Δ. Παπαμιχαήλ
Σ. Μπαλής
Χρ. Γιαννίκος
Δ. Νοταρᾶς
Κ. Σολδάτος

μαθηματικά
β' γυμνασίου

Ὀργανισμός
Ἐκδόσεως
Διδακτικῶν
Βιβλίων
Ἀθήνα 1981

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β/Γ 152

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Δ. ΠΑΠΑΜΙΧΑΗΛ - Σ. ΜΠΑΛΗΣ
ΧΡ. ΓΙΑΝΝΙΚΟΣ - Δ. ΝΟΤΑΡΑΣ - Κ. ΣΟΛΔΑΤΟΣ

Μαθηματικά . . . . .

μ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

β΄

ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1981

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

ΣΥΜΒΟΛΟ	ΣΗΜΑΣΙΑ
N, N^*	$N = \{0,1,2,3,\ldots\}$, $N^* = \{1, 2, 3,\ldots\}$
Z, Z^*	$Z = \{0, \pm 1, \pm 2,\ldots\}$, $Z^* = \{\pm 1, \pm 2,\ldots\}$
Q, Q^*	$Q = \left\{x \mid x = \frac{\alpha}{\beta}, \alpha \in Z, \ \beta \in Z^*\right\}$, $Q^* = Q - \{0\}$
R, R^*	$R =$ τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, $R^* = R - \{0\}$
$\in, \notin$	ἀνήκει, δέν ἀνήκει
$\Leftrightarrow$	ἰσοδυναμεῖ μέ...
$\Rightarrow$	Συνεπάγεται
$<, >$	μικρότερο, μεγαλύτερο
$\leqq, \geqq$	μικρότερο ἤ ἴσο, μεγαλύτερο ἤ ἴσο
$\simeq$	ἴσο μέ προσέγγιση
$\cap, \cup$	τομή, ἕνωση
$\subseteq, \subset$	ὑποσύνολο, γνήσιο ὑποσύνολο
$A \times B$	καρτεσιανό γινόμενο τοῦ A ἐπί τό B
$\varphi: A \to B$	ἀπεικόνιση τοῦ συνόλου A στό σύνολο B ἤ συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ $A \subseteq R$ καί τιμές στό B.
$\varphi(\chi)$	εἰκόνα τοῦ x στήν ἀπεικόνιση φ ἤ τιμή τῆς συναρτήσεως φ ἀντίστοιχη τοῦ x
$\overrightarrow{AB}$	διάνυσμα μέ ἀρχή τό A καί τέλος τό B.
$\overline{AB}$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	ἀλγεβρική τιμή τοῦ $\overrightarrow{AB}$, μέτρο τοῦ $\overrightarrow{AB}$
(AB)	μῆκος τοῦ εὐθ. τμήματος AB
$M(\alpha,\beta)$	σημεῖο M, πού ἔχει συντεταγμένες α καί β
$\vec{\delta} = (\alpha, \beta)$	Διάνυσμα $\vec{\delta}$, πού ἔχει συντεταγμένες α καί β
ημθ, συνθ, εφθ	ἡμίτονο, συνημίτονο, ἐφαπτομένη τῆς γωνίας θ.
π	τό πηλίκο τοῦ μήκους ἑνός κύκλου πρός τό μῆκος μιᾶς διαμέτρου του $\pi \simeq 3{,}14$.
$\widehat{AOB}$	γωνία μέ κορυφή τό O καί πλευρές OA, OB.
$\overset{\frown}{AB}$	τόξο μέ ἄκρα τά A καί B.

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν

1.1. Τό πρῶτο σύνολο ἀριθμῶν, πού γνωρίσαμε στήν Α' τάξη, ἦταν τό *σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν*(1)

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Στό σύνολο αὐτό ὁρίσαμε δυό βασικές πράξεις, τήν πρόσθεση καί τόν πολλαπλασιασμό καί εἴδαμε ὅτι:

- *Τό ἄθροισμα δύο φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε φυσικός ἀριθμός.*
- *Τό γινόμενο δύο φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε φυσικός ἀριθμός.*
- *Γιά κάθε φυσικό ἀριθμό α ἔχουμε $\alpha + 0 = \alpha$ καί λέμε ὅτι τό 0 εἶναι «οὐδέτερο» στοιχεῖο τῆς προσθέσεως.*
- *Γιά κάθε φυσικό ἀριθμό α ἔχουμε $\alpha . 1 = \alpha$ καί λέμε ὅτι τό 1 εἶναι «οὐδέτερο» στοιχεῖο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.*

Μέ τή βοήθεια τῆς προσθέσεως καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὁρίσαμε στό σύνολο N καί ἄλλες δύο πράξεις, τήν ἀφαίρεση καί τή διαίρεση. Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$$21 - 7 = 14, \quad \text{γιατί} \quad 7 + 14 = 21$$
$$21 : 7 = 3, \quad \text{γιατί} \quad 7 \cdot 3 = 21\,.$$

Διαπιστώσαμε ὅμως ὅτι οἱ πράξεις *«ἀφαίρεση» καί «διαίρεση»* δέν εἶναι πάντοτε δυνατές μέσα στό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, γιατί π.χ. δέν μποροῦμε νά βροῦμε τά ἐξαγόμενα

$$3 - 10 \quad \text{καί} \quad 3 : 10.$$

Γιά νά μποροῦμε νά βρίσκουμε τέτοια ἐξαγόμενα καί νά λύνουμε σχετικά προβλήματα, σκεφθήκαμε νά «ἐπεκτείνουμε» τούς φυσικούς ἀριθμούς καί νά κατασκευάσουμε πιό «πλούσια» σύνολα.

Τό σύνολο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν

1.2. Στήν Α' τάξη μάθαμε ἐπίσης ὅτι σύνολο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι τό

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}.$$

1. Τό σύνολο ὅλων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἐκτός ἀπό τό 0 σημειώνεται μέ N^*, δηλαδή $N^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Βλέπουμε ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ Z, ἐκτός ἀπό τό μηδέν[1], ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα φυσικό ἀριθμό, πού ἔχει μπροστά του ἕνα ἀπό τά πρόσημα + ἤ –. Κάθε στοιχεῖο τοῦ Z, πού ἔχει τό πρόσημο +, λέγεται **θετικός ἀκέραιος**, ἐνῶ κάθε στοιχεῖο τοῦ Z, πού ἔχει τό πρόσημο –, λέγεται **ἀρνητικός ἀκέραιος**. Συμφωνοῦμε τούς θετικούς ἀκέραιους νά τούς γράφουμε καί χωρίς τό πρόσημο +. Ἔτσι π.χ. ὅταν γράφουμε +2 ἤ 2, ἐννοοῦμε τόν ἴδιο ἀκέραιο ἀριθμό. Εἶναι φανερό ὅτι

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$$

Στό σύνολο Z ὁρίσαμε ἀρχικά τίς δύο βασικές πράξεις, πρόσθεση καί πολλαπλασιασμό. Ἔτσι π.χ. ἔχουμε:

$$(+21)+(+7)=+28 \qquad (+21)\cdot(+7)=147$$
$$(+21)+(-7)=+14 \qquad (+21)\cdot(-7)=-147$$
$$(-21)+(+7)=-14 \qquad (-21)\cdot(+7)=-147$$
$$(-21)+(-7)=-28 \qquad (-21)\cdot(-7)=+147$$

Γιά τίς δύο αὐτές πράξεις εἴδαμε ἐπίσης ὅτι:

- *Τό ἄθροισμα δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε ἀκέραιος.*
- *Τό γινόμενο δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε ἀκέραιος.*
- *Γιά κάθε ἀκέραιο ἀριθμό α (θετικό, ἀρνητικό ἤ μηδέν) ἔχουμε*

$$\alpha+0=\alpha, \qquad \alpha.1=\alpha,$$

δηλαδή τό μηδέν εἶναι πάλι «οὐδέτερο» στοιχεῖο τῆς προσθέσεως ***καί*** *τό 1 εἶναι πάλι «οὐδέτερο» στοιχεῖο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.*

Στό σύνολο Z τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἰσχύει ἐπίσης ἡ ἰδιότητα:

- *Ἄν α εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε* ***ἀκέραιος ἀριθμός διαφορετικός ἀπό τό μηδέν, τότε ὑπάρχει πάντοτε ἕνας ἄλλος ἀκέραιος ἀριθμός πού, ὅταν τόν προσθέσουμε στόν α, βρίσκουμε ἄθροισμα ἴσο μέ μηδέν.*** Ὁ ἀκέραιος αὐτός σημειώνεται μέ –α καί λέγεται **ἀντίθετος τοῦ α.** Ἔχουμε λοιπόν

$$\alpha+(-\alpha)=0$$

Ἔτσι π.χ. ἀντίθετος τοῦ +7 εἶναι ὁ –7, γιατί (+7) + (–7) = 0. Ἐπίσης ἀντίθετος τοῦ –5 εἶναι ὁ + 5, γιατί (–5) + (+5) = 0. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι

$$-(+7)=-7, \qquad -(-5)=+5$$

Στό σύνολο Z ἡ διαφορά α–β ἔχει πάντοτε νόημα, γιατί ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$$

δηλαδή, *γιά νά ἀφαιρέσουμε τόν ἀκέραιο β ἀπό τόν ἀκέραιο α, προσθέ-*

1. Τό σύνολο ὅλων τῶν ἀκέραιων ἐκτός ἀπό τό 0 σημειώνεται μέ Z*.

τουμε στόν α τόν ἀντίθετο τοῦ β. Συνεπῶς **ἡ διαφορά δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι *πάντοτε* ἀκέραιος ἀριθμός**. Ἔτσι π.χ. ἔχουμε:

$$(+21)-(+7) = (+21) + (-7) = +14$$
$$(+21)-(-7) = (+21) + (+7) = +28$$
$$(-21) - (+7) = (-21) + (-7) = -28$$
$$(-21) - (-7) = (-21) + (+7) = -14\,.$$

Τό σύνολο τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν

1.3. Στό σύνολο N τό πηλίκο α : β ἔχει νόημα, μόνο ὅταν ὁ α διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό β (β ≠ 0). Σκεφθήκαμε λοιπόν πάλι νά δημιουργήσουμε ἕνα σύνολο ἀριθμῶν, στό ὁποῖο τό πηλίκο α : β νά ἔχει νόημα, ὁποιοιδήποτε καί ἄν εἶναι οἱ φυσικοί ἀριθμοί α καί β. Ἔτσι κατασκευάσαμε τούς **κλασματικούς ἀριθμούς**, πού ἔχουν τή μορφή

$$\frac{\alpha}{\beta},\ \alpha\in N,\ \beta\in N^*.$$

Στούς κλασματικούς ἀριθμούς, πού λέγονται καί ἁπλῶς **κλάσματα**, περιέχονται καί οἱ φυσικοί ἀριθμοί, γιατί θεωροῦνται κλάσματα μέ παρονομαστή τή μονάδα.

Στήν Α΄ τάξη μάθαμε ὅτι δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καί $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι ἴσα, ὅταν $\alpha\delta = \beta\gamma$, δηλαδή

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{ὅταν} \quad \alpha\delta = \beta\gamma.$$

Μάθαμε ἀκόμη ὅτι:

- *Ἄν πολλαπλασιάσουμε ἤ διαιρέσουμε τούς ὅρους ἑνός κλάσματος μέ τόν ἴδιο φυσικό ἀριθμό (διαφορετικό ἀπό τό μηδέν), προκύπτει ἴσο κλάσμα.* Ἔτσι π.χ. εἶναι

$$\frac{5}{7} = \frac{5\cdot 3}{7\cdot 3} = \frac{15}{21}\ ,\quad \frac{21}{14} = \frac{21:7}{14:7} = \frac{3}{2}\,.$$

Ὅταν διαιροῦμε τούς ὅρους ἑνός κλάσματος μέ τό Μ.Κ.Δ. τους, προκύπτει ἕνα ἴσο **ἀνάγωγο** κλάσμα. Τό σύνολο, πού ἔχει στοιχεῖα ὅλα τά ἀνάγωγα κλάσματα, λέγεται **σύνολο τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν**.

- *Ἄν ἔχουμε δύο ἤ περισσότερα κλάσματα, μποροῦμε νά τά «τρέπουμε» σέ* **ὁμώνυμα** (δηλαδή νά βρίσκουμε ἴσα κλάσματα μέ τόν ἴδιο παρονομαστή) *πολλαπλασιάζοντας τούς ὅρους τοῦ καθενός μέ τόν ἀριθμό πού βρίσκουμε διαιρώντας τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν μέ τόν ἀντίστοιχο παρονομαστή.*
- *Γιά νά προσθέσουμε κλάσματα, τά τρέπουμε σέ ὁμώνυμα καί προσθέτουμε τούς ἀριθμητές τους,* δηλαδή

$$\frac{5}{7}+\frac{2}{3}=\frac{15}{21}+\frac{14}{21}=\frac{29}{21}\quad , \quad \frac{5}{7}+0=\frac{5}{7}+\frac{0}{7}=\frac{5}{7}$$

Γενικά, γιά κάθε κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ἔχουμε $\frac{\alpha}{\beta}+0=\frac{\alpha}{\beta}$ καί ἔτσι τό 0 εἶναι πάλι *«οὐδέτερο στοιχεῖο»* τῆς προσθέσεως.

- *Γιά νά ἀφαιρέσουμε δύο κλάσματα, τά τρέπουμε σέ ὁμώνυμα καί ἀφαιροῦμε τούς ἀριθμητές τους.* Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$$\frac{5}{7}-\frac{2}{3}=\frac{15}{21}-\frac{14}{21}=\frac{1}{21}$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἀριθμητής τοῦ μειωτέου (ὅταν τά κλάσματα γίνουν ὁμώνυμα) εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν ἀριθμητή τοῦ ἀφαιρετέου.

- *Γιά νά πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα, πολλαπλασιάζουμε ἁπλῶς τούς ἀριθμητές τους καί τούς παρονομαστές τους,* δηλαδή

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{21}\quad , \quad \frac{5}{7}\cdot 1=\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{1}=\frac{5}{7}.$$

Γενικά, γιά κάθε κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ἔχουμε $\frac{\alpha}{\beta}\cdot 1=\frac{\alpha}{\beta}$ καί ἔτσι τό 1 εἶναι πάλι *«οὐδέτερο στοιχεῖο»* τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἄν δυό κλάσματα ἔχουν γινόμενο ἴσο μέ 1, τότε τό καθένα λέγεται **ἀντίστροφο** τοῦ ἄλλου. Εἶναι φανερό ὅτι ἀντίστροφο κλάσμα τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}\neq 0$ εἶναι τό $\frac{\beta}{\alpha}$, γιατί

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=1}$$

Ἔτσι π.χ. ἀντίστροφο τοῦ $\frac{5}{7}$ εἶναι τό $\frac{7}{5}$ γιατί $\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{5}=1$, ἐνῶ ἀντίστροφο τοῦ 7 εἶναι τό $\frac{1}{7}$, γιατί $7\cdot\frac{1}{7}=1$. Τό ἀντίστροφο ἑνός κλάσματος $\kappa\neq 0$ σημειώνεται μέ $\frac{1}{\kappa}$.

Στό σύνολο τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἡ διαίρεση εἶναι πάντα δυνατή, γιατί τό πηλίκο $\kappa:\lambda$ δύο κλασμάτων κ καί $\lambda\neq 0$ ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$\boxed{\kappa:\lambda=\kappa\cdot\frac{1}{\lambda}}$$

Ἔτσι π.χ. εἶναι

$$\frac{5}{7}:\frac{2}{3}=\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{14}\quad , \quad 3:4=\frac{3}{1}:\frac{4}{1}=\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι, γιά νά διαιρέσουμε ἕνα κλάσμα κ μέ ἕνα κλάσμα λ, πολλαπλασιάζουμε τό κ μέ τό ἀντίστροφο κλάσμα $\frac{1}{\lambda}$ τοῦ διαιρέτη.

Τό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν

1.4. Ὅπως μέ τούς φυσικούς ἀριθμούς κατασκευάσαμε τά κλάσματα, ἔτσι καί μέ τούς ἀκέραιους ἀριθμούς κατασκευάζουμε τά **σχετικά κλάσματα** πού ἔχουν τή μορφή

$$\frac{\alpha}{\beta}, \quad \alpha\in Z,\ \beta\in Z^*.$$

Ἔτσι π.χ. σχετικά κλάσματα εἶναι τά

$$\frac{+2}{-3}, \frac{-5}{2}, \frac{-4}{-5}, \frac{+8}{1}, \frac{0}{3}, \ldots$$

Ἐπίσης ἕνα ὁποιοδήποτε κλάσμα εἶναι καί σχετικό κλάσμα (ἀφοῦ οἱ φυσικοί ἀριθμοί περιέχονται στούς ἀκέραιους). Τέλος κάθε ἀκέραιος ἀριθμός θεωρεῖται σχετικό κλάσμα μέ παρονομαστή $+1$.

Δύο σχετικά κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καί $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται **ἴσα**, ὅταν $\alpha\delta = \beta\gamma$ καί τότε γράφουμε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, δηλαδή

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ ὅταν } \alpha\delta = \beta\gamma}$$

Ἔτσι π.χ. $\frac{-2}{3} = \frac{4}{-6}$ γιατί $(-2)(-6) = 3\cdot 4$, $\frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$, γιατί $(-5)\cdot 7 = 5\cdot(-7)$ καί ἀκόμη $\frac{0}{2} = \frac{0}{-3}$ γιατί $0\cdot(-3) = 0\cdot 2$.

Ἀπό τόν τρόπο πού ὁρίσαμε τά ἴσα σχετικά κλάσματα συμπεραίνουμε τά ἑξῆς:

α) **Ὅταν ἀλλάζουμε τά πρόσημα τῶν ὅρων ἑνός σχετικοῦ κλάσματος, προκύπτει ἴσο σχετικό κλάσμα.** Ἔτσι π.χ. εἶναι

$$\frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}, \quad \frac{+5}{-7} = \frac{-5}{+7}$$

β) **Ὁ παρονομαστής ἑνός σχετικοῦ κλάσματος μπορεῖ νά θεωρεῖται πάντοτε θετικός ἀκέραιος ἀριθμός** (γιατί, ἄν εἶναι ἀρνητικός ἀκέραιος ἀριθμός, ἀλλάζουμε τά πρόσημα καί τῶν δύο ὅρων του).

Στήν περίπτωση αὐτή ἕνα σχετικό κλάσμα, πού ἔχει θετικό ἀριθμητή, λέγεται **θετικό σχετικό κλάσμα**, ἐνῶ ἕνα σχετικό κλάσμα, πού ἔχει ἀρνητικό ἀριθμητή, λέγεται **ἀρνητικό σχετικό κλάσμα**. Συμφωνοῦμε ἀκόμη τό πρόσημο + ἤ — τοῦ ἀριθμητῆ νά τό γράφουμε μπροστά ἀπό τή γραμμή τοῦ κλάσματος (καί ὅταν εἶναι +, μποροῦμε νά τό παραλείπουμε). Ἔτσι π.χ. γράφουμε

$$\frac{+2}{+3} = +\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \qquad \frac{-5}{-7} = \frac{+5}{+7} = +\frac{5}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{-2}{+3} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3} \qquad \frac{+5}{-7} = \frac{-5}{+7} = \frac{-5}{7} = -\frac{5}{7}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι τελικά **ἕνα σχετικό κλάσμα ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα κλάσμα καί ἕνα πρόσημο + ἤ —, πού βρίσκεται μπροστά ἀπό τή γραμμή τοῦ κλάσματος** (ὅταν δέν ὑπάρχει πρόσημο, ἐννοοῦμε τό +).

Δύο σχετικά κλάσματα λέγονται «ὁμόσημα», ἄν ἔχουν τό ἴδιο πρόσημο καί «ἑτερόσημα» ἄν ἔχουν διαφορετικά πρόσημα.

γ) Ἄν πολλαπλασιάσουμε ἤ διαιρέσουμε τούς ὅρους ἑνός σχετικοῦ κλάσματος μέ τόν ἴδιο ἀκέραιο ἀριθμό (διάφορετικό ἀπό τό 0), προκύπτει ἴσο σχετικό κλάσμα. Ἔτσι π.χ.

$$+\frac{5}{7} = \frac{(+5)(-3)}{7(-3)} = \frac{-15}{-21} = \frac{+15}{+21} = +\frac{15}{21}$$

$$-\frac{21}{9} = \frac{(-21):(-3)}{9:(-3)} = \frac{+7}{-3} = \frac{-7}{3} = -\frac{7}{3}.$$

Ὅταν διαιροῦμε τούς ὅρους ἑνός σχετικοῦ κλάσματος μέ τό Μ.Κ.Δ. τους, προκύπτει ἕνα ἴσο **ἀνάγωγο** σχετικό κλάσμα. **Τό σύνολο, πού ἔχει στοιχεῖα ὅλα τά ἀνάγωγα σχετικά κλάσματα, λέγεται «σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν» καί σημειώνεται μέ Q**

Συνεπῶς ὅταν λέμε *«ὁ ἀριθμός ρ εἶναι ρητός»* ἤ ὅταν γράφουμε

$$\rho \in Q,$$

ἐννοοῦμε ὅτι ὁ ρ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε ἀνάγωγο σχετικό κλάσμα ἤ ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός. Ἔτσι μποροῦμε νά γράψουμε

$$+\frac{7}{3} \in Q, \quad -2 \in Q, \quad 0 \in Q, \quad 5 \in Q, \quad -\frac{2}{5} \in Q.$$

Ἐπειδή κάθε σχετικό κλάσμα εἶναι ἴσο μέ ἕνα ἀνάγωγο σχετικό κλάσμα, δηλαδή ἴσο μέ ἕνα ρητό ἀριθμό, συνηθίζουμε νά λέμε «ρητό ἀριθμό» καί ἕνα ὁποιοδήποτε σχετικό κλάσμα, ἄσχετα ἄν εἶναι ἀνάγωγο ἤ ὄχι. Γιά νά δηλώσουμε λοιπόν ὅτι ἕνα γράμμα κ παριστάνει γενικά σχετικό κλάσμα, γράφουμε πάλι

$$\kappa \in Q$$

ὅπως π.χ. $\frac{12}{8} \in Q$, $-\frac{3}{9} \in Q, \ldots$ κ.λ.π.

Πρόσθεση ρητῶν ἀριθμῶν

1.5. Στήν Α' τάξη μάθαμε πῶς κάνουμε πράξεις μέ κλάσματα καί εἴδαμε ὅτι, γιά νά προσθέσουμε ἤ νά ἀφαιρέσουμε κλάσματα, πρέπει πρῶτα νά τά τρέψουμε σέ ὁμώνυμα. Θά μάθουμε τώρα πῶς κάνουμε πράξεις μέ ρητούς ἀριθμούς (σχετικά κλάσματα) καί θά δοῦμε ὅτι οἱ πράξεις αὐτές ἀκολουθοῦν τούς ἴδιους κανόνες τῶν κλασμάτων.

Ἡ πρόσθεση τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἀκολουθεῖ τόν ἑξῆς κανόνα:

> Γιά νά προσθέσουμε ρητούς ἀριθμούς, τούς τρέπουμε πρῶτα σέ ὁμώνυμα σχετικά κλάσματα καί μετά προσθέτουμε τούς ἀριθμητές τους ἀφήνοντας τόν ἴδιο παρονομαστή.

Ἔτσι π.χ.

$$+\frac{5}{7}+\left(+\frac{2}{3}\right)=+\frac{15}{21}+\left(+\frac{14}{21}\right)=\frac{+15+(+14)}{21}=+\frac{29}{21}$$

$$+\frac{5}{7}+\left(-\frac{2}{3}\right)=+\frac{15}{21}+\left(-\frac{14}{21}\right)=\frac{+15+(-14)}{21}=+\frac{1}{21}$$

$$-1+\left(+\frac{5}{7}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{21}{21}+\left(+\frac{15}{21}\right)+\left(-\frac{14}{21}\right)$$

$$=\frac{(-21)+(+15)+(-14)}{21}=-\frac{20}{21}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ἡ πρόσθεση ρητῶν ἀριθμῶν ἀνάγεται τελικά σέ πρόσθεση ἀκέραιων ἀριθμῶν (οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀριθμητές τῶν ἀντίστοιχων ὁμώνυμων σχετικῶν κλασμάτων). Τότε ὅμως θά ἰσχύουν γιά τήν πρόσθεση τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ὅλες οἱ ἰδιότητες πού ἰσχύουν στήν πρόσθεση τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν. Ἔτσι, ἄν κ,λ,ρ εἶναι ρητοί ἀριθμοί θά ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες:

$\kappa+\lambda=\lambda+\kappa$	(ἀντιμεταθετική)
$(\kappa+\lambda)+\rho=\kappa+(\lambda+\rho)$	(προσεταιριστική)

Οἱ δύο αὐτές ἰδιότητες μᾶς ἐπιτρέπουν, ὅταν θέλουμε νά ὑπολογίσουμε ἕνα ἄθροισμα, νά κάνουμε ἀντικατάσταση ὁσωνδήποτε καί ὁποιωνδήποτε ὅρων θέλουμε μέ τό ἄθροισμά τους. Ἔτσι π.χ.

$$\left(+\frac{5}{4}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{11}{2}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)+(-7)=$$

$$=\left(+\frac{5}{4}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{11}{2}\right)+(-7)=$$

$$= \left(+\frac{15}{12}\right) + \left(+\frac{8}{12}\right) + \left(+\frac{2}{12}\right) + \left(-\frac{66}{12}\right) + \left(-\frac{84}{12}\right) =$$

$$= \frac{(+15)+(+8)+(+2)}{12} + \frac{(-66)+(-84)}{12} =$$

$$= \left(+\frac{25}{12}\right) + \left(-\frac{150}{12}\right) = \frac{(+25)+(-150)}{12} = -\frac{125}{12}.$$

Ἐπίσης εἶναι φανερό ὅτι γιά κάθε ρητό ἀριθμό κ ἔχουμε

$$\boxed{\kappa + 0 = \kappa}$$

καί ἡ ἰσότητα αὐτή μᾶς λέει ὅτι τό 0 εἶναι πάλι *«οὐδέτερο στοιχεῖο»* τῆς προσθέσεως.

1.6. Ἄν δίνεται ἕνας ρητός ἀριθμός διαφορετικός ἀπό τό μηδέν, π.χ. ὁ $+\frac{2}{3}$, βρίσκεται πάντοτε ἕνας ἄλλος ρητός ἀριθμός, πού ἔχει μέ τόν $+\frac{2}{3}$ ἄθροισμα μηδέν. Αὐτός εἶναι ὁ $-\frac{2}{3}$, γιατί

$$\left(+\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) = 0,$$

καί λέγεται **ἀντίθετος** τοῦ $+\frac{2}{3}$.

Γενικά, γιά κάθε ρητό ἀριθμό $\kappa \neq 0$ βρίσκεται πάντοτε ὁ «ἀντίθετός» του ὁ ὁποῖος σημειώνεται μέ $-\kappa$ καί εἶναι τέτοιος, ὥστε

$$\boxed{\kappa + (-\kappa) = 0}$$

Ἔτσι ὅταν γράφουμε $-\kappa$ ἐννοοῦμε ἁπλῶς τό ρητό ἀριθμό πού εἶναι ἀντίθετος τοῦ κ, δηλαδή τό ρητό, πού ἀποτελεῖται ἀπό τό ἴδιο κλάσμα μέ ἀντίθετο πρόσημο, π.χ.

$$-\left(+\frac{5}{7}\right) = -\frac{5}{7}, \qquad -\left(-\frac{5}{7}\right) = +\frac{5}{7}.$$

Καταλαβαίνουμε τώρα ὅτι, **ὅταν παριστάνουμε ἕνα ρητό ἀριθμό μέ τό γράμμα κ, αὐτό δέ σημαίνει ὅτι ὁ κ εἶναι θετικός καί ὁ $-\kappa$ εἶναι ἀρνητικός** γιατί, ὅπως εἴδαμε, μπορεῖ νά εἶναι $\kappa = -\frac{5}{7}$ καί $-\kappa = +\frac{5}{7}$.

Ἀφαίρεση ρητῶν ἀριθμῶν

1.7. Ἡ διαφορά δύο ρητῶν ἀριθμῶν κ καί λ ἔχει πάντοτε νόημα, γιατί ὁρίζεται (ὅπως καί ἡ διαφορά δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν) ἀπό τήν ἰσότητα

$$\boxed{\kappa - \lambda = \kappa + (-\lambda)}$$

Δηλ. γιά νά ἀφαιρέσουμε ἀπό τό ρητό κ τό ρητό λ, προσθέτουμε στόν κ τόν ἀντίθετο τοῦ λ. Ἔτσι π.χ. ἔχουμε:

$$\left(+\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{5}{3}\right)=\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{5}{3}\right)=+\frac{7}{3}$$

$$\left(+\frac{2}{3}\right)-\left(+\frac{5}{3}\right)=\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{3}{3}=-1$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(+\frac{5}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{7}{3}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{5}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{5}{3}\right)=+\frac{3}{3}=+1.$$

Ἀλγεβρικά ἀθροίσματα

1.8. Στήν §1.5 μάθαμε πῶς ὑπολογίζεται ἕνα ἄθροισμα ρητῶν ἀριθμῶν μέ περισσότερους ἀπό δύο προσθετέους, ὅπως π.χ. τό

$$\left(+\frac{5}{4}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{11}{2}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)+(-7)$$

Σ' ἕνα τέτοιο ἄθροισμα παραλείπουμε τά σύμβολα + τῆς προσθέσεως καί τό γράφουμε πιό ἁπλά

$$+\frac{5}{4}+\frac{2}{3}-\frac{11}{2}+\frac{1}{6}-7$$

Ὅταν ἔχουμε μιά σειρά ἀπό προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις ρητῶν ἀριθμῶν, λέμε ὅτι ἔχουμε ἕνα **ἀλγεβρικό ἄθροισμα** ρητῶν ἀριθμῶν. Ἕνα ἀλγεβρικό ἄθροισμα εἶναι π.χ. τό

$$\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(+\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{7}{2}\right)-(-6).$$

Ἐπειδή ἡ ἀφαίρεση ρητοῦ ἀριθμοῦ ἰσοδυναμεῖ μέ πρόσθεση τοῦ ἀντιθέτου του, κάθε ἀλγεβρικό ἄθροισμα γράφεται μέ τή μορφή ἑνός ἁπλοῦ ἀθροίσματος. Ἔτσι, τό παραπάνω ἄθροισμα γράφεται:

$$\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(+\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{7}{2}\right)-(-6)=$$

$$=\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{7}{2}\right)+(+6)=$$

$$=-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}-\frac{5}{3}+\frac{7}{2}+6=-\frac{18}{12}-\frac{3}{12}-\frac{20}{12}+\frac{42}{12}+\frac{72}{12}=+\frac{73}{12}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι σ' ἕνα ἀλγεβρικό ἄθροισμα μποροῦμε νά παραλείπουμε τίς παρενθέσεις τῶν ὅρων του ἀκολουθώντας τούς ἑξῆς κανόνες:

- **Ὅταν μπροστά ἀπό μιά παρένθεση ὑπάρχει τό σημεῖο + τῆς προσθέσεως, γράφουμε τόν ὅρο ὅπως εἶναι (μέ τό ἴδιο πρόσημο).**
- **Ὅταν μπροστά ἀπό μιά παρένθεση ὑπάρχει τό σημεῖο — τῆς ἀφαιρέσεως, γράφουμε τόν ὅρο μέ ἀντίθετο πρόσημο.**

Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕνα ἀλγεβρικό ἄθροισμα, πού οἱ ὅροι του (ἤ μερικοί ἀπό τούς ὅρους του) εἶναι ἐπίσης ἀλγεβρικά ἀθροίσματα, π.χ. τό

$$+\left(-3+\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{5}{2}-7+\frac{1}{4}\right)+\left(2-\frac{3}{2}-\frac{7}{4}\right).$$

Ἡ περίπτωση αὐτή ἀνάγεται στήν προηγούμενη, ἄν ἀντικαταστήσουμε τούς ὅρους μέσα σέ κάθε παρένθεση μέ τό ἄθροισμά τους. Ἐπειδή ὅμως δύο ἀθροίσματα, πού ἔχουν ἀντίθετους ὅρους $\left(\text{ὅπως π.χ. τά } +\frac{5}{2}-7+\frac{1}{4} \text{ καί } -\frac{5}{2}+7-\frac{1}{4}\right)$, εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί, μποροῦμε πάλι νά παραλείψουμε πρῶτα τίς παρενθέσεις ἀκολουθώντας τούς ἴδιους κανόνες, δηλαδή

- **Ὅταν μπροστά ἀπό μιά παρένθεση ὑπάρχει τό σημεῖο + τῆς προσθέσεως, γράφουμε τούς ὅρους τῆς παρενθέσεως ὅπως εἶναι (μέ τό ἴδιο πρόσημο).**
- **Ὅταν μπροστά ἀπό μιά παρένθεση ὑπάρχει τό σημεῖο — τῆς ἀφαιρέσεως, γράφουμε τούς ὅρους τῆς παρενθέσεως μέ ἀντίθετα πρόσημα.**

Ἔτσι π.χ. τό παραπάνω ἀλγεβρικό ἄθροισμα γράφεται :

$$+\left(-3+\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{5}{2}-7+\frac{1}{4}\right)+\left(2-\frac{3}{2}-\frac{7}{4}\right)=$$

$$=-3+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+7-\frac{1}{4}+2-\frac{3}{2}-\frac{7}{4}=$$

$$=-\frac{12}{4}+\frac{2}{4}-\frac{10}{4}+\frac{28}{4}-\frac{1}{4}+\frac{8}{4}-\frac{6}{4}-\frac{7}{4}=+\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Γιά τά ἀλγεβρικά ἀθροίσματα χρησιμοποιοῦμε πολλές φορές, ἀντί γιά παρενθέσεις, ἀγκύλες [ ] ἤ ἄγκιστρα { }. Συνήθως, ἕνα ἀλγεβρικό ἄθροισμα Α (τό ὁποῖο εἶναι ὅρος κάποιου ἄλλου ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος) τό βάζουμε μέσα σέ ἀγκύλες, ὅταν περιέχει τουλάχιστον μιά παρένθεση καί τό βάζουμε μέσα σέ ἄγκιστρα, ὅταν περιέχει τουλάχιστον μιά ἀγκύλη. Γράφουμε π.χ.

$$-\frac{2}{3}+\left[-3-\left(\frac{5}{2}+1\right)\right]-\left(-2+\frac{1}{4}\right)$$

$$\left(+\frac{3}{2}-5\right)-\left\{-\left(\frac{2}{3}-1\right)+\left[-3+\left(\frac{7}{2}-2\right)\right]\right\}$$

Σέ ἕνα τέτοιο ἀλγεβρικό ἄθροισμα μποροῦμε νά παραλείπουμε τίς ἀγκύλες ἤ τά ἄγκιστρα ἐφαρμόζοντας κάθε φορά τούς ἴδιους κανόνες, μέ τούς ὁποίους παραλείπουμε τίς παρενθέσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθεῖ ὁ ἀριθμός x στήν ἰσότητα** $\left(-\frac{7}{2}\right)+x+(-4)+\left(+\frac{5}{2}\right)=0$

Λύση. Ἐπειδή σέ κάθε ἄθροισμα μποροῦμε νά ἀντιμεταθέσουμε τούς ὅρους του καί νά ἀντικαταστήσουμε ὁρισμένους μέ τό ἄθροισμά τους, ἡ ἰσότητα γράφεται διαδοχικά

$$\left(-\frac{7}{2}\right)+(-4)+\left(+\frac{5}{2}\right)+x=0\,,\quad \left(-\frac{7}{2}-\frac{8}{2}+\frac{5}{2}\right)+x=0\,,$$

$$\left(-\frac{10}{2}\right)+x=0$$

καί συνεπῶς ὁ x εἶναι ἀντίθετος τοῦ $-\frac{10}{2}=-5$, δηλαδή εἶναι $x=+5$

2. **Νά ὑπολογισθεῖ μέ 2 τρόπους τό ἄθροισμα**

$$A=-7+\left(-\frac{8}{3}+2-\frac{1}{3}\right)-\left[\frac{5}{3}-\left(4-\frac{1}{3}\right)\right]$$

Λύση. α) Μποροῦμε πρῶτα σέ κάθε παρένθεση νά ἀντικαταστήσουμε τούς ὅρους της μέ τό ἄθροισμα τους. Ἐπειδή εἶναι

$$-\frac{8}{3}+2-\frac{1}{3}=-\frac{8}{3}+\frac{6}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{3}{3}=-1\,,\quad 4-\frac{1}{3}=\frac{12}{3}-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}\,,$$

θά ἔχουμε $A=-7+(-1)-\left(\frac{5}{3}-\frac{11}{3}\right)=-7-1-\frac{5}{3}+\frac{11}{3}=-\frac{18}{3}=-6$

β) Μποροῦμε νά παραλείψουμε ἀπό τήν ἀρχή τήν ἀγκύλη καί τίς παρενθέσεις, ὁπότε

$$A=-7-\frac{8}{3}+2-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}+\left(4-\frac{1}{3}\right)=-7-\frac{8}{3}+2-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}+4-\frac{1}{3}=$$

$$=-\frac{21}{3}-\frac{8}{3}+\frac{6}{3}-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}+\frac{12}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{18}{3}=-6.$$

3. **Στό πρῶτο ἀπό τά παρακάτω σχήματα ἔχουμε ἕνα «μαγικό τετράγωνο», στό ὁποῖο**

11	16	9
10	12	14
15	8	13

-4		-8
		2
4		0

3	-12	9
6		
		-3

16	5		3
	4	15	
7	14		12
2			

τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν, πού βρίσκονται σέ κάθε γραμμή του, κάθε στήλη του καί κάθε διαγώνιό του εἶναι τό ἴδιο. Στά ἄλλα σχήματα ἔχουμε μαγικά τετράγωνα πού «σβήστηκαν» ὁρισμένα στοιχεῖα τους. Μπορεῖτε νά τά συμπληρώσετε;

Λύση. Ἡ συμπλήρωση γίνεται εὔκολα, γιατί σέ κάθε τετράγωνο δίνονται ὅλα τά στοιχεῖα μιᾶς τουλάχιστον γραμμῆς ἤ στήλης ἤ διαγωνίου καί συνεπῶς ξέρουμε τό ἄθροισμά τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιοί ἀπό τούς παρακάτω ρητούς εἶναι ἴσοι;

α) $\frac{-2}{3}$, $\frac{8}{12}$ β) $-\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ γ) $-\frac{6}{4}$, $\frac{-15}{8}$ δ) $\frac{4}{-10}$, $\frac{-6}{15}$ ε) $\frac{-3}{5}$, $\frac{6}{10}$

2. Νά τρέψετε τά παρακάτω σχετικά κλάσματα σέ ἴσα μέ θετικό παρονομαστή:

$$\frac{3}{-5}, \quad \frac{-2}{-3}, \quad -\frac{2}{-5}, \quad -\frac{-4}{-5}$$

3. Νά ὁρίσετε τόν x ἔτσι, ὥστε νά ἀληθεύουν οἱ ἰσότητες:

α) $\frac{x}{-4}=\frac{5}{2}$ β) $\frac{-x}{-36}=\frac{5}{12}$ γ) $\frac{x}{45}=\frac{-4}{15}$

4. Νά βρεῖτε δύο ἴσα σχετικά κλάσματα γιά καθένα ἀπό τά παρακάτω σχετικά κλάσματα:

$$\frac{3}{4}, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{-4}{-5}, \quad \frac{0}{3}, \quad 3, \quad -3, \quad \frac{-5}{2}$$

5. Νά ὑπολογιστοῦν τά ἀθροίσματα:

α) $(-5)+(-7)$ β) $(-8)+(+3)$ γ) $(+7)+(-2)$

δ) $(+11)+(+9)$ ε) $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)$ στ) $-2+\left(-\frac{3}{5}\right)$

ζ) $\left(-1\frac{3}{4}\right)+\left(-2\frac{5}{6}\right)$ η) $8+\left(-9\frac{1}{8}\right)$ θ) $-3\frac{2}{12}+\left(-2\frac{5}{8}\right)$

6. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ $x=\alpha+\beta$, ἄν

α) $\alpha=-5$, $\beta=+7$ β) $\alpha=+3$, $\beta=-\frac{1}{8}$ γ) $\alpha=15$, $\beta=-15$.

7. Νά ὑπολογιστοῦν τά ἀθροίσματα:

α) $(-2)+(-13)+(+8)+(-7)+(+14)$

β) $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)$

γ) $-2+3-8+11+15-23-1$

δ) $-1\frac{1}{5}-2+3\frac{1}{12}+\frac{1}{6}-13$

8. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ $x=\alpha+\beta+\gamma+\delta$ γιά

α) $\alpha=-2$, $\beta=-3$, $\gamma=+13$, $\delta=-3$

β) $\alpha=-4$, $\beta=1\frac{3}{4}$, $\gamma=-2\frac{5}{6}$, $\delta=5{,}6$

9. Νά βρεῖτε τούς ρητούς ἀριθμούς x καί y, πού ἐπαληθεύουν τίς ἰσότητες:

α) $(-7)+(-4)+(-2{,}5)+x=0$ β) $(-13{,}25)+5{,}75+(-4{,}8)+y=0$

10. Νά βρεῖτε τά ἐξαγόμενα:

α) $(2-3+5)+(-8+7)$ β) $(-2+7+11)+(-2-7)+(-3+8)$

11. Νά ἐλέγξετε μέ βάση τόν ὁρισμό τῆς ἀφαιρέσεως ρητῶν ἀριθμῶν ἄν ἰσχύουν οἱ παρακάτω ἰσότητες:

α) $(-5)-(+2)=-7$ β) $(+8)-(-3)=11$ γ) $(+5)-(+8)=-3$

12. Νά ὑπολογίσετε τίς διαφορές:

α) $(+8)-(+7)$ β) $(-8)-(-3)$ γ) $(+15)-(-12)$

δ) $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+1\frac{5}{6}\right)$ ε) $-1-\left(-1\frac{2}{3}\right)$ στ) $(-3{,}75)-\left(-\frac{3}{5}\right)$

13. Νά ὑπολογίσετε τόν $x=\alpha-\beta$ γιά

α) $\alpha=-2,\ \beta=-\frac{1}{2}$ β) $\alpha=+5,\ \beta=-7$ γ) $\alpha=-3\frac{2}{9},\ \beta=1\frac{1}{12}$

14. Νά βγάλετε τίς παρενθέσεις καί μετά νά ὑπολογίσετε τά ἀθροίσματα:

α) $(-5)+(-6)-(+3)-(-7)+(-12)-(-13)$

β) $(-7)-(+8)+(-3)+(+7)-(-3)-(+1)$

15. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ $x=\alpha-\beta-\gamma+\delta$, ἄν

α) $\alpha=-5,\quad \beta=-12,\quad \gamma=+7,\quad \delta=-3$

β) $\alpha=\frac{5}{6},\quad \beta=0{,}6,\quad \gamma=-1\frac{3}{4},\quad \delta=-2\frac{7}{9}$

16. Νά ὑπολογίσετε τά παρακάτω ἀλγεβρικά ἀθροίσματα μέ δύο τρόπους: α) ἀντικαθιστώντας τούς ὅρους σέ κάθε παρένθεση μέ ἕναν ἀριθμό, β) βγάζοντας ἀπό τήν ἀρχή τίς παρενθέσεις.

α) $-3-(8-7)-(-12+11)-(5+2)$

β) $3-[-2-(8+2)]-12-(8-3)$

γ) $7-(-8+3)-[-5-(10-13)-3]-1$

δ) $-(-3+1)-\{-5+(-3+7)-[-3-(-7+1)]\}-(8-5)$

ε) $-\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{8}\right)-\left\{-\frac{3}{4}+\left(1-\frac{1}{4}\right)-\left[-\frac{1}{3}-\left(-2+\frac{1}{4}\right)\right]\right\}-(-1)$

Πολλαπλασιασμός ρητῶν ἀριθμῶν

1.9. Τό γινόμενο ρητῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται (ὅπως καί τό γινόμενο τῶν κλασμάτων) μέ τόν ἑξῆς κανόνα:

> Τό γινόμενο ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι ρητός ἀριθμός, πού ἔχει ἀριθμητή τό γινόμενο τῶν ἀριθμητῶν τους καί παρονομαστή τό γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τους.

Ἔτσι π.χ.

$$\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{(+2)\cdot(-4)}{3\cdot 5}=-\frac{8}{15}.$$

$$(-3)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{(-3)\,(-3)}{1\cdot 4}=+\frac{9}{4}$$

$$\left(+\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)(-2)\left(+\frac{5}{6}\right)=\frac{(+3)\,(-4)\,(-2)\,(+5)}{5\cdot 3\cdot 1\cdot 6}=\frac{+120}{90}=+\frac{4}{3}.$$

Καταλαβαίνουμε λοιπόν πάλι ὅτι, **ἄν ἔχουμε ἄρτιο πλῆθος ἀρνητικῶν πα-**

παραγόντων, τό γινόμενο εἶναι θετικός ἀριθμός, ἐνῶ, ἄν ἔχουμε περιττό πλῆθος ἀρνητικῶν παραγόντων, τό γινόμενο εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα τούς ρητούς ἀριθμούς $\kappa = +\frac{5}{6}$, $\lambda = -\frac{2}{3}$, $\rho = -\frac{1}{2}$ καί ἄς ὑπολογίσουμε τά γινόμενα:

$$\kappa \cdot \lambda = \left(+\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{10}{18},$$

$$\lambda \cdot \kappa = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(+\frac{5}{6}\right) = -\frac{10}{18}$$

$$(\kappa\lambda)\rho = \left[\left(+\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\right] \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{10}{18}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = +\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$\kappa(\lambda\rho) = \left(+\frac{5}{6}\right)\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \left(+\frac{5}{6}\right)\left(+\frac{2}{6}\right) = +\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

Συγκρίνοντας τά γινόμενα αὐτά βλέπουμε ὅτι στόν πολλαπλασιασμό τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες:

$\kappa.\lambda = \lambda.\kappa$	(ἀντιμεταθετική)
$(\kappa\lambda)\rho = \kappa(\lambda\rho)$	(προσεταιριστική)

Οἱ δύο αὐτές ἰδιότητες μᾶς ἐπιτρέπουν, ὅταν θέλουμε νά ὑπολογίσουμε ἕνα γινόμενο, νά κάνουμε ἀντικατάσταση ὁσωνδήποτε καί ὁποιωνδήποτε παραγόντων θέλουμε μέ τό γινόμενό τους. Ἔτσι π.χ.

$$\left(+\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)(-2)\left(+\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \left(+\frac{3}{5}\right)\left(+\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)(-2)\left(-\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{(+3)\,(+1)}{5 \cdot 4} \cdot \frac{(-4)\,(-2)(-3)}{3 \cdot 1 \cdot 2} = \left(+\frac{3}{20}\right)\left(-\frac{24}{6}\right) = -\frac{72}{120} = -\frac{3}{5}.$$

Ἄς ὑπολογίσουμε ἀκόμη τό γινόμενο $\kappa(\lambda+\rho)$ καί τό ἄθροισμα $\kappa\lambda + \kappa\rho$. Ἔχουμε

$$\kappa(\lambda+\rho) = \left(+\frac{5}{6}\right)\left[\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \left(+\frac{5}{6}\right)\left[\left(-\frac{4}{6}\right) + \left(-\frac{3}{6}\right)\right] = \left(+\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{7}{6}\right) = -\frac{35}{36}$$

$$\kappa\lambda + \kappa\rho = \left(+\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(-\frac{10}{18}\right) + \left(-\frac{5}{12}\right) = \left(-\frac{20}{36}\right) + \left(-\frac{15}{36}\right) = -\frac{35}{36}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ἰσχύει ἡ ἰσότητα

$$\boxed{\kappa(\lambda+\rho) = \kappa\lambda + \kappa\rho}$$

ἡ ὁποία μᾶς λέει ὅτι στόν πολλαπλασιασμό τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἰσχύει ἡ **ἐπιμεριστική ἰδιότητα** ὡς πρός τήν πρόσθεση.

Ἀκόμη, εἶναι φανερό ὅτι γιά κάθε ρητό ἀριθμό κ ἔχουμε

$$\boxed{\kappa \,.\, 1 = \kappa}$$

καί ἀπό τήν ἰσότητα αὐτή καταλαβαίνουμε ὅτι τό 1 εἶναι *«οὐδέτερο στοιχεῖο»* τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

1.10. Ἄν δίνεται ἕνας ρητός ἀριθμός διαφορετικός ἀπό τό μηδέν, π.χ. ὁ $+\frac{2}{3}$, βρίσκεται πάντοτε ἕνας ἄλλος ρητός ἀριθμός, πού ἔχει μέ τόν $+\frac{2}{3}$ γινόμενο ἴσο μέ 1. Αὐτός εἶναι ὁ $+\frac{3}{2}$, γιατί

$$\left(+\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{3}{2}\right) = 1,$$

καί λέγεται **ἀντίστροφος** τοῦ $+\frac{2}{3}$.

Γενικά γιά κάθε ρητό ἀριθμό $\kappa \neq 0$ βρίσκεται πάντοτε ὁ ἀντίστροφός του, ὁ ὁποῖος εἶναι ἕνα ὁμόσημο σχετικό κλάσμα μέ ἀνεστραμμένους τούς ὅρους του καί σημειώνεται $\frac{1}{\kappa}$. Ἔχουμε λοιπόν πάντοτε

$$\boxed{\kappa \,.\, \frac{1}{\kappa} = 1}$$

Ἔτσι π.χ. ἄν $\kappa = -\frac{3}{5}$, θά εἶναι $\frac{1}{\kappa} = -\frac{5}{3}$, καί ἄν $\kappa = +\frac{1}{2}$, τότε $\frac{1}{\kappa} = +2$.

Διαίρεση ρητῶν ἀριθμῶν

1.11 Ἄν ἔχουμε δύο ρητούς ἀριθμούς κ καί λ, ὅπου $\lambda \neq 0$, ὀνομάζουμε **πηλίκο** τοῦ κ διά τοῦ λ τόν ἀριθμό $\kappa \cdot \frac{1}{\lambda}$, τόν ὁποῖο σημειώνουμε $\kappa : \lambda$ ἤ $\frac{\kappa}{\lambda}$. Ἔτσι ἔχουμε τήν ἰσότητα

$$\boxed{\kappa : \lambda = \kappa \,.\, \frac{1}{\lambda}}$$

ἡ ὁποία μᾶς λέει ὅτι **γιά νά βροῦμε τό πηλίκο τοῦ ρητοῦ κ μέ τό ρητό λ, πολλαπλασιάζουμε τόν κ μέ τόν ἀντίστροφο τοῦ λ.** Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$$\left(+\frac{2}{3}\right):\left(+\frac{5}{6}\right)=\left(+\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{6}{5}\right)=+\frac{12}{15}$$

$$\left(+\frac{2}{3}\right):(-3)=\left(+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{9}$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right):\left(+\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{3}{5}\right)\left(+\frac{4}{3}\right)=-\frac{12}{15}$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right):(-2)=\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=+\frac{3}{10}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι **τό πηλίκο ὁμόσημων ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι θετικός ρητός ἀριθμός, ἐνῶ τό πηλίκο ἑτερόσημων ρητῶν εἶναι ἀρνητικός ρητός.**

Τό πηλίκο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν $\kappa=-\frac{3}{5}$ καί $\lambda=+\frac{3}{4}$ γράφεται, ὅπως εἴπαμε, καί $\frac{\kappa}{\lambda}$. Ἔχουμε λοιπόν

$$\frac{-\frac{3}{5}}{+\frac{3}{4}}=\left(-\frac{3}{5}\right):\left(+\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(+\frac{4}{3}\right)=-\frac{12}{15}=-\frac{4}{5}.$$

Τό πρῶτο μέλος τῆς ἰσότητας αὐτῆς εἶναι ἕνα **σύνθετο σχετικό κλάσμα** καί, ὅπως βλέπουμε, ὑπολογίζεται μέ τόν ἴδιο κανόνα πού μάθαμε γιά τά ἁπλά κλάσματα.

Ἀριθμητικές παραστάσεις

1.12. Ὅταν λέμε **«ἀριθμητική παράσταση»**, ἐννοοῦμε μιά ἔκφραση ἡ ὁποία δηλώνει μιά σειρά πράξεων μεταξύ ρητῶν ἀριθμῶν. Τέτοιες ἐκφράσεις εἶναι π.χ. οἱ

$$\left(-\frac{2}{5}\right)(+3)+[6:(-2)]-\frac{8}{5},$$

$$(-3)\left(\frac{7}{2}+6-\frac{1}{3}\right)-4\left(5-\frac{3}{4}\right)\left(-1+\frac{1}{2}\right).$$

Ἄν σέ μιά ἀριθμητική παράσταση ἐκτελέσουμε τίς πράξεις πού εἶναι σημειωμένες, καταλήγουμε σ' ἕναν ἀριθμό, ὁ ὁποῖος λέγεται **τιμή** τῆς ἀριθμητικῆς παραστάσεως. Γιά νά βροῦμε τήν τιμή μιᾶς ἀριθμητικῆς παραστάσεως, ἀκολουθοῦμε μιά ὁρισμένη σειρά (προτεραιότητα) στήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων πού εἶναι σημειωμένες. Ἡ σειρά αὐτή εἶναι ἡ ἑξῆς:

α) **Ἄν ἡ ἀριθμητική παράσταση ἔχει παρενθέσεις (ἤ ἀγκύλες ἤ ἄγκιστρα), κάνουμε πρῶτα τίς πράξεις μέσα σ' αὐτές.**

β) Ἐκτελοῦμε τούς πολλαπλασιασμούς καί τίς διαιρέσεις ἀπό ἀριστερά πρός τά δεξιά.

γ) Τέλος, ἐκτελοῦμε τίς προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις, πού ἐμφανίζονται, καί πάντοτε ἀπό τά ἀριστερά πρός τά δεξιά.

Εἶναι φανερό ὅτι καί στίς πράξεις, πού κάνουμε μέσα σέ μιά παρένθεση, ὁ πολλαπλασιασμός καί ἡ διαίρεση θά προηγοῦνται ἀπό τήν πρόσθεση καί τήν ἀφαίρεση. Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$$\left(-\frac{2}{5}\right)(+3)+[6:(-2)]-\frac{8}{5}=\left(-\frac{2}{5}\right)(+3)+(-3)-\frac{8}{5}=$$

$$=-\frac{6}{5}-3-\frac{8}{5}=-\frac{29}{5}$$

$$(-3)\left(\frac{7}{2}+6-\frac{1}{3}\right)-4\left(5-\frac{3}{4}\right)\left(-1+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=(-3)\left(\frac{21}{6}+\frac{36}{6}-\frac{2}{6}\right)-4\left(+\frac{17}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=(-3)\left(+\frac{55}{6}\right)+\frac{17}{2}=-\frac{55}{2}+\frac{17}{2}=-\frac{38}{2}=-19$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ἄν εἶναι $\alpha=+\frac{2}{3}$, $\beta=-2$, $\gamma=-\frac{5}{6}$, νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα

$\alpha\cdot\beta$, $\alpha.\gamma$, $\beta.\gamma$, $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$, $\beta+\gamma$, $\alpha(\beta+\gamma)$, $\alpha\beta+\alpha\gamma$, $\alpha+\beta.\gamma$, $(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)$
καί νά ἐξετασθεῖ ἄν ἰσχύουν οἱ δύο ἰσότητες

(I) $\alpha.(\beta+\gamma)=(\alpha.\beta)+(\alpha.\gamma)$

(II) $\alpha+(\beta.\gamma)=(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)$

Λύση.

$$\alpha.\beta=\left(+\frac{2}{3}\right)(-2)=-\frac{4}{3}$$

$$\alpha.\gamma=\left(+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{6}\right)=-\frac{10}{18}$$

$$\beta.\gamma=(-2)\left(-\frac{5}{6}\right)=+\frac{10}{6}$$

$$\alpha+\beta=\left(+\frac{2}{3}\right)+(-2)=\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{6}{3}\right)=-\frac{4}{3}$$

$$\alpha+\gamma=\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)=\left(+\frac{4}{6}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)=-\frac{1}{6}$$

$$\beta+\gamma=(-2)+\left(-\frac{5}{6}\right)=\left(-\frac{12}{6}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)=-\frac{17}{6}$$

$$\alpha(\beta+\gamma)=\left(+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{17}{6}\right)=-\frac{34}{18}$$

$$(\alpha+\beta)\,(\alpha+\gamma)=\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{4}{18}$$

$$\alpha\beta+\alpha\gamma=\left(-\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{10}{18}\right)=\left(-\frac{24}{18}\right)+\left(-\frac{10}{18}\right)=-\frac{34}{18}$$

$$\alpha+(\beta.\gamma)=\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{10}{6}\right)=\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$$

'Από αὐτές βλέπουμε ὅτι $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$, δηλαδή ἰσχύει ἡ (I) πού ἐκφράζει τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα, ἤ ὅπως λέμε καλύτερα, ἐκφράζει ὅτι ὁ πολλαπλ/σμός ἐπιμερίζει τήν πρόσθεση.
Βλέπουμε ἀκόμη ὅτι $\alpha+(\beta.\gamma)\neq(\alpha+\beta)\,(\alpha+\gamma)$, δηλαδή ὅτι δέν ἰσχύει ἡ (II). 'Η (II) ὅμως προκύπτει ἀπό τήν (I) ἄν ἀλλάξουμε μεταξύ τους τά σημεῖα + καί . Αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ πρόσθεση δέν ἐπιμερίζει τόν πολλαπλασιασμό.

---

2. **'Από τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ καταλαβαίνουμε ὅτι ἰσχύουν οἱ ἰσότητες $\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta=\alpha(\beta+\gamma+\delta)$, $-\alpha\beta+\alpha\gamma-\alpha\delta=-\alpha(\beta-\gamma+\delta)$**
Χρησιμοποιώντας τίς ἰσότητες αὐτές (οἱ ὁποῖες ἐκφράζουν ὅτι, ἄν σ' ἕνα ἄθροισμα γινομένων ὑπάρχει κοινός παράγοντας, αὐτός γράφεται ἔξω ἀπό μιά παρένθεση) νά βρεῖτε τά ἐξαγόμενα:

I) $21.7+21.13$ **II)** $\frac{3}{4}.\frac{3}{5}-\frac{3}{4}.\frac{4}{5}+\frac{3}{4}.\frac{1}{5}$

III) $-\frac{3}{4}.5+\frac{3}{4}.7-\frac{3}{4}.11$

Λύση. I) $21.7+21.13=21(7+13)=21.20=420$

II) $\frac{3}{4}.\frac{3}{5}-\frac{3}{4}.\frac{4}{5}+\frac{3}{4}.\frac{1}{5}=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\right)=$

$=\frac{3}{4}.\frac{3-4+1}{5}=\frac{3}{4}.0=0$

III) $-\frac{3}{4}.5+\frac{3}{4}.7-\frac{3}{4}.11=-\frac{3}{4}(5-7+11)=-\frac{3}{4}.9=-\frac{27}{4}$

---

3. **Νά ὑπολογιστοῦν τά ἀθροίσματα:**

$A=1+2+3+\ldots+87$, $B=1+2+3+\ldots+999$, $\Gamma=1+2+3+\ldots+\nu$

Λύση. Χρησιμοποιώντας τήν ἀντιμεταθετική ἰδιότητα, μποροῦμε νά γράψουμε ἀκόμη $A=87+\ldots+3+2+1$ καί τότε προσθέτουμε κατά μέλη τίς δύο ἰσότητες

$$\begin{array}{l} A=1+2+3+\ldots\ldots.+86+87 \\ A=87+86+85+\ldots\ldots.+2+1 \\ \hline 2A=88+88+88+\ldots\ldots.+88+88 \end{array}$$

Στό δεύτερο μέλος ἔχουμε 87 προσθετέους ἴσους μέ 88 καί συνεπῶς

$$2A=87.88,\quad \text{δηλαδή}\quad A=\frac{87.88}{2}=3828$$

*Αν ἐργασθοῦμε μέ τόν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο, βρίσκουμε

$$B=\frac{999.1000}{2}=999.500=499500,\qquad \Gamma=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

17. Νά βρεῖτε τά γινόμενα

α) $(-5) \cdot (-3)$ β) $(+7) \cdot (+12)$ γ) $(-5) \cdot (+3)$

δ) $(+8) \cdot (-10)$ ε) $\left(-\frac{5}{12}\right) \cdot \left(+\frac{4}{3}\right)$ στ) $\left(-\frac{7}{8}\right) \cdot \left(-\frac{8}{7}\right)$

18. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ $x = 2\alpha - 3\beta$, ἄν

α) $\alpha = -2,\ \beta = +13$ β) $\alpha = -6,\ \beta = -\frac{7}{12}$ γ) $\alpha = -\frac{3}{4},\ \beta = 1\frac{4}{9}$

19. Νά ὑπολογίσετε τά παρακάτω γινόμενα μέ δύο τρόπους

α) $(-7+8+3) \cdot (-2)$ β) $\frac{1}{2}(12-8-6+4)$ γ) $\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$

δ) $(-8+3) \cdot (-5+7)$ ε) $\left(-8+\frac{1}{2}-0{,}8\right)\left(-2+\frac{1}{3}\right)$

20. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τῶν παραστάσεων:

α) $(-5+3-2) \cdot (-3)+6$ β) $(+3)(-5)+(-2)(-7)$

γ) $(-2) \cdot [-3-(-7+5)]$ δ) $\left(-4+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-8+\frac{3}{4}+\frac{1}{12}\right)$

ε) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) \cdot (-6)+2$

21. Νά ὑπολογίσετε τά παρακάτω γινόμενα

α) $(-2) \cdot (+3) \cdot (-4)$ β) $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{4}{6}\right)$

γ) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(+\frac{4}{7}\right) \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) \cdot (-3) \cdot (+3)$

22. Νά ὑπολογίσετε τό $x = \alpha\beta\gamma\delta$, ἄν

α) $\alpha = -2,\ \beta = -\frac{4}{3},\ \gamma = \frac{3}{2},\ \delta = 1$ β) $\alpha = -\frac{3}{4},\ \beta = \frac{1}{2},\ \gamma = \frac{2}{5},\ \delta = -\frac{4}{3}$

23. Νά ὑπολογίσετε τήν τιμή τῶν παραστάσεων:

α) $[(-2)(-4)(+2)](-10)$ β) $\left[4\left(-\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right](-1)$

24. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τῶν παραστάσεων:

α) $[3-(3-4)][5+(2-3)](6-4)$

β) $\left(3-\frac{2}{3}\right)\left[4-\left(+\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{10}{3}\right)\right]\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$

γ) $(-3) \cdot \left(7+6-\frac{2}{3}\right) - 4 \cdot \left(4-\frac{3}{4}\right)\left(7-\frac{1}{2}\right)(-1)$

25. Νά βρεῖτε τά πηλίκα:

α) $(-12) : (+4)$ β) $(-121) : (+11)$ γ) $(-42) : \left(-\frac{6}{7}\right)$

δ) $\left(+\frac{4}{5}\right) : (+2)$ ε) $\left(+\frac{8}{11}\right) : \left(-\frac{11}{2}\right)$ στ) $(-0{,}2) : (+0{,}4)$

26. Μέ ἐφαρμογή τοῦ ὁρισμοῦ τῆς διαιρέσεως νά ἐλέγξετε τήν ὀρθότητα τῶν ἰσοτήτων:

α) $(-15):(-5)=3$ β) $\left(-\frac{42}{5}\right):\frac{7}{10}=-12$ γ) $\frac{4}{3}:\left(-\frac{7}{9}\right)=-\frac{12}{7}$

27. Ὑπολογίστε τόν $x=\alpha:\beta$, ἄν

α) $\alpha=-144$, $\beta=+6$ β) $\alpha=\frac{12}{7}$, $\beta=-4$ γ) $\alpha=-2{,}5$, $\beta=-0{,}5$

28. Νά ὑπολογιστοῦν μέ δύο τρόπους τά πηλίκα:

α) $(12+6-15):(-2)$ β) $(7{,}7+0{,}77-77):(0{,}7)$

γ) $\left(-\frac{5}{12}+\frac{1}{4}-2\right):\left(-\frac{1}{2}\right)$ δ) $\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{4}-\frac{5}{3}\right):\frac{5}{2}$

29. Νά ὑπολογιστοῦν τά πηλίκα

α) $[60\cdot(-8)\cdot(-12)]:(-3)$ β) $[(-3)\cdot 5\cdot(-6)\cdot(-77)]:(-11)$

γ) $\left(\frac{6}{7}-\frac{1}{14}+\frac{3}{7}\right):\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)$ δ) $\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{2}+\frac{1}{8}\right):\left[\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{5}\right)\right]$

30. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα:

α) $45-19+3.6$

β) $45-(19+3.6)$

γ) $(45-19)+3.6$

δ) $45-(19+3)\cdot 6$

ε) $(45-19+3)\cdot 6$

στ) $12.48-36:3$

ζ) $12\cdot(48-36:3)$

η) $(12\cdot 48)-(36:3)$

θ) $12\cdot[(48-36):3]$

ι) $[12\cdot(48-36)]:3$

31. Νά ἐκτελεστοῦν οἱ πράξεις:

α) $-(8-5)-\{-2+[-3-(12-10)-5]-3\}-(-7+2-1)$

β) $(-8+1)\cdot(-3)-7\cdot(-5+1-3)-12$

γ) $\left(1-\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(1\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right):1\frac{1}{5}$

δ) $\left(2-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\frac{1}{6}-\left(3-\frac{5}{6}\right)(-2)$

ε) $\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right):\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\left(2-\frac{1}{4}\right)$

32. Νά βρεῖτε τά ἐξαγόμενα:

α) $\dfrac{4+\frac{1}{3}}{-2+\frac{5}{9}}\cdot\dfrac{4}{-\frac{1}{2}}$ β) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(1-\frac{1}{-2}\right)}{\frac{5}{-2}+\frac{-7}{2}-1}$

γ) $\dfrac{\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\right):\frac{3}{5}-\frac{1}{6}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}+\frac{1}{3}:\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}}$ δ) $\dfrac{\frac{4}{-7}-\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{-3}}\cdot\left(3+\frac{1}{-5}\right)$

33. Συμπληρῶστε τόν παρακάτω πίνακα καί συγκρίνετε τά ἀποτελέσματα στίς τρεῖς τελευταῖες στῆλες:

α	β	γ	αβ	αγ	αβ+αγ	αβ+γ	α(β+γ)
−5	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	−2	3	1	$-\frac{13}{5}$	1
−6	$\frac{3}{5}$	0					
−1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$					

34. Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῶν παραστάσεων:

α) $2\alpha - 3\beta - 5$, ἄν $\alpha = -1,\ \beta = -2$

β) $2\beta(\alpha+\gamma) - \delta$, ἄν $\alpha = -2,\ \beta = -\frac{1}{2},\ \gamma = 1,\ \delta = -5$

γ) $x + \frac{2}{3}\left(x - \frac{2}{3}\right)$, ἄν $x = \frac{1}{6}$

δ) $\frac{x-\beta\ (x+2\beta)}{(x-\beta)\ (x+2\beta)}$ ἄν $x = 5,\ \beta = -3$

35. Ἄν $\alpha = \frac{1}{3},\quad \beta = -\frac{2}{3},\quad \gamma = -\frac{4}{3},\quad \delta = \frac{1}{5}$, ἐπαληθεῦστε τίς παρακάτω ἰσότητες:

α) $\alpha : \beta = (\alpha.\gamma) : (\beta.\gamma)$

β) $(\alpha+\beta+\gamma) : \delta = (\alpha : \delta) + (\beta : \delta) + (\gamma : \delta)$

γ) $(\alpha.\beta) : \gamma = (\alpha : \gamma) . \beta$

δ) $\alpha : (\beta.\gamma) = (\alpha : \beta) : \gamma$.

36. Χρησιμοποιῆστε τήν ἰδιότητα $\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta+\gamma)$, γιά νά βρεῖτε μέ σύντομο τρόπο τίς τιμές τῶν παραστάσεων:

α) $5.(-3) + 5.(-17)$ β) $-8.3 - 8.4$ γ) $-12\ (-3) - 12\ (-7)$

Διάταξη στό σύνολο Q

1.13. Ἄν ἔχουμε δύο ὁποιουσδήποτε ρητούς ἀριθμούς α καί β πού ἡ διαφορά τους α−β εἶναι θετικός ἀριθμός, τότε λέμε ὅτι **ὁ α εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τό β** ἤ ὅτι **ὁ β εἶναι μικρότερος ἀπό τόν α** καί γράφουμε ἀντίστοιχα

$$\alpha > \beta \quad ἤ \quad \beta < \alpha$$

Οἱ δύο αὐτές σχέσεις λέγονται **ἀνισότητες** καί τά **σύμβολα** > καί < λέγονται «σύμβολα ἀνισότητας». Ἔτσι π.χ. εἶναι

$+\frac{3}{4} > -2$, γιατί $+\frac{3}{4} - (-2) = +\frac{3}{4} + 2 = +\frac{11}{4}$ θετικός ἀριθμός

$-1 > -2$, γιατί $-1 - (-2) = -1 + 2 = +1$ θετικός ἀριθμός

$+\frac{3}{4} > +\frac{1}{2}$, γιατί $+\frac{3}{4} - \left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = +\frac{1}{4}$ θετικός ἀριθ.

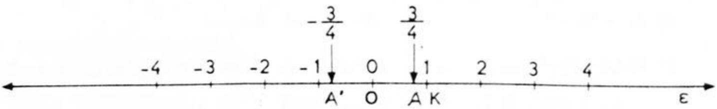
᾿Από τόν ὁρισμό πού δώσαμε, καταλαβαίνουμε ὅτι:

- **Κάθε θετικός ἀριθμός εἶναι μεγαλύτερος ἀπό κάθε ἀρνητικό.**
- **Κάθε θετικός ἀριθμός εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τό μηδέν.**
- **Κάθε ἀρνητικός ἀριθμός εἶναι μικρότερος ἀπό τό μηδέν.**

Γι' αὐτό ἀκριβῶς, ὅταν θέλουμε νά δηλώσουμε ὅτι ἕνας ρητός ἀριθμός α εἶναι θετικός (ἤ ἀρνητικός), γράφουμε $\alpha > 0$ (ἤ $\alpha < 0$).

Στήν Α' τάξη μάθαμε πῶς μποροῦμε νά παρουσιάσουμε τούς ἀκέραιους ἀριθμούς πάνω σέ μιά εὐθεία ε.

῎Αν θεωρήσουμε μιά τέτοια παρουσίαση, μποροῦμε νά ἀντιστοιχίσουμε



σέ κάθε ρητό ἀριθμό ἕνα σημεῖο τῆς ε. ῎Ετσι π.χ. στόν ἀριθμό $+\frac{3}{4}$ ἀντιστοιχίζεται ἕνα σημεῖο Α μεταξύ 0 καί 1, πού βρίσκεται ἄν χωρίσουμε τό τμῆμα ΟΚ σέ τέσσερα ἴσα μέρη. Σ' ἕνα σημεῖο Α' μεταξύ 0 καί -1 τέτοιο, ὥστε ΟΑ'=ΟΑ, ἀντιστοιχίζεται τό $-\frac{3}{4}$. Ὑπάρχει λοιπόν τρόπος νά ἀντιστοιχίσουμε ὅλους τούς ρητούς ἀριθμούς σέ σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε καί τότε ἡ ε λέγεται **ἄξονας τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.** Στήν ἀντιστοιχία αὐτή κάθε ἀριθμός x μεγαλύτερος ἀπό ἕναν ἀριθμό α βρίσκεται δεξιά τοῦ α, ἐνῶ κάθε ἀριθμός y μικρότερος τοῦ α βρίσκεται ἀριστερά τοῦ α: Συνεπῶς οἱ θετικοί ἀριθμοί βρίσκονται δεξιά ἀπό τό 0 καί οἱ ἀρνητικοί ἀριστερά ἀπό τό 0. Μέ τήν ἀντιστοιχία αὐτή βάζουμε τούς ρητούς ἀριθμούς σέ μιά «σειρά» δηλαδή κάνουμε, ὅπως λέμε, μιά «διάταξη» τοῦ συνόλου Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

Ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων

1.14 ῎Ας πάρουμε δύο ρητούς ἀριθμούς, π.χ. $\alpha = 5$ καί $\beta = 3$. ῎Εχουμε $\alpha - \beta = 5 - 3 = 2$, θετικός, ὥστε $\alpha > \beta$.

῎Αν προσθέσουμε καί στούς δύο ἕναν ἄλλο ρητό, π.χ. τόν $\gamma = -6$, ἔχουμε $\alpha + \gamma = 5 + (-6) = -1$ καί $\beta + \gamma = 3 + (-6) = -3$. Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι $-1 - (-3) = -1 + 3 = 2$, θετικός. Ἑπομένως ἔχουμε καί

$$\alpha + \gamma > \beta + \gamma.$$

῎Αν ἀφαιρέσουμε καί ἀπό τούς δύο τόν γ, ἔχουμε $\alpha - \gamma = 5 - (-6) = 5 + 6 = 11$ καί $\beta - \gamma = 3 - (-6) = 3 + 6 = 9$. Παρατηροῦμε πάλι ὅτι $11 - 9 = 2$, θετικός. Ἑπομένως ἔχουμε καί

$$\alpha - \gamma > \beta - \gamma.$$

Γενικά, ὅταν τά γράμματα α,β καί γ παριστάνουν ρητούς ἀριθμούς, ἄν εἶναι $\alpha > \beta$ θά εἶναι καί $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$ καί $\alpha-\gamma > \beta-\gamma$, δηλ.

> Ἄν στά μέλη μιᾶς ἀνισότητας προσθέσουμε τόν ἴδιο ρητό ἀριθμό ἤ ἀφαιρέσουμε ἀπ' αὐτά τόν ἴδιο ρητό ἀριθμό, ἡ ἀνισότητα διατηρεῖ τή φορά της.

Ἄς πάρουμε πάλι τήν ἀνισότητα $\alpha>\beta$, ὅπου $\alpha = 5$ καί $\beta = 3$ καί ἄς πολλαπλασιάσουμε τούς ρητούς, α καί β πρῶτα μέ ἕνα θετικό ρητό καί ὕστερα μέ ἕναν ἀρνητικό.

Ἄν π.χ. πάρουμε πρῶτα $\gamma = 2$, ἔχουμε $\alpha \cdot \gamma = 5 \cdot 2 = 10$ καί $\beta \cdot \gamma = 3 \cdot 2 = 6$. Παρατηροῦμε ὅτι $\alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \gamma = 10 - 6 = 4$, θετικός. Ἑπομένως ἔχουμε καί

$$\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$$

Ἄν πάρουμε τώρα $\gamma = -2$, ἔχουμε $\alpha \cdot \gamma = 5 \cdot (-2) = -10$ καί $\beta \cdot \gamma = 3 \cdot (-2) = -6$. Παρατηροῦμε ὅτι $\alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \gamma = -10 - (-6) = -10 + 6 = -4$, ἀρνητικός. Ἑπομένως ἔχουμε

$$\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$$

Γενικά, ὅταν τά γράμματα α,β καί γ παριστάνουν ρητούς ἀριθμούς, τότε, ἄν $\alpha > \beta$ καί γ θετικός, θά εἶναι καί $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$, ἐνῶ, ἄν $\alpha > \beta$ καί γ ἀρνητικός, θά εἶναι $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$. Δηλαδή

> Ἄν πολλαπλασιάσουμε τά μέλη μιᾶς ἀνισότητας μέ ἕνα θετικό ρητό, ἡ ἀνισότητα διατηρεῖ τή φορά της, ἐνῶ ἄν τά πολλαπλασιάσουμε μέ ἕναν ἀρνητικό ρητό, ἡ ἀνισότητα ἀλλάζει φορά.

Ἄς πάρουμε τώρα τίς ἀνισότητες

$$5 > 2 \quad \text{καί} \quad 2 > -3$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ διαφορά $5-(-3) = 5 + 3 = 8$, θετικός, ἑπομένως καί

$$5 > -3.$$

Γενικά :

> Ἄν τά γράμματα α,β καί γ παριστάνουν ρητούς ἀριθμούς καί εἶναι $\alpha>\beta$ καί $\beta>\gamma$ τότε, εἶναι καί $\alpha>\gamma$.

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ἡ σχέση *«μεγαλύτερος»* εἶναι **μεταβατική**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά μποῦν σέ μιά σειρά ἀπό τό μικρότερο πρός τό μεγαλύτερο οἱ ἀριθμοί**

$$3,\ -\frac{4}{5},\ -2{,}3,\ -\frac{2}{3},\ -4,\ 1{,}5,\ \frac{5}{2}$$

καί νά τοποθετηθοῦν στόν ἄξονα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

Λύση.

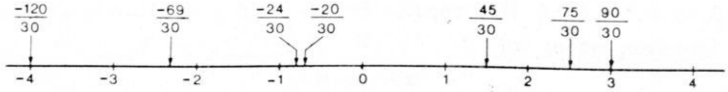
Οἱ ἀριθμοί αὐτοί σέ κλασματική μορφή γράφονται :

$$\frac{3}{1}, -\frac{4}{5}, -\frac{23}{10}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{1}, \frac{15}{10}, \frac{5}{2}$$

ἤ ἀκόμη, ἄν τραποῦν σέ ὁμώνυμα κλάσματα (ΕΚΠ = 30),

$$\frac{90}{30}, -\frac{24}{30}, -\frac{69}{30}, -\frac{20}{30}, -\frac{120}{30}, \frac{45}{30}, \frac{75}{30}$$

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι ἀρκεῖ τώρα νά διατάξουμε τούς ἀριθμητές τους. Μποροῦμε ἀκόμη νά τούς τοποθετήσουμε ἀπό τήν ἀρχή στόν ἄξονα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν



Βλέπουμε λοιπόν ὅτι $-\frac{120}{30} < -\frac{69}{30} < -\frac{24}{30} < -\frac{20}{30} < \frac{45}{30} < \frac{75}{30} < \frac{90}{30}$

ἤ $\qquad -4 < -2{,}3 < -\frac{4}{5} < -\frac{2}{3} < 1{,}5 < \frac{5}{2} < 3.$

2. **Ἄν α εἶναι ἕνας ρητός ἀριθμός, ὀνομάζουμε ἀ π ό λ υ τ η τ ι μ ή τ ο ῦ α τόν ἴδιο τόν α, ἄν εἶναι θετικός ἤ μηδέν, καί τόν ἀντίθετό του ἄν εἶναι ἀρνητικός. Ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ α σημειώνεται μέ $|\alpha|$, δηλαδή**

$$|\alpha| = \alpha \quad , \quad \text{ἄν } \alpha > 0 \text{ ἤ } \alpha = 0$$
$$|\alpha| = -\alpha \quad , \quad \text{ἄν } \alpha < 0$$

Ἔτσι π.χ. εἶναι $\left|+\frac{2}{3}\right| = +\frac{2}{3}$, $\left|-\frac{2}{3}\right| = -\left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{2}{3}$,

$\left|-\frac{1}{2}\right| = -\left(-\frac{1}{2}\right) = +\frac{1}{2}$.

α) Νά βρεῖτε τίς ἀπόλυτες τιμές τῶν ἀριθμῶν $x = +\frac{5}{2}$, $y = -\frac{3}{4}$, $z = -2$, $\omega = \frac{1}{4}$.

β) Μέ τίς ἀπόλυτες τιμές τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν νά δείξετε ὅτι σέ κάθε περίπτωση ἔχουμε

$$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta| \qquad , \qquad |\alpha\beta| = |\alpha| . |\beta|$$

Λύση. α) $|x| = \left|+\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}$, $|y| = \left|-\frac{3}{4}\right| = +\frac{3}{4}$, $|z| = |-2| = +2$, $|\omega| = \frac{1}{4}$

β) $|x| + |y| = +\frac{5}{2} + \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$. ἐνῶ $|x+y| = \left|\frac{5}{2} - \frac{3}{4}\right| = \left|+\frac{7}{4}\right| = \frac{7}{4}$

Συνεπῶς $|x+y| < |x| + |y|$

$|x| + |\omega| = +\frac{5}{2} + \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$ ἐνῶ $|x+\omega| = \left|\frac{5}{2} + \frac{1}{4}\right| = \left|+\frac{11}{4}\right| = \frac{11}{4}$

Συνεπῶς $|x+\omega| = |x| + |\omega|$

Ὁμοίως βρίσκουμε $|x+z| < |x| + |z|$ καί $|y+z| = |y| + |z|$. Δηλαδή σέ κάθε περίπτωση ἔχουμε

$$|\alpha+\beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$$

$|x||y| = \left(+\frac{5}{2}\right) \cdot \left(+\frac{3}{4}\right) = \frac{15}{8}$, ἐνῶ $|x . y| = \left|\left(+\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)\right|$

$= \left| -\frac{15}{8} \right| = +\frac{15}{8}$. Συνεπῶς $|xy| = |x|\,|y|$.

Ὁμοίως βρίσκουμε $|x\omega| = |x|\,|\omega|$, $|y\omega| = |y|\,|\omega|, \ldots$, δηλαδή ἔχουμε πάντα $|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

37. Νά δείξετε μέ τόν ὁρισμό τῆς ἀνισότητας ὅτι

$$-\frac{2}{3} > -\frac{12}{5} \quad , \quad \frac{2}{3} < \frac{12}{5} \quad , \quad -\frac{2}{3} < \frac{12}{5}$$

38. Νά βάλετε ἕνα ἀπό τά σύμβολα $<$ καί $>$ στή θέση πού ὑπάρχουν οἱ τελεῖες στά παρακάτω ζεύγη ἀριθμῶν.

$$-\frac{3}{11} \ldots\ldots -\frac{7}{11} \qquad \frac{7}{8} \ldots\ldots \frac{8}{9} \qquad -\frac{170}{83} \ldots\ldots \frac{1}{27}$$

$$-\frac{27}{11} \ldots\ldots -\frac{7}{11} \qquad -\frac{7}{8} \ldots\ldots -\frac{8}{9} \qquad \frac{11}{123} \ldots\ldots -\frac{27}{91}$$

39. Ἄν εἶναι $\alpha > \beta$ καί $\gamma > 0$ δεῖξτε ὅτι $\frac{\alpha+\gamma}{\gamma} > \frac{\beta+\gamma}{\gamma}$, $\frac{\alpha-\gamma}{\gamma} > \frac{\beta-\gamma}{\gamma}$.

40. Ἄν εἶναι $\alpha > \beta$ καί $\gamma < 0$, δεῖξτε ὅτι $\frac{\alpha+\gamma}{\gamma} < \frac{\beta+\gamma}{\gamma}$, $\frac{\alpha-\gamma}{\gamma} < \frac{\beta-\gamma}{\gamma}$.

Δύναμη ρητοῦ ἀριθμοῦ μέ ἐκθέτη ἀκέραιο

1.15. Μάθαμε στήν πρώτη τάξη ὅτι ἕνα γινόμενο, πού ὅλοι οἱ παράγοντές του εἶναι ἴσοι μεταξύ τους, τό γράφουμε πιό σύντομα σάν δύναμη. Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3, \text{ (τρίτη δύναμη τοῦ 5).}$$

$$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^4, \text{ (τέταρτη δύναμη τοῦ } -2\text{).}$$

Ἡ ἔννοια αὐτή τῆς δυνάμεως ἐπεκτείνεται καί στούς ρητούς ἀριθμούς. Ἄν τό γράμμα α παριστάνει ἕνα ρητό ἀριθμό, **νιοστή δύναμη τοῦ α λέγεται ἕνα γινόμενο μέ ν παράγοντες ἴσους μέ α καί συμβολίζεται α^ν**, δηλ.

$$\boxed{\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \,.\, \alpha \,.\, \alpha \ldots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}}$$

Ὁ ρητός ἀριθμός α λέγεται βάση τῆς δυνάμεως καί ὁ φυσικός ν ἐκθέτης. Εἶναι φανερό ὅτι ὁ ἐκθέτης ν εἶναι μεγαλύτερος ἤ ἴσος ἀπό τόν 2, γιατί, γιά νά ἔχουμε γινόμενο, πρέπει νά ἔχουμε τουλάχιστο δυό παράγοντες.

Συμφωνοῦμε ὅτι **κάθε ρητό ἀριθμό α θά τόν γράφουμε καί ὡς δύναμη πού ἔχει ἐκθέτη ἴσο μέ 1,** δηλ.

$$\boxed{\alpha^1 = \alpha,} \quad \text{(πρώτη δύναμη τοῦ α).}$$

Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$$(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-8,\quad \left(-\frac{3}{4}\right)^2=\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)=+\frac{9}{16}$$

$$\alpha^5=\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha,\qquad 10^6=10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=1000000.$$

Εἰδικά τή δεύτερη δύναμη ἑνός ἀριθμοῦ τήν ὀνομάζουμε καί **τετράγωνο** τοῦ ἀριθμοῦ καί τήν τρίτη δύναμή του τήν ὀνομάζουμε καί **κύβο** τοῦ ἀριθμοῦ.

Παρατηροῦμε ὅτι ὁποιαδήποτε δύναμη τοῦ 0 εἶναι ἴση μέ 0 καί ὁποιαδήποτε δύναμη τοῦ 1 εἶναι ἴση μέ ἕνα, ἔχουμε δηλ. πάντοτε τίς ἰσότητες:

$$\mathbf{0^\nu=0\ (\nu\in N^*)\ \text{καί}\ 1^\nu=1\ (\nu\in N^*)}$$

Ἐπίσης, παρατηροῦμε ὅτι:

$$10^1=10\qquad 10^4=10000$$
$$10^2=100\qquad 10^5=100000$$
$$10^3=1000\qquad 10^6=1000000$$

δηλ. παρατηροῦμε ὅτι κάθε δύναμη τοῦ 10 εἶναι ἴση μέ ἕναν ἀριθμό μέ πρῶτο ψηφίο τό 1, πού ἀκολουθεῖται ἀπό τόσα μηδενικά, ὅσος εἶναι ὁ ἐκθέτης. Ὥστε

$$\mathbf{10^\nu=1\underbrace{000\ldots0}_{\nu\ \text{μηδενικά}}}$$

Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων. Δύναμη μέ ἀρνητικὸ ἐκθέτη

1.16. Ἐπειδή τό γινόμενο θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε θετικός ἀριθμός, κάθε δύναμη θετικοῦ ἀριθμοῦ θά εἶναι θετικός ἀριθμός, δηλ.

ἄν α θετικός τότε καί α^ν θετικός.

Ἄς πάρουμε ἕναν ἀρνητικό ἀριθμό, π.χ τόν $\alpha=-3$ καί ἄς ὑπολογίσουμε διάφορες δυνάμεις του. Ἔχουμε

$$(-3)^1=-3\qquad (-3)^3=(-3)(-3)(-3)=-27$$
$$(-3)^2=(-3)(-3)=9\qquad (-3)^4=(-3)(-3)(-3)(-3)=81$$

Γενικά διαπιστώνουμε ὅτι οἱ **ἄρτιες δυνάμεις ἑνός ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι θετικοί ἀριθμοί, ἐνῶ οἱ περιττές δυνάμεις του εἶναι ἀρνητικοί ἀριθμοί.** Ὥστε:

Ἄν α ἀρνητικός καί ν ἄρτιος, τότε α^ν θετικός,
ἄν α ἀρνητικός καί ν περιττός, τότε α^ν ἀρνητικός.

Πρέπει νά προσέξουμε ὅτι $(-2)^4=(-2)(-2)(-2)(-2)=16=2^4$, ἐνῶ

$-2^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$, δηλ.

$$(-2)^4 \neq -2^4$$

Είδικά γιά τόν ἀριθμό -1 ἔχουμε

$(-1)^\nu = 1$, ὅταν ν ἄρτιος καί $(-1)^\nu = -1$, ὅταν ν περιττός,

Ἔτσι π.χ. εἶναι $(-1)^{100} = 1$ καί $(-1)^{13} = -1$.

Ἄν τά γράμματα α καί β παριστάνουν ρητούς ἀριθμούς, παρατηροῦμε ὅτι:

$$\alpha^2 \cdot \alpha^3 = (\alpha \cdot \alpha) \cdot (\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha) = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^5$$

καί γενικά

$$\alpha^\nu \cdot \alpha^\mu = \underbrace{(\alpha \cdot \alpha \ldots \alpha)}_{\nu \text{ παράγ.}} \cdot \underbrace{(\alpha \cdot \alpha \ldots \alpha)}_{\mu \text{ παράγ.}} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \ldots \alpha}_{\mu+\nu \text{ παράγ.}} = \alpha^{\mu+\nu},$$

δηλ. **τό γινόμενο δύο δυνάμεων ἑνός ἀριθμοῦ α εἶναι δύναμη μέ βάση τόν α καί ἐκθέτη τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.**

$$\boxed{\alpha^\nu \,.\, \alpha^\mu = \alpha^{\nu+\mu}}$$

Ἐπίσης, παρατηροῦμε π.χ. ὅτι:

$$(\alpha\beta)^3 = (\alpha\beta) \cdot (\alpha\beta) \cdot (\alpha\beta) = (\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha) \cdot (\beta \cdot \beta \cdot \beta) = \alpha^3 \cdot \beta^3$$

καί γενικά

$$(\alpha\beta)^\nu = \underbrace{(\alpha\beta)(\alpha\beta)\ldots(\alpha\beta)}_{\nu \text{ παράγ.}} = \underbrace{(\alpha \cdot \alpha \ldots \alpha)}_{\nu \text{ παράγ.}} \cdot \underbrace{(\beta \cdot \beta \ldots \beta)}_{\nu \text{ παράγ.}} = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu,$$

δηλ. **ἡ δύναμη τοῦ γινομένου δύο ἤ περισσότερων ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῶν δυνάμεων τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.**

$$\boxed{(\alpha \,.\, \beta)^\nu = \alpha^\nu \,.\, \beta^\nu}$$

Ἔτσι π.χ. ἔχουμε:

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8, \quad \left(-\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^4 = \left(-\frac{3}{5}\right)^6$$

$$(2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5, \quad \left[(-2) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)\right]^6 = (-2)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6$$

Ἄς πάρουμε τώρα μιά δύναμη ἑνός ἀριθμοῦ, π.χ. τή 2^3 καί ἄς τήν ὑψώσουμε σέ μιά ἄλλη δύναμη. Ἔχουμε τότε

$$(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3} = 2^{2 \cdot 3}$$

$$(2^3)^5 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3+3+3+3} = 2^{5 \cdot 3}$$

Γενικά, ἔχουμε

$$(\alpha^\nu)^\mu = \underbrace{\alpha^\nu \cdot \alpha^\nu \cdot \alpha^\nu \ldots \alpha^\nu}_{\mu \text{ παράγοντες}} = \alpha^{\overbrace{\nu+\nu+\ldots+\nu}^{\mu \text{ προσθετέοι}}} = \alpha^{\mu \cdot \nu},$$

δηλ. **ἡ δύναμη μιᾶς δυνάμεως ἑνός ἀριθμοῦ α εἶναι ἴση μέ δύναμη, πού ἔχει βάση τόν ἀριθμό α καί ἐκθέτη τό γινόμενο τῶν ἐκθετῶν.**

$$\boxed{(\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu\mu}}$$

Ἄς πάρουμε διάφορες δυνάμεις ἑνός ἀριθμοῦ καί ἄς τίς διαιρέσουμε. Ἔχουμε π.χ.

$$\frac{2^5}{2^3} = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}{2\cdot2\cdot2} = 2\cdot2 = 2^2 = 2^{5-3}$$

Γενικά, ἄν α^{ν} καί α^{μ} εἶναι δυό δυνάμεις τοῦ α καί εἶναι $\nu > \mu$. τότε ἔχουμε

$$\frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}} = \frac{\overbrace{\alpha\cdot\alpha\ldots\alpha}^{\nu}}{\underbrace{\alpha.\alpha\ldots\alpha}_{\mu}} = \frac{\overbrace{(\alpha\cdot\alpha\ldots\alpha)}^{\mu}\cdot\overbrace{(\alpha.\alpha\ldots\alpha)}^{\nu-\mu}}{\underbrace{(\alpha.\alpha\ldots\alpha)}_{\mu}} = \alpha^{\nu-\mu}.$$

Συνεπῶς :

$$\boxed{\text{Ὅταν } \nu > \mu, \text{ τότε } \alpha^{\nu} : \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu-\mu}.}$$

Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$$(-2)^5 : (-2)^2 = (-2)^3, \quad \left(\frac{4}{5}\right)^4 : \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

Στίς διαιρέσεις

$$4^3 : 4^3 \quad \text{καί} \quad 4^3 : 4^5$$

δέν μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τόν προηγούμενο κανόνα, γιατί ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρετέου δέν εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν ἐκθέτη τοῦ διαιρέτη. Ἄν ὅμως κάνουμε τίς διαιρέσεις βρίσκουμε:

$$4^3 : 4^3 = \frac{4\cdot4\cdot4}{4\cdot4\cdot4} = 1,\ 4^3 : 4^5 = \frac{4\cdot4\cdot4}{4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4} = \frac{1}{4\cdot4} = \frac{1}{4^2}.$$

Ἄν τώρα κάναμε χρήση τοῦ προηγούμενου κανόνα, θά βρίσκαμε

$$4^3 : 4^3 = 4^{3-3} = 4^0 \text{ καί } 4^3 : 4^5 = 4^{3-5} = 4^{-2}$$

Τά σύμβολα 4^0 καί 4^{-2}, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό πού δώσαμε, δέν εἶναι δυνάμεις, γιατί δέν ἔχουν ἀκέραιο θετικό ἐκθέτη. Συμφωνοῦμε ὅμως νά γράφουμε:

$$4^0 = 1 \quad \text{καί} \quad 4^{-2} = \frac{1}{4^2}$$

Γενικά συμφωνοῦμε ὅτι γιά κάθε ρητό $\alpha \neq 0$ θά γράφουμε:

$$\boxed{\alpha^{0} = 1 \quad \text{καί} \quad \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}} \,. \; (\nu \in N).}$$

Ὕστερα ἀπό τή συμφωνία αὐτή ἔχουμε πάντοτε

$$\boxed{\alpha^{\nu} : \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu-\mu}}$$

δηλ. **τό πηλίκο δυό δυνάμεων τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ εἶναι ἴσο μέ δύναμη πού ἔχει τήν ἴδια βάση καί ἐκθέτη τή διαφορά τῶν ἐκθετῶν.**

Ἔτσι π.χ. ἔχουμε:

$$(-2)^3 : (-2)^5 = (-2)^{3-5} = (-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{2^2}$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^5 : \left(-\frac{3}{4}\right)^5 = \left(-\frac{3}{4}\right)^{5-5} = \left(-\frac{3}{4}\right)^0 = 1$$

$$\left[(-3) \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)\right]^0 = 1$$

Ἐκθετική μορφή πολύ μικρῶν καί πολύ μεγάλων ἀριθμῶν

1.17. Στίς θετικές ἐπιστῆμες, ὅπως στήν Ἀστρονομία, τή Φυσική κλπ., χρησιμοποιοῦμε μερικές φορές ἀριθμούς πολύ μεγάλους ἤ πολύ μικρούς, πού εἶναι δύσκολο νά γραφτοῦν καί νά διαβαστοῦν καί πολύ περισσότερο νά γίνουν πράξεις μ' αὐτούς. Τούς ἀριθμούς αὐτούς μποροῦμε νά τούς γράφουμε σύντομα μέ τή βοήθεια τῶν δυνάμεων τοῦ 10, οἱ ὁποῖες εὔκολα ὑπολογίζονται. Παρατηροῦμε ὅτι:

$10^1 = 10 \qquad 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$10^2 = 100 \qquad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0{,}01$

$10^3 = 1000 \qquad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001$

$10^4 = 10000 \qquad 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0{,}0001$

- -

$10^{\nu} = \underbrace{1000\ldots0}_{\nu \text{ μηδενικά}} \qquad 10^{-\nu} = \frac{1}{10^{\nu}} = \underbrace{0{,}0000\ldots1}_{\nu \text{ μηδενικά}}$

Συμφωνοῦμε λοιπόν τούς πολύ μεγάλους ἤ πολύ μικρούς ἀριθμούς νά τούς γράφουμε σάν γινόμενο ἑνός ρητοῦ α, πού περιέχεται μεταξύ τοῦ 1 καί τοῦ 10, καί μιᾶς δυνάμεως τοῦ 10, δηλαδή νά τούς γράφουμε στή μορφή

$$\alpha \cdot 10^{\nu}$$

Έτσι π.χ. έχουμε:

$$0{,}000000000000001 = 10^{-15}$$

$$0{,}000000000000007 = 7 \cdot 0{,}000000000000001 = 7 \cdot 10^{-15}$$

$$0{,}0000000128 = 1{,}28 \cdot 0{,}00000001 = 1{,}28 \cdot 10^{-8}$$

Ἡ ἀπόσταση τῆς γῆς ἀπό τόν ἥλιο, πού εἶναι 150000000 km, γράφεται

$$150000000 = 1{,}5 \cdot 100000000 = 1{,}5 \cdot 10^{8}$$

Ἡ ταχύτητα μέ τήν ὁποία κινεῖται τό φῶς εἶναι 30000000000 cm/sec καί γράφεται $30000000000 = 3 \cdot 10^{10}$.

Ἡ μάζα, πού ἔχει ἕνα ἠλεκτρόνιο, εἶναι $9{,}109 \cdot 10^{-28}$ gr. Γιά νά γραφεῖ ὁ ἀριθμός αὐτός σέ δεκαδική μορφή, πρέπει νά μετακινήσουμε τήν ὑποδιαστολή του 28 θέσεις ἀριστερά, καί τότε γίνεται

$$0{,}0000000000000000000000000009109$$

Ὁ ὄγκος, πού ἔχει ὁ πυρήνας ἑνός ἀτόμου, εἶναι περίπου 10^{-36} cm^3. Ὁ ἀριθμός αὐτός στή δεκαδική του μορφή θά γράφεται μέ ἀκέραιο μέρος μηδέν καί μετά τήν ὑποδιαστολή θά ἀκολουθοῦν 35 μηδενικά καί τό 1.

Μέ τή μορφή αὐτή γίνονται καί σχετικά εὔκολα πράξεις μέ τέτοιους ἀριθμούς. Ἄς ὑπολογίσουμε π.χ. τό γινόμενο

$$\begin{aligned} 140 \cdot 32000000000 \cdot 0{,}0000000000006 &= \\ &= (1{,}4 \cdot 10^2) \cdot (3{,}2 \cdot 10^{10}) \cdot (6 \cdot 10^{-13}) = \\ &= (1{,}4 \cdot 3{,}2 \cdot 6) \cdot 10^2 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-13} \\ &= 26{,}88 \cdot 10^{-1} = 2{,}688. \end{aligned}$$

Σημείωση. Αὐτή ἡ μορφή χρησιμοποιεῖται στούς ἠλεκτρονικούς ὑπολογιστές καί σέ μερικά μικρά *«κομπιουτεράκια»*.

Ἔτσι, ὅταν γράφεται στόν πίνακα τοῦ ὑπολογιστῆ ἕνας δεκαδικός ἀριθμός καί στά δυό τελευταῖα τετραγωνάκια του ἕνας ἀκέραιος θετικός ἤ ἀρνητικός π.χ.

$$2{,}35120 \quad \boxed{+}\boxed{1}\boxed{2}$$

αὐτό σημαίνει ὅτι ὁ ἀριθμός, πού παρουσιάζεται στόν ὑπολογιστή, εἶναι ὁ $2{,}35120 \cdot 10^{12} = 2351200000000$.

1.18. Γιά νά βροῦμε τήν τιμή μιᾶς ἀριθμητικῆς παραστάσεως, πού περιέχει καί δυνάμεις, **κάνουμε πρῶτα τίς πράξεις, πού εἶναι σημειωμένες μέσα σέ παρενθέσεις (ἄν ὑπάρχουν), κατόπιν ὑπολογίζουμε τίς δυνάμεις καί τέλος ἐκτελοῦμε τίς ἄλλες πράξεις, πού εἶναι σημειωμένες καί μέ τή σειρά πού εἴδαμε στήν 1.12.** Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$$\left(-\frac{3}{5}+1\right)\cdot(-2)^2+\left(4\cdot\frac{1}{5}\right)^2:\left(-\frac{2}{3}\right)-\frac{7}{10}=$$

$$= \left(+\frac{2}{5}\right)\cdot(-2)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 : \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{7}{10} =$$

$$= \left(+\frac{2}{5}\right)\cdot 4 + \frac{16}{25} : \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{7}{10} =$$

$$= \left(+\frac{2}{5}\right)\cdot 4 + \frac{16}{25}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{7}{10} = +\frac{8}{5} - \frac{48}{50} - \frac{7}{10} =$$

$$= \frac{80-48-35}{50} = -\frac{3}{50}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

41. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ δυνάμεις:

α) $(-1)^3$, 1^5, $(-2)^3$, $(-2)^4$, -2^4

β) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $-\left(\frac{3}{4}\right)^2$, $\left(-\frac{3}{4}\right)^4$, $-(-5)^2$

γ) 2^{-2}, $(-2)^{-2}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$, 5^{-2}

42. Νά ἐκτελεστοῦν οἱ πράξεις:

α) $(-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3$ β) $(-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4$

γ) $(-3)^2 - 3^2 + (-3)^3 - 3^3$ δ) $2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

ε) $(-8) : \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - (-8)\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ στ) $\frac{(-3)^2}{-9} + \frac{5^2}{3} - \left(4 - \frac{1}{3}\right)^2$

43. Νά γίνουν μία δύναμη μέ βάση ρητό οἱ παραστάσεις:

α) $2^5 \cdot 2^3 : 2^4$ β) $[(-2)^2]^3 \cdot (-2)^4 : [(-2)^3]^2$

γ) $(2^2)^3 + 2^7 : 2 + (2^3)^2 + 2^2 \cdot 2^4$ δ) $[(-2)^2 \cdot (-5)^2]^3 : 100$

44. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ δυνάμεις:

α) $(-1)^{-1}$, $(-2)^{-2}$, -2^{-2}, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$

β) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-4}$, $-\frac{3}{4}^{-4}$, $-\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$, $-\frac{3}{4^{-4}}$

45. Νά ἐκτελέσετε τίς πράξεις:

α) $(-1)^2 + (-1)^1 + (-1)^0 + (-1)^{-1} + (-1)^{-2}$

β) $2\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} - 2\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

46. Νά γράψετε μέ μορφή δυνάμεως τούς ἀριθμούς:

0,1, $-0{,}1$, 10000, 0,00001, $-0{,}001$

47. Νά γράψετε μέ σύντομο τρόπο τούς ἀριθμούς:

0,00001, 0,00000007, $\frac{1}{0{,}000000015}$, $\frac{1}{0{,}000006}$

48. Συμπληρῶστε τούς παρακάτω πίνακες,

x	$2x$	x^2	$x+2$	2^x
-3				
4				

x	y	x^2+y^2	$(x+y)^2$	(x^3+y^3)	$(x+y)^3$
-2	1				
-3	$\frac{1}{2}$				
$-\frac{1}{2}$	-1				

49. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τῶν παρακάτω παραστάσεων:

α) $\dfrac{(-1)^2-(-1)^3-(-1)^5}{-2-(-2)^2-(-2)^3} \cdot \dfrac{(-2)^4-2^3}{(-3)^3+(-3)^2}$

β) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2+(-1)^4} : \dfrac{\left(\frac{1}{-2}-\frac{-1}{4}\right)^5}{\left(1+\frac{2}{-3}\right)^3}$

50. Νά ὑπολογίσετε τήν τιμή τῶν παραστάσεων:

α) x^3-3x^2+3x-1 ἄν $x=-3$

β) $2\alpha^2-3\beta^2-\gamma$ ἄν $\alpha=-2 \quad \beta=5 \quad \gamma=-3$

γ) $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2-\dfrac{\alpha}{\gamma}+\dfrac{\alpha\beta}{2}$ ἄν $\alpha=2^{-2} \quad \beta=\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \quad \gamma=-2$

δ) $3 \cdot \left(\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{3}{\alpha\beta}\right)^2-\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{2}$ ἄν $\alpha=-3 \quad \beta=2$

ε) $\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2}}-\left(y \cdot \dfrac{1}{x}\right)^2$ ἄν $x=-2 \quad y=3$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

Τά βασικά σύνολα ἀριθμῶν, πού μάθαμε ὡς τώρα, εἶναι:

- Τό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν

$$\mathbf{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$$

- Τό σύνολο Z τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν

$$\mathbf{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$$

- Τό σύνολο Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν

$$\mathbf{Q} = \left\{x \mid x=\frac{\alpha}{\beta},\quad \alpha \in \mathbf{Z},\quad \beta \in \mathbf{Z}^*\right\}$$

Γιά τά σύνολα αὐτά ἔχουμε $N \subset Z \subset Q$ καί ὅταν δέν παίρνουμε τό στοιχεῖο τους 0, τά σημειώνουμε ἀντίστοιχα N^*, Z^*, Q^*.

Στό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ὁρίσαμε τίς δυό βασικές πράξεις πρόσθεση καί πολλαπλασιασμό. Ἄν τά γράμματα α,β,γ παριστάνουν ρητούς ἀριθμούς, ἔχουμε τίς ἑξῆς ἰδιότητες:

α) **Γιά τήν πρόσθεση:**

- Τό ἄθροισμα $\alpha+\beta$ εἶναι πάντοτε ρητός ἀριθμός.
- Ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετική ἰδιότητα $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
- Ἰσχύει ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$
- Γιά κάθε ρητό ἀριθμό α ἔχουμε $\alpha+0=\alpha$.
- Γιά κάθε ρητό ἀριθμό α ὑπάρχει ὁ ἀντίθετός του $-\alpha$ τέτοιος, ὥστε $\alpha+(-\alpha)=0$
- Ἡ διαφορά $\alpha-\beta$ δυό ρητῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$$

β) **Γιά τόν πολλαπλασιασμό:**

- Τό γινόμενο $\alpha\,.\,\beta$ εἶναι πάντοτε ρητός ἀριθμός.
- Ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετική ἰδιότητα $\alpha\,.\,\beta=\beta\,.\,\alpha$
- Ἰσχύει ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα $\alpha\,.\,(\beta\,.\,\gamma)=(\alpha\,.\,\beta)\,.\,\gamma$
- Ἰσχύει ἡ ἐπιμεριστική ἰδιότητα $\alpha\,.\,(\beta+\gamma)=\alpha\,.\,\beta+\alpha\,.\,\gamma$
- Γιά κάθε ρητό ἀριθμό α ἔχουμε $\alpha\,.\,1=\alpha$ καί $\alpha\,.\,0=0$
- Γιά κάθε ρητό ἀριθμό α ($\alpha\neq0$) ὑπάρχει ὁ ἀντίστροφός του $\frac{1}{\alpha}$ τέτοιος, ὥστε $\alpha\,.\,\frac{1}{\alpha}=1$
- Τό πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$ ($\beta\neq0$) δυό ρητῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\,.\,\frac{1}{\beta}$$

Στό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ὁρίσαμε διάταξη. Εἶναι

$$\alpha>\beta, \text{ ὅταν } \alpha-\beta>0$$
$$\alpha<\beta, \text{ ὅταν } \alpha-\beta<0$$

Ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες:

$$\text{ἄν } \alpha>\beta, \text{ τότε } \alpha+\gamma>\beta+\gamma$$
$$\text{ἄν } \alpha>\beta \text{ καί } \gamma>0, \text{ τότε } \alpha.\gamma>\beta.\gamma$$
$$\text{ἄν } \alpha>\beta \text{ καί } \gamma<0, \text{ τότε } \alpha.\gamma<\beta.\gamma$$

Ἡ δύναμη ρητοῦ ἀριθμοῦ ὁρίζεται ἀπό τίς ἰσότητες:

$$\alpha^\nu=\underbrace{\alpha.\alpha\ldots\alpha,}_{\nu \text{ παράγ.}}\qquad \alpha^1=\alpha,\qquad \alpha^0=1\qquad(\alpha\neq0)$$

Ἄν τά γράμματα ν,μ παριστάνουν φυσικούς ἀριθμούς, ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες:

$$\alpha^\nu.\alpha^\mu=\alpha^{\nu+\mu}\qquad (\alpha.\beta)^\nu=\alpha^\nu.\beta^\nu$$

$$\alpha^\nu:\alpha^\mu=\alpha^{\nu-\mu},\ \alpha\neq0\qquad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu=\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu},\ \beta\neq0$$

$$(\alpha^\nu)^\mu=\alpha^{\nu\mu}\qquad \alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^\nu},\ \alpha\neq0$$

Εἰδικότερα ἔχουμε: $0^\nu=0(\nu\in N^*)$, $1^\nu=1$, $10^\nu=\underbrace{1000\ldots0}_{\nu \text{ μηδενικά}}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ·

51. Νά ἐκτελεστοῦν οἱ πράξεις:

α) $4-[3-(8-5)]+(15-17)+\{-5-[6-(-2-7)]\}$

β) $-\{-2+[(8-3)-1]-7\}-[(-13+9)-12]-12$

γ) $\left(-1+\frac{1}{2}+\frac{7}{9}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right):\left(\frac{3}{5}-1\right)$

δ) $-5-\{-2+3[-2-(12-3)(-5)]-7\}-2[(-8+1)-3]$

52. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τῶν παραστάσεων:

α) $(-1)^{2\nu}+(-1)^{2\nu+1}\quad (\nu\in N^*)$

β) $(-1)^{\nu}+(-1)^{\nu+1}+(-1)^{\nu+2}+(-1)^{\nu+3}\quad (\nu\in N^*)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

53. Ἄν $\alpha=-2$ καί $\beta=3$, νά ἐπαληθεύσετε τίς ἰσότητες:

α) $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ β) $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

γ) $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$ δ) $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

54. Νά ἐπαληθεύσετε τίς ἰσότητες:

α) $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\alpha\beta$, ὅταν $\alpha=2^{-2}$, $\beta=3^{-1}$

β) $(\alpha+\beta)^3=\alpha(\alpha-3\beta)^2+\beta(\beta-3\alpha)^2$, ὅταν $\alpha=-2$, $\beta=3$

γ) $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$,

ὅταν $\alpha=-1$, $\beta=2$, $x=-2$, $y=-3$

δ) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=$
$=(\beta z-\gamma y)^2+(\gamma x-\alpha z)^2+(\alpha y-\beta x)^2$,
ὅταν $\alpha=\beta=\gamma=+2$ καί $x=y=z=-3$

55. Νά βρεθεῖ ἡ ἀριθμητική τιμή τῶν παραστάσεων:

α) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\frac{xy}{x-y}$, ἄν $x=2^{-1}$, $y=-3$

β) $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{xy}\right):(x^3-y^3)$, ἄν $x=-2$, $y=-3$

γ) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\frac{1}{x}\left(3+\frac{1}{x^2}\right)$, ἄν $x=-\frac{1}{2}$

δ) $\frac{3\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}{\alpha-\beta}-\frac{\alpha^2-2\beta^2}{\gamma-1}$, ἄν $\alpha=-2$, $\beta=3$, $\gamma=4$

ε) $(x^2+1)^{xy}-2(y-4)^{x-3}-3(2y-1)^{y-5}$, ἄν $x=-1$, $y=2$

56. Ἄν x εἶναι ρητός ἀριθμός ($x\neq 0$), νά ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα:

α) $\frac{x^3\cdot x^{-2}}{x^{-4}}$ β) $\frac{x^2\cdot x^3}{x^5\cdot x^4}$ γ) $\frac{x^{-2}\cdot x^3\cdot x^{-4}}{x^{10}\cdot x^{-2}\cdot x^6}$ δ) $\frac{x^3+x}{x^2+1}$

57. Νά γίνουν μία δύναμη μέ βάση ρητό ἀριθμό οἱ παραστάσεις:

α) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{8}{27}\right)\right]^3:\left[(-4)\cdot\left(\frac{4}{27}\right)^2\right]$ β) $-2^6\cdot(-25)^3\cdot 2^{-3}\cdot\frac{1}{125}$

58. Νά ἐπαληθεύσετε μέ ἀριθμητικά παραδείγματα τίς ἀνισώσεις:

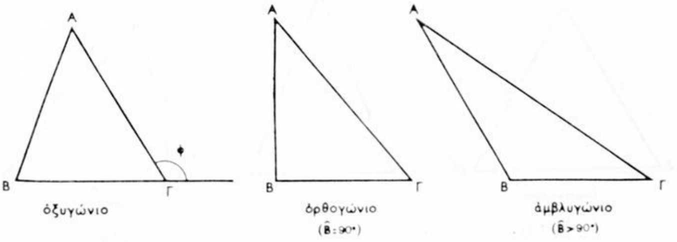
α) $\alpha^2+\beta^2>2\alpha\beta$ β) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Ἐπανάληψη βασικῶν ἐννοιῶν

2.1. Στήν Α′ τάξη μάθαμε ὅτι ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, τό ὁποῖο ἐξετάζεται ὡς πρός τίς γωνίες του, λέγεται **ὀξυγώνιο**, ὅταν οἱ τρεῖς γωνίες του εἶναι ὀξεῖες, **ὀρθογώνιο** ὅταν μιά γωνία του εἶναι ὀρθή, **ἀμβλυγώνιο** ὅταν μιά γωνία του εἶναι ἀμβλεία.



(σχ. 1) (σχ. 2) (σχ. 3)

Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ σέ ὁποιοδήποτε τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι

$$\boxed{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180^0}$$

Ἀπό τήν ἰσότητα αὐτή συμπεραίνουμε ὅτι:

- **Ἕνα τρίγωνο ἔχει μιά τό πολύ γωνία του ὀρθή ἤ ἀμβλεία.**
- **Κάθε ἐξωτερική γωνία τριγώνου εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι γωνιῶν του, π.χ.** (βλ. σχ. 1)

$$\boxed{\widehat{\varphi}=\widehat{A}+\widehat{B}}$$

- **Ἄν δυό τρίγωνα ἔχουν δυό γωνίες τους μία πρός μία ἴσες, τότε ἔχουν καί τίς τρίτες γωνίες τους ἴσες.**

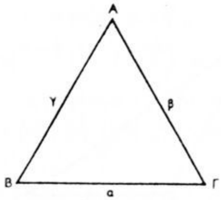
Σέ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ἡ πλευρά, πού βρίσκεται ἀπέναντι ἀπό τήν ὀρθή γωνία του, λέγεται **ὑποτείνουσα,** ἐνῶ οἱ δύο ἄλλες πλευρές του λέγονται **κάθετες πλευρές.** Στά ὀρθογώνια τρίγωνα ἰσχύουν οἱ προτάσεις:

- **Τό ἄθροισμα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν εἶναι 90°.**
- **Δυό ὀρθογώνια τρίγωνα, στά ὁποῖα ἡ μιά ὀξεία γωνία τοῦ ἑνός εἶναι ἴση μέ μιά ὀξεία γωνία τοῦ ἄλλου, ἔχουν καί τίς ἄλλες ὀξεῖες γωνίες τους ἴσες.**
- **Κάθε κάθετη πλευρά εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ὑποτείνουσα.**

2.2. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ σημειώνουμε μέ α,β,γ τά μήκη τῶν πλευρῶν του, πού βρίσκονται ἀπέναντι τῶν γωνιῶν $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ ἀντίστοιχα, δηλαδή

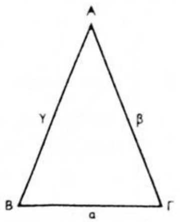
$$\alpha = (B\Gamma), \qquad \beta = (A\Gamma), \qquad \gamma = (AB)$$

Ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, τό ὁποῖο ἐξετάζεται ὡς πρός τίς πλευρές του, λέγεται **ἰσόπλευρο**, ὅταν ἔχει τίς τρεῖς πλευρές του ἴσες, **ἰσοσκελές** ὅταν ἔχει δυό πλευρές του ἴσες, **σκαληνό** ὅταν ἔχει ὅλες τίς πλευρές του ἄνισες.



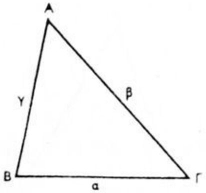
ἰσόπλευρο

(σχ. 4)



ἰσοσκελές

(σχ. 5)



σκαληνό

(σχ. 6)

Σέ ἰσοσκελές τρίγωνο μέ $\beta = \gamma$ ἡ πλευρά ΒΓ λέγεται **βάση** του καί τό σημεῖο Α **κορυφή** του. Τό ἰσόπλευρο τρίγωνο μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἰσοσκελές μέ βάση ὁποιαδήποτε πλευρά του. Γενικά ἔχουμε ὅτι:

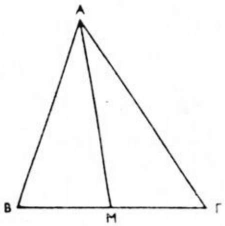
- Κάθε πλευρά τριγώνου εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, δηλαδή

$$\boxed{\alpha < \beta + \gamma, \qquad \beta < \alpha + \gamma, \qquad \gamma < \alpha + \beta}$$

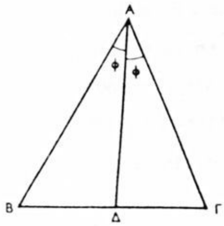
Ἄλλα στοιχεῖα τριγώνου

2.3. Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 7), τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΜ λέγεται **διάμεσος** τοῦ τριγώνου. Ἕνα τρίγωνο ἔχει τρεῖς διαμέσους καί κάθε μιά τους βρίσκεται *«μέσα»* στό τρίγωνο.

Ἄν φέρουμε τή διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{A}$ (σχ. 8) καί ὀνομάσουμε Δ τό σημεῖο, στό ὁποῖο τέμνει τήν πλευρά ΒΓ, τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΔ λέγεται **διχοτόμος** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἕνα τρίγωνο ἔχει τρεῖς διχοτόμους καί κάθε μιά τους βρίσκεται μέσα στό τρίγωνο.

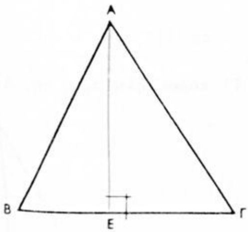


(σχ. 7)

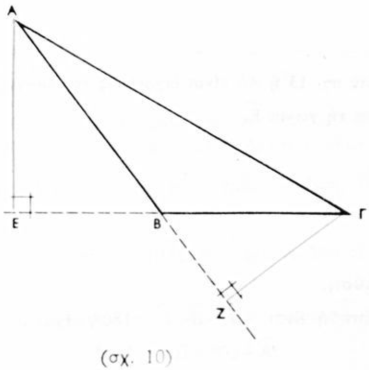


(σχ. 8)

Τέλος, ἄν φέρουμε ἀπό τήν κορυφή Α τό κάθετο τμῆμα ΑΕ (σχ. 9) πρός τήν πλευρά ΒΓ, τό ΑΕ λέγεται **ὕψος** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἕνα τρίγω-

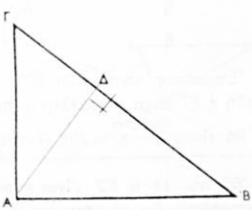


(σχ. 9)



(σχ. 10)

νο ἔχει τρία ὕψη. Σέ ὀξυγώνιο τρίγωνο τό κάθε ὕψος βρίσκεται *«μέσα»* στό τρίγωνο (σχ. 9.) Ὅταν τό τρίγωνο εἶναι ἀμβλυγώνιο στό Β, τά δύο ὕψη ΑΕ καί ΓΖ (σχ. 10) βρίσκονται «ἔξω» ἀπό τό τρίγωνο, ἐνῶ, ὅταν τό τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο στό Α, οἱ δύο κάθετες πλευρές του ΒΑ καί ΓΑ (σχ. 11) εἶναι καί ὕψη τοῦ τριγώνου. Τό τρίτο ὕψος του εἶναι τό ΑΔ.



(σχ. 11)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Στό σχ. 12 οἱ εὐθεῖες ΑΒ, ΔΕ εἶναι παράλληλες. Βρεῖτε τίς γωνίες x καί ψ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.**

Λύση.

Ἀπό τίς παράλληλες εὐθεῖες ΑΒ καί ΔΕ ἔχουμε $\widehat{y}=(\mathrm{B}\widehat{\Theta}\mathrm{E})=55^{o}$ (γιατί εἶναι ἐντός ἐναλλάξ).

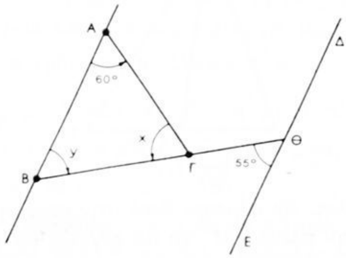
Στό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι

$$\widehat{A}+\widehat{y}+\widehat{x}=180^{0}$$

ἤ $60^{0}+55^{0}+\widehat{x}=180^{0}$

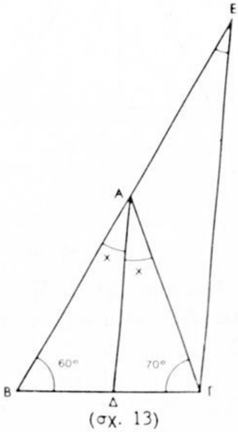
ἤ $115^{0}+\widehat{x}=180^{0}$

ἤ $\widehat{x}=180^{0}-115^{0}=65^{0}$.



(σχ. 12)

2. **Στό σχ. 13 ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$ καί ἡ ΓΕ παράλληλη πρός τήν ΑΔ. Βρεῖτε τή γωνία $\widehat{E}$.**



Λύση.

Ἐπειδή εἶναι $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180^{0}$, ἔχουμε

$$\widehat{A}+60^{0}+70^{0}=180^{0}$$

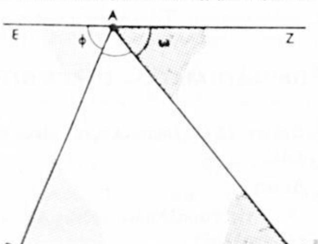
ἤ $\widehat{A}=180^{0}-130^{0}$

ἤ $\widehat{A}=50^{0}$

Ἑπομένως εἶναι $\widehat{x}=50^{0}:2=25^{0}$. Ἐπειδή ἡ ΕΓ εἶναι παράλληλη πρός τήν ΑΔ, θά εἶναι $\widehat{E}=\widehat{x}=25^{0}$ (ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά).

(σχ. 13)

3. **Στό σχ. 14 ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλη πρός τήν ΒΓ. Μέ τή βοήθεια τοῦ σχήματος αὐτοῦ διαπιστῶστε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου εἶναι ἴσο μέ 180^{0}.**



Λύση. Οἱ γωνίες $\widehat{\varphi}$, $\widehat{A}$ καί $\widehat{\omega}$ εἶναι διαδοχικές καί ἔχουν ἄθροισμα 180^{0}, δηλ.

$$\widehat{\omega}+\widehat{A}+\widehat{\varphi}=180^{0}$$

Ἐπειδή ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλη πρός τή ΒΓ, θά εἶναι

$$\widehat{\varphi}=\widehat{B} \quad \text{καί} \quad \widehat{\omega}=\widehat{\Gamma} \quad \text{(ἐντός ἐναλλάξ),}$$

ὥστε: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180^{0}$

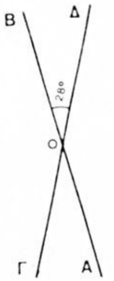
(σχ. 14)

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

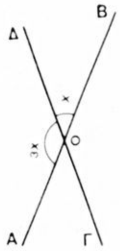
1. Νά χωρίσετε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα σέ 4 ἴσα μέρη μέ τό χάρακα καί τό διαβήτη.

2. Νά πάρετε μιά γωνία $\widehat{\varphi}$ καί μέ κορυφή ἕνα ἄλλο σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου νά κατασκευάσετε μιά ἄλλη γωνία ἴση μέ τή $\widehat{\varphi}$ καί νά τή διχοτομήσετε.

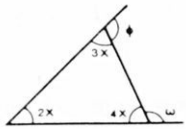
3. Στό σχ. 15 οἱ ΑΒ καί ΓΔ εἶναι εὐθεῖες γραμμές. Νά βρεθοῦν οἱ ἄλλες γωνίες.



(σχ. 15)



(σχ. 16)



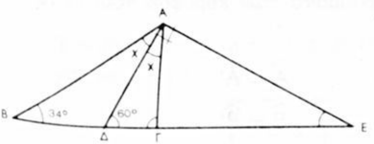
(σχ. 17)

4. Ἀπό ἕνα σημεῖο Ο τοῦ ἐπιπέδου νά φέρετε τρεῖς ἡμιευθεῖες Οx, Οψ, Οz, ὥστε οἱ τρεῖς διαδοχικές γωνίες πού σχηματίζονται νά εἶναι ἴσες, καί νά βρεῖτε τό μέτρο τους.

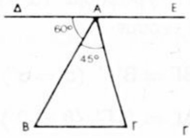
5. Νά σχεδιάσετε ἕνα ἀμβλυγώνιο τρίγωνο καί νά φέρετε τά τρία του ὕψη. Τί παρατηρεῖτε;

6. Στό σχ. 16 ἡ γωνία $\widehat{ΑΟΔ}$ εἶναι τριπλάσια ἀπό τή $\widehat{ΒΟΔ}$. Νά βρεθοῦν ὅλες οἱ γωνίες τοῦ σχήματος.

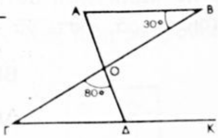
7. Στό σχ. 17 νά βρεθοῦν οἱ γωνίες τοῦ τριγώνου καί οἱ ἐξωτερικές γωνίες $\widehat{\omega}$ καί $\widehat{\varphi}$.



(σχ. 18)



(σχ. 19)



(σχ. 20)

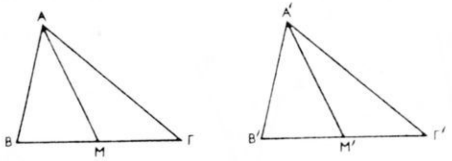
8. Στό σχ. 18 ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος καί $(\widehat{ΔΑΕ}) = 90°$. Νά βρεθοῦν οἱ γωνίες $\widehat{ΑΕΓ}$, $\widehat{ΒΑΔ}$, $\widehat{ΔΓΑ}$.

9. Στό σχ. 19 ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλη πρός τή ΒΓ. Νά βρεθοῦν οἱ γωνίες $\widehat{Β}$ καί $\widehat{Γ}$.

10. Στό σχ. 20 ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλη πρός τή ΓΔ. Νά βρεθεῖ ἡ γωνία $\widehat{ΟΔΚ}$.

Ἴσα τρίγωνα

2.4. Στήν Α' τάξη μάθαμε ὅτι δυό τρίγωνα (ἤ γενικά δυό σχήματα) λέγονται ἴσα, ὅταν τό ἕνα μπορεῖ (μέ κατάλληλη μετατόπιση) νά ἐφαρμόσει πάνω στό ἄλλο. Τότε κάθε πλευρά καί κάθε γωνία τοῦ ἑνός τριγώνου θά συμπέσει μέ μιά πλευρά καί μέ μιά γωνία τοῦ ἄλλου τριγώνου.



(σχ. 21)

Μποροῦμε λοιπόν νά λέμε ὅτι:

- Δυό ἴσα τρίγωνα ἔχουν μία πρός μία ἴσες ὅλες τίς πλευρές καί ὅλες τίς γωνίες τους.
- Σέ δύο ἴσα τρίγωνα ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν βρίσκονται ἴσες γωνίες καί ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν βρίσκονται ἴσες πλευρές.

Ἄν ἔχουμε δυό ἴσα τρίγωνα καί ἐφαρμόσουμε τό ἕνα πάνω στό ἄλλο, τότε συμπίπτουν καί ὅλα τά ἄλλα ἀντίστοιχα στοιχεῖα τους, ὅπως π.χ. οἱ διάμεσοι ΑΜ καὶ Α'Μ' (σχ. 21). Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

Δυό ἴσα τρίγωνα ἔχουν ὅλα τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα τους ἴσα.

Γιά νά δηλώσουμε ὅτι δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α'Β'Γ' εἶναι ἴσα, θά γράφουμε

$$\text{τριγ } ΑΒΓ = \text{τριγ } Α'Β'Γ' \qquad \text{εἴτε} \qquad Α\overset{\Delta}{Β}Γ = Α'\overset{\Delta}{Β'}Γ'$$

Στήν περίπτωση αὐτή γράφουμε τά γράμματα τῶν κορυφῶν τους μέ τέτοια σειρά, ὥστε νά ἔχουμε

$$ΒΓ = Β'Γ' \ (\alpha = \alpha'), \qquad \widehat{Α} = \widehat{Α'}$$

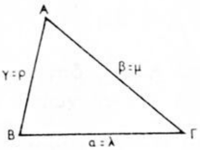
$$ΑΓ = Α'Γ' \ (\beta = \beta'), \qquad \widehat{Β} = \widehat{Β'}$$

$$ΑΒ = Α'Β' \ (\gamma = \gamma'), \qquad \widehat{Γ} = \widehat{Γ'}.$$

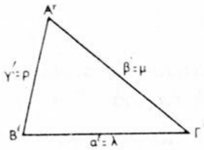
Γιά νά ἐλέγξουμε τήν ἰσότητα δυό τριγώνων, δέν εἶναι εὔκολο νά μεταφέρουμε κάθε φορά τό ἕνα πάνω στό ἄλλο, γιά νά δοῦμε ἄν ἐφαρμόζουν. Γι' αὐτό ἀκριβῶς θά προσπαθήσουμε νά βροῦμε προτάσεις, πού θά μᾶς ἐξασφαλίζουν τήν ἰσότητα δυό τριγώνων ἀπό τήν ἰσότητα ὁρισμένων μόνο στοιχείων τους. Οἱ προτάσεις αὐτές θά εἶναι τά **κριτήρια ἰσότητας** τῶν τριγώνων.

Πρῶτο κριτήριο ἰσότητας δυό τριγώνων

2.5. Ἂς πάρουμε τρία ὁρισμένα εὐθύγραμμα τμήματα μέ μήκη λ,μ,ρ, π.χ. $\lambda=6$ cm, $\mu=5$ cm, $\rho=4$ cm, καί ἄς κατασκευάσουμε ἕνα τρίγωνο μέ πλευρές ἴσες μ' αὐτά.



(σχ. 22)



(σχ. 23)

Παίρνουμε ἕνα τμῆμα (ΒΓ)=λ= 6 cm καί γράφουμε τούς κύκλους (Γ, μ = 5) καί (Β, ρ=4), πού τέμνονται στό σημεῖο Α. Ἂν φέρουμε τά τμήματα ΑΒ καί ΑΓ, τότε κατασκευάζεται τό τρίγωνο ΑΒΓ (βλ. σχ. 22), πού ἔχει πλευρές

$$\alpha=\lambda \qquad \beta=\mu \qquad \gamma=\rho\,.$$

Ἂν πάρουμε ἕνα ἄλλο εὐθύγραμμο τμῆμα (Β'Γ')=λ=6 cm καί κάνουμε τήν ἴδια δουλειά (βλ. σχ. 23), κατασκευάζεται ἕνα ἄλλο τρίγωνο Α'Β'Γ', πού ἔχει πλευρές

$$\alpha'=\lambda \qquad \beta'=\mu \qquad \gamma'=\rho\,.$$

Ἂς ἀποτυπώσουμε τώρα τό ΑΒΓ σ' ἕνα διαφανές χαρτί καί ἄς τοποθετήσουμε τό διαφανές χαρτί πάνω στό Α'Β'Γ' κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε ἡ ΑΒ νά ἐφαρμόσει πάνω στήν Α'Β' καί οἱ δυό κορυφές Γ καί Γ' νά βρεθοῦν στό ἴδιο ἡμιεπίπεδο μέ ἀκμή τήν Α'Β'. Βλέπουμε τότε ὅτι ἡ κορυφή Γ θά πέσει πάνω στή Γ' καί ὅτι τό τρίγωνο ΑΒΓ θά ἐφαρμόσει στό Α'Β'Γ'. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι:

> Δυό τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν οἱ πλευρές τοῦ ἑνός εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ τίς πλευρές τοῦ ἄλλου.

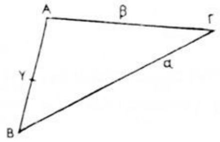
Ἐπειδή τά τρίγωνα αὐτά θά ἔχουν καί τίς γωνίες τους ἴσες, μποροῦμε νά γράφουμε ὅτι:

Ἂν εἶναι $\boxed{\begin{array}{c}\alpha=\alpha'\\ \beta=\beta'\\ \gamma=\gamma'\end{array}}$, τότε θά εἶναι καί $\boxed{\begin{array}{c}\widehat{A}=\widehat{A}'\\ \widehat{B}=\widehat{B}'\\ \widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}'\end{array}}$

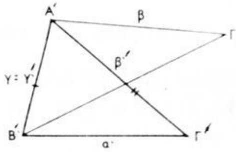
2.6. Ἂς θεωρήσουμε δυό τρίγωνα ΑΒΓ καί Α'Β'Γ', πού ἔχουν

$$\alpha>\alpha', \qquad \beta=\beta', \qquad \gamma=\gamma'$$

Εἶναι φανερό ὅτι **τά τρίγωνα αὐτά δέν εἶναι ἴσα** (γιατί, ἄν ἦταν ἴσα, θά εἶχαν τότε καί $\alpha=\alpha'$). Ἂν ἀποτυπώσουμε τό ΑΒΓ σ' ἕνα διαφανές χαρ-



(σχ. 24)



(σχ. 25)

τί καί τοποθετήσουμε τό διαφανές στό Α'Β'Γ', ὅπως καί προηγούμενα, βλέπουμε ὅτι ἡ πλευρά ΑΓ θά πέσει ἔξω ἀπό τή γωνία Α' καί ἑπομένως ἡ γωνία $\widehat{A}$ θά εἶναι πιό μεγάλη ἀπό τήν $\widehat{A'}$. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι:

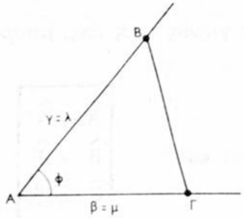
> Ὅταν δυό τρίγωνα ἔχουν μόνο δυό πλευρές τους μία πρός μία ἴσες, τότε ἀπέναντι ἀπό τίς ἄνισες τρίτες πλευρές τους βρίσκονται ὅμοια ἄνισες γωνίες.

Ἡ πρόταση αὐτή διατυπώνεται καί ὡς ἑξῆς:

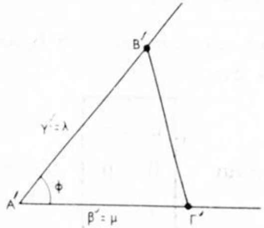
Ἄν εἶναι $\boxed{\begin{array}{l} \alpha > \alpha' \\ \beta = \beta' \\ \gamma = \gamma' \end{array}}$ τότε θά εἶναι $\boxed{\widehat{A} > \widehat{A'}}$

Δεύτερο κριτήριο ἰσότητας δυό τριγώνων

2.7. Ἄς πάρουμε δυό ὁρισμένα εὐθύγραμμα τμήματα μέ μήκη λ καί μ καί μιά ὁρισμένη γωνία φ, π.χ. $\lambda = 6$ cm, $\mu = 5$ cm καί $\varphi = 50^0$ καί ἄς κατασκευάσουμε ἕνα τρίγωνο, πού οἱ δυό πλευρές του νά εἶναι ἴσες μέ λ καί μ καί ἡ γωνία πού σχηματίζουν, ἴση μέ τή $\widehat{\varphi}$.



(σχ. 26)



(σχ. 27)

Κατασκευάζουμε πρῶτα, ὅπως μάθαμε στήν Α' τάξη, μιά γωνία $\widehat{A} = \widehat{\varphi}$

καί μετά παίρνουμε μέ τό διαβήτη στίς πλευρές της τμήματα $(AB)=\lambda$ καί $(A\Gamma)=\mu$ (βλ. σχ. 26).

Ἄν ἑνώσουμε τά σημεῖα Β καί Γ, σχηματίζεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, πού ἔχει

$$\gamma=\lambda, \qquad \beta=\mu, \qquad \widehat{A}=\widehat{\varphi}$$

Ἄν κατασκευάσουμε τή γωνία $\widehat{\varphi}$ σέ μιά ἄλλη θέση καί κάνουμε τήν ἴδια δουλειά, σχηματίζεται ἕνα ἄλλο τρίγωνο Α'Β'Γ' (βλ. σχ. 27), πού ἔχει

$$\gamma'=\lambda, \qquad \beta'=\mu, \qquad \widehat{A}'=\widehat{\varphi}.$$

Ἄν ἀποτυπώσουμε τό ΑΒΓ πάνω σ' ἕνα διαφανές χαρτί καί τοποθετήσουμε τό διαφανές πάνω στό Α'Β'Γ' κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε ἡ $\widehat{A}$ νά ἐφαρμόσει πάνω στήν $\widehat{A}'$, βλέπουμε ὅτι τά σημεῖα Β καί Γ θά πέσουν πάνω στά Β' καί Γ' καί ἔτσι τό τρίγωνο ΑΒΓ θά ἐφαρμόσει στό Α'Β'Γ'. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι:

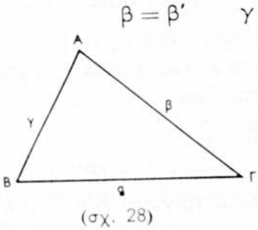
> Δυό τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν οἱ δυό πλευρές καί ἡ περιεχόμενη ἀπ' αὐτές γωνία τοῦ ἑνός εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ τίς δυό πλευρές καί τήν περιεχόμενη ἀπ' αὐτές γωνία τοῦ ἄλλου.

Ἐπειδή τά τρίγωνα αὐτά θά ἔχουν καί τά ἄλλα ἀντίστοιχα στοιχεῖα τους ἴσα, μποροῦμε νά γράφουμε ὅτι:

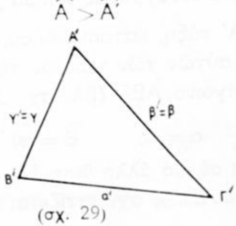
Ἄν εἶναι $\boxed{\begin{array}{l}\beta=\beta'\\ \gamma=\gamma'\\ \widehat{A}=\widehat{A}'\end{array}}$ **τότε θά εἶναι καί** $\boxed{\begin{array}{l}\widehat{B}=\widehat{B}'\\ \widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}'\\ \alpha=\alpha'\end{array}}$

2.8. Ἄς θεωρήσουμε τώρα δυό τρίγωνα, πού ἔχουν

$$\beta=\beta' \qquad \gamma=\gamma' \qquad \widehat{A}>\widehat{A}'$$



(σχ. 28)



(σχ. 29)

Εἶναι φανερό ὅτι **τά τρίγωνα αὐτά δέν εἶναι ἴσα,** (γιατί, ἄν ἦταν ἴσα, θά εἶχαν καί $\widehat{A}=\widehat{A}'$). Ἄς συγκρίνουμε τίς πλευρές τους α καί α'. Δέν μπορεῖ νά εἶναι $\alpha=\alpha'$, γιατί τότε θά ἦταν καί $\widehat{A}=\widehat{A}'$, οὔτε $\alpha<\alpha'$, γιατί τότε θά ἦταν $\widehat{A}<\widehat{A}'$. Ἑπομένως ἡ μόνη δυνατή περίπτωση εἶναι $\alpha>\alpha'$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

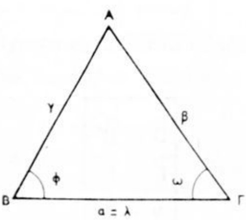
Όταν δυό τρίγωνα ἔχουν δυό πλευρές τους μία πρός μία ἴσες καί τίς περιεχόμενες γωνίες τους ἄνισες, ἀπέναντι τῶν ἄνισων αὐτῶν γωνιῶν βρίσκονται ὅμοια ἄνισες πλευρές.

Ἡ πρόταση αὐτή διατυπώνεται καί ὡς ἑξῆς:

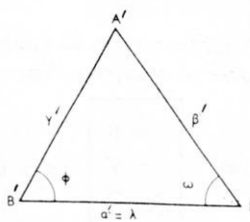
Ἄν εἶναι $\boxed{\begin{array}{c} \beta = \beta' \\ \gamma = \gamma' \\ \widehat{A} > \widehat{A}' \end{array}}$, **τότε θά εἶναι** $\boxed{\alpha > \alpha'}$

Τρίτο κριτήριο ἰσότητας δυό τριγώνων

2.9. **Ἄς πάρουμε ἕνα ὁρισμένο εὐθ.** τμῆμα μήκους λ καί δύο ὁρισμένες γωνίες φ καί ω, π.χ. $\lambda = 6$ cm, $\widehat{\varphi} = 58^0$, $\widehat{\omega} = 55^0$, καί ἄς κατασκευάσουμε ἕνα τρίγωνο πού ἡ μιά πλευρά του νά εἶναι ἴση μέ λ καί οἱ δυό γωνίες οἱ ὁποῖες ἔχουν τίς κορυφές τους πάνω στήν πλευρά αὐτή, νά εἶναι ἴσες μέ τίς $\widehat{\omega}$ καί $\widehat{\varphi}$.



σχ. 30



σχ. 31

Παίρνουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα (ΒΓ)=λ καί στά ἄκρα του, ὅπως μάθαμε στήν Α' τάξη, κατασκευάζουμε δυό γωνίες ἴσες μέ τίς $\widehat{\omega}$ καί $\widehat{\varphi}$. Οἱ ἄλλες πλευρές αὐτῶν τῶν γωνιῶν τέμνονται σέ ἕνα σημεῖο Α. Σχηματίζεται ἔτσι ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ (βλ. σχ. 30), πού ἔχει

$$\alpha = \lambda, \qquad \widehat{B} = \widehat{\varphi}, \qquad \widehat{\Gamma} = \widehat{\omega}$$

Ἄν πάρουμε σέ μιά ἄλλη θέση ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα (Β'Γ')=λ καί κάνουμε τήν ἴδια δουλειά, σχηματίζεται ἕνα ἄλλο τρίγωνο Α'Β'Γ' (βλ. σχ. 31), πού ἔχει

$$\alpha' = \lambda, \qquad \widehat{B}' = \widehat{\varphi}, \qquad \widehat{\Gamma}' = \widehat{\omega}.$$

Ἄν ἀποτυπώσουμε τό ΑΒΓ πάνω σ' ἕνα διαφανές χαρτί καί τοποθετήσουμε τό διαφανές κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε ἡ ΒΓ νά ἐφαρμόσει στή Β'Γ' καί οἱ κορυφές Α καί Α' νά βρεθοῦν στό ἴδιο ἡμιεπίπεδο μέ ἀκμή Β'Γ', βλέπουμε τότε ὅτι ἡ κορυφή Α θά πέσει πάνω στήν Α' καί ἔτσι τό τρίγωνο ΑΒΓ θά ἐφαρμόσει στό Α'Β'Γ'. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

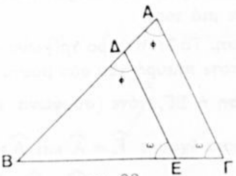
> Δυό τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἡ μιά πλευρά καί οἱ προσκείμενες σ' αὐτή γωνίες τοῦ ἑνός τριγώνου, εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ μιά πλευρά καί τίς προσκείμενες σ' αὐτή γωνίες τοῦ ἄλλου τριγώνου.

Ἐπειδή τά τρίγωνα αὐτά θά ἔχουν καί τά ἄλλα ἀντίστοιχα στοιχεῖα τους ἴσα, μποροῦμε νά γράφουμε:

Ἄν εἶναι $\boxed{\begin{array}{c} \alpha = \alpha' \\ \widehat{B} = \widehat{B}' \\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}' \end{array}}$, **τότε θά εἶναι καί** $\boxed{\begin{array}{c} \widehat{A} = \widehat{A}' \\ \beta = \beta' \\ \gamma = \gamma' \end{array}}$

Ἄν τά παραπάνω τρίγωνα ἔχουν $\alpha = \alpha'$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$, $\widehat{A} = \widehat{A}'$, πάλι θά εἶναι ἴσα, γιατί θά ἔχουν καί $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}'$ (ἀφοῦ δυό τρίγωνα, πού ἔχουν δυό γωνίες τους μία πρός μία ἴσες, ἔχουν καί τίς τρίτες γωνίες τους ἴσες). Βλέπουμε δηλαδή ὅτι δυό τρίγωνα, πού ἡ μιά πλευρά τοῦ ἑνός εἶναι ἴση μέ μιά πλευρά τοῦ ἄλλου, εἶναι ἴσα ὄχι μόνο ὅταν ἔχουν ἴσες μία πρός μία τίς προσκείμενες γωνίες, ἀλλά καί ὅταν ἔχουν ἴσες μία πρός μία δυό γωνίες τους **ὅμοια κείμενες** ὡς πρός τίς ἴσες πλευρές.

2.10 Παρατηροῦμε ὅτι σέ ὅλα τά κριτήρια ἰσότητας τριγώνων, πού ἀναφέραμε, **ἡ ἰσότητα δυό τριγώνων ἐξασφαλίζεται μέ τίς ἰσότητες τριῶν ἀντίστοιχων στοιχείων τους, ἀπό τίς ὁποῖες μιά τουλάχιστον εἶναι ἰσότητα πλευρῶν.** Δηλαδή δέν ὑπάρχει κριτήριο πού νά ἐξασφαλίζει τήν ἰσότητα δυό τριγώνων μόνο μέ γωνίες τους. Καί αὐτό γιατί μπορεῖ νά ὑπάρχουν τρίγωνα, πού ἔχουν ὅλες τίς γωνίες τους μία πρός μία ἴσες δίχως νά εἶναι ἴσα. Μιά τέτοια περίπτωση δείχνει τό σχ. 32, στό ὁποῖο ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλη πρός τήν ΑΓ.



σχ. 32

Τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΒΕ ἔχουν τίς γωνίες τους μία πρός μία ἴσες, ἐνῶ τό ἕνα εἶναι μέρος τοῦ ἄλλου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Σ' ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ἀπέναντι ἀπό τίς ἴσες πλευρές του βρίσκονται ἴσες γωνίες του.**

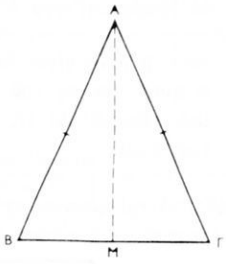
Λύση.

Ἂς εἶναι ΑΒΓ ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο μέ ΑΒ=ΑΓ καί ἂς φέρουμε τή διάμεσό του. Βλέπουμε ὅτι τά τρίγωνα ΑΒΜ καί ΑΜΓ ἔχουν

ΑΒ	=	ΑΓ	(Τό ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές)
ΒΜ	=	ΜΓ	(Μ μέσο τῆς ΒΓ)
ΑΜ	=	ΑΜ	(κοινή πλευρά)

Ἐπομένως τά τρίγωνα εἶναι ἴσα καί θά ἔχουν ὅλα τά ἀντίστοιχά τους στοιχεῖα ἴσα, ἐπομένως καί

$$\widehat{B} = \widehat{\Gamma}.$$



(σχ. 33)

2. **Γιά νά μετρήσουμε τήν ἀπόσταση δύο σημείων Α καί Β, πού χωρίζονται ἀπό ἕνα βάλτο, παίρνουμε ἕνα σημεῖο Γ καί στήν προέκταση τῶν ΑΓ καί ΓΒ παίρνουμε τμήματα ΓΑ΄=ΓΑ καί ΓΒ΄=ΓΒ. Νά συγκριθοῦν τά τμήματα ΑΒ καί Α΄Β΄.**

Λύση.

Συγκρίνουμε τά τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ. Αὐτά ἔχουν

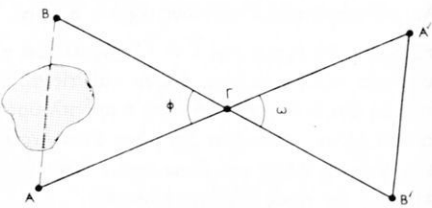
ΓΒ = ΓΒ΄ (ἀπό τήν ὑπόθεση)

ΓΑ = ΓΑ΄ (ἀπό τήν ὑπόθεση)

$\widehat{\varphi} = \widehat{\omega}$ (εἶναι κατακορυφήν)

Ἐπομένως τά τρίγωνα εἶναι ἴσα καί θά ἔχουν ὅλα τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα τους ἴσα, ἐπομένως καί

$$AB = A'B'.$$



(σχ. 34)

3. **Δικαιολογῆστε ὅτι ὅλες οἱ γωνίες ἰσόπλευρου τριγώνου εἶναι ἴσες καί ὑπολογίστε τήν κάθε μιά τους.**

Λύση. Τό ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι εἶναι ἰσοσκελές μέ ὁποιαδήποτε πλευρά του σάν βάση. Ἂν θεωρήσουμε ὅτι εἶναι βάση ἡ ΒΓ, τότε (σύμφωνα μέ τό παράδ. 1) ἔχουμε $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

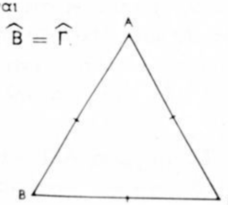
Ὅμοια ἔχουμε $\widehat{\Gamma} = \widehat{A}$ καί $\widehat{A} = \widehat{B}$. Ἐπομένως

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$$

Ἐπειδή $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^0$, ἔχουμε διαδοχικά

$$\widehat{A} + \widehat{A} + \widehat{A} = 180 \text{ ἤ } 3\widehat{A} = 180^0$$

$$\widehat{A} = 60^0$$



(σχ. 35)

Συνεπῶς: **Κάθε γωνία ἰσόπλευρου τριγώνου εἶναι 60^0.**

4. **Νά συγκρίνετε τίς ἀπέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.**

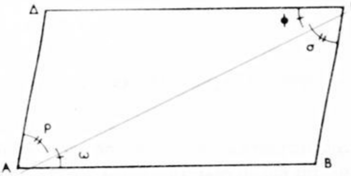
Λύση. Φέρνουμε τή διαγώνιο ΑΓ καί συγκρίνουμε τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΑΔΓ.

Αὐτά ἔχουν

$A\Gamma = A\Gamma$ (κοινή πλευρά)

$\widehat{\omega} = \widehat{\varphi}$ ($AB // \Delta\Gamma$ καί οἱ $\widehat{\omega}$ καί $\widehat{\varphi}$ εἶναι ἐντός ἐναλλάξ)

$\widehat{\sigma} = \widehat{\rho}$ ($A\Delta // B\Gamma$ καί οἱ $\widehat{\sigma}$ καί $\widehat{\rho}$ εἶναι ἐντός ἐναλλάξ)



(σχ. 36)

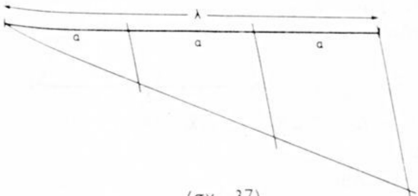
Ἑπομένως τά τρίγωνα εἶναι ἴσα καί θά ἔχουν ὅλα τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα τους ἴσα ἑπομένως καί

$$AB = \Delta\Gamma, \quad B\Gamma = A\Delta.$$

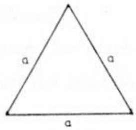
Συνεπῶς: **Οἱ ἀπέναντι πλευρές κάθε παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες.**

5. **Νά κατασκευασθεῖ ἰσόπλευρο τρίγωνο, στό ὁποῖο ἡ περίμετρος νά εἶναι ἴση μέ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα πού ἔχει μῆκος λ, π.χ. λ=9 cm.**

Λύση. Παίρνουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ἴσο μέ τό λ καί τό χωρίζουμε σέ τρία ἴσα



(σχ. 37)



(σχ. 38)

μέρη (βλ. σχ. 37). Τό κάθε ἕνα ἀπό αὐτά εἶναι ἡ πλευρά τοῦ τριγώνου.
Ἡ κατασκευή γίνεται κατά τά γνωστά, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 38.

6. **Ἔχουμε τρίγωνο ΑΒΓ μέ ΑΓ>ΑΒ καί στήν ΑΓ παίρνουμε τμῆμα ΑΔ = ΑΒ. Νά συγκρίνετε:**

α) Τίς γωνίες $A\widehat{B}\Delta$ καί $A\widehat{\Delta}B$.

β) Κάθε μιά ἀπό τίς γωνίες $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου μέ τήν $A\widehat{\Delta}B$.

γ) Τίς γωνίες $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου.

Λύση. α) Τό τρίγωνο ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές, γιατί ἔχει ΑΒ = ΑΔ. Συνεπῶς θά εἶναι

$$A\widehat{B}\Delta = A\widehat{\Delta}B.$$

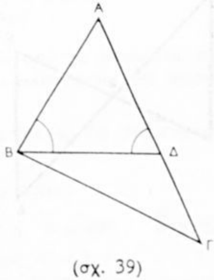
β) Ἡ ΒΔ, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 39, εἶναι στό ἐσωτερικό τῆς γωνίας $\widehat{B}$ καί ἑπομένως θά εἶναι

$$\widehat{B} > A\widehat{B}\Delta.$$

Τότε ὅμως θά ἔχουμε καί

$$\widehat{B} > A\widehat{\Delta}B \quad (1)$$

Ἡ γωνία $A\widehat{\Delta}B$ εἶναι ἐξωτερική γωνία τοῦ τριγώνου ΒΔΓ. Ἔτσι θά εἶναι $A\widehat{\Delta}B = \Delta\widehat{B}\Gamma + \widehat{\Gamma}$ καί συνεπῶς ἔχουμε



(σχ. 39)

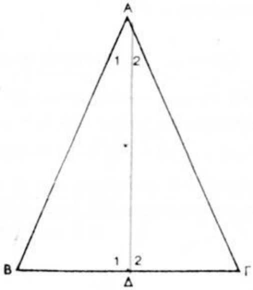
$$\widehat{A\Delta B} > \widehat{\Gamma} \quad (2)$$

γ) Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) συμπεραίνουμε (μέ τή μεταβατική ἰδιότητα) ὅτι

$$\widehat{B} > \widehat{\Gamma}.$$

Διαπιστώσαμε λοιπόν ὅτι **σέ κάθε τρίγωνο ἀπέναντι ἀπό μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται καί μεγαλύτερη γωνία.**

7. **Σέ ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ μέ κορυφή τό Α φέρνουμε τή διχοτόμο ΑΔ. Νά ἐξετάσετε ἄν ἡ ΑΔ εἶναι ἐπίσης ὕψος καί διάμεσος.**



(σχ. 39α)

Λύση: Συγκρίνουμε τά τρίγωνα ΑΒΔ καί ΑΓΔ.
Αὐτά ἔχουν:

ΑΒ = ΑΓ (ΑΒΓ ἰσοσκελές)
ΑΔ = ΑΔ (κοινή πλευρά)
$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (ΑΔ διχοτόμος)

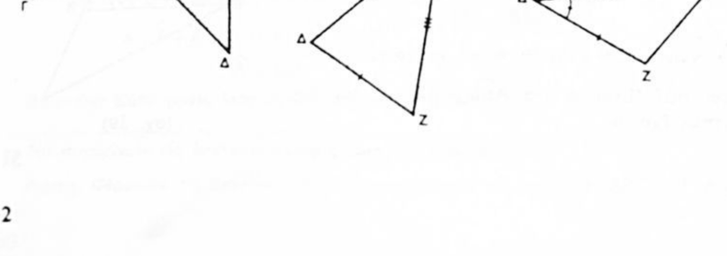
Συνεπῶς τά τρίγωνα εἶναι ἴσα καί θά ἔχουν ὅλα τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα τους ἴσα. Δηλαδή

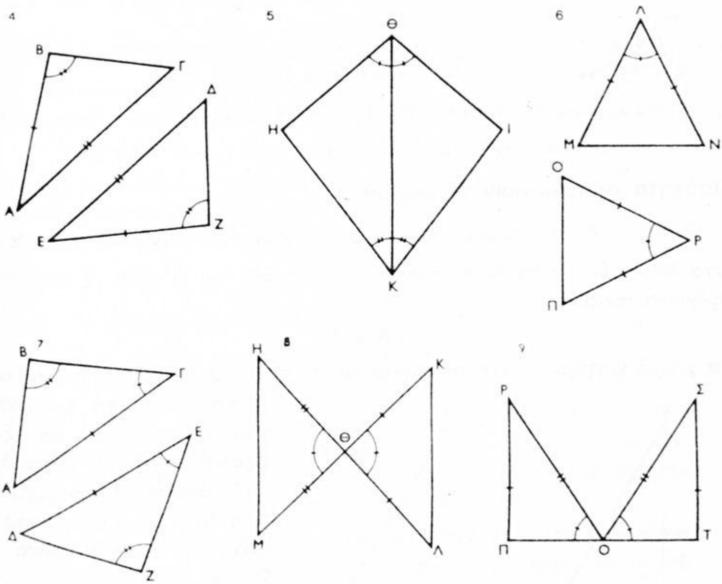
$$B\Delta = \Delta\Gamma$$

(ἑπομένως ἡ ΑΔ εἶναι διάμεσος) καί $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_2}$. Ἀλλά $\widehat{\Delta_1} + \widehat{\Delta_2} = 2$ ὀρθές καί συνεπῶς $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_2} = 1$ ὀρθή.
Ἔτσι θά εἶναι $A\Delta \perp B\Gamma$
καί συνεπῶς τό ΑΔ εἶναι καί ὕψος τοῦ ΑΒΓ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

11. Στά σχήματα, πού ἀκολουθοῦν, ὑπάρχουν 9 ζεύγη μέ τρίγωνα, στά ὁποῖα ἔχουμε σημειώσει μέ τό ἴδιο σημάδι τίς ἴσες πλευρές καί τίς ἴσες γωνίες. Νά βρεῖτε ποιά ζεύγη τριγώνων εἶναι ἴσα καί νά ἀναφέρετε σ' αὐτά τά ἄλλα ἴσα ἀντίστοιχά τους στοιχεῖα. Δικαιολογῆστε τίς ἀπαντήσεις σας μέ τά κριτήρια ἰσότητας.





12. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε $\widehat{A}=75^0$ καί $\widehat{B}=45^0$. Νά βρεθεῖ ἡ $\widehat{\Gamma}$.

13. Σέ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ μέ $\widehat{A}=90^0$, γνωρίζουμε ὅτι ἡ γωνία $\widehat{B}$ εἶναι διπλάσια ἀπό τή $\widehat{\Gamma}$. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ γωνίες $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$.

14. Σ' ἕνα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ = ΒΓ καί ΑΔ = ΔΓ. Νά συγκρίνετε τίς γωνίες $\widehat{A}$ καί $\widehat{\Gamma}$.

15. Σ' ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ νά φέρετε τίς διαγωνίους του καί νά συγκρίνετε τά τμήματα, στά ὁποῖα χωρίζονται ἀπό τό σημεῖο τομῆς τους Ο

16. Νά δικαιολογήσετε γιατί δέν μπορεῖ νά εἶναι ὀρθή ἡ ἀμβλεία ἡ γωνία Β ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, πού ἔχει κορυφή τό Α.

17. Σ' ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, μέ κορυφή Α, φέρνουμε τή διάμεσο ΑΜ. Νά ἐξετάσετε ἄν ἡ ΑΜ εἶναι ἐπίσης διχοτόμος καί ὕψος τοῦ ΑΒΓ.

18. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\widehat{B}>\widehat{\Gamma}$. Νά ἐξετάσετε ποιά ἀπό τίς παρακάτω σχέσεις ἰσχύει: α) ΑΓ=ΑΒ β) ΑΓ<ΑΒ γ) ΑΓ>ΑΒ. Νά δικαιολογήσετε τήν ἀπάντησή σας.

19. Σ' ἕναν κύκλο μέ κέντρο Ο παίρνουμε δυό ἴσες χορδές ΑΒ καί ΓΔ. Νά συγκριθοῦν οἱ γωνίες $A\widehat{O}B$ καί $\Gamma\widehat{O}\Delta$.

20. **Νά κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, ὅταν γνωρίζετε ὅτι :**

1. $\alpha = 5$ cm, $\beta = 3$ cm, $\widehat{\Gamma} = 45^0$
2. $\alpha = 8$ cm, $\widehat{B} = 43^0$, $\widehat{\Gamma} = 80^0$
3. $\beta = 8$ cm, $\widehat{A} = 40^0$, $\widehat{B} = 75^0$
4. $\alpha = 3$ cm, $\beta = 5$ cm, $\gamma = 4$ cm,

21. Νά κατασκευάσετε ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο μέ βάση $\alpha = 6$ cm καί ἀντίστοιχο ὕψος $\upsilon = 4$ cm.

22. Πόσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα μπορεῖτε νά κατασκευάσετε, πού ἔχουν βάση ἕνα ὁρισμένο τμῆμα ΒΓ; Τί παρατηρεῖτε σχετικά μέ τή θέση, πού ἔχουν οἱ κορυφές τους;

23. Σ' ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ἡ γωνία τῆς κορυφῆς του εἶναι διπλάσια ἀπό κάθε μιά ἀπό τίς ἴσες γωνίες του. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ γωνίες του.

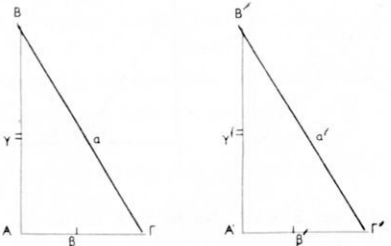
24. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\widehat{B} = 40^0$, $\widehat{\Gamma} = 60^0$. Νά ὑπολογίσετε τή γωνία $\widehat{A}$ καθώς καί τή γωνία πού σχηματίζουν οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$ καί $\widehat{B}$.

Ἰσότητα ὀρθογώνιων τριγώνων

2.11. Ἄς θεωρήσουμε τώρα δυό ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί Α'Β'Γ', στά ὁποῖα θά ὑποθέτουμε πάντα ὅτι $\widehat{A} = 90^0$ καί $\widehat{A}' = 90^0$. Ἐπειδή στά τρίγωνα αὐτά ἔχουμε

$$\widehat{A} = \widehat{A}',$$

τά γενικά κριτήρια ἰσότητας τριγώνων θά παίρνουν τώρα πιό ἁπλή μορφή καί ἡ ἰσότητα δυό ὀρθογώνιων τριγώνων θά ἐξασφαλίζεται μέ τίς ἰσότητες ὄχι τριῶν ἀντίστοιχων στοιχείων τους ἀλλά μόνο δυό, ἀφοῦ ἡ τρίτη ἰσότητα θά εἶναι ἡ $\widehat{A} = \widehat{A}'$

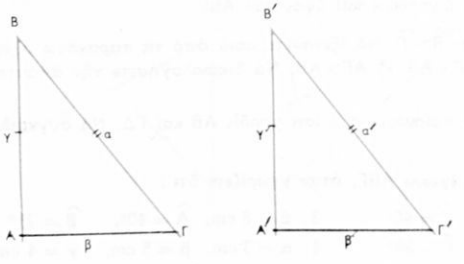


(σχ. 40)

Ἄς ὑποθέσουμε π.χ. ὅτι τά δυό ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν ΑΒ=Α'Β' καί ΑΓ=Α'Γ'. Ἐπειδή εἶναι καί $\widehat{A} = \widehat{A}'$, τά τρίγωνα αὐτά σύμφωνα μέ τό δεύτερο κριτήριο ἰσότητας θά εἶναι ἴσα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

> Δυό ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν οἱ κάθετες πλευρές τοῦ ἑνός εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ τίς κάθετες πλευρές τοῦ ἄλλου.

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι τά ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν ΑΒ = Α'Β' καί ΒΓ = Β'Γ'. Ἄν ἀποτυπώσουμε τό ΑΒΓ πάνω σ' ἕνα διαφανές χαρτί καί τοποθετήσουμε τό διαφανές πάνω στό Α' Β' Γ' κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε ἡ ΑΒ νά ἐφαρμόσει στήν Α'Β', βλέπουμε ὅτι τό ΑΒΓ ἐφαρμόζει στό Α'Β'Γ'. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:



(σχ. 41)

Δυό ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἡ ὑποτείνουσα καί μιά κάθετη πλευρά τοῦ ἑνός εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ την ὑποτείνουσα καί μιά κάθετη πλευρά τοῦ ἄλλου.

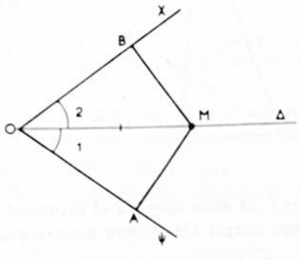
Ἄν ἐφαρμόσουμε τέλος τό τρίτο κριτήριο, πού ἡ ἰσότητα τῶν τριγώνων ἐξασφαλίζεται μέ μιά ἰσότητα πλευρῶν καί δυό ἰσότητες γωνιῶν, βρίσκουμε εὔκολα ὅτι:

Δυό ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν:

- μιά κάθετη πλευρά καί ἡ προσκείμενη ὀξεία γωνία τοῦ ἑνός τριγώνου εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ μιά κάθετη πλευρά καί τήν προσκείμενη ὀξεία γωνία τοῦ ἄλλου τριγώνου,
- μιά κάθετη πλευρά καί ἡ ἀπέναντι ὀξεία γωνία τοῦ ἑνός τριγώνου εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ μιά κάθετη πλευρά καί τήν ἀπέναντι ὀξεία γωνία τοῦ ἄλλου τριγώνου,
- ἡ ὑποτείνουσα καί μιά ὀξεία γωνία τοῦ ἑνός τριγώνου εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ τήν ὑποτείνουσα καί μιά ὀξεία γωνία τοῦ ἄλλου τριγώνου.

Χαρακτηριστική ἰδιότητα διχοτόμου γωνίας

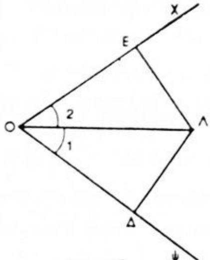
2.12. Ἄς θεωρήσουμε μιά ὀξεία γωνία $x\widehat{O}\psi$ καί τή διχοτόμο της ΟΔ. Ἄς εἶναι Μ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς διχοτόμου καί ΜΑ καί ΜΒ οἱ ἀποστάσεις του ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας. Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΟΜ καί ΒΟΜ εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν ΟΜ = ΟΜ καί $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ Ἑπομένως ΜΑ = ΜΒ καί ἀπό τήν ἰσότητα αὐτή συμπεραίνουμε ὅτι:



(σχ. 42)

Κάθε σημεῖο τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τίς πλευρές της.

Τήν ἰδιότητα αὐτή τήν ἔχουν μόνο τά σημεῖα τῆς διχοτόμου. Πραγματικά, ἄν πάρουμε μέσα σέ μιά γωνία $X\widehat{O}\Psi$ ἕνα σημεῖο Λ, πού νά ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας (δηλαδή οἱ ἀποστάσεις του ΛΔ καί ΛΕ νά εἶναι μεταξύ τους ἴσες) τότε, ἄν φέρουμε τήν ΟΛ, σχηματίζονται τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΟΛ καί ΕΟΛ πού ἔχουν



σχ. 43

ΟΛ = ΟΛ

ΛΔ = ΛΕ.

Ὥστε: τριγ ΔΟΛ = τριγ ΕΟΛ καί ἑπομένως καί

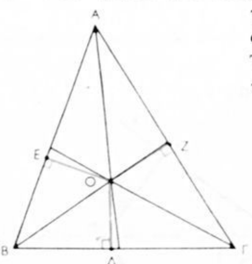
$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$.

Ἀπό τήν ἰσότητα $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ συμπεραίνουμε ὅτι ἡ ΟΛ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $X\widehat{O}\Psi$, δηλαδή τό σημεῖο Λ βρίσκεται πάλι πάνω στή διχοτόμο τῆς $\widehat{O}$. Ὥστε

> Κάθε σημεῖο, πού ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές μιᾶς γωνίας, βρίσκεται πάνω στή διχοτόμο της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ νά χαράξετε τίς διχοτόμους τῶν γωνιῶν του $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ μέχρι τό σημεῖο τομῆς τους Ο, Φέρτε τίς ἀποστάσεις τοῦ Ο ἀπό τίς τρεῖς πλευρές τοῦ τριγώνου καί συγκρίνετέ τες. Τί παρατηρεῖτε; Θά περάσει καί ἡ διχοτόμος τῆς τρίτης γωνίας ἀπό τό Ο;**

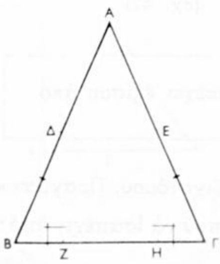


(σχ. 44)

Λύση. Ἄς ὀνομάσουμε ΟΔ, ΟΕ καί ΟΖ τίς τρεῖς αὐτές ἀποστάσεις. Ἐπειδή τό σημεῖο Ο βρίσκεται πάνω στή διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{B}$, θά ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές της, δηλαδή εἶναι ΟΔ = ΟΕ. Ὅμοια εἶναι ΟΔ = ΟΖ. Ὥστε καί ΟΕ = ΟΖ, δηλαδή τό σημεῖο Ο ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας $\widehat{A}$ καί ἑπομένως βρίσκεται πάνω στή διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{A}$.

Ὥστε : **Σέ κάθε τρίγωνο οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του περνᾶνε ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Ο, πού ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τίς πλευρές τοῦ τριγώνου.**

2. **Σέ ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ μέ κορυφή τό Α νά φέρετε τίς ἀποστάσεις τῶν μέσων τῶν ἴσων πλευρῶν του ἀπό τή βάση ΒΓ καί νά τίς συγκρίνετε.**



σχ. 45

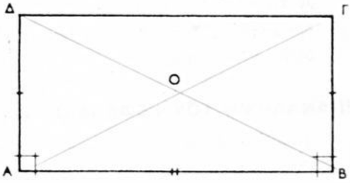
Λύση: Συγκρίνουμε τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΔΖ καί ΗΕΓ. Αὐτά ἔχουν:

$\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ (γωνίες ἰσοσκελοῦς τριγώνου)

ΒΔ=ΕΓ (εἶναι ΑΒ=ΑΓ καί ἔχουμε πάρει τά μέσα τους).

Ὥστε τά τρίγωνα εἶναι ἴσα καί θά ἔχουν καί τά ἄλλα ἀντίστοιχά τους στοιχεῖα ἴσα, δηλ. ΔΖ=ΕΗ.

3. **Σέ ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ συγκρίνετε μέ τό διαβήτη σας τίς διαγωνίους του καί δικαιολογῆστε τό συμπέρασμά σας συγκρίνοντας τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί ΑΒΔ.**



(σχ. 46)

Λύση. Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί ΑΒΔ ἔχουν

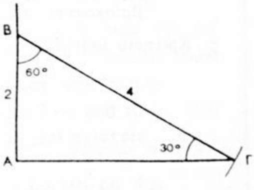
ΑΒ = ΑΒ (κοινή πλευρά)

ΒΓ = ΑΔ (ἀπέναντι πλευρές παραλληλογράμμου),

ὥστε τά τρίγωνα εἶναι ἴσα καί θά ἔχουν καί τά ἄλλα τους ἀντίστοιχα στοιχεῖα ἴσα καί ἑπομένως ΑΓ = ΔΒ, δηλ. **οἱ διαγώνιοι ὀρθογώνιου παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες μεταξύ τους.**

4. **Νά κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο, πού νά ἔχει μιά κάθετη πλευρά ἴση μέ τό μισό τῆς ὑποτείνουσας καί νά μετρήσετε τίς γωνίες του.**

Λύση. Κατασκευάζουμε μιά ὀρθή γωνία Α καί πάνω στή μιά πλευρά της παίρνουμε ἕνα σημεῖο Β ὥστε (ΑΒ) = 2 cm. Μέ κέντρο Β καί ἀκτίνα τό διπλάσιο τῆς ΑΒ, δηλ. 4cm, γράφουμε ἕναν κύκλο πού τέμνει τήν ἄλλη πλευρά τῆς ὀρθῆς γωνίας σ' ἕνα σημεῖο Γ. Χαράζουμε τή ΒΓ καί ἔτσι κατασκευάστηκε ἕνα τέτοιο ὀρθογώνιο τρίγωνο.



(σχ. 47)

Ἡ μέτρηση τῶν γωνιῶν του, ἄν γίνει μέ προσοχή, δίνει $\widehat{\Gamma} = 30^0$ καί $\widehat{B} = 60^0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

25. Σ'ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ φέρτε ἀπό τήν κορυφή Α τό ὕψος του ΑΔ. Συγκρίνετε τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ καί ΑΓΔ καί διαπιστῶστε ὅτι τό ΑΔ εἶναι διχοτόμος καί διάμεσος τοῦ τριγώνου.

26. Σ' ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε ἀπό τό μέσο Δ τῆς βάσεώς του ΒΓ τίς ἀποστάσεις ΔΕ καί ΔΖ ἀπό τίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ ἀντίστοιχα. Συγκρίνετε τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΕΒΔ καί ΖΓΔ καί διαπιστῶστε ὅτι ΔΕ = ΔΖ.

27. Νά κατασκευαστεῖ ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\widehat{A}=90^0)$, ἄν γνωρίζουμε ὅτι:

α) $\widehat{\Gamma} = 45^0$ $\quad \beta = 2$ cm δ) $\alpha = 5$ cm, $\beta = 3$ cm

β) $\widehat{B} = 30^0$, $\quad \beta = 3$ cm ε) $\alpha = 4$ cm $\gamma = 3$ cm

γ) $\widehat{B} = 50^0$ $\quad \alpha = 6$ cm στ) $\beta = 3$ cm, $\gamma = 4$ cm

28. Νά κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο, πού νά ἔχει μιά πλευρά 4 cm καί διαγώνιο 5 cm.

29. Σ' ἕνα ὀξυγώνιο τρίγωνο χαράξετε προσεκτικά τά τρία ὕψη του. Τί παρατηρεῖτε;

30. Νά κάνετε τήν ἴδια ἐργασία σ' ἕνα ἀμβλυγώνιο τρίγωνο καί σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο. Παρατηρεῖτε τό ἴδιο;

31. Σέ ἕναν κύκλο νά φέρετε μιά διάμετρο ΒΓ, νά πάρετε ἕνα σημεῖο Α στό ἕνα ἡμικύκλιο καί νά χαράξετε τίς ΑΒ καί ΑΓ. Μετρῆστε τή γωνία Α. Κάνετε τήν ἴδια ἐργασία γιά διάφορες θέσεις τοῦ σημείου Α. Τί παρατηρεῖτε;

32. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο μιά διαγώνιος σχηματίζει μέ μιά πλευρά του γωνία 70°. Νά ὑπολογίσετε τίς ἄλλες γωνίες, πού σχηματίζουν οἱ διαγώνιοί του μέ τίς πλευρές τοῦ ὀρθογωνίου.

33. Νά κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιο καί ἰσοσκελές τρίγωνο καί νά ὑπολογίσετε τίς ὀξεῖες γωνίες του.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

1. Ἕνα τρίγωνο, ὅταν ἐξετάζεται ὡς πρός τίς γωνίες του, εἶναι **ὀξυγώνιο** ἤ **ὀρθογώνιο** ἤ **ἀμβλυγώνιο**. Ὅταν ἐξετάζεται ὡς πρός τίς πλευρές του, εἶναι **ἰσόπλευρο** ἤ **ἰσοσκελές** ἤ **σκαληνό**.

Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κάθε τριγώνου εἶναι ἴσο μέ 180°.

- Δύο ἴσα τρίγωνα ἔχουν μιά πρός μιά ἴσες ὅλες τίς πλευρές καί ὅλες τίς γωνίες τους. Δυό ἴσα τρίγωνα ἔχουν ἐπίσης ὅλα τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα τους ἴσα. Σέ ἴσα τρίγωνα ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν βρίσκονται ἴσες γωνίες καί ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν ἴσες πλευρές.

2. **Κριτήρια ἰσότητας τριγώνων**. Δυό τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν:

- οἱ πλευρές τοῦ ἑνός εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ τίς πλευρές τοῦ ἄλλου,
- οἱ δυό πλευρές καί ἡ περιεχόμενη ἀπ' αὐτές γωνία τοῦ ἑνός εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ τίς δυό πλευρές καί τήν περιεχόμενη ἀπ' αὐτές γωνία τοῦ ἄλλου,
- ἡ μιά πλευρά καί οἱ προσκείμενες σ' αὐτήν γωνίες τοῦ ἑνός τριγώνου εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ μιά πλευρά καί τίς προσκείμενες σ' αὐτήν γωνίες τοῦ ἄλλου.

Οἱ ἀπέναντι πλευρές καί οἱ ἀπέναντι γωνίες κάθε παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες.

3. **Κριτήρια ἰσότητας ὀρθογωνίων τριγώνων**. Δυό ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν:

- οἱ κάθετες πλευρές τοῦ ἑνός εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ τίς κάθετες πλευρές τοῦ ἄλλου,
- ἡ ὑποτείνουσα καί μιά κάθετη πλευρά τοῦ ἑνός εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ τήν ὑποτείνουσα καί μιά κάθετη πλευρά τοῦ ἄλλου,
- μιά κάθετη πλευρά καί ἡ προσκείμενη (ἤ ἀπέναντι) ὀξεία γωνία τοῦ ἑνός εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ μιά κάθετη πλευρά καί τήν προσκείμενη (ἤ ἀπέναντι) ὀξεία γωνία τοῦ ἄλλου,
- ἡ ὑποτείνουσα καί μιά ὀξεία γωνία τοῦ ἑνός εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ τήν ὑποτείνουσα καί μιά ὀξεία γωνία τοῦ ἄλλου,

Κάθε σημεῖο τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές της καί κάθε σημεῖο πού ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές της βρίσκεται πάνω στή διχοτόμο. Σέ κάθε ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ *

34. Ἔστω Α, Β καί Γ τρία σημεῖα σέ εὐθεία γραμμή τέτοια ὥστε (ΑΒ) = (ΒΓ) = 4 cm. Μέ πλευρές τίς ΑΒ καί ΒΓ κατασκευάστε πρός τό ἴδιο μέρος τῆς εὐθείας δυό ἰσό-

πλευρα τρίγωνα ΑΒΔ καί ΒΓΕ. Χαράξτε τή ΔΕ. Τί τρίγωνο είναι τό ΒΔΕ; Εί-
ναι ΔΕ//ΑΓ;

35. Κατασκευάστε ένα όρθογώνιο τρίγωνο μέ κάθετες πλευρές (ΑΒ) = (ΑΓ) = 3 cm. Μέ πλευρές τίς ΑΒ καί ΑΓ κατασκευάστε έξω άπό τό τρίγωνο ΑΒΓ δυό ίσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ καί ΑΓΕ. Νά ύπολογιστοῦν οί γωνίες $\widehat{ΔΑΕ}$, $\widehat{ΔΑΒ}$ καί $\widehat{ΕΑΓ}$. Χαράξτε τήν ΕΔ. Τί τρίγωνο είναι τό ΑΔΕ;

36. Χαράξτε τίς κάθετες στά μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν ένός τριγώνου ΑΒΓ. Τί παρατηρεῖτε; Δικαιολογῆστε τήν άπάντησή σας.

37. Χαράξτε ένα εύθύγραμμο τμῆμα (ΒΓ) = 4 cm. Έκατέρωθεν τοῦ ΒΓ κατασκευάστε δυό ίσοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΒΓ τέτοια ὥστε (ΑΒ) = (ΑΓ) = 3 cm καί (ΔΒ) = (ΔΓ) = 5 cm. Χαράξετε τήν ΑΔ πού τέμνει τήν ΒΓ στό Ο. Μετρῆστε τίς ΟΒ, ΟΓ, $\widehat{ΔΑΒ}$, $\widehat{ΓΑΔ}$, Τί παρατηρεῖτε; Δικαιολογῆστε τίς άπαντήσεις σας.

38. Σ' ένα ίσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ χαράξτε τά ΰψη ΒΔ καί ΓΕ άπό τά άκρα τῆς βάσεώς του ΒΓ. Συγκρίνετε τά όρθογώνια τρίγωνα ΒΓΔ καί ΒΓΕ. Τί συμπεραίνετε γιά τά ΰψη ΒΔ καί ΓΕ;

39. Δυό κύκλοι μέ κέντρα Κ καί Λ τέμνονται στά σημεῖα Α καί Β. Χαράξτε τίς ΚΛ, ΑΚ, ΑΛ, ΒΚ, ΒΛ καί έξετάσετε άν ή ΚΛ είναι διχοτόμος τῶν γωνιῶν $\widehat{ΑΚΒ}$ καί $\widehat{ΑΛΒ}$.

40. Σ' ένα ίσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ χαράξτε άπό τά άκρα τῆς βάσεώς του ΒΓ τίς διαμέσους ΒΔ καί ΓΕ. Συγκρίνετε τά τρίγωνα ΒΓΔ καί ΒΓΕ καί συμπεράνετε ότι ΒΔ = ΓΕ.

41. Σ' ένα ίσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ μέ κορυφή τό Α συγκρίνετε τίς έξωτερικές γωνίες του $\widehat{Β}$ καί $\widehat{Γ}$.

42. Νά κατασκευάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, όταν

α) $\widehat{B} = 40^{\circ}$, $\gamma = 8$ cm, $\beta = 6$ cm

β) $\widehat{B} = 40^{\circ}$, $\gamma = 8$ cm, $\beta = 10$ cm

Πόσα διαφορετικά τρίγωνα κατασκευάζονται μέ τά στοιχεῖα αύτά;

43. Χαράξτε σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ τίς τρεῖς διαμέσους του. Τί παρατηρεῖτε;

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Τό διατεταγμένο ζεῦγος

3.1. Στήν καθημερινή μας ζωή μιλᾶμε συχνά γιά ζεύγη πραγμάτων ἤ προσώπων δίχως νά μᾶς ἐνδιαφέρει ποιό θά ἀναφέρουμε πρῶτο καί ποιό δεύτερο. Ἔτσι π.χ. οἱ δύο φράσεις:

«Χθές παντρεύτηκαν ὁ Γιῶργος καί ἡ Μαρία»
«Χθές παντρεύτηκαν ἡ Μαρία καί ὁ Γιῶργος»

ἔχουν τό ἴδιο ἀκριβῶς νόημα. Σέ ἄλλες ὅμως περιπτώσεις, ὅταν μιλᾶμε γιά ἕνα ζεῦγος, ἔχει σημασία ποιό ἀπό τά στοιχεῖα του θά ἀναφέρουμε πρῶτο καί ποιό δεύτερο. Ἔτσι π.χ. οἱ δυό φράσεις

«Χθές ἔγινε ὁ ἀγώνας ΠΑΟΚ-ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΥ»
«Χθές ἔγινε ὁ ἀγώνας ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΥ-ΠΑΟΚ»

ἔχουν διαφορετικό νόημα, γιατί ἡ πρώτη σημαίνει ὅτι ὁ ἀγώνας ἔγινε στό γήπεδο τοῦ ΠΑΟΚ στή Θεσσαλονίκη, ἐνῶ ἡ δεύτερη σημαίνει ὅτι ὁ ἀγώνας ἔγινε στό γήπεδο τοῦ ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΥ στό Φάληρο. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι τό ζεῦγος (ΠΑΟΚ, ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΣ) εἶναι **διατεταγμένο ζεῦγος**.

Ὥστε:

> Ἕνα ζεῦγος στοιχείων λέγεται *διατεταγμένο*, ὅταν παίρνουμε τά στοιχεῖα του μέ μιά ὁρισμένη σειρά καί τά ξεχωρίζουμε σέ πρῶτο καί δεύτερο.

Ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος μέ πρῶτο στοιχεῖο τό α καί δεύτερο στοιχεῖο τό β θά σημειώνεται

$$(\alpha, \beta)$$

καί θά ἔχει διαφορετική σημασία ἀπό τό (β,α), δηλ. θά εἶναι $(\alpha,\beta) \neq (\beta,\alpha)$. Δύο διατεταγμένα ζεύγη (α,β) καί (γ,δ) θεωροῦνται ἴσα, ὅταν $\alpha=\gamma$ καί $\beta=\delta$, δηλ.

$$\boxed{(\alpha,\beta) = (\gamma,\delta) \text{ σημαίνει } \alpha = \gamma \text{ καί } \beta = \delta}$$

Ἔτσι π.χ. ἡ ἰσότητα $(\alpha,\beta) = (3,5)$ σημαίνει ὅτι $\alpha = 3$ καί $\beta = 5$.

Μέ τά διατεταγμένα ζεύγη μποροῦμε νά διατυπώνουμε πιό ἁπλά καί πιό σύντομα πολλά ἀπό τά θέματα, πού ἀντιμετωπίζουμε καθημερινά. Ἔτσι π.χ., ἄν θέλουμε νά καταγράψουμε τίς πρωτεύουσες τῶν εὐρωπαϊκῶν κρατῶν, μποροῦμε νά κατασκευάσουμε τά διατεταγμένα ζεύγη:

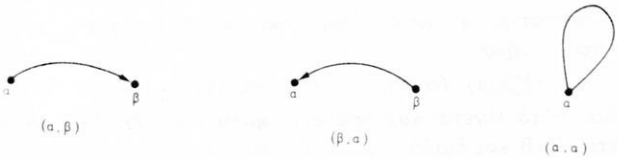
(Ἑλλάδα, Ἀθήνα), (Ἰταλία, Ρώμη), (Γαλλία, Παρίσι), ...

ὅπου τό πρῶτο στοιχεῖο τοῦ ζεύγους δηλώνει τό κράτος καί τό δεύτερο στοιχεῖο δηλώνει τήν πρωτεύουσά του.

Μέ διατεταγμένα ζεύγη μποροῦμε νά παραστήσουμε τούς διψήφιους ἀριθμούς, ἄν συμφωνήσουμε ὅτι τό πρῶτο στοιχεῖο τοῦ ζεύγους παριστάνει τό ψηφίο τῶν δεκάδων καί τό δεύτερο στοιχεῖο παριστάνει τό ψηφίο τῶν μονάδων. Ἔτσι π.χ. γράφουμε

$$(3,5) = 35, \qquad (5,3) = 53, \qquad (4,4) = 44.$$

3.2. Ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος (α,β) παριστάνεται γραφικά μέ δύο σημεῖα, πού τά σημειώνουμε μέ α καί β, καί μέ ἕνα καμπυλόγραμμο βέλος, πού ξεκινάει ἀπό τό α καί καταλήγει στό β.



(σχ. 1)

Ἡ γραφική παράσταση τοῦ ζεύγους (α,α) στό σχ. 1 εἶναι μιά «θηλιά» χωρίς καμιά ἔνδειξη γιά τή φορά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Σχηματίστε ὅλα τά ζεύγη μέ στοιχεῖα ἀπό τό σύνολο { α,β }.**

Λύση. Ἀπό τό σύνολο αὐτό μποροῦμε νά σχηματίσουμε τά ἑξῆς διαφορετικά ζεύγη:

(α,β), (β,α), (α,α), (β,β)

2. **Τί διαφέρουν μεταξύ τους τά παρακάτω σύμβολα;**

{ 1,5 }, (1,5), { (1,5) }

Λύση.

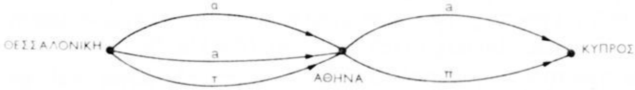
{ 1,5 } εἶναι ἕνα σύνολο, πού ἔχει στοιχεῖα τούς ἀριθμούς 1 καί 5.

(1,5) εἶναι ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος μέ πρῶτο στοιχεῖο τό 1 καί δεύτερο τό 5.

{ (1,5) } εἶναι ἕνα σύνολο, πού ἔχει μοναδικό στοιχεῖο τό ζεῦγος (1,5).

Καρτεσιανό γινόμενο

3.3. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἕνα ἄτομο μπορεῖ νά ταξιδέψει ἀπό τή Θεσσαλονίκη στήν Ἀθήνα μέ αὐτοκίνητο (= α), ἀεροπλάνο (= a) ἤ τραῖνο (=τ) καί ἀπό τήν 'Αθήνα στήν Κύπρο μέ ἀεροπλάνο (= a) ἤ πλοῖο (=π).



(σχ. 2)

Οἱ τρόποι, πού μπορεῖ νά ταξιδέψει τό ἄτομο αὐτό ἀπό τή Θεσσαλονίκη στήν Κύπρο, μπορεῖ νά σημειωθοῦν μέ τά διατεταγμένα ζεύγη:

$$(\alpha,a),\ (\alpha,\pi),\ (a,a),\ (a,\pi),\ (\tau,a),\ (\tau,\pi),$$

ὅπου τό πρῶτο στοιχεῖο τοῦ ζεύγους δείχνει τόν τρόπο ταξιδιοῦ ἀπό τή Θεσσαλονίκη στήν 'Αθήνα καί τό δεύτερο δείχνει τόν τρόπο ταξιδιοῦ ἀπό τήν 'Αθήνα στήν Κύπρο. Ἄν σημειώσουμε μέ Α καί Β τά σύνολα αὐτῶν τῶν μεταφορικῶν μέσων, δηλ.

$$A = \{\alpha,\ a,\ \tau\}, \qquad B = \{a,\ \pi\},$$

τότε ὅλοι οἱ τρόποι, μέ τούς ὁποίους μπορεῖ νά γίνει τό ταξίδι αὐτό, εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου

$$\{(\alpha,\ a),\ (\alpha,\ \pi),\ (a,\ a),\ (a,\pi),\ (\tau,\ a),\ (\tau,\pi)\}$$

Τό σύνολο αὐτό λέγεται **καρτεσιανό γινόμενο** τῶν συνόλων Α καί Β, σημειώνεται Α×Β καί διαβάζεται «Α ἐπί Β». Ὥστε:

Καρτεσιανό γινόμενο Α×Β δύο συνόλων Α καί Β λέγεται τό σύνολο πού ἔχει στοιχεῖα ὅλα τά διατεταγμένα ζεύγη, τά ὁποῖα ἔχουν πρῶτο στοιχεῖο ἀπό τό Α καί δεύτερο στοιχεῖο ἀπό τό Β, δηλ.

$$\boxed{A \times B = \{\text{διατεταγμένα ζεύγη } (\alpha,\beta) \text{ μέ } \alpha \in A \text{ καί } \beta \in B\}}$$

Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν τό Α ἔχει μ στοιχεῖα καί τό Β ἔχει ν στοιχεῖα, τό σύνολο Α×Β ἔχει μ · ν στοιχεῖα.

Ἄν πάρουμε τά σύνολα

$$A = \{1,\ 2,\ 3\} \quad \text{καί} \quad B = \{\alpha,\beta\},$$

ἔχουμε:

$$A\times B = \{(1,\alpha),\ (1,\beta),\ (2,\alpha),\ (2,\beta),\ (3,\alpha),\ (3,\beta)\}$$
$$B\times A = \{(\alpha,1),\ (\alpha,2),\ (\alpha,3),\ (\beta,1),\ (\beta,2),\ (\beta,3)\}$$

Παρατηροῦμε ὅτι

$$\mathbf{A \times B \neq B \times A}$$

δηλ. στό καρτεσιανό γινόμενο *δέν ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετική ἰδιότητα.* Μποροῦμε, βέβαια, νά ἔχουμε καί καρτεσιανά γινόμενα Α×Α καί Β×Β. Αὐτά εἶναι:

$$A\times A = A^2 = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3)\}$$
$$B\times B = B^2 = \{(\alpha,\alpha),\ (\alpha,\beta),\ (\beta,\alpha),\ (\beta,\beta)\}.$$

Παράσταση τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου

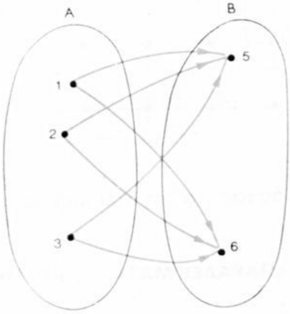
3.4. Ἄς θεωρήσουμε δύο σύνολα ξένα μεταξύ τους π.χ. τά

$$A = \{1,2,3\} \qquad \text{καί} \qquad B = \{5,6\}.$$

Τό καρτεσιανό τους γινόμενο εἶναι:

$$A \times B = \{(1,5),\ (1,6),\ (2,5),\ (2,6),\ (3,5),\ (3,6)\}.$$

Στό σχ. 3 ἔχουμε παραστήσει μέ διαγράμματα τοῦ Venn τά σύνολα A καί B καί ἔχουμε φέρει βέλη, πού ξεκινοῦν ἀπό κάθε στοιχεῖο τοῦ A καί καταλήγουν σέ κάθε στοιχεῖο τοῦ B. Ἕνα τέτοιο σχῆμα, ἐπειδή ἀκριβῶς περιέχει τά βέλη, τό λέμε **βελοειδές διάγραμμα.** Εἶναι φανερό ὅτι τό βελοειδές διάγραμμα τοῦ σχήματος 3 παριστάνει τό καρτεσιανό γινόμενο A × B.



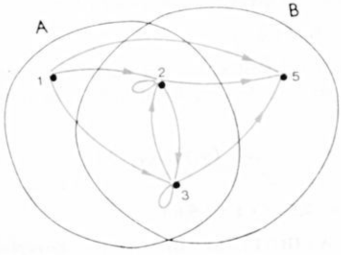
(σχ. 3)

Στά σχήματα 4 καί 5 ἔχουμε δύο βελοειδή διαγράμματα, πού παριστάνουν ἀντιστοίχως τά καρτεσιανά γινόμενα

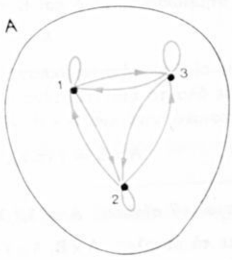
$$A \times B = \{(1,2),\ (1,3),\ (1,5),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,5),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,5)\}$$

$$A^2 = A \times A = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3)\},$$

ὅπου εἶναι $A = \{1,2,3\}$ καί $B = \{2,3,5\}$



(σχ. 4)



(σχ. 5)

3.5. Τό παραπάνω καρτεσιανό γινόμενο A × B μποροῦμε νά τό παραστήσουμε καί μέ ἕναν ἀπό τούς παρακάτω πίνακες.

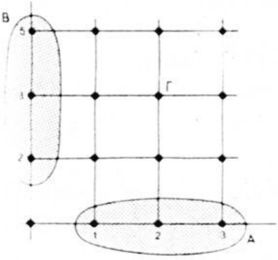
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)
B ↑ / A →	1	2	3

B ↓ \ A →	1	2	3
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)

(σχ. 6)

Οἱ πίνακες αὐτοί λέγονται **πίνακες μέ διπλή εἴσοδο.**

3.6. Τέλος δίνουμε στό σχ. 7 ἕναν τρίτο τρόπο γραφικῆς παραστάσεως τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου, πού συνδυάζει τήν παράσταση μέ πίνακα καί τήν παράσταση μέ διαγράμματα τοῦ Venn. Σέ δύο κάθετες εὐθεῖες σημειώνουμε τά στοιχεῖα τῶν συνόλων Α καί Β καί ἀπό τά σημεῖα αὐτά φέρνουμε παράλληλες εὐθεῖες πρός τό ζεῦγος τῶν κάθετων εὐθειῶν. Τό σημεῖο στό ὁποῖο τέμνονται οἱ δύο εὐθεῖες, πού ξεκινοῦν ἀπό ἕνα στοιχεῖο τοῦ Α καί ἕνα στοιχεῖο τοῦ Β, παριστάνει τό ζεῦγος τῶν στοιχείων αὐτῶν. Π.χ. τό σημεῖο Γ παριστάνει τό ζεῦγος (2,3). Ἡ παράσταση αὐτή τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου λέγεται **καρτεσιανό διάγραμμα**.



(σχ. 7)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Σέ ἕνα γεῦμα τό φαγητό εἶναι ψάρι (=ψ) ἤ κρέας (=κ) καί τό ἐπιδόρπιο φροῦτο (=φ), γλυκό (=γ) ἤ παγωτό (=π). Ποιοί εἶναι ὅλοι οἱ δυνατοί τρόποι, μέ τούς ὁποίους μπορεῖ κάποιος νά διαλέξει τό φαγητό καί τό ἐπιδόρπιό του;**

Λύση :

Ἄς σημειώσουμε μέ Α καί Β τά σύνολα τῶν φαγητῶν καί τῶν ἐπιδόρπιων,

$$A = \{ \kappa, \psi \}, \quad B = \{ \varphi, \gamma, \pi \}.$$

Ὅλες οἱ δυνατότητες ἐκλογῆς φαγητοῦ καί ἐπιδόρπιου θά βρεθοῦν, ἄν σχηματίσουμε ὅλα τά διατεταγμένα ζεύγη μέ στοιχεῖα ἀπό τό Α καί Β, δηλ. ἄν βροῦμε τό καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$. Αὐτό εἶναι

$$A \times B = \{ (\kappa,\varphi), (\kappa,\gamma), (\kappa,\pi), (\psi,\varphi), (\psi,\gamma), (\psi,\pi) \}.$$

2. **Δίνονται τά σύνολα $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,5\}$, $\Gamma = \{5,6\}$.**

Βρεῖτε τά σύνολα: $A \times B$, $A \times \Gamma$, $B \cap \Gamma$, $A \times (B \cap \Gamma)$, $(A \times B) \cap (A \times \Gamma)$. Συγκρίνετε τά σύνολα: $A \times (B \cap \Gamma)$ καί $(A \times B) \cap (A \times \Gamma)$ Τί παρατηρεῖτε;

Λύση:

Ἔχουμε:

$$A \times B = \{ (1,2), (1,5), (2,2), (2,5), (3,2), (3,5) \}$$
$$A \times \Gamma = \{ (1,5), (1,6), (2,5), (2,6), (3,5), (3,6) \}$$
$$B \cap \Gamma = \{ 5 \}$$
$$A \times (B \cap \Gamma) = \{ (1,5), (2,5), (3,5) \}$$
$$(A \times B) \cap (A \times \Gamma) = \{ (1,5), (2,5), (3,5) \}$$

Παρατηροῦμε ὅτι:

$$A \times (B \cap \Gamma) = (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$$

δηλ. τό καρτεσιανό γινόμενο ἔχει τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα ὡς πρός τήν τομή.

3. **Μέ τά σύνολα A καί B τοῦ προηγούμενου παραδείγματος βρεῖτε τά σύνολα: $B \cup \Gamma$, $(A \times B) \cup (A \times \Gamma)$ καί διαπιστῶστε ὅτι**

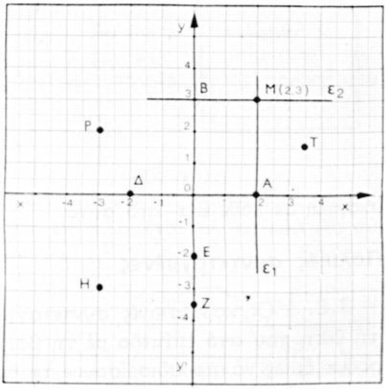
$$A \times (B \cup \Gamma) = (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$$

δηλ. τό καρτεσιανό γινόμενο ἔχει τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα ὡς πρός τήν ἕνωση.

Καρτεσιανές συντεταγμένες

3.7. Στό πρῶτο κεφάλαιο εἴδαμε ὅτι κάθε ρητός ἀριθμός μπορεῖ νά ἀπεικονίζεται σέ ἕνα ὁρισμένο σημεῖο τοῦ ἄξονα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Αὐτό θά μᾶς βοηθήσει τώρα νά ἀντιστοιχίσουμε σέ κάθε διατεταγμένο ζεῦγος ρητῶν ἀριθμῶν ἕνα ὁρισμένο σημεῖο ἑνός ἐπιπέδου.

Παίρνουμε δύο κάθετους ἄξονες xx' καί yy' ἑνός ἐπιπέδου καί ὑποθέτουμε ὅτι ἔχουν κοινή ἀρχή τό σημεῖο τομῆς τους O. Ἀπό τούς ἄξονες αὐτούς ὁ xx' θεωρεῖται *«πρῶτος»* καί ὁ yy' θεωρεῖται *«δεύτερος»*. Γιά κάθε διατεταγμένο ζεῦγος ρητῶν, π.χ. τό (2,3), κάνουμε διαδοχικά τίς ἑξῆς ἐργασίες:



(σχ. 8)

– Στόν πρῶτο ἄξονα xx' παίρνουμε τό σημεῖο A, πού ἀντιπροσωπεύει τόν πρῶτο ἀριθμό 2 τοῦ ζεύγους.

– Στό δεύτερο ἄξονα yy' παίρνουμε τό σημεῖο B, πού ἀντιπροσωπεύει τόν δεύτερο ἀριθμό 3 τοῦ ζεύγους.

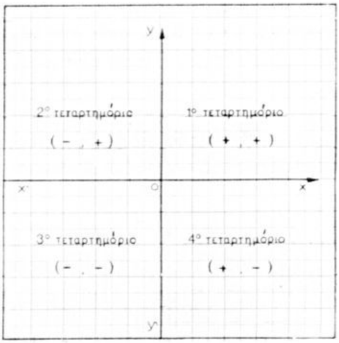
– Στό A φέρνουμε εὐθεία ε_1 κάθετη πρός τόν ἄξονα xx' καί στό B φέρνουμε εὐθεία ε_2 κάθετη πρός τόν ἄξονα yy' καί σημειώνουμε μέ ἕνα γράμμα, π.χ. μέ M, τό σημεῖο τομῆς τῶν ε_1 καί ε_2.

Ἐπειδή οἱ εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 τέμνονται πάντοτε καί μάλιστα σ' ἕνα μοναδικό σημεῖο M, τό M καθορίζεται ἐντελῶς ἀπό τό διατεταγμένο ζεῦγος (2,3) καί θεωρεῖται εἰκόνα του.

Οἱ ἀριθμοί τοῦ διατεταγμένου ζεύγους (2,3) λέγονται **καρτεσιανές συντεταγμένες** τοῦ σημείου M. Εἰδικότερα, ὁ πρῶτος ἀπ' αὐτούς λέγεται **τετμημένη τοῦ M** καί ὁ δεύτερος λέγεται **τεταγμένη τοῦ M.** Τό σημεῖο M, πού ἔχει συντεταγμένες τό ζεῦγος (2,3), τό σημειώνουμε **M(2,3).**

Στό σχ. 8 δίνονται τά σημεῖα P(–3,2), $T\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ καί H(–3, –3).

Εἶναι φανερό ὅτι **κάθε σημεῖο τοῦ ἄξονα xx΄ ἔχει τεταγμένη μηδέν** καί εἶναι π.χ. Α(2,0), Δ(–2,0), ἐνῶ **κάθε σημεῖο τοῦ ἄξονα yy΄ ἔχει τετμημένη μηδέν** καί εἶναι π.χ. Β(0,3), Ε(0,–2), Ζ $\left(0,-\frac{7}{2}\right)$. Ἡ ἀρχή Ο τῶν ἀξόνων ἔχει συντεταγμένες (0,0).



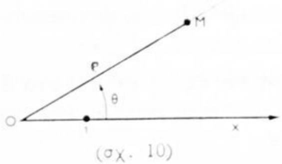
(σχ. 9)

Τό σύστημα τῶν συντεταγμένων χωρίζει τό ἐπίπεδο σέ 4 περιοχές, πού λέγονται **τεταρτημόρια** καί χαρακτηρίζονται ὡς 1^0, 2^0, 3^0 καί 4^0, ὅπως φαίνεται στό σχ. 9, ὅπου σημειώνονται καί τά πρόσημα τῆς τετμημένης καί τῆς τεταγμένης τῶν σημείων, πού βρίσκονται σέ κάθε ἕνα ἀπό αὐτά.

Πολικές συντεταγμένες

3.8. Οἱ καρτεσιανές συντεταγμένες ἑνός σημείου Μ προσδιορίζουν τή θέση του στό ἐπίπεδο μέ τή βοήθεια δύο ἀξόνων xx΄ καί yy΄. Μποροῦμε ὅμως νά προσδιορίσουμε τή θέση ἑνός σημείου Μ στό ἐπίπεδο καί μέ τή βοήθεια μόνο ἑνός ἡμιάξονα Οx. Ὁ προσδιορισμός αὐτός γίνεται ὡς ἑξῆς:

Παίρνουμε ἕναν ὁρισμένο ἡμιάξονα Οx καί θεωροῦμε σάν μονάδα μετρήσεως τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων τοῦ ἐπιπέδου τή μονάδα, πού ἔχουμε στόν ἡμιάξονα Οx. Παίρνουμε ἀκόμη μιά ἡμιευθεία Οε, πού σχηματίζει μέ τόν ἡμιάξονα Οx γωνία, τῆς ὁποίας τό μέτρο θ περιέχεται μεταξύ 0^0 καί 360^0.



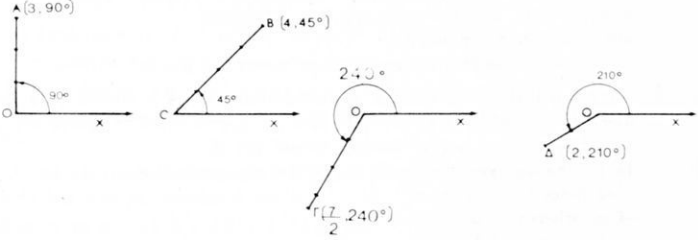
(σχ. 10)

Ἄν θεωρήσουμε τώρα ἕνα θετικό ρητό ἀριθμό ρ καί πάρουμε πάνω στήν Οε ἕνα σημεῖο Μ τέτοιο, ὥστε τό μέτρο τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΟΜ νά εἶναι ρ, τό ζεῦγος (ρ,θ) ὁρίζει τή θέση τοῦ σημείου Μ πάνω στό ἐπίπεδο.

Οἱ ἀριθμοί ρ καί θ λέγονται **πολικές συντεταγμένες** τοῦ Μ καί γράφουμε **Μ (ρ,θ)**. Εἰδικότερα:

- Ἡ γωνία θ, πού εἶναι τέτοια ὥστε $0^0 \leq \theta < 360^0$, λέγεται **πολική γωνία** τοῦ Μ.
- Ὁ θετικός ἀριθμός ρ λέγεται **πολική ἀπόσταση** τοῦ Μ.

Ὁ ἡμιάξονας Ox λέγεται **πολικός ἄξονας** καί ἡ ἀρχή του O λέγε-

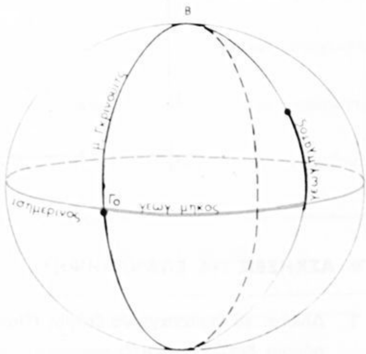


(σχ. 11)

ται **πόλος.** Στό σχῆμα 11 δίνονται ὁρισμένα σημεῖα μέ τίς πολικές συντεταγμένες τους.

Γεωγραφικές συντεταγμένες

3.9. Ὅπως μέ τή βοήθεια τῶν καρτεσιανῶν καί πολικῶν συντεταγμένων ὁρίζεται ἡ θέση ἑνός σημείου στό ἐπίπεδο, ἔτσι μέ κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων μπορεῖ νά ὁριστεῖ ἡ θέση ἑνός σημείου στό χῶρο ἤ ἑνός σημείου πάνω στήν ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας.



(σχ. 12)

Στό μάθημα τῆς γεωγραφίας μαθαίνουμε ὅτι ἡ θέση ἑνός σημείου πάνω στήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς ὁρίζεται μέ τίς **γεωγραφικές συντεταγμένες.** Παίρνοντας σάν βασικούς κύκλους τόν *ἰσημερινό τῆς γῆς* καί τό *μεσημβρινό τοῦ Γκρίνουιτς*, θεωροῦμε κάθε σημεῖο πάνω στήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς ὡς τομή τοῦ μεσημβρινοῦ του καί ἑνός κύκλου παράλληλου πρός τόν ἰσημερινό. Ἔτσι, ὅταν γράφουμε π.χ. γιά ἕνα σημεῖο M τῆς ἐπιφάνειας τῆς γῆς

$$M\ (30^0\ \text{B}.\ 40^0\text{A}),$$

ἐννοοῦμε ὅτι τό σημεῖο M ἔχει **γεωγραφικό πλάτος 30^0 βόρειο** καί **γεωγραφικό μῆκος 40^0 ἀνατολικό.**

Τό γεωγραφικό πλάτος μεταβάλλεται ἀπό 0^0—90^0 B καί 0^0—90^0 N, ἐνῶ τό γεωγραφικό μῆκος μεταβάλλεται ἀπό 0^0—180^0 A καί 0^0—180^0 Δ.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3

1. Στό **διατεταγμένο ζεῦγος** (α,β) ἔχει σημασία ποιό στοιχεῖο εἶναι πρῶτο καί ποιό δεύτερο. Στά διατεταγμένα ζεύγη ὁρίζουμε «ἰσότητα» μέ τή συμφωνία

$$(\alpha,\beta) = (\gamma,\delta) \text{ σημαίνει } \alpha = \gamma \text{ καί } \beta = \delta$$

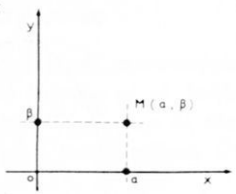
2. Ἄν Α καί Β εἶναι δυό σύνολα, **καρτεσιανό γινόμενο Α × Β** εἶναι τό σύνολο, πού ἔχει στοιχεῖα ὅλα τά διατεταγμένα ζεύγη, στά ὁποῖα τό πρῶτο στοιχεῖο τους ἀνήκει στό Α καί τό δεύτερο ἀνήκει στό Β.
Τό καρτεσιανό γινόμενο Α×Β παριστάνεται γραφικά μέ:
–ἕνα βελοειδές διάγραμμα,
–ἕναν πίνακα μέ διπλή εἴσοδο,
–ἕνα καρτεσιανό διάγραμμα.

3. Ἡ θέση ἑνός σημείου πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο καθορίζεται μέ ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος ἀριθμῶν.

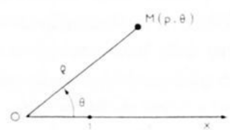
I. Μέ ἕνα **σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων.**
Τό σημεῖο Μ τοῦ σχ. 13 ἔχει συντεταγμένες (α,β). Τό α εἶναι ἡ **τετμημένη** του, β εἶναι ἡ **τεταγμένη** του.

II) Μέ ἕνα **σύστημα πολικῶν συντεταγμένων.**
Τό σημεῖο Μ τοῦ σχ. 14 ἔχει πολικές συντεταγμένες (ρ,θ). Τό ρ εἶναι ἡ **πολική του ἀπόσταση** καί θ εἶναι ἡ **πολική του γωνία.**

Ἡ θέση ἑνός σημείου στήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς καθορίζεται μέ τίς γεωγραφικές συντεταγμένες.



(σχ. 13)



(σχ. 14)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

1. Δίνεται τό διατεταγμένο ζεῦγος (Παπαδιαμάντης, Φόνισσα). Γράψτε 5 ἄλλα παρόμοια διατεταγμένα ζεύγη.
2. Δίνεται τό διατεταγμένο ζεῦγος (Ἄρτα, Ἤπειρος). Γράψτε 5 ἄλλα διατεταγμένα ζεύγη μέ τήν ἴδια σημασία.
3. Νά βρεθοῦν οἱ ἀριθμοί α καί β, ὅταν:

   $(\alpha, 3) = (2, \beta)$ $\qquad$ $(\alpha-2, \beta+3) = (4, 3)$

   $(\alpha+1{,}5) = (4, \beta-1)$ $\qquad$ $(\alpha, 3) = (\beta, \beta+1)$
4. Δίνονται τά σύνολα

   $A = \{0, 2, 3\}$, $B = \{1, 4\}$, $\Gamma = \{3, 5, 8\}$, $\Delta = \{3, 4, 8\}$

   Βρεῖτε τά σύνολα Α × Β καί Γ × Δ καί κάνετε τό καρτεσιανό διάγραμμα καί τόν πίνακα μέ διπλή εἴσοδο γιά τό Α×Β. Ἐπίσης τό βελοειδές διάγραμμα γιά τό Γ×Δ.

5. Δίνονται τά σύνολα $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$, $\Gamma=\{4\}$, $\Delta=\{5\}$.

Νά βρεθοῦν τά σύνολα: $A\times B$, $A\times \Gamma$, $A\times \Delta$, $B\cup\Gamma\cup\Delta$ καί $(A\times B)\cup(A\times\Gamma)\cup(A\times\Delta)$.

Νά ἐπαληθεύσετε τήν ἰσότητα: $A\times(B\cup\Gamma\cup\Delta)=(A\times B)\cup(A\times\Gamma)\cup(A\times\Delta)$.

6. Ἕνας μαθητής ἔχει δυό σακάκια, ἕνα καφέ (=κ) καί ἕνα μαῦρο (=μ) καί τρία παντελόνια, ἄσπρο (=α), γαλάζιο (=γ) καί πράσινο (=π). Γράψτε μέ διατεταγμένα ζεύγη ὅλους τούς τρόπους, μέ τούς ὁποίους μπορεῖ νά συνδυάσει σακάκι μέ παντελόνι.

7. Ἄν τό καρτεσιανό γινόμενο $A\times B$ ἔχει 6 στοιχεῖα, πόσα στοιχεῖα μπορεῖ νά ἔχει κάθε ἕνα ἀπό τά σύνολα A καί B;

8. Δίνεται τό σύνολο $A=\{0,1,2,3\}$.
Βρεῖτε τό καρτεσιανό γινόμενο $A\times A$ καί σχεδιάστε τό βελοειδές καί τό καρτεσιανό του διάγραμμα.

9. Σημειῶστε σ' ἕνα σύστημα συντεταγμένων τά σημεῖα:

$$A(-3,-2),\quad B\left(2,-\frac{5}{2}\right),\quad \Gamma\left(-\frac{5}{2},2\right),\quad \Delta(0,4),\quad E(4,0)$$

10. Σημειῶστε σ' ἕνα σύστημα συντεταγμένων τό σημεῖο M (3,2).
Βρεῖτε τά συμμετρικά του ὡς πρός τόν ἄξονα Ox καί ὡς πρός τόν Oy. Ποιές εἶναι οἱ συντεταγμένες τους;

11. Σέ ποιό τεταρτημόριο βρίσκεται ἕνα σημεῖο, ὅταν ἔχει:
α. τετμημένη θετική β. τεταγμένη ἀρνητική γ. τετμημένη ἀρνητική καί τεταγμένη θετική;

12. Βρεῖτε ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, πού ἔχουν τετμημένη ἴση μέ 2 καί τεταγμένη ὁποιοδήποτε ἀριθμό.

13. Βρεῖτε ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, πού ἔχουν τεταγμένη ἴση μέ 3 καί τετμημένη ὁποιοδήποτε ἀριθμό.

14. Τά σημεῖα A(3,1), B(3,3), Γ(−2,1) καί Δ(−2,3) εἶναι κορυφές ἑνός ὀρθογωνίου. Βρεῖτε τήν περίμετρό του.

15. Σημειῶστε σ' ἕνα σύστημα πολικῶν συντεταγμένων τά σημεῖα·

$$A(5,\ 30^{o}),\quad B(7,\ 30^{o}),\quad \Gamma(2,\ 120^{o}),\quad \Delta\ (3,\ 270^{o}),\quad E\ (4,\ 0^{o}).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

16. Σημειῶστε σ' ἕνα σύστημα πολικῶν συντεταγμένων τά σημεῖα
$A(3,0^{o})$ καί $B(3,60^{o})$.
Τί εἴδους τρίγωνο εἶναι τό AOB; Δικαιολογῆστε τήν ἀπάντηση.

17. Σέ ἕνα σύστημα πολικῶν καί σέ ἕνα καρτεσιανῶν συντεταγμένων ὁ πολικός ἄξονας ταυτίζεται μέ τόν ἡμιάξονα Ox.

α. Ἕνα σημεῖο M ἔχει πολικές συντεταγμένες M(3, 90°). Ποιές εἶναι οἱ καρτεσιανές του συντεταγμένες;

β. Ἕνα σημεῖο N ἔχει καρτεσιανές συντεταγμένες N (−5,0). Ποιές εἶναι οἱ πολικές του συντεταγμένες;

18. Πόσο γεωγραφ. πλάτος ἔχουν τά σημεῖα, πού βρίσκονται στόν ἰσημερινό τῆς γῆς καί πόσο οἱ πόλοι τῆς γῆς;

4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Ἡ ἔννοια τῆς προτάσεως

4.1. Οἱ ἄνθρωποι, γιά νά συνενοηθοῦν μεταξύ τους, χρησιμοποιοῦν διάφορα σύνολα ἀπό λέξεις καί σύμβολα, ὅπως π.χ.

«ὁ ἀριθμός 8 εἶναι ἄρτιος»
«ἡ Θεσσαλονίκη εἶναι πρωτεύουσα τῆς Ἑλλάδας»
«φέρε μου ἕνα ποτήρι νερό»
«αὔριο μπορεῖ νά ἔρθει ὁ Γιάννης».

Κάθε τέτοιο σύνολο ἀπό λέξεις καί σύμβολα, πού ἔχει κάποιο νοητικό περιεχόμενο, λέγεται γενικά *ἔκφραση*. Πολλές φορές μποροῦμε νά χαρακτηρίσουμε μιά ἔκφραση σάν *«ἀληθή»* ἤ *«ψευδή»*. Ἔτσι π.χ. ἡ ἔκφραση *«ὁ ἀριθμός 8 εἶναι ἄρτιος»* εἶναι *«ἀληθής»*, ἐνῶ ἡ ἔκφραση *«ἡ Θεσσαλονίκη εἶναι πρωτεύουσα τῆς Ἑλλάδας»* εἶναι *«ψευδής»*. Ὑπάρχουν ὅμως καί ἐκφράσεις, πού δέν μποροῦν νά χαρακτηριστοῦν *«ἀληθεῖς»* ἤ *«ψευδεῖς»*, ὅπως π.χ. ἡ ἔκφραση *«φέρε μου ἕνα ποτήρι νερό»*.

Κάθε ἔκφραση, πού μπορεῖ νά χαρακτηριστεῖ μόνο σάν «ἀληθής» ἤ μόνο σάν «ψευδής», λέγεται «λογική πρόταση» ἤ ἁπλά «πρόταση».

Ἔτσι π.χ. οἱ ἐκφράσεις

«ὁ ἀριθμός 8 εἶναι ἄρτιος»	(ἀληθής)
«ἡ Θεσσαλονίκη εἶναι πρωτεύουσα τῆς Ἑλλάδας»	(ψευδής)
«ὁ 4 εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 7»	(ψευδής)
«ὁ Σολωμός ἔγραψε τόν ἐθνικό ὕμνο»	(ἀληθής)

εἶναι προτάσεις, ἐνῶ ἡ ἔκφραση *«φέρε μου ἕνα ποτήρι νερό»* δέν εἶναι στά μαθηματικά πρόταση. Οὔτε καί ἡ ἔκφραση *«αὔριο μπορεῖ νά ἔρθει ὁ Γιάννης»* εἶναι πρόταση.

Προτασιακοί τύποι

4.2. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό γράμμα x παριστάνει ἕνα ὁποιοδήποτε στοιχεῖο τοῦ συνόλου

$$A = \{1, 2, 4, 9, 11\}$$

καί ἄς σημειώσουμε μέ $p(x)$ μιά ἔκφραση, πού περιέχει τό γράμμα x, π.χ. τήν

$p(x)$: *ὁ x εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 7.*

Ἡ ἔκφραση αὐτή δέν εἶναι πρόταση, γιατί δέν μπορεῖ νά χαρακτηριστεῖ σάν ἀληθής ἤ σάν ψευδής. Ἡ $p(x)$ ὅμως γίνεται πρόταση, ὅταν ἀντικατασταθεῖ τό x μέ ὁρισμένο στοιχεῖο τοῦ Α. Ἄν λοιπόν ἀντικαταστήσουμε τό x διαδοχικά μέ ὅλα τά στοιχεῖα 1,2,4... τοῦ συνόλου Α καί σημειώσουμε μέ $p(1)$, $p(2)$, $p(4)$,... τίς ἀντίστοιχες ἐκφράσεις πού θά προκύψουν, ἔχουμε τίς προτάσεις:

$p(1)$	: *ὁ 1 εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 7,*	(ψευδής)
$p(2)$	: *ὁ 2 εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 7,*	(ψευδής)
$p(4)$	: *ὁ 4 εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 7,*	(ψευδής)
$p(9)$	: *ὁ 9 εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 7,*	(ἀληθής)
$p(11)$	: *ὁ 11 εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 7.*	(ἀληθής)

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι, ἐνῶ ἡ ἴδια ἡ ἔκφραση $p(x)$ δέν εἶναι πρόταση, μποροῦμε νά βροῦμε ἀπό τήν ἔκφραση αὐτή προτάσεις καί μάλιστα τόσες, ὅσα εἶναι τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου. Γι' αὐτό μιά τέτοια ἔκφραση $p(x)$ λέγεται **προτασιακός τύπος** (εἴτε **ἀνοικτή πρόταση** εἴτε **συνθήκη**) **μέ μιά μεταβλητή.**

Τό γράμμα x, πού περιέχεται στόν προτασιακό τύπο καί παριστάνει ἕνα ὁποιοδήποτε στοιχεῖο ἑνός ὁρισμένου συνόλου Α, λέγεται **μεταβλητή**, ἐνῶ τό σύνολο Α λέγεται **σύνολο ἀναφορᾶς** τοῦ προτασιακοῦ τύπου. Συνηθίζουμε νά λέμε ὅτι ἡ μεταβλητή x *παίρνει τιμές* ἀπό τό σύνολο Α ἤ *διατρέχει* τό σύνολο Α.

Προτασιακός τύπος μέ δυό μεταβλητές

4.3. Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ἔχουμε δυό μεταβλητές x καί y καί ὅτι ἡ x παίρνει τιμές ἀπό τό σύνολο $A = \{1, 2, 9, 11\}$ καί ἡ y παίρνει τιμές ἀπό τό σύνολο $B = \{1, 3, 9, 10, 17\}$. Ἄς σημειώσουμε μέ $p(x,y)$ μιά ἔκφραση πού περιέχει καί τά δύο γράμματα x καί y, π.χ.

$p(x,y)$: *ὁ x εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν y.*

Ἡ ἔκφραση αὐτή δέν εἶναι πρόταση, γιατί δέν μπορεῖ νά χαρακτηριστεῖ σάν ἀληθής ἤ ψευδής, γίνεται ὅμως πρόταση, ἄν ἀντικατασταθεῖ τό x μέ ὁρισμένο στοιχεῖο τοῦ Α καί τό y μέ ὁρισμένο στοιχεῖο τοῦ Β. Ἔτσι, ἄν σημειώσουμε π.χ. μέ $p(2,10)$ τήν ἔκφραση, πού προκύπτει ἀπό τήν $p(x,y)$ ὅταν ἀντικαταστήσουμε τό x μέ τό $2 \in A$ καί τό y μέ τό $10 \in B$, ἔχουμε τήν πρόταση

$p(2,10)$: *2 εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 10* (ψευδής)

Ἀπό τήν ἔκφραση $p(x,y)$, προκύπτουν ἐπίσης οἱ προτάσεις

$p(9,3)$: *ὁ 9 εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 3,* (ἀληθής)

$p(9,11)$: *ὁ 9 εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 11* (ψευδής)

. . . .

Μιά τέτοια ἔκφραση $p(x,y)$ λέγεται **προτασιακός τύπος** (εἴτε **ἀνοικτή πρόταση** εἴτε **συνθήκη) μέ δυό μεταβλητές.**

Ἀπό ἕναν προτασιακό τύπο μέ δυό μεταβλητές προκύπτει μιά πρόταση, μόνο ὅταν τά x καί y ἀντικατασταθοῦν ἀντίστοιχα, μέ ὁρισμένα στοιχεῖα τῶν συνόλων A καί B, δηλ. μόνο ὅταν τό ζεῦγος (x,y) τῶν μεταβλητῶν του ἀντικατασταθεῖ μέ ὁρισμένο ζεῦγος τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $A \times B$. Γι' αὐτό ἀκριβῶς **σύνολο ἀναφορᾶς τοῦ προτασιακοῦ τύπου $p(x,y)$ εἶναι τό καρτεσιανό γινόμενο AxB.**

Σύνολο ἀλήθειας ἑνός προτασιακοῦ τύπου

4.4 Ἄς πάρουμε πάλι τόν προτασιακό τύπο τῆς μεταβλητῆς x

p(x) : ὁ x εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 7

μέ σύνολο ἀναφορᾶς τό $A = \{1, 2, 4, 9, 11\}$. Ὁ προτασιακός αὐτός τύπος δίνει ἀληθεῖς προτάσεις, μόνο ὅταν τό x ἀντικατασταθεῖ μέ τά στοιχεῖα 9 καί 11 τοῦ συνόλου A. Γι' αὐτό τό σύνολο $\mathbf{G = \{9, 11\}}$, πού εἶναι ὑποσύνολο τοῦ A, λέγεται **σύνολο ἀλήθειας** τοῦ παραπάνω προτασιακοῦ τύπου καί γράφεται ἀκόμη

$$\mathbf{G = \{x \in A : \text{ὁ } x \text{ μεγαλύτερος ἀπό τόν } 7\}}$$

Γενικά:

Σύνολο ἀλήθειας ἑνός προτασιακοῦ τύπου p(x) λέγεται τό σύνολο G, πού ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς A, γιά τά ὁποῖα προκύπτουν ἀπό τόν p(x) ἀληθεῖς προτάσεις.

Τό σύνολο ἀλήθειας G ἑνός προτασιακοῦ τύπου $p(x)$ γράφεται ἀκόμη

$$\mathbf{G = \{x \in A : p(x)\}}$$

Βλέπουμε δηλ. ὅτι **κάθε προτασιακός τύπος συνοδεύεται ἀπό δυό σύνολα:**

- **Τό σύνολο ἀναφορᾶς του A.**
- **Τό σύνολο ἀλήθειας του G** (πού εἶναι ὑποσύνολο τοῦ A).

Δέν ἀποκλείεται τό σύνολο ἀλήθειας G νά εἶναι τό ἴδιο τό A ἤ νά εἶναι τό κενό σύνολο ∅. Ἔτσι π.χ. ἄν ἔχουμε τόν προτασιακό τύπο

p(x) : ὁ x διαιρεῖ τόν 20

καί ὀνομάσουμε A τό σύνολο ἀναφορᾶς του, παρατηροῦμε ὅτι:

Ἂν εἶναι $A = \{3, 8, 11, 17\}$, τότε εἶναι
$G = \{x \in A : x$ διαιρεῖ τόν $20\} = \varnothing$

Ἂν εἶναι $A = \{2, 4, 5, 10\}$, τότε εἶναι
$G = \{x \in A : x$ διαιρεῖ τόν $20\} = \{2, 4, 5, 10\} = A$

Ἂν εἶναι $A = \{2, 3, 5, 8, 10, 11\}$, τότε εἶναι
$G = \{x \in A : x$ διαιρεῖ τόν $20\} = \{2,5,10\} \subset A$

4.5. Ἄς πάρουμε τώρα ἕναν προτασιακό τύπο μέ δυό μεταβλητές x καί y, π.χ. τόν

$$p(x,y) : \quad \text{ὁ } x \text{ μεγαλύτερος ἀπό τόν } y,$$

καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ μεταβλητή x παίρνει τιμές ἀπό τό $A = \{1, 2, 9, 11\}$ καί ἡ μεταβλητή y παίρνει τιμές ἀπό τό $B = \{1, 3, 9, 10, 17\}$. Τότε σύνολο ἀναφορᾶς τοῦ προτασιακοῦ τύπου p(x,y) εἶναι, ὅπως εἴπαμε, τό καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$. Παρατηροῦμε ὅτι μόνο τά ζεύγη

$$(2,1), (9,1), (9,3), (11,1), (11,3), (11,9), (11,10)$$

τοῦ $A \times B$ δίνουν ἀληθεῖς προτάσεις. Τά ζεύγη αὐτά ἀποτελοῦν ἕνα σύνολο, ὑποσύνολο τοῦ $A \times B$, τό ὁποῖο λέγεται **σύνολο ἀλήθειας** τοῦ προτασιακοῦ τύπου p(x,y). Γενικά:

> Σύνολο ἀλήθειας ἑνός προτασιακοῦ τύπου p(x,y) λέγεται τό σύνολο, πού ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά ζεύγη τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς $A \times B$, γιά τά ὁποῖα προκύπτουν ἀληθεῖς προτάσεις ἀπό τόν p(x,y).

Τό σύνολο ἀλήθειας ἑνός προτασιακοῦ τύπου p(x,y) σημειώνεται

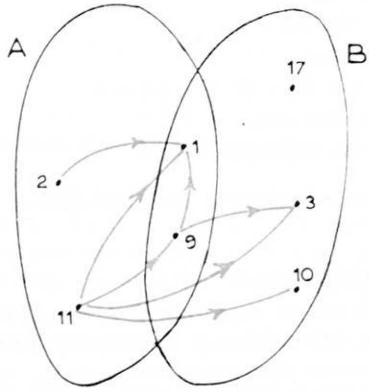
$$\mathbf{G = \{(x,y) \in AxB : p(x,y)\}}$$

Ἔτσι π.χ. τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ παραπάνω προτασιακοῦ τύπου γράφεται καί

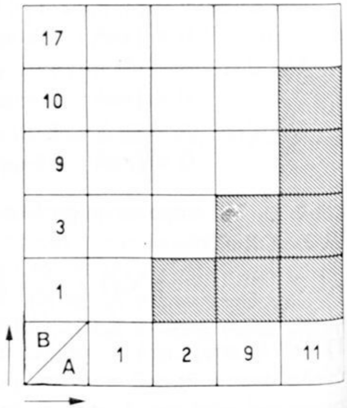
$$G = \{(x,y) \in A \times B : \underbrace{\text{ὁ } x \text{ εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν } y}_{p(x,y)}\}$$

Ἀφοῦ τό σύνολο ἀλήθειας ἑνός προτασιακοῦ τύπου p(x,y) εἶναι ὑποσύνολο τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $A \times B$, μποροῦμε νά τό παραστήσουμε ὅπως καί τό καρτεσιανό γινόμενο.

Στό σχ. 1 ἔχουμε τό βελοειδές διάγραμμα, πού παριστάνει τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ προηγούμενου προτασιακοῦ τύπου p(x,y). Σημειώνουμε μέ βέλη μόνο τά ζεύγη τοῦ $A \times B$, πού ἀνήκουν στό σύνολο ἀλήθειας. Στό σχ. 2 ἔχουμε τόν πίνακα μέ διπλή εἴσοδο, πού παριστάνει ἐπίσης τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ p(x,y). Στόν πίνακα αὐτό «μαυρίσαμε» μόνο τά τε-



(σχ. 1)



(σχ. 2)

τράγωνα, στά ὁποῖα βρίσκονται τά ζεύγη τοῦ A × B, πού ἀνήκουν στό σύνολο ἀλήθειας τοῦ p(x,y).

Ἰσοδύναμοι προτασιακοί τύποι

4.6. Ἄς θεωρήσουμε δύο προτασιακούς τύπους μιᾶς μεταβλητῆς μέ τό ἴδιο σύνολο ἀναφορᾶς A = {1, 2, 4, 9, 11} π.χ.

p(x) : *ὁ x εἶναι μικρότερος ἀπό τό 7*

g(x) : *ὁ x εἶναι διαιρέτης τοῦ 8*

Εἶναι φανερό ὅτι ὁ p(x) ἔχει σύνολο ἀλήθειας τό {1,2,4}, ἀλλά καί ὁ g(x) ἔχει σύνολο ἀλήθειας τό ἴδιο. Ἔτσι οἱ δύο αὐτοί προτασιακοί τύποι ἔχουν ὄχι μόνο τό ἴδιο σύνολο ἀναφορᾶς, ἀλλά καί τό ἴδιο σύνολο ἀλήθειας. Οἱ προτασιακοί αὐτοί τύποι λέγονται **ἰσοδύναμοι**. Γενικά:

> Δύο προτασιακοί τύποι λέγονται ἰσοδύναμοι, ὅταν ἔχουν τό ἴδιο σύνολο ἀναφορᾶς καί τό ἴδιο σύνολο ἀλήθειας.

Γιά νά δηλώσουμε ὅτι δυό προτασιακοί τύποι p(x) καί g(x) εἶναι ἰσοδύναμοι, γράφουμε

$$p(x) \Leftrightarrow g(x).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω ἐκφράσεις εἶναι λογικές προτάσεις καί ποιές ὄχι.
   α. Ὁ 5 εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τό 10.

β. Ἄνοιξε τήν πόρτα.
γ. Ὁ 10 εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.
δ. Σήμερα μπορεῖ νά ἐξεταστῶ στά μαθηματικά.
ε. Ὁ Σεφέρης πῆρε τό βραβεῖο Nobel.

2. Μέ σύνολο ἀναφορᾶς τό $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, βρεῖτε τό σύνολο ἀλήθειας τῶν προτασιακῶν τύπων:
α. $p(x)$: ὁ x διαιρεῖ τό 12
β. $g(x) : x+2=6$
γ. $\sigma(x) : 2x+1=9$
δ. $\tau(x): 2x < 10$
Ποιοί προτασιακοί τύποι εἶναι ἰσοδύναμοι;

3. Ἄν οἱ μεταβλητές x καί y «διατρέχουν» τά σύνολα $A=\{3,2,5\}$ καί $B=\{5,8,6\}$ ἀντιστοίχως, νά βρεῖτε τό σύνολο ἀλήθειας τῶν προτασιακῶν τύπων:
α. $p(x,y)$: ὁ x διαιρεῖ τόν y
β. $g(x,y): x+y=10$

4. Οἱ μεταβλητές x καί y διατρέχουν ἀντίστοιχως τά σύνολα
A = {Ἀθήνα (Α), Ρώμη (Ρ), Λονδίνο (Λ), Τόκιο (Τ)} καί
B = {Ἑλλάδα (Ε), Ἰαπωνία (Ι), Γαλλία (Γ)}.
Νά βρεῖτε τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ προτασιακοῦ τύπου
$p(x,y)$: ἡ πόλη x εἶναι πρωτεύουσα τοῦ κράτους ψ.

5. Ἡ ἔκφραση «ὁ x εἶναι διαιρέτης τοῦ 20» εἶναι προτασιακός τύπος μέ μιά μεταβλητή; Ἄν ὄχι, συμπληρῶστε την καί βρεῖτε τό σύνολο ἀλήθειας.

6. Ἡ ἔκφραση «ὁ x εἶναι διπλάσιος ἀπό τόν y» εἶναι προτασιακός τύπος μέ δυό μεταβλητές; Ἄν ὄχι, συμπληρῶστε την καί βρεῖτε τό σύνολο ἀλήθειας.

7. Μέ σύνολο ἀναφορᾶς τό $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ βρεῖτε δυό ἰσοδύναμους προτασιακούς τύπους μέ μιά μεταβλητή.

8. Μέ σύνολο ἀναφορᾶς τό $A = \{2, 4, 8\}$ βρεῖτε ἕναν προτασιακό τύπο μιᾶς μεταβλητῆς, πού νά ἔχει σύνολο ἀλήθειας:
α. Τό Α β. Τό κενό σύνολο. γ. Ἕνα γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ Α.

Διμελής σχέση ἀπό σύνολο Α σέ σύνολο Β

4.7. Κάθε προτασιακός τύπος $p(x,y)$ μέ δυό μεταβλητές, στόν ὁποῖο ἡ μεταβλητή x παίρνει τιμές σ' ἕνα σύνολο Α καί ἡ y σ' ἕνα σύνολο Β, συνδέει γενικά ὁρισμένα στοιχεῖα τοῦ Α μέ ὁρισμένα στοιχεῖα τοῦ Β. Ἄς θεωρήσουμε π.χ. τά δυό σύνολα

A = {Ἀθήνα(=α), Θεσσαλονίκη(=θ), Σόφια(=σ), Βουκουρέστι(=β), Μόναχο(=μ), Ρώμη(=ρ)}

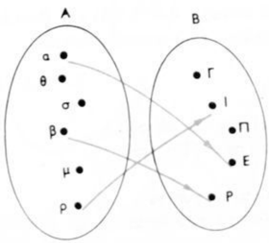
B = {Γερμανία(=Γ), Ἰταλία(=Ι), Πολωνία(=Π), Ἑλλάδα(=Ε), Ρουμανία(=Ρ)}

καί τόν προτασιακό τύπο

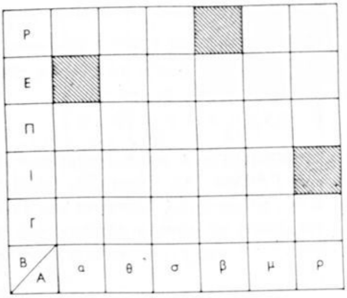
$p(x,y)$: *ἡ πόλη x εἶναι πρωτεύουσα τοῦ κράτους y*

μέ σύνολο ἀναφορᾶς τό $A \times B$.

Τά ζεύγη (α,Ε), (β,Ρ), (ρ,Ι) ἀποτελοῦν τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἀλήθειας τοῦ p(x,y). Βλέπουμε λοιπόν ὅτι μέ τόν τύπο αὐτό τά στοιχεῖα α,β,ρ τοῦ συνόλου Α συνδέονται, ἀντίστοιχα, μέ τά στοιχεῖα Ε,Ρ,Ι τοῦ συνόλου Β. Στά σχ. 3 καί 4 δίνονται τό βελοειδές διάγραμμα καί ὁ πίνακας τοῦ συνόλου ἀλήθειας τοῦ προτασιακοῦ τύπου p(x,y).



(σχ. 3)

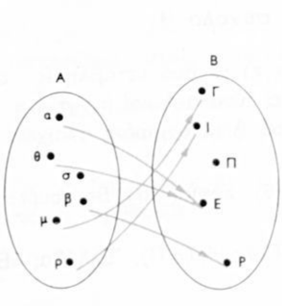


(σχ. 4)

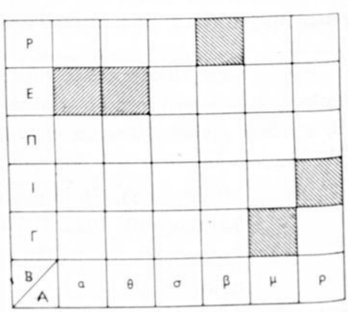
Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕναν ἄλλο προτασιακό τύπο μέ τό ἴδιο σύνολο ἀναφορᾶς Α × Β, π.χ. τόν

g(x,y) : *ἡ πόλη x ἀνήκει στό κράτος y.*

Αὐτός συνδέει τώρα ἄλλα στοιχεῖα τοῦ Α μέ ἄλλα στοιχεῖα τοῦ Β



(σχ. 5)



(σχ. 6)

καί συγκεκριμένα συνδέει τά α,θ,β,μ,ρ τοῦ Α μέ τά Ε,Ε,Ρ,Γ,Ι ἀντιστοίχως τοῦ Β. Σχηματίζονται ἔτσι τά διατεταγμένα ζεύγη

(α,Ε), (θ,Ε), (β,Ρ), (μ,Γ), (ρ,Ι)

τά ὁποῖα ἀποτελοῦν τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ g(x,y). Στά σχ. 5 καί 6 δίνονται τό βελοειδές διάγραμμα καί ὁ πίνακας τοῦ συνόλου ἀλήθειας τοῦ τύπου g(x,y).

Γενικά λοιπόν κάθε προτασιακός τύπος p(x,y) μέ σύνολο ἀναφορᾶς Α × Β συνδέει ὁρισμένα στοιχεῖα τοῦ συνόλου Α μέ ὁρισμένα στοιχεῖα τοῦ συνόλου Β καί λέμε ὅτι ὁρίζει μιά **διμελή σχέση ἀπό τό Α στό Β**. Ἔτσι ὁ ὅρος «σχέση» εἶναι μιά γενική ἔννοια, πού δηλώνει τρόπο συνδέσεως ὁρισμένων στοιχείων τοῦ Α μέ ὁρισμένα στοιχεῖα τοῦ Β. Λέγοντας λοιπόν ὅτι *τά στοιχεῖα α ∈ Α καί β ∈ Β ἱκανοποιοῦν τή «σχέση»*, ἐννοοῦμε ὅτι ἡ πρόταση p(α,β) εἶναι ἀληθής, δηλαδή ὅτι τό ζεῦγος (α,β) ἀνήκει στό σύνολο ἀλήθειας G τοῦ p(x, 9).

Τό σύνολο ἀλήθειας G τοῦ προτασιακοῦ τύπου λέγεται πιό ἁπλά **γράφημα** τῆς διμελοῦς σχέσεως.

Διμελής σχέση σέ ἕνα σύνολο Α

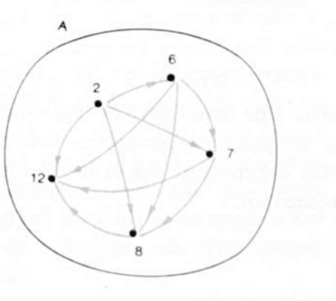
4.8. Σ' ἕναν προτασιακό τύπο p(x,y) μπορεῖ οἱ δυό μεταβλητές του x καί y νά παίρνουν τιμές ἀπό τό ἴδιο σύνολο Α, ὁπότε ὁ τύπος θά ἔχει σύνολο ἀναφορᾶς τό Α × Α. Ἕνας τέτοιος προτασιακός τύπος εἶναι π.χ. ὁ

p(x,y) : ὁ x εἶναι μικρότερος ἀπό τόν y,

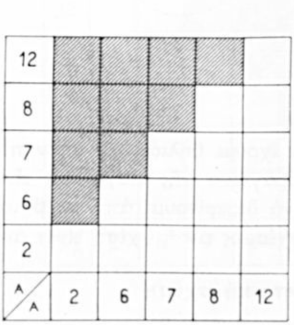
ὅταν τά x καί y παίρνουν τιμές ἀπό τό σύνολο Α = {2,6,7,8,12}. Ἡ διμελής σχέση, πού ὁρίζεται ἀπό ἕναν τέτοιο προτασιακό τύπο, λέγεται **διμελής σχέση στό σύνολο Α** καί ἔχει γράφημα τό

G = {(2,6), (2,7), (2,8), (2,12), (6,7), (6,8), (6,12), (7,8), (7,12),(8,12)}.

Τό σχ. 7 παριστάνει τό βελοειδές διάγραμμα τῆς σχέσεως αὐτῆς, ἐνῶ τό σχ. 8 εἶναι ὁ πίνακάς της.



(σχ. 7)



(σχ. 8)

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ πίνακας τῆς σχέσεως αὐτῆς εἶναι τώρα «τετραγωνικός», δηλ. ἔχει τόσες ὁριζόντιες λωρίδες ὅσες καί κατακόρυφες.

Ἀνακλαστική σχέση

4.9. Ἄς θεωρήσουμε πάλι τό σύνολο

$$A = \{2,6,7,8,12\}$$

καί τή διμελή σχέση στό A, πού ὁρίζεται μέ τόν προτασιακό τύπο

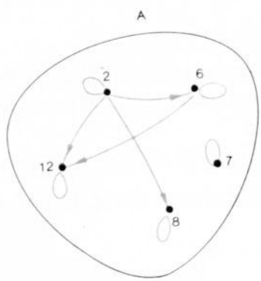
$$p(x,y) \ : \qquad \text{ὁ } x \text{ διαιρεῖ τόν } y$$

καί ἔχει γράφημα τό σύνολο

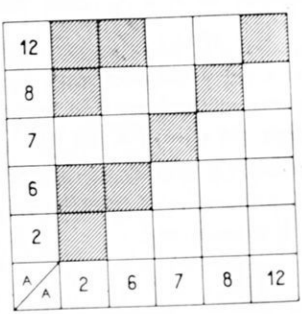
$$G = \{\mathbf{(2,2)}, (2,6), (2,8), (2,12), \mathbf{(6,6)}, (6,12), \mathbf{(7,7)}, \mathbf{(8,8)}, \mathbf{(12,12)}\}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι τό σύνολο G **περιέχει ὅλα τά ζεύγη μέ ἴδια στοιχεῖα, πού μποροῦμε νά πάρουμε ἀπό τό σύνολο A.** Μιά τέτοια σχέση λέγεται **ἀνακλαστική**.

Στό βελοειδές διάγραμμα μιᾶς ἀνακλαστικῆς σχέσεως σέ κάθε στοιχεῖο



(σχ. 9)



(σχ. 10)

τοῦ A ἔχουμε θηλιά, ἐνῶ στόν πίνακα μιᾶς ἀνακλαστικῆς σχέσεως ὅλα τά τετράγωνα τῆς διαγωνίου εἶναι μαυρισμένα. Μποροῦμε λοιπόν εὔκολα νά διακρίνουμε ἀπό τό βελοειδές διάγραμμα εἴτε ἀπό τόν πίνακα μιᾶς σχέσεως ἄν ἡ σχέση εἶναι ἀνακλαστική.

Συμμετρική σχέση

4.10. Ἄς θεωρήσουμε τώρα τό ἴδιο σύνολο

$$A = \{2, 6, 7, 8, 12\}$$

καί τή διμελή σχέση στό A, πού ὁρίζεται ἀπό τόν προτασιακό τύπο

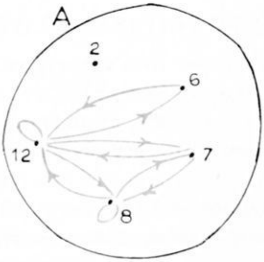
$p(x,y)$: *Οἱ x καί y ἔχουν ἄθροισμα μεγαλύτερο ἀπό 14* $(x+y>14)$

καί ἔχει γράφημα τό σύνολο

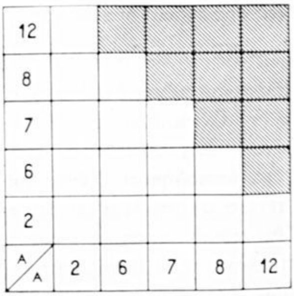
$G = \{(6,12), (12,6), (7,8), (8,7), (8,8), (7,12), (12,7), (8,12), (12,8), (12,12)\}$.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι, **ἄν ἕνα ὁποιοδήποτε ζεῦγος (α,β) ἀνήκει στό G, τότε καί τό «ἀνάστροφο» ζεῦγος (β,α) ἀνήκει ἐπίσης στόG.** Μιά τέτοια διμελής σχέση λέγεται **συμμετρική.**

Στό βελοειδές διάγραμμα μιᾶς συμμετρικῆς σχέσεως, ἄν δυό στοιχεῖα



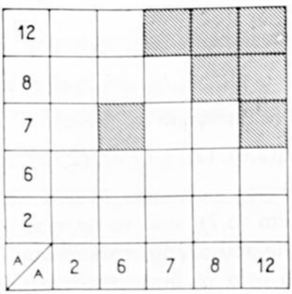
(σχ. 11)



(σχ. 12)

τοῦ A συνδέονται μέ μιά γραμμή, θά συνδέονται καί μέ μιά δεύτερη γραμμή, πού ἔχει ἀντίθετο βέλος. Ἐπίσης στόν πίνακα μιᾶς συμμετρικῆς σχέσεως ὅλα τά μαυρισμένα τετράγωνα (πού δέ βρίσκονται στή διαγώνιό του) χωρίζονται σέ ζεύγη πού τά μέλη τους εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τή διαγώνιο.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι μιά διμελής σχέση στό σύνολο A εἶναι συμμετρική, ὅταν γιά κάθε ζεῦγος (α,β) τοῦ G πού σχηματίζεται ἀπό διαφορετικά στοιχεῖα τοῦ A, καί τό ἀνάστροφο ζεῦγος (β,α) ἀνήκει στό G. Ἔτσι, **ἄν τό G περιέχει ἔστω καί ἕνα ζεῦγος (α,β) μέ $\alpha \neq \beta$ δίχως νά περιέχει καί τό (β,α), ἡ σχέση δέν εἶναι συμμετρική.**



(σχ. 13)

Στό σχ. 13 βλέπουμε τόν πίνακα μιᾶς διμελοῦς σχέσεως στό σύνολο Α, ἡ ὁποία δέν εἶναι συμμετρική, γιατί τό σύνολο G περιέχει τό ζεῦγος (6,7) δίχως νά περιέχει τό (7,6). Βέβαια αὐτή ἡ ὄχι συμμετρική σχέση περιέχει καί ἀνάστροφα ζεύγη, ὅπως π.χ. τά (7,12) καί (12,7).

Ἀντισυμμετρική σχέση

4.11. Ἄς θεωρήσουμε πάλι στό ἴδιο σύνολο

$$A = \{2, 6, 7, 8, 12\}$$

μιά διμελή σχέση, πού ὁρίζεται ἀπό τόν προτασιακό τύπο

$$p(x,y): \quad \text{ὁ } x \text{ διαιρεῖ τόν } y,$$

καί ἔχει γράφημα τό σύνολο

$$G = \{(2,2), (2,6), (2,8), (2,12), (6,6), (6,12), (7,7), (8,8), (12,12)\}.$$

Βλέπουμε τώρα ὅτι ἡ σχέση αὐτή ὄχι μόνο δέν εἶναι συμμετρική, γιατί π.χ. τό G περιέχει τό (2,6) δίχως νά περιέχει τό (6,2), ἀλλά στό σύνολο G δέν ὑπάρχουν καθόλου ἀνάστροφα ζεύγη. Δηλαδή, **ἄν (α,β) μέ α≠β εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε ζεῦγος τοῦ G, τό ζεῦγος (β,α) δέν ἀνήκει στό G.** Μιά τέτοια σχέση λέγεται **ἀντισυμμετρική.**

Ἄν παρατηρήσουμε στήν § 4.9 τό βελοειδές διάγραμμα (σχ. 9) καί τόν πίνακα (σχ. 10) τῆς παραπάνω διμελοῦς σχέσεως, βλέπουμε ὅτι στό βελοειδές διάγραμμα δέν ὑπάρχουν γραμμές μέ τά ἴδια ἄκρα καί ἀντίθετα βέλη, ἐνῶ στόν πίνακα δέν ὑπάρχουν μαυρισμένα τετράγωνα συμμετρικά ὡς πρός τή διαγώνιο.

Σχέση μεταβατική

4.12 Στό ἴδιο σύνολο

$$A = \{2,6,7,8,12\}$$

παίρνουμε μιά διμελή σχέση μέ τόν προτασιακό τύπο

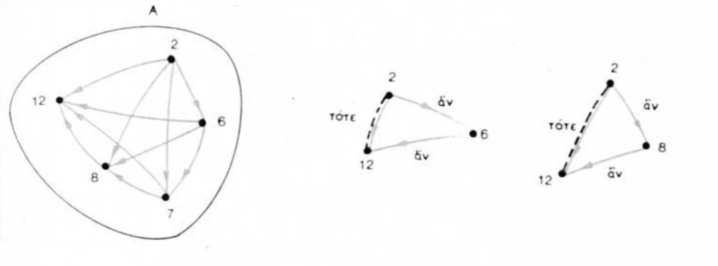
$$p(x,y): \quad \text{ὁ } x \text{ εἶναι μικρότερος ἀπό τόν } y \qquad (x<y),$$

πού ἔχει γράφημα τό σύνολο

$$G = \{(2,6), (2,7), (2,8), (2,12), (6,7), (6,8), (6,12), (7,8), (7,12), (8,12)\}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι, ὅταν ὑπάρχουν στό G δυό ζεύγη, ὅπως π.χ. τά (2,6) καί (6,7), πού τό δεύτερο στοιχεῖο τοῦ ἑνός εἶναι ἴδιο μέ τό πρῶτο στοιχεῖο τοῦ ἄλλου, τότε ὑπάρχει στό G καί τό ζεῦγος (2,7), πού σχηματίζεται ἀπό τά διαφορετικά στοιχεῖα τῶν δύο ζευγῶν. Δηλαδή τό στοιχεῖο 6 παίζει τό ρόλο μιᾶς «γέφυρας», γιά νά «μεταβοῦμε» ἀπό τά δυό ζεύγη (2,6) καί (6,7) στό ζεῦγος (2,7). Τό ἴδιο συμβαίνει καί μέ ὅλα τά ἄλλα ἀνάλογα ζεύγη. Ἔτσι π.χ. στό G ἀνήκουν ὄχι μόνο τά ζεύγη (2,8) καί (8,12), ἀλλά καί τό (2,12). Γενικά λοιπόν ἡ διμελής αὐτή σχέση εἶναι τέτοια ὥστε, **ὅταν τό G περιέχει δυό ζεύγη τῆς μορφῆς (α,β) καί (β,γ), περιέχει ὁπωσδήποτε καί τό (α, γ).** Μιά τέτοια σχέση λέγεται **μεταβατική.**

Ἄν προσέξουμε τό βελοειδές διάγραμμα μιᾶς μεταβατικῆς σχέσεως,



(σχ. 14)

βλέπουμε ὅτι γιά κάθε δυό «διαδοχικές» γραμμές, πού ἔχουν βέλη τῆς ἴδιας φορᾶς, ὑπάρχει καί μιά τρίτη γραμμή, πού ἔχει βέλος τῆς ἴδιας φορᾶς καί ἄκρα τά διαφορετικά ἄκρα τῶν δυό γραμμῶν. Μποροῦμε λοιπόν εὔκολα ἀπό τό γράφημα μιᾶς σχέσεως νά καταλάβουμε ἄν ἡ σχέση εἶναι μεταβατική, ἐνῶ ἀπό τόν πίνακα τῆς σχέσεως δέν μποροῦμε νά τό καταλάβουμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Τό παρακάτω σύνολο A ἔχει στοιχεῖα τά μέλη μιᾶς συντροφιᾶς**

A = {Νίκος (N), Σταῦρος (Σ), Σοφία(Σο), Γιῶργος(Γ), Ἄννα(A), Ἠρώ (H), Ἑλένη(E)}.

Νά βρεθεῖ τό βελοειδές διάγραμμα καί ὁ πίνακας τῆς διμελοῦς σχέσεως, πού ὁρίζεται ἀπό τόν προτασιακό τύπο

p(x,y): Τό ὄνομα τοῦ (τῆς) x τελειώνει στό γράμμα πού ἀρχίζει τό ὄνομα τοῦ (τῆς) y.
Νά ἐξετασθεῖ ἀπό τό βελοειδές διάγραμμα ἤ τόν πίνακά της ἄν ἡ σχέση εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική, ἀντισυμμετρική, μεταβατική.

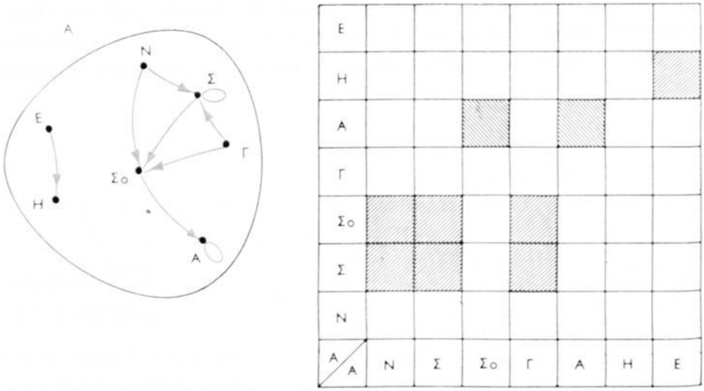
Λύση.

— Ἡ σχέση δέν εἶναι ἀνακλαστική, γιατί δέν ὑπάρχουν θηλιές σέ ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ A.

— Ἡ σχέση δέν εἶναι συμμετρική, γιατί ὑπάρχουν μαυρισμένα τετράγωνα, πού τό συμμετρικό τους ὡς πρός τή διαγώνιο δέν εἶναι μαυρισμένο.

— Ἡ σχέση εἶναι ἀντισυμμετρική, γιατί δέν ὑπάρχουν μαυρισμένα τετράγωνα, πού νά εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τή διαγώνιο.

— Ἡ σχέση δέν εἶναι μεταβατική, γιατί ὑπάρχουν τά ζεύγη (Γ, $Σ_0$), ($Σ_0$, A) καί δέν ὑπάρχει τό ζεῦγος (Γ,Α). Αὐτό φαίνεται καί στό διάγραμμα τῆς σχέσεως στό ὁποῖο ὑπάρχουν οἱ «διαδοχικές» γραμμές $Γ\Sigma_0$, $\Sigma_0 A$ καί δέν ὑπάρχει ἡ ΓΑ.



(σχ. 15)

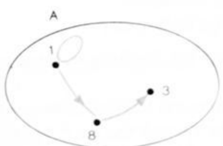
2. **Τό παρακάτω βελοειδές διάγραμμα παριστάνει διμελή σχέση σέ σύνολο Α. Νά γραφοῦν τό σύνολο Α, τό γράφημα G καί νά συμπληρωθεῖ ὁ πίνακας τῆς σχέσεως. Ἡ σχέση εἶναι μεταβατική; Εἶναι ἀντισυμμετρική;**

Λύση. Σύνολο Α εἶναι τό

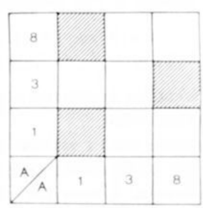
$$A = \{1, 3, 8\},$$

ἐνῶ τό γράφημα τῆς σχέσεως εἶναι $G = \{(1,1), (1,8), (8,3)\}$.

Πίνακας τῆς σχέσεως εἶναι τό σχ. 17. Ἡ σχέση δέν εἶναι μεταβατική, γιατί ὑπάρχουν τά ζεύγη (1,8), (8,3) καί δέν ὑπάρχει τό (1,3).



(σχ. 16)



(σχ. 17)

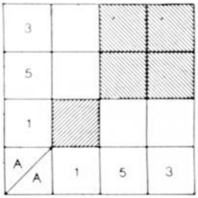
Ἡ σχέση εἶναι ἀντισυμμετρική, γιατί δέν ὑπάρχουν μαυρισμένα τετράγωνα συμμετρικά ὡς πρός τή διαγώνιο ἤ γιατί δέν ἀνήκουν στό G «ἀνάστροφα» ζεύγη.

3. **Ὁ παρακάτω πίνακας παριστάνει μιά διμελή σχέση σέ σύνολο Α. Νά γραφοῦν τό σύνολο Α, τό σύνολο G καί νά γίνει τό βελοειδές διάγραμμα τῆς σχέσεως. Ἡ σχέση αὐτή εἶναι ἀνακλαστική; Εἶναι συμμετρική;**

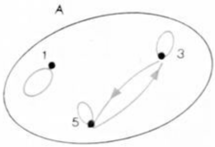
Λύση. Σύνολο Α είναι τό

$$A = \{1,5,3\},$$

ἐνῶ τό γράφημα τῆς σχέσεως είναι $G = \{(1,1), (5,5), (5,3), (3,5), (3,3)\}$ καί παριστάνεται ἀπό τό σχ. 19.
Ἡ σχέση εἶναι ἀνακλαστική, γιατί ὑπάρχουν θηλιές σέ ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ Α. Εἶναι ἐπίσης συμμετρική, γιατί τά μαυρισμένα τετράγωνα εἶναι συμμετρικά ὡς πρός



(σχ. 18)



(σχ. 19)

τή διαγώνιο ἤ γιατί στό βελοειδές διάγραμμα τῆς σχέσεως τά στοιχεῖα 5 καί 3 συνδέονται μέ γραμμές πού ἔχουν ἀντίθετα βέλη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

9. Δίνονται τά σύνολα
Α = {Καβάλλα (Κ), Ἄρτα (Α), Δράμα (Δ), Χανιά (Χ), Πάτρα (Π), Ξάνθη (Ξ)}
Β = {Θράκη (Θ), Κρήτη (Κρ.), Ἤπειρος (Η), Μακεδονία (Μ)}.
Ὁ προτασιακός τύπος $p(x,y)$: «ἡ πόλη x βρίσκεται στήν περιοχή ψ» ὁρίζει μιά διμελή σχέση ἀπό τό Α στό Β. Νά βρεθεῖ τό γράφημα G τῆς σχέσεως αὐτῆς καί νά γίνει ὁ πίνακάς της.

10. Δίνονται τά σύνολα
Α = {Ἔντισον, Μαρκόνι, Μπέλ, Στέφενσον},
Β = {Ἀσύρματος, τηλέφωνο, φωνογράφος}.
Ὁ προτασιακός τύπος $p(x,y)$: «ὁ x ἐφεῦρε τό y» ὁρίζει μιά διμελή σχέση ἀπό τό Α στό Β. Νά γίνει τό γράφημα καί ὁ πίνακάς της.

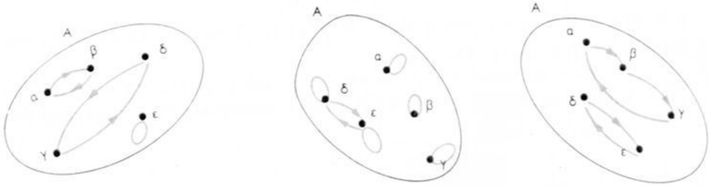
11. Δίνονται τά σύνολα
Α = {Παλαμᾶς, Παπαδιαμάντης, Δροσίνης, Ρίτσος, Σολωμός, Καζαντζάκης, Βενέζης}
Β = {Φόνισσα, Ἐπιτάφιος, Δωδεκάλογος τοῦ γύφτου, Ζορμπᾶς, Ἐθνικός Ὕμνος, Γαλήνη}.
Ὁ προτασιακός τύπος $p(x,y)$: «ὁ x ἔγραψε τό ἔργο ψ» ὁρίζει μιά διμελή σχέση ἀπό τό Α στό Β. Νά βρεθεῖ τό γράφημά της.

12. Στά σύνολα $A = \{2, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{5, 9, 10, 11, 15\}$ ὁ προτασιακός τύπος $p(x,y)$: $y = x + 3$ ὁρίζει μιά διμελή σχέση. Νά βρεῖτε τό γράφημά της καί νά τό παραστήσετε μ' ἕναν πίνακα μέ διπλή εἴσοδο.

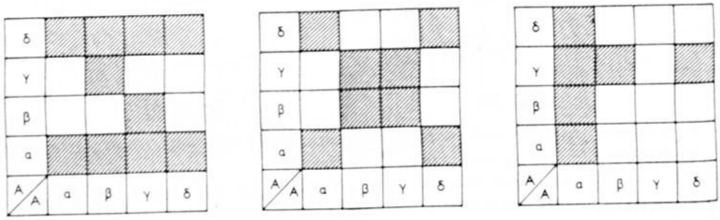
13. Στό σύνολο $A = \{\alpha, \beta\}$ ἔχουμε ὁρίσει μιά διμελή σχέση, πού τό γράφημά της εἶναι $G = \{(\alpha,\beta), (\beta,\alpha)\}$. Ἐξηγῆστε γιατί ἡ σχέση δέν εἶναι μεταβατική.

14. Τά παρακάτω σχήματα εἶναι τά βελοειδή διαγράμματα διάφορων διμελῶν σχέ-

σεων. Βρεῖτε τά γραφήματά τους καί ἐξετάστε ποιές ἀπ' αὐτές εἶναι ἀνακλαστικές, συμμετρικές, ἀντισυμμετρικές, μεταβατικές .



15. Τά παρακάτω σχήματα εἶναι πίνακες διμελῶν σχέσεων. Βρεῖτε τά γραφήματά τους καί ἐξετάστε ποιές εἶναι ἀνακλαστικές καί ποιές ἀντισυμμετρικές.



16. Στό σύνολο $A = \{1,2,3,4\}$ ἔχουμε ὁρίσει διάφορες διμελεῖς σχέσεις, πού ἔχουν γραφήματα:

$G_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (3,2), (3,4)\}$.

$G_2 = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$, $G_3 = \{(1,4), (1,2), (1,3), (1,1), (2,1)\}$

Σχεδιάστε τό βελοειδές διάγραμμα ἤ τόν πίνακά τους καί βρεῖτε ποιές ἀπ' αὐτές εἶναι ἀνακλαστικές, συμμετρικές, ἀντισυμμετρικές, μεταβατικές.

Σχέση ἰσοδυναμίας

4.13. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα σύνολο μαθητῶν, π.χ. τό

Ε = {Πέτρος (Π), Ἀπόστολος (Α), Σωτήρης (Σ), Πάνος (Πα), Σπύρος (Σπ), Σταῦρος (Στ)}

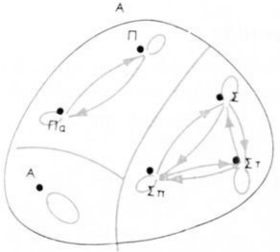
καί τή διμελή σχέση, πού ὁρίζεται ἀπό τόν προτασιακό τύπο

$p(x,y)$: *ὁ x ἔχει τό ἴδιο ἀρχικό γράμμα μέ τόν y.*

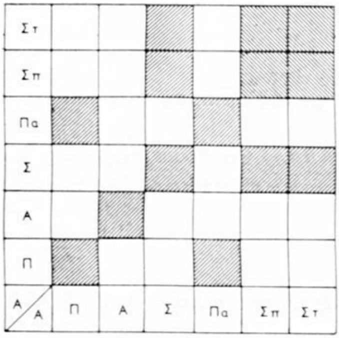
Ἡ σχέση αὐτή ἔχει γράφημα τό

G = {(Π,Π), (Πα,Πα), (Α,Α), (Σ,Σ), (Σ,Σπ), (Σ, Στ), (Πα,Π), (Π,Πα), (Σπ,Σ), (Στ,Σ), (Σπ,Σπ), (Σπ,Στ), (Στ, Σπ), (Στ, Στ)}.

Τό βελοειδές διάγραμμα καί ὁ πίνακάς της δίνονται στά παρακάτω σχήματα.



(σχ. 20)



(σχ. 21)

Παρατηροῦμε ἀπό τό βελοειδές διάγραμμά της ὅτι ἡ σχέση αὐτή εἶναι

- **ἀνακλαστική,** γιατί περιέχει ὅλα τά ζεύγη μέ ἴδια στοιχεῖα,
- **συμμετρική,** γιατί ὅταν περιέχει ἕνα ζεῦγος (α,β) περιέχει καί τό ἀνάστροφό του (β,α),
- **μεταβατική,** γιατί ὅταν περιέχει δυό ζεύγη τῆς μορφῆς (α,β) καί (β,γ) περιέχει καί τό (α,γ).

Μιά τέτοια σχέση λέγεται **σχέση ἰσοδυναμίας** ἤ **ἰσοδυναμία** καί τότε ἀντί νά λέμε ὅτι τά στοιχεῖα x καί y τοῦ Ε «ἱκανοποιοῦν» τή σχέση λέμε ἁπλά ὅτι **«τά x καί y εἶναι ἰσοδύναμα»** καί γράφουμε

$$x \sim y \quad \text{εἴτε} \quad x \equiv y$$

Γενικά λοιπόν :

> Μιά διμελής σχέση στό σύνολο Α εἶναι «ἰσοδυναμία» ὅταν εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική καί μεταβατική.

Παρατηροῦμε ὅτι ὑπάρχουν ὑποσύνολα τοῦ Ε πού τά στοιχεῖα τους εἶναι *«ἰσοδύναμα»*. **Κάθε ὑποσύνολο τοῦ Ε πού ἀποτελεῖται ἀπό στοιχεῖα ἰσοδύναμα μεταξύ τους λέγεται κλάση ἰσοδυναμίας.** Ἔτσι π.χ. στήν παραπάνω ἰσοδυναμία ἔχουμε τίς κλάσεις ἰσοδυναμίας

{Σ, Σπ, Στ}, {Π,Πα}, {Α}.

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας εἶναι σύνολα ξένα μεταξύ τους, πού ἔχουν ἕνωση τό σύνολο Ε. Ἄν πάρουμε ἕνα ὁποιοδήποτε στοιχεῖο τοῦ συνόλου Ε, αὐτό θά ἀνήκει σέ μιά μόνο κλάση ἰσοδυναμίας καί μάλιστα θά προσδιορίζει έντελῶς τήν κλάση αὐτή, ἀφοῦ ὅλα τά στοιχεῖα της θά εἶναι ἰσοδύναμά του. Ἔτσι λοιπόν μιά ὁποιαδήποτε κλάση καθορίζεται πλήρως, ἤ ὅπως λέμε «ἀντιπροσωπεύεται», μόνο ἀπό ἕνα στοιχεῖο της.

Ὁ ρητός ἀριθμός σάν κλάση ἰσοδυναμίας

4.14. Θά δοῦμε τώρα μιά βασική ἰσοδυναμία στό σύνολο A τῶν σχετικῶν κλασμάτων. Ἄν θεωρήσουμε τόν προτασιακό τύπο

Τά σχετικά κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ *καί* $\frac{\gamma}{\delta}$ *εἶναι ἴσα,*

ὁρίζεται στό σύνολο A μιά διμελής σχέση, πού τό γράφημά της G ἔχει στοιχεῖα ὅλα τά ζεύγη $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}\right)$ τῶν ἴσων κλασμάτων, π.χ. τό $\left(\frac{3}{4}, \frac{6}{8}\right)$. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ σχέση αὐτή εἶναι

- **ἀνακλαστική,** γιατί τό G περιέχει κάθε ζεῦγος τῆς μορφῆς $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$,
- **συμμετρική,** γιατί ἄν τό G περιέχει ἕνα ζεῦγος $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}\right)$, θά περιέχει καί τό $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$, ἀφοῦ ἀπό τήν ἰσότητα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ προκύπτει καί ἡ $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta}$,
- **μεταβατική,** γιατί ἄν τό G περιέχει τά ζεύγη $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}\right)$ καί $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\varepsilon}{\zeta}\right)$, θά περιέχει καί τό ζεῦγος $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\varepsilon}{\zeta}\right)$, ἀφοῦ ἀπό τίς ἰσότητες $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ προκύπτει ἡ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$.

Ἐπομένως εἶναι μιά ἰσοδυναμία. Ὅλα τά σχετικά κλάσματα, πού εἶναι ἴσα μέ ἕνα ἀνάγωγο κλάσμα, ἀποτελοῦν μιά κλάση ἰσοδυναμίας. **Κάθε τέτοια κλάση ἰσοδυναμίας, πού ὁρίζεται ἀπό τόν παραπάνω προτασιακό τύπο, δηλαδή ἀπό τήν ἰσότητα τῶν σχετικῶν κλασμάτων, λέγεται «ρητός ἀριθμός».** Ἡ κλάση αὐτή ἰσοδυναμίας *«ἀντιπροσωπεύεται»* συνήθως μέ τό ἀνάγωγο κλάσμα της. Καταλαβαίνουμε λοιπόν, ὅτι, ὅταν στό κεφάλαιο 1 καλέσαμε «ρητό ἀριθμό» κάθε ἀνάγωγο κλάσμα, θεωρήσαμε ὅτι τό ἀνάγωγο κλάσμα *«ἀντιπροσώπευε»* τήν κλάση ἰσοδυναμίας του.

Ἔτσι π.χ. ὁ ρητός $\frac{3}{5}$ ἀντιπροσώπευε τήν κλάση

$$\left\{\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}, \ldots\right\}$$

ἐνῶ ὁ ρητός $-\frac{2}{3}$ ἀντιπροσώπευε τήν κλάση

$$\left\{-\frac{2}{3}, -\frac{4}{6}, -\frac{6}{9}, -\frac{8}{12}, \ldots\right\}$$

Σχέση διατάξεως

4.15. Ἄς θεωρήσουμε τό σύνολο

$$A = \{3, 6, 12, 15, 17\}$$

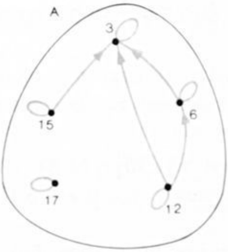
καί τή διμελή σχέση πού ὁρίζεται ἀπό τόν προτασιακό τύπο

$p(x,y)$: *ὁ x εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ y.*

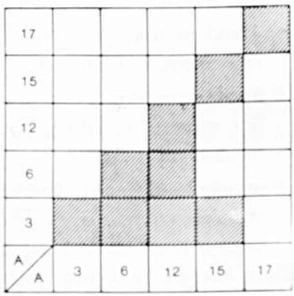
Γράφημα τῆς σχέσεως αὐτῆς εἶναι τό

$$G = \{(3,3), (6,3), (12,3), (15,3), (6,6), (12,6), (12,12), (15,15), (17,17)\}$$

Τό βελοειδές διάγραμμα καί ὁ πίνακάς της δίνονται στά παρακάτω σχήματα.



(σχ. 22)



(σχ. 23)

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ σχέση αὐτή εἶναι

- **ἀνακλαστική**, γιατί περιέχει ὅλα τά ζεύγη μέ ἴδια στοιχεῖα,

- **ἀντισυμμετρική**, γιατί δέν ὑπάρχουν στό G ἀνάστροφα ζεύγη (α,β) καί (β,α) μέ $\alpha \neq \beta$,
- **μεταβατική**, γιατί, ὅταν περιέχει δυό ζεύγη τῆς μορφῆς (α,β) καί (β,γ), περιέχει καί τό (α,γ).

Ὅλα αὐτά διαπιστώνονται εὔκολα ἀπό τό βελοειδές διάγραμμα εἴτε ἀπό τόν πίνακα τῆς σχέσεως. Μιά τέτοια σχέση λέγεται **σχέση διατάξεως.**

Γενικά λοιπόν:

> Μιά διμελής σχέση στό σύνολο A εἶναι «σχέση διατάξεως», ὅταν εἶναι ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρική καί μεταβατική.

Τό σύνολο A μέσα στό ὁποῖο ὁρίσαμε μιά σχέση διατάξεως λέγεται **διατεταγμένο σύνολο.** Ἄν στό βελοειδές διάγραμμα τῆς σχέσεως ὑπάρχουν γραμμές πού ἑνώνουν ἀνά δυό ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου A, τότε ἡ σχέση εἶναι **ὁλικῆς διατάξεως.** Ἄν ὑπάρχει τουλάχιστο ἕνα ζεῦγος στοιχείων τοῦ A, πού δέ συνδέονται μέ γραμμές, ἡ σχέση εἶναι **μερικῆς διατάξεως.** Στό παράδειγμα πού ἀναφέραμε ἔχουμε **μερική διάταξη.**

Ἡ διαιρετότητα σάν διάταξη

4.16. Στό σύνολο

$$N^* = \{1, 2, 3 \ldots\}$$

ὁ προτασιακός τύπος

$$p(x,y): \quad \text{ὁ } x \text{ διαιρεῖ τόν } y,$$

ὁρίζει μιά διμελή σχέση. Ἄς ὀνομάσουμε G τό γράφημά της.

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ σχέση αὐτή εἶναι

- **ἀνακλαστική**, γιατί περιέχει ὅλα τά ζεύγη μέ ἴδια στοιχεῖα, ἀφοῦ κάθε ἀριθμός διαιρεῖ τόν ἑαυτό του,
- **ἀντισυμμετρική**, γιατί, ὅταν τό G περιέχει τό ζεῦγος (α,β) μέ $\alpha \neq \beta$ δέν περιέχει τό (β,α), ἀφοῦ, ὅταν ὁ α διαιρεῖ τόν β, τότε ὁ β δέν διαιρεῖ τόν α,
- **μεταβατική**, γιατί, ὅταν τό G περιέχει τά ζεύγη (α,β), (β,γ), θά περιέχει καί τό (α,γ), ἀφοῦ, ὅταν ὁ α διαιρεῖ τόν β καί ὁ β διαιρεῖ τόν γ, τότε καί ὁ α διαιρεῖ τόν γ.

Εἶναι λοιπόν ἡ σχέση **«διαιρετότητα»** σχέση διατάξεως. Γιά νά δηλώσουμε ὅτι δύο στοιχεῖα τοῦ N* ἱκανοποιοῦν τήν παραπάνω σχέση διατάξεως, ὅπως π.χ. τό 2 καί 8, γράφουμε

$$\mathbf{2 \mid 8}$$

καί διαβάζουμε: *ὁ 2 διαιρεῖ τόν 8.*

Ἔτσι οἱ συμβολισμοί $2|8$ καί $(2,8) \in G$ δηλώνουν τό ἴδιο πράγμα.

Ἡ φυσική διάταξη στὸ Q

4.17. Στό σύνολο Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν μέ τόν προτασιακό τύπο

$$p(x,y): \quad \textit{ὁ } x \textit{ εἶναι μικρότερος ἤ ἴσος τοῦ } y \qquad (x \leq y)$$

ὁρίζεται μιά διμελής σχέση. Τό γράφημά της G περιέχει ὅλα τά ζεύγη τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τό πρῶτο στοιχεῖο εἶναι ἴσο ἤ μικρότερο ἀπό τό δεύτερο.

Ἔτσι ὁ γνωστός μας συμβολισμός $\alpha \leq \beta$ σημαίνει $(\alpha,\beta) \in G$. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ σχέση αὐτή εἶναι:

- **ἀνακλαστική**, γιατί τό G περιέχει ὅλα τά ζεύγη τῆς μορφῆς (α,α)
- **ἀντισυμμετρική**, γιατί ἄν τό G περιέχει τό ζεῦγος (α,β) μέ $\alpha \neq \beta$ δέν θά περιέχει τό (β,α), ἀφοῦ, ἄν εἶναι $\alpha < \beta$ δέ μπορεῖ νά εἶναι καί $\beta < \alpha$,
- **μεταβατική**, γιατί, ἄν τό G περιέχει τά ζεύγη (α,β) καί (β,γ) τότε θά περιέχει καί τό (α,γ), ἀφοῦ ἀπό τίς $\alpha \leq \beta$ καί $\beta \leq \gamma$ προκύπτει ἡ $\alpha \leq \gamma$.

Ἔτσι λοιπόν ἡ παραπάνω διμελής σχέση στό Q εἶναι σχέση διατάξεως, πού λέγεται εἰδικότερα **φυσική διάταξη στό Q**.

Παρατηροῦμε ἀκόμα, ὅτι, ἄν πάρουμε δυό ὁποιουσδήποτε ρητούς ἀριθμούς α καί β, θά εἶναι πάντοτε

$$\alpha = \beta \quad \text{ἤ} \quad \alpha < \beta \quad \text{ἤ} \quad \alpha > \beta.$$

Ἑπομένως ἕνα ἀπό τά ζεύγη (α,β) ἤ (β,α) θά ἀνήκει πάντοτε στό G καί συνεπῶς ἡ σχέση αὐτή εἶναι ὁλική διάταξη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

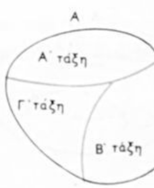
1. **Στό σύνολο Α τῶν μαθητῶν ἑνός γυμνασίου ὁρίζουμε μιά σχέση μέ τόν προτασιακό τύπο p(x,y): ὁ x εἶναι στήν ἴδια τάξη μέ τόν y. Δεῖξτε ὅτι ἡ σχέση αὐτή εἶναι ἰσοδυναμία. Βρεῖτε τίς κλάσεις ἰσοδυναμίας.**

Λύση. Ἄν x εἶναι ἕνας μαθητής τοῦ γυμνασίου, τότε τό ζεῦγος (x,x) ἐπαληθεύει τόν προτασιακό τύπο, δηλαδή ἡ σχέση εἶναι **ἀνακλαστική**.

Ἄν ὁ x εἶναι στήν ἴδια τάξη μέ τόν y, τότε καί ὁ y εἶναι στήν ἴδια τάξη μέ τόν x, δηλαδή ἡ σχέση εἶναι **συμμετρική**.

Ἄν ὁ x εἶναι στήν ἴδια τάξη μέ τόν y καί ὁ y εἶναι στήν ἴδια τάξη μέ τόν z, τότε καί ὁ x εἶναι στήν ἴδια τάξη μέ τόν z, δηλαδή ἡ σχέση εἶναι **μεταβατική**.

Συνεπῶς ἡ σχέση εἶναι μιά ἰσοδυναμία. Ὅλοι οἱ



μαθητές μιᾶς τάξεως, σύμφωνα μέ τή σχέση αὐτή, εἶναι «ἰσοδύναμοι». Ἑπομένως κλάσεις ἰσοδυναμίας εἶναι οἱ τρεῖς τάξεις τοῦ γυμνασίου. Στό σχῆμα μας ἔχουμε μιά εἰκόνα τῶν κλάσεων ἰσοδυναμίας.

2. **Στό σύνολο A τῶν μαθητῶν μιᾶς τάξεως ὁρίζουμε μιά σχέση μέ τόν προτασιακό τύπο p(x,y): ὁ x ἔχει τόν ἴδιο βαθμό μέ τόν y. Δεῖξτε ὅτι ἡ σχέση αὐτή εἶναι ἰσοδυναμία.**

Λύση. Ἄν x εἶναι ἕνας μαθητής τῆς τάξεως, τότε τό ζεῦγος (x, x) ἐπαληθεύει τόν προτασιακό τύπο, δηλαδή ἡ σχέση εἶναι **ἀνακλαστική**. Ἄν ὁ x ἔχει τόν ἴδιο βαθμό μέ τόν y, τότε καί ὁ y ἔχει τόν ἴδιο βαθμό μέ τόν x, δηλαδή ἡ σχέση εἶναι **συμμετρική**. Ὅμοια διαπιστώνεται ὅτι εἶναι καί **μεταβατική**, ἐπομένως εἶναι μιά ἰσοδυναμία.

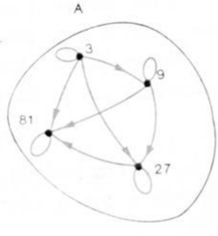
Παρατήρηση

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ἡ ἰσοδυναμία στά Μαθηματικά εἶναι αὐτό πού ἐννοοῦμε στή καθημερινή ζωή ὅταν λέμε ὅτι δυό πράγματα εἶναι ἰσοδύναμα ὡς πρός κάποια ἰδιότητά τους. Ἔτσι λέμε π.χ. ὅτι οἱ μαθητές πού παίρνουν τούς ἴδιους βαθμούς εἶναι ἰσοδύναμοι, ἤ οἱ ἀθλητές πού πηδοῦν τό ἴδιο ὕψος εἶναι ἰσοδύναμοι ἤ οἱ μηχανές πού ἔχουν τήν ἴδια ἰσχύ εἶναι ἰσοδύναμες.

3. **Στό σύνολο A = {9, 27, 3, 81} ὁρίζουμε μιά σχέση μέ τόν προτασιακό τύπο p(x,y): ὁ x διαιρεῖ τόν y. Δεῖξτε ὅτι εἶναι σχέση ὁλικῆς διατάξεως καί σχεδιάστε τό γράφημά της.**

Λύση. Γράφημα τῆς σχέσεως αὐτῆς εἶναι τό

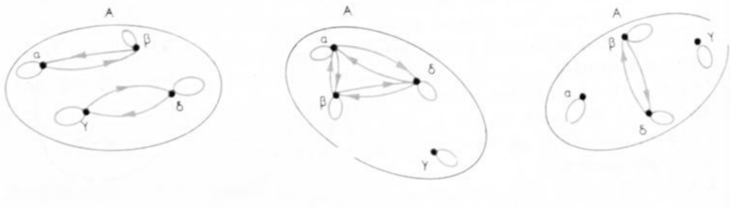
$G = \{(9,9), (9,27), (9,81), (27,27), (27,81), (3,3),$
$(3,9), (3,27), (3,81), (81,81)\}.$



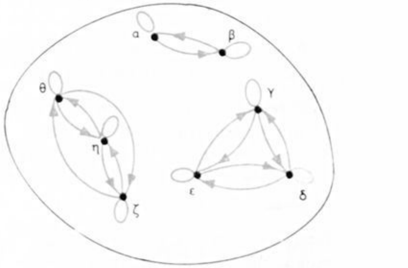
Εἰκόνα τοῦ γραφήματος εἶναι τό διπλανό σχῆμα. Εὔκολα διαπιστώνουμε ἀπό τό σχῆμα αὐτό ὅτι ἡ σχέση εἶναι **ἀνακλαστική**, **ἀντισυμμετρική** καί **μεταβατική**, δηλαδή εἶναι σχέση διατάξεως. Παρατηροῦμε ὅτι ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου A συνδέονται ἀνά δύο μέ βέλη. Ἑπομένως εἶναι σχέση **ὁλικῆς διατάξεως**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

17. Στά παρακάτω σχήματα ἔχουμε τά βελοειδή διαγράμματα διάφορων σχέσεων. Βρεῖτε ποιές ἀπ' αὐτές εἶναι σχέσεις ἰσοδυναμίας καί σημειῶστε τίς κλάσεις ἰσοδυναμίας.



18. Στό σύνολο $A = \{9, 27, 3, 81\}$ ὁρίζουμε μιά διμελή σχέση μέ τόν προτασιακό τύπο $p(x,y)$: ὁ x εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ y. Νά δείξετε ὅτι εἶναι σχέση ὁλικῆς διατάξεως.



19. Ἐξηγῆστε γιατί τό διπλανό σχῆμα εἶναι τό βελοειδές διάγραμμα μιᾶς σχέσεως ἰσοδυναμίας. Ποιές εἶναι οἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας;

20. Στό σύνολο Α τῶν ἀθλητῶν μπάσκετ μιᾶς ὁμάδας ὁρίζουμε μιά σχέση μέ τόν προτασιακό τύπο $p(x,y)$: ὁ x πέτυχε τόσα καλάθια, ὅσα καί ὁ y. Δεῖξτε ὅτι ἡ σχέση αὐτή εἶναι μιά ἰσοδυναμία.

21. Στό σύνολο
Α = { Ἀθήνα, Ρώμη, Βενετία, Δράμα, Σπάρτη, Παρίσι, Μασαλία }
ὁρίζουμε μιά σχέση μέ τόν προτασιακό τύπο

$p(x,y)$: ἡ πόλη x βρίσκεται στήν ἴδια χώρα μέ τήν πόλη y.

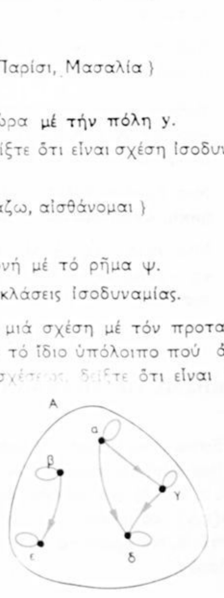
Σχεδιάστε τό βελοειδές διάγραμμα τῆς σχέσεως, δείξτε ὅτι εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας καί βρεῖτε τίς κλάσεις ἰσοδυναμίας.

22. Στό σύνολο Α = { παίζω, τρέχω, κοιμᾶμαι, διαβάζω, αἰσθάνομαι }
ὁρίζουμε μιά σχέση μέ τό προτασιακό τύπο

$p(x,y)$: τό ρῆμα x ἀνήκει στήν ἴδια φωνή μέ τό ρῆμα ψ.

Δεῖξτε ὅτι εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας καί βρεῖτε τίς κλάσεις ἰσοδυναμίας.

23. Στό σύνολο $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12\}$ ὁρίζουμε μιά σχέση μέ τόν προτασιακό τύπο $p(x,y)$: ὁ x ὅταν διαιρεῖται μέ τόν 4 ἀφήνει τό ἴδιο ὑπόλοιπο πού ἀφήνει καί ὁ y. Σχεδιάστε τό βελοειδές διάγραμμα τῆς σχέσεως, δείξτε ὅτι εἶναι ἰσοδυναμία καί βρεῖτε τίς κλάσεις ἰσοδυναμίας.



24. Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε τό βελοειδές διάγραμμα μιᾶς σχέσεως. Εἶναι σχέση διατάξεως;

25. Δίνεται τό σύνολο $A = \{1, 2\}$.
α. Βρεῖτε ὅλα τά ὑποσύνολά του γνήσια καί ὄχι.
β. Ἄς εἶναι Β τό σύνολο μέ στοιχεῖα ὅλα τά ὑποσύνολα τοῦ Α. Στό Β ὁρίζουμε μιά σχέση μέ τήν συνθήκη

$p(X,\Psi)$: Τό X εἶναι ὑποσύνολο τοῦ Ψ.

Σχεδιάστε τό βελοειδές διάγραμμα τῆς σχέσεως αὐτῆς καί δεῖξτε ὅτι εἶναι σχέση διατάξεως.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

1. Κάθε ἔκφραση πού μπορεῖ νά χαρακτηριστεῖ μόνο σάν «ἀληθής» ἤ μόνο σάν «ψευδής» λέγεται **λογική πρόταση.**

Κάθε ἔκφραση p(x), πού περιέχει ἕνα γράμμα x, λέγεται **προτασιακός τύπος μέ μιά μεταβλητή** ὅταν ἀπ' αὐτόν μποροῦμε νά πάρουμε προτάσεις ἄν ἀντικαταστήσουμε τό x μέ τά στοιχεῖα ἑνός ὁρισμένου συνόλου A. Τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου A πού δίνουν ἀληθεῖς προτάσεις ἀποτελοῦν τό **σύνολο ἀλήθειας** τοῦ προτασιακοῦ τύπου.

Κάθε ἔκφραση p(x,y) πού περιέχει δυό γράμματα x καί y λέγεται **προτασιακός τύπος μέ δυό μεταβλητές** ὅταν ἀπ' αὐτόν μποροῦμε νά πάρουμε προτάσεις ἄν ἀντικαταστήσουμε τά x καί y μέ στοιχεῖα δυό ὁρισμένων συνόλων A καί B. Σύνολο ἀλήθειας τοῦ p(x,y) λέγεται τό σύνολο πού ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά ζεύγη (x,ψ) πού δίνουν ἀληθεῖς προτάσεις.

Δυό προτασιακοί τύποι λέγονται **ἰσοδύναμοι** ὅταν ἔχουν τό ἴδιο σύνολο ἀναφορᾶς καί τό ἴδιο σύνολο ἀλήθειας.

2. Κάθε προτασιακός τύπος p(x,y) μέ δυό μεταβλητές, πού ἔχει σύνολο ἀναφορᾶς $A \times B$ ὁρίζει μιά **διμελή σχέση ἀπό τό A στό B**. Ὅταν ἔχει σύνολο ἀναφορᾶς τό $A \times A$ τότε ὁρίζει **μιά διμελή σχέση στό A**.

Μιά διμελής σχέση στό σύνολο A, μπορεῖ νά εἶναι: **ἀνακλαστική, συμμετρική, ἀντισυμμετρική, μεταβατική.**

Μιά σχέση στό A λέγεται **ἰσοδυναμία** ὅταν εἶναι ἀνακλαστική – συμμετρική – μεταβατική, ἐνῶ λέγεται **σχέση διατάξεως** ὅταν εἶναι ἀνακλαστική–ἀντισυμμετρική – μεταβατική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

26. Ἔστω A = {Ἑρμῆς, Ἀφροδίτη, Γῆ, Ἄρης, Ζεύς, Κρόνος, Οὐρανός, Ποσειδῶν, Πλούτων} τό σύνολο τῶν πλανητῶν τοῦ ἡλιακοῦ μας συστήματος καί B = {0, 1, 2, 5, 10,12} ἕνα σύνολο ἀριθμῶν. Ὁ προτασιακός τύπος p(x,y): «ὁ πλανήτης x ἔχει ψ φυσικούς δορυφόρους», ὁρίζει μιά σχέση ἀπό τό A στό B. Νά βρεθεῖ τό γράφημά της καί νά γίνει ἕνας πίνακας τῆς σχέσεως μέ διπλῆ εἴσοδο.

27. Ἄν εἶναι A ἕνα σύνολο μέ στοιχεῖα τίς λέξεις τῆς ἐκφράσεως «ἄν αὔριο ὁ καιρός εἶναι καλός θά πᾶμε ἐκδρομή» καί B τό σύνολο μέ στοιχεῖα τά μέρη τοῦ λόγου, δηλ. B={οὐσιαστικό, ἄρθρο, ρῆμα, ἐπίρημα, ἐπίθετο, ἀντωνυμία, πρόθεση, σύνδεσμος, μετοχή, ἐπιφώνημα}, ὁ προτασιακός τύπος p(x,y): «ἡ λέξη x εἶναι μέρος τοῦ λόγου y» ὁρίζει μιά σχέση ἀπό τό A στό B. Νά γίνει τό βελοειδές διάγραμμα τῆς σχέσεως.

28. Ἄς εἶναι A={642, 811, 1117, 84, 55, 64, 66, 1234, 823, 52} ἕνα σύνολο ἀριθμῶν. Ὁ προτασιακός τύπος p(x,y): «ὁ x ἔχει ἄθροισμα ψηφίων ὅσο καί ὁ y» ὁρίζει στό A μιά σχέση. Βρεῖτε τό γράφημα τῆς σχέσεως καί τό βελοειδές διάγραμμα. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ σχέση εἶναι ἰσοδυναμία καί βρεῖτε τίς κλάσεις ἰσοδυναμίας.

29. Δίνεται τό σύνολο Α={ α, β, γ }. Βρεῖτε ὅλα τά ὑποσύνολά του γνήσια καί ὄχι. Ἄς εἶναι Β τό σύνολο, πού ἔχει στοιχεῖα ὅλα τά ὑποσύνολα τοῦ Α. Ὁ προτασιακός τύπος p(x,y):«x εἶναι ὑποσύνολο τοῦ y» ὁρίζει μιά διμελῆ σχέση στό Β. Βρεῖτε τό γράφημά της, καί δεῖξτε ὅτι εἶναι μιά σχέση διατάξεως.

30. Μέσα στό σύνολο Α ={ 1, 2, 3, . . . , 9,10,11 } ὁρίζουμε μιά σχέση μέ τόν προτασιακό τύπο p(x,y): $x \leq y$. Δεῖξτε ὅτι ἡ σχέση αὐτή εἶναι ὁλική διάταξη καί ὅτι τό γράφημά της περιέχει 66 ζεύγη.

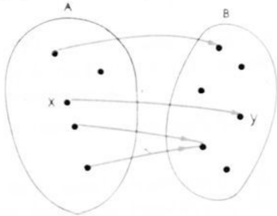
31. Στό σύνολο Ν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὁρίζουμε μιά σχέση μέ τόν προτασιακό τύπο p(x,y): «ὁ x εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ y». Δεῖξτε ὅτι ἡ σχέση αὐτή εἶναι σχέση διατάξεως.

5ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Ἡ ἔννοια τῆς ἀπεικονίσεως

5.1. Ἄς ξαναρθοῦμε στίς διμελεῖς σχέσεις ἀπό ἕνα σύνολο Α σ' ἕνα σύνολο Β. Ἀπό τίς σχέσεις αὐτές μᾶς ἐνδιαφέρουν ἰδιαίτερα ἐκεῖνες πού σέ **κάθε** στοιχεῖο τοῦ Α ἀντιστοιχίζεται **ἕνα μόνο** στοιχεῖο τοῦ Β. Μιά τέτοια διμελής σχέση ἀπό τό Α στό Β λέγεται **«ἀπεικόνιση»** τοῦ συνόλου Α στό σύνολο Β. Τίς ἀπεικονίσεις τίς παριστάνουμε συνήθως μέ ἕνα ἀπό τά γράμματα φ, f, σ,...



(σχ. 1)

Παράδειγμα. Ἄς θεωρήσουμε τά δυό σύνολα

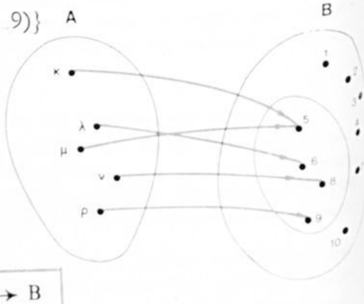
$$A = \{\kappa, \lambda, \mu, \nu, \rho\}, \qquad B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\},$$

ἀπό τά ὁποῖα τό Α παριστάνει ἕνα σύνολο μαθητῶν, πού ἔγραψαν ἕνα διαγώνισμα, καί τό Β παριστάνει τό σύνολο τῶν βαθμῶν μέ τούς ὁποίους βαθμολογεῖται ἡ ἐπίδοση ἑνός μαθητῆ. Ἄς ὑποθέσουμε ἀκόμα ὅτι ἡ διμελής σχέση, πού ὁρίζει ὁ προτασιακός τύπος $p(x,y)$: «ὁ μαθητής x πῆρε βαθμό y» ἔχει γράφημα

$$G = \{(\kappa, 5), (\lambda, 6), (\mu, 5), (\nu, 8), (\rho, 9)\}$$

Ἡ διμελής αὐτή σχέση εἶναι μιά ἀπεικόνιση τοῦ Α στό Β, γιατί σέ **κάθε** μαθητή (στοιχεῖο τοῦ Α) ἀντιστοιχίζεται **ἕνας μόνο βαθμός** (ἕνα στοιχεῖο τοῦ Β). Μιά ἀπεικόνιση φ τοῦ συνόλου Α στό σύνολο Β θά σημειώνεται

$$\boxed{\varphi : A \rightarrow B}$$



(σχ. 2)

Σέ μιά ἀπεικόνιση φ ὁρίζουμε ὅτι:

- Τό σύνολο Α λέγεται **σύνολο ἀφετηρίας** ἤ **σύνολο ὁρισμοῦ** τῆς φ.
- Τό σύνολο Β λέγεται **σύνολο ἀφίξεως** τῆς φ.
- Τό στοιχεῖο y τοῦ Β, πού ἀπεικονίζεται τό x τοῦ Α, λέγεται **εἰκόνα** τοῦ x.

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι σέ μιά ἀπεικόνιση $\varphi : A \to B$ κάθε στοιχεῖο τοῦ Α ἔχει μιά μόνο εἰκόνα στό Β, δέν ἀποκλείεται ὅμως δυό ἤ περισσότερα στοιχεῖα τοῦ Α νά ἔχουν τήν ἴδια εἰκόνα στό Β. Γιά νά δηλώσουμε ὅτι ἡ ἀπεικόνιση φ ἀντιστοιχίζει στό στοιχεῖο $x \in A$ τό στοιχεῖο $y \in B$, γράφουμε

$$x \xrightarrow{\varphi} y \quad \text{ἤ} \quad \varphi(x) = y$$

Ἔτσι στό προηγούμενο παράδειγμά μας ἔχουμε

$$\varphi(\kappa) = 5, \quad \varphi(\lambda) = 6, \quad \varphi(\mu) = 5, \quad \varphi(\nu) = 8, \quad \varphi(\rho) = 9.$$

Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως

5.2. Μιά ἀπεικόνιση $\varphi : A \to B$ λέγεται ἐπίσης καί **συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό Α**. Τότε οἱ εἰκόνες τῆς φ ὀνομάζονται «τιμές» τῆς συναρτήσεως καί λέμε ὅτι *«ἡ συνάρτηση παίρνει τιμές στό Β»*. Ἄν καί δέν ὑπάρχει καμιά διαφορά μεταξύ τῶν ὅρων «ἀπεικόνιση» καί «συνάρτηση», συνηθίζουμε νά χρησιμοποιοῦμε τόν ὅρο «συνάρτηση» μόνο ὅταν τά Α καί Β εἶναι ἀριθμητικά σύνολα.

Ἔτσι π.χ. γιά νά ὁρίσουμε μιά συνάρτηση φ μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $A = \{1,2,4,7,9\}$ πού παίρνει τιμές στό $N = \{0,1,2,3,\ldots\}$, θά πρέπει νά ἀντιστοιχίσουμε σέ κάθε ἀριθμό x ἀπό τό Α ἕναν ἀριθμό $\varphi(x)$ ἀπό τό Ν. Ἔστω π.χ. ἡ συνάρτηση φ μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό Α, πού ὁρίζεται μέ τήν ἰσότητα

$$\varphi(x) = 3x,$$

ἡ ὁποία λέγεται **τύπος** τῆς συναρτήσεως φ. Οἱ τιμές τῆς συναρτήσεως αὐτῆς γιά $x = 1,2,4,7,9$ εἶναι ἀντίστοιχα οἱ ἀριθμοί

$$\varphi(1) = 3\cdot 1 = 3, \; \varphi(2) = 3\cdot 2 = 6, \; \varphi(4) = 3\cdot 4 = 12,$$
$$\varphi(7) = 3\cdot 7 = 21, \quad \varphi(9) = 3\cdot 9 = 27.$$

Τό σύνολο ὅλων τῶν τιμῶν τῆς φ τό συμβολίζουμε μέ $\varphi(A)$, δηλαδή

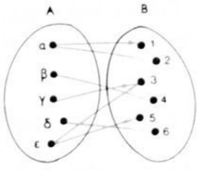
$$\varphi(A) = \{3,6,12,21,27\}.$$

Σέ μιά συνάρτηση σχηματίζουμε πολλές φορές ἀντί γιά τό γράφημά της ἕναν πίνακα μέ δυό γραμμές, ὁ ὁποῖος ἔχει στήν πρώτη γραμμή τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου Α καί στή δεύτερη γραμμή τίς ἀντίστοιχες τιμές τῆς συναρτήσεως. Ἔτσι π.χ. γιά τό προηγούμενο παράδειγμα σχηματίζουμε τόν παρακάτω πίνακα τιμῶν.

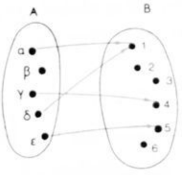
x	1	2	4	7	9
$\varphi(x)$	3	6	12	21	27

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

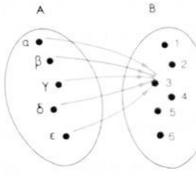
1. **Τά παρακάτω σχήματα δείχνουν βελοειδή διαγράμματα διάφορων διμελῶν σχέσεων ἀπό τό σύνολο Α = { α,β,γ,δ,ε } στό σύνολο Β={ 1,2,3,4,5,6}. Ἐξετάστε σέ κάθε περίπτωση ἄν εἶναι ἀπεικόνιση ἤ ὄχι.**



(σχ. 3)



(σχ. 4)



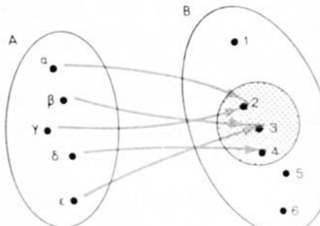
(σχ. 5)

Λύση: Ἡ πρώτη δέν εἶναι ἀπεικόνιση, γιατί σέ ὁρισμένα στοιχεῖα τοῦ Α ἀντιστοιχίζονται δυό στοιχεῖα τοῦ Β.
Ἡ δεύτερη δέν εἶναι ἀπεικόνιση, γιατί τό στοιχεῖο β τοῦ Α δέν ἀντιστοιχίζεται μέ στοιχεῖο τοῦ Β.
Ἡ τρίτη εἶναι ἀπεικόνιση, γιατί κάθε στοιχεῖο τοῦ Α ἀντιστοιχίζεται μέ ἕνα στοιχεῖο τοῦ Β. Ἐδῶ ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ Α ἀντιστοιχίζονται σέ ἕνα μόνο στοιχεῖο τοῦ Β. Μιά τέτοια ἀπεικόνιση, πού ὅλα τά στοιχεῖα του Α ἔχουν τήν ἴδια εἰκόνα, λέγεται **σταθερή ἀπεικόνιση**.

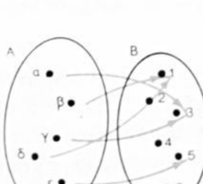
2. **Σέ μιά ἀπεικόνιση φ : Α →Β τό σύνολο τῶν εἰκόνων ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ Α εἶναι ἕνα ὑποσύνολο τοῦ Β καί σημειώνεται, ὅπως εἴπαμε, μέ φ(Α). Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε**

φ(Α)={ 2,3,4}.

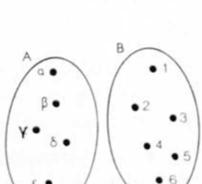
Στό πρῶτο ἀπό τά παρακάτω σχήματα νά συμπληρωθοῦν τά στοιχεῖα τοῦ φ(Α), ἐνῶ στά δυό ἄλλα σχήματα νά ὁρισθεῖ μιά ἀπεικόνιση, πού νά ἔχει φ(Α) αὐτό πού σημειώνεται.



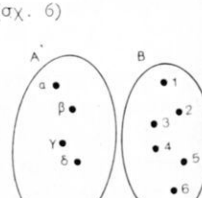
(σχ. 6)



φ(Α) = {. . .}

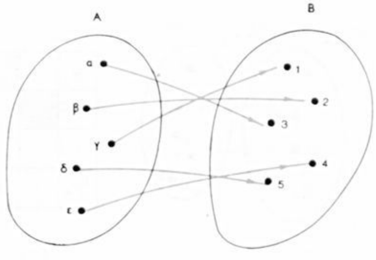


φ(Α) = {1,2,5,6}



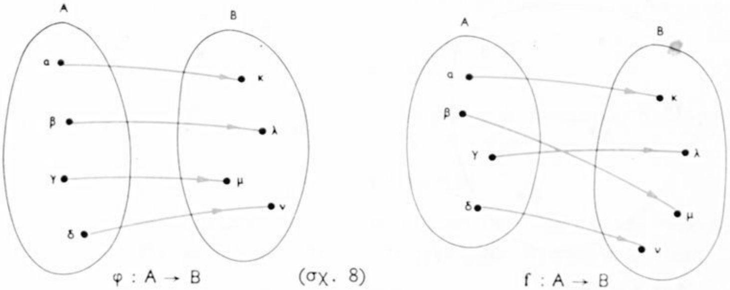
φ(Α) = {4}

3. Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε μιά ἀπεικόνιση $\varphi : A \rightarrow B$, στήν ὁποία δυό διαφορετικά στοιχεῖα τοῦ A ἔχουν πάντα διαφορετικές εἰκόνες καί ἀκόμα εἶναι $\varphi(A) = B$. Μιά τέτοια ἀπεικόνιση λέγεται «ἀμφιμονοσήμαντη» ἤ ἀπεικόνιση «ἕνα πρός ἕνα». Νά ὁρισθοῦν δυό διαφορετικές ἀμφιμονοσήμαντες ἀπεικονίσεις τοῦ $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ στό $B = \{\kappa, \lambda, \mu, \nu\}$. Νά ὁρισθεῖ μιά ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ B στό A.



(σχ. 7)

Λύση: Τά παρακάτω σχήματα μᾶς δίνουν δυό ἀμφιμονοσήμαντες ἀπεικονίσεις φ καί f τοῦ A στό B.



$\varphi : A \rightarrow B$ (σχ. 8) $f : A \rightarrow B$

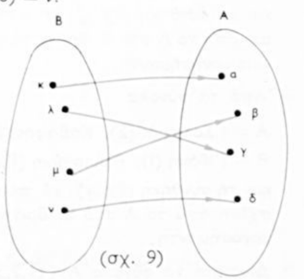
Στήν πρώτη εἶναι $\varphi(\alpha) = \kappa$, $\varphi(\beta) = \lambda$, $\varphi(\gamma) = \mu$, $\varphi(\delta) = \nu$.
Στή δεύτερη εἶναι $f(\alpha) = \kappa$, $f(\beta) = \mu$, $f(\gamma) = \lambda$, $f(\delta) = \nu$.

Ἄν ἀλλάξουμε τή φορά τοῦ βέλους, ἔχουμε ἀμέσως μιά ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ B στό A.

Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε μιά τέτοια ἀπεικόνιση $\sigma : B \rightarrow A$, πού προέκυψε ἀπό τή δεύτερη μέ ἀλλαγή τῆς φορᾶς τῶν βελῶν. Ἔχουμε

$\sigma(\kappa) = \alpha$, $\sigma(\lambda) = \gamma$, $\sigma(\mu) = \beta$, $\sigma(\nu) = \delta$.

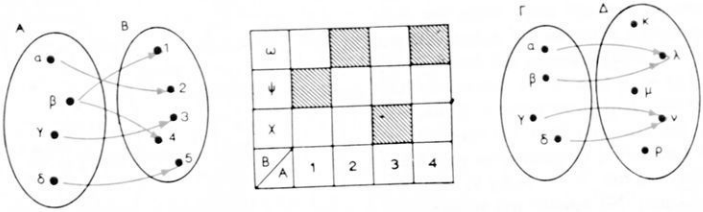
Ἡ ἀπεικόνιση αὐτή λέγεται **ἀντίστροφη τῆς f**. Βρεῖτε καί τήν ἀντίστροφη τῆς φ.



(σχ. 9)

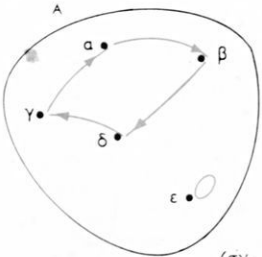
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Τά ἑπόμενα σχήματα δείχνουν βελοειδή διαγράμματα καί πίνακες διάφορων διμελῶν σχέσεων. Ἐξετάστε σέ κάθε περίπτωση ἄν εἶναι ἀπεικονίσεις ἤ ὄχι. Στίς ἀπεικονίσεις βρεῖτε σέ κάθε περίπτωση τό γράφημα G καί τό φ(A).

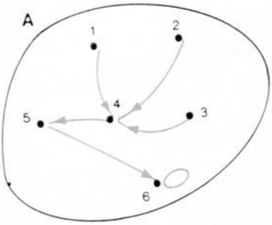


(σχ. 10)

2. Τά παρακάτω σχήματα δείχνουν βελοειδή διαγράμματα σχέσεων ἀπό τό Α στό Α. Εἶναι ἀπεικονίσεις; Βρεῖτε τά γραφήματά τους.



(σχ. 11)



(σχ. 12)

3. Ἀπό τά σύνολα
Α = { Καβάλλα (Κ), Πάτρα (Π), Ἄρτα (Α), Βόλος (Β) }
Β = { Ἤπειρος (Η), Θεσσαλία (Θ), Πελοπόννησος (Π), Μακεδονία (Μ) }
καί τή συνθήκη $p(x,y)$: «ἡ πόλη x βρίσκεται στήν περιοχή y» ὁρίζεται μιά σχέση ἀπό τό Α στό Β. Βρεῖτε τό γράφημά της. Εἶναι ἀπεικόνιση; Εἶναι ἀπεικόνιση ἀμφιμονοσήμαντη;

4. Ἀπό τά σύνολα
Α = { Σολωμός (Σ), Καβάφης (Κ), Παλαμᾶς (Π), Ρίτσος (Ρ), Ἐλύτης (Ε)}
Β = { Ἰθάκη (Ι), Ρωμιοσύνη (Ρ), Τάφος (Τ), Ἄξιον ἐστί (ΑΕ), Ἐθνικός ὕμνος (ΕΥ)}
καί τή συνθήκη $p(x,y)$: «ὁ ποιητής x ἔγραψε τό ποίημα y» ὁρίζεται μιά διμελής σχέση ἀπό τό Α στό Β. Βρεῖτε τό γράφημά της. Εἶναι ἀπεικόνιση; Εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη;

5. Δίνονται τά σύνολα $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$ καί τά ἀκόλουθα γραφήματα διμελῶν σχέσεων ἀπό τό Α στό Β. Ποιές εἶναι ἀπεικονίσεις;
$G_1 = \{(1,3),\ (2,5),\ (3,4)\}$, $G_3 = \{(1,5),\ (2,5),\ (3,3)\}$
$G_2 = \{(1,5),\ (2,5),\ (3,5)\}$, $G_4 = \{(1,3),\ (1,4),\ (1,5)\}$

6. Δίνονται τά σύνολα $A = \{\alpha,\beta\}$, $B = \{\gamma,\delta\}$. Βρεῖτε ὅλες τίς δυνατές ἀμφιμονοσήμαντες ἀπεικονίσεις τοῦ Α στό Β καί σχεδιάστε τά βελοειδή τους διαγράμματα.

7. Σέ μιά ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση $\varphi : A \rightarrow B$ ἔχουμε $\varphi(x) = \alpha$, $\varphi(y) = \beta$, $\varphi(\omega) = \gamma$, $\varphi(z) = \delta$. Βρεῖτε τά σύνολα Α καί Β καί ὁρίστε μιά ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση ἀπό τό Β στό Α.

8. Δίνονται τά σύνολα $A = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$, $B = \{1,2,3,4\}$. Ὁρίστε μιά ἀπεικόνιση τοῦ Α στό Β ὥστε:

I. $\varphi(A) = \{2,3\}$ II. $\varphi(A) = \{1,3,4\}$ III. $\varphi(A) = \{1,2,3,4\}$.

Μπορεῖτε νά ὁρίσετε μιά ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ Α στό Β;

9. Δίνονται τά σύνολα $A = \{\alpha,\beta,\gamma\}$, $B = \{1,2,3\}$. Βρεῖτε ὅλες τίς δυνατές ἀμφιμονοσήμαντες ἀπεικονίσεις τοῦ Α στό Β καί σχεδιάστε τά βελοειδή τους διαγράμματα.

10. Τό ἴδιο γιά τά σύνολα $A = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ καί $B = \{\alpha,\beta,\delta\}$.

Μετασχηματισμοί

5.3. Στό προηγούμενο κεφάλαιο μιλήσαμε καί γιά διμελεῖς σχέσεις σ' ἕνα σύνολο Α. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι θά ὑπάρχουν καί ἀπεικονίσεις τῆς μορφῆς

$$\varphi : A \to A,$$

οἱ ὁποῖες θά ἀντιστοιχίζουν σέ κάθε στοιχεῖο ἑνός ὁρισμένου συνόλου Α ἕνα στοιχεῖο τοῦ ἴδιου τοῦ Α. Ἔτσι π.χ. ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό

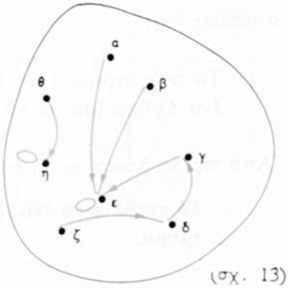
$$A = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta,\theta\}$$

εἶναι ἕνα σύνολο μαθητῶν πού ψήφισαν, γιά νά ἐκλέξουν τόν πρόεδρό τους, καί ἡ διμελής σχέση, πού ὁρίζεται ἀπό τόν προτασιακό τύπο

$p(x,y)$: ὁ μαθητής x ψήφισε τό μαθητή y

ἔχει γράφημα τό

$$G = \{(\alpha,\varepsilon), (\beta,\varepsilon), (\gamma,\varepsilon), (\delta,\gamma), (\varepsilon,\varepsilon), (\zeta,\delta), (\eta,\eta), (\theta,\eta)\}.$$



(σχ. 13)

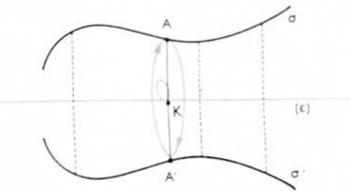
Ἡ σχέση αὐτή εἶναι μιά ἀπεικόνιση, γιατί κάθε μαθητής ψήφισε μόνο ἕνα συμμαθητή του, δηλαδή σέ κάθε στοιχεῖο τοῦ Α ἀντιστοιχίζεται ἕνα στοιχεῖο τοῦ ἴδιου τοῦ Α.

> Μιά ἀπεικόνιση ἑνός συνόλου Α στόν ἑαυτό του λέγεται καί **μετασχηματισμός τοῦ συνόλου Α**.

Συνήθως ὁ ὅρος «μετασχηματισμός τοῦ Α» χρησιμοποιεῖται πιό πολύ, ὅταν τό Α εἶναι ἕνα σύνολο σημείων.

Ἀξονική συμμετρία

5.4. Ἄς θεωρήσουμε τό σύνολο Ε τῶν σημείων ἑνός ἐπιπέδου καί μιά εὐθεία ε τοῦ ἐπιπέδου, πού τήν ὀνομάζουμε «ἄξονα». Μέ τή βοήθεια τῆς εὐθείας ε μποροῦμε νά ὁρίσουμε ἕνα μετασχηματισμό τοῦ συνόλου Ε τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο: Σέ κάθε σημεῖο Α ἀντιστοιχίζουμε τό σημεῖο Α' πού βρίσκεται, ὅταν φέρουμε τό κάθετο τμῆμα ΑΚ πρός τήν ε καί πάρουμε στήν προέκτασή του τμῆμα



(σχ. 14)

$$KA' = KA.$$

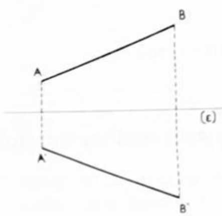
Ὁ μετασχηματισμός αὐτός τοῦ Ε λέγεται **συμμετρία ὡς πρός τόν ἄξονα ε** καί τό σημεῖο Α', πού εἶναι εἰκόνα τοῦ Α, λέγεται **συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τόν ἄξονα ε.** Στό μετασχηματισμό αὐτό εἰκόνα τοῦ Α' εἶναι τό Α. Γι' αὐτό, ὅταν μιά εὐθεία ε εἶναι μεσοκάθετος σ' ἕνα τμῆμα ΑΑ', λέμε ὅτι **τά δυό σημεῖα Α καί Α' εἶναι συμμετρικά ὡς πρός ἄξονα ε.** Εἶναι φανερό ὅτι **ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἄξονα ε συμπίπτουν μέ τά συμμετρικά τους.**

Ἄν ἔχουμε τώρα ἕνα σχῆμα σ καί πάρουμε τά συμμετρικά ὅλων τῶν σημείων τοῦ σ ὡς πρός τόν ἄξονα ε, βρίσκουμε ἕνα νέο σχῆμα σ', τό ὁποῖο λέγεται **συμμετρικό τοῦ σ ὡς πρός τόν ἄξονα ε.** Ἄν διπλώσουμε τό χαρτί μας, στό ὁποῖο εἶναι σχεδιασμένα τά σχήματα **σ καί σ'** κατά μῆκος τῆς εὐθείας ε, βλέπουμε ὅτι τά σχήματα σ καί σ' ἐφαρμόζουν ἐντελῶς. Αὐτό σημαίνει ὅτι:

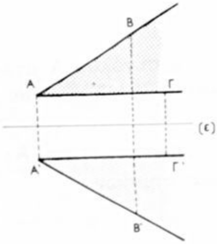
> Τό συμμετρικό ἑνός σχήματος σ ὡς πρός ἕναν ἄξονα ε εἶναι ἕνα σχῆμα ἴσο μέ τό σ.

Ἀπό τήν πρόταση αὐτή συμπεραίνουμε ὅτι στή συμμετρία ὡς πρός ἄξονα:

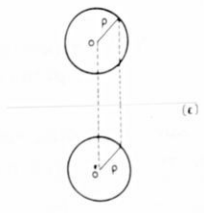
- **Τό συμμετρικό ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος εἶναι ἕνα ἴσο εὐθύγραμμο τμῆμα.**



(σχ. 15)



(σχ. 16)



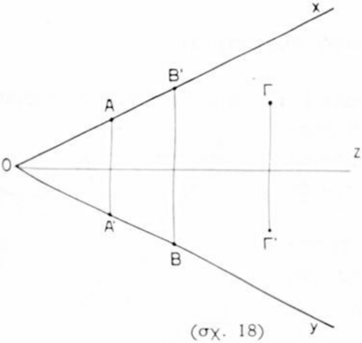
(σχ. 17)

- **Τό συμμετρικό μιᾶς γωνίας εἶναι μιά γωνία ἴση.**
- **Τό συμμετρικό ἑνός κύκλου (Ο,ρ) εἶναι ἕνας ἴσος κύκλος πού ἔχει κέντρο τό συμμετρικό τοῦ Ο.**

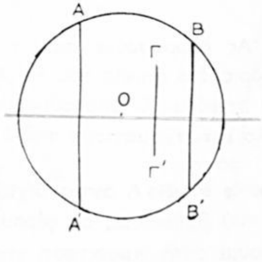
Στά παραπάνω σχήματα δίνονται τά συμμετρικά σχήματα ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ, μιᾶς γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$ καί ἑνός κύκλου (Ο,ρ). Ἀπό τό πρῶτο σχῆμα καταλαβαίνουμε ὅτι, γιά νά βρίσκουμε τό συμμετρικό ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος, ἀρκεῖ νά βρίσκουμε μόνο τά συμμετρικά τῶν ἄκρων του. Γενικά, γιά νά βρίσκουμε τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας, ἀρκεῖ νά βρίσκουμε μόνο τά συμμετρικά δυό σημείων της.

Σχήματα μέ ἄξονα συμμετρίας

5.5. Ἄν ἔχουμε μιά γωνία $\widehat{XO\Psi}$ καί πάρουμε τά συμμετρικά Α',Β', Γ',... ὁποιωνδήποτε σημείων της Α,Β,Γ... ὡς πρός τήν εὐθεία τῆς διχοτόμου ΟΖ τῆς γωνίας, βλέπουμε ὅτι τά σημεῖα Α',Β',Γ'... ἀνήκουν ἐπίσης στή γωνία καί γι αὐτό λέμε ὅτι **ἡ εὐθεία τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας εἶναι ἄξονας συμμετρίας τῆς γωνίας.** Αὐτό μποροῦμε νά τό διαπιστώσουμε εὔκολα, ἄν ἀποτυπώσουμε τό σχῆμα αὐτό σέ ἕνα διαφανές χαρτί καί τό διπλώσουμε



(σχ. 18)



(σχ. 19)

κατά μῆκος τῆς ΟΖ. Τότε τά σημεῖα Α,Β,Γ,... θά συμπέσουν μέ τά συμμετρικά τους Α',Β',Γ',..., πού εἶναι ὅλα σημεῖα τῆς ἴδιας γωνίας. Ἀκόμα, ἄν ἔχουμε ἕναν κυκλικό δίσκο (Ο,ρ) καί πάρουμε τά συμμετρικά Α',Β',Γ'... ὁποιωνδήποτε σημείων του Α,Β,Γ,... ὡς πρός μιά διάμετρό[1] του, βλέπουμε ὅτι τά σημεῖα Α',Β',Γ',... ἀνήκουν στόν κυκλικό δίσκο καί λέμε ὅτι **κάθε διάμετρος ἑνός κυκλικοῦ δίσκου εἶναι ἕνας ἄξονας συμμετρίας του.**

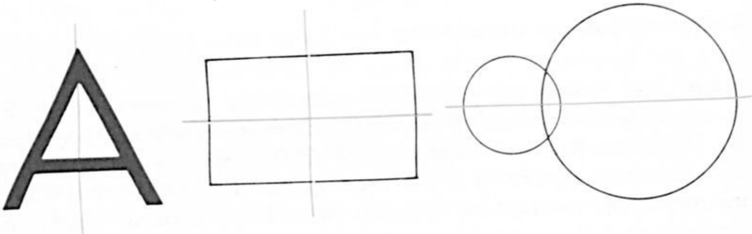
---

(1) Μέ τόν ὅρο «διάμετρος» κυκλικοῦ δίσκου ἐννοοῦμε ἐδῶ μιά εὐθεία πού περνάει ἀπό τό κέντρο του.

Γενικά λοιπόν θά λέμε ὅτι:

Ἕνα σχῆμα σ ἔχει **ἄξονα συμμετρίας** μιά ὁρισμένη εὐθεία ε, ὅταν ὅλα τά σημεῖα τοῦ σχήματος χωρίζονται σέ ζεύγη, πού τά μέλη τους εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν εὐθεία ε.

Ἑπομένως, γιά νά ἐλέγξουμε ἄν ἕνα σχῆμα σ ἔχει ἄξονα συμμετρίας μιά εὐθεία ε, πρέπει νά ἐξετάσουμε ἄν τό συμμετρικό κάθε σημείου τοῦ σχήματος ὡς πρός ἄξονα ε εἶναι ἐπίσης σημεῖο τοῦ σχήματος. Κάθε ἕνα ἀπό τά παρακάτω σχήματα ἔχει ἄξονα συμμετρίας.



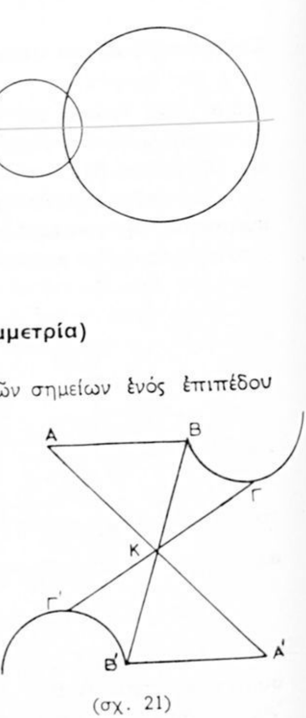
(σχ. 20)

Συμμετρία ὡς πρός κέντρο (κεντρική συμμετρία)

5.6. Ἄς θεωρήσουμε πάλι τό σύνολο Ε τῶν σημείων ἑνός ἐπιπέδου καί ἕνα ὁρισμένο σημεῖο του Κ. Μέ τή βοήθεια τοῦ σημείου Κ μποροῦμε νά ὁρίσουμε ἕναν ἄλλο μετασχηματισμό τοῦ Ε μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

Σέ κάθε σημεῖο Α ἀντιστοιχίζουμε τό σημεῖο Α' πού βρίσκουμε, ἄν φέρουμε τήν ΑΚ καί πάρουμε στήν προέκτασή της τμῆμα

$$KA' = KA.$$



(σχ. 21)

Ὁ μετασχηματισμός αὐτός λέγεται **συμμετρία ὡς πρός κέντρο Κ** καί τό σημεῖο Α', πού εἶναι εἰκόνα τοῦ Α, λέγεται **συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τό Κ.** Στό μετασχηματισμό αὐτό εἰκόνα τοῦ Α' εἶναι τό Α καί γι αὐτό, ἄν ἕνα σημεῖο Κ εἶναι μέσο τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΑΑ', λέμε ὅτι **τά σημεῖα Α καί Α' εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τό Κ.** Εἶναι φανερό ὅτι **τό συμμετρικό τοῦ σημείου Κ εἶναι τό ἴδιο τό Κ.** Ἄν ἔχουμε τώρα ἕνα σχῆμα σ καί πάρουμε τά συμμετρικά ὅλων τῶν σημείων του Α,Β,Γ... ὡς πρός κέντρο Κ, βρίσκουμε ἕνα νέο σχῆμα σ', τό ὁποῖο λέγεται **συμμετρικό τοῦ σ** ὡς πρός τό κέντρο

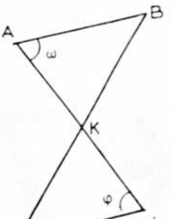
Κ. Ἄν φανταστοῦμε ὅτι ὅλες οἱ ἡμιευθεῖες ΚΑ,ΚΒ,ΚΓ,... στρέφονται συγχρόνως καί κατά τήν ἴδια φορά κατά γωνία 180^0, ὅλα τά σημεῖα Α,Β,Γ,... τοῦ σ θά ἐφαρμόσουν στά ἀντίστοιχα σημεῖα Α',Β',Γ',... τοῦ σ' καί ἔτσι τά σχήματα σ καί σ' θά ἐφαρμόσουν ἐντελῶς. Αὐτό σημαίνει ὅτι:

Τό συμμετρικό ἑνός σχήματος σ ὡς πρός κέντρο Κ εἶναι ἕνα σχῆμα ἴσο μέ τό σ.

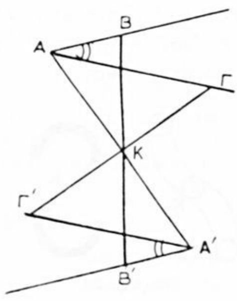
Ἀπό τήν πρόταση αὐτή συμπεραίνουμε ὅτι στή συμμετρία ὡς πρός κέντρο:

- **Τό συμμετρικό ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος εἶναι ἕνα ἴσο εὐθύγραμμο τμῆμα.**
- **Τό συμμετρικό μιᾶς γωνίας εἶναι μιά ἴση γωνία.**
- **Τό συμμετρικό ἑνός κύκλου (Ο,ρ) εἶναι ἕνας ἴσος κύκλος, πού ἔχει κέντρο τό συμμετρικό τοῦ Ο.**

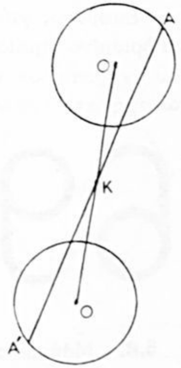
Στά παρακάτω σχήματα δίνονται τά συμμετρικά ὡς πρός κέντρο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ, μιᾶς γωνίας $B\widehat{A}\Gamma$ καί ἑνός κύκλου (Ο,ρ).



(σχ. 22)



(σχ. 23)



(σχ. 24)

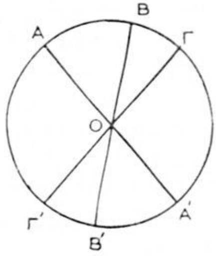
Ἀπό τό πρῶτο σχῆμα βλέπουμε ὅτι, γιά νά βρίσκουμε τό συμμετρικό ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ὡς πρός κέντρο Κ, ἀρκεῖ νά βρίσκουμε μόνο τά συμμετρικά τῶν ἄκρων του. Γενικά, γιά νά βρίσκουμε τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας, ἀρκεῖ νά βρίσκουμε τά συμμετρικά δυό μόνο σημείων της. Ἐπίσης, στό σχῆμα αὐτό τά τρίγωνα ΚΑΒ καί ΚΑ'Β' εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν

$$KA = KA', \ KB = KB' \text{ καί } A\widehat{K}B = A'\widehat{K}B' \text{ (κατακορυφήν γωνίες)}$$

καί ἐπομένως θά εἶναι καί $\widehat{\omega} = \widehat{\varphi}$, ὁπότε ΑΒ//Α'Β'. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι:

Τό συμμετρικό ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ (ἤ μιᾶς εὐθείας ε) ὡς πρός κέντρο εἶναι ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα παράλληλο καί ἴσο πρός τό ΑΒ (ἤ εὐθεία παράλληλη πρός τήν ε).

Σχήματα μέ κέντρο συμμετρίας



(σχ. 25)

5.7. Ἄν ἔχουμε ἕναν κύκλο (Ο,ρ) καί πάρουμε τά συμμετρικά ὁποιωνδήποτε σημείων του Α,Β,Γ,... ὡς πρός τό κέντρο του Ο, βλέπουμε ὅτι οἱ εἰκόνες τους Α′,Β′,Γ′,..., ἀνήκουν ἐπίσης στόν κύκλο (Ο,ρ) καί γι αὐτό λέμε ὅτι τό **κέντρο ἑνός κύκλου εἶναι κέντρο συμμετρίας του.**

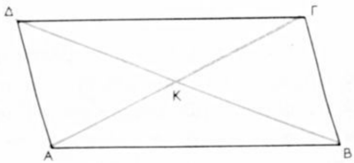
Γενικά λοιπόν θά λέμε ὅτι:

Ἕνα σχῆμα σ ἔχει **κέντρο συμμετρίας** ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Κ, ὅταν ὅλα τά σημεῖα τοῦ σχήματος χωρίζονται σέ ζεύγη, πού τά μέλη τους εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τό Κ.

Ἑπομένως γιά νά ἐλέγξουμε ἄν ἕνα σχῆμα σ ἔχει κέντρο συμμετρίας ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Κ, πρέπει νά ἐξετάσουμε ἄν τό συμμετρικό κάθε σημείου τοῦ σχήματος ὡς πρός Κ εἶναι ἐπίσης σημεῖο τοῦ σχήματος. Τά παρακάτω σχήματα ἔχουν κέντρο συμμετρίας.

(σχ. 26)

5.8. Μάθαμε στήν πρώτη τάξη ὅτι παραλληλόγραμμο εἶναι ἕνα τετράπλευρο, πού ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες. Ἄν στό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρουμε τίς διαγωνίους του ΑΓ καί ΒΔ καί μέ τό διαβήτη μας μετρήσουμε τά τμήματα ΚΑ, ΚΓ καί ΚΒ, ΚΔ, βλέπουμε ὅτι



(σχ. 27)

ΚΑ = ΚΓ καί ΚΒ = ΚΔ.

Ἀπό τίς ἰσότητες αὐτές βλέπουμε ὅτι τό συμμετρικό τοῦ παραλληλογράμμου ὡς πρός τό σημεῖο Κ εἶναι τό ἴδιο τό παραλληλόγραμμο. Ἔτσι τό σημεῖο K τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του εἶναι κέντρο συμμετρίας τοῦ παραλληλογράμμου καί οἱ πλευρές AB, ΓΔ καί AΔ, BΓ εἶναι συμμετρικές ὡς πρός K. Ἐπίσης οἱ γωνίες του $A\hat{\Delta}\Gamma$, $A\hat{B}\Gamma$ καί $\Delta\hat{A}B$, $\Delta\hat{\Gamma}B$ εἶναι συμμετρικές ὡς πρός K. Ἑπομένως σέ κάθε παραλληλόγραμμο:

- **Οἱ ἀπέναντι πλευρές εἶναι ἴσες μεταξύ τους.**
- **Οἱ ἀπέναντι γωνίες εἶναι ἴσες μεταξύ τους**
- **Οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται.**

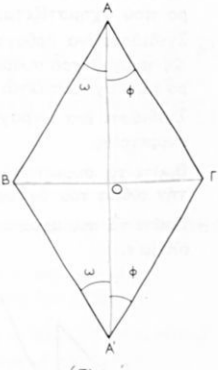
Διαπιστώνεται ὅτι, ἄν ἔχουμε ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ στό ὁποῖο ἰσχύει μιά ἀπό τίς ἰδιότητες αὐτές, τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Βρεῖτε τό συμμετρικό ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρός ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία τῆς βάσεώς του ΒΓ. Συγκρίνετε μέ τό διαβήτη σας τίς πλευρές τοῦ τετραπλεύρου πού σχηματίστηκε. Δικαιολογῆστε τά συμπεράσματά σας μέ συλλογισμούς.**

Λύση. Βρίσκουμε τό συμμετρικό A′ τοῦ A ὡς πρός τή ΒΓ. Συμμετρικό τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, ὡς πρός τή ΒΓ, εἶναι τό ἴσο ἰσοσκελές τρίγωνο A′ΒΓ. Εἶναι

$$AB = A\Gamma = A'B = A'\Gamma.$$



(σχ. :

Στό συμπέρασμα αὐτό καταλήγουμε καί μέ τόν ἀκόλουθο συλλογισμό. A′B = AB καί A′Γ = AΓ, γιατί τό συμμετρικό ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ὡς πρός ἄξονα εἶναι ἴσο εὐθύγραμμο τμῆμα. Ἀλλά AB = AΓ, γιατί τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές. Ἑπομένως ἔχουμε

$$AB = A\Gamma = A'B = A'\Gamma.$$

Ἀπό τήν ἰσότητα τῶν τριγώνων ABA′ καί AΓA′ (AB=AΓ, A′B=A′Γ, AA′=κοινή πλευρά) προκύπτει ὅτι καί ω = φ, ἑπομένως προκύπτει

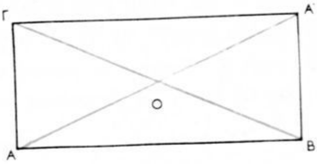
$$AB // A'\Gamma \text{ καί } BA' // A\Gamma,$$

δηλαδή τό τετράπλευρο ABA′Γ εἶναι παραλληλόγραμμο μέ ἴσες ὅλες τίς πλευρές του. Τό παραλληλόγραμμο αὐτό λέγεται **ρόμβος**. Παρατηροῦμε ἀκόμα ὅτι σέ κάθε ρόμβο:

- **Οἱ διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.**
- **Οἱ διαγώνιοί του εἶναι καί διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του.**
- **Οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἄξονες συμμετρίας του.**

2. **Βρεῖτε τό συμμετρικό ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ μέ κέντρο συμμετρίας τό μέσο Ο τῆς ὑποτείνουσάς του ΒΓ. Μελετῆστε τίς ἰδιότητες τοῦ τετραπλεύρου πού σχηματίζεται.**

Λύση. Συμμετρικό τοῦ Α εἶναι τό σημεῖο Α', τοῦ Β τό Γ καί τοῦ Γ τό Β, ἐπομένως συμμετρικό τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τό ἴσο ὀρθογώνιο τρίγωνο Α'ΒΓ.'Επειδή τό συμμετρικό ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ὡς πρός κέντρο εἶναι ἴσο καί παράλληλο εὐθύγραμμο τμῆμα, θά εἶναι Α'Β//ΑΓ καί Α'Γ//ΑΒ, δηλαδή τό τετράπλευρο ΑΒΑ'Γ εἶναι παραλληλόγραμμο καί μάλιστα μέ γωνίες ὀρθές. Τό παραλληλόγραμμο αὐτό λέγεται **ὀρθογώνιο.** Στό παράδειγμα 3 τῆς σελ. 57 εἴδαμε ὅτι οἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσες, δηλαδή ΑΑ'=ΓΒ.



(σχ. 29)

'Επειδή $ΑΟ = \frac{1}{2}ΑΑ'$, θά εἶναι καί $ΑΟ=\frac{1}{2}ΓΒ$, δηλαδή **στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ἡ διάμεσος ἀπό τήν κορυφή τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι ἴση μέ τό $\frac{1}{2}$ τῆς ὑποτείνουσάς του.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

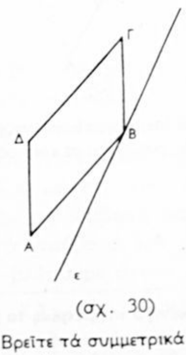
11 Σχεδιάστε ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ καί βρεῖτε τό συμμετρικό του ὡς πρός ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου. Τί εἶναι τό τετράπλευρο πού σχηματίζεται;

12 Σχεδιάστε ἕνα ὀρθογώνιο ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ καί βρεῖτε τό συμμετρικό του ὡς πρός κέντρο συμμετρίας τό μέσο τῆς ὑποτείνουσάς του. Τί εἶναι τό τετράπλευρο πού σχηματίζεται;

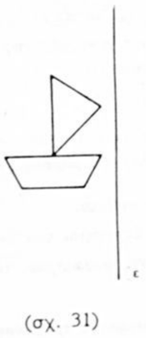
13 Σχεδιάστε ἕνα τετράγωνο ΑΒΓΔ καί ἐξετάστε ἄν ἔχει ἄξονες συμμετρίας καί κέντρο συμμετρίας.

14 Βρεῖτε τό συμμετρικό ἑνός σκαληνοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρός ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία τοῦ ὕψους ΑΔ.

15 Βρεῖτε τά συμμετρικά τῶν παρακάτω σχημάτων ὡς πρός ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία ε.



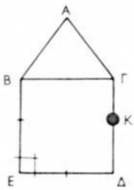
(σχ. 30)



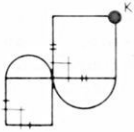
(σχ. 31)

(σχ. 32)

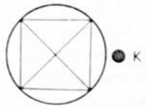
16 Βρεῖτε τά συμμετρικά τῶν ἑπόμενων σχημάτων ὡς πρός κέντρο συμμετρίας τό σημεῖο Κ.



(σχ. 33)



(σχ. 34)



(σχ. 35)

17. Σέ ἕνα σύστημα συντεταγμένων σημειῶστε τά σημεῖα Α(1,3), Β(−2,3), Γ(−4,−5) καί βρεῖτε τά συμμετρικά τους: α) ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων, β) ὡς πρός τόν ἄξονα Οx γ) ὡς πρός τόν ἄξονα Οψ.

18. Ἄν ἕνα σημεῖο Μ ἔχει συντεταγμένες (α,β), ποιές θά εἶναι οἱ συντεταγμένες τοῦ συμμετρικοῦ του: α) ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων, β) ὡς πρός τόν ἄξονα Οx γ) ὡς πρός τόν ἄξονα Οy.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 5.

1. **Ἀπεικόνιση ἑνός συνόλου Α σ' ἕνα σύνολο Β λέγεται μιά διμελής σχέση ἀπό τό Α στό Β, ὅταν κάθε στοιχεῖο τοῦ Α ἀντιστοιχίζεται μέ ἕνα μόνο στοιχεῖο τοῦ Β.** Μιά ἀπεικόνιση φ σημειώνεται

$$\varphi : A \to B$$

Τό σύνολο Α λέγεται **σύνολο ὁρισμοῦ** τῆς ἀπεικονίσεως καί τό σύνολο Β λέγεται **σύνολο ἀφίξεως**. Ἡ εἰκόνα τοῦ στοιχείου $x \in A$ σημειώνεται μέ $\varphi(x)$. Ἄν τά σύνολα Α καί Β εἶναι ἀριθμητικά σύνολα, τότε ἡ ἀπεικόνιση λέγεται καί **συνάρτηση**.

2. Μιά ἀπεικόνιση

$$\varphi : A \to A$$

λέγεται καί **μετασχηματισμός τοῦ Α.** Τέτοιοι μετασχηματισμοί εἶναι ἡ ἀξονική συμμετρία καί ἡ κεντρική συμμετρία.

- Τό συμμετρικό ἑνός σχήματος ὡς πρός ἄξονα εἶναι ἕνα ἴσο σχῆμα.
- Τό συμμετρικό ἑνός σχήματος ὡς πρός κέντρο εἶναι ἕνα ἴσο σχῆμα.

3. Ἕνα σχῆμα λέμε ὅτι ἔχει **ἄξονα συμμετρίας** μιά εὐθεία ε, ὅταν τό συμμετρικό τοῦ σχήματος ὡς πρός ἄξονα τήν εὐθεία ε ταυτίζεται μέ τό σχῆμα.
Ἕνα σχῆμα λέμε ὅτι ἔχει **κέντρο συμμετρίας** ἕνα σημεῖο Κ, ὅταν τό συμμετρικό τοῦ σχήματος ὡς πρός τό Κ ταυτίζεται μέ τό σχῆμα.

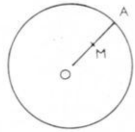
- Ἡ εὐθεία τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας εἶναι ἄξονας συμμετρίας τῆς γωνίας.
- Κάθε διάμετρος κύκλου εἶναι ἄξονας συμμετρίας του.
- Τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων ἑνός παραλληλογράμμου εἶναι κέντρο συμμετρίας τοῦ παραλληλογράμμου.
- Τό κέντρο ἑνός κύκλου εἶναι κέντρο συμμετρίας του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*.

19. Στό σύνολο $A = \{0,2,-1,1,-2,3,-3\}$ ὁρίζουμε μιά ἀπεικόνιση φ μέ τύπο $\varphi(x)=x^2$.

Κάνετε τόν πίνακα τιμῶν της καί βρεῖτε τό φ(Α). Σ' ἕνα σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων σημειῶστε τά σημεῖα, πού ἀντιστοιχοῦν στά ζεύγη τῆς φ.

20. Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο,ρ). Σέ κάθε σημεῖο Α τοῦ κύκλου ἀντιστοιχίζουμε τό μέσο Μ τῆς ἀκτίνας ΟΑ, ὅπως φαίνεται στό διπλανό σχῆμα. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἀντιστοιχία αὐτή εἶναι μιά ἀπεικόνιση μέ σύνολο ὁρισμοῦ τόν κύκλο. Ποιό εἶναι τό σύνολο τῶν εἰκόνων;



21. Στό σύνολο Α = {1,2,3,4,5} ὁρίζουμε δυό ἀπεικονίσεις φ καί f μέ τύπους ἀντίστοιχα $\varphi(x) = 2x$ καί $f(x) = \frac{1}{2x}$. Κάνετε ἕναν πίνακα τιμῶν γιά κάθε ἀπεικόνιση καί βρεῖτε τά σύνολα φ(Α) καί f(A). Σ' ἕνα σύστημα συντεταγμένων σημειῶστε τά σημεῖα πού ἀντιστοιχοῦν στά ζεύγη τῆς φ καί τῆς f.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ••

22. Στό σύνολο Α = {−2,−1,0,1,2} ὁρίζουμε μιά σταθερή ἀπεικόνιση φ μέ τύπο $\varphi(x) = 3$. Βρεῖτε τό φ(Α) καί σημειῶστε σ' ἕνα σύστημα συντεταγμένων τά ζεύγη τῆς φ. Τί παρατηρεῖτε γιά τά σημεῖα αὐτά;

23. Νά βρεῖτε τό συμμετρικό
α) ἑνός τριγώνου ὡς πρός κέντρο συμμετρίας ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο του,
β) ἑνός κύκλου ὡς πρός κέντρο συμμετρίας ἕνα σημεῖο του,
γ) ἑνός παραλληλογράμμου ὡς πρός κέντρο συμμετρίας μιά κορυφή του.

24. Σ' ἕνα σύστημα συντεταγμένων σημειῶστε τά σημεῖα Α(1,3), Β(4,4) καί Γ(−3,5). Σχηματίστε τό τρίγωνο ΑΒΓ, βρεῖτε τό συμμετρικό του Α'Β'Γ' ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί τίς συντεταγμένες τῶν σημείων Α', Β', Γ'.

25. Ἄν ἕνα σχῆμα ἔχει δυό ἄξονες συμμετρίας πού τέμνονται κάθετα, θά ἔχει τότε καί κέντρο συμμετρίας; Σέ ποιά γεωμετρικά σχήματα, ἀπό ὅσα γνωρίζετε, συμβαίνει αὐτό;

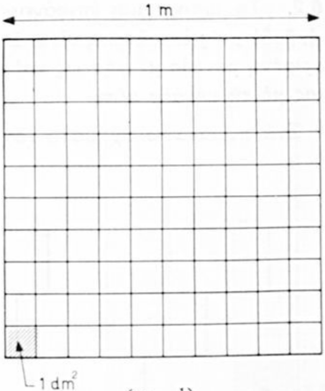
6ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Μονάδες μετρήσεως ἐπιφανειῶν

6.1. Στήν Α' τάξη μάθαμε ὅτι, γιά νά μετρήσουμε ἕνα ὁποιοδήποτε μέγεθος Α, τό συγκρίνουμε μέ ἕνα ὁμοειδές του μέγεθος Μ, τό ὁποῖο ὀνομάζουμε **μονάδα μετρήσεως**. Ὁ ἀριθμός πού προκύπτει ἀπό τή μέτρηση τοῦ Α μέ τή «μονάδα» Μ λέγεται γενικά **μέτρο** τοῦ Α. Μάθαμε ἀκόμη ὅτι στή μέτρηση τῶν ἐπιφανειῶν παίρνουμε συνήθως γιά μονάδα μετρήσεως τό **τετραγωνικό μέτρο (m^2)**, δηλαδή τήν ἐπιφάνεια ἑνός τετραγώνου, πού ἔχει πλευρά 1 m.

Γιά νά μετρήσουμε μικρές ἐπιφάνειες, χρησιμοποιοῦμε μονάδες, οἱ ὁποῖες εἶναι ὑποδιαιρέσεις τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου. Μιά τέτοια μονάδα π.χ. βρίσκεται, ἄν χωρίσουμε τό τετραγωνικό μέτρο σέ 100 ἴσα τετράγωνα, ὅπως δείχνει τό διπλανό σχῆμα. Κάθε ἕνα ἀπό τά ἴσα αὐτά τετράγωνα ἔχει πλευρά $\frac{1}{10}$ m (δηλαδή 10 cm) καί ἡ ἐπιφάνειά του λέγεται **τετραγωνικό δεκατόμετρο (dm^2)**. Ἄν χωρίσουμε μέ τόν ἴδιο τρόπο τό τετραγωνικό δεκατόμετρο σέ 100 ἴσα τετράγωνα, ἔχουμε τό **τετραγωνικό ἑκατοστόμετρο (cm^2)** κ.ο.κ.



(σχ. 1)

Οἱ ὑποδιαιρέσεις λοιπόν τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου, πού χρησιμοποιοῦνται γιά τή μέτρηση μικρῶν ἐπιφανειῶν, εἶναι:

- **Τό τετραγωνικό δεκατόμετρο** (dm^2) $= \frac{1}{100}\ m^2$ [1]
- **Τό τετραγωνικό ἑκατοστόμετρο** (cm^2) $= \frac{1}{100}\ dm^2 = \frac{1}{10\,000}\ m^2$.
- **Τό τετραγωνικό χιλιοστόμετρο** (mm^2) $= \frac{1}{100}\ cm^2 = \frac{1}{10\,000}\ dm^2 = \frac{1}{1\,000\,000}\ m^2$.

(1) Τά σύμβολα m, dm, κ.λ.π., εἶναι συντμήσεις τῶν γαλλικῶν λέξεων metre (m), décimetre (dm), centimetre (cm), millimetre (mm), décametre (dàm), hectometre (hm), kilometre (km).

Γιά τή μέτρηση μεγάλων ἐπιφανειῶν χρησιμοποιοῦνται μονάδες, οἱ ὁποῖες εἶναι πολλαπλάσια τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου· αὐτές εἶναι:

- **Τό τετραγωνικό δεκάμετρο (dam^2) = 100 m^2**
- **Τό τετραγωνικό ἑκατόμετρο (hm^2) = 100 dam^2 = 10 000 m^2**
- **Τό τετραγωνικό χιλιόμετρο (km^2) = 100 hm^2 = 10 000 dam^2 = = 1 000 000 m^2**

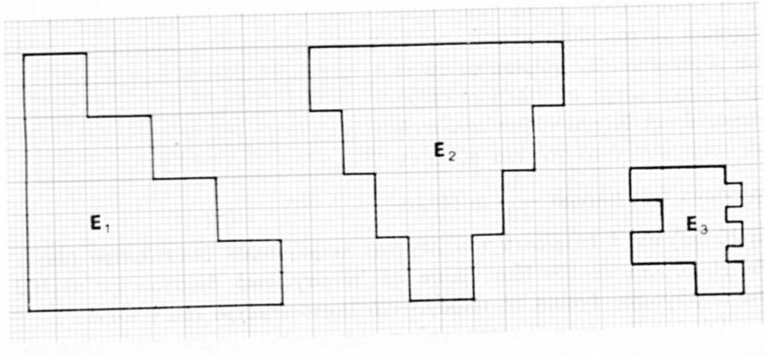
Στή χώρα μας γιά τή μέτρηση ἐκτάσεων γῆς χρησιμοποιεῖται τό **στρέμμα** καί εἶναι

1 στρέμμα = 1.000 m^2

Ἐμβαδό σχήματος. Ἰσοδύναμα σχήματα

6.2. Τό μέτρο μιᾶς ἐπιφάνειας λέγεται **ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας**. Ἔτσι, **τό ἐμβαδό μιᾶς ἐπιφάνειας εἶναι ἕνας ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀναφέρεται σέ συγκεκριμένη μονάδα μετρήσεως καί προκύπτει ἀπό τή σύγκριση τῆς ἐπιφάνειας μέ τή μονάδα αὐτή.**

Στά παρακάτω σχήματα (σχ. 2) βλέπουμε τρεῖς ἐπιφάνειες E_1, E_2, E_3

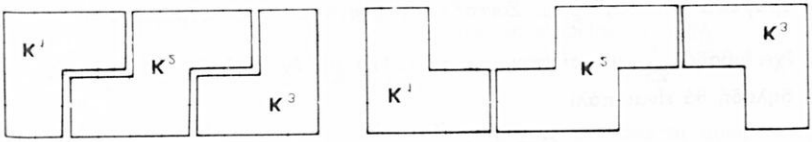


(σχ. 2)

ἀπό τίς ὁποῖες οἱ E_1 καί E_2 ἔχουν ἐμβαδό 10 cm^2, ἐνῶ ἡ E_3 ἔχει ἐμβαδό 249 mm^2 ἤ 2,49 cm^2.

Δύο σχήματα, πού ἔχουν τό ἴδιο ἐμβαδό, λέγονται ἰσοδύναμα. Τά παραπάνω σχήματα E_1 καί E_2 εἶναι ἰσοδύναμα δίχως βέβαια νά εἶναι ἴσα. Γενικά δύο ἴσα σχήματα εἶναι πάντοτε ἰσοδύναμα, ἀφοῦ, ὅταν τοποθετήσουμε τό ἕνα πάνω στό ἄλλο, ἔχουν ἀκριβῶς τήν ἴδια ἐπιφάνεια. Τά ἰσοδύναμα ὅμως σχήματα δέν εἶναι ἀπαραιτήτως ἴσα.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, ἄν κομματιάσουμε ἕνα σχῆμα καί τοποθετήσουμε τά κομμάτια του τό ἕνα δίπλα στό ἄλλο κατά διάφορους

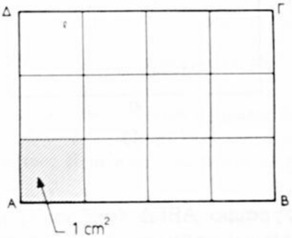


(σχ. 3)

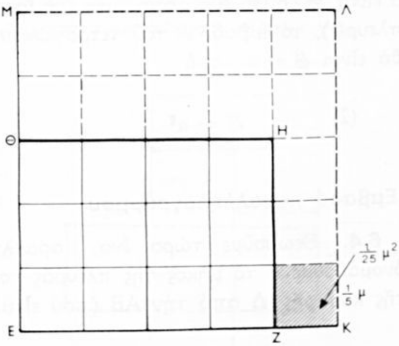
τρόπους, θά προκύψουν σχήματα ἰσοδύναμα. Μιά τέτοια ἐργασία φαίνεται στό παραπάνω σχῆμα 3.

Ἐμβαδὸ ὀρθογωνίου

6.3. Ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ, πού ἔχει πλευρές μέ μήκη (ΑΒ) = 4 cm καί (ΒΓ) = 3 cm, χωρίζεται μέ τόν τρόπο πού δείχνει τό σχῆμα 4 σέ



(σχ. 4)



(σχ. 5)

$4 \times 3 = 12$ τετράγωνα, πού τό καθένα τους ἔχει πλευρά 1 cm. Ἔτσι τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ εἶναι

$$\mathscr{E} = 4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}^2$$

Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕνα ὀρθογώνιο ΕΖΗΘ, πού οἱ πλευρές του ΕΖ καί ΖΗ εἶναι τά $\frac{4}{5}$ καί τά $\frac{3}{5}$ μιᾶς μονάδας μήκους μ (βλ. σχῆμα 5). Τό ὀρθογώνιο αὐτό χωρίζεται μέ τόν ἴδιο τρόπο σέ $4 \times 3 = 12$ τετράγωνα, πού τό καθένα τους ἔχει πλευρά τό $\frac{1}{5}$ τοῦ μ. Προεκτείνουμε τώρα τήν κάθε πλευρά τοῦ ὀρθογωνίου ὥσπου νά γίνει ἴση μέ μ. Σχηματίζεται ἔτσι τό τετράγωνο ΕΚΛΜ, πού ἔχει ἐμβαδό 1 μ² καί ἀποτελεῖται ἀπό 25 τετράγωνα πλευρᾶς $\frac{1}{5}$ μ. Συνεπῶς τό καθένα ἀπό τά τετράγωνα αὐτά ἔχει ἐμβαδό $\frac{1}{25}$ $μ^2$ καί ἑπομένως τό ΕΖΗΘ θά ἔχει ἐμβαδό $12 \cdot \frac{1}{25}$ $μ^2$, δηλαδή θά εἶναι πάλι

$$\mathscr{E} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25}\ μ^2$$

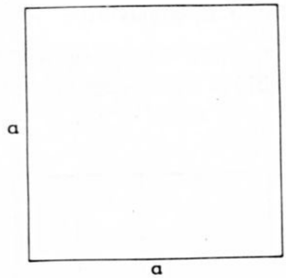
Βλέπουμε λοιπόν ὅτι, ἄν οἱ πλευρές ἑνός ὀρθογωνίου μετρηθοῦν μέ τήν ἴδια μονάδα μετρήσεως καί ἔχουν μήκη α καί β, τό ἐμβαδό θά εἶναι

(1) $$\boxed{\mathscr{E} = α . β}$$

δηλαδή **τό ἐμβαδό ἑνός ὀρθογωνίου εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τῶν μηκῶν δύο διαδοχικῶν πλευρῶν του.**

Ἐπειδή τό τετράγωνο μέ πλευρά[1] α εἶναι κι αὐτό ἕνα ὀρθογώνιο (μέ ἴσες πλευρές), τό ἐμβαδό $\mathscr{E}$ τοῦ τετραγώνου θά εἶναι $\mathscr{E} = α \cdot α$ ἤ

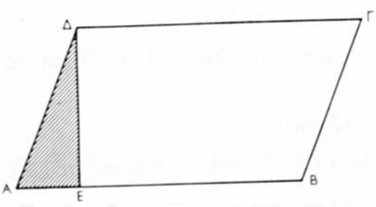
(2) $$\boxed{\mathscr{E} = α^2}$$



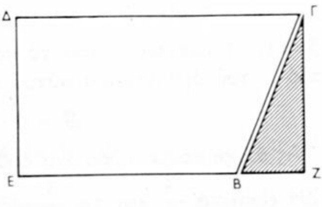
(σχ. 6)

Ἐμβαδό παραλληλογράμμου

6.4. Θεωροῦμε τώρα ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχῆμα 7) καί ὀνομάζουμε α τό μῆκος τῆς πλευρᾶς του ΑΒ καί (ΔΕ)=υ τήν ἀπόσταση τῆς κορυφῆς Δ ἀπό τήν ΑΒ (πού εἶναι ἴση μέ τήν ἀπόσταση τῶν δύο



(σχ. 7)



(σχ. 8)

παράλληλων εὐθειῶν ΑΒ καί ΓΔ). Κόβουμε μέ ἕνα ψαλίδι τό τρίγωνο ΑΔΕ καί τό τοποθετοῦμε στή θέση ΒΓΖ, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 8. Ἔτσι τό παραλληλόγραμμο μετατρέπεται σέ ὀρθογώνιο, πού ἔχει πλευρές (ΕΖ)=

(1) Ἀπό δῶ καί πέρα λέγοντας πλευρά ἤ βάση ἤ ὕψος θά ἐννοοῦμε συνήθως τά μήκη τους.

$= (\Delta\Gamma) = \alpha$ καί $(\Delta E) = \upsilon$. Ἑπομένως τό ἐμβαδό $\mathcal{E}$ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θά εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογωνίου, δηλαδή

$$\boxed{\mathcal{E} = \alpha . \upsilon} \tag{3}$$

Σ' ἕνα παραλληλόγραμμο ἡ μιά του πλευρά χαρακτηρίζεται συνήθως σάν *«βάση»* του καί τότε ἡ ἀπόσταση μιᾶς ἀπέναντι κορυφῆς του ἀπό τή βάση εἶναι τό *«ὕψος»* του. Ἔτσι ὁ τύπος (3) γράφεται πιό ἀναλυτικά

$$\boxed{\mathcal{E} = \text{βάση} \times \text{ὕψος}} \tag{3'}$$

δηλαδή **τό ἐμβαδό ἑνός παραλληλογράμμου εἶναι γινόμενο τῆς βάσεώς του ἐπί τό ὕψος του.**

Ἔτσι π.χ. ἄν εἶναι $(AB) = 5$ cm καί $\upsilon = 3$ cm, τό ἐμβαδό τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι $\mathcal{E} = 5 \times 3 = 15$ cm^2.

Εἶναι φανερό ὅτι ὁ ἴδιος κανόνας μπορεῖ νά διατυπωθεῖ καί γιά τό ὀρθογώνιο (γιατί, ἄν ἡ πλευρά του α χαρακτηρισθεῖ σάν «βάση» του, τότε ἡ πλευρά β εἶναι τό ὕψος του).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

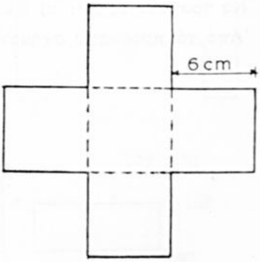
1. **Ἡ περίμετρος τοῦ διπλανοῦ σχήματος ἀποτελεῖται ἀπό εὐθύγραμμα τμήματα, πού τό καθένα τους εἶναι 6 cm. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό του.**

Λύση. Ὅπως βλέπουμε (σχ. 9), τό σχῆμα ἀποτελεῖται ἀπό 5 τετράγωνα, πού τό καθένα τους ἔχει πλευρά 6 cm. Ἑπομένως τό ἐμβαδό τοῦ καθενός τετραγώνου εἶναι

$$\mathcal{E}_1 = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$$

καί τό ἐμβαδό τοῦ σχήματος εἶναι

$$\mathcal{E} = 5.36 = 180 \text{ cm}^2.$$



(σχ. 9)

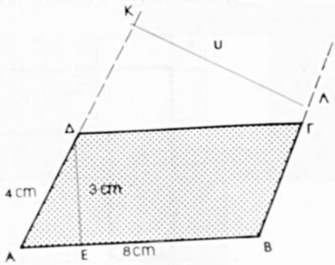
2. **Νά ὑπολογίσετε τήν ἀπόσταση υ τῶν παράλληλων πλευρῶν ΑΔ καί ΒΓ στό παραλληλόγραμμο τοῦ σχήματος 10.**

Λύση. Ἄν χαρακτηρίσουμε σάν βάση τοῦ παραλληλογράμμου τήν πλευρά ΑΒ, ὕψος θά εἶναι τό ΔΕ καί συνεπῶς τό ἐμβαδό του θά εἶναι

$$\mathcal{E} = 8.3 = 24 \text{ cm}^2.$$

Παίρνουμε τώρα σάν βάση τήν ΒΓ (πού εἶναι ἴση μέ τήν ΑΔ), ὁπότε ὕψος θά εἶναι τό $(K\Lambda) = \upsilon$. Θά ἔχουμε λοιπόν

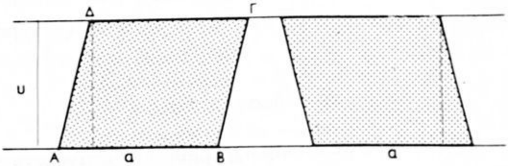
$$\mathcal{E} = (B\Gamma).\upsilon \text{ ἤ } 24 = 4.\upsilon \text{ ἤ } \upsilon = \frac{24}{4} = 6 \text{ cm}.$$



(σχ. 10)

3. **Δύο ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καί ΔΓ μήκους α μετακινοῦνται πάνω σέ δύο παράλληλες εὐθεῖες. Νά δείξετε ὅτι σέ ὁποιαδήποτε θέση τους τό ἐμβαδό τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι πάντοτε τό ἴδιο.**

Λύση: Σέ κάθε θέση τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων ΑΒ καί ΔΓ τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο, γιατί, ὅπως διαπιστώνουμε εὔκολα μέ τό διαβήτη, ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του ἴσες.



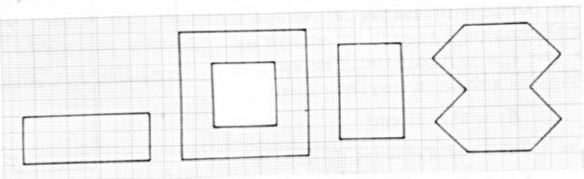
(σχ. 11)

Ἄν πάρουμε λοιπόν σάν βάση τήν πλευρά $(AB)=\alpha$, ὕψος θά εἶναι ἡ ἀπόσταση υ τῶν δύο παράλληλων εὐθειῶν. Συνεπῶς γιά ὁποιαδήποτε θέση τῶν ΑΒ καί ΔΓ τό ἐμβαδό τοῦ τετραπλεύρου (παραλληλογράμμου) ΑΒΓΔ θά εἶναι

$$E=\alpha . \upsilon$$

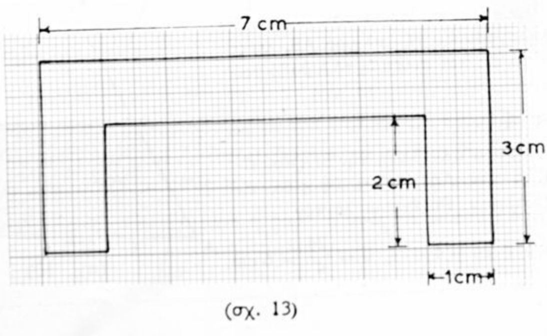
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά τραποῦν σέ cm^2: α) $3\ m^2$ β) $5\ m^2\ 12\ dm^2\ 17\ cm^2$ γ) $4\ dam^2\ 5\ m^2\ 12\ cm^2$.
2. Νά τραποῦν σέ m^2: α) $5\ km^2$ β) $3\ km^2\ 12\ hm^2$ γ) $3267\ cm^2$.
3. Ἀπό τά παρακάτω σχήματα νά βρεῖτε ποιά εἶναι ἰσοδύναμα.



(σχ. 12)

4. Νά σχεδιάσετε δύο σχήματα ἰσοδύναμα μέ τό σχῆμα 13.



(σχ. 13)

5. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό ἑνός ὀρθογωνίου, πού ἔχει περίμετρο 48 cm καί ἡ μιά του πλευρά εἶναι 16 cm.

6. Ἀγόρασε κάποιος ἕνα χαλί, πού εἶχε μῆκος 3,5 m καί πλάτος 1,8 m. Νά βρεῖτε πόσα πλήρωσε, ἄν τό 1 m^2 κοστίζει 800 δρχ.

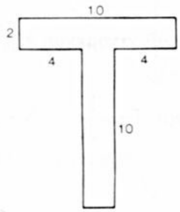
7. Μιά αὐλή, πού ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου μέ μῆκος 12 m καί πλάτος 8 m, πρόκειται νά τή στρώσουμε μέ τετραγωνικά πλακάκια πλευρᾶς 40 cm. Πόσα πλακάκια θά χρειαστοῦμε;

8. Ἕνα ὀρθογώνιο ἔχει βάση 15 cm καί εἶναι ἰσοδύναμο μέ τετράγωνο πλευρᾶς 12 cm. Νά βρεῖτε τό ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου.

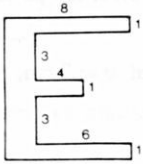
9. Ἕνα παραλληλόγραμμο ἔχει βάση 6,5 cm καί ἐμβαδό 39 cm^2. Νά βρεῖτε τό ὕψος του.

10. Τί θά πάθει ἕνα παραλληλόγραμμο, ἄν ἀφήσουμε τή βάση του ἀμετάβλητη καί διπλασιάσουμε τό ὕψος του;

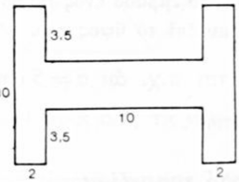
11. Νά βρεῖτε τά ἐμβαδά τῶν παρακάτω σχημάτων. (Οἱ ἀριθμοί ἐκφράζουν τά μήκη τῶν τμημάτων σέ cm).



(σχ. 14)

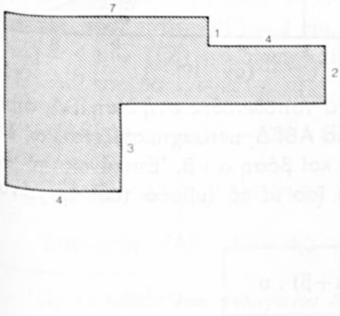


(σχ. 15)

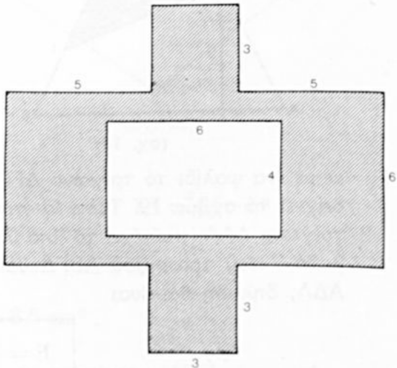


(σχ. 16)

12. Νά βρεῖτε τά ἐμβαδά τῶν γραμμοσκιασμένων σχημάτων 16α καί 16β.



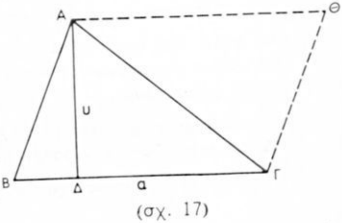
(σχ. 16α)



(σχ. 16β)

‘Εμβαδὸ τριγώνου

6.5. Θεωροῦμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, τό ὁποῖο ἔχει βάση (ΒΓ)=α καί ὕψος (ΑΔ)=υ. ’Από τό Α φέρνουμε παράλληλη πρός τή ΒΓ καί ἀπό τό Γ παράλληλη πρός τήν ΑΒ. Σχηματίζεται ἔτσι τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΘ, πού ἔχει τήν ἴδια βάση καί τό ἴδιο ὕψος μέ τό τρίγωνο. ‘Επομένως τό ἐμβαδό τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ εἶναι α · υ.



(σχ. 17)

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι τό μισό τοῦ παραλληλογράμμου (γιατί τά δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί ΑΓΘ εἶναι ἴσα). Συνεπῶς τό ἐμβαδό Ε τοῦ τριγώνου θά εἶναι

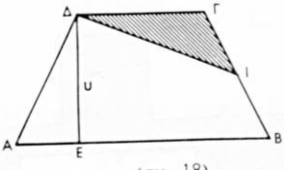
$$E = \frac{1}{2}\,\alpha \,.\, \upsilon \qquad (4)$$

δηλαδή, **τό ἐμβαδό ἑνός τριγώνου εἶναι ἴσο μέ τό μισό τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς του ἐπί τό ὕψος του.**

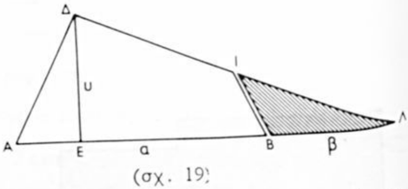
Ἔτσι π.χ. ἄν $\alpha = 5$ cm καί $\upsilon = 3$ cm, θά εἶναι $E = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = 7{,}5\ \text{cm}^2$.

‘Εμβαδό τραπεζίου

6.6. Ἔστω ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ, πού ἔχει βάσεις (ΑΒ) = α, (ΓΔ) = β καί ὕψος (ΔΕ)=υ (σχῆμα 18). Ἄν Ι εἶναι τό μέσο τῆς πλευρᾶς ΒΓ, κόβουμε μέ ἕνα ψαλίδι τό τρίγωνο ΔΓΙ καί τό τοποθετοῦμε στή θέση ΙΒΛ, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 19. Τότε τό τραπέζιο ΑΒΓΔ μετασχηματίζεται σέ ἕνα τρίγωνο ΔΑΛ, πού ἔχει τό ἴδιο ὕψος υ καί βάση α+β. ‘Επομένως τό ἐμβαδό Ε τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ θά εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου ΑΔΛ, δηλαδή θά εἶναι



(σχ. 18)



(σχ. 19)

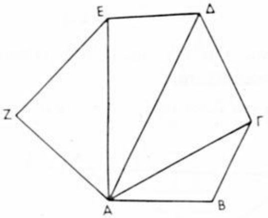
$$E = \frac{1}{2}\,(\alpha+\beta) \,.\, \upsilon \qquad (5)$$

Ὥστε: Τό ἐμβαδό ἑνός τραπεζίου εἶναι ἴσο μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν βάσεών του ἐπί τό ὕψος του.

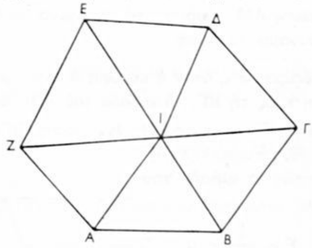
Ἔτσι π.χ. ἄν εἶναι (ΑΒ) $= 6$ cm, (ΔΓ) $= 4$ cm καί (ΔΕ) $= 5$ cm, τό ἐμβαδό τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ θά εἶναι $\text{Ε} = \frac{1}{2}(6+4)\cdot 5 = 25 \text{ cm}^2$.

Ἐμβαδό πολυγώνου

6.7. Γιά νά ὑπολογίσουμε τό ἐμβαδό ἑνός πολυγώνου[1], χωρίζουμε τό πολύγωνο σέ ἄλλα σχήματα, πού ξέρουμε νά βρίσκουμε τό ἐμβαδό τους. Συνήθως τό χωρίζουμε σέ τρίγωνα ἤ μέ τίς διαγωνίους, πού διέρχονται ἀπό μιά κορυφή του (βλέπε σχῆμα 20), ἤ μέ εὐθύγραμμα τμήματα,



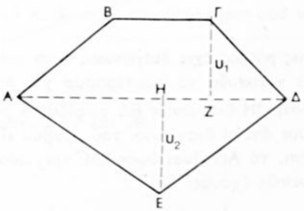
(σχ. 20)



(σχ. 21)

πού φέρνουμε ἀπό ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο του Ι πρός ὅλες τίς κορυφές του (βλέπε σχῆμα 21).

Ὁ τρόπος πού χωρίζουμε τό πολύγωνο ἐξαρτᾶται κάθε φορά ἀπό τό σχῆμα του. Ἔτσι π.χ. στό διπλανό πολύγωνο, πού ἡ διαγώνιός του ΑΔ εἶναι παράλληλη πρός τήν πλευρά ΒΓ, τό ἐμβαδό του βρίσκεται, ἄν προσθέσουμε τά ἐμβαδά τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ καί τοῦ τριγώνου ΑΕΔ. Ἄν λοιπόν εἶναι (ΒΓ) $= 2$ cm, (ΑΔ) $= 4$ cm, (ΓΖ) $= 1{,}5$ cm καί (ΕΗ) $= 2$ cm, θά ἔχουμε



(σχ. 22)

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{2}(\text{ΒΓ}+\text{ΑΔ})\cdot(\text{ΓΖ}) = \frac{1}{2}(2+4)\cdot 1{,}5 = 4{,}5 \text{ cm}^2$$

$$(\text{ΑΕΔ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΔ})\cdot(\text{ΗΕ}) = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2 = 4 \text{ cm}^2$$

Ἑπομένως $(\text{ΑΒΓΔΕ}) = 4{,}5 + 4 = 8{,}5 \text{ cm}^2$.

(1) Τό ἐμβαδό ἑνός πολυγώνου ΑΒΓΔ... θά σημειώνεται (ΑΒΓΔ...).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά δείξετε ὅτι κάθε διάμεσος τριγώνου χωρίζει γενικά τό τρίγωνο σέ δύο (ἄνισα) τρίγωνα ἰσοδύναμα.**

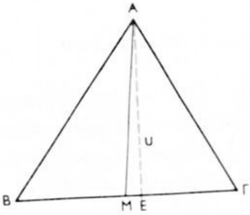
Λύση. Ὀνομάζουμε (ΒΓ) = α καί ὕψος (ΑΕ) = υ. Τά τρίγωνα ΑΒΜ καί ΑΜΓ ἔχουν τό ἴδιο ὕψος (τό υ) καί βάσεις τίς ΒΜ καί ΜΓ. Ἀλλά $(ΒΜ)=(ΜΓ)=\frac{α}{2}$.

Ἑπομένως εἶναι

$$(ΑΒΜ) = \frac{1}{2}(ΒΜ).(ΑΕ) = \frac{1}{2}.\frac{α}{2}.υ = \frac{1}{4}α.υ$$

$$(ΑΜΓ) = \frac{1}{2}(ΜΓ).(ΑΕ) = \frac{1}{2}.\frac{α}{2}.υ = \frac{1}{4}α.υ$$

Συνεπῶς εἶναι (ΑΒΜ) = (ΑΜΓ), δηλαδή ἡ διάμεσος ΑΜ χώρισε τό τρίγωνο σέ δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα.



(σχ. 23)

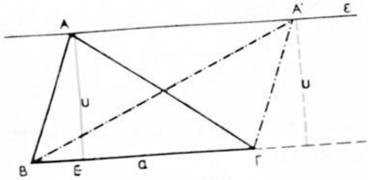
2. **Νά δείξετε ὅτι, ὅταν ἡ κορυφή Α ἑνός τριγώνου ΑΒΓ κινεῖται σέ μιά εὐθεία παράλληλη πρός τή ΒΓ, τό ἐμβαδό τοῦ ΑΒΓ δέ μεταβάλλεται.**

Λύση. Τό τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει βάση (ΒΓ)=α καί ὕψος (ΑΕ)=υ (υ εἶναι ἡ ἀπόσταση τῶν δύο παραλλήλων).

Συνεπῶς τό ἐμβαδό του εἶναι

$$E = \frac{1}{2}\ α.υ$$

Καθώς τώρα κινεῖται ἡ κορυφή Α στήν εὐθεία ε, οὔτε ἡ βάση τοῦ τριγώνου μεταβάλλεται οὔτε τό ὕψος του (βάση παραμένει πάντοτε ἡ (ΒΓ)=α καί ὕψος ἡ ἀπόσταση υ τῶν δύο παραλλήλων). Ἑπομένως δέ μεταβάλλεται οὔτε τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου.



(σχ. 24)

3. **Ἕνας ρόμβος ἔχει διαγωνίους 6 cm καί 4 cm. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό του.** (Νά γενικευθεῖ τό συμπέρασμα γιά διαγωνίους λ καί μ cm).

Λύση. Ἡ διαγώνιος ΒΔ χωρίζει τό ρόμβο σέ δύο ἴσα τρίγωνα ΑΒΔ καί ΓΒΔ. Ξέρουμε ὅτι οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου εἶναι κάθετες.

Ἔτσι, τό ΑΟ εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΔ καί συνεπῶς ἔχουμε:

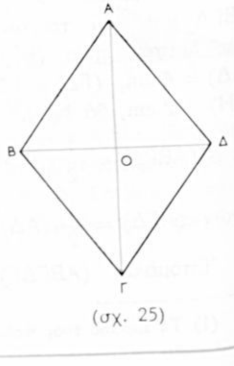
$$(ΑΒΔ) = \frac{1}{2}\ (ΒΔ)\ .\ (ΑΟ) = \frac{1}{2}\ 4\ .\ 6/2 = 6\ cm^2$$

Ἑπομένως $(ΑΒΓΔ) = 2.6 = 12\ cm^2$.

Ἄν τώρα οἱ διαγώνιοι εἶναι λ καί μ cm, θά ἔχουμε

$$(ΑΒΔ) = \frac{1}{2}(ΒΔ).(ΑΟ) = \frac{1}{2}.λ.\frac{μ}{2} = \frac{1}{4}λ.μ \text{ καί}$$

$(ΑΒΓΔ) = 2\cdot\frac{1}{4}λ.μ = \frac{1}{2}λ.μ$, δηλαδή, **τό ἐμβαδό ρόμβου εἶναι ἴσο μέ τό μισό τοῦ γινομένου τῶν διαγωνίων του.**



(σχ. 25)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

13. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρά ΒΓ εἶναι 12 cm καί τό ὕψος, πού ἀντιστοιχεῖ στή ΒΓ, εἶναι 8 cm.

14. Στό τρίγωνο τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως ἡ πλευρά ΑΓ εἶναι 16 cm. Νά βρεῖτε τό ὕψος, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ΑΓ.

15. Τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοδύναμο μέ τετράγωνο πλευρᾶς 8 cm. Νά βρεῖτε τήν πλευρά ΒΓ, ἄν τό ἀντίστοιχο ὕψος εἶναι 10 cm.

16. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό ὀρθογώνιου τριγώνου, τοῦ ὁποίου οἱ κάθετες πλευρές εἶναι 5 cm καί 8 cm.

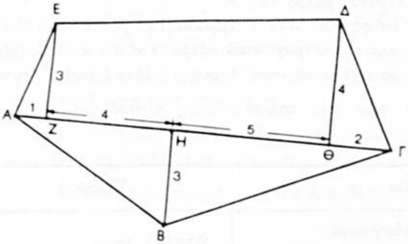
17. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό ἑνός τραπεζίου, τό ὁποῖο ἔχει βάσεις 6 cm καί 4 cm καί ὕψος 3 cm.

18. Νά βρεῖτε τό ὕψος ἑνός τραπεζίου, τοῦ ὁποίου οἱ βάσεις εἶναι 10 cm καί 6 cm καί τό ἐμβαδό 40 cm^2.

19. Ἕνα ἀγρόκτημα ἔχει σχῆμα τραπεζίου μέ βάσεις 140 m καί 80 m καί ὕψος 56 m. Πόσα θά εἰσπράξει ὁ ἰδιοκτήτης του, ἄν τό πουλήσει πρός 7 200 δρχ. τό στρέμμα;

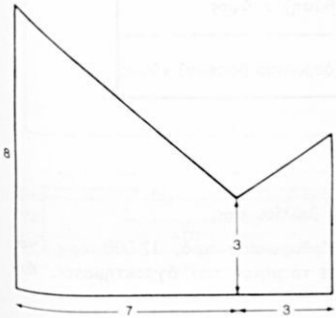
20. Ἕνας ρόμβος ἔχει ἐμβαδό 60 cm^2. Ἡ μία διαγώνιός του εἶναι 12 cm. Νά ὑπολογίσετε τήν ἄλλη διαγώνιο.

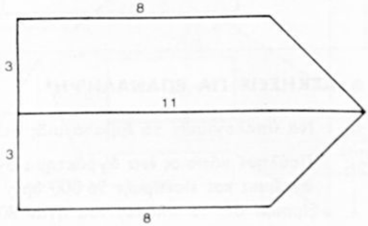
21. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ τοῦ σχήματος 26.



(σχ. 26)

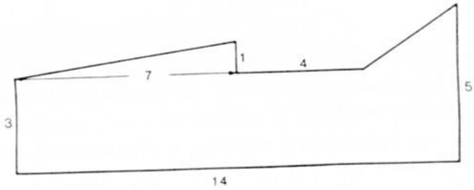
22. Νά ὑπολογίσετε τά ἐμβαδά τῶν σχημάτων 27 καί 28.



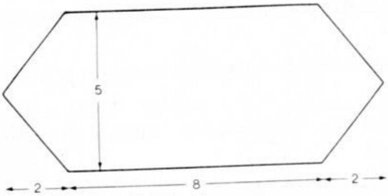


(σχ. 27) (σχ. 28)

23. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό τῶν σχημάτων 29 καί 29α.



(σχ. 29)



(σχ. 29α)

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 6

1. Γιά νά μετρήσουμε ἕνα μέγεθος Α, τό συγκρίνουμε μέ ἕνα ὁμοειδές του μέγεθος Μ, πού λέγεται **μονάδα μετρήσεως.** Ὁ ἀριθμός πού προκύπτει ἀπό τή σύγκριση αὐτή, λέγεται **μέτρο** τοῦ Α.

Τό μέτρο μιᾶς ἐπιφάνειας λέγεται **ἐμβαδό.** Γιά βασική μονάδα μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν παίρνουμε τό **τετραγωνικό μέτρο** καί τίς ὑποδιαιρέσεις ἤ τά πολλαπλάσιά του. Δύο σχήματα, πού ἔχουν τό ἴδιο ἐμβαδό, λέγονται **ἰσοδύναμα.**

2. Τά ἐμβαδά τῶν πιό συνηθισμένων σχημάτων δίνονται στόν παρακάτω πίνακα.

Σχῆμα	Ἐμβαδό
—Ὀρθογώνιο — Παραλληλόγραμμο	βάση x ὕψος
Τρίγωνο	$\frac{1}{2}$ (βάση) x ὕψος
Τραπέζιο	$\frac{1}{2}$ (ἄθροισμα βάσεων) xὕψος

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

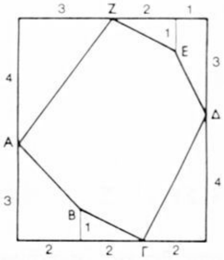
24. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό μιᾶς σελίδας τοῦ βιβλίου σας.

25. Πούλησε κάποιος ἕνα ἀγρόκτημα σχήματος ὀρθογωνίου πρός 12 000 δρχ. τό στρέμμα καί εἰσέπραξε 96 000 δρχ. Νά βρεῖτε τό μῆκος τοῦ ἀγροκτήματος, ἄν ξέρουμε ὅτι τό πλάτος του ἦταν 80 m.

26. Ἕνα τρίγωνο καί ἕνα παραλληλόγραμμο εἶναι ἰσοδύναμα καί ἔχουν τήν ἴδια βάση.

Τό ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι 6 cm. Πόσο εἶναι τό ὕψος τοῦ τριγώνου;

27. Στό σχῆμα 30 νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό τοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ.



(σχ. 30)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

28. Τί παθαίνει τό ἐμβαδό ἑνός τριγώνου, ἄν διπλασιασθεῖ ἡ βάση του καί τό ὕψος του γίνει τό μισό;

29. Ἕνα παραλληλόγραμμο εἶναι ἰσοδύναμο μέ τετράγωνο πλευρᾶς **6cm καί ἔχει** περίμετρο 28 cm. Νά βρεῖτε τήν ἀπόσταση τῶν μεγαλύτερων πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου, ἄν ξέρετε ὅτι ἡ μιά πλευρά του εἶναι 6 cm.

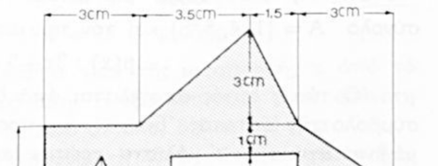
30. Ἕνα παραλληλόγραμμο ἔχει περίμετρο 42 cm καί ἡ μιά πλευρά του εἶναι διπλάσια ἀπό τήν ἄλλη. Ἡ ἀπόσταση τῶν μεγαλύτερων πλευρῶν του εἶναι 3,5 cm. Πόση εἶναι ἡ ἀπόσταση τῶν ἄλλων πλευρῶν του;

31. Ἕνα τραπέζιο ἔχει ὕψος 8 cm καί ἐμβαδό 96 cm^2. Νά βρεῖτε τίς βάσεις του, ἄν ξέρετε ὅτι ἡ μιά εἶναι διπλάσια ἀπό τήν ἄλλη.

32. Θεωροῦμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ. Μέ εὐθεῖες πού περνᾶνε ἀπό τήν κορυφή Α, νά χωρίσετε τό τρίγωνο σέ τρία ἰσοδύναμα τρίγωνα.

33. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό τῶν σχημάτων 31α καί 31β.

(σχ. 31α)



(σχ. 31β)

7ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ

7.1. Πολλοί* νόμοι στίς θετικές ἐπιστῆμες διατυπώνονται σύντομα καί ξεκάθαρα μέ ἐξισώσεις. Μιά τέτοια πολύ γνωστή ἐξίσωση εἶναι ὁ τύπος τοῦ Einstein

$$\boxed{E = mc^2}$$

πού χαρακτήρισε τόν αἰώνα μας σάν ἀτομικό. Ἡ ἐξίσωση αὐτή μᾶς δίνει τήν ἐνέργεια E πού προκύπτει ἀπό τή διάσπαση μάζας m. Τό c εἶναι ἡ ταχύτητα μέ τήν ὁποία κινεῖται τό φῶς.

Γιά νά βροῦμε πόση μάζα πρέπει νά διασπάσουμε, γιά νά πάρουμε μιά ὁρισμένη ποσότητα ἐνέργειας, πρέπει ἀπό τήν ἐξίσωση $E = mc^2$ νά ὑπολογίσουμε τή μάζα m, ὅταν ξέρουμε τήν ἐνέργεια E. Πρέπει δηλαδή, ὅπως λέμε, νά «λύσουμε» τήν ἐξίσωση αὐτή ὡς πρός m. Γιά νά καταλαβαίνουμε λοιπόν σωστά τούς διάφορους νόμους, πού ἰσχύουν στίς θετικές ἐπιστῆμες καί νά λύνουμε πολλά ἄλλα ἀνάλογα προβλήματα πού μᾶς παρουσιάζονται, πρέπει νά μελετήσουμε τίς ἐξισώσεις.

Ἐξίσωση α΄ βαθμοῦ μ' ἕναν ἄγνωστο

7.2. Ἄς θεωρήσουμε μιά μεταβλητή x, πού παίρνει τιμές ἀπό τό σύνολο $A = \{1, 4, 5, 8\}$ καί τόν προτασιακό τύπο

$$p(x) : 3x + 5 = 17$$

Ὁ τύπος αὐτός ἀποτελεῖται ἀπό δυό μέρη, πού συνδέονται μέ τό σύμβολο τῆς ἰσότητας. Ἕνας τέτοιος προτασιακός τύπος λέγεται **ἐξίσωση μέ ἕναν ἄγνωστο** καί μάλιστα **πρώτου βαθμοῦ**, γιατί ἡ μεταβλητή x εἶναι ὑψωμένη στήν πρώτη δύναμη $(x = x^1)$. Οἱ παραστάσεις $3x+5$ καί 17 λέγονται **μέλη τῆς ἐξισώσεως**, ἡ $3x+5$ λέγεται **πρῶτο μέλος** καί ὁ 17 λέγεται **δεύτερο μέλος**. Τό σύνολο A, ἀπό τό ὁποῖο παίρνει τιμές ὁ x, λέγεται **σύνολο ὁρισμοῦ** τῆς ἐξισώσεως καί ἡ μεταβλητή x εἶναι ὁ **ἄγνωστος τῆς ἐξισώσεως**.

Ἀπό τόν προτασιακό τύπο $3x+5 = 17$ παίρνουμε τίς παρακάτω προτάσεις:

$x=1 \quad , \quad 3\cdot1+5=17$ ψευδής,

$x=4 \quad , \quad 3\cdot4+5=17$ **ἀληθής**,

$x=5 \quad , \quad 3\cdot5+5=17$ ψευδής,

$x=8 \quad , \quad 3\cdot8+5=17$ ψευδής

Ἡ τιμή $x=4$ τῆς μεταβλητῆς, πού δίνει ἀληθή πρόταση, λέγεται **λύση** ἤ **ρίζα** τῆς ἐξισώσεως καί τό σύνολο $L=\{4\}$ λέγεται **σύνολο λύσεων**.

7.3. Ἄς θεωρήσουμε τίς ἐξισώσεις

α. $2x-3=1$ β. $x^2=4$ γ. $3x+1=15$

μέ σύνολο ὁρισμοῦ τό $A=\{1,-2,3,2\}$

Γιά τήν ἐξίσωση α ἔχουμε:

$x=1 \quad , \quad 2\cdot1-3=1$ ψευδής,

$x=-2 \quad , \quad 2(-2)-3=1$ ψευδής,

$x=3 \quad , \quad 2\cdot3-3=1$ ψευδής,

$x=2 \quad , \quad 2\cdot2-3=1$ ἀληθής,

δηλαδή $x=2$ εἶναι λύση τῆς ἐξισώσεως καί $L=\{2\}$.

Γιά τήν ἐξίσωση β ἔχουμε:

$x=1 \quad , \quad 1^2=4$ ψευδής,

$x=-2 \quad , \quad (-2)^2=4$ ἀληθής,

$x=3 \quad , \quad 3^2=4$ ψευδής,

$x=2 \quad , \quad 2^2=4$ ἀληθής,

δηλαδή $x=-2$ καί $x=2$ εἶναι λύσεις τῆς ἐξισώσεως καί $L=\{-2,2\}$.

Γιά τήν ἐξίσωση γ ἔχουμε:

$x=1 \quad , \quad 3\cdot1+1=15$ ψευδής,

$x=-2 \quad , \quad 3\cdot(-2)+1=15$ ψευδής,

$x=3 \quad , \quad 3\cdot3+1=15$ ψευδής,

$x=2 \quad , \quad 3\cdot2+1=15$ ψευδής,

δηλαδή παρατηροῦμε ὅτι δέν ὑπάρχει τιμή τῆς μεταβλητῆς x ἀπό τό σύνολο Α, πού νά δίνει ἀληθή πρόταση. Ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι **ἀδύνατη** στό Α, καί ἔχει σύνολο λύσεων τό κενό σύνολο, δηλαδή $L=\varnothing$.

Στό παράδειγμα αὐτό, γιά νά βροῦμε τίς λύσεις τῶν ἐξισώσεων, σχηματίσαμε ὅλες τίς προτάσεις, πού προέκυψαν ἀπό τούς προτασιακούς τύπους, ἀντικαθιστώντας τόν x μέ ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου Α. Βέβαια δέν μποροῦμε μέ τόν τρόπο αὐτό νά βρίσκουμε τίς λύσεις μιᾶς ἐξισώσεως, ὅταν τό σύνολο ὁρισμοῦ της ἔχει πολλά ἤ ἄπειρα στοιχεῖα.

Ἰσοδύναμες ἐξισώσεις

7.4. Ἄς θεωρήσουμε τίς ἐξισώσεις

α. $3x-1=8$ γ. $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=2$

β. $3x+2=5x-4$ δ. $x=3$

μέ σύνολο ὁρισμοῦ γιά ὅλες τό $A=\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Ἀντικαθιστώντας στή θέση τοῦ x τιμές ἀπό τό σύνολο A εὔκολα διαπιστώνουμε ὅτι ὅλες αὐτές οἱ ἐξισώσεις ἔχουν τήν ἴδια λύση $x=3$. Οἱ ἐξισώσεις αὐτές λέγονται **ἰσοδύναμες**. Γενικά:

> Δυό ἤ περισσότερες ἐξισώσεις λέγονται ἰσοδύναμες, ὅταν ἔχουν ὅλες τό ἴδιο σύνολο λύσεων.

Γιά νά σημειώσουμε ὅτι δυό ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμες, γράφουμε ἀνάμεσά τους τό σύμβολο $\Leftrightarrow$, ἔτσι π.χ. γράφουμε

$$3x-1=8 \Leftrightarrow x=3.$$

Ἀπό τίς παραπάνω ἰσοδύναμες ἐξισώσεις ἡ ἐξίσωση $x=3$ ἔχει τήν πιό ἁπλή μορφή, ἀπό τήν ὁποία καταλαβαίνουμε ἀμέσως τή λύση της. Ἑπομένως, εὔκολα θά μποροῦμε νά **«λύσουμε»** μιά ἐξίσωση, ἄν μποροῦμε νά βροῦμε μιά ἰσοδύναμή της πού ἔχει τήν ἁπλή αὐτή μορφή. Γιά τό σκοπό αὐτό εἶναι χρήσιμο νά ἐπαναλάβουμε δύο βασικές ἰδιότητες τῆς ἰσότητας στό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

Ἄν α, β, καί γ εἶναι ρητοί ἀριθμοί, ἔχουμε:

$$\boxed{\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma},$$

δηλαδή, **ἄν στά μέλη μιᾶς ἰσότητας προσθέσουμε τόν ἴδιο ἀριθμό, προκύπτει νέα ἰσότητα.** Ἐπίσης

$$\boxed{\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma=\beta \cdot \gamma} \quad (\gamma \neq 0),$$

δηλαδή, **ἄν τά μέλη μιᾶς ἰσότητας πολλαπλασιασθοῦν ἤ διαιρεθοῦν μέ τόν ἴδιο ἀριθμό (διαφορετικό ἀπό τό μηδέν), προκύπτει νέα ἰσότητα.** Μέ τή βοήθεια τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν λύνουμε εὔκολα ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ.

Λύση ἐξισώσεως α΄ βαθμοῦ

7.5. Ἄς θεωρήσουμε τήν ἐξίσωση

$$7x+3=17$$

ὁρισμένη στό Q. Ἀφαιροῦμε ἀπό τά δυό μέλη της τόν 3 καί ἔχουμε

$$\begin{aligned} 7x+3=17 &\Leftrightarrow 7x+3-\mathbf{3}=17-\mathbf{3} \\ &\Leftrightarrow 7x=14 \end{aligned}$$

Διαιροῦμε τά δύο μέλη της μέ 7 καί ἔχουμε

$$7x = 14 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7x}{7} = \frac{14}{7} \Leftrightarrow x = 2$$

δηλαδή σύνολο λύσεων εἶναι τό $L = \{2\}$.

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἰσοδύναμη ἐξίσωση $7x = 17 - 3$ προκύπτει ἀπό τήν ἀρχική ἐξίσωση, ἄν μεταφέρουμε τόν ὅρο $+3$ ἀπό τό πρῶτο μέλος της στό δεύτερο μέ ἀντίθετο πρόσημο. Ἔχουμε ἑπομένως τό πρακτικό συμπέρασμα:

> Ἀπό μιά ἐξίσωση προκύπτει ἰσοδύναμη ἐξίσωση, ὅταν μεταφέρουμε ἕναν ὅρο ἀπό τό ἕνα μέλος της στό ἄλλο ἀλλάζοντας τό πρόσημό του.

7.6. Ἄς λύσουμε στό σύνολο Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν τήν ἐξίσωση

$$3x - 2 = 5x + 8$$

Σύμφωνα μέ τό προηγούμενο συμπέρασμα ἔχουμε διαδοχικά

$$3x - 2 = 5x + 8 \Leftrightarrow 3x - 5x = 8 + 2 \Leftrightarrow -2x = 10.$$

Πολλαπλασιάζουμε τά δυό μέλη της ἐπί -1 καί ἔχουμε

$$\begin{aligned} -2x = 10 \quad &\Leftrightarrow \quad (-2x) \cdot (-1) = 10 \cdot (-1) \\ &\Leftrightarrow \quad 2x = -10 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2x}{2} = -\frac{10}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x = -5 \end{aligned}$$

δηλαδή σύνολο λύσεων εἶναι τό $L = \{-5\}$.

7.7. Ἄς λύσουμε στό Q τήν ἐξίσωση

$$\frac{x+1}{2} - \frac{x}{3} = \frac{3}{4}$$

Ὅταν στά μέλη μιᾶς ἐξισώσεως ὑπάρχουν κλάσματα, φροντίζουμε νά βροῦμε μιά ἰσοδύναμη ἐξίσωση χωρίς κλάσματα καί αὐτό λέγεται *ἀπαλοιφή τῶν παρονομαστῶν*. Γιά τό σκοπό αὐτό βρίσκουμε τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν καί πολλαπλασιάζουμε τά μέλη τῆς ἐξισώσεως μέ τό Ε.Κ.Π. Ἔτσι, ἐπειδή Ε.Κ.Π. τῶν 2,3 καί 4 εἶναι τό 12, ἔχουμε

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2} - \frac{x}{3} = \frac{3}{4} &\Leftrightarrow 12 \cdot \frac{x+1}{2} - 12 \cdot \frac{x}{3} = 12 \cdot \frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow 6(x+1) - 4x = 3 \cdot 3 \\ &\Leftrightarrow 6x + 6 - 4x = 9 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 6x - 4x = 9 - 6$$
$$\Leftrightarrow 2x = 3$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2},$$

δηλαδή σύνολο λύσεων εἶναι τό $L = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

7.8. Ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα προκύπτει ὅτι μιά ἐξίσωση α' βαθμοῦ εἶναι πάντοτε ἰσοδύναμη μέ μιά ἐξίσωση τῆς μορφῆς

$$\boxed{\alpha \cdot x = \beta}$$

ὅπου α,β εἶναι γνωστοί ρητοί ἀριθμοί καί x εἶναι ὁ ἄγνωστος.

Γιά τήν ἐξίσωση $\alpha . x = \beta$ ἔχουμε:

- Ἄν εἶναι $\alpha \neq 0$, τότε $x = \frac{\beta}{\alpha}$.
- Ἄν εἶναι $\alpha = 0$ καί $\beta \neq 0$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $0 \cdot x = \beta$ καί ἐπειδή δέν ὑπάρχει ρητός ἀριθμός x πού νά τήν ἐπαληθεύει λέμε ὅτι ἡ ἐξίσωση εἶναι **ἀδύνατη** (σύνολο λύσεών της εἶναι τό κενό σύνολο).
- Ἄν εἶναι $\alpha = 0$ καί $\beta = 0$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $0 \cdot x = 0$ καί ἐπειδή γιά κάθε ρητό ἀριθμό x ἰσχύει ἡ ἰσότητα αὐτή, λέμε ὅτι ἡ ἐξίσωση εἶναι **ἀόριστη** ἤ ὅτι εἶναι *«ταυτότητα»* (σύνολο λύσεών της εἶναι τό σύνολο ὁρισμοῦ της).

Ἀπό τά προηγούμενα καταλαβαίνουμε ὅτι γιά νά λύσουμε μιά ἐξίσωση α' βαθμοῦ κάνουμε τίς ἑξῆς ἐργασίες:

- Ἀπαλείφουμε τούς παρονομαστές (ἄν ὑπάρχουν) πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη μέ τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν.
- Ἐξαλείφουμε τίς παρενθέσεις (ἄν ὑπάρχουν) κάνοντας τίς πράξεις πού εἶναι σημειωμένες.
- Μεταφέρουμε τούς ὅρους, πού περιέχουν τόν ἄγνωστο, στό ἕνα μέλος καί τούς ὑπόλοιπους ὅρους στό ἄλλο μέλος (χωρίζουμε, ὅπως λέμε, τούς γνωστούς ὅρους ἀπό τούς ἄγνωστους).
- Κάνοντας τίς προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις πού εἶναι σημειωμένες (δηλαδή κάνοντας ἀναγωγή ὅμοιων ὅρων) καταλήγουμε στή μορφή $\alpha . x = \beta$.

• Διαιροῦμε καί τά δύο μέλη τῆς $\alpha \cdot x = \beta$ μέ τόν ἀριθμό $\alpha \neq 0$ καί βρίσκουμε γιά ρίζα τήν $x = \frac{\beta}{\alpha}$.

Πολλές φορές κάνουμε καί «ἐπαλήθευση», γιά νά διαπιστώσουμε ἄν ἡ ρίζα πού βρήκαμε ἐπαληθεύει τήν ἀρχική μας ἐξίσωση. Ἔτσι π.χ. γιά νά διαπιστώσουμε ἄν ἡ τιμή $x=3/2$ πού βρήκαμε στήν § 7.7 εἶναι πράγματι ρίζα τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{x+1}{2} - \frac{x}{3} = \frac{3}{4}$$

βάζουμε στή θέση τοῦ x τό $3/2$ καί βρίσκουμε

$$\frac{\frac{3}{2}+1}{2} - \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{3}{4} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\frac{5}{2}}{2} - \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{3}{4} \quad \text{ἤ} \quad \frac{5}{4} - \frac{3}{6} = \frac{3}{4}$$

$$\text{ἤ} \quad \frac{15}{12} - \frac{6}{12} = \frac{3}{4} \quad \text{ἤ} \quad \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Πραγματικά λοιπόν ἡ τιμή $x = \frac{3}{2}$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως.

Ἐφαρμογή στή λύση προβλημάτων

7.9. Μποροῦμε, τώρα, χρησιμοποιώντας ἐξισώσεις α' βαθμοῦ νά λύνουμε διάφορα προβλήματα. Γιά τή λύση τῶν προβλημάτων πρέπει νά ἔχουμε ὑπόψη μας τά ἑξῆς:

— Διαβάζουμε τό πρόβλημα προσεκτικά καί ὄχι μόνο μιά φορά.
— Συμβολίζουμε μέ ἕνα γράμμα, π.χ. μέ x, τό ζητούμενο τοῦ προβλήματος.
— Ὁρίζουμε τό σύνολο, στό ὁποῖο πρέπει ν' ἀνήκει ὁ ἄγνωστος.
— Γράφουμε, χρησιμοποιώντας μαθηματικά σύμβολα, τά δεδομένα καί τά ζητούμενα τοῦ προβλήματος.
— Σχηματίζουμε μιά ἐξίσωση μέ αὐτά, σύμφωνα μέ τίς ἐπιταγές τοῦ προβλήματος.
— Λύνουμε τήν ἐξίσωση.
— Ἐλέγχουμε ἄν ἡ λύση πού βρήκαμε ἱκανοποιεῖ τίς ἐπιταγές τοῦ προβλήματος.

Στά παραδείγματα πού ἀκολουθοῦν ἐξηγεῖται ὅλη αὐτή ἡ διαδικασία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθεῖ ἕνας ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τό διπλάσιο, ὅταν αὐξηθεῖ κατά 5, γίνεται ἴσο μέ τό τριπλάσιό του ἐλαττωμένο κατά 2.**

Λύση. Ἄς ὀνομάσουμε x τό ζητούμενο ἀριθμό, ὅπου $x \in Q$. Τό διπλάσιο τοῦ ἀριθμοῦ, αὐξημένο κατά 5 εἶναι: $2x+5$. Τό τριπλάσιο τοῦ ἀριθμοῦ, ἐλαττωμένο κατά 2 εἶναι: $3x-2$. Σύμφωνα μέ τήν ἐπιταγή τοῦ προβλήματος ἔχουμε τήν ἐξίσωση

$$2x+5=3x-2$$

πού γράφεται διαδοχικά:

$$2x-3x=-2-5$$
$$-x=-7$$
$$x=7.$$

Δηλαδή, ζητούμενος ἀριθμός εἶναι ὁ 7.

Ἐπαλήθευση: $2.7+5=14+5=19$ καί $3.7-2=21-2=19$.

2. **Ἕνα Γυμνάσιο ἔχει 350 μαθητές. Ἡ Α΄ τάξη ἔχει 20 μαθητές περισσότερους ἀπό τή Β΄ καί ἡ Γ΄ τάξη ἔχει 12 μαθητές λιγότερους ἀπό τή Β΄. Πόσους μαθητές ἔχει κάθε τάξη τοῦ Γυμνασίου;**

Λύση. Στό πρόβλημα αὐτό ἔχουμε τρεῖς ἄγνωστους. Θά συμβολίσουμε μέ x τόν ἕνα ἄγνωστο καί θά προσπαθήσουμε νά ἐκφράσουμε τούς ἄλλους μέ τή βοήθεια τοῦ x. Ἄν εἶναι x οἱ μαθητές τῆς Β΄ τάξεως, τότε $x+20$ θά εἶναι οἱ μαθητές τῆς Α΄ καί $x-12$ οἱ μαθητές τῆς Γ΄. Οἱ ἀριθμοί x, $x+20$, $x-12$ παριστάνουν πλῆθος μαθητῶν. Ἑπομένως πρέπει νά εἶναι φυσικοί ἀριθμοί μικρότεροι ἀπό 351. Συνεπῶς ὁ x πρέπει νά ἀνήκει στό σύνολο $\{13, 14, 15, \cdots, 330\}$.

Σύμφωνα μέ τά δεδομένα τοῦ προβλήματος ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$(x+20)+x+(x-12)=350$$

πού γράφεται διαδοχικά $x+20+x+x-12=350$

$$x+x+x=350-20+12$$
$$3x=342$$
$$x=\frac{342}{3}=114$$

Συνεπῶς:

ἡ Β΄ τάξη ἔχει 114 μαθητές

ἡ Α΄ τάξη ἔχει $114+20=134$ μαθητές καί

ἡ Γ΄ τάξη ἔχει $114-12=102$ μαθητές.

3. **Τό ἐμβαδό ἑνός τραπεζίου εἶναι $154cm^2$ καί τό ὕψος του εἶναι 11cm. Νά βρεῖτε τίς βάσεις του, ἄν ξέρουμε ὅτι διαφέρουν κατά 4cm.**

Λύση. Ἄν ὀνομάσουμε x τό μῆκος τῆς μικρῆς βάσεως (σέ cm), ἡ μεγάλη βάση θά ἔχει μῆκος $x+4$cm. Ὁ x πρέπει νά εἶναι θετικός ἀριθμός. Ἀπό τόν τύπο τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τραπεζίου

$$E=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot \upsilon,$$

ἔχουμε διαδοχικά:

$$154=\frac{1}{2}(x+x+4)\cdot 11 \Leftrightarrow 308=(2x+4)\cdot 11 \Leftrightarrow 308=22x+44$$
$$\Leftrightarrow -22x=44-308 \Leftrightarrow -22x=-264$$
$$\Leftrightarrow 22x=264 \Leftrightarrow x=12cm.$$

Ὥστε ἡ μικρή βάση εἶναι 12cm καί ἡ μεγάλη $12+4=16$cm.

4. **Ἕνας λογαριασμός τῆς Δ.Ε.Η εἶναι 1595 δρχ. Ἀπό τό ποσό αὐτό οἱ 287 δρχ. εἶναι δημοτικά τέλη καί εἰσφορά στήν Ε.Ρ.Τ. Ἄν ἡ κατανάλωση ρεύματος ἐπιβαρύνεται μέ φόρο 9%, ποιά εἶναι ἡ πραγματική ἀξία τοῦ ρεύματος πού καταναλώθηκε;**

Λύση. Ἔστω x ἡ ἀξία τοῦ ρεύματος πού καταναλώθηκε. Ὁ x πρέπει νά εἶναι θετικός ἀριθμός μικρότερος ἀπό 1595–287=1308 δρχ. Ὁ φόρος μέ τόν ὁποῖο ἐπιβαρύνεται ὁ λογαριασμός εἶναι $x \cdot \frac{9}{100} = \frac{9x}{100}$. Ἔχουμε ἑπομένως τήν ἐξίσωση

$$x + \frac{9x}{100} = 1595-287 \Leftrightarrow x + \frac{9x}{100} = 1308 \Leftrightarrow 100x + 9x = 130800 \Leftrightarrow$$

$$109x = 130800 \Leftrightarrow x = \frac{130800}{109} \Leftrightarrow x = 1200.$$

Ὥστε ἡ πραγματική ἀξία τοῦ ρεύματος πού καταναλώθηκε ἦταν 1200 δρχ.

5. **Πόσα κιλά ψευδάργυρου πρέπει νά συντήξουμε μέ 140 κιλά χαλκοῦ, ὥστε νά πάρουμε ἕνα κράμα πού νά περιέχει 44% ψευδάργυρο καί 56% χαλκό;**

Λύση. Ἄν εἶναι x τά κιλά τοῦ ψευδάργυρου, ὁ x πρέπει νά εἶναι θετικός ἀριθμός. Ὅλο τό κράμα θά εἶναι 140+x κιλά. Ὁ χαλκός πού περιέχεται στό κράμα εἶναι

$$(140+x) \cdot \frac{56}{100}.$$

Ἔχουμε ἑπομένως τήν ἐξίσωση

$$(140+x) \cdot \frac{56}{100} = 140 \Leftrightarrow (140+x) \cdot 56 = 14000 \Leftrightarrow 7840 + 56x = 14000 \Leftrightarrow$$

$$56x = 14000-7840 \Leftrightarrow 56x = 6160 \Leftrightarrow x = \frac{6160}{56} = 110.$$

Ὥστε πρέπει νά συντήξουμε 110 κιλά ψευδάργυρου.

6. Ἄς παίξουμε τό ἑξῆς μαθηματικό παιχνίδι:

Σκέψου ἕναν ἀριθμό.	Π.χ 10
Διπλασίασε τόν ἀριθμό.	$10.2 = 20$
Πρόσθεσε 4.	$20+4 = 24$
Τριπλασίασε τόν ἀριθμό πού βρῆκες.	$24.3 = 72$
Διαίρεσε μέ 6.	$72 : 6 = 12$
Ἀφαίρεσε τόν ἀριθμό πού σκέφθηκες.	$12-10 = 2$

Βρῆκες σάν ἀποτέλεσμα τόν ἀριθμό 2.

Ἄν κάνεις τά ἴδια καί μέ ἄλλον ἀριθμό θά βρεῖς πάλι 2. Γιατί;

Ἄς προσπαθήσουμε νά σχηματίσουμε μιά ἐξίσωση ἡ ὁποία νά περιγράφει τίς πράξεις πού ἀναφέραμε γιά ἕναν ὁποιονδήποτε ἀριθμό $x \in Q$. Ἔχουμε:

$$\frac{(2x+4).3}{6} - x = 2 \Leftrightarrow \frac{2x+4}{2} - x = 2 \Leftrightarrow 2x+4-2x = 4 \Leftrightarrow$$

$$2x-2x = 4-4 \Leftrightarrow 0.x = 0.$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι ἀόριστη, ἔχει δηλαδή σύνολο λύσεων ὅλους τούς ρητούς ἀριθμούς. Ὥστε μέ ὁποιονδήποτε ἀριθμό καί ἄν ξεκινήσουμε τό παιχνίδι, βρίσκουμε πάντοτε 2.

7. Ἕνας ἐργάτης ἐκτελεῖ ἕνα ἔργο σέ 8 ὥρες καί ἕνας ἄλλος ἐκτελεῖ τό ἴδιο ἔργο σέ 12 ὥρες. Σέ πόσες ὥρες θά ἐκτελέσουν τό ἔργο καί οἱ δύο ἐργάτες, ἄν ἐργασθοῦν μαζί;

Λύση. Ἔστω ὅτι ἄν ἐργασθοῦν μαζί θά τελειώσουν τό ἔργο σέ x ὧρες. Ὁ x πρέπει νά εἶναι θετικός ἀριθμός.

Ὁ πρῶτος ἐργάτης μόνος του ἐκτελεῖ τό ἔργο σέ 8 ὧρες. Συνεπῶς σέ 1 ὥρ. ἐκτελεῖ τό $\frac{1}{8}$ τοῦ ἔργου καί σέ x ὧρες τά $\frac{x}{8}$ τοῦ ἔργου. Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε ὅτι ὁ δεύτερος ἐργάτης σέ x ὧρες ἐκτελεῖ τά $\frac{x}{12}$ τοῦ ἔργου. Ἐπειδή καί οἱ δύο μαζί σέ x ὧρες ἐκτελοῦν ὅλο τό ἔργο, θά ἔχουμε τήν ἐξίσωση

$$\frac{x}{8}+\frac{x}{12}=1 \Leftrightarrow 3x+2x=24 \Leftrightarrow 5x=24 \Leftrightarrow x=\frac{24}{5} \Leftrightarrow x=4{,}8 \text{ ὥρ.}$$

Ὥστε καί οἱ δύο μαζί θά ἐκτελέσουν τό ἔργο σέ 4,8 ὥρ.

---

8. Τό ψηφίο τῶν δεκάδων ἑνός διψήφιου ἀριθμοῦ εἶναι διπλάσιο ἀπό τό ψηφίο τῶν μονάδων του. Ἄν ἀλλάξουμε τή θέση τῶν ψηφίων του, προκύπτει ἀριθμός κατά 36 μονάδες μικρότερος. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός;

Λύση. Ἄν εἶναι x τό ψηφίο τῶν μονάδων τοῦ ἀριθμοῦ, τό ψηφίο τῶν δεκάδων θά εἶναι 2x.

Ὁ x πρέπει νά εἶναι μονοψήφιος φυσικός ἀριθμός   ἀριθμός πού ζητᾶμε θά ἔχει $10.2x+1.x$ μονάδες. (Ξέρουμε ὅτι, γιά νά βροῦμε τό πλῆθος τῶν μονάδων ἑνός ἀριθμοῦ, πολλαπλασιάζουμε τό ψηφίο τῶν μονάδων ἐπί 1, τό ψηφίο τῶν δεκάδων ἐπί 10,...). Ὁ ἀριθμός πού προκύπτει μέ τήν ἀλλαγή τῆς θέσεως τῶν ψηφίων θά ἔχει ψηφίο μονάδων τό 2x καί ψηφίο δεκάδων τό x. Συνεπῶς θά ἔχει $10.x+1.2x$ μονάδες. Σχηματίζουμε λοιπόν τήν ἐξίσωση

$$10.2x+x=10x+2x+36 \Leftrightarrow 20x+x-10x-2x=36 \Leftrightarrow 9x=36 \Leftrightarrow x=4.$$

Ὥστε τό ψηφίο τῶν μονάδων εἶναι 4, ὁπότε τῶν δεκάδων θά εἶναι 8. Δηλαδή ὁ ἀριθμός εἶναι ὁ 84.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά λυθοῦν στό σύνολο Q οἱ ἐξισώσεις.

α) $7x-15=3x+9$

β) $8(x+2)-5=2(x+3)$

γ) $3y-4=5y+2$

δ) $9\omega+3=2\omega+10$

ε) $\frac{x+2}{3}=\frac{2x-7}{4}$

στ) $\frac{3-x}{2}=\frac{-6-5x}{7}$

ζ) $\frac{3y+5}{2}-\frac{3y+1}{4}=3$

2. Νά λυθοῦν στό σύνολο Q οἱ ἐξισώσεις:

α) $\frac{x-7}{2}-\frac{1}{3}=1+\frac{x+9}{9}$

β) $6-\frac{x-1}{2}=\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{4}$

γ) $\frac{2x-1}{3}-\frac{7x+6}{12}=\frac{3x-2}{4}+\frac{5x-4}{6}$

δ) $\frac{2(\omega-3)}{5}-\frac{3(\omega-2)}{4}=1$

3. Νά βρεθοῦν τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου $A \cup B$ ὅταν:

α) $A=\{x \in Q \mid 3x-1=x+2\}$ $\quad B=\left\{x \in Q \mid \frac{x-1}{2}=\frac{x-2}{3}\right\}$

β) $A = \left\{x \in Q \mid 2(x-1)-3(x-2) = x\right\}$, $B = \left\{x \in Q \mid x - \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{x-2}{3}\right\}$

4. Μιά ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση μέ σύνολο ὁρισμοῦ Α ἔχει τύπο $\varphi(x) = 2x-3$. Ἄν $\varphi(A) = \{0, -1, 2, 1/2\}$, ποιό εἶναι τό σύνολο Α;

5. Νά λύσετε στό Q τίς ἐξισώσεις

α) $\dfrac{5}{x+3} = \dfrac{3}{2x-1}$ β) $\dfrac{2x+5}{3x-1} = \dfrac{25}{29}$.

6. Νά βρεῖτε τή ρίζα τῆς ἐξισώσεως $(\alpha-1)x=3$, ὅταν εἶναι $\alpha \neq 1$ καί ὅταν εἶναι $\alpha=1$.

7. Νά λυθοῦν στό Q οἱ ἐξισώσεις:

α) $(x-1) \cdot (x-2) = 0$ β) $(2x+1) \cdot (3x-2) = 0$

8. Νά λυθοῦν στό Q οἱ ἐξισώσεις:

α) $3(x+5) = 15+3x$ γ) $\dfrac{2x-5}{3} = \dfrac{3x-1}{2} - \dfrac{5x+1}{6}$

β) $2(x+1) = 2x+3$ δ) $2-3y = 1-3(y-1)$

Προβλήματα πού λύνονται μέ ἐξισώσεις

9. Ποιός ἀριθμός πρέπει νά προστεθεῖ στούς ὅρους τοῦ κλάσματος $\dfrac{5}{12}$, ὥστε αὐτό νά γίνει ἴσο μέ $\dfrac{4}{5}$;

10. Ὁ ἀριθμητής ἑνός κλάσματος εἶναι μικρότερος ἀπό τόν παρονομαστή του κατά 4. Ἄν προσθέσουμε στούς ὅρους του τόν 29, προκύπτει κλάσμα ἴσο μέ $\dfrac{8}{9}$. Ποιό ἦταν τό κλάσμα;

11. Ποιοῦ ἀριθμοῦ τό μισό ἰσοῦται μέ τό διπλάσιό του;

12. Οἱ ἡλικίες τριῶν ἀδερφῶν ἔχουν ἄθροισμα 34. Ὁ πιό μεγάλος εἶναι 5 χρόνια μεγαλύτερος ἀπό τόν πιό μικρό καί αὐτός 2 χρόνια μικρότερος ἀπό τό μεσαῖο. Ποιά εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ καθενός;

13. Ἕνας πατέρας εἶναι 46 χρονῶν καί ὁ γιός του 14. Μετά πόσα χρόνια ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα θά εἶναι διπλάσια ἀπό τήν ἡλικία τοῦ γιοῦ του;

14. Ἕνας πατέρας ἔχει τετραπλάσια ἡλικία ἀπό τήν κόρη του. Μετά ἀπό 20 χρόνια θά ἔχει διπλάσια. Ποιά εἶναι ἡ σημερινή τους ἡλικία;

15. Νά μοιραστεῖ ἕνα ποσό 4500 δρχ. σέ τρία ἄτομα Α,Β,Γ ὥστε ὁ Α νά πάρει 1800 δρχ. περισσότερες ἀπό τόν Β καί ὁ Β 600 δρχ. περισσότερες ἀπό τό Γ.

16. Μιά κατοικία ἔχει 4 διαμερίσματα. Ὁ λογαριασμός τοῦ καλοριφέρ ἦταν γιά ὅλο τό χειμώνα 31000 δρχ. Τό Α διαμέρισμα εἶναι διπλάσιο ἀπό τό Γ καί τό Β εἶναι τά $\dfrac{5}{2}$ τοῦ Δ. Ὁ ἔνοικος τοῦ Δ πλήρωσε 800 δρχ. λιγότερο ἀπό τόν ἔνοικο τοῦ Α. Πόσα πλήρωσε ὁ καθένας;

17. Ὁ μισθός ἑνός ὑπαλλήλου αὐξήθηκε ἀπό 14000 σέ 15100. Ἄν ὁ πληθωρισμός τό χρόνο αὐτό εἶναι 8%, ὁ ὑπάλληλος ἔγινε πιό πλούσιος ἤ πιό φτωχός;

18. Τό ἐνοίκιο ἑνός σπιτιοῦ αὐξήθηκε τόν ἕνα χρόνο κατά 20%, τόν ἑπόμενο χρόνο κατά 25% καί τόν τρίτο χρόνο κατά 30%. Ἡ τελική τιμή ἔφτασε τίς 3900 δρχ. τό μήνα. Ποιά ἦταν ἡ ἀρχική τιμή;

19. Ἕνας ἐκσκαφέας χρειάζεται 6 μέρες γιά νά σκάψει τά θεμέλια μιᾶς οἰκοδομῆς. Σέ πόσες μέρες θά τελειώσει ἡ δουλειά, ἄν ἀπό τήν τρίτη μέρα βοηθάει καί ἄλλος ἐκσκαφέας μέ τή μισή ἀπόδοση;

20. Μιά βρύση γεμίζει μιά δεξαμενή σέ 6 ὧρες καί μιά ἄλλη σέ 4 ὥρ. Σέ πόσες ὧρες θά γεμίσει ἡ δεξαμενή: α) Ἄν ἀνοιχτοῦν καί οἱ δυό βρῦσες μαζί; β) Ἄν ἡ δεύτερη βρύση ἀνοιχτεῖ μία ὥρα ἀργότερα ἀπό τήν πρώτη;

21. Ἕνα κοστούμι ἀξίας 5140 δρχ. πουλήθηκε 3855 δρχ. Πόσο % ἔκπτωση ἔγινε;

22. Ἕνα ἠλεκτρικό πλυντήριο πουλήθηκε μέ ἔκπτωση 3% γιά 14841 δρχ. Ποιά ἦταν ἡ τιμή του χωρίς τήν ἔκπτωση;

23. Τό ὕψος ἑνός τραπεζίου εἶναι 13cm καί τό ἐμβαδό του 260 cm^2. Νά βρεῖτε τίς βάσεις του, ἄν ξέρετε ὅτι ἡ μία εἶναι τά $\frac{3}{5}$ τῆς ἄλλης.

24. Μιά οἰκογένεια ξόδεψε τόν προηγούμενο χρόνο τό $\frac{1}{12}$ τῶν ἐσόδων της γιά ἐνοίκιο, τό $\frac{1}{2}$ γιά φαγητό καί ἄλλα ἔξοδα τοῦ σπιτιοῦ, τό $\frac{1}{15}$ γιά ροῦχα καί τό $\frac{1}{4}$ γιά τά ὑπόλοιπα ἔξοδα. Ἀκόμα ἔκανε καί ἀποταμίευση 15 600 δρ. Πόσα ἦταν τά ἔσοδά της;

25. Πόσα κουνέλια καί πόσα περιστέρια ἔχει ὁ Δημήτρης, ἄν ὅλα αὐτά τά ζῶα ἔχουν 19 κεφάλια καί 52 πόδια;

Ἀνίσωση α΄ βαθμοῦ μέ ἕναν ἄγνωστο

7.10. Ἄς θεωρήσουμε μιά μεταβλητή x, πού παίρνει τιμές ἀπό τό σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ καί τόν προτασιακό τύπο

$$p(x): \quad 3x + 2 > 10$$

Ὁ τύπος αὐτός ἀποτελεῖται ἀπό δυό μέρη, πού συνδέονται μέ τό σύμβολο τῆς ἀνισότητας. Ἕνας τέτοιος προτασιακός τύπος λέγεται **ἀνίσωση μέ ἕναν ἄγνωστο** καί μάλιστα **πρώτου βαθμοῦ**, γιατί ἡ μεταβλητή x εἶναι ὑψωμένη στήν πρώτη δύναμη ($x = x^1$). Ὅπως καί στίς ἐξισώσεις α΄ βαθμοῦ, ἡ παράσταση $2x+2$ εἶναι τό **πρῶτο μέλος** τῆς ἀνισώσεως καί ὁ 10 τό **δεύτερο μέλος**. Τό σύνολο A εἶναι τό **σύνολο ὁρισμοῦ** τῆς ἀνισώσεως καί ὁ x εἶναι ὁ **ἄγνωστος** τῆς ἀνισώσεως. Ἀπό τόν προτασιακό τύπο $3x+2>10$ παίρνουμε τίς παρακάτω προτάσεις:

$x = 1,$	$3\cdot 1+2>10$	ψευδής,
$x = 2,$	$3\cdot 2+2>10$	ψευδής,
$x = 3,$	$3\cdot 3+2>10$	ἀληθής,
$x = 4,$	$3\cdot 4+2>10$	ἀληθής,
$x = 5,$	$3\cdot 5+2>10$	ἀληθής.

Οἱ τιμές τῆς μεταβλητῆς $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$, πού δίνουν ἀληθεῖς προτάσεις, λέγονται **λύσεις τῆς ἀνισώσεως** καί τό σύνολό τους

$$L = \{3, 4, 5\}$$

λέγεται **σύνολο λύσεων τῆς ἀνισώσεως**

Ἰσοδύναμες ἀνισώσεις.

7.11. Ἄς θεωρήσουμε δύο ἀνισώσεις μέ τό ἴδιο σύνολο ὁρισμοῦ $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, π.χ. τίς

$$2x+1>4 \quad \text{καί} \quad 2x>3$$

Εὔκολα διαπιστώνουμε ὅτι οἱ δύο ἀνισώσεις αὐτές ἔχουν τό ἴδιο σύνολο λύσεων $L = \{2, 3, 4\}$ καί γι' αὐτό λέγονται **ἰσοδύναμες**. Γενικά:

> Δυό ἤ περισσότερες ἀνισώσεις λέγονται ἰσοδύναμες, ὅταν ἔχουν ὅλες τό ἴδιο σύνολο λύσεων.

Γιά νά δηλώσουμε ὅτι οἱ δυό αὐτές ἀνισώσεις εἶναι ἰσοδύναμες, γράφουμε, ὅπως καί στίς ἐξισώσεις,

$$2x+1>4 \Leftrightarrow 2x>3$$

Λύση ἀνισώσεως α΄ βαθμοῦ.

7.12. Ὅπως καί στίς ἐξισώσεις α΄ βαθμοῦ ἔτσι καί ἐδῶ, γιά νά λύσουμε μιά ἀνίσωση α΄ βαθμοῦ προσπαθοῦμε νά βροῦμε μιά ἰσοδύναμή της μέ ἁπλή μορφή. Στήν προσπάθειά μας αὐτή χρησιμοποιοῦμε συνήθως τίς δύο βασικές ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων:

Ἄν στά μέλη μιᾶς ἀνισότητας προσθέσουμε τόν ἴδιο ἀριθμό, προκύπτει ἀνισότητα μέ τήν ἴδια φορά, δηλ.

$$\boxed{\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma > \beta+\gamma}$$

Ἄν τά μέλη μιᾶς ἀνισότητας πολλαπλασιασθοῦν ἤ διαιρεθοῦν μέ τόν ἴδιο ἀριθμό, τότε προκύπτει ἀνισότητα μέ τήν ἴδια φορά, ὅταν ὁ ἀριθμός εἶναι θετικός ἐνῶ, προκύπτει ἀνισότητα μέ ἀντίθετη φορά, ὅταν ὁ ἀριθμός εἶναι ἀρνητικός, δηλ.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{ἄν } \alpha>\beta \text{ καί } \gamma>0 \text{ τότε } \alpha.\gamma>\beta.\gamma \\ \text{ἄν } \alpha>\beta \text{ καί } \gamma<0 \text{ τότε } \alpha.\gamma<\beta.\gamma \end{array}}$$

Γιά νά λύνουμε ἀνισώσεις α΄ βαθμοῦ, ἀκολουθοῦμε πορεία ἐργασίας παρόμοια μέ ἐκείνη πού ἀκολουθήσαμε γιά τή λύση τῶν ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ.

7.13. Ἄς λύσουμε στό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν τήν ἀνίσωση

$$3x-10<5$$

Προσθέτοντας καί στά δυό μέλη της τό 10 ἔχουμε

$$3x-10<5 \Leftrightarrow 3x-10+\mathbf{10}<5+\mathbf{10}$$
$$\Leftrightarrow 3x<15$$

Διαιροῦμε τώρα καί τά δυό μέλη της μέ 3 καί ἔχουμε

$$3x<15 \Leftrightarrow \frac{3x}{3}<\frac{15}{3}$$
$$\Leftrightarrow x<5.$$

Ὥστε, σύνολο λύσεων εἶναι τό $L=\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Ὅπως καί στίς ἐξισώσεις ἔτσι καί στίς ἀνισώσεις ἔχουμε τό πρακτικό συμπέρασμα:

> Ἀπό μιά ἀνίσωση προκύπτει ἰσοδύναμη ἀνίσωση, ὅταν μεταφέρουμε ἕναν ὅρο ἀπό τό ἕνα μέλος της στό ἄλλο ἀλλάζοντας τό πρόσημό του.

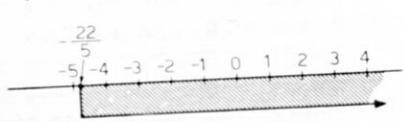
7.14. Ἄς λύσουμε στό σύνολο Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν τήν ἀνίσωση

$$\frac{2x-5}{3}-\frac{3x}{2}<2$$

Στά μέλη τῆς ἀνισώσεως αὐτῆς ὑπάρχουν κλάσματα. Στήν περίπτωση αὐτή, ὅπως καί στίς ἐξισώσεις, πολλαπλασιάζουμε τά μέλη της μέ τό Ε.Κ.Π τῶν παρονομαστῶν. Ἔτσι ἔχουμε

$$\frac{2x-5}{3}-\frac{3x}{2}<2 \Leftrightarrow 6\cdot\frac{(2x-5)}{3}-6\cdot\frac{3x}{2}<6\cdot 2$$
$$\Leftrightarrow 2(2x-5)-3\cdot 3x<12$$
$$\Leftrightarrow 4x-10-9x<12$$
$$\Leftrightarrow 4x-9x<12+10$$
$$\Leftrightarrow -5x<22$$
$$\Leftrightarrow 5x>-22$$
$$\Leftrightarrow x>-22/5$$

Ὥστε τό σύνολο λύσεων ἀποτελεῖται ἀπό ὅλους τούς ρητούς ἀριθμούς πού εἶναι μεγαλύτεροι ἀπό τόν $-\frac{22}{5}$. Στήν περίπτωση αὐτή τό



σχ. 1

σύνολο λύσεων σημειώνεται στόν ἄξονα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ὅπως δείχνει τό σχ. 1.

7.15. Ἀπό τά προηγούμενα παραδείγματα προκύπτει ὅτι μιά ἀνίσωση α' βαθμοῦ εἶναι πάντοτε ἰσοδύναμη μέ μιά ἀνίσωση τῆς μορφῆς

$$\alpha\cdot x > \beta \quad \text{ἤ} \quad \alpha\cdot x < \beta,$$

ὅπου α,β εἶναι γνωστοί ρητοί ἀριθμοί καί x ὁ ἄγνωστος.

Γιά τήν ἀνίσωση $\alpha\cdot x > \beta$ ἔχουμε:

— Ἄν $\alpha > 0$, τότε $\alpha\cdot x > \beta \Leftrightarrow x > \dfrac{\beta}{\alpha}$

— Ἄν $\alpha < 0$, τότε $\alpha\cdot x > \beta \Leftrightarrow x < \dfrac{\beta}{\alpha}$

Στήν περίπτωση πού ἔχουμε $\alpha = 0$, δηλαδή ἔχουμε μιά ἀνίσωση τῆς μορφῆς $0\cdot x > \beta$ ἤ $0\cdot x < \beta$, ἡ ἀνίσωση ἤ θά εἶναι ἀδύνατη ἤ θά ἀληθεύει γιά κάθε τιμή τοῦ x (γιατί γράφεται τελικά $0 > \beta$ ἤ $0 < \beta$).

Συναληθεύουσες ἀνισώσεις

7.16. Πολλές φορές εἶναι χρήσιμο νά γνωρίζουμε γιά ποιές τιμές μιᾶς μεταβλητῆς ἀληθεύουν συγχρόνως δυό ἤ περισσότερες ἀνισώσεις. Λέμε τότε ὅτι ἔχουμε ἕνα **σύστημα ἀνισώσεων** ἤ **συναληθεύουσες ἀνισώσεις.** Ἄς ὑποθέσουμε π.χ. ὅτι θέλουμε νά βροῦμε ἕνα φυσικό ἀριθμό, πού τό τριπλάσιό του αὐξημένο κατά 5 νά εἶναι μικρότερο ἀπό 29 καί μεγαλύτερο ἀπό 20. Ἄν ὀνομάσουμε τόν ἀριθμό αὐτό x, τότε τό τριπλάσιό του αὐξημένο κατά 5 εἶναι $3x+5$. Ἔχουμε ἑπομένως τίς ἀνισώσεις

$$3x+5 < 29 \quad \text{καί} \quad 3x+5 > 20, \quad \text{ὅπου} \quad x \in \mathrm{N}.$$

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ λύση τοῦ προβλήματός μας θά εἶναι ἡ τομή δύο συνόλων πού καθένα τους εἶναι τό σύνολο λύσεων τῆς κάθε μιᾶς ἀνισώσεως χωριστά. Ἔχουμε ὅμως

$$3x+5 < 29 \Leftrightarrow 3x < 29-5 \Leftrightarrow 3x < 24$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{24}{3} \Leftrightarrow x < 8,$$

δηλ. τό σύνολο λύσεων τῆς πρώτης εἶναι $L_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

$$3x+5 > 20 \Leftrightarrow 3x > 20-5 \Leftrightarrow 3x > 15$$

$$\Leftrightarrow x > 5,$$

δηλ. τό σύνολο λύσεων τῆς δευτέρας εἶναι $L_2 = \{6, 7, 8, 9, \ldots\}$.
Ἑπομένως, σύνολο λύσεων τοῦ συστήματος τῶν δύο ἀνισώσεων εἶναι τό

$$L = L_1 \cap L_2 = \{6, 7\}$$

καί συνεπῶς, ὁ ἀριθμός x πού ζητούσαμε εἶναι $x = 6$ ἤ $x = 7$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Στό σύνολο Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν νά λυθεῖ τό σύστημα τῶν ἀνισώσεων:

$$\frac{x+2}{3}-\frac{x}{4}>\frac{1}{2},\quad 5x-8<x+4,\quad 2x-3<3x-2$$

Λύση. Λύνουμε κάθε μιά ἀνίσωση χωριστά. Ἔχουμε

$$\frac{x+2}{3}-\frac{x}{4}>\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{12(x+2)}{3}-\frac{12x}{4}>\frac{12}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4(x+2)-3x>6$$

$$\Leftrightarrow 4x+8-3x>6$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x>-2} \quad (1)$$

$$5x-8<x+4 \Leftrightarrow 5x-x<4+8$$

$$\Leftrightarrow 4x<12$$

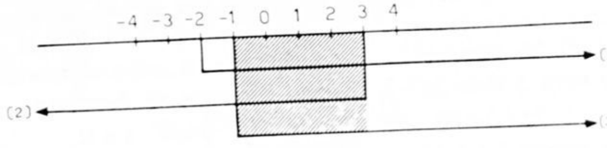
$$\Leftrightarrow \boxed{x<3} \quad (2)$$

$$2x-3<3x-2 \Leftrightarrow 2x-3x<-2+3$$

$$\Leftrightarrow -x<1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x>-1} \quad (3)$$

Γιά νά βροῦμε τό σύνολο λύσεων τοῦ συστήματος, σημειώνουμε τίς λύσεις τῶν τριῶν ἀνισώσεων στόν ἄξονα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.



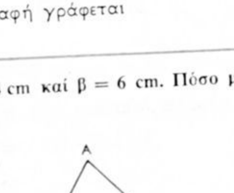
(σχ. 2)

Τό σκιασμένο τμῆμα τοῦ σχ. 2 μᾶς δίνει τό σύνολο τῶν λύσεων τοῦ συστήματος τῶν ἀνισώσεων. Τό σύνολο αὐτό μέ περιγραφή γράφεται

$$L=\{x\in Q \mid -1<x<3\}$$

Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ οἱ δυό πλευρές εἶναι $\alpha=4$ cm καί $\beta=6$ cm. Πόσο μπορεῖ νά εἶναι τό μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς;

Λύση. Ἔστω ὅτι εἶναι $\gamma=x$ cm. Γνωρίζουμε ὅτι κάθε πλευρά ἑνός τριγώνου εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἄθροισμα τῶν δυό ἄλλων. Ἐπομένως ἔχουμε τό σύστημα τῶν ἀνισώσεων:



(σχ. 3)

$$x<4+6 \Leftrightarrow \boxed{x<10} \quad (1)$$

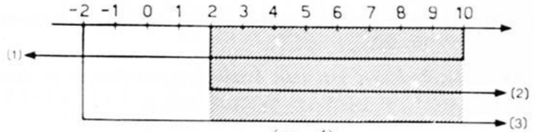
$$6<4+x \Leftrightarrow -x<4-6$$

$$\Leftrightarrow -x<-2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x > 2} \qquad (2)$$

$$4 < 6 + x \Leftrightarrow -x < 6 - 4$$
$$\Leftrightarrow -x < 2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x > -2} \qquad (3)$$

Ἄν σημειώσουμε τί λύσεις τῶν τριῶν ἀνισώσεων στόν ἄξονα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν,



(σχ. 4)

βρίσκουμε ὅτι τό μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς εἶναι μεγαλύτερο ἀπό 2 cm καί μικρότερο ἀπό 10 cm.

3. **Νά βρεθεῖ ὁ μικρότερος φυσικός ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τό ἑφταπλάσιο ἐλαττωμένο κατά τρία εἶναι μεγαλύτερο ἀπό 86.**

Λύση. Ἄν x εἶναι ἕνας φυσικός ἀριθμός, τό ἑφταπλάσιό του ἐλαττωμένο κατά τρία εἶναι $7x-3$. Ἔχουμε ἑπομένως τήν ἀνίσωση

$$7x-3 > 86 \Leftrightarrow 7x > 86+3$$
$$\Leftrightarrow 7x > 89$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{89}{7}$$
$$\Leftrightarrow x > 12\frac{5}{7}$$

Ὥστε σύνολο λύσεων εἶναι τό $L = \{13, 14, 15, \ldots\}$ καί ὁ ζητούμενος ἀριθμός εἶναι ὁ 13.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

26. Ἄν $A = \{0, 5, -2, 2\}$, ποιά στοιχεῖα τοῦ A εἶναι λύσεις τῆς ἀνισώσεως
$$3x-5 < 13-3x;$$

27. Νά λυθοῦν στό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν οἱ ἀνισώσεις:

α) $3x-5 < 13-3x$

β) $8+2x < 28-3x$

γ) $5x-2 < 2x+10$

δ) $-2x+3 < -4x-5$

ε) $\frac{x-1}{3} > \frac{x-3}{2}$

στ) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} > 2$

28. Νά λυθοῦν στό σύνολο Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν οἱ ἀνισώσεις:

α) $4(x-4) < 3x-14$

β) $5x+2-(3x+5) < 4x+17$

γ) $\frac{x+2}{2} - \frac{2x+3}{5} < \frac{x+5}{4}$

δ) $2x+3 < 3x+2$

ε) $x - \frac{x}{5} < \frac{3x-2}{4}$

στ) $\frac{4x-3}{5} - \frac{7x+5}{2} \geq -\frac{x+3}{2}$

29. Ἄν εἶναι $\alpha < 6$, ποιές ἀπό τίς παρακάτω ἀνισώσεις εἶναι σωστές; Δικαιολογῆστε τήν ἀπάντησή σας.

α) $\alpha + 3 < 6 + 3$ γ) $2 . \alpha < 2 . 6$

β) $\alpha - 2 < 6 - 2$ δ) $-3 . \alpha < -3 . 6$

30. Βρεῖτε τό μεγαλύτερο φυσικό ἀριθμό τοῦ ὁποίου τό πενταπλάσιο ἐλαττωμένο κατά 8 εἶναι μικρότερο ἀπό τόν 30.

31. Βρεῖτε τό μικρότερο φυσικό ἀριθμό, τοῦ ὁποίου τό τριπλάσιο αὐξημένο κατά 5 εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τόν 20.

32. Βρεῖτε τούς ἀκέραιους ἀριθμούς γιά τούς ὁποίους συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις:

α) $3x - 5 > x - 13$ καί $5x - 3 < 2x + 15$

β) $4x + 1 > 5x - 2$ καί $3x - 8 > 2(x - 1)$

33. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\beta = 3$ cm, $\gamma = 2$ cm. Πόσο μπορεῖ νά εἶναι τό μῆκος τῆς πλευρᾶς α, ὅταν ὁ α εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός;

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 7

1. **Ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ** εἶναι ἕνας προτασιακός τύπος πού μπορεῖ τελικά νά πάρει τή μορφή

$$\alpha \cdot x = \beta$$

ὅπου α καί β γνωστοί ρητοί ἀριθμοί. Ἄν $\alpha \neq 0$, τότε ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως εἶναι

$$x = \frac{\beta}{\alpha}$$

2. **Ἀνίσωση α΄ βαθμοῦ** εἶναι ἕνας προτασιακός τύπος πού μπορεῖ τελικά νά πάρει τή μορφή

$$\alpha \cdot x > \beta$$

ὅπου α καί β εἶναι γνωστοί ρητοί ἀριθμοί. Οἱ λύσεις τῆς ἀνισώσεως εἶναι:

$$\text{Ἄν } \alpha > 0, \quad x > \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\text{Ἄν } \alpha < 0, \quad x < \frac{\beta}{\alpha}$$

3. Μέ ἐξισώσεις καί ἀνισώσεις α΄ βαθμοῦ μποροῦμε νά λύσουμε διάφορα προβλήματα. Γιά τή λύση τῶν προβλημάτων ἀκολουθοῦμε τήν παρακάτω πορεία:

- Συμβολίζουμε μ' ἕνα γράμμα, π.χ. τό x, τόν ἄγνωστο τοῦ προβλήματος.
- Ὁρίζουμε τό σύνολο στό ὁποῖο πρέπει νά ἀνήκει ὁ x.
- Γράφουμε μέ παραστάσεις, πού περιέχουν τόν ἄγνωστο x, τά στοιχεῖα τοῦ προβλήματος καί σχηματίζουμε μέ αὐτά ἐξίσωση (ἤ ἀνίσωση).
- Λύνουμε τήν ἐξίσωση (ἤ τήν ἀνίσωση).
- Ἐλέγχουμε τό ἀποτέλεσμα πού βρήκαμε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

34. Νά λυθοῦν στό Q οἱ ἐξισώσεις:

α) $2-\frac{3(x+1)}{2}=3-\frac{2(x+1)}{3}$ β) $(x+1)(x-2)=0$

γ) $\frac{x+1}{2}-\frac{x+2}{3}=\frac{x+3}{4}$ δ) $\frac{\omega-2}{3}-\frac{3(\omega-1)}{2}=\frac{\omega+1}{6}$

35. Στό σύνολο Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν νά λυθεῖ τό σύστημα τῶν ἀνισώσεων:

α) $2x-1>x+2$, $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}<1$, $3x-5<4x-2$

β) $\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}>\frac{x-1}{4}$, $\frac{2(x-1)}{3}<\frac{3(x+1)}{4}$

36. Νά βρεθεῖ ἕνας διψήφιος ἀριθμός, πού τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι ἴσο μέ 8 καί, ὅταν τά ψηφία του ἀναστραφοῦν, προκύπτει ἀριθμός μεγαλύτερος κατά 18.

37. Νά βρεθεῖ ἕνας διψήφιος ἀριθμός, πού τό ψηφίο τῶν δεκάδων εἶναι τριπλάσιο ἀπό τό ψηφίο τῶν μονάδων καί, ὅταν τά ψηφία του ἀναστραφοῦν, προκύπτει ἀριθμός μικρότερος κατά 36.

38. Ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι τό μισό τῆς μιᾶς ἀπό τίς παρά τή βάση γωνίες του. Νά βρεθοῦν οἱ γωνίες τοῦ τριγώνου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

39. Νά βρεθοῦν οἱ φυσικοί ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τό τριπλάσιο αὐξημένο κατά 4 εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό διπλάσιό τους καί μικρότερο ἀπό τό τετραπλάσιό τους.

40. Ἕνα ὀρθογώνιο ἔχει περίμετρο 26cm καί ἡ μιά πλευρά του εἶναι κατά 1cm μεγαλύτερη ἀπό τό διπλάσιο τῆς ἄλλης. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογωνίου.

41. Ἕνα τραπέζιο εἶναι ἰσοδύναμο μέ τετράγωνο πλευρᾶς 6cm. Τό ὕψος τοῦ τραπεζίου εἶναι 4cm. Νά βρεῖτε τίς βάσεις του, ἄν ξέρετε ὅτι ἡ μία εἶναι κατά 2cm μικρότερη ἀπό τά $\frac{3}{7}$ τῆς ἄλλης.

42. Πέρυσι σ' ἕνα προϊόν ἔγινε μείωση τῆς τιμῆς του κατά 20%. Πόσο % πρέπει νά αὐξηθεῖ φέτος ἡ τωρινή τιμή του, ὥστε τό προϊόν νά πουλιέται ὅσο καί πρίν ἀπό τίς δυό αὐτές μεταβολές τῆς τιμῆς του;

43. Παίξετε τά παρακάτω «**μαθηματικά παιχνίδια**» καί προσπαθῆστε νά τά δικαιολογήσετε:

I) α) Σκέψου ἕναν ἀριθμό.
β) Πρόσθεσε 5.
γ) Διπλασίασε τό ἀποτέλεσμα.
δ) Ἀφαίρεσε 4.
ε) Διαίρεσε τό ἀποτέλεσμα μέ 2.
στ) Ἀφαίρεσε τόν ἀριθμό πού σκέφθηκες.
Τό ἀποτέλεσμα εἶναι 3.

II) α) Σκέψου έναν άριθμό.

β) Τριπλασίασέ τον.

γ) Πρόσθεσε τόν άριθμό πού σκέφθηκες καί μιά μονάδα.

δ) Πρόσθεσε 11.

ε) Διαίρεσε μέ τό 4.

στ) Ἀφαίρεσε τό 3.

Τό ἀποτέλεσμα εἶναι ὁ ἀριθμός πού σκέφθηκες.

8ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Δεκαδική μορφή ρητοῦ ἀριθμοῦ

8.1. Ξέρουμε ὅτι *δεκαδικό κλάσμα* εἶναι κάθε κλάσμα μέ παρονομαστή 10, 100, 1000, . . ., δηλ. δύναμη τοῦ 10. Π.χ. τά κλάσματα

$$\frac{7}{10},\ \frac{31}{100},\ \frac{1123}{1000},\ \frac{17}{10000}$$

εἶναι δεκαδικά. Τά κλάσματα αὐτά τά γράφουμε καί μέ δεκαδική μορφή

$$0{,}7 \qquad 0{,}31 \qquad 1{,}123 \qquad 0{,}0017$$

καί τά λέμε *δεκαδικούς ἀριθμούς*.

Ἄς ἐξετάσουμε τώρα ποιά ἄλλα κλάσματα μπορεῖ νά γραφοῦν μέ δεκαδική μορφή. Ἐπειδή οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ 10 εἶναι τό 2 καί τό 5, γιά νά μπορεῖ ἕνας ἀριθμός νά γίνει δύναμη τοῦ 10, πρέπει, ὅταν ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο παραγόντων, νά ἔχει ὡς πρώτους παράγοντες μόνο τό 2 ἤ μόνο τό 5 ἤ μόνο τό 2 καί τό 5. Ἄς δοῦμε π.χ. ἄν τά *ἀνάγωγα κλάσματα* $\frac{17}{80}$, $\frac{5}{12}$ καί $\frac{31}{250}$ εἶναι δυνατό νά γραφοῦν μέ δεκαδική μορφή.

Ἄν ἀναλύσουμε τούς παρονομαστές τους σέ γινόμενα πρώτων παραγόντων, ἔχουμε:

$$\begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$80 = 2^4 \cdot 5 \qquad 12 = 2^2 \cdot 3 \qquad 250 = 2 \cdot 5^3$$

Ἑπομένως τά κλάσματα $\frac{17}{80}$ καί $\frac{31}{250}$ εἶναι δυνατό νά γραφοῦν μέ δεκαδική μορφή, ἐνῶ τό $\frac{5}{12}$ ὄχι.

Ἂν κάνουμε τίς διαιρέσεις 17 : 80 καί 31 : 250, βρίσκουμε ὅτι

$$\frac{17}{80} = 0{,}2125 \quad \text{καί} \quad \frac{31}{250} = 0{,}124$$

Ἂν κάνουμε τή διαίρεση 3 : 11, βρίσκουμε ὅτι

$$\frac{3}{11} = 0{,}272727\ldots$$

Ὁ ἀριθμός αὐτός λέγεται **περιοδικός δεκαδικός μέ περίοδο 27** καί γράφεται σύντομα $0{,}\overline{27}$, δηλ. $0{,}272727\ldots = 0{,}\overline{27}$.

Ἔτσι ἔχουμε

$0{,}\overline{35} = 0{,}353535\ldots$ (περίοδος τό 35)

$-5{,}4\overline{123} = -5{,}4123123123123\ldots$ (περίοδος τό 123)

Καταλήξαμε λοιπόν στό συμπέρασμα:

> Κάθε ρητός ἀριθμός μπορεῖ νά γραφεῖ καί μέ δεκαδική μορφή, ἁπλή ἤ περιοδική.

Μποροῦμε βέβαια, κάθε ἁπλό δεκαδικό ἀριθμό νά τόν γράφουμε μέ μορφή κλασματική. Ἔχουμε π.χ.

$$0{,}35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}, \quad -1{,}12 = -\frac{112}{100} = -\frac{28}{25}$$

Ἂς δοῦμε ἄν μποροῦμε νά γράφουμε μέ κλασματική μορφή καί τούς περιοδικούς δεκαδικούς. Ἂς εἶναι[1]

$$\alpha = 0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots..$$

Πολλαπλασιάζουμε μέ 10 (γιατί ἡ περίοδος εἶναι 3, μονοψήφιος ἀριθμός) καί ἔχουμε $10\alpha = 3{,}333\ldots$ Ἔχουμε λοιπόν τίς ἰσότητες

$$10\alpha = 3{,}333\ldots$$
$$\alpha = 0{,}333\ldots$$

καί μέ ἀφαίρεσή τους κατά μέλη βρίσκουμε

$$9\alpha = 3{,}000\ldots \text{ ἤ } 9\alpha = 3 \text{ ἤ } \alpha = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Ὥστε: $0{,}333\ldots = \dfrac{1}{3}$

1. Ὁ περιοδικός δεκαδικός $\alpha = 0{,}\overline{3}$ λέγεται *ἁπλός* περιοδικός, γιατί ἡ περίοδός του ἀρχίζει ἀπό τό πρῶτο δεκαδικό ψηφίο. Ἕνας περιοδικός, πού δέν εἶναι ἁπλός, λέγεται *μεικτός*.

Ἂς πάρουμε τώρα ἕναν ἁπλό περιοδικό μέ περίοδο διψήφιο ἀριθμό, π.χ.

$$\alpha = 0,\overline{63} = 0,636363\ldots$$

Ἂν πολλαπλασιάσουμε μέ 100, βρίσκουμε μέ τόν ἴδιο τρόπο

$$100\alpha = 63,636363\ldots$$
$$\alpha = 0,636363\ldots$$

καί μέ ἀφαίρεση κατά μέλη, ἔχουμε

$$99\alpha = 63,000\ldots = 63 \text{ ἤ } \alpha = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$$

Συνεπῶς :

> Γιά νά γράψουμε ἕναν ἁπλό περιοδικό ἀριθμό μέ κλασματική μορφή, γράφουμε ἀριθμητή τήν περίοδο καί παρονομαστή τόσα 9 ὅσα ψηφία ἔχει ἡ περίοδος.

Π.χ. $3,\overline{29} = 3\frac{29}{99}$, $-2,\overline{7} = -2\frac{7}{9}$

Ὅταν ὁ περιοδικός δεκαδικός ἀριθμός εἶναι μεικτός, τόν πολλαπλασιάζουμε μέ κατάλληλη δύναμη τοῦ 10 ὥστε νά γίνει ἁπλός. Ἔτσι ἄν εἶναι $\alpha = 3,5\overline{71}$ γράφουμε πρῶτα

$$10\alpha = 35,717171\ldots$$

Πολλαπλασιάζουμε τώρα μέ 100 (ἡ περίοδος εἶναι διψήφιος) καί βρίσκουμε

$$1000\alpha = 3571,717171\ldots$$
$$10\alpha = 35,717171\ldots$$

Μέ ἀφαίρεση κατά μέλη ἔχουμε

$$990\alpha = 3536,000\ldots \text{ ἤ } 990\alpha = 3536 \text{ ἤ } \alpha = \frac{3536}{990} = \frac{1768}{495}$$

Συνεπῶς:

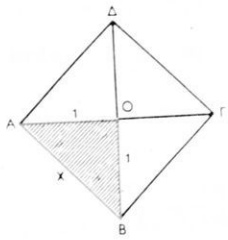
> Κάθε δεκαδικός περιοδικός ἀριθμός, μπορεῖ νά γραφεῖ μέ κλασματική μορφή, καί ἑπομένως εἶναι ρητός.

Γεννιέται τό ἐρώτημα: Ὑπάρχουν ἀριθμοί πού δέν εἶναι ρητοί; Στό ἐρώτημα αὐτό θά ἀπαντήσουμε στήν ἑπόμενη παράγραφο.

Ὕπαρξη ἄρρητου ἀριθμοῦ

8 2. Ἂς ξεκινήσουμε ἀπό ἕνα γεωμετρικό πρόβλημα.

Ἔστω ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ, πού οἱ κάθετες πλευρές του εἶναι ἴσες καί ἔχουν μῆκος 1 cm. Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ δημιουργοῦμε τό τετράγωνο ΑΒΓΔ. Τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου ΑΟΒ εἶναι ἴσο μέ $\frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \upsilon = \frac{1}{2}$ cm². Ἑπομένως τό ἐμβαδό τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ θά εἶναι ἴσο μέ $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ cm². Τό τετράγωνο αὐτό εἶναι ἐντελῶς ὁρισμένο καί ἔχει μιά ὁρισμένη πλευρά. Πόσο εἶναι τό μῆκος τῆς πλευρᾶς του;



(σχ. 1)

Ἄν ὀνομάσουμε x τό μῆκος αὐτό, τότε τό ἐμβαδό τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσο μέ $x \cdot x = x^2$, ἑπομένως πρέπει

$$x^2 = 2$$

Ἄς προσπαθήσουμε νά βροῦμε τόν ἀριθμό x. Ἐπειδή $1^2 = 1 < 2$ καί $2^2 = 4 > 2$, ὁ x δέν μπορεῖ νά εἶναι ἀκέραιος, ἀλλά κάποιος ἀριθμός μεταξύ 1 καί 2.

Ἄς προσπαθήσουμε νά βροῦμε τόν x μέ προσέγγιση ἑνός δεκαδικοῦ ψηφίου. Παίρνουμε τούς ἀριθμούς

1,1   1,2   1,3   1,4   1,5   1,6   1,7   1,8   1,9

Ἄν ὑπολογίσουμε τά τετράγωνά τους, βρίσκουμε ὅτι $(1{,}1)^2 = 1{,}21 < 2, \cdots, (1{,}4)^2 = 1{,}96 < 2$, $(1{,}5)^2 = 2{,}25 > 2$ Ὥστε :

$$1{,}4 < x < 1{,}5$$

Ἄς προσπαθήσουμε νά βροῦμε τόν x μέ προσέγγιση δυό δεκαδικῶν ψηφίων. Παίρνουμε τούς ἀριθμούς

1,41   1,42   1,43   1,44   1,45   1,46   1,47   1,48   1,49

Ἄν ὑπολογίσουμε τά τετράγωνά τους, βρίσκουμε ὅτι $(1{,}41)^2 = 1{,}9881 < 2$, $(1{,}42)^2 = 2{,}0164 > 2$. Ὥστε :

$$1{,}41 < x < 1{,}42$$

Ἄν συνεχίσουμε τήν ἴδια διαδικασία, διαπιστώνουμε ὅτι δέν ὑπάρχει δεκαδικός ἀριθμός ἁπλός ἤ περιοδικός, πού τό τετράγωνό του νά εἶναι ἴσο μέ 2[1], καί συνεπῶς ὁ ἀριθμός x δέν εἶναι ρητός. Ὥστε:

Ὑπάρχουν ἀριθμοί πού δέν εἶναι ρητοί. Τούς ἀριθμούς αὐτούς τούς λέμε **ἄρρητους** ἤ **ἀσύμμετρους**.

Τόν ἀριθμό x τόν γράφουμε μέ τό σύμβολο $\sqrt{2}$, πού τό διαβάζουμε *τετραγωνική ρίζα* τοῦ 2. Τό σύμβολο $\sqrt{\ }$ λέγεται *ριζικό* καί ὁ ἀριθμός 2 λέγεται *ὑπόρριζο*.

1. Στήν τρίτη τάξη θά δικαιολογήσουμε καί θεωρητικά γιατί δέν ὑπάρχει ρητός ἀριθμός, πού τό τετράγωνό του νά ἰσοῦται μέ 2.

Οἱ πραγματικοί ἀριθμοί

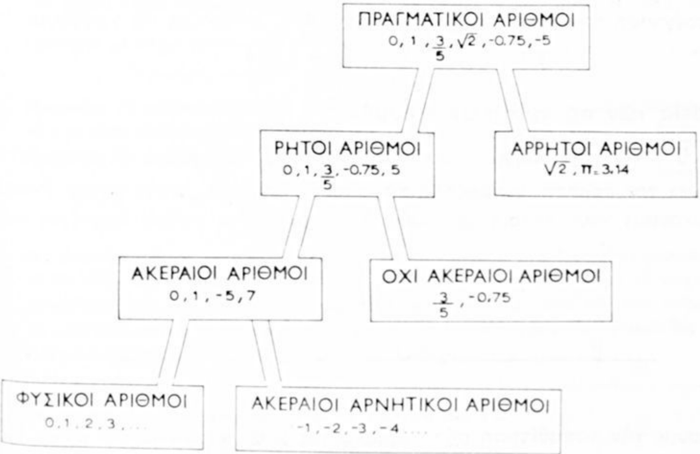
8.3. Εἴδαμε λοιπόν ὅτι ὑπάρχουν καί ἀριθμοί, πού δέν εἶναι ρητοί, καί τούς ὀνομάσαμε «ἄρρητους» ἀριθμούς. Τό σύνολο πού ἔχει γιά στοιχεῖα ὅλους τούς ρητούς καί ὅλους τούς ἄρρητους ἀριθμούς λέγεται **σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν** καί σημειώνεται μέ R(1). Κάθε στοιχεῖο τοῦ R λέγεται «πραγματικός ἀριθμός». Ἔτσι, ὅταν λέμε ὅτι ἕνας ἀριθμός α εἶναι πραγματικός (ἤ ὅταν γράφουμε $\alpha \in R$), θά ἐννοοῦμε ὅτι ὁ α μπορεῖ νά εἶναι εἴτε ρητός εἴτε ἄρρητος ἀριθμός. Τέτοιοι πραγματικοί ἀριθμοί εἶναι π.χ. οἱ

$$-\frac{7}{4},\ 1,\ 0,\ \frac{3}{5},\quad 2{,}3535\ldots,\quad \sqrt{2}$$

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι τά γνωστά μας σύνολα ἀριθμῶν N,Z,Q εἶναι ὑποσύνολα τοῦ R καί μάλιστα

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Ἡ διαδοχή αὐτή τῶν συνόλων δείχνεται καί μέ τό παρακάτω διάγραμμα:



---

1. Μέ R^* σημειώνουμε τό σύνολο ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐκτός ἀπό τό μηδέν.

Ρητή προσέγγιση ἄρρητου ἀριθμοῦ

8.4. Ἂς πάρουμε πάλι τόν ἄρρητο ἀριθμό $\sqrt{2}$ πού εἶναι, ὅπως εἴπαμε, λύση τῆς ἐξισώσεως $x^2=2$, δηλαδή εἶναι τέτοιος ὥστε $(\sqrt{2})^2=2$. Γιά τόν ἀριθμό αὐτό βρήκαμε τίς ἀνισότητες (βλ. § 8.2)

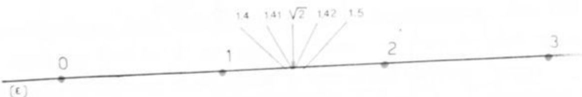
$$
\begin{array}{ll}
 & 1 < \sqrt{2} < 2 \\
 & 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 \\
(1) & 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42 \\
 & 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415 \\
 & \ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι μποροῦμε νά βροῦμε δυό δεκαδικούς ἀριθμούς μέ ὅσα θέλουμε δεκαδικά ψηφία, οἱ ὁποῖοι θά διαφέρουν μόνο κατά τό τελευταῖο δεκαδικό ψηφίο καί θά περιέχουν τόν $\sqrt{2}$. Ὁ μικρότερος ἀπ' αὐτούς λέγεται **προσέγγιση μέ ἔλλειψη** τοῦ $\sqrt{2}$ καί ὁ μεγαλύτερος λέγεται **προσέγγιση μέ ὑπεροχή** τοῦ $\sqrt{2}$. Ἔτσι π.χ. ἀπό τίς ἀνισότητες $1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$ καταλαβαίνουμε ὅτι ὁ δεκαδικός ἀριθμός 1,414 εἶναι *«προσέγγιση χιλιοστοῦ μέ ἔλλειψη»* τοῦ $\sqrt{2}$ καί ὁ 1,415 εἶναι *«προσέγγιση χιλιοστοῦ μέ ὑπεροχή»* τοῦ $\sqrt{2}$. Ὅταν παίρνουμε ἀντί γιά τόν $\sqrt{2}$, μιά προσέγγισή του μέ ἔλλειψη, π.χ. τήν 1,414, μποροῦμε νά γράφουμε

$$\sqrt{2}=1{,}414\ldots \quad ἤ \quad \sqrt{2}\simeq 1{,}414$$

Εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν

8.5. Μέ τή βοήθεια τῶν ἀνισοτήτων (1) μποροῦμε νά «τοποθετήσουμε» τόν ἄρρητο ἀριθμό $\sqrt{2}$ πάνω στήν εὐθεία ε, στήν ὁποία ἔχουμε ἀπεικονίσει τούς ρητούς ἀριθμούς. Στό παρακάτω σχῆμα δείχνεται πῶς κάνουμε τήν τοποθέτηση αὐτή βρίσκοντας κάθε φορά ἕνα πιό μικρό διάστημα, μέσα στό ὁποῖο περιέχεται ὁ ἀριθμός $\sqrt{2}$.



Ὁ τρόπος μέ τόν ὁποῖο τοποθετήσαμε τόν $\sqrt{2}$ στήν εὐθεία ε μπορεῖ νά ἐφαρμοσθεῖ καί γιά ὁποιονδήποτε ἄλλο ἄρρητο ἀριθμό. Ἀπό τόν τρόπο αὐτό καταλαβαίνουμε ὅτι πρέπει νά παραδεχθοῦμε τά ἑξῆς:

- Κάθε πραγματικός ἀριθμός ἀπεικονίζεται σ' ἕνα μόνο σημεῖο τῆς εὐθείας ε.

• Κάθε σημεῖο τῆς εὐθείας ε εἶναι εἰκόνα ἑνός μόνο πραγματικοῦ ἀριθμοῦ(1).

Ἔτσι λοιπόν ὑπάρχει ἀντιστοιχία «ἕνα μέ ἕνα» τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου R μέ τά σημεῖα μιᾶς εὐθείας. Μιά τέτοια εὐθεία, στήν ὁποία ἀπεικονίζουμε ὅλους τούς πραγματικούς ἀριθμούς, τή λέμε **εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν**, (ἤ **ἄξονα** τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά γραφεῖ μέ κλασματική μορφή ὁ περιοδικός δεκαδικός 0,999...**

Λύση. Ἄν ὀνομάσουμε τόν ἀριθμό αὐτό α, ἔχουμε

$$10\alpha = 9{,}999\ldots$$
$$\alpha = 0{,}999\ldots$$

Μέ ἀφαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε $9\alpha = 9{,}000\ldots = 9$ ἤ $\alpha = \frac{9}{9} = 1$, ὥστε

$$0{,}9999\ldots = 1.$$

Ἔχουμε ἀκόμα $3{,}999\ldots = 4$, $3{,}49999\ldots = 3{,}5$, κ.λ.π. Δηλαδή, δέν ἔχουμε περιοδικούς δεκαδικούς ἀριθμούς μέ περίοδο 9.

Ἄν βρεῖτε τώρα τή δεκαδική μορφή τοῦ $\frac{1}{3}$ καί τήν πολλαπλασιάσετε μέ 3, θά καταλήξετε μέ ἄλλο τρόπο στό ἴδιο συμπέρασμα.

2. **Μποροῦμε νά «κατασκευάζουμε» δεκαδικούς ἀριθμούς μέ ἄπειρα δεκαδικά ψηφία, πού νά μήν εἶναι περιοδικοί, δηλαδή μποροῦμε νά «κατασκευάζουμε» ἄρρητους ἀριθμούς.**

Ἔτσι π.χ. ὁ δεκαδικός

$$\alpha = 0{,}\underbrace{10}_{1}\underbrace{100}_{2}\underbrace{1000}_{3}\underbrace{10000}_{4}\underbrace{100000}_{5}1\ldots$$

δέν εἶναι περιοδικός, ἑπομένως εἶναι ἄρρητος.(Εἶναι εὔκολο νά δικαιολογήσουμε γιατί δέν εἶναι περιοδικός. Ἄν π.χ. εἶχε ὡς περίοδο κάποιον ἀριθμό μέ 15 ψηφία, θά συνεχίζαμε τήν «κατασκευή» τοῦ α καί θά βρίσκαμε ἕνα δεκαδικό του τμῆμα μέ 16 μηδενικά, ὁπότε βλέπουμε ὅτι δέν μπορεῖ νά ἐπαναλαμβάνεται ἡ περίοδός του). Κατασκευάστε τώρα καί ἄλλους τέτοιους ἀριθμούς.

3. **Νά βρεθεῖ ἡ προσέγγιση ἑκατοστοῦ μέ ἔλλειψη τοῦ $\sqrt{5}$.**

Λύση. Ἐπειδή $2^2 = 4$ καί $3^2 = 9$, ἔχουμε

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

Οἱ δεκαδικοί ἀριθμοί μ' ἕνα δεκαδικό ψηφίο, πού περιέχονται μεταξύ 2 καί 3, ἔχουν τετράγωνα $(2{,}1)^2 = 4{,}41$, $(2{,}2)^2 = 4{,}84$, $(2{,}3)^2 = 5{,}29\ldots$ καί συνεπῶς

$$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$$

1. Σέ μεγαλύτερη τάξη θά δικαιολογήσουμε αὐτές τίς παραδοχές καί θά δοῦμε τήν ἰδιαίτερη σημασία πού ἔχουν γιά τά μαθηματικά.

Οἱ δεκαδικοί ἀριθμοί μέ δυό δεκαδικά ψηφία, πού περιέχονται μεταξύ 2,2 καί 2,3, ἔχουν τετράγωνα $(2{,}21)^2 = 4{,}8841$, $(2{,}22)^2 = 4{,}9284$, $(2{,}23)^2 = 4{,}9729$, $(2{,}24)^2 = 5{,}0176, \ldots$ Ὥστε

$$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$$

Ἐπομένως ἡ προσέγγιση ἑκατοστοῦ μέ ἔλλειψη εἶναι

$$\sqrt{5} = 2{,}23\ldots$$

Βρεῖτε τώρα μέ τόν ἴδιο τρόπο τήν ἴδια προσέγγιση τοῦ $\sqrt{19}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Χωρίς νά κάνετε τή διαίρεση νά βρεῖτε ποιά ἀπό τά κλάσματα $\frac{15}{32}$, $\frac{33}{52}$, $\frac{13}{48}$, $\frac{148}{240}$ γράφονται μέ ἁπλή δεκαδική μορφή καί ποιά μέ περιοδική.
2. Νά γραφοῦν μέ κλασματική μορφή οἱ ἀριθμοί

   $\alpha = 0{,}555\ldots$ $\quad\gamma = 3{,}2535353\ldots$

   $\beta = 2{,}151515\ldots$ $\quad\delta = 4{,}125125125\ldots$
3. Βρεῖτε τήν προσέγγιση ἑκατοστοῦ μέ ἔλλειψη τοῦ $\sqrt{35}$
4. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς καί ποιές ψευδεῖς:
   α) Κάθε ἀκέραιος ἀριθμός εἶναι ρητός.
   β) Κάθε ἄρρητος ἀριθμός εἶναι πραγματικός.
   γ) Κάθε πραγματικός ἀριθμός εἶναι ἀκέραιος.
   δ) Κάθε ἀκέραιος ἀριθμός εἶναι φυσικός.
5. Βρεῖτε τά σύνολα:
   α) $Q \cap N$ β) $Q \cup R$ γ) $Z \cup Q$ δ) $Z \cap R$.

Πράξεις στό σύνολο R

8.6. Τό σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀποτελεῖται, ὅπως εἴπαμε, ἀπό τούς ρητούς καί τούς ἄρρητους ἀριθμούς. Ὅλες οἱ πράξεις, πού μάθαμε μέχρι τώρα, ἀφοροῦν στούς ρητούς ἀριθμούς. Θά πρέπει τώρα νά δοῦμε πῶς γίνονται οἱ πράξεις μεταξύ ρητῶν καί ἄρρητων ἀριθμῶν ἤ μεταξύ ἄρρητων ἀριθμῶν.

Εἴδαμε ὅτι κάθε ἄρρητος ἀριθμός προσεγγίζεται ὅσο θέλουμε μέ ἕνα ρητό ἀριθμό. Μποροῦμε λοιπόν νά συμφωνήσουμε ὅτι κάθε φορά πού θά ἐμφανίζεται σέ μιά πράξη ἕνας ἄρρητος ἀριθμός, θά παίρνουμε στή θέση του μιά «καλή» προσέγγισή του μέ ρητό. Ἔτσι θά ἔχουμε π.χ.

$$7 + \sqrt{2} \simeq 7 + 1{,}414 = 8{,}414$$

$$3\sqrt{5} \simeq 3 \cdot (2{,}236) = 6{,}708$$

δηλαδή οἱ πράξεις μέ ἄρρητους ἀριθμούς ἀνάγονται σέ πράξεις μέ ρητούς ἀριθμούς, πού ξέρουμε πῶς γίνονται. Ἐπομένως μποροῦμε νά δεχθοῦμε ὅτι **ὅλες οἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων, πού ἰσχύουν στούς ρητούς ἀριθμούς, ἰσχύουν καί στούς πραγματικούς ἀριθμούς.**

Ἂν λοιπόν μέ τά γράμματα α,β,γ παριστάνουμε πραγματικούς ἀριθμούς (ρητούς ἤ ἄρρητους), θά ἔχουμε τίς ἑξῆς ἰδιότητες :

α) Γιά τήν πρόσθεση:

- Τό ἄθροισμα $\alpha+\beta$ εἶναι πάντοτε πραγματικός ἀριθμός.
- Ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετική ἰδιότητα: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.
- Ἰσχύει ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα: $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$.
- Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό α ἔχουμε $\alpha+0=\alpha$.
- Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό α ὑπάρχει ὁ ἀντίθετός του $-\alpha$, ὥστε $\alpha+(-\alpha)=0$.
- Ἡ διαφορά $\alpha-\beta$ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$.

β) Γιά τόν πολλαπλασιασμό :

- Τό γινόμενο $\alpha\,.\,\beta$ εἶναι πάντοτε πραγματικός ἀριθμός.
- Ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετική ἰδιότητα: $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$
- Ἰσχύει ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα: $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$
- Ἰσχύει ἡ ἐπιμεριστική ἰδιότητα: $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha.\beta+\alpha\cdot\gamma$
- Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό α ἔχουμε $\alpha\cdot 1=\alpha$
- Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό $\alpha\neq 0$ ὑπάρχει ὁ ἀντίστροφός του $\frac{1}{\alpha}$ τέτοιος, ὥστε $\alpha\,.\,\frac{1}{\alpha}=1$.
- Τό πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$ $(\beta\neq 0)$ δυό πραγματικῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα $\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\,.\,\frac{1}{\beta}$.

Ἡ διάταξη στό σύνολο R

8.7. Ὅπως ὁρίσαμε τή διάταξη στούς ρητούς ἀριθμούς, τήν ὁρίζουμε καί στούς πραγματικούς. Ἂν τά γράμματα α,β,γ παριστάνουν πραγματικούς ἀριθμούς (ρητούς ἤ ἄρρητους), λέμε ὅτι:

$$\alpha>\beta\ ,\ \text{ὅταν } \alpha-\beta>0$$
$$\alpha<\beta\ ,\ \text{ὅταν } \alpha-\beta<0$$

Ὅπως καί στήν περίπτωση τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες :

- Ἂν $\alpha>\beta$, τότε καί $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$
- Ἂν $\alpha>\beta$ καί $\gamma>0$, τότε $\alpha.\gamma>\beta.\gamma$
- Ἂν $\alpha>\beta$ καί $\gamma<0$, τότε $\alpha.\gamma<\beta.\gamma$
- Ἂν $\alpha>\beta$ καί $\beta>\gamma$, τότε καί $\alpha>\gamma$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Μέ τίς ἰδιότητες τῶν πράξεων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν βρεῖτε τά ἐξαγόμενα:

α) $5\alpha + 7\alpha - 3\alpha$

β) $5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$

γ) $3(2\alpha+\beta)-(3\alpha+2\beta)$

δ) $3(2\sqrt{2}+\sqrt{5})-(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})$

Λύση. α) $5\alpha+7\alpha-3\alpha = (5+7-3).\alpha = 9\alpha$

β) $5\sqrt{2}+7\sqrt{2}-3\sqrt{2} = (5+7-3)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

γ) $$\begin{aligned} 3(2\alpha+\beta)-(3\alpha+2\beta) &= 6\alpha+3\beta+(-3\alpha-2\beta) \\ &= 6\alpha+3\beta-3\alpha-2\beta \\ &= (6\alpha-3\alpha)+(3\beta-2\beta) \\ &= (6-3)\alpha+(3-2)\beta = 3\alpha+1.\beta = 3\alpha+\beta \end{aligned}$$

δ) $$\begin{aligned} 3(2\sqrt{2}+\sqrt{5})-(3\sqrt{2}+2\sqrt{5}) &= 6\sqrt{2}+3\sqrt{5}-3\sqrt{2}-2\sqrt{5} \\ &= (6\sqrt{2}-3\sqrt{2})+(3\sqrt{5}-2\sqrt{5}) \\ &= (6-3)\sqrt{2}+(3-2)\sqrt{5} = 3\sqrt{2}+\sqrt{5} \end{aligned}$$

2. Ἄν α καί β εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα (μέ ἐφαρμογή τῶν ἰδιοτήτων):

α) $3(2\alpha-5\beta)-5(\alpha+2\beta)$

β) $(\alpha+\beta)^2$

γ) $(\alpha-\beta)^2$

δ) $(2\alpha+3\beta).(3\alpha+5\beta)$

ε) $(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)$

στ) $(2\alpha+5\beta)^2$

Λύση. α) $$\begin{aligned} 3(2\alpha-5\beta)-5(\alpha+2\beta) &= 6\alpha-15\beta+(-5).(\alpha+2\beta) \\ &= 6\alpha-15\beta-5\alpha-10\beta \\ &= (6-5)\alpha+(-15-10)\beta = \alpha-25\beta. \end{aligned}$$

β) $$\begin{aligned} (\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta).(\alpha+\beta) &= (\alpha+\beta).\alpha+(\alpha+\beta).\beta \\ &= \alpha^2+\beta\alpha+\alpha\beta+\beta^2 \\ &= \alpha^2+\beta^2+1.\alpha\beta+1.\alpha\beta \\ &= \alpha^2+\beta^2+(1+1)\alpha\beta \\ &= \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \end{aligned}$$

γ) Μέ τόν ἴδιο τρόπο διαπιστώνουμε ὅτι $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$.

δ) $$\begin{aligned} (2\alpha+3\beta).(3\alpha+5\beta) &= (2\alpha+3\beta).3\alpha+(2\alpha+3\beta).5\beta \\ &= 6\alpha^2+9\beta\alpha+10\alpha\beta+15\beta^2 \\ &= 6\alpha^2+(9+10)\alpha\beta+15\beta^2 = 6\alpha^2+19\alpha\beta+15\beta^2. \end{aligned}$$

ε) $$\begin{aligned} (\alpha+\beta).(\alpha-\beta) &= (\alpha+\beta).[\alpha+(-\beta)] \\ &= (\alpha+\beta).\alpha+(\alpha+\beta).(-\beta) \\ &= \alpha^2+\beta\alpha-\alpha\beta-\beta^2 \\ &= \alpha^2+(1-1)\alpha\beta-\beta^2 = \alpha^2+0.\alpha\beta-\beta^2 = \alpha^2-\beta^2. \end{aligned}$$

στ) Μέ τόν ἴδιο τρόπο διαπιστῶστε ὅτι $(2\alpha+5\beta)^2 = 4\alpha^2+20\alpha\beta+25\beta^2$.

Παρατήρηση: Στό δ τοῦ προηγούμενου παραδείγματος βρήκαμε :

$$\begin{aligned} (2\alpha+3\beta).(3\alpha+5\beta) &= 6\alpha^2+9\beta\alpha+10\alpha\beta+15\beta^2 \\ &= (2\alpha).(3\alpha)+(3\beta).(3\alpha)+(2\alpha).(5\beta)+(3\beta).(5\beta). \end{aligned}$$

Ἀπό τήν ἰσότητα αὐτή συμπεραίνουμε ὅτι: **Γιά νά πολλαπλασιάσουμε δύο ἀθροίσματα, ἀρκεῖ νά πολλαπλασιάσουμε κάθε ὅρο τοῦ ἑνός ἀθροίσματος μέ ὅλους τούς ὅρους τοῦ ἄλλου καί νά προσθέσουμε τά γινόμενα πού βρίσκουμε.**

6. Ἄν τά γράμματα α,β,γ παριστάνουν πραγματικούς ἀριθμούς, χρησιμοποιώντας τίς ἰδιότητες τῶν πράξεων βρεῖτε τά ἐξαγόμενα:

α) $3.(2\alpha+3\beta-5\gamma)+4(\alpha-2\beta+3\gamma)$

β) $(2\alpha+3\beta).\gamma+(3\alpha+2\beta).\gamma$

γ) $(\alpha+\beta).(\alpha+\gamma)+(\beta+\gamma).(\alpha+2\gamma)$

7. Βρεῖτε τά ἐξαγόμενα:

α) $2(\sqrt{5}+\sqrt{7})+3(2\sqrt{5}-\sqrt{7})$

β) $3\sqrt{5}+2\sqrt{7}+4\sqrt{5}-6\sqrt{7}+4\sqrt{7}-7\sqrt{5}$

8. Βρεῖτε τά ἐξαγόμενα:

α) $5{,}33\ldots+2{,}1515\ldots-3{,}1212\ldots$

β) $2\,.\,5{,}33\ldots+4.3{,}1212\ldots$

γ) $(5{,}33\ldots)\,.\,(2{,}1515\ldots)$

9. Συγκρίνετε τούς ἀριθμούς:

α) $\sqrt{2}$ καί $1{,}5$ γ) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ καί $0{,}8$

β) $\sqrt{7}$ καί $2{,}25$ δ) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ καί $0{,}35$

Τετραγωνική ρίζα θετικοῦ ἀριθμοῦ

8.8. Ἄς ὑπολογίσουμε τά τετράγωνα μερικῶν ἀριθμῶν. Ἔχουμε:

$$5^2=25, \text{ ἀλλά καί } (-5)^2=25$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}, \text{ ἀλλά καί } \left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

$$(0{,}8)^2=0{,}64, \text{ ἀλλά καί } (-0{,}8)^2=0{,}64$$

Παρατηροῦμε ὅτι, ἄν δοθεῖ ὁ θετικός ἀριθμός 25, ὑπάρχουν δύο ἀριθμοί, ὁ 5 καί ὁ -5, πού τά τετράγωνά τους μᾶς δίνουν τόν 25. Κάθε ἕναν ἀπό τούς ἀριθμούς αὐτούς τόν ὀνομάζουμε **τετραγωνική ρίζα** τοῦ 25. Ἔτσι π.χ. καί ὁ $\frac{9}{16}$ ἔχει δύο τετραγωνικές ρίζες, τό $\frac{3}{4}$ καί τό $-\frac{3}{4}$.

Γενικά, ἔχουμε τόν ὁρισμό:

> Τετραγωνική ρίζα ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ β λέγεται ἕνας ἀριθμός α ὁ ὁποῖος, ὅταν ὑψωθεῖ στό τετράγωνο, μᾶς δίνει τόν β, δηλ.
> $\alpha^2=\beta$.

Εἴδαμε ὅτι κάθε θετικός ἀριθμός ἔχει δυό τετραγωνικές ρίζες, πού ἡ μιά εἶναι ἀντίθετη τῆς ἄλλης. Γιά νά γράψουμε τήν τετραγωνική ρίζα ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ, χρησιμοποιοῦμε τό σύμβολο $\sqrt{}$ πού λέγεται **ριζικό.** **Μέ τό σύμβολο αὐτό συμφωνοῦμε νά γράφουμε μόνο τή θετική τετραγωνική ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ.** Ἔτσι π.χ. γράφουμε,

$$\sqrt{25}=5, \quad \sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}, \quad \sqrt{0{,}64}=0{,}8$$

Γιά νά δηλώσουμε τώρα ὅτι καί ὁ ἀριθμός -5 εἶναι τετραγωνική ρίζα τοῦ 25, βάζουμε τό πρόσημο — μπροστά στό σύμβολο $\sqrt{25}$, δηλ. γράφουμε (1)

$$-\sqrt{25}=-5.$$

Οἱ ἀριθμοί 1, 4, 9, 16, 25, 36, $\frac{25}{49}, \ldots$, τῶν ὁποίων βρίσκεται ἀκριβῶς ἡ τετραγωνική ρίζα, λέγονται **τέλεια τετράγωνα.**

Γνωρίζουμε ὅτι τό τετράγωνο ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ, ἐκτός ἀπό τό μηδέν, εἶναι ἀριθμός θετικός. Ἑπομένως οἱ **ἀρνητικοί ἀριθμοί δέν ἔχουν τετραγωνική ρίζα.** Ἔτσι π.χ. τό σύμβολο $\sqrt{-25}$, δέν ἔχει κανένα νόημα μέσα στό σύνολο R, ἐνῶ $\sqrt{0}=0$ (γιατί $0^2=0$).

8.9. Ἄν πάρουμε τίς τετραγωνικές ρίζες δύο θετικῶν ἀριθμῶν, π.χ. $\sqrt{4}=2$ καί $\sqrt{9}=3$, παρατηροῦμε ὅτι $4.9=36$ καί συνεπῶς

$$\sqrt{4.9}=\sqrt{36}=6=2.3=\sqrt{4}.\sqrt{9}.$$

Γενικά, ἄν α καί β εἶναι δύο θετικοί ἀριθμοί, τότε ἰσχύει πάντοτε ἡ ἰσότητα

$$\boxed{\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\,.\,\sqrt{\beta}}$$

Ἐπίσης παρατηροῦμε ὅτι $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$, γιατί $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$,

καί ἑπομένως

$$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}.$$

Γενικά, ἄν α καί β εἶναι δύο θετικοί ἀριθμοί, τότε ἰσχύει πάντοτε ἡ ἰσότητα

$$\boxed{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}}$$

(1) Συνεπῶς ἡ γραφή $\sqrt{25}=-5$ εἶναι λάθος.

Οἱ ἰδιότητες αὐτές[1] μᾶς ἐπιτρέπουν νά ἁπλοποιοῦμε ἐκφράσεις μέ ριζικά. Ἔτσι π.χ. μποροῦμε νά γράψουμε

$$\sqrt{300} = \sqrt{100 \cdot 3} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{3} = 10 \cdot \sqrt{3}.$$

Ἡ μορφή $10 \cdot \sqrt{3}$ εἶναι πιό ἁπλή ἀπό τή μορφή $\sqrt{300}$, γιατί κάτω ἀπό τό σύμβολο τοῦ ριζικοῦ ἔχουμε πιό μικρό ἀριθμό.

Ἐπίσης μποροῦμε, ὅταν ἔχουμε τετραγωνική ρίζα κλάσματος, νά ἔχουμε τελικά ριζικό μόνο στόν ἀριθμητή τοῦ κλάσματος. Ἔχουμε π.χ.

$$\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 5}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

Εὕρεση τῆς τετραγωνικῆς ρίζας μέ προσέγγιση

8.10. Ὅταν ἕνας ἀριθμός εἶναι τέλειο τετράγωνο, τότε μποροῦμε νά βροῦμε τήν τετραγωνική του ρίζα ἀκριβῶς. Στό τέλος τοῦ βιβλίου ὑπάρχει ἕνας πίνακας πού δίνει **τά τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν ἀπό 1 μέχρι 100.** Ὅταν ὁ ἀριθμός δέν εἶναι τέλειο τετράγωνο, τότε ἡ τετραγωνική του ρίζα εἶναι ἄρρητος ἀριθμός. Στήν περίπτωση αὐτή παίρνουμε σάν προσέγγιση τῆς τετραγωνικῆς ρίζας ἕνα ρητό ἀριθμό.

Ἄς προσπαθήσουμε νά βροῦμε τήν τετραγωνική ρίζα τοῦ 29, πού δέν εἶναι τέλειο τετράγωνο.

Εὔκολα βρίσκουμε δυό ἀριθμούς, πού εἶναι τέλεια τετράγωνα καί πού ἀνάμεσά τους βρίσκεται ὁ 29. (Μπορεῖτε νά χρησιμοποιήσετε τόν πίνακα τοῦ βιβλίου). Παρατηροῦμε ὅτι

$$25 < 29 < 36$$

καί ἐπειδή $\sqrt{25} = 5$ καί $\sqrt{36} = 6$, θά ἔχουμε

$$5 < \sqrt{29} < 6,$$

δηλ. ἡ $\sqrt{29}$ προσεγγίζεται μέ τούς ἀκέραιους 5 καί 6.

Ἄς βροῦμε μιά προσέγγιση μέ δέκατα τῆς μονάδας. Παίρνουμε τούς ἀριθμούς

$$5{,}1 \quad 5{,}2 \quad 5{,}3 \quad 5{,}4 \quad 5{,}5 \quad 5{,}6 \quad 5{,}7 \quad 5{,}8 \quad 5{,}9$$

Ἄν ὑπολογίσουμε τά τετράγωνά τους, βρίσκουμε ὅτι

$$(5{,}3)^2 < 29 < (5{,}4)^2$$

Ὥστε

$$5{,}3 < \sqrt{29} < 5{,}4$$

---

1. Παρατηροῦμε ὅτι $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$, ἐνῶ $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \neq 7$. Γενικά, ἔχουμε

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha + \beta}.$$

Μποροῦμε λοιπόν νά πάρουμε σάν προσέγγιση τῆς $\sqrt{29}$ ἤ τό 5,3 (προσέγγιση μέ ἔλλειψη) ἤ τό 5,4 (προσέγγιση μέ ὑπεροχή). Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε μεγαλύτερη προσέγγιση, π.χ.

$$5{,}38 < \sqrt{29} < 5{,}39$$

Στόν πίνακα τοῦ βιβλίου βλέπουμε ὅτι προσέγγιση μέ 3 δεκαδικά ψηφία τοῦ $\sqrt{29}$ εἶναι ὁ 5,385 καί γράφουμε $\sqrt{29} = 5{,}385\ \ldots$

8.11. Ὑπάρχει μιά πιό πρακτική μέθοδος γιά τόν ὑπολογισμό τῆς τετραγωνικῆς ρίζας τῶν θετικῶν ἀριθμῶν. Ἄς ὑπολογίσουμε π.χ. τήν $\sqrt{234567}$.

Ἡ πορεία πού θά ἀκολουθήσουμε εἶναι:

α. Εὕρεση τοῦ πρώτου ψηφίου.

Χωρίζουμε τόν ἀριθμό 234567 σέ διψήφια τμήματα ἀπό τά δεξιά πρός τά ἀριστερά. Ἔτσι στήν ἀρχή τοῦ ἀριθμοῦ μένει ἕνα τμῆμα διψήφιο ἤ μονοψήφιο. Ἐδῶ μένει 23.

$$\begin{array}{r|l}
23\,\overline{45}\,\overline{67} & 4 \\ \cline{2-2}
-16 & \\ \cline{1-1}
7 &
\end{array}$$

Βρίσκουμε τήν τετραγωνική ρίζα τοῦ 23 κατά προσέγγιση μονάδας μέ ἔλλειψη, πού εἶναι τό 4. Τό 4 τό γράφουμε δεξιά ἀπό τή γραμμή. Τό $4^2 = 16$ τό ἀφαιροῦμε ἀπό τό διψήφιο τμῆμα 23 καί βρίσκουμε διαφορά 7. Πρῶτο ψηφίο τῆς ρίζας εἶναι τό 4.

β. Εὕρεση τοῦ δεύτερου ψηφίου.

Δεξιά ἀπό τό 7 γράφουμε τό ἑπόμενο διψήφιο τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ, τό 45, καί σχηματίζεται ὁ ἀριθμός 745.

Διπλασιάζουμε τόν 4 καί τό $2 \cdot 4 = 8$ τό γράφουμε κάτω ἀπό τό 4. Διαιροῦμε μέ τό 8 τόν ἀριθμό 74 πού σχηματίζουν τά δύο πρῶτα ψηφία τοῦ 745. Τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως, δηλ. τό 9, τό γράφουμε δίπλα ἀπό τό 8 καί σχηματίζεται ὁ ἀριθμός 89. Πολλαπλασιάζουμε τόν 89 ἐπί 9 καί τό γινόμενο 801 τό ἀφαιροῦμε, ἄν ἀφαιρεῖται, ἀπό τό 745. Στήν περίπτωση πού δέν ἀφαιρεῖται, στή θέση τοῦ πηλίκου 9 γράφουμε ἕναν ἀριθμό κατά μονάδα μικρότερο, δηλ. 8, καί κάνουμε τήν ἴδια ἐργασία. Μένει ὑπόλοιπο 41. Δεύτερο ψηφίο τῆς ρίζας εἶναι τό 8, πού τό γράφουμε πάνω ἀπό τή γραμμή δίπλα στό 4.

$$\begin{array}{r|r|r}
23\,\overline{45}\,\overline{67} & \multicolumn{2}{l}{48} \\ \cline{2-3}
-16 & 89 & 88 \\ \cline{1-1}
745 & \times 9 & \times 8 \\ \cline{2-3}
-704 & 801 & 704 \\ \cline{1-1}
41 & &
\end{array}$$

γ. Εὕρεση τοῦ τρίτου ψηφίου.

Δίπλα στό ὑπόλοιπο 41 γράφουμε τό ἄλλο διψήφιο τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ, τό 67, καί σχηματίζεται ἔτσι ὁ ἀριθμός 4167.

Σέ μιά στήλη κάτω άπό τό 48 γράφουμε τό διπλάσιό του, δηλ. τό 96. Διαιροῦμε μέ τό 96 τόν ἀριθμό 416 πού σχηματίζουν τά 3 πρῶτα ψηφία τοὺ 4167 καί τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως, δηλ. τό 4, τό γράφουμε δίπλα στό 96, ὁπότε σχηματίζεται ὁ ἀριθμός 964. Τόν ἀριθμό αὐτό τόν πολλαπλασιάζουμε μέ τό 4 καί τό γινόμενό τους $964 \cdot 4 = 3856$ τό ἀφαιροῦμε ἀπό τόν 4167. Ἔμεινε διαφορά 311. Ὁ ἀριθμός 4 εἶναι τό τρίτο ψηφίο τῆς τετραγωνικῆς ρίζας καί γράφεται δίπλα στό 48.

$23\overline{45}\,\overline{67}$	484	
−16	88	964
745	×8	×4
−704	704	3856
4167		
3856		
311		

Ὁ ἀριθμός 484 εἶναι ἡ προσέγγιση μονάδας μέ ἔλλειψη τοῦ $\sqrt{234567}$. Πραγματικά ἔχουμε $(484)^2 = 234256$ καί $(485)^2 = 235225$, δηλ.

$$(484)^2 < 234567 < (485)^2$$

δ) **Εὕρεση τοῦ πρώτου δεκαδικοῦ ψηφίου.**

Ἄν θέλουμε νά συνεχίσουμε τήν εὕρεση τῆς ρίζας μέ προσέγγιση ἑνός δεκαδικοῦ ψηφίου, γράφουμε δυό μηδενικά δίπλα στή διαφορά πού εἶχε μείνει, δηλ. στό 311, καί μέ τόν ἀριθμό 31100, πού σχηματίζεται, ἐπαναλαμβάνουμε τήν ἴδια ἐργασία, δηλ. διπλασιάζουμε τό 484 κ.τ.λ.

234567	484,3	
		9683
		3
31100		29049
29049		
2051		

Δίπλα φαίνεται ἡ συνέχεια τῆς ἐργασίας αὐτῆς, ἡ ὁποία μᾶς ἔδωσε πρῶτο δεκαδικό ψηφίο τό 3. Ἔτσι, μέ προσέγγιση ἑνός δεκαδικοῦ ψηφίου, ἔχουμε

$$\sqrt{234567} = 484{,}3\ldots$$

Σημείωση: Καθένα ἀπό τά διαδοχικά ὑπόλοιπα, πού προκύπτουν κατά τήν ἐργασία γιά τήν εὕρεση τῆς τετραγωνικῆς ρίζας, πρέπει νά εἶναι μικρότερο ἤ ἴσο ἀπό τό διπλάσιο τοῦ τμήματος τῆς ρίζας πού βρήκαμε ὡς τότε. Ἄν τό ὑπόλοιπο εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό διπλάσιο αὐτό, σημαίνει ὅτι πρέπει νά αὐξήσουμε τό ἀντίστοιχο ψηφίο τῆς ρίζας τουλάχιστον κατά 1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά γίνουν οἱ πράξεις: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$, $\sqrt{12} + \sqrt{27} + \sqrt{147}$**

Λύση. α) Τό $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ δέν μπορεῖ νά πάρει ἄλλη πιό ἁπλή μορφή μέ ριζικά. Μποροῦμε νά βροῦμε τήν τιμή του μέ προσέγγιση. Ἔτσι π.χ. ἀπό τούς πίνακες τοῦ βιβλίου ἔχουμε $\sqrt{2} = 1{,}414$, $\sqrt{3} = 1{,}732$ καί συνεπῶς $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}146$.

β) Ὅταν ἔχουμε ὅμοια(1) ριζικά, ὅπως εἴδαμε στό παράδ. 1 σελ. 146, μποροῦμε νά βρίσκουμε πιό ἁπλή μορφή. Ἔτσι

1. Δύο ριζικά τά λέμε ὅμοια, ὅταν ἔχουν τό ἴδιο ὑπόρριζο.

$$3\sqrt{2}+7\sqrt{2}-5\sqrt{2}=(3+7-5)\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

γ) Τό τρίτο ἄθροισμα γράφεται

$$\sqrt{12}+\sqrt{27}+\sqrt{147} = \sqrt{4.3}+\sqrt{9.3}+\sqrt{49.3}=\sqrt{4}.\sqrt{3}+\sqrt{9}.\sqrt{3}+\sqrt{49}.\sqrt{3}$$
$$= 2\sqrt{3}+3\sqrt{3}+7\sqrt{3}=(2+3+7)\sqrt{3}=12\sqrt{3}$$

Γράψτε τώρα μέ πιό ἁπλή μορφή τό ἄθροισμα

$$\sqrt{50}+\sqrt{8}+\sqrt{72}$$

---

2. **Νά βρεῖτε τίς τετραγωνικές ρίζες $\sqrt{0,35}$, $\sqrt{3000}$, $\sqrt{\frac{2}{15}}$**

Λύση. Ὁ πίνακας τοῦ βιβλίου ἔχει τίς ρίζες τῶν ἀριθμῶν ἀπό 1 ἕως 100. Μέ **τόν πίνακα αὐτό** μποροῦμε νά βρίσκουμε καί τήν τετραγωνική ρίζα καί ἄλλων ἀριθμῶν μέ τή χρήση τῶν ἰδιοτήτων τῶν ριζῶν. Ἔτσι

$$\sqrt{0,35}=\sqrt{\frac{35}{100}}=\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{100}}=\frac{5,916}{10}=0,5916$$

$$\sqrt{3000}=\sqrt{100.30}=\sqrt{100}.\sqrt{30}=10.5,477=54,77$$

$$\sqrt{\frac{2}{15}}=\sqrt{\frac{2.15}{15.15}}=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{15^2}}=\frac{\sqrt{30}}{15}=\frac{5,477}{15}=0,365$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

10. Βρεῖτε τίς παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

$\sqrt{81}$ $\quad\sqrt{\frac{25}{36}}$ $\quad\sqrt{2^4}$, $\quad\sqrt{141}$

$\sqrt{500}$ $\quad\sqrt{17^2}$ $\quad\sqrt{5^6}$ $\quad\sqrt{1360}$

11. Ἀπό τούς πίνακες τοῦ βιβλίου σας καί μέ τή χρήση τῶν ἰδιοτήτων

$\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ καί $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$, βρεῖτε τίς παρακάτω ρίζες:

$\sqrt{5000}$ $\quad\sqrt{0,01}$ $\quad\sqrt{23000}$ $\quad\sqrt{640000}$

$\sqrt{0,25}$ $\quad\sqrt{0,125}$ $\quad\sqrt{13600}$ $\quad\sqrt{0,00025}$

12. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω ἰσότητες εἶναι σωστές καί ποιές λάθος;

$\sqrt{25}=-5$ $\quad\sqrt{8^2}=8$ $\quad\sqrt{\alpha^4}=\alpha^2$

$-\sqrt{49}=-7$ $\quad\sqrt{(-3)^2}=-3$ $\quad\sqrt{\alpha^2}=\alpha$

13. Γράψτε μέ πιό ἁπλή μορφή τίς παραστάσεις:

$6\sqrt{3}-4\sqrt{3}+7\sqrt{3}$ $\qquad\sqrt{18}+\sqrt{108}-\sqrt{50}$

$\frac{1}{2}\sqrt{6}-\frac{1}{3}\sqrt{6}+\frac{1}{12}\sqrt{6}$ $\qquad\sqrt{48}-\sqrt{12}+\sqrt{300}$

$2\sqrt{7}-\sqrt{28}+\sqrt{63}$ $\qquad 2\sqrt{27}-3\sqrt{75}+\sqrt{18}$

14. Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ παράσταση

$$12\sqrt{\frac{2}{3}}-8\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{24}{25}}$$

15. Βρεῖτε μέ προσέγγιση τά ἀθροίσματα:

$\sqrt{7}+\sqrt{13}$ $\qquad$ $2\sqrt{17}+5\sqrt{3}+8\sqrt{12}$

$\sqrt{75}+\sqrt{41}+\sqrt{63}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{7}{10}}$

16. Ἀπεικονίστε στήν εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τούς ἀριθμούς:

$\sqrt{5},\ \sqrt{10},\ \sqrt{2}+\sqrt{3},\ \sqrt{5}-\sqrt{8},\ 2\sqrt{7}$

17. Βρεῖτε τά ἐξαγόμενα:

$(6\sqrt{2}-3\sqrt{12}+8\sqrt{24}):2\sqrt{2}$

$(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}).\sqrt{6}$

$(4\sqrt{2}-\sqrt{5}).2\sqrt{2}$

18. Τῶν παρακάτω ἀριθμῶν νά βρεθοῦν οἱ ἀντίθετοι καί οἱ ἀντίστροφοι:

$\frac{3}{4},\ -8,\ \sqrt{5},\ -\sqrt{3},\ \sqrt{\frac{2}{3}},\ -\sqrt{\frac{5}{6}}$

19. Ἄν α,β εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, ποιός εἶναι ὁ ἀντίστροφος καί ποιός ὁ ἀντίθετος τοῦ α+β καί τοῦ α.β;

20. Βρεῖτε τούς ἀντίστροφους καί ἀντίθετους τῶν ἀριθμῶν:

$\frac{4}{7}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right),\ \left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)\sqrt{2}\ ,\ 2\sqrt{2}-5\sqrt{2}+7\sqrt{2}$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 8

1. Κάθε κλασματικός ἀριθμός μπορεῖ νά γραφεῖ μέ μορφή δεκαδική, ἁπλή ἤ περιοδική. Ἀντίστροφα, κάθε δεκαδικός ἀριθμός, ἁπλός ἤ περιοδικός, μπορεῖ νά γραφεῖ μέ μορφή κλασματική.

2. Ὑπάρχουν δεκαδικοί ἀριθμοί μέ ἄπειρα δεκαδικά ψηφία, πού δέν εἶναι περιοδικοί. Οἱ ἀριθμοί αὐτοί λέγονται **ἄρρητοι** ἤ **ἀσύμμετροι.**

Τό σύνολο ὅλων τῶν ρητῶν καί ἄρρητων ἀριθμῶν λέγεται **σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν** καί σημειώνεται μέ R. Εἶναι

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

— Οἱ ἄρρητοι ἀριθμοί προσεγγίζονται μέ ρητούς μέ ὅση προσέγγιση θέλουμε. Οἱ πράξεις μέ ἄρρητους ἀριθμούς γίνονται μέ τίς ρητές προσεγγίσεις τους.

— Στό σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν γιά τίς πράξεις καί τή διάταξη ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες πού ἰσχύουν καί στό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν Q.

3. **Τετραγωνική ρίζα** ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ β λέγεται ἕνας ἀριθμός α, τέτοιος ὥστε $\alpha^2=\beta$. Κάθε θετικός ἀριθμός ἔχει δύο ἀντιθέτους ἀριθμούς γιά τετραγωνικές του ρίζες. Μέ τό σύμβολο $\sqrt{\beta}$ ἐννοοῦμε μόνο τή θετική ρίζα τοῦ β. Τήν ἀρνητική θά τήν σημειώνουμε $-\sqrt{\beta}$.

— Ἄν α καί β εἶναι θετικοί ἀριθμοί, τότε

$$\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\,.\,\sqrt{\beta}$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

21. Ἁπλοποιῆστε τίς παραστάσεις:

$5\sqrt{2}-\sqrt{3}+9\sqrt{2}+8\sqrt{3}$ $\qquad$ $\sqrt{72}-4\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

$8\sqrt{72}+2\sqrt{50}-4\sqrt{8}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{2}\sqrt{12}-\dfrac{1}{3}\sqrt{27}$

22. Ἄν τά γράμματα α καί β παριστάνουν πραγματικούς ἀριθμούς, νά γίνουν οἱ πράξεις:

α) $3(2\alpha-5\beta)-5(2\alpha+2\beta)+4(-3\alpha+2\beta)$

β) $(2\alpha-3\beta)\cdot\beta+(4\alpha+2\beta)\cdot\alpha$

γ) $(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2$

23. Βρεῖτε τά ἐξαγόμενα τῶν παρακάτω πράξεων μέ μορφή κλασματική:

α) $-5{,}33\ldots+2{,}151515\ldots$ $\qquad$ β) $(5{,}88\ldots):3$

γ) $(5{,}1212\ldots)\cdot(3{,}555\ldots)$ $\qquad$ δ) $-5:1{,}2525\ldots$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

24. Ἀπεικονίστε στήν εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τούς ἀριθμούς:

$\sqrt{5}+\sqrt{7}\quad,\quad\sqrt{3}-\sqrt{2}\quad,\quad\sqrt{7}+1\quad,\quad\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

25. Ἄν α,β εἶναι θετικοί πραγματικοί ἀριθμοί, νά βρεῖτε τά ἐξαγόμενα τῶν παρακάτω πράξεων:

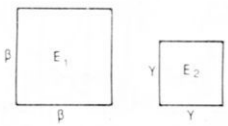
1) $\alpha\sqrt{\beta}\cdot\beta\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha\beta}$ $\qquad$ 3) $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\cdot(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})$

2) $\sqrt{\alpha\beta}\cdot\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ $\qquad$ 4) $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\cdot(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})$

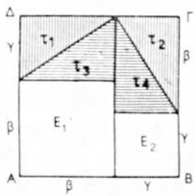
9ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

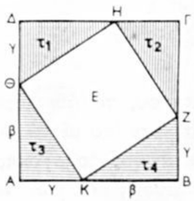
9.1. Ἂς θεωρήσουμε δύο τετραγώνα μέ πλευρές β καί γ καί ἄς προσπαθήσουμε νά κατασκευάσουμε ἕνα τρίτο τετράγωνο, πού νά ἔχει ἐμβαδό ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν E_1 καί E_2 τῶν δύο τετραγώνων (βλ. σχῆμα 1).



(σχ. 1)



(σχ. 2)



(σχ. 3)

Τοποθετοῦμε τό ἕνα τετράγωνο δίπλα στό ἄλλο (βλ. σχῆμα 2) καί κατασκευάζουμε τό τετράγωνο, πού ἔχει πλευρά τήν $(AB)=\beta+\gamma$. Παρατηροῦμε ὅτι:

—Τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν E_1 καί E_2 προκύπτει, ἄν ἀπό τό ἐμβαδό τοῦ ΑΒΓΔ ἀφαιρέσουμε τά ἐμβαδά $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ τεσσάρων ἴσων ὀρθογώνιων τριγώνων, πού τό καθένα τους ἔχει κάθετες πλευρές β καί γ.

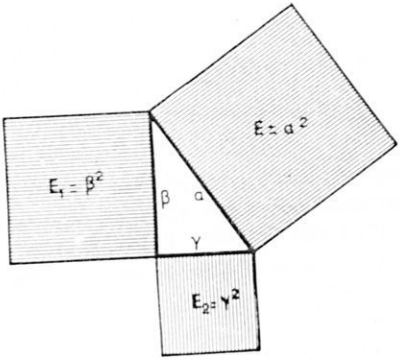
— Ἂν μετακινήσουμε τά τρίγωνα τ_3 καί τ_4 μέσα στό ΑΒΓΔ καί τά τοποθετήσουμε ὅπως δείχνει τό σχῆμα 3, τό τετράπλευρο ΚΖΗΘ, πού σχηματίζεται, εἶναι τετράγωνο καί τό ἐμβαδό του Ε προκύπτει, ἄν ἀπό τό ἐμβαδό τοῦ ΑΒΓΔ ἀφαιρέσουμε πάλι τά ἐμβαδά τ_1, τ_2, τ_3, τ_4.

Ἔτσι ἔχουμε τήν ἰσότητα

$$E_1+E_2=E$$

ὅπου τό Ε εἶναι (βλ. σχῆμα 3) τό ἐμβαδό ἑνός τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρά εἶναι ἴση μέ τήν ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου, πού ἔχει κάθετες πλευρές τά εὐθύγραμμα τμήματα β καί γ.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, ἄν ἔχουμε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο καί κατασκευάσουμε τά δύο τετράγωνα πού ἔχουν πλευρές τίς κάθετες πλευ-



(σχ. 4)

ρές του, τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο αὐτῶν τετραγώνων εἶναι πάντοτε ἴσο μέ τό ἐμβαδό τοῦ τετραγώνου, πού ἔχει πλευρά τήν ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου. Ἔτσι, ἄν α,β,γ εἶναι τά μήκη τῆς ὑποτείνουσας καί τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου, ἔχουμε τήν ἰσότητα

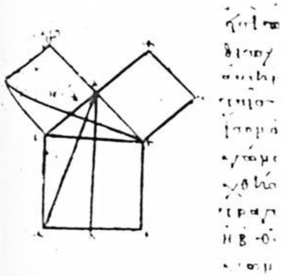
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \tag{1}$$

ἡ ὁποία ἐκφράζει ὅτι **τό τετράγωνο τῆς ὑποτείνουσας ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο κάθετων πλευρῶν.**

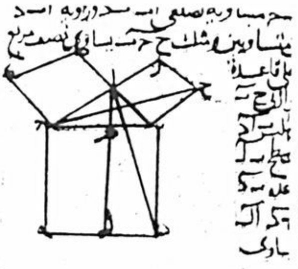
Ἡ πρόταση αὐτή λέγεται **πυθαγόρειο θεώρημα**, γιατί ἡ ἀπόδειξή της, στή γενική της μορφή, ὀφείλεται στόν Ἕλληνα μαθηματικό καί φιλόσοφο **Πυθαγόρα**(1).

1. Ὁ Πυθαγόρας γεννήθηκε στή Σάμο γύρω στό 580 π.Χ. Ἔκανε πολλά ταξίδια στήν Ἑλλάδα, Αἴγυπτο καί Ἀσία γιά νά συμπληρώσει τίς γνώσεις του καί τό 530 π.Χ. ἐγκαταστάθηκε στόν Κρότωνα τῆς Ν. Ἰταλίας. Στήν Ἑλληνική αὐτή πόλη ἵδρυσε δική του σχολή μέ 300 περίπου μαθητές, οἱ ὁποῖοι ζοῦσαν μιά ἀσκητική ζωή καί σπούδαζαν Μαθηματικά, Ἰατρική καί Μουσική. Ἡ σχολή τοῦ Πυθαγόρα ἐξελίχθηκε γρήγορα σέ μιά ἠθική, θρησκευτική καί πολιτική κίνηση, τῆς ὁποίας τά μέλη ἀποτελοῦσαν τήν ἀριστοκρατική τάξη τῆς πόλεως καί κατέλαβαν ἐξέχουσες θέσεις στήν κοινωνική ζωή της. Ἡ «Πυθαγόρεια» αὐτή τάξη ἀνετράπη τό 495 π.Χ. καί ὁ Πυθαγόρας μαζί μέ πολλούς μαθητές του κατέφυγε στό Μεσοπόντιο τῆς Ἰταλίας, ὅπου καί πέθανε.

Τό πυθαγόρειο θεώρημα (ὅπως καί ἄλλα θεωρήματα πού διατυπώθηκαν ἀπό τούς ἀρχαίους Ἕλληνες μαθηματικούς) ἔγινε γνωστό σέ ὅλο σχεδόν τόν κόσμο, τόσο στήν Εὐρώπη ὅσο καί στήν Ἀσία. Παρακάτω βλέπουμε ἕνα Ἑλληνικό κείμενο τοῦ θεωρήματος καθώς καί πέντε μεταφράσεις του σέ διάφορες γλῶσσες.

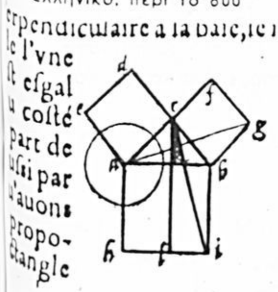


Ἑλληνικό, περί τό 800

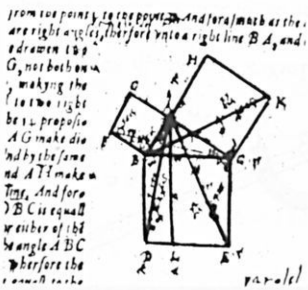


Ἀραβικό, περί τό 1250

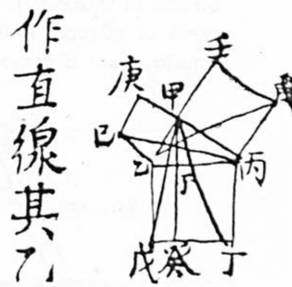
Λατινικό, 1120



Γαλλικό, 1564



Ἀγγλικό, 1570



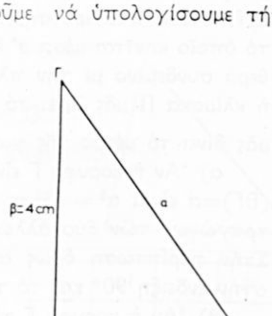
Κινεζικό, 1607

Ἐφαρμογές τοῦ πυθαγόρειου θεωρήματος

9.2. Μέ τό πυθαγόρειο θεώρημα μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τήν ὑποτείνουσα ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου, ὅταν ξέρουμε τίς κάθετες πλευρές του.

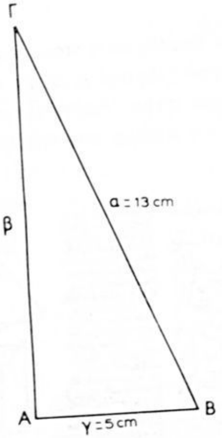
Ἔτσι π.χ. ἡ ὑποτείνουσα α ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ, πού ἔχει $\beta = 4$ cm καί $\gamma = 3$ cm, εἶναι

$$\alpha^2 = 4^2 + 3^2$$
$$\alpha^2 = 16 + 9$$
$$\alpha^2 = 25$$
$$\alpha = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$



(σχ. 5)

Ἐπίσης σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τή μιά κάθετη πλευρά του, ὅταν ξέρουμε τήν ὑ-

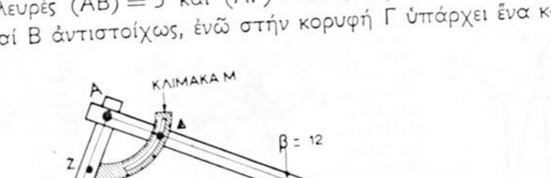


(σχ. 6)

ποτείνουσά του καί τήν ἄλλη κάθετη πλευρά του. Ἔτσι π.χ. ἄν ἔχουμε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ μέ ὑποτείνουσα $\alpha = 13$ cm καί $\gamma = 5$ cm, θά εἶναι

$$\alpha^2 = \gamma^2 + \beta^2$$
$$13^2 = 5^2 + \beta^2$$
$$169 = 25 + \beta^2$$
$$169 - 25 = \beta^2$$
$$144 = \beta^2$$
$$\beta = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

9.3. Τό παρακάτω σχῆμα δείχνει ἕνα «ἀρθρωτό» τρίγωνο, τοῦ ὁποίου οἱ πλευρές εἶναι σχεδιασμένες πάνω σέ τρεῖς χάρακες. Στό τρίγωνο αὐτό οἱ πλευρές (ΑΒ) = 5 καί (ΑΓ) = 12 μποροῦν νά στρέφονται στά σημεῖα Α καί Β ἀντιστοίχως, ἐνῶ στήν κορυφή Γ ὑπάρχει ἕνα καρφί, πού



μπορεῖ νά κινεῖται μέσα σ' ἕνα αὐλάκι τοῦ βαθμολογημένου χάρακα ΒΓ. Σ' ἕνα ἄλλο σταθερό σημεῖο Δ τῆς πλευρᾶς ΑΓ ὑπάρχει ἕνα ἄλλο καρφί, τό ὁποῖο κινεῖται μέσα σ' ἕνα αὐλάκι ἑνός μοιρογνωμονίου πού εἶναι σταθερά συνδεμένο μέ τήν πλευρά ΑΒ. Ἔτσι, σέ κάθε θέση τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἡ κλίμακα Π μᾶς δίνει τό μέτρο τῆς πλευρᾶς (ΒΓ)=α, ἐνῶ ἡ κλίμακα Μ μᾶς δίνει τό μέτρο τῆς γωνίας $\widehat{A}$. Παρατηροῦμε τώρα ὅτι:

α) Ἄν ἡ κορυφή Γ εἶναι στήν ἔνδειξη 13, τό τετράγωνο τῆς πλευρᾶς (ΒΓ)=α εἶναι $\alpha^2 = 13^2 = 169$, δηλαδή εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ἀφοῦ καί $\beta^2 + \gamma^2 = 5^2 + 12^2 = 169$. Στήν περίπτωση ὅμως αὐτή τό σημεῖο Δ βρίσκεται, ὅπως βλέπουμε, στήν ἔνδειξη 90^0 καί τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιο στό Α.

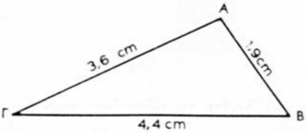
β) Ἄν ἡ κορυφή Γ πλησιάζει πρός τό Β, ἡ πλευρά (ΒΓ)=α εἶναι σέ κάθε θέση της μικρότερη ἀπό 13 καί ἑπομένως τό τετράγωνό της εἶναι μικρότερο ἀπό τό $13^2 = 169 = \beta^2 + \gamma^2$. Στήν περίπτωση αὐτή καί τό σημεῖο Δ πλησιάζει πρός τό Ζ, δηλαδή θά βρίσκεται πάντοτε σέ ἔνδειξη μικρότερη ἀπό 90^0, ὁπότε ἡ γωνία $\widehat{A}$ θά εἶναι ὀξεία.

γ) Ἄν ἡ κορυφή Γ ἀπομακρύνεται ἀπό τό Β, ἡ πλευρά (ΒΓ)=α εἶναι σέ κάθε θέση της μεγαλύτερη ἀπό 13 καί ἑπομένως τό τετράγωνό της εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό $13^2 = 169 = \beta^2+\gamma^2$. Στήν περίπτωση αὐτή καί τό σημεῖο Δ ἀπομακρύνεται ἀπό τό Ζ, δηλαδή θά βρίσκεται πάντοτε σέ ἔνδειξη μεγαλύτερη ἀπό 90^0, ὁπότε τό τρίγωνο ΑΒΓ θά εἶναι ἀμβλυγώνιο στό Α.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι μποροῦμε νά ἐλέγξουμε ἄν μιά γωνία Α ἑνός τριγώνου εἶναι ὀρθή, ὀξεία ἤ ἀμβλεία συγκρίνοντας τό τετράγωνο τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς της α μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν. Τότε:

- **Ἄν $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, τό τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο στήν κορυφή Α.**
- **Ἄν $\alpha^2<\beta^2+\gamma^2$, ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεία.**
- **Ἄν $\alpha^2>\beta^2+\gamma^2$, τό τρίγωνο εἶναι ἀμβλυγώνιο στήν κορυφή Α.**

Παράδειγμα 1: Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε (ΑΒ) = 1,9 cm, (ΑΓ) = 3,6 cm καί (ΒΓ) = 4,4 cm. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ γωνία $\widehat{A}$ εἶναι ἀμβλεία.



(σχ. 7)

Ἐπειδή ἔχουμε

$$\alpha^2 = (ΒΓ)^2 = (4,4)^2 = 19,36$$

καί $\beta^2+\gamma^2 = (ΑΓ)^2+(ΑΒ)^2 = (3,6)^2+(1,9)^2 = 12,96+3,61 = 16,57$,

εἶναι $\alpha^2>\beta^2+\gamma^2$ καί συνεπῶς $\widehat{A}>90^0$.

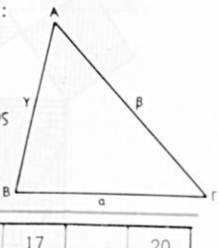
Παράδειγμα 2: Νά δειχθεῖ ὅτι τό τρίγωνο ΑΒΓ πού ἔχει πλευρές (ΑΒ)=2,1 cm, (ΑΓ)=5,7 cm καί (ΒΓ)=5,4 cm εἶναι ὀξυγώνιο.

Μεγαλύτερη γωνία τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ $\widehat{B}$ (γιατί βρίσκεται ἀπέναντι ἀπό τή μεγαλύτερη πλευρά). Ἀρκεῖ λοιπόν νά δείξουμε ὅτι ἡ $\widehat{B}$ εἶναι ὀξεία. Συγκρίνουμε τό β^2 μέ τό $\alpha^2+\gamma^2$. Ἔχουμε:

$$\beta^2 = (5,7)^2 = 32,49$$

$$\alpha^2+\gamma^2 = (5,4)^2 + (2,1)^2 = 29,16+4,41 = 33,57.$$

Δηλαδή $\beta^2<\alpha^2+\gamma^2$, ὁπότε $\widehat{B}<90^0$ καί ἑπομένως τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ὀξυγώνιο.



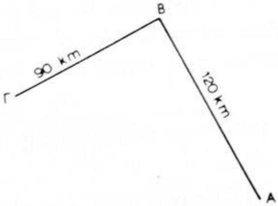
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά συμπληρώσετε τό διπλανό πίνακα, ἄν α εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ καί β,γ εἶναι οἱ κάθετες πλευρές του.

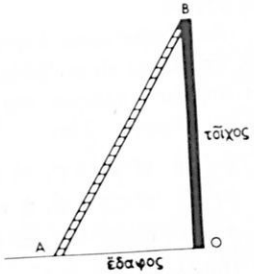
α	17		20
β	8	11	
γ		8	12

2. Θέλουμε νά χαράξουμε ἕνα δρόμο, πού νά συνδέει ἀπευθείας τίς πόλεις Α καί Γ τοῦ σχήματος 9, στό ὁποῖο ἡ γωνία $\widehat{B}$ εἶναι ὀρθή. Πόσο θά κοστίσει ἡ χάραξη τοῦ δρόμου, ἄν τό κάθε χιλιόμετρο κοστίζει 2 500 000 δραχμές;

3. Μιά σκάλα ΑΒ ἔχει μῆκος 10 m. Τό ἄκρο Α τῆς σκάλας ἀπέχει ἀπό τόν τοῖχο ΟΒ 2,5 m (σχῆμα 10). Νά βρεῖτε τό ὕψος τοῦ τοίχου.



(σχ. 9)



(σχ. 10)

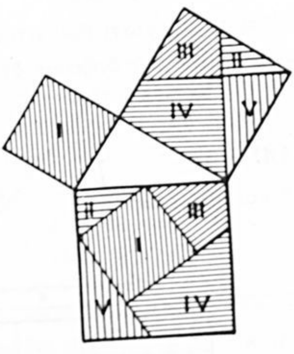
4. Νά βρεῖτε τό εἶδος ἑνός τριγώνου ΑΒΓ στό ὁποῖο εἶναι:

i) $\alpha = 13$ cm $\quad \beta = 10$ cm $\quad \gamma = 8$ cm

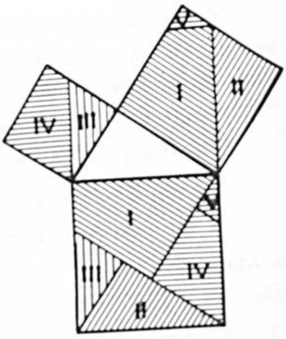
ii) $\alpha = 19$ cm $\quad \beta = 15$ cm $\quad \gamma = 14$ cm

iii) $\alpha = 20$ cm $\quad \beta = 25$ cm $\quad \gamma = 15$ cm

5. Μελετῆστε προσεχτικά τό σχῆμα 11. Τί συμπέρασμα βγάζετε; Νά κάνετε τό ἴδιο καί μέ τό σχῆμα 12.



(σχ. 11)



(σχ. 12)

Ὑπολογισμός μηκῶν καί ἐμβαδῶν

9.4. Μέ τό πυθαγόρειο θεώρημα μποροῦμε νά λύσουμε πολλά ὑπολογιστικά προβλήματα στή Γεωμετρία. Μερικά τέτοια χαρακτηριστικά προβλήματα εἶναι τά ἑξῆς:

1. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, πού οἱ ἴσες πλευρές του ΑΒ καί ΑΓ ἔχουν μήκη 10 cm καί ἡ βάση τοῦ ΒΓ ἔχει μῆκος 6 cm.

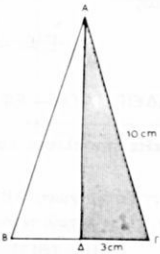
Θά πρέπει πρῶτα νά ὑπολογίσουμε τό ὕψος του ΑΔ. Ἐπειδή ὅμως τό Δ εἶναι μέσο τῆς ΒΓ, θά εἶναι $(ΒΔ) = (ΔΓ) = 3$ cm. Ἑπομένως στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ ξέρουμε δύο πλευρές του. Ἔτσι

$(ΑΔ)^2 + (ΔΓ)^2 = (ΑΓ)^2$

$(ΑΔ)^2 + 3^2 = 10^2$

$(ΑΔ)^2 = 100-9$

$(ΑΔ)^2 = 91$ ἤ $(ΑΔ) = \sqrt{91} \simeq 9{,}54$ cm.



(σχ. 13)

Συνεπῶς

$$E = \frac{1}{2}\,(ΒΓ)\cdot(ΑΔ) \simeq \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 9{,}54 = 28{,}62\ \text{cm}^2$$

2. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό ἑνός ἰσοπλεύρου τριγώνου, πού ἔχει πλευρά 6 cm.

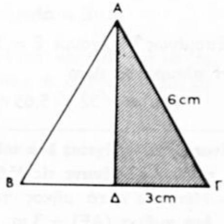
Ἄν φέρουμε τό ὕψος ΑΔ, αὐτό θά εἶναι καί διάμεσος καί συνεπῶς $(ΒΔ) = (ΔΓ) = 3$ cm. Ἔτσι, ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ θά ἔχουμε

$(ΑΔ)^2 + (ΔΓ)^2 = (ΑΓ)^2$

$(ΑΔ)^2 + 9 = 36$

$(ΑΔ)^2 = 36-9$

$(ΑΔ)^2 = 27$ ἤ $(ΑΔ) = \sqrt{27} \simeq 5{,}19$ cm

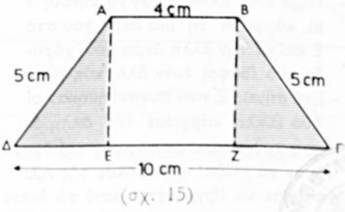


(σχ. 14)

Συνεπῶς

$$E = \frac{1}{2}\,(ΒΓ)\cdot(ΑΔ) \simeq \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5{,}19 = 15{,}57\ \text{cm}^2$$

3. Σ' ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ οἱ δύο βάσεις του εἶναι (ΑΒ) = 4 cm καί (ΓΔ)=10cm, ἐνῶ οἱ ἄλλες δύο πλευρές του ΑΔ καί ΒΓ εἶναι ἴσες μέ 5 cm. Νά βρεθεῖ τό ὕψος τοῦ τραπεζίου καί τό ἐμβαδό του.



(σχ. 15)

Ὅπως διαπιστώνουμε εὔκολα,

τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ καί ΒΖΓ εἶναι ἴσα. Ἑπομένως θά εἶναι ΔΕ= ΖΓ. Ἐπειδή (ΕΖ) = (ΑΒ) = 4 cm, θά εἶναι (ΔΕ)+(ΖΓ) = 10–4=6 cm καί συνεπῶς (ΔΕ) = 6 : 2 = 3 cm. Ἔτσι, ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ ἔχουμε:

$$(ΑΕ)^2+(ΔΕ)^2 = (ΑΔ)^2$$
$$(ΑΕ)^2 + 3^2 = 5^2$$
$$(ΑΕ)^2 = 25–9$$
$$(ΑΕ)^2 = 16 \text{ ἤ } (ΑΕ) = \sqrt{16} = 4 \text{ cm.}$$

Ἑπομένως

$$Ε \doteq \frac{β_1+β_2}{2} \cdot υ = \frac{4+10}{2} \cdot 4 = 28 \text{ cm}^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Νά βρεῖτε τήν πλευρά καί τό ἐμβαδό ἑνός τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος εἶναι 8 cm.**

Λύση. Τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιο στήν κορυφή Β. Ἄν ὀνομάσουμε λοιπόν α τήν πλευρά τοῦ τετραγώνου, θά ἔχουμε

$$(ΑΒ)^2+(ΒΓ)^2 = (ΑΓ)^2$$
$$α^2+α^2 = 8^2$$
$$2α^2 = 64$$
$$α^2 = 32$$

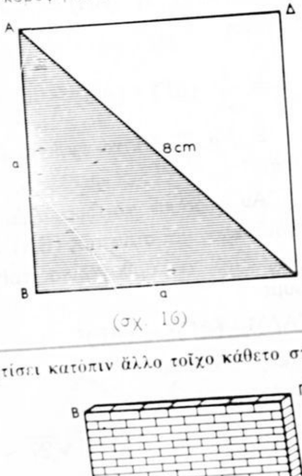
Ξέρουμε ὅτι τό ἐμβαδό τετραγώνου, πού ἔχει πλευρά α, εἶναι

$$Ε = α^2.$$

Ἑπομένως θά ἔχουμε Ε = 32 cm².

Ἡ πλευρά θά εἶναι

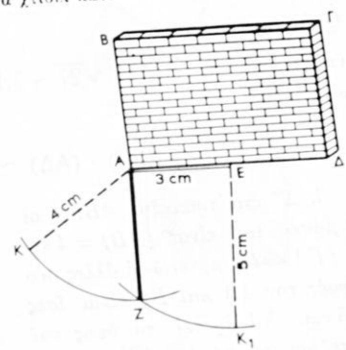
$$α = \sqrt{32} \simeq 5{,}65 \text{ cm.}$$



(σχ. 16)

2. **Ἕνας ἐργάτης ἔχτισε ἕνα τοῖχο ΑΒΓΔ. Γιά νά χτίσει κατόπιν ἄλλο τοῖχο κάθετο στήν πλευρά ΑΔ, ἔκανε τίς ἑξῆς ἐργασίες:**

– Μέτρησε κατά μῆκος τοῦ τοίχου ἕνα τμῆμα (ΑΕ) = 3 m.
– Πῆρε ἕνα σπάγγο μήκους 4m, κάρφωσε τή μιά ἄκρη του στό Α καί μέ τήν ἄλλη ἄκρη χάραξε στό ἔδαφος ἕναν κύκλο κ.
– Πῆρε ἕναν ἄλλο σπάγγο μήκους 5 m, κάρφωσε τή μιά ἄκρη του στό Ε καί μέ τήν ἄλλη ἄκρη του χάραξε στό ἔδαφος ἕναν ἄλλο κύκλο $κ_1$·
– Στό σημεῖο Ζ πού συναντήθηκαν οἱ δύο κύκλοι κάρφωσε τήν ἄλλη ἄκρη τοῦ πρώτου σπάγγου καί ἄρχισε νά χτίζει κατά μῆκος τῆς ΑΖ.



(σχ. 17)

Μπορεῖτε νά ἐξηγήσετε γιατί τά ἔκανε ὅλα αὐτά;

3 Οἱ τρεῖς πρῶτες στῆλες τοῦ παρακάτω πίνακα δείχνουν τά μέτρα τῶν πλευρῶν διάφορων τριγώνων. Συμπληρῶστε τόν πίνακα καταλήγοντας σ' ἕνα συμπέρασμα γιά τό εἶδος κάθε τριγώνου, ὅπως ἔγινε στήν πρώτη γραμμή.

α	β	γ	α^2	$\beta^2+\gamma^2$	$\alpha^2 \lesseqgtr \beta^2+\gamma^2$	Εἶδος τριγώνου
13	5	11	169	$25+121=146$	$>$	ἀμβλυγώνιο
8	5	7				
10	6	9				
15	12	9				
1,3	0,5	1,2				
20,2	10,1	11,3				

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

6. Ἡ ὑποτείνουσα ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι 12 cm καί ἡ μιά κάθετη πλευρά του 9 cm. Νά βρεῖτε τήν ἄλλη κάθετη πλευρά καί τό ἐμβαδό του.

7. Μιά χορδή ΑΒ ἀπέχει ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου 3 cm. Νά βρεῖτε τό μῆκος τῆς χορδῆς, ἄν ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου εἶναι 8 cm.

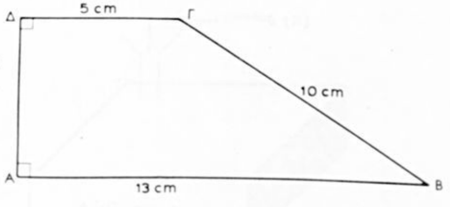
8. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλογράμμου πού ἔχει διαγώνιο 16 cm καί ὕψος 9 cm.

9. Νά βρεῖτε τή διαγώνιο ἑνός τετραγώνου πού ἔχει πλευρά 6 cm.

10. Ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει (ΑΒ) = (ΑΓ) = 14 cm καί (ΒΓ) = 18 cm. α) Νά βρεῖτε τό εἶδος τοῦ τριγώνου (ὀξυγώνιο, ὀρθογώνιο ἤ ἀμβλυγώνιο). β) Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό του.

11. Ἡ περίμετρος ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 54 cm καί ἡ βάση του 24 cm. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό του.

12. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ (σχ. 18), στό ὁποῖο οἱ γωνίες Α καί Δ εἶναι ὀρθές.

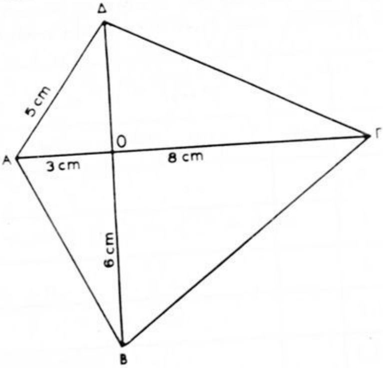


(σχ. 18)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

13. Νά ὑπολογίσετε τά μήκη τῶν πλευρῶν καί τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου

ΑΒΓΔ (σχῆμα 19), στό ὁποῖο οἱ διαγώνιοι εἶναι κάθετες μεταξύ τους.



(σχ. 19)

14. Νά βρεῖτε τήν πλευρά καί τό ἐμβαδό ἑνός ἰσόπλευρου τριγώνου, τοῦ ὁποίου τό ὕψος εἶναι 6 cm.

15. Ἡ ὑποτείνουσα ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι 20 cm καί ἡ μιά κάθετη πλευρά του 16 cm. Νά ὑπολογίσετε τό ὕψος πού ἀντιστοιχεῖ στήν ὑποτείνουσα.

16. Ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει (ΑΒ) = (ΑΓ) = 18 cm καί (ΒΓ) = 20 cm. Νά ὑπολογίσετε τά ὕψη του.

17. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 12 cm καί ἡ μιά κάθετη πλευρά εἶναι διπλάσια ἀπό τήν ἄλλη.

10^{o} ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Βασικές ἔννοιες

10.1. Στό κεφάλαιο 5 εἴπαμε ὅτι μιά ἀπεικόνιση

$$\varphi : A \to B$$

στήν ὁποία τά A καί B εἶναι ἀριθμητικά σύνολα λέγεται καί **«συνάρτηση» μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό A καί τιμές στό B.**

Ὡς σύνολο B γιά τίς συναρτήσεις παίρνουμε συνήθως τό σύνολο R ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὁπότε σημειώνουμε

$$\varphi : A \to R.$$

Ἔτσι λοιπόν, γιά νά προσδιορίσουμε μιά συνάρτηση, θά πρέπει νά ξέρουμε:

- **Τό πεδίο ὁρισμοῦ A, πού εἶναι ὑποσύνολο τοῦ R.**
- **Τόν κανόνα μέ τόν ὁποῖο ἀντιστοιχίζεται σέ κάθε $x \in A$ ἕνας πραγματικός ἀριθμός.**

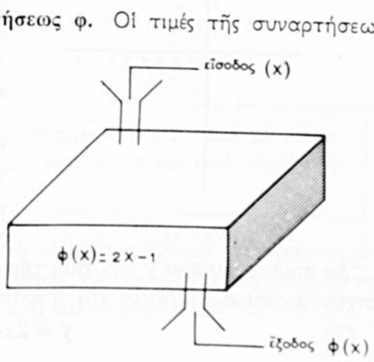
Ἔτσι π.χ. γιά νά προσδιορίσουμε μιά συνάρτηση φ μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $A = \{1,2,-2,3,4\}$, θά πρέπει νά ὁρίσουμε ἕναν κανόνα, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχίζει σέ κάθε $x \in A$ ἕναν πραγματικό ἀριθμό, πού τόν σημειώνουμε $\varphi(x)$. Ἕνας τέτοιος κανόνας δίνεται π.χ. μέ τήν ἰσότητα

(1) $$\varphi(x) = 2x-1,$$

ἡ ὁποία λέγεται **τύπος τῆς συναρτήσεως φ.** Οἱ τιμές τῆς συναρτήσεως αὐτῆς γιά $x = 1,2,-2,3,4$ εἶναι ἀντίστοιχα οἱ ἀριθμοί

$$\varphi(1) = 2\cdot 1-1 \quad = 1$$
$$\varphi(2) = 2\cdot 2-1 \quad = 3$$
$$\varphi(-2) = 2(-2)-1 = -5$$
$$\varphi(3) = 2\cdot 3-1 \quad = 5$$
$$\varphi(4) = 2\cdot 4-1 \quad = 7$$

Μιά συνάρτηση λοιπόν μποροῦμε νά τήν φαντασθοῦμε σάν μιά «μηχανή» πού ἀποτελεῖται ἀπό τρία μέρη:



(σχ. 1)

— Τήν εἴσοδο ἀπό τήν ὁποία «μπαίνουν» οἱ τιμές τοῦ x.
— Ἕνα μηχανισμό πού ἐπεξεργάζεται τίς τιμές αὐτές καί εἶναι ὁ τύπος τῆς συναρτήσεως.
— Τήν ἔξοδο ἀπό τήν ὁποία «βγαίνουν» οἱ τιμές τῆς συναρτήσεως.

10.2. Ἀφοῦ μιά συνάρτηση φ εἶναι ἀπεικόνιση (δηλαδή διμελής σχέση), ἔχει γράφημα πού ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά ζεύγη $(x, \varphi(x))$ μέ $x \in A$. Τό γράφημα π.χ. τῆς παραπάνω συναρτήσεως ἀποτελεῖται ἀπό τά ζεύγη

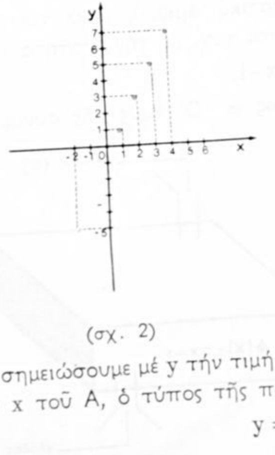
$$(1,1), (2,3), (-2,-5), (3,5), (4,7).$$

Τό γράφημα αὐτό μπορεῖ νά δοθεῖ καί μέ τή μορφή ἑνός πίνακα τιμῶν μέ δυό γραμμές (ἤ δυό στῆλες), πού στή μιά γράφουμε τίς τιμές τοῦ x καί στήν ἄλλη γράφουμε τίς ἀντίστοιχες τιμές τῆς συναρτήσεως.

x	1	2	−2	3	4
φ(x)	1	3	−5	5	7

x	φ(x)
1	1
2	3
−2	−5
3	5
4	7

Ἄν πάρουμε ἕνα σύστημα συντεταγμένων, τό γράφημα μιᾶς συναρτήσεως μπορεῖ νά δοθεῖ καί μέ τό σύνολο τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, πού ἔχουν συντεταγμένες τά ζεύγη τοῦ γραφήματος. Τό σύνολο τῶν σημείων αὐτῶν, πού δίνει γεωμετρική εἰκόνα τοῦ γραφήματος, λέγεται **γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως φ.**



(σχ. 2)

Στό διπλανό σχῆμα δίνεται ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως φ, πού ἔχει τύπο $\varphi(x) = 2x - 1$ καί πεδίο ὁρισμοῦ τό $A = \{1, 2, -2, 3, 4\}$.

Ἄν σημειώσουμε μέ y τήν τιμή τῆς συναρτήσεως, πού ἀντιστοιχεῖ στό στοιχεῖο x τοῦ A, ὁ τύπος τῆς παραπάνω συναρτήσεως γράφεται

$$y = 2x - 1 \qquad (2)$$

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἰσότητα αὐτή ἐπαληθεύεται ἀπό τίς συντεταγμένες τῶν σημείων τῆς γραφικῆς παραστάσεως.

Πολλές φορές μᾶς δίνεται ὁ τύπος μιᾶς συναρτήσεως φ μέ τή μορφή (1) ἤ τή μορφή (2) δίχως νά μᾶς δίνεται τό πεδίο ὁρισμοῦ της. Στήν περίπτωση αὐτή ἐννοοῦμε ὅτι τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως ἀποτελεῖται ἀπό ὅλους τούς πραγματικούς ἀριθμούς, γιά τούς ὁποίους τό δεύτερο μέλος τοῦ τύπου ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ. Ἔτσι π.χ., ἄν δέν μᾶς δίνεται τό πεδίο ὁρισμοῦ στή συνάρτηση μέ τύπο $y = 2x-1$, θεωροῦμε ὡς πεδίο ὁρισμοῦ τό R. Ἐπίσης στήν $y = \dfrac{3}{(x-2)(x-5)}$ θεωροῦμε ὡς πεδίο ὁρισμοῦ τό R ἐκτός ἀπό τά στοιχεῖα του 2 καί 5, γιατί τό δεύτερο μέλος τοῦ τύπου δέν ἔχει νόημα, ὅταν $x = 2$ ἤ $x = 5$.

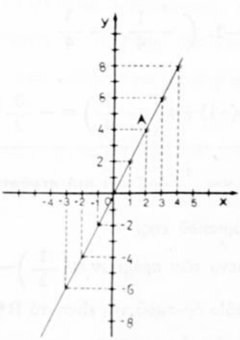
Ἡ συνάρτηση y=αx

10.3. Μιά συνάρτηση πολύ χρήσιμη στά μαθηματικά εἶναι αὐτή πού ἔχει τύπο τῆς μορφῆς

$$\boxed{y = \alpha x}$$

Ἄς θεωρήσουμε π.χ. τή συνάρτηση μέ τύπο $y = 2x$ καί πεδίο ὁρισμοῦ τό R. Στόν παρακάτω πίνακα ἔχουμε μερικές τιμές τῆς συναρτήσεως αὐτῆς, μέ τή βοήθεια τῶν ὁποίων κατασκευάζουμε τή γραφική της παράσταση.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8



(σχ. 3)

Παρατηροῦμε ὅτι ὅλα τά σημεῖα τῆς γραφικῆς παραστάσεως βρίσκονται σέ μιά εὐθεία γραμμή πού διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων. Γενικά:

> Ἡ γραφική παράσταση ὁποιασδήποτε συναρτήσεως μέ τύπο $y = \alpha x$ εἶναι μία εὐθεία γραμμή πού διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, γιά νά σχηματίσουμε τή γραφική παράσταση μιᾶς τέτοιας συναρτήσεως, ἀρκεῖ νά βροῦμε μόνο ἕνα σημεῖο της, π.χ. τό Α, πού ἔχει συντεταγμένες (2,4) καί νά φέρουμε τήν εὐθεία ΟΑ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Μέ τόν τύπο $y = -3x$ ὁρίζεται μιά συνάρτηση φ. Βρεῖτε:**

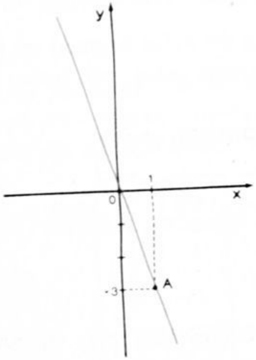
α) Τό πεδίο ὁρισμοῦ της καί τή γραφική παράστασή της.

β) Τό $\varphi(A)$ ὅπου $A = \{-2, 0, 3, -5, 1\}$

γ) Τό ἄθροισμα $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \varphi(-1) + \varphi\left(-\frac{1}{4}\right)$.

Λύση. α) Πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως φ εἶναι τό σύνολο R ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, γιατί τό δεύτερο μέλος τοῦ τύπου ἔχει νόημα ἀριθμοῦ γιά ὁποιαδήποτε τιμή. Ἡ γραφική της παράσταση εἶναι ἡ εὐθεία ΟΑ τοῦ διπλανοῦ σχήματος, ἡ ὁποία περνάει ἀπό τό Ο καί ἀπό τό σημεῖο Α πού ἔχει συντεταγμένες

$$x = 1, \quad y = \varphi(1) = -3.$$



(σχ. 4)

β) Ἔχουμε:

$\varphi(-2) = -3(-2) = 6$, $\varphi(0) = 0$,

$\varphi(3) = -9$, $\varphi(-5) = 15$ καί $\varphi(1) = -3$.

Ἑπομένως $\varphi(A) = \{6, 0, -9, 15, -3\}$.

γ) Ἔχουμε:

$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$, $\varphi(-1) = -3 \cdot (-1) = 3$,

$\varphi\left(-\frac{1}{4}\right) = -3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$

Ἑπομένως

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \varphi(-1) + \varphi\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{2} + 3 + \frac{3}{4} = -\frac{6}{4} + \frac{12}{4} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

2. **Μέ τόν τύπο $y = \frac{4}{x}$ ὁρίζεται μιά συνάρτηση φ. Βρεῖτε:**

α) Τό πεδίο ὁρισμοῦ της.

β) Τό ἐξαγόμενο τῶν πράξεων $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \varphi\left(\frac{1}{3}\right) + \varphi(-2)$

Λύση. α) Πεδίο ὁρισμοῦ της εἶναι τό R^*, γιατί γιά $x = 0$ τό δεύτερο μέλος τοῦ τύπου $y = \frac{4}{x}$ δέν ἔχει νόημα.

β) Ἔχουμε:

$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$, $\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{\frac{1}{3}} = 12$, $\varphi(-2) = \frac{4}{-2} = -2$. Ὥστε

$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \varphi\left(\frac{1}{3}\right) + \varphi(-2) = 8 - 12 - 2 = -6$.

3. **Μιά συνάρτηση φ ἔχει τύπο $y = 3x - 2$. Νά βρεθεῖ ἕνα στοιχεῖο α τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της τέτοιο, ὥστε $\varphi(\alpha) = 4$.**

Λύση. Ἔχουμε $\varphi(\alpha) = 3\alpha - 2$, ἐπομένως πρέπει

$$3\alpha - 2 = 4 \Leftrightarrow 3\alpha = 4 + 2$$
$$\Leftrightarrow 3\alpha = 6$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{6}{3} = 2.$$

---

4. **Ἡ γραφική παράσταση μιᾶς συναρτήσεως μέ τύπο $y = \alpha x$ περνάει ἀπό τό σημεῖο $A(4, -2)$. Νά βρεθεῖ ὁ ἀριθμός α.**

Λύση. Ἀφοῦ ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως περνάει ἀπό τό σημεῖο $A(4,-2)$, πρέπει οἱ συντεταγμένες του νά ἐπαληθεύουν τόν τύπο τῆς συναρτήσεως, πρέπει δηλαδή νά ἔχουμε τήν ἐξίσωση

$$-2 = \alpha . 4 \Leftrightarrow -\frac{2}{4} = \alpha \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}.$$

Ἑπομένως ὁ τύπος τῆς συναρτήσεως εἶναι $y = -\frac{1}{2}x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

---

1. Νά γίνουν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων, πού ἔχουν τύπους

α) $y = \frac{1}{2}x$ β) $y = x$ γ) $y = -\frac{3}{4}x$ δ) $y = -x$.

2. Στό ἴδιο σύστημα συντεταγμένων νά κάνετε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων μέ τύπους $y = 2x$ καί $y = \frac{1}{2}x$. Φέρετε τή διχοτόμο τῆς γωνίας τῶν δυό θετικῶν ἡμιαξόνων καί βρεῖτε τίς συμμετρικές εὐθεῖες τους μέ ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία τῆς διχοτόμου. Τί παρατηρεῖτε;

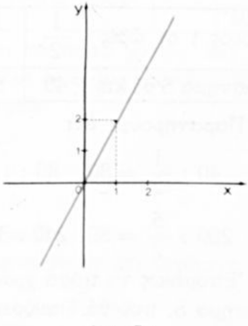
3. Δίνεται μιά συνάρτηση φ μέ τύπο $\varphi(x) = 4x$ καί μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $A = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, -1, 4\right\}$. Βρεῖτε τά:

α) $\varphi(A)$ β) $\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{2}{3}\right) + \varphi(-1)$

γ) $\dfrac{\varphi\left(\frac{2}{3}\right) - \varphi(4)}{\frac{2}{3} - 4}$

4. Ἡ γραφική παράσταση μιᾶς συναρτήσεως φ μέ τύπο $\varphi(x) = \alpha x$ περνάει ἀπό τό σημεῖο $A\left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{5}\right)$. Βρεῖτε τόν ἀριθμό α.

5. Δίνεται μιά συνάρτηση φ μέ τύπο $\varphi(x) = -\frac{2}{3}x$. Νά βρεθεῖ ἕνα στοιχεῖο α τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της, ὥστε:



(σχ. 5)

α) $\varphi(\alpha) = \frac{3}{5}$ β) $\varphi(\alpha) = -1$ γ) $\varphi(\alpha) = \alpha + 2$

6. Στό σχῆμα 5 ἔχουμε τή γραφική παράσταση μιᾶς συναρτήσεως. Μπορεῖτε νά βρεῖτε τόν τύπο της;

7. Στό ἴδιο σύστημα ἀξόνων σχεδιάστε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων μέ τύπους $y = 3x$ καί $y = -3x$ καί βρεῖτε τίς συμμετρικές τῶν εὐθειῶν αὐτῶν μέ ἄξονα συμμετρίας τόν Oy.

Ποσά ἀνάλογα

10.4. Ἄς θεωρήσουμε μιά συνάρτηση μέ τύπο τῆς μορφῆς $y = \alpha x$, π.χ. τήν $y=2x$, καί ἄς κατασκευάσουμε τόν παρακάτω πίνακα τιμῶν της.

x	1	2	−3	1/2	3/5
y	2	4	−6	1	6/5

Ἄς ἐξετάσουμε τώρα τίς ἀντίστοιχες τιμές τῶν μεταβλητῶν x καί y. Παρατηροῦμε ὅτι:

$$2:1=2,\ 4:2=2,\quad -6:(-3)=2,\ 1:\frac{1}{2}=2,\ \frac{6}{5}:\frac{3}{5}=2,$$

δηλαδή οἱ ἀντίστοιχες τιμές τους ἔχουν πάντοτε πηλίκο ἤ, ὅπως λέμε, **λόγο** ἴσο μέ 2. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι οἱ μεταβλητές x καί y ορίζουν **ποσά ἀνάλογα**. Γενικά:

> Λέμε ὅτι δύο μεταβλητά ποσά εἶναι **ἀνάλογα**, ὅταν οἱ ἀντίστοιχες τιμές, πού παίρνουν, ἔχουν πάντοτε τόν ἴδιο λόγο.

Ἄς δοῦμε μερικά παραδείγματα ἀνάλογων ποσῶν.

10.5. Ἕνα αὐτοκίνητο κινεῖται μέ ταχύτητα $\upsilon = 80$ km/h. Πόσο διάστημα θά διανύσει σέ χρόνο t ὧρες;

Ἄς σχηματίσουμε ἕναν πίνακα τιμῶν γιά τά μεταβλητά ποσά διάστημα S καί χρόνο t.

Χρόνος t σέ ὧρες	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	...	t
Διάστημα S σέ km	40	80	120	160	200	240	...	80t

Παρατηροῦμε ὅτι

$$40:\frac{1}{2}=80,\quad 80:1=80,\quad 120:\frac{3}{2}=80,\ 160:2=80,$$

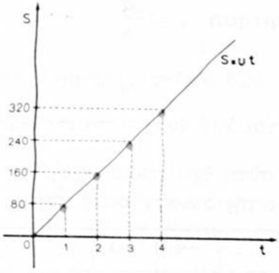
$$200:\frac{5}{2}=80,\ 240:3=80,\cdots$$

Ἑπομένως τά ποσά *χρόνος* καί *διάστημα* εἶναι ἀνάλογα. Μάλιστα τό διάστημα S, πού θά διανύσει τό αὐτοκίνητο σέ χρόνο t, θά εἶναι

$$S = 80t.$$

(Γενικά, ἄν υ εἶναι ἡ σταθερή ταχύτητα μέ τήν ὁποία κινεῖται τό αὐτοκίνητο, τό διάστημα, πού διανύει, εἶναι $S = \upsilon t$).

Ὁ τύπος $S=80t$ ὁρίζει μιά συνάρτηση μέ μεταβλητή τό χρόνο t. Ἄν πάρουμε ἕνα σύστημα ἀξόνων καί στόν ἄξονα τῶν x πάρουμε τίς τιμές τοῦ t καί στόν ἄξονα τῶν y τίς τιμές τοῦ S, τότε ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως αὐτῆς εἶναι μιά ἡμιευθεία, πού ἔχει ἀρχή τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.



(σχ. 6)

10.6. Γνωρίζουμε ὅτι, ὅταν καταθέτουμε στήν τράπεζα ἕνα χρηματικό ποσό, ἕνα **κεφάλαιο** ὅπως λέμε, καί τό ἀποσύρουμε μετά ἀπό ὁρισμένο χρόνο, τότε παίρνουμε καί ἕνα ἐπιπλέον ποσό, πού τό λέμε **τόκο.** Ὁ τόκος πού παίρνουμε γιά ἑκατό δραχμές σέ ἕνα χρόνο λέγεται **ἐπιτόκιο.**

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι καταθέτουμε σέ μιά τράπεζα κεφάλαιο $K = 50\,000$ δρχ. γιά ἕνα χρονικό διάστημα $x = 5$ ἔτη, πρός ἐπιτόκιο $\varepsilon = 8\%$. Πόσο τόκο θά πάρουμε;

Ἄς σχηματίσουμε ἕναν πίνακα τιμῶν γιά τά μεταβλητά ποσά τόκο (Τ) καί χρόνο (x). Ἐπειδή ὁ τόκος τῶν 50 000 δρχ. γιά ἕνα ἔτος εἶναι $50\,000 \cdot \dfrac{8}{100} = 4000$ ἤ γενικά $K \cdot \dfrac{\varepsilon}{100} = \dfrac{K.\varepsilon}{100}$ ἔχουμε:

Χρόνος **x** σέ ἔτη	1	2	3	4	5	...	x
Τόκος τοῦ κεφαλαίου	4000	8000	12000	16000	20000	...	$\dfrac{K.\varepsilon}{100} \cdot x$

Ἀπό τόν πίνακα αὐτό βλέπουμε ὅτι τά ποσά *χρόνος* καί *τόκος* εἶναι ἀνάλογα καί μάλιστα ὁ τόκος πού δίνει ὁρισμένο κεφάλαιο Κ μέ ἐπιτόκιο $\varepsilon\%$ σέ x ἔτη βρίσκεται ἀπό τόν τύπο

$$\boxed{T = \frac{K\,.\,\varepsilon}{100}\,.\,x}$$

εἶναι δηλαδή μιά συνάρτηση τῆς μορφῆς $y = \alpha x$.

Μέ τόν ἴδιο τρόπο μπορoῦμε νά διαπιστώσουμε ὅτι ἀνάλογα ποσά εἶναι καί:

— *Τό βάρος ἑνός ἐμπορεύματος καί ἡ τιμή του.*

— *Ὁ ἀριθμός ἐργατῶν καί τό ἔργο πού ἐκτελοῦν στόν ἴδιο χρόνο.*

–Οἱ κιλοβατῶρες τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνέργειας, πού καταναλώνουμε, καί ἡ τιμή τους.
— Ἡ ἀκτίνα ἑνός κύκλου καί τό μῆκος του.

Ἡ συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$

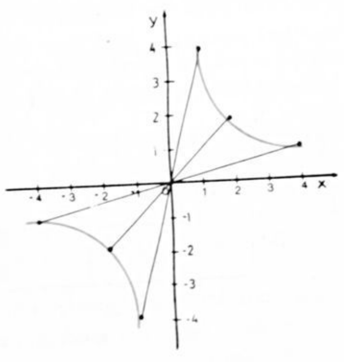
10.7. Μιά ἄλλη χρήσιμη συνάρτηση στά μαθηματικά εἶναι ἐκείνη πού ὁρίζεται ἀπό ἕναν τύπο τῆς μορφῆς $y = \frac{\alpha}{x}$, π.χ. τόν $y = \frac{4}{x}$. Ἡ συνάρτηση αὐτή ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό R^*. Ὁ παρακάτω πίνακας δίνει μερικές τιμές τῆς συναρτήσεως αὐτῆς.

x	...	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4	...
y	...	–1	$-\frac{4}{3}$	–2	–4	4	2	$\frac{4}{3}$	1	...

Ἔτσι στό γράφημα G τῆς συναρτήσεως ἀνήκουν καί τά ζεύγη

$$(-4, -1),\ \left(-3, -\frac{4}{3}\right),\ (-2, -2),\ (-1, -4),\ \ldots,\ (4, 1).$$

Φυσικά τό γράφημα ἔχει ἄπειρα ζεύγη καί εἶναι ἕνα ὑποσύνολο τοῦ καρτεσιανοῦ γινόμενου $R^* \times R^*$. Ἄν πάρουμε ἕνα σύστημα συντεταγμένων καί σημειώσουμε τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, πού ἔχουν συντεταγμένες τά παραπάνω ζεύγη, παρατηροῦμε ὅτι τά σημεῖα αὐτά δέν βρίσκονται πάνω σέ εὐθεία γραμμή, ἀλλά σέ μιά καμπύλη πού ἀποτελεῖται ἀπό δύο κλάδους. Ἡ καμπύλη αὐτή λέγεται **ὑπερβολή**.



(σχ. 7)

Ἄν μάλιστα προσέξουμε τήν καμπύλη, διαπιστώνουμε ὅτι ἔχει κέντρο συμμετρίας τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων. Ἰσχύει λοιπόν γενικά ὅτι:

> Ἡ γραφική παράσταση μιᾶς συναρτήσεως τῆς μορφῆς $y = \frac{\alpha}{x}$ εἶναι μιά καμπύλη πού ἀποτελεῖται ἀπό δυό κλάδους συμμετρικούς ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί λέγεται *ὑπερβολή*.

Ποσά ἀντιστρόφως ἀνάλογα

10.8. Ἄς ἐξετάσουμε τώρα τίς ἀντίστοιχες τιμές τῶν μεταβλητῶν x καί y στόν πίνακα τῆς §10.7. Παρατηροῦμε ὅτι:
$(-4)\cdot(-1) = 4$, $(-3)\cdot(-4/3)=4$, $(-2)\cdot(-2)=4$, $(-1)\cdot(-4)=4, \ldots, 4\cdot 1 = 4$,
δηλαδή οἱ ἀντίστοιχες τιμές τους ἔχουν γινόμενο πάντοτε ἴσο μέ 4. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι οἱ μεταβλητές x καί y ὁρίζουν ποσά **ἀντιστρόφως ἀνάλογα.** Γενικά:

> Λέμε ὅτι δυό μεταβλητά ποσά εἶναι **ἀντιστρόφως ἀνάλογα**, ὅταν οἱ ἀντίστοιχες τιμές, πού παίρνουν, ἔχουν πάντοτε τό ἴδιο γινόμενο.

Τίς προηγούμενες ἰσότητες μποροῦμε ἀκόμα νά τίς γράψουμε καί ὡς ἑξῆς:

$$(-4):(-1) = 4, \quad (-3):\left(-\frac{3}{4}\right)=4, \quad (-2):\left(-\frac{1}{2}\right) = 4, \ldots$$

δηλαδή **στά ἀντιστρόφως ἀνάλογα ποσά οἱ τιμές τοῦ ἑνός καί οἱ ἀντίστροφες ἀντίστοιχες τιμές τοῦ ἄλλου ἔχουν πάντοτε τόν ἴδιο λόγο.**

Ἄς δοῦμε μερικά παραδείγματα ἀντιστρόφως ἀνάλογων ποσῶν.

10.9. Ἡ κάθε στήλη τοῦ παρακάτω πίνακα μᾶς δίνει τό μῆκος τῆς βάσεως καί τοῦ ὕψους ἑνός ὀρθογωνίου, πού ἔχει ἐμβαδό 24 cm^2

βάση (β)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ὕψος (υ)	24	12	8	6	$\frac{24}{5}$	4	$\frac{24}{7}$	3	$\frac{24}{9}$	$\frac{24}{10}$	$\frac{24}{11}$	2

Παρατηροῦμε ὅτι

$$1\cdot 24 = 24, \quad 2\cdot 12 = 24, \quad 3\cdot 8 = 24, \ldots, \quad 12\cdot 2 = 24$$

καί γενικά

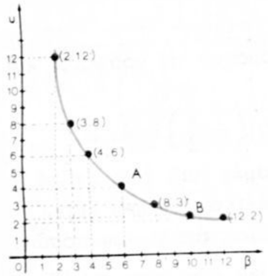
$$\beta \cdot \upsilon = 24$$

Ἑπομένως τά ποσά *βάση* καί *ὕψος* ἑνός ὀρθογωνίου, πού ἔχει ἐμβαδό 24 cm^2, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Μάλιστα τό ὕψος υ τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ εἶναι

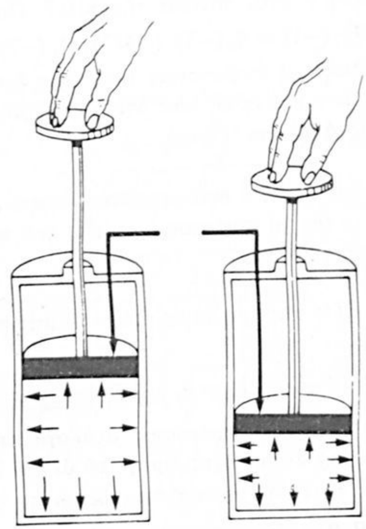
$$\upsilon = \frac{24}{\beta}$$

Ὁ τύπος αὐτός ὁρίζει μιά συνάρτηση μέ μεταβλητή τό β. Στή συνάρτηση αὐτή πεδίο ὁρισμοῦ εἶναι τό σύνολο τῶν θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Στό σχ. 8 ἔχουμε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως αὐτῆς. Στόν ἄξονα τῶν x παίρνουμε τίς τιμές τοῦ β καί στόν ἄξονα τῶν y τίς τιμές τοῦ υ. Ἀπό τή γραφική αὐτή παράσταση μποροῦμε νά βρίσκουμε γιά κάθε τιμή τοῦ β τήν ἀντίστοιχη τιμή τοῦ υ.



(σχ. 8)



(σχ. 9)

10.10. Γνωρίζουμε ἀπό τό μάθημα τῆς Φυσικῆς ὅτι, ὅσο περισσότερο πιέζουμε ἕνα ἀέριο, τόσο μικρότερο ὄγκο καταλαμβάνει (σχ. 9). Ὁ παρακάτω πίνακας μᾶς δίνει τήν πίεση P καί τόν ἀντίστοιχο ὄγκο V, πού καταλαμβάνει μιά ὁρισμένη μάζα ἑνός ἀερίου.

P	3	4	5	6	10	12	24
V	40	30	24	20	12	10	5

Παρατηροῦμε ὅτι

$$3 \cdot 40 = 120, \quad 4 \cdot 30 = 120, \ldots, \; 24 \cdot 5 = 120$$

Δηλαδή ὁ *ὄγκος* καί ἡ *πίεση*, κάτω ἀπό τήν ὁποία βρίσκεται μιά ὁρισμένη μάζα ἀερίου, εἶναι ποσά ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Γενικά ἔχουμε:

$$P \cdot V = 120$$

ἤ

$$V = \frac{120}{P}.$$

Μέ τόν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νά διαπιστώσουμε ὅτι ἀντιστρόφως ἀνάλογα ποσά εἶναι καί:

— Ὁ ἀριθμός ἐργατῶν καί ὁ χρόνος γιά τήν ἐκτέλεση ἑνός ἔργου.

— Ἡ ἰσχύς μιᾶς μηχανῆς καί ὁ χρόνος πού χρειάζεται γιά τήν ἐκτέλεση ἑνός ἔργου.

— Ἡ ταχύτητα καί ὁ χρόνος πού ἀπαιτεῖται, γιά νά διανυθεῖ ἕνα σταθερό διάστημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Μιά συνάρτηση φ ἔχει τύπο $y = -\dfrac{4}{x}$.**

α) Νά βρεθεῖ τό πεδίο ὁρισμοῦ της.

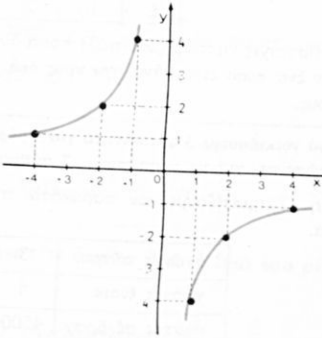
β) Νά γίνει ἕνας πίνακας τιμῶν τῆς συναρτήσεως, ὅταν ἡ μεταβλητή x παίρνει τιμές ἀπό τό σύνολο $A = \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$, καί μέ τή βοήθεια αὐτοῦ τοῦ πίνακα νά γίνει ἡ γραφική της παράσταση.

Λύση. α) Πεδίο ὁρισμοῦ εἶναι τό $\mathbb{R}^*$, γιατί γιά $x=0$ δέν ἔχει νόημα τό δεύτερο μέλος τοῦ τύπου.

β) Ὁ πίνακας τιμῶν εἶναι

x	−4	−3	−2	−1	1	2	3	4
y	1	$\frac{4}{3}$	2	4	−4	−2	$-\frac{4}{3}$	−1

Ἡ γραφική της παράσταση δίνεται στό διπλανό σχῆμα.



(σχ. 10)

2. **Ἕνας μαθητής ρωτήθηκε πότε δύο ποσά λέγονται ἀνάλογα καί ἀπάντησε : «ἀνάλογα λέγονται δύο ποσά στά ὁποῖα, ὅταν μεγαλώνει ἡ τιμή τοῦ ἑνός, μεγαλώνει καί ἡ ἀντίστοιχη τιμή τοῦ ἄλλου». Ἀπάντησε σωστά;**

Λύση: Ἄς ὀνομάσουμε x τήν πλευρά ἑνός τετραγώνου καί y τό ἐμβαδό του. Τότε θά εἶναι $y = x^2$. Εἶναι φανερό ὅτι, ὅταν μεγαλώνει ἡ πλευρά τοῦ τετραγώνου, μεγαλώνει καί τό ἐμβαδό του. Ὅμως τά ποσά «πλευρά τοῦ τετραγώνου» καί «ἐμβαδό τοῦ τετραγώνου» δέν εἶναι ἀνάλογα, γιατί, ὅπως φαίνεται ἀπό τό διπλανό πίνακα, οἱ ἀντίστοιχες τιμές τους δέν ἔχουν τόν ἴδιο λόγο ἀφοῦ π.χ. $\frac{3}{9} \neq \frac{6}{36}$. Συνεπῶς ὁ μαθητής δέν ἀπάντησε σωστά.

πλευρά x	3	6	12	. . .
ἐμβαδό $y = x^2$	9	36	144	. . .

3. **Γνωρίζουμε ὅτι τό ἐμβαδό ἑνός τριγώνου δίνεται ἀπό τόν τύπο $E = \frac{1}{2}\beta\upsilon$. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι τό ἐμβαδό ἐξαρτᾶται ἀπό τίς τιμές, πού παίρνουν δυό μεταβλητές, τό υ καί τό β. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι ὁ τύπος $E = \frac{1}{2}\beta\upsilon$ ὁρίζει μιά «συνάρτηση μέ δύο μεταβλητές».**

Ἄς σχηματίσουμε τώρα τόν παρακάτω πίνακα τιμῶν.

β	10	10	10	20	30	10	5	β
υ	2	4	6	4	2	1	2	υ
Ε	10	20	30	40	30	5	5	$\frac{1}{2}\beta.\upsilon$

Παρατηροῦμε ὅτι γιά τό ἴδιο β τό Ε καί τό υ εἶναι ποσά ἀνάλογα, ὅπως ἐπίσης ποσά ἀνάλογα εἶναι (γιά τό ἴδιο υ) τό Ε καί τό β. Ἐπίσης παρατηροῦμε ὅτι, ἄν βροῦμε τά γινόμενα τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ β καί τοῦ υ καί σχηματίσουμε τόν παρακάτω πίνακα

βυ	20	40	60	80
Ε	10	20	30	40

,

οἱ ἀντίστοιχες τιμές ὁρίζουν πάλι ποσά ἀνάλογα. Γενικά λοιπόν διαπιστώνουμε ὅτι: **Ὅταν ἕνα ποσό εἶναι ἀνάλογο πρός δυό ἄλλα, εἶναι ἀνάλογο καί πρός τό γινόμενό τους.**

---

4. **Γιά νά νοικιάσουμε 3 αὐτοκίνητα γιά 5 μέρες, πληρώνουμε ἐνοίκιο 4500 δρχ. Πόσο θά πληρώσουμε, γιά νά νοικιάσουμε 7 αὐτοκίνητα γιά 8 μέρες;**

Λύση. Σχηματίζουμε τόν παρακάτω πίνακα τιμῶν γιά τά μεταβαλλόμενα αὐτά ποσά.

ἀριθμός αὐτοκ.	3	7
χρόνος ἐνοικ.	5	8
κόστος σέ δραχ.	4500	x

ἀνάλογα

ἀνάλογα

Ἐπομένως οἱ τιμές 4500 καί x θά εἶναι ἀνάλογες πρός τά γινόμενα $3.5 = 15$ καί $7.8 = 56$. Ὥστε

$$\frac{x}{56} = \frac{4500}{15} \Leftrightarrow 15.x = 4500.56$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4500.56}{15} = 16\,800 \text{ δρχ.}$$

Ἀναλογίες

10.11. Ὀνομάζουμε **ἀναλογία** κάθε ἰσότητα δύο λόγων, ὅπως π.χ. τήν

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad (\beta \neq 0,\ \delta \neq 0)^{(1)}. \tag{1}$$

Ἄν ἰσχύει ἡ (1), λέμε ἀκριβέστερα ὅτι οἱ ἀριθμοί α καί γ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν β καί δ ἤ ὅτι οἱ ἀριθμοί α καί β εἶναι ἀνάλογοι τῶν γ καί δ. Οἱ ἀριθμοί α,β,γ,δ λέγονται **ὅροι** τῆς ἀναλογίας. Εἰδικότερα:

- Οἱ α καί δ λέγονται **ἄκροι ὅροι**.
- Οἱ β καί γ λέγονται **μέσοι ὅροι**.

(1) Στά ἑπόμενα ὅταν παίρνουμε μιά ἀναλογία, θά ἐννοοῦμε (χωρίς νά τό γράφουμε) ὅτι οἱ παρονομαστές εἶναι διάφοροι ἀπό τό μηδέν.

● Οἱ α καί γ λέγονται **ἡγούμενοι ὅροι**.
● Οἱ β καί δ λέγονται **ἑπόμενοι ὅροι**.

Ἔτσι π.χ. στήν ἀναλογία

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$$

ἄκροι ὅροι εἶναι ὁ 3 καί ὁ 10, μέσοι ὁ 5 καί ὁ 6, ἡγούμενοι ὁ 3 καί ὁ 6 καί ἑπόμενοι ὁ 5 καί ὁ 10.

Ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$, πού ἔχει τούς μέσους ὅρους της ἴσους, λέγεται **συνεχής ἀναλογία** καί ὁ β λέγεται **μέσος ἀνάλογος** τῶν α καί γ.

Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν

10.12. α) Ἄν πάρουμε τήν ἀναλογία $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$, παρατηροῦμε ὅτι εἶναι $3\cdot 10=30$ καί $5\cdot 6=30$, δηλαδή $3\cdot 10=5\cdot 6$.

Γενικότερα ἰσχύει:

$$\boxed{\text{Ἄν } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}, \text{ τότε } \alpha.\delta=\beta.\gamma}$$

δηλαδή, **σέ κάθε ἀναλογία τό γινόμενο τῶν ἄκρων ὅρων εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τῶν μέσων ὅρων.**

β) Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι ἀπό τήν ἀναλογία $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ μποροῦμε νά πάρουμε καί τίς ἀναλογίες $\frac{10}{5}=\frac{6}{3}$ καί $\frac{3}{6}=\frac{5}{10}$.

Πιό γενικά:

$$\boxed{\text{Ἄν } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}, \text{ τότε } \left\{\begin{array}{l}\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}\\[4pt] \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}\end{array}\right.}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι, **ἄν σέ μιά ἀναλογία ἀλλάξουμε τή θέση τῶν μέσων ὅρων ἤ τή θέση τῶν ἄκρων ὅρων, παίρνουμε πάλι ἀναλογία.**

γ) Ἀπό τήν ἀναλογία $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ προσθέτοντας καί στά δύο μέλη τό $+1$ ἔχουμε διαδοχικά:

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10} \text{ ἤ } \frac{3}{5}+1=\frac{6}{10}+1 \text{ ἤ } \frac{3}{5}+\frac{5}{5}=\frac{6}{10}+\frac{10}{10} \text{ ἤ } \frac{3+5}{5}=\frac{6+10}{10}.$$

Μέ παρόμοια ἐργασία ἀπό τήν $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ μποροῦμε νά πάρουμε ἀκόμη τίς ἀναλογίες $\frac{3-5}{5} = \frac{6-10}{10}$, $\frac{3}{5+3} = \frac{6}{10+6}$, $\frac{3}{5-3} = \frac{6}{10-6}$

Γενικότερα :

$$\text{Ἂν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}, \text{ τότε } \begin{cases} \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}, & \frac{\alpha-\beta}{\beta} = \frac{\gamma-\delta}{\delta} \\ \frac{\alpha}{\beta+\alpha} = \frac{\gamma}{\delta+\gamma}, & \frac{\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{\gamma}{\delta-\gamma} \end{cases}$$

Δηλαδή, **ἄν στούς ἡγούμενους ὅρους μιᾶς ἀναλογίας προσθέσουμε (ἤ ἀφαιρέσουμε) τούς ἑπόμενους ἤ ἄν στούς ἑπόμενους ὅρους προσθέσουμε (ἤ ἀφαιρέσουμε) τούς ἡγούμενους, παίρνουμε πάλι ἀναλογία.**

δ) Ἂν πάρουμε τώρα τά ἴσα γινόμενα $5 \cdot 8 = 4 \cdot 10$, παρατηροῦμε ὅτι οἱ λόγοι $\frac{5}{10}$ καί $\frac{4}{8}$ εἶναι ἴσοι, δηλαδή ἔχουμε τήν ἀναλογία $\frac{5}{10} = \frac{4}{8}$. Ἀπό τά ἴδια γινόμενα μποροῦμε νά πάρουμε καί ἄλλες ἀναλογίες, ὅπως π.χ. τήν $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ ἤ τήν $\frac{4}{8} = \frac{5}{10}$. Ὅπως βλέπουμε σέ ὅλες τίς ἀναλογίες, οἱ παράγοντες τοῦ ἑνός γινομένου εἶναι μέσοι ὅροι καί τοῦ ἄλλου ἄκροι ὅροι.

Ὥστε:

$$\text{Ἂν } \alpha.\delta = \beta.\gamma, \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

Δηλαδή, **ἀπό τήν ἰσότητα δύο γινομένων παίρνουμε ἀναλογία, στήν ὁποία μέσοι ὅροι εἶναι οἱ παράγοντες τοῦ ἑνός γινομένου καί ἄκροι ὅροι οἱ παράγοντες τοῦ ἄλλου.**

ε) Θεωροῦμε τούς ἴσους λόγους $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ καί παρατηροῦμε ὅτι καί ὁ λόγος $\frac{1+2+3+4}{2+4+6+8} = \frac{10}{20}$ εἶναι ἴσος μέ αὐτούς, δηλαδή

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{1+2+3+4}{2+4+6+8} \text{ καί πιό γενικά}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\eta}{\theta} = \frac{\alpha+\gamma+\varepsilon+\eta}{\beta+\delta+\zeta+\theta}$$

Ὥστε **δύο ἤ περισσότεροι ἴσοι λόγοι εἶναι ἴσοι καί μέ τό λόγο πού** ἔχει ἡγούμενο τό ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων καί ἑπόμενο τό ἄθροισμα τῶν ἑπομένων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ—ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Ἄν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{3}$, νά βρεῖτε τούς λόγους $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$, $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$, $\frac{\alpha+2}{\beta+3}$.

Λύση. Ἀπό τήν ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{3}$, ἔχουμε σύμφωνα μέ τίς ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν.

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{2+3}{3}=\frac{5}{3} \quad (1)$$

$$\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{2-3}{3}=-\frac{1}{3} \quad (2)$$

Ἄν διαιρέσουμε κατά μέλη τίς (1) καί (2), προκύπτει

$$\frac{\frac{\alpha+\beta}{\beta}}{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}=\frac{\frac{5}{3}}{-\frac{1}{3}} \text{ ἤ } \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=-\frac{5}{1}=-5 \text{ καί } \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=-\frac{1}{5}.$$

Ἐπίσης ἔχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{3}=\frac{\alpha+2}{\beta+3}, \text{ δηλαδή } \frac{\alpha+2}{\beta+3}=\frac{2}{3}$$

2. Βρεῖτε τρεῖς ἀριθμούς α,β,γ, πού ἔχουν ἄθροισμα 27 καί εἶναι ἀνάλογοι πρός τούς ἀριθμούς 2, 3, 4.

Λύση. Ἔχουμε $\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2+3+4}=\frac{27}{9}=3$, ἑπομένως

$\frac{\alpha}{2}=3$ ἤ $\alpha=6$, $\frac{\beta}{3}=3$ ἤ $\beta=9$, $\frac{\gamma}{4}=3$ ἤ $\gamma=12$.

3. Σέ τρία παιδιά 5, 8 καί 10 χρόνων μοιράστηκαν 2300 δρχ. ἀνάλογα μέ τήν ἡλικία τους. Βρεῖτε πόσες δραχμές πῆρε τό καθένα.

Λύση. Ἄν x, y καί ω εἶναι οἱ δραχμές πού πῆρε τό καθένα τους, τότε

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{8}=\frac{\omega}{10}=\frac{x+y+\omega}{5+8+10}=\frac{2300}{23}=100 \text{ καί ἑπομένως}$$

$x=100.5=500$ δρχ., $y=100.8=800$ δρχ., $\omega=100.10=1000$ δρχ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8. Ἄν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{3}{4}$, βρεῖτε τούς λόγους $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$, $\frac{\alpha-\beta}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, $\frac{\alpha+3}{\beta+4}$, $\frac{\alpha-3}{\beta-4}$

9. Ἐξετάστε ἄν τά παρακάτω ζεύγη ἀνά δυό ἔχουν στοιχεῖα ἀνάλογα.

α) (5,10) καί (15,30)

β) (−12, 6) καί (4, −2)

γ) (α,β) καί (2α, 2β)

δ) ($\alpha^2\beta$, $\alpha\beta^2$) καί (3α, 3β)

10. Στήν ἀναλογία $\frac{\alpha}{5}=\frac{\beta}{3}$ βρεῖτε τά α καί β, ὅταν:

α) $\alpha+\beta=16$ β) $\alpha-\beta=6$ γ) $2\alpha+3\beta=20$.

11. Βρεῖτε τό μέσο ἀνάλογο τῶν ἀριθμῶν

α) 16 καί 4 β) 3 καί 12 γ) –4 καί –9

12. Στήν ἀναλογία $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ βρεῖτε τούς x,y,z, ὅταν

α) $x+y+z=20$ β) $x-y+z=8$ γ) $2x+3y=26$

13. Βρεῖτε δυό ἀριθμούς, πού ἔχουν λόγο $\frac{3}{4}$ καί ἄθροισμα 14.

14. Ἕνα χρηματικό ἔπαθλο 3 000 δρχ. μοιράστηκε σέ τρεῖς νικητές ἑνός διαγωνισμοῦ ἀνάλογα μέ τίς σωστές ἀπαντήσεις τους. Ὁ Α ἀπάντησε σωστά σέ 3 ἐρωτήσεις, ὁ Β σέ 8 καί ὁ Γ σέ 4. Βρεῖτε τί πῆρε ὁ καθένας τους.

15. Ἡ ἀπάντηση ἑνός μαθητῆ στό ἐρώτημα «πότε δύο ποσά λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογα» ἦταν: «Ἀντιστρόφως ἀνάλογα λέγονται δύο ποσά στά ὁποῖα, ὅταν ἡ τιμή τοῦ ἑνός μεγαλώνει, ἡ ἀντίστοιχη τιμή τοῦ ἄλλου μικραίνει». Εἶναι σωστή ἡ ἀπάντηση;

Ἡ συνάρτηση y=αx+β

10.13. Μιά ἄλλη χρήσιμη συνάρτηση στά μαθηματικά εἶναι αὐτή πού ἔχει τύπο τῆς μορφῆς

$$\boxed{y = \alpha x + \beta}$$

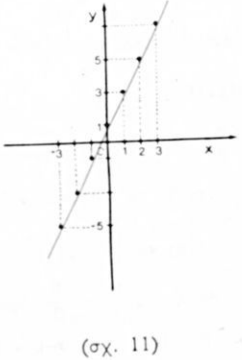
Ἄς θεωρήσουμε π.χ. τή συνάρτηση μέ τύπο $y = 2x+1$ καί πεδίο ὁρισμοῦ τό R. Στόν παρακάτω πίνακα ἔχουμε μερικές τιμές τῆς συναρτήσεως αὐτῆς μέ τή βοήθεια τῶν ὁποίων κατασκευάζουμε τή γραφική της παράσταση

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−5	−3	−1	1	3	5	7

Παρατηροῦμε ὅτι ὅλα τά σημεῖα τῆς γραφικῆς της παραστάσεως βρίσκονται σέ μιά εὐθεία γραμμή.

Διαπιστώνεται γενικά ὅτι **ἡ γραφική παράσταση ὁποιασδήποτε συναρτήσεως μέ τύπο y=αx+β εἶναι μιά εὐθεία γραμμή.**

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, γιά νά σχηματίσουμε τή γραφική παράσταση μιᾶς τέτοιας συναρτήσεως, ἀρκεῖ



(σχ. 11)

νά βροῦμε μόνο δυό σημεῖα της καί νά χαράξουμε τήν εὐθεία πού διέρχεται ἀπό αὐτά.

Στό παρακάτω διάγραμμα δίνουμε τήν πορεία μιᾶς τέτοιας ἐργασίας.

Συνάρτηση
$y = 2x - 4$

↓

Γιά $x = 0$
βρίσκουμε $y = -4$

↓

Σημειώνουμε τό σημεῖο
$A(0,-4)$

↓

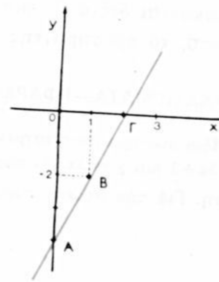
Γιά $x = 1$
βρίσκουμε $y = -2$

↓

Σημειώνουμε τό σημεῖο
$B(1,-2)$

↓

Χαράζουμε τήν εὐθεία
πού περνάει ἀπό τά A,B



(σχ. 12)

Γραφική λύση τῆς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta = 0$ καί τῆς ἀνισώσεως $\alpha x + \beta > 0$

10.14. Στό σχῆμα 12 βλέπουμε ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως μέ τύπο $y = 2x - 4$ τέμνει τόν ἄξονα Ox στό σημεῖο Γ, πού ἔχει συντεταγμένες (2,0). Στό σημεῖο αὐτό ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως εἶναι ἴση μέ μηδέν, δηλαδή ἡ τιμή $x = 2$ εἶναι λύση τῆς ἐξισώσεως $2x - 4 = 0$.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, **ἄν θέλουμε νά βροῦμε τή λύση μιᾶς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $\alpha x + \beta = 0$ μέ γραφική μέθοδο, δέν ἔχουμε παρά νά θεωρήσουμε τή συνάρτηση μέ τύπο $y = \alpha x + \beta$ καί νά κάνουμε τή γραφική της παράσταση. Ἡ τετμημένη τοῦ σημείου, πού ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως τέμνει τόν ἄξονα Ox, εἶναι ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta = 0$.**

Ἄς βροῦμε τώρα μερικές τιμές τῆς συναρτήσεως γιά τιμές τοῦ x πού βρίσκονται δεξιά καί ἀριστερά τοῦ σημείου Γ.

Γιά τίς τιμές $x = 3,\ x = 4,\ x = 5, \ldots$, πού βρίσκονται δεξιά, ἔχουμε ἀντίστοιχα $y = 2,\ y = 4,\ y = 6, \ldots$, πού εἶναι ὅλοι ἀριθμοί θετικοί, δηλαδή οἱ τιμές αὐτές τοῦ x ἀποτελοῦν λύσεις τῆς ἀνισώσεως $2x - 4 > 0$.

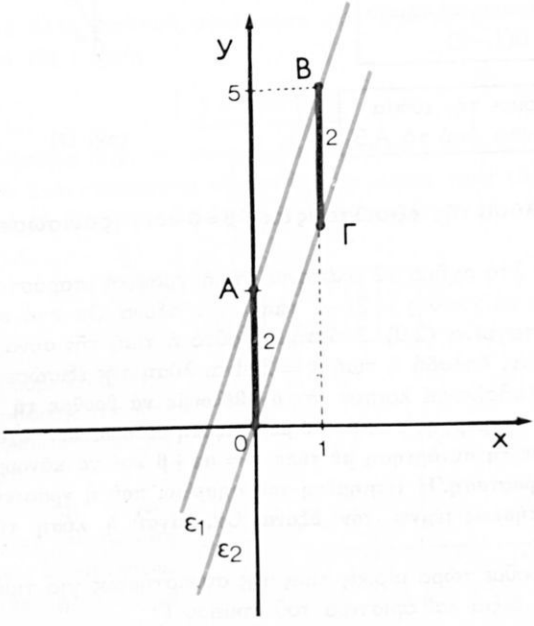
Γιά τίς τιμές $x = 1,\ x = 0,\ x = -1 \ldots$, πού βρίσκονται ἀριστερά, ἔχουμε ἀντίστοιχα $y=-2$, $y=-4$, $y=-6, \ldots$ πού εἶναι ὅλοι ἀριθμοί ἀρνητικοί, δηλαδή οἱ τιμές αὐτές τοῦ x ἀποτελοῦν λύσεις τῆς ἀνισώσεως $2x-4<0$.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, **γιά νά λύσουμε γραφικά μιά ἀνίσωση τῆς μορφῆς $\alpha x+\beta>0$ ἤ $\alpha x+\beta<0$, δέν ἔχουμε παρά νά θεωρήσουμε τή συνάρτηση μέ τύπο $y=\alpha x+\beta$ καί νά κάνουμε τή γραφική της παράσταση. Οἱ τετμημένες τῶν σημείων, πού βρίσκονται δεξιά ἤ ἀριστερά ἀπό τό σημεῖο τομῆς τῆς γραφικῆς παραστάσεως μέ τόν ἄξονα Ox, ἀποτελοῦν τίς λύσεις τῆς ἀνισώσεως. Γιά νά δοῦμε ἄν ἀποτελοῦν λύσεις τῆς ἀνισώσεως οἱ τιμές πού βρίσκονται δεξιά ἤ ἀριστερά, ἐλέγχουμε μέ μιά τέτοια τιμή, π.χ. μέ τήν τιμή $x=0$, τό πρόσημο τῆς τιμῆς τῆς συναρτήσεως $y=\alpha x+\beta$.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ—ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Στό ἴδιο σύστημα συντεταγμένων κάνετε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y=3x+2$ καί $y=3x$. Τί παρατηρεῖτε;**

Λύση. Γιά τήν πρώτη συνάρτηση ἔχουμε:



(σχ. 13)

$x=0$, $y=2$, ἀντίστοιχο σημεῖο $A(0,2)$
$x=1$, $y=5$, ἀντίστοιχο σημεῖο $B(1,5)$

Γραφική της παράσταση εἶναι ἡ εὐθεία ε_1 πού περνάει ἀπό τά σημεῖα A καί B.

Γιά τή δεύτερη συνάρτηση έχουμε:

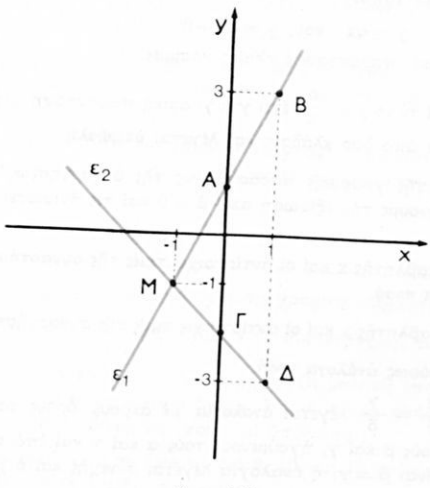
$x = 0$, $y = 0$, ἀντίστοιχο σημεῖο ἡ ἀρχή Ο.

$x = 1$, $y = 3$, ἀντίστοιχο σημεῖο Γ (1,3).

Γραφική της παράσταση εἶναι ἡ εὐθεία ε_2, πού περνάει ἀπό τά σημεῖα Ο καί Γ. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ εὐθεία ε_1 εἶναι παράλληλη πρός τήν ε_2, προκύπτει μάλιστα ἀπό τήν ε_2 μέ μιά «παράλληλη μεταφορά» της κατά τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα Oy κατά 2 μονάδες.

2. **Στό ἴδιο σύστημα συντεταγμένων κάνετε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν δυό συναρτήσεων $y = 2x+1$ καί $y = -x-2$. Βρεῖτε τό σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν πού ὁρίζουν. Τί παρατηρεῖτε;**

Λύση. Ἔχουμε γιά κάθε μία ἀπό τίς συναρτήσεις:



(σχ. 14)

$x = 0$, $y = 1$, A(0,1)
$x = 1$, $y = 3$, B (1,3)

$x = 0$, $y = -2$, Γ(0,−2)
$x = 1$, $y = -3$, Δ(1,−3)

Γραφικές παραστάσεις τους εἶναι ἀντίστοιχα οἱ εὐθεῖες ε_1 καί ε_2, πού τέμνονται στό σημεῖο Μ τό ὁποῖο ἔχει συντεταγμένες (−1,−1). Παρατηροῦμε ὅτι τό ζεῦγος τῶν ἀριθμῶν (−1,−1) ἐπαληθεύει καί τίς δυό ἐξισώσεις

$$y = 2x+1$$
$$y = -x-2$$

καί εἶναι, ὅπως θά μάθουμε στήν τρίτη τάξη, λύση τοῦ «συστήματος» τῶν δυό ἐξισώσεων μέ δυό ἀγνώστους.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 10

1. Μιά ἀπεικόνιση φ : A → B, ὅπου τά σύνολα A καί B εἶναι σύνολα ἀριθμῶν, λέγεται συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό A καί μέ τιμές στό B.
Γιά νά προσδιοριστεῖ μιά συνάρτηση, θά πρέπει νά ξέρουμε:

- Τό πεδίο ὁρισμοῦ A πού εἶναι ὑποσύνολο τοῦ R.
- Τόν κανόνα μέ τόν ὁποῖο θά ἀντιστοιχίζεται σέ κάθε x ἀπό τό A ἕνας πραγματικός ἀριθμός.
- Ἄν μιά συνάρτηση φ ὁρίζεται μέ ἕναν τύπο π.χ. $y = \frac{3}{(x-2)(x-5)}$ χωρίς νά ἀναφέρεται τό πεδίο ὁρισμοῦ της, τότε θεωροῦμε ὡς πεδίο ὁρισμοῦ τό R ἐκτός ἀπό τά στοιχεῖα 2 καί 5, γιατί τό δεύτερο μέλος τοῦ τύπου δέν ἔχει νόημα, ὅταν $x = 2$ ἤ $x = 5$.

2. Γραφική παράσταση μιᾶς συναρτήσεως εἶναι τό καρτεσιανό διάγραμμα τοῦ γραφήματός της G σ' ἕνα σύστημα συντεταγμένων.

3. Οἱ συναρτήσεις μέ τύπους

$$y = \alpha x \quad \text{καί} \quad y = \alpha x + \beta$$

ἔχουν γιά γραφικές παραστάσεις εὐθεῖες γραμμές.

4. Ἡ συνάρτηση μέ τύπο $y = \frac{\alpha}{x}$ ἔχει γιά γραφική παράσταση μιά καμπύλη, πού ἀποτελεῖται ἀπό δύο κλάδους καί λέγεται **ὑπερβολή**.

5. Μέ τή βοήθεια τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως $y = \alpha x + \beta$ μποροῦμε νά λύνουμε τήν ἐξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ καί τίς ἀνισώσεις $\alpha x + \beta < 0$ ἤ $\alpha x + \beta > 0$.

6. Οἱ τιμές τῆς μεταβλητῆς x καί οἱ ἀντίστοιχες τιμές τῆς συναρτήσεως $y = \alpha x$ ὁρίζουν **ἀνάλογα ποσά**.

Οἱ τιμές τῆς μεταβλητῆς x καί οἱ ἀντίστοιχες τιμές τῆς συναρτήσεως $y = \frac{\alpha}{x}$ ὁρίζουν **ἀντιστρόφως ἀνάλογα ποσά**.

7. Ἡ ἰσότητα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ λέγεται **ἀναλογία** μέ ἄκρους ὅρους τούς α καί δ, μέσους ὅρους τούς β καί γ, ἡγούμενους τούς α καί γ καί ἑπόμενους τούς β καί δ. Ὅταν εἶναι $\beta = \gamma$, ἡ ἀναλογία λέγεται συνεχής καί ὁ β μέσος ἀνάλογος τῶν α,δ.

Στίς ἀναλογίες ἔχουμε τίς ἰδιότητες:

- Ἄν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\begin{cases} \alpha . \delta = \beta . \gamma \\ \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} \\ \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}, \quad \frac{\alpha-\beta}{\beta} = \frac{\gamma-\delta}{\delta} \\ \frac{\alpha}{\beta+\alpha} = \frac{\gamma}{\delta+\gamma}, \quad \frac{\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{\gamma}{\delta-\gamma} \end{cases}$
- Ἄν $\alpha . \delta = \beta . \gamma$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = \ldots = \frac{\alpha+\gamma+\varepsilon+\ldots}{\beta+\delta+\zeta+\ldots}$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

16. Μιά συνάρτηση φ ἔχει τύπο $\varphi(x) = 2x+1$ καί πεδίο ὁρισμοῦ $A = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}\right\}$. Βρεῖτε τό $\varphi(A)$.

17. Στό ἴδιο σύστημα ἀξόνων σχεδιάστε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων μέ τύπους $y = 3x$, $y = 3x+2$, $y = 3x-2$.
Τί παρατηρεῖτε γιά τίς εὐθεῖες ε_1, ε_2, ε_3, πού εἶναι οἱ γραφικές τους παραστάσεις;

18. Βρεῖτε γραφικά τή λύση τῶν παρακάτω ἐξισώσεων.

α) $3x-6 = 0$ β) $\frac{1}{2}x-3 = 0$ γ) $3x+2 = 2x-1$.

19. Βρεῖτε γραφικά τίς λύσεις τῶν παρακάτω ἀνισώσεων.

α) $2x+4>0$ β) $3x-6<0$ γ) $3x+1<2x-2$.

20. Ἡ γραφική παράσταση μιᾶς συναρτήσεως μέ τύπο $y = 2x+\beta$ περνάει ἀπό τό σημεῖο $A(-1,2)$. Βρεῖτε τόν ἀριθμό β καί κάνετε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως.

21. Στό ἴδιο σύστημα ἀξόνων σχεδιάστε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων μέ τύπους $y = 3x+2$ καί $y = 2x-3$. Βρεῖτε τίς συντεταγμένες τοῦ σημείου τομῆς τους.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

22. Στό ἴδιο σύστημα ἀξόνων σχεδιάστε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων μέ τύπους $y = \frac{2}{x}$ καί $y = 2x$. Βρεῖτε τίς συντεταγμένες τῶν σημείων τομῆς τους.

23. Μ' ἕνα λεωφορεῖο ταξιδεύουν 53 ἐπιβάτες. Οἱ μαθητές ἐπιβάτες πληρώνουν εἰσιτήριο 3 δρχ. καί οἱ ὑπόλοιποι 5 δρχ. Ἄν συνολικά πλήρωσαν 203 δρχ., πόσοι ἦταν οἱ μαθητές ἐπιβάτες καί πόσοι οἱ ὑπόλοιποι;

24. 1500 δρχ. μοιράζονται σέ τρία παιδιά 8, 10, καί 12 χρόνων ἀνάλογα μέ τήν ἡλικία τους. Βρεῖτε τό μερίδιο τοῦ καθενός.

25. Ἄν δυό συναρτήσεις ἔχουν τύπους $\varphi(x)=2x+1$ καί $f(x) = \frac{4}{x}$, βρεῖτε τά:

α) $\varphi(0) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) - \varphi\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot f(-2)$ β) $f(2)+\frac{1}{2}\cdot\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)$

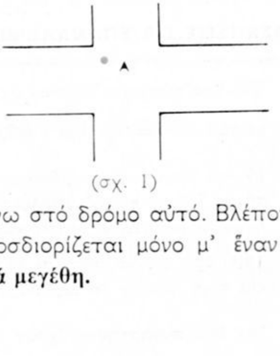
11ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

'Αριθμητικά καί διανυσματικά μεγέθη

11.1. Πολλά μεγέθη, ἀπό ἐκεῖνα πού χρησιμοποιοῦμε στήν καθημερινή μας ζωή, προσδιορίζονται ἀκριβῶς μόνο μέ ἕναν ἀριθμό. Ἔτσι π.χ. ὅταν λέμε ὅτι *«αὐτό τό δέμα ἔχει ὄγκο 3 dm^3»* ἤ *«αὐτό τό βιβλίο ἔχει πλάτος 16 cm»*, προσδιορίζουμε ἀκριβῶς τόν ὄγκο τοῦ δέματος ἤ τό πλάτος τοῦ βιβλίου. Τέτοια μεγέθη, πού προσδιορίζονται ἀκριβῶς μέ ἕναν ἀριθμό, λέγονται **ἀριθμητικά** ἤ **μονόμετρα μεγέθη.**

Ὑπάρχουν ὅμως καί μεγέθη, πού δέν μποροῦν νά προσδιοριστοῦν ἀκριβῶς μόνο μέ ἕναν ἀριθμό. Ἄν π.χ. στό ἀπέναντι σχῆμα 1 τό σημεῖο Α παριστάνει ἕνα αὐτοκίνητο, πού κινεῖται μέ ταχύτητα 50 km/h, ὁ ἀριθμός 50 δέν ἀρκεῖ, γιά νά ξέρουμε ποῦ θά βρίσκεται τό αὐτοκίνητο ὕστερα ἀπό 1 ὥρα. Θά πρέπει ἀκόμη νά ξέρουμε τό δρόμο, στόν ὁποῖο κινεῖται, καί τήν κατεύθυνσή του πάνω στό δρόμο αὐτό. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι τό μέγεθος «ταχύτητα» δέν προσδιορίζεται μόνο μ' ἕναν ἀριθμό. Τέτοια μεγέθη λέγονται **διανυσματικά μεγέθη.**

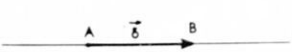


(σχ. 1)

'Η ἔννοια τοῦ διανύσματος

11.2. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, τοῦ ὁποίου τό ἕνα ἄκρο θεωρεῖται ὡς «ἀρχή» του καί τό ἄλλο θεωρεῖται ὡς «τέλος» του, λέγεται διάνυσμα. Γιά νά δηλώσουμε ὅτι ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα εἶναι διάνυσμα μέ ἀρχή τό Α καί τέλος τό Β, γράφουμε $\overrightarrow{AB}$ καί τό σχεδιάζουμε μέ ἕνα βέλος (βλ. σχ. 2). Ἕνα διάνυσμα θά σημειώνεται πιό σύντομα καί μέ ἕνα μικρό γράμμα, π.χ. $\vec{\delta}$.

'Η εὐθεία ε, πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Α καί Β, λέγεται **φορέας** ἤ **στήριγμα** τοῦ $\overrightarrow{AB}$.



(σχ. 2)

Σέ κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ διακρίνουμε:

- **Τή διεύθυνσή του**, πού εἶναι ἡ διεύθυνση τοῦ φορέα του(1).
- **Τή φορά του**, πού καθορίζεται ἀπό τήν κίνηση ἀπό τό Α πρός τό Β.
- **Τό μέτρο του**, πού εἶναι τό μῆκος τοῦ τμήματος ΑΒ καί σημειώνεται $|\overrightarrow{AB}|$.

Στό σχῆμα 3 βλέπουμε διανύσματα πού ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση, τήν ἴδια φορά καί τό ἴδιο μέτρο 3. Γιά νά ἀναφερθοῦμε σ' ἕνα ἀπ' αὐτά,

(σχ. 3)

π.χ τό $\vec{\delta}$, θά πρέπει νά ξέρουμε τήν ἀρχή του Ε. Τό διάνυσμα αὐτό $\vec{\delta}$, πού ἔχει ἀρχή ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Ε, λέγεται **ἐφαρμοστό** στό Ε.

11.3. Τά διανύσματα, πού ἔχουν τό ἴδιο στήριγμα ἤ παράλληλα στηρίγματα, λέγονται **παράλληλα διανύσματα** (βλ. σχ. 4). Τά παράλ-

(σχ. 4)

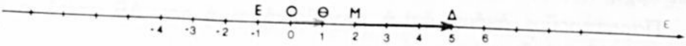
(σχ. 5)

(σχ. 6)

ληλα διανύσματα ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση. Δύο παράλληλα διανύσματα θά λέγονται **ὁμόρροπα**, ἄν ἔχουν τήν ἴδια φορά (βλ. σχ. 5), καί **ἀντίρροπα**, ἄν ἔχουν ἀντίθετη φορά (βλ. σχ. 6).

Διανύσματα ἑνός ἄξονα

11.4. Ἄν ἔχουμε ἕναν ἄξονα ε μέ ἀρχή Ο καί ἕνα ὁποιοδήποτε ση-



(σχ. 7)

μεῖο Μ, ὁ ἀριθμός πού ἀντιστοιχίζεται στό Μ θά λέγεται **τετμημένη τοῦ σημείου Μ**. Ἔτσι π.χ. τά σημεῖα Μ, Δ, Ε,... τοῦ σχήματος ἔχουν τετμημένες τούς ἀριθμούς 2,5,–1,... ἀντίστοιχα καί σημειώνονται Μ(2), Δ(5), Ε(–1),...

Ἄν Θ εἶναι τό σημεῖο πού ἔχει τετμημένη 1, τό διάνυσμα $\overrightarrow{O\Theta}$ λέγεται *μοναδιαῖο διάνυσμα* τοῦ ἄξονα καί ἡ φορά του ὁρίζει τή *«θετική φορά»* τοῦ ἄξονα. Ἔτσι κάθε διάνυσμα ὁμόρροπο πρός τό $\overrightarrow{O\Theta}$ ἔχει

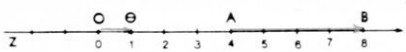
(1) Στά μαθηματικά θεωροῦμε ὅτι ὅλες οἱ εὐθεῖες οἱ παράλληλες μεταξύ τους ὁρίζουν μιά **διεύθυνση**. Ἔτσι, ὅταν μιλᾶμε γιά «διεύθυνση» μιᾶς εὐθείας ε, ἐννοοῦμε τή διεύθυνση, πού ὁρίζεται ἀπό τήν ε καί ὅλες τίς παράλληλές της.

θετική φορά, ὅπως π.χ. τό $\overrightarrow{M\Delta}$, ἐνῶ κάθε διάνυσμα ἀντίρροπο πρός τό $\overrightarrow{O\Theta}$ ἔχει **ἀρνητική φορά,** ὅπως π.χ. τό $\overrightarrow{\Delta\Theta}$.

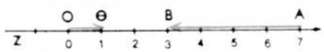
Τό μέτρο $|\overrightarrow{AB}|$ ἑνός ὁποιουδήποτε διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ τοῦ ἄξονα εἶναι πάντα θετικός ἀριθμός. Ἀντιστοιχίζουμε τώρα στό $\overrightarrow{AB}$ ἕναν ἄλλο ἀριθμό, θετικό ἤ ἀρνητικό, ὁ ὁποῖος σημειώνεται μέ $\overline{AB}$ καί ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα:

$$\overline{AB} = \begin{cases} +\ |\overrightarrow{AB}|, \text{ ἄν τό } \overrightarrow{AB} \text{ ἔχει θετική φορά.} \\ -\ |\overrightarrow{AB}|, \text{ ἄν τό } \overrightarrow{AB} \text{ ἔχει ἀρνητική φορά.} \end{cases}$$

Ὁ ἀριθμός $\overline{AB}$ λέγεται **ἀλγεβρική τιμή** τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.



(σχ. 8)



(σχ. 9)

Στά σχήματα 8 καί 9 ἔχουμε ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μέ $|\overrightarrow{AB}| = 4$.

Στό σχῆμα 8 εἶναι $\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = 4$, ἐνῶ στό σχῆμα 9 εἶναι $\overline{AB} = -|\overrightarrow{AB}| = -4$.

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ἡ ἀλγεβρική τιμή ἑνός διανύσματος δίνει ὄχι μόνο τό μέτρο τοῦ διανύσματος ἀλλά καί τή φορά του πάνω στόν ἄξονα.

11.5. Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς διανύσματος καταλαβαίνουμε ὅτι, π.χ. στό σχῆμα 8, ἔχουμε

$$\overline{OA} = 4, \quad \overline{OB} = 8, \quad \overline{OZ} = -2,$$

δηλαδή **ἡ ἀλγεβρική τιμή ἑνός ὁποιουδήποτε διανύσματος τοῦ ἄξονα, πού ἔχει ἀρχή τό O, εἶναι ἴση μέ τήν τετμημένη τοῦ τέλους του.**

Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ $\overrightarrow{AB}$ στά δύο παραπάνω σχήματα εἶναι:

στό σχῆμα 8: $\overline{AB} = 4 = 8-4 = \overline{OB} - \overline{OA}$ στό σχῆμα 9: $\overline{AB} = -4 = 3-7 = \overline{OB} - \overline{OA}$.

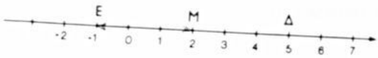
Ἔτσι ἔχουμε πάντοτε, ἀφοῦ $\overline{OB}$ = τετμημένη τοῦ B καί $\overline{OA}$ = τετμημένη τοῦ A,

$$(1) \qquad \boxed{\overline{AB} = (\text{Τετμημένη B}) - (\text{τετμημένη A})}$$

Δηλαδή **ἡ ἀλγεβρική τιμή ἑνός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ βρίσκεται, ἄν ἀπό τήν τετμημένη τοῦ τέλους του ἀφαιρέσουμε τήν τετμημένη τῆς ἀρχῆς του.**

Παράδειγμα 1: Νά βρεθοῦν οἱ ἀλγεβρικές τιμές τῶν $\overrightarrow{EM}$ καί $\overrightarrow{\Delta E}$, ὅταν τά Ε, Δ, Μ ἔχουν ἀντίστοιχα τετμημένες -1, 5, 2.

Λύση: Ἐφαρμόζοντας τόν τύπο (1) βρίσκουμε (βλ. σχ. 10)

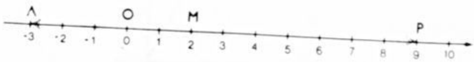


(σχ. 10)

$$\overline{EM} = \overline{OM} - \overline{OE} = 2-(-1) = 3$$
$$\overline{\Delta E} = \overline{OE} - \overline{O\Delta} = -1-5 = -6$$

Παράδειγμα 2: Νά βρεθοῦν τά διανύσματα $\overrightarrow{M\Lambda}$ καί $\overrightarrow{MP}$ ἑνός ἄξονα, πού ἔχουν ἀρχή τό σημεῖο Μ(2) καί ἀλγεβρικές τιμές $\overline{M\Lambda}=-5$ καί $\overline{MP}=7$.

Λύση: Ἀρκεῖ νά προσδιορίσουμε τίς τετμημένες τῶν Λ καί Ρ ἤ τίς ἀλ-



(σχ. 11)

γεβρικές τιμές τῶν $\overrightarrow{O\Lambda}$ καί $\overrightarrow{OP}$. Ἀπό τόν τύπο (1) ἔχουμε

$$\overline{M\Lambda} = \overline{O\Lambda} - \overline{OM} \Leftrightarrow -5 = \overline{O\Lambda} - 2 \Leftrightarrow \overline{O\Lambda} = -5+2 = -3$$
$$\overline{MP} = \overline{OP} - \overline{OM} \Leftrightarrow 7 = \overline{OP} - 2 \Leftrightarrow \overline{OP} = 7+2 = 9$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ ἀλγεβρικές τιμές τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma E}$, ὅταν δίνονται τά σημεῖα Α(–5), Β(2), Γ(–3), $\Delta\left(-\frac{2}{5}\right)$ καί $E\left(-\frac{14}{5}\right)$ ἑνός ἄξονα.

2. Νά βρεθεῖ ἡ ἀλγεβρική τιμή ἑνός διανύσματος, ἄν:
α) Ἡ τετμημένη τῆς ἀρχῆς του εἶναι 7 καί ἡ τετμημένη τοῦ τέλους 5,
β) » » » » » » -3 » » » » » $-\frac{2}{3}$,
γ) » » » » » » 2 » » » » » -7,
δ) » » » » » » $-\frac{4}{5}$ » » » » » $-\frac{5}{9}$.

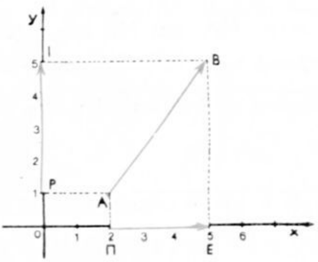
3. Νά βρεθεῖ ἡ τετμημένη τῆς ἀρχῆς διανύσματος, ἄν:
α) Ἡ τετμημένη τοῦ τέλους του εἶναι -4 καί ἡ ἀλγεβρική του τιμή εἶναι $+5$,
β) » » » » » » -1 » » » » » » -5,
γ) » » » » » » $+2$ » » » » » » -1.

Πάνω σ' ἕναν ἄξονα δίνονται τά σημεῖα Α(3) καί Β(–2). Νά βρεῖτε:

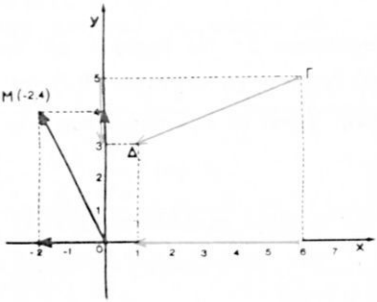
α) Τήν ἀλγεβρική τιμή τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.
β) Τήν τετμημένη τοῦ μέσου Μ τοῦ τμήματος ΑΒ.

Συντεταγμένες διανύσματος

11·6. Θεωροῦμε ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα ἀξόνων καί ἕνα ὁρισμένο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ τοῦ ἐπιπέδου μέ ἀρχή τό σημεῖο Α (2,1) καί τέλος τό σημεῖο Β (5,5).



(σχ. 12)



(σχ. 13)

Ἄν ἀπό τά σημεῖα Α καί Β (βλ. σχ. 12) φέρουμε τά τμήματα ΑΠ, ΑΡ, ΒΕ, ΒΙ κάθετα πρός τούς ἄξονες Ox καί Oy, τότε:

- Τό διάνυσμα $\overrightarrow{\Pi E}$ λέγεται **προβολή τοῦ $\overrightarrow{AB}$ στόν ἄξονα Ox** καί ἡ ἀλγεβρική τιμή του $\alpha = \overline{\Pi E} = 3$ λέγεται **τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{AB}$**.
- Τό διάνυσμα $\overrightarrow{PI}$ λέγεται **προβολή τοῦ $\overrightarrow{AB}$ στόν ἄξονα Oy** καί ἡ ἀλγεβρική τιμή του $\beta = \overline{PI} = 4$ λέγεται **τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{AB}$**.
- Τό διατεταγμένο ζεῦγος (3,4), πού ἔχει στοιχεῖα του τήν τετμημένη καί τήν τεταγμένη τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, ἀποτελεῖ τίς **συντεταγμένες τοῦ $\overrightarrow{AB}$** καί γράφουμε

$$\overrightarrow{AB} = (3,4).$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι σέ κάθε διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου μποροῦμε νά ἀντιστοιχίσουμε ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος ἀριθμῶν, τίς συντεταγμένες του. Στό σχῆμα 13 ἔχουμε ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, πού ἔχει συντεταγμένες (–5,–2).

11·7. Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ (βλ. σχ. 13) πού ἔχει ἀρχή τό Ο καί τέλος ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, π.χ. τό $(-2,4)$. Ἀπό τόν ὁρισμό τῶν συντεταγμένων τοῦ $\overrightarrow{OM}$ καταλαβαίνουμε ὅτι

$$\overrightarrow{OM} = (-2,4),$$

δηλαδή, **οἱ συντεταγμένες ἑνός ὁποιουδήποτε διανύσματος τοῦ ἐπιπέδου πού ἔχει ἀρχή τό Ο εἶναι ἴσες μέ τίς συντεταγμένες τοῦ τέλους του.** Ἕνα τέτοιο διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ λέγεται καί **διανυσματική ἀκτίνα τοῦ σημείου M.**

Ἄς πάρουμε πάλι τό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ τοῦ σχήματος 12, πού ἔχει συντεταγμένες $\alpha = 3$ καί $\beta = 4$. Οἱ συντεταγμένες αὐτές γράφονται $\alpha = \overline{\Pi E} = \overline{OE} - \overline{O\Pi} = 5-2$, $\beta = \overline{P\Gamma} = \overline{O\Gamma} - \overline{OP} = 5-1$ καί συνεπῶς ἔχουμε

(2)	τετμημένη $\overrightarrow{AB}$ = (τετμημένη B) — (τετμημένη A) τεταγμένη $\overrightarrow{AB}$ = (τεταγμένη B) —(τεταγμένη A)

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι **οἱ συντεταγμένες ἑνός διανύσματος βρίσκονται, ἄν ἀπό τίς συντεταγμένες τοῦ τέλους του ἀφαιρέσουμε τίς ὁμώνυμες συντεταγμένες τῆς ἀρχῆς του.**

Παράδειγμα 1: Δίνονται τά σημεῖα $M(-2,4)$, $E(3,-1)$, $Z(-2,-3)$. Νά βρεθοῦν οἱ συντεταγμένες τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{EZ}$, $\overrightarrow{ZM}$.

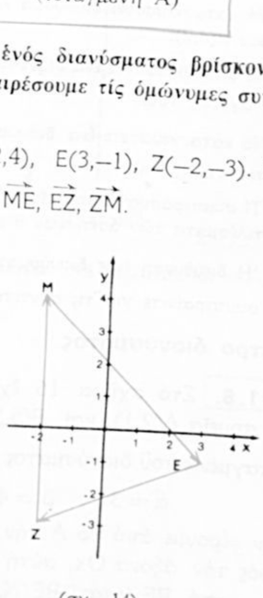
Λύση: Ἄν σέ κάθε διάνυσμα ὀνομάζουμε α τήν τετμημένη του καί β τήν τεταγμένη του, ἔχουμε:

Γιά τό $\overrightarrow{ME}$: $\alpha = 3-(-2) = 5$,
$\beta = -1-4 = -5$.

Γιά τό $\overrightarrow{EZ}$: $\alpha = -2-3 = -5$,
$\beta = -3-(-1) = -2$.

Γιά τό $\overrightarrow{ZM}$: $\alpha = -2-(-2) = 0$,
$\beta = 4-(-3) = 7$.

Εἶναι λοιπόν $\overrightarrow{ME} = (5,-5)$, $\overrightarrow{EZ} = (-5,-2)$, $\overrightarrow{ZM} = (0,7)$.



(σχ. 14)

Παράδειγμα 2: Νά κατασκευασθεῖ ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{\Theta H}$, πού ἔχει ἀρχή τό σημεῖο $\Theta(-1,4)$ καί συντεταγμένες $(4,-5)$.

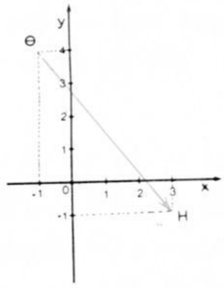
Λύση. Ἀρκεῖ νά προσδιορίσουμε τίς συντεταγμένες τοῦ τέλους του Η.

Ἄν ὀνομάσουμε (x,y) τίς συντεταγμένες τοῦ Η, θά ἔχουμε ἀπό τίς (2)

$$4 = x - (-1) \Leftrightarrow x = 4 - 1 = 3$$

$$-5 = y - 4 \quad \Leftrightarrow y = -5 + 4 = -1$$

Δηλαδή τό ζητούμενο σημεῖο Η ἔχει συντεταγμένες $(3, -1)$.



(σχ. 15)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5. Νά κατασκευασθεῖ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ πού ἔχει συντεταγμένες (2,2) καί ἀρχή τό σημεῖο Α(2,2).

6. Ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει κορυφές τά σημεῖα Α(−2,−2), Β(3,3) καί Γ(3,−2). Νά βρεῖτε τίς συντεταγμένες τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ καί $\overrightarrow{\Gamma A}$.

7. Νά κατασκευασθεῖ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$, πού ἔχει συντεταγμένες (2,1) καί τέλος τό σημεῖο Β(4,2).

8. Νά κατασκευάσετε ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μέ Α(1,2) καί Β(1,4) καί νά βρεῖτε τίς συντεταγμένες του.

9. Νά κατασκευάσετε ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ μέ Γ(2,−1) καί Δ(2,3) καί νά βρεῖτε τίς συντεταγμένες του.

10. Τί συμπεράσματα μπορεῖτε νά διατυπώσετε μελετώντας τά σχήματα καί τά ἀποτελέσματα τῶν ἀσκήσεων 8 καί 9;

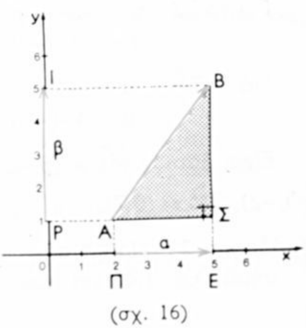
11. Ἡ διεύθυνση ἑνός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ σχηματίζει μέ τόν ἄξονα Οx γωνία 45°. Τί συμπεραίνετε γιά τίς συντεταγμένες α καί β τοῦ $\overrightarrow{AB}$;

Μέτρο διανύσματος

11.8. Στό σχῆμα 16 ἔχουμε πάλι ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$, πού ἔχει ἄκρα τά σημεῖα Α(2,1) καί Β(5,5). Οἱ συντεταγμένες τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ εἶναι

$$\alpha = 3 \quad , \quad \beta = 4.$$

Ἄν φέρουμε ἀπό τό Α τήν παράλληλη πρός τόν ἄξονα Οx, αὐτή θά εἶναι κάθετη στή ΒΕ (γιατί ΒΕ//Οy). Ἔτσι τό τρίγωνο ΑΒΣ εἶναι ὀρθογώνιο στό Σ καί ἔχει κάθετες πλευρές ΑΣ καί ΣΒ ἴσες μέ τά εὐθύγραμμα τμήματα ΠΕ καί ΡΙ ἀντίστοιχα (ὅπως φαίνεται ἀπό τά ὀρθο-



(σχ. 16)

γώνια ΑΣΕΠ καί ΣΒΙΡ). 'Εφαρμόζοντας τό πυθαγόρειο θεώρημα στό τρίγωνο ΑΣΒ έχουμε

$$(AB)^2 = (A\Sigma)^2 + (\Sigma B)^2 = 3^2+4^2 \text{ ή } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5.$$

Γενικά λοιπόν τό μέτρο ένός διανύσματος $\overrightarrow{AB} = (\alpha,\beta)$ είναι

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \qquad (3)$$

Δηλαδή **τό μέτρο ένός διανύσματος είναι ίσο μέ τήν τετραγωνική ρίζα τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν συντεταγμένων του.**

Παράδειγμα : Δίνονται τά σημεῖα $M(-2,4)$, $E(3,-1)$ καί $Z(-2,-3)$. Νά βρεθοῦν τά μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΜΕΖ.

Λύση: Στό πρδ. 1 τῆς § 11.7 βρήκαμε

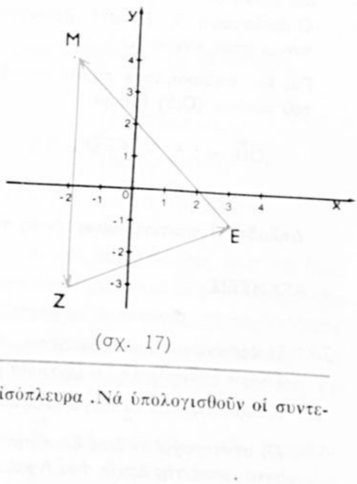
$\overrightarrow{ME} = (5,-5)$, $\overrightarrow{EZ} = (-5,-2)$, $\overrightarrow{ZM} = (0,7)$

'Από τόν τύπο (3) έχουμε

$|\overrightarrow{ME}| = \sqrt{5^2+(-5)^2} = \sqrt{50} \simeq 7{,}07$

$|\overrightarrow{EZ}| = \sqrt{(-5)^2+(-2)^2} = \sqrt{29} \simeq 5{,}38$

$|\overrightarrow{ZM}| = \sqrt{0^2+7^2} = \sqrt{49} = 7$



(σχ. 17)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Στό σχῆμα 18 τά τρίγωνα ΟΑΒ καί ΒΓΔ εἶναι ἰσόπλευρα. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ συντεταγμένες τοῦ $\overrightarrow{A\Gamma}$.**

Λύση : 'Επειδή τά ΰψη στά ισόπλευρα τρίγωνα είναι καί διάμεσοι, είναι φανερό ότι ή τετμημένη α τοῦ $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι $\alpha = 8-3 = 5$.

'Η τεταγμένη β είναι ίση μέ τή διαφορά τῶν ΰψῶν τῶν τριγώνων ΟΑΒ καί ΒΓΔ. 'Από τό τρίγωνο ΟΠΑ έχουμε

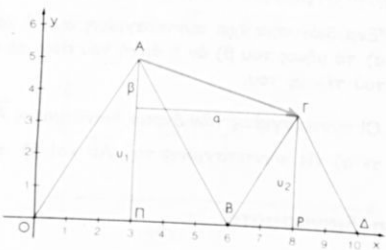
$\upsilon_1 = \sqrt{6^2-3^2} = \sqrt{27} \simeq 5{,}19$

καί άπό τό ΒΡΓ έχουμε

$\upsilon_2 = \sqrt{4^2-2^2} = \sqrt{12} \simeq 3{,}46.$

Συνεπῶς

$\beta = 5{,}19 - 3{,}46 = 1{,}73.$



(σχ. 18)

2. **Σ' ἕνα σύστημα ὀρθογώνιων ἀξόνων παίρνουμε ὅλα τά σημεῖα $M_1(\alpha_1,\beta_1)$, $M_2(\alpha_2,\beta_2)$, $M_3(\alpha_3,\beta_3)$,... πού οἱ συντεταγμένες τους εἶναι λύσεις τῆς ἐξισώσεως**

$$(1) \quad x^2+y^2 = 25.$$

Νά δειχθεῖ ὅτι κάθε λύση βρίσκεται στόν κύκλο, πού ἔχει κέντρο O καί ἀκτίνα 5. Νά δειχθεῖ ἀκόμη ὅτι, ἄν N(γ,δ) εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ κύκλου αὐτοῦ, οἱ συντεταγμένες του ἐπαληθεύουν τήν (1).

Λύση: Ἄν M_κ $(\alpha_\kappa,\beta_\kappa)$ εἶναι ἕνα σημεῖο πού οἱ συντεταγμένες του ἐπαληθεύουν τήν (1), θά ἔχουμε (βλ. σχ. 19)

$$\alpha_\kappa^2 + \beta_\kappa^2 = 25.$$

Τότε ὅμως θά ἔχουμε

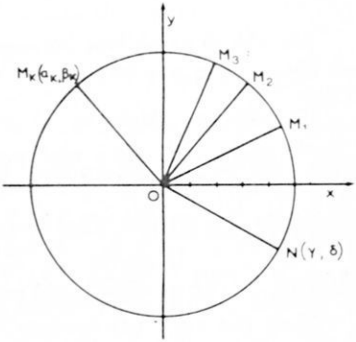
$$|\overrightarrow{OM_\kappa}| = \sqrt{\alpha_\kappa^2+\beta_\kappa^2} = \sqrt{25} = 5$$

καί συνεπῶς τό M_κ ἀπέχει ἀπό τό O ἀπόσταση 5, δηλαδή βρίσκεται πάνω στόν κύκλο (O,5).

Γιά ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο N(γ,δ) τοῦ κύκλου (O,5) ἔχουμε

$$|\overrightarrow{ON}| = 5 \text{ ἤ } \sqrt{\gamma^2+\delta^2} = 5 \text{ ἤ}$$

$$\gamma^2+\delta^2 = 25$$



(σχ. 19)

Δηλαδή οἱ συντεταγμένες (γ,δ) τοῦ N ἐπαληθεύουν τήν (1).

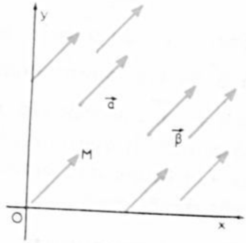
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

12. Σέ ὀρθογώνιο σύστημα ἀξόνων δίνονται τά σημεῖα Α,Β,Γ μέ συντεταγμένες ἀντίστοιχα (−2,−3), (2,1), (2,3). Νά βρεῖτε τά μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.
13. Νά ἐξετάσετε ἄν τό τρίγωνο μέ κορυφές Α (−2,8), Β(−1,1) καί Γ (3,3) εἶναι ἰσοσκελές.
14. Οἱ συντεταγμένες ἑνός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ εἶναι $\alpha = 3$ καί $\beta = 4$. Νά βρεῖτε τίς συντεταγμένες τῆς ἀρχῆς του Α καί τό μέτρο του, ἄν οἱ συντεταγμένες τοῦ τέλους του Β εἶναι (4,2).
15. Ἕνα διάνυσμα ἔχει συντεταγμένες $\alpha = 2$ καί $\beta = 0$. Νά βρεῖτε α) τό μῆκος του β) ἄν ἡ ἀρχή του εἶναι τό σημεῖο Α(−1,−1) τίς συντεταγμένες τοῦ τέλους του.
16. Οἱ συντεταγμένες τῶν ἄκρων διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ εἶναι Α(2,−8) καί Β(−3,4). Νά βρεῖτε α) τίς συντεταγμένες τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καί β) τό $|\overrightarrow{AB}|$.

Ἴσα διανύσματα

11.9. Στό σύνολο Δ τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου θεωροῦμε τόν προτασιακό τύπο

$p(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$: *«Τά διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ ἔχουν*
τήν ἴδια διεύθυνση,
τήν ἴδια φορά,
τό ἴδιο μέτρο».



(σχ. 20)

Ἡ διμελής σχέση πού ὁρίζεται ἀπό τόν προτασιακό αὐτό τύπο εἶναι *ἀνακλαστική, συμμετρική καί μεταβατική,* δηλαδή εἶναι *σχέση ἰσοδυναμίας.* Δύο λοιπόν διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$, πού ἱκανοποιοῦν τή σχέση αὐτή, εἶναι *«ἰσοδύναμα».* Δύο τέτοια ἰσοδύναμα διανύσματα θά λέγονται **ἴσα** καί θά γράφουμε

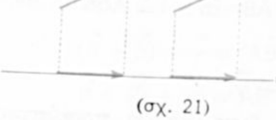
$$\boxed{\vec{\alpha} = \vec{\beta}}$$

Συνεπῶς στήν ἰσότητα τῶν διανυσμάτων ἔχουμε τίς ἰδιότητες:

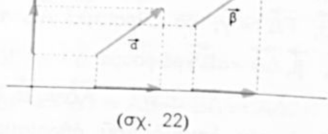
I.	$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$, γιά κάθε $\vec{\alpha} \in \Delta$	(ἀνακλαστική)
II.	Ἄν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$, τότε καί $\vec{\beta} = \vec{\alpha}$	(συμμετρική)
III.	Ἄν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ καί $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$	(μεταβατική)

Ἀφοῦ ἡ ἰσότητα τῶν διανυσμάτων εἶναι μιά ἰσοδυναμία, ὅλα τά διανύσματα, πού εἶναι ἴσα μεταξύ τους, ἀποτελοῦν μιά *«κλάση ἰσοδυναμίας»* (βλ. § 4.13), ἡ ὁποία θά λέγεται τώρα **ἐλεύθερο διάνυσμα.** Ἔτσι ὁ ὅρος *«ἐλεύθερο διάνυσμα»* σημαίνει οὐσιαστικά ἕνα διάνυσμα, πού μπορεῖ νά κινηθεῖ παράλληλα πρός τόν ἑαυτό του διατηρώντας τή φορά του καί τό μέτρο του.

Ἄν ἔχουμε δύο ἴσα διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ καί πάρουμε τίς προβολές τους σέ μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία ε (βλ. σχ. 21), διαπιστώνουμε εὔκολα (μέ ἕνα διαβήτη) ὅτι οἱ προβολές τους εἶναι ἐπίσης ἴσα διανύσματα. Ἀπ' αὐτό καταλαβαίνουμε ὅτι καί οἱ προβολές τῶν $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ στούς ἄξονες



(σχ. 21)



(σχ. 22)

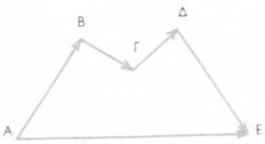
ἑνός ὀρθογώνιου συστήματος ἀξόνων εἶναι ἐπίσης ἴσα διανύσματα, δηλαδή ὅτι:

> Τά ἴσα διανύσματα ἔχουν τίς ὁμώνυμες συντεταγμένες τους ἴσες.

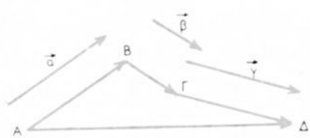
Ἔτσι π.χ. ἄν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ καί τό $\vec{\alpha}$ ἔχει συντεταγμένες (2, 1), τότε καί τό $\vec{\beta}$ θά ἔχει συντεταγμένες (2,1) καθώς καί κάθε ἄλλο διάνυσμα ἴσο πρός τό $\vec{\alpha}$. Συνεπῶς ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα θά προσδιορίζεται ἐντελῶς μόνο ἀπό τίς συντεταγμένες του (ἐνῶ, ὅπως εἴπαμε, γιά νά προσδιορίσουμε ἕνα ἐφαρμοστό διάνυσμα, θά πρέπει νά ξέρουμε καί τίς συντεταγμένες τῆς ἀρχῆς του).

Πρόσθεση διανυσμάτων

11. 10. Ἄν προσέξουμε τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta E}$ στό



(σχ. 23)



(σχ. 24)

σχῆμα 23, βλέπουμε ὅτι τό τέλος τοῦ καθενός συμπίπτει μέ τήν ἀρχή τοῦ ἑπομένου του. Τέτοια διανύσματα λέγονται **διαδοχικά διανύσματα.**

Ἄν ἔχουμε διαδοχικά διανύσματα, τό διάνυσμα, πού ἔχει ἀρχή τήν ἀρχή τοῦ πρώτου καί τέλος τό τέλος τοῦ τελευταίου, λέγεται **ἄθροισμα** τῶν διαδοχικῶν διανυσμάτων. Ἔτσι π.χ. ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν διανυσμάτων τοῦ σχήματος 23 εἶναι τό $\overrightarrow{AE}$ καί, γιά νά τό δηλώσουμε αὐτό, γράφουμε

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta E}.$$

Γενικότερα, ἄν ἔχουμε ὁποιαδήποτε διανύσματα, π.χ. τά $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ (βλ. σχ. 24) καί πάρουμε τά ἴσα τους διαδοχικά διανύσματα $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{\gamma}$, τό ἄθροισμα $\overrightarrow{A\Delta}$ τῶν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγεται **ἄθροισμα τῶν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$** καί γράφουμε

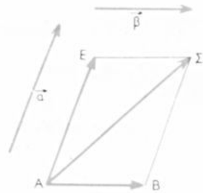
$$\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}.$$

Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ ἀθροίσματος διανυσμάτων προκύπτουν τά ἀκόλουθα:

α) Ἂν ἔχουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ καί τά καταστήσουμε ἐφαρμοστά σ' ἕνα σημεῖο Α παίρνοντας $\vec{AE} = \vec{\alpha}$ καί $\vec{AB} = \vec{\beta}$, τότε στό παραλληλόγραμμο ΑΕΣΒ, πού σχηματίζεται, ἔχουμε

$$\vec{A\Sigma} = \vec{AE} + \vec{E\Sigma} = \vec{AE} + \vec{AB} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

Δηλαδή:



(σχ. 25)

> Τό ἄθροισμα δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ εἶναι ἴσο μέ τό διάνυσμα $\vec{A\Sigma}$ πού ὁρίζει ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου, τό ὁποῖο ἔχει πλευρές $AE = |\vec{\alpha}|$ καί $AB = |\vec{\beta}|$.

β) Στό παραλληλόγραμμο ΑΕΣΒ (βλ. σχ. 25) ἔχουμε ἀκόμη

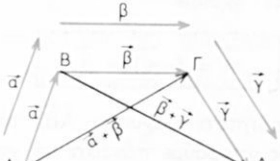
$$\vec{A\Sigma} = \vec{AB} + \vec{B\Sigma} = \vec{AB} + \vec{AE} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}.$$

Δηλαδή εἶναι

$$\boxed{\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}}$$

καί συνεπῶς στήν πρόσθεση διανυσμάτων ἰσχύει ἡ *«ἀντιμεταθετική»* ἰδιότητα.

γ) Ἂν ἔχουμε τρία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ καί πάρουμε τά ἀντίστοιχά τους διαδοχικά $\vec{AB} = \vec{\alpha}$, $\vec{B\Gamma} = \vec{\beta}$, $\vec{\Gamma\Delta} = \vec{\gamma}$, παρατηροῦμε ὅτι



(σχ. 26)

$$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = (\vec{AB} + \vec{B\Gamma}) + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{A\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{A\Delta}$$

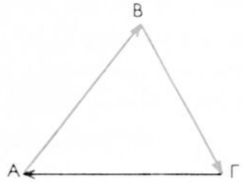
$$\vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{AB} + (\vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta}) = \vec{AB} + \vec{B\Delta} = \vec{A\Delta}.$$

Δηλαδή ἔχουμε

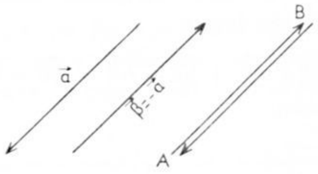
$$\boxed{(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})}$$

Ἔτσι, στήν πρόσθεση τῶν διανυσμάτων ἰσχύει καί ἡ *«προσεταιριστική»* ἰδιότητα.

11. 11. Τό ἄθροισμα τῶν τριῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma A}$ (βλ. σχ. 27) θά εἶναι, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό, ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$, τοῦ



(σχ. 27)



(σχ. 28)

ὁποίου τά δύο ἄκρα συμπίπτουν. Ἕνα τέτοιο διάνυσμα, πού ἡ ἀρχή του συμπίπτει μέ τό τέλος του, λέγεται **μηδενικό διάνυσμα** καί σημειώνεται μέ $\vec{0}$. Εἶναι φανερό ὅτι γιά κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ μποροῦμε νά γράφουμε τήν ἰσότητα

$$\boxed{\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}}$$

καί συνεπῶς τό $\vec{0}$ εἶναι *«οὐδέτερο στοιχεῖο»* τῆς προσθέσεως.

Στό μηδενικό διάνυσμα καταλήγουμε πάντοτε, ὅταν προσθέτουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ πού ἔχουν **τήν ἴδια διεύθυνση, τό ἴδιο μέτρο** καί **ἀντίθετη φορά** (βλ. σχ. 28). Δυό τέτοια διανύσματα λέγονται **ἀντίθετα διανύσματα**. Ἕνα διάνυσμα, πού εἶναι ἀντίθετο πρός τό διάνυσμα $\vec{\alpha}$, σημειώνεται μέ $-\vec{\alpha}$ καί ἔτσι ἔχουμε

$$\boxed{\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}}$$

Ἄν ἔχουμε ἕνα ὁποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$, τό διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$ εἶναι ἀντίθετό του καί συνεπῶς μποροῦμε πάντοτε νά γράφουμε

$$\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}}$$

Ἀφαίρεση διανυσμάτων

11. 12. Ἄν ἔχουμε δυό ὁποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$, ὀνομάζουμε **διαφορά τῶν $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$,** καί σημειώνουμε μέ $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, ἕνα διάνυσμα $\vec{x}$ τέτοιο, ὥστε

$$\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha}$$

Ἔτσι οἱ δυό ἰσότητες

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{x} \quad \text{καί} \quad \vec{\alpha} = \vec{\beta} + \vec{x}$$

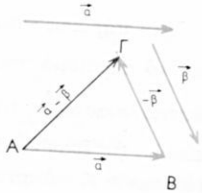
εἶναι ἰσοδύναμες.

Ἄν τώρα καί στά δύο μέλη τῆς ἰσότητας $\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha}$ προσθέσουμε τό διάνυσμα $-\vec{\beta}$ (δηλαδή τό ἀντίθετο τοῦ $\vec{\beta}$), ἔχουμε διαδοχικά

$$(-\vec{\beta}) + (\vec{\beta} + \vec{x}) = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$$
$$[(-\vec{\beta}) + \vec{\beta}] + \vec{x} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$$
$$\vec{0} + \vec{x} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$$
$$\vec{x} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$$

Συνεπῶς

$$\boxed{\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})}$$



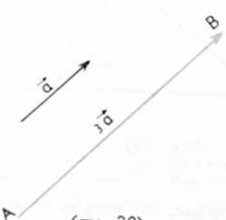
(σχ. 29)

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, **γιά νά βροῦμε τή διαφορά $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, πρέπει νά προσθέσουμε στό $\vec{\alpha}$ τό ἀντίθετο τοῦ $\vec{\beta}$.** Ἡ ἐργασία αὐτή δείχνεται στό σχῆμα 29.

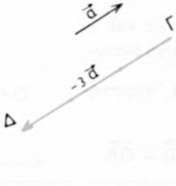
Γινόμενο διανύσματος μέ ἀριθμό

11. 13. Ἄν θεωρήσουμε ἕνα ὁρισμένο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ καί ἕνα θετικό ἀριθμό, π.χ. τόν 3, ὁρίζουμε ὅτι:

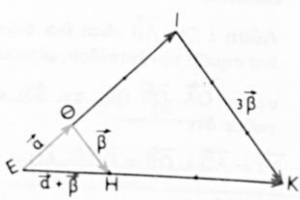
- Τό γινόμενο $3\vec{\alpha}$ παριστάνει ἕνα διάνυσμα (βλ. σχ. 30) ὁμόρροπο πρός τό $\vec{\alpha}$ μέ μέτρο τριπλάσιο ἀπό τό μέτρο τοῦ $\vec{\alpha}$.
- Τό γινόμενο $-3\vec{\alpha}$ παριστάνει ἕνα διάνυσμα ἀντίρροπο πρός τό $\vec{\alpha}$ μέ μέτρο τριπλάσιο ἀπό τό μέτρο τοῦ $\vec{\alpha}$ (βλ. σχ. 31).



(σχ. 30)



(σχ. 31)



(σχ. 32)

Γενικότερα ἄν ἔχουμε ἕνα θετικό ἀριθμό λ,

- ἡ ἰσότητα $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{\alpha}$ σημαίνει ὅτι τό $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἕνα διάνυσμα ὁμόρροπο πρός τό $\vec{\alpha}$ πού ἔχει μέτρο λ φορές τό μέτρο τοῦ $\vec{\alpha}$,
- ἡ ἰσότητα $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -\lambda\vec{\alpha}$ σημαίνει ὅτι τό $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι διάνυσμα ἀντίρροπο πρός τό $\vec{\alpha}$ πού ἔχει πάλι μέτρο λ φορές τό μέτρο τοῦ $\vec{\alpha}$.

Ἔτσι λοιπόν τά δύο διανύσματα $\lambda\vec{\alpha}$ καί $-\lambda\vec{\alpha}$ εἶναι ἀντίθετα γιά κάθε $\lambda \neq 0$.

11. 14. Ἄς πάρουμε τώρα δύο διαδοχικά διανύσματα $\overrightarrow{E\Theta} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\Theta H} = \vec{\beta}$ καί τό ἄθροισμά τους $\overrightarrow{EH} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

Ἄν κατασκευάσουμε τά διανύσματα $\overrightarrow{EI} = 3\vec{\alpha}$ καί $\overrightarrow{IK} = 3\vec{\beta}$, διαπιστώνουμε εὔκολα (μέ ἕναν κανόνα) ὅτι ὁ φορέας τοῦ $\overrightarrow{EH}$ (βλ. σχ. 32) διέρχεται ἀπό τό σημεῖο K. Διαπιστώνουμε ἀκόμη (μέ ἕνα διαβήτη) ὅτι τό διάνυσμα $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{IK} = 3\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ εἶναι τριπλάσιο ἀπό τό $\overrightarrow{EH}$. Ἔχουμε δηλαδή $3\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EK}$ ἤ τελικά $3(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 3\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$

Γενικότερα ἄν $\lambda \in R$, τότε:

$$\boxed{\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}}$$

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ὁ **πολλαπλασιασμός ἀριθμοῦ ἐπί διάνυσμα** *«ἐπιμερίζει»* **τήν πρόσθεση τῶν διανυσμάτων.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

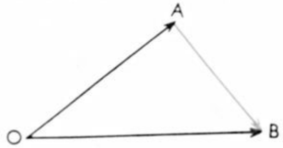
1. **Νά δικαιολογήσετε γιατί ἕνα ὁποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μποροῦμε νά τό γράψουμε**

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},$$

ὅπου O εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου.

Λύση : Ἄν $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἕνα διάνυσμα καί O ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, φέρνουμε τά διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ (βλ. σχ. 33) καί παρατηροῦμε ὅτι

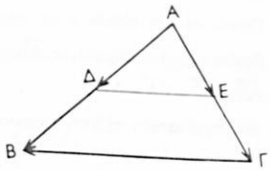
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$



(σχ. 33)

2. **Νά δικαιολογήσετε μέ τά διανύσματα ὅτι τό εὐθύγραμμο τμῆμα, πού συνδέει τά μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου, εἶναι παράλληλο πρός τήν τρίτη πλευρά καί ἴσο μέ τό μισό της.**

Λύση: Ἂν Δ καί Ε εἶναι τά μέσα τῶν ΑΒ καί ΑΓ, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο παράδειγμα θά ἔχουμε $\vec{E\Delta} = \vec{A\Delta} - \vec{AE} =$
$= \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{A\Gamma} = \frac{1}{2}(\vec{AB} - \vec{A\Gamma}) =$
$= \frac{1}{2}\vec{\Gamma B}$. Αὐτό σημαίνει ὅτι τό $\vec{E\Delta}$ εἶναι ὁμόρροπο πρός τό $\vec{\Gamma B}$ (ΕΔ//ΓΒ) καί $|\vec{E\Delta}| =$
$= \frac{1}{2}|\vec{\Gamma B}|$ (δηλαδή $E\Delta = \frac{1}{2}\Gamma B$).

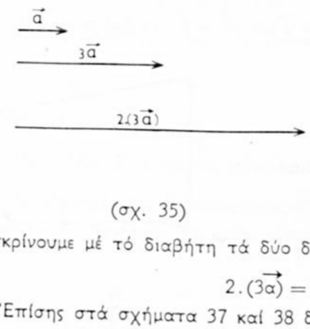


(σχ. 34)

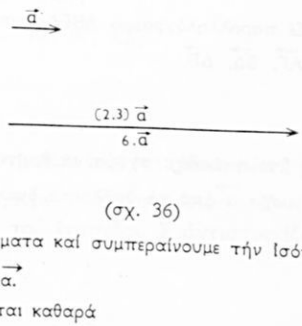
3. **Νά ἐπαληθεύσετε τίς ἰδιότητες:**

α) $2.(3\vec{\alpha}) = (2.3)\vec{\alpha}$ β) $(3+2)\vec{\alpha} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\alpha}$

Λύση: α) Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ $\lambda\vec{\alpha}$ βρίσκουμε πρῶτα τό διάνυσμα $3\vec{\alpha}$ καί ἔπειτα τό $2.(3\vec{\alpha})$ (βλ. σχ. 35). Ἔπειτα σχηματίζουμε τό διάνυσμα $(2.3)\vec{\alpha}$ ἤ $6\vec{\alpha}$ (βλ. σχ.36).



(σχ. 35)

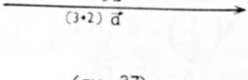


(σχ. 36)

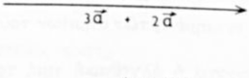
Συγκρίνουμε μέ τό διαβήτη τά δύο διανύσματα καί συμπεραίνουμε τήν ἰσότητα

$$2.(3\vec{\alpha}) = (2.3)\vec{\alpha}.$$

β) Ἐπίσης στά σχήματα 37 καί 38 δείχνεται καθαρά



(σχ. 37)



(σχ. 38)

ὅτι ἰσχύει ἡ ἰσότητα

$$(3+2)\vec{\alpha} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\alpha}$$

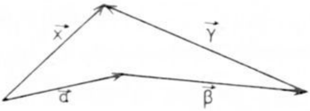
17. Νά κατασκευάσετε δύο διαδοχικά καί ἀντίθετα διανύσματα καί νά βρεῖτε τό ἄθροισμά τους.

18. Πάνω σέ μιά εὐθεία ε νά πάρετε τά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ σέ ὁποιαδήποτε σειρά. Νά βρεῖτε α) τό ἄθροισμα $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, β) τή διαφορά $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Delta}$, γ) τό ἄθροισμα $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}$.

19. Νά σχεδιάσετε σέ τετραγωνισμένο χαρτί ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ καί νά βρεῖτε α) τό ἄθροισμα $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B}$, β) τό ἄθροισμα $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Gamma}$, γ) τό ἄθροισμα $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}$, δ) τή διαφορά $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}$.

20. Νά σχεδιάσετε σέ τετραγωνισμένο χαρτί ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καί νά βρεῖτε α) τό ἄθροισμα $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, β) τή διαφορά $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, γ) τή διαφορά $\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{\Gamma B}$, δ) τή διαφορά $\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{B\Gamma}$.

21. Νά βρεῖτε τό διάνυσμα $\vec{x}$ στό ἀπέναντι σχῆμα, ὅταν ξέρετε τά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$.

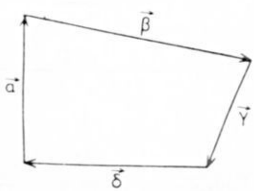


22. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\beta}$, νά βρεῖτε τό $\overrightarrow{A\Gamma}$.

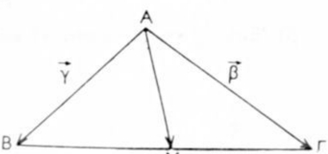
23. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\beta}$ νά βρεῖτε τό $\overrightarrow{B\Gamma}$.

24. Σέ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ εἶναι $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ καί $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\beta}$. Νά βρεῖτε τά διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta B}$.

25. Στό ἀπέναντι σχῆμα νά βρεῖτε τό διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ἀπό τά ὑπόλοιπα διανύσματα.



26. Στό ἀπέναντι σχῆμα νά ὑπολογίσετε τό διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ ἀπό τά $\vec{\gamma}$ καί $\vec{\beta}$ (Μ εἶναι τό μέσο τῆς ΒΓ).



27. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ ἀλγεβρικές τιμές τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{\Gamma A}$, $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma B}$, ἄν οἱ τετμημένες τῶν σημείων τοῦ ἄξονα εἶναι $A\left(\frac{1}{2}\right)$, $B\ (1)$ καί $\Gamma\ \left(\frac{3}{2}\right)$. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma B}$.

28. Σέ ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (κορυφῆς Α): α) Νά κατασκευάσετε τό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}$. β) Εἶναι σωστή ἡ ἰσότητα $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A\Gamma}$;

29. Νά κατασκευάσετε τά διανύσματα α) $5\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$, β) $-\frac{1}{2}\vec{\alpha} + 5\vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ είναι γνωστά διανύσματα.

30. Μέ τή βοήθεια τοῦ σχήματος, νά συμπληρώσετε τίς ἑπόμενες ἰσότητες:

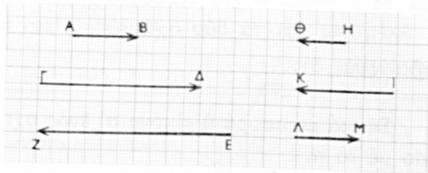
α) $\vec{\Gamma\Delta} = \ldots\vec{AB}$,

β) $\vec{EZ} = \ldots\vec{AB}$,

γ) $\vec{AB} = \ldots\vec{EZ}$

δ) $\vec{IK} = \ldots\vec{H\Theta}$,

ε) $\vec{\Lambda M} = \ldots\vec{H\Theta}$



31. Δίνεται γωνία $x\widehat{O}y$, ἕνα σημεῖο A τῆς Ox καί ἕνα σημεῖο B τῆς Oy. Νά βρεῖτε α) τό ἄθροισμα $\vec{OA}+\vec{OB}$, β) τή διαφορά $\vec{OA}-\vec{OB}$.

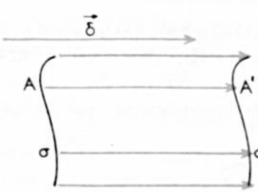
32. Νά πάρετε σέ τετραγωνισμένο χαρτί σύστημα ὀρθογώνιων ἀξόνων καί νά τοποθετήσετε τά σημεῖα A(3,0), B(4,0), Γ(0,2) καί Δ (0,–6). Νά βρεῖτε τόν ἀριθμό λ, σέ καθεμιά ἀπό τίς ἰσότητες:

α) $\vec{OA} = \lambda\vec{OB}$ β) $\vec{O\Gamma} = \lambda\vec{O\Delta}$ γ) $\vec{\Gamma\Delta} = \lambda\,\vec{O\Gamma}$.

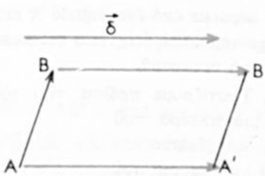
Ποιές εἶναι οἱ συντεταγμένες τῶν διανυσμάτων $\vec{A\Gamma}$, $\vec{B\Gamma}$, $\vec{A\Delta}$;

Μεταφορά

11. 15. Ἄν Σ εἶναι τό σύνολο τῶν σημείων ἑνός ἐπιπέδου, μέ τή βοήθεια ἑνός ὁρισμένου διανύσματος $\vec{\delta}$ ὁρίζουμε μιά ἀπεικόνιση : $\Sigma \to \Sigma$ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο: Σέ κάθε σημεῖο A τοῦ ἐπιπέδου Σ ἀντιστοιχίζουμε



(σχ. 39)



(σχ. 40)

τό σημεῖο A' (βλ. σχ. 39), πού εἶναι τέτοιο, ὥστε

$$\vec{AA'} = \vec{\delta}.$$

Δηλαδή στό σημεῖο A ἀντιστοιχίζουμε τό τέλος ἑνός διανύσματος, πού ἔχει ἀρχή τό Α καί εἶναι ἴσο μέ τό $\vec{\delta}$. Ἡ ἀπεικόνιση αὐτή λέγεται **μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\delta}$**.

Σέ μιά τέτοια μεταφορά οἱ εἰκόνες ὅλων τῶν σημείων ἑνός σχήματος σ ἀποτελοῦν ἕνα ἄλλο σχῆμα σ', τό ὁποῖο εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ σ. Ἄν ἀποτυπώσουμε τό σ πάνω σ' ἕνα διαφανές χαρτί καί τό τοποθετήσουμε πάνω στό σ', βλέπουμε ὅτι τά δύο σχήματα σ καί σ' ἐφαρμόζουν. Ἀπ' αὐτό καταλαβαίνουμε ὅτι:

> Σέ μιά μεταφορά ἡ εἰκόνα σ' ἑνός σχήματος σ εἶναι σχῆμα ἴσο μέ τό σ.

Γι' αὐτό καί θεωροῦμε ὅτι τό σχῆμα σ' εἶναι τό ἴδιο τό σ σέ ἄλλη θέση καί λέμε σύντομα ὅτι τό σ *«μεταφέρθηκε»* στή θέση σ'.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα στή μεταφορά αὐτή τήν εἰκόνα $\overrightarrow{A'B'}$ ἑνός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ (βλ. σχ. 40). Ἐπειδή τό σχῆμα ΑΒΒ'Α' εἶναι παραλληλόγραμμο (ἀφοῦ $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{\delta}$), βλέπουμε ὅτι τό τμῆμα Α'Β' εἶναι ἴσο καί παράλληλο πρός τό ΑΒ ἤ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

Συνεπῶς:

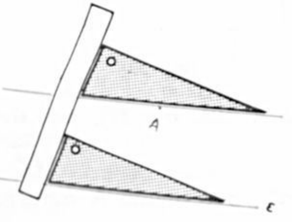
> Σέ μιά μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\delta}$ κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μεταφέρεται σ' ἕνα ἴσο διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$.

Ἀπ' αὐτό γίνεται φανερό ὅτι σέ μιά μεταφορά ἡ εἰκόνα μιᾶς εὐθείας ε εἶναι πάντοτε εὐθεία παράλληλη πρός τήν ε.

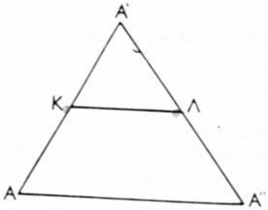
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Γιά νά φέρουμε ἀπό ἕνα σημεῖο Α μιά εὐθεία παράλληλη πρός ἄλλη εὐθεία ε, μάθαμε ἕνα μηχανισμό, πού δείχνεται στό παρακάτω σχῆμα. Νά ἐξηγήσετε τώρα τό μηχανισμό αὐτό μέ τή μεταφορά.**

Λύση: Ταυτίζουμε πρῶτα τήν εὐθεία ε μέ τήν ὑποτείνουσα τοῦ γνώμονα (ἤ γενικά μέ μιά πλευρά τοῦ γνώμονα) καί ἔπειτα κάνουμε μιά μεταφορά τοῦ γνώμονα, ὥστε ἡ ὑποτείνουσά του νά περάσει ἀπό τό Α. Ἡ νέα αὐτή θέση τῆς ὑποτείνουσας εἶναι ἡ εἰκόνα τῆς εὐθείας ε πού, ὅπως ξέρουμε, εἶναι παράλληλη πρός τήν ε.



2. **Σέ κάθε σημεῖο Α ἑνός ἐπιπέδου ἀντιστοιχίζουμε ἕνα ἄλλο σημεῖο Α'' τοῦ ἐπιπέδου μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο: Παίρνουμε τό σημεῖο Α' συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Κ καί ἔπειτα παίρνουμε τό σημεῖο Α'' συμμετρικό τοῦ Α' ὡς πρός ἕνα ἄλλο ὁρισμένο σημεῖο Λ. Νά δείξετε ὅτι ἡ ἀπεικόνιση πού ἀντιστοιχίζει τό Α στό Α'' εἶναι μιά μεταφορά.**

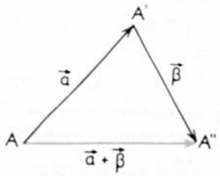


Λύση: Πραγματικά, ἀφοῦ Κ καί Λ εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν ΑΑ' καί Α'Α'' τοῦ τριγώνου ΑΑ'Α'', θά εἶναι (§ 11.14 παράδ. 2)

$$\overrightarrow{AA''} = 2.\overrightarrow{K\Lambda}$$

Αὐτό σημαίνει ὅτι τό Α'' εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ Α στή μεταφορά κατά τό σταθερό διάνυσμα $2.\overrightarrow{K\Lambda}$.

3. **Ἕνα σημεῖο Α μεταφέρεται κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$ καί ἡ εἰκόνα του Α' μεταφέρεται κατά ἕνα ἄλλο διάνυσμα $\vec{\beta}$ στή θέση Α''. Νά βρεῖτε τό διάνυσμα, μέ τό ὁποῖο μεταφέρεται τό Α στό Α''.**



Λύση : Ἄν Α' εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ Α στή μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$ καί Α'' εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ Α' στή μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\beta}$, τότε,

$$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}.$$

Συνεπῶς τό Α'' εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ Α στή μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

33. Νά βρεῖτε τήν εἰκόνα ἑνός κύκλου (O,R) α) στή μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{AO}$, ὅπου Α ὁρισμένο σημεῖο τοῦ κύκλου (O,R), β) στή μεταφορά κατά διάνυσμα $2\,\overrightarrow{AO}$, γ) στή μεταφορά κατά διάνυσμα $3\,\overrightarrow{AO}$.
Νά ἐξετάσετε τίς θέσεις τῶν δύο κύκλων σέ κάθε περίπτωση.

34. Νά σχεδιάσετε τήν εἰκόνα ἑνός τετραγώνου ΑΒΓΔ στή μεταφορά του κατά διάνυσμα: α) $\overrightarrow{AB}$ β) $\overrightarrow{A\Gamma}$ γ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}$.

35. Ἄν Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ἡ εἰκόνα παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, στή μεταφορά κατά διάνυσμα $2\overrightarrow{AB}$: α) νά βρεῖτε τήν εἰκόνα τοῦ σημείου τομῆς Ο τῶν διαγωνίων του, β) νά δικαιολογήσετε γιατί τό ΟΟ' εἶναι ἴσο καί παράλληλο πρός τό διπλάσιο τοῦ ΑΒ.

36. Ἔστω ε μιά εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου καί δύο διαφορετικά σημεῖα της Α,Β. Ἄν Ο εἶναι σημεῖο ἔξω ἀπό τήν ε, παίρνουμε σημεῖο Γ τέτοιο, ὥστε $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A\Gamma}$, καί σημεῖο Ε τέτοιο, ὥστε $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{\Gamma B}$. Ὀνομάζουμε Μ τήν εἰκόνα τοῦ Α στή μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{BE}$.
Νά ἐπαληθεύσετε μέ ἕναν κανόνα ὅτι τά σημεῖα Ο, Μ, Ε βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία. Μπορεῖτε νά τό δικαιολογήσετε;

37. Θεωροῦμε δύο σημεῖα Α,Β διαφορετικά μεταξύ τους καί σημεῖο Γ ἔξω ἀπό τήν εὐθεία ΑΒ. Ἄν Δ εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ Β στή μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{AB}$ καί Ε εἶναι τό σημεῖο, στό ὁποῖο τέμνει τήν εὐθεία ΑΓ ἡ παράλληλη εὐθεία πρός τή ΒΓ ἀπό τό Δ, νά δικαιολογήσετε ὅτι $\vec{A\Gamma} = \vec{\Gamma E}$.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 11

1. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ, τοῦ ὁποίου τό ἄκρο Α χαρακτηρίζεται ὡς *«ἀρχή»* καί τό ἄκρο Β ὡς *«τέλος»*, λέγεται **διάνυσμα** καί σημειώνεται $\vec{AB}$. Σέ κάθε διάνυσμα διακρίνουμε **διεύθυνση**, **φορά** καί **μέτρο**.

Τά διανύσματα, πού ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση, εἶναι **παράλληλα** καί μπορεῖ νά εἶναι

- **ὁμόρροπα**, δηλαδή νά ἔχουν καί τήν ἴδια φορά,
- **ἀντίρροπα**, δηλαδή νά ἔχουν ἀντίθετες φορές.

Σέ κάθε διάνυσμα $\vec{AB}$, πού βρίσκεται πάνω σέ ἄξονα, ὁρίζουμε ὡς **ἀλγεβρική τιμή** του $\overline{AB}$ τόν ἀριθμό $+|\vec{AB}|$ ἤ $-|\vec{AB}|$ ἀνάλογα μέ τό ἄν τό διάνυσμα ἔχει τή θετική ἤ ἀρνητική φορά τοῦ ἄξονα. Ἡ ἀλγεβρική τιμή $\overline{AB}$ βρίσκεται μέ τήν ἰσότητα

$$\overline{AB} = (\text{τετμημένη } B) - (\text{τετμημένη } A).$$

Σ' ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα ἀξόνων ὀνομάζουμε **συντεταγμένες** ἑνός διανύσματος τίς ἀλγεβρικές τιμές τῶν προβολῶν του στούς δύο ἄξονες. Ἕνα διάνυσμα $\vec{AB}$ μέ συντεταγμένες (α,β) γράφεται $\vec{AB} = (\alpha,\beta)$, ἐνῶ ἰσχύουν οἱ ἰσότητες:

$$\alpha = (\text{τετμημένη } B) - (\text{τετμημένη } A),$$
$$\beta = (\text{τεταγμένη } B) - (\text{τεταγμένη } A).$$

Τό μέτρο διανύσματος $\vec{AB} = (\alpha,\beta)$ εἶναι $|\vec{AB}| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

2. **Δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$, πού ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση, τήν ἴδια φορά καί τό ἴδιο μέτρο, λέγονται ἴσα καί τότε γράφουμε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$. Ἡ ἰσότητα στό σύνολο τῶν διανυσμάτων εἶναι μιά «ἰσοδυναμία» καί κάθε κλάση ἰσοδυναμίας λέγεται ἐλεύθερο διάνυσμα.**

Ἄν ἔχουμε *«διαδοχικά»* διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$, $\vec{\Gamma\Delta}$, $\vec{\Delta E}$, τό διάνυσμα $\vec{AE}$, πού ἔχει ἀρχή τήν ἀρχή τοῦ πρώτου καί τέλος τό τέλος τοῦ τελευταίου, λέγεται **ἄθροισμά τους**. Γενικότερα, ἄθροισμα ὁποιωνδήποτε διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ λέγεται τό ἄθροισμα διαδοχικῶν διανυσμάτων ἴσων πρός τά $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$.

Τό **ἄθροισμα** δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ εἶναι τό διάνυσμα, πού ὁρίζεται ἀπό τή διαγώνιο τοῦ παραλληλογράμμου, πού ἔχει πλευρές $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$.

Στήν πρόσθεση διανυσμάτων ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha} \qquad \text{(ἀντιμεταθετική)}$$

$$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) \qquad \text{(προσεταιριστική)}$$

Δύο διανύσματα, πού ἔχουν ἄθροισμα τό «μηδενικό» διάνυσμα, λέγονται **ἀντί-**

θετα. Τά ἀντίθετα διανύσματα ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση, ἀντίθετες φορές καί τό ἴδιο μέτρο. Τό διάνυσμα πού εἶναι ἀντίθετο τοῦ $\vec{\alpha}$ σημειώνεται μέ $-\vec{\alpha}$. Τό διάνυσμα $\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$ εἶναι ἡ **διαφορά** $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ **τῶν** $\vec{\alpha}$ **καί** $\vec{\beta}$.

3. Ἄν δίνεται ἕνα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ καί ἕνας ἀριθμός $\lambda>0$:

- Ἡ ἰσότητα $\vec{\beta}=\lambda\vec{\alpha}$ σημαίνει ὅτι τό $\vec{\beta}$ εἶναι διάνυσμα πού ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση καί τήν ἴδια φορά μέ τό $\vec{\alpha}$, ἐνῶ τό μέτρο του εἶναι λ φορές τό μέτρο τοῦ $\vec{\alpha}$.

- Ἡ ἰσότητα $\vec{\gamma}=-\lambda\vec{\alpha}$ σημαίνει ὅτι τό $\vec{\gamma}$ εἶναι διάνυσμα πού ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση καί ἀντίθετη φορά μέ τό $\vec{\alpha}$, ἐνῶ τό μέτρο του εἶναι λ φορές τό μέτρο τοῦ $\vec{\alpha}$. Τά διανύσματα λοιπόν $\lambda\vec{\alpha}$ καί $-\lambda\vec{\alpha}$ εἶναι ἀντίθετα γιά κάθε $\lambda\neq 0$.

4. Μέ τή βοήθεια ἑνός διανύσματος $\vec{\delta}$ ὁρίζεται μιά ἀπεικόνιση στό σύνολο τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, ἡ ὁποία ἀντιστοιχίζει σέ κάθε σημεῖο Α τό τέλος τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AA'}=\vec{\delta}$. Ἡ ἀπεικόνιση αὐτή λέγεται **μεταφορά κατά διάνυσμα** $\vec{\delta}$. **Σέ κάθε μεταφορά κατά διάνυσμα διατηρεῖται τόσο ἡ ἰσότητα τῶν σχημάτων ὅσο καί ἡ διεύθυνση τῶν εὐθειῶν.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ·

38. Πάνω σέ μιά εὐθεία ε δίνονται τά σημεῖα Α,Β,Μ,Ν τέτοια, ὥστε $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BN}$. Νά βρεῖτε μέ τή βοήθεια τῶν σημείων αὐτῶν καί ἄλλα ζεύγη ἴσων διανυσμάτων.

39. Σ' ἕναν ἄξονα παίρνουμε τά σημεῖα Α(4), Β(−2), $\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)$, $\Delta\left(\frac{17}{5}\right)$. Νά ὑπολογισθεῖ τό ἄθροισμα
$$\overline{AB}\,.\,\overline{\Gamma\Delta}+\overline{A\Gamma}\,.\,\overline{\Delta B}+\overline{A\Delta}\,.\,\overline{B\Gamma}$$

40. Ἔστω Α,Β,Γ,Δ τέσσερα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου. Νά ἐπαληθεύσετε τίς ἰσότητες:
α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Delta}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$
β) $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}=\vec{0}$.

41. Δίνονται τρία σημεῖα Α,Β,Γ μή συνευθειακά καί ἕνα σημεῖο Μ τῆς εὐθείας ΑΒ. Ἔστω Ν ἡ εἰκόνα τοῦ Μ στή μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$ καί Π ἡ εἰκόνα τοῦ Ν στή μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$. Νά βρεῖτε τίς εἰκόνες τῶν σημείων Α,Β,Γ στή μεταφορά κατά τό διάνυσμα $\overrightarrow{AN}$.

42. Δύο εὐθεῖες ε καί ε' τέμνονται στό Ι. Ἔστω Α ἕνα σημεῖο τῆς ε διάφορο τοῦ Ι καί Α' ἕνα σημεῖο τῆς ε' διάφορο τοῦ Ι. Ἔστω ἐπίσης ἕνα σημεῖο Β τέτοιο, ὥστε $\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AI}$ καί σημεῖο Β' τέτοιο ὥστε $\overrightarrow{IB'}=\overrightarrow{A'I}$. Νά δικαιολογήσετε γιατί οἱ εὐθεῖες ΑΒ' καί Α'Β εἶναι παράλληλες.

43. Δίνονται δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ μέ συντεταγμένες $\vec{\alpha}=(5,1)$ καί $\vec{\beta}=(1,7)$. Νά βρεῖτε α) τίς συντεταγμένες τοῦ διανύσματος $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ καί β) τό $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$.

44. Ἂν ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο καί Ε,Ζ εἶναι δύο σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου του τέτοια, ὥστε $\overrightarrow{BZ} = \overrightarrow{E\Delta}$ τότε α) νά βρεῖτε τήν εἰκόνα τοῦ $\overrightarrow{E\Gamma}$ στή μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{EA}$, β) νά δικαιολογήσετε τήν ἰσότητα $\overrightarrow{E\Gamma} = \overrightarrow{AZ}$ χρησιμοποιώντας τήν ἰδιότητα τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου.

45. Ἔστω τρία σημεῖα Α,Β,Γ μή συνευθειακά. Ἔστω Α′ ἡ εἰκόνα τοῦ Α στή μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma B}$ καί Γ′ ἡ εἰκόνα τοῦ Γ στή μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. α) Νά συγκρίνετε τά διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma A}$, $\overrightarrow{BA'}$ καί $\overrightarrow{\Gamma A}$, $\overrightarrow{\Gamma' B}$. β) Νά δικαιολογήσετε γιατί τά σημεῖα Α′,Β,Γ′ ἀνήκουν στήν ἴδια εὐθεία.

46. Ἔστω Α,Β,Γ τρία σημεῖα μή συνευθειακά, Δ ἡ εἰκόνα τοῦ Α στή μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$, Ε ἡ εἰκόνα τοῦ Δ στήν ἴδια μεταφορά καί Ζ ἡ εἰκόνα τοῦ Β στή μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. α) Νά δικαιολογήσετε γιατί τά διανύσματα $\overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{\Gamma E}$, $\overrightarrow{Z\Gamma}$ εἶναι ἴσα. β) Νά δικαιολογήσετε γιατί τά σημεῖα Ε,Γ καί Ζ εἶναι συνευθειακά.

47. ΑΒΓΔ εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμο μέ Α(1,1), Β(7,3) καί Γ(10,7).

α) Νά βρεῖτε τίς συντεταγμένες τῆς κορυφῆς Δ.

β) Νά βρεῖτε τά μήκη τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΔ.

γ) Νά βρεῖτε τά μήκη τῶν διαγωνίων ΑΓ καί ΒΔ.

δ) Νά βρεῖτε τίς συντεταγμένες τοῦ σημείου Α′, πού εἶναι εἰκόνα τῆς κορυφῆς Α τοῦ παραλληλογράμμου στή μεταφορά του κατά διάνυσμα $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$.

48. Ἂν ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρο τρίγωνο, νά βρεῖτε ποιές ἀπό τίς ἑπόμενες ἰσότητες εἶναι ἀληθεῖς καί ποιές ψευδεῖς:

α) $\overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{AB}$ β) $|\overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma A}| = |\overrightarrow{AB}|$ γ) $|\overrightarrow{B\Gamma}| + |\overrightarrow{\Gamma A}| = |\overrightarrow{AB}|$

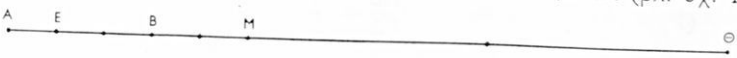
δ) $\overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB}$ ε) $|\overrightarrow{B\Gamma}| + |\overrightarrow{\Gamma A}| + |\overrightarrow{AB}| = 3\,|\overrightarrow{B\Gamma}|$ στ) $\overrightarrow{B\Gamma} = -\overrightarrow{\Gamma A} - \overrightarrow{AB}$

12ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

Λόγος δύο εὐθύγραμμων τμημάτων

12.1. Ξέρουμε ἀπό τήν πρώτη τάξη ὅτι, ἄν δίνεται ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΜ, τό γινόμενο $3 \cdot AM$ παριστάνει τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΘ πού βρίσκουμε, ὅταν προσθέσουμε τρία τμήματα ἴσα μέ ΑΜ (βλ. σχ. 1)



(σχ. 1)

καί τότε γράφουμε

$$A\Theta = 3 \cdot AM$$

Ξέρουμε ἐπίσης ὅτι τό γινόμενο $\frac{1}{5} \cdot AM$ παριστάνει τό ἕνα ἀπό τά εὐθύγραμμα τμήματα πού βρίσκουμε, ὅταν χωρίσουμε τό ΑΜ σέ 5 ἴσα μέρη. Ἄν ἕνα τέτοιο τμῆμα εἶναι τό ΑΕ, γράφουμε

$$AE = \frac{1}{5}\ AM.$$

Καταλαβαίνουμε τώρα ὅτι τό γινόμενο $3 . \frac{1}{5}$ ΑΜ παριστάνει ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ, πού προκύπτει, ὅταν προσθέσουμε τρία τμήματα ἴσα μέ $\frac{1}{5}$ ΑΜ (δηλαδή ἴσα μέ ΑΕ). Τό τμῆμα $3 \cdot \frac{1}{5}$ ΑΜ γράφεται πιό σύντομα $\frac{3}{5}$ ΑΜ. Ἔτσι ἡ ἰσότητα

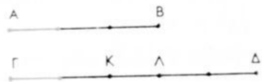
$$AB = \frac{3}{5}\ AM$$

δηλώνει ὅτι τό ΑΒ εἶναι ἄθροισμα τριῶν τμημάτων ἴσων μέ $\frac{1}{5}$ ΑΜ. Βλέπουμε λοιπόν ὅτι, ἄν λ εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε θετικός ρητός, τό γινόμενο $\lambda \cdot AM$ παριστάνει ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, πού κατασκευάζεται μέ γνωστό τρόπο.

Ἐπειδή ὅμως καί κάθε ἄρρητος ἀριθμός προσεγγίζεται ὅσο θέλουμε μέ ἕνα ρητό ἀριθμό, καταλαβαίνουμε ὅτι τό γινόμενο $\lambda \cdot AM$ θά παριστάνει εὐθύγραμμο τμῆμα καί ὅταν ὁ λ εἶναι ἄρρητος ἀριθμός.

12.2. Ἄν δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καί ΓΔ (βλ. σχ. 2) συνδέονται μέ μιά ἰσότητα τῆς μορφῆς

(1) $AB = \frac{3}{5}\ \Gamma\Delta$,



(σχ. 2)

ὁ ἀριθμός $\frac{3}{5}$ λέγεται **λόγος** τοῦ τμήματος ΑΒ πρός τό τμῆμα ΓΔ καί σημειώνεται μέ $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$ ἤ $AB : \Gamma\Delta$

Ἔτσι ἡ ἰσότητα

(1′) $$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{3}{5}$$

δηλώνει ὅτι ὁ ἀριθμός $\frac{3}{5}$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ τμήματος ΑΒ πρός τό τμῆμα ΓΔ καί συνεπῶς εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἰσότητα (1).

Ἄς πάρουμε τώρα γιά μονάδα μετρήσεως τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων τό τμῆμα $K\Lambda = \frac{1}{5}\ \Gamma\Delta$. Τότε τά μέτρα τῶν τμημάτων ΑΒ καί ΓΔ εἶναι ἀντίστοιχα οἱ ἀριθμοί $(AB) = 3$ καί $(\Gamma\Delta) = 5$. Ἔτσι ἡ ἰσότητα (1′), ἐπειδή $\frac{3}{5} = \frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)}$, γράφεται

(2) $$\boxed{\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)}}$$

Δηλαδή **ὁ λόγος δύο εὐθύγραμμων τμημάτων εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν μέτρων τους.**

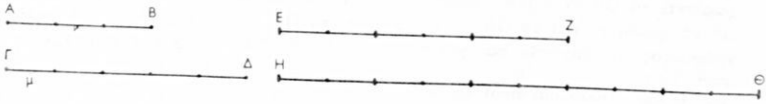
Ἡ ἰσότητα (2) ἰσχύει φυσικά μέ τήν προϋπόθεση, ὅτι καί τά δύο τμήματα μετρήθηκαν μέ τήν ἴδια μονάδα μετρήσεως.

Ἀνάλογα εὐθύγραμμα τμήματα

12.3. Ἄς πάρουμε πάλι δυό τμήματα ΑΒ καί ΓΔ, πού νά ἔχουν λόγο $\frac{3}{5}$ (βλ. σχ. 3) καί δύο ἄλλα τμήματα ΕΖ καί ΗΘ, πού νά ἔχουν ἐπίσης λόγο $\frac{3}{5}$ (βλ. σχ. 4). Ἔχουμε λοιπόν $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{3}{5}$ καί $\frac{EZ}{H\Theta} = \frac{3}{5}$ καί συνεπῶς μποροῦμε νά γράψουμε

(3) $$\boxed{\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{EZ}{H\Theta}}$$

Μιά τέτοια ἰσότητα δύο λόγων λέγεται **ἀναλογία εὐθύγραμμων τμη-**



σχ. 3) (σχ. 4)

μάτων καί στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι **τά εὐθύγραμμα τμήματα AB καί ΓΔ εἶναι ἀνάλογα πρός τά EZ καί HΘ.**

Ἄν πάρουμε γιά μονάδα μετρήσεως τό τμῆμα $\mu = \frac{1}{5}\,\Gamma\Delta$, θά ἔχουμε, ὅπως φαίνεται στά σχήματα 3 καί 4, $(AB) = 3$, $(\Gamma\Delta) = 5$, $(EZ) = 6$, $(H\Theta) = 10$. Τότε ὅμως θά εἶναι

$$\frac{AB}{EZ} = \frac{(AB)}{(EZ)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{\Gamma\Delta}{H\Theta} = \frac{(\Gamma\Delta)}{(H\Theta)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

δηλαδή θά εἶναι

(4) $$\frac{AB}{EZ} = \frac{\Gamma\Delta}{H\Theta}$$

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, **ὅταν ἰσχύει ἡ ἰσότητα (3), τά τμήματα AB καί EZ εἶναι ἐπίσης ἀνάλογα πρός τά ΓΔ καί HΘ.**

Συγκρίνοντας τίς (3) καί (4) βλέπουμε ὅτι σέ μιά ἀναλογία εὐθύγραμμων τμημάτων μποροῦμε νά κάνουμε ἐναλλαγή τῶν μέσων της, ὅπως καί στίς ἀριθμητικές ἀναλογίες. Πιό γενικά, ἀφοῦ ὁ λόγος δύο τμημάτων εἶναι πάντοτε ἴσος μέ τό λόγο δύο ἀριθμῶν (τῶν μέτρων τους), στίς ἀναλογίες τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων θά ἰσχύουν ὅλες οἱ ἰδιότητες τῶν ἀριθμητικῶν ἀναλογιῶν.

Παράδειγμα: Δίνεται ἕνα τμῆμα AB μέ $(AB) = 6$ cm καί ἕνα σημεῖο του Γ τέτοιο, ὥστε τά τμήματα AΓ καί ΓB νά εἶναι ἀνάλογα πρός δύο τμήματα $\alpha = 3$ cm καί $\beta = 1$ cm. Νά ὑπολογιστεῖ τό τμῆμα AΓ.

Ἀπό τά δεδομένα μας εἶναι

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{3}{1}$$

Ἄν προσθέσουμε τούς ἡγούμενους στούς ἑπόμενους, θά ἔχουμε

$$\frac{A\Gamma}{A\Gamma + \Gamma B} = \frac{3}{3+1} \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{(A\Gamma)}{6} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow (A\Gamma) = \frac{3}{4} \cdot 6 = \frac{18}{4} = 4{,}5 \text{ cm}.$$

1. Ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἶναι διπλάσιο ἀπό ἕνα τμῆμα ΓΔ καί τό ΓΔ τριπλάσιο ἀπό τό ΕΖ. Νά βρεθεῖ ὁ λόγος ΑΒ : ΕΖ.

2. Δίνεται μιά γωνία $x\widehat{O}y$ καί παίρνουμε πάνω στήν Ox σημεῖο Α τέτοιο, ὥστε (ΟΑ) = 7 cm, καί πάνω στήν πλευρά Oy σημεῖο Β τέτοιο, ὥστε (ΟΒ) = 5 cm. Νά χωρίσετε τό ΟΒ σέ 5 ἴσα τμήματα ΟΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ καί ΖΒ. Μέ τή βοήθεια τῆς ΟΒ νά χωρίσετε καί τό ΟΑ σέ 5 ἴσα μέρη, τά ΟΓ′, Γ′Δ′, Δ′Ε′, Ε′Ζ′, Ζ′Α περιγράφοντας τήν ἐργασία σας γιά τό χωρισμό τοῦ ΟΑ. Νά βρεῖτε τούς λόγους $\frac{ΟΓ'}{ΟΑ}$, $\frac{ΟΓ}{ΟΒ}$. Πόσα cm εἶναι τό ΟΓ′;

3. Ἄν ἕνα σημεῖο Γ διαιρεῖ ἕνα τμῆμα ΑΒ ἔτσι, ὥστε $\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{3}{2}$ καί εἶναι (ΒΓ) = = 5 cm, νά βρεῖτε τά (ΑΓ) καί (ΑΒ) σέ dm.

4. Δύο τμήματα μέ μήκη α,β ἔχουν λόγο $\frac{5}{2}$. Νά βρεῖτε τό λόγο $\frac{α+β}{α-β}$.

Τό θεώρημα τοῦ Θαλῆ[1]

12.4. Θεωροῦμε δύο εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$ καί ὀνομάζουμε T_1 καί T_2 τά σύνολα τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων τους ἀντιστοίχως. Μέ τή βοήθεια μιᾶς ἄλλης εὐθείας ε, ἡ ὁποία τέμνει τίς $ε_1$ καί $ε_2$, μποροῦμε νά ὁρίσουμε μιά ἀπεικόνιση $T_1 \to T_2$ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

Σέ κάθε τμῆμα ΑΒ τῆς $ε_1$ ἀντιστοιχίζουμε τό τμῆμα Α′Β′ τῆς $ε_2$ πού βρίσκουμε, ὅταν ἀπό τά Α καί Β φέρουμε παράλληλες πρός τήν ε.

(σχ. 4′)

Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἴσα διαδοχικά τμήματα ΑΘ, ΘΒ, ΒΔ, ... τῆς $ε_1$ καί τά ἀντίστοιχά τους (στήν πιό πάνω ἀπεικόνιση) Α′Θ′, Θ′Β′, Β′Δ′,... τῆς $ε_2$ (βλ. σχ. 5). Ξέρουμε ἀπό τά προηγούμενα ὅτι

$$Α'Θ' = Θ'Β' = Β'Δ' = \ldots$$

Ἄν πάρουμε σέ κάθε εὐθεία ἀπό τίς $ε_1$ καί $ε_2$ τό ἕνα ἀπό τά ἴσα τμήματά της ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν τμημάτων της, θά ἔχουμε π.χ.

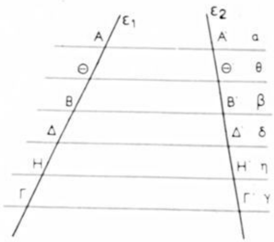
$$\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{(ΑΒ)}{(ΒΓ)} = \frac{2}{3}, \quad \frac{Α'Β'}{Β'Γ'} = \frac{(Α'Β')}{(Β'Γ')} = \frac{2}{3}$$

καί συνεπῶς

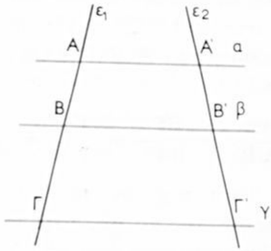
1. Ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος γεννήθηκε γύρω στά 640 π.Χ. καί πέθανε τό 546 π.Χ. Θεωρεῖται ὡς ὁ πρῶτος φυσικός φιλόσοφος. Στήν ἀρχαιότητα συγκαταλεγόταν μεταξύ τῶν ἑπτά σοφῶν. Εἶναι ὁ πρῶτος ἄνθρωπος στό κόσμο, πού χρησιμοποίησε τήν ἀπόδειξη στά μαθηματικά.

(5) $$\boxed{\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{A'B'}{B'\Gamma'}}$$

Ἡ ἰσότητα αὐτή ἐκφράζει τό **θεώρημα τοῦ Θαλῆ** (βλ. σχ. 6):



(σχ. 5)



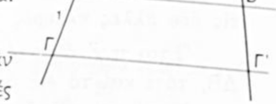
(σχ. 6)

Ἄν εὐθεῖες παράλληλες τέμνουν δυό ὁποιεσδήποτε ἄλλες εὐθεῖες, τότε τά τμήματα, πού ὁρίζουν οἱ παράλληλες πάνω στή μιά εὐθεία, εἶναι ἀνάλογα πρός τά ἀντίστοιχά τους πάνω στήν ἄλλη εὐθεία.

Ἄς ὑποθέσουμε π.χ. ὅτι στό σχῆμα 7 οἱ τρεῖς παράλληλες εὐθεῖες τέμνουν τήν ε_1 κατά τά τμήματα ΑΒ, ΒΓ μέ (ΑΒ) = = 2 cm καί (ΒΓ) = 1 cm, δηλαδή τό ἕνα εἶναι διπλάσιο ἀπό τό ἄλλο. Τότε ἔχουμε τήν ἀναλογία

$$\frac{A'B'}{B'\Gamma'}=\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{2}{1},$$

ἀπό τήν ὁποία καταλαβαίνουμε ὅτι καί τό Α'Β' θά εἶναι διπλάσιο ἀπό τό Β'Γ'. Ἄν λοιπόν εἶναι (Α'Β') = 3 cm, τότε θά εἶναι (Β'Γ') = 1,5 cm.



(σχ. 7)

Ἀπό τήν ἰσότητα (5) βρίσκουμε εὔκολα (ἄν προσθέσουμε τούς ἀριθμητές στούς παρονομαστές ἤ ἀντίστροφα) τίς ἀναλογίες

(5') $$\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{A'B'}{A'\Gamma'},\quad \frac{A\Gamma}{B\Gamma}=\frac{A'\Gamma'}{B'\Gamma'},$$

οἱ ὁποῖες μᾶς λένε ὅτι **δυό ὁποιαδήποτε τμήματα τῆς ε_1 εἶναι πάντοτε ἀνάλογα πρός τά ἀντίστοιχα τμήματά τους τῆς εὐθείας ε_2.**

Ἐπίσης, ἄν ἐναλλάζουμε τούς μέσους στίς ἀναλογίες (5) καί (5'), βρίσκουμε τίς ἀναλογίες

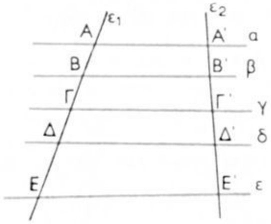
(6) $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'},\quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'},\quad \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'},$$

οἱ ὁποῖες δείχνουν ὅτι δύο ὁποιαδήποτε ἀντίστοιχα τμήματα τῶν εὐθειῶν

ε_1 καί ε_2 εἶναι πάντοτε ἀνάλογα πρός δύο ἄλλα ἀντίστοιχα τμήματα τῶν ἴδιων εὐθειῶν.

Εἶναι πιά φανερό ὅτι, ἄν θεωρήσουμε ὁσεσδήποτε παράλληλες εὐθεῖες, οἱ ὁποῖες τέμνουν μιά εὐθεία στά Α,Β,Γ,Δ,... καί μιά ἄλλη εὐθεία στά Α',Β',Γ',Δ',... θά ἔχουμε

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \ldots$$



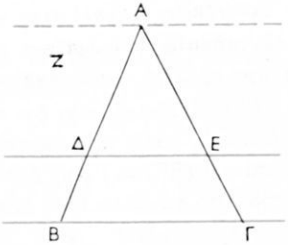
(σχ. 8)

Ἔτσι π.χ. ἄν τό Α'Β' εἶναι διπλάσιο ἀπό τό ΑΒ, τότε τό Β'Γ' θά εἶναι διπλάσιο ἀπό τό ΒΓ, τό Γ'Δ' θά εἶναι διπλάσιο ἀπό τό ΓΔ,... κ.ο.κ.

12.5. Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί μία εὐθεία παράλληλη πρός τήν πλευρά του ΒΓ, πού τέμνει τίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ στά σημεῖα Δ καί Ε ἀντίστοιχα (βλ. σχ. 9).

Ἄν φέρουμε καί τήν ΑΖ//ΒΓ, οἱ παράλληλες εὐθεῖες ΑΖ, ΔΕ, ΒΓ θά τέμνουν τίς ΑΒ καί ΑΓ σέ μέρη ἀνάλογα. Ἔχουμε λοιπόν

$$(7) \qquad \boxed{\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}}$$



(σχ. 9)

Δηλαδή **κάθε εὐθεία παράλληλη πρός μιά πλευρά τριγώνου χωρίζει τίς δύο ἄλλες πλευρές του σέ μέρη ἀνάλογα.**

Ἔτσι π.χ. ἄν στό παραπάνω σχῆμα τό ΑΔ εἶναι τριπλάσιο ἀπό τό ΔΒ, τότε καί τό ΑΕ θά εἶναι τριπλάσιο ἀπό τό ΕΓ.

Ἀντίστροφα τώρα, ἄς πάρουμε δύο σημεῖα Δ καί Ε τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΓ, τά ὁποῖα νά χωρίζουν τίς πλευρές αὐτές σέ μέρη ἀνάλογα, δηλαδή νά εἶναι τέτοια, ὥστε νά ἰσχύει ἡ (7). Τότε διαπιστώνουμε εὔκολα (μέ κανόνα καί γνώμονα) ὅτι ἡ εὐθεία ΔΕ εἶναι παράλληλη πρός τή ΒΓ, δηλαδή **κάθε εὐθεία, πού χωρίζει τίς δυό πλευρές τριγώνου σέ μέρη ἀνάλογα, εἶναι παράλληλη πρός τήν τρίτη πλευρά του.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Δίνεται ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ μέ βάσεις ΑΒ καί ΔΓ. Ἀπό τό μέσο Ε τῆς ΑΔ φέρνουμε εὐθεία ε παράλληλη πρός τίς βάσεις του. Νά δικαιολογήσετε γιατί ἡ ε θά περάσει ἀπό τό μέσο τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς καί ἀπό τά μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ τραπεζίου.**

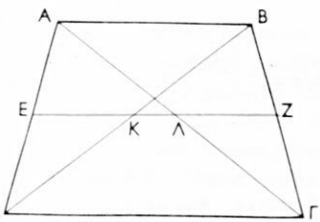
Λύση. Σύμφωνα μέ τό θεώρημα τοῦ Θαλῆ ἔχουμε:

$$\frac{AE}{E\Delta} = \frac{BK}{K\Delta} = \frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma} = \frac{BZ}{Z\Gamma} = 1 \quad (\text{ἀφοῦ } AE = E\Delta)$$

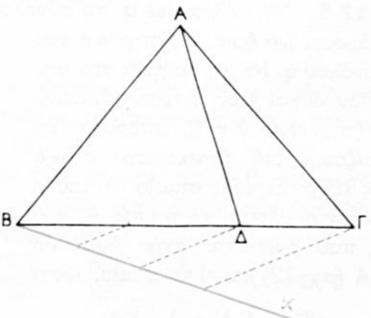
Συνεπῶς ΒΚ = ΚΔ, ΑΛ = ΛΓ, ΒΖ = ΖΓ. Δηλαδή τά Κ,Λ,Ζ εἶναι μέσα τῶν ΒΔ,ΑΓ,ΒΓ.

2. **Ἀπό τήν κορυφή Α ἑνός τριγώνου ΑΒΓ νά φέρετε μιά εὐθεία ΑΔ τέτοια, ὥστε τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου ΑΒΔ νά εἶναι διπλάσιο ἀπό τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου ΑΔΓ.**

Λύση. Τά δύο τρίγωνα πού θά σχηματισθοῦν, ὅταν φέρουμε τήν ΑΔ, θά ἔχουν τό ἴδιο ὕψος ἀπό τήν κορυφή Α. Ἄν λοιπόν βροῦμε σημεῖο Δ, πού νά διαιρεῖ τή βάση ΒΓ σέ δύο μέρη τέτοια, ὥστε ΒΔ = 2ΔΓ ἤ $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = 2$, τότε τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου ΑΒΔ, πού θά ἔχει διπλάσια βάση, θά εἶναι διπλάσιο ἀπό τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου



(σχ. 10)



(σχ. 11)

ΑΔΓ. Διαιροῦμε λοιπόν τό τμῆμα ΒΓ σέ τρία ἴσα μέρη (βλ. σχ. 11) καί φέρνουμε ὕστερα τήν ΑΔ. Ἔτσι ἔχουμε ΒΔ = 2.ΔΓ καί συνεπῶς (ΑΒΔ)=2(ΑΔΓ).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5. Τέσσερις παράλληλες εὐθεῖες α,β,γ,δ τέμνουν μιά εὐθεία ε στά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ καί μιά ἄλλη ε' στά σημεῖα Α',Β,'Γ',Δ' ἔτσι, ὥστε $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{1}{2}$ καί $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{3}$.

α) Νά βρεῖτε τούς λόγους $\frac{AB}{A\Gamma}$, $\frac{B\Gamma}{B\Delta}$, $\frac{A\Gamma}{A\Delta}$, $\frac{A'B'}{B'\Gamma'}$, $\frac{B'\Gamma'}{\Gamma'\Delta'}$, $\frac{A'B'}{A'\Gamma'}$, $\frac{B'\Gamma'}{B'\Delta'}$, $\frac{A'\Gamma'}{A'\Delta'}$

β) Νά σχηματίσετε τίς ἀναλογίες πού ὁρίζονται.

6. Νά κατασκευάσετε μέ κανόνα καί διαβήτη ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μέ (ΑΒ) = 6 cm, (ΒΓ) = 9 cm καί (ΑΓ) = 12 cm. Πάνω στήν πλευρά ΑΒ νά πάρετε σημεῖο Δ τέτοιο, ὥστε $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{1}{3}$. Ἀπό τό Δ νά φέρετε τήν ΔΕ//ΑΓ πού τέμνει τήν ΒΓ στό Ε.

α) Νά ὑπολογίσετε τά μήκη τῶν τμημάτων ΑΔ, ΒΔ, ΒΕ, ΕΓ.

β) Νά φέρετε ἀπό τό Ε τήν ΕΖ//ΑΒ καί νά ὑπολογίσετε τό ΔΕ ὑπολογίζοντας πρῶτα τό ΑΖ.

7. Νά διαιρεθεῖ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ σέ δύο μέρη πού ἔχουν λόγο 3 : 2.

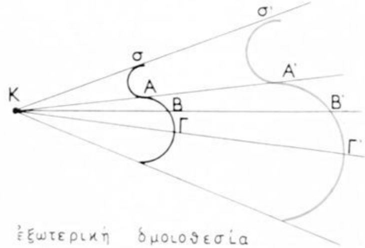
8. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τή ΔΕ // ΒΓ, πού τέμνει τίς ΑΒ καί ΑΓ στά Δ καί Ε ἀντίστοιχα. Ἄν (ΑΒ) = 5 cm, (ΑΓ) = 8 cm καί ΑΔ : ΔΒ = 2 : 3, νά ὑπολογίσετε τά μήκη (ΑΔ), (ΔΒ), (ΑΕ), (ΕΓ).

9. Δίνονται τρία τμήματα μέ μήκη α,β,γ. Νά κατασκευάσετε τμῆμα μήκους x τέτοιο, ὥστε α : β = γ : x (τέταρτη ἀνάλογος).

10. Πάνω στήν πλευρά Ax γωνίας $x\widehat{A}y$ νά πάρετε δύο τμήματα ΑΒ καί ΑΓ τέτοια, ὥστε (ΑΒ) = 2 cm καί (ΒΓ) = 3 cm. Πάνω στήν Ay νά πάρετε τά σημεῖα Δ καί Ε τέτοια, ὥστε (ΑΔ) = 1,5 cm καί (ΔΕ) = 2,25 cm. Τί συμπεραίνετε γιά τίς εὐθεῖες ΒΔ καί ΓΕ;

Ὁμοιοθεσία

12.6. Ἄς καλέσουμε q τό σύνολο τῶν σημείων ἑνός ἐπιπέδου καί ἄς πάρουμε ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Κ τοῦ συνόλου q. Μέ τή βοήθεια τοῦ σημείου Κ καί ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ λ (π.χ. τοῦ λ = 2) μποροῦμε νά ὁρίζουμε μιά ἀπεικόνιση: q → q ὡς ἑξῆς: Σέ κάθε σημεῖο Α τοῦ q ἀντιστοιχίζουμε τό σημεῖο Α′ τοῦ q, πού βρίσκεται στήν ἡμιευθεία ΚΑ (σχ. 12) καί εἶναι τέτοιο, ὥστε

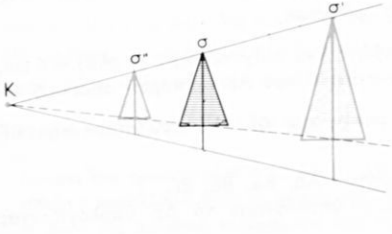


(σχ. 12)

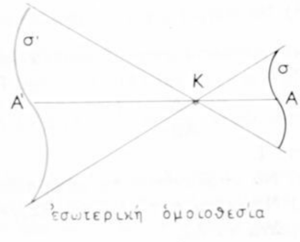
$$\text{(8)} \qquad \boxed{KA' = \lambda \cdot KA}$$

Ἡ ἀπεικόνιση αὐτή τοῦ ἐπιπέδου q στόν ἑαυτό του λέγεται **ὁμοιοθεσία μέ κέντρο Κ καί λόγο λ.** Τό σημεῖο Α′, πού εἶναι εἰκόνα τοῦ Α, λέγεται **ὁμοιόθετο τοῦ Α** στήν ὁμοιοθεσία αὐτή.

Ἄν πάρουμε τώρα τά ὁμοιόθετα ὅλων τῶν σημείων Α,Β,Γ,... ἑνός σχήματος σ, σχηματίζεται ἕνα νέο σχῆμα σ′ τοῦ ἐπιπέδου, τό ὁποῖο λέγεται **ὁμοιόθετο τοῦ σ.**



(σχ. 13)



(σχ. 14)

Στό σχῆμα 13 δίνονται τά ὁμοιόθετα σ' καί σ'' ἑνός σχήματος σ ὡς πρός κέντρο ὁμοιοθεσίας Κ καί λόγους ὁμοιοθεσίας $\lambda = 2$ καί $\lambda = \frac{2}{3}$ ἀντίστοιχα. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι γιά $\lambda > 1$ ἡ εἰκόνα τοῦ σ εἶναι ἕνα μεγαλύτερο σχῆμα, γι' αὐτό καί μιά τέτοια ὁμοιοθεσία λέγεται **διαστολή**, ἐνῶ γιά $\lambda < 1$ ἡ εἰκόνα τοῦ σ εἶναι ἕνα μικρότερο σχῆμα, γι' αὐτό καί μιά τέτοια ὁμοιοθεσία λέγεται **συστολή**.

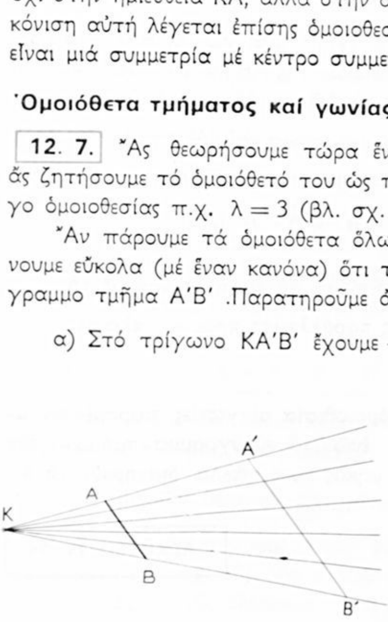
Μέ τό ἴδιο σημεῖο Κ, τόν ἴδιο λόγο λ καί τήν ἴδια ἰσότητα $KA' = \lambda \cdot KA$ μποροῦμε νά ὁρίσουμε καί μιά ἄλλη ἀπεικόνιση $q \to q$, ἄν πάρουμε τό Α' ὄχι στήν ἡμιευθεία ΚΑ, ἀλλά στήν ἀντικείμενή της (βλ. σχ. 14). Ἡ ἀπεικόνιση αὐτή λέγεται ἐπίσης ὁμοιοθεσία[1]. Ἡ ὁμοιοθεσία αὐτή γιά $\lambda = 1$ εἶναι μιά συμμετρία μέ κέντρο συμμετρίας τό Κ.

Ὁμοιόθετα τμήματος καί γωνίας

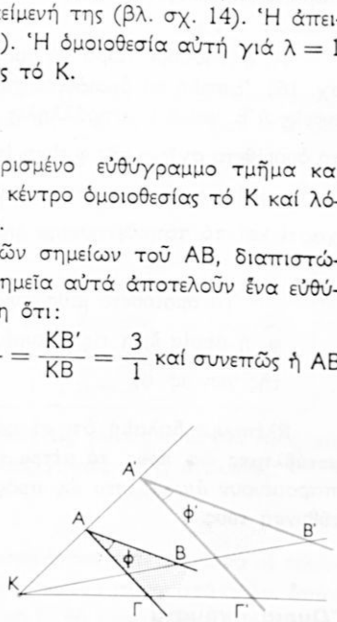
12. 7. Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕνα ὁρισμένο εὐθύγραμμο τμῆμα καί ἄς ζητήσουμε τό ὁμοιόθετό του ὡς πρός κέντρο ὁμοιοθεσίας τό Κ καί λόγο ὁμοιοθεσίας π.χ. $\lambda = 3$ (βλ. σχ. 15).

Ἄν πάρουμε τά ὁμοιόθετα ὅλων τῶν σημείων τοῦ ΑΒ, διαπιστώνουμε εὔκολα (μέ ἕναν κανόνα) ὅτι τά σημεῖα αὐτά ἀποτελοῦν ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα Α'Β'. Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι:

α) Στό τρίγωνο ΚΑ'Β' ἔχουμε $\frac{KA'}{KA} = \frac{KB'}{KB} = \frac{3}{1}$ καί συνεπῶς ἡ ΑΒ



(σχ. 15)



(σχ. 16)

χωρίζει τίς δύο πλευρές του σέ μέρη ἀνάλογα, ὁπότε ΑΒ//Α'Β'.

β) Ἄν συγκρίνουμε μέ τή βοήθεια ἑνός διαβήτη τά τμήματα ΑΒ καί Α'Β', βλέπουμε ὅτι τό Α'Β' εἶναι τριπλάσιο ἀπό τό ΑΒ, δηλαδή ὁ λόγος $\frac{A'B'}{AB}$ εἶναι ἴσος μέ τό λόγο ὁμοιοθεσίας.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

1. Τήν ὁμοιοθεσία αὐτή θά τή λέμε **ἐσωτερική** (γιατί τό κέντρο της βρίσκεται ἀνάμεσα στά δύο ὁμοιόθετα σημεῖα), γιά νά τή διακρίνουμε ἀπό τήν προηγούμενη, πού θά τή λέμε **ἐξωτερική** ὁμοιοθεσία.

Τό ὁμοιόθετο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ σέ μιά ὁμοιοθεσία μέ λόγο **λ εἶναι ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα** $A'B' = \lambda \cdot AB$ παράλληλο πρός τό ΑΒ.

Ἔτσι λοιπόν γιά νά βροῦμε τό ὁμοιόθετο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος, ἀρκεῖ νά βροῦμε μόνο τά ὁμοιόθετα τῶν δύο ἄκρων του.

Ἀπό τό παραπάνω συμπέρασμα γίνεται ἀκόμη φανερό ὅτι τό ὁμοιόθετο μιᾶς εὐθείας ε σέ μιά ὁμοιοθεσία κέντρου Κ μέ λόγο λ εἶναι μιά εὐθεία ε' παράλληλη πρός τήν ε, πού τή βρίσκουμε, παίρνοντας τά ὁμοιόθετα δύο σημείων τῆς ε.

Ἄς ζητήσουμε τώρα τό ὁμοιόθετο σχῆμα μιᾶς γωνίας $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{\varphi}$ (βλ. σχ. 16). Ἐπειδή τά ὁμοιόθετα τῶν πλευρῶν της ΑΒ καί ΑΓ εἶναι δύο ἡμιευθεῖες Α'Β' καί Α'Γ' παράλληλες πρός τίς ΑΒ καί ΑΓ, καταλαβαίνουμε ὅτι τό ὁμοιόθετο σχῆμα τῆς $\widehat{\varphi}$ εἶναι ἐπίσης μιά γωνία καί μάλιστα ἴση μέ τή $\widehat{\varphi}$ (ὅπως φαίνεται ἀμέσως, ἄν πάρουμε τό ἀποτύπωμα τῆς $\widehat{\varphi}$ σ' ἕνα διαφανές χαρτί καί τό τοποθετήσουμε πάνω στή $\widehat{B'A'\Gamma'}$). Ἔτσι :

Τό ὁμοιόθετο μιᾶς γωνίας $\widehat{\varphi}$ εἶναι μιά γωνία $\widehat{\varphi'}$ ἴση μέ τή $\widehat{\varphi}$, ἡ ὁποία ἔχει τίς πλευρές της παράλληλες πρός τίς πλευρές τῆς γωνίας $\widehat{\varphi}$.

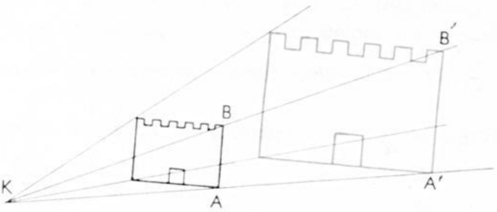
Βλέπουμε δηλαδή ὅτι σέ κάθε ὁμοιοθεσία οἱ γωνίες παραμένουν **ἀμετάβλητες ὡς πρός τά μέτρα τους,** ἐνῶ τά εὐθύγραμμα τμήματα δέν παραμένουν *ἀμετάβλητα* ὡς πρός τό μῆκος τους, ἀλλά **διατηροῦν τή διεύθυνσή τους.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 11—14

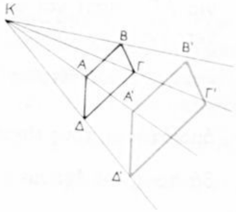
Ὅμοια σχήματα

12. 8. Δύο σχήματα τοῦ ἐπιπέδου, τά ὁποῖα εἶναι ὁμοιόθετα ἤ μπορεῖ νά γίνουν ὁμοιόθετα, λέγονται **ὅμοια σχήματα.** Ἀφοῦ δύο ὅμοια σχήματα εἶναι ἤ μπορεῖ νά γίνουν ὁμοιόθετα, ὁ λόγος τῆς ἀποστάσεως δύο σημείων τοῦ ἑνός σχήματος πρός τήν ἀπόσταση τῶν ἀντίστοιχων σημείων τοῦ ἄλλου σχήματος εἶναι πάντα ὁ ἴδιος (γιατί αὐτές οἱ ἀποστάσεις εἶναι ὁμοιόθετα εὐθύγραμμα τμήματα καί ὁ λόγος τους εἶναι ἴσος μέ τό λόγο ὁμοιοθεσίας) καί λέγεται **λόγος ὁμοιότητας** τῶν δύο σχημάτων. Ἔτσι π.χ. στό σχῆμα 17 ὁ λόγος ὁμοιότητας τῶν δύο πύργων εἶναι $\frac{A'B'}{AB}$.

Βλέπουμε συνεπῶς ὅτι, ἄν δύο σχήματα εἶναι ὅμοια, τό ἕνα εἶναι «μεγέθυνση» ἤ «σμίκρυνση» τοῦ ἄλλου.



(σχ. 17)



(σχ. 18)

Ἄν πάρουμε τώρα δύο ὅμοια πολύγωνα (βλ. σχ. 18), ὁ λόγος ὁμοιότητας θά ἰσοῦται μέ τό λόγο δύο ὁποιωνδήποτε ἀντίστοιχων πλευρῶν τους καί συνεπῶς θά ἔχουμε

$$\boxed{\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta A}{\Delta'A'}}$$

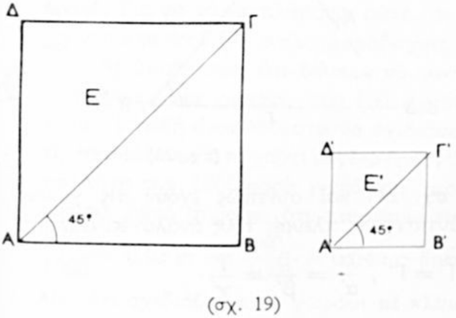
Ἐπίσης, ἀφοῦ τά ὅμοια πολύγωνα θά εἶναι ἤ θά ἔχουν γίνει ὁμοιόθετα, οἱ ἀντίστοιχες γωνίες τους θά εἶναι ἴσες, δηλαδή

$$\boxed{\widehat{A} = \widehat{A'}\ ,\ \widehat{B} = \widehat{B'}\ ,\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}\ ,\ \widehat{\Delta} = \widehat{\Delta'}}$$

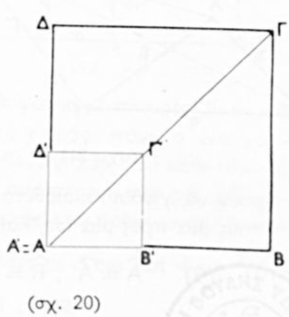
Ἔτσι λοιπόν **δύο ὅμοια πολύγωνα ἔχουν τίς γωνίες τους μία πρός μία ἴσες καί τίς πλευρές, πού περιέχουν τίς ἴσες γωνίες τους, ἀνάλογες.**

Λόγος ἐμβαδῶν ὅμοιων σχημάτων

12. 9. Ἄς θεωρήσουμε τώρα δύο ὁποιαδήποτε τετράγωνα μέ πλευρές α καί α' (βλ. σχ. 19). Ἄν τοποθετήσουμε τό ἕνα πάνω στό ἄλλο, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 20, βλέπουμε ὅτι ἡ κορυφή Γ' θά πέσει πάνω στή διαγώ-



(σχ. 19)



(σχ. 20)

νιο ΑΓ (γιατί καί οἱ δύο γωνίες $\widehat{BAΓ}$ καί $\widehat{B'A'Γ'}$ εἶναι 45°). Ἔτσι τά δύο τετράγωνα μποροῦν νά θεωρηθοῦν ὁμοιόθετα μέ κέντρο ὁμοιοθεσίας τό Α καί λόγο ὁμοιοθεσίας $\lambda = \frac{\alpha}{\alpha'}$. Τότε ὅμως εἶναι ὅμοια σχήματα καί ὁ λόγος ὁμοιότητάς τους εἶναι ἐπίσης $\lambda = \frac{\alpha}{\alpha'}$. Ἄν ὀνομάσουμε Ε καί Ε' τά ἐμβαδά τους, θά ἔχουμε

$$\frac{E}{E'} = \frac{\alpha^2}{\alpha'^2} = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2 = \lambda^2.$$

Δηλαδή ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τους εἶναι ἴσος μέ τό τετράγωνο τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητας. Ἔτσι π.χ. ἄν ἡ πλευρά α εἶναι τριπλάσια ἀπό τήν α', τό ἐμβαδό Ε εἶναι ἐννέα φορές μεγαλύτερο ἀπό τό Ε'.

Τό συμπέρασμα αὐτό ἰσχύει καί γιά δύο ὁποιαδήποτε ὅμοια σχήματα. Ἔτσι:

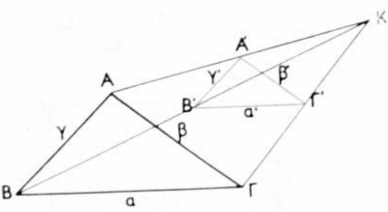
> Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὅμοιων σχημάτων εἶναι ἴσος μέ τό τετράγωνο τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητάς τους.

Ἄν π.χ. στό σχῆμα 17 ἡ πλευρά τοῦ μικροῦ πύργου εἶναι τό μισό τῆς πλευρᾶς τοῦ ἄλλου, ἡ ἐπιφάνειά του θά εἶναι τό $\frac{1}{4}$ τῆς ἐπιφάνειας τοῦ μεγάλου πύργου.

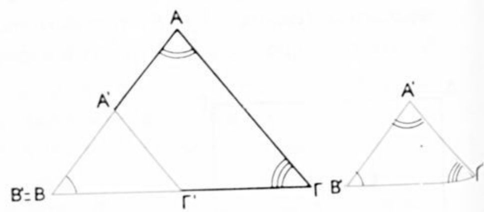
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 19—21

Ὅμοια τρίγωνα

12.10. Ἄς περιορισθοῦμε τώρα σέ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α'Β'Γ'. Ὅταν λέμε ὅτι τά τρίγωνα αὐτά εἶναι ὅμοια, ἐννοοῦμε ὅτι εἶναι ἤ μπο-



(σχ. 21)



(σχ. 22)

ροῦν νά γίνουν ὁμοιόθετα (βλ. σχ. 21) καί συνεπῶς ἔχουν τίς γωνίες τους μία πρός μία ἴσες καί τίς ἀντίστοιχες πλευρές τους ἀνάλογες. Δηλαδή

$$(9) \qquad \widehat{A} = \widehat{A'}\ ,\ \widehat{B} = \widehat{B'}\ ,\ \widehat{Γ} = \widehat{Γ'}\ ,\ \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}.$$

Έτσι μποροῦμε νά λέμε ὅτι, **δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν τίς γωνίες τους μία πρός μία ἴσες καί τίς πλευρές τους, πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό τίς ἴσες γωνίες, ἀνάλογες.** Οἱ πλευρές δύο ὅμοιων τριγώνων, πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό τίς ἴσες γωνίες, λέγονται «ὁμόλογες» πλευρές.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα δύο τρίγωνα, γιά τά ὁποῖα ξέρουμε ὅτι $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}'$ (βλ. σχ. 22). Ἄν τοποθετήσουμε τό Α'Β'Γ' πάνω στό ΑΒΓ κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε ἡ $\widehat{B}'$ νά συμπέσει μέ τήν ἴση της γωνία $\widehat{B}$, τά τρίγωνα γίνονται ὁμοιόθετα μέ κέντρο ὁμοιοθεσίας τό Β (γιατί, ἐπειδή $\widehat{A} = \widehat{A}'$ θά εἶναι Α'Γ'//ΑΓ, ὁπότε ἀπό τό θεώρημα τοῦ Θαλῆ θά εἶναι $\frac{BA'}{BA} = \frac{B\Gamma'}{B\Gamma} = \lambda$) καί συνεπῶς εἶναι ὅμοια. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

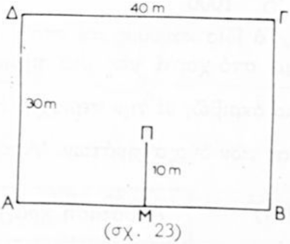
> Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν τίς γωνίες τους μία πρός μία ἴσες.

Αὐτό σημαίνει ὅτι, γιά νά συμπεράνουμε τήν ὁμοιότητα δύο τριγώνων, δέ χρειάζεται νά ἐξετάσουμε ἄν ἰσχύουν ὅλες οἱ ἰσότητες (9). Ἀρκεῖ νά ἰσχύουν μόνο οἱ τρεῖς πρῶτες καί τότε θά ἰσχύει καί ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 22–25

Κλίμακες

12. 11. Ὅταν διαβάζουμε ἕνα χάρτη ἤ ἕνα ἀρχιτεκτονικό σχέδιο, βλέπουμε σέ μιά γωνιά του νά γράφεται π.χ. «ΚΛΙΜΑΚΑ 1:1000000» ἤ «ΚΛΙΜΑΚΑ 1:50». Καταλαβαίνουμε βέβαια ὅτι αὐτή ἡ φράση εἶναι σχετική μέ τόν τρόπο, πού σχεδιάστηκε ὁ χάρτης ἤ τό ἀρχιτεκτονικό σχέδιο, ἀλλά τί ἀκριβῶς ἐννοεῖ; Γιά νά τό καταλάβουμε αὐτό, ἄς ξεκινήσουμε ἀπό ἕνα ἁπλό παράδειγμα.



(σχ. 23)

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά περιγράψουμε ἕνα χωράφι, πού ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιο μέ πλευρές 30 m καί 40 m. Ἐπειδή εἶναι ἀδύνατο νά σχεδιάσουμε τό χωράφι πάνω σ' ἕνα χαρτί, σχεδιάζουμε στό χαρτί μας ἕνα ὀρθογώνιο (βλ. σχ. 23), πού κάθε πλευρά του εἶναι π.χ. 1000 φορές μικρότερη ἀπό τήν ἀντίστοιχη πλευρά τοῦ χωραφιοῦ. Αὐτό σημαίνει ὅτι παίρνουμε τίς πλευρές τοῦ ὀρθογωνίου ἴσες μέ $\frac{30}{1000} = 0{,}03$ m καί $\frac{40}{1000} = 0{,}04$ m, δηλαδή ἴσες μέ 3 cm καί 4 cm. Τότε λέμε ὅτι σχεδιάζουμε τό χωράφι **μέ κλίμακα 1 : 1000.**

῎Ετσι ὁ ἀριθμός $\frac{1}{1000}$ παριστάνει τό λόγο τῆς ἀποστάσεως δύο σημείων τοῦ σχεδίου πρός τήν πραγματική τους ἀπόσταση. Γενικά λοιπόν ὅταν λέμε κλίμακα $\frac{1}{\alpha}$ ἐννοοῦμε ὅτι

$$(10) \qquad \boxed{\frac{\text{ἀπόσταση σχεδίου}}{\text{ἀπόσταση πραγματική}} = \frac{1}{\alpha}}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι, **ἕνα σχέδιο μέ κλίμακα 1 : 1000** $\left(\text{ἤ γενικά } \frac{1}{\alpha}\right)$ **οὐσιαστικά σημαίνει ἕνα σχῆμα ὅμοιο πρός τό πραγματικό μέ λόγο ὁμοιότητας** $\frac{1}{1000}$ $\left(\text{ἤ γενικά } \frac{1}{\alpha}\right)$.

᾿Από τήν ἰσότητα (10) προκύπτει ἡ ἰσότητα:

$$\boxed{\text{᾿Απόσταση σχεδίου} = \frac{1}{\alpha} \cdot (\text{ἀπόσταση πραγματική})}$$

῎Ετσι π.χ. ἄν τό χωράφι ἔχει ἕνα πηγάδι, πού βρίσκεται στό μέσο τῆς προσόψεως τῶν 40 m καί σέ βάθος 10 m, γιά νά τό σημειώσουμε στό σχέδιό μας, θά πρέπει νά φέρουμε ἀπό τό μέσο Μ τῆς πλευρᾶς ΑΒ μιά παράλληλη πρός τήν ΑΔ καί πάνω σ᾿αὐτή νά πάρουμε τμῆμα ΜΠ ὥστε

$$(\text{ΜΠ}) = \frac{1}{1000} \cdot 10 = 0{,}01 \text{ m} = 1 \text{ cm}.$$

Τό ἴδιο κάνουμε καί στούς χάρτες. ᾿Επειδή δέν μποροῦμε νά σχεδιάσουμε στό χαρτί μας μιά περιοχή, σχεδιάζουμε μέ κλίμακα ἕνα σχῆμα ὅμοιο ἀκριβῶς μέ τήν περιοχή. ῾Η κλίμακα $\frac{1}{\alpha}$ εἶναι ἴση μέ τό λόγο ὁμοιότητας τῶν δύο σχημάτων. ᾿Από τήν ἰσότητα (10) προκύπτει ἡ ἰσότητα:

$$(11) \qquad \boxed{\text{᾿Απόσταση πραγματική} = \alpha \,.\, (\text{ἀπόσταση σχεδίου})}$$

μέ τήν ὁποία *«διαβάζουμε»* ἕνα χάρτη πού κατασκευάστηκε μέ κλίμακα $\frac{1}{\alpha}$.

῎Ετσι π.χ. γιά νά βροῦμε τήν πραγματική ἀπόσταση Μυτιλήνης–Καλλονῆς ἀπό τό χάρτη τοῦ σχήματος 24 $\left(\text{πού ἔχει κλίμακα } \frac{1}{800\,000}\right)$, μετρᾶμε τήν ἀπόσταση στό χάρτη καί βρίσκουμε ὅτι εἶναι 4,4 cm, ὁπότε ἔχουμε

(σχ. 24)

$$x = 0{,}044 \times 800000 = 35200 \text{ m} = 35{,}2 \text{ km}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 26–30

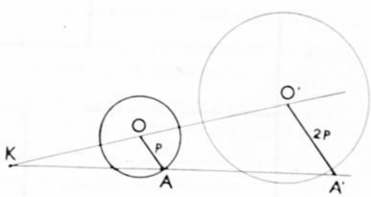
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ—ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Θεωροῦμε ἕναν κύκλο (Ο,ρ) καί παίρνουμε τό ὁμοιόθετο σχῆμα του ὡς πρός κέντρο ὁμοιοθεσίας ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Κ καί λόγο $\lambda = 2$. Νά δικαιολογήσετε γιατί τό ὁμοιόθετο σχῆμα εἶναι ἐπίσης κύκλος μέ ἀκτίνα 2ρ.**

Λύση. Ἄν ὀνομάσουμε Ο΄ τό ὁμοιόθετο τοῦ κέντρου Ο καί Α΄ τό ὁμοιόθετο ἑνός ὁποιουδήποτε σημείου Α τοῦ κύκλου, τό εὐθύγραμμο τμῆμα Ο΄Α΄ θά εἶναι (βλ. σχ. 25) ὁμοιόθετο τῆς ἀκτίνας ΟΑ. Ἔτσι ἔχουμε

$$O'A' = 2OA = 2\rho$$

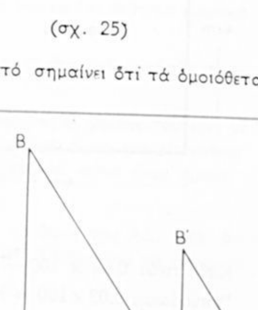
Βλέπουμε λοιπόν ὅτι τό ὁμοιόθετο ἑνός ὁποιουδήποτε σημείου τοῦ κύκλου (Ο,ρ) ἀπέχει ἀπό ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Ο΄ ἀπόσταση 2ρ. Αὐτό σημαίνει ὅτι τά ὁμοιόθετα ὅλων τῶν σημείων βρίσκονται στόν κύκλο (Ο΄,2ρ).



(σχ. 25)

2. **Νά δικαιολογήσετε γιατί δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ ($\widehat{A} = \widehat{A'} = 90^0$), πού ἔχουν τίς ὀξεῖες γωνίες τους Γ καί Γ΄ ἴσες, εἶναι ὅμοια.**

Λύση. Ἀφοῦ τά τρίγωνα εἶναι ὀρθογώνια, θά ἔχουν τίς ὀρθές γωνίες τους $\widehat{A}$ καί $\widehat{A'}$ ἴσες. Ἐπειδή εἶναι ἀκόμη $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$ καί $\widehat{B} = 90^0 - \widehat{\Gamma}$, $\widehat{B'} = 90^0 - \widehat{\Gamma'}$, θά εἶναι καί $\widehat{B} = \widehat{B'}$. Ἐπειδή λοιπόν τά τρίγωνα ἔχουν τίς γωνίες τους ἴσες μία πρός μία, θά εἶναι ὅμοια.



(σχ 26)

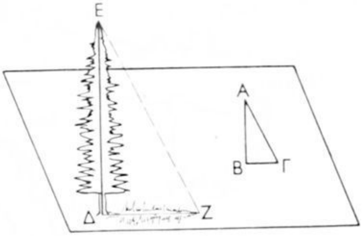
3. Ρωτήθηκε ένας γεωργός τί ΰψος έχει ένα ψηλό δένδρο στό κτῆμα του. Ἐκεῖνος, πρίν ἀπαντήσει, ἔκανε διαδοχικά τίς ἑξῆς ἐργασίες:

α) Πῆρε ἕναν πάσσαλο μήκους 1m καί τόν ἔστησε κατακόρυφα δίπλα στό δένδρο (βλ. σχ. 27).

β) Μέτρησε τίς σκιές τοῦ δένδρου καί τοῦ πασσάλου καί βρῆκε $(ΔΖ) = 3{,}6$ m, $(ΒΓ) = 0{,}4$m.

γ) Ἔκανε τή διαίρεση $3{,}6 : 0{,}4 = 9$ καί εἶπε ὅτι τό ὕψος τοῦ δέντρου εἶναι 9m.

Μπορεῖτε νά τά ἐξηγήσετε ὅλα αὐτά;



(σχ. 27)

Λύση. Ἐπειδή οἱ ἀκτίνες ΕΖ καί ΑΓ τοῦ ἥλιου θεωροῦνται παράλληλες γιά τόσο κοντινές ἀποστάσεις, τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΖΕ καί ΒΓΑ θά ἔχουν τίς ὀξεῖες γωνίες $\widehat{Ε}$ καί $\widehat{Α}$ ἴσες. Συνεπῶς θά εἶναι ὅμοια. Μποροῦμε λοιπόν νά γράψουμε

$$\frac{(ΕΔ)}{(ΑΒ)} = \frac{(ΔΖ)}{(ΒΓ)} \quad ἤ \quad \frac{(ΕΔ)}{1} = \frac{3{,}6}{0{,}4} \quad ἤ \quad (ΕΔ) = 9 \text{ m}.$$

---

4. Τό σχῆμα 28 δείχνει τήν κάτοψη ἑνός σπιτιοῦ μέ κλίμακα 1 : 100. Νά βρεῖτε τίς διαστάσεις κάθε δωματίου καί τίς διαστάσεις τοῦ οἰκοπέδου.

Λύση. Ἀπό τόν τύπο (11) ἔχουμε

(σχ. 28)

Καθιστικό: $0{,}04 \times 100 = 4$ m καί $0{,}04 \times 100 = 4$m

Ὑπνοδωμ.: $0{,}03 \times 100 = 3$ m καί $0{,}04 \times 100 = 4$ m.

Κουζίνα: $0{,}035 \times 100 = 3{,}5$ m καί $0{,}02 \times 100 = 2$ m

Λουτρό: $0{,}025 \times 100 = 2{,}5$ m καί $0{,}02 \times 100 = 2$m
Ἀποθήκη: $0{,}01 \times 100 = 1$ m καί $0{,}03 \times 100 = 3$ m
Οἰκοπέδου: $0{,}10 \times 100 = 10$ m καί $0{,}07 \times 100 = 7$ m

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

11. Νά κατασκευάσετε ἕνα τετράγωνο πλευρᾶς 2cm καί τό ὁμοιόθετό του σέ μιά ἐσωτερική ὁμοιοθεσία πού ἔχει κέντρο μιά κορυφή του καί λόγο $\frac{1}{2}$.

12. Νά κατασκευάσετε τό ὁμοιόθετο ἰσόπλευρου τριγώνου πλευρᾶς 3 cm σέ μιά ἐξωτερική ὁμοιοθεσία πού ἔχει κέντρο μιά κορυφή του καί λόγο $\lambda = 2$. Ποιό εἶναι τό μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ νέου ἰσόπλευρου τριγώνου;

13. Νά σχεδιάσετε ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ μέ (ΑΒ) = 8 cm καί (ΒΓ) = 6 cm. Ἄν Ε καί Ζ εἶναι τά μέσα τῶν ΑΒ καί ΒΓ ἀντίστοιχα α) νά κατασκευάσετε τό ὁμοιόθετο τοῦ πενταγώνου ΑΕΖΓΔ στήν ἐξωτερική ὁμοιοθεσία μέ κέντρο τό κέντρο τοῦ ὀρθογωνίου καί λόγο $\lambda = \frac{3}{2}$ καί β) νά ὑπολογίσετε τά μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ νέου πενταγώνου.

14. Ποιό εἶναι τό ὁμοιόθετο μιᾶς εὐθείας στήν ὁμοιοθεσία πού ἔχει λόγο 3 καί κέντρο ἕνα σημεῖο της Κ;

15. Δίνεται ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ μέ διαστάσεις (ΑΒ) = 6 cm, (ΑΔ) = 4 cm. Νά κατασκευάσετε ὀρθογώνιο Α'Β'Γ'Δ' ὅμοιο μέ τό ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρά ἡ ὁμόλογη πρός τήν ΑΒ νά ἔχει μῆκος (Α'Β') = 4,5 cm.

16. Δύο πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ καί Α'Β'Γ'Δ'Ε' εἶναι ὅμοια καί ἰσχύει ἡ ἀναλογία $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'}$. Ἐφαρμόζοντας κατάλληλη ἰδιότητα ἀναλογιῶν, νά βρεῖτε τό λόγο τῶν περιμέτρων τῶν δύο ὅμοιων σχημάτων καί νά διατυπώσετε τό συμπέρασμά σας γιά δυό ὁποιαδήποτε ὅμοια πολύγωνα.

17. Μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι δύο ὁποιοιδήποτε κυκλ. δίσκοι εἶναι ὅμοια σχήματα; Ἄν ναί, νά βρεῖτε ἕναν ἁπλό τρόπο, ὥστε αὐτοί νά γίνουν ὁμοιόθετα σχήματα.

18. Νά κατασκευάσετε ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο μέ πλευρά 2 cm καί ἔπειτα ἕνα δεύτερο ἰσόπλευρο τρίγωνο μέ ἐπιφάνεια τό μισό τῆς ἐπιφάνειας τοῦ πρώτου.

19. Νά χαράξετε ἕναν κυκλικό δίσκο μέ ἀκτίνα 14 mm καί ἔπειτα ἕνα δεύτερο κυκλικό δίσκο, πού νά ἔχει διπλάσια ἐπιφάνεια.

20. Ποιό εἶναι τό ἐμβαδό τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρά εἶναι τό μισό τῆς πλευρᾶς ἑνός τετραγώνου πού ἔχει ἐμβαδό 64 m^2;

21. Ὅλες οἱ πλευρές ἑνός ἑξαγώνου εἶναι ἴσες μέ 3 cm καί ὅλες οἱ γωνίες του ἴσες μέ 120°. Ἕνα ἄλλο ἑξάγωνο ἔχει ὅλες τίς πλευρές του ἴσες μέ 5 cm καί τίς γωνίες του πάλι ἴσες μέ 120°. α) Νά ἐξετάσετε ἄν τά ἑξάγωνα αὐτά εἶναι ὅμοια. β) Ποιός εἶναι ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τους;

22. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$) νά φέρετε τό ὕψος του ΑΔ. Νά δικαιολογήσετε ὅτι τό τρίγωνο ΑΔΒ εἶναι ὅμοιο μέ τό ΑΒΓ. Τό ἴδιο γιά τά τρίγωνα ΑΔΓ καί ΑΒΓ. Νά συμπληρώσετε τίς ἀναλογίες:

i) $\frac{B A}{\ } = \frac{A\Delta}{\ } = \frac{B\Delta}{\ }$ ii) $\frac{A\Gamma}{\ } = \frac{A\Delta}{\ } = \frac{\Gamma\Delta}{\ }$, πού προκύπτουν ἀπό αὐτά τά ὅμοια τρίγωνα. Τί συμπεραίνετε γιά τά τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΔΓ;

23. Δυό ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ ($\widehat{A} = \widehat{A'} = 90^0$) ἔχουν κάθετες πλευρές μέ μήκη (ΑΒ) = 6 cm, (ΑΓ) = 4 cm καί (Α΄Β΄) = 4,5 cm, (Α΄Γ΄) = 3 cm. Νά μετρήσετε τίς ὀξεῖες γωνίες τους $\widehat{Γ}$ καί $\widehat{Γ'}$. Τί συμπέρασμα βγάζετε, ἄν παρατηρήσετε ὅτι τά τρίγωνα ἔχουν τίς κάθετες πλευρές τους ἀνάλογες;

24. Νά κατασκευάσετε δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ μέ πλευρές (ΑΒ) = 2 cm, (ΒΓ) = = 3 cm, (ΑΓ) = 4 cm καί (Α΄Β΄) = 4 cm, (Β΄Γ΄) = 6 cm, (Α΄Γ΄) = 8 cm. Νά μετρήσετε ἔπειτα τίς γωνίες τους. Τά τρίγωνα εἶναι ὅμοια; Παρατηρώντας ὅτι ἔχουν τίς πλευρές τους ἀνάλογες τί γενικό συμπέρασμα βγάζετε;
Νά φέρετε τά ὕψη ΑΔ καί Α΄Δ΄ καί νά ὑπολογίσετε τό λόγο ΑΔ : Α΄Δ΄. Τί συμπέρασμα βγάζετε;

25. Νά ἐξετάσετε ἄν τό τρίγωνο, πού ἔχει κορυφές τά μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι ὅμοιο μέ τό ΑΒΓ.

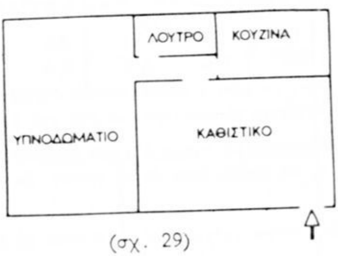
26. Σ' ἕνα χάρτη, πού σχεδιάστηκε μέ κλίμακα $\frac{1}{100\,000}$, δύο πόλεις ἀπέχουν 12cm. Νά βρεῖτε τήν πραγματική ἀπόστασή τους σέ km.

27. Πάνω σ' ἕναν τοπογραφικό χάρτη μέ κλίμακα $\frac{1}{100}$ μετρήσαμε τό ἐμβαδό ἑνός ὀρθογώνιου κτήματος καί τό βρήκαμε ἴσο μέ 120 cm². Νά ὑπολογίσετε τό πραγματικό ἐμβαδό τοῦ κτήματος σέ m².

28. Σέ ἕνα σχέδιο μέ κλίμακα 1:200 ὑπάρχει κύκλος μέ ἀκτίνα 3 cm. Ποιό εἶναι τό πραγματικό μῆκος τῆς ἀκτίνας τοῦ κύκλου;

29. Νά σχεδιάσετε μέ κλίμακα 1 : 1000 ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο μέ βάση 45 m καί ὕψος 25 m.

30. Νά μετρήσετε τίς διαστάσεις τῶν δωματίων τοῦ διαμερίσματος, πού ἔχουμε σχεδιάσει στό σχῆμα 29 μέ κλίμακα 1 : 150, καί νά ὑπολογίσετε τίς πραγματικές διαστάσεις τους.



(σχ. 29)

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 12

1. Ἄν δύο εὐθ. τμήματα α καί β συνδέονται μέ τή σχέση $α = \frac{3}{5}\,β$, ὁ ἀριθμός $\frac{3}{5}$ λέγεται **λόγος τοῦ α πρός τό β** καί γράφεται $\frac{α}{β}$. Ἔτσι οἱ δυό ἰσότητες

$$α = \frac{3}{5}\cdot β \quad \text{καί} \quad \frac{α}{β} = \frac{3}{5}$$

εἶναι ἰσοδύναμες. Ἄν μετρήσουμε τά α καί β μέ τήν ἴδια μονάδα, **ὁ λόγος τῶν δύο τμημάτων εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν μέτρων τους.**

2. Ὅπως καί στούς ἀριθμούς, ἔτσι καί στά εὐθύγραμμα τμήματα ἡ ἰσότητα δύο λόγων λέγεται **ἀναλογία**. Ὅταν ἔχουμε τήν ἀναλογία

$$(1) \qquad \frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$$

λέμε ὅτι **τά α καί β εἶναι ἀνάλογα πρός τά γ καί δ.** 'Από τήν (Ι) προκύπτει ἡ $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$, πού ἐκφράζει ὅτι καί τά α καί γ εἶναι ἀνάλογα πρός τά β καί δ. Γενικά στίς ἀναλογίες τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων ἰσχύουν ὅλες οἱ ἰδιότητες τῶν ἀριθμητικῶν ἀναλογιῶν. Μιά βασική πρόταση στίς ἀναλογίες εἶναι τό **θεώρημα τοῦ Θαλῆ**:

Τρεῖς ἤ περισσότερες παράλληλες εὐθεῖες τέμνουν δύο ὁποιεσδήποτε εὐθεῖες σέ μέρη ἀνάλογα.

'Από τό θεώρημα αὐτό προκύπτει ὅτι **κάθε εὐθεία παράλληλη πρός μιά πλευρά τριγώνου τέμνει τίς δύο ἄλλες σέ μέρη ἀνάλογα.**

3. Ὅταν λέμε **ὁμοιοθεσία μέ κέντρο Κ καί λόγο λ**, ἐννοοῦμε μιά **ἀπεικόνιση**, πού ἀντιστοιχίζει σέ κάθε σημεῖο Α τό σημεῖο Α' τῆς ἡμιευθείας ΚΑ (ἐξωτερική ὁμοιοθεσία) ἤ τῆς ἀντικειμένης της (ἐσωτερική ὁμοιοθεσία) πού εἶναι τέτοιο, ὥστε ΚΑ' = λΚΑ. Ἡ ὁμοιοθεσία λέγεται **συστολή** γιά $\lambda < 1$ καί **διαστολή** γιά $\lambda > 1$.

Τό *ὁμοιόθετο ἑνός σχήματος* σ εἶναι ἕνα ἄλλο σχῆμα σ', τό ὁποῖο ἀποτελεῖται ἀπό τά ὁμοιόθετα ὅλων τῶν σημείων τοῦ σ. Σέ μιά ὁμοιοθεσία μέ λόγο λ:

- Τό ὁμοιόθετο τμήματος ΑΒ εἶναι τμῆμα Α'Β' = λΑΒ παράλληλο πρός τό ΑΒ.
- Τό ὁμοιόθετο γωνίας $\widehat{\varphi}$ εἶναι γωνία ἴση μέ τή $\widehat{\varphi}$.

Τά σχήματα, πού εἶναι ἤ πού μπορεῖ νά γίνουν ὁμοιόθετα, λέγονται **ὅμοια.** Ἄν ἔχουμε δύο ὅμοια σχήματα καί α,α' εἶναι δύο ὁποιαδήποτε ἀντίστοιχα εὐθύγραμμα τμήματά τους, ὁ λόγος α : α' εἶναι **ὁ λόγος ὁμοιότητας** τῶν δύο σχημάτων. Ἄν τά ὅμοια σχήματα εἶναι πολύγωνα, τότε:

— Οἱ γωνίες τους εἶναι μία πρός μία ἴσες.

— Οἱ ἀντίστοιχες πλευρές τους εἶναι ἀνάλογες.

— Τά ἐμβαδά τους ἔχουν λόγο ἴσο μέ τό τετράγωνο τοῦ λόγου ὁμοιότητάς τους.

Εἰδικά στά τρίγωνα ἡ ὁμοιότητα ἐξασφαλίζεται μόνο μέ τίς ἰσότητες τῶν γωνιῶν τους. Ἔτσι **ἄν δύο τρίγωνα ἔχουν μία πρός μία τίς γωνίες τους ἴσες, οἱ πλευρές, πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό τίς ἴσες γωνίες, εἶναι ἀνάλογες.**

Στά ὅμοια σχήματα στηρίζεται ἡ σχεδίαση μέ κλίμακα. Γιά νά σχεδιάσουμε ἕνα σχῆμα μέ κλίμακα $\frac{1}{\alpha}$, σχεδιάζουμε ἕνα ὅμοιο σχῆμα μέ λόγο ὁμοιότητας $\frac{1}{\alpha}$. Ἔτσι ἰσχύει πάντοτε ὁ τύπος

$$\frac{\text{ἀπόσταση σχεδίου}}{\text{ἀπόσταση πραγματική}} = \frac{1}{\alpha}$$

Μέ τή βοήθεια αὐτοῦ τοῦ τύπου διαβάζουμε χάρτες, σχέδια, κ.λ.π.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

31. Νά διαιρέσετε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ μέ ἕνα σημεῖο Γ ἔτσι, ὥστε ΑΓ : ΒΓ = 2 : 5

32. Δύο παράλληλες εὐθεῖες ε καί ε' ἔχουν μεταξύ τους ἀπόσταση 6 cm. Ἔστω ΑΒ ἕνα τμῆμα κάθετο πρός αὐτές, πού ἔχει τό Α στήν ε καί τό Β στήν ε', καί ἕνα πλάγιο τμῆμα ΓΔ μέ μῆκος 9 cm, πού ἔχει τό Γ στήν ε καί τό Δ στήν ε'. 'Από τό μέσο Μ τοῦ ΑΒ φέρνουμε τήν παράλληλη πρός τήν ε. Νά ὑπολογίσετε τό λόγο τῶν τμημάτων, στά ὁποῖα αὐτή διαιρεῖ τό ΓΔ.

33. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ ($\widehat{A}=90^0$) καί Α'Β'Γ' ($\widehat{A'}=90^0$) ἔχουν $\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma'}=37^\circ$ καί $(\mathrm{A\Gamma})=4$ cm, $(\mathrm{AB})=3$ cm καί $(\mathrm{A'\Gamma'})=2$ cm.
α) Νά ἐξετάσετε ἄν τά τρίγωνα εἶναι ὅμοια.
β) Νά ὑπολογίσετε τό μῆκος τῆς πλευρᾶς Α'Β'.

34. Ἄν πενταπλασιάσετε τό μῆκος μιᾶς πλευρᾶς ἑνός ἰσόπλευρου τριγώνου καί μέ πλευρά αὐτό κατασκευάσετε ἕνα ἄλλο ἰσόπλευρο τρίγωνο, νά βρεῖτε α) πόσο μεγαλύτερη εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ νέου τριγώνου, β) πόσο μεγαλύτερο εἶναι τό ἐμβαδό τοῦ νέου τριγώνου.

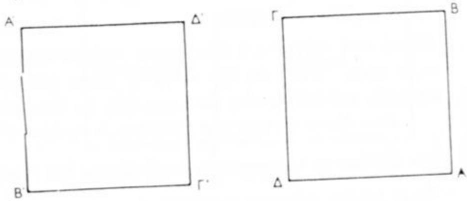
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

35. Ἄν δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, νά βρεῖτε: α) Πάνω στήν πλευρά του ΑΒ ἕνα σημεῖο Δ τέτοιο, ὥστε $\mathrm{A\Delta}=\frac{3}{5}\mathrm{AB}$. β) Πάνω στήν πλευρά ΑΓ ἕνα σημεῖο Ε τέτοιο, ὥστε $\mathrm{\Gamma E}=\frac{2}{5}\mathrm{A\Gamma}$. γ) Νά ἐξετάσετε τή θέση τῶν εὐθειῶν ΔΕ καί ΒΓ καί νά βρεῖτε τό λόγο ΔΕ : ΒΓ.

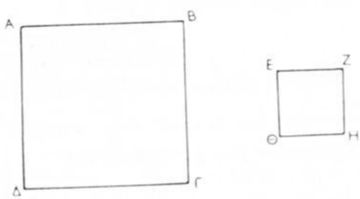
36. α) Νά κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ μέ $(\mathrm{AB})=6$ cm καί $(\mathrm{A\Delta})=8$ cm. β) Μέ κέντρο ὁμοιοθεσίας τό Α καί λόγο $\lambda=1/2$ νά κατασκευάσετε τό ἐσωτερικό ὁμοιόθετο τοῦ ΑΒΓΔ. γ) Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό τοῦ νέου ὀρθογωνίου.

37. Μέ κέντρο ὁμοιοθεσίας ἕνα σημεῖο Κ ἐσωτερικό τοῦ κυκλικοῦ δίσκου (Ο,2cm) καί λόγο $\lambda=3$ νά κατασκευάσετε τό ἐσωτερικό ὁμοιόθετο σχῆμα τοῦ κύκλου (Ο,2cm) καί νά ὑπολογίσετε τήν ἀκτίνα τοῦ ὁμοιόθετου κύκλου.

38. Τά δύο τετράγωνα τοῦ ἀπέναντι σχήματος εἶναι ἴσα. Ὑπάρχει ὁμοιοθεσία πού νά ἀντιστοιχίζει τό ἕνα στό ἄλλο; Νά βρεῖτε τό κέντρο καί τό λόγο τῆς ὁμοιθεσίας. Ὑπάρχει ἄλλο κέντρο ὁμοιοθεσίας;



39. Τά δύο τετράγωνα τοῦ ἀπέναντι σχήματος εἶναι ἄνισα.
α) Πόσες ὁμοιοθεσίες ἀντιστοιχίζουν τό ἕνα στό ἄλλο;
β) Νά βρεῖτε τά κέντρα ὁμοιοθεσίας καί τούς λόγους ὁμοιοθεσίας μέ μέτρηση.



40. Νά σχεδιάσετε μιά ὀξεία γωνία $x\widehat{O}y$ καί νά πάρετε στήν Οx ὁποιαδήποτε σημεῖα Α,Γ,Ε,Η. Μετά ἀπό τά σημεῖα αὐτά νά φέρετε τίς ΑΒ,ΓΔ,ΕΖ,ΗΘ κάθετες στήν Οy.

Νά συγκρίνετε τούς λόγους:

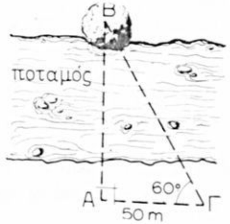
α) $\frac{AB}{OB}$, $\frac{\Gamma\Delta}{O\Delta}$, $\frac{EZ}{OZ}$, $\frac{H\Theta}{O\Theta}$ β) $\frac{AB}{OA}$, $\frac{\Gamma\Delta}{O\Gamma}$, $\frac{EZ}{OE}$, $\frac{H\Theta}{OH}$ γ) $\frac{OB}{OA}$, $\frac{O\Delta}{O\Gamma}$, $\frac{OZ}{OE}$, $\frac{O\Theta}{OH}$

13ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Τί εἶναι Τριγωνομετρία

13.1. Στό σχ. 1 βλέπουμε ἕνα μεγάλο βράχο πού βρίσκεται ἀπέναντι ἀπό τό σημεῖο Α. Γιά νά μετρήσουμε τήν ἀπόσταση ΑΒ, κάνουμε τίς παρακάτω ἐργασίες:



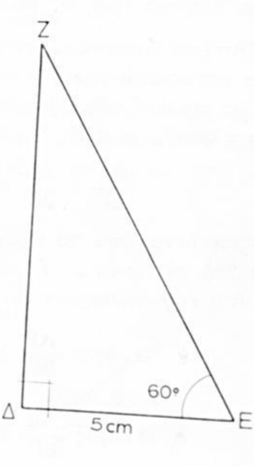
(σχ. 1)

– Μετρᾶμε μιά ἀπόσταση κατά μῆκος τοῦ ποταμοῦ, π.χ. (ΑΓ) = 50 m.
– Μέ ἕνα γωνιόμετρο μετρᾶμε τή γωνία $\widehat{A\Gamma B}$ καί βρίσκουμε π.χ. $(\widehat{A\Gamma B}) = 60^0$.
– Κατασκευάζουμε τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ μέ κλίμακα 1:1000, δηλαδή κατασκευάζουμε ἕνα ἄλλο ὀρθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ (βλ. σχ. 2), πού ἔχει (ΔΕ)=50m:1000=5 cm καί $(\widehat{\Delta E Z}) = 60^0$.
– Μετρᾶμε τή ΔΖ καί βρίσκουμε

$$(\Delta Z) = 8{,}7 \text{ cm}$$

– Πολλαπλασιάζοντας τό μῆκος (ΔΖ) πού βρήκαμε μέ τήν κλίμακά μας βρίσκουμε $8{,}7 \cdot 1000 = 8700$ cm, ὁπότε

$$(AB) = 87 \text{ m}.$$



(σχ. 2)

Ὥστε ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου Α ἀπό τό βράχο εἶναι 87 m. Τί ἀκρίβεια ὅμως ἔχει ἡ ἀπόσταση πού βρήκαμε;

Ἄν στή μέτρηση τῆς ΔΖ κάναμε λάθος 1mm, τότε στόν ὑπολογισμό τῆς ἀποστάσεως ΑΒ τό λάθος πού κάναμε εἶναι

$$1 \text{ mm} \cdot 1000 = 1000 \text{ mm} = 1 \text{ m}$$

Τέτοια λάθη γίνονται, ὅσο προσεκτικά καί ἄν κάνουμε τήν κατασκευή τοῦ τρίγωνου ΔΕΖ, καί ὀφείλονται ἀκόμα καί στό πάχος πού ἔχουν οἱ γραμμές πού σχεδιάζουμε. Σκεφθήκαμε λοιπόν νά λύνουμε τέτοια προβλήματα ὄχι μέ γεωμετρικές κατασκευές, ὅπου εἶναι ἀναπόφευκτα τά λάθη, ἀλλά μέ ὑπολογισμούς, πού μποροῦμε νά τούς κάνουμε μέ ὅση ἀκρίβεια θέλουμε. Ἔτσι δημιουργήσαμε ἕναν κλάδο τῶν μαθηματικῶν, πού λέγεται **τριγωνομετρία,** καί ἔχει σά σκοπό τόν ὑπολογισμό τῶν ἄγνωστων στοιχείων ἑνός τριγώνου.

Τριγωνομετρικοί λόγοι ὀξείας γωνίας

13. 2. Ἄς δοῦμε πάλι τό προηγούμενο πρόβλημα. Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΒ καί ΔΕΖ ἔχουν τίς γωνίες $\widehat{\Gamma}$ καί $\widehat{E}$ ἴσες, ἀφοῦ κάθε μιά εἶναι 60^0 καί ἑπομένως εἶναι ὅμοια. Ἔχουμε λοιπόν

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\Delta Z}{\Delta E}, \quad \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}, \quad \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta Z}{EZ}.$$

Γενικά, ἄν κατασκευάσουμε δυό ὁποιαδήποτε ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ, πού νά ἔχουν τίς ὀξεῖες γωνίες τους $\widehat{\Gamma}$ καί $\widehat{E}$ ἴσες μέ δεδομένη γωνία ω, τότε οἱ λόγοι αὐτοί θά εἶναι πάλι ἴσοι.

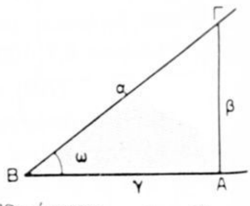
Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι ὅλα τά ὀρθογώνια τρίγωνα, στά ὁποῖα ἡ μιά ὀξεία γωνία εἶναι ἴση μέ δεδομένη γωνία ω ἔχουν:

- τούς λόγους τῶν ἀντίστοιχων κάθετων πλευρῶν τους ἴσους·
- τούς λόγους τῶν προσκείμενων στήν ω (ἤ τῶν ἀπέναντι τῆς ω) κάθετων πλευρῶν πρός τίς ὑποτείνουσες ἐπίσης ἴσους.

Ἀπό τά παραπάνω καταλαβαίνουμε ὅτι, ἄν ἔχουμε μιά ὀξεία γωνία ω καί κατασκευάσουμε ἕνα ὁποιοδήποτε ὀρθογώνιο τρίγωνο (φέρνοντας ἀπό ἕνα σημεῖο Γ τῆς μιᾶς πλευρᾶς της κάθετη στήν ἄλλη πλευρά), οἱ τρεῖς λόγοι

$$\frac{A\Gamma}{B\Gamma}, \quad \frac{AB}{B\Gamma}, \quad \frac{A\Gamma}{AB}$$

δέν ἐξαρτῶνται ἀπό τά μήκη τῶν πλευρῶν, ἀλλά μόνο ἀπό τή γωνία ω. Γι' αὐτό οἱ ἀριθμοί αὐτοί λέγονται *τριγωνομετρικοί λόγοι* τῆς γωνίας ω καί εἰδικότερα:



(σχ. 3)

- Ὁ λόγος $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ λέγεται **ἡμίτονο** τῆς γωνίας ω καί γράφεται ημω.
- Ὁ λόγος $\frac{AB}{B\Gamma}$ λέγεται **συνημίτονο** τῆς γωνίας ω καί γράφεται συνω.

• Ὁ λόγος $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}$ λέγεται **ἐφαπτομένη** τῆς γωνίας ω καί γράφεται εφω.

Ἔχουμε λοιπόν:

$$ημω = \frac{\text{ἀπέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{ὑποτείνουσα}}$$

$$συνω = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{ὑποτείνουσα}} \quad ἤ$$

$$εφω = \frac{\text{ἀπέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

$ημω = \frac{β}{α}$
$συνω = \frac{γ}{α}$
$εφω = \frac{β}{γ}$

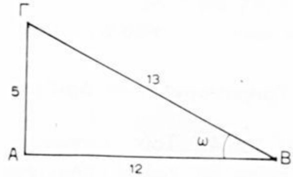
Οἱ ἀριθμοί ημω, συνω, εφω λέγονται **τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας ω.**

Ἔτσι π.χ. ἄν ω εἶναι ἡ ὀξεία γωνία τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου τοῦ σχ. 4, ἔχουμε:

$$ημω = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{5}{13},$$

$$συνω = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{12}{13},$$

$$εφω = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{5}{12}$$



(σχ. 4)

Εἶναι φανερό ὅτι **τό ἡμίτονο καί τό συνημίτονο μιᾶς ὀξείας γωνίας εἶναι πάντοτε ἀριθμοί μικρότεροι ἀπό τή μονάδα.**

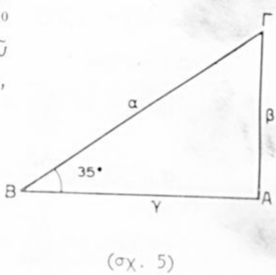
Τριγωνομετρικοί πίνακες

13. 3. Ὅταν μᾶς δίνεται μιά ὀξεία γωνία ω καί θέλουμε νά ὑπολογίσουμε τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς της, κατασκευάζουμε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο, πού νά ἔχει μιά ὀξεία γωνία ἴση μέ τήν ω, καί μετρᾶμε τίς πλευρές του.

Στό σχ. 5 ἔχουμε κατασκευάσει, μέ τή μεγαλύτερη δυνατή ἀκρίβεια, μιά γωνία 35^0 καί μετρήσαμε τά μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐπειδή εἶναι (ΑΒ) = 3,2 cm, (ΑΓ) = 2,2 cm, (ΒΓ) = 3,9 cm, ἔχουμε

$$ημ35^0 = \frac{β}{α} = \frac{2,2}{3,9} \simeq 0,6,$$

$$συν\ 35^0 = \frac{γ}{α} = \frac{3,2}{3,9} \simeq 0,8,$$



(σχ. 5)

$$\varepsilon\varphi\ 35^0 = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{2,2}{3,2} \simeq 0,7$$

Οἱ τιμές αὐτές δέν εἶναι πολύ ἀκριβεῖς. Γι' αὐτό κατασκευάσθηκαν πίνακες, πού μᾶς δίνουν μέ μεγάλη ἀκρίβεια τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἀπό 1^0–89^0 καί βρίσκονται στό τέλος τοῦ βιβλίου μας. Ἀπό τούς πίνακες αὐτούς βρίσκουμε:

$$\eta\mu 35^0 = 0,5736, \qquad \sigma\upsilon\nu 35^0 = 0,8192, \qquad \varepsilon\varphi 35^0 = 0,7002$$

Μέ τούς πίνακες αὐτούς μποροῦμε ἀκόμη ὅταν γνωρίζουμε ἕναν τριγωνομετρικό ἀριθμό μιᾶς γωνίας, νά βρίσκουμε καί τήν ἴδια τή γωνία.

Ἔτσι π.χ. ἄν ἔχουμε $\eta\mu\omega = 0,3746$, βρίσκουμε τόν ἀριθμό 0,3746 στή στήλη τοῦ ἡμιτόνου καί ἀπό τή θέση του καταλαβαίνουμε ὅτι $\omega = 22^0$.

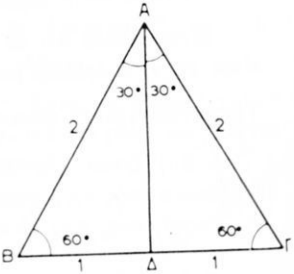
Ἐπίσης, ἄν ἔχουμε π.χ. $\varepsilon\varphi\alpha = 2,153$, ἀναζητοῦμε τόν ἀριθμό 2,153 στή στήλη τῆς ἐφαπτομένης. Ἐπειδή αὐτός περιέχεται μεταξύ τῶν 2,145 καί 2,245 καί εἶναι πιό κοντά στόν 2,145, πού παριστάνει τήν ἐφαπτομένη τῶν 65^0, παίρνουμε $\alpha \simeq 65^0$.

Τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν γωνιῶν 30^0, 45^0 καί 60^0

13. 4. Τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῶν 30^0, 45^0 καί 60^0 μποροῦμε νά τούς ὑπολογίσουμε ἀμέσως μέ τή βοήθεια τοῦ πυθαγόρειου θεωρήματος.

Στό σχ. 6 ἔχουμε ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο μέ πλευρά ἴση μέ 2 καί ἔχουμε φέρει τή διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{A}$. Ἔτσι, στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ εἶναι

$$(\mathrm{A\Gamma}) = 2,\ (\Delta\Gamma) = 1,\ \widehat{\Gamma} = 60^0,\ \Delta\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = 30^0$$



(σχ. 6)

Μέ τό πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε τήν ΑΔ. Εἶναι

$$(\mathrm{A}\Delta)^2 = (\mathrm{A\Gamma})^2 - (\Delta\Gamma)^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

$$(\mathrm{A}\Delta) = \sqrt{3} \simeq 1,732$$

Ἔχουμε λοιπόν:

$$\eta\mu\ 30^0 = \frac{\Delta\Gamma}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{1}{2} \qquad \eta\mu\ 60^0 = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\ 30^0 = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu\ 60^0 = \frac{\Delta\Gamma}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\ 30^0 = \frac{\Delta\Gamma}{\mathrm{A}\Delta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \varepsilon\varphi\ 60^0 = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

Στό σχ. 7 ἔχουμε ἕνα ὀρθογώνιο καί ἰσοσκελές τρίγωνο μέ κάθετες πλευρές ἴσες μέ 1. Κάθε ὀξεία γωνία του εἶναι 45^0.

Μέ τό πυθαγόρειο θεώρημα ὑπολογίζουμε τήν ὑποτείνουσά του ΒΓ. Ἔχουμε:

$$(\text{ΒΓ})^2 = (\text{ΑΒ})^2 + (\text{ΑΓ})^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

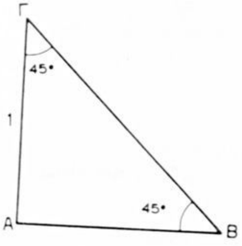
$$(\text{ΒΓ}) = \sqrt{2} \simeq 1{,}414$$

Ἔχουμε λοιπόν:

$$\text{ημ}\,45^0 = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0{,}707$$

$$\text{συν}\,45^0 = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0{,}707$$

$$\text{εφ}\,45^0 = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{1}{1} = 1$$



(σχ. 7)

Τά ἀποτελέσματα αὐτά εἶναι συγκεντρωμένα στόν παρακάτω πίνακα καί καλό εἶναι νά ἀπομνημονευθοῦν.

ω	30^0	45^0	60^0
ημω	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$
συνω	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$
εφω	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}414$$

$$\sqrt{3} \simeq 1{,}732$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0{,}707$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0{,}57$$

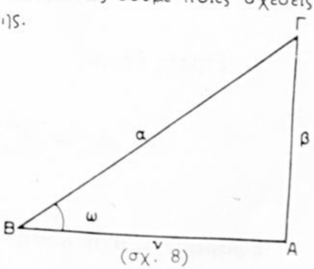
Σχέσεις μεταξύ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν

13. 5. Ἄς πάρουμε μιά ὀξεία γωνία ω καί ἄς δοῦμε ποιές σχέσεις συνδέουν τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς της.

Γνωρίζουμε ὅτι

$$\text{ημ}\omega = \frac{\beta}{\alpha}\,, \quad \text{συν}\omega = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Συνεπῶς ἔχουμε (ἐπειδή $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$)



(σχ. 8)

$$(\text{ημ}\omega)^2+(\text{συν}\omega)^2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2} = 1.$$

Τή σχέση αὐτή τή γράφουμε πιό ἁπλά

$$\boxed{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1}$$

Ἐπίσης, ἐπειδή $\quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{\beta}{\gamma}, \quad$ ἔχουμε

$$\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{\beta}{\gamma} = \varepsilon\varphi\omega$$

Συνεπῶς εἶναι

$$\boxed{\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}}$$

Ἀπό τίς σχέσεις αὐτές μποροῦμε, ὅταν ξέρουμε ἕναν τριγωνομετρικό ἀριθμό μιᾶς γωνίας, νά ὑπολογίζουμε τούς ἄλλους.

Ἔτσι π.χ. ἄν $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$, ἀπό τή σχέση $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ βρίσκουμε

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\frac{9}{25} + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25}{25} - \frac{9}{25}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{16}{25}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Ἐπίσης ἔχουμε

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}.$$

Ἐφαρμογές στή λύση προβλημάτων

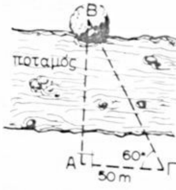
13. 6. Ἄς δοῦμε πάλι τό πρόβλημα, πού μᾶς παρουσιάστηκε στήν ἀρχή τοῦ κεφαλαίου 13. Γνωρίζουμε τήν ἀπόσταση (ΑΓ)=50 m, τή γωνία

$\widehat{\Gamma} = 60^0$ καί θέλουμε νά ὑπολογίσουμε τήν ἀπόσταση ΑΒ. Ἀπό τήν ἰσότητα

$$\varepsilon\varphi 60^0 = \frac{AB}{A\Gamma}$$

ἔχουμε $1{,}732 = \dfrac{(AB)}{50}$ καί τελικά

$$(AB) = 1{,}732 \cdot 50 = 86{,}6 \text{ m}.$$



(σχ. 9)

Στό πρόβλημα αὐτό ὑπολογίσαμε τήν πλευρά ΑΒ μέ τή βοήθεια τῶν γνωστῶν στοιχείων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Γενικά ὁ ὑπολογισμός τῶν ἄγνωστων στοιχείων ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου ἀπό τά γνωστά στοιχεῖα του λέγεται **ἐπίλυση** τοῦ τριγώνου.

Στό παρακάτω παράδειγμα σημειώνουμε τήν κατάστρωση πού κάνουμε γιά τήν ἐπίλυση τριγώνων.

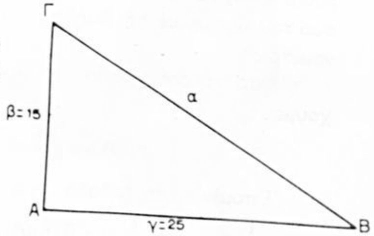
Παράδειγμα: Νά ἐπιλυθεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ὅταν $\beta = 15$, $\gamma = 25$.

Γνωστά στοιχεῖα	$\beta=15, \quad \gamma=25$
Ἄγνωστα στοιχεῖα	$\alpha = ;\ \widehat{B}=;\ \widehat{\Gamma} = ;$

Ἐπειδή $\varepsilon\varphi B = \dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{15}{25} = 0{,}60$,

ἀπό τούς πίνακες βρίσκουμε

$$\widehat{B} = 31^0$$



(σχ. 10)

Ἀπό τήν ἰσότητα $\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=90^0$ βρίσκουμε

$$\widehat{\Gamma} = 90^0 - \widehat{B} = 90^0 - 31^0 = 59^0$$

Ἡ ὑποτείνουσα α μπορεῖ νά βρεθεῖ εἴτε μέ τό πυθαγόρειο θεώρημα εἴτε ἀπό τό ἡμίτονο τῆς γωνίας $\widehat{B}$. Ἔχουμε δηλαδή

$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\text{ἤ } \eta\mu 31^0 = \frac{15}{\alpha}$$

$$\text{ἤ } 0{,}515 = \frac{15}{\alpha}$$

$$\text{ἤ } 0{,}515 \cdot \alpha = 15$$

$$\text{ἤ } \alpha = \frac{15}{0{,}515} = 29{,}12$$

13. 7. Γιά νά μετρήσουμε τό ὕψος τῆς καπνοδόχου ἑνός ἐργοστασίου, ἔχουμε κάνει τίς μετρήσεις πού δείχνει τό σχ. 11.

’Από τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε

$$\text{εφ}52^0 = \frac{AB}{A\Gamma}$$

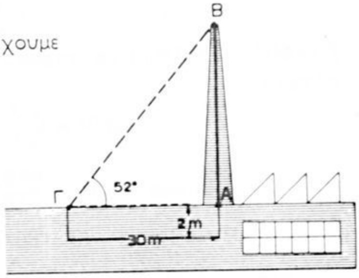
$$\text{ἤ } 1{,}28 = \frac{(AB)}{30}$$

Συνεπῶς ἔχουμε

$$(AB) = 1{,}28 \cdot 50 = 38{,}4 \text{ m}.$$

Τό ὕψος λοιπόν τῆς καπνοδόχου μέχρι τή βάση της θά εἶναι

$$38{,}4 + 2 = 40{,}4 \text{m}.$$

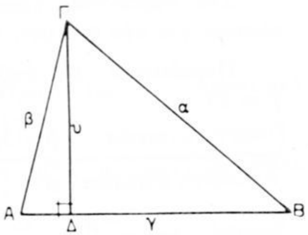


(σχ. 11)

‛Εμβαδό τριγώνου

13. 8. ῞Ενα τριγωνικό ἀγρόκτημα ΑΒΓ ἔχει πλευρές (ΑΒ) = 250 m, (ΑΓ) = 200 m καί γωνία $\widehat{A} = 80^0$. Γιά νά ὑπολογίσουμε τό ἐμβαδό του, πρέπει νά βροῦμε τό μῆκος τοῦ ὕψους του ΓΔ. Μποροῦμε ὅμως νά ἀποφύγουμε τόν ὑπολογισμό τοῦ ὕψους μέ τή βοήθεια τῆς τριγωνομετρίας.

’Από τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ ἔχουμε



$$\text{ημ } A = \frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma} = \frac{\upsilon}{\beta} \text{ ἤ } \beta \cdot \text{ημ}A = \upsilon$$

(σχ. 12)

‛Επομένως τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου ΑΒΓ θά εἶναι

$$E = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \upsilon = \frac{1}{2} \gamma \cdot \beta \cdot \text{ημ}A.$$

῞Ωστε

$$\boxed{E = \frac{1}{2} \beta\gamma \text{ ημ } A}$$

Τό ἐμβαδό λοιπόν τοῦ ἀγροκτήματος ΑΒΓ εἶναι

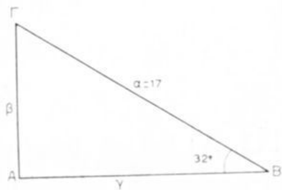
$$E = \frac{1}{2} 250 \cdot 200 \text{ ημ } 80^0 = \frac{1}{2} \cdot 250 \cdot 200 \cdot 0{,}9848 = 24620 \text{ m}^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ—ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἐπιλυθεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ὅταν $\alpha = 17$ καί $\widehat{B} = 32^0$.**

Λύση:

Γνωστά στοιχεῖα	$\alpha = 17$, $\widehat{B} = 32^0$
῎Αγνωστα στοιχεῖα	$\widehat{\Gamma} = ;$ $\beta = ;$ $\gamma = ;$



(σχ. 13)

’Επειδή $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ$, ἔχουμε

$$32^\circ + \widehat{\Gamma} = 90^\circ$$

$$\widehat{\Gamma} = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ.$$

Ἡ ἰσότητα $ημB = \frac{β}{α}$ γράφεται $ημ32° = \frac{β}{17}$. Ἀπό τούς πίνακες βρίσκουμε ὅτι $ημ32° = 0,5299$ καί ἑπομένως

$$0,5299 = \frac{β}{17}$$

$$0,5299 \cdot 17 = β$$

$$β = 9,0083$$

Ἐπίσης ἡ ἰσότητα $συν B = \frac{γ}{α}$ γράφεται $συν 32° = \frac{γ}{17}$ καί ἐπειδή $συν 32° = 0,848$, ἔχουμε

$$0,848 = \frac{γ}{17}$$

$$0,848 \cdot 17 = γ$$

$$γ = 14,416.$$

2. **Στό σχ. 14 ἔχουμε μιά ἀποθήκη μέ μῆκος 15 m, πλάτος 10 m καί κλίση τῆς ὀροφῆς 33°. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τῆς ὀροφῆς.**

Λύση. Ἡ ὀροφή τῆς ἀποθήκης ἀποτελεῖται ἀπό δυό ὀρθογώνια, πού ἔχουν μῆκος 15 m. Γιά νά βροῦμε τό ἐμβαδό τους, πρέπει νά βροῦμε τό ὕψος τους. Ἄς σχεδιάσουμε χωριστά τό τρίγωνο, πού βλέπουμε μπροστά στήν ἀποθήκη. Τό τρίγωνο αὐτό (σχ. 15) εἶναι ἰσοσκελές καί, ἄν φέρουμε τό ὕψος του ΑΔ, θά εἶναι (ΔΓ) = 5 m. Ἔχουμε ἑπομένως

$$συν 33° = \frac{ΔΓ}{ΑΓ} \text{ ἤ } 0,8387 = \frac{5}{(ΑΓ)} \text{ ἤ}$$

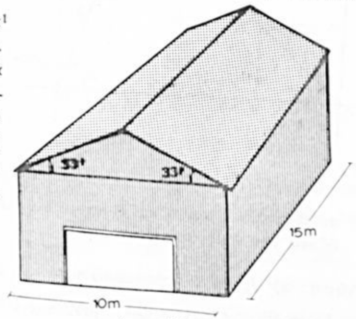
$$0,8387 \cdot (ΑΓ) = 5 \text{ ἤ } (ΑΓ) = \frac{5}{0,8387} = 5,9616 \text{ m}$$

Ἔτσι, τό ἐμβαδό ἑνός ὀρθογωνίου τῆς ὀροφῆς εἶναι

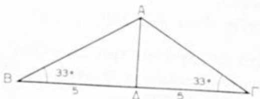
$$15 \cdot 5,9616 = 89,424 \text{ m}^2$$

καί συνεπῶς τό ἐμβαδό ὅλης τῆς ὀροφῆς εἶναι

$$2 \cdot 89,424 = 178,848 \text{ m}^2.$$

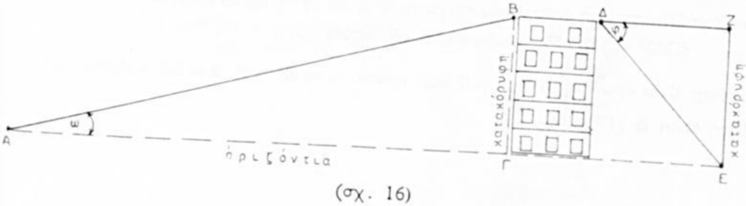


(σχ. 14)



(σχ. 15)

3. **Πολλές φορές εἶναι χρήσιμο νά γνωρίζουμε τή θέση ὁρισμένων σημείων ὡς πρός τόν ὁρίζοντα. Ἄν ἀπό τή θέση ἑνός σημείου Α τοῦ ὁρίζοντα (σχ. 16) βλέπουμε ψηλά ἕνα**



(σχ. 16)

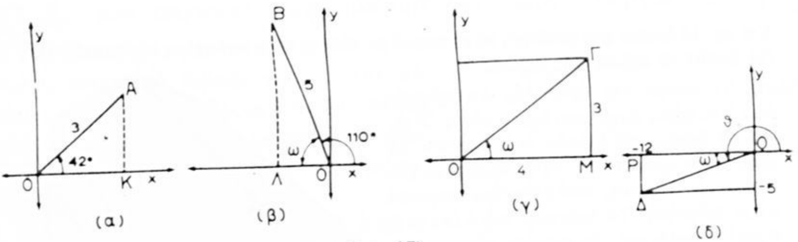
σημεῖο Β, ἡ γωνία ω, πού σχηματίζεται ἀπό τή διεύθυνση παρατηρήσεως καί τήν ὁριζόντια γραμμή λέγεται «γωνία ὕψους». Ἄν ἀπό τή θέση Δ, πού βρίσκεται ψηλά, παρατηροῦμε ἕνα σημεῖο Ε χαμηλά, ἡ γωνία $\widehat{\varphi}$, πού σχηματίζεται ἀπό τή διεύθυνση παρατηρήσεως καί τήν ὁριζόντια γραμμή, λέγεται «γωνία βάθους». Ἄν στό σχ. 16 εἶναι $(\text{ΑΓ})=60$ m καί ἡ γωνία ὕψους εἶναι $\omega = 15°$, πόσο εἶναι τό ὕψος τοῦ κτιρίου;

Λύση: Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{ΓΒ}}{\text{ΓΑ}} \quad \text{ἤ} \quad \varepsilon\varphi 15° = \frac{(\text{ΓΒ})}{60} \quad \text{ἤ} \quad 0{,}2679 = \frac{(\text{ΓΒ})}{60}$$

Συνεπῶς $(\text{ΓΒ}) = 0{,}2679 \cdot 60 = 16{,}074$ m.

4. Στά παρακάτω σχήματα δίνονται κατά σειρά τά σημεῖα Α,Β μέ τίς πολικές συντεταγμένες τους καί τά Γ,Δ μέ τίς καρτεσιανές συντεταγμένες τους. Νά βρεθοῦν οἱ καρτεσιανές



(σχ. 17)

συντεταγμένες τῶν Α καί Β καί οἱ πολικές συντεταγμένες τῶν Γ καί Δ (ὡς πρός πολικό ἄξονα τήν ἡμιευθεία Οx).

Λύση: α) Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ ἔχουμε $\eta\mu 42° = \dfrac{\text{ΚΑ}}{\text{ΟΑ}}$ καί $\sigma\upsilon\nu\, 42° = \dfrac{\text{ΟΚ}}{\text{ΟΑ}}$

Εἶναι λοιπόν $(\text{ΚΑ})=(\text{ΟΑ})\cdot\eta\mu 42°=3\cdot 0{,}6691=2{,}0073$, $(\text{ΟΚ})=(\text{ΟΑ})\,\sigma\upsilon\nu 42°=3\cdot 0{,}7431 = 2{,}2293$.

Συνεπῶς εἶναι Α(2,2293 , 2,0073).

β) Στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΛΒ εἶναι $\widehat{\omega} = 180°-110° = 70°$. Ἄν ἐργασθοῦμε ὅπως προηγουμένως βρίσκουμε (ΛΒ)=4,6985 καί (ΟΛ)=1,710. Ἑπομένως Β(−1,710, 4,6985)·

γ) Ἐφαρμόζουμε τό πυθαγόρειο θεώρημα στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΜΓ καί ἔχουμε $(\text{ΟΓ})^2 = 3^2+4^2 = 25$, ὁπότε $(\text{ΟΓ}) = 5$.

Ἀπό τό ἴδιο τρίγωνο ἔχουμε καί $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$, ὁπότε ἀπό τούς τριγωνομετρικούς πίνακες βρίσκουμε ὅτι $\omega = 37°$. Συνεπῶς Γ(5,37°).

δ) Ἐργαζόμαστε στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΡΔ ὅπως προηγουμένως καί βρίσκουμε:

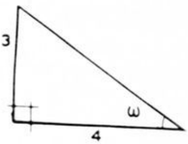
$$(\text{ΟΔ})^2 = 12^2+5^2 = 144+25 = 169, \text{ ὁπότε } (\text{ΟΔ}) = \sqrt{169} = 13$$

Ἐπίσης εἶναι $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\text{ΡΔ}}{\text{ΟΡ}} = \dfrac{5}{12} = 0{,}416$, ὁπότε $\omega = 22°$ καί $\theta = 22°+180°=202°$.

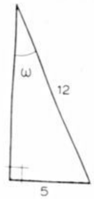
Ὥστε εἶναι Δ (13,202°).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

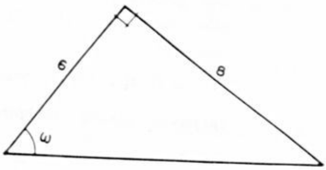
1. Στά παρακάτω σχήματα νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας ω.



(σχ. 18)



(σχ. 19)



(σχ. 20)

2. Ἄν $ημω = \frac{5}{13}$, νά βρεθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας ω.

3. Ἄν $συνω = \frac{5}{6}$, νά βρεθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας ω.

4. Νά ἐπιλυθεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ὅταν:

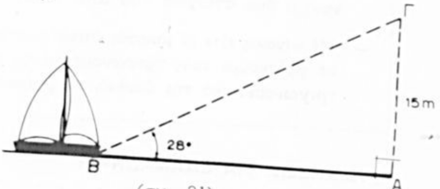
1. $α = 170$ m, $\widehat{B} = 35°$ 3. $γ = 15$m, $\widehat{B} = 72°$ 5. $α = 20$m, $β = 15$m
2. $β = 12$ cm, $\widehat{B} = 67°$ 4. $β = 23$m, $γ = 25$m 6. $α = 18$m, $β = 9$ m

5. Σ' ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς Α εἶναι 80° καί ἡ βάση α εἶναι 30 cm. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου καί τά μήκη τῶν ἴσων πλευρῶν του.

6. Σ' ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ἔχουμε $\widehat{A} = 62°$, (ΑΒ) = 12 cm καί (ΑΔ) = = 8 cm. Νά βρεθεῖ τό ὕψος του ΔΕ καί τό ἐμβαδό του.

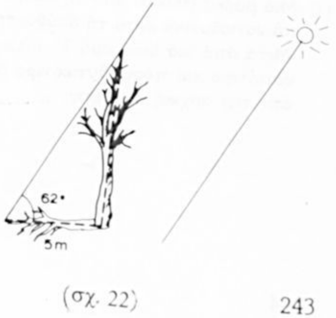
7. Σέ κύκλο ἀκτίνας R = 10 cm δίνεται ἐπίκεντρη γωνία 72°. Νά βρεθεῖ τό μῆκος τῆς χορδῆς, πού ἀντιστοιχεῖ στή γωνία αὐτή.

8. Ἕνας παρατηρεῖ μέσα ἀπό τή βάρκα ἕνα ψηλό σημεῖο τῆς ἀκτῆς καί ἡ γωνία ὕψους εἶναι 28°. Ἄν τό σημεῖο Γ ἔχει ὕψος 15m, πόσο μακριά εἶναι ἡ βάρκα ἀπό τήν ἀκτή;



(σχ. 21)

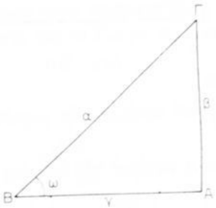
9. Ὅταν οἱ ἀκτίνες τοῦ ἥλιου ἔχουν κλίση 62°, ἕνα δέντρο ρίχνει σκιά μήκους 5 m. Πόσο εἶναι τό ὕψος τοῦ δέντρου;



(σχ. 22)

1. Ἡ τριγωνομετρία εἶναι ἕνας κλάδος τῶν μαθηματικῶν πού ἀσχολεῖται μέ τόν ὑπολογισμό τῶν ἄγνωστων στοιχείων ἑνός τριγώνου καί στηρίζεται στή βασική ἰδιότητα πού ἔχει ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο, οἱ λόγοι δυό πλευρῶν του νά μήν ἐξαρτῶνται ἀπό τά μήκη τους, ἀλλά ἀπό τίς ὀξεῖες γωνίες του.

— Ἄν ω εἶναι μιά ὀξεία γωνία ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου, τότε ὁρίζουμε τούς **τριγωνομετρικούς ἀριθμούς** τῆς $\widehat{\omega}$



(σχ. 23)

$$\etaμ\omega = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$συν\omega = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$εφ\omega = \frac{\beta}{\gamma}$$

Οἱ τριγωνομετρικοί αὐτοί ἀριθμοί συνδέονται μέ τίς σχέσεις:

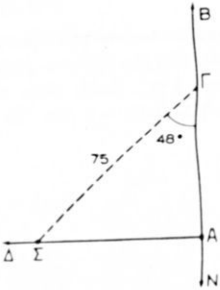
$$\boxed{\begin{aligned} \etaμ^2\omega + συν^2\omega &= 1 \\ εφ\omega &= \frac{\etaμ\omega}{συν\omega} \end{aligned}}$$

2. Ὁ ὑπολογισμός τῶν ἄγνωστων στοιχείων ἑνός τριγώνου λέγεται **ἐπίλυση** αὐτοῦ. Γενικά μποροῦμε νά ἐπιλύσουμε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ὅταν δίνονται δύο στοιχεῖα του ἀπό τά ὁποῖα τό ἕνα τουλάχιστον εἶναι πλευρά.

— Μέ πίνακες εἴτε μέ μικρούς ὑπολογιστές μποροῦμε, ὅταν ξέρουμε μιά γωνία, νά βρίσκουμε τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς της καί, ὅταν ξέρουμε ἕναν τριγωνομετρικό της ἀριθμό, νά βρίσκουμε τή γωνία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ·

10. Μιά βάρκα ξεκινάει ἀπό τή θέση Γ καί κινεῖται νοτιοδυτικά κατά τή διεύθυνση ΓΣ.
Μετά ἀπό μιά διαδρομή 75 μιλίων πόσο νοτιότερα καί πόσο δυτικότερα βρίσκεται ἀπό τήν ἀρχική της θέση;



11. Ἕνα σημεῖο Μ ἔχει συντεταγμένες Μ (5,8). Νά βρεθοῦν οἱ πολικές συντεταγμένες του, ἄν πολικός ἄξονας εἶναι ὁ Ox.

12. Ἕνα σημεῖο P ἔχει πολικές συντεταγμένες P(2,73°). Νά βρεθοῦν οἱ καρτεσιανές τοῦ συντεταγμένες, ἄν πολικός ἄξονας εἶναι ὁ Ox.

13. Ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει γωνία βάσεως $\widehat{B} = 42°$ καί βάση $\alpha = 10$ cm. Νά βρεθοῦν τά μήκη τῶν ἴσων πλευρῶν του καί τό ἐμβαδό του.

14. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\widehat{B} = 47°$, $\widehat{\Gamma} = 58°$, $\beta = 62$ m, $\gamma = 72$m. Νά βρεθεῖ ἡ τρίτη πλευρά του α καί τό ἐμβαδό του.

15. Ἕνα ἀεροπλάνο, πού πετᾶ σέ ὕψος 500 m, βλέπει τό φάρο τοῦ ἀεροδρομίου μέ γωνία βάθους 20°. Πόση εἶναι ἡ ὁριζόντια ἀπόστασή του ἀπό τό φάρο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ **

16. Στό ὀρθογώνιο τρίγωνο οἱ δυό ὀξεῖες γωνίες του εἶναι συμπληρωματικές. Συγκρίνετε τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τους. Τί παρατηρεῖτε;

17. Ἕνα οἰκόπεδο ἔχει σχῆμα ἰσοσκελοῦς τραπεζίου μέ μεγάλη βάση 150 m, μικρή βάση 100 m καί γωνίες βάσεως 62°. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό του.

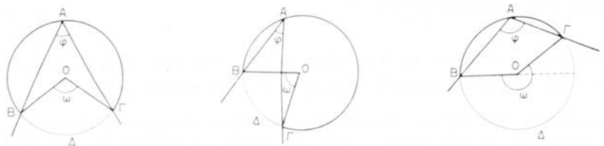
18. Ἕνα ἀγρόκτημα ἔχει σχῆμα τριγωνικό μέ μήκη τῶν δυό πλευρῶν του 150 m καί 230 m. Ἄν οἱ πλευρές αὐτές σχηματίζουν γωνία 75°, νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό του.

14ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Γωνία ἐγγεγραμμένη σέ κύκλο

14. 1. Ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Α ἑνός κύκλου μέ κέντρο Ο φέρνουμε δύο ὁποιεσδήποτε χορδές ΑΒ καί ΑΓ. Οἱ ἡμιευθεῖες ΑΒ καί ΑΓ



(σχ. 1) (σχ. 2) (σχ. 3)

σχηματίζουν μιά γωνία $B\widehat{A}\Gamma = \widehat{\varphi}$, πού λέγεται **ἐγγεγραμμένη στόν κύκλο.**

Τό τόξο $\widehat{B\Delta\Gamma}$, τό ὁποῖο περιέχεται στήν ἐγγεγραμμένη γωνία $B\widehat{A}\Gamma$, λέγεται **ἀντίστοιχο τόξο** της καί ἡ γωνία $B\widehat{O}\Gamma = \widehat{\omega}$, πού ἔχει κορυφή τό κέντρο Ο τοῦ κύκλου, λέγεται **ἀντίστοιχη ἐπίκεντρη γωνία** τῆς ἐγγεγραμμένης $B\widehat{A}\Gamma$. Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία $B\widehat{A}\Gamma$ καί ἡ ἐπίκεντρη γωνία $B\widehat{O}\Gamma$ λέμε ὅτι «βαίνουν» στό τόξο $\widehat{B\Gamma}$. Στό σχῆμα 3 βλέπουμε ὅτι ἡ ἀντίστοιχη ἐπίκεντρη γωνία μιᾶς ἐγγεγραμμένης μπορεῖ νά εἶναι καί μή κυρτή, ὅταν τό ἀντίστοιχο τόξο $\widehat{B\Delta\Gamma}$ τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας εἶναι μεγαλύτερο ἀπό ἡμικύκλιο.

Ἄν μετρήσουμε μέ ἕνα μοιρογνωμόνιο σέ κάθε ἕνα ἀπό τά σχήματα 1,2,3 τίς γωνίες $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$, διαπιστώνουμε εὔκολα ὅτι

$$(1) \qquad \boxed{B\widehat{A}\Gamma = \frac{1}{2}\, B\widehat{O}\Gamma}$$

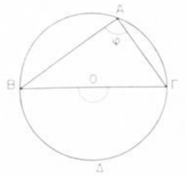
Ἔτσι ἔχουμε τό συμπέρασμα:

Κάθε γωνία ἐγγεγραμμένη σέ κύκλο εἶναι ἴση μέ τό μισό τῆς ἀντίστοιχης ἐπίκεντρης γωνίας.

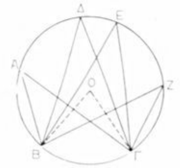
Ξέρουμε ὅμως ὅτι (μέ κατάλληλες μονάδες μετρήσεως τῶν τόξων καί γωνιῶν) τό τόξο $\widehat{B\Delta\Gamma}$ καί ἡ ἐπίκεντρη γωνία $B\widehat{O}\Gamma$ ἔχουν πάντα ἴσα μέτρα. Συνεπῶς **τό μέτρο μιᾶς ἐγγεγραμμένης γωνίας θά εἶναι ἴσο μέ τό μισό τοῦ**

μέτρου τοῦ ἀντίστοιχου τόξου της. Ἔτσι π.χ. ἄν στό σχῆμα 1 ἔχουμε $(\widehat{B\Delta\Gamma}) = 100^0$, τότε θά εἶναι $(\widehat{BA\Gamma}) = 50^0$.

14. 2. Ἀπό τήν παραπάνω πρόταση καταλαβαίνουμε ἀμέσως ὅτι, ἄν μιά ἐγγεγραμμένη γωνία $\widehat{BA\Gamma} = \varphi$ βαίνει σέ ἡμικύκλιο $\widehat{B\Delta\Gamma}$ (σχῆμα 4),



(σχ. 4)



(σχ. 5)

τότε εἶναι ὀρθή, γιατί ἡ ἀντίστοιχη ἐπίκεντρη γωνία της εἶναι $(\widehat{BO\Gamma}) = 180^0$. Ἔτσι λοιπόν:

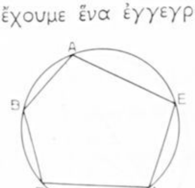
> Κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία, πού βαίνει σέ ἡμικύκλιο, εἶναι ὀρθή.

Ἄς πάρουμε τώρα διάφορες γωνίες $\widehat{BA\Gamma}$, $\widehat{B\Delta\Gamma}$, $\widehat{BE\Gamma}$,... ἐγγεγραμμένες σέ ἕναν κύκλο, πού νά βαίνουν στό ἴδιο τόξο. Κάθε μιά ἀπό τίς γωνίες αὐτές θά εἶναι ἴση μέ τό μισό τῆς ἀντίστοιχης ἐπίκεντρής της $\widehat{BO\Gamma}$ καί συνεπῶς θά εἶναι ἴσες μεταξύ τους. Ὥστε:

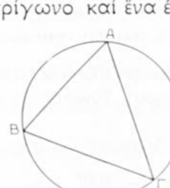
> Οἱ ἐγγεγραμμένες γωνίες ἑνός κύκλου, πού βαίνουν στό ἴδιο τόξο, εἶναι ἴσες.

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ πρόταση αὐτή θά ἰσχύει καί στήν πιό γενική περίπτωση, πού οἱ ἐγγεγραμμένες γωνίες βαίνουν σέ ἴσα τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου ἤ ἀκόμη σέ ἴσα τόξα ἴσων κύκλων.

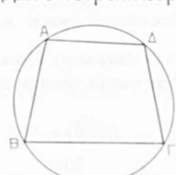
14. 3. Ἄς πάρουμε ὁρισμένα σημεῖα ἑνός κύκλου, π.χ. τά Α,Β, Γ,Δ,Ε. Ἄν φέρουμε τίς χορδές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ, σχηματίζεται ἕνα πολύγωνο (σχῆμα 6), πού λέγεται **ἐγγεγραμμένο** στόν κύκλο. Στήν περίπτωση αὐτή ὁ κύκλος λέγεται **περιγεγραμμένος** στό πολύγωνο. Στά σχήματα 7 καί 8 ἔχουμε ἕνα ἐγγεγραμμένο τρίγωνο καί ἕνα ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο.



(σχ. 6)



(σχ. 7)

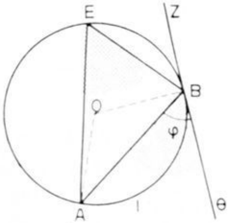


(σχ. 8)

Ὅπως φαίνεται καί στά προηγούμενα σχήματα, σέ κάθε ἐγγεγραμμένο πολύγωνο οἱ πλευρές του εἶναι χορδές ἑνός κύκλου καί οἱ γωνίες του εἶναι ἐγγεγραμμένες στόν κύκλο αὐτό.

Γωνία χορδῆς καί ἐφαπτομένης

14. 4. Θεωροῦμε τώρα μιά ὁρισμένη χορδή ΑΒ ἑνός κύκλου (Ο,ρ) καί τήν ἐφαπτομένη ΘΖ τοῦ κύκλου στό ἕνα ἄκρο της, π.χ. τό Β. (Ὅπως ξέρουμε, ἡ ΘΖ εἶναι κάθετη στήν ἀκτίνα ΟΒ). Ὀνομάζουμε $\widehat{\varphi}$ τήν ὀξεία γωνία, πού σχηματίζει ἡ χορδή ΑΒ μέ τήν ἐφαπτομένη ΘΖ.



(σχ. 9)

Στό τόξο, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό τή $\widehat{\varphi}$, παίρνουμε ἕνα σημεῖο Ε καί σχηματίζουμε τήν ἐγγεγραμμένη γωνία $\widehat{AEB}$. Ἄν μετρήσουμε μέ τό μοιρογνωμόνιο τίς γωνίες $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{AEB}$, θά διαπιστώσουμε ὅτι εἶναι ἴσες, δηλαδή

$$\widehat{\varphi} = \widehat{AEB}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

> Ἡ γωνία $\widehat{\varphi}$, πού σχηματίζεται ἀπό μιά χορδή **ΑΒ καί** τήν ἐφαπτομένη στό ἕνα ἄκρο της, εἶναι ἴση μέ μιά ὁποιαδήποτε ἐγγεγραμμένη γωνία, ἡ ὁποία βαίνει στό τόξο $\widehat{AB}$ πού βρίσκεται μέσα στή γωνία $\widehat{\varphi}$.

Ἔτσι π.χ., ἄν ἡ γωνία $\widehat{AB\Theta}$ εἶναι 50^0, ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία $\widehat{AEB}$, πού βαίνει στό τόξο $\widehat{AIB}$, εἶναι ἐπίσης 50^0.

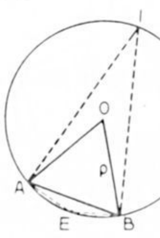
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Σέ ἕναν κύκλο (Ο,ρ) παίρνουμε μέ τό διαβήτη μας μιά χορδή ΑΒ = ρ. Νά ὑπολογίσετε τά δύο τόξα $\widehat{AEB}$ καί $\widehat{AIB}$ τοῦ κύκλου, πού ἔχουν χορδή τήν ΑΒ, καί τίς ἐγγεγραμμένες γωνίες πού βαίνουν στά τόξα αὐτά.**

Λύση: Ἄν φέρουμε τίς ἀκτίνες ΟΑ καί ΟΒ, θά σχηματισθεῖ τό τρίγωνο ΟΑΒ, πού εἶναι ἰσόπλευρο (γιατί καί οἱ τρεῖς πλευρές του εἶναι ἴσες μέ τήν ἀκτίνα ρ). Θά εἶναι λοιπόν $(\widehat{AOB}) = 60°$ (ἐπειδή εἶναι γωνία ἰσόπλευρου τριγώνου). Συνεπῶς θά ἔχουμε.

$$(\widehat{AEB}) = 60°,\ (\widehat{AIB}) = 360°–60° = 300°,$$

$$(\widehat{AIB}) = \frac{60°}{2} = 30° \text{ καί } (\widehat{AEB}) = \frac{300°}{2} = 150°.$$



(σχ. 10)

2. Έχουμε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ έγγεγραμμένο σ' έναν κύκλο. Νά ύπολογίσετε τό ἄθροισμα $\widehat{A}+\widehat{\Gamma}$ τῶν ἀπέναντι γωνιῶν του.

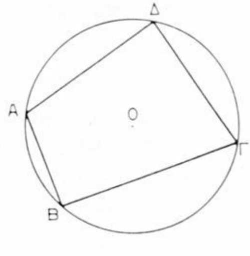
Λύση: Ἄν μετρήσουμε μέ τό μοιρογνωμόνιο τίς γωνίες $\widehat{A}$ καί $\widehat{\Gamma}$, θά δοῦμε ὅτι εἶναι $(\widehat{A}) = 109°$ καί $(\widehat{\Gamma}) = 71°$ (σχῆμα 11). Ἔχουμε λοιπόν

$$(\widehat{A})+(\widehat{\Gamma}) = 180°,$$

δηλαδή οἱ γωνίες $\widehat{A}$ καί $\widehat{\Gamma}$ εἶναι παραπληρωματικές.

Στό ἴδιο συμπέρασμα καταλήγουμε, ἄν σκεφτοῦμε, ὅτι $(\widehat{A}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{B\Gamma\Delta})$ καί $(\widehat{\Gamma}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BA\Delta})$, ὁπότε μέ πρόσθεση κατά μέλη ἔχουμε:

$$(\widehat{A}) + (\widehat{\Gamma}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{B\Gamma\Delta}) + \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BA\Delta})$$
$$= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{B\Gamma\Delta AB}) = \frac{1}{2}\cdot 360°$$
$$= 180°.$$

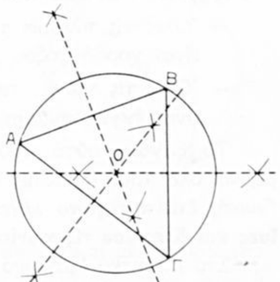


(σχ. 11)

Ἀπό τά παραπάνω καταλαβαίνουμε ὅτι ἕνα τετράπλευρο, πού δέν ἔχει τίς ἀπέναντι γωνίες του παραπληρωματικές, δέν μπορεῖ νά ἐγγραφεῖ σέ κύκλο.

3. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ. Νά κατασκευάσετε τόν κύκλο τόν περιγεγραμμένο στό τρίγωνο.

Λύση: Τό κέντρο τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου στό τρίγωνο ΑΒΓ θά ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τίς κορυφές Α,Β,Γ. Ἑπομένως θά βρίσκεται πάνω στίς μεσοκαθέτους καί τῶν τριῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ,ΓΑ. Πραγματικά, ἄν κατασκευάσουμε τίς μεσοκαθέτους τῶν πλευρῶν (μέ τή βοήθεια τοῦ διαβήτη καί τοῦ χάρακα), διαπιστώνουμε ὅτι περνᾶνε ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Ο (σχῆμα 12). Ἄν τώρα κατασκευάσουμε κύκλο μέ κέντρο τό Ο καί ἀκτίνα τήν ΟΑ (ἤ τήν ΟΒ ἤ τήν ΟΓ), βλέπουμε ὅτι ὁ κύκλος αὐτός περνάει καί ἀπό τίς τρεῖς κορυφές τοῦ τριγώνου, δηλαδή εἶναι ὁ περιγεγραμμένος στό τρίγωνο.



(σχ. 12)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σέ έναν κύκλο (Ο,ρ) νά πάρετε δύο διαδοχικά τόξα $(\overset{\frown}{AB}) = 38°$ καί $(\overset{\frown}{B\Gamma}) = 54°$. Νά ύπολογίσετε τίς ἐγγεγραμμένες γωνίες, πού βαίνουν στά τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ καί $\overset{\frown}{AB\Gamma}$.

2. Μιά γωνία ἐγγεγραμμένη σέ κύκλο εἶναι ἴση μέ $\frac{1}{3}$ τῆς ὀρθῆς. Νά βρεῖτε σέ μοῖρες τό ἀντίστοιχο τόξο της.

3. Σέ ἕναν κύκλο νά πάρετε δύο διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB}$ καί $\overset{\frown}{B\Gamma}$, ὥστε τό $\overset{\frown}{AB}$ νά εἶναι τό

$\frac{1}{5}$ τοῦ κύκλου καί τό $\widehat{ΒΓ}$ τά $\frac{3}{10}$ τοῦ κύκλου. Νά ὑπολογίσετε τίς ἐγγεγραμμένες γωνίες $Β\widehat{Α}Γ$ καί $Α\widehat{Β}Γ$.

4. Σέ ἕναν κύκλο παίρνουμε τρία διαδοχικά τόξα $(\widehat{ΑΒ}) = 66°$, $(\widehat{ΒΓ}) = 80°$ καί $(\widehat{ΓΔ}) = 104°$. Νά ὑπολογίσετε τίς γωνίες τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

5. Σέ κύκλο (Ο,ρ) παίρνουμε δύο διαδοχικές ἐπίκεντρες γωνίες $(Α\widehat{Ο}Β) = 122°$ καί $(Β\widehat{Ο}Γ) = 76°$. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

6. Μέ τή βοήθεια ἑνός διαβήτη καί ἑνός χάρακα νά κατασκευάσετε τόν κύκλο τόν περιγεγραμμένο σ' ἕνα ὀρθογώνιο καί σ' ἕνα ἀμβλυγώνιο τρίγωνο.

7. Μιά γωνία $\widehat{Α}$ εἶναι ἐγγεγραμμένη σέ κύκλο καί βαίνει στό τόξο $(\widehat{ΒΓ}) = 82°$. Στά σημεῖα Β καί Γ φέρνουμε τίς ἐφαπτόμενες τοῦ κύκλου, πού τέμνονται στό σημεῖο Δ. Νά ὑπολογίσετε τή γωνία $Β\widehat{Δ}Γ$.

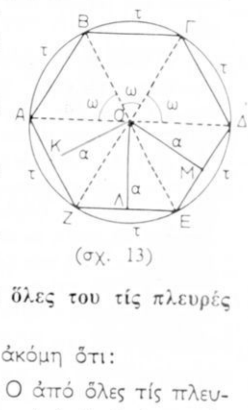
8. Σέ ἕναν κύκλο παίρνουμε μιά ἐπίκεντρη γωνία $(Α\widehat{Ο}Β) = 106°$. Νά ὑπολογίσετε τήν ὀξεία γωνία, πού σχηματίζεται ἀπό τή χορδή ΑΒ καί τήν ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου στό σημεῖο Β.

Κανονικά πολύγωνα

14. 5. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἕνας κύκλος (Ο,ρ) χωρίζεται ἀπό τά σημεῖα του Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ σέ ἕξι ἴσα τόξα τ. Ἄν φέρουμε τίς χορδές ΑΒ,ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ, σχηματίζεται ἕνα ἑξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ πού ἔχει:

— Ὅλες τίς πλευρές του ἴσες, γιατί κάθε μιά εἶναι χορδή τόξου τ.

— Ὅλες τίς γωνίες του ἴσες, γιατί κάθε μιά εἶναι ἐγγεγραμμένη σέ τόξο 4τ.



(σχ. 13)

Τό ἑξάγωνο αὐτό, πού ἔχει ὅλες του τίς πλευρές καί ὅλες του τίς γωνίες ἴσες, τό λέμε **«κανονικό»**. Γενικά, **ἕνα πολύγωνο λέγεται κανονικό, ὅταν ἔχει ὅλες του τίς πλευρές ἴσες καί ὅλες του τίς γωνίες ἴσες.**

Στό κανονικό ἑξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι:

- Οἱ ἀποστάσεις ΟΚ, ΟΛ, ΟΜ,... τοῦ κέντρου Ο ἀπό ὅλες τίς πλευρές του εἶναι ἴσες. Ἄν σημειώσουμε μέ α κάθε μιά ἀπό τίς ἀποστάσεις αὐτές, τό α λέγεται **ἀπόστημα** τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου.
- Οἱ ἐπίκεντρες γωνίες $Α\widehat{Ο}Β$, $Β\widehat{Ο}Γ$, $Γ\widehat{Ο}Δ$,... εἶναι ἐπίσης ἴσες, γιατί βαίνουν σέ ἴσα τόξα. Ἄν σημειώσουμε μέ $\widehat{ω}$ κάθε μιά ἀπό τίς γωνίες αὐτές, ἡ $\widehat{ω}$ λέγεται **κεντρική γωνία** τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου καί εἶναι ἴση μέ $\frac{360°}{6} = 60°$.

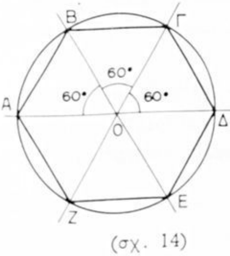
Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν χωρίσουμε τόν κύκλο σέ ν ἴσα μέρη, θά προκύψει ἕνα κανονικό πολύγωνο μέ ν πλευρές, τό ὁποῖο θά ἔχει κεντρική γωνία

(2) $$\widehat{\omega} = \frac{360^\circ}{\nu}$$

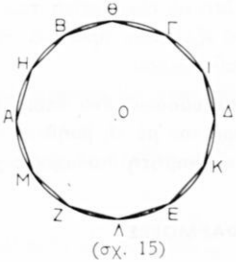
Ἔτσι π.χ. ἄν χωρίσουμε τόν κύκλο σέ τέσσερα ἴσα μέρη, θά προκύψει κανονικό τετράπλευρο (δηλαδή τετράγωνο) πού θά ἔχει κεντρική γωνία $\widehat{\omega} = \frac{360^0}{4} = 90^0$. Ἐπίσης ἄν χωρίσουμε τόν κύκλο σέ πέντε ἴσα μέρη, θά προκύψει ἕνα κανονικό πεντάγωνο, στό ὁποῖο ἡ κεντρική γωνία θά εἶναι $\widehat{\omega} = \frac{360^0}{5} = 72^0$

14. 6. Ἀπό τά προηγούμενα συμπεραίνουμε ὅτι, γιά νά κατασκευάσουμε ἕνα κανονικό πολύγωνο μέ ν πλευρές, θά πρέπει νά χωρίσουμε ἕναν κύκλο σέ ν ἴσα μέρη. Αὐτό γίνεται μέ τή βοήθεια τῆς κεντρικῆς γωνίας $\widehat{\omega} = \frac{360^0}{\nu}$ τοῦ πολυγώνου.

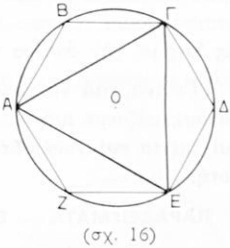
Ἔστω π.χ. ὅτι θέλουμε νά χωρίσουμε ἕναν κύκλο σέ ἕξι ἴσα μέρη. Ἐπειδή ἡ κεντρική γωνία τοῦ ἑξαγώνου, πού θά προκύψει, εἶναι $\frac{360^0}{6} = 60^0$, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς (βλέπε σχῆμα 14):



(σχ. 14)



(σχ. 15)

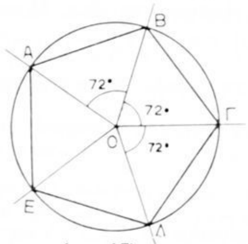


(σχ. 16)

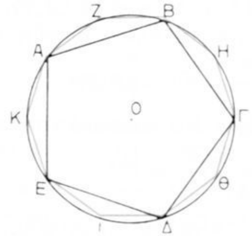
Παίρνουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Α τοῦ κύκλου καί μέ πλευρά τήν ΟΑ κατασκευάζουμε (μέ τό μοιρογνωμόνιο) μιά γωνία 60^0. Ἐκεῖ πού ἡ ἄλλη πλευρά τῆς γωνίας αὐτῆς τέμνει τόν κύκλο, βάζουμε τό σημεῖο Β. Ἔπειτα, μέ πλευρά τήν ΟΒ κατασκευάζουμε (πάλι μέ τό μοιρογνωμόνιο) μιά ἄλλη γωνία 60^0 καί ἐκεῖ πού ἡ ἄλλη πλευρά της τέμνει τόν κύκλο βάζουμε τό σημεῖο Γ. Συνεχίζοντας μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε καί τά ὑπόλοιπα σημεῖα Δ, Ε, Ζ. Ἔτσι κατασκευάζεται ἕνα κανονικό ἑξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ.

Ἄν πάρουμε τά μέσα τῶν τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, . . ., $\widehat{ZA}$, τά μέσα αὐτά μαζί μέ τίς κορυφές τοῦ ἑξαγώνου χωρίζουν τόν κύκλο σέ 12 ἴσα μέρη (βλέπε σχῆμα 15) καί ἔτσι κατασκευάζεται ἕνα κανονικό δωδεκάγωνο. Ἐπίσης ἄν ἑνώσουμε ἀνά δύο τίς κορυφές τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 16, κατασκευάζεται κανονικό τρίγωνο (δηλαδή ἰσόπλευρο τρίγωνο).

Μέ τόν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νά χωρίσουμε ἕναν κύκλο σέ 5 ἴσα μέρη κατασκευάζοντας διαδοχικές γωνίες, μέ κορυφή Ο, οἱ ὁποῖες νά εἶναι



(σχ. 17)



(σχ. 18)

ἴσες μέ $\frac{360^0}{5} = 72^0$ (βλέπε σχῆμα 17). Ἔτσι κατασκευάζεται ἕνα κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ. Ἄν πάρουμε καί τά μέσα τῶν τόξων $\widehat{\mathrm{AB}}$, $\widehat{\mathrm{B\Gamma}}$, ... $\widehat{\mathrm{EA}}$, κατασκευάζουμε ἕνα κανονικό δεκάγωνο (βλέπε σχῆμα 18).

Στό σχῆμα 14 τό τρίγωνο ΟΑΒ εἶναι ἰσόπλευρο (γιατί εἶναι ἰσοσκελές καί ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι 60^0). Συνεπῶς ἡ πλευρά ΑΒ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου θά εἶναι ἴση μέ τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου. Ἔτσι, γιά νά κατασκευάσουμε τό κανονικό ἑξάγωνο, ἀρκεῖ νά πάρουμε ἕξι διαδοχικές χορδές ἴσες μέ τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

Γενικά, **γιά νά κατασκευάσουμε ἕνα ὁποιοδήποτε κανονικό πολύγωνο, κατασκευάζουμε μιά πλευρά του μέ τή βοήθεια τῆς κεντρικῆς γωνίας του καί ἔπειτα παίρνουμε μέ τό διαβήτη διαδοχικές χορδές ἴσες μέ τήν πλευρά αὐτή.**

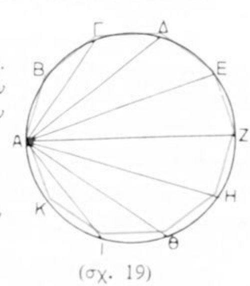
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες ἑνός κανονικοῦ δεκαγώνου.**

Λύση: Ἄν φέρουμε τίς διαγωνίους ἀπό μιά κορυφή (π.χ. τήν Α), σχηματίζονται 8 τρίγωνα. Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ δεκαγώνου εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν 8 τριγώνων, δηλαδή εἶναι ἴσο μέ

$$8 \times 180^\circ = 1440^\circ.$$

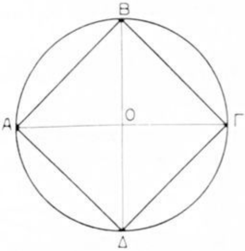
Ἐπειδή οἱ γωνίες τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου εἶναι ἴσες, ἡ κάθε μιά θά εἶναι $\frac{1440^\circ}{10} = 144^\circ$.



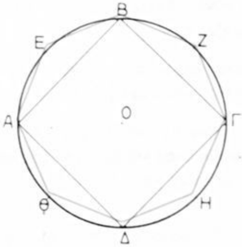
(σχ. 19)

2. **Νά ἐγγράψετε σέ ἕναν κύκλο κανονικό τετράπλευρο (δηλαδή τετράγωνο) καί κανονικό ὀκτάγωνο.**

Λύση: Παίρνουμε πάνω στόν κύκλο ἕνα σημεῖο Α καί ξεκινώντας ἀπό τήν ἡμιευθεία ΟΑ κατασκευάζουμε (μέ τό μοιρογνωμόνιο ἤ τό γνώμονα) 4 διαδοχικές γωνίες ἴσες μέ $\frac{360^\circ}{4}=90^\circ$. Βρίσκουμε ἔτσι τά σημεῖα Β,Γ,Δ πού μαζί μέ τό Α εἶναι κορυφές ἑ-



(σχ. 20)



(σχ. 21)

νός τετραγώνου ἐγγεγραμμένου στόν κύκλο (σχῆμα 20). Διαπιστώνουμε εὔκολα ἀπό τό σχῆμα, ὅτι οἱ ἡμιευθεῖες ΟΑ, ΟΓ καθώς καί οἱ ΟΒ, ΟΔ εἶναι ἀντικείμενες.

Ἔτσι, γιά νά κατασκευάσουμε τετράγωνο ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο, ἀρκεῖ νά φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους τοῦ κύκλου. Τά ἄκρα τῶν διαμέτρων αὐτῶν εἶναι οἱ κορυφές τοῦ τετραγώνου.

Ἄν πάρουμε τώρα τά μέσα τῶν τόξων $\overparen{AB}$, $\overparen{B\Gamma}$, $\overparen{\Gamma\Delta}$, $\overparen{\Delta A}$ (πού τά βρίσκουμε εὔκολα φέρνοντας τίς μεσοκαθέτους τῶν ἀντίστοιχων χορδῶν), τά μέσα αὐτά μαζί μέ τά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ εἶναι κορυφές ἑνός κανονικοῦ ὀκταγώνου ἐγγεγραμμένου στόν κύκλο (σχῆμα 21).

3. **Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό ἑνός κανονικοῦ ἑξαγώνου, πού εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο ἀκτίνας 3 cm.**

Λύση: Στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΑΗ εἶναι $(A\widehat{O}H)=\frac{60^\circ}{2}=30^\circ$.

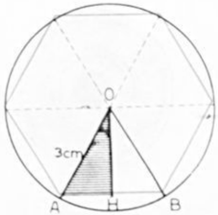
Ἔχουμε λοιπόν

$$(AH)=(OA)\,\text{ημ}30^\circ=3\,.\,\frac{1}{2}=1{,}5\text{ cm.}$$

$$(AB)=2(AH)=2\,.\,1{,}5=3\text{ cm.}$$

Ἐπίσης εἶναι

$$(OH)=(OA)\,\text{συν}30^\circ=3.\frac{\sqrt{3}}{2}\simeq 3\cdot\frac{1{,}732}{2}=2{,}598\text{ cm}$$



(σχ. 22)

Τό ἐμβαδό λοιπόν τοῦ τριγώνου ΟΑΒ εἶναι

$$(OAB)=\frac{1}{2}\,(AB).(OH)=\frac{1}{2}\cdot 3.2{,}598=3{,}897\text{ cm}^2.$$

Ἑπομένως τό ἐμβαδό τοῦ ἑξαγώνου εἶναι $E=6\,.\,3{,}897=23{,}382\ \text{cm}^2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

9. Νά ὑπολογίσετε τήν κεντρική γωνία καί τή γωνία ἑνός κανονικοῦ ὀκταγώνου, δωδεκαγώνου, εἰκοσαγώνου.

10. Ποιοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἡ κεντρική γωνία εἶναι 20° ἤ 40° ἤ $\frac{1}{3}$ ὀρθῆς;

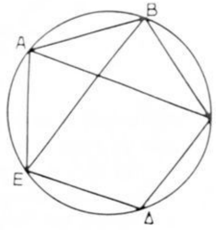
11. Νά βρεῖτε τήν πλευρά καί τό ἐμβαδό ἑνός κανονικοῦ πενταγώνου, πού εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο ἀκτίνας 6 cm.

12. Σέ κύκλο ἀκτίνας 10 cm νά ἐγγράψετε ἰσόπλευρο τρίγωνο καί νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό του.

13. Κανονικό ὀκτάγωνο μέ πλευρά 4 cm εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο. Νά βρεῖτε τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου καί τό ἀπόστημα τοῦ ὀκταγώνου.

14. Σέ διαφανές χαρτί νά σχεδιάσετε κανονικό ἑξάγωνο καί κανονικό πεντάγωνο ἐγγεγραμμένα σέ κύκλο. Νά ἐξετάσετε ἄν καθένα ἀπό τά πολύγωνα αὐτά ἔχει ἄξονα συμμετρίας καί κέντρο συμμετρίας.

15. Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε φέρει τίς δύο διαγωνίους τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ. Νά φέρετε καί τίς ὑπόλοιπες διαγωνίους καί νά ἐξετάσετε (μέ τή βοήθεια τῶν γεωμετρικῶν σας ὀργάνων) ἄν τό πεντάγωνο, πού ἔχει κορυφές τά σημεῖα τομῆς τους, εἶναι κανονικό.



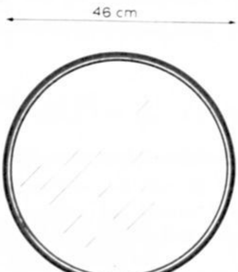
(σχ. 23)

Μῆκος κύκλου

14. 7. Στά παρακάτω σχήματα βλέπουμε ἕνα δίσκο μουσικῆς, πού ἔχει διάμετρο 25 cm, ἕναν κυκλικό καθρέφτη, πού ἔχει διάμετρο 46 cm,

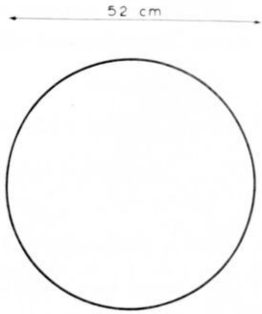
78,54 cm

(σχ. 24)



144,51 cm

(σχ. 25)



163,36 cm

(σχ. 26)

καί ἕνα σιδερένιο στεφάνι, πού ἔχει διάμετρο 52 cm. Κάτω ἀπό κάθε σχῆμα εἶναι γραμμένος ὁ ἀριθμός πού βρίσκουμε, ἄν μετρήσουμε (μέ μιά μετροταινία) τό μῆκος τοῦ κύκλου τοῦ σχήματος.

Ἄν σχηματίσουμε σέ κάθε σχῆμα τό πηλίκο τοῦ μήκους τοῦ κύκλου πρός τή διάμετρό του, βρίσκουμε

$$\frac{78,54}{25} = 3,141\ldots, \qquad \frac{144,51}{46} = 3,141\ldots, \qquad \frac{163,36}{52} = 3,141\ldots$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι σέ κάθε κύκλο τό πηλίκο $\frac{\text{μῆκος κύκλου}}{\text{διάμετρος}}$ εἶναι πάντα ὁ ἴδιος ἀριθμός καί ἑπομένως τό πηλίκο αὐτό δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τή διάμετρο τοῦ κύκλου. Ἔχει ἀποδειχθεῖ ὅτι τό πηλίκο αὐτό εἶναι ἄρρητος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος συμβολίζεται διεθνῶς μέ τό ἑλληνικό γράμμα π καί εἶναι ἴσος(1) μέ

$$\pi = 3,1415936\ldots$$

(Στούς ὑπολογισμούς μας παίρνουμε συνήθως γιά τιμή τοῦ π τή ρητή του προσέγγιση $\pi = 3,14$).

Ἄν λοιπόν ὀνομάσουμε Γ τό μῆκος ἑνός κύκλου, πού ἔχει ἀκτίνα ρ, θά ἔχουμε $\frac{\Gamma}{2\rho} = \pi$ ἤ τελικά

$$\boxed{\Gamma = 2\pi\rho} \qquad (3)$$

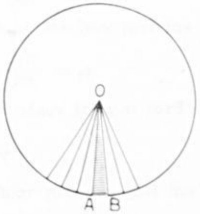
Ἔτσι π.χ. τό μῆκος ἑνός κύκλου ἀκτίνας $\rho = 4$ cm εἶναι

$$\Gamma = 2\,(3,14)\cdot 4 = 25,12 \text{ cm}.$$

Ἐμβαδό κυκλικοῦ δίσκου

14. 8. Γιά νά βροῦμε τό ἐμβαδό ἑνός κυκλικοῦ δίσκου, πού ἔχει ἀκτίνα ρ, σκεφτόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἄν πάρουμε δύο πολύ γειτονικά σημεῖα Α καί Β τοῦ κύκλου (Ο,ρ), μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι τό ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΟΒ ἔχει ὕψος ρ (τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου) καί ὅτι ἡ βάση τοῦ τριγώνου ταυτίζεται μέ τό τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Φανταζόμαστε τώρα ὅτι ὁ κυκλικός δίσκος εἶναι ἄθροισμα τέτοιων ἰσοσκελῶν τριγώνων, ὁπότε (σχῆμα 27) τό ἐμβαδό Ε τοῦ κυκλικοῦ δίσκου θά εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τους. Ἐπειδή ὅμως τά τρίγωνα ἔχουν τό ἴδιο ὕψος, τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τους εἶναι



(σχ. 27)

$$E = \frac{1}{2}\,(\text{ἄθροισμα βάσεων}) \times \text{ὕψος} =$$

1. Μέ τόν ὑπολογισμό τοῦ π ἀσχολήθηκε καί ὁ μεγάλος Ἕλληνας Μαθηματικός Ἀρχιμήδης (287-212 π.Χ.), ὁ ὁποῖος διπλασιάζοντας διαρκῶς τό πλῆθος τῶν πλευρῶν ἑνός κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο βρῆκε γιά τιμή τοῦ π τόν ἀριθμό $\frac{22}{7} = 3,1428$.

$$= \frac{1}{2} \text{ (μῆκος κύκλου)} \times \text{ἀκτίνα} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi\rho \cdot \rho = \pi\rho^2$$

Ἐπομένως τό ἐμβαδό τοῦ κυκλικοῦ δίσκου εἶναι

$$(4) \qquad \boxed{E = \pi\,\rho^2}$$

Ἔτσι π.χ. τό ἐμβαδό ἑνός κυκλικοῦ δίσκου ἀκτίνας $\rho = 4$ cm, εἶναι
$E = (3,14) \cdot 4^2 = 50,24$ cm².

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Δίνεται ἕνας κύκλος ἀκτίνας ρ καί ἕνα τόξο του $\overset{\frown}{AB}$, πού εἶναι μ μοῖρες. Νά δειχθεῖ ὅτι:**

α) Τό μῆκος γ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ εἶναι $\gamma = 2\pi\rho \cdot \dfrac{\mu^0}{360^0}$.

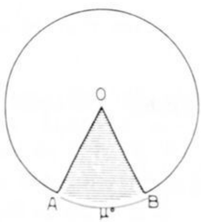
β) Τό ἐμβαδό ε_τ τοῦ κυκλικοῦ τομέα ΑΟΒ εἶναι $\varepsilon_\tau = \pi\rho^2 \dfrac{\mu^0}{360^0}$.

Λύση: Ἄν χωρίσουμε τόν κύκλο σέ 360 ἴσα μέρη, κάθε ἕνα ἀπό τά 360 αὐτά τόξα εἶναι μιά μοίρα καί ἔχει μῆκος $\dfrac{2\pi\rho}{360}$ $\left(\text{τό } \dfrac{1}{360} \text{ τοῦ μήκους τοῦ κύκλου}\right)$, ἐνῶ ὁ κυκλικός τομέας μιᾶς μοίρας ἔχει **ἐμβαδό** $\dfrac{\pi\rho^2}{360}$. Συνεπῶς ἕνα τόξο μ μοιρῶν ἔχει μῆκος

$$\gamma = \frac{2\pi\rho}{360}\mu \quad \text{ἤ} \quad \gamma = 2\pi\rho \frac{\mu^\circ}{360^\circ}$$

καί ἕνας κυκλικός τομέας μ μοιρῶν ἔχει ἐμβαδό

$$\varepsilon_\tau = \frac{\pi\rho^2}{360} \cdot \mu \quad \text{ἤ} \quad \varepsilon_\tau = \pi\rho^2 \frac{\mu^\circ}{360^\circ}$$



(σχ. 28)

Ἔτσι π.χ. σέ κύκλο ἀκτίνας $\rho = 4$ cm, ἕνα τόξο 60° ἔχει μῆκος

$$\gamma = 2 \cdot (3,14) \cdot 4 \frac{60^\circ}{360^\circ} = 4,186 \text{ cm}$$

καί ἕνας κυκλικός τομέας 60° ἔχει ἐμβαδό

$$\varepsilon_\tau = (3,14) \cdot 4^2 \frac{60^\circ}{360^\circ} = 8,373 \text{ cm}^2.$$

Σημείωση: Γιά τό ἐμβαδό ἑνός κυκλικοῦ τομέα μ μοιρῶν ἔχουμε:

$$\varepsilon_\tau = \pi\rho^2 \frac{\mu^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\rho \cdot \rho \cdot \frac{\mu^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2}\left(2\pi\rho \frac{\mu^\circ}{360^\circ}\right) \cdot \rho = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \rho.$$

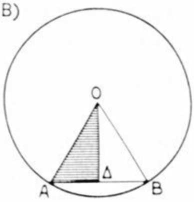
Βλέπουμε δηλαδή ὅτι **τό ἐμβαδό τοῦ κυκλικοῦ τομέα εἶναι ἴσο μέ τό μισό τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπί τό «ὕψος» του.** (Βάση τοῦ κυκλικοῦ τομέα εἶναι τό ἀντίστοιχο τόξο καί «ὕψος» ἡ ἀκτίνα).

2. **Δίνεται κύκλος ἀκτίνας 4 cm καί ἕνα τόξο του $(\overset{\frown}{AB}) = 60^0$. Νά ὑπολογισθεῖ τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας, πού περικλείεται ἀπό τό τόξο ΑΒ καί τή χορδή ΑΒ (κυκλικό τμῆμα).**

Λύση: 'Από τό ἐμβαδό τοῦ κυκλικοῦ τομέα θά ἀφαιρέσουμε τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου ΑΟΒ. Τό ἐμβαδό τοῦ κυκλικοῦ τομέα εἶναι

$$\varepsilon_\tau = 3{,}14 \,.\, 4^2 \,\frac{60^\circ}{360^\circ} = 8{,}373 \text{ cm}^2.$$

Στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΟΔ (ΟΔ εἶναι τό ὕψος τοῦ ΑΟΒ) ἔχουμε



$$(\text{Α}\Delta) = (\text{ΟΑ}) \,.\, \eta\mu\, 30^\circ = 4 \,.\, \frac{1}{2} = 2 \text{ cm}.$$

$$(\text{ΑΒ}) = 2 \,.\, 2 = 4 \text{ cm}.$$

$$(\text{Ο}\Delta) = (\text{ΟΑ}) \,.\, \sigma\upsilon\nu\, 30^\circ = 4 \,.\, \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 2 \,.\, 1{,}732 = 3{,}464 \text{ cm}.$$

Συνεπῶς

$$(\text{ΑΟΒ}) = \frac{1}{2}\,(\text{ΑΒ}).(\text{Ο}\Delta) = \frac{1}{2}.4\,.3{,}464 = 6{,}928 \text{ cm}^2.$$

(σχ. 29)

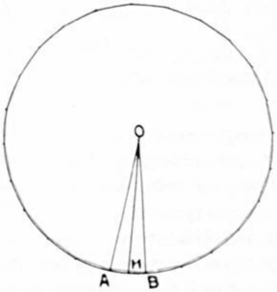
"Αρα τό ἐμβαδό ε, πού ζητᾶμε, εἶναι $\varepsilon = 8{,}373 - 6{,}928 = 1{,}445 \text{ cm}^2$.

3. **Νά βρεῖτε μιά ρητή προσέγγιση τοῦ π μέ τή βοήθεια τῆς περιμέτρου ἑνός κανονικοῦ 24γώνου ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο ἀκτίνας 6 cm.**

Λύση: Ἡ κεντρική γωνία τοῦ κανονικοῦ 24γώνου εἶναι

$$\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ.$$

Θά ὑπολογίσουμε τώρα τήν πλευρά ΑΒ τοῦ 24γώνου. 'Από τό ὀρθογώνιο τρίγωνο



(σχ. 30)

ΟΑΜ(ΟΜ εἶναι τό ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΑΒ) ἔχουμε

$(\text{ΑΜ}) = (\text{ΟΑ})\eta\mu\,(\widehat{\text{ΑΟΜ}}) = 6 \,.\, \eta\mu\,(7^\circ\, 30') = 6.0{,}1305 = 0{,}783$ cm.[1] Εἶναι λοιπόν $(\text{ΑΒ}) = 2.\, 0{,}783 = 1{,}566$ cm. Συνεπῶς ἡ περίμετρος τοῦ 24γώνου εἶναι

$$24 \,.\, 1{,}566 = 37{,}584 \text{ cm}$$

"Οπως φαίνεται καί ἀπό τό σχῆμα, ἡ περίμετρος τοῦ 24γώνου ἐλάχιστα διαφέρει ἀπό τόν κύκλο. Μποροῦμε λοιπόν νά θεωρήσουμε ὅτι τό μῆκος τοῦ κύκλου εἶναι (μέ μεγάλη προσέγγιση) ἴσο μέ τό μῆκος τῆς περιμέτρου τοῦ 24γώνου. Ἔτσι, θά ἔχουμε

1. 'Επειδή $\eta\mu 7^\circ = 0{,}129$ καί $\eta\mu 8^\circ = 0{,}1392$, πήραμε $\eta\mu(7^\circ\, 30') = 0{,}1305$, δηλαδή τό ἡμιάθροισμά τους.

$$2\pi\rho = 37{,}584$$
$$\text{ἤ} \quad 12\pi = 37{,}584$$
$$\text{ἤ} \quad \pi = \frac{37{,}584}{12} = 3{,}132.$$

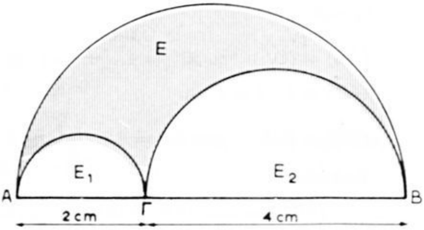
4. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφάνειας τοῦ διπλανοῦ σχήματος.

Λύση: Ἀπό τό ἐμβαδό E_3 τοῦ μεγάλου ἡμικυκλικοῦ δίσκου (μέ διάμετρο τήν ΑΒ) θά ἀφαιρέσουμε τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο ἄλλων. Ἔχουμε ὅμως

$$E_3 = (3{,}14) \cdot 3^2 \cdot \frac{180^\circ}{360^\circ} = 14{,}13 \text{ cm}^2$$

$$E_1 = (3{,}14) \cdot 1^2 \cdot \frac{180^\circ}{360^\circ} = 1{,}57 \text{ cm}^2$$

$$E_2 = (3{,}14) \cdot 2^2 \cdot \frac{180^\circ}{360^\circ} = 6{,}28 \text{ cm}^2$$



Συνεπῶς θά εἶναι

$$E = E_3 - (E_1 + E_2) = 14{,}13 - (1{,}57 + 6{,}23) = 6{,}23 \text{ cm}^2$$

(σχ. 31)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

16. Νά βρεῖτε τό μῆκος ἑνός κύκλου, πού ἔχει διάμετρο 7,2 cm.

17. Ἡ ἀκτίνα τῆς Γῆς εἶναι 6 400 km. Νά βρεῖτε τό μῆκος τοῦ ἰσημερινοῦ τῆς Γῆς.

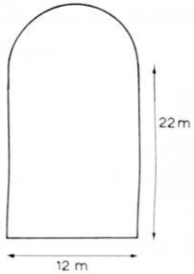
18. Γύρω ἀπό ἕνα βαρέλι τυλίγουμε ἕνα σπάγγο. Μετρᾶμε τό σπάγγο καί βλέπουμε ὅτι ἔχει μῆκος 2,512 m. Νά βρεῖτε τήν ἀκτίνα τοῦ βαρελιοῦ.

19. Σέ κύκλο πού ἔχει μῆκος 34,54 cm νά βρεῖτε τό μῆκος ἑνός τόξου 80°.

20. Πόσα μέτρα σύρμα θά χρειασθοῦμε, γιά νά περιφράξουμε τό οἰκόπεδο τοῦ σχήματος 32;

21. Ἕνα ποδήλατο, πού οἱ τροχοί του ἔχουν διάμετρο 60 cm, κάλυψε μιά ἀπόσταση 4710 m. Πόσες στροφές ἔκαναν οἱ τροχοί;

22. Τά δισκόφρενα ἑνός αὐτοκινήτου ἔχουν διάμετρο 20 cm. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τους.

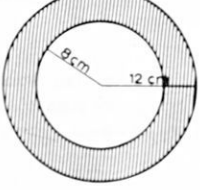


(σχ. 32)

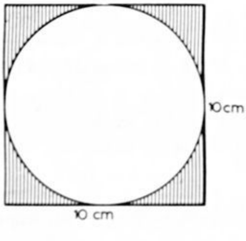
23. Ἕνα σύρμα ἔχει μῆκος 25,12 cm. Τό λυγίζουμε ἔτσι, ὥστε νά σχηματισθεῖ κύκλος. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τοῦ κυκλικοῦ δίσκου, πού ἀντιστοιχεῖ στό συρμάτινο κύκλο.

24. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό τοῦ σχήματος 32.

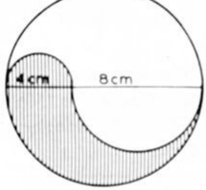
25. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τοῦ γραμμοσκιασμένου δακτυλίου τοῦ σχήματος 33.



(σχ. 33)



(σχ. 34)

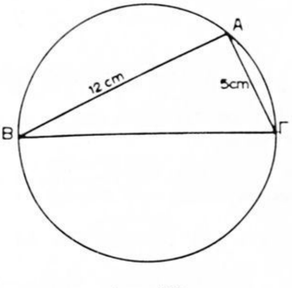


(σχ. 35)

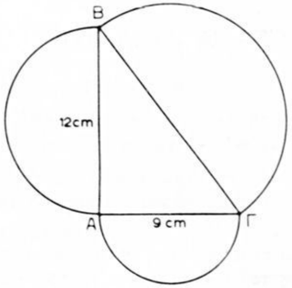
26. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφάνειας τοῦ σχ. 34.

27. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφάνειας τοῦ σχ. 35.

28. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τοῦ κυκλικοῦ δίσκου τοῦ σχήματος 36.



(σχ. 36)



(σχ. 37)

29. Στό σχῆμα 37 νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο μικρῶν ἡμικυκλικῶν δίσκων καί νά τό συγκρίνετε μέ τό ἐμβαδό τοῦ μεγάλου ἡμικ. δίσκου.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 14

1. Δύο ὁποιεσδήποτε χορδές ΑΒ καί ΑΓ ἑνός κύκλου (Ο,ρ) σχηματίζουν μιά γωνία $\widehat{ΒΑΓ}$, πού λέγεται **ἐγγεγραμμένη** στόν κύκλο καί «βαίνει» στό τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$. **Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία $\widehat{ΒΑΓ}$ εἶναι τό μισό τῆς ἀντίστοιχης ἐπίκεντρης γωνίας $\widehat{ΒΟΓ}$.** Ἀπό τήν πρόταση αὐτή προκύπτουν τά ἑξῆς:

- Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία, πού βαίνει σέ ἡμικύκλιο, εἶναι ὀρθή.
- Ὅλες οἱ ἐγγεγραμμένες γωνίες, πού βαίνουν στό ἴδιο τόξο, εἶναι ἴσες.
- Μιά ὁποιαδήποτε ἐγγεγραμμένη γωνία, πού βαίνει σ' ἕνα τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$, εἶναι ἴση καί μέ τή γωνία πού σχηματίζεται ἀπό τή χορδή ΒΓ καί τήν ἐφαπτομένη στό ἕνα ἄκρο της.

2. Ἕνα πολύγωνο, πού οἱ κορυφές του εἶναι σημεῖα ἑνός κύκλου, λέγεται **ἐγγεγραμμένο** στόν κύκλο. Ὅταν οἱ κορυφές του χωρίζουν τόν κύκλο σέ ἴσα μέρη, τό πολύγωνο εἶναι **κανονικό,** δηλαδή ἔχει ὅλες τίς πλευρές του ἴσες καί ὅλες του τίς γωνίες ἴσες. Ἄν ἕνα ἐγγεγραμμένο κανονικό πολύγωνο ἔχει ν πλευρές, κάθε πλευρά του φαίνεται ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου ὑπό γωνία

$$\widehat{\omega} = \frac{360^\circ}{\nu}$$

καί αὐτή εἶναι ἡ **κεντρική γωνία** τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.
Ἕνας κύκλος (Ο,ρ) χωρίζεται σέ ν ἴσα μέρη, ἄν κατασκευάσουμε μέ κορυφή τό Ο διαδοχικές γωνίες ἴσες μέ $\dfrac{360^\circ}{\nu}$.

3. Σέ κάθε κύκλο τό πηλίκο τοῦ μήκους του πρός τή διάμετρό του εἶναι ὁ σταθερός ἄρρητος ἀριθμός $\pi = 3{,}14\ldots$ Ἔτσι τό μῆκος Γ τοῦ κύκλου δίνεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$Γ = 2\pi\rho$$

ἐνῶ τό ἐμβαδό Ε τοῦ ἀντίστοιχου κυκλικοῦ δίσκου εἶναι ἴσο μέ

$$E = \pi\rho^2$$

Ἂν ἕνα τόξο $\widehat{AB}$ εἶναι μ μοῖρες, τό μῆκος γ τοῦ τόξου καί τό ἐμβαδό E_τ τοῦ τομέα ΑΟΒ δίνονται ἀντίστοιχα ἀπό τούς τύπους

$$\gamma = 2\pi\rho\,\frac{\mu^\circ}{360^\circ}, \qquad \varepsilon_\tau = \pi\rho^2\,\frac{\mu^\circ}{360^\circ}$$

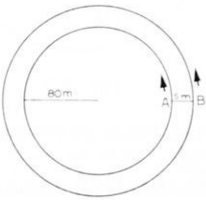
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

30. Σέ κύκλο (Ο,ρ) παίρνουμε δύο διαδοχικά τόξα $(\widehat{AB}) = 68^\circ$ καί $(\widehat{B\Gamma}) = 110^\circ$. Φέρνουμε τή διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{AB\Gamma}$, ἡ ὁποία τέμνει τόν κύκλο στό σημεῖο Δ. Νά ὑπολογίσετε τίς γωνίες τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

31. Κανονικό πεντάγωνο, πού ἔχει ἀπόστημα 10 cm, εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τοῦ ἀντίστοιχου κυκλικοῦ δίσκου.

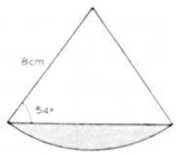
32. Τό ἐμβαδό ἑνός τετραγώνου ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο εἶναι 64 cm². Νά βρεῖτε τό μῆκος τοῦ κύκλου καί τό ἐμβαδό τοῦ ἀντίστοιχου κυκλικοῦ δίσκου.

33. Δύο ποδηλάτες τρέχουν στούς διαδρόμους Α καί Β ἑνός κυκλικοῦ ποδηλατοδρομίου (σχῆμα 38). Ὁ Α διανύει 5 κύκλους σέ 4 λεπτά καί ὁ Β 7 κύκλους σέ 6 λεπτά. Ποιός ἀπό τούς δύο ἔχει μεγαλύτερη ταχύτητα;



(σχ. 38)

34. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφάνειας τοῦ σχήματος 39.



(σχ. 39)

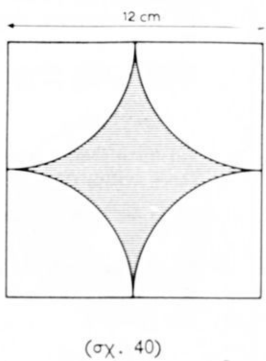
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

35. Σέ ἕναν κύκλο (Ο,ρ) νά χαράξετε μιά χορδή ΒΓ. Νά κατασκευάσετε ἰσοσκελές τρίγωνο ἐγγεγραμμένο στόν κύκλο, πού νά ἔχει βάση τή ΒΓ. Πόσα τέτοια τρίγωνα μπορεῖτε νά κατασκευάσετε;

36. Σέ δύο κύκλους μέ ἀκτῖνες 4 cm καί 6 cm νά ἐγγράψετε ἀπό ἕνα κανονικό ἑξάγωνο.
Νά ἐξετάσετε ἄν τά δύο κανονικά ἑξάγωνα, πού κατασκευάσατε, εἶναι ὅμοια.

37. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφάνειας τοῦ σχήματος 40.

38. Νά ἐξετάστε ἄν: α) τό μῆκος ἑνός κύκλου εἶναι ἀνάλογο πρός τήν ἀκτίνα του, β) τό ἐμβαδό ἑνός κυκλικοῦ δίσκου εἶναι ἀνάλογο πρός τήν ἀκτίνα του.



(σχ. 40)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΣΥΝΟΛΑ

1. Τά βασικά ἀριθμητικά σύνολα εἶναι:

- Τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν $N = \{0,1,2,3,\ldots\}$
- Τό σύνολο τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν $Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2\ldots\}$
- Τό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν $Q = \left\{x \mid x = \frac{\alpha}{\beta},\ \alpha\in Z,\ \beta\in Z^*\right\}$

καί αὐτά εἶναι τέτοια, ὥστε

$$\boxed{N \subset Z \subset Q}$$

Τά σύνολα N, Z, Q δίχως τό στοιχεῖο τους 0 σημειώνονται ἀντίστοιχα μέ N^*, Z^*, Q^*.

2. **Πράξεις στό Q**· Στό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται «πρόσθεση» καί «πολλαπλασιασμός» μέ τίς ἰσότητες:

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta},\quad \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}}$$

Γιά τίς πράξεις αὐτές ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες.

Ἰδιότητες	ΠΡΟΣΘΕΣΗ	ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ
Ἀντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\beta=\beta\alpha$
Προσεταιριστική	$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$	$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$
Οὐδέτερο στοιχεῖο	$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot 1=\alpha$
Συμμετρικό στοιχεῖο	$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1$
Ἐπιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$	

Ὁ ἀριθμός $-\alpha$ λέγεται **ἀντίθετος** τοῦ α, ἐνῶ ὁ ἀριθμός $\frac{1}{\alpha}$ λέγεται **ἀντίστροφος** τοῦ $\alpha(\alpha\neq 0)$.

Τό ἄθροισμα $\alpha+(-\beta)$ σημειώνεται μέ $\alpha-\beta$ καί εἶναι ἡ «διαφορά» τῶν α καί β, δηλαδή $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$.

Τό γινόμενο $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ σημειώνεται μέ $\frac{\alpha}{\beta}$ καί εἶναι τό «πηλίκο» τοῦ α διά τοῦ β, δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$.

3. **Διάταξη στὸ Q**. Ἄν ἔχουμε δύο ὁποιουσδήποτε ρητούς ἀριθμούς α καί β, πού ἡ διαφορά τους α–β εἶναι θετικός ἀριθμός, τότε λέμε ὅτι **ὁ α εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν β** καί γράφουμε τήν «ἀνισότητα» $\alpha > \beta$ ἤ τήν $\beta < \alpha$. Ἔτσι, ἄν ὁ α εἶναι θετικός, γράφουμε $\alpha > 0$, ἐνῶ ἄν ὁ α εἶναι ἀρνητικός, γράφουμε $\alpha < 0$.

Στίς ἀνισότητες ἰσχύει ἡ «μεταβατική» ἰδιότητα, δηλαδή

ἄν $\alpha > \beta$ καί $\beta > \gamma$, τότε εἶναι καί $\alpha > \gamma$.

Ἐπίσης, ἄν ἔχουμε $\alpha > \beta$, θά ἔχουμε ἀκόμη

$$\alpha + \gamma > \beta + \gamma, \text{ γιά ὁποιοδήποτε } \gamma$$
$$\alpha - \gamma > \beta - \gamma, \text{ γιά ὁποιοδήποτε } \gamma$$
$$\alpha\gamma > \beta\gamma, \text{ γιά } \gamma > 0$$
$$\alpha\gamma < \beta\gamma, \text{ γιά } \gamma < 0$$

Τέλος μποροῦμε νά προσθέσουμε ὁμοιόστροφες ἀνισότητες κατά μέλη (δηλαδή, ἄν $\alpha > \beta$ καί $\gamma > \delta$, τότε ἔχουμε καί $\alpha + \gamma > \beta + \delta$), ἐνῶ **δέν μποροῦμε νά ἀφαιρέσουμε ὁμοιόστροφες ἀνισότητες κατά μέλη.**

4. **Δυνάμεις**. Ἡ δύναμη α^μ ἑνός ρητοῦ ἀριθμοῦ α γιά $\mu \in N$ ὁρίζεται ἀπό τίς ἰσότητες:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha^\mu = \underbrace{\alpha.\alpha\ldots\alpha}_{\mu \text{ παράγ.}}, \ \mu \neq 0, \quad \mu \neq 1 \\ \alpha^1 = \alpha \\ \alpha^0 = 1 \end{array}}$$

Ὁρίζουμε ἐπίσης καί δύναμη μέ ἐκθέτη ἀρνητικό ἀκέραιο ἀπό τήν ἰσότητα $\alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^\mu}$. Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς δυνάμεως εἶναι φανερό ὅτι:

- **Ἄν $\alpha > 0$, τότε εἶναι καί $\alpha^\mu > 0$ γιά κάθε $\mu \in N$**
- **Ἄν $\alpha < 0$ καί $\mu =$ ἄρτιος, τότε εἶναι $\alpha^\mu > 0$**
- **Ἄν $\alpha < 0$ καί $\mu =$ περιττός, τότε εἶναι $\alpha^\mu < 0$.**

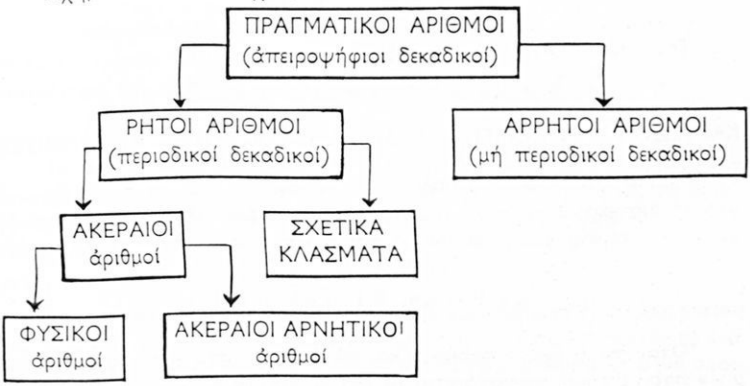
Στίς δυνάμεις ἰσχύουν ἀκόμη οἱ ἰδιότητες:

$$\boxed{\begin{array}{c} \alpha^\mu . \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu} \\ (\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu} \\ \alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu} \\ (\alpha . \beta)^\mu = \alpha^\mu \beta^\mu \end{array}}$$

5. **Τὸ σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.** Κάθε ρητός ἀριθμός μπορεῖ νά γραφεῖ πάντοτε σάν ἀπειροψήφιος δεκαδικός περιοδικός ἀριθμός (ἡ περίοδός του μπορεῖ νά εἶναι καί τό ψηφίο 0)[1]. Ἀντίστροφα, κάθε ἀπειροψήφιος δεκαδικός περιοδικός ἀριθμός παριστάνει ἕνα ρητό ἀριθμό. Ὑπάρχουν ὅμως καί ἀπειροψήφιοι δεκαδικοί ἀριθμοί, πού δέν εἶναι περιοδικοί. Αὐτοί δέν εἶναι ρητοί ἀριθμοί καί λέγονται **ἄρρητοι ἀριθμοί**.

Τό σύνολο, πού ἔχει στοιχεῖα τούς ρητούς καί τούς ἄρρητους ἀριθμούς, λέγεται **σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν** καί σημειώνεται μέ R. Τό σύνολο R δίχως τό στοιχεῖο 0 σημειώνεται πάλι μέ R*.

Σχηματικά λοιπόν ἔχουμε:



Οἱ ἄρρητοι ἀριθμοί παριστάνονται μέ ρητές προσεγγίσεις τους καί ἔτσι οἱ πράξεις στό σύνολο R γίνονται ὅπως καί στό σύνολο Q καί ἔχουν τίς ἴδιες ἰδιότητες.

Τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου R μποροῦμε νά τά ἀπεικονίσουμε ἕνα μέ ἕνα μέ τά σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε καί τότε ἡ ε λέγεται **εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν**.

6. **Τετραγωνική ρίζα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.** Ἄν ἔχουμε ἕνα πραγματικό ἀριθμό $\alpha > 0$, μέ τό σύμβολο $\sqrt{\alpha}$, τό ὁποῖο λέγεται **τετραγωνική ρίζα τοῦ α** ἤ ἁπλῶς ρίζα τοῦ α, παριστάνουμε ἕναν ἀριθμό $\beta \in R$ τέτοιον, ὥστε $\beta^2 = \alpha$. Ἀπό τόν ὁρισμό αὐτό καταλαβαίνουμε ὅτι:

- Δέν ὑπάρχει τετραγωνική ρίζα ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ.
- Κάθε θετικός ἀριθμός ἔχει δύο τετραγωνικές ρίζες, πού εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί. Ἔτσι π.χ. ὁ 4 ἔχει ρίζες τούς ἀριθμούς $+2$ καί -2.

Συμφωνοῦμε ὅτι ὁ $\sqrt{4}$ θά παριστάνει μόνο τόν $+2$, ὁπότε εἶναι $-\sqrt{4} = -2$ (μέ τή συμφωνία αὐτή ἡ ἰσότητα $\sqrt{4} = -2$ δέν ἰσχύει).

1. Ἡ περίοδος εἶναι τό ψηφίο 0 στούς ἀκέραιους καί σέ ὁρισμένα σχετικά κλάσματα (πού ἔχουν παρονομαστή δύναμη τοῦ 2 ἤ τοῦ 5).

— Ἡ $\sqrt{\alpha}$ εἶναι ρητός ἀριθμός μόνον ὅταν ὁ α εἶναι τετράγωνο ἑνός ρητοῦ ἀριθμοῦ ρ, ἐνῶ στήν ἀντίθετη περίπτωση ἡ $\sqrt{\alpha}$ εἶναι ἄρρητος ἀριθμός. Ἔχουμε λοιπόν

$$\sqrt{\rho^2} = \rho .$$

Στίς τετραγωνικές ρίζες ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες

$$\boxed{\begin{array}{c} \sqrt{\alpha} \, . \, \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta} \\ \sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}} \end{array}}$$

Τονίζεται ἰδιαίτερα ὅτι γενικά ἔχουμε

$$\sqrt{\alpha+\beta} \neq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \quad \text{καί} \quad \sqrt{\alpha-\beta} \neq \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$$

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ — ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ — ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

1. Ἄν ἔχουμε δύο σύνολα $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ καί $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$, ὅλα τά διατεταγμένα ζεύγη $(\alpha_\kappa, \beta_\lambda)$ ἀποτελοῦν ἕνα ἄλλο σύνολο, πού λέγεται καρτεσιανό γινόμενο τῶν Α καί Β καί σημειώνεται $A \times B$, δηλαδή

$$\boxed{A \times B = \{(\alpha_\kappa, \beta_\lambda) : \alpha_\kappa \in A, \ \beta_\lambda \in B\}}$$

Ὅταν τό Α ἔχει μ στοιχεῖα καί τό Β ἔχει ν στοιχεῖα, τό $A \times B$ ἔχει $\mu \cdot \nu$ στοιχεῖα καί παριστάνεται μέ ἕνα «βελοειδές διάγραμμα» ἤ μέ ἕναν πίνακα διπλῆς εἰσόδου. Εἶναι φανερό ὅτι $A \times B \neq B \times A$. Τό σύνολο $A \times A$, πού σημειώνεται καί A^2, ἔχει στοιχεῖα ὅλα τά διατεταγμένα ζεύγη $(\alpha_\kappa, \alpha_\lambda)$ τοῦ συνόλου Α. Ἔτσι τό $\mathrm{R} \times \mathrm{R} = \mathrm{R}^2$ παριστάνει ὅλα τά διατεταγμένα ζεύγη τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τά στοιχεῖα τοῦ R^2 ἀντιστοιχίζονται ἕνα πρός ἕνα μέ τά σημεῖα ἑνός ἐπιπέδου Π καί τό ζεῦγος $(\chi, \psi) \in \mathrm{R}^2$, πού ἀντιστοιχίζεται σ' ἕνα σημεῖο Μ, ἀποτελεῖ τίς συντεταγμένες τοῦ Μ.

2. **Διμελεῖς σχέσεις.** Ἄν ἔχουμε ἕναν προτασιακό τύπο $p(\chi, \psi)$ μέ $x \in A$ καί $\psi \in B$, τό καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ εἶναι τό **σύνολο ἀναφορᾶς** τοῦ $p(\chi, \psi)$. Τά ζεύγη $(\alpha, \beta) \in A \times B$, γιά τά ὁποῖα οἱ προτάσεις $p(\alpha, \beta)$ εἶναι ἀληθεῖς, ἀποτελοῦν ἕνα σύνολο $G \subseteq A \times B$, τό ὁποῖο λέγεται **σύνολο ἀλήθειας** τοῦ προτασιακοῦ τύπου.

Κάθε προτασιακός τύπος $p(\chi, \psi)$ μέ σύνολο ἀναφορᾶς $A \times B$ ὁρίζει μιά **διμελή σχέση** ἀπό τό Α στό Β. Τό σύνολο ἀλήθειας G τοῦ $p(\chi, \psi)$ λέγεται τώρα **γράφημα** τῆς διμελοῦς σχέσεως καί παριστάνεται μέ βελοειδές διάγραμμα ἤ μέ πίνακα μέ διπλή εἴσοδο.

Ἄν ἕνας προτασιακός τύπος $p(\chi, \psi)$ ἔχει σύνολο ἀναφορᾶς $A \times A$, τότε ἡ διμελής σχέση, πού ὁρίζει, λέγεται διμελής σχέση στό Α. Μιά διμελής σχέση στό Α λέγεται:

- **Ἀνακλαστική**, ὅταν ἔχουμε $(\alpha,\alpha)\in G$ γιά κάθε $\alpha\in A$.
- **Συμμετρική**, ὅταν γιά κάθε $(\alpha,\beta)\in G$ ἔχουμε καί $(\beta,\alpha)\in G$.
- **Ἀντισυμμετρική**, ὅταν γιά κάθε $(\alpha,\beta)\in G$ μέ $\alpha\neq\beta$ ἔχουμε $(\beta,\alpha)\notin G$.
- **Μεταβατική**, ὅταν γιά ὁποιαδήποτε α,β,γ τέτοια, ὥστε $(\alpha,\beta)\in G$ καί $(\beta,\gamma)\in G$ ἔχουμε καί $(\alpha,\gamma)\in G$.

Μιά διμελής σχέση, πού εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική καί μεταβατική, λέγεται **σχέση ἰσοδυναμίας**, ἐνῶ μιά διμελής σχέση, πού εἶναι ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρική καί μεταβατική, λέγεται **σχέση διατάξεως**.

3. **Ἀπεικονίσεις**. Μιά διμελής σχέση φ ἀπό τό Α στό Β, στήν ὁποία σέ κάθε στοιχεῖο τοῦ Α ἀντιστοιχίζεται ἕνα μόνο στοιχεῖο τοῦ Β, λέγεται **ἀπεικόνιση** τοῦ συνόλου Α στό σύνολο Β καί σημειώνεται

$$\varphi : A \rightarrow B.$$

Τό Α λέγεται **σύνολο ἀφετηρίας** (ἤ σύνολο ὁρισμοῦ) τῆς φ καί τό Β λέγεται **σύνολο ἀφίξεως**. Ἄν τό $\chi\in A$ ἀντιστοιχίζεται στό $\psi\in B$, τό ψ λέγεται εἰκόνα τοῦ χ. Γιά νά δηλώσουμε ὅτι τό στοιχεῖο $\psi\in B$ εἶναι εἰκόνα τοῦ $\chi\in A$ στήν ἀπεικόνιση φ, γράφουμε $\psi=\varphi(\chi)$ καί ἡ ἰσότητα αὐτή λέγεται **τύπος** τῆς ἀπεικονίσεως φ.

Μιά ἀπεικόνιση $\varphi : A \rightarrow B$ λέγεται **ἀμφιμονοσήμαντη** ἤ **ἀπεικόνιση ἕνα πρός ἕνα**, ὅταν ὄχι μόνο κάθε στοιχεῖο τοῦ Α ἀντιστοιχίζεται σέ ἕνα στοιχεῖο τοῦ Β, ἀλλά καί κάθε στοιχεῖο τοῦ Β εἶναι εἰκόνα ἑνός μόνο στοιχείου τοῦ Α.

4. **Συναρτήσεις**. Μιά ἀπεικόνιση $\varphi: A\rightarrow B$ λέγεται ἀκόμη καί **συνάρτηση** μέ πεδίο ὁρισμοῦ Α καί τιμές στό Β. Συνήθως ὁ ὅρος συνάρτηση χρησιμοποιεῖται, ὅταν τά Α καί Β εἶναι ἀριθμητικά σύνολα καί συνεπῶς στόν «*τύπο*»

$$\psi = \varphi(\chi)$$

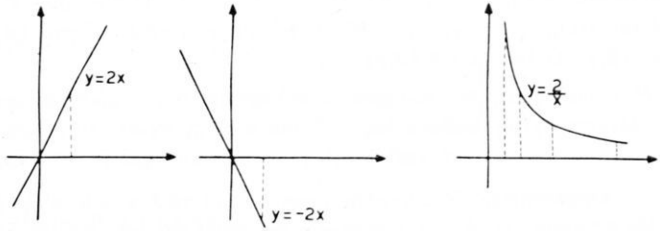
μιᾶς συναρτήσεως τά χ καί ψ παριστάνουν γενικά πραγματικούς ἀριθμούς.

Ἄν θεωρήσουμε σ' ἕνα σύστημα ἀξόνων τά σημεῖα Μ, πού ἔχουν συντεταγμένες ὅλα τά διατεταγμένα ζεύγη (χ,ψ) μέ $\chi\in A$ καί $\psi=\varphi(\chi)$, τό σύνολο τῶν σημείων Μ ἀποτελεῖ τή **γραφική παράσταση** τῆς συναρτήσεως φ. Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό R καί τύπο

$$\boxed{\psi = \alpha\chi + \beta}$$

εἶναι εὐθεία, τήν ὁποία κατασκευάζουμε βρίσκοντας τίς συντεταγμένες δύο ὁποιωνδήποτε σημείων της. Στά δύο πρῶτα σχήματα δίνονται εὐθεῖες, πού εἶναι γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $\psi=2\chi$ καί $\psi=-2\chi$, ἐνῶ στό τρίτο σχῆμα δίνεται ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως

$\psi = \frac{2}{\chi}$, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο τῶν θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.



Γενικά, ἄν ἔχουμε δύο μεγέθη (ποσά) τά ὁποῖα μεταβάλλονται **συγχρόνως** καί παραστήσουμε μέ χ τίς τιμές τοῦ ἑνός καί ψ τίς ἀντίστοιχες τιμές τοῦ ἄλλου, τά μεγέθη λέγονται

- **ἀνάλογα,** ὅταν ἔχουμε $\psi = \alpha\chi$,
- **ἀντιστρόφως ἀνάλογα,** ὅταν ἔχουμε $\psi = \frac{\alpha}{\chi}$,

ὅπου τό α εἶναι ὁρισμένος ἀριθμός.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1 Κάθε προτασιακός τύπος μιᾶς μεταβλητῆς χ, πού περιέχει τό σύμβολο τῆς ἰσότητας, λέγεται **ἐξίσωση μέ ἕναν ἄγνωστο** καί ἄν τό χ εἶναι στήν πρώτη δύναμη, ἡ ἐξίσωση λέγεται «*πρώτου βαθμοῦ*». Μία τέτοια ἐξίσωση ἔχει μιά λύση (ἤ ρίζα) καί ἡ εὕρεσή της λέγεται **ἐπίλυση** τῆς ἐξισώσεως.

Δύο ἐξισώσεις, πού ἔχουν τήν ἴδια λύση, εἶναι **«ἰσοδύναμες»**. Γιά νά βροῦμε τή λύση μιᾶς ἐξισώσεως, βρίσκουμε διαδοχικά ἰσοδύναμες ἐξισώσεις της ἀκολουθώντας τήν παρακάτω πορεία:

- Ἀπαλείφουμε (ἄν ὑπάρχουν) τούς παρονομαστές πολλαπλασιάζοντας τά δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως μέ τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν
- Ἐξαλείφουμε (ἄν ὑπάρχουν) τίς παρενθέσεις κάνοντας τίς πράξεις, πού εἶναι σημειωμένες.
- Χωρίζουμε γνωστούς ἀπό ἀγνώστους ὅρους.
- Κάνουμε ἀναγωγή τῶν ὅμοιων ὅρων σέ κάθε μέλος τῆς ἰσότητας καί ἔτσι καταλήγουμε σέ μιά ἰσοδύναμη ἐξίσωση τῆς μορφῆς

$$\alpha\chi = \beta.$$

- Διαιρώντας μέ τόν ἀριθμό $\alpha \neq 0$ βρίσκουμε ρίζα τήν $\chi = \frac{\beta}{\alpha}$.

Πολλές φορές κάνουμε καί «ἐπαλήθευση», δηλαδή βλέπουμε ἄν ἡ ρίζα, πού βρήκαμε, ἐπαληθεύει τήν ἀρχική ἰσότητα. Ὅταν ἡ ἐξίσωση ἀναφέρεται σέ συγκεκριμένο πρόβλημα, ἐξετάζουμε ἀκόμη ἄν ἡ ρίζα, πού βρήκαμε, ἱκανοποιεῖ τούς περιορισμούς, πού ἔχει ὁ ἄγνωστος χ ἀπό τή φύση τοῦ προβλήματος.

2. **Ἀνισώσεις**. Κάθε προτασιακός τύπος μιᾶς μεταβλητῆς χ, πού περιέχει τό σύμβολο τῆς ἀνισότητας, λέγεται **ἀνίσωση μέ ἕναν ἄγνωστο** καί ἄν τό χ εἶναι στήν πρώτη δύναμη ἡ ἀνίσωση λέγεται «πρώτου βαθμοῦ». Τό σύνολο ἀλήθειας ἑνός τέτοιου προτασιακοῦ τύπου λέγεται **σύνολο λύσεων** τῆς ἀνισώσεως καί ἡ εὕρεσή του ἀποτελεῖ τήν **ἐπίλυση** τῆς ἀνισώσεως. Γενικά, τό σύνολο λύσεων μιᾶς ἀνισώσεως ἔχει ἄπειρα στοιχεῖα.

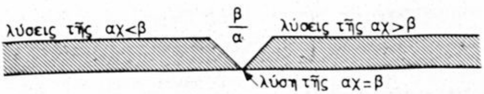
Δύο ἀνισώσεις, πού ἔχουν τό ἴδιο σύνολο λύσεων, εἶναι **«ἰσοδύναμες»**. Γιά νά ἐπιλύσουμε μιά ἀνίσωση, βρίσκουμε διαδοχικά ἰσοδύναμες ἀνισώσεις της ἀκολουθώντας τήν ἴδια πορεία, πού ἀναφέρουμε παραπάνω γιά τίς ἐξισώσεις. Ἔτσι καταλήγουμε σέ μιά ἀπό τίς ἀνισώσεις

$$\alpha\chi < \beta, \quad \alpha\chi \leq \beta, \quad \alpha\chi > \beta, \quad \alpha\chi \geq \beta$$

πού θά εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἀρχική. Συνεπῶς, ἄν διαιρέσουμε καί μέ τό $\alpha > 0$, βρίσκουμε ἀντίστοιχα μιά ἀπό τίς ἀνισώσεις

$$\chi < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \chi \leq \frac{\beta}{\alpha} \quad \chi > \frac{\beta}{\alpha}, \quad \chi \geq \frac{\beta}{\alpha},$$

ἡ ὁποία δίνει ἀμέσως τό σύνολο λύσεων.



Στήν ἐπίλυση μιᾶς ἀνισώσεως πρέπει νά προσέχουμε πολύ, ὅταν πολλαπλασιάζουμε τά μέλη της μέ ἕναν ἀριθμό, γιατί, ὅταν ὁ ἀριθμός εἶναι ἀρνητικός, ἡ ἀνίσωση ἀλλάζει φορά. Ἔτσι, ἡ ἀνίσωση ἀλλάζει φορά καί ὅταν ἀλλάζουμε τά πρόσημα ὅλων τῶν ὅρων της (ἀφοῦ τότε πολλαπλασιάζουμε ἐπί -1).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ – ΟΜΟΙΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Κάθε ἀπεικόνιση $\varphi : E \rightarrow E$ ἑνός συνόλου Ε στόν ἑαυτό του λέγεται **μετασχηματισμός τοῦ Ε** καί, ὅταν τό Ε εἶναι σημειοσύνολο, μιά τέτοια ἀπεικόνιση λέγεται **γεωμετρικός μετασχηματισμός**.

Ἄν θεωρήσουμε ἕναν ὁποιονδήποτε γεωμετρικό μετασχηματισμό ἑνός ἐπίπεδου p, κάθε γεωμετρικό σχῆμα σ τοῦ p ἔχει μιά «εἰκόνα» σ', ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπό τίς εἰκόνες ὅλων τῶν σημείων τοῦ σ. Οἱ βασικοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί ἑνός ἐπιπέδου p εἶναι:

1. **Ἡ συμμετρία ὡς πρός ἄξονα ε**. Εἶναι ἕνας γεωμετρικός μετα-

σχηματισμός, πού ὁρίζεται μέ τή βοήθεια μιᾶς εὐθείας ε καί ἀντιστοιχίζει σέ κάθε σημεῖο Α∊p ἕνα σημεῖο Α'∊p τέτοιο, ὥστε ἡ ὁρισμένη εὐθεία ε (ἄξονας συμμετρίας) νά εἶναι πάντοτε μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΑ'. Στό μετασχηματισμό αὐτό κάθε σημεῖο τοῦ ἄξονα συμμετρίας ε ἀντιστοιχίζεται στόν ἑαυτό του. Ἡ εἰκόνα σ' ἑνός σχήματος σ λέγεται τώρα **συμμετρικό τοῦ σ ὡς πρός ἄξονα** ε καί ἰσχύει γενικά ἡ πρόταση :

Τά συμμετρικά σχήματα ὡς πρός ἄξονα εἶναι ἴσα.

Ἄν τό συμμετρικό ἑνός σχήματος σ ὡς πρός ἄξονα ε εἶναι τό ἴδιο τό σχῆμα σ, τότε λέμε ὅτι τό σ ἔχει **ἄξονα συμμετρίας** τήν εὐθεία ε.

2. **Ἡ συμμετρία ὡς πρός κέντρο Ο**. Εἶναι ἕνας γεωμετρικός μετασχηματισμός, ὁ ὁποῖος ὁρίζεται μέ τή βοήθεια ἑνός σημείου Ο καί ἀντιστοιχίζει σέ κάθε σημεῖο Α∊p ἕνα σημεῖο Α'∊p τέτοιο, ὥστε τό ὁρισμένο σημεῖο Ο (κέντρο συμμετρίας) νά εἶναι μέσο τοῦ τμήματος ΑΑ'.
Στό μετασχηματισμό αὐτό μόνο τό σημεῖο Ο ἀπεικονίζεται στόν ἑαυτό του.

Ἡ εἰκόνα σ' ἑνός σχήματος σ λέγεται τώρα συμμετρικό τοῦ σ ὡς πρός Ο καί ἰσχύουν γενικά οἱ προτάσεις:

- Τά συμμετρικά σχήματα ὡς πρός κέντρο εἶναι ἴσα.
- Τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας ὡς πρός κέντρο εἶναι εὐθεία παράλληλη.

Ἄν τό συμμετρικό ὡς πρός κέντρο Ο ἑνός σχήματος σ εἶναι τό ἴδιο τό σχῆμα σ, τότε λέμε ὅτι τό σ ἔχει **κέντρο συμμετρίας** τό σημεῖο Ο.

3. **Ἡ μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$**. Εἶναι ἕνας γεωμ. μετασχηματισμός, πού ὁρίζεται μέ τή βοήθεια ἑνός διανύσματος $\vec{\alpha}$ τοῦ ἐπιπέδου p καί ἀντιστοιχίζει σέ κάθε σημεῖο Α∊p ἕνα σημεῖο Α'∊p τέτοιο, ὥστε $\vec{AA'} = \vec{\alpha}$.
Στή μεταφορά ἰσχύουν οἱ προτάσεις:

- Ἡ εἰκόνα ἑνός σχήματος σ εἶναι σχῆμα ἴσο μέ τό σ.
- Ἡ εἰκόνα μιᾶς εὐθείας εἶναι εὐθεία παράλληλη καί λέμε πιό σύντομα ὅτι «σέ μιά μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$ διατηρεῖται ἡ ἰσότητα τῶν σχημάτων καί ἡ διεύθυνση τῶν εὐθειῶν». Ἐπίσης, ἄν σ' εἶναι ἡ εἰκόνα ἑνός σχήματος σ, λέμε ὅτι «τό σ μεταφέρθηκε στό σ'».

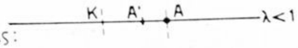
4. **Ἡ ὁμοιοθεσία μέ κέντρο Κ καί λόγο λ**. Εἶναι ἕνας γεωμετρικός μετασχηματισμός, πού ὁρίζεται μέ τή βοήθεια ἑνός σημείου Κ καί ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ λ ($\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$), ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχίζει σέ κάθε σημεῖο Α∊p ἕνα σημεῖο Α'∊p τῆς εὐθείας ΚΑ τέτοιο, ὥστε $(KA') = \lambda(KA)$. Ἡ εἰκόνα σ' ἑνός σχήματος σ λέγεται **ὁμοιόθετο τοῦ σ ὡς πρός κέντρο Κ καί λόγο λ.** Μιά τέτοια ὁμοιοθεσία λέγεται εἰδικότερα:

- **Ἐξωτερική**, ὅταν τό κέντρο Κ βρίσκεται ἔξω ἀπό τό τμῆμα ΑΑ'.

- **Ἐσωτερική**, ὅταν τό κέντρο Κ βρίσκεται μέσα στό τμῆμα ΑΑ'.

- **Διαστολή**, ὅταν $\lambda > 1$ (καί τότε τό ὁμοιόθετο ἑνός σχήματος σ εἶναι «μεγέθυνση» τοῦ σ).

- **Συστολή**, ὅταν $\lambda < 1$ (καί τότε τό ὁμοιόθετο ἑνός σχήματος σ εἶναι «σμίκρυνση» τοῦ σ).



Στήν ὁμοιοθεσία ἰσχύουν οἱ προτάσεις:

- Τό ὁμοιόθετο μιᾶς γωνίας εἶναι γωνία ἴση.
- Τό ὁμοιόθετο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ εἶναι τμῆμα Α'Β' παράλληλο πρός τό ΑΒ καί τέτοιο, ὥστε $(A'B') = \lambda(AB)$.

Γενικά λοιπόν τό ὁμοιόθετο σχήματος σ δέν εἶναι ἴσο πρός τό σ.

Ὅμοια σχήματα

5. Δύο σχήματα λέγονται **ὅμοια**, ὅταν εἶναι ἤ μπορεῖ νά γίνουν ὁμοιόθετα. Ὁ λόγος λ τῆς ὁμοιοθεσίας λέγεται τώρα **λόγος ὁμοιότητας** τῶν δύο σχημάτων.

Σέ δύο ὅμοια πολύγωνα:

- Οἱ γωνίες τους εἶναι μία πρός μία ἴσες.
- Οἱ πλευρές τοῦ ἑνός εἶναι ἀνάλογες πρός τίς ἀντίστοιχες πλευρές τοῦ ἄλλου.
- Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τους εἶναι ἴσος μέ τό τετράγωνο τοῦ λόγου ὁμοιότητας.

Γενικά, **ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁποιωνδήποτε ὅμοιων σχημάτων εἶναι ἴσος μέ τό τετράγωνο τοῦ λόγου ὁμοιότητας.**

Μιά ἐφαρμογή τῶν ὅμοιων σχημάτων εἶναι τά σχέδια (χάρτες, κατόψεις, κ.λ.π.) ὑπό κλίμακα. Ὅταν σ' ἕνα τέτοιο σχέδιο διαβάζουμε «κλίμακα $1/\alpha$», καταλαβαίνουμε ὅτι τό σχέδιο εἶναι ὅμοιο πρός τό φυσικό σχῆμα, πού ἀντιπροσωπεύει, μέ λόγο ὁμοιότητας $1/\alpha$.

ΜΕΛΕΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Ἰσότητα τριγώνων

1. Δύο σχήματα λέγονται ἴσα, ὅταν τό ἕνα μπορεῖ, μέ κατάλληλη μετατόπιση, νά ἐφαρμόσει πάνω στό ἄλλο. Ἔτσι ἄν δύο εὐθύγραμμα σχήματα εἶναι ἴσα,

- κάθε πλευρά τοῦ ἑνός εἶναι ἴση μέ μιά πλευρά τοῦ ἄλλου,
- κάθε γωνία τοῦ ἑνός εἶναι ἴση μέ μιά γωνία τοῦ ἄλλου.

Ἂν ἔχουμε δύο τρίγωνα, μποροῦμε σέ ὁρισμένες περιπτώσεις νά ἐξασφαλίσουμε τήν ἰσότητά τους μέ τήν ἰσότητα τριῶν μόνο ἀντίστοιχων στοιχείων τους, ἀπό τά ὁποῖα ἕνα τουλάχιστον εἶναι πλευρά. Οἱ περιπτώσεις αὐτές λέγονται κριτήρια ἰσότητας τριγώνων καί δίνονται στόν παρακάτω πίνακα:

$\overset{\Delta}{AB\Gamma}=\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$	$\alpha=\alpha'$	$\beta=\beta'$	$\gamma=\gamma'$	$\widehat{A}=\widehat{A'}$	$\widehat{B}=\widehat{B'}$	$\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma'}$
3 πλευρές ἴσες	+	+	+			
2 πλευρές ἴσες		+	+	+		
1 πλευρά ἴση	+				+	+
	+			+	+	
	+			+		+

2. Εἰδικότερα, ἡ ἰσότητα δύο ὀρθογώνιων τριγώνων ΑΒΓ καί Α'Β'Γ' μέ $\widehat{A}=\widehat{A'}=1$ ὀρθή, μπορεῖ νά ἐξασφαλισθεῖ μέ τήν ἰσότητα δύο μόνο στοιχείων τους, ἀπό τά ὁποῖα πάλι ἕνα τουλάχιστον εἶναι πλευρά, στίς παρακάτω περιπτώσεις:

$\overset{\Delta}{AB\Gamma}=\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$	$\alpha=\alpha'$	$\beta=\beta'$	$\gamma=\gamma'$	$\widehat{B}=\widehat{B'}$	$\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma'}$
2 πλευρές ἴσες	+	+			
		+	+		
1 πλευρά ἴση	+			+	
		+		+	
		+			+

Ἐπίλυση ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου

3. Ἂν ἔχουμε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A}=90^0$), οἱ πλευρές του συνδέονται μέ τήν ἰσότητα

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$$

ἡ ὁποία εἶναι τό **πυθαγόρειο θεώρημα.** Ἔτσι, ὅταν ξέρουμε δύο πλευρές ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου, βρίσκουμε τήν τρίτη πλευρά του.

Γενικότερα, ὅταν σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ξέρουμε δύο στοιχεῖα του (ἀπό τά ὁποῖα ἕνα τουλάχιστον εἶναι πλευρά) μποροῦμε νά βρίσκουμε τά ὑπόλοιπα στοιχεῖα του. Ἡ ἐργασία αὐτή λέγεται «ἐπίλυση» τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου καί γίνεται μέ τή βοήθεια τῶν **τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.**

Στόν παρακάτω πίνακα δίνονται ὅλες οἱ περιπτώσεις ἐπιλύσεως ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου:

ΓΝΩΣΤΑ					ΑΓΝΩΣΤΑ				
α	β	γ	$\widehat{B}$	$\widehat{\Gamma}$	α	β	γ	$\widehat{B}$	$\widehat{\Gamma}$
+	+						$\gamma=\alpha\cdot\eta\mu\Gamma$ ἤ $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2$	$\eta\mu B=\frac{\beta}{\alpha}$	$\widehat{\Gamma}=90^0-\widehat{B}$
	+	+			$\alpha=\frac{\beta}{\eta\mu B}$ ἤ $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$			$\varepsilon\varphi B=\frac{\beta}{\gamma}$	$\widehat{\Gamma}=90^0-\widehat{B}$
+			+			$\beta=\alpha\cdot\eta\mu B$	$\gamma=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu B$		$\widehat{\Gamma}=90-\widehat{B}$
	+		+		$\alpha=\frac{\beta}{\eta\mu B}$ ἤ $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$		$\gamma=\frac{\beta}{\varepsilon\varphi B}$		$\widehat{\Gamma}=90^0-\widehat{B}$
	+			+	$\alpha=\frac{\beta}{\eta\mu B}$ ἤ $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$		$\gamma=\beta\cdot\varepsilon\varphi\Gamma$	$B=90^0-\widehat{\Gamma}$	

Οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν ὀξειῶν γωνιῶν δίνονται ἀπό τούς «τριγωνομετρικούς πίνακες». Ὁ παρακάτω πίνακας δίνει τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς μερικῶν γωνιῶν:

φ	$\eta\mu\varphi$	$\sigma\upsilon\nu\varphi$	$\varepsilon\varphi\varphi$
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45^0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Παραλληλόγραμμα

4. Ένα τετράπλευρο, πού έχει τίς άπέναντι πλευρές του παράλληλες, λέγεται παραλληλόγραμμο καί έχει τίς έξῆς ίδιότητες:

- **Οί άπέναντι πλευρές του είναι ἴσες.**
- **Οί άπέναντι γωνίες του είναι ἴσες.**
- **Οί διαγώνιοί του διχοτομοῦνται.**

Ἀντιστρόφως, κάθε τετράπλευρο, στό όποῖο ίσχύει μιά άπό τίς ίδιότητες αὐτές, εἶναι παραλληλόγραμμο.

Ένα παραλληλόγραμμο λέγεται είδικότερα:

— **ὀρθογώνιο,** ὅταν ὅλες του οί γωνίες εἶναι ἴσες (ὀρθές),

— **ρόμβος,** ὅταν ὅλες του οί πλευρές εἶναι ἴσες,

— **τετράγωνο,** ὅταν ὅλες του οί γωνίες εἶναι ὀρθές καί ὅλες οί πλευρές του εἶναι ἴσες.

Σ' ἕνα ὀρθογώνιο οἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσες, ἐνῶ σ' ἕνα ρόμβο οἱ διαγώνιοι εἶναι κάθετες. Ἔτσι στό τετράγωνο οἱ διαγώνιοι εἶναι καί ἴσες καί κάθετες.

Κανονικά πολύγωνα–Μῆκος κύκλου

5. Ἕνα πολύγωνο, πού ἔχει τίς πλευρές του ἴσες καί τίς γωνίες του ἴσες, λέγεται **κανονικό**. Γιά νά βροῦμε ἕνα κανονικό πολύγωνο, πού ἔχει ν πλευρές, διαιροῦμε ἕναν κύκλο (Ο,ρ) σέ ν ἴσα μέρη καί παίρνουμε τά σημεῖα διαιρέσεως Α,Β,Γ,Δ,... ὡς κορυφές του. Ἕνα τέτοιο κανονικό πολύγωνο λέγεται **ἐγγεγραμμένο στόν κύκλο** Ο καί είδικότερα:

- Ἡ ἀκτίνα ρ τοῦ κύκλου λέγεται **ἀκτίνα τοῦ πολυγώνου.**
- Κάθε μιά ἀπό τίς ἴσες γωνίες $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$, $\widehat{\Gamma O\Delta}$,... λέγεται **κεντρική γωνία** καί εἶναι ἴση μέ $\frac{360^0}{\nu}$.
- Ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου Ο ἀπό μιά ὁποιαδήποτε πλευρά τοῦ πολυγώνου λέγεται **ἀπόστημά** του.

Χρησιμοποιώντας τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῆς κεντρικῆς γωνίας, μποροῦμε νά βροῦμε τά στοιχεῖα του, «πλευρά», «ἀπόστημα», «ἀκτίνα», ὅταν ξέρουμε τό ἕνα ἀπ' αὐτά.

Ἄν φαντασθοῦμε ὅτι τό πλῆθος ν τῶν πλευρῶν ἑνός ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου αὐξάνει ἀπεριόριστα, ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πλησιάζει ὅσο θέλουμε τό μῆκος Γ τοῦ κύκλου, τό ὁποῖο δίνεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$\boxed{\Gamma = 2\pi\rho}$$

Τό μῆκος γ ἑνός τόξου $\overset{\frown}{AB}$ τοῦ κύκλου, πού ἀντιστοιχεῖ σέ ἐπίκεντρη γωνία $(A\hat{O}B) = \mu^0$, εἶναι $\gamma = 2\pi\rho \frac{\mu^0}{360^0}$.

Ἐμβαδά

6. Τό ἐμβαδό μετράει τήν ἐπιφάνεια ἑνός ἐπίπεδου σχήματος. Ὁ παρακάτω πίνακας δίνει τούς κανόνες ὑπολογισμοῦ τῶν ἐμβαδῶν ὁρισμένων βασικῶν σχημάτων:

Σχῆμα	Ἐμβαδό
Τρίγωνο	$\frac{1}{2}$ βάση × ὕψος
Παραλληλόγραμμο	βάση × ὕψος
Τραπέζιο	$\frac{1}{2}$ (ἄθροισμα βάσεων) × ὕψος
Κανονικό ἐγγεγραμμένο πολύγωνο	$\frac{1}{2}$ (περίμετρος) × ἀπόστημα
Κύκλ. δίσκος ἀκτίνας ρ	$\pi\rho^2$

Γενικά γιά νά ὑπολογίσουμε τό ἐμβαδό ἑνός ὁποιουδήποτε πολυγώνου, τό χωρίζουμε συνήθως σέ τρίγωνα (ἤ ἄλλα σχήματα πού ξέρουμε νά ὑπολογίζουμε τά ἐμβαδά τους).

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. Βλ. § 1.4

3. α) $x = -10$ β) $x = 15$ γ) $x = -12$

6. α) 2 β) $2\frac{7}{8}$ γ) 0.

7. α) 0 β) $-3\frac{5}{12}$ γ) -5 δ) $-12\frac{19}{20}$

8. α) 5 β) $\frac{31}{60}$

9. α) $x = 13{,}5$ β) $y = 12{,}30$

10 α) 3 β) 12

13 α) $-\frac{3}{2}$ β) 12 γ) $-4\frac{11}{36}$

14 α) -6 β) -9

15. α) -3 β) $-\frac{143}{180}$

16. α) -10 β) -2 γ) 16 δ) 3 ε) $1\frac{13}{24}$

18. α) -43 β) $-\frac{41}{4}$ γ) $-\frac{35}{6}$

19. α) -8 β) 1 γ) $\frac{1}{2}$ δ) -10 ε) $13\frac{5}{6}$

20. α) 18 β) -1 γ) 2 δ) $27\frac{17}{36}$ ε) 1

21. α) 24 β) $-\frac{1}{2}$ γ) -3

22. α) 4 β) $\frac{1}{5}$

23. α) -160 β) $\frac{5}{3}$

24. α) 32 β) $2\frac{2}{27}$ γ) $47\frac{1}{2}$

27. α) -24 β) $-\frac{3}{7}$ γ) 5

28. α) $-\frac{3}{2}$ β) $-97{,}9$ γ) $\frac{13}{3}$ δ) $-\frac{1}{6}$

29. α) -1920 β) 630 γ) $-\frac{102}{7}$ δ) $-\frac{35}{12}$

30. α) 44 β) 8 γ) 44 δ) -87 ε) 174 στ) 564 ζ) 432 η) 564 θ) 48 ι) 48

31. α) 18 β) 58 γ) $-\frac{29}{24}$ δ) $15\frac{1}{3}$ ε) $-7\frac{1}{12}$

32. α) 24 β) $\frac{13}{84}$ γ) $\frac{25}{19}$ δ) $-\frac{13}{5}$

33. Τιμές πρώτης γραμμῆς $-2, 3, 1, -\frac{13}{5}, 1$

34. α) -1 β) 6 γ) $-\frac{1}{6}$ δ) $-\frac{1}{4}$

36. α) -100 β) -56 γ) 120

38. Νά χρησιμοποιήσετε τόν ὁρισμό τῆς § 1.13

39. Νά ἐφαρμόσετε στήν $\alpha > \beta$ διαδοχικά τίς ἰδιότητες τῆς § 1.14

40. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση.

42. α) 0 β) 10 γ) -54 δ) $\frac{15}{16}$ ε) -19 στ) $-6\frac{1}{9}$

43. α) 2^4 β) $(-2)^4$ γ) 2^8 δ) 10^4

45. α) 1 β) $-10\frac{1}{8}$

48. α) Τιμές πρώτης γραμμῆς: $-6, 9, -1, \frac{1}{8}$

β) Τιμές πρώτης γραμμῆς: $5, 1, -7, -1$

49. α) $-\frac{2}{3}$ β) $-\frac{32}{15}$

50. α) -64 β) -64 γ) 1297,25 δ) 0,5 ε) 0

51. α) -18 β) 9 γ) $\frac{5}{4}$ δ) -105

52. α) 0 β) 0

53. Νά βρεῖτε τίς τιμές τῶν δύο μελῶν κάθε ἰσότητας καί νά τίς συγκρίνετε.

54. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση.

55. α) $-\frac{5}{3}$ β) $\frac{1}{36}$ γ) $-1\frac{5}{8}$ δ) $\frac{13}{15}$ ε) $\frac{1}{72}$

56. α) x^5 β) x^{-4} γ) x^{-17} δ) x

57. α) $\left(\frac{2}{3}\right)^9$ β) 10^3

58. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 53

3. 152°

4. 120°

6. $x = 45°$

7. 60°, 40°, 80° Ἐξωτερικές: $\omega = 100°$, $\varphi = 120°$

8. $(\widehat{AE\Gamma}) = 30°$, $(\widehat{BA\Delta}) = 26°$, $(\widehat{\Delta\Gamma A}) = 94°$

9. $(\widehat{B}) = 60°$, $(\widehat{\Gamma}) = 75°$

10. $(\widehat{O\Delta K}) = 110°$

12. $(\widehat{\Gamma}) = 60°$

13. $(\widehat{B}) = 60°$, $(\widehat{\Gamma}) = 30°$

14. Νά συγκρίνετε τά τρίγωνα ΑΒΔ καί ΒΔΓ.

15. Συγκρίνετε τά τρίγωνα ΟΑΒ καί ΟΔΓ.

16. Οἱ γωνίες $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ θά εἶναι τοῦ ἴδιου εἴδους.

17. Νά συγκρίνετε τά τρίγωνα ΑΜΒ καί ΑΜΓ.

18. Σκεφθεῖτε τί θά συμβαίνει, ἄν ἰσχύει ἡ (α) ἤ ἡ (β).

19. Συγκρίνετε τά τρίγωνα ΑΟΒ καί ΓΟΔ.

22. Βρίσκονται στή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΒΓ.

23. 90°, 45°, 45°

24. $(\widehat{A}) = 80°$, γωνία διχοτόμων 120°

27. Νά ξεκινήσετε κατασκευάζοντας πρῶτα μιά ὀρθή γωνία $\widehat{A}$.

28. Νά κατασκευάσετε πρῶτα τό ὀρθογώνιο τρίγωνο, πού εἶναι τό μισό τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

29-30. Περνᾶνε ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

31. Εἶναι ὀρθή.

32. 70° καί 20°

33. 45°, 45°

34. $\overset{\Delta}{B\Delta E}$ ἰσόπλευρο. ΔΕ//ΑΓ

35. $(\widehat{\Delta AE}) = 150°$, $(\widehat{\Delta AB}) = 60°$, $(\widehat{EA\Gamma}) = 60°$. $\overset{\Delta}{A\Delta E}$ ἰσοσκελές

36. Περνᾶνε ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

37. Εἶναι ἴσες. Ἡ ΑΔ εἶναι μεσοκάθετος στό ΒΓ.

38. Εἶναι ἴσα.

39. Νά παρατηρήσετε ὅτι $K\Lambda \perp AB$ καί ὅτι τά τριγ. ΑΒΚ, $\overset{\Delta}{AB\Lambda}$ εἶναι ἰσοσκελῆ.

41. Εἶναι ἴσες.

43. Διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

1. (Καρκαβίτσας, Λόγια τῆς πλώρης), κ.λ.π.

2. (Κιλκίς, Μακεδονία), κ.λ.π.,

3. α) $\alpha = 2$, $\beta = 3$
   β) $\alpha + 1 = 4$ ἤ $\alpha = 3$
   $\beta - 1 = 5$ ἤ $\beta = 6$
   γ) $\alpha = 6$, $\beta = 0$
   δ) $\alpha = \beta = 2$

4. $A \times B = \{(0,1), (0,4), (2,1), (2,4), (3,1), (3,4)\}$
   $\Gamma \times \Delta = \{(3,3), (3,4), (3,8), (5,3), (5,4), (5,8), (8,3), (8,4), (8,8)\}$

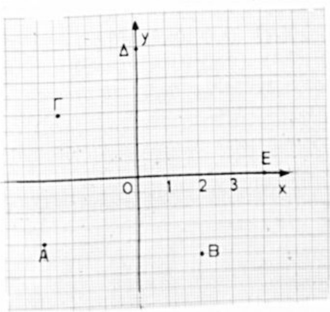
5. $A \times B = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$, $A \times \Gamma = \{(1,4), (2,4)\}$
   $A \times \Delta = \{(1,5), (2,5)\}$
   $B \cup \Gamma \cup \Delta = \{2, 3, 4, 5\}$
   $(A \times B) \cup (A \times \Gamma) \cup (A \times \Delta) = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (1,4), (2,4), (1,5), (2,5)\}$
   Νά βρεῖτε τό $A \times (B \cup \Gamma \cup \Delta)$ καί νά τό συγκρίνετε μέ τό $(A \times B) \cup (A \times \Gamma) \cup (A \times \Delta)$

6. $A = \{\kappa, \mu\}$, $B = \{\alpha, \gamma, \pi\}$
   $A \times B = \{(\kappa,\alpha), (\kappa,\gamma), (\kappa,\pi), (\mu,\alpha), (\mu,\gamma), (\mu,\pi)\}$

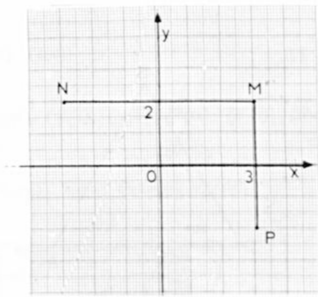
7. Ἐπειδή $6 = 1 \cdot 6 = 6 \cdot 1 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$, τό σύνολο Α μπορεῖ νά ἔχει 1 στοιχεῖο καί τό Β 6 ἤ 6 καί 1 ἤ 2 καί 3 ἤ 3 καί 2.

8. $A \times A = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

9.



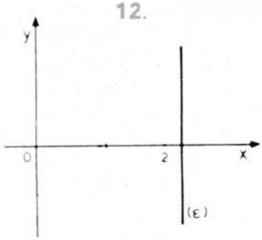
10.



N(−3,2), P(3,−2),

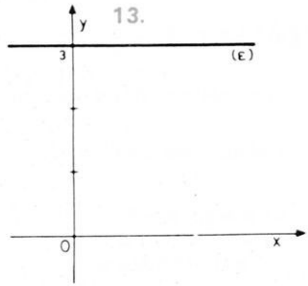
11. α) α′ ἤ δ′, β) γ′ ἤ δ′, γ) β′

12.



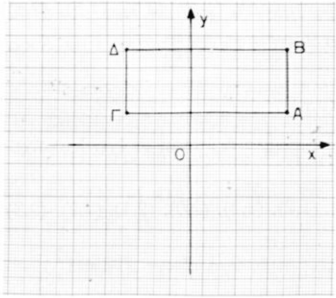
Τά σημεῖα τῆς εὐθείας ε

13.

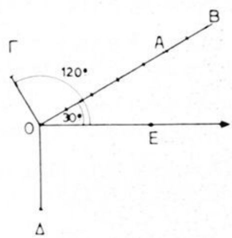


Τά σημεῖα τῆς εὐθείας ε

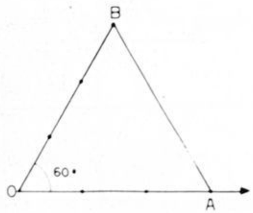
14.



15.

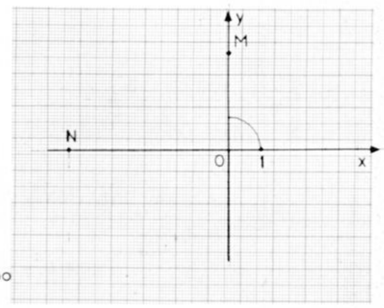


16.



Τό τρίγωνο ΟΑΒ εἶναι ἰσόπλευρο

17.



M (0,3), N(5, 180°)

18. 0°, 90°

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

1. α,γ,ε εἶναι προτάσεις, β καί δ ὄχι.

2. α) $G = \{1, 2, 3, 4\}$ γ) $G = \{4\}$
β) $G = \{4\}$ δ) $G = \{1,2,3,4\}$
$p(x) \Leftrightarrow \tau(x)$ καί $g(x) \Leftrightarrow \sigma(x)$

3. $G = \{(3,6),\ (2,8),\ (2,6),\ (5,5)\}$
$G = \{(2,8),\ (5,5)\}$

4. $G = \{(A,E),\ (T,I)\}$

5. Ὄχι, γιατί δέ δίνεται σύνολο ἀναφορᾶς. Ἄν π.χ. εἶναι σύνολο ἀναφορᾶς τό $A = \{1, 2, 3\}$, τότε $G = \{1,2\}$.

6. Ὄχι, γιατί δέ δίνονται τά σύνολα ἀπό τά ὁποῖα παίρνουν τιμές οἱ μεταβλητές x καί y.

7. $p(x)\ :\ x + 2 = 6$, $G = \{4\}$
$g(x)\ :\ x > 3$, $G = \{4\}$

8. $p(x)$: x διαιρεῖ τό 8 $G = \{2,4,8\} = A$
$g(x)$: x διαιρεῖ τό 9 $G = \{\ \}$
$\tau(x)$: x διαιρεῖ τό 4 $G = \{2,4\} \subset A$

9. $G = \{(K,M),\ (A,H),\ (\Delta,M),\ (X,K\rho),\ (\Xi,\Theta)\}$

10. G = {(Ἔντισον, φωνογράφος), (Μαρκόνι, ἀσύρματος), (Μπέλ, τηλέφωνο)}.

11. G = {(Παλαμᾶς, Δωδεκάλογος), (Παπαδιαμάντης, Φόνισσα), (Ρίτσος, Ἐπιτάφιος), (Σολωμός, Ἐθνικός ὕμνος), (Καζαντζάκης, Ζορμπᾶς), (Βενέζης, Γαλήνη)}.

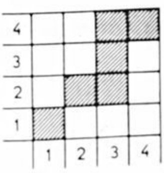
12. $G = \{(2,5),\ (6,9),\ (8,11),\ (12,15)\}$

13. Γιατί δέν περιέχει τό ζεῦγος (α,α).

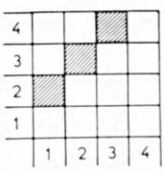
14. α) $G = \{(\alpha,\beta),\ (\beta,\alpha),\ (\varepsilon,\varepsilon),\ (\gamma,\delta),\ (\delta,\gamma)\}$
β) $G = \{(\alpha,\alpha),\ (\beta,\beta),\ (\gamma,\gamma),\ (\delta,\delta),\ (\varepsilon,\varepsilon),\ (\varepsilon,\delta),\ (\delta,\varepsilon)\}$
γ) $G = (\alpha,\beta),\ (\beta,\gamma),\ (\gamma,\alpha),\ (\delta,\varepsilon),\ (\varepsilon,\delta)\}$

15. α) $G = \{(\alpha,\alpha),\ (\alpha,\delta),\ (\beta,\alpha),\ (\beta,\gamma),\ (\beta,\delta),\ (\gamma,\alpha),\ (\gamma,\beta),\ (\gamma,\delta),\ (\delta,\alpha),\ (\delta,\delta)\}$. Δέν εἶναι οὔτε ἀνακλαστική οὔτε ἀντισυμμετρική.
β) $G = \{(\alpha,\alpha),\ (\alpha,\delta),\ (\beta,\beta),\ (\beta,\gamma),\ (\gamma,\beta),\ (\gamma,\gamma),\ (\delta,\alpha),\ (\delta,\delta)\}$. Εἶναι ἀνακλαστική.
γ) $G = \{(\alpha,\alpha),\ (\alpha,\beta),\ (\alpha,\gamma),\ (\alpha,\delta),\ (\beta,\gamma),\ (\delta,\gamma)\}$. Εἶναι ἀντισυμμετρική.

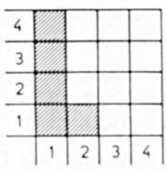
16.



ἀνακλαστική
ἀντισυμμετρική



ἀντισυμμετρική



17. α) Εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας. Οἱ κλάσεις εἶναι {α,β} καί {δ,γ}
β) Εἶναι ἰσοδυναμία. Οἱ κλάσεις εἶναι {α,β,δ}, {γ}
γ) Εἶναι ἰσοδυναμία. Οἱ κλάσεις εἶναι {α}, {β,δ}, {γ}

18. Νά ἐξετάσετε ἄν ἡ σχέση εἶναι ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρική, μεταβατική.

19. Οἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας εἶναι {α,β}, {γ,δ,ε}, {ζ,η,θ}

20. Νά ἐξετάσετε ἄν ἡ σχέση εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική, μεταβατική.

21. G = {(A,A), (A,Δ), (Δ,A), (A,Σ), (Σ,A), (Δ,Δ), (Σ,Σ), (P,P), (P,B), (B,B), (B,P), (Δ,Σ), (Σ,Δ), (Π,Π), (Π,M), (M,M), (M,Π)}. Οἱ κλάσεις εἶναι {A,Σ,Δ}, {P,B}, {Π,M}.

22. Οἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας εἶναι
{παίζω, τρέχω, διαβάζω}, {κοιμᾶμαι, αἰσθάνομαι}

23. Οἱ κλάσεις εἶναι: {4,8,12}, {5,9}, {6}, {7,11}

24. Ναί.

25. ϕ, {1}, {2}, {1,2}
B = {ϕ, {1}, {2}, {1,2}}

26. G = {('Ερ., 0), ('Αφ., 0), (Γ, 1), (A,2) (Z, 12), (K,10) (Οὐρ., 5), (Ποσ., 2) (Πλ.,0)}.

27. G = {("Αν, σύνδεσμος), . . .}

28. Οἱ κλάσεις εἶναι: {642, 84, 66}, {811, 1117, 55, 64, 1234}, {823}, {53}

29. B = {ϕ, {α}, {β}, {γ}, {α,β}, {α,γ}, {β,γ}, {α,β,γ}}

30. Νά συνδυάσετε κάθε στοιχεῖο τοῦ A μέ τόν ἑαυτό του καί ὅλα τά ἑπόμενα.

31. Νά ἐξετάσετε ἄν ἡ σχέση εἶναι ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρική, μεταβατική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

1. α) Δέν εἶναι ἀπεικόνιση.
β) φ(1) = ψ, φ(2) = ω, φ(3) = x, φ(4) = ω, φ(A) = {x,y,ω}
γ) φ(Γ) = {λ,ν}

2. G={(γ,α), (α,β), (β,δ), (δ,γ), (ε,ε)}, G={(1,4), (2,4), (3,4), (4,5), (5,6), (6,6)}

3. G = {(K,M), (Π,Π), (A,H), (B,Θ)}. Εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση.

4. Εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση.

5. Εἶναι ἀπεικονίσεις ἐκτός ἀπό τήν **τέταρτη**

6. G_1 = {(α,γ), (β,δ)} G_2 = {(α,δ), (β,γ)}

7. A = {x, y, ω, z}, B = {α, β, γ, δ}

8. Δέν μπορεῖ νά ὁρισθεῖ ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση, γιατί τά σύνολα δέν ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος στοιχείων.

9. G_1 = {(α,1), (β,2), (γ,3)}
G_2 = {(α,1), (β,3), (γ,2)}
G_3 = {(α,2), (β,1), (γ,3)}
G_4 = {(α,2), (β,3), (γ,1)}
G_5 = {(α,3), (β,1), (γ,2)}
G_6 = {(α,3), (β,2), (γ,1)}

10. G_1 = {(α,α), (β,β), (γ,δ)}
G_2 = {(α,α), (β,δ), (γ,β)}
G_3 = {(α,β), (β,α), (γ,δ)}
G_4 = {(α,β), (β,δ), (γ,α)}
G_5 = {(α,δ), (β,α), (γ,β)}
G_6 = {(α,δ), (β,β), (γ,α)}

11. Ρόμβος   12. τετράγωνο.   13. 4 ἄξονες, ἕνα κέντρο.

14. Νά βρεῖτε τά συμμετρικά τῶν κορυφῶν του.

17. α) $(-1,-3)$, $(2,-3)$, $(4,5)$ β) $(1,-3)$, $(-2,-3)$, $(-4,5)$ γ) $(-1,3)$, $(2,3)$, $(4,-5)$

18. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση.

19. $\varphi(A) = \{0, 4, 1, 9\}$

20. Εἶναι ὁ κύκλος $\left(O, \frac{\rho}{2}\right)$

21. $\varphi(A) = \{2,4,6,8,10\}$, $f(A) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}\right\}$

22. $\varphi(A) = \{3\}$. Τά σημεῖα βρίσκονται σέ εὐθεία παράλληλη πρός τόν ἄξονα Ox.

24. $A'(-1,-3)$, $B'(-4,-4)$, $\Gamma'(3,-5)$

25. Στό τετράγωνο, στόν κύκλο, στό ρόμβο καί στό ὀρθογώνιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

1. α) 30 000 cm^2 β) 51217 cm^2 γ) 4 050 012 cm^2

2. α) 5 000 000 m^2 β) 3 120 000 m^2 γ) 0,3267 m^2

3. Ἰσοδύναμα εἶναι: τό (α) καί τό (γ), τό (β) καί τό (δ)

5. Νά βρεῖτε πρῶτα τήν ἄλλη πλευρά καί κατόπιν νά ἐφαρμόσετε τόν τύπο 1 τῆς σελ. 112. ($E = 128\ cm^2$).

6. Πλήρωσε 5 040 δρχ.

7. Θά χρειαστοῦμε 600 πλακάκια.

8. Νά βρεῖτε πρῶτα τό ἐμβαδό του. ($\upsilon = 9{,}6$ cm).

9. Νά χρησιμοποιήσετε τόν τύπο 3 τῆς σελ. 113 ($\upsilon = 6$ cm).

10. Νά πάρετε δύο παραλληλόγραμμα, πού νά ἔχουν τήν ἴδια βάση (π.χ. 12 cm) καί τό ὕψος τοῦ ἑνός νά εἶναι διπλάσιο ἀπό τό ὕψος τοῦ ἄλλου (π.χ. 5 cm καί 10 cm)

11. Νά χωρίσετε τά σχήματα σέ ὀρθογώνια. ($E_1 = 40\ cm^2$, $E_2 = 34\ cm^2$, $E_3 = 70\ cm^2$).

12. $E_1 = 41\ cm^2$, $E_2 = 72\ cm^2$

13. Νά ἐφαρμόσετε τόν τύπο 4 τῆς σελ. 116 ($E = 48\ cm^2$)

14. $\upsilon = 6$ cm

15. Νά βρεῖτε πρῶτα τό ἐμβαδό του. $(B\Gamma) = 12{,}8$ cm.

16. Νά πάρετε σάν βάση τή μιά κάθετη πλευρά. ($E = 20\ cm^2$).

17. Νά ἐφαρμόσετε τόν τύπο 5 τῆς σελ. 116. ($E = 15\ cm^2$)

18. $\upsilon = 5$ cm

19. Θά εἰσπράξει 44 352 δρχ.

20. Νά χρησιμοποιήσετε τό συμπέρασμα τοῦ παραδ. 3 τῆς σελ. 118 ($\delta = 10$ cm)

21. Νά προσθέσετε τά ἐμβαδά τῶν ὀρθογ. τριγώνων καί τοῦ τραπεζίου. ($E = 55\ cm^2$)

22. Νά χωρίσετε τά σχήματα σέ τραπέζια ($E_1 = 50{,}5\ cm^2$, $E_2 = 57\ cm^2$)

23. Νά χωρίσετε τά σχήματα σέ τρίγωνα καί ὀρθογώνια. ($E_1 = 48,5\ cm^2$, $E_2 = 50\ cm^2$).

25. Μῆκος $= 100$ m.

26. Νά πάρετε δύο δικά σας σχήματα ($υ = 12$ cm).

27. Ἀπό τό ἐμβαδό τοῦ μεγάλου ὀρθογωνίου νά ἀφαιρέσετε τά ἐμβαδά τῶν ὀρθογ. τριγώνων καί τραπεζίων. ($E = 24\ cm^2$).

28. Νά πάρετε ἕνα δικό σας παράδειγμα.

29. Ἡ ἀπόσταση εἶναι 4,5 cm.

30. Νά βρεῖτε πρῶτα τίς πλευρές του καί κατόπιν τό ἐμβαδό του. Νά πάρετε σάν βάση μιά ἀπό τίς μικρότερες πλευρές καί νά βρεῖτε τό ἀντίστοιχο ὕψος. (Ἀπόσταση = = 7 cm).

31. Νά ὀνομάσετε x τή μικρή βάση. ($β_1 = 8$ cm, $β_2 = 16$ cm).

32. Νά χωρίσετε τή βάση σέ τρία ἴσα μέρη.

33. $E_1 = 14,5\ cm^2$, $E_2 = 39\ cm^2$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

1. α) $x=6$, β) $x=-\frac{5}{6}$, γ) $y=-3$ δ) $ω=1$ ε) $x=\frac{29}{2}$ στ) $x=-11$ ζ) $y=1$

2. α) $x = 15$ β) $x = 11$, γ) $x = \frac{2}{9}$ δ) $ω = -2$

3. α) $A \cup B = \left\{\frac{3}{2}, -1\right\}$ β) $A \cup B = \{2, -7\}$

4. $A = \left\{\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{2}, \frac{7}{4}\right\}$

5. α) $x = 2$ β) $x = 10$

6. α) $x = \frac{3}{α-1}$ β) ἀδύνατη

7. α) $x = 1$, $x = 2$ β) $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{2}{3}$

8. α) $L = Q$, β) $L = \emptyset$, γ) $L = \emptyset$, δ) $L = \emptyset$

9. 23

10. $\frac{3}{7}$

11. 0

12. 9, 11, 14

13. 18

14. 40 καί 10

15. Γ = 500 δρχ., Β = 1100 δρχ. Α = 2900 δρχ.

16. Α = 6760 δρχ., Β = 14900 δρχ., Γ = 3380 δρχ., Δ = 5960 δρχ.

17. Πληθωρ. 8%, αὔξηση 7,8%

18. Ἂν τό ἐνοίκιο τόν α' χρόνο ἦταν x δρχ., τόν β' χρόνο ἦταν $x+\frac{20}{100}x=\frac{6x}{5}$ κ.λ.π. (Ἀρχική τιμή 2000 δρχ.)

19. Ἂν ὁ πρῶτος ἐκσκαφέας ἐργασθεῖ x ἡμέρες, ὁ δεύτερος θά ἐργασθεῖ x–2 ἡμέρες ($x = 4^2/_3$ ἡμέρες).

20. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση. α) $2^2/_5$ ὧρ. β) 3 ὧρ.

21. 25%

22. 15300 δρχ.

23. 15cm, 25cm

24. 156000 δρχ.

25. 7 κουνέλια, 12 περιστέρια

26. –2, 0, 2

27. α) $L = \{0,1,2\}$ β) $L = \{0,1,2,3\}$ γ) $L = \{0,1,2,3\}$ δ) $L = \emptyset$
ε) $L = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ στ) $L = \{13, 14, 15, \ldots\}$

28. α) $x<2$ β) $x>-10$ γ) $x>-\frac{17}{3}$ δ) $x>1$

ε) $x<-10$ στ) $x \leq -\frac{8}{11}$

29. α, β, γ σωστές, δ λάθος

30. 7

31. 6

32. α) $L = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
β) $L = \emptyset$

33. 2 cm, 3 cm, 4 cm

34. α) $x=-\frac{11}{5}$ β) $x=-1$, $x=2$ γ) $x=-11$, δ) $\omega=\frac{1}{2}$

35. α) $3<x<6$ β) $x>\frac{11}{7}$

36. Ἂν τό ψηφίο τῶν μονάδων εἶναι x, τό ψηφίο τῶν δεκάδων εἶναι 8–x(35).

37. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στό παράδ. 8 τῆς σελ. 130 (62).

38. 72°, 72°, 36°

39. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν § 7.16. (5,6,7,···).

40. Ἂν ὀνομάσετε x τή μιά πλευρά, ἡ ἄλλη θά εἶναι 2x+1. ($E=36cm^2$).

41. Ἂν ὀνομάσετε x τή μιά βάση, ἡ ἄλλη θά εἶναι $\frac{3x}{7}-2$ (14cm, 4cm).

42. 25%

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

1. Μέ άπλή μορφή τό $\frac{15}{32}$, μέ περιοδική τά $\frac{33}{52}$, $\frac{13}{48}$, $\frac{148}{240}$

2. $\frac{5}{9}$, $2\frac{15}{99}$, $3\frac{251}{990}$, $4\frac{125}{999}$

3. 5,91

4. άληθής, άληθής, ψευδής, ψευδής

5. $Q \cap N = N$, $Q \cup R = R$, $Z \cup Q = Q$, $Z \cap R = Z$

6. α) $10\alpha+\beta-3\gamma$
β) $5\alpha\gamma+5\beta\gamma$
γ) $\alpha^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+3\beta\gamma+2\gamma^2$

7. α) $8\sqrt{5}-\sqrt{7}$ β) 0

8. α) $4\frac{4}{11}$, β) $23\frac{5}{33}$ γ) $11\frac{47}{99}$

9. $\sqrt{2} < 1{,}5$, $\sqrt{7} > 2{,}25$, $\sqrt{\frac{3}{5}} < 0{,}8$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} > 0{,}35$

10. 9, $\frac{5}{6}$, 2^2, 11,87, 22,36, 17, 5^3, 36,87

11. 70,71, 0,1, 151,65, 800, 0,5, 0,35, 116,61, 0,0158

12. α) λάθος, β) σωστό, γ) σωστό, δ) σωστό, ε) λάθος, στ) λάθος

13. α) $9\sqrt{3}$ β) $\frac{1}{4}\sqrt{6}$, γ) $3\sqrt{7}$, δ) $6\sqrt{3}-2\sqrt{2}$, ε) $12\sqrt{3}$, στ) $-9\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

14. Νά φύγουν τά ριζικά άπό τούς παρονομαστές, π.χ. $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2.3}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$

15. Νά πάρετε ρητές προσεγγίσεις τῶν ριζῶν (6,252 44,618, 23, 1,6113)

17. $3-\frac{3\sqrt{6}}{2}+8\sqrt{3}$, $6\sqrt{2}+6\sqrt{3}$, $16-2\sqrt{10}$

18. 'Αντίθετοι: $-\frac{3}{4}$, 8, $-\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{5}{6}}$ 'Αντίστροφοι : $\frac{4}{3}$, $-\frac{1}{8}$,

$\frac{\sqrt{5}}{5}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}$, $-\sqrt{\frac{6}{5}}$

19. 'Αντίθετοι: $-\alpha-\beta$, $-(\alpha.\beta)$ 'Αντίστροφοι: $\frac{1}{\alpha+\beta}$, $\frac{1}{\alpha.\beta}$

20. ᾿Αντίθετοι: $\frac{3}{7}$, $-\frac{\sqrt{2}}{6}$, $-4\sqrt{2}$ ᾿Αντίστροφοι : $-\frac{7}{3}$, $3\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{8}$

21. $14\sqrt{2}+7\sqrt{3}$, $4\sqrt{2}$, $50\sqrt{2}$, 0

22. $-16\alpha-17\beta$, $4\alpha\beta-3\beta^2+4\alpha^2$, $2\alpha^2+2\beta^2$

23. $-\frac{35}{11}$, $\frac{53}{27}$, $\frac{5408}{297}$, $-\frac{495}{124}$

25 $\alpha^2\beta^2$, α, $\alpha-\beta$, $\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

1. $\alpha = 13{,}601$, $\beta = 16$, $\gamma = 15$.
2. Νά ὑπολογίσετε τήν ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΑΒΓ. (Θά κοστίσει 375000000 δρχ.).
3. $\upsilon = 9{,}682$ m
4. Νά συγκρίνετε τό τετράγωνο τῆς μεγαλύτερης πλευρᾶς μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων: (i) ἀμβλυγώνιο ii) ὀξυγώνιο. iii) ὀρθογώνιο).
5. Θά διαπιστώσετε ὅτι τό μεγάλο τετράγωνο εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.
6. Πλευρά $= 7{,}937$ cm, $E = 35{,}7165$ cm^2
7. Μέ τό πυθαγόρειο θεώρημα νά βρεῖτε πρῶτα τό μισό τῆς χορδῆς. (χορδή$=14{,}832$cm)
8. Νά βρεῖτε πρῶτα τή βάση του. ($E = 119{,}052$ cm^2)
9. $\delta = 8{,}485$ cm.
10. α) ᾿Οξυγώνιο. β) Νά βρεῖτε πρῶτα τό ὕψος του. ($E = 96{,}507$ cm^2)
11. $E = 108$ cm^2
12. Νά ὑπολογίσετε πρῶτα τό ὕψος του. ($E = 54$ cm^2)
13. (ΑΓ) = 11 cm, (ΔΒ) = 10 cm, (ΔΓ) = 8,944 cm, (ΒΓ) = 10 cm, (ΑΒ) =6,708cm.
14. Νά καλέσετε x τό μισό τῆς πλευρᾶς του καί νά ἐφαρμόσετε τό πυθαγόρειο θεώρημα στό ὀρθογώνιο τρίγωνο πού σχηματίζεται, ὅταν φέρετε τό ὕψος. (Πλευρά$=6{,}928$ cm, $E = 20{,}784$ cm^2)
15. Νά βρεῖτε πρῶτα τήν ἄλλη κάθετη πλευρά καί τό ἐμβαδό του. Κατόπιν νά πάρετε σάν βάση τήν ὑποτείνουσα καί νά ὑπολογίσετε τό ἀντίστοιχο ὕψος ($\upsilon = 9{,}6$ cm)
16. α) Ὕψος (ΑΔ) = 14,966 cm, β) Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό καί νά πάρετε σάν βάση τήν ΑΓ. (Ὕψος (ΒΕ) = 16,628 cm).
17. Νά ὀνομάσετε x τή μικρότερη κάθετη πλευρά ($E = 28{,}7939$ cm^2).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

2. Εἶναι συμμετρικές ὡς πρός τήν εὐθεία τῆς διχοτόμου

3. α) $\varphi(A) = \left\{-2, 0, \frac{8}{3}, -4, 16\right\}$

β) $-\frac{34}{3}$ γ) 4

4. $\alpha = -\frac{9}{10}$

5. α) $\alpha = -\frac{9}{10}$ β) $\alpha = +\frac{3}{2}$ γ) $\alpha = -\frac{6}{5}$

6. $y = 2x$

8. $\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{7}{4}$, $\frac{\alpha-\beta}{\beta} = -\frac{1}{4}$, $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{3}{7}$, $\frac{\alpha+3}{\beta+4} = \frac{3}{4}$ $\frac{\alpha-3}{\beta-4} = \frac{3}{4}$

9. Ὅλα τά ζεύγη ἔχουν στοιχεῖα ἀνάλογα

10. α) $\alpha = 10$, $\beta = 6$ β) $\alpha = 15$, $\beta = 9$ γ) $\alpha = \frac{100}{19}$, $\beta = \frac{60}{19}$

11. α) 8 ἤ −8 β) 6 ἤ −6 γ) 6 ἤ −6

12. α) $x = 4$, $y = 6$, $z = 10$ γ) $x = 4$, $y = 6$, $z = 10$
β) $x = 4$, $y = 6$, $z = 10$

13. $x = 6$, $y = 8$

14. 600 δρχ., 1600 δρχ., 800 δρχ.

15. Ὄχι. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στό παράδ. 2 τῆς σελ. 179.

16. $\varphi(A) = \left\{0, 1, \frac{7}{3}, -\frac{1}{2}\right\}$

17. Οἱ εὐθεῖες εἶναι παράλληλες.

18. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν § 10.14. α) $x = 2$ β) $x = 6$ γ) $x = -3$

19. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν § 10.14. α) $x > -2$ β) $x < 2$ γ) $x < -3$

20. Τό ζεῦγος (−1,2) ἐπαληθεύει τόν τύπο τῆς συναρτήσεως. ($\beta = 4$)

21. Μ (−5, −13)

22. M_1 (1,2) καί M_2 (−1,−2)

23. 31 μαθητές, 22 οἱ ὑπόλοιποι.

24. 400 δρχ., 500 δρχ., 600 δρχ.

25. α) 7 β) 2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

1. Ἐφαρμόζοντας τόν τύπο (1) βρίσκετε: 7, $2\frac{3}{5}$, −5, $\frac{1}{5}$

2. α) −2, β) $2\frac{1}{3}$, γ) −9, δ) 11/45

3. Ἀπό τήν ἰσοδυναμία $\alpha = \beta - x \Leftrightarrow x = \beta - \alpha$ βρίσκετε: α) −9, β) 4, γ) 3.

4. α) −5 β) Ἄν x εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ Μ, θά πρέπει $\overline{BM} = \overline{MA}$ ἀπ' ὅπου $x = \frac{1}{2}$

5. Ἐφαρμόζοντας τούς τύπους (2) βρίσκετε τίς συντεταγμένες τοῦ Β (4,4).

6. Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκετε: $\overrightarrow{AB} = (5,5)$, $\overrightarrow{B\Gamma} = (0,-5)$, $\overrightarrow{\Gamma A} = (-5,0)$

7. Βρίσκετε τίς συντεταγμένες τοῦ Α (2,1)

8. Νά τοποθετήσετε τά σημεῖα Α καί Β στό σύστημα ἀξόνων. $\overrightarrow{AB} = (0,2)$

9. Μέ τόν ἴδιο τρόπο θά βρεῖτε $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = (0,4)$.

10. Ὅταν οἱ τετμημένες τῶν διανυσμάτων εἶναι 0, εἶναι παράλληλα πρός τόν Oy.

11. Νά φέρετε ἀπό τό Β παράλληλη πρός τόν ἄξονα Oy καί ἀπό τό Α παράλληλη πρός τήν Ox· θά συμπεράνετε ὅτι $\alpha = \beta$ ἤ $\alpha = -\beta$.

12. Νά βρεῖτε πρῶτα μέ τόν τύπο (2) τίς συντεταγμένες τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ καί ἔπειτα μέ τόν τύπο (3) τά μέτρα $4\sqrt{2}$, $\sqrt{52}$, 2 ἀντίστοιχα.

13. Νά ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 12 καί θά βρεῖτε $|\vec{A\Gamma}| = |\vec{AB}| = \sqrt{50}$ ἤ $AB=A\Gamma$

14. $|\vec{AB}| = 5$ καί $A(1;2)$

15. α) 2, β) $(1, -1)$

16. α) $\vec{AB} = (-5,12)$ β) $|\vec{AB}| = 13$

17. $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$ 18. α) $\vec{A\Delta}$ β) $\vec{\Delta B}$ γ) $\vec{AA} = \vec{0}$.

19. α) $\vec{AB}$ β) $2\vec{A\Gamma}$ γ) $\vec{0}$ δ) $\vec{\Gamma B}$

20. α) $\vec{A\Delta}$, β) $2\vec{AB}$, γ) $2\vec{A\Delta}$, δ) $\vec{0}$

21. $\vec{x} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ 22. $\vec{A\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ 23. $\vec{B\Gamma} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

24. $\vec{A\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{B\Delta} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$, $\vec{\Delta B} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ 25. $\vec{\alpha} = -\vec{\beta} - \vec{\gamma} - \vec{\delta}$

26. Νά παρατηρήσετε ὅτι $\vec{BM} = \vec{M\Gamma}$. Μετά τήν ἀντικατάσταση θά ἔχετε $\vec{AM} = \dfrac{\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{2}$

27. Νά ἐφαρμόσετε τό τύπο (1) ὅπως καί στήν ἄσκηση (1) καί θά βρεῖτε:

$$-1, \quad \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad -1.$$

28. Ἄν ΑΒΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμο, τότε $\vec{AB} + \vec{A\Gamma} = \vec{A\Delta}$, $\vec{AB} \neq \vec{A\Gamma}$.

29. α) Νά κατασκευάσετε τά διανύσματα $\vec{AB} = 5\vec{\alpha}$ καί $\vec{B\Gamma} = -2\vec{\beta}$. Τό διάνυσμα $\vec{A\Gamma}$ εἶναι τό ζητούμενο β) Ἐργάζεστε μέ ἀνάλογο τρόπο.

30. α) Νά παρατηρήσετε ὅτι τά $\vec{\Gamma\Delta}$ καί $\vec{AB}$ ἔχουν ἴδια φορά καί $|\vec{\Gamma\Delta}| = 2{,}5|\vec{AB}|$. Συνεπῶς θά γράψετε $\vec{\Gamma\Delta} = 2{,}5\,\vec{AB}$. Ἀνάλογα ἐργάζεστε γιά τίς ἄλλες ἐρωτήσεις.

31. α) Νά σχηματίσετε τό παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ. Τό $\vec{O\Gamma}$ εἶναι τό ζητούμενο. β) Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα 1 θά ἔχετε $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$.

32. α) $\lambda = \dfrac{3}{4}$ β) $\lambda = -\dfrac{1}{3}$ γ) $\lambda = -4$. $\vec{A\Gamma} = (-3,2)$, $\vec{B\Gamma} = (-4,2)$, $\vec{A\Delta} = (-3,-6)$.

33. α) Εἶναι κύκλος (Ο΄, R) πού τέμνει τόν (Ο,R). β) Εἶναι κύκλος (Ο΄, R) πού ἔχει ἕνα κοινό σημεῖο μέ τόν κύκλο (Ο,R) γ) Ὁ (Ο΄, R) εἶναι ἔξω ἀπό τόν (Ο,R).

34. α) Τό Α μεταφέρεται στό Β κ.λ.π. β) Τό Α μεταφέρεται στό Γ κ.λ.π. γ) Τό Α μεταφέρεται στήν κορυφή Ε τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΕΓ κ.λ.π.

35. Νά σκεφτεῖτε ὅτι τό Ο΄ εἶναι κέντρο τοῦ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ καί συνεπῶς ἡ μεταφορά τοῦ Ο κατά διάνυσμα $2\vec{AB}$.

36. β) Νά παρατηρήσετε ὅτι Α,Β εἶναι μέσα τῶν ΓΟ,ΓΕ καί ὅτι τό ΑΒΕΜ εἶναι παραλληλόγραμμο.

37. Νά παρατηρήσετε ὅτι Β εἶναι τό μέσο τοῦ ΑΔ καί ὅτι ΒΓ//ΔΕ(ἐφαρμογή 2.§11.14).

38. $\vec{MA} = \vec{NB}$, $\vec{AB} = \vec{MN}$, $\vec{BA} = \vec{NM}$.

39. Νά ὑπολογίσετε τίς ἀλγεβρικές τιμές τῶν διανυσμάτων καί μετά τήν ἀντικατάσταση θά βρεῖτε τελικά $\dfrac{-414+405+9}{10} = 0$.

40. Νά θυμηθεῖτε τόν κανόνα ἀθροίσματος διαδοχικῶν διανυσμάτων.

41. Οἱ εἰκόνες τῶν Α,Β,Γ εἶναι ἀντίστοιχα τά σημεῖα Ν,Μ,Π.

42. Νά μελετήσετε τό τετράπλευρο ΑΑ΄ΒΒ΄.

43. α) Νά κάνετε σ' ἕνα τετραγωνισμένο χαρτί ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα ἀξόνων καί νά πάρετε διανυσματικές ἀκτίνες $\vec{OA}$ καί $\vec{OB}$ μέ Α (5,1) καί Β (1,7). Ἔπειτα κατασκευάζοντας τό παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ θά βρεῖτε $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{O\Gamma}=(6,8)$. β) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=10$.

44. α) Ἡ εἰκόνα τοῦ $\vec{E\Gamma}$ εἶναι τό $\vec{AZ}$. β) Ἀπό τά στοιχεῖα, πού ἔχουν δοθεῖ, προκύπτει ὅτι τά τετράπλευρα ΑΒΓΔ καί ΔΖΒΕ εἶναι παραλληλόγραμμα. Τά τμήματα ΑΓ,ΕΖ ἔχουν γιά μέσο τους τό μέσο τῆς ΒΔ.

45. α) $\vec{\Gamma A}=\vec{BA'}$ καί $\vec{\Gamma A}=\vec{\Gamma' B}$. β) Νά θυμηθεῖτε τό αἴτημα τοῦ Εὐκλείδη γιά τήν παράλληλη ἀπό τό σημεῖο Β πρός τήν ΓΑ.

46. Νά μελετήσετε τά τετράπλευρα ΑΒΓΔ, ΒΓΕΔ καί ΒΖΓΔ.

47. α) Ἄν $\Delta(x,y)$, ἐπειδή $\vec{A\Delta}=\vec{B\Gamma}$ σύμφωνα μέ τήν § 11.9, θά βρεῖτε Δ (4,5) β) $(AB)=\sqrt{40}\simeq 6{,}3$, $(A\Delta)=5$. γ) $(A\Gamma)\simeq 10{,}8$, $(B\Delta)\simeq 3{,}606$, δ) $A'\equiv\Gamma\,(10,7)$

48. Ἄν (Λ) σημαίνει: λαθεμένη καί (Α) σημαίνει: ἀληθινή, τότε οἱ ἀπαντήσεις σας, πού πρέπει νά τίς δικαιολογήσετε, εἶναι: α) (Λ) β) (Α) γ) (Λ) δ) (Λ) ε) (Α) στ) (Α).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

1. $AB : EZ = 6$ 2. $O\Gamma' : OA = 1 : 5 = O\Gamma : OB$. $(O\Gamma') = 1{,}4$ cm.

3. $(A\Gamma) = 0{,}75$ dm καί $(AB) = 1{,}25$ dm. 4. $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\dfrac{7}{3}$

5. α) Μέ τήν ἰδιότητα $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}=\dfrac{\gamma}{\gamma+\delta}$ βρίσκετε $\dfrac{AB}{A\Gamma}=\dfrac{1}{3}$ καί $\dfrac{B\Gamma}{B\Delta}=\dfrac{2}{5}$. Ἄν ἐκφράσετε τά ΑΓ καί ΑΔ μέ τή βοήθεια τοῦ ΑΒ, θά βρεῖτε $\dfrac{A\Gamma}{A\Delta}=\dfrac{1}{2}$, καί μέ τό θεώρημα τοῦ Θαλῆ βρίσκετε:

$$\frac{A'B'}{B'\Gamma'}=\frac{1}{2},\quad \frac{B'\Gamma'}{\Gamma'\Delta'}=\frac{2}{3},\quad \frac{A'B'}{A'\Gamma'}=\frac{1}{3},\quad \frac{B'\Gamma'}{B'\Delta'}=\frac{2}{5}\quad \text{καί}\quad \frac{A'\Gamma'}{A'\Delta'}=\frac{1}{2}$$

β) Εὔκολα τώρα σχηματίζετε τίς ἀναλογίες ἀπό τούς ἴσους λόγους.

6. α) $(A\Delta) = 2$ cm, $(B\Delta) = 4$ cm, $(BE) = 6$ cm, $(E\Gamma) = 3$ cm, β) $(AZ) = (\Delta E) = 8$cm.

7. Νά πάρετε σέ μιά ἡμιευθεία Αx τμήματα $(A\Delta) = 3$ cm, $(\Delta E) = 2$ cm κ.λ.π.

8. Μέ τήν ἰδιότητα $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}=\dfrac{\gamma}{\gamma+\delta}$ καί τό θεώρημα τοῦ Θαλῆ βρίσκετε: $(A\Delta) = 2$ cm, $(\Delta B) = 3$ cm, $(AE) = 3{,}2$ cm, $(E\Gamma) = 4{,}8$ cm.

9. Νά κατασκευάσετε γωνία $x\widehat{O}y$ καί νά πάρετε στήν Ox σημεῖα Α,Β τέτοια, ὥστε $(OA) = \alpha$ καί $(AB) = \beta$, στήν Oy νά πάρετε $(O\Gamma) = \gamma$ κ.λ.π.

10. ΔΒ//ΓΕ. Νά τό δικαιολογήσετε.

11. Ἄν π.χ. Γ εἶναι τό κέντρο ὁμοιοθεσίας, ἐπειδή εἶναι ἐσωτερική, νά πάρετε στήν προέκταση τῆς ΔΓ, πρός τό μέρος τοῦ Γ, τμῆμα $\Gamma\Delta' = \dfrac{1}{2}\Gamma\Delta$ κ.λ.π.

12. α) Ἐπειδή ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι ἐξωτερική, ἄν Α εἶναι τό κέντρο, νά πάρετε στήν προέκταση τῆς ΑΒ πρός τό μέρος τοῦ Β τμῆμα ΑΒ' τέτοιο, ὥστε $AB'=2AB$ κ.λ.π. β) Ἐπειδή $A' \equiv A$ εἶναι $(A'B') = 6$ cm.

13. Μέ τό πυθαγόρειο θεώρημα νά ὑπολογίσετε τό μῆκος τῆς πλευρᾶς ΕΖ. Ἔπειτα νά κατασκευάσετε τό ὁμοιόθετο τοῦ πενταγώνου ὅπως στήν ἄσκηση 12. Τά μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ νέου πενταγώνου θά τά βρεῖτε: $(Α'Ε') = 6$ cm, $(Ε'Ζ') = 7{,}5$cm, $(Ζ'Γ') = 4{,}5$ cm, $(Γ'Δ') = 12$ cm καί $(Α'Δ') = 9$ cm.

14. Ὁ ἑαυτός της. Νά τό δικαιολογήσετε.

15. Ἀρκεῖ νά ὑπολογίσετε τήν πλευρά τήν ὁμολόγη πρός τήν ΑΔ. Θά βρεῖτε 3 cm.

16. Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῆς ὁμοιότητάς τους.

17. Νά κάνετε τούς κυκλ. δίσκους ὁμόκεντρους καί νά ἐξηγήσετε ὅτι εἶναι ὁμοιόθετα σχήματα.

18. Σύμφωνα μέ τό συμπέρασμα τῆς παραγράφου 12.9 θά βρεῖτε πλευρά τοῦ νέου ἰσόπλευρου τριγώνου μέ μῆκος $\sqrt{2}$ cm $\simeq 1{,}41$ cm.

19. Μέ τόν ἴδιο τρόπο (ἄσκηση 18) βρίσκετε ὅτι ἡ ἀκτίνα τοῦ νέου κυκλ. δίσκου εἶναι $14\sqrt{2} \simeq 20$ mm.

20. $E = 16$ m². 21. Ἄν ἐξετάσετε τό λόγο τῶν πλευρῶν, θά τά βρεῖτε ὅμοια β) Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τους εἶναι 9 : 25.

22. α) Νά προσέξετε τή γωνία $\widehat{Β}$ β) τό ἴδιο γιά τή γωνία $\widehat{Γ}$ γ) i) $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΓ} = \frac{ΒΔ}{ΑΒ}$ ii) $\frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΓΔ}{ΑΓ}$ δ) Εἶναι ὅμοια (μεταβατική ἰδιότητα).

23. Ἄν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τίς κάθετες πλευρές τους ἀνάλογες, εἶναι ὅμοια.

24. α) Ἄν δύο τρίγωνα ἔχουν τίς πλευρές τους ἀνάλογες, εἶναι ὅμοια. β) $ΑΔ : Α'Δ' = ΑΒ : Α'Β'$ Ὁ λόγος δύο ὁμόλογων ὑψῶν εἶναι ἴσος μέ τό λόγο ὁμοιότητας.

25. Ἀρκεῖ νά δικαιολογήσετε ὅτι οἱ γωνίες τους εἶναι ἴσες.

26. Πραγματική ἀπόσταση = 12 km.

27. Εἶναι ὅμοια μέ λόγο ὁμοιότητας $\frac{1}{100}$. Συνεπῶς $E = 120$ m².

28. Πραγματικό μῆκος = 6 m.

29. Τά ἀντίστοιχα μήκη σχεδίου εἶναι 4,5 cm καί 2,5 cm.

30. Μετρῆστε μέ προσοχή τίς διαστάσεις καί ἐργαστεῖτε ὅπως στό παράδειγμα 4. Θά πρέπει νά βρεῖτε: Ὑπνοδωμάτιο: $4{,}5$ m $\times$ 3 m. Καθιστικό: $4{,}5$ m $\times$ 3 m. Λουτρό: $1{,}95$ m $\times$ $0{,}975$ m. Κουζίνα: $2{,}55$ m $\times$ $1{,}5$ m.

31. Νά ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 7.

32. Ὁ ζητούμενος λόγος εἶναι ἴσος μέ 1.

33. β) $(Α'Β') = 1{,}5$cm. 34. α) 5 φορές β) 25 φορές.

35. α) καί β) Νά γίνουν οἱ κατασκευές ὅπως στήν ἄσκηση 7. γ) Νά βρεῖτε τό λόγο $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$. Θά εἶναι ΔΕ//ΒΓ καί $\frac{ΔΕ}{ΒΓ} = \frac{3}{5}$.

36. β) Νά ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 11. γ) $E = 12$ cm².

37. α) Νά ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 11. β) $R' = 6$ cm.

38. α) Νά ἑνώσετε τά ἀντίστοιχα σημεῖα β) $\lambda = 1$ γ) ὄχι.

39. α) Τέσσερες (2 ἐξωτερικές καί 2 ἐσωτερικές) β) Ἕνα κέντρο βρίσκεται μέ ἀντίστοιχα σημεῖα π.χ. τά Β,Ζ καί τό ἄλλο κέντρο μέ ἀντίστοιχα τά Β,Θ. Οἱ λόγοι εἶναι: $\lambda = 2$ (ἐξωτερική, ἐσωτερική) καί $\lambda = \frac{1}{2}$ (ἐξωτερική, ἐσωτερική).

40. Ἀπό τήν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων σέ κάθε περίπτωση προκύπτει ἡ ἰσότητα τῶν λόγων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

1. $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$ $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5}$ $\varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{4}$

$\eta\mu\omega = \frac{5}{12}$ $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{10,9}{12}$ $\varepsilon\varphi\omega = \frac{5}{10,9}$

$\eta\mu\omega = \frac{8}{10}$ $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{6}{10}$ $\varepsilon\varphi\omega = \frac{8}{6}$

2. $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{12}{13}$ $\varepsilon\varphi\omega = \frac{5}{12}$

3. $\eta\mu\omega = \frac{3,317}{6}$ $\varepsilon\varphi\omega = \frac{3,317}{5}$

4. 1) $\widehat{\Gamma} = 55°$ $\beta = 97,512$ m $\gamma = 139,264$ m 2) $\widehat{\Gamma} = 23°$ $\alpha = 13,03$ cm $\gamma = 5,09$ cm

3) $\widehat{\Gamma} = 18°$ $\alpha = 48,54$ cm $\beta = 46,17$ cm 4) $\alpha = 33,97$ cm

$\widehat{B} \simeq 43°$, $\widehat{\Gamma} \simeq 47°$, 5) $\widehat{B} \simeq 49°$, $\widehat{\Gamma} \simeq 41°$, $\gamma = 13,22$ m

6) $\gamma = 15,58$ m $\widehat{B} = 30°$ $\widehat{\Gamma} = 60°$

5. $\beta = \gamma = 23,33$ cm $E = 268,05$ cm^2
6. $\upsilon = 7,0632$ $E = 84,7584$ cm^2
7. Μῆκος χορ. 11,756 cm
8. 28,21 m
9. $\upsilon = 9,405$ m
10. Νότια 50,18 μιλ., δυτικά 55,73 μίλ.
11. Μ (5,8) $\rho = 9,434$ $\varphi = 58°$
12. $x = 0,5848$ $y = 1,9126$
13. $\beta = \gamma = 6,728$ cm $E = 22,51$ cm^2
14. $\alpha = 81,9578$ m $E = 2157,96$ m^2
15. $x = 1373,62$ m
16. Τό ημ τῆς μιᾶς ἰσοῦται μέ τό συν τῆς ἄλλης.
17. $E = 5878,125$ m^2
18. $E = 16661,77$ m^2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14

1. Οἱ γωνίες εἶναι 19°, 27° καί 46° ἀντιστοίχως.
2. Τό τόξο εἶναι 60°.
3. $(B\widehat{A}\Gamma) = 54°$, $(A\widehat{B}\Gamma) = 90°$.
4. $(\widehat{A}) = 92°$, $(\widehat{B}) = 107°$, $(\widehat{\Gamma}) = 88°$, $(\widehat{\Delta}) = 73°$
5. $(\widehat{A}) = 38°$, $(\widehat{B}) = 81°$, $(\widehat{\Gamma}) = 61°$.
6. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στό παράδ. 3 τῆς σελ. 249
7. Μέ τή βοήθεια τῆς § 14.4, νά ὑπολογίσετε πρῶτα τή γωνία $\Delta\widehat{B}\Gamma$ $[(B\widehat{\Delta}\Gamma) = 98°]$
8. Νά στηριχθεῖτε στίς § 14.1 καί 14.4. (Ζητούμενη γωνία = 53°).
9. Κεντρική γωνία: 45°, 30°, 18°. Γωνία: 135°, 150° [illegible]2°.
10. 18γώνου, 9γώνου, 12γώνου

11. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στό παράδ. 3 τῆς σελ. 253. (πλευρά = 7,0536 cm, Ε = 85,5954 cm²).

12. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση. (Ε = 129,9 cm²)

13. ρ = 5,227 cm, ἀπόστημα = 4,828 cm.

14. Τό κανονικό πεντάγωνο ἔχει 5 ἄξονες συμμετρίας. Τό κανονικό ἑξάγωνο ἔχει 6 ἄξονες συμμετρίας καί 1 κέντρο συμμετρίας.

15. Τό πεντάγωνο, πού σχηματίζεται, εἶναι κανονικό.

16. Νά χρησιμοποιήσετε τόν τύπο 3 τῆς σελ. 255. (Γ = 22,608 cm).

17. Γ = 40192 km.

18. ρ = 40 cm.

19. Νά ἐφαρμόσετε τόν τύπο τοῦ παραδ. 1 τῆς σελ. 256 (γ = 7,675 cm).

20. Ἡ περίμετρος ἀποτελεῖται ἀπό τρία εὐθύγραμμα τμήματα καί ἕνα ἡμικύκλιο. (Θά χρειασθοῦμε 74,84 m).

21. Νά βρεῖτε πόση ἀπόσταση καλύπτει σέ κάθε στροφή.(Οἱ τροχοί ἔκαναν 2.500 στροφές).

22. Ε = 314 cm²

23. Νά βρεῖτε πρῶτα τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου καί κατόπιν νά χρησιμοποιήσετε τόν τύπο 4 τῆς σελ. 256. (Ε = 50,24 cm²).

24. Τό σχῆμα ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα ὀρθογώνιο καί ἕναν ἡμικυκλικό δίσκο. (Ε=320,52 m²)

25. Ἀπό τό ἐμβαδό τοῦ μεγάλου κυκλικοῦ δίσκου νά ἀφαιρέσετε τό ἐμβαδό τοῦ μικροῦ. (Ε = 251,2 cm²).

26. Ἀπό τό ἐμβαδό τοῦ τετραγώνου νά ἀφαιρέσετε τό ἐμβαδό τοῦ κυκλικοῦ δίσκου. (Ε = 21,5 cm²).

27. Ἀπό τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τοῦ μεγάλου καί τοῦ μικροῦ ἡμικυκλικοῦ δίσκου νά ἀφαιρέσετε τό ἐμβαδό τοῦ μεσαίου (Ε = 37,68 cm²)

28. Νά βρεῖτε πρῶτα τή διάμετρο τοῦ κύκλου. (Ε = 132,665 cm²)

29. Εἶναι 56,52 cm² + 31,7925 cm² = 88,3125 cm².

30. $\widehat{(A)} = 100^\circ\ 30'$, $\widehat{(B)} = 91^\circ$, $\widehat{(\Gamma)} = 79^\circ\ 30'$, $\widehat{(\Delta)} = 89^\circ$.

31. Νά βρεῖτε πρῶτα τήν ἀκτίνα τοῦ κυκλικοῦ δίσκου. (Ε = 479,696 cm²).

32. Νά βρεῖτε πρῶτα τήν πλευρά τοῦ τετραγώνου καί κατόπι νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση. (Γ=35,526cm Ε = 100,48 cm²).

33. Νά βρεῖτε πόσα μέτρα διανύει ὁ κάθε ποδηλάτης σέ ἕνα λεπτό. (Μεγαλύτερη ταχύτητα ἔχει ὁ Α).

34. Ἀπό τό ἐμβαδό τοῦ κυκλικοῦ τομέα νά ἀφαιρέσετε τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου (Ε = 9,7581 cm²).

35. Νά φέρετε τή μεσοκάθετο τῆς χορδῆς. (Κατασκευάζονται δύο τρίγωνα).

36. Νά συγκρίνετε τίς γωνίες τους καί τούς λόγους τῶν ἀντίστοιχων πλευρῶν τους.

37. Ἀπό τό ἐμβαδό τοῦ τετραγώνου νά ἀφαιρέσετε τά ἐμβαδά τῶν τεσσάρων κυκλικῶν τομέων. (Ε = 30,96 cm²).

38. α) Ναί β) Ὄχι.

Πίνακας τῶν τετραγώνων
καί τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν ἀριθμῶν 1 μέχρι 100.

ΑΡΙΘΜΟΣ		
x	x^2	$\sqrt{x}$
1	1	1,000
2	4	1,414
3	9	1,732
4	16	2,000
5	25	2,236
6	36	2,450
7	49	2,646
8	64	2,828
9	81	3,000
10	100	3,162
11	121	3,317
12	144	3.464
13	169	3,606
14	196	3,742
15	225	3,873
16	256	4,000
17	289	4,123
18	324	4,243
19	361	4,359
20	400	4,472
21	441	4,583
22	484	4,690
23	529	4,796
24	576	4,899
25	625	5,000
26	676	5,099
27	729	5,196
28	784	5,292
29	841	5,385
30	900	5,477
31	961	5,568
32	1 024	5,657
33	1 089	5,745
34	1 156	5,831
35	1 225	5,916
36	1 296	6,000
37	1 369	6,083
38	1 444	6,164
39	1 521	6,245
40	1 600	6,325
41	1 681	6,403
42	1 761	6,481
43	1 849	6,507
44	1 936	6,633
45	2 025	6,708
46	2 116	6,782
47	2 209	6,856
48	2 304	6,928
49	2 401	7,000
50	2 500	7,071

ΑΡΙΘΜΟΣ		
x	x^2	$\sqrt{x}$
51	2 601	7,141
52	2 704	7,211
53	2 809	7,280
54	2 916	7,349
55	3 025	7,416
56	3 136	7,483
57	3 249	7,550
58	3 364	7,616
59	3 481	7,681
60	3 600	7,746
61	3 721	7,810
62	3 844	7,874
63	3 969	7,937
64	4 096	8,000
65	4 225	8,062
66	4 356	8,124
67	4 489	8,185
68	4 624	8,246
69	4 761	8,307
70	4 900	8,367
71	5 041	8,426
72	5 184	8,485
73	5 329	8,544
74	5 476	8,602
75	5 625	8,660
76	5 776	8,718
77	5 929	8,775
78	6 084	8,832
79	6 241	8,888
80	6 400	8,944
81	6 561	9,000
82	6 724	9,055
83	6 889	9,110
84	7 056	9,165
85	7 225	9,220
86	7 396	9,274
87	7 569	9,327
88	7 714	9,381
89	7 921	9,434
90	8 100	9,487
91	8 281	9,539
92	8 464	9,592
93	8 649	9,644
94	8 836	9,695
95	9 025	9,747
96	9 216	9,798
97	9 409	9,849
98	9 604	9,900
99	9 801	9,950
100	10 000	10,000

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΓΩΝΙΑ	ημ	συν	εφ	ΓΩΝΙΑ	ημ	συν	εφ
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.036
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.072
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.111
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.150
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.192
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0,7771	0,6293	1,235
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	7.7880	0.6157	1.280
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.327
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.376
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.428
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.483
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.540
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.600
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.664
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.732
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.804
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.881
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.963
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.050
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.145
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.246
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.356
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.475
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.605
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.747
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.904
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.078
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.271
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.487
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2586	3.732
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.011
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.332
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.705
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.145
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.671
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.314
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.115
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.144
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.514
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.43
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.30
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.08
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.64
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.29
45°	0.7071	0.7071	1.000				

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ [1]

1. Οἱ ἀριθμοί ἀναφέρονται σέ σελίδα τοῦ βιβλίου

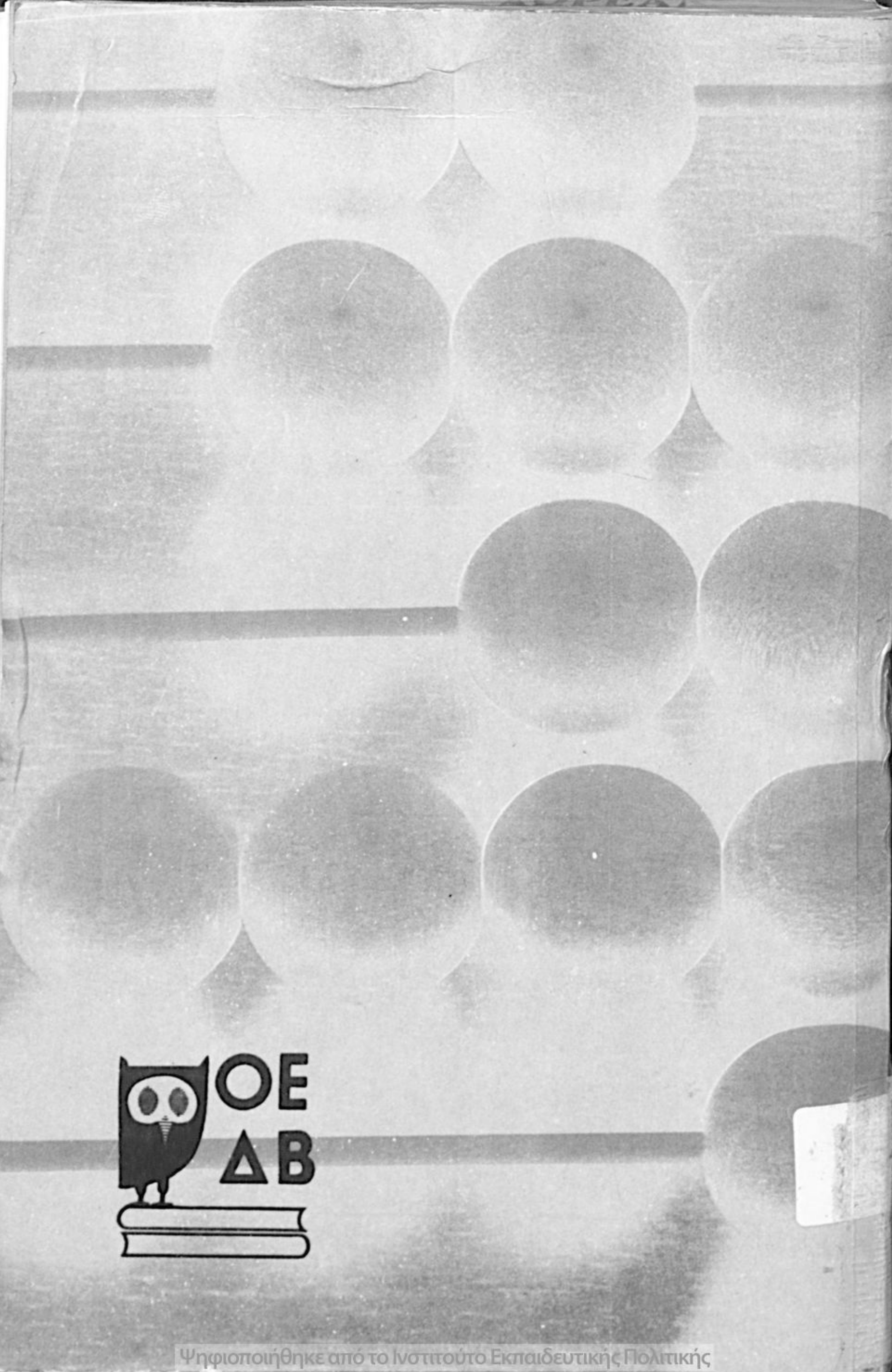
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Τά ἀντίτυπα τοῦ βιβλίου φέρουν τό κάτωθι βιβλιόσημο γιά ἀπόδειξη τῆς γνησιότητας αὐτῶν.

Ἀντίτυπο στερούμενο τοῦ βιλιοσήμου τούτου θεωρεῖται κλεψίτυπο. Ὁ διαθέτων, πωλῶν ἤ χρησιμοποιῶν αὐτό διώκεται κατά τίς διατάξεις τοῦ ἄρθρου 7 τοῦ Νόμου 1129 τῆς 15/21 Μαρτίου 1946 (Ἐφ. Κυβ. 1946, Α΄ 108).

ΕΚΔΟΣΗ Δ΄ 1981 (IV) ΑΝΤΙΤΥΠΑ 165.000 - ΣΥΜΒΑΣΗ 3591/14-4-81

ΕΚΤΥΠΩΣΗ: ΚΕΡΚΥΡΑΪΚΗ ΛΙΘΟΓΡΑΦΙΑ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: Δ. ΚΑΤΣΑΒΡΙΑΣ & ΣΙΑ Ο.Ε


ΟΕ
ΔΒ