ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤ'

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΤ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ε. ΠΑΠΑΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1970

Δ 2 ΜΜΙ

Μαστρογιαννοπούλου (Ε.)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΤ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

Παπατριανταφύλλου (Ε.)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΤ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ε. ΠΑΠΑΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ

ΕΛΛΑΣ

21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1970

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Ὁρισμοὶ — βασικαὶ ἔννοιαι

1.1. Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀλγέβρας τὸν ὁρισμὸν μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως ὡς πρὸς χ, $A(\chi)=B(\chi)$, ὅπου A καὶ B εἶναι συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς (ἀγνώστου) χ. Ἐὰν ἓν τοὐλάχιστον τῶν μελῶν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως, περιέχῃ τὴν τιμὴν μιᾶς ἢ περισσοτέρων τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων [1] εἰς τὴν θέσιν $\varphi(\chi)$, ὅπου φ τυχοῦσα συνάρτησις τῆς αὐτῆς πραγματικῆς μεταβλητῆς χ, τότε ἡ ἐξίσωσις αὕτη καλεῖται **τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις** ὡς πρὸς χ. Π.χ. αἱ ἐξισώσεις:

$$\eta\mu^2\chi+\sigma\upsilon\nu\chi=2, \quad \sigma\upsilon\nu 5\chi=-\frac{1}{2}, \quad \varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu\chi)=\sigma\varphi(\eta\mu\chi), \tag{1}$$

$$\varepsilon\varphi\chi=\chi, \quad \eta\mu^2\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi=1 \tag{2}$$

εἶναι τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις.

Κάθε τόξον χ_0, τὸ ὁποῖον ἐπαληθεύει μίαν τριγωνομετρικὴν ἐξίσωσιν, ἤτοι καθιστᾷ ταύτην ἰσότητα, καλεῖται **μερικὴ λύσις** αὐτῆς (π.χ. τὸ τόξον $\chi_0=\dfrac{2\pi}{15}$ εἶναι μία μερικὴ λύσις τῆς δευτέρας ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1)). Τὸ σύνολον τῶν μερικῶν λύσεων μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως καλεῖται **γενικὴ λύσις** ἢ ἁπλῶς **λύσις**, ἡ δὲ εὕρεσις τῆς γενικῆς λύσεως καλεῖται **ἐπίλυσις** τῆς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως.

Ἐὰν κάθε τόξον χ εἶναι λύσις (μερικὴ) μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως,

---

[1] Λέγοντες «τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις», ἐννοοῦμεν ἐνταῦθα, ἐκτὸς τῶν συναρτήσεων ημ, συν, εφ, σφ καὶ τὰς ἀντιστρόφους αὐτῶν, ὡς ὁρίζονται εἰς τὸ Κεφ. V. Ἐπίσης, ὑπενθυμίζομεν ὅτι οἱ γνωστοὶ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ημχ, συνχ, εφχ καὶ σφχ εἶναι ἀκριβῶς αἱ τιμαὶ τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων ημ, συν, εφ καὶ σφ ἀντιστοίχως εἰς τὸ σημεῖον $\chi\in R$.

Ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ (ἤ, ὡς ἄλλως λέγομεν εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν, τὸ τόξον) τῶν τοιούτων συναρτήσεων, εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός. Ἐφ' ἑξῆς δέ, πάντα τὰ χρησιμοποιούμενα τόξα θὰ θεωροῦνται ὅτι ἔχουν μετρηθῆ μὲ μονάδα τὸ ἀκτίνιον.

τότε ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι τριγωνομετρικὴ **ταυτότης** (π.χ. ἡ τελευταία ἐκ τῶν (2)).

Εἶναι δυνατὸν ἐπίσης, οὐδὲν τόξον νὰ ἐπαληθεύῃ μίαν τριγωνομετρικὴν ἐξίσωσιν, ὁπότε αὕτη καλεῖται **ἀδύνατος** (π.χ. ἡ ἐξίσωσις ημχ = 2).

Ἡ ἐπίλυσις οἱασδήποτε τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως στηρίζεται ἐπὶ τεσσάρων βασικῶν θεωρημάτων, τὰ ὁποῖα διατυποῦνται συντόμως ὑπὸ τῶν κάτωθι ἰσοδυναμιῶν:

$$\text{(I)}\ \eta\mu\chi = \eta\mu\psi \iff \chi = \rho\pi + (-1)^{\rho}\psi \iff \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \psi \ \text{ἤ} \\ \chi = (2\kappa+1)\pi - \psi \end{cases} (\kappa, \rho \in Z)$$

$$\text{(II)}\ \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\psi \iff \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \psi \ \text{ἤ} \\ \chi = 2\kappa\pi - \psi \end{cases} (\kappa \in Z)$$

$$\text{(III)}\ \varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi\psi \iff \chi = \kappa\pi + \psi \quad (\kappa \in Z)$$

$$\text{(IV)}\ \sigma\varphi\chi = \sigma\varphi\psi \iff \chi = \kappa\pi + \psi \quad (\kappa \in Z)$$

Ἐπιλύομεν καὶ διερευνῶμεν κατωτέρω ὡρισμένας κλασσικὰς μορφὰς τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων, εἰς τὰς ὁποίας ἀνάγεται, ἐν γένει, κάθε ἄλλη τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις.

2. Θεμελιώδεις τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις

2.1. ημχ = α(α∈R). Πρὸς ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως ταύτης, παρατηροῦμεν, ὅτι:

α) Ἐὰν $|\alpha| > 1$ ($\iff \alpha > 1$ ἢ $\alpha < -1$), ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος, διότι $|\eta\mu\chi| \leq 1$ διὰ κάθε $\chi \in R$.

β) Ἐὰν $|\alpha| \leq 1$ ($\iff -1 \leq \alpha \leq 1$), τότε ἡ ἐξίσωσις ἔχει λύσιν, τὴν ὁποίαν προσδιορίζομεν ὡς ἑξῆς:

β_1) Ἐὰν $0 \leq \alpha \leq 1$, τότε ὑπάρχει τόξον φ (εὑρισκόμενον διὰ τῶν πινάκων) μὲ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ καὶ τοιοῦτον, ὥστε ημφ = α, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις γράφεται:

$$\eta\mu\chi = \eta\mu\varphi \tag{1}$$

Προφανῶς τὸ φ εἶναι μία μερικὴ λύσις τῆς (1). Ἐν συνεχείᾳ, χρησιμοποιοῦντες τὴν ἀνωτέρω ἰσοδυναμίαν (I), εὑρίσκομεν τὴν γενικὴν λύσιν τῆς (1), ἡ ὁποία εἶναι:

$$\chi = \kappa\pi + (-1)^{\kappa}\varphi(\kappa \in Z) \iff \begin{cases} \chi = 2\lambda\pi + \varphi \\ \chi = (2\rho+1)\pi - \varphi \end{cases} (\lambda, \rho \in Z) \tag{2}$$

Παρατηροῦμεν, μέσω τοῦ τύπου (2), ὅτι εἰς κάθε τιμὴν τοῦ ἀκεραίου κ ἀντιστοιχεῖ καὶ μία λύσις (μερικὴ) τῆς ἐξισώσεως (1). Ἐπὶ παραδείγματι, διὰ κ = 0, εὑρίσκομεν τὴν μερικὴν λύσιν χ = φ.

β_2) Ἐὰν $-1 \leq \alpha < 0$, τότε μετασχηματίζομεν ἰσοδυνάμως τὴν πρὸς ἐπίλυσιν ἐξίσωσιν, ὡς κάτωθι:

$$\eta\mu\chi = \alpha \iff -\eta\mu\chi = -\alpha \iff \eta\mu(-\chi) = -\alpha$$

Εἰς τὴν τελευταίαν ὅμως ἐξίσωσιν εἶναι $0 < -\alpha \leq 1$ καὶ συνεπῶς, ἐὰν θεωρήσωμεν ἄγνωστον τόξον τὸ $-\chi$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι τῆς προηγουμένης μορφῆς (περίπτωσις β_1) καὶ ἐπιλύεται ἀναλόγως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\eta\mu 3\chi = -\frac{1}{2}$ καὶ νὰ εὑρεθῇ ἐκ τῶν μερικῶν λύσεων αὐτῆς, ἡ ἐλαχίστη θετική.

Ἐπίλυσις: Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται: $\eta\mu 3\chi = \eta\mu(-\frac{\pi}{6})$. Ἡ γενικὴ λύσις αὐτῆς δίδεται ὑπὸ τῶν τύπων:

$$\left.\begin{array}{l} 3\chi_\kappa = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \quad (\kappa \in Z) \\ 3\chi_\rho = (2\rho+1)\pi + \frac{\pi}{6} \quad (\rho \in Z) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \chi_\kappa = \frac{2\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{18} \quad (\kappa \in Z) & (1) \\ \chi_\rho = \frac{2\rho\pi}{3} + \frac{7\pi}{18} \quad (\rho \in Z) & (2) \end{array}\right.$$

Ἐξετάζομεν κατ' ἀρχήν, ποῖαι ἐκ τῶν εὑρεθεισῶν λύσεων εἶναι θετικαί. Ἵνα αἱ λύσεις εἶναι θετικαί, πρέπει καὶ ἀρκεῖ:

$$\left\{ \frac{2\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{18} > 0 \text{ καὶ } \frac{2\rho\pi}{3} + \frac{7\pi}{18} > 0 \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \kappa > \frac{1}{12} \text{ καὶ } \rho > -\frac{7}{12} \right\}$$

Ἄρα, διὰ $\kappa = 1,2,3,\ldots$ καὶ $\rho = 0,1,2,\ldots$, λαμβάνομεν, ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἀντιστοίχως, θετικὰς λύσεις. Ἐπὶ πλέον παρατηροῦμεν, ὅτι:

$$\chi_{\kappa+1} > \chi_\kappa \text{ καὶ } \chi_{\rho+1} > \chi_\rho, \ \forall \ \kappa,\rho \in Z.$$

Ὅθεν, αἱ (1) καὶ (2) εἶναι αὔξουσαι συναρτήσεις ὡς πρὸς κ καὶ ρ ἀντιστοίχως. Συνεπῶς, ἐκ τῶν μερικῶν λύσεων (1), ἡ ἐλαχίστη θετικὴ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν $\kappa = 1$ καὶ εἶναι $\chi_1 = \frac{11\pi}{18}$.

Ὁμοίως, διὰ $\rho = 0$, εὑρίσκομεν τὴν ἐλαχίστην θετικὴν λύσιν ἐκ τῶν μερικῶν λύσεων (2), ἡ ὁποία εἶναι $\chi_0 = \frac{7\pi}{18}$. Ἄρα, ἡ ἐλαχίστη θετικὴ λύσις εἶναι $\frac{7\pi}{18}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\eta\mu\frac{3\chi}{2} = -\frac{1}{2}$.

Ἐπίλυσις: Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $\eta\mu\left(\frac{-3\chi}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Ἐπίσης, εἶναι γνωστόν, ὅτι $\eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ καὶ συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις γράφεται:

$\eta\mu\left(\frac{-3\chi}{2}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6}$. Ἡ γενικὴ λύσις αὐτῆς εἶναι:

$$-\frac{3\chi}{2} = \kappa\pi + (-1)^\kappa \frac{\pi}{6} \quad (\kappa \in Z) \qquad (1)$$

'Εκ τῆς (1), λύοντες ἀλγεβρικῶς ὡς πρὸς χ, εὑρίσκομεν:

$$\chi = -\frac{2\kappa\pi}{3} + (-1)^{\kappa}\left(-\frac{\pi}{9}\right) \quad (\kappa\in Z) \iff \tag{2}$$

$$\chi = \frac{2\kappa\pi}{3} - (-1)^{\kappa}\frac{\pi}{9} \quad (\kappa\in Z). \tag{3}$$

Παρατήρησις. Εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (2) ἐτέθη κ ἀντὶ -κ, διότι, ἐὰν τὸ κ λαμβάνη ὅλας τὰς ἀκεραίας τιμάς, τότε καὶ τὸ -κ λαμβάνει ὅλας τὰς ἀκεραίας τιμὰς καὶ $(-1)^{\kappa} = (-1)^{-\kappa}$, ἄρα ὁ προκύπτων τύπος (3) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν (2).

2.2. $\sigma\upsilon\nu\chi = \lambda$ ($\lambda\in\mathbf{R}$). Ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην θεμελιώδους μορφῆς τριγωνομετρικὴν ἐξίσωσιν, διακρίνομεν καὶ ἐν προκειμένῳ τὰς κάτωθι περιπτώσεις ὡς πρὸς τὴν παράμετρον λ:

α) Ἐὰν $|\lambda| > 1$, τότε ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος.

β) Ἐὰν $0 \leq \lambda \leq 1$, τότε ὑπάρχει τόξον φ μὲ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ καὶ τοιοῦτον, ὥστε $\sigma\upsilon\nu\varphi = \lambda$, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις γράφεται:

$$\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\varphi. \tag{1}$$

Ἡ γενικὴ λύσις τῆς (1), βάσει τῆς ἰσοδυναμίας (ΙΙ), εἶναι: $\chi = 2\kappa\pi \pm \varphi$ ($\kappa\in Z$).

γ) Ἐὰν $-1 \leq \lambda < 0$, τότε μετασχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς ἑξῆς:

$$\sigma\upsilon\nu\chi = \lambda \iff -\sigma\upsilon\nu\chi = -\lambda \iff \sigma\upsilon\nu(\pi-\chi) = -\lambda$$

Ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν τὴν ἐξίσωσιν $\sigma\upsilon\nu(\pi-\chi) = -\lambda$ μὲ $0 < -\lambda \leq 1$ καὶ ἄγνωστον τόξον τὸ $\pi-\chi$ καὶ συνεπῶς μεταπίπτομεν εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν (β).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\sigma\upsilon\nu 3\chi = \frac{1}{4}$.

Ἐπίλυσις: Εὑρίσκομεν ἐκ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τὸ ἐλάχιστον θετικὸν τόξον τ τοιοῦτον, ὥστε $\sigma\upsilon\nu\tau = \frac{1}{4}$. Πρὸς τοῦτο, λογαριθμίζομεν τὴν τελευταίαν ἰσότητα καὶ ἔχομεν:

$$\lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\tau = \lambda o\gamma\frac{1}{4} \Rightarrow \lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\tau = -\lambda o\gamma 4 \Rightarrow \lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\tau = \bar{1},39794 \Rightarrow \tau = 75^{\circ}31'21''$$

Συνεπῶς, ἡ γενικὴ λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι:

$$3\chi = 360^{\circ}\kappa \pm 75^{\circ}31'21'' \iff \chi = 120^{\circ}\kappa \pm 25^{\circ}10'27'' \quad (\kappa\in Z)$$

2.3. $\varepsilon\varphi\chi = \lambda$ ($\lambda\in\mathbf{R}$). Ἐὰν $\lambda \geq 0$, εὑρίσκομεν ἐκ τῶν πινάκων τόξον ω μὲ $\varepsilon\varphi\omega = \lambda$ καὶ συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις γράφεται:

$$\varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi\omega \tag{1}$$

Ἡ γενικὴ λύσις τῆς (1), βάσει τοῦ τύπου (ΙΙΙ), εἶναι: $\chi = \kappa\pi + \omega$ ($\kappa\in Z$).

Ἐὰν $\lambda < 0$, τότε διαμορφώνομεν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ὡς ἑξῆς:

$$\varepsilon\varphi\chi = \lambda \iff -\varepsilon\varphi\chi = -\lambda \iff \varepsilon\varphi(-\chi) = -\lambda \quad (-\lambda > 0).$$

Οὕτω, ἡ πρὸς ἐπίλυσιν ἐξίσωσις $εφ(-χ) = -λ$ εἶναι τῆς προηγουμένης μορφῆς, μὲ ἄγνωστον τόξον τὸ $-χ$.
Καθ' ὅμοιον ἀκριβῶς τρόπον ἐπιλύεται καὶ ἡ ἑπομένη θεμελιώδης τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις:

2.4. $σφχ = α$ $(α \in R)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐντὸς τοῦ ἀνοικτοῦ διαστήματος $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ τόξα, τὰ ἐπαληθεύοντα τὴν ἐξίσωσιν $εφ2χ = \sqrt{3}$.

Λύσις: Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $εφ2χ = εφ\frac{\pi}{3}$. Ἡ γενικὴ λύσις αὐτῆς εἶναι:

$$2χ = κ\pi + \frac{\pi}{3} \iff χ = \frac{κ\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \quad (κ \in Z).$$

Ἐξ ὑποθέσεως ὅμως ἔχομεν:

$$0 < χ < \frac{3\pi}{4} \iff 0 < \frac{κ\pi}{2} + \frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{4} \iff -\frac{\pi}{6} < \frac{κ\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \iff -\frac{1}{3} < κ < \frac{7}{6}$$

Αἱ μόναι ἀκέραιαι τιμαὶ τοῦ κ ἐντὸς τοῦ διαστήματος $\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{6}\right)$ εἶναι 0 καὶ 1. Ἐν συνεχείᾳ, θέτοντες τὰς ἀκεραίας αὐτὰς τιμὰς τοῦ κ εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν γενικὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως, εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως δύο τόξα, $χ_1 = \frac{\pi}{6}$ καὶ $χ_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$, τὰ ὁποῖα εἶναι καὶ τὰ ζητούμενα.

Ἀναφέρομεν κατωτέρω ὡρισμένας θεμελιώδεις τριγωνομετρικὰς ἐξισώσεις καὶ τὰς λύσεις αὐτῶν:

$$ημχ = 0 \iff χ = κ\pi \qquad συνχ = 0 \iff χ = κ\pi + \frac{\pi}{2}$$
$$ημχ = 1 \iff χ = 2κ\pi + \frac{\pi}{2} \qquad συνχ = 1 \iff χ = 2κ\pi$$
$$ημχ = -1 \iff χ = 2κ\pi - \frac{\pi}{2} \qquad συνχ = -1 \iff χ = (2κ+1)\pi$$
$$εφχ = 0 \iff χ = κ\pi \qquad σφχ = 0 \iff χ = κ\pi + \frac{\pi}{2}$$

(Εἰς ὅλας τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις εἶναι $κ \in Z$).

3. Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις ἀναγόμεναι εἰς θεμελιώδεις

3.1. Τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $f(t) = 0$, ἔνθα t τριγωνομετρικὸς ἀριθμὸς τοῦ τόξου χ καὶ $f(t)$ ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς t.

Πρὸς ἐπίλυσιν μιᾶς τοιαύτης ἐξισώσεως ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐπιλύομεν τὴν ὡς πρὸς t ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν $f(t) = 0$ καὶ ἔστωσαν $t_1, t_2, .., t_ν$ αἱ ρίζαι αὐτῆς. Τότε, ἡ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις $f(t)=0$ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὰς κάτωθι θεμελιώδεις τριγωνομετρικὰς ἐξισώσεις:

$$t=t_1,\ t=t_2,\dots,\ t=t_\nu,$$

αἱ ὁποῖαι ἐπιλύονται εὐκόλως καὶ αἱ λύσεις αὐτῶν εἶναι ἡ γενικὴ λύσις τῆς $f(t)=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\eta\mu^3\chi+2\eta\mu^2\chi-\eta\mu\chi-2=0$.

Λύσις : Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἰσοδυνάμως γράφεται:

$$(\eta\mu^3\chi-\eta\mu\chi)+2(\eta\mu^2\chi-1)=0 \iff \eta\mu\chi(\eta\mu^2\chi-1)+2(\eta\mu^2\chi-1)=0 \iff$$

$$\iff (\eta\mu\chi+2)(\eta\mu\chi-1)(\eta\mu\chi+1)=0 \iff \begin{cases}\eta\mu\chi=-2 & (\alpha)\\ \eta\mu\chi=\ \ 1 & (\beta)\\ \eta\mu\chi=-1 & (\gamma)\end{cases}$$

Ἡ ἐξίσωσις (α) εἶναι ἀδύνατος, αἱ λύσεις τῶν (β) καὶ (γ) εἶναι ἀντιστοίχως $\chi=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ καὶ $\chi=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}$ $(\kappa\in Z)$.

Παρατήρησις. Ἡ διερεύνησις μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως $f(t)=0$, τῆς προηγουμένης μορφῆς, ἀνάγεται ἐν γένει εἰς τὴν διερεύνησιν τῆς ἀντιστοίχου ὡς πρὸς t ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως $f(t)=0$, λαμβανομένων ἐπὶ πλέον ὑπ' ὄψιν τῶν ὁρίων μεταβολῆς τοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ t.

Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\alpha\varepsilon\varphi^2\chi+\beta\varepsilon\varphi\chi+\gamma=0$ $(\alpha\neq0)$ ἢ $\alpha\sigma\varphi^2\chi+\beta\sigma\varphi\chi+\gamma=0$ $(\alpha\neq0)$ ἔχει πάντοτε λύσιν, ἐφ' ὅσον $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma\geqslant0$, ὅπου Δ ἡ διακρίνουσα τῆς δευτεροβαθμίου (ὡς πρὸς t) ἐξισώσεως $\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$. Ἡ διερεύνησις τῆς $\alpha\eta\mu^2\chi+\beta\eta\mu\chi+\gamma=0$ $(\alpha\neq0)$ ἢ $\alpha\sigma\upsilon\nu^2\chi+\beta\sigma\upsilon\nu\chi+\gamma=0$ $(\alpha\neq0)$ ἀνάγεται εἰς τὴν διερεύνησιν τῆς ἀντιστοίχου ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως $\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$ μὲ $-1\leq t\leq1$ (διότι ἐτέθη $\eta\mu\chi=t$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\chi=t$).

Πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τῆς ἀνωτέρω παρατηρήσεως ἀναφέρομεν τὰ ἑπόμενα δύο παραδείγματα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\alpha\eta\mu^2\chi+\beta\eta\mu\chi+\gamma=0,\ \alpha\neq0.$ (1)

Ἐπίλυσις : Θέτοντες $\eta\mu\chi=t$, ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν τὴν ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν

$$f(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma=0 \quad (-1\leq t\leq1). \tag{2}$$

Ἔστωσαν t_1 καὶ t_2 αἱ ρίζαι αὐτῆς. Διὰ νὰ εἶναι αἱ ρίζαι αὗται δεκταί, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εὑρίσκωνται ἐντὸς τοῦ κλειστοῦ διαστήματος $[-1,+1]$. Ἐνδιαφερόμεθα ὅμως, νὰ εὕρωμεν ὑπὸ ποίας ἀναγκαίας καὶ ἱκανὰς συνθήκας μεταξὺ τῶν α, β καὶ γ συμβαίνει τοῦτο. Σχετικῶς διακρίνομεν τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις.

1) Ἡ ἐξίσωσις (2) ἔχει **μίαν μόνον δεκτὴν ρίζαν** εἰς τὰς ἑξῆς περιπτώσεις:

1_α) Μία καὶ μόνον ρίζα τῆς (2) εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἀνοικτοῦ διαστήματος $(-1,+1)$. Πρὸς τοῦτο, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι:

$$f(+1)f(-1)<0 \iff \boldsymbol{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)<0}\ .$$

1_β) Ἡ μία ρίζα εἶναι τὸ -1 καὶ ἡ ἄλλη κεῖται ἐκτὸς τοῦ διαστήματος $[-1, +1]$. Τοῦτο ἰσχύει, ὅταν καὶ μόνον ὅταν:

$$\left(f(-1)=0, \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|>1\right) \Longleftrightarrow \left(\boldsymbol{\alpha-\beta+\gamma=0}, \left|\frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\alpha}}\right|>\mathbf{1}\right)$$

Διότι, ἐὰν $t_1=-1$, τότε, ἐπειδὴ καὶ $t_1t_2=\frac{\gamma}{\alpha}$, συνάγεται $t_2=-\frac{\gamma}{\alpha}$. Συνεπῶς, ἡ ρίζα $t_2=-\frac{\gamma}{\alpha}$ εἶναι ἐκτὸς τοῦ διαστήματος $[-1,+1]$, ἐφ' ὅσον $\left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|>1$.

1_γ) Ἡ μία ρίζα εἶναι τὸ 1 καὶ ἡ ἄλλη κεῖται ἐκτὸς τοῦ διαστήματος $[-1,+1]$. Πρὸς τοῦτο, πρέπει νὰ ἀρκεῖ νὰ εἶναι:

$$\left(f(+1)=0, \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|>1\right) \Longleftrightarrow \left(\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=0}, \left|\frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\alpha}}\right|>\mathbf{1}\right)$$

2) Ἡ ἐξίσωσις (2) ἔχει **δύο δεκτὰς ρίζας** εἰς τὰς ἑξῆς περιπτώσεις:

2_α) Αἱ δύο ρίζαι τῆς (2) εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ διαστήματος $[-1,+1]$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ ἀναγκαῖαι καὶ ἱκαναὶ συνθῆκαι εἶναι:

$$\left((\Delta>0, \ \alpha f(-1)\geqq 0, \ \alpha f(+1)\geqq 0, \ -1+\frac{\beta}{2\alpha}<0, \ 1+\frac{\beta}{2\alpha}>0\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma>0, \ \alpha(\alpha-\beta+\gamma)\geqq 0, \ \alpha(\alpha+\beta+\gamma)\geqq 0, \ -1+\frac{\beta}{2\alpha}<0, \ 1+\frac{\beta}{2\alpha}>0}\right)$$

2_β) Ἡ ἐξίσωσις (2) ἔχει διπλῆν ρίζαν ἐντὸς τοῦ διαστήματος $[-1,+1]$. Πρὸς τοῦτο, πρέπει καὶ ἀρκεῖ:

$$\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma=0} \ \textbf{καὶ} \ \boldsymbol{-1\leq-\frac{\beta}{2\alpha}\leq+1}$$

3) Ἡ ἐξίσωσις (2) **οὐδεμίαν ἔχει λύσιν** εἰς τὰς ἑξῆς περιπτώσεις:

3_α) Αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι μιγαδικαὶ $\Longleftrightarrow \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0$.

3_β) Αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι πραγματικαὶ καὶ κεῖνται ἐκτὸς τοῦ διαστήματος $[-1,+1]$. Αἱ ἀναγκαῖαι καὶ ἱκαναὶ συνθῆκαι πρὸς τοῦτο, εἶναι:

$$[\alpha f(-1)<0, \ \alpha f(+1)<0] \Longleftrightarrow [\alpha(\alpha-\beta+\gamma)<0, \ \alpha(\alpha+\beta+\gamma)<0] \ \text{ἢ}$$

$$\left(\Delta\geqq 0, \alpha f(+1)>0, 1+\frac{\beta}{2\alpha}<0\right) \Longleftrightarrow \left(\beta^2-4\alpha\gamma\geqq 0, \alpha(\alpha+\beta+\gamma)>0, \ 1+\frac{\beta}{2\alpha}<0\right)$$

ἢ

$$\left(\Delta\geqq 0, \alpha f(-1)>0, -1+\frac{\beta}{2\alpha}>0\right) \Longleftrightarrow \left(\beta^2-4\alpha\gamma\geqq 0, \alpha(\alpha-\beta+\gamma)>0, -1+\frac{\beta}{2\alpha}>0\right)$$

Καθ' ὅμοιον ἀκριβῶς τρόπον ἐπιλύεται καὶ διερευνᾶται ἡ ἐξίσωσις

$$\alpha\text{συν}\chi^2+\beta\text{συν}\chi+\gamma=0 \quad (\alpha\neq 0).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ $\lambda\in R$ ἡ ἐξίσωσις $\text{εφ}\chi^2+\lambda\text{εφ}\chi+1=0$ ἔχει μίαν μόνον λύσιν, πληροῦσαν τὴν σχέσιν $0<\chi<\frac{\pi}{4}$.

Λύσις: Ἐκ τῆς δεδομένης σχέσεως: $0<\chi<\frac{\pi}{4}$ συνάγεται $\text{εφ}0<\text{εφ}\chi<\text{εφ}\frac{\pi}{4}$ καὶ συνεπῶς $0 < \text{εφ}\chi < 1$. Θέτομεν $\text{εφ}\chi = t$ καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται:

$$\varphi(t) = t^2 + \lambda t + 1 = 0 \text{ μὲ } 0 < t < 1. \quad (1)$$

Ἀπαιτοῦμεν ἡ ἐξίσωσις (1) νὰ ἔχῃ μίαν μόνον δεκτὴν ρίζαν, ἤτοι, μίαν μόνον ρίζαν ἐντὸς τοῦ διαστήματος $(0, +1)$. Πρὸς τοῦτο, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι:

$$\varphi(0)\varphi(1) < 0 \iff 1\cdot(\lambda+2) < 0 \iff \lambda < -2.$$

Ἄρα, διὰ $\lambda < -2$, ἡ ἐξίσωσις $\text{εφ}^2\chi + \lambda\text{εφ}\chi + 1 = 0$ ἔχει μίαν μόνον λύσιν ἐντὸς τοῦ διαστήματος $(0, \frac{\pi}{4})$.

3.2. Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις μὲ περισσότερα τοῦ ἑνὸς ἄγνωστα τόξα. Θεωροῦντες ἀλγεβρικὰς ἐξισώσεις περισσοτέρων τοῦ ἑνὸς ἀγνώστων, εἶναι δυνατόν, νὰ ἐπεκτείνωμεν τὸν ὁρισμὸν τῆς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως 1.1 καὶ εἰς τριγωνομετρικὰς ἐξισώσεις περισσοτέρων τοῦ ἑνὸς ἀγνώστων τόξων. Π.χ. αἱ ἐξισώσεις

$$\text{ημ}(\chi+\psi) + \text{ημ}(\chi-\psi) = 2, \quad \text{εφ}2\chi = \text{εφ}\psi, \quad \text{συν}3\chi = \text{ημ}(\psi + \frac{\pi}{4})$$

εἶναι τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις δύο ἀγνώστων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\text{ημ}\psi = \text{συν}2\chi$ (Ε).

Ἐπίλυσις: Αὕτη γράφεται $\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \text{συν}2\chi$ καὶ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὰς κάτωθι δύο οἰκογενείας ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \psi &= 2\kappa\pi + 2\chi, \ \kappa\in Z \\ \frac{\pi}{2} - \psi &= 2\kappa\pi - 2\chi, \ \kappa\in Z \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} \psi &= \frac{\pi}{2} - 2\chi - 2\kappa\pi \quad (1) \\ \psi &= \frac{\pi}{2} + 2\chi - 2\kappa\pi \quad (2) \end{aligned}\right. \quad (\kappa\in Z)$$

Ὥστε, ἡ γενικὴ λύσις τῆς (Ε) εἶναι:

$$\{(\chi,\psi)\in R\times R : \chi\in R, \psi = \frac{\pi}{2} - 2\chi - 2\kappa\pi, \ \kappa\in Z\} \cup$$

$$\{(\chi,\psi)\in R\times R : \chi\in R, \psi = \frac{\pi}{2} + 2\chi - 2\kappa\pi, \ \kappa\in Z\}$$

Ἡ (1) παριστᾶ εἰς ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων μίαν **οἰκογένειαν** παραλλήλων εὐθειῶν, ὅταν ὁ κ διατρέχῃ τὸ Ζ. Ὁμοίως καὶ ἡ (2) παριστᾶ μίαν **οἰκογένειαν** παραλλήλων εὐθειῶν (νὰ γίνῃ γραφικὴ παράστασις τῶν δύο τούτων οἰκογενειῶν παραλλήλων εὐθειῶν).

3.3. Ὁμογενὴς τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ημχ καὶ συνχ. Οὕτω καλεῖται πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\varphi(\text{ημ}\chi, \text{συν}\chi) = 0$, ὅπου τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς εἶναι ἀκέραιον ὁμογενὲς πολυώνυμον ὡς πρὸς ημχ καὶ συνχ. Π.χ. αἱ ἐξισώσεις:

$\eta\mu^2\chi + 3\sigma\upsilon\nu^2\chi - 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = 0, \qquad \eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^3\chi + \eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu\chi - 3\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi = 0$
εἶναι ὁμογενεῖς τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις.

Πρὸς ἐπίλυσιν μιᾶς τοιαύτης ἐξισώσεως, διαιροῦμεν ἐν γένει (ἐφ' ὅσον τοῦτο εἶναι δυνατόν, δηλαδὴ $\chi \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$) ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς μὲ $\sigma\upsilon\nu^\kappa\chi$, ὅπου κ ὁ βαθμὸς ὁμογενείας, ὁπότε προκύπτει ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις ὡς πρὸς εφχ καὶ συνεπῶς μεταπίπτομεν εἰς τὴν προηγουμένην κατηγορίαν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων. Δηλαδή, ἐὰν ἡ ὁμογενὴς τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις $\varphi(\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi) = 0$ ἔχει βαθμὸν ὁμογενείας $\kappa \in N$, τότε αὕτη γράφεται $\sigma\upsilon\nu^\kappa\chi\, f(\varepsilon\varphi\chi) = 0$, $(\sigma\upsilon\nu\chi \neq 0)$, ὁπότε ἔχομεν νὰ ἐπιλύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $f(\varepsilon\varphi\chi) = 0$, ὅπου $f(\varepsilon\varphi\chi)$ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς εφχ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\eta\mu^2\chi - (1+\sqrt{3})\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu^2\chi = 0$

Ἐπίλυσις: Ἐὰν $\sigma\upsilon\nu\,\chi = 0$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δίδει $\eta\mu\,\chi = 0$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον[1]. Ἄρα, ὑποθέτοντες $\sigma\upsilon\nu\chi \neq 0$ καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) μὲ $\sigma\upsilon\nu^2\chi$, λαμβάνομεν $\varepsilon\varphi^2\chi - (1+\sqrt{3})\,\varepsilon\varphi\chi + \sqrt{3} = 0$. Αἱ ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου (ὡς πρὸς εφχ) αὐτῆς ἐξισώσεως εἶναι 1 καὶ 3 καὶ συνεπῶς ἔχομεν:

$$(1) \iff \begin{cases} \varepsilon\varphi\chi = 1 & (2) \\ \varepsilon\varphi\chi = \sqrt{3} & (3) \end{cases}$$

Ἡ γενικὴ λύσις τῆς (2) εἶναι $\{\chi \in R : \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{4},\ \kappa \in Z\}$, ἡ δὲ γενικὴ λύσις τῆς (3) εἶναι $\{\chi \in R : \chi = \rho\pi + \frac{\pi}{3},\ \rho \in Z\}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\alpha\eta\mu^2\chi + \beta\sigma\upsilon\nu^2\chi + \gamma\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = \delta$

Ἐπίλυσις: Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται: $\alpha\,\eta\mu^2\chi + \beta\,\sigma\upsilon\nu^2\chi + \gamma\,\eta\mu\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi = \delta(\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi)$ καὶ ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν:

$$(\alpha-\delta)\eta\mu^2\chi + (\beta-\delta)\sigma\upsilon\nu^2\chi + \gamma\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = 0 \qquad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι μία δευτεροβάθμιος ὁμογενὴς τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις. Πρὸς ἐπίλυσιν ταύτης διακρίνομεν τὰς κάτωθι περιπτώσεις:

1) Ἐὰν $\alpha \neq \delta$, τότε $\sigma\upsilon\nu\chi \neq 0$, διότι, ἐὰν $\sigma\upsilon\nu\chi = 0$, ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται $(\alpha-\delta)\eta\mu^2\chi = 0$ καὶ ἐπειδὴ $\alpha - \delta \neq 0$, προκύπτει $\eta\mu\chi = 0$, ὅπερ ἄτοπον.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) μὲ $\sigma\upsilon\nu^2\chi$ καὶ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$(\alpha-\delta)\varepsilon\varphi^2\chi + \gamma\varepsilon\varphi\chi + \beta - \delta = 0, \qquad (2)$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀλγεβρικὴ ὡς πρὸς εφχ καὶ ἔχει λύσιν, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν, $\gamma^2 - 4(\alpha-\delta)(\beta-\delta) \geq 0$.

---

[1] Τοῦτο σημαίνει, ὅτι αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\sigma\upsilon\nu\chi = 0$ δὲν εἶναι λύσεις τῆς (1) καὶ συνεπῶς, ὑποθέτοντες $\sigma\upsilon\nu\chi \neq 0$ δὲν περιορίζομεν τὰς λύσεις τῆς (1), ἤτοι δὲν ἔχομεν ἀπώλειαν ριζῶν.

2) Ἐὰν $\alpha = \delta$, ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται:

$$(\beta-\delta)\sigma\upsilon\nu^2\chi + \gamma\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = 0 \iff \sigma\upsilon\nu\chi\{(\beta-\delta)\sigma\upsilon\nu\chi + \gamma\eta\mu\chi\} = 0 \iff$$

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\chi = 0 & (\alpha) \\ (\beta-\delta)\sigma\upsilon\nu\chi + \gamma\eta\mu\chi = 0 & (\beta) \end{cases}$$

Ἡ γενικὴ λύσις τῆς (α) εἶναι $\chi = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}$ $(\kappa \in Z)$

Λύσις τῆς (β). Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι μία πρωτοβάθμιος ὁμογενὴς τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις καὶ διακρίνομεν διὰ τὴν λύσιν αὐτῆς τὰς κάτωθι περιπτώσεις:

2_α) Ἐὰν $\gamma \neq 0$, τότε $\sigma\upsilon\nu\chi \neq 0$, ὁπότε διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (β) μὲ συνχ, εὑρίσκομεν $\gamma\varepsilon\varphi\chi + \beta - \delta = 0$ ἢ $\varepsilon\varphi\chi = \frac{\delta-\beta}{\gamma}$, ἡ ὁποία ἐπιλύεται εὐκόλως.

2_β) Ἐὰν $\gamma = 0$, ἡ (β) γράφεται $(\beta-\delta)\ \sigma\upsilon\nu\chi = 0$ καὶ ἐὰν μὲν $\beta = \delta$, αὕτη εἶναι ἀόριστος, ἤτοι ἐπαληθεύεται διὰ κάθε $\chi \in R$, ἐὰν δὲ $\beta \neq \delta$, τότε εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $\sigma\upsilon\nu\chi = 0$, τῆς ὁποίας ἡ γενικὴ λύσις εἶναι:

$$\chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\kappa \in Z)$$

Παρατήρησις. Ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις (1) εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιλυθῆ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον, δι' ἐφαρμογῆς τῶν τύπων ὑποβιβασμοῦ (ἢ ἀποτετραγωνισμοῦ). Βάσει τῶν τύπων τούτων, αὕτη γράφεται:

$$(\alpha-\delta)\frac{1-\sigma\upsilon\nu2\chi}{2} + (\beta-\delta)\frac{1+\sigma\upsilon\nu2\chi}{2} + \frac{\gamma\eta\mu2\chi}{2} = 0 \iff \gamma\eta\mu2\chi + (\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu2\chi = 2\delta - \alpha - \beta$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις εἶναι μία γραμμικὴ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις (διὰ τὴν ἐπίλυσιν ταύτης, πρβλ. κατωτέρω περίπτωσιν γ).

Γενικώτερον, ἔχομεν ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $f(\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi) = \mu$ $(0 \neq \mu \in \mathbf{R})$, ὅπου τὸ $f(\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi)$ παριστᾶ ἀκέραιον πολυώνυμον καὶ ὁμογενὲς ὡς πρὸς ημχ, συνχ καὶ βαθμοῦ ἀρτίου. Ἐὰν ὁ βαθμὸς ὁμογενείας εἶναι $2\rho (\rho \in \mathbf{N})$, τότε δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$f(\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi) = \mu \iff f(\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi) - \mu(\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi)^\rho = 0$$

Ἡ τελευταία ὅμως ἐξίσωσις εἶναι ὁμογενὴς (βαθμὸς ὁμογενείας 2ρ) καὶ ἐπιλύεται κατὰ τὰ γνωστά.

Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $5\eta\mu^4\chi + 4\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi + 7\sigma\upsilon\nu^4\chi = 4$ (1) ἰσοδυνάμως γράφεται:

$(1) \iff 5\eta\mu^4\chi + 4\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi + 7\sigma\upsilon\nu^4\chi - 4(\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi)^2 = 0 \iff \varepsilon\varphi^4\chi - 4\varepsilon\varphi^2\chi + 3 = 0$, ἡ ὁποία ἐπιλύεται εὐκόλως.

3.4. Γραμμικὴ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις.

Αὕτη εἶναι τῆς μορφῆς

$$\alpha\eta\mu\chi + \beta\sigma\upsilon\nu\chi = \gamma, \quad \alpha\beta\gamma \neq 0,$$ [1]

ἤτοι τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς εἶναι μία γραμμικὴ μορφὴ τῶν ημχ καὶ συνχ.

3.4.1. Λύσις τῆς $\alpha\,\eta\mu\chi + \beta\sigma\upsilon\nu\chi = \gamma$, $\alpha\beta\gamma \neq 0$. Ἐπειδὴ $\frac{\beta}{\alpha} \in R$, συνάγε-

---

[1] Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι, ἐὰν $\alpha\beta\gamma = 0$, ἡ γραμμικὴ ἐξίσωσις λαμβάνει ἁπλουστάτην μορφὴν (θεμελιώδη).

τοι, ὅτι ὑπάρχει πάντοτε τόξον (εὑρισκόμενον ἐκ τῶν πινάκων), τοῦ ὁποίου ἡ ἐφαπτομένη ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν $\frac{\beta}{\alpha}$.

Ὡς ἐκ τούτου, πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως χρησιμοποιοῦμεν τὸν μετασχηματισμὸν $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\omega=\frac{\beta}{\alpha}}$ **(M_1)**, ὅπου ω εἶναι γνωστὸν τόξον καὶ συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις γράφεται:

$$\alpha\eta\mu\chi+\beta\sigma\upsilon\nu\chi=\gamma \Longleftrightarrow \eta\mu\chi+\frac{\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\chi=\frac{\gamma}{\alpha} \Longleftrightarrow \eta\mu\chi+\varepsilon\varphi\omega\sigma\upsilon\nu\chi=\frac{\gamma}{\alpha} \Longleftrightarrow$$

$$\eta\mu\chi\ \sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\chi=\frac{\gamma}{\alpha}\ \sigma\upsilon\nu\omega \Longleftrightarrow \eta\mu(\chi+\omega)=\frac{\gamma}{\alpha}\ \sigma\upsilon\nu\omega \quad (E).$$

Ἡ τελευταία ὅμως ἐξίσωσις (Ε) εἶναι ἡ γνωστὴ θεμελιώδης ἐξίσωσις **2.1.**, τὴν ὁποίαν ἐπιλύομεν κατὰ τὰ γνωστά, ἤτοι: Ἐὰν $\left|\frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\omega\right|>1$, δὲν ὑπάρχει οὐδὲν τόξον, τοῦ ὁποίου τὸ συνημίτονον νὰ εἶναι $\frac{\gamma}{\alpha}$ συνω καὶ συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις $\alpha\eta\mu\chi+\beta\sigma\upsilon\nu\chi=\gamma$ εἶναι ἀδύνατος. **Ἡ συνθήκη δυνατότητος λύσεως τῆς (Ε)** εἶναι $\left|\frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\omega\right|\leq 1$, ἡ ὁποία περαιτέρω ἀναλύεται ἰσοδυνάμως ὡς ἑξῆς: $\left|\frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\omega\right|\leq 1 \Longleftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\sigma\upsilon\nu^2\omega\leq 1 \Longleftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\ \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}\leq 1 \Longleftrightarrow$

$$\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\ \frac{1}{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}}\leq 1 \Longleftrightarrow \alpha^2+\beta^2\geqq\gamma^2 \quad (\Sigma).$$

Ἄρα, ἡ γραμμικὴ ἐξίσωσις ἔχει λύσιν, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν, πληροῦται ἡ συνθήκη (Σ). Πληρουμένης τῆς (Σ), θέτομεν $\boldsymbol{\frac{\gamma}{\alpha}\ \sigma\upsilon\nu\omega=\eta\mu\theta}$ **(M_2)**, ὅπου θ γνωστὸν τόξον μὲ $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ καὶ ἡ (Ε) γράφεται:

$$\eta\mu(\chi+\omega)=\eta\mu\theta \Longleftrightarrow \begin{cases}\chi+\omega=2\kappa\pi+\theta\\ \chi+\omega=(2\rho+1)\pi-\theta\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\chi=2\kappa+\theta-\omega\\ \chi=(2\rho+1)\pi-\theta-\omega\end{cases} \quad (\kappa,\rho\in Z)$$

Αἱ δύο τελευταῖαι **οἰκογένειαι** τόξων ἀποτελοῦν τὴν γενικὴν λύσιν τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως.

Παρατηρήσεις: 1) Πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\alpha\varepsilon\varphi\chi+\beta\sigma\varphi\chi=\gamma$, $\alpha\beta\gamma\neq 0$, ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως $\gamma\eta\mu\omega+(\alpha-\beta)\sigma\upsilon\nu\omega=\alpha+\beta$, ὅπου $\omega=2\chi$ (διατί ;).

2) Εἴδομεν ὅτι ἡ συνθήκη δυνατότητος ἐπιλύσεως τῆς $\alpha\eta\mu\chi+\beta\ \sigma\upsilon\nu\chi=\gamma$ εἶναι $\alpha^2+\beta^2\geqslant\gamma^2$. Ἐὰν $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$, τότε $|\eta\mu\theta|=1$, ἕνεκα καὶ τῶν (M_1), (M_2).

Ἡ ἀνωτέρω γραμμικὴ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιλυθῇ καὶ δι' ἄλλης μεθόδου, τὴν ὁποίαν περιγράφομεν κατωτέρω.

3.4.2. Λύσις τῆς $\boldsymbol{\alpha\ \eta\mu\chi+\beta\sigma\upsilon\nu\chi=\gamma,\ \alpha\beta\gamma\neq 0}$. Ἐκφράζομεν, μέσω γνωστῶν τύπων, τὰ ημχ καὶ συνχ συναρτήσει τῆς εφ $\frac{χ}{2}$ (οἱ τύποι οὗτοι ἰσχύουν μὲ $χ \neq 2κπ+π$, $κ \in Z$) καὶ ἡ ἐξίσωσις γράφεται:

$$α\frac{2εφ\frac{χ}{2}}{1+εφ^2\frac{χ}{2}}+β\frac{1-εφ^2\frac{χ}{2}}{1+εφ^2\frac{χ}{2}}=γ \Longleftrightarrow (β+γ)εφ^2\frac{χ}{2}-2αεφ\frac{χ}{2}+γ-β=0 \quad (1)$$

Ἐπίσης, παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ $χ=2κπ+π$ ἡ γραμμικὴ ἐξίσωσις γράφεται:
$αημ(2κπ+π)+βσυν(2κπ+π)=γ \Longleftrightarrow α\cdot 0+β(-1)=γ \Longleftrightarrow β+γ=0$
Ἄρα, ἡ γραμμικὴ ἐξίσωσις δὲν δέχεται ὡς λύσεις τὰ τόξα:

$$χ=2κπ+π \quad (κ \in Z), \text{ ἐφ' ὅσον } β+γ \neq 0.$$

Βάσει τῶν ἀνωτέρω διακρίνομεν τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις:

1) Ἐὰν $β+γ \neq 0$, τότε ἡ πρὸς λύσιν ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν (1), ἡ ὁποία εἶναι ἀλγεβρικὴ ὡς πρὸς εφ$\frac{χ}{2}$ καὶ ἐπιλύεται κατὰ τὰ γνωστά.
Ἡ συνθήκη δυνατότητος ἐπιλύσεως τῆς (1) εἶναι:

$$Δ=4α^2-4(γ+β)(γ-β) \geq 0 \Longleftrightarrow α^2+β^2 \geq γ^2$$

2) Ἐὰν $β+γ=0$, τότε ἡ γραμμικὴ ἐξίσωσις γράφεται:

$$αημχ+βσυνχ=-β \Longleftrightarrow αημχ=-β(1+συνχ) \Longleftrightarrow 2αημ\frac{χ}{2}συν\frac{χ}{2}=-2βσυν^2\frac{χ}{2} \Longleftrightarrow$$

$$συν\frac{χ}{2}\left(αημ\frac{χ}{2}+βσυν\frac{χ}{2}\right)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} συν\frac{χ}{2}=0 & (1) \\ αημ\frac{χ}{2}+βσυν\frac{χ}{2}=0 & (2) \end{cases}$$

Ἡ γενικὴ λύσις τῆς (1) εἶναι $χ=2κπ+π$ $(κ \in Z)$. Ἡ (2) γράφεται εφ $\frac{χ}{2}=\frac{-β}{α}$ καὶ ἐπιλύεται κατὰ τὰ γνωστά. Ἐπὶ πλέον, ἐφ' ὅσον $β=-γ$, προκύπτει $β^2=γ^2$, ὁπότε $α^2+β^2 \geq γ^2$.

Παρατήρησις. Δυνάμει τῆς ἀνωτέρω ἐκτεθείσης μεθόδου ἐπιλύσεως τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως, συνάγεται, ὅτι τὰ ημχ καὶ συνχ ἐκφράζονται συναρτήσει τῆς εφ$\frac{χ}{2}$ μόνον ἐφ' ὅσον $β+γ \neq 0$, ὁπότε καταλήγομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1). Ἐὰν δὲ $β+γ=0$, ἀκολουθοῦμεν τὸν ἐκ τῆς περιπτώσεως 2) ἐκτεθέντα τρόπον ἐπιλύσεως τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως. Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ἐπανευρίσκομεν τὴν γνωστὴν συνθήκην δυνατότητος ἐπιλύσεως τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως $α^2+β^2 \geq γ^2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ἐπιλυθῆ ἡ ἐξίσωσις: $ημχ+\sqrt{3}\,συνχ=2λ$, $λ \in Z$.

Ἐπίλυσις: Ἡ ἐξίσωσις ἔχει λύσιν, ἐφ' ὅσον πληροῦται ἡ συνθήκη: $1^2+(\sqrt{3})^2 \geq (2λ)^2$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν: $-1 \leq λ \leq 1$. Ἐκ τῆς τελευταίας σχέσεως καὶ ἐπειδὴ ὁ λ εἶναι ἀκέραιος, συνάγεται $λ=-1,0,1$.

Ἄρα, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει λύσιν, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν, τὸ λ εἶναι -1,0 καὶ 1 καὶ θὰ εἶναι τότε ἰσοδύναμος μὲ τὰς κάτωθι τρεῖς ἐξισώσεις:

$ημχ+\sqrt{3}συνχ=-2 \quad (α), \qquad ημχ+\sqrt{3}συνχ=0 \quad (β), \qquad ημχ+\sqrt{3}συνχ=2 \qquad (γ)$

Λύσις τῆς (α). Ἡ ἐξίσωσις (α) γράφεται:

$$ημχ+εφ\frac{π}{3}\,συνχ=-2 \Longleftrightarrow ημχ+\frac{ημ\frac{π}{3}}{συν\frac{π}{3}}\,συνχ=-2 \Longleftrightarrow$$

$$ημχσυν\frac{π}{3}+ημ\frac{π}{3}\,συνχ=-2συν\frac{π}{3} \Longleftrightarrow ημ\left(χ+\frac{π}{3}\right)=-1 \Longleftrightarrow$$

$$χ+\frac{π}{3}=2κπ-\frac{π}{2} \Longleftrightarrow χ=2κπ-\frac{5π}{6} \qquad (κ\in Z).$$

Λύσις τῆς (β). Ἡ (β) γράφεται: $εφχ=-\sqrt{3}$ καὶ ἡ γενικὴ λύσις αὐτῆς εἶναι

$$χ=κπ+\frac{2π}{3},\ κ\in Z.$$

Λύσις τῆς (γ). Πρὸς λύσιν ταύτης ἀκολουθοῦμεν τὴν αὐτὴν ἀκριβῶς πορείαν μὲ τὴν λύσιν τῆς (α) καὶ εὑρίσκομεν $ημ\left(χ+\frac{π}{3}\right)=1$, τῆς ὁποίας ἡ γενικὴ λύσις εἶναι $χ=κπ+\frac{π}{6}$, $κ\in Z$.

3.5. Συμμετρικὴ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ημχ καὶ συνχ. Οὕτω καλεῖται πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $f(ημχ, συνχ)=0$, ὅπου $f(ημχ, συνχ)$ εἶναι συμμετρικὸν ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς ημχ καὶ συνχ. Εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀλγέβρας, ὅτι κάθε συμμετρικὸν πολυώνυμον (ἀκέραιον) ὡς πρὸς χ καὶ ψ εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσει τῶν στοιχειωδῶν συμμετρικῶν παραστάσεων $χ+ψ$ καὶ $χψ$ καί, συνεπῶς, κάθε συμμετρικὴ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις δύναται τελικῶς νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν $f(ημχ+συνχ, ημχ\,συνχ)=0$ (Ε).

Πρὸς ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως (Ε), ἐφαρμόζομεν τὸν μετασχηματισμὸν $\mathbf{ημχ+συνχ=t}$ (M_1), ὁ ὁποῖος ἐν συνεχείᾳ γράφεται:

$$ημχ+ημ\left(\frac{π}{2}-χ\right)=t \Longleftrightarrow 2ημ\frac{π}{4}συν\left(\frac{π}{4}-χ\right)=t \Longleftrightarrow \mathbf{\sqrt{2}\,συν\left(\frac{π}{4}-χ\right)=t} \quad (M_2)$$

Ἐξ ἄλλου, ἐκ τῆς σχέσεως (M_1), ἔχομεν:

$$(ημχ+συνχ)^2=t^2 \Rightarrow ημ^2χ+συνχ^2+2ημχσυνχ=t^2 \Rightarrow 1+2ημχσυνχ=t^2 \Rightarrow$$

$$\mathbf{ημχσυνχ=\frac{t^2-1}{2}} \quad (1).$$

Βάσει τῶν (M_1) καὶ (1) ἡ ἐξίσωσις (Ε) γράφεται $f\left(t,\frac{t^2-1}{2}\right)=0$ (ε).

Αὕτη εἶναι μία ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις ὡς πρὸς t, τὴν ὁποίαν ἐπιλύομεν καὶ εὑρίσκομεν τὸ t. Ἐν συνεχείᾳ, θέτοντες τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ t εἰς τὴν ἐξίσωσιν (M_2)

καὶ ἐπιλύοντες τὴν θεμελιώδη ταύτην ἐξίσωσιν, προσδιορίζομεν τὸ χ. Διὰ τὴν διερεύνησιν τῆς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως (ε) θὰ πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι τὰ ὅρια μεταβολῆς τοῦ t εἶναι ἀπὸ $-\sqrt{2}$ ἕως $\sqrt{2}$, ἤτοι $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$, διότι:

$$-1 \leq \text{συν}\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) \leq 1 \iff -\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\,\text{συν}\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) \leq \sqrt{2} \iff -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \quad (M_3),$$

λόγω καὶ τῆς (M_2).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\alpha(\text{ημ}\chi + \text{συν}\chi) + \beta\,\text{ημ}\chi\,\text{συν}\chi = \gamma$ (1)

Ἐπίλυσις: Ἡ πρὸς λύσιν ἐξίσωσις εἶναι ἡ ἁπλουστέρα μορφὴ συμμετρικῆς ἐξισώσεως. Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα, θέτομεν $\text{ημ}\chi + \text{συν}\chi = t$ καὶ ἡ ἐξίσωσις γράφεται:

$$\alpha t + \beta \frac{t^2-1}{2} = \gamma \iff \beta t^2 + 2\alpha t - (\beta + 2\gamma) = 0 \qquad (2)$$

Συνεπῶς ἔχομεν:

$$(1) \iff \begin{cases} (2) \\ \sqrt{2}\,\text{συν}\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) = t \quad (M) \end{cases}$$

Ἐπιλύομεν τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν (2) καὶ εὑρίσκομεν τὸ t. Ἐν συνεχείᾳ, μέσῳ τῆς θεμελιώδους ἐξισώσεως (M), εὑρίσκομεν τὸ χ. Ἵνα αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι δεκταί, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ κεῖνται ἐντὸς τοῦ διαστήματος $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Αἱ ἱκαναὶ καὶ ἀναγκαῖαι συνθῆκαι πρὸς τοῦτο εἶναι γνωσταὶ ἐκ τῆς Ἀλγέβρας (ἐπίσης, πρβλ. 3.1.).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\text{ημ}^3\chi + \text{συν}^3\chi = 1$.

Λύσις: Ἡ πρὸς λύσιν ἐξίσωσις εἶναι συμμετρική, διότι δὲν μεταβάλλεται διὰ τῆς ἀντιμεταθέσεως τῶν ημχ καὶ συνχ. Αὕτη, δυνάμει καὶ τῶν προηγουμένων, γράφεται:

$$\text{ημ}^3\chi + \text{συν}^3\chi = 1 \iff (\text{ημ}\chi + \text{συν}\chi)(\text{ημ}^2\chi + \text{συν}^2\chi - \text{ημ}\chi\text{συν}\chi) = 1 \iff$$

$$(\text{ημ}\chi + \text{συν}\chi)(1 - \text{ημ}\chi\text{συν}\chi) = 1 \iff \begin{cases} t\left(1 - \frac{t^2-1}{2}\right) = 1 & (\varepsilon_1) \\ \sqrt{2}\,\text{συν}\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) = t & (\varepsilon_2) \end{cases}$$

Κατ' ἀρχὴν ἐπιλύομεν τὴν ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν (ε_1). Πρὸς τοῦτο ἔχομεν:

$$t\,\frac{3-t^2}{2} = 1 \iff t^3 - 3t + 2 = 0 \iff (t^3 - t) - (2t - 2) = 0 \iff t(t^2-1) - 2(t-1) = 0$$

$$\iff (t-1)(t^2+t-2) = 0 \iff \begin{cases} t - 1 = 0 \\ t^2 + t - 2 = 0 \end{cases}$$

Δι' ἐπιλύσεως τῶν τελευταίων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν τὰς ρίζας τῆς (ε_1), αἱ ὁποῖαι εἶναι $t_1 = 1$ (διπλῆ) καὶ $t_2 = -2$. Ἡ ρίζα -2 ἀπορρίπτεται λόγῳ τῆς (M_3). Ἐν συνεχείᾳ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (ε_2) τὴν δεκτὴν ρίζαν καὶ ἔχομεν πρὸς λύσιν τὴν ἐξίσωσιν $\sqrt{2}\,συν\left(\frac{π}{4}-χ\right)=1$. Αὕτη ἰσοδυνάμως γράφεται:

$$συν\left(\frac{π}{4}-χ\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow συν\left(\frac{π}{4}-χ\right)=συν\frac{π}{4} \Longleftrightarrow \frac{π}{4}-χ=2κπ\pm\frac{π}{4},\ κ\in Z \Longleftrightarrow$$

$$χ=\frac{π}{4}-\left(2κπ\pm\frac{π}{4}\right)\ (κ\in Z) \Longleftrightarrow \begin{cases} χ=2κπ \\ χ=2κπ+\dfrac{π}{2} \end{cases} \quad (κ\in Z).$$

4. Τριγωνομετρικὴ ἐπίλυσις τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $αχ^2+βχ+γ=0$ $(α, β, γ\in R)$ (1)

4.1. Ἐπειδὴ $χ\in R$, ὑπάρχει $ω\in\left(-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right)$ τοιοῦτον, ὥστε $εφω=χ$ (M_1) καὶ συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται:

$$(1) \Longleftrightarrow αεφ^2ω+βεφω+γ=0 \Longleftrightarrow α\frac{ημ^2ω}{συν^2ω}+β\frac{ημω}{συνω}+γ=0 \Longleftrightarrow$$

$$αημ^2ω+βημωσυνω+γσυν^2ω=0 \Longleftrightarrow α(1-συν2ω)+βημ2ω+γ(1+συν2ω)=0 \Longleftrightarrow$$

$$βημ2ω+(γ-α)συν2ω=-(α+γ) \qquad (2)$$

Οὕτως ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως (1) ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (2), ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς $αημχ+βσυνχ=γ$ καὶ ἐπιλύεται, ὡς γνωστόν, διὰ τῆς πρώτης μεθόδου ἐπιλύσεώς της, ὡς ἑξῆς:

1) Ἐὰν $β\neq 0$, διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (2) μὲ β καὶ ἔχομεν:

$$ημ2ω+\frac{γ-α}{β}συν2ω=-\frac{α+γ}{β} \qquad (3)$$

Ἐν συνεχείᾳ θέτομεν $\frac{γ-α}{β}=εφψ$ (M_2) καὶ ἡ (3) γράφεται:

$$ημ2ω+εφψσυν2ω=-\frac{α+γ}{β} \Longleftrightarrow ημ(2ω+ψ)=-\frac{α+γ}{β}συνψ \qquad (4)$$

Ἡ συνθήκη δυνατότητος ἐπιλύσεως τῆς (2), ὡς γνωστόν, εἶναι:

$$β^2+(γ-α)^2\geqq(α+γ)^2 \Longleftrightarrow β^2-4αγ\geqq 0.$$

Ἡ τελευταία εὑρεθεῖσα συνθήκη εἶναι ἡ γνωστὴ συνθήκη ὑπάρξεως ριζῶν (πραγματικῶν) τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως (1). Πληρουμένης τῆς συνθήκης ταύτης, ἡ ἐξίσωσις (4) ἔχει λύσιν (διατί;), ἤτοι ὑπάρχει τόξον $φ\in R$ τοιοῦτον, ὥστε $ημφ=-\frac{α+γ}{γ}συνψ$ (M_3) καὶ συνεπῶς ἡ (4) γράφεται $ημ(2ω+ψ)=ημφ$. Αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι αἱ κάτωθι οἰκογένειαι τόξων:

$$ω_1=κπ+\frac{φ}{2}-\frac{ψ}{2} \qquad (κ\in Z)$$

$$ω_2=λπ+\frac{π}{2}-\frac{φ}{2}-\frac{ψ}{2} \qquad (λ\in Z)$$

Εἶναι $\varepsilon\varphi\omega_1 = \varepsilon\varphi\left(\kappa\pi + \frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2}\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2}\right)$ καὶ

$\varepsilon\varphi\omega_2 = \varepsilon\varphi\left(\lambda\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2}\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\psi}{2}\right)$, ὁπότε, βάσει καὶ τῆς (M_1), αἱ ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως (1) εἶναι:

$$\chi_1 = \varepsilon\varphi\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2}\right), \qquad \chi_2 = \sigma\varphi\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\psi}{2}\right) \quad (5).$$

2) Ἐὰν $\beta = 0$, ἡ (2) γράφεται $(\gamma - \alpha)\sigma\upsilon\nu 2\omega = -(\alpha + \gamma)$. Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως ταύτης διακρίνομεν τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις:

2_α) Ἐὰν $\gamma - \alpha = 0$ ($\Longleftrightarrow \alpha = \gamma$), τότε ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος, διότι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι καὶ $\alpha + \gamma = 0$ (διατί;).

2_β) Ἐὰν $\gamma - \alpha \neq 0$ ($\Longleftrightarrow \alpha \neq \gamma$), τότε ἡ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται

$$\sigma\upsilon\nu 2\omega = \frac{\alpha + \gamma}{\alpha - \gamma} \quad (6).$$

Ἡ συνθήκη δυνατότητος ἐπιλύσεως τῆς (6) εἶναι:

$$\left|\frac{\alpha + \gamma}{\alpha - \gamma}\right| \leq 1 \Longleftrightarrow (\alpha + \gamma)^2 \leq (\alpha - \gamma)^2 \Longleftrightarrow \alpha\gamma \leq 0,$$

ἤτοι ἐπανευρίσκομεν τὴν γνωστὴν ἐκ τῆς Ἀλγέβρας συνθήκην ὑπάρξεως πραγματικῶν ριζῶν, διότι μὲ $\beta = 0$ ἡ διακρίνουσα τῆς (1) εἶναι $\Delta = -4\alpha\gamma$ καὶ θὰ πρέπει $\Delta \geq 0 \Longleftrightarrow -4\alpha\gamma \geq 0 \Longleftrightarrow \alpha\gamma \leq 0$. Πληρουμένης τῆς συνθήκης ταύτης, ὑπάρχει τόξον $\varphi \in \mathrm{R}$ μὲ $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\alpha + \gamma}{\alpha - \gamma}$ καὶ συνεπῶς ἡ (6) γράφεται $\sigma\upsilon\nu 2\omega = \sigma\upsilon\nu\varphi$.

Ἡ γενικὴ λύσις τῆς τελευταίας ἐξισώσεως εἶναι:

$$\{\omega \in \mathrm{R} : \omega = \kappa\pi + \frac{\varphi}{2},\ \kappa \in Z\} \cup \{\omega \in \mathrm{R} : \omega = \lambda\pi - \frac{\varphi}{2},\ \lambda \in Z\}.$$

Συνεπῶς, δυνάμει καὶ τῆς (M_1), αἱ ρίζαι τῆς (1) θὰ εἶναι:

$$\chi_1 = \varepsilon\varphi\frac{\varphi}{2},\ \chi_2 = -\varepsilon\varphi\frac{\varphi}{2}.$$

Παρατηρήσεις: 1) Ὑποθέτομεν, ὅτι αἱ εὑρεθεῖσαι ρίζαι (5) εἶναι ἴσαι· τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2}\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\psi}{2}\right) \Longleftrightarrow \varepsilon\varphi\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2}\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2} = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2} \Longleftrightarrow \varphi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \eta\mu\varphi \in \{1, -1\} \quad (\kappa \in Z).$$

Ἐκ τούτου, βάσει καὶ τῆς (M_3), συνάγεται $\left|\frac{\alpha + \gamma}{\beta}\sigma\upsilon\nu\psi\right| = 1 \Longleftrightarrow \frac{(\alpha + \gamma)^2}{\beta^2}\sigma\upsilon\nu^2\psi = 1 \Longleftrightarrow$ $\frac{(\alpha + \gamma)^2}{\beta^2} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\psi} = 1$. Ἐξ αὐτῆς καὶ τῆς (M_2), προκύπτει:

$$\frac{(\alpha + \gamma)^2}{\beta^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(\gamma - \alpha)^2}{\beta^2}} = 1 \Longleftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$$

ἤτοι εὑρίσκομεν τὴν γνωστὴν ἐκ τῆς Ἀλγέβρας συνθήκην ὑπάρξεως διπλῆς ρίζης.

2) Ἡ γνωστὴ ἐκ τῆς Ἀλγέβρας μέθοδος ἐπιλύσεως τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ διαφέρει οὐσιωδῶς τῆς ἀνωτέρω ἀναφερθείσης τριγωνομετρικῆς μεθόδου, διότι κατ' αὐτὴν δὲν ἐλήφθησαν ὑπ' ὄψιν οἱ γνωστοὶ ἀλγεβρικοὶ τύποι, οἱ ὁποῖοι παρέχουν τὰς ρίζας τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἐπιλύσατε τὰς κάτωθι ἐξισώσεις:

1) $\sigma\upsilon\nu\left(2\chi-\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}$ 2) $\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{6}\right)=\eta\mu\left(\frac{3\pi}{4}-2\chi\right)$

3) $\sigma\upsilon\nu\left(2\chi+\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\upsilon\nu 3\chi$ 4) $4\eta\mu^2\chi=1$

5) $\sigma\upsilon\nu 3\chi+1=0$ 6) $\varepsilon\varphi\left(\chi+\frac{\pi}{3}\right)=-1$

7) $\sigma\upsilon\nu 4\chi+\sigma\upsilon\nu\chi=0$ 8) $\sigma\upsilon\nu\left(2\chi-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{3}$

9) $4\eta\mu^3\chi-3\eta\mu\chi=\frac{1}{2}$ 10) $\sigma\upsilon\nu^2 4\chi-\eta\mu^2 3\chi=0$

11) $4\eta\mu^2(2\chi-1)=1$ 12) $\varepsilon\varphi\left(2\chi-\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\varphi 3\chi$

2) Ἐπιλύσατε τὰς κάτωθι ἐξισώσεις:

1) $\varepsilon\varphi\left(\chi+\frac{\pi}{3}\right)=2\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{3}\right)$ 2) $\varepsilon\varphi(\alpha\chi)\varepsilon\varphi(\beta\chi)=-1$ $(\alpha,\beta\in R)$

3) $\varepsilon\varphi\chi\ \varepsilon\varphi 2\chi=1$ 4) $\varepsilon\varphi\left(\chi-\frac{\pi}{3}\right)=3\sigma\varphi\left(\chi-\frac{\pi}{3}\right)$

5) $\varepsilon\varphi\left(\chi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{4}-\chi\right)$

3) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ὡς πρὸς χ ἐξίσωσις: $|\eta\mu\chi|=\eta\mu\alpha$ $(\eta\mu\alpha\geqslant 0)$.

4) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1) $\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\left(2\chi-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\\ -\pi\leq\chi\leq\pi\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\varepsilon\varphi\left(2\chi-\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\varphi\chi\\ -\frac{\pi}{2}\leq\chi<\pi\end{cases}$

5) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1) $\varepsilon\varphi 2\chi=\varepsilon\varphi\left(\psi+\frac{\pi}{4}\right)$ 2) $\varepsilon\varphi\chi\varepsilon\varphi 2\psi=1$

3) $\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\psi-\frac{\pi}{4}\right)=0$ 4) $\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)+3\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)=4$

6) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1) $4\sigma\upsilon\nu^2\chi-2(1+\sqrt{3})\sigma\upsilon\nu\chi+\sqrt{3}=0$ 2) $2\eta\mu^2\chi+\sqrt{3}\eta\mu\chi-3=0$

3) $3(1-\sigma\upsilon\nu\chi)=\eta\mu^2\chi$ 4) $\varepsilon\varphi^2\chi+(\sqrt{3}-1)\varepsilon\varphi\chi-\sqrt{3}=0$

5) $\eta\mu 2\chi=\varepsilon\varphi\chi$ 6) $\sigma\upsilon\nu 2\chi-4\sigma\upsilon\nu\chi-5=0$

7) $\varepsilon\varphi 2\chi=3\varepsilon\varphi\chi$ 8) $\eta\mu 2\chi=\eta\mu^3\chi$

9) $2\eta\mu\chi\ \eta\mu 3\chi=1$ 10) $5\eta\mu^2\chi-2\sigma\upsilon\nu^2\chi-3\eta\mu\chi\ \sigma\upsilon\nu\chi=0$

11) $\sigma\upsilon\nu 2\chi+(1+\sqrt{3})\eta\mu 2\chi-2\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu^2\chi=1$

7) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1) $\eta\mu\chi+\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu\chi=\sqrt{2}$ 2) $2\eta\mu\chi+3\sigma\upsilon\nu\chi=3$ 3) $\sqrt{3}\eta\mu 2\chi+\sigma\upsilon\nu 2\chi=1$

4) $\eta\mu\frac{\chi}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}=1$ 5) $\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi-\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi=1$ 6) $\sigma\upsilon\nu\chi-\eta\mu\chi+\eta\mu\chi\ \sigma\upsilon\nu\chi=1$

8) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1) $ημ2χ + ημ6χ = 2ημ4χ$
2) $ημ3χ + συν3χ = ημχ + συνχ$
3) $συν2χ - συν3χ + ημ5χ = 0$
4) $ημχ + ημ3χ = 2ημ2χ$
5) $ημχ + ημ2χ + ημ3χ = 0$
6) $συνχ\, συν7χ = συν3χ\, συν5χ$
7) $συνχ + συν2χ = 2ημχ\, ημ2χ$
8) $2συν\dfrac{3χ}{2}\, συν\dfrac{χ}{2} = \sqrt{2}\, συν\left(\dfrac{π}{4} - χ\right)$
9) $εφχ + εφ2χ + εφ3χ = 0$
10) $1 + συνχ + συν2χ + συν3χ = 0$
11) $2ημ^3χ = 3συνχ + συν3χ$
12) $εφχ = 2\sqrt{2}\, συν2χ - σφ2χ$
13) $8\, συν\, χ = \dfrac{\sqrt{3}}{ημχ} + \dfrac{1}{συνχ}$
14) $2\, συν\dfrac{χ}{3} - ημ\dfrac{χ}{2} = 2$ (θέσατε $\dfrac{χ}{6} = ω$)
15) $ημχ + ημ2χ + ημ3χ = 4\, συν\dfrac{χ}{2}\, συνχ\, συν\dfrac{3χ}{2}$
16) $1 + ημχ + ημ2χ + ημ3χ = συνχ - συν2χ + συν3χ$

9) Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ διερευνηθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1) $λημ^2χ - 2(λ-2)ημχ + λ + 2 = 0$
2) $ημ2χ = λημ3χ$
3) $(μ-1)ημ^2χ - 2(μ+2)ημχ - 1 = 0$
4) $2ημ^2χ + 2ημχ\, συνχ = λ$
5) $2συν^2χ - λημ2χ = -λ$
6) $συνχ + ημχ = κ \quad (κ \in Z)$
7) $(λ-1)ημχ + (λ+1)συν2χ = 2λ$
8) $λ(ημχ + συνχ) - ημχ\, συνχ = 1$

10) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ $λ$ ἡ ἐξίσωσις $συν2χ + λημχ + 1 = 0$ ἔχει δύο μόνον λύσεις ἐντὸς τοῦ διαστήματος $[0, 2π]$.

11) Νὰ ἐπιλυθῆ ἡ ἐξίσωσις $ημ2ψ = συν\left(\dfrac{π}{4} - 3χ\right)$ καὶ νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι αἱ λύσεις αὐτῆς παριστοῦν δύο οἰκογενείας παραλλήλων εὐθειῶν (εἰς ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων). Νὰ γίνη γραφικὴ παράστασις τῶν δύο τούτων οἰκογενειῶν παραλλήλων εὐθειῶν.

12) Ἐὰν $χ \in \left(0, \dfrac{3π}{2}\right)$, νὰ ἐπιλυθῆ καὶ διερευνηθῆ ἡ ἐξίσωσις: $λημχ + συνχ = 1 - 3λ$

13) Νὰ ἐπιλυθῆ καὶ διερευνηθῆ ἡ ὡς πρὸς $χ$ ἐξίσωσις: $συν^2χ + συν^2(α - χ) = λ \quad (α, λ \in R)$

14) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1) $εφ(πημχ) = σφ(πσυνχ)$
2) $ημ(πσυνχ) = συν(πημχ)$
3) $8\, συνχσυν2χ\, συν4χ = 1$
4) $ημ3χ = 4ημχ\, ημ2χημ4χ$
5) $εφ\left(\dfrac{π}{4} - χ\right) + εφ\left(\dfrac{π}{4} + χ\right) = \sqrt{\dfrac{8\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}$
6) $ημχ\, συν2χ\, συν4χ = 1$
7) $(ημχ + συνχ + εφχ)^3 = ημ^3χ + συν^3χ + εφ^3χ$
8) $συν7χ = 2ημχημ2χ\,(5 - 8συν^2χ)$
9) $(ημχ + συνχ)\left(1 + \dfrac{2}{ημ2χ}\right) + εφχ + σφχ + 2 = 0$
10) $ημχ + συν\dfrac{2χ}{3} = 2ημ^2\left(\dfrac{π}{4} + \dfrac{χ}{6}\right)$
11) $ημχσυνχ - ημ^3ασυνχ - συν^3α\, ημχ = 0$
12) $ημχ + ημ2χ + \ldots + ημ\,(νχ) = 0$

15) Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ διερευνηθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1) $\sqrt{1 + συν^2χ} + \sqrt{1 + ημ^2χ} = \sqrt{λ},\ λ > 0$
2) $(ημχ + συνχ + λεφχ)^3 = ημ^3χ + συν^3χ + λ^3εφ^3χ$

3) $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi + \varepsilon\varphi\chi + \sigma\varphi\chi + \tau\varepsilon\mu\chi + \sigma\tau\varepsilon\mu\chi = \lambda$

4) $\eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^3\chi = \kappa$, $\kappa \in Z$ (ἀποδείξατε πρῶτον, ὅτι: $-1 \leq \eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^3\chi \leq 1$).

5) $\lambda\sqrt{\lambda^2\eta\mu^2\chi + 1} = \sigma\upsilon\nu\chi$, $\lambda > 0$ καὶ $\chi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

16) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐντὸς τοῦ διαστήματος $[0,2\pi]$ τόξα, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν: $\sigma\upsilon\nu 2\chi = \sqrt{2}(\sigma\upsilon\nu^3\chi + \eta\mu^3\chi - \eta\mu\chi\,\sigma\upsilon\nu^2\chi - \sigma\upsilon\nu\chi\eta\mu^2\chi)$.

17) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ἡ ἐξίσωσις $\mu\sigma\upsilon\nu\chi - (2\mu+1)\,\eta\mu\chi = \mu$ ἔχῃ δύο λύσεις χ_1, χ_2 τοιαύτας, ὥστε:

α) $|\chi_1 - \chi_2| = \frac{\pi}{2}$

β) $\chi_1 + \chi_2 = \frac{3\pi}{2}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Βασικαὶ ἔννοιαι — ὁρισμοὶ

1.1. Ἕν σύστημα ἐξισώσεων, ἐκ τῶν ὁποίων μία τοὐλάχιστον εἶναι τριγωνομετρική, καλεῖται **τριγωνομετρικὸν σύστημα.** Ἐννοεῖται, ὅτι αἱ ἀλγεβρικαὶ ἐξισώσεις ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ συστήματος, ἐὰν ὑπάρχουν, εἶναι ἐν γένει ἐξισώσεις ὡς πρὸς τὰ ἄγνωστα τόξα τῶν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος τούτου.

Αἱ ἐφαρμοζόμεναι μέθοδοι διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν τριγωνομετρικῶν συστημάτων εἶναι ἐν γένει ἀνάλογοι πρὸς ἐκείνας τῶν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων, δὲν ὑπάρχει δὲ μία γενικὴ μέθοδος διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν συστημάτων τούτων.

Κατὰ τὴν ἐπίλυσιν ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ συστήματος, ἐπιδιώκομεν πάντοτε νὰ εὕρωμεν ἰσοδύναμον ἀλγεβρικὸν σύστημα καὶ δι' αὐτοῦ νὰ προσδιορίσωμεν τὰ ἄγνωστα τόξα.

2. Συστήματα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους

Κατωτέρω ἀναφέρομεν ὡρισμένας βασικὰς κατηγορίας τριγωνομετρικῶν συστημάτων δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.

2.1. Ἡ μία τῶν ἐξισώσεων εἶναι ἀλγεβρική. Τὰ βασικώτερα συστήματα τῆς κατηγορίας αὐτῆς εἶναι τὰ κάτωθι:

$$(\text{A}) \quad \left\{ \begin{array}{c} \chi+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \etaμ\chi+\varepsilon_2\etaμ\psi=\beta \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} \chi+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ συν\chi+\varepsilon_2συν\psi=\beta \end{array} \right\}$$

$$(\text{B}) \quad \left\{ \begin{array}{c} \chi+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \etaμ\chi\ \etaμ\psi=\beta \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} \chi+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \etaμ\chi\ συν\psi=\beta \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} \chi+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ συν\chi\ συν\psi=\beta \end{array} \right\}$$

$$(\Gamma)\quad \left\{\begin{array}{l} \chi+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \varepsilon\varphi\chi+\varepsilon_2\varepsilon\varphi\psi=\beta \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} \chi+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \varepsilon\varphi\chi\varepsilon\varphi\psi=\beta \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} \chi+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \dfrac{\varepsilon\varphi\,\chi}{\varepsilon\varphi\psi}=\beta \end{array}\right\}$$

$$(\Delta)\quad \left\{\begin{array}{l} \chi+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \sigma\varphi\chi+\varepsilon_2\sigma\varphi\chi=\beta \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} \chi+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \sigma\varphi\chi\sigma\varphi\psi=\beta \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} \chi+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \dfrac{\sigma\varphi\,\chi}{\sigma\varphi\psi}=\beta \end{array}\right\}$$

$$(E)\quad \left\{\begin{array}{l} \chi+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \dfrac{\eta\mu\,\chi}{\eta\mu\psi}=\beta \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} \chi+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu\,\chi}{\sigma\upsilon\nu\psi}=\alpha \end{array}\right\}$$

Εἰς ὅλα τὰ ἀνωτέρω συστήματα τὰ ε_1 καὶ ε_2 λαμβάνουν τὰς τιμὰς 1 ἢ -1 καὶ $\alpha,\beta\in R$.

Κατὰ τὴν λύσιν ἑνὸς ἑκάστου τῶν ἀνωτέρω συστημάτων ἐπιδιώκομεν νὰ εὕρωμεν ἐκ τῆς δευτέρας τῶν ἐξισώσεων τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν τόξων χ καὶ ψ, ἐφ' ὅσον ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως δίδεται ἡ διαφορὰ ἢ τὸ ἄθροισμα τούτων ἀντιστοίχως.

2.1.1. Ἐπίλυσις τοῦ συστήματος : $\left\{\begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \eta\mu\chi+\eta\mu\psi=\beta \end{array}\right.\quad (\Sigma)$

Τὸ δοθὲν σύστημα ἰσοδυνάμως γράφεται:

$$(\Sigma)\iff\left\{\begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ 2\eta\mu\dfrac{\chi+\psi}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\chi-\psi}{2}=\beta \end{array}\right\}\iff\left\{\begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ 2\eta\mu\dfrac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\chi-\psi}{2}=\beta \end{array}\right.\quad (1)$$

Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (1) διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις:

i) Ἐὰν $\eta\mu\dfrac{\alpha}{2}\neq 0$ ($\iff$ $\alpha\neq 2\kappa\pi$, $\kappa\in Z$), τότε ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται: $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\chi-\psi}{2}=\dfrac{\beta}{2\eta\mu\dfrac{\alpha}{2}}$, ἡ ὁποία εἶναι μία θεμελιώδης τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις. Ἐὰν $\left|\dfrac{\beta}{2\eta\mu\dfrac{\alpha}{2}}\right|>1$, αὕτη εἶναι ἀδύνατος καὶ συνεπῶς τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἐὰν $\left|\dfrac{\beta}{2\eta\mu\dfrac{\alpha}{2}}\right|\leq 1$, τότε ὑπάρχει τόξον φ τοιοῦτον, ὥστε $\sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{\beta}{2\eta\mu\dfrac{\alpha}{2}}$ καὶ ἡ ἐξίσωσις γράφεται $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\chi-\psi}{2}=\sigma\upsilon\nu\varphi$. Ἡ γενικὴ λύσις ταύτης εἶναι $\chi-\psi=4\kappa\pi\pm2\varphi$ ($\kappa\in Z$), ὁπότε τὸ σύστημα (Σ) εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὰ ἀκόλουθα δύο ἀλγεβρικὰ συστήματα:

$$\left\{\begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \chi-\psi=4\kappa\pi+2\varphi \end{array}\right\},\quad \left\{\begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \chi-\psi=4\kappa\pi-2\varphi \end{array}\right\}\quad (\kappa\in Z)$$

Αἱ λύσεις τῶν συστημάτων τούτων ἀντιστοίχως εἶναι: $\left\{ \chi = 2\kappa\pi + \varphi + \frac{\alpha}{2},\ \psi = -2\kappa\pi - \varphi + \frac{\alpha}{2} \right\}$ καὶ $\left\{ \chi = 2\kappa\pi - \varphi + \frac{\alpha}{2},\ \psi = -2\kappa\pi + \varphi + \frac{\alpha}{2} \right\}$, ὅπου $\kappa \in Z$ καὶ $\alpha \neq 2\kappa\pi$.

ii) Ἐὰν $\eta\mu\frac{\alpha}{2} = 0$ ($\iff \alpha = 2\kappa\pi,\ \kappa \in Z$), τότε, ἐὰν μὲν $\beta \neq 0$, ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος καὶ συνεπῶς τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον, ἐὰν δὲ $\beta = 0$, ἡ (1) εἶναι ἀόριστος. Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) ἐπαληθεύεται διὰ κάθε ζεῦγος (χ, ψ) τόξων καὶ συνεπῶς ἡ λύσις τοῦ συστήματος εἶναι: $\chi = \theta$, $\psi = \alpha - \theta$ μὲ $\theta \in R$ (τυχόν).

Ἀναλόγως ἐπιλύονται τὰ ὑπόλοιπα συστήματα τῆς ὁμάδος (Α).

Παρατήρησις. Ἡ συνθήκη δυνατότητος τοῦ ἀνωτέρω ἐπιλυθέντος συστήματος (Σ) εἶναι: $\left| \frac{\beta}{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}} \right| \leq 1 \iff \beta^2 \leq 4\,\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}$. Τὴν συνθήκην ταύτην εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς: Ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (Σ) ἔχομεν $\psi = \alpha - \chi$, ὁπότε ἡ δευτέρα τῶν ἐξισώσεων γράφεται:

$$\eta\mu\chi + \eta\mu(\alpha - \chi) = \beta \iff \eta\mu\chi + \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\chi - \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\chi = \beta \iff$$
$$(1 - \sigma\upsilon\nu\alpha)\,\eta\mu\chi + \eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\chi = \beta \qquad (E).$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha\eta\mu\chi + \beta\ \sigma\upsilon\nu\chi = \gamma$, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ συνθήκη δυνατότητος εἶναι $\alpha^2 + \beta^2 \geqslant \gamma^2$. Ἡ συνθήκη αὕτη διὰ τὴν (Ε) εἶναι:

$$(1 - \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 + \eta\mu^2\alpha \geqslant \beta^2 \iff 4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2} \geqslant \beta^2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ἐπιλυθῆ τὸ σύστημα: $\begin{cases} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ \eta\mu\chi - \eta\mu\psi = \frac{1}{2} \end{cases}$

Ἐπίλυσις: Τὸ σύστημα τοῦτο ἰσοδυνάμως γράφεται:

$$\begin{cases} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ 2\eta\mu\frac{\chi - \psi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\chi + \psi}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ 2\eta\mu\frac{\pi}{6}\sigma\upsilon\nu\frac{\chi + \psi}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu\frac{\chi + \psi}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ \chi + \psi = 4\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (\kappa \in Z)$$

Ἄρα, τὸ πρὸς ἐπίλυσιν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὰ κάτωθι δύο ἀλγεβρικὰ συστήματα:

$$\begin{cases} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ \chi + \psi = 4\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad \text{καὶ} \quad \begin{cases} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ \chi + \psi = 4\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases},$$

τὰ ὁποῖα ἐπιλύονται εὐκόλως καὶ προσδιορίζομεν τὰ ἄγνωστα τόξα χ καὶ ψ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα: $\begin{cases} \chi+\psi=3\pi \\ \eta\mu\chi+\eta\mu\psi=1 \end{cases}$ (Σ)

Ἐπίλυσις : Ἔχομεν:

$$(\Sigma) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \psi=3\pi-\chi \\ \eta\mu\chi+\eta\mu(3\pi-\chi)=1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \psi=3\pi-\chi \\ \eta\mu\chi+\eta\mu\chi=1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \psi=3\pi-\chi \\ \eta\mu\chi=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \psi=3\pi-\chi \\ \chi=\kappa\pi+(-1)^{\kappa}\frac{\pi}{6} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \psi=3\pi-\kappa\pi-(1)^{\kappa}\frac{\pi}{6} \\ \chi=\kappa\pi+(-1)^{\kappa}\frac{\pi}{6} \end{array}\right\} (\kappa\in Z)$$

2.1.2. Ἐπίλυσις τοῦ συστήματος : $\begin{cases} \chi+\psi=\alpha \\ \eta\mu\chi\eta\mu\psi=\beta \end{cases}$ (Σ)

Τὸ δοθὲν σύστημα ἰσοδυνάμως γράφεται:

$$(\Sigma) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)-\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)=2\beta \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)-\sigma\upsilon\nu\alpha=2\beta \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi+\psi=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)=2\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha \quad (1) \end{cases}$$

Ἐὰν $|2\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha|>1$, ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος καὶ συνεπῶς τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον. Ἐὰν ὅμως $|2\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha|\leq 1$, τότε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τόξον φ τοιοῦτον, ὥστε $\sigma\upsilon\nu\varphi=2\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha$, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται $\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)=\sigma\upsilon\nu\varphi$. Ἡ γενικὴ λύσις αὐτῆς εἶναι $\chi-\psi=2\kappa\pi\pm\varphi$ $(\kappa\in Z)$ καὶ συνεπῶς τὸ σύστημα (Σ) εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὰ ἑπόμενα δύο συστήματα:

$$\left\{\begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \chi-\psi=2\kappa\pi+\varphi \end{array}\right\} (\Sigma_1), \qquad \left\{\begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \chi-\psi=2\kappa\pi-\varphi \end{array}\right\} (\Sigma_2)$$

Εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι αἱ λύσεις τῶν συστημάτων (Σ_1) καὶ (Σ_2) ἀντιστοίχως εἶναι:

$$\chi=\kappa\pi+\frac{\varphi}{2}+\frac{\alpha}{2},\ \psi=-\kappa\pi-\frac{\varphi}{2}+\frac{\alpha}{2} \text{ καὶ } \chi=\kappa\pi-\frac{\varphi}{2}+\frac{\alpha}{2},\ \psi=-\kappa\pi+\frac{\varphi}{2}+\frac{\alpha}{2}.$$

Παρατήρησις. Ἡ συνθήκη δυνατότητος ἐπιλύσεως τοῦ ἀνωτέρω συστήματος δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν $-\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}\leq\beta\leq\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}$ (διατί;).

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐπιλύονται καὶ τὰ ὑπόλοιπα συστήματα τῆς ὁμάδος (Β).

2.1.3. Ἐπίλυσις τοῦ συστήματος : $\begin{cases} \chi+\psi=\alpha \\ \varepsilon\varphi\chi+\varepsilon\varphi\psi=\beta\ (\chi,\psi\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in Z) \end{cases}$ (Σ)

Πρὸ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος ὑπενθυμίζομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις ἐφαπτομένη δὲν εἶναι ὡρισμένη (δὲν ἔχει ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ) διὰ τὰ τόξα $\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in Z$ καὶ συνεπῶς θὰ πρέπει νὰ ὑποθέσωμεν $\chi, \psi \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in Z$.

Ἐν συνεχείᾳ, τὸ πρὸς λύσιν σύστημα (Σ) μετασχηματίζεται ἰσοδυνάμως ὡς ἑξῆς:

$$(\Sigma) \iff \left\{ \begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \dfrac{\eta\mu(\chi+\psi)}{\sigma\upsilon\nu\chi\,\sigma\upsilon\nu\psi}=\beta \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\chi\,\sigma\upsilon\nu\psi}=\beta \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \beta\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi=\eta\mu\alpha \end{array} \right\}$$

i) Ἐὰν $\beta \neq 0$, τότε ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ τελευταίου συστήματος γράφεται:

$\sigma\upsilon\nu\chi\,\sigma\upsilon\nu\psi=\frac{\eta\mu\alpha}{\beta}$ καὶ συνεπῶς ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν τὸ σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu\chi\,\sigma\upsilon\nu\psi=\dfrac{\eta\mu\alpha}{\beta} \end{array} \right. ,$$

τὸ ὁποῖον ἐπιλύομεν ἀκριβῶς ὅπως καὶ τὸ 2.1.2.

ii) Ἐὰν $\beta = 0$, τότε ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ δοθέντος συστήματος (Σ) μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\varepsilon\varphi\chi+\varepsilon\varphi\psi=0 \iff \varepsilon\varphi\chi=-\varepsilon\varphi\psi \iff \varepsilon\varphi\chi=\varepsilon\varphi(-\psi) \iff \chi=\kappa\pi-\psi,\ \kappa\in Z \iff$$
$$\chi+\psi=\kappa\pi,\ \kappa\in Z.$$

Ἄρα, ἔχομεν νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ σύστημα: $\left\{ \begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \chi+\psi=\kappa\pi \end{array} \right.$ $(\kappa\in Z)$,

τὸ ὁποῖον προφανῶς εἶναι ἀδύνατον, ἐὰν $\alpha \neq \kappa\pi$ διὰ κάθε $\kappa \in Z$ καὶ ἀόριστον, ἐὰν $\alpha = \kappa\pi$ δι' ἓν $\kappa \in Z$.

2.1.4. Ἐπίλυσις τοῦ συστήματος : $\left\{ \begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \varepsilon\varphi\chi\,\varepsilon\varphi\psi=\beta\ (\chi,\psi\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in Z) \end{array} \right.$ (Σ)

Ἐκ τῆς δευτέρας τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (Σ) λαμβάνομεν:

$\frac{\eta\mu\chi\,\eta\mu\psi}{\sigma\upsilon\nu\chi\,\sigma\upsilon\nu\psi}=\beta$ καὶ ἐξ αὐτῆς, ἐφ' ὅσον $\beta \neq 1$, προκύπτει:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\chi\ \sigma\upsilon\nu\psi+\eta\mu\chi\ \eta\mu\psi}{\sigma\upsilon\nu\chi\ \sigma\upsilon\nu\psi-\eta\mu\chi\ \eta\mu\psi}=\frac{1+\beta}{1-\beta} \iff \frac{\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)}{\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)}=\frac{1+\beta}{1-\beta}.$$

Συνεπῶς ἔχομεν:

$$(\Sigma) \iff \left\{ \begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)}{\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)}=\dfrac{1+\beta}{1-\beta} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=\dfrac{1+\beta}{1-\beta} \end{array} \right\} \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)=\dfrac{1+\beta}{1-\beta}\,\sigma\upsilon\nu\alpha \end{array} \right\}$$

Ἐὰν $\left|\frac{1+\beta}{1-\beta}\sigma\upsilon\nu\alpha\right|>1$, τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον. Ἔστω $\left|\frac{1+\beta}{1-\beta}\sigma\upsilon\nu\alpha\right|\leqslant 1$. Τότε ἡ τελευταία ἐξίσωσις ἐπιλύεται κατὰ τὰ γνωστὰ καὶ εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν $\chi-\psi$.

Ἐὰν $\beta=1$, ἡ δευτέρα τῶν ἐξισώσεων τοῦ δοθέντος συστήματος (Σ) μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\varepsilon\varphi\chi\,\varepsilon\varphi\psi=1 \iff \varepsilon\varphi\chi=\sigma\varphi\psi \iff \varepsilon\varphi\chi=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right) \iff$$

$$\chi=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-\psi,\ \kappa\in Z \iff \psi+\chi=\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in Z.$$

Οὕτως ἔχομεν νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ σύστημα:

$$\begin{cases}\chi+\psi=\alpha\\ \chi+\psi=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\quad(\kappa\in Z)$$

Τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, ἐφ' ὅσον $\alpha\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ διὰ κάθε $\kappa\in Z$ καὶ ἔχει λύσιν, ἐφ' ὅσον $\alpha=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ δι' ἓν $\kappa\in Z$. Ἡ λύσις αὕτη εἶναι: $\chi=\theta$, $\psi=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-\theta$ μὲ $\kappa\in Z$ καὶ $\theta\in R$ (τυχόν).

Τονίζομεν ἰδιαιτέρως, ὅτι εἰς τὰς λύσεις τοῦ ἀνωτέρω συστήματος (Σ) ὑπάρχει ὁ περιορισμὸς $\chi,\psi\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$. π.χ. θὰ πρέπει εἰς τὰς τελευταίας εὑρεθείσας λύσεις νὰ εἶναι $\theta\neq 0$.

2.1.5. Ἐπίλυσις τοῦ συστήματος : $\begin{cases}\chi+\psi=\alpha\\ \dfrac{\varepsilon\varphi\chi}{\varepsilon\varphi\psi}=\beta\end{cases}$. (Σ)

Ἡ δευτέρα τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (Σ) ἔχει ἔννοιαν, ἐφ' ὅσον $\chi,\psi\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ καὶ $\psi\neq\kappa\pi$ $(\kappa\in Z)$. Ἐν συνεχείᾳ αὕτη, βάσει γνωστῆς ἰδιότητος τῶν ἀναλογιῶν καὶ μὲ $\beta\neq\pm1$, γράφεται:

$$\frac{\varepsilon\varphi\chi+\varepsilon\varphi\psi}{\varepsilon\varphi\chi-\varepsilon\varphi\psi}=\frac{\beta+1}{\beta-1} \iff \frac{\eta\mu(\chi+\psi)}{\eta\mu(\chi-\psi)}=\frac{\beta+1}{\beta-1} \iff (\beta+1)\eta\mu(\chi-\psi)=(\beta-1)\eta\mu(\chi+\psi)$$

Οὕτω, τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἀκόλουθον γνωστὸν σύστημα :

$$\begin{cases}\chi+\psi=\alpha\\ \eta\mu(\chi-\psi)=\dfrac{\beta-1}{\beta+1}\eta\mu\alpha\end{cases}$$

Ἀπομένει νὰ ἐξετάσωμεν τὰς περιπτώσεις $\beta=1$ καὶ $\beta=-1$. Κατ' αὐτὰς ἡ δευτέρα τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (Σ) λαμβάνει ἁπλουστέραν μορφὴν καὶ οὕτως εὑρίσκομεν ἀμέσως ἀλεγβρικὴν ἐξίσωσιν τῶν χ,ψ καὶ τὸ σύστημα ἐπιλύεται εὐκόλως.

Τὰ ὑπόλοιπα συστήματα τῆς ὁμάδος (Γ), ὡς καὶ τὰ συστήματα τῆς ὁμάδος (Δ), ἐπιλύονται ἀναλόγως.

2.1.6. Ἐπίλυσις τοῦ συστήματος : $\begin{cases} \chi+\psi=\alpha \\ \dfrac{\eta\mu\chi}{\eta\mu\psi}=\beta \; (\psi \neq \kappa\pi, \kappa\in Z) \end{cases}$ (Σ)

Ἐκ τῆς δευτέρας τῶν ἐξισώσεων, ἐφ' ὅσον $\beta \neq 1$, ἔχομεν:

$$\frac{\eta\mu\chi+\eta\mu\psi}{\eta\mu\chi-\eta\mu\psi}=\frac{\beta+1}{\beta-1} \iff \frac{2\eta\mu\frac{\chi+\psi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\chi-\psi}{2}}{2\eta\mu\frac{\chi-\psi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\chi+\psi}{2}}=\frac{\beta+1}{\beta-1} \iff$$

$$\varepsilon\varphi\,\frac{\chi+\psi}{2}\,\sigma\varphi\frac{\chi-\psi}{2}=\frac{\beta+1}{\beta-1}$$

Ἄρα, τὸ σύστημα (Σ) ἰσοδυνάμως γράφεται:

$$(\Sigma) \iff \left\{\begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \varepsilon\varphi\,\dfrac{\chi+\psi}{2}\sigma\varphi\dfrac{\chi-\psi}{2}=\dfrac{\beta+1}{\beta-1} \end{array}\right\} \iff \begin{cases} \chi+\psi=\alpha \\ \varepsilon\varphi\,\dfrac{\alpha}{2}\sigma\varphi\,\dfrac{\chi-\psi}{2}=\dfrac{\beta+1}{\beta-1} \end{cases} \quad (1)$$

$$(\alpha \neq 2\kappa\pi+\pi, \; \kappa\in Z)$$

i) Ἐὰν $\varepsilon\varphi\,\frac{\alpha}{2} \neq 0$ ($\iff \alpha = 2\kappa\pi, \kappa\in Z$), τότε ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν τὸ ἀκόλουθον γνωστὸν σύστημα:

$$\begin{cases} \chi+\psi=\alpha \\ \sigma\varphi\,\dfrac{\chi-\psi}{2}=\dfrac{\beta+1}{\beta-1}\sigma\varphi\,\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

ii) Ἐὰν $\varepsilon\varphi\,\frac{\alpha}{2}=0$ ($\iff \alpha=2\kappa\pi, \kappa\in Z$), τότε ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος, ἐφ' ὅσον $\beta \neq -1$ καὶ ἀόριστος, ἐὰν $\beta=-1$, ὁπότε αἱ λύσεις εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν εἶναι: $\chi=\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{2}$, $\psi=\frac{\alpha}{2}-\frac{\theta}{2}$ μὲ $\theta\in R$ (τυχόν).

Ἐξετάζομεν ἐπὶ πλέον τὴν περίπτωσιν $\alpha=2\kappa\pi+\pi$, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ $\varepsilon\varphi\,\frac{\alpha}{2}$ δὲν ὁρίζεται καὶ συνεπῶς δὲν δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν ἀνωτέρω ἐκτεθέντα τρόπον διὰ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (1). Ἐὰν λοιπὸν εἶναι $\alpha=2\kappa\pi+\pi$, $\kappa\in Z$, τότε τὸ δοθὲν σύστημα γράφεται:

$$\left\{\begin{array}{l} \chi+\psi=2\kappa\pi+\pi \\ \dfrac{\eta\mu\chi}{\eta\mu(2\kappa\pi+\pi-\chi)}=\beta \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \chi+\psi=2\kappa\pi+\pi \\ 1=\beta \end{array}\right\} \quad (\kappa\in Z)$$

Τὸ τελευταῖον σύστημα εἶναι ἀδύνατον, ἐφ' ὅσον $\beta \neq 1$ καὶ ἀόριστον, ἐὰν $\beta = 1$.

'Εάν, τέλος, ὑποθέσωμεν ὅτι $\beta = 1$, ἡ δευτέρα τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (Σ) λαμβάνει ἁπλουστάτην μορφὴν καὶ τὸ σύστημα λύεται εὐκόλως. Καθ' ὅμοιον ἀκριβῶς τρόπον ἐπιλύονται καὶ τὰ ὑπόλοιπα συστήματα τῆς ὁμάδος (Ε).

2.2. Συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὰ τόξα. Τὰ κλασσικὰ συστήματα τῆς κατηγορίας ταύτης εἶναι τὰ κάτωθι:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{ημ}\chi + \text{ημ}\psi = \alpha \\ \text{συν}\chi\,\text{συν}\psi = \beta \end{array}\right\}, \quad \left\{\begin{array}{l} \text{ημ}\chi\;\text{ημ}\psi = \alpha \\ \text{συν}\chi + \text{συν}\psi = \beta \end{array}\right\},$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{ημ}\chi\;\text{ημ}\psi = \alpha \\ \text{ημ}\chi + \text{ημ}\psi = \beta \end{array}\right\}, \quad \left\{\begin{array}{l} \text{συν}\chi\;\text{συν}\psi = \alpha \\ \text{ημ}\chi + \text{ημ}\psi = \beta \end{array}\right\} \text{ κ.λ.π}$$

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν ἑνὸς συμμετρικοῦ τριγωνομετρικοῦ συστήματος, ἐπιδιώκομεν νὰ μετασχηματίσωμεν τοῦτο εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ἐμφανισθοῦν ἄγνωστα τόξα τὰ $\chi+\psi$ καὶ $\chi-\psi$.

2.2.1. 'Επίλυσις τοῦ συστήματος : $\left\{\begin{array}{l} \text{συν}\chi\;\text{συν}\psi = \alpha \\ \text{ημ}\chi\;\text{ημ}\psi = \beta \end{array}\right.$ (Σ)

Τὸ δοθὲν σύστημα μετασχηματίζεται ἰσοδυνάμως ὡς ἑξῆς:

$$(\Sigma) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{συν}(\chi-\psi) + \text{συν}(\chi+\psi) = 2\alpha \\ \text{συν}(\chi-\psi) - \text{συν}(\chi+\psi) = 2\beta \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{συν}(\chi-\psi) = \alpha+\beta \\ \text{συν}(\chi+\psi) = \alpha-\beta \end{array}\right\}$$

Τὸ τελευταῖον σύστημα ἔχει λύσιν, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν $|\alpha+\beta| \leq 1$ καὶ $|\alpha-\beta| \leq 1$. 'Εν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὑπάρχουν τόξα $\varphi_1, \varphi_2, \in R$ μὲ $\varphi_1, \varphi_2, \in [0,\pi]$, τοιαῦτα, ὥστε $\text{συν}\varphi_1 = \alpha+\beta$ καὶ $\text{συν}\varphi_2 = \alpha-\beta$ καὶ συνεπῶς τὸ σύστημα γράφεται:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{συν}(\chi-\psi) = \text{συν}\varphi_1 \\ \text{συν}(\chi+\psi) = \text{συν}\varphi_2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \chi-\psi = 2\kappa\pi \pm \varphi_1 \\ \chi+\psi = 2\rho\pi \pm \varphi_2 \end{array}\right\} \quad (\kappa, \rho \in Z)$$

Ἤτοι τὸ δοθὲν σύστημα (Σ) εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὰ κάτωθι συστήματα :

$$\left\{\begin{array}{l} \chi-\psi = 2\kappa\pi + \varphi_1 \\ \chi+\psi = 2\rho\pi + \varphi_2 \end{array}\right\}, \quad \left\{\begin{array}{l} \chi-\psi = 2\kappa\pi + \varphi_1 \\ \chi+\psi = 2\rho\pi - \varphi_2 \end{array}\right\},$$

$$\left\{\begin{array}{l} \chi-\psi = 2\kappa\pi - \varphi_1 \\ \chi+\psi = 2\rho\pi + \varphi_2 \end{array}\right\}, \quad \left\{\begin{array}{l} \chi-\psi = 2\kappa\pi - \varphi_1 \\ \chi+\psi = 2\rho\pi - \varphi_2 \end{array}\right\}$$

Τὰ ἀνωτέρω συστήματα εἶναι ἀλγεβρικὰ καὶ ἐπιλύονται εὐκόλως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα : $\left\{\begin{array}{l} \text{ημ}\chi + \text{ημ}\psi = 1 \\ \text{συν}\chi\;\text{συν}\psi = \dfrac{3}{4} \end{array}\right.$ (Σ)

Λύσις : Ἔχομεν: $(\Sigma) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\eta\mu \dfrac{\chi+\psi}{2} \sigma\upsilon\nu \dfrac{\chi-\psi}{2} = 1 \\ \sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)+\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi) = \dfrac{3}{2} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta\mu \dfrac{\chi+\psi}{2} \sigma\upsilon\nu \dfrac{\chi-\psi}{2} = \dfrac{1}{2} \\ 2\sigma\upsilon\nu^2 \dfrac{\chi-\psi}{2} - 1 + 1 - 2\eta\mu^2 \dfrac{\chi+\psi}{2} = \dfrac{3}{2} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu \dfrac{\chi+\psi}{2} \sigma\upsilon\nu \dfrac{\chi-\psi}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \sigma\upsilon\nu^2 \dfrac{\chi-\psi}{2} - \eta\mu^2 \dfrac{\chi+\psi}{2} = \dfrac{3}{4} \end{array} \right.$$

Ἐν συνεχείᾳ, θέτοντες $\eta\mu \dfrac{\chi+\psi}{2} = \omega$ καὶ $\sigma\upsilon\nu \dfrac{\chi-\psi}{2} = \varphi$, ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν τὸ ἀλγεβρικὸν σύστημα: $\{ \omega\varphi = \dfrac{1}{2},\ \varphi^2 - \omega^2 = \dfrac{3}{4} \}$. Αἱ λύσεις αὐτοῦ εἶναι $\varphi = 1$, $\omega = \dfrac{1}{2}$ καὶ $\varphi = -1$, $\omega = -\dfrac{1}{2}$, ὁπότε ἀναγόμεθα εἰς τὰ κάτωθι τριγωνομετρικὰ συστήματα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu \dfrac{\chi-\psi}{2} = 1 \\ \eta\mu \dfrac{\chi+\psi}{2} = \dfrac{1}{2} \end{array} \right\} (\Sigma_1), \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu \dfrac{\chi-\psi}{2} = -1 \\ \eta\mu \dfrac{\chi+\psi}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right\} (\Sigma_2)$$

Τὸ σύστημα (Σ_1) εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὰ ἀκόλουθα ἀλγεβρικὰ συστήματα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\chi-\psi}{2} = 2\kappa\pi \\ \dfrac{\chi+\psi}{2} = 2\lambda\pi + \dfrac{\pi}{6} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\chi-\psi}{2} = 2\kappa\pi \\ \dfrac{\chi+\psi}{2} = 2\lambda\pi + \dfrac{5\pi}{6} \end{array} \right\} (\kappa, \lambda \in Z)$$

Ἐκ τοῦ πρώτου εὑρίσκομεν: $\chi = 2(\kappa+\lambda)\pi + \dfrac{\pi}{6}$, $\psi = 2(\lambda-\kappa)\pi + \dfrac{\pi}{6}$

Ἐκ τοῦ δευτέρου εὑρίσκομεν: $\chi = 2(\kappa+\lambda)\pi + \dfrac{5\pi}{6}$, $\psi = 2(\lambda-\kappa) + \dfrac{5\pi}{6}$

Ὁμοίως ἐπιλύεται καὶ τὸ σύστημα (Σ_2).

2.3. Ἐκ μιᾶς τοὐλάχιστον τῶν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος προκύπτει ἀμέσως ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις τῶν ἀγνώστων τόξων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: $\left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(\chi+\psi) = 1 \\ 2\eta\mu\chi + \eta\mu\psi = 0 \end{array} \right. \quad (\Sigma)$

Λύσις : Ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων τοῦ δοθέντος συστήματος (Σ) λαμβάνομεν:

$$\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi) = \sigma\upsilon\nu 0 \Longleftrightarrow \chi+\psi = 2\kappa\pi, \kappa \in Z \Longleftrightarrow \psi = 2\kappa\pi - \chi, \kappa \in Z$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων τοῦ (Σ), ἔχομεν:

$$2\eta\mu\chi + \eta\mu(2\kappa\pi - \chi) = 0 \iff 2\eta\mu\chi - \eta\mu\chi = 0 \iff \eta\mu\chi = 0 \iff \eta\mu\chi = 0 \iff \chi = \rho\pi,\ \rho \in Z$$

Ἄρα, ἡ λύσις τοῦ συστήματος εἶναι: $\chi = \rho\pi,\ \psi = 2\kappa\pi - \rho\pi$ $(\kappa, \rho \in Z)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: $\begin{cases} \eta\mu\chi = \eta\mu\left(\psi + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4} - \chi\right) = 2\eta\mu^2\dfrac{\psi}{2} + \sigma\upsilon\nu\left(\psi + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

Ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν τὰς ἀλγεβρικὰς ἐξισώσεις:

$$\left(\chi = 2\kappa\pi + \psi + \frac{\pi}{4},\ \chi = 2\kappa\pi + \pi - \psi - \frac{\pi}{4}\right) \iff$$

$$\left(\chi = 2\kappa\pi + \psi + \frac{\pi}{4},\ \ \chi = 2\kappa\pi - \psi + \frac{3\pi}{4}\right).$$

Ἐξ ἄλλου, ἡ δευτέρα τῶν ἐξισώσεων τοῦ δοθέντος συστήματος γράφεται: $\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4} - \chi\right) = 1 - \sigma\upsilon\nu\psi - \eta\mu\psi$. Συνεπῶς, τὸ πρὸς ἐπίλυσιν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὰ κάτωθι δύο συστήματα:

$$\left.\begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \psi + \dfrac{\pi}{4} \\ \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4} - \chi\right) = 1 - \sigma\upsilon\nu\psi - \eta\mu\psi \end{cases}\right\}(\Sigma_1) \quad \text{καὶ} \quad \left.\begin{cases} \chi = 2\kappa\pi - \psi + \dfrac{3\pi}{4} \\ \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4} - \chi\right) = 1 - \sigma\upsilon\nu\psi - \eta\mu\psi \end{cases}\right\}(\Sigma_2)$$

Ἐν συνεχείᾳ ἔχομεν:

$$(\Sigma_1) \iff \left\{\begin{array}{l} \chi = 2\kappa\pi + \psi + \dfrac{\pi}{4} \\ \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4} - 2\kappa\pi - \psi - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 - \sigma\upsilon\nu\psi - \eta\mu\psi \end{array}\right\} \iff$$

$$\left\{\begin{array}{l} \chi = 2\kappa\pi + \psi + \dfrac{\pi}{4} \\ -\eta\mu\psi = 1 - \sigma\upsilon\nu\psi - \eta\mu\psi \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \chi = 2\kappa\pi + \psi + \dfrac{\pi}{4} \\ \sigma\upsilon\nu\psi = 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \chi = 2\kappa\pi + \psi + \dfrac{\pi}{4} \\ \psi = 2\lambda\pi \end{array}\right\}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \chi = 2(\kappa + \lambda)\pi + \dfrac{\pi}{4} \\ \psi = 2\lambda\pi \end{array}\right\} \quad (\kappa, \lambda \in Z)$$

Ἀναλόγως, ἐπιλύοντες τὸ (Σ_2) εὑρίσκομεν: $\left\{\begin{array}{l} \chi = 2(\kappa - \lambda)\pi + \dfrac{\pi}{4} \\ \psi = 2\lambda\pi + \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\}$ $(\kappa, \lambda \in Z)$

3. Συστήματα περισσοτέρων τῶν δύο ἀγνώστων

Ἐπιλύομεν κατωτέρω ἓν χαρακτηριστικὸν σύστημα τριῶν ἀγνώστων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα: $\begin{cases} \chi+\psi+\omega=\pi \\ \dfrac{\sigma\varphi\chi}{\alpha}=\dfrac{\sigma\varphi\psi}{\beta}=\dfrac{\sigma\varphi\omega}{\gamma} \end{cases}$ $(\alpha\beta\gamma\neq 0)$ (Σ)

Ἐπίλυσις : Γνωρίζομεν ὅτι, ἐὰν $\chi+\psi+\omega=\pi$, τότε $\sigma\varphi\chi\,\sigma\varphi\psi+\sigma\varphi\psi\,\sigma\varphi\omega+\sigma\varphi\omega\,\sigma\varphi\chi=1$. Συνεπῶς ἔχομεν:

$$(\Sigma) \iff \begin{cases} \sigma\varphi\chi\,\sigma\varphi\psi+\sigma\varphi\psi\,\sigma\varphi\omega+\sigma\varphi\omega\,\sigma\varphi\chi=1 & (1) \\ \chi+\psi+\omega=\pi & (2) \\ \sigma\varphi\chi=\lambda\alpha & (3) \\ \sigma\varphi\psi=\lambda\beta & (4) \\ \sigma\varphi\omega=\lambda\gamma & (5) \end{cases} \quad (\Sigma')$$

Ἡ (1), δυνάμει τῶν (3), (4) καὶ (5), γράφεται $\lambda^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=1$. Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν μὲν $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\leq 0$, τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον, ἐὰν δὲ $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha>0$, τότε $\lambda=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}}$. Θέτομεν $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}}=\lambda_1$ καὶ $\dfrac{-1}{\sqrt{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}}=\lambda_2$. Τὸ σύστημα (Σ') εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὰ κάτωθι δύο συστήματα:

$$\left\{\begin{array}{l} \chi+\psi+\omega=\pi \\ \sigma\varphi\chi=\lambda_1\alpha \\ \sigma\varphi\psi=\lambda_1\beta \\ \sigma\varphi\omega=\lambda_1\gamma \end{array}\right\} (\Sigma_1) \text{ καὶ } \left\{\begin{array}{l} \chi+\psi+\omega=\pi \\ \sigma\varphi\chi=\lambda_2\alpha \\ \sigma\varphi\psi=\lambda_2\beta \\ \sigma\varphi\omega=\lambda_2\gamma \end{array}\right\} (\Sigma_2)$$

Ἔστωσαν ω_1, ω_2 καὶ ω_3 τὰ τόξα τοῦ διαστήματος $(0,\pi)$ τοιαῦτα, ὥστε $\sigma\varphi\omega_1=\lambda_1\alpha$, $\sigma\varphi\omega_2=\lambda_1\beta$ καὶ $\sigma\varphi\omega_3=\lambda_1\gamma$. Τότε ἔχομεν:

$$(\Sigma_1) \iff \left\{\begin{array}{l} \chi+\psi+\omega=\pi \\ \sigma\varphi\chi=\sigma\varphi\omega_1 \\ \sigma\varphi\psi=\sigma\varphi\omega_2 \\ \sigma\varphi\omega=\sigma\varphi\omega_2 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \chi+\psi+\omega=\pi \\ \chi=\kappa_1\pi+\omega_1 \\ \psi=\kappa_2\pi+\omega_2 \\ \omega=\kappa_3\pi+\omega_3 \end{array}\right\} (\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3\in Z)$$

Ἐκ τοῦ τελευταίου συστήματος λαμβάνομεν :

$$\chi+\psi+\omega=(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3)\pi+\omega_1+\omega_2+\omega_3 \iff \pi-(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3)\pi=\omega_1+\omega_2+\omega_3$$

Ἐπειδὴ ὅμως $\omega_i\in(0,\pi)$, $(i=1,2,3)$, συνάγεται :

$$0<\omega_1+\omega_2+\omega_3<3\pi \iff 0<\pi-(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3)\pi<3\pi \iff$$
$$-2<\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3<1 \iff (\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3)\in\{-1,0\}$$

Ἄρα, ἡ γενικὴ λύσις τοῦ συστήματος (Σ_1) εἶναι:
$\chi=\kappa_1\pi+\omega_1$, $\psi=\kappa_2\pi+\omega_2$, $\omega=\kappa_3\pi+\omega_3$ μὲ $(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3)\in\{-1,0\}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

18) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1) $\begin{cases} \chi+\psi=\dfrac{2\pi}{3} \\ \etaμ\chi\ \etaμ\psi=\dfrac{3}{4} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \chi+\psi=\dfrac{\pi}{4} \\ \etaμ^2\chi+\etaμ^2\psi=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4} \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \chi-\psi=\dfrac{\pi}{6} \\ \dfrac{εφ\chi}{εφ\psi}=3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \chi+\psi=\dfrac{\pi}{4} \\ εφ\chi+εφ\psi=1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \chi-\psi=\dfrac{\pi}{12} \\ εφ\chi=\sqrt{3}\ εφ\psi \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \chi+\psi=\dfrac{4\pi}{3} \\ \dfrac{συν\chi}{συν\psi}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

7) $\begin{cases} \chi+\psi=\dfrac{\pi}{4} \\ σφ\chi-σφ\psi=2 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \chi+\psi=\dfrac{\pi}{6} \\ \etaμ2\chi+\etaμ2\psi=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

19) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1) $\begin{cases} \chi-\psi=\dfrac{\pi}{3} \\ συν\chi+συν\psi=2\sqrt{6}\ συν\chi\ συν\psi \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \chi-\psi=\dfrac{\pi}{3} \\ 3\ (\etaμ\chi-\etaμ\psi)+4\etaμ\chi\ \etaμ\psi=3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \chi+2\psi=\dfrac{\pi}{2} \\ 3εφ\chi+12εφ\psi=5\sqrt{3} \end{cases}$

20) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1) $\begin{cases} 2συν\chi\ συν\psi=1 \\ εφ\chi+εφ\psi=2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \etaμ\chi\ \etaμ\psi=\dfrac{1}{4} \\ συν\chi\ συν\psi=\dfrac{3}{4} \end{cases}$ 3) $\begin{cases} εφ\chi+εφ\psi=2\sqrt{3} \\ σφ\chi+σφ\psi=2\sqrt{3} \end{cases}$

4) $\begin{cases} \etaμ\chi+\etaμ\psi=\sqrt{2} \\ \etaμ3\chi+\etaμ3\psi=\sqrt{2} \end{cases}$ 5) $\begin{cases} συν2\chi+συν2\psi=\dfrac{1}{2} \\ 2(\etaμ\chi+\etaμ\psi)=1+\sqrt{2} \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \etaμ\chi+\etaμ\psi=0 \\ συν\chi\ συν\psi=\dfrac{3}{4} \end{cases}$

7) $\begin{cases} \etaμ\chi-\etaμ\psi=1 \\ συν\chi\ συν\psi=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \etaμ\chi\ \etaμ\psi=\dfrac{1}{2} \\ εφ\chi+εφ\psi=2 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} \etaμ2\chi+\etaμ2\psi=1 \\ εφ\chi+εφ\psi=4 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2\etaμ(\chi-\psi)=1 \\ 2συν(\chi+\psi)=1 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 9εφ\chi+εφ\psi=4 \\ 2σφ\chi+4σφ\psi=1 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 2\etaμ\chi\ \etaμ\psi=1 \\ 2(συν2\psi-συν2\chi)=1 \end{cases}$

21) Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ διερευνηθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1) $\begin{cases} \chi+\psi=\alpha\ (\alpha\in R) \\ \etaμ^2\chi+\etaμ^2\psi=1-συν\alpha \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{\etaμ\chi}{\etaμ\psi}=\alpha \\ \chi-\psi=\beta \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \chi+\psi=\alpha \\ \etaμ^2\chi-\etaμ^2\psi=\beta \end{cases}$

4) $\begin{cases} \chi+\psi=2\alpha \\ \etaμ\chi+\etaμ\psi=\beta(\etaμ\chi-\etaμ\psi) \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \etaμ\chi+\etaμ\psi=2\lambda\etaμ\alpha \\ συν\chi+συν\psi=2\lambdaσυν\alpha \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \etaμ\chi\ \etaμ\psi=\alpha \\ συν\chi+συν\psi=\beta \end{cases}$

7) $\begin{cases} συν\chi+συν\psi=\alpha \\ εφ\ \dfrac{\chi}{2}+εφ\ \dfrac{\psi}{2}=\beta \end{cases}$ 8) $\begin{cases} συν\chi+συν\psi=1 \\ συν\ \dfrac{\chi}{2}+συν\ \dfrac{\psi}{2}=\lambda \end{cases}$

22) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1) $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\chi\ \eta\mu\psi + \varepsilon\varphi\chi\ \varepsilon\varphi\psi = 0 \\ \varepsilon\varphi\chi\ \varepsilon\varphi\psi = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = \sqrt{2} \\ \varepsilon\varphi\chi + \varepsilon\varphi\psi = 2\eta\mu(\chi+\psi) \end{cases}$

3) $\begin{cases} \eta\mu\chi = \eta\mu\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) \\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) = 2\eta\mu^2\frac{\psi}{2} + \sigma\upsilon\nu\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \eta\mu\chi = \sigma\upsilon\nu 2\psi \\ \sigma\upsilon\nu\psi = \eta\mu 2\chi \end{cases}$

5) $\begin{cases} \left(\eta\mu\frac{\chi+\psi}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{\chi-\psi}{2}\right)^2 = 1 - \eta\mu\chi \\ \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = \frac{3}{2} \end{cases}$

23) Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ διερενηθοῦν τὰ συστήματα:

1) $\begin{cases} \eta\mu\chi = \eta\mu(\psi+\alpha)\ \varepsilon\varphi\alpha \\ \eta\mu(\alpha-\chi) = 2\eta\mu^2\frac{\psi}{2} + \sigma\upsilon\nu(\psi+2\alpha) \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \varepsilon\varphi\chi = \lambda\varepsilon\varphi 2\psi \\ \varepsilon\varphi\psi = \lambda\varepsilon\varphi 2\chi \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \eta\mu\psi = \lambda\eta\mu\chi \\ 2\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = 1 \end{cases}$

24) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα:

1) $\begin{cases} \chi+\psi+\omega = \pi \\ \varepsilon\varphi\chi + \varepsilon\varphi\psi = 3 \\ \varepsilon\varphi\psi + \varepsilon\varphi\omega = 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = \sigma\upsilon\nu\omega \\ \sigma\upsilon\nu 2\chi + \sigma\upsilon\nu 2\psi = \sigma\upsilon\nu 2\omega \\ \sigma\upsilon\nu 3\chi + \sigma\upsilon\nu 3\psi = \sigma\upsilon\nu 3\omega \end{cases}$

3) $\begin{cases} \chi+\psi+\omega = \pi \\ \varepsilon\varphi\frac{\chi}{2}\ \varepsilon\varphi\frac{\chi}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3} \\ \varepsilon\varphi\frac{\psi}{2}\ \varepsilon\varphi\frac{\omega}{2} = \sqrt{3}-\sqrt{2} \\ \chi,\psi,\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \varepsilon\chi\varphi + \varepsilon\varphi\psi + \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\chi\ \varepsilon\varphi\psi\ \varepsilon\varphi\omega \\ \sigma\varphi\chi\ \sigma\varphi\psi + \sigma\varphi\psi\ \sigma\varphi\omega + \sigma\varphi\omega\ \sigma\varphi\chi = 1 \\ \sigma\upsilon\nu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\psi + \sigma\upsilon\nu^2\omega - 2\sigma\upsilon\nu\chi\ \sigma\upsilon\nu\psi\ \sigma\upsilon\nu\omega = 1 \end{cases}$

25) Νὰ ἀποδειχθῆ ἡ ἰσοδυναμία:

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu(\alpha+\chi) + \sigma\upsilon\nu(\alpha+\psi) = 0 \\ \eta\mu\alpha + \eta\mu(\alpha+\chi) + \eta\mu(\alpha+\psi) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = 0 \\ \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = 0 \end{cases} \ (\alpha \in R)$$

καὶ νὰ ἐπιλυθῆ τὸ σύστημα. Ἐὰν (χ_0, ψ_0) εἶναι μία λύσις αὐτοῦ, δείξατε ὅτι τὰ πέρατα τῶν τόξων α, $\alpha+\chi_0$ καὶ $\alpha+\psi_0$, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, ἀποτελοῦν κορυφὰς ἰσοπλεύρου τριγώνου.

26) Νὰ ἐπιλυθῆ τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} \chi+\psi+\omega = \pi \\ \frac{\eta\mu\chi}{\alpha} = \frac{\eta\mu\psi}{\beta} = \frac{\eta\mu\omega}{\gamma}, \ \alpha\beta\gamma \neq 0 \end{cases}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΑΛΟΙΦΗ

1. Ἡ ἔννοια τῆς ἀπαλοιφῆς

1.1. Ἡ ἔννοια τῆς ἀπαλοιφῆς καὶ τῆς ἀπαλειφούσης, ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀλγέβρας, ὑπάρχει εἰς παραμετρικὸν σύστημα, τοῦ ὁποίου αἱ ἐξισώσεις εἶναι περισσότεραι τῶν ἀγνώστων.

Ἔστω ἓν τριγωνομετρικὸν παραμετρικὸν σύστημα μ ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους, ἔνθα μ>ν. Τὸ σύστημα τοῦτο, ὅπως καὶ εἰς τὴν Ἄλγεβραν, ἐνδέχεται νὰ ἔχῃ λύσιν ἢ νὰ μὴν ἔχῃ λύσιν. Δεχόμενοι ὅτι τὸ σύστημα ἔχει λύσιν, εὑρίσκομεν μίαν σχέσιν μεταξὺ τῶν παραμέτρων, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **ἀπαλείφουσαν** τοῦ συστήματος. Ἡ ἀπαλείφουσα, λοιπόν, ἐξ ὁρισμοῦ ἐκφράζει τὴν ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα τὸ σύστημα ἔχῃ λύσιν. Ἡ ἐργασία δέ, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὴν ἀπαλείφουσαν, καλεῖται **ἀπαλοιφὴ** τῶν θεωρουμένων ἀγνώστων ἢ ἁπλῶς ἀπαλοιφή.

Κατωτέρω ἀναφέρομεν ὡρισμένα παραδείγματα ἀπαλοιφῆς.

1.1.1. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος : $\left\{\begin{array}{l} \alpha\eta\mu\chi = \gamma \\ \beta\sigma\upsilon\nu\chi = \delta \end{array}\right.$ $(\alpha\beta \neq 0)$

Δεχόμεθα ὅτι τὸ σύστημα ἔχει λύσιν καὶ ἔστω $\chi = \chi_0$ μία λύσις αὐτοῦ. Τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\begin{array}{l} \alpha\eta\mu\chi_0 = \gamma \\ \beta\sigma\upsilon\nu\chi_0 = \delta \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \eta\mu\chi_0 = \dfrac{\gamma}{\alpha} \\ \sigma\upsilon\nu\chi_0 = \dfrac{\delta}{\beta} \end{array}\right\} \Rightarrow \eta\mu^2\chi_0 + \sigma\upsilon\nu^2\chi_0 = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{\delta^2} = 1$$

Ἡ τελευταία εὑρεθεῖσα σχέσις εἶναι ἡ ζητουμένη ἀπαλείφουσα.

1.1.2. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος : $\left\{\begin{array}{l}\sigma\varphi\chi\,(1+\eta\mu\chi)=4\alpha\\ \sigma\varphi\chi\,(1-\eta\mu\chi)=4\beta\end{array}\right.$

Ἔστω $\chi=\chi_0$ μία λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος. Τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma\varphi\chi_0\,(1+\eta\mu\chi_0)=4\alpha\\ \sigma\varphi\chi_0\,(1-\eta\mu\chi_0)=4\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\sigma\varphi\chi_0+\sigma\upsilon\nu\chi_0=4\alpha\\ \sigma\varphi\chi_0-\sigma\upsilon\nu\chi_0=4\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\sigma\varphi\chi_0=2\alpha+2\beta\\ \sigma\upsilon\nu\chi_0=2\alpha-2\beta\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi_0}{\eta\mu\chi_0}=2\alpha+2\beta\\ \sigma\upsilon\nu\chi_0=2\alpha-2\beta\end{array}\right\}$$

Ἐκ τῶν τελευταίων σχέσεων, ἐφ' ὅσον $\alpha^2-\beta^2\neq0$, λαμβάνομεν:

$$\left\{\begin{array}{l}\eta\mu\chi_0=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\\ \sigma\upsilon\nu\chi_0=2\alpha-2\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\eta\mu^2\chi_0+\sigma\upsilon\nu^2\chi_0=\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2+(2\alpha-2\beta)^2\Rightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2+4(\alpha-\beta)^2=1,$$

ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἡ ζητουμένη ἀπαλείφουσα.

1.1.3. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος :

$$\left\{\begin{array}{l}\chi+\psi=\alpha\\ \varepsilon\varphi\chi+\varepsilon\varphi\psi=\varepsilon\varphi\beta\qquad(\alpha,\beta,\gamma\in\mathrm{R})\\ \sigma\varphi\chi+\sigma\varphi\psi=\sigma\varphi\gamma\end{array}\right.$$

Ἐὰν (χ_0,ψ_0) εἶναι μία λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος, τότε προκύπτει:

$$\left\{\begin{array}{l}\chi_0+\psi_0=\alpha\\ \varepsilon\varphi\chi_0+\varepsilon\varphi\psi_0=\varepsilon\varphi\beta\\ \sigma\varphi\chi_0+\sigma\varphi\psi_0=\sigma\varphi\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\chi_0+\psi_0=\alpha\\ \dfrac{\eta\mu(\chi_0+\psi_0)}{\sigma\upsilon\nu\chi_0\,\sigma\upsilon\nu\psi_0}=\varepsilon\varphi\beta\\ \dfrac{\eta\mu(\chi_0+\psi_0)}{\eta\mu\chi_0\,\eta\mu\psi_0}=\sigma\varphi\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\chi_0+\psi_0=\alpha\\ \dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\chi_0\sigma\upsilon\nu\psi_0}=\varepsilon\varphi\beta\\ \dfrac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\chi_0\,\eta\mu\psi_0}=\sigma\varphi\gamma\end{array}\right.$$

Ἐκ τῶν τελευταίων σχέσεων, ἐφ' ὅσον $\eta\mu\alpha\;\varepsilon\varphi\beta\;\sigma\varphi\gamma\neq0$, λαμβάνομεν:

$$\left\{\begin{array}{l}\chi_0+\psi_0=\alpha\\ \sigma\upsilon\nu\chi_0\,\sigma\upsilon\nu\psi_0=\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\\ \eta\mu\chi_0\,\eta\mu\psi_0=\eta\mu\alpha\,\varepsilon\varphi\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\chi_0+\psi_0=\alpha\\ \sigma\upsilon\nu\chi_0\,\sigma\upsilon\nu\psi_0-\eta\mu\chi_0\,\eta\mu\psi_0=\eta\mu\alpha\,\sigma\varphi\beta-\eta\mu\alpha\,\varepsilon\varphi\gamma\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\chi_0+\psi_0=\alpha\\ \sigma\upsilon\nu\,(\chi_0+\psi_0)=\eta\mu\alpha\,(\sigma\varphi\beta-\varepsilon\varphi\gamma)\end{array}\right\}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\alpha=\eta\mu\alpha\,(\sigma\varphi\beta-\varepsilon\varphi\gamma)\Rightarrow$$

$$(\sigma\varphi\beta-\varepsilon\varphi\gamma)\,\varepsilon\varphi\alpha=1$$

Ἡ τελευταία εὑρεθεῖσα συνθήκη εἶναι ἡ ἀπαλείφουσα τοῦ δοθέντος συστήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

27) Νὰ ἀπαλειφθῇ τὸ χ μεταξὺ τῶν κάτωθι ἐξισώσεων:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \eta\mu\chi + \beta_1 \sigma\upsilon\nu\chi &= \gamma_1 \\ \alpha_2 \eta\mu\chi + \beta_2 \sigma\upsilon\nu\chi &= \gamma_2 \end{aligned} \qquad (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0)$$

28) Νὰ ἀπαλειφθῇ τὸ χ μεταξὺ τῶν κάτωθι ἐξισώσεων:

1) $\begin{aligned} \eta\mu(\chi+\alpha) &= \mu \\ \eta\mu(\chi+\beta) &= \nu \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi &= \alpha \\ \varepsilon\varphi 2\chi + \sigma\varphi 2\chi &= \beta \end{aligned}$ 3) $\begin{aligned} \sigma\varphi\chi(1+\eta\mu\chi) &= 4\alpha \\ \sigma\varphi\chi(1-\eta\mu\chi) &= 4\beta \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi &= \alpha \\ \eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^3\chi &= \beta \end{aligned}$ 5) $\begin{aligned} \varepsilon\varphi\chi + \sigma\varphi\chi &= \alpha \\ \eta\mu^2\chi\, \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi\, \eta\mu\chi &= \beta \end{aligned}$ 6) $\begin{aligned} \lambda\sigma\upsilon\nu 2\chi &= \sigma\upsilon\nu(\chi+\alpha) \\ \lambda\eta\mu 2\chi &= 2\eta\mu(\chi+\alpha) \end{aligned}$

7) $\begin{aligned} \alpha\eta\mu^2\chi + \beta\eta\mu\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi + \gamma\,\sigma\upsilon\nu^2\chi &= 0 \\ \alpha'\eta\mu^2\chi + \beta'\eta\mu\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi + \gamma'\sigma\upsilon\nu^2\chi &= 0 \end{aligned} \qquad (\alpha\alpha' \neq 0)$

29) Νὰ ἀπαλειφθῇ τὸ α μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων:

$$\begin{aligned} \chi^3\eta\mu\alpha + \psi^3\,\sigma\upsilon\nu\alpha &= \lambda^3\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha \\ \chi^3\sigma\upsilon\nu\alpha - \psi^3\eta\mu\alpha &= \lambda^3\sigma\upsilon\nu 2\alpha \end{aligned}$$

30) Νὰ ἀπαλειφθοῦν τὰ χ καὶ ψ μεταξὺ τῶν κάτωθι ἐξισώσεων:

1) $\eta\mu\chi + \eta\mu\psi = \alpha, \quad \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = \beta, \quad \chi - \psi = \gamma$

2) $\eta\mu\chi + \eta\mu\psi = \alpha, \quad \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = \beta, \quad \varepsilon\varphi\dfrac{\chi}{2}\,\varepsilon\varphi\dfrac{\psi}{2} = \varepsilon\varphi^2\dfrac{\theta}{2}$

3) $\varepsilon\varphi\chi + \varepsilon\varphi\psi = \alpha, \quad \sigma\varphi\chi + \sigma\varphi\psi = \beta, \quad \chi + \psi = \gamma$

31) Ἐὰν αἱ ἐξισώσεις $\eta\mu\chi + \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu\chi = 1$ καὶ $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \lambda$ ἔχουν κοινὴν λύσιν, νὰ εὑρεθῇ τὸ λ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1. Ὁρισμοὶ — βασικαὶ ἔννοιαι

Ἐὰν εἰς ἓν τοὐλάχιστον τῶν μελῶν μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἀνισώσεως ὡς πρὸς χ περιέχωνται εἷς ἢ περισσότεροι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ χ, τότε ἡ ἀνίσωσις καλεῖται **τριγωνομετρικὴ ἀνίσωσις** ὡς πρὸς χ. Ἐν προκειμένῳ περιοριζόμεθα εἰς τριγωνομετρικὰς ἀνισώσεις ἑνὸς ἀγνώστου, γενικώτερον ὅμως, ὅπως ἀκριβῶς καὶ εἰς τὰς τριγωνομετρικὰς ἐξισώσεις, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν καὶ τριγωνομετρικὰς ἀνισώσεις περισσοτέρων τοῦ ἑνὸς ἀγνώστων.

Κάθε τόξον χ_0, τὸ ὁποῖον ἐπαληθεύει μίαν τριγωνομετρικὴν ἀνίσωσιν ὡς πρὸς χ_0, καλεῖται **μερικὴ λύσις** ἢ ἁπλῶς **λύσις** αὐτῆς. Τὸ σύνολον τῶν μερικῶν λύσεων μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἀνισώσεως καλεῖται **γενικὴ λύσις** αὐτῆς.

Τὸ σύνολον τῶν λύσεων ἐντὸς τοῦ διαστήματος $[0,2\pi]$ μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἀνισώσεως ὡς πρὸς ἕναν ἄγνωστον, καλεῖται **εἰδικὴ λύσις** αὐτῆς.

Ἡ τριγωνομετρικὴ ἀνίσωσις, ἡ ὁποία ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ τόξου (μεταβλητῆς) τὸ ὁποῖον περιέχει, καλεῖται **μόνιμος** τριγωνομετρικὴ ἀνίσωσις.

Κατωτέρω ἀναφέρομεν ὡρισμένας βασικὰς κατηγορίας τριγωνομετρικῶν ἀνισώσεων ἑνὸς ἀγνώστου.

2. Θεμελειώδεις τριγωνομετρικαὶ ἀνισώσεις

Ἡ λύσις οἱασδήποτε τριγωνομετρικῆς ἀνισώσεως ἀνάγεται κατὰ κανόνα εἰς τὰς ἀκολούθους θεμελιώδεις τριγωνομετρικὰς ἀνισώσεις:

$$\eta\mu\chi \gtrless \alpha, \quad \sigma\upsilon\nu\chi \gtrless \alpha, \quad \varepsilon\varphi\chi \gtrless \alpha, \quad \sigma\varphi\chi \gtrless \alpha \quad (\chi, \alpha \in \mathrm{R})$$

2.1. ημχ < α. Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῆς ἀνισώσεως ταύτης διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

i) Ἐὰν $\alpha \leq -1$, ἡ δοθεῖσα ἀνίσωσις εἶναι ἀδύνατος, διότι ημχ ≤ -1 διὰ κάθε $\chi \in R$.

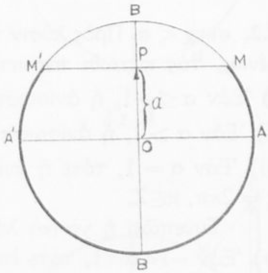
ii) Ἐὰν $\alpha > 1$, ἡ ἀνίσωσις εἶναι μόνιμος τριγωνομετρικὴ ἀνίσωσις, διότι ημχ ≤ 1 διὰ κάθε $\chi \in R$.

iii) Ἐὰν $\alpha = 1$, τότε ἡ ἀνίσωσις ἐπαληθεύεται διὰ κάθε τόξον, ἐξαιρουμένων τῶν τόξων χ, τὰ ὁποῖα εἶναι λύσεις τῆς ἐξισώσεως ημχ $= 1$. Ἄρα, ἡ γενικὴ λύσις τῆς ἀνισώσεως εἶναι:

$$R - \{\chi \in R : \eta\mu\chi = 1\} = R - \{\chi \in R : \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in Z\}.$$

iv) Ἔστω, τέλος, $-1 < \alpha < 1$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν διακρίνομεν τὰς ἑξῆς, ἐπὶ πλέον, περιπτώσεις:

α) Ἐὰν $0 < \alpha < 1$, ἐπιλύομεν τὴν ἀνίσωσιν γεωμετρικῶς (γραφικῶς) ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου. Πρὸς τοῦτο, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων διάνυσμα $\overline{OP}$ τοιοῦτον, ὥστε $(\overline{OP}) = \alpha$ καὶ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα ΒΒ' εἰς τὸ Ρ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' (Σχ. 1). Προφανῶς, κάθε τόξον χ μὲ ἀρχὴν Α καὶ πέρας τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου $\overparen{M'B'M}$, ἐξαιρέσει τῶν ἄκρων Μ καὶ Μ', ἐπαληθεύει τὴν ἀνίσωσιν ημχ $< \alpha$ μὲ $0 < \alpha < 1$.



Σχ. 1

Ἐν συνεχείᾳ, ἐπιδιώκομεν νὰ εὕρωμεν ἀναλυτικῶς τὴν γενικὴν λύσιν τῆς δοθείσης ἀνισώσεως. Πρὸς τοῦτο, εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν εἰδικὴν λύσιν καὶ ἐξ αὐτῆς προσδιορίζομεν ἀμέσως τὴν γενικὴν λύσιν, ὡς συνάγεται ἐκ τῆς ἑπομένης ἰσοδυναμίας:

$$\eta\mu\chi < \alpha \iff \begin{cases} \eta\mu\omega < \alpha & (1) \\ \omega \in [0,2\pi] & (2) \\ \chi = 2\kappa\pi + \omega,\ \kappa \in Z & (3) \end{cases}$$

(Εἶναι προφανές, ὅτι κάθε τόξον $\chi \in R$ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\chi = 2\kappa\pi + \omega \text{ μὲ } \kappa \in Z \text{ καὶ } \omega \in [0,2\pi]\ ).$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰσοδυναμίας, παρατηροῦμεν, ὅτι ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἀνισώσεως (1) εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν τὴν γενικὴν λύσιν τῆς ημχ $< \alpha$ μέσῳ τῆς (3). Ἐπὶ πλέον, ἡ λύσις τῆς (1) μὲ τὸν περιορισμὸν (2) εἶναι ἡ εἰδικὴ λύσις τῆς δοθείσης ἀνισώσεως. Ἐπιλύομεν τὴν ἀνίσωσιν (1), ἤτοι εὑρίσκομεν τὴν εἰδικὴν λύσιν τῆς δοθείσης ἀνισώσεως. Πρὸς τοῦτο, ἔστωσαν φ καὶ π—φ τὰ μόνα τόξα τοῦ κλειστοῦ διαστήματος $[0,2\pi]$ μὲ ημφ $=$ ημ$(\pi - \varphi) = \alpha$ $(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$. Τότε τὰ μόνα ὑποδιαστήματα τοῦ διαστήματος $[0,2\pi]$, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν ἀνίσωσιν, εἶναι $(\pi-\varphi, 2\pi]$ καὶ $[0,\varphi)$. Ἄρα, ἡ εἰδικὴ λύσις εἶναι:

$(\pi-\varphi, 2\pi] \cup [0,\varphi) = \{\omega \in R : \pi-\varphi < \omega \leq 2\pi\} \cup \{\omega \in R : 0 \leq \omega \leq \varphi\}$

Ἡ γενικὴ λύσις τῆς δοθείσης ἀνισώσεως εὑρίσκεται, ἐὰν εἰς τὰ ἄκρα τῶν διαστημάτων τῆς εἰδικῆς λύσεως προσθέσωμεν τὸ $2\kappa\pi$ μὲ $\kappa \in Z$ (τυχόν), λόγῳ καὶ τῆς (3).

Ἐὰν θέσωμεν $\Delta_\kappa = (2\kappa\pi+\pi-\varphi,\ 2\kappa\pi+2\pi] \cup [2\kappa\pi,\ 2\kappa\pi+\varphi)$, τότε ἡ γενικὴ λύσις εἶναι $\bigcup\limits_{\kappa \in Z} \Delta_\kappa$ [1], ἤτοι: $\{\chi \in R : \exists\ \kappa \in Z$ μὲ $\chi \in \Delta_\kappa\}$.

β) Ἐὰν $-1 < \alpha \leq 0$, ἐπιλύομεν τὴν ἀνίσωσιν κατ' ἀνάλογον ἀκριβῶς τρόπον.

Καθ' ὅμοιον ἀκριβῶς τρόπον ἐπιλύεται ἡ ἀνίσωσις ημχ$>\alpha$. Ὁμοίως ἐπιλύονται καὶ αἱ ἀνισοεξισώσεις ημχ$\leq \alpha$ καὶ ημχ$\geq \alpha$, ἀρκεῖ εἰς τὰς λύσεις τῆς ἀνισώσεως ημχ$<\alpha$ ἢ ημχ$>\alpha$ νὰ ἐπισυνάψωμεν καὶ τὴν γενικὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως ημχ$=\alpha$.

2.2. συνχ $<$ α. Πρὸς λύσιν τῆς ἀνισώσεως ταύτης, διακρίνομεν, ὡς καὶ προηγουμένως, τὰς κάτωθι περιπτώσεις:

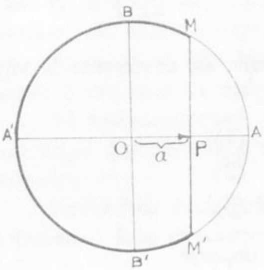
i) Ἐὰν $\alpha \leq -1$, ἡ ἀνίσωσις εἶναι ἀδύνατος.

ii) Ἐὰν $\alpha > 1$, ἡ ἀνίσωσις εἶναι μόνιμος τριγωνομετρικὴ ἀνίσωσις.

iii) Ἐὰν $\alpha = 1$, τότε ἡ ἀνίσωσις ἀληθεύει διὰ κάθε τόξον, ἐξαιρέσει τῶν τόξων $\chi = 2\kappa\pi$, $\kappa \in Z$.

Συνεπῶς, ἡ γενικὴ λύσις εἶναι: $R - \{\chi \in R : \chi = 2\kappa\pi,\ \kappa \in Z\}$.

iv) Ἐὰν $-1 < \alpha < 1$, τότε ἐπιλύομεν τὴν ἀνίσωσιν γεωμετρικῶς. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων θεωροῦμεν διάνυσμα $\overline{PO}$ τοιοῦτον, ὥστε $(\overline{OP}) = \alpha$ καὶ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΑ' εἰς τὸ σημεῖον Ρ, τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Μ,Μ' (Σχ. 2). Κάθε τόξον χ μὲ ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου $\overset{\frown}{MA'M'}$, ἐξαιρουμένων τῶν ἄκρων Μ καὶ Μ', ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν ἀνίσωσιν.



Σχ. 2

Ἐν συνεχείᾳ, πρὸς εὕρεσιν τῆς εἰδικῆς λύσεως, ὑποθέτομεν ὅτι φ εἶναι τὸ τόξον ἐντὸς τοῦ διαστήματος $(0,\pi)$ μὲ συνφ$=\alpha$. Ἄρα, ἡ εἰδικὴ λύσις εἶναι: $(\varphi, 2\pi-\varphi) = \{\chi \in R : \varphi < \chi < 2\pi-\varphi\}$.

Προσθέτοντες εἰς τὰ ἄκρα τοῦ διαστήματος τῆς εἰδικῆς λύσεως τὸ $2\pi\kappa$, $\kappa \in Z$ εὑρίσκομεν ὡς καὶ προηγουμένως τὴν γενικὴν λύσιν τῆς δοθείσης ἀνισώσεως.

Ἀναλόγως ἐπιλύονται αἱ: συνχ$>\alpha$, συνχ$\leq \alpha$, καὶ συνχ$\geq \alpha$

---

[1] Τὸ σύνολον $\bigcup\limits_{\kappa \in Z} \Delta_\kappa$ εἶναι ἡ ἕνωσις τῶν ἀπείρων διαστημάτων Δ_κ, ὅταν τὸ κ διατρέχῃ τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

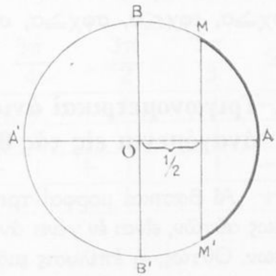
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις $\text{συνχ} \leq \frac{1}{2}$.

Ἐπίλυσις: Εὑρίσκομεν τὰ δύο καὶ μοναδικὰ τόξα ἐντὸς τοῦ διαστήματος $[0,2\pi)$, τῶν ὁποίων τὸ συνημίτονον εἶναι $\frac{1}{2}$. Ταῦτα, ὡς γνωστόν, εἶναι $\frac{\pi}{3}$ καὶ $\frac{5\pi}{3}$.

Κάθε τόξον χ, τὸ ὁποῖον περατοῦται εἰς ἓν σημεῖον τοῦ τόξου $\overset{\frown}{MAM'}$, συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν ἄκρων M καὶ M′ (Σχ. 3), εἶναι λύσις τῆς ἀνισώσεως. Προφανῶς, ἡ εἰδικὴ λύσις εἶναι:

$\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$, ἡ δὲ γενική:

$\bigcup_{\kappa \in Z} \Delta_\kappa$, ὅπου $\Delta_\kappa = \left[2\kappa\pi, 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}\right] \cup$
$\left[2\kappa\pi + \frac{5\pi}{3}, 2\kappa\pi + 2\pi\right]$.

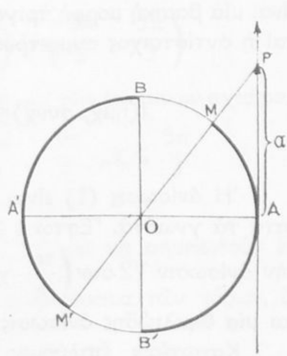


Σχ. 3

Δηλαδή, ἀναλυτικῶς, κάθε τόξον χ τῆς γενικῆς λύσεως πληροῖ μίαν τῶν κάτωθι σχέσεων:

$$2\kappa\pi \leq \chi \leq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3},\ 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{3} \leq \chi \leq 2\kappa\pi + 2\pi \ (\kappa \in Z)$$

2.3. εφχ < α. Ἡ ἀνίσωσις αὕτη ἔχει πάντοτε λύσιν, ἐφ' ὅσον $\alpha \in R$, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς: Ἔστω $\alpha > 0$ (ἐὰν $\alpha < 0$ ἐργαζόμεθα ἀναλόγως). Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἐφαπτομένων λαμβάνομεν διάνυσμα $\overline{AP}$ τοιοῦτον, ὥστε $(\overline{AP}) = \alpha$ καὶ θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν τὴν διερχομένην ἐκ τῶν σημείων O καὶ P, τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ M καὶ M′ (Σχ. 4). Εἶναι ἤδη προφανὲς ἐκ τοῦ σχήματος, ὅτι κάθε τόξον, τὸ ὁποῖον ἔχει πέρας τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου $\overset{\frown}{MAB'}$ ἢ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{BA'M'}$ (ἐξαιρουμένων τῶν ἄκρων M καὶ B′ ἢ B καὶ M′) ἐπαληθεύει τὴν ἀνίσωσιν.



Σχ. 4

Ἐν συνεχείᾳ, ἔστωσαν φ καὶ π+φ τὰ μοναδικὰ τόξα τοῦ διαστήματος $[0,2\pi]$ μὲ $\text{εφφ} = \text{εφ}(\pi + \varphi) = \alpha$ $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$. Τότε ἡ εἰδικὴ λύσις εἶναι:

$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi + \varphi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \cup [0, \varphi).$$

Ἡ γενικὴ λύσις ἐν προκειμένῳ εὑρίσκεται ταχύτερον, ἀρκεῖ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ διαστήματος $\left(\frac{\pi}{2}, \pi+\varphi\right)$ νὰ προσθέσωμεν τὸ κπ μὲ $\kappa \in Z$ (τυχόν). Ἤτοι, ἐὰν

$\Delta_\kappa = (\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa\pi + \pi + \varphi)$, αὕτη εἶναι:

$$\bigcup_{\kappa \in Z} \Delta_\kappa = \{ \chi \in R : \chi = \kappa\pi + \theta, \kappa \in Z, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi + \varphi \}.$$

Ἀναλόγως ἐπιλύονται αἱ ἀνισώσεις $\varepsilon\varphi\chi < \alpha$, $\sigma\varphi\chi < \alpha$, $\sigma\varphi\chi < \alpha$, ὡς καὶ αἱ $\varepsilon\varphi\chi \geq \alpha$, $\varepsilon\varphi\chi \leq \alpha$, $\sigma\varphi\chi \geq \alpha$, $\sigma\varphi\chi \leq \alpha$.

3. Τριγωνομετρικαὶ ἀνισώσεις ἀναγόμεναι εἰς τὰς θεμελιώδεις

Αἱ βασικαὶ μορφαὶ τριγωνομετρικῶν ἀνισώσεων, ὡς καὶ αἱ μέθοδοι ἐπιλύσεως αὐτῶν, εἶναι ἐν γένει ἀντίστοιχοι πρὸς ἐκείνας τῶν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων. Οὕτως, ἡ ἐπίλυσις μιᾶς ἀνισώσεως ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν θεμελιωδῶν τριγωνομετρικῶν ἀνισώσεων. Ἐπὶ παραδείγματι, ἡ ἀνίσωσις $f(\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi) \gtrless 0$, ὅπου $\varphi(\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi)$ ἀκέραιον συμμετρικὸν πολυώνυμον ὡς πρὸς ημχ καὶ συνχ, εἶναι μία βασικὴ μορφὴ τριγωνομετρικῆς ἀνισώσεως καὶ ἐπιλύεται ὅπως ἀκριβῶς καὶ ἡ ἀντίστοιχος συμμετρικὴ ἐξίσωσις. Ἤτοι, ὡς γνωστόν, ἔχομεν:

$$f(\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi) \lesseqgtr 0 \iff \begin{cases} f(t, \frac{t^2-1}{2}) \lesseqgtr 0 & (1) \\ t = \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\,(\frac{\pi}{4} - \chi) & (2) \end{cases}$$

Ἡ ἀνίσωσις (1) εἶναι μία ἀλγεβρικὴ ἀνίσωσις ὡς πρὸς t καὶ ἐπιλύεται κατὰ τὰ γνωστά. Ἔστω $t \gtrless t_0$ μία λύσις αὐτῆς. Τότε, ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν τὴν ἀνίσωσιν $\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) \lesseqgtr t_0$ $\left(\iff \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) \lesseqgtr \frac{t_0}{\sqrt{2}}\right)$, ἡ ὁποία εἶναι μία θεμελιώδης ἀνίσωσις.

Κατωτέρω ἐπιλύομεν ὡρισμένας χαρακτηριστικὰς μορφὰς τριγωνομετρικῶν ἀνισώσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις: $(2\eta\mu\chi - \sqrt{3})(2\sigma\upsilon\nu\chi - 1)(\varepsilon\varphi\chi - 1) < 0$.

Ἐπίλυσις: Πρὸς ἐπίλυσιν ταύτης, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰ σημεῖα τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου μέλους, ὅταν τὸ χ διατρέχῃ τὸ διάστημα $[0,2\pi]$. Πρὸς τοῦτο, προσδιορίζομεν τὰς εἰδικὰς λύσεις τῶν κάτωθι θεμελιωδῶν ἀνισώσεων:

$$2\eta\mu\chi - \sqrt{3} > 0 \iff \eta\mu\chi > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2\sigma\upsilon\nu\chi - 1 > 0 \iff \sigma\upsilon\nu\chi > \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\chi - 1 > 0 \iff \varepsilon\varphi\chi > 1$$

Αἱ εἰδικαὶ λύσεις αὐτῶν, εὑρισκόμεναι εὐκόλως κατὰ τὰ γνωστά, ἀντιστοίχως εἶναι:

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \text{ καὶ } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Ἐν συνεχείᾳ, πρὸς εὕρεσιν τοῦ σημείου τοῦ πρώτου μέλους τῆς δοθείσης ἀνισώσεως, καταρτίζομεν τὸν κατωτέρω πίνακα:

$$\chi \quad 0 \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{2\pi}{3} \quad \frac{5\pi}{4} \quad \frac{3\pi}{2} \quad \frac{5\pi}{3} \quad 2\pi$$

2ημχ−3	−	−	+	+	−	−	−	−
2συνχ−1	+	+	−	−	−	−	−	+
εφχ−1	−	+	+	−	−	+	−	−
Γ	+	−	−	+	−	+	−	+

Ἐτέθη $\Gamma = (2\eta\mu\chi - \sqrt{3})\,(2\sigma\upsilon\nu\chi - 1)\,(\varepsilon\varphi\chi - 1)$.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ εἰδικὴ λύσις τῆς δοθείσης ἀνισώσεως εἶναι:

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$$

Ἀναλυτικῶς, κάθε τόξον χ τῆς εἰδικῆς λύσεως πληροῖ μία τῶν ἑπομένων σχέσεων:

$$\frac{\pi}{4} < \chi < \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{3} < \chi < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2\pi}{3} < \chi < \frac{5\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{2} < \chi < \frac{5\pi}{3}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις $\eta\mu 3\chi > \frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ νὰ σημειωθοῦν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ διαστήματα τῶν τόξων, ἐντὸς τῶν ὁποίων περατοῦνται αἱ λύσεις της.

Ἐπίλυσις: Θέτομεν $3\chi = \omega$ καὶ ἐπιλύομεν τὴν ἀνίσωσιν $\eta\mu\omega > \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ἡ γενικὴ λύσις ταύτης εἶναι:

$$\bigcup_{\kappa \in Z} \Delta_\kappa \text{ μὲ } \Delta_\kappa = \left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}, 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3}\right), \ \kappa \in Z.$$

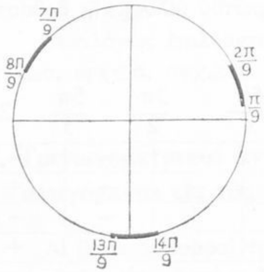
Συνεπῶς, ἔχομεν:

$$2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} < 3\chi < 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \iff 2\pi\frac{\kappa}{3} + \frac{\pi}{9} < \chi < 2\pi\frac{\kappa}{3} + \frac{2\pi}{9} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $\kappa = 3\rho + \upsilon$, $0 \leq \upsilon < 3$, ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$2\pi\rho + \frac{2\pi\upsilon}{3} + \frac{\pi}{9} < \chi < 2\pi\rho + \frac{2\pi\upsilon}{3} + \frac{2\pi}{9} \quad (\rho \in Z)$$

'Εξ αὐτῆς συνάγεται, ὅτι ἡ εἰδικὴ λύσις τῆς δοθείσης ἀνισώσεως εἶναι $\left(\frac{2\pi\upsilon}{3}+\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi\upsilon}{3}+\frac{2\pi}{9}\right)$ $(\upsilon=0,1,2)$. Εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ ἀκεραίου υ ἀντιστοιχεῖ καὶ ἓν ὑποδιάστημα τοῦ διαστήματος $[0,2\pi]$ καὶ συνεπῶς εὑρίσκομεν τρία ὑποδιαστήματα τοῦ $[0,2\pi]$ (Σχ.5), ἐντὸς τῶν ὁποίων περατοῦνται αἱ λύσεις τῆς ἀνισώσεως. Ταῦτα εἶναι:



Σχ. 5

$$\upsilon=0 \longrightarrow \left(\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}\right)$$

$$\upsilon=1 \longrightarrow \left(\frac{7\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}\right)$$

$$\upsilon=2 \longrightarrow \left(\frac{13\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}\right)$$

3.1. Ἀνίσωσις τῆς μορφῆς: $\alpha\eta\mu\chi+\beta\sigma\upsilon\nu\chi+\gamma \gtrless 0$ (1)

'Επειδὴ ἡ ἀντίστοιχος ἐξίσωσις $\alpha\eta\mu\chi+\beta\sigma\upsilon\nu\chi+\gamma=0$, ὡς εἴδομεν, ἐπιλύεται κατὰ δύο τρόπους, οὕτω καὶ ἡ δοθεῖσα ἀνίσωσις εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιλυθῇ κατὰ δύο τρόπους.

α' τρόπος. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι $\chi \neq 2\kappa\pi+\pi$ $(\kappa\in Z)$, ἐκφράζομεν τὰ ημχ, συνχ συναρτήσει τῆς εφ $\frac{\chi}{2}$ καὶ ἔχομεν:

$$(1) \Longleftrightarrow \alpha \frac{2\varepsilon\varphi\frac{\chi}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2}}+\beta\frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2}}+\gamma \gtrless 0 \Longleftrightarrow$$

$$(\gamma-\beta)\,\varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2}+2\alpha\,\varepsilon\varphi\,\frac{\chi}{2}+\beta+\gamma \gtrless 0 \quad (2)$$

Ἡ τελευταία ὅμως ἀνίσωσις (2) εἶναι δευτεροβάθμιος ὡς πρὸς εφ $\frac{\chi}{2}$ καὶ ἐπιλύεται εὐκόλως. Οὕτως ἡ λύσις τῆς ἀνισώσεως (1) ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν θεμελιωδῶν ἀνισώσεων τῆς μορφῆς εφ $\frac{\chi}{2} \gtrless \alpha$, $\alpha\in \mathbf{R}$.

'Εὰν $\chi=2\kappa\pi+\pi$ $(\kappa\in Z)$ ἡ (1) γράφεται:

$\alpha\eta\mu(2\kappa\pi+\pi)+\beta\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi+\pi)+\gamma \gtrless 0 \Longleftrightarrow -\beta+\gamma \gtrless 0 \Longleftrightarrow \gamma \gtrless \beta$ $(\kappa\in Z)$

Ἄρα, τὰ τόξα $\chi=2\kappa\pi+\pi$ θὰ εἶναι λύσεις τῆς ἀνισώσεως (1), ἐφ' ὅσον $\gamma \gtrless \beta$.

β' τρόπος. Ἡ (1) γραφέται:

$$(1) \Longleftrightarrow \alpha(\eta\mu\chi+\frac{\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\chi+\frac{\gamma}{\alpha}) \gtrless 0$$

'Επειδὴ $\frac{\beta}{\alpha} \in R \Rightarrow \exists\ \omega \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ μὲ $\epsilon\varphi\omega = \frac{\beta}{\alpha}$ (M) καὶ συνεπῶς

λαμβάνομεν:

$$(1) \Longleftrightarrow \alpha(\eta\mu\chi + \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\sigma\upsilon\nu\chi + \frac{\gamma}{\alpha}) \gtrless 0 \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\omega}[\eta\mu(\chi+\omega) + \frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\omega] \gtrless 0 \quad (2)$$

Διακρίνομεν ἤδη τὰς ἑξῆς περιπτώσεις:

i) 'Εὰν $\alpha > 0$, τότε, ἐπειδὴ καὶ $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$, ἕπεται $\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\omega} > 0$, ὁπότε ἡ (2) γράφεται: $\eta\mu(\chi+\omega) \gtrless -\frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\omega$, ἡ ὁποία ἀνάγεται εἰς τὴν θεμελιώδη $\eta\mu\chi \gtrless \lambda$.

ii) 'Εὰν $\alpha < 0$, τότε $\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\omega} < 0$, ὁπότε ἡ (2) γράφεται: $\eta\mu(\chi+\omega) \lessgtr -\frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\omega$, ἡ ὁποία ἀνάγεται καὶ πάλιν εἰς τὴν $\eta\mu\chi \gtrless \lambda$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ἐπιλυθῆ ἡ ἀνίσωσις : $\sqrt{3}\,\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi - \sqrt{2} < 0$ (1)

Ἐπίλυσις: Αὕτη ἰσοδυνάμως γράφεται:

$$(1) \Longleftrightarrow \sqrt{3}\left(\eta\mu\chi + \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma\upsilon\nu\chi - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) < 0 \Longleftrightarrow \sqrt{3}\left(\eta\mu\chi + \epsilon\varphi\frac{\pi}{6}\sigma\upsilon\nu\chi - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) < 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}}\left[\eta\mu\left(\chi + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\right] < 0 \Longleftrightarrow 2\left[\eta\mu\left(\chi + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{2}\right] < 0 \Longleftrightarrow$$

$$\eta\mu\left(\chi + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Θέτομεν $\chi + \frac{\pi}{6} = \omega$, ὁπότε ἔχομεν πρὸς λύσιν τὴν ἀνίσωσιν $\eta\mu\omega < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ἡ γενικὴ λύσις ταύτης εἶναι:

$$2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} < \omega \leq 2\kappa\pi + 2\pi \quad \text{καὶ} \quad 2\lambda\pi \leq \omega < 2\lambda\pi + \frac{\pi}{4} \quad (\kappa,\lambda \in Z)$$

'Εξ αὐτῶν καὶ ἐπειδὴ $\chi = \omega - \frac{\pi}{6}$ εὑρίσκομεν:

$$2\kappa\pi + \frac{7\pi}{12} < \chi \leq 2\kappa\pi + \frac{11\pi}{6} \quad \text{καὶ} \quad 2\lambda\pi - \frac{\pi}{6} \leq \chi < 2\lambda\pi + \frac{\pi}{12}, \quad (\kappa,\lambda \in Z)$$

αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὴν γενικὴν λύσιν τῆς (1).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

32) Ἐπιλύσατε τὰς κάτωθι ἀνισώσεις:

1) $ημχ > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $εφχ \geqslant -\sqrt{3}$ 3) $συνχ < -\frac{1}{2}$

4) $ημ\left(χ-\frac{π}{2}\right) < \frac{1}{2}$ 5) $συν\left(χ-\frac{π}{3}\right) > \frac{1}{2}$ 6) $σφχ > 0$

33) Ἐπιλύσατε τὰς ἀκολούθους ἀνισώσεις:

1) $σφ3χ > -1$ 2) $ημ4χ < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $συν3χ < \frac{1}{2}$

34) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις $ημ5χ > \frac{1}{2}$ καὶ νὰ σημειωθοῦν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ διαστήματα τῶν τόξων ἐντὸς τῶν ὁποίων περατοῦνται αἱ λύσεις της.

35) Εὕρετε τὰς εἰδικὰς λύσεις τῶν κάτωθι ἀνισώσεων:

1) $(ημχ-1)(2συνχ-1)(εφχ-1) < 0$ 2) $(συνχ+1)(ημχ-2)(εφχ+\sqrt{3}) < 0$

3) $(2ημχ-1)\left(συνχ+\frac{1}{2}\right)(σφχ-\sqrt{3}) \geqslant 0$ 4) $(\sqrt{2}\,ημχ-1)(εφ2χ-1) \leq 0$

5) $(χ-2)\,ημ3χ < 0$ 6) $χσυνχ > 0$.

36) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισώσεις:

1) $3ημχ + 2συνχ > 2$ 2) $εφχ + σφχ > 1$ 3) $συν2χ > ημ^2χ - 1$

4) $ημ2χ > συνχ$ 5) $ημχ + συνχ > 1$ 6) $\sqrt{3συν^2χ-1} < 5ημ^2χ - 4$

7) $\sqrt{3-4συν^2χ} > 1 + 3ημχ$ 8) $\frac{συν2χ-1}{συν2χ} < 1$ 9) $ημ^2χ - ημ2χ + 3συν^2χ > 2$

10) $\frac{2ημ2χ-1}{συν2χ-3συνχ+2} > 0$ 11) $3(ημχ+συνχ) - 5ημχ\,συνχ > 3$

12) $\frac{ημχ+συνχ}{ημχ-συνχ} > 1$

37) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις: $ημ2χ > ημ2α$, $\frac{π}{6} < α < \frac{π}{4}$.

38) Νὰ ἐπιλυθῇ καὶ διερευνηθῇ ἡ, ὡς πρὸς χ, ἐξίσωσις: $(2συνφ-1)χ^2 - 4χ + 2(2συνφ+1) = 0$, $0 \leq φ \leq 2π$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΚΥΚΛΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Ὁρισμοὶ — βασικαὶ ἔννοιαι

1.1. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ημχ ($\chi \in R$) συνάγεται, ὅτι τὸ ἡμίτονον (συντόμως τὸ ημ) εἶναι μία συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ R καὶ πεδίον τιμῶν τὸ $[-1,+1]$. Εἶναι δηλαδὴ τὸ ημ μία πραγματικὴ συνάρτησις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς καὶ ἔχει τὸν τύπον $\psi = ημχ$. Συνεπῶς δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἀπεικόνισιν:

$$ημ : R \longrightarrow [-1,+1] \quad ἤ \qquad (1)$$

$$R \ni \chi \xrightarrow{ημ} ημ(\chi) \in [-1,+1],$$

ὅπου ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως ημ(χ) εἰς τὸ τυχὸν $\chi \in R$ (ἤ, ὡς ἄλλως λέγομεν, ἡ εἰκὼν τοῦ τυχόντος χ διὰ τῆς ημ) εἶναι ὁ γνωστὸς τριγωνομετρικὸς ἀριθμὸς ημχ.

Παρατηροῦμεν ἐπὶ πλέον εἰς τὴν συνάρτησιν (1), ὅτι κάθε $\psi \in [-1,+1]$ δὲν εἶναι ἀντίστοιχον (εἰκὼν) ἑνὸς μόνον $\chi \in R$, διότι ἡ ἐξίσωσις $ημχ = \psi$ μὲ $|\psi| \leq 1$ δὲν ἔχει, ὡς γνωστόν, μίαν μόνον λύσιν. Π.χ. ἐὰν $\psi = \frac{1}{2}$, τότε ἡ γενικὴ λύσις τῆς ἐξισώσεως $ημχ = \frac{1}{2}$ εἶναι: $\{\chi \in R : \chi = κπ + (-1)^κ \frac{π}{6},\ κ \in Z\}$ καὶ συνεπῶς κάθε $\chi = κπ + (-1)^κ \frac{π}{6}$ μὲ $κ \in Z$ ἔχει ἀντίστοιχον τὸ $\frac{1}{2}$, ἤτοι:

$$ημ\left\{κπ + (-1)^κ \frac{π}{6}\right\} = \frac{1}{2} \quad \text{διὰ κάθε } κ \in Z.$$

Ἄρα, ἡ ἀπεικόνισις ημ δὲν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καὶ συνεπῶς ἡ ἀντιστοιχία

$$ημ^{-1} : [-1,+1] \longrightarrow R,$$

ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀντίστροφος ἀντιστοιχία τῆς συναρτήσεως ημ, δὲν εἶναι συνάρτησις, δηλαδὴ δὲν ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς συναρτήσεως ημ, ὡς αὕτη ὡρίσθη.

Ἐὰν ὅμως περιορίσωμεν τὴν συνάρτησιν ημ εἰς ἓν κατάλληλον διάστημα (ὑποδιάστημα τοῦ R) π.χ. τὸ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, δηλαδὴ θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν:

$$ημ: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,+1],$$

τότε ἡ ἀντιστοιχία:

$$ημ^{-1}: [-1,+1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

εἶναι συνάρτησις.

Ἀποδεικνύεται γενικώτερον, ὅτι ἡ συνάρτησις ημ ἐντὸς τοῦ κλειστοῦ διαστήματος $\Delta_\kappa = \left[\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ $(\kappa \in Z)$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος [1]. Πράγματι: Ἔστωσαν $\chi_1, \chi_2 \in \Delta_\kappa$, $\chi_i \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $(\kappa \in Z,\ i = 1, 2)$, $\chi_i \neq \kappa\pi - \frac{\pi}{2}$, $(\kappa \in Z,\ i = 1,2)$ καὶ $\chi_1 \neq \chi_2$. Ὑποθέτομεν $ημ\chi_1 = ημ\chi_2$, ὁπότε $\chi_1 = 2\rho\pi + \chi_2$ $(\rho \in Z)$ ἢ $\chi_1 = (2\rho+1)\pi - \chi_2$ $(\rho \in Z)$ καὶ συνεπῶς ἔχομεν:

$$\chi_1 - \chi_2 = 2\rho\pi \quad (1)$$
$$\chi_1 + \chi_2 = 2\rho\pi + \pi \quad (2)$$

Ἐξ ἄλλου, ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν: $\kappa\pi - \frac{\pi}{2} < \chi_1 < \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ καὶ $\kappa\pi - \frac{\pi}{2} < \chi_2 < \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$,

ὁπότε: $$-\pi < \chi_1 - \chi_2 < \pi \quad (3)$$
$$2\kappa\pi - \pi < \chi_1 + \chi_2 < 2\kappa\pi + \pi \quad (4)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (3) λαμβάνομεν: $-\pi < 2\rho\pi < \pi \Rightarrow -\frac{1}{2} < \rho < \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\rho = 0 \Rightarrow \chi_1 = \chi_2$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον, διότι ὑπετέθη $\chi_1 \neq \chi_2$. Ἐκ τῶν (2) καὶ (4) προκύπτει:

$2\kappa\pi - \pi < 2\rho\pi + \pi < 2\kappa\pi + \pi \Rightarrow 2\kappa - 1 < 2\rho + 1 < 2\kappa + 1 \Rightarrow \kappa - 1 < \rho < \kappa$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι $ημ\chi_1 \neq ημ\chi_2$ καὶ συνεπῶς ἡ συνάρτησις ημ, ἐντὸς τοῦ διαστήματος $\Delta_\kappa \subset R$, εἶναι ἀμφιμανοσήμαντος διὰ κάθε $\kappa \in Z$. Ἄρα, τῆς συναρτήσεως ημ περιοριζομένης εἰς τὸ διάστημα Δ_κ, ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις, ἡ ὁποία συμβολίζεται μὲ **τοξ$_\kappa$ ημ** καὶ καλεῖται **ἀντίστροφος κυκλικὴ συνάρτησις** τῆς συναρτήσεως ημ. Εἰδικώτερον, ἐὰν $\kappa = 0$, τότε ἔχομεν τὴν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν:

$$τοξ_0 ημ: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,+1],$$

---

[1] Ἐκ τῶν μαθημάτων τῆς Ἀναλύσεως (πρβλ. σελ. 15) γνωρίζομεν ὅτι μία ἀπεικόνισις $f: A \longrightarrow B$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν:

$$\forall \chi_1 \in A \text{ καὶ } \forall \chi_2 \in A \text{ μὲ } \chi_1 \neq \chi_2 \Rightarrow f(\chi_1) \neq f(\chi_2).$$

διότι $\Delta_0 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$. Τὴν συνάρτησιν τοξ$_0$ημ θὰ παριστῶμεν ἐφ' ἑξῆς μὲ **Τοξ ημ** (τόξον ἡμιτόνου), τὴν δὲ τιμὴν Τοξ ημχ αὐτῆς εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον $\chi \in [-1, +1]$, θὰ καλοῦμεν **πρωτεύουσαν τιμήν.** Π.χ. τὸ Τοξ ημ $\frac{1}{2}$ παριστᾶ τὸ μοναδικὸν τόξον τοῦ διαστήματος $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, τοῦ ὁποίου τὸ ἡμίτονον εἶναι $\frac{1}{2}$, δηλαδὴ τὸ $\frac{\pi}{6}$ (Τοξ ημ $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$). Ὁμοίως, ἐξ ὁρισμοῦ ἔχομεν :

Τοξ ημ$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\pi}{3}$ καὶ Τοξ ημ$1 = \frac{\pi}{2}$.

Διὰ τοῦ συμβόλου **τοξ ημ** παριστῶμεν τὴν ἀντίστροφον ἀντιστοιχίαν τῆς συναρτήσεως (Ι) καὶ συνεπῶς τὸ τοξημψ με $|\psi| \leq 1$ παριστᾶ τὸ σύνολον τῶν τόξων, τῶν ὁποίων τὸ ἡμίτονον εἶναι ψ, ἤτοι τὸ σύνολον τῶν μερικῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως ημχ = ψ. Π.χ.

$$\text{τοξ ημ}\,\frac{1}{2} = \{ \chi \in R : \text{ημ}\chi = \frac{1}{2} \} = \{ \chi \in R : \chi = \kappa\pi + (-1)^\kappa \frac{\pi}{6}, \ \kappa \in Z \}.$$

Ὁμοίως εἶναι: τοξημ $1 = \{ \chi \in R : \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \ \kappa \in Z \}$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως τοξ$_\kappa$ ημ συνάγεται, διὰ κάθε $\kappa \in Z$ καὶ διὰ κάθε ψ μὲ $|\psi| \leq 1$, ὅτι:

α) ημ(τοξ$_\kappa$ ημψ) = ψ

β) Τοξ ημ(−ψ) = −Τοξ ημψ

γ) τοξ$_\kappa$ ημψ = $\kappa\pi + (-1)^\kappa$ Τοξ ημψ

δ) $$\left\{ \begin{array}{l} \chi = \text{Τοξ ημ}\psi \\ \psi \in [-1, +1] \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ημ}\chi = \psi \\ \chi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \end{array} \right\}$$

1. 2. Κατ' ἀνάλογον ἀκριβῶς τρόπον μελετᾶται τὸ πρόβλημα τῆς ὑπάρξεως ἀντιστρόφου συναρτήσεως τῆς συναρτήσεως συν (συνημίτονον) καὶ ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις αὐτῆς ἐντὸς τοῦ διαστήματος $\Delta_\kappa = [\kappa\pi, \kappa\pi + \pi]$ μὲ $\kappa \in Z$ (ἀπόδειξις;). Ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς συναρτήσεως συν, περιοριζομένης ταύτης εἰς τὸ διάστημα Δ_κ, συμβολίζεται μὲ **τοξ$_\kappa$ συν** καὶ καλεῖται **ἀντίστροφος κυκλικὴ συνάρτησις** τῆς συναρτήσεως συν. Διὰ $\kappa = 0$ ἔχομεν τὸ διάστημα $[0, \pi]$, ἡ ἀντιστοιχοῦσα δὲ εἰς τοῦτο συνάρτησις τοξ$_0$συν θὰ συμβολίζεται μὲ **Τοξ συν** (τόξον συνημιτόνου). Ἡ τιμὴ Τοξ συνχ τῆς συναρτήσεως Τοξ συν εἰς τὸ τυχὸν $\chi \in [-1, +1]$ καλεῖται **πρωτεύουσα τιμή.** Π.χ.

$$\text{Τοξ συν}\ \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \ \text{Τοξ συν}\,(-1) = \pi \ \text{ καὶ Τοξ συν}\,0 = \frac{\pi}{2}.$$

Διὰ τοῦ συμβόλου **τοξ συν** θὰ παριστῶμεν τὴν ἀντίστροφον ἀντιστοιχίαν τῆς συναρτήσεως $\text{συν}: \mathrm{R} \longrightarrow [-1,+1]$ καὶ συνεπῶς τὸ $\text{τοξ συν}\psi$ μὲ $|\psi| \leq 1$ εἶναι τὸ σύνολον: $\text{τοξ συν}\psi = \{\chi \in \mathrm{R} : \text{συν}\chi = \psi\}$. Π.χ.

$$\text{Τοξ συν}\ \frac{1}{2} = \{\chi \in \mathrm{R} : \text{συν}\chi = \frac{1}{2}\} =$$

$$= \{\chi \in \mathrm{R} : \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3},\ \kappa \in Z\} \cup \{\chi \in \mathrm{R} : \chi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3},\ \kappa \in Z\}.$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως $\text{τοξ}_\kappa\ \text{συν}$ ἕπονται τὰ ἑξῆς:

α) $\text{συν}(\text{Τοξ}_\kappa\ \text{συν}\psi) = \psi,\ \forall \kappa \in Z$ καὶ $\forall\ \psi \in [-1,+1]$.

β) $\text{Τοξ συν}(-\psi) = \pi - \text{Τοξ συν}\psi,\ \forall\ \psi \in [-1,+1]$.

γ) $\text{τοξ}_\kappa\ \text{συν}\psi = \kappa\pi + (-1)^\kappa\ \text{Τοξ συν}\psi + [1-(-1)^\kappa]\frac{\pi}{2}$, $\kappa \in Z$ καὶ $\psi \in [-1,+1]$

δ) Ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία:

$$\left.\begin{array}{r}\chi = \text{Τοξ συν}\psi \\ \psi \in [-1,+1]\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{συν}\chi = \psi \\ \chi \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\end{array}\right.$$

Παρατήρησις. Ἡ μελέτη τῆς ἀντιστρόφου τῆς συναρτήσεως συν ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην, λόγῳ τῆς σχέσεως $\text{συν}\chi = \text{ημ}\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right)$, θεωρουμένης εἰς τὸ διάστημα $\Delta_\kappa = [\kappa\pi, (\kappa+1)\pi]$ μὲ $\kappa \in Z$.

1.3. Ἡ συνάρτησις εφ μὲ τύπον $\psi = \text{εφ}\chi$ εἶναι ὡρισμένη ἐν

$$\mathrm{R} - \{\chi \in \mathrm{R} : \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in Z\}$$

καὶ λαμβάνει τιμὰς ἐν R. Ὡς γνωστόν, ἡ συνάρτησις αὕτη δὲν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καὶ συνεπῶς δὲν ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις αὐτῆς. Ἀποδεικνύεται ὅμως, ὅτι ἐντὸς τοῦ διαστήματος $\Delta_\kappa = \left(\kappa\pi - \frac{\pi}{2},\ \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ $(\kappa \in Z)$ ἡ συνάρτησις εφ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος ἐπὶ καὶ συνεπῶς εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρισθῇ ἡ ἀντίστροφός της. Πράγματι: Ἐὰν $\chi_1, \chi_2 \in \Delta_\kappa$ $(\kappa \in Z)$ μὲ $\chi_1 \neq \chi_2$ καὶ ὑποθέσωμεν $\text{εφ}\chi_1 = \text{εφ}\chi_2$, τότε $\chi_1 = \rho\pi + \chi_2$ $(\rho \in Z)$ καὶ ἐξ αὐτῆς ἔχομεν $\chi_1 - \chi_2 = \rho\pi$. Ἐξ ἄλλου, εἶναι:

$$\left.\begin{array}{ll}\kappa\pi - \frac{\pi}{2} < \chi_1 < \kappa\pi + \frac{\pi}{2} & (1) \\ \kappa\pi - \frac{\pi}{2} < \chi_2 < \kappa\pi + \frac{\pi}{2} & (2)\end{array}\right. \quad (\kappa \in Z)$$

Ἐκ τῆς (2) προκύπτει:

$$-\kappa\pi + \frac{\pi}{2} > -\chi_2 > -\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow -\kappa\pi - \frac{\pi}{2} < -\chi_2 < -\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (3) λαμβάνομεν: $-\pi < \chi_1 - \chi_2 < \pi$, ὁπότε, βάσει καὶ τῆς σχέσεως $\chi_1 - \chi_2 = \rho\pi$ $(\rho \in Z)$, ἔχομεν:

$$-\pi < \rho\pi < \pi \iff -1 < \rho < 1 \iff \rho = 0$$

Συνεπῶς ἡ σχέσις $\chi_1 - \chi_2 = \rho\pi$ γίνεται $\chi_1 - \chi_2 = 0 \Rightarrow \chi_1 = \chi_2$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον, διότι ὑπετέθη $\chi_1 \neq \chi_2$. Ἤτοι : $\chi_1 \neq \chi_2 \iff \varepsilon\varphi\chi_1 \neq \varepsilon\varphi\chi_2$.

Ἄρα, ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς συναρτήσεως εφ, περιοριζομένης ταύτης εἰς τὸ διάστημα $\Delta_\kappa = \left(\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, ἡ ὁποία συμβολίζεται μὲ $\tau o\xi_\kappa\, \varepsilon\varphi$ καὶ καλεῖται **ἀντίστροφος κυκλικὴ συνάρτησις** τῆς συναρτήσεως εφ.

Εἰδικώτερον, ἐὰν $\kappa = 0$ τὸ διάστημα Δ_κ εἶναι $\Delta_0 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ἡ δὲ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τοῦτο συνάρτησις $\tau o\xi_0 \varepsilon\varphi$ θὰ συμβολίζεται μὲ **Τοξ εφ** (τόξον ἐφαπτομένης). Ἡ τιμὴ Τοξ εφχ τῆς συναρτήσεως Τοξ εφ εἰς τὴν θέσιν $\chi \in [R - \{\chi \in R: \chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{2}, \lambda \in Z\}]$ καλεῖται πρωτεύουσα τιμή. Π.χ.

$$\text{Τοξ εφ}\, 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \text{Τοξ εφ}(-1) = -\frac{\pi}{4}, \quad \text{Τοξ εφ}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

Καθ' ὅμοιον ἀκριβῶς τρόπον, ὁρίζεται ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς συναρτήσεως σφ, περιοριζομένης ταύτης εἰς τὸ διάστημα $\Delta_\kappa = (\kappa\pi, \kappa\pi + \pi)$, $\kappa \in Z$. Δηλαδή, ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ συνάρτησις σφ εἶναι ἀμφινομοσήμαντος ἐπί, ἐντὸς τοῦ διαστήματος $\Delta_\kappa = (\kappa\pi, \kappa\pi + \pi)$ (ἀπόδειξις ;).

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων $\tau o\xi_\kappa\, \varepsilon\varphi$ καὶ $\tau o\xi_\kappa\, \sigma\varphi$ συνάγεται:

α) $\varepsilon\varphi(\tau o\xi_\kappa\, \varepsilon\varphi\psi) = \psi$, $\forall\, \psi \in R$ καὶ $\forall\, \kappa \in Z$

β) $\text{Τοξ εφ}(-\psi) = -\text{Τοξ εφ}\psi$, $\forall\, \psi \in R$

γ) $\tau o\xi_\kappa\, \varepsilon\varphi\psi = \kappa\pi + \text{Τοξεφ}\psi$, $\forall\, \psi \in R$ καὶ $\forall\, \kappa \in Z$.

Ἐπίσης ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι:

$\text{Τοξ εφ}\psi = \text{Τοξ σφ}\frac{1}{\psi}$, ἐὰν $\psi > 0$ καὶ $\text{Τοξ εφ}\psi = -\pi + \text{Τοξ σφ}\frac{1}{\psi}$, ἐὰν $\psi < 0$

Τὰ αὐτὰ ἀκριβῶς ἰσχύουν καὶ διὰ τὴν συνάρτησιν $\tau o\xi_\kappa\, \sigma\varphi$, $\kappa \in Z$.

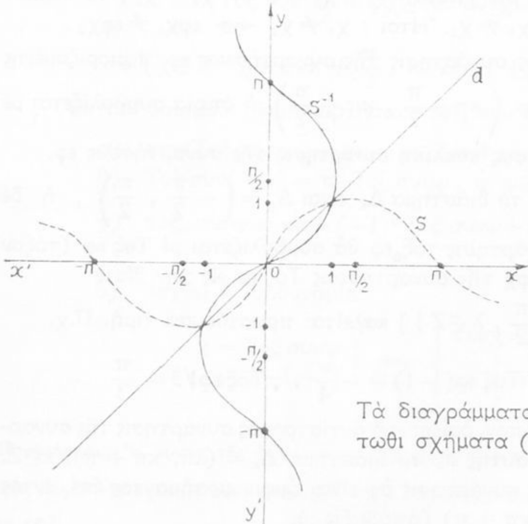
1.4. Γραφικὴ παράστασις τῶν ἀντιστρόφων κυκλικῶν συναρτήσεων. Γνωρίζομεν ὅτι, ἐὰν f εἶναι μία συνάρτησις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς καὶ f^{-1} ἡ ἀντίστροφος αὐτῆς, τότε τὰ διαγράμματα S_f καὶ $S_{f^{-1}}$ τῶν συναρτήσεων f καὶ f^{-1} ἀντιστοίχως εἰς ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων, εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν πρώτην διχοτόμον. Τῇ βοηθείᾳ τούτου, εἶναι εὔκολον νὰ χαράξωμεν τὰ διαγράμματα τῶν ἀντιστρόφων κυκλικῶν συναρτήσεων, ἀρκεῖ βεβαίως νὰ γνωρίζομεν τὰ διαγράμματα τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων. Συγκεκριμένως, θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν Τοξημ, ὡς ὡρίσθη ἀνωτέρω. Αὕτη εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς συναρτήσεως ημ ἐντὸς τοῦ διαστήματος $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ καὶ συνεπῶς, τὰ διαγράμματα S καὶ S^{-1} τῶν συναρτήσεων ημ καὶ Τοξ ημ ἀντιστοίχως (Σχ. 6) θὰ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν πρώτην διχοτόμον d.

Ἐν προκειμένῳ, ὑποθέτομεν γνωστὸν τὸ διάγραμμα S (ἡμιτονοειδὴς καμπύλη) τῆς συναρτήσεως ημ. Ἐν συνεχείᾳ, θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $τοξ_κ$ ημ, $κ \in Z$. Ἡ γραφικὴ παράστασις αὐτῆς θὰ προκύψῃ διὰ παραλλήλου μεταφορᾶς τοῦ διαγράμματος S^{-1} τῆς Τοξ ημ κατὰ κπ ($κ \in Z$) καὶ τοῦτο ἕνεκα τῆς σχέσεως:

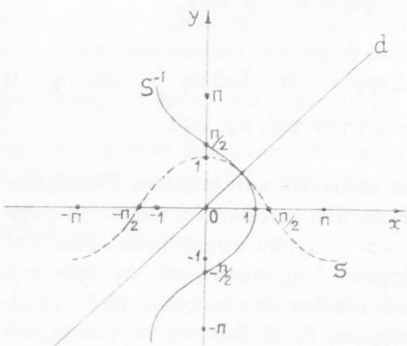
$$τοξ_κ\, ημx = κπ + Τοξ\, ημx.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον, χαράσσονται τὰ διαγράμματα τῶν ὑπολοίπων ἀντιστρόφων κυκλικῶν συναρτήσεων.

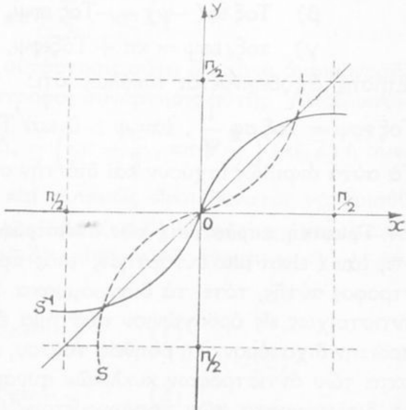
Τὰ διαγράμματα ταῦτα δίδονται εἰς τὰ κάτωθι σχήματα (7, 8 καὶ 9):



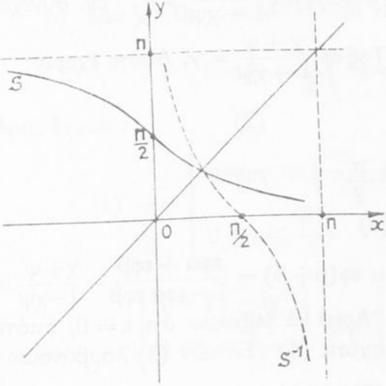
Σχ. 6



Σχ. 7



Σχ. 8



Σχ. 9

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\text{Τοξ εφ}\,\frac{1}{2} + \text{Τοξ εφ}\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις : Θέτομεν Τοξ εφ $\frac{1}{2} = \alpha$ (I) καὶ Τοξ εφ $\frac{1}{3} = \beta$ (II), ὁπότε εφα $= \frac{1}{2}$ καὶ εφβ $= \frac{1}{3}$. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς πρωτευούσης τιμῆς Τοξ εφ $\frac{1}{2} = \alpha$ συνάγεται ἀμέσως ὅτι $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Ὁμοίως συνάγεται $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$. Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι: εφ0 $<$ εφα $<$ εφ$\frac{\pi}{4}$ καὶ εφ 0 $<$ εφ β $<$ εφ $\frac{\pi}{4}$, προκύπτει $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ καὶ $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$. Συνεπῶς, ἐκ τῶν (I) καὶ (II) ἔχομεν:

$$\text{εφ}\alpha = \frac{1}{2},\ \text{εφ}\beta = \frac{1}{3} \qquad (2)$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{4} \qquad (3)$$

$$(1) \Longleftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \qquad (4)$$

Ἐπὶ πλέον, δυνάμει καὶ τῶν σχέσεων (2), εἶναι:

$$\text{εφ}\,(\alpha+\beta) = \frac{\text{εφ}\,\alpha + \text{εφ}\,\beta}{1 - \text{εφ}\,\alpha\ \text{εφ}\,\beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1.$$

Ἄρα, $\alpha + \beta = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$, $\kappa \in Z$. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ δείξωμεν ὅτι $\kappa = 0$, ὁπότε προκύπτει ἡ ἀποδεικτέα σχέσις (4). Ἐκ τῶν σχέσεων (3), διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ καὶ συνεπῶς ἔχομεν:

$$0 < \kappa\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow -\frac{1}{4} < \kappa < \frac{1}{4} \Longleftrightarrow \kappa = 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ἐὰν $\chi > 0$, $\psi > 0$ καὶ $\chi\psi < 1$, τότε ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\text{Τοξ εφ}\chi + \text{Τοξ εφ}\psi = \text{Τοξ εφ}\ \frac{\chi+\psi}{1-\chi\psi} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ $χψ<1$ καὶ $χ+ψ>0$, συνάγεται $\dfrac{χ+ψ}{1-χψ}>0$. Ἐν συνεχείᾳ θέτομεν Τοξ εφ$χ=α$, Τοξ εφ$ψ=β$ καὶ Τοξ εφ $\dfrac{χ+ψ}{1-χψ}=γ$, ὁπότε ἔχομεν:

$$εφα=χ,\ εφβ=ψ,\ εφγ=\frac{χ+ψ}{1-χψ} \qquad (2)$$

$$0<α<\frac{π}{2},\ 0<β<\frac{π}{2},\ 0<γ<\frac{π}{2} \qquad (3)$$

$$(1) \Longleftrightarrow α+β=γ \qquad (4)$$

Ἐξ ἄλλου, βάσει καὶ τῶν (2), εἶναι: $εφ(α+β)=\dfrac{εφα+εφβ}{1-εφα\,εφβ}=\dfrac{χ+ψ}{1-χψ}=$ $=εφγ$, ὁπότε $α+β=κπ+γ$, $κ \in Z$ (5). Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $κ=0$, ὁπότε, βάσει τῆς (5), προκύπτει ἡ ἀποδεικτέα σχέσις (4). Ἐκ τῶν (3) λαμβάνομεν: $-\dfrac{π}{2}<α+β-γ<π$. Ἐξ αὐτῆς καὶ τῆς (5) προκύπτει:

$$-\frac{π}{2}<κπ<π \Longleftrightarrow -\frac{1}{2}<κ<1 \Longleftrightarrow κ=0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: Τοξ ημ$χ$ + Τοξ ημ$χ\sqrt{3}=\dfrac{π}{2}$ (1)

Ἐπίλυσις: Τὸ πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ὁρίζεται (ἔχει ἔννοιαν), ἐφ' ὅσον εἶναι:

$$\left.\begin{cases} -1\le χ \le 1 \\ -1 \le χ\sqrt{3} \le 1 \end{cases}\right\} \Longleftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \le χ \le \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ἐν συνεχείᾳ θέτομεν Τοξ ημ$χ=α$ καὶ Τοξ ημ$χ\sqrt{3}=β$. Κατόπιν τούτου ἔχομεν:

$$ημα=χ,\ ημβ=χ\sqrt{3} \qquad (2)$$

$$-\frac{π}{2}<α<\frac{π}{2},\ -\frac{π}{2}<β<\frac{π}{2} \qquad (3)$$

$$(1) \Longleftrightarrow \begin{cases} α+β=\dfrac{π}{2} & (4) \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \le χ \le \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Διακρίνομεν τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις:

α) Ἐὰν $χ \le 0$, τότε, βάσει καὶ τῶν (2), (3), προκύπτει $-\dfrac{π}{2}<α\le 0$ καὶ $-\dfrac{π}{2}<β\le 0$, ὁπότε $-π<α+β\le 0$. Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (4) εἶναι ἀδύνατος.

β) Ἐὰν $\chi > 0$, τότε, βάσει καὶ τῶν (2), εἶναι $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ καὶ

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2} \left(\Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{2} - \beta < \frac{\pi}{2} \right).$$

Ἄρα, ἔχομεν:

$$(1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\alpha = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \\ 0 < \chi \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \\ 0 < \chi \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi = \sqrt{1 - 3\chi^2} \\ 0 < \chi \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4\chi^2 = 1 \\ 0 < \chi \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \chi = \frac{1}{2}.$$

Παρατήρησις. Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (1) τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος, δυνάμεθα νὰ ἀκολουθήσωμεν καὶ τὴν ἑπομένην μέθοδον:

Θεωροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν $\eta\mu\alpha = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ (I), ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὰς κάτωθι ἐξισώσεις:

$$\frac{\pi}{2} - \beta = \kappa\pi + (-1)^{\kappa}\alpha, \quad \kappa \in Z \qquad \text{(II)}$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (II), διὰ $\kappa = 0$ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\pi}{2} - \beta = \alpha$ ($\Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$).

Ἐξ αὐτοῦ δὲν συνάγεται ὅτι αἱ ἐξισώσεις (I) καὶ (4) εἶναι ἰσοδύναμοι, ἀλλὰ ἁπλῶς ὅτι κάθε λύσις τῆς (5) εἶναι καὶ λύσις τῆς (I). Ἄρα, ἐὰν εὕρωμεν τὰς λύσεις τῆς (I) καὶ ἐλέγξωμεν ποία ἐξ αὐτῶν εἶναι καὶ λύσις τῆς (5), ἔχομεν ἐπιλύσει τὴν (5), ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν (1).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Ἐὰν $\chi > 0$, $\psi > 0$ καὶ $\chi^2 + \psi^2 < 1$, νὰ δειχθῆ ὅτι:

$$\text{Τοξ}\,\eta\mu\chi + \text{Τοξ}\,\eta\mu\psi = \text{Τοξ}\,\eta\mu(\chi\sqrt{1 - \psi^2} + \psi\sqrt{1 - \chi^2}) \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις: Ἐκ τῆς ὑποθέσεως $\chi^2 + \psi^2 < 1$ συνάγεται ὅτι $\chi < 1$, $\psi < 1$ καὶ $\chi\sqrt{1 - \psi^2} + \psi\sqrt{1 - \chi^2} < 1$, συνεπῶς τὰ μέλη τῆς (1) ὁρίζονται (ἔχουν ἔννοιαν).

Ἐν συνεχείᾳ θέτομεν:

Τοξ ημχ $= \alpha$, Τοξ ημψ $= \beta$ καὶ Τοξ ημ$(\chi\sqrt{1 - \psi^2} + \psi\sqrt{1 - \chi^2}) = \gamma$, ὁπότε ἔχομεν:

$$\eta\mu\alpha = \chi, \ \eta\mu\beta = \psi, \ \eta\mu\gamma = \chi\sqrt{1 - \psi^2} + \psi\sqrt{1 - \chi^2} \qquad (2)$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \ 0 < \gamma < \frac{\pi}{2} \qquad (3)$$

$$(1) \Leftrightarrow \alpha + \beta = \gamma \qquad (4)$$

Δυνάμει τῶν (2) λαμβάνομεν: $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha =$ $= \eta\mu\alpha\sqrt{1 - \eta\mu^2\beta} + \eta\mu\beta\sqrt{1 - \eta\mu^2\alpha} = \chi\sqrt{1 - \psi^2} + \psi\sqrt{1 - \chi^2} = \eta\mu\gamma$. Ἐκ τῆς ἀποδειχθείσης σχέσεως $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\gamma$ δὲν συνάγεται κατ' ἀνάγκην ὅτι $\alpha + \beta = \gamma$, ἤτοι ἡ ἀποδεικτέα σχέσις (4). Θὰ πρέπει ἐπὶ πλέον νὰ δείξωμεν ὅτι:

$0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, ἐπειδὴ καὶ $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$, ὥστε νὰ προκύψη ἡ ἰσότης τῶν τόξων $\alpha + \beta$ καὶ γ ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ἡμιτόνων των. Πράγματι, ἐκ τῆς $\chi^2 + \psi^2 < 1$ ἔχομεν:

$$\chi^2 + \psi^2 < 1 \Rightarrow \eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta < 1 \Rightarrow \eta\mu^2\alpha < 1 - \eta\mu^2\beta \Rightarrow \eta\mu^2\alpha < \sigma\upsilon\nu^2\beta \Rightarrow$$
$$|\eta\mu\alpha| < |\sigma\upsilon\nu\beta| \Rightarrow \eta\mu\alpha < \sigma\upsilon\nu\beta \Rightarrow \eta\mu\alpha < \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right).$$

Ἐκ τῆς τελευταίας σχέσεως, ἐπειδὴ καὶ $0 < \frac{\pi}{2} - \beta < \frac{\pi}{2}$, συνάγεται:

$$\alpha < \frac{\pi}{2} - \beta, \text{ ὁπότε } 0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Εὕρετε τὰς τιμὰς τῆς παραστάσεως:

$$\psi = \text{τοξ}\,\varepsilon\varphi(\sigma\varphi\chi) + \text{τοξ}\,\sigma\varphi(\varepsilon\varphi\chi).$$

Λύσις: Θέτομεν τοξ εφ(σφχ) = α καὶ τοξ σφ(εφχ) = β, ὁπότε ἔχομεν:

$$\varepsilon\varphi\alpha = \sigma\varphi\chi \text{ καὶ } \sigma\varphi\beta = \varepsilon\varphi\chi,$$

$$\text{ἤτοι: } \varepsilon\varphi\alpha = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) \text{ καὶ } \sigma\varphi\beta = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right).$$

Ἐκ τῶν τελευταίων σχέσεων λαμβάνομεν: $\alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \chi$, $\kappa \in Z$ καὶ $\beta = \lambda\pi + \frac{\pi}{2} - \chi$, $\lambda \in Z$. Ἄρα, ἡ δοθεῖσα παράστασις γράφεται:

$$\psi = \alpha + \beta = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \chi + \lambda\pi + \frac{\pi}{2} - \chi = (\kappa + \lambda + 1)\pi - 2\chi$$

Αἱ διάφοροι λοιπὸν τιμαὶ τῆς παραστάσεως εἶναι: $\{\psi \in R : \psi = \rho\pi - 2\chi,\ \rho \in Z\}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις: $2\text{Τοξ}\,\eta\mu\,\frac{1}{3} + \text{Τοξ}\,\eta\mu\chi < \frac{\pi}{2}$ (1)

Ἐπίλυσις: Τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) ὁρίζεται, ἐφ' ὅσον $|\chi| \leq 1$. Ἐν συνεχείᾳ θέτομεν Τοξ ημ $\frac{1}{3} = \alpha$ καὶ Τοξ ημχ = β, ὁπότε ἔχομεν:

$$\eta\mu\alpha = \frac{1}{3},\ \eta\mu\beta = \chi \qquad (2)$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4},\ -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \qquad (3)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta < \frac{\pi}{2} & (4) \\ |\chi| \leq 1 \end{cases}$$

Εἶναι: $0<\alpha<\frac{\pi}{4} \Rightarrow 0<2\alpha<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0>-2\alpha>-\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}>\frac{\pi}{2}-2\alpha>0$

Ἐκ τῆς τελευταίας, ἐπειδὴ εἶναι καὶ $-\frac{\pi}{2}\leq\beta\leq\frac{\pi}{2}$, συνάγεται:

$$(1) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\beta<\frac{\pi}{2}-2\alpha \\ |\chi|\leq 1\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\eta\mu\beta<\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right) \\ |\chi|\leq 1\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\eta\mu\beta<\sigma\upsilon\nu 2\alpha \\ |\chi|\leq 1\end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\eta\mu\beta<1-2\eta\mu^2\alpha \\ -1\leq\chi\leq 1\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\chi<1-\frac{2}{9} \\ -1\leq\chi\leq 1\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\chi<\frac{7}{9} \\ -1\leq\chi\leq 1\end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow -1\leq\chi<\frac{7}{9}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

39) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν ἀκολούθων παραστάσεων:

1) $\text{Τοξ ημ}\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\text{ημ}\left(\text{Τοξ ημ}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 3) $\text{συν}\left(\text{Τοξ ημ}\frac{4}{5}\right)$

4) $\text{συν}\left(2\,\text{Τοξ συν}\frac{3}{5}\right)$ 5) $\text{Τοξ ημ}\left(\text{ημ}\frac{8\pi}{9}\right)$ 6) $\text{εφ}\left[\text{Τοξ συν}\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$

7) $\text{Τοξ εφ}\sqrt{3}+\text{Τοξ εφ }1$ 8) $2\text{Τοξ εφ}\frac{1}{3}+\text{Τοξ εφ}\frac{1}{7}$

40) Νὰ δειχθοῦν αἱ κάτωθι ἰσότητες:

1) $\text{Τοξ εφ}\frac{1}{2}+\text{Τοξ εφ}\frac{1}{5}+\text{Τοξ εφ}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

2) $\text{Τοξ σφ}7+\text{Τοξ σφ}8+\text{Τοξ σφ }18=\text{Τοξ σφ}3$

3) $\text{συν}\left(2\,\text{Τοξ εφ}\frac{1}{7}\right)=\text{ημ}\left(4\,\text{Τοξ εφ}\frac{1}{3}\right)$

41) Νὰ δειχθῇ ἡ ταυτότης: $\text{Τοξ εφ}\frac{\alpha}{\alpha+1}+\text{Τοξ εφ}\frac{1}{2\alpha+1}=\frac{\pi}{4}$ $(\alpha>0)$.

42) Εὕρετε διὰ ποίας τιμὰς τοῦ ν ἰσχύει ἡ σχέσις: $\text{Τοξ εφ}\frac{\nu}{\nu+1}+\text{Τοξ εφ}\frac{1}{2\nu+1}=\frac{\pi}{4}$

43) Ἐὰν $\chi,\psi,\omega>0$, νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\text{Τοξ εφ}\chi+\text{Τοξ εφ}\psi+\text{Τοξ εφ}\omega=\frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \chi\psi+\psi\omega+\omega\chi=1$$

44) Νὰ δειχθῇ ὅτι $\text{Τοξ εφ}\chi+\text{Τοξ εφ}\frac{1-\chi}{1+\chi}=\frac{\pi}{4}$, ἐὰν $\chi>-1$ καὶ

$\text{Τοξ εφ}\chi+\text{Τοξ εφ}\frac{1-\chi}{1+\chi}=-\frac{3\pi}{4}$, ἐὰν $\chi<-1$.

45) 'Εὰν $\chi>0$, $\psi>0$ καὶ $\chi\psi>1$, τότε ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$\text{Τοξ εφ}\chi+\text{Τοξ εφ}\psi=\pi+\text{Τοξ εφ}\ \frac{\chi+\psi}{1-\chi\psi}$$

46) Δείξατε ὅτι : $\text{τοξ εφ}\chi+\text{τοξ εφ}\psi=\kappa\pi+\text{τοξ εφ}\ \frac{\chi+\psi}{1-\chi\psi}$ $(\chi,\psi\in R$ καὶ $\kappa\in Z)$

47) 'Εὰν $\chi>0$ καὶ $\psi>0$, δείξατε ὅτι: $\text{Τοξ σφ}\chi+\text{Τοξ σφ}\psi=\text{Τοξ σφ}\ \frac{\chi\psi-1}{\chi+\psi}$

48) 'Εὰν $\chi>0$, $\psi>0$ καὶ $\text{Τοξ ημ}\chi+\text{Τοξ ημ}\psi<\frac{\pi}{2}$, τότε ἰσχύει ἡ σχέσις (1) τοῦ παραδείγματος 4 ('Αρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι : $\text{Τοξ ημ}\chi+\text{Τοξ ημ}\psi<\frac{\pi}{2}\iff\chi^2+\psi^2<1$).

49) 'Εὰν $\chi,\psi,\omega>0$, νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$\text{Τοξ συν}\chi+\text{Τοξ συν}\psi+\text{Τοξ συν}\omega=\pi\iff\chi^2+\psi^2+\omega^2+2\chi\psi\omega=1$$

50) 'Επιλύσατε τὰς κάτωθι ἐξισώσεις :

1) $\text{Τοξ εφ}\ \frac{3\chi}{2}+\text{Τοξ σφ}\ \frac{1}{\chi}=\frac{\pi}{4}$

2) $\text{Τοξ ημ}\chi+\text{Τοξ ημ}2\chi=\frac{\pi}{2}$

3) $\text{Τοξ εφ}\ \frac{2}{5}-\text{Τοξ εφ}\chi=\frac{\pi}{4}$

4) $\text{ημ}\left(\text{Τοξ εφ}\ \frac{1}{2}\right)=\text{εφ}(\text{Τοξ συν}\sqrt{\chi})$

5) $\text{ημ}\ [2\ \text{Τοξ ημ}\chi]=\chi$

6) $\text{Τοξ εφ}\chi+\text{Τοξ εφ}\ \frac{2\chi+1}{2\chi-23}=\frac{\pi}{4}$

51) Προσδιορίσατε τὸν ἀκέραιον κ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ ἑπομένη ἐξίσωσις νὰ ἔχῃ λύσιν :

$$\text{Τοξ εφ}\ \frac{\chi+1}{\chi-1}+\text{Τοξ εφ}\ \frac{\chi-1}{\chi}=\kappa\pi+\text{Τοξ εφ}(-7)$$

52) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισώσεις :

1) $\text{Τοξ συν}\ \frac{1}{2}>\frac{3\pi}{4}$

2) $\text{Τοξ εφ}\chi+\text{Τοξ σφ}(\chi-1)<\frac{\pi}{2}$

3) $|\ \text{τοξ ημ}\ \frac{1}{2}\ |<\frac{4\pi}{3}$

53) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις : $\text{ημ}\ [\text{Τοξ σφ}\ \{\text{συν}\ (\text{Τοξεφ}\chi)\}]>\chi$.

54) Εὕρετε τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς παραστάσεως $\psi=\text{συν}\ (\frac{1}{3}\ \text{τοξ ημ}\alpha)$, $0<\alpha<1$. 'Εν συνεχείᾳ, δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον αὐτῶν ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{16}(\alpha^2-1)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ — ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ

1. Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τυχόντος τριγώνου

1.1. Συμβολίζομεν μὲ α,β,γ ἀντιστοίχως τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ μὲ Α,Β,Γ τὰ μέτρα τῶν τριῶν γωνιῶν του. Ἐφ' ἑξῆς θὰ λέγωμεν: ἡ «πλευρὰ α» ἀντὶ τὸ «μῆκος τῆς πλευρᾶς α» ὡς καὶ ἡ «γωνία Α» ἀντὶ τὸ «μέτρον τῆς γωνίας Α». Τὸ αὐτὸ βεβαίως θὰ ἰσχύη καὶ δι' ὅλα τὰ γωνιακὰ καὶ γραμμικὰ στοιχεῖα[1] τοῦ τριγώνου.

Αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι ἑνὸς τριγώνου εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ συνδέονται, ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Γεωμετρίας, διὰ τῶν κάτωθι σχέσεων:

$$A+B+\Gamma=\Pi$$

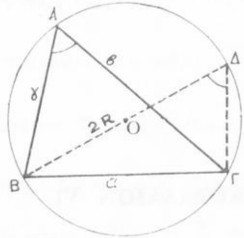
$$\left.\begin{array}{l} |\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma \\ |\gamma-\alpha|<\beta<\gamma+\alpha \\ |\alpha-\beta|<\gamma<\alpha+\beta \end{array}\right\} \text{(I) (Τριγωνικὴ ἰδιότης)}$$

1.2. Θεμελιώδεις ὁμάδες τύπων. Μεταξὺ τῶν κυρίων στοιχείων (α,β,γ,Α,Β,Γ) ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ὑπάρχουν, ὡς ἤδη γνωρίζομεν, διάφοροι σχέσεις (τύποι) π.χ. Νόμος τῶν ἡμιτόνων, Νόμος τῶν συνημιτόνων κ.λπ. Κατωτέρω θὰ ἀναφέρωμεν καὶ θὰ ἀποδείξωμεν τρεῖς θεμελιώδεις ὁμάδας τύπων, διὰ τῶν ὁποίων συνδέονται τὰ κύρια στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου.

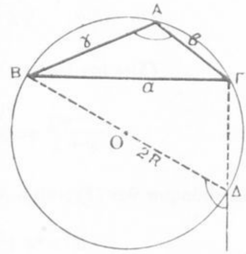
Ἔστωσαν ΑΒΓ τυχὸν τρίγωνον καὶ Ο τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης

[1] Λέγοντες «γραμμικὸν στοιχεῖον» ἑνὸς τριγώνου, ἐννοοῦμεν ἐν προκειμένῳ τὸ μῆκος οἱουδήποτε εὐθυγράμμου τμήματος, τὸ ὁποῖον ἔχει σχέσιν μὲ τὸ τρίγωνον. Π.χ. αἱ πλευραί, τὰ ὕψη, αἱ διχοτόμοι κ.λπ., ἑνὸς τριγώνου, εἶναι γραμμικὰ στοιχεῖα αὐτοῦ. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου θὰ θεωρῆται ἐφ' ἑξῆς γραμμικὸν στοιχεῖον αὐτοῦ.

περιφερείας αὐτοῦ, ἀκτῖνος R. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΒΔ (Σχ. 10 ἢ Σχ. 11). Ἐὰν $A < \frac{\pi}{2} \left(\text{ἢ } A > \frac{\pi}{2} \right)$, τότε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΓΔ ἔχομεν $(B\Gamma) = (B\Delta)\eta\mu\Delta$ (ἢ $(B\Gamma) = B\Delta)\eta\mu(\pi - \Delta))$, ὁπότε εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις προκύπτει $\alpha = 2R\eta\mu A$, διότι εἶναι $A = \Delta$ καὶ $\eta\mu(\pi - \Delta) = \eta\mu\,\Delta$. Ἐπὶ πλέον, ἐὰν



Σχ. 10



Σχ. 11

$A = \frac{\pi}{2}$, διαπιστοῦται εὐκόλως ὅτι ἰσχύει καὶ πάλιν ἡ ἀποδειχθεῖσα σχέσις $\alpha = 2R\,\eta\mu A$. Ἀναλόγως ἐργαζόμενοι, εὑρίσκομεν $\beta = 2R\,\eta\mu\,B$ καὶ $\gamma = 2R\,\eta\mu\Gamma$. Ἐκ τούτων, συνάγεται τὸ θεώρημα τῶν ἡμιτόνων (Νόμος τῶν ἡμιτόνων):

$$\boxed{\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = 2R} \qquad \text{(II)}$$

Ἔχομεν, ἤδη, τὴν ἑπομένην θεμελιώδη ὁμάδα τύπων :

$$\text{(A)} \quad \boxed{\begin{array}{c} \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \\ A + B + \Gamma = \pi \end{array}} \quad \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{array}$$

Τὴν δευτέραν θεμελιώδη ὁμάδα τύπων ἀποτελοῦν οἱ γνωστοὶ τύποι τοῦ **θεωρήματος τῶν συνημιτόνων** (Νόμος τῶν συνημιτόνων). Ἤτοι:

$$\text{(B)} \quad \boxed{\begin{array}{c} \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A \\ \beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\,\sigma\upsilon\nu B \\ \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma \end{array}} \quad \begin{array}{c} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \end{array}$$

Εἰς τυχὸν τρίγωνον ἰσχύει $\eta\mu A = \eta\mu\,(B + \Gamma)$ καὶ συνεπῶς ἔχομεν: $\eta\mu A = \eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma + \eta\mu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu B \Longleftrightarrow 2R\eta\mu A = (2R\eta\mu B)\,\sigma\upsilon\nu\Gamma + (2R\,\eta\mu\Gamma)\sigma\upsilon\nu B \Longleftrightarrow$
$\alpha = \beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\,\sigma\upsilon\nu B$ (δυνάμει καὶ τοῦ τύπου (II)).

Διὰ κυκλικῆς δὲ ἐναλλαγῆς τῶν α,β,γ καὶ Α,Β,Γ λαμβάνομεν τὴν ἀκόλουθον θεμελιώδη ὁμάδα τύπων, οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουν τὸ **θεώρημα τῶν προβολῶν.**

$$\text{(Γ)} \quad \boxed{\begin{array}{c} \alpha = \beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\,\sigma\upsilon\nu B \\ \beta = \gamma\,\sigma\upsilon\nu A + \alpha\,\sigma\upsilon\nu\Gamma \\ \gamma = \alpha\,\sigma\upsilon\nu B + \beta\,\sigma\upsilon\nu A \end{array}} \quad \begin{array}{c} \mathbf{6} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{8} \end{array}$$

1.2.1. Θεώρημα. Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ καὶ $A, B, \Gamma \in (0,\pi)$, τότε αἱ ἀνωτέρω ὁμάδες τύπων (A), (B) καὶ (Γ) εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἀπόδειξις: (A) $\Rightarrow$ (B): Ἐκ τοῦ τύπου **2** λαμβάνομεν : $A = \pi - (B + \Gamma) \Rightarrow$

$$\eta\mu A = \eta\mu\,(B + \Gamma) \Rightarrow \eta\mu A = \eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma + \eta\mu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu B \Rightarrow \eta\mu^2 A =$$

$$\eta\mu^2 B\,\sigma\upsilon\nu^2\Gamma + \eta\mu^2\Gamma\,\sigma\upsilon\nu^2 B + 2\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma \Rightarrow \eta\mu^2 A =$$

$$\eta\mu^2 B\,(1 - \eta\mu^2\Gamma) + \eta\mu^2\Gamma\,(1 - \eta\mu^2 B) + 2\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma \Rightarrow \eta\mu^2 A =$$

$$\eta\mu^2 B - \eta\mu^2 B\,\eta\mu^2\Gamma + \eta\mu^2\Gamma - \eta\mu^2\Gamma\,\eta\mu^2 B + 2\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma \Rightarrow \eta\mu^2 A =$$

$$\eta\mu^2 B + \eta\mu^2\Gamma + 2\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma\,(\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma - \eta\mu B\,\eta\mu\Gamma) \Rightarrow \eta\mu^2 A =$$

$$\eta\mu^2 B + \eta\mu^2\Gamma + 2\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) \Rightarrow \eta\mu^2 A = \eta\mu^2 B + \eta\mu^2\Gamma - 2\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu A$$

Ἐκ τῆς τελευταίας, βάσει καὶ τῶν σχέσεων $\eta\mu B = \beta\,\dfrac{\eta\mu A}{\alpha}$, $\eta\mu\Gamma = \gamma\,\dfrac{\eta\mu A}{\alpha}$, προκύπτει:

$$\eta\mu^2 A = \frac{\beta^2}{\alpha^2}\eta\mu^2 A + \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\eta\mu^2 A - 2\,\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}\eta\mu^2 A\,\sigma\upsilon\nu A \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A\,.$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύονται καὶ οἱ ὑπόλοιποι τύποι τῆς ὁμάδος (B).

(B) $\Rightarrow$ (Γ): Διὰ προσθέσεως τῶν (3) καὶ (4) λαμβάνομεν:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\gamma^2 - 2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A - 2\gamma\alpha\,\sigma\upsilon\nu B \Rightarrow$$

$$2\gamma^2 = 2\gamma\,(\beta\,\sigma\upsilon\nu A + \alpha\,\sigma\upsilon\nu B) \Rightarrow \gamma = \beta\,\sigma\upsilon\nu A + \alpha\,\sigma\upsilon\nu B$$

Ἀναλόγως προκύπτουν καὶ οἱ ὑπόλοιποι τύποι τῆς ὁμάδος (Γ).

(Γ) $\Rightarrow$ (A): Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς μὲν **6** μὲ α, τῆς δὲ **7** μὲ β καὶ ἔχομεν ἀντιστοίχως: $\alpha^2 = \alpha\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma + \alpha\gamma\,\sigma\upsilon\nu B$, $\beta^2 = \beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A + \alpha\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

Τὰς τελευταίας σχέσεις ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη καὶ προκύπτει: $\alpha^2 - \beta^2 = \gamma(\alpha\sigma\upsilon\nu B - \beta\sigma\upsilon\nu A)$. Ἐξ αὐτῆς καὶ βάσει τῆς **8** ἔχομεν:

$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha\sigma\upsilon\nu B + \beta\sigma\upsilon\nu A)\,(\alpha\sigma\upsilon\nu B - \beta\sigma\upsilon\nu A) \Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 B - \beta^2\sigma\upsilon\nu^2 A \Rightarrow$ $\alpha^2(1 - \sigma\upsilon\nu^2 B) = \beta^2(1 - \sigma\upsilon\nu^2 A) \Rightarrow \alpha^2\eta\mu^2 B = \beta^2\eta\mu^2 A \Rightarrow \alpha\eta\mu B = \beta\eta\mu A$, διότι α, β, ημA καὶ ημB θετικοὶ ἀριθμοί. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι: $\beta\eta\mu\Gamma = \gamma\eta\mu B$, ὁπότε $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\beta}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$.

Ἀπομένει νὰ δείξωμεν ὅτι $A + B + \Gamma = \pi$. Ἐκ τοῦ θεωρήματος τῶν ἡμιτόνων λαμβάνομεν $\beta = \dfrac{\alpha}{\eta\mu A}\,\eta\mu B$, $\gamma = \dfrac{\alpha}{\eta\mu A}\,\eta\mu\Gamma$ καὶ συνεπῶς, δυνάμει καὶ τῆς **6**, ἔχομεν:

$$\alpha = \frac{\alpha}{\eta\mu A}\,\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma + \frac{\alpha}{\eta\mu A}\,\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B \Rightarrow \eta\mu A = \eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma + \eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B \Rightarrow$$

$\eta\mu A = \eta\mu(B + \Gamma)$.

Ἀναλόγως προκύπτει $\eta\mu B = \eta\mu(\Gamma + A)$ καὶ $\eta\mu\Gamma = \eta\mu(A + B)$. Ἐκ τῶν τελευταίων τριῶν σχέσεων ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{l} Β+Γ = 2κπ+Α \text{ ἢ } Β+Γ = (2κ'+1)π-Α \\ Γ+Α = 2λπ+Β \text{ ἢ } Γ+Α = (2λ'+1)π-Β \\ Α+Β = 2μπ+Γ \text{ ἢ } Α+Β = (2μ'+1)π-Γ \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ll} Β+Γ-Α = 2κπ \text{ ἢ } Α+Β+Γ = (2κ'+1)π & (κ,κ'\in Z) \\ Γ+Α-Β = 2λπ \text{ ἢ } Γ+Α+Β = (2λ'+1)π & (λ,λ'\in Z) \\ Α+Β-Γ = 2μπ \text{ ἢ } Α+Β+Γ = (2μ'+1)π & (μ,μ'\in Z) \end{array}\right.$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $Α,Β,Γ \in (0,π)$ συνάγεται ὅτι $(Α+Β+Γ) \in (0,3π)$ καὶ $(Β+Γ-Α)$, $(Γ+Β-Γ)$, $(Α+Β-Γ) \in (-π,2π)$. Συνεπῶς, παρατηροῦμεν ὅτι:

Ἐὰν $Β+Γ-Α = 2κπ$, τότε εἶναι: $-π<2κπ<2π \Rightarrow -\frac{1}{2}<κ<1 \Rightarrow κ=0$.

Ἐὰν $Α+Β+Γ = (2κ'+1)π$, τότε εἶναι:

$$0<(2κ'+1)π<3π \Rightarrow -\frac{1}{2}<κ'<1 \Rightarrow κ'=0.$$

Ἄρα, τελικῶς ἔχομεν $Α+Β+Γ = π$ (διατί;)

Διατυποῦμεν ἤδη καὶ ἀποδεικνύομεν τὸ ἑπόμενον θεώρημα:

1.2.2. Θεώρημα. Ἐὰν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ $α,β,γ$ καὶ αἱ θετικαὶ γωνίαι $Α$, $Β$, $Γ$ ἱκανοποιοῦν τὰς σχέσεις τῆς ὁμάδος (Α), τότε, ὑπάρχει ἓν καὶ μόνον ἓν τρίγωνον, μὲ πλευρὰς $α,β,γ$ καὶ γωνίας τὰς $Α,Β,Γ$.

Ἀπόδειξις : Ἔστω τρίγωνον $Α'Β'Γ'$ τοιοῦτον, ὥστε $(Β'Γ') = α$, $Β' = Β$ καὶ $Γ' = Γ$. Ἡ κατασκευὴ ἑνὸς τοιούτου τριγώνου εἶναι πάντοτε δυνατή, διότι $Β+Γ = Β'+Γ'<π$. Εἶναι $Α'+Β'+Γ' = π$, ὁπότε $Α'+Β+Γ = π$ καὶ συνεπῶς, βάσει καὶ τῆς (2), προκύπτει $Α' = Α$.

Ἐπὶ πλέον, δυνάμει τοῦ θεωρήματος τῶν ἡμιτόνων διὰ τὸ τρίγωνον $Α'Β'Γ'$, ἔχομεν:

$$\frac{(Β'Γ')}{ημΑ'} = \frac{(Γ'Α')}{ημΒ'} = \frac{(Α'Β')}{ημΓ'} \Rightarrow \frac{α}{ημΑ} = \frac{(Γ'Α')}{ημΒ} = \frac{(Α'Β')}{ημΓ}$$

Ἐκ τῆς τελευταίας, βάσει καὶ τοῦ τύπου **1**, λαμβάνομεν $(Γ'Α') = β$ καὶ $(Α'Β') = γ$.

Ἄρα, τὰ ἓξ στοιχεῖα $α,β,γ,Α,Β$ καὶ $Γ$ εἶναι στοιχεῖα τοῦ τριγώνου $Α'Β'Γ'$. Τὸ μονοσήμαντον τοῦ τριγώνου $Α'Β'Γ'$ εἶναι προφανές.

Ἀναφέρομεν κατωτέρω δύο θεωρήματα ,τῶν ὁποίων αἱ ἀποδείξεις στηρίζονται εἰς τὴν ἰσοδυναμίαν τῶν θεμελιωδῶν ὁμάδων τύπων καὶ εἰς τὸ ἀνωτέρω θεώρημα καὶ συνεπῶς παραλείπονται.

1.2.3. Θεώρημα. Ἐὰν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ $α$, $β$, $γ$ καὶ αἱ γωνίαι $Α$, $Β$, $Γ$ μὲ $Α,Β,Γ \in (0,π)$ πληροῦν τὰς σχέσεις τῆς ὁμάδος (Β), τότε ὑπάρχει ἓν καὶ μόνον ἓν τρίγωνον μὲ πλευρὰς τὰς $α,β,γ$ καὶ γωνίας τὰς $Α,Β,Γ$ (ἀπόδειξις;).

1.2.4. Θεώρημα. Ἐὰν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ $α,β,γ$ καὶ αἱ γωνίαι $Α,Β,Γ \in (0,π)$

πληροῦν τὰς σχέσεις τῆς ὁμάδος (Γ), τότε ὑπάρχει ἓν καὶ μόνον ἓν τρίγωνον, μὲ πλευρὰς τὰς α,β,γ καὶ γωνίας τὰς Α,Β,Γ (ἀπόδειξις;).

Χρήσιμοι διὰ τὰ ἑπόμενα εἶναι καὶ οἱ ἀκόλουθοι γνωστοὶ τύποι:

1.3. Τύποι τοῦ Mollweide.

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\,\text{συν}\,\frac{\Gamma}{2}=\text{ημ}\,\frac{A-B}{2} \qquad (9)$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}\,\text{ημ}\,\frac{\Gamma}{2}=\text{συν}\,\frac{A-B}{2} \qquad (10)$$

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\,\text{σφ}\,\frac{\Gamma}{2}=\text{εφ}\,\frac{A-B}{2} \qquad (11)$$

1.4. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν ἡμίσεων γωνιῶν τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

$$\text{ημ}\,\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}} \qquad (12)$$

$$\text{συν}\,\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}} \qquad (13)$$

$$\text{εφ}\,\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}} \qquad (14)$$

1.5. Τύποι τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου.

$$E=\frac{1}{2}\,\beta\gamma\,\text{ημ}A=\frac{1}{2}\,\gamma\alpha\,\text{ημ}B=\frac{1}{2}\,\alpha\beta\,\text{ημ}\Gamma \qquad (15)$$

$$E=\frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \qquad (16)$$

$$E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \qquad (17)$$

$$E=2R^2\,\text{ημ}A\,\text{ημ}B\,\text{ημ}\Gamma \qquad (18)$$

1.6. Ἡ ἀκτὶς R συναρτήσει τῶν πλευρῶν τριγώνου.

$$R=\frac{\alpha\beta\gamma}{4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}} \qquad (19)$$

Παρατήρησις. Οἱ τύποι τοῦ θεωρήματος τῶν συνημιτόνων μετασχηματίζονται μέσῳ τῶν τύπων (15) τοῦ ἐμβαδοῦ εἰς χρησίμους τύπους, ὡς ἑξῆς:

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\text{συν}A \Rightarrow \alpha^2=\beta^2+\gamma^2-4\left(\frac{1}{2}\,\beta\gamma\,\text{ημ}A\right)\frac{\text{συν}A}{\text{ημ}A} \Rightarrow \alpha^2=\beta^2+\gamma^2-4E\,\text{σφ}A.$$

Ὥστε ἰσχύουν οἱ τύποι :

$$\boldsymbol{\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-4E\text{σφ}A\;,\quad \beta^2=\gamma^2+\alpha^2-4E\text{σφ}B\;,\quad \gamma^2=\alpha^2+\beta^2-4E\text{σφ}\Gamma} \qquad (\text{III})$$ [1]

Ἐξ αὐτῶν προκύπτουν ἀμέσως καὶ οἱ τύποι :

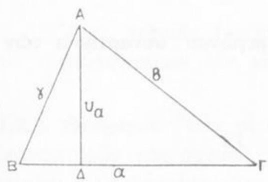
$$\boldsymbol{\text{σφ}A=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{4E}\;,\quad \text{σφ}B=\frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{4E}\;,\quad \text{σφ}\Gamma=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{4E}} \qquad (\text{IV})$$

Διὰ προσθέσεως δὲ κατὰ μέλη τῶν τελευταίων τούτων τύπων, λαμβάνομεν:

$$\boldsymbol{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=4E(\text{σφ}A+\text{σφ}B+\text{σφ}\Gamma)} \qquad (\text{V})$$

Οἱ ἀνωτέρω τύποι (III), (IV) καὶ (V) λύουν πολύπλοκα προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἐμφανίζονται αἱ παραστάσεις: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, $\text{σφ}A+\text{σφ}B+\text{σφ}\Gamma$, $\beta^2+\gamma^2-\alpha^2$ κ.λ.π.

1.7. Ὕψος τριγώνου. Ἔστω υ_α τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ὕψος τριγώνου ΑΒΓ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ ἔχομεν: $\upsilon_\alpha=\gamma\,\text{ημ}B$ (Σχ. 12) καὶ συνεπῶς, ἐπειδὴ $\gamma=2R\,\text{ημ}\Gamma$, προκύπτουν οἱ τύποι:



Σχ. 12

$\upsilon_\alpha=2R\,\text{ημ}\Gamma\,\text{ημ}B$	**20**
$\upsilon_\beta=2R\,\text{ημ}A\,\text{ημ}\Gamma$	**21**
$\upsilon_\gamma=2R\,\text{ημ}B\,\text{ημ}A$	**22**

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ τύπου **20** ἐλήφθη $B,\Gamma<\frac{\pi}{2}$ · ἐὰν $B\geqslant\frac{\pi}{2}$ ἢ $\Gamma\geqslant\frac{\pi}{2}$ ὁ τύπος ἰσχύει πάλιν (διατί;).

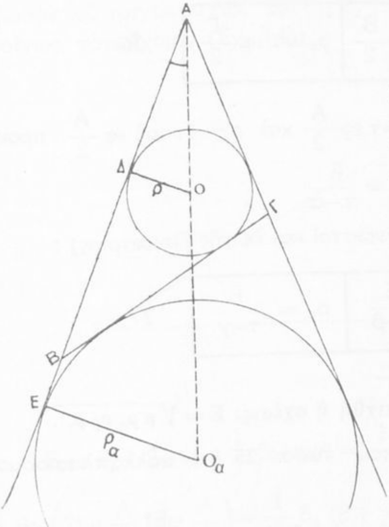
Ἐπίσης χρήσιμοι εἶναι καὶ οἱ ἀκόλουθοι γνωστοὶ ἐκ τῆς Γεωμετρίας θεμελιώδεις τύποι :

$$\boxed{\alpha\upsilon_\alpha=\beta\upsilon_\beta=\gamma\upsilon_\gamma=2E} \qquad \mathbf{23}$$

1.8. Ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τρίγωνον κύκλου. Ἔστω ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου κύκλου Ο. Ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωρίζομεν, ὅτι $(ΑΔ)=\tau-\alpha$ (Σχ. 13), ὅπου τ εἶναι ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΟ ἔχομεν $(ΔΟ)=(ΑΔ)\,\text{εφ}\frac{A}{2}$ καὶ συνεπῶς $\rho=(\tau-\alpha)\text{εφ}\frac{A}{2}$. Ἐξ αὐτοῦ καὶ βάσει τοῦ τύπου **14** προκύπτει:

---

[1] Οἱ τύποι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν Λατινικὴν ἀρίθμησιν, δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἀπομνημονευθοῦν.



Σχ. 13

$$\rho = (\tau-\alpha)\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}} \Rightarrow$$

$$\rho = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau^2}} \Rightarrow \rho = \frac{E}{\tau}$$

Τελικῶς ἔχομεν τοὺς κάτωθι βασικοὺς τύπους:

$$\boxed{\rho = (\tau-\alpha)\,\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = (\tau-\beta)\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = (\tau-\gamma)\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}} \qquad \mathbf{24}$$

$$\boxed{\rho = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}} = \frac{E}{\tau}} \qquad \mathbf{25}$$

Ἐκ τῶν **24** λαμβάνομεν:

$$\rho^3 = (\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$$

$$\Rightarrow (\tau\rho)^3 = \tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)\,\tau^2\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} \Rightarrow$$

$$E^3 = E^2\tau^2\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} \Rightarrow E = \tau^2\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} \Rightarrow$$

$$\tau\rho = \tau^2\,\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\rho = \tau\,\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}} \qquad \mathbf{VI}$$

Ἐκ τούτου δέ, προκύπτουν εὐκόλως καὶ οἱ ἑπόμενοι χρήσιμοι τύποι:

$$\boldsymbol{\tau = \rho\sigma\varphi\frac{A}{2}\,\sigma\varphi\frac{B}{2}\,\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}} \qquad \mathbf{VII}$$

$$\boldsymbol{E = \tau^2\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}} \qquad \mathbf{VIII}$$

$$\boldsymbol{E = \rho^2\sigma\varphi\frac{A}{2}\,\sigma\varphi\frac{B}{2}\,\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}} \qquad \mathbf{IX}$$

1.9. Ἀκτὶς τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου τριγώνου. Ἔστωσαν O_α τὸ κέντρον τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου, τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν πλευρὰν α τριγώνου ΑΒΓ καὶ ρ_α ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ (Σχ. 13). Ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωρίζομεν ὅτι $(AE) = \tau$ καὶ συνεπῶς ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου AEO_α ἔχομεν $\rho_\alpha = \tau\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$. Ἀντίστοιχοι τύποι θὰ ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς ἀκτῖνας ρ_β, ρ_γ καὶ οὕτω προκύπτουν οἱ βασικοὶ τύποι:

$\rho_\alpha = \tau\, \varepsilon\varphi \frac{A}{2}$	$\rho_\beta = \tau\, \varepsilon\varphi \frac{B}{2}$	$\rho_\gamma = \tau\, \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2}$	**26**

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τοὺς τύπους $\rho_\alpha = \tau\, \varepsilon\varphi \frac{A}{2}$ καὶ $\rho = (\tau - \alpha)\, \varepsilon\varphi \frac{A}{2}$ προκύπτει: $\frac{\rho_\alpha}{\rho} = \frac{\tau}{\tau-\alpha} \Rightarrow \rho_\alpha = \frac{\tau\rho}{\tau-\alpha} \Rightarrow \rho_\alpha = \frac{E}{\tau-\alpha}$

Ἔχομεν λοιπὸν τοὺς βασικοὺς τύπους (γνωστοὶ καὶ ἐκ τῆς Γεωμετρίας) :

$\rho_\alpha = \frac{E}{\tau-\alpha}$	$\rho_\beta = \frac{E}{\tau-\beta}$	$\rho_\gamma = \frac{E}{\tau-\gamma}$	**27**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1. Διὰ κάθε τρίγωνον νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις: $E = \sqrt{\rho\, \rho_\alpha\, \rho_\beta\, \rho_\gamma}$.

Ἀπόδειξις : Ἐκ τῶν τύπων **27** καὶ τοῦ τύπου **25** διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη ἔχομεν :

$$\rho_\alpha \rho_\beta \rho_\gamma \rho = \frac{E^4}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)\tau} \Rightarrow \rho_\alpha \rho_\beta \rho_\gamma \rho = \frac{E^4}{E^2} \Rightarrow$$

$$E^2 = \rho_\alpha \rho_\beta \rho_\gamma \rho \Rightarrow E = \sqrt{\rho\, \rho_\alpha\, \rho_\beta\, \rho_\gamma}\,.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2. Δείξατε ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ἰσχύει :

$$\frac{1}{\rho_\alpha} + \frac{1}{\rho_\beta} + \frac{1}{\rho_\gamma} = \frac{1}{\upsilon_\alpha} + \frac{1}{\upsilon_\beta} + \frac{1}{\upsilon_\gamma} = \frac{1}{\rho}$$

Ἀπόδειξις : Βάσει τῶν τύπων **27** ἔχομεν :

$$\frac{1}{\rho_\alpha} + \frac{1}{\rho_\beta} + \frac{1}{\rho_\gamma} = \frac{\tau-\alpha}{E} + \frac{\tau-\beta}{E} + \frac{\tau-\gamma}{E} = \frac{3\tau - (\alpha+\beta+\gamma)}{E} =$$

$$\frac{3\tau - 2\tau}{E} = \frac{\tau}{E} = \frac{\tau}{\tau\rho} = \frac{1}{\rho}\,.$$

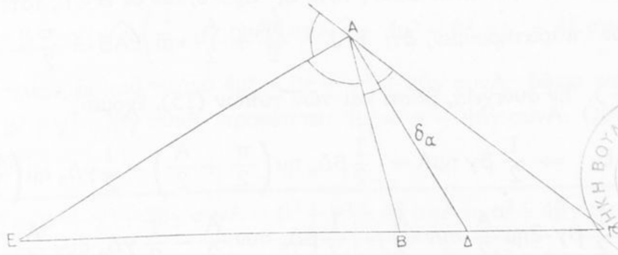
Ἐξ ἄλλου, βάσει τῶν τύπων **23** εἶναι :

$$\frac{1}{\upsilon_\alpha} + \frac{1}{\upsilon_\beta} + \frac{1}{\upsilon_\gamma} = \frac{\alpha}{2E} + \frac{\beta}{2E} + \frac{\gamma}{2E} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2E} = \frac{2\tau}{2E} = \frac{\tau}{\tau\rho} = \frac{1}{\rho}\,.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ἀμέσως ἡ ἰσχὺς τῆς ἀποδεικτέας σχέσεως.

Παρατήρησις. Οἱ τύποι **23** ἢ **27** ἐφαρμόζονται ἐν γένει εἰς προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα παρουσιάζονται τὰ ὕψη υ_α, υ_β καὶ υ_γ ἑνὸς τριγώνου ἢ αἱ ἀκτῖνες ρ_α, ρ_β καὶ ρ_γ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.

1.10. Ἐσωτερικὴ διχοτόμος τριγώνου. Ἔστω $(A\Delta) = \delta_\alpha$ ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν πλευρὰν α τριγώνου ΑΒΓ. Ἐὰν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ E_1, E_2 τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ ἀντιστοίχως, τότε ἔχομεν (Σχ. 14):



Σχ. 14

$$E = E_1 + E_2 \Rightarrow \frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\delta_\alpha\,\eta\mu\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\beta\delta_\alpha\,\eta\mu\frac{A}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\beta\gamma\left(2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2}\delta_\alpha(\beta+\gamma)\eta\mu\frac{A}{2} \Rightarrow 2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = (\beta+\gamma)\,\delta_\alpha \Rightarrow$$

$$\delta_\alpha = \frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} \Rightarrow \delta_\alpha = \frac{2\cdot 2R\,\eta\mu B\cdot 2R\,\eta\mu\Gamma}{2R\,\eta\mu B + 2R\,\eta\mu\Gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} \Rightarrow$$

$$\delta_\alpha = \frac{4R\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu B + \eta\mu\Gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} \Rightarrow \delta_\alpha = \frac{4R\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{2\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} \Rightarrow$$

$$\delta_\alpha = \frac{2R\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}.$$

Ἄρα, ἔχομεν τελικῶς τοὺς κάτωθι βασικοὺς τύπους:

$\delta_\alpha = \frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \frac{2R\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}$	**28**
$\delta_\beta = \frac{2\gamma\alpha}{\gamma+\alpha}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2} = \frac{2R\,\eta\mu\Gamma\,\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma-A}{2}}$	**29**
$\delta_\gamma = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} = \frac{2R\,\eta\mu A\,\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}}$	**30**

1.11. Ἐξωτερικὴ διχοτόμος τριγώνου. Ἔστω $(AE) = \Delta_\alpha$ ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν πλευρὰν α. Ἐὰν μὲ E_1, E_2 παραστήσωμεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΓΕ, ΑΒΕ ἀντιστοίχως, τότε θὰ εἶναι : $E = |E_1 - E_2|$ (Σχ 14), διότι ἐὰν μὲν εἶναι $B > \Gamma$, τότε $E_1 - E_2 > 0$, ἐὰν δὲ $B < \Gamma$, τότε $E_1 - E_2 < 0$. Ἐπὶ πλέον παρατηροῦμεν, ὅτι $\widehat{EA\Gamma} = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$ καὶ $\widehat{EAB} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$ (διότι $\widehat{EAB} = \frac{\pi}{2}$). Ἐν συνεχείᾳ, βάσει καὶ τῶν τύπων (15), ἔχομεν:

$$E = |E_1 - E_2| \Rightarrow \frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A = \left|\frac{1}{2}\beta\Delta_\alpha\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}\right) - \frac{1}{2}\gamma\Delta_\alpha\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)\right|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\beta\gamma\cdot 2\eta\mu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \left|\frac{1}{2}\beta\Delta_\alpha\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} - \frac{1}{2}\gamma\Delta_\alpha\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\right|^{1} \Rightarrow$$

$$\Delta_\alpha = \frac{2\beta\gamma}{|\beta - \gamma|}\eta\mu\frac{A}{2} \Rightarrow \Delta_\alpha = \frac{2\cdot 2R\eta\mu B\cdot 2R\eta\mu\Gamma}{2R\,|\eta\mu B - \eta\mu\Gamma|}\eta\mu\frac{A}{2} \Rightarrow$$

$$\Delta_\alpha = \frac{4R\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{\left|2\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}\right|}\eta\mu\frac{A}{2} \Rightarrow \Delta_\alpha = \frac{2R\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{\left|\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\right|\left|\eta\mu\frac{A}{2}\right|}\eta\mu\frac{A}{2} \Rightarrow$$

$$\Delta_\alpha = \frac{2R\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{\left|\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\right|} \quad (\text{διότι } \eta\mu\frac{A}{2} > 0).$$

Συνεπῶς ἔχομεν τοὺς κάτωθι βασικοὺς τύπους :

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta_\alpha = \dfrac{2\beta\gamma}{|\beta-\gamma|}\eta\mu\dfrac{A}{2} = \dfrac{2R\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{\left|\eta\mu\dfrac{B-\Gamma}{2}\right|} \\ \hline \Delta_\beta = \dfrac{2\gamma\alpha}{|\gamma-\alpha|}\eta\mu\dfrac{B}{2} = \dfrac{2R\,\eta\mu\Gamma\,\eta\mu A}{\left|\eta\mu\dfrac{\Gamma-A}{2}\right|} \\ \hline \Delta_\gamma = \dfrac{2\alpha\beta}{|\alpha-\beta|}\eta\mu\dfrac{\Gamma}{2} = \dfrac{2R\,\eta\mu A\,\eta\mu B}{\left|\eta\mu\dfrac{A-B}{2}\right|} \end{array}}$$

31

32

33

1.12. Διάμεσος τριγώνου. Ἔστω μ_α ἡ διάμεσος, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν πλευ-

[1] Ὑποτίθεται $\beta \neq \gamma$ ($\Longleftrightarrow$ $B \neq \Gamma$), διότι ἄλλως δὲν ὁρίζεται ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος Δ_α.

ρὰν α τριγώνου ΑΒΓ. Ἐκ τοῦ θεωρήματος τῶν διαμέσων ἔχομεν:

$$\beta^2+\gamma^2=2\mu_\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow 2(\beta^2+\gamma^2)=4\mu_\alpha^2+\alpha^2 \Rightarrow$$

$$2(\beta^2+\gamma^2)=4\mu_\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma \text{ συν}A \Rightarrow 4\mu_\alpha^2=\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma \text{ συν}A \Rightarrow$$

$$4\mu_\alpha^2=\beta^2+\gamma^2+4\left(\frac{1}{2}\beta\gamma \text{ ημ}A\right)\text{σφ}A \Rightarrow 4\mu_\alpha^2=\beta^2+\gamma^2+4E \text{ σφ}A .$$

Ἐπὶ πλέον, ἐκ τοῦ τύπου $4\mu_\alpha^2=\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma \text{ συν}A$, βάσει καὶ τοῦ τύπου $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma \text{ συν}A$, προκύπτει: $4\mu_\alpha^2=\alpha^2+4\beta\gamma \text{ συν}A$. Οὕτως ἔχομεν τοὺς τύπους:

$4\mu_\alpha^2=\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma \text{ συν}A=\beta^2+\gamma^2+4E \text{ σφ}A=\alpha^2+4\beta\gamma \text{ συν}A$	35
$4\mu_\beta^2=\gamma^2+\alpha^2+2\gamma\alpha \text{ συν}B=\gamma^2+\alpha^2+4E \text{ σφ}B=\beta^2+4\gamma\alpha \text{ συν}B$	36
$4\mu_\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \text{ συν}\Gamma=\alpha^2+\beta^2+4E \text{ σφ}\Gamma=\gamma^2+4\alpha\beta \text{ συν}\Gamma$	37

Παρατήρησις. Ὁ τύπος $4\mu_\alpha{}^2=\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma\text{συν}A$ εἶναι δυνατόν, διὰ τῆς χρήσεως βοηθητικῆς γωνίας, νὰ μετασχηματισθῇ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ διάμεσος μ_α. Πράγματι, ὁ τύπος οὗτος γράφεται διαδοχικῶς:

$$4\mu_\alpha{}^2=(\beta^2+\gamma^2)\left(\text{συν}^2\frac{A}{2}+\text{ημ}^2\frac{A}{2}\right)+2\beta\gamma\left(\text{συν}^2\frac{A}{2}-\text{ημ}^2\frac{A}{2}\right)=$$

$$(\beta+\gamma)^2\text{συν}^2\frac{A}{2}+(\beta-\gamma)^2\text{ημ}^2\frac{A}{2}=(\beta+\gamma)^2\text{συν}^2\frac{A}{2}\left[1+\left(\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\right)^2\text{εφ}^2\frac{A}{2}\right] \Rightarrow$$

$$2\mu_\alpha=(\beta+\gamma)\text{ συν}\frac{A}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\right)^2\text{εφ}^2\frac{A}{2}}$$

θέτοντες $\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\text{εφ}\frac{A}{2}=\text{εφ}\omega \left(-\frac{\pi}{2}<\omega<\frac{\pi}{2}\right)$, ἔχομεν:

$$2\mu_\alpha=(\beta+\gamma)\text{ συν}\frac{A}{2}\sqrt{1+\text{εφ}^2\omega} \Rightarrow 2\mu_\alpha=(\beta+\gamma)\text{ συν}\frac{A}{2}\,|\text{τεμ}\,\omega|$$

$$\Rightarrow \mu_\alpha=\frac{\beta+\gamma}{2\text{συν}\omega}\text{συν}\frac{A}{2} \Rightarrow \mu_\alpha=\frac{2R(\text{ημ}B+\text{ημ}\Gamma)}{2\text{συν}\omega}\text{συν}\frac{A}{2}=$$

$$\frac{2R\text{ημ}\frac{B+\Gamma}{2}\text{ συν}\frac{B-\Gamma}{2}}{\text{συν}\omega}\text{συν}\frac{A}{2}=\frac{2R\text{συν}^2\frac{A}{2}\text{συν}\frac{B-\Gamma}{2}}{\text{συν}\omega}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Νὰ ἐκφρασθοῦν τὰ στοιχεῖα τ, ρ καὶ ρ_α τυχόντος τριγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R καὶ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

Λύσις: Εἶναι: $\tau=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{1}{2}(2R\text{ημ}A+2R\text{ημ}B+2R\text{ημ}\Gamma) \Rightarrow$

$$\tau=R(\text{ημ}A+\text{ημ}B+\text{ημ}\Gamma) \Rightarrow \tau=4R\text{συν}\frac{A}{2}\text{συν}\frac{B}{2}\text{συν}\frac{\Gamma}{2}.$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου, βάσει καὶ τῶν τύπων **18** καὶ **25**, λαμβάνομεν διαδοχικῶς:

$$\rho = \frac{E}{\tau} = \frac{2R^2 \eta\mu A \ \eta\mu B \ \eta\mu \Gamma}{4R\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \ \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} \ \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}} =$$

$$\frac{2R^2\left(2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\right)\left(2\eta\mu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\right)\left(2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\right)}{4R\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}} =$$

$$= 4R \ \eta\mu \frac{A}{2} \ \eta\mu \frac{B}{2} \ \eta\mu \frac{\Gamma}{2} .$$

Γνωρίζομεν ὅτι $\rho_\alpha = \tau \ \varepsilon\varphi \frac{A}{2}$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον τοῦτον τὴν προηγουμένως εὑρεθεῖσαν ἔκφρασιν τοῦ τ, λαμβάνομεν :

$$\rho_\alpha = 4R \ \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \ \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} \ \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} \ \frac{\eta\mu \frac{A}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2}} \Rightarrow \rho_\alpha = 4R\eta\mu\frac{A}{2} \ \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} \ \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} .$$

Ὥστε ἔχομεν τοὺς ἀκολούθους χρησίμους τύπους :

$$\boldsymbol{\tau = 4R \ \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \ \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} \ \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}} \qquad \text{(X)}$$

$$\boldsymbol{\rho = 4R \ \eta\mu \frac{A}{2} \ \eta\mu \frac{B}{2} \ \eta\mu \frac{\Gamma}{2}} \qquad \text{(XI)}$$

$$\boldsymbol{\rho_\alpha = 4R \ \eta\mu \frac{A}{2} \ \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} \ \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}} \qquad \text{(XII)}$$

1.13. Παρατήρησις. Πάντα τὰ γραμμικὰ στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου (πλευραί, ἐμβαδόν, ὕψη, διχοτόμοι, διάμεσοι, περίμετρος, ἀκτὶς ἐγγεγραμμένου κύκλου, ἀκτῖνες παρεγγεγραμμένων κύκλων) ἐκφράζονται συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ τῶν γωνιῶν[1] αὐτοῦ καὶ μάλιστα διὰ τύπων τοιούτων, ὥστε νὰ εἶναι δυνατὸς ὁ διὰ τῶν λογαρίθμων ὑπολογισμὸς αὐτῶν. Οἱ τύποι οὗτοι εἶναι: (II), **18**, **20**, **21**, **22**, **28**, **29**, **30**, **31**, **32**, **33**, (X), (XI) (XII) καὶ ὁ τελικὸς τύπος τῆς προηγουμένης παρατηρήσεως.

Ἡ ἀνωτέρω παρατήρησις ἔχει σπουδαιοτάτην σημασίαν διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν τριγώνων, ὡς θὰ ἴδωμεν ἀμέσως εἰς τὰ ἑπόμενα.

---

[1] Τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν γωνιῶν. Τοῦτο δὲ θὰ ἐννοοῦμεν πάντοτε, ὅταν λέγωμεν ὅτι γραμμικόν τι στοιχεῖον ἑνὸς τριγώνου ἐκφράζεται συναρτήσει τοῦ R καὶ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

55) Εἰς κάθε τρίγωνον νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

1) $α\,ημ(B - Γ) + β\,ημ(Γ - A) + γ\,ημ(A - B) = 0$

2) $α\,συνA + β\,συνB + γ\,συνΓ = 4R\,ημA\,ημB\,ημΓ$

3) $(β + γ)\,συνA + (γ + α)\,συνB + (α + β)\,συνΓ = 2τ$

4) $α^2 + β^2 + γ^2 = 8R^2\,(1 + συνA\,συνB\,συνΓ)$

5) $α(συνB - συνΓ) = 2\,(γ - β)\,συν^2\,\frac{A}{2}$

6) $(β - γ)^2\,συν^2\,\frac{A}{2} + (β + γ)^2 ημ^2\,\frac{A}{2} = α^2$

7) $γ^2 = (α - β)^2 + 4αβ\,ημ^2\,\frac{Γ}{2}$

8) $α(β - γ)\,σφ^2\,\frac{A}{2} + β(γ - α)σφ^2\,\frac{B}{2} + γ(α - β)\,σφ^2\,\frac{Γ}{2} = 0$

9) $E = \dfrac{α^2 + β^2 - γ^2}{4εφ\,\dfrac{A + B - Γ}{2}} = \dfrac{α^2 - β^2}{2(σφB - σφA)} = \dfrac{α^2 ημ2B + β^2 ημ2A}{4} \quad (B \neq A)$

10) $E = \dfrac{(α^2 - β^2)\,ημA\,ημB}{2ημ\,(A - B)} = \sqrt{βγ\,(τ - β)\,(τ - γ)}\,συν\,\dfrac{A}{2} \quad (B \neq A)$

11) $E = ρ_β ρ_γ εφ\,\dfrac{A}{2} = \dfrac{ρ_α ρ_β ρ_γ}{τ} = \dfrac{μ_α{}^2 + μ_β{}^2 + μ_γ{}^2}{3(σφA + σφB + σφΓ)}$

12) $α\,σφA + β\,σφB + γ\,σφΓ = 2(R + ρ)$

13) $ημ^2\,\frac{A}{2} + ημ^2\,\frac{B}{2} + ημ^2\frac{Γ}{2} = 1 - \frac{ρ}{2R}$

14) $E = Rρ(ημA + ημB + ημΓ) = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{α^2β^2γ^2\,ημA\,ημB\,ημΓ} = \dfrac{τ^2}{σφ\,\dfrac{A}{2} + σφ\,\dfrac{B}{2} + σφ\,\dfrac{Γ}{2}}$

15) $E = 2R^2\,\dfrac{υ_α\,υ_β\,υ_γ}{αβγ} = α\,\dfrac{ρ_β ρ_γ}{ρ_β + ρ_γ} = \dfrac{(α + β)ρρ_γ}{ρ + ρ_γ}$

16) $υ_α + υ_β + υ_γ = \dfrac{βγ + γα + αβ}{2R}$

17) $\dfrac{ημ^2 A}{υ_α{}^2} = \dfrac{1}{β^2} + \dfrac{1}{γ^2} - \dfrac{2συνA}{βγ}$

18) $α^3 συν\,(B - Γ) + β^3 συν\,(Γ - A) + γ^3 συν\,(A - B) = 3αβγ$

56) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύῃ ἡ σχέσις: $R\,συν(B - Γ) = δ_α\,συν\,\dfrac{B - Γ}{2}$, τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

57) Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα ἓν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον, εἶναι:

$$εφ\,\frac{A}{2} + εφ\,\frac{B}{2} + εφ\,\frac{Γ}{2} + εφ\,\frac{A}{2}\,εφ\,\frac{B}{2}\,εφ\,\frac{Γ}{2} = 2$$

58) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $μ_α = γ$, τότε δείξατε ὅτι:

$$εφ\,\frac{A}{2} = \left(1 + εφ^2\,\frac{A}{2}\right) ημ\,(B - Γ)$$

καὶ ἀντιστρόφως.

59) Ἐν τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, ἐὰν ἰσχύῃ μία τῶν ἀκολούθων σχέσεων:

1) $\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} = \eta\mu B\ \eta\mu\Gamma$ 2) $\alpha = 2\beta\ \sigma\upsilon\nu\Gamma$ 3) $(\tau-\beta)\sigma\varphi \frac{\Gamma}{2} = \tau\varepsilon\varphi \frac{B}{2}$

4) $2\upsilon_\alpha = \alpha\sigma\varphi \frac{A}{2}$ 5) $4\tau\rho = \alpha^2\ \sigma\varphi \frac{A}{2}$ 6) $(\alpha+\beta)\sigma\varphi \frac{\Gamma}{2} = \alpha\ \varepsilon\varphi A + \beta\varepsilon\varphi B$

7) $\frac{\alpha}{\upsilon_\alpha} + \frac{\beta}{\upsilon_\beta} + \frac{\gamma}{\upsilon_\gamma} = \sigma\varphi \frac{A}{2} + 3\varepsilon\varphi \frac{A}{2}$

60) Εἰς κάθε τρίγωνον νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

1) $\delta_\alpha\ \sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2} = \upsilon_\alpha$ 2) $\delta_\alpha\ \Delta_\alpha\ (\beta^2-\gamma^2) = 4\beta\gamma E\ (\beta>\gamma)$

3) $\rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma = 4R + \rho$ 4) $\varepsilon\varphi \frac{B}{2} + \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{\rho_\alpha}$

5) $\varepsilon\varphi \frac{B}{2}\ \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} = \frac{\rho}{\rho_\alpha}$ 6) $\alpha^2 \geqslant 4\rho\rho_\alpha$ 7) $\rho_\alpha + \rho_\beta = 4R\ \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\Gamma}{2}$

8) $\rho_\alpha\rho_\beta + \rho\rho_\gamma = \alpha\beta$ 9) $\sigma\upsilon\nu A\ \sigma\upsilon\nu B\ \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\tau^2-(2R+\rho)^2}{4R^2}$

10) $\frac{1}{\rho_\alpha} + \frac{1}{\rho_\beta} = \frac{2}{\upsilon_\gamma}$ 11) $\upsilon_\alpha\upsilon_\beta + \upsilon_\beta\upsilon_\gamma + \upsilon_\gamma\upsilon_\alpha = \frac{2\rho\tau^2}{R}$

12) $\rho_\alpha\rho_\beta + \rho_\beta\rho_\gamma + \rho_\gamma\rho_\alpha = \tau^2$

61) Ἐὰν εἰς τρίγωνον εἶναι $E = \frac{\alpha}{4}\sqrt{(\beta+\gamma)^2-\alpha^2}$, τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

62) Ἐὰν αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀρ. προόδου καὶ ἡ μεγαλυτέρα γωνία εἶναι διπλασία τῆς μικροτέρας γωνίας, τότε αἱ πλευραί του εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 4,5,6 καὶ ἀντιστρόφως.

63) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ἰσχύῃ μία τῶν ἀκολούθων σχέσεων, τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον :

1) $\eta\mu^2A + \eta\mu^2B + \eta\mu^2\Gamma = 2$ 2) $E = \tau(\tau-\alpha)$ 3) $E = \rho\rho_\alpha$

4) $E = \rho_\beta\rho_\gamma$ 5) $\rho_\beta + \rho_\gamma = \alpha$ 6) $\rho_\beta + \rho_\gamma = 2R$

7) $\varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma = \frac{\alpha^2}{2E}$ 8) $\sigma\varphi \frac{B}{2} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta}$

64) Ἐὰν αἱ διάμεσοι μ_β καὶ μ_γ τέμνωνται καθέτως, νὰ δειχθῇ ὅτι :

1) $2(\sigma\varphi B + \sigma\varphi\Gamma) = \sigma\varphi A$ 2) $\sigma\upsilon\nu A \geqslant \frac{A}{5}$

65) Δείξατε ὅτι $\upsilon_\alpha = 4\rho$, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν $3\eta\mu \frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2}$.

66) Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα ἓν τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον εἶναι:

$$\beta\varepsilon\varphi \frac{B}{2} + \gamma\varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} = 2(R-\rho).$$

67) Εἶναι δυνατὸν αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν ἢ γεωμετρικὴν πρόοδον, ὅταν αἱ γωνίαι του εὑρίσκονται ἐν ἀριθμ. προόδῳ;

68) Ἐὰν εἰς τρίγωνον εἶναι $\alpha = \upsilon_\alpha$, τότε δείξατε ὅτι:

$$\frac{\gamma}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) \leq \beta \leq \frac{\gamma}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$$

69) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ἰσχύη $R = \sqrt{\rho \rho_\alpha}$, τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές.

70) Ἐὰν εἰς τρίγωνον εἶναι $\tau > 2R + \rho$, νὰ ὁρισθῇ τὸ εἶδος τοῦ τριγώνου.

71) Εἰς τρίγωνον εἶναι $\alpha^4 + \beta^4 = \gamma^4$, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν $2\eta\mu^2\Gamma = \varepsilon\varphi A \varepsilon\varphi B$.

72) Ἐὰν ω,φ καὶ θ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ διάμεσος μ_α ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ μὲ τὰς πλευρὰς α,β καὶ γ αὐτοῦ, τότε δείξατε ὅτι :

α) $\sigma\varphi\theta = 2\sigma\varphi A + \sigma\varphi\Gamma$

β) $\sigma\varphi\varphi = 2\sigma\varphi A + \sigma\varphi B$

γ) $2\sigma\varphi\omega = |\sigma\varphi B - \sigma\varphi\Gamma| \left(\omega \leq \frac{\pi}{2}\right)$

δ) $\sigma\varphi A = \dfrac{4\mu_\alpha{}^2 - \alpha^2}{4\alpha\mu_\alpha\eta\mu\omega}$

73) Ἐὰν Ο εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τριγώνου ΑΒΓ τοιοῦτον, ὥστε $\widehat{OAB} = \widehat{OB\Gamma} = \widehat{O\Gamma A} = \omega$, δείξατε ὅτι:

α) $\sigma\varphi\omega = \sigma\varphi A + \sigma\varphi B + \sigma\varphi\Gamma$

β) $\sigma\tau\varepsilon\mu^2\omega = \sigma\tau\varepsilon\mu^2 A + \sigma\tau\varepsilon\mu^2 B + \sigma\tau\varepsilon\mu^2\Gamma$

γ) $\omega \leq \frac{\pi}{6}$

74) Ἔστωσαν ΑΒΓ ὀξυγώνιον τρίγωνον, Α΄Β΄Γ΄ τὸ ὀρθικὸν τρίγωνον αὐτοῦ, Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ Ο τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας αὐτοῦ. Ἐὰν ΟΚ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ Ο ἀπὸ τὴν πλευράν, δείξατε ὅτι :

1) $(OK) = R\sigma\upsilon\nu A$, ὅπου R εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

2) $(HA) = 2R\sigma\upsilon\nu A$

3) $(HA') = 2R\ \sigma\upsilon\nu B\ \sigma\upsilon\nu\Gamma$

4) $A' = \pi - 2A$, $B' = \pi - 2B$, $\Gamma' = \pi - 2\Gamma$ (Α΄,Β΄,Γ΄ εἶναι αἱ γωνίαι τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου).

5) $(B'\Gamma') = R\eta\mu 2A = \alpha\sigma\upsilon\nu A$

6) $(A'B'\Gamma') = 2E\ \sigma\upsilon\nu A\ \sigma\upsilon\nu B\ \sigma\upsilon\nu\Gamma$

7) $(OH)^2 = R^2(1 - 8\ \sigma\upsilon\nu A\ \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu\Gamma)$

8) $\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu\Gamma \leq \frac{1}{8}$

Ποία ἡ μορφὴ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων, ὅταν τὸ τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον;

2. Ἐπίλυσις τριγώνων

2.1. Ὁρισμοὶ καὶ βασικαὶ ἔννοιαι. Καλεῖται **ἐπίλυσις** ἑνὸς τριγώνου, ὁ δι' ὑπολογισμοῦ προσδιορισμὸς τῶν ἀγνώστων κυρίων στοιχείων του, ὅταν δοθοῦν πρὸς τοῦτο ἐπαρκῆ στοιχεῖα αὐτοῦ.

Ἡ ἐπίλυσις τριγώνου εἶναι εἷς ἐκ τῶν κυριωτέρων σκοπῶν τῆς Τριγωνομετρίας καὶ τοῦτο, διότι αὕτη εἶναι ἀδύνατος διὰ τῆς Γεωμετρίας. Ἡ ἀδυναμία αὕτη τῆς Γεωμετρίας ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονός, ὅτι δὲν ὑπάρχουν σχέσεις, αἱ ὁποῖαι νὰ συνδέουν τὰ γραμμικὰ καὶ γωνιακὰ στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου. Τὴν δυσκολίαν ταύτην αἴρει ἡ Τριγωνομετρία διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν γωνίας, τῇ βοηθείᾳ τῶν ὁποίων, καθίσταται δυνατὴ ἡ ὕπαρξις σχέσεων μεταξὺ τῶν γραμμικῶν στοιχείων τριγώνου καὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

Θὰ λέγωμεν ὅτι μία ἐπίλυσις εἶναι **δυνατή**, ἐφ' ὅσον ὑπάρχει τρίγωνον τοιοῦτον, ὥστε τὰ ἐκ τῆς ἐπιλύσεως εὑρισκόμενα στοιχεῖα καὶ τὰ δεδομένα στοιχεῖα εἶναι στοιχεῖα του. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, ἡ ἐπίλυσις θὰ λέγεται **ἀδύνατος**.

Ἡ εὕρεσις τῶν ἀναγκαίων καὶ ἱκανῶν συνθηκῶν μεταξὺ τῶν δεδομένων στοιχείων διὰ τὴν ἐπίλυσιν ἑνὸς τριγώνου, ἵνα ἡ ἐπίλυσις εἶναι δυνατὴ ἢ ἀδύνατος, καλεῖται **διερεύνησις**.

Ἐφ' ἑξῆς, λέγοντες **γωνιακὴ σχέσις** ἢ **γραμμικὴ σχέσις** ἑνὸς τριγώνου, θὰ ἐννοοῦμεν κάθε τριγωνομετρικὴν ἐξίσωσιν (ἢ ἐξίσωσιν) ὡς πρὸς τὰς γωνίας Α,Β,Γ ἢ κάθε ἐξίσωσιν ὡς πρὸς τὰ γραμμικὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου τούτου.

Συνεπῶς, τὰ δεδομένα πρὸς ἐπίλυσιν τριγώνου στοιχεῖα δύνανται νὰ εἶναι γραμμικαὶ ἢ γωνιακαὶ σχέσεις.

2.2. Παρατηρήσεις : **1) Κάθε γραμμικὴ ὁμογενὴς σχέσις ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμος μὲ μίαν γωνιακὴν σχέσιν.** Τοῦτο συνάγεται ἐκ τῆς γενομένης παρατηρήσεως (1. 13), ὅτι πάντα τὰ γραμμικὰ στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου ἐκφράζονται συναρτήσει τοῦ R καὶ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ. Συνεπῶς, ἐὰν ἐκφράσωμεν τὰ γραμμικὰ στοιχεῖα τῆς γραμμικῆς ὁμογενοῦς σχέσεως συναρτήσει τοῦ R καὶ τῶν γωνιῶν καὶ ἀπαλείψωμεν τὸ R, θὰ προκύψη μία γωνιακὴ σχέσις. Π.χ. Ἐκ τῆς γραμμικῆς ὁμογενοῦς σχέσεως $\alpha \upsilon_\alpha = \beta\gamma$ θὰ ἔχωμεν :

$$\alpha\upsilon_\alpha = \beta\gamma \Longleftrightarrow (2R\ \eta\mu A)(2R\ \eta\mu B\ \eta\mu \Gamma) = (2R\ \eta\mu B)(2R\ \eta\mu\Gamma) \Longleftrightarrow$$

$$4R^2\ \eta\mu A\ \eta\mu B\ \eta\mu\Gamma = 4R^2\ \eta\mu B\ \eta\mu\Gamma \Longleftrightarrow \eta\mu A = 1 \Longleftrightarrow A = \frac{\pi}{2}.$$

2) Ἐκ δύο γραμμικῶν μὴ ὁμογενῶν σχέσεων προκύπτει μία γωνιακὴ σχέσις. Διότι, ἐὰν ἐκφράσωμεν τὰ γραμμικὰ στοιχεῖα τῶν δύο γραμμικῶν σχέσεων συναρτήσει τοῦ R καὶ τῶν γωνιῶν καὶ ἀπαλείψωμεν τὸ R μεταξὺ αὐτῶν (συνήθως διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν σχέσεων), θὰ προκύψη γωνιακὴ σχέσις. Π.χ. ἐκ τῶν γραμμικῶν σχέσεων $\beta - \gamma = \kappa > 0$ καὶ $E = \lambda^2$, ὅπου κ,λ δεδομένοι ἀριθμοί, θὰ ἔχωμεν:

$$\beta - \gamma = \kappa \Longleftrightarrow 2R\ (\eta\mu B - \eta\mu\Gamma) = \kappa \Longleftrightarrow 4R\ \eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\ \sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2} = \kappa \Longleftrightarrow$$

$$4R\ \eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\ \eta\mu\frac{A}{2} = \kappa \Longleftrightarrow 16R^2\ \eta\mu^2\frac{B-\Gamma}{2}\ \eta\mu^2\frac{A}{2} = \kappa^2 \quad (1).$$

$$E = \lambda^2 \Longleftrightarrow 2R^2\ \eta\mu A\ \eta\mu B\ \eta\mu\Gamma = \lambda^2 \Longleftrightarrow 4R^2\ \eta\mu\frac{A}{2}\ \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\ \eta\mu B\ \eta\mu\Gamma = \lambda^2 \quad (2)$$

Διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν (1), (2) προκύπτει ἡ γωνιακὴ σχέσις :

$$\frac{4\eta\mu^2\dfrac{B-\Gamma}{2}\ \eta\mu\dfrac{A}{2}}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{A}{2}\ \eta\mu B\ \eta\mu\Gamma} = \frac{\kappa^2}{\lambda^2}$$

Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι Α,Β,Γ καὶ εἷς ἀριθμὸς R. Ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωρίζομεν, ὅτι αἱ ἱκαναὶ καὶ ἀναγκαῖαι συνθῆκαι, ἵνα ὑπάρχῃ τρίγωνον μὲ γωνίας τὰς Α,Β,Γ καὶ ἀκτῖνα περιγεγραμμένης περιφερείας αὐτοῦ, μήκους R, εἶναι :

$$A>0,\ B>0,\ \Gamma>0,\ A+B+\Gamma=\pi,\ R>0$$

Ἄρα, ἔχομεν τὴν ἑπομένην βασικὴν ἐπίλυσιν :

2.3 Βασικὴ ἐπίλυσις. Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν δύο γωνιῶν του καὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας αὐτοῦ. Δηλαδὴ δίδονται: $A=\theta_1$, $B=\theta_2$, $R=\kappa$ (θ_1,θ_2,κ δεδομένοι ἀριθμοί).

Πρός ἐπίλυσιν τοῦ τριγώνου τούτου θεωροῦμεν τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} A=\theta_1 \\ B=\theta_2 \\ A+B+\Gamma=\pi \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\theta_1 \\ B=\theta_2 \\ \Gamma=\pi-(\theta_1+\theta_2) \end{array}\right.$$

Ἵνα τὸ σύστημα τοῦτο ἔχῃ θετικὴν λύσιν πρέπει καὶ ἀρκεῖ:

$$(\theta_1>0,\ \theta_2>0,\ \pi-(\theta_1+\theta_2)>0) \Longleftrightarrow (\theta_1>0, \theta_2>0,\ \theta_1+\theta_2<\pi)$$

Ἄρα, αἱ συνθῆκαι δυνατότητος τῆς ἐπιλύσεως εἶναι:

$$\theta_1>0,\ \theta_2>0,\ \theta_1+\theta_2<\pi,\ \kappa>0.$$

Ἐν συνεχείᾳ, ἐκ τῶν τύπων $\alpha=2R\eta\mu A$, $\beta=2R\eta\mu B$ καὶ $\gamma=2R\eta\mu\Gamma$ προσδιορίζομεν τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, αἱ ὁποῖαι θὰ εἶναι:

$$\alpha=2\kappa\ \eta\mu\theta_1,\quad \beta=2\kappa\ \eta\mu\theta_2,\quad \gamma=2\kappa\ \eta\mu\ (\theta_1+\theta_2)$$

2.4. Συμφώνως πρὸς τὰς ἀνωτέρω παρατηρήσεις, διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις ἐπιλύσεων.

α) Δίδονται δύο γωνιακαὶ σχέσεις καὶ μία γραμμικὴ μὴ ὁμογενής.

β) Δίδονται δύο γραμμικαὶ σχέσεις, ἐκ τῶν ὁποίων μία τοὐλάχιστον εἶναι μὴ ὁμογενὴς καὶ μία γωνιακή.

γ) Δίδονται τρεῖς γραμμικαὶ σχέσεις, ἐκ τῶν ὁποίων μία τοὐλάχιστον εἶναι μὴ ὁμογενής.

Αἱ περιπτώσεις β) καὶ γ) ἀνάγονται, δυνάμει τῶν ἀνωτέρω παρατηρήσεων, εἰς τὴν περίπτωσιν α) (διατί;).

Πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ τριγώνου, εἰς τὴν περίπτωσιν α) παρατηροῦμεν ὅτι: Αἱ δύο δεδομέναι γωνιακαὶ σχέσεις, ἐν συνδυασμῷ καὶ μὲ τὴν $A+B+\Gamma=\pi$, ἀποτελοῦν ἓν τριγωνομετρικὸν σύστημα (ἢ σύστημα) (Σ), μὲ ἀγνώστους τὰς γωνίας Α, Β καὶ Γ. Οὕτως, ἡ ἐπίλυσις τοῦ τριγώνου ἀρχίζει μὲ τὸν προσδιορισμὸν τῶν γωνιῶν ἐκ τοῦ συστήματος (Σ). Ἐὰν τὸ σύστημα τοῦτο ἔχῃ θετικὴν λύσιν ($A>0$, $B>0$, $\Gamma>0$), τότε προσδιορίζομεν τὰς γωνίας. Ἐν συνεχείᾳ, ἐκ τῆς δεδομένης γραμμικῆς σχέσεως προσδιορίζομεν τὸ R, ἀφοῦ προηγουμένως ἐκφράσωμεν τὰ γραμμικὰ στοιχεῖα αὐτῆς συναρτήσει τοῦ R καὶ τῶν γωνιῶν Α,Β,Γ. Ἔχομεν οὕτως ἀναχθῆ εἰς τὴν βασικὴν ἐπίλυσιν.

Τονίζομεν ἰδιαιτέρως, ὅτι, ἐὰν τὸ σύστημα (Σ) ἔχῃ θετικὴν λύσιν καὶ εἶναι $R>0$, τότε ὑπάρχει τρίγωνον, τοιοῦτον ὥστε τὰ δεδομένα στοιχεῖα καὶ τὰ ἐκ τῆς ἐπιλύσεως εὑρισκόμενα τοιαῦτα, νὰ εἶναι στοιχεῖα του.

Ὥστε, αἱ συνθῆκαι, ἵνα τὸ σύστημα (Σ) ἔχῃ θετικὴν λύσιν καὶ εἶναι $R > 0$, εἶναι αἱ συνθῆκαι δυνατότητος τῆς ἐπιλύσεως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν σχέσεων: $B - \Gamma = \omega > 0$, $\beta + \gamma = \kappa \upsilon_\alpha$ καὶ $\rho = \lambda$, ὅπου κ,λ,ω δεδομένοι ἀριθμοί.

Ἐπίλυσις : Τὰ δεδομένα πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ τριγώνου εἶναι : Μία γωνιακὴ σχέσις καὶ δύο γραμμικαὶ σχέσεις, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία ($\rho = \lambda$) εἶναι μὴ ὁμογενής. Ἐκ τῆς ὁμογενοῦς σχέσεως $\beta + \gamma = \kappa\upsilon_\alpha$ ἔχομεν:

$$\beta + \gamma = \kappa\upsilon_\alpha \iff 2R\,(\eta\mu B + \eta\mu\Gamma) = 2\kappa R\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma$$

$$4\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2} = \kappa\,(2\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma) \iff$$

$$4\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2} = \kappa\{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) - \sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)\}\quad (1)$$

Ἄρα, ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} B-\Gamma = \omega \\ (1) \\ A+B+\Gamma = \pi \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} B-\Gamma = \omega \\ 4\sigma\upsilon\nu\dfrac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\omega}{2} = \kappa\,(\sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu A) \\ A+B+\Gamma = \pi \end{array}\right.\quad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) ἰσοδυνάμως γράφεται:

$$(2) \iff 4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2} = \kappa\,\left(\sigma\upsilon\nu\omega + 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} - 1\right) \iff$$

$$2\kappa\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} - 4\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} + \kappa\,\sigma\upsilon\nu\omega - \kappa = 0 \iff$$

$$f\left(\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\right) = \kappa\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} - 2\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} - \kappa\eta\mu^2\frac{\omega}{2} = 0\quad (3)$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι: $\Gamma > 0 \iff 2\Gamma > 0 \iff (A+B+\Gamma) - (B-\Gamma) > A \iff \pi - \omega > A$

Ἐκ ταύτης καὶ ἐπειδὴ $B-\Gamma = \omega > 0$, συνάγεται ὅτι: Ἐὰν τὸ ἀνωτέρω σύστημα ἔχῃ λύσιν, αὕτη θὰ εἶναι θετική, τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν:

$$0 < A < \pi - \omega < \pi \iff 0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2} < \frac{\pi}{2} \iff$$

$$\sigma\upsilon\nu\,0 > \sigma\upsilon\nu\,\frac{A}{2} > \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right) \iff 1 > \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} > \eta\mu\frac{\omega}{2}\quad (4)$$

Συνεπῶς, αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (3) εἶναι δεκταί, ἐφ' ὅσον πληροῦν τὴν (4). Πρὸς τοῦτο, ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀλγέβρας, διακρίνομεν τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις:

α) Ἡ (3) ἔχει μίαν δεκτὴν ρίζαν, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν :

$$f\left(\eta\mu\frac{\omega}{2}\right) f(1) < 0 \Longleftrightarrow$$

$$\left(\kappa\eta\mu^2\frac{\omega}{2} - 2\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\,\eta\mu\frac{\omega}{2} - \kappa\eta\mu^2\frac{\omega}{2}\right)\left(\kappa - 2\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2} - \kappa\eta\mu^2\frac{\omega}{2}\right) < 0 \Longleftrightarrow$$

$$-2\,\eta\mu\frac{\omega}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\left(\kappa\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2} - 2\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\right) < 0 \Longleftrightarrow$$

$$\eta\mu\omega\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\left(\kappa\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2} - 2\right) > 0 \Longleftrightarrow \kappa\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2} - 2 > 0 \quad (5)$$

β) Ἡ (3) ἔχει δύο δεκτὰς ρίζας, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν:

$$\Delta > 0,\ \alpha f\left(\eta\mu\frac{\omega}{2}\right) > 0,\ \alpha f(1) > 0,\ \eta\mu\frac{\omega}{2} + \frac{\beta}{2\alpha} < 0,\ 1 + \frac{\beta}{2\alpha} > 0$$

Ἐν συνεχείᾳ, ἐκ τῆς δεδομένης γραμμικῆς σχέσεως $\rho = \lambda$ καὶ βάσει τοῦ τύπου (XI) ἔχομεν: $\lambda = 4R\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$. Ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν τὸ R καὶ συνεπῶς ἔχομεν ἀναχθῆ εἰς τὴν βασικὴν ἐπίλυσιν.

Ἐπὶ πλέον, ἵνα τὸ R εἶναι θετικόν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ $\lambda > 0$. Ἐκ τῆς δεδομένης σχέσεως $\beta + \gamma = \kappa\upsilon_\alpha$ προκύπτει καὶ $\kappa > 0$.

Ἡ συνθήκη (5), ἐφ' ὅσον $\kappa > 0$, γράφεται: $\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2} > \frac{2}{\kappa}$

Ἐπίσης ἔχομεν: $\alpha f(\eta\mu\frac{\omega}{2}) = \kappa(-2\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\,\eta\mu\frac{\omega}{2}) = -\kappa\,\eta\mu\omega < 0$(διότι $\kappa > 0$), συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις (3) δὲν ἔχει δύο δεκτὰς ρίζας.

Τελικῶς, συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν ὅτι αἱ συνθῆκαι δυνατότητος τῆς ἐπιλύσεως εἶναι : $\lambda > 0,\ \kappa > 0,\ \sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2} > \frac{2}{\kappa}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν σχέσεων: $B - \Gamma = \omega$, $\frac{\beta}{\gamma} = \kappa$ καὶ $\delta_\alpha = \lambda$, ὅπου κ,λ,ω δεδομένοι ἀριθμοὶ καὶ $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$.

Ἐπίλυσις : Τὰ δεδομένα πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ τριγώνου εἶναι: Μία γωνιακὴ σχέσις καὶ δύο γραμμικαὶ σχέσεις, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία ($\delta_\alpha = \lambda$) εἶναι μὴ ὁμογενής. Ἐκ τῆς ὁμογενοῦς σχέσεως $\frac{\beta}{\gamma} = \kappa$ προκύπτει $\kappa \neq 1$, διότι, ἐὰν $\kappa = 1$, τότε $\beta = \gamma$, ὅθεν $B = \Gamma$ καὶ συνεπῶς $B - \Gamma = 0$, ὅπερ ἄτοπον, λόγῳ τῆς δεδομένης σχέσεως $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$. Ἐν συνεχείᾳ, βάσει γνωστῆς ἰδιότητος τῶν ἀναλογιῶν, ἔχομεν:

$$\frac{\beta}{\gamma}=\kappa \Longleftrightarrow \frac{2R\eta\mu B}{2R\eta\mu\Gamma}=\kappa \Longleftrightarrow \frac{\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma}=\kappa \Longleftrightarrow \frac{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}{\eta\mu B-\eta\mu\Gamma}=\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{2\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}{2\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}}=\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \Longleftrightarrow \varepsilon\varphi\frac{B+\Gamma}{2}\sigma\varphi\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\kappa+1}{\kappa-1}$$

Συνεπῶς, ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} B-\Gamma=\omega \\ A+B+\Gamma=\pi \\ \varepsilon\varphi\frac{B+\Gamma}{2}\sigma\varphi\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} B-\Gamma=\omega \\ A+B+\Gamma=\pi \\ \sigma\varphi\frac{A}{2}=\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2} \quad (1) \end{array}\right.$$

Ἐὰν τὸ ἀνωτέρω σύστημα ἔχῃ λύσιν, αὕτη εἶναι θετική, ὅταν καὶ μόνον ὅταν (ὡς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα):

$$0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2}<\frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \sigma\varphi\frac{A}{2}>\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2}\right) \Longleftrightarrow \sigma\varphi\frac{A}{2}>\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}$$

Ἑπομένως, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει δεκτὴν λύσιν, ὅταν καὶ μόνον ὅταν:

$$\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}>\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2} \Longleftrightarrow \frac{\kappa+1}{\kappa-1}>1 \Longleftrightarrow \kappa>1$$

Ἐπὶ πλέον, ἐκ τῆς γραμμικῆς σχέσεως $\delta_\alpha=\lambda$ ἔχομεν: $\dfrac{2R\eta\mu B\ \eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}=\lambda$ καὶ ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν τὸ $R=\dfrac{\lambda\,\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}{2\eta\mu B\ \eta\mu\Gamma}$. Οὕτω, καταλήγομεν εἰς τὴν βασικὴν ἐπίλυσιν.

Ἡ ἐξίσωσις (1) ἐπιλύεται ὡς ἑξῆς: Ἐπειδὴ $\dfrac{\kappa+1}{\kappa-1}\varepsilon\varphi\dfrac{\omega}{2}>0$, ὑπάρχει τόξον θ (εὑρισκόμενον λογαριθμικῶς) μὲ $0<\theta<\pi$ τοιοῦτον, ὥστε $\sigma\varphi\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\kappa+1}{\kappa-1}\varepsilon\varphi\dfrac{\omega}{2}$ καὶ συνεπῶς ἡ (1) γράφεται $\sigma\varphi\dfrac{A}{2}=\sigma\varphi\dfrac{\theta}{2}$. Ἡ λύσις αὐτῆς, ἐπειδὴ $0<A<\pi$, εἶναι $A=\theta$. Εὑρέθη οὕτως ἡ γωνία A καὶ συνεπῶς τὸ ἀνωτέρω σύστημα ἐπιλύεται εὐκόλως. Πρὸς ὁλοκλήρωσιν τῆς διερευνήσεως τῆς ἐπιλύσεως, παρατηροῦμεν ὅτι : $R>0 \Longleftrightarrow \lambda>0$.

Ὥστε, αἱ συνθῆκαι δυνατότητος τῆς ἐπιλύσεως εἶναι : $\lambda>0,\ \kappa>1$.

2.5. Κλασσικαὶ ἐπιλύσεις. Ἐὰν τὰ δεδομένα πρὸς ἐπίλυσιν ἑνὸς τριγώνου εἶναι κύρια στοιχεῖα τοῦ τριγώνου τούτου, τότε λέγομεν ὅτι ἡ ἐπίλυσις εἶναι **κλασσικὴ ἐπίλυσις.**

2.5.1. Νὰ ἐπιλυθῆ τρίγωνον ἐκ τῶν: $A = \theta_1$, $B = \theta_2$, $\alpha = \kappa$. Πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ τριγώνου τούτου, ὡς ἀνεφέραμεν καὶ εἰς τὰς γενικὰς περιπτώσεις, θεωροῦμεν τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} A = \theta_1 \\ B = \theta_2 \\ A + B + \Gamma = \pi \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = \theta_1 \\ B = \theta_2 \\ \Gamma = \pi - (\theta_1 + \theta_2) \end{array}\right.$$

Τὸ σύστημα τοῦτο ἔχει θετικὴν λύσιν, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν: $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$, $\theta_1 + \theta_2 < \pi$. Ἐν συνεχείᾳ, ἐκ τῆς γραμμικῆς σχέσεως $\alpha = \kappa$ ἔχομεν: $\kappa = 2R\, \eta\mu\theta_1 \Rightarrow R = \dfrac{\kappa}{2\eta\mu\theta_1}$. Ἔχομεν ἤδη γνωστὰ τὰ στοιχεῖα A, B, Γ, R καὶ συνεπῶς, προχωροῦμεν κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς βασικῆς ἐπιλύσεως. Ἐπὶ πλέον εἶναι: $R > 0 \Longleftrightarrow \dfrac{\kappa}{2\eta\mu\theta_1} > 0 \Longleftrightarrow \kappa > 0$, ἑπομένως αἱ συνθῆκαι δυνατότητος τῆς ἐπιλύσεως εἶναι: $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$, $\theta_1 + \theta_2 < \pi$, $\kappa > 0$.

2. 5. 2. Νὰ ἐπιλυθῆ τρίγωνον ἐκ τῶν: $\beta = \kappa$, $\gamma = \lambda$, $A = \theta$. Ὑποθέτομεν $\kappa > 0$, $\lambda > 0$ καὶ $0 < \theta < \pi$, διότι, ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, εἶναι προφανὲς ὅτι δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ ἐπίλυσις. Οἱ τεθέντες περιορισμοὶ θὰ εὑρίσκοντο βεβαίως καὶ ἐκ τῆς συνήθους διαδικασίας τῆς διερευνήσεως τῆς ἐπιλύσεως.

Ἐν συνεχείᾳ, ὑποθέτομεν $\beta > \gamma$ ($\Longleftrightarrow \kappa > \lambda$), ὁπότε, βάσει καὶ τοῦ τύπου **11**, ἔχομεν τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} A = \theta \\ A + B + \Gamma = \pi \\ \varepsilon\varphi\, \dfrac{B-\Gamma}{2} = \dfrac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\, \sigma\varphi\, \dfrac{A}{2} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = \theta \\ A + B + \Gamma = \pi \\ \varepsilon\varphi\, \dfrac{B-\Gamma}{2} = \dfrac{\kappa-\lambda}{\kappa+\lambda}\, \sigma\varphi\, \dfrac{\theta}{2} \end{array}\right. \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $0 < A < \pi$ καὶ $\kappa > \lambda$ ($\kappa, \lambda > 0$), συνάγεται $\dfrac{\kappa-\lambda}{\kappa+\lambda}\, \sigma\varphi\, \dfrac{\theta}{2} > 0$.

Ἐπιλύομεν τὴν ἐξίσωσιν (1) πρὸς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς $B - \Gamma$. Πρὸς τοῦτο ἔστω γωνία φ μὲ $0 < \dfrac{\varphi}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ τοιαύτη, ὥστε $\varepsilon\varphi\, \dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{\kappa-\lambda}{\kappa+\lambda}\, \sigma\varphi\, \dfrac{\theta}{2}$, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται:

$$\varepsilon\varphi\, \frac{B-\Gamma}{2} = \varepsilon\varphi\, \frac{\varphi}{2} \Longleftrightarrow \frac{B-\Gamma}{2} = \frac{\varphi}{2} \Longleftrightarrow B - \Gamma = \varphi.$$

Συνεπῶς, τὸ ἀνωτέρω σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} A = \theta \\ A + B + \Gamma = \pi \\ B - \Gamma = \varphi \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = \theta \\ B = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\varphi}{2} - \dfrac{\theta}{2} \\ \Gamma = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varphi}{2} - \dfrac{\theta}{2} \end{array}\right.$$

Ἡ εὑρεθεῖσα λύσις τοῦ συστήματος εἶναι θετική. Πράγματι, ἐπειδὴ $0<\theta<\pi \Rightarrow$ $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}>0 \Rightarrow B=\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}-\frac{\theta}{2}>0$. Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ $\frac{\kappa-\lambda}{\kappa+\lambda}<1$, ἐκ τῆς σχέσεως $\varepsilon\varphi\,\frac{\varphi}{2}=\frac{\kappa-\lambda}{\kappa+\lambda}\sigma\varphi\,\frac{\theta}{2}$ συνάγεται : $\varepsilon\varphi\,\frac{\varphi}{2}<\sigma\varphi\,\frac{\theta}{2} \Rightarrow$

$$\varepsilon\varphi\,\frac{\varphi}{2}<\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \frac{\varphi}{2}<\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}-\frac{\theta}{2}>0 \Rightarrow$$

$$\Gamma=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}-\frac{\theta}{2}>0.$$

Ἄρα, τὸ σύστημα ἔχει πάντοτε θετικὴν λύσιν (μίαν) καὶ συνεπῶς ἡ ἐπίλυσις εἶναι πάντοτε δυνατή. Ἐν συνεχείᾳ, ἐκ τῆς $\alpha=\kappa$ ἔχομεν $2R\,\eta\mu\theta=\kappa$ καὶ ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν τὸ $R=\frac{\kappa}{2\eta\mu\theta}>0$. Οὕτως ἔχομεν ἀναχθῆ εἰς τὴν βασικὴν ἐπίλυσιν.

Ἐὰν $\beta<\gamma$ ($\Longleftrightarrow \kappa<\lambda$), ἐργαζόμεθα ἀναλόγως. Ἐὰν ὅμως $\beta=\gamma$ ($\Longleftrightarrow \kappa=\lambda$), τότε ἡ ἐπίλυσις εἶναι ἁπλουστάτη, διότι $B=\Gamma=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$.

2.5.3. Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν πλευρῶν του. Τὰ δεδομένα πρὸς ἐπίλυσιν εἶναι: $\alpha=\kappa$, $\beta=\lambda$, $\gamma=\mu$, ὅπου κ,λ,μ δεδομένοι θετικοὶ ἀριθμοί. Ἐν προκειμένῳ, οἱ πλέον κατάλληλοι τύποι, εἶναι οἱ τύποι **14**. Συνεπῶς, ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν τὸ σύστημα:

$$\varepsilon\varphi\,\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-\lambda)(s-\mu)}{s(s-\kappa)}},\quad \varepsilon\varphi\,\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-\mu)(s-\kappa)}{s(s-\lambda)}},$$

$$\varepsilon\varphi\,\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-\kappa)(s-\lambda)}{s(s-\mu)}} \qquad \text{ὅπου } 2s=\kappa+\lambda+\mu.$$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι : $\frac{(s-\lambda)(s-\mu)}{s(s-\kappa)}>0 \Longleftrightarrow |\lambda-\mu|<\kappa<\lambda+\mu \quad (1)$

Ἐὰν εἶναι $\frac{(s-\lambda)(s-\mu)}{s(s-\kappa)}>0$, τότε ὑπάρχει τόξον θ_1 (εὑρισκόμενον λογαριθμικῶς) μὲ $0<\theta_1<\pi$ τοιοῦτον, ὥστε $\varepsilon\varphi\,\frac{\theta_1}{2}=\sqrt{\frac{(s-\lambda)(s-\mu)}{s(s-\kappa)}}$, ὁπότε ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων τοῦ ἀνωτέρω συστήματος γράφεται $\varepsilon\varphi\,\frac{A}{2}=\varepsilon\varphi\,\frac{\theta_1}{2}$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει μίαν μόνον λύσιν ἐντὸς τοῦ διαστήματος $(0,\pi)$, ἡ ὁποία εἶναι $A=\theta_1$. Ἄρα, αἱ ἱκαναὶ καὶ ἀναγκαῖαι συνθῆκαι, ἵνα τὸ σύστημα ἔχῃ μίαν μόνον λύσιν ἐντὸς τοῦ διαστήματος $(0,\pi)$, εἶναι:

$$|\lambda-\mu|<\kappa<\lambda+\mu,\ |\mu-\kappa|<\lambda<\mu+\kappa,\ |\kappa-\lambda|<\mu<\kappa+\lambda \qquad (\Sigma)$$

Ἔστω ($A=\theta_1$, $B=\theta_2$, $\Gamma=\theta_3$) ἡ λύσις αὕτη. Ἡ ἐπίλυσις θὰ εἶναι δυνατή, ἐφ' ὅσον $\theta_1+\theta_2+\theta_3=\pi$. Τοῦτο ὅμως ἰσχύει, διότι: Ἀφ' ἑνὸς γνωρίζομεν ὅτι:

$$\kappa^2=\lambda^2+\mu^2-2\lambda\mu\,\sigma\upsilon\nu\theta_1 \iff \varepsilon\varphi\,\frac{\theta_1}{2}=\sqrt{\frac{(s-\lambda)(s-\mu)}{s(s-\kappa)}}.$$

Ἀφ' ἑτέρου οἱ ἀριθμοὶ κ,λ,μ καὶ $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ πληροῦν τὰς ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος 1.2.3. καὶ συνεπῶς εἶναι στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου. Ἐν συνεχείᾳ, ἐκ τῆς $\kappa=2R\,\eta\mu\theta_1$ εὑρίσκομεν τὸ R καὶ συνεπῶς ἀναγόμεθα εἰς τὴν βασικὴν ἐπίλυσιν. Αἱ συνθῆκαι δυνατότητος τῆς ἐπιλύσεως εἶναι αἱ (Σ).

Παρατήρησις 1. Ἡ σχέσις $\theta_1+\theta_2+\theta_3=\pi$ δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\text{Εἶναι: } \varepsilon\varphi\frac{\theta_1}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\theta_2}{2}+\varepsilon\varphi\frac{\theta_2}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\theta_3}{2}+\varepsilon\varphi\frac{\theta_3}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\theta_1}{2}=$$

$$=\sqrt{\frac{(s-\lambda)(s-\kappa)(s-\mu)^2}{s^2(s-\kappa)(s-\mu)}}+\sqrt{\frac{(s-\kappa)^2(s-\lambda)(s-\mu)}{s^2(s-\lambda)(s-\mu)}}+\sqrt{\frac{(s-\lambda)^2(s-\kappa)(s-\mu)}{s^2(s-\mu)(s-\kappa)}}=1$$

Ἐξ αὐτοῦ ὡς γνωστὸν ἡ μεταξὺ τῶν θ_1,θ_2 καὶ θ_3 σχέσις εἶναι $\theta_1+\theta_2+\theta_3=2\rho\pi+\pi$, $\rho\in Z$. Ἐπειδὴ ὅμως $\theta_1,\theta_2,\theta_3\in(0,\pi)$, προκύπτει: $0<\theta_1+\theta_2+\theta_3<3\pi$ καὶ συνεπῶς ἔχομεν:

$$0<2\rho\pi+\pi<3\pi \iff -\pi<2\rho\pi<2\pi \iff -\frac{1}{2}<\rho<1 \iff \rho=0 \iff \theta_1+\theta_2+\theta_3=\pi.$$

Παρατήρησις 2. Ἐφ' ἑξῆς, πρὸ τῆς ἐπιλύσεως ἑνὸς τριγώνου θὰ θέτωμεν ὡρισμένους προφανεῖς περιορισμοὺς διὰ τὰς πλευρὰς (ἢ τὰ γραμμικὰ στοιχεῖα γενικῶς) καὶ τὰς γωνίας αὐτοῦ, οἱ ὁποῖοι ὡς γνωστὸν εἶναι: $A,B,\Gamma\in(0,\pi)$, $\kappa>0$ διὰ κάθε γραμμικὸν στοιχεῖον κ τοῦ τριγώνου.

2.5.4. Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν: $\alpha=\kappa$, $\beta=\lambda$, $A=\theta$.

Περιορισμοί: $\kappa>0$, $\lambda>0$ καὶ $0<\theta<\pi$. Ἐν συνεχείᾳ, ἐκ τῶν δύο γραμμικῶν σχέσεων ἔχομεν:

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{2R\,\eta\mu B}{2R\,\eta\mu A} \iff \frac{\lambda}{\kappa}=\frac{\eta\mu B}{\eta\mu\theta} \iff \eta\mu B=\frac{\lambda}{\kappa}\,\eta\mu\theta.$$

Συνεπῶς, ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} A=\theta \\ A+B+\Gamma=\pi \\ \eta\mu B=\dfrac{\lambda}{\kappa}\eta\mu\theta \qquad (1) \end{cases}$$

Ἐπιλύομεν καὶ διερευνῶμεν τὴν (1). Πρὸς τοῦτο, διακρίνομεν τὰς κάτωθι περιπτώσεις:

α) Ἐὰν $\dfrac{\lambda}{\kappa}\eta\mu\theta>1$, τότε ἡ (1) εἶναι ἀδύνατος καὶ συνεπῶς ἡ ἐπίλυσις εἶναι ἀδύνατος.

β) Ἐὰν $\dfrac{\lambda}{\kappa}\eta\mu\theta\leq 1$, τότε ἡ (1) ἔχει λύσιν, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς: Ἔστω φ τὸ τόξον μὲ $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ καὶ τοιοῦτον, ὥστε $\eta\mu\varphi=\frac{\lambda}{\kappa}\,\eta\mu\theta$. Συνεπῶς, ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται $\eta\mu B=\eta\mu\varphi$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη, ἔχει δύο λύσεις ἐντὸς τοῦ διαστήματος $(0,\pi)$, αἱ ὁποῖαι εἶναι : $B=\varphi$, $B=\pi-\varphi$. Ἐξ αὐτῶν, βάσει καὶ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων τοῦ ἀνωτέρω συστήματος, προκύπτει : $\Gamma=\pi-\theta-\varphi$, $\Gamma=\varphi-\theta$. Ἄρα, ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν τὰ συστήματα :

$$\left.\begin{array}{l} A=\theta \\ B=\varphi \\ \Gamma=\pi-\theta-\varphi \end{array}\right\} \ (\Sigma_1) \qquad \left.\begin{array}{l} A=\theta \\ B=\pi-\varphi \\ \Gamma=\varphi-\theta \end{array}\right\} \ (\Sigma_2)$$

Ἐξετάζομεν ὑπὸ ποίας συνθήκας τὰ ἀνωτέρω συστήματα ἔχουν θετικὴν λύσιν. Πρὸς τοῦτο, διακρίνομεν τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις:

β_1) Ἐὰν $\theta\geq\frac{\pi}{2}\left(\Longleftrightarrow \pi-\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\varphi-\theta\leq 0$ ($\Longleftrightarrow \Gamma\leq 0$) καὶ συνεπῶς τὸ σύστημα (Σ_2) εἶναι ἀδύνατον, ἤτοι δὲν ἔχει θετικὴν λύσιν. Τὸ σύστημα (Σ_1) ἔχει θετικὴν λύσιν, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν : $\Gamma>0 \Longleftrightarrow \pi-\theta-\varphi>0 \Longleftrightarrow \pi-\theta>\varphi \Longleftrightarrow \eta\mu(\pi-\theta)>\eta\mu\varphi \Longleftrightarrow \eta\mu\theta>\eta\mu\varphi \Longleftrightarrow \eta\mu\theta>\frac{\lambda}{\kappa}\,\eta\mu\theta \Longleftrightarrow \kappa>\lambda$.

β_2) Ἐὰν $\theta<\frac{\pi}{2}$, τότε $\pi-\theta-\varphi>0$ καὶ συνεπῶς, τὸ σύστημα (Σ_1) ἔχει θετικὴν λύσιν. Τὸ σύστημα (Σ_2) ἔχει θετικὴν λύσιν, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν: $\Gamma=\varphi-\theta>0 \Longleftrightarrow$

$$\varphi>\theta \Longleftrightarrow \eta\mu\varphi>\eta\mu\theta \Longleftrightarrow \frac{\lambda}{\kappa}\,\eta\mu\theta>\eta\mu\theta \Longleftrightarrow \lambda>\kappa.$$

Συνοψίζοντες τὰ ἀνωτέρω, ἔχομεν τὸν κάτωθι πίνακα.

$$\begin{array}{lll}
\alpha<\beta\,\eta\mu A & & \text{οὐδεμία λύσις} \\
\alpha>\beta\,\eta\mu A & \begin{cases} A<\frac{\pi}{2} & \begin{cases} \alpha<\beta & \text{δύο λύσεις} \\ \alpha\geq\beta & \text{μία λύσις} \end{cases} \\ A\geq\frac{\pi}{2} & \begin{cases} \alpha\leq\beta & \text{οὐδεμία λύσις} \\ \alpha>\beta & \text{μία λύσις} \end{cases} \end{cases} & \\
\alpha=\beta\,\eta\mu A & \begin{cases} A<\frac{\pi}{2} & \text{μία λύσις} \\ A\geq\frac{\pi}{2} & \text{οὐδεμία λύσις} \end{cases} &
\end{array}$$

2.6. Εἰδικώτερον, ἐὰν τὸ πρὸς ἐπίλυσιν τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον (θὰ συμβολίζωμεν πάντοτε τὴν ὀρθὴν γωνίαν μὲ Α), τότε, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι $A=\frac{\pi}{2}\left(\Rightarrow B+\Gamma=\frac{\pi}{2}\right)$, τὸ ἀνωτέρω σύστημα (Σ) (2.4) θὰ εἶναι ἓν τριγωνομετρικὸν σύστημα (ἢ σύστημα) τῶν ὀξειῶν γωνιῶν Β,Γ καὶ ἡ ἐπίλυσις τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ εἶναι δυνατή, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν, ὑπάρχη θετικὴ λύσις ($B>0$, $\Gamma>0$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῶν: $\alpha=\kappa$, $\rho=\lambda$.

Ἐπίλυσις : Οἱ ἀρχικοὶ περιορισμοὶ εἶναι : $\kappa>0$, $\lambda>0$. Ἐν συνεχείᾳ, ἐκ τῶν δύο δεδομένων γραμμικῶν σχέσεων καὶ βάσει τοῦ τύπου (XI) ἔχομεν :

$$\frac{\rho}{\alpha}=\frac{4R\,\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}{2R\,\eta\mu A}\Longleftrightarrow\frac{\lambda}{\kappa}=\frac{2\eta\mu\frac{\pi}{4}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{\pi}{2}}\Longleftrightarrow$$

$$\frac{\lambda}{\kappa}=\sqrt{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\Longleftrightarrow 2\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}=\frac{2\lambda}{\kappa\sqrt{2}}\Longleftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}=\frac{\lambda\sqrt{2}}{\kappa}\Longleftrightarrow\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\lambda\sqrt{2}}{\kappa}\Longleftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\lambda\sqrt{2}}{\kappa}+\frac{\sqrt{2}}{2}\Longleftrightarrow\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\sqrt{2}(2\lambda+\kappa)}{2\kappa}$$

Ἄρα, ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} B+\Gamma=\frac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\sqrt{2}(2\lambda+\kappa)}{2\kappa} \quad (1)\end{cases}$$

Ἐὰν τὸ σύστημα τοῦτο ἔχῃ λύσιν, αὕτη θὰ εἶναι θετική, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν:

$$0\le|B-\Gamma|<\frac{\pi}{2}\Longleftrightarrow 0\le\left|\frac{B-\Gamma}{2}\right|<\frac{\pi}{4}\Longleftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 0\geq\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}>\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\Longleftrightarrow 1\geq\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}>\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad(2).$$

Συνεπῶς, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει λύσιν, ὅταν καὶ μόνον ὅταν:

$$1\geq\frac{\sqrt{2}(2\lambda+\kappa)}{2\kappa}>\frac{\sqrt{2}}{2}\Longleftrightarrow\frac{\sqrt{2}(2\lambda+\kappa)}{2\kappa}\le 1\Longleftrightarrow\lambda\le\frac{\kappa(\sqrt{2}-1)}{2}\qquad(3).$$

Πληρουμένης τῆς συνθήκης (3), ἡ ἐξίσωσις (1) θὰ ἔχῃ λύσιν καὶ συνεπῶς εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν Β – Γ, ὁπότε εὐκόλως εὑρίσκομεν τὰς ὀξείας γωνίας Β καὶ Γ.

Αἱ συνθῆκαι δυνατότητος τῆς ἐπιλύσεως εἶναι:

$$κ > 0,\ λ > 0,\ λ \leq \frac{κ(\sqrt{2}-1)}{2}.$$

Ἐὰν $λ = \frac{(κ\sqrt{2}-1)}{2}$, τὸ τρίγωνον θὰ εἶναι ἰσοσκελὲς (διατί;).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ ἐπιλυθῆ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῶν:

$$α = κ,\ δ_β\, δ_γ = λ^2\ (κ,λ \in \mathrm{R}).$$

Ἐπίλυσις: Ὁ ἀρχικὸς περιορισμὸς εἶναι: $κ > 0$. Ἐν συνεχείᾳ, ἐκ τῶν δύο δεδομένων μὴ ὁμογενῶν γραμμικῶν σχέσεων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μίαν γωνιακὴν σχέσιν. Πράγματι, ἀφ' ἑνὸς ἔχομεν:

$$δ_β\, δ_γ = \frac{γ}{συν\frac{Β}{2}} \cdot \frac{β}{συν\frac{Γ}{2}} \Longleftrightarrow λ^2 = \frac{4\mathrm{R}^2\,ημΓ\,ημΒ}{συν\frac{Β}{2}\,συν\frac{Γ}{2}} \Longleftrightarrow$$

$$λ^2 = 16\mathrm{R}^2 ημ\frac{Β}{2}\,ημ\frac{Γ}{2} \qquad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου, εἶναι: $α = 2\mathrm{R} \Longleftrightarrow κ = 2\mathrm{R} \Longleftrightarrow κ^2 = 4\mathrm{R}^2 \qquad (2)$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$λ^2 = 4κ^2 ημ\frac{Β}{2}\,ημ\frac{Γ}{2} \Longleftrightarrow λ^2 = 2κ^2\left[συν\frac{Β-Γ}{2} - συν\frac{Β+Γ}{2}\right] \Longleftrightarrow$$

$$λ^2 = 2κ^2\left[συν\frac{Β-Γ}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \Longleftrightarrow συν\frac{Β-Γ}{2} = \frac{λ^2}{2κ^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Συνεπῶς, ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} Β + Γ = \frac{π}{2} & (3) \\ συν\frac{Β-Γ}{2} = \frac{λ^2}{2κ^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}. & (4) \end{cases}$$

Ἐὰν τὸ σύστημα τοῦτο ἔχῃ λύσιν, αὕτη θὰ εἶναι θετική, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν:

$$0 \leq |Β-Γ| < π - Α \Longleftrightarrow 0 \leq |Β-Γ| < \frac{π}{2} \Longleftrightarrow 0 \leq \left|\frac{Β-Γ}{2}\right| < \frac{π}{4} \Longleftrightarrow$$

$$συν0 \geq συν\left|\frac{Β-Γ}{2}\right| > συν\frac{π}{4} \Longleftrightarrow 1 \geq συν\frac{Β-Γ}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (5)$$

Ἄρα, ἵνα ἡ ἐξίσωσις (4) ἔχῃ δεκτὴν λύσιν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ:

$$1 \geq \frac{\lambda^2}{2\kappa^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow \frac{\lambda^2}{2\kappa^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1 \Longleftrightarrow \frac{\lambda^2}{\kappa^2} \leq 2 - \sqrt{2} \qquad (6)$$

Πληρουμένης τῆς συνθήκης (6), ἡ ἐξίσωσις (4) ἔχει λύσιν, ὁπότε ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν Β—Γ καὶ συνεπῶς προχωροῦμεν κατὰ τὰ γνωστά.

Τελικῶς, αἱ συνθῆκαι δυνατότητος τῆς ἐπιλύσεως εἶναι:

$$\kappa > 0, \quad \frac{\lambda^2}{\kappa^2} \leq 2 - \sqrt{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

75) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν κάτωθι στοιχείων:

1) $B = \frac{\pi}{9}$, $\Gamma = \frac{2\pi}{5}$, $\alpha = 180$ 2) $\beta = 20$, $\gamma = 10$, $\Gamma = \frac{\pi}{3}$

3) $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{3} + 1$, $A = \frac{\pi}{12}$ 4) $\gamma = 4$, $A = 2\Gamma$, $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $\beta = 2$, $\gamma = \sqrt{2}$, $\Gamma = \frac{\pi}{6}$ 6) $\beta = 2$, $\gamma = \sqrt{3}$, $\Gamma = \frac{\pi}{3}$

7) $\alpha = 2\beta$, $\Gamma = \frac{\pi}{3}$, $E = 2\sqrt{3}$ 8) α, R, $A = 2\Gamma$

9) α, $\beta - \gamma = \lambda$, $B = 2\Gamma$ 10) α, A, $\frac{\beta}{\gamma} = \lambda$

76) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν κάτωθι στοιχείων:

1) α, A, τ 2) α, B, $\beta - \gamma = \lambda$ 3) α, A, E

4) α, υ_α, $B = 2\Gamma$ 5) α, A, μ_α 6) A, $\beta + \gamma = \lambda$, $\upsilon_\alpha = \alpha$

7) A, υ_α, $\beta + \gamma = 2\alpha$ 8) α, τ, $B = 2\Gamma$ 9) α, A, $\beta^2 + \gamma^2 = \lambda^2$

77) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ $\left(A = \frac{\pi}{2}\right)$ ἐκ τῶν ἑπομένων στοιχείων:

1) α, ρ 2) υ_α, μ_β 3) B, $\beta + \gamma = \kappa$ 4) υ_α, μ_α 5) ρ, B

6) α, δ_β 7) τ, R 8) 2τ, υ_α 9) B, $\alpha + \upsilon_\alpha = \lambda$

78) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν ἀκολούθων στοιχείων:

1) α, $B - \Gamma = \omega$, $\frac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi\Gamma} = \lambda$ 2) α, $E = \lambda^2$, $\varepsilon\varphi\frac{B}{2} + \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = \nu$

3) α, A, $\beta - \gamma + \upsilon_\alpha = \lambda$ 4) α, A, $\upsilon_\beta + \upsilon_\gamma = \mu$

5) α, μ_α, $B - \Gamma = \omega > 0$ 6) α, $\frac{\upsilon_\alpha}{\rho_\beta} = \lambda$, $B = 2\Gamma$

7) ρ_α, ρ_β, ρ_γ 8) υ_α, υ_β, υ_γ 9) A, $\beta + \gamma = \lambda$, $\upsilon_\alpha + \rho_\alpha = \kappa$

79) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τρεῖς πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὰ μήκη αὐτῶν εἶναι τρεῖς διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ ὅτι ἡ μεγαλυτέρα γωνία εἶναι διπλασία τῆς μικροτέρας.

80) Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον δίδονται τὰ τμήματα μ καὶ ν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ὑποτείνουσα ὑπὸ τῆς διχοτόμου δ_α. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ στοιχεῖα α, β, γ, δ_α καὶ υ_α.

81) Αἱ πλευραὶ α, β, γ ἑνὸς τριγώνου ἀποτελοῦν ἀριθ. πρόοδον. Ἐὰν δίδεται ἡ γωνία Α, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἄλλαι γωνίαι.

82) Εἰς τρίγωνον δίδονται τὰ στοιχεῖα R, ρ καὶ $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8R^2$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου.

83) Ἐὰν εἰς τρίγωνον εἶναι $\sigma\varphi A = 2$ καὶ $\sigma\varphi B = 3$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία Γ (ἄνευ πινάκων).

84) Νὰ ἐκφρασθῇ, συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας τῶν διαμέσων μ_β καὶ μ_γ.

85) Αἱ πλευραὶ τριγώνου ἀποτελοῦν ἀριθ. πρόοδον, ἡ δὲ διαφορὰ τῆς μικροτέρας γωνίας αὐτοῦ ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν εἶναι $\frac{\pi}{2}$. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμούς: $\sqrt{7} - 1$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{7} + 1$.

86) Ἐὰν εἰς τρίγωνον εἶναι $\Gamma = \frac{\pi}{3}$, τότε νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\frac{1}{\alpha + \gamma} + \frac{1}{\beta + \gamma} = \frac{3}{2\tau}$$

87) Ἐὰν εἰς τρίγωνον εἶναι $E = \frac{4}{3}$, $\beta^2 + \gamma^2 = \frac{20}{3}$ καὶ $\varepsilon\varphi B \ \varepsilon\varphi \Gamma = 4$, τότε νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ α καὶ $\varepsilon\varphi A$.

88) Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἰσχύῃ $\beta(\beta + 2\gamma) > \gamma^2$, νὰ δειχθῇ ὅτι $B > \frac{\pi}{8}$.

89) Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον δίδεται ἡ ὀξεῖα γωνία ω τῆς διαμέσου μ_β μετὰ τῆς ὑποτεινούσης α. Ζητοῦνται:

1) Νὰ ὁρισθοῦν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ.
2) Εὑρίσκομεν δύο τιμὰς διὰ τὴν γωνίαν Β, τὰς B_1 καὶ B_2. Νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$B_1 + B_2 = \frac{\pi}{2} + \omega.$$

90) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, υ_α, $\varepsilon\varphi \frac{B}{2} \ \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} = \mu$.

91) Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν $\sqrt{6}$, $\sqrt{3}$ καὶ 1, ὑπολογίσατε τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ. Ἐπίσης, δείξατε ὅτι $A - B = \frac{\pi}{2}$ καὶ ὅτι ἡ διάμεσος μ_α εἶναι κάθετος εἰς τὴν πλευρὰν γ.

92) Θεωροῦμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ὑψοῦμεν καθέτους, ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Α, ἐπὶ τὴν ΒΓ εἰς τὸ Β καὶ ἐπὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Γ. Ἐὰν Ε′ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν καθέτων τούτων, τότε:

$$\frac{E'}{E} = (\sigma\varphi A + \sigma\varphi B + \sigma\varphi \Gamma)^2$$

93) Ἐὰν ω,φ καὶ θ εἶναι αἱ γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν πλευρῶν προσανατολισμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ ἑνὸς ἄξονος, νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$(\eta\mu\omega\ \eta\mu\varphi\ \eta\mu\theta)^2 + (\sigma\upsilon\nu\omega\ \sigma\upsilon\nu\varphi\ \sigma\upsilon\nu\theta)^2 = \frac{1}{16}$$

94) Θεωροῦμεν κανονικὴν πυραμίδα ν παραπλεύρων ἑδρῶν, τῆς ὁποίας ἡ παράπλευρος ἀκμὴ εἶναι α καὶ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἑκάστης ἕδρας 2φ. Νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῶν α καὶ φ:

1) Τὸ ὁλικὸν ἐμβαδόν,
2) Ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος,
3) ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας καὶ
4) ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας.

95) Ἔστω R ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τῆς βάσεως ΑΒΓ τρισορθογωνίου εἰς τὸ Ο τετραέδρου ΟΑΒΓ. Ἐὰν ω_1, ω_2 καὶ ω_3 εἶναι ἀντιστοίχως αἱ δίεδροι γωνίαι ΒΓ, ΓΑ καὶ ΑΒ, δείξατε ὅτι:

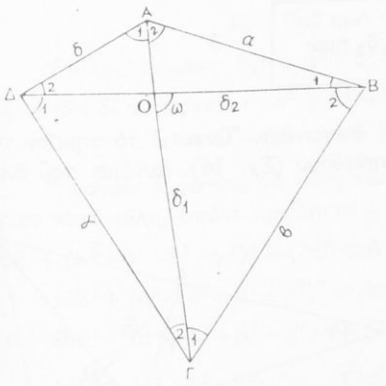
α) $V = \frac{4}{3}\ R^3\ \eta\mu A\ \eta\mu B\ \eta\mu\Gamma \sqrt{\sigma\upsilon\nu A\ \sigma\upsilon\nu B\ \sigma\upsilon\nu\Gamma}$, ὅπου R εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου.

β) $\sigma\upsilon\nu\omega_3 = \sqrt{\sigma\varphi A\ \sigma\varphi B}$

γ) $\sigma\upsilon\nu^2\omega_1 + \sigma\upsilon\nu^2\omega_2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega_3 = 1$

3. Τετράπλευρον

3.1. Κυρτὸν τετράπλευρον. Αἱ γωνίαι Α, Β, Γ, Δ καὶ αἱ πλευραὶ α, β, γ, δ ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου (Σχ. 15) χαρακτηρίζονται, ὅπως καὶ εἰς τὸ τρίγωνον, ὡς **κύρια** στοιχεῖα τοῦ τετραπλεύρου. Αἱ διαγώνιοι δ_1 καὶ δ_2, τὸ ἐμβαδὸν Ε, ἡ περίμετρος 2s, ἡ γωνία ω τῶν διαγωνίων, ὡς καὶ κάθε ἄλλο στοιχεῖον (γραμμικὸν ἢ γωνιακόν), τὸ ὁποῖον συνδέεται μὲ τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, καλοῦνται **δευτερεύοντα** στοιχεῖα τοῦ τετραπλεύρου.



Σχ. 15

3. 1. 1. Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων κυρτοῦ τετραπλεύρου. Ἀναφέρομεν κατωτέρω ὡρισμένας βασικὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου.

3.2.1. Γωνίαι πλευρῶν καὶ διαγωνίων. Ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς προφανοῦς σχέσεως $\frac{(A\Delta)}{(A\Gamma)} \cdot \frac{(A\Gamma)}{(AB)} \cdot \frac{(AB)}{(A\Delta)} = 1$ καὶ βάσει τοῦ θεωρήματος τῶν ἡμιτόνων, εὑρίσκομεν ἀμέσως τὸν τύπον:

$$\frac{\eta\mu\Gamma_2}{\eta\mu\Delta} \cdot \frac{\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma_1} \cdot \frac{\eta\mu\Delta_2}{\eta\mu B_1} = 1$$

Ἐργαζόμενοι ἀναλόγως, καταλήγομεν εἰς τοὺς τύπους:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\eta\mu\Gamma_2}{\eta\mu\Delta}\cdot\dfrac{\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma_1}\cdot\dfrac{\eta\mu\Delta_2}{\eta\mu B_1}=1\,,\quad \dfrac{\eta\mu\Delta_2}{\eta\mu A}\cdot\dfrac{\eta\mu\Gamma}{\eta\mu\Delta_1}\cdot\dfrac{\eta\mu A_2}{\eta\mu\Gamma_1}=1\,, \\[2ex] \dfrac{\eta\mu A_2}{\eta\mu B}\cdot\dfrac{\eta\mu\Delta}{\eta\mu A_1}\cdot\dfrac{\eta\mu B_2}{\eta\mu\Delta_1}=1\,,\quad \dfrac{\eta\mu B_2}{\eta\mu\Gamma}\cdot\dfrac{\eta\mu A}{\eta\mu B_1}\cdot\dfrac{\eta\mu\Gamma_2}{\eta\mu A_1}=1 \end{array}} \tag{1}$$

Ὁμοίως ἐκ τῆς σχέσεως $\dfrac{AB}{B\Gamma}\cdot\dfrac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}\cdot\dfrac{\Gamma\Delta}{\Delta A}\cdot\dfrac{\Delta A}{AB}=1$, εὑρίσκομεν τὸν τύπον:

$$\boxed{\eta\mu A_1\,\eta\mu B_1\,\eta\mu\Gamma_1\,\eta\mu\Delta_1=\eta\mu A_2\,\eta\mu B_2\,\eta\mu\Gamma_2\,\eta\mu\Delta_2} \tag{2}$$

3.1.3. Ἐμβαδόν. Διαδοχικῶς ἔχομεν (Σχ. 15):

$$E=(AOB)+(BO\Gamma)+(\Gamma O\Delta)+(AO\Delta)\Rightarrow E=\frac{1}{2}(AO)(BO)\,\eta\mu\omega+$$

$$+\frac{1}{2}(BO)(\Gamma O)\,\eta\mu\omega+\frac{1}{2}(\Gamma O)(\Delta O)\,\eta\mu\omega+\frac{1}{2}(\Delta O)(AO)\,\eta\mu\omega\Rightarrow$$

$$E=\frac{1}{2}[(AO)+(O\Gamma)]\,[(BO)+(O\Delta)]\,\eta\mu\omega\Rightarrow E=\frac{1}{2}(A\Gamma)(B\Delta)\,\eta\mu\omega\,.$$

Συνεπῶς, λαμβάνομεν τὸν τύπον:

$$\boxed{E=\frac{1}{2}\,\delta_1\delta_2\,\eta\mu\omega} \tag{3}$$

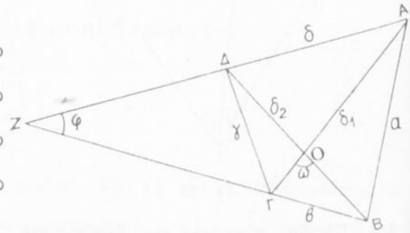
3.1.4. Πλευραί, διαγώνιοι καὶ γωνία τῶν διαγωνίων. Ἔστω Z τὸ σημεῖον τομῆς τῶν πλευρῶν β καὶ δ κυρτοῦ τετραπλεύρου (Σχ. 16). Δυνάμει τοῦ θεωρήματος τῶν συνημιτόνων, ἔχομεν:

$$\alpha^2=(OA)^2+(OB)^2+2(AO)(OB)\,\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\beta^2=(OB)^2+(O\Gamma)^2-2(OB)(O\Gamma)\,\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\gamma^2=(O\Delta)^2+(O\Gamma)^2+2(O\Delta)(O\Gamma)\,\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\delta^2=(OA)^2+(O\Delta)^2-2(OA)(O\Delta)\,\sigma\upsilon\nu\omega$$



Σχ. 16

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν:

$$\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2=2[(OA)(OB)+(OB)(O\Gamma)+(O\Gamma)(O\Delta)+(O\Delta)(OA)]\,\sigma\upsilon\nu\omega\Rightarrow$$

$$\boxed{(\alpha^2+\gamma^2)-(\beta^2+\delta^2)=2\delta_1\delta_2\,\sigma\upsilon\nu\omega} \tag{4}$$

Ὁμοίως ἔχομεν: $\delta_1{}^2 = (AZ)^2 + (Z\Gamma)^2 - 2(AZ)(Z\Gamma)$ συνφ,
$\delta_2{}^2 = (ZB)^2 + (Z\Delta)^2 - 2(ZB)(Z\Delta)$ συνφ, $\alpha^2 = (ZB)^2 + (ZA)^2 - 2(ZB)(ZA)$ συνφ
καὶ $\gamma^2 = (Z\Delta)^2 + (Z\Gamma)^2 - 2(Z\Delta)(Z\Gamma)$ συνφ.

Ἐκ τούτων καὶ βάσει τῶν σχέσεων $(ZA) = (Z\Delta) + (\Delta A)$, $(ZB) = (Z\Gamma) + (\Gamma B)$, προκύπτει ὁ τύπος:

$$\boxed{(\delta_1{}^2 + \delta_2{}^2) - (\alpha^2 + \gamma^2) = 2\beta\delta \text{ συνφ}} \qquad \mathbf{5}$$

3.1.5. Ἐμβαδὸν συναρτήσει περιμέτρου καὶ γωνιῶν. Ἐκ τῶν τύπων (4) καὶ (5) προκύπτει ἀμέσως ὁ τύπος:

$$\boxed{E = \frac{1}{4}(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2) \text{ εφω}} \qquad \mathbf{6}$$

Ἐξ ἄλλου, εἶναι: $E = (\Delta AB) + (\Delta\Gamma B) = \frac{1}{2}\alpha\delta \text{ ημ}A + \frac{1}{2}\beta\gamma \text{ ημ}\Gamma \Rightarrow$

$$4E = 2\alpha\delta \text{ ημ}A + 2\beta\gamma \text{ ημ}\Gamma \quad (1)$$

Ἐπίσης, ἔχομεν: $\delta_2{}^2 = \alpha^2 + \delta^2 - 2\alpha\delta \text{ συν}A$ καὶ $\delta_2{}^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \text{ συν}\Gamma$.
Ἐξ αὐτῶν δὲ συνάγεται: $\alpha^2 + \delta^2 - 2\alpha\delta \text{ συν}A = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \text{ συν}\Gamma \Rightarrow$

$$\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha\delta \text{ συν}A - 2\beta\gamma \text{ συν}\Gamma \quad (2).$$

Ὑψοῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῶν (1), (2) εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προσθέτομεν κατὰ μέλη, ὁπότε προκύπτει:

$$16E^2 + (\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 = (2\alpha\delta \text{ ημ}A + 2\beta\gamma \text{ ημ}\Gamma)^2 + (2\alpha\delta \text{ συν}A - 2\beta\gamma \text{ συν}\Gamma)^2 \Rightarrow$$

$$16E^2 + (\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 = 4\alpha^2\delta^2 + 4\beta^2\gamma^2 - 8\alpha\beta\gamma\delta \text{ συν}(A + \Gamma) \Rightarrow$$

$$16E^2 + (\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 = (2\alpha\delta + 2\beta\gamma)^2 - 8\alpha\beta\gamma\delta\,[1 + \text{συν}(A + \Gamma)] \Rightarrow$$

$$16E^2 + (\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2\gamma^2)^2 = (2\alpha\delta + 2\beta\gamma)^2 - 16\alpha\beta\gamma\delta \text{ συν}^2\frac{A + \Gamma}{2} \Rightarrow$$

$$16E^2 = (2\alpha\delta + 2\beta\gamma)^2 - (\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 - 16\alpha\beta\gamma\delta \text{ συν}^2\frac{A + \Gamma}{2} \Rightarrow$$

$$16E^2 = [(\alpha + \delta)^2 - (\beta - \gamma)^2]\,[(\beta + \gamma)^2 - (\alpha - \delta)^2] - 16\alpha\beta\gamma\delta \text{ συν}^2\frac{A + \Gamma}{2} \Rightarrow$$

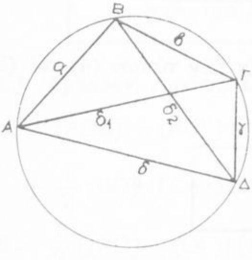
$$16E^2 = 16(s - \alpha)(s - \beta)(s - \gamma)(s - \delta) - 16\alpha\beta\gamma\delta \text{ συν}^2\frac{A + \Gamma}{2}$$

$$(2s = \alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

Οὕτως εὑρίσκομεν τὸν τύπον:

$$E = \sqrt{(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)(s-\delta) - \alpha\beta\gamma\delta\, \text{συν}^2 \frac{A+\Gamma}{2}} \qquad \mathbf{7}$$

3.2. Κυρτὸν τετράπλευρον ἔγγραψιμον εἰς κύκλον. Ἔστω τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 17). Γνωρίζομεν ὅτι $B+\Delta=\pi$, ὁπότε συν$B = -$συν Δ. Ἐξ ἄλλου, ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ, δυνάμει καὶ τοῦ θεωρήματος τῶν συνημιτόνων, λαμβάνομεν:



Σχ. 17

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\,\text{συν}B = \gamma^2+\delta^2-2\gamma\delta\,\text{συν}B \Rightarrow$$

$$\text{συν}B = \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)} \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς (1), δυνάμει καὶ τῶν τύπων

$$\text{ημ}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1-\text{συν}B}{2}}, \quad \text{συν}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1+\text{συν}B}{2}},$$

λαμβάνομεν:

$$\text{ημ}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-\alpha)(s-\beta)}{\alpha\beta+\gamma\delta}}, \quad \text{συν}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-\gamma)(s-\delta)}{\alpha\beta+\gamma\delta}}.$$

Ἐξ αὐτῶν δὲ προκύπτει: $\text{εφ}\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-\alpha)(s-\beta)}{(s-\gamma)(s-\delta)}}$ $(2s = \alpha+\beta+\gamma+\delta)$.

Ὥστε, ἔχομεν τοὺς ἑπομένους βασικοὺς τύπους:

$$\text{ημ}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-\alpha)(s-\beta)}{\alpha\beta+\gamma\delta}}, \quad \text{συν}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-\gamma)(s-\delta)}{\alpha\beta+\gamma\delta}}, \qquad \mathbf{8}$$

$$\text{εφ}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-\alpha)(s-\beta)}{(s-\gamma)(s-\delta)}}$$

Εἶναι $A+\Gamma=\pi$, ὁπότε συν$\dfrac{A+\Gamma}{2} = 0$. Ἄρα, ἐκ τοῦ τύπου **7** λαμβάνομεν:

$$E = \sqrt{(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)(s-\delta)} \qquad \mathbf{9}$$

Αἱ διαγώνιοι δ_1 καὶ δ_2 τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (Σχ. 17) ὑπολογίζονται συναρτήσει τῶν πλευρῶν του ὡς ἑξῆς:
Εἰς τὸν τύπον $\delta_1{}^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$ συν Β, ἀντικαθιστῶμεν τὴν προηγουμένως εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ συνΒ (3.2), ὁπότε μετὰ τὰς πράξεις, εὑρίσκομεν:

$$\delta_1{}^2 = \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma)}{\alpha\beta + \gamma\delta}. \quad \text{Ὥστε:}$$

$$\boxed{\delta_1 = \sqrt{\frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma)}{\alpha\beta + \gamma\delta}}, \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\beta + \gamma\delta)}{\alpha\delta + \beta\gamma}}} \qquad \mathbf{10}$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 17) λαμβάνομεν:

$$\delta_1 = 2R\eta\mu B \Rightarrow \delta_1 = 4R\eta\mu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2},$$

ὁπότε, δυνάμει καὶ τῶν τύπων **8, 10**, προκύπτει:

$$\boxed{\begin{aligned} R &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(\alpha\beta + \gamma\delta)(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma)}{(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)(s-\delta)}} \\ &= \frac{1}{4E}\sqrt{(\alpha\beta + \gamma\delta)(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma)} \end{aligned}} \qquad \mathbf{11}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

96) Εἰς κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ νὰ δειχθοῦν αἱ σχέσεις:

α) $\frac{\eta\mu A}{\eta\mu \Gamma} = \frac{\eta\mu B_1\,\eta\mu A_1}{\eta\mu B_2\,\eta\mu \Gamma_2} = \frac{\eta\mu \Delta_2\,\eta\mu A_2}{\eta\mu \Delta_1\,\eta\mu \Gamma_1}$ β) $\frac{\eta\mu A\,\eta\mu B}{\eta\mu \Gamma\,\eta\mu \Delta} = \frac{\eta\mu A_2\,\eta\mu B_1}{\eta\mu \Gamma_2\,\eta\mu \Delta_1}$

97) Κυρτοῦ τετραπλεύρου δίδονται αἱ πλευραὶ α,β,γ καὶ αἱ γωνίαι Β,Γ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι Α,Δ καὶ ἡ πλευρὰ δ.

98) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι 3,4,5,6 καὶ αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα π.

99) Ἐὰν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι περιγράψιμον εἰς κύκλον, τότε $E = \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}\,\eta\mu\frac{B+\Delta}{2}$.

100) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς περιγεγραμμένον περὶ κύκλου τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι:

$$\alpha\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2} = \gamma\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\eta\mu\frac{\Delta}{2}.$$

101) Δίδεται τραπέζιον ΑΒΓΔ. Ἐὰν $\widehat{ΒΑΓ} = χ$ καὶ $\widehat{ΑΒΔ} = ψ$, δείξατε ὅτι:

α) $σφχ - σφψ = σφΑ - σφΒ$ β) $\dfrac{δ_1}{δ_2} = \dfrac{ημχ}{ημψ}$

102) Ἐὰν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον, νὰ δειχθῇ ὅτι:

α) $εφ\,\dfrac{Α}{2} = \sqrt{\dfrac{βγ}{αδ}}$ β) $Ε = αβ\,εφ\,\dfrac{Β}{2}$ γ) $συν\,Α = \dfrac{αδ - βγ}{αδ + βγ}$

δ) $εφ^2\,\dfrac{ω}{2} = \dfrac{βδ}{αγ}$ ε) $ημω = \dfrac{2\sqrt{αβγδ}}{αγ + βδ}$ (ω εἶναι ἡ γωνία τῶν διαγωνίων)

103) Εἰς πᾶν ἐγγράψιμον τετράπλευρον ἰσχύει: $εφ\,\dfrac{ω}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-β)(s-δ)}{(s-α)(s-γ)}}$, ὅπου ω εἶναι ἡ γωνία τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου.

4. Ἐπίλυσις τετραπλεύρου

4. 1. Αἱ διαγώνιοι ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ χωρίζουν τοῦτο εἰς τὰ τέσσαρα τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ καὶ ΔΑΒ, τὰ ὁποῖα καλοῦνται **μερικὰ τρίγωνα.** Διὰ τῶν τριγώνων τούτων διευκολύνεται οὐχὶ μόνον ἡ ἐν γένει σπουδὴ τοῦ τετραπλεύρου, ὡς ἤδη εἴπομεν, ἀλλὰ καὶ ἡ ἐπίλυσις αὐτοῦ. Καλεῖται **ἐπίλυσις** ἑνὸς τετραπλεύρου ὁ δι' ὑπολογισμοῦ προσδιορισμὸς τῶν ἀγνώστων κυρίων στοιχείων του, ὅταν δοθοῦν πρὸς τοῦτο ἐπαρκῆ στοιχεῖα αὐτοῦ. Συνήθως, ἡ ἐπίλυσις ἑνὸς τετραπλεύρου ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς ἐπιλύσεως τῶν μερικῶν τριγώνων αὐτοῦ.

Γενικῶς ὅμως, ὁ τρόπος ἐπιλύσεως ἑνὸς τετραπλεύρου ποικίλει ἀναλόγως τῶν δεδομένων πρὸς ἐπίλυσιν στοιχείων αὐτοῦ. Δηλαδή, ὑπάρχουν περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας, ἐκ τῶν δεδομένων διὰ τὴν ἐπίλυσιν στοιχείων τοῦ τετραπλεύρου, οὐδὲν ἐκ τῶν μερικῶν τριγώνων αὐτοῦ ἐπιλύεται.

Οἱ χρησιμοποιούμενοι ἐν γένει τύποι διὰ τὴν ἐπίλυσιν ἑνὸς τετραπλεύρου δὲν ἐκλέγονται μόνον μεταξὺ τῶν τύπων αὐτοῦ, ἀλλὰ καὶ μεταξὺ τῶν τοιούτων τοῦ τριγώνου.

Πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω, παραθέτομεν τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ἐπιλυθῇ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν στοιχείων $Α_1, Β_1$ β,γ καὶ $δ_2$ (Σχ. 18).

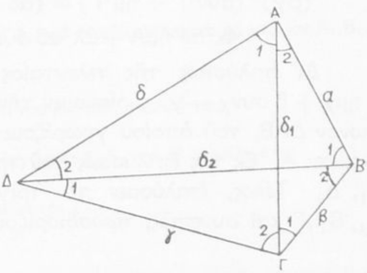
Ἐπίλυσις : Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ τριγώνου ΒΓΔ ὑπολογίζομεν τὰς γωνίας $Β_2$, Γ καὶ Δ. Συνεπῶς, ἡ γωνία $Β = Β_1 + Β_2$ ὑπολογίζεται.

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν : $Α_2 + Β + Γ_1 = π \Rightarrow (Α - Α_1) + Β + (Γ - Γ_2) = π \Rightarrow$
$Α - Γ_2 = π + Α_1 - (Β + Γ)$ (1)

'Εκ τοῦ τελευταίου τῶν τύπων **1**, προκύπτει:

$$ημA\ ημΓ_2 = \frac{ημB_1\ ημΓ\ ημA_1}{ημB_2} \qquad (2)$$

Αἱ (1), (2) ἀποτελοῦν ἓν ἁπλοῦν τριγωνομετρικὸν σύστημα, ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου προσδιορίζομεν τὰς γωνίας Α καὶ $Γ_2$. Συνεπῶς, ἔχομεν προσδιορίσει τὰς γωνίας $Δ = 2π - (A + B + Γ)$ καὶ $Δ_2 = Δ - Δ_1$. 'Ακολούθως, δι' ἐπιλύσεως τῶν μερικῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ὑπολογίζομεν τὰ λοιπὰ κύρια στοιχεῖα τοῦ τετραπλεύρου.



Σχ. 18

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ ἐπιλυθῇ κυρτὸν τετράπλευρον ἐκ τῶν στοιχείων

$α, A_1, A_2, B_2$ καὶ $Δ_1$.

'Επίλυσις: Προφανῶς (Σχ. 18), ἐκ τῶν σχέσεων

$A = A_1 + A_2$ καὶ $Γ = π - (B_2 + Δ_1)$, προσδιορίζομεν τὰς γωνίας Α καὶ Γ, ὁπότε ἔχομεν: $B + Δ = 2π - (A + Γ) \quad (1)$

'Εν συνεχείᾳ, ἐκ τοῦ δευτέρου τῶν τύπων **1**, λαμβάνομεν:

$$\frac{ημB}{ημΔ} = \frac{ημA_2\ ημB_2}{ημA_1\ ημΔ_1} \qquad (2)$$

'Επιλύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ προσδιορίζομεν τὰς γωνίας Β καὶ Δ. Μετὰ ταῦτα, δι' ἐπιλύσεως τῶν μερικῶν τριγώνων προσδιορίζομεν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ τετραπλεύρου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Νὰ ἐπιλυθῇ κυρτὸν τετράπλευρον ἐκ τῶν πλευρῶν α, β, γ, δ καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ $E = κ^2$.

'Επίλυσις: 'Εκ τῶν μερικῶν τριγώνων ΔΑΒ καὶ ΔΓΒ (Σχ. 15), βάσει καὶ τοῦ θεωρήματος τῶν συνημιτόνων, ἔχομεν:

$$\left.\begin{aligned} {δ_2}^2 &= α^2 + δ^2 - 2αδ\ συνA \\ {δ_2}^2 &= β^2 + γ^2 - 2βγ\ συνΓ \end{aligned}\right\} \Rightarrow αδ\ συνA - βγ\ συνΓ = \frac{α^2 + δ^2 - β^2 - γ^2}{2} \qquad (1)$$

Πρὸς εὐκολίαν, θέτομεν $\dfrac{α^2 + δ^2 - β^2 - γ^2}{2} = λ^2$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται:

$$αδ\ συνA - βγ\ συνΓ = λ^2.$$

'Επίσης εἶναι: $E = (ΔAB) + (ΔΓB) \Rightarrow κ^2 = \dfrac{1}{2}\ αδ\ ημA + \dfrac{1}{2}\ βγ\ ημΓ \Rightarrow$

$$αδ\ ημA + βγ\ ημΓ = 2κ^2.$$

Οὕτως ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν, διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν γωνιῶν Α καὶ Γ, τὸ ἑπόμενον σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\delta\ \text{συν}A - \beta\gamma\ \text{συν}\Gamma &= \lambda^2 \\ \alpha\delta\ \text{ημ}A + \beta\gamma\ \text{ημ}\Gamma &= 2\kappa^2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} \beta\gamma\ \text{συν}\Gamma &= \alpha\delta\ \text{συν}A - \lambda^2 \qquad (2) \\ \beta\gamma\ \text{ημ}\Gamma &= 2\kappa^2 - \alpha\delta\ \text{ημ}A \qquad (3) \end{aligned}\right.$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) προκύπτει:

$$(\beta\gamma)^2\,(\text{συν}^2\Gamma + \text{ημ}^2\Gamma) = (\alpha\delta\ \text{συν}A - \lambda^2)^2 + (2\kappa^2 - \alpha\delta\ \text{ημ}A)^2 \Longleftrightarrow$$

$$4\kappa^2\alpha\delta\ \text{ημ}A + 2\lambda^2\alpha\delta\ \text{συν}A = \alpha^2\delta^2 + \lambda^4 + 4\kappa^4 - \beta^2\gamma^2$$

Δι' ἐπιλύσεως τῆς τελευταίας ἐξισώσεως, ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς: $\alpha\ \text{ημ}\chi + \beta\ \text{συν}\chi = \gamma$, εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν Α. Ἐν συνεχείᾳ ἐπιλύομεν τὸ τρίγωνον ΔΑΒ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν δύο πλευρὰς α, δ καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν Α. Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ τριγώνου τούτου εὑρίσκομεν τὴν δ_2 καὶ τὰς B_1, Δ_2. Τέλος, ἐπιλύομεν τὸ τρίγωνον ΔΓΒ καὶ εὑρίσκομεν τὰς γωνίας Δ_1, B_2, Γ καὶ συνεπῶς, προσδιορίζομεν τὰς γωνίας τοῦ τετραπλεύρου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Νὰ ἐπιλυθῇ κυρτὸν τετράπλευρον ἐκ τῶν πλευρῶν α, β, γ, δ καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ $E = \kappa^2$.

Ἐπίλυσις: Ἐκ τῶν μερικῶν τριγώνων ΔΑΒ καὶ ΔΓΒ (Σχ. 15), βάσει καὶ τοῦ θεωρήματος τῶν συνημιτόνων, ἔχομεν:

$$\left.\begin{aligned} \delta_2{}^2 &= \alpha^2 + \delta^2 - 2\alpha\delta\ \text{συν}A \\ \delta_2{}^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\ \text{συν}\Gamma \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \alpha\delta\ \text{συν}A - \beta\gamma\ \text{συν}\Gamma = \frac{\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2}{2} \qquad (1)$$

Θέτομεν $\dfrac{\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2}{2} = \lambda^2$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται:

$$\alpha\delta\ \text{συν}A - \beta\gamma\ \text{συν}\Gamma = \lambda^2 \qquad (3)$$

Προφανῶς εἶναι: $E = (\Delta AB) + (\Delta\Gamma B) \Longrightarrow \kappa^2 = \dfrac{1}{2}\,\alpha\delta\ \text{ημ}A + \dfrac{1}{2}\,\beta\gamma\ \text{ημ}\Gamma \Longrightarrow$

$$\alpha\delta\ \text{ημ}A + \beta\gamma\ \text{ημ}\Gamma = 2\kappa^2 \qquad (3)$$

Οὕτω, λόγῳ τῶν (2) καὶ (3), ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν τὸ τριγωνομετρικὸν σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\delta\ \text{συν}A - \beta\gamma\ \text{συν}\Gamma &= \lambda^2 \\ \alpha\delta\ \text{ημ}A + \beta\gamma\ \text{ημ}\Gamma &= 2\kappa^2 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} \beta\gamma\ \text{συν}\Gamma &= \alpha\delta\ \text{συν}A - \lambda^2 \qquad (4) \\ \beta\gamma\ \text{ημ}\Gamma &= 2\kappa^2 - \alpha\delta\ \text{ημ}A \qquad (5). \end{aligned}\right.$$

Ἐκ τῶν (4) καὶ (5) λαμβάνομεν:

$$(\beta\gamma)^2(\text{συν}^2\Gamma + \text{ημ}^2) = (\alpha\delta\ \text{συν}A - \lambda^2)^2 + (2\kappa^2 - \alpha\delta\ \text{ημ}A)^2 \Longrightarrow$$

$$(4\kappa^2\alpha\delta)\ \text{ημ}A + (2\lambda^2\alpha\delta)\ \text{συν}A = \alpha^2\delta^2 + \lambda^4 + 4\kappa^4 - \beta^2\gamma^2$$

Δι' ἐπιλύσεως τῆς τελευταίας ἐξισώσεως, ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha\ \text{ημ}\chi + \beta\ \text{συν}\chi = \gamma$, εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν Α. Ἐν συνεχείᾳ ἐπιλύομεν τὸ τρίγωνον ΔΑΒ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς δύο πλευρὰς α,δ καὶ τὴν γωνίαν Α.

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ τριγώνου τούτου εὑρίσκομεν τὴν δ_2 καὶ τὰς B_1, Δ_2. Τέλος, ἐπιλύομεν τὸ τρίγωνον ΔΓΒ καὶ εὑρίσκομεν τὰς γωνίας Δ_1, B_2, Γ_2 καὶ συνεπῶς, προσδιορίζομεν τὰς γωνίας τοῦ τετραπλεύρου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

104) Νὰ ἐπιλυθῇ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν στοιχείων $\delta_1, A_1, B_1, \Gamma_1$ καὶ Γ_2.

105) Νὰ ἐπιλυθῇ κυρτὸν τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ πλευραί του.

106) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ γωνίαι A_1, B_1, B_2 καὶ Δ_1.

107) Νὰ ἐπιλυθῇ κυρτὸν τετράπλευρον ἐκ τῶν πλευρῶν του καὶ μιᾶς γωνίας του.

108) Νὰ ἐπιλυθῇ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ διαγώνιοι δ_1, δ_2 καὶ αἱ γωνίαι του.

109) Νὰ ἐπιλυθῇ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου δίδονται :
Ε(ἐμβαδόν), 2s(περίμετρος) καὶ μία διαγώνιος δ.

110) Ἐὰν κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, αἱ πλευραὶ α,β,γ,δ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 5,6,7,9 καὶ τὸ ἐμβαδὸν $E = 100$, τότε νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

111) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαγώνιοι τραπεζίου, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς πλευράς.

112) Νὰ ἐπιλυθῇ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν:

$$2s, \quad \frac{\delta_1}{\delta_2} = \lambda, \quad \omega \text{ (γωνία διαγωνίων)}$$

113) Νὰ ἐπιλυθῇ τετράπλευρον, ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον, ἐκ τῆς πλευρᾶς α καὶ τῶν γωνιῶν Α,Β αὐτοῦ.

114 Κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι περιγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος R. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι αὐτοῦ, ἐὰν γνωρίζομεν τὰς πλευρὰς α,β καὶ γ. Ἐν συνεχείᾳ, εὕρετε ὑπὸ ποίαν συνθήκην ἔχει λύσιν τὸ πρόβλημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΕΙΡΑΙ

1. Ὁρισμοὶ — βασικαὶ ἔννοιαι

1.1. Ὑπενθυμίζομεν ἐν πρώτοις τὸν ὁρισμὸν μιᾶς σειρᾶς. Ἔστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Θεωροῦμεν ἐπίσης τὴν ἀκολουθίαν $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_\nu, \ldots$ ἔνθα:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \alpha_1 \\
\sigma_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\
\sigma_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sigma_\nu &= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu \qquad (\nu \in N)
\end{aligned}$$

Ἡ οὕτως ὁριζομένη ἀκολουθία $\sigma_\nu \mid \nu = 1, 2, \ldots$, ἐκ τῆς ἀκολουθίας $\alpha_\nu \mid \nu = 1, 2, \ldots$, καλεῖται «ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων» ἢ συνηθέστερον **σειρὰ** καὶ τὴν συμβολίζομεν μὲ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$. Οἱ ἀριθμοὶ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ καλοῦνται **ὅροι** τῆς σειρᾶς, ὁ δὲ ἀριθμὸς α_ν $(\nu \in N)$ ὀνομάζεται **νιοστὸς** ὅρος τῆς σειρᾶς. Τὸ ὅριον τῆς ἀκολουθίας $\sigma_\nu \mid \nu = 1, 2, \ldots$ τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων καλεῖται **ἄθροισμα** τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$. Δηλαδή, ἐὰν

$$\lim_{\nu \to +\infty} \sigma_\nu = \lim_{\nu \to +\infty} (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu) = \alpha \in R,$$

τότε λέγομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς α καὶ γράφομεν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \alpha$.

Εἰδικώτερον, ἐὰν οἱ ὅροι μιᾶς σειρᾶς περιέχουν τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς, τότε ἡ σειρὰ καλεῖται **τριγωνομετρικὴ σειρά.**

Παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα μιᾶς σειρᾶς πρέπει πρῶτον νὰ εὕρωμεν τὸ μερικὸν ἄθροισμα (δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων της) καὶ ἐν συνεχείᾳ τὸ ὅριον αὐτοῦ. Τονίζομεν, ὅτι εἰς τὰς περισσοτέρας περιπτώσεις σειρῶν, τὸ μερικὸν ἄθροισμα σ_ν δὲν ὑπολογίζεται καὶ συνεπῶς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς. Μὲ τὰς περιπτώσεις ταύτας δὲν πρόκειται νὰ ἀσχοληθῶμεν.

Διατυποῦμεν καὶ ἀποδεικνύομεν κατωτέρω, μίαν χρήσιμον πρότασιν διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μερικοῦ ἀθροίσματος ὡρισμένων σειρῶν.

1.2. Πρότασις. Ἐὰν ὁ νιοστὸς ὅρος α_ν μιᾶς σειρᾶς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha_\nu = f(\nu) - f(\nu+1)$ (1), διὰ κάθε $\nu \in N$, τότε τὸ μερικὸν ἄθροισμα σ_ν δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\sigma_\nu = f(1) - f(\nu+1)$ (2). Ἐὰν δὲ $\alpha_\nu = f(\nu+1) - f(\nu)$, τότε $\sigma_\nu = f(\nu+1) - f(1)$.

Ἀπόδειξις : Ἡ ἀπόδειξις πραγματοποιεῖται διὰ τῆς τελείας ἐπαγωγῆς. Ἐὰν $\nu = 1$, τότε, ἀφ' ἑνὸς εἶναι $\sigma_1 = \alpha_1$, ἀφ' ἑτέρου αἱ (1) καὶ (2) γράφονται: $\alpha_1 = f(1) - f(2)$ καὶ $\sigma_1 = f(1) - f(2)$. Ἄρα, ἐπειδὴ καὶ $\sigma_1 = \alpha_1$, συνάγεται ὅτι διὰ $\nu = 1$ ἡ πρότασις ἰσχύει. Ἐν συνεχείᾳ, δεχόμεθα ὅτι ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ $\nu = \kappa$, ἤτοι ἰσχύει: $\sigma_\kappa = f(1) - f(\kappa)$ (3)

Ἐξ ἄλλου εἶναι: $\sigma_{\kappa+1} = \sigma_\kappa + \alpha_{\kappa+1}$ (4) καὶ $\alpha_{\kappa+1} = f(\kappa+1) - f(\kappa+2)$ (5)

Διὰ προσθέσεως τῶν (3) καὶ (5) κατὰ μέλη προκύπτει:

$$\sigma_\kappa + \alpha_{\kappa+1} = f(1) - f(\kappa+2),$$

ὁπότε, δυνάμει καὶ τῆς (4), λαμβάνομεν: $\sigma_{\kappa+1} = f(1) - f(\kappa+2)$, δηλαδὴ ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ $\nu = \kappa + 1$ καὶ συνεπῶς ἡ πρότασις ἀπεδείχθη.

Ἀναλόγως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ δευτέρα περίπτωσις.

Κατωτέρω, θὰ περιορισθῶμεν εἰς μερικὰ παραδείγματα καὶ ἀσκήσεις τριγωνομετρικῶν σειρῶν εἰδικῆς μορφῆς, εἰς τὰς ὁποίας καὶ τὸ μερικὸν ἄθροισμα καὶ τὸ ὅριον αὐτοῦ ὑπολογίζονται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Ἐὰν $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, τότε νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς:

$$\eta\mu\alpha + 2\,\eta\mu^2\alpha + 4\eta\mu^3\,\alpha + \ldots + 2^{\nu-1}\,\eta\mu^\nu\,\alpha + \ldots$$

Λύσις : Οἱ ὅροι τῆς δοθείσης σειρᾶς εἶναι ὅροι φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου καὶ συνεπῶς ἔχομεν:

$$\sigma_\nu = \frac{(2\,\eta\mu\alpha)^\nu - 1}{2\eta\mu\,\alpha - 1}\,\eta\mu\alpha \iff \sigma_\nu = \frac{\eta\mu\alpha}{2\,\eta\mu\alpha - 1}\,(2\,\eta\mu\alpha)^\nu + \frac{\eta\mu\alpha}{1 - 2\,\eta\mu\alpha} \quad (1)$$

Ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν: $0 < \alpha < \frac{\pi}{6} \iff 0 < \eta\mu\alpha < \frac{1}{2} \iff 0 < 2\,\eta\mu\alpha < 1$

Συνεπῶς: $\lim\limits_{\nu\to+\infty} (2\eta\mu\alpha)^\nu = 0$ (2)

Ἐπίσης, ἐκ τῆς (1) προκύπτει: $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\sigma_\nu = \frac{\eta\mu\alpha}{2\,\eta\mu\alpha - 1}\lim\limits_{\nu\to+\infty}(2\,\eta\mu\alpha)^\nu + \frac{\eta\mu\alpha}{1 - 2\,\eta\mu\alpha}$, ὁπότε, λόγῳ καὶ τῆς (2), ἔχομεν:

$$\lim_{\nu\to+\infty}\sigma_\nu = \frac{\eta\mu\alpha}{1-2\,\eta\mu\alpha} \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty}2^{\nu-1}\eta\mu^\nu\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{1-2\,\eta\mu\alpha},$$ δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς εἶναι $\frac{\eta\mu\alpha}{1-2\,\eta\mu\alpha}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς: $\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta\mu\frac{\pi}{2^{\nu+2}}\,\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2^{\nu+2}}$

Λύσις: Ἔχομεν: $\alpha_\nu = \eta\mu\frac{\pi}{2^{\nu+2}}\,\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2^{\nu+2}} \Longleftrightarrow$

$$2\alpha_\nu = 2\,\eta\mu\frac{\pi}{2^{\nu+2}}\,\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2^{\nu+2}} \Longleftrightarrow 2\alpha_\nu = \eta\mu\frac{\pi}{2^\nu} - \eta\mu\frac{\pi}{2^{\nu+1}} \Longleftrightarrow$$

$$\alpha_\nu = \frac{1}{2}\,\eta\mu\frac{\pi}{2^\nu} - \frac{1}{2}\,\eta\mu\frac{\pi}{2^{\nu+1}}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι: $\alpha_\nu = f(\nu) - f(\nu+1)$, ὅπου $f(\nu) = \frac{1}{2}\,\eta\mu\frac{\pi}{2^\nu}$.

Συνεπῶς, βάσει τῆς ἀνωτέρω προτάσεως, θὰ εἶναι:

$$\sigma_\nu = f(1) - f(\nu+1) = \frac{1}{2}\,\eta\mu\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\,\eta\mu\frac{\pi}{2^{\nu+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\eta\mu\frac{\pi}{2^{\nu+1}}$$

Εἶναι: $\lim_{\nu\to+\infty}\sigma_\nu = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lim_{\nu\to+\infty}\eta\mu\frac{\pi}{2^{\nu+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,.\,0 = \frac{1}{2}$

Ἄρα, τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς εἶναι $\frac{1}{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς: $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}\,\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2^\nu}$.

Λύσις: Ἀποδεικνύεται εὐκόλως ἡ ταυτότης: $\varepsilon\varphi\chi = \sigma\varphi\chi - 2\sigma\varphi2\chi$ (1)

Ἐκ τῆς (1), διὰ $\chi = \frac{\alpha}{2^\nu}$, ἔχομεν: $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2^\nu} = \sigma\varphi\frac{\alpha}{2^\nu} - 2\,\sigma\varphi\frac{\alpha}{2^{\nu-1}} \Longleftrightarrow$

$$\frac{1}{2^\nu}\,\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2^\nu} = \frac{1}{2}\,\sigma\varphi\frac{\alpha}{2^\nu} - \frac{1}{2^{\nu-1}}\,\sigma\varphi\frac{\alpha}{2^{\nu-1}}.$$

Ἑπομένως:

$$\alpha_\nu = \frac{1}{2^\nu}\,\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2^\nu} = \frac{1}{2^\nu}\,\sigma\varphi\frac{\alpha}{2^\nu} - \frac{1}{2^{\nu-1}}\,\sigma\varphi\frac{\alpha}{2^{\nu-1}} = f(\nu+1) - f(\nu),$$

$$\text{ὅπου } f(\nu) = \frac{1}{2^{\nu-1}}\,\sigma\varphi\frac{\alpha}{2^{\nu-1}}.$$

Ἄρα, βάσει τῆς ἀποδειχθείσης προτάσεως 1.2, θὰ εἶναι:

$$\sigma_\nu = f(\nu+1) - f(1) = \frac{1}{2^\nu}\,\sigma\varphi\,\frac{\alpha}{2^\nu} - \frac{1}{2^0}\,\sigma\varphi\,\frac{\alpha}{2^0} = \frac{1}{2^\nu}\,\sigma\varphi\,\frac{\alpha}{2^\nu} - \sigma\varphi\alpha =$$

$$= \sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha}{2^\nu}\cdot\frac{\frac{1}{2^\nu}}{\eta\mu\,\frac{\alpha}{2^\nu}} - \sigma\varphi\alpha = \frac{1}{\alpha}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha}{2^\nu}\cdot\frac{\frac{\alpha}{2^\nu}}{\eta\mu\,\frac{\alpha}{2^\nu}} - \sigma\varphi\alpha$$

$$\text{Εἶναι:}\ \lim_{\nu\to+\infty}\sigma_\nu = \frac{1}{\alpha}\lim_{\nu\to+\infty}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2^\nu}\cdot\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\frac{\alpha}{2^\nu}}{\eta\mu\,\frac{\alpha}{2^\nu}} - \sigma\varphi\alpha =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\,\sigma\upsilon\nu\,0\cdot 1 - \sigma\varphi\alpha = \frac{1}{\alpha} - \sigma\varphi\alpha$$

(εἶναι γνωστὸν ὅτι : $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\chi}{\eta\mu\chi} = \lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi} = 1$ καὶ $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{\alpha}{2^\nu} = 0$).

Ἄρα, τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς εἶναι $\dfrac{1}{\alpha} - \sigma\varphi\alpha$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Ἐὰν $\alpha > 0$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\text{Τοξ εφ}\,\frac{\alpha}{1+\nu\,(\nu+1)\alpha^2}$$

Λύσις: Ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι (σχετικῶς πρβλ. κεφ. V παράδειγμα 2):

$$\text{Ἐὰν}\ \chi,\psi>0 \Rightarrow \text{Τοξ εφ}\chi - \text{Τοξ εφ}\psi = \text{Τοξ εφ}\,\frac{\chi-\psi}{1+\chi\psi} \qquad (1)$$

Εἶναι: $\nu\alpha > 0$ καὶ $(\nu+1)\alpha > 0$, $\forall\ \nu\in N$, διότι $\alpha > 0$. Ἑπομένως, ἐκ τῆς (1), διὰ $\chi = (\nu+1)\alpha$ καὶ $\psi = \nu\alpha$, λαμβάνομεν :

$$\text{Τοξ εφ}(\nu+1)\alpha - \text{Τοξ εφ}\nu\alpha = \text{Τοξ εφ}\,\frac{(\nu+1)\alpha-\nu\alpha}{1+\nu\,(\nu+1)\alpha^2} \iff$$

$$\text{Τοξ εφ}(\nu+1)\alpha - \text{Τοξ εφ}\nu\alpha = \text{Τοξ εφ}\,\frac{\alpha}{1+\nu\,(\nu+1)\alpha^2} \qquad (2)$$

Ὁ νιοστὸς ὅρος τῆς σειρᾶς εἶναι:

$$\alpha_\nu = \text{Τοξ εφ}\,\frac{\alpha}{1+\nu\,(\nu+1)\alpha^2} = \text{Τοξ εφ}(\nu+1)\alpha - \text{Τοξ εφ}\nu\alpha = f(\nu+1) - f(\nu),$$

ὅπου $f(\nu) = \text{Τοξ εφ}\nu\alpha$.

Ἑπομένως : $\sigma_\nu = f(\nu+1) - f(1) = \text{Τοξ εφ}\,(\nu+1)\,\alpha - \text{Τοξ εφ}\,\alpha$, ὁπότε, βάσει τῆς (1), ἔχομεν :

$$\sigma_\nu = \text{Τοξ εφ}\,\frac{(\nu+1)\alpha-\alpha}{1+(\nu+1)\alpha^2} = \text{Τοξ εφ}\,\frac{\nu\alpha}{\nu\alpha^2+1+\alpha^2} = \text{Τοξ εφ}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+\frac{1+\alpha^2}{\nu}}$$

Εἶναι: $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \sigma_\nu = \lim\limits_{\nu\to+\infty} \text{Τοξ εφ} \dfrac{\alpha}{\alpha^2+\dfrac{1+\alpha^2}{\nu}} = \text{Τοξ εφ}\left(\lim\limits_{\nu\to+\infty} \dfrac{\alpha}{\alpha^2+\dfrac{1+\alpha^2}{\nu}}\right) =$

$$= \text{Τοξ εφ} \frac{\alpha}{\alpha^2+0} = \text{Τοξ εφ} \frac{1}{\alpha}\,.$$

Ἄρα, τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς εἶναι Τοξ εφ $\dfrac{1}{\alpha}$, δηλαδή:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \text{Τοξ εφ} \frac{\alpha}{1+\nu\,(\nu+1)\alpha^2} = \text{Τοξ εφ} \frac{1}{\alpha}\,.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

115) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{4^\nu \,\text{συν}\, \dfrac{\alpha}{2^\nu}}$.

116) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}$ Τοξ σφ $(1+\nu+\nu^2)$.

(Ὑπόδειξις: Ἐὰν $\chi > \psi > 0 \Longrightarrow$ Τοξ σφψ − Τοξ σφχ = Τοξ σφ$\dfrac{\chi\psi+1}{\chi-\psi}$)

117) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \text{ημ}\dfrac{\alpha}{3^\nu}\,\text{τεμ}\dfrac{\alpha}{3^{\nu-1}}$ εἶναι 0.

118) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα τῶν κάτωθι σειρῶν :

α) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^\nu}\,\text{εφ}\,\dfrac{\alpha}{2^\nu}\right)^2$ β) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \text{εφ}\,\dfrac{\alpha}{2^\nu}\,\text{τεμ}\,\dfrac{\alpha}{2^{\nu-1}}$ γ) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu-1}\,\text{εφ}^2\,\dfrac{\alpha}{2^\nu}\,\text{εφ}\,\dfrac{\alpha}{2^{\nu-1}}$

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Βασικαὶ ἔννοιαι — Ὁρισμοὶ . . . σελ. 5
2. Θεμελιώδεις τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις . . . » 6
   2.1. Ἐπίλυσις τῆς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως $ημx = α$ . . . » 6
   » » » » $συνx = λ$ . . . » 8
   2.3. » » » » $σφx = λ$ . . . » 8
   2.4. » » » » $σφx = α$ . . . » 9
3. Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις ἀναγόμεναι εἰς θεμελιώδεις . . . » 9
   3.1. Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $φ(τ) = 0$ ($τ$ = τριγ. ἀριθ. τόξου x) » 9
   3.2. Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις μὲ περισσότερα τοῦ ἑνὸς ἄγνωστα τόξα . . . » 12
   3.3. Ὁμογενεῖς τριγ. ἐξισώσεις ὡς πρὸς ημx καὶ συνx . . . » 12
   3.4. Γραμμικὴ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις . . . » 14
   3.5. Συμμετρικὴ τριγ. ἐξίσωσις ὡς πρὸς ημx καὶ συνx . . . » 17
4. Τριγωνομετρικὴ ἐπίλυσις τῆς β-βαθμίου ἐξισώσεως $αx^2+βx+γ = 0$ . . . » 19
   Ἀσκήσεις . . . » 21

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Βασικαὶ ἔννοιαι — Ὁρισμοὶ . . . » 24
2. Συστήματα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους . . . » 24
   Συστήματα μὲ μίαν ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων ἀλγεβρικὴν . . . » 24
   2.2. Συστήματα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὰ τόξα . . . » 31
   2.3. Τριγωνομετρικὰ συστήματα ἐκ μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως τῶν ὁποίων, προκύπτει ἀμέσως ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις τῶν ἀγνώστων τόξων . . . » 32
3. Τριγ. συστήματα περισσοτέρων τῶν δύο ἀγνώστων . . . » 34
   Ἀσκήσεις . . . » 35

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΑΛΟΙΦΗ

1. Ἡ ἔννοια τῆς ἀπαλοιφῆς — Ἀπαλείφουσα . . . σελ. 37
   Ἀσκήσεις . . . » 39

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1. Ὁρισμοὶ — Βασικαὶ ἔννοιαι . . . » 40
   2. Θεμελιώδεις τριγωνομετρικαὶ ἀνισώσεις . . . » 40
   3. Τριγ. ἀνισώσεις ἀναγόμεναι εἰς τὰς θεμελιώδεις . . . » 44
   Ἀσκήσεις . . . » 48

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΚΥΚΛΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Ὁρισμοὶ — Βασικαὶ ἔννοιαι . . . » 49
   1.1. Ἡ συνάρτησις τοξημ . . . » 49
   1.2. Ἡ συνάρτησις τοξσυν . . . » 51
   1.3. Αἱ συναρτήσεις τοξεφ καὶ τοξσφ . . . » 52
   1.4. Γραφικαὶ παραστάσεις τῶν ἀντιστρόφων κυκλικῶν συναρτήσεων . . . » 53
   Ἀσκήσεις . . . » 59

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ — ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ

1. Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τυχόντος τριγώνου . . . » 61
   1.1. Τριγωνικὴ Ἰδιότης . . . » 61
   1.2. Θεμελιώδεις ὁμάδες τύπων . . . » 61
   1.3. Τύποι τοῦ Mollweide . . . » 65
   1.4. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν ἡμίσεων γωνιῶν τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ . . . » 65

1.5. Τύποι τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου . . . . σελ. 65
1.6. Ἡ ἀκτὶς R (τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου) συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου . . . . » 65
1.7. Ὕψος Τριγώνου . . . . » 66
1.8. Ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τρίγωνον κύκλου . . . . . . » 67
1.9. Ἡ ἀκτὶς τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου τριγώνου . . . . . . » 67
1.10. Ἐσωτερικὴ διχοτόμος τριγώνου . . . . » 68
1.11. Ἐξωτερικὴ διχοτόμος τριγώνου . . . . » 72
1.12. Διάμεσος τριγώνου . . . . » 70
1.13. Ἀξιοσημείωτος παρατήρησις . . . . » 73
Ἀσκήσεις . . . . » 73
2. Ἐπίλυσις Τριγώνου . . . . » 75
2.1. Ὁρισμοὶ καὶ βασικαὶ ἔννοιαι . . . . » 75
2.2. Παρατηρήσεις . . . . » 76
2.3. Βασικὴ ἐπίλυσις . . . . » 77
2.4. Περιπτώσεις ἐπιλύσεων (Τριγώνου) . . . . » 77
2.5. Κλασσικαὶ ἐπιλύσεις . . . . » 80
2.6. Ἐπίλυσις ὀρθογωνίου τριγώνου . . . . » 85
Ἀσκήσεις . . . . » 87
3. Τὸ τετράπλευρον . . . . » 89
3.1. Κυρτὸν τετράπλευρον . . . . » 89
3.2. Κυρτὸν τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον . . . . . . » 92
Ἀσκήσεις . . . . » 93
4. Ἐπίλυσις τετραπλεύρου . . . . » 94
Ἀσκήσεις . . . . » 97

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΕΙΡΑΙ

1. Ὁρισμοὶ — Βασικαὶ ἔννοιαι — Παραδείγματα . . . . . . » 98
Ἀσκήσεις . . . . » 102

Ἔκδοσις Β' 1970 (VI) - Ἀντίτυπα 15.000 - Σύμβασις 2014/7-4-70
ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ : Ι. ΔΙΚΑΙΟΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ : ΟΚΤΩΡΑΤΟΣ - ΚΟΥΚΙΑΣ