εἶχεν φθορὰν ἴσην πρὸς τὰ 3/40 τῆς ἀξίας του. Νὰ εὕρετε τὴν ἀξίαν τοῦ ἐμπορεύματος αὐτοῦ πρὸ τῆς φθορᾶς, ἐὰν γνωρίζετε ὅτι μετὰ τὴν φθορὰν ἡ ἀξία ἦτο 60.000 δρχ.

240. Τὰ 2/5 τῶν 3/4 τῆς ἡλικίας ἑνὸς ἀτόμου εἶναι 18 ἔτη. Πόση εἶναι ἡ ἡλικία του;

241. Τὰ 3/4 ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐὰν αὐξηθοῦν κατὰ τὰ 2/5 αὐτοῦ δίδουν ἀποτέλεσμα 21. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

242. Τὸ 1/3 καὶ τὰ 3/8 ἑνὸς ποσοῦ εἶναι 3400 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ποσὸν τοῦτο.

243. Ἐὰν ἀπὸ ἓν ποσὸν ἀφαιρέσωμεν τὰ 3/4 αὐτοῦ καὶ τὸ 1/3 τοῦ ὑπολοίπου, θὰ ἀπομείνουν 1440 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀρχικὸν ποσόν.

244. Ἓξ ἄτομα διένειμον μεταξύ των τὰ 5/8 ἑνὸς ποσοῦ καὶ ἀπέμειναν 57.600 δρχ. Ποῖον ἦτο τὸ ἀρχικὸν ποσόν;

245. Νὰ μοιρασθοῦν 20.230 δρχ. εἰς τρία ἄτομα α', β', γ' εἰς τρόπον ὥστε: τὸ μερίδιον τοῦ β' νὰ εἶναι τὰ 7/22 τοῦ μεριδίου τοῦ α' καὶ τὸ μερίδιον τοῦ γ' νὰ εἶναι τὰ 16/33 τοῦ μεριδίου τοῦ α'.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

### 79. ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Κατωτέρω θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι εἶναι μικρότεροι τῆς ἀκεραίας μονάδος.

**79. 1. Δεκαδικαὶ κλασματικαὶ μονάδες. Δεκαδικὴ κλῖμαξ**

Ἀπὸ τὰς κλασματικὰς μονάδας

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{10},\quad \frac{1}{20},\quad \frac{1}{100},\quad \frac{1}{500},\quad \frac{1}{1000},\quad \frac{1}{10000}$$

αἱ κλασματικαὶ μονάδες $\frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1.}{10000}$

ἔχουν ἓν ἰδιαίτερον γνώρισμα. Ἔχουν ὡς παρονομαστὰς δυνάμεις τοῦ 10.

$10=10^1,\quad 100=10^2,\quad 1000=10^3,\quad 10.000=10^4.$

Διὰ τοῦτο ὀνομάζονται δεκαδικαὶ κλασματικαὶ μονάδες. Ἰδιαιτέρως:

Τὸ $\frac{1}{10}$ λέγεται δεκαδικὴ κλασμ. μονὰς 1ης τάξεως

Τὸ $\frac{1}{100}$ » » » » 2ας »

Τὸ $\frac{1}{1000}$ » » » » 3ης » κ.ο.κ.

Τὰς ἀνωτέρω δεκαδικὰς κλασματικὰς μονάδας, δυνάμεθα νὰ τὰς γράψωμεν κατὰ τάξιν φθίνοντος μεγέθους ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά:

$$\frac{1}{10},\quad \frac{1}{100},\quad \frac{1}{1000},\quad \frac{1}{10.000}\ \ldots \qquad (1)$$

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι

$$10\cdot\frac{1}{10.000}=\frac{1}{1000},\qquad 10\cdot\frac{1}{1000}=\frac{1}{100},\qquad 10\cdot\frac{1}{100}=\frac{1}{10}$$

Ἤτοι εἰς τὴν κλίμακα (1) ἑκάστη δεκαδικὴ κλασματικὴ μονὰς εἶναι δεκαπλασία ἀπὸ τὴν ἀμέσως ἑπομένην της (πρὸς τὰ δεξιὰ) καὶ ὑποδεκαπλασία ἀπὸ τὴν ἀμέσως προηγουμένην της (πρὸς τὰ ἀριστερά).

Ὡς ἐνθυμούμεθα δὲ καὶ ἡ δεκαδικὴ κλῖμαξ

$$\ldots 10000, \quad 1000, \quad 100, \quad 10, \quad 1 \qquad (2)$$

ἔχει τὴν αὐτὴν ἰδιότητα,

$$1 \cdot 10 = 10, \quad 10 \cdot 10 = 100, \quad 10 \cdot 100 = 1000, \quad 10 \cdot 1000 = 10000$$

Ἄρα δυνάμεθα νὰ συνδυάσωμεν τὰς δύο αὐτὰς κλίμακας (1) καὶ (2), διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἀκόλουθον πλήρη κλίμακα τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν δεκαδικῶν κλασματικῶν μονάδων κατὰ φθίνουσαν τάξιν μεγέθους ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά.

$$\ldots 10.000, \ 1000, \ 100, \ 10 \ \ 1, \ \ 1/10, \ 1/100, \ 1/1000, \ 1/10000, \ldots$$
$$\text{ἢ} \ldots 10^4, \quad 10^3, \quad 10^2, \ 10^1, \ 10^0, \ 1/10^1, \ 1/10^2, \ 1/10^3, \quad 1/10^4 \ldots \quad (3)$$

Καθὼς παρατηροῦμεν ἡ τελευταία αὕτη κλῖμαξ εἶναι ἀπεριόριστος πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ πρὸς τὰ δεξιά.

### 79. 2. Δεκαδικὰ κλάσματα. Δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

Ἕκαστον κλάσμα τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι δύναμις τοῦ δέκα λέγεται δεκαδικὸν κλάσμα. Π.χ. τὰ κλάσματα

$\frac{3}{10}, \frac{7}{100}, \frac{254}{1000}$, εἶναι δεκαδικὰ κλάσματα.

Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς δεκαδικῆς κλίμακος (3) δυνάμεθα νὰ θέτωμεν τὰ δεκαδικὰ κλάσματα ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν. Π.χ. ὅπως ὁ ἀκέραιος 547 γράφεται

$$\begin{aligned} 547 &= 5 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 7 \\ &= 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

Ὁμοίως καὶ τὸ δεκαδικὸν κλάσμα 547/1000 γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{547}{1000} &= \frac{500+40+7}{1000} = \frac{500}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{7}{1000} \\ &= \frac{5}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1000} = 5 \cdot \frac{1}{10^1} + 4 \cdot \frac{1}{10^2} + 7 \cdot \frac{1}{10^3} \end{aligned}$$

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἔχομεν:

$$\begin{aligned} 135\,\frac{24}{100} &= \frac{13524}{100} = \frac{1 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 4}{100} \\ &= \frac{1 \cdot 10000}{100} + \frac{3 \cdot 1000}{100} + \frac{5 \cdot 100}{100} + \frac{2 \cdot 10}{100} + \frac{4 \cdot 1}{100} \\ &= 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 2 \cdot \frac{1}{10^1} + 4 \cdot \frac{1}{10^2} \qquad (4) \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ δὲ εἰς ὁλόκληρον τὴν κλίμακα μονάδων 10 μονάδες μιᾶς τάξεως ἰσοδυναμοῦν μὲ μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, γράφομεν τὸ 2ον μέλος τῆς (4) ὡς ἑξῆς

$$135{,}24 \qquad (5)$$

ὅπου ἡ ὑποδιαστολὴ χρησιμοποιεῖται διὰ νὰ χωρίσῃ τὰς ἀκεραίας μονάδας ἀπὸ τὰς δεκαδικάς. Συγκεκριμένως: ἀριστερὰ τῆς ὑποδιαστολῆς εὑρίσκονται κατὰ σειρὰν τὰ ψηφία τῶν ἀκεραίων μονάδων, τῶν δεκάδων, τῶν ἑκατοντάδων ... δεξιὰ δὲ καὶ κατὰ σειρὰν τὰ ψηφία τῶν δεκάτων, τῶν ἑκατοστῶν...

Ὅταν εἷς ρητὸς γράφεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (5), λέγεται δεκαδικὸς ἀριθμός*. Τὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ μέρους ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ λέγονται δεκαδικὰ ψηφία αὐτοῦ.

### 79. 3. Παραδείγματα

α) $$\frac{3756}{10000} = \frac{3000}{10000} + \frac{700}{10000} + \frac{50}{10000} + \frac{6}{10000}$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{6}{10000}$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{10^1} + 7 \cdot \frac{1}{10^2} + 5 \cdot \frac{1}{10^3} + 6 \cdot \frac{1}{10^4}$$

Ἤτοι: $$\frac{3756}{10000} = 0{,}3756 \qquad (6)$$

β) $$\frac{30402}{1000} = \frac{3 \cdot 10000}{1000} + \frac{0 \cdot 1000}{1000} + \frac{4 \cdot 100}{1000} + \frac{0 \cdot 10}{1000} + \frac{2 \cdot 1}{1000}$$

$$= 3 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 + 4 \cdot \frac{1}{10^1} + 0 \cdot \frac{1}{10^2} + 2 \cdot \frac{1}{10^3}$$

(Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχουν ἑκατοστὰ ἐθέσαμεν εἰς τὴν θέσιν των 0.)

Ἤτοι $$\frac{30402}{1000} = 30{,}402 \qquad (7)$$

γ) $$\frac{342}{10000} = \frac{300+40+2}{10000} = \frac{300}{10000} + \frac{40}{10000} + \frac{2}{10000}$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{10^2} + 4 \cdot \frac{1}{10^3} + 2 \cdot \frac{1}{10^4}$$

* Πρόκειται περὶ μιᾶς ἄλλης, ἁπλουστέρας γραφῆς ἑνὸς ρητοῦ ἀριθμοῦ.

"Ητοι $$\frac{342}{10000}=0{,}0342 \qquad (8)$$

**Ἀντιστρόφως**: εἷς δεκαδικὸς ἀριθμὸς π.χ. ὁ δεκαδικὸς 3,02, γράφεται ὑπὸ μορφὴν κλάσματος ὡς ἑξῆς:

$$3{,}02 = 3+0{,}02 = 3+0\cdot\frac{1}{10^1}+2\cdot\frac{1}{10^2}$$

$$=\frac{3\cdot10^2}{10^2}+\frac{0\cdot10^1}{10^2}+\frac{2\cdot1}{10^2}$$

$$=\frac{3\cdot10^2+0\cdot10^1+2}{10^2}=\frac{302}{100}$$

"Ητοι $$3{,}02=\frac{302}{100} \qquad (9)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (6), (7), (8) καὶ (9) ἐννοοῦμεν τοὺς ἑξῆς κανόνας.

1. **Διὰ νὰ γράψωμεν ἓν δεκαδικὸν κλάσμα ὑπὸ μορφὴν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, γράφομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ χωρίζομεν ἐκ δεξιῶν τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστής.**

Π.χ. $\frac{349}{100}=3{,}49 \qquad \frac{28}{1000}=0{,}028$

2. **Διὰ νὰ γράψωμεν ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν ὑπὸ μορφὴν δεκαδικοῦ κλάσματος παραλείπομεν τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ γράφομεν αὐτὸν ὡς ἀριθμητὴν κλάσματος μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχει οὗτος.**

Π.χ. $0{,}005=\frac{5}{1000}, \qquad 32{,}04=\frac{3204}{100}$

### 79. 4. Ἀπαγγελία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

Διὰ νὰ ἀπαγγείλωμεν τὸν δεκαδικὸν 4,125 λέγομεν

τέσσαρα καὶ ἑκατὸν εἴκοσι πέντε χιλιοστά.

ἢ τέσσαρα ἀκέραιος, ἓν δέκατον, δύο ἑκατοστὰ καὶ πέντε χιλιοστὰ

ἢ τέσσαρες χιλιάδες, ἑκατὸν εἴκοσι πέντε χιλιοστά.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

246. Γράψατε ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν τὰ κάτωθι δεκαδικὰ κλάσματα:

$$\frac{1}{10^5}, \quad \frac{23}{10^4}, \quad \frac{201}{100000}, \quad \frac{234}{10^2}$$

247. Γράψατε ὑπὸ μορφὴν δεκαδικῶν κλασμάτων τοὺς κάτωθι δεκαδικοὺς ἀριθμούς:

4,002, 1,002, 0,005, 0,000104

## 80. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

**80. 1.** Ἐκ τῶν ἴσων κλασμάτων

$$\frac{24}{10} = \frac{240}{100} = \frac{2400}{1000} \ldots$$

ἔχομεν $$2{,}4 = 2{,}40 = 2{,}400 \ldots .$$

Παρατηροῦμεν δηλαδὴ ὅτι :

**Ἐὰν εἰς τὸ τέλος ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ γράψωμεν ὁσαδήποτε μηδενικὰ ἢ ἐὰν παραλείψωμεν ἀπὸ τὸ τέλος του ὅσα μηδενικὰ τυχὸν ὑπάρχουν, ἡ τιμή του δὲν μεταβάλλεται.**

**80. 2.** Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι

$$\frac{245}{1000} \cdot 10 = \frac{245}{100} \qquad \frac{245}{1000} \cdot 100 = \frac{245}{10} \qquad \frac{245}{1000} \cdot 1000 = 245$$

ἢ $$0{,}245 \cdot 10 = 2{,}45 \qquad 0{,}245 \cdot 100 = 24{,}5 \qquad 0{,}245 \cdot 1000 = 245$$

Ἤτοι : **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 ..., ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ μίαν, δύο, τρεῖς.... θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ ἀντιστοίχως.**

Παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι :

$$\frac{245}{1000} : 10 = \frac{245}{10000}, \qquad \frac{245}{1000} : 100 = \frac{245}{100\,000}$$

Ἤ $$0{,}245 : 10 = 0{,}0245 \qquad 0{,}245 : 100 = 0{,}00245$$

Ἤτοι : **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ 10, 100, 1000... ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ μίαν, δύο, τρεῖς... θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἀντιστοίχως.**

**Σημείωσις**

Ἐὰν τὰ ὑπάρχοντα δεκαδικὰ ψηφία δὲν ἀρκοῦν, τὰ συμπληρώνομεν μὲ μηδενικά. Π.χ. $0{,}24 \cdot 1000 = 240$, $\quad 0{,}24 : 1000 = 0{,}00024$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

248. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα

$$4{,}002 \cdot 10, \qquad 4{,}002 \cdot 100, \qquad 4{,}002 \cdot 10^5$$

249. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα

$$4{,}002 : 10, \qquad 4{,}002 : 100, \qquad 4{,}002 : 10^5$$

250. Συμπληρώσατε τὰς ἰσότητας

7,05 · 10 = ...... 100 = ..... 1000

## 81. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

**81. 1.** Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα :

$$\chi = 13{,}45 + 12{,}7 + 0{,}3$$

Γράφομεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ὑπὸ μορφὴν δεκαδικῶν κλασμάτων καὶ προσθέτομεν αὐτά.

$$13{,}45 + 12{,}7 + 0{,}3 = \frac{1345}{100} + \frac{127}{10} + \frac{3}{10} = \frac{1345}{100} + \frac{1270}{100} + \frac{30}{100} = \frac{1345 + 1270 + 30}{100}$$

Ἡ πρόσθεσις (Ι) δίδει τὸ ἄθροισμα εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ τελευταίου κλάσματος. Ἄρα $\chi = \dfrac{2645}{100} = 26{,}45$

$$\text{(I)}\quad \begin{array}{r} 1345 \\ 1270 \\ 30 \\ \hline 2645 \end{array} \qquad \text{(II)}\quad \begin{array}{r} 13{,}45 \\ 12{,}7 \\ 0{,}3 \\ \hline 26{,}45 \end{array}$$

Τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα δίδει συντόμως καὶ ἡ πρόσθεσις (ΙΙ). Εἰς αὐτὴν αἱ ὑποδιαστολαί, ἄρα καὶ τὰ ψηφία τῆς αὐτῆς τάξεως, εὑρίσκονται εἰς τὴν ἰδίαν στήλην. Ἐκ τούτου ὁδηγούμενοι συνάγομεν τὸν γνωστὸν κανόνα προσθέσεως δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

## 82. ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ $\delta = 31{,}4 - 8{,}32$

Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω, ἔχομεν

$$31{,}4 - 8{,}32 = \frac{314}{10} - \frac{832}{100} = \frac{3140}{100} - \frac{832}{100} = \frac{3140 - 832}{100}$$

Ἀπὸ τὴν ἀφαίρεσιν (Ι) ἔχομεν τὴν διαφορὰν εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ τελευταίου κλάσματος.

$$\text{(I)}\quad \begin{array}{r} 3140 \\ -\ 832 \\ \hline 2308 \end{array} \qquad \text{(II)}\quad \begin{array}{r} 31{,}40 \\ -\ 8{,}32 \\ \hline 23{,}08 \end{array}$$

Ἄρα $\delta = \dfrac{2308}{100} = 23{,}08$

Εἰς τὸ ἴδιον ἀποτέλεσμα φθάνομεν συντόμως καὶ μὲ τὴν ἀφαίρεσιν (ΙΙ). Ἐξ αὐτῆς συνάγομεν τὸν γνωστὸν κανόνα ἀφαιρέσεως δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

Σκόπιμον εἶναι νὰ συμπληρώνωμεν τὰ ἐλλείποντα δεκαδικὰ ψηφία τῶν ἀριθμῶν μὲ μηδενικὰ διὰ νὰ ἀποφεύγωνται λάθη.

## 83. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἂς εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\quad x=15{,}32\cdot 3{,}4$

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$x=\frac{1532}{100}\cdot\frac{34}{10}=\frac{1532\cdot 34}{100\cdot 10}=\frac{52088}{1000}=52{,}088$$

Παρατηροῦμεν ὅτι

α) Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος $52088/1000$ προκύπτει ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δοθέντας δεκαδικούς, ὡς ἐὰν ἦσαν ἀκέραιοι.

β) Ὁ παρανομαστὴς ὁρίζει ὅτι θὰ χωρίσωμεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουν ὁμοῦ καὶ οἱ δύο παράγοντες.

Ὥστε: **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ὡς ἐὰν ἦσαν ἀκέραιοι καὶ εἰς τὸ γινόμενον χωρίζομεν ἀπὸ δεξιὰ τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουν καὶ οἱ δύο παράγοντες ὁμοῦ.**

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως γίνεται ὡς κατωτέρω

$$\begin{array}{r} 15{,}32\\ \times\quad 3{,}4\\ \hline 6128\\ 4596\phantom{0}\\ \hline 52{,}088 \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} 2{,}35\\ \times\quad 6\\ \hline 14{,}10 \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} 0{,}67\\ \times\quad 3{,}2\\ \hline 134\\ 201\phantom{0}\\ \hline 2{,}144 \end{array}$$

**Γενικὴ παρατήρησις**

Καθὼς εἴδομεν οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι δεκαδικὰ κλάσματα γραμμένα ὑπὸ ἄλλην μορφήν. Διὰ τοῦτο ὅλαι αἱ ἰδιότητες τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, τὰς ὁποίας εἴδομεν εἰς τὴν πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν καὶ πολλαπλασιασμὸν ἰσχύουν καὶ δι' αὐτούς. Π.χ. ἡ πρόσθεσις δεκαδικῶν εἶναι μεταθετικὴ καὶ προσεταιριστική.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

251. Νὰ εὕρετε τὰ ἀθροίσματα:

ι) $28{,}3+0{,}625$ ιι) $6{,}25+47{,}4+175{,}803$

252. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαφοραί:

ι) $0{,}84-0{,}76$ ιι) $12-0{,}075$ ιιι) $135{,}1-37{,}803$

253. Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ πολλαπλασιασμοί:

ι) $3{,}45\cdot 0{,}37$ ιι) $101{,}11\cdot 31{,}9$ ιιι) $0{,}01^3\cdot 0{,}02$

254. Χρησιμοποιήσατε γνωστὴν ἰδιότητα διὰ νὰ ὑπολογίσετε συντόμως τὰς ἀριθμητικὰς παραστάσεις:

ι) $9{,}1\cdot 72{,}65+0{,}9\cdot 72{,}65$

ιι) $81{,}2\cdot 0{,}48-81{,}2\cdot 13{,}42$

255. Νὰ ὑπολογισθῇ μὲ δύο τρόπους ἡ ἀριθμητικὴ παράστασις

$$8{,}12-(0{,}385-0{,}03)$$

256. Ἓν πεντάδραχμον ἔχει πάχος 1,5 cm. Πόσον ὕψος ἔχει μία στήλη ἀπὸ 35 πεντάδραχμα, ι) εἰς dm καὶ ιι) εἰς cm. Πόσον ὕψος ἔχουν τὰ 0,75 τῆς στήλης, εἰς cm;

## 84. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

### 84. 1. Ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος

α) Ἂς προσέξωμεν τὴν διαίρεσιν 8,55:3

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$8{,}55:3=\frac{855}{100}:3=\frac{855:3}{100}=\frac{285}{100}=2{,}85$$

Εὑρίσκομεν συντόμως τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα κατὰ τὴν γνωστὴν παραπλεύρως διάταξιν.

$$\begin{array}{r|l} \dot{8}{,}\dot{5}\dot{5} & 3 \\ \cline{2-2} 2\,5 & 2{,}85 \\ 15 & \\ 0 & \end{array}$$

Εἰς τὴν διάταξιν αὐτήν, ὅταν δεξιὰ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου 2 τοποθετοῦμεν τὸ 5, σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς 25, ὁ ὁποῖος σημαίνει πλέον δέκατα $\left(2{,}5=\frac{25}{10}\right)$. Ἑπομένως καὶ τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου θὰ εἶναι δέκατα. Διὰ τοῦτο καὶ ἐθέσαμεν πρὸ αὐτοῦ ὑποδιαστολήν.

Ὁμοίως, τὸ νέον ὑπόλοιπον εἶναι ἑκατοστά. $0{,}15=\frac{15}{100}$.

Ἑπομένως καὶ τὸ νέον ψηφίον τοῦ πηλίκου θὰ εἶναι ἑκατοστὰ κ.ο.κ.

Ὥστε: **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου, διαιροῦμεν αὐτοὺς ὡς ἐὰν ἦσαν ἀκέραιοι, θέτομεν δὲ εἰς τὸ πηλίκον ὑποδιαστολὴν ἀμέσως μόλις τελειώσει ἡ διαίρεσις τοῦ ἀκεραίου μέρους.**

β) Ἂς προσέξωμεν τὴν διαίρεσιν 2,3:3.

Δυνάμεθα πάλιν νὰ γράψωμεν

$$2{,}3:3=\frac{23}{10}:3=\frac{23}{30}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{23}{30}$ εἶναι ἀνάγωγον καὶ ὁ παρονομαστὴς του δὲν εἶναι, οὔτε δύναται νὰ γίνῃ δύναμις τοῦ 10. (Τὸ 23 δὲν διαιρεῖται διὰ 3).

Ἤτοι τὸ κλάσμα $\frac{23}{3\cdot 10}=\frac{23}{30}$ δὲν εἶναι δεκαδικὸν κλάσμα· ἄρα καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 2,3:3.

Ὥστε: **τὸ πηλίκον ἑνὸς δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου δὲν εἶναι πάντοτε δεκαδικὸν κλάσμα.**

Τί ὅμως θὰ λάβωμεν ὡς πηλίκον εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν;

Δυνάμεθα:

1) Νὰ λάβωμεν τὸ κλάσμα 23/30 ὡς τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 2,3 διὰ 3.

2) Νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον κατὰ *προσέγγισιν* μὲ τὸν ἑξῆς τρόπον. Ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα.

$$\begin{array}{r|l} 2{,}3 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 0{,}7 \end{array}$$

Ἡ διαίρεσις ἀφήνει ὑπόλοιπον $0{,}2 = \frac{2}{10}$. Ἤτοι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον εἶναι: 0,7 καὶ $\frac{2}{3}$ τοῦ δεκάτου. Ἐὰν συνεπῶς παραλείψωμεν τὸ ὑπόλοιπον καὶ λάβωμεν ὡς πηλίκον τὸ 0,7 κάνομεν λάθος.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ λάθος αὐτὸ εἶναι μικρότερον τοῦ ἑνὸς δεκάτου.

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι τὸ 0,7 εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως κατὰ *προσέγγισιν* δεκάτου.

Ἐπειδὴ εἶναι καὶ μικρότερον τοῦ πραγματικοῦ, ὀνομάζεται πηλίκον κατὰ *προσέγγισιν δεκάτου κατ' ἔλλειψιν*. Ἐὰν ἀντὶ νὰ παραλείψωμεν τὸ ὑπόλοιπον 2/3 τοῦ δεκάτου, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεως δεκάτου, τὸ κάνωμεν ἓν δέκατον καὶ τὸ προσθέτωμεν εἰς τὸ 0,7 ,θὰ ἔχωμεν ὡς πηλίκον 0,8. Τὸ πηλίκον τώρα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀληθοῦς πηλίκου κατὰ 1/3 τοῦ δεκάτου. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι τὸ πηλίκον εὑρέθη κατὰ *προσέγγισιν δεκάτου καθ' ὑπεροχήν*.

Ἐφ' ὅσον θελήσωμεν μεγαλυτέραν *προσέγγισιν* δυνάμεθα νὰ συνεχίσωμεν τὴν διαίρεσιν καὶ νὰ εὕρωμεν, πηλίκον κατὰ *προσέγγισιν ἑκατοστοῦ*, *χιλιοστοῦ* κ.ο.κ. ὡς κατωτέρω:

Προσέγγισις ἑκατοστοῦ

$$\begin{array}{r|l} 2{,}3 & 3 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}76 \\ 2 & \end{array}$$

Κατ' ἔλλειψιν : 0,76
Καθ' ὑπεροχήν : 0,77

Προσέγγισις χιλιοστοῦ

$$\begin{array}{r|l} 2{,}3 & 3 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}766 \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$$

Κατ' ἔλλειψιν : 0,766
Καθ' ὑπεροχήν : 0,767

Παρατηροῦμεν ἐπὶ πλέον ὅτι: τὸ ἑκάστοτε νέον ὑπόλοιπον εἶναι πάντοτε 2. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὅσον καὶ ἂν συνεχίσωμεν τὴν διαίρεσιν δὲν θὰ τελειώσῃ αὕτη ποτὲ καὶ ὅτι εἰς τὸ πηλίκον θὰ εὑρίσκωμεν διαρκῶς τὸ αὐτὸ ψηφίον 6.

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 2, 3 διὰ 3 ἢ τὸ κλάσμα 23/30 δὲν δύναται νὰ λάβῃ *τερματιζομένην δεκαδικὴν μορφήν*. Διὰ νὰ δηλώσωμεν δὲ τοῦτο γράφομεν, $\frac{23}{30} = 0{,}766\ldots$

## 84. 2. Διαιρέτης δεκαδικὸς ἀριθμὸς

Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ διαίρεσις 0,45:1,5

Ἡ περίπτωσις αὐτὴ ἀνάγεται εἰς τὴν διαίρεσιν μὲ διαιρέτην ἀκέραιον. Πράγματι· 0,45:1,5=4,5:15=0,3 (πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 10).

Ὁμοίως τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 49 διὰ 0,72 εὑρίσκεται ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν 4900 διὰ 72 (πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 100). Ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι ἀτελής. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀρχικῆς διαιρέσεως δὲν εἶναι 4, ἀλλὰ $\frac{4}{100}$. Διατί;

$$\begin{array}{r|l} 4900 & 72 \\ \cline{2-2} 580 & 68 \\ 4 & \end{array}$$

**Σημείωσις**

Δυνάμεθα πάντοτε νὰ τρέπωμεν τοὺς δεκαδικοὺς διαιρέτας εἰς δεκαδικὰ κλάσματα ὁπότε ἐκτελοῦμεν διαίρεσιν διὰ κλάσματος.

## 85. ΤΡΟΠΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΕΙΣ ΔΕΚΑΔΙΚΟΝ

Γνωρίζομεν ὅτι ἕκαστον κλάσμα παριστάνει τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρανομαστοῦ του. Διὰ νὰ τὸ τρέψωμεν εἰς δεκαδικὸν ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν αὐτήν. Π.χ. διὰ τὰ κλάσματα

$\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{6}$ ἔχομεν:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 0,6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 70 & 8 \\ \cline{2-2} 60 & 0,875 \\ 40 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 6 \\ \cline{2-2} 10 & 1,166 \\ 40 & \\ 40 & \\ 4 & \end{array}$$

Ἤτοι $\frac{3}{5}=0,6$ $\qquad \frac{7}{8}=0,875$ $\qquad \frac{7}{6}=1,166\ldots$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$, τρέπονται εἰς τερματιζομένους δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ἐνῷ τὸ κλάσμα $\frac{7}{6}$ εἶναι ἀδύνατον νὰ λάβῃ τερματιζομένην δεκαδικὴν μορφήν.

## 86. ΠΟΙΑ ΑΝΑΓΩΓΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΤΡΕΠΟΝΤΑΙ ΕΙΣ ΤΕΡΜΑΤΙΖΟΜΕΝΟΥΣ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ὡρισμένα κλάσματα τρέπονται εἰς τερματιζομένους δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ἐνῷ ἄλλα δὲν τρέπονται. Γεννᾶται τὸ ἐρώτημα: Δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν, πρὶν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, ἐὰν ἓν κλάσμα τρέπεται εἰς τερματιζόμενον δεκαδικὸν ἀριθμόν;

Εἰς τὴν ἀπάντησιν θὰ ὁδηγηθῶμεν ἀπὸ τὰς ἑξῆς παρατηρήσεις :

α) Ἂς λάβωμεν τοὺς τερματιζομένους δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς 0,4, 0,15, 0,625 καὶ ἂς εὕρωμεν τὰ δεκαδικὰ κλάσματα εἰς τὰ ὁποῖα τρέπονται οὗτοι. Ἔχομεν :

$$0{,}4 = \frac{4}{10}, \qquad 0{,}15 = \frac{15}{100}, \qquad 0{,}625 = \frac{625}{1000}$$

Μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν, ὥστε νὰ καταστοῦν ταῦτα ἀνάγωγα, ἔχομεν :

$$\frac{4}{10} = \frac{2\cdot2}{2\cdot5} = \frac{2}{5}, \qquad \frac{15}{100} = \frac{3\cdot5}{2^2\cdot5^2} = \frac{3}{2^2\cdot5}, \qquad \frac{625}{1000} = \frac{5^4}{2^3\cdot5^3} = \frac{5}{2^3}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι :

Τὰ ἀ ν ά γ ω γ α κλάσματα, εἰς τὰ ὁποῖα τρέπονται οἱ ἀνωτέρω δεκαδικοί, ἔχουν παρονομαστὰς μ ό ν ο ν δ υ ν ά μ ε ι ς τ ῶ ν ἀ ρ ι θ μ ῶ ν 2 κ α ὶ 5 ἢ μ ό ν ο ν τ ο ῦ ἑ ν ὸ ς ἐ ξ α ὐ τ ῶ ν.

β) Ἂς λάβωμεν ἀνάγωγα κλάσματα, π.χ. τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{20}$, τῶν ὁποίων οἱ παρονομασταὶ οὐδένα πρῶτον παράγοντα διαφορετικὸν ἀπὸ τοὺς 2 καὶ 5 περιέχουν.

Ἔχομεν :

$$\frac{1}{2} = \frac{5\cdot1}{5\cdot2} = \frac{5}{10} = 0{,}5 \qquad \frac{3}{5} = \frac{3\cdot2}{5\cdot2} = \frac{6}{10} = 0{,}6 \qquad \frac{9}{20} = \frac{5\cdot9}{5\cdot20} = 0{,}45$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ κλάσματα δίδουν τερματιζομένους δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω παρατηρήσεις ἐννοοῦμεν ὅτι :

**Διὰ νὰ τρέπεται ἓν ἀνάγωγον κλάσμα εἰς τερματιζόμενον δεκαδικὸν ἀριθμὸν πρέπει καὶ ἀρκεῖ, ὁ παρανομαστής του, ἀναλελυμένος εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, νὰ ἔχῃ ὡς μόνους πρώτους παράγοντας τοὺς 2 καὶ 5 ἢ τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν.**

**Παράδειγμα**

Τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{147}{40}$ τρέπεται εἰς τερματιζόμενον δεκαδικόν, διότι ὁ παρονομαστής του, $40=2^3\cdot5$, ἔχει ὡς μόνους πρώτους παράγοντας τοὺς 2 καὶ 5. Ἀντιθέτως τὸ κλάσμα $\frac{2}{35}$ δὲν τρέπεται, διότι ὁ παρονομαστής του, $35=5\cdot7$, ἔχει ὡς πρῶτον παράγοντα καὶ τὸ 7.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

257. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

α) $5 \cdot \chi = 0{,}0125$ β) $12 \cdot \chi = 0{,}0144$

258. Νὰ τραποῦν εἰς δεκαδικοὺς τὰ κλάσματα :

$\frac{1}{8}$, $\frac{3}{25}$, $\frac{7}{2^2 \cdot 5^3}$, $\frac{9}{2^2 \cdot 5}$

259. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις :

ι) $\frac{3}{8} - 0{,}07$ ιι) $\frac{3}{5} \cdot 0{,}75$ ιιι) $0{,}225:5$

260. Νὰ εὕρετε μὲ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων :

ι) 10:28 ιι) 6,4:3

261. Ποῖα ἀπὸ τὰ κάτωθι κλάσματα τρέπονται εἰς τερματιζομένους δεκαδικούς :

$\frac{3}{5}$, $\frac{11}{50}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{6}{48}$, $\frac{9}{32}$, $\frac{718}{325}$

262. Νὰ γράψετε τὸ σύνολον τῶν κλασματικῶν μονάδων μὲ παρανομαστὴν μικρότερον τοῦ 20, αἱ ὁποῖαι τρέπονται εἰς τερματιζομένους δεκαδικούς.

## 87. ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ἀπὸ τοὺς παρονομαστὰς τῶν ἀναγώγων κλασμάτων $\frac{2}{3}$, $\frac{9}{11}$, $\frac{1}{12}$ διακρίνομεν ὅτι ταῦτα δὲν τρέπονται εἰς τερματιζομένους δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

Ἂς προσέξωμεν τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων 2:3, 9:11 καὶ 1:12.

$$
\begin{array}{r|l}
20 & 3 \\ \hline
20 & 0{,}666\ldots \\
20 & \\
20 & \\
2 & \\
.. & \\
.. &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
90 & 11 \\ \hline
20 & 0{,}8181\ldots \\
90 & \\
20 & \\
9 & \\
.. & \\
.. &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
100 & 12 \\ \hline
40 & 0{,}0833\ldots \\
40 & \\
4 & \\
.. & \\
.. &
\end{array}
$$

Διακρίνομεν ὅτι τὰ ψηφία ἑκάστου πηλίκου ἐπαναλαμβάνονται ἀπεριορίστως, τὰ αὐτὰ καὶ μὲ τὴν ἰδίαν σειρὰν διαδοχῆς. (Διατί;) Ἐπαναλαμβάνονται, ὅπως λέγομεν, περιοδικῶς.

Διὰ τοῦτο οἱ ἀριθμοί :

0,666 . . ., 0,8181..., 0,08333. . .

λέγονται περιοδικοὶ δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

Τὸ τμῆμα τοῦ δεκαδικοῦ μέρους, τὸ ὁποῖον ἐπαναλαμβάνεται λέγεται περίοδος.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Π.χ. | τοῦ ἀριθμοῦ | 0, 666 . . . | περίοδος | εἶναι | 6 |
| | » » | 0,8181 . . . | » | » | 81 |
| | » » | 0,0833 . . . | » | » | 3 |

Εἰς τοὺς περιοδικοὺς ἀριθμοὺς 0,666 ... καὶ 0,8181 ... παρατηροῦμεν ὅτι ἡ περίοδος ἀρχίζει ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν. Διὰ τοῦτο οὗτοι λέγονται ἁπλοῖ περιοδικοί. Εἰς τὸν δεκαδικὸν 0,0833 ... ἡ περίοδος ἀρχίζει μετὰ ἀπὸ δύο δεκαδικὰ ψηφία. Ἤτοι τὸ δεκαδικὸν μέρος αὐτοῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓν περιοδικὸν τμῆμα καὶ ἀπὸ ἓν μὴ περιοδικόν. Διὰ τοῦτο οὗτος λέγεται μεικτὸς περιοδικός.

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας: $\frac{4}{10} = 0{,}4 = 0{,}4000\ldots$, $\frac{25}{100} = 0{,}25 = 0{,}25000\ldots$

εἶναι εὔκολον νὰ ἐννοήσωμεν ὅτι καὶ ἕκαστον κλάσμα τὸ ὁποῖον τρέπεται εἰς τερματιζόμενον δεκαδικὸν δύναται νὰ λάβῃ μορφὴν περιοδικοῦ ἀριθμοῦ. Ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν ὡς περίοδόν του τὸ 0.

Δυνάμεθα λοιπὸν γενικῶς νὰ εἴπωμεν ὅτι:

**Ἕκαστος ρητὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ μορφὴν δεκαδικοῦ περιοδικοῦ ἀριθμοῦ ἢ ὅπως λέγομεν ἔχει ἓν δεκαδικὸν περιοδικὸν ἀνάπτυγμα.**

Ἀντιστρόφως:

**Ἕκαστος περιοδικὸς ἀριθμὸς παριστάνει ἕνα ρητόν, τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν.**

Διακρίνομεν πρὸς τοῦτο τὰς ἑξῆς περιπτώσεις:

α) Ὁ περιοδικὸς ἀριθμὸς εἶναι ἁπλοῦς: π.χ. ὁ 0,777 ...

Ἐὰν ὀνομάσωμεν μὲ χ τὸν ζητούμενον ρητὸν ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα: $\chi = 0{,}777\ldots$ (1)

ι) Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ 10 → $10\cdot\chi = 7{,}77\ldots$ (2)

ιι) Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς (2) τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς χ καὶ 0,777... → $\chi = 0{,}777\ldots$

Διαφορὰ $9\cdot\chi = 7$

Ἄρα $\chi = \frac{7}{9}$ Ἢ $0{,}777\ldots = \frac{7}{9}$

Ὁμοίως διὰ τὸν περιοδικὸν ἀριθμὸν $\chi = 0{,}6363\,63\ldots$ (3)

ι) Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 100 τὰ μέλη τῆς (3) $100\cdot\chi = 63{,}6363\ldots$ (4)

ιι) Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς (4) τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς χ καὶ 0,636363 ... $\chi = 0{,}636363\ldots$

Διαφορὰ $99\cdot\chi = 63$

ἢ $\chi = \frac{63}{99}$

Ἤτοι: $0{,}636363\ldots = \dfrac{63}{99}$

Ὁ ἀνωτέρω τρόπος ἐργασίας μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸ ἀκόλουθον συμπέρασμα

**Ἕκαστος ἁπλοῦς περιοδικὸς δεκαδικὸς ἀριθμὸς < 1 εἶναι ἴσος μὲ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἀριθμητὴν τὴν περίοδόν του, καὶ παρανομαστὴν τόσα 9, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τῆς περιόδου.**

β) Ὁ περιοδικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεικτὸς

Ἔστω $\chi = 0{,}8333\ldots$ (5)

Ἔχομεν:

$100\cdot\chi = 83{,}33\ldots$ Πολ/σμὸς τῶν μελῶν τῆς (5) ἐπὶ 100

$10\cdot\chi = 8{,}33\ldots$ » » » » » » 10

$90\cdot\chi = 83 - 8$ Διαφορὰ

Ἢ $\chi = \dfrac{83-8}{90}$

Ἤτοι $0{,}8333\ldots = \dfrac{83-8}{90}$

Ἐργαζόμενοι μὲ ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν: $0{,}54888\ldots = \dfrac{548-54}{900}$

Ἤτοι: ἕκαστος μεικτὸς περιοδικὸς εἶναι ἴσος μὲ κοινὸν κλάσμα τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος σχηματίζεται ἀπὸ τὰ ψηφία τοῦ μὴ περιοδικοῦ τμήματος καὶ μιᾶς περιόδου ἠλαττωμένος κατὰ τὸ μὴ περιοδικὸν τμῆμα, ὁ δὲ παρονομαστὴς σχηματίζεται ἀπὸ τόσα 9, ὅσα ψηφία ἔχει ἡ περίοδος ἀκολουθούμενα ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχει τὸ μὴ περιοδικὸν τμῆμα. Εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς ἔχει καὶ ἀκέραιον μέρος, μὲ ἀνάλογον τρόπον, σχηματίζομεν τὸ κλάσμα τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτόν.

**Παραδείγματα**

α) $12{,}4343\ldots = 12 + 0{,}4343\ldots = \dfrac{1243-12}{99}$

β) $5{,}423636\ldots = \dfrac{54236-542}{9900}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

263. Νὰ γράψετε ὡς περιοδικοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς τὰ κλάσματα:

$\dfrac{1}{7}$, $\dfrac{2}{75}$, $\dfrac{5}{21}$, $\dfrac{31}{33}$

264. Νὰ τραποῦν εἰς κλάσματα οἱ κάτωθι περιοδικοὶ δεκαδικοὶ ἀριθμοί:

ι) 0,4545 . . . ιι) 0,3141414 . . . ιιι) 7,555 . . .

ιν) 15,32858585 . . . ν) 0,006767 . . .

265) Εἰς τὸ σύνολον $A = \left\{ \frac{2}{5}, \frac{1}{7}, \frac{3}{12}, \frac{5}{8}, \frac{15}{45}, \frac{4}{40} \right\}$. ποῖον εἶναι τὸ ὑποσύνολον κλασμάτων, τὰ ὁποῖα τρέπονται εἰς δεκαδικοὺς περιοδικοὺς ἀριθμούς :

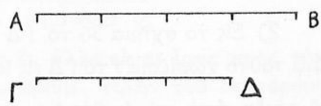
266. Δείξατε ὅτι τὸ κλάσμα : $\dfrac{\frac{1}{5} - 0{,}1}{\frac{1}{5} + 0{,}1}$ τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν.

267. Νὰ ἐκτελέσετε τὰς πράξεις :

ι) $\frac{5}{6} + 2{,}353535\ldots$ ιι) $0{,}7272\ldots - 0{,}444\ldots$

## 88. ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ ΔΥΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

**88. 1.** Ὡς γνωστόν, ἐὰν δοθῇ ἓν εὐθ. τμῆμα AB καὶ εἷς ρητὸς $\lambda \neq 0$, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἓν ἄλλο εὐθύγραμμον τμῆμα ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον $\lambda \cdot AB$. Π.χ. ἐὰν δοθῇ ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα AB καὶ ὁ ρητὸς $3/4$, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν εὐθ. τμῆμα $\Gamma\Delta = 3/4 \cdot AB$ Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ χωρίσωμεν τὸ AB εἰς 4 ἴσα τμήματα καὶ νὰ λάβωμεν ἓν τμῆμα ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα ἐκ τριῶν αὐτῶν. Τοιουτοτρόπως εἰς τὸ σχ. 33 ἔχομεν $\Gamma\Delta = \frac{3}{4} \cdot AB$



Σχ. 33

Ὁ ρητὸς $\frac{3}{4}$ λέγεται λόγος τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ AB· γράφομεν δὲ $\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{3}{4}$.

Ὥστε $\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{3}{4}$ σημαίνει ὅτι $\Gamma\Delta = \frac{3}{4} \cdot AB$

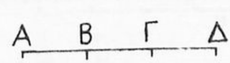
$$\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{3}{4} \iff \Gamma\Delta = \frac{3}{4} \cdot AB$$

Συμφώνως πρὸς τ' ἀνωτέρω εἰς τὸ παραπλεύρως σχ. 34 ὅπου ἐλάβομεν $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta$ ἔχομεν

$$AB = \frac{1}{3} \cdot A\Delta \iff \frac{AB}{A\Delta} = \frac{1}{3}$$

$$AB = \frac{1}{2} \cdot A\Gamma \iff \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{1}{2}$$

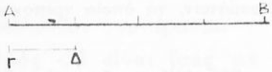
$$A\Gamma = \frac{2}{3} \cdot A\Delta \iff \frac{A\Gamma}{A\Delta} = \frac{2}{3}$$



Σχ. 34

**88. 2.** Ἂς ἐξετάσωμεν καὶ τὸ ἀντίστροφον πρόβλημα.

Ἤτοι: ἐὰν δοθοῦν δύο εὐθ. τμήματα, ΑΒ, ΓΔ, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸν λόγον τοῦ ΑΒ, πρὸς τὸ $ΓΔ \neq 0$;




Σχ. 35

1) Εἰς τὸ σχ. 35 τὸ τμῆμα ΓΔ χωρεῖ ἀκριβῶς 4 φορὰς εἰς τὸ τμῆμα ΑΒ.

Ἤτοι ἔχομεν $ΑΒ = 4 \cdot ΓΔ \iff \dfrac{ΑΒ}{ΓΔ} = 4$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ λόγος τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ ἰσοῦται μὲ 4. Ἐὰν δὲ τὸ ΓΔ ληφθῇ ὡς μονὰς μετρήσεως τοῦ ΑΒ τότε ὁ ἀκέραιος 4 εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ΑΒ.


Σχ. 36

2) Εἰς τὸ σχῆμα 36 τὸ ΓΔ δὲν χωρεῖ ἀκριβῶς ν φορὰς ($ν \in N$) εἰς τὸ ΑΒ. Διὰ τοῦτο χωρίζομεν τὸ ΓΔ εἰς ἴσα μέρη, π.χ. εἰς 10 ἴσα μέρη. Ἐὰν ὀνομάσωμεν Μ τὸ ἓν ἀπὸ αὐτά, θὰ ἔχωμεν: $ΓΔ = 10 \cdot Μ \iff Μ = \dfrac{1}{10} \cdot ΓΔ$ (1)

Ἂς μετρήσωμεν ἤδη τὸ ΑΒ μὲ μονάδα τὸ Μ. Εἶναι δυνατόν:

α) Ἡ μονὰς μετρήσεως Μ. νὰ χωρῇ εἰς τὸ ΑΒ ἀκριβῶς ν φορὰς ($ν \in N$) π.χ. 12 φορὰς ὅπως εἰς τὸ ΑΒ, σχ. 36.

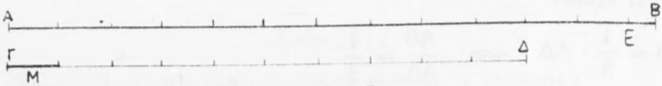
Ἤτοι $ΑΒ = 12 \cdot Μ$ ἢ $ΑΒ = 12 \cdot \left(\dfrac{1}{10} ΓΔ\right)$

ἢ $ΑΒ = \dfrac{12}{10} \cdot ΓΔ \iff \dfrac{ΑΒ}{ΓΔ} = \dfrac{12}{10}$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ ρητὸς $\dfrac{12}{10} = 1{,}2$, εἶναι ὁ λόγος τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ ἢ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ΑΒ μὲ μονάδα μετρήσεως τὸ ΓΔ.

β) Ἡ μονὰς μετρήσεως Μ νὰ μὴ χωρῇ ἀκριβῶς ν φορὰς ($ν \in N$) εἰς τὸ ΑΒ, ὅπως π.χ. φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 37. ὅπου εἶναι

$12 \cdot Μ < ΑΒ < 13 \cdot Μ$ (Διότι $ΕΒ < Μ$).




Σχ. 37

Ἤτοι $ΑΒ > \dfrac{12}{10} \cdot ΓΔ$ καὶ $ΑΒ < \dfrac{13}{10} \cdot ΓΔ$

ἢ $\dfrac{12}{10} < \dfrac{ΑΒ}{ΓΔ} < \dfrac{13}{10}$

Καθὼς βλέπομεν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ λόγος τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ εἶναι μόνον κατὰ προσέγγισιν (κατ' ἔλλειψιν) ἴσος πρὸς $\frac{12}{10} = 1{,}2$.

Ἤτοι ἡ ἀριθμ. τιμὴ τοῦ ΑΒ μὲ μονάδα μετρήσεως τὸ ΓΔ εἶναι κατὰ προσέγγισιν (κατ' ἔλλειψιν) ἴση πρὸς 1,2. Τὴν ἀνωτέρω προσέγγισιν δυνάμεθα νὰ τὴν κάνωμεν ὅσον θέλομεν μεγάλην. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ λάβωμεν ὡς μονάδα Μ 10 ἢ 100 ἢ 1000 . . . φορὰς μικροτέραν*.

**88. 3.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι $AB = 12 \cdot M$, $\Gamma\Delta = 10 \cdot M$ ὁπότε $AB/\Gamma\Delta = 12/10$, σχ. 36.

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτάς, ἐὰν προσέξωμεν ὅτι οἱ ρητοὶ 10 καὶ 12 εἶναι ἀντιτοίχως αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῶν τμημάτων ΓΔ καὶ ΑΒ μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα μετρήσεως Μ,

ἔχομεν $$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{12}{10} = \frac{\text{Ἀριθ. τιμὴ τοῦ ΑΒ μὲ μονάδα Μ}}{\text{Ἀριθ. τιμὴ τοῦ ΓΔ μὲ μονάδα Μ}}$$

Ἤτοι: **Ὁ λόγος ἑνὸς εὐθ. τμήματος πρὸς ἓν ἄλλο εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῆς ἀριθ. τιμῆς τοῦ πρώτου πρὸς τὴν ἀριθμ. τιμὴν τοῦ δευτέρου, ἐὰν μετρηθοῦν μὲ τὴν ἰδίαν μονάδα καὶ τὰ δύο.**

$$\boxed{\left.\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{\alpha \cdot M}{\beta \cdot M}\right\} \Longrightarrow \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{\alpha}{\beta}}$$

Σημειώνομεν ὅτι ὁ ἀνωτέρω λόγος εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν μονάδα τὴν ὁποίαν θὰ χρησιμοποιήσωμεν διὰ τὴν μέτρησιν τῶν δύο αὐτῶν τμημάτων.

Π.χ. ἐὰν εἶναι $AB = 40$ cm καὶ $\Gamma\Delta = 50$ cm.

ὁπότε $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{40}{50}$, τότε θὰ εἶναι $AB = 0{,}4$ m, $\Gamma\Delta = 0{,}5$ m καὶ $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{0{,}4}{0{,}5} = \frac{40}{50}$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

268. Χαράξατε ἓν εὐθ. τμῆμα Μ καὶ ἔπειτα τρία ἄλλα τμήματα Α, Β, Γ τοιαῦτα ὥστε :

$$\frac{A}{M} = 2, \qquad \frac{B}{M} = 2{,}5, \qquad \frac{\Gamma}{M} = 3.$$

269. Τρία εὐθ. τμήματα Α,Β,Γ ἐμετρήθησαν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα Μ καὶ αἱ τιμαί των ἦσαν αἱ ἑξῆς :

$$A = \frac{3}{4} \cdot M, \qquad B = 5 \cdot M, \qquad \Gamma = 2 \cdot M$$

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λόγοι : $\frac{A}{M}, \ \frac{M}{A}, \ \frac{A}{B}, \ \frac{A}{\Gamma}, \ \frac{B}{\Gamma}$.

* Ὑπάρχουν περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας ὁσονδήποτε μικρὰν κι ἂν λάβωμεν τὴν μονάδα Μ, ἡ ἀκριβὴς τιμὴ τοῦ λόγου ΑΒ/ΓΔ δὲν εἶναι ρητὸς ἀριθμός.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'.

## 89. ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

### 89. 1. Ὁρισμὸς

Ὡς γνωστὸν αἱ μονάδες μετρήσεως τόξων, γωνιῶν, χρόνου, δὲν ἔχουν δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις.

$1^o = 60'$, $1' = 60''$, $1\ h = 60\ min$, $1\ min = 60\ sec$.

Συνεπῶς ὅταν μετρήσωμεν μίαν γωνίαν ἢ ἓν τόξον ἢ ἓν χρονικὸν διάστημα μὲ τὰς μονάδας αὐτάς, εἶναι πιθανὸν νὰ εὕρωμεν τιμὰς συγκεκριμένους ἀριθμοὺς ὅπως π.χ. $30^o\ 20'\ 10''$ ἢ 2 h 10 min 5 sec.

Οἱ ἀνωτέρω ἀριθμοὶ ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἄλλους συγκεκριμένους τῶν ὁποίων οἱ μονάδες εἶναι πολλαπλάσια ἢ ὑποπολλαπλάσια τῆς αὐτῆς ἀρχικῆς μονάδος. Διὰ τοῦτο λέγονται συμμιγεῖς ἀριθμοί.

Τοὺς ἕως τώρα γνωστούς μας ἀριθμοὺς διὰ νὰ τοὺς διακρίνωμεν ἀπὸ τοὺς συμμιγεῖς θὰ τοὺς λέγωμεν ἁπλοῦς ἀριθμούς.

### 89. 2. Τροπὴ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ εἰς ἁπλοῦν

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς γωνίας $10^o\ 20'\ 12''$ εἰς δεύτερα λεπτὰ σκεπτόμεθα ὅτι :

α) $1^o = 60'$ Ἄρα $10^o = 10.60' = 600'$

β) $1' = 60''$ Ἄρα $600' + 20' = 620'$, $620' = 620.60'' = 37200''$

γ) $37200'' + 12'' = 37212''$

Ἤτοι : $10^o\ 20'\ 12'' = 37212''$

Ὁμοίως διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον 1 h 20 min 15 sec εἰς δευτερόλεπτα (sec) σκεπτόμεθα ὅτι :

1 h = 60 min. 1 min = 60 sec

Ἄρα : 60 min + 20 min = 80 min. 80 min = 80.60 sec = 4800 sec.
4800 sec + 15 sec = 4815 sec.

Ἤτοι : 1 h 20 min 15 sec = 4815 sec.

### 89. 3. Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς μονάδας μιᾶς τάξεως αὐτοῦ

Διὰ νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ 2 h 10 min 45 sec εἰς πρῶτα λεπτὰ (min) σκεπτόμεθα ὅτι

2 h=2.60 min=120 min, 45 sec $= \frac{45}{60}$ min=0,75 min

Ἄρα: 2 h 10 min 45 sec =120 min+10 min+0,75 min

=130,75 min.

Θὰ ἦτο ὅμως δυνατὸν νὰ τρέψωμεν πρῶτα τὸν συμμιγῆ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως (sec) καὶ ἔπειτα νὰ τρέψωμεν αὐτὰς εἰς πρῶτα λεπτὰ (min).

α) 2 h=120 min, 120 min+10 min=130 min.

130 min=130.60 sec=7800 sec 7800 sec+45 sec=7845 sec.

β) 7845 sec:60=130,75 min.

Ἤτοι: 2 h. 10 min 45 sec=130,75 min.

## 89. 4. Τροπὴ ἁπλοῦ συγκεκριμένου ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῆ

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἔχομεν σαφεστέραν ἀντίληψιν τῆς διαρκείας ἑνὸς ταξιδίου ἐὰν μᾶς εἴπουν ὅτι τοῦτο διήρκεσεν 1 h 20 min 10 sec παρ' ὅτι ἐὰν μᾶς εἴπουν ὅτι διήρκεσεν 4810 sec (1 h 20 min 10 sec).

Τὸ γεγονὸς τοῦτο μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν τροπὴν ἑνὸς ἁπλοῦ συγκεκριμένου ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῆ.

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἕνα ἁπλοῦν συγκεκριμένον ἀριθμόν, π.χ. τὸν ἀριθμὸν 4830 sec, εἰς συμμιγῆ, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

1) Διαιροῦμεν τὰ 4830 sec διὰ 60, ὁπότε εὑρίσκομεν 80 min καὶ 30 sec.

2) Διαιροῦμεν τὰ 80 min διὰ 60 ὁπότε εὑρίσκομεν 1 h. καὶ 20 min.

α) $\begin{array}{r|l} 4830 \text{ sec} & 60 \\ \cline{2-2} 30 \text{ sec} & 80 \text{ min} \end{array}$ β) $\begin{array}{r|l} 80 \text{ min} & 60 \\ \cline{2-2} 20 \text{ min} & 1 \text{ h} \end{array}$

Ἤτοι 4830 sec = 1 h 20 min 30 sec.

Ὁμοίως διὰ νὰ τρέψωμεν τὸν συγκεκριμένον ἀριθμὸν 72620″ εἰς συμμιγῆ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

α) $\begin{array}{r|l} 72620'' & 60 \\ \cline{2-2} 126 & 1210' \\ 62 & \\ 20'' & \end{array}$ β) $\begin{array}{r|l} 1210' & 60 \\ \cline{2-2} 10' & 20^\circ \end{array}$

Ἤτοι 72620″ =20° 10′ 20″

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

270. Νὰ τραποῦν εἰς δευτερόλεπτα (sec).

α) 3 h 25 min 40 sec β) 2 h 10 min 48 sec

271. Νὰ τραποῦν εἰς πρῶτα λεπτά:

α) $2^\circ\ 32'\ 48''$ β) $9^\circ\ 20'\ 15''$

272. Νὰ τραποῦν εἰς συμμιγεῖς:

α) $3\frac{1}{4}$ h, β) $2\frac{4^\circ}{5}$

273. Ὁ χρόνος μεταξὺ δύο πανσελήνων εἶναι 29 ἡμ., 12 h 43 min. Νὰ τραπῇ ὁ χρόνος οὗτος α) εἰς sec β) εἰς min.

## 90. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ, ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΣΥΜΜΙΓΩΝ

### 90. 1. Πρόσθεσις

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα

$$25^\circ\ 17'\ 32'' + 5^\circ\ 20'\ 19'' + 10^\circ\ 32'\ 51''$$

Ἔχομεν

$$\begin{array}{lll} 25^\circ & 17' & 32'' \\ 5^\circ & 20' & 19'' \quad + \\ 10^\circ & 32' & 51'' \\ \hline 40^\circ & 69' & 102'' \end{array} \quad \text{ἢ} \quad 40^\circ\ 70'\ 42'' \quad \text{ἢ} \quad 41^\circ\ 10'\ 42''$$

### 90. 2. Ἀφαίρεσις

α) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ $18^\circ\ 20'\ 31'' - 7^\circ\ 17'\ 26''$

Ἔχομεν

$$\begin{array}{lll} 18^\circ & 20' & 31'' \\ 7^\circ & 17' & 26'' \\ \hline 11^\circ & 3' & 5'' \end{array}$$

β) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ $18^\circ\ 20'\ 31'' - 7^\circ\ 24'\ 41''$

Ἔχομεν

$$\begin{array}{lll} 18^\circ & 20' & 31'' \\ 7^\circ & 24' & 41'' \\ \hline \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{lll} 18^\circ & 19' & 91'' \\ 7^\circ & 24' & 41'' \\ \hline \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{lll} 17^\circ & 79' & 91'' \\ 7^\circ & 24' & 41'' \\ \hline 10^\circ & 55' & 50'' \end{array}$$

Ἤτοι διά νὰ καταστήσωμεν δυνατὰς τὰς ἀφαιρέσεις (ὅπου δὲν ἦσαν δυναταί), ἀνελύσαμεν μίαν μονάδαν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως...

## 91. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ, ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΣΥΜΜΙΓΩΝ

### 91. 1. Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἀκέραιον

Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $(13^\circ\ 20'\ 12'').\ 6$

$$\begin{array}{lll} 13^\circ & 20' & 12'' \\ & & 6\ \times \\ \hline 78^\circ & 120' & 72'' \end{array} \quad \text{ἢ} \quad 78^\circ\ 121'\ 12'' \quad \text{ἢ} \quad 80^\circ\ 1'\ 12''$$

### 91. 2. Διαίρεσις δι' ἀκεραίου

Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον $(15^\circ\ 12'\ 20''):4$

$$
\begin{array}{rrr|l}
15^\circ & 12' & 20'' & 4 \\ \cline{4-4}
-\ 12^\circ & & & 3^\circ\ 48'\ 5'' \\ \cline{1-1}
3^\circ & = 180' & & \\ \cline{2-2}
 & 192' & & \\
 & 32' & & \\ \cline{2-2}
 & 0' & = 0'' & \\ \cline{3-3}
 & & 20'' & \\
 & & 0'' &
\end{array}
$$

### 91. 3. Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ κλάσμα

Εἶναι $\quad (3^\circ\ 13'\ 20'')\cdot\dfrac{3}{5} = [(3^\circ\ 13'\ 20'')\cdot 3]:5$

$$
\begin{array}{r}
3^\circ\ 13'\ 20'' \\
3\ \times \\ \hline
9^\circ\ 39'\ 60''
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|l}
9^\circ & 39' & 60'' & 5 \\ \cline{4-4}
5^\circ & & & 1^\circ\ 55'\ 60'' \\ \cline{1-1}
4^\circ & = 240' & & \\ \cline{2-2}
 & 279' & & \\
 & 29' & & \\ \cline{2-2}
 & 4' & = 240'' & \\ \cline{3-3}
 & & 300'' &
\end{array}
$$

Ἤτοι $\quad (3^\circ\ 13'\ 20'')\cdot\dfrac{3}{5} = 1^\circ\ 55'\ 60'' = 1^\circ\ 56'$

### 91. 4. Διαίρεσις διὰ κλάσματος

Ἡ περίπτωσις αὐτὴ ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην.

Π.χ. $\quad (2\text{ h}\quad 31\text{ min}\quad 15\text{ sec}):\dfrac{2}{5} = (2\text{ h}\ \ 31\text{ min}\ \ 14\text{ sec})\cdot\dfrac{5}{2}$

### 91. 5. Γινόμενον δύο συμμιγῶν

Ἓν κινητὸν εἰς χρόνον 1 h διαγράφει τόξον $30^\circ\ 20'\ 10''$. Πόσον τόξον θὰ διαγράψῃ εἰς 2 h 40 min 30 sec;

**Ἐπίλυσις**

Τρέπομεν τὸν συμμιγῆ 2 h 40 min 30 sec εἰς ἁπλοῦν καὶ συγκεκριμένως ἐνταῦθα εἰς ὥρας.

$2\text{ h}\ 40\text{ min}\ 30\text{ sec} = 2\dfrac{27}{40}\text{ h}.$

Ἤδη εἶναι εὔκολον νὰ ἐννοήσωμεν ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ὡρῶν ἐπὶ τὸν συμμιγῆ 30°20'10''.

$$2\frac{27}{40} \cdot (30^\circ\ 20'\ 10'') = 81^\circ\ 8'\ 56{,}75''$$

## 91. 6. Διαίρεσις διὰ συμμιγοῦς

### α) Μερισμὸς

Ἓν κινητὸν εἰς 2 h 40 min διατρέχει τόξον 34° 9' 20''. Πόσον τόξον (τοῦ ἰδίου κύκλου) διατρέχει εἰς μίαν ὥραν;

**Ἐπίλυσις**

Τρέπομεν τὸν χρόνον 2 h 40 min εἰς ὥρας: $2\text{ h } 40\text{ min} = 2\frac{2}{3}\text{ h}$.

Ἀρκεῖ ἤδη νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $(34^\circ\ 9'\ 20'') : 2\frac{2}{3}$

$$(34^\circ\ 9'\ 20'') : 2\frac{2}{3} = 12^\circ\ 48'\ 30''.$$

Ὥστε τὸ κινητὸν εἰς 1 h διατρέχει τόξον 12° 48' 30''

### β) Μέτρησις

Ἓν κινητὸν εἰς 1 h διατρέχει τόξον 3° 20' 10''. Εἰς πόσον χρόνον θὰ διατρέξῃ τόξον (τοῦ αὐτοῦ κύκλου) 23° 21' 10'';

**Ἐπίλυσις**

Ἔχομεν τὴν διαίρεσιν:

$$(23^\circ\ 21'\ 10'') : (3^\circ\ 20'\ 10'')$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τρέπομεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην εἰς μονάδας τῆς αὐτῆς κατωτέρας τάξεως (εἰς sec) καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν κατὰ τὰ γνωστά.

$23^\circ\ 21'\ 10'' = 84070''$, $\quad 3^\circ\ 20'\ 10'' = 12010''$ $\quad 84070 : 12010 = 7$

Ἤτοι τὸ κινητὸν θὰ διατρέξῃ τόξον 23° 21' 10'' εἰς 7 h.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

274. Ἓν κινητὸν διατρέχει ἐπὶ ἑνὸς κύκλου τόξον 5°10'20'' εἰς 1 min. Πόσον τόξον τοῦ ἰδίου κύκλου θὰ διατρέξῃ εἰς 8 min.

275. Ἓν ὡρολόγιον εἰς 6 h μένει ὀπίσω 8 min, 30 sec. Πόσον μένει ὀπίσω εἰς 1 h;

276. Ἓν αὐτοκίνητον διατρέχει εἰς 1 min 30 sec ἀπόστασιν 1 km. Εἰς πόσον χρόνον θὰ διατρέξῃ ἀπόστασιν $8\frac{3}{4}$ km.

277. Τὰ 5/8 ἑνὸς τόξου ἔχουν τιμὴν 50°12'55''. Πόση εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ τόξου τούτου;

278. Ἓν διαστημικὸν πλοῖον ἐκτελεῖ μίαν πλήρη περιφορὰν περὶ τὴν γῆν εἰς 1 h καὶ 12 min. Πόσας τοιαύτας περιφορὰς ἐκτελεῖ εἰς 14 h 24 min;

279. Ἓν διαστημόπλοιον ἐκτελεῖ μίαν πλήρη περιφορὰν τῆς γῆς εἰς 1 h 20 min. Εἰς πόσον χρόνον θὰ διανύσῃ τοῦτο τόξον 30° 20' τῆς ἀνωτέρω περιφορᾶς;

(Θεωροῦμεν τὴν τροχιὰν τοῦ διαστημοπλοίου κυκλικήν).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΓΕΝΙΚΗΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

280) Εἰς μεικτὸν γυμνάσιον ἐνεγράφησαν 635 μαθηταὶ καὶ μαθήτριαι. Ἐὰν ἐνεγράφοντο 50 μαθηταὶ ὀλιγώτεροι καὶ 15 μαθήτριαι περισσότεραι ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν καὶ τῶν μαθητριῶν θὰ ἦτο ὁ αὐτός. Πόσοι μαθηταὶ καὶ πόσαι μαθήτριαι ἐνεγράφησαν;

281. Ἐργάτης ἐξετέλεσεν τὰ 3/5 ἑνὸς ἔργου ἐργασθεὶς 12 h μετὰ τὰς ὁποίας προσελήφθη καὶ δεύτερος ἐργάτης. Τοιουτοτρόπως τὸ ἔργον ἐξετελέσθη ἐν ὅλῳ εἰς 15 h. Ποῖον μέρος τοῦ ἔργου ἐξετέλεσεν ὁ δεύτερος ἐργάτης;

282. Ἐκ δύο πόλεων Α, Β ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο κινητὰ α, β. Ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ α εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ταχύτητος τοῦ β κατὰ 10 km τὴν ὥραν καὶ τὰ κινητὰ κινηθοῦν κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, θὰ συναντηθοῦν μετὰ 42 h. Ἐὰν δὲ κινηθοῦν ἀντιθέτως θὰ συναντηθοῦν μετὰ 7 h. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητες καὶ ἡ ἀπόστασις ΑΒ.

283. Ἐργολάβος ἔχει 3 συνεργεῖα ἐργατῶν. Τὸ α' δύναται νὰ περατώσῃ ἓν ἔργον εἰς 8 ἡμέρας, τὸ β' εἰς 5 ἡμέρας καὶ τὸ γ' εἰς 15 ἡμέρας. Λαμβάνει ὁ ἐργολάβος τὰ 2/3 τῶν ἐργατῶν τοῦ α' συνεργείου, τὸ 1/3 τοῦ β' καὶ τὰ 3/4 τοῦ γ' καὶ σχηματίζει νέον συνεργεῖον. Εἰς πόσας ἡμέρας τὸ νέον τοῦτο συνεργεῖον θὰ περατώσῃ τὸ αὐτὸ ἔργον;

284. Μία περιουσία ἔπρεπε νὰ διανεμηθῇ μεταξὺ τῶν κληρονόμων θανόντος, ἕκαστος τῶν ὁποίων θὰ ἐλάμβανε 288000 δρχ. Λόγῳ ὅμως τῆς παραιτήσεως δύο ἐξ αὐτῶν οἱ ὑπόλοιποι ἔλαβον ἀνὰ 432000 δρχ. ἕκαστος. Πόσοι ἦσαν οἱ κληρονόμοι;

285. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὰ 2/3 αὐξανόμενα κατὰ 52 δίδουν ἄθροισμα μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου του κατὰ 12.

286. Εἰς πόσας ὥρας θὰ ἐκτελέσουν ἔργον τι τρεῖς ἐργάται ἐργαζόμενοι ὁμοῦ, ὅταν ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος ἐκτελοῦν ὁμοῦ ἐργαζόμενοι τὸ ἥμισυ τοῦ ἔργου εἰς 6 h καὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος ὁλόκληρον τὸ ἔργον εἰς 15 h. καὶ ὁ β' καὶ ὁ γ' εἰς 20 h.

287. Ἀποθνήσκων τις ἀφήνει εἰς τὸν υἱόν του τὰ 2/5 τῆς περιουσίας του, εἰς τὴν θυγατέραν τὰ 3/8 καὶ εἰς τὴν σύζυγόν του τὸ ὑπόλοιπον ἤτοι 315.000 δρχ. Πόση ἦτο ἡ περιουσία;

288. Ἕνας ἐργάτης ἐκτελεῖ τὰ 2/3 ἑνὸς ἔργου εἰς 9 ἡμέρας. Ἄλλος ἐργάτης ἐκτελεῖ τὰ 5/8 τοῦ ἰδίου ἔργου εἰς 5 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐκτελέσουν τὸ ἔργον τοῦτο ἐὰν ἐργασθοῦν συγχρόνως καὶ οἱ δύο ἐργάται;

289. Τὰ 2/3 τοῦ 1/4 τῶν 3/5 τῆς ἡλικίας ἑνὸς ἀνθρώπου εἶναι 10 ἔτη. Πόση εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ ἀνθρώπου τούτου.

290. Τρεῖς ἐργάται ἐμοιράσθησαν 19600 δρχ. κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε ὁ εἷς τούτων νὰ λάβῃ 800 δρχ. ὀλιγωτέρας τῶν ὅσων, ἔλαβεν ἕκαστος τῶν δύο ἄλλων. Πόσα χρήματα ἔλαβεν ἕκαστος;

277. Τὰ 3/8 ἑνὸς πόσου ἔχουν τιμὴν 50/12 δρχ. Πόση εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ πόσου τούτου;

278. Ἓν ἐκκρεμὲς ὡρολόγιον καθυστερεῖ κατὰ πᾶσαν ὥραν, τεσσαρὰ καὶ τὴν νύκτα εἰς 4 ὥρας 12 min. Πόσας ταλαντώσεις ἐκτελεῖ εἰς 14 h 24 min;

279. Ἕνας δορυφόρος διαγράφει πλήρη περιφορὰν γύρω τῆς γῆς εἰς 1 h 20 min. Εἰς πόσον χρόνον θὰ διανύσῃ τόξον 10° 20' τῆς ἀνωτέρω περιφερείας;

(Θεωροῦμεν τὴν τροχιὰν τοῦ δορυφόρου κυκλικήν).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΓΕΝΙΚΗΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

280. Εἰς ἓν γυμνάσιον ἐνεγράφησαν 635 μαθηταὶ καὶ μαθήτριαι. Ἐὰν ἐνεγράφοντο 30 μαθηταὶ ὀλιγώτεροι καὶ 15 μαθήτριαι περισσότεραι, ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν καὶ τῶν μαθητριῶν θὰ ἦτο ὁ αὐτός. Πόσοι μαθηταὶ καὶ πόσαι μαθήτριαι ἐνεγράφησαν;

281. Ἐργάτης ἐξετέλεσε τὰ 3/5 ἑνὸς ἔργου ἐργασθεὶς 12 h, μετὰ τὰς ὁποίας προσελήφθη καὶ δεύτερος ἐργάτης. Συνεργαζόμενοι τὸ ἔργον ἐτελείωσαν εἰς 4 h. Πόσον μέρος τοῦ ἔργου ἐξετέλεσεν ὁ δεύτερος ἐργάτης;

282. Ἐκ δύο πόλεων Α, Β ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο αὐτοκίνητα α, β. Ἡ ταχύτης τοῦ α εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ταχύτητος τοῦ β κατὰ 10 km τὴν ὥραν καὶ τὰ αὐτοκίνητα συναντῶνται μετὰ 4 h. Ἐὰν δὲ κινηθοῦν ἀντιθέτως θὰ συνηντῶντο μετὰ 7 h. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητες καὶ ἡ ἀπόστασις ΑΒ.

283. Ἐργολάβος ἔχει 3 συνεργεῖα ἐργατῶν. Τὸ α' δύναται νὰ τελειώσῃ ἓν ἔργον εἰς 8 ἡμέρας, τὸ β' εἰς 5 ἡμέρας καὶ τὸ γ' εἰς 12 ἡμέρας. Ἀναθέτει ὁ ἐργολάβος τὰ 2/3 τῶν ἐργατῶν τοῦ α' συνεργείου, τὸ 1/3 τοῦ β' καὶ τὰ 3/4 τοῦ γ' καὶ σχηματίζει νέον συνεργεῖον. Εἰς πόσας ἡμέρας τὸ νέον τοῦτο συνεργεῖον θὰ τελειώσῃ τὸ αὐτὸ ἔργον;

284. Μία οἰκογένεια ἔπρεπε νὰ διανείμῃ μεταξὺ τῶν κληρονόμων ἑκάστου, ἕκαστος τῶν ὁποίων θὰ ἐλάμβανε 28000 δρχ. ἀλλὰ ἐπειδὴ ἀπεποιήθησαν δύο ἐξ αὐτῶν οἱ ὑπόλοιποι ἔλαβον ἀνὰ 42000 δρχ. ἕκαστος. Πόσοι ἦσαν οἱ κληρονόμοι;

285. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὰ 2/5 ὑπερβαίνουν κατὰ 52 εἶναι μεγαλύτερα τοῦ διπλασίου του κατὰ 12.

286. Εἰς πόσας ὥρας θὰ ἐκτελέσουν ἔργον τρεῖς ἐργάται ἐργαζόμενοι ὁμοῦ, ὅταν ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος ἐκτελοῦν ὁμοῦ τὸ ἔργον εἰς 5 h καὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος ἐκτελοῦν τὸ ἔργον εἰς 12 h, καὶ ὁ β' καὶ ὁ γ' εἰς 20 h.

287. Ἐπωλήθησαν τὰ ἀγροκτήματα τοῦ ὑπολοίπου τὰ 2/5 τῆς περιουσίας καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἀντιπροσωπεύει ἀξίαν 318.000 δρχ. Πόση ἦτο ἡ περιουσία;

288. Ἕνας ἐργάτης ἐκτελεῖ τὰ 2/3 ἑνὸς ἔργου εἰς 9 ἡμέρας. Ἄλλος ἐργάτης ἐκτελεῖ τὰ 3/8 τοῦ ἰδίου ἔργου εἰς 5 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον ἐὰν ἐργασθοῦν συγχρόνως καὶ οἱ δύο ἐργάται;

289. Τὰ 2/3 τοῦ ... 7/3 ... εἶναι 18. Πόση εἶναι ἡ ἀξία τοῦ ἀγαθοῦ τούτου.

290. Τρεῖς ἐργάται ἐμοιράσθησαν 19500 δρχ. κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε ὁ α' νὰ λάβῃ 400 δρχ. ὀλιγωτέρας τοῦ β' καὶ ... τῶν δύο ἄλλων. Πόσα χρήματα ἔλαβεν ἕκαστος;

# Γ Ε Ω Μ Ε Τ Ρ Ι Α

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

### 1. ΦΥΣΙΚΑ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ

**1. 1.** Τὸ παρὸν βιβλίον μᾶς εἰσάγει εἰς ἕνα βασικόν, ἐξαιρετικῶς ἐνδιαφέροντα καὶ χρήσιμον κλάδον τῶν Μαθηματικῶν, εἰς τὴν Γεωμετρίαν.

Τὸ ὄνομα «Γεω-μετρία» μαρτυρεῖ τὴν προέλευσίν της. Πρακτικαὶ ἀνάγκαι, ὅπως ἡ μέτρησις τεμαχίων γῆς, στερεῶν σωμάτων, καθὼς καὶ ἡ ἐξέτασις τοῦ σχήματος αὐτῶν ὡδήγησαν εἰς τὰς πρώτας γεωμετρικὰς γνώσεις.

**1. 2.** Μεταξὺ τῶν διαφόρων στερεῶν*, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται γύρω μας, εἶναι εὔκολον νὰ παρατηρήσωμεν μερικὰ βασικά, κοινὰ γνωρίσματα:

**Τὸ βάρος:** Ὅλα τὰ στερεὰ σώματα ἔχουν βάρος.

**Τὸν ὄγκον:** Ἤτοι τὴν περιωρισμένην ἔκτασιν τὴν ὁποίαν καταλαμβάνει ἕκαστον στερεὸν εἰς τὸ ἀπεριόριστον διάστημα (χῶρον) τοῦ περιβάλλοντός μας. Αὕτη ἐκτείνεται ἐντὸς τοῦ χώρου εἰς βάθος, εἰς πλάτος καὶ εἰς μῆκος. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἕκαστον στερεὸν σῶμα καθὼς καὶ ὁ περιβάλλων χῶρος ἔχουν τρεῖς διαστάσεις.

**Τὸ σχῆμα.** Ἕκαστον στερεὸν ἔχει μίαν ὡρισμένην μορφήν, ἓν ὡρισμένον σχῆμα. Τὴν μορφὴν (σχῆμα) τοῦ στερεοῦ τὴν ἀντιλαμβανόμεθα ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ.

**1. 3.** Ἡ συστηματικὴ σπουδὴ τῶν στερεῶν σωμάτων ἐπέβαλεν τὴν ἐξέτασιν τούτων ἀπὸ διαφόρους ἀπόψεις. Πρῶτοι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες** φιλό-

* Ἕνα ὑλικὸν σῶμα λέγεται στερεόν, ἐὰν τὸ σχῆμα καὶ τὸ μέγεθος αὐτοῦ εἶναι ἀμετάβλητα ὅταν αἱ ἐξωτερικαὶ συνθῆκαι δὲν ἀλλάζουν αἰσθητῶς.

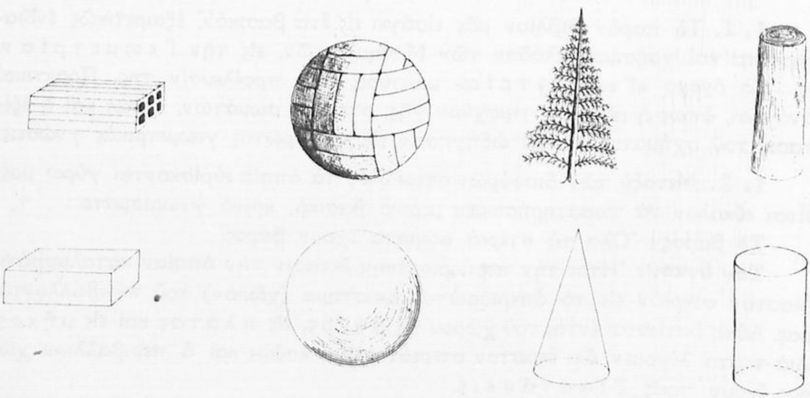
** Αἱ μέχρι τὴν ἐποχὴν ἐκείνην γεωμετρικαὶ γνώσεις ἀπετέλουν μίαν πρακτικὴν τέχνην καὶ ὄχι ἐπιστήμην. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐδημιούργησαν τὸ λαμπρὸν οἰκοδόμημα τῆς Μαθηματικῆς ἐπιστήμης.

σοφοι ἐξήτασαν τὰ στερεά, ἰδιαιτέρως ὡς πρὸς τὸ σχῆμα καὶ τὸ μέγεθος, ἀδιαφοροῦντες διὰ τὰ λοιπὰ γνωρίσματα αὐτῶν (βάρος, ὕλην, χρῶμα . . .). Τοιουτοτρόπως ἀπὸ τὰ στερεὰ τοῦ φυσικοῦ περιβάλλοντος ὡδηγήθησαν εἰς τὴν ἰδέαν τοῦ *γεωμετρικοῦ στερεοῦ*. Ἐὰν φαντασθῆτε ἓν στερεὸν μὲ *σχῆμα* καὶ *μέγεθος ὡρισμένα* καὶ *ἀμετάβλητα* εἰς τὰς μετατοπίσεις του ἐντὸς τοῦ χώρου, χωρὶς ἄλλα γνωρίσματα (βάρος, χρῶμα . . .) θὰ ἔχετε τὴν ἰδέαν ἑνὸς γεωμετρικοῦ στερεοῦ. Βεβαίως εἰς τὸ φυσικόν μας περιβάλλον δὲν ὑπάρχει τοιοῦτον στερεὸν χωρὶς ὕλην, βάρος . . . Ὅπως δὲν ὑπάρχει π.χ. ὑλικὸς ἄξων περὶ τὸν ὁποῖον περιστρέφεται ἡ γῆ ἀλλὰ εἶναι μόνον νοητός.

Γεωμετρικὰ στερεὰ ὑπάρχουν μόνον εἰς τὰς σκέψεις μας, εἶναι δημιουργήματα τοῦ νοῦ μας, τὰ ὁποῖα προέρχονται ἀπὸ τὰ φυσικὰ στερεά, ὅταν «λησμονήσωμεν» ὡρισμένα γνωρίσματα αὐτῶν.

## 2. ΑΠΛΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ

**1. 2.** Ἀπὸ τὸ δημοτικὸν σχολεῖον ἔχετε μίαν πρώτην γνωριμίαν μὲ μερικὰ ἁπλᾶ γεωμετρικὰ στερεά, τὰ ὁποῖα προέρχονται ἀπὸ τὰ ἀντίστοιχα φυσικὰ στερεά.

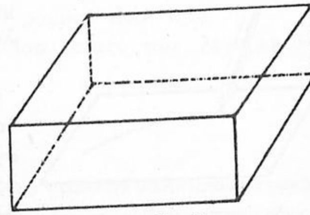


**Ἄνω:** Εἰκόνες φυσικῶν στερεῶν. **Κάτω:** Εἰκόνες γεωμετρικῶν στερεῶν.

Κατωτέρω θὰ περιγράψωμεν συντόμως δύο χαρακτηριστικὰ ἐκ τῶν ἁπλουστέρων γεωμ. στερεῶν. Τὸ *ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον* καὶ τὸν *κύλινδρον*.

### 2. 2. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον

Ἓν κυτίον ἀπὸ κιμωλίας ἢ ἀπὸ σπίρτα, πολλὰ κιβώτια καὶ γενικῶς πολλὰ ἀντικείμενα τοῦ περιβάλλοντός μας ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Ἂς προσέξωμεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τοῦ σχ. 2. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 διακεκριμένα ἐπίπεδα μέρη, τὰς ἕδρας. Ἑκάστη ἕδρα ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Ἀνὰ δύο ἀπέναντι ἕδραι δὲν τέμνονται, ἐνῶ ἀνὰ δύο συνεχόμεναι τέμνονται (συναντῶνται) κατὰ μίαν γραμμήν. Ἑκάστη ἀπὸ τὰς γραμμὰς αὐτὰς λέγεται ἀκμὴ τοῦ στερεοῦ. Μερικαὶ ἀπὸ τὰς ἀκμὰς ἀνὰ τρεῖς τέμνονται (συναντῶνται) εἰς ἓν σημεῖον. Ἕκαστον τῶν σημείων αὐτῶν λέγεται κορυφὴ τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου.

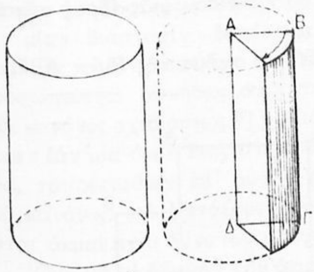


Σχ. 2

Ἤτοι ἕκαστον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει :
6 ἕδρας, 12 ἀκμὰς καὶ 8 κορυφάς.

## 2. 3. Ὁ κύλινδρος

Ἓν κυτίον γάλακτος, εἷς κλειστὸς σωλὴν θερμάστρας ἢ ὕδατος, πολλὰ μολύβια, ἢ ἄξονες διαφόρων ἐργαλείων, μηχανῶν, ἔχουν σχῆμα κυλίνδρου.




Σχ. 3

Μία περιστρεφομένη θύρα, ὅπως π.χ. ὡρισμέναι θύραι τραπεζῶν καὶ μεγάλων καταστημάτων, μᾶς δεικνύει πῶς γεννᾶται εἷς κύλινδρος ἐκ τῆς περιστροφῆς ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ περὶ μίαν πλευρὰν ΑΔ αὐτοῦ (σχ. 3).

Ἂς προσέξωμεν ἕνα κύλινδρον π.χ. τὸν κύλινδρον τοῦ σχ. 3. Παρατηροῦμεν ὅτι οὗτος περατοῦται :

α) Εἰς μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία γεννᾶται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς ΒΓ κατὰ τὴν περιστροφὴν αὐτῆς περὶ τὴν ΑΔ.

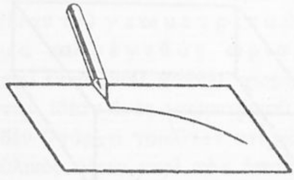
β) Εἰς δύο ἐπιπέδους ἐπιφανείας, αἱ ὁποῖαι γεννῶνται ὑπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΓΔ κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ περὶ τὴν ΑΔ.

Παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι ἑκάστη ἐπίπεδος ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου περατοῦται εἰς μίαν καμπύλην γραμμήν, ἡ ὁποία ὀνομάζεται κύκλος.

# 3. ΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

## 3. 1. Τὸ γεωμετρικὸν σχῆμα ὡς σύνολον σημείων

α) Καθὼς εἴδομεν εἰς τὸ ὀρθογ. παραλ/δον ἀνὰ δύο συνεχόμεναι ἀκμαὶ μιᾶς ἕδρας αὐτοῦ συναντῶνται εἰς ἓν σημεῖον. Ὁ κόκκος κόνεως, τὸ ἴχνος τῆς μύτης τοῦ μολυβιοῦ μας (ὅταν τὸ κρατοῦμεν ἀκίνητον) εἰς τὸ σχέδιον, μᾶς δίδουν μίαν ἰδέαν τοῦ σημείου. Τὸ σημεῖον ὡς γεωμετρικὸν στοιχεῖον δὲν ἔχει διαστάσεις. Ἁπλῶς ὁρίζει μίαν θέσιν. Εἰς τὸ σχέδιον τὸ παριστάνομεν μὲ μίαν τελείαν καὶ τὸ ὀνομάζομεν μὲ ἓν κεφαλαῖον γράμμα (Σημεῖον Α, Σημεῖον Β...).



Σχ. 4

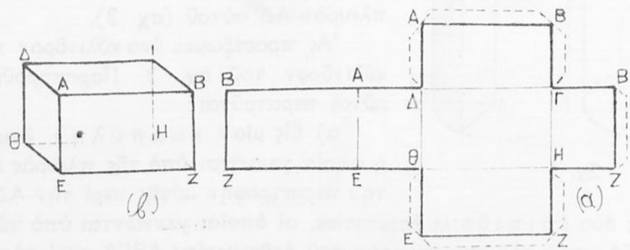
β) Ἐὰν μετακινήσωμεν χωρὶς διακοπὴν τὴν μύτην τοῦ μολυβιοῦ μας ἐπὶ τοῦ χάρτου, τότε τὸ ἴχνος αὐτῆς παριστάνει μίαν γραμμήν, σχ. 4. Ἀλλὰ εἰς ἑκάστην θέσιν τοῦ μολυβιοῦ, τὸ ἴχνος τῆς μύτης του παριστάνει ἓν σημεῖον. Ἤτοι ἡ γραμμὴ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία συνεχὴς σειρὰ διαδοχικῶν θέσεων ἑνὸς σημείου τὸ ὁποῖον μετατοπίζεται εἰς τὸν χῶρον. Διὰ τοῦτο λαμβάνομεν τὴν γραμμὴν ὡς σύνολον σημείων (σημειοσύνολον).

Ἐξ ἄλλου τὰ γνωστά μας σχήματα (τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, ὁ κύκλος, τὸ τρίγωνον...) ἀπαρτίζονται ἀπὸ γραμμάς. Εἶναι συνεπῶς καὶ αὐτὰ σύνολα σημείων.

### 3. 2. Ἰσότης γεωμετρικῶν σχημάτων

Τὸ σχ. 5 δεικνύει πῶς δυνάμεθα νὰ ἀναπτύξωμεν τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 5α) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου μιᾶς ἕδρας αὐτοῦ (σχ. 5β).

Ἐπὶ διαφανοῦς φύλλου χάρτου ἀντιγράφομεν τὸ σχῆμα τῆς ἕδρας ΑΒΓΔ.




Σχ. 5

Τὸ ἀντίγραφον τοῦτο δυνάμεθα νὰ τὸ τοποθετήσωμεν καταλλήλως ἐπὶ τοῦ σχήματος τῆς ἀπέναντι ἕδρας ΕΖΗΘ εἰς τρόπον ὥστε τὰ δύο σχήματα νὰ ἐφαρμόσουν καὶ νὰ ἀποτελέσουν ἓν σχῆμα*. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι τὰ δύο δύο αὐτὰ σχήματα εἶναι ἴσα μεταξύ των ἢ ἁπλῶς ἴσα.

Γενικῶς: **Δύο γεωμετρικὰ σχήματα Σ, Σ′ λέγονται ἴσα μεταξύ των, ὅταν εἶναι δυνατὸν νὰ τοποθετήσωμεν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν καὶ νὰ ἀποτελέσουν ἓν σχῆμα.**

* Ἡ ἐργασία αὐτὴ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν νοερὰν μετατόπισιν τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων.

Γράφομεν δὲ $\Sigma = \Sigma'$*

Κατὰ τ' ἀνωτέρω:

Αἱ ἀπέναντι ἕδραι ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι.

Ὅταν δύο γεωμ. σχήματα Σ, Σ' δὲν εἶναι ἴσα μεταξύ των, λέγομεν ὅτι εἶναι ἄνισα καὶ γράφομεν $\Sigma \neq \Sigma'$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἀναφέρατε φυσικὰ ἀντικείμενα τὰ ὁποῖα ἔχουν σχῆμα γνωστῶν γεωμετρικῶν στερεῶν.

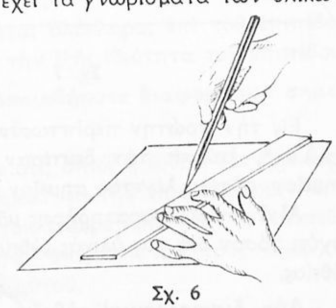
2. Κατασκευάσατε ὑποδείγματα (μοντέλα) κύβου, πρίσματος, πυραμίδος καὶ περιγράψατε αὐτά.

3. Μὲ ἓν διαφανὲς φύλλον χάρτου συγκρίνατε τὰ σχήματα τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν ἑνὸς τριγωνικοῦ πρίσματος. Πόσας συγκρίσεις χρειάζεσθε;

4. Εὕρετε φυσικὰ ἀντικείμενα τῶν ὁποίων τὸ σχῆμα εἶναι σύνθεσις σχημάτων ἁπλῶν γεωμ. στερεῶν.

## 4. Η ΕΥΘΕΙΑ

**4. 1.** Μία φωτεινὴ ἀκτίς, ἓν τεντωμένον νῆμα, εἰκονίζουν εὐθείας γραμμάς. Ἡ εὐθεῖα ὡς γεωμετρικὸν στοιχεῖον δὲν ἔχει τὰ γνωρίσματα τῶν ὑλικῶν εὐθειῶν (πάχος, χρῶμα, βάρος). Ἔχει μόνον μίαν διάστασιν· ἐκτείνεται εἰς μῆκος. Εἰς τὴν πρακτικὴν ἡ εὐθεῖα ἀντιπροσωπεύεται συνήθως ἀπὸ τὴν ἀκμὴν ἑνὸς κανόνος σχεδιάσεως. Π.χ. διὰ νὰ ἐλέγξωμεν ἐὰν μία ἀκμὴ ἑνὸς στερεοῦ εἶναι εὐθεῖα, τοποθετοῦμεν ἐπ' αὐτῆς τὴν ἀκμὴν τοῦ κανόνος καὶ ἐξετάζομεν ἐὰν αἱ δύο αὗται ἀκμαὶ εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμόσουν.



Σχ. 6

Ὁμοίως μὲ ὁδηγὸν τὴν ἀκμὴν τοῦ κανόνος χαράσσομεν εὐθείας γραμμάς, σχ. 6.

**4. 2.** Εἰς τὸ σχέδιόν σας σημειώσατε ἓν σημεῖον Α. Πόσαι εὐθεῖαι διέρχονται δι' αὐτοῦ; Ἄπειροι.

Σημειώσατε ἐπίσης δύο διαφορετικὰ σημεῖα Β, Γ. Πόσαι εὐθεῖαι διέρχονται καὶ διὰ τῶν δύο αὐτῶν σημείων; Μία καὶ μόνον μία.

Παρατηρήσεις ὡς αἱ ἀνωτέρω μᾶς ἐξηγοῦν διατὶ εἰς τὴν Γεωμετρίαν δεχόμεθα ὅτι:

**Διὰ δύο διαφορετικῶν σημείων διέρχεται μία καὶ μόνον μία εὐθεῖα.**

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι δύο διαφορετικὰ σημεῖα Α, Β ὁρίζουν μίαν εὐθεῖαν: τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἢ ΒΑ.

* Ἤτοι ἡ ἰσότης $\Sigma = \Sigma'$ σημαίνει ἐνταῦθα ὅτι τὸ Σ εἶναι ἐφαρμόσιμον (δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ) ἐπὶ τοῦ Σ'.

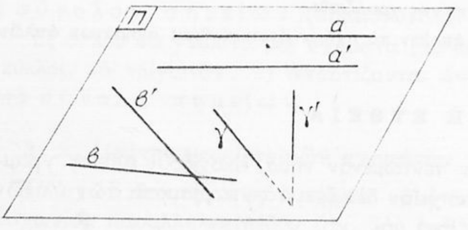
Ἐπίσης μίαν εὐθεῖαν τὴν ὀνομάζομεν μὲ ἓν μικρὸν γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου μας. (εὐθεῖα ε, εὐθεῖα δ . . .).

**4. 4.** Εἶναι εὔκολον νὰ ἀντιληφθῶμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα προεκτείνεται ὅσον θέλομεν. Διὰ τοῦτο εἰς τὴν Γεωμετρίαν δεχόμεθα ὅτι :

**Ἡ εὐθεῖα δύναται νὰ προεκταθῇ ἀπεριορίστως ἑκατέρωθεν.**

**4. 5.** α) Προσέξατε τὰς εὐθείας τῶν πλευρῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Ἀνὰ δύο ἀπέναντι εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν. Ἀντιθέτως ἀνὰ δύο συνεχόμεναι ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον.

β) Εἰς τὸ «ἐπίπεδον» ἑνὸς φύλλου τοῦ τετραδίου χαράξατε δύο εὐθείας. Πόσα τὸ πολὺ κοινὰ σημεῖα δυνατὸν νὰ ἔχουν αὗται;




Σχ. 7

Παρατηροῦμεν ὅτι :

Ἢ οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν, ὁσονδήποτε καὶ ἂν προεκταθοῦν, ὅπως π.χ. αἱ εὐθεῖαι α, α′ τοῦ σχ. 7.

Ἢ ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ὅπως συμβαίνει μὲ τὰ ζεύγη τῶν εὐθειῶν β, β′ καὶ γ, γ′ τοῦ σχ. 7.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν λέγομεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι α, α′ εἶναι παράλληλοι*, ἐνῶ εἰς τὴν δευτέραν ὅτι τέμνονται. Τὸ μοναδικὸν κοινὸν σημεῖον αὐτῶν λέγεται σημεῖον τομῆς.

Αἱ ἀνωτέρω παρατηρήσεις μᾶς ὁδηγοῦν εἰς τὸ ἑξῆς συμπέρασμα τὸ ὁποῖον ἰσχύει τόσον διὰ τὰς ὑλικὰς εὐθείας τοῦ σχεδίου ὅσον καὶ διὰ τὰς γεωμετρικὰς εὐθείας.

**Δύο διαφορετικαὶ εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου εἶναι δυνατόν :**

**α) Οὐδὲν κοινὸν σημεῖον νὰ ἔχουν, ὁπότε λέγομεν ὅτι εἶναι μεταξύ των παράλληλοι.**

**β) Νὰ ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ὁπότε λέγομεν ὅτι τέμνονται.**

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5. Σημειώσατε δύο σημεῖα Α, Β καὶ ἔπειτα χαράξατε δύο εὐθείας ε, ε′ τοιαύτας ὥστε Α∈ε, Β∈ε, Α∈ε′.

6. Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἀκμῆς τοῦ κανόνος νὰ εὕρετε ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου εὐθείας. Τί παρατηρεῖτε;

7. Σημειώσατε εἰς τὸ τετράδιόν σας τρία διαφορετικὰ σημεῖα καὶ χαράξατε ἔπειτα ὅλας

* Μὲ τὰς παραλλήλους εὐθείας θὰ ἀσχοληθῶμεν ἐκτενέστερον εἰς ἄλλο κεφάλαιον.

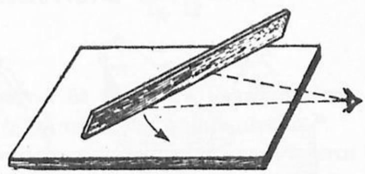
τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ αὐτά. Πόσαι τοιαῦται εὐθεῖαι ὑπάρχουν; (Διακρίνατε περιπτώσεις).

8. Ἐπαναλάβατε τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα διὰ τέσσαρα διαφορετικὰ σημεῖα. (Διακρίνατε διαφόρους περιπτώσεις).

9. Διὰ τρεῖς εὐθείας α, β, γ καὶ ἓν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου γνωρίζετε ὅτι $M \in (\alpha \cap \beta) \cap \gamma$. Ποῖον εἶναι τὸ σχετικὸν σχέδιον;

## 5. ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

**5. 1.** Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πίνακος, τοῦ ἠρεμοῦντος ὕδατος, τοῦ λείου δαπέδου, εἶναι ὑλικαὶ παραστάσεις ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν. Ἀπὸ αὐτὰς ἐδημιουργήθη εἰς τὴν σκέψιν μας ἡ γεωμετρικὴ ἰδέα τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας ἢ ἁπλῶς τοῦ ἐπιπέδου.



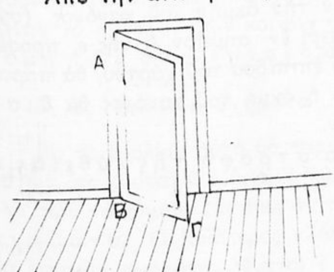
Σχ. 8

**5. 2.** Διὰ νὰ ἐλέγξωμεν ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πίνακος εἶναι ἐπίπεδος, τοποθετοῦμεν ἐπ' αὐτῆς τὴν ἀκμὴν τοῦ κανόνος. Πρέπει τότε, ὁποιαδήποτε καὶ ἐὰν εἶναι ἡ θέσις τοῦ κανόνος, ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ δύο σημεῖα αὐτοῦ, νὰ εὑρίσκεται ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.

Ἀπὸ τὸ πείραμα τοῦτο ὁδηγούμεθα εἰς τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τοῦ ἐπιπέδου:

**Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ δύο ὁποιαδήποτε διαφορετικὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου κεῖται ὁλόκληρος ἐπ' αὐτοῦ.**

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω πρότασιν ἐννοοῦμεν ὅτι, ὅπως ἡ εὐθεῖα δὲν ἔχει ἄκρα, ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ τὴν προεκτείνωμεν ὅσον θέλομεν, τοιουτοτρόπως καὶ τὸ ἐπίπεδον προεκτείνεται ἀπεριορίστως πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις αὐτοῦ.




Σχ. 9

**5. 3.** α) Ἡ θύρα τοῦ σχεδ. 9 παριστάνει ἓν ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ δύο διαφορετικὰ σημεῖα Α, Β (τὰ κέντρα τῶν στροφέων). Ἀπὸ τὴν στροφὴν τοῦ ἐπιπέδου τῆς θύρας περὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ αὐτοῦ ἐννοοῦμεν ὅτι:

**Ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν διέρχονται ἄπειρα ἐπίπεδα.**

Τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ ἀντιπροσωπεύονται ἀπὸ τὰς διαφόρους θέσεις τῆς στρεφομένης θύρας.

β) Ἐὰν τοποθετήσωμεν μίαν καρφίδα εἰς τὸ δάπεδον ,(σημεῖον Γ) ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ τῶν στροφέων, τότε ἡ θύρα θὰ προσκρούσῃ εἰς αὐτὴν καὶ θὰ σταθεροποιηθῇ εἰς μίαν ὡρισμένην θέσιν.

Ἤτοι: **Μία εὐθεῖα ΑΒ καὶ ἓν σημεῖον Γ ἐκτὸς αὐτῆς ὁρίζουν ἓν καὶ μόνον ἓν ἐπίπεδον.**

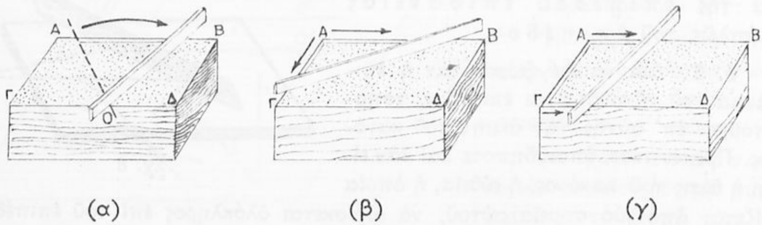
Εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο κεῖται ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Γ.

γ) Ἐὰν σκεφθῶμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ δύο διαφορετικὰ σημεῖα Α, Β, τότε ἡ προηγουμένη πρότασις διατυπώνεται καὶ ὡς ἑξῆς:

**Τρία διαφορετικὰ σημεῖα Α, Β, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας ὁρίζουν ἓν καὶ μόνον ἓν ἐπίπεδον.**

## 5. 6. Γένεσις ἐπιπέδου διὰ κινήσεως εὐθείας

Τὰ κατωτέρω σχέδια 10α, β, γ δεικνύουν πῶς γεννᾶται ἓν ὑλικὸν ἐπίπεδον διὰ καταλλήλου μετατοπίσεως μιᾶς ὑλικῆς εὐθείας.




Σχ. 10

### α) Διὰ στροφῆς μιᾶς εὐθείας

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἑνὸς σκληροῦ φύλλου χάρτου σχεδιάζομεν μίαν εὐθεῖαν ε καὶ ἔπειτα κατὰ μῆκος αὐτῆς τοποθετοῦμεν τὴν ἀκμὴν τοῦ κανόνος, (σχ. 11). Ἐὰν ἤδη περιστρέψωμεν τὸν κανόνα περὶ ἓν σημεῖον Α τῆς ε, προσέχοντες ὥστε ἡ ἀκμή του νὰ παραμένῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ χάρτου, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι εἰς μίαν πλήρη περιστροφήν, ἡ ἀκμὴ τοῦ κανόνος θὰ διαγράψῃ ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον.

Ὁ ἀνωτέρω τρόπος ἐργασίας εἶναι μία στροφὴ τῆς εὐθείας ε περὶ τὸ σημεῖον Α.

### β) Διὰ παραλλήλου μετατοπίσεως

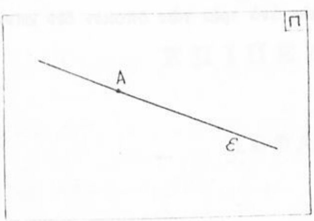
Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πίνακος ἢ μιᾶς πινακίδος σχεδιάσεως, τοποθετοῦμεν τὸ ταῦ, ὡς δεικνύει τὸ σχ. 12 καὶ ὀλισθαίνομεν αὐτὸ προσέχοντες ὥστε ἡ κεφαλή του νὰ ἐφαρμόζῃ σταθερῶς ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ πίνακος (ἢ τῆς πινακίδος).

Παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ τὴν ὀλίσθησιν αὐτὴν ἡ εὐθεῖα ε τῆς ἀκμῆς τοῦ βραχίονος τοῦ ταῦ διαγράφει τὸ ἐπίπεδον τοῦ πίνακος.

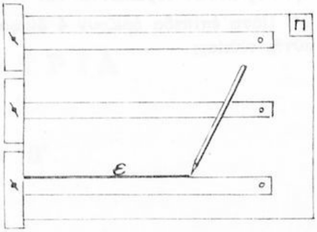
Ὁ ἀνωτέρω τρόπος ἐργασίας λέγεται παράλληλος μετατόπισις τῆς εὐθείας ε.

Ἀπὸ τ' ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

**Μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια γεννᾶται διὰ καταλλήλου μετατοπίσεως μιᾶς εὐθείας.**




Σχ. 11




Σχ. 12

## 5. 7. Τὸ ἐπίπεδον ὡς σημειοσύνολον

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα εἶναι ἓν σημειοσύνολον, τὸ δὲ ἐπίπεδον γεννᾶται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν, εἶναι φυσικὸν νὰ θεωρήσωμεν τὸ ἐπίπεδον ὡς σημειοσύνολον*.

(Ἐὰν κτυπήσωμεν ἕνα σπόγγον ἐπὶ τοῦ πίνακος τότε ὁ πίναξ καλύπτεται μὲ κόνιν κιμωλίας Ἐὰν ἕκαστος κόκκος κόνεως παριστάνῃ ἓν σημεῖον, τότε τὸ στρῶμα τῆς κόνεως τοῦ πίνακος παριστάνει τὸ σημειοσύνολον τοῦ ἐπιπέδου).

## 5. 8. Τομὴ δύο διαφορετικῶν ἐπιπέδων

Προσέξατε δύο συνεχομένας ἕδρας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Ἔχουν κοινὰ σημεῖα κείμενα ἐπὶ μιᾶς εὐθείας. Ὅταν δύο διαφορετικὰ ἐπίπεδα ἔχουν κοινὰ σημεῖα, τότε λέγομεν ὅτι τέμνονται. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σύνολον τῶν κοινῶν σημείων εἶναι μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία λέγεται τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων.

## 5. 9. Ἐπίπεδα σχήματα

Εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ θὰ περιορισθῶμεν εἰς τὴν μελέτην γεωμετρικῶν σχημάτων ὅπως εἶναι ἡ εὐθεῖα, ὁ κύκλος, τὸ τρίγωνον, ἡ γωνία, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὅλα των τὰ σημεῖα ἐπὶ ἑνός ἐπιπέδου καὶ ὀνομάζονται διὰ τοῦτο ἐπίπεδα σχήματα. Ὁ ἰδιαίτερος κλάδος τῆς γεωμετρίας ὁ ὁποῖος ἀναφέρεται εἰς τὰ ἐπίπεδα σχήματα, λέγεται ἐπιπεδομετρία.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

10 Ἀναφέρατε παραδείγματα σχηματισμοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου διὰ καταλλήλου κινήσεως εὐθείας.

* Τὸ σημειοσύνολον ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι διαφορετικὸν εἶδος σημειοσυνόλου ἀπὸ τὸ σημειοσύνολον μιᾶς εὐθείας.

11. Ἐξετάσατε ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ εἶναι ἐπίπεδον σχῆμα ἓν τρίγωνον.

12. Ἐξετάσατε ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἓν τετράπλευρον νὰ μὴ εἶναι ἐπίπεδον σχῆμα.

13. Τέσσαρα διαφορετικὰ σημεῖα δὲν εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐξετάσατε ἐὰν τρία ἐξ αὐτῶν εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

14. Πόσα ἐπίπεδα ὁρίζουν 4 διαφορετικὰ σημεῖα ἀνὰ τρία τῶν ὁποίων δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας;

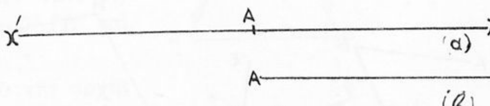
# ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

### 6. Η ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ

Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας χ'χ σημειώνομεν ἓν σημεῖον Α, σχ. 13.

Παρατηροῦμεν τότε ὅτι ἡ ε χωρίζεται εἰς δύο ἀπεριόριστα μέρη. Ἕκαστον τούτων λέγεται ἡ μ ι ε υ θ ε ῖ α.



Σχ. 13

Τὸ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μοναδικὸν ἄκρον ἑκάστης τῶν ἡμιευθειῶν τοῦ σχ. 13α, λέγεται ἀ ρ χ ὴ ἑκάστης τῶν ἡμιευθειῶν τούτων.

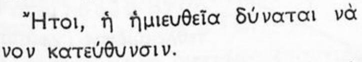
Ἤτοι, ἡ ἡμιευθεῖα δύναται νὰ προεκταθῇ ἀπεριορίστως π ρ ὸ ς μ ί α ν μόνον κατεύθυνσιν.

Μία ἡμιευθεῖα ὀνομάζεται κατὰ δύο τρόπους:

α) Μὲ δύο κεφαλαῖα γράμματα, π.χ. ΑΜ. Ἐκ τούτων τὸ μὲν πρῶτον εἶναι τὸ ὄνομα τῆς ἀρχῆς, τὸ δὲ δεύτερον ἑνός ὁποιουδήποτε ἄλλου σημείου αὐτῆς. Π.χ. ἡ ἡμιευθεῖα ΑΜ τοῦ σχ. 13β ἔχει ἀρχὴν τὸ Α.

β) Μὲ ἓν κεφαλαῖον γράμμα, τὸ ὄνομα τῆς ἀρχῆς της, καὶ ἓν μικρὸν γράμμα διὰ τὴν κατεύθυνσιν πρὸς τὴν ὁποίαν ἡ ἡμιευθεῖα δύναται νὰ προεκταθῇ ἀπεριορίστως. Π.χ., εἰς τὸ σχ. 13α, τὸ σημεῖον Α χωρίζει τὴν εὐθεῖαν χ'Αχ εἰς τὰς δύο ἡμιευθείας Αχ καὶ Αχ'. Ἑκάστη τῶν ἡμιευθειῶν τούτων λέγεται ἀ ν τ ί θ ε τ ο ς ἢ ἀ ν τ ι κ ε ι μ έ ν η τῆς ἄλλης.

### 7. ΤΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΝ ΤΜΗΜΑ



Σχ. 14

Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ε σημειώνομεν δύο σημεῖα Α, Β.

Τὸ σύνολον τὸ ὁποῖον ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα καὶ ἀπὸ τὰ μεταξὺ αὐτῶν κείμενα σημεῖα τῆς εὐθείας ε λέγεται ε ὐ θ ύ γ ρ α μ μ ο ν τ μ ῆ μ α ΑΒ ἢ ΒΑ.

Τὰ σημεῖα Α, Β λέγονται ἄκρα τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Ἐὰν τὰ ἄκρα αὐτὰ συμπέσουν (Α≡Β), τότε τὸ ΑΒ λέγεται μηδενικὸν εὐθύγραμμον τμῆμα.

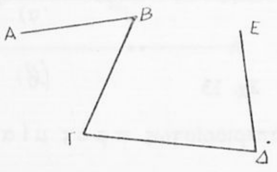
### 8. Η ΤΕΘΛΑΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΗ

**8. 1.** Εἰς τὸ σχ. 15 ἔχομεν τέσσαρα εὐθύγραμμα τμήματα. Κατὰ σειρὰν τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ ΔΕ. Παρατηροῦμεν ὅτι :

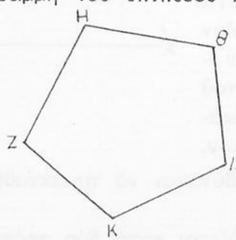
Τὸ πρῶτον ΑΒ καὶ τὸ δεύτερον ΒΓ ἔχουν ἓν κοινὸν ἄκρον καὶ δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ὁμοίως τὸ δεύτερον ΒΓ καὶ τὸ τρίτον ΓΔ ἔχουν ἓν κοινὸν ἄκρον καὶ δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας κ.ο.κ. Ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔΕ λέγεται τεθλασμένη γραμμή.

Τῆς ἀνωτέρω τεθλασμένης γραμμῆς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε λέγονται κορυφαί. Τὰ σημεῖα Α καὶ Ε ἄκρα καὶ τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ ΔΕ πλευραί.

**8. 2.** Μία τεθλασμένη γραμμὴ τοῦ ἐπιπέδου λέγεται κυρτὴ ὅταν ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ δύο τυχούσας διαδοχικὰς κορυφὰς αὐτῆς, ἀφήνη ὅλας τὰς ἄλλας κορυφὰς πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος μετὰ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς. Π.χ. ἡ τεθλασμένη γραμμὴ τοῦ σχ. 16 εἶναι κυρτὴ ἐνῶ ἡ τεθλασμένη γραμμὴ τοῦ σχ. 15 δὲν εἶναι κυρτή. Διατί;



Σχ. 15



Σχ. 16

**8. 3.** Ὅταν τὰ ἄκρα μιᾶς τεθλασμένη γραμμῆς συμπίπτουν, σχ. 16, τότε αὕτη λέγεται κλειστὴ τεθλασμένη γραμμὴ ἢ πολύγωνον.

Ἓν πολύγωνον ἔχει τὸν ἴδιον ἀριθμὸν κορυφῶν καὶ πλευρῶν. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι 3, 4, 5 . . ., τὸ πολύγωνον λέγεται τρίγωνον, τετράπλευρον, πεντάγωνον . . . ἀντιστοίχως. Ἕκαστον εὐθ. τμῆμα τὸ ὁποῖον συνδέει δύο μὴ γειτονικὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου λέγεται διαγώνιος αὐτοῦ.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

15. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ε σημειώσατε δύο διαφορετικὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ποῖαι ἡμιευθεῖαι ὁρίζονται α) μὲ ἀρχὴν τὸ Α β) μὲ ἀρχὴν τὸ Β ;

16. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ε σημειώσατε 4 διαφορετικὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Νὰ εὕρετε ὅλα τὰ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ ὁποῖα σχηματίζονται.

17. Ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου σημειώσατε 5 διαφορετικὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε τοιαῦτα ὥστε ἀνὰ τρία νὰ μὴ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Πόσα εὐθ. τμήματα ὁρίζονται τοιουτοτρόπως;

18. Νὰ σχεδιάσετε ἓν ἑξάγωνον καὶ ἔπειτα νὰ εὕρετε πόσαι διαγώνιοι ἄγονται α) ἐκ μιᾶς κορυφῆς, β) ἐξ ὅλων τῶν κορυφῶν αὐτοῦ ὁμοῦ.

19. Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα νὰ ἐξετασθῇ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν 7/γώνου, 8/γώνου.

## 9. ΙΣΑ, ΑΝΙΣΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

### 9. 1. Ὁρισμοὶ

Χαράσσομεν δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ καὶ μίαν ἡμιευθεῖαν Οχ. Μὲ τὸν διαβήτην ἢ τὸ διαστημόμετρον μεταφέρομεν τὸ ΑΒ ἐπὶ τῆς Οχ εἰς τρόπον ὥστε τὸ ἓν ἄκρον του νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ἀρχὴν Ο αὐτῆς, σχ. 17.

Τὸ αὐτὸ ἐπαναλαμβάνομεν καὶ διὰ τὸ ΓΔ.

Ὑπάρχουν τότε ἀποκλειστικῶς τὰ ἀκόλουθα τρία ἐνδεχόμενα:

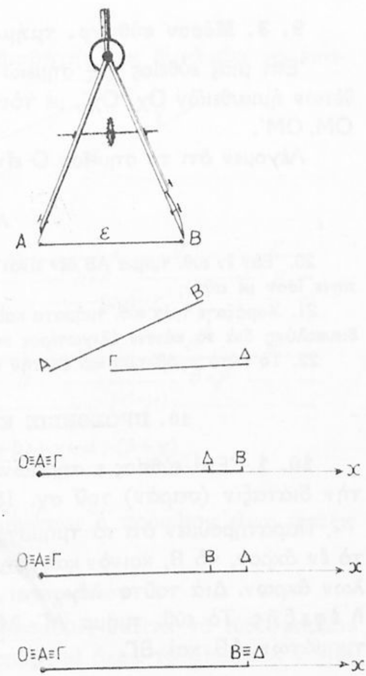
α) Τὸ Δ νὰ κεῖται μεταξὺ τῆς ἀρχῆς Ο καὶ τοῦ Β, σχ. 17α. Λέγομεν τότε ὅτι ΑΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΓΔ καὶ γράφομεν ΑΒ > ΓΔ.

β) Τὸ Β νὰ κεῖται μεταξὺ τῆς ἀρχῆς Ο καὶ τοῦ Δ (σχ. 17β), ὁπότε λέγομεν ὅτι ΑΒ εἶναι μικρότερον τοῦ ΓΔ καὶ γράφομεν ΑΒ < ΓΔ.

γ) Τὸ Β νὰ συμπέσῃ (ταυτισθῇ) μὲ τὸ Δ (σχ. 17γ)· λέγομεν δὲ ὅτι ΑΒ εἶναι ἴσον μὲ ΓΔ καὶ γράφομεν ΑΒ=ΓΔ.

Ὅταν ΑΒ δὲν εἶναι ἴσον μὲ ΓΔ, ὁπότε θὰ εἶναι ἢ μεγαλύτερον ἢ μικρότερον ἀπὸ αὐτό, λέγομεν ὅτι τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἄνισα· γράφομεν δὲ ΑΒ≠ΓΔ.

Σημειωτέον ὅτι αἱ σχέσεις ΑΒ > ΓΔ καὶ ΓΔ < ΑΒ ἔχουν τὴν αὐτὴν σημασίαν.



Σχ. 17

### 9. 2. Ἰδιότητες

α) Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἰσότητος εὐθ. τμημάτων ἐννοοῦμεν ὅτι:

ι) ΑΒ=ΑΒ. Ἀνακλαστικὴ ἰδιότης.

ιι) Ἐὰν εἶναι ΑΒ=ΓΔ, τότε θὰ εἶναι καὶ ΓΔ=ΑΒ.

Ἢ συμβολικῶς:

ΑΒ=ΓΔ ⟹ ΓΔ=ΑΒ Συμμετρικὴ ἰδιότης

β) Ἐὰν συγκρίνοντες τρία εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ εὕρετε ὅτι:

ΑΒ=ΓΔ (1) καὶ ΓΔ=ΕΖ (2) τὶ συμπεραίνετε διὰ τὰ ΑΒ καὶ ΕΖ;
Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συμπεραίνομεν ὅτι καὶ ΑΒ=ΕΖ.
(Ἐπαληθεύσατε τὸ συμπέρασμα τοῦτο μὲ τὸν διαβήτην σας).
Ἢ συμβολικῶς :

(ΑΒ=ΓΔ καὶ ΓΔ=ΕΖ) $\Longrightarrow$ ΑΒ=ΕΖ Μεταβατικὴ ἰδιότης.

γ) Μὲ τὸν διαβήτην σας εὑρίσκετε ὅτι ΑΒ > ΓΔ καὶ ΓΔ > ΕΖ. Κατόπιν τούτου δύνασθε νὰ συγκρίνετε, χωρὶς ὄργανα, τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΕΖ; Θὰ εἶναι ΑΒ > ΕΖ.

Ὥστε : (ΑΒ > ΓΔ καὶ ΓΔ > ΕΖ) $\Longrightarrow$ ΑΒ > ΕΖ Μεταβατικὴ ἰδιότης.

### 9. 3. Μέσον εὐθυγρ. τμήματος

Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας χ'χ σημειώνομεν ἓν σημεῖον Ο. Ἔπειτα ἐπὶ τῶν ἀντιθέτων ἡμιευθειῶν Οχ, Οχ', μὲ τὸν διαβήτην μας, λαμβάνομεν δύο ἴσα τμήματα ΟΜ, ΟΜ'.

Λέγομεν ὅτι τὸ σημεῖον Ο εἶναι μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΜ'.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

20. Ἐὰν ἓν εὐθ. τμῆμα ΑΒ δὲν εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ ἓν ἄλλο ΓΔ τότε θὰ εἶναι ὁπωσδήποτε ἴσον μὲ αὐτό;

21. Χαράξατε τρία εὐθ. τμήματα καὶ κατατάξατε αὐτὰ κατὰ μέγεθος .Ποία ἰδιότης θὰ σᾶς διευκολύνῃ διὰ νὰ κάνετε ὀλιγωτέρας συγκρίσεις;

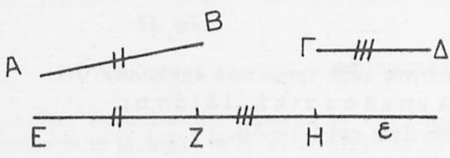
22. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τεσσάρων εὐθ. τμημάτων.

## 10. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

**10. 1.** Ἐπὶ εὐθείας ε σημειώνομεν τρία διαφορετικὰ σημεῖα Α, Β, Γ, κατὰ τὴν διάταξιν (σειρὰν) τοῦ σχ. 18.

Σχ. 18

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ἔχουν τὸ ἓν ἄκρον, τὸ Β, κοινὸν καὶ μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων ἄκρων. Διὰ τοῦτο λέγονται διαδοχικὰ ἢ ἐφεξῆς. Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΓ λέγεται ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ καὶ ΒΓ.



Σχ. 19

Γράφομεν δὲ

ΑΒ+ΒΓ=ΑΓ

**10. 2.** Δίδονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ.

Μὲ τὸν διαβήτην μας ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ε λαμβάνομεν διαδοχικὰ τμήματα ΕΖ=ΑΒ καὶ ΖΗ=ΓΔ.

Τὸ εὐθ. τμῆμα ΕΗ=ΕΖ+ΖΗ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ.

ΑΒ+ΓΔ=ΕΗ

Ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εἰς ἕκαστον ζεῦγος εὐθυγράμμων τμημάτων ἀντιστοιχίζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων τμημάτων, λέγεται **π ρ ό σ θ ε σ ι ς** αὐτῶν.

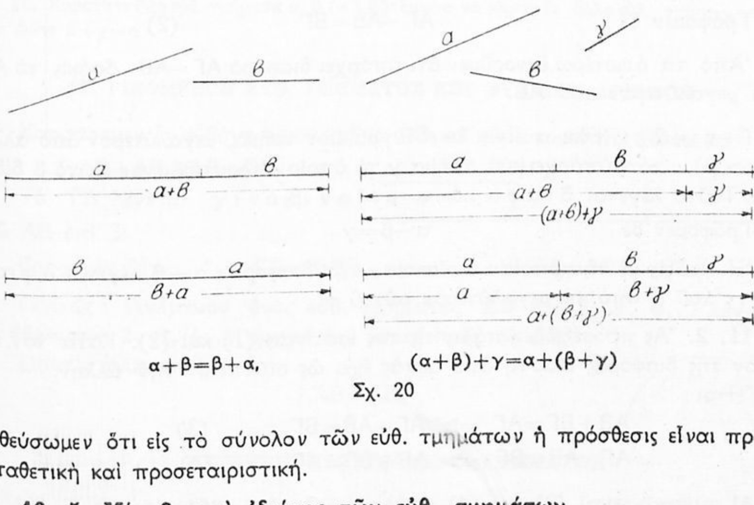
## 10. .3 Ἄθροισμα περισσοτέρων εὐθ. τμημάτων

Τρία ἢ περισσότερα κατὰ σειρὰν εὐθ. τμήματα ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λέγονται διαδοχικὰ ὅταν τὸ 2ον εἶναι ἐφεξῆς πρὸς τὸ 1ον, τὸ 3ον πρὸς τὸ 2ον κ.ο.κ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τριῶν ἢ περισσοτέρων εὐθ. τμημάτων εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων, εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο προσθέτομεν τὸ τρίτον εὐθ. τμῆμα κ.ο.κ.

## 10. 4. Ἰδιότητες

Καθὼς φαίνεται εἰς τὸ σχ. 20 μὲ τὸν διαβήτην μας δυνάμεθα νὰ ἐπα-




$\alpha+\beta=\beta+\alpha$, $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

Σχ. 20

ληθεύσωμεν ὅτι εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθ. τμημάτων ἡ πρόσθεσις εἶναι πρᾶξις μεταθετικὴ καὶ προσεταιριστική.

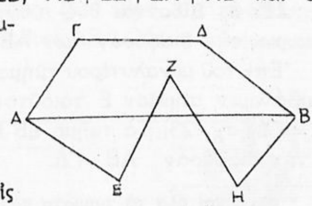
## 10. 5. Μία βασικὴ ἰδιότης τῶν εὐθ. τμημάτων

Σημειώνομεν δύο σημεῖα Α, καὶ Β. Χαράσσομεν ἔπειτα τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καθὼς καὶ ἄλλας τεθλασμένας γραμμὰς μὲ ἄκρα τὰ σημεῖα Α καὶ Β, (σχ. 21).

Ἃς εὕρωμεν τὰ ἀθροίσματα ΑΓ+ΓΔ+ΔΒ, ΑΕ+ΕΖ+ΖΗ+ΗΒ καὶ ἃς συγκρίνωμεν ἕκαστον τούτων μὲ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ.

Θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι :

$$AB < A\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta B$$
$$AB < AE+EZ+ZH+HB$$



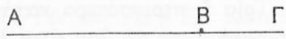

Σχ. 21

Αἱ ἀνωτέρω παρατηρήσεις μᾶς ὁδηγοῦν εἰς τὴν ἑξῆς γεωμετρικὴν πρότασιν :

**Τὸ εὐθ. τμῆμα εἶναι μικρότερον πάσης ἄλλης γραμμῆς, ἡ ὁποία ἔχει ἄκρα τὰ ἄκρα τοῦ εὐθ. τμήματος.**

### 11. ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

**11. 1.** Ἂς σημειώσωμεν ἐπ' εὐθείας ε δύο διαδοχικὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ, σχ. 22.



Σχ. 22

Θὰ ἔχωμεν τότε

$$ΑΒ+ΒΓ=ΑΓ \qquad (1)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓ* προστίθεται εἰς τὸ ΑΒ διὰ νὰ δώσῃ ἄθροισμα τὸ ΑΓ. Διὰ τοῦτο λέγεται δ ι α φ ο ρ ὰ τῶν **ΑΓ** καὶ ΑΒ.

Γράφομεν δὲ

$$ΑΓ-ΑΒ=ΒΓ \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἐννοοῦμεν ὅτι ὑπάρχει διαφορὰ ΑΓ –ΑΒ ὁσάκις τὸ ΑΓ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΑΒ.

Γ ε ν ι κ ῶ ς: Ἐὰν $α$ εἶναι ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα, μεγαλύτερον ἀπὸ ἄλλο $β$ $(α>β)$, τότε ὑπάρχει εὐθ. τμῆμα $γ$ τὸ ὁποῖον προστιθέμενον εἰς τὸ $β$ δίδει τὸ $α$. Τοῦτο λέγεται δ ι α φ ο ρ ὰ $α$ μ ε ῖ ο ν $β$.

Γράφομεν δὲ

$$α-β=γ$$

Ἡ πρᾶξις μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν $α-β$ λέγεται ἀ φ α ί ρ ε σ ι ς τοῦ $β$ ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον αὐτοῦ $α$.

**11. 2.** Ἂς προσέξωμεν πάλιν εἰς τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2). Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαφορᾶς ἑκάστη ἀπὸ αὐτὰς ἔχει ὡς συνέπειαν τὴν ἄλλην.

Ἤτοι :

$$ΑΒ+ΒΓ=ΑΓ \Longrightarrow ΑΓ-ΑΒ=ΒΓ \qquad (3)$$

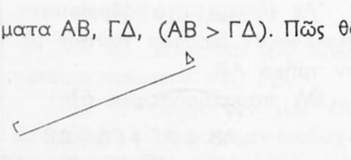
$$ΑΓ-ΑΒ=ΒΓ \Longrightarrow ΑΒ+ΒΓ=ΑΓ \qquad (4)$$

Αἱ συνεπαγωγαὶ (3) καὶ (4) γράφονται ὁμοῦ ὡς ἑξῆς :

$$\boxed{ΑΒ+ΒΓ=ΑΓ \Longleftrightarrow ΑΓ-ΑΒ=ΒΓ} \qquad (5)$$

**11. 3.** Δίδονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ, (ΑΒ > ΓΔ). Πῶς θὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν των ΑΒ –ΓΔ;

Ἐπὶ τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος ΑΒ λαμβάνομεν σημεῖον Ε τοιοῦτον ὥστε ΑΕ=ΓΔ, σχ. 23. Τὸ τμῆμα ΕΒ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν ΑΒ –ΓΔ. Διατί ;



Σχ. 23

* ὅπως καὶ ὅλα τὰ τμήματα τὰ ἴσα πρὸς τὸ ΒΓ

Πράγματι ἔχομεν :

$$AE+EB=AB \iff AB-AE=EB$$

$$\text{ἢ } AB-\Gamma\Delta=EB$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

23. Χαράξατε τρία εὐθύγραμμα τμήματα α, β, γ καὶ ἔπειτα νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι :

$$(\alpha+\gamma)+\beta=\alpha+(\beta+\gamma)$$

24. Χαράξατε τέσσαρα εὐθύγραμμα τμήματα α, β, γ, δ καὶ ἔπειτα σχηματίσατε τὰ ἀθροίσματα : $(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta), \quad \alpha+(\beta+\gamma+\delta)$

25. Χαράξατε δύο εὐθύγραμμα τμήματα α, β ($\alpha=\beta$) καὶ ἕν ἄλλο $\gamma < \beta$. Μὲ αὐτὰ ἐπαθεύσατε ὅτι : $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$ καὶ $\alpha-\gamma=\beta-\gamma$

26. Χαράξατε δύο εὐθ. τμήματα α, β ($\alpha > \beta$)· ἔπειτα νὰ εὕρετε ἕν ἄλλο εὐθ. τμῆμα χ τοιοῦτον ὥστε $\beta+\chi=\alpha$

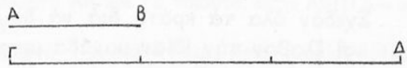
## 12. ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΦΥΣΙΚΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ

Χαράσσομεν ἕν εὐθύγραμμον τμῆμα AB καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα

$$AB+AB+AB=\Gamma\Delta$$

Τὸ ΓΔ λέγεται γ ι ν ό μ ε ν ο ν τοῦ AB ἐπὶ 3.

Γράφομεν δὲ $\Gamma\Delta=3\cdot AB$




Σχ. 24

Γενικῶς : **Γινόμενον ἑνὸς εὐθ. τμήματος AB ἐπὶ 2, 3, 4... λέγεται τὸ ἄθροισμα 2, 3, 4... τμημάτων ἴσων πρὸς τὸ AB.**

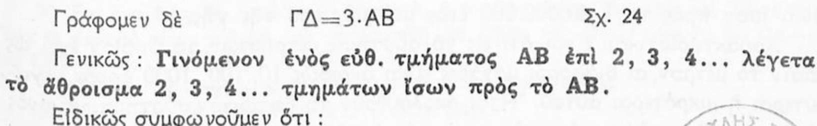
Εἰδικῶς συμφωνοῦμεν ὅτι :

$$1.AB=AB.$$

## 13. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

### 13. 1. Ἀριθμητικὴ τιμὴ εὐθ. τμήματος

Αἱ καθημεριναὶ ἀνάγκαι μᾶς ἐπιβάλλουν τὴν μέτρησιν διαφόρων μεγεθῶν. Καθὼς γνωρίζετε, διὰ νὰ μετρήσωμεν ἓν εὐθ. τμῆμα AB χρειαζόμεθα πρῶτον ἓν ἄλλο εὐθ. τμῆμα Μ τὸ ὁποῖον συμφωνοῦμεν νὰ λάβωμεν ὡς μονάδα μετρήσεως. Ἔπειτα εὑρίσκομεν ἀπὸ πόσας μονάδας (καὶ μέρη τῆς ληφθείσης μονάδος) ἀποτελεῖται τὸ πρὸς μέτρησιν εὐθ. τμῆμα AB. Οὕτως εὑρίσκομεν




Ὄργανα μετρήσεως εὐθ. τμημάτων

ἕνα ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος λέγεται ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ὴ τ ι μ ὴ ἢ ἁπλῶς τ ι μ ὴ τοῦ εὐθ. τμήματος.

Π.χ. ἐὰν ὀνομάσωμεν ΑΒ τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ πίνακος τῆς τάξεώς μας καὶ εὕρωμεν ὅτι αὕτη περιέχει 6 φορὰς ἀκριβῶς τὴν μεγαλυτέραν πλευρὰν τοῦ γνώμονος, τότε ὁ ἀριθμὸς 6 εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ ἢ ἡ τιμὴ τῆς πλευρᾶς ΑΒ μὲ μονάδα μετρήσεως τὴν μεγαλυτέραν πλευρὰν τοῦ γνώμονος.

Ἐὰν ὅμως ὡς μονάδα μετρήσεως λάβωμεν τὴν μικροτέραν πλευρὰν τοῦ γνώμονος καὶ εὕρωμεν ὅτι αὕτη περιέχεται 9 φορὰς ἀκριβῶς εἰς τὴν πλευρὰν ΑΒ, τότε ὁ ἀριθμὸς 9 εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ ἢ ἡ τιμὴ τῆς πλευρᾶς ΑΒ μὲ μονάδα μετρήσεως τὴν μικροτέραν πλευρὰν τοῦ γνώμονος.

**Παρατήρησις**

Ἐὰν κατὰ τὴν μέτρησιν ἡ μονὰς Μ τὴν ὁποίαν ἐκλέξαμεν δὲν περιέχεται ἀκριβῶς ν φορὰς ($\nu \in N$) εἰς τὸ μετρούμενον τμῆμα, τότε λαμβάνομεν μίαν ἄλλην μονάδα 10 ἢ 100 ἢ 1000 . . . φορὰς μικροτέραν τῆς Μ.

## 13. 2. Μονάδες μετρήσεως εὐθ. τμημάτων

Σχεδὸν ὅλα τὰ κράτη διὰ νὰ διευκολύνουν τὰς συναλλαγὰς συνεφώνησαν καὶ ἔλαβον τὴν ἰδίαν μονάδα μετρήσεως εὐθυγρ. τμημάτων.

Αὐτὴ εἶναι τὸ Γ α λ λ ι κ ὸ ν μ έ τ ρ ο ν* ἢ ἁπλῶς μ έ τ ρ ο ν (m). Τοῦτο εἶναι ἴσον πρὸς τὸ 1/40.000.000 ἑνὸς μεσημβρινοῦ τῆς γῆς.

Χαρακτηριστικὸν εἶναι ὅτι εἰς τὸ σύστημα μετρήσεων, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς βάσιν τὸ μέτρον, αἱ διάφοροι μονάδες εἶναι ἀκριβῶς 10, 100, 1000 φορὰς μεγαλύτεραι ἢ μικρότεραι αὐτοῦ. Ἤτοι ἀκολουθοῦν τὸ δεκαδικὸν σύστημα γεγονὸς τὸ ὁποῖον διευκολύνει εἰς τοὺς σχετικοὺς ὑπολογισμούς.

**I. Ὑποδιαιρέσεις τοῦ m**

| | | |
|---|---|---|
| Τὸ δεκατόμετρον: | dm = 1/10 | m |
| Τὸ ἑκατοστόμετρον: | cm = 1/100 | m |
| Τὸ χιλιοστόμετρον: | mm = 1/1000 | m |

**II. Πολλαπλάσια τοῦ m**

| | | |
|---|---|---|
| Τὸ δεκάμετρον: | dam = 10 | m |
| Τὸ ἑκατόμετρον: | hm = 100 | m |
| Τὸ χιλιόμετρον: | km = 1000 | m |

Παραπλεύρως παραθέτομεν πίνακα ὑποδιαιρέσεων ἢ πολλαπλασίων τοῦ m αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται συνήθως ὡς μονάδες. Ἀπὸ τὸν πίνακα αὐτὸν προκύπτουν αἱ σχέσεις:

$$1\ m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm$$
$$1\ km = 1000\ m = 10000\ dm = 100000\ cm$$

Ἄλλαι χρησιμοποιούμεναι μονάδες μήκους εἶναι αἱ ἑξῆς:

1 τ ε κ τ ο ν ι κ ὸ ς π ῆ χ υ ς = 0,75 m = 75 cm
1 ὑ ά ρ δ α (yrd) = 0,914 m = 91,4 cm = 914 mm

* Σήμερον τὸ μέτρον καθορίζεται ὑπὸ τοῦ προτύπου μέτρου τὸ ὁποῖον φυλάσσεται εἰς τὸ ἐν Sévres τῆς Γαλλίας διεθνὲς γραφεῖον μέτρων καὶ σταθμῶν. Βάσει αὐτοῦ βαθμολογοῦνται μὲ ἀκρίβειαν οἱ συνήθεις κανόνες, μέτρα, μετροταινίαι . . .

Ἑκάστη ὑάρδα ὑποδιαιρεῖται εἰς 3 πόδας (ft)
Ἕκαστος πούς » εἰς 12 ἴντσας (in)
Ἤτοι 1 yrd=3 ft=36 in

Εἰς τὴν ναυτιλίαν ἐξ ἄλλου χρησιμοποιεῖται τὸ γαλλικὸν ναυτικὸν μίλιον=1852 m.

## 13. 3. Σημείωσις

Ἐὰν κατὰ τὴν μέτρησιν ἑνὸς εὐθ. τμήματος ΑΒ εὕρωμεν ὅτι ἡ μονὰς 1 cm περιέχεται εἰς αὐτὸ ἀκριβῶς 3 φορὰς τότε γράφομεν:

ΑΒ=3 cm καὶ διαβάζομεν: τὸ ΑΒ ἔχει μῆκος 3 cm.

Ἤτοι ἡ γραφὴ ΓΔ=2 m σημαίνει ὅτι τὸ ΓΔ ἔχει μῆκος 2 m.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

27. Γράψατε ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ ἔπειτα ἐπαληθεύσατε ὅτι

$$2\cdot(3\cdot AB)=(2.3).AB$$

28. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ε σημειώσατε δύο τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ τοιαῦτα, ὥστε $AB \cap \Gamma\Delta=\varnothing$ καὶ ΑΒ=ΓΔ=2 cm. Νὰ ἐξετάσετε ἐὰν ΑΓ=ΒΔ.

29. Εἰς τριψήφιος ἀκέραιος, π.χ. ὁ 856, παριστάνει χιλιοστὰ (mm). Ποῖον ψηφίον αὐτοῦ παριστάνει cm καὶ ποῖον dm.

30 Ἐπὶ ἡμιευθείας Οx λαμβάνομεν σημεῖα Α, Β τοιαῦτα, ὥστε ΟΑ=4 cm καὶ ΟΒ=6 cm. Ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΑΒ, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ ΟΜ. Γενίκευσις διὰ ΟΑ=α καὶ ΟΒ=β.

31 Μὲ πόσα m ἰσοῦται τὸ 1/100 τοῦ γαλλικοῦ ναυτικοῦ μιλίου.

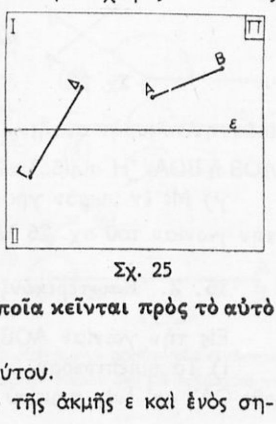
32. Μὲ πόσα mm ἰσοῦται μῆκος 2 ἰντσῶν (in).

## 14. ΤΟ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟΝ

Εἰς τὸ ἐπίπεδον Π χαράσσομεν μίαν εὐθεῖαν ε. Αὕτη διαχωρίζει τὰ ἐκτὸς αὐτῆς σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου εἰς δύο «περιοχάς» Ι καὶ ΙΙ, σχ. 25.

Τὰ σημεῖα Α, Β κεῖνται ἀμφότερα εἰς τὴν μίαν ἀπὸ τὰς περιοχὰς αὐτάς. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ε.

Εἰς τὸ αὐτὸ σχέδιον τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν κεῖται εἰς τὴν μίαν περιοχὴν καὶ τὸ ἄλλο εἰς τὴν ἄλλην, λέγομεν ὅτι κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ε.



Σχ. 25

**Τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ε, λέγεται ἡμιεπίπεδον.**

Ἡ εὐθεῖα ε λέγεται ἀκμὴ τοῦ ἡμιεπιπέδου τούτου.

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἓν ἡμιεπίπεδον ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἀκμῆς ε καὶ ἑνὸς σημείου αὐτοῦ, κειμένου ἐκτὸς τῆς ε. Διὰ νὰ ὀνομάσωμεν ἓν ἡμιεπίπεδον ἀναφέρομεν π ρ ῶ τ ο ν τὴν ἀκμὴν καὶ ἔπειτα ἓν σημεῖον αὐτοῦ. Π.χ. εἰς τὸ σχέδιον 25, διακρίνομεν τὸ ἡμιεπίπεδον (ε, Α) ἢ (ε, Β) ἢ (ε, Δ) καὶ τὸ ἡμιεπίπεδον (ε, Γ).

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἐννοοῦμεν ὅτι, ἐὰν εἰς ἐπίπεδον Π δοθῇ μία εὐθεῖα ε, τότε ὁρίζονται τρία σημειοσύνολα, ὑποσύνολα τοῦ Π. Ἡ εὐθεῖα ε (τὸ ἓν) καὶ τὰ δύο ἡμιεπίπεδα τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀκμὴν τὴν ε (τὰ δύο ἄλλα). Τὰ δύο ὡς ἄνω ἡμιεπίπεδα λέγονται ἀ ν τ ί θ ε τ α μεταξύ των.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

33. Ἡ ἕνωσις ἑνὸς ἡμιεπιπέδου καὶ τῆς ἀκμῆς αὐτοῦ λέγεται κ λ ε ι σ τ ὸ ν ἡ μ ι ε π ί π ε δ ο ν. Ἐὰν ὀνομάσωμεν $K_1$, $K_2$ τὰ δύο κλειστὰ ἡμιεπίπεδα, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἐπὶ ἐπιπέδου Π ὑπὸ μιᾶς εὐθείας ε αὐτοῦ, νὰ εὕρετε τὰ σύνολα $K_1 \cup K_2$ καὶ $K_1 \cap K_2$.

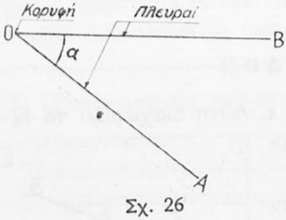
34. Εἰς ἓν ἐπίπεδον χαράξατε δυὸ εὐθείας τεμνομένας καὶ σημειώσατε τὰ 4 ἡμιεπίπεδα τὰ ὁποῖα ὁρίζουν αὗται.

## 15. Η ΓΩΝΙΑ

### 15. 1. Ὁρισμὸς

Χαράσσομεν δύο ἡμιευθείας ΟΑ, ΟΒ μὲ κοινὴν ἀρχὴν Ο, σχ. 26. Σχηματίζεται τότε μία γωνία.

Γενικῶς: **Ἕκαστον ζεῦγος ἡμιευθειῶν μὲ κοινὴν ἀρχὴν λέγεται γωνία.**



Σχ. 26

Αἱ δύο ἡμιευθεῖαι καλοῦνται π λ ε υ ρ α ὶ τῆς γωνίας ἡ δὲ κοινὴ ἀρχὴ αὐτῶν κ ο ρ υ φ ή.

Π.χ. ἡ γωνία τοῦ σχ. 26 ἔχει κορυφὴν τὸ σημεῖον Ο καὶ πλευρὰς τὰς ἡμιευθείας ΟΑ, ΟΒ.

Ὀνομάζομεν μίαν γωνίαν:

α) Μὲ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς της.

β) Μὲ τρία γράμματα· ἐξ αὐτῶν τὸ μὲν μ ε σ α ῖ ο ν εἶναι τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς τὰ δὲ ἄλλα δύο εἶναι γράμματα δύο σημείων: Ἓν ἀπὸ ἑκάστην πλευρὰν αὐτῆς. Π.χ. εἰς τὸ σχ. 26 εἰκονίζεται ἡ γωνία Ο ἢ γωνία ΑΟΒ ἢ ΒΟΑ. Ἢ συμβολικῶς: $\widehat{O}$ ἢ $A\widehat{O}B$ ἢ $B\widehat{O}A$

γ) Μὲ ἓν μικρὸν γράμμα τοποθετούμενον πλησίον τῆς κορυφῆς. Π.χ. διὰ τὴν γωνίαν τοῦ σχ. 26 λέγομεν: γωνία α ἢ συμβολικῶς $\widehat{\alpha}$.

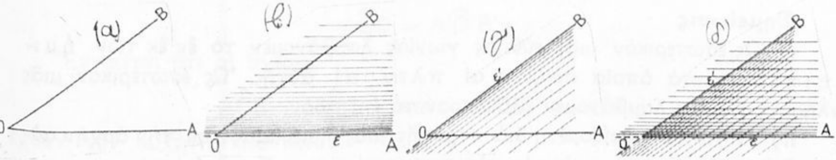
### 15. 2. Ἐσωτερικόν, ἐξωτερικὸν γωνίας. Κυρτή, μὴ κυρτὴ γωνία

Εἰς τὴν γωνίαν ΑΟΒ, σχ. 27α, θεωροῦμεν:

ι) Τὸ ἡμιεπίπεδον (ε, Β). Ἤτοι τὸ ἡμιεπίπεδον τῆς εὐθείας ε, (τῆς πλευρᾶς ΟΑ) καὶ ἑνὸς σημείου Β τῆς πλευρᾶς ΟΒ, σχ. 27β.

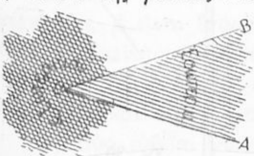
ιι) Τὸ ἡμιεπίπεδον (ε′, Α). Ἤτοι τὸ ἡμιεπίπεδον τῆς εὐθείας ε′, (τῆς πλευρᾶς ΟΒ) καὶ ἑνὸς σημείου Α τῆς πλευρᾶς ΟΑ, σχ. 27γ.

ιιι) Τὴν τομὴν τῶν δύο αὐτῶν ἡμιεπιπέδων (ε, Β)∩(ε′,Α), σχ. 27δ. (Δι-




Σχ. 27

πλογραμμοσκιασμένον μέρος τοῦ ἐπιπέδου). Ἡ τομὴ αὕτη λέγεται ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ὸ ν τῆς γωνίας ΑΟΒ. Τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας, οὔτε εἰς τὰς πλευρὰς αὐτῆς, λέγεται ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ὸ ν τῆς γωνίας ΑΟΒ. Ἡ ἕνωσις τῆς γωνίας ΑΟΒ καὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ αὐτῆς λέγεται κ υ ρ τ ὴ γ ω ν ί α ΑΟΒ. Ἡ ἕνωσις τῆς γωνίας ΑΟΒ καὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ αὐτῆς λέγεται μ ὴ κ υ ρ τ ὴ γωνία ΑΟΒ.




Σχ. 28

Ὥστε : **Ἑκάστη γωνία ὁρίζει μίαν κυρτὴν καὶ μίαν μὴ κυρτὴν γωνίαν.**

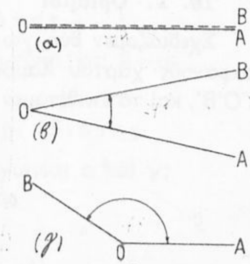
Ἐπειδὴ εἰς τὴν τάξιν αὐτὴν θὰ ἀσχοληθῶμεν κυρίως μὲ κυρτὰς γωνίας, εἰς τὰ ἑπόμενα ὅταν γράφωμεν γωνία ΑΟΒ ἢ $\widehat{AOB}$, θὰ ἐννοοῦμεν τὴν κυρτὴν γωνίαν ΑΟΒ. Εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν θὰ γίνεται εἰδικὴ μνεία.

## 15. 3. Σχηματισμὸς γωνίας διὰ στροφῆς

α) Οἱ δύο δεῖκται τοῦ ὡρολογίου εἰκονίζουν δύο ἡμιευθείας κοινῆς ἀρχῆς Ο, αἱ ὁποῖαι στρέφονται εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν περὶ τὸ Ο. Εἰς ἑκάστην θέσιν ὁρίζουν μίαν κυρτὴν καὶ μίαν μὴ κυρτὴν γωνίαν.

β) Φαντασθῆτε ὅτι δύο ἡμιευθεῖαι ΟΑ, ΟΒ συμπίπτουν, σχ. 29α, ὅπως συμβαίνει ἐνίοτε μὲ τοὺς δείκτας τοῦ ὡρολογίου. Κρατοῦμεν τὴν μίαν σταθεράν, τὴν ΟΑ καὶ στρέφομεν* περὶ τὸ Ο τὴν ΟΒ (προσέχοντες ὥστε νὰ παραμένη αὕτη πάντοτε ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου). Εἰς ἑκάστην θέσιν ἡ ΟΒ μετὰ τῆς ΟΑ ὁρίζει μίαν κυρτὴν καὶ μίαν μὴ κυρτὴν γωνίαν, σχ. 29. Εἰδικῶς:

ι) Εἰς τὸ σχ. 29δ ἡ ΟΒ ἔχει γίνει ἀντίθετος τῆς ΟΑ. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι αἱ δύο ἀντίθετοι ἡμιευθεῖαι ΟΑ, ΟΒ σχηματίζουν ε ὐ θ ε ῖ α ν γ ω ν ί α ν.




Σχ. 29

* Ἡ στροφὴ προφανῶς δύναται νὰ γίνῃ κατὰ δύο φοράς. Κατὰ τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου ἢ κατὰ τὴν ἀντίθετον αὐτῆς. Πρὸς τὸ παρὸν δὲν θὰ λαμβάνωμεν ὑπ᾽ ὄψιν μας κατὰ ποίαν φορὰν ἐγένετο ἡ στροφή.

ιι) Εἰς τὸ σχ. 29στ ἡ ΟΒ ἔχει συμπέσει μὲ τὴν ΟΑ μετὰ ἀπὸ μίαν πλήρη στροφήν. Δι' αὐτὸ λέγομεν αἱ συμπίπτουσαι ἡμιευθεῖαι ΟΑ, ΟΒ σχηματίζουν μίαν π λ ή ρ η γ ω ν ί α ν.

**Σημείωσις**

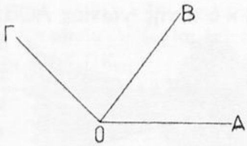
ι) Ὡς ἐσωτερικὸν μιᾶς εὐθείας γωνίας λαμβάνομεν τὸ ἓν ἐκ τῶν ἡ μ ι ε π ι π έ δ ω ν τὰ ὁποῖα ὁρίζουν αἱ π λ ε υ ρ α ὶ αὐτῆς. Ὡς ἐσωτερικὸν μιᾶς πλήρους γωνίας λαμβάνομεν ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον.

ιι) Ἡ γωνία ἡ ὁριζομένη διὰ στροφῆς μιᾶς ἡμιευθείας περὶ τὴν ἀρχὴν αὐτῆς εἶναι πολὺ χρήσιμος εἰς τὴν μέτρησιν περιστροφικῶν κινήσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

35. Νὰ ὀνομάσετε διαφόρους γωνίας ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

36. Χαράξατε δύο τεμνομένας εὐθείας ε,ε' καὶ ἔπειτα χρωματίσατε τὰ 4 ἡμιεπίπεδα τὰ ὁποῖα ὁρίζουν αὗται (ἕκαστον μὲ διαφορετικὸν χρῶμα). Ποῖα εἶναι τὰ ἐσωτερικὰ τῶν τεσσάρων γωνιῶν, τὰς ὁποίας ὁρίζουν αἱ δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι;



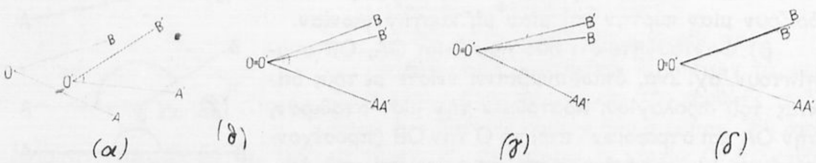

Σχ. 30

37. Ὀνομάσατε ὅλας τὰς κυρτὰς καὶ μὴ κυρτὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ τῶν ἡμιευθειῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ τοῦ παραπλεύρως σχεδίου 30.

## 16. ΙΣΑΙ, ΑΝΙΣΟΙ ΓΩΝΙΑΙ

### 16. 1. Ὁρισμοί

Σχεδιάζομεν δύο γωνίας ΑΟΒ καὶ Α'Ο'Β', σχ. 31α. Ἔπειτα μὲ ἓν φύλλον διαφανοῦς χάρτου λαμβάνομεν τὸ ἀποτύπωμα τῆς μιᾶς, π.χ. τῆς γωνίας Α'Ο'Β', καὶ τὸ ἐπιθέτομεν ἐπὶ τῆς ἄλλης, ὡς δεικνύει τὸ σχ. 31β,γ,δ. Ἤτοι αἱ μὲν




Σχ. 31

δύο πλευραὶ ΟΑ, Ο'Α' νὰ συμπέσουν (ταυτισθοῦν) αἱ δὲ δύο ἄλλαι ΟΒ, Ο'Β' νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὸ ἓν ἀπὸ τὰ δύο ἡμιεπίπεδα, τὰ ὁποῖα ὁρίζει ἡ εὐθεῖα ΟΑ.

Ὑπάρχουν τότε τὰ ἑξῆς τρία ἐνδεχόμενα.

α) Ἡ πλευρὰ Ο'Β' νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΑΟΒ, σχ. 31β. Λέγομεν τότε ὅτι ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι μ ε γ α λ υ τ έ ρ α τῆς γωνίας Α'Ο'Β'.

Γράφομεν δὲ $\widehat{AOB} > \widehat{A'O'B'}$

β) Ἡ πλευρὰ Ο'Β' νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τῆς γωνίας ΑΟΒ, σχ. 31γ. Λέγομεν τότε ὅτι ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι μ ι κ ρ ο τ έ ρ α τῆς γωνίας Α'Ο'Β'.

Γράφομεν τότε $\widehat{AOB} < \widehat{A'O'B'}$.

γ) Ἡ πλευρὰ O'B' νὰ ταυτισθῇ μὲ τὴν πλευρὰν OB, σχ. 31δ. Λέγομεν τότε ὅτι ἡ γωνία A'O'B' εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν AOB καὶ γράφομεν:

$$\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$$

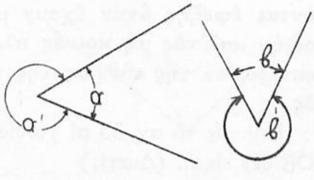
Ἐννοεῖται ὅτι αἱ σχέσεις

$$\widehat{AOB} > \widehat{A'O'B'} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{A'O'B'} < \widehat{AOB}$$

ἔχουν τὴν αὐτὴν σημασίαν.

## 16. 2. Παρατηρήσεις

α) Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν δύο κυρταὶ γωνίαι α, β εἶναι ἴσαι, τότε καὶ αἱ ὑπ' αὐτῶν ὁριζόμεναι μὴ κυρταὶ γωνίαι α', β' ἀντιστοίχως εἶναι ἐφαρμόσιμοι, σχ. 32. Συνεπῶς εἶναι καὶ αὐταὶ ἴσαι.



Σχ. 32

β) Δύο εὐθεῖαι γωνίαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

γ) Ἑκάστη μὴ κυρτὴ γωνία εἶναι μεγαλυτέρα οἱασδήποτε κυρτῆς.

## 16. 3. Ἰδιότητες τῆς ἰσότητος γωνιῶν

α) Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος γωνιῶν ἐννοοῦμεν ὅτι ἑκάστη γωνία εἶναι ἴση πρὸς ἑαυτήν.

$\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}$ Ἀνακλαστικὴ ἰδιότης

β) Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι ἐὰν εἶναι $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\widehat{\beta} = \widehat{\alpha}$.

Ἢ συμβολικῶς:

$\widehat{\alpha} = \widehat{\beta} \Longrightarrow \widehat{\beta} = \widehat{\alpha}$ Συμμετρικὴ ἰδιότης

γ) Ἐὰν $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$ καὶ $\widehat{\beta} = \widehat{\gamma}$ τί συνάγομεν διὰ τὰς γωνίας α καὶ γ;

Εὐκόλως συμπεραίνομεν ὅτι καὶ $\widehat{\alpha} = \widehat{\gamma}$

Ἢ συμβολικῶς:

$(\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$ καὶ $\widehat{\beta} = \widehat{\gamma}) \Longrightarrow \widehat{\alpha} = \widehat{\gamma}$ Μεταβατικὴ ἰδιότης

## 16. 4. Ἰδιότητες τῆς ἀνισότητος γωνιῶν

α) Ἐπειδὴ ἀληθεύει ἡ ἰσότης $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}$ δὲν ἀληθεύουν αἱ ἀνισότητες:

$$\widehat{\alpha} > \widehat{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\alpha} < \widehat{\alpha}$$

β) Ἐὰν εἶναι $\widehat{\alpha} > \widehat{\beta}$ προφανῶς δὲν θὰ εἶναι καὶ $\widehat{\beta} > \widehat{\alpha}$.

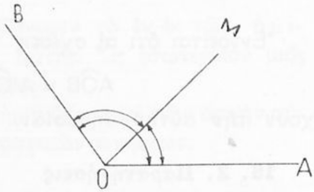
γ) $(\widehat{\alpha} > \widehat{\beta}$ καὶ $\widehat{\beta} > \widehat{\gamma}) \Longrightarrow \widehat{\alpha} > \widehat{\gamma}$

Ὥστε: Ἡ ἀνισότης γωνιῶν ἔχει τὴν μεταβατικὴν ἰδιότητα ἀλλὰ δὲν ἔχει τὴν ἀνακλαστικὴν καὶ τὴν συμμετρικήν.

## 17. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΓΩΝΙΩΝ

### 17. 1. Ἐφεξῆς γωνίαι

Εἰς τὸ σχ. 33 αἱ κυρταὶ γωνίαι ΑΟΜ καὶ ΜΟΒ ἔχουν τὴν πλευρὰν ΟΜ κοινήν, τὰς δὲ πλευρὰς ΟΑ, ΟΒ, ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας τῆς κοινῆς πλευρᾶς ΟΜ. Διὰ τοῦτο λέγονται ἐφεξῆς.



Σχ. 33

**Δύο κυρταὶ γωνίαι τοῦ ἐπιπέδου λέγονται ἐφεξῆς ὅταν ἔχουν μίαν πλευρὰν κοινὴν καὶ τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς αὐτῶν ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας τῆς κοινῆς πλευρᾶς.**

Π.χ. εἰς τὸ σχ. 33 αἱ γωνίαι ΑΟΜ, ΜΟΒ εἶναι ἐφεξῆς ἐνῷ αἱ γωνίαι ΑΟΜ, ΑΟΒ δὲν εἶναι. (Διατί;)

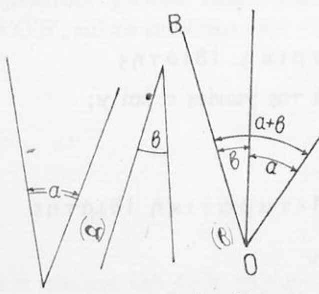
### 17. 2. Ἄθροισμα γωνιῶν.

Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο γωνίας α, β, σχ. 34α, τὰς καθιστῶμεν ἐφεξῆς, σχ. 34β. (Μὲ τὴν βοήθειαν διαφανοῦς χάρτου).

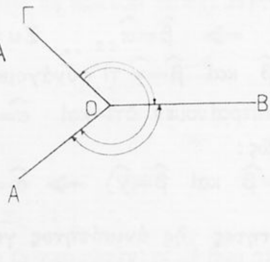
**Ἡ κυρτὴ (ἢ μὴ κυρτὴ) γωνία ΑΟΒ ἡ ὁποία γεννᾶται ὑπὸ μιᾶς ἡμιευθείας ὅταν αὕτη, διαγράφη διαδοχικῶς τὰς ἐφεξῆς κυρτὰς γωνίας α, β καὶ μόνον αὐτάς, λέγεται ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτων.**

Γράφομεν δὲ $\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}=\widehat{AOB}$

Τοιουτοτρόπως εἰς τὸ σχ. 33 τὸ ἄθροισμα τῶν κυρτῶν γωνιῶν ΑΟΜ καὶ ΜΟΒ εἶναι ἡ κυρτὴ γωνία ΑΟΒ, εἰς τὸ σχ. 35 ἄθροισμα τῶν κυρτῶν γωνιῶν ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ εἶναι ἡ μὴ κυρτὴ γωνία ΑΟΓ.



Σχ. 34

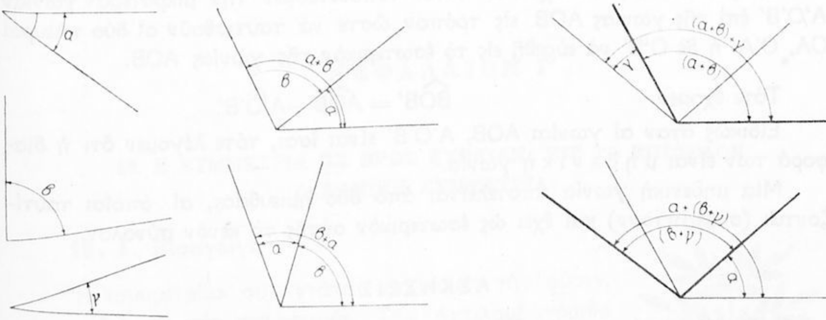


Σχ. 35

**17. 3.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων γωνιῶν, εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων. Εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο προσθέτομεν τὴν τρίτην γωνίαν κ.ο.κ.

### 17. 4. Ἰδιότητες

Μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς φύλλου διαφανοῦς χάρτου δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν ὅτι ἡ πρόσθεσις γωνιῶν εἶναι πρᾶξις μεταθετικὴ καὶ προσεταιριστική.




$\widehat{\alpha}+\widehat{\beta} = \widehat{\beta}+\widehat{\alpha}$ $\qquad$ $(\widehat{\alpha}+\widehat{\beta})+\widehat{\gamma}=\widehat{\alpha}+(\widehat{\beta}+\widehat{\gamma})$

Σχ. 36

## 18. ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΓΩΝΙΩΝ

### 18. 1. Ὁρισμός

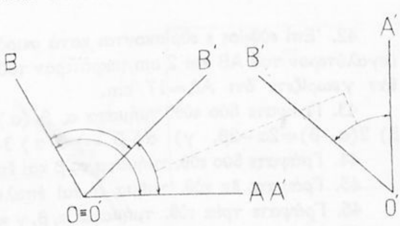
Ἄς ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ σχ. 33. Ἐὰν εἰς τὴν γωνίαν ΑΟΜ προσθέσωμεν τὴν γωνίαν ΜΟΒ θὰ εὕρωμεν τὴν γωνίαν ΑΟΒ. Διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΜΟΒ λέγεται διαφορὰ τῶν γωνιῶν ΑΟΒ καὶ ΑΟΜ.

Γράφομεν δέ:

$\widehat{AOB} - \widehat{AOM} = \widehat{MOB}$ $\qquad$ (1)

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὑπάρχει διαφορὰ

$\widehat{AOB} - \widehat{AOM}$ ἐπειδὴ $\widehat{AOB} > \widehat{AOM}$




Σχ. 37

### 18. 2. 
Παρατηροῦμεν ὅτι: Ἑκάστη ἐκ τῶν ἰσοτήτων

$\widehat{AOB} - \widehat{AOM} = \widehat{MOB}$ καὶ $\widehat{AOM} + \widehat{MOB} = \widehat{AOB}$ ἔχει ὡς συνέπειαν τὴν ἄλλην.

$$\widehat{AOB} - \widehat{AOM} = \widehat{MOB} \implies \widehat{AOM} + \widehat{MOB} = \widehat{AOB}$$

$$\widehat{AOM} + \widehat{MOB} = \widehat{AOB} \implies \widehat{AOB} - \widehat{AOM} = \widehat{MOB}$$

Διὰ τοῦτο γράφομεν:

$$\widehat{AOB} - \widehat{AOM} = \widehat{MOB} \iff \widehat{AOM} + \widehat{MOB} = \widehat{AOB}$$

Γενικῶς δι᾽ ἕκαστον ζεῦγος γωνιῶν $\widehat{\alpha}$ καὶ $\widehat{\beta}$ ὅπου $\widehat{\alpha} > \widehat{\beta}$ ἔχομεν:

$$\widehat{\alpha} - \widehat{\beta} = \widehat{\gamma} \iff \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} = \widehat{\alpha}$$

## 18. 3. Εὕρεσις τῆς διαφορᾶς

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς δύο γωνιῶν ΑΟΒ, Α'Ο'Β', ἐργαζόμεθα ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχ. 37. Ἤτοι τοποθετοῦμεν τὴν μικροτέραν γωνίαν Α'Ο'Β' ἐπὶ τῆς γωνίας ΑΟΒ εἰς τρόπον ὥστε νὰ ταυτισθοῦν αἱ δύο πλευραὶ ΟΑ, Ο'Α' ἡ δὲ Ο'Β' νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΑΟΒ.

Τότε ἔχομεν $\widehat{BOB'} = \widehat{AOB} - \widehat{A'O'B'}$

Εἰδικῶς ὅταν αἱ γωνίαι ΑΟΒ, Α'Ο'Β' εἶναι ἴσαι, τότε λέγομεν ὅτι ἡ διαφορά των εἶναι μ η δ ε ν ι κ ὴ γωνία.

Μία μηδενικὴ γωνία ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἡμιευθείας, αἱ ὁποῖαι ταυτίζονται (συμπίπτουν) καὶ ἔχει ὡς ἐσωτερικὸν αὐτῆς τὸ κενὸν σύνολον.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

38. Πόσας συγκρίσεις χρειάζεσθε διὰ νὰ βεβαιωθῆτε ὅτι τρεῖς γωνίαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι;

39. Χαράξατε τρεῖς γωνίας, ἔπειτα μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαφανοῦς κατατάξατε αὐτὰς κατὰ μέγεθος.

40. Χαράξατε τρεῖς γωνίας $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\gamma}$ καὶ ἔπειτα ἐπαληθεύσατε μὲ αὐτὰς ὅτι $\widehat{\alpha}+(\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}) = (\widehat{\alpha}+\widehat{\gamma})+\widehat{\beta}$.

41. Χαράξατε τρεῖς γωνίας $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\gamma}$, ὅπου $\widehat{\alpha} > \widehat{\beta} > \widehat{\gamma}$ καὶ ἐπαληθεύσατε μὲ αὐτὰς ὅτι $\widehat{\alpha}-\widehat{\gamma} > \widehat{\beta}-\widehat{\gamma}$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

42. Ἐπὶ εὐθείας ε εὑρίσκονται κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ Δ. Εἶναι δὲ τὸ ΒΓ 3 cm μεγαλύτερον τοῦ ΑΒ καὶ 2 cm μικρότερον τοῦ ΓΔ. Νὰ εὕρετε τὰ μήκη τῶν τμημάτων τούτων ἐὰν γνωρίζετε ὅτι ΑΔ = 17 cm.

43. Γράψατε δύο εὐθ. τμήματα α, β ($\alpha > \beta$) καὶ ἐπαληθεύσατε ὅτι α) $2(\alpha+\beta)=2\alpha+2\beta$, β) $2(\alpha-\beta)=2\alpha-2\beta$, γ) $\alpha > \beta \Rightarrow 3\cdot\alpha > 3\cdot\beta$

44. Γράψατε δύο εὐθ. τμήματα α, β καὶ ἔπειτα σχηματίσατε τμήματα ἴσα μὲ $2\alpha+\beta$, $\alpha+2\beta$.

45. Γράψατε ἓν εὐθ. τμῆμα α καὶ ἐπαληθεύσατε ὅτι $2\cdot(3\cdot\alpha)=(2\cdot3)\alpha$.

46. Γράψατε τρία εὐθ. τμήματα α, β, γ καὶ ἐπαληθεύσατε ὅτι $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha+\gamma > \beta+\gamma$

47. Μὲ εὐθ. τμήματα α, β, γ ἐπαληθεύσατε ὅτι $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)=(\gamma+\alpha)+\beta$.

48. Μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς διαφανοῦς νὰ εὕρετε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου.

49. Ὁμοίως ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου.

50. Μὲ κατάλληλα εὐθ. τμήματα α, β, γ ἐπαληθεύσατε ὅτι $\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\beta)-\gamma$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

### 19. Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑΝ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ (ΑΞΩΝΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ)

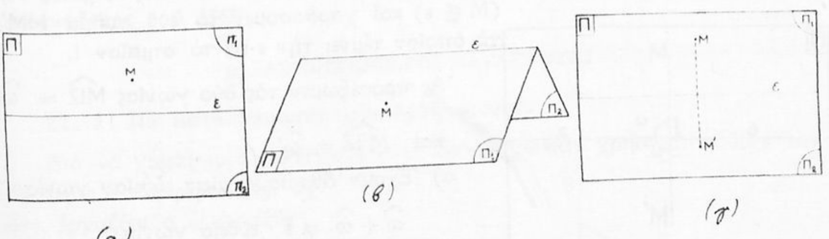
**19. 1. Εἰσαγωγὴ**

Ἡ «συμμετρία» συναντᾶται συχνὰ εἰς τὴν φύσιν, εἰς σχέδια, εἰς τὰς κατασκευάς. Τὴν ἀντιλαμβανόμεθα καθὼς παρατηροῦμεν ἓν φύλλον δένδρου, τὸν σκελετὸν ἑνὸς ζώου, μίαν πεταλούδαν...

**19. 2. Ὁρισμὸς**

Εἰς τὸ ἐπίπεδον Π ἑνὸς φύλλου χάρτου χαράσσομεν μίαν εὐθεῖαν ε. Ὁρίζονται τότε δύο ἀντίθετα ἡμιεπίπεδα: Τὰ $\Pi_1$, $\Pi_2$, σχ. 38α.

Ἂς διπλώσωμεν τὸ ἐπίπεδον Π περὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτοῦ ε, σχ. 38β. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι τὰ δύο ἡμιεπίπεδα $\Pi_1$, $\Pi_2$ συμπίπτουν. Ἕκαστον δὲ σημεῖον




Σχ. 38

τοῦ ἑνὸς ἡμιεπιπέδου, π.χ. τὸ σημεῖον Μ τοῦ $\Pi_1$ συμπίπτει μὲ ἓν σημεῖον Μ' τοῦ $\Pi_2$, σχ. 38β, γ.

Τὸ σημεῖον Μ' λέγεται σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ὸ ν τ ο ῦ σ η μ ε ί ο υ Μ ὡ ς π ρ ὸ ς τ ὴ ν ε ὐ θ ε ῖ α ν ε.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἐννοοῦμεν ὅτι, ἕκαστον σημεῖον τοῦ $\Pi_1$ ἔχει ἓν (καὶ μόνον ἓν) συμμετρικὸν σημεῖον ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε. Τοῦτο εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ $\Pi_2$. Ὁμοίως ἕκαστον σημεῖον τοῦ $\Pi_2$ ἔχει ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε, ἓν (καὶ μόνον ἓν) συμμετρικὸν σημεῖον καὶ εὑρίσκεται τοῦτο ἐπὶ τοῦ $\Pi_1$.

Διὰ τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ε παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ τὴν δίπλωσιν ἑκαστον τούτων μένει ἀκίνητον ἢ ὅπως λέγομεν συμπίπτει (ταυτίζεται) μὲ τὸ συμμετρικόν του.

Ἤτοι: Ἐὰν εἰς ἐπίπεδον Π δοθῇ μία εὐθεῖα ε, τότε μεταξὺ τῶν σημείων τοῦ Π δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν μίαν ἀντιστοιχίαν τοιαύτην ὥστε: Εἰς ἕκαστον σημεῖον Μ τοῦ Π νὰ ἀντιστοιχῇ τὸ συμμετρικὸν Μ′ αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν ε.

Ἡ ἀντιστοιχία αὕτη ὀνομάζεται συμμετρία ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν (ἄξονα) ε. Χάριν συντομίας ἀντὶ «συμμετρία ὡς πρὸς εὐθεῖαν ε» γράφομεν Σ(ε).

Εἰς τὴν δίπλωσιν περὶ τὴν ε ἀντὶ νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ Μ συμπίπτει μὲ τὸ Μ′ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ Μ′ συμπίπτει μὲ τὸ Μ. Ἤτοι ὅτι καὶ τὸ Μ′ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Μ.

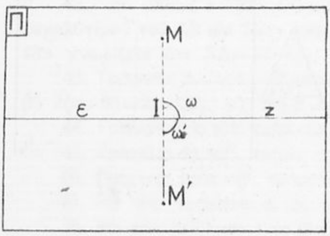
Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι τὰ σημεῖα Μ, Μ′ εἶναι μεταξύ των συμμετρικὰ ἢ ἁπλῶς συμμετρικὰ ἢ ὁμόλογα εἰς τὴν Σ(ε).

**19. 3.** Ἐὰν στρέψωμεν ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον Π περὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτοῦ ε, κατὰ ἡμισείαν στροφήν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἕκαστον σημεῖον Μ αὐτοῦ ἐναλλάσσεται μὲ τὸ συμμετρικόν του Μ′. (Τὸ Μ λαμβάνει τὴν θέσιν τοῦ Μ′ καὶ τὸ Μ′ τοῦ Μ).

## 20. ΕΥΘΕΙΑΙ ΚΑΘΕΤΟΙ. ΟΡΘΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

### 20. 1. Ὀρθὴ γωνία

Εἰς τὴν Σ(ε), σχ. 39 εὑρίσκομεν* τὸ συμμετρικὸν Μ′ ἑνὸς σημείου Μ, (Μ ∉ ε) καὶ χαράσσομεν τὸ εὐθ. τμῆμα ΜΜ′ τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ε εἰς τὸ σημεῖον Ι.



Σχ. 39

Ἂς προσέξωμεν τὰς δύο γωνίας $\widehat{MIZ} = \widehat{\omega}$ καὶ $\widehat{M'IZ} = \widehat{\omega}'$.

α) Ἔχουν ἄθροισμα μίαν εὐθεῖαν γωνίαν.

$$\widehat{\omega} + \widehat{\omega}' = 1 \quad \text{εὐθεῖα γωνία}$$

β) Κατὰ τὴν δίπλωσιν περὶ τὴν ε ἡ κοινὴ πλευρὰ αὐτῶν ΙΖ θὰ μείνῃ ἀκίνητος αἱ δὲ ἄλλαι πλευραὶ ΙΜ, ΙΜ′, θὰ συμπέσουν. (Τὸ Ι θὰ μείνῃ ἀκίνητον, ἐνῶ τὰ Μ καὶ Μ′ θὰ συμπέσουν).

Ἀπὸ τὴν παρατήρησιν αὐτὴν ἐννοοῦμεν ὅτι αἱ γωνίαι ω, ω′ εἶναι ἴσαι.

$$\widehat{\omega} = \widehat{\omega}'$$

Ὥστε: αἱ γωνίαι $\widehat{\omega}$, $\widehat{\omega}'$ ἔχουν ἄθροισμα μίαν εὐθεῖαν γωνίαν καὶ εἶναι ἴσαι.

* Διὰ διπλώσεως περὶ τὴν ε.

Ἑκάστη τούτων λέγεται ὀ ρ θ ὴ γ ω ν ί α

Ἤτοι: **Ὀρθὴ γωνία εἶναι τὸ ἥμισυ μιᾶς εὐθείας γωνίας**

Ἐὰν σκεφθῶμεν ὅτι ὅλαι αἱ εὐθεῖαι γωνίαι εἶναι ἴσαι συμπεραίνομεν ὅτι:

**Ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι.**

**20. 2. Εὐθεῖαι κάθετοι**

Αἱ εὐθεῖαι ΜΜ' καὶ ε ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραὶ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας λέγονται κ ά θ ε τ ο ι μεταξύ των ἢ ἁπλῶς κ ά θ ε τ ο ι. Διὰ νὰ γράψωμεν συντόμως ὅτι δύο εὐθεῖαι δ, δ' εἶναι κάθετοι γράφομεν:

$$\delta \perp \delta' \quad \text{ἢ} \quad \delta' \perp \delta.$$

Ὅταν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται, ἀλλὰ ὄχι καθέτως, λέγομεν ὅτι τέμνονται π λ α γ ί ω ς ἢ ὅτι εἶναι μεταξύ των π λ ά γ ι α ι.

Παραδείγματα εὐθειῶν καθέτων μεταξύ των γνωρίζομεν πολλά. (Π.χ., ἀνὰ δύο συνεχόμεναι ἀκμαὶ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι τμήματα καθέτων εὐθειῶν.

**20. 3.** Ἂς ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ σχ. 39. Κατὰ τὴν δίπλωσιν περὶ τὴν ε εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ συμπέσουν καὶ τὰ τμήματα ΙΜ, ΙΜ'.

Ὥστε: Ἡ ε ὐ θ ε ῖ α ε δ ι χ ο τ ο μ ε ῖ τὸ εὐθ. τμῆμα ΜΜ' καὶ εἶναι κ ά θ ε τ ο ς π ρ ὸ ς τ ὴ ν ε ὐ θ ε ῖ α ν α ὐ τ ο ῦ. Ἢ κατ' ἄλλην ἔκφρασιν: Ἡ εὐθεῖα ε εἶναι κ ά θ ε τ ο ς πρὸς τὸ τμῆμα ΜΜ' εἰς τὸ μ έ σ ο ν Ι αὐτοῦ. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ ε εἶναι ἡ μ ε σ ο κ ά θ ε τ ο ς τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΜ'.

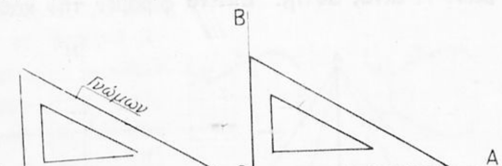
Ὥστε: **Εἰς τὴν Σ(ε) : Μ, Μ' συμμετρικὰ σημαίνει ὅτι ἡ ε εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΜΜ'**

## 21. ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

**21. 1. Νὰ κατασκευασθῇ μία ὀρθὴ γωνία.**

Διὰ νὰ χαράξωμεν πρακτικῶς μίαν ὀρθὴν γωνίαν χρησιμοποιοῦμεν τὸν γ ν ώ μ ο ν α (τρίγωνον), σχ. 40α, ἐργαζόμεθα δὲ ὡς ἑξῆς:

Χαράσσομεν μίαν ἡμιευθεῖαν ΟΑ καὶ ἔπειτα τοποθετοῦμεν τὸν γνώμονα εἰς τρόπον ὥστε: Ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ νὰ ταυτισθῇ μὲ τὸ Ο, καὶ ἡ μία ἀκμὴ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΟΑ. Ἔπειτα μὲ τὴν μίαν χεῖρα μας κρατοῦμεν σταθερῶς τὸν γνώμονα καὶ μὲ τὴν ἄλλην χαράσσομεν τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΒ κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης ἀκμῆς αὐτοῦ, σχ. 40β.



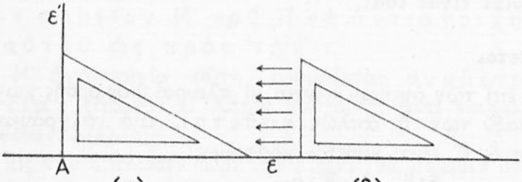
Σχ. 40

Μὲ ὅμοιον τρόπον ἐλέγχομεν ἐὰν μία γωνία εἶναι ὀρθὴ ἢ ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

**21. 2. Νὰ χαραχθῇ κάθετος ἀπὸ σημεῖον Α πρὸς εὐθεῖαν ε**

α) Ἐὰν Α κεῖται ἐπὶ τῆς ε.

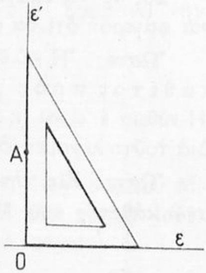
Τοποθετοῦμεν τὸν γνώμονα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου εἰς τρόπον ὥστε ἡ μία ἀκμὴ αὐτοῦ νὰ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς ε, σχ. 41 β. Ἔπειτα μετακινοῦμεν τὸν γνώμονα, προσέχοντες νὰ ἐφαρμόζῃ πάντοτε ἡ ἀκμή του ἐπὶ τῆς ε, μέχρις ὅτου ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας ταυτισθῇ μὲ τὸ σημεῖον Α, σχ. 41α. Εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν χαράσσομεν τὴν εὐθεῖαν ε′ ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἡ μοναδικὴ κάθετος πρὸς τὴν ε εἰς τὸ σημεῖον Α αὐτῆς.



Σχ. 41

β) Ἐὰν τὸ Α κεῖται ἐκτὸς τῆς ε.

Ἐργαζόμεθα ὡς προηγουμένως μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι εἰς τὴν τελικὴν θέσιν τοῦ γνώμονος τὸ Α θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ε′. Τοιουτοτρόπως, εἰς τὸ σχ. 42, ἡ εὐθεῖα ε′ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε καὶ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Α. Τὸ σημεῖον Ο ὅπου ἡ ε′ συναντᾷ τὴν ε λέγεται ὀρθὴ προβολὴ ἢ ἁπλῶς προβολὴ τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε.



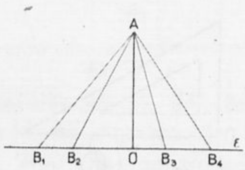
Σχ. 42

**21. 3.** Εἰς ἀνωτέραν τάξιν θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι:

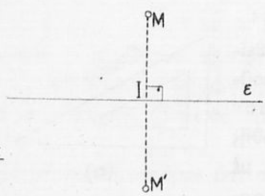
Ἐξ ὅλων τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τοῦ Α, ὑπάρχει μία καὶ μόνον μία κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε.

**21. 4. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθεῖαν**

Εἰς ἓν φύλλον χάρτου χαράσσομεν μίαν εὐθεῖαν ε καὶ λαμβάνομεν ἓν σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτῆς. Ἔπειτα φέρομεν τὴν κάθετον ΑΟ ἐκ τοῦ Α πρὸς τὴν ε καὶ διάφορα ἄλλα εὐθ. τμήματα $AB_1$, $AB_2$, $AB_3$, $AB_4$, ἐκ τοῦ σημείου Α μέχρι τῆς εὐθείας ε. Ἐὰν μὲ τὸν διαβήτην μας συγκρίνωμεν τὸ τμῆμα ΑΟ μὲ τὰ τμήματα $AB_1$, $AB_2$, $AB_3$ καὶ $AB_4$, θὰ διαπιστώσωμεν ὅτι:



Σχ. 43



Σχ. 44

**Τὸ κάθετον τμῆμα ΑΟ εἶναι μικρότερον παντὸς ἄλλου τμήματος ἀπὸ τὸ σημεῖον Α μέχρι τῆς εὐθείας ε.**

Ἤτοι: $AO < AB_1$, $AO < AB_2$, $AO < AB_3 \ldots$

Τὸ μῆκος τοῦ καθέτου τμήματος ΑΟ λέγεται ἀπόστασις τοῦ σημείου Α ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ε.

**21. 5. Νὰ εὑρεθῆ τὸ συμμετρικὸν Μ′ ἑνὸς σημείου Μ εἰς τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς εὐθεῖαν ε.**

α) Ἐὰν Μ κεῖται ἐκτὸς τῆς ε, σχ. 44.

Φέρομεν τὴν κάθετον ἐκ τοῦ Μ πρὸς τὴν ε. Ἔπειτα δὲ ἐπ' αὐτῆς καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου τομῆς Ι μετὰ τῆς ε, λαμβάνομεν ἴσα τμήματα ΙΜ = ΙΜ′.

Τὸ σημεῖον Μ′ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ εἰς τὴν Σ(ε). Διατί;

β) Ἐὰν Μ κεῖται ἐπὶ τῆς ε.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, καθὼς εἴδομεν εἰς τὴν παρ. 19.2, τὸ Μ′ συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ Μ′, Μ≡Μ′.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

51. Χαράξατε μίαν εὐθεῖαν ε καὶ νὰ λάβετε δύο σημεῖα Α, Β. Εἰς τὴν Σ(ε) νὰ εὕρετε τὰ συμμετρικὰ τῶν Α, Β καὶ τοῦ μέσου Μ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Τί παρατηρεῖτε διὰ τὴν θέσιν τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ Μ;

52. Χαράξατε μίαν εὐθεῖαν ε καὶ δύο συμμετρικὰ σημεῖα Α, Α′ ὡς πρὸς αὐτήν. Ἐὰν Ο εἶναι ἓν σημεῖον τῆς ε συγκρίνατε τὰ τμήματα ΟΑ καὶ ΟΑ′.

53. Χαράξατε ἓν εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ δύο εὐθείας δ, δ′ καθέτους πρὸς αὐτὸ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως.

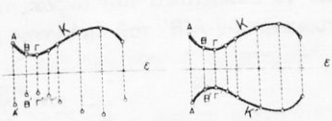
54. Χαράξατε μίαν εὐθεῖαν ε καὶ ἓν εὐθ. τμῆμα ΑΒ. Νὰ εὕρετε, εἰς τὴν Σ(ε), τὰ συμμετρικὰ διαφόρων σημείων τοῦ ΑΒ. Τί παρατηρεῖτε;

55. Κατασκευάσατε ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον.

## 22. ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΝ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑΝ

### 22. 1. Ὁρισμός

Ἂς λάβωμεν ἓν σχῆμα (Κ) καὶ ἂς εὕρωμεν εἰς τὴν Σ(ε) τὰ συμμετρικὰ Α′, Β′, Γ′ . . . τῶν σημείων Α, Β, Γ, . . . αὐτοῦ, σχ. 45. Τὸ σχῆμα (Κ′) τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων τοῦ σχήματος (Κ) καὶ μόνον ἀπὸ αὐτά, λέγεται συμμετρικὸν τοῦ (Κ) εἰς τὴν Σ(ε). Εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ τὸ σχῆμα (Κ) εἶναι συμμετρικὸν τοῦ (Κ′) εἰς τὴν ἰδίαν συμμετρίαν (Κ) $\rightleftarrows$ (Κ′). Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι τὰ σχήματα (Κ) καὶ (Κ′) εἶναι μεταξύ των συμμετρικὰ ἢ ἁπλῶς συμμετρικὰ ἢ ὁμόλογα.



Σχ. 45

### 22. 2. Ἰσότης συμμετρικῶν σχημάτων

Ἂς στρέψωμεν τὸ ἐπίπεδον Π περὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτοῦ ε, κατὰ ἡμισείαν στροφήν. Ἕκαστον σημεῖον τοῦ (Κ) θὰ λάβη τὴν θέσιν τοῦ συμμετρικοῦ του εἰς τὸ σχῆμα (Κ′). Ἐπίσης ἕκαστον σημεῖον τοῦ (Κ′) θὰ λάβῃ τὴν θέσιν τοῦ συμμετρικοῦ του εἰς τὸ (Κ). Ἤτοι τὰ συμμετρικὰ σχήματα (Κ) καὶ (Κ′) εἶναι ἐφαρμόσιμα (ἴσα).

Ὥστε: **Εἰς τὴν Σ(ε) τὰ συμμετρικὰ σχήματα εἶναι ἴσα.**

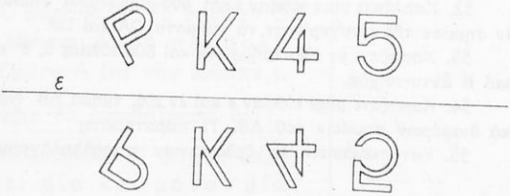
**22. 3. Σπουδαία παρατήρησις.**

Εἶναι εὔκολον νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ἡμισεία στροφὴ τοῦ ἐπιπέδου περὶ τὴν ε ἀναστρέφει* τὸ ἐπίπεδον. Συνεπῶς δύο συμμετρικὰ σχήματα εἰς τὴν Σ(ε) εἶναι ἐφαρμόσιμα μόνον ἔπειτα ἀπὸ ἀναστροφὴν τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν. Π.χ. τὰ σχήματα (Κ) καὶ (Κ′) τοῦ σχ. 45 δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ τὰ φέρωμεν εἰς σύμπτωσιν μὲ ἁπλῆν ὀλίσθησιν. Πρέπει καὶ νὰ ἀναστρέψωμεν τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι τὰ σχήματα (Κ) καὶ (Κ′) εἶναι κατ᾽ ἀναστροφὴν ἴσα.

Ὥστε: **Εἰς τὴν Σ(ε) δύο ὁμόλογα σχήματα εἶναι κατ᾽ ἀναστροφὴν ἴσα.**

## 23. ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΑΠΛΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

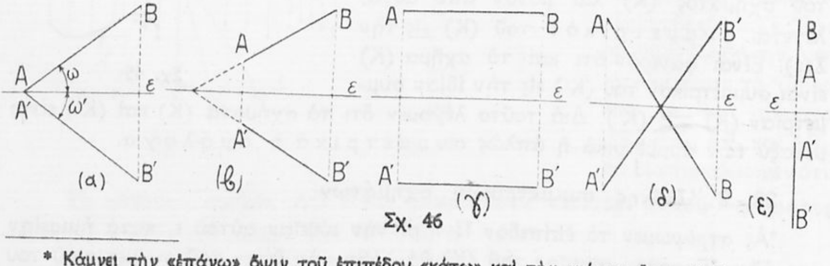
**23. 1.** Παραπλεύρως παραθέτομεν εἰκόνας συμμετρικῶν σχημάτων. Ὅπως βλέπομεν εἶναι σχήματα κατ᾽ ἀναστροφὴν ἴσα.




**23. 2. Συμμετρικὸν εὐθ. τμήματος**

Ὡς εἴδομεν προηγουμένως τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς σχήματος, ὡς πρὸς εὐθεῖαν, εἶναι ἓν σχῆμα ἴσον πρὸς αὐτό.

Συνεπῶς τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς εὐθ. τμήματος ΑΒ, ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε, εἶναι ἓν εὐθ. τμῆμα Α′Β′ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ. Διὰ νὰ τὸ εὕρωμεν δέ, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰ συμμετρικὰ των ἄκρων τοῦ ΑΒ. Τὰ κατωτέρω σχέδια 46 δεικνύουν τὸ συμμετρικὸν Α′Β′ τοῦ τμήματος ΑΒ εἰς πέντε διαφορετικὰς περιπτώσεις.




Σχ. 46

* Κάμνει τὴν «ἐπάνω» ὄψιν τοῦ ἐπιπέδου «κάτω» καὶ τὴν «κάτω» ὄψιν «ἐπάνω».

Είδικῶς εἰς τὸ σχ. 46α παρατηροῦμεν ὅτι ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν μόνον τὸ συμμετρικὸν Β′ τοῦ Β, διότι τὸ Α κεῖται ἐπὶ τῆς ε, συνεπῶς συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικόν του Α′.

Εἰς τὸ σχ. 46β, αἱ εὐθεῖαι τῶν συμμετρικῶν τμημάτων ΑΒ, Α′Β′ συναντοῦν τὴν ε εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.(Διατί; Ποῖον εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου τομῆς τῶν εὐθειῶν ε καὶ ΑΒ;).

Εἰς τὸ σχ. 46γ αἱ εὐθεῖαι τῶν ΑΒ καὶ Α′Β′ εἶναι παράλληλοι μεταξύ των καὶ πρὸς τὴν ε.

Εἰς τὸ σχ. 46δ τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ Α′Β′ συναντοῦν τὴν ε εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Εἰς τὸ σχ. 46ε τὰ ΑΒ, Α′Β′ εἶναι τμήματα τῆς αὐτῆς εὐθείας ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ε. (Διατί;)

Ὥστε: **α) Ἐὰν τὸ ΑΒ κεῖται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ε, τότε καὶ τὸ Α′Β′ κεῖται ἐπίσης ἐπὶ παραλλήλου πρὸς τὴν ε.**

**β) Ἐὰν τὸ ΑΒ τέμνῃ τὴν ε, τότε καὶ τὸ Α′Β′ τέμνει τὴν ε εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.**

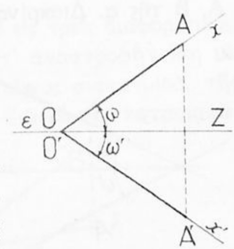
**γ) Ἐὰν τὸ ΑΒ κεῖται ἐπὶ εὐθείας καθέτου πρὸς τὴν ε, τότε καὶ τὸ Α′Β′ κεῖται ἐπὶ τῆς ἰδίας εὐθείας.**

## 23. 3. Συμμετρικὸν ἡμιευθείας Οχ. Διχοτόμος γωνίας

α) Ὅταν Ο κεῖται ἐπὶ τῆς ε:

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν συμμετρικὴν τῆς ἡμιευθείας Οχ ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ συμμετρικὸν τῆς ἀρχῆς Ο καὶ ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου αὐτῆς Α.

Ἀλλὰ ἡ ἀρχὴ Ο εἶναι σημεῖον τῆς ε, συνεπῶς συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικὸν Ο′ αὐτῆς (Ο≡Ο′). Διὰ τοῦτο εὑρίσκομεν μόνον τὸ συμμετρικὸν Α′ ἑνὸς σημείου Α τῆς Οχ καὶ χαράσσομεν ἔπειτα τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΑ′. Αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη.



Σχ. 47

Ἄς προσέξωμεν τὰς γωνίας ω, ω′ τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ συμμετρικαὶ ἡμιευθεῖαι ΟΑ, ΟΑ′ μετὰ τῆς ΟΖ, σχ. 47.

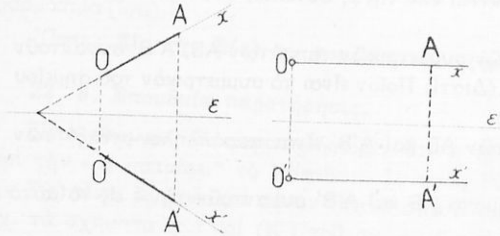
Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ δίπλωσις τοῦ ἐπιπέδου περὶ τὴν ε ἀφήνει ἀκίνητον τὴν ΟΖ καὶ φέρει εἰς σύμπτωσιν τὰς ΟΑ, ΟΑ′. Ἀπὸ τὴν παρατήρησιν αὐτὴν ἐννοοῦμεν ὅτι αἱ ἀνωτέρω γωνίαι ω καὶ ω′ εἶναι ἴσαι.

Ἡ ἡμιευθεῖα ΟΖ, ἡ ὁποία κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΑΟΑ′ καὶ τὴν χωρίζει εἰς δύο ἴσας γωνίας, λέγεται διχοτόμος αὐτῆς.

β) Ὅταν Ο κεῖται ἐκτὸς τῆς ε.

Διακρίνομεν ἰδιαιτέρως δύο περιπτώσεις:

ι) Ἡ Οχ τέμνει τὴν ε καὶ ιι) ἡ Οχ κεῖται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸ



Σχ. 48

αὐτήν, σχ. 48. Καὶ εἰς τὸ δύο περιπτώσεις τὰ ἀρχικ σημεῖα Ο, Ο' τῶν συμμετρι κῶν ἡμιευθειῶν Οχ, Ο'χ' εἰ ναι συμμετρικά.

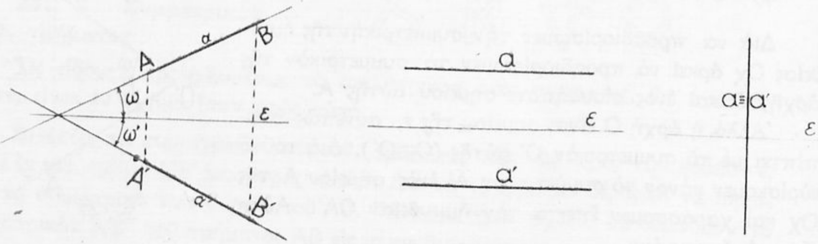
Συνεπῶς διὰ νὰ χαρά ξωμεν τὴν Ο'χ' ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ἐκτὸς τοῦ Ο' κα τὸ συμμετρικὸν Α' ἑνὸς ἄλ- λου σημείου Α, τῆς Οχ. Ἰδι- αιτέρως παρατηροῦμεν ὅτι:

Εἰς τὴν α' περίπτωσιν αἱ εὐθεῖαι Οχ, Ο'χ' συναντοῦν τὴν ε εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Εἰς τὴν β' περίπτωσιν αἱ συμμετρικαὶ ἡμιευθεῖαι Οχ, Ο'χ' εἶναι παράλληλοι* μεταξύ των καὶ πρὸς τὴν ε, κεῖνται δέ, πρὸς τὸ αὐτὸ ἡμιεπίπεδον ἀκμῆς ΟΟ' (ὁμόρροποι).

### 23. 4. Συμμετρικὸν εὐθείας α

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν συμμετρικὴν α' τῆς εὐθείας α, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν δύο οἱαδήποτε σημεῖα αὐτῆς. Ἤτοι τὰ συμμετρικὰ Α', Β' δύο τυχόντων σημείων Α, Β τῆς α. Διακρίνομεν ἰδιαιτέρως τέσσαρας περιπτώσεις:



Σχ. 49

α) Ὅταν ἡ α τέμνῃ τὴν ε.

Τότε αἱ συμμετρικαὶ εὐθεῖαι α, α' συναντοῦν τὴν ε εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ σχηματίζουν ἴσας γωνίας ω=ω', μὲ αὐτήν, σχ. 49α.

β) Ὅταν ἡ α εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε.

Τότε αἱ συμμετρικαὶ εὐθεῖαι α, α' εἶναι παράλληλοι μεταξύ των καὶ πρὸς τὴν ε. (Διατί; Ἐὰν ἡ α' ἔτεμνε τὴν ε εἰς ἓν σημεῖον Α, ποῖον θὰ ἦτο τὸ συμ-

* Δύο ἡμιευθεῖαι εἶναι παράλληλοι μεταξύ των ὅταν κεῖνται ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν.

μετρικὸν αὐτοῦ . . .). Ἐὰν διπλώσωμεν δὲ τὸ ἐπίπεδον περὶ τὴν ε θὰ διαπιστώσωμεν ὅτι ἡ ταινία* τῶν παραλλήλων α καὶ ε θὰ ἔλθῃ εἰς σύμπτωσιν μὲ τὴν ταινίαν τῶν παραλλήλων ε καὶ α'.

Ἤτοι: Ἡ ε χωρίζει τὴν ταινίαν τῶν παραλλήλων α καὶ α' εἰς δύο ἴσας (ἐφαρμοσίμους) ταινίας.

γ) Ὅταν $\alpha \perp \varepsilon$

Παρατηροῦμεν τότε ὅτι ἕκαστον σημεῖον τῆς α ἔχει τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ἐπὶ τῆς α. Ἤτοι ἡ α συμπίπτει μὲ τὴν συμμετρικήν της ($\alpha \equiv \alpha'$).

δ) Ὅταν $\alpha \equiv \varepsilon$

Τότε ἕκαστον σημεῖον τῆς α συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικόν του. Ἤτοι ἡ α ταυτίζεται μὲ τὴν συμμετρικήν της ($\alpha \equiv \alpha'$).

Ὥστε: **Εἰς τὴν Σ(ε) τὸ συμμετρικὸν μιᾶς εὐθείας α εἶναι μία εὐθεῖα α' καὶ ἐάν:**

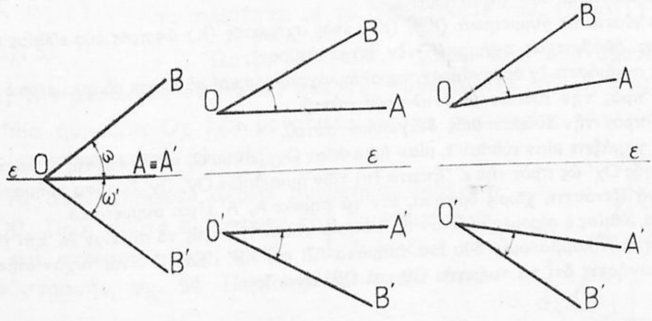
**α) Ἡ α τέμνῃ τὴν ε καὶ ἡ α' τέμνει τὴν ε εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.**

**β) Ἡ α εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε καὶ ἡ α' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε.**

**γ) Ἡ α εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ε ἢ κεῖται ἐπ' αὐτῆς, τότε ἡ α' συμπίπτει μὲ τὴν α.**

### 23. 5. Συμμετρικὸν γωνίας

Εἰς τὸ σχ. 50 φαίνεται τὸ συμμετρικὸν γωνίας ΑΟΒ εἰς τρεῖς διαφορετικὰς περιπτώσεις. Εἶναι ὡς ἀνεμένετο, μία γωνία Α'Ο'Β' κατ' ἀναστροφὴν ἴση μὲ αὐτήν, ἔχει δὲ τὴν κορυφὴν καὶ τὰς πλευρὰς ἀντιστοίχως συμμετρικὰ τῆς κορυφῆς καὶ τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας. Συνεπῶς διὰ νὰ τὴν κατασκευάσωμεν ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ συμμετρικὸν τῆς κορυφῆς Ο καθὼς καὶ τὰ συμμετρικὰ τῶν πλευρῶν ΟΑ, ΟΒ.



Σχ. 50

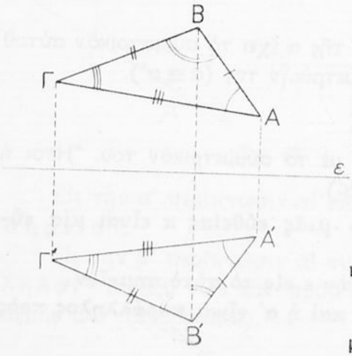
---

* Ταινία δύο παραλλήλων λέγεται τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον περικλείεται ὑπ' αὐτῶν.

## 23. 6. Συμμετρικὸν τριγώνου

Χαράσσομεν ἓν τρίγωνον ΑΒΓ. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ εἰς τὴν Σ(ε) εὑρίσκομεν τὰ συμμετρικὰ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ, τὰ Α' Β', Γ' ἀντιστοίχως.

Τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὴν Σ(ε) (Διατί;). Ἡ δίπλωσις περὶ τὴν ε φέρει εἰς σύμπτωσιν τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα, συνεπῶς φέρει εἰς σύμπτωσιν τὰς γωνίας καὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ἑνὸς μὲ τὰς ὁμολόγους πρὸς αὐτὰς γωνίας καὶ πλευρὰς τοῦ ἄλλου:



Σχ. 51

Ἤτοι εἰς τὸ σχ. 51 ἔχομεν:

$$\mathrm{A}=\widehat{\mathrm{A}}', \quad \widehat{\mathrm{B}}=\widehat{\mathrm{B}}', \quad \widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}'$$

καὶ $\quad \mathrm{AB}=\mathrm{A'B'} \quad \mathrm{B\Gamma}=\mathrm{B'\Gamma'}, \quad \mathrm{\Gamma A}=\mathrm{\Gamma' A'}$

Γενικῶς διὰ δύο συμμετρικὰ εὐθ. σχήματα (Κ), (Κ') δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

**Ὅταν δύο εὐθ. σχήματα (Κ), (Κ') εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς εὐθεῖαν τότε τὰ ὁμόλογα στοιχεῖα αὐτῶν εἶναι ἴσα.**

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

56. Νὰ εὕρετε τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς εὐθ. τμήματος ΑΒ ὡς πρὸς εὐθεῖαν ε κάθετον πρὸς αὐτὸ εἰς τὸ Α.

57. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συμμετρικὴ μιᾶς ἡμιευθείας Οχ ὡς πρὸς εὐθεῖαν ε κάθετον πρὸς τὴν εὐθεῖαν τῆς Οχ. (Διακρίνατε δύο περιπτώσεις).

58. Νὰ εὕρετε τὰ συμμετρικὰ (Κ'), (Κ'') ἑνὸς σχήματος (Κ) ὡς πρὸς δύο εὐθείας ε, ε'. Τί παρατηρεῖτε; (Λάβετε ὡς σχῆμα (Κ) ἓν τετράπλευρον).

59. Νὰ σχεδιάσετε ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ νὰ εὕρετε τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ:
α) Ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν μιᾶς πλευρᾶς αὐτοῦ.
β) Ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν μιᾶς διαγωνίου αὐτοῦ.

60. Νὰ χαράξετε μίαν εὐθεῖαν ε, μίαν ἡμιευθεῖαν Οχ, (ὅπου Ο, κεῖται ἐπὶ τῆς ε) καὶ τὴν συμμετρικὴν αὐτῆς Οχ' ὡς πρὸς τὴν ε. Ἔπειτα ἐπὶ τῶν ἡμιευθειῶν Οχ, Οχ' δύο ἴσα τμήματα ΟΑ = = ΟΑ' καὶ νὰ ἐξετάσετε, χωρὶς ὄργανα, ἐὰν τὰ σημεῖα Α, Α' εἶναι συμμετρικά.

61. Ἐπὶ εὐθείας ε φέρομεν κάθετον δ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ε εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἐπὶ τῆς δ καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ Α λαμβάνομεν δύο ἴσα τμήματα ΑΒ καὶ ΑΒ'. Ἐὰν Ο εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ε νὰ δικαιολογήσετε ὅτι τὰ τμήματα ΟΒ καὶ ΟΒ' εἶναι ἴσα.

## 24. ΑΞΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

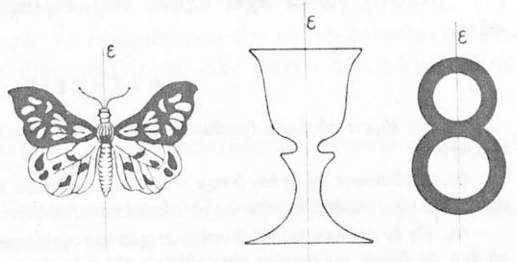
### 24. 1. Ὁρισμός

Γνωρίζομεν ὅτι ἐὰν μία εὐθεῖα δ εἶναι κάθετος πρὸς εὐθεῖαν ε, τότε εἰς τὴν Σ(ε) ἡ δ συμπίπτει μὲ τὴν συμμετρικήν της δ' (23.4.). Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα δ ἔχει τὴν εὐθεῖαν ε ἄξονα συμμετρίας.

Γενικῶς: **Ἐὰν εἰς τὴν Σ(ε) ἓν σχῆμα (Κ) συμπίπτῃ μὲ τὸ συμμετρικόν του (Κ′), τότε λέγομεν ὅτι τὸ σχῆμα (Κ) ἔχει τὴν εὐθεῖαν ε ἄξονα συμμετρίας.**

### 24. 2. Παραδείγματα

α) Τὰ σχήματα τοῦ σχ. 52 ἔχουν ἄξονα συμμετρίας.




Σχ. 52

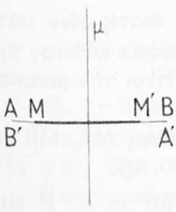
β) Μία εὐθεῖα δ ἔχει ἑκάστην κάθετον πρὸς αὐτὴν ἄξονα συμμετρίας.

Ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὸν ἑαυτόν της, ἡ δ συμπίπτει μὲ τὴν συμμετρικήν της. $\delta \equiv \delta'$.

Ἤτοι: **Ἑκάστη εὐθεῖα ἔχει ἀπείρους ἄξονας συμμετρίας· τὸν ἑαυτόν της καὶ πᾶσαν κάθετον πρὸς αὐτήν.**

γ) Ἂς εὕρωμεν τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς εὐθ. τμήματος ΑΒ ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον μ αὐτοῦ, σχ. 53.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν Σ(μ) τὰ σημεῖα Α καὶ Β εἶναι ὁμόλογα (διατί;) Ἀλλὰ καὶ ἕκαστον σημεῖον Μ τοῦ ΑΒ ἔχει τὸ ὁμόλογόν του Μ′ ἐπὶ τοῦ ΑΒ. Ἤτοι εἰς τὴν Σ(μ) τὸ τμῆμα ΑΒ συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικόν του. Μὲ ἄλλους λόγους τὸ ΑΒ ἔχει τὴν μεσοκάθετον αὐτοῦ μ ἄξονα συμμετρίας.



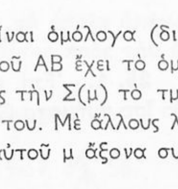

Σχ. 53

Ἐξ ἄλλου καὶ εἰς τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ ΑΒ τὸ τμῆμα τοῦτο συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικόν του. (Διατί);

Ὥστε: **Ἓν εὐθ. τμῆμα ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας, τὴν μεσοκάθετον αὐτοῦ καὶ τὴν εὐθεῖαν ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται.**

δ) Μία ἡμιευθεῖα Οχ ἔχει μοναδικὸν ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεῖαν ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται αὕτη (Διατί;)

ε) Ἂς ἀναζητήσωμεν ἄξονα συμμετρίας μιᾶς γωνίας ΑΟΒ. Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὴν διχοτόμον* αὐτῆς ΟΖ καὶ στρέφομεν περὶ αὐτὴν τὸ ἐπίπεδον κατὰ ἡμισείαν στροφήν, σχ. 54. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι:




Σχ. 54



α) Ἡ διχοτόμος ΟΖ μένει ἀκίνητος.

β) Αἱ πλευραὶ ΟΑ, ΟΒ ἐναλλάσσονται. (Ἑκάστη τούτων λαμβάνει τὴν θέσιν τῆς ἄλλης).

* Ἐπὶ τοῦ παρόντος εὑρίσκομεν τὴν διχοτόμον, ἐὰν διπλώσωμεν τὸ ἐπίπεδον τῆς γωνίας εἰς τρόπον ὥστε ἑκάστη πλευρὰ αὐτῆς νὰ ἔλθῃ εἰς σύμπτωσιν μὲ τὴν ἄλλην.

Ἤτοι εἰς τὴν Σ(ε) ἡ γωνία ΑΟΒ συμπίπτει μὲ τὴν συμμετρικήν της.

Συμπέρασμα :

**Ἑκάστη γωνία ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεῖαν τῆς διχοτόμου αὐτῆς.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

62. Νὰ εὕρετε σύμβολα (ἀριθμούς, γράμματα) τὰ ὁποῖα ἔχουν ἕνα ἢ περισσοτέρους ἄξονας συμμετρίας.

63. Σχεδιάσατε ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ μὲ διπλώσεις προσπαθήσατε νὰ εὕρετε ἄξονας συμμετρίας αὐτοῦ. Τὸ αὐτὸ ἐπαναλάβατε καὶ εἰς ἓν τετράγωνον.

64. Εἰς ἓν φύλλον τετραγωνισμένου χάρτου σχεδιάσατε ἓν εὐθύγραμμον σχῆμα, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ ὡς ἄξονα συμμετρίας μίαν εὐθεῖαν τῆς ἐκλογῆς σας.

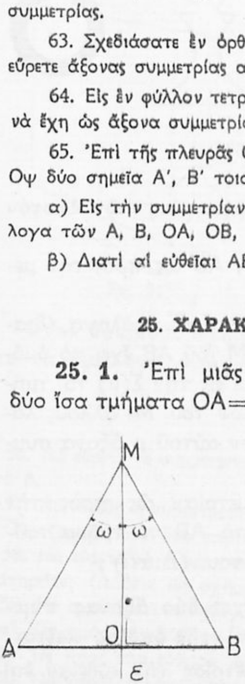
65. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Οχ γωνίας χΟψ λαμβάνομεν δύο σημεῖα Α, Β καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Οψ δύο σημεῖα Α′, Β′ τοιαῦτα ὥστε : ΟΑ=ΟΑ′, ΟΒ=ΟΒ′.

α) Εἰς τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας νὰ εὕρετε τὰ ὁμόλογα τῶν Α, Β, ΟΑ, ΟΒ, ΑΑ′, ΑΒ′, Α′Β.

β) Διατί αἱ εὐθεῖαι ΑΒ′ καὶ Α′Β τέμνονται ἐπὶ τῆς διχοτόμου;

## 25. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΣ ΤΗΣ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΥ

**25. 1.** Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν σημεῖον Ο καὶ ἑκατέρωθεν αὐτοῦ δύο ἴσα τμήματα ΟΑ=ΟΒ, σχ. 55. Ἔπειτα φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ε κάθετον πρὸς τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ο αὐτῆς. Ἤτοι τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος ΑΒ.




Σχ. 55

Ἂς συγκρίνωμεν τὰς ἀποστάσεις ΜΑ, ΜΒ ἑνὸς σημείου Μ τῆς ε ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ ΑΒ.

Εἰς τὴν Σ(ε) παρατηροῦμεν ὅτι τὰ Α, Β εἶναι μεταξύ των ὁμόλογα ἐνῶ τὸ Μ εἶναι ὁμόλογον πρὸς ἑαυτό. Συνεπῶς καὶ τὰ τμήματα ΜΑ, ΜΒ, εἶναι ὁμόλογα καὶ ἴσα.

ΜΑ=ΜΒ

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὅπως εἰργάσθημεν μὲ τὸ σημεῖον Μ εἶναι δυνατὸν νὰ ἐργασθῶμεν μὲ ὁποιοδήποτε ἄλλο σημεῖον τῆς ε.

Ἤτοι: Μ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΑΒ $\Longrightarrow$ ΜΑ=ΜΒ (1)

**25. 2.** Ἂς λάβωμεν μὲ τὸν διαβήτην μας ἓν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου, τοιοῦτον ὥστε ΜΑ=ΜΒ, καὶ ἂς φέρωμεν τὴν διχοτόμον ΜΟ τῆς γωνίας ΑΜΒ, σχ. 55.

Εἰς τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΜΟ γνωρίζομεν ὅτι αἱ πλευραὶ ΜΑ, ΜΒ τῆς γωνίας ΑΜΒ εἶναι ὁμόλογοι.

Ἤτοι : Εἰς τὴν δίπλωσιν περὶ τὴν ΜΟ αἱ πλευραὶ ΜΑ, ΜΒ θὰ συμπέσουν. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ΜΑ=ΜΒ, θὰ συμπέσουν καὶ τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι καὶ τὰ Α, Β εἶναι ὁμόλογα. Συνεπῶς ἡ εὐθεῖα ΜΟ=ε εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ.

Ὥστε: ΜΑ=ΜΒ $\Longrightarrow$ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΑΒ. (2)

Μὲ τὰ ὄργανά σας δύνασθε νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι εἰς τὸ ἐπίπεδον ὁποιοδήποτε σημεῖον Ν, ἐκτὸς τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΑΒ, ἀπέχει ἄ ν ι σ ο ν ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ ΑΒ.

**25. 3.** Αἱ ἀνωτέρω προτάσεις διὰ τὴν μεσοκάθετον διατυπώνονται ὁμοῦ ὡς ἑξῆς:

**Εἰς τὸ ἐπίπεδον τὰ σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου πρὸς εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ μόνον αὐτὰ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτοῦ.**

Ἢ συμβολικῶς:

| |
|---|
| ΜΑ=ΜΒ $\Longleftrightarrow$ Μ κεῖται εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ ΑΒ |

Μία ἄλλη διατύπωσις τῆς ἰδίας προτάσεως εἶναι ἡ ἀκόλουθος:

**Ὁ γεωμετρικὸς τόπος* τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ δύο σημεῖα Α καὶ Β αὐτοῦ, εἶναι ἡ μεσοκάθετος πρὸς τὴν ΑΒ.**

## 26. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΚΑΘΕΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

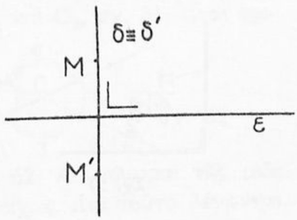
**26. 1.** Χαράσσομεν δύο εὐθείας δ, ε καθέτους μεταξύ των, σχ. 56.

Π ο ῖ ο ν ε ἶ ν α ι τὸ σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ὸ ν τ ῆ ς δ ε ἰ ς τ ὴ ν Σ(ε);

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ δ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ε. Ἄρα συμπίπτει μὲ τὴν συμμετρικήν της (δ≡δ').

Ὥστε: **Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι μεταξύ των, τότε ἑκάστη τούτων συμπίπτει μὲ τὴν συμμετρικήν της εἰς τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὴν ἄλλην.**

Ἢ συμβολικῶς: Εἰς τὴν Σ(ε): $\delta \perp \varepsilon \Longrightarrow \delta \equiv \delta'$.



Σχ. 56

**26. 2.** Εἰς τὴν Σ(ε) μία εὐθεῖα $\delta \neq \varepsilon$ συμπίπτει μὲ τὴν συμμετρικήν της (δ≡δ'). Π ο ί α ε ἶ ν α ι ἡ θ έ σ ι ς τ ῆ ς δ ὡ ς π ρ ὸ ς τ ὴ ν ε;

Σκεπτόμεθα ὅτι: Ἐφ' ὅσον ἡ δ συμπίπτει μὲ τὴν συμμετρικήν της πρέπει τὸ συμμετρικὸν Μ' τυχόντος σημείου Μ τῆς δ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς δ. Ἀλλὰ ἡ ΜΜ' εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ε. Ἤτοι ἡ δ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ε.

* Ἡ ἔννοια καὶ ὁ ὅρος «γεωμετρικὸς τόπος» ὀφείλεται εἰς τὸν διάσημον Ἕλληνα φιλόσοφον καὶ μαθηματικὸν τῆς ἀρχαιότητος Πλάτωνα.

Ὥστε : **Ἐὰν εἰς τὴν Σ(ε) μία εὐθεῖα δ $\neq$ ε συμπίπτῃ μὲ τὴν συμμετρικήν της, τότε αἱ εὐθεῖαι δ καὶ ε εἶναι κάθετοι μεταξύ των.**

Ἤ συμβολικῶς : Εἰς τὴν Σ(ε) : $\delta \equiv \delta' \Longrightarrow \delta \perp \varepsilon$ (2)

**26. 3.** Αἱ συνεπαγωγαὶ (1) καὶ (2) γράφονται ὁμοῦ ὡς ἑξῆς :

$$\boxed{\text{Εἰς τὴν } \Sigma(\varepsilon) : \delta \perp \varepsilon \iff \delta \equiv \delta', \quad \delta \neq \varepsilon}$$

**Ἵνα εἰς τὴν Σ(ε) μία εὐθεῖα δ$\neq$ε συμπίπτῃ μὲ τὴν συμμετρικήν της, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ε.**

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

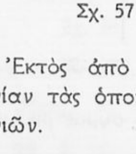
66. Ἐὰν Μ, Μ′ εἶναι ἓν ζεῦγος σημείων συμμετρικῶν ὡς πρὸς εὐθεῖαν ε καὶ Ν ἓν σημεῖον τῆς ε, τί συνάγετε διὰ τὰ τμήματα ΝΜ καὶ ΝΜ′;

67. Ἐὰν τὸ σημεῖον Ν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας ε, τί συνάγετε διὰ τὰ τμήματα ΝΜ καὶ ΝΜ′;

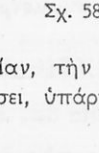
68. Χαράξατε μίαν εὐθεῖαν ε καὶ ἐκ σημείου Μ ἐκτὸς τῆς ε φέρατε τὴν κάθετον ΜΟ πρὸς αὐτήν. Ἔπειτα φέρατε ἐκ τοῦ Μ δύο πλαγίας πρὸς τὴν ε. Εἰς ποίαν περίπτωσιν τὰ τμήματα τῶν πλαγίων ἀπὸ τὸ Μ μέχρι τῆς ε εἶναι ἴσα;

69. Σχηματίσατε μίαν γωνίαν χΟψ καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Οχ σημειώσατε ἓν σημεῖον Α. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Οψ ἓν σημεῖον Β τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἐξ ἴσου ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ο καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α.

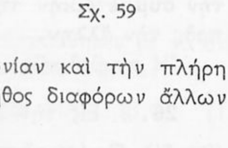
## 27. ΟΞΕΙΑΙ, ΑΜΒΛΕΙΑΙ ΓΩΝΙΑΙ



Σχ. 57



Σχ. 58



Σχ. 59

Ἐκτὸς ἀπὸ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, τὴν εὐθεῖαν γωνίαν καὶ τὴν πλήρη γωνίαν τὰς ὁποίας ἔχομεν γνωρίσει, ὑπάρχει καὶ πλῆθος διαφόρων ἄλλων γωνιῶν.

### 27. 1. Ὀξεῖα γωνία

Ἑκάστη γωνία μικροτέρα τῆς ὀρθῆς λέγεται ὀ ξ ε ῖ α γ ω ν ί α.

### 27. 2. Ἀμβλεῖα γωνία

Ἑκάστη γωνία μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς καὶ μικροτέρα τῆς εὐθείας γωνίας λέγεται ἀ μ β λ ε ῖ α γ ω ν ί α.

## 28. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ, ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ, ΚΑΤΑ ΚΟΡΥΦΗΝ ΓΩΝΙΑΙ

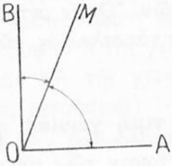
### 28. 1. Συμπληρωματικαί

Χαράσσομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν καὶ φέρομεν μίαν ἡμιευθεῖαν ΟΜ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς, σχ. 60.

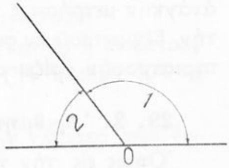
Αἱ γωνίαι ΑΟΜ καὶ ΜΟΒ ἔχουν ἄθροισμα μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἑκάστη τούτων εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς ἄλλης. Ἢ ὅτι εἶναι μεταξύ των συμπληρωματικαί.

Γενικῶς: **Δύο γωνίαι λέγονται συμπληρωματικαὶ ὅταν ἔχουν ἄθροισμα μίαν ὀρθὴν γωνίαν**



Σχ. 60



Σχ. 61

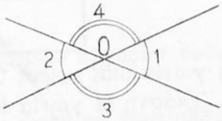
### 28. 2. Παραπληρωματικαί

Εἰς τὸ σχ. 61 αἱ γωνίαι $O_1$ καὶ $O_2$ ἔχουν ἄθροισμα μίαν εὐθεῖαν γωνίαν. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἑκάστη τούτων εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἄλλης ἢ ὅτι εἶναι μεταξύ των παραπληρωματικαί.

Γενικῶς: **Δύο γωνίαι λέγονται παραπληρωματικαὶ ὅταν ἔχουν ἄθροισμα μίαν εὐθεῖαν γωνίαν.**

### 28. 3. Παρατηρήσεις

Εἰς τὰ σχήματα 60, 61 αἱ γωνίαι ἐκτὸς τοῦ ὅτι εἶναι συμπληρωματικαὶ ἢ παραπληρωματικαὶ εἶναι καὶ ἐφεξῆς. Ἤτοι αἱ γωνίαι ΑΟΜ καὶ ΜΟΒ, σχ. 60, εἶναι ἐφεξῆς συμπληρωματικαὶ ἐνῷ αἱ γωνίαι $O_1$ καὶ $O_2$, σχ. 61, εἶναι ἐφεξῆς παραπληρωματικαί.



σχ. 62

### 28. 4. Κατὰ κορυφὴν γωνίαι

Ἂς προσέξωμεν τὰς γωνίας $O_1$, $O_2$ τοῦ σχ. 62. Αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι ἀντίθετοι τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης ἀντιστοίχως. Διὰ τοῦτο λέγονται κατὰ κορυφὴν γωνίαι.

Ὥστε: **Δύο γωνίαι λέγονται κατὰ κορυφὴν ἐὰν αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι ἡμιευθεῖαι ἀντίθετοι τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.**

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, εἰς τὸ αὐτὸ σχέδιον καὶ αἱ γωνίαι $O_3$, $O_4$ εἶναι κατὰ κορυφήν.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

70. Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ὀργάνων σας χαράξατε μίαν ὀξεῖαν γωνίαν καὶ ἔπειτα μίαν συμπληρωματικὴν καὶ μίαν παραπληρωματικὴν αὐτῆς.

71. Εἶναι δυνατὸν δύο ὀξεῖαι γωνίαι ἢ δύο ἀμβλεῖαι γωνίαι νὰ εἶναι παραπληρωματικαί;

72. Δύο παραπληρωματικαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι. Τί συμπεραίνετε δι' ἑκάστην τούτων;

73. Χαράξατε δύο εὐθείας τεμνομένας καὶ εὕρετε ὅλα τὰ ζεύγη τῶν παραπληρωματικῶν γωνιῶν τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν εἰς τὸ σχέδιον αὐτό.

74. Διατὶ ὅταν δύο γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαὶ τῆς αὐτῆς γωνίας εἶναι ἴσαι; Μὲ τὴν βοήθειαν τούτου ἀποδείξατε ὅτι δύο κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

## 29. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΓΩΝΙΩΝ

**29. 1.** Εἰς τὰς κατασκευάς, εἰς τοὺς ὑπολογισμούς, εἰς τὴν τεχνικὴν ἔχομεν ἀνάγκην μετρήσεως γωνιῶν. Ὅταν μετρῶμεν μίαν γωνίαν κυρτὴν ἢ μὴ κυρτήν, δὲν μετροῦμεν φυσικὰ τὰς πλευράς, οὔτε τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς, ἀλλὰ πόσην περιστροφὴν ὁρίζει αὕτη.

### 29. 2. Ἀριθμητικὴ τιμὴ γωνίας

Ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν γωνίαν πρέπει πρῶτον νὰ ἐκλέξωμεν μίαν ὡρισμένην γωνίαν ὡς μονάδα. Ἔπειτα νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς περιέχει ἡ δοθεῖσα γωνία τὴν μονάδα καὶ τὰ μέρη αὐτῆς.

Προκύπτει τοιουτοτρόπως εἷς ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος λέγεται ἀριθμητικὴ τιμὴ ἢ τιμὴ τῆς γωνίας.

### 29. 3. Μονάδες μετρήσεως γωνιῶν

Συνήθεις μονάδες μετρήσεως γωνιῶν, εἶναι ἡ ὀρθὴ γωνία (L), ἡ γωνία μιᾶς μοίρας ($1^o$) καὶ ἡ γωνία ἑνὸς βαθμοῦ (1 gr).

α) Ἡ γωνία μιᾶς μοίρας ἰσοῦται μὲ τὸ 1/90 τῆς ὀρθῆς γωνίας ἢ τὸ 1/360 τῆς πλήρους γωνίας.

$$\boxed{1^o = 1/90 \text{ L}}$$

Ἑκάστη γωνία μιᾶς μοίρας ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 γωνίας τοῦ ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ (1′). Ἑκάστη δὲ γωνία ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 γωνίας τοῦ ἑνὸς δευτέρου λεπτοῦ (1″).

Ἤτοι: $$\boxed{1^o = 60', \qquad 1' = 60''}$$

β) Ἑκάστη γωνία ἑνὸς βαθμοῦ ἰσοῦται μὲ 1/100 τῆς ὀρθῆς γωνίας

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω:

Μία πλήρης γωνία ἰσοῦται μὲ 4 L ἢ $360^o$ ἢ 400 gr

Μία εὐθεῖα γωνία ἰσοῦται μὲ 2 L ἢ $180^o$ ἢ 200 gr

### 29. 4. Σημείωσις

Ἐὰν κατὰ τὴν μέτρησιν μιᾶς γωνίας ω εὕρωμεν ὅτι ἡ μονὰς μία μοίρα περιέχεται εἰς αὐτὴν π.χ. ἀκριβῶς 60 φορὰς τότε γράφομεν:

$$\widehat{\omega} = 60^o$$

## 29. 5. Γωνιόμετρον (Μοιρογνωμόνιον)

Διὰ τὴν μέτρησιν γωνιῶν χρησιμοποιοῦμεν συχνὰ τὸ γωνιόμετρον

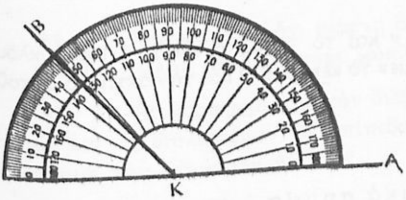
Τὸ ὄργανον τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓν ἡμικύκλιον, μετάλλινον ἢ πλαστικόν, διηρημένον εἰς 180 ὑποδιαιρέσεις ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ἀντιστρόφως. Αἱ ἐνδείξεις ἀναγράφονται ἀνὰ 10°. Ἀναφέρομεν κατωτέρω παραδείγματα δύο χρήσεων τοῦ γωνιομέτρου.

## 29. 6. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ δοθείσης γωνίας ΑΚΒ, σχ. 63.

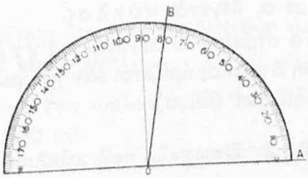
Τοποθετοῦμεν τὸ γωνιόμετρον εἰς τρόπον ὥστε νὰ ταυτιστοῦν:

α) Τὸ κέντρον Ο αὐτοῦ, μὲ τὴν κορυφὴν Κ τῆς γωνίας, καὶ β) ἡ διάμετρος τοῦ γωνιομέτρου μὲ τὴν μίαν πλευρὰν ΚΑ τῆς γωνίας. (Ἡ πλευρὰ ΚΑ νὰ διέρχεται διὰ τοῦ μηδενὸς τῆς κλίμακος μετρήσεως).

Ἤδη ἀρκεῖ νὰ ἀναγνώσωμεν εἰς τὴν βαθμολογημένην κλίμακα τὴν ἔν-




Σχ. 63




Σχ. 64

δειξιν τὴν ὁποίαν δεικνύει ἡ πλευρὰ ΚΒ. Π.χ. ἡ γωνία ΑΚΒ τοῦ σχ. 63 εἶναι περίπου 130°

## 29. 7. Νὰ κατασκευασθῇ γωνία 80° μὲ μίαν πλευρὰν δοθεῖσαν ἡμιευθεῖαν ΟΑ.

Τοποθετοῦμεν τὸ γωνιόμετρον εἰς τρόπον ὥστε νὰ ταυτισθῇ:

α) τὸ κέντρον αὐτοῦ Ο μὲ τὴν ἀρχὴν Ο τῆς δοθείσης ἡμιευθείας καὶ

β) ἡ διάμετρος τοῦ γωνιομέτρου μὲ τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΑ.

(Ἡ ΟΑ νὰ διέρχεται ἐκ τοῦ μηδενὸς τῆς κλίμακος).

Ἔπειτα χαράσσομεν τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΒ ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἐνδείξεως 80° τοῦ γωνιομέτρου, σχ. 64.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

75. Μία γωνία εἶναι διπλασία μιᾶς συμπληρωματικῆς της. Νὰ εὕρετε εἰς μοίρας, εἰς βαθμοὺς καὶ εἰς ὀρθάς, ἑκάστην τῶν γωνιῶν αὐτῶν.

76. Μία γωνία ὑπερβαίνει τὴν παραπληρωματικήν αὐτῆς κατὰ 30°. Νὰ ὑπολογίσετε ἑκάστην τῶν δύο αὐτῶν γωνιῶν.

## 30. 1. Ὁρισμός

α) Εἰς ἓν ἐπίπεδον σημειώσατε σημεῖον Ο καὶ μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου, εὕρετε διάφορα ἄλλα σημεῖα $M_1, M_2, M_3 \ldots$ τὰ ὁποῖα ἀπέχουν 4 cm ἀπὸ τὸ Ο, σχ. 65.

Ποῖον εἶναι τὸ σχῆμα τῶν σημείων αὐτῶν;

β) Στερεώνομεν τὰ σκέλη τοῦ διαβήτου μας ὥστε νὰ μὴ μεταβάλλεται ἡ γωνία αὐτῶν. Ἔπειτα, στηρίζομεν τὴν αἰχμὴν τοῦ ἑνὸς σκέλους εἰς ἓν σημεῖον Ο ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ περιφέρομεν τὸν διαβήτην εἰς τρόπον ὥστε ἡ γραφὶς τοῦ ἄλλου σκέλους νὰ ἐγγίζῃ συνεχῶς τὸ ἐπίπεδον. Τοιουτοτρόπως ἡ γραφὶς χαράσσει μίαν γραμμήν, σχ. 66, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο.

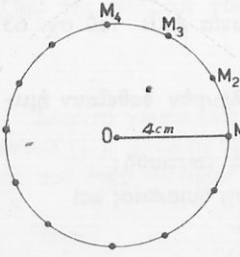
γ) Ἐὰν εἰς τὸ ἐπίπεδον δοθῇ ἓν σημεῖον Ο καὶ ἓν εὐθ. τμῆμα α, τότε τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπὸ τὸ Ο ἀπόστασιν ἴσην μὲ α, λέγεται κύκλος.

Τὸ σημεῖον Ο λέγεται κέντρον καὶ τὸ τμῆμα α ἀκτὶς τοῦ κύκλου. Ἐπειδὴ ὁ κύκλος ὁρίζεται ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ κέντρον Ο καὶ τὴν ἀκτῖνα α αὐτοῦ, συμβολίζεται (Ο, α).

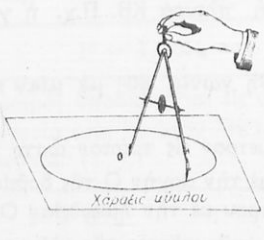
## 30. 2. Στοιχεῖα τοῦ κύκλου

α) Ἐσωτερικὰ καὶ ἐξωτερικὰ σημεῖα

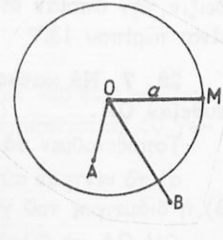
ι) Εἰς τὸ σχ. 67 τὸ σημεῖον Α ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον Ο ἀπόστασιν




Σχ. 65




Σχ. 66




Σχ. 67

μικροτέραν τῆς ἀκτῖνος α, (ΟΑ < α) καὶ λέγεται ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο, α). Εἰς τὸ αὐτὸ σχέδιον τὸ σημεῖον Β ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον Ο ἀπόστασιν ΟΒ μεγαλυτέραν τῆς ἀκτῖνος α, (ΟΒ > α) καὶ λέγεται ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο, α).

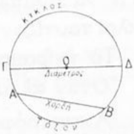
Τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων τοῦ κύκλου λέγεται ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου. Τὸ σύνολον τῶν ἐξωτερικῶν σημείων τοῦ κύκλου λέγεται ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου.

Ἤτοι :

$OA < \alpha \Longleftrightarrow$ A κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου.

$OM = \alpha \Longleftrightarrow$ M κεῖται ἐπὶ τοῦ κύκλου

$OB > \alpha \Longleftrightarrow$ B κεῖται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου.




Σχ. 68

β) Χορδή, διάμετρος, τόξον.

Ἐὰν A, B εἶναι δύο σημεῖα τοῦ κύκλου, τότε τὸ εὐθ. τμῆμα AB λέγεται χορδὴ τοῦ κύκλου.

Εἰδικῶς ἐὰν μία χορδὴ ΓΔ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου O τοῦ κύκλου, αὕτη λέγεται διάμετρος τοῦ κύκλου, σχ. 68.

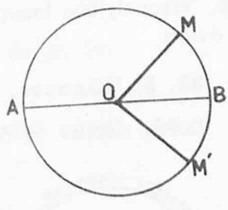
Ἑκάστη χορδή, π.χ. ἡ χορδὴ AB, σχ. 68, χωρίζει τὸν κύκλον εἰς δύο μέρη τὰ ὁποῖα κεῖνται ἑκατέρωθεν αὐτῆς. Ἕκαστον τούτων λέγεται τόξον.

Ἤτοι ἡ χορδὴ AB ὁρίζει εἰς τὸν κύκλον δύο τόξα μὲ ἄκρα τὰ σημεῖα A καὶ B.

## 31. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ

**31. 1.** Εἶναι φανερὸν ὅτι ἑκάστη διάμετρος ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἀκτῖνας. Ἄρα : **Ὅλαι αἱ διάμετροι κύκλου εἶναι ἴσαι.**

**31. 2.** Ἂς χαράξωμεν μὲ τὸν διαβήτην ἕνα κύκλον, μίαν διάμετρον AB αὐτοῦ καὶ ἂς διπλώσωμεν τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου περὶ τὴν διάμετρον AB.




Σχ. 69

Ἡ δίπλωσις αὕτη :

α) Θὰ ἀφήσῃ ἀκίνητον τὸ κέντρον O τοῦ κύκλου.

β) Θὰ φέρῃ τυχὸν σημεῖον M αὐτοῦ εἰς σημεῖον M′ καὶ θὰ εἶναι $OM = OM'$. (Διατί;).

Ἤτοι, θὰ φέρῃ ἕκαστον σημεῖον τοῦ κύκλου ἐπὶ τοῦ ἰδίου κύκλου. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ συμμετρικὸν τοῦ κύκλου ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν AB εἶναι ὁ ἴδιος ὁ κύκλος.

Ἤτοι : **1. Ἡ εὐθεῖα ἑκάστης διαμέτρου εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ κύκλου.**

**2. Ἑκάστη διάμετρος χωρίζει τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη.**

Ἕκαστον τῶν δύο τούτων μερῶν τοῦ κύκλου λέγεται ἡμικύκλιον.

## 32. ΙΣΟΤΗΣ ΚΥΚΛΩΝ, ΤΟΞΩΝ

### 32. 1. Ἰσότης, ἀνισότης κύκλων

Χαράσσομεν δύο κύκλους (O, α), (O′, α′) μὲ ἴσας ἀκτῖνας $\alpha = \alpha'$. Ἔπειτα μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαφανοῦς ἐπιθέτομεν τὸν ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου εἰς τρόπον ὥστε νὰ συμπέσουν τὰ κέντρα Ο, Ο' αὐτῶν. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι οἱ δύο κύκλοι ταυτίζονται.

Τὸ πείραμα τοῦτο ὁδηγεῖ εἰς τὸν ἑξῆς ὁρισμόν.

**Ὅταν αἱ ἀκτῖνες δύο κύκλων εἶναι ἴσαι τότε καὶ οἱ κύκλοι εἶναι ἴσοι.**

Ἀντιστρόφως· δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν ὅτι:

**Ἐὰν δύο κύκλοι εἶναι ἴσοι θὰ ἔχουν ἴσας ἀκτῖνας.**

$$\boxed{(\text{O}, \alpha) = (\text{O}', \alpha') \iff \alpha = \alpha'}$$

Ἐὰν δύο κύκλοι δὲν εἶναι ἴσοι τότε λέγονται ἄνισοι.

## 32. 2. Τόξα ἴσων κύκλων

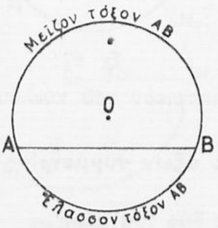
Χαράσσομεν δύο κύκλους μὲ ἴσας ἀκτῖνας: Ἤτοι δύο ἴσους κύκλους.

Ἐπὶ τῶν δύο τούτων κύκλων λαμβάνομεν δύο τόξα ΑΒ καὶ Α'Β'.

Ἔπειτα μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς φύλλου διαφανοῦς χάρτου, ἐπιθέτομεν τὸν ἕνα κύκλον ἐπὶ τοῦ ἄλλου εἰς τρόπον ὥστε οἱ δύο κύκλοι νὰ ἐφαρμόσουν. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι, τὸ τόξον ΑΒ τοῦ ἑνὸς κύκλου ταυτίζεται μὲ τὸ τόξον Α'Β' τοῦ ἄλλου κύκλου (ἔστω καὶ ἐὰν χρειασθῇ νὰ περιστρέψωμεν περὶ τὸ κέντρον τὸν ἕνα κύκλον) ἢ δὲν ταυτίζεται. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν λέγομεν ὅτι τὰ δύο τόξα ΑΒ, Α'Β' εἶναι ἴσα καὶ εἰς τὴν δευτέραν ὅτι εἶναι ἄνισα. Ἤτοι εἰς δύο ἴσους κύκλους (ἢ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον) δύο τόξα εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα.

## 32. 3. Ἔλασσον, μεῖζον τόξον

Καθὼς εἴδομεν τὰ ἄκρα Α, Β μιᾶς χορδῆς ΑΒ εἶναι ἄκρα δύο τόξων τοῦ κύκλου. Τὰ τόξα αὐτὰ εἶναι ἄνισα. Τὸ ἕν, τὸ μικρότερον, ὀνομάζεται ἔλασσον τόξον ΑΒ καὶ τὸ ἄλλο, τὸ μεγαλύτερον, μεῖζον τόξον ΑΒ.



Σχ. 70

Εἰς τὰ ἑπόμενα ὁσάκις γράφομεν «τόξον ΑΒ» ἢ συμβολικῶς $\widehat{AB}$, θὰ ἐννοοῦμεν τὸ ἔλασσον τόξον ΑΒ. Διὰ τὸ μεῖζον τόξον θὰ γίνεται εἰδικὴ μνεία.

## 32. 4. Τόξα ἀνίσων κύκλων

Χαράξατε δύο ἀνίσους κύκλους καὶ μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς φύλλου διαφανοῦς χάρτου προσπαθήσατε νὰ φέρετε εἰς σύμπτωσιν (νὰ ἐφαρμόσετε) ἓν τόξον τοῦ ἑνὸς μὲ ὁποιοδήποτε τόξον τοῦ ἄλλου. Θὰ πεισθῆτε ὅτι τοῦτο εἶναι ἀδύνατον.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

77. Χαράξατε δύο κύκλους (Ο, α) καὶ (Ο, β) ὅπου α > β. Νὰ εὕρετε τὸ σύνολον τῶν ση-

μείων τοῦ ἐπιπέδου τὰ ὁποῖα εἶναι ἐσωτερικὰ τοῦ κύκλου (Ο, α) καὶ ἐξωτερικὰ τοῦ κύκλου (Ο ,β).

78. Θέλομεν νὰ χαράξωμεν κύκλους μὲ ἀκτῖνα μήκους 3 cm καὶ διερχομένους ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Α. Πόσους τοιούτους κύκλους δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν εἰς τὸ ἐπίπεδον; Ποῦ εὑρίσκονται τὰ κέντρα αὐτῶν;

79. Εἰς ἕνα κύκλον χαράξατε δύο διαμέτρους καθέτους μεταξύ των. Ἔπειτα μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς φύλλου διαφανοῦς χάρτου συγκρίνατε τὰ ὑπ' αὐτῶν ὁριζόμενα 4 τόξα τοῦ κύκλου.

80. Χαράξατε εὐθ. τμῆμα ΑΒ μήκους 4 cm. Ἔπειτα νὰ εὕρετε σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τὰ ὁποῖα ἀπέχουν 3 cm ἀπὸ ἕκαστον ἄκρον τοῦ ΑΒ.

## 33. ΑΘΡΟΙΣΜΑ, ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΟΞΩΝ ΙΣΩΝ ΚΥΚΛΩΝ

### 33, 1. Ὁρισμοί

α) Εἰς τὸ κατωτέρω σχ. 71 τὰ ἐλάσσονα τόξα ΑΒ, ΒΓ ἔχουν τὸ ἓν ἄκρον αὐτῶν κοινὸν καὶ μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων ἄκρων. Διὰ τοῦτο λέγονται διαδοχικά.

Τὸ μεῖζον ἢ ἔλασσον τόξον ΑΓ, τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ σημεῖον Β λέγεται ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν τόξων ΑΒ καὶ ΒΓ.

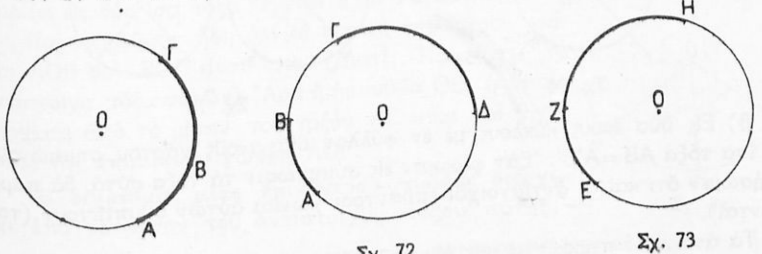
Γράφομεν δὲ
$$\widehat{AB}+\widehat{B\Gamma}=\widehat{A\Gamma} \qquad (1)$$

β) Τὸ τόξον ΒΓ προστίθεται εἰς τὸ τόξον ΑΒ καὶ δίδει ἄθροισμα τὸ τόξον ΑΓ καὶ λέγεται διὰ τοῦτο διαφορὰ τῶν τόξων ΑΓ καὶ ΑΒ.

Γράφομεν δέ:
$$\widehat{A\Gamma}-\widehat{AB}=\widehat{B\Gamma} \qquad (2)$$

Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἀπὸ τὴν (1) ἔχομεν ἀκόμη ὅτι
$$\widehat{A\Gamma}-\widehat{B\Gamma}=\widehat{AB} \qquad (\text{Διατί;})$$

**33, 2.** Διὰ νὰ προσθέσωμεν μὴ διαδοχικὰ τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ




Σχ. 71 Σχ. 72 Σχ. 73

δύο ἴσων κύκλων, μὲ ἓν φύλλον διαφανοῦς χάρτου τὰ καθιστῶμεν διαδοχικὰ καὶ ἔπειτα τὰ προσθέτομεν.

Π.χ. διὰ νὰ προσθέσωμεν τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΓΔ τοῦ σχ. 72 λαμβάνομεν:
$$\widehat{EZ}=\widehat{AB} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{ZH}=\widehat{\Gamma\Delta}$$

Ἄρα:
$$\widehat{AB}+\widehat{\Gamma\Delta}=\widehat{EZ}+\widehat{ZH}$$

Ἤ
$$\widehat{AB}+\widehat{\Gamma\Delta}=\widehat{EZH}$$

81. Μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς φύλλου διαφανοῦς χάρτου ἐπαληθεύσατε ὅτι ἡ πρόσθεσι τῶν τόξων ἴσων κύκλων εἶναι πρᾶξις μεταθετικὴ καὶ προσεταιριστική.

82. Εἰς δύο ἴσους κύκλους δυὸ τόξα (ἐλάσσονα) εἶναι ἴσα. Τί συνάγετε διὰ τὰ ἀντίστοιχ μείζονα τόξα αὐτῶν; Δικαιολογήσατε τὴν ἀπάντησίν σας.

83. Εἰς δύο ἴσους κύκλους σημειώσατε δύο ἄνισα ἐλάσσονα τόξα. Μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸ φύλλου διαφανοῦς χάρτου νὰ συγκρίνετε τὰ ἀντίστοιχα μείζονα τόξα αὐτῶν. Τί παρατηρεῖτε

## 34. ΕΠΙΚΕΝΤΡΟΣ ΓΩΝΙΑ - ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΝ ΤΟΞΟΝ

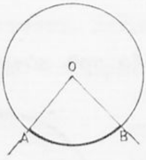
### 34. 1. Ὁρισμοί

Ἑκάστη γωνία ΑΟΒ, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφήν της εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, λέγεται ἐπίκεντρος γωνία εἰς τὸν κύκλον τοῦτον. Τὰ σημεῖα Α, Β εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΒ, σχ. 74, τέμνει τὸν κύκλον εἶναι ἄκρα δύο τόξων. Τὸ μὲν ἔλασσον τόξον ΑΒ λέγεται ἀντίστοιχον τόξον τῆς κυρτῆς ἐπικέντρου γωνίας ΑΟΒ, τὸ δὲ μεῖζον τόξον ΑΒ ἀντίστοιχον τόξον τῆς μὴ κυρτῆς ἐπικέντρου γωνίας ΑΟΒ.

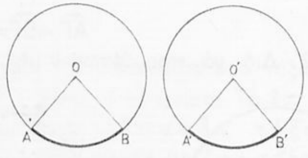
### 34. 2. Σχέσις ἐπικέντρων γωνιῶν καὶ ἀντιστοίχων τόξων

α) Εἰς δύο ἴσους κύκλους σημειώνομεν δύο ἴσας ἐπικέντρους γωνίας ΑΟΒ καὶ Α'Ο'Β', σχ. 75.

Ἐὰν μὲ τὴν βοήθειαν διαφανοῦς χάρτου φέρωμεν εἰς σύμπτωσιν τὰς γωνίας αὐτάς, εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ ἐφαρμόσουν καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα.



Σχ. 74



Σχ. 75

β) Εἰς δύο ἴσους κύκλους, μὲ ἓν φύλλον διαφανοῦς χάρτου, σημειώνομεν δύο ἴσα τόξα ΑΒ=Α'Β'. Ἐὰν φέρωμεν εἰς σύμπτωσιν τὰ τόξα αὐτά, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίκεντροι γωνίαι αὐτῶν συμπίπτουν (ταυτίζονται).

Τὰ ἀνωτέρω πειράματα μᾶς ὁδηγοῦν εἰς τὴν ἑξῆς γεωμετρικὴν πρότασιν.

**Εἰς δύο ἴσους κύκλους (ἢ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον):**

**Εἰς ἴσας κυρτὰς (ἢ μὴ κυρτὰς) ἐπικέντρους γωνίας ἀντιστοιχοῦν ἴσα τόξα καὶ ἀντιστρόφως· εἰς ἴσα τόξα ἀντιστοιχοῦν ἴσαι κυρταὶ (ἢ μὴ κυρταὶ) ἐπίκεντροι γωνίαι.**

Ἢ συμβολικῶς :

Εἰς ἴσους κύκλους : $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'} \iff A\hat{O}B=A'\hat{O'}B'$

## 35. ΙΣΑ ΤΟΞΑ, ΙΣΑΙ ΧΟΡΔΑΙ

**35. 1.** α) Εἰς δύο ἴσους κύκλους (ἢ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον) χαράξατε, μὲ τὴν βοήθειαν φύλλου διαφανοῦς χάρτου, δύο ἴσας χορδὰς ΑΒ = Α'Β' καὶ συγκρίνατε τὰ δύο ἐλάσσονα καθὼς καὶ τὰ δύο μείζονα τόξα ΑΒ, Α'Β'. Φέρατε πρὸς τοῦτο (μὲ τὴν βοήθειαν φύλλου διαφανοῦς χάρτου) εἰς σύμπτωσιν τοὺς ἴσους κύκλους εἰς τρόπον ὥστε νὰ συμπέσουν αἱ ἴσαι χορδαί. Τί παρατηρεῖτε;

β) Εἰς δύο ἴσους κύκλους (ἢ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον) σημειώσατε, μὲ φύλλον διαφανοῦς χάρτου, δύο ἴσα τόξα καὶ ἔπειτα συγκρίνατε τὰς χορδὰς αὐτῶν.

Πρὸς τοῦτο φέρατε εἰς σύμπτωσιν τοὺς δύο ἴσους κύκλους εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν τὰ ἴσα τόξα. Τί παρατηρεῖτε;

Τὰ ἀνωτέρω πειράματα μᾶς ὁδηγοῦν εἰς τὰς ἑξῆς γεωμετρικὰς προτάσεις.

**Εἰς ἴσους κύκλους ἢ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον:**

**1. Εἰς ἴσας χορδὰς ἀντιστοιχοῦν ἴσα ἐλάσσονα ἢ μείζονα τόξα.**

**2. Εἰς ἴσα τόξα ἀντιστοιχοῦν ἴσαι χορδαί.**

**Σημείωσις**

Ἡ 1η ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων μᾶς ἐπιτρέπει νὰ λάβωμεν εἰς ἴσους κύκλους ἴσα τόξα, λαμβάνοντες μὲ τὸν διαβήτην ἴσας χορδάς.

### 35. 2. Μέσον τόξου. Διχοτόμος ἐπικέντρου γωνίας

Εἰς ἕνα κύκλον σημειώνομεν δύο διαδοχικὰ ἴσα τόξα, $\widehat{AB} = \widehat{B\Gamma}$, σχ. 76. Τὸ σημεῖον Β τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ τόξον ΑΓ καὶ τὸ χωρίζει εἰς δύο ἴσα τόξα λέγεται μ έ σ ο ν αὐτοῦ.

Σχ. 76

Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι αἱ κυρταὶ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ εἶναι ἴσαι. (Διατί;. Προσέξατε τὰ ἀντίστοιχα τόξα αὐτῶν). Ἄρα ἡ ἡμιευθεῖα ΟΒ, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΓ εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς ἐπικέντρου γωνίας ΑΟΓ.

**Ἡ διχοτόμος μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου αὐτῆς.**

Ἡ πρότασις αὕτη μᾶς ἐπιτρέπει νὰ κατασκευάσωμεν μὲ χάρακα τὴν διχοτόμον μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ μέσον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου αὐτῆς.

## 36. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΟΞΩΝ

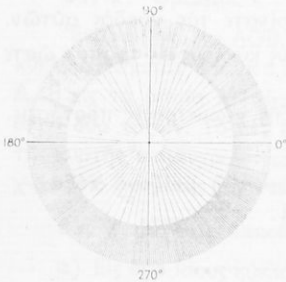
### 36. 1. Ἀριθμητικὴ τιμὴ τόξου

Διὰ νὰ μετρήσωμεν ἓν τόξον ΑΒ συγκρίνομεν αὐτὸ μὲ ἓν ἄλλο τόξον Μ τοῦ ἰ δ ί ο υ κύκλου, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς μονάδα. Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν αὐτὴν προκύπτει εἷς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δεικνύει πόσας φορὰς χωρεῖ ἡ μονὰς τόξων (καὶ τὰ μέρη αὐτῆς) εἰς τὸ μετρούμενον τόξον. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ ἢ τιμὴ τοῦ τόξου.

### 36. 2. Μονάδες μετρήσεων τόξων

α) Μονὰς μετρήσεως τόξων εἶναι τὸ τόξον μιᾶς μοίρας ($1^o$). Αὕτη ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

Φαντασθῆτε ὅτι ἐκ τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου φέρομεν ἡμιευθείας ΟΑ, ΟΒ ,ΟΓ . . . οὕτως ὥστε νὰ σχηματίσωμεν 360 διαδοχικὰ ἴσα τόξα, σχ. 77.




Σχ. 77

Ἕκαστον τῶν τόξων τούτων λέγεται τόξον μιᾶς μοίρας.

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίκεντροι γωνίαι τῶν τόξων τούτων εἶναι ἴσαι. Ἑκάστη δὲ τούτων εἶναι ἴση μὲ $1^o$.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰς ἐπίκεντρον γωνίαν μιᾶς μοίρας ἀντιστοιχεῖ τόξον μιᾶς μοίρας, εἰς ἐπίκεντρον γωνίαν 2, 3, 4 . . . μοιρῶν ἀντιστοιχεῖ τόξον 2, 3, 4 . . . μοιρῶν ἀντιστοίχως.

Ἤτοι ἡ τιμὴ μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας εἶναι ἡ ἰδία μὲ τὴν τιμὴν τοῦ ἀντιστοίχου τόξου αὐτῆς (ὅταν μετρηθοῦν μὲ μοίρας).

Διὰ τοῦτο, ὅταν μετρῶμεν μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον μίαν γωνίαν (§ 29), τὴν καθιστῶμεν ἐπίκεντρον καὶ μετροῦμεν τὸ ἀντίστοιχον τόξον αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ μοιρογνωμονίου.

β) Ἕκαστον τόξον μιᾶς μοίρας ($1^o$) ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 ἴσα τόξα. Ἕκαστον τούτων λέγεται τόξον ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ ($1'$). Ὁμοίως, ἕκαστον τόξον ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 ἴσα τόξα. Ἕκαστον τούτων, λέγεται τόξον τοῦ ἑνὸς δευτέρου λεπτοῦ ($1''$).

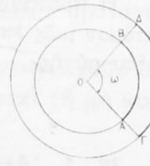
$$\boxed{1^o = 60', \qquad 1' = 60'', \qquad 1^o = 3600''}$$

γ) Ἄλλαι μονάδες μετρήσεως τόξων εἶναι τὸ ἀκτίνιον καὶ ὁ βαθμός (gr).

Τόξον ἑνὸς ἀκτινίου = Τὸξον μὲ μῆκος ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

Τόξον ἑνὸς βαθμοῦ = Τόξον ἴσον πρὸς τὸ 1/400 τοῦ κύκλου.

Ὁ βαθμὸς ὑποδιαιρεῖται εἰς δέκατα (dgr), ἑκατοστὰ (cgr.)




Σχ. 78

**Παρατηρήσεις**

α) Ὅταν δύο τόξα ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμὴν δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην ἴσα.

Π.χ. τὰ τόξα ΑΒ, ΓΔ τοῦ σχεδ. 78, ἔχουν ἴσας τιμὰς (εἰς μοίρας) χωρὶς νὰ εἶναι ἴσα.

β) Ἡ λέξις «μοίρα» ὅταν χρησιμοποιεῖται ὡς μονὰς τόξων δηλώνει ἓν τόξον, ἐνῶ ὅταν χρησιμοποιεῖται ὡς μονὰς γωνιῶν δηλώνει μίαν γωνίαν.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

84. Εἰς ἕνα κύκλον φέρατε δυὸ καθέτους μεταξύ των διαμέτρους. Συγκρίνατε ἔπειτα τὰς τέσσαρας χορδὰς αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπ' αὐτῶν.

85. Μὲ τρεῖς διαμέτρους χωρίζομεν ἕνα κύκλον εἰς 6 ἴσα τόξα. Νὰ εὕρετε τὰς τιμὰς (εἰς μοίρας) καὶ τῶν 6 τόξων ὡς καὶ τῶν ἀντιστοίχων ἐπικέντρων γωνιῶν αὐτῶν.

86. Εἰς ἕνα κύκλον νὰ λάβετε δύο ἀνίσους χορδὰς καὶ ἔπειτα νὰ συγκρίνετε τὰς ἀποστάσεις τοῦ κέντρου ἀπὸ αὐτάς. Τί παρατηρεῖτε; Διατυπώσατε τὰ συμπεράσματά σας.

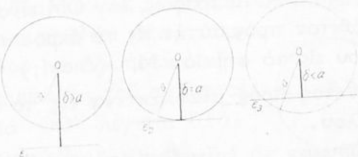
87. Νὰ ἐξετάσετε ἐὰν ἡ μεσοκάθετος μιᾶς χορδῆς διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καὶ διὰ τῶν μέσων τῶν τόξων αὐτῆς.

## 37. ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ

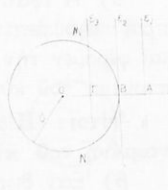
**37. 1.** Ἐὰν σᾶς ζητήσουν νὰ χαράξετε μίαν εὐθεῖαν καὶ ἕνα κύκλον, εἰς ποίας θέσεις εἶναι δυνατὸν νὰ τοποθετήσετε τὴν εὐθεῖαν ὡς πρὸς τὸν κύκλον;

Αἱ δυναταὶ σχετικαὶ θέσεις φαίνονται εἰς τὸ σχ. 79.

Εἰς ἑκάστην περίπτωσιν θὰ συγκρίνωμεν τὴν ἀκτῖνα α μὲ τὴν ἀπόστασιν δ τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν.



Σχ. 79



Σχ. 80

**37. 2.** Χαράσσομεν ἕνα κύκλον (Ο, α) καὶ τρεῖς εὐθείας $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$. εἰς ἀποστάσεις ἀπὸ τὸ κέντρον $ΟΑ > α$, $ΟΒ = α$ καὶ $ΟΓ < α$ ἀντιστοίχως, σχ. 80.

Διακρίνομεν τότε τὰ ἑξῆς:

1η περίπτωσις: $ΟΑ > α$.

Οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχει ἡ εὐθεῖα μὲ τὸν κύκλον. (Διατί; Συγκρίνατε τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς $\varepsilon_1$ μὲ τὴν ἀκτῖνα α).

2α περίπτωσις: $ΟΒ = α$

Τὸ σημεῖον Β τῆς $\varepsilon_2$ κεῖται ἐπὶ τοῦ κύκλου. Ὅλα τὰ ἄλλα σημεῖα τῆς $\varepsilon_2$ ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον ἀπόστασιν μεγαλυτέραν τῆς $ΟΒ = α$ (§ 21. 4.)

Συνεπῶς τὸ Β εἶναι τὸ μοναδικὸν κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας $\varepsilon_2$ μὲ τὸν κύκλον. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα $\varepsilon_2$ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Β αὐτοῦ τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται σημεῖον ἐπαφῆς.

3η περίπτωσις: $O\Gamma < \alpha$

Τὸ σημεῖον Γ εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (Ο, α) ἡ δὲ εὐθεῖα $\varepsilon_3$ ἔχει δύο κοινὰ σημεῖα Μ καὶ Ν μὲ τὸν κύκλον, διὰ τοῦτο λέγεται τέμνουσα αὐτοῦ.

Ὥστε:

**Ἐὰν δ > α τότε ἡ εὐθεῖα εἶναι ἐξωτερικὴ (Οὐδὲν κοινὸν σημεῖον)**
**» δ = α » ἡ » » ἐφαπτομένη (1 κοινὸν σημεῖον).**
**» δ < α » ἡ » » τέμνουσα (2 κοινὰ σημεῖα)**

Αἱ τρεῖς αὐταὶ προτάσεις ἰσχύουν καὶ ἀντιστρόφως.

Ἤτοι: **Ἐὰν δὲν ὑπάρχουν κοινὰ σημεῖα, τότε* εἶναι δ > α**
**Ἐὰν ὑπάρχῃ 1 μόνον κοινὸν σημεῖον, τότε δ = α**
**Ἐὰν ὑπάρχουν 2 κοινὰ σημεῖα, τότε εἶναι δ < α**

Αἱ ἓξ (6) ἀνωτέρω προτάσεις γράφονται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\delta > \alpha$ | $\Longleftrightarrow$ | $\varepsilon \cap (O,\alpha) = \varnothing$, | ε = ἐξωτερικὴ τοῦ κύκλου | (1) |
| $\delta = \alpha$ | $\Longleftrightarrow$ | $\varepsilon \cap (O,\alpha) = \{B\}$ | ε = ἐφαπτομένη | (2) |
| $\delta < \alpha$ | $\Longleftrightarrow$ | $\varepsilon \cap (O,\alpha) = \{M,N\}$ | ε = τέμνουσα | (3) |

## 37. 3. Παρατηρήσεις

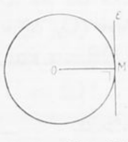
α) Ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Μ αὐτοῦ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΟΜ. Ἀντιστρόφως, ἐὰν ΟΜ εἶναι μία ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ φέρομεν τὴν κάθετον πρὸς αὐτὴν εἰς τὸ ἄκρον τῆς Μ, αὕτη θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Μ. (Διατί;)

Ἤτοι: **Ἡ κάθετος πρὸς μίαν ἀκτῖνα εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου.**

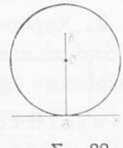
β) Ἐὰν διπλώσωμεν τὸ ἐπίπεδον τοῦ σχ. 80 περὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΓ, τὰ κοινὰ σημεῖα Μ καὶ Ν θὰ συμπέσουν**. Ἤτοι ἡ ΟΓ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΜΝ.

## 37. 4. Ἐφαρμογαὶ

α) Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἐφαπτομένη κύκλου εἰς σημεῖον Μ αὐτοῦ.




Σχ. 81




Σχ. 82

Χαράσσομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΜ καὶ ἔπειτα τὴν κάθετον πρὸς αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον Μ, σχ. 81.

---

* Ἰδοὺ πῶς δυνάμεθα νὰ δικαιολογήσωμεν τὴν μίαν ἀπὸ αὐτάς, π.χ. τὴν πρώτην. Ἐὰν δὲν ἦτο δ > α, θὰ ἦτο:

δ < α, ὁπότε ἡ ε θὰ εἶχε 2 κοινὰ σημεῖα μὲ τὸν κύκλον
δ = α, » ἡ ε » » 1 κοινὸν σημεῖον » » »

** Ἡ εὐθεῖα ΟΓ εἶναι: α) Φορεὺς μιᾶς διαμέτρου, ἤτοι ἄξων συμμετρίας τοῦ κύκλου. β) Κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν $\varepsilon_3$ ἤτοι ἄξων συμμετρίας αὐτῆς.

β) Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος ἀκτῖνος α ὁ ὁποῖος νὰ ἐφάπτεται μιᾶς δοθείσης εὐθείας ε εἰς τὸ σημεῖον Α αὐτῆς, σχ. 82.

ι) Χαράσσομεν τὴν εὐθεῖαν δ κάθετον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε εἰς τὸ σημεῖον Α αὐτῆς.

ιι) Ἐπὶ τῆς δ λαμβάνομεν τμῆμα ΟΑ=α καὶ γράφομεν τὸν κύκλον (Ο, α). Ὁ κύκλος οὗτος εἶναι ὁ ζητούμενος.

Πράγματι· ἡ ἀκτὶς ΟΑ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε εἰς τὸ σημεῖον Α. Συνεπῶς ὁ κύκλος (Ο, ΟΑ) ἐφάπτεται τῆς εὐθείας ε (§37. 3).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

88. Νὰ εὕρετε τὸν ἀριθμὸν τῶν κοινῶν σημείων εὐθείας ε καὶ κύκλου (Ο, α) εἰς τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

α) Ὅταν α=3 cm καὶ δ=2 cm, β) ὅταν α=3 cm καὶ δ=3 cm, γ) ὅταν α=3 cm καὶ δ=4 cm.

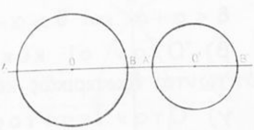
Ὅπου δ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ε.

89. Νὰ χαράξετε ἐφαπτομένας κύκλου εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου αὐτοῦ.

90. Νὰ χαράξετε εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ ἔπειτα κύκλους ἐφαπτομένους αὐτοῦ εἰς τὸ ἄκρον Α. Πόσας λύσεις ἔχει τὸ πρόβλημα;

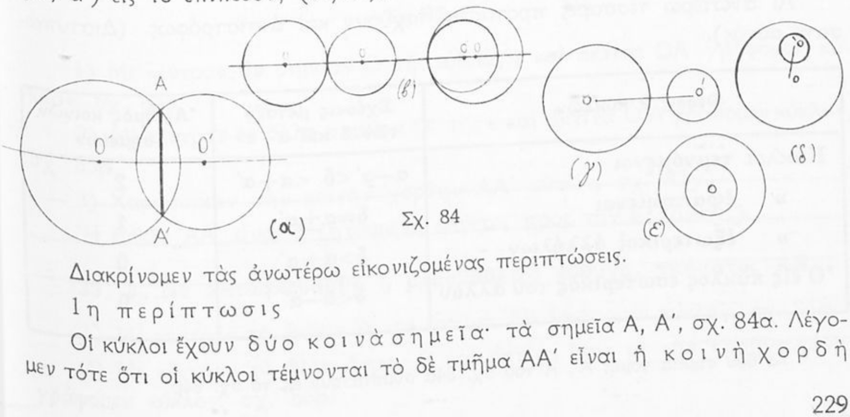
## 38. ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

**38. 1.** Ἄς χαράξωμεν δύο κύκλους μὲ κέντρα Ο, Ο'. Ἐὰν σκεφθῶμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα μιᾶς διαμέτρου κύκλου εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ, εἶναι εὔκολον νὰ ἐννοήσωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΟΟ' εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος τῶν δύο κύκλων. Ἡ εὐθεῖα ΟΟ' λέγεται διάκεντρος τῶν δύο τούτων κύκλων, σχ. 83.




Σχ. 83

**38. 2.** Ποῖαι εἶναι αἱ δυναταὶ σχετικαὶ θέσεις μεταξὺ δύο κύκλων (Ο, α), (Ο', α') εἰς τὸ ἐπίπεδον; (α > α').




Σχ. 84

Διακρίνομεν τὰς ἀνωτέρω εἰκονιζομένας περιπτώσεις.

1η περίπτωσις

Οἱ κύκλοι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα· τὰ σημεῖα Α, Α', σχ. 84α. Λέγομεν τότε ὅτι οἱ κύκλοι τέμνονται τὸ δὲ τμῆμα ΑΑ' εἶναι ἡ κοινὴ χορδὴ

Ἃς διπλώσωμεν τὸ ἐπίπεδον τοῦ σχήματος περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας ΟΟ΄ τῶν δύο κύκλων.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ δύο κοινὰ σημεῖα Α, Α΄ συμπίπτουν. (Διατί;). Ἤτοι ἡ διάκεντρος εἶναι μεσοκάθετος τῆς κοινῆς χορδῆς ΑΑ΄.

2α περίπτωσις

Οἱ κύκλοι ἔχουν μόνον ἓν κοινὸν σημεῖον. Τοῦτο κεῖται ἐπὶ τῆς διακέντρου*, σχ. 84β, καὶ λέγεται σημεῖον ἐπαφῆς, οἱ δὲ κύκλοι ἐφαπτόμενοι ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς (2 περιπτώσεις).

3η περίπτωσις

Οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν οἱ κύκλοι (σχ. 84 γ, δ, ε).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν οἱ δύο κύκλοι :

ι) Ἢ εὑρίσκονται ἐκτὸς ἀλλήλων (σχ. 84 γ).

ιι) Ἢ ὁ εἷς εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ἄλλου (σχ. 84 δ).

ιιι) Ἢ ἔχουν κοινὸν κέντρον (ὁμόκεντροι κύκλοι, σχ. 84 ε).

**38. 3.** Θὰ συγκρίνωμεν τὸ ἄθροισμα $\alpha+\alpha'$ ἢ τὴν διαφορὰν $\alpha-\alpha'$ τῶν ἀκτίνων μὲ τὴν ἀπόστασιν $OO'=\delta$ τῶν δύο κέντρων εἰς τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις.

α) Ὅταν οἱ κύκλοι τέμνωνται: Τότε μὲ τὸν διαβήτην εὑρίσκομεν ὅτι :

$\delta < \alpha+\alpha'$ καὶ $\delta > \alpha-\alpha'$ ἢ συντόμως $\alpha-\alpha' < \delta < \alpha+\alpha'$

β) Ὅταν οἱ κύκλοι ἐφάπτωνται. Τότε εἶναι $\delta=\alpha+\alpha'$, ἐὰν ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς καὶ $\delta=\alpha-\alpha'$, ἐὰν ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς.

γ) Ὅταν ἕκαστος κύκλος εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ ἄλλου. Τότε εἶναι $\delta > \alpha+\alpha'$.

δ) Ὅταν ὁ εἷς κύκλος κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ἄλλου. Τότε εἶναι $\delta < \alpha-\alpha'$.

Αἱ ἀνωτέρω τέσσαρες προτάσεις ἰσχύουν καὶ ἀντιστρόφως. (Διατυπώσατε αὐτάς).

| Θέσεις 2 κύκλων | Σχέσεις μεταξὺ τῶν δ καὶ α+α΄ | Ἀριθμὸς κοινῶν σημείων |
|---|---|---|
| **Κύκλοι τεμνόμενοι** | $\alpha-\alpha'<\delta<\alpha+\alpha'$ | **2** |
| » **ἐφαπτόμενοι** | $\delta=\alpha\pm\alpha'$ | **1** |
| » **ἐξωτερικοὶ ἀλλήλων** | $\delta>\alpha+\alpha'$ | **0** |
| **Ὁ εἷς κύκλος ἐσωτερικὸς τοῦ ἄλλου** | $\delta<\alpha-\alpha'$ | **0** |

* Τὰ δύο σημεῖα τομῆς Α΄, Α τοῦ σχ. 84α συμπίπτουν εἰς τὸ σχ. 84β.

91. Ἐὰν α, α' παριστοῦν τὰ μήκη εἰς (cm) τῶν ἀκτίνων δύο κύκλων καὶ δ τὸ μῆκος τῆς διακέντρου αὐτῶν (εἰς cm), νὰ εὕρετε τὰς σχετικὰς θέσεις τῶν δύο αὐτῶν κύκλων εἰς τὰς περιπτώσεις τοῦ παραπλεύρως πίνακος.

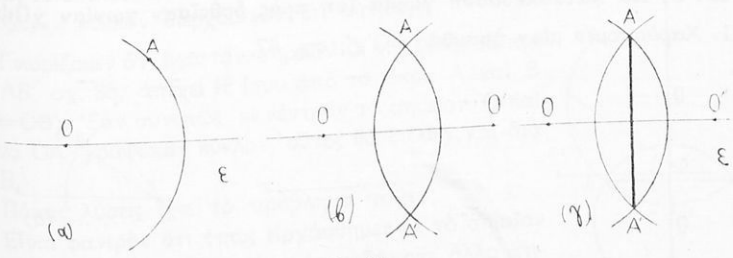
| | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
|---|---|---|---|---|---|
| δ | 5 | 1 | 6 | 2 | 2 |
| α | 3 | 3 | 3 | 5 | 5 |
| α | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 |

92. Γράψατε εὐθ. τμῆμα ΑΒ μήκους 5 cm καὶ κύκλον κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος 3 cm. Ἔπειτα γράψατε κύκλον μὲ κέντρον τὸ μέσον τοῦ ΑΒ καὶ ἀκτῖνα τοιαύτην ὥστε οἱ δύο κύκλοι α) νὰ ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς, β) νὰ τέμνωνται, γ) νὰ μὴ ἔχουν κοινὰ σημεῖα.

## 39. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

**39. 1.** Ἡ χρησιμοποίησις διαφανοῦς χάρτου καὶ γνώμονος εἰς τὴν κατασκευὴν ἑνὸς σχεδίου, ἀνεξαρτήτως τῶν προσπαθειῶν μας, δὲν μᾶς ἐπιτρέπει μεγάλην ἀκρίβειαν. Διὰ τοῦτο ἐφεξῆς θὰ χρησιμοποιοῦμεν μόνον κανόνα, (χάρακα), καὶ διαβήτην. Μὲ τὸν ὅρον δὲ γεωμετρικὴ κατασκευὴ θὰ ἐννοοῦμεν κατασκευὴν μὲ χρησιμοποίησιν μόνον κανόνος καὶ διαβήτου.

**39. 2. Ἐκ σημείου Α, ἐκτὸς εὐθείας ε, νὰ ἀχθῇ κάθετος πρὸς αὐτήν**




Σχ. 85

1) Μὲ κέντρον ἓν σημεῖον Ο τῆς εὐθείας ε καὶ ἀκτῖνα ΟΑ γράφομεν κύκλον, σχ. 85α.

2) Μὲ κέντρον ἓν ἄλλο σημεῖον Ο' τῆς ε καὶ ἀκτῖνα Ο'Α γράφομεν κύκλον, σχ. 85β.

3) Χαράσσομεν τὴν κοινὴν χορδὴν ΑΑ' αὐτῶν, σχ. 85γ.

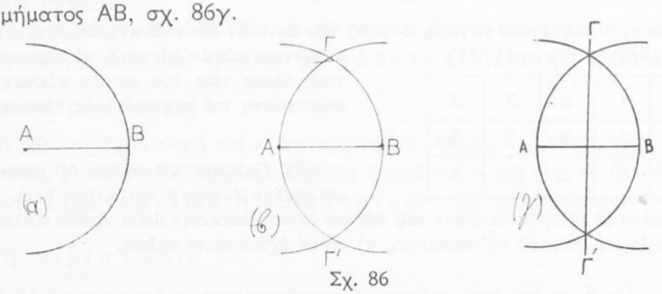
Ἡ εὐθεῖα ΑΑ' εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος πρὸς τὴν ε. (Διατί;).

**39. 3. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ μεσοκάθετος εὐθυγρ. τμήματος ΑΒ**

1) Μὲ κέντρον τὸ ἄκρον Α καὶ ἀκτῖνα ΑΒ γράφομεν κύκλον, σχ. 86α.

2) Μὲ κέντρον τὸ ἄλλο ἄκρον Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν προηγουμένην γράφομεν κύκλον. σχ. 86β.

3) Χαράσσομεν τὴν κοινὴν χορδὴν ΓΓ'. Αὕτη εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΒ, σχ. 86γ.




Σχ. 86

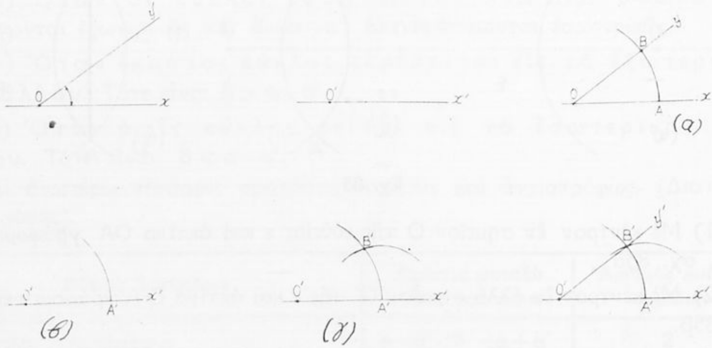
Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον χωρίζομεν ἓν εὐθύγρ. τμῆμα εἰς 2 ἴσα μέρη.

**39. 4. Νὰ κατασκευασθῆ ἡ κάθετος πρὸς εὐθεῖαν ε εἰς δεδομένον σημεῖον Α αὐτῆς**

Ἐπὶ τῆς ε καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ Α λαμβάνομεν δύο ἴσα τμήματα ΑΒ=ΑΓ. Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν κατεστήσαμεν τὸ Α μέσον τοῦ ΒΓ. Ἀρκεῖ συνεπῶς νὰ χαράξωμεν κατὰ τὰ γνωστὰ τὴν μεσοκάθετον αὐτοῦ.

**39. 5. Νὰ κατασκευασθῆ γωνία ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν χΟψ.**

1. Χαράσσομεν μίαν ἡμιευθεῖαν Ο'χ', σχ. 87.




Σχ. 87

2. Μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ὅσην θέλομεν (ὄχι πολὺ μικρὰν) γράφομεν τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς πλευρὰς Οχ, Οψ εἰς τὰ σημεῖα Α, Β ἀντιστοίχως, σχ. 87α. Μὲ ἄλλους λόγους : Καθιστῶμεν τὴν γωνίαν χΟψ ἐπίκεντρον.

3. Μὲ κέντρον Ο' καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν προηγουμένην γράφομεν δεύτερον τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν Ο'χ' εἰς ἓν σημεῖον Α', σχ. 87β.

4. Μὲ κέντρον Α' καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν χορδὴν ΑΒ γράφομεν ἓν τρίτον τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον νὰ τέμνῃ τὸ δεύτερον εἰς ἓν σημεῖον Β', σχ. 87γ.

Ἡ γωνία Α'Ο'Β' εἶναι ἡ ζητουμένη. Ἰδοὺ διατί :

α) Οἱ δύο κύκλοι (Ο, ΟΑ) καὶ (Ο', Ο'Α') εἶναι ἴσοι ἐκ κατασκευῆς.

β) Αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ Α'Β' αὐτῶν εἶναι ἴσαι.

γ) Τὰ τόξα ΑΒ, Α'Β' εἶναι ἴσα. (Διατί;)

Συνεπῶς καὶ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΟΒ καὶ Α'Ο'Β' εἶναι ἴσαι.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Αἱ κατωτέρω κατασκευαὶ νὰ γίνουν διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου.

93. Νὰ χαράξετε ἓν εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ ἔπειτα καθέτους πρὸς αὐτὸ εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β.

94. Νὰ χαράξετε μίαν ἡμιευθεῖαν καὶ ἔπειτα μίαν ὀρθὴν γωνίαν μὲ μίαν πλευρὰν τὴν ἡμιευθεῖαν αὐτήν.

95. Νὰ χωρίσετε ἓν εὐθ. τμῆμα εἰς 4 ἴσα μέρη.

96. Νὰ γράψετε κύκλον μὲ διάμετρον ἴσην πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

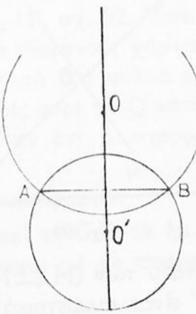
97. Νὰ χαράξετε ἐφαπτομένας κύκλου εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς χορδῆς αὐτοῦ.



## 40. ΚΥΚΛΟΙ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΟΙ ΔΙΑ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ

Εἰς ἓν ἐπίπεδον δίδονται δύο διαφορετικὰ σημεῖα Α, Β καὶ ζητοῦμεν νὰ χαράξωμεν κύκλον διερχόμενον δι' αὐτῶν.

Γνωρίζομεν ὅτι ἕκαστον σημεῖον Ο τῆς μεσοκαθέτου τῆς ΑΒ, σχ. 88, ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β (ΟΑ=ΟΒ). Ἐὰν συνεπῶς μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ γράψωμεν κύκλον, οὗτος θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Β.



Σχ. 88

Πόσας λύσεις ἔχει τὸ πρόβλημα τοῦτο;

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὅπως εἰργάσθημεν μὲ τὸ σημεῖον Ο δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν μὲ ὁποιοδήποτε ἄλλο σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου.

Ἤτοι ὑπάρχουν εἰς τὸ ἐπίπεδον ἄπειροι κύκλοι διερχόμενοι διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β. Τὰ κέντρα ὅλων αὐτῶν εἶναι σημεῖα τῆς μ ε σ ο κ α θ έ τ ο υ πρὸς τὸ τμῆμα ΑΒ.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

98. Σημειώσατε τρία διαφορετικὰ σημεῖα μὴ κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ κατασκευάσατε κύκλον διερχόμενον καὶ διὰ τῶν τριῶν αὐτῶν σημείων. Πόσους τοιούτους κύκλους δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν;

99. Σημειώσατε 4 διαφορετικὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ μὴ κείμενα ἀνὰ τρία ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Ἔπειτα χαράξατε δύο κύκλους, οἱ ὁποῖοι διέρχονται ὁ μὲν εἷς διὰ τῶν Α, Β, Γ, ὁ δὲ ἄλλος διὰ τῶν Α, Β, Δ.

## 41. Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΗΜΕΙΟΝ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ (ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ)

Ἡ συμμετρία ὡς πρὸς εὐθεῖαν δὲν εἶναι τὸ μόνον εἶδος συμμετρίας, τὸ ὁποῖον συναντῶμεν εἰς τὸ περιβάλλον μας.

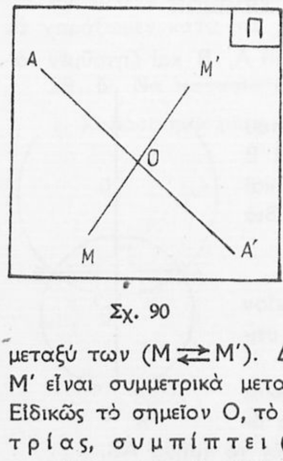
Εἰς τὸ σχ. 89 διακρίνομεν μίαν ἄλλην συμμετρίαν· τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς σημεῖον.

Σχ. 89

### 41. 1. Ὁρισμὸς

Εἰς τὸ ἐπίπεδον Π δίδονται δύο διαφορετικὰ σημεῖα Ο καὶ Α. Χαράσσομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΟ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν σημεῖον Α' εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι ΟΑ = ΟΑ', σχ. 90. Ἤτοι τὸ σημεῖον Ο νὰ εἶναι μέσον τοῦ τμήματος ΑΑ'. Τὸ σημεῖον Α' λέγεται συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ Ο. Μὲ ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ συμμετρικὸν ἑκάστου σημείου τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο.

Συνεπῶς : Ἐὰν εἰς τὸ ἐπίπεδον Π δοθῇ ἓν σημεῖον Ο, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν μεταξὺ τῶν σημείων αὐτοῦ μίαν ἀντιστοιχίαν τοιαύτην ὥστε :




Σχ. 90

Εἰς ἕκαστον σημεῖον Μ τοῦ Π νὰ ἀντιστοιχῇ ἓν καὶ μόνον ἓν σημεῖον τοῦ Π. τὸ συμμετρικὸν Μ' τοῦ Μ ὡς πρὸς Ο.

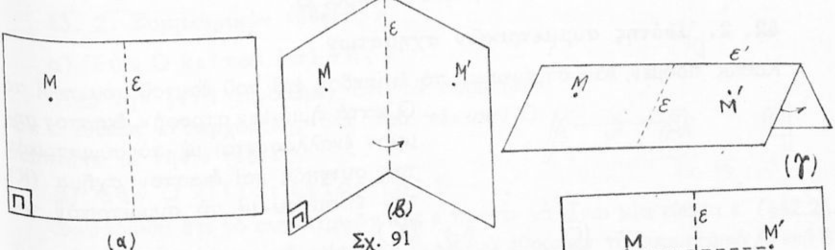
Ἡ ἀντιστοιχία αὕτη ὀνομάζεται συμμετρία ὡς πρὸς τὸ Ο γράφεται δὲ συντόμως Σ(Ο).

Εἰς τὴν Σ(Ο) τὸ Μ' εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Μ. Ἀπὸ τὸν τρόπον ὅμως εὑρέσεως τοῦ Μ' ἐννοοῦμεν ὅτι εἰς τὴν ἰδίαν συμμετρίαν καὶ τὸ Μ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Μ' Ἤτοι : Εἰς τὴν Σ(Ο) τὰ σημεῖα Μ, Μ' ἀντιστοιχοῦν διττῶς (ἀμφιμοσημάντως) μεταξύ των ($M \rightleftarrows M'$). Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι εἰς τὴν Σ(Ο) τὰ σημεῖα Μ, Μ' εἶναι συμμετρικὰ μεταξύ των ἢ ἁπλῶς συμμετρικὰ ἢ ὁμόλογα. Εἰδικῶς τὸ σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον εἰς τὴν Σ(Ο) λέγεται κέντρον συμμετρίας, συμπίπτει (ταυτίζεται) μὲ τὸ συμμετρικόν του.

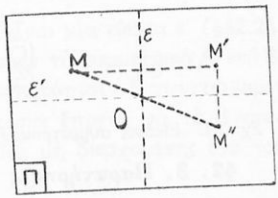
Ὥστε : Εἰς τὴν Σ(Ο) : **Μ, Μ' εἶναι συμμετρικὰ σημαίνει ὅτι : τὸ Ο εἶναι μέσον τοῦ τμήματος ΜΜ'.**

**41. 2.** Εἰς ἓν φύλλον χάρτου σημειώνομεν σημεῖον Μ, σχ. 91α. Διπλώνομεν ἔπειτα τὸ φύλλον τοῦτο δύο φορὰς διαδοχικῶς. Τὴν πρώτην φορὰν κατὰ μίαν εὐθεῖαν αὐτοῦ ε, μὴ διερχομένην διὰ τοῦ Μ, σχ. 91β, καὶ τὴν δευτέραν κατὰ εὐθεῖαν ε' κάθετον πρὸς τὴν ε, σχ. 91γ (Διπλῆ δίπλωσις).

Σημειώνομεν τὸ συμμετρικὸν Μ' τοῦ Μ εἰς τὴν Σ(ε) καὶ τὸ συμμετρικὸν Μ'' τοῦ Μ' εἰς τὴν Σ(ε'). Ἂς ἀναπτύξωμεν ἤδη τὸ φύλλον καὶ ἂς προσέξωμεν τὴν θέσιν τῶν σημείων Μ καί Μ'' ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τομῆς Ο τῶν δύο καθέτων εὐθειῶν ε, ε'. Διαπιστώνομεν* ὅτι τὸ Ο εἶναι μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΜ''. Ἤτοι τὰ σημεῖα Μ, Μ'' εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ Ο.



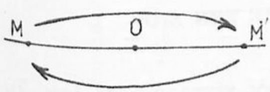
Σχ. 91




Τὸ ἀνωτέρω πείραμα μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸ ἑξῆς συμπέρασμα:

**Τὸ ἀποτέλεσμα δύο διαδοχικῶν συμμετριῶν ὡς πρὸς δύο εὐθείας καθέτους εἶναι μία συμμετρία ὡς πρὸς τὴν τομὴν τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.**

**41. 3.** Ἐπὶ ἑνὸς φύλλου σχεδίου σημειώνομεν σημεῖον Ο καὶ δύο συμμετρικὰ ὡς πρὸς αὐτὸ σημεῖα Μ, Μ', σχ. 92. Ἔπειτα ἐπιθέτομεν ἐπ' αὐτοῦ φύλλον διαφανοῦς χάρτου καὶ ἀφοῦ σταθεροποιήσωμεν** τὰ δύο φύλλα εἰς τὸ Ο περιστρέφομεν τὸ διαφανὲς περὶ τὸ Ο κατὰ ἡμισείαν στροφήν. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ στροφὴ αὕτη φέρει τὸ μὲν Μ εἰς τὸ Μ' τὸ δὲ Μ' εἰς τὸ Μ.



Σχ. 92

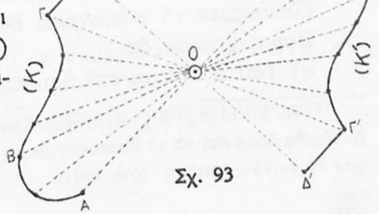
Ἡ παρατήρησις αὕτη μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸ ἀκόλουθον συμπέρασμα.

**Ἐὰν στρέψωμεν τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του περὶ τὸ Ο κατὰ ἡμισείαν στροφήν, τότε ἕκαστον σημεῖον αὐτοῦ ἐναλλάσσεται μὲ τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς Ο.**

## 42. ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΝ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΗΜΕΙΟΝ

**42. 1. Ὁρισμός** Ἂς εὕρωμεν εἰς τὴν Σ(Ο) τὰ ὁμόλογα Α', Β', Γ . . . τῶν σημείων Α, Β, Γ . . . ἑνὸς σχήματος (Κ), σχ. 93.

Τὸ σχῆμα (Κ'), τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ ὁμόλογα ὅλων τῶν σημείων τοῦ (Κ) καὶ μόνον ἀπὸ αὐτά, λέγεται συμμετρικὸν τοῦ σχήματος (Κ) εἰς τὴν Σ(Ο).



Σχ. 93

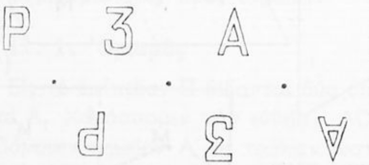
* Ἡ ἀπόδειξις θὰ δοθῇ ἀργότερον.

** Μὲ τὴν βοήθειαν μιᾶς καρφίδος.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ τὸ (Κ) εἶναι συμμετρικὸν τοῦ (Κ΄) εἰς τὴν Σ(Ο). Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι τὰ σχήματα (Κ) καὶ (Κ΄) εἶναι συμμετρικὰ μεταξύ των ἢ ἁπλῶς συμμετρικὰ ὡς πρὸς Ο.

### 42. 2. Ἰσότης συμμετρικῶν σχημάτων

Καθὼς εἴδομεν, ἐὰν στρέψωμεν τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του περὶ τὸ Ο κατὰ ἡμισείαν στροφήν, ἕκαστον σημεῖον ἐναλλάσσεται μὲ τὸ συμμετρικόν του, συνεπῶς καὶ ἕκαστον σχῆμα (Κ) τοῦ ἐπιπέδου μὲ τὸ συμμετρικόν του (Κ΄).



Σχ. 94. Εἰκόνες συμμετρικῶν σχημάτων

Ἤτοι: **Δύο σχήματα συμμετρικὰ ὡς πρὸς κέντρον εἶναι ἴσα.**

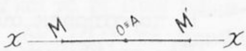
### 42. 3. Παρατήρησις

Ἀντιθέτως πρὸς τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς εὐθεῖαν, ὅπου ἓν σχῆμα (Κ) ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ (Κ΄) ἀφοῦ πρὶν τὸ ἓν ἀπὸ αὐτὰ ἀναστραφῆ, εἰς τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς σημεῖον ἡ ἀνωτέρω ἐφαρμογὴ ἐπιτυγχάνεται μόνον δι᾿ ὀλισθήσεως. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι εἰς τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς σημεῖον δύο συμμετρικὰ σχήματα εἶναι εὐθέως ἴσα.

## 43. ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΤΙΝΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ Σ(Ο)

### 43. 1. Συμμετρικὸν ἡμιευθείας Αχ

Καθὼς εἴδομεν, τὰ συμμετρικὰ σχήματα ὡς πρὸς κέντρον εἶναι ἴσα. Συνεπῶς καὶ τὸ συμμετρικὸν ἡμιευθείας Αχ θὰ εἶναι ἐπίσης ἡμιευθεῖα. Διὰ νὰ τὴν εὕρωμεν δέ, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ συμμετρικὸν τοῦ ἄκρου Α καὶ ἑνὸς ἄλλου σημείου Μ αὐτῆς. Διακρίνομεν ἰδιαιτέρως τὰς ἑξῆς περιπτώσεις.




Σχ. 95

1) Ἐὰν $O \equiv A$, σχ. 95.

Παρατηροῦμεν ὅτι:

α) Τὸ συμμετρικὸν τῆς ἀρχῆς Α συμπίπτει μὲ τὸ Α β) τὸ συμμετρικὸν τυχόντος σημείου Μ τῆς Αχ κεῖται ἐπὶ τῆς ἀντιθέτου ἡμιευθείας αὐτῆς Αχ΄. Ἀπὸ τὴν παρατήρησιν αὐτὴν ὁδηγούμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ συμμετρικὸν τῆς ἡμιευθείας Αχ εἶναι ἡ ἀντίθετος αὐτῆς ἡμιευθεῖα Αχ΄.

2) Ἐὰν τὸ Ο κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας τῆς Αχ, σχ. 96.

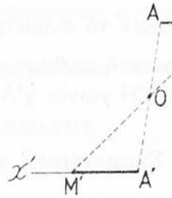
Εὑρίσκομεν τὰ συμμετρικὰ δύο σημείων Α καὶ Μ, τῆς Αχ.

Παρατηροῦμεν ὅτι:

α) Ταῦτα κεῖνται ἐπὶ ἡμιευθείας Α΄χ΄ παραλλήλου* πρὸς τὴν Αχ.

* Τὸ ὅτι αἱ Αχ, Α΄χ΄ εἶναι παράλληλοι τὸ διαπιστώνομεν μὲ παράλληλον μετατόπισιν. Δυνάμεθα ὅμως καὶ νὰ τὸ δικαιολογήσωμεν ὡς ἑξῆς. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι τῶν ἡμιευθειῶν Αχ, Α΄χ΄ εἶχον ἓν κοινὸν σημεῖον, τότε τοῦτο. .

β) Αἱ παράλληλοι ἡμιευθεῖαι Αχ, Α'χ' εὑρίσκονται εἰς τὰ ἀ ν τ ί θ ε τ α ἡμιεπίπεδα ἀκμῆς ΑΑ' (ἀντίρροποι).



Σχ. 96

### 43. 2. Συμμετρικὸν εὐθείας ε

α) Ἐ ὰ ν Ο κ ε ῖ τ α ι ἐ π ὶ τ ῆ ς ε.

Ἀπὸ τὴν §43.1 ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ συμμετρικὸν ε' εὐθείας ε διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου Ο συμπίπτει μὲ τὴν ε (ε≡ε').

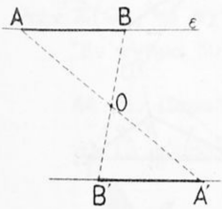
β) Ἐ ὰ ν Ο κ ε ῖ τ α ι ἐ κ τ ὸ ς τ ῆ ς ε.

Σκεπτόμεθα ὅτι τὸ συμμετρικὸν τῆς ε πρέπει νὰ εἶναι μία εὐθεῖα ε' (§42.2). Συνεπῶς διὰ νὰ τὴν προσδιορίσωμεν ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰ συμμετρικὰ Α' καὶ Β' δύο σημείων Α, Β τῆς ε, σχ. 97. Μὲ παράλληλον μετατόπισιν διαπιστώνομεν ὅτι ἡ ε' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε. Τοῦτο ἄλλωστε ἔπρεπε νὰ τὸ ἀναμένωμεν ἀφοῦ, καθὼς εἴδομεν, τὸ συμμετρικὸν ἡμιευθείας μὴ διερχομένης διὰ τοῦ Ο, εἶναι ἡμιευθεῖα παράλληλος πρὸς αὐτήν.

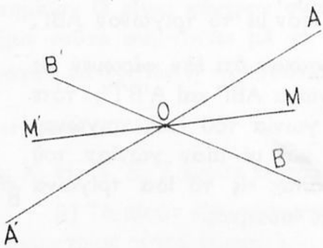
### 43. 3. Συμμετρικὸν γωνίας. Ἰσότης τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν

Εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ συμμετρικὸν μιᾶς γωνίας ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰ συμμετρικὰ τῶν πλευρῶν αὐτῆς.

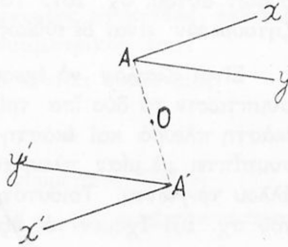
Διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις



Σχ. 97



Σχ. 98



Σχ. 99

α) Ὅ τ α ν ἡ κ ο ρ υ φ ὴ σ υ μ π ί π τ η μ ὲ τ ὸ κ έ ν τ ρ ο ν σ υ μ μ ε τ ρ ί α ς.

Ἂς εὕρωμεν τὸ συμμετρικὸν τῆς γωνίας ΑΟΒ, σχ. 98.

Εἰς τὴν Σ(Ο) αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ, ΟΒ ἔχουν συμμετρικὰς τὰς ἀντιθέτους αὐτῶν ἡμιευθείας ΟΑ', ΟΒ' ἀντιστοίχως. Τυχοῦσα ἡμιευθεῖα ΟΜ, ἐσωτερικὴ τῆς γωνίας ΑΟΒ, ἔχει συμμετρικὴν τὴν ἀντίθετον αὐτῆς ΟΜ', ἐσωτερικὴν τῆς γωνίας Α'ΟΒ'.

Ἤτοι : Εἰς τὴν Σ(Ο) ἡ γωνία ΑΟΒ ἔχει ὡς συμμετρικὴν τὴν κ α τ ὰ κ ο ρ υ φ ὴ ν α ὐ τ ῆ ς γ ω ν ί α ν.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν συμμετρικῶν σχημάτων συμπεραίνομεν ὅτι :

**Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.**

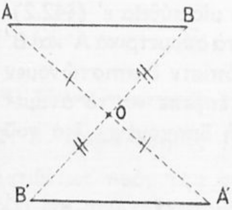
β) Ὅταν ἡ κορυφὴ δὲν συμπίπτῃ μὲ τὸ κέντρον συμμετρίας.

Ἂς εὕρωμεν τὸ συμμετρικὸν τῆς γωνίας χΑψ, σχ. 99.

Εὑρίσκομεν ἡμιευθείας Α'χ', Α'ψ' συμμετρικὰς τῶν Αχ, Αψ ἀντιστοίχως εἰς τὴν Σ(Ο). Ἡ γωνία χ'Α'ψ' εἶναι συμμετρικὴ τῆς γωνίας χΑψ εἰςτὴν Σ(Ο).

### 43. 4. Συμμετρικὸν εὐθ. τμήματος

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς εὐθ. τμήματος ΑΒ ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰ συμμετρικὰ τῶν ἄκρων Α καὶ Β αὐτοῦ.




Σχ. 100

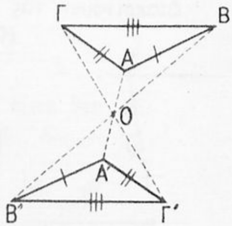
Εἰς τὸ σχ. 100 φαίνεται τὸ συμμετρικὸν τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ εἰς τὴν Σ(Ο), ὅπου τὸ Ο κεῖται ἐκτὸς εὐθείας ΑΒ.

Εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα Α'Β' παράλληλον καὶ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ. Ἔχει δὲ ὡς ἄκρα Α', Β' τὰ συμμετρικὰ τῶν ἄκρων τοῦ ΑΒ.

### 43. 5. Συμμετρικὸν τριγώνου

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ συμμετρικὸν τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὴν Σ(Ο) εὑρίσκομεν τὰ συμμετρικὰ Α', Β', Γ' τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, σχ. 101. Τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι τὸ ζητούμενον· εἶναι δὲ εὐθέως ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Εἶναι εὔκολον νὰ ἐννοήσωμεν ὅτι ἐὰν φέρωμεν εἰς σύμπτωσιν τὰ δύο ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ', τότε ἑκάστη πλευρὰ καὶ ἑκάστη γωνία τοῦ ἑνὸς τριγώνου συμπίπτει μὲ μίαν πλευρὰν καὶ μὲ μίαν γωνίαν τοῦ ἄλλου τριγώνου. Τοιουτοτρόπως εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα τοῦ σχ. 101 ἔχομεν τὰς ἑξῆς ἰσότητας.




Σχ. 101

| | | |
|---|---|---|
| $\widehat{A}=\widehat{A'}$ | $\widehat{B}=\widehat{B'}$ | $\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma'}$ |
| ΑΒ=Α'Β' | ΒΓ=Β'Γ' | ΑΓ=Α'Γ' |

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

100. Χαράξατε δύο τεμνομένας εὐθείας ε, ε'. Μετρήσατε τὴν μίαν ἀπὸ τὰς 4 σχηματιζομένας γωνίας καὶ ὑπολογίσατε τὰς ἄλλας τρεῖς γωνίας.

101. Νὰ εὕρετε τὸ συμμετρικὸν μιᾶς μὴ κυρτῆς γωνίας ὡς πρὸς τὴν κορυφὴν αὐτῆς.

102. Χαράξατε δύο εὐθείας ε, ε' τεμνομένας εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἐπὶ τῆς ε καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ Ο, λάβετε δύο σημεῖα Α, Β τοιαῦτα ὥστε ΟΑ=ΟΒ. Ἐπὶ δὲ τῆς ε' καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ Ο, δύο ἄλλα σημεῖα τοιαῦτα ὥστε ΟΓ=ΟΔ:

α) Εἰς τὴν Σ(Ο) νὰ εὕρετε τὰ ὁμόλογα τῶν ΟΑ, ΓΔ, καὶ ΒΔ.

β) Νὰ ἐξετάσετε ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι παράλληλοι.

103. Εἰς τὸ σχέδιον τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως νὰ ἐξετάσετε διατὶ ἡ εὐθεῖα τῶν μέσων τῶν τμημάτων ΑΓ καὶ ΒΔ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ο.

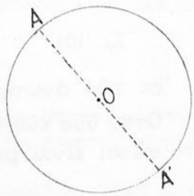
104. Ποῖον εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ σχήματος ΑΒΓΔ, τῆς ἀσκήσεως 103 εἰς τὴν Σ(Ο);

## 44. ΚΕΝΤΡΟΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

### 44. 1. Ὁρισμὸς

Ποῖον εἶναι τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς κύκλου εἰς τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὸ κέντρον Ο αὐτοῦ;

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς σημείου Α αὐτοῦ εἶναι τὸ σημεῖον Α', τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἰδίου κύκλου (ΟΑ= ΟΑ'), σχ. 102.



Σχ. 102

Γενικῶς τὸ συμμετρικὸν ἑκάστου σημείου τοῦ κύκλου κεῖται ἐπὶ τοῦ ἰδίου κύκλου.

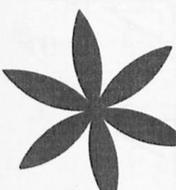
Ἤτοι: Εἰς τὴν Σ(Ο), ὁ κύκλος (Ο, α) συμπίπτει μὲ τὸν συμμετρικόν του. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εἶναι κ έ ν τ ρ ο ν σ υ μ μ ε τ ρ ί α ς αὐτοῦ.

Γενικῶς: **Ἓν σημεῖον Ο εἶναι κέντρον συμμετρίας σχήματος, ἐὰν εἰς τὴν Σ(Ο), τὸ σχῆμα τοῦτο συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικόν του.**

Ἓν σχῆμα δυνατὸν νὰ ἔχῃ ἓν ἢ περισσότερα κέντρα συμμετρίας.

### 44. 2. Παραδείγματα

α) Τὰ σύμβολα Χ, Η, Ν, Ξ, Ζ ἔχουν κέντρον συμμετρίας. Ποῖον;


Σχ. 103

β) Τὸ μέσον εὐθ. τμήματος εἶναι τὸ μοναδικὸν κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ. (Διατί;).

γ) Εἴδομεν ὅτι τὸ συμμετρικὸν εὐθείας ὡς πρὸς σημεῖον αὐτῆς εἶναι ἡ ἰδία εὐθεῖα.

Ἤτοι:

Ἡ εὐθεῖα ἔχει ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς κέντρον συμμετρίας. Ἀντιθέτως:

Μία ἡμιευθεῖα οὐδὲν κέντρον συμμετρίας ἔχει. (Διατί;).

δ) Εἰς τὸ σχέδιον 103 ὑπάρχει κέντρον συμμετρίας; Ποῖον;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

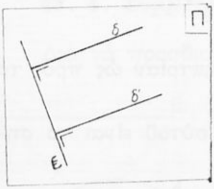
105. Νὰ εὕρετε γνωστὰ σύμβολα, σχέδια, μὲ κέντρον συμμετρίας.

106. Νὰ εὕρετε τὸ κέντρον συμμετρίας:

α) Δύο τεμνομένων εὐθειῶν. β) Δύο παραλλήλων καὶ ἴσων εὐθ. τμημάτων. γ) Δύο κατὰ κορυφὴν γωνιῶν. δ) Τοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓν εὐθ. τμῆμα καὶ τὴν μεσοκάθετον αὐτοῦ.

## 45. ΕΥΘΕΙΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ

Γνωρίζομεν ἤδη τί εἶναι παράλληλοι εὐθεῖαι. Κατωτέρω θὰ ἔχωμεν τὴν εὐκαιρίαν διὰ μίαν καλυτέραν γνωριμίαν μὲ αὐτάς.



Σχ. 104

Εἰς ἓν ἐπίπεδον χαράσσομεν μίαν εὐθεῖαν ε καὶ δύο καθέτους πρὸς αὐτὴν $\delta \perp \varepsilon$, $\delta' \perp \varepsilon$. (σχ. 104).

Ἂς προσέξωμεν τὰς δύο διαφορετικὰς εὐθείας δ, δ'

α) Εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ

β) δὲν τέμνονται*

**Δύο εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ δὲν τέμνονται, λέγονται παράλληλοι**

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

**Ὅταν δύο εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου εἶναι κάθετοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, τότε αὗται εἶναι μεταξύ των παράλληλοι.**

Ἢ συμβολικῶς : $\left\{ \delta,\ \delta' \in \Pi \quad \text{καὶ} \quad \begin{matrix} \delta \perp \varepsilon \\ \delta' \perp \varepsilon \end{matrix} \right\} \Longrightarrow \delta \parallel \delta'$

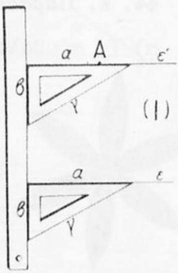
## 46. ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ ΑΠΟ ΣΗΜΕΙΟΝ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑΝ

Διὰ νὰ χαράξωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον Α εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ε, σχ. 105, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

1. Τοποθετοῦμεν κατὰ μῆκος τῆς ε μίαν ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρὰς τοῦ γνώμονος γ. Π.χ. τὴν πλευρὰν α.

2. Κατὰ μῆκος τῆς δευτέρας καθέτου πλευρᾶς αὐτοῦ β, τοποθετοῦμεν τὴν ἀκμὴν τοῦ κανόνος Κ.

3. Κρατοῦμεν ἀκίνητον τὸν κανόνα καὶ μετακινοῦμεν (μὲ ὀλίσθησιν) τὸν γνώμονα προσέχοντας νὰ ἐφαρμόζῃ διαρκῶς ἡ δευτέρα κάθετος πλευρὰ β αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ κανόνος. Εἰς τὴν θέσιν (Ι) τοῦ γνώμονος, σχ. 105, ἡ κάθετος πλευρὰ α αὐτοῦ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Α.



Σχ. 105

4. Χαράσσομεν τὴν εὐθεῖαν ε' ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς α. Ἡ εὐθεῖα αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Α καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε. (Διατί;).

* Ἐὰν ἐτέμνοντο (ἔστω εἰς τὴν προέκτασίν των), τότε ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς θὰ εἴχομεν δύο καθέτους πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε.....

Γενικῶς ἑκάστη θέσις τῆς πρώτης καθέτου πλευρᾶς α ὁρίζει μίαν παράλληλον εὐθεῖαν πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε.

## 47. ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΝ ΑΙΤΗΜΑ

Γεννᾶται τὸ ἐρώτημα:

Μήπως ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Α ἦτο δυνατὸν νὰ χαράξωμεν καὶ ἄλλην παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε; Πρακτικῶς εἰς τὸ σχέδιόν μας βεβαιούμεθα ὅτι τοῦτο εἶναι ἀδύνατον. Εἰς τὴν Γεωμετρίαν, τὴν ὁποίαν μελετοῦμεν, παραδεχόμεθα ὅτι:

**Ἀπὸ ἓν σημεῖον ἐκτὸς εὐθείας, μία καὶ μόνον μία παράλληλος διέρχεται πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτήν.**

Ἡ ἀνωτέρω πρότασις εἶναι θεμελιώδης, εἶναι δὲ γνωστὴ ὡς Εὐκλείδειον* αἴτημα.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

107. Χαράξατε δύο εὐθείας παραλλήλους καὶ μίαν ἄλλην εὐθεῖαν κάθετον πρὸς τὴν μίαν ἀπὸ αὐτάς. Πῶς τέμνει ἡ κάθετος αὔτη τὴν ἄλλην παράλληλον; Χρησιμοποιήσατε τὰ ὄργανά σας.

108. Χαράξατε δύο εὐθείας παραλλήλους καὶ μίαν ἄλλην παράλληλον πρὸς μίαν ἀπὸ αὐτάς. Ποία ἡ θέσις τῆς τελευταίας αὐτῆς εὐθείας ὡς πρὸς τὴν ἄλλην παράλληλον; (Χρησιμοποιήσατε παράλληλον μετατόπισιν).

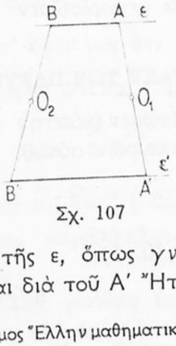
109. Νὰ εὕρετε διατί αἱ ἐφαπτόμεναι κύκλου εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου αὐτοῦ εἶναι παράλληλοι.

## 48. ΚΕΝΤΡΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΔΥΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ

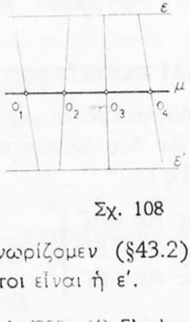
**48.1.** Χαράσσομεν δύο εὐθείας παραλλήλους, $\varepsilon \parallel \varepsilon'$, λαμβάνομεν δὲ ἓν σημεῖον Α τῆς ε καὶ ἓν σημεῖον Α′ τῆς ε′. Ἂς συγκεντρώσωμεν τὴν προσοχήν μας εἰς τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὸ μέσον Ο, τοῦ τμήματος ΑΑ′, σχ. 106.

α) Εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ Α καὶ Α′ εἶναι συμμετρικά.

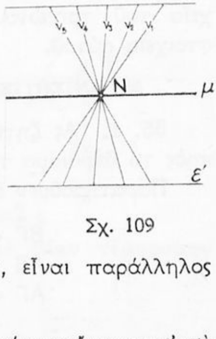
Σχ. 106



Σχ. 107



Σχ. 108



Σχ. 109

β) Ἡ συμμετρικὴ τῆς ε, ὅπως γνωρίζομεν (§43.2), εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτὴν καὶ διέρχεται διὰ τοῦ Α′ Ἤτοι εἶναι ἡ ε′.

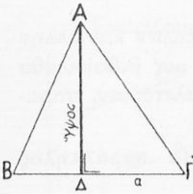
---

* Εὐκλείδης: Διάσημος Ἕλλην μαθηματικὸς (300 π.Χ). Εἰς τὸ περίφημον ἔργον του εἰς τὰ «Στοιχεῖα», ὠργάνωσε κατὰ θαυμάσιον τρόπον τὰς μαθηματικὰς γνώσεις τῆς ἐποχῆς του. Ἔκτοτε τὰ «Στοιχεῖα» ἀποτελοῦν τὰς βάσεις τῆς γεωμετρικῆς μορφώσεως.

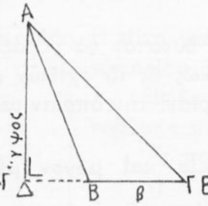
### 54. ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

**54. 1. Ὕψος**

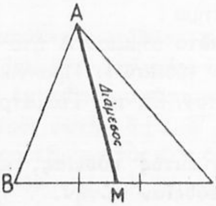
Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α τριγώνου ΑΒΓ, σχ. 116, 117, δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν μίαν κάθετον πρὸς τὴν εὐθεῖαν τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ.



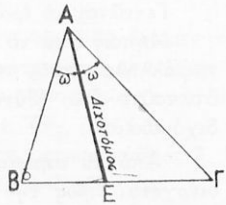
Σχ. 116



Σχ. 117



Σχ. 118



Σχ. 119

Τὸ τμῆμα ΑΔ τῆς καθέτου ταύτης ἢ καὶ ὁλόκληρος ἡ εὐθεῖα τῆς καθέτου, λέγεται ὕ ψ ο ς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ. Τὸ σημεῖον Δ λέγεται ἴ χ ν ο ς τοῦ ὕψους τούτου.

**54. 2. Διάμεσος**

Ἡ κορυφὴ Α καὶ τὸ μέσον Μ τῆς ἀπέναντι αὐτῆς πλευρᾶς ΒΓ, σχ. 118, ὁρίζουν τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΜ. Τὸ τμῆμα τοῦτο ἢ καὶ ὁλόκληρος ἡ εὐθεῖα αὐτοῦ λέγεται δ ι ά μ ε σ ο ς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ.

**54. 3. Διχοτόμος**

Τὸ τμῆμα ΑΕ, σχ. 119, τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ ἢ καὶ ὁλόκληρος ἡ ἡμιευθεῖα αὐτῆς λέγεται δ ι χ ο τ ό μ ο ς τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου τούτου. Τὸ σημεῖον Ε λέγεται ἴ χ ν ο ς τῆς διχοτόμου αὐτῆς.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω:

**Ἕκαστον τρίγωνον ἔχει 3 ὕψη, 3 διαμέσους καὶ 3 διχοτόμους**

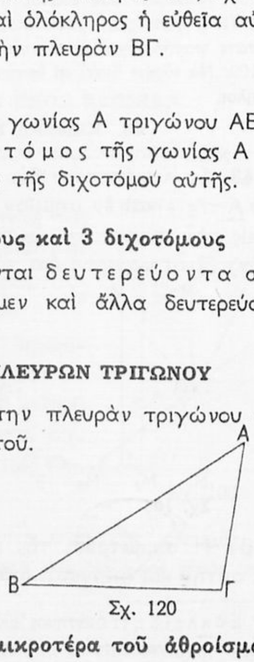
Τὰ ὕψη, αἱ διάμεσοι καὶ αἱ διχοτόμοι λέγονται δ ε υ τ ε ρ ε ύ ο ν τ α στοιχεῖα τοῦ τριγώνου. Ἀργότερον θὰ γνωρίσωμεν καὶ ἄλλα δευτερεύοντα στοιχεῖα αὐτοῦ.

### 55. ΑΝΙΣΟΤΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΠΛΕΥΡΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

**55. 1.** Ἂς ζητήσωμεν νὰ συγκρίνωμεν ἑκάστην πλευρὰν τριγώνου ΑΒΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.

Παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\left.\begin{aligned} ΒΓ &< ΑΒ+ΑΓ \\ ΑΒ &< ΑΓ+ΓΒ \\ ΑΓ &< ΑΒ+ΒΓ \end{aligned}\right\} \quad (\S\ 10.\ 5)$$



Σχ. 120

Ἤτοι: **Ἑκάστη πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ** ὡς μίαν πλευρὰν τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΒ ἢ τὴν ἡμιευθεῖαν ΒΑ καὶ λέγονται ἐσωτερικαὶ ἢ ἐντός.

Αἱ ἄλλαι τέσσαρες γωνίαι, αἱ $A_3$, $A_4$, $B_3$, $B_4$, ἔχουν ὡς μίαν πλευρὰν τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΖ ἢ τὴν ἡμιευθεῖαν ΒΖ′ καὶ λέγονται ἐξωτερικαὶ ἢ ἐκτός.

Αἱ γωνίαι $A_1$ καὶ $B_1$, ἐπειδὴ εἶναι ἀμφότεραι ἐντὸς καὶ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης $\gamma$, λέγονται ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. Ὁμοίως καὶ αἱ γωνίαι $A_2$, $B_2$.

Αἱ γωνίαι $A_2$ καὶ $B_1$ εἶναι ἀμφότεραι ἐντὸς ἀλλὰ οὐχὶ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης $\gamma$ καὶ λέγονται ἐντὸς ἐναλλάξ. Ὁμοίως καὶ αἱ γωνίαι $A_1$ καὶ $B_2$.

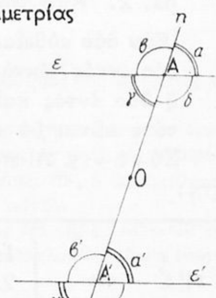
Αἱ γωνίαι $A_4$ καὶ $B_1$ κεῖνται ἡ μία ἐντός, ἡ ἄλλη ἐκτὸς ἀλλὰ ἀμφότεραι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς $\gamma$ καὶ λέγονται ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

## 50. ΓΩΝΙΑΙ ΣΧΗΜΑΤΙΖΟΜΕΝΑΙ ΥΠΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΚΑΙ ΜΙΑΣ ΤΕΜΝΟΥΣΗΣ ΑΥΤΑΣ

Εἰς τὸ σχ. 111 ἔχομεν χαράξει δύο παραλλήλους, $\varepsilon \parallel \varepsilon'$, καὶ μίαν εὐθεῖαν $\eta$ τέμνουσαν αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Α′.

Ἂς συγκεντρώσωμεν τὴν προσοχήν μας εἰς τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὸ μέσον Ο τοῦ τμήματος ΑΑ′.

Παρατηροῦμεν ὅτι: αἱ εὐθεῖαι $\varepsilon$, $\varepsilon'$ εἶναι συμμετρικαὶ ἡ δὲ $\eta$ συμπίπτει μὲ τὴν συμμετρικήν της. Συνεπῶς τὸ Ο εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ σχήματος.



Σχ. 111

α) Ἂς προσέξωμεν ἤδη δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας τοῦ σχήματος αὐτοῦ. Παρατηροῦμεν ὅτι: Αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι $\alpha'$ καὶ $\gamma$ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς Ο· ἄρα καὶ ἴσαι.

$$\widehat{\alpha'} = \widehat{\gamma}$$

β) Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν μας ὅτι καὶ $\widehat{\alpha} = \widehat{\gamma}$ (κατὰ κορυφὴν γωνίαι), εὑρίσκομεν ὅτι καὶ : $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha'}$

$$(\widehat{\alpha} = \widehat{\gamma} \text{ καὶ } \widehat{\gamma} = \widehat{\alpha'}) \Rightarrow \widehat{\alpha} = \widehat{\alpha'}$$

γ) Ἐπειδὴ $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha'}$ καὶ $\widehat{\alpha} + \widehat{\delta} = 2\llcorner$ θὰ εἶναι καὶ $\widehat{\alpha'} + \widehat{\delta} = 2\llcorner$

Ὥστε: **Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι σχηματίζουν μὲ μίαν τέμνουσαν αὐτάς:**

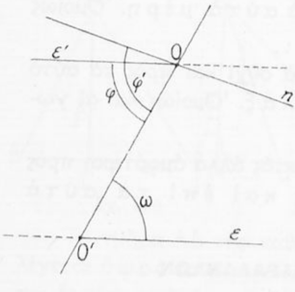
**ι) Τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας.**

**ιι) Τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ γωνίας ἴσας.**

**ιιι) Τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ γωνίας παραπληρωματικάς.**

## 51. ΓΝΩΡΙΣΜΑΤΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

**51. 1.** Σχηματίζομεν δύο ἴσας γωνίας, $\widehat{\omega}=\widehat{\varphi}$ καὶ τὰς τοποθετοῦμεν ὅπως δεικνύει τὸ σχ. 112. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ σχέδιον αὐτὸ αἱ εὐθεῖαι ε, ε′ τέμνονται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΟΟ′ καὶ σχηματίζουν δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας. Ποίαν θέσιν ἔχουν μεταξύ των αἱ εὐθεῖαι ε, ε′; Μὲ παράλληλον μετατόπισιν διαπιστώνομεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ε, ε′ εἶναι π α ρ ά λ λ η λ ο ι.



Σχ. 112

Τοῦτο δικαιολογεῖται ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν ἡ ε′ δὲν ἦτο παράλληλος πρὸς τὴν ε τότε ὡς γνωστὸν θὰ ὑπῆρχε μία ἄλλη εὐθεῖα η, ἡ ὁποία θὰ διήρχετο διὰ τοῦ Ο καὶ θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς τὴν ε. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ γωνίαι φ′ καὶ ω, σχ. 112, θὰ ἦσαν ἴσαι (ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ε καὶ η).

Ἤτοι θὰ ἦτο $\left.\begin{array}{l}\widehat{\omega}=\widehat{\varphi}\\ \widehat{\omega}=\widehat{\varphi'}\end{array}\right\} \Longrightarrow \widehat{\varphi}=\widehat{\varphi'}$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν φ καὶ φ′ ἐννοοῦμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ε′ καὶ η συμπίπτουν.

Ὥστε: **Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ τρίτης καὶ σχηματίζουν δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας θὰ εἶναι παράλληλοι.**

**51. 2.** Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω πρότασιν προκύπτουν καὶ αἱ ἑξῆς:

**Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζουν:**
**δύο ἐντός, ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ γωνίας ἴσας**
**ἢ δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ γωνίας παραπληρωματικὰς**
**τότε αὗται θὰ εἶναι παράλληλοι.**

Σύνοψις. Αἱ προτάσεις τῶν παραγράφων 50 καὶ 51 συνοψίζονται ὡς ἑξῆς:

| | | |
|---|---|---|
| ε ∥ ε′ | ⟺ | 1. Ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ἴσαι.<br>2. Ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ γωνίαι ἴσαι.<br>3. Ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ γωνίαι παραπληρωματικαί. |

## 52. Ἐφαρμογαί

**52. 1.** Ἡ πρότασις τῆς παρ. 50 μᾶς ἐπιτρέπει, ὅταν γνωρίζωμεν μίαν ἀπὸ τὰς 8 γωνίας αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ δύο παραλλήλων καὶ μιᾶς τεμνούσης αὐτάς, νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς ἄλλας 7.

Π.χ. ἐὰν εἰς τὸ σχ. 111 εἶναι $\widehat{\alpha}=60^{o}$ τότε θὰ ἔχωμεν:

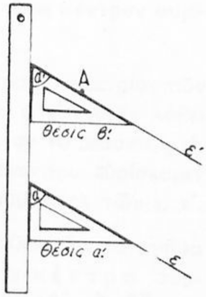
$$\widehat{\alpha}=\widehat{\alpha'}=\widehat{\gamma}=\widehat{\gamma'}=60^{o}$$

$$\widehat{\beta}=180^{o}-60^{o}=120^{o} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\beta}=\widehat{\delta}=\widehat{\beta'}=\delta'=120^{o}$$

**52. 2.** Ἡ πρότασις τῆς παρ. 51 μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸν ἑξῆς τρόπον χαράξεως παραλλήλων μὲ γνώμονα καὶ κανόνα.

Ἔστω ὅτι θέλωμεν νὰ χαράξωμεν εὐθεῖαν ε' παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν ε, σχ. 113.

Πρὸς τοῦτο τοποθετοῦμεν κατὰ μῆκος τῆς ε μίαν πλευρὰν τοῦ γνώμονος καὶ ἐφαρμόζομεν εἰς μίαν ἐκ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ τὴν ἀκμὴν τοῦ κανόνος (θέσις α'). Ἔπειτα ὀλισθαίνομεν τὸν γνώμονα, κατὰ μῆκος τῆς ἀκμῆς τοῦ κανόνος εἰς μίαν ἄλλην θέσιν (θέσις β'). Εἰς αὐτὴν τὴν θέσιν χαράσσομεν εὐθεῖαν ε' κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ γνώμονος, ἡ ὁποία ἀρχικῶς ἐφήρμοζε ἐπὶ τῆς εὐθείας ε. Αἱ εὐθεῖαι ε, ε' εἶναι μεταξύ των παράλληλοι. (Διατί ; Προσέξατε τὰς γωνίας α, α' τοῦ σχεδίου 113).



Σχ. 113

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

110. Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τέμνονται ὑπὸ τρίτης εὐθείας καὶ σχηματίζουν μίαν γωνίαν 75°. Νὰ εὕρετε τὰς τιμὰς (εἰς μοίρας) τῶν ἄλλων 7 γωνιῶν.

111. Χαράξατε δύο εὐθείας παραλλήλους α//β κι' ἔπειτα δύο ἄλλας παραλλήλους γ//δ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς δύο πρώτας. Νὰ εὕρετε ὅλας τὰς ἴσας γωνίας τοῦ σχήματος αὐτοῦ.

112. Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι (α//β) τέμνονται ὑπὸ εὐθείας γ καὶ σχηματίζουν δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ὀρθάς. Ποίαν θέσιν ἔχει ἡ εὐθεῖα γ ὡς πρὸς τὰς εὐθείας α καὶ β;

113. Ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας 50° φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτῆς. Νὰ ὑπολογίσετε τὰς ἄλλας γωνίας τοῦ σχήματος αὐτοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

114. Νὰ χαράξετε δύο ἴσους κύκλους καὶ ἔπειτα ἕνα ἄξονα συμμετρίας τοῦ σχήματος τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς δύο αὐτοὺς κύκλους.

115. Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τέμνονται ὑπὸ τρίτης εὐθείας καὶ σχηματίζουν δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας παραπληρωματικάς. Ποία εἶναι ἡ θέσις τῆς τεμνούσης ὡς πρὸς τὰς πλευράς;

116. Τὸ ἄθροισμα 4 διαδοχικῶν γωνιῶν εἶναι 360°. Ἐὰν ἡ 1η εἶναι 70°, ἡ 2α τριπλασία τῆς τρίτης καὶ ἡ 4η ἴση μὲ 90°, ὑπολογίσετε ἑκάστην τῶν γωνιῶν αὐτῶν.

117. Δύο εὐθεῖαι ε, ε' τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς ε : ΑΟ=ΟΒ καὶ ἐπὶ τῆς ε' : ΓΟ=ΟΔ, νὰ ἐξετάσετε ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΓΒ εἶναι παράλληλοι. Νὰ εὕρετε ἐπίσης τὸ συμμετρικὸν τοῦ σχήματος ΑΓΒΔ ὡς πρὸς τὸ Ο.

118. Χαράσσομεν μίαν εὐθεῖαν ε καὶ δύο ἡμιευθείας Αχ, Βψ, ὅπου Α, Β∈ε. Ἔπειτα χαράσσομεν τὰς συμμετρικὰς Αχ', Βψ' τῶν ἡμιευθειῶν Αχ, Βψ εἰς τὴν Σ(ε). Ἐὰν Μ, Μ' εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν Αχ, Βψ καὶ Αχ', Βψ', νὰ ἐξετάσετε ἐὰν ἡ ε εἶναι μεσοκάθετος πρὸς τὸ τμῆμα ΜΜ' (Δικαιολογήσατε τὴν ἀπάντησίν σας).

119. Ἐξετάσατε ἐὰν ἰσχύει ἡ ἑξῆς πρότασις :

Εἰς τὴν συμμετρίαν (ὡς πρὸς εὐθεῖαν ἢ πρὸς σημεῖον) ἡ τομὴ δύο σχημάτων (Κ), (Λ) ἔχει ὁμόλογον τὴν τομὴν τῶν ὁμολόγων (Κ'), (Λ') τῶν σχημάτων (Κ) καὶ (Λ).

Λάβατε ὡς σχήματα (Κ), (Λ) 2 εὐθείας ἢ δύο κύκλους ἢ εὐθεῖαν καὶ κύκλον.

120. Χαράξατε δύο τεμνομένας εὐθείας ε, ε'. Ἔπειτα γράψατε κύκλον μὲ κέντρον τὸ σημεῖον τομῆς αὐτῶν Ο. Ἐὰν ὁ κύκλος οὗτος τέμνῃ τὴν μὲν ε εἰς τὰ σημεῖα Α, Γ τὴν δὲ ε' εἰς τὰ Β καὶ Δ, νὰ εὕρετε :

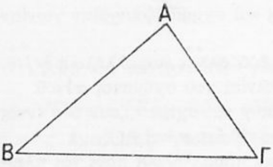
α) τὰ συμμετρικὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΑΓ, ΒΔ, ὡς πρὸς τὸ Ο.

β) τὸ συμμετρικὸν τοῦ σχήματος ΑΒΓΔ πρὸς τὸ κέντρον Ο. Τί παρατηρεῖτε;

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

### 53. ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

**53. 1.** Ἂς εἶναι Α, Β, Γ τρία διαφορετικὰ σημεῖα, μὴ κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, σχ. 114. Τὸ σύνολον τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ λέγεται τ ρ ί γ ω ν ο ν.

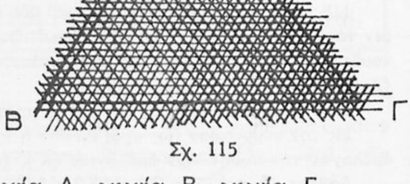


Σχ. 114

Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, λέγονται κ ο ρ υ φ α ί, ἐνῷ τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΒΓκαὶ ΓΑ π λ ε υ ρ α ὶ τοῦ τριγώνου τούτου.

Ἓν τρίγωνον μὲ κορυφὰς Α, Β, Γ ,ὀνομάζεται τρίγωνον ΑΒΓ ἢ συμβολικῶς: Δ. ΑΒΓ.

**53. 2.** Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, σχ. 115, ἔχομεν σημειώσει τὰ τρία ἡμιεπίπεδα (ΒΓ, Α), (ΑΒ, Γ) καὶ (ΑΓ, Β). Ἤτοι τὰ ἡμιεπίπεδα τὰ ὁποῖα ὁρίζει ἡ εὐθεῖα ἑκάστης πλευρᾶς μὲ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς κορυφήν. Ἡ τομὴ καὶ τῶν τριῶν αὐτῶν ἡμιεπιπέδων λέγεται ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ό ν τοῦ τριγώνου. Ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου, οὔτε εἰς τὰς πλευρὰς αὐτοῦ, λέγεται ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ὸ ν τοῦ τριγώνου.



Σχ. 115

Ἑκάστη κορυφὴ τοῦ τριγώνου εἶναι κορυφὴ μιᾶς κυρτῆς γωνίας εἰς τὰς πλευρὰς τῆς ὁποίας κεῖνται δύο πλευραὶ τοῦ τριγώνου· λέγεται δὲ γ ω ν ί α τ ο ῦ τ ρ ι γ ώ ν ο υ. Συνήθως ἑκάστη γωνία τοῦ τριγώνου ὀνομάζεται μὲ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς της. Π.χ. γωνία Α, γωνία Β, γωνία Γ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία Α ἔχει π ρ ο σ κ ε ι μ έ ν α ς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἀ π έ ν α ν τ ι τὴν πλευρὰν ΒΓ.

Αἱ τρεῖς πλευραὶ καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι ἑνὸς τριγώνου λέγονται π ρ ω τ ε ύ ο ν τ α στοιχεῖα αὐτοῦ.

γ) Ὁμοίως ἡ συμμετρικὴ τῆς ε' εἶναι ἡ ε.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἐννοοῦμεν ὅτι :

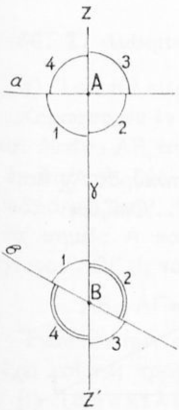
**Εἰς τὴν Σ($O_1$) τὸ σχῆμα τῶν δύο παραλλήλων ε, ε' ἔχει κέντρον συμμετρίας τὸ σημεῖον $O_1$.**

**48. 2.** Ἄραγε τὸ σημεῖον $O_1$ εἶναι τὸ μοναδικὸν κέντρον συμμετρίας τῶν παραλλήλων ε, ε'; Εἰς τὸ σχ. 107, ἐπὶ τῶν ἰδίων εὐθειῶν ε, ε' ἔχομεν λάβει ἓν ἄλλο ζεῦγος σημείων Β, Β', τοῦ ὁποίου τὸ μέσον $O_2$ εἶναι διάφορον τοῦ $O_1$. Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν ὅτι καὶ τὸ σημεῖον $O_2$ εἶναι κέντρον συμμετρίας τῶν ε, ε'.

**48. 3.** Ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ σχῆμα τῶν δύο παραλλήλων ε, ε' ἔχει ἄπειρα κέντρα συμμετρίας.

Ἄς εὕρωμεν μερικὰ ἀπὸ αὐτά: Τὰ $O_1$, $O_2$, $O_3$ . . ., σχ. 108. Παρατηροῦμεν ὅτι ὅλα κεῖνται ἐπὶ εὐθείας μ παραλλήλου πρὸς τὰς ε, ε'. Ἡ εὐθεῖα μ λέγεται μεσοπαράλληλος τῶν δύο παραλλήλων ε, ε'.

**48. 4.** Λαμβάνομεν ἓν τυχὸν σημεῖον Ν τῆς μεσοπαραλλήλου μ τῶν ε, ε', σχ. 109. Ἔπειτα διὰ τοῦ Ν φέρομεν διάφορα εὐθ. τμήματα $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$... περατούμενα εἰς τὰς παραλλήλους ε, ε'. Μὲ τὸν διαβήτην μας εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Ν εἶναι τὸ μέσον ἑκάστου τῶν τμημάτων τούτων. Ἀπὸ τὴν διαπίστωσιν αὐτὴν ὁδηγούμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι :



Σχ. 110

**Πᾶν σημεῖον τῆς μεσοπαραλλήλου μ εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ σχήματος τῶν δύο παραλλήλων ε, ε'.**

**48. 5.** Ἄς διπλώσωμεν τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο παραλλήλων ε, ε' περὶ τὴν μεσοπαράλληλον μ αὐτῶν. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι αἱ παράλληλοι ε, ε' συμπίπτουν: Ἀπὸ τὸ πείραμα τοῦτο ὁδηγούμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι :

**Ἡ μεσοπαράλληλος μ εἶναι ἄξων συμμετρίας τῶν δύο παραλλήλων ε, ε'.**

## 49. ΓΩΝΙΑΙ ΣΧΗΜΑΤΙΖΟΜΕΝΑΙ ΥΠΟ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΜΙΑΣ ΑΛΛΗΣ ΤΕΜΝΟΥΣΗΣ ΑΥΤΑΣ

Χαράσσομεν δύο εὐθείας α, β καὶ μίαν τρίτην τέμνουσαν αὐτάς, σχ. 110. Καθὼς παρατηροῦμεν, τὸ κοινὸν σημεῖον Α τῶν εὐθειῶν α καὶ γ εἶναι κορυφὴ 4 γωνιῶν ($A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$) μὲ τὴν μίαν πλευρὰν ἐπὶ τῆς γ καὶ τὴν ἄλλην ἐπὶ τῆς α. Ὁμοίως τὸ σημεῖον Β, τῶν εὐθειῶν β καὶ γ, εἶναι κορυφὴ 4 γωνιῶν ($B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$) μὲ τὴν μίαν πλευρὰν ἐπὶ τῆς γ καὶ τὴν ἄλλην ἐπὶ τῆς β.

Ἀπὸ τὰς 8 αὐτὰς γωνίας αἱ 4, καὶ συγκεκριμένως αἱ $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, ἔχουν

**55. 2.** Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, σχ. 120, εἶναι ΑΒ > ΒΓ > ΑΓ.

Ἂς εὕρωμεν μὲ τὰ ὄργανά μας* τὴν διαφορὰν ΑΒ – ΑΓ, καὶ ἂς συγκρίνωμεν αὐτὴν πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ.

Εὑρίσκομεν ὅτι: ΒΓ > ΑΒ – ΑΓ

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι: ΑΒ > ΒΓ – ΑΓ καὶ ΑΓ > ΑΒ – ΒΓ

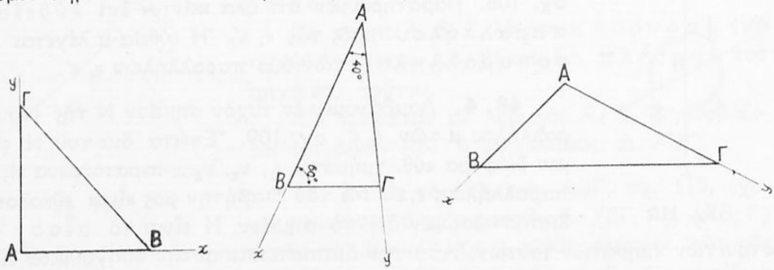
Ἤτοι: **Ἑκάστη πλευρὰ τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.**

## 56. ΕΙΔΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

### 56. 1. Διάκρισις τριγώνων ὡς πρὸς τὰς γωνίας

α) Ὀρθογώνιον τρίγωνον

Κατασκευάζομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν χΑψ. Ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς Αχ λαμβάνομεν σημεῖον Β καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς Αψ σημεῖον Γ. Ὁρίζομεν τοι-




Σχ. 121

ουτοτρόπως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν γωνίαν Α ὀρθὴν καὶ καθὼς παρατηροῦμεν, τὰς ἄλλας γωνίας ὀξείας. Διὰ τοῦτο λέγεται ὀρθογώνιον.

Ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας Α, πλευρὰ ΒΓ, λέγεται ὑποτείνουσα.

β) Ὀξυγώνιον τρίγωνον

Κατασκευάζομεν μίαν ὀξεῖαν γωνίαν χΑψ= 40°. Ἔπειτα μὲ κορυφὴν ἓν σημεῖον Β τῆς πλευρᾶς Αχ καὶ μὲ μίαν πλευρὰν τὴν ἡμιευθεῖαν ΒΑ σχηματίζομεν μίαν γωνίαν 60°, σχ. 121 β. Ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς γωνίας αὐτῆς τέμνει τὴν Αψ εἰς ἓν σημεῖον Γ.

Τοιουτοτρόπως σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, σχ. 121 β, τὸ ὁποῖον, καθὼς παρατηροῦμεν, ἔχει ὅλας τὰς γωνίας αὐτοῦ ὀξείας. Διὰ τοῦτο λέγεται ὀξυγώνιον τρίγωνον.

* Θεωρητικὴ ἐξέτασις θὰ γίνῃ εἰς ἄλλην τάξιν.

γ) Ἀ μ β λ υ γ ώ ν ι ο ν τ ρ ί γ ω ν ο ν

Κατασκευάζομεν μίαν ἀμβλεῖαν γωνίαν χΑψ καὶ σημειώνομεν ἐπὶ τῶν λευρῶν Αχ, Αψ αὐτῆς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἀντιστοίχως, σχ. 121 γ.

Τοιουτοτρόπως ὁρίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν μίαν γωαν αὐτοῦ ἀμβλεῖαν καὶ τὰς ἄλλας ὀξείας. Διὰ τοῦτο λέγεται ἀ μ β λ υ γ ώ ι ο ν τρίγωνον.

Ἤτοι τὰ τρίγωνα ἀναλόγως τῶν γωνιῶν των διακρίνονται εἰς ὀρθοώνια, ὀξυγώνια καὶ ἀμβλυγώνια.

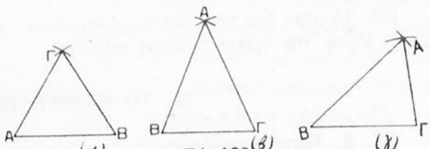
## 56. 2. Διάκρισις ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς

α) Ἰ σ ό π λ ε υ ρ ο ν τ ρ ί γ ω ν ο ν

Χαράσσομεν ἓν εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ ἔπειτα δύο κύκλους, τὸν ἕνα μὲ κέντρον καὶ ἀκτῖνα ΑΒ καὶ τὸν ἄλλον μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα πάλιν ΑΒ, σχ. 122α.

ὸ ἓν ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα τομῆς ῶν δύο κύκλων, τὸ σημεῖον Γ, ὲ τὰ σημεῖα Α καὶ Β ὁρίζει ἓν ρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι:

$$ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ$$



Σχ. 122

Ἕκαστον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ τὰς τρεῖς πλευρᾶς αὐτοῦ ἴσας, λέγεται ἰ σ ό π λ ε υ ρ ο ν τρίγωνον.

β) Ἰ σ ο σ κ ε λ ὲ ς τ ρ ί γ ω ν ο ν

Χαράσσομεν εὐθ. τμῆμα ΒΓ=2 cm. Ἔπειτα γράφομεν δύο κύκλους· τὸν ἕνα μὲ κορυφὴν Β καὶ ἀκτῖνα 3 cm καὶ τὸν ἄλλον μὲ κορυφὴν Γ καὶ ἀκτῖνα ἐπίσης 3 cm. Τὸ ἓν ἀπὸ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν δύο κύκλων, π.χ. τὸ σημεῖον Α, μὲ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ὁρίζει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, σχ. 122β. Τοῦτο ἔχει δύο πλευρὰς ἴσας.

$$ΑΒ = ΑΓ$$

Ἕκαστον τρίγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει δύο πλευρὰς ἴσας, λέγεται ἰ σ ο σ κ ε λ ὲ ς τρίγωνον.

γ) Σ κ α λ η ν ὸ ν τ ρ ί γ ω ν ο ν

Χαράσσομεν εὐθ. τμῆμα ΒΓ= 3 cm καὶ δύο κύκλους μὲ κέντρα Β, Γ καὶ ἀκτίνας 2,5 cm καὶ 4 cm ἀντιστοίχως. Τὸ ἓν ἐκ τῶν σημείων τομῆς τῶν δύο κύκλων, π.χ. τὸ σημεῖον Α, μὲ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ὁρίζει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει :

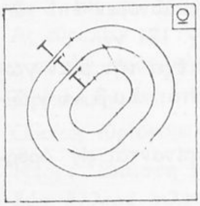
$$ΑΒ \neq ΒΓ. \qquad ΑΒ \neq ΑΓ \qquad \text{καὶ} \qquad ΑΓ \neq ΒΓ$$

Ἕκαστον τρίγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς πλευρὰς του ἀνίσους ἀνὰ δύο, λέγεται σ κ α λ η ν ὸ ν τρίγωνον.

**56. 3.** Ὥστε: τὰ τρίγωνα ἀναλόγως τῶν πλευρῶν των διακρίνονται εἰς ἰσόπλευρα, ἰσοσκελῆ καὶ σκαληνά.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐὰν λάβωμεν ὡς βασικὸν σύνολον Ω τῶν γεωμ. σχημάτων τοῦ ἐπιπέδου καὶ παραστήσωμεν :

Μὲ Τ τὸ σύνολον τῶν τριγώνων, μὲ Τ′ τὸ σύνολον τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων καὶ μὲ Τ″ τὸ σύνολον τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων, τότε αἱ σχέσεις μεταξὺ τῶν ἰσοσκελῶν, ἰσοπλεύρων καὶ σκαληνῶν τριγώνων, ἀποδίδονται ὑπὸ τοῦ διαγράμματος τοῦ σχ. 123.



Σχ. 123

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

121. Χαράξατε προσεκτικῶς τὰ 3 ὕψη ἑνὸς ὀξυγωνίου τριγώνου. Τί παρατηρεῖτε;

122. Χαράξατε προσεκτικῶς τὰς 3 διαμέσους ἑνὸς ὀξυγωνίου τριγώνου. Τί παρατηρεῖτε;

123. Χαράξατε προσεκτικῶς τὰς 3 διχοτόμους ἑνὸς ὀξυγωνίου τριγώνου. Τί παρατηρεῖτε;

124. Σχεδιάσατε ἓν τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ἐξετάσετε ἐὰν εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ ὑπάρχουν δύο σημεῖα Δ καὶ Ε, τὸ Δ ἐσωτερικὸν καὶ τὸ Ε ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου, τοιαῦτα ὥστε $ΔΕ \cap ΑΒΓ = \emptyset$.

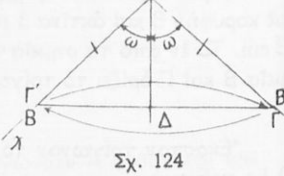
125. Τὰ μήκη δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι 5 cm καὶ 7 cm. Μεταξὺ ποίων τιμῶν εὑρίσκεται τὸ μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς αὐτοῦ;

## 57. ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

**57. 1.** Κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν χΑψ καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς λαμβάνομεν ΑΒ=ΑΓ. Ἔπειτα χαράσσομεν τὸ εὐθ. τμῆμα ΒΓ, σχ. 124· τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

**57. 2. Ἰδιότητες**

Ἂς συγκεντρώσωμεν τὴν προσοχήν μας εἰς τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε τῆς διχοτόμου ΑΔ, σχ. 124.



Σχ. 124

Εἰς τὴν συμμετρίαν αὐτὴν παρατηροῦμεν ὅτι:

α) Τὸ σημεῖον Α ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν ἑαυτόν του.

β) Αἱ πλευραὶ Αχ καὶ Αψ τῆς γωνίας Α ἀντιστοιχοῦν μεταξύ των. ($Αχ \rightleftarrows Αψ$). Ἐπειδὴ δὲ ΑΒ=ΑΓ, ἀντιστοιχοῦν μεταξύ των καὶ αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ. ($Β \rightleftarrows Γ$)

Ἤτοι : α) Εἰς τὴν Σ(ε) τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἑαυτό. Συνεπῶς ἡ ε εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ.

β) $ΒΓ \perp ΑΔ$ καὶ ΒΔ=ΔΓ

γ) $\widehat{Β} = \widehat{Γ}$

Ὥστε: **Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον :**

**α) Ἡ εὐθεῖα τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ.**

**β) Αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι εἶναι ἴσαι.**

γ) **Ἡ διχοτόμος, ἡ διάμεσος καὶ τὸ ὕψος πρὸς τὴν βάσιν ταυτίζονται.**

## 57. 3. Τρίγωνον μὲ ἄξονα συμμετρίας

Ἐὰν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχῃ ἄξονα συμμετρίας διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς Α, τότε ἡ δίπλωσις περὶ αὐτόν:

α) Ἀφήνει ἀκίνητον τὴν κορυφὴν Α (Διατί;)

β) Φέρει εἰς σύμπτωσιν τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ (Διατί;)

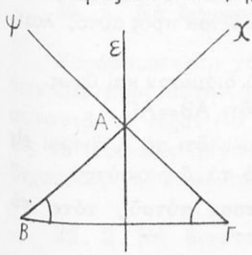
Συνεπῶς φέρει εἰς σύμπτωσιν καὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ($AB \rightleftarrows A\Gamma$).

Ἤτοι εἶναι: $AB = A\Gamma$

**Ἐὰν ἓν τρίγωνον ἔχῃ ἄξονα συμμετρίας εἶναι ἰσοσκελές.**

## 57. 4 Τρίγωνον μὲ δύο γωνίας ἴσας

Χαράξατε εὐθ. τμῆμα ΒΓ καὶ δύο ἴσας ὀξείας γωνίας μὲ κορυφὰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ. (Αἱ γωνίαι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὸ αὐτὸ ἡμιεπίπεδον ἀκμῆς ΒΓ καὶ κατὰ τὴν διάταξιν τοῦ σχ. 125). Παρατηροῦμεν ὅτι ὁρίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Μὲ τὸν διαβήτην δυνάμεθα νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ἰσοσκελὲς ($AB = A\Gamma$).



Σχ. 125

Εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα καταλήγομεν διὰ τῆς συμμετρίας ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον ε τοῦ ΒΓ. Πράγματι· ἡ δίπλωσις περὶ τὴν μεσοκάθετον ε φέρει εἰς σύμπτωσιν:

α) Τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ.

β) Τὰς ἴσας γωνίας Β καὶ Γ (Διατί;)

Συνεπῶς φέρει εἰς σύμπτωσιν καὶ τὰς πλευρὰς Βχ καὶ Γψ τῶν γωνιῶν αὐτῶν.

Ἤτοι: αἱ Βχ καὶ Γψ εἶναι συμμετρικαὶ καὶ συναντοῦν δὲ τὸν ἄξονα ε εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Α. Συνεπῶς καὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι συμμετρικαὶ καὶ ἴσαι.

Ὥστε: **Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ δύο γωνίας ἴσας εἶναι ἰσοσκελές.**

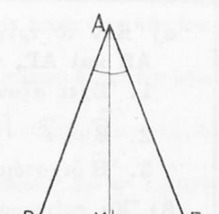
$$\widehat{\Gamma} = \widehat{B} \Longrightarrow AB = A\Gamma$$

## 57. 5. Ἄλλαι ἰδιότητες τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου

Μὲ διαφόρους κατασκευὰς καὶ συλλογισμοὺς δυνάμεθα νὰ ἀνακαλύψωμεν καὶ ἄλλας ἰδιότητας τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

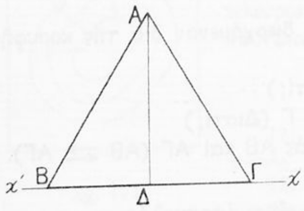
α) Τρίγωνον τοῦ ὁποίου μία διχοτόμος εἶναι καὶ ὕψος.

ι) Κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν χΑψ καὶ τὴν διχοτόμον ΑΖ αὐτῆς, σχ. 126. Ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΑΖ, λαμβάνομεν ἓν σημεῖον Μ καὶ φέρομεν τὴν κάθετον πρὸς τὴν ΑΖ εἰς τὸ Μ. Ἡ κάθετος αὕτη τέμνει τὰς πλευρὰς Αχ, Αψ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἀντιστοίχως.



Σχ. 126

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ ΑΜ εἶναι ὕψος καὶ διχοτόμος. Μὲ τὸν διαβήτην δυνάμεθα νὰ διαπιστώσωμεν τότε ὅτι ΑΒ=ΑΓ



Σχ. 127

Εἰς τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ ὁδηγούμεθα μὲ τὸν ἑξῆς συλλογισμόν.

Ἡ δίπλωσις περὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΖ θὰ φέρῃ εἰς σύμπτωσιν :

1) Τὰς πλευρὰς Αχ, Αψ  (Αχ $\rightleftarrows$ Αψ).

2) Τὰς ἡμιευθείας ΜΒ, ΜΓ  (ΜΒ $\rightleftarrows$ ΜΓ).

Ἄρα θὰ φέρῃ εἰς σύμπτωσιν καὶ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ. Εἶναι συνεπῶς  ΑΒ=ΑΓ.

Ὥστε : **Ἐὰν μία διχοτόμος τριγώνου εἶναι καὶ ὕψος, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.**

β) Τρίγωνον τοῦ ὁποίου ἓν ὕψος εἶναι καὶ διάμεσος

Χαράσσομεν ἓν εὐθ. τμῆμα ΒΓ καὶ ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου πρὸς αὐτό, λαμβάνομεν ἓν σημεῖον Α, σχ. 127.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει τὸ τμῆμα ΑΔ διάμεσον καὶ ὕψος.

Μὲ τὸν διαβήτην δυνάμεθα νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι ΑΒ=ΑΓ.

Εἰς τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ ὁδηγούμεθα ἐὰν σκεφθῶμεν ὅτι τὸ Α ἀνήκει εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ ΒΓ συνεπῶς ἀπέχει ἐξ' ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτοῦ.

Ὥστε : **Ἐὰν ἓν ὕψος τριγώνου εἶναι καὶ διάμεσος αὐτοῦ, τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.**

γ) Εἰς ἄλλην τάξιν θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι :

**Ἐὰν μία διχοτόμος τριγώνου εἶναι καὶ διάμεσος αὐτοῦ, τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.**

## ΠΙΝΑΞ

### • Ἰδιοτήτων τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων

**α) Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ ἴσας πλευρὰς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, τότε :**

**1. Ἔχει ἄξονα συμμετρίας διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς Α**

**2.** $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$

**3. Ἡ διχοτόμος, τὸ ὕψος καὶ ἡ διάμεσος πρὸς τὴν ΒΓ ταυτίζονται.**

**β) Ἓν τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, ὅταν :**

**1. Ἔχῃ ἄξονα συμμετρίας.**

**2. Ἔχῃ δύο γωνίας ἴσας.**

**3. Μία διχοτόμος εἶναι καὶ διάμεσος αὐτοῦ.**

**4. Μία διχοτόμος εἶναι καὶ ὕψος αὐτοῦ (ποία;)**

**5. Μία διάμεσος εἶναι καὶ ὕψος αὐτοῦ (ποία;)**

## 58. ΤΟ ΙΣΟΠΛΕΥΡΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων συνάγομεν ὅτι:

**1. Εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον:**

**α) Ὑπάρχουν τρεῖς ἄξονες συμμετρίας (ποῖοι;)**

**β) Αἱ τρεῖς γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι.**

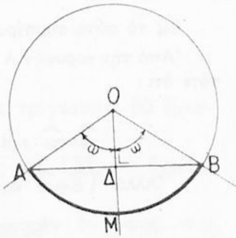
**γ) Τὰ τρία ὕψη ταυτίζονται μὲ τὰς τρεῖς διαμέσους καὶ τὰς τρεῖς διχοτόμους.**

**2. Τὸ ἰσογώνιον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.**

## 59. ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

### 59. 1. Νὰ διχοτομηθῇ τόξον ΑΒ δοθέντος κύκλου

Χαράσσομεν τὴν χορδὴν ΑΒ καὶ φέρομεν ἔπειτα τὴν ἐκ τοῦ κέντρου Ο κάθετον ΟΔ πρὸς αὐτήν, σχ. 128. Ἡ ΟΔ προεκτεινομένη συναντᾷ τὸ τόξον ΑΒ εἰς τὸ μέσον Μ αὐτοῦ. (Διατί; Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΟΑΒ, τὸ ὕψος ΟΔ εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς ἐπικέντρου γωνίας Ο . . .)



Σχ. 128

### 59. 2. Νὰ διχοτομηθῇ δοθεῖσα γωνία.

Καθιστῶμεν τὴν γωνίαν ἐπίκεντρον, σχ. 128 καὶ εὑρίσκομεν τὸ μέσον Μ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου αὐτῆς. Ἡ ἡμιευθεῖα ΟΜ εἶναι ἡ ζητουμένη διχοτόμος. (Διατί;).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

126. Νὰ συγκρίνετε τὰς γωνίας αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἀπὸ τὰς προεκτάσεις τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου μὲ τὴν βάσιν αὐτοῦ.

127. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου, ἡ πλευρὰ ΒΓ νὰ ἔχῃ μῆκος 4 cm καὶ τὸ ἐπ' αὐτὴν ὕψος 3 cm.

128. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ νὰ εἶναι 45°, ἡ δὲ διχοτόμος αὐτῆς νὰ ἔχῃ μῆκος 4 cm.

129. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) τοῦ ὁποίου, Β=50° καὶ ΒΓ==4 cm.

130. Χαράξατε ἕνα κύκλον καὶ μίαν χορδὴν ΑΒ αὐτοῦ. Ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ μικροτέρου τόξου ΑΒ καὶ Μ' τοῦ μεγαλυτέρου, νὰ δικαιολογήσετε ὅτι:
α) Τὰ τρίγωνα ΑΜΒ καὶ ΑΜ'Β εἶναι ἰσοσκελῆ. β) Ἡ ΜΜ' εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου.

131. Πόσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα δύνασθε νὰ κατασκευάσετε μὲ βάσιν δοθὲν εὐθ. τμῆμα ΒΓ; Τί παρατηρεῖτε σχετικῶς μὲ τὴν θέσιν τῆς ἄλλης κορυφῆς αὐτῶν;

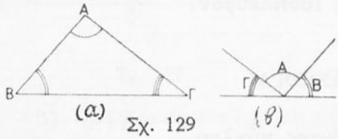
132. Κατασκευάσατε δύο ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα (μὲ τὴν βοήθειαν διαφανοῦς) καὶ ἔπειτα σχηματίσατε μὲ αὐτὰ ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον.

133. Νὰ χαράξετε τὴν διχοτόμον μιᾶς γωνίας χΑψ καὶ ἔπειτα ἀπὸ ἓν ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς γωνίας νὰ φέρητε μίαν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰς πλευρὰς αὐτῆς εἰς τρόπον ὥστε τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται νὰ εἶναι ἰσοσκελές.

134. Νὰ διαιρεθῆ δοθὲν τόξον εἰς 4 ἴσα τόξα.

## 60. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Σχηματίσατε τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀποκόψατε ἔπειτα τὰς γωνίας του καὶ σχηματίσατε τὸ ἄθροισμά των, σχ. 129α, β Τί εὑρίσκετε;



Σχ. 129

Εἶναι : $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=2$ ὀρθαί.

Ὥστε : **Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας.**

Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα ἦτο δυνατὸν νὰ φθάσωμεν ὡς ἑξῆς :

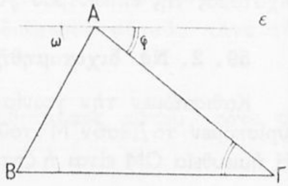
Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α φέρομεν εὐθεῖαν ε παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, σχ. 130 . Παρατηροῦμεν τότε ὅτι :

$\widehat{B}=\widehat{\omega}$ καὶ $\widehat{\Gamma}=\widehat{\varphi}$ (Διατί;)

Ἀλλὰ $(\widehat{B}=\widehat{\omega}$ καὶ $\widehat{\Gamma}=\widehat{\varphi}) \Longrightarrow \widehat{B}+\widehat{\Gamma}=\widehat{\omega}+\widehat{\varphi}$

Ἐξ ἄλλου $\widehat{A}+\widehat{\omega}+\widehat{\varphi}=2\ L$

Ἄρα $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=2\ L$



Σχ. 130

## 61. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

**61. 1.** Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω πρότασιν συνάγομεν ὅτι :

**α) Αἱ ὀξεῖαι γωνίαι ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι συμπληρωματικαί.**

**β) Ἓν τρίγωνον δύναται νὰ ἔχῃ μίαν ὀρθὴν ἢ μίαν ἀμβλεῖαν γωνίαν· αἱ ἄλλαι δύο εἶναι ὀξεῖαι.**

### 61. 2. Ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου

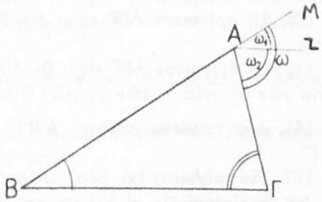
Σχεδιάζομεν ἓν τρίγωνον ΑΒΓ, σχ. 131 καὶ προεκτείνομεν μίαν πλευρὰν αὐτοῦ, π.χ. τὴν ΑΒ, κατὰ τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΜ ἀντίθετον τῆς ΑΒ. Ἡ γωνία ΓΑΜ=ω εἶναι ἐφεξῆς παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας Α καὶ λέγεται ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ὴ γ ω ν ί α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὴν κορυφὴν Α. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ἓξ (6) ἐξωτερικὰς γωνίας (Ποίας;).

Θὰ συγκρίνωμεν κατωτέρω τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ω, σχ. 131, μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ. Ἂς φέρωμεν ἐκ τοῦ Α ἡμιευθεῖαν ΑΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ. Παρατηροῦμεν ὅτι :

$$AZ \parallel B\Gamma \Longrightarrow \begin{cases} \widehat{B}=\widehat{\omega}_1 \\ \widehat{\Gamma}=\widehat{\omega}_2 \end{cases}$$

Ἄρα $\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=\widehat{\omega}_1+\widehat{\omega}_2$

ἢ $\widehat{\omega}=\widehat{B}+\widehat{\Gamma}$




Σχ. 131

Ὥστε: **Ἑκάστη ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ.**

**Σημείωσις**

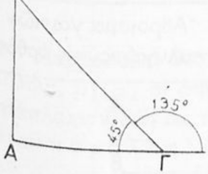
Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω πρότασιν συμπεραίνομεν ὅτι: Ἑκάστη ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ ἑκάστην ἀπέναντι αὐτῆς ἐσωτερικήν.

**61. 3. Ἐφαρμογαὶ εἰς τὴν κατασκευὴν γωνιῶν.**

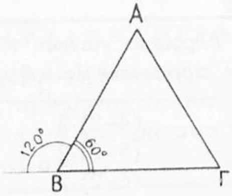
ι) Ἐὰν κατασκευάσωμεν ἓν ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, θὰ ἔχωμεν γωνίας 45° καὶ 135°, (σχ. 132). (Διατί;)

ιι) Ἐὰν κατασκευάσωμεν ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον, σχ. 133, θὰ ἔχωμεν γωνίας 60° καὶ 120°. (Διατί;).

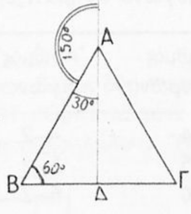
ιιι) Ἐὰν εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, σχ. 134, φέρωμεν ἓν ὕψος, π.χ. τὸ ΑΔ, θὰ ἔχωμεν γωνίας 60°, 30° καὶ 150°. (Διατί;)




Σχ. 132




Σχ. 133




Σχ. 134

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

135. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἐὰν μία ἀπὸ τὰς ἴσας γωνίας εἶναι 52°.

136. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἐὰν ἡ γωνία τῆς κορυφῆς τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι 70°.

137. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν ἡ διαφορὰ δύο ἐξ αὐτῶν εἶναι 20°. (Διακρίνατε περιπτώσεις).

138. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν ἡ μία γωνία του εἶναι τριπλασία μιᾶς ἄλλης. (Δύο περιπτώσεις).

139. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $Α=50^o$, $Γ=55^o$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι αὐτοῦ.

140. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $Β=50^o$, $Γ=80^o$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία Α, καθὼς καὶ ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ αὐτοῦ.

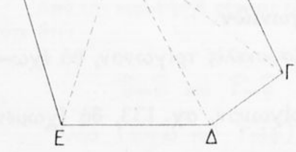
141. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ', ἔχουν $\widehat{Α}=\widehat{Α'}$ καὶ $\widehat{Β}=\widehat{Β'}$. Συγκρίνατε τὰς γωνίας Γ καὶ Γ'.

142. Ἓν τρίγωνον ἔχει δύο γωνίας ἴσας τὴν δὲ ἄλλην μεγαλυτέραν ἑκάστης τούτων κατὰ $30^o$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου τούτου.

## 62. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΚΥΡΤΟΥ* ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ κυρτοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ σχ. 135, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν χωρίσωμεν τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα διὰ τῶν διαγωνίων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ μίαν κορυφὴν αὐτοῦ, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων αὐτῶν θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου. Φέρομεν λοιπὸν ὅλας τὰς διαγωνίους ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α. Ἤτοι τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ.



Σχ. 135

Σχηματίζονται 4 τρίγωνα. Ἤτοι τόσα τρίγωνα, ὅσος ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου πλὴν 2.

Συνεπῶς: τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κυρτοῦ ἑξαγώνου=4.2 ὀρθαί. Ἐργαζόμενοι μὲ ὅμοιον τρόπον εἰς διάφορα κυρτὰ πολύγωνα σχηματίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα.

| Ἀριθμὸς πλευρῶν | Ἀριθμὸς τριγώνων | Ἄθροισμα γωνιῶν τῶν τριγώνων εἰς ὀρθὰς | Ἄθροισμα γωνιῶν πολυγώνου εἰς ὀρθὰς |
|---|---|---|---|
| 4 | 4–2 | $(4-2)\cdot 2$ | 4 |
| 5 | 5–2 | $(5-2)\cdot 2$ | 6 |
| 6 | 6–2 | $(6-2)\cdot 2$ | 8 |
| ... | ... | ... | ... |
| ν | ν–2 | $(\nu-2)\cdot 2$ | $2\cdot(\nu-2)$ |

Ὥστε: **Τὸ ἄθροισμα Σ τῶν γωνιῶν κυρτοῦ πολυγώνου ν πλευρῶν εἶναι ἴσον μὲ 2.(ν —2) ὀρθὰς γωνίας.**

$$\boxed{\Sigma = 2 \cdot (\nu-2) \text{ ὀρθαί}}$$

* Ἓν πολύγωνον λέγεται κυρτὸν ὅταν ἡ εὐθεῖα ἑκάστης πλευρᾶς αὐτοῦ ἀφήνῃ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

142. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς κυρτοῦ:
α) 14/γώνου, β) 16/γώνου, γ) 50/γώνου.

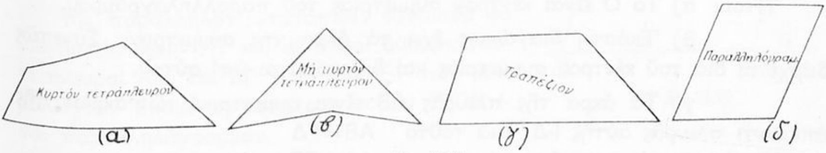
143. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ 60L.

144. Ἓν κυρτὸν πολύγωνον ἔχει ἄθροισμα γωνιῶν ἴσον μὲ 10 ὀρθάς. Νὰ εὕρετε ἑκάστην τῶν γωνιῶν αὐτοῦ ἐὰν γνωρίζετε ὅτι αὗται εἶναι ὅλαι ἴσαι.

## 63. ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Πολλὰς εἰκόνας τετραπλεύρων διακρίνομεν εἰς τὸ περιβάλλον μας, πολλὰ δὲ καὶ γνωστὰ τὰ γεωμετρικὰ στερεὰ ἔχουν ὡς ἕδρας των τετράπλευρα.

Εἰς τὸ σχ. 136 ἔχομεν σχεδιάσει διάφορα εἴδη τετραπλεύρων. Τὸ (α) εἶναι




Σχ. 136

ἓν τυχὸν κυρτὸν τετράπλευρον ἐνῷ τὸ (β) ἓν μὴ κυρτὸν τετράπλευρον.

Τὸ (γ), ἔχει δύο μόνον πλευρὰς παραλλήλους καὶ ὀνομάζεται δι' αὐτὸ τραπέζιον.

Τὸ (δ) ἔχει καὶ τὰ δύο ζεύγη τῶν ἀπέναντι πλευρῶν παράλληλα καὶ ὀνομάζεται δι' αὐτὸ παραλληλόγραμμον.

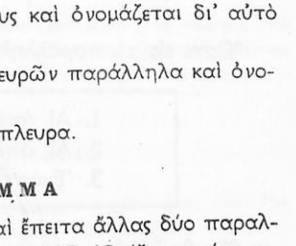
Κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν μόνον κυρτὰ τετράπλευρα.

## 64. ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

Χαράσσομεν δύο παραλλήλους εὐθείας, α||α' καὶ ἔπειτα ἄλλας δύο παραλλήλους, β||β', αἱ ὁποῖαι νὰ τέμνουν τὰς πρώτας, σχ. 137. Ὁρίζεται τότε τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους. Ἤτοι εἶναι παραλληλόγραμμον.

$$\boxed{ΑΒΓΔ \text{ παραλ/μον} \iff ΑΒ \parallel ΓΔ \text{ καὶ } ΒΓ \parallel ΑΔ}$$

## 65. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ




Σχ. 137

**65. 1.** Μὲ τὰ ὄργανά σας ἐξετάσατε:
Τὰς ἀπέναντι πλευράς, τὰς ἀπέναντι γωνίας, τὴν χαρακτηριστικὴν θέσιν τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων ἑνὸς παραλληλογράμμου. Τί παρατηρεῖτε;

**65. 2.** Ὡς γνωστὸν ἕκαστον σημεῖον τῆς μεσοπαραλλήλου $\varepsilon_1$ τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ σχήματος αὐτῶν. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὰ σημεῖα τῆς μεσοπαραλλήλου $\varepsilon_2$ τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ.

Ἂς συγκεντρώσωμεν τὴν προσοχήν μας εἰς τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὴν τομὴν Ο τῶν $\varepsilon_1$ καὶ $\varepsilon_2$, σχ. 137.

Παρατηροῦμεν ὅτι:

Ὁμόλογος τῆς εὐθείας α εἶναι ἡ εὐθεῖα α'.

Ὁμόλογος τῆς εὐθείας β εἶναι ἡ εὐθεῖα β'.

Ἄρα ὁμόλογον τῆς τομῆς Α τῶν α, β εἶναι ἡ τομὴ Γ τῶν α', β'.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι: ὁμόλογον τοῦ Β εἶναι τὸ Δ

$$A \rightleftarrows \Gamma \quad \text{καὶ} \quad B \rightleftarrows \Delta$$

Ἤτοι: α) Τὸ Ο εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ παραλληλογράμμου.

β) Ἑκάστη διαγώνιος ἔχει τὰ ἄκρα της συμμετρικά. Συνεπῶς διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου συμμετρίας καὶ διχοτομεῖται ὑπ' αὐτοῦ.

γ) Τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς ΑΒ εἶναι συμμετρικὰ τῶν ἄκρων τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς αὐτῆς ΓΔ. Διὰ τοῦτο ΑΒ=ΓΔ

Ὁμοίως συνάγομεν ὅτι καὶ ΑΔ=ΒΓ

δ) Ἀνὰ δύο αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ὁμόλογοι. (Διατί;). Ἄρα καὶ ἴσαι.

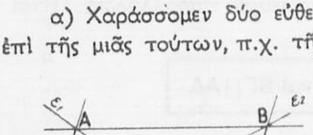
$$\widehat{A}=\widehat{\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{B}=\widehat{\Delta}$$

Ὥστε εἰς τὸ παραλληλόγραμμον:

1. Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι.
2. Αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι.
3. Ἑκάστη διαγώνιος διχοτομεῖ τὴν ἄλλην.

## 65. 3. Ἄλλοι τρόποι κατασκευῆς παραλληλογράμμου

α) Χαράσσομεν δύο εὐθείας $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, τεμνομένας εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἔπειτα ἐπὶ τῆς μιᾶς τούτων, π.χ. τῆς $\varepsilon_1$, λαμβάνομεν δύο ἴσα τμήματα τὰ ΟΑ=ΟΓ ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης, τῆς $\varepsilon_2$, ἐπίσης δύο ἴσα μεταξύ των τμήματα ΟΒ=ΟΔ. καὶ σχηματίζομεν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, σχ. 138. Ἤτοι ἓν τετράπλευρον τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι διχοτομοῦνται.



Σχ. 138

Μὲ παράλληλον μετατόπισιν διαπιστώνομεν ὅτι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι παράλληλοι.

Ἤτοι: ΑΒ||ΓΔ καὶ ΒΓ||ΑΔ.

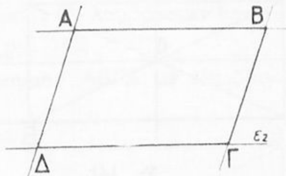
Συνεπῶς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα καταλήγομεν καὶ διὰ τῆς συμμετρίας ὡς πρὸς κέντρον τὸ Ο.

Πράγματι· εἰς τὴν συμμετρίαν αὐτὴν παρατηροῦμεν ὅτι ἡ κορυφὴ Γ εἶναι ὁμόλογος τῆς κορυφῆς Α καὶ ἡ κορυφὴ Δ τῆς κορυφῆς Β. Συνεπῶς καὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ὁμόλογοι ἄρα ἴσαι καὶ παράλληλοι. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Ὥστε: **Ἐὰν αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου διχοτομοῦνται, τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.**

β) Χαράσσομεν δύο εὐθείας $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ παραλλήλους καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῶν δύο ἴσα τμήματα. ΑΒ=ΓΔ, σχ. 139. Τοιουτοτρόπως ὁρίζομεν τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου δύο ἀπέναντι πλευραί, αἱ ΑΒ, ΓΔ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

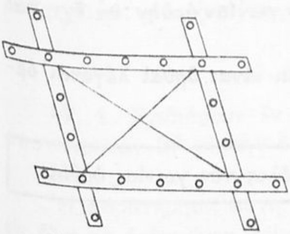


Σχ. 139

Μὲ παράλληλον μετατόπισιν δυνάμεθα νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι καὶ αἱ ἄλλαι δύο ἀπέναντι πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι μεταξύ των παράλληλοι. Ἑπομένως τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ὥστε: **Ἐὰν κυρτὸν τετράπλευρον ἔχῃ δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους, θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον.**

Σημείωσις: Ἓν ὑλικὸν ἀρθρωτὸν παραλληλογράμμον (μοντέλλον), μὲ πλευρὰς ἀπὸ διάτρητα ἐλάσματα καὶ διαγωνίους ἀπὸ ἐλαστικὰ νήματα, σχ. 140, θὰ μᾶς βοηθήσῃ νὰ κατανοήσωμεν τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας.


Σχ. 140

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

145. Ἑνὸς παραλληλογράμμου ἡ μία γωνία εἶναι 75°. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἄλλαι τρεῖς γωνίαι αὐτοῦ.

146. Παραλληλογράμμου ἡ περίμετρος ἔχει μῆκος 20 cm, μία δὲ πλευρὰ αὐτοῦ ἔχει μῆκος 4 cm. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν ἄλλων πλευρῶν.

147. Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον μὲ μήκη διαγωνίων 4 cm καὶ 6 cm. Πόσας λύσεις ἔχει τὸ πρόβλημα;

148. Ἐὰν Μ, Ν εἶναι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΑΒ, ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, νὰ ἐξετάσετε, ἐὰν τὸ ΑΜΝΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

149. Χαράξατε ἓν εὐθ. τμῆμα τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον συμμετρίας παραλληλογράμμου καὶ νὰ περατοῦται εἰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς αὐτοῦ. Μήπως τὸ κέντρον Ο τοῦ παραλληλογράμμου διχοτομεῖ τὸ τμῆμα τοῦτο; Δικαιολογήσατε τὴν ἀπάντησίν σας.

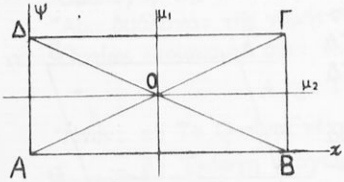
150. Νὰ ὑπολογίσετε τὰς γωνίας παραλληλογράμμου, ἐὰν γνωρίζετε ὅτι ἡ μία ἀπὸ αὐτὰς εἶναι διπλασία μιᾶς ἄλλης.

# ΕΙΔΙΚΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

## 66. ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΝ

### 66. 1. Ὁρισμός

Ἂς κατασκευάσωμεν ἓν παραλληλόγραμμον μὲ μίαν γωνίαν ὀρθήν. Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν χΑψ καὶ ἔπειτα φέρομεν :




Σχ. 141

α) Ἀπὸ ἓν σημεῖον Β τῆς Αχ τὴν παράλληλον πρὸς τὴν Αψ.

β) Ἀπὸ ἓν σημεῖον Δ τῆς Αψ τὴν παράλληλον πρὸς τὴν Αχ.

Τοιουτοτρόπως ὁρίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, σχ. 141, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν γωνίαν Α ὀρθήν. Ἂς προσέξωμεν δύο διαδοχικὰς γωνίας αὐτοῦ, π.χ. τὰς γωνίας Α καὶ Δ. Αὗται εἶναι παραπληρωματικαὶ

$$\widehat{A}+\widehat{\Delta}=2 \text{ ὀρθαὶ} \quad (\text{Διατί;})$$

Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{A}=1$ ὀρθὴ θὰ εἶναι καὶ $\widehat{\Delta}=1$ ὀρθή. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι καὶ $\widehat{B}=1$ ὀρθὴ καὶ $\widehat{\Gamma}=1$ ὀρθή.

Ὥστε : **Ἐὰν ἓν παραλληλόγραμμον ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθὴν θά ἔχῃ καὶ τὰς ἄλλας γωνίας αὐτοῦ ὀρθάς.**

**Τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαὶ λέγεται ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον.**

| |
|---|
| Ὀρθογώνιον παραλ/μον $\Longleftrightarrow$ παραλ/μον μὲ ὅλας τὰς γωνίας ὀρθάς |

### 66. 2. Ἰδιότητες

Τὸ ὀρθογώνιον ὡς παραλληλόγραμμον ἔχει ὅλας τὰς ἰδιότητας αὐτοῦ. Μὲ τὰ ὄργανά μας καὶ μὲ συλλογισμοὺς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ἄλλας.

**α) Ἄξονες συμμετρίας**

Ἂς διπλώσωμεν τὸ ὀρθογώνιον περὶ τὴν μεσοπαράλληλον $\mu_1$ τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ, σχ. 141.

Ἡ κορυφὴ Α θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν κορυφὴν Β καὶ ἡ κορυφὴ Δ μὲ τὴν κορυφὴν Γ. Ἤτοι εἰς τὴν $\Sigma(\mu_1)$ αἱ κορυφαὶ Α καὶ Δ εἶναι ὁμόλογοι τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ ἀντιστοίχως. Συνεπῶς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ εἶναι ὁμόλογον πρὸς ἑαυτό. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ $\mu_1$ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι καὶ ἡ $\mu_2$ εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ.

β) Ἰσότης διαγωνίων

Εἰς τὴν Σ($\mu_1$) ἢ εἰς τὴν Σ($\mu_2$), ἑκάστη διαγώνιος εἶναι ὁμόλογος τῆς ἄλλης. (Διατί;) Ἤτοι αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι.

Ὥστε: **Εἰς τὸ ὀρθογώνιον :**

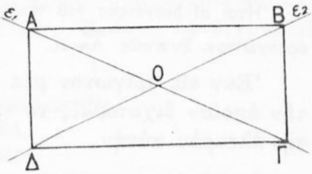
**1. Ὑπάρχουν δύο ἄξονες συμμετρίας. Εἶναι αἱ μεσοπαράλληλοι τῶν ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ.**

**2. Αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι.**

γ) **Παραλληλόγραμμον μὲ ἴσας διαγωνίους.**

Ἐπὶ δύο εὐθειῶν $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ τεμνομένων εἰς τὸ σημεῖον Ο, λαμβάνομεν ἴσα τμήματα : ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ, σχ. 142

Τοιουτοτρόπως ὁρίζεται ἓν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ μὲ τὰς διαγωνίους αὐτοῦ ἴσας. Μὲ τὸν γνώμονά μας διαπιστώνομεν ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.



Σχ. 142

Ὥστε : **Ἐὰν παραλληλόγραμμον ἔχῃ τὰς διαγωνίους ἴσας, εἶναι ὀρθογώνιον.**

Σημείωσις

Μὲ ἓν ἀρθρωτὸν παραλληλόγραμμον μὲ διαγωνίους ἀπὸ ἐλαστικὰ νήματα, δυνάμεθα νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι, ὅταν αἱ διαγώνιοι γίνωνται ἴσαι, τότε τὸ παραλ/μον γίνεται ὀρθογώνιον.

## 67. ΜΙΑ ΣΠΟΥΔΑΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**67. 1.** Σχεδιάσατε ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ συγκρίνατε τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ μὲ τὴν διάμεσον ΑΜ. Τί παρατηρεῖτε;

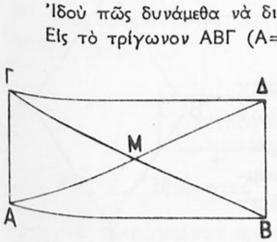
Εἶναι : ΑΜ=ΒΓ/2

Ἡ παρατήρησις αὕτη μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἑξῆς πρότασιν, ἡ ὁποία ἰσχύει εἰς ὅλα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα τοῦ σχεδίου ἢ τῆς γεωμετρίας.

**Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ διάμεσος πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς.**

Ἰδοὺ πῶς δυνάμεθα νὰ δικαιολογήσωμεν τὴν πρότασιν αὐτήν.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Α=1L) τοῦ σχ. 143, ἔχομεν προεκτείνει τὴν διάμεσον ΑΜ μέχρι τοῦ σημείου Δ, συμμετρικοῦ τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ μέσον Μ τῆς ΒΓ.



Σχ. 143

Ἐὰν προσέξωμεν εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΓ, παρατηροῦμεν ὅτι :

ΒΜ=ΜΓ καὶ ΑΜ=ΜΔ

Ἤτοι τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΔΓ αἱ διαγώνιοι διχοτομοῦνται, εἶναι δηλαδὴ τοῦτο παραλληλόγραμμον. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $\widehat{A}$=1L , εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἄρα : ΑΔ=ΒΓ ἢ ΑΜ=ΒΓ/2

**67. 2.** Ἂς κατασκευάσωμεν ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΜΒ καὶ ἂς προεκτείνωμεν τὴν πλευρὰν ΒΜ κατὰ τμῆμα ΜΓ=ΜΒ, σχ. 143.

Τοιουτοτρόπως ὁρίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ ΑΜ εἶναι διάμεσος καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ.

$$AM = B\Gamma/2 \qquad BM = \Gamma M$$

Μὲ τὸν γνώμονά μας εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι

$$\widehat{BA\Gamma} = 1L$$

Εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα καταλήγομεν καὶ ὡς ἑξῆς:

Προεκτείνομεν τὴν διάμεσον ΑΜ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κατὰ τμῆμα ΜΔ=ΜΑ καὶ χαράσσομεν τὰ εὐθυγρ. τμήματα ΔΓ καὶ ΔΒ.

Ἂς προσέξωμεν τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΓ.

Εἶναι: $\left.\begin{matrix} AM = M\Delta \\ BM = M\Gamma \end{matrix}\right\}$ καὶ $AM = B\Gamma/2$ ἢ $A\Delta = B\Gamma$

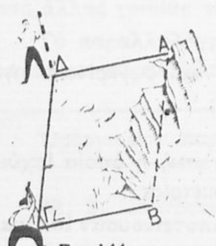
Ἤτοι αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΔΓ διχοτομοῦνται καὶ εἶναι ἴσαι. Ἄρα εἶναι ὀρθογώνιον. Συνεπῶς $\widehat{A} = 1L$.

**Ἐὰν εἰς τρίγωνον μία διάμεσος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τὴν ὁποίαν διχοτομεῖ, τὸ τρίγωνον θὰ εἶναι ὀρθογώνιον μὲ ὑποτείνουσαν τὴν πλευρὰν αὐτήν.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

151. Ἐξηγήσατε πῶς διὰ τῆς διατάξεως τοῦ παραπλεύρως σχεδίου ὑπολογίζεται ἡ ἀπόστασις ΑΒ, σχ. 144;

152. Μία διαγώνιος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου σχηματίζει μὲ μίαν πλευρὰν αὐτοῦ γωνίαν 50°. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἄλλαι γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ διαγώνιοι μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου.



Σχ. 144

153. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τῶν διαγωνίων τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

154. Τὸ κυρτὸν τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει διαγωνίους δύο διαμέτρους κύκλου, εἶναι ὀρθογώνιον (διατί;).

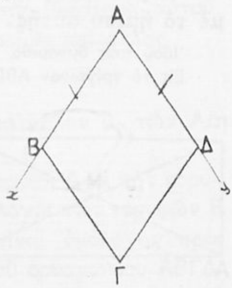
155. Νὰ χαράξετε ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον μὲ μίαν διαγώνιον 5 cm καὶ μὲ μίαν γωνίαν διαγωνίων 60°.

## 68. ΡΟΜΒΟΣ

**68. 1.** Ἐπὶ τῶν πλευρῶν γωνίας χΑψ λαμβάνομεν ἴσα τμήματα ΑΒ=ΑΔ, (σχ. 145) καὶ ἐκ τῶν σημείων Β, Δ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας. Τοιουτοτρόπως σχηματίζεται ἓν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ τὸ ὁποῖον ἔχει ΑΒ=ΑΔ. Ἐὰν δὲ σκεφθῶμεν

ὅτι: ΑΒ=ΓΔ καὶ ΑΔ=ΒΓ

εὑρίσκομεν ὅτι ΑΒ=ΑΔ=ΔΓ=ΓΒ



Σχ. 145

Ἤτοι : **Ἐὰν ἓν παραλληλόγραμμον ἔχῃ δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας θὰ ἔχῃ ὅλας τὰς πλευρὰς ἴσας.**

**Τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι, λέγεται ρόμβος.**

| Ρόμβος $\Longleftrightarrow$ παραλ/μον μὲ ὅλας τὰς πλευρὰς ἴσας |
|---|

## 68. 2. Ἰδιότητες

Ὁ ρόμβος, ὅπως καὶ τὸ ὀρθογώνιον, ὡς παραλληλόγραμμον ἔχει ὅλας τὰς ἰδιότητας αὐτοῦ. Ἔχει ὅμως καὶ ἄλλας.

Μὲ τὰ ὄργανά μας καὶ μὲ διπλώσεις περὶ τὰς εὐθείας τῶν διαγωνίων εὑρίσκομεν ὅτι :

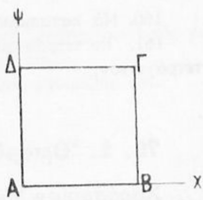
**ι) Αἱ εὐθεῖαι τῶν διαγωνίων ρόμβου εἶναι ἄξονες συμμετρίας αὐτοῦ.**

**ιι) Αἱ διαγώνιοι ρόμβου τέμνονται καθέτως. Ἑκάστη δὲ διχοτομεῖ δύο ἀπέναντι γωνίας αὐτοῦ.**

Τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας δυνάμεθα νὰ τὰς δικαιολογήσωμεν ὡς ἑξῆς :
$AB = A\Delta \Rightarrow$ A κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΒΔ.
$\Gamma B = \Gamma\Delta \Rightarrow$ Γ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΒΔ.
Ἤτοι ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ ΒΔ, συνεπῶς καὶ ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ.

Εἰς τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΓ αἱ μὲν κορυφαὶ Α, Γ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἑαυτὰς ($A \rightleftarrows A$, $\Gamma \rightleftarrows \Gamma$) αἱ δὲ κορυφαὶ Β, Δ πρὸς ἀλλήλας ($B \rightleftarrows \Delta$). (Διατί;)
Συνεπῶς ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι ἄξων συμμετρίας καὶ τοῦ ρόμβου. Διὰ τοῦτο εἶναι καὶ διχοτόμος τῶν ἀπέναντι γωνιῶν Α καὶ Γ αὐτοῦ.

# 69. ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΝ



Σχ. 146

## 69. 1. Ὁρισμὸς

Σχῆμα τετραγώνου ἔχουν αἱ ἕδραι κύβου.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τετράγωνον χαράσσομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν χΑψ καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν της λαμβάνομεν ἴσα τμήματα ΑΒ=ΑΔ, σχ. 146. Εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Δ χαράσσομεν καθέτους πρὸς τὰς Αχ καὶ Αψ ἀντιστοίχως. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ρόμβος, λέγεται δὲ τετράγωνον.

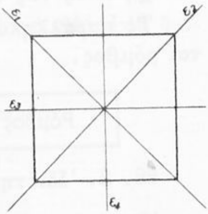
| τετράγωνον $\Longleftrightarrow$ ὀρθογώνιον καὶ ρόμβος |
|---|

## 69. 2. Ἰδιότητες

Τὸ τετράγωνον ὡς ὀρθογώνιον καὶ ρόμβος ἔχει ὅλας τὰς ἰδιότητας τῶν δύο αὐτῶν σχημάτων. Ἤτοι ἔχει :

**Ὅλας τὰς πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς διαγωνίους ἴσας, τεμνομένας δίχα, καθέτως καὶ διχοτόμους τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.**

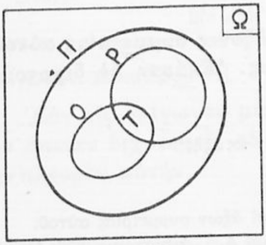
Τὸ τετράγωνον ἔχει τέσσαρας ἄξονας συμμετρίας. Οἱ δύο εἶναι φορεῖς τῶν διαγωνίων ($\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$) καὶ οἱ ἄλλοι δύο ($\varepsilon_3$, $\varepsilon_4$) εἶναι αἱ μεσοπαράλληλοι τῶν εὐθειῶν τῶν ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ.



Σχ. 147

## 69. 3. Παρατήρησις

Τὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν παραλληλογράμμων (Π) τῶν ὀρθογωνίων (Ο), ρόμβων (Ρ), καὶ τῶν τετραγώνων (Τ) δυνάμεθα νὰ τὰς παραστήσωμεν γραφικῶς μὲ τὸ διάγραμμα τοῦ σχ. 148. Ἐξηγήσατε καὶ δικαιολογήσατε τὰς σχετικὰς θέσεις τῶν συνόλων αὐτῶν.



Σχ. 148

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

156. Κατασκευάσατε δύο ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα καὶ ἔπειτα μὲ αὐτὰ ἕνα ρόμβον.

157. Μία διαγώνιος ρόμβου σχηματίζει μὲ μίαν πλευρὰν αὐτοῦ γωνίαν $40^o$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ ρόμβου.

158. Νὰ κατασκευάσετε ρόμβον μὲ διαγωνίους 6 cm, 8 cm.

159. Νὰ κατασκευάσετε 4 ἴσα ὀρθογώνια καὶ ἰσοσκελῆ τρίγωνα κι' ἔπειτα μὲ αὐτὰ ἓν τετράγωνον.

160. Νὰ κατασκευάσετε ἓν τετράγωνον μὲ περίμετρον 16 cm.

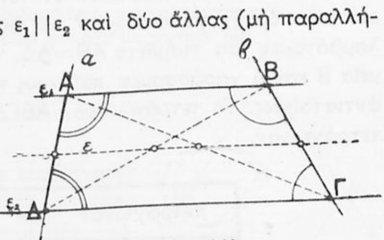
161. Ἓν τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει διαγωνίους δύο καθέτους διαμέτρους κύκλου, εἶναι τετράγωνον;

# 70. ΤΡΑΠΕΖΙΟΝ

## 70. 1. Ὁρισμὸς

Χαράσσομεν δύο εὐθείας παραλλήλους $\varepsilon_1 || \varepsilon_2$ καὶ δύο ἄλλας (μὴ παραλλήλους) τὰς α καὶ β. Αὗται τέμνουν τὰς δύο πρώτας εἰς τὰ σημεῖα Α, Δ, Β, Γ, σχ. 149.

Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχει παραλλήλους μόνον τὰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς αὐτοῦ ΑΒ καὶ ΓΔ· λέγεται δὲ τραπέζιον.



Σχ. 149

Γενικῶς: **Ἕκαστον τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς δύο πλευρὰς αὐτοῦ παραλλήλους καὶ τὰς ἄλλας δύο μὴ παραλλήλους, λέγεται τραπέζιον.**

Αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ (ΑΒ||ΓΔ) εἶναι αἱ βάσεις τοῦ τραπεζίου.

**70. 2. Ἰδιότητες**

α) Εἰς τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ τοῦ σχ. 149 παρατηροῦμεν ὅτι αἱ γωνίαι αὐτοῦ Β καὶ Γ εἶναι ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΓ. Συνεπῶς εἶναι παραπληρωματικαί. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὰς ἄλλας δύο γωνίας Α, Δ αὐτοῦ.

Ὥστε: **Εἰς τὸ τραπέζιον αἱ βάσεις σχηματίζουν μὲ ἑκάστην ἐκ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν γωνίας παραπληρωματικάς.**

β) Ἡ ἀνωτέρω πρότασις ἰσχύει καὶ ἀντιστρόφως. Πράγματι, ἐὰν εἰς ἓν κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ δύο διαδοχικαὶ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαὶ ($\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=2L$), τότε θὰ πρέπει δύο πλευραὶ τῶν γωνιῶν αὐτῶν νὰ εἶναι παράλληλοι. (Διατί;) Συνεπῶς τὸ τετράπλευρον τοῦτο θὰ εἶναι τραπέζιον ἢ παραλληλόγραμμον.

Ὥστε: **Ἐὰν δύο διαδοχικαὶ γωνίαι κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι παραπληρωματικαὶ τοῦτο εἶναι τραπέζιον ἢ παραλληλόγραμμον.**

γ) Καθὼς εἴδομεν εἰς τὴν § 48. 2. τὰ μέσα τῶν εὐθ. τμημάτων, τὰ ὁποῖα περατοῦνται εἰς τὰς παραλλήλους πλευρὰς ΑΒ, ΓΔ, σχ. 149, κεῖνται εἰς τὴν μεσοπαράλληλον τῶν παραλλήλων τούτων.

Ἤτοι: **Τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τραπεζίου καὶ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων κεῖνται ἐπὶ τῆς μεσοπαραλλήλου τῶν βάσεων αὐτοῦ.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

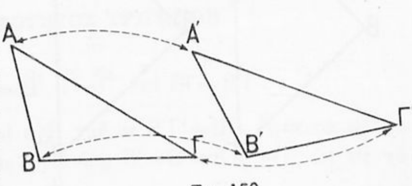
162. Εἰς ἓν τραπέζιον εἶναι δυνατὸν αἱ προσκείμεναι εἰς ἑκάστην τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ γωνίαι νὰ εἶναι καὶ αἱ δύο ὀξεῖαι;

163. Κατασκευάσατε ἓν τραπέζιον ΑΒΓΔ, μὲ βάσεις ΑΒ, ΓΔ καὶ διχοτομήσατε τὰς γωνίας Β καὶ Γ αὐτοῦ. Νὰ ὑπολογίσετε τὰς γωνίας τῶν δύο τούτων διχοτόμων.

164. Κατασκευάσατε τραπέζιον ΑΒΓΔ, μὲ βάσεις ΑΒ, ΓΔ, ἐὰν γνωρίζετε ὅτι: $B\Gamma=3$ cm, $\Gamma\Delta=6$ cm καὶ $\Gamma=120^\circ$.

## 71. ΙΣΟΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

**71. 1.** Ὡς γνωστόν, ἐὰν ἔχωμεν δύο ἴσα τρίγωνα, εἴτε μὲ ἁπλῆν ὀλίσθησιν εἴτε μὲ ὀλίσθησιν καὶ ἀναστροφὴν τοῦ ἑνός, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν αὐτὰ εἰς σύμπτωσιν. Τότε ἑκάστη πλευρὰ καὶ ἑκάστη γωνία τοῦ ἑνὸς ἐφαρμόζει εἰς μίαν πλευρὰν καὶ εἰς μίαν γωνίαν τοῦ ἄλλου. Ἐὰν κατὰ τὴν σύμπτωσιν αὐτὴν ἡ κορυφὴ Α συμπίπτῃ μὲ τὴν Α', ἡ Β μὲ τὴν Β' καὶ ἡ Γ μὲ τὴν Γ', σχ. 150, τότε θὰ ἔχωμεν τὰς ἑξῆς ἓξ ἰσότητας:



Σχ. 150

$$\widehat{A}=\widehat{A'} \qquad \widehat{B}=\widehat{B'} \qquad \widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma'}$$
$$B\Gamma=B'\Gamma' \qquad A\Gamma=A'\Gamma' \qquad AB=A'B'$$

Ἤτοι ἡ ἰσότης δύο τριγώνων ὁρίζει μεταξὺ τῶν γωνιῶν αὐτῶν μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν τοιαύτην ὥστε :

**Αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι νὰ εἶναι ἴσαι·**

**ἀπέναντι δὲ ἀπὸ τὰς ἴσας γωνίας κεῖνται ἴσαι πλευραί.**

**71. 2.** Μέχρι τοῦδε ἡ ἐξακρίβωσις τῆς ἰσότητος δύο τριγώνων ἐγένετο δι' ἐπιθέσεως αὐτῶν. Γεννᾶται τὸ ἐρώτημα : Μήπως, ἐκ τῆς ἰσότητος μ ε ρ ι κ ῶ ν στοιχείων (πλευρῶν καὶ γωνιῶν) ἑνὸς τριγώνου μὲ στοιχεῖα (πλευρὰς καὶ γωνίας) ἄλλου τριγώνου, δυνάμεθα νὰ σ υ μ π ε ρ ά ν ω μ ε ν τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων τούτων;

Καθὼς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, ἐὰν ἐκ τῶν 6 κυρίων στοιχείων ἑνὸς τριγώνου (3 πλευραί, 3 γωνίαι) τρία κατάλληλα εἶναι ἴσα μὲ τρία στοιχεῖα ἑνὸς ἄλλου τριγώνου, τότε τὰ τρίγωνα αὐτὰ θὰ εἶναι ἴσα.

Ἤτοι καὶ τὰ λοιπὰ 3 κύρια στοιχεῖα τοῦ πρώτου τριγώνου εἶναι ἴσα μὲ τὰ 3 ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ δευτέρου τριγώνου.

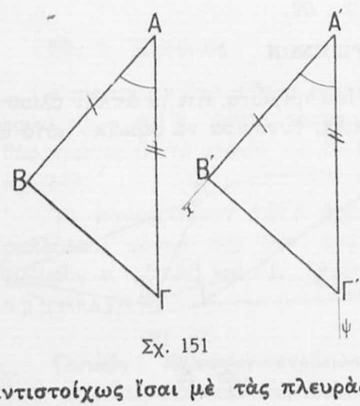
### 72. 1ον ΚΡΙΤΗΡΙΟΝ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

**72. 1.** Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' μὲ $\widehat{A}=\widehat{A}'$, ΑΒ=Α'Β' καὶ ΑΓ=Α'Γ'. Σχηματίζομεν ἓν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ μίαν γωνίαν χΑ'ψ ἴσην μὲ τὴν γωνίαν Α αὐτοῦ.

Ἐπὶ τῶν πλευρῶν Α'χ, Α'ψ λαμβάνομεν τμήματα : Α'Β'=ΑΒ καὶ Α'Γ'= =ΑΓ, σχ. 151. Ὁρίζομεν τοιουτοτρόπως τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἰς τὸ ὁποῖον ἔχομεν :

$$\widehat{A}=\widehat{A}', \quad A'B'=AB \quad \text{καὶ} \quad A'\Gamma'=A\Gamma$$

Φανταζόμεθα ὅτι τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' τίθεται ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τρόπον ὥστε ἡ Α'Β' νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΑΒ καθὼς καὶ ἡ γωνία Α' ἐπὶ τῆς ἴσης της γωνίας Α. Τότε κατ' ἀνάγκην καὶ ἡ Α'Γ' θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΑΓ ὁπότε καὶ ἡ Β'Γ' ἐπὶ τῆς ΒΓ.



Σχ. 151

Συνεπῶς κατὰ τὴν τοποθέτησιν αὐτὴν τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ὥστε : **Ἐὰν εἰς δύο τρίγωνα, μία γωνία τοῦ ἑνὸς ἰσοῦται μὲ μίαν γωνίαν τοῦ ἄλλου καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς ἐκ τῶν γωνιῶν αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς τῆς ἄλλης γωνίας, τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.**

Ἢ συμβολικῶς :

$$\boxed{(\widehat{A}=\widehat{A}',\ AB=A'B',\ A\Gamma=A'\Gamma') \Longrightarrow \Delta{\cdot}AB\Gamma=\Delta{\cdot}A'B'\Gamma'}$$

### 72. 2. Παρατηρήσεις

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν δύο ἀνωτέρω τριγώνων προκύπτει ὅτι καὶ $\widehat{B}=\widehat{B}'$, $\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}'$ καὶ $B\Gamma=B'\Gamma'$.

Ἤτοι : Εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα, αἱ ἴσαι γωνίαι κεῖνται ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν καὶ αἱ ἴσαι πλευραὶ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω : Εἶναι δυνατὸν νὰ συμπεράνωμεν τὴν ἰσότητα δύο γωνιῶν (ἢ δύο εὐθ. τμημάτων) χωρὶς ἀπ' εὐθείας σύγκρισιν αὐτῶν. Ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ὅτι αἱ δύο αὐταὶ γωνίαι (ἢ εὐθ. τμήματα) εἶναι ἀντίστοιχα στοιχεῖα δύο ἴσων τριγώνων.

## 73. ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις δύο σημείων A καὶ B, ἐὰν τὸ τμῆμα AB, σχ. 152, εἶναι ἀπρόσιτον.**

α) Λαμβάνομεν ἓν σημεῖον Γ, ἐκτὸς τῆς εὐθείας AB καὶ μετροῦμεν τὰς ἀποστάσεις ΓΑ καὶ ΓΒ.

β) Προεκτείνομεν τὰς ΓΑ καὶ ΓΒ κατὰ τμήματα $\Gamma A'=\Gamma A$ καὶ $\Gamma B'=\Gamma B$, σχ. 152.

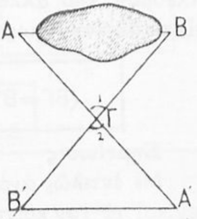
γ) Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ ἔχουν :

$\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}$ (ὡς κατὰ κορυφὴν)

$\Gamma B=\Gamma B'$ (ἐκ κατασκευῆς)

$\Gamma A=\Gamma A'$ (ἐκ κατασκευῆς)

Ἄρα εἶναι ἴσα. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν ὅτι $AB=A'B'$. Ἐὰν συνεπῶς μετρήσωμεν τὴν Α'Β', θὰ ἔχωμεν καὶ τὸ μῆκος τῆς ΑΒ.



Σχ. 152

## 74. 2ον ΚΡΙΤΗΡΙΟΝ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' μὲ $\widehat{B}=\widehat{B}'$, $\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}'$ καὶ $B\Gamma=B'\Gamma'$.

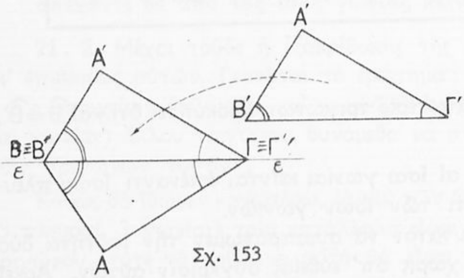
Σχηματίζομεν ἓν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ εὐθ. τμῆμα $B'\Gamma'=B\Gamma$. Ἔπειτα εἰς τὸ αὐτὸ ἡμιεπίπεδον τῆς Β'Γ' σχηματίζομεν γωνίας $B'=B$ καὶ $\Gamma'=\Gamma$, ὡς εἰς τὸ σχ. 153.

Ὁρίζομεν τοιουτοτρόπως ἓν ἄλλο τρίγωνον Α'Β'Γ' μὲ $\widehat{B}'=\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}'=\widehat{\Gamma}$ καὶ $B'\Gamma'=B\Gamma$.

Ἄς συγκρίνωμεν τὰ δύο ἀνωτέρω τρίγωνα.

Πρὸς τοῦτο τοποθετοῦμεν τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν αἱ ἴσαι πλευραὶ ΒΓ, Β'Γ' καὶ αἱ ἴσαι γωνίαι Β, Β'.

Παρατηροῦμεν τότε ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ἐφαρμόζουν. Δυνάμεθα ὅμως νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς:



Σχ. 153

Νὰ τοποθετήσωμεν τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' παραπλεύρως τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν αἱ ἴσαι πλευραὶ ΒΓ, Β'Γ' (Β≡Β', Γ≡Γ') αἱ δὲ γωνίαι Β' καὶ Γ' νὰ γίνουν ἐφεξῆς μὲ τὰς ἴσας των Β καὶ Γ ἀντιστοίχως, σχ. 153. Εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι κοινὴ διχοτόμος τῶν γωνιῶν ΑΒΑ' καὶ ΑΓΑ' (Διατί;)

Ἂς συγκεντρώσωμεν τὴν προσοχήν μας εἰς τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε=ΒΓ τῆς κοινῆς αὐτῆς δοχοτόμου. Ἐὰν διπλώσωμεν τὸ ἐπίπεδον περὶ τὴν ε, αἱ κορυφαὶ Β, Γ θὰ μείνουν ἀκίνητοι. Αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας ΑΒΑ' θὰ συμπέσουν (διατί;). Ἐπίσης θὰ συμπέσουν αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας ΑΓΑ'.

Ἄρα καὶ ἡ τομὴ Α τῶν πλευρῶν ΒΑ, ΓΑ θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν τομὴν Α' τῶν ΒΑ', ΓΑ'.

Ὥστε: **Ἐὰν εἰς δύο τρίγωνα, μία πλευρὰ τοῦ ἑνὸς ἰσοῦται μὲ μίαν πλευρὰν τοῦ ἄλλου καὶ αἱ προσκείμεναι γωνίαι εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.**

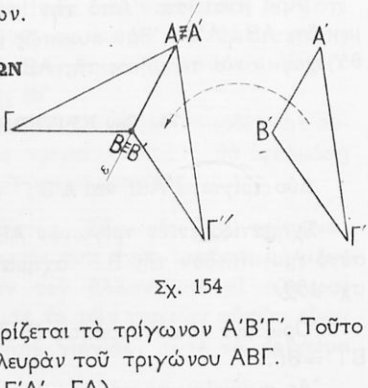
$$\boxed{(ΒΓ=Β'Γ',\quad \widehat{Β}=\widehat{Β'},\quad \widehat{Γ}=\widehat{Γ'}) \Rightarrow Δ\cdot ΑΒΓ=Δ\cdot Α'Β'Γ'}$$

**Σημείωσις**

Μὲ ἐντελῶς ἀνάλογον τρόπον ἦτο δυνατὸν νὰ ἐργασθῶμεν διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ 1ον κριτήριον ἰσότητος τριγώνων.

### 75. 3ον ΚΡΙΤΗΡΙΟΝ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

**Δύο τρίγωνα μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ ἑνὸς ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ἄλλου.**



Σχ. 154

**75. 1.** Σχεδιάζομεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ εὐθ. τμῆμα Β'Γ'=ΒΓ. Ἔπειτα μὲ κέντρον τὰ σημεῖα Β' καὶ Γ' καὶ ἀκτῖνας ΒΑ καὶ ΓΑ ἀντιστοίχως γράφομεν δύο κύκλους. Ἐὰν Α' εἶναι τὸ ἓν σημεῖον τομῆς αὐτῶν, τότε ὁρίζεται τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ'. Τοῦτο ἔχει ἑκάστην πλευρὰν αὐτοῦ ἴσην μὲ μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

(Β'Γ'=ΒΓ, Β'Α'=ΒΑ, Γ'Α'=ΓΑ)

**75. 2.** Ἂς φαντασθῶμεν ὅτι τοποθετοῦμεν τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' παραπλεύρως τοῦ ΑΒΓ εἰς τρόπον ὥστε, νὰ ταυτισθοῦν αἱ ἴσαι πλευραὶ ΑΒ, Α'Β' ($A \equiv A'$, $B \equiv B'$) αἱ δὲ γωνίαι Α', Β' νὰ γίνουν ἐφεξῆς μὲ τὰς γωνίας Α καὶ Β ἀντιστοίχως, σχ. 154.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα ΑΓ=ΑΓ' ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος ΓΓ'. Ὁμοίως ἐπειδὴ ΒΓ=ΒΓ' τὸ Β κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΓΓ'.

Ἤτοι: ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΓΓ'. Ἐὰν ἤδη διπλώσωμεν τὸ ἐπίπεδον περὶ τὴν μεσοκάθετον ΑΒ, πρέπει: Τὰ σημεῖα Α καὶ Β νὰ μείνουν ἀκίνητα, ἐνῶ τὸ σημεῖον Γ θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ σημεῖον Γ'. (Διατί;)

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν ΑΒ καὶ συνεπῶς ἴσα.

Ὥστε: **Ἐὰν αἱ τρεῖς πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς ἑνὸς ἄλλου τριγώνου, τότε τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα.**

$$\boxed{(AB=A'B',\ B\Gamma=\Gamma'B',\ \Gamma A=\Gamma'A') \Longrightarrow \Delta\cdot AB\Gamma=\Delta\cdot A'B'\Gamma'}$$

Παραθέτομεν κατωτέρω πίνακα τῶν τριῶν κριτηρίων ἰσότητος τριγώνων.

$$\boxed{\begin{array}{c} \widehat{A}=\widehat{A'} \\ AB=A'B' \\ A\Gamma=A'\Gamma' \end{array}} \Longleftrightarrow \boxed{\Delta\cdot AB\Gamma=\Delta\cdot A'B'\Gamma'} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \widehat{B}=\widehat{B'} \\ \widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma'} \\ B\Gamma=B'\Gamma' \end{array}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{AB=A'B',\ B\Gamma=B'\Gamma',\ A\Gamma=A'\Gamma'}$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

165. Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' (ΑΒ=ΑΓ, Α'Β'=Α'Γ') ἔχουν $\widehat{A}=\widehat{A'}$ καὶ ΑΒ=Α'Β'. Νὰ ἐξετάσετε ἐὰν ταῦτα εἶναι ἴσα. Ἐὰν ναί, ποῖα εἶναι τὰ λοιπὰ ἴσα στοιχεῖα αὐτῶν;

166. Δύο ὀρθογώνια τρίγωναΑΒΓ, Α'Β'Γ' ($\widehat{A}=\widehat{A'}=1L$) ἔχουν ΑΓ=Α'Γ' καὶ $\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma'}$. Νὰ ἐξετάσετε ἐὰν ταῦτα εἶναι ἴσα. Ἐὰν ναί, ποῖα εἶναι τὰ λοιπὰ ἴσα στοιχεῖα αὐτῶν;

167 Νὰ συγκρίνετε τὰς διαμέσους δύο ἴσων τριγώνων.

168 Νὰ συγκρίνετε τὰ 4 τρίγωνα εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται εἷς ῥόμβος ὑπὸ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

169 Εἰς κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ=ΑΔ καὶ ΓΔ=ΓΒ. Νὰ συγκριθοῦν αἱ γωνίαι ΑΔΓ καὶ ΑΒΓ αὐτοῦ.

170. Χαράξατε ἓν παραλληλόγραμμον καὶ συγκρίνατε τὰ δύο τρίγωνα εἰς τὰ ὁποῖα τὸ παραλ/μον χωρίζεται ὑπὸ μιᾶς διαγωνίου αὐτοῦ.

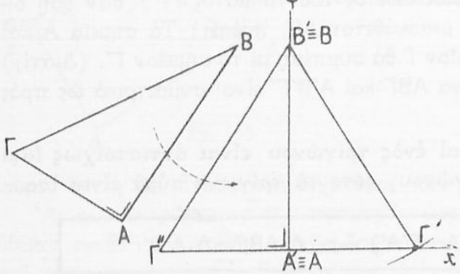
## 76. ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Ἐκτὸς ἀπὸ τὰ τρία γενικὰ κριτήρια ἰσότητος τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἰσχύουν φυσικὰ καὶ εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, ὑπάρχουν καὶ τρία ειδικὰ κριτήρια ἰσότητος ὀρθογωνίων τριγώνων.

**1ον Κριτήριον**

**Ὀρθογώνια τρίγωνα μὲ τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ ἀνὰ μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην.**

α) Σχηματίζομεν ὀρθογ. τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς ὀρθῆς γωνίας χΑ'ψ λαμβάνομεν Α'Β'=ΑΒ. Ἔπειτα μὲ κέντρον Β' καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ ΒΓ γράφομεν κύκλον, ὁ ὁποῖος τέμνει τὴν πλευρὰν Α'χ εἰς σημεῖον Γ'. Τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἔχει Α'Β'=ΑΒ, Β'Γ'=ΒΓ.




Σχ. 155

β) Ἂς συγκρίνωμεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ', σχ. 155.

Πρὸς τοῦτο τοποθετοῦμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ παρὰ τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν αἱ ἴσαι πλευραὶ Α'Β' καὶ ΑΒ.

Τότε ἡ ΑΓ θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν Α'Γ'', προέκτασιν τῆς πλευρᾶς Α'Γ'. (Διατί; Προσέξατε τὰς γωνίας Α, Α'). Εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν τὰ δύο τρίγωνα σχηματίζουν ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον: τὸ τρίγωνον Γ''Β'Γ' μὲ ἴσας πλευρὰς τὰς Β'Γ' καὶ Β'Γ''.

Ἄρα τὸ ὡς πρὸς τὴν βάσιν Γ'Γ'' ὕψος Β'Α, θὰ εἶναι καὶ ἄξων συμμετρίας.

Συνεπῶς $\Delta\cdot A'B'\Gamma''=\Delta\cdot A'B'\Gamma'$ ἢ $\Delta\cdot AB\Gamma=\Delta\cdot A'B'\Gamma'$

**Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ ἀνὰ μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην, εἶναι ἴσα.**

$$\boxed{(\widehat{A}=\widehat{A'}=1L,\quad AB=A'B',\quad B\Gamma=B'\Gamma') \Longrightarrow \Delta.AB\Gamma=\Delta.A'B'\Gamma'}$$

**2ον Κριτήριον**

**Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' ($\widehat{A}=\widehat{A'}=1L$), μὲ ΒΓ=Β'Γ' καὶ $\widehat{B}=\widehat{B'}$.**

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γωνία Γ εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας Β,

$$\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=1L \quad \text{Ἤτοι} \quad \widehat{\Gamma}=1L-\widehat{B} \qquad (1)$$

Ἐπίσης καὶ ἡ γωνία Γ' εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας Β'

$$\widehat{B'}+\widehat{\Gamma'}=1L \quad \text{Ἤτοι} \quad \widehat{\Gamma'}=1L-\widehat{B'} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς (1) καὶ (2) ἐννοοῦμεν ὅτι αἱ γωνίαι Γ, Γ' εἶναι ἴσαι.

Συνεπῶς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' ἔχουν $ΒΓ=Β'Γ'$, $\widehat{Β}=\widehat{Β'}$ καὶ $\widehat{Γ}=\widehat{Γ'}$ καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἴσα. (2ον κριτ. ἰσότητος τυχόντων τριγ.).

Ὥστε: **Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ ἀνὰ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, εἶναι ἴσα.**

$$\boxed{(\widehat{Α}=\widehat{Α'}=1L,\quad ΒΓ=Β'Γ',\ \widehat{Β}=\widehat{Β'}) \Longrightarrow Δ.ΑΒΓ=Δ.Α'Β'Γ'}$$

**3ον Κριτήριον**

**Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' ($\widehat{Α}=\widehat{Α'}=1L$) μὲ $ΑΒ=Α'Β'$ καὶ $\widehat{Γ}=\widehat{Γ'}$.**

Σκεπτόμενοι ὅπως προηγουμένως εὑρίσκομεν ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἔχουν καὶ τὰς γωνίας Β καὶ Β' ἴσας.

Ἤτοι ἔχουν $ΑΒ=Α'Β'$, $\widehat{Α}=\widehat{Α'}$ $(=1L)$ καὶ $\widehat{Β}=\widehat{Β'}$

Ἄρα εἶναι ἴσα.

**Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν ἀνὰ μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς ὀξείας γωνίας, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ἴσας, θὰ εἶναι ἴσα.**

$$\boxed{\widehat{Α}=\widehat{Α'}=1L,\quad \widehat{Γ}=\widehat{Γ'},\quad ΑΒ=Α'Β') \Longrightarrow Δ.ΑΒΓ=Δ.Α'Β'Γ'}$$

Παραθέτομεν κατωτέρω συνοπτικὸν πίνακα κριτηρίων ἰσότητος ὀρθογωνίων τριγώνων.

$$\boxed{\begin{array}{c}\widehat{Α}=\widehat{Α'}=1L\\ ΑΒ=Α'Β'\\ ΒΓ=Β'Γ'\end{array}} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}Δ.ΑΒΓ=Δ.Α'Β'Γ'\\ \widehat{Α}=1L\quad \widehat{Α'}=1L\end{array}} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\widehat{Α}=\widehat{Α'}=1L\\ ΒΓ=Β'Γ'\\ \widehat{Β}=\widehat{Β'}\end{array}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\widehat{Α}=\widehat{Α'}=1L\\ \widehat{Γ}=\widehat{Γ'},\ ΑΒ=Α'Β'\end{array}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

171. Δικαιολογήσατε ὅτι αἱ ἀποστάσεις τῶν μέσων τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπὸ τὴν βάσιν εἶναι ἴσαι.

172. Δικαιολογήσατε ὅτι τὰ ὕψη τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου πρὸς τὰς ἴσας πλευρὰς αὐτοῦ εἶναι ἴσαι.

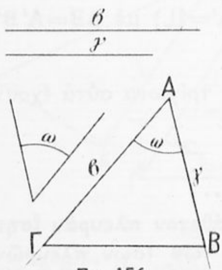
173. Δικαιολογήσατε τὴν ἑξῆς πρότασιν : Ἐὰν δύο ὕψη ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσα, τότε τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.

174. Δικαιολογήσατε ὅτι τὰ τρία ὕψη ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἴσα.

174. Μὲ τὴν βοήθειαν ἴσων τριγώνων δικαιολογήσατε διατί αἱ διαγώνιοι ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι.

## 77. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Τὰ κριτήρια ἰσότητος τριγώνων μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ κατασκευάσωμεν γεωμετρικῶς ἓν τρίγωνον, ὅταν γνωρίζωμεν τρία κατάλληλα στοιχεῖα αὐτοῦ καὶ καθορίζουν τὸ πλῆθος ἢ τὴν μοναδικότητα τῶν λύσεων.



Σχ. 156

**77. 1. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου δίδονται δύο πλευραὶ ΑΒ=γ, ΑΓ=β καὶ ἡ περιεχομένη γωνία Α=ω.**

α) Μὲ κορυφὴν ἓν σημεῖον Α κατασκευάζομεν κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 39.2) γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν.

β) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας αὐτῆς λαμβάνομεν τμήματα ΑΒ=γ καὶ ΑΓ=β, σχ. 156.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον. (Διατί;).

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν ἐννοοῦμεν ὅτι ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ὁρίζεται πλήρως, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ καὶ τὴν γωνίαν Α, ἀρκεῖ αὕτη νὰ εἶναι μικροτέρα μιᾶς εὐθείας γωνίας.

Ἐὰν μὲ τὰ αὐτὰ στοιχεῖα κατασκευάσωμεν ἄλλο τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ τότε τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα θὰ εἶναι ἴσα. (Διατί;)

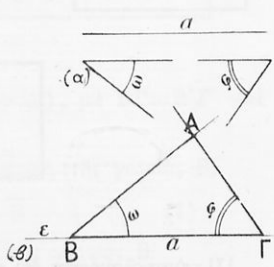
**77. 2. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ μία πλευρὰ ΒΓ=α καὶ αἱ δύο προσκείμεναι αὐτῆς γωνίαι Β καὶ Γ.**

Δεδομένα : Σχ. 157α.

Ἐπὶ εὐθείας ε λαμβάνομεν ἓν τμῆμα ΒΓ=α. Ἔπειτα μὲ κορυφὰς τὰ ἄκρα Β, Γ κατασκευάζομεν δύο γωνίας ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς γωνίας ω, καὶ φ (κατὰ τὴν διάταξιν τοῦ σχ. 157.

Κατασκευάζεται τοιουτοτρόπως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον. (Διατί;).

Ἐὰν ἐλαμβάνομεν τὰς γωνίας ω, φ πρὸς τὸ ἄλλο ἡμιεπίπεδον ὡς πρὸς τὴν ΒΓ, τότε θὰ εἴχομεν ἓν ἄλλο τρίγωνον κατ᾽ ἀναστροφὴν ἴσον μὲ τὸ ΑΒΓ.



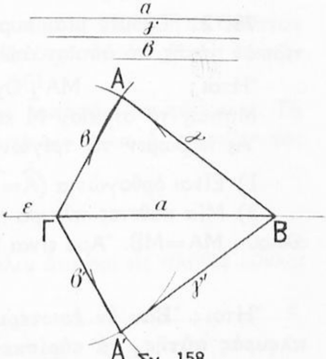
Σχ. 157

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὁρίζεται πλήρως ὅταν μᾶς δοθοῦν ἡ πλευρὰ ΒΓ καὶ αἱ γωνίαι Β,Γ αὐτοῦ, ἀρκεῖ μόνον νὰ εἶναι $\widehat{B}+\widehat{\Gamma}<2L$.

**77. 3. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν αὐτοῦ ΒΓ=α, ΑΓ=β, ΑΒ=γ, α>γ>β**

α) Ἐπὶ εὐθείας ε λαμβάνομεν τμῆμα ΒΓ=α

β) Μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Β καὶ Γ καὶ ἀκτῖνας ἴσας μὲ γ καὶ β ἀντιστοίχως, γράφομεν δύο κύκλους. Ἐὰν οἱ κύκλοι αὐτοὶ τέμνωνται εἰς δύο διαφορετικὰ σημεῖα Α, Α', τότε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'ΒΓ, σχ. 158, τὰ ὁποῖα εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος.



Σχ. 158

**Παρατήρησις**

Εἶναι προφανὲς ὅτι διὰ νὰ σχηματισθοῦν τὰ τρίγωνα πρέπει οἱ δύο κύκλοι νὰ τέμνωνται. Ἤτοι πρέπει μεταξὺ τῆς διακέντρου ΒΓ=α καὶ τῶν ἀκτίνων β,γ νὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις

$$\gamma-\beta<\alpha<\beta+\gamma \qquad (1)\ (\S\ 38,\ 2)$$

Μάλιστα ἐπειδὴ α>γ>β, θὰ εἶναι καὶ α>γ−β

Ἤτοι αἱ συνθῆκαι (1) περιορίζονται εἰς τὴν α<β+γ

**Ἵνα τρία τμήματα α, β, γ εἶναι πλευραὶ τριγώνου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ μεγαλύτερον νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

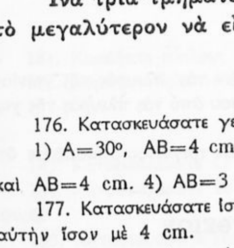
176. Κατασκευάσατε γεωμετρικῶς τρίγωνον ΑΒΓ, ὅταν γνωρίζετε ὅτι : 1) Α=30°, ΑΒ=4 cm ΑΓ=2 cm. 2) Α=30°, ΑΒ=ΑΓ=4 cm. 3) Α=60°, Β=45° καὶ ΑΒ=4 cm. 4) ΑΒ=3 cm, ΑΓ=4 cm καὶ ΒΓ=5 cm.

177. Κατασκευάσατε ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ μὲ βάσιν ΒΓ ἴσην μὲ 5 cm καὶ μὲ ὕψος πρὸς αὐτὴν ἴσον μὲ 4 cm.

178. Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ ὑποτείνουσαν ΒΓ=5 cm καὶ μὲ γωνίαν Β=60°.

## 78. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΣ ΤΗΣ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥ

**78. 1.** Χαράσσομεν μίαν κυρτὴν γωνίαν χΟψ καὶ τὴν διχοτόμον της ΟΖ, σχ. 161. Λαμβάνομεν ἓν σημεῖον Μ τῆς διχοτόμου καὶ φέρομεν τὰς ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τὰς πλευρὰς Οχ, Οψ,



Σχ. 159

$$MA \perp O\chi, \qquad MB \perp O\psi$$

Θὰ συγκρίνωμεν τὰς ἀποστάσεις αὐτάς.

Ἂς προσέξωμεν τὰ τρίγωνα ΟΑΜ καὶ ΟΒΜ :

1) Εἶναι ὀρθογώνια $\widehat{A}=\widehat{B}=1L$

2) Ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν ΟΜ κοινὴν

3) Ἔχουν τὰς ὀξείας γωνίας $O_1$, $O_2$ ἴσας. (Διατί;).

Ἄρα τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν ὅτι :

$$MA = MB$$

Ὥστε : **Ἕκαστον σημεῖον τῆς διχοτόμου γωνίας ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς πλευρὰς αὐτῆς.**

**78. 2.** Ἔχομεν μίαν κυρτὴν γωνίαν $\chi O\psi$ καὶ ἓν σημεῖον Μ, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.

Ἤτοι : $MA \perp O\chi$, $MB \perp O\psi$, καὶ $MA = MB$, σχ. 159.

Μήπως τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας;

Ἂς λάβωμεν τὰ τρίγωνα ΟΑΜ καὶ ΟΒΜ.

1) Εἶναι ὀρθογώνια ($\widehat{A} = \widehat{B} = 1L$). 2) Ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν ΟΜ κοινήν.
3) Μία κάθετος πλευρὰ τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴση μὲ μίαν κάθετον πλευρὰν τοῦ ἄλλου : $MA = MB$. Ἄρα εἶναι ἴσα. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν ὅτι καὶ

$$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$$

Ἤτοι : **Ἐὰν ἓν ἐσωτερικὸν σημεῖον γωνίας ἀπέχῃ ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς πλευρὰς αὐτῆς, θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας.**

**78. 3.** Αἱ ἀνωτέρω δύο προτάσεις συνοψίζονται εἰς τὴν ἀκόλουθον : **Εἰς τὸ ἐπίπεδον τὰ σημεῖα τῆς διχοτόμου μιᾶς κυρτῆς γωνίας καὶ μόνον αὐτά, ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

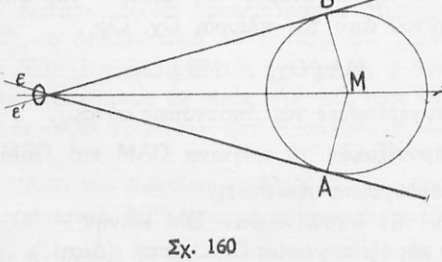
179. Κατασκευάσατε μίαν γωνίαν καὶ μίαν εὐθεῖαν ε τέμνουσαν τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ε νὰ εὑρεθῇ ἓν σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.

180. Ἐὰν Ο εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διχοτόμων δύο γωνιῶν τριγώνου ἀποδείξατε ὅτι τοῦτο ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου.

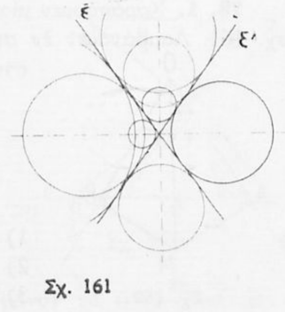
## 79. ΚΥΚΛΟΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΙ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

**79. 1.** Χαράσσομεν δύο εὐθείας ε, ε′ τεμνομένας εἰς τὸ σημεῖον Ο καὶ εὑρίσκομεν τὴν διχοτόμον ΟΖ μιᾶς ἐκ τῶν σχηματιζομένων κυρτῶν γωνιῶν.

Ἀπὸ ἓν σημεῖον Μ τῆς ΟΖ φέρομεν τὰς ΜΑ, ΜΒ καθέτους πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας. Θὰ εἶναι τότε $MA = MB$



Σχ. 160



Σχ. 161

Συνεπῶς, ἐὰν μὲ κέντρον Μ καὶ ἀκτῖνα ΜΑ γράψωμεν κύκλον, οὗτος θὰ ἐφάπτεται καὶ τῶν δύο εὐθειῶν ε, ε', σχ. 160.

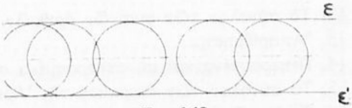
**79. 2.** Πόσους κύκλους ἐφαπτομένους τῶν δύο αὐτῶν εὐθειῶν ε, ε' δυνάμεθα νὰ γράψωμεν;

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὅπως εἰργάσθημεν μὲ τὸ σημεῖον Μ θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἐργασθῶμεν καὶ μὲ οἱονδήποτε ἄλλο σημεῖον τῆς διχοτόμου ἑκάστης ἐκ τῶν τεσσάρων κυρτῶν γωνιῶν τῶν εὐθειῶν ε, ε', σχ. 161.

Συνεπῶς ὑπάρχουν ἄπειροι εἰς πλῆθος κύκλοι ἐφαπτόμενοι τῶν ε, ε'. Τὰ κέντρα ὅλων αὐτῶν εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν διχοτόμων τῶν 4 γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ εὐθεῖαι ε, ε'.

### 79. 3. Εἰδικὴ περίπτωσις

Ἐὰν αἱ ε, ε' εἶναι παράλληλοι ὑπάρχουν πάλιν ἄπειροι εἰς πλῆθος κύκλοι ἐφαπτόμενοι αὐτῶν. Οὗτοι εἶναι ἴσοι καὶ ἔχουν τὰ κέντρα των ἐπὶ τῆς μεσοπαραλλήλου τῶν ε, ε'.




Σχ. 162

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

181. Χαράξατε κύκλους ἐφαπτομένους τῶν πλευρῶν μιᾶς ὀρθῆς γωνίας.

182. Χαράξατε κύκλον ἐφαπτόμενον τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΓΕΝΙΚΗΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

183. Κατασκευάσατε ἓν τετράγωνον, ἐὰν γνωρίζετε μίαν διαγώνιον αὐτοῦ.

184. Κατασκευάσατε ἓν ὀρθογώνιον, ἐὰν γνωρίζετε μίαν πλευρὰν καὶ μίαν διαγώνιον αὐτοῦ.

185. Κατασκευάσατε ἕνα ρόμβον ἐὰν γνωρίζετε μίαν διαγώνιον καὶ μίαν πλευρὰν αὐτοῦ.

186. Εἰς ἓν παραλ/μον ΑΒΓΔ ἡ διαγώνιος ΑΓ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΒΑΔ. Ἐξετάσατε ἐὰν τὸ παραλ/μον εἶναι ρόμβος.

187. Ἐὰν Μ εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) νὰ δικαιολογήσετε ὅτι:

α) Τὰ τμήματα ΜΓ ΜΒ εἶναι ἴσα, β) αἱ γωνίαι ΓΒΜ καὶ ΒΓΜ εἶναι ἴσαι.

188. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου Π τὰ ὁποῖα εἶναι συμμετρικὰ ἑνὸς σταθεροῦ σημείου Α ὡς πρὸς τὰς εὐθείας αἵτινες διέρχονται δι' ἄλλου σημείου Ο. Τὰ Ο καὶ Α κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π.

189. Νὰ δικαιολογήσετε ὅτι ἐὰν δύο ὕψη τριγώνου εἶναι ἴσα τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.

190. Δικαιολογήσατε ὅτι αἱ μεσοκάθετοι παντὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

# ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

Σελὶς



## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄



## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

# ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'



## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'



## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

Σελὶς



## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄




ΕΚΔΟΣΙΣ Β', 1970 (VI) — ΑΝΤΙΤ. 110.000 — ΣΥΜΒΑΣΙΣ : 1979/31 - 3 - 70

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ : Μ. ΠΕΧΛΙΒΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ - Α. Ε.

ΟΕ
ΔΒ