

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ε/ΓΕΙΣΣ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ε' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(ΓΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ)

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΗΛΙΑ Β. ΝΤΖΙΩΡΑ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ  
ΑΘΗΝΑΙ 1972







# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΩΡΕΑ  
ΕΘΝΙΚΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΤ 89  
ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

Νεφιώρα, Ηλίας Θ.

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ε' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ)

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΗΛΙΑ Β. ΝΤΖΙΩΡΑ



21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ  
ΑΘΗΝΑΙ 1972

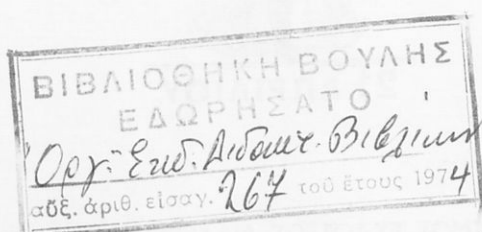
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

002

404

5798

7999



# ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

#### ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΟΥ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ\*)

**§ Ι. Πρότασις (άπλη, κατηγορική) ἢ δήλωσις.** — Ἡ ἔννοια τῆς ἀπλῆς προτάσεως ἢ δηλώσεως, ἀκριβέστερον τῆς «*λογικῆς προτάσεως*», θεωρεῖται ὡς μία πρωταρχικὴ ἔννοια, ὡς ἔννοια μὴ ἐπιδεχομένη ὀρισμὸν. Εἰς τὸ συντακτικόν, λ.χ., ἡ (ἀπλῆ) πρότασις ὀρίζεται ὡς «*λόγος συντομώτατος (προφορικὸς ἢ γραπτὸς) μὲ ἐντελῶς ἀπλοῦν περιεχόμενον*».

Εἰς τὰ Μαθηματικά καὶ γενικῶς εἰς τὴν λογικὴν (κλασσικὴν λογικὴν) διὰ τοῦ ὅρου «*πρότασις ἢ δήλωσις*» ἐννοοῦμεν μίαν ἔκφρασιν μὲ νόημα, ἀκριβέστερον ἐννοοῦμεν τὸ *περιεχόμενον*, τὸ ὁποῖον ἐκφράζομεν διὰ μιᾶς προτάσεως μὲ τὴν ἐννοιαν τοῦ συντακτικοῦ καὶ διὰ τὸ ὁποῖον δυνάμεθα κατὰ ἀκριβῶς ἓνα τρόπον νὰ ἀποφανθῶμεν, ἂν εἶναι ἀληθὲς ἢ ψευδές, ἀποκλείοντες ἄλλην περίπτωσιν. Οὕτω, π.χ., ἡ ἔκφρασις :

«*ὁ ἀριθμὸς 10 εἶναι ἄρτιος*»,

εἶναι μία λογικὴ πρότασις, καθόσον ὅ,τι αὕτη ἐκφράζει εἶναι ἀληθές.

Ὁμοίως ἡ ἔκφρασις :

«*ὁ ἀριθμὸς 4 εἶναι πρῶτος*»,

εἶναι μία λογικὴ πρότασις, καθόσον ὅ,τι αὕτη ἐκφράζει εἶναι ψευδές.

Τὸ περιεχόμενον λοιπὸν μιᾶς προτάσεως (λογικῆς προτάσεως) ἐπιδέχεται ἂ ν α γ κ α σ τ ι κ ῶ ς ἓνα καὶ μόνον ἓνα τῶν χαρακτηρισμῶν «*ἀληθές*», «*ψευδές*»· οὐδέποτε ὅμως εἶναι καὶ ἀληθές καὶ ψευδές (*ἀρχὴ τῆς ἀντιφάσεως*).

Τὰς προτάσεις, ὡς γνωρίζομεν καὶ ἐκ τῶν μαθημάτων τῆς προηγουμένης τάξεως, τὰς παριστάνομεν συμβολικῶς μὲ μικρὰ γράμματα τοῦ λατινικοῦ ἀλφαβήτου, κατὰ προτίμησιν μὲ  $p, q, r, \dots$

Ἐὰν μία πρότασις  $p$  εἶναι ἀληθής, τότε, καὶ μόνον τότε, λέγομεν ὅτι αὕτη ἔχει «*τιμὴν ἀληθείας  $\alpha$* » καὶ γράφομεν  $\tau(p) = \alpha$ , ἐὰν δὲ αὕτη εἶναι ψευδής, τότε, καὶ μόνον τότε, λέγομεν ὅτι ἔχει «*τιμὴν ἀληθείας  $\psi$* » καὶ γράφομεν  $\tau(p) = \psi$ . Ἐπομένως, ἐὰν πρότασις εὐρεθῇ ἔχουσα συγχρόνως καὶ τὰς δύο τιμὰς ἀληθείας  $\alpha$  καὶ  $\psi$ , τότε τοῦτο ἀποτελεῖ ἀντίφασιν.

\* Θεμελιωτῆς τῆς Λογικῆς τῶν προτάσεων ὑπῆρξεν ὁ στωϊκὸς φιλόσοφος Χρύσιππος (281–208 π.Χ.).

**Παραδείγματα:** 1ον: 'Η έκφρασις  $p$ : « $O \ 2 + 3i \equiv (2,3)$  είναι μιγαδικός αριθμός»· Είναι μία πρότασις (λογική πρότασις), καθόσον τὸ περιεχόμενον αὐτῆς εἶναι ἀληθές, ἥτοι  $\tau(p) = \alpha$ .

2ον: 'Η έκφρασις  $q$ : « $O \ \sqrt{2}$  είναι ρητὸς ἀριθμός»· Είναι μία λογική πρότασις, καθόσον τὸ περιεχόμενον τῆς εἶναι ψευδές, ἥτοι  $\tau(q) = \psi$ .

3ον: 'Η έκφρασις « $\delta \ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma \ x$  εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 10» δὲν εἶναι πρότασις, διότι δὲν ἐπιδέχεται ἓνα τῶν χαρακτηρισμῶν «ἀληθής», «ψευδής».

Εἰς τὴν διατύπωσιν τῶν προτάσεων καὶ γενικώτερον τῶν ἐκφράσεων, ἰδίως δὲ εἰς τὰ Μαθηματικά, συναντῶμεν ὅρους καὶ σύμβολα, ὅπως π.χ. εἰς τὰ δύο πρῶτα παραδείγματα: «μιγαδικὸς ἀριθμός», «ρητὸς ἀριθμός», « $2 + 3i$ », « $\sqrt{2}$ » καὶ πλῆθος ἄλλα παρόμοια, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν καθωρισμένην καὶ μόνιμον σημασίαν εἰς ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς ἐπεξεργασίας ἐνὸς θέματος. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν καλοῦμεν τοὺς ὅρους καὶ τὰ σύμβολα **σταθεράς**. Ἀντιθέτως εἰς τὸ παράδειγμα 3 τὸ σύμβολον  $x$  δὲν ἔχει μοναδικὴν σημασίαν, δύναται λ.χ. τὸ  $x$  νὰ εἶναι εἰς οἰοσδήποτε φυσικὸς ἀριθμὸς ἢ ἀκόμη εἰς οἰοσδήποτε πραγματικὸς ἀριθμὸς. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει εἰς τὴν έκφρασιν  $2x = 6$ . Ὁμοίως εἰς τὴν έκφρασιν  $x^2 + \sqrt{2} > y^3$  τὰ σύμβολα  $x$  καὶ  $y$  (ἄρα καὶ τὰ  $x^2$  καὶ  $y^3$ ) ἔχουν ἀκαθόριστον καὶ μὴ μόνιμον σημασίαν, κατέχουν δὲ τὴν θέσιν δύο οἰωνδήποτε, ἀπὸ μίαν ἐιδικὴν κατηγορίαν, ἀντικειμένων, λ.χ. τὸ  $x$  εἶναι εἰς οἰοσδήποτε φυσικὸς καὶ τὸ  $y$  εἰς οἰοσδήποτε πραγματικὸς ἀριθμὸς. Τὰ τοιαῦτα σύμβολα ὀνομάζομεν **μεταβλητάς**. Φανερόν εἶναι πλέον ὅτι ἐκφράσεις περιέχουσαι μεταβλητάς δὲν εἶναι προτάσεις.

**§ 2. Προτασιακὸς τύπος ἢ ἀνοικτὴ πρότασις.**— Ἐλέχθη ἀνωτέρω ὅτι μία έκφρασις περιέχουσα μεταβλητάς δὲν ἔχει νόημα προτάσεως, καθόσον δὲν γνωρίζομεν ἂν τὸ περιεχόμενον αὐτῆς εἶναι ἀληθές ἢ ψευδές. Μία τοιαύτη έκφρασις γίνεται πρότασις, ὅταν αἱ ἐν λόγω μεταβληταὶ ἀντικατασταθοῦν με σταθεράς ὠρισμένης κατηγορίας. Οὕτως ἡ έκφρασις:

«ὁ  $x$  εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 10»·

θὰ γίνῃ πρότασις, ἂν ἡ μεταβλητὴ  $x$  ἀντικατασταθῇ με ἓνα οἰωνδήποτε πραγματικὸν ἀριθμόν. Ἐὰν λ.χ. ἀντικαταστήσωμεν τὸ  $x$  διὰ τοῦ 12, θὰ προκύψῃ ἡ πρότασις: «ὁ 12 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 10» με τιμὴν ἀληθείας  $\alpha$ . Ἐὰν πάλιν ἀντικαταστήσωμεν τὸ  $x$  διὰ τοῦ 7, θὰ προκύψῃ ἡ πρότασις: «ὁ 7 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 10» με τιμὴν ἀληθείας  $\psi$ . Ὁμοίως ἡ έκφρασις:

«ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς  $x$  διαιρεῖ τὸν φυσικὸν ἀριθμόν  $y$ »·

γίνεται πρότασις, ἐὰν ἀντικατασταθοῦν π.χ. τὸ  $x = 5$  καὶ  $y = 35$  με τιμὴν ἀληθείας  $\alpha$ , καθὼς καὶ διὰ  $x = 7$ ,  $y = 33$  με τιμὴν ἀληθείας  $\psi$ . Παρατηροῦμεν ἐδῶ ὅτι ὑπάρχουν ζεύγη τιμῶν τῶν μεταβλητῶν  $x$  καὶ  $y$  ἀπὸ δύο καθοριζόμενα σύνολα, ἐν προκειμένῳ ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν καὶ ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ έκφρασις γίνεται ἀληθὴς πρότασις καὶ ἄλλα ζεύγη τιμῶν τῶν  $x$  καὶ  $y$ , διὰ τὰ ὁποῖα αὕτη γίνεται ψευδὴς πρότασις.

Αἱ ἐκφράσεις: «ὁ  $x$  εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 10», «ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς  $x$  διαιρεῖ

τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν  $y$ » κ.ἄ. καλοῦνται **προτασιακοὶ τύποι** ἢ **ἀνοικταὶ πρό-  
τάσεις**, ἄλλως **προτασιακαὶ συναρτήσεις** μιᾶς, ἀντιστοίχως δύο μεταβλητῶν.

Γενικῶς : **Προτασιακὸς τύπος** (ἢ **ἀνοικτὴ πρότασις**) μιᾶς ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν καλεῖται **μία ἔκφρασις**, ἢ **ὁποία περιέχει μίαν ἢ περισσοτέρας μεταβλητάς**, καὶ ἡ ὁποία καθίσταται **πρότασις** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν σὶ ἐν λόγῳ μεταβληταὶ ἀντικατασταθοῦν ἀπὸ στοιχεῖα ἐνὸς ἢ περισσοτέρων συνόλων.

Οὕτως αἱ ἐξισώσεις καὶ αἱ ἀνισώσεις εἶναι προτασιακοὶ τύποι.

Χάριν συντομίας συμβολίζομεν τοὺς προτασιακοὺς τύπους μὲ μίαν μεταβλητὴν π.χ. τὴν  $x$  διὰ τῶν :  $p(x), q(x), r(x), \dots$ , μὲ δύο μεταβλητάς π.χ. τὰς  $x, y$  διὰ τῶν :  $p(x, y), q(x, y), \dots$ , καὶ γενικῶς διὰ  $n$  μεταβλητάς :  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$  καὶ ἐννοοῦμεν ὅτι : ἡ μεταβλητὴ  $x$  διατρέχει ἐν σύνολον ἀντικειμένων, ἀντιστοίχως τὸ ζεύγος τῶν μεταβλητῶν  $(x, y)$  ἐν σύνολον ζευγῶν ἀντικειμένων, ἀντιστοίχως ἐν σύνολον  $n$ -άδων ἀντικειμένων, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρεται ἡ ἔκφρασις  $p, \dots$ . Τὸ σύνολον αὐτὸ καλοῦμεν **σύνολον ἀναφορᾶς** τοῦ προτασιακοῦ τύπου.

Τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἢ τῶν μεταβλητῶν, διὰ τὰς ὁποίας ὁ προτασιακὸς τύπος καθίσταται ἀληθὴς πρότασις, καλεῖται **σύνολον τιμῶν ἀληθείας** τοῦ προτασιακοῦ τύπου.

Εἶναι φανερόν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν προτασιακοῦ τύπου περισσοτέρων τῆς μιᾶς μεταβλητῶν τὸ σύνολον ἀληθείας του εἶναι, ἐν γένει, ἐν σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν ἢ γενικώτερον  $n$ -άδων ἀντικειμένων. Οὕτως εἰς τὸν προτασιακὸν τύπον  $p(x, y) : « 3x + y = 8 »$ , ὡς σύνολον ἀναφορᾶς δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ σύνολον  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , δηλ. τὸ σύνολον ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τότε τὸ σύνολον ἀληθείας του εἶναι τὸ σύνολον (ὄλων) τῶν διατεταγμένων ζευγῶν  $(x, y)$ , τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν ἰσότητα  $3x + y = 8$ , λ.χ.

τὰ ζεύγη  $(1, 5), (2, 2), \left(\frac{5}{3}, 3\right)$  κ.ἄ.

**Σημείωσις :** Προφανῶς οἱ συμβολισμοὶ  $p(x)$  καὶ  $p(y)$  νοοῦνται ὡς ταυτόσημοι, ἥτοι τὸ γράμμα, τὸ ὁποῖον συμβολίζει τὴν μεταβλητὴν δὲν μεταβάλλει τὸ εἶδος τοῦ προτασιακοῦ τύπου. Κατὰ συνέπειαν, ἀλλαγὴ τοῦ ἀγνώστου εἰς μίαν ἐξίσωσιν ἢ ἀνίσωσιν, δίδει ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν ἢ ἀνίσωσιν.

**§ 3. Ποσοδεῖκται.**—Ἐστω  $p(x)$  εἰς προτασιακὸς τύπος καὶ  $\Omega$  τὸ σύνολον ἀναφορᾶς του. Τότε τὸ σύνολον  $\Omega$  χωρίζεται εἰς δύο σύνολα, ἥτοι εἰς τὸ σύνολον  $\Omega_a$ , διὰ τὰ στοιχεῖα τοῦ ὁποίου ὁ προτασιακὸς τύπος  $p(x)$  γίνεται λογικὴ πρότασις μὲ τιμὴν ἀληθείας  $a$  καὶ τὸ σύνολον  $\Omega_w$ , διὰ τὰ στοιχεῖα τοῦ ὁποίου ὁ  $p(x)$  γίνεται λογικὴ πρότασις μὲ τιμὴν ἀληθείας  $w$ .

Πολλάκις διὰ νὰ διατυπώσωμεν προτάσεις, αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται εἰς τὰ Μαθηματικά, προτάσσομεν τοὺς καλουμένους **ποσοδεῖκτας**.

Οἱ ποσοδεῖκται, ὅπως γνωρίζομεν καὶ ἐκ τῆς προηγουμένης τάξεως, εἶναι δύο, ἥτοι :

1). Ὁ καλούμενος **ὕπαρξιακὸς ποσοδεῖκτης**, συμβολιζόμενος μὲ « $\exists$ », ὅστις ἀναγιγνώσκεται «*ὑπάρχει τοῦλάχιστον ἐν...*» εἴτε καὶ ἄλλως «*διὰ μερικά...*».

2). 'Ο καλούμενος **καθολικός ποσοδείκτης**, συμβολιζόμενος με « $\forall$ », όστις άναγιγνώσκεται «*διά κάθε...*» είτε και άλλως «*δι' όλα τά...*».

Οί ποσοδείκται προτάσσονται προτασιακών τύπων ούτω :

1). « $\exists x p(x)$ » άναγιγνώσκεται : «υπάρχει έν τουλάχιστον  $x$ , ώστε να ίσχύει  $p(x)$ », είτε και ούτω «*διά μερικά  $x$ , ίσχύει  $p(x)$* ».

2). « $\forall x p(x)$ » άναγιγνώσκεται : «*διά κάθε  $x$  ίσχύει  $p(x)$* » είτε και ούτω «*δι' όλα τά  $x$  ίσχύει  $p(x)$* ».

Παρατηρούμεν τώρα τά έξής : "Αν  $p(x)$  είναι είς προτασιακός τύπος, λ.χ. «ό  $x$  είναι πρώτος άριθμός» και  $\Omega$  είναι τό σύνολον άναφοράς, είς τό παράδειγμά μας, λ.χ. τό σύνολον  $\mathbf{N}$  τών φυσικών άριθμών, τότε :

1). 'Η έκφρασις « $\exists x p(x)$ » είναι μία λογική πρότασις, καθόσον αύτη λαμβάνει τήν τιμήν  $\alpha$  τότε, και μόνον τότε, άν τό σύνολον  $\Omega_\alpha$  δέν είναι κενόν (δηλαδή τό σύνολον  $\Omega_\psi$  είναι γνήσιον ύποσύνολον του  $\Omega$ ) και τήν τιμήν  $\psi$  τότε, και μόνον τότε, άν τό σύνολον  $\Omega_\alpha$  είναι κενόν (ήτοι τό  $\Omega_\psi = \Omega$ ).

2). 'Η έκφρασις « $\forall x p(x)$ » είναι μία λογική πρότασις, καθόσον αύτη λαμβάνει τήν τιμήν  $\alpha$  τότε, και μόνον τότε, άν  $\Omega_\alpha = \Omega$  (δηλαδή τό  $\Omega_\psi$  είναι ίσον με τό κενόν) και τιμήν  $\psi$  τότε, και μόνον τότε, άν  $\Omega_\alpha$  είναι γνήσιον ύποσύνολον του  $\Omega$  (δηλαδή τό  $\Omega_\psi$  είναι διάφορον του κενού).

Προτάσεις τών μορφών 1) και 2) καλούνται *ύπαρξιακαί*, άντιστοίχως *ποσοτικά* προτάσεις. Έκ τών άνωτέρω συνάγομεν τώρα ότι : **Μία ύπαρξιακή άντιστοίχως μία ποσοτική πρότασις είναι πάντοτε μία λογική πρότασις.**

**Παράδειγματα :** 1ον : 'Εάν  $p(x)$  είναι ό προτασιακός τύπος : « $x + 5 \geq 13$ » με σύνολον άναφοράς τό σύνολον  $\mathbf{N}$  τών φυσικών άριθμών, τότε ή πρότασις : « $\forall x p(x)$ », έκτενώς ή : « $\forall x, x \in \mathbf{N}$  με  $x + 5 \geq 13$ », είναι ψευδής, διότι τό  $\Omega_\alpha = \{8, 9, 10, \dots\}$  είναι γνήσιον ύποσύνολον του  $\mathbf{N}$ , ένω ή πρότασις : « $\exists x p(x)$ », έκτενώς ή : « $\exists x, x \in \mathbf{N}$  με  $x + 5 \geq 13$ », είναι άληθής, διότι τό σύνολον τιμών άληθείας  $\Omega_\alpha = \{8, 9, \dots\}$  είναι διάφορον του κενού.

2ον : 'Εάν  $p(x)$  είναι ό προτασιακός τύπος : « $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ » με σύνολον άναφοράς τό σύνολον  $\mathbf{R}$  τών πραγματικών άριθμών, τότε ή πρότασις : « $\forall x p(x)$ » λαμβάνει τήν τιμήν  $\alpha$ , διότι  $\Omega_\alpha \equiv \mathbf{R}$ .

'Επίσης ή : « $\exists x p(x)$ » λαμβάνει τήν τιμήν  $\alpha$ , διότι τό  $\Omega_\psi$  είναι ίσον με τό κενόν σύνολον.

3ον : 'Εάν  $p(x)$  : « $x^2 + x + 1 < 0$ » με σύνολον άναφοράς τό σύνολον  $\mathbf{R}$  τών πραγματικών άριθμών, τότε ή πρότασις :

« $\forall x p(x)$ » έκτενώς ή : « $\forall x, x \in \mathbf{R}$  με  $x^2 + x + 1 < 0$ » είναι ψευδής, διότι  $\Omega_\alpha$  είναι τό κενόν σύνολον και συνεπώς  $\Omega_\alpha$  γνήσιον ύποσύνολον του  $\mathbf{R}$ .

'Επίσης ή πρότασις :

« $\exists x p(x)$ » έκτενώς ή : « $\exists x, x \in \mathbf{R} : x^2 + x + 1 < 0$ » λαμβάνει τήν τιμήν  $\psi$ , διότι  $\Omega_\alpha = \emptyset$ .



Οἱ ποσοδεῖται προτάσσονται καὶ προτασιακῶν τύπων δύο ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν οὕτω :

$\forall x \forall y p(x,y)$ , δηλαδή διὰ κάθε  $x$  καὶ κάθε  $y$  ἰσχύει  $p(x,y)$ .

$\exists x \exists y p(x,y)$ , δηλαδή ὑπάρχει (τοῦλάχιστον) ἓν  $x$  καὶ ἓν  $y$ , ὥστε νὰ ἰσχύη  $p(x,y)$ .

$\forall x \exists y p(x,y)$ , δηλαδή διὰ κάθε  $x$  ὑπάρχει ἓν  $y$ , ὥστε νὰ ἰσχύη  $p(x,y)$ .

$\exists x \forall y p(x,y)$ , δηλαδή ὑπάρχει  $x$ , ὥστε διὰ κάθε  $y$  νὰ ἰσχύη  $p(x,y)$ .

Αἱ ἄνωτέρω προτάσεις εἶναι λογικαὶ προτάσεις.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὰς δύο πρώτας περιπτώσεις ἐπιτρέπεται μετάθεσις

$\forall x \forall y$  καὶ  $\exists x \exists y$ , ἥτοι ἰσχύει :

$$\forall x \forall y p(x,y) \equiv \forall y \forall x p(x,y)$$

$$\exists x \exists y p(x,y) \equiv \exists y \exists x p(x,y).$$

Τοῦτο δὲν ἐπιτρέπεται εἰς τὰς δύο τελευταίας περιπτώσεις, ὡς δεικνύει τὸ κάτωθι :

**Παράδειγμα :** "Ἐστω  $p(x,y)$  ὁ προτασιακὸς τύπος : «'Ο  $x$  εἶναι μικρότερος τοῦ  $y$ »· μὲ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ σύνολο  $\mathbf{R}$  τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε ἡ πρότασις :

$\forall x \exists y p(x,y)$  λαμβάνει τὴν τιμὴν  $\alpha$ , ἐνῶ ἡ πρότασις

$\exists y \forall x p(x,y)$  λαμβάνει τὴν τιμὴν  $\psi$ .

Ἡ πρώτη ἐκφράζει : «διὰ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν ὑπάρχει εἰς μεγάλυτερος», ἐνῶ ἡ δευτέρα ἐκφράζει : «ὑπάρχει εἰς ἀριθμὸς, ὥστε κάθε ἄλλος νὰ εἶναι μικρότερος».

**§ 4. Σύνθετοι προτάσεις.** — "Ἄς θεωρήσωμεν τὴν πρότασιν :

« ὁ 4 εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς ».

Αὕτη εἶναι μία ἀπλὴ λογικὴ πρότασις, καθόσον εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ «ἀληθής». Αὕτη ἐκφράζει μίαν ιδιότητα, τὴν ὁποῖαν ἔχει ἓν ἀντικείμενον (πρᾶγμα), δηλ. ὁ ἀριθμὸς 4, ἥτοι τὴν ιδιότητα :

(1)

«... εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς».

Προφανῶς ἡ ιδιότης αὕτη ἀναφέρεται καὶ εἰς ἄλλα ἀντικείμενα (ἀριθμούς). Οὕτως, ἐὰν εἰς τὴν θέσιν τοῦ 4 γράψωμεν τὸ 7, τότε ἡ πρότασις :

« ὁ 7 εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς »,

εἶναι ἐπίσης λογικὴ πρότασις, καθόσον εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ «ψευδής». Τὴν ιδιότητα (1) καλοῦμεν ἐν «κατηγορήμα».

Αἱ προτάσεις : « ὁ 4 εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς », « ὁ 7 εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς », δὲν δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς δύο ἢ περισσότερας ἄλλας προτάσεις, δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ αὐτὸ καὶ μὲ τὴν πρότασιν :

(1)

«Οἱ ἀριθμοὶ 10 καὶ 12 εἶναι ἄρτιοι».

Αὕτη εἶναι μία λογικὴ πρότασις μὲ τιμὴν ἀληθείας  $\alpha$ , ἀλλὰ χωρίζεται εἰς δύο ἄλλας προτάσεις, ἥτοι :

(2)

«ὁ ἀριθμὸς 10 εἶναι ἄρτιος» καὶ «ὁ ἀριθμὸς 12 εἶναι ἄρτιος».

Ἐδῶ ὁ σύνδεσμος «καί» παίζει ἕνα ρόλον σχηματισμοῦ μιᾶς νέας προτάσεως, τῆς (1) ἐκ τῶν δύο ἀπλῶν προτάσεων (2). Τὴν ὡς ἄνω πρότασιν (1) καλοῦμεν **σύνθετον πρότασιν**.

Γενικῶς : Μία πρότασις καλεῖται σύνθετος τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν συνίσταται ἐξ ἀπλῶν προτάσεων συνδεδεμένων μεταξύ των μὲ διάφορα συνδετικά, τὰ ὅποια καλοῦμεν **λογικοὺς συνδέσμους**.

Γενικῶς εἰς τὴν λογικὴν τῶν προτάσεων θεωροῦνται ὡς **λογικοὶ σύνδεσμοι** αἱ ἐκφράσεις : «καί», «εἴτε», «ἐάν... τότε...», «τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν», ἐπίσης ἡ ἐκφρασις «ὄχι», ὅταν τίθεται πρὸ μιᾶς προτάσεως.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λογικῶν συνδέσμων ὁ μὲν «ὄχι» εἶναι **μονομελὲς** σύνδεσμος, διότι προτάσσεται μιᾶς προτάσεως, οἱ ὑπόλοιποι ὅμως εἶναι **διμελεῖς**, διότι συνδέουν δύο προτάσεις.

**Παραδείγματα συνθέτων προτάσεων.**

α). «Ὁ ἀριθμὸς 3 εἴτε ὁ ἀριθμὸς 4 εἶναι περιττός».

β). «Ἐάν ὁ 4 εἶναι ἄρτιος, τότε ὁ  $\sqrt{2}$  εἶναι ἄρρητος».

γ). «Ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς 16 εἶναι ἄρτιος τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν διαιρῇται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2».

δ). «Ὁχι ὁ 3 εἶναι ἄρτιος» = «ὁ 3 δὲν εἶναι ἄρτιος».

Εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν ὅτι αἱ ἀνωτέρω σύνθετοι προτάσεις εἶναι **λογικαὶ προτάσεις** μὲ τιμὴν ἀληθείας α. Κατὰ τὸν χαρακτηρισμὸν τῶν ἀνωτέρω συνθέτων προτάσεων εὐκόλως διαπιστοῦνται ὅτι ἡ τιμὴ ἀληθείας των ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν ἀπλῶν προτάσεων, ἐξ ὧν αὗται συνίστανται.

Εἰς τὴν λογικὴν τῶν προτάσεων δεχόμεθα γενικῶς ὅτι ἐκ δύο λογικῶν προτάσεων συνίσταται διὰ συνθέσεως αὐτῶν μὲ ἕνα ἐκ τῶν λογικῶν συνδέσμων «καί», «εἴτε», «ἐάν... τότε...», «τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν» μία νέα λογικὴ πρότασις. Ἐπίσης ἐκ μιᾶς προτάσεως (λογικῆς) διὰ προτάξεως τῆς ἀρνήσεως «ὄχι», προκύπτει μία λογικὴ πρότασις.

Αἱ προτάσεις θεωροῦμεναι εἴτε μεμονωμένως, εἴτε ἐντὸς **λογικοῦ συνδυασμοῦ** μετ' ἄλλων προτάσεων, ὅμως ὡς ἓν σύνολον, ἀποτελοῦν ἀντικείμενον μελέτης τοῦ μέρους ἐκείνου τῆς Μαθηματικῆς Λογικῆς, τὸ ὅποιον καλεῖται **Προτασιακὸς Λογισμὸς**.

**§ 5. Ἄλγεβρα (λογισμὸς) τῶν προτάσεων.** — Δεχόμεθα ὅτι ὑπάρχει ἓν σύνολον ἀπλῶν λογικῶν προτάσεων, τὸ ὅποιον συμβολίζομεν μὲ  $\Pi$ · τὰ στοιχεῖα, ἐξ ὧν τὸ  $\Pi$  συνίσταται, δηλ. τὰς προτάσεις, συμβολίζομεν, ὡς ἐλέχθη καὶ εἰς τὴν § 1, μὲ τὰ γράμματα  $p, q, r, s, \dots$ . Δεχόμεθα ἐπὶ πλέον ὅτι εἰς ἐκάστην πρότασιν  $p$  ἐκ τοῦ  $\Pi$  ἀντιστοιχεῖ ἀκριβῶς εἰς ἐκ τῶν δύο χαρακτηρισμῶν : «ἀληθὴς» ( $\alpha$ ), «ψευδὴς» ( $\psi$ ), ἥτοι δεχόμεθα ὅτι ὑφίσταται μία **μονοσήμαντος** ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου  $\Pi$  εἰς τὸ διμελὲς σύνολον  $\{\alpha, \psi\}$  : Γράφομεν δέ :

$$\tau : \Pi \rightarrow \{\alpha, \psi\} \text{ ἢ καὶ ἄλλως } \Pi p \rightarrow \tau(p) \in \{\alpha, \psi\}.$$

Διὰ τῆς **μονοσημάντου** ταύτης ἀπεικονίσεως  $\tau$  ἐκάστη πρότασις  $p$  λαμβάνει ἀκριβῶς μίαν τιμὴν  $\tau(p)$  ἐν  $\{\alpha, \psi\}$ , τὴν καλουμένην **τιμὴν ἀληθείας** τῆς προτάσεως  $p$ .

Θεωρούμεν τώρα τούς κάτωθι λογικούς συνδέσμους, τῇ βοηθείᾳ τῶν ὁποίων ἐφοδιάζομεν τὸ σύνολον Π τῶν ἀπλῶν προτάσεων μὲ «*λογικὰς πράξεις*» :

1). Ὁ σύνδεσμος «*καί*», ὅστις συμβολίζεται μὲ « $\wedge$ » καὶ διαβάζεται «*σύνδεξις*», ἢ «*καί*», χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς λογικῆς πράξεως τῆς *συνζεύξεως*.

2). Ὁ σύνδεσμος «*εἴτε*» ἢ «*ἢ*», ὁ ὁποῖος συμβολίζεται μὲ « $\vee$ » καὶ διαβάζεται «*διάδεξις*», χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς λογικῆς πράξεως τῆς *(ἐγκλειστικῆς) διαζεύξεως*.

3). Ἡ ἔκφρασις «*ἐὰν . . . , τότε . . .*», ἡ ὁποία συμβολίζεται μὲ « $\implies$ » καὶ διαβάζεται «*ἐπεται*», «*συνεπάγεται*», χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς λογικῆς πράξεως τῆς *συνεπαγωγῆς*.

4). Ἡ ἔκφρασις «*τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν*», ἡ ὁποία συμβολίζεται μὲ « $\iff$ » καὶ διαβάζεται «*ἐπεται καὶ ἀντιστρόφως*» ἢ «*συνεπάγεται καὶ ἀντιστρόφως*», χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς λογικῆς πράξεως τῆς *(λογικῆς) ἰσοδυναμίας*.

5). Ὁ λογικὸς σύνδεσμος «*ὅχι*», ὅστις συμβολίζεται μὲ « $\sim$ » καὶ διαβάζεται «*ὅχι*» ἢ «*δέν*», χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς λογικῆς πράξεως τῆς *ἀρνήσεως*.

Δεχόμεθα τώρα τὰ ἑξῆς : α). Ἐὰν εἰς τῶν τεσσάρων πρώτων συνδέσμων τεθῇ μεταξύ δύο οἰωνδήποτε ἀπλῶν προτάσεων  $p$  καὶ  $q$  ἐκ τοῦ Π, τότε προκύπτει μία σύνθετος πρότασις, ἡ ὁποία καλεῖται *σύνθετος πρότασις πρώτης βαθμίδος*. Ἦτοι διὰ κάθε ζευγὸς ἀπλῶν προτάσεων  $p$  καὶ  $q$  ἐκ τοῦ Π αἱ προτάσεις :  $p \wedge q$ ,  $p \vee q$ ,  $p \implies q$ ,  $p \iff q$  εἶναι σύνθετοι προτάσεις πρώτης βαθμίδος. Φανερόν εἶναι ὅτι οἱ ὅροι τοῦ ζεύγους  $p$  καὶ  $q$  ἐπιτρέπεται νὰ συμπίπτουν, ἦτοι αἱ

$$p \vee p, \quad p \wedge p, \quad p \implies p, \quad p \iff p,$$

εἶναι ἐπίσης σύνθετοι προτάσεις πρώτης βαθμίδος διὰ κάθε πρότασιν  $p$  ἐκ τοῦ Π. β). Ἐὰν ὁ πέμπτος λογικὸς σύνδεσμος τεθῇ πρὸ τυχούσης προτάσεως ἐκ τοῦ Π, τότε προκύπτει μία σύνθετος πρότασις, καλουμένη ἐπίσης *πρώτης βαθμίδος*, ἦτοι  $\sim p$  εἶναι σύνθετος πρότασις πρώτης βαθμίδος.

**§ 6. Πράξεις μεταξύ λογικῶν προτάσεων.** — Δι' ἐκάστην σύνθετον πρότασιν πρώτης βαθμίδος ὀρίζεται ἀκριβῶς μία τιμὴ ἐν  $\{\alpha, \psi\}$  τῇ βοηθείᾳ τῶν κατωτέρω πινάκων. Ἡ τιμὴ τῆς συνθέτου προτάσεως ἐν  $\{\alpha, \psi\}$ , ἡ ὁποία καλεῖται καὶ *τιμὴ ἀληθείας τῆς συνθέτου προτάσεως*, ὀρίζεται πλήρως ἐκ τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν ἀπλῶν προτάσεων ἐκ τῶν ὁποίων συνίσταται καὶ τοῦ τρόπου συνδέσεως αὐτῶν πρὸς σχηματισμὸν τῆς συνθέτου προτάσεως, οὐχὶ ὅμως ἀπὸ τὸ περιεχόμενον αὐτῶν.

Οἱ διάφοροι τρόποι συνδέσεως ἀπλῶν προτάσεων πρὸς σχηματισμὸν συνθέτου τοιαύτης, ἀποτελοῦν τὰς «*λογικὰς πράξεις*» μεταξύ τῶν προτάσεων.

Αἱ θεμελιώδεις λογικαὶ πράξεις εἶναι αἱ ἑξῆς :

**1. Σύνδεξις :** Τὰ ἐξαγόμενα τῆς λογικῆς πράξεως τῆς *συνζεύξεως*  $\wedge$  παρέχονται σχηματικῶς, ὅπως γνωρίζομεν καὶ ἐκ τῶν μαθημάτων τῆς προη-

γυμμένης τάξεως, διὰ τοῦ κάτωθι πίνακος καλουμένου πίνακος τιμῶν ἀληθείας τῆς συζεύξεως  $p \wedge q$ .

(1)

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|--------------|
| α | α | α            |
| α | ψ | ψ            |
| ψ | α | ψ            |
| ψ | ψ | ψ            |

Δυνάμει τοῦ ἔναντι πίνακος, ἡ τιμὴ  $\tau(p \wedge q)$  τῆς προτάσεως  $p \wedge q$  ὀρίζεται ἴση μὲ α, δηλαδὴ  $\tau(p \wedge q) = \alpha$  τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν  $\tau(p) = \tau(q) = \alpha$ · εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν ἡ τιμὴ τῆς  $p \wedge q$  εἶναι ἴση μὲ ψ, ἥτοι  $\tau(p \wedge q) = \psi$ .

᾽Ωστε: Ἡ σύζευξις δύο προτάσεων εἶναι ἀ-

ληθῆς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἀμφότεραι αἱ προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς.

Παράδειγμα: Ἐστωσαν αἱ προτάσεις:

$p$ : «Ὁ  $\frac{2}{3}$  εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς» καὶ  $q$ : «Ὁ 5 εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς».

Τότε ἡ σύζευξις αὐτῶν  $p \wedge q$ : «Ὁ  $\frac{2}{3}$  εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς καὶ ὁ 5 εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς» εἶναι μία σύνθετος πρότασις, ἡ ὁποία εἶναι ψευδὴς (διὰ τὴν  $j$ ).

## 2. Ἐγκλειστικὴ διάζευξις:

Δυνάμει τοῦ κάτωθι πίνακος, ἡ τιμὴ  $\tau(p \vee q)$  τῆς προτάσεως  $p \vee q$  ὀρίζεται ἴση μὲ ψ, ἥτοι  $\tau(p \vee q) = \psi$  τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν  $\tau(p) = \tau(q) = \psi$ · εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν ἡ τιμὴ τῆς  $p \vee q$  εἶναι ἴση μὲ α.

(2)

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|------------|
| α | α | α          |
| α | ψ | α          |
| ψ | α | α          |
| ψ | ψ | ψ          |

᾽Ωστε: Ἡ (ἐγκλειστικὴ) διάζευξις δύο προτάσεων εἶναι ἀληθῆς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν μία τοὐλάχιστον τῶν (ἀπλῶν) προτάσεων εἶναι ἀληθῆς.

Παράδειγμα: Εἶναι ἀληθῆς ἢ εἶναι ψευδὴς ἡ πρότασις:

«Ὁ ἀριθμὸς 17 εἶναι τέλειον τετράγωνον εἴτε ὁ  $\sqrt{2}$  εἶναι ἄρρητος»;

Ἀπάντησις: Ἡ σύνθετος αὕτη πρότασις εἶναι ἀληθῆς, διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ  $p$  τὴν πρότασιν: «Ὁ ἀριθμὸς 17 εἶναι τέλειον τετράγωνον» καὶ διὰ  $q$  τὴν πρότασιν: «Ὁ  $\sqrt{2}$  εἶναι ἄρρητος», ἔχομεν  $\tau(p) = \psi$  καὶ  $\tau(q) = \alpha$ . Ὅθεν, συμφώνως πρὸς τὸν ἀνωτέρω πίνακα (2), ἡ σύνθετος πρότασις:

$p \vee q$ : «ὁ ἀριθμὸς 17 εἶναι τέλειον τετράγωνον εἴτε ὁ  $\sqrt{2}$  εἶναι ἄρρητος» εἶναι ἀληθῆς.

## 3. Συνεπαγωγὴ:

Δυνάμει τοῦ κάτωθι πίνακος, ἡ τιμὴ  $\tau(p \Rightarrow q)$  τῆς προτάσεως  $p \Rightarrow q$  ὀρίζεται ἴση μὲ ψ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν  $\tau(p) = \alpha$  καὶ  $\tau(q) = \psi$ · εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν ἡ τιμὴ τῆς  $p \Rightarrow q$  εἶναι ἴση μὲ α, ἥτοι:

(3)

| p | q | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|-------------------|
| α | α | α                 |
| α | ψ | ψ                 |
| ψ | α | α                 |
| ψ | ψ | α                 |

$$\tau(p \Rightarrow q) = \alpha.$$

᾽Ωστε: Ἡ συνεπαγωγὴ  $p \Rightarrow q$  εἶναι ψευδὴς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ  $p$  εἶναι ἀληθῆς καὶ ἡ  $q$  εἶναι ψευδὴς. Εἰς πᾶσας τὰς ἄλλας περιπτώσεις εἶναι ἀληθῆς.

Πῶς φαίνεται ὅτι ἡ συνεπαγωγὴ δὲν εἶναι ἀντιμεταθετικὴ λογικὴ πρᾶξις;

**Παράδειγμα:** Είναι αληθής ή ψευδής ή πρότασις : «  $(3 = 4) \implies (7 > 2)$  »;

**Απάντησις:** 'Η πρότασις είναι αληθής, διότι, αν παραστήσωμεν διὰ  $p$  τήν : «  $3 = 4$  » και διὰ  $q$  τήν : «  $7 > 2$  », παρατηρούμεν ὅτι ἡ  $p$  είναι ψευδής ( $\psi$ ) καὶ ἡ  $q$  είναι αληθής ( $\alpha$ ). Συνεπῶς, συμφώνως πρὸς τὸν πίνακα (3), ἡ σύνθετος πρότασις :

$$p \implies q : \text{« ἂν } 3 = 4, \text{ τότε } 7 > 2 \text{ »}$$

είναι αληθής.

**Παρατηρήσεις:** Ἄλλοι τρόποι διατυπώσεως τῆς συνεπαγωγῆς  $p \implies q$  είναι καὶ οἱ ἑξῆς :

1. «  $p$  είναι ικανή συνθήκη διὰ  $q$  »
2. «  $q$  είναι ἀναγκαία συνθήκη διὰ  $p$  »
3. « ὑπόθεσις :  $p$ , συμπέρασμα :  $q$  »
4. «  $p$ , ὅθεν  $q$  »
5. «  $p$ , ἄρα  $q$  »
6. «  $q$  συνάγεται ἐκ τοῦ  $p$  ».

**Παράδειγμα:** Ἐστω ἡ συνεπαγωγή : « Ἐὰν τὰ τρίγωνα  $AB\Gamma$ ,  $A'B'\Gamma'$  είναι ἴσα, τότε αἱ γωνίαι των είναι ἴσαι μία πρὸς μίαν ».

Ἡ ὑπόθεσις  $p$  : « τὰ τρίγωνα  $AB\Gamma$ ,  $A'B'\Gamma'$  είναι ἴσα » είναι **ικανή συνθήκη** διὰ τὸ συμπέρασμα τῆς ισότητος τῶν ἀντιστοίχων γωνιῶν.

Τὸ συμπέρασμα  $q$  : « αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων είναι ἴσαι μία πρὸς μίαν » είναι **ἀναγκαία συνθήκη** διὰ τὴν ισότητα τῶν τριγώνων· δηλαδὴ δὲν δύνανται τὰ τρίγωνα νὰ είναι ἴσα χωρὶς αἱ γωνίαι των νὰ είναι ἴσαι μία πρὸς μίαν.

#### 4) Λογικὴ ἰσοδυναμία.

Δυνάμει τοῦ κάτωθι πίνακος, ἡ τιμὴ  $\tau(p \iff q)$  τῆς προτάσεως  $p \iff q$  ὀρίζεται ἴση μὲ  $\alpha$ , τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν  $\tau(p) = \tau(q)$ . ὅθεν ἡ τιμὴ  $\tau(p \iff q)$  είναι ἴση μὲ  $\psi$ , ἂν, καὶ μόνον ἂν  $\tau(p) \neq \tau(q)$ .

(4)

| $p$      | $q$      | $p \iff q$ |
|----------|----------|------------|
| $\alpha$ | $\alpha$ | $\alpha$   |
| $\alpha$ | $\psi$   | $\psi$     |
| $\psi$   | $\alpha$ | $\psi$     |
| $\psi$   | $\psi$   | $\alpha$   |

Ὡστε : Ἡ (λογικὴ) ἰσοδυναμία είναι ἀληθὴς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν αἱ δύο προτάσεις εἶναι συγχρόνως ἀληθεῖς ἢ συγχρόνως ψευδεῖς.

Ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία είναι ἀντιμεταθετικὴ λογικὴ πρᾶξις ; Νὰ σχηματισθῇ ὁ σχετικὸς πίναξ ἀληθείας.

**Παράδειγμα:** Είναι αληθής ἢ είναι ψευδής ἡ πρότασις : «  $(2 = 5) \iff (4 > 7)$  »;

**Απάντησις:** Ἡ δοθεῖσα ἰσοδυναμία είναι αληθής, διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ  $p$  : «  $2 = 5$  » καὶ διὰ  $q$  : «  $4 > 7$  », ἔχομεν  $\tau(p) = \psi$  καὶ  $\tau(q) = \psi$ . Ἐπομένως, συμφώνως πρὸς τὸν πίνακα (4), ἡ σύνθετος πρότασις :

$$p \iff q : \text{« Ὁ } 2 = 5 \text{ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν } 4 > 7 \text{ »}$$

είναι αληθής.

**Παρατηρήσεις: α).** Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς (λογικῆς) ἰσοδυναμίας ἐννοοῦμεν ὅτι ἰσχύουν αἱ ἑξῆς ιδιότητες :

1.  $p \iff p$
2.  $(p \iff q) \iff (q \iff p)$
3.  $(p \iff q \wedge q \iff r) \implies (p \iff r)$ .

β). Άλλοι τρόποι λεκτικής διατυπώσεως της ισοδυναμίας « $p \iff q$ » είναι και οί εξής :

1. « $p$  εάν, και μόνον εάν,  $q$ ».
2. « $p$  είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη διά  $q$ ».
3. « $p$  πρέπει και αρκεί  $q$ ».
4. « $p$  και  $q$  είναι λογικώς ισοδύναμοι» ή απλώς «ισοδύναμοι».
5. « $p \implies q$  και αντίστροφως».

**Σημειώσεις :** Εάν θέλωμεν να δηλώσωμεν ότι η ισοδυναμία  $p \iff q$  δύο προτάσεων υφίσταται εξ ορίσμου, τότε χρησιμοποιούμεν τὸ σύμβολον  $\iff$ , ἥτοι γράφομεν  $p \iff q$ .

**5) Ἀρνήσις :** Κατὰ τὴν λογικὴν αὐτὴν πρᾶξιν διὰ κάθε πρότασιν  $p$  δεχόμεθα μίαν πρότασιν τῆς μορφῆς «ὄχι  $p$ », συμβολιζομένη « $\sim p$ », ἡ ὁποία εἶναι ἀληθὴς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ  $p$  εἶναι ψευδής, ψευδὴς δὲ ἂν ἡ  $p$  εἶναι ἀληθής. Οὕτως ὁ πίναξ τιμῶν ἀληθείας τῆς ἀρνήσεως « $\sim p$ » εἶναι ὁ κάτωθι :

(5)

| $p$      | $\sim p$ |
|----------|----------|
| $\alpha$ | $\psi$   |
| $\psi$   | $\alpha$ |

Δυνάμει τοῦ ἑναντι πίνακος, ἡ τιμὴ  $\tau(\sim p)$  τῆς προτάσεως  $\sim p$  ὀρίζεται πάντοτε διάφορος (ἀντίθετος) τῆς τιμῆς  $\tau(p)$  τῆς προτάσεως  $p$ .

Ὅθεν, ἐὰν  $\tau(p) = \alpha$ , τότε  $\tau(\sim p) = \psi$  καὶ ἐὰν  $\tau(p) = \psi$ , τότε  $\tau(\sim p) = \alpha$ .

Ὡστε : Αἱ τιμαὶ ἀληθείας τῶν  $p$  καὶ  $\sim p$  εἶναι πάντοτε ἀντίθετοι.

**Παράδειγμα :** Εάν  $p$  : «ὁ  $\sqrt{2}$  εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς»· νὰ εὐρεθῇ ἡ τιμὴ  $\tau(\sim p)$  τῆς προτάσεως  $\sim p$ .

**Λύσις :** Ἐχομεν  $\tau(p) = \psi$ , ἄρα  $\tau(\sim p) = \alpha$ , ἔνθα :

$\sim p$  : «ὄχι ὁ  $\sqrt{2}$  εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς» = «ὁ  $\sqrt{2}$  δὲν εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς».

**Παρατήρησις :** Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω λογικῶν συνδέσμων χρησιμοποιεῖται ἐνίοτε ὡς σύνδεσμος καὶ ἡ ἔκφρασις «ἢ μόνον ... ἢ μόνον ...», ἡ ὁποία συμβολίζεται μὲ « $\underline{\vee}$ » ἢ « $\vee$ ». Τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἀνωτέρω συνδέσμου σχηματίζεται ἡ λεγομένη ἀποκλειστικὴ διάζευξις. Οὕτως, ἡ ἀποκλειστικὴ διάζευξις δύο προτάσεων  $p, q$  συμβολίζεται μὲ :  $p \underline{\vee} q$  ἢ  $p \vee q$  καὶ ἀναγινώσκεται «ἢ μόνον  $p$  ἢ μόνον  $q$ ». Ἡ σύνθετος πρότασις  $p \underline{\vee} q$ , κατατασσομένη καὶ αὕτη εἰς τὴν πρώτην βαθμίδα εἶναι, ὅπως γνωρίζομεν ἐκ τῆς προηγουμένης τάξεως, ἀληθὴς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν αἱ τιμαὶ ἀληθείας τῶν  $p$  καὶ  $q$  εἶναι διάφοροι, ψευδὴς δέ, ὅταν αἱ τιμαὶ ἀληθείας τῶν  $p$  καὶ  $q$  εἶναι ἴσαι.

(6)

| $p$      | $q$      | $p \underline{\vee} q$ |
|----------|----------|------------------------|
| $\alpha$ | $\alpha$ | $\psi$                 |
| $\alpha$ | $\psi$   | $\alpha$               |
| $\psi$   | $\alpha$ | $\alpha$               |
| $\psi$   | $\psi$   | $\psi$                 |

Ὅθεν ἔχομεν τὸν ἑναντι πίνακα τιμῶν ἀληθείας τῆς ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως  $p \underline{\vee} q$ .

Δυνάμει τοῦ πίνακος τούτου, ἡ τιμὴ  $\tau(p \underline{\vee} q)$  τῆς προτάσεως  $p \underline{\vee} q$  ὀρίζεται ἴση μὲ  $\alpha$ , τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν  $\tau(p) \neq \tau(q)$  καὶ  $\tau(p \underline{\vee} q) = \psi$ , τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν  $\tau(p) = \tau(q)$ .

Ὡστε : Ἡ ἀποκλειστικὴ διάζευξις δύο προτάσεων εἶναι ἀληθὴς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ μία εἶναι ἀληθὴς καὶ ἡ ἄλλη ψευδής.

**Παράδειγμα 1ον :** Εἰς τὰ Μαθηματικά ἡ ἔκφρασις : «ὁ α εἶναι μεγαλύτερος ἢ ἴσος τοῦ β» ὀρίζεται ὡς ἑξῆς :

$$\alpha \geq \beta \stackrel{\text{ορσ}}{\longleftrightarrow} \alpha > \beta \quad \eta \quad \alpha = \beta.$$

Κατόπιν τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ποία ἡ τιμὴ ἀληθείας τῆς προτάσεως : « $4 \geq 3$ ».

**Ἀπάντησις :** Δυνάμει τοῦ ὡς ἄνω ὁρισμοῦ ἡ ἀνωτέρω πρότασις εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν : « $4 > 3$  ἢ  $4 = 3$ ». Αὕτη ὁμως εἶναι ἀληθής, διότι, ἂν παραστήσωμεν μὲ  $p$  τὴν πρότασιν : « $4 > 3$ » καὶ μὲ  $q$  τὴν : « $4 = 3$ », ἔχομεν :  $\tau(p) = \alpha$  καὶ  $\tau(q) = \psi$ . Ἐπὶ πλέον δὲ οὐδέποτε ἕνας ἀριθμὸς εἶναι καὶ μεγαλύτερος καὶ ἴσος ἐνὸς ἄλλου ἀριθμοῦ. Ἐπομένως ἡ σύνθετος πρότασις :

« $4 > 3$  ἢ  $4 = 3$ » ἀποτελεῖ μίαν ἀποκλειστικὴν διάζευξιν, συνεπῶς, συμφώνως πρὸς τὸν πίνακα (6), ἔχομεν :  $\tau(p \vee q) = \alpha$ .

**Σημείωσις .** Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος συμπεραίνομεν ὅτι εἶναι ὀρθὸν νὰ γράφωμεν : « $3 \geq 3$ » καὶ γενικῶς « $x \geq x$ »  $\forall x \in \mathbf{R}$  (διατί ;).

**Παράδειγμα 2ον :** Κατόπιν τοῦ ὁρισμοῦ, τὸν ὁποῖον ἐδώσαμεν εἰς τὴν § 1 διὰ τὴν λογικὴν πρότασιν ἢ δήλωσιν, τί εἶναι ἡ ἔκφρασις : «Ἡ δήλωσις εἶναι μία ἀληθὴς ἢ ψευδὴς πρότασις».

**Ἀπάντησις :** Ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις εἶναι ἀποκλειστικὴ διάζευξις, διότι ἡ (λογικὴ) πρότασις ἢ δήλωσις εἶναι ἢ μόνον ἀληθὴς (καὶ ὄχι ψευδής), ἢ μόνον ψευδὴς (καὶ ὄχι ἀληθής). Δηλαδὴ ἡ δήλωσις οὐδέποτε εἶναι καὶ ἀληθὴς καὶ ψευδής.

**Παράδειγμα 3ον :** Ἐστω μία οἰκογένεια μὲ δύο τέκνα, ἀμφότερα ἀγόρια. Ἐστω  $p$  ἡ πρότασις : «Τὸ μεγαλύτερον τέκνον εἶναι ἀγόρι» καὶ  $q$  ἡ πρότασις : «Τὸ μικρότερον τέκνον εἶναι ἀγόρι». Νὰ ἀποδόσῃτε λεκτικῶς τὴν σύνθετον πρότασιν  $p \vee q$  καὶ νὰ εὑρῇτε τὴν τιμὴν ἀληθείας ταύτης.

**Ἀπάντησις :** Ἡ σύνθετος πρότασις  $p \vee q$  σημαίνει :

$p \vee q$  : «Ἡ μόνον τὸ μεγαλύτερον τέκνον εἶναι ἀγόρι ἢ μόνον τὸ μικρότερον».

Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν :

«Ἡ οἰκογένεια ἔχει ἕνα ἀγόρι καὶ ἕνα κορίτσι».

Προφανῶς ἡ τιμὴ ἀληθείας τῆς προτάσεως ταύτης εἶναι  $\psi$  (= ψεῦδος). Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα καταλήγομεν καὶ ἐκ τοῦ πίνακος 6, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι :  $\tau(p) = \alpha$ ,  $\tau(q) = \alpha$ . Ὡστε :

$$\tau(p \vee q) = \psi.$$

**Ἀνακεφαλαίωσις.** Οἱ ἑξ ἀνωτέρω πίνακες τιμῶν ἀληθείας τῶν λογικῶν πράξεων τῆς συζεύξεως, ἐγκλειστικῆς διαζεύξεως, ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως, συνεπαγωγῆς, ἰσοδυναμίας καὶ ἀρνήσεως δύο προτάσεων  $p$ ,  $q$  συνοψίζονται εἰς τὸν κάτωθι πίνακα :

| p | q | Σύζευξις     | Ἐγκλ. Διαζ. | Ἀπ. Διαζ.              | Συνεπαγωγή     | Ἰσοδυναμία                | Ἀρνήσις  |          |
|---|---|--------------|-------------|------------------------|----------------|---------------------------|----------|----------|
|   |   | $p \wedge q$ | $p \vee q$  | $p \underline{\vee} q$ | $p \implies q$ | $p \longleftrightarrow q$ | $\sim p$ | $\sim q$ |
| α | α | α            | α           | ψ                      | α              | α                         | ψ        | ψ        |
| α | ψ | ψ            | α           | α                      | ψ              | ψ                         | ψ        | α        |
| ψ | α | ψ            | α           | α                      | α              | ψ                         | α        | ψ        |
| ψ | ψ | ψ            | ψ           | ψ                      | α              | α                         | α        | α        |



## § 7. Ταυτολογίες και αυτοαντιφάσεις.

1). **Ταυτολογίες.** Μία σύνθετος πρότασις  $A$ , εις την οποίαν εμφανίζονται αἱ ἀπλᾶι προτάσεις  $p_1, p_2, \dots, p_k$  ἐκ τοῦ συνόλου  $\Pi$ , καλεῖται μία **ταυτολογία** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ τιμὴ ἀληθείας αὐτῆς εἶναι ἡ  $\alpha$  ( $=$  ἀλήθεια), διὰ κάθε «συνδυασμὸν» τιμῶν ἀληθείας τῶν ἀπλῶν προτάσεων  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Αἱ ταυτολογίαι συμβολίζονται μὲ πρόταξιν τοῦ συμβόλου :  $\vdash$ , ἥτοι :

$\vdash A$  σημαίνει : *ἡ πρότασις  $A$  εἶναι μία ταυτολογία.*

Ἀξιόλογοι ταυτολογίαι εἶναι αἱ ἑξῆς :

- 1). *Νόμος τῆς ταυτότητος* :  $\vdash p \implies p$ .
- 2). *Νόμος διπλῆς ἀρνήσεως* :  $\vdash p \iff \sim(\sim p)$ .
- 3). *Νόμος ἀποκλείσεως τρίτου* :  $\vdash p \vee (\sim p)$ .
- 4). *Νόμος ἀντιφάσεως* :  $\vdash \sim [p \wedge (\sim p)]$ .

Τὸ ὅτι εἶναι ταυτολογίαι, φαίνεται σαφῶς ἐκ τῶν κάτωθι πινάκων :

| $p$      | $\sim p$ | $\sim(\sim p)$ | $p \wedge (\sim p)$ | $p \implies p$ | $p \iff \sim(\sim p)$ | $p \vee \sim p$ | $\sim [p \wedge (\sim p)]$ |
|----------|----------|----------------|---------------------|----------------|-----------------------|-----------------|----------------------------|
| $\alpha$ | $\psi$   | $\alpha$       | $\psi$              | $\alpha$       | $\alpha$              | $\alpha$        | $\alpha$                   |
| $\psi$   | $\alpha$ | $\psi$         | $\psi$              | $\alpha$       | $\alpha$              | $\alpha$        | $\alpha$                   |

**Παρατηρήσεις :** 1). Ὁρισμένοι ταυτολογίαι, λόγῳ τῆς γενικῆς ἰσχύος των, καλοῦνται **ἀρχαὶ ἢ νόμοι**. Παραδείγματα τοιοῦτων ταυτολογιῶν εἶναι αἱ ἀνωτέρω ταυτολογίαι (1), (3), (4), αἱ ὁποῖαι εἶναι τρεῖς ἐκ τῶν τεσσάρων νόμων τῆς Λογικῆς τοῦ Ἀριστοτέλους \*).

Οἱ νόμοι τῆς Λογικῆς τοῦ Ἀριστοτέλους εἶναι οἱ κάτωθι τέσσαρες :

- α'). *Ὁ νόμος τῆς ταυτότητος*
- β'). *Ὁ νόμος τῆς ἀντιφάσεως*
- γ'). *Ὁ νόμος τοῦ ἀποχρῶντος λόγου καὶ*
- δ'). *Ὁ νόμος τῆς τοῦ τρίτου ἀποκλείσεως.*

2). Ἡ ταυτολογία (3), κατὰ τὴν ὁποίαν ἐκ δύο ἀντιφατικῶν προτάσεων  $p$  καὶ  $\sim p$  ἡ μία εἶναι ἀληθὴς καὶ ἡ ἄλλη ψευδής, μέση κατάστασις δὲν χωρεῖ, καλεῖται καὶ ἀρχὴ τῆς τοῦ μέσου ἢ τρίτου ἀποκλείσεως.

**Παράδειγμα :** Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ κάτωθι ἰσοδυναμία :

$$\sim (p \wedge q) \iff \sim p \vee \sim q \quad (\text{Νόμος τοῦ De Morgan})$$

εἶναι ταυτολογία.

\* Θεμελιωτὴς τῆς Λογικῆς, γενικῶς ὡς ἐπιστήμης τῶν νόμων τῆς σκέψεως, ὑπῆρξεν ὁ ἐκ Σταγειρίων τῆς Μακεδονίας μέγας φιλόσοφος Ἀριστοτέλης (384 - 321 π.Χ.).



**Λύσεις :** Σχηματίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα τιμῶν ἀληθείας τῆς δοθείσης ἰσοδυναμίας :

| p | q | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \wedge q$ | $\sim (p \wedge q)$ | $\sim p \vee \sim q$ | $\sim (p \wedge q) \iff \sim p \vee \sim q$ |
|---|---|----------|----------|--------------|---------------------|----------------------|---------------------------------------------|
| α | α | ψ        | ψ        | α            | ψ                   | ψ                    | α                                           |
| α | ψ | ψ        | α        | ψ            | α                   | α                    | α                                           |
| ψ | α | α        | ψ        | ψ            | α                   | α                    | α                                           |
| ψ | ψ | α        | α        | ψ            | α                   | α                    | α                                           |

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τιμὴ ἀληθείας τῆς δοθείσης ἰσοδυναμίας εἶναι πάντοτε α, διὰ κάθε συνδυασμὸν τιμῶν ἀληθείας τῶν p καὶ q.

Ἀρα ἡ δοθεῖσα ἰσοδυναμία εἶναι ταυτολογία.

Ὡστε :  $\vdash \sim (p \wedge q) \iff \sim p \vee \sim q$ .

**Σημείωσις :** Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ὁ ἕτερος νόμος τοῦ De Morgan.

$$\sim (p \vee q) \iff \sim p \wedge \sim q.$$

**2). Αὐτοαντίφασεις.** Μία σύνθετος πρότασις B, εἰς τὴν ὁποίαν ἐμφανίζονται αἱ ἀπλαῖ πρότασεις  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , καλεῖται αὐτοαντίφασις τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ τιμὴ ἀληθείας αὐτῆς εἶναι ψ (= ψεῦδος), διὰ κάθε συνδυασμὸν τιμῶν ἀληθείας τῶν ἀπλῶν προτάσεων  $p_1, p_2, \dots, p_k$  ἢ συντομώτερον, ὅταν ἡ ἄρνησις αὐτῆς εἶναι μία ταυτολογία.

Μία αὐτοαντίφασις συμβολίζεται μὲ πρόταξιν τοῦ συμβόλου  $\sim \vdash$ .

**Παράδειγμα :** Νὰ δεიχθῇ ὅτι ἡ πρότασις :  $(p \implies q) \iff (p \wedge \sim q) \equiv B(p, q)^*)$  εἶναι αὐτοαντίφασις.

**Λύσις :** Σχηματίζομεν τὸν πίνακα τιμῶν ἀληθείας τῆς προτάσεως B (p, q).

| p | q | $\sim q$ | $p \implies q$ | $p \wedge \sim q$ | B (p, q) | $\sim B(p, q)$ |
|---|---|----------|----------------|-------------------|----------|----------------|
| α | α | ψ        | α              | ψ                 | ψ        | α              |
| α | ψ | α        | ψ              | α                 | ψ        | α              |
| ψ | α | ψ        | α              | ψ                 | ψ        | α              |
| ψ | ψ | α        | α              | ψ                 | ψ        | α              |

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τιμὴ ἀληθείας τῆς προτάσεως B (p, q) εἶναι πάντοτε ψ, διὰ κάθε συνδυασμὸν τιμῶν ἀληθείας τῶν p καὶ q. Ἐπίσης ἐκ τῆς τελευταίας στήλης τοῦ ἀνωτέρω πίνακος βλέπομεν ὅτι :  $\sim B(p, q)$  εἶναι ταυτολογία. Ἀρα :  $\sim \vdash B(p, q)$ .

**Γενικὴ παρατήρησις.** Τὰ ἀναπτυχθέντα μέχρι τοῦδε περὶ λογισμοῦ τῶν προτάσεων ἰσχύουν καὶ ἂν εἰς τοὺς ἀνωτέρω πίνακας τὰ σύμβολα p

\* Ἐνταῦθα τὸ σύμβολον «  $\equiv$  » σημαίνει : συντόμως συμβολίζομεν τὴν ἀριστερὰ πρότασιν μὲ...

καί  $q$  αντικατασταθοῦν μέ προτασιακοὺς τύπους (ἀνοικτὰς προτάσεις), τῶν ὁποίων ὅμως τὸ ἀληθές ἢ ψευδές θὰ ἀναφέρηται εἰς τὸ σύνολον τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἢ τῶν μεταβλητῶν τῶν ἐν λόγῳ προτασιακῶν τύπων.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἐστωσαν αἱ ἀνοικταὶ προτάσεις :

$p$  : «Ὁ  $x$  εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς»,  $q$  : «Ὁ  $x$  εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς».

α). Νὰ γραφοῦν ὑπὸ συμβολικὴν μορφήν αἱ κάτωθι ἐκφράσεις :

1. «Ὁ  $x$  δὲν εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς»,
2. «Ὁ  $x$  δὲν εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς»,
3. «Ὁ  $x$  εἶναι ρητὸς καὶ ὄχι φυσικὸς ἀριθμὸς».

β). Νὰ διατυπωθοῦν μέ λέξεις οἱ κάτωθι (λογικοὶ) τύποι :

$p \vee q$ ,  $p \wedge q$ ,  $\sim p \wedge \sim q$ ,  $p \wedge \sim q$ ,  $p \vee \sim q$ ,  $q \implies p$ ,  $\sim p \iff \sim q$ .

2. Τί σημαίνει ἐκάστη τῶν κάτωθι λογικῶν προτάσεων ;

α)  $(5 < 7) \wedge (7 < 8)$ , β)  $\sim (\alpha = \beta)$ ,  
γ)  $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (x > 0)$ .

3. Ἐχουν νόημα συνθέτου προτάσεως αἱ ἐκφράσεις ;

α) «σχήμα  $\vee$  τύπος». β) « $7 \iff 3$ ». γ) «Ἀνατολὴ  $\vee$  Δύσις».  
 (Ἀπάντησις : ὄχι (διὰ τί ;)).

4. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ ἀληθείας τῶν κάτωθι συνθέτων προτάσεων :

α)  $\left(4 = \frac{12}{3}\right) \vee (3 = 8)$ , β)  $\left(3 \frac{1}{7} < 5\right) \implies (2 = 2)$ ,  
 γ)  $(7 = 4 + 3) \implies (2 > 5)$ , δ)  $(2 = 3) \iff (5 = 7)$ ,  
 ε)  $(27 = 3 \cdot 8) \vee (5^2 = 25)$ , στ)  $(2 > 5) \iff (3 = 8)$ .

5. Δικαιολογήσατε διὰ τί ἡ πρότασις : «Ἐάν ὁ Περικλῆς ἦτο ποταμός, τότε ὁ Παρθενὼν εὑρίσκεται εἰς τὰς Ἀθήνας» εἶναι ἀληθής.

6. Δείξατε ὅτι ἐκάστη τῶν ἐπομένων συνθέτων προτάσεων εἶναι ταυτολογία.

α)  $\sim (p \wedge q) \iff (p \implies \sim q)$ , β)  $p \wedge q \implies p \vee q$ ,  
 γ)  $p \wedge (p \vee q) \iff p$ , δ)  $p \vee (p \wedge q) \iff p$ ,  
 ε)  $(p \implies q) \iff (\sim p) \vee q$ , στ)  $(p \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim q)$ ,  
 ζ)  $[p \wedge (p \implies q)] \implies q$ , η)  $[(p \implies q) \wedge (p \implies \sim q)] \implies \sim p$ ,  
 θ)  $[(p \implies q) \wedge (q \implies r)] \implies (p \implies r)$ , ι)  $(p \vee q) \wedge r \iff (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ .

7. Δείξατε ὅτι ἐκάστη τῶν ἐπομένων συνθέτων προτάσεων εἶναι αὐτοαντίφασις.

α)  $(p \wedge q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ , β)  $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$ ,  
 γ)  $\sim (p \wedge q) \iff \sim (\sim p \vee \sim q)$ , δ)  $\sim p \wedge q \iff p \vee q$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

### ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

**§ 8. Ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου.**— Ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου, ὡς καὶ ἡ ἔννοια τῆς λογικῆς προτάσεως, θεωρεῖται ὡς πρωταρχικὴ ἔννοια, ὡς ἔννοια μὴ ἐπιδεχομένη ὀρισμὸν, ὡς ἔννοια μὴ δυναμένη ν' ἀναχθῇ εἰς ἄλλην ἔννοιαν.

Εἰς τὰ Μαθηματικὰ δεχόμεθα ὅτι ἐπιτρέπεται πολλὰ ἀντικείμενα σαφῶς καθωρισμένα καὶ διακεκριμένα μεταξὺ τῶν νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἐν ν ἑ ο ν ἀ ν τ ι κ ε ῖ - μ ε ν ο ν, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν τὸ σύνολον τῶν θεωρουμένων αντικειμένων.

Τὰ ἀντικείμενα συμβολίζονται συνήθως μὲ μικρὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, π.χ.  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ . Ἐν σύνολον ἀντικειμένων συμβολίζεται μὲ ἐν κεφαλαῖον γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου, π.χ.  $\Sigma, A, X$ , χωρὶς βεβαίως τοῦτο νὰ εἶναι ὑποχρεωτικόν, π.χ. εἰς τὴν γεωμετρίαν συμβαίνει συχνὰ τὸ ἀντίστροφον. Τὰ ἀντικείμενα  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , τὰ ὁποῖα ὀρίζουν ἐν σύνολον, λ.χ. τὸ  $\Sigma$ , καλοῦνται εἰς τὴν «γλῶσσαν τῶν συνόλων», στοιχεῖα τοῦ συνόλου  $\Sigma$ , πολλάκις δὲ καὶ σημεῖα τοῦ συνόλου  $\Sigma$ .

Δι' ἐν τυχὸν στοιχεῖον  $x$  καὶ δι' ἐν τυχὸν σύνολον  $\Sigma$  δεχόμεθα ὅτι ἰσχύει μία μόνον ἀπὸ τὰς σχέσεις :

1)  $x \in \Sigma$  (δηλαδὴ τὸ  $x$  ἀνήκει εἰς τὸ  $\Sigma$  ἢ τὸ  $x$  εἶναι στοιχεῖον τοῦ  $\Sigma$ ).

2)  $x \notin \Sigma$  (δηλ. τὸ  $x$  δὲν ἀνήκει εἰς τὸ  $\Sigma$  ἢ τὸ  $x$  δὲν εἶναι στοιχεῖον τοῦ  $\Sigma$ ).

Ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου εἶναι συνδεδεμένη μὲ τὴν ἔννοιαν μιᾶς «σχέσεως ἰσότητος» ὠρισμένης μεταξὺ τῶν στοιχείων του, βάσει τῆς ὁποίας θεωροῦμεν ταῦτα, ἐὰν δὲν συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως  $=$ , ὡς διακεκριμένα μεταξὺ τῶν. Ἀκριβέστερον : δεχόμεθα ὅτι κάθε σύνολον  $\Sigma$  στοιχείων  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, x, y, z, \dots$  εἶναι ἐφωδιασμένον μὲ μία σχέσιν ἰσότητος, ἥτοι ὅτι : διὰ κάθε ζεύγος στοιχείων  $x, y$  ἐκ τοῦ  $\Sigma$  εἶναι βέβαιοι καὶ κατὰ ἓνα ἀκριβῶς τρόπον ( $\equiv$  μονοσημάντως), ἂν τὰ στοιχεῖα ταῦτα εἶναι ἴσα, ὁπότε γράφομεν  $x = y$ , ἢ διάφορα, ὁπότε γράφομεν  $x \neq y$ . Ἡ σχέσις αὕτη πληροῖ τὰς ἐξῆς χαρακτηριστικὰς ιδιότητας ( $\equiv$  ἀξιώματα) τῆς ἰσότητος :

α)  $x = x \quad \forall \quad x \in \Sigma$  (αὐτοπαθὴς ιδιότης)

β) ἂν  $x = y$ , τότε  $y = x$  (συμμετρικὴ ιδιότης)

γ) ἂν  $x = y$  καὶ  $y = z$ , τότε  $x = z$  (μεταβατικὴ ιδιότης).

Τὴν ὡς ἄνω ἰσότητα, ἡ ὁποία ὀρίζει τὸ  $\Sigma$  (διακρίνει τὰ στοιχεῖα του) καλοῦμεν «βασικὴν ἰσότητα» πρὸς διάκρισιν ἀπὸ κάθε ἄλλην «ἰσότητα» ὀριζομένην ἐν  $\Sigma$ .

**Π ρ ο σ έ ξ α τ ε !** Τὸ σύμβολον  $=$  συμβολίζει τὴν βασικὴν ἰσότητα καὶ δὲν πρέπει νὰ συγχέηται μὲ τὸ  $\equiv$ , τοῦ ὁποίου ἡ σημασία ἔχει ἤδη ἐξηγηθῇ.

### Παραδείγματα συνόλων.

1. Το σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν : 1, 2, 3, . . . , ν, . . . Τοῦτο συμβολίζεται μὲ τὸ γράμμα :  $\mathbf{N}$ .

2. Το σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν : 0, +1, -1, +2, -2, . . . , +ν, -ν, . . . Τοῦτο συμβολίζεται μὲ τὸ γράμμα :  $\mathbf{Z}$ .

3. Το σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, ὅπερ συμβολίζομεν μὲ :  $\mathbf{Q}$ .

4. Το σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὅπερ συμβολίζομεν μὲ τὸ γράμμα  $\mathbf{R}$ , ἐνῶ μὲ τὰ σύμβολα  $\mathbf{R}^+$ ,  $\mathbf{R}_0^+$  συμβολίζομεν τοὺς θετικούς πραγματικούς ἀριθμούς, ἀντιστοίχως τοὺς μὴ ἀρνητικούς πραγματικούς ἀριθμούς.

5. Το σύνολον τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, ὅπερ συμβολίζομεν μὲ τὸ γράμμα  $\mathbf{C}$ . Οὕτω, δυνάμει τῶν ἀνωτέρω συμβολισμῶν, θὰ ἔχωμεν :

$$1 \in \mathbf{N}, \quad -\frac{2}{3} \in \mathbf{N}, \quad \sqrt{2} \in \mathbf{Q}, \quad \sqrt{2} \in \mathbf{R}^+, \quad -\frac{7}{8} \in \mathbf{Q}^+, \quad -2 \in \mathbf{Z}, \quad 3+5i \in \mathbf{C}.$$

**§ 9. Παράστασις συνόλου.**— Συνήθεις τρόποι παραστάσεως ἑνὸς συνόλου εἶναι οἱ κάτωθι δύο :

α). Δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἕκαστον σύνολον ὀρίζεται διὰ δηλώσεως (ἀναγραφῆς) ὅλων τῶν στοιχείων τῶν ἀνηκόντων εἰς αὐτό. Οὕτω, π.χ., τὸ σύνολον μὲ στοιχεῖα αὐτοῦ τοὺς ἀριθμούς 1, 2, 3, 4 θὰ συμβολίζωμεν γράφοντες τὰ στοιχεῖα του μεταξὺ ἀγκίστρων, ἥτοι :

$$\{ 1, 2, 3, 4 \}.$$

Κατὰ τὸν συμβολισμόν τοῦτον δὲν ἔχει σημασίαν ἡ σειρὰ μὲ τὴν ὁποίαν γράφομεν τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου μεταξὺ τῶν ἀγκίστρων. Ὅθεν τὰ :  $\{ 1, 2, 3, 4 \}$ ,  $\{ 1, 3, 4, 2 \}$ ,  $\{ 2, 3, 4, 1 \}$  κ.τ.λ. συμβολίζουν τὸ αὐτὸ σύνολον. Γενικῶς :  $\{ \alpha, \beta, \gamma, \dots \}$  συμβολίζει ἓν σύνολον, τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ἀπὸ τὰ στοιχεῖα  $\alpha, \beta, \gamma$  καὶ ἄλλα ἀκόμη, τὰ ὁποῖα ἐκ τοῦ τρόπου δηλώσεως τῶν  $\alpha, \beta, \gamma$  ἐννοοῦνται καὶ — χάριν συντομίας — παραλείπονται.

Οὕτω τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν συμβολίζεται ὡς κάτωθι :

$$\mathbf{N} \equiv \{ 1, 2, 3, \dots \}^*).$$

β). Διὰ περιγραφῆς τῶν στοιχείων του. Ὁ ἀνωτέρω τρόπος παραστάσεως ἑνὸς συνόλου δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του δὲν δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ πρακτικῶς (τοῦλάχιστον) εἰς τὴν περίπτωσιν συνόλου μὲ μεγάλον ἀριθμὸν στοιχείων, λ.χ. εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ συνόλου τῶν ὀνομάτων ὅλων τῶν κατοίκων τῆς Εὐρώπης καὶ θεωρητικῶς εἰς τὴν περίπτωσιν συνόλου μὲ ἄπειρον πλῆθος στοιχείων λ.χ. τοῦ συνόλου  $\mathbf{Q}$  τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς τὰ σύνολα ὀρίζονται δι' ἰδιοτήτων ἀναφερομένων εἰς τὰ στοιχεῖα αὐτῶν. Ὅλα τὰ ἀντικείμενα μιᾶς ὠρισμένης ιδιότητος θεωροῦμεν ὡς ἓν σύνολον. Ἄν ἡ ιδιότης συμβολίζεται μὲ :  $p(\ )$ , τότε  $p(x)$  συμβολίζει τὴν (ἀνοικτὴν) πρότασιν ἢ ἄλλως τὴν συνθήκην : «τὸ ἀντικείμενον  $x$  ἔχει τὴν ιδιότητα  $p(\ )$ ».

\* Τὸ σύμβολον  $\equiv$  (ἴσον) σημαίνει, ὅπου συναντᾶται, «τὸ αὐτὸ δυνάμει ὀρισμοῦ (εἴτε συμβολισμοῦ) μὲ».

Με  $\{x : p(x)\}$  συμβολίζομεν τότε τὸ σύνολον τῶν ἀντικειμένων μετὰ τὴν ιδιότητα  $p(\ )$ . Οὕτως, ἂν λ.χ.  $p(\ )$  συμβολίζῃ τὴν ιδιότητα :

«... εἶναι ἄρτιος ἀριθμός»,

τότε  $p(x)$  συμβολίζει τὴν (ἀνοικτὴν) πρότασιν : «ὁ  $x$  εἶναι ἄρτιος ἀριθμός». Αὕτῃ καθίσταται λογικὴ πρότασις, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸ  $x$  μετὰ ἕνα ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος μάλιστα, ἂν συμβῇ νὰ εἶναι ἄρτιος καθιστᾷ τὴν πρότασιν ἀληθεῖ. Τότε τὸ  $\{x : p(x)\}$  συμβολίζει τὸ σύνολον (ὅλων) τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν.

Πρὸς ἀποφυγὴν παρερμηνειῶν καὶ ἀντινομιῶν δεχόμεθα ὅτι μία ιδιότης  $p(\ )$  ἀναφέρεται εἰς ἀντικείμενα, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς ἕν ὠρισμένον σύνολον  $\Omega$ . Ἐὰν τώρα ἕν ἀντικείμενον  $\alpha \in \Omega$  τεθῇ ἐν  $p(\ )$ , ἥτοι ἂν γράψωμεν  $p(\alpha)$ , τότε τὸ  $p(\alpha)$  συμβολίζει μίαν λογικὴν πρότασιν, διὰ τὴν ὁποίαν δυνάμεθα ν' ἀποφανθῶμεν κατὰ ἕνα καὶ μόνον τρόπον, ἂν αὕτη εἶναι ἀληθὴς ἢ ψευδής. Τότε διὰ τοῦ συμβόλου :

$\{x \in \Omega : p(x)\}$  εἴτε ἄλλως  $\{x \in \Omega | p(x)\}$

ὀρίζεται ἕν ὑποσύνολον  $A$  τοῦ  $\Omega$ , τοῦ ὁποῖου τὰ στοιχεῖα καὶ μόνον αὐτὰ εἶναι ὅλα ἐκεῖνα τὰ  $x \in \Omega$ , διὰ τὰ ὁποῖα ἢ  $p(x)$ , ὡς λογικὴ πρότασις, λαμβάνει τὴν τιμὴν «ἀληθής». Ὡστε δεχόμεθα ὅτι : *Διὰ κάθε σύνολον  $\Omega$  καὶ μίαν ιδιότητα  $p(\ )$  ὀρίζεται διὰ τοῦ συμβόλου  $\{x \in \Omega : p(x)\}$  πάντοτε ἕν σύνολον, τοῦ ὁποῖου στοιχεῖα εἶναι ὅλα ἐκεῖνα τὰ  $x \in \Omega$ , διὰ τὰ ὁποῖα ἢ πρότασις  $p(x)$  εἶναι ἀληθής.*

Ὑπὸ τὴν ὡς ἄνω σημασίαν θὰ θεωρῶμεν εἰς τὰ ἐπόμενα τὸ σύμβολον :  $\{x \in \Omega : p(x)\}$ . Ἐπομένως, ἂν  $A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\}$ , τότε εἶναι :

$\forall x, x \in A \iff p(x)$  ἀληθής.

**Παράδειγμα :** Ἐστω ὁ προτασιακὸς τύπος  $p(x) : «x^2 - 3x + 2 = 0»$  μετὰ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ σύνολον  $\mathbf{R}$  τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς  $x$ , αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὸν  $p(x)$  ἀληθεῖ πρότασιν εἶναι : 1, 2.

Ἐπομένως τό :  $\{x \in \mathbf{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$  εἶναι τὸ διμελὲς σύνολον  $\{1, 2\}$ .

**Παρατήρησις :** Τὸ σύμβολον «:» ἢ «|» ἀναγιγνώσκεται «τοιοῦτον, ὥστε», τὸ δὲ πρὸ τοῦ ὡς ἄνω συμβόλου γράμμα δημιουργεῖ τὸ σύνολον συμφώνως πρὸς τὴν μετὰ τοῦτο συνθήκην.

**§ 10. Τὸ κενὸν σύνολον.**—Δεχόμεθα τὴν ὕπαρξιν ἑνὸς συνόλου, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν «τὸ κενὸν σύνολον» καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μετὰ  $\{\}$  ἢ ἄλλως μετὰ  $\emptyset$ . Τοῦτο εἶναι ἕν σύνολον, εἰς τὸ ὁποῖον οὐδὲν στοιχεῖον ἀνήκει, ἥτοι διὰ κάθε ἀντικείμενον  $x$  ἰσχύει  $x \notin \emptyset$ . Οὕτω τὸ σύνολον :  $\{x \in \mathbf{R} : x^2 + 1 = 0\}$  εἶναι τὸ κενόν. Ὁμοίως, ἂν θεωρήσωμεν τό :  $\{x \in \mathbf{R} : x \neq x\} \equiv K$ , διαπιστώνομεν ἀμέσως ὅτι τοῦτο δὲν δύναται νὰ ἔχῃ στοιχεῖα, ἥτοι  $\forall x \in \mathbf{R}$  ἰσχύει  $x \notin K$ .

**§ 11. Ὑποσύνολον ἄλλου συνόλου. Ὑπερσύνολον. Ἰσότης δύο συνόλων.**

Ἐστώσαν  $A$  καὶ  $B$  δύο μὴ κενὰ σύνολα.

α). Θὰ λέγωμεν : «Τὸ σύνολον  $A$  εἶναι ὑποσύνολον τοῦ  $B$ » εἴτε ἄλλως «τὸ  $A$  περιέχεται ( $\equiv$  ἐγκλείεται) εἰς τὸ  $B$ » καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μετὰ : « $A \subseteq B$ » τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε  $x \in A$  ἔπεται  $x \in B$ .

‘Ο άνωτέρω όρισμός μέ χρήσιν τών συμβόλων τής λογικής διατυπώνται συντόμως ούτω :

$$A \subseteq B \stackrel{\text{ορισ}}{\iff} (x \in A \implies x \in B)$$

β). Θα λέγωμεν : «Τό σύνολον  $A$  είναι υπερόύνολον τοῦ  $B$ » καί θα συμβολίζωμεν τοῦτο μέ « $A \supseteq B$ » τότε, καί μόνον τότε, ἂν τό  $B$  εἶναι ὑποσύνολον τοῦ  $A$ .

Ἦτοι :

$$A \supseteq B \stackrel{\text{ορισ}}{\iff} B \subseteq A.$$

Τό σύμβολον « $\supseteq$ » ἀναγινώσκεται «περιέχει τό» ἢ ἄλλως «ἐγκλείει τό».

γ). Θα λέγωμεν : «Τό  $A$  εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ  $B$ » καί θα συμβολίζωμεν τοῦτο μέ  $A \subset B$  τότε, καί μόνον τότε, ἂν τό  $A \subseteq B$  καί ὑπάρχει ἓν (τοῦλάχιστον)  $y \in B$  μέ  $y \notin A$ .

Ἦτοι :

$$A \subset B \stackrel{\text{ορισ}}{\iff} (\forall x \in A \implies x \in B) \wedge (\exists y \in B : y \notin A).$$

δ). Θα λέγωμεν : «Τό  $A$  εἶναι ἴσον μέ τό  $B$ » καί θα συμβολίζωμεν τοῦτο μέ  $A = B$  τότε, καί μόνον τότε, ἂν ἰσχύουν συγχρόνως :  $A \subseteq B$  καί  $B \subseteq A$ .

Συντόμως ὁ όρισμός οὔτος δίδεται ὡς κάτωθι :

$$A = B \stackrel{\text{ορισ}}{\iff} (A \subseteq B \wedge B \subseteq A).$$

‘Ο όρισμός οὔτος εἶναι ἰσοδύναμος μέ :

$$(A = B) \iff (\forall x : x \in A \implies x \in B) \wedge (y : y \in B \implies y \in A) \iff (x \in A \iff x \in B).$$

Ἐάν τὰ σύνολα  $A, B$  δέν εἶναι ἴσα γράφομεν :  $A \neq B$  ( $A$  διάφορον τοῦ  $B$ ).

Ὡστε :

$$A \neq B \iff \sim (A = B).$$

Κατόπιν τούτου ὁ όρισμός τοῦ γνήσιου ὑποσυνόλου διατυπώνται συντόμως ούτω :

$$A \subset B \stackrel{\text{ορισ}}{\iff} A \subseteq B \text{ καί } A \neq B.$$

Ἰσχύουν αἱ κάτωθι ιδιότητες :

- 1).  $A \subseteq A$ , διὰ κάθε σύνολον  $A$  (αὐτοπαθής)
- 2). Ἐάν  $A \subseteq B$  καί  $B \subseteq A \implies A = B$  (ἀντισυμμετρική)
- 3). Ἐάν  $A \subseteq B$  καί  $B \subseteq \Gamma \implies A \subseteq \Gamma$  (μεταβατική).

**Σημειώσεις :** Μία σχέση, ἥτις εἶναι αὐτοπαθής, ἀντισυμμετρική καί μεταβατική καλεῖται σχέση διατάξεως. Ἡ σχέση « $\subseteq$ » εἶναι ὅθεν σχέση διατάξεως.

**Παρατηρήσεις :** 1). Ἐκαστον σύνολον εἶναι ὑποσύνολον τοῦ ἑαυτοῦ του.

2). Ἐκαστον σύνολον δέν εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ ἑαυτοῦ του (διατί;)

3). Τό κενόν σύνολον θεωρεῖται ἐξ όρισμοῦ ὡς ὑποσύνολον κάθε συνόλου.

4). Δι' ἕκαστον σύνολον ἐκ  $\nu$  στοιχείων ὑπάρχουν  $2^\nu$  ὑποσύνολα. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ὑποσυνόλων ἑνὸς συνόλου  $\Sigma$  καλεῖται **δυναμοσύνολον** τοῦ συνόλου  $\Sigma$  καὶ συμβολίζεται μέ:  $\mathcal{P}(\Sigma)$ .

5). Πρέπει νὰ γίνηται διάκρισις μεταξύ τῶν συμβόλων « $\epsilon$ », τὸ ὁποῖον καλεῖται σύμβολον τοῦ «ἀνήκει εἰς...» καὶ « $\subseteq$ », τὸ ὁποῖον καλεῖται σύμβολον τοῦ «περιέχεται», διότι τὸ μὲν « $\epsilon$ » συσχετίζει στοιχεῖον πρὸς σύνολον, τὸ δὲ « $\subseteq$ » σύνολον πρὸς σύνολον, εἰς δὲ τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων στοιχεῖον καὶ σύνολον παίζουν διαφορετικοὺς ρόλους. Τοιουτοτρόπως ἐξηγεῖται διατὶ πάντοτε ἰσχύει  $\{\alpha\} \neq \alpha$ . Πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τοῦ τελευταίου δίδομεν τὸ ἐξῆς χαρακτηριστικὸν παράδειγμα: Μία κασετίνα, ἡ ὁποία περιέχει ἕνα διαβήτην καὶ τίποτε ἄλλο δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ πρᾶγμα μὲ τὸν διαβήτην.

**§ 12. Βασικὸν σύνολον ἢ σύνολον ἀναφορᾶς.** — Ἐὰν κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν ἑνὸς «ζητήματος» θεωρῶμεν τὰ ὑποσύνολα ἑνὸς γενικωτέρου συνόλου  $\Omega$ , τότε τὸ  $\Omega$  καλεῖται **βασικὸν σύνολον ἢ σύνολον ἀναφορᾶς**, (ἐπειδὴ εἰς αὐτὸ — κατὰ τὴν ἐξέτασιν τοῦ ζητήματος — ἀναφέρονται ὅλα τὰ ἄλλα σύνολα). Γενικῶς εἰς κάθε «ζήτημα» ποὺ ἀφορᾷ σύνολα, ἐπιβάλλεται νὰ καθορίζηται πρῶτα τὸ βασικὸν σύνολον, τοῦ ὁποῖου ὑποσύνολον ὀφείλει νὰ εἶναι κάθε ἄλλο σύνολον, τὸ ὁποῖον ἐμφανίζεται κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ ὑπ' ὄψιν ζητήματος. Ἄλλως ὑπάρχει κίνδυνος νὰ περιπέσωμεν εἰς ἀντιφάσεις (ἀντινομίας). Οὕτω π.χ. εἰς ἕν πρόβλημα ἐπιπεδομετρίας βασικὸν σύνολον ἢ σύνολον ἀναφορᾶς θὰ εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου. Ἐπίσης εἰς ἕν πρόβλημα ἀλγέβρας αἱ μεταβληταὶ ποὺ θὰ παρουσιασθοῦν εἰς τοὺς ἀντιστοιχοὺς προτασιακοὺς τύπους θὰ ἀναφέρονται εἰς ἕν γενικὸν σύνολον λ.χ. εἰς τὸ σύνολον  $\mathbf{R}$  τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τοῦτο θὰ εἶναι τὸ βασικὸν σύνολον δι' ὅλα τὰ ὑποσύνολα, τὰ ὁποῖα θὰ παρουσιασθοῦν εἰς τὸ πρόβλημα.

Τὸ βασικὸν σύνολον διαφέρει ἀπὸ πρόβλημα εἰς πρόβλημα καὶ μάλιστα πολυάκις παραλείπεται ὁ ἀκριβὴς καθορισμὸς του, διότι ἀπὸ τὸ περιεχόμενον τοῦ προβλήματος καθορίζεται καὶ τὸ ἴδιον.

## Πράξεις μεταξύ συνόλων.

Ἄς θεωρήσωμεν ἕν βασικὸν σύνολον  $\Omega$ , μὴ κενὸν καὶ τελείως ὠρισμένον (λ.χ.  $\Omega = \mathbf{R}$ ), τοῦ ὁποῖου τὰ ὑποσύνολα ἃς συμβολίσωμεν μὲ κεφαλαῖα γράμματα τῆς ἀλφαβήτου  $A, B, \dots, \Sigma, X, Y$ · τότε δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν ἕν σύνολον, τὸ ὁποῖον συμβολίζομεν μὲ  $\mathcal{P}(\Omega)$ , καὶ τοῦ ὁποῖου στοιχεῖα εἶναι ὅλα τὰ ὑποσύνολα τοῦ  $\Omega$ . Τοῦτο ὀρίζεται καὶ μὲ ἰδιότητα ὡς ἐξῆς:

$$\mathcal{P}(\Omega) \equiv \{X : X \subseteq \Omega\} \equiv \{X : \text{ἂν } x \in X \implies x \in \Omega\}.$$

Μεταξὺ στοιχείων τοῦ συνόλου  $\mathcal{P}(\Omega)$  δυνάμεθα τώρα νὰ ὀρίσωμεν πράξεις ὡς ἐξῆς:

Ἐστῶσαν  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$  καὶ  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ · τότε ὀρίζεται:



**§ 13. Τομή δύο συνόλων.**— Καλείται τομή του  $A$  με το  $B$  και συμβολίζεται με  $A \cap B$  το κάτωθι σύνολο :

$$A \cap B \equiv \{x \in \Omega : x \in A \wedge x \in B\}$$

Ούτως, εάν  $A = \{0, 1, 3, 4\}$  και  $B = \{1, 2, 3, 5\}$ , τότε  $A \cap B = \{1, 3\}$ .  
 Έκ του ανωτέρω ορισμού συνάγεται ότι :

$$A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset \quad \text{και} \quad A \cap \Omega = \Omega \cap A = A \quad \text{διὰ κάθε} \quad A \subseteq \Omega.$$

Εάν ή τομή δύο συνόλων είναι το κενόν σύνολο τότε, και μόνον τότε, τὰ σύνολα καλούνται ξένα μεταξύ των.

**§ 14. Η τομή συνόλων και ή σύζευξις.**— Έστωσαν δύο σύνολα  $A, B$  όριζόμενα διὰ περιγραφής και  $p(x), q(x)$  αντιστοίχως οί προτασιακοί τύποι μεταβλητής  $x$  με σύνολο αναφοράς το  $\Omega$ , ήτοι έστωσαν :

$$A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\} \quad \text{και} \quad B \equiv \{x \in \Omega : q(x)\}.$$

Ας σχηματίσωμεν το σύνολο  $\Sigma \equiv \{x \in \Omega : p(x) \wedge q(x)\}$ , δηλαδή το σύνολο (όλων) τών τιμών της μεταβλητής  $x$ , αί όποίαι καθιστούν συγχρόνως αληθείς προτάσεις τούς προτασιακούς τύπους  $p(x), q(x)$ . Προφανώς τότε το  $\Sigma$  είναι ή τομή τών συνόλων  $A, B$ . Όστε :

$$A \cap B \equiv \{x \in \Omega : p(x)\} \cap \{x \in \Omega : q(x)\} = \{x \in \Omega : p(x) \wedge q(x)\}.$$

**Παράδειγμα :** Έστωσαν τὰ σύνολα :

$$A \equiv \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 = 0\}, \quad B \equiv \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 = 0\}.$$

Ο προτασιακός τύπος : «  $x^2 - 5x + 6 = 0$  » καθίσταται αληθής πρότασις διὰ  $x = 2$  ή  $x = 3$ , έξ άλλου ό προτασιακός τύπος : «  $x^2 - 9 = 0$  » γίνεται αληθής πρότασις διὰ  $x = 3$  ή  $x = -3$ . Τομή τών συνόλων  $A$  και  $B$  είναι το μονομελές ή μονοστοιχειακόν σύνολο  $\{3\}$ · συμβολικώς γράφομεν :

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 = 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 5x + 6 = 0) \wedge (x^2 - 9 = 0)\} = \{3\}.$$

**§ 15. Ένωσις συνόλων.**— Καλείται ένωσις του  $A$  με το  $B$  και συμβολίζεται με  $A \cup B$  το κάτωθι σύνολο :

$$A \cup B \equiv \{x \in \Omega : x \in A \vee x \in B\}$$

Ούτως, εάν  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4\}$ , τότε  $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

Έκ του ανωτέρω ορισμού συνάγεται ότι :

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A \quad \text{και} \quad A \cup \Omega = \Omega \cup A = \Omega \quad \text{διὰ κάθε} \quad A \subseteq \Omega,$$

καθώς και :

$$\forall x : x \in A \implies x \in (A \cup B) \quad \text{και} \quad \forall y : y \in B \implies y \in (A \cup B),$$

$$\text{ήτοι :} \quad A \subseteq A \cup B \quad \text{και} \quad B \subseteq A \cup B \quad \text{διὰ κάθε} \quad A, B \in \mathcal{P}(\Omega).$$

**§ 16. Η ένωσις συνόλων και ή (έγκλειστική) διάζευξις.**— Έστωσαν τὰ σύνολα :  $A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\}$  και  $B \equiv \{x \in \Omega : q(x)\}$ . Θεωρούμεν και το σύνολο  $\Sigma \equiv \{x \in \Omega : p(x) \vee q(x)\}$ , ήτοι το σύνολο, το όποιον όρίζεται από όλας τās τιμάς της μεταβλητής  $x$ , αί όποίαι καθιστούν τόν προτασιακόν τύπον



$p(x)$  είτε τον  $q(x)$  αληθής πρότασιν και μόνον αὐτάς. Προφανῶς τὸ  $\Sigma$  δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ ἡ ἔνωση τῶν δύο συνόλων  $A$  καὶ  $B$ . Ὡστε :

$$A \cup B \equiv \{x \in \Omega : p(x)\} \cup \{x \in \Omega : q(x)\} = \{x \in \Omega : p(x) \vee q(x)\}.$$

**Παράδειγμα :**

\*Εστω:  $A \equiv \{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 7\}$ ,  $B \equiv \{x \in \mathbb{R} : 5 \leq x \leq 12\}$

τότε:  $A \cup B \equiv \{x \in \mathbb{R} : (2 < x \leq 7) \vee (5 \leq x \leq 12)\} = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 12\}.$

**§ 17. Διαφορὰ δύο συνόλων (συνολοθεωρητική διαφορά).** — Ὡς (συνολοθεωρητικήν) διαφοράν τοῦ συνόλου  $A$  πλὴν τοῦ  $B$ , συμβολιζομένη με  $A - B$ , ὀρίζομεν τὸ κάτωθι σύνολον :

$$A - B \equiv \{x \in \Omega : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Οὕτως, ἐὰν  $A \equiv \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ ,  $B \equiv \{\alpha, \beta, \delta, \epsilon, \eta\}$ , τότε  $A - B = \{\gamma\}$ . Ὁμοίως, ἐὰν  $A \equiv \mathbb{R}$  ( $\equiv$  σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν),  $B \equiv \mathbb{Q}$  ( $\equiv$  σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν), τότε  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀρρήτων (ἀσυμμέτρων) ἀριθμῶν.

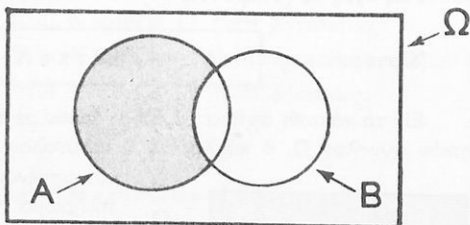
Σχηματικῶς τὸ  $A - B$  παρίσταται μετὰ τὸ ἐσκιασμένον μέρος τοῦ  $A$  εἰς τὸ παραπλεύρως διάγραμμα τοῦ Venn (σχ. 1).

Ἐὰν τὰ  $A$  καὶ  $B$  ὀρίζωνται διὰ περιγραφῆς (§ 9, β), ἥτοι, ἐὰν

$$A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\} \text{ καὶ}$$

$$B \equiv \{x \in \Omega : q(x)\}, \text{ τότε :}$$

$$A - B \equiv_{\text{ορσ}} \{x \in \Omega : p(x) \wedge \sim q(x)\}^*.$$



Σχ. 1

**§ 18. Διαζευκτικὸν ἄθροισμα ἢ συμμετρικὴ διαφορά δύο συνόλων.**

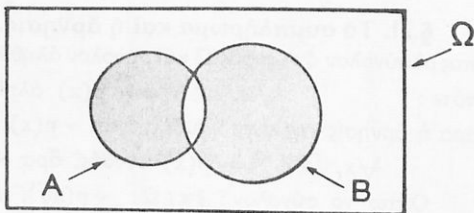
Ὡς διαζευκτικὸν ἄθροισμα ἢ συμμετρικὴν διαφοράν, συντόμως **συμμετροδιαφοράν**, δύο συνόλων  $A$  καὶ  $B$ , τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου:  $A \dagger B$  καὶ διαβάζομεν: « $A$  σὺν  $B$ » ἢ « $A$  κόντρα σὺν  $B$ », ὀρίζομεν τὸ κάτωθι σύνολον :

$$A \dagger B \equiv \{x \in \Omega : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

Εἶναι συνεπῶς :

$$A \dagger B = (A - B) \cup (B - A).$$

Εἰς τὸ παραπλεύρως διάγραμμα τοῦ Venn παρίσταται ἡ **συμμετρικὴ διαφορά**  $A \dagger B$  ἀπὸ τὸ ἐσκιασμένον μέρος τῶν συνόλων  $A$  καὶ  $B$  (σχ. 2).



Σχ. 2

\* Τὸ σύμβολον:  $\equiv_{\text{ορσ}}$  σημαίνει, ὅπου συναντᾶται ἐδῶ, «ἴσον ἐξ ὀρίσμου».

## § 19. Τὸ διαζευκτικὸν ἄθροισμα καὶ ἡ ἀποκλειστικὴ διάζευξις.

Ἐστώσαν τὰ σύνολα :  $A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\}$  καὶ  $B \equiv \{x \in \Omega : q(x)\}$  τότε εἶναι :

$$A \vdash B \equiv \{x \in \Omega : (p(x) \wedge \sim q(x)) \vee (q(x) \wedge \sim p(x))\}.$$

Θεωροῦμεν καὶ τὸ σύνολον  $\Sigma \equiv \{x \in \Omega : p(x) \vee q(x)\}$ , ἥτοι τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ἀπὸ ὅλας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς  $x$ , αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν ἢ μόνον τὸν προτασιακὸν τύπον  $p(x)$  ἀληθῆ πρότασιν εἴτε ἢ μόνον τὸν  $q(x)$  ἀληθῆ πρότασιν. Προφανῶς τὸ  $\Sigma$  εἶναι ἡ συμμετρικὴ διαφορὰ τῶν δύο συνόλων  $A, B$ .

Ὡστε :  $A \vdash B \equiv \{x \in \Omega : p(x)\} \vdash \{x \in \Omega : q(x)\} = \{x \in \Omega : p(x) \vee q(x)\}.$

**Σημ.** Ἐὰν  $A \cap B = \emptyset$ , δηλαδὴ τὰ σύνολα  $A, B$  εἶναι ξένα μεταξὺ των, τότε :  $A \vdash B = A \cup B$ .

**§ 20. Συμπληρωματικὸν σύνολον.** — Ἐστω  $\Omega$  τὸ βασικὸν σύνολον καὶ  $A$  ἓν ὑποσύνολον αὐτοῦ. Τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ  $\Omega$ , τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ  $A$ , καλεῖται **συμπληρωματικὸν σύνολον τοῦ  $A$** , ἄλλως **συμπλήρωμα τοῦ  $A$  ὡς πρὸς τὸ (ὑπερσύνολον)  $\Omega$**  καὶ συμβολίζεται μέ :  $A^c$ , ἢ  $A'$ , ἢ  $\bar{A}$ , ἢ  $C_\Omega A$ .

Ὡστε :

$$A^c \equiv \{x \in \Omega : x \notin A\} = \Omega - A.$$

Εἰς τὸ κάτωθι σχῆμα τὸ ὀρθογώνιον μέ τὴν περίμετρόν του παριστᾷ τὸ βασικὸν σύνολον  $\Omega$ , ὁ κύκλος τὸ ὑποσύνολον  $A$ , τὸ δὲ « ἀπομένον » ἀπὸ τὸ  $\Omega$  ἐσκιασμένον μέρος τοῦ σχ. 3 παριστᾷ τὸ συμπλήρωμα τοῦ  $A$ .

Ἰσχύουν προφανῶς αἱ ἑξῆς ἰσότητες :

$$C_\Omega \Omega \equiv \Omega^c = \emptyset \quad \text{καὶ} \quad C_\Omega \emptyset \equiv \emptyset^c = \Omega.$$

**Παράδειγμα :**

Ἐὰν  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  καὶ  $A = \{2, 4\}$

τότε :  $A^c = \{1, 3, 5\}.$

**Σημ.** Διὰ τὸ συμπληρωματικὸν σύνολον ἰσχύουν αἱ συνεπαγωγαί :

$$\forall x, x \in A \implies x \notin A^c \quad \text{καὶ} \quad \forall x, x \in A^c \implies x \notin A.$$

**§ 21. Τὸ συμπλήρωμα καὶ ἡ ἄρνησις.** — Ἐστω  $p(x)$  εἰς προτασιακὸς τύπος μέ σύνολον ἀναφορᾶς  $\Omega$  καὶ σύνολον ἀληθείας τὸ  $A$ , ἥτοι :  $A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\}$ , τότε :

$$\forall x, x \in A \iff p(x) \text{ ἀληθὴς πρότασις,}$$

ἄρα ἡ ἄρνησις τῆς εἶναι ψευδής, ἥτοι  $\sim p(x)$  ψευδής. Ἐπὶ πλέον :

$$\forall x, x \notin A \iff p(x) \text{ ψευδής, ἄρα } \sim p(x) \text{ ἀληθὴς πρότασις.}$$

Οὕτω τὸ σύνολον :  $\{x \in \Omega : \sim p(x)\}$ , τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ἀπὸ ὅλας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς  $x$ , αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τό :  $\sim p(x)$  ἀληθῆ πρότασιν, εἶναι τὸ συμπλήρωμα  $A^c$  τοῦ  $A$ .

Ὡστε : Ἐὰν  $A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\}$ , τότε  $A^c \equiv \{x \in \Omega : \sim p(x)\}.$

**Παράδειγμα :** Έάν  $\Omega \equiv N$  καὶ  $p(x) : \ll \text{Ο } x \text{ είναι ἄρτιος φυσικὸς ἀριθμὸς} \gg$ , τότε τὸ συμπλήρωμα τοῦ συνόλου  $A \equiv \{x \in N : p(x)\}$  εἶναι τὸ σύνολον τῶν περὶ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἥτοι τό :  $A^c \equiv \{x \in N : \sim p(x)\}$ .

**§ 22. Ἰδιότητες τῶν πράξεων τῶν συνόλων.**— Βάσει τῶν προηγουμένων ὁρισμῶν ἀποδεικνύονται εὐκόλως αἱ κάτωθι ἰδιότητες τῶν πράξεων :

**A). Τῆς τομῆς.**

$\alpha_1)$   $A \cap \Omega = A$ , ἥτοι τὸ βασικὸν σύνολον εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς πράξεως  $\cap$ .

$\alpha_2)$   $A \cap B = B \cap A$ , ἥτοι ἡ πράξις  $\cap$  εἶναι μεταθετική.

$\alpha_3)$   $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$ , ἥτοι ἡ πράξις  $\cap$  εἶναι προσεταιριστική.

$\alpha_4)$   $A \cap A = A$ , ἥτοι ἡ πράξις  $\cap$  εἶναι ἀδύναμος.

$\alpha_5)$   $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$ .

$\alpha_6)$  Ἰσχύει  $A \subseteq B \iff A \cap B = A$ .

**B). Τῆς ἑνώσεως.**

$\beta_1)$   $A \cup B = B \cup A$ , ἥτοι ἡ πράξις  $\cup$  εἶναι μεταθετική.

$\beta_2)$   $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$ , ἥτοι ἡ πράξις  $\cup$  εἶναι προσεταιριστική.

$\beta_3)$   $A \cup A = A$ , ἥτοι ἡ πράξις  $\cup$  εἶναι ἀδύναμος.

$\beta_4)$   $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$ .

$\beta_5)$  Ἰσχύει :  $A \subseteq B \iff A \cup B = B$ .

Ἰσχύουν ἐπὶ πλέον αἱ κάτωθι δύο ἐπιμεριστικαὶ ἰδιότητες :

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$$

$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma).$$

**Γ). Τῆς διαφορᾶς.**

$\gamma_1)$   $A - B = A \cap B^c$ .

$\gamma_2)$   $A - (A - B) = A \cap B$ .

$\gamma_3)$   $A \cap (B - \Gamma) = (A \cap B) - (A \cap \Gamma)$ .

$\gamma_4)$   $(A - B) \cup B = A \cup B$ , ἥτοι ἡ ἑνώσις δὲν εἶναι ἐπιμεριστική ὥς πρὸς τὴν διαφοράν.

$\gamma_5)$  Ἰσχύει :  $A \subseteq B \iff A - B = \emptyset$ .

**Δ). Τοῦ διαζευκτικοῦ ἀθροίσματος.**

$\delta_1)$   $A \dot{+} B = B \dot{+} A$ .

$\delta_2)$   $A \dot{+} (B \dot{+} \Gamma) = (A \dot{+} B) \dot{+} \Gamma$ .

$\delta_3)$   $A \dot{+} \emptyset = A, A \dot{+} \Omega = A^c, A \dot{+} A = \emptyset, A \dot{+} A^c = \Omega$ .

$\delta_4)$   $A \cap (B \dot{+} \Gamma) = (A \cap B) \dot{+} (A \cap \Gamma)$ .

$\delta_5)$   $A^c \dot{+} B^c = A \dot{+} B$ .

$\delta_6)$   $A \cup B = A \dot{+} B \dot{+} A \cap B$ .

Ε). Τοῦ συμπληρώματος.

$\epsilon_1)$   $(A^c)^c = A$  διὰ κάθε  $A \subseteq \Omega$ .

$\epsilon_2)$   $A \cap A^c = \emptyset$ ,  $A \cup A^c = \Omega$ .

$\epsilon_3)$  Ἰσχύει:  $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$ .

**§ 23. Νόμοι τοῦ De Morgan.**—Ἰσχύουν οἱ κάτωθι δύο τύποι :

$$1. (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad 2. (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

**Ἀπόδειξις τοῦ τύπου 1.**

$\alpha)$   $\forall x : x \in (A \cap B)^c \implies x \notin (A \cap B) \implies x \notin A \vee x \notin B$ · τοῦτο δηλοῖ ὅτι :  $x \in A^c \vee x \in B^c$ , ἥτοι  $x \in (A^c \cup B^c)$ . Ἀρα  $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$  (1.α)

$\beta)$   $\forall y : y \in (A^c \cup B^c) \implies (y \in A^c) \vee (y \in B^c)$ · τοῦτο δηλοῖ :  $(y \notin A) \vee (y \notin B)$ , ὅθεν  $y \notin (A \cap B) \implies y \in (A \cap B)^c$ .

Ἀρα:  $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$ . (1.β)

Ἐκ τῶν (1.α) καὶ (1.β) ἔπεται ἀμέσως ὁ τύπος 1.

Ὁ τύπος 2 ἀποδεικνύεται ἤδη εὐκόλως (πῶς ;).

**Σημείωσις :** Ἡ ἀπόδειξις θὰ ἡδύνατο νὰ γίνη καὶ ὡς ἑξῆς :

Ἐστω  $A \equiv \{x : p(x)\}$  καὶ  $B \equiv \{x : q(x)\}$ , τότε κατὰ τὰς §§ 14, 21 ἔχονεν ἀντιστοίχως  $A \cap B \equiv \{x : p(x) \wedge q(x)\}$  καὶ

$$(A \cap B)^c \equiv \{x : \sim(p(x) \wedge q(x))\}.$$

Ἀλλά:  $\sim(p(x) \wedge q(x)) \iff \sim p(x) \vee \sim q(x)$  (§ 7, παρδ. 1).

Ἐπομένως :

$$\begin{aligned} (A \cap B)^c &\equiv \{x : \sim(p(x) \wedge q(x))\} = \{x : \sim p(x) \vee \sim q(x)\} = \\ &= \{x : \sim p(x)\} \cup \{x : \sim q(x)\} = A^c \cup B^c. \end{aligned}$$

**§ 24. Διαγράμματα τοῦ Venn καὶ λογισμὸς τῶν προτάσεων.**—Ἐ-

στῶσαν δύο σύνολα  $A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\}$  καὶ  $B \equiv \{x \in \Omega : q(x)\}$ , τὰ ὁποῖα παρίστανται διὰ κύκλων εἰς τὸ σχ. 4, ὑποσύνολα τοῦ βασικοῦ συνόλου  $\Omega$ . Θὰ ζητήσωμεν νὰ ὀρίσωμεν τὸ :

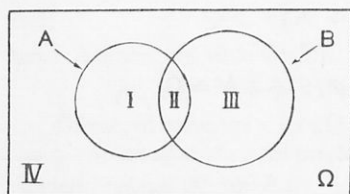
$$\Gamma \equiv \{x \in \Omega : p(x) \implies q(x)\},$$

ἥτοι τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς  $x$ , αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὴν συνεπαγωγὴν  $p(x) \implies q(x)$  ἀληθῆ πρότασιν. Ὡς γνωστὸν ἡ συνεπαγωγὴ  $p(x) \implies q(x)$  εἶναι ἀληθὴς πρότασις εἰς τὰς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις :

1) Ἐὰν  $p$  καὶ  $q$  εἶναι συγχρόνως ἀληθεῖς προτάσεις.

2) Ἐὰν  $p$  ψευδὴς καὶ  $q$  ἀληθὴς καὶ 3) Ἐὰν ἀμφότεραι εἶναι ψευδεῖς.

Δυνάμει τοῦ ἑναντι σχήματος ὁ προτασιακὸς τύπος  $p(x)$  καθίσταται ἀληθὴς πρότασις διὰ τιμὰς τῆς μεταβλητῆς εἰς τὰς «περιοχὰς» I, II, ὁ δὲ  $q(x)$  διὰ τιμὰς τῶν περιοχῶν II, III. Ὁ  $p(x)$  καθίσταται ψευδὴς καὶ ὁ  $q(x)$  ἀληθὴς πρότασις διὰ τιμὰς τῆς περιοχῆς III. Τέλος καθίστανται ἀμφότεροι ψευδεῖς διὰ τιμὰς τῆς μεταβλητῆς  $x$  εἰς τὴν περιοχὴν IV.



Σχ. 4

Οὕτω τὸ σύνολον  $\Gamma \equiv \{x \in \Omega : p(x) \implies q(x)\}$  ἔχει ὡς εἰκόνα, εἰς τὸ σχ. 4, τὰ σημεῖα τῶν περιοχῶν II, III, IV. Ἀλλὰ αἱ περιοχαὶ II, III καὶ IV εἶναι ἀκριβῶς ἡ εἰκὼν τοῦ συνόλου  $A^c \cup B$ .

Ἄρα :  $\Gamma \equiv \{x \in \Omega : p(x) \implies q(x)\} = A^c \cup B$ .

**§ 25. Καρτεσιανὸν γινόμενον συνόλων.** — Ἄς θεωρήσωμεν δύο μὴ κενὰ σύνολα  $A$  καὶ  $B$ , ὑποσύνολα ἑνὸς βασικοῦ συνόλου  $\Omega$ . Ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ σύνολα σχηματίζεται (ὀρίζεται) ἓν νέον σύνολον, τὸ ὁποῖον καλεῖται *καρτεσιανὸν γινόμενον* με *πρῶτον παράγοντα* τὸ  $A$  καὶ *δεύτερον* τὸ  $B$  καὶ συμβολίζεται με  $A \times B$ : τὸ νέον τοῦτο σύνολον ὀρίζεται ὡς ἑξῆς :

$$A \times B \equiv \{(\alpha, \beta) : \forall \alpha \in A \text{ καὶ } \forall \beta \in B\}$$

Τὸ στοιχεῖον  $(\alpha, \beta) \in A \times B$  καλεῖται *ἐν διατεταγμένον ζεύγος*: ὅθεν τὸ  $A \times B$  ὀρίζεται ὡς τὸ σύνολον πάντων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν  $(\alpha, \beta)$ , με  $\alpha \in A$  καὶ  $\beta \in B$ .

Τὰ στοιχεῖα  $\alpha$  καὶ  $\beta$  τοῦ ζεύγους καλοῦνται *ἀντιστοιχῶς πρώτη καὶ δευτέρα συντεταγμένη* (ἢ *προβολή*) τοῦ ζεύγους.

Ἡ βασικὴ ἰσότης ὀρίζεται ἐν  $A \times B$  ὡς ἑξῆς :

$$(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta') \iff \alpha = \alpha' \text{ καὶ } \beta = \beta'.$$

Ἐὰν  $A = B$ , τότε τὸ  $A \times A$  συμβολίζεται με  $A^2$ .

Τὸ σύνολον  $\Delta$  τῶν ζευγῶν  $(\alpha, \alpha)$  με  $\alpha \in A$  καλεῖται *διαγώνιος* τοῦ  $A^2$ . Προφανῶς  $\Delta \subseteq A^2$ .

Ἐὰν  $A = \emptyset$  ἢ  $B = \emptyset$ , τότε ὀρίζομεν :  $A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset \times \emptyset = \emptyset$ .

**Παράδειγμα :** Ἐὰν  $A = \{1, 2, 3\}$  καὶ  $B = \{\alpha, \beta\}$ , τότε :

$$A \times B \equiv \{(1, \alpha), (1, \beta), (2, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (3, \beta)\} \text{ ἐνῶ}$$

$$B \times A \equiv \{(\alpha, 1), (\alpha, 2), (\alpha, 3), (\beta, 1), (\beta, 2), (\beta, 3)\}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι :  $A \times B \neq B \times A$ .

Γενικῶς : Εἰς τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον δὲν ἰσχύει ἡ μεταθετικὴ ιδιότης.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ὀρίζεται τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον με περισσοτέρους ἀπὸ δύο παράγοντας· π.χ. ἂν  $A, B, \Gamma$  εἶναι μὴ κενὰ ὑποσύνολα τοῦ  $\Omega$ , ὀρίζομεν ὡς καρτεσιανὸν γινόμενον  $A$  ἐπὶ  $B$  ἐπὶ  $\Gamma$  καὶ συμβολίζομεν με  $A \times B \times \Gamma$  τὸ κάτωθι σύνολον :

$$A \times B \times \Gamma \equiv \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha \in A, \beta \in B \text{ καὶ } \gamma \in \Gamma\},$$

δηλαδὴ τὸ σύνολον τῶν «*διατεταγμένων τριάδων*»  $(\alpha, \beta, \gamma)$   $\forall \alpha \in A, \beta \in B$  καὶ  $\gamma \in \Gamma$ .

**Σημείωσις :** Θεωροῦμεν τὸ σύνολον  $\mathbf{R}$  τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν\*) καὶ σχηματίζομεν τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον :

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \equiv \{(x, y) : \forall x \in \mathbf{R} \text{ καὶ } \forall y \in \mathbf{R}\},$$

ἥτοι τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

\* Τὸ σύνολον  $\mathbf{R}$  τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καλεῖται συχνά : **Εὐθεῖα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν** εἴτε ἄλλως **Εὐκλείδειος χώρος διαστάσεως 1**.

Τὸ  $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \equiv \mathbf{R}^2$  καλεῖται, ἐὰν θέλωμεν νὰ ἐκφρασθῶμεν μὲ τὴν γλῶσσαν τῆς Γεωμετρίας, Εὐκλείδειον ἐπίπεδον ἢ Εὐκλείδειος χώρος διαστάσεως δύο.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8. Νὰ ὁρισθοῦν καὶ δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων των τὰ κάτωθι σύνολα :  
 1)  $A \equiv \{x \in \mathbf{N} : x^2 < 50\}$ , 2)  $B \equiv \{x \in \mathbf{Z} : x \text{ διαιρετὴς τοῦ } 24\}$ ,  
 3)  $\Gamma \equiv \{x \in \mathbf{N} : 5 \leq x \leq 29 \text{ τῆς μορφῆς } v^2 + 1 \text{ μὲν } v \in \mathbf{N}\}$ , 4)  $\Delta \equiv \{x \in \mathbf{N} : 5 < x < 6\}$ .
9. Νὰ ὁρισθοῦν καὶ διὰ περιγραφῆς ἕκαστον τῶν ἀκολουθῶν συνόλων :  
 1)  $A \equiv \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 2)  $B \equiv \{1, 4, 9\}$ , 3)  $\Gamma \equiv \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ,  
 4)  $\Delta \equiv \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, \omicron, \upsilon, \omega\}$ , 5)  $E \equiv \{11, 13, 15, 17, 19\}$ , 6)  $\Sigma \equiv \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$ .
10. Δίδονται τὰ σύνολα :  
 $A \equiv \{x \in \mathbf{N} : 3 < x \leq 7\}$  καὶ  $B \equiv \{5, 6, 7, 4\}$ . Νὰ δεიχθῇ ὅτι :  $B = A$ .
11. Ἐὰν  $A \equiv \{x \in \mathbf{R} : 3x = 21\}$  καὶ  $y = 7$ , εἶναι  $y \in A$  ;
12. Ἐὰν  $B \equiv \{x \in \mathbf{R} : x^2 - 25 = 0\}$  καὶ  $\Gamma = \{5\}$ , εἶναι  $\Gamma \subset B$  ;
13. Δίδεται τὸ σύνολον :  $A \equiv \{\alpha, \beta, \gamma\}$ . Ποία ἐκ τῶν κάτωθι σχέσεων εἶναι ἀληθῆς καὶ ποία ὄχι ; Δικαιολογήσατε τὴν ἀπάντησιν.  
 1)  $\{\alpha\} \in A$ , 2)  $\alpha \subset A$ , 3)  $\{\gamma\} \subset A$ , 4)  $\{\alpha, \beta\} \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ , 5)  $\{\emptyset, A, \{\alpha, \beta\}\} \subset A$ .
14. Ἐὰν  $A \equiv \{1, 2, 3, 4\}$ , νὰ ἀναγραφοῦν ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ δυναμοσυνόλου  $\mathcal{P}(A)$ .
15. Τὸ δυναμοσύνολον ἐνὸς συνόλου ἔχει 32 στοιχεῖα. Πόσα στοιχεῖα ἔχει τὸ σύνολον ;
16. Ἐὰν  $\Delta_{18}$  εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων διαιρετῶν τοῦ 18 καὶ  $\Delta_{42}$  τὸ σύνολον τῶν διαιρετῶν τοῦ ἀριθμοῦ 42, ὀρίσατε τὰ σύνολα  $\Delta_{18} \cap \Delta_{42}$  καὶ  $\Delta_{18} \cup \Delta_{42}$ .
17. Ἐὰν  $A, B, \Gamma$  ὑποσύνολα ἐνὸς βασικοῦ συνόλου  $\Omega$ , δεῖξατε ὅτι :  
 1)  $A \cap (A \cup B) = A$  καὶ  $A \cup (A \cap B) = A$ , 2)  $(A - B) \cap B = \emptyset$ ,  
 3)  $A \dagger B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$ , 4)  $(A - B) \cup (A - B^c) = A$ ,  
 5) Ἐὰν  $\Gamma \cap A = B \cap A$  καὶ  $\Gamma \cup A = B \cup A \implies B = \Gamma$ ,  
 6)  $A - (B \cup \Gamma) = (A - B) \cap (A - \Gamma)$ , 7)  $(A \cup B) \dagger (A \cap B) = A \dagger B$ ,  
 8)  $A - (B \cap \Gamma) = (A - B) \cup (A - \Gamma)$ , 9)  $A - (B - A) = A$ , 10)  $A \dagger (A \dagger B) = B$ .
18. Δίδεται ὡς βασικὸν σύνολον τὸ  $\Omega \equiv \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Νὰ ὁρισθοῦν τὰ ὑποσύνολα τοῦ  $A, B, \Gamma$  (δι' ἐφαρμογῆς τῶν νόμων τοῦ De Morgan), γνωστοῦ ὄντος ὅτι :  
 $A \cap B = \{2, 4\}$ ,  $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$ ,  $A \cap \Gamma = \{2, 3\}$ ,  $A \cup \Gamma = \{1, 2, 3, 4\}$ .  
 Ἀκολουθῶς νὰ ὁρισθοῦν καὶ τὰ :  $A \cap (A \cup B)$ ,  $\Gamma \cap (A \cup B)$ .
19. Δίδονται τὰ σύνολα :  $A \equiv \{1, 2, 5\}$ ,  $B = \{2, 4\}$ . Νὰ ὁρισθοῦν τὰ :  
 1)  $A \times B$ , 2)  $B \times A$ , 3)  $A^2$ , 4)  $B^2$ , 5)  $A \times (A \cap B)$ .
20. Ἐὰν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  εἶναι τυχόντα ἀντικείμενα, νὰ δειχθῇ ὅτι :  
 $(\{\{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}\} = \{\{\gamma, \delta\}, \{\gamma\}\}) \implies (\alpha = \gamma \wedge \beta = \delta)$ .
21. Δίδονται διὰ περιγραφῆς τὰ σύνολα :  
 $A \equiv \{x \in \mathbf{R} : x^3 - 5x^2 + 6x = 0\}$  καὶ  $B \equiv \{x \in \mathbf{R} : x^3 - 3x = x\}$ .  
 Παραστήσατε τὰ κάτωθι σύνολα διὰ περιγραφῆς καὶ ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων των :  
 1)  $A \cap B$ , 2)  $A \cup B$ , 3)  $A - B$ , 4)  $B - A$ , 5)  $A \dagger B$ .
22. Ἐὰν  $A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\}$  καὶ  $B \equiv \{x \in \Omega : q(x)\}$ , δεῖξατε ὅτι τὸ σύνολον τιμῶν ἀληθείας τῆς ἰσοδυναμίας  $p(x) \iff q(x)$  εἶναι τό :  $(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$ , ἥτοι :  
 $\{x \in \Omega : p(x) \iff q(x)\} = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$ .

**§ 26. Εἰσαγωγή.** — Ἄς παρακολουθήσωμεν τὰς ἐκφωνήσεις τῶν κατωτέρω προτάσεων :

1). Διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $n$  ἰσχύει ἡ ἰσότης :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n \cdot (n + 1).$$

2). Ἐὰν  $a > -1$ , δείξατε ὅτι ἰσχύει :  $(1 + a)^n \geq 1 + na$ , διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $n$ .

3). Τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων πολυγώνου ἔχοντος  $n$  κορυφὰς ἰσοῦται μὲ :

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

4). Διὰ  $n \in \mathbb{N}$  μὲ  $n \geq 4$  νὰ δειχθῇ ὅτι :  $\left(\frac{3}{2}\right)^n > n + 1$ .

5). Δείξατε ὅτι :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ὁ ἀριθμὸς  $7^{2n} + 16n - 1$  διαιρεῖται διὰ τοῦ 64.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκφωνήσεων παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχουν μαθηματικαὶ προτάσεις, ἐξαρτώμεναι ἀπὸ ἓνα φυσικὸν ἀριθμὸν  $n$ , τῶν ὁποίων τὴν ἀλήθειαν θέλομεν νὰ δείξωμεν διὰ κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ἢ διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν μεγαλύτερον ἢ ἴσον ἐνὸς δοθέντος φυσικοῦ ἀριθμοῦ  $n_0$ .

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοιούτων προτάσεων ἐφαρμόζομεν εἰδικὴν ἀποδεικτικὴν μέθοδον γνωστὴν ὡς : «Μαθηματικὴ ἢ τελεία ἐπαγωγή».

Ὡστε : Μαθηματικὴ ἢ τελεία ἐπαγωγή καλεῖται μία γενικὴ μέθοδος ἀποδείξεως, ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται προκειμένου ν' ἀποδειχθῇ ὅτι μία πρότασις, εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς ὁποίας ἀναφέρεται φυσικὸς ἀριθμὸς  $n$ , ἀληθεύει διὰ κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ἢ διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ .

Κατωτέρω θὰ ἴδωμεν εἰς ποίαν κατὰ βάσιν ἀρχὴν στηρίζεται ἡ ἐν λόγω ἀποδεικτικὴ μέθοδος.

**§ 27. Θεμελιώδεις ιδιότητες τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν (ἀξιώματα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν κατὰ Peano \*).**

Τὸ σύνολον  $\mathbb{N}$  τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὀρίζεται τῇ βοήθειᾳ τῶν κάτωθι ἀξιωμάτων :

**Ἀξίωμα I.** Ὁ 1 εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς, ἥτοι  $1 \in \mathbb{N}$ .

**Ἀξίωμα II.** Διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ὑπάρχει εἷς, καὶ μόνον εἷς, «ἐπόμενος» φυσικὸς ἀριθμὸς, ἥτοι  $\forall n \in \mathbb{N} \implies n + 1 \in \mathbb{N}$ .

**Ἀξίωμα III.** Δὲν ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμὸς  $n$  μὲ ἐπόμενον τὸν 1, ἥτοι  $n + 1 \neq 1$  (ἀκριβέστερον  $n + 1 > 1$ )  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Ἀξίωμα IV.** Δύο φυσικοὶ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν αὐτὸν ἐπόμενον εἰναι ἴσοι, ἥτοι  $\forall n \in \mathbb{N}$  καὶ  $\forall \mu \in \mathbb{N}$  μὲ  $n + 1 = \mu + 1 \implies n = \mu$ .

\* G. Peano (1858 - 1932). Ἰταλὸς μαθηματικὸς καὶ φιλόσοφος.

**Ἀξίωμα V.** Κάθε σύνολον φυσικῶν ἀριθμῶν, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει ὁ 1 καὶ μαζὺ μὲ οἰονδήποτε φυσικὸν ἀριθμὸν  $n$  ἀνήκει εἰς αὐτὸ καὶ ὁ ἐπόμενός του  $n + 1$ , συμπίπτει μὲ τὸ σύνολον  $N$  τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἥτοι, ἂν ἐν ὑποσύνολον  $S$  τοῦ συνόλου  $N$  πληροῖ τὰς ἐξῆς δύο ἰδιότητες :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \quad 1 \in S \\ \text{(b)} \quad \forall n \in S \implies n + 1 \in S \end{array} \right\} \implies S \equiv N.$$

Τὸ τελευταῖο ἀξίωμα χαρακτηρίζεται καὶ ὡς «*ἀρχὴ τῆς μαθηματικῆς ἢ τελελείας (πλήρους) ἐπαγωγῆς*» τῇ βοήθειᾳ τῆς ὁποίας ἀποδεικνύεται τὸ κάτωθι :

**§ 28. Θεώρημα (τῆς τελελείας ἐπαγωγῆς).**—'Εὰν διὰ μίαν πρότασιν  $p(n)$ , εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς ὁποίας ἀναφέρεται ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς  $n$ , εἶναι γνωστὸν ὅτι :

- 1) Ἡ πρότασις ἀληθεύει διὰ  $n = 1$ , ἥτοι  $p(1)$  ἀληθής καὶ ἐπὶ πλεόν
- 2) μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἀληθεύει διὰ  $n = k$ , ἀποδεικνύεται ὅτι αὕτη ἀληθεύει καὶ διὰ  $n = k + 1$ , ἥτοι  $p(k + 1)$  ἀληθής, ἂν  $p(k)$  ἀληθής καὶ τοῦτο διὰ κάθε  $k \in N$ , τότε ἡ πρότασις  $p(n)$  ἀληθεύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $n$ .

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα μὲ χρῆσιν τῶν συμβόλων τῆς λογικῆς διατυποῦται συντόμως οὕτω :

$$\{ p(1) \wedge [p(k) \text{ ἀληθής} \implies p(k + 1)] \} \text{ ἀληθής} \implies p(n) \text{ ἀληθής} \quad \forall n \in N$$

**Ἀπόδειξις :** Ἐστω  $S$  τὸ σύνολον (ὅλων) τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, διὰ τοὺς ὁποίους ἡ  $p(n)$  εἶναι ἀληθής, ἥτοι ἔστω

$$S \equiv \{ n \in N : p(n) \}.$$

τὸ σύνολον τοῦτο δὲν εἶναι κενόν, διότι τὸ  $1 \in S$  ἐφ' ὅσον  $p(1)$  ἀληθής. Ἐπὶ πλεόν, ἂν  $k \in S$ , τότε καὶ  $k + 1 \in S$ , διότι, ἂν  $k \in S$ , τότε  $p(k)$  ἀληθής, ὅθεν (ὑπόθ. 2) καὶ  $p(k + 1)$  ἀληθής, συνεπῶς  $k + 1 \in S$ . Ὡστε τὸ  $S$  ἔχει τὰς ἰδιότητας (a) καὶ (b) τοῦ ἀξιώματος V, συμπίπτει ὅθεν μὲ τὸ σύνολον  $N$ . Κατὰ συνέπειαν ἡ (λογικὴ) πρότασις  $p(n)$  ἀληθεύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $n$ .

**Παρατήρησις :** Συμβαίνει πολλάκις μία πρότασις  $p(n)$  νὰ ἔχῃ νόημα διὰ τιμὰς τοῦ  $n$  μεγαλυτέρας ἢ ἴσας ὠρισμένου φυσικοῦ ἀριθμοῦ  $v_0$ . Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ θεώρημα τῆς τελελείας ἐπαγωγῆς ἰσχύει (προφανῶς) ὑπὸ τὴν ἐξῆς ὁμως διατύπωσιν μὲ χρῆσιν τῶν συμβόλων τῆς λογικῆς :

$$\{ p(v_0) \wedge [p(k) \text{ ἀληθής} \implies p(k + 1)] \} \text{ ἀληθής} \implies p(n) \text{ ἀληθής} \quad \forall n \in N : n \geq v_0$$

ἥτοι : Ἐὰν μία πρότασις  $p(n)$  ἀληθεύῃ διὰ  $n = v_0$  καὶ ὑποθέτοντες ὅτι ἀληθεύει διὰ τινὰ τιμὴν τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ  $n$ , ἔστω  $n = k > v_0$ , ἀποδείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καὶ διὰ τὴν τιμὴν  $n = k + 1$ , τότε ἡ πρότασις  $p(n)$  ἀληθεύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $n \geq v_0$ .

**Σημείωσις.** Εἰς τὸ ἀνωτέρω θεώρημα στηρίζεται ἡ ἀποδεικτικὴ μέθοδος τῆς Μαθηματικῆς ἢ τελελείας ἐπαγωγῆς. Κατ' αὐτὴν διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἀληθειαν μιᾶς προτάσεως  $p(n)$  ἐργαζόμεθα ὡς ἐξῆς :



α). 'Αποδεικνύομεν τὴν ἀλήθειαν τῆς προτάσεως διὰ  $v = 1$ , (ἐφ' ὅσον διὰ  $v = 1$  ἔχει νόημα). 'Εὰν διὰ  $v = 1$  ἡ πρότασις δὲν ἔχη νόημα, τὴν ἐπαληθεύομεν διὰ τὸν ἐλάχιστον φυσικὸν ἀριθμὸν  $v_0$ , διὰ τὸν ὁποῖον ἔχει νόημα.

β). 'Υποθέτοντες ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διὰ  $v = k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , δηλ.  $p(k)$  ἀληθῆς, ἀποδεικνύομεν τῇ βοηθεῖα τῆς ἀληθείας τῆς  $p(k)$  πιθανῶς δὲ καὶ τοῦ  $p(1)$  τὴν ἀλήθειαν τῆς  $p(k+1)$ .

γ). Συμπεραίνομεν, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τῆς τελείας ἐπαγωγῆς (§ 28), ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διὰ κάθε  $v \in \mathbb{N}$ .

## ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

**1η :** Διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $v$  ἰσχύει ἡ ἰσότης :

$$1 + 2 + 3 + \dots + v = \frac{1}{2} v \cdot (v + 1). \quad (i)$$

'Απόδειξις : "Ὡς συμβολίσωμεν διὰ τοῦ  $S$  τὸ σύνολον τῶν  $v \in \mathbb{N}$ , διὰ τὰ ὁποῖα ἡ (i) ἀληθεύει. Τότε  $1 \in S$ , διότι ἡ (i) ἀληθεύει διὰ  $v = 1$ , καθ' ὅτι :

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + 1).$$

'Υποθέσωμεν τώρα ὅτι ὁ ἀριθμὸς  $k$  ἀνήκει εἰς τὸ  $S$ . Τότε ἡ (i) ἀληθεύει δι' αὐτὸν τὸν (φυσικὸν) ἀριθμὸν  $k$  ἥτοι εἶναι :

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{1}{2} k \cdot (k + 1).$$

'Εὰν προσθέσωμεν τὸ  $k + 1$  εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη, λαμβάνομεν :

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = (1 + 2 + \dots + k) + (k + 1) = \frac{1}{2} k \cdot (k + 1) + (k + 1) = \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} = \frac{1}{2} (k + 1) \cdot [(k + 1) + 1].$$

Συνεπῶς, ἂν ἡ (i) ἀληθεύῃ διὰ  $v = k$ , τότε ἡ (i) ἀληθεύει καὶ διὰ  $v = k + 1$ , ὅθεν ἂν  $k \in S$ , τότε  $k + 1 \in S$ . "Αρα κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς ἔχομεν  $S \equiv \mathbb{N}$ . 'Επειδὴ δὲ τὸ  $S$  εἶναι τὸ σύνολον τῶν  $v \in \mathbb{N}$  διὰ τὰ ὁποῖα ἡ (i) ἀληθεύει, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ (i) ἀληθεύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $v$ .

**2α :** "Αν  $\alpha > -1$  καὶ  $v \in \mathbb{N}$ , νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$(1 + \alpha)^v \geq 1 + v\alpha \quad (\text{ἀνισότης τοῦ Bernoulli}). \quad (ii)$$

'Απόδειξις : α). Διὰ  $v = 1$  ἰσχύει ὡς ἰσότης, ἐπειδὴ :

$$(1 + \alpha)^1 = 1 + \alpha = 1 + 1 \cdot \alpha.$$

β). "Εστω ὅτι διὰ  $v = k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) ἡ ἀνισότης ἀληθεύει, δηλαδὴ ἔστω ὅτι :

$$(1 + \alpha)^k \geq 1 + k\alpha. \quad (p)$$

'Εκ τῆς ἀληθείας τῆς (p) θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ ἀνισότης (ii) ἰσχύει καὶ διὰ  $v = k + 1$ , ἥτοι :

$$(1 + \alpha)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)\alpha, \quad (q)$$

δηλαδὴ θὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἀλήθειαν τῆς συνεπαγωγῆς (p)  $\implies$  (q).

Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας αμφοτέρω τὰ μέρη τῆς (p) ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν  $(1 + \alpha)$  ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$(1 + \alpha)^{k+1} \geq (1 + k\alpha)(1 + \alpha) = 1 + k\alpha^2 + (k+1)\alpha \geq 1 + (k+1)\alpha,$$

ἥτοι :

$$(1 + \alpha)^{k+1} \geq 1 + (k+1)\alpha.$$

Ἄρα ὅταν ἀληθεύῃ ἡ (p), ἀληθεύει καὶ ἡ (q), συνεπῶς ἡ ἀποδεικτέα ἀνισότης (ii) ἀληθεύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $v$ .

**3η :** Διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $v \geq 4$  νὰ δειχθῇ ὅτι :  $\left(\frac{3}{2}\right)^v > v + 1$ . (iii)

Ἀπόδειξις : Διὰ  $v = v_0 = 4$  ἡ ἀνισότης ἰσχύει, διότι :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} > 5 = 4 + 1.$$

Ἐστω ὅτι διὰ  $v = k$  ( $k \in \mathbb{N}$  μὲ  $k \geq 4$ ) ἡ ἀνισότης (iii) ἰσχύει, ἥτοι :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k > k + 1.$$

Ἐξ αὐτῆς θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἀνισότης (iii) ἰσχύει καὶ διὰ  $v = k + 1$ , ἥτοι ὅτι :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} > (k+1) + 1.$$

Πράγματι, ἐπειδὴ

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} > \frac{3}{2}(k+1)$$

ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι :

$$\frac{3}{2}(k+1) > (k+1) + 1 \quad \eta \quad \frac{3}{2}(k+1) - (k+1) > 1,$$

δηλαδή :

$$k + 1 > 2.$$

Ἡ τελευταία ὁμῶς ἀνισότης ἰσχύει (διότι  $k \geq 4$ ). Ὅθεν ἡ ἀποδεικτέα ἀνισότης

$$\left(\frac{3}{2}\right)^v > v + 1$$

ἰσχύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $v \geq 4$ .

**Παρατηρήσεις :** Πολλάκις, διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι μία πρότασις  $p(v)$  ἀληθεύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $v$ , ἀποδεικνύομεν τὴν ἀλήθειαν αὐτῆς δι' ἕνα σημαντικὸν ἀριθμὸν διαδοχικῶν φυσικῶν τιμῶν τοῦ  $v$ , λ.χ. διὰ  $v = 1, 2, \dots, v_0$  καὶ ἀκολουθῶς συμπεραίνομεν ὅτι αὕτη θὰ ἀληθεύῃ διὰ κάθε  $v \in \mathbb{N}$  (ἀτελὲς ἐπαγωγή). Ἡ μέθοδος αὕτη ὁδηγεῖ πολλάκις εἰς ἐσφαλμένα συμπεράσματα καὶ δὲν πρέπει νὰ τὴν μεταχειριζώμεθα. Ἐν κλασσικὸν παράδειγμα τοιαύτης πλάνης εἶναι ἡ ἐξῆς ψευδὴς πρότασις τοῦ Euler :

«Ἐὰν  $v$  φυσικὸς ἀριθμὸς, τότε ὁ ἀριθμὸς  $(v^2 - v + 41)$  εἶναι πρῶτος».

Ἡ παράστασις  $v^2 - v + 41$  διὰ  $v = 1, 2, 3, \dots, 40$  δίδει πρῶτους ἀριθμοὺς (μὴ ἔχοντας δηλ. ἄλλον διαιρέτην ἐκτὸς τοῦ ἑαυτοῦ των καὶ τῆς μονάδος), ὁμῶς διὰ  $v = 41$  δίδει :

$$v^2 - v + 41 = 41^2 - 41 + 41 = 41^2,$$

δηλ. ἀριθμὸν μὴ πρῶτον.

‘Ομοίως ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ἡ ἔκφρασις  $2^{2^v} + 1$  δίδει διὰ  $v = 1, 2, 3, 4$  πρώτους ἀριθμούς δὲν δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἡ εἰρημένη ἔκφρασις δίδει πρώτους ἀριθμούς διὰ πάντας τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς, καθ’ ὅσον διὰ  $v = 5$  ἡ ἐν λόγῳ ἔκφρασις δίδει σύνθετον ἀριθμόν.

Ἐπίσης δὲν ἄρκει ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀληθείας τῆς προτάσεως διὰ  $v = k + 1$ , μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι αὕτη ἀληθεύει διὰ  $v = k$ . Πρέπει ὁπωσδήποτε νὰ ἀποδεικνύωμεν τὴν ἀλήθειαν αὐτῆς διὰ  $v = 1$  (ἢ, ἂν δὲν ἔχη νόημα διὰ  $v = 1$ , ἀποδεικνύωμεν τὴν ἀλήθειαν διὰ  $v = v_0$ , ἐνθα  $v_0$  ὁ ἐλάχιστος φυσικὸς ἀριθμὸς, δι’ ὃν ἔχει νόημα ἡ πρότασις). Περὶ τούτου βεβαιούμεθα ἀπὸ τὴν ἐξῆς ψευδῇ πρότασιν :

« Διὰ  $v \in \mathbb{N}$  ἰσχύει :  $v = v + 17$  ».

Πράγματι, ἄς παραλείψωμεν νὰ ἐξακριβώσωμεν κατὰ πόσον ἡ ἀνωτέρω πρότασις ἀληθεύει διὰ  $v = 1$ .

Ὑποθέσωμεν ὅτι αὕτη εἶναι ἀληθὴς διὰ  $v = k$ , ἥτοι :  $k = k + 17$ , τότε ἔχομεν

$$k + 1 = (k + 17) + 1$$

$$\text{ἢ} \quad k + 1 = (k + 1) + 17,$$

δηλ. ἡ πρότασις ἀληθεύει διὰ  $v = k + 1$  μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἀληθεύει διὰ  $v = k$ .

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν συνάγομεν ὅτι : εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως καὶ αἱ δύο ὑποθέσεις 1) καὶ 2) τοῦ θεωρήματος τῆς τελείας ἐπαγωγῆς πληροῦνται, ἵνα εἶναι τὸ συμπέρασμα ἀληθές.

**§ 29. Γενικεύσεις τοῦ Θεωρήματος τῆς τελείας Ἐπαγωγῆς.** — Ἐκτὸς τῆς μορφῆς τῆς (ἀπλῆς) τελείας ἐπαγωγῆς, τὴν ὁποίαν ἀνεπτύξαμεν προηγουμένως, ὑπάρχουν καὶ δύο ἄλλαι μορφαὶ αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι παρέχονται ὑπὸ τῶν κάτωθι δύο θεωρημάτων, τὰ ὁποῖα ἀναφέρομεν ἄνευ ἀποδείξεως.

**§ 30. Θεώρημα I.** — Ἐὰν  $p(v)$  εἶναι μία (λογικὴ) πρότασις, εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς ὁποίας ἀναφέρεται ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς  $v$ , ἡ ὁποία πληροὶ τὰς ἐξῆς ὑποθέσεις : 1) «  $p(1)$  εἶναι ἀληθὴς » 2) μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ  $p(v)$  ἀληθεύει διὰ κάθε  $v \in \mathbb{N}$  μὲ  $v < k$ , ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ  $p(v)$  ἀληθεύει καὶ διὰ  $v = k$  καὶ τοῦτο διὰ τυχὸν  $k \in \mathbb{N}$  μὲ  $k > 1$ , τότε : ἡ  $p(v)$  ἀληθεύει διὰ κάθε  $v \in \mathbb{N}$ .

**Ἐφαρμογή.** Νὰ δεიχθῇ (διὰ τῆς τελείας ἐπαγωγῆς) ὅτι ἡ ἀνισότης :

$$2^{10^v} > 10^{3^v} \quad \text{ἀληθεύει διὰ κάθε } v \in \mathbb{N}.$$

**Ἀπόδειξις :** Διὰ  $v = 1$  ἡ ἀνισότης ἀληθεύει, ἥτοι  $2^{10} > 10^3$ .

Ἐστω ὅτι αὕτη ἀληθεύει διὰ κάθε  $v < k$  (καὶ τοῦτο διὰ τυχὸν  $k \in \mathbb{N}$  μὲ  $k > 1$ ), ὁπότε ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$2^{10} > 10^3 \quad \text{καὶ} \quad 2^{10(k-1)} > 10^{3(k-1)},$$

ἐκ τῶν ὁποίων διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη προκύπτει :  $2^{10k} > 10^{3k}$ , ἥτοι ἡ ἐν λόγῳ ἀνισότης ἰσχύει καὶ διὰ  $v = k$ . συνεπῶς ἰσχύει  $2^{10^v} > 10^{3^v}$  διὰ κάθε  $v \in \mathbb{N}$ .

**§ 31. Θεώρημα II.** — Ὑποθέσεις : 1) Ἰσχύει : « ἡ  $p(1)$  καὶ  $p(2)$  εἶναι ἀληθεῖς », 2) μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἀληθεύουν αἱ  $p(k-2)$  καὶ  $p(k-1)$  ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ  $p(k)$  ἀληθεύει καὶ τοῦτο διὰ τυχὸν  $k \in \mathbb{N}$  μὲ  $k > 2$ .

**Συμπέρασμα :** ἡ  $p(v)$  ἀληθεύει διὰ κάθε  $v \in \mathbb{N}$ .

Ἐφαρμογή. Νά δειχθῇ ὅτι διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $n$  ἰσχύει :

$$S_n \equiv (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n = \text{πολ. } 2^n.$$

Ἀποδείξεις: Διὰ  $n = 1$  καὶ  $n = 2$  ἔχομεν ἀντιστοίχως :

$$S_1 = (3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5}) = 6 = 3 \cdot 2^1$$

$$S_2 = (3 + \sqrt{5})^2 + (3 - \sqrt{5})^2 = 28 = 7 \cdot 2^2.$$

Ἄρα ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ  $n = 1$  καὶ  $n = 2$ .

Ἐστω ὅτι αὕτη ἰσχύει διὰ  $n = k - 2, k - 1$  (διὰ τυχὸν  $k \in \mathbb{N}, k > 2$ ), ἤτοι :

$$S_{k-2} \equiv (3 + \sqrt{5})^{k-2} + (3 - \sqrt{5})^{k-2} = \text{πολ. } 2^{k-2} \quad \text{καὶ}$$

$$S_{k-1} \equiv (3 + \sqrt{5})^{k-1} + (3 - \sqrt{5})^{k-1} = \text{πολ. } 2^{k-1}.$$

Θὰ δείξωμεν τότε ὅτι ἡ πρότασις αὕτη ἰσχύει καὶ διὰ  $n = k$ .

Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν μὲ ρίζας  $x_1 = 3 + \sqrt{5}$  καὶ  $x_2 = 3 - \sqrt{5}$ .

Αὕτη εἶναι ἡ  $x^2 - 6x + 4 = 0$ .

Εὐκόλως τῶρα διαπιστοῦται ὅτι :

$$(3 + \sqrt{5})^k + (3 - \sqrt{5})^k \equiv S_k = 6 S_{k-1} - 4 S_{k-2}$$

καὶ ἐπομένως :

$$S_k = 6 \cdot \text{πολ. } 2^{k-1} - 4 \cdot \text{πολ. } 2^{k-2} = \text{πολ. } 2^k,$$

ἤτοι ἡ ἐν λόγω πρότασις ἰσχύει καὶ διὰ  $n = k$ .

Ἄρα ἡ πρότασις, δυνάμει τοῦ θεωρήματος II, ἰσχύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $n$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

23. Νά ἀποδειχθοῦν διὰ τῆς μεθόδου τῆς Μαθηματικῆς Ἐπαγωγῆς αἱ κάτωθι προτάσεις :

$$1. \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

$$2. \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

$$3. \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

$$4. \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

$$5. \quad \frac{(n+1)(n+2) \dots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} = 2^n \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$$

24. Διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $n$ , νά δειχθῇ ὅτι :

$$1. \quad \text{Ὁ ἀριθμὸς } 7^{2n} + 16n - 1 \text{ διαιρεῖται διὰ τοῦ } 64$$

$$2. \quad \text{» } 3^{4n+2} + 2^{6n+3} \text{ » » » } 17$$

$$3. \quad \text{» } 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2 \text{ » » » } 54.$$

25. Ἐάν  $n$  τυχὸν φυσικὸς ἀριθμὸς, νά ἀποδειχθοῦν ἐπαγωγικῶς αἱ ἀνισότητες :

$$1. \quad (1 - \alpha)^n \geq 1 - n\alpha, \quad \text{ὅπου } 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$2. \quad (1 - \alpha)^n < \frac{1}{1 + n\alpha}, \quad \text{ὅπου } 0 < \alpha \leq 1$$

$$3. \quad \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n}, \quad 4. \quad \left(1 + \frac{1}{6n}\right)^{-n} > \frac{5}{6},$$

$$5. \quad \frac{n^2}{2} < 1 + 2 + 3 + \dots + n < \frac{(n+1)^2}{2}.$$

26. Ἐάν  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  θετικοὶ ἀριθμοί, διάφοροι τοῦ 1, νά δειχθῇ ὅτι :

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_n) > 2^n \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$$

27. Εάν  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$  και  $\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ , δείξτε ότι :

1.  $(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_n) \geq 1 + \sigma_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .
2.  $(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \dots (1 - \alpha_n) \geq 1 - \sigma_n$ , όπου όμως  $0 < \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n < 1$ .
3.  $(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_n) < \frac{1}{1 - \sigma_n}$ , όπου όμως  $\sigma_n < 1$ .
4.  $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n} \right) \geq n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

28. Να δειχθῇ (διὰ τῆς μεθόδου τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς) ὅτι τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων πολυγώνων ἔχοντος  $n$ -κορυφὰς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :  $\frac{n(n-3)}{2}$ .

29. Να δειχθοῦν (διὰ τῆς μεθόδου τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς) αἱ κάτωθι ἀνισότητες :

1.  $2^n > n^3 \quad \forall n \geq 10$ , 2.  $\sqrt[n]{3} > \sqrt[n]{n} \quad \forall n > 3$ ,
3.  $2^{-\mu} < 10^{-\nu}$ , διὰ κάθε  $\mu, \nu \in \mathbb{N}$  μὲ :  $\mu > \frac{10}{3} \nu$ ,
4.  $\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n} > \frac{2}{3} \sqrt{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

30. Να ἀποδειχθῇ ὅτι:  $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

31. Ὁμοίως  $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1), \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

32. Να ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς  $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$  διαιρεῖται διὰ 9,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

33. Εάν  $\theta$  ἀριθμὸς θετικὸς  $\neq 1$ , νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ἰσχύει ἡ ἀνισότης :

$$\frac{1 + \theta^2 + \theta^4 + \dots + \theta^{2n}}{\theta + \theta^3 + \dots + \theta^{2n-1}} > 1 + \frac{1}{\theta}.$$

34. Εάν  $\alpha^2 - \beta^2 \gamma = \text{πολ} \cdot 4$ , ἔνθα  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$  μὲ  $\gamma \geq 0$ , τότε δείξτε ὅτι διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $n$  ἰσχύει :

$$S_n \equiv (\alpha + \beta \sqrt{\gamma})^n + (\alpha - \beta \sqrt{\gamma})^n = \text{πολ} \cdot 2^n.$$

# ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

## ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

#### ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

##### Ι. ΟΡΙΣΜΟΙ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**§ 32. Όρισμός.** — Απόλυτος τιμή ενός πραγματικού αριθμού καλείται αυτός ούτος ο αριθμός, εάν είναι θετικός ή μηδέν, ο αντίθετός του, εάν ο αριθμός είναι αρνητικός.

Η απόλυτος τιμή ενός πραγματικού αριθμού  $\alpha$  συμβολίζεται με  $|\alpha|$  και αναγιγνώσκεται: «*απόλυτος τιμή του  $\alpha$* » \*). Ὡς ἄμεσον συνέπειαν τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ἔχομεν :

$$|\alpha| = \alpha, \quad \text{ἐὰν } \alpha \geq 0$$

$$\text{καὶ } |\alpha| = -\alpha, \quad \text{ἐὰν } \alpha < 0.$$

$$\text{Οὕτω : } |2| = 2, \quad |0| = 0, \quad \left| -\frac{3}{4} \right| = -\left( -\frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4}.$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ προκύπτει ὅτι :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{εἶναι : } |\alpha| \geq 0.$$

Ἀναλυτικώτερον ἔχομεν :

$$|\alpha| > 0 \iff \alpha \neq 0$$

$$\text{καὶ } |\alpha| = 0 \iff \alpha = 0.$$

Ὅθεν ἡ παράστασις  $|\alpha|$  εἶναι μὴ ἀρνητικός ἀριθμός.

Ἐντεῦθεν ἔπεται ὁ ἐξῆς ἰσοδύναμος ὁρισμός τῆς ἀπολύτου τιμῆς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ :

Ἀπόλυτος τιμή (ἢ μέτρον) ενός πραγματικού αριθμοῦ  $\alpha$  καλεῖται ὁ μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ὀρίζεται οὕτω :

$$|\alpha| \stackrel{\text{ορισ.}}{=} \begin{cases} \alpha, & \text{ἐὰν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{ἐὰν } \alpha < 0 \end{cases}.$$

\* Τὸ σύμβολον  $|\alpha|$  ὥς καὶ ἡ ὀνομασία του, ὀφείλονται εἰς τὸν Γερμανὸν μαθηματικὸν Καρλ Βάιερστρας (1815 - 1897).

**§ 33. Ίδιότης I.** — Οι αντίθετοι πραγματικοί αριθμοί έχουν ίσας απόλυτους τιμές,

ήτοι :

$$\forall a \in \mathbf{R} \implies |-a| = |a|$$

**Ἀπόδειξις :** Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις :

(i). Ἐὰν  $a > 0$ , ὁπότε  $-a < 0$ ,  $\implies |a| = a$  καὶ  $|-a| = -(-a) = a$ .

Ὅθεν :  $|a| = |-a|$ .

(ii). Ἐὰν  $a = 0$ , ὁπότε καὶ  $-a = 0$ ,  $\implies |a| = 0$  καὶ  $|-a| = 0$ .

Ὅθεν :  $|a| = |-a|$ .

(iii). Ἐὰν  $a < 0$ , ὁπότε  $-a > 0$ ,  $\implies |a| = -a$  καὶ  $|-a| = -a$ .

Ὅθεν καὶ εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν :  $|a| = |-a|$ .

Ὡστε :  $\forall a \in \mathbf{R} \implies |-a| = |a|$ .

**Πόρισμα.** — Ἐὰν  $a, \beta \in \mathbf{R} \implies |a - \beta| = |\beta - a|$ .

**§ 34. Ίδιότης II.** — Ἐὰν  $a$  πραγματικὸς ἀριθμὸς, τότε :

$$-|a| \leq a \leq |a|.$$

**Ἀπόδειξις :** Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

(i). Ἐὰν  $a \geq 0 \implies |a| = a$  καὶ ἔπομένως :  $-|a| \leq a = |a|$ .

Ὅθεν καί :  $-|a| \leq a \leq |a|$ .

(ii). Ἐὰν  $a < 0 \implies |a| = -a$  καὶ ἔπομένως :  $-|a| = a < |a|$ .

Ὅθεν καί :  $-|a| \leq a \leq |a|$ .

Οὐδέποτε εἶναι :  $-|a| < a < |a|$ .

Ὡστε :

$$\forall a \in \mathbf{R} \implies -|a| \leq a \leq |a|$$

**Παρατήρησις :** Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος ἔπεται ἀμέσως :

$$\forall x \in \mathbf{R} \implies |x| + x \geq 0 \text{ καὶ } |x| - x \geq 0.$$

**§ 35. Ίδιότης III.** — Τὸ τετράγωνον τῆς ἀπολύτου τιμῆς ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, ἥτοι ἰσχύει :

$$\forall a \in \mathbf{R} \implies |a|^2 = a^2$$

**Ἀπόδειξις :** Ἐὰν  $a \geq 0 \implies |a| = a$  καὶ ἄρα  $|a|^2 = a^2$ .

Ἐὰν  $a < 0 \implies |a| = -a$  καὶ συνεπῶς  $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$ .

Ὡστε :  $\forall a \in \mathbf{R} \implies |a|^2 = a^2$ .

**Σπουδαία παρατήρησις.** Ἐὰν  $a \notin \mathbf{R} \implies |a|^2 \neq a^2$ .

Οὕτως, ἐὰν  $a \in \mathbf{C}$ , δηλαδή  $a = x + iy$ , ( $y \neq 0$ )  $\implies |a|^2 \neq a^2$  (διὰτί ;).

Κατὰ ταῦτα ἡ ἰσότης  $|α|^2 = α^2$  συνεπάγεται τὸ πραγματικὸν τοῦ  $α$  καὶ τὸ διάφορον  $|α|^2 \neq α^2$  συνεπάγεται ὅτι ὁ  $α$  εἶναι τῆς μορφῆς  $λ + μi$ , συμβολικῶς  $(λ, μ)$ , ὅπου  $λ, μ \in \mathbb{R}$  καὶ  $μ \neq 0$ .

**Πόρισμα 1ον.** — Γενικώτερον ἰσχύουν τὰ κάτωθι :

$$\forall x \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{N} \implies \begin{cases} |x|^{2v} = x^{2v} \\ |x|^{2v+1} = \begin{cases} x^{2v+1}, & \text{ἐὰν } x \geq 0 \\ -x^{2v+1}, & \text{ἐὰν } x < 0. \end{cases} \end{cases}$$

**Πόρισμα 2ον.** — Ἐὰν  $α \in \mathbb{R}$  καὶ  $v \in \mathbb{N} \implies \sqrt[2v]{α^{2v}} = |α|$ .

Κατὰ ταῦτα εἶναι :

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{ἐὰν } x > 0 \\ -x, & \text{ἐὰν } x < 0 \\ 0, & \text{ἐὰν } x = 0. \end{cases}$$

Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις δυνάμεθα ὅθεν νὰ γράφωμεν :  $\sqrt{x^2} = |x|$ .

**§ 36. Ἰδιότης IV.** — Διὰ κάθε ζεύγος  $(ε, x)$  πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ  $ε > 0$ , ἰσχύει ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία :

$$|x| \leq ε \iff -ε \leq x \leq ε.$$

**Ἀπόδειξις :** Ἐστω ὅτι ἰσχύει :  $|x| \leq ε \implies |x|^2 \leq ε^2$  ἢ κατὰ τὴν ιδιότητα III :  $x^2 \leq ε^2$  ἢ  $x^2 - ε^2 \leq 0$  ἢ  $(x - ε)(x + ε) \leq 0$ .

Αὕτη, κατὰ τὰ γνωστά, ἀληθεύει διὰ :  $-ε \leq x \leq ε$ .

Ὡστε :  $|x| \leq ε \implies -ε \leq x \leq ε$ .

**Ἀντιστροφή :** Ἐστω τώρα ὅτι ἰσχύει :

$$-ε \leq x \leq ε \implies (x + ε) \geq 0 \wedge (x - ε) \leq 0,$$

ἄρα  $(x + ε)(x - ε) \leq 0$  ἢ  $x^2 - ε^2 \leq 0$  ἢ  $x^2 \leq ε^2$ , τότε συμφώνως πρὸς τὸ πόρισμα 2 τῆς προηγουμένης ιδιότητος, ἐπειδὴ καὶ  $ε > 0$ , ἔχομεν :  $|x| \leq ε$ .

Ὡστε :  $-ε \leq x \leq +ε \implies |x| \leq ε$ .

**Ἀρα :**  $\forall (ε, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : |x| \leq ε \iff -ε \leq x \leq ε$

**Παρατήρησις :** Ὅμοίως ἀποδεικνύονται αἱ λογικαὶ ἰσοδυναμίαι :

1η.  $-ε < x < ε \iff |x| < ε, \text{ ὅπου } ε > 0$

2α.  $(x < -ε \text{ ἢ } x > ε) \iff |x| > ε, \text{ ὅπου } ε > 0.$

**Ἐφαρμογαί.** 1η : Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ (λογικὴ) ἰσοδυναμία :

$$2 \leq x \leq 8 \iff |x - 5| \leq 3.$$

Πράγματι, ἐκ τῶν  $2 \leq x \leq 8 \iff -3 \leq x - 5 \leq 3 \iff |x - 5| \leq 3$ .

2α : Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ (λογικὴ) ἰσοδυναμία :

$$|x - x_0| < ε \iff x_0 - ε < x < x_0 + ε.$$

Πράγματι :  $|x - x_0| < ε \iff -ε < x - x_0 < ε \iff x_0 - ε < x < x_0 + ε$ .



## Ἀπόλυτος τιμὴ ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς πραγματικῶν ἀριθμῶν.

**§ 37. Ἰδιότης V.**—Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μικροτέρα ἢ ἰση τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων,

ἥτοι :

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

**Ἀπόδειξις :** Πράγματι, ἐκ τῶν γνωστῶν σχέσεων (ιδιότης II) :

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη, λαμβάνομεν :

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq (|a| + |b|)$$

καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην ιδιότητα, ἔχομεν :

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \quad (5.1)$$

**Παρατήρησις :** Ἡ ἰσότης ἀληθεύει τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν :  $ab \geq 0$  (διατί ;).

Ὅθεν μία πολὺ χρήσιμος πρότασις εἶναι ἡ ἐξῆς :

$$|a + b| = |a| + |b| \iff ab \geq 0. \quad (5.2)$$

**Πόρισμα Iον.**—Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μικροτέρα ἢ ἰση τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπολύτων τιμῶν των,

ἥτοι :

$$|a - b| \leq |a| + |b| \quad (5.3)$$

Πράγματι, ἐὰν εἰς τὴν (5.1) θέσωμεν ἀντὶ  $\beta$  τὸ  $-\beta$ , θὰ ἔχωμεν :

$$|a - b| \leq |a| + |-\beta| = |a| + |b|.$$

Τὸ ἴσον ἰσχύει τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν :  $ab \leq 0$  (διατί ;).

Ὅθεν ἰσχύει ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία :

$$|a - b| = |a| + |b| \iff ab \leq 0. \quad (5.4)$$

**Πόρισμα Iον.**—Ἐὰν  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , τότε διὰ κάθε  $n \in \mathbb{N}$  μὲ  $n \geq 2$  ἰσχύει :

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

Ἡ ἀπόδειξις εὐκόλος διὰ τῆς μαθηματικῆς (τελείας) ἐπαγωγῆς, γνωστοῦ ὄντος ὅτι διὰ  $n = 2$  ἰσχύει (§ 37).

**Ἐφαρμογή :** Ἐὰν  $|a| < \frac{\varepsilon}{2}$  καὶ  $|b| < \frac{\varepsilon}{2} \implies |a \pm b| < \varepsilon$ .

Πράγματι, δι' ἐφαρμογῆς τῶν (5.1) καὶ (5.3) ἔχομεν :

$$|a \pm b| \leq |a| + |b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ἀρα :

$$|a \pm b| < \varepsilon.$$

**§ 38. Ἰδιότης VI.** — Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερα ἢ ἴση τῆς διαφορᾶς τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἀριθμῶν καθ' οἷανδήποτε τάξιν.

ἦτοι :

$$\forall a, \beta \in \mathbb{R} \implies |a - \beta| \geq |a| - |\beta| \text{ καὶ } |a - \beta| \geq |\beta| - |a|$$

**Ἀπόδειξις :** Ἐπειδὴ  $\alpha = \alpha + \beta - \beta = \beta + (\alpha - \beta)$ , ἔχομεν κατὰ τὴν ιδιότητα V :

$$|\alpha| = |\beta + (\alpha - \beta)| \leq |\beta| + |\alpha - \beta|, \text{ ἔξ οὗ : } |\alpha - \beta| \geq |\alpha| - |\beta|. \quad (6.1)$$

Ὁμοίως :  $\beta = \beta + \alpha - \alpha = \alpha + (\beta - \alpha)$ . Ἄρα :

$$|\beta| = |\alpha + (\beta - \alpha)| \leq |\alpha| + |\beta - \alpha| = |\alpha| + |\alpha - \beta|, \text{ ἔξ οὗ : } |\alpha - \beta| \geq |\beta| - |\alpha|. \quad (6.2)$$

**Πόρισμα.** — Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερα ἢ ἴση τῆς διαφορᾶς τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἀριθμῶν καθ' οἷανδήποτε τάξιν.

ἦτοι :

$$\forall a, \beta \in \mathbb{R} \implies |a + \beta| \geq |a| - |\beta| \text{ καὶ } |a + \beta| \geq |\beta| - |a| \quad (6.3)$$

Πράγματι, ἀρκεῖ εἰς τὰς (6.1) καὶ (6.2) νὰ τεθῇ ἀντὶ  $\beta$  τὸ  $-\beta$ .

**§ 39. Ἰδιότης VII.** — Διὰ κάθε ζεύγος πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσχύει :

$$|a| - |\beta| \leq |a \pm \beta|$$

**Ἀπόδειξις.** Ἐκ τῶν (6.1), (6.2) καὶ (6.3) ἔχομεν :

$$\text{ἀφ' ενός : } |a| - |\beta| \leq |a \pm \beta| \quad (7.1)$$

$$\text{καὶ ἀφ' ἑτέρου : } |\beta| - |a| \leq |a \pm \beta| \text{ ἢ } -|a \pm \beta| \leq |a| - |\beta|. \quad (7.2)$$

Ἐκ τῶν (7.1) καὶ (7.2) συνάγομεν τὴν διπλὴν ἀνισότητα :

$$-|a \pm \beta| \leq |a| - |\beta| \leq |a \pm \beta|$$

ἢ ὅποια, κατὰ τὴν ιδιότητα IV, γράφεται :

$$||a| - |\beta|| \leq |a \pm \beta|. \quad (7.3)$$

Κατ' ἀκολουθίαν, βάσει καὶ τῆς ιδιότητος V, θὰ εἶναι :

$$\forall a, \beta \in \mathbb{R} \implies |a| - |\beta| \leq |a \pm \beta| \leq |a| + |\beta| \quad (7.4)$$

**Παρατήρησις.** Ἐκ τῶν ιδιοτήτων τῶν ἀποδειχθεισῶν εἰς τὰς προηγούμενας παραγράφους, μετὰ τῶν ἀντιστοιχῶν πορισμάτων, συνάγομεν ὅτι :

$$\forall a, \beta \in \mathbb{R} \implies |a| - |\beta| \leq |a| - |\beta| \leq |a \pm \beta| \leq |a| + |\beta| \quad (7.5)$$

**Ἀσκησις.** Ἐξετάσατε πότε εἰς τὰς σχέσεις (7.5) ἰσχύει τὸ ἴσον.

## Ἀπόλυτος τιμὴ γινομένου πραγματικῶν ἀριθμῶν.

**§ 40. Ἰδιότης VIII.** — Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ γινομένου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων.

Ἦτοι :

$$|a \cdot \beta| = |a| \cdot |\beta|$$

**Ἀπόδειξις.** Ὡς γνωστὸν (§ 35, πόρισμα 2ον) ἰσχύει :

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Ἀρα :

$$|a\beta| = \sqrt{(a\beta)^2} = \sqrt{a^2 \cdot \beta^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{\beta^2} = |a| \cdot |\beta|. \quad (8.1)$$

**Πόρισμα Ιον.** — Ἐὰν  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , τότε διὰ κάθε  $n \in \mathbb{N}$  μὲ  $n \geq 2$  ἰσχύει :

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_{n-1} \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot |a_3| \dots |a_{n-1}| \cdot |a_n| \quad (8.2)$$

Ἡ ἀπόδειξις εὐκολος διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, γνωστοῦ ὄντος ὅτι διὰ  $n = 2$  ἰσχύει (§ 40).

**Πόρισμα 2ον.** — Ἐὰν  $a \in \mathbb{R}$  καὶ  $n \in \mathbb{N}$  ἰσχύει πάντοτε :

$$|a^n| = |a|^n$$

Προφανῶς, ἀρκεῖ εἰς τὴν (8.2) νὰ τεθῇ :  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{n-1} = a_n = a$ .

## Ἀπόλυτος τιμὴ πηλίκου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν.

**§ 41. Ἰδιότης IX.** — Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πηλίκου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν.

Ἦτοι :

$$\left| \frac{a}{\beta} \right| = \frac{|a|}{|\beta|}, \quad \text{ἐνθα } \beta \neq 0.$$

**Ἀπόδειξις.** Προφανῶς, ἔχομεν :  $a = \frac{a}{\beta} \cdot \beta$  (ὑποτίθεται  $\beta \neq 0$ ) καὶ ἐπομένως κατὰ τὴν ιδιότητα VIII θὰ εἶναι :

$$|a| = \left| \frac{a}{\beta} \cdot \beta \right| = \left| \frac{a}{\beta} \right| \cdot |\beta|, \quad \text{ἐξ οὗ : } \frac{|a|}{|\beta|} = \left| \frac{a}{\beta} \right|.$$

Ὡστε :

$$\forall a, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0 \implies \left| \frac{a}{\beta} \right| = \frac{|a|}{|\beta|}$$

**Πόρισμα.** — Διὰ κάθε  $a \in \mathbb{R}$  μὲ  $a \neq 0$  καὶ  $k \in \mathbb{Z}$  ἰσχύει :

$$|a^k| = |a|^k.$$

## Παραδείγματα εφαρμογής των άνωτέρω ιδιοτήτων.

**Παράδειγμα 1ον :** Έάν  $\alpha < \beta$  δείξτε ότι η παράσταση :

$$A \equiv ||\alpha - x| + |\beta - x||$$

διατηρεί σταθερά τιμήν, όταν το  $x$  μεταβάλλεται μεταξύ των  $\alpha$  και  $\beta$ , δηλαδή  $\alpha < x < \beta$ .

**Απόδειξις :** Έπειδή  $\alpha < x < \beta$  έχουμε :

$$\begin{array}{l} \alpha - x < 0 \\ \beta - x > 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} |\alpha - x| = x - \alpha \\ |\beta - x| = \beta - x \end{array} \Rightarrow A \equiv |x - \alpha + \beta - x| = |\beta - \alpha| = \beta - \alpha$$

δηλ. η παράσταση  $A$  είναι ανεξάρτητος του  $x$ , έφ' όσον βεβαίως  $\alpha < x < \beta$ .

**Παρατήρησις :** Το αυτό ισχύει και όταν  $\alpha \leq x \leq \beta$ . Τί συμβαίνει διά  $x < \alpha$  ή  $x > \beta$ ;

**Παράδειγμα 2ον :** Έάν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , νά αποδειχθῇ ἡ ισοδυναμία :

$$||\alpha| - |\beta|| = |\alpha + \beta| \Leftrightarrow \alpha\beta < 0.$$

**Απόδειξις :** Έκ τῆς ισότητος  $||\alpha| - |\beta|| = |\alpha + \beta|$  λαμβάνομεν τήν :

$$(|\alpha| - |\beta|)^2 = (\alpha + \beta)^2 \quad \eta \quad (|\alpha| + |\beta|)^2 = (\alpha + \beta)^2$$

ἢ  $\alpha^2 - 2|\alpha||\beta| + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$  ἢ  $|\alpha\beta| = -\alpha\beta$ . Άρα :  $\alpha\beta < 0$ , καθόσον, έάν ἦτο  $\alpha\beta \geq 0$ , θά ἦτο, έξ όρισμοῦ,  $|\alpha\beta| = \alpha\beta$ .

**Άντιστρόφως :** Έάν  $\alpha\beta < 0 \Rightarrow |\alpha\beta| = -\alpha\beta$  ἢ  $|\alpha||\beta| = -\alpha\beta$

$$\eta \quad -2|\alpha||\beta| = 2\alpha\beta \quad \eta \quad \alpha^2 - 2|\alpha||\beta| + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\eta \quad |\alpha|^2 - 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 \quad \eta \quad (|\alpha| - |\beta|)^2 = (\alpha + \beta)^2.$$

$$\text{"Όθεν : } ||\alpha| - |\beta|| = |\alpha + \beta|.$$

**Παράδειγμα 3ον :** Έάν  $x \in \mathbb{R}$  μέ :  $-2 \leq x \leq 3$ , δείξτε ότι :

$$|x^2 + 4x - 2| \leq 23.$$

**Απόδειξις :** Έχομεν (Πορ. 2ον, § 37).

$$|x^2 + 4x - 2| \leq |x|^2 + 4|x| + 2.$$

$$\text{Τώρα έκ τῶν } -2 \leq x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \Rightarrow |x| \leq 3, \text{ έξ ἧς : } x^2 \leq 9.$$

$$\text{Συνεπῶς : } |x^2 + 4x - 2| \leq 9 + 12 + 2 = 23.$$

**Παράδειγμα 4ον :** Έάν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  καὶ  $\alpha^2 \neq \beta^2$ , δείξτε ότι :

$$\frac{|\alpha| - |\beta|}{||\alpha| - |\beta||} + \frac{||\alpha| - |\beta||}{|\alpha - \beta|} + \frac{|\alpha + \beta|}{|\alpha| + |\beta|} \leq 3.$$

**Αύσις :** Προφανῶς, ἡ  $\alpha^2 \neq \beta^2$  δίδει :  $|\alpha| \neq |\beta|$ , ὅθεν καὶ  $\alpha \neq \beta$ .

Έκ τῆς (7.5) § 39 έχομεν :

$$|\alpha| - |\beta| \leq ||\alpha| - |\beta||, \quad ||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta| \quad \text{καὶ} \quad |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

$$\text{"Οθεν: } \frac{|\alpha| - |\beta|}{||\alpha| - |\beta||} \leq 1, \quad \frac{||\alpha| - |\beta||}{|\alpha - \beta|} \leq 1, \quad \frac{|\alpha + \beta|}{|\alpha| + |\beta|} \leq 1$$

καί ἐξ αὐτῶν, διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη, λαμβάνομεν :

$$\frac{|\alpha| - |\beta|}{||\alpha| - |\beta||} + \frac{||\alpha| - |\beta||}{|\alpha - \beta|} + \frac{|\alpha + \beta|}{|\alpha| + |\beta|} \leq 3.$$

**Π α ρ α δ ε ι γ μ α 5ον :** Ἐὰν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \cdot \beta(\alpha + 2\beta) \neq 0$ , δείξτε ὅτι αἱ ἀνισότητες :

$$\left| \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} \right| < 1, \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 1, \quad \left| \frac{\alpha\beta + 2\alpha^2}{\alpha\beta + 2\beta^2} \right| < 1$$

εἶναι λογικῶς ἰσοδύναμοι, δηλαδή ἡ ἀλήθεια τῆς μιᾶς συνεπάγεται τὴν ἀλήθειαν τῶν ὑπολοίπων.

**Ἀ π ὅ δ ε ι ξ ι ς :** i). Ἐστω ὅτι ἀληθεύει ἡ πρώτη. Τότε ἔχομεν :

$$\left| \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} \right|^2 < 1 \quad \eta \quad 4\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 < \alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2 \quad \eta \quad 3\alpha^2 < 3\beta^2 \quad \eta \quad \alpha^2 < \beta^2,$$

ἐξ οὗ :  $|\alpha| < |\beta|$  καὶ ἐπειδὴ  $|\beta| > 0$ , ἔπεται  $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 1 \quad \eta \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 1$ , ἥτοι,

ἰσχύουσας τῆς πρώτης, ἰσχύει καὶ ἡ δευτέρα.

Ἦδη, ἐκ τῶν δύο πρώτων, διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη, λαμβάνομεν :

$$\frac{|2\alpha + \beta|}{|\alpha + 2\beta|} \cdot \frac{|\alpha|}{|\beta|} < 1 \quad \eta \quad \left| \frac{2\alpha^2 + \alpha\beta}{\alpha\beta + 2\beta^2} \right| < 1.$$

(ii). Ἐστω ὅτι ἀληθεύει ἡ δευτέρα. Τότε ἀκολουθοῦντες ἀντίθετον πορείαν φθάνομεν ἐκ τῆς δευτέρας εἰς τὴν πρώτην. Ἀκριβέστερον ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 1 \quad \eta \quad \alpha^2 < \beta^2 \quad \eta \quad 3\alpha^2 < 3\beta^2 \quad \eta \quad 4\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 < \alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2$$

$$\eta \quad (2\alpha + \beta)^2 < (\alpha + 2\beta)^2 \quad \eta \quad \left( \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} \right)^2 < 1, \quad \text{καὶ κατὰ τὴν § 35, πορ. 2ον,}$$

$$\text{ἔχομεν :} \quad \left| \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} \right| < 1.$$

Ἐντεῦθεν, ἐκ ταύτης καὶ τῆς  $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 1$ , διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη, λαμβάνομεν τὴν τρίτην.

(iii). Τέλος ἔστω ὅτι ἀληθεύει ἡ τρίτη. Τότε ἔχομεν :

$$\left| \frac{\alpha(\beta + 2\alpha)}{\beta(\alpha + 2\beta)} \right| < 1 \quad \eta \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \cdot \left| \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} \right| < 1.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἀνισότητος ἔπεται ὅτι θὰ ἰσχύῃ ἡ μία τοῦλάχιστον τῶν ἀνισοτήτων :

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 1 \quad \eta \quad \left| \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} \right| < 1.$$

Ἰσχύουσας δὲ τῆς μίας τῶν ἀνωτέρω ἀνισοτήτων, ἰσχύει, ὡς ἐδείχθη εἰς τὰς περιπτώσεις (i) καὶ (ii) καὶ ἡ ἄλλη.

Θὰ ἐξετάσωμεν κατωτέρω καὶ δύο εἰδικὰ παραδείγματα· προσέξατε τὴν ἀπόδειξιν :

**Π α ρ ά δ ε ι γ μ α β ο ν :** Διὰ τοῦ συμβόλου  $\max(a, \beta)$ , ἀντιστοίχως  $\min(a, \beta)$ , συμβολίζομεν τὸν μέγιστον (maximum), ἀντιστοίχως τὸν ἐλάχιστον (minimum), ἐκ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν  $a, \beta$ , τοὺς ὁποίους ὀρίζομεν οὕτω :

$$\max(a, \beta) \equiv \begin{cases} a, & \text{ἐὰν } a \geq \beta \\ \beta, & \text{ἐὰν } \beta > a \end{cases}, \quad \min(a, \beta) \equiv \begin{cases} a, & \text{ἐὰν } a < \beta \\ \beta, & \text{ἐὰν } \beta \leq a \end{cases}$$

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν νὰ εὗρεθῇ ἡ ἀναλυτικὴ ἔκφρασις τῶν  $\max(a, \beta)$  καὶ  $\min(a, \beta)$  συναρτήσῃ τῶν  $a$  καὶ  $\beta$  καὶ τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

**Λ ύ σ ι ς : I.** Ἐὰν  $\alpha \geq \beta$  ἔχομεν :

$$\max(\alpha, \beta) = \alpha = \frac{\alpha + \beta + (\alpha - \beta)}{2} = \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2} = \frac{\alpha + \beta + |\beta - \alpha|}{2}$$

$$\min(\alpha, \beta) = \beta = \frac{\alpha + \beta - (\alpha - \beta)}{2} = \frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2} = \frac{\alpha + \beta - |\beta - \alpha|}{2}.$$

**II.** Ἐὰν  $\alpha < \beta$  ἔχομεν :

$$\max(\alpha, \beta) = \beta = \frac{\alpha + \beta + (\beta - \alpha)}{2} = \frac{\alpha + \beta + |\beta - \alpha|}{2} = \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2}$$

$$\min(\alpha, \beta) = \alpha = \frac{\alpha + \beta - (\beta - \alpha)}{2} = \frac{\alpha + \beta - |\beta - \alpha|}{2} = \frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2}.$$

**Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 7 ο ν :** Ἐὰν  $\rho_1$  καὶ  $\rho_2$  εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου  $x^2 + \xi x + \eta$  καὶ ἰσχύουν :  $|\xi| = 2\eta$  καὶ  $\eta > 1$ ,

νὰ δεიχθῇ ὅτι :

$$\frac{1}{|\rho_1|} + \frac{1}{|\rho_2|} \geq 2.$$

**Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς :** Ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου εἶναι :

$$\xi^2 - 4\eta = 4\eta^2 - 4\eta = 4\eta(\eta - 1) > 0, \quad \text{διότι } \eta > 1,$$

ἄρα τὸ τριώνυμον ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, διὰ τὰς ὁποίας θὰ ἔχωμεν :

$$\rho_1 + \rho_2 = -\xi \quad (1)$$

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = \eta. \quad (2)$$

Διὰ διαιρέσεως τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} = -\frac{\xi}{\eta}. \quad (3)$$

Ἐκ τῆς (3), ἂν λάβωμεν τὰς ἀπολύτους τιμὰς ἀμφοτέρων τῶν μελῶν, ἔχομεν :

$$\left| \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \right| = \left| -\frac{\xi}{\eta} \right| \quad \eta \quad \frac{|\rho_1 + \rho_2|}{|\rho_1 \rho_2|} = \frac{|\xi|}{|\eta|} = \frac{|\xi|}{\eta}, \quad \text{διότι } \eta > 0.$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως  $|\xi| = 2\eta$ , θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{|\rho_1 + \rho_2|}{|\rho_1| \cdot |\rho_2|} = \frac{|\xi|}{\eta} = \frac{2\eta}{\eta} = 2. \quad (4)$$

Άλλά, (ιδιότης V, § 37) :  $|p_1| + |p_2| \geq |p_1 + p_2|$  όποτε, λόγω και της (4),

$$\text{έχουμε : } \frac{|p_1| + |p_2|}{|p_1| \cdot |p_2|} \geq \frac{|p_1 + p_2|}{|p_1| \cdot |p_2|} = 2,$$

$$\eta \quad \frac{1}{|p_1|} + \frac{1}{|p_2|} \geq 2.$$

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

35. Εάν  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ , να αποδειχθούν αι ισοδυναμίες :

$$1. \quad ||\alpha| - |\beta|| = |\alpha - \beta| \iff \alpha\beta \geq 0,$$

$$2. \quad \alpha|\beta| - \beta|\alpha| = 0 \iff |\alpha + \beta| \geq |\alpha - \beta|.$$

36. Εύρετε τās άκεραίας τιμές του  $x$  διὰ τās όποιās είναι :

$$1) \quad |x| < 3,2, \quad 2) \quad |x| > 1,8 \quad \text{και} \quad |x| \leq 5.$$

37. Εάν  $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ , να εύρεθῇ πότε ἡ παράστασις :

$$A \equiv |\alpha - x| + |\beta - x| + |\gamma - x| + |\delta - x|$$

διατηρεῖ σταθεράν τιμήν.

38. Δίδεται ἡ συνάρτησις  $f$  με τύπον :

$$f(x) = \frac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|}.$$

Νά αποδειχθῇ ότι :

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ἐὰν } |x| < 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{ἐὰν } |x| > 1. \end{cases}$$

39. Εάν  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$  με  $\alpha\beta\gamma \neq 0$ , να αποδειχθῇ ότι :

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{|\alpha| + |\beta|} + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{|\beta| + |\gamma|} + \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{|\gamma| + |\alpha|} \geq |\alpha + \beta + \gamma|.$$

40. Διὰ ποίās πραγματικός τιμές του  $x$  έχει νόημα πραγματικού άριθμού ἡ παράστασις :

$$y \equiv \sqrt[n]{\frac{x}{|x|} - \frac{\sqrt{x^2}}{x}} + \sqrt[n]{2 - |x| + 2x^2 - |x|^3}, \quad (n = \text{φυσικός άριθμός} > 1).$$

41. Εάν  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ , δείξατε ότι :  $\alpha|\beta| + \beta|\alpha| \leq \alpha\beta + |\alpha\beta|$ . Πότε ισχύει τὸ = ;

42. Εάν  $x, y \in \mathbf{R}$  με  $x < 0$  και  $y = |5 - 3x| - 2|x|$ , να αποδειχθῇ ότι :  $|x| - |y| \leq 5$ .

43. Εάν  $x, y \in \mathbf{R} - \{0\}$  και ισχύει :

$$\frac{|x|y| + y|x|}{|xy|} = 2,$$

να αποδειχθῇ ότι οι άριθμοι  $x$  και  $y$  είναι όμόσημοι.

44. Εάν  $x, y \in \mathbf{R}$ ,  $x \neq \pm y$ , να αποδειχθῇ ότι :  $\frac{|x|}{|x+y|} + \frac{|y|}{|x-y|} \geq 1$ .

45. Εάν  $x, y \in \mathbf{R}$  και  $2x + y + 4 = 0$ , να αποδειχθῇ ότι :  $|x| + |y| \geq 2$ .

46. Εάν  $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ , να αποδειχθῇ ότι :  $|\beta - \gamma| < |\alpha - \delta|$ .

47. Εάν οι συντελεστές της εξίσώσεως  $x^2 + \gamma x + \delta = 0$  πληροῦν τās σχέσεις :

$$|1 + \gamma + \delta| = |1 - \gamma + \delta| \quad \text{και} \quad |\gamma| > 1 + |\delta|,$$

δείξατε ότι ἡ ἐν λόγω εξίσωσις έχει ρίζας πραγματικές και άνίσους.

48. 'Εάν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$  με  $\gamma \neq 0$ , νά αποδειχθῇ ὅτι αἱ σχέσεις :

$$|\beta - \delta| < |\alpha - \gamma| \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad |\gamma| < |\beta| \quad (2)$$

συνεπάγονται τὴν :

$$\left| \frac{\delta}{\beta} \right| - \left| \frac{\alpha}{\gamma} \right| < 2.$$

49. 'Εάν  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  καὶ  $|\alpha| > 1$ , δείξατε ὅτι ἡ ἰσότης :  $\beta = \frac{\alpha}{1 - |\alpha|}$

συνεπάγεται τὰς :

$$|\beta| > 1 \quad \text{καὶ} \quad \alpha = \frac{\beta}{1 - |\beta|}.$$

50. 'Εάν  $x, y, z \in \mathbf{R}$ , δείξατε ὅτι :

$$|x + y - z| + |y + z - x| + |z + x - y| \geq |x| + |y| + |z|.$$

51. Δείξατε ὅτι :  $\max(0, 2x) - \min(0, 2x) = 2|x|$ .

52. Δείξατε ὅτι ἐξ ἐκάστης τῶν σχέσεων :

$$\left| \frac{2x+3y}{3x+2y} \right| < 1, \quad \left| \frac{y}{x} \right| < 1, \quad \left| \frac{2xy+3y^2}{2xy+3x^2} \right| < 1 \quad (x, y \in \mathbf{R}, x(3x+2y) \neq 0)$$

ἔπονται αἱ ἄλλαι δύο.

53. 'Εάν  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ , νά αποδειχθῇ ὅτι :  $\frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|}.$

54. 'Εάν οἱ  $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z \in \mathbf{R}$ , εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενὸς καὶ πληροῦν τὰς σχέσεις :

$$\alpha = \frac{x}{1 + |x| + |y| + |z|}, \quad \beta = \frac{y}{1 + |x| + |y| + |z|}, \quad \gamma = \frac{z}{1 + |x| + |y| + |z|}$$

νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ  $x, y, z$  συναρτήσῃ τῶν  $\alpha, \beta, \gamma$ .

55. 'Εάν  $x \in \mathbf{R}$  καὶ  $|2x + 9| = 3|x + 2|$ , νὰ ὑπολογισθῇ ἡ  $|x|$ .

56. Διὰ πᾶν ζεύγος τιμῶν τῶν  $x, y$  ἰσχύει ἡ ἰσότης :

$$|x^2 - 3y + 1| = |3y - x^2 - 1|.$$

57. 'Εάν  $x, y \in \mathbf{R}$  καὶ  $y\sqrt{x^2} - x\sqrt{y^2} + x|x - y|y = 0$ , δείξατε ὅτι :  $|x| = |y|$ .

58. 'Εάν  $\alpha^2 = \beta\gamma$  καὶ  $2|\beta + \gamma| + |\gamma| > 6 + \beta\gamma$ , νὰ δειχθῇ ὅτι θὰ εἶναι :

$$\eta \quad (|\gamma| < 2, |\beta| > 3) \quad \eta \quad (|\gamma| > 2, |\beta| < 3).$$

59. 'Εάν  $|x| > |y|$ , δείξατε ὅτι :

$$\frac{|x|}{|x + y|} + \frac{|y|}{|x - y|} + \frac{|x|}{|x| - |y|} - \frac{|y|}{||x| - |y||} \geq 2.$$

60. 'Εάν  $\gamma > 1, |\beta| = 2\gamma$ , δείξατε ὅτι αἱ ρίζαι  $x_1, x_2$  τῆς ἐξίσωσως  $x^2 - \beta x + \gamma = 0$  πληροῦν τὴν σχέσηιν :

$$\frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|} = 2.$$

61. 'Εάν  $\alpha$  καὶ  $\beta$  εἶναι ἀριθμοὶ θετικοί, νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| \leq \sqrt{|\alpha - \beta|}.$$

62. 'Εάν  $x \neq y$ , δείξατε ὅτι :

$$|\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 + y^2}| < |x - y|.$$

63. 'Εάν  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$  καὶ  $(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta) \neq 0$ , δείξατε ὅτι :

$$\frac{|\alpha|}{|\beta + \gamma|} + \frac{|\beta|}{|\gamma + \alpha|} + \frac{|\gamma|}{|\alpha + \beta|} \geq \frac{3}{2}.$$



64. Μεταξύ ποίων όρίων μεταβάλλεται ο λόγος  $\frac{\beta}{\alpha}$ , όταν διά τούς πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  ισχύη ή ανισότης :  $\left| \frac{\alpha + 2\beta}{2\alpha + \beta} \right| < 1$ .

65. 'Εάν  $\xi$  είναι ρίζα τής εξίσωσης  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $\alpha \neq 0$ , νά δειχθῇ ὅτι :

$$|\xi| < \frac{|\alpha| + |\beta| + |\gamma|}{|\alpha|}$$

66. 'Εάν  $\frac{|x| + 1}{x - 1} = \frac{y - 1}{|y| + 1}$ , νά αποδειχθῇ ὅτι :  $xy \geq 0$ , ( $x, y \in \mathbb{R}$ ).

67. Θεωροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν :  $x^2 - 2\alpha x + \beta = 0$  μὲ συντελεστὰς πραγματικούς ἀριθμούς καὶ ρίζας  $\rho_1, \rho_2$ . 'Εάν  $|\rho_2| \leq |\rho_1|$ , νά αποδειχθῇ ὅτι :  $|\alpha| + \sqrt{\alpha^2 + |\beta|} \leq (1 + \sqrt{2}) \cdot |\rho_1|$ .

68. 'Εάν  $|y - \varphi| < |x - \omega|$  καὶ  $|\omega| < |\varphi|$ , νά αποδειχθῇ ὅτι :

$$\left| \frac{y}{\varphi} \right| - \left| \frac{x}{\omega} \right| < 3, \quad (\text{ὑποτίθεται: } \omega, \varphi \neq 0).$$

69. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις  $\alpha x^2 + \beta xy - \gamma y^2 = 0$ . 'Εάν μεταξὺ τῶν ριζῶν  $x_1, x_2$  καὶ τῶν συντελεστῶν αὐτῆς ὑφίστανται αἱ σχέσεις :

$$\frac{|x_1 + x_2|}{|x_1 + x_2| + |x_1 x_2|} = |\alpha|, \quad 1 - |\alpha| = \frac{2}{|\beta|}, \quad \alpha\gamma = -6,$$

νά αποδειχθῇ ὅτι :

$$y = \pm \frac{1}{3}.$$

70. 'Εάν  $\xi$  εἶναι ρίζα τῆς ἐξίσωσης  $x^4 + \alpha x^2 + \beta = 0$  καὶ εἶναι  $|\xi| < 1$ , νά δειχθῇ ὅτι θὰ εἶναι πάντοτε :

$$\left| \alpha \xi^2 + \frac{\beta}{2} \right| < |\xi|^2 + \left| \frac{\beta}{2} \right|.$$

## ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΟΥΣ ΤΙΜΑΣ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ ΕΠΙΛΥΟΜΕΝΑΣ ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}$ .

Θὰ ἐκθέσωμεν κατωτέρω τὸν τρόπον ἐπιλύσεως, ἐντὸς τοῦ  $\mathbb{R}$ , μερικῶν μορφῶν ἐξισώσεων, εἰς τὰς ὁποίας ὑπεισέρχονται ἀπόλυτοὶ τιμαὶ πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὡς ἀγνώστων.

**§ 42. I. 'Επίλυσις τῆς ἐξίσωσης  $\alpha|x| + \beta = 0$ , μὲ  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  καὶ  $\alpha \neq 0$ .**

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

α'). 'Εστω  $x > 0$ , τότε (ἐξ ὁρισμοῦ) ἔχομεν  $|x| = x$  καὶ ἡ ἐξίσωσις γίνεται :

$$\alpha x + \beta = 0, \quad \text{ἐξ οὗ: } x = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

'Η τιμὴ αὕτη τοῦ  $x$  θὰ εἶναι δεκτὴ, ἐὰν ικανοποιῇ τὴν  $x > 0$ . Δηλαδή :

$$-\frac{\beta}{\alpha} > 0. \quad (1)$$

'Ενταῦθα, ἐὰν  $\alpha\beta > 0$ , δηλ. ἐὰν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ  $\alpha$  καὶ  $\beta$  εἶναι ὁμόσημοι, ἡ (1) δὲν ἀληθεύει καὶ ἐπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δὲν ἔχει λύσιν.

'Εὰν ὁμως  $\alpha\beta < 0$ , δηλ. οἱ  $\alpha$  καὶ  $\beta$  εἶναι ἐτερόσημοι, ἡ (1) ἀληθεύει καὶ ἐπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει λύσιν, τὴν  $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ .

β'). Έστω  $x < 0$ , τότε  $|x| = -x$  και η δοθείσα εξίσωση γίνεται :

$$-ax + \beta = 0, \text{ εξ ου } x = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Η τιμή αυτή του  $x$  θα είναι δεκτή, εάν πληροί την  $x < 0$ . Δηλαδή :

$$\frac{\beta}{\alpha} < 0. \quad (2)$$

Η (2), προφανώς, αληθεύει διὰ  $\alpha\beta < 0$ .

Ωστε, η εξίσωση  $\alpha|x| + \beta = 0$  είναι **αδύνατος**, η άλλως **εστερημένη λύσεως** ως προς  $x$ , όταν οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  είναι ομόσημοι, έχει δὲ αὕτη λύσεις  $x = -\frac{\beta}{\alpha}$  και  $x = \frac{\beta}{\alpha}$ , όταν οι  $\alpha$  και  $\beta$  είναι ετερόσημοι. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν λέγομεν ὅτι ἡ εξίσωση  $\alpha|x| + \beta = 0$  εἶναι **ισοδύναμος** πρὸς τὴν :

$$x^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

γ'). Εάν  $\beta = 0$ , ἔχομεν  $\alpha|x| = 0$ , καὶ συνεπῶς  $|x| = 0$ , ἐξ ου  $x = 0$ .

Τὰ ἀνωτέρω συνοψίζονται εἰς τὸν κάτωθι πίνακα :

| Πίναξ διερευνήσεως τῆς : $\alpha x  + \beta = 0$ |                                                               |
|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| $\alpha\beta > 0$                                | $\alpha x  + \beta = 0$ <b>αδύνατος</b>                       |
| $\alpha\beta < 0$                                | $\alpha x  + \beta = 0 \implies x = \pm \frac{\beta}{\alpha}$ |
| $\beta = 0$                                      | $\alpha x  + \beta = 0 \implies x = 0.$                       |

**Παράδειγμα 1ον :** Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ εξίσωση :  $2|x| - 3 = 0$ .

**Λύσις :** Ἐχομεν, ἐν προκειμένῳ,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = -3$  καὶ ἐπειδὴ  $\alpha\beta = -6 < 0$  ἡ εξίσωση  $2|x| - 3 = 0$  ἔχει τὰς λύσεις :  $x = \pm \frac{3}{2}$ .

**2ον :** Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ εξίσωση :  $4|x| = -7$ .

**Λύσις :** Ἡ εξίσωση γράφεται  $4|x| + 7 = 0$ . Ἐνταῦθα εἶναι  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 7$  καὶ ἐπειδὴ  $\alpha\beta = 28 > 0$ , ἡ δοθείσα εξίσωση εἶναι **αδύνατος**.

**§ 43. II. Ἐπίλυσις εξισώσεως τῆς μορφῆς :  $\alpha|x| + \beta x + \gamma = 0$  (1), μὲ  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$ .**

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις :

α'). Εάν  $x > 0$ , ἔχομεν ἐξ ὀρισμοῦ  $|x| = x$  καὶ ἡ δοθείσα εξίσωση γίνεται :

$$\alpha x + \beta x + \gamma = 0 \quad \eta \quad (\alpha + \beta)x = -\gamma. \quad (2)$$

Εάν  $\alpha + \beta \neq 0$ , ἡ (2) δίδει :  $x = -\frac{\gamma}{\alpha + \beta}$ .

Διὰ νὰ εἶναι δεκτὴ ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ  $x$ , πρέπει νὰ ἱκανοποιῇ τὴν  $x > 0$ .  
 Δηλαδή πρέπει :

$$-\frac{\gamma}{\alpha+\beta} > 0 \quad \eta \quad \frac{\gamma}{\alpha+\beta} < 0 \quad \eta \quad \gamma(\alpha+\beta) < 0.$$

Ἐὰν  $\alpha+\beta=0$ , ἡ (2) γίνεται  $0x=-\gamma$ . Ἐπειδὴ δὲ  $\gamma \neq 0$ , αὕτη εἶναι ἀδύνατος. Συνεπῶς καὶ ἡ (1) εἶναι ἀδύνατος.

β'). Ἐὰν  $x < 0$ , τότε  $|x| = -x$  καὶ ἡ (1) γίνεται :

$$-ax + \beta x + \gamma = 0 \quad \eta \quad (\beta - \alpha)x = -\gamma \quad \eta \quad (\alpha - \beta)x = \gamma. \quad (3)$$

Ἐὰν  $\alpha - \beta \neq 0$ , ἡ (3) δίδει :  $x = \frac{\gamma}{\alpha - \beta}$ .

Διὰ νὰ εἶναι ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ  $x$  δεκτὴ, πρέπει νὰ ἱκανοποιῇ τὴν  $x < 0$ .

Δηλαδή :  $\frac{\gamma}{\alpha - \beta} < 0$ , ἐξ οὗ :  $\gamma(\alpha - \beta) < 0$ .

Ἐὰν  $\alpha - \beta = 0$ , δηλ.  $\alpha = \beta$ , ἡ (3) εἶναι ἀδύνατος, ἐφ' ὅσον  $\gamma \neq 0$ . Κατ' ἀκολουθίαν καὶ ἡ (1) εἶναι ἀδύνατος.

γ'). Ἐὰν  $x = 0$ , τότε ἡ (1) γίνεται  $\gamma = 0$  καὶ ἐφ' ὅσον  $\gamma \neq 0$ , ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα :

| Πίναξ διερευνήσεως τῆς : $a x  + \beta x + \gamma = 0$ |                                                                          |
|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $\gamma(\alpha+\beta) < 0$                             | $a x  + \beta x + \gamma = 0 \implies x = -\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$  |
| $\alpha + \beta = 0$                                   | ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος.                                           |
| $\gamma(\alpha - \beta) < 0$                           | $a x  + \beta x + \gamma = 0 \implies x = \frac{\gamma}{\alpha - \beta}$ |
| $\alpha - \beta = 0$                                   | ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος.                                           |

**Σημείωσις :** Διὰ  $\beta = 0$  ἔχομεν τὴν μορφήν I (§ 42).

**Ἀσκήσις :** Ἐξετάσατε τὰς κάτωθι ἰδιαιτέρας περιπτώσεις :

(i).  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ , (ii).  $\alpha = \pm 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ .

**Παραδείγματα :** 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :  $3|x| + 2x - 4 = 0$ .

**Λύσις :** Λαμβάνοντες τὰς ἐκφράσεις  $\alpha + \beta$ ,  $\gamma(\alpha + \beta)$ , παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\alpha + \beta = 3 + 2 = 5 \neq 0 \quad \text{καὶ} \quad \gamma(\alpha + \beta) = -4 \times 5 = -20 < 0.$$

Πληροῦνται ὅθεν αἱ συνθήκαι τῆς περιπτώσεως α') καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ δοθεῖσα

ἐξίσωσις ἐπιδέχεται ὡς λύσιν τὴν :  $x = -\frac{\gamma}{\alpha + \beta} = \frac{4}{5}$ .

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ  $\alpha - \beta = 3 - 2 = 1 \neq 0$  καὶ  $\gamma(\alpha - \beta) = -4 \times 1 = -4 < 0$ ,

ή δοθείσα εξίσωσις επιδέχεται ως (άρνητικήν) ρίζαν τήν :

$$x = \frac{\gamma}{\alpha - \beta} = \frac{-4}{1} = -4.$$

**2ον :** Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :  $|x| + x + 2 = 0$ . (ε)

**Λύσις :** Ἐστω  $x > 0$ , τότε  $|x| = x$  καὶ ἡ (ε) γίνεται :

$$x + x + 2 = 0 \quad \text{ἢ} \quad 2x = -2, \quad \text{ἐξ οὗ} : x = -1.$$

Ἐπειδὴ ὅμως ὑπετέθη  $x > 0$ , ἡ τιμὴ  $x = -1$  ἀπορρίπτεται.

Ἐστω τώρα  $x < 0$ , τότε  $|x| = -x$  καὶ ἡ (ε) δίδει :  $-x + x + 2 = 0$ , δηλ.  $2 = 0$  (ἀδύνατος).

Διὰ  $x = 0$  ἡ (ε) δίδει ἐπίσης  $2 = 0$  (ἀδύνατος).

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις  $|x| + x + 2 = 0$  δὲν ἔχει λύσιν.

Τοῦτο ἄλλωστε τὸ ἀνεμείναμεν, διότι ἐν προκειμένῳ ἔχομεν  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ , ὁπότε :  $\alpha - \beta = 1 - 1 = 0$  καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἐξίσωσις (ε) εἶναι ἀδύνατος.

**§ 44. III. Ἐπίλυσις ἐξισώσεως τῆς μορφῆς :  $\alpha x^2 + \beta |x| + \gamma = 0$  (1), ὅπου  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  καὶ  $\alpha \neq 0$ .**

Ἐπειδὴ διὰ κάθε  $x \in \mathbb{R}$  εἶναι :  $x^2 = |x|^2$ , ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :  $\alpha |x|^2 + \beta |x| + \gamma = 0$ , ἡ ὁποία εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς  $|x|$ .

Ἐὰν θέσωμεν  $|x| = y$ , ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0 \\ |x| = y, \end{cases}$$

ὑπὸ τὸν ὅρον ὅτι **μ ό ν ο ν** αἱ (πραγματικαὶ) μὴ ἀρνητικαὶ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως ὡς πρὸς  $y$  μᾶς παρέχουν τὰς ρίζας τῆς δοθείσης. Ἐπομένως ἡ (1) θὰ ἔχη λύσιν, ἐφ' ὅσον ἔχει, τοῦλάχιστον, μίαν ρίζαν πραγματικὴν μὴ ἀρνητικὴν ἡ ἐξίσωσις :

$$\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0. \quad (2)$$

Ἀναλυτικώτερον διακρίνομεν τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

**1η :** Ἐὰν  $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ , ἡ (2) ἔχει ρίζας μιγαδικὰς καὶ συνεπῶς ἡ (1) οὐδεμίαν λύσιν ἔχει.

**2α :** Ἐὰν  $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$ , ἡ (2) ἔχει τὴν διπλὴν ρίζαν  $y = -\frac{\beta}{2\alpha}$  καὶ συνεπῶς :

(i). Ἐὰν  $-\frac{\beta}{2\alpha} > 0$ , δηλ.  $\alpha\beta < 0$ , τότε ἡ (1) θὰ ἔχη ὡς ρίζας τὰς :

$$x_1 = -\frac{\beta}{2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad x_2 = \frac{\beta}{2\alpha}.$$

(ii). Ἐὰν  $-\frac{\beta}{2\alpha} < 0$ , δηλ.  $\alpha\beta > 0$ , τότε ἡ (1) οὐδεμίαν λύσιν ἔχει.

**3η :** Ἐὰν  $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ , ἡ (2) ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς, ὁπότε :

(i). Ἐὰν  $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$  καὶ  $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$ , ἀμφότεραι αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι θετικαὶ

καὶ ἐὰν καλέσωμεν αὐτὰς  $y_1$  καὶ  $y_2$ , τότε ἡ (1) θὰ ἔχη ὡς λύσεις, τὰς λύσεις τῶν ἐξισώσεων  $|x| = y_1$  καὶ  $|x| = y_2$ , ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν  $x = \pm y_1$  καὶ

$x = \pm y_2$ , ήτοι ή (1) θα έχει εις τήν περίπτωσιν ταύτην 4 ρίζας, τας :

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = -y_1, \quad x_3 = y_2, \quad x_4 = -y_2.$$

(ii). 'Εάν  $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$  και  $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$ , ἀμφότεραι αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι ἀρνητικαί, ὁπότε ή (1) οὐδεμίαν λύσιν ἔχει (ἐν  $\mathbb{R}$ ).

(iii). 'Εάν  $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$ , ή (2) ἔχει δύο ρίζας ἑτεροσήμους, ἔστω τὰς  $y_1 < 0 < y_2$ , ὁπότε ή (1) θα ἔχη ὡς λύσεις, τὰς λύσεις τῆς  $|x| = y_2$ , ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν :

$$x_1 = y_2, \quad x_2 = -y_2.$$

Συνοψίζοντες τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν τὸν κάτωθι πίνακα :

| Πίναξ διερευνήσεως τῆς : $ax^2 + \beta x  + \gamma = 0$ |                                                        |                                                                  | (1)                                            |
|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| $\beta^2 - 4a\gamma < 0$                                | ή εξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος ἐντὸς τοῦ $\mathbb{R}$ . |                                                                  |                                                |
| $\beta^2 - 4a\gamma = 0$                                | $-\frac{\beta}{2a} > 0$                                | $ax^2 + \beta x  + \gamma = 0 \implies x = \pm \frac{\beta}{2a}$ |                                                |
|                                                         | $-\frac{\beta}{2a} < 0$                                | ή εξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος.                                   |                                                |
| $\beta^2 - 4a\gamma > 0$                                | $\frac{\gamma}{a} > 0$                                 | $-\frac{\beta}{a} > 0$                                           | ή $ax^2 + \beta x  + \gamma = 0$ ἔχει 4 ρίζας. |
|                                                         | $\frac{\gamma}{a} > 0$                                 | $-\frac{\beta}{a} < 0$                                           | ή εξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος.                 |
|                                                         | $\frac{\gamma}{a} < 0$                                 |                                                                  | ή $ax^2 + \beta x  + \gamma = 0$ ἔχει 2 ρίζας. |

Μερικὴ περίπτωσις : 'Εάν  $\gamma = 0$ , ἔχομεν τὴν εξίσωσιν :

$$\alpha|x|^2 + \beta|x| = 0 \quad \eta \quad |x| \cdot (\alpha|x| + \beta) = 0, \quad \text{ὁπότε :$$

$$\eta \quad |x| = 0, \quad \text{ἐκ τῆς ὁποίας } x = 0.$$

$$\eta \quad \alpha|x| + \beta = 0, \quad \text{ή ὁποία ἔχει ἤδη μελετηθῇ εἰς τὴν § 42.}$$

**Παράδειγμα :** 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ  $\mathbb{R}$ , ή εξίσωσις :

$$x^2 - 5|x| + 6 = 0.$$

**Λύσις :** 'Η δοθεῖσα εξίσωσις γράφεται :  $|x|^2 - 5|x| + 6 = 0$ . (1)

Θέτομεν  $|x| = y$  ( $y > 0$ ) και ή (1) γίνεται :

$$y^2 - 5y + 6 = 0.$$

Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι  $y_1 = 2$  και  $y_2 = 3$ . Ἀρα  $|x| = 2$  και  $|x| = 3$ , ἐκ τῶν ὁποίων ἔχομεν :  $x = \pm 2$  και  $x = \pm 3$ .

Ὡστε, αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης εξισώσεως εἶναι :

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = -3.$$

2ον : Να επιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :  $x^2 - 4|x| - 12 = 0$ . (2)

Λύσις : Ἐπειδὴ εἶναι  $x^2 = |x|^2$ , θέτοντες  $|x| = y$  ( $y > 0$ ) ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$y^2 - 4y - 12 = 0,$$

ἀπὸ τὴν ὁποῖαν λαμβάνομεν  $y = 6$  καὶ  $y = -2$ . Ἄρα θὰ εἶναι :

$$|x| = 6 \quad (3) \quad \text{καὶ} \quad |x| = -2 \quad (4)$$

Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν :  $x = \pm 6$ .

Ἡ (4) εἶναι ἀδύνατος.

Ἐπομένως, αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι :  $x_1 = 6$  καὶ  $x_2 = -6$ .

Παρατήρησις : Ἀναλόγως ἐργαζόμεθα διὰ τὴν ἐπίλυσιν, ἐντὸς τοῦ  $\mathbb{R}$ , ἐξισώσεων τῆς μορφῆς :  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma |x| + \delta = 0$ .

Παράδειγμα : Να επιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :  $x^2 - 3x + 2|x| - 6 = 0$ . (1)

Λύσις : Διὰ  $x = 0$  ἡ (1) εἶναι ἀδύνατος.

Ἐστω  $x > 0$ , τότε  $|x| = x$  καὶ ἡ (1) γίνεταί :

$x^2 - 3x + 2x - 6 = 0$  ἢ  $x^2 - x - 6 = 0$ , ἡ ὁποία ἔχει ρίζας τὰς :  
 $x = 3$  καὶ  $x = -2$ . Ἐξ αὐτῶν δεκτὴ εἶναι μόνον ἡ θετικὴ.

Ἐστω τώρα  $x < 0$ , τότε  $|x| = -x$  καὶ ἡ (1) γίνεταί :

$$x^2 - 3x - 2x - 6 = 0 \quad \text{ἢ} \quad x^2 - 5x - 6 = 0.$$

Αὕτη ἔχει ρίζας τὰς :  $x = 6$  καὶ  $x = -1$ .

Ἐξ αὐτῶν δεκτὴ εἶναι μόνον ἡ  $x = -1$ , ὡς πληροῦσα τὴν συνθήκην :  $x < 0$ .

Ὡστε, αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι :  $x = 3$  καὶ  $x = -1$ .

**§ 45. IV. Ἐπίλυσις ἐξισώσεως τῆς μορφῆς :  $|A(x)| + |B(x)| + \dots + |P(x)| + Q(x) = 0$  (1), ὅπου  $A(x), B(x), \dots, P(x), Q(x)$  ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ  $x$  μὲ πραγματικοὺς συντελεστές.** — Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν πραγματικῶν λύσεων τῆς (1) ἐξετάζομεν τὰ πρόσημα τῶν  $A(x), B(x), \dots, P(x)$ , ἢτοι τῶν παραστάσεων, αἱ ὁποῖαι εὐρίσκονται ἐντὸς τοῦ συμβόλου τῆς ἀπολύτου τιμῆς, διὰ τὰς διαφόρους πραγματικὰς τιμὰς τοῦ  $x$  καὶ βάσει τῶν προσήμων τούτων ἐξαλείφομεν τὰ ἀπόλυτα, δηλαδὴ ἀντικαθιστῶμεν τὰς παραστάσεις μὲ ἀπολύτους τιμὰς, διὰ τῶν ἴσων των, κατὰ τὸν ὀρισμὸν, ἄνευ ἀπολύτων, εὐρίσκοντες οὕτως εἰς ἕκαστον διάστημα τιμῶν τοῦ  $x$  καὶ μίαν, ἄνευ ἀπολύτων τιμῶν, ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν πρὸς τὴν (1). Αἱ λύσεις τῶν ἐξισώσεων τούτων, ἐφ' ὅσον εὐρίσκονται ἐκάστοτε εἰς τὸ ἀντίστοιχον διάστημα μεταβολῆς τοῦ  $x$ , εἶναι δεκταὶ ὡς λύσεις διὰ τὴν (1), ἄλλως ἀπορρίπτονται.

Παραθέτομεν κατωτέρω μερικὰ παραδείγματα ἐπιλύσεως ἐξισώσεων τῆς μορφῆς (IV) πρὸς πλήρη κατανόησιν τοῦ θέματος.

Παράδειγμα 1ον : Να επιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ  $\mathbb{R}$ , ἡ ἐξίσωσις :

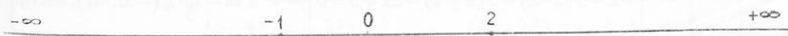
$$-2x + |x| - 3|x - 2| + 5|x + 1| = -5. \quad (1)$$

Λύσις : Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$|x| - 3|x - 2| + 5|x + 1| - 2x + 5 = 0. \quad (2)$$

Αἱ τιμαὶ τοῦ  $x$ , αἱ ὁποῖαι μηδενίζουν ἐκάστην παράστασιν εὐρισκομένην ἐντὸς τοῦ συμβόλου τῆς ἀπολύτου τιμῆς εἶναι κατὰ σειράν :  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $x = -1$ .

Τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ  $x$  τοποθετοῦμεν ἐπὶ ἄξονος κατὰ τάξιν αὐξοντος μεγέθους, ὡς κάτωθι φαίνεται :



Διακρίνομεν ἤδη τὰς ἀκολουθοῦσας περιπτώσεις :

α'). Ἐάν  $-\infty < x < -1$ , τότε θὰ εἶναι :

$$\begin{array}{l} x+1 < 0 \\ x < 0 \\ x-2 < 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} |x+1| = -x-1 \\ |x| = -x \\ |x-2| = -x+2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{καὶ ἡ (2) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα :} \\ -x-3(-x+2)+5(-x-1)-2x+5=0 \\ x < -1 \end{array} \right\} (\Sigma_1).$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος δίδει :  $x = -\frac{6}{5}$  (δεκτὴ), ὡς πληροῦσα τήν :  $x < -1$ .

β'). Ἐάν  $-1 \leq x < 0$ , θὰ εἶναι :

$$\begin{array}{l} x+1 \geq 0 \\ x < 0 \\ x-2 < 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} |x+1| = x+1 \\ |x| = -x \\ |x-2| = -x+2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{καὶ ἡ (2) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα :} \\ -x-3(-x+2)+5(x+1)-2x+5=0 \\ -1 \leq x < 0. \end{array} \right\} (\Sigma_2).$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος δίδει :  $x = -\frac{4}{5}$  (δεκτὴ), ὡς πληροῦσα τήν :  $-1 \leq x < 0$ .

γ'). Ἐάν  $0 \leq x < 2$ , τότε :

$$\begin{array}{l} x+1 > 0 \\ x \geq 0 \\ x-2 < 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} |x+1| = x+1 \\ |x| = x \\ |x-2| = -x+2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{καὶ ἡ (2) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα :} \\ x-3(-x+2)+5(x+1)-2x+5=0 \\ 0 \leq x < 2. \end{array} \right\} (\Sigma_3).$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος δίδει :  $x = -\frac{4}{7}$  (ἀπορρίπτεται), ὡς μὴ πληροῦσα τήν :  $0 \leq x < 2$ .

δ'). Ἐάν  $2 \leq x < +\infty$ , θὰ εἶναι :

$$\begin{array}{l} x+1 > 0 \\ x > 0 \\ x-2 \geq 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} |x+1| = x+1 \\ |x| = x \\ |x-2| = x-2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{καὶ ἡ (2) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα :} \\ x-3(x-2)+5(x+1)-2x+5=0 \\ 2 \leq x. \end{array} \right\} (\Sigma_4).$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος δίδει :  $x = -16$  (ἀπορρίπτεται), ὡς μὴ πληροῦσα τήν :  $2 \leq x < +\infty$ .

Ὡστε, αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι :  $x = -\frac{6}{5}$  καὶ  $x = -\frac{4}{5}$ .

**Παρατήρησις :** Πρὸς ταχυτέραν εὑρεσιν τῶν πραγματικῶν λύσεων τῆς (1) σχηματίζομεν τὸν εἰς τὴν ἐπομένην σελίδα πίνακα, εἰς τὸν ὁποῖον σημειοῦμεν τὰ πρόσημα τῶν ἐντὸς τοῦ συμβόλου τῆς ἀπολύτου τιμῆς παραστάσεων εἰς τὰ ἐκάστοτε διαστήματα τῶν τιμῶν τοῦ  $x$ , καθὼς ἐπίσης ἀναγράφομεν καὶ τὰς ἀντιστοίχους εἰς αὐτὰ ἰσοδυνάμους πρὸς τὴν (1) ἐξισώσεις :

| x         | x-2 | x | x+1 | $ x-3  \cdot  x-2  + 5 x+1  - 2x + 5 = 0$ | Συμπεράσματα                                              |
|-----------|-----|---|-----|-------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| $-\infty$ | -   | - | -   | $-x + 3(x-2) - 5(x+1) - 2x + 5 = 0$       | $\Rightarrow x = -\frac{6}{5} \in (-\infty, -1)$ , δεκτή. |
| -1        | -   | - | 0   | $-x + 3(x-2) - 5(x+1) - 2x + 5 = 0$       | $\Rightarrow x = -\frac{4}{5} \in [-1, 0)$ , δεκτή.       |
| 0         | -   | 0 | +   | $-x + 3(x-2) - 5(x+1) - 2x + 5 = 0$       | $\Rightarrow x = -\frac{4}{5} \notin [0, 2)$ , απορριπτ.  |
| 2         | 0   | + | +   | $-x + 3(x-2) - 5(x+1) - 2x + 5 = 0$       | $\Rightarrow x = -\frac{4}{5} \notin [0, 2)$ , απορριπτ.  |
| $+\infty$ | +   | + | +   | $x - 3(x-2) + 5(x+1) - 2x + 5 = 0$        | $\Rightarrow x = -16 \notin [2, +\infty)$ , απορρ.        |

**Παράδειγμα 2ον :** Να εύρεθούν αι πραγματικοί λύσεις της εξίσωσης :  
 $|x^2 - 5x + 6| - 2|x - 1| + 2x - 3 = 0$ .

**Λύσεις :** Θέτομεν :

$$A \equiv x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3), \text{ τότε: } \frac{x}{A} \begin{array}{c} -\infty \\ + \\ 2 \\ - \\ 3 \\ + \\ +\infty \end{array}$$

$$\text{καί } B \equiv x - 1, \text{ τότε: } \frac{x}{B} \begin{array}{c} -\infty \\ - \\ 1 \\ + \\ +\infty \end{array}$$

Ήδη σχηματίζομεν, ως καί προηγουμένως, τὸν ἀκόλουθον πίνακα :

| x         | A | B | $ x^2 - 5x + 6  - 2 x - 1  + 2x - 3 = 0$ | Συμπεράσματα                                                                                                    |
|-----------|---|---|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $-\infty$ | + | - | $x^2 - 5x + 6 + 2(x-1) + 2x - 3 = 0$     | Ρίζαι μιγαδικαί (ἀπορρίπτονται).                                                                                |
| 1         | + | 0 | $x^2 - 5x + 6 + 2(x-1) + 2x - 3 = 0$     | $\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$ , δεκτή μόνον ἡ :<br>$x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \in [1, 2]$ .       |
| 2         | 0 | + | $-(x^2 - 5x + 6) - 2(x-1) + 2x - 3 = 0$  | Ρίζαι μιγαδικαί (ἀπορρίπτονται).                                                                                |
| 3         | - | + | $-(x^2 - 5x + 6) - 2(x-1) + 2x - 3 = 0$  | Ρίζαι μιγαδικαί (ἀπορρίπτονται).                                                                                |
| $+\infty$ | + | + | $x^2 - 5x + 6 - 2(x-1) + 2x - 3 = 0$     | $\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$ , δεκτή μόνον ἡ :<br>$x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \in [3, +\infty)$ . |

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος καθίσταται φανερόν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ὡς μόνως πραγματικὰς ρίζας ἔχει τὰς :  $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

**Παράδειγμα 3ον :** Να ἐπιλυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$|2x - |2x - 1|| = -\lambda^2 x. \quad (1)$$

**Λύσεις :** Ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος εἶναι θετικὸν ἢ μηδέν, διὰ νὰ ἰσχύῃ ἡ (1) θὰ πρέπει νὰ εἶναι  $x \leq 0$ . Τούτου τεθέντος, ἐπεταὶ ὅτι :

$$2x \leq 0 \text{ ἢ } 2x - 1 \leq -1 \text{ ἢ } 2x - 1 < 0, \text{ ἄρα } |2x - 1| = -2x + 1 \text{ καὶ ἡ (1) γίνεται :}$$

$$|2x - (1 - 2x)| = -\lambda^2 x \text{ ἢ } |4x - 1| = -\lambda^2 x. \quad (2)$$



Επειδή  $x \leq 0$ , έπεται  $4x - 1 < 0$ , άρα  $|4x - 1| = 1 - 4x$  και ή (2) γίνεται :

$$1 - 4x = -\lambda^2 x.$$

Επομένως ή δοθείσα εξίσωσις είναι ισοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα :

$$\left. \begin{array}{l} 1 - 4x = -\lambda^2 x \\ x \leq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (4 - \lambda^2) x = 1 \\ x \leq 0 \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Διακρίνομεν τώρα τὰς ἐξῆς περιπτώσεις :

α'). Εάν  $\lambda = \pm 2$ , ή εξίσωσις τοῦ συστήματος (3) γίνεται :  $0 \cdot x = 1$ , και είναι αδύνατος, διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ  $x$ . Ἄρα και ή εξίσωσις (1) είναι αδύνατος.

β'). Εάν  $\lambda \neq \pm 2$ , ή εξίσωσις τοῦ συστήματος (3) δίδει :

$$x = \frac{1}{4 - \lambda^2}.$$

Ἡ τιμή αὕτη πρέπει νὰ πληροί τὴν  $x \leq 0$ . Δηλαδή πρέπει :

$$\frac{1}{4 - \lambda^2} \leq 0 \quad \eta \quad 4 - \lambda^2 \leq 0 \quad \eta \quad \lambda^2 \geq 4 \quad \eta \quad \lambda^2 - 4 \geq 0 \quad \eta \quad (\lambda + 2)(\lambda - 2) \geq 0.$$

Ἐκ ταύτης έπεται ὅτι :  $\lambda \leq -2$  και  $\lambda \geq 2$ . Ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη  $\lambda \neq \pm 2$ , έπεται ὅτι :

$$\lambda < -2 \quad \text{και} \quad \lambda > 2.$$

Ὡστε, ή δοθείσα εξίσωσις (1) ἔχει λύσιν μόνον, ὅταν :

$$\lambda < -2 \quad \text{και} \quad \lambda > 2.$$

## ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΟΥΣ ΤΙΜΑΣ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ

**§ 46.** Διὰ τὴν επίλυσιν, ἐντὸς τοῦ  $\mathbf{R}$ , ἀνισώσεων μὲ ἀπολύτους τιμὰς τοῦ ἀγνώστου, ἐργαζόμεθα ἐκάστοτε κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὸν τρόπον ἐπιλύσεως εξισώσεων τῆς ἀντιστοίχου μορφῆς, ὡς ἐξετέθησαν εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους (§§ 42, 43, 44, 45).

Ὅπως εἰς τὰς εξισώσεις μὲ ἀπολύτους τιμὰς τοῦ ἀγνώστου, οὕτω και εἰς τὰς ἀνισώσεις εὐρίσκομεν εἰς ἕκαστον διάστημα μεταβολῆς τοῦ ἀγνώστου και μίαν, ἄνευ ἀπολύτων τιμῶν, ισοδύναμον ἀνίσωσιν πρὸς τὴν δοθείσαν. Αἱ τομαὶ τῶν διαστημάτων (λύσεων) ἐκάστης ισοδυνάμου ἀνισώσεως μετὰ τοῦ ἀντιστοίχου διαστήματος τιμῶν τοῦ ἀγνώστου, ἀποτελοῦν τὰς λύσεις τῆς δοθείσης ἀνισώσεως.

Πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τοῦ θέματος παραθέτομεν κατωτέρω μερικὰ παραδείγματα ἐπιλύσεως ἀνισώσεων διαφόρων μορφῶν.

**Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1 ο ν :** Νὰ ἐπιλυθῇ ή ἀνίσωσις :  $\frac{|x| - 5}{3} > \frac{x - 8}{4}$  (1)

**Λ ύ σ ι ς :** α). Εάν  $x \geq 0$ , τότε  $|x| = x$  και ή (1) ισοδυναμεῖ με τὸ σύστημα :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x - 5}{3} - \frac{x - 8}{4} > 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x > -4 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \text{συμβιβασταί.}$$

Ἄρα :  $x \geq 0$ . (2)

β). Έάν  $x < 0$ , τότε  $|x| = -x$  και ή (1) ισοδυναμεί με τὸ σύστημα :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{-x-5}{3} - \frac{x-8}{4} > 0 \\ x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -7x > -4 \\ x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x < \frac{4}{7} \\ x < 0 \end{array} \right\} \text{συμβιβασταί.}$$

Άρα :

$$x < 0.$$

(3)

Έκ τῶν (2) καὶ (3) συνάγομεν ὅτι ή (1) ἀληθεύει διὰ κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 2 ο ν :** Διὰ ποίας πραγματικὰς τιμὰς τοῦ  $x$  ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ή παράστασις :  $\sqrt{3x^2 - 10|x| + 3}$ . (1)

**Λ ύ σ ι ς :** Διὰ νὰ ἔχη νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ή παράστασις πρέπει :

$$\begin{aligned} 3x^2 - 10|x| + 3 &\geq 0, \text{ ή ἔπειδὴ } x^2 = |x|^2 \\ 3|x|^2 - 10|x| + 3 &\geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Θέτοντες  $|x| = y$  ( $y \geq 0$ ), ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὴν (2) σύστημα :

$$\left. \begin{array}{l} 3y^2 - 10y + 3 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3(y-3)\left(y - \frac{1}{3}\right) \geq 0$$

$$y \geq 0.$$

Τὸ ὡς ἄνω σύστημα πληροῦται διὰ :  $y \geq 3$  καὶ  $0 \leq y \leq \frac{1}{3}$ .

Τότε ὁμως ἔχομεν :

$$|x| \geq 3 \quad \text{καὶ} \quad |x| \leq \frac{1}{3}.$$

Ἡ πρώτη γράφεται :  $x^2 \geq 9$  ή  $x^2 - 9 \geq 0$  ή  $(x-3)(x+3) \geq 0$   
καὶ ἀληθεύει διὰ :  $x \leq -3$  καὶ  $x \geq 3$ .

Ἡ δευτέρα, ὡς γνωστὸν (§ 36), εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν :  $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$ .

Ὅθεν, ή παράστασις  $\sqrt{3x^2 - 10|x| + 3}$  ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ διὰ τὰς ἑξῆς τιμὰς τοῦ  $x$  :

$$-\infty < x \leq -3, \quad -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}, \quad 3 \leq x < +\infty.$$

**Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 3 ο ν :** Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ  $\mathbb{R}$ , ή ἀνίσωσις :

$$|x+1| - 2|x| + |x-1| - \frac{2x+4}{5} > 0. \quad (1)$$

**Λ ύ σ ι ς :** Ἐργαζόμεθα κατὰ τρόπον ἀνάλογον μετὸν ἐκτεθέντα εἰς τὴν προηγούμενην παράγραφον :

Αἱ τιμαὶ τοῦ  $x$ , αἱ ὁποῖαι μηδενίζουν τὰς παραστάσεις τὰς ἐντὸς τοῦ συμβόλου τῆς ἀπολύτου τιμῆς, εἶναι κατὰ σειρὰν αἱ ἑξῆς :  $x = -1, 0, 1$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Θέτομεν : } A \equiv x+1 \\ B \equiv x \\ \Gamma \equiv x-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \frac{x}{A} \left| \begin{array}{c} -\infty \\ -1 \\ +\infty \end{array} \right. \begin{array}{c} - \\ + \\ + \end{array} \\ \frac{x}{B} \left| \begin{array}{c} -\infty \\ 0 \\ +\infty \end{array} \right. \begin{array}{c} - \\ + \\ + \end{array} \\ \frac{x}{\Gamma} \left| \begin{array}{c} -\infty \\ 1 \\ +\infty \end{array} \right. \begin{array}{c} - \\ + \\ + \end{array} \end{array}$$

Καταρτίζουμεν ακόλουθως τὸν κατωτέρω πίνακα, εἰς τὸν ὁποῖον σημειοῦμεν τὰ πρόσημα τῶν ἐντὸς τοῦ συμβόλου τῆς ἀπολύτου τιμῆς παραστάσεων εἰς τὰ ἑκάστοτε διαστήματα τῶν τιμῶν τοῦ  $x$ , ὡς ταῦτα καθορίζονται ὑπὸ τῶν εἰς τὴν προηγουμένην σελίδα πινακίων, καθὼς ἐπίσης ἀναγράφουμεν καὶ τὰς ἀντιστοίχους, εἰς τὰ ἑκάστοτε διαστήματα τιμῶν τοῦ  $x$ , ἰσοδυνάμους πρὸς τὴν (1) ἀνισώσεις.

| $x$       | A | B | Γ | $ x+1 -2 x + x-1 -\frac{2x+4}{5} > 0$ | Συμπεράσματα                                                                                               |
|-----------|---|---|---|---------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $-\infty$ | — | — | — | $-(x+1)+2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0$  | $\Rightarrow x < -2$ . *Αρα:<br>$x \in (-\infty, -2) \cap (-\infty, -1) = (-\infty, -2)$                   |
| -1        | 0 | — | — | $-(x+1)+2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0$  | $\Rightarrow x > -\frac{3}{4}$ . *Αρα:<br>$x \in (-\frac{3}{4}, +\infty) \cap [-1, 0) = (-\frac{3}{4}, 0)$ |
| 0         | + | — | — | $(x+1)+2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0$   | $\Rightarrow x < \frac{1}{2}$ . *Αρα:<br>$x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cap [0, 1) = [0, \frac{1}{2})$     |
| 1         | + | + | — | $(x+1)-2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0$   | $\Rightarrow x < -2$ . *Αρα:<br>$x \in (-\infty, -2) \cap [1, +\infty) = \emptyset$ .                      |
| $+\infty$ | + | + | + | $(x+1)-2x+(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0$   |                                                                                                            |

Λύσεις τῆς (1) θὰ εἶναι αἱ λύσεις τῶν κάτωθι συστημάτων :

$$\alpha'). \left. \begin{aligned} -(x+1)+2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0 \\ x < -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2x+4 < 0 \\ x < -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x < -2 \\ x < -1 \end{aligned} \right\} \text{συμβι-} \\ \text{βασταί.}$$

$$*Αρα: \quad -\infty < x < -2.$$

$$\beta'). \left. \begin{aligned} (x+1)+2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0 \\ -1 \leq x < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 8x+6 > 0 \\ -1 \leq x < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x > -\frac{3}{4} \\ -1 \leq x < 0 \end{aligned} \right\} \text{συμβι-} \\ \text{βασταί.}$$

$$*Αρα: \quad -\frac{3}{4} < x < 0.$$

$$\gamma'). \left. \begin{aligned} (x+1)-2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0 \\ 0 \leq x < 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 12x-6 < 0 \\ 0 \leq x < 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x < \frac{1}{2} \\ 0 \leq x < 1 \end{aligned} \right\} \text{συμβι-} \\ \text{βασταί.}$$

$$*Αρα: \quad 0 \leq x < \frac{1}{2}.$$

$$\delta'). \left. \begin{aligned} (x+1)-2x+(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0 \\ x \geq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2x+4 < 0 \\ x \geq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x < -2 \\ x \geq 1 \end{aligned} \right\} \text{ἀσυμβι-} \\ \text{βαστοί.}$$

Ωστε, ἡ δοθεῖσα ἀνίσωσις (1) ἀληθεύει διὰ :  $x < -2$  καὶ  $-\frac{3}{4} < x < \frac{1}{2}$ .

**Παράδειγμα 4ον :** Να επιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις :

$$||x| - 5| > ||3x| - 3|. \quad (1)$$

**Λύσις :** Ὑψοῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἔχομεν :

$$(|x| - 5)^2 > (3|x| - 3)^2 \quad \eta \quad (|x| - 5)^2 - (3|x| - 3)^2 > 0$$

$$\eta \quad (4|x| - 8)(-2|x| - 2) > 0 \quad \eta \quad 8(|x| - 2)(|x| + 1) < 0. \quad (2)$$

Ἀλλὰ  $|x| + 1 > 0$ , διὰ κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , κατὰ συνέπειαν ἐκ τῆς (2) ἔχομεν :

$$|x| - 2 < 0 \quad \eta \quad |x| < 2, \quad \text{ἐξ οὗ: } -2 < x < 2.$$

**Παράδειγμα 5ον :** Να δειχθῇ ὅτι διὰ κάθε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ  $x$ , ἰσχύει ἡ σχέσηις :

$$|x - 2| + |2x - 1| \geq \frac{3}{2}. \quad (1)$$

Δια ποίας τιμᾶς τοῦ  $x$  ἰσχύει ἡ ἰσότης :

**Λύσις :** Ἐργαζόμενοι, ὅπως καὶ εἰς τὸ παράδειγμα 3, ἔχομεν τὸν κάτωθι πίνακα μετὰ τῶν σχετικῶν συμπερασμάτων :

| $x$           | $x - 2$ | $2x - 1$ | $ x - 2  +  2x - 1  \geq \frac{3}{2}$  | Συμπέρασμα                  |
|---------------|---------|----------|----------------------------------------|-----------------------------|
| $-\infty$     | —       | —        | $-(x - 2) - (2x - 1) \geq \frac{3}{2}$ | $-\infty < x < \frac{1}{2}$ |
| $\frac{1}{2}$ | —       | 0        | $-(x - 2) + (2x - 1) \geq \frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2} \leq x < 2$    |
| 2             | 0       | +        | $(x - 2) + (2x - 1) \geq \frac{3}{2}$  | $2 \leq x < +\infty$        |
| $+\infty$     | +       | +        |                                        |                             |

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος συνάγομεν ὅτι ἡ σχέσηις (1) ἰσχύει διὰ κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Ἡ ἰσότης, ὡς εὐκόλως φαίνεται, ἰσχύει διὰ  $x = \frac{1}{2}$ .

## ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΟΥΣ ΤΙΜΑΣ ΤΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΕΠΙΛΥΟΜΕΝΑ ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}$ .

### § 47. I. Ἐπίλυσις συστήματος τῆς μορφῆς :

$$\left. \begin{aligned} \alpha|x| + \beta|y| &= \gamma \\ \alpha_1|x| + \beta_1|y| &= \gamma_1 \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

ὅπου  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  πραγματικοὶ ἀριθμοί, ἀνεξάρτητοι τῶν  $x, y$ .

Θέτομεν  $|x| = x_1, |y| = y_1$  καὶ τὸ σύστημα (1) λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\left. \begin{aligned} \alpha x_1 + \beta y_1 &= \gamma \\ \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 &= \gamma_1 \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Τὸ σύστημα (2), ὑποτιθεμένου ὅτι:  $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0$ , ἔχει λύσιν τήν:

$$x_1 = \frac{\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}, \quad y_1 = \frac{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}.$$

Ἐπειδὴ δι' οἰανδήποτε τιμὴν τῶν  $x$  καὶ  $y$  εἶναι  $|x| \geq 0$ ,  $|y| \geq 0$ , τὸ σύστημα (1) θὰ ἔχῃ λύσιν τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν:

$$\frac{\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} \geq 0, \quad \frac{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} \geq 0.$$

Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ταύτην αἱ λύσεις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι αἱ λύσεις τοῦ ζεύγους τῶν ἐξισώσεων:

$$|x| = \frac{\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}, \quad |y| = \frac{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta},$$

τὰς ὁποίας εὐρίσκομεν ὡς ἐξετέθη εἰς τὴν § 42.

**Παράδειγμα 1ον:** Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} 3|x| - 2|y| &= 10 \\ 5|x| + 3|y| &= 23 \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

**Λύσις:** Θέτομεν  $|x| = x_1$ ,  $|y| = y_1$  καὶ τὸ σύστημα (1) λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 - 2y_1 &= 10 \\ 5x_1 + 3y_1 &= 23 \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Λύοντες τοῦτο, ἔχομεν:  $x_1 = 4$ ,  $y_1 = 1$ .

Τότε αἱ λύσεις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι αἱ λύσεις τοῦ ζεύγους τῶν ἐξισώσεων:

$$\left. \begin{aligned} |x| &= 4 \\ |y| &= 1 \end{aligned} \right\}, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \begin{aligned} x &= \pm 4 \\ y &= \pm 1. \end{aligned}$$

Ὡστε, αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος (1) εἶναι τὰ ζεύγη:

$(x=4, y=1)$ ,  $(x=4, y=-1)$ ,  $(x=-4, y=1)$ ,  $(x=-4, y=-1)$ .

**Παράδειγμα 2ον:** Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:

$$\begin{aligned} |x| + |y| &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

**Λύσις:** Τὸ δοθὲν σύστημα γράφεται καὶ οὕτω:

$$\begin{aligned} |x| + |y| &= 1 \\ |x|^2 + |y|^2 &= 1. \end{aligned}$$

Τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύστημα:

$$\begin{aligned} |x| + |y| &= 1 \\ |x \cdot y| &= 0. \end{aligned}$$

Ἀπὸ τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν ἔχομεν:  $x=0$  ἢ  $y=0$ .

Διὰ  $x=0$  ἔχομεν ἓκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως τοῦ συστήματος  $|y|=1$ , ἐξ οὗ  $y = \pm 1$  καὶ διὰ  $y=0$  ἔχομεν  $|x|=1$ , ἐξ οὗ:  $x = \pm 1$ .

Ὡστε, αἱ λύσεις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι :

$$(x=0, y=1), (x=0, y=-1), (x=1, y=0), (x=-1, y=0).$$

#### § 48. II. Ἐπίλυσις συστήματος τῆς μορφῆς :

$$\left. \begin{aligned} \alpha |x| + \beta |y| + \gamma x + \delta y &= k \\ \alpha' |x| + \beta' |y| + \gamma' x + \delta' y &= k' \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

ὅπου οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων καὶ οἱ σταθεροὶ ὅροι εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί.

Διακρίνομεν τὰς ἐξῆς τέσσαρας περιπτώσεις :

α').  $x \geq 0, y \geq 0$ , ὁπότε  $|x| = x, |y| = y$  καὶ τὸ σύστημα (1) εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τό :

$$\left. \begin{aligned} (\alpha + \gamma) x + (\beta + \delta) y &= k \\ (\alpha' + \gamma') x + (\beta' + \delta') y &= k' \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Αἱ μὴ ἀρνητικαὶ λύσεις αὐτοῦ εἶναι λύσεις τοῦ δοθέντος συστήματος.

Συνεχίζομεν τὴν ἐπίλυσιν θεωροῦντες ἀκόμη τὰς περιπτώσεις :

$$\beta'). \quad x \geq 0, y < 0, \quad \gamma'). \quad x < 0, y \geq 0, \quad \delta'). \quad x < 0, y < 0.$$

**Παράδειγμα :** Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τοῦ συστήματος :

$$\begin{aligned} x |y| + y |x| &= -6 \\ |x| + 2 |y| + x + 2y &= 0. \end{aligned}$$

**Λύσις :** Ἐκ τῆς πρώτης παρατηροῦμεν ὅτι :  $x \neq 0$  καὶ  $y \neq 0$ .

Διακρίνομεν ἤδη τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

α'). Ἐὰν  $x > 0, y > 0$ , τότε ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων γίνεται :

$$xy + yx = -6 \quad \text{ἢ} \quad xy = -3, \text{ τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον, διότι } xy > 0.$$

β'). Ἐὰν  $x > 0, y < 0$ , τότε ἡ πρώτη τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων γίνεται :

$$-xy + xy = -6 \quad \text{ἢ} \quad 0 = -6 \quad (\text{ἀδύνατον}).$$

γ'). Ἐὰν  $x < 0, y > 0$ , τότε ἡ πρώτη τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων δίδει ἐπίσης

$$xy - xy = -6 \quad \text{ἢ} \quad 0 = -6 \quad (\text{ἀδύνατον}).$$

δ'). Ἐὰν  $x < 0, y < 0$ , τότε ἐκ τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων λαμβάνομεν :  $xy = 3$ , ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν :  $x = 1$  καὶ  $y = 3$  ἢ  $x = 3$  καὶ  $y = 1$  ἢ  $x = -1$  καὶ  $y = -3$  ἢ  $x = -3$  καὶ  $y = -1$ , καθ' ὅσον οἱ  $x$  καὶ  $y$  πρέπει, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν, νὰ εἶναι ἀκέραιοι.

Ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη  $x < 0, y < 0$ , ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος πληροῦται ὑπὸ τῶν ζευγῶν :  $(x = -1, y = -3)$  ἢ  $(x = -3, y = -1)$ .

Ἀλλὰ τὰ ζεύγη αὐτὰ, ὥς εὐκόλως διαπιστοῦται, πληροῦν καὶ τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος. Ὅθεν αἱ ζητούμεναι λύσεις εἶναι τὰ ζεύγη :

|          |
|----------|
| $x = -1$ |
| $y = -3$ |

καὶ

|          |
|----------|
| $x = -3$ |
| $y = -1$ |

**§ 49. ΙΙΙ. 'Επίλυσις συστημάτων ειδικῶν μορφῶν.**—Παραθέτομεν κατωτέρω παραδείγματα ἐπιλύσεως συστημάτων ειδικῶν τινῶν μορφῶν :

**Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1ον :** Νά εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι καὶ μὴ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τῶν  $x$  καὶ  $y$ , αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν τὸ σύστημα :

$$|x + y - 7| + x + y = 7 \quad (1)$$

$$x - 3y = 0. \quad (2)$$

**Λύσις :** Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν :  $x = 3y$ . (2')

Δυνάμει ταύτης ἡ πρώτη γίνεται :

$$|3y + y - 7| + 3y + y = 7 \quad \eta \quad |4y - 7| + 4y = 7. \quad (3)$$

Διακρίνομεν ἡδη δύο περιπτώσεις :

α'). Ἐὰν  $4y - 7 \geq 0$ , δηλ.  $4y \geq 7$  ἢ  $y \geq \frac{7}{4}$ , θὰ ἔχωμεν :  $|4y - 7| = 4y - 7$ ,

ὁπότε ἡ (3) γίνεται :  $4y - 7 + 4y = 7$  ἢ  $8y = 14$ , ἐξ ἧς :  $y = \frac{7}{4}$ . Ἡ τιμὴ ὁμως αὕτη δὲν εἶναι δεκτὴ, καθ' ὅσον δὲν εἶναι ἀκέραια.

β'). Ἐὰν  $4y - 7 < 0$ , δηλ.  $y < \frac{7}{4}$ , θὰ ἔχωμεν  $|4y - 7| = -(4y - 7)$  καὶ

ἡ (3) γίνεται :  $-(4y - 7) + 4y = 7$  ἢ  $0 \cdot y = 0$ , ἥτοι ταυτότης ὡς πρὸς  $y$ .

Ἐπεὶ δὲ ὁμως, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν, πρέπει τὸ  $y$  νὰ εἶναι ἀκέραιον καὶ μὴ ἀρνητικὸν ἀφ' ἑνὸς καὶ ἀφ' ἑτέρου, κατὰ τὸν περιορισμόν, πρέπει νὰ εἶναι  $y < \frac{7}{4}$ , συμπεραίνομεν ὅτι αἱ ζητούμεναι τιμαὶ τοῦ  $y$  εἶναι :  $y = 0$  ἢ  $y = 1$ ,

ὁπότε ἐκ τῆς (2') ἔχομεν ἀντιστοίχως  $x = 0$  ἢ  $x = 3$ .

Ὡστε, αἱ ζητούμεναι ἀκέραιαι καὶ μὴ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τῶν  $x$  καὶ  $y$  εἶναι :

$$(x = 0, y = 0) \text{ καὶ } (x = 3, y = 1).$$

**Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 2ον :** Νά ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ  $\mathbb{R}$ , τὸ σύστημα :

$$4|x - 2| + |y - 1| = 5 \quad (1)$$

$$4x - 3y = 6. \quad (2)$$

**Λύσις :** Διακρίνομεν τὰς ἐξῆς τέσσαρας περιπτώσεις :

**Π ε ρ ί π τ ω σ ι ς 1η :** Ἐὰν  $x - 2 \geq 0$ ,  $y - 1 \geq 0$ , τότε τὸ σύστημα γράφεται :

$$\left| \begin{array}{l} 4(x - 2) + (y - 1) = 5 \\ 4x - 3y = 6 \end{array} \right. \quad \eta \quad \left| \begin{array}{l} 4x + y = 14 \\ 4x - 3y = 6 \end{array} \right., \quad \text{ἐξ οὗ : } \left| \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2. \end{array} \right.$$

Τὸ ζεῦγος τοῦτο ἀποτελεῖ λύσιν τοῦ συστήματος, καθ' ὅσον αἱ τιμαὶ  $x = 3$  καὶ  $y = 2$  ἱκανοποιοῦν τὰς συνθήκας  $x - 2 \geq 0$  καὶ  $y - 1 \geq 0$ .

**Π ε ρ ί π τ ω σ ι ς 2α :** Ἐὰν  $x - 2 \geq 0$ ,  $y - 1 < 0$ , τότε τὸ σύστημα γράφεται :

$$\left| \begin{array}{l} 4(x - 2) - (y - 1) = 5 \\ 4x - 3y = 6 \end{array} \right. \quad \eta \quad \left| \begin{array}{l} 4x - y = 12 \\ 4x - 3y = 6 \end{array} \right., \quad \text{ἐξ οὗ : } \left| \begin{array}{l} x = \frac{15}{4} \\ y = 3. \end{array} \right.$$

Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ  $y = 3$  δὲν ικανοποιεῖ τὴν  $y - 1 < 0$ , αἱ τιμαὶ  $x = \frac{15}{4}$ ,  $y = 3$  δὲν ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ συστήματος.

Περίπτωσης 3η: Ἐὰν  $x - 2 < 0$ ,  $y - 1 \geq 0$ , τότε τὸ σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} -4(x-2) + (y-1) = 5 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases} \quad \eta \quad \begin{cases} 4x - y = 2 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -2. \end{cases}$$

Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ  $y = -2$  δὲν ικανοποιεῖ τὴν συνθήκην  $y - 1 \geq 0$ , αἱ τιμαὶ  $x = 0$ ,  $y = -2$  δὲν ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ συστήματος.

Περίπτωσης 4η: Ἐὰν  $x - 2 < 0$ ,  $y - 1 < 0$ , τότε τὸ σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} -4(x-2) - (y-1) = 5 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases} \quad \eta \quad \begin{cases} 4x + y = 4 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \begin{cases} x = \frac{9}{8} \\ y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Τὸ ζεύγος τοῦτο ἀποτελεῖ λύσιν τοῦ συστήματος, καθ' ὅσον αἱ τιμαὶ  $x = \frac{9}{8}$  καὶ  $y = -\frac{1}{2}$  ικανοποιοῦν τὰς συνθήκας  $x - 2 < 0$  καὶ  $y - 1 < 0$ .

Ὅθεν αἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι τὰ ζεύγη:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{καὶ} \quad \begin{cases} x = 9/8 \\ y = -1/2 \end{cases}$$

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

71. Νὰ ἐπιλυθοῦν, ἐντὸς τοῦ  $\mathbf{R}$ , αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

1.  $2|x| - 3 = 0$ ,    2.  $\frac{3}{5}|x| - 2x = 7$ ,    3.  $\frac{3x+5}{3|x|+5} = -2$ ,
4.  $x^2 - 7|x| + 12 = 0$ ,    5.  $x^2 - 3|x| + 2x - 6 = 0$ ,    6.  $x^2 - 4x + 2|x| - 3 = 0$ ,
7.  $|x|^3 - 5|x|^2 - 17|x| + 21 = 0$ ,    8.  $|x^8| - |3x^4| + 2 = 0$ ,    9.  $|x| - |x-1| = 5 - 3x$ ,
10.  $2x - 3|x + 3| - 5|x + 1| + 4|x - 5| + 6 = 0$ ,    11.  $|2x - 1| - 3|x - 1| = 1$ ,
12.  $|2x - 1| + |x| + |4x + 1| - 3|x - 3| + 7 = 0$ ,    13.  $|x - 2| - 3|x - 1| + 2x - 5 = 0$ ,
14.  $|x - 2| + x^2 - 4x + 10 = 0$ ,    15.  $|x^2 - 3x + 2| + |x - 4| - 13 = 0$ ,
16.  $\frac{1}{|x-1|} - \frac{2}{|x-2|} + \frac{1}{|x-3|} = 0$     17.  $|x^3 - 3x^2 + 2x - 1| = |x^3 - 1| + |3x^2 - 2x|$ .

72. Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

1.  $2x + 3|x| = \lambda x + 2$ ,    2.  $|x - |x - 1|| = \lambda x + 1$ ,
3.  $|x - 3| - \lambda|x - 1| = 2$ ,    4.  $\lambda|x| + 3x = -1$ ,
5.  $|\mu - 1|x + (\mu - 1)|x| = \mu^2 - 1$ .

73. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἀνισώσεις:

1.  $|3x| - 2 > |x| + 8$ ,    2.  $3|x| + 4|x - 1| > 5$ ,    3.  $2|x| + x > 10$ ,
4.  $\frac{3|x| + 1}{4} - \frac{4 - x}{3} > 1$ ,    5.  $|2x + 1| + |6x| > 9$ ,    6.  $\frac{|2x^2 - 5|}{3|x|} > \frac{|x| + 1}{2}$ ,
7.  $|x|^3 - 4x^2 + |x| + 6 > 0$ ,    8.  $|x - 1| + |x - 2| - 1 < 2x$ ,



9.  $|2x+1|-4|x-3|-|x-4|>3$ , 10.  $|x|+|x-1|+|x-2|>9$ ,  
 11.  $||x|+x|-||x|-x|<|x-2|$ , 12.  $|x-1|+|x-2|+|x-3|<x+1$ .

\* 74. Νά επιλυθούν και νά διερευνηθούν αἱ ἀνισώσεις :

1.  $\lambda|x|+2x>2\lambda-3$ , 2.  $|x-1|+\lambda|x-2|>1$ .

75. Νά δειχθῇ ὅτι διὰ κάθε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ  $x$  ἰσχύει ἡ σχέση :

$$f(x) \equiv \left| x + \frac{5}{2} \right| + \left| x - \frac{1}{2} \right| + |x-2| \geq \frac{9}{2}.$$

Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ  $x$  ἰσχύει ἡ ἰσότης ;

76. Διὰ ποίας πραγματικὰς τιμὰς τοῦ  $x$  ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἑκάστη τῶν κάτωθι παραστάσεων ;

$$A \equiv \sqrt{|x|^2 + 2|x|-4}, \quad B \equiv \sqrt{|x^2 + 8x - 9| - 24}.$$

77. Νά επιλυθούν τὰ κάτωθι συστήματα :

1.  $\begin{cases} 2|x|+3|y|=11 \\ 3|x|-5|y|=7 \end{cases}$

2.  $\begin{cases} 3|x|-2|y|=5 \\ |x|+3|y|=9 \end{cases}$

3.  $\begin{cases} |x|-2y=3 \\ x+|y|=6 \end{cases}$

4.  $\begin{cases} |2x-3y|=12 \\ 3x+y=7 \end{cases}$

5.  $\begin{cases} |x-1|+|y-3|=4 \\ x^2-y^2=8 \end{cases}$

6.  $\begin{cases} |x|+|y-1|=3 \\ |x|+|y-2|=4 \end{cases}$

78. Ὅμοιως τὰ κάτωθι :

1.  $\begin{cases} |x-2y|+|x+y-1|=2 \\ x+3y=2 \end{cases}$

2.  $\begin{cases} 2|x-y|+|x+y-3|=9 \\ 2x+3y=19 \end{cases}$

79. Ἐάν  $\alpha \in \mathbb{R}$  νά επιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} |x|+|y|=\alpha \\ \alpha y=x^2. \end{cases}$$

80. Νά εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τοῦ συστήματος :

$$\begin{cases} y+y|x|=6 \\ |y|-|x|=2. \end{cases}$$

81. Νά εὑρεθοῦν τὰ ζεύγη τῶν ἀκεραίων  $x, y$ , τὰ ὅποια ἱκανοποιοῦν τὰς σχέσεις :

$$\begin{cases} y-|x^2-2x|+\frac{1}{2}>0 \\ y+|x-1|<2. \end{cases}$$

82. Νά εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τοῦ συστήματος :

$$\begin{cases} x^2=yz \\ |y+z|>x^2+1. \end{cases}$$

ἐνθα οἱ  $z, y$  ἔχουν τὰς ἐλαχίστας ἀπολύτους τιμὰς

83. Νά επιλυθῇ καὶ νά διερευνηθῇ τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} |\lambda x+y|=2x \\ 3x+5y=2. \end{cases} \quad \text{ἐνθα } \lambda \in \mathbb{R}.$$

\*

# ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΠΟΛΥΤΩΝ

84. Ἐάν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  τί συμπεραίνετε ἐκ τῆς σχέσεως  $|\alpha|+|\beta| \neq 0$  ;

85. Ἐάν  $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$ , μὲ  $\alpha\beta \neq 0$ , ἰσχύουν δὲ αἱ δύο σχέσεις :

$$x = \alpha \{ |\alpha| + |\beta| \} \quad \text{καὶ} \quad y = \beta \{ |\alpha| + |\beta| \},$$

τότε θὰ ἰσχύουν καὶ αἱ :

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{|x|+|y|}}, \quad \beta = \frac{y}{\sqrt{|x|+|y|}}$$

καὶ ἀντιστρόφως, αἱ δύο τελευταῖαι συνεπάγονται τὰς δύο πρώτας.

86. 'Εάν  $\alpha\beta \neq 0$  και  $\alpha^2 < 16\beta^2$ , νά δειχθῇ ὅτι :

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| - \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < \frac{15}{4}.$$

87. 'Εάν  $|\alpha| > 1$ , δείξατε ὅτι :

$$\left| \alpha + \frac{1}{\alpha} \right| - 1 < |\alpha| < \left| \alpha + \frac{1}{\alpha} \right|.$$

88. 'Εάν  $(x \neq y) \in \mathbf{R}$  καὶ διάφοροι τοῦ μηδενός, δείξατε ὅτι :

$$\frac{\sqrt{x^2 y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{(x-y)^2}}{x-y} \left[ \frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{y^2}}{y} \right] = 1.$$

89. 'Εάν ὁ πραγματικός ἀριθμὸς  $\alpha$  ικανοποιῇ τὴν σχέσιν  $|\alpha| < \sqrt{2} - 1$ , νά ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{|1-\alpha|}{1+|\alpha|} < \sqrt{2} + 1.$$

90. 'Εάν  $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z \in \mathbf{R}$ , δείξατε ὅτι ἀπὸ τὰς σχέσεις :

$$\alpha = \frac{x}{|y| + |z|}, \quad \beta = \frac{y}{|z| + |x|}, \quad \gamma = \frac{z}{|x| + |y|},$$

ἔπουνται αἱ σχέσεις :

$$|\alpha\beta\gamma| \leq \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{|\alpha|} + \frac{1}{|\beta|} + \frac{1}{|\gamma|} \geq$$

91. 'Ἴνα ἡ ἰσότης  $|\alpha|x| + \beta x| = |\alpha|x| + \beta x|$  εἶναι ταυτότης ὡς πρὸς  $x$ , πρέπει καὶ ἀρκεῖ :  $\alpha + \beta \geq 0$  καὶ  $\alpha - \beta \geq 0$ .

92. Νά ἐξετάσῃτε, ἐάν αἱ σχέσεις  $\alpha + \beta \geq 0$  καὶ  $\alpha - \beta \leq 0$  εἶναι αἱ ἱκαναὶ καὶ ἀναγκαῖαι συνηῇκαι, ἵνα ἡ ἰσότης  $|\alpha|x| + \beta x| = |\beta|x| + \alpha x|$  εἶναι ταυτότης ὡς πρὸς  $x$ .

93. 'Εάν  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  καὶ  $|x| = \alpha x + \beta x + 1$ , νά ὑπολογισθῇ ὁ  $x$ , ὥστε νά εἶναι :

$$|\alpha + \beta| < 1.$$

94. Νά εὑρεθοῦν τὰ διαστήματα μεταβολῆς τοῦ  $x$ , εἰς τὰ ὁποῖα ἡ παράστασις :

$$y = |x - 5| + |3x + 1| + |2x - 3|$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ  $x$ .

95. Δείξατε διὰ πραγματικῶν ἀριθμῶν  $\alpha, \beta$  ὅτι ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$2\beta(1 + |\alpha|) = 1 + \alpha + |\alpha|$$

ἔπουνται αἱ :

$$|2\beta - 1| < 1 \quad \text{καὶ} \quad \alpha(1 - |2\beta - 1|) = 2\beta - 1$$

καὶ ἀντιστρόφως, ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας ἔπεται ἡ πρώτη.

96. 'Ἴνα ἡ ἰσότης  $|\alpha|x| + \beta x| = |A|x| + Bx|$  εἶναι ταυτότης ὡς πρὸς  $x$ , πρέπει καὶ ἀρκεῖ :

$$A = \frac{|\alpha + \beta|}{2} + \frac{|\alpha - \beta|}{2} \quad \text{καὶ} \quad B = \frac{|\alpha + \beta|}{2} - \frac{|\alpha - \beta|}{2}.$$

97. 'Εάν  $x, y, z \in \mathbf{R}$  καὶ  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $|x + y| < \frac{z}{|z| + 1}$ , τότε :  $||x| - |y|| < 3$ .

98. Νά εὑρεθοῦν τὰ διαστήματα μεταβολῆς τοῦ  $x$  καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ  $\lambda$ , ἵνα ἡ παράστασις :  $y = |\lambda^2 x + 1| + |2\lambda x + 3|$  εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ  $x$ .

99. Δίδεται ἡ παράστασις :  $y = \left| x + \frac{3}{2} \right| + \left| x - \frac{1}{2} \right| + |x - 2|$ , νά εὑρεθοῦν :

- 1). Αἱ ἐκφράσεις αὐτῆς ἄνευ τοῦ συμβόλου τῆς ἀπολύτου τιμῆς διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ  $x$ .
- 2). Βάσει τούτων νά εὑρεθῇ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ αὐτῆς, ὅταν τὸ  $x$  διατρέχῃ τὴν εὐθεῖαν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

100. 'Εάν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως  $x^2 + \xi x + \eta = 0$  εἶναι πραγματικαὶ καὶ οἱ συντελεσταὶ  $\xi$  καὶ  $\eta$  πληροῦν τὴν σχέσιν  $\xi^2 - 2\eta^2 < \xi|\eta|$ , νά δειχθῇ ὅτι αἱ ρίζαι  $\rho_1, \rho_2$  τῆς ἐξισώσεως  $\eta x^2 + \xi x + 1 = 0$  πληροῦν τὴν :  $|\rho_1| - |\rho_2| < 2$ .

101. Έκ τῆς σχέσεως:  $x_1 = \frac{y_1}{1 + |y_1|}$  ἔπονται αἱ σχέσεις:

$$1 - |x_1| > 0 \quad \text{καὶ} \quad y_1 = \frac{x_1}{1 - |x_1|} \quad \text{καὶ ἀντιστρόφως.}$$

Ἐνῶ ἐκ τῶν σχέσεων:

$$x_1 = \frac{y_1}{1 + |y_1| + |y_2|}, \quad x_2 = \frac{y_2}{1 + |y_1| + |y_2|}$$

ἔπονται αἱ σχέσεις:

$$1 - |x_1| - |x_2| > 0, \quad y_1 = \frac{x_1}{1 - |x_1| - |x_2|}, \quad y_2 = \frac{x_2}{1 - |x_1| - |x_2|} \quad \text{καὶ ἀντιστρόφως.}$$

102. Ἐάν  $|\lambda| < 1$ , νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐξ ἐκάστης τῶν σχέσεων:

$$|x + \lambda y| < |\lambda x + y|, \quad |x| < |y|, \quad |x^2 + \lambda xy| < |\lambda xy + y^2|$$

ἔπονται αἱ ἄλλαι δύο σχέσεις.

103. Ἐάν  $\alpha, \beta, v \in \mathbb{Z}$  καὶ  $\alpha\beta = -1, v \geq 5, x = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2v} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2(v-1)}$ ,

νὰ δειχθῇ ὅτι:  $40|x| \leq \sqrt{3}$ .

104. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις:  $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ , ἐνθα  $\beta < \gamma < 0$ . Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐάν  $\rho_1, \rho_2$  ( $\rho_1 > \rho_2$ ) εἶναι αἱ ρίζαι αὐτῆς, θὰ εἶναι:  $|\rho_2| < \rho_1 < 1 + |\beta|$ .

105. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις μεταξύ τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξίσωσεως:

$$\alpha|x|^3 + \beta x^2 + \beta|x| + \alpha = 0,$$

ἵνα αὕτη ἔχη τὸ ἀνώτερον δυνατόν πληθὸς πραγματικῶν ριζῶν.

106. Ἐάν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$  καὶ  $|\alpha| - |\beta| > 1$ , νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις  $x^2 + \alpha x + \beta = 0$  δὲν δύναται νὰ ἔχη ἀμφοτέρας τὰς ρίζας τῆς ἀκεραίας.

107. Δείξατε ὅτι διὰ πραγματικῶν ἀριθμῶν  $\alpha, \beta, \gamma$  ἀπὸ τὰς σχέσεις:  $2|\beta| \leq \alpha \leq \gamma$ , ἔπεται ὅτι:  $\alpha \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}$ . Κατόπιν τούτου δείξατε ὅτι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma$  πληροῦν-  
τες τὰς ἄνω σχέσεις εἶναι μόνον οἱ  $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1$ , ἐφ' ὅσον  $\alpha\gamma = 1 + \beta^2$ .

108. Ἐστω  $\beta$  πραγματικὸς ἀριθμὸς διάφορος τοῦ μηδενὸς καὶ τοιοῦτος, ὥστε  $|\beta| < 1$ . Ἐστω ἐπίσης  $x$  πραγματικὸς ἀριθμὸς κείμενος ἀλγεβρικῶς μεταξύ 0 καὶ  $\beta$ .

$$\text{Νὰ δειχθῇ ὅτι: } \left| \frac{\beta - x}{1 + x} \right| < |\beta|.$$

109. Ἐάν  $\xi_1, \xi_2$  εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσεως  $x^2 - 2\alpha x + \beta = 0$  μὲ πραγματικῶν συντελε-  
στὰς καὶ ἰσχύη:  $0 < |\xi_1| < |\xi_2|$ ,

$$\text{νὰ δειχθῇ ὅτι: } 2\alpha^2 - \beta - \left| \frac{\beta}{2} \right| < \left| \frac{\xi_2}{\sqrt{2}} \right|^2 < 2\alpha^2 - \beta.$$

110. Ἐάν  $v > 0$  καὶ  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , δείξατε ὅτι:

$$\left| \alpha + \beta + \frac{v - \alpha\beta}{\alpha + \beta} \right| \geq |\sqrt{3}v| \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \left| \alpha + \beta + \gamma + \frac{v - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \right| \geq \left| \sqrt{\frac{8v}{3}} \right| \quad (2)$$

111. Δίδονται τὰ τριώνυμα:

$$f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad \text{μὲ} \quad |\alpha'| < \alpha.$$

$$\varphi(x) \equiv \alpha'x^2 + \beta'x + \gamma'$$

Ἐάν  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) αἱ ρίζαι τοῦ  $f(x)$  καὶ  $\rho_1, \rho_2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ) αἱ ρίζαι τοῦ  $\varphi(x)$ , νὰ ἀποδει-  
χθῇ ἡ ἰσοδυναμία:

$$(|f(x)| \geq \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}) \iff (x_1 = \rho_1 \quad \text{καὶ} \quad x_2 = \rho_2).$$

112. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις:

$$x^2 + x + \lambda|x| + 1 = 0.$$

Νὰ ὀρισθῇ ὁ  $\lambda$  ὥστε αὕτη νὰ ἔχη τέσσαρας ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους.

113. Έάν  $x, y, z \in \mathbf{R}$  νά δειχθῇ ὅτι ἐκ τῆς σχέσεως :

$$(x^2 - y^2 + z^2)^2 \leq 4x^2z^2 \quad (1)$$

ἔπονται αἱ σχέσεις :

$$||x| - |y|| \leq |z| \quad (2) \quad \text{καί} \quad |z| \leq |x| + |y| \quad (3)$$

καί ἀντιστρόφως, ἀπό τὰς δύο τελευταίας ἔπεται ἡ πρώτη.

114. Έάν  $x, y, z \in \mathbf{R} - \{0\}$  καί ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$x^2y^2 + x^2z^2 = y^2z^2 \quad \text{καί} \quad x^2 + z^2 > |xz| + |zy|,$$

νά δειχθῇ ὅτι :

$$1) \quad |x| < |y| < |z|$$

$$2) \quad \frac{x^2 + y^2}{z^2} < \frac{|x| + |y|}{|z|}.$$

115. Τοῦ  $x$  λαμβάνοντος τιμὰς ἐκτὸς τοῦ διαστήματος μὲ ἄκρα τὰ  $\alpha$  καί  $\gamma$  νά εὐρεθῇ τὸ

$$\text{σημεῖον τῆς παραστάσεως : } y = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{|\gamma - x|}} + \frac{\beta - \gamma}{\sqrt{|\alpha - x|}} + \frac{\gamma - \alpha}{\sqrt{|\beta - x|}}, \text{ εἰς τὰς κάτωθι}$$

περιπτώσεις :

$$1). \quad \Delta\acute{\iota}\alpha \quad x < \alpha < \beta < \gamma$$

$$2). \quad \Delta\acute{\iota}\alpha \quad \alpha > \beta > \gamma > x.$$

Υπόδειξις : Θέσατε,  $\sqrt{|\alpha - x|} = k$ ,  $\sqrt{|\beta - x|} = \lambda$ ,  $\sqrt{|\gamma - x|} = \mu$  καί ἐκφράσατε τὴν παράστασιν  $y$  συναρτήσῃ τῶν  $k, \lambda, \mu$ .

116. Έάν  $|\alpha| + |\beta| = 1$ , ἔνθα  $\alpha, \beta \in \mathbf{R} - \{0\}$ , νά δειχθῇ ὅτι :

$$\left\{ |\alpha| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \right\}^2 + \left\{ |\beta| + \left| \frac{1}{\beta} \right| \right\}^2 \geq \frac{25}{2}.$$

117. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ , ἔνθα  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$  μὲ  $\alpha \gamma \neq 0$  καί  $|\rho_1| \neq |\rho_2|$ ,

ἔνθα  $\rho_1, \rho_2$  αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσεως. Έάν  $M \equiv \max \left\{ \left| \frac{\rho_1}{\rho_2} \right|, \left| \frac{\rho_2}{\rho_1} \right| \right\}$ , δείξατε ὅτι :

$$1). \quad 2 \left| 1 - \frac{\beta^2}{2\alpha\gamma} \right| - 1 < M < 2 \left| 1 - \frac{\beta^2}{2\alpha\gamma} \right|$$

$$2). \quad 1 < \left| 1 - \frac{\beta^2}{2\alpha\gamma} \right|$$

3). Πληρουμένων τῶν ὑποθέσεων εἶναι  $\beta \neq 0$ .

118. Νά ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\begin{aligned} 2|x-1| + |y+1| &= 7 \\ |x-2| + |y| + x-y &= 4. \end{aligned}$$

119. Όμοίως τὸ σύστημα :

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{z^2}{2|yz| - y^2} \\ 0 < x &\leq \frac{3}{3 + |y+2|}. \end{aligned}$$

120. Νά εὐρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τοῦ συστήματος :

$$(x^2 + 4y^2)(z^2 + 4) = (xz + 4y)^2$$

$$16z^2 - 56 \left| \frac{x}{y} \right| + 45 < 0$$

$$x^2 + y^2 + |xy| < 64.$$

121. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις :

$$\alpha|x|^3 + \beta|x|^2 + \beta|x| + \alpha = 0,$$

δείξατε ὅτι αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν ἐξισώσεων :

$$|x| + 1 = 0 \quad (1) \quad \text{καί} \quad \alpha|x|^2 + (\beta - \alpha)|x| + \alpha = 0 \quad (2).$$

Έπιλύσατε τὰς ἐξισώσεις (1) καί (2).

122. 'Εάν  $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$ , δείξτε ότι :

$$(x - \alpha)(x - \beta) \leq 0 \iff \min(\alpha, \beta) \leq x \leq \max(\alpha, \beta).$$

123. 'Εάν  $\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \dots, \frac{\alpha_n}{\beta_n}$  είναι οιαδήποτε κλάσματα με  $\beta_k > 0$  ή  $\beta_k < 0$

$\forall k = 1, 2, \dots, n$ , να αποδειχθεί ότι :

$$\min\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \dots, \frac{\alpha_n}{\beta_n}\right) \leq \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n} \leq \max\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \dots, \frac{\alpha_n}{\beta_n}\right).$$

124. 'Εάν  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  και ισχύουν αι σχέσεις :

$$\gamma = \frac{\alpha\beta}{|\alpha| - |\beta|} \quad \text{και} \quad |\alpha| > |\beta| > 0,$$

να αποδειχθεί ότι θα ισχύουν και αι σχέσεις :

$$\alpha = \frac{\beta\gamma}{|\gamma| - |\beta|} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{\alpha\gamma}{|\alpha| + |\gamma|}.$$

125. 'Εάν οι  $x, y, \omega$  πραγματικοί αριθμοί, να δειχθεί ότι :

$$\left|\frac{1}{y + \omega}\right| + \left|\frac{1}{\omega + x}\right| + \left|\frac{1}{x + y}\right| \geq \frac{9}{2} \left(\frac{1}{|x| + |y| + |\omega|}\right).$$

126. Να λυθεί το σύστημα :

$$3x - 5|y| = 1$$

$$x|y| + y|x| = 4.$$

127. 'Εάν οι πραγματικοί αριθμοί  $x, y, z$  πληρούν τὰς σχέσεις :

$$x^3 + y^3 + z^3 > 3xyz$$

$$xyz < 0 \quad \text{και}$$

$$x^{2n+1} - y|y| = 0,$$

να αποδειχθεί ότι οι  $x, y$  είναι θετικοί.

128. 'Εάν οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  πληρούν την σχέση :

$$|\alpha + \beta| + |\beta + \gamma| + |\gamma + \alpha| \geq \alpha\beta\gamma (|\alpha| + |\beta| + |\gamma|),$$

να αποδειχθεί ότι θα πληρούν και την σχέση :

$$\alpha\beta\gamma \leq 2.$$

129. 'Εάν  $\xi$  είναι ρίζα της εξίσωσης :  $\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$ , τοιαύτη ώστε  $|\xi| > 1$ , είναι δε επί πλέον :  $|\alpha_0| > \max(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_n|)$ , τότε δείξτε ότι :

$$1 < |\xi| < 2.$$

130. 'Εάν οι συντελεστές του τριωνύμου :  $x^2 - 2\alpha x + \beta$  είναι πραγματικοί αριθμοί με  $\beta \neq 0$  και  $\rho_1, \rho_2$  είναι αι ρίζες του με  $|\rho_1| \neq |\rho_2|$ , θέσωμεν δέ :

$$M \equiv \max\left(\left|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right|, \left|\frac{\rho_2}{\rho_1}\right|\right), \quad m \equiv \min\left(\left|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right|, \left|\frac{\rho_2}{\rho_1}\right|\right) \quad \text{και} \quad \lambda = 2 \left|\frac{2\alpha^2 - \beta}{\beta}\right|,$$

να αποδειχθεί ότι :

α). Αι ρίζες του τριωνύμου είναι αριθμοί πραγματικοί και άνιστοι.

β). 'Ισχύουν αι σχέσεις :

$$1. \lambda - 1 < M < \lambda, \quad 2. \lambda > 2, \quad 3. \frac{1}{\lambda} < m < \frac{1}{\lambda - 1}.$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

### ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

#### I. ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

**§ 50. Έννοια τοῦ πολυωνύμου.** — Έστω  $\mathbf{R}$  τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἓν σύμβολον  $x$ , καλούμενον «**μεταβλητὴ**»<sup>\*</sup>), τὸ ὁποῖον κατ' ἀρχὴν οὐδένα πραγματικὸν ἀριθμὸν παριστᾷ, μετὰ τοῦ ὁποῖου ὁμως σημειοῦμεν πράξεις τῶν στοιχείων τοῦ  $\mathbf{R}$ , ὡς ἐὰν ἦτο καὶ τὸ  $x$  εἰς πραγματικὸς ἀριθμὸς ἢ γενικώτερον εἰς μιγαδικὸς ἀριθμὸς. Οὕτως ἡ παράστασις  $x^k$ , ὅπου  $k$  φυσικὸς ἀριθμὸς, θὰ συμβολίζῃ ἀπλῶς μίαν μορφήν γινομένου  $xx \dots x$ , ὅπου τὸ  $x$  θὰ περιλαμβάνεται ὡς παράγων  $k$  φορές, ὁμοίως ἡ παράστασις  $\alpha x^k$ , ὅπου  $\alpha \in \mathbf{R}$  καὶ  $k \in \mathbf{N}$ , θὰ συμβολίζῃ μίαν μορφήν γινομένου τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ  $\alpha$  ἐπὶ τὸ σύμβολον  $x^k$ . Ὅρίζομεν ἀκόμη, ὅτι τὸ  $x^0 = 1$ , ὁπότε  $\alpha x^0 = \alpha$  διὰ κάθε  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Κατόπιν τούτων δίδομεν τὸν κάτωθι ὅρισμόν :

Καλεῖται **ἀκέραιον πολυώνυμον** τοῦ  $x$ , κάθε ἔκφρασις τῆς μορφῆς :

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad (1)$$

ὅπου  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$  σταθεροὶ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ  $n$  φυσικὸς ἀριθμὸς ἢ μηδέν. Οἱ  $\alpha_k \in \mathbf{R}$  καλοῦνται **συντελεσταὶ** τοῦ πολυωνύμου. Τὸ  $\alpha_0$  θεωρεῖται ὡς συντελεστὴς τοῦ  $x^0$ . Αἱ ἐκφράσεις τῆς μορφῆς  $\alpha_k x^k$ , ἐνθα  $k$  φυσικὸς ἢ μηδέν, καλοῦνται **ἀκέραια μονώνυμα** καὶ ἀποτελοῦν τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου.

Ἡ παράστασις (1) εἶναι ἓν νέον σύμβολον<sup>\*\*</sup>), δηλ. δὲν σημαίνει πρόσθεσιν, οὔτε ἄλλην τινὰ πράξιν μεταξύ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν  $\alpha_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) καὶ τῆς μεταβλητῆς  $x$ . Ἡ σημασία τῆς παραστάσεως (1), δηλ. τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου, θὰ προκύψῃ κατωτέρω κατόπιν ὠρισμένων ιδιοτήτων τὰς ὁποίας θὰ ὀρίσωμεν ἐπ' αὐτῆς.

Κατωτέρω ἀντὶ ἀκεραίου πολυωνύμου τοῦ  $x$  θὰ λέγωμεν ἀπλῶς καὶ πολυώνυμον τοῦ  $x$ .

Διὰ τὰ πολυώνυμα τῆς μεταβλητῆς  $x$  μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς θὰ χρησιμοποιῶμεν τοὺς συμβολισμοὺς :  $f(x), \varphi(x), \pi(x), g(x), \dots$

<sup>\*</sup> Διὰ τοῦ ὅρου «**μεταβλητὴ**»  $x$  ἐννοοῦμεν ἓν σύμβολον, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἀντιπροσωπεύῃ τὸ τυχὸν στοιχεῖον ἐνὸς συνόλου ἀριθμῶν. Ὑπάρχει διαφορὰ μεταξύ τῆς μεταβλητῆς  $x$  καὶ τοῦ ἀγνώστου  $x$ , τὸν ὁποῖον συναντῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις. Ἡ μὲν μεταβλητὴ  $x$  εἶναι ἀπλῶς ἓν σύμβολον καὶ ἐπομένως ἔχει ἀπροσδιόριστον τιμὴν, ἐνῶ ὁ ἀγνώστος  $x$  ἔχει προσδιοριστέαν τιμὴν.

<sup>\*\*</sup> Τὸ  $x$  κατὰ τὴν παράστασιν (1) ἐνὸς πολυωνύμου παίζει τὸν ρόλον ἐνὸς **ἀκαθορίστου συμβόλου**, ἄλλως **ἀκαθορίστου μεταβλητῆς**.

Οὕτω θὰ γράφωμεν :

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad (2)$$

ἐνθα τὸ σύμβολον « $\equiv$ » σημαίνει ὅτι διὰ τοῦ  $f(x)$  παρίσταται τὸ πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον ἀναγράφεται εἰς τὸ β' μέλος.

Ἐὰν  $\alpha_n \neq 0$ , τότε ὁ ἐκθέτης  $n$  τῆς μεταβλητῆς  $x$  καλεῖται **βαθμὸς** τοῦ πολυωνύμου (2). Ὡστε :

**Βαθμὸς ἐνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου**  $f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$  καλεῖται ὁ μεγαλύτερος ἐκθέτης τῆς μεταβλητῆς  $x$ , τῆς ὁποίας ὁ συντελεστὴς εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

Οὕτω τοῦ πολυωνύμου  $f(x) \equiv 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ , ὁ βαθμὸς εἶναι 3, ἐνῶ τοῦ πολυωνύμου  $(x) \equiv 2x^2 - \sqrt{3}x + 1$ , ὁ βαθμὸς εἶναι 2.

Ἐὰν  $n = 0$ , τότε ἔχομεν τὸ **σταθερὸν πολυώνυμον**, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν σταθερὸν μόνον ὅρον καὶ συνεπῶς εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ  $x$ . Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν, ἐφ' ὅσον ὁ σταθερὸς ὅρος  $\alpha_0 \neq 0$ , θὰ ὁμιλῶμεν περὶ πολυωνύμου **βαθμοῦ μηδέν**, δηλαδὴ κάθε σταθερὸς πραγματικὸς ἀριθμὸς  $\alpha$  θεωρεῖται ὡς πολυώνυμον τοῦ  $x$ , βαθμοῦ μηδέν, ἐφ' ὅσον  $\alpha \neq 0$ . Οὕτω, λ.χ., ὁ ἀριθμὸς 4 δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ  $x$  βαθμοῦ μηδέν, διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν  $4 \equiv 4x^0$ .

Ἐὰν πάντες οἱ συντελεσταὶ τοῦ (2) εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, τότε τὸ  $f(x)$  λέγεται **πλήρες πολυώνυμον** τοῦ  $x$ , ἄλλως λέγεται **ἐλλειπές**.

Τὸ πολυώνυμον νιοστοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς  $x$  δύναται ἐπίσης νὰ γραφῇ :

$$f(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_n x^n, \quad \alpha_n \neq 0 \quad (3)$$

δηλ. κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ  $x$ .

Κάθε πολυώνυμον δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ πέραν τοῦ βαθμοῦ του, ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ ἐπισυνάψωμεν ὅρους μὲ συντελεστὰς μηδέν.

Οὕτω τὸ πολυώνυμον (3), βαθμοῦ  $n$ , δύναται νὰ γραφῇ :

$$f(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n + \alpha_{n+1} x^{n+1} + \alpha_{n+2} x^{n+2} + \dots + \alpha_{n+k} x^{n+k} \quad (4)$$

μὲ  $\alpha_n \neq 0$  καὶ  $\alpha_{n+1} = \alpha_{n+2} = \dots = \alpha_{n+k} = 0 \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τώρα ὅτι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν δύο πολυώνυμα μὲ τὸ αὐτὸ πλῆθος ὁρῶν, προσθέτοντες εἰς τὸ μικροτέρου βαθμοῦ πολυώνυμον ὅρους μὲ συντελεστὰς μηδέν.

Ἐὰν πάντες οἱ συντελεσταὶ τοῦ πολυωνύμου (2) εἶναι μηδέν, τότε τὸ  $f(x)$  καλεῖται **μηδενικὸν πολυώνυμον**. Ὡστε : Τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

καλεῖται **μηδενικὸν πολυώνυμον ἢ πολυώνυμον ἐκ ταυτότητας ἴσον πρὸς μηδέν ἐν  $\mathbb{R}$**  τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν πάντες οἱ συντελεσταὶ του εἶναι μηδέν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν γράφομεν :

$$f(x) \equiv 0$$

καὶ ἀναγινώσκουμεν : «  $f(x)$  ἐκ ταυτότητας ἴσον πρὸς μηδέν ».

Κατόπιν τοῦ ἀνωτέρω συμβολισμοῦ, ὁ ὀρισμὸς τοῦ μηδενικοῦ πολυωνύμου δίδεται συντόμως οὕτω :

Ἐὰν  $f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ,  $\alpha_k \in \mathbf{R}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots, n$ , τότε :

$$f(x) \equiv 0 \iff \underset{\text{ορσ}}{\alpha_n = \alpha_{n-1} = \dots = \alpha_1 = \alpha_0 = 0.}$$

Πολυώνυμα ἐκ ταυτότητος ἴσα πρὸς μηδὲν οὐδένα βαθμὸν ἔχουν.

Ἐὰν τὸ  $f(x)$  δὲν εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον γράφομεν:  $f(x) \not\equiv 0$ .

**§ 51. Ἑλγεβρα (λογισμὸς) τῶν πολυωνύμων.**— Ἄς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων τοῦ  $x$  μὲ συντελεστὰς πραγματικοὺς ἀριθμούς, τὸ ὁποῖον παριστῶμεν μὲ  $\mathbf{R}[x]$ . τὰ στοιχεῖα ἐξ ὧν τὸ  $\mathbf{R}[x]$  συνίσταται, δηλ. τὰ ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ  $x$  συμβολίζομεν, ὡς ἐλέχθη εἰς τὴν προηγούμενην παράγραφον μέ:  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\pi(x)$ , ...

Ὡς γνωστὸν (§ 8) ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου εἶναι συνδεδεμένη μὲ τὴν ἔννοιαν μιᾶς σχέσεως βασικῆς ἰσότητος. Ἡ βασικὴ ἰσότης ὀρίζεται ἐν  $\mathbf{R}[x]$  οὕτω :

Ἐὰν  $f(x)$ ,  $\varphi(x) \in \mathbf{R}[x]$  καὶ εἶναι :

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$\varphi(x) \equiv \beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0,$$

τότε θὰ λέγωμεν ὅτι: **τὰ δύο πολυώνυμα  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  εἶναι ἴσα, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν οἱ συντελεστὰι τῶν ὁμοβαθμίων ὅρων εἶναι ἴσοι.**

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν γράφομεν: ,

$$f(x) \equiv \varphi(x)$$

καὶ ἀναγιγνώσκομεν: «  $f(x)$  ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς τὸ  $\varphi(x)$  ».

Κατόπιν τοῦ ἀνωτέρω συμβολισμοῦ, ἡ βασικὴ ἰσότης ἐν  $\mathbf{R}[x]$  ὀρίζεται συντόμως οὕτω :

$$f(x) \equiv \varphi(x) \iff \underset{\text{ορσ}}{\alpha_k = \beta_k \text{ διὰ κάθε } k = 0, 1, 2, \dots, n.}$$

Προφανῶς δύο μηδενικά πολυώνυμα εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα.

Μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου  $\mathbf{R}[x]$  δυνάμεθα τώρα νὰ ὀρίσωμεν πράξεις ὡς ἐξῆς: Ἐστωσαν  $f(x)$ ,  $\varphi(x) \in \mathbf{R}[x]$ , τότε \*) :

**α).** Καλοῦμεν **ἄθροισμα** τῶν πολυωνύμων  $f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$  καὶ  $\varphi(x) \equiv \beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$  καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μέ:  $f(x) + \varphi(x)$  τὸ πολυώνυμον :

$$(\alpha_n + \beta_n) x^n + (\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (\alpha_1 + \beta_1) x + (\alpha_0 + \beta_0).$$

\* Δεχόμεθα, ἀνευ βλάβης τῆς γενικότητος, ὅτι τὰ πολυώνυμα  $f(x)$  καὶ  $\varphi(x)$  ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος ὅρων. Ἐὰν τὰ  $f(x)$  καὶ  $\varphi(x)$  δὲν ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος ὅρων, προσθέτομεν εἰς τὸ πολυώνυμον μὲ ὀλιγωτέρους ὅρους, τοὺς ἀπαιτούμενους ὅρους μὲ συντελεστὰς μηδέν.



**β).** Καλοῦμεν **ἀντίθετον** τοῦ πολυωνύμου  $\varphi(x) = \beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$  καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μέ:  $-\varphi(x)$  τὸ πολυώνυμον:

$$(-\beta_n) x^n + (-\beta_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (-\beta_1) x + (-\beta_0)$$

καὶ γράφομεν:

$$-\varphi(x) \equiv -\beta_n x^n - \beta_{n-1} x^{n-1} - \dots - \beta_1 x - \beta_0.$$

**γ).** Καλοῦμεν **διαφορὰν** τοῦ πολυωνύμου  $\varphi(x) \equiv \beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$  ἀπὸ τοῦ πολυώνυμου  $f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$  καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μέ:  $f(x) - \varphi(x)$ , τὸ πολυώνυμον  $f(x) + [-\varphi(x)]$ . Ἦτοι ἡ διαφορὰ  $f(x) - \varphi(x)$  δύο πολυωνύμων  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  ἀνάγεται εἰς ἄθροισμα τοῦ  $f(x)$  καὶ τοῦ ἀντιθέτου τοῦ πολυωνύμου  $\varphi(x)$ .

Δυνάμει τῶρα τῶν  $\alpha$  καὶ  $\beta$  ἡ διαφορὰ  $f(x) - \varphi(x)$  εἶναι τὸ πολυώνυμον:

$$(\alpha_n - \beta_n) x^n + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (\alpha_1 - \beta_1) x + (\alpha_0 - \beta_0).$$

Ἐκ τῶν ὁρισμῶν τούτων προκύπτουν ἀμέσως τὰ ἑξῆς:

1. Τὸ σύνολον τῶν πολυωνύμων  $R[x]$  εἶναι «κλειστὸν» ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, δηλ. τὸ ἄθροισμα δύο πολυωνύμων ἐκ τοῦ  $R[x]$  ἀνήκει εἰς τὸ  $R[x]$ .
2. Τὸ πολυώνυμον συμβολίζει ἓν ἄθροισμα ὄρων τῆς μορφῆς  $\alpha_k x^k$ .
3. Ἡ πρόσθεσις τῶν πολυωνύμων ἔχει τὴν μεταθετικὴν καὶ προσεταιριστικὴν ιδιότητα, ἥτοι: ἂν  $\pi_1(x), \pi_2(x), \pi_3(x) \in R[x]$ , τότε ἰσχύουν:

$$\pi_1(x) + \pi_2(x) = \pi_2(x) + \pi_1(x) \text{ καθὼς καὶ}$$

$$\pi_1(x) + [\pi_2(x) + \pi_3(x)] = [\pi_1(x) + \pi_2(x)] + \pi_3(x).$$

4. Ὑπάρχει οὐδέτερον στοιχεῖον ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν καὶ εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον, ἥτοι, ἂν  $\varphi(x) \equiv 0$ , τότε ἰσχύει:

$$f(x) + \varphi(x) \equiv f(x) + 0 \equiv f(x) \text{ διὰ κάθε } f(x) \in R[x].$$

**Παρατήρησις:** Ὁ βαθμὸς τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς δύο πολυωνύμων εἶναι μικρότερος ἢ ἴσος τοῦ μεγίστου ἐκ τῶν βαθμῶν τῶν δύο πολυωνύμων. Οὕτω:

Ἐὰν  $k$  εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς δύο πολυωνύμων  $f(x)$  καὶ  $g(x)$  βαθμῶν  $n$  καὶ  $m$  ἀντιστοίχως, ἔχομεν:

$$k \leq \max(n, m).$$

Τὸ ὅτι οὗτος δύνανται νὰ εἶναι μικρότερος φαίνεται ἀπὸ τὸ ἑξῆς παράδειγμα:

\*Ἀν  $f(x) \equiv 5x^4 + 4x^3 - 3x + 1$  καὶ  $g(x) \equiv -5x^4 + 3x^3 - 2x + 2$ , τότε εἶναι:

$$f(x) + g(x) \equiv 7x^3 - 5x + 3.$$

**δ).** Καλοῦμεν **γινόμενον** δύο μονωνύμων  $\alpha x^n$  καὶ  $\beta x^m$  τὸ μονώνυμον  $\alpha \beta x^{n+m}$ , ἥτοι:

$$(\alpha x^n) \cdot (\beta x^m) = \alpha \beta x^{n+m}.$$

**ε).** Καλοῦμεν **γινόμενον** δύο ἀκεραίων πολυωνύμων  $f(x)$ ,  $g(x)$  καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μέ  $f(x) \cdot g(x)$ , τὸ πολυώνυμον τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ τὰ  $f(x)$  καὶ  $g(x)$  βάσει τοῦ «ἐπιμεριστικοῦ νόμου», ἥτοι ἂν πολλαπλασιάσωμεν

όλους τούς όρους του  $f(x)$  επί έκαστον όρον του  $g(x)$  καί προσθέσωμεν όλα τά προκύπτοντα μερικά γινόμενα: Ούτως, εάν

$$f(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n \quad \text{καί}$$

$$g(x) \equiv \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_m x^m,$$

τότε τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι τὸ πολυώνυμον:

$$\begin{aligned} \pi(x) \equiv f(x) \cdot g(x) &= \alpha_0 \beta_0 + (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0) x + (\alpha_0 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_0) x^2 + \\ &+ (\alpha_0 \beta_3 + \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + \alpha_3 \beta_0) x^3 + \dots + \alpha_n \beta_m x^{n+m}. \end{aligned}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι: **ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου ἰσοῦται μετὰ τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων.**

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν προκύπτουν τώρα τὰ ἑξῆς:

1. Τὸ σύνολον τῶν πολυωνύμων  $R[x]$  εἶναι *κλειστὸν* ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμόν, δηλ. τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων ἐκ τοῦ  $R[x]$  ἀνήκει πάντοτε εἰς τὸ  $R[x]$ .

2. Ἰσχύει ἡ ἐπιμεριστική ιδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, ἥτοι ἐὰν  $\pi_1(x), \pi_2(x), \pi_3(x) \in R[x]$ , τότε ἰσχύει:

$$[\pi_1(x) + \pi_2(x)] \pi_3(x) = \pi_1(x) \pi_3(x) + \pi_2(x) \pi_3(x).$$

3. Ὁ πολλαπλασιασμός τῶν πολυωνύμων ἔχει τὴν μεταθετικήν καὶ προσεταιριστικήν ιδιότητα, ἥτοι ἐὰν  $\pi_1(x), \pi_2(x), \pi_3(x) \in R[x]$ , τότε ἰσχύουν:

$$\pi_1(x) \cdot \pi_2(x) = \pi_2(x) \cdot \pi_1(x)$$

$$\pi_1(x) [\pi_2(x) \pi_3(x)] = [\pi_1(x) \pi_2(x)] \cdot \pi_3(x).$$

4. Ὑπάρχει οὐδέτερον στοιχεῖον ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμόν καὶ εἶναι τὸ πολυώνυμον  $f(x) \equiv 1$ , ἥτοι ἰσχύει:

$$f(x) \cdot \varphi(x) \equiv 1 \cdot \varphi(x) \equiv \varphi(x) \quad \text{διὰ κάθε } \varphi(x) \in R[x].$$

**στ').** Καλοῦμεν ***v-οστήν δύναμιν*** ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου  $f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_0$  καὶ συμβολίζομεν αὐτήν μετὰ  $[f(x)]^v$ , τὸ πολυώνυμον:

$$[f(x)]^v \stackrel{\text{ορισ.}}{=} f(x) \cdot f(x) \cdot \dots \cdot f(x),$$

ὅπου οἱ παράγοντες τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι  $v$  τὸ πλῆθος.

Συνέπειαι τοῦ ἀνωτέρου ὁρισμοῦ εἶναι:

$$1. \quad [f(x)]^v \cdot [f(x)]^m = [f(x)]^{v+m}$$

$$2. \quad [[f(x)]^m]^v = [f(x)]^{mv}$$

$$3. \quad [f(x) \cdot g(x)]^v = [f(x)]^v \cdot [g(x)]^v.$$

**Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς :** Τὸ σύνολον  $R[x]$  τῶν πολυωνύμων μετὰ πραγματικούς συντελεστάς ἐφωδιασμένον μετὰ δύο πράξεις: τὴν πρόσθεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμόν, ὡς αὗται ὠρίσθησαν ἀνωτέρω καὶ αἱ ὁποῖαι πληροῦν τὰς προαναφερθείσας ιδιότητες, ἀποτελεῖ ἓν χαρακτηριστικὸν παράδειγμα μιᾶς θεμελιώδους ἀλγεβρικῆς ἐννοίας, τῆς τοῦ **δακτυλίου**, ἐννοίαν τὴν ὁποίαν θὰ μάθωμεν εἰς τὴν ἑκτὴν τάξιν.

Ὁ δακτύλιος οὗτος λέγεται «πολυωνυμικός δακτύλιος» καὶ συμβολίζεται μὲ  $R[x]$ .

Ἀποδεικνύομεν κατωτέρω δύο θεωρήματα :

**§ 52. Θεώρημα I.**—Ἐὰν  $\varphi(x) \not\equiv 0$ , τότε ἀναγκαίᾳ καὶ ἰκανῇ συνθήκῃ διὰ νὰ εἶναι  $f(x) \cdot \varphi(x) \equiv 0$  εἶναι  $f(x) \equiv 0$ .

Ἀπόδειξις : α). Ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαίᾳ. Ἐστω ὅτι  $f(x) \cdot \varphi(x) \equiv 0$  καὶ  $f(x) \not\equiv 0$ ,  $\varphi(x) \not\equiv 0$ . Ἐφ' ὅσον  $f(x) \not\equiv 0$ , ὑπάρχει συντελεστής αὐτοῦ  $\alpha_n \neq 0$  (ν βαθμὸς τοῦ  $f(x)$ ). Ἐπίσης ἐφ' ὅσον  $\varphi(x) \not\equiv 0$ , ὑπάρχει συντελεστής αὐτοῦ  $\beta_\mu \neq 0$  (μ βαθμὸς τοῦ  $\varphi(x)$ ). Τότε τὸ γινόμενον  $f(x) \cdot \varphi(x)$  θὰ περιλαμβάνῃ ὡς ὅρον τὸν  $\alpha_n \beta_\mu x^{n+\mu}$  μὲ  $\alpha_n \beta_\mu \neq 0$  καὶ ἐπομένως  $f(x) \cdot \varphi(x) \not\equiv 0$ , ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα  $f(x) \equiv 0$ .

β). Ἡ συνθήκη εἶναι ἰκανή. Πράγματι, ἂν  $\varphi(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$  καὶ  $f(x) \equiv 0$ , τότε :  $f(x) \cdot \varphi(x) \equiv 0 \cdot (\beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0) \equiv (0 \cdot \beta_\mu) x^\mu + (0 \cdot \beta_{\mu-1}) x^{\mu-1} + \dots + (0 \cdot \beta_1) x + (0 \cdot \beta_0) \equiv 0 \cdot x^\mu + 0 \cdot x^{\mu-1} + \dots + 0x + 0 \equiv 0$ .

**§ 53. Θεώρημα II.**—Ἐὰν  $f(x), g(x), \varphi(x) \in R[x]$  καὶ εἶναι  $\varphi(x) \neq 0$ , τότε διὰ νὰ εἶναι  $f(x) \cdot \varphi(x) \equiv g(x) \cdot \varphi(x)$ , πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι  $f(x) \equiv g(x)$ .

Ἀπόδειξις : Πράγματι, ἡ  $f(x) \cdot \varphi(x) \equiv g(x) \cdot \varphi(x)$  εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν :

$$f(x)\varphi(x) - g(x)\varphi(x) \equiv 0$$

$$\eta \quad \varphi(x) \cdot [f(x) - g(x)] \equiv 0$$

καὶ ἐπειδὴ  $\varphi(x) \neq 0$ , κατὰ τὸ θεώρημα I, ἡ τελευταία σχέσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν :

$$f(x) - g(x) \equiv 0, \quad \text{δηλαδή : } f(x) \equiv g(x).$$

**Ἀξιολογος σημειώσεις :** Ἐξ ὅλων τῶν μέχρι τοῦδε συμπερασμάτων συναγομέν ὅτι τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων  $R[x]$  μὲ συντελεστὰς πραγματικούς ἀριθμούς εἶναι κλειστὸν ὡς πρὸς τὰς τρεῖς πράξεις, τὴν πρόσθεσιν, τὴν ἀφαίρεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμόν, εἰς τὸν ὁποῖον μάλιστα ἰσχύει ἡ μεταθετικὴ ιδιότης. Ἐξ ἄλλου (θεώρ. I) γινόμενον δύο πολυωνύμων εἶναι ἴσον μὲ τὸ μηδὲν τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἓν τούλάχιστον ἐξ αὐτῶν εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον. Πάντα ταῦτα χαρακτηρίζουν τὸ σύνολον  $R[x]$  τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων ὡς μίαν «ἀκεραίαν περιοχὴν». Περὶ τῆς ἐννοίας τοῦ δακτυλίου καὶ τῆς ἀκεραίας περιοχῆς θὰ γνωρίσωμεν περισσότερα εἰς τὴν ἕκτην τάξιν.

**§ 54. Ἀριθμητικὴ τιμὴ πολυωνύμου.**—Ὡς ἐλέχθη εἰς τὴν § 50 εἰς ἓν πολυώνυμον  $f(x)$  σημειοῦνται πράξεις, αἱ ὁποῖαι, ἂν τὸ  $x$  ἀντικατασταθῇ μὲ τυχόντα πραγματικὸν ἀριθμὸν  $\alpha$ , δύνανται νὰ ἐκτελεσθοῦν, ὅποτε προκύπτει εἰς πραγματικὸς ἀριθμός, τὸν ὁποῖον συμβολίζομεν διὰ τοῦ  $f(\alpha)$  καὶ καλοῦμεν **ἀριθμητικὴν τιμὴν** τοῦ πολυωνύμου  $f(x)$  διὰ  $x = \alpha$ . Οὕτως, ἔαν

$$f(x) \equiv 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - x - 5$$

$$\text{θὰ εἶναι : } f(2) = 2 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 2 - 5 = -3.$$

Ὁ ἀριθμὸς  $-3$  εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου  $f(x)$  διὰ τὴν τιμὴν  $x = 2$ . Τὸ αὐτὸ πολυώνυμον διὰ  $x = 3$  δίδει:  $f(3) = 46$ .

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ προκύπτει ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος (γινόμενου) δύο πολυωνύμων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα (γινόμενον) τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν πολυωνύμων.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος δύο πολυωνύμων προκύπτει ὅτι: **δύο ἐκ ταυ-τότητος ἴσα πολυώνυμα ἔχουν ἴσας ἀριθμητικὰς τιμὰς**. Πράγματι, ἐὰν

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$\varphi(x) \equiv \beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$$

καὶ  $f(x) \equiv \varphi(x)$ , ὅτε  $\alpha_n = \beta_n$ ,  $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1}$ ,  $\dots$ ,  $\alpha_1 = \beta_1$ ,  $\alpha_0 = \beta_0$  (βλ. § 51)  
θὰ εἶναι καὶ:  $f(\alpha) = \varphi(\alpha)$  διὰ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν  $\alpha$ , διότι:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &\equiv \alpha_n \alpha^n + \alpha_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + \alpha_1 \alpha + \alpha_0 = \\ &= \beta_n \alpha^n + \beta_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + \beta_1 \alpha + \beta_0 \equiv \varphi(\alpha). \end{aligned}$$

Τέλος, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ μηδενικοῦ πολυωνύμου, προκύπτει ὅτι ἡ ἀριθμη-  
τικὴ τιμὴ παντὸς μηδενικοῦ πολυωνύμου εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πάντοτε πρὸς τὸ  
μηδέν, διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς  $x$ .

**Παρατήρησις:** Εἶδομεν ἀνωτέρω ὅτι τὸ σύμβολον  $x$  ἐν τῷ πολυωνύ-  
μῳ  $f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ,  $f(x) \in \mathbf{R}[x]$  δύναται νὰ ἀντι-  
κατασταθῇ δι' οἷουδήποτε πραγματικοῦ ἀριθμοῦ, δι' ὃ καὶ καλεῖται μεταβλητὴ  
τοῦ πολυωνύμου. Διὰ τῆς τοιαύτης ἀντικαταστάσεως εἰς ἕκαστον πραγματικὸν  
ἀριθμὸν  $x$  ἀντιστοιχεῖ εἰς πραγματικὸς ἀριθμὸς  $y = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots +$   
 $\alpha_1 x + \alpha_0$ , ἥτοι τὸ πολυώνυμον  $f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$   
ὀρίζει μίαν συνάρτησιν, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν ἐπίσης διὰ τοῦ  $f(x)$ , μὲ πεδίον  
ὁρισμοῦ τὸ σύνολον  $\mathbf{R}$  τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τιμὰς ἐν  $\mathbf{R}$ , μὲ τύπον:

$$y = f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0. \quad (1)$$

Αἱ συναρτήσεις τοῦ τύπου (1) καλοῦνται **πολυωνυμικαὶ συναρτήσεις ἢ ἀκέ-  
ραιαι ρηταὶ συναρτήσεις τοῦ  $x$** .

Ὅριζομεν ὅτι δύο πολυωνυμικαὶ συναρτήσεις  $f(x)$  καὶ  $\varphi(x)$  λέγονται  
ἐκ ταυτότητος ἴσαι καὶ σημειοῦμεν  $f(x) \equiv \varphi(x)$  τότε, καὶ μόνον τότε, ἐὰν  
αὗται εἶναι ἴσαι διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς  $x$  ἐντὸς τοῦ  $\mathbf{R}$ .

Ἐὰν βεβαίως δύο πολυώνυμα  $f(x)$  καὶ  $\varphi(x)$  μὲ πραγματικούς συντελε-  
στὰς εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, ἔχουν δηλαδὴ τοὺς αὐτοὺς συντελεστὰς, ταῦτα  
ὀρίζουν ἐντὸς τοῦ  $\mathbf{R}$  καὶ ἴσας πολυωνυμικὰς συναρτήσεις.

Ἐν τοῖς ἐπομένοις θὰ γίνεται χρῆσις τῆς ἐκφράσεως: «*Θεωροῦμεν τὴν ἀπει-  
κόνισιν*

$$f: x \longrightarrow \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

τοῦ  $\mathbf{R}$  ἐν τῷ  $\mathbf{R}$ ». Διὰ τῆς ἀνωτέρω ἐκφράσεως θὰ ἐννοῶμεν ὅτι θεωροῦμεν τὴν συ-  
νάρτησιν  $f$  ὠρισμένην ἐπὶ τοῦ  $\mathbf{R}$  μὲ τιμὰς ἐν  $\mathbf{R}$ , ὀριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \text{ διὰ } x \in \mathbf{R}.$$

**§ 55. "Εννοια τής ρίζης ενός πολυωνύμου.** — "Εστω τὸ μὴ μηδενικὸν πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad (1)$$

τοῦ ὁποίου οἱ συντελεσταὶ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί. Ἐὰν διὰ  $x = \rho$  ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου (1) εἶναι ἴση μὲ μηδέν, ἤτοι  $f(\rho) = 0$ , τότε ὁ  $\rho$  καλεῖται **ρίζα** τοῦ πολυωνύμου (1).

Π.χ. τοῦ πολυωνύμου  $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$  ρίζαι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, -2, -3, διότι εἶναι :  $f(1) = 0$ ,  $f(-2) = 0$ ,  $f(-3) = 0$ .

Ἐὰν ἐν ἀκέραιον πολυώνυμον ἐξισώσωμεν μὲ μηδέν, τότε λέγομεν ὅτι ἔχομεν μίαν **ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν**.

Οὕτως, ἐκ τοῦ πολυωνύμου (1) ἔχομεν τὴν ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν  $n$  βαθμοῦ :

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0. \quad (2)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ  $x$  δὲν εἶναι πλέον ἡ μεταβλητὴ, ἀλλὰ μία ρίζα τοῦ πολυωνύμου (1). Αἱ ρίζαι τοῦ πολυωνύμου (1) εἶναι καὶ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (2). Ἀξίζει νὰ τονισθῇ ὅτι εἶναι ἐντελῶς διάφορος ἡ ἔννοια τῆς ἐξισώσεως  $f(x) = 0$  ἀπὸ τὴν ἔννοιαν  $f(x) \equiv 0$  τοῦ μηδενικοῦ πολυωνύμου. Διότι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ  $x$  εἶναι ρίζα τοῦ πολυωνύμου  $f(x)$  καὶ ἐπομένως ἔχει προσδιοριστέαν τιμὴν, ἐνῶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν τὸ  $x$  εἶναι ἡ «μεταβλητὴ» τοῦ πολυωνύμου  $f(x)$  καὶ ἐπομένως ἔχει ἀπροσδιόριστον τιμὴν.

Ἐν πολυώνυμον ἔχει ἔννοιαν ἀκόμη καὶ ἐὰν τὸ σύμβολον  $x$  ἀντικατασταθῇ μὲ μιγαδικούς ἀριθμούς, συνεπῶς τὸ πολυώνυμον (1) δυνατὸν νὰ ἔχη καὶ μιγαδικὰς ρίζας.

Π.χ. τὸ πολυώνυμον  $f(x) \equiv x^3 + 1$  ἔχει ὡς ρίζας τοὺς ἀριθμούς :

$$-1, \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Κατόπιν τούτων δίδομεν τὸν ἐξῆς γενικὸν ὅρισμόν τῆς ρίζης :

**Καλεῖται ρίζα ἐνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου  $f(x) \not\equiv 0$  κάθε ἀριθμὸς πραγματικὸς ἢ μιγαδικός, ὅστις τιθέμενος ἀντὶ τοῦ  $x$  εἰς τὸ πολυώνυμον τὸ μηδενίζει.**

Συντόμως ὁ ὅρισμός οὗτος δίδεται ὡς ἐξῆς :

$$\text{Ὁ } \rho \text{ εἶναι ρίζα τοῦ } f(x) \iff f(\rho) = 0.$$

ορσ

\* Ἡ ρίζα ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως, πραγματικὴ ἢ μιγαδική, λέγεται **ἀλγεβρικὸς ἀριθμός**. Ἀκριβέστερον : *Εἰς ἀριθμὸς  $\zeta \in \mathbb{C}$  λέγεται ἀλγεβρικὸς ὑπεράνω τοῦ  $\mathbb{R}$  τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρῃ ἀκέραιον πολυώνυμον  $f(x)$ , ἥτοι  $f(x) \in R[x]$ , μὲ  $f(\zeta) = 0$ . Εἰς ἀριθμὸς, ὅστις δὲν εἶναι ἀλγεβρικὸς, καλεῖται **ὑπερβατικός**. Ὑπερβατικὸς ἀριθμὸς εἶναι, λ.χ., ὁ γνωστὸς ἀριθμὸς  $\pi = 3,14159 \dots$  ὡς καὶ ὁ ἀριθμὸς  $e$ , περὶ τοῦ ὁποίου γίνεται λόγος εἰς ἐπόμενον κεφάλαιον.*

Οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ δύνανται νὰ εἶναι ρητοὶ ἢ ἄρρητοι, ἀλλὰ δὲν ἐπε-  
ται ὅτι κάθε ἄρρητος εἶναι ἀλγεβρικὸς ἀριθμός. Παράδειγμα οἱ ἀριθμοὶ  $\pi$  καὶ  $e$ .

Εἰς τὴν Ἀνωτέραν Ἀλγεβραν καὶ τὴν Θεωρίαν τῶν Ἀναλυτικῶν Συναρτήσεων ἀποδεικνύεται τὸ κάτωθι θεώρημα :

**§ 56. Θεώρημα τοῦ D' Alembert.** — Πᾶν ἀκέραιον πολυώνυμον μὲ συντελεστὰς πραγματικοὺς (ἢ μιγαδικούς) ἀριθμούς, βαθμοῦ  $n \geq 1$ , ἔχει ἐντὸς τοῦ συνόλου  $\mathbb{C}$  τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν μίαν τοῦλάχιστον ρίζαν.

Τὸ θεώρημα τοῦτο ὀνομάζεται *θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Ἀλγέβρας*. Τοῦτο διευτυπώθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ D' Alembert κατὰ τὸ 1764, ἀλλ' ἡ ἀπόδειξις ὑπ' αὐτοῦ δὲν ἦτο αὐστηρά. Ἡ πρώτη αὐστηρὰ ἀπόδειξις ἐγένετο τὸ 1799 παρὰ τοῦ Gauss. Ἐκτοτε ἐδόθησαν καὶ ἄλλαι ἀποδείξεις (Cauchy, κ.ἄ.).

Τὸ θεώρημα τοῦ D' Alembert ἐξασφαλίζει μὲν τὴν ὕπαρξιν ρίζης (πραγματικῆς ἢ μιγαδικῆς) διὰ κάθε πολυώνυμον βαθμοῦ  $n \geq 1$ , δὲν παρέχει ὅμως μέθοδον εὐρέσεως ταύτης.

Ἡ ἀναζητήσις μεθόδων διὰ τὴν εὐρεσιν ριζῶν μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως  $n$  βαθμοῦ συνίσταται εἰς τὴν εὐρεσιν γενικῶν τύπων, διὰ τῶν ὁποίων αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως ἐκφράζονται συναρτήσῃ τῶν συντελεστῶν αὐτῆς διὰ τῶν πράξεων τῆς προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμοῦ, διαιρέσεως καὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ριζικῶν. Ἀποδεικνύεται ὅτι διὰ τὰς ἐξισώσεις μέχρι τετάρτου βαθμοῦ εἶναι δυνατόν νὰ εὐρεθοῦν τοιοῦτοι τύποι. Ὁ Abel ἀπέδειξεν ὅτι δὲν εἶναι δυνατόν, εἰς κάθε περίπτωσιν, νὰ εὐρεθοῦν γενικοὶ τύποι διὰ τὰς ἐξισώσεις βαθμοῦ μεγαλύτερου τοῦ τετάρτου.

**§ 57. Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῶν ἐκ ταυτότητος ἴσων πολυωνύμων — Μέθοδος τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν.**

Ἡ ἰσότης τῶν συντελεστῶν τῶν ὁμοβαθμίων ὄρων δύο ἐκ ταυτότητος ἴσων πολυωνύμων (§ 51) μᾶς ἐπιτρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς συντελεστὰς ἑνὸς πολυωνύμου εἰς τρόπον, ὥστε νὰ πληροῖ τοῦτο ὠρισμένης συνθήκας. Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι γνωστὴ ὡς *μέθοδος τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν*. Ὡς ἴδωμεν πῶς ἐφαρμόζεται ἡ μέθοδος αὕτη εἰς συγκεκριμένα παραδείγματα :

**Ἐφαρμογὴ 1η :** Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῶν  $\alpha, \beta, \gamma$  οὕτως, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ταυτότης :

$$2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta \equiv 2x^3 + (\gamma - 2)x^2 - (\gamma + 12)x - 6\gamma.$$

**Λύσις :** Ἐπειδὴ τὰ πολυώνυμα ταῦτα εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, οἱ συντελεσταὶ τῶν αὐτῶν δυνάμεων τοῦ  $x$  καὶ οἱ γνωστοὶ ὅροι θὰ εἶναι ἴσοι· δηλαδὴ θὰ εἶναι :

$$\left. \begin{aligned} \gamma - 2 &= \alpha \\ -(\gamma + 12) &= -13 \\ -6\gamma &= \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \gamma - 2 &= \alpha \\ \gamma + 12 &= 13 \\ 6\gamma &= -\beta \end{aligned} \right\}.$$

Λύνοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν :

$$\alpha = -1, \quad \beta = -6, \quad \gamma = 1.$$

**Ἐφαρμογὴ 2α :** Νὰ εὐρεθῇ ἀκέραιον πολυώνυμον  $f(x)$  τρίτου βαθμοῦ, τὸ ὁποῖον δέχεται ὡς ρίζαν τὸν ἀριθμὸν μηδέν καὶ ἐπαληθεύει τὴν ταυτότητα :

$$f(x) - f(x-1) \equiv x^2.$$

Ἀκολουθῶς, βάσει αὐτοῦ, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2, \quad (v \in \mathbb{N}).$$

**Λύσις :** Τὸ ζητούμενον πολυώνυμον θὰ εἶναι τῆς μορφῆς :  $f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ , ἔνθα  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  προσδιοριστεῖσι συντελεσταί. Ἐπειδὴ  $f(0) = 0$  θὰ πρέπει  $\delta = 0$  καὶ τὸ πολυώνυμον γίνεται :  $f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$ .

Λόγῳ τῆς ὑποθέσεως θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{aligned} f(x) - f(x-1) &\equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - \alpha(x-1)^3 - \beta(x-1)^2 - \gamma(x-1) \equiv \\ &\equiv 3\alpha x^2 - (3\alpha - 2\beta)x + (\alpha - \beta + \gamma) \equiv x^2. \end{aligned}$$

Ἐξ αὐτῆς, συμφώνως πρὸς τὸν ὅρισμόν τῆς ἰσότητος δύο πολυωνύμων (§ 51), προκύπτει :

$$\left. \begin{aligned} 3\alpha &= 1 \\ 3\alpha - 2\beta &= 0 \\ \alpha - \beta + \gamma &= 0 \end{aligned} \right\}, \text{ ἔξ οὗ : } \begin{aligned} \alpha &= 1/3 \\ \beta &= 1/2 \\ \gamma &= 1/6. \end{aligned}$$

Ἐπομένως τὸ ζητούμενον πολυώνυμον εἶναι :

$$f(x) \equiv \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x. \quad (1)$$

Ἐκ τῆς ταυτότητος  $f(x) - f(x-1) \equiv x^2$  εὐρίσκομεν, θέτοντες διαδοχικῶς  $x = 1, x = 2, \dots, x = v$  :

$$\begin{aligned} f(1) - f(0) &= 1^2 \\ f(2) - f(1) &= 2^2 \\ f(3) - f(2) &= 3^2 \\ &\dots\dots\dots \\ f(v) - f(v-1) &= v^2. \end{aligned}$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, εὐρίσκομεν :

$$f(v) - f(0) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2, \text{ ἢ ἔπειδὴ } f(0) = 0 \text{ ἔχομεν τελικῶς :}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2 = f(v) = \frac{1}{3} v^3 + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{6} v = \frac{v(v+1) \cdot (2v+1)}{6}.$$

**Ἐφαρμογὴ 3η :** Ἡ ἰκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, διὰ νὰ εἶναι τὸ κλάσμα :

$$\frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_v x^v + \beta_{v-1} x^{v-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}, \quad v \in \mathbb{N}, \quad \alpha_v \beta_v \neq 0$$

ἀνεξάρτητον τοῦ  $x$ , εἶναι ἡ :

$$\frac{\alpha_v}{\beta_v} = \frac{\alpha_{v-1}}{\beta_{v-1}} = \dots = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_0}{\beta_0}.$$

**Ἀπόδειξις :** Ἐστω ὅτι τὸ κλάσμα εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ  $x$ , ἥτοι, ὅτι ἰσοῦται, οἰοῦδήποτε ὄντος τοῦ  $x$ , πρὸς ἀριθμὸν  $k$ . Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_v x^v + \beta_{v-1} x^{v-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0} \equiv k \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{ἢ} \quad \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 &\equiv k \beta_v x^v + k \beta_{v-1} x^{v-1} + \dots + \\ &+ k \beta_1 x + k \beta_0. \end{aligned}$$



Ἐπειδὴ τὰ δύο ταῦτα πολυώνυμα εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας :  $\alpha_v = k\beta_v, \alpha_{v-1} = k\beta_{v-1}, \dots, \alpha_1 = k\beta_1, \alpha_0 = k\beta_0$ .

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων λαμβάνομεν :

$$\frac{\alpha_v}{\beta_v} = \frac{\alpha_{v-1}}{\beta_{v-1}} = \dots = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_0}{\beta_0}. \quad (2)$$

Ἦτοι, ἐδείχθη ὅτι ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαία.

Θὰ δείξωμεν ὅτι αὕτη εἶναι καὶ ἱκανή. Πράγματι· ἂν ἰσχύῃ ἡ (2) καὶ καλέσωμεν  $k$  τοὺς ἴσους λόγους, θὰ ἔχωμεν :

$$\alpha_v = k\beta_v, \alpha_{v-1} = k\beta_{v-1}, \dots, \alpha_1 = k\beta_1, \alpha_0 = k\beta_0.$$

Τὸ δοθὲν κλάσμα τότε γράφεται :

$$\frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_v x^v + \beta_{v-1} x^{v-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0} = \frac{k(\beta_v x^v + \beta_{v-1} x^{v-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0)}{\beta_v x^v + \beta_{v-1} x^{v-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0} = k,$$

ἥτοι, εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ  $x$  καὶ ἴσον πάντοτε πρὸς  $\frac{\alpha_v}{\beta_v}$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

131. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma$ , ἵνα τὸ πολυώνυμον :

$$(2\alpha + 1)x^2 + (3\beta - 1)x + (2\gamma + \beta - \alpha) \text{ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.}$$

132. Ὑπάρχουν τιμαὶ τῶν  $\lambda$  καὶ  $\mu$  διὰ τὰς ὁποίας τὸ πολυώνυμον :

$$(\lambda - 1)x^2 + (2\mu + 2)x + (\lambda + \mu - 3) \text{ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν ;}$$

133. Ἐάν  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$  καὶ  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ , ἐνθα  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ , δείξατε ὅτι τὸ  $f(x) \equiv (\alpha - \beta)x^2 + (\beta - \gamma)x + (\gamma - \alpha)$  εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον.

134. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ  $\alpha, \beta, \gamma$ , ἵνα τὸ πολυώνυμον  $2x^2 + 4x + 5$  ἰσοῦται ἐκ ταυτότητος μὲ :  $\alpha(x + 2)(x + 3) + \beta x(x - 1) + \gamma$ .

135. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma$ , ἵνα τὸ πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4 \text{ εἶναι τετράγωνον τοῦ τριωνύμου } x^2 - x + \gamma.$$

136. Ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ  $x$  ;

$$\alpha) \frac{3x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 10x + 4}, \quad \beta) \frac{4x^2 - 5x - 1}{8x^2 - 10x + 1}, \quad \gamma) \frac{2x^3 - 6x^2 + 2x - 2}{x^3 - 3x^2 + x - 1}.$$

137. Προσδιορίσατε τὰ  $\lambda, \mu$ , ἵνα τὰ κλάσματα :

$$\alpha) \frac{(\lambda - 1)x^2 + (\mu + 1)x + 1}{x^2 + 5x + 1} \quad \beta) \frac{x^2 + (\lambda - \mu)x + \lambda\mu}{4x^2 + (2\lambda - \mu)x + \lambda - \mu}$$

ἔχουν τιμὴν ἀνεξάρτητον τοῦ  $x$ .

138. Λέγομεν ὅτι τὸ πολυώνυμον  $f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$  εἶναι τέλειος κύβος, τότε καὶ μόνον τότε, ἐὰν τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν :  $\alpha(x + k)^3, k \in \mathbf{R}$ . Κατόπιν τούτου, δείξατε ὅτι αἱ ἱκαναὶ καὶ ἀναγκαῖαι συνθήκαι, ἵνα τὸ  $f(x)$  εἶναι τέλειος κύβος, εἶναι :  $\beta^3 = 27\alpha^2\delta, \beta^2 = 3\alpha\gamma$ . Ἀκολούθως δείξατε ὅτι τὸ πολυώνυμον :  $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$  εἶναι τέλειος κύβος.

139. Προσδιορίσατε τὰ  $\lambda, \mu, \nu$ , ἵνα ἡ παράστασις

$$\frac{(\lambda - 1)x^3 + (\mu + 1)x^2 + (\nu - 1)x - 15}{3x^3 - 6x^2 + x - 5}$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ  $x$ .



140. 'Εάν τὸ πολυώνυμον  $f(x) \equiv x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$  εἶναι τέλειον τετράγωνον, νὰ δειχθῇ ὅτι:  $\gamma^2 = \delta \alpha^2$  καὶ  $(4\beta - \alpha^2)^2 = 64\delta$ .

141. Προσδιορίσατε τὰ Α, Β, Γ ὥστε νὰ ὑφίσταται ἡ ταυτότης:

$$\frac{2x^2 + 10x - 3}{(x+1)(x^2-9)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-3}.$$

'Υπόδειξις: 'Εκτελέσατε πράξεις εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ ἐξισώσατε τοὺς ἀριθμητὰς τῶν δύο μελῶν.

142. Νὰ εὑρεθῇ ἀκέραιον πολυώνυμον  $f(x)$  τετάρτου βαθμοῦ, τὸ ὁποῖον δέχεται ὡς ρίζαν τὸν ἀριθμὸν μηδέν καὶ ἐπαληθεύει τὴν ταυτότητα:  $f(x) - f(x-1) \equiv x^3$ . Βάσει τούτων νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα:  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3, n \in \mathbb{N}$ .

143. 'Εάν  $\alpha + \beta + \gamma = 30$ , νὰ προσδιορισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma$ , ἵνα τὸ κλάσμα  $\frac{(\alpha-2)x^2 + (\beta-4)x + \gamma-6}{x^2 + 2x + 3}$  ἔχη τιμὴν ἀνεξάρτητον τοῦ  $x$ .

144. Νὰ ὀρισθοῦν οἱ  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  οὕτως, ὥστε:

$$\alpha n^4 + \beta n^3 + \gamma n^2 + \delta n \equiv 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

145. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐάν τὰ ἀκέραια πολυώνυμα:

$$f(x) \equiv Ax^2 + 2Bxy + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2E y + Z$$

$$\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\epsilon y + \zeta$$

εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, θὰ εἶναι:

$$A = \alpha, \quad B = \beta, \quad \Gamma = \gamma, \quad \Delta = \delta, \quad E = \epsilon, \quad Z = \zeta.$$

## Διαιρετότης ἀκεραίων πολυωνύμων

**§ 58. Τελεία διαιρέσεις.** — 'Εστωσαν  $f(x)$  καὶ  $\varphi(x)$  δύο ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ πολυωνυμικοῦ δακτυλίου  $R[x]$ . Θὰ λέγωμεν:

Τὸ πολυώνυμον  $f(x)$  διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ πολυωνύμου  $\varphi(x) \not\equiv 0$  τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ ἀκέραιον πολυώνυμον  $\pi(x) \in R[x]$  τοιοῦτον, ὥστε:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x). \quad (1)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ἐπίσης ὅτι: Τὸ  $f(x)$  εἶναι διαιρετὸν διὰ  $\varphi(x)$ , ἢ τὸ  $f(x)$  εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ  $\varphi(x)$ , ἢ ἡ διαιρέσις  $f(x) : \varphi(x)$  εἶναι τελεία, ἢ ἀκόμη τὸ  $\varphi(x)$  διαιρεῖ (ἀκριβῶς) τὸ  $f(x)$  καὶ γράφομεν  $\varphi(x) | f(x)$ .

Κατόπιν τοῦ συμβολισμοῦ τούτου ὁ ἀνωτέρω ὀρισμὸς δίδεται συντόμως ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\varphi(x) | f(x) \iff \exists \pi(x) \in R[x] : f(x) \equiv \varphi(x) \pi(x).} \quad (2)$$

'Εάν τὸ πολυώνυμον  $f(x)$  δὲν διαιρῆται διὰ τοῦ  $\varphi(x) \not\equiv 0$ , τότε γράφομεν:

$$\varphi(x) \nmid f(x).$$

Τὰ πολυώνυμα  $f(x), \varphi(x)$  καὶ  $\pi(x)$  καλοῦνται ἀντιστοίχως διαιρετέος, διαιρέτης καὶ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως τοῦ  $f(x)$  διὰ τοῦ  $\varphi(x)$ .

**'Αμεσοὶ συνέπειαι τοῦ ὀρισμοῦ.**

α). 'Εάν  $\nu, \mu (\nu \geq \mu)$  καὶ  $\lambda$  εἶναι ἀντιστοίχως οἱ βαθμοὶ τῶν  $f(x), \varphi(x)$  καὶ

$\pi(x)$  θὰ ἔχωμεν (§ 51, ε)  $\mu + \lambda = \nu$ , ὅτε  $\lambda = \nu - \mu$ , ἤτοι: «ὁ βαθμὸς τοῦ πηλίκου ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφοράν τῶν βαθμῶν διαιρετέου καὶ διαιρέτου».

β). Τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον διαιρεῖται (ἀκριβῶς) ὑπὸ παντὸς μὴ μηδενικοῦ πολυωνύμου  $\varphi(x)$  καὶ δίδει πηλίκον μηδέν. Πράγματι ἰσχύει:  $0 \equiv \varphi(x) \cdot 0$ .

γ). Πᾶν πολυώνυμον διαιρεῖται (ἀκριβῶς) ὑπὸ παντὸς σταθεροῦ πολυωνύμου  $\neq 0$ , (δηλ. σταθερᾶς ποσότητος  $\neq 0$ ). Πράγματι, ἐάν

$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$  καὶ  $\varphi(x) = c^*$ ,  $c \in \mathbf{R}$ ,  $c \neq 0$  ἔχομεν τὴν προφανῆ ταυτότητα:

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \equiv c \cdot \left\{ \frac{\alpha_\nu}{c} x^\nu + \frac{\alpha_{\nu-1}}{c} x^{\nu-1} + \dots + \frac{\alpha_1}{c} x + \frac{\alpha_0}{c} \right\},$$

ὅπου τὸ ἐντὸς τῆς ἀγκύλης ἀκέραιον πολυώνυμον εἶναι τὸ πηλίκον.

Ἐκ τοῦ ὁρίσμου (2) καὶ τοῦ θεωρήματος § 52, προκύπτει τὸ μονοσήμαντον τοῦ πηλίκου. Ἀκριβέστερον ἰσχύει ἡ πρότασις:

Ἐάν  $\varphi(x) \mid f(x)$ , τότε ὑπάρχει ἀκριβῶς ἐν πολυώνυμον  $\pi(x) \in R[x]$  τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ταυτότης:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x).$$

Πράγματι, ἐάν ὑπῆρχε καὶ ἕτερον πολυώνυμον  $\pi_1(x) \in R[x]$  τοιοῦτον, ὥστε:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi_1(x),$$

τότε θὰ ἴσχυε:  $\varphi(x)[\pi(x) - \pi_1(x)] \equiv 0$ , καὶ ἐπειδὴ  $\varphi(x) \neq 0$ , θὰ εἶναι, κατὰ τὸ θεώρημα § 52,  $\pi(x) - \pi_1(x) \equiv 0$ , ἐξ οὗ:  $\pi(x) \equiv \pi_1(x)$ .

Τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀνωτέρω ἀποδεικνύομεν τὰ κάτωθι θεωρήματα:

**§ 59. Θεώρημα.** — Ἐάν  $\varphi(x) \mid f(x) \implies \varphi(x) \mid f(x) \cdot \sigma(x)$ , διὰ κάθε πολυώνυμον  $\sigma(x) \in R[x]$ .

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ  $\varphi(x) \mid f(x)$  ἔχομεν:  $f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x)$ , ὅθεν καὶ:

$$f(x) \sigma(x) \equiv \varphi(x) \cdot [\pi(x) \cdot \sigma(x)] \equiv \varphi(x) \cdot \pi_1(x),$$

ἐνθα  $\pi_1(x) \equiv \pi(x) \cdot \sigma(x)$ , δηλαδή:  $\varphi(x) \mid f(x) \sigma(x)$ .

Παρατήρησις: Διὰ  $\sigma(x) = c$  ἰσχύει: Ἐάν  $\varphi(x) \mid f(x) \implies \varphi(x) \mid cf(x)$ ,  $c \in \mathbf{R}$ .

**§ 60. Θεώρημα.** — Ἐάν  $\varphi(x) \mid f_1(x)$  καὶ  $\varphi(x) \mid f_2(x) \implies \varphi(x) \mid f_1(x) \pm f_2(x)$ .

Ἀπόδειξις. Ἐχομεν:  $f_1(x) \equiv \pi_1(x) \cdot \varphi(x)$

$$f_2(x) \equiv \pi_2(x) \cdot \varphi(x).$$

Ὅθεν:  $f_1(x) \pm f_2(x) \equiv [\pi_1(x) \pm \pi_2(x)] \cdot \varphi(x)$ ,

ἤτοι  $\varphi(x) \mid f_1(x) \pm f_2(x)$ .

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου καὶ τῆς παρατηρήσεως τοῦ θεωρήματος § 59 προκύπτει τὸ κάτωθι:

\* Τὸ γράμμα  $c$  εἶναι τὸ ἀρχικὸν τῆς λέξεως  $\text{constant} = \text{σταθερά}$  καὶ δὲν πρέπει νὰ συγχέηται μὲ τὸ σύμβολον  $\mathbf{C} \equiv \text{σύνολον τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν (Complex numbers)}$ .

**§ 61. Θεώρημα.** — 'Εάν  $\varphi(x) \mid f_1(x), \varphi(x) \mid f_2(x), \dots, \varphi(x) \mid f_v(x)$ , τότε  $\varphi(x) \mid c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_v f_v(x)$ , ἔνθα  $c_1, c_2, \dots, c_v$  τυχοῦσαι σταθεραί.

**§ 62. Θεώρημα.** — 'Εάν  $\varphi(x) \mid f_1(x), \varphi(x) \mid f_2(x), \dots, \varphi(x) \mid f_v(x)$ , τότε  $\varphi(x) \mid f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_v(x)$ .

'Η ἀπόδειξις ὡς εὐκολος παραλείπεται.

**Πόρισμα.** — 'Εάν  $\varphi(x) \mid f(x) \implies \varphi(x) \mid [f(x)]^v \quad \forall v \in \mathbb{N}$ .

**§ 63. Θεώρημα.** — 'Εάν  $\varphi(x) \mid f(x)$  καὶ  $f(x) \mid \varphi(x) \implies f(x) = c \cdot \varphi(x)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**Ἀπόδειξις.** Ἐχομεν  $f(x) \equiv \pi_1(x) \cdot \varphi(x)$   
καὶ  $\varphi(x) \equiv \pi_2(x) \cdot f(x)$   
συνεπῶς  $f(x) \equiv \pi_1(x) \pi_2(x) f(x)$  καὶ ἐπειδὴ  $f(x) \not\equiv 0$   
κατὰ τὸ θεώρημα § 53 προκύπτει:  $\pi_1(x) \pi_2(x) \equiv 1$ .

Τότε ὁμως ἕκαστον τῶν πολυωνύμων  $\pi_1(x), \pi_2(x)$  πρέπει νὰ εἶναι βαθμοῦ μηδέν, δηλαδὴ σταθεραὶ (διατί);.

Ὡστε  $\pi_1(x) = c_1, \pi_2(x) = c_2$ , ἔνθα  $c_1, c_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

Ἀρα  $f(x) \equiv c_1 \varphi(x)$  ἢ  $\varphi(x) \equiv c_2 f(x)$ , ὁπότε  $f(x) = \frac{1}{c_2} \varphi(x)$ , δηλαδὴ γενικῶς:  

$$f(x) = c \cdot \varphi(x).$$

**Σημείωσις.** Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου προκύπτει ἀμέσως ὅτι:

'Εάν  $\varphi(x) \mid f(x) \implies c\varphi(x) \mid f(x)$ ,  $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

Οἱ διαιρέται  $\varphi(x)$  καὶ  $c\varphi(x)$  τοῦ  $f(x)$  καλοῦνται **ισοδύναμοι διαιρέται**. Ἐξ ὅλων τῶν ἰσοδυνάμων διαιρετῶν ἑνὸς πολυωνύμου  $f(x)$  ἐκεῖνος, ὅστις ἔχει ὡς συντελεστὴν τῆς μεγαλυτέρας δυνάμεως τοῦ  $x$  τὴν μονάδα, καλεῖται **κύριος διαιρέτης**.

**§ 64. Ταυτότης τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως.** — 'Εν γένει ἡ διαίρεσις δύο τυχόντων ἀκεραίων πολυωνύμων δὲν εἶναι τελεία. Εἰς τρόπον διὰ νὰ ἐλέγξωμεν ἂν ἔν πολυώνυμον διαιρῇ ἔν ἄλλο εἶναι ὁ ἀκόλουθος:

'Εστωσαν, π.χ., τὰ πολυώνυμα  $2x^2 - 7x + 6$  καὶ  $3x + 1$ . Ἴνα τὸ δεύτερον διαιρῇ ἀκριβῶς τὸ πρῶτον, πρέπει νὰ ὑπάρχη ἀκέραιον πολυώνυμον  $\pi(x)$  τοιοῦτον, ὥστε:

$$2x^2 - 7x + 6 \equiv (3x + 1) \cdot \pi(x). \quad (1)$$

Ἐπειδὴ, ὡς ἐλέχθη § 58, ὁ βαθμὸς τοῦ πηλίκου ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν βαθμῶν διαιρετέου καὶ διαιρέτου, ἔπεται ὅτι τὸ  $\pi(x)$  πρέπει νὰ εἶναι πρῶτου βαθμοῦ, ἥτοι τῆς μορφῆς  $\alpha x + \beta$ . Τότε ἡ (1) γίνεται:

$2x^2 - 7x + 6 \equiv (3x + 1)(\alpha x + \beta) \equiv 3\alpha x^2 + (\alpha + 3\beta)x + \beta$ ,  
ὁπότε, κατὰ τὸν ὅρισμὸν τῆς ἰσότητος δύο πολυωνύμων, θὰ ἔχωμεν συγχρόνως:

|                        |                                                                                           |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| $3\alpha = 2$          | 'Η πρώτη τούτων δίδει $\alpha = \frac{2}{3}$ . Διὰ $\alpha = \frac{2}{3}$ καὶ $\beta = 6$ |
| $\alpha + 3\beta = -7$ | ἡ δευτέρα δὲν ἀληθεύει, διότι:                                                            |
| $\beta = 6$ .          | $\frac{2}{3} + 3 \cdot 6 = \frac{2}{3} + 18 = 18\frac{2}{3} \neq -7$ .                    |

Συνεπώς δὲν ὑπάρχει πολυώνυμον  $\pi(x)$  πληροῦν τὴν (1), ἄρα τὸ  $2x^2 - 7x + 6$  δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ  $3x + 1$ . Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν ὅτι κατ' ἐξαιρέσιν μόνον ἡ διαίρεσις δύο ἀκεραίων πολυωνύμων εἶναι τελεία.

Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν ἀντὶ τῆς ταυτότητος (1) τῆς § 58 ἰσχύει ἡ καλουμένη ταυτότης τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως, ἡ ὁποία διαμορφοῦται καὶ ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὸ κάτωθι θεώρημα :

**Θεώρημα.** — Δοθέντων δύο ἀκεραίων πολυωνύμων  $f(x)$  καὶ  $\varphi(x)$ , βαθμῶν  $\nu$  καὶ  $\mu$  ἀντιστοίχως ( $\mu \geq 0$ ), ὑπάρχουν πάντοτε δύο μονοσημάντως ὠρισμένα πολυώνυμα  $\pi(x)$  καὶ  $\upsilon(x)$  ἐκ τοῦ  $R[x]$  τοιαῦτα, ὥστε :

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x) \quad (2)$$

καὶ βαθμὸς  $\upsilon(x) <$  βαθμὸς  $\varphi(x)$ .

Τὸ  $\pi(x)$  καλεῖται ἀκέραιον πηλίκον ἢ ἀλγοριθμικὸν πηλίκον (συντόμως πηλίκον) καὶ τὸ  $\upsilon(x)$  καλεῖται ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ  $f(x)$  διὰ τοῦ  $\varphi(x)$ , ἡ δὲ ταυτότης (2) ἢ συνδέουσα διαιρετέον, διαιρέτην, πηλίκον καὶ ὑπόλοιπον καλεῖται ταυτότης τῆς (ἀλγοριθμικῆς) διαιρέσεως.

**Ἄπόδειξις.** Ἐστώσαν τὰ πολυώνυμα :

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad (\alpha_\nu \neq 0)$$

$$\varphi(x) \equiv \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0, \quad (\beta_\mu \neq 0).$$

Θὰ ἀποδείξωμεν :

**α). Τὴν ὑπαρξιν τῶν  $\pi(x)$  καὶ  $\upsilon(x)$ .** Πρὸς τούτοις διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

**Περίπτωσις 1η :** Ἐὰν  $\nu < \mu$ , τότε τὸ θεώρημα ἰσχύει, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν  $\pi(x) \equiv 0$  καὶ  $\upsilon(x) \equiv f(x)$ , ὅτε ἡ (2) ἰσχύει, διότι ἔχομεν :

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot 0 + f(x).$$

**Περίπτωσις 2α :** Ἐὰν  $\nu \geq \mu$ , τότε διαιροῦντες τὸν πρῶτον ὅρον  $\alpha_\nu x^\nu$  τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου  $\beta_\mu x^\mu$  τοῦ διαιρετοῦ λαμβάνομεν ὡς πηλίκον τὸ ἀκέραιον μονώνυμον  $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} x^{\nu-\mu}$ , τὸ ὁποῖον ἂς καλέσωμεν  $\pi_1(x)$ , ἥτοι :

$$\pi_1(x) \equiv \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} x^{\nu-\mu}.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην  $\varphi(x)$  ἐπὶ τὸ  $\pi_1(x)$  λαμβάνομεν ὡς γινόμενον τὸ πολυώνυμον :

$$\varphi(x) \pi_1(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \beta_{\mu-1} x^{\nu-1} + \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \beta_{\mu-2} \cdot x^{\nu-2} + \dots + \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \beta_0 x^{\nu-\mu},$$

τὸ ὁποῖον ἔχει μετὰ τοῦ  $f(x)$  κοινὸν τὸν πρῶτον ὅρον  $\alpha_\nu x^\nu$ .

Σχηματίζομεν τὴν διαφοράν :

$$f(x) - \varphi(x) \pi_1(x) \equiv \left( \alpha_{\nu-1} - \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \beta_{\mu-1} \right) x^{\nu-1} + \left( \alpha_{\nu-2} - \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \beta_{\mu-2} \right) x^{\nu-2} + \dots$$

Ἐὰν καλέσωμεν  $\upsilon_1(x)$  τὸ πολυώνυμον τοῦ δευτέρου μέλους, ἔχομεν :

$$f(x) - \varphi(x) \pi_1(x) \equiv \upsilon_1(x)$$

$$\text{ἢ } f(x) \equiv \varphi(x) \pi_1(x) + \upsilon_1(x), \text{ μὲ βαθμὸν } \upsilon_1(x) \leq \nu - 1. \quad (3)$$

Τότε : (i). 'Εάν  $\nu - 1 < \mu$  ή (3) αποδεικνύει τὸ θεώρημα.

(ii). 'Εάν  $\nu - 1 \geq \mu$ , ἐργαζόμενοι ὁμοίως ἐπὶ τῶν  $u_1(x)$  ὡς διαιρετέον καὶ  $\varphi(x)$  ὡς διαιρέτην, λαμβάνομεν :

$$u_1(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi_2(x) + u_2(x), \text{ με βαθμὸν } u_2(x) < \text{βαθμοῦ } u_1(x).$$

'Εάν τώρα εἶναι πάλιν : βαθμὸς  $u_2(x) \geq \mu (= \text{βαθμὸς } \varphi(x))$ , συνεχίζομεν τὴν αὐτὴν ἐργασίαν ἐπὶ τῶν  $u_2(x)$  καὶ  $\varphi(x)$ , ἥτοι : θὰ ὑπάρχη πάλιν ἐν πηλίκον  $\pi_3(x)$  καὶ ἐν πολυώνυμον  $u_3(x)$ , ὥστε νὰ εἶναι :

$$u_2(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi_3(x) + u_3(x), \text{ με βαθμὸν } u_3(x) < \text{βαθμ. } u_2(x).$$

Οἱ βαθμοὶ τῶν  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$ ,  $u_3(x)$  βαίνουνσιν διαδοχικῶς ἐλαττούμενοι, ἄρα θὰ φθάσωμεν τελικῶς εἰς ἐν πολυώνυμον βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ  $\mu$  τοῦ  $\varphi(x)$ , ὅτε θὰ λήξη ἡ ἐργασία αὕτη. Οὕτω θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητες :

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv \varphi(x)\pi_1(x) + u_1(x) \\ u_1(x) &\equiv \varphi(x)\pi_2(x) + u_2(x) \\ u_2(x) &\equiv \varphi(x)\pi_3(x) + u_3(x) \\ &\dots\dots\dots \\ u_k(x) &\equiv \varphi(x)\pi_{k+1}(x) + u_{k+1}(x), \end{aligned} \quad (4)$$

ὅπου τὸ  $u_{k+1}(x)$  εἶναι πολυώνυμον βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ  $\mu$  τοῦ  $\varphi(x)$ . Ἀθροίζοντες τὰς ἰσότητες (4) κατὰ μέλη λαμβάνομεν μετὰ τὰς ἀπλοποιήσεις :

$$f(x) \equiv \varphi(x) \{ \pi_1(x) + \pi_2(x) + \dots + \pi_{k+1}(x) \} + u_{k+1}(x).$$

Θέτοντες :  $\pi_1(x) + \pi_2(x) + \dots + \pi_{k+1}(x) \equiv \pi(x)$  καὶ  $u_{k+1}(x) = u(x)$ , φθάνομεν εἰς τὴν ἀποδεικτέαν ταυτότητα :

$$f(x) \equiv \varphi(x) \pi(x) + u(x), \text{ με βαθμ. } u(x) < \mu (= \text{βαθμὸς } \varphi(x)).$$

## β). Τὸ μονοσήμαντον τῆς παραστάσεως (2).

Τὸ ζεῦγος τῶν πολυωνύμων  $\pi(x)$  καὶ  $u(x)$  εἶναι τὸ μόνον διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει ἡ (2), διότι, ἐὰν εἶναι καὶ :

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi'(x) + u'(x), \text{ με βαθμὸν } u'(x) < \mu,$$

τότε :  $\pi'(x) \equiv \pi(x)$  καὶ  $u'(x) \equiv u(x)$ .

Πράγματι, ἐπειδὴ :

$$\varphi(x) \cdot \pi(x) + u(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi'(x) + u'(x),$$

ἔχομεν :  $[\pi(x) - \pi'(x)]\varphi(x) \equiv u'(x) - u(x). \quad (5)$

Ἡ ταυτότης (5) δὲν δύναται νὰ ἰσχύη, εἰμὴ μόνον ἂν  $\pi(x) - \pi'(x) \equiv 0$  καὶ  $u'(x) - u(x) \equiv 0$ , δηλαδή :

$$\pi(x) \equiv \pi'(x) \text{ καὶ } u(x) \equiv u'(x),$$

διότι ἄλλως τὸ πρῶτο μέλος τῆς (5) εἶναι πολυώνυμον βαθμοῦ  $\geq \mu$ , ἐνῶ τὸ δεύτερον μέλος εἶναι πολυώνυμον βαθμοῦ  $< \mu$ .

Τὸ θεώρημα ὅθεν ἀπεδείχθη πλήρως.

## Παρατηρήσεις ἐπὶ τῆς ταυτότητος διαιρέσεως (2).

1). 'Εάν  $u(x) \equiv 0$ , τότε ἐκ τῆς (2) προκύπτει ἡ ταυτότης (1) τῆς τελείας διαιρέσεως.

2). Έκ τῆς (2) ἔπεται :  $\varphi(x) \mid f(x) - u(x)$ , δηλαδή ἡ διαφορὰ τοῦ διαιρετέου μείον τὸ ὑπόλοιπον εἶναι διαιρετὴ διὰ τοῦ διαιρέτου.

3). Ὁ βαθμὸς τοῦ ἀκεραίου πηλίκου ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν βαθμῶν διαιρετέου καὶ διαιρέτου.

4). Ἐὰν  $\varphi(x) \not\equiv 0$  ἡ ταυτότης (2) γράφεται :

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \pi(x) + \frac{u(x)}{\varphi(x)},$$

μὲ βαθμὸν  $u(x) < \text{βαθμ. } \varphi(x)$ .

Τὸ πολυώνυμον  $\pi(x)$  καλεῖται «τὸ ἀκέραιον μέρος» καὶ τὸ  $\frac{u(x)}{\varphi(x)}$  «τὸ γνησίον κλασματικὸν μέρος» τοῦ  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ .

5). Ἡ μέθοδος τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ ἀνωτέρω θεώρημα μᾶς δίδει ἕναν ἀλγόριθμον διὰ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ εὕρισκωμεν τὰ πολυώνυμα  $\pi(x)$  καὶ  $u(x)$ .

**Παράδειγμα.** Ἐὰν  $f(x) = x^3 - 1$ ,  $\varphi(x) = x + 1$  εὑρετε τὰ μονοσημάντως ὠρισμένα πολυώνυμα  $\pi(x)$  καὶ  $u(x)$ , ὥστε νὰ εἶναι :

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x) + u(x), \text{ μὲ βαθμ. } u(x) < \text{βαθμ. } \varphi(x) = 1.$$

**Λύσις.** Ἔχομεν :

$$\begin{aligned} u_1(x) &\equiv f(x) - \pi_1(x) \cdot \varphi(x) = (x^3 - 1) - x^2 \cdot (x + 1) = -x^2 - 1, & \pi_1(x) &= x^2 \\ u_2(x) &\equiv u_1(x) - \pi_2(x) \cdot \varphi(x) = -x^2 - 1 - (-x)(x + 1) = x - 1, & \pi_2(x) &= -x \\ u_3(x) &\equiv u_2(x) - \pi_3(x) \cdot \varphi(x) = (x - 1) - 1(x + 1) = -2, & \pi_3(x) &= 1 \end{aligned}$$

\*Ἀρα :

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \pi_1(x) + \pi_2(x) + \pi_3(x) = x^2 - x + 1 \\ u(x) &= u_3(x) = -2. \end{aligned}$$

**Πόρισμα I.** — Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου  $f(x)$  διὰ τοῦ διωνύμου  $x - a$  ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ πολυωνύμου διὰ  $x = a$ , ἥτοι :

$$u = f(a)$$

Γενικώτερον, ἰσχύει ὅτι : Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ  $f(x)$  διὰ τοῦ  $\alpha x + \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$  εἶναι :

$$u = f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

Ἐκ τοῦ ὁρίσμου τῆς ρίζης ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου καὶ τοῦ ἀνωτέρω πορίσματος συμπεραίνομεν :

**Πόρισμα II.** — Ἐὰν  $\rho$  εἶναι ρίζα τοῦ  $f(x) \iff x - \rho \mid f(x)$ , ἥτοι :

$$f(\rho) = 0 \iff f(x) \equiv (x - \rho) \cdot \pi(x),$$

ἐνθα  $\pi(x)$  ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ  $x$ , ἥτοι  $\pi(x) \in \mathbb{R}[x]$ .

## Ἰδιότητες τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων

**§ 65. Θεώρημα.** — Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον  $f(x)$  διαιρῇται δι' ἐνὸς ἐκάστου τῶν διωνύμων :  $(x - \rho_1), (x - \rho_2), \dots, (x - \rho_\mu)$ , ἔνθα  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\mu$  ἀριθμοὶ διάφοροι ἀλλήλων ἀνὰ δύο, τότε θὰ διαιρῇται (ἀκριβῶς) καὶ διὰ τοῦ γινομένου :

$$(x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_\mu)$$

καὶ ἀντιστρόφως.

**Ἀπόδειξις.** Θὰ ἀποδείξωμεν τὸ θεώρημα διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς. Ἐστω ὅτι τὸ  $f(x)$  διαιρεῖται διὰ τῶν διωνύμων  $(x - \rho_1), (x - \rho_2), \dots, (x - \rho_\mu)$ , τότε κατὰ τὸ πόρισμα II τῆς προηγουμένης παραγράφου θὰ ἔχωμεν :  $f(\rho_1) = 0, f(\rho_2) = 0, \dots, f(\rho_\mu) = 0$ .

Ἐστω  $\pi_1(x)$  τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως  $f(x) : (x - \rho_1)$ , ὅτε θὰ ἔχωμεν :

$$f(x) \equiv (x - \rho_1) \cdot \pi_1(x) \quad (1)$$

ἥτοι, ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ  $\mu = 1$ .

Δεχόμεθα ὅτι ἰσχύει διὰ  $\mu = k$ , ἥτοι δεχόμεθα ὅτι :

$$f(x) \equiv (x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_k) \cdot \pi_k(x). \quad (2)$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι ἰσχύει καὶ διὰ  $\mu = k + 1$ .

Πράγματι· ἔὰν θέσωμεν εἰς τὴν (2)  $x = \rho_{k+1}$ , θὰ ἔχωμεν :

$$f(\rho_{k+1}) \equiv (\rho_{k+1} - \rho_1) \cdot (\rho_{k+1} - \rho_2) \dots (\rho_{k+1} - \rho_k) \cdot \pi_k(\rho_{k+1}).$$

Ἐπειδὴ  $f(\rho_{k+1}) = 0$  καὶ  $\rho_{k+1} - \rho_j \neq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$  θὰ εἶναι :

$$\pi_k(\rho_{k+1}) = 0.$$

Τότε ὁμως, συμφώνως πρὸς τὸ πόρισμα II § 64, τὸ  $\pi_k(x)$  διαιρεῖται διὰ τοῦ  $x - \rho_{k+1}$  καὶ ἔστω  $\pi_{k+1}(x)$  τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως  $\pi_k(x) : (x - \rho_{k+1})$ , τότε :

$$\pi_k(x) \equiv (x - \rho_{k+1}) \cdot \pi_{k+1}(x). \quad (3)$$

Τῇ βοήθειᾳ τῆς τελευταίας ταυτότητος, ἡ (2) γράφεται :

$$f(x) \equiv (x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_k)(x - \rho_{k+1}) \cdot \pi_{k+1}(x)$$

ἥτοι, ἡ πρότασις ἰσχύει καὶ διὰ  $\mu = k + 1$ , ἄρα ἰσχύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $\mu$ .  
Τὸ ἀντίστροφον εἶναι προφανές.

**§ 66. Θεώρημα.** — Ἐὰν τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

μηδενίζεται διὰ  $n$  διαφόρους τιμὰς τοῦ  $x$ , τὰς :  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}, \rho_n$ , τότε θὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης :

$$f(x) \equiv a_n (x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_{n-1})(x - \rho_n).$$

**Ἀπόδειξις.** Ἐπειδὴ  $f(\rho_1) = f(\rho_2) = \dots = f(\rho_{n-1}) = f(\rho_n) = 0$ , ἔπεται, συμφώνως πρὸς τὸ πόρισμα II § 64, ὅτι τὸ πολυώνυμον  $f(x)$  διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τῶν διωνύμων :

$$x - \rho_1, x - \rho_2, \dots, x - \rho_{n-1}, x - \rho_n.$$

Τότε όμως, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου :

$$(x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_{v-1})(x - \rho_v),$$

καθόσον :

$$\rho_1 \neq \rho_2 \neq \rho_3 \neq \cdots \neq \rho_{v-1} \neq \rho_v \neq \rho_1.$$

Ἄρα, κατὰ τὰ γνωστά, θὰ ἀληθεύῃ ἡ ταυτότης :

$$f(x) \equiv (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_{v-1})(x - \rho_v) \cdot \pi, \quad (1)$$

ὅπου  $\pi$  τὸ πηλίκον.

Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος εἶναι βαθμοῦ  $v$ , καθὼς καὶ ὁ διαιρέτης, τὸ πηλίκον  $\pi$  θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου ὅρου  $\alpha_v x^v$  τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου  $x^v$  τοῦ διαιρέτου. Δηλαδή :

$$\pi = \frac{\alpha_v x^v}{x^v} = \alpha_v,$$

ὁπότε ἡ (1) γίνεται :

$$f(x) \equiv \alpha_v (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_{v-1})(x - \rho_v). \quad (2)$$

**Π α ρ α τ ῆ ρ η σ ι ς.** Ἐὰν εἰς τὴν τελευταίαν ταυτότητα (2) εἶναι  $\rho_1 = \rho_2$ , τότε τὸ γινόμενον  $(x - \rho_1)(x - \rho_2)$  γίνεται  $(x - \rho_1)^2$  καὶ λέγομεν ὅτι ἡ ρίζα  $\rho_1$  εἶναι **διπλῇ**, ἢ εἶναι **βαθμοῦ πολλαπλότητος δύο**. Ὁμοίως ἐὰν εἶναι  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ , τότε τὸ γινόμενον  $(x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)$  γίνεται  $(x - \rho_1)^3$  καὶ λέγομεν ὅτι ἡ ρίζα  $\rho_1$  εἶναι **τριπλῇ**, ἢ εἶναι **βαθμοῦ πολλαπλότητος τρία**.

Διὰ τὰ εἰρησθέντα περισσότερον ἀκριβεῖς δίδομεν τὸν κάτωθι γενικὸν ὁρισμόν :

**Μία ρίζα  $\rho$  ἐνὸς πολυωνύμου  $f(x)$ , διαφόρου τοῦ μηδενικοῦ, θὰ λέγομεν ὅτι εἶναι πολλαπλῇ τάξεως  $k$ , ἢ εἶναι βαθμοῦ πολλαπλότητος  $k$  ( $k$  ἀκέραιος  $\geq 1$ ), τότε καὶ μόνον τότε, ἂν :**

$$(x - \rho)^k \mid f(x) \quad \text{καὶ} \quad (x - \rho)^{k+1} \nmid f(x).$$

Ἐὰν  $k = 1$ , τότε ἡ ρίζα  $\rho$  λέγεται **ἀπλῇ**, ἐὰν  $k = 2$  **διπλῇ**, κ.ο.κ.

Εἶναι φανερόν ὅτι, ἐὰν ἔν ἀκέραιον πολυώνυμον  $f(x)$  ἔχῃ μίαν ρίζαν  $\rho$  βαθμοῦ πολλαπλότητος  $k$ , τότε ὁ βαθμὸς  $v$  αὐτοῦ εἶναι  $\geq k$ .

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ προκύπτει τώρα ἡ ἐξῆς σπουδαία πρότασις :

**Ἡ ἀναγκαία καὶ ἰκανὴ συνθήκη, ἵνα εἰς ἀριθμὸς  $\rho$  εἶναι ρίζα, βαθμοῦ πολλαπλότητος  $k$ , ἐνὸς πολυωνύμου  $f(x)$ , εἶναι : νὰ ὑπάρχῃ ἀκέραιον πολυώνυμον  $\varphi(x)$  τοιοῦτον, ὥστε :**

$$(1) \quad f(x) \equiv (x - \rho)^k \cdot \varphi(x) \quad \text{καὶ} \quad (2) \quad \varphi(\rho) \neq 0.$$

**Ἀ π ὁ δ ε ι ξ ι ς :** Ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαία. Πράγματι, τὸ ὅτι ὑπάρχει ἀκέραιον πολυώνυμον  $\varphi(x)$ , προκύπτει ἀπὸ τὸ γεγονός, ὅτι τὸ  $f(x)$  εἶναι διαιρετόν διὰ  $(x - \rho)^k$ , ἄρα ἔχομεν :

$$f(x) \equiv (x - \rho)^k \cdot \varphi(x).$$

Ἐξ ἄλλου, ἐὰν ᾗτο  $\varphi(\rho) = 0$ , τότε  $x - \rho \mid \varphi(x)$ , δηλ.  $\varphi(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x)$  καὶ ἐπομένως θὰ ἴσχυε :

$$f(x) \equiv (x - \rho)^{k+1} \cdot \pi(x), \quad \text{δηλ.} \quad (x - \rho)^{k+1} \mid f(x), \quad \text{ὅπερ ἄτοπον.}$$

**Ἡ συνθήκη εἶναι ἰκανή.** Πράγματι, ὑποθέσωμεν ὅτι :

$$f(x) \equiv (x - \rho)^k \cdot \varphi(x) \quad (1)$$

$$\mu\epsilon \quad \varphi(\rho) \neq 0. \quad (2)$$



Ἡ (1) δεικνύει, ὅτι πράγματι τὸ  $f(x)$ , εἶναι διαιρετὸν διὰ  $(x - \rho)^k$ , ἥτοι  $(x - \rho)^k \mid f(x)$ .

Ἐὰν καὶ  $(x - \rho)^{k+1} \mid f(x)$ , τότε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀκέραιον πολυώνυμον  $g(x)$ , ὥστε :

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv (x - \rho)^{k+1} \cdot g(x) \\ \text{ἢ} \quad f(x) &\equiv (x - \rho)^k \cdot (x - \rho) g(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Συγκρίνοντας τὰς (1) καὶ (3) λαμβάνομεν :

$$\varphi(x) \equiv (x - \rho) \cdot g(x). \quad (4)$$

Ἡ (4), διὰ  $x = \rho$ , γίνεται :

$$\begin{aligned} \varphi(\rho) &\equiv 0 \cdot g(\rho) \\ \text{ἢ} \quad \varphi(\rho) &= 0, \end{aligned}$$

ὅπερ ἄτοπον, διότι ἀντίκειται εἰς τὴν (2). Ἡ πρότασις ὅθεν ἀπεδείχθη.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι : Εἰς κάθε ρίζαν πολυωνύμου  $f(x) \not\equiv 0$  ἀντιστοιχεῖ *μονοσημάντως* εἰς μέγιστος ἀκέραιος  $k \geq 1$ . Ἐὰν συνεπῶς τὸ πολυώνυμον  $f(x)$ , βαθμοῦ  $\nu$ , ἔχη ὡς ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$  καὶ ἐκάστην μὲ βαθμὸν πολλαπλότητος  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν :

$$f(x) \equiv \alpha_\nu (x - \rho_1)^{\lambda_1} \cdot (x - \rho_2)^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot (x - \rho_k)^{\lambda_k},$$

$$\text{ἐνθα εἶναι} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = \nu, \quad (k \leq \nu).$$

Ἡ παράστασις αὕτη, ἣτις εἶναι μονοσημάντως ὠρισμένη διὰ κάθε πολυώνυμον, ἂν δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ θέσις τῶν παραγόντων ἐν αὐτῇ, καλεῖται : « *ἀνάλυσις τοῦ πολυωνύμου  $f(x)$  εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων* ».

**Ἐφαρμογή :** Τὸ πολυώνυμον  $f(x) \equiv x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 + 3x + 2$  ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων ὡς κάτωθι :

$$f(x) \equiv (x - 1)^2(x + 1)^3(x + 2),$$

ἥτοι ἔχει τὰς ρίζας 1, -1, -2 εἰς βαθμοὺς πολλαπλότητος ἀντιστοίχως 2, 3, 1.

## § 67. Θεώρημα. — Ἐὰν τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_1x + a_0$$

μηδενίζεται διὰ  $\nu+1$  τιμὰς τοῦ  $x$ , διαφόρους μεταξύ των, τότε τοῦτο εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον.

**Ἀπόδειξις.** Ἀς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ  $\nu+1$  διάφοροι ἀλλήλων τιμαὶ τοῦ  $x$  :

$$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\nu, \rho_{\nu+1}$$

μηδενίζουν τὸ πολυώνυμον  $f(x)$ . Τότε, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ ἔχωμεν :

$$f(x) \equiv \alpha_\nu (x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_\nu). \quad (1)$$

Ἡ ταυτότης (1), διὰ  $x = \rho_{\nu+1}$ , γίνεται :

$$f(\rho_{\nu+1}) \equiv \alpha_\nu (\rho_{\nu+1} - \rho_1)(\rho_{\nu+1} - \rho_2) \dots (\rho_{\nu+1} - \rho_\nu) = 0, \text{ καθόσον } f(\rho_{\nu+1}) = 0. \quad (2)$$

Ἐπειδὴ δέ:  $\rho_{v+1} \neq \rho_1 \neq \rho_2 \neq \dots \neq \rho_v$ , θὰ εἶναι:

$$(\rho_{v+1} - \rho_1)(\rho_{v+1} - \rho_2) \dots (\rho_{v+1} - \rho_v) \neq 0,$$

ὅτε ἐκ τῆς (2), ἔπεται ὅτι:  $\alpha_v = 0$ . Τότε ὁμως τὸ πολυώνυμον  $f(x)$  γίνεται:

$$f(x) \equiv \alpha_{v-1} x^{v-1} + \alpha_{v-2} x^{v-2} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0. \quad (3)$$

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως καὶ εἰς τὸ πολυώνυμον (3) ἀποδεικνύομεν, ὅτι  $\alpha_{v-1} = 0$ .

Ὅμοιως προχωροῦντες εὐρίσκομεν ὅτι:  $\alpha_{v-2} = 0, \alpha_{v-3} = 0, \dots, \alpha_1 = 0, \alpha_0 = 0$ .

Ὡστε, ἀπεδείχθη ὅτι:  $\alpha_v = \alpha_{v-1} = \dots = \alpha_1 = \alpha_0 = 0$ . (4)

Ἡ (4) ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

**Ἐφαρμογή:** Δείξατε ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$f(x) \equiv (x-a)^2 (\beta-\gamma) + (x-\beta)^2 (\gamma-a) + (x-\gamma)^2 (a-\beta) + (a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a)$$

εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

**Λύσις:** Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι:  $f(a) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$ .

Ἐπειδὴ τὸ  $f(x)$  εἶναι δευτέρου βαθμοῦ καὶ μηδενίζεται διὰ τιμὰς τοῦ  $x$  περισσοτέρας τοῦ βαθμοῦ του ἔπεται, ὅτι τὸ  $f(x)$  εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

**Πόρισμα I.**— Πᾶν ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ  $v$ , ἔχει  $v$  τὸ πολὺ διαφόρους ρίζας.

**Πόρισμα II.**— Ἐὰν τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον:

$$f(x) \equiv \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

μηδενίζεται δι' ἀπείρους τιμὰς τοῦ  $x$ , τότε τοῦτο εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

**Πόρισμα III.**— Ἐὰν δύο ἀκέραια πολυώνυμα  $f(x)$  καὶ  $\phi(x)$ , βαθμῶν  $v$ , λαμβάνουν τὰς αὐτὰς τιμὰς διὰ  $v+1$  διαφόρους τιμὰς τοῦ  $x$ , τότε τὰ πολυώνυμα ταῦτα εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα.

**§ 68. Θεώρημα.**— Ἐὰν τὰ ἀκέραια πολυώνυμα:

$$f_1(x) \equiv \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad \alpha_v \neq 0$$

$$f_2(x) \equiv \beta_v x^v + \beta_{v-1} x^{v-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0, \quad \beta_v \neq 0$$

ἔχουν τὰς αὐτὰς  $v$  διαφόρους ἀλλήλων ρίζας  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_v$ , τότε:

$$\frac{\beta_v}{\alpha_v} = \frac{\beta_{v-1}}{\alpha_{v-1}} = \dots = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_0}{\alpha_0}$$

καὶ ἀντιστρόφως.

**Ἀπόδειξις:** Κατὰ τὰ γνωστά (§ 66), θὰ ἔχωμεν

$$f_1(x) \equiv \alpha_v (x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_v) \quad (1)$$

$$f_2(x) \equiv \beta_v (x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_v). \quad (2)$$

Ἡ σχέση (2) γράφεται:

$$f_2(x) \equiv \frac{\beta_v}{\alpha_v} \cdot \alpha_v (x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_v) \equiv \frac{\beta_v}{\alpha_v} f_1(x). \quad (3)$$

Ἐὰν δὲ τεθῇ  $\frac{\beta_v}{\alpha_v} = k$ , ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν:

$$f_2(x) \equiv k \cdot f_1(x), \text{ δηλαδή:}$$

$$\beta_v x^v + \beta_{v-1} x^{v-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0 \equiv k \alpha_v x^v + k \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + k \alpha_1 x + k \alpha_0,$$

καὶ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος δύο πολυωνύμων, ἔχομεν τὰς σχέσεις :

$$\beta_v = k\alpha_v, \beta_{v-1} = k\alpha_{v-1}, \dots, \beta_1 = k\alpha_1, \beta_0 = k\alpha_0 \quad (4)$$

$$\eta \quad \boxed{\frac{\beta_v}{\alpha_v} = \frac{\beta_{v-1}}{\alpha_{v-1}} = \dots = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_0}{\alpha_0}} \quad (5)$$

**Ἀντιστρόφως :** Ἐστω ὅτι ἀληθεύει ἡ (5). Θέτομεν τοὺς ἴσους λόγους (5) ἴσον μὲ  $k$ , ὅτε ἔχομεν :

$$\text{Τότε :} \quad \beta_v = k\alpha_v, \beta_{v-1} = k\alpha_{v-1}, \dots, \beta_1 = k\alpha_1, \beta_0 = k\alpha_0.$$

$$f_2(x) \equiv k\alpha_v x^v + k\alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + k\alpha_0 \equiv k(\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_0),$$

$$\eta \text{τοι :} \quad f_2(x) \equiv k f_1(x).$$

Ἐξ αὐτῆς προκύπτει ὅτι κάθε ρίζα τοῦ  $f_1(x)$  εἶναι καὶ ρίζα τοῦ πολυωνύμου  $f_2(x)$ .

**Παρατήρησις :** Αἱ ἰσότητες (4) δὲν ἀντικαθίστανται ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων (5), ὅταν εἰς τῶν συντελεστῶν  $\beta_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, v$ , π.χ. ὁ  $\beta_{v-\lambda}$ , εἶναι μηδέν. Ἐκ τῆς (4), ἡ σχέση  $\beta_{v-\lambda} = k \cdot \alpha_{v-\lambda}$  μᾶς δίδει καὶ  $\alpha_{v-\lambda} = 0$ , ὅτε τὰ πολυώνυμα  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  δὲν θὰ ἔχουν τὸν ὅρον μὲ τὸ  $x^{v-\lambda}$  καὶ ἀπὸ τὰς ἰσοτήτων (5) θὰ λείπῃ ὁ λόγος  $\frac{\beta_{v-\lambda}}{\alpha_{v-\lambda}}$ . Ἐὰν πάλιν τὸ  $\alpha_{v-\lambda}$  εἶναι μηδέν, ὁ λόγος  $\frac{\beta_{v-\lambda}}{\alpha_{v-\lambda}}$  δὲν ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καὶ συνεπῶς καὶ πάλιν μεταξὺ τῶν λόγων τῶν ἰσοτήτων (5) δὲν θὰ ὑπάρχῃ ὁ λόγος  $\frac{\beta_{v-\lambda}}{\alpha_{v-\lambda}}$ .

**§ 69 Θεώρημα.** — Ἐὰν τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον  $f(x) \equiv \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ,  $\alpha_v \neq 0$ , μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς  $\alpha_v, \alpha_{v-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ , δέχεται ὡς ρίζαν τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν  $\alpha + i\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$ ), τότε θὰ δέχεται ὡς ρίζαν καὶ τὸν συζυγῆ αὐτοῦ  $\alpha - i\beta$ .

Ὑποτίθεται ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου  $f(x)$  εἶναι μεγαλύτερος ἢ ἴσος τοῦ 2.

**Ἀπόδειξις :** Ἐστω  $\phi(x)$  τὸ πολυώνυμον δευτέρου βαθμοῦ, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς  $\alpha + i\beta$  καὶ  $\alpha - i\beta$ , ἡτοι :

$$\phi(x) \equiv [x - (\alpha + i\beta)][x - (\alpha - i\beta)] \equiv x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2).$$

Τὸ  $f(x)$  διαιρούμενον διὰ τοῦ  $\phi(x)$  θὰ δώσῃ, κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 64), πηλίκον ἀκέραιον πολυώνυμον, ἔστω τὸ  $\pi(x)$  καὶ πρωτοβάθμιον ὑπόλοιπον μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς, ἔστω τὸ  $\gamma x + \delta$ . Τότε, κατὰ τὴν ταυτότητα διαιρέσεως ἀκεραίων πολυωνύμων, θὰ ἔχομεν :

$$f(x) \equiv \phi(x) \cdot \pi(x) + (\gamma x + \delta). \quad (1)$$

Ἐπειδὴ  $f(\alpha + i\beta) = 0$  καὶ  $\phi(\alpha + i\beta) = 0$ , ἐκ τῆς (1) ἔπεται :

$$\gamma(\alpha + i\beta) + \delta = 0$$

$$\eta \quad (\alpha\gamma + \delta) + i\beta\gamma = 0, \text{ ἐξ οὗ : } \begin{cases} \alpha\gamma + \delta = 0 \\ \beta\gamma = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Ἐπειδὴ ὁμως  $\beta \neq 0$ , ἔπεται, ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (2),  $\gamma = 0$ . Τότε, ἐκ τῆς πρώτης τῶν (2), προκύπτει  $\delta = 0$ .

Διὰ  $\gamma = \delta = 0$  ἡ (1) γίνεται :

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x). \quad (3)$$

Ἐκ τῆς (3) προκύπτει :

$$f(\alpha - i\beta) \equiv \varphi(\alpha - i\beta) \pi(\alpha - i\beta)$$

καὶ ἔπειδὴ  $\varphi(\alpha - i\beta) = 0$ , θὰ εἶναι :  $f(\alpha - i\beta) = 0$ , ἥτοι τὸ  $f(x)$  δέχεται ὡς ρίζαν καὶ τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν  $\alpha - i\beta$ .

Γενικώτερον ἰσχύει τὸ κάτωθι θεώρημα :

**§ 70. Θεώρημα.**—Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον, μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς, δέχεται ὡς ρίζαν τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν  $\alpha + i\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq 0$ ) εἰς βαθμὸν πολλαπλότητος  $k$ , θὰ δέχεται ἐπίσης ὡς ρίζαν καὶ τὸν συζυγῆ του  $\alpha - i\beta$  καὶ μάλιστα μὲ τὸν αὐτὸν βαθμὸν πολλαπλότητος  $k$ .

Ἡ ἀπόδειξις διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

**Πόρισμα I.**—Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον  $f(x)$ , μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς, ἔχῃ μιγαδικὰς ρίζας, τὸ πλῆθος τῶν μιγαδικῶν ριζῶν εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς.

**Πόρισμα II.**—Ἀκέραιον πολυώνυμον περιττοῦ βαθμοῦ μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς ἔχει τοῦλάχιστον μίαν πραγματικὴν ρίζαν, ἀρτίου δὲ βαθμοῦ δύναται νὰ ἔχῃ καὶ πάσας τὰς ρίζας του μιγαδικὰς.

**§ 71. Θεώρημα.**—Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον μὲ ρητοὺς συντελεστὰς δέχεται ρίζαν τὴν  $\alpha + \sqrt{\beta}$  ( $\alpha \in \mathbb{Q}$ ,  $\beta \in \mathbb{Q}^+$ ,  $\beta \neq 0^2$ , ὅπου  $\theta \in \mathbb{Q}$ ) θὰ δέχεται ἐπίσης καὶ τὴν  $\alpha - \sqrt{\beta}$  καὶ μάλιστα μὲ τὸν αὐτὸν βαθμὸν πολλαπλότητος.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος τῆς τοῦ προηγουμένου θεωρήματος καὶ ὡς ἐκ τούτου ἐπαφίεται ὡς ἄσκησης.

**Ἐφαρμογή.** Νὰ εὑρεθῇ πολυώνυμον τετάρτου βαθμοῦ μὲ ἀκεραίους συντελεστὰς, τὸ ὁποῖον νὰ διαιρῇται διὰ τοῦ :  $x^2 - (\sqrt{2} + i)x + i\sqrt{2}$ .

**Λύσις.** Παρατηροῦμεν ὅτι :

$$x^2 - (\sqrt{2} + i)x + i\sqrt{2} \equiv (x - \sqrt{2})(x - i).$$

Ἐὰν  $f(x)$  εἶναι τὸ ζητούμενον πολυώνυμον, τότε, ἔπειδὴ διαιρεῖται διὰ  $x - \sqrt{2}$ , δυνάμει τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, θὰ διαιρῇται καὶ διὰ  $x + \sqrt{2}$ , ὁμοίως ἔπειδὴ διαιρεῖται διὰ  $x - i$ , δυνάμει τοῦ θεωρήματος § 69, θὰ διαιρῇται καὶ διὰ  $x + i$ , ὅθεν, δυνάμει τοῦ θεωρήματος § 65, θὰ διαιρῇται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν :

$$f(x) \equiv (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - i)(x + i) \equiv (x^2 - 2)(x^2 + 1) \equiv x^4 - x^2 - 2.$$

**§ 72. Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῶν ιδιοτήτων τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων.**

**Ἐφαρμογή 1η :** Προσδιορίσατε τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς  $\alpha, \beta$ , ἵνα τὸ πολυώνυμον  $f(x) \equiv x^3 - 2\alpha x^2 + \beta x + 6$  διαιρῇται διὰ τοῦ γινομένου  $(x-2)(x-3)$ .

**Λύσις.** Ἐπειδὴ θέλομεν τὸ πολυώνυμον  $f(x) \equiv x^3 - 2\alpha x^2 + \beta x + 6$  νὰ διαιρῇται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ γινομένου  $(x-2)(x-3)$ , ἔπεται ὅτι ἀρκεῖ νὰ διαιρῇται ἀκριβῶς διὰ  $x-2$  καὶ διὰ  $x-3$ .

Πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ :

$$f(2) = -8\alpha + 2\beta + 14 = 0, \quad \text{ἤτοι} \quad 4\alpha - \beta = 7 \quad (1)$$

$$f(3) = -18\alpha + 3\beta + 33 = 0, \quad \text{ἤτοι} \quad 6\alpha - \beta = 11. \quad (2)$$

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὐρίσκομεν :

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1.$$

**Σημείωσις :** Τοὺς πραγματικούς ἀριθμούς  $\alpha$  καὶ  $\beta$  τῆς ἀνωτέρω ἐφαρμογῆς δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν καὶ δι' ἄλλων τρόπων. Ἐφαρμόσατε ἕναν ἐξ αὐτῶν διὰ τὴν εὐρεσιν τῶν  $\alpha$  καὶ  $\beta$ .

**Ἐφαρμογὴ 2α :** Ἀκέραιον πολυώνυμον  $f(x)$  διαιρούμενον διὰ  $x+1$  δίδει ὑπόλοιπον 2, διαιρούμενον διὰ  $x-2$  δίδει ὑπόλοιπον 11 καὶ διὰ  $x+3$  δίδει ὑπόλοιπον 6. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ  $f(x)$  διὰ τοῦ γινομένου  $(x+1)(x-2)(x+3)$ .

**Λύσις :** Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι :

$$f(-1) = 2, \quad f(2) = 11, \quad f(-3) = 6. \quad (1)$$

Τὸ πολυώνυμον  $f(x)$  διαιρούμενον διὰ τοῦ γινομένου :

$$(x+1)(x-2)(x+3),$$

τὸ ὁποῖον εἶναι τρίτου βαθμοῦ, θὰ δώσῃ ἐν πηλίκον  $\pi(x)$  καὶ ἐν ὑπόλοιπον τὸ πολὺ δευτέρου βαθμοῦ, ἔστω τὸ  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ .

Κατὰ τὴν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως θὰ ἔχωμεν :

$$f(x) \equiv (x+1)(x-2)(x+3) \cdot \pi(x) + \alpha x^2 + \beta x + \gamma. \quad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὴν (2) διαδοχικῶς  $x = -1, x = 2, x = -3$  καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς (1), λαμβάνομεν τὸ σύστημα :

$$(\Sigma) \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 2 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 11 \\ 9\alpha - 3\beta + \gamma = 6. \end{cases}$$

Λύοντες τὸ σύστημα  $(\Sigma)$  εὐρίσκομεν :  $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$ .

Ὡστε, τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον θὰ εἶναι :  $x^2 + 2x + 3$ .

**§ 73. Σχέσεις μεταξύ τῶν ριζῶν καὶ τῶν συντελεστῶν ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου.** — Ἐστω τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad (\alpha_n \neq 0)$$

μὲ ρίζας  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_{n-1}, \rho_n$ .

Ὡς γνωστὸν ἰσχύει :

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \equiv \alpha_n (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n). \quad (1)$$

Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) διὰ τοῦ  $\alpha_n \neq 0$  καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εἰς τὸ δεύτερον μέρος, τὸ ὁποῖον καὶ διατάσσομεν κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ  $x$ , ἔχομεν :

$$x^n + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x^{n-1} + \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n} x^{n-2} + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_n} x + \frac{\alpha_0}{\alpha_n} \equiv x^n - (\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n) x^{n-1} + (\rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \dots + \rho_{n-1} \rho_n) x^{n-2} - \dots + (-1)^n \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n.$$

Ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τῶν ἰσοβαθμίων ὅρων λαμβάνομεν τὰς σχέσεις :

$$\begin{array}{ll}
 S_1 \equiv \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \cdots + \rho_{v-1} + \rho_v & = - \frac{a_{v-1}}{a_v} \\
 S_2 \equiv \rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \cdots + \rho_1 \rho_v + \rho_2 \rho_3 + \cdots + \rho_2 \rho_v + \cdots + \rho_{v-1} \rho_v & = + \frac{a_{v-2}}{a_v} \\
 S_3 \equiv \rho_1 \rho_2 \rho_3 + \rho_1 \rho_2 \rho_4 + \cdots + \rho_1 \rho_2 \rho_v + \cdots + \rho_{v-2} \rho_{v-1} \rho_v & = - \frac{a_{v-3}}{a_v} \\
 \dots & \dots \\
 S_v \equiv \rho_1 \rho_2 \rho_3 \cdots \rho_{v-1} \rho_v & = (-1)^v \frac{a_0}{a_v}
 \end{array}$$

Αἱ σχέσεις αὗται μεταξὺ τῶν ριζῶν καὶ τῶν συντελεστῶν ἑνὸς πολυωνύμου εἶναι γνωσταὶ ὡς σχέσεις τοῦ Vieta.

Διὰ τῶν σχέσεων τούτων δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν πολυώνυμον, τοῦ ὁποίου ἔχουν δοθῇ αἱ ρίζαι.

**Ἐ φ α ρ μ ο γ ῆ 1η :** Δίδεται τὸ πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv 2x^3 - 3x^2 + 4x - 8.$$

Ἐὰν  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ  $f(x)$ , νὰ εὗρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως :

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2.$$

**Λύσεις :** Ἰσχύει προφανῶς ἡ ἰσότης :

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)^2 - 2(\rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \rho_2 \rho_3). \quad (1)$$

$$\text{Ἄλλά :} \quad \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\text{καὶ} \quad \rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \rho_2 \rho_3 = \frac{4}{2} = 2. \quad (3)$$

Ἡ (1), δυνάμει τῶν (2) καὶ (3), γίνεται :

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot 2 = \frac{9}{4} - 4 = -\frac{7}{4}.$$

**Ἐ φ α ρ μ ο γ ῆ 2α :** Νὰ εὗρεθῇ πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ, τοῦ ὁποίου δύο ρίζαι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ  $\rho_1 = 5$  καὶ  $\rho_2 = i$ .

**Λύσεις :** Ἐστω  $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ ,  $\alpha \neq 0$  τὸ ζητούμενον πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ.

Προφανῶς ἡ τρίτη ρίζα τοῦ ἐν λόγῳ πολυώνυμον εἶναι :  $\rho_3 = -i$ , (διὰτί;)

Τότε, συμφώνως πρὸς τὰς σχέσεις τοῦ Vieta, θὰ ἔχωμεν :

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 &= -\frac{\beta}{\alpha}, & \text{ἤτοι} & & 5 &= -\frac{\beta}{\alpha} \\ \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3 &= \frac{\gamma}{\alpha}, & \text{ἤτοι} & & 1 &= \frac{\gamma}{\alpha} \\ \rho_1\rho_2\rho_3 &= -\frac{\delta}{\alpha}, & \text{ἤτοι} & & 5 &= -\frac{\delta}{\alpha} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \beta &= -5\alpha \\ \gamma &= \alpha \\ \delta &= -5\alpha. \end{aligned}$$

Ὅθεν τὸ ζητούμενον πολυώνυμον εἶναι :

$$f(x) \equiv \alpha(x^3 - 5x^2 + x - 5).$$

**\* Διαιρετότης ἀκεραίου πολυωνύμου διὰ τοῦ διωνύμου  $(x - \alpha)^v$ .**

**§ 74. Θεώρημα.** — Ἀκέραιον πολυώνυμον  $f(x)$  διαιρεῖται διὰ τοῦ  $(x - \alpha)^v$ ,  $v \in \mathbb{N}$ , τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν :

$$f(\alpha) = 0, \quad f_1(\alpha) = 0, \quad f_2(\alpha) = 0, \quad \dots, \quad f_{v-1}(\alpha) = 0,$$

ἔνθα  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{v-1}(x)$  εἶναι ἀντιστοίχως τὰ πηλίκων τῶν διαιρέσεων :

$$f(x) : (x - \alpha), \quad f_1(x) : (x - \alpha), \quad \dots, \quad f_{v-2}(x) : (x - \alpha).$$

**Ἀ π ὅ δ ε ι ξ ι σ :** Ἐστω  $\varphi(x)$  τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ  $f(x)$  διὰ τοῦ  $(x - \alpha)^v$ , τότε ἔχομεν :  $f(x) \equiv (x - \alpha)^v \cdot \varphi(x)$ . (1)

Διὰ  $x = \alpha$  ἡ (1) δίδει  $f(\alpha) = 0$ . Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ  $f(x)$  διαιρεῖται διὰ  $x - \alpha$ . Ἐὰν  $f_1(x)$  εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ  $f(x)$  διὰ  $x - \alpha$ , τότε, διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) διὰ  $x - \alpha$ , λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα :

$$f_1(x) \equiv (x - \alpha)^{v-1} \cdot \varphi(x). \quad (2)$$

Διὰ  $x = \alpha$  ἡ (2) δίδει  $f_1(\alpha) = 0$ . Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ πολυώνυμον  $f_1(x)$  διαιρεῖται διὰ  $x - \alpha$ . Ἐὰν  $f_2(x)$  εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως  $f_1(x) : x - \alpha$ , τότε, διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (2) διὰ  $x - \alpha$ , λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα :

$$f_2(x) \equiv (x - \alpha)^{v-2} \cdot \varphi(x). \quad (3)$$

Διὰ  $x = \alpha$  ἡ (3) δίδει  $f_2(\alpha) = 0$ , τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὸ  $f_2(x)$  διαιρεῖται διὰ  $x - \alpha$ .

Προχωροῦντες, καθ' ὅμοιον τρόπον, εὐρίσκομεν ὅτι τὸ πηλίκον τῆς  $v - 1$  τάξεως εἶναι :

$$f_{v-1}(x) \equiv (x - \alpha) \cdot \varphi(x). \quad (v)$$

Διὰ  $x = \alpha$  ἡ σχέση αὕτη γίνεται  $f_{v-1}(\alpha) = 0$ , δηλαδή τὸ πολυώνυμον  $f_{v-1}(x)$  διαιρεῖται διὰ  $x - \alpha$ .

**Ἀ ν τ ι σ τ ρ ὀ φ ω σ.** Ἐφ' ὅσον  $f(\alpha) = 0, f_1(\alpha) = 0, \dots, f_{v-1}(\alpha) = 0$ , θὰ ἔχωμεν :

|                                         |                                                                  |
|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| $f(x) \equiv (x - \alpha) f_1(x)$       | Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τούτων κατὰ μέλη, λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα : |
| $f_1(x) \equiv (x - \alpha) f_2(x)$     |                                                                  |
| $f_2(x) \equiv (x - \alpha) f_3(x)$     |                                                                  |
| $\dots\dots\dots$                       |                                                                  |
| $f_{v-1}(x) \equiv (x - \alpha) f_v(x)$ |                                                                  |

$$f(x) \equiv (x - \alpha)^v f_v(x),$$

ἡ ὁποία φανερώνει ὅτι τὸ πολυώνυμον  $f(x)$  διαιρεῖται διὰ  $(x - \alpha)^v$ .

**Παρατήρησις.** Διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι ἀκέραιον πολυώνυμον διαιρεῖται διὰ τινος δυνάμεως τοῦ  $x - \alpha$  ἐργαζόμεθα πολλάκις ὡς ἑξῆς :

**Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως.** Ἐστω ὅτι τὸ πολυώνυμον  $f(x)$  διαιρεῖται διὰ  $(x - \alpha)^2$ . Τότε θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα :

$$f(x) \equiv (x - \alpha)^2 \cdot \varphi(x). \quad (1)$$

Θεωροῦμεν τὸν μετασχηματισμόν :

$$x - \alpha = y \iff x = y + \alpha \quad (2)$$

καὶ ἡ (1) γίνεται :

$$f(y + \alpha) \equiv y^2 \cdot \varphi(y + \alpha), \quad (3)$$

ὅπου  $f(y + \alpha)$  καὶ  $\varphi(y + \alpha)$  ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ  $y$ .

Ἐκ τῆς (3) προκύπτει ὅτι τὸ  $f(y + \alpha)$  διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ  $y^2$ . Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ τὸ  $f(y + \alpha)$  νὰ στερεῇται σταθεροῦ καὶ πρωτοβαθμίου ὅρου, ἥτοι νὰ εἶναι τῆς μορφῆς :

$$f(y + \alpha) \equiv \alpha_n y^n + \alpha_{n-1} y^{n-1} + \dots + \alpha_3 y^3 + \alpha_2 y^2.$$

Ὅμοίως ἵνα τὸ  $f(x)$  διαιρῇται διὰ  $(x - \alpha)^3$ , πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ  $f(y + \alpha)$  νὰ διαιρῇται διὰ  $y^3$ , ἥτοι νὰ εἶναι τῆς μορφῆς :  $f(y + \alpha) \equiv \alpha_n y^n + \alpha_{n-1} y^{n-1} + \dots + \alpha_4 y^4 + \alpha_3 y^3$ , διότι διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ (2) προκύπτει ὅτι :

$$f(x) \equiv (x - \alpha)^3 \cdot \pi(x) \iff f(y + \alpha) \equiv y^3 \cdot \pi(y + \alpha).$$

**Ἐφαρμογὴ 1η :** Ἐάν  $n$  φυσικὸς ἀριθμὸς, νὰ δεიχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv n x^{n+1} - (n+1) x^n + 1$$

διαιρεῖται διὰ τοῦ  $(x - 1)^2$ .

**Λύσις.** Διὰ  $x = 1$  ἔχομεν :

$$f(1) = n - (n+1) + 1 = 0.$$

Ἄρα τὸ  $f(x)$  διαιρεῖται διὰ  $x - 1$ . Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν εὐρίσκομεν τὴν ταυτότητα :

$$f(x) \equiv (x - 1) \cdot [nx^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)]. \quad (1)$$

Ἐὰν θέσωμεν  $f_1(x) \equiv nx^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$  παρατηροῦμεν ὅτι :  $f_1(1) = n - (1 + 1 + \dots + 1 + 1) = n - n = 0$ . Τοῦτο δηλοῖ ὅτι τὸ πολυώνυμον  $f_1(x)$  διαιρεῖται διὰ  $x - 1$ , ὁπότε θὰ ἔχωμεν :

$$f_1(x) \equiv (x - 1) \pi(x). \quad (2)$$

Ἐνεκα ταύτης, ἡ (1) γίνεται :

$$f(x) \equiv (x - 1)^2 \cdot \pi(x),$$

ἡ ὁποία φανερώνει ὅτι τὸ  $f(x)$  διαιρεῖται διὰ  $(x - 1)^2$ .

**Ἐφαρμογὴ 2α :** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 24x + 4$$

διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ  $(x - 2)^2$ .

**Ἀπόδειξις :** Ἐκτελοῦμεν τὴν ἀντικατάστασιν :

$$x - 2 = y \iff x = y + 2$$



καί ἔχομεν :  $f(y+2) = (y+2)^4 - 9(y+2)^3 + 25(y+2)^2 - 24(y+2) + 4$ .

Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εὐρίσκομεν :

$$f(y+2) \equiv y^4 - y^3 - 5y^2 = y^2(y^2 - y - 5)$$

ἢ διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως  $y = x - 2$  ἔχομεν :

$$f(x) \equiv (x-2)^2 \cdot [(x-2)^2 - (x-2) - 5],$$

ἢ ὁποῖα φανερώνει ὅτι τὸ  $f(x)$  διαιρεῖται διὰ τοῦ  $(x-2)^2$ .

### \* Θεωρήματα ἐπὶ τῶν ὑπολοίπων.

**§ 75. Θεώρημα 1ον.** — Ἐὰν  $u_1(x)$  καὶ  $u_2(x)$  εἶναι τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων  $f_1(x) : \delta(x)$  καὶ  $f_2(x) : \delta(x)$ ,  $\delta(x) \not\equiv 0$ , ἀντιστοίχως, τότε ἰσχύει ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία :

$$\delta(x) \mid f_1(x) - f_2(x) \iff u_1(x) \equiv u_2(x).$$

**Ἀπόδειξις :** Ἐστω  $\delta(x) \mid f_1(x) - f_2(x)$ , τότε  $f_1(x) - f_2(x) \equiv \delta(x) \cdot \pi(x)$ . (1)

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν :

$$f_1(x) \equiv \delta(x) \pi_1(x) + u_1(x), \quad \text{βαθμ. } u_1(x) < \text{βαθμ. } \delta(x) \quad (2)$$

$$f_2(x) \equiv \delta(x) \pi_2(x) + u_2(x), \quad \text{βαθμ. } u_2(x) < \text{βαθμ. } \delta(x). \quad (3)$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν :

$$f_1(x) - f_2(x) \equiv \delta(x) [\pi_1(x) - \pi_2(x)] + u_1(x) - u_2(x).$$

Ἀλλὰ, δυνάμει τῆς (1), ἡ διαίρεσις  $[f_1(x) - f_2(x)] : \delta(x)$  εἶναι τελεία καὶ ἔπομένως :

$$u_1(x) - u_2(x) \equiv 0, \quad \text{ἐξ οὗ : } u_1(x) \equiv u_2(x).$$

**Ἀντιστρόφως :** Ἐστω ὅτι  $u_1(x) \equiv u_2(x)$  καὶ ὅτι :

$$f_1(x) \equiv \delta(x) \cdot \pi_1(x) + u_1(x) \quad \text{καὶ} \quad f_2(x) \equiv \delta(x) \pi_2(x) + u_1(x).$$

Τότε θὰ ἔχομεν :

$$f_1(x) - f_2(x) \equiv \delta(x) \cdot [\pi_1(x) - \pi_2(x)] \implies \delta(x) \mid f_1(x) - f_2(x).$$

**§ 76. Θεώρημα 2ον.** — Ἐὰν  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$  εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων  $f_1(x) : \delta(x), f_2(x) : \delta(x), \dots, f_n(x) : \delta(x)$ , τότε αἱ διαιρέσεις  $[f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] : \delta(x)$  καὶ  $[u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)] : \delta(x)$  δίδουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

**Ἀπόδειξις :** Ἐχομεν, ἂν συμβολίσωμεν τὰ πολυώνυμα ἀπλῶς μὲ  $f, \delta, \pi, u$  ἀντὶ  $f(x), \delta(x), \pi(x), u(x)$ , τὰς σχέσεις :

$$\begin{array}{l|l} \text{(σ)} \quad \begin{array}{l} f_1 \equiv \delta \pi_1 + u_1 \\ f_2 \equiv \delta \pi_2 + u_2 \\ f_3 \equiv \delta \pi_3 + u_3 \\ f_n \equiv \delta \pi_n + u_n \end{array} & \begin{array}{l} \text{Αὗται προστιθέμεναι κατὰ μέλη δίδουν :} \\ f_1 + f_2 + \dots + f_n \equiv \delta(\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n) + (u_1 + u_2 + \dots + u_n). \\ \text{Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν :} \\ (f_1 + f_2 + \dots + f_n) - (u_1 + u_2 + \dots + u_n) \equiv \delta(\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n). \end{array} \end{array}$$

Ἡ τελευταία ταυτότης δηλοῖ ὅτι τὸ  $\delta$  διαιρεῖ τὴν διαφορὰν τῶν πολυωνύμων  $f_1 + f_2 + \dots + f_n$  καὶ  $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ , ἔπομένως, δυνάμει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἕκαστον τούτων διαιρούμενον διὰ τοῦ  $\delta(x)$  δίδει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

**§ 77. Θεώρημα 3ον.** — Αί υποθέσεις του θεωρήματος 2, τότε αί διαιρέσεις  $[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x)] : \delta(x)$  και  $[u_1(x) \cdot u_2(x) \cdots u_n(x)] : \delta(x)$  δίδουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

**Ἀπόδειξις:** Τὰς σχέσεις (σ) τῆς προηγουμένης παραγράφου πολλαπλασιάζομεν κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν :

$$f_1 f_2 \dots f_n \equiv \delta \cdot \pi + (u_1 u_2 \dots u_n), \quad (1)$$

ἐνθα  $\pi$  ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ  $x$ .

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$[f_1 f_2 \dots f_n] - [u_1 u_2 \dots u_n] \equiv \delta \cdot \pi,$$

ἢ ὁποῖα καὶ ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

**Παρατήρησις:** Τὰ θεωρήματα 2 καὶ 3 ἰσχύουν καὶ ἂν ἀκόμη δὲν ἀντικατασταθοῦν ὅλα τὰ πολυώνυμα  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  διὰ τῶν ὑπολοίπων, ἀλλὰ μόνον μερικὰ ἐξ αὐτῶν.

**Πόρισμα.**—Ἐὰν  $u(x)$  εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως  $f(x) : \delta(x)$ , τότε αί διαιρέσεις  $[f(x)]^v : \delta(x)$  καὶ  $[u(x)]^v : \delta(x)$  δίδουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

**Ἐφαρμογή:** Ἐὰν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  εἶναι ἀκέραιοι μὴ ἀρνητικοί, νὰ δεიχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον :

$$x^{4\alpha+3} + x^{4\beta+2} + x^{4\gamma+1} + x^{4\delta} \text{ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ :}$$

$$x^3 + x^2 + x + 1.$$

**Ἀπόδειξις:** Ὁ διαιρετὸς γράφεται :

$$(x^4)^\alpha x^3 + (x^4)^\beta x^2 + (x^4)^\gamma x + (x^4)^\delta.$$

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν  $x^4 : x^3 + x^2 + x + 1$  εὐρίσκομεν ὑπόλοιπον 1. Ἄρα τὰ γινόμενα  $(x^4)^\alpha \cdot x^3$  καὶ  $1^\alpha \cdot x^3$  διαιρούμενα διὰ τοῦ  $x^3 + x^2 + x + 1$  δίδουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον (βλ. θεώρ. 3ον καὶ πόρισμα). Ὀμοίως τὰ γινόμενα  $(x^4)^\beta \cdot x^2$  καὶ  $1^\beta \cdot x^2$  διαιρούμενα διὰ τοῦ  $x^3 + x^2 + x + 1$  δίδουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον. Τὰ αὐτὰ ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ  $(x^4)^\gamma x$  καὶ  $1^\gamma \cdot x$  ἄφ' ἑνὸς καὶ  $(x^4)^\delta$  καὶ  $1^\delta$  ἄφ' ἑτέρου. Ἐπομένως τὰ πολυώνυμα :

$$x^{4\alpha+3} + x^{4\beta+2} + x^{4\gamma+1} + x^{4\delta} \text{ καὶ } 1^\alpha x^3 + 1^\beta x^2 + 1^\gamma x + 1^\delta \equiv x^3 + x^2 + x + 1$$

διαιρούμενα διὰ τοῦ  $x^3 + x^2 + x + 1$  δίδουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον. Ἀλλὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως  $(x^3 + x^2 + x + 1) : (x^3 + x^2 + x + 1)$  εἶναι μηδέν. Ὅθεν ἡ διαίρεσις  $(x^{4\alpha+3} + x^{4\beta+2} + x^{4\gamma+1} + x^{4\delta}) : (x^3 + x^2 + x + 1)$  εἶναι τελεία.

**\* Ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου  $f(x)$  διὰ τοῦ διωνύμου  $x^n - a$ , ἐνθα  $n \in \mathbb{N}$ .**

Ἐστω ἐν ἀκέραιον πολυώνυμον  $f(x)$ , βαθμοῦ  $k$ , καὶ εἰς φυσικὸς ἀριθμὸς  $n$ , μικρότερος ἢ ἴσος τοῦ βαθμοῦ  $k$  τοῦ πολυωνύμου  $f(x)$ , ἥτοι :  $n \leq k$ .

Τότε ἰσχύει ἡ κάτωθι πρότασις :

Τὸ πολυώνυμον  $f(x)$  δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$f(x) \equiv x^{n-1} \cdot f_{n-1}(x^n) + x^{n-2} f_{n-2}(x^n) + \cdots + x f_1(x^n) + f_0(x^n), \quad (1)$$

ὅπου  $f_{n-1}(x^n), f_{n-2}(x^n), \dots, f_1(x^n), f_0(x^n)$  ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ  $x^n$ .

Πράγματι: οί εκθέται τῶν ὄρων τοῦ  $f(x)$  θὰ εἶναι ἡ πολλαπλάσια τοῦ  $v$  ἡ πολλαπλάσια τοῦ  $v$  ἡ ὑψιζήμενα κατὰ 1 ἡ πολ. $v+2$  ἡ πολ. $v+3$ , κ.ο.κ. Οἱ ὄροι τῶν ὁποίων οἱ εκθέται εἶναι πολλαπλάσια τοῦ  $v$  θὰ δίδουν τὸ  $f_0(x^v)$ . Οἱ ὄροι τῶν ὁποίων οἱ εκθέται εἶναι πολ. $v+1$  θὰ δίδουν τὸ  $xf_1(x^v)$ . Οἱ ὄροι τῶν ὁποίων οἱ εκθέται εἶναι πολ. $v+2$  θὰ δίδουν τὸ  $x^2f_2(x^v)$  κ.ο.κ.

**Σημείωσις:** Τὴν ὥς ἄνω πρότασιν δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν αὐστηρότερον διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς.

**Ἐφαρμογή:** Ἐστω  $f(x) \equiv 3x^7 - 5x^6 + 8x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 7x + 3$  καὶ ἔστω ὅτι  $v=3$ .

Δυνάμει τῆς ἄνωτέρω προτάσεως τὸ  $f(x)$  δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν:  $f(x) \equiv x^2(8x^3 - 4) + x(3x^6 - 3x^3 + 7) - (5x^6 - 2x^3 - 3)$ .

**§ 78. Θεώρημα.** — Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου  $f(x)$  τεθέντος ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$f(x) \equiv x^{v-1} f_{v-1}(x^v) + x^{v-2} f_{v-2}(x^v) + \dots + x f_1(x^v) + f_0(x^v)$$

διὰ τοῦ διωνύμου  $x^v - a$  εἶναι:

$$u(x) \equiv x^{v-1} f_{v-1}(a) + x^{v-2} f_{v-2}(a) + \dots + x f_1(a) + f_0(a).$$

**Ἀπόδειξις:** Ἐκ τοῦ θεωρήματος § 76 προκύπτει ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως  $f(x) : (x^v - a)$  εἶναι:  $u(x) \equiv u_{v-1}(x) + u_{v-2}(x) + \dots + u_1(x) + u_0(x)$ , ὅπου  $u_{v-1}(x)$ ,  $u_{v-2}(x)$ , ...,  $u_1(x)$ ,  $u_0(x)$  εἶναι ἀντιστοιχῶς τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων:  $x^{v-1} f_{v-1}(x^v) : (x^v - a)$ ,  $x^{v-2} f_{v-2}(x^v) : (x^v - a)$ , ...,  $x f_1(x^v) : (x^v - a)$ ,  $f_0(x^v) : (x^v - a)$ . Τὸ ὑπόλοιπον ὅμως τῆς διαιρέσεως τοῦ  $f_{v-1}(x^v)$  διὰ τοῦ  $x^v - a$  εἶναι τὸ  $f_{v-1}(a)$ , διότι, ἐὰν τεθῇ  $x^v = y$ , τότε, ὥς γνωστὸν (§ 64, πρόρρισμα 1), τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως  $f_{v-1}(y) : (y - a)$  εἶναι  $u = f_{v-1}(a)$ . Ἐξ ἄλλου τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ  $x^{v-1}$  διὰ τοῦ  $x^v - a$  εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ  $x^{v-1}$ , διότι εἶναι μικροτέρου βαθμοῦ ὁ διαιρετέος ἀπὸ τὸν διαιρέτην. Ἄρα τὸ γινόμενον  $x^{v-1} \cdot f_{v-1}(x^v)$  καὶ τὸ  $x^{v-1} \cdot f_{v-1}(a)$  διαιρούμενα διὰ τοῦ  $x^v - a$  δίδουν τὰ αὐτὰ ὑπόλοιπα. Ἀλλὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως  $x^{v-1} \cdot f_{v-1}(a) : (x^v - a)$  εἶναι τὸ  $x^{v-1} f_{v-1}(a)$ . Ὅθεν  $u_{v-1}(x) \equiv x^{v-1} f_{v-1}(a)$ .

Ὅμοιως  $u_{v-2}(x) \equiv x^{v-2} f_{v-2}(a)$ , ...,  $u_1(x) \equiv x f_1(a)$ ,  $u_0(x) \equiv f_0(a)$ . Ἄρα:

$$u(x) \equiv x^{v-1} f_{v-1}(a) + x^{v-2} f_{v-2}(a) + \dots + x f_1(a) + f_0(a).$$

**Πόρισμα.** — Διὰ νὰ διαιρῇται τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον:

$$f(x) \equiv x^{v-1} f_{v-1}(x^v) + x^{v-2} f_{v-2}(x^v) + \dots + x f_1(x^v) + f_0(x^v)$$

διὰ τοῦ  $x^v - a$ , πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι:

$$f_{v-1}(a) = 0, f_{v-2}(a) = 0, \dots, f_1(a) = 0, f_0(a) = 0.$$

**Ἐφαρμογαί:** 1η: Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου  $f(x) \equiv 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 3x - 4$  διὰ τοῦ διωνύμου  $x^3 + 2$ .

**Λύσις:** Τὸ  $f(x)$  γράφεται:  $f(x) \equiv x^2(2x^3 - 2) - x(3x^3 - 3) + (4x^3 - 4)$ . Ἐὰν εἰς τοῦτο θέσωμεν ὅπου  $x^3 = -2$ , λαμβάνομεν τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον:

$$u(x) \equiv -6x^2 + 9x - 12.$$

2α : 'Εάν  $\alpha, \beta, \gamma$  θετικοί άκέραιοι, νά εύρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ άκέραιου πολυωνύμου  $f(x) \equiv x^{3\alpha} + x^{3\beta+1} + x^{3\gamma+5}$  διὰ τοῦ  $x^3 - 2$ .

Λύσις : Τὸ  $f(x)$  γράφεται :

$$f(x) \equiv x^2 \cdot (x^3)^{\gamma+1} + x(x^3)^{\beta} + (x^3)^{\alpha}.$$

'Εάν εἰς τοῦτο θέσωμεν ὅπου  $x^3 = 2$ , λαμβάνομεν τὸ ὑπόλοιπον.

$$v(x) \equiv 2^{\gamma+1} \cdot x^2 + 2^{\beta} \cdot x + 2^{\alpha}.$$

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΕΠΙ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

146. Νά προσδιορισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma$  οὕτως, ὥστε νά πληροῦν τὴν σχέσιν  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ , τὸ δὲ πολυώνυμον  $f(x) \equiv x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  νά λαμβάνῃ τὴν τιμὴν 7 διὰ  $x = 1$ .

147. 'Εάν  $v \in \mathbb{N}$ , νά ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv (x+1)^{2v} - x^{2v} - 2x - 1$$

διαιρεῖται διὰ τοῦ :  $2x^3 + 3x^2 + x$ .

148. Νά προσδιορισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ  $\alpha$  καὶ  $\beta$ , ἵνα τὸ πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ :  $(x-3)(x+2)$ .

149. Νά προσδιορισθοῦν τὰ  $k$  καὶ  $\lambda$  καὶ νά εύρεθοῦν αἱ ρίζαι  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  τοῦ πολυωνύμου :  $f(x) \equiv x^3 - 8x^2 - 8\lambda x + k$ , ἂν γνωρίζωμεν ὅτι :  $\rho_1 = \rho_2 = -\rho_3$ .

150. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον :  $f(x) \equiv x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6$  διαιρεῖται διὰ τοῦ  $(x-1)^2$ .

151. Νά προσδιορισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ  $\alpha$  καὶ  $\beta$ , ἵνα τὸ πολυώνυμον :  $f(x) \equiv x^{v+1} + \alpha x + \beta$  διαιρῆται διὰ τοῦ  $(x-1)^2$  καὶ νά εύρεθῇ τὸ πηλίκον.

152. 'Ακέραιον πολυώνυμον  $f(x)$  διαιρούμενον διὰ  $x-2$  δίδει ὑπόλοιπον 12, διαιρούμενον δὲ διὰ  $x-3$  δίδει ὑπόλοιπον 17. Νά εύρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως  $f(x) : (x-2)(x-3)$ .

153. 'Εάν τὸ πολυώνυμον  $x^3 + \alpha x + \beta$  εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ  $(x-k)^2$ , δείξατε ὅτι μεταξὺ τῶν  $\alpha$  καὶ  $\beta$  ὑφίσταται ἡ σχέσις :  $\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = 0$ .

154. 'Εάν διὰ τρεῖς διαφόρους τιμὰς τοῦ  $x$  τὰ τριώνυμα :

$$(\alpha-2)x^2 + (2\beta-1)x + \gamma \quad \text{καὶ} \quad x^2 + 5x + \alpha + 1$$

λαμβάνουν ἴσας ἀριθμητικὰς τιμὰς, νά προσδιορισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma$ .

155. 'Εάν άκέραιον πολυώνυμον  $f(x)$  διαιρῆται διὰ τοῦ  $x-3$ , νά δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον  $f(4x-5)$  διαιρεῖται διὰ τοῦ  $x-2$ .

156. 'Εάν τὸ πολυώνυμον :  $f(x) \equiv x^v + \xi y^v + \eta z^v$ , ( $v \in \mathbb{N}$ ,  $v \geq 2$ ) εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ πολυωνύμου  $\phi(x) \equiv x^2 - (\alpha\gamma + \beta z)x + \alpha\beta\gamma z$ , τότε θά ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$\frac{\xi}{\alpha^v} + \frac{\eta}{\beta^v} + 1 = 0.$$

('Υπόδειξις : 'Αναλύσατε τὸ  $\phi(x)$  εἰς γινόμενον παραγόντων κτλ.).

157. Νά δειχθῇ ὅτι, ἐάν  $\alpha \neq \beta$ , τότε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου  $f(x)$  διὰ τοῦ γινομένου  $(x-\alpha)(x-\beta)$  εἶναι :

$$v(x) \equiv \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} x + \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha}.$$

'Εφαρμογὴ εἰς τὴν διαίρεσιν :  $(x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 8x - 9) : (x-3)(x-2)$ .

158. Εύρετε τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα ἡ ἐξίσωσις :  $x^3 - 3\alpha x + 2\beta = 0$  ἔχη διπλὴν ρίζαν.

159. Προσδιορίσατε τὰ  $\alpha$  καὶ  $\beta$  ὥστε ἡ ἐξίσωσις  $x^3 - 24x - 72 = 0$  νὰ τίθεται ὑπὸ τῆν μορφήν  $\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^3 = \frac{\alpha}{\beta}$ . Ἀκολουθῶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις αὕτη.

160. Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου  $f(x) \equiv \alpha x^4 + \beta x^3 - 18x^2 + 15x - 5$  διὰ τοῦ  $\varphi(x) \equiv x^2 - 3x + 2$  εἶναι  $u(x) \equiv 4x - 7$ , νὰ δεიχθῇ ὅτι  $\alpha = 1$  καὶ  $\beta = 4$ .

161. Δείξατε ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου  $f(x)$  διὰ τοῦ  $x^2 - \alpha^2$  εἶναι τό :

$$u(x) \equiv \frac{f(\alpha) - f(-\alpha)}{2\alpha} x + \frac{f(\alpha) + f(-\alpha)}{2}.$$

162. Διὰ ποίας τιμὰς τῶν  $k$  καὶ  $\lambda$  τὸ πολυώνυμον :  $f(x) \equiv 3x^4 - kx^3 + 5x^2 - 9x + \lambda$  διαιρεῖται διὰ  $x^2 - 1$  ;

163. Ἐὰν  $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) \neq 0$ , νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\alpha^3 + \alpha^2 x + \alpha y + z = 1$$

$$\beta^3 + \beta^2 x + \beta y + z = 1$$

$$\gamma^3 + \gamma^2 x + \gamma y + z = 1.$$

(Ἑπόδειξις : Παρατηρήσατε ὅτι τὸ πολυώνυμον  $f(t) \equiv t^3 + xt^2 + yt + (z-1)$  ἔχει ρίζας τὰ  $\alpha, \beta, \gamma$ ).

164. Ἀκέραιον πολυώνυμον  $f(x)$  διαιρούμενον διὰ  $x^2 + x + 1$  δίδει ὑπόλοιπον  $x - 1$ , διαιρούμενον δὲ διὰ  $x^2 - x + 1$  δίδει ὑπόλοιπον  $2x + 1$ . Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως  $f(x) : (x^4 + x^2 + 1)$ .

(Ἑπόδειξις : Παρατηρήσατε ὅτι :  $x^4 + x^2 + 1 \equiv (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ ).

165. Ἐστω ἡ ἐξίσωσις  $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ , τῆς ὁποίας ἡ μία τῶν ριζῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων. Νὰ εὑρεθῇ ποία συνθήκη ὑπάρχει μεταξύ τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι τῆς.

166. Ἐὰν  $k, \lambda, \mu \in \mathbb{N}$  νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον  $x^{3k+2} + x^{3\lambda+1} + x^{3\mu}$  διαιρεῖται διὰ  $x^2 + x + 1$ .

167. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ πολυώνυμον  $f(x) \equiv x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  μὲ ἀκεραίους συντελεστὰς διαιρεῖται διὰ τοῦ  $x^2 - 2x + 1$ , νὰ δειχθῇ ὅτι :  $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \geq 3$ .

168. Ἐὰν  $-4$  καὶ  $-164$  εἶναι τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων  $f(x) : (x+1)$  καὶ  $f(x) : (x-3)$  ἀντιστοίχως, τότε νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως  $f(x) : (x^2 - 2x - 3)$ . Ἐὰν τὸ πολυώνυμον  $f(x)$  εἶναι τετάρτου βαθμοῦ μὲ ρίζας  $0, 2, -2$ , ποία ἡ ἄλλη ρίζα του ;

169. Ἐὰν  $n \in \mathbb{N}$ , νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον :  $x^{4n+2} - (2n+1)x^{2n+2} + (2n+1)x^{2n} - 1$  διαιρεῖται διὰ τοῦ  $(x^2 - 1)^3$ .

170. Εὑρετε τὴν μεταξύ τῶν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  σχέσιν, ἵνα αἱ ρίζαι  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  τοῦ πολυωνύμου :  $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$  πληροῦν τὴν σχέσιν :  $\rho_1 + \rho_3 = 2\rho_2$ .

171. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ  $\alpha$  καὶ  $\beta$  οὕτως, ὥστε τὸ πολυώνυμον  $x^4 + (\alpha - \beta)x^3 + 2\alpha x^2 - 5x + 4$  νὰ διαιρῇται διὰ τῆς μεγαλύτερας δυνατῆς δυνάμεως τοῦ  $x - 1$ .

172. Ἐὰν τὰ πολυώνυμα  $f(x) \equiv x^3 + \alpha x - \beta$  καὶ  $\varphi(x) \equiv \beta x^3 - \alpha x - 1$  μὲ  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  ἔχουν μίαν πραγματικὴν ρίζαν κοινὴν, τότε ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

1)  $\rho_1^3 + \rho_2^3 + \rho_3^3 = -2\alpha$ , 2)  $|\rho_1| + |\rho_2| + |\rho_3| > \frac{3}{2}$ , ἔνθα  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  εἶναι ρίζαι τοῦ  $f(x)$ .

173. Δείξατε ὅτι διὰ κάθε ρίζαν  $\rho$  τοῦ πολυωνύμου  $f(x) \equiv x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ , μὲ πραγματικούς συντελεστὰς, ἰσχύει ἡ ἀνισότης :

$$|\rho| < 1 + |\alpha_{n-1}| + |\alpha_{n-2}| + \dots + |\alpha_1| + |\alpha_0|.$$

174. Δίδεται τὸ πολυώνυμον  $f(x) \equiv x^2 + \alpha x + \beta$ , ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) καὶ ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς  $\eta$  μὲ  $\eta \geq 2$ . Ἐὰν  $m$  καλέσωμεν τὸν  $\max \{ |f(0)|, |f(\eta)|, |f(-\eta)| \}$ , τότε δείξατε ὅτι :

$$m \equiv \max \{ |f(0)|, |f(\eta)|, |f(-\eta)| \} \geq \eta.$$

175. Εύρετε τὴν μεταξύ τῶν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  σχέσιν, ἵνα αἱ ρίζαι  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$  τοῦ πολυωνύμου  $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$  συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως:  $\rho_1 + \rho_2 = \rho_3 + \rho_4$ .

176. Ἐάν τὸ πολυώνυμον  $f(x) \equiv x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ , ἔνθα  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , ἔχη διπλὴν ρίζαν ἀριθμὸν  $\rho$  καὶ εἶναι  $\rho \leq 0$  ἢ  $\rho \geq 1 + \sqrt{2}$ , νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \geq \rho^2 + 2\rho.$$

177. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου  $f(x)$  διὰ τοῦ  $x^2 - 2\rho x + \rho^2$  εἶναι τὸ:  $\pi(\rho)x + f(\rho) - \rho\pi(\rho)$ , ὅπου  $\pi(x)$  εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως  $[f(x) - f(\rho)] : (x - \rho)$ .

178. Ἀκέραιον πολυώνυμον διαιρούμενον διὰ  $x + 2$  δίδει ὑπόλοιπον 7, διαιρούμενον διὰ  $x - 3$  δίδει ὑπόλοιπον 17. Τί ὑπόλοιπον θὰ δώσῃ ἂν τοῦτο διαιρεθῇ διὰ τοῦ  $x^2 - x - 6$ ; Προσδιορίσατε ἐν τοιοῦτον πολυώνυμον. Ὑποθέσατε ἀκολούθως ὅτι τὸ πολυώνυμον τοῦτο εἶναι τρίτου βαθμοῦ καὶ διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ  $2x^2 + x - 3$ . Ποῖον εἶναι τότε τοῦτο;

179. Ἐάν  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma \neq 0$  καὶ αἱ ρίζαι  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  τοῦ πολυωνύμου:

$$f(x) \equiv x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

πληροῦν τὰς σχέσεις:  $|\rho_1| = 2|\rho_2| = 3|\rho_3|$ , τότε δείξατε ὅτι:  $|\alpha\beta| < 11|\gamma|$ .

180. Δίδεται τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον μὲ πραγματικούς συντελεστές:

$$f(x) \equiv \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

Ἐθέμεν  $|x| = \theta$ , ὑποθέτοντες  $\theta \neq 1$ , καὶ  $m \equiv \max\{|\alpha_0|, |\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{v-1}|, |\alpha_v|\}$ . Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$|f(x)| \leq m \cdot \frac{\theta^{v+1} - 1}{\theta - 1}.$$

## II. ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

### Ὁμογενῇ καὶ συμμετρικὰ πολυώνυμα.

**§ 79. Εἰσαγωγικαὶ ἔννοιαι — Ὁρισμοί.** — Ὡς εἰς τὴν § 50 ὠρίσθη ἡ ἔννοια τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου μιᾶς μεταβλητῆς μὲ συντελεστὰς πραγματικούς ἀριθμούς, κατὰ τὸν αὐτὸν ἀκριβῶς τρόπον εἰσάγεται καὶ ἡ ἔννοια τοῦ πολυωνύμου ν τὸ πλῆθος μεταβλητῶν  $x, y, z, \dots, t$ .

Ἐπειδὴ εἰς ὅλας σχεδὸν τὰς ἐφαρμογὰς ποὺ συναντῶμεν εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον αἱ μεταβληταὶ δέν εἶναι περισσότεραι τῶν τριῶν, διὰ τοῦτο κατωτέρω θὰ περιορισθῶμεν εἰς πολυώνυμα τριῶν μεταβλητῶν  $x, y, z$ : αἱ δὲ προτάσεις αἱ ὁποῖαι θὰ διατυπωθῶν γενικεύονται, ἐν γένει, καὶ διὰ πολυώνυμα περισσοτέρων μεταβλητῶν.

Κατόπιν τούτου δίδομεν τοὺς κάτωθι ὁρισμούς:

α'). Ἀκέραιον μονώνυμον τῶν  $x, y, z$  καλεῖται πᾶσα ἔκφρασις τῆς μορφῆς:

$$\alpha x^k y^l z^m \quad (1)$$

ὅπου  $\alpha$  (σταθερὸς) πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ  $k, l, m$  φυσικοὶ ἀριθμοὶ ἢ μηδέν. Ὁ ἀριθμὸς  $\alpha$  καλεῖται **συντελεστής** τοῦ μονωνύμου (1), τὰ δὲ σύμβολα  $x, y, z$  καλοῦνται **μεταβληταί**. Τὸ ἄθροισμα  $k + l + m$  τῶν ἐκθετῶν, ἐφ' ὅσον  $\alpha \neq 0$ , καλεῖται **βαθμὸς** τοῦ μονωνύμου (1). Ἐάν  $k = l = m = 0$  καὶ  $\alpha \neq 0$  τὸ μονώνυμον (1) ἀνάγεται εἰς τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν  $\alpha$  καὶ λέγομεν εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ὅτι τὸ μονώνυμον (1) εἶναι **βαθμοῦ μηδέν**. Ἐάν  $\alpha = 0$ , τότε τὸ μονώνυμον κα-

λείται **μηδενικόν** και δὲν ὁμιλοῦμεν διὰ τὸν βαθμὸν του. Τέλος ἐὰν  $\alpha \neq 0$ , λέγομεν ὅτι τὸ μονώνυμον (1) εἶναι ὡς πρὸς  $x$  βαθμοῦ  $k$ , ὡς πρὸς  $y$  βαθμοῦ  $\lambda$ , ὡς πρὸς  $z$  βαθμοῦ  $\mu$ , ὡς πρὸς  $x$  καὶ  $y$  βαθμοῦ  $k + \lambda$ , κ.ο.κ. Οὕτω, π.χ., τὸ μονώνυμον :  $-3x^2yz^3$  εἶναι βου βαθμοῦ, ἐνῶ ὡς πρὸς  $x$  καὶ  $z$  εἶναι βαθμοῦ 5ου.

**β').** Δύο μονώνυμα καλοῦνται **ὅμοια** (ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς των), ἂν ἐν τῇ παραστάσει των ἔχουν τὰς αὐτὰς μεταβλητάς καὶ ἐκάστην μὲ τὸν αὐτὸν ἐκθέτην, διαφέρουν δὲ (ἂν διαφέρουν) μόνον κατὰ τοὺς συντελεστές των. Οὕτω, π.χ., τὰ μονώνυμα :  $-3x^2yz^3$ ,  $2x^2yz^3$  εἶναι ὅμοια.

Τὰ μὴ ὅμοια μονώνυμα καλοῦνται **ἀνόμοια**.

Τὰ μονώνυμα τῆς μορφῆς :  $\alpha x^k y^\lambda z^\mu$  καὶ  $-\alpha x^k y^\lambda z^\mu$  καλοῦνται **ἀντίθετα**.

Δύο μὴ μηδενικὰ μονώνυμα  $\alpha x^k y^\lambda z^\mu$  καὶ  $\beta x^\nu y^\rho z^\sigma$  καλοῦνται **ἐκ ταυτότητος ἴσα** καὶ γράφομεν  $\alpha x^k y^\lambda z^\mu \equiv \beta x^\nu y^\rho z^\sigma$  τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν :

$$\alpha = \beta, \quad k = \nu, \quad \lambda = \rho, \quad \mu = \sigma.$$

**γ').** Τὸ **ἄθροισμα** τῶν ἀκεραίων μονωνύμων :  $\alpha_1 x^{k_1} y^{\lambda_1} z^{\mu_1}, \alpha_2 x^{k_2} y^{\lambda_2} z^{\mu_2}, \dots, \alpha_n x^{k_n} y^{\lambda_n} z^{\mu_n}$  παρίσταται οὕτω :

$$\alpha_1 x^{k_1} y^{\lambda_1} z^{\mu_1} + \alpha_2 x^{k_2} y^{\lambda_2} z^{\mu_2} + \dots + \alpha_n x^{k_n} y^{\lambda_n} z^{\mu_n}.$$

Ἐὰν δὲ τὰ ὡς ἄνω μονώνυμα εἶναι ὅμοια τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι μονώνυμον ὅμοιον πρὸς αὐτά, ἔχον συντελεστὴν τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν μονωνύμων, ἥτοι :

$$\alpha_1 x^k y^\lambda z^\mu + \alpha_2 x^k y^\lambda z^\mu + \dots + \alpha_n x^k y^\lambda z^\mu = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) x^k y^\lambda z^\mu.$$

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὁμοίων μονωνύμων καλεῖται **ἀναγωγή** αὐτῶν.

Ἡ **διαφορά** δύο μονωνύμων ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τοῦ ἀντιθέτου τοῦ ἀφαιρετέου μονωνύμου.

**Γινόμενον** τῶν ἀκεραίων μονωνύμων  $\alpha_1 x^{k_1} y^{\lambda_1} z^{\mu_1}, \alpha_2 x^{k_2} y^{\lambda_2} z^{\mu_2}, \dots, \alpha_n x^{k_n} y^{\lambda_n} z^{\mu_n}$  καλεῖται τὸ μονώνυμον :  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n x^{k_1+k_2+\dots+k_n} y^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n} z^{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n}$ .

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐκφράσεως συνάγομεν ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου δύο ἢ περισσοτέρων μὴ μηδενικῶν μονωνύμων ὡς πρὸς ἐκάστην μεταβλητὴν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν μονωνύμων ὡς πρὸς τὴν ἐν λόγῳ μεταβλητὴν.

Ἀκέραιον μονώνυμον λέγομεν ὅτι εἶναι **διαιρετὸν** δι' ἄλλου, μὴ μηδενικοῦ, ἀκεραίου μονωνύμου, τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ ἀκέραιον μονώνυμον, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ δεύτερον δίδει τὸ πρῶτον, ἥτοι ὅταν τὸ πηλίκον τῶν δύο μονωνύμων εἶναι ἀκέραιον μονώνυμον. Π.χ. τὸ ἀκέραιον μονώνυμον  $12x^3y^2z^5$  εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ ἀκεραίου μονωνύμου  $4x^2yz^3$ , διότι τὸ πηλίκον εἶναι τὸ ἀκέραιον μονώνυμον  $3xyz^2$ .

**δ').** Ἀκέραιον **πολυνώνυμον** τῶν  $x, y, z$  καλεῖται κάθε ἄθροισμα ἀκεραίων μονωνύμων τῶν  $x, y, z$ , ἐκ τῶν ὁποίων δύο τοῦλάχιστον εἶναι ἀνόμοια, ἥτοι ἐν ἀκέραιον πολυνώνυμον τῶν  $x, y, z$  εἶναι μία παράστασις τῆς μορφῆς :

$$\alpha_1 x^{k_1} y^{\lambda_1} z^{\mu_1} + \alpha_2 x^{k_2} y^{\lambda_2} z^{\mu_2} + \dots + \alpha_n x^{k_n} y^{\lambda_n} z^{\mu_n}, \quad (2)$$

ὅπου  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  (σταθεροὶ) πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ  $k_i, \lambda_i, \mu_i, i = 1, 2, \dots, n$



ἀκέραιοι μὴ ἀρνητικοί. Οἱ ἀριθμοὶ  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  καλοῦνται **συντελεσταὶ** τοῦ πολωνύμου (2). Τὰ μονώνυμα, ἐξ ὧν σύγκεται τὸ πολωνύμου (2), καλοῦνται **ὄροι** αὐτοῦ. Οὕτω, π.χ., ἡ παράστασις :

$$5x^3y^2z - 3xy^3z + 2x^2yz^3 - 7xyz$$

εἶναι ἓν ἀκέραιον πολωνύμου τῶν  $x, y, z$  μὲ ὄρους τὰ μονώνυμα :

$$5x^3y^2z, -3xy^3z, 2x^2yz^3, -7xyz.$$

Διὰ τὰ πολωνύμου  $v$  μεταβλητῶν  $x, y, z, \dots, t$  θὰ χρησιμοποιῶμεν τοὺς συμβολισμοὺς :

$f(x, y, z, \dots, t)$  ἢ  $\varphi(x, y, z, \dots, t)$  ἢ  $\pi(x, y, z, \dots, t)$  ἢ  $g(x, y, z, \dots, t)$  κ.λ.π.

Οὕτω, π.χ., τὸ πολωνύμου (2) τῶν μεταβλητῶν  $x, y, z$  γράφεται :

$$f(x, y, z) \equiv \alpha_n x^{k_n} y^{l_n} z^{m_n} + \dots + \alpha_2 x^{k_2} y^{l_2} z^{m_2} + \alpha_1 x^{k_1} y^{l_1} z^{m_1}. \quad (3)$$

Καλοῦμεν « **ἀνηγμένον** » ἓν ἀκέραιον πολωνύμου εἰς τὸ ὁποῖον ἔχουν ἐκτελεσθῇ αἱ σημειωθεῖσαι πράξεις καὶ ἡ ἀναγωγή τῶν ὁμοίων ὄρων.

Κατωτέρω λέγοντες «**πολωνύμου**» θὰ ἐννοῶμεν «**ἀκέραιον ἀνηγμένον πολωνύμου**».

Ἐὰν πάντες οἱ συντελεσταὶ ἑνὸς πολωνύμου  $f(x, y, z, \dots)$ ,  $v$  τὸ πλῆθος μεταβλητῶν, εἶναι μηδέν, τότε τοῦτο καλεῖται πάλιν **μηδενικὸν πολωνύμου** ἢ **πολωνύμου ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς μηδέν**.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν γράφομεν ἐπίσης :  $f(x, y, z, \dots) \equiv 0$ . Εἰς τὴν ἀντίθετον δὲ περίπτωσιν γράφομεν :  $f(x, y, z, \dots) \not\equiv 0$ .

**Βαθμὸς** ἑνός, μὴ μηδενικοῦ, ἀκέραιου πολωνύμου καλεῖται ὁ μέγιστος βαθμὸς τῶν μονωνύμων αὐτοῦ. Οὕτω, π.χ., τὸ πολωνύμου :

$$f(x, y, z) \equiv 3xy^3 - 6x^5 + 3x^2y^3z^2 - 5z^4, \text{ εἶναι ἐξδόμου βαθμοῦ.}$$

Βαθμὸς ἑνὸς πολωνύμου ὡς πρὸς μίαν μεταβλητὴν καλεῖται ὁ μεγαλύτερος ἐκθέτης τῆς μεταβλητῆς ταύτης. Οὕτω τὸ ἀνωτέρω πολωνύμου  $f(x, y, z)$  ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν  $x$  εἶναι 5ου βαθμοῦ, ὡς πρὸς  $y$  3ου καὶ ὡς πρὸς  $z$  4ου βαθμοῦ.

ε'). Ἐν ἀκέραιον πολωνύμου  $f(x, y, z, \dots)$  τοῦ ὁποῖου πάντες οἱ ὄροι (ὄχι ὅμοιοι) εἶναι μονώνυμα τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς  $x, y, z, \dots$  καλεῖται **ὁμογενές**. Ὁ κοινὸς βαθμὸς τῶν ὄρων τοῦ καλεῖται **βαθμὸς ὁμογενείας** τοῦ πολωνύμου.

Κάθε μὴ μηδενικὸν πολωνύμου  $f(x, y, z, \dots)$ ,  $v$  βαθμοῦ δύναται νὰ γραφῇ κατὰ ἓνα ἀκριβῶς τρόπον ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$f(x, y, z, \dots) \equiv f_v(x, y, z, \dots) + f_{v-1}(x, y, z, \dots) + \dots + f_0(x, y, z, \dots), \quad (4)$$

ἐνθα  $f_k(x, y, z, \dots)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, v$  εἶναι ὁμογενὲς πολωνύμου  $k$  βαθμοῦ ὁμογενείας ἢ τὸ μηδενικὸν πολωνύμου καὶ  $f_v(x, y, z, \dots) \not\equiv 0$ .

Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ πολωνύμου  $f(x, y, z, \dots)$  ἔχει γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν (4) λέγομεν ὅτι τοῦτο ἔχει διαταχθῇ εἰς **ὁμογενεῖς ὁμάδας**.



Κατόπιν τούτων ἐν ἀκέραιον πολυώνυμον τριῶν μεταβλητῶν  $x, y, z$  δύναται νὰ διαταχθῇ εἰς ὁμογενεῖς ὁμάδας ὡς κάτωθι :

$$f(x,y,z) \equiv \alpha_0 + [\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z] + [\alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 z^2 + \alpha_7 xy + \alpha_8 xz + \alpha_9 yz] + \\ + \alpha_{10} x^3 + \alpha_{11} y^3 + \alpha_{12} z^3 + \alpha_{13} x^2 y + \alpha_{14} x^2 z + \alpha_{15} y^2 x + \dots,$$

ἐνθα  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots$  οἱ συντελεσταὶ τοῦ πολυωνύμου.

στ'). Τὸ ἄθροισμα, ἡ διαφορὰ καὶ τὸ γινόμενον πολυωνύμων τριῶν καὶ γενικῶς  $n$  μεταβλητῶν ὀρίζεται ὡς ἀκριβῶς καὶ διὰ πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς. Κατὰ συνέπειαν καὶ τὰ πολυώνυμα  $n$  τὸ πλῆθος μεταβλητῶν μὲ πραγματικούς συντελεστὰς ἀποτελοῦν *δακτύλιον*, ὁ ὁποῖος συμβολίζεται μέ:  $R[x,y,z,\dots]$ .

Ἡ ἰσότης μεταξὺ δύο ἀκεραίων πολυωνύμων, περιεχόντων τὰς αὐτὰς μεταβλητάς, ὀρίζεται ὡς καὶ διὰ τὰ πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς. Ἀκριβέστερον λέγομεν ὅτι :

Δύο ἀκέραια πολυώνυμα  $f(x,y,z,\dots)$  καὶ  $\varphi(x,y,z,\dots)$  εἶναι ἴσα ἢ ἐκ ταυ-τότητος ἴσα, καὶ γράφομεν  $f(x,y,z,\dots) \equiv \varphi(x,y,z,\dots)$ , τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν σύγκρινται ἀπὸ ἴσα μονώνυμα ἢ ὕπερ τὸ αὐτό, ἂν ἡ διαφορὰ των εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον. Ἦτοι :

$$f(x,y,z,\dots) \equiv \varphi(x,y,z,\dots) \iff f(x,y,z,\dots) - \varphi(x,y,z,\dots) \equiv 0$$

ορισ

Οὕτω, π.χ., τὰ πολυώνυμα :

$$f(x,y) \equiv \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 - \delta x + \varepsilon y + \theta \text{ καὶ } \varphi(x,y) \equiv 2x^2 - 3xy + y^2 + 5x + 4$$

θὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν :

$$\alpha = 2, \beta = -3, \gamma = 1, \delta = -5, \varepsilon = 0, \theta = 4.$$

ζ'). Καλοῦμεν *ἀριθμητικὴν τιμὴν* τοῦ πολυωνύμου  $f(x,y,z,\dots)$  διὰ  $x = \alpha, y = \beta, z = \gamma, \dots$ , ἐνθα  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  ἀριθμοὶ πραγματικοὶ ἢ μιγαδικοὶ, τὸν ἀριθμὸν  $f(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ , ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἂν εἰς τὸ πολυώνυμον  $f(x,y,z,\dots)$  ἀντικαταστήσωμεν τὰς μεταβλητάς  $x, y, z, \dots$  διὰ τῶν  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  ἀντιστοίχως.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος δύο πολυωνύμων  $n$  μεταβλητῶν καὶ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ μηδενικοῦ πολυωνύμου προκύπτει ὅτι :

$$\text{Ἐὰν } f(x,y,z,\dots) \equiv \varphi(x,y,z,\dots) \implies f(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \dots) \text{ καὶ ἔὰν } \\ f(x,y,z,\dots) \equiv 0 \implies f(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = 0 \text{ διὰ κάθε } n\text{-άδα τιμῶν } \alpha, \beta, \gamma, \dots \text{ τῶν } \\ x, y, z, \dots \text{ ἀντιστοίχως.}$$

**Παρατήρησις.** Διὰ τὴν ἀπόδειξιν προτάσεων, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς πολυώνυμα πολλῶν μεταβλητῶν, διατάσσομεν συνήθως αὐτὰ ὡς πρὸς μίαν μεταβλητὴν. Ἀκριβέστερον ἰσχύει ἡ ἐξῆς πρότασις :

Κάθε μὴ μηδενικὸν πολυώνυμον  $f(x,y,z)$ ,  $n$  βαθμοῦ ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν  $x$ , δύναται νὰ διαταχθῇ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς  $x$  κατὰ μοναδικὸν (μονοσήμαντον) τρόπον ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$f(x,y,z) \equiv f_n(y,z)x^n + f_{n-1}(y,z)x^{n-1} + \dots + f_1(y,z)x + f_0(y,z), \quad (4)$$

ἐνθα  $f_n(y,z), f_{n-1}(y,z), \dots, f_0(y,z)$  ἀκέραια πολυώνυμα τῶν μεταβλητῶν  $y, z$  καὶ  $f_n(y,z) \neq 0$ .

Προφανώς ή διάταξις αὕτη γίνεται ὡς ἑξής :

Συλλέγομεν πρῶτον τοὺς ὅρους οἱ ὅποιοι ἔχουν τὸ  $x$  εἰς τὴν μεγαλυτέραν δύναμιν  $\nu$  καὶ μεταξύ αὐτῶν ἐξάγομεν κοινὸν παράγοντα τὸ  $x^\nu$ , ὅτε ἔχομεν ὡς συντελεστὴν τοῦ  $x^\nu$  ἓν γένει πολυώνυμον τῶν  $y$  καὶ  $z$ , τὸ ὅποιον καλοῦμεν  $f_\nu(y, z)$ . Ἀκολουθῶς συλλέγομεν τοὺς ὅρους οἱ ὅποιοι ἔχουν τὸ  $x$  εἰς τὴν δύναμιν  $\nu - 1$  καὶ μεταξύ αὐτῶν ἐξάγομεν κοινὸν παράγοντα τὸν  $x^{\nu-1}$  καὶ ἔχομεν οὕτω ὡς συντελεστὴν τοῦ  $x^{\nu-1}$  ἓν γένει πολυώνυμον τῶν  $y$  καὶ  $z$ , τὸ ὅποιον καλοῦμεν  $f_{\nu-1}(y, z)$ . Προχωροῦντες καθ' ὅμοιον τρόπον συλλέγομεν τέλος τοὺς ὅρους οἱ ὅποιοι δὲν ἔχουν τὴν μεταβλητὴν  $x$  καὶ οἱ ὅποιοι ἀπαρτίζουν τὸν τελευταῖον προσθετέον  $f_0(y, z)$  τοῦ ἀναπτύγματος (4).

Τὸ αὐτὸ πολυώνυμον  $f(x, y, z)$ , ἐὰν εἶναι βαθμοῦ  $\mu$  ὡς πρὸς μίαν ἄλλην μεταβλητὴν π.χ. τὴν  $y$  δύναται νὰ διαταχθῇ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ  $y$ , δηλ. νὰ λάβῃ τὴν μορφήν :

$$f(x, y, z) \equiv f_\mu(x, z) y^\mu + f_{\mu-1}(x, z) y^{\mu-1} + \dots + f_1(x, z) y + f_0(x, z), \quad (4')$$

ἐνθα  $f_\mu(x, z), f_{\mu-1}(x, z), \dots, f_0(x, z)$  ἀκέραια πολυώνυμα τῶν  $x, z$  καὶ  $f_\mu(x, z) \neq 0$ .

**Ἐφαρμογή.** Τὸ πολυώνυμον :

$$f(x, y, z) \equiv 5x^4y^2z^3 - 3x^3yz^5 + 2x^3z - x^4y + 4yx - 7xy^2z + 3z - 2y$$

διατάσσεται κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς  $x$  ὡς κάτωθι :

$$f(x, y, z) \equiv (5y^2z^3 - y)x^4 + (2z - 3yz^5)x^3 + (4y - 7y^2z)x + (3z - 2y).$$

η'). Ἀνάλογοι προτάσεις πρὸς τὰ θεωρήματα I καὶ II τῶν §§ 52, 53 διατυπώνται καὶ διὰ πολυώνυμα περισσοτέρων τῆς μιᾶς μεταβλητῶν, ἥτοι :

**1ον :** Ἐὰν τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων  $f(x, y, z, \dots)$  καὶ  $\varphi(x, y, z, \dots)$  εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν ἐνὼ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν δὲν εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον, τότε τὸ ἄλλο εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν. Δηλαδή :

Ἐὰν  $f(x, y, z, \dots) \cdot \varphi(x, y, z, \dots) \equiv 0$  καὶ  $\varphi(x, y, z, \dots) \neq 0 \implies f(x, y, z, \dots) \equiv 0$ .

**2ον :** Ἐὰν  $f(x, y, z, \dots) \cdot \varphi(x, y, z, \dots) \equiv g(x, y, z, \dots) \cdot \varphi(x, y, z, \dots)$  καὶ  $\varphi(x, y, z, \dots) \neq 0$ , τότε :  $f(x, y, z, \dots) \equiv g(x, y, z, \dots)$ .

## Διαιρετότης ἀκεραίων πολυωνύμων πολλῶν μεταβλητῶν.

**§ 80. Τελεία διαίρεσις.** — Ἡ τελεία διαίρεσις ἀκεραίων πολυωνύμων περισσοτέρων τῆς μιᾶς μεταβλητῶν ὀρίζεται ὡς καὶ διὰ τὰ πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς. Οὕτω θὰ λέγωμεν ὅτι :

Τὸ μὴ μηδενικὸν πολυώνυμον  $\varphi(x, y, z, \dots)$  διαιρεῖ τὸ  $f(x, y, z, \dots)$  καὶ γράφομεν  $\varphi(x, y, z, \dots) \mid f(x, y, z, \dots)$ , τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ ἀκέραιον πολυώνυμον  $\pi(x, y, z, \dots)$  τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ταυτότης :

$$f(x, y, z, \dots) \equiv \varphi(x, y, z, \dots) \cdot \pi(x, y, z, \dots). \quad (1)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ἐπίσης ὅτι τὸ πολυώνυμον  $f(x, y, z, \dots)$  *διαιρεῖται* (ἀκριβῶς) ἢ εἶναι *διααιρετὸν* διὰ τοῦ πολυωνύμου  $\varphi(x, y, z, \dots)$  ἢ ἀκόμη ὅτι ἡ διαίρεσις  $f(x, y, z, \dots) : \varphi(x, y, z, \dots)$  εἶναι *τελεία*.

Τὸ πολυώνυμον  $\pi(x, y, z, \dots)$  καλεῖται ἐπίσης *πηλίκον* τῆς τελείας διαιρέσεως  $f(x, y, z, \dots) : \varphi(x, y, z, \dots)$ . Οὕτω, π.χ., τὸ πολυώνυμον  $f(x, y) \equiv x^3 + y^3$  διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ  $\varphi(x, y) \equiv x^2 - xy + y^2$  καὶ δίδει πηλίκον τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον  $\pi(x, y) \equiv x + y$ .

Είναι φανερόν ὅτι τὸ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως  $f(x,y,z,\dots) : \varphi(x,y,z,\dots)$ , ἢτοι τὸ πολυώνυμον  $\pi(x,y,z,\dots)$ , ὁρίζεται μονοσημάντως· πράγματι, ἐὰν ὑπῆρχε καὶ ἄλλο πολυώνυμον  $\pi_1(x,y,z,\dots)$  τοιοῦτον, ὥστε :

$$f(x,y,z,\dots) \equiv \varphi(x,y,z,\dots) \cdot \pi_1(x,y,z,\dots), \quad (2)$$

τότε, δυνάμει τῶν (1) καὶ (2), θὰ εἴχομεν :

$$\varphi(x,y,z,\dots) \cdot \pi(x,y,z,\dots) \equiv \varphi(x,y,z,\dots) \cdot \pi_1(x,y,z,\dots)$$

καὶ ἐπομένως :

$$\varphi(x,y,z,\dots) \cdot [\pi(x,y,z,\dots) - \pi_1(x,y,z,\dots)] \equiv 0 \quad (3)$$

Ἀλλὰ  $\varphi(x,y,z,\dots) \neq 0$ , ὅθεν (§ 79, η) θὰ εἶναι :

$$\pi(x,y,z,\dots) - \pi_1(x,y,z,\dots) \equiv 0 \quad \text{ἢ} \quad \pi(x,y,z,\dots) \equiv \pi_1(x,y,z,\dots)$$

Δηλαδή ἐν μόνον πηλίκον ὑπάρχει.

**Σημειώσεις.** Εἰς τὴν περίπτωσιν πολυωνύμων περισσοτέρων τῆς μιᾶς μεταβλητῶν δὲν ἰσχύει ἐν ἀνάλογον θεώρημα πρὸς τὸ τῆς § 64. Κατὰ ταῦτα :

Δοθέντων δύο πολυωνύμων  $A(x,y)$  καὶ  $B(x,y)$  δὲν ὑπάρχουν πάντοτε δύο πολυωνύμα  $Q(x,y)$  καὶ  $R(x,y)$  (μὲ βαθμὸν τοῦ  $R(x,y)$  μικρότερον τοῦ βαθμοῦ τοῦ  $B(x,y)$ ) τοιούτων, ὥστε :

$$A(x,y) \equiv B(x,y) \cdot Q(x,y) + R(x,y).$$

**Παράδειγμα :**  $A(x,y) \equiv x^3 + 2xy^2 - x + 1$ ,  $B(x,y) \equiv x + y - 1$ .

Ἀποδεικνύομεν κατωτέρω μερικά βασικά θεωρήματα διαιρετότητος.

**§ 81. Θεώρημα.**— Ἀκέραιον πολυώνυμον  $f(x,y,z)$  διαιρεῖται διὰ τοῦ διωνύμου  $x - y$  τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν :  $f(y,y,z) \equiv 0$ , δηλ. καθίσταται ἐκ ταυτότητος μηδέν, ὅταν εἰς αὐτὸ τεθῇ ἀντὶ  $x$  τὸ  $y$ .

**Ἀπόδειξις.** Ἐστω ὅτι  $x - y \mid f(x,y,z)$ , τότε, ἐὰν καλέσωμεν  $\pi(x,y,z)$  τὸ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως  $f(x,y,z) : (x - y)$ , θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα :

$$f(x,y,z) \equiv (x - y) \cdot \pi(x,y,z) \quad (1)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὸ  $x$  διὰ τοῦ  $y$  λαμβάνομεν :

$$f(y,y,z) \equiv 0. \quad (2)$$

**Ἀντιστρέφως.** Ἐστω ὅτι ἰσχύει ἡ (2) καὶ ὅτι  $v$  εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ  $f(x,y,z)$  ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν  $x$ . Τότε τὸ  $f(x,y,z)$  τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$f(x,y,z) \equiv f_v(y,z)x^v + f_{v-1}(y,z)x^{v-1} + \dots + f_1(y,z)x + f_0(y,z).$$

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ  $f(x,y,z)$  διὰ  $x - y$ , θὰ εὑρωμεν ἐν πηλίκον  $\pi(x,y,z)$  καὶ ἐν υπόλοιπον μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν  $x$ , δηλ. ἐν ἀκέραιον πολυώνυμον μὴ περιέχον τὸ  $x$ , ἀλλὰ μόνον τὰς μεταβλητὰς  $y$  καὶ  $z$ .

Ἐὰν  $u(y,z)$  καλέσωμεν τὸ ἐν λόγω υπόλοιπον, θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα :

$$f(x,y,z) \equiv (x - y) \cdot \pi(x,y,z) + u(y,z). \quad (3)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (3) τὸ  $x$  μὲ τὸ  $y$  καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (2) λαμβάνομεν :

$$u(y,z) \equiv f(y,y,z) \equiv 0,$$

δηλαδή τὸ  $u(y,z)$  εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον, ὅτε ἡ (3) γίνεται :

$$f(x,y,z) \equiv (x - y) \cdot \pi(x,y,z), \quad \text{δηλαδή} \quad (x - y) \mid f(x,y,z).$$

**§ 82. Θεώρημα.** — 'Εάν άκέραιον πολυώνυμον  $f(x,y,z)$  διαιρῆται δι' ένός έκάστου τών διωνύμων:  $x - y, y - z, z - x$ , τότε θά διαιρῆται καί διά τοῦ γινομένου:  $(x - y)(y - z)(z - x) \neq 0$

καί άντιστρόφως.

**Ἀπόδειξις.** 'Εφ' όσον, ές ύποθέσεως, τὸ  $f(x,y,z)$  διαιρεῖται διά  $x - y$  θά έχωμεν, έάν  $\pi_1(x,y,z)$  καλέσωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης:

$$f(x,y,z) \equiv (x - y) \cdot \pi_1(x,y,z). \quad (1)$$

'Εάν εἰς τὴν (1) τεθῇ όπου  $y$  τὸ  $z$  λαμβάνομεν:

$$f(x,z,z) \equiv (x - z) \cdot \pi_1(x,z,z). \quad (2)$$

'Επειδὴ όμως τὸ  $f(x,y,z)$  διαιρεῖται διά  $y - z$ , θά εἶναι ( § 81 )  $f(x,z,z) \equiv 0$ . Τότε όμως έκ τῆς (2) προκύπτει:  $\pi_1(x,z,z) \equiv 0$ , διότι  $x - z \neq 0$ .

'Εκ τῆς  $\pi_1(x,z,z) \equiv 0$  προκύπτει ὅτι τὸ πολυώνυμον  $\pi_1(x,y,z)$  διαιρεῖται (άκριβῶς) διά  $y - z$ , ὅθεν θά έχωμεν, έάν  $\pi_2(x,y,z)$  καλέσωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης:

$$\pi_1(x,y,z) \equiv (y - z) \pi_2(x,y,z). \quad (3)$$

'Η (1), λόγω τῆς (3), γίνεται:

$$f(x,y,z) \equiv (x - y)(y - z) \pi_2(x,y,z). \quad (4)$$

'Εάν εἰς τὴν (4) τεθῇ όπου  $z$  τὸ  $x$  λαμβάνομεν:

$$f(x,y,x) \equiv (x - y)(y - x) \cdot \pi_2(x,y,x). \quad (5)$$

'Επειδὴ όμως τὸ  $f(x,y,z)$  διαιρεῖται διά τοῦ  $z - x$ , θά εἶναι  $f(x,y,x) \equiv 0$ .

Τότε όμως έκ τῆς (5) προκύπτει:  $\pi_2(x,y,x) \equiv 0$ , διότι  $(x - y)(y - x) \neq 0$ .

'Αλλά  $\pi_2(x,y,x) \equiv 0$  δηλοῖ ὅτι τὸ πολυώνυμον  $\pi_2(x,y,z)$  διαιρεῖται (άκριβῶς) διά τοῦ  $z - x$ . Ἀρα:

$$\pi_2(x,y,z) \equiv (z - x) \cdot \pi(x,y,z), \quad (6)$$

ἔνθα  $\pi(x,y,z)$  εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως  $\pi_2(x,y,z) : (z - x)$ .

'Η (4), δυνάμει τῆς (6), γίνεται:

$$f(x,y,z) \equiv (x - y)(y - z)(z - x) \cdot \pi(x,y,z).$$

Συνεπῶς τὸ  $f(x,y,z)$  διαιρεῖται άκριβῶς καί διά τοῦ γινομένου  $(x - y)(y - z)(z - x)$ .

Τὸ άντίστροφον εἶναι προφανές.

Δι' άναλόγου τρόπου άποδεικνύεται καί τὸ κάτωθι:

**§ 83. Θεώρημα.** — 'Εάν άκέραιον πολυώνυμον  $f(x,y,z)$  διαιρῆται:

- (i) διά  $x + y, y + z, z + x \iff$  διαιρεῖται καί διά  $(x + y)(y + z)(z + x)$
- (ii) διά  $x, y, z, \iff \gg \gg \gg x \cdot y \cdot z$
- (iii) διά  $x + y - z, y + z - x, z + x - y \iff \gg \gg \gg (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y).$

**Σημείωσις.** Τά προηγούμενα θεωρήματα Ισχύουν γενικῶς διά κάθε πολυώνυμον  $f(x,y,z, \dots, t)$ ,  $n$  τὸ πλῆθος μεταβλητῶν, αἱ δέ άποδείξεις εἶναι πανομοιότυποι τῶν άνωτέρω ὡς καί διά πολυώνυμα τριῶν μεταβλητῶν.

**Ἐφαρμογή.** 'Εάν  $n$  φυσικὸς άριθμός, νά δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$f(x,y,z) \equiv (x + y + z)^{2n+1} - x^{2n+1} - y^{2n+1} - z^{2n+1}$$

διαιρεῖται διά τοῦ γινομένου:  $(x + y)(y + z)(z + x)$ .

**Λύσις.** Ἀντικαθιστώντες τὸ  $x$  μετὸ  $-y$  εἰς τὸ  $f(x,y,z)$  εύρίσκομεν:

$$f(-y,y,z) \equiv (-y + y + z)^{2n+1} - (-y)^{2n+1} - y^{2n+1} - z^{2n+1} \equiv z^{2n+1} + y^{2n+1} - y^{2n+1} - z^{2n+1} \equiv 0.$$

'Αρα τὸ  $f(x,y,z)$  διαιρεῖται (άκριβῶς) διά  $x + y$ . Ὁμοίως άποδεικνύεται ὅτι διαιρεῖται διά  $y + z$  καί  $z + x$ . Τότε όμως, συμφώνως πρὸς τὸ τελευταῖον θεωρήμα τὸ  $f(x,y,z)$  θά διαιρῆται καί διά τοῦ γινομένου  $(x + y)(y + z)(z + x)$ .

## Ὁμογενὴ πολυώνυμα

**§ 84. Ὁρισμοί.**—Εἰς τὴν παράγραφον 79 εἶδομεν ὅτι: Ἐν ἀκέραιον πολυώνυμον δύο ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν καλεῖται ὁμογενὲς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὅλοι οἱ ὅροι του, δηλαδή τὰ μονώνυμα (μὴ μηδενικά) ἐξ ὧν σύγκειται εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ σύνολον τῶν μεταβλητῶν.

Ὁ κοινὸς βαθμὸς τῶν ὄρων του καλεῖται **βαθμὸς ὁμογενείας** τοῦ πολυωνύμου. Οὕτω, π.χ., τὸ πολυώνυμον:  $f(x,y,z) \equiv 2x^3 - y^3 + 3z^3 + x^2y + y^2z - z^2x + 3xyz$  εἶναι ὁμογενὲς, τρίτου βαθμοῦ. Ἐπίσης τὸ πολυώνυμον  $\varphi(x,y) \equiv x^3y - 2x^2y^2 + 3xy^3$  εἶναι ὁμογενὲς τετάρτου βαθμοῦ ὁμογενείας, ἐνῶ τὸ πολυώνυμον:  $g(x,y) \equiv x^2 + y^2 + xy + x + y$  δὲν εἶναι ὁμογενὲς.

Ἐστω τώρα ἐν ὁμογενὲς πολυώνυμον  $f(x,y,z)$ , βαθμοῦ ὁμογενείας  $\nu$ , τότε ὁ τυχὼν ὅρος αὐτοῦ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς:  $\alpha x^k y^p z^\mu$ , ἐνθα  $\alpha$  (σταθερὸς) πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ  $k, p, \mu$  φυσικοὶ ἀριθμοὶ ἢ μηδὲν τοιοῦτοι, ὥστε νὰ εἶναι  $k + p + \mu = \nu$ . Ὁ ὅρος οὗτος, ἐὰν τὰ  $x, y, z$  ἀντικατασταθοῦν ἀντιστοιχῶς ὑπὸ τῶν γινομένων:  $\lambda x, \lambda y, \lambda z$ , ἐνθα  $\lambda$  τυχὼν πραγματικὸς ἀριθμὸς,  $\lambda \neq 0$ , γίνεται:

$$\alpha(\lambda x)^k (\lambda y)^p (\lambda z)^\mu \equiv \alpha \cdot \lambda^{k+p+\mu} x^k y^p z^\mu \equiv \lambda^\nu \cdot \alpha x^k y^p z^\mu,$$

ἤτοι πολλαπλασιάζεται ἐπὶ  $\lambda^\nu$ . Ἐφ' ὅσον ὁ τυχὼν ὅρος τοῦ πολυωνύμου  $f(x,y,z)$  πολλαπλασιάζεται ἐπὶ  $\lambda^\nu$ , ἔπεται ὅτι καὶ τὸ πολυώνυμον  $f(x,y,z)$  πολλαπλασιάζεται ἐπὶ  $\lambda^\nu$ . Ἐντεῦθεν ἔπεται ὁ ἐξῆς ἰσοδύναμος ὁρισμὸς τοῦ ὁμογενοῦς πολυωνύμου:

**Ἀκέραιον πολυώνυμον  $f(x,y,z, \dots)$  καλεῖται ὁμογενὲς,  $\nu$  βαθμοῦ, τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑφίσταται ἡ ταυτότης:**

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \dots) \equiv \lambda^\nu \cdot f(x, y, z, \dots)$$

διὰ κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$  καὶ  $(x, y, z, \dots) \neq (0, 0, 0, \dots)$ .

**Παράδειγμα:** Τὸ πολυώνυμον:  $f(x,y,z) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  εἶναι ὁμογενὲς τρίτου βαθμοῦ, διότι ἔχομεν:

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv (\lambda x)^3 + (\lambda y)^3 + (\lambda z)^3 - 3(\lambda x)(\lambda y)(\lambda z) \equiv \lambda^3 \cdot (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \equiv \lambda^3 \cdot f(x, y, z).$$

**Ἀσκήσις.** Ἀποδείξατε τὴν ἰσοδυναμίαν τῶν ἀνωτέρω δύο ὁρισμῶν τοῦ ὁμογενοῦς πολυωνύμου.

## Ἰδιότητες τῶν Ὁμογενῶν πολυωνύμων

**§ 85. Ἰδιότης I.**—Τὸ γινόμενον δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι ἐπίσης ὁμογενὲς πολυώνυμον, βαθμοῦ ὁμογενείας ἴσου πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν δύο πολυωνύμων.

**Ἀπόδειξις.** Ἐστώσαν τὰ ὁμογενὴ πολυώνυμα  $f(x,y,z)$ ,  $\varphi(x,y,z)$  βαθμῶν ὁμογενείας  $\nu$  καὶ  $\mu$  ἀντιστοιχῶς. Τότε θὰ ἔχωμεν:

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^\nu \cdot f(x, y, z) \quad (1)$$

$$\varphi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^\mu \cdot \varphi(x, y, z). \quad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα :

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \cdot \varphi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^{v+\mu} \cdot f(x, y, z) \cdot \varphi(x, y, z) \quad (3)$$

Ἡ (3) μᾶς βεβαιώνει ὅτι τὸ γινόμενον  $f(x, y, z) \cdot \varphi(x, y, z)$  τῶν δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι ἐπίσης ὁμογενὲς πολυώνυμον  $v + \mu$  βαθμοῦ ὁμογενείας.

**Παρατήρησις.** Τὸ γινόμενον ἑνὸς ὁμογενοῦς καὶ ἑνὸς μὴ ὁμογενοῦς πολυωνύμου καθὼς καὶ τὸ γινόμενον δύο μὴ ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι πολυώνυμον μὴ ὁμογενὲς (διατί;) :

**§ 86. Ἰδιότης II.**— Τὸ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι πολυώνυμον ὁμογενές, βαθμοῦ ὁμογενείας ἴσου πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν βαθμῶν τῶν δύο πολυωνύμων.

**Ἀπόδειξις.** Ἐστώσαν  $f(x, y, z)$ ,  $\varphi(x, y, z)$ ,  $\pi(x, y, z)$  ἀντιστοίχως ὁ διαιρετός, ὁ διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκον μιᾶς τελείας διαιρέσεως καὶ  $v$ ,  $\mu$  ( $v > \mu$ ) ἀντιστοίχως οἱ βαθμοὶ ὁμογενείας τῶν  $f(x, y, z)$  καὶ  $\varphi(x, y, z)$ . Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$f(x, y, z) \equiv \varphi(x, y, z) \cdot \pi(x, y, z) \quad (1)$$

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^v \cdot f(x, y, z) \quad (2)$$

$$\varphi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^\mu \cdot \varphi(x, y, z). \quad (3)$$

Ἡ ταυτότης (1), ἐὰν τὰ  $x, y, z$  ἀντικατασταθοῦν ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν  $\lambda x, \lambda y, \lambda z$  γίνεται :

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \varphi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \cdot \pi(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

ἢ δυνάμει τῶν (2) καὶ (3) :

$$\lambda^v \cdot f(x, y, z) \equiv \lambda^\mu \cdot \varphi(x, y, z) \cdot \pi(\lambda x, \lambda y, \lambda z). \quad (4)$$

Διαιροῦντες τὰς (4) καὶ (1) κατὰ μέλη λαμβάνομεν μετὰ τὰς πράξεις :

$$\pi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^{v-\mu} \cdot \pi(x, y, z),$$

ἢ ὁποία δηλοῖ ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον βαθμοῦ ὁμογενείας  $v - \mu$ .

**Σημείωσις.** Ἡ ἰδιότης II ἀποδεικνύεται συντομώτερον διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, ἔχοντες ὅμως ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν παρατήρησιν τῆς προηγουμένης παραγράφου.

**Παρατήρησις.** Τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων δὲν εἶναι πάντοτε ὁμογενὲς πολυώνυμον. Περὶ τούτου βεβαιούμεθα ἐκ τῶν κάτωθι παραδειγμάτων :

$$\text{Ἐὰν } f(x, y, z) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \quad (\text{ὁμογενὲς πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ})$$

$$\text{καὶ } \varphi(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \quad ( \quad \gg \quad \gg \quad \text{δευτέρου} \quad \gg \quad )$$

τότε τὸ ἄθροισμά των, ἥτοι τὸ πολυώνυμον :

$$\sigma(x, y, z) \equiv f(x, y, z) + \varphi(x, y, z) \equiv x^3 + y^3 + z^3 + x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx - 3xyz$$

δὲν εἶναι ὁμογενὲς ὡς πρὸς τὰ  $x, y, z$ .

Ἀντιθέτως, ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ πολυώνυμα :

$$f(x, y, z) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \quad (\text{ὁμογενὲς πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ})$$

$$g(x, y, z) \equiv x^2y + y^2z + z^2x + 5xyz \quad (\text{ὁμογενὲς πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ})$$

τότε καὶ τό :

$$\tau(x, y, z) \equiv f(x, y, z) + g(x, y, z) \equiv x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + y^2z + z^2x + 2xyz$$

εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον καὶ μάλιστα τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὁμογενείας.

Γενικώς: Το άθροισμα δύο ή περισσότερων ομογενών πολυωνύμων θα είναι ομογενές πολυώνυμον, εάν τα πολυώνυμα τα όποια προστίθενται είναι του αυτού βαθμού ομογενείας.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

181. Δείξτε ότι το πολυώνυμον:  $f(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 8xy$  είναι ομογενές δευτέρου βαθμού ομογενείας.
182. Δείξτε ότι το πολυώνυμον:  $f(x,y) \equiv 8x^2y - 5x^2y^2 + 3xy^3$  είναι ομογενές τετάρτου βαθμού ομογενείας.
183. Δείξτε ότι το πολυώνυμον:  $f(x,y,z) \equiv 5x^3 - y^3 + 2z^3 + x^2y + y^2z - z^2x + 3xyz$  είναι ομογενές τρίτου βαθμού ομογενείας.
184. Δείξτε ότι το πολυώνυμον:  $f(x,y) \equiv 9x^5y^3 + 3x^4y^4 - 14xy^7$  είναι ομογενές, όδού βαθμού ομογενείας.  
(Νά γίνει εις τὰς ἀνωτέρω ασκήσεις χρήσις τοῦ δευτέρου ὁρίσμου).
185. Όμοίως, τῇ βοηθείᾳ τοῦ δευτέρου ὁρίσμου, δείξτε ὅτι τὸ πολυώνυμον:  
 $f(x,y) \equiv x^5 - 5x^4y + 6x^3y^2 - 5x^2y^3 + xy^4 - y^5$   
εἶναι ομογενές 5ου βαθμού ομογενείας.
186. Δίδονται τὰ πολυώνυμα:  $f(x,y) \equiv x^3 + 2xy^2 + x^2y + xy + x + y$ ,  
 $\varphi(x,y,z) \equiv 3x^2y^2z^2 - 2xy^2z^2 + y^6z - 7x^4yz$ .  
Εἶναι ομογενῆ; Ἐν καταφατικῇ περιπτώσει νά εὑρεθῇ ὁ βαθμός τῆς ομογενείας των.

## Συμμετρικά πολυώνυμα

**§ 87. Βοηθητικαὶ ἔννοιαι — Ὁρισμοί. — α').** Ἐστώσαν  $n$  τὸ πλῆθος διάφορα ἀλλήλων διατεταγμένα στοιχεῖα  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , τὰ όποῖα θεωροῦνται ὡς στοιχεῖα ἑνός συνόλου  $E$ , ἥτοι  $E \equiv \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

**Καλεῖται μετὰθεσις τῶν  $n$  αὐτῶν στοιχείων κάθε ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνις τοῦ συνόλου  $E$  ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του.**

Οὕτω, π.χ., εάν  $E \equiv \{x, y, z\}$  καὶ θεωρήσωμεν τὴν ἀπεικόνισιν:

$$x \leftrightarrow y, \quad y \leftrightarrow x, \quad z \leftrightarrow z,$$

τότε αὕτη εἶναι μία μετὰθεσις τῶν στοιχείων τοῦ τριμελοῦς συνόλου  $E$ .

Τὴν ἀνωτέρω ἀπεικόνισιν (μετὰθεσιν) παριστᾶμεν συμβολικῶς οὕτω:

$$\left( \begin{array}{ccc} x & y & z \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y & x & z \end{array} \right) \text{ ἢ ἀπλούστερον } \left( \begin{array}{ccc} x & y & z \\ y & x & z \end{array} \right)^*$$

Μεταθέσεις τοῦ τριμελοῦς συνόλου  $\{x, y, z\}$  εἶναι καὶ αἱ ἑξῆς:

$$\left( \begin{array}{ccc} x & y & z \\ x & y & z \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} x & y & z \\ x & z & y \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} x & y & z \\ y & z & x \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} x & y & z \\ z & x & y \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} x & y & z \\ z & y & x \end{array} \right).$$

Ὡστε ἐκ τοῦ τριμελοῦς συνόλου  $\{x, y, z\}$  λαμβάνομεν  $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$  μεταθέσεις.

\*) Εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν γράφονται τὰ πρότυπα καὶ εἰς τὴν δευτέραν κάτωθεν ἐκάστου προτύπου ἡ εἰκὼν αὐτοῦ.

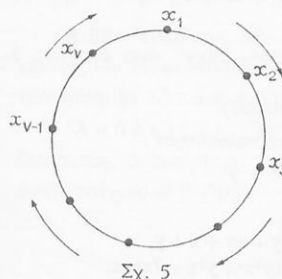


Εἰς ἕν ἐπόμενον κεφάλαιον θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι : Τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων ἐνὸς συνόλου ἐκ  $n$  στοιχείων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ .

Μία εἰδικὴ περίπτωσις μεταθέσεως εἶναι ἐκείνη καθ' ἣν ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ συνόλου  $E$  ἀπεικονίζεται εἰς τὸ ἐπόμενόν του, τὸ δὲ τελευταῖον στοιχεῖον  $x_n$  εἰς τὸ πρῶτον  $x_1$ . Δηλαδή ἡ μετάθεσις :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_{n-1} & x_n \\ x_2 & x_3 & \cdot & \cdot & x_n & x_1 \end{pmatrix}$$

Μία τοιαύτη μετάθεσις καλεῖται : **κυκλικὴ μετάθεσις**.



Ἡ ὀνομασία αὕτη ἐξηγεῖται ἀμέσως ἐὰν τὰ  $n$  διατεταγμένα στοιχεῖα  $x_1, x_2, \dots, x_n$  φαντασθῶμεν ὅτι εἶναι τοποθετημένα ἐπὶ μιᾷ περιφερείας κύκλου καὶ θεωρήσωμεν ἕν κινητὸν τὸ ὁποῖον διαγράφει τὴν περιφέρειαν (σχ. 5) κατὰ τὴν φορὰν ποὺ δεικνύουν τὰ βέλη, τότε τὸ κινητὸν μετὰ τὸ  $x_1$  θὰ συναντήσῃ τὸ  $x_2$ , μετὰ τὸ  $x_2$  τὸ  $x_3$ , ... καὶ τέλος μετὰ τὸ  $x_n$  θὰ συναντήσῃ πάλιν τὸ  $x_1$ .

Κυκλικαὶ μεταθέσεις ἐκ δύο στοιχείων καλοῦνται εἰδικώτερον **ἀντιμεταθέσεις**.

**β').** Ὡς θεωρήσωμεν ἤδη τὸ πολυώνυμον  $f(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 3x + 2y + 1$  τῶν μεταβλητῶν  $x$  καὶ  $y$ . Ἐὰν ἀντιμεταθέσωμεν τὰς μεταβλητὰς  $x$  καὶ  $y$ , δηλ. ἐὰν θέσωμεν ἀντὶ  $x$  τὸ  $y$  καὶ ἀντὶ  $y$  τὸ  $x$  θὰ προκύψῃ τὸ πολυώνυμον  $f(y,x) \equiv y^2 + x^2 - 3y + 2x + 1$ , τὸ ὁποῖον προφανῶς εἶναι διάφορον τοῦ  $f(x,y)$ , ἥτοι ἔχομεν :  $f(y,x) \neq f(x,y)$ .

Ἀντιθέτως ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ πολυώνυμον :

$$f(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 2xy + 3(x+y) - 5$$

καὶ ἀντιμεταθέσωμεν τὰς μεταβλητὰς του προκύπτει πολυώνυμον ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς τὸ δοθέν, ἥτοι ἐν προκειμένῳ ἰσχύει :  $f(y,x) \equiv f(x,y)$ .

Ὁμοίως, ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ πολυώνυμον τριῶν μεταβλητῶν :

$$f(x,y,z) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

καὶ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τῶν μεταβλητῶν του  $x, y, z$  μίαν οἰανδήποτε μετάθεσιν,

λ.χ. τὴν :  $\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix}$ , ἥτοι ἂν θέσωμεν ἀντὶ  $x$  τὸ  $z$ , ἀντὶ  $y$  τὸ  $x$  καὶ ἀντὶ  $z$

τὸ  $y$  θὰ προκύψῃ τὸ πολυώνυμον :

$$f(z,x,y) \equiv z^3 + x^3 + y^3 - 3zxy.$$

Εἶναι δέ :

$$f(z,x,y) \equiv f(x,y,z).$$

Τὰ πολυώνυμα τῶν δύο τελευταίων παραδειγμάτων καλοῦνται : **συμμετρικά**. Κατόπιν τούτων δίδομεν τὸν ἑξῆς ὅρισμόν τοῦ συμμετρικοῦ πολυωνύμου.

Ἀκέραιον, μὴ μηδενικόν, πολυώνυμον δύο ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν καλεῖται **συμμετρικόν** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν δι' οἰασδήποτε μεταθέσεως τῶν μεταβλητῶν του προκύπτῃ πολυώνυμον ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς τὸ ἀρχικόν.



Οὕτως, ἔάν  $f(x,y,z)$  εἶναι συμμετρικὸν πολυώνυμον ὡς πρὸς  $x,y,z$  θὰ ἔχω-  
 μεν :

$$f(y,z,x) \equiv f(z,x,y) \equiv f(y,x,z) \equiv f(z,y,x) \equiv f(x,z,y) \equiv f(x,y,z).$$

γ'). Ἀς θεωρήσωμεν ἤδη τὸ πολυώνυμον :

$$f(x,y,z) \equiv x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y). \quad (1)$$

Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι τὸ ἐν λόγω πολυώνυμον δὲν εἶναι συμμετρικόν,  
 κατὰ τὸν δοθέντα ὅρισμόν, διότι, ἐάν λάβωμεν τὴν μετάθεσιν  $\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & y & x \end{pmatrix}$  καὶ  
 τὴν ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τῶν μεταβλητῶν τοῦ, θὰ προκύψῃ πολυώνυμον  $f(z,y,x)$   
 διάφορον τοῦ δοθέντος.

Ἀντιθέτως, ἐάν ἐπὶ τῶν μεταβλητῶν τοῦ  $x,y,z$  ἐφαρμόσωμεν τὴν κυκλικὴν  
 μετάθεσιν, ἥτοι ἂν θέσωμεν ἀντὶ  $x$  τὸ  $y$ , ἀντὶ  $y$  τὸ  $z$  καὶ ἀντὶ  $z$  τὸ  $x$ , θὰ ἔχωμεν :

$$f(y,z,x) \equiv y^2(z-x) + z^2(x-y) + x^2(y-z). \quad (2)$$

Συγκρίνοντας τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$f(y,z,x) \equiv f(x,y,z).$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι τὸ πολυώνυμον (1) εἶναι **κυκλικῶς  
 συμμετρικόν**. Ὡστε :

Ἀκέραιον, μὴ μηδενικόν, πολυώνυμον δύο ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν κα-  
 λεῖται **κυκλικῶς συμμετρικόν** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν δι' οἰασδὴποτε  
 κυκλικῆς μεταθέσεως τῶν μεταβλητῶν τοῦ προκύψῃ πολυώνυμον ἐκ ταυτότητος  
 ἴσον πρὸς τὸ ἀρχικόν.

Εἶναι φανερόν τώρα ὅτι κάθε συμμετρικόν πολυώνυμον εἶναι καὶ κυκλικῶς  
 συμμετρικόν, τὸ ἀντίστροφον ὅμως δὲν ἀληθεύει (διὰτί;).

Κατωτέρω εἰς περιπτώσεις καθ' ὅς τὸ πολυώνυμον εἶναι κυκλικῶς συμμετρικόν  
 θὰ τονίζωμεν τοῦτο ἰδιαίτερως.

**Παρατήρησις.** Εἰς τὴν περίπτωσιν πολυωνύμου δύο μεταβλητῶν αἱ  
 ἔννοιαι : «*συμμετρικόν πολυώνυμον*» καὶ «*κυκλικῶς συμμετρικόν πολυώνυμον*» εἶ-  
 ναι ταυτόσημοι.

## Ἰδιότητες τῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων

**§ 88. Ἰδιότης I.**—Τὸ ἄθροισμα, ἡ διαφορὰ καὶ τὸ γινόμενον δύο συμμετρι-  
 κῶν πολυωνύμων εἶναι πάντοτε συμμετρικὸν πολυώνυμον.

Ἡ ἀπόδειξις ὡς εὐκόλος παραλείπεται.

**§ 89. Ἰδιότης II.**—Τὸ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως δύο συμμετρικῶν πο-  
 λυωνύμων (τῶν αὐτῶν μεταβλητῶν) εἶναι συμμετρικὸν πολυώνυμον.

**Ἀπόδειξις.** Ἐστώσαν  $f(x,y,z)$ ,  $\varphi(x,y,z)$  καὶ  $\pi(x,y,z)$  ἀντιστοίχως  
 ὁ διαιρετέος, διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως τῶν συμμετρικῶν  
 πολυωνύμων  $f(x,y,z)$  καὶ  $\varphi(x,y,z) \neq 0$ , τότε θὰ ἔχωμεν :

$$f(x,y,z) \equiv \varphi(x,y,z) \cdot \pi(x,y,z). \quad (1)$$

Διὰ μιᾶς τυχοῦσης μεταθέσεως τῶν  $x, y, z$  π.χ. τῆς  $\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix}$ , ἡ (1) γίνεται :

$$\begin{aligned} f(z, x, y) &\equiv \varphi(z, x, y) \cdot \pi(z, x, y) \\ \eta \quad f(x, y, z) &\equiv \varphi(x, y, z) \cdot \pi(z, x, y), \end{aligned} \quad (2)$$

διότι τὰ πολυώνυμα  $f(x, y, z)$  καὶ  $\varphi(x, y, z)$  ὑπετέθησαν συμμετρικά.

Διὰ συγκρίσεως τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\pi(z, x, y) \equiv \pi(x, y, z).$$

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι ἡ οἰαδήποτε ἄλλη μετάθεσις τῶν  $x, y, z$  καθιστᾷ τὸ πηλίκον  $\pi(x, y, z)$  ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς ἑαυτό· ὅθεν τὸ  $\pi(x, y, z)$  εἶναι συμμετρικὸν πολυώνυμον.

**Παρατηρήσεις.** Ἐὰν τὰ πολυώνυμα  $f(x, y, z)$  καὶ  $\varphi(x, y, z)$  εἶναι κυκλικῶς συμμετρικά, τότε τὸ πηλίκον  $\pi(x, y, z)$  εἶναι κυκλικῶς συμμετρικὸν πολυώνυμον.

**§ 90. Ἰδιότης III.**—Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον  $f(x, y, z)$  εἶναι συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς  $x, y, z$  καὶ διαιρῆται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου  $\varphi(x, y, z) \neq 0$  (οὐχὶ κατ' ἀνάγκην συμμετρικοῦ), τότε θὰ διαιρῆται διὰ παντὸς πολυωνύμου, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ  $\varphi(x, y, z)$  δι' οἰασδήποτε μεταθέσεως τῶν μεταβλητῶν του.

**Ἀπόδειξις.** Ἐστω  $\pi(x, y, z)$  τὸ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως  $f(x, y, z) : \varphi(x, y, z)$ , τότε θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα :

$$f(x, y, z) \equiv \varphi(x, y, z) \cdot \pi(x, y, z). \quad (1)$$

Ἐὰν εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς ταυτότητος (1) ἐκτελέσωμεν μίαν οἰανδήποτε μετάθεσιν τῶν  $x, y, z$  π.χ. τὴν  $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & z \end{pmatrix}$ , τὸ πρῶτον μέλος δὲν βλάπτεται, διότι τὸ  $f(x, y, z)$  εἶναι συμμετρικὸν πολυώνυμον, ἐνῶ τὸ δεύτερον μέλος γίνεται :  $\varphi(y, x, z) \cdot \pi(y, x, z)$ , καὶ ἐπομένως ἡ (1) γράφεται :

$$f(x, y, z) \equiv \varphi(y, x, z) \cdot \pi(y, x, z). \quad (2)$$

Ἡ (2) δεικνύει ὅτι τὸ  $f(x, y, z)$  διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ  $\varphi(y, x, z)$ .

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι τὸ  $f(x, y, z)$  διαιρεῖται διὰ παντὸς ἄλλου πολυωνύμου, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ  $\varphi(x, y, z)$  δι' οἰασδήποτε ἄλλης μεταθέσεως τῶν  $x, y, z$ .

**Σημείωσις.** Ἐὰν τὸ πολυώνυμον  $f(x, y, z)$  εἶναι κυκλικῶς συμμετρικὸν ἢ ἰδιότης III ἰσχύει ὑπὸ τὴν ἐξῆς ὁμως διατύπωσιν :

Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον  $f(x, y, z)$  εἶναι κυκλικῶς συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς  $x, y, z$  καὶ διαιρῆται διὰ τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου  $\varphi(x, y, z) \neq 0$  (οὐχὶ κατ' ἀνάγκην συμμετρικοῦ), τότε θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τῶν πολυωνύμων  $\varphi(y, z, x)$  καὶ  $\varphi(z, x, y)$ , τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἐκ τοῦ  $\varphi(x, y, z)$  διὰ κυκλικῆς μεταθέσεως τῶν μεταβλητῶν του.

**Πόρισμα.** — Κυκλικῶς συμμετρικὸν πολυώνυμον  $f(x,y,z)$  διαιρετὸν διὰ  $x-y$  θὰ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου  $(x-y)(y-z)(z-x)$ , διαιρετὸν διὰ  $x+y$  θὰ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου  $(x+y)(y+z)(z+x)$ , διαιρετὸν δὲ διὰ  $x+y-z$  θὰ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου :

$$(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y).$$

**§ 91. Ἰδιότης IV.** — Ἐὰν ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον  $f(x,y)$  συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς  $x, y$  εἶναι διαιρετὸν διὰ  $x-y$ , θὰ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ  $(x-y)^2$ .

**Ἀπόδειξις.** Ἐπειδὴ τὸ  $x-y$  διαιρεῖ τὸ  $f(x,y)$  ὑπάρχει πολυώνυμον  $\pi(x,y)$  τοιοῦτον, ὥστε :

$$f(x,y) \equiv (x-y) \cdot \pi(x,y). \quad (1)$$

$$\text{Τότε :} \quad f(y,x) \equiv (y-x) \cdot \pi(y,x). \quad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2), ἐπειδὴ τὸ  $f(x,y)$  ὑπετέθη συμμετρικόν, ἔπεται :

$$(x-y) \cdot \pi(x,y) \equiv (y-x) \cdot \pi(y,x)$$

$$\eta \quad (x-y) [\pi(x,y) + \pi(y,x)] \equiv 0. \quad (3)$$

Ἐπειδὴ  $x-y \neq 0$ , ἐκ τῆς (3) ἔπεται :

$$\pi(x,y) + \pi(y,x) \equiv 0,$$

ἢ ἀντικαθιστῶντες τὸ  $x$  διὰ τοῦ  $y$  ἔχομεν :

$$\pi(y,y) + \pi(y,y) \equiv 0, \quad \text{δηλ.} \quad \pi(y,y) \equiv 0,$$

συνεπῶς τὸ  $\pi(x,y)$  εἶναι διαιρετὸν διὰ  $x-y$ . Κατὰ ταῦτα ὑπάρχει πολυώνυμον  $\varphi(x,y)$  τοιοῦτον, ὥστε :

$$\pi(x,y) \equiv (x-y) \cdot \varphi(x,y).$$

Τότε ἡ (1) γίνεται :

$$f(x,y) \equiv (x-y)^2 \cdot \varphi(x,y),$$

ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται ὅτι τὸ  $f(x,y)$  εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ  $(x-y)^2$ .

**§ 92. Μορφαὶ τῶν κυκλικῶς συμμετρικῶν ἀκεραίων πολυωνύμων.** — Ἡ γενικὴ μορφή τῶν κυκλικῶς συμμετρικῶν ἀκεραίων πολυωνύμων μέχρι τρίτου βαθμοῦ εἶναι :

**α').** Διὰ δύο μεταβλητὰς  $x$  καὶ  $y$ .

- 1). Πρωτοβάθμια :  $\alpha(x+y) + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \alpha \neq 0.$
- 2). Δευτεροβάθμια :  $\alpha(x^2+y^2) + \beta xy + \gamma(x+y) + \delta, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R} \quad \text{καὶ}$   
 $\alpha \neq 0 \quad \eta \quad \beta \neq 0.$
- 3). Τριτοβάθμια :  $\alpha(x^3+y^3) + \beta(x^2y+y^2x) + \gamma xy + \delta(x+y) + \epsilon, \quad \alpha, \beta, \dots, \epsilon \in \mathbf{R}$   
 $\text{καὶ} \quad \alpha \neq 0 \quad \eta \quad \beta \neq 0.$

**β').** Διὰ τρεῖς μεταβλητὰς  $x, y, z$ .

- 1). Πρωτοβάθμια :  $\alpha(x+y+z) + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \alpha \neq 0.$
- 2). Δευτεροβάθμια :  $\alpha(x^2+y^2+z^2) + \beta(xy+yz+zx) + \gamma(x+y+z) + \delta$   
 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R} \quad \text{καὶ} \quad \alpha \neq 0.$

3). Τριτοβάθμια :  $\alpha(x^3 + y^3 + z^3) + \beta(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + \gamma xyz + \delta(x^2 + y^2 + z^2) + \varepsilon(xy + yz + zx) + \theta(x + y + z) + \eta$ ,  $\varepsilon\eta\theta\alpha$   $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \theta, \eta \in \mathbb{R}$  και  $\varepsilon\eta\theta\alpha$   $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ .

Ἄς ἀποδείξωμεν τὸ  $\alpha_2$  τῶν ἀνωτέρω :

Πράγματι· κάθε πολυώνυμον δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς  $x$  καὶ  $y$  εἶναι τῆς μορφῆς :

$$f(x, y) \equiv Ax^2 + By^2 + \Gamma xy + \Delta x + Ey + \Theta \quad (1)$$

ἐνθα  $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta$  (σταθεροί) πραγματικοὶ ἀριθμοί, ὅχι ὅλοι ὑποχρεωτικῶς  $\neq 0$ .

Διὰ νὰ εἶναι τοῦτο κυκλικῶς συμμετρικὸν πολυώνυμον, πρέπει νὰ παραμένῃ ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς ἑαυτὸ, δι' οἵασδήποτε κυκλικῆς μεταθέσεως τῶν  $x, y$  (ἀντιμεταθέσεως).

Δι' ἀντιμεταθέσεως τῶν  $x$  καὶ  $y$  προκύπτει τὸ πολυώνυμον :

$$f(y, x) \equiv Ay^2 + Bx^2 + \Gamma yx + \Delta y + Ex + \Theta, \quad (2)$$

τὸ ὁποῖον ὀφείλει νὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς τὸ πολυώνυμον (1), ἥτοι :

$$Ay^2 + Bx^2 + \Gamma yx + \Delta y + Ex + \Theta \equiv Ax^2 + By^2 + \Gamma xy + \Delta x + Ey + \Theta.$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸν ὁρισμὸν τῆς ἰσότητος (§ 79) δύο πολυωνύμων πολλῶν μεταβλητῶν ἔχομεν :  $Ay^2 \equiv By^2, Bx^2 \equiv Ax^2, \Gamma yx \equiv \Gamma xy, \Delta y \equiv Ey, Ex \equiv \Delta x, \Theta = \Theta$ , ἐξ ὧν :

$$A = B, \quad \Delta = E.$$

Θέτοντες  $A = B = \alpha, \Gamma = \beta, \Delta = E = \gamma$  καὶ  $\Theta = \delta$  εὐρίσκομεν ὅτι τὸ πολυώνυμον (1), πρέπει νὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην τῆς μορφῆς :

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta xy + \gamma(x + y) + \delta.$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὐρίσκονται καὶ αἱ γενικαὶ μορφαὶ τῶν κυκλικῶς συμμετρικῶν πολυωνύμων, τὰς ὁποίας ἀνεγράψαμεν ἀνωτέρω.

**§ 93. Τὰ στοιχειώδη συμμετρικὰ πολυώνυμα.**— Ἄς θεωρήσωμεν  $n$  μεταβλητὰς  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , τότε τὰ ἀπλούστερα συμμετρικὰ πολυώνυμα ὡς πρὸς αὐτὰς εἶναι τὰ κάτωθι :

$$S_1 \equiv x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$S_2 \equiv x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n$$

$$S_3 \equiv x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_1x_2x_n + x_2x_3x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n$$

$$\dots \dots \dots$$

$$S_n \equiv x_1x_2x_3 \dots x_n.$$

Τὰ ἀνωτέρω πολυώνυμα καλοῦνται **στοιχειώδη συμμετρικὰ πολυώνυμα** τῶν μεταβλητῶν  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Οὕτω, π.χ., τὰ στοιχειώδη συμμετρικὰ πολυώνυμα δύο μεταβλητῶν  $x, y$  εἶναι τὰ :

$$S_1 = x + y \quad \text{καὶ} \quad S_2 = xy,$$

τριῶν μεταβλητῶν  $x, x, z$  εἶναι :

$$S_1 = x + y + z, \quad S_2 = xy + yz + zx, \quad S_3 = xyz.$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι : Πᾶν ἀκέραιον συμμετρικὸν πολυώνυμον δύναται νὰ ἐκφρασθῇ πάντοτε κατὰ ἓνα καὶ μόνον τρόπον συναρτήσῃ τῶν στοιχειωδῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων.

Οὕτω, π.χ., τὸ συμμετρικὸν πολυώνυμον :

$$f(x, y) \equiv x^3 - 2x^2y - 2xy^2 + y^3 \quad (1)$$

γράφεται :

$$f(x, y) \equiv (x + y)^3 - 3xy(x + y) - 2xy(x + y) \equiv (x + y)^3 - 5xy(x + y)$$

$$\eta \quad \alpha\nu : \quad S_1 = x + y \quad \text{καί} \quad S_2 = xy,$$

$$\text{τότε :} \quad f(x, y) \equiv S_1^3 - 5 S_1 S_2,$$

ήτοι τὸ συμμετρικὸν πολυώνυμον (1) ἔχει ἐκφρασθῇ συναρτήσῃ τῶν στοιχειωδῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων τῶν μεταβλητῶν του.

**§ 94. Ὁμογενὴ καὶ κυκλικῶς συμμετρικὰ πολυώνυμα.**— Εἶναι φανερόν ὅτι ἐν ἀκέραιον πολυώνυμον δύναται νὰ εἶναι ὁμογενὲς ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς του χωρὶς συγχρόνως νὰ εἶναι καὶ κυκλικῶς συμμετρικὸν ὡς πρὸς αὐτάς καὶ ἀντιστρόφως, δύναται νὰ εἶναι κυκλικῶς συμμετρικὸν χωρὶς νὰ εἶναι καὶ ὁμογενὲς συγχρόνως. Ὑπάρχουν ὅμως περιπτώσεις καθ' ὧς ἐν ἀκέραιον πολυώνυμον ἔχει συγχρόνως ἀμφοτέρας τὰς ιδιότητας τῆς ὁμογενείας καὶ τῆς κυκλικῆς συμμετρίας. Ἐν τοιοῦτον πολυώνυμον δύναται νὰ προκύψῃ ἀπὸ ἐν κυκλικῶς συμμετρικὸν πολυώνυμον, ἐὰν παραλειφθοῦν οἱ ὅροι αὐτοῦ οἱ καταστρέφοντες τὴν ὁμογένειαν. Οὕτως εὐρίσκομεν, π.χ., ὅτι τὰ μόνα ὁμογενὴ καὶ συγχρόνως κυκλικῶς συμμετρικὰ πολυώνυμα τριῶν μεταβλητῶν  $x, y, z$  εἶναι τῶν κάτωθι μορφῶν :

$$1). \text{ Πρώτου βαθμοῦ : } \alpha(x + y + z), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0.$$

$$2). \text{ Δευτέρου βαθμοῦ : } \alpha(x^2 + y^2 + z^2) + \beta(xy + yz + zx), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$3). \text{ Τρίτου βαθμοῦ : } \alpha(x^3 + y^3 + z^3) + \beta(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + \gamma xyz, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Ὅλα τὰ στοιχειώδη συμμετρικὰ πολυώνυμα τῆς § 93 εἶναι συγχρόνως καὶ ὁμογενή.

Προφανῶς ἰσχύει ἡ πρότασις :

Τὸ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως δύο ὁμογενῶν καὶ κυκλικῶς συμμετρικῶν πολυωνύμων εἶναι πολυώνυμον ὁμογενὲς καὶ κυκλικῶς συμμετρικόν (διατί ;).

**§ 95. Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῶν ὁμογενῶν καὶ συμμετρικῶν ἀκεραίων πολυωνύμων.**— Αἱ μέχρι τοῦδε προτάσεις ἐπὶ τῶν ὁμογενῶν καὶ συμμετρικῶν πολυωνύμων χρησιμεύουν πολλὰκις διὰ νὰ μετατρέπωμεν ταχέως εἰς γινόμενα παραγόντων διάφορα ὁμογενὴ καὶ συμμετρικὰ πολυώνυμα, ὅπως γίνεται φανερόν ἀπὸ τὰ κάτωθι παραδείγματα :

**Παράδειγμα 1ον.** Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τὸ πολυώνυμον :

$$f(x, y, z) \equiv (x - y)(x^3 + y^3) + (y - z)(y^3 + z^3) + (z - x)(z^3 + x^3).$$

**Λῆσις :** Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ  $x = y$  εἶναι  $f(y, y, z) \equiv 0$ , ἄρα τὸ πολυώνυμον  $f(x, y, z)$  διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ  $x - y$  καὶ ἐπειδὴ εἶναι κυκλικῶς συμμετρικὸν θὰ διαιρῇται (§ 90, πρότασις) καὶ διὰ τοῦ γινομένου  $(x - y)(y - z)(z - x)$ . Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι πολυώνυμα ὁμογενὴ καὶ κυκλικῶς συμμετρικὰ, διὰ τοῦτο τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ εἶναι ὁμογενὲς καὶ κυκλικῶς συμμετρικὸν πολυώνυμον πρώτου βαθμοῦ, ἀφοῦ τὸ  $f(x, y, z)$  εἶναι τετάρτου βαθμοῦ καὶ ὁ διαιρέτης τρίτου. Θὰ εἶναι δηλαδὴ τοῦτο τῆς μορφῆς :  $\alpha(x + y + z)$ , ἐνθα  $\alpha$  σταθερὸς ἀριθμός.

Κατόπιν τούτων θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα :

$$(x - y)(x^3 + y^3) + (y - z)(y^3 + z^3) + (z - x)(z^3 + x^3) \equiv \alpha(x + y + z)(x - y)(y - z)(z - x) \quad (1)$$

Ἡ (1) εἶναι ἀληθὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν  $x, y, z$ . Δίδομεν εἰς τὰ  $x, y, z$  μίαν τριάδα ἀυθαίρετων

τιμῶν, αἱ ὁποῖαι ὁμῶς δὲν μηδενίζουν τὸν διαιρέτην  $(x-y)(y-z)(z-x)$ . π.χ.  $x = 1, y = 2, z = 0$  καὶ ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν  $\alpha = 1$ .

Ἐπομένως :

$$(x-y)(x^3+y^3) + (y-z)(y^3+z^3) + (z-x)(z^3+x^3) \equiv (x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x).$$

**Π α ρ ἄ δ ε ι γ μ α 2ον.** Νῦν δεიχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον  $f(x,y,z) \equiv (x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$  εἶναι διαιρετὸν διὰ  $(x+y)(y+z)(z+x)$  καὶ νῦν εὐρεθῇ τὸ πηλίκον ἄνευ ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως.

**Λ Ὑ σ ι ς :** Ἐὰν εἰς τὸ  $f(x,y,z)$  τεθῇ ἀντὶ  $x$  τὸ  $-y$  εὐρίσκομεν  $f(-y,y,z) \equiv 0$ . Ἄρα τὸ  $f(x,y,z)$  διαιρεῖται διὰ τοῦ  $x+y$  καὶ ἐπειδὴ εἶναι συμμετρικὸν θὰ διαιρῇται καὶ διὰ τοῦ γινομένου  $(x+y)(y+z)(z+x)$ . Ἐπειδὴ ὁμῶς τὸ  $f(x,y,z)$  εἶναι ὁμογενὲς καὶ κυκλικῶς συμμετρικὸν πέμπτου βαθμοῦ, ὃ δὲ διαιρέτης  $(x+y)(y+z)(z+x)$  εἶναι πολυώνυμον ὁμογενὲς καὶ κυκλικῶς συμμετρικὸν τρίτου βαθμοῦ, ἔπεται ὅτι τὸ πηλίκον θὰ εἶναι πολυώνυμον ὁμογενὲς καὶ κυκλικῶς συμμετρικὸν δευτέρου βαθμοῦ, ἥτοι τῆς μορφῆς :

$$\alpha(x^2 + y^2 + z^2) + \beta(xy + yz + zx), \text{ ἔνθα } \alpha, \beta \text{ πραγματικοὶ ἀριθμοί.}$$

Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα :

$$(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5 \equiv (x+y)(y+z)(z+x) \cdot [\alpha(x^2+y^2+z^2) + \beta(xy+yz+zx)]. \quad (1)$$

Ἡ (1) εἶναι ἀληθὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν  $x, y, z$ .

Θέτοντες εἰς τὴν (1), π.χ.,  $x = y = z = 1$  εὐρίσκομεν :

$$\alpha + \beta = 10. \quad (2)$$

Θέτοντες δὲ ἀκολουθῶς εἰς τὴν (1)  $x = 0, y = 2, z = -1$  εὐρίσκομεν :

$$5\alpha - 2\beta = 15. \quad (3)$$

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) εὐρίσκομεν :  $\alpha = 5, \beta = 5$  καὶ τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι :

$$5(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx).$$

**§ 96. Σύντομος γραφὴ ἀθροισμάτων καὶ γινομένων.**—Ἐνίοτε παρυσιάζονται ἀθροίσματα τῆς μορφῆς :

$$\alpha + \beta + \gamma, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \quad \alpha^2(\beta - \gamma) + \beta^2(\gamma - \alpha) + \gamma^2(\alpha - \beta), \text{ κ.τ.λ.}$$

Τὰ ἀθροίσματα αὐτὰ παριστάνομεν συμβολικῶς ὡς ἑξῆς (ἀντιστοιχῶς) :

$$\Sigma\alpha, \quad \Sigma\alpha\beta, \quad \Sigma\alpha^2(\beta - \gamma).$$

Ὅμοίως χρησιμοποιοῦμεν τὸ σύμβολον  $\Pi$  διὰ τὴν συμβολικὴν γραφὴν γινομένων. Οὕτω, π.χ., τὸ γινόμενον :  $(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)$  παριστάνομεν συμβολικῶς μέ :

$$\Lambda \Sigma \text{ Κ Η } \Sigma \text{ Ε Ι } \Sigma$$

187. Νὰ γραφοῦν πλήρως αἱ ἀκόλουθοι ἐκφράσεις :

$$\Sigma\alpha^2(\beta - \gamma), \quad \Sigma\alpha^2(\beta - \gamma)^3, \quad \Sigma(\alpha\beta - \gamma^2)(\alpha\gamma - \beta^3).$$

188. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\Sigma\alpha^2(\beta + \gamma) + 3\alpha\beta\gamma \equiv (\Sigma\alpha) \cdot (\Sigma\beta\gamma).$$

189. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\Sigma\beta\gamma(\beta + \gamma) + 2\alpha\beta\gamma \equiv \Pi(\beta + \gamma).$$

190. Ὅμοίως ὅτι :  $\alpha\beta\gamma(\Sigma\alpha)^3 - (\Sigma\beta\gamma)^3 = \alpha\beta\gamma\Sigma\alpha^3 - \Sigma\beta^3\gamma^3 = \Pi(\alpha^3 - \beta\gamma)$ .

191. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν :

$$\frac{\Sigma\alpha^2(\beta - \gamma)}{\Sigma(\beta - \gamma)^3}, \quad \frac{\Sigma\alpha^2(\beta - \gamma)^3}{\Pi(\beta - \gamma)}.$$

192. Να αποδειχθῇ ὅτι :

$$(\alpha + \beta + \gamma)^3 \equiv \Sigma \alpha^3 + 3\Sigma \alpha^2(\beta + \gamma) + 6\alpha\beta\gamma.$$

193. Ὁμοίως ὅτι :

$$(\Sigma \alpha)^2 = \Sigma \alpha^2 + 2\Sigma \alpha\beta.$$

194. Να ὑπολογισθοῦν αἱ ἐκφράσεις :

$$\alpha). \Sigma \frac{1}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}, \quad \beta). \Sigma \frac{\beta + \gamma}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}, \quad \gamma). \Sigma \frac{\alpha^3}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}.$$

195. Να δειχθῇ ὅτι τὸ  $\Sigma \frac{4\alpha^2 - 1}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$  δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Ποία ἡ τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος;

196. Ἐὰν  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ , καὶ διάφοροι ἀλλήλων, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ :

$$\left( \Sigma \frac{\alpha}{\beta - \gamma} \right) \cdot \left( \Sigma \frac{\beta - \gamma}{\alpha} \right).$$

197. Να αποδειχθῇ ὅτι :

$$\Sigma(\alpha\beta - \gamma^2)(\alpha\gamma - \beta^2) = (\Sigma\beta\gamma)(\Sigma\beta\gamma - \Sigma\alpha^2).$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΟΜΟΓΕΝΩΝ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

198. Ἐὰν  $f(0, y, z) \equiv 0$  καὶ  $f(-x, y, z) \equiv f(x, y, z)$ , τότε τὸ ἄκεραῖον πολυώνυμον  $f(x, y, z)$  διαιρεῖται διὰ  $x^2$ . Ἐὰν δὲ ἐπὶ πλέον τὸ  $f(x, y, z)$  εἶναι καὶ συμμετρικὸν πολυώνυμον, τότε θὰ διαιρῇται διὰ  $x^2 y^2 z^2$ .

199. Προσδιορίσατε τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς  $\alpha$  καὶ  $\beta$ , ἵνα τὸ πολυώνυμον :

$$f(x, y) \equiv 4x^4 + 12x^3y + \alpha x^2y^2 + \beta xy^3 + y^4$$
 εἶναι τέλειον τετράγωνον ἄκεραίου πολυωνύμου.

200. Ἐὰν τὸ συμμετρικὸν πολυώνυμον  $f(x, y)$  διαιρῇται διὰ  $(x - y)^{2k+1}$ , τότε θὰ διαιρῇται καὶ διὰ  $(x - y)^{2k+2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

201. Να ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις :

$$\alpha) x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y), \quad \beta) x(y - z)^2 + y(z - x)^2 + z(x - y)^2 + 8xyz,$$

$$\gamma) x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) + 2xyz, \quad \delta) x(y^4 - z^4) + y(z^4 - x^4) + z(x^4 - y^4),$$

$$\epsilon) (x - y)(x + y)^2 + (y - z)(y + z)^2 + (z - x)(z + x)^2.$$

202. Ὁμοίως αἱ κάτωθι :

$$\alpha) (x + y + z)^5 - (y + z - x)^5 - (z + x - y)^5 - (x + y - z)^5$$

$$\beta) (y - z)^2(y + z - 2x) + (z - x)^2(z + x - 2y) + (x - y)^2(x + y - 2z).$$

203. Να ἀπλοποιηθοῦν αἱ ρηταὶ παραστάσεις :

$$\alpha) \frac{x^2(y - z)^3 + y^2(z - x)^3 + z^2(x - y)^3}{(x - y)(y - z)(z - x)}, \quad \beta) \frac{x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)}{x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y)}.$$

204. Να δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον  $f(x, y, z) \equiv x^v(y - z) + y^v(z - x) + z^v(x - y)$  εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ  $\varphi(x, y, z) \equiv (x - y)(y - z)(z - x)$  διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $v \geq 2$ . Να εὑρεθῇ τὸ πηλίκον διὰ  $v = 3$  ἄνευ ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως.

205. Να δειχθῇ ὅτι τὸ συμμετρικὸν πολυώνυμον :  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$ , λαμβάνει τὴν μορφήν :  $f \equiv S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3$ , ἐνθα  $S_1, S_2, S_3$  τὰ στοιχειώδη συμμετρικὰ πολυώνυμα ἀντιστοίχως πρώτου, δευτέρου καὶ τρίτου βαθμοῦ τῶν μεταβλητῶν  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

206. Ἴνα τὸ πολυώνυμον  $f(x, y, z) \equiv \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$  εἶναι συμμετρικὸν πολυώνυμον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι  $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$ .

207. Να ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ :

$$\alpha) \Sigma yz(y^2 - z^2), \quad \beta) \Sigma(y + z)^3 - 2\Sigma x^3 + 6xyz,$$

$$\gamma) \Sigma x(y + z)^2 - 4xyz, \quad \delta) (x + y + z)^4 - (y + z)^4 - (z + x)^4 - (x + y)^4 + x^4 + y^4 + z^4.$$

**208.** Νά προσδιορισθῇ πολυώνυμον  $f(x,y,z)$  ὁμογενὲς καὶ κυκλικῶς συμμετρικὸν 2ου βαθμοῦ τοιοῦτον, ὥστε:  $f(0,1,1) = 5$  καὶ  $f(0,0,1) = 6$ .

**209.** Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$3x^2 + 12y^2 + 10z^2 + 26yz + 17zx + 13xy$$

εἶναι γινόμενον δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων 1ου βαθμοῦ ὁμογενείας, νά εὑρεθοῦν τὰ πολυώνυμα αὐτά.

**210.** Νά δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$f(x,y,z) \equiv x^v [z^2(x-y)^2 - y^2(z-x)^2] + y^v [x^2(y-z)^2 - z^2(x-y)^2] + z^v [y^2(z-x)^2 - x^2(y-z)^2],$$

$v \in \mathbb{N}$ , εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου  $P \equiv (x-y)(y-z)(z-x)$ . Ποῖον τὸ πηλίκον;

**211.** Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$f(x,y) \equiv \alpha + \beta(x+y) + \gamma(x^2+y^2) + \delta xy + \epsilon(x^3+y^3) + \lambda(x^2y+xy^2)$$

λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$F(X,Y) \equiv \alpha + \beta X + (\delta-2\gamma)Y + \gamma X^2 + (\lambda-3\epsilon)XY + \epsilon X^3,$$

ὅπου  $X = x + y$  καὶ  $Y = xy$ .

**212.** Νά δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$f(x,y,z) \equiv 12 [(x+y+z)^{2v} - (x+y)^{2v} - (y+z)^{2v} - (z+x)^{2v} + x^{2v} + y^{2v} + z^{2v}], \quad v \in \mathbb{N}, \quad v \geq 2$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ πολυωνύμου:

$$\varphi(x,y,z) \equiv (x+y+z)^4 - (x+y)^4 - (y+z)^4 - (z+x)^4 + x^4 + y^4 + z^4.$$

(Ὑπόδειξις: Παρατηρήσατε ὅτι τὸ  $\varphi(x,y,z)$  καὶ  $f(x,y,z)$  μηδενίζονται διὰ  $x=0, y=0, z=0$  καὶ ὅτι  $x+y+z \mid f(x,y,z)$ ).

### III. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΡΗΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΕΙΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΑΠΛΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

**§ 97. Ὅρισμός.**— Καλοῦμεν **ρητὸν κλάσμα** ὡς πρὸς  $x$  τὸ πηλίκον  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$

δύο ἀκεραίων πολυωνύμων ὡς πρὸς  $x$ , δηλαδὴ κάθε παράστασιν τῆς μορφῆς:

$$k(x) \equiv \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\alpha_\mu x^\mu + \alpha_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}, \quad (1)$$

ὅπου  $\alpha_i, \beta_j, i = 0, 1, \dots, \mu, j = 0, 1, \dots, \nu$ , πραγματικοὶ ἀριθμοί,  $\mu$  καὶ  $\nu$  ἀκέραιοι θετικοί\* καὶ  $\alpha_\mu \neq 0, \beta_\nu \neq 0$ .

Τῇ βοήθειά τῶν ἐκ ταυτότητος ἴσων ἀκεραίων πολυωνύμων δυνάμεθα νά ἀναλύσωμεν τὸ ρητὸν κλάσμα (1) εἰς ἄθροισμα ἄλλων ἀπλῶν κλασμάτων. Πρὸς ἐπίτευξιν ὅμως τῆς ἀναλύσεως ταύτης, πρέπει ὁ ἀριθμητὴς τῆς (1), δηλ. τὸ πολυώνυμον  $f(x)$  νά εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ παρονομαστοῦ. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, δηλ. ἐὰν ὁ βαθμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι μεγαλύτερος ἢ ἴσος τοῦ βαθμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ ( $\mu \geq \nu$ ), ἡ ἀνάλυσις τοῦ κλάσματος  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$  ἀνάγεται εἰς τὴν ἀνάλυσιν κλάσματος μὲ βαθμὸν ἀριθμητοῦ μικρότερον τοῦ βαθμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ.

\* Διὰ  $\mu = \nu = 0$  τὸ  $k(x)$  γίνεταί  $\frac{\alpha_0}{\beta_0}$ , ἥτοι εἶναι μία σταθερά, διὰ  $\nu = 0, \mu \geq 1$  τὸ  $k(x)$  γίνεταί ἐν πολυώνυμον.





**Έφαρμογή.** Νά αναλυθῇ τὸ κλάσμα :  $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$  εἰς ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων.

**Λύσις.** Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν τὴν ἀνάλυσιν :

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x-3}. \quad (1)$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν :

$$x^2 + x + 1 \equiv A_1(x-2)(x-3) + A_2(x-1)(x-3) + A_3(x-1)(x-2). \quad (2)$$

Ἡ ταυτότης (2) διὰ  $x = 1, 2, 3$  δίδει ἀντιστοίχως :  $A_1 = \frac{3}{2}, \quad A_2 = -7, \quad A_3 = \frac{13}{2}$ .

Ὅθεν :

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv \frac{3}{2(x-1)} - \frac{7}{(x-2)} + \frac{13}{2(x-3)}.$$

**Περίπτωσις II.** Ἐὰν τὸ  $\varphi(x)$  ἔχη πραγματικὰς καὶ πολλαπλὰς ρίζας ἢ γενικώτερον ἀπλὰς καὶ πολλαπλὰς πραγματικὰς ρίζας, ἥτοι ἂν εἶναι, π.χ., τῆς μορφῆς :

$\varphi(x) \equiv (x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)^k \dots (x-\rho_\mu)^\lambda$ , μὲ  $1+1+k+\dots+\lambda = \nu$ ,  
τότε τὸ κλάσμα  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$  δύναται νὰ γραφῇ κατὰ ἓνα καὶ μόνον τρόπον ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{A_1}{x-\rho_1} + \frac{A_2}{x-\rho_2} + \frac{B_1}{x-\rho_3} + \frac{B_2}{(x-\rho_3)^2} + \dots + \frac{B_k}{(x-\rho_3)^k} + \dots + \frac{M_1}{x-\rho_\mu} +$$

$$+ \frac{M_2}{(x-\rho_\mu)^2} + \dots + \frac{M_\lambda}{(x-\rho_\mu)^\lambda},$$

ὅπου  $A_1, A_2, B_1, B_2, \dots, B_k, \dots, M_1, M_2, \dots, M_\lambda$  πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καταλλήλως προσδιοριζόμενοι.

Ἐργασθῶμεν διὰ τὸ ἀπλούστερον ἐπὶ παραδειγμάτων.

**Ἐφαρμογή 1η :** Νά αναλυθῇ τὸ κλάσμα  $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{x^2 + 4x + 7}{(x+2)(x+3)^2}$  εἰς ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων.

**Λύσις.** Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν :

$$\frac{x^2 + 4x + 7}{(x+2)(x+3)^2} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B_1}{x+3} + \frac{B_2}{(x+3)^2}. \quad (1)$$

Ἐκ ταύτης, δι' ἀπαλοιφῆς τῶν παρονομαστῶν, λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα :

$$x^2 + 4x + 7 \equiv A(x+3)^2 + B_1(x+2)(x+3) + B_2(x+2). \quad (2)$$

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εἰς τὸ δεῦτερον μέλος τῆς (2) εὐρίσκομεν :

$$x^2 + 4x + 7 \equiv (A+B_1)x^2 + (6A+5B_1+B_2) + (9A+6B_1+2B_2). \quad (3)$$

Ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ  $x$  τῶν μελῶν τῆς (3) λαμβάνομεν τὸ σύστημα :

$$A + B_1 = 1, \quad 6A + 5B_1 + B_2 = 4, \quad 9A + 6B_1 + 2B_2 = 7.$$

Λύνοντας το σύστημα τουτο εύρισκόμεν :

$$A = 3, \quad B_1 = -2, \quad B_2 = -4.$$

\*Οθεν :

$$\frac{x^2 + 4x + 7}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+3)} - \frac{4}{(x+3)^2}.$$

**Ἐφαρμογή 2α :** Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα :  $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{3x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 34x + 1}{(x-2)^3(x+3)^2}$  εἰς ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων.

**Λύσις :** Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἡ ἀνάλυσις δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\frac{3x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 34x + 1}{(x-2)^3 \cdot (x+3)^2} \equiv \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{B_1}{x+3} + \frac{B_2}{(x+3)^2}.$$

Ἐργαζόμενοι ἤδη, ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην ἐφαρμογὴν, εύρισκόμεν :

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -3, \quad B_1 = 2, \quad B_2 = -5,$$

καὶ ἐπομένως ἡ ζητούμενη ἀνάλυσις εἶναι :

$$\frac{3x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 34x + 1}{(x-2)^3(x+3)^2} \equiv \frac{1}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^3} + \frac{2}{x+3} - \frac{5}{(x+3)^2}.$$

**Περίπτωσις III.** Ἐὰν τὸ ρητὸν κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς :

$$\frac{f(x)}{(x^2 + \beta x + \gamma)^v},$$

ὅπου ὁ βαθμὸς τοῦ  $f(x)$  εἶναι μικρότερος τοῦ  $2v$ ,  $v$  ἀκέραιος  $\geq 1$  καὶ  $\beta, \gamma$  πραγματικοὶ ἀριθμοὶ μὲ  $\beta^2 - 4\gamma < 0$ , τότε ὑπάρχουν πραγματικοὶ ἀριθμοὶ  $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_v, B_v$  τοιοῦτοι, ὥστε νὰ ἰσχύη :

$$\frac{f(x)}{(x^2 + \beta x + \gamma)^v} \equiv \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + \beta x + \gamma} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + \beta x + \gamma)^2} + \dots + \frac{A_v x + B_v}{(x^2 + \beta x + \gamma)^v}.$$

Ἵνα καταστήσωμεν σαφέστερον τὸ πρᾶγμα, ὅς ἐργασθῶμεν ἐφ' ἐνὸς παραδείγματος.

**Ἐφαρμογή.** Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα  $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{x^5 + 1}{(x^2 - x + 1)^3}$  εἰς ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων.

**Λύσις :** Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ  $x^2 - x + 1$  ἔχει μιγαδικὰς ρίζας, ἐπὶ πλέον δὲ τὸ κλάσμα  $\frac{x^5 + 1}{(x^2 - x + 1)^3}$  πληροῖ ὅλας τὰς ὑποθέσεις τῆς περιπτώσεως III, ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ἀνάλυσιν :

$$\frac{x^5 + 1}{(x^2 - x + 1)^3} \equiv \frac{A_1 x + B_1}{x^2 - x + 1} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 - x + 1)^2} + \frac{A_3 x + B_3}{(x^2 - x + 1)^3}. \quad (1)$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν :

$$x^5 + 1 \equiv (A_1 x + B_1)(x^2 - x + 1)^2 + (A_2 x + B_2)(x^2 - x + 1) + A_3 x + B_3.$$

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εἰς τὸ δευτερον μέλος καὶ ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τῶν ἰσῶν δυνάμεων τοῦ  $x$  τῶν δύο μελῶν, λαμβάνομεν ἐν πρωτοβάθμιον σύστημα ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ , τὸ ὁποῖον λυόμενον δίδει :

$$A_1 = 1, \quad B_1 = 2, \quad A_2 = 1, \quad B_2 = -3, \quad A_3 = -1, \quad B_3 = 2.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰς τιμὰς αὐτὰς λαμβάνομεν τὴν ἀνάλυσιν :

$$\frac{x^5 + 1}{(x^2 - x + 1)^3} \equiv \frac{x + 2}{x^2 - x + 1} + \frac{x - 3}{(x^2 - x + 1)^2} - \frac{x - 2}{(x^2 - x + 1)^3}.$$

**Περίπτωσης IV.** Ἐὰν τὸ  $\varphi(x)$  ἔχη ρίζας πραγματικὰς καὶ μιγαδικὰς ἀπλᾶς ἢ πολλαπλᾶς, τότε ἰσχύουν συγχρόνως αἱ περιπτώσεις II καὶ III.

**Ἐφαρμογή.** Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα  $\frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$  εἰς ἄθροισμα κλασμάτων.

**Λύσις :** Ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος γράφεται  $(x-1)(x+1)(x^2+1)^2$ , ἥτοι ἔχει ρίζας πραγματικὰς ἀπλᾶς καὶ μιγαδικὰς πολλαπλᾶς (διπλᾶς), ὅθεν, συμφώνως πρὸς τὰς περιπτώσεις II καὶ III, θὰ ἔχωμεν τὴν κάτωθι ἀνάλυσιν :

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)^2} \equiv \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B_1x + \Gamma_1}{x^2+1} + \frac{B_2x + \Gamma_2}{(x^2+1)^2}. \quad (1)$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν μελῶν τῆς (1) ἐπὶ  $(x^2-1)(x^2+1)^2$  προκύπτει :

$$x+2 \equiv A_1(x+1)(x^2+1)^2 + A_2(x-1)(x^2+1)^2 + (B_1x + \Gamma_1)(x^2-1)(x^2+1) + (B_2x + \Gamma_2)(x^2-1),$$

ὅθεν τελικῶς :

$$x+2 \equiv (A_1 + A_2 + B_1)x^5 + (A_1 - A_2 + \Gamma_1)x^4 + (2A_1 + 2A_2 + B_2)x^3 + (2A_1 - 2A_2 + \Gamma_2)x^2 + (A_1 + A_2 - B_1 - B_2)x + (A_1 - A_2 - \Gamma_1 - \Gamma_2).$$

Διὰ συγκρίσεως τῶν συντελεστῶν τῶν δύο ἴσων πολυωνύμων προκύπτει τὸ κάτωθι γραμμικὸν σύστημα :

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + B_1 &= 0 \\ A_1 - A_2 + \Gamma_1 &= 0 \\ 2A_1 + 2A_2 + B_2 &= 0 \\ 2A_1 - 2A_2 + \Gamma_2 &= 0 \\ A_1 + A_2 - B_1 - B_2 &= 1 \\ A_1 - A_2 - \Gamma_1 - \Gamma_2 &= 2. \end{aligned}$$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν :

$$A_1 = \frac{3}{8}, \quad A_2 = -\frac{1}{8}, \quad B_1 = -\frac{1}{4}, \quad B_2 = -\frac{1}{2}, \quad \Gamma_1 = -\frac{1}{2}, \quad \Gamma_2 = -1$$

καὶ ἐπομένως ἡ ζητουμένη ἀνάλυσις εἶναι :

$$\frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2+1} - \frac{\frac{1}{2}x + 1}{(x^2+1)^2}.$$

## ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

**1η.** Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα  $\frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$  εἰς ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων.

**Λύσις :** Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου  $x^2 + x + 1$  εἶναι ἀρνητική. Ἄρα τὸ κλάσμα δέχεται τὴν ἀνάλυσιν :

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + \Gamma}{x^2+x+1}. \quad (1)$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν :

$$2x+1 \equiv A(x^2+x+1) + (Bx + \Gamma)(x+1) \quad (2)$$

$$\text{ἢ} \quad 2x+1 \equiv (A+B)x^2 + (A+B+\Gamma)x + (A+\Gamma). \quad (3)$$

συνεπῶς :

$$A+B=0, \quad A+B+\Gamma=2, \quad A+\Gamma=1.$$

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος τούτου εὐρίσκομεν :  $A = -1, \quad B = 1, \quad \Gamma = 2.$

Ὅθεν :

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)} \equiv -\frac{1}{x+1} + \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

**Σημ. Ταχεία εύρεσις τῶν A, B, Γ.**

Ἐκ τῆς ταυτότητος (2) διὰ  $x = -1 \Rightarrow A = -1$ .

» » » » »  $x = 0 \Rightarrow A + \Gamma = 1$ , ἐξ ἧς:  $\Gamma = 2$ .

Ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τοῦ  $x^2$  εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς (3) εὐρίσκομεν :

$$0 = A + B \Rightarrow B = 1.$$

**2α. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα  $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)}$  εἰς ἄθροισμα κλασμάτων ἐχόντων ὡς παρονομαστὰς τοὺς παράγοντας τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δοθέντος.**

**Λύσις :** Ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος γράφεται :

$$(x^2 + x)(x^2 + 1) \equiv x(x+1)(x^2 + 1)$$

καὶ συμφώνως πρὸς τὰ προηγούμενα θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{1}{(x^2 + x)(x^2 + 1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{\Gamma x + \Delta}{x^2 + 1}. \quad (1)$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις εἰς τὸ β' μέλος :

$$1 \equiv (A + B + \Gamma)x^3 + (A + \Gamma + \Delta)x^2 + (A + B + \Delta)x + A. \quad (2)$$

Ἐκ τῆς (2) προκύπτει τὸ κάτωθι σύστημα :

$$A + B + \Gamma = 0, \quad A + \Gamma + \Delta = 0, \quad A + B + \Delta = 0, \quad A = 1.$$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν :  $A = 1, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad \Gamma = -\frac{1}{2}, \quad \Delta = -\frac{1}{2}.$

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὴν (1) τὰς τιμὰς αὐτὰς λαμβάνομεν τὴν ἀνάλυσιν :

$$\frac{1}{(x^2 + x)(x^2 + 1)} \equiv \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{x+1}{2(x^2 + 1)}.$$

**3η. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα  $\frac{x^3-2x-13}{x^2-2x-3}$  εἰς ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων.**

**Λύσις :** Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμητὴς εἶναι πολὺνυμνον μεγαλυτέρου βαθμοῦ ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ παρονομαστοῦ. Διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ τρέποντες τὸν παρονομαστὴν εἰς γινόμενον ἔχομεν, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (2) τῆς § 97.

$$\frac{x^3 - 2x - 13}{x^2 - 2x - 3} \equiv (x + 2) + \frac{5x - 7}{(x - 3)(x + 1)}.$$

Ἐργαζόμενοι ἤδη εἰς τὸ κλάσμα  $\frac{5x-7}{(x-3)(x+1)}$ , ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν I, εὐρίσκομεν ὅτι τοῦτο ἰσοῦται μέ :

$$\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+1}$$

\* Ἀρα ἔχομεν :

$$\frac{x^3 - 2x - 13}{x^2 - 2x - 3} \equiv (x + 2) + \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+1}.$$

**4η. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα  $\frac{1}{(2v-1)(2v+1)}$  εἰς ἄθροισμα δύο κλασμάτων καὶ τῇ βοήθειᾳ τῆς ἀναλύσεως ταύτης νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα :**

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2v-1)(2v+1)}.$$

**Λύσις :** Ἐχομεν κατὰ τὰ προηγούμενα :

$$\frac{1}{(2v-1)(2v+1)} \equiv \frac{A}{2v-1} + \frac{B}{2v+1}.$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν :

$$1 \equiv A(2v+1) + B(2v-1)$$

$$\eta \quad 1 \equiv 2(A+B)v + (A-B)$$

Όπότε :

$$A + B = 0$$

$$A - B = 1.$$

Λύνοντας το σύστημα ταῦτο εὐρίσκομεν :  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = -\frac{1}{2}$ .

Ὁθεν :

$$\frac{1}{(2v-1)(2v+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2v-1} - \frac{1}{2v+1} \right). \quad (1)$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν :

$$\text{Διὰ } v = 1 : \quad \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} \right)$$

$$\text{Διὰ } v = 2 : \quad \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$$

$$\text{Διὰ } v = 3 : \quad \frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\text{Διὰ } v = v : \quad \frac{1}{(2v-1)(2v+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2v-1} - \frac{1}{2v+1} \right).$$

Προσθέτοντες τὰς ὡς ἄνω ἰσότητας κατὰ μέλη, εὐρίσκομεν :

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2v-1)(2v+1)} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2v+1} \right).$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**213.** Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων τὰ κάτωθι ρητὰ κλάσματα :

$$\begin{aligned} 1) & \frac{1}{(x^2-4)(x+1)}, \quad 2) \frac{3x-1}{x^2-5x+6}, \quad 3) \frac{8x^2-19x+2}{(x+2)(x-1)(x-4)}, \quad 4) \frac{1}{(1+x^2)^2 \cdot (1+x)} \\ 5) & \frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}, \quad 6) \frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}, \quad 7) \frac{3x^2+7x+2}{(x+1)(x^2+2x+5)}, \quad 8) \frac{10x^2+32}{x^3 \cdot (x-4)^2}. \end{aligned}$$

**214.** Ὁμοίως :

$$\begin{aligned} 1) & \frac{3x+4}{x^2-9x+14}, \quad 2) \frac{3x^2-5x-6}{x^3-6x^2+11x-6}, \quad 3) \frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2}, \quad 4) \frac{x^2}{(x^2-2x+5)^2}, \\ 5) & \frac{2x^3+7x^2-2x-2}{2x^2+x-6}, \quad 6) \frac{5x^2-4}{x^4-5x^2+4}, \quad 7) \frac{x^3}{x^3-3x+2}, \quad 8) \frac{7x-10}{(3x-4)(x-1)^2}. \end{aligned}$$

**215.** Νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα κλασμάτων τὸ κλάσμα :  $\frac{3x^2+x+2}{x^3-1}$ .

**216.** Ὁμοίως τὸ :  $\frac{x+1}{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}$ .

**217.** Τὸ κλάσμα  $\frac{1}{(v+1)(v+2)}$  νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο κλασμάτων καὶ τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀναλύσεως ταύτης νὰ εὐρεθῇ τὸ ἄθροισμα :

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(v+1)(v+2)}.$$

**218.** Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ κλάσμα  $\frac{1}{v(v+2)}$  καὶ τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀναλύσεως ταύτης νὰ εὐρεθῇ τὸ ἄθροισμα :  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{v(v+2)}$ .

219. Δείξτε ότι:  $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3v-1)(3v+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{3v+2}$ .

220. Νά αναλυθῇ τὸ κλάσμα  $\frac{1}{v(v+1)(v+2)}$  εἰς ἄθροισμα δύο κλασμάτων μὲ παρονομαστές ἀντιστοίχως  $v(v+1)$  καὶ  $(v+1)(v+2)$  καὶ τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀναλύσεως ταύτης νὰ εὐρεθῇ τὸ ἄθροισμα:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{v(v+1)(v+2)}.$$

221. Ἀναλύσατε τὸ κλάσμα  $\frac{1}{(v+1)(v+2) \dots (v+k)}$  εἰς ἄθροισμα δύο κλασμάτων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν νὰ ἔχῃ παρονομαστήν τὸ  $(v+1)(v+2) \dots (v+k-1)$  καὶ τὸ ἕτερον τὸ  $(v+2)(v+3) \dots (v+k-1)(v+k)$ .

#### IV. ΔΙΩΝΥΜΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

**§ 99. Ὁρισμός.**— Καλοῦμεν διώνυμον ἐξίσωσιν μὲ ἓναν ἄγνωστον, κάθε ἀκεραίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς:

$$\boxed{Ax^k + Bx^\mu = 0} \quad (1)$$

ὅπου  $x$  ὁ ἄγνωστος,  $A$  καὶ  $B$  πραγματικοὶ ἀριθμοὶ (συντελεσταί), μὴ ἐξαρτώμενοι ἐκ τοῦ  $x$ , μὲ  $A \cdot B \neq 0$  καὶ  $k, \mu$  ἀκέραιοι μὴ ἀρνητικοί, διάφοροι ἀλλήλων καὶ οὐχὶ ἀμφότεροι μηδέν.

**§ 100. Ἐπίλυσις τῆς διωνύμου ἐξίσωσεως (1).**— Θὰ δείξωμεν εὐθὺς ἀμέσως ὅτι: *πᾶσα διώνυμος ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (1) ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῆς διωνύμου ἐξίσωσεως  $y^n \pm 1 = 0$ , ὅπου  $n$  φυσικὸς ἀριθμὸς.*

Πράγματι: ἔὰν ὑποθετῇ, ἄνευ βλάβης τῆς γενικότητος, ὅτι  $k > \mu \geq 0$  ἡ (1) γίνεται:

$$x^\mu (Ax^{k-\mu} + B) = 0$$

καὶ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων:

$$x^\mu = 0 \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad Ax^{k-\mu} + B = 0. \quad (3)$$

\* Ἡ (2) ἐχει ρίζαν  $x = 0$  εἰς βαθμὸν πολλαπλότητος  $\mu$ .

Ἡ (3) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν:  $x^{k-\mu} = -\frac{B}{A}$ , ἡ ὁποία, ἔὰν τεθῇ  $v = k - \mu$ ,

$v \in \mathbb{N}$ , καὶ  $-\frac{B}{A} = \alpha$ , γίνεται:

$$\boxed{x^v = \alpha} \quad (4)$$

Τὸ πλῆθος τῶν ριζῶν τῆς (4), πραγματικῶν καὶ μιγαδικῶν, εἶναι  $v$ , αἱ νιοσται ρίζαι τοῦ  $\alpha$ , καὶ εὐρίσκονται, ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς μίαν τῶν ἐπομένων παραγράφων, διὰ τοῦ τύπου τοῦ De Moivre.

Ἐν τούτοις ὁμως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς ρίζας τῆς (4) καὶ ὥς ἐξῆς:

\* Ἐστω  $\gamma$  ἡ πρωτεύουσα νιοστή ρίζα τοῦ  $|\alpha|$ , ἥτοι  $\gamma = \sqrt[v]{|\alpha|}$ , ἐξ οὗ:  $\gamma^v = |\alpha|$ .

Τότε : εάν  $\alpha > 0 \Rightarrow |\alpha| = \alpha$  και ή (4) γράφεται :  $x^v = \gamma^v$  ή  $\left(\frac{x}{\gamma}\right)^v = 1$ , ενώ

εάν  $\alpha < 0 \Rightarrow |\alpha| = -\alpha$  και ή (4) γράφεται :  $x^v = -\gamma^v$  ή  $\left(\frac{x}{\gamma}\right)^v = -1$ .

Θέτομεν  $\frac{x}{\gamma} = y$  και αϊ δύο τελευταϊαι εξισώσεις γράφονται αντίστοιχως :

$$y^v - 1 = 0 \quad (5) \quad \text{και} \quad y^v + 1 = 0 \quad (6)$$

Ἐπομένως ή επίλυσις τῆς διωνύμου εξισώσεως τῆς μορφῆς (1) ἀνάγεται εἰς τὴν επίλυσιν τῆς διωνύμου εξισώσεως τῆς μορφῆς (5) ή (6).

Πρὸς επίλυσιν τούτων διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

**Περίπτωσις I :** Ἐάν  $v = 2\rho + 1$ , δηλ.  $v$  περιττός, τότε :

Ἡ (5) γίνεται :  $(y-1)(y^{2\rho} + y^{2\rho-1} + \dots + y + 1) = 0$  και εἶναι ἰσοδύναμος με τὸ ζεύγος τῶν εξισώσεων :  $y-1=0$  και  $y^{2\rho} + y^{2\rho-1} + \dots + y + 1 = 0$  ἐκ τῶν ὁποίων ή τελευταία εἶναι ἀντίστροφος.

Ὁμοίως ή (6) γίνεται :  $(y+1)(y^{2\rho} - y^{2\rho-1} + \dots - y + 1) = 0$  και εἶναι ἰσοδύναμος με τὸ ζεύγος τῶν εξισώσεων :  $y+1=0$  και  $y^{2\rho} - y^{2\rho-1} + \dots - y + 1 = 0$ .

**Περίπτωσις II :** Ἐάν  $v = 2\rho$ , δηλ.  $v$  ἄρτιος, τότε :

Ἡ  $y^v + 1 = 0$  γίνεται :  $y^{2\rho} + 1 = 0$  ή  $y^\rho + \frac{1}{y^\rho} = 0$ , ή ὁποία διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ  $y + \frac{1}{y} = z$  ἀνάγεται εἰς ἐξίσωσιν  $\rho$  βαθμοῦ.

Τέλος διὰ  $v = 2\rho$  ή (5) γίνεται :  $y^{2\rho} - 1 = 0$  ή  $(y^\rho - 1)(y^\rho + 1) = 0$  και εἶναι ἰσοδύναμος με τὸ ζεύγος τῶν εξισώσεων :  $y^\rho - 1 = 0$  και  $y^\rho + 1 = 0$ , ἑκάτερα τῶν ὁποίων ἀνάγεται εἰς μίαν τῶν προηγουμένων μορφῶν.

## § 101. Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῶν διωνύμων ἐξισώσεων :

**Παράδειγμα 1ον :** Νὰ ἐπιλυθῇ ή ἐξίσωσις :

$$2x^5 + 3x^2 = 0.$$

**Λύσις :** Αὕτη γράφεται  $x^2(2x^3 + 3) = 0$  και εἶναι ἰσοδύναμος με τὸ ζεύγος τῶν εξισώσεων  $x^2 = 0$  και  $2x^3 + 3 = 0$ .

Ἡ πρώτη ἔχει τὴν διπλὴν ρίζαν  $x_1 = x_2 = 0$ .

Ἡ δευτέρα εἶναι ἰσοδύναμος με τὴν :  $x^3 + \frac{3}{2} = 0$ . Θέτομεν  $x = y \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$  και ή τελευταία γίνεται :  $\frac{3}{2}y^3 + \frac{3}{2} = 0$  ή  $y^3 + 1 = 0$  ή  $(y+1)(y^2 - y + 1) = 0$ .

Ἐκ ταύτης ἔχομεν  $y = -1$  και  $y^2 - y + 1 = 0$ , ή ὁποία λυομένη δίδει :  $y = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ .

Θέτοντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν  $x = y \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ , ἔχομεν ὡς ρίζας τῆς δοθείσης :

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}, \quad x_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}}, \quad x_5 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$



**Παράδειγμα 2ον:** Νά επιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$x^4 + 81 = 0. \quad (1)$$

**Λύσις:** Αὕτη γράφεται:  $x^4 + 3^4 = 0$  ἢ  $\left(\frac{x}{3}\right)^4 + 1 = 0. \quad (2)$

Θέτομεν:  $\frac{x}{3} = y$  (3) καὶ ἡ (2) γίνεται  $y^4 + 1 = 0.$

Αὕτη γράφεται:  $(y^2 + 1)^2 - 2y^2 = 0$  ἢ  $(y^2 + \sqrt{2}y + 1)(y^2 - \sqrt{2}y + 1) = 0$  καὶ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεύγος τῶν ἐξισώσεων :

$$y^2 + \sqrt{2}y + 1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad y^2 - \sqrt{2}y + 1 = 0.$$

Αὗται λυόμεναι δίδουν ἀντιστοίχως:  $y = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$  καὶ  $y = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}.$

Θέτοντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν (3) ἔχομεν ὡς ρίζας τῆς δοθείσης :

$$x_1 = \frac{3(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{2}, \quad x_2 = \frac{3(-\sqrt{2} - i\sqrt{2})}{2}, \quad x_3 = \frac{3(\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{2}, \quad x_4 = \frac{3(\sqrt{2} - i\sqrt{2})}{2}.$$

**Παράδειγμα 3ον:** Νά εὑρεθοῦν αἱ κυβικαὶ ρίζαι τῆς μονάδος.

**Λύσις:** Ἐστω  $x$  ἡ κυβικὴ ρίζα τῆς μονάδος. Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$x^3 = 1 \quad \text{ἢ} \quad x^3 - 1 = 0 \quad \text{ἢ} \quad (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Ἐκ ταύτης ἔχομεν  $x = 1$  καὶ  $x^2 + x + 1 = 0$ , ἡ ὁποία λυομένη δίδει :

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Ἐπομένως αἱ ζητούμεναι ρίζαι εἶναι:}$$

$$\rho_1 = 1, \quad \rho_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \rho_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Εὐκόλως ἀποδεικνύομεν ὅτι :

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 0, \quad \rho_2 \rho_3 = 1, \quad \rho_2 = \rho_3^*, \quad \rho_3 = \rho_2^*.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**222.** Νά επιλυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

$$\begin{array}{llll} 1) \quad x^3 - 5 = 0, & 2) \quad x^4 + 2 = 0, & 3) \quad x^4 + 16 = 0, & 4) \quad 3x^4 + 7 = 0, \\ 5) \quad 8x^3 - 27 = 0, & 6) \quad 8x^3 + 125 = 0, & 7) \quad 32x^5 + 1 = 0, & 8) \quad x^{12} - 1 = 0. \end{array}$$

**223.** Ἐὰν  $\rho_1$  καὶ  $\rho_2$  εἶναι αἱ μιγαδικαὶ κυβικαὶ ρίζαι τῆς μονάδος, δείξατε ὅτι :

$$\begin{array}{ll} 1) \quad (1 + \rho_2)^4 = \rho_1, & 2) \quad (1 + \rho_1 - \rho_2)^3 - (1 - \rho_1 + \rho_2)^3 = 0, \\ 3) \quad (1 + 2\rho_1 + 3\rho_2)(1 + 3\rho_1 + 2\rho_2) = 3, & 4) \quad (1 - \rho_1 + \rho_2)(1 + \rho_1 - \rho_2) = 4. \end{array}$$

**224.** Νά εὑρεθοῦν αἱ κυβικαὶ ρίζαι τῆς ἀρνητικῆς μονάδος.

**225.** Νά εὑρεθοῦν αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν ἀριθμῶν  $i$  καὶ  $-i$ .

## Τριγωνομετρικὴ μορφή μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ.

### Τύπος τοῦ De Moivre.

**§ 102.** Ὅρισμα μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ  $z \neq 0$ . — Ἐστω ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς  $z = x + iy$  μὲ  $z \neq 0$  καὶ  $x, y \in \mathbb{R}$ : ἔχουν τότε ἔννοιαν ἐν  $\mathbb{R}$  αἱ παραστάσεις :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{καὶ ὁ } z \text{ δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν:}$$

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (1)$$

Έπειδή :

$$-1 \leq \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1$$

καὶ

$$\left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 = 1,$$

τὰ  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  δύνανται νὰ εἶναι ἀντιστοίχως τὸ συνημίτονον καὶ τὸ ἡμίτονον καταλλήλου γωνίας  $\varphi$ , ἥτοι :

$$\text{συν}\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \eta\mu\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (2)$$

Ὡς γνωστόν, ὑπάρχουν ἄπειροι τὸ πλῆθος γωνίαι, αἱ ὁποῖαι πληροῦν τὰς σχέσεις (2), τὰ δὲ μέτρα αὐτῶν εἰς ἀκτίνια διαφέρουν κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ  $2\pi$ . Ἐκ τούτων ὑπάρχει ἁ κ ρ ι β ὤ ς μία, ἡ ὁποία πληροῖ τὰς (2) καὶ ἐπὶ πλέον τὴν συνθήκην :  $-\pi < \varphi \leq \pi$ . Ταύτην καλοῦμεν : τὸ **βασικόν** (πρωτεῦον) **ὄρισμα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ**  $z = x + iy$  ( $\neq 0$ ) καὶ **συμβολίζομεν** μὲ : **Argz** (**Argument** = ὄρισμα).

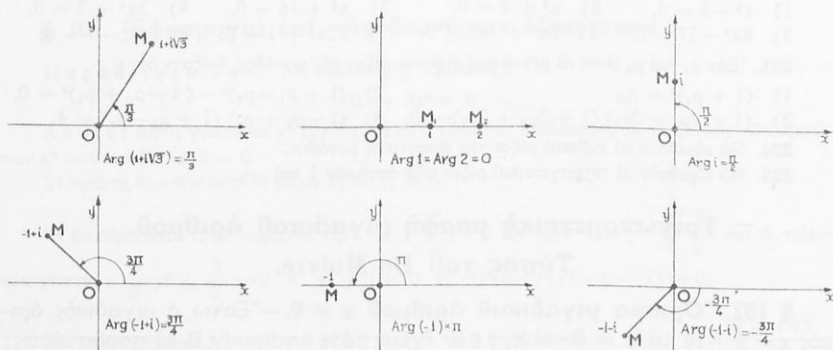
**Π α ρ ἄ δ ε ι γ μ α :** Διὰ τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν  $z = 1 + i\sqrt{3}$  ἔχομεν τὸ σύστημα :

$$\text{συν}\varphi = \frac{1}{2}, \quad \eta\mu\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\pi < \varphi \leq \pi,$$

ἐξ οὗ :

$$\varphi = \frac{\pi}{3}, \quad \text{ὥστε : } \text{Arg}(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

Γεωμετρικῶς τὸ ὄρισμα μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ  $z$  παριστᾷ τὴν κυρτὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ὁ θετικὸς ἡμίξων  $Ox$  μετὰ τῆς διανυσματικῆς ἀκτίνος  $OM$ , τῆς παριστώσης τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν  $z$ , ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὰς περιπτώσεις τῶν κάτωθι σχημάτων (βλ. Σχ. 6).



Σχ. 6

**§ 103. Τριγωνομετρικὴ μορφή μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ.**— Ἐστω εἰς μιγαδικὸς ἀριθμὸς  $z = x + iy \neq 0$ . Ὅρίζεται τότε ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἢ μέτρον αὐτοῦ,

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$  και τὸ ὄρισμά του  $\text{Arg} z = \varphi$  καὶ ἰσχύουν, ὡς εἶδομεν ἄνω-  
τέρω :  $\text{συν}\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\rho}, \quad \eta\mu\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\rho}. \quad (1)$

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν :

$$x = \rho \text{συν}\varphi, \quad y = \rho \eta\mu\varphi$$

καὶ ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς  $z = x + iy$  λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\boxed{x + iy = \rho (\text{συν}\varphi + i \eta\mu\varphi)} \quad (2)$$

Ἡ μορφή εἰς τὸ 2ον μέλος τῆς (2) καλεῖται : **Τριγωνομετρικὴ μορφή τοῦ μι-  
γαδικοῦ ἀριθμοῦ**  $z = x + iy$ .

Οὕτως εἶναι, π.χ., (βλ. καὶ σχῆμα 6, § 102) :

$$\begin{aligned} 1 &= 1 (\text{συν} 0 + i \eta\mu 0), & -1 &= 1 (\text{συν}\pi + i \eta\mu\pi), \\ i &= 1 \left( \text{συν} \frac{\pi}{2} + i \eta\mu \frac{\pi}{2} \right), & -i &= 1 \left( \text{συν} \left( -\frac{\pi}{2} \right) + i \eta\mu \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right), \\ 1 + i\sqrt{3} &= 2 \left( \text{συν} \frac{\pi}{3} + i \eta\mu \frac{\pi}{3} \right), & -1 - i &= \sqrt{2} \left( \text{συν} \left( -\frac{3\pi}{4} \right) + i \eta\mu \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \right), \\ -1 + i &= \sqrt{2} \left( \text{συν} \frac{3\pi}{4} + i \eta\mu \frac{3\pi}{4} \right), & -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} &= 1 \left( \text{συν} \frac{2\pi}{3} + i \eta\mu \frac{2\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Κάθε λοιπὸν μιγαδικὸς ἀριθμὸς  $z = x + iy \neq 0$  ἔχει ἀκριβῶς μίαν τριγωνομε-  
τρικὴν παράστασιν  $z = \rho (\text{συν}\varphi + i \eta\mu\varphi)$ , ὅπου  $\rho$  εἶναι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ  $z$  (ἢ  
ἄλλως τὸ μέτρον τοῦ  $z$ ) καὶ  $\varphi$  τὸ βασικὸν ὄρισμά του ( $-\pi < \varphi \leq \pi$ ).

Ἀντιστρόφως : Διὰ κάθε διατεταγμένον ζεύγος  $(\rho, \varphi)$  μὲ  $\rho > 0$  καὶ  
 $-\pi < \varphi \leq \pi$  ὑπάρχει ἀκριβῶς εἷς μιγαδικὸς ἀριθμὸς  $z = x + iy \neq 0$  μὲ τριγωνο-  
μετρικὴν μορφήν :  $\rho (\text{συν}\varphi + i \eta\mu\varphi)$ · οὗτος εἶναι ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς μὲ  $x = \rho \text{συν}\varphi$   
καὶ  $y = \rho \eta\mu\varphi$ .

Κατόπιν τούτων ἔχομεν τὴν λογικὴν ἰσοδυναμίαν :

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \text{συν}\varphi \\ y &= \rho \eta\mu\varphi \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{συν}\varphi &= \frac{x}{\rho}, \quad \eta\mu\varphi = \frac{y}{\rho} \end{aligned} \right.$$

**Παρατήρησις :** Ἐπειδὴ  $\text{συν}\varphi = \text{συν}(2k\pi + \varphi)$  καὶ  $\eta\mu\varphi = \eta\mu(2k\pi + \varphi)$ , ὅπου  
 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , ἡ παράστασις (2) γράφεται ὑπὸ τὴν γενικωτέραν μορφήν :

$$\boxed{z = x + iy = \rho [\text{συν}(\varphi + 2k\pi) + i \eta\mu(\varphi + 2k\pi)]} \quad (3)$$

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται τώρα τὸ κάτωθι :

**§ 104. Θεώρημα.**— Δύο μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ γεγραμμένοι ὑπὸ τριγωνομετρι-  
κὴν μορφήν εἶναι ἴσοι τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἔχουν ἴσα μέτρα καὶ ὁρίσματα διαφέ-  
ροντα κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον περιφερείας.

**Ἀπόδειξις.** Πράγματι, ἐὰν ἔχωμεν :

$$\theta\acute{\alpha} \text{ εἶναι : } \rho_1(\sin\varphi_1 + i \eta\mu\varphi_1) = \rho_2(\sin\varphi_2 + i \eta\mu\varphi_2),$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 \sin\varphi_1 &= \rho_2 \sin\varphi_2 \implies \rho_1^2 \sin^2\varphi_1 = \rho_2^2 \sin^2\varphi_2 \\ \rho_1 \eta\mu\varphi_1 &= \rho_2 \eta\mu\varphi_2 \implies \rho_1^2 \eta\mu^2\varphi_1 = \rho_2^2 \eta\mu^2\varphi_2 \end{aligned} \right\} \implies \rho_1^2(\sin^2\varphi_1 + \eta\mu^2\varphi_1) = \rho_2^2(\sin^2\varphi_2 + \eta\mu^2\varphi_2),$$

ἐξ οὗ :  $\rho_1^2 = \rho_2^2$  καὶ ἐπειδὴ  $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0$ , ἔπεται :  $\rho_1 = \rho_2$ ,  
ὁπότε  $\theta\acute{\alpha}$  εἶναι :

$$\left. \begin{aligned} \sin\varphi_1 &= \sin\varphi_2 \\ \eta\mu\varphi_1 &= \eta\mu\varphi_2 \end{aligned} \right\} \implies \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \text{ ἐξ οὗ : } \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi.$$

**Ἀντιστρόφως.** Ἐὰν  $\rho_1 = \rho_2$  καὶ  $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$ ,  $\theta\acute{\alpha}$  ἔχωμεν :

$$\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2, \eta\mu\varphi_1 = \eta\mu\varphi_2$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν :

$$\rho_1(\sin\varphi_1 + i \eta\mu\varphi_1) = \rho_2(\sin\varphi_2 + i \eta\mu\varphi_2).$$

**Χρήσις τῆς τριγωνομετρικῆς μορφῆς μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἰς τὰς πράξεις.**— Ἡ τριγωνομετρικὴ μορφή τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν ἀπλούστερον τὸν πολλαπλασιασμόν, τὴν διαίρεσιν καὶ τὴν ἐξαγωγήν τῶν ριζῶν τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Ἀκριβέστερον ἰσχύουσιν τὰ κάτωθι θεωρήματα :

**§ 105. Θεώρημα.**— Τὸ γινόμενον δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι εἰς μιγαδικὸς ἀριθμὸς ἔχων μέτρον μὲν τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν μιγάδων, ὄρισμα δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρισμάτων αὐτῶν. Ἦτοι, ἐὰν :

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \rho_1(\sin\varphi_1 + i \eta\mu\varphi_1) \\ z_2 &= \rho_2(\sin\varphi_2 + i \eta\mu\varphi_2) \end{aligned} \right\} \implies z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + i \eta\mu(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

**Ἀπόδειξις :** Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς δοθείσας  $\theta\acute{\alpha}$  ἔχωμεν :  
 $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\sin\varphi_1 + i \eta\mu\varphi_1) (\sin\varphi_2 + i \eta\mu\varphi_2) = \rho_1 \rho_2 [(\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 - \eta\mu\varphi_1 \eta\mu\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \eta\mu\varphi_2 + \eta\mu\varphi_1 \sin\varphi_2)] = \rho_1 \rho_2 [\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + i \eta\mu(\varphi_1 + \varphi_2)].$

**§ 106. Πόρισμα.**— Ἐὰν  $z_1 = \rho_1(\sin\varphi_1 + i \eta\mu\varphi_1), z_2 = \rho_2(\sin\varphi_2 + i \eta\mu\varphi_2) \dots$

$$\dots z_n = \rho_n (\sin\varphi_n + i \eta\mu\varphi_n),$$

τότε :

$$z_1 z_2 \dots z_n = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n [\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \eta\mu(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)] \quad (1)$$

Ἡ ἀπόδειξις νὰ δοθῇ διὰ τῆς μεθόδου τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

**Ἐφαρμογή.** Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον :

$$[2(\sin 30^\circ + i \eta\mu 30^\circ)] \cdot [\sqrt{2}(\sin 40^\circ + i \eta\mu 40^\circ)] \cdot [\sqrt{3}(\sin 50^\circ + i \eta\mu 50^\circ)].$$

**Λύσις :** Ἐχομεν διαδοχικῶς :

$$\begin{aligned} & [2(\sin 30^\circ + i \eta\mu 30^\circ)] \cdot [\sqrt{2}(\sin 40^\circ + i \eta\mu 40^\circ)] \cdot [\sqrt{3}(\sin 50^\circ + i \eta\mu 50^\circ)] = \\ & = 2 \sqrt{2} \sqrt{3} [\sin(30^\circ + 40^\circ + 50^\circ) + i \eta\mu(30^\circ + 40^\circ + 50^\circ)] = \\ & = 2 \sqrt{6} (\sin 120^\circ + i \eta\mu 120^\circ) = 2 \sqrt{6} \left(-\frac{1}{2} + \frac{i \sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{6} + 3i \sqrt{2}. \end{aligned}$$

**§ 107. Θεώρημα.**— Ὁ ἀντίστροφος ἑνὸς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ  $z (\neq 0)$  ἔχει μέτρον μὲν τὸ ἀντίστροφον τοῦ μέτρου του, ὄρισμα δὲ τὸ ἀντίθετον τοῦ ὁρίσματος του.

Ἄ π ό δ ε ι ξ ι ς. Πράγματι, ἂν  $z = \rho (\sigma \nu \varphi + i \eta \mu \varphi)$  ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$\begin{aligned} [\rho (\sigma \nu \varphi + i \eta \mu \varphi)]^{-1} &= \frac{1}{\rho (\sigma \nu \varphi + i \eta \mu \varphi)} = \frac{1 (\sigma \nu \varphi - i \eta \mu \varphi)}{\rho (\sigma \nu \varphi + i \eta \mu \varphi) (\sigma \nu \varphi - i \eta \mu \varphi)} = \\ &= \frac{\sigma \nu \varphi - i \eta \mu \varphi}{\rho (\sigma \nu^2 \varphi + \eta \mu^2 \varphi)} = \frac{1}{\rho} (\sigma \nu \varphi - i \eta \mu \varphi) = \frac{1}{\rho} [\sigma \nu (-\varphi) + i \eta \mu (-\varphi)]. \end{aligned}$$

Κατὰ ταῦτα :

$$[\rho (\sigma \nu \varphi + i \eta \mu \varphi)]^{-1} = \frac{1}{\rho} [\sigma \nu (-\varphi) + i \eta \mu (-\varphi)].$$

Τῇ βοήθειᾳ τώρα τῶν θεωρημάτων τῶν § § 105, 107, ἐπεταί ἀμέσως τὸ κάτωθι :

**§ 108. Θεώρημα.**— Τὸ πηλίκον δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι μιγαδικὸς ἀριθμὸς ἔχων μέτρον τὸ πηλίκον τῶν μέτρων των καὶ ὄρισμα τὴν διαφορὰν τῶν ὁρίσμάτων των. Ἦτοι, ἔάν :

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \rho_1 (\sigma \nu \varphi_1 + i \eta \mu \varphi_1) \\ z_2 &= \rho_2 (\sigma \nu \varphi_2 + i \eta \mu \varphi_2) \neq 0 \end{aligned} \right\} \implies \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\sigma \nu (\varphi_1 - \varphi_2) + i \eta \mu (\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Ἄ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐχομεν :  $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$  κ.τ.λ.

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον :  $\frac{-2}{1+i}$ .

Λύσις : Ἐχομεν :

$$\begin{aligned} \frac{-2}{1+i} &= \frac{-2+0i}{1+i} = \frac{2 (\sigma \nu 180^\circ + i \eta \mu 180^\circ)}{\sqrt{2} (\sigma \nu 45^\circ + i \eta \mu 45^\circ)} = \frac{2}{\sqrt{2}} [\sigma \nu (180^\circ - 45^\circ) + \\ &+ i \eta \mu (180^\circ - 45^\circ)] = \frac{2}{\sqrt{2}} (\sigma \nu 135^\circ + i \eta \mu 135^\circ) = \frac{2}{\sqrt{2}} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \\ &= \sqrt{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -1 + i. \end{aligned}$$

**§ 109. Θεώρημα (De Moivre).** Ἡ νιοστὴ δύναμις μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι μιγαδικὸς ἀριθμὸς ἔχων μέτρον τὴν νιοστὴν δύναμιν τοῦ μέτρου τοῦ μιγάδος καὶ ὄρισμα τὸ  $v$ —πλάσιον τοῦ ὁρίσματος αὐτοῦ. Ἦτοι, ἔάν :

$$z = \rho (\sigma \nu \varphi + i \eta \mu \varphi) \implies z^v = \rho^v [\sigma \nu (v\varphi) + i \eta \mu (v\varphi)]$$

$$\eta \quad \boxed{[\rho (\sigma \nu \varphi + i \eta \mu \varphi)]^v = \rho^v [\sigma \nu (v\varphi) + i \eta \mu (v\varphi)]} \quad (\tau)$$

Ὁ τύπος (τ) ὁ ὁποῖος δίδει τὴν νιοστὴν δύναμιν ἑνὸς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι γνωστὸς ὑπὸ τὸ ὄνομα : τ ὕ π ο ς τ ο ῦ De Moivre \*)

\* De Moivre (1667-1754). Γάλλος μαθηματικός.

**Ἀπόδειξις:** Ἐάν εἰς τὸν τύπον (1) τῆς παραγράφου 106 θέσωμεν :

$$z_1 = z_2 = \dots = z_n = \rho (\sigma\upsilon\nu\varphi + i \eta\mu\varphi), \text{ τότε προκύπτει ὁ } (\tau).$$

**Παρατήρησις I:** Τὸ θεώρημα τοῦ De Moivre δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς.

**Ὑπόδειξις:** Ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ  $n = 2$ . Ὑποθέσατε ὅτι ἰσχύει διὰ  $n = k$  καὶ δείξατε ὅτι ἰσχύει διὰ  $n = k + 1$ .

**Παρατήρησις II:** Ὁ τύπος τοῦ De Moivre ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ  $n$  εἶναι ἀκέραιος ἀρνητικός. Πράγματι, ἔχομεν :

$$[\rho (\sigma\upsilon\nu\varphi + i \eta\mu\varphi)]^{-k} = \{ [\rho (\sigma\upsilon\nu\varphi + i \eta\mu\varphi)]^{-1} \}^k = \{ \rho^{-1} \cdot [\sigma\upsilon\nu (-\varphi) + i \eta\mu (-\varphi)] \}^k = \rho^{-k} \cdot [\sigma\upsilon\nu (-k\varphi) + i \eta\mu (-k\varphi)], \quad k \in \mathbb{N}.$$

## Ρίζαι μιγαδικῶν ἀριθμῶν

**§ 110. Ὅρισμός.**— Δοθέντος ἐνὸς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ  $a \neq (0,0)$  καλοῦμεν νιοστήν ρίζαν αὐτοῦ, (συμβολισμός:  $\sqrt[n]{a}$ ), κάθε μιγαδικὸν ἀριθμὸν  $z$  τοιοῦτον, ὥστε:  $z^n = a$ , ἥτοι :

$$\sqrt[n]{a} = z \iff_{\text{ορσ}} z^n = a \quad (1)$$

Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι ὑπάρχουν μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ πληροῦντες τὴν (1) Πρὸς τοῦτο θὰ ἀποδείξωμεν τὸ κάτωθι θεώρημα :

### § 111. Θεώρημα (ὕπαρξεως νιοστῆς ρίζης μιγάδος).—

Ἐάν  $a = \rho (\sigma\upsilon\nu\theta + i \eta\mu\theta)$ ,  $a \neq 0$ , εἶναι τυχὼν μιγαδικὸς ἀριθμὸς, ὑπάρχουν ἀκριβῶς  $n$  διάφοροι ἀλλήλων νιοσταὶ ρίζαι αὐτοῦ, δηλαδὴ ἡ ἐξίσωσις :

$$z^n = a \quad (1)$$

ἔχει ἀκριβῶς  $n$  διαφόρους ἀλλήλων ρίζας, αἱ ὁποῖαι δίδονται ἐκ τοῦ τύπου :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left[ \sigma\upsilon\nu \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \eta\mu \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right],$$

ἐνθα  $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ .

**Ἀπόδειξις.** Ἐστω ὅτι ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς :

$$z = \rho (\sigma\upsilon\nu\varphi + i \eta\mu\varphi)$$

ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν (1). Τότε, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον τοῦ De Moivre, ἔχομεν :

$$\rho^n [\sigma\upsilon\nu(n\varphi) + i \eta\mu(n\varphi)] = \rho \cdot (\sigma\upsilon\nu\theta + i \eta\mu\theta). \quad (2)$$

Ἡ (2) ὁμῶς ἀληθεύει τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν :

$$\rho^n = \rho \quad \text{καὶ} \quad n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν :

$$\rho = \sqrt[n]{\rho^*} \quad \text{καὶ} \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

\*)  $\sqrt[n]{\rho}$  εἶναι ἡ θετικὴ νιοστὴ ρίζα τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ  $\rho$ .

“Ωστε :

$$z = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[ \sigma \nu \frac{\theta + 2k\pi}{\nu} + i \eta \mu \frac{\theta + 2k\pi}{\nu} \right], \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι ὑπάρχουν μιγαδικοί ἀριθμοί, ὀριζόμενοι ὑπὸ τῆς (3) διὰ τὰς διαφόρους ἀκεραίας τιμὰς τοῦ  $k$ , οἵτινες ἐπαληθεύουν τὴν (1).

Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι  $\nu$  μόνον ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι διάφοροι μεταξύ των, διὰ τὰς διαφόρους ἀκεραίας τιμὰς τοῦ  $k$ . Ἀκριβέστερον θὰ δείξωμεν ὅτι :

Ἐὰν ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς  $k$  λάβῃ τὰς τιμὰς  $0, 1, 2, \dots, \lambda, \dots, \mu, \dots, \nu-1$  ἀπὸ τὴν (3) προκύπτουν ἀντιστοίχως  $\nu$  ἀριθμοί:  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_\lambda, \dots, z_\mu, \dots, z_{\nu-1}$  διάφοροι ἀλλήλων καὶ ὅτι ἂν  $k$  λάβῃ τιμὴν διάφορον τῶν  $0, 1, 2, \dots, \nu-1$ , δηλ. ἂν  $k \geq \nu$  ἢ  $k < 0$ , τότε ὁ προκύπτων ἀπὸ τὴν (3) μιγαδικὸς ἀριθμὸς  $z$  θὰ συμπίπτῃ πρὸς ἓνα τῶν  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{\nu-1}$ .

Πράγματι, ἂς δώσωμεν κατ' ἀρχὰς εἰς τὸ  $k$  τὰς  $\nu$  διαδοχικὰς τιμὰς:  $0, 1, 2, \dots, (\nu-1)$ , τότε ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν  $\nu$  ἀριθμοὺς  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_\lambda, \dots, z_\mu, \dots, z_{\nu-1}$ , οἱ ὅποιοι ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον  $\sqrt[n]{\rho}$ , ὁρίσματα δὲ ἀντιστοίχως τὰ :

$$\frac{\theta}{\nu}, \quad \frac{\theta + 2\pi}{\nu}, \quad \frac{\theta + 4\pi}{\nu}, \dots, \frac{\theta + 2\lambda\pi}{\nu}, \dots, \frac{\theta + 2\mu\pi}{\nu}, \dots, \frac{\theta + 2(\nu-1)\pi}{\nu}.$$

Οἱ  $\nu$  οὗτοι ἀριθμοὶ  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_\lambda, \dots, z_\mu, \dots, z_{\nu-1}$  εἶναι διάφοροι ἀλλήλων, διότι, ἂν δύο τυχόντες ἐξ αὐτῶν ἦσαν ἴσοι, ἔστω οἱ  $z_\lambda$  καὶ  $z_\mu$ , ἔνθα  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ ,  $\lambda \neq \mu$  καὶ  $0 \leq \lambda, \mu < \nu$ , θὰ ἔπρεπε :

$$\frac{\theta + 2\lambda\pi}{\nu} - \frac{\theta + 2\mu\pi}{\nu} = 2k'\pi, \quad k' \in \mathbb{Z}.$$

Δηλαδή :

$$\lambda - \mu = k'\nu, \quad k' \in \mathbb{Z}.$$

Εἶναι ὅμως  $0 < |\lambda - \mu| < \nu$  καὶ ἐπομένως  $0 < |k'\nu| < \nu$  ἢ  $0 < |k'| < 1$  ἄτοπον, διότι δι' οὐδὲν  $k' \in \mathbb{Z}$  εἶναι  $0 < |k'| < 1$ .

“Ωστε :  $z_\lambda \neq z_\mu \quad \forall \quad \lambda, \mu \in [0, \nu-1], \quad \lambda \neq \mu \quad \text{καὶ} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{Z}.$

Ἄς ἴδωμεν τώρα τί συμβαίνει, ἂν ὁ  $k$  λάβῃ ἀκεραίας τιμὰς ἐκτὸς τοῦ διαστήματος  $[0, \nu-1]$ , δηλαδή τί συμβαίνει διὰ  $k \geq \nu$  ἢ  $k < 0$ .

Ἐφ' ὅσον  $k \in [0, \nu-1]$ , ἔαν καλέσωμεν  $\lambda$  τὸ πηλίκον καὶ  $k_1$  τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως  $k : \nu$  θὰ εἶναι :  $k = \lambda\nu + k_1$ , ὅπου  $\lambda$  καὶ  $k_1$  ἀκέραιοι μὲ  $0 \leq k_1 < \nu$ , δηλ.  $k_1 \in [0, \nu-1]$ .

Ἐχομεν δὲ τότε :

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[ \sigma \nu \frac{\theta + 2(\lambda\nu + k_1)\pi}{\nu} + i \eta \mu \frac{\theta + 2(\lambda\nu + k_1)\pi}{\nu} \right] = \\ &= \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[ \sigma \nu \left( \frac{\theta + 2k_1\pi}{\nu} + 2\lambda\pi \right) + i \eta \mu \left( \frac{\theta + 2k_1\pi}{\nu} + 2\lambda\pi \right) \right] = \\ &= \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[ \sigma \nu \left( \frac{\theta + 2k_1\pi}{\nu} \right) + i \eta \mu \left( \frac{\theta + 2k_1\pi}{\nu} \right) \right] = z_{k_1}, \quad k_1 = 0, 1, 2, \dots, \nu-1. \end{aligned}$$

\*Ητοι, αν  $k \neq 0, 1, 2, \dots, v-1$ , δηλ. αν  $k \geq v$  ή  $k < 0$ , τότε ο προκύπτων εκ της (3) μιγαδικός αριθμός  $z$  συμπίπτει προς έναν των  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{v-1}$ .

\*Ωστε, πράγματι, υπάρχουν ακριβώς  $v$  διάφοροι αλληλίων αριθμοί, οι οποίοι επαληθεύουν την εξίσωσιν :

$$z^v = a = \rho(\sin \theta + i \eta \mu \theta).$$

Ούτοι δίδονται υπό του τύπου :

$$z_k = \sqrt[v]{\rho} \cdot \left[ \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{v} \right) + i \eta \mu \left( \frac{\theta + 2k\pi}{v} \right) \right] \quad (4)$$

όπου  $k = 0, 1, 2, \dots, v-1$ .

**Παρατηρήσεις.** Έκ του ανωτέρω θεωρήματος προκύπτει ότι κάθε μιγαδικός αριθμός  $a \neq 0$  έχει ακριβώς  $v$  ντιστάς ρίζας, δηλ. το σύμβολον  $\sqrt[v]{a}$  έχει  $v$  διαφόρους τιμές (τάς (4)), είναι δηλαδή, ως άλλως λέγομεν,  $v$ -σήμαντον.

Ούτω, π.χ.,  $\sqrt[4]{4} = \pm 2, \sqrt[4]{25} = \pm 5, \sqrt[4]{2} = \pm \sqrt[4]{2}$ , όπου το σύμβολον  $\sqrt[4]{\phantom{x}}$  της τετραγωνικής ρίζης έχει την γνωστήν διά πραγματικούς αριθμούς έννοιαν.

Κατά ταύτα :

Εις την περιοχήν των μιγαδικών αριθμών (άκομη και αν ο αριθμός  $a$  είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή γράφεται ούτω  $a = a + i0$  με  $a \in \mathbb{R}$ ) εις το σύμβολον  $\sqrt[4]{\phantom{x}}$  δίδομεν διττήν σημασίαν, ήτοι ακριβέστερον :

Με  $\sqrt[4]{a}$ , όπου  $a \in \mathbb{C}$ , όρίζονται και αι δύο ρίζαι της εξισώσεως  $z^2 = a$ · αὗται συμπίπτουν τότε, και μόνον τότε, αν  $a = 0$ .

Τῇ βοηθείᾳ τῆς ανωτέρω σημασίας τοῦ συμβόλου  $\sqrt[4]{\phantom{x}}$  ἐν  $\mathbb{C}$ , δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὰς λύσεις τῆς δευτεροβαθμοῦ εξισώσεως :  $ax^2 + bx + c = 0$  με  $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{C}$ , διὰ τοῦ τύπου :

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

**Ἐφαρμογαί :** 1η : Νὰ εὑρεθῇ ἡ  $\sqrt[3]{8i}$ .

**Λύσις :** Ἐχομεν :  $8i = 8 \left( \sin \frac{\pi}{2} + i \eta \mu \frac{\pi}{2} \right)$  και ὁ τύπος (4) τῆς § 111 δίδει :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{8i} &= \sqrt[3]{8 \left( \sin \frac{\pi}{2} + i \eta \mu \frac{\pi}{2} \right)} = \sqrt[3]{8} \left( \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \eta \mu \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) = \\ &= 2 \left[ \sin \left( \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \eta \mu \left( \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

$$\text{Διὰ } k = 0: \quad 2 \left( \sin \frac{\pi}{6} + i \eta \mu \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + i$$

$$\text{Διὰ } k = 1: \quad 2 \left( \sin \frac{5\pi}{6} + i \eta \mu \frac{5\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} + i$$

$$\text{Διὰ } k = 2: \quad 2 \left( \sin \frac{3\pi}{2} + i \eta \mu \frac{3\pi}{2} \right) = 0 - 2i = -2i.$$



2α: Να εὑρεθῇ ἡ  $\sqrt[4]{2+2i\sqrt{3}}$ .

Λύσις: Ἐχομεν:  $2+2i\sqrt{3}=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)$  καὶ ὁ τύπος (4) τῆς § 111 δίδει

$$v=4, \quad \rho=4, \quad \theta=\frac{\pi}{3} \quad \text{δίδει:}$$

$$\begin{aligned} z_k &\equiv \sqrt[4]{4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt[4]{4} \cdot \left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)+i\eta\mu\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)\right] = \\ &= \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\eta\mu\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου διὰ  $k=0, 1, 2, 3$  εὐρίσκομεν ἀντιστοίχως:

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\eta\mu\frac{\pi}{12}\right),$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\eta\mu\frac{7\pi}{12}\right),$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\eta\mu\frac{13\pi}{12}\right),$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\eta\mu\frac{19\pi}{12}\right).$$

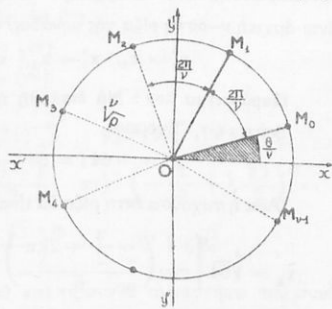
**§ 112. Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν νιοστῶν ριζῶν μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ.**—Ἐστω ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς  $a=\rho(\cos\theta+i\eta\mu\theta)$ , μὲ νιοστὰς ρίζας τὰς κάτωθι:

$$z_0 = \sqrt[v]{\rho} \left[ \cos\frac{\theta}{v} + i\eta\mu\frac{\theta}{v} \right]$$

$$z_1 = \sqrt[v]{\rho} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{v} + \frac{2\pi}{v}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\theta}{v} + \frac{2\pi}{v}\right) \right]$$

$$z_2 = \sqrt[v]{\rho} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{v} + \frac{4\pi}{v}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\theta}{v} + \frac{4\pi}{v}\right) \right]$$

.....



Σχ. 7

$$z_{v-1} = \sqrt[v]{\rho} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{v} + (v-1)\frac{2\pi}{v}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\theta}{v} + (v-1)\frac{2\pi}{v}\right) \right].$$

Παρατηροῦμεν ὅτι πᾶσαι αἱ νιοσταὶ ρίζαι τοῦ  $a$  ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον, ἥτοι  $|z_k| = \sqrt[v]{\rho}$ ,  $k=0, 1, \dots, (v-1)$ , καὶ ὁρίσματα τοιαῦτα, ὥστε ἀπὸ τινος ἀρχικῆς τιμῆς  $\frac{\theta}{v}$  αὐξάνουν διαρκῶς κατὰ  $\frac{2\pi}{v}$ . Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἂν λάβωμεν τὰς εἰκόνας αὐτῶν  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{v-1}$  εἰς τὸ μιγαδικὸν ἐπίπεδον, αὗται θὰ κεῖνται ἐπὶ κύκλου κέντρου  $O$  καὶ ἀκτίνος  $\sqrt[v]{\rho}$ , θὰ εἶναι δὲ κορυφαὶ κανονικοῦ  $v$ -πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον τοῦτον.

### § 113. Έφαρμογαί τῶν ἀνωτέρω εἰς τὴν λύσιν διωνύμων ἐξισώσεων.

**Παράδειγμα 1ον :** Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :  $x^v - 1 = 0$ . (1)

**Λύσις :** Αὕτη γράφεται  $x^v = 1$ . Ἐπειδὴ  $1 = 1$  (συν0 + i ημ0), ὁ τύπος (4) τῆς § 111 δίδει ἀμέσως διὰ  $v = v$ ,  $\rho = 1$ ,  $\theta = 0$  :

$$x_k = \text{συν} \frac{2k\pi}{v} + i \eta\mu \frac{2k\pi}{v}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, v-1. \quad (2)$$

Δι' ἐκάστην τῶν τιμῶν αὐτῶν τοῦ  $k$  προκύπτει ἐκ τῆς (2) καὶ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἄρα ἡ (1) ἔχει  $v$  ρίζας, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται **νιοσταὶ ρίζαι τῆς μονάδος**.

Διὰ  $k = 0$  ἔχομεν ἐκ τῆς (2) τὴν ρίζαν  $x_0 = 1$ . Καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὸν τύπον τοῦ De Moivre εἶναι :

$$\text{συν} \frac{2k\pi}{v} + i \eta\mu \frac{2k\pi}{v} = \left( \text{συν} \frac{2\pi}{v} + i \eta\mu \frac{2\pi}{v} \right)^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

αἱ  $v$  νιοσταὶ ρίζαι τῆς μονάδος εἶναι αἱ δυνάμεις :

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{v-1},$$

ὅπου :

$$\omega = \text{συν} \frac{2\pi}{v} + i \eta\mu \frac{2\pi}{v}.$$

**Σημ.** Κάθε ρίζα  $x_k$  τῆς μονάδος, ἡ ὁποία ἔχει τὴν ιδιότητα νὰ δίδῃ τὰς ἄλλας ρίζας ὡς δυνάμεις αὐτῆς, καλεῖται **ἀρχικὴ ν-οστὴ ρίζα τῆς μονάδος**. Π.χ. ἡ  $x_1 = \text{συν} \frac{2\pi}{v} + i \eta\mu \frac{2\pi}{v} \equiv \omega$  εἶναι ἀρχικὴ ν-οστὴ ρίζα τῆς μονάδος, διότι :

$$x_1^0 = x_0, \quad x_1^1 = x_1, \quad x_1^2 = x_2, \quad x_1^3 = x_3, \quad \dots, \quad x_1^{v-1} = x_{v-1}.$$

**Παράδειγμα 2ον :** Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :  $x^6 + 64i = 0$ .

**Λύσις :** Ἐχομεν :

$$x^6 = -64i = 64(-i) = 64 \left( \text{συν} \left( -\frac{\pi}{2} \right) + i \eta\mu \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Ἄρα ἡ τυχούσα ἔκτη ρίζα θὰ εἶναι κατὰ τὸν τύπον (4) τῆς μορφῆς :

$$\bar{x}_k = \sqrt[6]{64} \left[ \text{συν} \left( \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6} \right) + i \eta\mu \left( \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$\text{Διὰ } k = 0 \text{ εἶναι : } x_0 = 2 \left( \text{συν} \frac{\pi}{12} - i \eta\mu \frac{\pi}{12} \right) = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - i \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

$$\text{Διὰ } k = 1 \text{ εἶναι : } x_1 = 2 \left( \text{συν} \frac{\pi}{4} + i \eta\mu \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}(1 + i). \quad \text{κ.λ.π.}$$

**Παράδειγμα 3ον :** Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :  $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$ .

**Λύσις.** Θέτομεν πρῶτον τὸν  $1 + i\sqrt{3}$  ὑπὸ τριγωνομετρικὴν μορφήν. Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἔχομεν :

$$\rho = \sqrt{1^2 + 3} = 2 \quad \text{καὶ} \quad \theta = \text{Arg}(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{ἄρα : } 1 + i\sqrt{3} = \rho (\text{συν}\theta + i \eta\mu\theta) = 2 \cdot \left( \text{συν} \frac{\pi}{3} + i \eta\mu \frac{\pi}{3} \right).$$

Συνεπῶς ὁ τύπος (4) τῆς § 111 διὰ  $v = 3$ ,  $\rho = 2$ ,  $\theta = \frac{\pi}{3}$  δίδει :

$$z_k = \sqrt[3]{2} \left[ \text{συν} \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i \eta\mu \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} \right] = \sqrt[3]{2} \cdot \left[ \text{συν} \frac{(6k+1)\pi}{9} + i \eta\mu \frac{(6k+1)\pi}{9} \right].$$

Έκ του τύπου τούτου δια  $k = 0, 1, 2$  εύρισκουμε τὰς ζητούμενας ρίζας, ήτοι :

$$z_0 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\pi}{9} + i \eta \mu \frac{\pi}{9} \right), \quad z_1 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{7\pi}{9} + i \eta \mu \frac{7\pi}{9} \right),$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{13\pi}{9} + i \eta \mu \frac{13\pi}{9} \right).$$

#### Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

226. Νὰ τεθοῦν ὑπὸ τριγωνομετρικὴν μορφήν οἱ κάτωθι μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ :

$$\alpha) \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i, \quad \beta) -3 + 4i, \quad \gamma) \sqrt{3} - 3i, \quad \delta) 2 + 2\sqrt{3}i, \quad \epsilon) 3\sqrt{3} + 3i,$$

$$\sigma\tau) -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{3}, \quad \zeta) -\sqrt{3} + i, \quad \eta) \frac{1+i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i}, \quad \theta) 1 + \sin t + i \eta \mu t.$$

227. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον καὶ τὸ ὄρισμα τοῦ :

$$\left[ \frac{1+i+\sqrt{3}(1-i)}{1+i} \right]^3.$$

228. Δείξατε διὰ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν ὅτι :  $2 \times (-3) = -6$  καὶ  $(-2) \times (-3) = +6$ .

229. Ἐὰν ν φυσικὸς ἀριθμὸς, νὰ ἀποδείχθῃ ὅτι :

$$(\alpha). (\sin \theta - i \eta \mu \theta)^v = \sin (v\theta) - i \eta \mu (v\theta)$$

$$(\beta). (\sin \theta + i \eta \mu \theta)^{-v} = \sin (-v\theta) + i \eta \mu (-v\theta).$$

230. Ἐὰν  $z = \sin \theta + i \eta \mu \theta$  καὶ  $v \in \mathbb{N}$ , νὰ ἀποδείχθῃ ὅτι :

$$z^v + z^{-v} = 2 \sin (v\theta)$$

$$z^v - z^{-v} = 2i \eta \mu (v\theta).$$

231. Νὰ ἀποδείχθῃ ὅτι :

$$\alpha) (1+i)^{12} = -64, \quad \beta) (1+i)^{-6} = (2i)^{-8}, \quad \gamma) (1+i)^{10} = 32i,$$

$$\delta) (\sqrt{3}+i)^{150} = -2^{150}, \quad \epsilon) \left( \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right)^{18} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \quad \sigma\tau) \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{17} =$$

$$= -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \zeta) \left( \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{3k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

232. Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ  $\eta \mu 3\theta$  συναρτήσῃ τοῦ  $\eta \mu \theta$  καὶ τὸ  $\sin 3\theta$  συναρτήσῃ τοῦ  $\sin \theta$  δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τοῦ De Moivre.

233. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα :

$$\alpha) \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{24}, \quad \beta) \left( \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right)^8 + i^{258}, \quad \gamma) (\sin 12^\circ + i \eta \mu 12^\circ)^{10} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

234. Νὰ ἐπιλυθοῦν (τριγωνομετρικῶς) αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

$$\alpha). x^3 = 1 - i\sqrt{3}, \quad \beta) x^6 \pm 64 = 0, \quad \gamma) 4x^7 + 1 = 0, \quad \delta) x^3 + 8i = 0,$$

$$\epsilon). x^{12} + 1 = 0, \quad \sigma\tau) x^4 = -8 - 8\sqrt{3}i, \quad \zeta) x^5 = -\sqrt{3} + i, \quad \eta) 3x^5 + 24x^2 = 0.$$

235. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἑκταὶ ρίζαι τοῦ :  $\frac{1}{2} (\sqrt{3} - i).$

236. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τέταρται ρίζαι τοῦ :  $-8 + 8i\sqrt{3}.$

237. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον καὶ τὸ ὄρισμα τοῦ ἀριθμοῦ  $(1 + \sin \theta + i \eta \mu \theta)^2.$

238. Δίδεται :  $E = (1 + i\sqrt{3})^8 + (1 - i\sqrt{3})^8.$  Δείξατε ὅτι :  $E = -2^8.$

(Υπόδειξις : Νὰ γίνῃ χρῆσις τῆς τριγωνομετρικῆς μορφῆς τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν).

**239.** Δείξτε ότι ο μιγαδικός αριθμός  $z = \text{συν}\theta + i \eta\mu\theta$  δύναται να τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν :  
 $z = \frac{1 + i\lambda}{1 - i\lambda}$ , ὅπου  $\lambda$  κατάλληλος πραγματικός αριθμός. Νά ὁρισθῇ ὁ  $\lambda$ .

**240.** Νά ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha) \quad (1+i)^v + (1-i)^v = 2^{\frac{v+2}{2}} \cdot \text{συν} \frac{v\pi}{4}, \quad v \in \mathbb{N}$$

$$\beta) \quad (1+i)^v - (1-i)^v = i 2^{\frac{v+2}{2}} \cdot \eta\mu \frac{v\pi}{4}, \quad v \in \mathbb{N}.$$

**241.** Ἐάν  $\omega_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, v-1$  εἶναι αἱ  $v$ -οσται ρίζαι τῆς μονάδος, νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\alpha) \quad 1 + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{v-1} = 0$$

$$\beta) \quad \omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots \omega_{v-1} = 1.$$

**242.** Γράψτε τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν  $1 + i\sqrt[3]{3}$  ὑπὸ τριγωνομετρικὴν μορφήν καὶ δείξα-  
 τε ὅτι :

$$(1 + i\sqrt[3]{3})^4 = -8 - 8i\sqrt[3]{3}.$$

**243.** Νά ἀναλυθῇ τὸ ρητὸν κλάσμα εἰς ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων :

$$\frac{1}{x^4 + 4}$$

Ἵπόδειξις : Παρατηρήσατε ὅτι :  $x^4 + 4 \equiv (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$ .

**244.** Δείξτε ὅτι :

$$\frac{(\text{συν } 70^\circ + i \eta\mu 70^\circ)^5}{(\text{συν } 40^\circ + i \eta\mu 40^\circ)^5} = \frac{1}{2} (-\sqrt[3]{3} + i).$$

**245.** Νά ἐπιλυθῇ (τριγωνομετρικῶς) ἡ ἐξίσωσις  $x^6 + 64 = 0$ . Νά σημειωθοῦν τὰ ὁρί-  
 σματα τῶν 6 ριζῶν. Πῶς παριστάνονται γεωμετρικῶς αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης ;

**246.** Νά προσδιορισθοῦν τὰ  $\lambda$ ,  $\mu$ , ἵνα ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς :  $\sqrt[3]{2} (\text{συν } 45^\circ + i \eta\mu 45^\circ)$  εἴ-  
 ναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως :  $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + \lambda x + \mu = 0$ .

**247.** Νά εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως :

$$\left( \frac{1+x}{1-x} \right)^v - 1 = 0.$$

**248.** Δείξτε ὅτι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως :

$(1+z)^{2v} + (1-z)^{2v} = 0$  παρέχονται ὑπὸ τῆς σχέσεως :  $z = i \varepsilon\varphi \frac{2k+1}{4v} \Pi$ , ὅπου τὸ  $k$  λαμβά-  
 νει τὰς τιμὰς :  $0, 1, 2, \dots, 2v-1$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

### ΠΕΡΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

#### ΟΡΙΣΜΟΙ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**§ 114. Εισαγωγικαὶ ἔννοιαι.—α'). Διαστήματα.** Ἐστώσαν  $\alpha$  καὶ  $\beta$  πραγματικοὶ ἀριθμοὶ \*) μὲ  $\alpha < \beta$  τότε καλοῦμεν :

**1ον.** «Ἀνοικτὸν διάστημα ἀπὸ  $\alpha$  ἕως  $\beta$ » καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μὲ  $(\alpha, \beta)$  τὸ κάτωθι ὑποσύνολον τοῦ  $\mathbf{R}$  :

$$(\alpha, \beta) \equiv \{x \in \mathbf{R} : \alpha < x < \beta\}.$$

Τὰ σημεῖα (δηλαδή οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ)  $\alpha$  καὶ  $\beta$  καλοῦνται καὶ «ἄκρα τοῦ διαστήματος»  $(\alpha, \beta)$ , τὸ δὲ σημεῖον  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  «μέσον» ἢ ἄλλως «κέντρον» τοῦ διαστήματος. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ ἀνοικτὸν διάστημα  $(\alpha, \beta)$  δὲν συμπεριλαμβάνονται τὰ ἄκρα  $\alpha$  καὶ  $\beta$  τοῦ διαστήματος, ἤτοι  $\alpha \notin (\alpha, \beta)$  καὶ  $\beta \notin (\alpha, \beta)$ .

Παράδειγμα :  $(3, 8) \equiv \{x \in \mathbf{R} : 3 < x < 8\}$

**2ον.** «Κλειστὸν διάστημα μὲ ἄκρα  $\alpha, \beta$ » καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μὲ  $[\alpha, \beta]$  τὸ κάτωθι ὑποσύνολον τοῦ  $\mathbf{R}$  :

$$[\alpha, \beta] \equiv \{x \in \mathbf{R} : \alpha \leq x \leq \beta\}.$$

Εἰς τοῦτο συμπεριλαμβάνονται καὶ τὰ δύο ἄκρα  $\alpha$  καὶ  $\beta$ , ἤτοι  $\alpha, \beta \in [\alpha, \beta]$ .

Παράδειγμα :  $[-1, +1] \equiv \{x \in \mathbf{R} : -1 \leq x \leq +1\}.$

**3ον.** «Κλειστὸν ἀριστερά, ἀνοικτὸν δεξιὰ διάστημα μὲ ἄκρα  $\alpha, \beta$ » καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μὲ  $[\alpha, \beta)$  τὸ κάτωθι ὑποσύνολον τοῦ  $\mathbf{R}$  :

$$[\alpha, \beta) \equiv \{x \in \mathbf{R} : \alpha \leq x < \beta\}.$$

Εἰς τὸ  $[\alpha, \beta)$  συμπεριλαμβάνεται μόνον τὸ ἀριστερὸν ἄκρον  $\alpha$ , οὐχὶ ὅμως καὶ τὸ  $\beta$ , ἤτοι  $\alpha \in [\alpha, \beta)$ , ἀλλὰ  $\beta \notin [\alpha, \beta)$ .

\* Ὡς γνωστὸν τὸ σύνολον τῶν ρητῶν (συμμέτρων) καὶ ἀρρήτων (ἀσυμμέτρων) καλεῖται σύνολον τῶν *πραγματικῶν ἀριθμῶν*. Τὸ σύνολον τοῦτο καλοῦμεν καὶ «*εὐθείαν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν*» (ἐὰν θέλωμεν νὰ ἐκφρασθῶμεν μὲ τὴν γλῶσσαν τῆς Γεωμετρίας)· οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ θεωροῦνται τότε ὡς *σημεῖα τῆς εὐθείας*. Διὰ τὰ σημεῖα χρησιμοποιοῦμεν τὰ αὐτὰ σύμβολα μὲ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς. Ἡ ταυτοποίησις αὕτη τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ τὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας βασίζεται εἰς τὸ ἀξίωμα τῆς ἀντιστοιχίας τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας. Κατὰ τὸ ἀξίωμα τοῦτο μεταξὺ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν σημείων ἐνὸς ἄξονος ὑφίσταται μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία, δηλαδή εἰς ἕκαστον πραγματικὸν ἀριθμὸν ἀντιστοιχεῖ ἓν ὠρισμένον σημεῖον τοῦ ἄξονος καὶ ἀντιστρόφως.

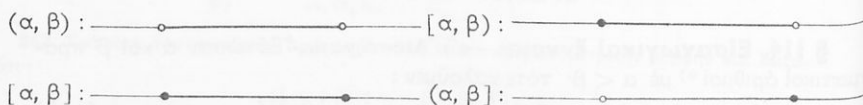
40ν. «'Ανοικτὸν ἀριστερά, κλειστὸν δεξιὰ διάστημα μὲ ἄκρα  $\alpha, \beta$ » καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μὲ  $(\alpha, \beta]$  τὸ κάτωθι ὑποσύνολον τοῦ  $\mathbf{R}$ :

$$(\alpha, \beta] \equiv \{x \in \mathbf{R} : \alpha < x \leq \beta\}.$$

Εἰς τοῦτο συμπεριλαμβάνεται **μόνον** τὸ δεξιὸν ἄκρον  $\beta$ , οὐχὶ ὁμως καὶ τὸ ἀριστερόν, ἥτοι  $\alpha \notin (\alpha, \beta]$ , ἀλλὰ  $\beta \in (\alpha, \beta]$ .

Παράδειγμα:  $(0, 1] \equiv \{x \in \mathbf{R} : 0 < x \leq 1\}.$

Ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τὰ ὡς ἄνω διαστήματα παρίστανται μὲ εὐθύγραμμα τμήματα ὡς κάτωθι:



Κατ' ἐπέκτασιν τῶν ἀνωτέρω διαστημάτων, ἔχομεν καὶ τὰ ἀκόλουθα διαστήματα:

$$(-\infty, \alpha) \equiv \{x \in \mathbf{R} : x < \alpha\} : \quad \leftarrow \text{---} \circ \alpha$$

$$(-\infty, \alpha] \equiv \{x \in \mathbf{R} : x \leq \alpha\} : \quad \leftarrow \text{---} \bullet \alpha$$

$$(\beta, +\infty) \equiv \{x \in \mathbf{R} : \beta < x\} : \quad \bullet \beta \text{---} \rightarrow$$

$$[\beta, +\infty) \equiv \{x \in \mathbf{R} : \beta \leq x\} : \quad \bullet \beta \text{---} \rightarrow$$

τὰ ὅποια καλοῦνται «ἀπέραντα» (ἀριστερά, ὡς τὰ δύο πρῶτα, ἀντιστοίχως δεξιὰ, ὡς τὰ δύο τελευταῖα), ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰ προηγούμενα τὰ ὅποια καλοῦνται «πεπερασμένα».

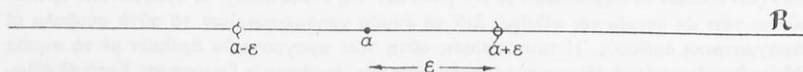
Τὰ διαστήματα ταῦτα παρίστανται ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν δεξιὰ σχημάτων.

Ὑπάρχουν ἐν ὄλῳ ἐννέα τύποι διαστημάτων. Ἐνίστε θὰ γράφωμεν:

$\mathbf{R} \equiv (-\infty, +\infty)$ . Εἰς τὰ ἐπόμενα θὰ συμβολίζωμεν συχνὰ τὰ διαστήματα ἐν  $\mathbf{R}$  μὲ τὸ γράμμα  $\Delta$ .

Σημ. Τὰ σύμβολα  $-\infty$  (πλὴν ἁπειρον) καὶ  $+\infty$  (σὺν ἁπειρον) δὲν παριστάνουν πραγματικούς ἀριθμούς. Ταῦτα χρησιμοποιοῦνται ἀνωτέρω μόνον πρὸς εὐκολίαν εἰς τὸν συμβολισμόν.

**β'). Περιοχὴ σημείου ἐν  $\mathbf{R}$ .** Ἐστω ἐν σημεῖον  $\alpha \in \mathbf{R}$  καὶ  $\epsilon$  εἰς θετικὸς ἀριθμὸς ( $\epsilon > 0$ ). Κάθε ἀνοικτὸν διάστημα τῆς μορφῆς  $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$  καλεῖται «περιοχὴ τοῦ σημείου  $\alpha$  μὲ κέντρον τὸ  $\alpha$  καὶ ἀκτῖνα  $\epsilon$ ».



Γενικώτερον: «Περιοχὴ ἐνὸς σημείου  $\xi$ » καλεῖται κάθε ἀνοικτὸν διάστημα  $(\alpha, \beta)$  τὸ ὅποιον περιέχει τὸ σημεῖον  $\xi$ , ἥτοι  $\xi \in (\alpha, \beta)$ .

Ούτω, λ.χ., τὸ διάστημα  $(1, 2)$  εἶναι περιοχὴ τοῦ  $\sqrt{2}$ , διότι  $\sqrt{2} \in (1, 2)$ .

γ'). **Ἀπόστασις πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλον.** Ἐστωσαν  $x \in \mathbf{R}$  καὶ  $y \in \mathbf{R}$ . Καλοῦμεν «ἀπόστασιν τοῦ  $x$  ἀπὸ τοῦ  $y$ » τὸν μὴ ἀρνητικὸν ἀριθμὸν  $|x - y|$ , συμβολίζομεν δὲ ταύτην μὲ  $d(x, y)$ . Ὡστε εἶναι :

$$d(x, y) \stackrel{\text{ορισ}}{=} |x - y| \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad \text{καὶ} \quad \forall y \in \mathbf{R}.$$

Αὕτη ἔχει τὰς ἑξῆς ιδιότητες :

$$d_1: \quad d(x, y) \geq 0 \quad \text{καὶ} \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$d_2: \quad d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{συμμετρικὴ ιδιότης})$$

$$d_3: \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{τριγωνικὴ ιδιότης}).$$

**Ἀπόδειξις.** Αἱ  $d_1$  καὶ  $d_2$  εἶναι προφανεῖς, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς  $d(x, y)$  καὶ τῶν γνωστῶν ιδιοτήτων τῶν ἀπολύτων τιμῶν. Θὰ ἀποδείξωμεν τὴν  $d_3$ . Ἀπὸ τὴν γνωστὴν ιδιότητα (τοῦ ἀθροίσματος) τῶν ἀπολύτων τιμῶν ἔχομεν :

$$d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

**Σημειώσεις.** Τὸ σύνολον  $\mathbf{R}$  τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, μὲ τὴν ἀπόστασιν  $d$ , ὡς αὕτη ὠρίσθη ἀνωτέρω, λέγομεν ὅτι εἶναι εἰς «μετρικὸς χώρος» καὶ γράφομεν  $(\mathbf{R}, d)$ . Γενικῶς θὰ λέγωμεν ὅτι: Ἐν σύνολον  $E$  εἶναι εἰς μετρικὸς χώρος τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν εἰς κάθε ζεύγος  $(x, y)$  στοιχείων αὐτοῦ ἀντιστοιχῇ εἰς πραγματικὸς ἀριθμὸς  $d(x, y)$ , ὁ ὁποῖος καλεῖται ἀπόστασις τῶν  $x \in E$ ,  $y \in E$  καὶ ὅστις πληροῖ τὰς ἀνωτέρω τρεῖς ιδιότητες  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ .

**Ἀσκήσις.** Ἐὰν  $d(x, y)$  παριστᾷ τὴν ἀπόστασιν τοῦ  $x \in \mathbf{R}$  ἀπὸ τοῦ  $y \in \mathbf{R}$  δείξατε ὅτι καὶ ἡ  $d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$  ἔχει τὰς ἀνωτέρω ιδιότητες  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ , ἥτοι, ὅτι καὶ ἡ  $d^*(x, y)$  εἶναι ἐπίσης μία ἀπόστασις ἐπὶ τοῦ  $\mathbf{R}$ .

**δ'). Μῆκος διαστήματος.** Ἐστω  $\Delta$  ἐν διάστημα (ἐν  $\mathbf{R}$ ) μὲ ἄκρα  $\alpha$ ,  $\beta$ . «ἡ ἀπόστασις  $|\alpha - \beta|$  καλεῖται τὸ μῆκος τοῦ διαστήματος  $\Delta$ » καὶ συμβολίζεται μὲ  $\mu(\Delta)$ . Ὡστε εἶναι :

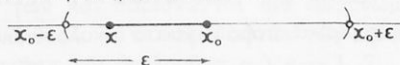
$$\mu(\Delta) \stackrel{\text{ορισ}}{=} |\alpha - \beta| = d(\alpha, \beta).$$

Οὕτω διὰ τὴν περιοχὴν  $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$  ἔχομεν ὡς μῆκος τῆς τὸ  $2\epsilon$ .

**Μία χρήσιμος παρατήρησις εἶναι ἡ ἑξῆς :** Ἐστω  $x_0 \in \mathbf{R}$  καὶ  $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$  ἡ περιοχὴ τοῦ  $x_0$  μὲ ἀκτῖνα  $\epsilon$ . Τότε ἰσχύει :

$$x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \iff |x - x_0| < \epsilon$$

Πρὸς ἐπιβεβαίωσιν παρατηρήσατε καὶ τὴν κάτωθι εἰκόνα :



**§ 115. Όρισμοί.**— Γνωρίζομεν ήδη, από τὰ μαθήματα τῶν προηγουμένων τάξεων, τὴν ἔννοιαν τῆς συναρτήσεως· ἃς ἐπαναλάβωμεν ἐνταῦθα τὸν ὅρισμόν της :

Καλοῦμεν συνάρτησιν μὲ πεδίου ὁρισμοῦ ἓνα σύνολον  $A$  καὶ πεδίου τιμῶν ἓνα σύνολον  $B$  (τὰ  $A, B$  ὑποτίθενται  $\neq \emptyset$ ) κάθε μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν  $f$  τοῦ  $A$  εἰς τὸ  $B$ . Γράφομεν δέ :

$$f : A \longrightarrow B \quad \text{ἢ καὶ ἄλλως} \quad A \ni x \longrightarrow f(x) \in B.$$

Ἔστω τώρα μία συνάρτησις  $\alpha$  μὲ πεδίου ὁρισμοῦ τὸ σύνολον  $N$  τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ τιμὰς ἐν  $B$ , αὕτη θὰ συμβολισθῇ οὕτω :

$$\alpha : N \longrightarrow B \quad \text{ἢ καὶ ἄλλως} \quad N \ni v \longrightarrow \alpha(v) \in B.$$

Κάθε συνάρτησις ὡς ἡ ἀνωτέρω  $\alpha$  καλεῖται : «μία ἀκολουθία στοιχείων τοῦ συνόλου  $B$ ». Εἰδικῶς, ἂν  $B \subseteq \mathbf{R}$  ἡ ἀκολουθία  $\alpha$  καλεῖται : «ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν».

Ὡστε : ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι κάθε συνάρτησις μὲ πεδίου ὁρισμοῦ τὸ σύνολον  $N$  τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ τιμὰς εἰς τὸ σύνολον  $\mathbf{R}$  τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, δηλαδὴ μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ  $N$  εἰς τὸ  $\mathbf{R}$ .

Τὴν τιμὴν  $\alpha(v)$  μιᾶς ἀκολουθίας  $\alpha$  συνηθίζομεν νὰ τὴν συμβολίζωμεν μὲ  $\alpha_v$ , γράφοντες δηλαδὴ τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν  $v$  ὡς κάτω δείκτην τοῦ  $\alpha$ . Αἱ τιμαὶ μιᾶς ἀκολουθίας  $\alpha$  καλοῦνται «ὅροι» αὐτῆς καὶ δυνάμεθα νὰ καταχωρίσωμεν αὐτοὺς εἰς ἓνα πίνακα ὡς κάτωθι :

|            |            |            |       |            |       |
|------------|------------|------------|-------|------------|-------|
| 1          | 2          | 3          | . . . | $v$        | . . . |
| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | . . . | $\alpha_v$ | . . . |

εἰς τὸν ὅποιον παραλείπεται συνήθως ἡ πρώτη γραμμὴ καὶ γράφονται μόνον οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας, ἥτοι :

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_v, \dots \quad (1)$$

Ὁ ὅρος  $\alpha_1$  καλεῖται πρῶτος ὅρος τῆς ἐν λόγῳ ἀκολουθίας, ὁ  $\alpha_2$  δεύτερος ὅρος καὶ γενικῶς ὁ  $\alpha_v$  νιοστὸς ἢ γενικὸς ὅρος τῆς ἀκολουθίας (1).

Εἰς τὰ ἐπόμενα θὰ χρησιμοποιῶμεν πολλακίς τὴν ἀκόλουθον ἔκφρασιν :

$$\text{«ἡ ἀκολουθία } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_v, \dots \text{»}$$

Δι' αὐτῆς ἐννοοῦμεν, ὅτι θεωροῦμεν τὴν ἀκολουθίαν  $\alpha : N \longrightarrow \mathbf{R}$  ὁρίζομένην οὕτω :

$$\alpha(v) = \alpha_v \quad \text{διὰ κάθε } v \in N.$$

Συντομώτερον μία ἀκολουθία παρίσταται καὶ οὕτω :

$$\alpha_v, \quad v = 1, 2, 3, \dots \quad \text{ἢ καὶ ἄλλως } \alpha_v, \quad v \in N.$$

Θὰ δώσωμεν τώρα μερικὰ παραδείγματα ἀκολουθιῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.



1. Ἡ ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἥτοι ἡ ἀκολουθία:

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

τῆς ὁποίας νιοστὸς ὅρος εἶναι ὁ ἀριθμὸς  $n$ , ἥτοι  $a_n = n$ .

2. Ἡ ἀκολουθία:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

τῆς ὁποίας νιοστὸς ὅρος εἶναι ὁ ἀριθμὸς  $\frac{1}{n}$ , ἥτοι  $a_n = \frac{1}{n}$ .

3. Ἡ ἀκολουθία:  $1, 1, 1, \dots, 1, \dots$

4. Ἡ ἀκολουθία:  $c, c, c, \dots, c, \dots$  (ἐνθα  $c \in \mathbf{R}$ ).

Ἡ ἀκολουθία τοῦ παραδείγματος 4 καλεῖται: «ἡ σταθερὰ ἀκολουθία  $a_n = c$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ». Ὅθεν ἡ ἀκολουθία τοῦ παραδείγματος 3, εἶναι ἡ σταθερὰ ἀκολουθία  $a_n = 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

5. Ἡ ἀκολουθία:  $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, (-1)^n \cdot \frac{1}{n}, \dots$

6. Ἐὰν ἀπεικονίσωμεν τοὺς περιττοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς εἰς τὸν ἀριθμὸν 0 καὶ τοὺς ἀρτίους φυσικοὺς εἰς τὸν ἀριθμὸν 1, θὰ προκύψῃ ἡ ἀκολουθία:

$$0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \dots$$

Συνήθως ἡ ὡς ἄνω ἀκολουθία συμβολίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\mathbf{N} \ni n \longrightarrow a_n = \begin{cases} 1, & \text{ἂν } n \text{ ἄρτιος} \\ 0, & \text{ἂν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$$

7. Ἡ ἀκολουθία:  $a_n = \frac{2n}{n+3}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , γράφεται ἑκτενῶς:

$$\frac{2}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{6}, \frac{8}{7}, \dots, \frac{2n}{n+3}, \dots$$

**Παρατήρησις.** Ἐνίοτε ὁ δείκτης  $n$  τοῦ  $a_n$  λαμβάνεται οὕτως, ὥστε νὰ διατρέχῃ τὰς τιμὰς:  $0, 1, 2, 3, \dots$ , ὁπότε ἡ ἀκολουθία γράφεται:

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$$

ὁ δὲ ὅρος  $a_{n-1}$  εἶναι τότε ὁ «νιοστὸς ὅρος» τῆς ἀκολουθίας.

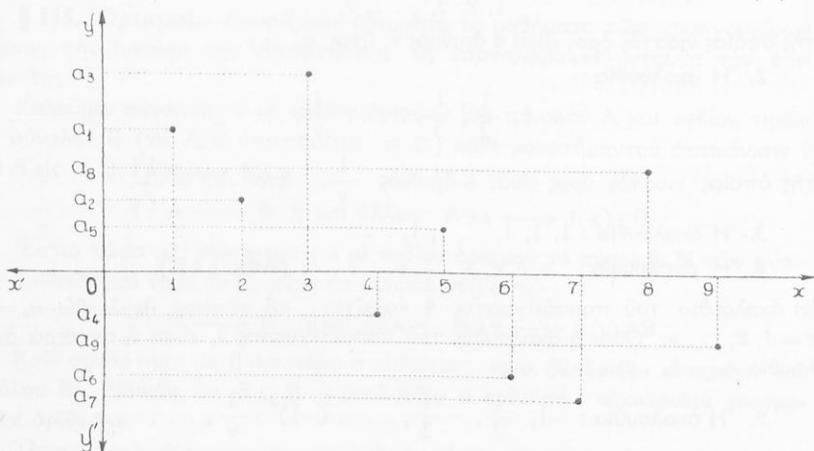
**§ 116. Γραφικὴ παράστασις ἀκολουθίας.** — Ἐστω  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τὸ διάγραμμα αὐτῆς εἶναι τότε τὸ σύνολον:

$$\{(1, a_1), (2, a_2), \dots, (n, a_n), \dots\} \equiv \Sigma$$

Τὸ ὁποῖον εἶναι ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου  $\mathbf{N} \times \mathbf{R}$  καὶ οὐχὶ τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου  $\Sigma$  εἶναι (προφανῶς) διάφορα μεταξύ των καὶ παρίστανται διὰ «μεμονωμένων» σημείων τοῦ καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ . Τὸ σύνολον αὐτῶν τῶν μεμονωμένων σημείων εἶναι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ἀκολουθίας  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

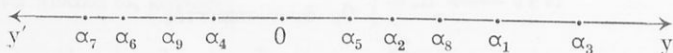
Εἰς τὸ κάτωθι σχῆμα παρίστανται ἑννέα ὄροι μιᾶς ἀκολουθίας  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$



Σχ. 8

Ἐὰν θεωρήσωμεν μόνον τὰς τεταγμένες τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, δι' ὧν παρίσταται γραφικῶς ἡ ἀκολουθία  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , ἔχομεν τὴν συνήθη ἐπὶ ἑνὸς μόνου ἄξονος παράστασιν τῆς ἀκολουθίας  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Οὕτως ἐκ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος ἔχομεν :



### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

249. Γράψατε τοὺς πέντε πρώτους ὄρους τῆς ἀκολουθίας :  $\alpha_n = \frac{2n+1}{n^2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

250. Γράψατε τοὺς ὀκτὼ πρώτους ὄρους τῆς ἀκολουθίας :  $\beta_n = \frac{1}{n+2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

251. Γράψατε τὴν ἀκολουθίαν τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν : 2, 4, 6, 8, ... ὑπὸ τὴν μορφήν  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

252. Γράψατε τὴν ἀκολουθίαν τῶν περιττῶν φυσικῶν ἀριθμῶν : 1, 3, 5, 7, ... ὑπὸ τὴν μορφήν  $\beta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

253. Γράψατε τοὺς ἑπτὰ πρώτους ὄρους τῆς ἀκολουθίας :

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{n}{2n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

254. Ὅμοίως γράψατε τοὺς ἑννέα πρώτους ὄρους τῆς ἀκολουθίας :

$$\alpha_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

255. Ὅμοίως γράψατε τοὺς πέντε πρώτους ὄρους τῆς ἀκολουθίας :

$$\alpha_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

**§ 117. Φραγμένη ακολουθία.—α').** Έστω ή ακολουθία  $\alpha_n = \frac{1}{n}, n=1, 2, \dots$

έκτενώς ή :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Διά τήν άνωτέρω ακολουθίαν παρατηρούμεν ότι ισχύει :

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \leq 1 \quad \text{διά κάθε } n = 1, 2, \dots$$

ήτοι, όλοι οί όροι τής ακολουθίας ταύτης είναι μικρότεροι ή ίσοι του πραγματικού άριθμού 1· λέγομεν δέ ότι ή ακολουθία αύτη είναι «**φραγμένη πρὸς τὰ ἄνω**» ἀπὸ τὸν άριθμὸν 1.

Γενικῶς : Μία ακολουθία πραγματικῶν άριθμῶν  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  καλεῖται **φραγμένη πρὸς τὰ ἄνω ἐν  $\mathbf{R}$**  τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχη πραγματικός άριθμός  $s$  τοιοῦτος, ὥστε νά ισχύῃ :

$$\alpha_n \leq s \quad \forall \quad n \in \mathbf{N}.$$

Ὁ άριθμός  $s$  καλεῖται «ἄνω φράγμα τής ακολουθίας  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ ». Οὕτως, ὁ άριθμός 1 είναι ἄνω φράγμα τής ακολουθίας  $\alpha_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$

Προφανῶς, ἂν  $s$  είναι ἐν ἄνω φράγμα μιᾶς ακολουθίας, τότε καὶ κάθε ἄλλος πραγματικός άριθμός μεγαλύτερος τοῦ  $s$  είναι ἐπίσης ἄνω φράγμα τής ακολουθίας.

**β').** Ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰς ακολουθίας, αἱ ὁποῖαι είναι φραγμένοι πρὸς τὰ ἄνω ἐν  $\mathbf{R}$ , ὑπάρχουν ακολουθίαι, τῶν ὁποίων ὅλοι οί όροι είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι ἑνὸς πραγματικοῦ άριθμοῦ· λ.χ. ή ακολουθία  $\alpha_n = 2n, n = 1, 2, \dots$ , ἐκτενῶς :

$$2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$$

Διά τήν ακολουθίαν ταύτην παρατηρούμεν ότι ισχύει :

$$2 \leq \alpha_n = 2n \quad \text{διά κάθε } n = 1, 2, \dots,$$

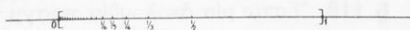
λέγομεν δέ ότι ή ακολουθία αύτη είναι «**φραγμένη πρὸς τὰ κάτω**» ἀπὸ τὸν άριθμὸν 2. Γενικῶς : Μία ακολουθία πραγματικῶν άριθμῶν  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  καλεῖται **φραγμένη πρὸς τὰ κάτω ἐν  $\mathbf{R}$**  τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχη πραγματικός άριθμός  $\sigma$  τοιοῦτος, ὥστε νά ισχύῃ :

$$\sigma \leq \alpha_n \quad \forall \quad n \in \mathbf{N}.$$

Ὁ άριθμός  $\sigma$  καλεῖται «κάτω φράγμα τής ακολουθίας  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ ».

**γ').** Τέλος ὑπάρχουν ακολουθίαι, αἱ ὁποῖαι είναι καὶ πρὸς τὰ ἄνω καὶ πρὸς τὰ κάτω φραγμένοι ἐν  $\mathbf{R}$ · λ.χ. ή ακολουθία  $\alpha_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$ , διότι ισχύει :

$$0 \leq \alpha_n = \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall \quad n \in \mathbf{N}$$



ήτοι, όλοι οί όροι της ανήκουν εἰς τὸ κλειστὸν διάστημα  $[0, 1]$ , λέγομεν δέ εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν, ότι ή ακολουθία αύτη είναι «**φραγμένη**».

Γενικῶς : Μία ακολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  καλεῖται **φραγμένη ἐν  $\mathbf{R}$**  τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ακολουθία αὕτη εἶναι καὶ πρὸς τὰ ἄνω καὶ πρὸς τὰ κάτω φραγμένη ἐν  $\mathbf{R}$ , ἥτοι, ἂν  $s$  εἶναι ἓν ἄνω φράγμα τῆς ἀκολουθίας  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  καὶ  $\sigma$  τὸ ἀντίστοιχον κάτω φράγμα, τότε ἰσχύει :

$$\sigma \leq \alpha_n \leq s \quad \text{διὰ κάθε } n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Ἄν τώρα  $\varphi$  εἶναι ἀριθμὸς μεγαλύτερος ἢ ἴσος τῶν  $|\sigma|$  καὶ  $|s|$ , τότε ἡ (1) συνεπάγεται, ἀφ' ἑνὸς μὲν :

$$\alpha_n \leq s \leq |\sigma| \leq \varphi \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

ἀφ' ἑτέρου δέ :

$$\alpha_n \geq \sigma \geq -|\sigma| \geq -\varphi \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Ἄρα ἰσχύει τότε :

$$-\varphi \leq \alpha_n \leq \varphi \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad (2)$$

ἢ ἰσοδυνάμως :

$$|\alpha_n| \leq \varphi \quad \forall n \in \mathbf{N}. \quad (3)$$

Ἄλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, ἂν ἰσχύῃ ἡ (3), τότε προφανῶς ἡ ακολουθία  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι φραγμένη, διότι ἡ (3) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν (2). Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι :

Μία ακολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι φραγμένη ἐν  $\mathbf{R}$  (ἢ καὶ ἄλλως «ἀπολύτως φραγμένη ἐν  $\mathbf{R}$ ») τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ πραγματικὸς ἀριθμὸς  $\varphi$  τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$|\alpha_n| \leq \varphi \quad \text{διὰ κάθε } n = 1, 2, \dots$$

Ὁ ἀριθμὸς  $\varphi$  καλεῖται **φράγμα**, ἀκριβέστερον «ἀπόλυτον φράγμα» τῆς ἀκολουθίας  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ἐν  $\mathbf{R}$ .

Φραγμένη ἀκολουθία εἶναι π.χ. ἡ  $\frac{2\eta\mu\nu}{\nu^3}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$ , διότι ἰσχύει :

$$\left| \frac{2\eta\mu\nu}{\nu^3} \right| = \frac{2|\eta\mu\nu|}{\nu^3} \leq \frac{2}{\nu^3} \leq 2 \quad \text{διὰ κάθε } \nu = 1, 2, \dots$$

Ὁμοίως ἡ ἀκολουθία :

$$\alpha_n = \frac{4 \sin 3\nu}{5\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad \text{διότι :}$$

$$|\alpha_n| = \left| \frac{4 \sin 3\nu}{5\nu} \right| = \frac{4|\sin 3\nu|}{5\nu} \leq \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\nu} \leq \frac{4}{5} \quad \text{διὰ κάθε } \nu = 1, 2, \dots$$

Ἀντιθέτως αἱ ἀκολουθίαι :

$$1, 4, 9, 16, \dots, \nu^2, \dots$$

καὶ

$$10, 10^2, 10^3, \dots, 10^\nu, \dots$$

δὲν εἶναι φραγμέναι (διὰ τὴν ;).

**§ 118.** Ἐστω μία ἀκολουθία πραγμ. ἀριθμῶν  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , π.χ. ἡ ἀκολουθία  $\alpha_n = \frac{1}{\nu}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$  καὶ μία συνθήκη π.χ. ἡ :  $\alpha_n < \frac{1}{998}$  παρατηροῦμεν

ὅτι, ἂν  $\nu = 1, 2, 3, \dots, 998$  ἥτοι, ἂν  $\nu \in \{1, 2, 3, \dots, 998\}$ , ἡ συνθήκη  $\alpha_n < \frac{1}{998}$

δὲν πληροῦται, ἀντιθέτως ἂν  $v = 999, 1000, 1001, \dots$ , ἤτοι ἂν καλέσωμεν  $v_0 \equiv 999$ , τότε διὰ κάθε δείκτην  $v \geq v_0 = 999$  ἡ συνθήκη :  $\alpha_v = \frac{1}{v} < \frac{1}{998}$  πληροῦται παρὰ τοῦ ὅρου  $\alpha_v$ , λέγομεν δὲ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅτι : «τελικῶς ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας  $\alpha_v = \frac{1}{v}$ ,  $v = 1, 2, \dots$  πληροῦν τὴν ὡς ἄνω συνθήκην».

Γενικῶς : ἂν  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  εἶναι μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν, θὰ λέγωμεν : «τελικῶς ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  πληροῦν μίαν συνθήκην ἢ ιδιότητα» τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ συνθήκη ἢ ἡ ιδιότης πληροῦται παρὰ τοῦ ὅρου  $\alpha_v$  διὰ κάθε δείκτην  $v \in \mathbb{N}$  ἐξαιρέσει ἐνὸς πεπερασμένου συνόλου δεικτῶν, δηλαδὴ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ εἰς δείκτης  $v_0 \in \mathbb{N}$  τοιοῦτος, ὥστε διὰ κάθε δείκτην  $v \geq v_0$ , ὁ ὅρος  $\alpha_v$  πληροῖ τὴν συνθήκην ἢ ιδιότητα ταύτην.

**§ 119.** Ἐστώσαν δύο ἀκολουθίαι :  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  καὶ  $\beta_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  ἑκτενῶς αἱ :

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_v, \dots$$

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_v, \dots$$

Μεταξὺ αὐτῶν ὀρίζονται τὰ κάτωθι :

**Ἰσότης.** Αἱ  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  καὶ  $\beta_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  καλοῦνται ἴσαι τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ :  $\alpha_v = \beta_v$  διὰ κάθε  $v \in \mathbb{N}$ .

**Ἀθροισμα τῆς  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  καὶ  $\beta_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$**  καλεῖται ἡ ἀκολουθία  $(\alpha_v + \beta_v)$ ,  $v = 1, 2, \dots$ , δηλαδὴ ἡ :  $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3, \dots, \alpha_v + \beta_v, \dots$

**Διαφορά τῆς  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  μείον  $\beta_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$**  καλεῖται ἡ ἀκολουθία  $\alpha_v - \beta_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$ , δηλαδὴ ἡ :  $\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \dots, \alpha_v - \beta_v, \dots$

**Γινόμενον ἐνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ  $\xi$  ἐπὶ τὴν ἀκολουθίαν  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$**  καλεῖται ἡ ἀκολουθία :  $\xi \alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$ , ἑκτενῶς ἡ ἀκολουθία :

$$\xi \alpha_1, \xi \alpha_2, \dots, \xi \alpha_v, \dots$$

**Γινόμενον τῆς  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  ἐπὶ τὴν  $\beta_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$**  καλεῖται ἡ ἀκολουθία  $\alpha_v \beta_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$ , δηλαδὴ ἡ :  $\alpha_1 \beta_1, \alpha_2 \beta_2, \dots, \alpha_v \beta_v, \dots$

**Πηλίκον τῆς  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  διὰ  $\beta_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  με  $\beta_v \neq 0 \quad \forall v \in \mathbb{N}$ ,** καλεῖται ἡ ἀκολουθία, ἡ ὁποία ἔχει ὅρους τὰ πηλικά τῶν ἀντιστοιχῶν ὁρῶν τῶν

ἐν λόγῳ ἀκολουθιῶν, δηλαδὴ ἡ ἀκολουθία  $\frac{\alpha_v}{\beta_v}$ ,  $v = 1, 2, \dots$  ἑκτενῶς ἡ :

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \dots, \frac{\alpha_v}{\beta_v}, \dots$$

**Τετραγωνικὴ ρίζα ἀκολουθίας  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  με  $\alpha_v \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{N}$ ,** καλεῖται ἡ ἀκολουθία :  $\sqrt{\alpha_v}$ ,  $v = 1, 2, \dots$  ἑκτενῶς ἡ :

$$\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_v}, \dots$$

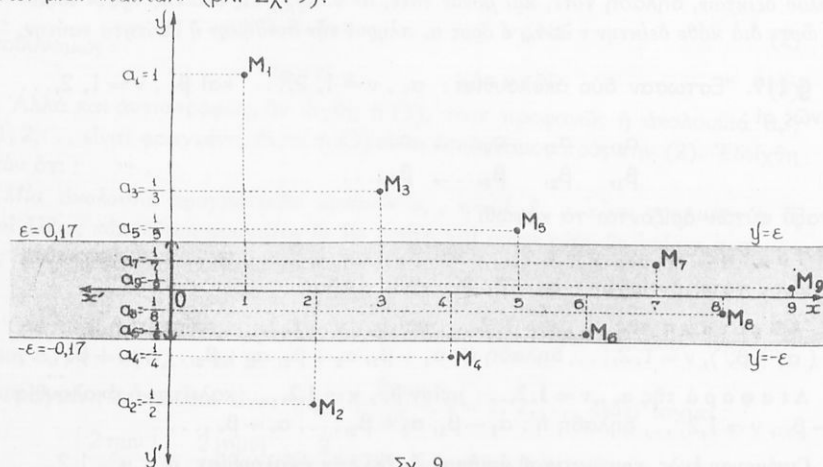
§ 120. \*Ορισμός.—Έστω ή ακολουθία  $\alpha_n$ ,  $n=1,2,\dots$  με γενικόν ὄρον

$$\alpha_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}, \text{ ἥτοι ἡ ακολουθία :}$$

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}, \dots$$

Αὕτη παρίσταται γραφικῶς ὡς εἰς τὸ κατωτέρω σχῆμα ἐμφαίνεται.

\*Ὡς θεωρήσωμεν τώρα ἓνα θετικὸν ἀριθμὸν  $\varepsilon$ , π.χ. τὸν  $\varepsilon=0,17$ , ὡς ἐπίσης καὶ τὰς εὐθείας με ἐξισώσεις  $y=\varepsilon=0,17$  καὶ  $y=-\varepsilon=-0,17$ , αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα τῶν  $x$  καὶ ὀρίζουν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων μίαν «ταινίαν» (βλ. Σχ. 9).



Σχ. 9

Παρατηροῦμεν εἰς τὸ ἀνωτέρω σχῆμα, ὅτι τὰ σημεῖα  $M_1, M_2, M_3, M_4$  καὶ  $M_5$  κεῖνται ἐκτὸς τῆς ταινίας, ἐνῶ τὰ ἀπὸ τοῦ δείκτου  $n=6$  καὶ «πέραν» ἀντίστοιχα σημεῖα, ἥτοι τὰ  $M_6, M_7, M_8, \dots$  εὐρίσκονται ὅλα ἐντὸς τῆς ταινίας τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν  $y=\varepsilon$  καὶ  $y=-\varepsilon$ . Τοῦτο σημαίνει ὅτι αἱ τεταγμέναι τῶν  $M_1, M_2, M_3, M_4$  καὶ  $M_5$ , ἥτοι οἱ ὅροι  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  τῆς ἐν λόγῳ ἀκολουθίας κεῖνται ἐκτὸς τοῦ ἀνοικτοῦ διαστήματος  $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ , ἐνῶ οἱ ἀπὸ τοῦ δείκτου  $n=6$  καὶ πέραν ἀντίστοιχοι ὅροι, ἥτοι οἱ  $\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \dots$  κεῖνται ὅλοι εἰς τὸ ἀνοικτὸν διάστημα  $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ , δηλαδή εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ μηδενός, καθόσον τὸ  $(-\varepsilon, +\varepsilon)$  γράφεται καὶ οὕτω:  $(0-\varepsilon, 0+\varepsilon)$ .

Ὡστε:  $-\varepsilon < \alpha_n < +\varepsilon \quad \forall \quad n \geq n_0 = 6 \quad (\varepsilon=0,17)$

ἢ ἰσοδυνάμως:

$$|\alpha_n| < \varepsilon \quad \forall \quad n \geq n_0 = 6.$$

Ἐὰν τώρα λάβωμεν ἓνα ἄλλον θετικὸν ἀριθμὸν  $\varepsilon$ , μικρότερον τοῦ προηγουμένου, π.χ. τὸν  $\varepsilon=0,09$ , καὶ ἐπαναλάβωμεν τὰ ἀνωτέρω, τότε καταλήγομεν

εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι τὰ σημεία  $M_1, M_2, \dots$  καὶ  $M_{11}$  κείνται ἐκτὸς τῆς ταινίας τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν  $y = \varepsilon = 0,09$  καὶ  $y = -\varepsilon = -0,09$ , ἐνῶ τὰ ἀπὸ τοῦ δείκτου  $v = 12$  καὶ πέραν ἀντίστοιχα σημεία, ἥτοι τὰ  $M_{12}, M_{13}, \dots, M_v, \dots$  εὐρίσκονται ἐντὸς τῆς ἐν λόγω ταινίας, δηλαδὴ αἱ τεταγμέναι τῶν σημείων τούτων, ἥτοι οἱ ὅροι:  $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_v, \dots$  τῆς ἐν λόγω ἀκολουθίας κείνται εἰς τὸ ἀνοικτὸν διάστημα  $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ , ἥτοι ἰσχύει:

$$-\varepsilon < \alpha_v < +\varepsilon \quad \forall v \geq v_0 = 12 \quad (\varepsilon = 0,09)$$

ἢ ἰσοδυνάμως:

$$|\alpha_v| < \varepsilon \quad \forall v \geq v_0 = 12.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι εἰς ἐκάστην ἐκλογὴν τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ  $\varepsilon$  ὑπάρχει εἰς δείκτης  $v_0$ , ὁ ὁποῖος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν  $\varepsilon$ , ἥτοι  $v_0 = v_0(\varepsilon)$ . Οὕτω, διὰ  $\varepsilon = 0,17$  ἔχομεν, ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω,  $v_0 = v_0(\varepsilon) = 6$ , ἐνῶ διὰ  $\varepsilon = 0,09$  ἔχομεν  $v_0 = v_0(\varepsilon) = 12$ .

Τὴν ἐν λόγω ἀκολουθίαν  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  μὲ  $\alpha_v = (-1)^{v-1} \cdot \frac{1}{v}$ , ἢ ὁποία πληροῖ τὰ ἀνωτέρω χαρακτηρίζομεν ὡς «μηδενικὴν ἀκολουθίαν».

Γενικῶς: Μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  καλεῖται **μηδενικὴ ἀκολουθία** καὶ θὰ συμβολίζομεν τοῦτο μὲ  $\alpha_v \rightarrow 0$  τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν: διὰ κάθε  $\varepsilon > 0$  ὑπάρχῃ δείκτης  $v_0 = v_0(\varepsilon)$  (ἐξαρτώμενος, ἐν γένει, ἐκ τοῦ  $\varepsilon$ ) τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ:

$$|\alpha_v| < \varepsilon \quad \text{διὰ κάθε } v \geq v_0(\varepsilon).$$

Συντόμως, μὲ χρήσιν τῶν γνωστῶν μας συμβόλων, ὁ ὀρισμὸς οὗτος δίδεται ὡς ἑξῆς:

$$\alpha_v \rightarrow 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists v_0 = v_0(\varepsilon) : |\alpha_v| < \varepsilon \quad \forall v \geq v_0$$

ορσ

## § 121. Παραδείγματα μηδενικῶν ἀκολουθιῶν.

**1ον.** Ἡ σταθερὰ ἀκολουθία  $\alpha_v = 0$ ,  $v = 1, 2, \dots$  εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία.

**2ον.** Ἡ ἀκολουθία  $\alpha_v = \frac{1}{v}$ ,  $v = 1, 2, \dots$  εἶναι μηδενικὴ, διότι διὰ τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν  $\varepsilon$  ὑπάρχει δείκτης  $v_0 = v_0(\varepsilon)$ , καὶ ὡς τοιοῦτος δύναται νὰ ληφθῇ ἐδῶ εἰς φυσικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ  $\frac{1}{\varepsilon}$ \*) τοιοῦτος, ὥστε διὰ κάθε  $v \geq v_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\text{ἰσχύει: } |\alpha_v| = \left| \frac{1}{v} \right| = \frac{1}{v} \leq \frac{1}{v_0} < \varepsilon, \text{ διότι ἐκ τῆς } v_0 > \frac{1}{\varepsilon} \implies \frac{1}{v_0} < \varepsilon.$$

Ἵνα ἐδείχθῃ ὅτι:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists v_0 = v_0(\varepsilon) \quad \left( \text{ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ } v_0 \geq \frac{1}{\varepsilon} \right) : |\alpha_v| = \left| \frac{1}{v} \right| < \varepsilon \quad \forall v \geq v_0.$$

\* Τοῦτο συμπεραίνομεν, διότι ἰσχύει:  $|\alpha_v| = \frac{1}{v} < \varepsilon \iff v > \frac{1}{\varepsilon}.$

Άρα :

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

**Σημειώσεις :** Η ακολουθία  $\alpha_n = \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  υπενθυμίζει τας άποσβεννυμένας άναπηθήσεις μιās έλαστικής σφαίρας επί ένός έπιπέδου. Τό ύψος εις τό όποϊον άνέρχεται ή σφαίρα εις έκάστην άναπήδησιν είναι μικρότερον τών προηγούμενων και τελικώς ή σφαίρα ίσορροπεϊ επί του έπιπέδου αύτου (ύψος άναπηδήσεως μηδέν).

**3ον.** Η ακολουθία  $\alpha_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$ , διότι  $\forall \epsilon > 0$  ύπάρχει  $n_0(\epsilon)$ , και

ώς τοιοϋτος δύναται επίσης νά ληφθῇ εις φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του  $\frac{1}{\epsilon}$  (διατί ;) τοιοϋτος, ώστε νά ίσχύη :

$$|\alpha_n| = |(-1)^n \cdot \frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \epsilon \text{ δια κάθε } n \geq n_0(\epsilon).$$

**Σημειώσεις :** Η ακολουθία του παραδείγματος (3) υπενθυμίζει τας άποσβεννυμένας άιωρήσεις ένός έκκεμοϋς ή ένός έλατηρίου περι τήν θέσιν ίσορροπίας αύτου.

**4ον.** Η ακολουθία  $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι μηδενική, διότι δια τυχόντα θετικών αριθμόν  $\epsilon$  ύπάρχει δείκτης  $n_0 \equiv n_0(\epsilon)$ , και ως τοιοϋτος δύναται νά ληφθῇ έδω εις φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του  $\frac{1}{\epsilon^2}$ , τοιοϋτος, ώστε: δια κάθε  $n \geq n_0 > \frac{1}{\epsilon^2}$

$$\text{ίσχύει: } |\alpha_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \epsilon, \text{ διότι εκ τῆς: } n \geq n_0 > \frac{1}{\epsilon^2} \implies \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \epsilon.$$

Ωστε έδειχθη ότι :

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \left( \text{άρκει νά ληφθῇ } n_0 > \frac{1}{\epsilon^2} \right): |\alpha_n| = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Άρα :

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

**§ 122. Ίδιότης I.** — Δια μίαν ακολουθίαν  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  πραγματικών αριθμών ίσχύει :

$$\text{Έάν } \alpha_n \rightarrow 0 \iff -\alpha_n \rightarrow 0 \text{ ως και } |\alpha_n| \rightarrow 0$$

**Απόδειξις :** Πράγματι· διότι, αν  $|\alpha_n| < \epsilon$ , τότε θα είναι και :

$$|-\alpha_n| = |\alpha_n| < \epsilon \quad \text{καθώς επίσης και } ||\alpha_n|| = |\alpha_n| < \epsilon.$$

**Αντιστρόφως :** αν :  $-\alpha_n \rightarrow 0$ , τότε  $|-\alpha_n| < \epsilon$ , δηλαδή  $|\alpha_n| < \epsilon$ , άρα  $\alpha_n \rightarrow 0$ , όπότε και  $|\alpha_n| \rightarrow 0$ .



**§ 123. 'Ιδιότης II.** — 'Εάν η ακολουθία  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι μηδενική, τότε και η προκύπτουσα εκ ταύτης διά προσθήκης ή διαγραφής ενός πεπερασμένου πλήθους όρων είναι επίσης μηδενική ακολουθία.

**Παράδειγμα :** 'Η  $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ , τότε και η ακολουθία:  $\beta_n = \frac{1}{n+4}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

έκτενώς ή :

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$$

ή όποια προκύπτει διά διαγραφής των τεσσάρων πρώτων όρων της  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι επίσης μηδενική ακολουθία.

**§ 124. 'Ιδιότης III.** — Κάθε μηδενική ακολουθία είναι φραγμένη.

**'Ητοι :** 'Εάν  $a_n \rightarrow 0$ , τότε  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι φραγμένη.

**'Απόδειξις.** 'Ας εφαρμόσωμεν τόν όρισμόν της μηδενικής ακολουθίας διά  $\epsilon = 1 > 0$ , τότε υπάρχει δείκτης  $n_0 = n_0(\epsilon)$  τοιοῦτος, ὥστε νά ἰσχύη :

$$|a_n| < 1 \quad \forall \quad n > n_0. \quad (1)$$

'Εστω τώρα  $A \equiv \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|)$ .  
Τότε θά ἔχωμεν :

$$|a_n| \leq A < A + 1 \quad \forall \quad n = 1, 2, \dots, n_0. \quad (2)$$

'Εκ τῶν (1) καί (2) προκύπτει :

$$|a_n| < A + 1 \equiv \varphi \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$$

'Οθεν ἡ  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι φραγμένη.

**Παρατήρησις.** 'Η ἀνωτέρω ἰδιότης δέν ἀντιστρέφεται, ἥτοι κάθε φραγμένη ακολουθία δέν είναι πάντοτε μηδενική. Περὶ τούτου βεβαιούμεθα ἀπὸ τὸ ἑξῆς παράδειγμα :

'Εστω ἡ ακολουθία:  $a_n = (-1)^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ἔκτενώς ἡ ακολουθία :

$$-1, 1, -1, 1, \dots$$

Αὕτη είναι φραγμένη, διότι:  $|a_n| = |(-1)^n| = 1 \leq 1 \quad \forall \quad n = 1, 2, 3, \dots$ , ἐν τούτοις ὁμως αὕτη δέν είναι μηδενική (διὰτί ;).

'Αντιθέτως ἡ ακολουθία  $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι φραγμένη, διότι ἰσχύει :

$$|a_n| = \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{καὶ συγχρόνως} \quad a_n \rightarrow 0.$$

**§ 125. 'Ιδιότης IV.** — Τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορά δύο μηδενικῶν ακολουθιῶν είναι μηδενική ακολουθία.

**'Ητοι :**

$$\left. \begin{array}{l} a_n \rightarrow 0 \\ \beta_n \rightarrow 0 \end{array} \right\} \implies a_n \pm \beta_n \rightarrow 0$$

**Ἀπόδειξις.** Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν αἱ  $\alpha_n$  καὶ  $\beta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι μηδενικαὶ ἀκολουθίαι θὰ ἔχωμεν, συμφώνως πρὸς τὸν ὀρισμὸν μηδενικῆς ἀκολουθίας : Διὰ κάθε  $\varepsilon > 0$ , ἄρα καὶ διὰ  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ , ὑπάρχει δείκτης  $n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$  καὶ  $n_0'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ , ὥστε νὰ ἰσχύη :

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{διὰ κάθε} \quad n \geq n_0'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \equiv n_0' \quad (1)$$

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{διὰ κάθε} \quad n \geq n_0''\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \equiv n_0'' \quad (2)$$

Ἐὰν καλέσωμεν  $n_0(\varepsilon)$  τὸν μέγιστον τῶν  $n_0'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$  καὶ  $n_0''\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ , ἤτοι ἂν  $n_0(\varepsilon) \equiv \max(n_0', n_0'')$ , τότε διὰ κάθε  $n \geq n_0(\varepsilon)$ , αἱ ἀνισότητες (1) καὶ (2) πληροῦνται συγχρόνως καὶ ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{διὰ κάθε} \quad n \geq n_0(\varepsilon),$$

ἤτοι :  $|\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$  καὶ  $|\alpha_n - \beta_n| < \varepsilon$  διὰ κάθε  $n > n_0(\varepsilon)$ .

Αἱ τελευταῖαι ἀνισότητες μᾶς πληροφοροῦν ὅτι αἱ ἀκολουθίαι :  $\alpha_n + \beta_n$ , καὶ  $\alpha_n - \beta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι μηδενικαί.

**§ 126. Ἰδιότης V.**—Τὸ γινόμενον μηδενικῆς ἀκολουθίας ἐπὶ φραγμένην εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία.

$$\text{Ἦτοι : } \left. \begin{array}{l} \text{Ἐὰν} \quad \alpha_n \rightarrow 0 \\ \beta_n, n = 1, 2, \dots \text{ φραγμένη} \end{array} \right\} \implies \alpha_n \beta_n \rightarrow 0$$

**Ἀπόδειξις :** Ἐστω  $\varphi$  ἓν φράγμα τῆς ἀκολουθίας  $\beta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Τότε ἔχομεν :

$$|\beta_n| \leq \varphi \quad \text{διὰ κάθε} \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ  $\alpha_n \rightarrow 0 \implies \forall \varepsilon > 0$ , ἄρα καὶ διὰ  $\frac{\varepsilon}{\varphi} > 0$ , ὑπάρχει δείκτης

$n_0 = n_0\left(\frac{\varepsilon}{\varphi}\right)$  τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύη :

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{\varphi} \quad \text{διὰ κάθε} \quad n \geq n_0. \quad (2)$$

Τότε ὁμως, διὰ κάθε  $n \geq n_0$ , ἔχομεν δυνάμει τῶν (1) καὶ (2) ὅτι :

$$|\alpha_n \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{\varphi} \cdot \varphi = \varepsilon.$$

Ὡστε ἐδείχθη ὅτι :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0\left(\frac{\varepsilon}{\varphi}\right) : |\alpha_n \beta_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Ἀρα :

$$\alpha_n \beta_n \rightarrow 0.$$

**§ 127. Ίδιότης VI.**—Τὸ γινόμενον δύο, ἢ γενικώτερον ἑνὸς πεπερασμένου πλήθους, μηδενικῶν ἀκολουθιῶν εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία.

Ἦτοι :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ἐὰν } \alpha_v \rightarrow 0 \\ \beta_v \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_v \beta_v \rightarrow 0$$

**Ἀπόδειξις.** Ἡ  $\beta_v, v=1, 2, \dots$  ὡς μηδενικὴ ἀκολουθία εἶναι (ιδιότης III) φραγμένη, ἄρα ἡ  $\alpha_v \beta_v, v=1, 2, \dots$ , ὡς γινόμενον μηδενικῆς ἐπὶ φραγμένην εἶναι (ιδιότης V) μηδενικὴ ἀκολουθία.

**Παράδειγμα:**  $\alpha_v = \frac{1}{v} \rightarrow 0, \beta_v = \frac{1}{v} \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha_v \beta_v = \frac{1}{v^2} \rightarrow 0.$

**Ἀσκήσις :** Ἀποδείξατε τὴν ἀνωτέρω ιδιότητα ἀνεξαρτήτως τῶν προηγουμένων ιδιοτήτων, ἀλλὰ μόνον τῇ βοήθειᾳ τοῦ ὁρίσμου μηδενικῆς ἀκολουθίας.

Ἐκ τῶν ιδιοτήτων IV καὶ V ἔπονται ἀμέσως αἱ κάτωθι δύο ιδιότητες :

**§ 128. Ίδιότης VII.**—Ἐὰν  $\alpha_v \rightarrow 0$ , τότε  $\xi \alpha_v \rightarrow 0$  διὰ κάθε  $\xi \in \mathbb{R}$ .

Οὕτως, ἐκ τῆς  $\frac{1}{v} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{3}{v} = 3 \cdot \frac{1}{v} \rightarrow 0.$

**§ 129. Ίδιότης VIII.**—Διὰ κάθε  $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ , ἐὰν  $\left. \begin{array}{l} \alpha_v \rightarrow 0 \\ \beta_v \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \xi \alpha_v + \eta \beta_v \rightarrow 0.$

**§ 130. Ίδιότης IX.**—Ἐὰν  $\beta_v \rightarrow 0$  καὶ διὰ μίαν ἀκολουθίαν  $\alpha_v, v=1, 2, \dots$  ἰσχύη :  $|\alpha_v| \leq |\beta_v|$  διὰ κάθε  $v=1, 2, \dots$ , τότε ἡ ἀκολουθία  $\alpha_v, v=1, 2, \dots$  εἶναι μηδενικὴ.

Ἦτοι :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ἐὰν } |\alpha_v| \leq |\beta_v| \quad \forall v \in \mathbb{N} \\ \beta_v \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_v \rightarrow 0$$

**Ἀπόδειξις :** Ἐκ τοῦ ὅτι  $\beta_v \rightarrow 0$  ἔπεται : Διὰ κάθε  $\varepsilon > 0$  ὑπάρχει  $v_0 = v_0(\varepsilon)$  τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύη :

$$|\beta_v| < \varepsilon \quad \text{διὰ κάθε } v \geq v_0(\varepsilon).$$

Τότε ὅμως ἔχομεν :

$$|\alpha_v| \leq |\beta_v| < \varepsilon, \quad \text{ἤτοι } |\alpha_v| < \varepsilon \quad \text{διὰ κάθε } v \geq v_0(\varepsilon).$$

Ἀρα :

$$\alpha_v \rightarrow 0.$$

**Ἐφαρμογή :** Δείξατε ὅτι :  $\alpha_v = \frac{1}{v^2 + v + 1} \rightarrow 0.$

Πράγματι :

$$|\alpha_v| = \frac{1}{v^2 + v + 1} < \frac{1}{v^2 + v} < \frac{1}{v} \quad \text{καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ιδιότητα (ἐπεὶ δὴ } \frac{1}{v} \rightarrow 0) \text{ εἶναι } \alpha_v \rightarrow 0.$$

τητα (ἐπεὶ δὴ  $\frac{1}{v} \rightarrow 0$ ) εἶναι  $\alpha_v \rightarrow 0.$

### § 131. Παραδείγματα εφαρμογής τών άνωτέρω ιδιοτήτων.

**Παράδειγμα 1ον.** Δείξτε ότι ή άκολουθία  $\alpha_v = \omega^v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  με  $\omega$  σταθερόν πραγματικόν αριθμόν και  $|\omega| < 1$  είναι μηδενική.

Ἀπόδειξις. α). Διά  $\omega = 0 < 1$  είναι προφανές.

β). Διά  $\omega \neq 0$ , ἔχομεν:  $0 < |\omega| < 1 \implies \frac{1}{|\omega|} > 1$ . Ἀρα  $\frac{1}{|\omega|} = 1 + \theta$ ,  $\theta > 0$  και ἔπομένως:

$$|\alpha_v| = |\omega^v| = |\omega|^v = \frac{1}{(1 + \theta)^v} \quad \forall v \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Ἀλλά ἀπό τήν γνωστήν ἀνισότητα τοῦ Bernoulli (§ 28, παρδ. 2), ἤτοι τήν ἀνισότητα:

$$(1 + \theta)^v \geq 1 + v\theta,$$

ἔχομεν:

$$(1 + \theta)^v > v\theta \quad \forall v \in \mathbb{N}.$$

Τότε ή (1) δίδει:

$$|\alpha_v| = |\omega^v| < \frac{1}{v\theta} = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{v} \quad \forall v \in \mathbb{N}.$$

Ἐπειδὴ  $\frac{1}{v} \rightarrow 0$ , δυνάμει τῶν ιδιοτήτων VII και IX είναι και  $\alpha_v = \omega^v \rightarrow 0$ .

Ἔστωτε ή άκολουθία:

$$\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \dots, \omega^v, \dots$$

με  $|\omega| < 1$  είναι μηδενική.

Οὕτω, π.χ., αί άκολουθίαι:  $\frac{1}{2^v}$ ,  $v = 1, 2, \dots$ ,  $\frac{1}{10^v}$ ,  $v = 1, 2, \dots$ ,  $3^{-v}$ ,  $v = 1, 2, \dots$

είναι πᾶσαι μηδενικαί άκολουθίαι.

**Παράδειγμα 2ον.** Ἡ άκολουθία:  $\alpha_v = a\omega^v$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots$  με  $|\omega| < 1$  και  $a \in \mathbb{R}$ , ἤτοι ή:  $a, a\omega, a\omega^2, a\omega^3, \dots, a\omega^v, \dots$ , είναι μηδενική.

Πράγματι: δυνάμει τοῦ άνωτέρω παραδείγματος και τῆς ιδιότητος VII.

**Παράδειγμα 3ον.** Δείξτε ότι ή άκολουθία  $\alpha_v = \sqrt{v^2 + 2} - \sqrt{v^2 + 1}$ ,  $v = 1, 2, \dots$  είναι μηδενική.

Ἀπόδειξις. Είναι γνωστόν ότι:  $x - y = \frac{x^2 - y^2}{x + y}$ . Ἐάν θέσωμεν  $x = \sqrt{v^2 + 2}$ ,  $y = \sqrt{v^2 + 1}$ ,

ἔχομεν:

$$|\alpha_v| = |\sqrt{v^2 + 2} - \sqrt{v^2 + 1}| = \left| \frac{(\sqrt{v^2 + 2})^2 - (\sqrt{v^2 + 1})^2}{\sqrt{v^2 + 2} + \sqrt{v^2 + 1}} \right| = \frac{1}{\sqrt{v^2 + 2} + \sqrt{v^2 + 1}} < \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}} < \frac{1}{v}.$$

Ἀρα, ἔπειδὴ  $\frac{1}{v} \rightarrow 0$ , δυνάμει τῆς ιδιότητος IX, προκύπτει ότι και ή άκολουθία:

$$\alpha_v = \sqrt{v^2 + 2} - \sqrt{v^2 + 1}, v = 1, 2, \dots \text{ είναι μηδενική.}$$

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

256. Δείξτε ότι αί κάτωθι άκολουθίαι είναι μηδενικαί:

$$1) \frac{v}{v^3 + v + 1}, \quad 2) \frac{(-1)^v}{(v+1)^2}, \quad 3) \frac{1 + \sqrt{v}}{v^3}, \quad 4) \sqrt{v^2 + 3} - \sqrt{v^2 + 1}.$$

257. Ὁμοίως αί άκολουθίαι:

$$1) \frac{\eta\mu v + \sigma\upsilon\nu^5 v}{\sqrt{v}}, \quad 2) v^{3/2} \cdot (\sqrt{v^4 + 4} - v^2), \quad 3) \sqrt[3]{v+1} - \sqrt[3]{v}, \quad 4) v \cdot (\sqrt{v^4 + 4} - v^2).$$

258. Διά  $\epsilon > 0$ , νά προσδιορισθῇ δείκτης  $v_0 = v_0(\epsilon)$ , ὥστε διά  $v \geq v_0(\epsilon)$ , νά είναι

$$|\alpha_v| < \epsilon,$$

όπου:  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  είναι:

$$1) \alpha_n = \frac{2}{n^2 + n}, \quad 2) \alpha_n = \frac{3}{4n^2 - 2n}, \quad 3) \alpha_n = \frac{\eta\mu\nu + \sigma\upsilon\nu^3\nu}{\sqrt{n}}, \quad 4) \alpha_n = \frac{3}{\sqrt{n^2 + 2}}.$$

259. Εάν η ακολουθία  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  είναι μηδενική, θα είναι μηδενική και η  $\sqrt[n]{|\alpha_n|}$ .

## ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΑΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ.

**§ 132. Όρισμός.**— Έστω η ακολουθία:

$$\alpha_n = \frac{3n + 1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Διά την ως άνω ακολουθίαν παρατηρούμεν ότι ισχύει:  $\alpha_n - 3 = \frac{1}{n}$ , ήτοι η ακολουθία  $\alpha_n - 3, n = 1, 2, \dots$  είναι μηδενική ακολουθία. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι ἡ ακολουθία  $\frac{3n + 1}{n}, n = 1, 2, \dots$  «συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν 3».

Γενικῶς θὰ λέγωμεν: «ἡ ακολουθία  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  πραγματικῶν ἀριθμῶν συγκλίνει πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν  $\alpha$  ἢ ἄλλως τείνει πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν  $\alpha$  καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μέ:  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ακολουθία  $(\alpha_n - \alpha), n = 1, 2, \dots$ , δηλαδή ἡ ακολουθία:

$$\alpha_1 - \alpha, \alpha_2 - \alpha, \alpha_3 - \alpha, \dots, \alpha_n - \alpha, \dots$$

εἶναι μηδενική.

Τὸν ἀριθμὸν  $\alpha$  καλοῦμεν «ὄριον» ἢ «ὀριακὴν τιμὴν» τῆς ακολουθίας  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  καὶ γράφομεν:  $\text{όρ } \alpha_n = \alpha$  ἢ ἄλλως  $\lim \alpha_n = \alpha$ .

Τὸ  $\lim$  εἶναι συγκοπή τῆς λατινικῆς λέξεως *limes* = ὄριον καὶ χρησιμοποιεῖται διεθνῶς.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ συνάγεται ὅτι:

ἡ  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  εἶναι μία μηδενική ακολουθία  $\Leftrightarrow \alpha_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lim \alpha_n = 0$ .

Ὅθεν ὁ ὁρισμὸς τῆς συγκλινούσης ακολουθίας διατυπώται συντόμως οὕτω:

$$\lim \alpha_n = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \lim (\alpha_n - \alpha) = 0$$

ορσ

Οὕτω διὰ τὸ παράδειγμά μας ἔχομεν:

$$\lim \frac{3n + 1}{n} = 3, \text{ διότι } \lim \left( \frac{3n + 1}{n} - 3 \right) = \lim \frac{1}{n} = 0.$$

**§ 133. Πρότασις.**— Ἡ ὀριακὴ τιμὴ μιᾶς συγκλινούσης ακολουθίας εἶναι μονοσημάντως ὠρισμένη, δηλ. κάθε συγκλίνουσα ακολουθία ἔχει ἀκριβῶς ἓνα ὄριον.

**Ἀπόδειξις.** Εάν συνέβαινε  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  καὶ συγχρόνως  $\alpha_n \rightarrow \alpha'$  μὲ  $\alpha \neq \alpha'$ , τότε θὰ ἔπρεπε αἱ:  $\alpha_n - \alpha, n = 1, 2, \dots$  καὶ  $\alpha_n - \alpha', n = 1, 2, \dots$  νὰ εἶναι μηδενικαὶ ἀκολουθίαι, συνεπῶς καὶ ἡ διαφορά των, ἥτοι ἡ ακολουθία:

$$\beta_n \equiv (\alpha_n - \alpha) - (\alpha_n - \alpha') = \alpha' - \alpha, \quad n = 1, 2, \dots$$

είναι μηδενική· αυτή όμως είναι σταθερά, ήτοι  $\beta_n = \alpha' - \alpha$  δια κάθε  $n=1,2,\dots$  είναι όθεν μηδενική τότε, και μόνον τότε, αν  $\alpha' - \alpha = 0$  (διατί ;).

Διὰ τὰς συγκλινούσας ακολουθίας ἰσχύει τὸ κάτωθι :

**§ 134. Θεώρημα.**— (Ίσοδύναμοι ὁρίσμοι συγκλινούσης ακολουθίας).

Ἐστω  $a_n, n=1,2,\dots$  μία ακολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν· αἱ κάτωθι προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι :

(i). Ἡ ακολουθία  $a_n, n=1,2,\dots$  συγκλίνει πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν  $a$ , ἥτοι  $\lim a_n = a, a \in \mathbb{R}$ .

(ii). Διὰ κάθε  $\varepsilon > 0$  ὑπάρχει δείκτης  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  (ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ  $\varepsilon$ ) τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύη :

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ διὰ κάθε } n \geq n_0.$$

Ἡ ὅπερ τὸ αὐτό :

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \text{ διὰ κάθε } n \geq n_0.$$

Ἀπόδειξις. (i)  $\implies$  (ii). Πράγματι·  $\lim a_n = a \implies \lim(a_n - a) = 0$ , τὸ ὅποῖον, δυνάμει τοῦ ὁρίσμου τῆς μηδενικῆς ακολουθίας, σημαίνει ὅτι :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \text{ τοιοῦτος, ὥστε διὰ κάθε } n \geq n_0 \text{ ἰσχύει :}$$

$$|a_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

(ii)  $\implies$  (i). Πράγματι· δυνάμει τοῦ ὁρίσμου τῆς μηδενικῆς ακολουθίας ἡ πρότασις (ii) δηλοῖ ὅτι ἡ ακολουθία  $a_n - a, n=1,2,\dots$  εἶναι μηδενική, τότε ὅμως, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς συγκλινούσης ακολουθίας, ἔπεται ὅτι :  $\lim a_n = a$ .

**Παραδείγματα συγκλινουσῶν καὶ μὴ συγκλινουσῶν ακολουθιῶν :**

1ον· Ἡ ακολουθία  $a_n = 1, n=1,2,\dots$ , δηλαδή ἡ ακολουθία :  $1, 1, 1, \dots, 1, \dots$  συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν 1, διότι ἡ ακολουθία  $a_n - 1, n=1,2,\dots$  εἶναι μηδενική ακολουθία.

Γενικῶς κάθε «σταθερά ακολουθία» :  $c, c, c, \dots, c, \dots$  διὰ  $c \in \mathbb{R}$ , συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν  $c$ .

2ον· Δείξατε ὅτι ἡ ακολουθία  $a_n = \frac{2n-1}{3n}, n=1,2,\dots$

συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν  $\frac{2}{3}$ , ἥτοι·  $\lim a_n = \lim \frac{2n-1}{3n} = \frac{2}{3}$ .

Ἀπόδειξις. Ἐχομεν :

$$\frac{2n-1}{3n} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3n} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n}, \quad n=1,2,\dots$$

καὶ ἐπειδὴ :

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \text{ἐπεται : } \lim \frac{2n-1}{3n} = \frac{2}{3}.$$

Ὁμοίως εἶναι :

$$\lim \frac{3n-5}{4n} = \frac{3}{4} \quad (\text{διατί ;}).$$

Δίδομεν κατωτέρω καὶ δύο παραδείγματα ακολουθιῶν αἱ ὁποῖαι δὲν συγκλίνουν ἐν  $\mathbb{R}$  προσέξατε τὴν ἀπόδειξιν :

3ον· Δείξατε ὅτι ἡ ακολουθία  $a_n = (-1)^n, n=1,2,\dots$  δὲν συγκλίνει ἐν  $\mathbb{R}$ .

Ἀπόδειξις. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ακολουθία  $a_n = (-1)^n, n=1,2,\dots$  συγκλίνει πρὸς τινὰ ἀριθμὸν  $x \in \mathbb{R}$ . Τότε διὰ κάθε  $\varepsilon > 0$ , ἄρα καὶ διὰ  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , ὑπάρχει δείκτης  $n_0 \in \mathbb{N}$  τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύη :

$$|(-1)^n - x| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0.$$

Ειδικώς :

$$|(-1)^{v_0} - x| < \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad |(-1)^{v_0+1} - x| < \frac{1}{2},$$

διότι  $v_0 \geq v_0$  και  $v_0 + 1 \geq v_0$ . Τότε όμως έχουμε :

$$|(-1)^{v_0} - (-1)^{v_0+1}| = |(-1)^{v_0} - x + x - (-1)^{v_0+1}| \leq |(-1)^{v_0} - x| + |x - (-1)^{v_0+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\text{ήτοι :} \quad |(-1)^{v_0} - (-1)^{v_0+1}| < 1. \quad (1)$$

$$\text{'Αλλά :} \quad |(-1)^{v_0} - (-1)^{v_0+1}| = 2. \quad (2)$$

\*Εκ τῶν (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι  $2 < 1$ , άτοπον. \*Επειδή η υπόθεση ότι η ακολουθία  $(-1)^v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  συγκλίνει ἐν  $\mathbf{R}$  ὁδηγεῖ εἰς άτοπον, συμπεραίνουμε ὅτι αὕτη δὲν συγκλίνει ἐν  $\mathbf{R}$ .

**4ον. Δειξάτε ὅτι ἡ ἀκολουθία  $a_v = v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  δὲν συγκλίνει ἐν  $\mathbf{R}$ .**

\*Απόδειξις. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία :  $1, 2, \dots, v, \dots$  συγκλίνει πρὸς τινα ἀριθμὸν  $y \in \mathbf{R}$ . Τότε δοθέντος  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ , ὑπάρχει δείκτης  $v_0 \in \mathbf{N}$  τοιοῦτος, ὥστε :

$$|v - y| < \frac{1}{3} \quad \forall \quad v \geq v_0.$$

Εἰδικῶς :

$$|v_0 - y| < \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad |v_0 + 1 - y| < \frac{1}{3},$$

διότι :  $v_0 \geq v_0$  και  $v_0 + 1 \geq v_0$ . Τότε όμως έχουμε :

$$1 = |(v_0 + 1) - v_0| \leq |v_0 + 1 - y| + |y - v_0| < \frac{1}{3} + \frac{1}{3}.$$

$$\text{ήτοι :} \quad 1 < \frac{2}{3}.$$

\*Επειδή η υπόθεση ότι η ἀκολουθία  $a_v = v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  συγκλίνει ἐν  $\mathbf{R}$  ὁδηγεῖ εἰς άτοπον, συμπεραίνουμε ὅτι αὕτη ἡ ἀκολουθία δὲν συγκλίνει ἐν  $\mathbf{R}$ .

## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

**§ 135. Ἰδιότης I.** — Ἐστω ἡ ἀκολουθία  $a_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$ . Τότε ἰσχύει :

$$\text{'Εὰν} \quad a_v \rightarrow a \implies -a_v \rightarrow -a$$

\*Απόδειξις. Πράγματι· ἐπειδὴ  $a_v \rightarrow a \implies (a_v - a) \rightarrow 0$ , τότε ὅμως (§ 122, ἰδ. I) καὶ ἡ  $-(a_v - a) = -a_v + a$ ,  $v = 1, 2, \dots$  εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία, ἥτοι :  $-a_v - (-a) \rightarrow 0$ . \*Αρα :  $-a_v \rightarrow -a$ .

**§ 136. Ἰδιότης II.** — Ἐστω ἡ ἀκολουθία  $a_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$ . Τότε ἰσχύει :

$$\text{'Εὰν} \quad a_v \rightarrow a \implies |a_v| \rightarrow |a|$$

Τὸ ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει πάντοτε, δηλαδὴ τὸ γεγονός, ὅτι ἡ ἀκολουθία  $a_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  συγκλίνει πρὸς τὸ  $|a|$  δὲν συνεπάγεται ὅτι  $a_v \rightarrow a$ .

\*Απόδειξις. Πράγματι· ἀπὸ  $a_v \rightarrow a \implies (a_v - a) \rightarrow 0$ , τότε ὅμως (§ 122, ἰδ. I) καὶ  $|a_v - a| \rightarrow 0$ .

Άλλά  $|\alpha_n| - |\alpha| \leq |\alpha_n - \alpha| \rightarrow 0$ , άρα και  $(|\alpha_n| - |\alpha|) \rightarrow 0$  (§ 130, ιδ. IX)

Τότε όμως:  $\lim |\alpha_n| = |\alpha|$ .

Τό ότι τό αντίστροφο δέν ισχύει πάντοτε δεικνύει τό εξής παράδειγμα:

Ή άκολουθία:  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$  δέν συγκλίνει (διاتی;) και όμως ή άκολουθία:  $|1|, |-1|, |1|, |-1|, \dots, |(-1)^{n+1}|, \dots$  συγκλίνει εις τό 1.

**Παρατηρήσεις:** 1). Εις τήν περίπτωση καθ' ήν ή άκολουθία  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι μηδενική, τότε ή ιδιότης II, ως έδειχθη § 122, αντιστρέφεται, ήτοι,  $\alpha_n \rightarrow 0 \implies |\alpha_n| \rightarrow 0$ .

2). Έκ του συμπεράσματος τής άνωτέρω ιδιότητος II συνάγεται ότι επιτρέπεται νά γράψωμεν:

$$\lim |\alpha_n| = |\lim \alpha_n|$$

ήτοι: Τό όριο τής απόλυτου τιμής μιιάς άκολουθίας πραγματικών αριθμών, ισούται με τήν απόλυτον τιμήν του όριου αυτής.

**§ 137. Ίδιότης III.** — Έστωσαν αί άκολουθίαι  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  και  $\beta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Τότε ισχύει:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_n \rightarrow \alpha \\ \beta_n \rightarrow \alpha \end{array} \right\} \implies \alpha_n - \beta_n \rightarrow 0$$

**Απόδειξις.** Πράγματι, έπειδή  $\alpha_n - \alpha$  και  $\beta_n - \alpha$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι μηδενικαί άκολουθίαι και ή διαφορά αυτών:

$$(\alpha_n - \alpha) - (\beta_n - \alpha) = \alpha_n - \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

είναι μία μηδενική άκολουθία.

**§ 138. Ίδιότης IV.** — Κάθε συγκλίνουσα έν R άκολουθία είναι φραγμένη.

Ήτοι:

$$\alpha_n \rightarrow \alpha \implies \alpha_n, n = 1, 2, \dots \text{ είναι φραγμένη}$$

**Απόδειξις.** Πράγματι από  $\alpha_n \rightarrow \alpha \implies (\alpha_n - \alpha) \rightarrow 0$ , τότε όμως (§ 126, III, § 124) ή  $\alpha_n - \alpha$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι φραγμένη, ήτοι υπάρχει πραγματικός αριθμός  $\theta > 0$  τοιοϋτος, ώστε νά ισχύη:

$$|\alpha_n - \alpha| \leq \theta \quad \text{διά κάθε } n = 1, 2, \dots$$

Άλλά:

$$|\alpha_n| - |\alpha| \leq |\alpha_n - \alpha|$$

άρα κατά μείζονα λόγον έχομεν:

$$|\alpha_n| - |\alpha| \leq \theta \quad \text{διά κάθε } n = 1, 2, \dots$$

δηλαδή:

$$|\alpha_n| \leq |\alpha| + \theta \quad \text{διά κάθε } n = 1, 2, \dots$$

ή

$$|\alpha_n| \leq \varphi \quad \text{διά κάθε } n = 1, 2, \dots$$

όπου  $\varphi = |\alpha| + \theta$ .

Άρα ή άκολουθία  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι φραγμένη.

**Παρατηρήσεις:** α). Ή ιδιότης IV ισχυρίζεται ότι μία άκολουθία ή όποία συγκλίνει έν R είναι φραγμένη. Τό αντίστροφο δέν άληθεύει πάντοτε, δηλαδή κάθε φραγμένη άκολουθία δέν είναι πάντοτε συγκλίνουσα. Περί τούτου βεβαιούμεθα από τό εξής παράδειγμα: Ή άκολουθία  $(-1)^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , άν και είναι φραγμένη δέν συγκλίνει (βλ. πρδ. 3, § 134).



β'). 'Η ιδιότης IV είναι επίσης χρήσιμος προκειμένου να αποδείξωμεν ότι ώρισμένοι άκολουθία δέν συγκλίνουν έν R. Ούτως, ή άκολουθία 1, 2, ..., ν, ... δέν συγκλίνει έν R, διότι αύτη δέν είναι φραγμένη (διατί ;).

**§ 139. 'Ιδιότης V.**—Τό άθροισμα ή ή διαφορά δύο συγκλινουσών άκολουθιών συγκλίνει άντιστοίχως πρὸς τό άθροισμα ή τήν διαφοράν τών όρίων αυτών.

'Ητοι:

$$\left. \begin{array}{l} \text{'Εάν} \\ a_n \rightarrow a \\ \beta_n \rightarrow \beta \end{array} \right\} \Rightarrow a_n \pm \beta_n \rightarrow a \pm \beta$$

**'Απόδειξις.** Θα αποδείξωμεν τήν ιδιότητα μόνον διά τό άθροισμα, αναλόγως έργαζόμεθα και διά τήν διαφοράν  $a_n - \beta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Πράγματι· έπειδή  $a_n \rightarrow a$  και  $\beta_n \rightarrow \beta$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι μηδενικά άκολουθία και τό άθροισμά των :

$$(a_n - a) + (\beta_n - \beta) = (a_n + \beta_n) - (a + \beta), \quad n = 1, 2, \dots$$

είναι μηδενική άκολουθία.

\*Αρα:

$$a_n + \beta_n \rightarrow a + \beta.$$

**Παρατηρήσεις :** 1). 'Η άνωτέρω ιδιότης γράφεται συνήθως ως εξής :

$$\lim(a_n \pm \beta_n) = \lim a_n \pm \lim \beta_n.$$

'Ητοι : Τό όριον άθροίσματος (άντιστοίχως διαφοράς) δύο συγκλινουσών άκολουθιών ισούται πρὸς τό άθροισμα (άντιστοίχως διαφοράν) τών όρίων αυτών.

2). 'Η άνωτέρω ιδιότης ισχύει και διά πεπερασμένες τό πλήθος συγκλινούσας άκολουθίας, ήτοι :

$$\lim(a_n + \beta_n + \dots + x_n) = \lim a_n + \lim \beta_n + \dots + \lim x_n.$$

3). 'Η άνωτέρω ιδιότης δέν ισχύει διά συγκλινούσας άκολουθίας άπειρών πλήθους. Περί τούτου πειθόμεθα έκ τοῦ εξής παραδείγματος.

\*Εστω ευθύγραμμον τμήμα AB μήκους ίσου πρὸς τήν μονάδα, τό όποϊον διαιρούμεν εἰς ν ἴσα μέρη, ένθα  $n \in \mathbb{N}$ . Τότε τό άθροισμα :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n},$$

έάν  $\epsilon_{\chi\eta}$  ν προσθετέους, θα είναι ίσον πρὸς :  $\frac{1}{n} \cdot n = 1$ , διά κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

'Εάν εφαρμόσωμεν τήν άνωτέρω ιδιότητα διά τό ως άνω άθροισμα έχομεν :

$$\lim\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \lim \frac{1}{n} + \lim \frac{1}{n} + \dots + \lim \frac{1}{n} = 0 + 0 + \dots + 0 = 0,$$

ήτοι ψευδές, καθ' όσον τό ευθύγραμμον τμήμα AB έλήφθη μέ μήκος ίσον πρὸς τήν μονάδα.

**§ 140. 'Ιδιότης VI.**—'Εστω ή άκολουθία  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Τότε ισχύει :

$$\left. \text{'Εάν} \right\} a_n \rightarrow a \Rightarrow \lambda a_n \rightarrow \lambda a \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

**'Απόδειξις.** Πράγματι· διότι ή άκολουθία :

$$\lambda a_n - \lambda a = \lambda(a_n - a), \quad n = 1, 2, \dots$$

είναι μηδενική, καθόσον ή άκολουθία  $a_n - a$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι μηδενική.

**Παρατηρήσεις :** Έκ του συμπεράσματος της ανωτέρω ιδιότητας συνάγεται ότι επιτρέπεται να γράφωμεν :

$$\lim(\lambda \cdot \alpha_n) = \lambda \cdot \lim \alpha_n, \quad \text{διὰ κάθε } \lambda \in \mathbf{R} \quad \text{μὲ } \lambda = \text{σταθερόν.}$$

Οὕτω :

$$\lim \frac{5}{n} = 5 \cdot \lim \frac{1}{n} = 5 \cdot 0 = 0.$$

Έκ τῶν ιδιοτήτων V καὶ VI ἔπεται εὐκόλως ἡ :

**§ 141. Ἰδιότης VII.**— Έστωσαν αἱ ἀκολουθίαι  $\alpha_n, \beta_n, n = 1, 2, \dots$ . Τότε ἰσχύει :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_n \rightarrow a \\ \beta_n \rightarrow \beta \end{array} \right\} \implies \xi \alpha_n + \eta \beta_n \rightarrow \xi a + \eta \beta \quad \forall \xi, \eta \in \mathbf{R}.$$

**§ 142. Ἰδιότης VIII.**— Τὸ γινόμενον δύο συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν συγκλίνει πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων αὐτῶν.

Ἦτοι :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_n \rightarrow a \\ \beta_n \rightarrow \beta \end{array} \right\} \implies \alpha_n \beta_n \rightarrow a\beta$$

**Ἀπόδειξις.** Πράγματι ἡ ἀκολουθία :

$\alpha_n \beta_n - a\beta = \alpha_n \beta_n - \beta_n \alpha + (\beta_n \alpha - a\beta) = \beta_n (\alpha_n - \alpha) + \alpha(\beta_n - \beta), \quad n = 1, 2, \dots$   
 εἶναι μηδενική, διότι ἀφ' ἐνὸς μὲν ἡ  $\alpha_n - \alpha \rightarrow 0$  καὶ  $\beta_n, n = 1, 2, \dots$  ὡς συγκλίνουσα εἶναι φραγμένη, ἄρα  $\beta_n (\alpha_n - \alpha) \rightarrow 0$ , ἀφ' ἑτέρου δὲ  $\beta_n - \beta \rightarrow 0$  καὶ  $\alpha$  σταθερά, ἄρα  $\alpha(\beta_n - \beta) \rightarrow 0$ . Έπομένως ἡ  $\alpha_n \beta_n - a\beta, n = 1, 2, \dots$  εἶναι μηδενική ἀκολουθία, ὡς ἄθροισμα μηδενικῶν ἀκολουθιῶν, ὅθεν :  $\alpha_n \beta_n \rightarrow a\beta$ .

**Παρατηρήσεις :** 1). Τὸ συμπεράσμα τῆς ανωτέρω ιδιότητος γράφεται συνήθως ὡς ἑξῆς :

$$\lim(\alpha_n \cdot \beta_n) = \lim \alpha_n \cdot \lim \beta_n.$$

Ἦτοι : Τὸ ὅριον τοῦ γινομένου δύο συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων τῶν παραγόντων.

2). Ἡ ανωτέρω ιδιότης ἰσχύει γενικώτερον διὰ περισσοτέρους παράγοντας, ἀλλὰ πεπερασμένον τὸ πλῆθος, ἦτοι :  $\lim(\alpha_n \cdot \beta_n \cdot \gamma_n \cdots x_n) = \lim \alpha_n \cdot \lim \beta_n \cdot \lim \gamma_n \cdots \lim x_n$ .

Τὸ ὅτι ἡ ανωτέρω ιδιότης δὲν ἰσχύει, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων δὲν εἶναι πεπερασμένον, πειθόμεθα ἐκ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος : Έστω ἡ ἀκολουθία :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Κατὰ τὴν ιδιότητα VIII θὰ ἔχωμεν :

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

ἀλλὰ  $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \lim \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$  καὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παραγόντων εἶναι ἴσον πρὸς τὴν μονάδα, ἄρα  $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1$ , ὅπερ ἄτοπον, διότι ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω  $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \equiv e = 2,7182818 \dots$

**§ 143. Ἰδιότης ΙΧ.**—Ἐὰν  $\beta_n \rightarrow \beta \neq 0$  καὶ  $\beta_n \neq 0$  διὰ κάθε  $n = 1, 2, \dots$ , τότε ἡ ἀκολουθία  $\frac{1}{\beta_n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν  $\frac{1}{\beta}$ , ἥτοι :

$$\lim \frac{1}{\beta_n} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\lim \beta_n}$$

**Ἀπόδειξις.** Πράγματι, ἔχομεν :

$$\frac{1}{\beta_n} - \frac{1}{\beta} = \frac{\beta - \beta_n}{\beta \beta_n} = -\frac{1}{\beta \beta_n} \cdot (\beta_n - \beta), \quad n = 1, 2, \dots$$

ἡ ἀκολουθία ὅμως  $\beta \cdot \beta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ὡς συγκλίνουσα πρὸς τὸ  $\beta^2$  εἶναι φραγμένη, ὁπότε καὶ ἡ ἀκολουθία  $\frac{1}{\beta \cdot \beta_n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι φραγμένη (διὰτί ;), ἐξ ἄλλου ἡ  $\beta_n - \beta$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι μία μηδενικὴ ἀκολουθία, ὅθεν καὶ ἡ :

$$\frac{1}{\beta_n} - \frac{1}{\beta}, \quad n = 1, 2, \dots$$

εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία, ὡς γινόμενον μηδενικῆς ἐπὶ φραγμένην ἀκολουθίαν.

Ἄρα :

$$\lim \frac{1}{\beta_n} = \frac{1}{\beta}.$$

**§ 144. Ἰδιότης Χ.**—Ἐὰν  $\alpha_n \rightarrow \alpha$ ,  $\beta_n \rightarrow \beta \neq 0$  καὶ εἶναι  $\beta_n \neq 0$  διὰ κάθε  $n = 1, 2, \dots$ , τότε ἰσχύει :

$$\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lim \alpha_n}{\lim \beta_n}$$

**Ἀπόδειξις.** Ἡ ἀπόδειξις ἀπλουστάτη, ἂν ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν αἱ ἰδιότητες VIII καὶ IX.

**§ 145. Ἰδιότης ΧΙ.**—Ἐὰν δύο ἀκολουθίαι  $\alpha_n$  καὶ  $\beta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  συγκλίνουν καὶ ἰσχύη  $\alpha_n \leq \beta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , τότε θὰ ἔχωμεν :  $\lim \alpha_n \leq \lim \beta_n$ .

**Ἀπόδειξις.** Ἐστῶσαν  $\alpha$  καὶ  $\beta$  τὰ ὅρια τῶν  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  καὶ  $\beta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ἀντιστοίχως, ἥτοι  $\lim \alpha_n = \alpha$  καὶ  $\lim \beta_n = \beta$ . Θὰ δείξωμεν ὅτι  $\alpha \leq \beta$ .

Ἐν πρώτοις ἔχομεν  $\beta_n - \alpha_n \geq 0$  διὰ κάθε  $n = 1, 2, \dots$ . Ἐξ ἄλλου ἡ ἀκολουθία  $\beta_n - \alpha_n \rightarrow \beta - \alpha$ . Τοῦτο σημαίνει ὅτι διὰ κάθε  $\varepsilon > 0$  θὰ ἔχωμεν :

$$(\beta - \alpha) - \varepsilon < \beta_n - \alpha_n < (\beta - \alpha) + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon).$$

Ἐὰν ᾗτο  $\alpha > \beta$ , τότε  $\alpha - \beta > 0$  καὶ ἡ ἀνωτέρω ἀνίσωτης διὰ  $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$  γίνεται :

$$2(\beta - \alpha) < \beta_n - \alpha_n < 0 \quad \text{διὰ κάθε } n \geq n_0(\varepsilon),$$

δηλαδὴ  $\beta_n < \alpha_n$  τελικῶς δι' ὅλους τοὺς δείκτας, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Ἄρα :

$$\alpha \leq \beta.$$

Θεωροῦντες τὴν  $\beta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ἢ τὴν  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ὡς σταθερὰν ἀκολουθίαν ἔχομεν ἀντ.στοίχως τὰ κάτωθι πορίσματα:

**Πόρισμα I.**—Ἐὰν οἱ ὅροι ἀκολουθίας  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι ἀπὸ τινος δείκτου καὶ πέραν μικρότεροι ἢ ἴσοι ἀριθμοῦ  $\beta$ , τότε ἰσχύει:  $\lim \alpha_n \leq \beta$ .

Ἦτοι:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ἐὰν} \quad \alpha_n \rightarrow \alpha \\ \alpha_n \leq \beta, \forall n \geq n_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \leq \beta.$$

**Πόρισμα II.**—Ἐστω ἡ ἀκολουθία  $\beta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Τότε ἰσχύει:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ἐὰν} \quad \beta_n \rightarrow \beta \\ \alpha \leq \beta_n, \forall n \geq n_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \leq \beta = \lim \beta_n$$

**§ 146. Ἰδιότης XII.**—Ἐστωσαν αἱ ἀκολουθίαι  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ ,  $\gamma_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Τότε ἰσχύει:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ἐὰν} \quad \beta_n \rightarrow \alpha, \quad \gamma_n \rightarrow \alpha \\ \beta_n \leq \alpha_n \leq \gamma_n, n = 1, 2, \dots \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_n \rightarrow \alpha$$

**Ἀπόδειξις.** Ἀπὸ  $\beta_n \rightarrow \alpha$  ἔπεται: διὰ κάθε  $\varepsilon > 0$  ὑπάρχει δείκτης  $n_1(\varepsilon)$  τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ:  $\alpha - \varepsilon < \beta_n < \alpha + \varepsilon$  διὰ κάθε  $n \geq n_1(\varepsilon)$ .

Ὁμοίως ἀπὸ  $\gamma_n \rightarrow \alpha$  ἔπεται ὅτι ὑπάρχει δείκτης  $n_2(\varepsilon)$  τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ:

$$\alpha - \varepsilon < \gamma_n < \alpha + \varepsilon \quad \text{διὰ κάθε } n \geq n_2(\varepsilon).$$

Τότε ὅμως, ἐὰν  $n_0 = \max [n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)]$ , θὰ ἔχωμεν διὰ κάθε  $n \geq n_0$

$$\alpha - \varepsilon < \beta_n \leq \alpha_n \leq \gamma_n < \alpha + \varepsilon,$$

ἥτοι

$$\alpha - \varepsilon < \alpha_n < \alpha + \varepsilon$$

ἢ ἰσοδυνάμως

$$|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon \quad \text{διὰ κάθε } n \geq n_0.$$

Ἀρα:

$$\lim \alpha_n = \alpha.$$

## § 147. Παραδείγματα ἐφαρμογῆς τῶν ἀνωτέρω ιδιοτήτων.

**Παράδειγμα Iον:** Δείξατε ὅτι:

$$\lim \frac{2v^2 + 4v - 7}{3v^2 + 1} = \frac{2}{3}.$$

**Λύσις.** Διαιροῦμεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος διὰ τῆς μεγαλύτερας δυνάμεως τοῦ  $v$ , δηλ. διὰ  $v^2$  καὶ ἡ ἀκολουθία γράφεται:

$$\frac{2v^2 + 4v - 7}{3v^2 + 1} = \frac{2 + \frac{4}{v} - \frac{7}{v^2}}{3 + \frac{1}{v^2}}.$$

Αί ακολουθίαί όμως  $\frac{4}{v} = 4 \cdot \frac{1}{v}$ ,  $v = 1, 2, \dots$ ,  $\frac{1}{v^2}$ ,  $v = 1, 2, \dots$  καί  $\frac{7}{v^2} = 7 \cdot \frac{1}{v^2}$ ,  $v = 1, 2, \dots$  είναι πᾶσαι μηδενικαί ακολουθίαί. Ἐπομένως ἔχομεν κατὰ σειράν :

$$\begin{aligned} \lim \frac{2v^2 + 4v - 7}{3v^2 + 1} &= \lim \frac{2 + \frac{4}{v} - \frac{7}{v^2}}{3 + \frac{1}{v^2}} = \frac{\lim \left( 2 + \frac{4}{v} - \frac{7}{v^2} \right)}{\lim \left( 3 + \frac{1}{v^2} \right)} = \\ &= \frac{2 + \lim \frac{4}{v} - \lim \frac{7}{v^2}}{3 + \lim \frac{1}{v^2}} = \frac{2 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ὡστε :  $\lim \frac{2v^2 + 4v - 7}{3v^2 + 1} = \frac{2}{3} \equiv$  μέ τὸν λόγον τῶν συντελεστῶν τῶν

μεγιστοβαθμίων ὅρων ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ.

Γενικῶς : "Ὅταν ὁ βαθμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι ἴσος μέ τὸν βαθμὸν τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα ἔχει ὅριον τὸν λόγον τῶν συντελεστῶν τῶν μεγιστοβαθμίων ὅρων ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ.

**Παράδειγμα 2ον :** Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία  $a_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$ , ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$a_v \equiv \frac{v^3 - v^2 + 1}{v^5 + 2v^4 - 3}$$

εἶναι μηδενική.

**Λύσις.** Διαιροῦμεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος διὰ τῆς μεγαλυτέρας δυνάμεως τοῦ  $v$ , δηλ. διὰ  $v^5$ , ὅτε λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον κλάσμα :

$$\frac{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^3} + \frac{1}{v^5}}{1 + \frac{2}{v} - \frac{3}{v^5}}.$$

Ἀλλὰ  $\lim \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^3} + \frac{1}{v^5} \right) = \lim \frac{1}{v^2} - \lim \frac{1}{v^3} + \lim \frac{1}{v^5} = 0 - 0 + 0 = 0$

καὶ  $\lim \left( 1 + \frac{2}{v} - \frac{3}{v^5} \right) = 1 + 2 \lim \frac{1}{v} - 3 \lim \frac{1}{v^5} = 1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 1.$

Τότε, δυνάμει τῆς ιδιότητος Χ τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν, ἔχομεν :

$$\lim a_v \equiv \lim \frac{v^3 - v^2 + 1}{v^5 + 2v^4 - 3} = \lim \frac{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^3} + \frac{1}{v^5}}{1 + \frac{2}{v} - \frac{3}{v^5}} = \frac{\lim \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^3} + \frac{1}{v^5} \right)}{\lim \left( 1 + \frac{2}{v} - \frac{3}{v^5} \right)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Γενικῶς : "Ὅταν ὁ βαθμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι μικρότερος τοῦ βαθμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ τὸ κλάσμα ἔχει ὅριον τὸ μηδέν.

**Παράδειγμα 3ον.** Νὰ εὐρεθῇ τὸ ὄριον τῆς ἀκολουθίας  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  μὲ

$$a_n = \sqrt[n]{a}, \quad \text{ἐνθα } a > 0.$$

**Λύσις (i).** Θεωρήσωμεν τὴν περίπτωσηιν καθ' ἣν  $a > 1$ , τότε εἶναι καὶ  $\sqrt[n]{a} > 1$ . Θέτοντες  $\sqrt[n]{a} = 1 + \varepsilon_n$ , ὅπου  $\varepsilon_n > 0$ , ἔχομεν:  $a = (1 + \varepsilon_n)^n$  ἢ, κατὰ τὴν ἀνισότητα τοῦ Bernoulli (βλ. ἐφαρμογὴ 2α, § 28),

$$a = (1 + \varepsilon_n)^n \geq 1 + n\varepsilon_n > n\varepsilon_n$$

ὁπότε :

$$0 < \varepsilon_n < a \cdot \frac{1}{n}.$$

Ἀλλὰ  $\lim a \cdot \frac{1}{n} = 0$  καὶ κατ' ἀκολουθίαν (§146)  $\lim \varepsilon_n = 0$ .

Ὅθεν  $\lim \sqrt[n]{a} = \lim (1 + \varepsilon_n) = 1 + \lim \varepsilon_n = 1$ .

**(ii).** Ἐστω ὅτι  $a < 1$ , τότε εἶναι καὶ  $\sqrt[n]{a} < 1$ .

Θέτοντες  $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{1 + \varepsilon_n}$ ,  $\varepsilon_n > 0$ , ἔχομεν :

$$a = \frac{1}{(1 + \varepsilon_n)^n} \leq \frac{1}{1 + n\varepsilon_n} < \frac{1}{n \cdot \varepsilon_n} \implies \varepsilon_n < \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n} \quad (a > 0)$$

Ἀλλὰ  $\lim \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{a} \lim \frac{1}{n} = 0$  καὶ ἐπομένως  $\lim \varepsilon_n = 0$ .

Ὅθεν  $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ .

**(iii).** Διὰ  $a = 1$ , τότε  $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{1} = 1$ , ἄρα  $\lim \sqrt[n]{a} = \lim \sqrt[n]{1} = 1$ .

**Παράδειγμα 4ον.** Δείξατε ὅτι :

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

**Ἀπόδειξις.** Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει  $\sqrt[n]{n} > 1$  διὰ κάθε  $n = 2, 3, \dots$  ὅθεν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν :

$$(1) \quad \sqrt[n]{n} = (1 + \delta_n)^2, \quad \text{ὅπου } \delta_n > 0 \text{ διὰ κάθε } n = 2, 3, \dots$$

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν:  $\sqrt[n]{n} = (1 + \delta_n)^2$  ἢ κατὰ τὴν ἀνισότητα τοῦ Bernoulli

$$(2) \quad \sqrt[n]{n} = (1 + \delta_n)^2 \geq 1 + 2\delta_n > 2\delta_n$$

ἢ

$$0 < \delta_n < \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

Ἀλλὰ  $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$  (βλ. πρδ. 4, § 121) καὶ συνεπῶς  $\lim \delta_n = 0$ .

Τότε ὅμως  $1 + \delta_n \rightarrow 1 + 0 = 1$  καὶ  $(1 + \delta_n)^2 \rightarrow 1 \cdot 1 = 1$ .

Ὅθεν ἐκ τῆς (1) ἔχομεν:  $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ .

# Παράδειγμα 5ον.

Ἐάν  $\lim a_n = a, a_n > 0, a \neq 0 \implies \lim \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a}$ .

Ἀπόδειξις. Προφανῶς ἰσχύει :

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{a_n} + \sqrt[n]{a}} < \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

Ἐπομένως :

$$|\sqrt[n]{a_n} - \sqrt[n]{a}| = \frac{|\alpha_n - \alpha|}{\sqrt[n]{a_n} + \sqrt[n]{a}} < \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \cdot |\alpha_n - \alpha|.$$

Ἀλλὰ  $\alpha_n - \alpha \rightarrow 0$  (διότι  $\alpha_n \rightarrow \alpha$ ), καὶ συνεπῶς  $\sqrt[n]{a_n} - \sqrt[n]{a} \rightarrow 0$ .

Ὅθεν :

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a}.$$

Παρατηρήσεις :

1). Ἐκ τοῦ συμπεράσματος τοῦ παραδείγματος 5 συνάγεται ὅτι ἐπιτρέπεται νὰ γράφωμεν :

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\lim a_n}$$

ἤτοι : τὰ σύμβολα  $\lim$  καὶ  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  ἐπιτρέπεται νὰ ἐναλλάσσωνται ἀριστερὰ τῆς ἀκολουθίας  $a_n, n = 1, 2, \dots$

2). Μὲ τὰς ὑποθέσεις τοῦ παραδείγματος 5 ἰσχύει γενικώτερον :

$$\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim a_n}, \quad \text{ἐνθα } k \in \mathbb{N} \text{ (διὰτί);}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

260. Νὰ εὑρεθοῦν, ἐὰν ὑπάρχουν, τὰ ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν μὲ γενικοὺς ὅρους :

$$1) \alpha_n = \frac{n^2 + 3}{2n^2 - 5n + 7}, \quad 2) \alpha_n = \sqrt{1 + \frac{4}{n}}, \quad 3) \alpha_n = \frac{n}{n^2 + 3},$$

$$4) \alpha_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2, \quad 5) \alpha_n = \frac{2n^3 - 3n + 2}{5n^3 + 7}, \quad 6) \alpha_n = \sqrt[3]{\frac{8n^3 + 5}{64n^3 + n + 1}}$$

261. Διὰ  $\varepsilon > 0$ , νὰ προσδιορισθῇ δείκτης  $n_0 = n_0(\varepsilon)$ , ὥστε διὰ  $n \geq n_0(\varepsilon)$  νὰ εἶναι :

$$\left| \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

262. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία  $\alpha_n = (-1)^n \cdot n, n = 1, 2, \dots$  δὲν συγκλίνει ἐν  $\mathbb{R}$ .

263. Ὅμοιως ἡ ἀκολουθία  $\alpha_n = n^2, n = 1, 2, \dots$

264. Εἶναι ἡ ἀκολουθία  $\alpha_n = \frac{2n^2}{n^2 + 1}, n = 1, 2, \dots$  φραγμένη ;

265. Ἐάν ἡ ἀκολουθία  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  εἶναι φραγμένη, δείξατε ὅτι καὶ ἡ ἀκολου-

θία :  $\frac{1}{n} \cdot \alpha_n, n = 1, 2, \dots$  εἶναι φραγμένη καὶ ἰσχύει :

$$\lim \frac{1}{n} \alpha_n = 0.$$

266. Δείξατε ὅτι :  $\lim \frac{n^4 - 4n^3 + n + 6}{2n^4 + 7n^2 + 2n - 1} = \frac{1}{2}.$

267. Ἐάν ἡ ἀκολουθία  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  συγκλίνει ἐν  $\mathbb{R}$ , δείξατε ὅτι καὶ ἡ ἀκολου-

θία  $\beta_n, n = 1, 2, \dots$ , ὅπου  $\beta_n = \alpha_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , συγκλίνει ἐν  $\mathbb{R}$  καὶ ἰσχύει :

$$\lim \alpha_{n+1} = \lim \alpha_n.$$

268. Δείξατε ὅτι :

$$\lim \sqrt[n]{n^2 + n} = 1.$$

## ΜΟΝΟΤΟΝΟΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΙ

**§ 148. Όρισμοί.**— Η ακολουθία  $\alpha_n = 2^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , δηλαδή ή ακολουθία:

$$2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots$$

διατηρεί προφανώς την διάταξιν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, δηλαδή ἰσχύει

$$v < \mu \implies 2^v = \alpha_v < \alpha_\mu = 2^\mu.$$

Γενικῶς μία ακολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν διατηροῦσα, ὡς καὶ ἡ  $\alpha_n = 2^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  τὴν διάταξιν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καλεῖται «**γνησίως αὐξουσα**». Ἀκριβέστερον διὰ μίαν ακολουθίαν  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ὀρίζομεν :

Ἡ ακολουθία  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  καλεῖται **γνησίως αὐξουσα** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ :  $\alpha_n < \alpha_{n+1}$  διὰ κάθε  $n = 1, 2, \dots$

Κατ' ἀναλογίαν ὀρίζομεν :

Ἡ ακολουθία  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  καλεῖται **γνησίως φθίνουσα** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ :  $\alpha_n > \alpha_{n+1}$  διὰ κάθε  $n = 1, 2, \dots$

Οὕτως ἡ ακολουθία  $\alpha_n = \frac{1}{v}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι γνησίως φθίνουσα, διότι

$$\text{διὰ πᾶν } n \text{ εἶναι : } \alpha_n = \frac{1}{v} > \frac{1}{v+1} = \alpha_{v+1}.$$

Ἐς θεωρήσωμεν ἤδη τὴν ακολουθίαν :  $1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n, n, \dots$  Διὰ τὴν ἐν λόγω ακολουθίαν παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει :

$$v < \mu \implies \alpha_v \leq \alpha_\mu$$

λέγομεν δὲ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅτι ἡ ακολουθία  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι **αὐξουσα**.

Ἀκριβέστερον : θὰ λέγομεν ὅτι ἡ ακολουθία  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι **αὐξουσα** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ :  $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$  διὰ κάθε  $n = 1, 2, \dots$

Ὅμοίως : Ἡ ακολουθία  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι **φθίνουσα** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ :  $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$  διὰ κάθε  $n = 1, 2, \dots$

Οὕτω, λ.χ., ἡ ακολουθία  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \dots$  εἶναι φθίνουσα

(μὴ αὐξουσα). Κατὰ ταῦτα λέγομεν ὅτι μία ακολουθία  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι **γνησίως μονότονος** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν αὕτη εἶναι γνησίως αὐξουσα ἢ γνησίως φθίνουσα.

Ἀντιστοίχως δὲ λέγομεν ὅτι ἡ  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι **μονότονος**, ἂν αὕτη εἶναι αὐξουσα ἢ φθίνουσα. Προφανῶς κάθε γνησίως μονότονος ακολουθία εἶναι καὶ μονότονος, δὲν ἰσχύει ὅμως τὸ ἀντίστροφον (διὰτι ;)

Διὰ νὰ δηλώσωμεν τὸ εἶδος τῆς μονοτονίας μιᾶς ακολουθίας χρησιμοποιοῦμεν τὰ κάτωθι σύμβολα :

$$\alpha_n \uparrow \iff \alpha_n \text{ εἶναι } \textit{γνησίως αὐξουσα}$$

$$\alpha_n \downarrow \iff \alpha_n \text{ εἶναι } \textit{γνησίως φθίνουσα}$$

$$\alpha_n \uparrow \iff \alpha_n \text{ εἶναι } \textit{αὐξουσα}$$

$$\alpha_n \downarrow \iff \alpha_n \text{ εἶναι } \textit{φθίνουσα}.$$



Ἡ ἀκολουθία :  $\alpha, \alpha, \alpha, \dots, \alpha, \dots$  με ὅλους τοὺς ὅρους της ἴσους με  $\alpha$  ἡμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ ( μοναδική ) περίπτωσης ἀκολουθίας, ἡ ὁποία εἶναι συγχρόνως αὐξουσα καὶ φθίνουσα. Δηλαδή ἰσχύει :

Ἡ  $a_n, n = 1, 2, \dots$  εἶναι σταθερά  $\Leftrightarrow$  ἡ  $a_n, n = 1, 2, \dots$  εἶναι ταυτοχρόνως αὐξουσα καὶ φθίνουσα.

Εἶναι προφανές ὅτι κάθε αὐξουσα ἀκολουθία εἶναι πάντοτε φραγμένη κάτωθεν με κάτω φράγμα τὸν πρῶτον ὅρον της, ἐνῶ κάθε φθίνουσα ἀκολουθία εἶναι φραγμένη ἄνωθεν με ἄνω φράγμα τὸν πρῶτον ὅρον αὐτῆς. Ὅθεν ὡς ἂν λέγομεν ὅτι : μία μονότονος ἀκολουθία εἶναι φραγμένη, θὰ ἐννοοῦμεν πάντοτε : ἂν μὲν εἶναι αὐξουσα ἡ γνησίως αὐξουσα ὅτι : αὕτη ἔχει καὶ ἐν ἄνω φράγμα, ἂν δὲ εἶναι φθίνουσα ἡ γνησίως φθίνουσα ὅτι : αὕτη ἔχει καὶ ἐν κάτω φράγμα.

**§ 149. Τὸ μονότονον καὶ ἡ σύγκλισις ἀκολουθίας.**— Ἀς θεωρήσωμεν πρῶτον τὴν ἀκολουθίαν  $v^2, v = 1, 2, \dots$ , ἥτοι τὴν :

$$1, 4, 9, 16, \dots, v^2, \dots$$

καὶ δευτέραν τὴν ἀκολουθίαν  $\frac{v}{v+1}, v = 1, 2, \dots$ , ἥτοι τὴν :

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{v}{v+1}, \dots$$

Δι' ἀμφοτέρων παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι αὐξουσαι καὶ μάλιστα γνησίως αὐξουσαι ἀκολουθίαι. Ἐκ τούτων ἡ πρώτη δὲν εἶναι φραγμένη (πρβλ. § 117), οὔτε δὲ συγκλίνει πρὸς πεπερασμένον ἀριθμὸν. Ἀντιθέτως ἡ δευτέρα, δηλαδή ἡ ἀκολουθία

$\frac{v}{v+1}, v = 1, 2, \dots$  εἶναι φραγμένη, διότι :  $\left| \frac{v}{v+1} \right| = \frac{v}{v+1} \leq 1$  διὰ κάθε  $v = 1, 2, \dots$ . Ἐπὶ πλέον παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία αὕτη συγκλίνει καὶ μάλιστα

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v}{v+1} = 1.$$

Τὸ γεγονός ὅτι ἡ αὐξουσα καὶ φραγμένη ἀκολουθία  $\frac{v}{v+1}, v = 1, 2, \dots$  συγκλίνει πρὸς πραγματικὸν ἀριθμὸν δεχόμεθα ὅτι ἰσχύει γενικῶς διὰ κάθε αὐξουσαν καὶ φραγμένην ἀκολουθίαν. Ἀκριβέστερον δεχόμεθα τὸ ἀκόλουθον ἄξιωμα :

**§ 150. Ἀξίωμα.**— Κάθε μονότονος καὶ φραγμένη ἀκολουθία  $a_n, n = 1, 2, \dots$  εἶναι συγκλίνουσα ἐν  $\mathbf{R}$ .

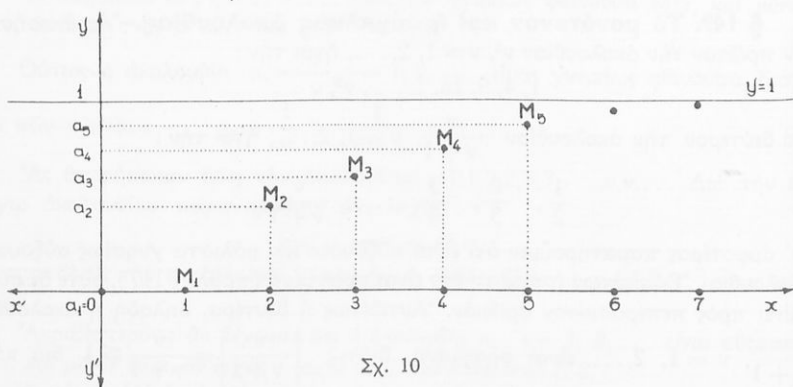
Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄνωτέρω ἄξιωμα ἐξασφαλίζει τὴν ὑπαρξιν τοῦ ὁρίου εἰς τὸ σύνολον  $\mathbf{R}$  μιᾶς ἀκολουθίας  $a_n, n = 1, 2, \dots$  ὑπὸ ὠρισμένης ὑποθέσεως. Δὲν παρέχει βεβαίως οὐδεμίαν ἐνδειξιν περὶ τοῦ πῶς θὰ ὑπολογισθῇ σαφῶς τὸ ὄριον, ὅπως εἶναι σπουδαῖον νὰ γνωρίζωμεν εἰς πολλὰς περιπτώσεις ὅτι ὁποιοδήποτε ἀκολουθία συγκλίνει ἐν  $\mathbf{R}$ , διότι τότε εἴμεθα περισσότερον εἰς θέσιν νὰ υπολογίσωμεν τὴν ὀριακὴν τιμὴν τῆς ἀκολουθίας.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ἀξιώματος ἔπονται αἱ εἰδικώτεροι προτάσεις :

α). Ἐὰν μία ἀκολουθία  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι αὐξουσα καὶ ἔχει ἓν ἄνω φράγμα τὸν ἀριθμὸν  $s$ , τότε εἶναι συγκλίνουσα καὶ ἰσχύει :  $\lim a_n \leq s$ .

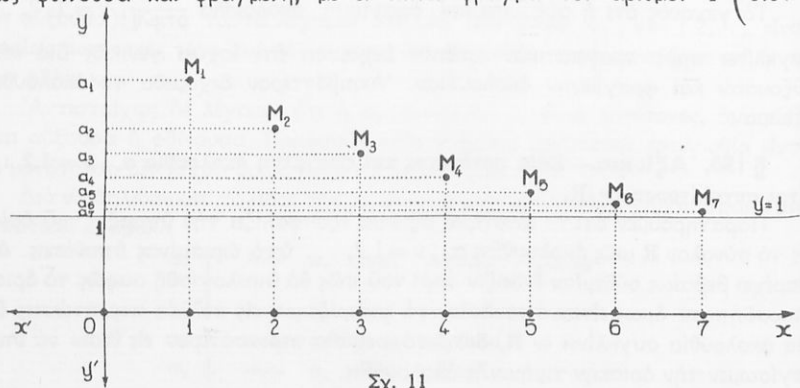
β). Ἐὰν μία ἀκολουθία  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι φθίνουσα καὶ ἔχει ἓν κάτω φράγμα τὸν ἀριθμὸν  $\sigma$ , τότε εἶναι συγκλίνουσα καὶ ἰσχύει :  $\sigma \leq \lim a_n$ .

**Παράδειγμα 1ον :** Ἡ ἀκολουθία  $\frac{n-1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι προφανῶς αὐξουσα καὶ φραγμένη (διότι :  $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$ ), ὅθεν συγκλίνει πρὸς ἀριθμὸν μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ 1. Δίδομεν εἰς τὸ κατωτέρω σχῆμα τοὺς πέντε πρώτους ὅρους τῆς ἀκολουθίας  $\frac{n-1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$



Σχ. 10

**Παράδειγμα 2ον :** Ἡ ἀκολουθία  $1 + \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι προφανῶς φθίνουσα καὶ φραγμένη, μὲ ἓν κάτω φράγμα τὸν ἀριθμὸν 1 (διότι :



Σχ. 11

$1 < 1 + \frac{1}{v}$  διὰ κάθε  $v = 1, 2, \dots$ ), επομένως συγκλίνει πρὸς ἀριθμὸν μεγάλυ-  
τερον ἢ ἴσον τοῦ 1.

Εἰς τὸ σχῆμα (11) τῆς ἐναντι σελίδος δίδομεν τοὺς ἐπτά πρώτους ὅρους  
τῆς ἀκολουθίας  $a_v = 1 + \frac{1}{v}$ ,  $v = 1, 2, \dots$

**Παρατήρησις.** Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς αὐξούσης καὶ μὴ φραγμένης  
ἀκολουθίας  $a_v = v^2$ ,  $v = 1, 2, \dots$ , ἡ ὁποία δὲν συγκλίνει πρὸς πραγματικὸν  
ἀριθμὸν, λέγομεν ὅτι αὕτη *ἀπειρίζεται θετικῶς*. Ἀλλὰ καὶ γενικώτερον διὰ μίαν  
αὐξουσαν καὶ μὴ φραγμένην ἀκολουθίαν  $a_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  θὰ λέγωμεν ὅτι  
αὕτη *ἀπειρίζεται θετικῶς*, ἢ ἄλλως *συγκλίνει πρὸς τὸ  $+\infty$*  ἢ ἀκόμη *τείνει*  
*πρὸς τὸ  $+\infty$*  (τὸ σύμβολον  $+\infty$  ἀναγινώσκεται: «σὺν ἄπειρον»).

Κατ' ἀναλογίαν διὰ μίαν φθίνουσαν καὶ μὴ φραγμένην ἀκολουθίαν πρα-  
γματικῶν ἀριθμῶν  $a_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$ , θὰ λέγωμεν ὅτι αὕτη *ἀπειρίζεται ἀρνητι-  
κῶς* ἢ ἄλλως *συγκλίνει πρὸς τὸ  $-\infty$*  ἢ ἀκόμη *τείνει πρὸς τὸ  $-\infty$*  (τὸ σύμ-  
βολον  $-\infty$  ἀναγινώσκεται: «πλὴν ἄπειρον»).

## § 151. Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῶν μονοτόνων ἀκολουθιῶν

**Παράδειγμα 1ον.** Ἐστω ἡ ἀκολουθία τῶν ἐμβαδῶν τῶν εἰς δοθέντα  
κύκλον ἐγγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων, ἥτοι ἡ ἀκολουθία:

$$E_3, E_4, E_5, \dots, E_v, \dots$$

ὅπου  $E_v$  τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μὲ  $v$  πλευράς.

Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι:

$$E_3 < E_4 < E_5 < \dots < E_v < E_{v+1} < \dots$$

ἥτοι, ἡ ἀκολουθία  $E_v$ ,  $v = 3, 4, \dots$  εἶναι γνησίως αὐξουσα. Ἐπὶ πλέον αὕτη εἶναι  
πρὸς τὰ ἄνω φραγμένη μὲ ἄνω φράγμα τὸν ἀριθμὸν, ὅστις παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν  
ἐνὸς οἰουδήποτε περιγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον κυρτοῦ πολυγώνου. Ὅθεν, δυνά-  
μει τοῦ ἀνωτέρω ἀξιώματος, συνάγομεν ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ἀκολουθία  $E_v$ ,  $v = 3, 4, \dots$   
συγκλίνει πρὸς ἓνα πραγματικὸν ἀριθμὸν. Τὸν πραγματικὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, δηλ.  
τὸ ὄριον τῆς ἀκολουθίας  $E_v$ ,  $v = 3, 4, \dots$ , καλοῦμεν, ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Γεωμε-  
τρίας, ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

**Παράδειγμα 2ον:** Μελετήσατε τὴν ἀκολουθίαν:

$a_1 = \sqrt{2}$ ,  $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ,  $a_3 = \sqrt{2 + a_2} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ , ...,  $a_v = \sqrt{2 + a_{v-1}}$ , ...  
ὡς πρὸς τὸ μονότονον καὶ τὴν σύγκλισιν.

**Λύσις:** Προφανῶς ἔχομεν:  $a_1 < a_2$ . Ἐστω ὅτι:  $a_k < a_{k+1}$ , τότε  
 $2 + a_k < 2 + a_{k+1}$  ἢ  $\sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + a_{k+1}}$ , δηλαδή  $a_{k+1} < a_{k+2}$ . Ἀρα,  
δυνάμει τοῦ θεωρ. τῆς τελείας ἐπαγωγῆς (§ 28), θὰ ἔχωμεν:  $a_v < a_{v+1}$  διὰ κάθε  
 $v = 1, 2, \dots$ , ἥτοι ἡ ἀκολουθία  $a_v = \sqrt{2 + a_{v-1}}$ ,  $v = 2, 3, \dots$  εἶναι γνησίως αὐ-  
ξουσα (μονότονος).

Ἐξετάζομεν τώρα τὴν ἀκολουθίαν ἂν εἶναι φραγμένη ἄνωθεν. Πράγματι  $\alpha_1 = \sqrt{2} < 2$ , ἔστω ὅτι καὶ  $\alpha_{v-1} < 2$ , τότε  $2 + \alpha_{v-1} < 4$ , ἐξ οὗ:  $\sqrt{2 + \alpha_{v-1}} < 2$  δηλ.  $\alpha_v < 2$ . Ἄρα, κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, ἰσχύει:  $\alpha_v < 2$  διὰ κάθε  $v = 1, 2, \dots$ , ἥτοι ἡ ἀκολουθία  $\alpha_v = \sqrt{2 + \alpha_{v-1}}$ ,  $v = 2, 3, \dots$  μὲ  $\alpha_1 = \sqrt{2}$  εἶναι φραγμένη ἄνωθεν.

Ἐπομένως, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος § 150, ἡ ὡς ἄνω ἀκολουθία συγκλίνει πρὸς πραγματικὸν ἀριθμὸν, ὅστις θὰ εἶναι μικρότερος ἢ ἴσος τοῦ 2 (διατί;).

Ἐστω λοιπὸν  $\alpha = \lim \alpha_v$ , τότε λαμβάνοντες τὰ ὅρια ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς  $\alpha_v = \sqrt{2 + \alpha_{v-1}}$  ἔχομεν (ἐπειδὴ  $\lim \alpha_v = \lim \alpha_{v+1} = \alpha$ ):

$$\lim \alpha_v = \lim \sqrt{2 + \alpha_{v-1}} = \sqrt{2 + \lim \alpha_{v-1}}$$

$$\eta \quad \alpha = \sqrt{2 + \alpha} \quad \eta \quad \alpha^2 - \alpha - 2 = 0, \quad \text{ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν:}$$

$$\alpha = 2 \quad \text{καὶ} \quad \alpha = -1.$$

Ἡ ρίζα  $\alpha = -1$  ἀπορρίπτεται, διότι τὸ ὅριον  $\alpha$  πρέπει νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς, καθ' ὅσον ὅλοι οἱ ὅροι τῆς αὐξοῦσης ἀκολουθίας  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί.

Ὅθεν:  $\lim \alpha_v = 2$ .

**Π α ρ ἄ δ ε ι γ μ α 3ον.** Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  μὲ:

$$\alpha_{v+1} = \frac{2\alpha_v + 4}{3} \quad \text{καὶ} \quad \alpha_1 = 0$$

συγκλίνει ἐν  $\mathbf{R}$ . Ποῖον τὸ ὅριον τῆς ἐν λόγῳ ἀκολουθίας;

**Ἀ π ὅ δ ε ι ξ ι ς.** Προφανῶς  $\alpha_1 < \alpha_2$  (διότι:  $\alpha_1 = 0 < \frac{2\alpha_1 + 4}{3} = \frac{4}{3}$ ).

Ἐστω ὅτι  $\alpha_k < \alpha_{k+1}$  δηλ.  $\alpha_{k+1} - \alpha_k > 0$ , τότε εἶναι καὶ  $\alpha_{k+1} < \alpha_{k+2}$ , διότι:

$$\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1} = \frac{2\alpha_{k+1} + 4}{3} - \frac{2\alpha_k + 4}{3} = \frac{2(\alpha_{k+1} - \alpha_k)}{3} > 0.$$

Ἄρα  $\alpha_v < \alpha_{v+1}$  διὰ κάθε  $v = 1, 2, \dots$ , ἥτοι ἡ ἀκολουθία  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  εἶναι αὐξουσα. Αὕτη εἶναι καὶ φραγμένη μὲ ἐν ἄνω φράγμα τὸν ἀριθμὸν 5, ἥτοι  $|\alpha_v| \leq 5 \quad \forall \quad v = 1, 2, \dots$  Πράγματι:  $|\alpha_1| = 0 \leq 5$ . Ἐστω ὅτι ἰσχύει:  $|\alpha_k| \leq 5$ , θὰ δείξωμεν ὅτι καί:  $|\alpha_{k+1}| \leq 5$ . Πράγματι: ἔχομεν:

$$|\alpha_{k+1}| = \left| \frac{2\alpha_k + 4}{3} \right| \leq \frac{2|\alpha_k| + 4}{3} \leq \frac{2 \cdot 5 + 4}{3} = \frac{14}{3} \leq 5.$$

Ἄρα  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  φραγμένη ἄνωθεν, ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ αὐξουσα, κατὰ τὸ ἀξίωμα τῆς § 150, συγκλίνει ἐν  $\mathbf{R}$  πρὸς ἀριθμὸν μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ πέντε.

Ἐστω  $x = \lim \alpha_v$ , τότε ἔχομεν:

$$x = \lim \alpha_{v+1} = \lim \frac{2\alpha_v + 4}{3} = \frac{2x + 4}{3}$$

ἢ  $3x = 2x + 4$ , ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν:  $x = 4$ .

Ὅθεν ἡ  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν 4, δηλ.  $\lim \alpha_v = 4$ .

**Παράδειγμα 4ον:** Μελετήσατε την ακολουθία:  $a_n, n = 1, 2, \dots$  με

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{3}{a_n} \right) \quad \text{και} \quad a_1 = \frac{1}{2} \left( \theta + \frac{3}{\theta} \right), \quad \text{ενθα } \theta > 0,$$

ως προς το μονότονον και την σύγκλιση. Ποιον το όριο της εν λόγω ακολουθίας;

**Λύσις.** Παρατηρούμεν κατ' αρχήν ότι:  $a_n > 0$  διὰ κάθε  $n = 1, 2, \dots$

Εξ άλλου έχομεν, από την γνωστήν ανισότητα:  $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ , ενθα  $x, y > 0$ :

$$a_n = \frac{1}{2} \left( a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}} \right) \geq \sqrt{a_{n-1} \cdot \frac{3}{a_{n-1}}} = \sqrt{3}, \quad \text{ήτοι } a_n \geq \sqrt{3} \quad \text{διὰ κάθε } n = 1, 2, \dots$$

Επίσης έχομεν:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{3}{a_n} \right) - a_n = \frac{3 - a_n^2}{2a_n} \leq 0 \quad (\text{διότι: } a_n^2 \geq 3 \iff 3 - a_n^2 \leq 0),$$

ήτοι:  $a_n \geq a_{n+1}$  διὰ κάθε  $n = 1, 2, \dots$ , δηλαδή η ακολουθία  $a_n, n = 1, 2, \dots$  είναι φθίνουσα. Επειδή δὲ εἶναι καὶ φραγμένη ἐκ τῶν κάτω, διότι

$$a_n \geq \sqrt{3} \quad \forall n = 1, 2, \dots, \quad \text{θα συγκλίνη ἐν } \mathbf{R}.$$

Εστω  $x$  τὸ  $\lim a_n$ , τότε εἶναι καί:

$$x = \lim a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( \lim a_n + \frac{3}{\lim a_n} \right) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{3}{x} \right)$$

ἢ  $x^2 = 3$ , ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν:  $x = \sqrt{3}$  καὶ  $x = -\sqrt{3}$  (ἀπορρίπτεται).

Ὅθεν:

$$\lim a_n = \sqrt{3}.$$

#### ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

**269.** Γράψατε τοὺς πέντε πρώτους ὅρους τῶν κάτωθι ἀκολουθιῶν:

α)  $1 + \frac{1}{v}, v = 1, 2, \dots$ , β)  $\alpha + (v-1)\omega, v = 1, 2, \dots$ , γ)  $\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}, v = 1, 2, \dots$

δ)  $\frac{1}{v(v+1)}, v = 1, 2, \dots$ , ε)  $(-1)^{v+1} \alpha \omega^{v-1}, v = 1, 2, \dots$ , στ)  $\frac{\sqrt{v+1}}{v}, v = 1, 2, \dots$

**270.** Ποῖα ἐκ τῶν ἀκολουθιῶν  $a_n, n = 1, 2, \dots$ , αἱ ὁποῖαι ὀρίζονται ὑπὸ τῶν κάτωθι τύπων εἶναι φραγμένα καὶ ποῖα δὲν εἶναι:

1)  $a_n = \frac{2v}{v^2 + 1}$ , 2)  $a_n = \frac{v \eta \mu 3v}{v^2 + 1}$ , 3)  $a_n = \frac{v^2 + 1}{2v}$ ,  
4)  $a_n = \frac{1}{v} \eta \mu \frac{\pi v}{2}$ , 5)  $a_n = v \cdot 3^{-v}$ , 6)  $a_n = \frac{\eta \mu v + \sigma \upsilon \nu^3 5v}{v^3 \cdot \sqrt{v}}$ .

**271.** Ποῖα ἐκ τῶν ἀκολουθιῶν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως εἶναι μονότονοι καὶ ποῖα δὲν εἶναι; Καθορίσατε τὸ εἶδος μονοτονίας διὰ τὰς μονοτόνους ἐξ αὐτῶν. Ποῖα εἶναι συγκλίνουσα καὶ ποῖα αἱ ὁριακαὶ τιμαὶ των;

**272.** Ὑπολογίσατε τὰς ὁριακὰς τιμὰς τῶν ἀκολουθιῶν  $a_n, n = 1, 2, \dots$  με γενικοὺς ὅρους:

1)  $a_n = \frac{3v + 2}{v^2 + 1}$ , 2)  $a_n = \frac{3v^2 - 5}{v^2}$ , 3)  $a_n = \left( \frac{2v^2 - 3}{3v^2 - 2} \right)^2$ ,

$$4) \alpha_v = \sqrt{\frac{3v^2 + 2}{4v^2 + v + 1}}, \quad 5) \alpha_v = \frac{\sqrt{v} - 1}{\sqrt{v} + 1}, \quad 6) \alpha_v = \frac{v + 1}{v \cdot \sqrt{v}},$$

$$7) \alpha_v = (\sqrt{v+1} - \sqrt{v}) \cdot \sqrt{v + \frac{1}{2}}, \quad 8) \alpha_v = \sqrt{v + \sqrt{v}} - \sqrt{v - \sqrt{v}}.$$

273. Όμοιως :

$$1) \alpha_v = \frac{v^2 + 3}{2v^2 - 3v + 1}, \quad 2) \alpha_v = \frac{2v^2 + 3v - 1}{5v^3 - v + 7}, \quad 3) \alpha_v = \frac{v^4 + 2}{v^2 - 4} - \frac{2v^5 - 3v^3}{2v^3 + 1},$$

$$4) \alpha_v = \sqrt{v^2 + v} - v, \quad 5) \alpha_v = \frac{1 + 2 + \dots + v}{v^2}, \quad 6) \alpha_v = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + v^2}{v^3}.$$

274. Εάν  $\lim \alpha_v = \alpha$  και  $\rho \in \mathbb{N}$ , δείξτε ότι :  $\lim(\alpha_v^\rho) = \alpha^\rho$ , δηλ.  $\lim(\alpha_v^\rho) = (\lim \alpha_v)^\rho$ .

275. Διά  $\varepsilon > 0$ , νά προσδιορισθῇ δείκτης  $v_0 = v_0(\varepsilon)$ , ὥστε διὰ  $v \geq v_0(\varepsilon)$ , νά εἶναι  $|\alpha_v| < \varepsilon$ ,

ὅπου  $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$  εἶναι :

$$1) \alpha_v = \frac{1}{2v + 1}, \quad 2) \alpha_v = \frac{v - 1}{v^2 + 1}, \quad 3) \alpha_v = \frac{\eta\mu v + 2\sigma\upsilon\nu 5v}{\sqrt{v}}, \quad 4) \alpha_v = \sqrt{v + 1} - \sqrt{v}.$$

Ἐφαρμογὴ διὰ  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

276. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$1) \lim \sqrt{\frac{9v^2}{v^2 + 3}} = 3, \quad 2) \lim \sqrt[3]{\frac{v^2 + v - 1}{27v^2 - 4}} = \frac{1}{3}.$$

277. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἀκολουθίαι :

$$\alpha_v = \frac{2v^2 - 1}{3v^2 + 2}, \quad \beta_v = \frac{2v + 3}{3v - 2}, \quad \gamma_v = \sqrt{\frac{4v - 3}{9v + 5}}, \quad v = 1, 2, \dots$$

εἶναι συγκλίνουσαι καὶ ἔχουν κοινὸν ὅριον.

278. Δίδονται αἱ ἀκολουθίαι :

$$\alpha_v = v^2, \quad \beta_v = v, \quad \gamma_v = v^3, \quad v = 1, 2, \dots$$

Νά ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$(i) \lim \alpha_v = \lim \beta_v = \lim \gamma_v = +\infty$$

$$(ii) \lim \frac{\alpha_v}{\beta_v} = +\infty, \quad \lim \frac{\gamma_v}{\beta_v} = +\infty, \quad \lim \frac{\gamma_v}{\alpha_v} = +\infty$$

$$(iii) \lim \frac{\alpha_v}{\gamma_v} = \lim \frac{\beta_v}{\alpha_v} = \lim \frac{\beta_v}{\gamma_v} = 0.$$

279. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι  $\lim \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v = e$ , νά εὑρεθοῦν τὰ ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν

$\alpha_v, v = 1, 2, \dots$ , αἱ ὁποῖαι ὀρίζονται ὑπὸ τῶν τύπων :

$$1) \alpha_v = \left(1 + \frac{1}{2v}\right)^v, \quad 2) \alpha_v = \left(1 + \frac{1}{v-1}\right)^{v-1}, \quad 3) \alpha_v = \left(1 - \frac{1}{v^2}\right)^v$$

280. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\lim \left[ \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{v^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{v^2 + v}} \right] = 1$$

(Ἐπὶ δειξίς : Προσθέσατε κατὰ μέλη τὰς προφανεῖς ἀνισότητος :

$$\frac{1}{\sqrt{v^2 + v}} \leq \frac{1}{\sqrt{v^2 + k}} \leq \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}}, \quad k = 1, 2, \dots, v \text{ καὶ ἐφαρμόσατε τὴν ἰδιότητα XII, § 146)}$$

281. Να λυθῇ ἡ ἀνίσότης :

$$\left| \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v^2 + 3}{2v^2 - 1} + x \right| < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

282. Δείξτε ὅτι αἱ κάτωθι ἀκολουθίαι εἶναι μόνотони καὶ φραγμέναι :

$$1) \alpha_v = \frac{v+1}{v}, \quad 2) \alpha_v = \frac{1}{v^2+1}, \quad 3) \alpha_v = \frac{v}{v^2+1}, \quad 4) \alpha_v = \frac{4v+1}{5v}.$$

283. Δείξτε ὅτι ἡ ἀκολουθία  $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$  μέ :

$$\alpha_{v+1} = \sqrt{1 + \alpha_v} \quad \text{καὶ} \quad \alpha_1 = 1$$

εἶναι γνησίως αὐξουσα, φραγμένη καὶ ὅτι :  $\lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$

284. Δίδεται ἡ ἀκολουθία  $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$ , μέ  $\alpha_{v+1} = \sqrt{4\alpha_v + 3}$  καὶ  $\alpha_1 = 5$ .

Νὰ δεიχθῇ ὅτι εἶναι συγκλίνουσα καὶ νὰ εὐρεθῇ τὸ ὄριόν της.

(Υπόδειξις : Δείξτε ὅτι εἶναι φθίνουσα καὶ φραγμένη κάτωθεν ὑπὸ τοῦ  $\sqrt{3}$  κτλ.).

285. Δίδεται ἡ ἀκολουθία  $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$ , εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι :

$$\alpha_1 = \theta > 0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha_{v+1} = \frac{1}{2} \left( \alpha_v + \frac{\lambda^2}{\alpha_v} \right), \quad 0 < \lambda < \theta, v = 1, 2, \dots$$

Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι συγκλίνουσα καὶ νὰ εὐρεθῇ τὸ ὄριόν της.

(Υπόδειξις : Σηριχθῇ ἐπὶ τῆς γνωστῆς ἀνισότητος  $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$  καὶ δείξτε ὅτι ἡ ἐν λόγω ἀκολουθία εἶναι φραγμένη καὶ φθίνουσα).

286. Δείξτε ὅτι ἡ ἀκολουθία  $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$  μέ :  $\alpha_{v+1} = \frac{3\alpha_v + 1}{4}$  καὶ  $\alpha_1 = 0$  εἶ-

ναι αὐξουσα καὶ φραγμένη πρὸς τὰ ἄνω ὑπὸ τῆς μονάδος. Ποῖον τὸ ὄριον τῆς ἐν λόγω ἀκολουθίας ;

(Υπόδειξις : Προχωρήσατε ὡς εἰς τὸ παράδειγμα 3, § 151).

287. Δείξτε ὅτι ἡ ἀκολουθία  $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$  μέ :  $\alpha_{v+1} = \sqrt{2\alpha_v}$  καὶ  $\alpha_1 = 1$  εἶναι αὐξουσα καὶ φραγμένη. Ποῖον τὸ ὄριον τῆς ἐν λόγω ἀκολουθίας ;

288. Μελετήσατε ὡς πρὸς τὸ μονότονον καὶ τὴν σύγκλισιν τὴν ἀκολουθίαν :  $\beta_v, v = 1, 2, \dots$

$$\text{μέ : } \beta_{v+1} = \frac{3\beta_v - 4}{5} \quad \text{διὰ κάθε } v = 1, 2, \dots \quad \text{καὶ } \beta_1 = -3.$$

Ποῖον τὸ ὄριον τῆς ἐν λόγω ἀκολουθίας ;

289. Δείξτε ὅτι ἡ ἀκολουθία :  $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$  μέ :

$$\alpha_{v+1} = \alpha + \alpha_v^2 \quad \text{καὶ} \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \deltaπου \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$$

εἶναι γνησίως αὐξουσα καὶ ὅτι συγκλίνει εἰς τὴν μικροτέραν ρίζαν τῆς ἐξίσωσως :  $t^2 - t + \alpha = 0$ .

290. Δείξτε ὅτι ἡ ἀκολουθία :

$$\alpha_v = \left( 1 + \frac{1}{v} \right)^v, \quad v = 1, 2, \dots$$

εἶναι γνησίως αὐξουσα.

291. Νὰ εὐρεθοῦν, ἐὰν ὑπάρχουν, αἱ ὁριακαὶ τιμαὶ τῶν ἀκολουθιῶν μέ γενικοὺς ὁρους :

$$1) \alpha_v = \frac{1^3 + 2^3 + \dots + v^3}{v^4}, \quad 2) \alpha_v = \frac{2v^2(v-3+4v^2)}{5(v-1)^3(3v+4)}.$$

292. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι :  $\lim_{v \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{v} \right)^v = e$ , νὰ εὐρεθοῦν τὰ ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν

$\alpha_v, v = 1, 2, \dots$ , αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν κάτωθι τύπων :

$$1) \alpha_v = \left( 1 - \frac{1}{v} \right)^v, \quad 2) \alpha_v = \left( 1 + \frac{2}{v} \right)^v, \quad 3) \alpha_v = \left( 1 + \frac{3}{v} \right)^v.$$

293. Δείξτε ότι η ακολουθία :

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

είναι γνησίως φθίνουσα.

294. Να αποδειχθεί ότι :

$$1) \quad \lim \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}_0^+$$

γνωστού όντος, ότι :

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

295. Εάν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  δείξτε ότι :

$$\lim (\sqrt[n]{(n+\alpha)(n+\beta)} - n) = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

296. Δείξτε ότι αί ακολουθίαι  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , αί όποίαι όρίζονται ύπό τών κάτωθι τύπων, είναι πᾶσαι μηδενικάί :

$$1) \quad \alpha_n = \frac{2^n}{n!}, \quad 2) \quad \alpha_n = \frac{n!}{n^n}, \quad 3) \quad \alpha_n = \frac{2^n \cdot n!}{(3n)^n},$$

όπου τó σύμβολον  $n!$  ( $n$  παραγοντικόν) παριστᾷ τó γινόμενον :  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \equiv n!$



## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

### ΠΕΡΙ ΠΡΟΟΔΩΝ

#### ΟΡΙΣΜΟΙ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**§ 152. Εισαγωγή.** — Εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον ὥρισamen τὴν ἔννοιαν τῆς ἀκολουθίας καὶ ἀπεδείξαμεν τὰς κυριωτέρας ἰδιότητας τῶν ἀκολουθιῶν. Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον θὰ μελετήσωμεν τρεῖς εἰδικὰς κατηγορίας ἀκολουθιῶν, ἐκάστη τῶν ὁποίων ἔχει καὶ μίαν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα. Ἀναλόγως τῆς χαρακτηριστικῆς ταύτης ἰδιότητος διακρίνομεν τὰς ἀκολουθίας αὐτάς, τὰς ὁποίας καλοῦμεν *π ρ ο ὅ δ ο υ ς*, εἰς : α) Ἀριθμητικὰς προόδους, β) Ἀρμονικὰς προόδους καὶ γ) Γεωμετρικὰς προόδους.

#### I. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

**§ 153. Ὅρισμοί.** — Ἐστω  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Θὰ λέγωμεν ὅτι «*ἡ ἀκολουθία* :

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

*εἶναι μία ἀριθμητικὴ πρόοδος ἢ πρόοδος κατὰ διαφορὰν τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἕκαστος ὅρος τῆς (ἐκτὸς τοῦ πρώτου) προκύπτῃ ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ προσθέσεως ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ».*

Ὁ σταθερὸς αὐτὸς ἀριθμὸς, ὅστις προστίθεται εἰς κάθε ὅρον τῆς προόδου διὰ νὰ δώσῃ τὸν ἐπόμενον, καλεῖται «*λόγος*» τῆς ἀριθμ. προόδου καὶ παρίσταται συνήθως μὲ τὸ γράμμα  $\omega$ . Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (1) καλοῦνται *ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς προόδου*.

Οὕτω, π.χ., ἡ ἀκολουθία :

$$5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \dots \quad (2)$$

εἶναι μία ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ λόγον  $\omega = 2$ .

Ὁμοίως ἡ ἀκολουθία :

$$19, 16, 13, 10, 7, 4, 1, -2, -5, \dots \quad (3)$$

εἶναι μία ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ λόγον  $\omega = -3$ .

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, τὸν ὁποῖον διευτυπώσαμεν ἄνω-τέρω, συνάγομεν ὅτι : ἂν  $a_n$  καὶ  $a_{n+1}$  εἶναι δύο διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου μὲ λόγον  $\omega$ , τότε θὰ ἔχωμεν :

$$a_{n+1} = a_n + \omega, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Ἐκ τῆς (4) προκύπτει :  $a_{n+1} - a_n = \omega$  καὶ τοῦτο διὰ κάθε  $n = 1, 2, \dots$

Ἐντεῦθεν ἔπεται ὁ ἐξῆς ἰσοδύναμος ὁρισμὸς τῆς ἀριθμητικῆς προόδου :

**Ἀριθμητικὴ πρόοδος** εἶναι μία ἀκολουθία ἀριθμῶν, τῆς ὁποίας δύο οἰωνδῆ-ποτε διαδοχικοὶ ὄροι τῆς ἔχουν διαφορὰν, ἥ ὁποία ἰσοῦται μὲ τὸν αὐτὸν πάντοτε ἀριθμὸν, ὅστις καλεῖται **λόγος** τῆς ἀριθμητικῆς προόδου.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ συνάγομεν τώρα τὰ ἐξῆς :

α'). Ἐὰν ὁ λόγος  $\omega$  εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς, τότε  $\alpha_{n+1} - \alpha_n > 0$  ἢ  $\alpha_{n+1} > \alpha_n$  διὰ κάθε  $n = 1, 2, \dots$ , δηλ. ἡ πρόοδος  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι **γνησίως αὐξουσα** (ἄρα καὶ αὐξουσα).

β'). Ἐὰν  $\omega < 0$ , τότε  $\alpha_{n+1} < \alpha_n$  διὰ κάθε  $n = 1, 2, \dots$ , δηλ. ἡ πρόοδος  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι **γνησίως φθίνουσα**. Οὕτως ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος (2) εἶναι γνησίως αὐξουσα, ἐνῶ ἡ (3) εἶναι γνησίως φθίνουσα.

**Παρατήρησις.** Εἰς τὴν τετριμμένην περίπτωσιν καθ' ἣν  $\omega = 0$ , ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος εἶναι μία ἀκολουθία ἴσων ἀριθμῶν (σταθερὰ ἀκολουθία) καὶ ὡς τοιαύτη εἶναι τότε, καὶ μόνον τότε συγχρόνως αὐξουσα καὶ φθίνουσα, ὡς ἐλέχθη καὶ εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον.

## Ἰδιότητες τῆς ἀριθμητικῆς προόδου

**§ 154. Ἰδιότης I.**— Ὁ νιοστὸς ὅρος  $\alpha_n$  ἀριθμητικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον  $\alpha_1$  καὶ λόγον  $\omega$  εὐρίσκεται, ἂν εἰς τὸν πρῶτον ὅρον αὐτῆς προστεθῇ τὸ γινόμενον τοῦ λόγου ἐπὶ τὸ πλῆθος τῶν προηγούμενων αὐτοῦ ὅρων.

Ἦτοι :

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1) \omega$$

(1)

**Ἀπόδειξις.** Διὰ  $n = 1$  ἡ (1) προφανῶς ἀληθεύει.

Δεχόμεθα ὅτι ἀληθεύει διὰ  $n = k$ , ἥτοι ὅτι ἰσχύει :  $\alpha_k = \alpha_1 + (k - 1) \omega$ .

Ἐξ αὐτῆς, διὰ προσθέσεως εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ λόγου  $\omega$ , ἔχομεν :

$\alpha_k + \omega = \alpha_1 + (k - 1) \omega + \omega$ . Ἀλλὰ  $\alpha_k + \omega = \alpha_{k+1}$  (ὁρισμὸς ἀριθμ. προόδου).

Ἄρα :  $\alpha_{k+1} = \alpha_1 + (k - 1) \omega + \omega$  ἢ  $\alpha_{k+1} = \alpha_1 + k\omega = \alpha_1 + [(k + 1) - 1] \omega$ , ἥτοι ἡ ἰδιότης I ἀληθεύει καὶ διὰ  $n = k + 1$ , ἐπομένως, κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, ἀληθεύει διὰ κάθε  $n = 1, 2, \dots$

**Ἐφαρμογή :** Νὰ εὑρεθῇ ὁ 15ος ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου 7, 15, 23, 31, ...

Λύσις : Ἐνταῦθα ἔχομεν :  $\alpha_1 = 7$ ,  $\omega = 8$ ,  $n = 15$ ,  $\alpha_{15} =$  ;

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου  $\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1) \omega$  εὐρίσκομεν :

$$\alpha_{15} = 7 + (15 - 1) \cdot 8 = 7 + 14 \cdot 8 = 119.$$

**Παρατηρήσεις :** α'). Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος συμπεραίνομεν ὅτι μία ἀριθμητικὴ πρόοδος εἶναι τελείως ὠρισμένη, ὅταν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος τῆς  $\alpha_1$  καὶ ὁ λόγος τῆς  $\omega$ , διότι τότε οἱ ὄροι τῆς θὰ εἶναι ἀντιστοιχῶς :

|              |                       |                        |                        |                            |
|--------------|-----------------------|------------------------|------------------------|----------------------------|
| 1ος ὅρος,    | 2ος ὅρος,             | 3ος ὅρος,              | 4ος ὅρος,              | 5ος ὅρος, ...              |
| $\alpha_1$ , | $\alpha_1 + \omega$ , | $\alpha_1 + 2\omega$ , | $\alpha_1 + 3\omega$ , | $\alpha_1 + 4\omega$ , ... |

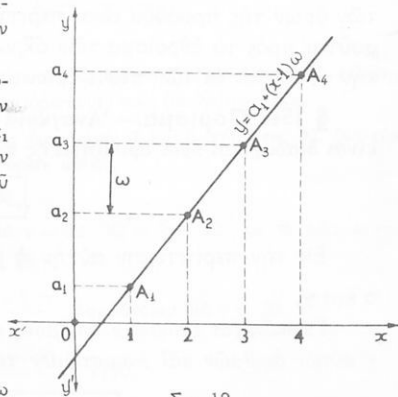
(2)

β'). Ο τύπος (1) είναι μία εξίσωσις μεταξύ των τεσσάρων μεταβλητών  $\alpha_n, \alpha_1, n, \omega$ . Ὡς πρὸς ἐκάστην μεταβλητὴν ἡ εξίσωσις εἶναι πρώτου βαθμοῦ· ἄρα ἐὰν δοθοῦν αἱ τιμαὶ τριῶν ἐκ τῶν τεσσάρων μεταβλητῶν, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν καὶ τὴν τετάρτην, ἐπιλύοντες μίαν εξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ.

γ'). Ἐκ τῆς ἀνωτέρω παρατηρήσεως (β) ἀγόμεθα εἰς μίαν «γεωμετρικὴν παράστασιν» τῶν ὄρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου μὲ πρώτον ὄρον τὸν  $\alpha_1$  καὶ λόγον  $\omega$ . Πράγματι ἄς θεωρήσωμεν ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων  $Ox, Oy$  καὶ ἄς λάβωμεν ἐπὶ τοῦ ἀξονος  $Ox$  τὰς διαδοχικὰς τιμὰς τοῦ  $n$ , δηλ.  $n = 1, 2, \dots$

Σημειοῦμεν ἀκολουθῶς τὰ σημεῖα :

|       |                  |     |     |                                     |
|-------|------------------|-----|-----|-------------------------------------|
| $A_1$ | μὲ συντεταγμένας | 1   | καὶ | $\alpha_1$ .                        |
| $A_2$ | »                | 2   | καὶ | $\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$      |
| $A_3$ | »                | 3   | καὶ | $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\omega$     |
| ...   | ...              | ... | ... | ...                                 |
| $A_n$ | »                | $n$ | καὶ | $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$ |



Σχ. 12

Τὰ μεμονωμένα αὐτὰ σημεῖα δίδουν μίαν γεωμετρικὴν παράστασιν τῶν ὄρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου μὲ πρώτον ὄρον τὸ  $\alpha_1$  καὶ λόγον  $\omega$ . Διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν εξίσωσιν τῆς γραμμῆς (εὐθείας), ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ , ἀρκεῖ εἰς τὸν τύπον (1) νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ  $n$  μὲ τὸ  $x$  καὶ τὸ  $\alpha_n$  μὲ τὸ  $y$ , τότε :

$$y = \alpha_1 + (x-1)\omega. \quad (\epsilon)$$

**§ 155. Ἰδιότης II.** — Εἰς πᾶσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ πεπερασμένον πλῆθος ὄρων, τὸ ἄθροισμα δύο ὄρων ἰσάκεις ἀπεχόντων (ἰσαπεχόντων) τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὄρων.

**Ἀπόδειξις :** Ἐστω μία ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ πεπερασμένον πλῆθος ὄρων καὶ λόγον  $\omega$ . Ἐὰν ἡ πρόοδος ἔχη  $n$  ὄρους  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ , τότε οἱ ὄροι  $\alpha_1$  καὶ  $\alpha_n$  εἶναι οἱ ἄκροι ὄροι. Δύο δὲ ὄροι τῆς προόδου λέγονται «ἰσαπέχοντες» τῶν ἄκρων, ἐὰν ὁ εἰς ἔχη τόσους ὄρους πρὸ αὐτοῦ, ὅσους ὁ ἄλλος μετ' αὐτοῦ. Οὕτω, λ.χ., οἱ ὄροι  $\alpha_2$  καὶ  $\alpha_{n-1}$  εἶναι ἰσαπέχοντες. Ὁμοίως οἱ :  $\alpha_3, \alpha_{n-2}$ .

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι :

$$\alpha_2 + \alpha_{n-1} = (\alpha_1 + \omega) + \alpha_{n-1} = \alpha_1 + (\alpha_{n-1} + \omega) = \alpha_1 + \alpha_n$$

$$\alpha_3 + \alpha_{n-2} = (\alpha_2 + \omega) + \alpha_{n-2} = \alpha_2 + (\alpha_{n-2} + \omega) = \alpha_2 + \alpha_{n-1} = \alpha_1 + \alpha_n$$

$$\alpha_4 + \alpha_{n-3} = (\alpha_3 + \omega) + \alpha_{n-3} = \alpha_3 + (\alpha_{n-3} + \omega) = \alpha_3 + \alpha_{n-2} = \alpha_1 + \alpha_n \text{ κ.ο.κ.}$$

Ὡστε, ἐὰν οἱ  $n$  ἀριθμοὶ  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n$  ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, τότε :

$$(\alpha_2 + \alpha_{n-1}) = (\alpha_3 + \alpha_{n-2}) = \dots = \alpha_1 + \alpha_n.$$

Οὕτω, π.χ., οἱ ὀκτὼ ἀριθμοὶ : 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 εὐρισκόμενοι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ, πληροῦν τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, διότι εἶναι :

$$3 + 17 = 20, \quad 5 + 15 = 20, \quad 7 + 13 = 20, \quad 9 + 11 = 20.$$

**Παρατήρησης :** Ἐὰν ὑπάρχη «μεσαῖος ὅρος», ἥτοι ὅρος προηγούμενος καὶ ἐπόμενος τοῦ αὐτοῦ πλήθους ὄρων ( καὶ τοῦτο θὰ συμβαίνει ὡς ἂν τὸ πλῆθος τῶν ὄρων τῆς προόδου εἶναι περιττόν), τότε τὸ διπλάσιον τοῦ μεσαίου ὄρου ἴσουςται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὄρων. Π.χ., ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον ἐκ τῶν πέντε ὄρων : 3, 5, 7, 9, 11, τότε  $3 + 11 = 5 + 9 = 2 \cdot 7$ .

**§ 156. Πόρισμα.**— Ἀναγκαῖα καὶ ἰκανὴ συνθήκη ἵνα τρεῖς ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma$  εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, καθ' ἣν τάξιν γράφονται, εἶναι :

$$2\beta = \alpha + \gamma \quad (1)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ  $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$  καλεῖται ἀριθμητικὸς μέσος τῶν  $\alpha$  καὶ  $\gamma$ .

Γενικῶς ἐὰν ἔχωμεν  $n$  ἀριθμοὺς  $a_1, a_2, \dots, a_n$  καλοῦμεν ἀριθμητικὸν μέσον τῶν  $n$  αὐτῶν ἀριθμῶν καὶ παριστῶμεν τοῦτον μὲν  $M_A$ , τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν :

$$M_A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (2)$$

**§ 157. Ἰδιότης III.**— Τὸ ἄθροισμα  $\Sigma_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  τῶν  $n$  πρώτων ὄρων ἀριθμητικῆς προόδου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\Sigma_n = \frac{(a_1 + a_n) n}{2} \quad (1)$$

**Ἀποδείξεις.** Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν τὸν ἀνωτέρω τύπον διὰ τῆς μεθόδου τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς, ἢ ἀποδείξῃς ὅμως αὕτη, ὡς εὐκολος, ἐπαφίεται εἰς τὸν ἀναγνώστην. Θὰ δώσωμεν μίαν ἄλλην ἀπόδειξιν, ἢ ὁποία στηρίζεται εἰς τὴν προηγουμένην ιδιότητα :

Γράφομεν ἄφ' ἑνός :  $\Sigma_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$   
καὶ ἄφ' ἑτέρου :  $\Sigma_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$ .  
Προσθέτοντες τὰς δύο ταύτας ἰσότητας κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$2\Sigma_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

ἢ ἐπεὶ δὲ  $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_{n-1} + a_2 = a_n + a_1$  (λόγῳ τῆς ιδιότη. II)  
καὶ αἱ παρενθέσεις εἶναι  $n$  τὸ πλῆθος, θὰ ἔχωμεν :

$$2\Sigma_n = (a_1 + a_n) \cdot n \quad \text{ἢ} \quad \Sigma_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

**Πόρισμα.**— Τὸ ἄθροισμα  $\Sigma_n$  τῶν  $n$  πρώτων ὄρων ἀριθμητικῆς προόδου συναρτῆσει τοῦ πρώτου ὄρου  $a_1 = a$ , τοῦ λόγου  $\omega$  καὶ τοῦ πλήθους  $n$  τῶν ὄρων, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\Sigma_n = \frac{[2a + (n - 1)\omega] \cdot n}{2} \quad (2)$$

**Παρατήρησης.** Οί δύο τύποι :

$$\alpha_v = \alpha_1 + (v-1) \omega \quad \text{και} \quad \Sigma_v = \frac{(\alpha_1 + \alpha_v) \cdot v}{2}$$

περιέχουν πέντε άγνωστους, τούς  $\alpha_1, \alpha_v, \omega, v, \Sigma_v$ .

Έάν λοιπόν μάς δοθούν οί τρείς εξ αυτών, τότε οί άνωτέρω δύο τύποι άποτελοῦν σύστημα δύο εξισώσεων μέ δύο άγνωστους, λύντες δέ τοῦτο εὑρίσκομεν τούς ὑπολοίπους δύο.

**Έφαρμογή.** Ἀριθμητικῆς προόδου ὁ πρώτος ὅρος εἶναι 2 καί ὁ ἐνδέκατος 92. Νά εὑρεθῇ ἡ πρόοδος καί τὸ ἄθροισμα τῶν 20 πρώτων ὅρων αὐτῆς.

**Λύσις :** Ἐχομεν  $\alpha_1 = 2, \alpha_{11} = 92, \omega = ;, \Sigma_{20} = ;$

Έκ τοῦ τύπου  $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1) \omega$  ἔχομεν διὰ  $v = 11, 92 = 2 + 10 \cdot \omega$ , ἐξ οὗ :  $\omega = 9$ .

Ἄρα ἡ πρόοδος εἶναι :  $2, 11, 20, 29, 38, \dots$

Εἰς ἄλλου ἐκ τοῦ τύπου :  $\Sigma_v = \frac{[2\alpha + (v-1) \omega] \cdot v}{2}$  λαμβάνομεν διὰ  $v = 20$

$$\Sigma_{20} = \frac{(4 + 19 \cdot 9) \cdot 20}{2} = 1750.$$

## § 158. Παρεμβολή ἀριθμητικῶν ἐνδιαμέσων. — Ὅρισμοί :

Οί ἀριθμοί  $x_1, x_2, \dots, x_\mu$  καλοῦνται **ἀριθμητικοί ἐνδιάμεσοι** δοθέντων ἀριθμῶν  $\alpha, \tau$  τότε, καί μόνον τότε, ἂν ἡ πεπερασμένη ἀκολουθία :

$$\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \tau$$

εἶναι μία ἀριθμητικῆ πρόοδος.

Δοθέντων δύο ἀριθμῶν  $\alpha, \tau$  καλοῦμεν **παρεμβολὴν  $\mu$  ἀριθμητικῶν ἐνδιαμέσων** τὴν εὑρεσιν  $\mu$  ἀριθμῶν  $x_1, x_2, \dots, x_\mu$  τοιούτων, ὥστε ἡ ἀκολουθία :

$\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \tau$  νὰ εἶναι ἀριθμητικῆ πρόοδος.

Διὰ τὴν εὑρεσιν τῶν ὡς ἄνω ἀριθμητικῶν ἐνδιαμέσων ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν λόγον τῆς ἀριθμητικῆς προόδου :  $\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \tau$ .

Έάν παραστήσωμεν μέ  $\omega'$  τὸν λόγον τῆς προόδου αὐτῆς, τότε, ἐπεὶδὴ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς εἶναι  $\mu + 2$ , ὁ  $\tau$  θὰ εἶναι ὁ ὅρος ὁ κατέχων τὴν  $\mu + 2$  τάξιν καί συνεπῶς θὰ ἰσοῦται μέ :  $\alpha + (\mu + 2 - 1) \omega' = \alpha + (\mu + 1) \omega'$ .

\*Ὡστε :

$$\tau = \alpha + (\mu + 1) \omega'$$

\*Ἄρα :

$$\omega' = \frac{\tau - \alpha}{\mu + 1}$$

(1)

Ὁ τύπος οὗτος καλεῖται **τύπος παρεμβολῆς ἀριθμητικῶν ἐνδιαμέσων** ἢ συντόμως **τύπος τῆς ἀριθμητικῆς παρεμβολῆς**.

Ὅρισθέντος, ἐκ τοῦ τύπου (1), τοῦ «λόγου παρεμβολῆς»  $\omega'$ , οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ :

$$x_1 = \alpha + \frac{\tau - \alpha}{\mu + 1}, \quad x_2 = \alpha + 2 \frac{\tau - \alpha}{\mu + 1}, \dots, x_\mu = \alpha + \mu \frac{\tau - \alpha}{\mu + 1}.$$

Ἐφαρμογή : Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 9 καὶ 41 νὰ παρεμβληθοῦν 7 ἀριθμητικοὶ ἐνδιάμεσοι.

Λύσις : Ὁ τύπος (1) τῆς § 158 δίδει διὰ  $\tau = 41$ ,  $\alpha = 9$ ,  $\mu = 7$

$$\omega' = \frac{41-9}{7+1} = 4$$

καὶ ἡ ζητούμενη πρόοδος εἶναι ἡ :

$$9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41.$$

**§ 159. Συμμετρικὴ παράστασις τῶν ὄρων ἀριθμητικῆς προόδου πεπερασμένου πλήθους ὄρων.** — Ἐπειδὴ εἰς διάφορα προβλήματα ἀριθμητικῶν προόδων εἰσέρχονται τρεῖς ἢ περισσότεροι ἄγνωστοι διὰ τοῦτο πρὸς περιορισμὸν τῶν ἀγνώστων, ἰδίᾳ ὅταν δίδεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὅποιοι εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, σκόπιμον εἶναι νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς ἐξῆς δύο περιπτώσεις :

**Περίπτωσις 1η :** Ἡ πρόοδος ἔχει περιττὸν πλῆθος ὄρων.

Ἐὰν ἡ πρόοδος ἔχη  $(2\nu + 1)$  ὄρους, τότε ὑπάρχει μεσαῖος τὸν ὅποιον παριστῶμεν μὲ ἐν γράμμα λ.χ. μὲ  $x$  καὶ ἐὰν ὁ λόγος τῆς προόδου εἶναι  $\omega$ , γράφομεν τὴν πρόοδον ὡς ἐξῆς :

$$x - \nu\omega, \dots, x - 2\omega, x - \omega, x, x + \omega, x + 2\omega, \dots, x + \nu\omega.$$

**Περίπτωσις 2α :** Ἡ πρόοδος ἔχει ἄρτιον πλῆθος ὄρων (ἔστω  $2\nu$ ).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὑπάρχουν δύο « μεσαῖοι » ὅροι τοὺς ὁποίους παριστῶμεν μὲ :  $x - \lambda$  καὶ  $x + \lambda$ , ὅτε ὁ λόγος  $\omega$  τῆς προόδου εἶναι :

$$\omega = (x + \lambda) - (x - \lambda) = 2\lambda. \quad \text{Τότε ἡ πρόοδος γράφεται ὡς ἐξῆς :}$$

$$x - (2\nu - 1)\lambda, \dots, x - 3\lambda, x - \lambda, x + \lambda, x + 3\lambda, \dots, x + (2\nu - 1)\lambda.$$

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ  $x$  δὲν εἶναι ὅρος τῆς ἀριθμ. προόδου.

Ἐφαρμογή : Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοί, οἱ ὅποιοι εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἄθροισμα εἶναι 33, τὸ δὲ γινόμενον 1287.

Λύσις : Ἐὰν μὲ  $x$  παραστήσωμεν τὸν μεσαῖον ὅρον τῆς προόδου καὶ μὲ  $\omega$  τὸν λόγον, οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ θὰ εἶναι :  $x - \omega, x, x + \omega$ . Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα :

$$\left. \begin{aligned} (x - \omega) + x + (x + \omega) &= 33 \\ (x - \omega) \cdot x \cdot (x + \omega) &= 1287 \end{aligned} \right\} \quad \eta \quad \begin{aligned} 3x &= 33 \\ x(x^2 - \omega^2) &= 1287 \end{aligned} \quad (1)$$

$$(2)$$

Ἡ (1) δίδει ἀμέσως  $x = 11$ . Τότε ἡ (2) λυομένη ὡς πρὸς  $\omega$  δίδει :  $\omega = \pm 2$ .

\* Ἀρα οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι : 9, 11, 13 ἢ 13, 11, 9.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

297. Γράψατε τοὺς ὀκτὼ πρώτους ὄρους τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὄρος καὶ ὁ λόγος εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως :  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

298. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος ἀριθμητικῆς προόδου ἐὰν  $\alpha_1 = 3$  καὶ  $\alpha_{12} = 80$ .

299. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν  $\nu$  πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν.

300. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν  $\nu$  πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ πλήθους αὐτῶν.

301. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν  $\nu$  πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν.

(Υπόδειξις : Χρησιμοποιήσατε την ταυτότητα :  $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  και θέσατε διαδοχικῶς  $x = 1, 2, \dots, n$  ἐπὶ πλέον λάβατε ὑπ' ὄψιν τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἀσκήσεως 299).

**302.** Ἐὰν  $\Sigma_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$  καὶ  $\Sigma_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ , ὑπολογίσατε τὸ  $\Sigma_3$  ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς ταυτότητος :  $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$  καὶ ἀκολουθῶς δείξατε ὅτι :  $\Sigma_3 = (\Sigma_1)^2$ .

**303.** Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 25 πρώτων πολλαπλασίων τοῦ ἀριθμοῦ 11.

**304.** Εἰς ἀριθμητικὴν πρόοδον δίδονται ἐκ τῶν πέντε στοιχείων  $\alpha_1, \omega, \nu, \alpha_n, \Sigma_n$  τρία οἰαδήποτε. Πόσα διάφορα προβλήματα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν καὶ ποῖα; Εἰς ἕκαστον πρόβλημα νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀγνωστα συναρτήσεσι τῶν ἐκάστοτε γνωστῶν καὶ νὰ γίνῃ, ὅπου ἀπαιτεῖται, ἡ σχετικὴ διερεύνησις.

**305.** Ὅρίσατε τὸν  $k$  οὕτως, ὥστε οἱ κάτωθι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν διαδοχικοὺς ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου : (i)  $3k, k+4, k-1$ , (ii)  $3k-7, k+2, 12-2k$ .

**306.** Δείξατε ὅτι, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma$  εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμ. προόδου, τότε καὶ οἱ ἀριθμοὶ :  $x = \alpha^2 - \beta\gamma, y = \beta^2 - \alpha\gamma, z = \gamma^2 - \alpha\beta$

εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου. Ποῖος ὁ λόγος τῶν λόγων τῶν δύο αὐτῶν προόδων;

**307.** Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ὁ λόγος ἀριθμ. προόδου γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν  $n$  πρώτων ὄρων αὐτῆς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ  $n$  ἰσοῦται πρὸς :  $3n^2 + n$ .

**308.** Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ κάτωθι ἄθροισμα ἐκ  $n$  ὄρων :

$$\Sigma = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots$$

(Υπόδειξις : Παρατηρήσατε ὅτι :  $\alpha_n = n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$ ).

**309.** Νὰ παρεμβληθοῦν μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 9 καὶ 34 ἀριθμητικοὶ ἐνδιάμεσοι οὕτως, ὥστε νὰ προκύψῃ μία ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ 11 ὅρους. Ποῖοι εἶναι οἱ ὅροι οὗτοι;

**310.** Δείξατε ὅτι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα οἱ ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma$ , καθ' ἣν τάξιν δίδονται, ἀνήκουν εἰς ἀριθμητικὴν πρόοδον (χωρὶς κατ' ἀνάγκην νὰ εἶναι διαδοχικοὶ) εἶναι : ἡ ἔξι-

$$\frac{\beta - \alpha}{x + 1} = \frac{\gamma - \beta}{y + 1}$$

ἔχει ἀκεραῖαν καὶ θετικὴν λύσιν ὡς πρὸς  $x, y$ , ἐνθα  $x$  εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὄρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου τῶν εὑρισκομένων μεταξύ  $\alpha$  καὶ  $\beta$  καὶ  $y$  τῶν εὑρισκομένων μεταξύ  $\beta$  καὶ  $\gamma$ .

**311.** Ἐξετάσατε ἂν οἱ ἀριθμοὶ :  $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$  ἀποτελοῦν ὅρους (οἰασδήποτε τάξεως) μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἀριθμητικῆς προόδου.

**312.** Πόσους ἀριθμ. ἐνδιάμεσους πρέπει νὰ παρεμβάλωμεν μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 19, ὥστε ὁ δεῦτερος ἐνδιάμεσος νὰ ἔχη πρὸς τὸν τελευταῖον ἐνδιάμεσον λόγον ἴσον μὲ  $1/6$ .

**313.** Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀριθμοὶ, οἱ ὅποιοι εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται πρὸς 26, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των πρὸς 214.

**314.** Ὁ τέταρτος καὶ ὁ ὄγδοος ὅρος ἀριθμ. προόδου ἔχουν ἄθροισμα 18, οἱ δὲ κύβοι των ἔχουν ἄθροισμα 3402. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

**315.** Νὰ εὑρεθοῦν πέντε ἀριθμοὶ, ἀποτελοῦντες διαδοχικοὺς ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶναι 45 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων των εἶναι  $137/180$ .

**316.** Εἰς μίαν ἀριθμητικὴν πρόοδον τὸ ἄθροισμα  $\Sigma_n$  τῶν  $n$  πρώτων ὄρων αὐτῆς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ  $n \in \mathbb{N}$  διδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :  $\Sigma_n = 8n^2 - n$ . Νὰ εὑρεθῇ ἡ τάξις τοῦ ὅρου, ὁ ὁποῖος ἔχει τιμὴν 263.

**317.** Τὰ ἄθροίσματα τῶν  $n$  πρώτων ὄρων δύο ἀριθμητικῶν προόδων ἔχουν λόγον  $\frac{7n+2}{n+1}$  διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ  $n \in \mathbb{N}$ . Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπέμπτων ὄρων τῶν δύο προόδων.

318. Ἐάν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἀληθεύει ἡ σχέσηις :

$$\frac{\alpha + \delta}{2} > \sqrt[4]{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

319. Προσδιορίσατε τὰ  $\alpha$  καὶ  $\beta$  οὕτως, ὥστε αἱ ρίζαι  $\rho_1, \rho_2$  τῆς ἐξίσωσως  $x^2 - \alpha x + \beta = 0$  καὶ αἱ ρίζαι  $\rho_3, \rho_4$  τῆς  $x^2 - (5\alpha - 4)x + \beta = 0$ , γραφόμεναι κατὰ τὴν τάξιν  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$  εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου.

320. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις  $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$ , ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι αἱ ρίζαι τῆς ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

321. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσηις μεταξὺ τῶν  $\alpha, \beta, \gamma$ , ὥστε αἱ ρίζαι τῆς διτετραγώνου ἐξίσωσως :  $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ , νὰ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου.

## II. ΑΡΜΟΝΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

**§ 160. Ὅρισμός.** — Μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots \quad (1)$$

εἶναι ἀρμονικὴ πρόοδος τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ἀκολουθία

$$\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}, \dots \quad (2)$$

εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος.

Οὕτως, ἡ ἀκολουθία τῶν ἀριθμῶν :

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$$

εἶναι ἀρμονικὴ πρόοδος, διότι οἱ ἀντίστροφοί των, κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, 3, 5, 7, 9, ...

ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον (μὲ λόγον  $\omega = 2$ ).

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρου ὁρισμοῦ τῆς ἀρμονικῆς προόδου συνάγομεν, ὅτι ζητήματα ἀφορῶντα ἀρμονικὴν πρόοδον ἀνάγονται εἰς ἐπίλυσιν ζητημάτων τῆς ἀντιστοίχου ἀριθμητικῆς προόδου. Ἐνεκα τούτου θὰ μελετήσωμεν κατωτέρω τὰς κυριωτέρας ιδιότητας τῶν ἀρμονικῶν προόδων ὑπὸ μορφήν ἐφαρμογῶν τῶν ιδιοτήτων τῶν ἀριθμητικῶν προόδων.

**§ 161. Εὑρεσις τοῦ νιοστοῦ ὅρου μιᾶς ἀρμονικῆς προόδου τῆς ὁποίας δίδονται οἱ δύο πρῶτοι ὅροι.** — Ἐστω ἡ ἀρμονικὴ πρόοδος :

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots \quad (1)$$

$$\text{Τότε, κατὰ τὸν ὁρισμὸν ταύτης, ἡ ἀκολουθία : } \frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}, \dots \quad (2)$$

εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ λόγον  $\omega = \frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1}$ .

Ἀλλὰ ὁ νιοστός ὅρος τῆς (2) δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (1) τῆς § 154, ἥτοι :

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\alpha_1} + (n-1) \cdot \left( \frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1} \right)$$

$$\eta \quad \frac{1}{\alpha_n} = \frac{\alpha_2 + (n-1)(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1 \alpha_2} = \frac{\alpha_1(n-1) - \alpha_2(n-2)}{\alpha_1 \alpha_2}$$



\*Αρα ὁ νιοστὸς ὅρος  $a_n$  τῆς ἀρμονικῆς προόδου (1) εἶναι τότε ὁ :

$$a_n = \frac{a_1 a_2}{a_1 (n-1) - a_2 (n-2)} \quad (3)$$

**§ 162. Συνθήκη, ἵνα οἱ ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma$  εἶναι, κατὰ τὴν δοθεῖσαν τάξιν, διαδοχικοὶ ὅροι ἀρμονικῆς προόδου.**

Ἐφ' ὅσον οἱ ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma$  εἶναι, κατὰ τὴν δοθεῖσαν τάξιν, διαδοχικοὶ ὅροι ἀρμονικῆς προόδου, οἱ ἀντίστροφοὶ τῶν  $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ , κατὰ τὸν δοθέντα ὅρισμόν (§ 160), εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου καὶ συνεπῶς (§ 156) θὰ ἔχωμεν :

$$2 \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \quad \eta \quad \beta = \frac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}}$$

\*Αρα :

$$\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma} \quad (1)$$

\*Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, ἐάν ἀληθεύῃ ἡ (1), τότε οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma$  εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀρμονικῆς προόδου (διατί;).

\*Ὅθεν : Ἰκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα οἱ ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma$  εἶναι, κατὰ τὴν δοθεῖσαν τάξιν, διαδοχικοὶ ὅροι ἀρμονικῆς προόδου εἶναι ἡ ἰσότης (1).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ  $\beta$  καλεῖται ἀρμονικὸς μέσος τῶν  $\alpha$  καὶ  $\gamma$ .

Γενικῶς : Δοθέντων  $n$  ἀριθμῶν  $a_1, a_2, \dots, a_n$  καλοῦμεν ἀρμονικὸν μέσον αὐτῶν καὶ τὸν συμβολίζομεν διὰ  $M_H$ , τὸν ἀριθμόν :

$$M_H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \quad (2)$$

**Παρατήρησις :** Ἡ σχέσις (1) δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφήν :

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} \quad (\text{διατί;}) \quad (3)$$

Κατὰ ταῦτα, ἡ ἀναγκαία καὶ ἰκανὴ συνθήκη, ἵνα οἱ ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma$  εἶναι, κατὰ τὴν δοθεῖσαν τάξιν, διαδοχικοὶ ὅροι ἀρμονικῆς προόδου, εἶναι οἱ ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma$  νὰ ἀποτελοῦν ἀ ρ μ ο ν ι κ ῆ ν ἀ ν α λ ο γ ί α ν.

**§ 163. Παρεμβολὴ ἀρμονικῶν ἐνδιαμέσων.**—Οἱ ἀριθμοὶ  $x_1, x_2, \dots, x_m$  καλοῦνται ἀρμονικοὶ ἐνδιάμεσοι δοθέντων ἀριθμῶν  $\alpha, \tau$  τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ἀκολουθία :  $\alpha, x_1, x_2, \dots, x_m, \tau$  εἶναι ἀρμονικὴ πρόοδος.

Δοθέντων τῶν ἀριθμῶν  $\alpha$ ,  $\tau$  καλοῦμεν **παρεμβολὴν  $\mu$  ἁρμονικῶν ἐνδιαμέσων**, τὴν εὑρεσιν  $\mu$  ἀριθμῶν  $x_1, x_2, \dots, x_\mu$  τοιούτων, ὥστε ἡ ἀκολουθία  $\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu$ ,  $\tau$  νὰ εἶναι ἁρμονικὴ πρόοδος.

Τίθεται τώρα τὸ ἐξῆς **πρόβλημα** :

**Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν  $\alpha$  καὶ  $\tau$  νὰ παρεμβληθοῦν  $\mu$  ἁρμονικοὶ ἐνδιάμεσοι.**

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ παρεμβληθοῦν  $\mu$  ἀριθμητικοὶ ἐνδιάμεσοι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν  $\frac{1}{\alpha}$  καὶ  $\frac{1}{\tau}$ . Ἐκ τοῦ τύπου (1) (§ 158) τῆς ἀριθμητικῆς παρεμβολῆς εὐρίσκομεν ἐν προκειμένῳ :

$$\omega' = \frac{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\alpha}}{\mu + 1} = \frac{\alpha - \tau}{(\mu + 1) \alpha \tau}. \quad (1)$$

Ὁ τύπος (1) καλεῖται **τύπος τῆς ἁρμονικῆς παρεμβολῆς**.

Ὅρισθέντος ἐκ τοῦ τύπου (1) τοῦ λόγου  $\omega'$  εὐρίσκομεν τοὺς  $\mu$  ἀριθμητικούς ἐνδιαμέσους τῶν  $\frac{1}{\alpha}$  καὶ  $\frac{1}{\tau}$ , ὁπότε οἱ ἀντίστροφοί των θὰ εἶναι οἱ ζητούμενοι  $\mu$  ἁρμονικοὶ ἐνδιάμεσοι τῶν  $\alpha$  καὶ  $\tau$ , ἥτοι θὰ ἔχωμεν :

$$x_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha - \tau}{(\mu + 1) \alpha \tau}}, \quad x_2 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + 2 \frac{\alpha - \tau}{(\mu + 1) \alpha \tau}}, \quad \dots, \quad x_\mu = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \mu \frac{\alpha - \tau}{(\mu + 1) \alpha \tau}}.$$

**Ἐ φ α ρ μ ο γ ῆ.** Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν  $\frac{5}{2}$  καὶ  $\frac{5}{11}$  νὰ παρεμβληθοῦν 5 ἁρμονικοὶ ἐνδιάμεσοι.

**Λύσις.** Πρὸς τοῦτο παρεμβάλομεν πέντε ἀριθμητικούς ἐνδιαμέσους μεταξὺ τῶν ἀντιστρόφων τῶν δοθέντων, ἥτοι μεταξὺ  $\frac{2}{5}$  καὶ  $\frac{11}{5}$ .

Ὁ τύπος (1), διὰ  $\tau = \frac{5}{11}$ ,  $\alpha = \frac{5}{2}$ ,  $\mu = 5$  δίδει:  $\omega' = \frac{3}{10}$ .

Τότε οἱ πέντε ἀριθμητικοὶ ἐνδιάμεσοι τῶν  $\frac{2}{5}$  καὶ  $\frac{11}{5}$  εἶναι οἱ:  $\frac{7}{10}$ ,  $1$ ,  $\frac{13}{10}$ ,  $\frac{8}{5}$ ,  $\frac{19}{10}$  κατὰ συνέπειαν οἱ ζητούμενοι ἁρμονικοὶ ἐνδιάμεσοι εἶναι οἱ ἀντίστροφοί των, ἥτοι :

$$\frac{10}{7}, 1, \frac{10}{13}, \frac{5}{8}, \frac{10}{19}.$$

καὶ ἡ ἁρμονικὴ πρόοδος εἶναι:  $\frac{5}{2}, \frac{10}{7}, 1, \frac{10}{13}, \frac{5}{8}, \frac{10}{19}, \frac{5}{11}$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**322.** Νὰ εὐρεθῇ ὁ 31ος ὅρος τῆς ἁρμονικῆς προόδου  $\frac{1}{25}, \frac{1}{33}, \frac{1}{41}, \dots$  καὶ ὁ 8ος ὅρος τῆς προόδου:  $1, \frac{3}{8}, \frac{3}{13}, \dots$

**323.** Νὰ προσδιορισθῇ ὁ  $k$  οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοί:  $1 + k, 3 + k, 9 + k$ , καθ' ἣν τάξιν δίδονται, εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.

324. 'Εάν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  είναι διαδοχικοί όροι άρμονικής προόδου, νά αποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{5\alpha - 3\beta}{\alpha\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\gamma\delta}.$$

325. 'Εάν  $\frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}, \beta, \frac{\beta + \gamma}{1 - \beta\gamma}$  είναι διαδοχικοί όροι άριθμ. προόδου, τότε οί  $\alpha, \frac{1}{\beta}, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι άρμονικής προόδου.

326. Νά παρεμβληθοῦν 19 άριθμητικοί ένδιάμεσοι καί 19 άρμονικοί ένδιάμεσοι μεταξύ τῶν άριθμῶν 2 καί 3. 'Εάν δέ  $\xi$  είναι εἰς άριθμητικός ένδιάμεσος καί  $\eta$  ὁ αντίστοιχος άρμονικός θά είναι :

$$\xi + \frac{6}{\eta} = 5.$$

327. 'Εάν οί άριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  συνιστοῦν άρμονικήν πρόοδον, τότε καί οί άριθμοί :

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma - \alpha}, \frac{\beta}{\gamma + \alpha - \beta}, \frac{\gamma}{\alpha + \beta - \gamma}$$

συνιστοῦν επίσης άρμονικήν πρόοδον.

328. 'Εάν οί όμóσημοι άριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  άποτελοῦν άρμονικήν πρόοδον, νά δειχθῇ ὅτι :

$$1) \frac{\alpha + \beta}{2\alpha - \beta} + \frac{\gamma + \beta}{2\gamma - \beta} > 4$$

$$2) \beta^2 (\alpha - \gamma)^2 = 2 [\gamma^2 (\beta - \alpha)^2 + \alpha^2 (\gamma - \beta)^2].$$

329. 'Εάν οί  $\alpha, \beta, \gamma$  συνιστοῦν άρμονικήν πρόοδον, νά δειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha} + \frac{\beta + \gamma}{\beta - \gamma} = 2.$$

330. 'Εάν οί άριθμοί  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$  άποτελοῦν άρμονικήν πρόοδον, νά αποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \dots + \alpha_{v-1} \alpha_v = (v-1) \alpha_1 \alpha_v.$$

331. Τό άθροισμα τριῶν διαδοχικῶν ὀρων μιᾶς άρμονικής προόδου είναι  $\frac{33}{40}$ , τό δέ άθροισμα τῶν αντίστροφῶν των είναι 15. Νά υπολογισθοῦν οί τρεῖς άριθμοί.

332. Νά ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις  $15x^3 - 46x^2 + 36x - 8 = 0$ , γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ ρίζαι τῆς εὑρίσκονται ἐν άρμονικῇ προόδῳ.

333. 'Εάν  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  είναι ὀροι άριθμητικῆς προόδου καί  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$  είναι ὀροι άρμονικῆς προόδου καί ἰσχύουν :  $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha$  καί  $\alpha_5 = \beta_5 = \beta$ , νά εὑρεθῇ τό γινόμενον  $\alpha_3 \beta_3$ .

334. 'Εάν ἡ παράστασις :  $\alpha(\beta - \gamma)x^2 + \beta(\gamma - \alpha)xy + \gamma(\alpha - \beta)y^2$  εἶναι τέλειον τετράγωνον οί άριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  εὑρίσκονται ἐν άρμονικῇ προόδῳ.

335. 'Εάν οί άριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι ὀροι άρμονικῆς προόδου τάξεως  $\lambda, \mu, \nu$  ἀντιστοίχως, νά δειχθῇ ἡ ἰσότης :

$$(\mu - \nu) \alpha + (\nu - \lambda) \beta + (\lambda - \mu) \gamma = 0.$$

336\*. Εὑρετε τήν συνθήκην, ἵνα τρεῖς άριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  εἶναι ὀροι άρμονικῆς προόδου, οὐχί κατ' ἀνάγκην διαδοχικοί καί ἐπὶ τῇ βάσει τῆς εὑρεθείσης συνθήκης ἐξετάσατε ἐάν οί άριθμοί  $\frac{1}{2}, \frac{1}{15}, \frac{1}{32}$  ἀνήκουν εἰς άρμονικήν πρόοδον καί ποίαν.

337. 'Εάν αἱ ρίζαι  $x_1, x_2, x_3$  τῆς ἐξίσώσεως :  $x^3 + 3\alpha x^2 + 3\beta x + \gamma = 0, \beta \neq 0$ , άποτελοῦν άρμονικήν πρόοδον, θά εἶναι :

$$3\alpha\beta\gamma - \gamma^2 = 2\beta^3.$$

### III. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

**§ 164. Όρισμοί.**— Έστω  $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$  μία άκολουθία πραγματικῶν άριθμῶν, διαφόρων τοῦ μηδενός. Θά λέγωμεν ὅτι «ἡ άκολουθία :

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v, \dots$$

(1)

είναι μία γεωμετρική πρόοδος ή πρόοδος κατά πηλίκον τότε, και μόνον τότε, αν ένας όρος της, από το δεύτερο και έφεξης, προκύπτει εκ του προηγούμενου του δια πολλαπλασιασμού επί ένα και τον αυτόν σταθερόν αριθμόν».

Ο σταθερός αυτός αριθμός καλείται λόγος της γεωμετρικής προόδου και παρίσταται συνήθως και αυτός με το γράμμα  $\omega$ .

Οί όροι της ακολουθίας (1) καλούνται και **όροι** της γεωμετρικής προόδου. Ούτως ή ακολουθία :

$$2, -4, 8, -16, 32, -64, \dots \quad (2)$$

είναι μία γεωμετρική πρόοδος με λόγον  $\omega = -2$ .

Όμοίως ή ακολουθία :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \quad (3)$$

είναι μία γεωμετρική πρόοδος με λόγον  $\omega = \frac{1}{2}$ .

Έκ του δοθέντος όρισμού της γεωμετρικής προόδου συνάγομεν ότι : εάν  $a_n$  και  $a_{n+1}$  είναι δύο διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγον  $\omega$ , θα έχωμεν :

$$a_{n+1} = a_n \cdot \omega, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Έκ της (4) προκύπτει :  $a_{n+1} : a_n = \omega$  και τοῦτο δια κάθε  $n = 1, 2, \dots$ . Έντεῦθεν έπεται ό εξής ισοδύναμος όρισμός της γεωμετρικής προόδου :

**Γεωμετρική πρόοδος** είναι μία ακολουθία αριθμῶν, της οποίας τὸ πηλίκον  $a_{n+1} : a_n$  δύο οίονδηποτε διαδοχικῶν ὄρων της ισούται με τον αυτόν πάντοτε αριθμόν, ό οποίος καλείται **λόγος** της γεωμετρικής προόδου.

Έκ του άνωτέρω όρισμού συνάγομεν τώρα τὰ εξής :

(i). Έάν  $|\omega| > 1$ , τότε  $|a_{n+1}| > |a_n|$  δια κάθε  $n = 1, 2, \dots$ , δηλαδή ή γεωμετρική πρόοδος  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι **άπολύτως αύξουσα**.

Ούτως ή πρόοδος (2) είναι άπολύτως αύξουσα.

(ii). Έάν  $|\omega| < 1$ , τότε  $|a_{n+1}| < |a_n|$  δια κάθε  $n = 1, 2, \dots$ , δηλ. ή γεωμετρική πρόοδος  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι **άπολύτως φθίνουσα**.

Ούτως ή πρόοδος (3) είναι άπολύτως φθίνουσα, διότι  $|\omega| = \frac{1}{2} < 1$ .

**Παρατήρησις.** Έάν  $|\omega| = 1$ , δηλαδή  $\omega = \pm 1$ , έχομεν :

(i). Δια  $\omega = 1$  ή γεωμ. πρόοδος είναι μία ακολουθία ίσων αριθμῶν (σταθερά ακολουθία  $a_n = a_1$ ,  $\forall n = 1, 2, \dots$ ) και ως τοιαύτη είναι συγχρόνως αύξουσα και φθίνουσα.

(ii). Δια  $\omega = -1$  ή γεωμετρική πρόοδος είναι άπολύτως σταθερά, διότι :  $|a_{n+1}| = |a_n \cdot \omega| = |a_n| = |a_1|$  και ως τοιαύτη είναι συγχρόνως άπολύτως αύξουσα και φθίνουσα.

## Ἰδιότητες τῆς γεωμετρικῆς προόδου

§ 165. Ἰδιότης I.— Εἰς πᾶσαν γεωμετρικὴν πρόοδον ἕκαστος ὅρος τῆς ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου αὐτῆς ἐπὶ δύναμιν τοῦ λόγου, ἔχουσιν ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν, ὅστις φανερώνει τὸν πληθὸς τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων.

Ἦτοι:

$$a_v = a_1 \cdot \omega^{v-1}, \quad v = 1, 2, \dots$$

(1)

Ἀποδείξεις: Ἡ ἰδιότης προφανῶς ἰσχύει διὰ  $v = 1$ .

Δεχόμεθα ὅτι ἀληθεύει διὰ  $v = k$ , ἦτοι ὅτι ἰσχύει:  $a_k = a_1 \cdot \omega^{k-1}$ .

Ἐξ αὐτῆς προκύπτει  $a_k \cdot \omega = a_1 \cdot \omega^k$ . Ἀλλὰ  $a_k \cdot \omega = a_{k+1}$  (ὁρισμὸς γεωμ. προόδου).

Ἄρα:

$$a_{k+1} = a_1 \cdot \omega^k = a_1 \cdot \omega^{(k+1)-1}$$

ἦτοι, ἡ ἰδιότης ἀληθεύει καὶ διὰ  $v = k + 1$ , ἐπομένως, κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς, ἀληθεύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $v$ .

Ἐφαρμογ αἱ. 1η: Νὰ εὑρεθῇ ὁ 7ος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου:  $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots$

Λύσις. Ἐχομεν  $a_1 = \frac{1}{2}, \omega = 2, v = 7, a_7 =$

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ἀνωτέρω τύπου (1) εὐρίσκουμεν:  $a_7 = \frac{1}{2} \cdot 2^6 = 32$ .

2α: Νὰ εὑρεθῇ τὸ πληθὸς  $v$  τῶν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου ἣ ὁποία ἔχει:

$$a_1 = 6, \quad \omega = 2, \quad a_v = 3072.$$

Λύσις. Εἰς τὸν τύπον  $a_v = a_1 \cdot \omega^{v-1}$  θέτομεν ἀντὶ τῶν  $a_1, \omega, a_v$  τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν:

$$3072 = 6 \cdot 2^{v-1} \quad \eta \quad 2^{v-1} = 512.$$

Ἐπειδὴ  $512 = 2^9$  ἡ τελευταία ἰσότης γράφεται:

$$2^{v-1} = 2^9, \quad \text{ἐξ οὗ: } v-1 = 9 \quad \eta \quad v = 10.$$

Παρατήρησις: Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος συμπεραίνομεν ὅτι μία γεωμετρικὴ πρόοδος εἶναι τελείως ὠρισμένη, ὅταν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος τῆς  $a_1$  καὶ ὁ λόγος τῆς  $\omega$ , διότι τότε οἱ ὅροι τῆς θὰ εἶναι ἀντιστοίχως:

|          |                |                  |                  |                               |
|----------|----------------|------------------|------------------|-------------------------------|
| 1ος ὅρος | 2ος ὅρος       | 3ος ὅρος         | 4ος ὅρος         | 5ος ὅρος . . .                |
| $a_1$ ,  | $a_1 \omega$ , | $a_1 \omega^2$ , | $a_1 \omega^3$ , | $a_1 \omega^4$ , . . . κ.ο.κ. |

§ 166. Ἰδιότης II.— Εἰς γεωμετρικὴν πρόοδον μὲ πεπερασμένον πληθὸς ὅρων τὸ γινόμενον δύο ὅρων ἰσάκεις ἀπεχόντων τῶν ἄκρων, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων, ἐὰν δὲ τὸ πληθὸς τῶν ὅρων εἶναι περιττόν, τότε ὁ μεσαῖος ὅρος εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν ἄκρων ὅρων.

Ἀποδείξεις. α'). Ἐστω μία γεωμ. πρόοδος μὲ  $v$  ὅρους:  $a_1, a_2, \dots, a_{v-1}, a_v$  καὶ λόγον  $\omega$ . Παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει:

$$a_2 \cdot a_{v-1} = (a_1 \omega) \cdot \left( \frac{a_v}{\omega} \right) = a_1 a_v$$

$$a_3 \cdot a_{v-2} = (a_1 \omega^2) \cdot \left( \frac{a_v}{\omega^2} \right) = a_1 \cdot a_v$$

καὶ γενικῶς, ἐὰν ὁ εἷς ἔχη  $k$  ὅρους πρὸ αὐτοῦ, θὰ εἶναι ἴσος μέ:  $\alpha_1 \cdot \omega^k$ , τότε ὁ ἔχων  $k$  ὅρους μετ' αὐτὸν θὰ εἶναι ἴσος μέ:  $\frac{\alpha_v}{\omega^k}$  συνεπῶς τὸ γινόμενον τῶν δύο αὐτῶν ὁρων εἶναι:  $(\alpha_1 \omega^k) \cdot \left(\frac{\alpha_v}{\omega^k}\right) = \alpha_1 \alpha_v$ .

β'). \*Εστω ὅτι τὸ πλῆθος τῶν ὁρων εἶναι περιττόν, τότε ὑπάρχει μεσαῖος ὁρος, ἔστω ὁ  $\alpha_\lambda$ . \*Εξ ὁρισμοῦ εἶναι  $\alpha_\lambda = \alpha_{\lambda-1} \cdot \omega$  καὶ  $\alpha_\lambda = \frac{\alpha_{\lambda+1}}{\omega}$ .

\*Εξ αὐτῶν λαμβάνομεν:

$$\alpha_\lambda^2 = (\alpha_{\lambda-1} \cdot \omega) \cdot \left(\frac{\alpha_{\lambda+1}}{\omega}\right) = \alpha_{\lambda-1} \cdot \alpha_{\lambda+1} = \alpha_1 \alpha_v,$$

ἤτοι ὁ μεσαῖος ὁρος εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν ἄκρων ὁρων.

**§ 167. Πόρισμα I.**— \*Αναγκαία καὶ ἰκανὴ συνθήκη, ἵνα τρεῖς ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma$ , καθ' ἣν τάξιν γράφονται, εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου εἶναι:

$$\beta^2 = \alpha \gamma \quad (1)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ  $\beta$  καλεῖται γεωμετρικὸς μέσος ἢ μέσος ἀνάλογος τῶν  $\alpha$  καὶ  $\gamma$ .

Γενικῶς: Καλοῦμεν γεωμετρικὸν μέσον  $n^*$  πραγματικῶν ἀριθμῶν  $a_1, a_2, \dots, a_n$  καὶ συμβολίζομεν τοῦτον μὲ  $M_\Gamma$ , τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν, ὅστις ὁρίζεται οὕτω:

$$M_\Gamma = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (2)$$

**§ 168. Πόρισμα II.**— Τὸ γινόμενον  $\Pi_v \equiv a_1 a_2 \dots a_v$  τῶν  $v$  πρώτων ὁρων γεωμετρικῆς προόδου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\Pi_v^2 = (a_1 \cdot a_v)^v \quad (1)$$

Σημείωσις. \*Ὁ ἀνωτέρω τύπος δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\Pi_v = a_1^v \cdot \omega^{\frac{v(v-1)}{2}}, \text{ ὅπου } \omega \text{ ὁ λόγος τῆς προόδου. (Διατί;).} \quad (2)$$

**§ 169. Ἰδιότης III.**— Τὸ ἄθροισμα  $\Sigma_v \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_v$  τῶν  $v$  πρώτων ὁρων γεωμετρικῆς προόδου μὲ λόγον  $\omega \neq 1$  δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\Sigma_v = \frac{a_v \omega - a_1}{\omega - 1} \quad (1)$$

\*Απόδειξις: Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος:

$$\Sigma_v = a_1 + a_2 + \dots + a_v \quad (2)$$

ἐπὶ τὸν λόγον  $\omega$  εὐρίσκομεν:

$$\omega \Sigma_v = a_1 \omega + a_2 \omega + \dots + a_v \omega \quad (3)$$

\* θετικῶν.

Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (3) καὶ (2) καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι :

$$\alpha_1 \omega = \alpha_2, \alpha_2 \omega = \alpha_3, \dots, \alpha_{v-1} \omega = \alpha_v,$$

εὐρίσκομεν :

$$\omega \Sigma_v - \Sigma_v = \alpha_v \omega - \alpha_1 \quad \eta \quad (\omega - 1) \cdot \Sigma_v = \alpha_v \omega - \alpha_1.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἰσότητος, διὰ  $\omega \neq 1$ , προκύπτει :

$$\Sigma_v = \frac{\alpha_v \omega - \alpha_1}{\omega - 1}.$$

Ἀσ κ η σ ι ς. Νὰ ἀποδειχθῇ ὁ τύπος (1) τοῦ ἄθροίσματος διὰ τῆς μεθόδου τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

**§ 170. Πόρισμα.**— Τὸ ἄθροισμα  $\Sigma_v \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v$  τῶν  $v$  πρώτων ὄρων γεωμετρικῆς προόδου μὲ λόγον  $\omega \neq 1$  δίδεται συναρτήσῃ τοῦ πρώτου ὄρου  $\alpha_1$ , τοῦ λόγου  $\omega$  καὶ τοῦ πλήθους  $v$  τῶν ὄρων τοῦ ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\Sigma_v = \frac{\alpha_1 (\omega^v - 1)}{\omega - 1} \quad (1)$$

Ὁ τύπος (1) δίδει τὸ ἄθροισμα τῶν  $v$  πρώτων ὄρων τῆς γεωμ. προόδου, χωρὶς νὰ παρίσταται ἀνάγκη νὰ εὕρωμεν τὸν νιοστὸν ὄρον αὐτῆς.

Ἐ φ α ρ μ ο γ ῆ : Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀκτὼ πρώτων ὄρων τῆς προόδου :

$$2, 6, 18, 54, \dots$$

Λύσις : Εἰς τὸν τύπον (1) (§ 170) θέτοντες  $\alpha_1 = 2$ ,  $\omega = 3$ ,  $v = 8$  λαμβάνομεν :

$$\Sigma_8 = \frac{2(3^8 - 1)}{3 - 1} = \frac{2(6561 - 1)}{2} = 6560.$$

**Παρατηρήσεις : α').** Ἐὰν εἰς μίαν γεωμετρικὴν πρόδον εἶναι  $\omega = 1$  οἱ τύποι (1) τῶν § 169, 170 διὰ τὸ  $\Sigma_v$  δὲν δύνανται νὰ ἐφαρμοσθοῦν (διατί;). Εἰς τὴν εἰδικὴν αὐτὴν περίπτωσιν, δηλ. ἂν  $\omega = 1$ , ἡ πρόδοδος ἔχει ὅλους τοὺς ὄρους τῆς ἴσους μὲ τὸν πρώτον καὶ συνεπῶς τὸ ἄθροισμα τῶν  $v$  πρώτων ὄρων ἰσοῦται μὲ :  $\Sigma_v = \alpha_1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_1 = v \cdot \alpha_1$ .

**β').** Οἱ δύο τύποι :

$$\alpha_v = \alpha_1 \omega^{v-1} \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \Sigma_v = \frac{\alpha_v \omega - \alpha_1}{\omega - 1} \quad (2)$$

περιέχουν πέντε ἀγνώστους, τοὺς  $\alpha_1, \alpha_v, \omega, v, \Sigma_v$ . Ἐὰν λοιπὸν μᾶς δοθοῦν οἱ τρεῖς ἐξ αὐτῶν, τότε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τοὺς ὑπολοίπους δύο ἐπιλύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Ἡ ἐπίλυσις τοῦ ἐν λόγω συστήματος εἶναι, ἐν γένει, εὐκόλος πλὴν τῶν ἐξῆς δύο περιπτώσεων :

(i). Ἐὰν ζητοῦνται οἱ  $\alpha_1$  καὶ  $\omega$ . Τότε τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2) δίδει τὴν ἐξίσωσιν :

$$(\Sigma_v - \alpha_v) \omega^v - \Sigma_v \omega^{v-1} + \alpha_v = 0. \quad (3)$$

(ii). Ἐὰν ζητοῦνται οἱ  $\alpha_v$  καὶ  $\omega$ . Τότε τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2) δίδει τὴν ἐξίσωσιν :

$$\alpha_1 \omega^v - \Sigma_v \omega + (\Sigma_v - \alpha_1) = 0. \quad (4)$$

Αἱ ἐξισώσεις (3) καὶ (4) εἶναι  $v$  βαθμοῦ καὶ ἂν μὲν ὁ  $v \leq 4$  αὐτὰ ἐπιλύονται, ἂν ὁμως  $v > 4$ , πρᾶγμα συνηθέστερον, τότε δὲν καθίσταται δυνατὴ ἡ ἐπίλυσις αὐτῶν μὲ τὰς στοιχειώδεις γνώσεις τῆς Ἀλγέβρας.

Μερικὰ ἀπὸ τὰ παρουσιαζόμενα προβλήματα ἐπιλύονται μὲ τὴν βοήθειαν τῶν λογαριθμῶν, τὴν θεωρίαν τῶν ὁποίων ἀναπτύσσομεν εἰς ἓν τῶν ἐπομένων κεφαλαίων.

**Εφαρμογή 1η :** Γεωμετρικής προόδου αποτελουμένης ἐξ ὀκτῶ ὄρων ὁ τελευταῖος ὄρος τῆς ἰσοῦται πρὸς 384 καὶ ὁ λόγος ἰσοῦται πρὸς 2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὄρος τῆς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων τῆς.

**Λύσις :** Ἐστωσαν  $\alpha_1$  ὁ πρῶτος ὄρος,  $\omega$  ὁ λόγος καὶ  $\alpha_n$  ὁ νιοστὸς ὄρος τῆς γεωμ. προόδου.

Ἐκ τῶν τύπων  $\alpha_n = \alpha_1 \omega^{n-1}$  καὶ  $\Sigma_n = \frac{\alpha_n \omega - \alpha_1}{\omega - 1}$  διὰ  $\omega = 2$ ,  $n = 8$ ,  $\alpha_n = 384$  λαμβάνομεν ἀντιστοίχως :

$$384 = \alpha_1 \cdot 2^7 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \Sigma_8 = \frac{384 \cdot 2 - \alpha_1}{2 - 1} \quad (2)$$

Ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν  $\alpha_1 = 3$ .

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) τὸ  $\alpha_1$  μὲ τὸ ἴσον του εὐρίσκομεν :

$$\Sigma_8 = \frac{384 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 765.$$

**Εφαρμογή 2α :** Εἰς γεωμετρικὴν πρόδοον μὲ πρῶτον ὄρον τὸ 5 ὁ ἑβδομος ὄρος τῆς ἰσοῦται πρὸς 3645. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπτά πρῶτων ὄρων τῆς.

**Λύσις :** Ἐκ τῶν τύπων  $\alpha_n = \alpha_1 \omega^{n-1}$  καὶ  $\Sigma_n = \frac{\alpha_n \omega - \alpha_1}{\omega - 1}$ , διὰ  $\alpha_1 = 5$ ,  $n = 7$ , καὶ  $\alpha_n = 3645$  λαμβάνομεν ἀντιστοίχως :

$$3645 = 5 \cdot \omega^6 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \Sigma_7 = \frac{3645 \cdot \omega - 5}{\omega - 1} \quad (2)$$

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν  $\omega^6 = 729$ , ἐξ ἧς :  $\omega = \pm 3$ .

Διὰ  $\omega = 3$  ἡ πρόοδος εἶναι : 5, 15, 45, 135, ... (3)

Διὰ  $\omega = -3$  ἡ πρόοδος εἶναι 5, -15, 45, -135, ... (4)

Ἡ πρώτη εἶναι γνησίως αὐξουσα, ἡ δευτέρα δὲν εἶναι οὔτε αὐξουσα οὔτε φθίνουσα, εἶναι ὁμως ἀπολύτως αὐξουσα καὶ μάλιστα γνησίως.

Ἐκ τῆς (2) δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ  $\omega$  μὲ τὰς τιμὰς του  $+3$  καὶ  $-3$  εὐρίσκομεν ἀντιστοίχως :

$$\Sigma_7 = \frac{3645 \cdot 3 - 5}{3 - 1} = 5465, \quad \Sigma'_7 = \frac{3645 (-3) - 5}{-3 - 1} = 2735.$$

Τὸ πρῶτον ἄθροισμα ἀναφέρεται εἰς τὴν πρόδοον (3), τὸ δεύτερον εἰς τὴν πρόδοον (4).

**§. 171. Παρεμβολὴ γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων.— Ὅρισμοί.** Οἱ ἀριθμοὶ

$x_1, x_2, \dots, x_\mu$  καλοῦνται **γεωμετρικοὶ ἐνδιάμεσοι** δοθέντων ἀριθμῶν  $\alpha$  καὶ  $\beta$ , τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ πεπερασμένη ἀκολουθία :

$$\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \beta \quad (1)$$

εἶναι γεωμετρικὴ πρόοδος.

Δοθέντων δύο ἀριθμῶν  $\alpha$  καὶ  $\beta$  καλοῦμεν **παρεμβολὴν  $\mu$  γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων** τὴν εὑρεσιν  $\mu$  ἀριθμῶν  $x_1, x_2, \dots, x_\mu$  τοιούτων, ὥστε ἡ ἀκολουθία :

$\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \beta$  νὰ εἶναι γεωμετρικὴ πρόοδος.

Διὰ τὴν εὑρεσιν τῶν ὡς ἄνω γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων ἀρκεῖ νὰ εὑρωμεν τὸν λόγον τῆς γεωμετρικῆς προόδου (1). Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ  $\omega$  τὸν λόγον τῆς προόδου αὐτῆς τότε, ἐπειδὴ τὸ πλῆθος ὄλων τῶν ὄρων τῆς εἶναι  $\mu + 2$ , ὁ  $\beta$  θὰ κατέχῃ τὴν  $\mu + 2$  θέσιν καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν :

$$\beta = \alpha \cdot \omega^{(\mu+2)-1} \quad \eta \quad \beta = \alpha \cdot \omega^{\mu+1}$$



\*Αρα:

$$\omega = \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (1)$$

Ο τύπος (1) καλείται τύπος παρεμβολής γεωμετρικών ενδιάμεσων ή συντόμως τύπος της γεωμετρικής παρεμβολής.

Η παρεμβολή γεωμετρικών ενδιάμεσων είναι δυνατή εις ὅλας τὰς περιπτώσεις, πλὴν τῆς περιπτώσεως καθ' ἣν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ  $\alpha$ ,  $\beta$  εἶναι ἑτερόσημοι ( $\alpha\beta < 0$ ) καὶ τὸ πλῆθος τῶν παρεμβολομένων ὄρων περιττὸς ἀριθμὸς (διατί;).

Ὅρισθέντος ἐκ τοῦ τύπου (1) τοῦ λόγου  $\omega$ , οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι:

$$x_1 = \alpha \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad x_2 = \alpha \left( \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}} \right)^2, \dots, \quad x_\mu = \alpha \left( \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}} \right)^\mu$$

Ἐφαρμογή. Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 48 νὰ παρεμβληθοῦν τρεῖς γεωμ. ἐνδιάμεσοι.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου (1) διὰ  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 48$  καὶ  $\mu = 3$ , λαμβάνομεν:

$$\omega = \sqrt[4]{\frac{48}{3}} = \sqrt[4]{16}, \quad \text{ἐξ οὗ: } \omega = 2.$$

Συνεπῶς οἱ ζητούμενοι γεωμετρικοὶ ἐνδιάμεσοι εἶναι οἱ: 6, 12, 24.

**§ 172. Συμμετρικὴ παράστασις τῶν ὄρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου πεπερασμένου πλῆθους ὄρων.**— Πρὸς περιορισμὸν τῶν ἀγνώστων εἰς διάφορα προβλήματα γεωμετρικῶν προόδων, ἰδίᾳ ὅταν δίδεται τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου καλὸν εἶναι νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς ἐξῆς δύο περιπτώσεις:

**Περίπτωσης 1η:** Ἡ πρόοδος ἔχει περιττὸν πλῆθος ὄρων.

Ἐὰν ἡ πρόοδος ἔχη  $(2\nu + 1)$  ὄρους, τότε ὑπάρχει μεσαῖος, τὸν ὁποῖον συμβολίζομεν μὲ  $x$  καὶ ἐὰν ὁ λόγος τῆς προόδου εἶναι  $\omega$  γράφομεν τὴν πρόοδον ταύτην ὡς ἐξῆς:

$$\frac{x}{\omega^\nu}, \dots, \frac{x}{\omega^2}, \frac{x}{\omega}, x, x\omega, x\omega^2, \dots, x\omega^\nu.$$

**Περίπτωσης 2α:** Ἡ πρόοδος ἔχει ἄρτιον πλῆθος ὄρων, ἔστω  $2\nu$ .

Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ὑπάρχουν δύο «μεσαῖοι» ὅροι ἰσαπέχοντες τῶν ἄκρων, τοὺς ὁποῖους παριστῶμεν μὲ:  $\frac{x}{\lambda}$  καὶ  $x\lambda$ , ὅτε ὁ λόγος  $\omega$  τῆς γεωμ. προόδου εἶναι:

$\omega = x\lambda : \frac{x}{\lambda} = \lambda^2$  καὶ ἡ πρόοδος γράφεται τότε ὡς ἐξῆς:

$$\frac{x}{\lambda^{\nu+1}}, \dots, \frac{x}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}, x\lambda, x\lambda^3, \dots, x\lambda^{\nu+1}.$$

Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ  $x$  δὲν εἶναι ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου καὶ ὁ λόγος τῆς προόδου, ὡς ἐλέχθη, εἶναι  $\lambda^2$ .

**Έφαρμογή.** Νά εὑρεθοῦν τέσσαρες πραγμ. ἀριθμοί, οἱ ὅποιοι εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι γεωμ. προόδου, ἐὰν τὸ γινόμενόν των ἰσοῦται πρὸς 729 καὶ ὁ τέταρτος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο μεσαίων.

**Λύσις :** Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, περίπτωσις 2α, παριστῶμεν τοὺς ζητούμενους ἀριθμούς ὡς ἑξῆς :

$$\frac{x}{\lambda^3}, \quad \frac{x}{\lambda}, \quad x\lambda, \quad x\lambda^3.$$

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενόν των ἰσοῦται πρὸς 729, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{x}{\lambda^3} \cdot \frac{x}{\lambda} \cdot x\lambda \cdot x\lambda^3 = 729$$

$$\eta \quad x^4 = 729 = 27^2, \quad \epsilon\acute{\iota}\varsigma \omicron\upsilon : \quad x = \pm 3 \sqrt[3]{3}.$$

Ἐξ ἄλλου, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν, ἔχομεν :  $x\lambda^3 = \left(\frac{x}{\lambda}\right) \cdot (x\lambda) = x^2 \quad \eta \quad \lambda^3 = x, \quad \epsilon\acute{\kappa}$

τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν :  $\lambda = \pm \sqrt[3]{3}.$

Διὰ  $x = 3 \sqrt[3]{3}$  καὶ  $\lambda = \sqrt[3]{3}$  οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι : 1, 3, 9, 27.

Διὰ  $x = -3 \sqrt[3]{3}$  καὶ  $\lambda = -\sqrt[3]{3}$  εὐρίσκομεν πάλιν τοὺς ἰδίους ἀριθμούς.

**§ 173. ᾿Αθροισμα ἀπείρων ὁρων ἀπολύτως φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου.**— Ἐστω μία γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ πρῶτον ὅρον τὸ α καὶ λόγον ω, ἥτοι ἔστω ἡ πρόοδος :

$$\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \dots, \alpha\omega^{n-1}, \dots \quad (1)$$

Ἄς συμβολίσωμεν μὲ  $\Sigma_n$  τὸ ἄθροισμα τῶν  $n$  πρώτων ὁρων τῆς (1), τὸ ὁποῖον, ὡς γνωστόν, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\Sigma_n = \frac{\alpha(\omega^n - 1)}{\omega - 1}.$$

Ἐστω τώρα ὅτι ὁ λόγος ω τῆς (1) πληροῖ τὴν συνθήκην :  $0 < |\omega| < 1$ , δηλαδὴ ἡ (1) εἶναι ἀπολύτως φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος, τότε ἰσχύει τὸ κάτωθι θεώρημα :

**§ 174. Θεώρημα.**— Διὰ κάθε θετικὸν ἀριθμὸν ε (ὁσονδήποτε μικρὸν) ὑπάρχει δείκτης  $n_0 = n_0(\epsilon)$  τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύη :

$$\left| \Sigma_n - \frac{\alpha}{1-\omega} \right| < \epsilon \quad \text{διὰ κάθε } n \geq n_0.$$

Ἡ ὅπερ τὸ αὐτό :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n = \frac{\alpha}{1-\omega}.$

**Ἀπόδειξις.** Πράγματι :  $\Sigma_n = \alpha + \alpha\omega + \dots + \alpha\omega^{n-1}$

$$\eta \quad \Sigma_n = \frac{\alpha\omega^n - \alpha}{\omega - 1} \quad \eta \quad \Sigma_n = \frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\alpha}{1-\omega} \omega^n.$$

Ἡ ἀκολουθία ὁμως  $\omega^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  μὲ  $|\omega| < 1$  εἶναι μηδενικὴ (βλ. Κεφ. V § 131, παράδειγμα 1ον).

Ὅθεν :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n = \frac{\alpha}{1-\omega}, \quad \text{διότι} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{1-\omega} \cdot \omega^n = 0.$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ὁδηγούμεθα εἰς τὸ νὰ δώσωμεν τὸν ἐξῆς ὁρισμόν :

Καλοῦμεν ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων τῆς ἀπολύτως φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὄρον τὸν  $\alpha$  καὶ λόγον  $\omega$  τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν  $\frac{\alpha}{1-\omega}$  πρὸς τὸν ὅποιον συγκλίνει τὸ ἄθροισμα  $\Sigma$  τῶν  $n$  πρώτων ὄρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου. Γράφομεν δὲ συμβολικῶς :

$$\Sigma_{\infty} \quad \eta \quad \Sigma = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^{n-1} + \dots = \frac{\alpha}{1-\omega}.$$

Ὡστε :

$$\text{Ἐὰν } |\omega| < 1 \implies \Sigma_{\infty} \equiv \Sigma = \frac{\alpha}{1-\omega} \quad (1)$$

Λέγομεν δὲ τότε : «Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὄρον τὸν  $\alpha$  καὶ λόγον  $\omega$  μὲ  $0 < |\omega| < 1$  ἰσοῦται μὲ  $\frac{\alpha}{1-\omega}$ ».

Σημ. Ἐὰν  $\alpha = 1$  τότε :  $\Sigma = 1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} + \dots = \frac{1}{1-\omega}.$

Ἐφαρμογή 1η : Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα :  $4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \dots + \frac{4}{3^n} + \dots$

Λύσις : Οἱ ἀπείροι προσθετοὶ τοῦ ἄθροίσματος συνιστοῦν γεωμ. πρόοδον μὲ πρῶτον ὄρον  $\alpha = 4$  καὶ λόγον  $\omega = \frac{1}{3}$ . Ἐπομένως τὸ ζητούμενον ἄθροισμα δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (1),

ἥτοι :  $4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \dots + \frac{4}{3^n} + \dots = \frac{4}{1 - \frac{1}{3}} = 6.$

Ἐφαρμογή 2α : Νὰ εὑρεθῇ τὸ κοινὸν κλάσμα, ἀπὸ τὸ ὅποιον παράγεται τὸ δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα 4,513513...

Λύσις : Τὸ δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα 4, 513513... γράφεται :

$$4 + \frac{513}{1000} + \frac{513}{1000^2} + \dots$$

Ἀλλὰ  $\frac{513}{1000} + \frac{513}{1000^2} + \frac{513}{1000^3} + \dots = \frac{\frac{513}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{513}{999}.$

Ἄρα :  $4,513513 \dots = 4 + \frac{513}{999} = \frac{4509}{999}.$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 4,513513... , ὅταν τὸ πλῆθος τῶν δεκαδικῶν του ψηφίων αὐξάνει ἀπεριορίστως, τείνει πρὸς τὸν ρητὸν ἀριθμὸν  $\frac{4509}{999}.$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

338. Χαρακτηρίσατε τὰς κάτωθι προόδους ὡς πρὸς τὸ μονότονον καὶ τὸ εἶδος μονοτονίας :

α) 12, 6, 3, ..., β)  $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \dots$ , γ) 3, -6, 12, ..., δ)  $-4, \frac{8}{3}, -\frac{16}{9}, \dots$

339. Έστω ή γεωμ. πρόοδος 1, 3, 9, 27, 81, ... Δείξτε ότι αι διαφοραί μεταξύ δύο διαδοχικών όρων σχηματίζουν μίαν νέαν γεωμ. πρόοδον. 'Η ιδιότης αύτη δύναται νά γενικευθῇ δι' οίανδήποτε γεωμ. πρόοδον;

340. Προσδιορίσατε τόν πραγματικόν αριθμόν  $x$  ούτως, ώστε οί κάτωθι αριθμοί άποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμ. προόδου: 1)  $x - 2, 2x, 7x + 4$ , 2)  $2x - 2, 3x + 6, 12x + 6$ .

341. Νά εύρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν όρων γεωμετρικῆς προόδου, εἰς τὰς κάτωθι περιπτώσεις:

$$\alpha) \alpha_1 = 4, \quad \omega = 4, \quad \Sigma_n = 5460, \quad \beta) \alpha_4 = 13, \quad \alpha_6 = 117, \quad \alpha_n = 9477,$$

$$\gamma) \alpha_1 = 4, \quad \alpha_n = 972, \quad \Sigma_n = 1456, \quad \delta) \alpha_n = 81, \quad \omega = \frac{3}{4}, \quad \Sigma_n = 781.$$

342. Νά σχηματισθῇ γεωμ. πρόοδος, ή όποία έχει ως πρῶτον όρον τήν μικρότεράν ρίζαν τῆς ἐξισώσεως  $x^3 - 2x^2 - 25x + 50 = 0$  καί ως λόγον τήν μεγαλυτέραν ρίζαν. 'Επί πλέον νά εύρεθῇ τὸ άθροισμα τῶν όρων αὐτῆς, τῶν όποίων τὸ πλῆθος εἶναι τριπλάσιον τῆς τρίτης ρίζης τῆς άνωτέρω ἐξισώσεως.

343. Νά παρεμβληθοῦν 4 γεωμετρικοί ἐνδιάμεσοι μεταξύ τῆς μικρότερας καί τῆς μεγαλυτέρας ρίζης τῆς ἐξισώσεως  $2x^2 - 5x - 3 = 0$ .

344. Νά δειχθῇ ὅτι τὸ άθροισμα  $n$  γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων παρεμβαλλομένων μεταξύ 1 καί  $\alpha$  ἰσοῦται πρὸς:

$$\frac{v+1}{\sqrt{\alpha}} \left( \frac{v+1}{\sqrt{\alpha^v} - 1} \right) : \left( \frac{v+1}{\sqrt{\alpha} - 1} \right).$$

345. Γεωμετρικῆς προόδου ἐξ ὀκτώ όρων τὸ άθροισμα τῶν 4 πρῶτων όρων εἶναι 40, τῶν δὲ ὑπολοίπων τὸ άθροισμα εἶναι 3240. Νά εύρεθῇ ὁ λόγος καί ὁ πρῶτος όρος τῆς προόδου.

346. Τὸ άθροισμα τῶν τεσσάρων πρῶτων όρων φθινοῦσης γεωμ. προόδου εἶναι 65, τὸ δὲ άθροισμα τῶν άπείρων όρων τῆς 81. Νά εύρεθῇ ή πρόοδος.

347. 'Απολύτως φθινοῦσης γεωμ. προόδου ὁ πρῶτος όρος τῆς εἶναι τὸ  $1/2$  τοῦ άθροίσματος τῶν άπείρων όρων τῆς, τὸ δὲ άθροισμα τῶν δύο πρῶτων όρων τῆς εἶναι 20. Νά εύρεθῇ ή πρόοδος.

348. Νά εύρεθοῦν τρεῖς αριθμοί άποτελοῦντες γεωμ. πρόοδον, ἐάν γνωρίζωμεν τὸ άθροισμὰ των 52 καί τὸ άθροισμα τῶν τετραγώνων των 1456.

349. Τὸ άθροισμα τῶν άπείρων όρων άπολύτως φθινοῦσης γεωμετρικῆς προόδου εἶναι 12, τὸ δὲ άθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν άπείρων όρων τῆς εἶναι 48. Νά εύρεθῇ ή πρόοδος.

350. Νά εύρεθοῦν τὰ κάτωθι άθροίσματα:

$$\alpha) \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{1}{2 - \sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots \quad \beta) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$$

$$\gamma) \alpha + \beta + \frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\beta^3}{\alpha^2} + \dots \quad (\alpha > \beta > 0).$$

351. Πρὸς ποῖον αριθμόν τείνει τὸ πηλίκον τοῦ άθροίσματος:  $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2v} + \dots$  διὰ τοῦ άθροίσματος:  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^v + \dots$ , ὅταν τὸ  $v \rightarrow \infty$ .

352. Νά εύρεθοῦν τὰ κοινὰ κλάσματα ἐκ τῶν όποίων παράγονται τὰ κάτωθι δεκαδικὰ περιοδικὰ κλάσματα:

$$1) 0,17651651\dots, 2) 2,341702702\dots, 3) 27,327575\dots, 4) 3,7292929\dots$$

353. Εἰς ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς  $\alpha$  συνδέομεν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του καί εὐρίσκωμεν νέον τοιοῦτον. Τὸ αὐτὸ ἐπαναλαμβάνομεν εἰς τὸ νέον τοῦτο καί οὕτω καθεστῆς. Νά εύρεθῇ τὸ άθροισμα τῶν ἐμβαδῶν καί τῶν περιμέτρων τῶν άπείρων τούτων τριγώνων.

354. 'Εάν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  εἶναι διαδοχικοί όροι γεωμ. προόδου νά δειχθῇ:

$$1) (\alpha + \delta) \cdot (\beta + \gamma) - (\alpha + \gamma) \cdot (\beta + \delta) = (\beta - \gamma)^2$$

$$2) (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 + (\delta - \beta)^2 = (\alpha - \delta)^2.$$

355. Να υπολογισθῇ ἡ παράσταση:  $\sqrt{\alpha\beta} \sqrt{\alpha\beta} \sqrt{\alpha\beta} \dots$ , ὅταν τὸ πλῆθος τῶν ριζικῶν εἶναι ἀπεριόριστον.

356. Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου σχηματίζουν γεωμ. πρόοδον νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος τῆς προόδου ἐπαληθεύει τὴν σχέσιν:  $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \omega < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ .

357. Τρεῖς ἀριθμοὶ  $x, y, z$  ἔχουν ἄθροισμα 147, ἐὰν οἱ  $x, y, z$  εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμ. προόδου καὶ εἰ  $x, z, y$  γεωμετρικῆς προόδου, νὰ εὑρεθοῦν οἱ τρεῖς αὐτοὶ ἀριθμοί.

358. Ἐὰν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  εἶναι θετικοὶ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἰσχύει:

$$\beta^2 - \alpha\gamma = 0, \quad \gamma^2 - \beta\delta = 0, \quad \text{τότε θὰ εἶναι: } |\alpha - \delta| \geq 3|\beta - \gamma|.$$

359. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma$  ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \left( \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} \right) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3.$$

360. Ἐὰν  $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0$  καὶ  $\alpha^3 + \beta^3 = \gamma^3$ , νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ:  $\alpha, \gamma, \beta\sqrt[3]{4}$  ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον.

### ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΠΡΟΟΔΩΝ

361. Ἐὰν  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$  καὶ  $M_A, M_G, M_H$  εἶναι ἀντιστοίχως ὁ μέσος ἀριθμητικὸς, μέσος γεωμετρικὸς καὶ μέσος ἀρμονικὸς αὐτῶν, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$M_A \geq M_G \geq M_H. \quad (\text{ἀνισότης τοῦ Cauchy}).$$

362. Ἐὰν  $x \geq 0, y \geq 0$  δεῖξτε ὅτι:

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \geq x^{1/3} \cdot y^{2/3}.$$

Πότε ἰσχύει τὸ ἴσον;

363. Τὴν ἀκολουθίαν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν χωρίζομεν εἰς ὁμάδας ὡς ἀκολουθῶς:

$$1, (2, 3, 4, 5), (6, 7, 8, \dots, 12), (13, 14, \dots, 22), (23, 24, \dots), \dots$$

Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος τῆς  $n$ -οστῆς ὁμάδος συναρτήσει τοῦ  $n$  καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῶν περιλαμβανομένων εἰς τὴν  $n$ -οστήν ὁμάδα ἰσοῦται πρὸς:

$$(3n-2) \cdot \left[ (n-1)^2 + \frac{n^2+1}{2} \right].$$

364. Ἐὰν  $S_1$  εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν  $n$  ὀρων ἀριθμητικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι  $\omega$  καὶ  $S_2$  τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν αὐτῶν ὀρων, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$S_2 - \frac{1}{n} S_1^2 = \frac{1}{12} n \omega^2 (n^2 - 1).$$

$$365. \text{ Ἐὰν } F(x) \equiv \sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}} \cdot \sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}} \cdot \sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}} \dots$$

νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$F\left(\frac{33}{55}\right) = \frac{132}{187}.$$

366. Νὰ δειχθῇ ὅτι: ἐὰν τὸ ἄθροισμα  $n$  ὀρων ἀριθμητικῶν προόδου, αἱ ὁποῖαι ἔχουν λόγους κατὰ σειρὰν  $1, 2, 3, \dots$  εἶναι  $n^2$ , τότε οἱ πρῶτοι ὅροι τῶν ἀποτελοῦν φθίνουσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἡ ὁποία καὶ νὰ ὀρίσθῃ.

367. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνθήκη, ἵνα αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσης:  $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  ἀποτελοῦν: α) Ἀριθμητικὴν πρόοδον, β) Γεωμετρικὴν πρόοδον.

368. Νὰ ὀρίσθῃ ὁ  $k$  οὕτως, ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσης  $x^3 - 8x^2 - 6x - k = 0$  νὰ ἀποτελοῦν πρόοδον ἀριθμητικὴν ἢ γεωμετρικὴν καὶ νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις αὕτη.

(‘Υπόδειξις. Λάβετε υπ’ ὄψιν τὰ συμπεράσματα τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως).

**369.** Χωρίζομεν 4200 ἀντικείμενα εἰς  $n + 1$  ομάδας οὕτως, ὥστε ἡ πρώτη ὁμάς νὰ περιλαμβάνη 5 ἀντικείμενα, ἡ δευτέρα 8, ἡ τρίτη 11, κ.ο.κ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ὁμάδων, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὑπολειπομένων ἀντικειμένων.

**370.** Ἐὰν οἱ  $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$  εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ὁ μὲν  $\alpha$  εἶναι μέσος ἀριθμητικὸς τῶν  $\beta$  καὶ  $\gamma$ , ὁ δὲ  $x$  μέσος ἀρμονικὸς τῶν  $y, z$  νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: ὁ  $\alpha x$  εἶναι μέσος γεωμετρικὸς τῶν  $\beta \gamma$  καὶ

$$\gamma z \text{ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν: } \frac{y}{z} + \frac{z}{y} = \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}.$$

**371.** Ἐὰν οἱ διάφοροι ἀλλήλων θετικοὶ ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma$  εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς ἢ γεωμετρικῆς ἢ ἀρμονικῆς προόδου, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $n \geq 2$  ἰσχύει ἡ ἀνισότης:

$$\alpha^n + \gamma^n > 2\beta^n.$$

(‘Υπόδειξις. Ἐφαρμόσατε τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς).

**372.** Ἐστω ἡ ἀκολουθία:  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  (1), διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι:

$$\alpha_{n+2} = \xi \cdot \alpha_{n+1} + \eta \cdot \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\xi, \eta \in \mathbb{R}).$$

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

Ἐὰν ὁ λόγος  $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ , ὅπου  $\alpha_1 \neq 0$ , εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως:

$$x^2 - \xi x - \eta = 0,$$

τότε ἡ ἀκολουθία (1) εἶναι γεωμετρικὴ πρόοδος.

**373.** Ἐὰν  $S_n$  εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν  $n$  πρώτων ὁρῶν γεωμετρικῆς προόδου τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὁρος εἶναι  $\alpha = -5$  καὶ ὁ λόγος  $\omega = -3/4$ , νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\left( \forall \varepsilon > 0 \text{ καὶ } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ μὲ } n > 3 \left( \frac{20}{7\varepsilon} - 1 \right) \right) \implies \left| -\frac{20}{7} - S_n \right| < \varepsilon.$$

Ποῖον τὸ  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ;

ΣΕΙΡΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

**§ 175. Συμβολισμός άθροισμάτων.**— Έπειδή συχνότατα συναντῶμεν άθροίσματα τῆς μορφῆς :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n$$

χρησιμοποιῶμεν, διὰ τὴν συντομωτέραν καὶ ἀπλουστέραν γραφὴν, τὸ ἑλληνικὸν γράμμα  $\Sigma$  πρὸς συμβολισμὸν τῶν ἐν λόγῳ άθροισμάτων. Οὕτω γράφομεν :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n \equiv \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος, δηλαδή ἡ συμβολικὴ ἔκφρασις  $\sum_{k=1}^n \alpha_k$  ἀναγινώσκεται : «*άθροισμα τῶν (ἀριθμῶν)  $\alpha_k$  ἀπὸ  $k=1$  ἕως  $k=n$* ». Ὁ συμβολισμὸς  $k=1$  κάτωθεν τοῦ συμβόλου  $\Sigma$  σημαίνει ὅτι 1 εἶναι ἡ πρώτη τιμὴ, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ὁ δείκτης  $k$ , ἐνῶ ὁ συμβολισμὸς  $k=n$  ἄνωθεν τοῦ συμβόλου  $\Sigma$  σημαίνει ὅτι ὁ δείκτης  $k$  θὰ διατρέξῃ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς μέχρι καὶ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ  $n$ . Τέλος τὸ σύμβολον  $\Sigma$  σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ προσθέσωμεν ὅλους τοὺς ὅρους ποὺ ἐλάβομεν θέτοντες διαδοχικῶς  $k=1, k=2, k=3, \dots, k=n$ .

Συμβατικῶς κατωτέρω θὰ θέτωμεν :  $\sum_{k=1}^1 \alpha_k \equiv \alpha_1$ .

Δυνάμει τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν τώρα :

$$\alpha). 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \equiv \sum_{k=1}^{10} k$$

$$\beta). 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 \equiv \sum_{k=1}^9 k^2$$

$$\gamma). x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} \equiv \sum_{k=3}^{12} x_k$$

$$\delta). \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_9 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_5) + (\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9) = \sum_{k=1}^5 \alpha_k + \sum_{k=6}^9 \alpha_k$$

$$\text{ἤτοι : } \sum_{k=1}^9 \alpha_k = \sum_{k=1}^5 \alpha_k + \sum_{k=6}^9 \alpha_k.$$

Γενικώτερον ἔχομεν :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = \sum_{k=1}^p \alpha_k + \sum_{k=p+1}^n \alpha_k, \quad p \in \mathbb{N} \text{ καὶ } p < n.$$

Δίδομεν κατωτέρω μερικὰ ἀκόμη παραδείγματα πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τοῦ συμβόλου  $\Sigma$ .

**Παράδειγμα 1ον :** Εἰς τὴν παράγραφον 28 ἔχομεν ἀποδείξει, ὅτι :

$$1 + 2 + 3 + \dots + v = \frac{v(v+1)}{2}.$$

Τὴν σχέσιν ταύτην γράφομεν, τῇ βοήθειᾳ τοῦ συμβόλου  $\Sigma$ , συντόμως οὕτω :

$$\sum_{k=1}^v k = \frac{v(v+1)}{2}.$$

**Παρατήρησις.** Ἀλλὰ ἀξιοσημείωτα ἀθροίσματα, τὰ ὅποια συναντᾷ κανεῖς εἰς τὰς ἐφαρμογὰς, εἶναι καὶ τὰ ἑξῆς :

$$\alpha). 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2 \equiv \sum_{k=1}^v k^2 = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6}$$

$$\beta). 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + v^3 \equiv \sum_{k=1}^v k^3 = \frac{v^2(v+1)^2}{4}, \text{ ἥτοι ἰσχύει : } \sum_{k=1}^v k^3 = \left[ \sum_{k=1}^v k \right]^2$$

$$\gamma). 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + v^4 \equiv \sum_{k=1}^v k^4 = \frac{v(v+1)(2v+1)(3v^2+3v-1)}{30}.$$

**Ἀσκήσις :** Ἀποδείξατε τὴν ἀλήθειαν τῶν (α), (β), (γ) διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς.

**Παράδειγμα 2ον :** Εἰς τὴν § 50 ὠρίσαμεν, ὅτι ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς  $x$ , βαθμοῦ  $v$ , εἶναι μία ἀλγεβρική παράστασις τῆς μορφῆς :

$$f(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_v x^v. \quad (1)$$

Ἦδη δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τὸ πολυώνυμον (1) συντόμως οὕτω :

$$f(x) \equiv \sum_{k=0}^v \alpha_k x^k, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, v \quad \text{καὶ} \quad \alpha_v \neq 0.$$

**§ 176. Βασικαὶ ιδιότητες τοῦ συμβόλου  $\Sigma$ .**— Αἱ ἀκόλουθοι ιδιότητες ἐπιτρέπουν ἓνα ἄνετον λογισμόν τῇ βοήθειᾳ τοῦ συμβόλου  $\Sigma$ .

i). Ἐὰν  $\alpha_k = \alpha$  διὰ κάθε  $k = 1, 2, \dots, v$ , τότε ἰσχύει :  $\sum_{k=1}^v \alpha_k = v\alpha$ .

Εἰδικῶς, ἐὰν  $\alpha = 1$  ἔχομεν :  $\sum_{k=1}^v \alpha_k \equiv \sum_{k=1}^v 1 = v$ .

ii). Ἰσχύει ἡ προσθετικὴ ιδιότης, ἥτοι :

$$\sum_{k=1}^v (\alpha_k + \beta_k) = \sum_{k=1}^v \alpha_k + \sum_{k=1}^v \beta_k \quad \text{καὶ} \quad \sum_{k=1}^v (\alpha_k - \beta_k) = \sum_{k=1}^v \alpha_k - \sum_{k=1}^v \beta_k.$$

iii). Ἐὰν  $\lambda$  σταθερὸς πραγματικὸς ἀριθμὸς (μὴ εξαρτώμενος ἐκ τοῦ δείκτου  $k$ ), τότε ἰσχύει :

$$\sum_{k=1}^v \lambda \alpha_k = \lambda \cdot \sum_{k=1}^v \alpha_k \quad (\text{ιδιότης ὁμογενείας}).$$

iv). Ἰσχύει :

$$\sum_{k=1}^v (\lambda \alpha_k + \mu \beta_k) = \lambda \cdot \sum_{k=1}^v \alpha_k + \mu \cdot \sum_{k=1}^v \beta_k, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$



v). 'Ισχύει :

$$\sum_{k=1}^v (\alpha_k - \alpha_{k-1}) = \alpha_v - \alpha_0 \quad (\text{ιδιότης συμπτύξεως}).$$

"Α σ κ η σ ι ς : 'Αποδείξτε τὰς ἀνωτέρω πέντε ιδιότητες τοῦ συμβόλου  $\Sigma$ .

**Παρατήρησις.** Μέχρι τώρα ἐχρησιμοποιήσαμεν ὡς δείκτην τὸ γράμμα  $k$ . Τοῦτο εἶναι αὐθαίρετον καὶ οὐδὲνα ρόλον παίζει, δυνάμεθα δηλαδὴ νὰ χρησιμοποιήσωμεν διὰ τὸ αὐτὸ ἄθροισμα καὶ ἄλλο γράμμα, ὡς δείκτην. Οὕτως ἔχομεν :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v = \sum_{k=1}^v \alpha_k = \sum_{p=1}^v \alpha_p = \sum_{v=1}^v \alpha_v.$$

'Επίσης αἱ τιμαὶ τὰς ὁποίας λαμβάνει ὁ δείκτης δύνανται νὰ μεταβάλλωνται, τότε ὁμως θὰ μεταβάλλεται συγχρόνως καὶ ὁ ὑπὸ τὸ σύμβολον  $\Sigma$  δείκτης, οὕτως λ.χ. ἔχομεν :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_5 = \sum_{k=1}^5 \alpha_k = \sum_{k=0}^4 \alpha_{k+1} = \sum_{k=11}^{15} \alpha_{k-10},$$

δηλαδὴ : δυνάμεθα νὰ αὐξήσωμεν (ἢ νὰ ἐλαττώσωμεν) τὸν δείκτην ὑπὸ τὸ σύμβολον  $\Sigma$ , ἀρκεῖ νὰ ἐλαττώσωμεν (ἢ νὰ αὐξήσωμεν) κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τὰ ὅρια (τὰς ἄκρας τιμὰς) τοῦ συμβόλου  $\Sigma$ .

**Ἐφαρμογὴ 1η :** Ὑπολογίσατε τὸ ἄθροισμα τῶν  $v$  πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν.

**Λύσις.** Ἐχομεν :

$$\sum_{k=1}^v (2k-1) = \sum_{k=1}^v 2k - \sum_{k=1}^v 1 = 2 \sum_{k=1}^v k - \sum_{k=1}^v 1 = 2 \cdot \frac{v(v+1)}{2} - v = v^2.$$

"Ωστε :

$$\sum_{k=1}^v (2k-1) = v^2.$$

**Ἐφαρμογὴ 2α :** Νὰ ἀπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα :  $\frac{\sum_{v=1}^v (3v^2 + 5v)}{\sum_{v=1}^v (3v^2 - 3v)}$ .

**Λύσις.** Ἐχομεν :

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{v=1}^v (3v^2 + 5v)}{\sum_{v=1}^v (3v^2 - 3v)} &= \frac{3 \sum_{v=1}^v v^2 + 5 \sum_{v=1}^v v}{3 \sum_{v=1}^v v^2 - 3 \sum_{v=1}^v v} = \frac{3 \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} + 5 \frac{v(v+1)}{2}}{3 \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} - 3 \frac{v(v+1)}{2}} = \\ &= \frac{v(v+1)(v+3)}{v(v+1)(v-1)} = \frac{v+3}{v-1}. \end{aligned}$$

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

374. Ὑπολογίσατε τὰ κάτωθι ἄθροισματα :

$$\begin{aligned} \alpha) \sum_{k=1}^v k(k+1), & \quad \beta) \sum_{k=1}^v \frac{1}{k(k+1)}, & \quad \gamma) \sum_{k=1}^v (k^2 + 5k + 3), \\ \delta) \sum_{k=1}^v (k^3 + 7k^2 + 12k), & \quad \epsilon) \sum_{k=1}^v k(k+2)(k+4), & \quad \sigma\tau) \sum_{k=1}^v (k^4 + 3k^3 + 4k^2). \end{aligned}$$

375. Τὰ κάτωθι ἄθροισματα νὰ γραφοῦν διὰ χρήσεως τοῦ συμβόλου  $\Sigma$  καὶ ἀκολουθῶς νὰ ὑπολογισθοῦν :

$$\begin{aligned} \alpha) 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \dots + v \cdot (v+3), & \quad \beta) 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + 32x^5, \\ \gamma) 1^2 + 4^2 + 7^2 + \dots + (3v-2)^2, & \quad \delta) 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2v-1)^2. \end{aligned}$$

376. Νά αποδειχθῇ ὅτι :

$$\sum_{k=1}^v k^3 = \frac{v^4}{4} + \frac{v^3}{2} + \frac{v^2}{4}$$

377. Νά ἀπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα :

α)  $\frac{\sum_{v=1}^k (v^4 + 6v^3 + 5v^2)}{\sum_{v=1}^k (v^4 + 2v^3 + v^2)},$  β)  $\frac{\sum_{v=1}^k (2v^3 - v)}{\sum_{v=1}^k (v^2 - v)},$  γ)  $\frac{\sum_{v=1}^k (v^3 + 3v^2 + 2v)}{k^2 + 5k + 6}.$

378. Ἐὰν  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$  καὶ  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_v$  εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, νά ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης τῶν Cauchy – Schwarz.

$$\left( \sum_{k=1}^v \alpha_k \beta_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^v \alpha_k^2 \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^v \beta_k^2 \right).$$

379. Ἐὰν  $v \in \mathbb{N}$  δείξατε ὅτι εἶναι :

$$\left[ \sum_{k=1}^v \frac{1}{k} \right]^2 \leq v \left( 2 - \frac{1}{v} \right).$$

380. Νά ἀποδειχθῇ διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ὅτι, διὰ  $v \geq 1$ , εἶναι :

α).  $\frac{v^3}{3} < \sum_{k=1}^v k^2 < \frac{(v+1)^3}{3},$  β).  $\left\{ \sum_{k=1}^v \frac{1}{k} \right\}^2 < 2v.$

**§. 177. Ἡ ἔννοια τῆς σειρᾶς.**— Ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ἔχει δοθῇ μία ἀκολουθία  $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$  τῆς ὁποίας οἱ ὅροι :

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_v, \dots \quad (1)$$

εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί. Διὰ κάθε  $v \in \mathbb{N}$ , ὀρίζομεν τὸ ἄθροισμα :

$$s_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v = \sum_{k=1}^v \alpha_k \quad (2)$$

τῶν πρώτων  $v$  ὁρων τῆς (1). Οὕτως ἔχομεν :

$$s_1 = \alpha_1, \quad s_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad s_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \dots$$

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον μορφώνομεν μία νέαν ἀκολουθίαν  $s_v, v = 1, 2, \dots$  μὲ ὅρους

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_v, \dots \quad (3)$$

οἱ ὁποῖοι εἶναι ἄθροίσματα τῶν ὁρων τῆς (1).

Τὴν ἀκολουθίαν (3) συμφωνοῦμεν νὰ τὴν συμβολίζωμεν οὕτως :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v + \dots \quad \text{ἢ συντόμως } \alpha_1 + \alpha_2 + \dots$$

ἢ συντομώτερα καὶ ἀκριβέστερα :  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v. \quad (4)$

Τὸ συμβολικὸν ἄθροισμα  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v + \dots$  ἢ  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  καλεῖται **σειρὰ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν  $\alpha_v, v \in \mathbb{N}$** . Κάθε ὅρος τῆς (3), δηλ. κάθε ἄθροισμα  $s_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v$  καλεῖται «**μερικὸν ἄθροισμα**» ἢ καὶ «**τμήμα τῆς σειρᾶς**» (4). Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (1), δηλαδή οἱ  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v, \dots$  καλοῦνται «**ὅροι τῆς σειρᾶς**», ὁ δὲ  $\alpha_v$  εἰδικώτερον καλεῖται «**γενικὸς ὅρος**» τῆς σειρᾶς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τώρα ὅτι: διὰ τοῦ ὅρου **σειρὰ** ἐννοοῦμεν ἓν μαθηματικὸν σύμβολον, τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὴν ἀκολουθίαν τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῆς (1).

**Σημειώσεις :** Δέν πρέπει νά γίνεται σύγχυσις τῆς ἐννοίας τῆς ἀκολουθίας  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν  $\alpha_n$  μέ τήν ὀρισθεῖσαν ἀνωτέρω ἐννοιαν τῆς σειρᾶς  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  τῶν αὐτῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Αὗται καίτοι σχηματίζονται μέ τοὺς αὐτοὺς ὁρους εἶναι δύο ἐννοιαὶ ἐντελῶς διάφοροι.

### Παραδείγματα σειρῶν :

**1ον.** Ἐστω ἡ σειρὰ  $\sum_{n=1}^{\infty} n \equiv 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$

Διὰ τήν ὡς ἄνω σειρὰν ἔχομεν :

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 3, \quad \sigma_3 = 6, \dots, \quad \sigma_n = \frac{n(n+1)}{2}, \dots$$

**2ον.** Ἐστω ἡ ἀκολουθία  $\alpha_n = \omega^{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , ἐκτενῶς ἡ :

$$1, \quad \omega, \quad \omega^2, \quad \omega^3, \dots, \omega^{n-1}, \dots \quad (1)$$

τῆς ὁποίας οἱ ὅροι ἀποτελοῦν πρόοδον γεωμετρικὴν μέ πρῶτον ὅρον τὸ 1 καὶ λόγον τὸ  $\omega$ . Τὴν ἀκολουθίαν τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων τῆς (1), ἥτοι τήν :

$$\sigma_n \equiv 1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

καλοῦμεν «**γεωμετρικὴν σειρὰν**» καὶ τὴν συμβολίζομεν, κατὰ τὰ λεχθέντα, οὕτω :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega^{n-1} \equiv 1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} + \dots \quad (2)$$

**Σημειώσεις :** Ἐνίστε ἡ ἀρίθμησις τῶν ὁρων μιᾶς σειρᾶς ἀρχεται μέ δεικτὴν  $n = 0$ , τότε γράφομεν :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \equiv \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$$

Οὕτως ἡ γεωμετρικὴ σειρὰ (2) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \equiv 1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^n + \dots$$

**3ον.** Ἡ σειρὰ :  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ , (γεωμετρικὴ σειρὰ μέ λόγον  $\omega = \frac{1}{2}$ ) μέ μερικὸν ἄθροισμα :

$$\sigma_n \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

**4ον.** Ἡ σειρὰ :  $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \equiv 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) + \dots$  μέ μερικὸν ἄθροισμα :

$$\begin{aligned} \sigma_n &\equiv 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2). \end{aligned}$$

**Παρατήρησις :** Ἡ ἐννοια τῆς ἀκολουθίας τὴν ὁποίαν εἶδομεν εἰς προηγούμενον κεφάλαιον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἐννοιαν τῆς συναρτήσεως καὶ ἡ ἐννοια τῆς σειρᾶς ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἐννοιαν τοῦ ὁλοκληρώματος, ἐννοιαν τὴν ὁποίαν θὰ μάθωμεν εἰς τὴν ἐκτὴν τάξιν.

§ 178. Σύγκλισις σειρᾶς. — Θεωρήσωμεν τὴν σειρὰν τοῦ παραδείγματος 3 τῆς προηγουμένης παραγράφου, ἥτοι τὴν σειρὰν :

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v} \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^v} + \cdots, \text{ με μερικὸν ἄθροισμα } \sigma_v \equiv 2 - \frac{1}{2^{v-1}}.$$

Ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων :

$$\sigma_v = 2 - \frac{1}{2^{v-1}}, \quad v = 1, 2, 3, \dots,$$

εὐκόλως διαπιστοῦμεν, ὅτι συγκλίνει εἰς τὸν ἀριθμὸν 2, ἥτοι  $\lim \sigma_v = 2$ , καθόσον  $\lim \frac{1}{2^{v-1}} = 0$ . Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἡ σειρὰ  $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v}$  συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν 2 καὶ γράφομεν :

Ὅμοίως ἔστω ἡ σειρὰ  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(2v-1)(2v+1)}$  με μερικὸν ἄθροισμα (§ 98)

$\sigma_v = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2v+1} \right)$ . Ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων :

$$\sigma_v = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2v+1} \right), \quad v = 1, 2, \dots$$

βλέπομεν ὅτι συγκλίνει εἰς τὸν ἀριθμὸν 1/2, ἥτοι εἶναι  $\lim \sigma_v = 1/2$ , καθόσον  $\lim \frac{1}{2v+1} = 0$ . Ἀρα ἡ σειρὰ  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(2v-1)(2v+1)}$  συγκλίνει εἰς τὸν ἀριθμὸν 1/2 καὶ κατ' ἀκολουθίαν

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(2v-1)(2v+1)} = \frac{1}{2}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων ὁδηγούμεθα εἰς τὸ νὰ δώσωμεν τὸν ἐξῆς γενικὸν ὅρισμόν :

Θὰ λέγωμεν ὅτι : ἡ σειρὰ  $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$  συγκλίνει πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν  $\sigma$  καὶ θὰ γράψωμεν  $\sum_{v=1}^{\infty} a_v = \sigma$ , τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων  $\sigma_v \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_v$ ,  $v = 1, 2, 3, \dots$  συγκλίνη πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν  $\sigma$ .

Συντόμως :

$$\sum_{v=1}^{\infty} a_v = \sigma \iff \lim_{\text{ορσ}} \sigma_v = \lim (a_1 + a_2 + \cdots + a_v) \equiv \lim_{k=1}^v \sum_{k=1}^v a_k = \sigma$$

Ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς  $\sigma$ , πρὸς τὸν ὁποῖον συγκλίνει ἡ ἀκολουθία  $\sigma_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  καλεῖται «ἄθροισμα τῆς σειρᾶς  $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ ». Δηλαδή καλοῦμεν ἄθροισμα τῆς σειρᾶς  $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ , τὸ ὄριον τοῦ ἄθροίσματος τῶν  $v$  πρώτων ὄρων αὐτῆς.

"Θθεν όσάκις γράφομεν :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v + \dots = \sigma \quad \eta \quad \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \sigma$$

έννοοῦμεν ότι ή σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  είναι συγκλίνουσα και τὸ άθροισμά της είναι  $\sigma$ .

Έάν όλοι οί όροι τής σειράς  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  είναι θετικοί, ή άκολουθία  $\sigma_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  είναι αύξουσα και διὰ νά συγκλίνη θά πρέπει νά είναι φραγμένη, άλλως ή  $\sigma_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  ώς αύξουσα και μή φραγμένη (βλ. § 150, παρατ.) άπειρίζεται θετικῶς.

Είς τήν περίπτωση αὐτήν λέγομεν ότι «ή σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  άπειρίζεται θετικῶς» και

γράφομεν συμβολικῶς :  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = +\infty$ .

"Ωστε :

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = +\infty \iff \lim_{\text{ορσ}} \sigma_v \equiv \lim ( \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v ) \equiv \lim_{k=1}^v \sum_{k=1}^v \alpha_k = +\infty$$

Οὕτως ή γεωμετρική σειρά :

$$\sum_{v=0}^{\infty} 2^v = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$$

μή μερικόν άθροισμα :

$$\sigma_v \equiv 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{v-1} = 2^v - 1$$

άπειρίζεται θετικῶς, διότι  $\lim \sigma_v = \lim (2^v - 1) = +\infty$ , καθόσον ή άκολουθία  $\sigma_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  είναι αύξουσα και μή φραγμένη.

Κατ' άνάλογον τρόπον όρίζομεν :

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = -\infty \iff \lim_{\text{ορσ}} \sigma_v \equiv \lim ( \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v ) \equiv \lim_{k=1}^v \sum_{k=1}^v \alpha_k = -\infty$$

Είς τās δύο τελευταίās περιπτώσεις λέγομεν ότι «ή σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  συγκλίνει κατ' έκδοχήν».

Τέλος υπάρχουν σειραί, αί όποίαι δέν συγκλίνουν, ούτε πρὸς πραγματικόν αριθμόν, ούτε πρὸς έν τῶν συμβόλων  $+\infty$  ή  $-\infty$ . Μία τοιαύτη σειρά καλεΐται «άποκλίνουσα» ή «κυμαινομένη». Οὕτως, εάν  $\alpha_v = (-1)^{v+1}$ ,  $v = 1, 2, \dots$ , τότε ή σειρά, ή όποία μορφώνεται έκ τής άκολουθίας  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  άποκλίνει. Πράγματι, ή άκολουθία  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  δύναται νά γραφή :

$$1, -1, 1, -1, \dots$$

και έξ αὐτῆς λαμβάνομεν :

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1 + (-1) = 0, \sigma_3 = 1 + (-1) + 1 = 1, \sigma_4 = 0, \dots,$$

ήτοι ή άκολουθία τών μερικών άθροισμάτων είναι :

$$1, 0, 1, 0, \dots$$

Αύτη όμως άποκλίνει ( $\equiv$  δέν συγκλίνει πρός πραγματικό αριθμόν ή πρός έν τών συμβόλων  $+\infty, -\infty$ ). Κατά συνέπεια καί ή σειρά, ή όποία προκύπτει έκ τής άκολουθίας  $\alpha_n = (-1)^{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  άποκλίνει.

Έκ τών άνωτέρω όρισμών συνάγομεν τώρα ότι :

Διά κάθε σειράν  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  πραγματικών αριθμών ισχύει άκριβώς μία έκ τών κάτωθι προτάσεων :

α). *Η σειρά έχει άθροισμα  $\iff$  συγκλίνη πρός ένα πραγματικό αριθμόν.*

β). *Η σειρά άπειρίζεται θετικώς είτε άρνητικώς  $\iff$  ή σειρά συγκλίνη κατ' έκδοχήν.*

γ). *Η σειρά άποκλίνει (κυμαίνεται).*

**Παρατήρησις 1η :** Έκ τών προηγούμενων είναι φανερόν ότι ή έννοια : *σειρά πραγματικών αριθμών* άποτελεί γενίκευσιν τής άλγεβρικής έννοίας : *άθροισμα πραγματικών αριθμών* (μέ δύο, τρεις, κτλ. όρους). Διά τούτο ή σειρά όνομάζεται ένίοτε καί «*άθροισμα μέ άπείρους όρους*». Δέν πρέπει όμως νά γίνεται σύγχυσις μεταξύ τών δύο έννοιών (άθροισμα πραγματικών αριθμών καί σειρά πραγματικών αριθμών), διότι τό μέν άθροισμα πεπερασμένου πλήθους πραγματικών αριθμών είναι εις μ ο ν ο σ η μ α ν τ ω ς ώρισμένος πραγματικός αριθμός, ένω διά μίαν σειράν δέν ύπάρχει πάντοτε τό άθροισμα, καθ' ότι ή σειρά ήμπορεί νά συγκλίνη πρός τό  $+\infty$  ή πρός τό  $-\infty$  ή άκόμη καί νά μήν συγκλίνη. Άλλά καί όταν ή σειρά συγκλίνη πρός πραγματικό αριθμόν, τό άθροισμα αύτής δέν όρίζεται άλγεβρικώς, αλλά μέσω τής έννοίας τής συγκλίσεως άκολουθίας, δηλαδή τό άθροισμα μίς συγκλινούσης σειράς δέν λαμβάνομεν μέ τήν συνηθισμένην πρόσθεσιν, αλλά ως τό *όριον τής άκολουθίας τών μερικών άθροισμάτων* κατά ταύτα ή λέξις «*άθροισμα*» χρησιμοποιείται έδω μέ μίαν πολύν ειδικήν σημασίαν. Έπίσης άξίζει νά τονισθί έδω ότι τό σύμβολον  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  διά μίαν συγκλίνουσαν σειράν σημαίνει καί τήν *σειράν* καί τό *άθροισμά της*, άν καί αί δυό αύται έννοιαι είναι, ως έλέχθη, διάφοροι.

**Παρατήρησις 2α :** Έκ του όρισμού συγκλίσεως σειράς, συνάγομεν ότι : προκειμένου νά έξετάσωμεν άν μία σειρά συγκλίνη ή όχι καί εις τήν πρώτην περίπτωση διά νά εύρωμεν τό άθροισμά της, εργαζόμεθα ως εξής : *Εύρίσκομεν συναρτήσεϊ του ν τό άθροισμα  $\sigma_v$  των ν πρώτων όρων της (μερικόν άθροισμα) — άν τούτο δύναται νά εύρεθί — καί άκολουθώς εύρίσκομεν τό  $\lim \sigma_v$ .* Έάν τό  $\lim \sigma_v$  είναι ό πραγματικός αριθμός  $\sigma$ , τότε ή σειρά συγκλίνει καί έχει άθροισμα τό  $\sigma$ , έάν τό  $\lim \sigma_v = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε ή σειρά άπειρίζεται θετικώς ή άρνητικώς (άντιστοιχώς) καί τέλος άν τό  $\lim \sigma_v$  δέν ύπάρχη, τότε ή σειρά άποκλίνει.

Άς ίδωμεν πώς θα εφαρμόσωμεν τά άνωτέρω εις συγκεκριμένα παραδείγματα.

## § 179. Παραδείγματα σειρών συγκλινουσών καί μή.

**Παράδειγμα 1ον :** Νά άποδειχθί ότι ή «δεκαδική σειρά»

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{3}{10^v} \equiv \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{10^v} + \dots$$

συγκλίνει καί μάλιστα ισχύει :

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{10^v} + \dots = \frac{1}{3}.$$

Πράγματι, έχουμε :

$$\sigma_v = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{10^v} = \frac{3}{10} \left( 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{v-1}} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{10} \right)^v.$$

"Οθεν :

$$\lim \sigma_v = \frac{1}{3}, \quad \text{διότι} \quad \lim \frac{1}{10^v} = 0.$$

Παράδειγμα 2ον : Νά μελετηθῇ ἡ σειρά :

$$\alpha + (\alpha + \omega) + (\alpha + 2\omega) + \dots + [\alpha + (v-1)\omega] + \dots \quad (\alpha \neq 0)$$

τῆς ὁποίας οἱ ὅροι ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Λύσις. Ὡς γνωστὸν (§ 157) ἔχομεν :

$$\sigma_v = \alpha + (\alpha + \omega) + (\alpha + 2\omega) + \dots + [\alpha + (v-1)\omega] = \frac{2\alpha + (v-1)\omega}{2} \cdot v$$

\*Αρα :

$$\lim \sigma_v = \begin{cases} +\infty, & \text{ἐὰν } \omega > 0 \\ -\infty, & \text{ἐὰν } \omega < 0. \end{cases}$$

"Οθεν : Κάθε σειρά τῆς ὁποίας οἱ ὅροι ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον συγκλίνει κατ' ἐκδοχήν, ἀκριβέστερον : ἀπειρίζεται θετικῶς μὲν, ἐὰν ἡ ἀντίστοιχος πρόοδος εἶναι αὐξουσα ( $\omega > 0$ ), ἀρνητικῶς δέ, ἐὰν ἡ πρόοδος εἶναι φθίνουσα ( $\omega < 0$ ).

Παράδειγμα 3ον : Νά μελετηθῇ ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν ἡ γεωμετρικὴ σειρά :

$$\alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^{v-1} + \dots \quad (\alpha \neq 0) \quad (1)$$

διὰ τὰς διαφόρους πραγματικὰς τιμὰς τοῦ λόγου  $\omega$ .

Λύσις : Τὸ ἄθροισμα τῶν  $v$  πρώτων ὅρων τῆς (1) εἶναι :

$$\sigma_v = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^{v-1} = \alpha \cdot \frac{\omega^v - 1}{\omega - 1} = \frac{\alpha}{1 - \omega} - \frac{\alpha\omega^v}{1 - \omega}.$$

Διακρίνομεν ἤδη τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

α'). Ἐὰν  $|\omega| < 1$ , δηλ.  $-1 < \omega < 1$ , τότε, ὡς δείχθη εἰς τὴν § 174, εἶναι  $\lim \sigma_v = \frac{\alpha}{1 - \omega}$  καὶ ἐπομένως ἡ γεωμετρικὴ σειρά συγκλίνει (ἐν  $\mathbf{R}$ ).

β'). Ἐὰν  $\omega > 1$ , τότε ἡ ἀκολουθία  $\omega^v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  εἶναι αὐξουσα καὶ μὴ φραγμένη, ἄρα  $\lim \omega^v = +\infty$ , ὁπότε ἐκ τοῦ τύπου  $\sigma_v = \frac{\alpha(\omega^v - 1)}{\omega - 1} = \frac{\alpha}{\omega - 1} \cdot (\omega^v - 1)$ , ἔχομεν :

$$\lim \sigma_v = \begin{cases} +\infty, & \text{ἐὰν } \alpha > 0 \\ -\infty, & \text{ἐὰν } \alpha < 0. \end{cases}$$

γ'). Ἐὰν  $\omega = 1$ , τότε ἡ σειρά εἶναι :  $\alpha + \alpha + \alpha + \dots$  καὶ ἐπειδὴ  $\sigma_v = v\alpha$ , ἔχομεν :

$$\lim \sigma_v = +\infty \quad \text{ἢ} \quad -\infty, \quad \text{καθόσον } \alpha > 0 \quad \text{ἢ} \quad \alpha < 0 \quad (\text{ἀντιστοίχως}).$$

δ'). Ἐὰν  $\omega = -1$ , τότε ἡ σειρά εἶναι :  $\alpha - \alpha + \alpha - \alpha + \dots$ , ὁπότε :

$$\sigma_1 = \alpha, \quad \sigma_2 = \alpha + (-\alpha) = 0, \quad \sigma_3 = \alpha + (-\alpha) + \alpha = \alpha, \quad \sigma_4 = 0, \dots$$

καὶ γενικῶς :

$$\sigma_v = \begin{cases} \alpha, & \text{ἐὰν } v \text{ περιττός} \\ 0, & \text{ἐὰν } v \text{ ἄρτιος.} \end{cases}$$

"Ἦτοι, ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων εἶναι :  $\alpha, 0, \alpha, 0, \dots$

Αὕτη ὁμως δὲν συγκλίνει. "Οθεν διὰ  $\omega = -1$ , ἡ σειρά (1) ἀποκλίνει.

ε'). Εάν  $\omega < -1$ , τότε η σειρά (1) γίνεται:  $\alpha - \alpha\omega + \alpha\omega^2 - \alpha\omega^3 + \dots \pm \alpha\omega^k \mp \dots$

\*Επειδή  $\omega < -1$ , οπότε  $|\omega| > 1$ , έπεται  $\lim \omega^v = +\infty$  ή  $-\infty$ , καθόσον ό ν είναι άρτιος ή περιττός αντίστοιχως, όθεν τό  $\sigma_v = \frac{\alpha}{\omega-1} (\omega^v - 1)$ ,  $v = 1, 2, \dots$  ούδέν όριον έχει και κατά συνέπειαν ή (1) άποκλίνει. Συνοψίζοντες τά άνωτέρω έχομεν:

$$\sum_{v=0}^{\infty} \alpha \omega^v \equiv \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^v + \dots = \begin{cases} \frac{\alpha}{1-\omega}, & \text{έάν } |\omega| < 1 \\ +\infty, & \text{έάν } \omega \geq 1 \text{ και } \alpha > 0 \\ -\infty, & \text{έάν } \omega \geq 1 \text{ και } \alpha < 0 \\ \text{άποκλίνει,} & \text{έάν } \omega \leq -1. \end{cases}$$

Ούτως ή σειρά:  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{3^v} \equiv \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$ , συγκλίνει πρós τόν πραγματικόν αριθμόν.

$$\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}, \quad \text{διότι } |\omega| = \frac{1}{3} < 1.$$

\*Αντιθέτως ή σειρά:

$$\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots, \text{ άποκλίνει, διότι } \omega = -1.$$

\*Ας ίδωμεν τώρα και έν παράδειγμα σειράς τής οποίας δέν δυνάμεθα νά εύρωμεν τό άθροισμα τών ν πρώτων όρων τής.

**Παράδειγμα 4ον.** Η σειρά:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{v} + \dots \quad (1)$$

καλεϊται άρμονική, διότι έκαστος όρος τής (έκτός τοῦ πρώτου) είναι μέσος άρμονικός έκείνων πού τόν περιέχουν.

Θά άποδείξωμεν ότι ή ως άνω σειρά άπειρίζεται θετικώς.

\*Έστω  $S_v \equiv 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{v}$ ,  $v = 1, 2, \dots$  ή άκολουθία τών μερικών άθροισμάτων τής (1). Εύκόλως διαπιστοῦμεν ότι ή  $S_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  είναι γνησίως αύξουσα άκολουθία θετικών όρων, ήτοι ισχύει:

$$S_v < S_{v+1} \quad \text{διά κάθε } v = 1, 2, \dots$$

\*Ας ύποθέσωμεν ότι ή  $S_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  είναι φραγμένη έν  $\mathbb{R}$ . Τότε, συμφώνως πρós τό άξίωμα (§ 150), ή  $S_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  ως αύξουσα και φραγμένη άκολουθία συγκλίνει έστω δέ ότι:

$$\lim S_v = S.$$

\*Επειδή  $S_v \rightarrow S$  έπεται ότι: διά κάθε  $\varepsilon > 0$  (άρα και διά  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ) ύπάρχει δείκτης  $v_0 \in \mathbb{N}$  τοιοῦτος, ώστε:

$$|S_v - S| \leq \frac{1}{4} \quad \text{διά κάθε } v \geq v_0.$$

\*Οθεν, έάν  $m \geq v_0$  και  $v \geq v_0$  έχομεν:

$$|S_m - S_v| = |(S_m - S) + (S - S_v)| \leq |S_m - S| + |S_v - S| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Ειδικώς έάν  $v \geq v_0$  και  $m = 2v$  έχομεν:

$$|S_{2v} - S_v| \leq \frac{1}{2} \quad (2)$$

\*Εξ άλλου, έάν  $v > 1$  έχομεν:

$$\begin{aligned} S_{2v} - S_v &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{v} + \frac{1}{v+1} + \dots + \frac{1}{2v}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{v}\right) = \\ &= \frac{1}{v+1} + \frac{1}{v+2} + \dots + \frac{1}{2v}. \end{aligned}$$



Ἀλλά:  $\frac{1}{v+1} > \frac{1}{2v}, \quad \frac{1}{v+2} > \frac{1}{2v}, \dots, \frac{1}{2v} \geq \frac{1}{2v}$  διὰ κάθε  $v > 1$ .

Ὁθεν:

$$S_{2v} - S_v = \frac{1}{v+1} + \frac{1}{v+2} + \dots + \frac{1}{2v} > \frac{1}{2v} + \frac{1}{2v} + \dots + \frac{1}{2v} = v \cdot \frac{1}{2v} = \frac{1}{2}.$$

ὁπότε συνάγεται ὅτι:

$$|S_{2v} - S_v| = S_{2v} - S_v > \frac{1}{2}. \quad (3)$$

τὸ ὁποῖον ἀντιφάσκει πρὸς τὴν (2). Ἐπομένως ἡ ὑπόθεσις ὅτι ἡ ἀκολουθία  $S_v, v = 1, 2, \dots$  εἶναι φραγμένη ὁδηγεῖ εἰς ἀτοπὸν. Συνειπῶς, ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἁθροισμάτων τῆς ἁρμονικῆς σειρᾶς, ὡς αὐξοῦσα καὶ μὴ φραγμένη, ἀπειρίζεται θετικῶς, ἥτοι  $\lim S_v = +\infty$  ὁπότε, κατὰ τὸν ὁρισμὸν συγκλίσεως σειρᾶς, ἔχομεν:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} = +\infty.$$

**§ 180. Μέθοδοι εὐρέσεως τοῦ ἁθροίσματος τῶν  $n$  πρώτων ὄρων σειρᾶς.**— Ὑπάρχουν διάφοροι μέθοδοι εὐρέσεως τοῦ ἁθροίσματος τῶν  $n$  πρώτων ὄρων σειρᾶς τινος ἀναλόγως τῆς μορφῆς τοῦ γενικοῦ ὄρου αὐτῆς. Ὑπάρχουν ὁμως καὶ σειραὶ τῶν ὁποίων δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἁθροισμα τῶν  $n$  πρώτων ὄρων, λ.χ. ἡ ἁρμονικὴ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$ . Παραδείγματα ἁθροίσεως σειρῶν, δηλ. εὐρέσεως τοῦ ἁθροίσματος τῶν  $n$  πρώτων ὄρων των, συναρτῆσει τοῦ  $n$ , ἔχομεν ἤδη γνωστὰ τὰ ἁθροίσματα τῶν  $n$  πρώτων ὄρων ἀριθμητικῶν καὶ γεωμετρικῶν προόδων. Δὲν ὑπάρχει ὁμως γενικὴ μέθοδος διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἁθροίσματος  $s_n$  τῶν  $n$  πρώτων ὄρων οἰασδήποτε σειρᾶς. Εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον θὰ ἐξετάσωμεν μόνον ὠρισμένας περιπτώσεις εἰς τὰς ὁποίας εἶναι δυνατὴ ἡ εὕρεσις τοῦ ἁθροίσματος  $s_n$  τῶν  $n$  πρώτων ὄρων σειρῶν μὲ γενικὸν ὄρον  $a_v$  εἰδικῆς μορφῆς.

**Περίπτωσις I.** Ἐὰν ὁ γενικὸς ὄρος  $a_v$  τῆς σειρᾶς  $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$  δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν:  $a_v = \varphi(v) - \varphi(v+1)$  (1), ὅπου  $\varphi(v)$  συνάρτησις τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ  $v$  (ἀκολουθία), τότε τὸ ἁθροισμα τῶν  $n$  πρώτων ὄρων αὐτῆς  $s_n$  εἶναι:

$$s_n = \varphi(1) - \varphi(n+1) \quad (2)$$

Πράγματι, ἐὰν θέσωμεν εἰς τὴν  $a_v = \varphi(v) - \varphi(v+1), v = 1, 2, \dots, n$ , ἔχομεν:

$$\alpha_1 = \varphi(1) - \varphi(2)$$

$$\alpha_2 = \varphi(2) - \varphi(3)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\alpha_n = \varphi(n) - \varphi(n+1).$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας ταύτας, ἔχομεν:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \varphi(1) - \varphi(n+1)$$

$$\eta \quad s_n = \varphi(1) - \varphi(n+1).$$

**Παρατήρησης.** 'Εάν υπάρχει το  $\lim \varphi(v)$  και είναι  $k$ , τότε εκ τῆς (2) ἔχομεν :

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \lim \sigma_v = \varphi(1) - k.$$

**Εφαρμογή 1η :** Νά εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν  $v$  πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς :

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{2v+1}{v^2(v+1)^2}$$

καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῆς.

**Λύσις :** 'Ο γενικός ὅρος αὐτῆς εἶναι :  $\alpha_v = \frac{2v+1}{v^2(v+1)^2}$ .

'Επειδὴ  $2v+1 = (v+1)^2 - v^2$  θὰ ἔχωμεν :

$$\alpha_v = \frac{(v+1)^2 - v^2}{v^2(v+1)^2} = \frac{1}{v^2} - \frac{1}{(v+1)^2} = \varphi(v) - \varphi(v+1), \quad \text{ὅπου } \varphi(v) = \frac{1}{v^2}$$

τότε ὁμως, συμφώνως πρὸς τὴν (2), θὰ εἶναι :

$$\sigma_v = \varphi(1) - \varphi(v+1) = 1 - \frac{1}{(v+1)^2}$$

καὶ 
$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{2v+1}{v^2(v+1)^2} = \lim \sigma_v = 1, \quad \text{διότι } \lim \frac{1}{(v+1)^2} = 0.$$

**Εφαρμογή 2α :** Νά εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς :

$$\frac{4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{6}{3 \cdot 4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \frac{v+3}{v(v+1)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^v + \dots \quad (\Sigma)$$

**Λύσις :** 'Ο γενικός ὅρος τῆς σειρᾶς ( $\Sigma$ ) εἶναι :  $\alpha_v = \frac{v+3}{v(v+1)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^v$ .

Πρὸς μετασχηματισμὸν τοῦ γενικοῦ ὅρου, ἀναλύομεν πρῶτον τὸ κλάσμα  $\frac{v+3}{v(v+1)}$  εἰς ἄθροισμα δύο ἀπλῶν κλασμάτων. Πρὸς τοῦτο θέτομεν :

$$\frac{v+3}{v(v+1)} \equiv \frac{A}{v} + \frac{B}{v+1}.$$

'Εξ αὐτῆς, ἐργαζόμενοι κατὰ τὰ γνωστά (§ 98), εὐρίσκομεν  $A = 3$ ,  $B = -2$ , ὅτε ἔχομεν :

$$\frac{v+3}{v(v+1)} \equiv \frac{3}{v} - \frac{2}{v+1}.$$

Τότε ὁ γενικός ὅρος τῆς σειρᾶς γίνεται :

$$\alpha_v = \frac{v+3}{v(v+1)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^v = \frac{3}{v} \cdot \frac{2^v}{3^v} - \frac{2}{v+1} \cdot \frac{2^v}{3^v} = \frac{2^v}{v \cdot 3^{v-1}} - \frac{2^{v+1}}{(v+1) \cdot 3^v},$$

ἥτοι ὁ  $\alpha_v$  ἐτέθη ὑπὸ τὴν μορφήν  $\alpha_v = \varphi(v) - \varphi(v+1)$ , ὅπου  $\varphi(v) = \frac{2^v}{v \cdot 3^{v-1}}$ .

Τότε, κατὰ τὸν τύπον (2), θὰ εἶναι :

$$\sigma_v = \varphi(1) - \varphi(v+1) = 2 - \frac{2^{v+1}}{(v+1) \cdot 3^v}, \quad \text{διότι } \varphi(1) = 2.$$

Ὁθεν :

$$\lim \sigma_v = 2 - \lim \frac{2^{v+1}}{(v+1) \cdot 3^v} = 2 - \lim \frac{2}{v+1} \cdot \lim \left(\frac{2}{3}\right)^v = 2 - 0 = 2.$$

"Ἦτοι ἡ σειρὰ ( $\Sigma$ ) συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν 2.

**Περίπτωσις II.** Ἐὰν ὁ γενικός ὅρος  $a_n$  τῆς σειρᾶς  $\sum_{v=1}^{\infty} a_n$  δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$a_n = A \varphi(v) + B \varphi(v+1) + \Gamma \varphi(v+2), \text{ ὅπου } A + B + \Gamma = 0 \quad (3)$$

τότε τὸ ἄθροισμα  $\sigma_n$  τῶν  $n$  πρώτων ὅρων αὐτῆς εἶναι :

$$\sigma_n = A \varphi(1) - \Gamma \varphi(2) - A \varphi(v+1) + \Gamma \varphi(v+2) \quad (4)$$

Πράγματι, ἔχομεν :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{k=1}^n \alpha_k = \sum_{k=1}^n \{ A \varphi(k) + B \varphi(k+1) + \Gamma \varphi(k+2) \} = A \sum_{k=1}^n \varphi(k) + B \sum_{k=1}^n \varphi(k+1) + \\ &+ \Gamma \sum_{k=1}^n \varphi(k+2) = A \sum_{k=-1}^{n-2} \varphi(k+2) + B \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(k+2) + \Gamma \sum_{k=1}^n \varphi(k+2) = \\ &= A \{ \varphi(1) + \varphi(2) \} + A \sum_{k=1}^{n-2} \varphi(k+2) + B \varphi(2) + B \sum_{k=1}^{n-2} \varphi(k+2) + B \varphi(v+1) + \\ &+ \Gamma \sum_{k=1}^{n-2} \varphi(k+2) + \Gamma \{ \varphi(v+1) + \varphi(v+2) \} = A \varphi(1) + (A+B) \varphi(2) + \\ &+ (B+\Gamma) \varphi(v+1) + \Gamma \varphi(v+2) + (A+B+\Gamma) \sum_{k=1}^{n-2} \varphi(k+2). \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ  $A+B+\Gamma=0$ , ὅτε  $A+B=-\Gamma$ ,  $B+\Gamma=-A$ , ἔχομεν :

$$\sigma_n = A \varphi(1) - \Gamma \varphi(2) - A \varphi(v+1) + \Gamma \varphi(v+2).$$

**Ἐφαρμογή :** Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν  $n$  πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς :

$$\frac{5}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{8}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{3n+2}{v(v+1) \cdot (v+2)} + \dots \quad (5)$$

**Λύσις :** Ἀναλύομεν τὸν γενικὸν ὅρον  $a_n = \frac{3n+2}{v(v+1)(v+2)}$  εἰς ἄθροισμα τριῶν ἀπλῶν κλασμάτων. Πρὸς τοῦτο θέτοντες :

$$\frac{3v+2}{v(v+1)(v+2)} \equiv \frac{A}{v} + \frac{B}{v+1} + \frac{\Gamma}{v+2}$$

εὐρίσκομεν, κατὰ τὰ γνωστά,  $A=B=1$  καὶ  $\Gamma=-2$ .

Παρατηροῦμεν ὅτι :  $A+B+\Gamma=0$  καὶ ὁ γενικός ὅρος τῆς σειρᾶς (5) ἐτέθη ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$a_n = A \varphi(v) + B \varphi(v+1) + \Gamma \varphi(v+2), \text{ ὅπου } \varphi(v) = \frac{1}{v}.$$

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (4) εὐρίσκομεν :

$$\sigma_n = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{v+1} - 2 \cdot \frac{1}{v+2} = 2 - \frac{1}{v+1} - \frac{2}{v+2}.$$

**Παρατήρησις.** Γενικῶς, ἐὰν  $a_n = A \varphi(v) + B \varphi(v+k) + \Gamma \varphi(v+\lambda)$  μὲ  $A+B+\Gamma=0$ , τότε τὸ  $\sigma_n$  ὑπολογίζεται.

**Περίπτωσις III.** Ἐὰν ὁ γενικός ὅρος  $a_n$  τῆς σειρᾶς  $\sum_{v=1}^{\infty} a_n$  εἶναι τῆς μορφῆς :

$$a_n = f(v) + \varphi(v) + g(v),$$

ὅπου  $f(v)$ ,  $\varphi(v)$ ,  $g(v)$  εἶναι οἱ γενικοὶ ὅροι σειρῶν, τῶν ὁποίων εἶναι γνωστὴ ἡ εὕρεσις τοῦ ἁθροίσματος τῶν  $n$  πρώτων ὅρων, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν  $n$  πρώτων ὅρων αὐτῆς ὑπολογίζεται.

**Παράδειγμα.** Νά εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν  $n$  πρώτων ὄρων τῆς σειρᾶς μὲ γενικὸν ὄρον  $\alpha_n = \frac{2^n - 1}{2^{2n-2}}$ , καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῆς ( $\equiv$  ἄθροισμα ἀπείρων ὄρων τῆς).

**Λύσις:** Ὁ γενικὸς ὄρος γράφεται:

$$\alpha_n = \frac{2^n - 1}{2^{2n-2}} = \frac{2^n}{2^{2n-2}} - \frac{1}{2^{2n-2}} = \frac{4}{2^n} - \frac{4}{4^n},$$

ἤτοι ὁ  $\alpha_n$  ἐτέθη ὑπὸ τὴν μορφήν:  $\alpha_n = f(n) + \varphi(n)$ , ὅπου  $\varphi(n) = \frac{4}{2^n}$  καὶ  $\varphi(n) = -\frac{4}{4^n}$ ,

δηλαδή ὁ  $\alpha_n$  ἀνελύθη εἰς διαφοράν δύο ὄρων, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἀποτελεῖ τὸν νιοστὸν ὄρον φθινοῦσης γεωμετρικῆς προόδου.

Τότε: διὰ  $n = 1$  ἔχομεν:  $\alpha_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{4}$

διὰ  $n = 2$  » :  $\alpha_2 = 4 \cdot \frac{1}{2^2} - 4 \cdot \frac{1}{4^2}$

.....

διὰ  $n = n$  » :  $\alpha_n = 4 \cdot \frac{1}{2^n} - 4 \cdot \frac{1}{4^n}$ .

Ὁθεν:

$$\begin{aligned} \sigma_n &\equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 4 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) - 4 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} \right) = \\ &= 4 \cdot \frac{\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} - 4 \cdot \frac{\frac{1}{4^{n+1}} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} - 1} = 4 \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) - \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{1}{4^n} \right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}} \end{aligned}$$

καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  εἶναι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{8}{3}.$$

**Περίπτωσις IV:** Ἐάν ὁ γενικὸς ὄρος  $\alpha_n$  τῆς σειρᾶς  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\alpha_n = f(n) \cdot x^n, \text{ ὅπου } f(n) \text{ ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ } n,$$

τότε τὸ ἄθροισμα τῶν  $n$  πρώτων ὄρων αὐτῆς ὑπολογίζεται.

**Παράδειγμα 1ον.** Νά ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν  $n$  πρώτων ὄρων τῆς σειρᾶς:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \equiv 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + \dots$$

**Λύσις.** Ἐστω:

$$\Sigma_n \equiv 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}. \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ  $x$  λαμβάνομεν:

$$x \Sigma_n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n. \quad (2)$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει:

$$(1-x) \Sigma_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} - nx^n.$$

Αὕτη, ἐπειδὴ εἶναι  $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$ , γίνεται:

$$(1-x) \cdot \Sigma_n = \frac{x^n - 1}{x - 1} - nx^n$$

ἤ

$$\Sigma_n = \frac{1 - x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}.$$

**Παράδειγμα 2ον.** Νά αποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν  $n$  πρώτων ὀρων τῆς σειρᾶς :

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{n+1}{3^n} + \dots \quad (1)$$

εἶναι :

$$\frac{5}{4} - \frac{2n+5}{4 \cdot 3^n}.$$

**Λύσις.** Ὁ γενικὸς ὀρος τῆς (1), δηλ. ὁ  $\frac{n+1}{3^n}$  εἶναι γινόμενον τοῦ νιοστοῦ ὀρου μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου (τῆς : 2, 3, ...,  $n$ ,  $n+1$ , ...) καὶ τοῦ νιοστοῦ ὀρου μιᾶς γεωμετρικῆς (τῆς :  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{3^2}$ , ...,  $\frac{1}{3^n}$ , ...), ἥτοι εἶναι ὁ νιοστός ὀρος μιᾶς μικτῆς προόδου \*).

Θέτομεν :

$$\Sigma_n = \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{n+1}{3^n}. \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς (2) ἐπὶ τὸν λόγον τῆς γεωμετρικῆς προόδου λαμβάνομεν :

$$\frac{1}{3} \Sigma_n = \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{n+1}{3^{n+1}}. \quad (3)$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῶν (2) καὶ (3) προκύπτει :

$$\frac{2}{3} \Sigma_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} - \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - 1} - \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

καὶ τελικῶς :

$$\Sigma_n = \frac{5}{4} - \frac{2n+5}{4 \cdot 3^n}.$$

**Περίπτωσις V :** Ἐὰν ὁ γενικὸς ὀρος μιᾶς σειρᾶς εἶναι ἀκεραία ρητὴ συνάρτησις τοῦ  $n$ , δηλαδή  $a_n = \varphi(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , δυνάμεθα νά εὗρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν  $n$  πρώτων ὀρων αὐτῆς.

**Παράδειγμα 1ον.** Νά εὗρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν  $n$  πρώτων ὀρων τῆς σειρᾶς, τῆς ὁποίας ὁ γενικὸς ὀρος εἶναι :  $a_n = 12n^2 - 6n + 1$ .

**Λύσις :** Ἐστω  $\sigma_n \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \sum_{v=1}^n \alpha_v \equiv \sum_{v=1}^n (12v^2 - 6v + 1)$ , τὸ ζητούμενον ἄθροισμα.

Λόγῳ τῶν γνωστῶν ἰδιοτήτων τοῦ συμβόλου  $\Sigma$  (βλ. § 176) ἔχομεν :

$$\sigma_n = \sum_{v=1}^n (12v^2 - 6v + 1) = \sum_{v=1}^n 12v^2 - \sum_{v=1}^n 6v + \sum_{v=1}^n 1$$

ἢ  $\sigma_n = 12 \sum_{v=1}^n v^2 - 6 \sum_{v=1}^n v + \sum_{v=1}^n 1 = 12 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 6 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n = n^2(4n+3).$

**Παράδειγμα 2ον.** Νά εὗρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν  $n$  πρώτων ὀρων τῆς σειρᾶς :

$$1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + 5 \cdot 7 \cdot 9 + \dots \quad (\Sigma)$$

\* Μικτὴ πρόοδος καλεῖται μία ἀκολουθία ἀριθμῶν, ἕκαστος ὀρος τῆς ὁποίας προκύπτει ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμόν τῶν ἀντιστοίχων (ὁμοταξίων) ὀρων δύο προόδων, μιᾶς ἀριθμητικῆς καὶ μιᾶς γεωμετρικῆς.



391. Νά εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα τῶν  $n$  πρώτων ὀρων τῶν ἀκολουθῶν σειρῶν.

α)  $1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+3) + \dots$

β)  $1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \dots$

γ)  $4\alpha + 5\alpha^2 + 6\alpha^3 + \dots + (n+3)\alpha^n + \dots$

392. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἀθροισμα τῶν  $n$  πρώτων ὀρων τῆς σειρᾶς :

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$$

εἶναι :

$$2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$$

393. Νά δειχθῇ ὅτι :  $1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \dots + \frac{n}{5^{n-1}} = \frac{5^{n+1} - 4n - 5}{16 \cdot 5^{n-1}}$ .

394. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$1 + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 3\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \dots + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = n^2.$$

395. Νά δειχθῇ ὅτι :  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v(v+2)(v+3)} = \frac{5}{36}$ .

396. Νά δειχθῇ ὅτι :  $\frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}} = 2 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$ .

## Ἰδιότητες συγκλίσεως σειρῶν

Εἰς τὴν παράγραφον ταύτην θὰ ἀποδείξωμεν μερικὰς βασικὰς ιδιότητες συγκλινουσῶν σειρῶν, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὁποίων δύναται τις νὰ συνδυάσῃ συγκλινούσας σειρὰς κατὰ ποικίλους τρόπους. Θὰ ἀναφέρωμεν ἐπίσης μίαν πολὺ ἀπλὴν συνθήκην, ἥ ὁποία εἶναι ἄν  $\alpha \gamma \kappa \alpha \iota \alpha$  διὰ τὴν σύγκλισιν, ἐπὶ πλεον δὲ κατάλληλος, εἰς πολλὰς περιπτώσεις, προκειμένου νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι μία σειρὰ δὲν συγκλίνει ἐν  $\mathbb{R}$ .

**§ 181. Ἰδιότης I.**— Ἐὰν μία σειρὰ  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$  (1) εἶναι συγκλίνουσα μὲ ἀθροισμα  $a \in \mathbb{R}$ , τότε καὶ ἡ σειρὰ :  $\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \dots$  (2), ἥ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν διὰ παραλείψεως τῶν  $k$  πρώτων ὀρων τῆς, εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα.

**Ἀποδείξεις :** Ἐστωσαν  $\sigma_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  καὶ  $t_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  αἱ ἀκολουθίαι τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῶν σειρῶν (1) καὶ (2) ἀντιστοίχως, ἥτοι :

$$\sigma_n \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \quad (3)$$

$$t_n \equiv \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \dots + \alpha_{k+n} \quad (4)$$

Τὸ (πεπερασμένον) ἀθροισμα  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$  εἶναι εἰς πραγματικὸς ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἂς καλέσωμεν  $s$ , ἥτοι :  $s \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ .

Θέτομεν :  $\sigma_{k+n} \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k + \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{k+n}$ , ὅτε ἔχομεν :

$$\sigma_{k+n} = s + \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \dots + \alpha_{k+n}$$

ἢ  $\sigma_{k+n} - s = \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \dots + \alpha_{k+n}$ . (5)

Ἡ (5), δυνάμει τῆς (4), γίνεται :

$$\sigma_{k+v} - s = t_v, \quad v = 1, 2, \dots$$

Ἐκ ταύτης ἔχομεν :  $\lim \sigma_{k+v} - s = \lim t_v$ . (6)

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι  $\lim \sigma_v = \alpha$ , ἄρα καὶ  $\lim_{v \rightarrow \infty} \sigma_{k+v} = \alpha$ , ἡ ἰσότης (6) δίδει :

$$\lim t_v = \alpha - s.$$

Ἐκ ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων τῆς σειρᾶς (2) συγκλίνει ὅτε, κατὰ τὸν ὅρισμόν συγκλίσεως σειρᾶς, καὶ ἡ σειρὰ (2) συγκλίνει.

**Παρατήρησις.** Παρατηροῦμεν ὅτι παραλείποντες τοὺς  $k$  πρώτους ὅρους μιᾶς συγκλινούσης σειρᾶς  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ , τὸ ἄθροισμα αὐτῆς  $\alpha$  ἐλαττοῦται κατὰ τὸ ἄθροισμα  $s$  τῶν παραλειπομένων ὀρων. Προφανῶς ἐὰν ἡ (1) δὲν συγκλίνει ἐν  $\mathbf{R}$ , τότε καὶ ἡ (2) ἐπίσης δὲν συγκλίνει. Οὕτως αἱ σειραὶ (1) καὶ (2) εἶναι πάντοτε τῆς αὐτῆς φύσεως, δηλαδὴ ἡ καὶ αἱ δύο συγκλινούσαι ἐν  $\mathbf{R}$  (ἀσχετῶς ἐὰν δὲν ἔχουν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα) ἢ καὶ αἱ δύο μὴ συγκλινούσαι. Ἀντιστρέφοντες τοὺς ρόλους τῶν (1) καὶ (2) συμπεραίνομεν ὅτι ἡ σύγκλισις ἢ μὴ μιᾶς σειρᾶς δὲν βλάπτεται, ἐὰν εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτῆς προσθέσωμεν ἓν πεπερασμένον πλήθος ὀρων. Οὕτως ἡ σειρὰ :

$$\sum_{v=11}^{\infty} \frac{1}{v} = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots,$$

ὡς προκύπτουσα ἐκ τῆς ἀρμονικῆς σειρᾶς  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$  διὰ παραλείψεως τῶν δέκα πρώτων ὀρων τῆς, ἀπειρίζεται θετικῶς.

**§ 182. Ἰδιότης II.**—Ἐστώσαν  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \alpha$  καὶ  $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v = \beta$

δύο συγκλινούσαι σειραί. Τότε :

1). Ἐὰν  $\lambda \in \mathbf{R}$ , ἡ σειρὰ  $\sum_{v=1}^{\infty} (\lambda \alpha_v)$  εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα ἔχουσα ἄθροισμα  $\lambda \alpha$ ,

ἥτοι :

$$\sum_{v=1}^{\infty} (\lambda \alpha_v) = \lambda \alpha = \lambda \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v,$$

δηλαδὴ διὰ τὰς συγκλινούσας σειράς, ὅπως καὶ διὰ τὰ συνήθη ἄθροίσματα, ἰσχύει ὁ ἐπιμεριστικὸς νόμος.

2). Ἡ σειρὰ  $\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v + \beta_v)$  εἶναι συγκλίνουσα ἔχουσα ἄθροισμα τὸν ἀριθμὸν  $\alpha + \beta$ ,

ἥτοι :

$$\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v + \beta_v) = \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v + \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v.$$

**Ἀπόδειξις :** Ἐστώσαν  $s_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  καὶ  $t_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  αἱ ἀκολουθίαι τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων τῶν σειρῶν  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  καὶ  $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$  ἀντιστοίχως, τότε :

$$s_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v$$

$$t_v = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_v, \quad v = 1, 2, \dots$$



1). 'Εάν  $s'_n$  είναι τὸ ἄθροισμα τῶν  $n$  πρώτων ὀρίων τῆς  $\sum_{v=1}^{\infty} (\lambda \alpha_v)$ , ἔχομεν :

$$s'_n = \lambda \alpha_1 + \lambda \alpha_2 + \dots + \lambda \alpha_n = \lambda (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = \lambda \cdot s_n.$$

'Εκ ταύτης ἔχομεν :  $\lim s'_n = \lim (\lambda \cdot s_n) = \lambda \cdot \lim s_n = \lambda \alpha$ , διότι  $\lim s_n = \alpha$ .

'Εκ ταύτης συνάγομεν ὅτι ἡ σειρὰ  $\sum_{v=1}^{\infty} (\lambda \alpha_v)$  συγκλίνει καὶ μάλιστα πρὸς τὸ  $\lambda \cdot \alpha$ .

2). 'Εάν  $s_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων τῆς  $\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v + \beta_v)$ , θὰ εἶναι :

$$s_n \equiv (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \dots + (\alpha_n + \beta_n) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) + (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) = s_n + t_n, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

"Οτε :  $\lim s_n = \lim (s_n + t_n) = \lim s_n + \lim t_n = \alpha + \beta$ , διότι ἐξ ὑποθέσεως  $\lim s_n = \alpha$ ,  $\lim t_n = \beta$ .

Τότε, συμφώνως πρὸς τὸν ὅρισμὸν συγκλίσεως σειρᾶς, ἡ σειρὰ  $\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v + \beta_v)$  συγκλίνει εἰς τὸ  $\alpha + \beta$ .

'Εκ τῶν συμπερασμάτων (1) καὶ (2) τῆς ἰδιότητος II ἔπεται ἡ γενικωτέρα ἰδιότης :

**§ 183. Ἰδιότης III.**—'Εάν  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \alpha$  καὶ  $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v = \beta$  μὲ  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ἐπὶ πλέον δὲ  $\xi$  καὶ  $\eta$  τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοί, τότε ἰσχύει :

$$\sum_{v=1}^{\infty} (\xi \alpha_v + \eta \beta_v) = \xi \alpha + \eta \beta.$$

Εἰδικῶς διὰ  $\xi = 1$ ,  $\eta = -1$  ἔχομεν :

$$\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v - \beta_v) = \alpha - \beta = \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v - \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v.$$

**Ἐφαρμογή :** Ἡ σειρὰ  $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^v}$  συγκλίνει, διότι :  $\frac{1}{3 \cdot 2^v} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^v}$ , ἐπὶ πλέον δὲ ἡ  $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v}$  συγκλίνει καὶ μάλιστα, ὡς ἐδείχθη εἰς τὸ παράδειγμα 1 § 178 ἰσχύει  $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v} = 2$ , ὁθεν :

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^v} = \frac{1}{3} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v} = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}.$$

**§ 184. Ἰδιότης IV.**—'Εάν ἡ σειρὰ  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  συγκλίνη (ἐν  $\mathbb{R}$ ), τότε :

α'). ἡ ἀκολουθία  $s_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων εἶναι φραγμένη,

β'). ἡ ἀκολουθία  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι μηδενική.

**Ἀπόδειξις.** α'). 'Εάν  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \alpha$ , τότε  $\lim s_n = \alpha$  καὶ ἡ ἀκολουθία  $s_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ὡς συγκλίνουσα εἶναι φραγμένη (βλ. § 138).

β'). Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ δεύτερον συμπέρασμα, παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\alpha_n = s_n - s_{n-1} \quad \text{διὰ κάθε } n = 2, 3, \dots$$

Ἐκ ταύτης ἔχομεν :  $\lim \alpha_n = \lim (\sigma_n - \sigma_{n-1}) = \lim \sigma_n - \lim \sigma_{n-1} = \alpha - \alpha = 0$ .  
Αἱ συνθήκαι (α) καὶ (β) τῆς ἀνωτέρω ιδιότητος εἶναι **ἀναγκαῖαι**, ἀλλ' οὐχὶ καὶ **ἱκαναί**. Οὕτως ὑπάρχουν μὴ συγκλίνουσαι σειραὶ διὰ τὰς ὁποίας ἡ (α) ἢ ἡ (β) ἰσχύει : Π.χ. ἡ σειρά :  $\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v$  ἀποκλίνει (βλ. § 178), ἐν τούτοις ὅμως ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων της εἶναι φραγμένη.

Ἐπίσης ἡ ἀρμονικὴ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$  ἀπειρίζεται θετικῶς, ἐν τούτοις ἡ ἀκολουθία  $\alpha_v = \frac{1}{v}$ ,  $v = 1, 2, \dots$  εἶναι μηδενικὴ.

**Πόρισμα.**— Ἐστω  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ  $\lim \alpha_v \neq 0$ , τότε ἡ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  δὲν συγκλίνει ἐν  $\mathbf{R}$ .

**Παράδειγμα :** Ἡ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{2v+1}{3v+5}$  δὲν συγκλίνει πρὸς πραγματικὸν ἀριθμόν, διότι :

$$\lim \frac{2v+1}{3v+5} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

**Συμπέρασμα :** Θὰ προχωρῶμεν εἰς τὴν μελέτην μιᾶς σειρᾶς ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν, μόνον ἐφ' ὅσον ὁ γενικὸς της ὅρος συγκλίνει εἰς τὸ μηδέν.

**§ 185. Ἰδιότης V.**— Ἐὰν ἡ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  συγκλίνη καὶ ἡ  $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$  δὲν συγκλίνη ἐν  $\mathbf{R}$ , τότε ἡ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v + \beta_v)$  δὲν συγκλίνει ἐν  $\mathbf{R}$ .

**Ἀπόδειξις :** Ἐπειδὴ  $\beta_v = (\alpha_v + \beta_v) - \alpha_v$  καὶ ἡ  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  συγκλίνει, κατὰ τὴν ιδιότητα III ἡ σύγκλις τῆς  $\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v + \beta_v)$  συνεπάγεται τὴν σύγκλισιν τῆς  $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ . Ἀποκλείεται συνεπῶς ἡ σύγκλις τῆς  $\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v + \beta_v)$ , ἐφ' ὅσον ἐξ ὑποθέσεως ἡ  $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$  δὲν συγκλίνει ἐν  $\mathbf{R}$ .

**Παράδειγμα :** Ἡ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \left( \frac{1}{v} + \frac{1}{2^v} \right)$  δὲν συγκλίνει (ἐν  $\mathbf{R}$ ), διότι ἡ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$  ἀπειρίζεται θετικῶς καὶ ἡ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v}$  συγκλίνει.

**Παρατήρησις :** Ἐὰν αἱ σειραὶ  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  καὶ  $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$  ἀμφότεραι δὲν συγκλίνουν ἐν  $\mathbf{R}$ , τότε ἡ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v + \beta_v)$  δυνατὸν νὰ συγκλίνη, δυνατὸν ὅμως καὶ νὰ μὴν συγκλίνη ἐν  $\mathbf{R}$ .

**Παράδειγμα :** 'Εάν  $\alpha_n = \beta_n = 1 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$ , τότε ή  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) = +\infty$ ,  
 εάν όμως  $\alpha_n = 1$  και  $\beta_n = -1 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$ , τότε ή  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n)$  συγκλίνει.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

397. Ποίαι σειραι με γενικούς όρους τούς κάτωθι είναι συγκλίνουσai και ποίαι όχι :

$$1). \alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}, \quad 2). \alpha_n = \frac{1}{n}, \quad 3). \alpha_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}.$$

398. 'Εάν  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$  και  $\beta_n, n = 1, 2, \dots$  είναι δύο ακολουθίαι τοιαύται, ώστε :

$$\alpha_n = \beta_n - \beta_{n+1} \quad \forall \quad n = 1, 2, \dots,$$

τότε ή σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  συγκλίνει, εάν, και μόνον εάν, ή ακολουθία  $\beta_n, n = 1, 2, \dots$  συγκλίνη. Είς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἔχομεν :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \beta_1 - l, \text{ όπου } l = \lim \beta_n.$$

(Υπόδειξις :  $\sigma_n \equiv \sum_{k=1}^n \alpha_k = \sum_{k=1}^n (\beta_k - \beta_{k+1}) = \beta_1 - \beta_{n+1}$  κ.τ.λ.).

399. Δείξατε ότι :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = 1$$

(Υπόδειξις Παρατηρήσατε ότι :  $\alpha_n = \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \equiv \beta_n - \beta_{n+1}$

και ακολουθως λάβετε υπ' όψιν τó συμπέρασμα τής προηγούμενης άσκήσεως).

**§ 186. Σειραι με θετικούς όρους.**— Είς τήν παράγραφον ταύτην θά θεωρήσωμεν σειράς με όρους θετικούς, δηλ. σειράς αί όποίαι προκύπτουν έξ ακολουθιών  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ , όπου  $\alpha_n \geq 0$  δια κάθε  $n = 1, 2, \dots$ . Τότε ή ακολουθία τών μερικών άθροισμάτων  $\sigma_n \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, n = 1, 2, \dots$  είναι πάντοτε αύξουσα και έπομένως ή σειρά : **α')** συγκλίνει πρòς πραγματικόν άριθμόν τότε, και μόνον τότε, αν ή ακολουθία  $\sigma_n, n = 1, 2, \dots$  είναι φραγμένη, **β')** άπειρίζεται θετικώς τότε, και μόνον τότε, αν ή ακολουθία  $\sigma_n, n = 1, 2, \dots$  δέν είναι φραγμένη. Άποδεικνύομεν κατωτέρω μίαν βασικήν πρότασιν, δυνάμει τής όποιás δυνάμεθα νά έξακριβώνωμεν είς πολλές περιπτώσεις, εάν μία σειρά με θετικούς όρους συγκλίνη ή άπειρίζεται θετικώς συγκρίνοντας αὐτήν πρòς μίαν άλλην γνωστήν σειράν, δι' ό και ή πρότασις αὐτή καλεΐται «κριτήριο συγκρίσεως σειρών».

**§ 187. Κριτήριο συγκρίσεως.**— 'Εάν  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  είναι δύο σειραι τοιαύται, ώστε :

$$0 \leq \alpha_n \leq \beta_n, \text{ δια κάθε } n = 1, 2, \dots$$

Τότε : (1) 'Εάν  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  συγκλίνη, τότε και ή  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  συγκλίνει.

(2) 'Εάν  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  άπειρίζεται θετικώς, τότε και ή  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  άπειρίζεται θετικώς.

**Ἀπόδειξις τῆς (1).** Ἐστώσαν  $s_n, n = 1, 2, \dots$  καὶ  $t_n, n = 1, 2, \dots$  αἱ ἀκολουθίαι τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῶν  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  καὶ  $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$  ἀντιστοίχως.

Λόγῳ τῆς ὑποθέσεως  $\alpha_n \leq \beta_n$  διὰ κάθε  $n = 1, 2, \dots$  ἔχομεν, ὅτι :

$$s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n \equiv t_n. \quad (1)$$

Ἐφ' ὅσον ἡ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$  συγκλίνει, ἡ ἀκολουθία  $t_n, n = 1, 2, \dots$  εἶναι φραγμένη (βλ. § 184), τότε ὁμως, ὡς εὐκόλως φαίνεται ἐκ τῆς (1), καὶ ἡ  $s_n, n = 1, 2, \dots$  εἶναι φραγμένη ἄνωθεν καὶ ἐπειδὴ  $\alpha_n \geq 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots$ , ἡ ἀκολουθία  $s_n, n = 1, 2, \dots$  εἶναι αὐξοῦσα καὶ φραγμένη, ἄρα συγκλίνει ἐν  $\mathbf{R}$ . Τότε, συμφώνως πρὸς τὸν ὅρισμὸν συγκλίσεως σειρᾶς, καὶ ἡ  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  συγκλίνει.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν :  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v \leq \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ .

**Ἀπόδειξις τῆς (2).** Ἀς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ  $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$  συγκλίνει. Τότε, συμφώνως πρὸς τὴν (1), ἡ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  συγκλίνει, ἄτοπον, διότι ἐξ ὑποθέσεως ἡ  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  ἀπειρίζεται θετικῶς. Ἀρα ἡ  $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$  ὡς σειρά θετικῶν ὀρων καὶ μὴ συγκλίνουσα ἐν  $\mathbf{R}$  ἀπειρίζεται θετικῶς.

**Ἐφαρμογὴ 1η :** Ἡ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{2^v(v+1)}$  συγκλίνει, διότι :  $\frac{v}{2^v(v+1)} < \frac{1}{2^v}$ ,  $v = 1, 2, \dots$  καὶ ἡ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v}$  συγκλίνει, ὡς ἐδείχθη εἰς τὸ παράδειγμα 1 τῆς § 178.

**Ἐφαρμογὴ 2α :** Ἡ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^p}$  ἀπειρίζεται θετικῶς διὰ  $p \in \mathbf{R}$  μὲ  $p \leq 1$ .

Πράγματι, ἐὰν  $p \leq 1$ , τότε  $v^p \leq v \quad \forall v \in \mathbf{N}$ . Ὅθεν  $\frac{1}{v} \leq \frac{1}{v^p}$ ,  $v = 1, 2, \dots$ . Ἀλλὰ ἡ ἀρμονικὴ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$  ἀπειρίζεται θετικῶς καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ ἡ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^p}$ ,  $p \leq 1$ , ἀπειρίζεται θετικῶς, συμφώνως πρὸς τὸ δεύτερον συμπέρασμα τοῦ κριτηρίου συγκρίσεως σειρῶν.

Οὕτω διὰ  $p = \frac{1}{2} < 1$  ἔχομεν ὅτι :

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v}} \equiv 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{v}} + \dots = +\infty.$$

**Ἐφαρμογὴ 3η :** Ἡ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^p}$  συγκλίνει διὰ  $p \in \mathbf{R}$  μὲ  $p > 1$ .

Πράγματι, αὕτη γράφεται :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^p} + \left( \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) + \left( \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \right) + \left( \frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \dots + \frac{1}{15^p} \right) + \\ + \left( \frac{1}{16^p} + \frac{1}{17^p} + \dots + \frac{1}{31^p} \right) + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Επειδή είναι :

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{2}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}},$$

$$\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} < \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} = \frac{4}{4^p} = \frac{1}{4^{p-1}} = \frac{1}{2^{2p-2}},$$

$$\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \dots + \frac{1}{15^p} < \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \dots + \frac{1}{8^p} = \frac{8}{8^p} = \frac{1}{8^{p-1}} = \frac{1}{2^{3p-3}}, \dots$$

έπεται ότι οι όροι της σειράς (1), (ήτοι αι παρενθέσεις) είναι μικρότεροι των αντίστοιχων όρων της σειράς :

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{2p-2}} + \frac{1}{2^{3p-3}} + \dots \quad (2)$$

Η σειρά (2), επειδή είναι  $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ , συγκλίνει (διατί;). Τότε όμως, συμφώνως προς το πρώτον συμπέρασμα του κριτηρίου συγκρίσεως, θα συγκλίνει και η (1).

Ωστε, διά  $p \in \mathbb{R}$ ,  $p > 1$  η σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^p}$  συγκλίνει (έν  $\mathbb{R}$ ).

Παρατήρησις : Η σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^p}$ , όπου  $p$  τυχών πραγματικός αριθμός, καλείται **αρμονική σειρά**  $p$ -τάξεως και ως έδειχθη εις τας εφαρμογάς 2 και 3 ισχύει :

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^p} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } p \leq 1 \\ \text{συγκλίνει,} & \text{αν } p > 1. \end{cases}$$

Διά  $p = 1$  έχομεν την αρμονική σειράν  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$  (βλ. πρδ. 4, § 179).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

400. Να εύρεθῃ ποία ἐκ τῶν κατωτέρω σειρῶν εἶναι συγκλίνουσαι καὶ ποία ὄχι :

1.  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{v^2 + 1}{v^4}$ ,

2.  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{v + 1}{2v}$ ,

3.  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{v^2 - 3v + 2}{v^4}$ ,

4.  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{v - 1}{v^2}$ ,

5.  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sqrt{v} + 1}{v^3}$ ,

6.  $\sum_{v=2}^{\infty} \frac{\sqrt{v}}{v + \sqrt{v}}$ .

401. Ἀποδείξατε ὅτι : Ἐὰν  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  καὶ  $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$  εἶναι δύο σειραὶ θετικῶν ὀρων καὶ

$$\lim \frac{\alpha_v}{\beta_v} = A,$$

ὅπου  $A > 0$ , τότε ἡ καὶ αὐτὴ δύο σειραὶ εἶναι συγκλίνουσαι ἢ καὶ αὐτὴ δύο ὄχι.

(Ὑπόδειξις : Δείξατε ὅτι :  $\frac{1}{2} A \leq \frac{\alpha_v}{\beta_v} \leq \frac{3}{2} A$  τελικῶς διὰ κάθε  $v \in \mathbb{N}$ ).

402. Στηριζόμενοι εἰς τὸ συμπέρασμα τῆς ἀνωτέρω ἀσκήσεως ἐξετάσατε ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν τὰς ἀκολούθους σειρὰς :

1)  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2 - 2v - 1}$  (Ὑπόδειξις : Θεωρήσατε ὡς  $\beta_v = \frac{1}{v^2}$ )

2)  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{v + 3}{2v^2 - 1}$ , 3)  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{2v + 2}{2v^3 + v^2 - 1}$ , 4)  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{3v - 1}{v^4 + 1}$ .

**§ 188. Σειραι ἀπολύτως συγκλίνουσai.**—Θὰ λέγωμεν ὅτι :

Ἡ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  συγκλίνει ἀπολύτως τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|$  τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ὅρων της, δηλαδή ἡ :

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_v| + \dots$$

συγκλίνει πρὸς πεπερασμένον ἀριθμόν.

Εἶναι φανερόν ὅτι, ἐὰν  $\alpha_v \geq 0 \quad \forall v=1, 2, \dots$ , τότε  $|\alpha_v| = \alpha_v$  καὶ ἡ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  συγκλίνει, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, συγκλίνει ἀπολύτως. Ἐὰν ὅμως μερικοὶ ἐκ τῶν ὅρων  $\alpha_v$  εἶναι θετικοὶ καὶ μερικοὶ ἀρνητικοὶ, τότε ἀπλῆ σύγκλισις καὶ ἀπόλυτος σύγκλισις δὲν εἶναι τὸ αὐτό.

Ἀκριβέστερον ἰσχύει τὸ κάτωθι θεώρημα :

**§ 189. Θεώρημα :** Ἐὰν μία σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  συγκλίνει ἀπολύτως, τότε αὕτη συγκλίνει καὶ ἀπλῶς. Τὸ ἀντίστροφον δὲν ἰσχύει πάντοτε.

**Ἀπόδειξις :** Ἐστω ὅτι ἡ  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  συγκλίνει ἀπολύτως.

Θέτομεν :  $\beta_v = |\alpha_v| - \alpha_v$  διὰ κάθε  $v=1, 2, \dots$

Τότε ἔχομεν :

$$0 \leq \beta_v = |\alpha_v| - \alpha_v \leq |\alpha_v| + |\alpha_v| \leq 2 \cdot |\alpha_v| \quad \forall v=1, 2, \dots \quad (1)$$

Ἐχομεν δεχθῆ ὅτι ἡ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|$  συγκλίνει. Τότε ὅμως ἐκ τῆς (1) προκύπτει, συμφώνως πρὸς τὸ γνωστὸν κριτήριον συγκρίσεως, ὅτι καὶ ἡ  $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$  συγκλίνει.

Κατὰ συνέπειαν καὶ ἡ  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  συγκλίνει, διότι ἐκ τῆς  $\beta_v = |\alpha_v| - \alpha_v$  ἔχομεν :

$\alpha_v = |\alpha_v| - \beta_v$ ,  $v=1, 2, \dots$  καὶ αἱ σειραὶ  $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|$ ,  $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ , συγκλίνουν.

**Παράδειγμα :** Ἡ σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v^2} \equiv -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \dots$

συγκλίνει.

Πράγματι, ἔχομεν :

$$\left| \frac{(-1)^v}{v^2} \right| = \frac{1}{v^2}, \quad v=1, 2, \dots$$

Ἀλλὰ ἡ  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2}$  συγκλίνει, ὅθεν καὶ ἡ  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v^2}$  συγκλίνει ἀπολύτως, ὁπότε, κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, αὕτη συγκλίνει καὶ ἀπλῶς.

**Παρατηρήσεις: α').** Ἐὰν ἡ  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$  συγκλίνει ἀπολύτως, τότε αὕτη συγκλίνει καὶ ἰσχύει :

$$\left| \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v \right| \leq \sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|.$$

β'). Το αντίστροφο του ανωτέρω θεωρήματος δεν αληθεύει πάντοτε. Δηλαδή, δυνατόν μία σειρά να συγκλίνει, ενώ η σειρά των απολύτων τιμών των όρων της να μην συγκλίνει.

**Συμπέρασμα.** Η έννοια όθεν της απόλυτου συγκλίσεως είναι «ισχυρότερα» της έννοιας της απλής συγκλίσεως.

**Παράδειγμα 2ον :** Δείξτε ότι η σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\eta_{\mu\nu}}{2^v}$  συγκλίνει.

Πράγματι, έχουμε :

$$\left| \frac{\eta_{\mu\nu}}{2^v} \right| \leq \frac{1}{2^v} \quad \forall v \in \mathbb{N}.$$

Αλλά, ως έδειχθη εις το παρδ. 1 § 178, η σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v}$  συγκλίνει, όθεν και η  $\sum_{v=1}^{\infty} \left| \frac{\eta_{\mu\nu}}{2^v} \right|$  συγκλίνει, δηλαδή η  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\eta_{\mu\nu}}{2^v}$  συγκλίνει απόλυτως. Τότε όμως αυτή θα συγκλίνει και απλώς.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

403. Ποιαί εκ των ακόλουθων σειρών είναι απόλυτως συγκλίνουσai; Ποιαί είναι συγκλίνουσai; Ποιαί δεν συγκλίνουν εν  $\mathbb{R}$ ;

$$1. \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \cdot \frac{v-2}{v^3+1}, \quad 2. \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \cdot \frac{1}{(2v)^2}, \quad 3. \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin v}{1+v^2},$$

$$4. \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \cdot \eta_{\mu} \left( v^{-\frac{3}{2}} \right), \quad 5. \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \cdot \frac{v}{v+1}, \quad 6. \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{\sqrt{v}}.$$

404. Έάν  $\sum_{v=1}^{\infty} |a_v|$  συγκλίνει, δείξτε ότι και η σειρά  $\sum_{v=1}^{\infty} a_v^2$  συγκλίνει. Δώσατε ακόλουθως εν παράδειγμα εκ του οποίου να εμφαίνηται ότι δεν ισχύει πάντοτε το αντίστροφο.

405. Έστω  $\sum_{v=1}^{\infty} |a_v| = \alpha$  και  $\sum_{v=1}^{\infty} a_v^2 = \beta$ ,  $a_v > 0 \quad \forall v = 1, 2, \dots$ , δείξτε ότι :

$$\alpha^2 > \beta.$$

## § 190. Παράστασις πραγματικῶν ἀριθμῶν με δεκαδικὰς σειράς.

Έστω η ακολουθία  $a_v = \frac{\psi_v}{10^v}$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots$ , εκτενῶς η :

$$\psi_0, \frac{\psi_1}{10}, \frac{\psi_2}{10^2}, \frac{\psi_3}{10^3}, \dots, \frac{\psi_v}{10^v}, \dots$$

όπου  $\psi_0$  είναι ακέραιος αριθμός και  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_v, \dots$  είναι ψηφία, δηλαδή ακέραιοι αριθμοί με :

$$0 \leq \psi_v \leq 9 \quad \forall v \in \mathbb{N}.$$

Θεωρήσωμεν την αντίστοιχον σειράν  $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$ , ήτοι τήν :

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{\psi_v}{10^v} \equiv \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \dots + \frac{\psi_v}{10^v} + \dots \quad (1)$$

τὴν ὁποίαν καλοῦμεν «δεκαδικὴν σειράν» ἢ καὶ ἄλλως «δεκαδικὸν ἀριθμὸν» μὲ ἀκέραιον μέρος  $\psi_0$  καὶ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία  $\psi_1, \psi_2, \dots$ . Ταύτην συμβολίζομεν συντόμως καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\psi_0, \psi_1 \psi_2 \psi_3 \dots \psi_n \dots$$

Ἄς μελετήσωμεν τώρα, ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν, τὴν δεκαδικὴν σειράν (1). Τὸ ἄθροισμα  $\sigma_n$  τῶν  $n$  πρώτων ὄρων (μερικὸν ἄθροισμα) εἶναι :

$$\sigma_n = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \dots + \frac{\psi_{n-1}}{10^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

ἀναλυτικώτερον ἔχομεν :

$$\sigma_1 = \psi_0, \quad \sigma_2 = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10}, \quad \sigma_3 = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2}, \quad \text{καὶ γενικῶς}$$

$$\sigma_{n+1} = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \dots + \frac{\psi_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{\psi_n}{10^n}, \dots$$

Παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\psi_0 \leq \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} \leq \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} \leq \dots$$

δηλαδὴ ἰσχύει :

$$\sigma_n \leq \sigma_{n+1} \quad \text{καὶ τοῦτο διὰ κάθε } n = 1, 2, 3, \dots,$$

ἥτοι ἡ ἀκολουθία (2) εἶναι αὐξουσα. Ἐπὶ πλέον, ἐπεὶ δὴ

$$\frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \dots + \frac{\psi_n}{10^n} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ (διὰ τι);}$$

ἡ ἀκολουθία (2) εἶναι φραγμένη πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἄνω φράγμα τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν  $\psi_0 + 1$ . Ἐπομένως, κατὰ τὸ ἀξίωμα τῆς § 150, Κεφ. V, ἡ ἀκολουθία (2), ὡς αὐξουσα καὶ φραγμένη συγκλίνει πρὸς ἓνα πραγματικὸν ἀριθμὸν  $\xi \leq \psi_0 + 1$ , ἥτοι :  $\lim \sigma_n = \xi$ . Τότε ὁμοῦ καὶ ἡ δεκαδικὴ σειρά (1) συγκλίνει, ἐξ ὁρισμοῦ, καὶ ἰσχύει :

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{\psi_v}{10^v} \equiv \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \dots + \frac{\psi_n}{10^n} + \dots \equiv \psi_0, \psi_1 \psi_2 \dots \psi_n \dots = \lim \sigma_n = \xi.$$

Ἐδείχθη ὅθεν τὸ ἑξῆς :

**§ 191. Θεώρημα.**— Μία δεκαδικὴ σειρά  $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{\psi_v}{10^v} \equiv \psi_0, \psi_1 \psi_2 \dots \psi_n \dots$

συγκλίνει πάντοτε καὶ ὀρίζει ἀκριβῶς ἓνα πραγματικὸν ἀριθμὸν  $\xi$ .

Δίδομεν τώρα τὸν κάτωθι ὁρισμόν :

**§ 192. Ὅρισμός.**— Θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς  $\xi$  παρίσταται ὡς μία δεκαδικὴ σειρά ἢ ἔχει δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα  $\psi_0, \psi_1 \psi_2 \dots \psi_n \dots$  τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχη μία δεκαδικὴ σειρά  $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{\psi_v}{10^v}$  τοιαύτη, ὥστε νὰ ἰσχύη :

$$\xi = \psi_0, \psi_1 \psi_2 \dots \psi_n \dots \equiv \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \dots + \frac{\psi_n}{10^n} + \dots$$



Σημ. Τὸ  $\psi_0$  καλεῖται τὸ «ἀκέραιον μέρος», τὰ δὲ  $\psi_1, \psi_2, \dots$  τὰ «δεκαδικὰ ψηφία» τοῦ ἀναπτύγματος.

Ἀποδεικνύεται εἰς τὰ μαθηματικά τὸ κάτωθι βασικὸν θεώρημα :

**§ 193. Θεώρημα παραστάσεως πραγματικοῦ ἀριθμοῦ διὰ δεκαδικῆς σειρᾶς.**— Διὰ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν  $\xi$  ὑπάρχει ἀκριβῶς μία παράστασις αὐτοῦ διὰ δεκαδικῆς σειρᾶς, ἥτοι :

$$\xi = \psi_0, \psi_1 \psi_2 \dots \psi_v \dots \equiv \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\psi_v}{10^v},$$

εἰς τὴν ὁποίαν τὰ δεκαδικὰ ψηφία δὲν εἶναι ὅλα ἐννέα, ἀπὸ τινος θέσεως καὶ πέραν.

Οὕτω, π.χ.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 0,333\dots & \parallel & \quad \frac{1}{2} = 0,5000\dots \\ 3,27 &= 3,27000\dots & \parallel & \quad \sqrt{2} = 1,414213564\dots \\ \frac{29}{4} &= 7 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \dots = 7,2500\dots \end{aligned}$$

**Παρατήρησις :** Διὰ τὸ 3,27 ἀντιστοίχως τὸ  $1/2$  ὑπάρχουν καὶ αἱ παραστάσεις  $3,27 = 3,26999\dots$  ἀντιστοίχως  $1/2 = 0,4999\dots$

Αὗται ὅμως ἀποκλείονται, διότι ἐπαναλαμβάνεται ἀπὸ τινος θέσεως καὶ πέραν τὸ ψηφίον 9.

**Ἐφαρμογή :** Νὰ εὑρεθῇ τὸ δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα τοῦ ἀριθμοῦ  $7/11$ .

**Λύσις :** Ἐστω ὅτι εἶναι :  $\frac{7}{11} = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \frac{\psi_3}{10^3} + \dots$  (1)

Ἡ (1) γράφεται καὶ οὕτω :

$$0 + \frac{7}{11} = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \frac{\psi_3}{10^3} + \dots$$

ἄρα  $\psi_0 = 0$  καὶ ἐπομένως :

$$\frac{7}{11} = \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \frac{\psi_3}{10^3} + \dots + \frac{\psi_v}{10^v} + \dots \quad (2)$$

Ἐκ τῆς (2) προκύπτει :

$$\frac{70}{11} = \psi_1 + \frac{\psi_2}{10} + \frac{\psi_3}{10^2} + \dots + \frac{\psi_v}{10^{v-1}} + \dots$$

$$\eta \quad 6 + \frac{4}{11} = \psi_1 + \frac{\psi_2}{10} + \frac{\psi_3}{10^2} + \dots$$

ἄρα  $\psi_1 = 6$  καὶ ἐπομένως :

$$\frac{4}{11} = \frac{\psi_2}{10} + \frac{\psi_3}{10^2} + \frac{\psi_4}{10^3} + \dots \quad (3)$$

Ἐκ τῆς (3) προκύπτει :

$$\frac{40}{11} = \psi_2 + \frac{\psi_3}{10} + \frac{\psi_4}{10^2} + \dots$$

$$\eta \quad 3 + \frac{7}{11} = \psi_2 + \frac{\psi_3}{10} + \frac{\psi_4}{10^2} + \dots$$

ἄρα  $\psi_2 = 3$  κ.ο.κ.

Οὕτω τελικῶς θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{7}{11} = \psi_0, \psi_1 \psi_2 \psi_3 \dots = 0,6363\dots$$

**\* § 194. Γινόμενα πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ πεπερασμένους τὸ πλήθος παράγοντας.**— Πολλὰκις παρουσιάζονται γινόμενα τῆς μορφῆς

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdots \alpha_n.$$

Διὰ τὴν συντομωτέραν γραφὴν χρησιμοποιοῦμεν τὸ ἑλληνικὸν γράμμα  $\Pi$  διὰ τὸν συμβολισμόν τῶν γινομένων τούτων. Γράφομεν :

$$\prod_{k=1}^n \alpha_k \equiv \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdots \alpha_n.$$

Τὸ πρῶτον μέλος ἀναγινώσκεται : *Γινόμενον τῶν (ἀριθμῶν)  $\alpha_k$  ἀπὸ  $k=1$  ἕως  $k=n$* . Τὸ σύμβολον  $\Pi$  σημαίνει, ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους λαμβάνομεν, θέτοντες διαδοχικῶς  $k=1, k=2, \dots, k=n$ .

Ἐκ τοῦ ὁρίσμου τούτου, ἔπεται ὅτι :

$$\alpha'). \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n, \quad \beta'). \prod_{k=1}^{v+1} \alpha_k = \alpha_{k+1} \cdot \prod_{k=1}^v \alpha_k, \quad \gamma'). \prod_{k=1}^v \alpha = \alpha^v.$$

Εὐκόλως ἀποδεικνύονται αἱ κάτωθι ιδιότητες γινομένων :

$$1). \prod_{k=1}^v (\alpha_k \beta_k) = \left( \prod_{k=1}^v \alpha_k \right) \cdot \left( \prod_{k=1}^v \beta_k \right)$$

$$2). \prod_{k=1}^v (\lambda \cdot \alpha_k) = \lambda^v \cdot \prod_{k=1}^v \alpha_k$$

$$3). \prod_{k=1}^v \frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}} = \frac{\alpha_v}{\alpha_0}, \quad \alpha_k \neq 0 \quad \forall \quad k=0, 1, 2, \dots, v.$$

**Παράδειγμα :** Δείξατε ὅτι :  $\prod_{k=2}^v \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{v}.$

Πράγματι εἶναι :

$$\prod_{k=2}^v \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{v}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{v-1}{v} = \frac{1}{v}.$$

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

406. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :  $\prod_{k=2}^v \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{v+1}{2v}.$

407. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :  $\lim_{v \rightarrow \infty} \left( \prod_{k=2}^v \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \right) = \frac{1}{2}.$

408. Ἐὰν  $x \neq 1$ , δείξατε ὅτι :

$$\prod_{k=1}^v (1 + x^{2^{k-1}}) = \frac{1 - x^{2^v}}{1 - x}.$$

Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ γινομένου αὐτοῦ ὅταν  $x = 1$ ;

409. Νὰ εὑρεθῇ τὸ  $\lim_{v \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^v \frac{v^3 - 1}{v^3 + 1}.$

410. Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀνίσωτης :  $\prod_{k=0}^v \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right) > (2v+3)^{1/2}.$

\* § 195. **Ἀπειρογινόμενα.**—Ἐστω  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Καλοῦμεν **ἀπειρογινόμενον** με ὅρους (εἴτε ἄλλως *παράγοντας*) τοὺς ἀριθμοὺς  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  τὴν παράστασιν :

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots,$$

δηλαδή γινόμενον με ἀπείρους παράγοντας.

Ἐν τοιοῦτον γινόμενον συμβολίζομεν διὰ τοῦ συμβόλου :  $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ , ἥτοι :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n \equiv \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots \quad (1)$$

Ἐκαστον γινόμενον

$$\gamma_n = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n \equiv \prod_{k=1}^n \alpha_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

καλεῖται **μερικὸν γινόμενον** τοῦ ἀπειρογινόμενου (1).

Τὰ πρῶτα ἀπειρογινόμενα ἐδόθησαν ὑπὸ τῶν μεγάλων μαθηματικῶν Viète (1646) καὶ Wallis (Οὐώλλις).

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἐνὸς ἀπειρογινόμενου, ἔπεται ὅτι :

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \alpha_k) = \prod_{k=1}^n (1 + \alpha_k) \cdot \prod_{k=n+1}^{\infty} (1 + \alpha_k).$$

\* § 196. **Σύγκλισις ἐνὸς ἀπειρογινόμενου (πραγματ. ἀριθμῶν).**

Θὰ λέγωμεν : τὸ ἀπειρογινόμενον  $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  με  $\alpha_n \neq 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$  συγκλίνει πρὸς

ἓνα ἀριθμὸν  $\gamma$  καὶ θὰ γράφωμεν  $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \gamma$  τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν  $\gamma \neq 0$ ,  $\gamma \neq \pm \infty$

καὶ ἐπὶ πλέον ἰσχύη :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \alpha_k = \gamma$ .

Συντόμως :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \gamma \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \alpha_k = \gamma, \quad \gamma \neq 0, \pm \infty$$

**Παράδειγμα 1ον :** Νὰ υπολογισθῇ τὸ  $\prod_{n=2}^{\infty} \left[ 1 - \frac{2}{n(n+1)} \right]$ .

**Λύσις :** Ἐχομεν :

$$1 - \frac{2}{k(k+1)} = \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}.$$

Κατὰ ταῦτα :

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^n \left[ 1 - \frac{2}{k(k+1)} \right] &= \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(n-1) \cdot (n+2)}{n \cdot (n+1)} = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+1) \cdot (n+2)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n \cdot (n+1)} = \frac{n+2}{3n}. \end{aligned}$$

Ὅθεν :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \left[ 1 - \frac{2}{k(k+1)} \right] = \frac{1}{3}, \text{ καὶ συνεπῶς } \prod_{n=2}^{\infty} \left[ 1 - \frac{2}{n(n+1)} \right] = \frac{1}{3}.$$

Παράδειγμα 2ον : Τὰ ἀπειρογνώμενα  $\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right)$  καὶ  $\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{v+1}\right)$  δὲν συγκλίνουν πρὸς πεπερασμένον ἀριθμόν.

Πράγματι, διὰ τὸ πρῶτον ἔχομεν :

$$\gamma_v \equiv \prod_{k=1}^v \left(1 + \frac{1}{k}\right) = v + 1, \quad \text{ἄρα } \lim \gamma_v = +\infty,$$

ἐνῶ διὰ τὸ δεύτερον :

$$\gamma'_v \equiv \prod_{k=1}^v \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{v+1}, \quad \text{ἄρα } \lim \gamma'_v = 0.$$

Διὰ τὸ πρῶτον θὰ λέγωμεν ὅτι συγκλίνει κατ' ἐκδοχὴν πρὸς τὸ  $+\infty$ .

Διὰ τὸ δεύτερον θὰ λέγωμεν ὅτι συγκλίνει κατ' ἐκδοχὴν πρὸς τὸ 0.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

411. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :  $\prod_{v=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{v^2+1}\right) = \frac{2}{3}$ .

412. Νὰ μελετηθοῦν ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν τὰ κάτωθι ἀπειρογνώμενα :

1.  $\prod_{v=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{v}\right), \quad 2. \prod_{v=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{v^2-1}\right).$

### ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΤΩΝ ΣΕΙΡΩΝ

413. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\sum_{k=1}^v (k^3 + 3k^2 - k + 1) = \frac{v}{4} (v^3 + 6v^2 + 5v + 4).$$

414. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ σειρὰ  $\sum_{v=2}^{\infty} \frac{1}{v^2-1}$  συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν  $\frac{3}{4}$ .

415. Δείξτε ὅτι :

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(v+1/2)(v+3/2)(v+5/2)} = \frac{2}{3}.$$

416. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν  $v$  πρώτων ὄρων τῆς σειρᾶς :

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$$

417. Ἐὰν  $\sum_{k=1}^v \alpha_k = 3v^2 + 4v$ , νὰ εὑρεθῇ τὸ  $\sum_{k=1}^{v-1} \alpha_k$  καὶ ἀκολουθῶς νὰ εὑρεθῇ ὁ  $\alpha_v$ .

418. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς :  $1 + \frac{4}{5} + \frac{7}{5^2} + \frac{10}{5^3} + \dots$

419. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν  $v$  πρώτων ὄρων τῆς σειρᾶς :

$$1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \dots$$

420. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι :

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2} = \frac{1}{6} \pi^2, \quad \text{νὰ δεიχθῇ ὅτι : } \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^3(v+1)^3} = 10 - \pi^2.$$

421. Δείξατε ὅτι ἡ σειρὰ  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^{v+2}}$  συγκλίνει (ἐν  $\mathbf{R}$ ), ἐνῶ δὲν συμβαίνει τὸ αὐτὸ καὶ διὰ

τὴν σειρὰν :  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v \sqrt{v+1}}$ .

422. Νά εξετασθῇ, ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν, ἡ σειρὰ μὲ γενικὸν ὄρον  $\alpha_n = \frac{3n-1}{n^4+1}$ .

\* 423. Ἐὰν  $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}^+ \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$  καὶ  $p, q \in \mathbb{R}^+$  μὲ  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  
νά ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \leq \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{k=1}^n \beta_k^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (\text{Ἀνισότης τοῦ Hölder}).$$

\* 424. Δείξατε ὅτι :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \alpha_k} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \alpha_k, \quad \alpha_k > 0, k = 1, 2, \dots, n.$$

425. Δείξατε ὅτι :

$$\frac{\prod_{\mu=1}^{v-1} \mu \cdot \prod_{\mu=2}^v (\mu^2 + \mu + 1)}{\prod_{\mu=3}^{v+1} \mu \cdot \prod_{\mu=1}^{v-1} (\mu^2 + \mu + 1)} = \frac{2}{v(v+1)} \cdot \frac{v^2 + v + 1}{3}.$$

426. Δείξατε ὅτι :

$$\prod_{v=1}^n \frac{1}{1 + \frac{m}{v+c}} = \frac{n+c}{n+1} \left( 1 - \frac{m}{v+c} \right).$$

427. Δείξατε ὅτι :

$$\frac{\prod_{k=2}^v (k-1) \cdot \prod_{k=2}^v (k+1)}{\prod_{k=2}^v k^2} = \frac{v+1}{2v}.$$

428. Νά μελετηθῇ, ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν, τὸ ἀπειρογινόμενον :

$$\prod_{v=1}^{\infty} \frac{(v+1)^2}{v(v+2)}.$$

429. Δίδεται τὸ πολυώνυμον  $f(x) \equiv x^2 + \beta x - \gamma$  μὲ ρίζας  $\rho_1 < \rho_2$ , τοῦ ὁποίου οἱ συντελεσταὶ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ πληροῦν τὴν σχέσιν  $1 + 2\beta < 4\gamma$ . Νά ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\rho_1 < \prod_{v=2}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{v^2} \right) < \rho_2.$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

### ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ — ΕΚΘΕΤΙΚΑΙ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑΙ ΕΙΣΩΣΕΙΣ

#### I. ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ. ΟΡΙΣΜΟΙ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

#### Εισαγωγικά έννοιαι

**§ 197. Δυνάμεις με έκθετην ἄρρητον ἀριθμόν.**—Εἰς τὴν προηγουμένην τάξιν ὥρισamen δυνάμεις με έκθετην ἀκέραιον ἢ κλασματικόν, ἤτοι με έκθετην ρητὸν ἀριθμόν καὶ ἀπεδείξαμεν τὰς κυριωτέρας ιδιότητας αὐτῶν, τὰς ὁποίας καὶ ὑπενθυμίζομεν ἑνταῦθα :

Ἐὰν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  καὶ  $x, y \in \mathbb{Q}$ , ( $\mathbb{Q}$  τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν), τότε ἰσχύουν αἱ κάτωθι ιδιότητες :

$$\begin{array}{ll} 1) & \alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y} \\ 2) & \alpha^x : \alpha^y = \alpha^{x-y} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 3) & (\alpha \cdot \beta)^x = \alpha^x \cdot \beta^x \\ 4) & (\alpha^x)^y = \alpha^{xy}. \end{array}$$

Ἐπὶ πλέον :

5) Ἐὰν  $x < y$ , τότε ἰσχύει :

$$\alpha^x \begin{cases} < \alpha^y & \text{διὰ } \alpha > 1 \\ = \alpha^y & \text{διὰ } \alpha = 1 \\ > \alpha^y & \text{διὰ } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Ὡστε : Διὰ  $\alpha > 0$  τὸ σύμβολον  $\alpha^x$  εἶναι τελείως ὠρισμένον εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ έκθέτης  $x$  εἶναι τυχόν ρητὸς ἀριθμός.

Εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον γενικεύομεν, ἔστω καὶ στοιχειωδῶς, τὴν ἔννοιαν τῆς δυνάμεως με έκθετην τυχόντα πραγματικόν ἀριθμόν. Πρὸς τοῦτο ὀρίζομεν τὴν ἔννοιαν τοῦ συμβόλου  $\alpha^x$ , ὅταν ὁ έκθέτης  $x$  εἶναι ἄρρητος ἀριθμός. Πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τοῦ θέματος, ἃς θεωρήσωμεν κατ' ἀρχὴν τὸ ἐξῆς συγκεκριμένον παράδειγμα :

Ἐστω ὅτι θέλομεν νὰ ὀρίσωμεν τὴν δύναμιν  $\alpha^{\sqrt{2}}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν μίαν αὐξουσαν ἀκολουθίαν ρητῶν ἀριθμῶν  $\rho_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  με  $\lim \rho_n = \sqrt{2}$ , π.χ. τὴν ἀκολουθίαν :

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, \dots, \quad (1)$$

ἢ ὁποία συγκλίνει πρὸς τὸν ἄρρητον  $\sqrt{2}$ .

Σχηματίζομεν ἀκολούθως τὴν ἀκολουθίαν  $\alpha^{\rho_n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  τῶν δυνάμεων με ρητούς έκθέτας, ἑκτενῶς τὴν ἀκολουθίαν :

$$\alpha^1, \alpha^{1.4}, \alpha^{1.41}, \alpha^{1.414}, \alpha^{1.4142}, \alpha^{1.41421}, \dots \quad (2)$$

Ἐὰν  $\alpha > 1$ , τότε κατὰ τὴν ιδιότητα 5, θὰ ἔχωμεν :

$$\alpha^1 < \alpha^{1.4} < \alpha^{1.41} < \alpha^{1.414} < \alpha^{1.4142} < \dots < \alpha^{1+1} = \alpha^2,$$

ἤτοι ἡ ἀκολουθία (2) εἶναι αὐξουσα καὶ φραγμένη, συνεπῶς συγκλίνει (§ 150).

Ἐὰν πάλιν  $0 < \alpha < 1$  ἡ ἀκολουθία (2) εἶναι φθίνουσα καὶ φραγμένη καὶ ὡς τοιαύτη πάλιν συγκλίνει.

Τὸ ὄριον τῆς ἀκολουθίας (2), τὸ ὁποῖον ὡς ἐλέχθη ὑπάρχει  $\forall \alpha \in \mathbf{R}^+$ , ὀρίζομεν ὡς τὴν δύναμιν  $\alpha^{1^2}$ .

Ἐστω τώρα  $x$  τυχὼν ἄρρητος ἀριθμὸς, ἔχων, δυνάμει τοῦ θεωρήματος (§ 193), δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα :

$$x = \psi_0, \psi_1 \psi_2 \dots \psi_n \dots \equiv \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \dots + \frac{\psi_n}{10^n} + \dots$$

καὶ  $\alpha$  εἰς θετικὸς πραγματικὸς ἀριθμὸς.

Δεχόμεθα, ἄνευ βλάβης τῆς γενικότητος, ὅτι  $\alpha > 1$  καὶ  $x > 0$ . Θέτομεν :

$$x_n = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \dots + \frac{\psi_n}{10^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ἡ ἀκολουθία (3) εἶναι μία αὐξουσα ἀκολουθία ρητῶν ἀριθμῶν, ἐπὶ πλέον δὲ φραγμένη πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἄνω φράγμα τὸν ἀκέραιον  $\psi_0 + 1$  (διὰ τὴν). Ἐπειδὴ ἕκαστος ὅρος τῆς ἀκολουθίας  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς, ἡ δύναμις  $\alpha^{x_n}$  ἔχει μίαν ἐντελῶς καθωρισμένην ἔννοιαν. Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ  $\alpha > 1$ , ἔχομεν :

$$\alpha^{\psi_0} < \alpha^{\psi_0 + \frac{\psi_1}{10}} < \alpha^{\psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2}} < \dots < \alpha^{\psi_0 + 1}, \quad (4)$$

ἤτοι, ἡ ἀκολουθία τῶν δυνάμεων μὲ ρητοὺς ἐκθέτας  $\alpha^{x_n}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  εἶναι αὐξουσα καὶ μάλιστα γνησίως, ἐπὶ πλέον δὲ φραγμένη πρὸς τὰ ἄνω ἀπὸ τὸν  $\alpha^{\psi_0 + 1}$ , ἄρα θὰ συγκλίνη πρὸς πραγματικὸν ἀριθμὸν μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ  $\alpha^{\psi_0 + 1}$  (§ 150).

Ἐὰν πάλιν  $0 < \alpha \leq 1$  ἡ ἀκολουθία  $\alpha^{x_n}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  εἶναι φθίνουσα καὶ φραγμένη πρὸς τὰ κάτω καὶ ὡς τοιαύτη εἶναι πάλιν συγκλίνουσα.

Ὡστε, διὰ κάθε  $\alpha \in \mathbf{R}^+$  ὑπάρχει τὸ ὄριον τῆς ἀκολουθίας  $\alpha^{x_n}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Ἐξ ὁρισμοῦ θέτομεν τώρα :

$$\boxed{\alpha^x = \lim_{\text{ορσ}} \alpha^{x_n}}$$

Ἦτοι: Ὀρίζομεν ὡς δύναμιν τοῦ  $\alpha$  εἰς τὸν ἄρρητον ἐκθέτην  $x$ , τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν πρὸς τὸν ὁποῖον τείνει ἡ ἀκολουθία τῶν δυνάμεων μὲ ρητοὺς ἐκθέτας :

$$\alpha^{\psi_0}, \alpha^{\psi_0 \psi_1}, \alpha^{\psi_0 \psi_1 \psi_2}, \dots, \alpha^{\psi_0 \psi_1 \psi_2 \dots \psi_n}, \dots$$

\* Σημειώσεις. Ἐν προκειμένῳ ἀποδεικνύονται τὰ ἑξῆς :

1). Ἐὰν δύο ἀκολουθίαι  $x_n$ ,  $x_n^*$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ρητῶν ἀριθμῶν συγκλίνουν ἀμφοτέραι εἰς τὸν ἄρρητον  $x$ , τότε αἱ ἀκολουθίαι  $\alpha^{x_n}$ ,  $\alpha^{x_n^*}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  συγκλίνουν ἐπίσης εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, τὸν ὁποῖον παριστῶμεν μὲ  $\alpha^x$  καὶ καλοῦμεν δύναμιν τοῦ  $\alpha$  εἰς τὸν ἄρρητον ἐκθέτην  $x$ .

2). Αι γνωστοί ιδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ ρητοὺς ἐκθέτας, τὰς ὁποίας ἀνεφέραμεν εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς παρούσης παραγράφου, ἰσχύουν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀρρητοὺς ἀριθμοὺς, κατὰ συνέπειαν μὲ ἐκθέτας τυχόντας πραγματικοὺς ἀριθμοὺς.

Ἐν τῇ πράξει, ἡ δύναμις  $a^x$ , ὅπου  $x$  ἄρρητος, ἀντικαθίσταται διὰ τῆς προσεγγίσεώς της  $a^p$ , ὅπου  $p$  ρητὸς ἐπαρκῶς προσεγγίζων τὸν ἄρρητον ἀριθμὸν  $x$ .

## Ἔννοια τοῦ λογαρίθμου

### § 198. Λογάριθμος μὲ βάσιν τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν $a \neq 1$ .

Ἀποδεικνύεται εἰς τὰ μαθηματικὰ ὅτι : *Διὰ κάθε θετικὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν  $a$ , διάφορον τῆς μονάδος ( $0 < a \neq 1$ ) καὶ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν  $\theta > 0$ , ὑπάρχει ἀκριβῶς εἰς πραγματικὸς ἀριθμὸς  $x$  (ρητὸς ἢ ἄρρητος), εἰς τὸν ὁποῖον ὑψούμενος ὁ  $a$  δίδει τὸν  $\theta$ ,*

ἥτοι :

$$a^x = \theta \quad (1)$$

Ὁ μονοσημάντως ὀριζόμενος πραγματικὸς ἀριθμὸς  $x$ , ὅστις πληροῖ τὴν (1), καλεῖται «**λογαρίθμος τοῦ  $\theta$  ὡς πρὸς βάσιν  $a$** » καὶ συμβολίζεται οὕτω :

$$x = \log_a \theta \quad (2)$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν τὴν λογικὴν ἰσοδυναμίαν :

$$\log_a \theta = x \iff a^x = \theta \quad (3)$$

Δίδομεν τώρα τὸν κάτωθι ὅρισμὸν τοῦ λογαρίθμου μὲ βάσιν τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν  $a \neq 1$ .

**Λογάριθμος** ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ  $\theta$ , ὡς πρὸς βάσιν  $a$  ( $0 < a \neq 1$ ), καλεῖται ὁ ἐκθέτης εἰς τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ὑψωθῇ ἡ βάσις  $a$  διὰ νὰ δώσῃ τὸν  $\theta$ .

Ἡ (1), λόγῳ τῆς (2), δίδει :

$$a^{\log_a \theta} = \theta \quad (4)$$

**Παραδείγματα :**

|                                                                   |                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $\log_{10} 100 = 2$ , διότι $10^2 = 100$                       | 5) $\log_{10} 0,001 = -3$ , διότι $10^{-3} = 0,001$                                           |
| 2) $\log_2 8 = 3$ , » $2^3 = 8$                                   | 6) $\log_{1/2} \left(\frac{1}{16}\right) = 4$ , » $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ |
| 3) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$ , » $2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$ | 7) $\log_{1/\sqrt{2}} 1 = 0$ , » $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^0 = 1$                      |
| 4) $\log_{1/3} 9 = -2$ , » $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$    | 8) $\log_3 \sqrt[3]{3} = \frac{1}{2}$ , » $(3)^{1/2} = \sqrt[3]{3}$                           |

**Γενικὴ παρατήρησις.** Παντοῦ κατωτέρω, οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν



τούς λογαρίθμους, θὰ θεωροῦνται **θετικοί**. Λογαρίθμους ἀρνητικῶν ἀριθμῶν οὔτε ὀρίζομεν, οὔτε μεταχειρίζομεθα.

**§ 199. Βάσις λογαρίθμων — λογαριθμικὰ συστήματα.**— Ὁ πραγματικός ἀριθμὸς  $\alpha$ , ὅστις εἶναι θετικὸς καὶ διάφορος τῆς μονάδος, καλεῖται **βάσις** τῶν λογαρίθμων. Ἐπειδὴ ὡς βάσις  $\alpha$  δύναται νὰ ληφθῇ οἷοσδήποτε θετικὸς πραγματικός ἀριθμὸς διάφορος τῆς μονάδος, διὰ τοῦτο δύνανται νὰ σχηματισθοῦν διάφορα λογαριθμικὰ συστήματα. Τὰ χρησιμοποιούμενα ὁμῶς εἶναι τὰ ἐξῆς :

**1ον. Τὸ δεκαδικὸν λογαριθμικὸν σύστημα.** Οὕτω καλεῖται τὸ σύστημα ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ βάσις  $\alpha$  εἶναι ὁ ἀριθμὸς 10. Ὁ λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ  $\theta$  εἰς τὸ σύστημα τοῦτο καλεῖται **δεκαδικὸς λογάριθμος** καὶ συμβολίζεται ἀπλῶς  $\log \theta$  ἀντὶ  $\log_{10} \theta$ .

Οἱ δεκαδικοὶ λογάριθμοι καλοῦνται καὶ «*κοινὸι λογάριθμοι*» ἢ «*Briggs λογάριθμοι*»\*) καὶ χρησιμοποιοῦνται εὐρέως εἰς τὰ στοιχειώδη μαθηματικὰ διὰ πρακτικῶς κυρίως σκοποῦς.

**2ον. Τὸ Νεπέριον λογαριθμικὸν σύστημα\*\*).** Οὕτω καλεῖται τὸ σύστημα ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ βάσις  $\alpha$  εἶναι ὁ ἄρρητος ἀριθμὸς  $e = 2,71828 \dots$ , ὅστις, ὡς θὰ

ἴδωμεν εἰς ἐπόμενον κεφάλαιον, εἶναι τὸ ὄριον τῆς ἀκολουθίας  $\left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$ ,  $v = 1, 2, \dots$

Ὁ λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ  $\theta$  εἰς τὸ σύστημα αὐτὸ καλεῖται «**νεπέριος λογάριθμος**»\*\*) ἢ «**φυσικὸς λογάριθμος**» τοῦ  $\theta$  καὶ συμβολίζεται διεθνῶς μὲ « $\log \theta$ » εἴτε « $\ln \theta$ » παραλειπομένου τοῦ δείκτου  $e$ , ἥτοι καὶ εἰς τὸ σύστημα αὐτὸ ἀντὶ  $y = \log_e \theta$  γράφομεν  $y = \log \theta$  ἢ  $y = \ln \theta$ . Οἱ νεπέριοι λογάριθμοι χρησιμοποιοῦνται κυρίως εἰς θεωρητικὰς μελέτας καὶ ὡς ἐκ τούτου τὸ ὥς ἄνω σύστημα δεσπάζει τῶν ἄλλων συστημάτων κυρίως εἰς τὰ ἀνώτερα μαθηματικὰ.

**Παρατήρησις.** Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ λογαρίθμου μὲ βάσιν τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν  $\alpha \neq 1$  προκύπτει ὅτι εἰς κάθε θετικὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν  $x$  ἀντιστοιχεῖ ἀκριβῶς εἰς πραγματικὸς ἀριθμὸς  $y$ , ὅστις ἱκανοποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\alpha^y = x.$$

Τοιοιουτρόπως ὀρίζεται μία συνάρτησις, ἡ  $y = f(x) \equiv \log_{\alpha} x$  μὲ πεδῖον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον  $\mathbf{R}^+$  τῶν θετικῶν ἀριθμῶν καὶ πεδῖον τιμῶν τὸ σύνολον  $\mathbf{R}$  τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἥτοι :

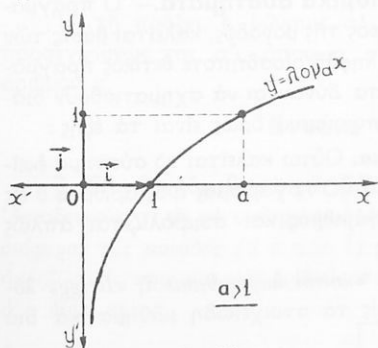
$$\mathbf{R}^+ \ni x \longrightarrow y = f(x) \equiv \log_{\alpha} x \in \mathbf{R}.$$

Ἡ ὡς ἄνω συνάρτησις  $f: \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}$  ὀνομάζεται **λογαριθμικὴ συνάρτησις** καὶ ὅπως θὰ μάθωμεν εἰς τὴν ἑκτὴν τάξιν αὕτη εἶναι «*ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως  $x = a^y$* ».

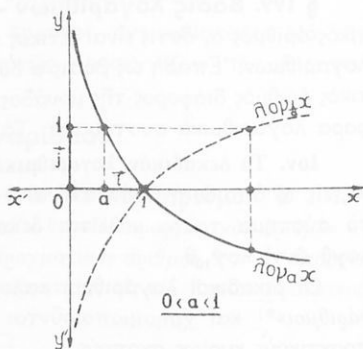
\* Πρὸς τιμὴν τοῦ Ἀγγλοῦ Μαθηματικοῦ Henry Briggs (1556–1630), ὅστις πρῶτος ἐλαβεν ὡς βάσιν τῶν λογαρίθμων τὸν ἀριθμὸν 10.

\*\* Πρὸς τιμὴν τοῦ John Napier (1550–1617), ὅστις ἐπενόησε πρῶτος τοὺς λογαρίθμους καὶ ἐλαβεν ὡς βάσιν τὸν ἀριθμὸν  $e = 2,7182 \dots$

Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἀξόνων ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως  $y = \log_a x$  δίδεται, κατὰ πρόχειρον σχεδιάσιν, εἰς τὰ κάτωθι σχήματα.



Σχ. 13



Σχ. 14

Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων καὶ τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀνωτέρω γραφικῶν παραστάσεων ἐννοοῦμεν εὐκόλως τὰ ἑξῆς :

1). "Εκαστος πραγματικὸς ἀριθμὸς εἶναι λογάριθμος ἑνὸς καὶ μόνου θετικοῦ ἀριθμοῦ.

2). "Εκαστος θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει λογάριθμον ἓνα καὶ μόνον πραγματικὸν ἀριθμὸν.

3). "Όταν ἡ βάσις συστήματος τινὸς λογαρίθμων εἶναι  $> 1$ , οἱ μεγαλύτεροι τῆς μονάδος ἀριθμοὶ ἔχουν λογαρίθμους θετικούς, ἐνῶ οἱ μικρότεροι αὐτῆς ἔχουν λογαρίθμους ἀρνητικούς, τὸ ἀντίθετον δὲ συμβαίνει, ὅταν ἡ βάσις εἶναι  $< 1$ .

4). "Όταν ἡ βάσις  $a$  εἶναι  $> 1$ , αὐξανόμενου τοῦ ἀριθμοῦ, αὐξάνεται καὶ ὁ λογάριθμ. αὐτοῦ καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν δὲ  $a < 1$ , αὐξανόμενου τοῦ ἀριθμοῦ, ἐλαττοῦται ὁ λογάριθμος.

**Σημείωσις.** Εἰς τὴν ἑκτὴν τάξιν θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἰσχύουν τὰ κάτωθι :

|             |                                                                                                    |
|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a > 1$     | $\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty$ καὶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ |
| $0 < a < 1$ | $\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = +\infty$ καὶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ |

Πρὸς ἐπιβεβαίωσιν παρατηρήσατε καὶ τὰ ἀνωτέρω σχήματα (Σχ. 13 καὶ Σχ. 14).

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**430.** Προσδιορίσατε τὸν  $x$  ἐκ τῶν κάτωθι ἰσοτήτων :

- 1)  $\log_4 x = 3$ , 2)  $\log x = -3$ , 3)  $\log_2 \left( \frac{1}{2} \right) = x$ , 4)  $\log_{\sqrt{3}} (9 \sqrt{3}) = x$ ,  
 5)  $\log_{1/8} 27 = x$ , 6)  $\log_8 x = -\frac{7}{3}$ , 7)  $\log_{2a} \sqrt{2a} = x$ , 8)  $\log_2 \left( \frac{1}{\sqrt{32}} \right) = x$ .

431. Εύρετε την άγνωστον βάσιν  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \neq 1$ , εκ τῶν κάτωθι ἰσοτήτων :

1)  $\log_x 25 = 2$ , 2)  $\log_x 16 = \frac{2}{3}$ , 3)  $\log_x 5 = \frac{1}{3}$ , 4)  $\log_x \left(\frac{81}{16}\right) = 4$ .

432. Ὑπολογίσατε τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν :

$$81, \quad 64, \quad \frac{1}{32}, \quad \sqrt{2}, \quad \frac{1}{125}, \quad 27, \quad 4\sqrt{2}, \quad 1000$$

ὡς πρὸς βάσεις ἀντιστοίχως τὰς :

$$3, \quad \frac{1}{2}, \quad 2, \quad 4, \quad 5, \quad 3, \quad 2, \quad 0,01.$$

433. Ὑπολογίσατε τὰς κάτωθι παραστάσεις :

$$\alpha) \frac{\log_3 81 - \log_8 64}{\log_{0,5} 64 + \log_2 \frac{1}{32} + \log_2 4\sqrt{2}}$$

$$\beta) \frac{\log_3 9 \sqrt{3} : \log_{49} 7}{\log_5 \frac{1}{125} - \log_2 \frac{1}{32} + \log_3 27 \cdot \log_{1/2} 64}$$

$$\gamma) \frac{-5 + \log_7 (\log_{25} 2a) - 4 \log_a \sqrt{a}}{\log_3 27 + 7 \cdot \log_{0,1} 10 + \log 0,001}$$

434. Ἐὰν  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ,  $\alpha \neq 1$  καὶ καλέσωμεν :  $x = \log_{\sqrt{\alpha}} \alpha$ ,  $y = \log_{\alpha} \alpha^2$ ,  $z = \log_{\alpha} \alpha^4$ , νὰ ἀποδείξηθῃ ὅτι :

$$xyz = x + y + z + 2.$$

435. Νὰ ἀποδείξηθῇ ὅτι ὁ  $\log_3$  εἶναι ἀριθμὸς ἄρρητος (= ἀσύμμετρος).

## Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων

**§ 200. Ἰδιότης I.**— Εἰς πᾶν σύστημα λογαρίθμων, ὁ λογάριθμος τῆς μονάδος εἶναι τὸ μηδέν, ὁ δὲ λογάριθμος τῆς βάσεως εἶναι ἡ μονάς, ἥτοι :

$$\boxed{\log_a 1 = 0} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\log_a a = 1} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ - \{1\}.$$

Πράγματι, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ λογαρίθμου ὡς ἐκθέτου, ἔχομεν :

$$\alpha^0 = 1 \implies \log_a 1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha^1 = \alpha \implies \log_a \alpha = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ - \{1\}.$$

**§ 201. Ἰδιότης II.**— Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου δύο (θετικῶν) ἀριθμῶν ὡς πρὸς βάσιν  $a$  ( $0 < a \neq 1$ ), ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν.

**Ἀπόδειξις.** Ἐστωσαν  $\theta_1$  καὶ  $\theta_2$  δύο (θετικοὶ) ἀριθμοὶ καὶ  $x, y$  ἀντιστοίχως οἱ λογάριθμοί των, ὡς πρὸς βάσιν  $a$ . Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν τὰς λογικὰς ἰσοδυναμίας :

$$\alpha^x = \theta_1 \iff x = \log_a \theta_1 \quad \text{καὶ} \quad \alpha^y = \theta_2 \iff y = \log_a \theta_2. \quad (1)$$

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν :

$$\alpha^x \cdot \alpha^y = \theta_1 \cdot \theta_2 \quad \eta \quad \alpha^{x+y} = \theta_1 \theta_2.$$

Ἀλλὰ ἡ τελευταία ἰσότης δεικνύει ὅτι :

$$\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = x + y = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

Ὡστε :

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^+ \quad 0 < a \neq 1 \quad \implies \log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

**Πόρισμα.**—Ἐὰν  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  εἶναι θετικοὶ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ, τότε ἰσχύει

$$\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2 \cdots \theta_n) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2 + \cdots + \log_a \theta_n$$

ἢ ὅπερ τὸ αὐτό :

$$\log_a \left( \prod_{k=1}^n \theta_k \right) = \sum_{k=1}^n \log_a \theta_k$$

Ἡ ἀπόδειξις εὐκολος διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς.

**Παράδειγμα.** Ἐχομεν π.χ.  $\log (7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) = \log 7 + \log 5 + \log 4 + \log 3$

καὶ ἀντιστρόφως :  $\log 5 + \log 3 + \log 6 + \log 2 = \log (5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2) = \log 180$ .

**§ 202. Ἰδιότης III.**—Ὁ λογάριθμος πηλίκου δύο ἀριθμῶν (θετικῶν) ὡς πρὸς βάσιν  $a$  ( $0 < a \neq 1$ ), ἰσοῦται πρὸς τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρετέου μείον τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου, ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν.

**Ἀπόδειξις.** Ἐστώσαν  $\theta_1$  καὶ  $\theta_2$  δύο ἀριθμοὶ (θετικοὶ) καὶ  $x, y$  ἀντιστοίχως οἱ λογάριθμοι των, ὡς πρὸς βάσιν  $a$ . Κατὰ τὸν ὅρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν τὰς λογικὰς ἰσοδυναμίας :

$$\alpha^x = \theta_1 \iff x = \log_a \theta_1 \quad \text{καὶ} \quad \alpha^y = \theta_2 \iff y = \log_a \theta_2.$$

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν :

$$\alpha^x : \alpha^y = \theta_1 : \theta_2 \quad \eta \quad \alpha^{x-y} = \frac{\theta_1}{\theta_2}.$$

Ἀλλὰ ἡ τελευταία ἰσότης δεικνύει ὅτι :

$$\log_a \left( \frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = x - y = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2.$$

Ὡστε :

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^+ \quad 0 < a \neq 1 \quad \implies \log_a \left( \frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$$

Οὕτως ἔχομεν π.χ.  $\log \frac{3}{5} = \log 3 - \log 5$

καὶ ἀντιστρόφως :  $\log 7 - \log 13 = \log 7/13$ .

**Πόρισμα I.**—Οἱ ἀντίστροφοι ἀριθμοὶ ἔχουν ἀντιθέτους λογαρίθμους.

Πράγματι :

$$\log_a \left( \frac{1}{\theta} \right) = \log_a 1 - \log_a \theta = 0 - \log_a \theta = -\log_a \theta.$$

**Πόρισμα II.**— Δύο θετικοί αριθμοί είναι ίσοι τότε, και μόνον τότε, αν οι λογάριθμοι αυτών, ως προς την αὐτὴν βάση, είναι ίσοι, ἤτοι :

$$\log_a \theta_1 = \log_a \theta_2 \iff \theta_1 = \theta_2$$

Ἡ ἀπόδειξις εὐκολος.

**Ἀξιόλογος παρατήρησις.** Δέον νὰ ἔχωμεν πάντοτε ὑπ' ὄψιν ὅτι :

$$\log_a (\theta_1 + \theta_2) \neq \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

$$\log_a (\theta_1 - \theta_2) \neq \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$$

$$\log_a \theta_1 \cdot \log_a \theta_2 \neq \log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

$$\log_a \theta_1 : \log_a \theta_2 \neq \log_a \left( \frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2.$$

**§ 203. Ἰδιότης IV.**— Ὁ λογάριθμος οἰασδήποτε δυνάμεως ἐνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐκθέτου τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως τῆς δυνάμεως.

**Ἀπόδειξις.** Ἐστω ὅτι εἶναι  $\log_a \theta = x$ , ἐνθα  $\theta \in \mathbb{R}^+$  καὶ  $0 < a \neq 1$ . Ἐὰν  $\theta^k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , εἶναι μία δύναμις τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ  $\theta$ , τότε, ἐπειδὴ  $\theta = a^x$ , ἔχομεν  $\theta^k = (a^x)^k = a^{kx}$ .

Ἐκ ταύτης, κατὰ τὸν ὅρισμόν τῶν λογαρίθμων, προκύπτει :

$$\log_a \theta^k = k \cdot x = k \cdot \log_a \theta.$$

Ὡστε :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R} \quad \left\| \begin{array}{l} 0 < a \neq 1 \end{array} \right\| \implies \log_a \theta^k = k \cdot \log_a \theta$$

**§ 204. Ἰδιότης V.**— Ὁ λογάριθμος οἰασδήποτε ρίζης, μὲ ὑπόρριζον θετικόν, ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ λογαρίθμου τοῦ ὑπόρριζου διὰ τοῦ δείκτου τῆς ρίζης.

**Ἀπόδειξις.** Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἀποτελεῖ πόρισμα τῆς προηγούμενης ιδιότητος. Πράγματι, ἀρκεῖ εἰς τὴν ἀποδειχθεῖσαν ἰσότητα  $\log_a \theta^k = k \cdot \log_a \theta$ , νὰ τεθῇ π.χ.  $k = \frac{1}{v}$ .

Λαμβάνομεν τότε :

$$\log_a \theta^{\frac{1}{v}} = \log_a \sqrt[v]{\theta} = \frac{1}{v} \cdot \log_a \theta.$$

Ὡστε :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^+, v \in \mathbb{N} \quad \left\| \begin{array}{l} 0 < a \neq 1 \end{array} \right\| \implies \log_a \sqrt[v]{\theta} = \frac{1}{v} \cdot \log_a \theta$$

Οὕτως ἔχομεν π.χ.  $\log \sqrt[3]{205} = \frac{1}{3} \log 205$

καὶ ἀντιστρόφως :  $\frac{1}{5} \log 1014 = \log \sqrt[5]{1014}.$

**§ 205. Ίδιότης VI.**—'Εάν ή βάσις  $a$  τών λογαρίθμων εἶναι  $> 1$ , οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ 1 ἔχουν θετικούς λογαρίθμους, ἐνῶ οἱ θετικοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 1 ἔχουν ἀρνητικούς λογαρίθμους, ἥτοι :

$$\text{'Εάν } a > 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a \theta > 0 \iff \theta > 1 \\ \log_a \theta < 0 \iff 0 < \theta < 1 \end{cases}$$

**Ἀπόδειξις.** Ἐστω ὅτι  $\log_a \theta > 0$ . ἐκ τῆς  $a > 1$  προκύπτει :

$$a^{\log_a \theta} > 1^{\log_a \theta}$$

Ἐξ οὗ :  $\theta > 1$ .

**Ἀντιστρόφως.** Ἐστω  $\theta > 1$  ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ  $a^{\log_a \theta} > 1^{\log_a \theta}$ . Ἐξ αὐτῆς, ἐπειδὴ  $a > 1$ , προκύπτει :  $\log_a \theta > 0$ .

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ δευτέρα ἰσοδυναμία.

**Πόρισμα.**—Τῆς βάσεως  $a$  τών λογαρίθμων οὗσης  $> 1$ , ὁ μεγαλύτερος ἐκ δύο θετικῶν ἀριθμῶν ἔχει μεγαλύτερον λογάριθμον καὶ ἀντιστρόφως, ἥτοι :

$$\text{'Εάν } a > 1, \text{ τότε : } \log_a \theta_1 > \log_a \theta_2 \iff \theta_1 > \theta_2$$

**§ 206. Ίδιότης VII.**—'Εάν ή βάσις  $a$  τών λογαρίθμων εἶναι :  $0 < a < 1$ , οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ 1 ἔχουν ἀρνητικούς λογαρίθμους, ἐνῶ οἱ θετικοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 1 ἔχουν θετικούς λογαρίθμους, ἥτοι :

$$\text{'Εάν } 0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a \theta < 0 \iff \theta > 1 \\ \log_a \theta > 0 \iff 0 < \theta < 1 \end{cases}$$

**Ὑπόδειξις.** Παρατηρήσατε ὅτι :  $\log_a \theta = -\log_{1/a} \theta$  καὶ ἐφαρμόσατε ἀκολουθῶς τὴν προηγούμενην ἰδιότητα.

**Πόρισμα.**—Τῆς βάσεως  $a$  τών λογαρίθμων οὗσης θετικῆς καὶ μικροτέρας τῆς μονάδος, ὁ μεγαλύτερος ἐκ δύο θετικῶν ἀριθμῶν ἔχει μικρότερον λογάριθμον καὶ ἀντιστρόφως, ἥτοι :

$$\text{'Εάν } 0 < a < 1, \text{ τότε : } \log_a \theta_1 > \log_a \theta_2 \iff \theta_1 < \theta_2$$

**Παρατήρησις.** Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων καθίσταται φανερόν, ὅτι μὲ τὴν βοήθειαν ἐνὸς «λογαριθμικοῦ πίνακος», περὶ τῶν ὁποίων θὰ ὁμιλήσωμεν κατωτέρω, δυνάμεθα νὰ ἀπλοποιήσωμεν ἕνα ἀριθμητικὸν ὑπολογισμόν καὶ τοῦτο διότι δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἕνα γινόμενον μὲ ἕνα ἄθροισμα, ἕνα πηλίκον μὲ μίαν διαφορὰν, μίαν ἐξαγωγήν ρίζης μὲ μίαν διαίρεσιν κ.τ.λ.

Είς τήν τελευταίαν μάλιστα περίπτωση ὁ λογαριθμικὸς ὑπολογισμὸς εἶναι ἀναπόφευκτος, ὅταν ὁ δείκτης τοῦ ριζικοῦ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3.

### Ἐφαρμογαὶ τῶν ιδιοτήτων τῶν λογαρίθμων

1η. Νὰ ἐκφρασθῇ ὁ  $\log_3 \left( \frac{3\alpha^2}{5\beta \sqrt[4]{\gamma}} \right)$  ὑπὸ μορφήν ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος λογαρίθμων.

Λύσις. Ἐχομεν :

$$\log_3 \left( \frac{3\alpha^2}{5\beta \sqrt[4]{\gamma}} \right) = \log_3 (3\alpha^2) - \log_3 (5\beta \cdot \sqrt[4]{\gamma}) = \log_3 3 + \log_3 \alpha^2 - (\log_3 5 + \log_3 \beta + \log_3 \sqrt[4]{\gamma}) = 1 + 2 \log_3 \alpha - \log_3 5 - \log_3 \beta - \frac{1}{4} \log_3 \gamma.$$

2α. Νὰ ἐφαρμοσθοῦν πᾶσαι αἱ δυναταὶ ιδιότητες τῶν λογαρίθμων ἐπὶ τοῦ

$$\log \frac{3\alpha^3 \cdot \sqrt[4]{\beta^2 \cdot \gamma}}{5\beta^2 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2 \cdot \beta \cdot \gamma^2}}, \quad \text{ἐνθα } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+.$$

Λύσις. Ἐχομεν :

$$\begin{aligned} \log \frac{3\alpha^3 \cdot \sqrt[4]{\beta^2 \cdot \gamma}}{5\beta^2 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2 \cdot \beta \cdot \gamma^2}} &= \log (3\alpha^3 \cdot \sqrt[4]{\beta^2 \cdot \gamma}) - \log (5\beta^2 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2 \cdot \beta \cdot \gamma^2}) = \\ &= \left[ \log 3 + 3 \log \alpha + \frac{1}{4} (2 \log \beta + \log \gamma) \right] - \left[ \log 5 + 2 \log \beta + \frac{1}{3} (2 \log \alpha + \log \beta + 2 \log \gamma) \right] \\ &= \log 3 - \log 5 + \frac{7}{3} \log \alpha - \frac{11}{6} \log \beta - \frac{5}{12} \log \gamma. \end{aligned}$$

3η. Ἐὰν  $\log_e i = -\frac{Rt}{L} + \log_e 1 \implies i = 1 \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}.$

Λύσις : Ἡ δοθεῖσα γράφεται :

$$\log_e i - \log_e 1 = -\frac{Rt}{L} \quad \eta \quad \log_e \frac{i}{1} = -\frac{Rt}{L}.$$

Κατὰ τὸν ὀρισμὸν τοῦ λογαρίθμου ἔχομεν ἐκ τῆς τελευταίας ἰσότητος :

$$e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{i}{1}, \quad \text{ἐξ οὗ} : \quad i = 1 \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}.$$

4η. Ἐὰν  $\alpha > \beta > 0$  καὶ  $\alpha^2 + \beta^2 = 11\alpha\beta$ , δεῖξατε ὅτι :

$$\log \frac{\alpha - \beta}{3} = \frac{1}{2} (\log \alpha + \log \beta).$$

Ἀπόδειξις : Ἐχομεν :

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 9\alpha\beta \quad \eta \quad (\alpha - \beta)^2 = 9\alpha\beta \quad \eta \quad \alpha - \beta = 3 \sqrt{\alpha\beta}$$

$$\eta \quad \frac{\alpha - \beta}{3} = \sqrt{\alpha\beta}.$$

Τότε ὅμως θὰ ἔχωμεν καί :

$$\log \left( \frac{\alpha - \beta}{3} \right) = \log \sqrt{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\log \alpha + \log \beta).$$

5η. Νὰ δεიχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητος :

$$\frac{7}{16} \log (3 + 2\sqrt{2}) - 4 \log (\sqrt{2} + 1) = \frac{25}{8} \log (\sqrt{2} - 1).$$

Λύσις. Παρατηρούμεν ότι :  $3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2$ .

$$\begin{aligned} \text{Άρα : } \frac{7}{16} \log (3 + 2\sqrt{2}) - 4 \log (\sqrt{2} + 1) &= \frac{7}{16} \log (\sqrt{2} + 1)^2 - 4 \log (\sqrt{2} + 1) = \\ &= \frac{7}{8} \log (\sqrt{2} + 1) - 4 \log (\sqrt{2} + 1) = -\frac{25}{8} \log (\sqrt{2} + 1) \end{aligned} \quad (1)$$

Άλλά κατά τὸ πόρισμα I § 202 ἔχομεν :

$$-\log (\sqrt{2} + 1) = \log \left( \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right) = \log (\sqrt{2} - 1) \quad (2)$$

Ἡ (1), λόγω τῆς (2), γίνεται :

$$\frac{7}{16} \log (3 + 2\sqrt{2}) - 4 \log (\sqrt{2} + 1) = \frac{25}{8} \log (\sqrt{2} - 1).$$

**§ 207. Μετάβασις ἐξ ἑνὸς λογαριθμικοῦ συστήματος εἰς ἕτερον (ἀλλαγὴ βάσεως λογαρίθμων).—** Αἱ ἀνωτέρω ιδιότητες τῶν λογαρίθμων ἀναφέρονται ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν. Πολλάκις ὅμως παρουσιάζονται, εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πρόβλημα, λογάριθμοι ὡς πρὸς διαφορετικὰς βάσεις, ὅτε ὁ λογι-  
σμός, ἂν ὄχι ἀδύνατος, δὲν εἶναι εὐκόλος καὶ διὰ τοῦτο ἐκείνο τὸ ὅποῖον ἐπιδιώ-  
κομεν, εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς, εἶναι : πάντες οἱ λογάριθμοι νὰ ἀναφερθοῦν ὡς πρὸς  
τὴν αὐτὴν βάσιν.

Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κάτωθι θεωρήματος :

**Θεώρημα.**— Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸν λογάριθμον ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὡς πρὸς βάσιν  
τινὰ  $\alpha$ , εὐρίσκομεν τὸν λογάριθμόν του, ὡς πρὸς νέαν βάσιν  $\beta$ , ἂν διαιρέσωμεν τὸν  
γνωστὸν λογάριθμον (ὡς πρὸς βάσιν  $\alpha$ ) διὰ τοῦ λογαρίθμου τῆς νέας βάσεως  $\beta$ , ὡς  
πρὸς τὴν παλαιάν, ἦτοι :

|                                                                                                                    |                                                                                   |          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------|
| $\begin{aligned} \forall \theta \in \mathbb{R}^+ \\ \theta < \alpha \neq 1 \\ \theta < \beta \neq 1 \end{aligned}$ | $\implies \log_{\beta} \theta = \frac{\log_{\alpha} \theta}{\log_{\alpha} \beta}$ | $(\tau)$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------|

**Ἀπόδειξις.** Ἐστω  $x$  ὁ λογάριθμος τοῦ  $\theta$ , ὡς πρὸς τὴν νέαν βάσιν  $\beta$ , ἦτοι  
ἔστω ὅτι :

$$\log_{\beta} \theta = x. \quad (1)$$

Τότε, κατὰ τὸν ὅρισμόν τῶν λογαρίθμων, θὰ ἔχωμεν ;

$$\beta^x = \theta. \quad (2)$$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος (2), ὡς πρὸς βάσιν  
 $\alpha$ , εὐρίσκομεν :

$$x \log_{\alpha} \beta = \log_{\alpha} \theta, \quad \text{ἐξ οὗ : } x = \frac{\log_{\alpha} \theta}{\log_{\alpha} \beta}.$$

Ἡ τελευταία ἰσότης, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ (1), γράφεται :

$$\log_{\beta} \theta = \frac{\log_{\alpha} \theta}{\log_{\alpha} \beta}. \quad \text{ὁ.ἔ.δ.}$$

**Παρατήρησις.** Ὁ τύπος (τ) παρέχει τὸν κανόνα εὐρέσεως τῶν λογαρίθμων  
ὡς πρὸς τὸ λογαριθμικὸν σύστημα μὲ βάσιν  $\beta$ , ἂν φυσικὰ γνωρίζωμεν τοὺς λο-



γαρίθμους ως πρὸς τὸ σύστημα μὲ βάσιν τὸ α. Λαμβανομένου δὲ ὑπ' ὄψιν ὅτι ὑπάρχουν λογαριθμικοὶ πίνακες ως πρὸς βάσιν 10, δυνάμεθα, τῇ βοήθειά τοῦ τύπου (τ) χωρὶς τὴν σύνταξιν νέων πινάκων, νὰ εὗρωμεν τὸν λογάριθμον οἰουδήποτε θετικοῦ ἀριθμοῦ ως πρὸς οἰανδήποτε βάσιν θέλομεν.

Ὁ τύπος (τ), ἐὰν ληφθῇ  $\alpha = 10$ , διότι ως πρὸς βάσιν 10 ὑπάρχουν πίνακες, γράφεται :

$$\log_{\beta} \theta = \frac{\log \theta}{\log \beta} \quad (\tau')$$

**Πόρισμα.**—Τὸ γινόμενον τῶν λογαρίθμων δύο (θετικῶν) ἀριθμῶν διαφόρων τῆς μονάδος ἑκατέρου ἔχοντος βάσιν τὸν ἕτερον εἶναι ἡ μονάς.

Πράγματι, διὰ  $\theta = \alpha$  ὁ τύπος (τ) δίδει :

$$\log_{\beta} \alpha = \frac{\log_{\alpha} \alpha}{\log_{\alpha} \beta} = \frac{1}{\log_{\alpha} \beta}, \text{ καθ' ὅσον } \log_{\alpha} \alpha = 1.$$

Ὅθεν :

$$\log_{\alpha} \beta \times \log_{\beta} \alpha = 1$$

**Ἀξιοσημείωτος ἰσότης.**

Ὁ τύπος (τ), τῇ βοήθειά τοῦ ἀνωτέρω πορίσματος, γράφεται :

$$\log_{\beta} \theta = \log_{\alpha} \theta \times \log_{\beta} \alpha$$

**Σημ.** Μνημονικὸς κανὼν :  $\frac{\theta}{\beta} = \frac{\theta}{\alpha} \times \frac{\alpha}{\beta}$ .

**Ἐφαρμογὰί :** 1η. Ἐὰν  $\log 2 = 0,301$  καὶ  $\log 5 = 0,698$  νὰ εὗρεθῇ ὁ  $\log 250$  καὶ ὁ  $\log_2 250$ .

**Λύσις :** α)  $\log 250 = \log (2 \cdot 5^3) = \log 2 + 3 \log 5 = 0,301 + 3 \cdot 0,698 = 0,301 + 2,094 = 2,395$ .

$$\beta) \log_2 250 = \frac{\log 250}{\log 2} = \frac{2,395}{0,301} = 7,956.$$

2α. Νὰ υπολογισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως :

$$k = \frac{(\log_2 5 + \log_3 5) \cdot \log_5 5}{\log_2 5 \cdot \log_3 5}.$$

**Λύσις :** Ἐχομεν, δυνάμει τοῦ πορίσματος τῆς § 207 :

$$k = \frac{\left( \frac{1}{\log_2 5} + \frac{1}{\log_3 5} \right) \cdot \frac{1}{\log_5 5}}{\frac{1}{\log_2 5 \cdot \log_3 5}} = \frac{\log_5 2 + \log_5 3}{\log_5 6} = \frac{\log_5 (2 \cdot 3)}{\log_5 6} = 1.$$

**§ 208. Συλλογὰριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ.**— Καλεῖται συλλογὰριθμος ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ  $\theta$  ως πρὸς βάσιν  $\alpha$ , ὁ λογάριθμος τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ  $\theta$ , ἥτοι τοῦ  $\frac{1}{\theta}$  ως πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ σημειοῦται οὕτω :

$$\text{συλλογ}_{\alpha} \theta.$$

Έχουμε κατά ταύτα :

$$\text{συλλογ}_a \theta = \log_a \frac{1}{\theta} = \log_a 1 - \log_a \theta = -\log_a \theta.$$

Έντεῦθεν ἔπεται ἡ πρότασις :

Ὁ συλλογάριθος θετικοῦ τινος ἀριθμοῦ  $\theta$  ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀντίθετον τοῦ λογαρίθμου τοῦ  $\theta$ .

Ὡστε :

$$\text{συλλογ}_a \theta = \log_a \frac{1}{\theta} = -\log_a \theta$$

(1)

Ἡ εἰσαγωγή τῶν συλλογαρίθμων ἐπιτρέπει νὰ ἀντικαθιστῶμεν μίαν διαφορὰν λογαρίθμων διὰ τοῦ ἀθροίσματός των. Οὕτως ἔχουμε :

$$\log_a \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2 = \log_a \theta_1 + \text{συλλογ}_a \theta_2.$$

Σημ. Ἐκ τῆς (1) ἔχουμε ὅτι :

$$\log_a \theta + \text{συλλογ}_a \theta = 0$$

(2)

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

436. Νὰ ἐφαρμοσθοῦν πᾶσαι αἱ δυναταὶ ιδιότητες τῶν λογαρίθμων ἐπὶ τῶν :

$$1) \log_3 3x \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2x}}, \quad 2) \log \frac{x^3 \sqrt{y}}{4 \sqrt{x} \cdot y^3}, \quad 3) \log \frac{\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[10]{2}}{\sqrt{18} \sqrt{2}},$$

$$4) \log \frac{3(x^2 - y^2)}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}, \quad 5) \log \frac{5x^3 \sqrt[4]{y^2 z}}{7y^2 \cdot \sqrt{x^2 y z^2}}.$$

437. Εὑρετε τὴν τιμὴν τοῦ :  $\log_2 \sqrt{32 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt[3]{2}}.$

438. Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν κάτωθι ἰσοτήτων :

1.  $\log 3 + 2 \log 4 - \log 12 = 2 \log 2$

2.  $3 \log 2 + \log 5 - \log 4 = 1$

3.  $\frac{1}{2} \log 25 + \frac{1}{3} \log 8 + \frac{1}{5} \log 32 = 2 \log 2 + \log 5$

4.  $\log_\beta \frac{\alpha}{\beta \gamma} = \log_\beta \alpha + \text{συλλογ}_\beta \gamma - 1$ , ὅπου  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+$ ,  $\beta \neq 1$ .

439. Ἐὰν  $\log 2 = 0,30103$  νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως :

$$y = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log (2 + \sqrt{2}) + \frac{1}{2} \log (2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \frac{1}{2} \log (2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})$$

440. Δείξατε ὅτι :  $x^{\log y} = y^{\log x}.$

441. Ἐὰν  $\alpha, \beta$  πραγματικοὶ ἀριθμοὶ μεγαλύτεροι τῆς μονάδος, νὰ ἀπλοποιηθῇ ἡ παράστασις :

$$y = \log (\alpha^2 - 1) + \log (\beta^2 - 1) - \log [(\alpha\beta + 1)^2 - (\alpha + \beta)^2].$$

442. 'Εάν  $\log 2 = 0,301$  και  $\log 14 = 1,146$  εύρετε τους επόμενους λογαριθμούς :

$$\cdot \log 28, \log 8, \log 5, \log 56, \log 32, \log \frac{4}{7}, \log \sqrt[5]{64}, \log 35, \log \sqrt[3]{70.000}.$$

443. Δείξτε ότι:  $\log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\beta} \gamma \cdot \log_{\gamma} \alpha = 1$  διὰ κάθε  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ .

444. 'Εάν ισχύει:  $\log_x y = \log_y z \cdot \log_z x$ , τότε θα είναι:  $x = y$  ή  $x = \frac{1}{y}$ .

445. Γνωρίζοντας, ότι  $\log 2 = \alpha$  και  $\log 15 = \beta$ , νά υπολογισθούν συναρτήσει των  $\alpha$  και  $\beta$  αι παραστάσεις:

$$1) \log_3 \sqrt[5]{7,2}, \quad 2) \log \sqrt[5]{\frac{5}{3}} \sqrt[4]{6}.$$

446. 'Εάν  $\log(x^2 y^3) = \alpha$  και  $\log x - \log y = \beta$  νά εκφρασθούν οι  $\log x$  και  $\log y$  συναρτήσει των  $\alpha$  και  $\beta$ .

447. 'Εάν  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  και θέσωμεν:  $x = \log_{\alpha}(\beta \gamma)$ ,  $y = \log_{\beta}(\gamma \alpha)$ ,  $z = \log_{\gamma}(\alpha \beta)$  νά αποδειχθῇ ότι:

$$xyz = x + y + z + 2.$$

448. 'Εάν είναι  $\log \alpha - \log \beta > 0$ , τί συνάγεται διὰ τούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ ;

449. Νά εύρεθῇ ἡ βάση τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ἀληθὴς ἡ ἰσότης:

$$2(\log_x 8)^2 + \log_x 64 + \log_x 8 = 9.$$

450. 'Ομοίως:

$$\log_x \sqrt[3]{625} - \log_x \sqrt{125} + \frac{1}{6} = 0.$$

451. 'Εάν  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ , διάφοροι ἀλλήλων καὶ  $\frac{\log \alpha}{\beta - \gamma} = \frac{\log \beta}{\gamma - \alpha} = \frac{\log \gamma}{\alpha - \beta}$ , νά αποδειχθῇ ὅτι:

$$\alpha^a \cdot \beta^b \cdot \gamma^c = 1.$$

452. 'Εάν οἱ  $\alpha, \beta, \gamma$  εἶναι θετικοὶ καὶ κατέχουν ἀντιστοίχως τὰς τάξεις  $\mu, \nu, \rho$  εἰς μίαν γεωμετρικὴν καὶ μίαν ἀρμονικὴν πρόδον, δείξτε ὅτι:

$$\alpha(\beta - \gamma) \log \alpha + \beta(\gamma - \alpha) \log \beta + \gamma(\alpha - \beta) \log \gamma = 0.$$

453. Νά εύρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν  $n$  πρώτων ὁρῶν τῆς σειρᾶς:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \quad \text{μὲ γενικὸν ὅρον: } \alpha_n = \log 3^n.$$

454. 'Εάν οἱ ἀριθμοὶ  $\alpha, \beta, \gamma$  εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου, νά αποδειχθῇ ὅτι οἱ λογάριθμοι ἑνὸς ἀριθμοῦ (θετικοῦ) ὡς πρὸς βάσεις ἀντιστοίχως  $\alpha, \beta, \gamma$  εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀρμονικῆς προόδου.

455. 'Εάν  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ , διάφοροι τοῦ  $\alpha$ , ὅπου  $0 < \alpha \neq 1$ , καὶ εἶναι:

$$y = \alpha^{\frac{1}{1 - \log_{\alpha} x}}, \quad z = \alpha^{\frac{1}{1 - \log_{\alpha} y}}$$

τότε θὰ εἶναι:

$$x = \alpha^{\frac{1}{1 - \log_{\alpha} z}}.$$

456. 'Αριθμητικῆς προόδου ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ  $\log \alpha$  καὶ ὁ δεῦτερος ὅρος τῆς ὁ  $\log \beta$ . Νά δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα  $\Sigma_n$  τῶν  $n$  πρώτων ὁρῶν τῆς εἶναι:

$$\Sigma_n = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{\beta^n (n-1)}{\alpha^{n(n-3)}}.$$

457. 'Εάν  $x, y \in \mathbb{R}^+$ , δείξτε ὅτι ἰσχύει:

$$x^x \cdot y^y \geq x^y \cdot y^x.$$

458. 'Εάν  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  καὶ  $\mu, \nu \in \mathbb{N}$  τοιοῦτοι, ὥστε  $\mu > \nu$ , νά αποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{1}{\mu} \cdot \log(1 + \alpha^{\mu}) < \frac{1}{\nu} \cdot \log(1 + \alpha^{\nu}).$$

## Δεκαδικοί λογάριθμοι

**§ 209. Όρισμός.**— Καλεῖται δεκαδικὸς λογάριθμος ἀριθμοῦ τινὸς  $\theta > 0$ , ὁ  $\log_{10}\theta$ , ἥτοι ὁ λογάριθμος αὐτοῦ ὡς πρὸς βάσιν 10.

Συνήθως τὸν δεκαδικὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ  $\theta > 0$  καλοῦμεν καὶ ἀπλῶς λογάριθμον τοῦ  $\theta$  καὶ ἀντὶ τοῦ συμβόλου  $\log_{10}\theta$  χρησιμοποιοῦμεν τό:  $\log\theta$  (ἄνευ δείκτου).

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ δεκαδικοῦ λογαρίθμου καὶ τοῦ συμβολισμοῦ ἔχομεν τὴν λογικὴν ἰσοδυναμίαν :

$$\boxed{\log\theta = x \iff 10^x = \theta} \quad (1)$$

Οὕτως, ἔχομεν π.χ.

$$\log 100 = \log 10^2 = 2, \quad \log 1000 = \log 10^3 = 3, \quad \log 0,01 = \log 10^{-2} = -2,$$

$$\log \sqrt[5]{10^3} = \log 10^{3/5} = \frac{3}{5}.$$

Γενικῶς : Πᾶσα δυνάμεις τοῦ 10 μὲ ἐκθέτην ἀριθμὸν ρητὸν (σύμμετρον) ἔχει λογάριθμον τὸν ρητὸν τοῦτον ἐκθέτην, ἥτοι :

$$\log 10^p = p, \quad \forall \quad p \in \mathbb{Q}.$$

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν  $p \in \mathbb{Z}$ , ὁ λογάριθμος τοῦ  $10^p$  εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς  $p$ . Οὕτως ἔχομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα :

|       |     |        |       |      |     |   |    |     |      |       |     |
|-------|-----|--------|-------|------|-----|---|----|-----|------|-------|-----|
| x     | ... | 0,0001 | 0,001 | 0,01 | 0,1 | 1 | 10 | 100 | 1000 | 10000 | ... |
| log x | ... | -4     | -3    | -2   | -1  | 0 | 1  | 2   | 3    | 4     | ... |

Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὅποιοι δὲν εἶναι σύμμετροι δυνάμεις τοῦ 10, εἶναι ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι. Πράγματι, ἂν  $\theta$  εἶναι εἰς τοιοῦτος ἀριθμὸς καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι οὗτος ἔχει λογάριθμον σύμμετρον ἀριθμὸν π.χ. τὸν  $\frac{\mu}{\nu}$ , ἔνθα  $\mu \in \mathbb{Z}$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ , δηλ. ὅτι εἶναι  $\log\theta = \frac{\mu}{\nu}$ , τότε  $10^{\frac{\mu}{\nu}} = \theta$ , ἄτοπον, λόγῳ τῆς γενομένης ὑποθέσεως διὰ τὸν  $\theta$ .

Οὕτω π.χ. ὁ  $\log 35$  εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος, διότι ἂν ἦτο :  $\log 35 = \frac{\mu}{\nu}$ ,

ὅπου  $\mu \in \mathbb{Z}$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ , τότε θὰ εἴχομεν :  $10^{\frac{\mu}{\nu}} = 35$  ἢ  $2^\mu \cdot 5^\mu = 5^\nu \cdot 7^\nu$ .

Ἡ τελευταία ὅμως ἰσότης εἶναι ἀδύνατος (διατί;).

Ἀρα ὁ  $\log 35$  εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος.

Ὡστε : Οἱ λογάριθμοι ὅλων τῶν (θετικῶν) ἀριθμῶν, ἐκτὸς τῶν συμμέτρων δυνάμεων τοῦ 10, δὲν δύνανται νὰ υπολογισθοῦν ἀκριβῶς, ἀλλὰ κατὰ προσέγγισιν μᾶς δεκαδικῆς μονάδος (συνήθως ὑπολογίζονται κατὰ προσέγγισιν 0,00001).

**Γενική παρατήρησης.** 'Εν τοῖς ἐπομένοις γίνεται λόγος μόνον περὶ δεκαδικῶν λογαρίθμων. 'Επειδὴ δὲ ἡ βάσις  $\alpha = 10 > 1$ , προκύπτει ἐκ τῆς ιδιότητος VI (§ 205) ὅτι: οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεγαλύτεροι τῆς μονάδος ἔχουν θετικούς δεκαδικούς λογαρίθμους, οἱ δὲ θετικοὶ καὶ μικρότεροι τῆς μονάδος ἔχουν ἀρνητικούς λογαρίθμους.

## § 210. Χαρακτηριστικὸν καὶ δεκαδικὸν μέρος ἑνὸς λογαρίθμου.

'Εστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν  $\log 557$ .

'Επειδὴ  $10^2 < 557 < 10^3$

θὰ ἔχωμεν, ἂν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν τριῶν μελῶν :

$$2 < \log 557 < 3.$$

'Ἦτοι :  $\log 557 = 2, \dots$

Δηλαδή :  $\log 557 = 2 + d$ , ὅπου  $d$  θετικὸς ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος.

Τὸ ἀκέραιον μέρος (εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ὁ ἀριθμὸς 2) καλεῖται «**χαρακτηριστικὸν**» τοῦ λογαρίθμου, ὁ δὲ θετικὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος δεκαδικὸς ἀριθμὸς  $d$  καλεῖται «**δεκαδικὸν μέρος**» τοῦ λογαρίθμου.

Τὸ χαρακτηριστικὸν ἑνὸς λογαρίθμου, π.χ. τοῦ  $\log \theta$ , παρίσταται συμβολικῶς οὕτω :  $[\log \theta]$ .

'Εκ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος καὶ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἑνὸς λογαρίθμου, καθίσταται φανερόν ὅτι ὡς χαρακτηριστικὸν ἑνὸς λογαρίθμου ὀρίζομεν τὸν μικρότερον ἐκ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ λογαρίθμος αὐτός.

Οὕτως, ἔχομεν :

'Εὰν  $\log \alpha = 5,03426$ , τότε  $[\log \alpha] = 5$  καὶ  $d = 0,03426$ .

'Εὰν  $\log \beta = 0,63752$ , τότε  $[\log \beta] = 0$  καὶ  $d = 0,63752$ .

'Εὰν  $\log \gamma = -2,32715$ , τότε  $[\log \gamma] = -3$ , διότι :  $-3 < -2,32715 < -2$ .

Τὸ δεκαδικὸν μέρος εἶναι μηδὲν μόνον διὰ τὰς ἀκεραίας δυμᾶμεις τοῦ 10. Εἰς πάσας τὰς ἄλλας περιπτώσεις τὸ δεκαδικὸν μέρος λαμβάνεται ὡς θετικόν.

Ὡστε :

Τὸ δεκαδικὸν μέρος ἑνὸς λογαρίθμου εἶναι μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμός.

'Εὰν  $d$  εἶναι τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ  $\log \theta$  καὶ  $[\log \theta]$  τὸ χαρακτηριστικόν, τότε ἐκ τῆς σχέσεως :

$$\log \theta = [\log \theta] + d$$

προκύπτει :

$$d = \log \theta - [\log \theta]$$

Οὕτως ἔχομεν :

'Εὰν  $\log \theta = -3,45217$ , τότε  $[\log \theta] = -4$  καὶ  $d = -3,45217 - (-4) = 0,54783$ .

**§ 211. Τροπὴ ἀρνητικοῦ λογαρίθμου εἰς ἡμιαρνητικόν.**— 'Ελέχθη ἀνωτέρω ὅτι τὸ δεκαδικὸν μέρος ἑνὸς λογαρίθμου εἶναι μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμός. 'Επειδὴ ὁμως οἱ λογαρίθμοι τῶν θετικῶν ἀριθμῶν τῶν μικροτέρων τῆς μονάδος

είναι άρνητικοί, οί δέ τοιοῦτοι λογάριθμοι δέν εἶναι εὐχρηστοί εἰς τόν λογιισμόν, διὰ τοῦτο τρέπομεν τοὺς άρνητικούς λογαρίθμους εἰς «**ήμιαρνητικούς**», δηλαδή εἰς λογαρίθμους τῶν ὁποίων **μόνον** τὸ άκέραιον μέρος (χαρακτηριστικόν) εἶναι άρνητικόν, τὸ δέ δεκαδικόν θετικόν.

Ἡ τροπή αὕτη γίνεται ὡς ἑξῆς :

Ἔστω π.χ. ὁ (ὅλως) άρνητικός λογάριθμος ἀριθμοῦ τινὸς  
 $\theta = -2,54327$  ἦτοι  $\theta : -2 - 0,54327$ .

Ἐάν εἰς αὐτὸν προσθέσωμεν  $-1$  καὶ  $+1$ , ὅπερ δέν τὸν μεταβάλλει, λαμβάνομεν:  
 $-2 - 1 + 1 - 0,54327 = -3 + (1 - 0,54327) = -3 + 0,45673$ .

Ὡστε εἶναι :  $-2,54327 = -3 + 0,45673$ .

Ἀλλὰ τὸ άθροισμα τοῦ άκεραίου άρνητικοῦ μέρους  $-3$  καὶ τοῦ δεκαδικοῦ  $0,45673$  συμφωνοῦμεν νά τὸ γράφωμεν, ὡς ἑξῆς :  $3,45673$ · δηλαδή γράφομεν τὸ πλὴν ὑπεράνω τοῦ άκεραίου μέρους, ἵνα δηλώσωμεν, ὅτι τοῦτο **μόνον** εἶναι άρνητικόν. Ὑπὸ τὴν μορφήν αὐτὴν φαίνεται, ὅτι χαρακτηριστικόν τοῦ λογαρίθμου εἶναι τὸ άκέραιον μέρος  $-3$ , διότι ὁ λογάριθμος περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν διαδοχικῶν άκεραίων  $-3$  καὶ  $-2$  καὶ δεκαδικόν μέρος τοῦ λογαρίθμου, τὸ άναγραφόμενον δεκαδικόν μέρος, διότι τοῦτο εἶναι ἡ διαφορά, ἡ ὁποία προκύπτει, ἀν ἀπὸ τὸν λογάριθμον  $-3 + 0,45673$  ἀφαιρεθῇ τὸ χαρακτηριστικόν αὐτοῦ  $-3$ .

Ὅμοίως ἔχομεν :

$$\begin{aligned} -3,75632 &= -3 - 0,75632 = -3 - 1 + 1 - 0,75632 = -4 + (1 - 0,75632) = \\ &= -4 + 0,24368 = \bar{4},24368. \end{aligned}$$

Ἐκ τῶν άνωτέρω παραδειγμάτων συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα :

**Κανών.** Διὰ νά τρέψωμεν άρνητικόν λογάριθμον εἰς **ήμιαρνητικόν**, αὐξάνομεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ άκεραίου κατὰ  $1$  καὶ γράφομεν τὸ — ὑπεράνω τοῦ εὑρισκομένου άθροίσματος, δεξιὰ δέ τούτου γράφομεν ὡς δεκαδικὰ ψηφία τὰς διαφορὰς τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος, τοῦ μὲν τελευταίου (σημαντικοῦ) ἀπὸ τοῦ  $10$  τῶν δὲ ἄλλων ἀπὸ τὸ  $9$ .

Οὕτως, ἔχομεν π.χ.

Ἐάν  $\log \theta = -3,85732$ , θὰ ἔχωμεν :  $\log \theta = \bar{4},14268$ .

Ἐάν  $\log \theta = -2,35724$ , θὰ ἔχωμεν :  $\log \theta = \bar{3},64276$ .

**§ 212. Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων.**— α'). Τὸ χαρακτηριστικόν ἑνὸς λογαρίθμου εἶναι ὁ ἐκθέτης τῆς μεγαλυτέρας άκεραίας δυνάμεως τοῦ  $10$ , ἡ ὁποία δέν ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμόν.

Ἀπόδειξις. Πράγματι· ἔάν  $10^k$  εἶναι ἡ μεγαλυτέρα άκεραία δύναμις τοῦ  $10$  ἡ μὴ ὑπερβαίνουσα τὸν (θετικόν) ἀριθμόν  $\theta$ , τότε θὰ ἔχωμεν :

$$10^k \leq \theta < 10^{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ἐξ οὗ :

$$k \leq \log \theta < k + 1.$$

Ἄρα ὁ  $\log \theta$  ἢ θὰ εἶναι ἴσος μὲ  $k$  ἢ μὲ  $k + d$ , ὅπου  $0 < d < 1$ .

Ὅθεν τὸ χαρακτηριστικόν τοῦ λογαρίθμου  $\theta$  εἶναι ἴσον πρὸς  $k$ .

β'). Το χαρακτηριστικόν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ μεγαλύτερου τῆς μονάδος ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους αὐτοῦ, ἐλαττωθὲν κατὰ μονάδα.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι ὁ ἀριθμὸς  $\theta$  εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος. Ἐὰν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ  $\theta$  ἔχῃ  $k$  ψηφία, τότε ὁ  $\theta$  θὰ περιέχεται μεταξύ  $10^{k-1}$  καὶ  $10^k$ , ἥτοι θὰ ἔχωμεν :

$$10^{k-1} \leq \theta < 10^k.$$

Ἐξ οὗ :  $(k-1) \leq \log \theta < k.$

Ὅθεν τὸ χαρακτηριστικόν τοῦ  $\log \theta$  εἶναι ἴσον πρὸς  $(k-1)$ .

Οὕτω π.χ.  $\log 235 = 2, \dots$

$\log 5378,4 = 3, \dots$

$\log 3,748 = 0, \dots$

γ'). Το χαρακτηριστικόν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ μικροτέρου τῆς μονάδος γεγραμμένου ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, ἔχει τόσας ἀρνητικὰς μονάδας, ὅση εἶναι ἡ τάξις τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου του μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι ὁ θετικὸς ἀριθμὸς  $\theta$  εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος ( $0 < \theta < 1$ ). Ἐὰν  $k$  εἶναι ἡ θέσις τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν δεκαδικὴν μορφήν τοῦ  $\theta$ , θὰ εἶναι :

$$10^{-k} \leq \theta < 10^{-k+1}$$

Ἐξ οὗ :  $\log 10^{-k} \leq \log \theta < \log 10^{-k+1}$

ἢ  $-k \leq \log \theta < -k+1.$

Ὅθεν τὸ χαρακτηριστικόν τοῦ  $\log \theta$  εἶναι ἴσον πρὸς  $-k$ .

Οὕτω π.χ.  $\log 0,00729 = \bar{3}, \dots$

$\log 0,27508 = \bar{1}, \dots$

$\log 0,08473 = \bar{2}, \dots$

Παρατήρησις. Τῇ βοήθειᾳ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων δυνάμεθα νὰ εὕρισκωμεν νοερώς (ἀπὸ μνήμης) τὸ χαρακτηριστικόν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ.

Ἀντιστρόφως τώρα ἐκ τῶν ἰδιοτήτων β' καὶ γ' ἔπεται ὅτι :

δ'). Ἐὰν τὸ χαρακτηριστικόν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ (θετικοῦ)  $x$  εἶναι ἀριθμὸς θετικὸς ἢ μηδέν, τότε ὁ ἀριθμὸς  $x$  ἔχει τόσα ἀκέραια ψηφία ὅσας μονάδας ἔχει τὸ χαρακτηριστικόν καὶ ἔν ἀκόμῃ. Ἐὰν ὁ λογάριθμος τοῦ  $x$  εἶναι ἡμιαρνητικὸς, τότε τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ  $x$  εἶναι τὸ μηδέν, τὸ δὲ πρῶτον σημαντικὸν ψηφίον τοῦ  $x$  μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν κατέχει τάξιν ἴσην μὲ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ χαρακτηριστικοῦ.

Οὕτως, ἐὰν τὸ χαρακτηριστικόν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ τινος εἶναι 3, τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει τέσσαρα ψηφία· ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 0, τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει ἓν ψηφίον· ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 2, ὁ ἀριθμὸς εἶναι δεκαδικὸς τῆς μορφῆς  $0,0y_1y_2y_3y_4\dots$ , ἔνθα  $1 \leq y_1 \leq 9$ .

ε'). 'Εάν πολλαπλασιάσωμεν (ἢ διαιρέσωμεν) ἓνα ἀριθμὸν ἐπὶ  $10^v$ ,  $v \in \mathbb{N}$ , τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου δὲν μεταβάλλεται, τὸ χαρακτηριστικὸν ὅμως αὐτοῦ αὐξάνεται (ἢ ἐλαττοῦται) κατὰ  $v$  μονάδας.

'Απόδειξις. Ἐστω ὁ θετικὸς ἀριθμὸς  $\theta$  μὲ  $\log \theta = y_0, y_1 y_2 y_3 \dots$ .

Πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν  $\theta$  ἐπὶ  $10^v$ ,  $v \in \mathbb{N}$  ἔχομεν τότε :

$$\begin{aligned} \log (10^v \cdot \theta) &= \log 10^v + \log \theta = v + \log \theta = v + y_0, y_1 y_2 y_3 \dots = \\ &= (y_0 + v), y_1 y_2 y_3 \dots \end{aligned} \quad (1)$$

'Ομοίως, διαιροῦντες τὸν  $\theta$  διὰ τοῦ  $10^v$ ,  $v \in \mathbb{N}$  ἔχομεν :

$$\begin{aligned} \log \left( \frac{\theta}{10^v} \right) &= \log \theta - \log 10^v = -v + \log \theta = -v + y_0, y_1 y_2 y_3 \dots = \\ &= (y_0 - v), y_1 y_2 y_3 \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Αἱ ισότητες (1) καὶ (2) δεικνύουν ὅτι τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ  $\theta \cdot 10^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ  $\log \theta$ , τὸ χαρακτηριστικὸν ὅμως τοῦ  $\log (\theta \cdot 10^k)$  αὐξάνεται (ἢ ἐλαττοῦται, ἂν  $k$  ἀρνητικὸς ἀκέραιος) κατὰ  $k$  μονάδος ἐν σχέσει πρὸς τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ  $\log \theta$ .

Δυνάμει τῆς ἀνωτέρω ιδιότητος οἱ ἀριθμοὶ π.χ. 5, 50, 500, 5000, ... ἔχουν τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος εἰς τὸν λογάριθμόν τους. Ἐπίσης οἱ ἀριθμοὶ : 0,5, 0,05, 0,005, 0,0005, ...

**Πόρισμα.** — Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἔχουν τὰ αὐτὰ ψηφία καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, διαφέρουν δὲ μόνον ὡς πρὸς τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, οἱ λογάριθμοί των διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ χαρακτηριστικὸν των.

Οὕτως, ἐὰν εἶναι π.χ.  $\log 312,865 = 2,49536$ ,  
τότε θὰ εἶναι :  $\log 31,2865 = 1,49536$   
 $\log 0,312865 = 1,49536$   
 $\log 31286,5 = 4,49536$   
 $\log 3,12865 = 0,49536$ .

**§ 213. Πράξεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων.**— Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων γίνονται καθὼς καὶ αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν σχετικῶν ἀριθμῶν, μὲ παραλλαγὰς τινάς, ὅταν οἱ λογάριθμοι ἔχουν ἀρνητικὸν χαρακτηριστικόν. Ἐκτενέστερον ἔχομεν τὰ ἑξῆς :

**α'). Πρόσθεσις λογαρίθμων.** Διὰ νὰ προσθέσωμεν δεκαδικοὺς λογαρίθμους προσθέτομεν τὰ δεκαδικὰ μέρη, τὰ ὅποια εἶναι ὅλα θετικὰ καὶ τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν τὸ προσθέτομεν ἀλγεβρικῶς εἰς τὸ ἀλγεβρικὸν ἀθροίσμα τῶν ἀκεραίων μερῶν τῶν λογαρίθμων.

Π.χ. 1) Νὰ γίνῃ ἡ πρόσθεσις :  $\overline{5,57834} + \overline{3,67641}$ . Ἐχομεν :

$$\begin{array}{r} \overline{5,57834} \\ \overline{3,67641} \\ \hline \overline{7,25475} \end{array}$$

Προσθέτομεν τὰ δεκαδικὰ μέρη των, ὡς συνήθως, καὶ ἔχομεν τελικὸν κρατούμενον 1, ὅτε τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀθροίσματος εἶναι :

$$1 + (-3) + (-5) = -7 = \overline{7}.$$



2) Νά γίνη ἡ πρόσθεσις :  $2,85643 + 2,24482 + 3,42105 + 1,24207$ . Ἐχομεν :

$\overline{2,85643}$

$\overline{2,24482}$

$\overline{3,42105}$

$\overline{1,24207}$

$\overline{3,76437}$

Ἐνταῦθα τὸ ἄθροισμα τῶν δεκαδικῶν μερῶν ἔχει μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ συνεπῶς τὸ ἀκέραion μέρος τοῦ ἄθροίσματος εἶναι :

$$1 + (-1) + (-3) + 2 + (-2) = -3 = \overline{3}.$$

β'). Ἀφαίρεσις λογαρίθμων. Ἡ ἀφαίρεσις λογαρίθμων γίνεται, ὅπως καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν συνήθων δεκαδικῶν ἀριθμῶν, ἡ δὲ διαφορά τῶν δεκαδικῶν μερῶν εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς. Ἐὰν ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν μερῶν προκύψῃ τελικῶς κρατούμενον, τοῦτο εἶναι θετικὸν καὶ προστίθεται (ἀλγεβρικῶς) μὲ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ἀφαιρετέου, ἀκολουθῶν δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ μειωτέου.

Π.χ. 1) Νά γίνη ἡ ἀφαίρεσις :  $\overline{2,83754} - \overline{5,32452}$ . Ἐχομεν :

$\overline{2,83754}$

$\overline{5,32452}$

$\overline{3,51302}$

Ἐνταῦθα δὲν ὑπάρχει κρατούμενον, τὸ δὲ χαρακτηριστικὸν ἰσοῦται

$$\text{πρὸς : } -2 - (-5) = 3.$$

2) Νά γίνη ἡ ἀφαίρεσις :  $\overline{3,48765} - \overline{2,75603}$ . Ἐχομεν :

$\overline{3,48765}$

$\overline{2,75603}$

$\overline{2,73162}$

Ἐνταῦθα τὸ τελικὸν κρατούμενον εἶναι 1, τὸ δὲ χαρακτηριστικὸν

$$\text{ἰσοῦται πρὸς : } -3 - (-2 + 1) = -3 - (-1) = -2 = \overline{2}.$$

3) Ὅμοιως ἔχομεν :

$\overline{2,95842}$

$\overline{5,76923}$

$\overline{3,18919}$

$\overline{5,67835}$

$\overline{0,85632}$

$\overline{6,82203}$

$\overline{0,35893}$

$\overline{3,44972}$

$\overline{2,90921}$

$\overline{2,72125}$

$\overline{5,28582}$

$\overline{3,43543}$

Παρατήρησις. Ὡς γνωστὸν (§ 208) εἶναι :

$$\log \alpha - \log \beta = \log \alpha + \text{συλλογ}\beta,$$

ἤτοι ἡ ἀφαίρεσις ἐνὸς λογαρίθμου ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τοῦ συλλογαρίθμου του.

Ὑπολογισμὸς τοῦ συλλογαρίθμου ἐνὸς ἀριθμοῦ, γνωστοῦ ὄντος τοῦ λογαρίθμου του.

Ἐστω ὅτι εἶναι  $\log \beta = 2,54675$ . Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$\text{συλλογ}\beta = -\log \beta = -2,54675.$$

(1)

Ἐπειδὴ (§ 211)

$$-2,54675 = \overline{3,45325}, \text{ ἡ ἰσότης (1) γίνεται :}$$

$$\text{συλλογ}\beta = \overline{3,45325}.$$

Ἐντεῦθεν ἔπεται ὁ ἐξῆς :

**Κανὼν.** Διὰ τὰ εὗρωμεν τὸν συλλογαρίθμον ἐνὸς ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποῖον γνωρίζομεν τὸν λογαρίθμον, προσθέτομεν εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τὸ + 1 καὶ τοῦ ἄθροίσματος ἀλλάσσομεν τὸ σημεῖον, ἀκολουθῶν ἀφαιροῦμεν τὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ μέρους ἀπὸ τοῦ 9, ἐκτὸς τελευταίου σημαντικοῦ, τὸ ὁποῖον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 10.

Κατά ταῦτα ἔχομεν :

Ἐάν  $\log \alpha = \bar{1},37260 \Rightarrow \text{συλλογα} = 0,62740$

Ἐάν  $\log 0,06543 = \bar{2},81578 \Rightarrow \text{συλλογ } 0,06543 = 1,18422.$

γ'). Πολλαπλασιασμός ἑνὸς λογαρίθμου ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμόν.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

i). Ἐάν ὁ ἀκέραιος εἶναι θετικός, τότε πολλαπλασιάζομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀκέραιον καὶ γράφομεν μόνον τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ γινομένου, τὸ δὲ ἀκέραιον μέρος τοῦ γινομένου τὸ προσθέτομεν ἀλγεβρικῶς εἰς τὸ γινόμενον τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀκέραιον.

Π.χ. Νὰ γίνη ὁ πολλαπλασιασμός :  $\bar{2},65843 \times 4$ . Ἐχομεν :

$\bar{2},65843$

4

$\bar{6},63372$

Ἐνταῦθα τὸ τελικὸν κρατούμενον εἶναι 2, τὸ δὲ χαρακτηριστικὸν τοῦ γινομένου ἰσοῦται πρὸς :  $(-2) \cdot 4 + 2 = -6 = \bar{6}$ .

ii). Ἐάν ὁ ἀκέραιος εἶναι ἀρνητικός, τότε πολλαπλασιάζομεν τὸν συλλογὰριθμον τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν ἀντίθετον τοῦ ἀκεραίου καὶ οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν.

Π.χ. Νὰ γίνη ὁ πολλαπλασιασμός :  $3,67942 \times (-4)$ .

Ἐάν  $\log x = \bar{3},67942 \Rightarrow \text{συλλογ} x = 2,32058$  καὶ συνεπῶς :

$$\bar{3},67942 \times (-4) = 2,32058 \times 4 = 9,28232.$$

δ'). Διαίρεσις ἑνὸς λογαρίθμου δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

1). Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸν λογθ διὰ θετικοῦ ἀκεραίου (φυσικοῦ) ἀριθμοῦ  $k$ , ἐφ' ὅσον μὲν  $\log \theta > 0$  ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τοὺς δεκαδικούς ἀριθμούς· ἐάν ὅμως ὁ  $\log \theta$  εἶναι ἡμισαρνητικὸς ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

1α). Ἐάν ὁ  $k$  διαιρῇ (ἀκριβῶς) τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ  $\log \theta$ , τότε διαιρούμεν χωριστὰ τὸ δεκαδικὸν μέρος καὶ χωριστὰ τὸ χαρακτηριστικὸν καὶ προσθέτομεν τὰ πηλίκα.

1β). Ἐάν ὁ  $k$  δὲν διαιρῇ τὸ χαρακτηριστικὸν, τότε προσθέτομεν εἰς αὐτὸ τὸν μικρότερον ἀρνητικὸν ἀκέραιον  $-μ$  οὕτως, ὥστε νὰ καταστῇ διαιρετὸν διὰ τοῦ  $k$ , ἀκολουθῶς προσθέτομεν τὸν  $+μ$  εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος (τὸ ὅποιον εἶναι τὸ μηδέν) τοῦ δεκαδικοῦ μέρους καὶ εὐρίσκομεν χωριστὰ τὰ πηλίκα τῶν δύο αὐτῶν μερῶν διὰ τοῦ  $k$ , τὰ ὅποια καὶ προσθέτομεν τελικῶς.

Π.χ. Νὰ γίνουν αἱ διαιρέσεις : 1)  $(\bar{6},54782) : 3$  καὶ 2)  $(5,62891) : 3$  :

Αὗται γίνονται ὡς ἑξῆς :

|    |                 |                       |
|----|-----------------|-----------------------|
| 1) | $\bar{6},54782$ | 3                     |
|    | $\bar{6}$       | $\bar{2} + 0,18260 =$ |
|    | $0 + 0,54782$   | $= \bar{2},18260$     |
|    | 24              |                       |
|    | 07              |                       |
|    | 18              |                       |
|    | 02              |                       |

|    |                             |                       |
|----|-----------------------------|-----------------------|
| 2) | $5,62891$                   | 3                     |
|    | $5 + \bar{1} + 1 + 0,62891$ | $\bar{2} + 0,54297 =$ |
|    | $\bar{6} + 1,62891$         | $= 2,54297$           |
|    | $\bar{6}$                   |                       |
|    | $0 + 1,62891$               |                       |
|    | 12                          |                       |
|    | 08                          |                       |
|    | 29                          |                       |
|    | 21                          |                       |
|    | 0                           |                       |

2. Διὰ τὴν διαιρέσωμεν τὸν λογθ διὰ τοῦ ἀρνητικοῦ ἀκεραίου  $k$  διαιρούμεν τὸν συλλογθ διὰ τοῦ  $-k > 0$ .

Π.χ. Νὰ γίνη ἡ διαίρεσις :  $(5,92158) : (-2)$ . Ἐχομεν :

Ἐὰν  $\log x = 5,92158 \implies \text{συλλογ} x = \overline{6},07842$ , ὅτε θὰ ἔχωμεν :

$$(5,92158) : (-2) = (\overline{6},07842) : 2 = \overline{3},03921.$$

## Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

459. Νὰ γίνουν ἡμιαρνητικοί οἱ λογάριθμοι :

- 1)  $-2,32254$     2)  $-0,69834$     3)  $-1,27218$     4)  $-3,54642$   
5)  $-0,41203$     6)  $-5,78952$     7)  $-0,00208$     8)  $-2,05024$ .

460. Γράψατε τὸ χαρακτηριστικὸν τῶν λογαρίθμων τῶν κάτωθι ἀριθμῶν :

- 1) 135    2) 2050    3) 9,5    4) 0,003    5) 382,27  
6) 47,5    7)  $\frac{17}{3}$     8) 12,25    9) 0,56    10) 3041,7.

461. Πόσα ἀκέραια ψηφία ἔχει ἀριθμός, τοῦ ὁποῦ οἱ λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικόν :

$$3, 5, 0, 1, 7, 4, 2 ;$$

462. Ποία εἶναι ἡ τάξις τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποῦ οἱ λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικόν :  $-1, -2, -3, -4, -5, -7$  ;

463. Ἐὰν  $\log \alpha = \overline{1},63819$  καὶ  $\log 4347 = 3,63819$ , νὰ εὑρεθῇ ὁ  $\alpha$ .

464. Δοθέντος ὅτι  $\log 7 = 0,84510$ , εὑρετε τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν :

$$7 \cdot 10^3, \quad 7 \cdot 10^1, \quad \frac{7}{10^2}, \quad \frac{7}{10^5}.$$

465. Ἐὰν  $\log 7283 = 3,86231$ , νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τῶν ἀριθμῶν :

$$0,7283, \quad 7,283, \quad 0,007283, \quad 728300, \quad 728,3.$$

466. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα :

$$\log 724 - \log 7,24, \quad \log 0,65 - \log 6,5, \quad \log 17,62 - \log 1,762.$$

467. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ συλλογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν μὲ τοὺς κάτωθι λογαρίθμους :

1.  $\overline{3},27284$     2.  $0,07257$     3.  $1,71824$ ,  
4.  $5,27203$     5.  $\overline{4},75304$     6.  $\overline{1},03275$ .

468. Ἐὰν  $\log \alpha = \overline{2},29814$  καὶ  $\log \beta = \overline{2},84212$ , ὑπολογίσατε τὰ :

1.  $\log \alpha + \log \beta$ ,    2.  $\log \alpha - \log \beta$ ,    3)  $3 \log \alpha + 5 \log \beta$ ,  
4.  $2 \log \beta - \frac{3}{4} \log \alpha$ ,    5.  $\frac{7}{5} (\log \alpha + \log \beta) - \frac{3}{4} (\log \alpha - \log \beta)$ .

469. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα :

1.  $\overline{5},27214 + 3,4751 + \overline{1},81523 + 0,47214$   
2.  $4,67471 + \overline{2},14523 + 0,67215 + \overline{3},04703$ .

470. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον τῶν κάτωθι πράξεων :

1.  $\overline{3},24518 + 1,41307 - \overline{2},47503$   
2.  $0,03182 - \overline{4},27513 + \overline{3},82504 - \overline{1},08507$ .

471. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα :

1.  $\overline{3},82307 \times 5$ ,    2.  $0,24507 \times (-2)$ ,    3.  $\overline{1},24513 \times 4$ .

472. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις :

1.  $\overline{4},89524 : 3,$       2.  $\overline{5},60106 : (-3),$       3.  $\overline{4},57424 : \left(-\frac{3}{7}\right),$
4.  $\overline{1},42118 : 4,$       5.  $\overline{6},27508 : (-2),$       6.  $\overline{8},32403 : 4.$

473. Ἐὰν  $K$  εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων οἱ λογάριθμοι ἔχουν χαρακτηριστικὸν  $k$  καὶ  $\Lambda$  εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων, τῶν ὁποίων οἱ ἀντίστροφοι ἔχουν λογάριθμους μὲ χαρακτηριστικὸν  $-\lambda$  ( $\lambda > 0$ ), νὰ δεიχθῇ ὅτι :

$$\log K - \log \Lambda = k - \lambda + 1.$$

## Περὶ λογαριθμικῶν πινάκων

**§ 214.**—Εἶδομεν εἰς τὴν § 209 ὅτι, ἐκτὸς τῶν συμμετρων δυνάμεων τοῦ 10, πάντων τῶν ἄλλων θετικῶν ἀριθμῶν οἱ λογάριθμοι εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ καὶ ἔχουν διὰ τοῦτο ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά. Ἐνεκα τούτου εὐρίσκουμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν τούτων κατὰ προσέγγισιν (συνήθως 0,00001). Ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου  $\log \frac{1}{\alpha} = -\log \alpha$ , ἔπεται ὅτι, ἂν γνωρίζωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν τῶν  $> 1$ , δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν καὶ τοὺς λογαρίθμους τῶν θετικῶν ἀριθμῶν τῶν  $< 1$ .

Ἐξ ἄλλου εἶδομεν ὅτι ὁ λογάριθμος ἐνὸς ἀριθμοῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη : Ἀπὸ τὸ **χαρακτηριστικόν** του καὶ ἀπὸ τὸ **δεκαδικόν** του μέρους.

Τὸ χαρακτηριστικόν του ἐδείξαμεν εἰς τὴν § 212, πῶς ὑπολογίζεται ἀπὸ μνήμης.

Τὸ δεκαδικόν μέρος τοῦ λογαρίθμου δύναται νὰ ὑπολογισθῇ εἰς οἷονδήποτε ἐπιθυμητὸν βαθμὸν προσεγγίσεως μὲ δεκαδικὰ ψηφία, τῇ βοηθείᾳ μεθόδων αἱ ὁποῖαι ἀναπτύσσονται εἰς τὰ ἀνώτερα μαθηματικά. Τῇ βοηθείᾳ τῶν μεθόδων τούτων τὸ δεκαδικόν μέρος τῶν λογαρίθμων ὅλων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 καὶ ἐφεξῆς, συνήθως μέχρι τοῦ 10.000, εὐρέθη καὶ κατεγράφη εἰς πίνακας, οἱ ὁποῖοι λέγονται **λογαριθμικοὶ πίνακες** ἢ «**πίνακες τοῦ δεκαδικοῦ μέρους**».

Τοιοῦτοι πίνακες ὑπάρχουν διαφόρων εἰδῶν. Εἰς περιέχει τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 ἕως 10.000 μὲ 7 δεκαδικὰ ψηφία. Ἄλλος μὲ 11 δεκαδικὰ ψηφία. Ἄλλος μὲ 14 δεκαδικὰ ψηφία καὶ ἄλλος μὲ 5 δεκαδικὰ ψηφία. Διὰ τὰς συνήθεις ὁμως ἐφαρμογὰς ἀρκεῖ ὁ πενταψήφιος πίναξ, τοῦ ὁποίου ὑπάρχουν καὶ Ἑλληνικαὶ ἐκδόσεις κατὰ τὸ σύστημα Dupuis.

Τοῦτον θὰ περιγράψωμεν συντόμως εἰς τὰ ἐπόμενα καὶ θὰ ἐκθέσωμεν καὶ τὸν τρόπον τῆς χρήσεως αὐτοῦ.

**§ 215. Περιγραφή τῶν λογαριθμικῶν πινάκων Dupuis.**— Οἱ λογαριθμικοὶ πίνακες Dupuis περιέχουν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 10.000. Ἡ διάταξις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων φαίνεται εἰς τὸν ἑνᾶν τι «**πίνακα**», ὅστις ἔχει ληφθῇ ἐκ τῆς γαλλικῆς ἐκδόσεως τοῦ J. Dupuis.

| N   | 0     | 1   | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
|-----|-------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 500 | 69897 | 906 | 914  | 923  | 932  | 940  | 949  | 958  | 966  | 975  |
| 1   | 984   | 992 | *001 | *010 | *018 | *027 | *036 | *044 | *053 | *062 |
| 2   | 70070 | 079 | 088  | 096  | 105  | 114  | 122  | 131  | 140  | 148  |
| 3   | 157   | 165 | 174  | 183  | 191  | 200  | 209  | 217  | 226  | 236  |
| 4   | 243   | 252 | 260  | 269  | 278  | 286  | 295  | 303  | 312  | 321  |
| 5   | 329   | 338 | 346  | 355  | 364  | 372  | 381  | 389  | 398  | 406  |
| 6   | 415   | 424 | 432  | 441  | 449  | 458  | 467  | 475  | 484  | 492  |
| 7   | 501   | 509 | 518  | 526  | 535  | 544  | 552  | 561  | 569  | 578  |
| 8   | 586   | 595 | 603  | 612  | 621  | 629  | 638  | 646  | 655  | 663  |
| 9   | 672   | 680 | 689  | 697  | 706  | 714  | 723  | 731  | 740  | 749  |
| 510 | 757   | 766 | 774  | 783  | 791  | 800  | 808  | 817  | 825  | 834  |
| 1   | 842   | 851 | 859  | 868  | 876  | 885  | 893  | 902  | 910  | 919  |
| 2   | 927   | 935 | 944  | 952  | 961  | 969  | 978  | 986  | 995  | *003 |
| ... | ..... | ... | ...  | ...  | ...  | ...  | ...  | ...  | ...  | ...  |
| 549 | 73957 | 965 | 973  | 981  | 989  | 997  | *005 | *013 | *020 | *028 |
| N   | 0     | 1   | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |

Εἰς τὴν πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλην, ἄνωθεν τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ γράμμα Ν (Nombres = ἀριθμοί), εἰς δὲ τὰς ἑλληνικὰς ἐκδόσεις τὸ γράμμα Α (ἀριθμοί), εἶναι γραμμέναι αἱ δεκάδες τῶν ἀριθμῶν, αἱ δὲ μονάδες αὐτῶν εἶναι εἰς τὴν αὐτὴν ὀριζοντίαν γραμμὴν μετὰ τοῦ Ν. Εἰς τὰς ἄλλας στήλας εἶναι γραμμένα τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων. Τὰ δύο ψηφία, τὰ ὅποια εἰς τὴν δευτέραν στήλην βλέπομεν ὅτι ἐξέχουν, νοοῦνται ἐπαναλαμβανόμενα, μέχρις οὗ ἀλλάξουν. Καὶ τοῦτο, διότι πολλοὶ ἐφεξῆς λογάριθμοι ἔχουν τὰ δύο πρῶτα ψηφία κοινὰ.

Ὁ λογάριθμος ἐκάστου ἀριθμοῦ εὐρίσκεται ἐκεῖ ὅπου διασταυροῦνται αἱ δύο νοηταὶ γραμμαί, ἡ ἐκ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ἀγομένη κατακόρυφος καὶ ἡ ἐκ τοῦ συνόλου τῶν δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ ἀγομένη ὀριζοντία.

Ὁ ἀστερίσκος τὸν ὅποιον βλέπομεν νὰ προτάσσεται τῶν τριῶν τελευταίων δεκαδικῶν ψηφίων εἰς τινὰς λογαρίθμους, φανερῶνται ὅτι τὰ δύο παραλειπόμενα πρῶτα ψηφία ἤλλαξαν καὶ πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ ἀμέσως ἐπόμενα.

Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα καὶ βάσει τοῦ ἀνωτέρω «πίνακος», ἔχομεν ὅτι :

|                    |                     |                     |
|--------------------|---------------------|---------------------|
| λογ 500 = 2,69897, | λογ 5047 = 3,70303, | λογ 5084 = 3,70621  |
| λογ 503 = 2,70157, | λογ 5128 = 3,70995, | λογ 5017 = 3,70044  |
| λογ 512 = 2,70927, | λογ 5129 = 3,71003, | λογ 5060 = 3,70415. |

**§ 216. Χρήσις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.**— Τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας χρησιμοποιοῦμεν πρὸς ἐπίλυσιν τῶν ἀκολουθῶν προβλημάτων :

- 1) Νὰ εὐρεθῇ ὁ λογάριθμος δοθέντος ἀριθμοῦ, καὶ
- 2) Νὰ εὐρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὁ ὅποιος ἀντιστοιχεῖ εἰς δοθέντα λογάριθμον.

### § 217. Πρόβλημα 1.— Να εύρεθῇ ὁ λογάριθμος δοθέντος ἀριθμοῦ.

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τούτου ὑποθέτομεν πρῶτον, ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι πάντοτε γεγραμμένος ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, καὶ δεύτερον, ὅτι χρησιμοποιοῦμεν πενταψηφίους πίνακες. Οἱ πίνακες οὗτοι θὰ μᾶς δώσουν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου, διότι τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ θὰ τὸ εὔρωμεν ἀπὸ μνήμης, συμφώνως πρὸς τὰς ιδιότητας β' καὶ γ' τῆς § 212. Διὰ τὴν εὔρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους, δέον νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι :

Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου ἐνὸς ἀριθμοῦ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν ἀκολουθίαν τῶν καλουμένων σημαντικῶν ψηφίων, ἡ ὁποία ἐπιτυγχάνεται παραλείποντες τὴν τυχὸν ὑπάρχουσαν ὑποδιαστολὴν καὶ τὰ μηδενικὰ τὰ ὁποῖα τυχὸν ὑπάρχουν εἰς τὴν ἀρχὴν ἢ εἰς τὸ τέλος τοῦ ἐν λόγῳ ἀριθμοῦ.

Συνεπῶς κατὰ τὴν εὔρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου θὰ καθιστῶμεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἀκέραιον, ἥτοι θὰ παραλείπωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν. Τοῦτο, ὡς εἶδομεν (§ 212, ιδ. ε'), δὲν μεταβάλλει τὸ ζητούμενον δεκαδικὸν μέρος. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν, ὅτι τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν ἀριθμῶν :

50,87      0,05087      508,70      5087000      5,0870

εἶναι τὰ αὐτὰ μὲ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ ἀριθμοῦ 5087.

Ἦδη πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ τεθέντος προβλήματος διακρίνομεν τὰς κάτωθι δύο περιπτώσεις :

**Περίπτωσις α'.** Ὁ ἀριθμὸς περιέχεται εἰς τοὺς πίνακες, ἥτοι ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχει περισσότερα τῶν τεσσάρων σημαντικῶν ψηφίων.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν, ἀφοῦ εὔρωμεν κατ' ἀρχὴν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἐν λόγῳ ἀριθμοῦ, εὐρίσκομεν ἀκολούθως καὶ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀμέσως ἐκ τῶν πινάκων, ἀρκεῖ νὰ εὔρωμεν τὸν ἐν λόγῳ ἀριθμὸν εἰς τοὺς πίνακες, ὡς ἐξετέθη εἰς προηγουμένην παράγραφον (§ 215).

**Παράδειγμα :** Να εύρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ 56,82.

**Λύσις :** Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου εἶναι 1. Τὸ δεκαδικὸν μέρος εἶναι τὸ αὐτὸ (§ 212) μὲ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 5682. Ἀλλὰ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογ 5682, ὡς εἰς τοὺς πίνακες φαίνεται, εἶναι τὸ 75450. Ἀρα  $\log 56,82 = 1,75450$ .

Ὁμοίως εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\begin{array}{l|l} \log 568,2 = 2,75450 & \log 0,8703 = 1,93967 \\ \log 0,000507 = \overline{4},70501 & \log 3,74 = 0,57287. \end{array}$$

**Περίπτωσις β'.** Ὁ ἀριθμὸς δὲν περιέχεται εἰς τοὺς πίνακες, ἥτοι οὗτος ἔχει περισσότερα τῶν τεσσάρων ψηφίων.

Εὐρίσκομεν πρῶτον, ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν α', τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου. Κατόπιν, διὰ τὴν εὔρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου, χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς τὰ τέσσαρα πρῶτα ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον γεγραμμένος πλέον ὁ ἀριθμὸς, περιέχεται μεταξύ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων μὲ τέσσαρα ψηφία. Ἡ εὔρεσις ἐν συνεχείᾳ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους ἐπιτυγχάνεται ἔχοντες ὑπ' ὄψιν, ἀφ' ἐνὸς μὲν τὴν γνωστὴν ιδιότητά, καθ' ἣν :

Ἐὰν  $a, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+$  καὶ εἶναι  $a < \beta < \gamma \iff \log a < \log \beta < \log \gamma$   
καὶ ἀφ' ἑτέρου τὴν παραδοχὴν, καθ' ἣν :

Διὰ μικρὰς μεταβολὰς τῶν ἀριθμῶν, αἱ μεταβολαὶ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους εἶναι ἀνάλογοι τῶν μεταβολῶν τῶν ἀριθμῶν (κατὰ προσέγγισιν, ὅταν αἱ μεταβολαὶ τῶν ἀριθμῶν εἶναι μικρότεροι τῆς μονάδος) καὶ ἀντιστρόφως.

Ἡ ἀνωτέρω παραδοχὴ δὲν εἶναι τελείως ἀληθής, ἀκριβέστερον αἱ μεταβολαὶ τῶν λογαρίθμων δὲν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς μεταβολὰς τῶν ἀριθμῶν.

Πράγματι, θεωρήσωμεν δύο διαδοχικοὺς ἀκεραίους  $\alpha$  καὶ  $\alpha + 1$ ,  $\alpha > 0$  καὶ καλέσωμεν  $\delta$  τὴν διαφορὰν :  $\log(\alpha + 1) - \log \alpha$ , ἥτοι :

$$\delta = \log(\alpha + 1) - \log \alpha \quad \eta \quad \delta = \log \frac{\alpha + 1}{\alpha}$$
$$\eta \quad \delta = \log \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right).$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι : διὰ  $\alpha \rightarrow \infty$ , ὅτε  $\frac{1}{\alpha} \rightarrow 0$ , ἔχομεν :

$$\log \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) \rightarrow 0,$$
$$\eta \quad \delta \rightarrow 0.$$

Ὡστε, ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων δὲν μένει πάντοτε ἡ αὐτή, ἀλλὰ ἐλαττοῦται καθ' ὅσον οἱ ἀριθμοὶ αὐξάνουν καὶ κατ' ἀκολουθίαν δὲν ἀληθεύει ὅτι ἡ αὐξησης τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν ἀριθμῶν.

Ἐπειδὴ ὁμως ἡ διαφορὰ αὕτη μένει ἐπὶ πολλοὺς ἀριθμοὺς ἀμετάβλητος, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν, ὡς ἔγγιστα, τὴν αὐξησην τῶν λογαρίθμων ἀνάλογον πρὸς τὴν αὐξησην τῶν ἀριθμῶν.

Κατόπιν τούτων, διὰ τὴν εὑρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὰ κατωτέρω παραδείγματα ἐμφαίνεται.

**Παράδειγμα 1ον :** Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ 17424.

**Λύσις :** Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου εἶναι 4. Χωρίζομεν τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ δι' ὑποδιαστολῆς τὰ τέσσαρα πρῶτα ψηφία καὶ οὕτως ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 1742,4. Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς καὶ ὁ 1742,4 ἔχουν (§ 212) τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου των. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὑρωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 1742,4.

Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : Ἐπειδὴ, προφανῶς, εἶναι :

$$1742 < 1742,4 < 1743,$$
$$\eta \quad \log 1742 < \log 1742,4 < \log 1743.$$

Ἐκ τῆς ἀνισότητος ταύτης, ἐπειδὴ, ὡς ἐκ τῶν πινάκων φαίνεται, εἶναι :

$$\log 1742 = 3,24105 \quad \text{καὶ} \quad \log 1743 = 3,24130, \quad \text{προκύπτει :}$$
$$3,24105 < \log 1742,4 < 3,24130.$$

Ἡτοι ὁ ζητούμενος λογάριθμος περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 3,24105 καὶ 3,24130, οἱ ὅποιοι διαφέρουν κατὰ 25 μονάδας πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως (μ.ε'.δ.π.)

Ἐκ τῶν πινάκων βλέπομεν ἐπίσης ὅτι τοῦ ἀριθμοῦ αὐξανόμενον κατὰ 2, 3, 4, 5, ... ἀκεραίας μονάδας ὁ λογάριθμος αὐτοῦ αὐξάνεται ἀντιστοίχως κατὰ 50, 75, 99, 125, ... μ.ε'.δ.π.

Δυνάμεθα ὅθεν νὰ θεωρήσωμεν τὴν αὐξησιν τοῦ λογαρίθμου ὡς ἔγγιστα ἀνάλογον πρὸς τὴν αὐξησιν τοῦ ἀριθμοῦ καὶ νὰ ὑπολογίσωμεν πόσον πρέπει νὰ αὐξηθῇ ὁ  $\log 1742 = 3,24105$  διὰ νὰ προκύψῃ ὁ  $\log 1742,4$  καὶ ἐξ αὐτοῦ ὁ  $\log 17424$ . Ὁ ὑπολογισμὸς γίνεται ὡς ἑξῆς :

Εἰς αὐξησιν τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ 1 ἀντιστοιχεῖ αὐξ. τοῦ λογ. κατὰ 25 μ.ε'.δ.τ

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0,4 & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

"Αρα :  $x = 25 \cdot 0,4 = 10$  μ.ε'.δ.τ.

Κατ' ἀκολουθίαν :

$$\log 1742,4 = 3,24105 + 0,00010 = 3,24115$$

καὶ συνεπῶς

$$\log 17424 = 4,24115.$$

Αἱ ἀνωτέρω πράξεις διατάσσονται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{l} \log 1742 = 3,24105 \\ \log 1743 = 3,24130 \\ \hline \Delta = 25 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Αὐξησης ἀριθμῶν 1 αὐξησις λογαρίθμων 25 μ.ε'.δ.τ.} \\ \text{» » 0,4 » » x ; »} \\ \hline x = 25 \cdot 0,4 = 10 \text{ μ.ε'.δ.τ.} \end{array}$$

"Αρα :  $\log 17424 = 4,24105 + 0,00010 = 4,24115.$

Εὐρέθεντος ὅτι  $\log 17424 = 4,24115$  ἔχομεν :

$$\log 17,424 = 1,24115, \quad \log 0,0017424 = 3,24115,$$

$$\log 1,7424 = 0,24115, \quad \log 174,24 = 2,24115.$$

### Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὐρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 24,3527.

Λύσις : Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου εἶναι προφανῶς 1. Ἐὰν δὲ πάλιν λαπλασιάσωμεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἐπὶ 100, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου μένει (§ 212) ἀμετάβλητον. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὐρωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 2435,27.

Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, ἦτοι :

$$\begin{array}{l} \log 2435 = 3,38650 \\ \log 2436 = 3,38668 \\ \hline \Delta = 18 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Αὐξησης ἀριθμῶν 1 αὐξησις λογαρίθμων 18 μ.ε'.δ.τ.} \\ \text{» » 0,27 » » x ; »} \\ \hline x = 18 \cdot 0,27 = 4,86 \simeq 5 \text{ μ.ε'.δ.τ.} \end{array}$$

"Αρα :  $\log 24,3527 = 1,38650 + 0,00005 = 1,38655.$

**Σημείωσις :** Εἰς τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακες ὑπάρχουν ἐκτὸς τοῦ πλαισίου πινακίδια, ἕκαστον τῶν ὁποίων φέρει ὡς ἐπικεφαλίδα μίαν τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σελίδι διαφορῶν μεταξὺ τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν. Ἐκαστον πινακίδιον διαιρεῖται δι' εὐθείας γραμμῆς εἰς δύο στήλας. Τούτων ἡ πρώτη φέρει τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, ..., 9, οἱ ὅποιοι φανερόνουν δέκατα τῆς ἀκεραίας μονάδος, ἡ δὲ ἄλλη τὰς ἀντιστοίχους τῶν λογαρίθμων αὐξήσεις εἰς μονάδας τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξεως. Τῇ βοήθειᾳ τούτων ὑπολογίζομεν ἀμέσως τὰς αὐξήσεις τῶν λογαρίθμων, αἱ ὁποῖαι ὀφείλονται εἰς δοθείσας διαφορὰς ( $\Delta$ ) τῶν ἀριθμῶν καὶ τοῦτο διότι τὰυτὰ δίδουν ἀπ' εὐθείας, διὰ τὰς διαφορὰς διαφορὰς  $\Delta$ , τὰς τιμὰς :

$$\frac{\Delta \times 1}{10}, \quad \frac{\Delta \times 2}{10}, \quad \dots, \quad \frac{\Delta \times 9}{10}.$$

Οὕτως, ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ λογαρίθμου τοῦ παραδείγματος 2 γίνεται μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ πινακιδίου, τὸ ὁποῖον φέρει ἐπικεφαλίδα τὴν διαφορὰν  $\Delta = 18$ .

Εἰς τὸ πινακίδιον τοῦτο ἀπέναντι τοῦ 2 (στήλῃ α') εἶναι 3,6 καὶ ἀπέναντι τοῦ 7 εἶναι 12,6, ἀλλὰ ἐπειδὴ τὸ ψηφίον 7 παριστᾷ εἰς τὸν ἀριθμὸν 2435,27 ἑκατοστὰς, ἦτοι μονάδας 10 φορές μικροτέρας, πρέπει νὰ λάβωμεν 1,26. Ὡστε εἰς αὐξησιν τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ 0,27 ἀντιστοιχεῖ αὐξησης τοῦ λογαρίθμου κατὰ  $3,6 + 1,26 = 4,86 \simeq 5$  μ.ε'.δ.τ.

| 18 |      |
|----|------|
| 1  | 1,8  |
| 2  | 3,6  |
| 3  | 5,4  |
| 4  | 7,2  |
| 5  | 9,0  |
| 6  | 10,8 |
| 7  | 12,6 |
| 8  | 14,4 |
| 9  | 16,2 |



Διάταξις τῶν πράξεων.

|             |             |             |             |               |
|-------------|-------------|-------------|-------------|---------------|
|             | λογ 2435    |             | = 3,38650   | $\Delta = 18$ |
| Εἰς αὐξησην | 0,2         | αὐξησης λογ | 3,6         |               |
| » »         | 0,07        | » »         | 1,26        |               |
| ἄρα         | λογ 2435,27 |             | = 3,3865486 |               |

καὶ ἐπειδὴ τὸ βον ψηφίον τοῦ δεκ. μέρους εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 5, αὐξάνομεν κατὰ μονάδα τὸ 5ον ψηφίον. Ἄρα θὰ εἶναι  $\log 2435,27 = 3,38655$  καὶ κατ' ἀκολουθίαν  $\log 24,3527 = 1,38655$ .

**§ 218. Πρόβλημα II. (ἀντίστροφον).—** Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς δοθέντα λογάριθμον.

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἀναζητοῦμεν πρῶτον εἰς τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου. Ἐνεκα τούτου διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον τὸ δεκαδικὸν τοῦτο μέρος ἀναγράφεται ἢ μὴ εἰς τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας. Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου ἐπιτρέπει τὸν καθορισμὸν, συμφώνως πρὸς τὴν ιδιότητα δ' τῆς § 212, τοῦ πλήθους τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ.

Ἀκριβέστερον ἐργαζόμεθα ὡς κάτωθι :

**Περίπτωσις α'.**— Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου εὐρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας.

Ἐστω ὅτι θέλομεν νὰ εὑρωμεν τὸν θετικὸν ἀριθμὸν  $x$ , διὰ τὸν ὁποῖον εἶναι:

$$\log x = 2,62716.$$

**Λύσις :** Χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸ χαρακτηριστικὸν 2 ἀναζητοῦμεν πρῶτον εἰς τὴν στήλην Ο τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τὸν ἀριθμὸν 62, ποῦ ἀποτελοῦν τὰ δύο πρῶτα ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου, ἀκολουθῶς ἀναζητοῦμεν εἰς τὸν πίνακα τὰ ἕτερα τρία ψηφία 716. Οὕτω βλέπομεν ὅτι ταῦτα κεῖνται εἰς τὴν 423ην ὀριζοντίαν γραμμὴν καὶ στήλην 8· τὰ ψηφία λοιπὸν, μὲ τὰ ὁποῖα γράφεται ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς καὶ ἡ διαδοχὴ αὐτῶν εἶναι ἡ ἀκόλουθος 4, 2, 3, 8. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς λοιπὸν θὰ εἶναι ὁ ἔχων 423 δεκάδας καὶ 8 μονάδας, ἥτοι ὁ 4238. Ἐπειδὴ δὲ ὁ λογάριθμός του ἔχει χαρακτηριστικὸν 2, ἔπεται (§ 212, δ') ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ ἔχη τρία ἀκέραια ψηφία. Ἄρα ἔχομεν :

$$x = 423,8.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὐρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸν λογάριθμον π.χ.  $\overline{3},75343$  ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 0,005668. Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ  $\overline{3} = -3$  φανερώνει ὅτι ὑπάρχουν τρία μηδενικά πρὸ τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου 5 τοῦ 5668 (βλ. § 212, δ').

**Σημείωσις :** Ἐστω ὅτι θέλομεν νὰ εὑρωμεν τὸν ἀριθμὸν  $x$ , διὰ τὸν ὁποῖον εἶναι  $\log x = 2,63022$ . Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ 022 δὲν εὐρίσκεται εἰς τὰς σειρὰς τοῦ 63. Τότε ἀναζητοῦμεν αὐτὸ εἰς τὰς σειρὰς τοῦ 62 φέρον ἔμπροσθέν του ἀστερίσκον (\*). Πράγματι τοῦτο συμβαίνει, διότι τὸ 022 μετ' ἀστερίσκου εὐρίσκεται εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ 62. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς  $x$  εἶναι συνεπῶς ὁ 426,8. Ὁμοίως εὐρίσκομεν :

$$\text{Ἐὰν } \log x = 2,63003, \quad \text{τότε } x = 426,9$$

$$\text{» } \log x = 2,63002, \quad \text{» } x = 426,6.$$

**Περίπτωσις β'.**— Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου δὲν εὐρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας.

**Ιον :** Ἐστω ὅτι θέλομεν νὰ εὑρωμεν τὸν θετικὸν ἀριθμὸν  $x$ , διὰ τὸν ὁποῖον εἶναι :

$$\log x = 1,25357.$$

**Λύσις :** Παρατηρούμεν ὅτι τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου ἀναζητούμενον, ὡς προηγουμένως, εἰς τοὺς πίνακας εὐρίσκεται μεταξύ τοῦ 0,25334 καὶ τοῦ 0,25358, εἰς τοὺς ὁποίους ἀντιστοιχοῦν οἱ ἀριθμοὶ 1792 καὶ 1793 ἀντιστοίχως. Ἦτοι ἔχομεν :

$$1,25334 < 1,25357 < 1,25358$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν :

$$17,92 < x < 17,93.$$

Ἦδη παρατηρούμεν ὅτι :

$$\Delta = 1,25358 - 1,25334 = 24 \text{ μ.ε'.δ.τ.}$$

καὶ

$$\delta = 1,25357 - 1,25334 = 23 \text{ μ.ε'.δ.τ.}$$

Λαμβανομένου δὲ ὑπ' ὄψιν ὅτι κατὰ προσέγγισιν ἡ αὐξήσις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν ἀριθμῶν καὶ καταρτίζοντες τὴν ἀκόλουθον διάταξιν, ἔχομεν :

Αὐξήσις λογαρίθμου κατὰ 24 μ.ε'.δ.τ. φέρει αὐξήσιν τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ 1

» » » 23 » » » » » y;

$$y = 1 \cdot \frac{23}{24} = \frac{23}{24} = 0,958.$$

Προσθέντες εἰς τὸν 1792 τὸν 0,958 εὐρίσκομεν 1792,958, δηλαδὴ τὸ 958 τὸ προσαρτῶμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 1792. Ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 1792,958 ἔχει προφανῶς τὰ αὐτὰ μὲ τὸν x ψηφία καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειρὰν, πλὴν ὅμως ἡ θέσις τῆς ὑποδιαστολῆς ἐν τῷ x κανονίζεται ἀπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ log x, ὅπερ ἐν προκειμένῳ εἶναι 1.

Θὰ εἶναι λοιπόν :

$$x = 17,92958.$$

Συντομώτερον ἡ ἐργασία αὕτη διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

|                   |         |   |      |    |                                       |
|-------------------|---------|---|------|----|---------------------------------------|
| 1,25357           | 1,25358 | ⇒ | 1793 | 24 | 1                                     |
| 1,25334           | 1,25334 | ⇒ | 1792 | 23 | y;                                    |
| Διαφοραὶ : δ = 23 | Δ = 24  |   | 1    |    | $y = 1 \times \frac{23}{24} = 0,958.$ |

Ἄρα :

$$x = 17,92958.$$

**Σημείωσις :** Ἡ διαφορά Δ τῶν ἄκρων τῶν λογαρίθμων, μεταξύ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ δοθεὶς λογάριθμος, καλεῖται **μεγάλῃ διαφορά**· ἡ δὲ διαφορά δ τοῦ μικροτέρου τούτων ἀπὸ τοῦ δοθέντος καλεῖται **μικρὰ διαφορά**.

**2ον :** Δίδεται ὅτι :  $\log x = \overline{3},47647$  καὶ ζητεῖται νὰ εὕρεθῇ ὁ x.

**Λύσις :** Ἐκ τῶν πινάκων παρατηρούμεν ὅτι :

$$\overline{3},47640 < \overline{3},47647 < \overline{3},47654$$

καὶ ἄρα

$$0,002995 < x < 0,002996.$$

Ἦδη, πρὸς εὕρεσιν τοῦ x, κάμνομεν τὴν ἀκόλουθον διάταξιν :

|                      |                      |   |      |    |                                    |
|----------------------|----------------------|---|------|----|------------------------------------|
| $\overline{3},47647$ | $\overline{3},47654$ | ⇒ | 2996 | 14 | 1                                  |
| $\overline{3},47640$ | $\overline{3},47640$ | ⇒ | 2995 | 7  | y;                                 |
| Διαφοραὶ : δ = 7     | Δ = 14               |   | 1    |    | $y = 1 \times \frac{7}{14} = 0,5.$ |

Οὕτω τὰ σημαντικὰ ψηφία τοῦ x εἶναι κατὰ σειρὰν 2, 9, 9, 5, 5. Ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς x εἶναι ὁ 0,0029955, διότι τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εἶναι  $\overline{3}$ . Ὁμοίως θὰ ἔχωμεν :

Ἐὰν  $\log x = 0,47647$ , τότε  $x = 2,9955$

»  $\log x = 5,47647$ , »  $x = 299550.$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξάγεται τώρα ὁ ἀκόλουθος :

**Κανὼν.** Διὰ τὰ εὗρωμεν τὸν ἀριθμὸν ἐκ τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ, εἰς περὶ-  
πτωσιν καθ' ἣν ὁ λογάριθμος (ἐνν. τὸ δεκαδικόν του μέρος) δὲν εὐρίσκεται εἰς τοὺς  
πίνακας, παραθέτομεν δεξιὰ τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ, ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν μι-  
κρότερον τῶν λογαρίθμων τοῦ πίνακος μεταξὺ τῶν ὁποίων ὁ δοθεὶς λογάριθμος  
περιέχεται, πάντα τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως δ : Δ, ἐνθα δ ἡ  
μικρὰ καὶ Δ ἡ μεγάλη διαφορά. Μετὰ ταῦτα καθορίζομεν τὴν θέσιν τῆς υποδια-  
στολῆς, λαμβάνοντες ἐπ' ὅψιν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου.

## Ἐφαρμογαὶ τῶν λογαρίθμων

**§ 219.** Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ιδιοτήτων τῶν λογαρίθμων καὶ τῶν λογαριθμι-  
κῶν πινάκων δυνάμεθα νὰ ἀνάγωμεν τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν εἰς ἄλλας  
ἀπλουστεράς, ἤτοι τὸν πολλαπλασιασμὸν εἰς πρόσθεσιν, τὴν διαίρεσιν εἰς ἀφαί-  
ρεσιν, τὴν ὑψωσιν εἰς δυνάμεις εἰς πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν ἐξαγωγήν τῶν ρι-  
ζῶν εἰς διαίρεσιν. Οὕτω μὲ χρῆσιν τῶν λογαρίθμων ἐκτελοῦνται πράξεις, αἱ  
ὁποῖαι ἄλλως θὰ ἦσαν μακρόταται καὶ δυσχερεῖς, ἂν μὴ δυναταί.

Τὰ ἐπόμενα παραδείγματα θὰ καταστήσουν περισσότερον σαφές πόσον  
μεγάλως ἀπλοποιεῖ τὴν ἐκτέλεσιν διαφόρων πράξεων ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ λογισμοῦ  
διὰ τῶν λογαρίθμων.

**Παράδειγμα 1ον :** Νὰ ὑπολογισθῇ διὰ τῶν λογαρίθμων τὸ γινόμενον :

$$x = 180,2 \times 35,32 \times 0,724.$$

**Λύσις :** Ἐχομεν :

$$\log x = \log 180,2 + \log 35,32 + \log 0,724.$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\log 180,2 = 2,25575$$

$$\log 35,32 = 1,54802$$

$$\log 0,724 = 1,85974$$

$$\log x = 3,66351$$

$$x = 4608.$$

Ἄρα :

**Παράδειγμα 2ον :** Νὰ εὐρεθῇ ὁ  $x$ , ἂν εἶναι  $x = \frac{7,56 \times 4667 \times 567}{899,1 \times 0,00337 \times 23435}.$

**Λύσις :** Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς δοθείσης παραστάσεως  
ἔχομεν :

$$\log x = \log 7,56 + \log 4667 + \log 567 - (\log 899,1 + \log 0,00337 + \log 23435).$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὐρίσκομεν :

$$\log 7,56 = 0,87852$$

$$\log 4667 = 3,66904$$

$$\log 567 = 2,75358$$

$$7,30114$$

$$\log 899,1 = 2,95381$$

$$\log 0,00337 = 3,52763$$

$$\log 23435 = 4,36986$$

$$4,85130.$$

Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν προκύπτει :

$$\log x = 2,44984$$

Ἄρα :

$$x = 281,73.$$

Παράδειγμα 3ον : Να εύρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ  $8^{(8^7)}$ .

Λύσις : Θέτοντες  $x = 8^{(8^7)}$  καὶ  $y = 8^8$  εὐρίσκομεν ὅτι :

$$x = 8^y \quad \text{καὶ} \quad \log x = y \cdot \log 8.$$

Ἐπειδὴ δὲ  $\log y = 8 \log 8 = 7,22472$ , ἔπεται ὅτι  $y = 16777300$  περίπου καὶ

$$\log x = 16777300 \cdot \log 8 = 15151412.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ὁ  $x$  θὰ ἔχῃ περίπου 15151413 ἀκέραια ψηφία.

Σημ. Ἄνευ τῆς χρήσεως τῶν λογαρίθμων ἔπρεπε πρὸς εὕρεσιν τοῦ  $y$  νὰ κάμωμεν 7 πολλαπλασιασμούς καὶ πρὸς εὕρεσιν τοῦ  $x$  ἄλλους 16777300 περίπου πολλαπλασιασμούς.

Παράδειγμα 4ον : Να υπολογισθῇ, κατὰ προσέγγισιν, ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως :

$$x = \frac{27,32 \times (1,04)^{20} \times \sqrt[5]{0,003}}{\sqrt[4]{0,0042} \times (345,6)^2}.$$

Λύσις : Λαμβάνοντες λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς δοθείσης ἰσότητος ἔχομεν συμφῶνως πρὸς τὰς ιδιότητες τῶν λογαρίθμων :

$$\log x = (\log 27,32 + 20 \cdot \log 1,04 + \frac{1}{5} \log 0,003) - \left( \frac{1}{4} \cdot \log 0,0042 + 2 \log 345,6 \right).$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὐρίσκομεν :

| Βοηθητικαὶ πράξεις                                                                                                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\log (1,04) = 0,01703$<br><div style="text-align: right; margin-right: 20px;">20</div> $\hline 0,34060$<br>.....                                                                    |
| $\log 0,003 = \overline{3},47712$<br>$\frac{1}{5} \log 0,003 = \frac{\overline{3},47712}{5} = \frac{5 + 2,47712}{5} =$<br>$= \overline{1} + 0,49542 = \overline{1},49542$<br>.....   |
| $\log 0,0042 = \overline{3},62325$<br>$\frac{1}{4} \log 0,0042 = \frac{\overline{3},62325}{4} = \frac{4 + 1,62325}{4} =$<br>$= \overline{1} + 0,40581 = \overline{1},40581$<br>..... |
| $\log 345,6 = 2,53857$<br><div style="text-align: right; margin-right: 20px;">2</div> $\hline 5,07714$                                                                               |

| Τελικαὶ πράξεις                                                                                                                                                                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\log 27,32 = 1,43648$<br>$20 \cdot \log (1,04) = 0,34060$<br>$\frac{1}{5} \cdot \log (0,003) = \overline{1},49542$<br><hr style="width: 100%;"/> $\text{*Αθροισμα} = 1,27250$<br>..... |
| $\frac{1}{4} \log (0,0042) = \overline{1},40581$<br>$2 \cdot \log 345,6 = 5,07714$<br><hr style="width: 100%;"/> $\text{*Αθροισμα} = 4,48295$<br>                                       |
| $\text{*Ὡστε εἶναι :}$<br>$\log x = 1,27250 - 4,48295 =$<br>$= -3,21045 = \overline{4},78955.$                                                                                          |

Ἐκ τῶν πινάκων εὐρίσκομεν :  $x = 0,000615957.$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**474.** Να εύρεθῇ ὁ λογάριθμος ἐκάστου ἐκ τῶν κάτωθι ἀριθμῶν :

- |             |            |               |
|-------------|------------|---------------|
| 1. 0,2507   | 5. 6,8372  | 9. 85,007     |
| 2. 45,72    | 6. 5278,37 | 10. 0,0004124 |
| 3. 0,003817 | 7. 63,347  | 11. 326,537   |
| 4. 107,3    | 8. 25234   | 12. 14,1606   |

13.  $0,00643598$

15.  $31,2865$

17.  $524 \frac{3}{8}$

14.  $0,0682947$

16.  $5378,92$

18.  $4,72 + \frac{6}{7}$

475. Να εύρεθῇ ὁ θετικός ἀριθμὸς  $x$ , γνωστοῦ ὄντος ὅτι :

1.  $\log x = 2,48001$

5.  $\log x = 4,87622$

9.  $\log x = 0,70020$

2.  $\log x = 1,96895$

6.  $\log x = 2,99348$

10.  $\log x = 1,66325$

3.  $\log x = 4,97534$

7.  $\log x = 1,79100$

11.  $\log x = 4,15050$

4.  $\log x = 3,69636$

8.  $\log x = 2,78000$

12.  $\log x = 5,25865$

476. Να ὑπολογισθοῦν διὰ τῶν λογαριθμῶν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1.  $82,75 \times 0,3974$

2.  $25200 \times 3,1416$

3.  $437 \times 0,5223$

4.  $4,25 \times 308 \times 0,295$

5.  $3,72 \times 7,8 \times 9312$

6.  $3,14 \times 25,2 \times 395$

7.  $56314 : 9$

8.  $0,8276 : 25,2$

9.  $10025 : 4,35$

10.  $4,36^3$

11.  $0,895^5$

12.  $10,25^4$

13.  $3,02^{10}$

14.  $\sqrt[5]{2,8314}$

15.  $\sqrt[16]{2}$

16.  $\sqrt[4]{1,414}$

17.  $\sqrt[3]{\pi}$

18.  $9,35^2 \times 3,1416$

19.  $18,2^3 \times 1,33$

20.  $0,45^2 \times 2,25 \times \sqrt[3]{3}$

21.  $\sqrt{\frac{27,3 \times 0,139}{4,5}}$

22.  $\sqrt[3]{\frac{1258 \times 0,824}{2,5^2}}$

23.  $\sqrt[4]{\frac{25,6 \times 0,312}{0,85}}$

477. Ἐπιλύσατε τὰς κάτωθι ἐξισώσεις :

1.  $x^4 = 5\,832,6$

2.  $x^5 = 0,0247$

478. Χρησιμοποιοῦντες τὸν τύπον :

$$E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

ὑπολογίσατε τὸ ἐμβαδὸν  $E$  ἐνὸς τριγώνου, εὗ αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι :

$$\alpha = 202,5 \text{ m}, \quad \beta = 180,2 \text{ m} \quad \text{καὶ} \quad \gamma = 75,3 \text{ m} \quad (\tau = \frac{1}{2} \text{ περιμέτρου}).$$

479. Ὑπολογίσατε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ  $x$ , ὅστις ὀρίζεται ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$$

$$\alpha = 0,27355, \quad \beta = 29,534, \quad \gamma = 44,340.$$

480. Τρεῖς ἀριθμοὶ  $\alpha, x, y$  συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως :

$$\alpha xy^2 = \sqrt[3]{x}.$$

1ον. Ὑπολογίσατε τὸ  $y$ , ἂν εἶναι  $\alpha = 0,3$  καὶ  $x = 1,8215$ 2ον. Ὑπολογίσατε τὸ  $x$ , ἂν εἶναι  $\alpha = 10$  καὶ  $y = 0,5242$ .481. Γεωμετρικῆς προόδου δίδονται  $\alpha_1 = 3$ ,  $\omega = 8$  καὶ  $\nu = 13$ . Να εύρεθῇ ὁ 13ος ὅρος τῆς καὶ τὸ ἄθροισμα  $\Sigma_{13}$  τῶν ὁρων αὐτῆς.

482. Ἐπαληθεύσατε διὰ τῆς χρήσεως τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τὰς ἀκολουθοῦσας ἰσότητες:

1.  $\sqrt{\frac{577,8 \times 69}{0,75 \times 3,107}} = 6,431,$

2.  $\sqrt[3]{8,5273 \times 3} \sqrt[3]{51,3388} = 5,62962$

3.  $\sqrt[3]{\frac{4,632 \times (2,96)^2}{81,3 \times 32,41}} = 0,225855,$

4.  $\frac{312,415 \times \sqrt[3]{3,5781^2}}{17,1826^2 \times \sqrt[10]{0,002987^3}} = 14,1606.$

483. Να υπολογισθῇ διὰ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$$y = \frac{4,3^2 \times \sqrt[3]{0,0004975}}{\sqrt{0,312}} + \sqrt[3]{\frac{217^2 \times \sqrt{595}}{137 \times \sqrt[3]{0,03}}}$$

(Υπόδ. Ὑπολογίσατε χωριστὰ ἕκαστον ὄρον τῆς παραστάσεως καὶ προσθέσατε ἀκολουθῶν τὰ ἐξαγόμενα).

## II. ΕΚΘΕΤΙΚΑΙ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

### Ἐκθετικά καὶ ἐξισώσεις

**§ 220. Ὅρισμοί.**— Καλεῖται ἐκθετικὴ ἐξίσωσις πᾶσα ἐξίσωσις, ἡ ὁποία περιέχει μίαν τοῦλάχιστον δύναμιν μὲ ἐκθέτην τὸν ἄγνωστον ἢ συνάρτησιν τινὴ τοῦ ἄγνωστου.

Π.χ. αἱ ἐξισώσεις :

$$3^x = 81, \quad 2^{3x+1} - 5 \cdot 4^x + 3 = 0, \quad 5^{x^2-2x+3} = 1$$

εἶναι ἐκθετικά ἐξισώσεις.

Ἐπίλυσις ἐκθετικῆς ἐξισώσεως καλεῖται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἄγνωστων αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι τὴν ἐπαληθεύουν.

Αἱ συνηθέστεραι ἐκθετικά ἐξισώσεις ἔχουσιν ἢ δύνανται νὰ λάβωσι μίαν τῶν ἀκολουθῶν μορφῶν :

α'). Ἐκθετικά ἐξισώσεις τῆς μορφῆς :

$$a^x = \beta$$

(1)

ἐνθα  $a, \beta \in \mathbb{R}^+$  καὶ  $a \neq 1$ .

Πρὸς ἐπίλυσιν τῆς ἀνωτέρω ἐκθετικῆς ἐξισώσεως διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

**Περίπτωσις I.**— Ὁ  $\beta$  εἶναι δύναμις τοῦ  $a$  ἢ δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς δύναμιν τοῦ  $a$ . Τότε, ἐὰν εἶναι  $\beta = a^k$  θὰ ἔχωμεν :  $a^x = a^k$  καὶ συνεπῶς  $x = k$ .

Παράδειγμα : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :  $3^x = 729$ .

Ἐπίλυσις : Ἐπεὶδὴ  $729 = 3^6$ , ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$3^x = 3^6 \quad \text{καὶ δίδει} \quad x = 6.$$

**Περίπτωσις II.**— Ὁ  $\beta$  δὲν δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς δύναμιν τοῦ  $a$ . Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λαμβάνοντες τοὺς λογαριθμοὺς ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (1) ἔχομεν :

$$x \cdot \log a = \log \beta \quad \text{καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι} \quad x = \frac{\log \beta}{\log a}.$$

Παράδειγμα : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :  $2^x = \frac{5}{6}$ .

Ἐπίλυσις : Λαμβάνομεν τοὺς λογαριθμοὺς ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ ἔχομεν :

$$x \cdot \log 2 = \log 5 - \log 6 \quad \text{ἢ} \quad x = \frac{\log 5 - \log 6}{\log 2} = \frac{-0,07918}{0,30103} = -0,26303.$$

β'). Έκθετικά εξισώσεις της μορφής :

$$\boxed{a^{E(x)} = \beta} \quad (2)$$

ένθα  $g(x)$  είναι δεδομένη συνάρτησις τοῦ ἀγνώστου καὶ  $a, \beta \in \mathbb{R}^+$  με  $a \neq 1$ .

Προφανῶς διὰ  $g(x) = x$  ἔχομεν ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν τῆς προηγουμένης μορφῆς.

Πρὸς ἐπίλυσιν τῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς (2) διακρίνομεν, ὡς καὶ προηγουμένως, δύο περιπτώσεις, κατ' ὅσον οἱ ἀριθμοὶ  $a$  καὶ  $\beta$  εἶναι ἢ μὴ δυνάμεις ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

**Παράδειγμα 1ον :** Νά ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις  $3^{x^2-5x+11} = 243$ .

**Ἐπίλυσις :** Ἐπειδὴ  $243 = 3^5$ , ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$3^{x^2-5x+11} = 3^5 \text{ καὶ δίδει } x^2 - 5x + 11 = 5 \quad \text{ἢ} \quad x^2 - 5x + 6 = 0. \quad (1)$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι  $x = 2$  καὶ  $x = 3$ , αἱ ὁποῖαι εἶναι καὶ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

**Παράδειγμα 2ον :** Νά ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :  $[3^{(x-1)}]^{(x^2-9)} = 1$ .

**Ἐπίλυσις :** Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$3^{(x-1)(x^2-9)} = 3^0 \text{ καὶ δίδει } (x-1)(x^2-9) = 0 \quad \text{ἢ} \quad (x-1)(x-3)(x+3) = 0.$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι  $x = 1, x = 3, x = -3$ . Αὗται δὲ εἶναι καὶ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

**Παράδειγμα 3ον :** Νά ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις  $5^{3x-2} = 437$ .

**Ἐπίλυσις :** Λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ ἔχομεν :

$$(3x-2) \cdot \log 5 = \log 437 \quad \text{ἢ} \quad 3x-2 = \frac{\log 437}{\log 5} \quad \text{ἢ} \quad 3x-2 = \frac{2,64048}{0,69897}$$

$$\text{ἢ} \quad 3x-2 = 3,77767 \quad \text{καὶ ἐξ αὐτῆς :} \quad x = 1,92589.$$

**Παράδειγμα 4ον :** Νά ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\text{ένθα } a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+ \text{ καὶ } a \neq 1, \beta \neq 1. \quad a^{\beta^x} = \gamma, \quad (1)$$

**Ἐπίλυσις :** Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (1) ἔχομεν :

$$\beta^x \cdot \log a = \log \gamma \quad \text{ἢ} \quad \beta^x = \frac{\log \gamma}{\log a} \quad (2)$$

Ἐκ τῆς (2), λαμβάνοντες ἐκ νέου τοὺς λογαρίθμους, εὐρίσκομεν :

$$x \cdot \log \beta = \log \left( \frac{\log \gamma}{\log a} \right)$$

$$\boxed{x = \frac{1}{\log \beta} \cdot \log \left( \frac{\log \gamma}{\log a} \right)} \quad (3)$$

Διὰ νὰ ἔχη νόημα τὸ δεύτερον μέλος τῆς (3) πρέπει νὰ εἶναι  $\frac{\log \gamma}{\log a} > 0$ . Τοῦτο ὑφίσταται ὅταν οἱ  $\log \gamma$  καὶ  $\log a$  εἶναι ὁμόσημοι, δηλ. ἢ ἀμφότεροι εἰς  $a$  καὶ  $\gamma$  νὰ εἶναι  $> 1$  ἢ ἀμφότεροι  $< 1$ .

γ'). Έκθετικά εξισώσεις της μορφής :

$$f(a^x) = g(a^x)$$

(3)

ένθα  $a \in \mathbb{R}^+$ .

Ειδικώς κατωτέρω θά μελετήσωμεν εξισώσεις τῶν μορφῶν :

$$\gamma_1 : A\alpha^{2x} + B\alpha^x + \Gamma = 0$$

$$\gamma_2 : A_1\alpha^{\mu_1 x + \nu_1} + A_2\alpha^{\mu_2 x + \nu_2} + \dots + A_k\alpha^{\mu_k x + \nu_k} = 0,$$

ένθα  $\mu_i, \nu_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, k$ .

Αί εξισώσεις αὗται ἀνάγονται εἰς τὴν μορφήν (1) διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως :

$$a^x = y$$

**Παράδειγμα 1ον :** Νά ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις  $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$ .

**Ἐπίλυσις :** Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :  $2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$  καὶ ἐὰν τεθῇ :  $2^x = y$ ,  
ἔχομεν :

$$y^2 - 7y - 8 = 0.$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσεως αὐτῆς εἶναι :  $y_1 = 8$  καὶ  $y_2 = -1$ .

Ἄρα θά εἶναι :

$$2^x = 8 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad 2^x = -1 \quad (2).$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται  $2^x = 2^3$  καὶ δίδει :  $x = 3$ .

Ἡ ἐξίσωσις (2) εἶναι ἀδύνατος, διότι  $2^x > 0$  διὰ κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Ὡστε ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξίσωσεως εἶναι  $x = 3$ .

**Παράδειγμα 2ον :** Νά ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$3^{x+2} + 5 \cdot 3^x + 3^{x-1} - 3^{x-2} = 128.$$

**Ἐπίλυσις :** Αὕτη γράφεται :

$$3^x \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^x + \frac{3^x}{3} - \frac{3^x}{9} = 128.$$

Θέτομεν  $3^x = y$  καὶ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$9y + 5y + \frac{y}{3} - \frac{y}{9} = 128$$

$$\text{ἢ} \quad 128y = 1152,$$

$$\text{ἐξ ὧν :} \quad y = 9.$$

Τότε ἔχομεν :  $3^x = 9$  ἢ  $3^x = 3^2$  καὶ ἄρα  $x = 2$ .

**Παράδειγμα 3ον :** Νά ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :  $5^{2x-1} + 3 \cdot 5^{x+1} = 80$ .

**Ἐπίλυσις :** Αὕτη γράφεται :

$$\frac{(5^x)^2}{5} + 3 \cdot 5^x \cdot 5 - 80 = 0$$

$$\text{ἢ} \quad (5^x)^2 + 75 \cdot 5^x - 400 = 0.$$

Θέτομεν  $5^x = y$  καὶ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$y^2 + 75 \cdot y - 400 = 0.$$

Αὕτη λυομένη δίδει :

$$y_1 = 5 \text{ καὶ } y_2 = -80.$$

(1)



\*Οθεν ή (1) είναι ισοδύναμος πρὸς τὸ ζεύγος τῶν ἐξισώσεων :

$$5^x = 5 \quad \text{καὶ} \quad 5^x = -80.$$

\*Η πρώτη δίδει :

$$x = 1.$$

\*Η δεύτερα εἶναι ἀδύνατος, διότι  $5^x > 0$  διὰ κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

δ'). Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς :

$$f(a^x) = g(\beta^x)$$

(4)

Συνήθεις περιπτώσεις τῆς ἀνωτέρω μορφῆς εἶναι αἱ κάτωθι :

$$\delta_1: A \cdot \alpha^x = B \cdot \beta^x$$

$$\delta_2: A \cdot \alpha^{2x} + B \cdot \alpha^x \cdot \beta^x + \Gamma \cdot \beta^{2x} = 0.$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται ἀνάγονται εἰς τὴν μορφήν (1) διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως :

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y$$

Πράγματι, διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως  $\delta_2$  διὰ  $\beta^{2x}$  αὕτη μετασχηματίζεται εἰς τὴν :

$$\delta_2': A \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2x} + B \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x + \Gamma = 0$$

καὶ διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως  $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y$  (1), ἡ ἐξίσωσις  $\delta_2'$  γίνεται :

$$Ay^2 + By + \Gamma = 0.$$

Λυομένη αὕτη καὶ ἐφ' ὅσον  $B^2 - 4A\Gamma \geq 0$ , θὰ δώσῃ δύο πραγματικὰς ρίζας  $y_1$  καὶ  $y_2$ . Διὰ τὰς τιμὰς  $y = y_1$  καὶ  $y = y_2$  ἡ (1) δίδει τὰς ἐκθετικὰς ἐξισώσεις :

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y_1 \quad \text{καὶ} \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y_2, \quad \text{αἱ ὁποῖαι λύνονται κατὰ τὰ γνωστά.}$$

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$3 \cdot 2^{x-4} - 2^{x-1} = 5^{x-2} - 6 \cdot 5^{x-3}.$$

\*Ἐπίλυσις : Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$3 \cdot \frac{2^x}{2^4} - \frac{2^x}{2} = \frac{5^x}{5^2} - 6 \cdot \frac{5^x}{5^3}$$

$$2^x \cdot \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{2}\right) = 5^x \cdot \left(\frac{1}{25} - \frac{6}{125}\right)$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{16}{625}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^4.$$

\*Ἀρα εἶναι :

$$x = 4.$$

Παράδειγμα 2ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :  $3 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 2^{2x+1} = 0$ .

\*Ἐπίλυσις : Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{2x} = 0.$$

Διαιρούντες αμφοτέρω τὰ μέλη αὐτῆς διὰ  $2^{2x}$  λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν :

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 = 0. \quad (1)$$

Θέτομεν  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$  καὶ ἡ (1) γράφεται :  $2y^2 - 5y + 3 = 0$ .

Αὕτη ἔχει ρίζας :  $y_1 = \frac{3}{2}$ ,  $y_2 = 1$  καὶ ἐπομένως ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} \quad \text{καὶ} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1.$$

Αὗται γραφόμεναι :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \quad \text{καὶ} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

Δίδουν ἀντιστοίχως :  $x = -1$  καὶ  $x = 0$ .

ε'). Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς :

$$\{f(x)\}^{g(x)} = 1 \quad (5)$$

ἔνθα  $f(x)$ ,  $g(x)$  πολυωνυμικαὶ συναρτήσεις τοῦ  $x$ .

Αἱ ἐξισώσεις τῆς ἀνωτέρω μορφῆς ἔχουν προφανῶς λύσεις τὰς λύσεις τῶν ἐξισώσεων :

$$(i) f(x) = 1$$

$$(ii) g(x) = 0 \quad \text{καὶ} \quad f(x) \neq 0.$$

Παράδειγμα : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$(x^2 - 3x + 2)^{x^2 - 2x} = 1.$$

Ἐπίλυσις : (i). Αἱ ρίζαι τῆς  $x^2 - 3x + 2 = 1$  εἶναι προφανῶς λύσεις τῆς δοθείσης.

Αὕτη γράφεται  $x^2 - 3x + 1 = 0$  καὶ λυομένη δίδει :

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{καὶ} \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

(ii). Αἱ λύσεις τοῦ συστήματος :

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 \neq 0$$

προφανῶς ἱκανοποιοῦν τὴν δοθείσαν.

Εἶναι δὲ  $x(x-2) = 0$  καὶ  $(x-1)(x-2) \neq 0$ .

Ἄρα :  $x = 0$ .

Ἐπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει τὰς ρίζας :

$$x = 0, \quad x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Παρατήρησις : Ἡ ἐξίσωσις  $\{f(x)\}^{f(x)} = \beta$ , ἔνθα  $f(x)$  πολυωνυμικὴ συνάρτησις τοῦ  $x$ , ἐπιλύεται, ὅταν τὸ  $\beta$  δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν :  $\beta = \alpha^a$ .  
Θὰ ἔχωμεν τότε :  $\{f(x)\}^{f(x)} = \alpha^a$  καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι  $f(x) = \alpha$ .

Παράδειγμα : Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

$$(i). \quad x^x = 4, \quad (ii). \quad x^x = -1, \quad (iii). \quad (x^2 - 7x + 15)^{x^2 - 7x + 15} = 27.$$

(i) Ἐχομεν  $4 = 2^2$  καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι  $x^x = 2^2$ . Ἐκ ταύτης προκύπτει  $x = 2$ .

(ii) Ἐχομεν  $-1 = (-1)^{-1}$  καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι  $x^x = (-1)^{-1}$ , ὅτε  $x = -1$ .

(iii). Έχουμε  $27 = 3^3$  και συνεπώς θα είναι  $(x^2 - 7x + 15)^{x^2 - 7x + 15} = 3^3$ . Αυτή είναι  
 Ισοδύναμος με την:  $x^2 - 7x + 15 = 3$  ή  $x^2 - 7x + 12 = 0$ , ή όποια λυομένη δίδει:

$$x = 3 \quad \text{και} \quad x = 4.$$

## Εκθετικά Συστήματα

**§ 221. Όρισμοί.**— Καλείται σύστημα εκθετικών εξισώσεων με δύο ή περισσότερους άγνωστους, πάλι σύστημα εξισώσεων εκ των οποίων μία τουλάχιστον είναι εκθετική.

Αί τιμαί των άγνωστων δια τας όποιας συναληθεύουν αι εξισώσεις του συστήματος συνιστούν λύσιν αυτού.

Η επίλυσις των εκθετικών συστημάτων στηρίζεται επί των ιδιοτήτων των δυνάμεων και των λογαρίθμων και τής εις την προηγούμενην παράγραφον εκτεθείσης θεωρίας επίλυσεως των εκθετικών εξισώσεων.

**Παραδείγματα :** 1ον. Νά επιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$4^x \cdot 2^{y-2} = 32$$

$$3^{x+2} \cdot 3^{y-4} = 27.$$

Ἐπίλυσις : Τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον μετὰ τὸ :

$$2^{2x+y-2} = 2^5$$

$$3^{x+y-2} = 3^3.$$

$$\text{Τοῦτο ἀληθεύει ὅταν : } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν τὴν λύσιν :  $x = 2, \quad y = 3.$

2ον : Νά ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$3^x \cdot 4^y = 3981312 \quad (1)$$

$$2^y \cdot 5^x = 400000. \quad (2)$$

Ἐπίλυσις : Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῶν εξισώσεων (1) καὶ (2) εὐρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν σύστημα :

$$x \cdot \log 3 + y \cdot \log 4 = \log 3981312 \quad (1')$$

$$y \cdot \log 2 + x \cdot \log 5 = \log 400000. \quad (2')$$

Θέτοντες  $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2$  καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς (2') ἐπὶ 2, εὐρίσκομεν :

$$x \log 3 + 2y \cdot \log 2 = \log 3981312 \quad (1'')$$

$$2x \log 5 + 2y \cdot \log 2 = \log 400000. \quad (2'')$$

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν εξισώσεων (1'') καὶ (2'') εὐρίσκομεν :

$$x = \frac{2 \log 400000 - \log 3981312}{2 \log 5 - \log 3} = \frac{2 \cdot \log (2^4 \cdot 10^5) - \log (2^{14} \cdot 3^5)}{2 \log 5 - \log 3} =$$

$$= \frac{10 - 10 \log 2 - 5 \log 3}{2 - 2 \log 2 - \log 3} = 5.$$

Ἀντικαθιστώντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ  $x$  εἰς τὴν δευτέραν τῶν δοθεισῶν εξισώσεων εὐρίσκομεν :

$$2^y = \frac{400000}{5^5} = \frac{4 \cdot 10^5}{5^5} = \frac{2^2 \cdot 2^5 \cdot 5^5}{5^5} = 2^7,$$

ἐκ τῆς όποιας ἔχομεν  $y = 7.$

“Αρα αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος εἶναι :  $x = 5, y = 7$ .

**3ον :** Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$x^y = y^x \quad (1)$$

$$x^3 = y^2 \quad (2)$$

**Ἐπίλυσις :** Προφανῆς λύσις τοῦ συστήματος εἶναι :  $x = y = 1$ . Ὑποθέτοντες τὴν ὅτι :  $x > 0, y > 0$  καὶ  $x \neq 1 \neq y$  εὐρίσκωμεν, ἂν λάβωμεν τοὺς λογαριθμοὺς ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), ὅτι τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τό :

$$y \cdot \log x = x \cdot \log y \quad (1')$$

$$3 \cdot \log x = 2 \cdot \log y. \quad (2')$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (1') καὶ (2') ἔχομεν :  $\frac{y}{3} = \frac{x}{2}$ ,

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν  $y = \frac{3x}{2}$ . (3)

Θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ  $y$  εἰς τὴν δευτέραν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων ἔχομεν :

$$x^3 = \left(\frac{3x}{2}\right)^2 \quad \eta \quad x^3 = \frac{9}{4} x^2$$

$\eta \quad x^2 \left[ x - \frac{9}{4} \right] = 0$ , καὶ ἐπειδὴ ὑπετέθη  $x > 0$ , ἔπεται :  $x = \frac{9}{4}$ .

Θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ  $x$  εἰς τὴν (3) λαμβάνομεν :

$$y = \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{8}.$$

Ἐπομένως, κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα, αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος εἶναι τὰ ζεύγη :

$$(x = 1, y = 1) \quad \text{καὶ} \quad \left(x = \frac{9}{4}, y = \frac{27}{8}\right).$$

## Λογαριθμικαὶ ἐξισώσεις καὶ λογαριθμικὰ συστήματα

**§ 222. Ὅρισμοί. — α').** Καλεῖται **λογαριθμικὴ ἐξίσωσις** πᾶσα ἐξίσωσις, ἥ ὁποία περιέχει τὸν λογάριθμον ἀγνώστου ἢ ἀγνώστων αὐτῆς ἢ καὶ συναρτήσεων αὐτῶν. Π. χ. αἱ κάτωθι ἐξισώσεις εἶναι λογαριθμικαί :

$$3 \log x - \frac{1}{2} \log (2x + 1) = \log \sqrt{2x - 1} + 2$$

$$\log x + 3 \log y = 7$$

$$\log_2 (3x + 1) - \log x = \log_x (2x - 3).$$

Ἡ ἐπίλυσις τῶν λογαριθμικῶν ἐξισώσεων στηρίζεται ἐπὶ τῶν ιδιοτήτων τῶν λογαρίθμων. Πολλάκις ὅμως ἡ ἐπίλυσις μιᾶς λογαριθμικῆς ἐξισώσεως ἀνάγεται εἰς ἐπίλυσιν ἐξισώσεων τῶν κάτωθι μορφῶν :

$$(i) \log x = y, \quad (ii) \log x = \log a, \quad (iii) \log f(x) = \log a,$$

$$(iv) \log_\beta f(x) = \log_\beta g(x),$$

ἐνθα  $a$  γνωστὸς θετικὸς ἀριθμὸς,  $f(x)$  δὲ καὶ  $g(x)$  γνωσταὶ συναρτήσεις τοῦ ἀγνώστου, αἱ ὁποῖαι ὑπόκεινται εἰς τὸν περιορισμὸν  $f(x), g(x) > 0$  καὶ  $\beta$  ἡ βᾶσις τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος ( $0 < \beta \neq 1$ ).

Ἐκ τοῦ ὁρίσμου τοῦ λογαρίθμου καὶ τοῦ πορίσματος II, ιδ. III τῆς § 202 προκύπτει τώρα ὅτι :

(i) Ἡ ἐξίσωσις  $\log x = \gamma$  εἶναι ἰσοδύναμος μετὰ τὴν :  $x = 10^\gamma$

(ii) Ἡ »  $\log x = \log \alpha$  » μετὰ τὸ σύστημα :  $x = \alpha, \alpha > 0$

(iii) Ἡ »  $\log f(x) = \log \alpha$  » » » » :  $f(x) = \alpha, \alpha > 0$

(iv) Ἡ »  $\log_{\beta} f(x) = \log_{\beta} g(x)$  » » » » :  $f(x) = g(x), g(x) > 0$ .

**Σημειώσεις :** Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν οἱ λογάριθμοι ἔχουν ληφθῇ ὡς πρὸς διαφοροὺς βάσεις, θὰ μετατρέπωνται πάντες ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν.

**β').** Καλεῖται **σύστημα λογαριθμικῶν ἐξισώσεων** πᾶν σύστημα ἐξισώσεων ἐκ τῶν ὁποίων μία τούλάχιστον εἶναι λογαριθμική.

Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων διὰ τὰς ὁποίας συναληθεύουν αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος συνιστοῦν λύσιν αὐτοῦ.

Ἡ ἐπίλυσις τῶν λογαριθμικῶν συστημάτων στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων καὶ τῆς ἀνωτέρω ἐκτεθείσης θεωρίας ἐπιλύσεως λογαριθμικῶν ἐξισώσεων.

Ὡς παραδείγματα ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα :

**Παράδειγμα 1ον :** Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{1}{2} \log (x+2) + \log \sqrt{x-3} = 1 + \log \sqrt{3}.$$

**Ἐπίλυσις :** Ἐν πρώτοις πρέπει νὰ εἶναι  $x+2 > 0, x-3 > 0$ , ὅτε  $x > 3$ .

Ἐπειδὴ  $1 = \log 10$ , ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$\log \sqrt{x+2} + \log \sqrt{x-3} = \log 10 + \log \sqrt{3}$$

$$\eta \quad \log (\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-3}) = \log \cdot 10 \sqrt{3}$$

$$\eta \quad \sqrt{(x+2) \cdot (x-3)} = 10 \sqrt{3}$$

$$\eta \quad (x+2) \cdot (x-3) = 300$$

$$\eta \quad x^2 - x - 306 = 0.$$

$$\text{Ἐξ αὐτῆς εὐρίσκομεν :} \quad x = 18 \quad \text{καὶ} \quad x = -17.$$

Ἡ  $x = -17$  ἀπορρίπτεται, ὡς μὴ πληροῦσα τὸν περιορισμὸν  $x > 3$ .

**Παράδειγμα 2ον :** Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\bullet \quad \sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10. \quad (1)$$

**Ἐπίλυσις :** **Περιορισμός :** πρέπει νὰ εἶναι  $x > 0$ .

Ὑψώνομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἔχομεν :

$$x^{\log \sqrt{x}} = 100. \quad (2)$$

Λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (2) καὶ ἔχομεν :

$$\log \sqrt{x} \cdot \log x = \log 100$$

$$\eta \quad \frac{1}{2} (\log x)^2 = 2$$

$$\eta \quad (\log x)^2 = 4$$

$$\text{καὶ ἄρα :} \quad \log x = \pm 2.$$

Ἐάν λάβωμεν  $\log x = 2$  ἔχομεν  $\log x = \log 100$ , ἄρα:  $x = 100$ .

Ἐάν λάβωμεν  $\log x = -2$  ἔχομεν  $\log x = \log 0,01$ , ἄρα:  $x = 0,01$ .

**Παράδειγμα 3ον :** Νά ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\log_{\sqrt{2}} (2 \cdot \log_4 x \cdot \log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x) = 6. \quad (1)$$

**Ἐπίλυσις :** Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν :

$$2 \log_4 x \cdot \log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x = (\sqrt{2})^6 = 8. \quad (2)$$

Ὡς γνωστὸν (§ 207) εἶναι :

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}, \quad \text{ἐνθα οἱ } \log x \text{ καὶ } \log a \text{ εἶναι ὡς πρὸς βᾶσιν } 10.$$

Λόγῳ αὐτοῦ ἔχομεν :

$$\log_4 x = \frac{\log x}{\log 4} = \frac{\log x}{2 \log 2}, \quad \log_2 x = \frac{\log x}{\log 2}, \quad \log_{\sqrt{2}} x = \frac{\log x}{\log \sqrt{2}} = \frac{2 \log x}{\log 2}.$$

Δυνάμει αὐτῶν ἡ (2) γίνεται :

$$2 \frac{\log x}{2 \log 2} \cdot \frac{\log x}{\log 2} + \frac{2 \log x}{\log 2} = 8$$

$$\eta \quad \left( \frac{\log x}{\log 2} \right)^2 + 2 \cdot \left( \frac{\log x}{\log 2} \right) - 8 = 0.$$

Ἐξ αὐτῆς εὐρίσκομεν :

$$\frac{\log x}{\log 2} = 2 \quad \text{καὶ} \quad \frac{\log x}{\log 2} = -4.$$

Ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν :

$$\log x = 2 \log 2 = \log 4, \quad \text{ἄρα} \quad x = 4$$

καὶ ἐκ τῆς δευτέρας ὁμοίως ἔχομεν :

$$\log x = -4 \log 2 = \log 2^{-4} = \log \frac{1}{16}, \quad \text{ἄρα} \quad x = \frac{1}{16}.$$

**Παράδειγμα 4ον :** Νά ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\log x + \log y = \log 14$$

$$3x - y = 1.$$

**Ἐπίλυσις :** Περιορισμός:  $x > 0, y > 0$ . Ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ συστήματος γράφεται :

$$\log (xy) = \log 14 \quad \text{καὶ} \quad \text{δίδει:} \quad xy = 14.$$

Ἐχομεν οὕτω νά ἐπιλύσωμεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα :

$$3x - y = 1$$

$$xy = 14.$$

Λύομεν τὸ σύστημα τοῦτο καὶ ἐπειδὴ πρέπει  $x > 0, y > 0$  εὐρίσκομεν :

$$x = 7/3 \quad \text{καὶ} \quad y = 6.$$

**Παράδειγμα 5ον :** Νά ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$x^{\log y + 1} = y^{\log x + 2}$$

$$y^{\sqrt{x} + 2} = x^{y - 2}.$$

**Ἐπίλυσις :** Προφανὴς λύσις τοῦ συστήματος εἶναι :  $x = y = 1$ . Ὑποθέτομεν τώρα ὅτι :

$x > 0, y > 0$  καθὼς καὶ  $x \neq 1 \neq y$ .

Ἐκ τῆς πρώτης, λογαριθμίζοντες, λαμβάνομεν :

$$(\log y + 1) \cdot \log x = (\log x + 2) \cdot \log y$$

$$\eta \quad \log x \log y + \log x = \log x \log y + 2 \log y$$

$$\eta \quad \log x = \log y^2$$

καὶ συνεπῶς :

$$x = y^2.$$

(1)

Λόγω ταύτης ή δευτέρα εξίσωσις τοῦ συστήματος γράφεται :

$$y\sqrt{y^2+2} = y^{2(y-2)}.$$

Ἐκ ταύτης, ἐπειδὴ  $y \neq 1$ , λαμβάνομεν :

$$\sqrt{y^2+2} = 2(y-2), \quad \text{ἐξ ἧς:} \quad y = 6.$$

Διὰ  $y = 6$  ἡ (1) δίδει :  $x = 36$ .

Ἄρα τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὰς λύσεις :

$$(x = 1, y = 1), \quad (x = 36, y = 6).$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

484. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1.  $5\sqrt{x} = 625,$       2.  $3^{x^2-9x+11} = 27,$       3.  $\sqrt[3]{27^{x+1}} = 3^{2x-4},$
4.  $\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7} = \left(\frac{4}{3}\right)^{7x-3},$       5.  $2 \cdot 9^x - 7 \cdot 3^x + 3 = 0,$       6.  $3^x - 4\sqrt[3]{3^x} + 3 = 0,$
7.  $5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}},$       8.  $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1},$       9.  $2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x,$
10.  $(x^2 - 5x + 6)^{x^2-2x} = 1,$       11.  $3^{x+1} - 2^x = 3^{x-1} + 2^{x+3},$       12.  $x^{x^2-26x^2+25} = 1.$

485. Ὁμοίως :

1.  $18^{8-4x} = (54\sqrt{2})^{3x-2},$       2.  $\sqrt[3]{\frac{8}{5}} \cdot \frac{5}{8} = 2 \cdot \sqrt[3]{5},$       3.  $x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x}),$
4.  $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{3})^{3x-4},$       5.  $3^{x-1} - \frac{15}{3^{x+1}} + 3^x - \frac{21}{3^{x+1}} = 0,$
6.  $5^{x-2} - 3 \cdot 2^{x-3} = 12 \cdot 5^{x-3} - 2^x,$       7.  $\sqrt[3]{2^{6x-13}} - 3^{2(x-2)} = \sqrt[3]{8^{2x-3}} - 3^{2x-3}.$

486. Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1.  $\begin{cases} 2^{3x+y} = 32 \\ 3^{2x-y} = 1 \end{cases}$       2.  $\begin{cases} x^y = 243 \\ \sqrt[3]{1024} = \left(\frac{2}{3}x\right)^2 \end{cases}$       3.  $\begin{cases} 4^{2x-9} \cdot 2^{3y-2} = 1024 \\ 3^{x-2} \cdot 3^{y-3} = 3^{-2} \end{cases}$
4.  $\begin{cases} 3^x - 2^{y+3} = 15 \\ 2^y - 3^{x-3} = 3 \end{cases}$       5.  $\begin{cases} 3^{xy} - y^x = 1 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$       6.  $\begin{cases} 2^x = 3y \\ 3^x = 2y \end{cases}$

487. Ὁμοίως :

1.  $\begin{cases} x^y = y^x \\ x = y^2 \end{cases}$       2.  $\begin{cases} x^{x+y} = y^3 \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases}$       3.  $\begin{cases} x^{x+y} = y^{*/3} \\ y^{x+y} = x^{*/3} \end{cases}$

488. Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1.  $\begin{cases} \alpha^x = \beta^y \\ x^y = y^x \end{cases}$       2.  $\begin{cases} \alpha^x = \beta^y \\ x^\alpha = y^\beta \end{cases}$       3.  $\begin{cases} x^\alpha = y^\beta \\ x^y = y^x \end{cases}$

489. Να επιλυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

$$\begin{aligned} 1. \log(x+1) + 2 \log \sqrt[3]{5x} &= 2, & 2. \frac{1}{3} \log(x-2) + \log \sqrt[4]{4x+3} &= \frac{2}{3}, \\ 3. \log \frac{2x}{3} + \log \left( \frac{5x}{4} + 2 \right) &= 2 \log(x-1), & 4. \log[\log(2x^2 + x - 11)] &= 0, \\ 5. x^{\log_3 x - \log_5 x} &= 0,01, & 6. (4x)^{\log_2 + \log \sqrt{x}} &= 100, & 7. 2^{\log x} + 2^{5 - \log x} &= 12, \\ 8. \frac{\log x}{\log x + 2} + \frac{\log x + 3}{\log x - 1} &= \frac{11}{2}, & 9. \log_2(\log_2 x) &= \log_4(\log_4 x). \end{aligned}$$

490. Ὁμοίως :

$$\begin{aligned} 1. \log(2^x + 2 \cdot 3^x) + \log 81 &= x \cdot \log 3 + \log 178 \\ 2. (\log_3 x)^2 - 3^{\log_5 x} + (\log_2 3)^{-1} &= \log_3(x^6) - 9^{\log_3 \sqrt[3]{x}}, & 3. 10 \cdot x^{\log x} &= x^2 \cdot \sqrt{x}, \\ 4. x^{\log \frac{3x}{10}} &= 9 \cdot (3x)^{\log_9 x}, & 5. \log_{\sqrt{2}} x \log_2 x \log_{\frac{1}{2}} x \log_4 x &= 54. \end{aligned}$$

491. Διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ  $\theta$  ἡ ἐξίσωσις :  $x^2 - 2(1 + \log \theta)x + 1 - (\log \theta)^2 = 0$  ἔχει ρίζας πραγματικές καὶ ἴσας ;

492. Να επιλυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$\begin{aligned} 1. \log x - \log y &= 1 & 2. \frac{x + \log y}{\sqrt[3]{y^2} + 10} &= \frac{x}{\sqrt[3]{y}} & 3. \left( \frac{x}{5} \right)^{\log 5} &= \left( \frac{y}{7} \right)^{\log 7} \\ \log x^2 + \log y^2 &= \log 32 & & & 7^{\log x} &= 5^{\log y} \\ 4. x^{\log y} + y^{\log x} &= 20 & 5. \frac{x^{\log y} + y^{\log x}}{\sqrt{x^{\log y}} \cdot \sqrt{y^{\log x}}} &= 200 & 6. (3x)^{\log 3} &= (5y)^{\log 5} \\ \log \sqrt{xy} &= 1 & & & 5^{\log x} &= 3^{\log y} \end{aligned}$$

493. Ὁμοίως :

$$\begin{aligned} 1. \frac{x^{\log y} + y^{\log x}}{x} &= 200 & 2. \frac{\log y}{\sqrt[3]{5^{4x}}} &= 25 & 3. y^x (1 + y^x) &= 10100 \\ \sqrt{(\log x)^y \cdot (\log y)^x} &= 1024 & & & \log \sqrt[3]{xy} - \log \sqrt{\frac{x}{y}} &= 3. \\ 4. (2x)^{\log y} + y^{\log(2x)} &= 8x^2 & 5. (3x)^{\log 3} &= (5y)^{\log 5} \\ y &= 4x^2 \cdot y^{\log(2x)} & & & x^{\log 5} &= y^{\log 3} \end{aligned}$$

494. Να εὑρεθοῦν αἱ πραγματικαὶ λύσεις τοῦ συστήματος :

$$z^x = y^{2x}, \quad 2^{z-1} = 4^x, \quad x + y + z = 16.$$

495. Ἐὰν  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$ , νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\log_{\alpha} x \cdot \log_{\beta} y = \log_{\alpha} \beta, \quad \alpha^{\log_{\alpha} y} = \sqrt{x}.$$

496. Να ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\log(21^{\log x + 1} - 42) + \log 4 = \log 21 \cdot \log x + \log 76.$$

497. Ὁμοίως :

$$[\log_x(16x - 5 - x^2) + \log_x 2] \cdot \log_{x+5} x \cdot \log_x x = 2.$$

498. Να εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τὰς ὁποίας λαμβάνει ὁ  $\theta$ ,  $\theta \in \mathbf{R}^+$ , ἂν αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσως :

$$\log[\log(x^2 + x \log \theta + 110)] = 0,$$

ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ συστήματος :

$$y^{\log z} + z^{\log y} = 20, \quad \log \sqrt[3]{yz} = 1.$$



ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ — ΙΣΑΙ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ — ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ

Ι. Ἀνατοκισμός

**§ 223. Εἰσαγωγικαὶ ἔννοιαι — Ὅρισμοί.**— Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς ὅτι **τόκος** λέγεται τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον λαμβάνει τις δανείζων εἰς ἄλλον χρήματα, ἐπὶ πλεόν τοῦ δανειζομένου ποσοῦ. Τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον δανεῖζει τις, λέγεται **κεφάλαιον**, ὃ δὲ τόκος εἶναι ἡ ἀμοιβή τὴν ὁποίαν καταβάλλει ὁ δανειζόμενος διὰ τὴν χρῆσιν τοῦ κεφαλαίου. Ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου, ὁ τόκος λέγεται **ἀπλοῦς**· λέγομεν δὲ τότε ὅτι τὰ χρήματα τοκίζονται **ἐπὶ ἀπλῷ τόκῳ**, ὃ δὲ τόκος τῶν 100 δρχ. εἰς μίαν χρονικὴν περίοδον καλεῖται **ἐπιτόκιον**. Πολλάκις ὅμως ὁ τόκος ἐκάστης χρονικῆς περιόδου προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ ἀποτελεῖ μαζὺ μὲ αὐτὸ τὸ κεφάλαιον τῆς ἐπομένης χρονικῆς περιόδου. Οὕτως ὁ τόκος κεφαλαιοποιεῖται καὶ τοκίζεται ἐν συνεχείᾳ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Ἡ πρόσθεσις αὕτη τοῦ τόκου εἰς τὸ κεφάλαιον, ἥτοι ἡ κεφαλαιοποίησις τοῦ τόκου λέγεται **ἀνατοκισμός**, ὃ δὲ τόκος, ὁ ὁποῖος λαμβάνεται ἀπὸ τὸν ἀνατοκισμόν, λέγεται **σύνθετος**.

Εἰς τὸν ἀνατοκισμόν καλεῖται «**ἐπιτόκιον**» ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν περίοδον. Κατὰ συνέπειαν τὸ ἐπιτόκιον εἰς τὸν ἀνατοκισμόν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ  $1/100$  τοῦ ἐπιτοκίου τοῦ ἀπλοῦ τόκου. Τοῦτο παρίσταται κατωτέρω μὲ τ ( $\tau$  = τὸ ἑκατοστὸν τοῦ ἐπιτοκίου τοῦ ἀπλοῦ τόκου).

Κεφάλαιόν τι λέγομεν ὅτι **ἀνατοκίζεται** ὅταν ὁ δανεισμός του γίνεταί ἐπὶ ἀνατοκισμῷ.

Συνήθως ἡ χρονικὴ περίοδος κατὰ τὴν ὁποίαν ἀνατοκίζεται ἐν κεφάλαιον, εἶναι τὸ ἔτος ἢ ἡ ἑξαμηνία.

Εἰς τὸν ἀνατοκισμόν διακρίνομεν **ἀρχικὸν** καὶ **τελικὸν** ἢ **σύνθετον κεφάλαιον**. Τὸ τελικὸν κεφάλαιον εἶναι τὸ ἀρχικὸν ἡϋξημένον κατὰ τοὺς τόκους τοῦ δανειζομένου (ἀρχικοῦ) κεφαλαίου κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα κατὰ τὸ ὁποῖον διήρκεσε ὁ δανεισμός.

Τὰ προβλήματα τοῦ ἀνατοκισμοῦ λύομεν διὰ τύπων, τοὺς ὁποῖους εὐρίσκομεν διὰ τῆς λύσεως τοῦ ἀκολουθοῦ γενικοῦ προβλήματος.

**§ 224. Πρόβλημα.**— **Κεφάλαιον  $k_0$  δραχμῶν ἀνατοκίζεται διὰ  $n$  ἔτη μὲ ἐπιτόκιον  $\tau$  δραχμῶν. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ τελικὸν κεφάλαιον  $k_n$ .**

**Λύσις.** Ἡ μία δραχμὴ θὰ φέρῃ μετὰ ἐν ἔτος τόκον  $\tau$ , ἄρα αἱ  $k_0$  δραχμαὶ θὰ φέρουν εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους  $k_0\tau$  δρχ. καὶ συνεπῶς τὸ κεφάλαιον  $k_0$  δρχ. εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ γίνῃ :

$$k_0 + k_0\tau = k_0(1 + \tau)$$

ἤτοι: τὸ κεφάλαιον  $k_0$  πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν (σταθερὸν) συντελεστὴν  $(1 + \tau)$ , ἵνα δώσῃ τὸ ζητούμενον ποσὸν εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους.

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ εὐρίσκουμεν, ὅτι αἱ  $k_0 (1 + \tau)$  δραχμαὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους θὰ γίνουιν (μὲ τοὺς τόκους τῶν):  $k_0 (1 + \tau) \cdot (1 + \tau)$ , ἤτοι  $k_0 (1 + \tau)^2$  δραχμαί. Οὕτω μετὰ δύο ἔτη τὸ κεφάλαιον  $k_0$  θὰ ἀνέλθῃ εἰς:

$$k_0 (1 + \tau)^2.$$

Ὅμοίως ἐργαζόμενοι εὐρίσκουμεν ὅτι αἱ  $k_0$  δραχμαὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους θὰ γίνουιν:

$$k_0 (1 + \tau)^3.$$

Τέλος, προχωροῦντες καθ' ὅμοιον τρόπον, εὐρίσκουμεν ὅτι αἱ  $k_0$  δραχμαὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ νιοστοῦ ἔτους θὰ γίνουιν:  $k_0 (1 + \tau)^v$ .

Ἄρα τὸ τελικὸν κεφάλαιον  $k_v$  δίδεται ἐκ τοῦ τύπου:

$$k_v = k_0 \cdot (1 + \tau)^v \quad (1)$$

Ὁ τύπος (1) καλεῖται **τύπος τοῦ ἀνατοκισμοῦ** καὶ συνδέει τὰ τέσσαρα ποσὰ  $k_0$ ,  $\tau$ ,  $v$ ,  $k_v$ . Ἄν δίδωνται τὰ τρία ἐξ αὐτῶν, τότε λύομεν λογαριθμικῶς τοῦτον, ὥς πρὸς τὸν ἀπομένοντα ἄγνωστον.

Ἐνίστε ὅμως ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται διὰ  $v$  ἔτη καὶ ἡμέρας τινὰς λ.χ. ἡ ἡμέρας, ( $\eta < 360$ ), τότε πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ τελικοῦ κεφαλαίου  $k$  σκεπτόμεθα ὥς ἑξῆς:

Μετὰ παρέλευσιν  $v$  ἔτων αἱ  $k_0$  δραχμαὶ θὰ γίνουιν:  $k_0 (1 + \tau)^v$ . Τὸ ποσὸν τοῦτο θὰ μείνῃ ἀκόμη ἐπὶ ἀπλῶ τόκῳ ἡ ἡμέρας ( $\eta < 360$ ) καὶ τοῦτο διότι αἱ ἡμέραι δὲν συνιστοῦν μίαν χρονικὴν περίοδον, ἥτοι ἓν ἔτος. Ἐπειδὴ εἰς τὸν ἀπλοῦν τόκον τὸ ἐπιτόκιον εἶναι:  $\epsilon = 100 \cdot \tau$ , τὸ ποσὸν  $k_0 (1 + \tau)^v$  θὰ δώσῃ εἰς ἡ ἡμέρας τόκον:

$$\frac{k_0 (1 + \tau)^v \cdot 100 \tau \cdot \eta}{36000}, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{k_0 (1 + \tau)^v \cdot \tau \eta}{360}.$$

Ἐπομένως τὸ τελικὸν κεφάλαιον μετὰ  $v$  ἔτη καὶ ἡ ἡμέρας θὰ εἶναι:

$$k = k_0 (1 + \tau)^v + \frac{k_0 (1 + \tau)^v \cdot \tau \eta}{360}.$$

Ὅθεν:

$$k = k_0 (1 + \tau)^v \cdot \left( 1 + \frac{\tau \eta}{360} \right) \quad (\eta < 360) \quad (2)$$

**Σημ.** Εἰς τὴν πρᾶξιν ἀντὶ τοῦ τύπου (2) χρησιμοποιοῦμεν (συνήθως) τὴν κατὰ προσέγγισιν ἰσότητά (τύπον):

$$k = k_0 (1 + \tau)^v + \frac{\eta}{360} \quad (2')$$

Ὁ (2') δίδει σχεδὸν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον μὲ τὸν (2) καὶ εἶναι πλέον εὐχρηστος διὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς.

**Παρατήρησις.** Ἐὰν ὁ ἀνατοκισμὸς δὲν γίνεται κατ' ἔτος, ἀλλὰ κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα, ἥτοι καθ' ἑξαμηνίαν ἢ κατὰ τριμηνίαν ἢ κατὰ μῆνα κλπ. δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν εὑρεθέντα τύπον  $k_v = k_0 (1 + \tau)^v$  μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ  $\tau$  παριστᾷ τὸν τόκον τῆς 1 δραχμῆς εἰς ἓν

ἐκ τῶν διαστημάτων τούτων καὶ τὸ  $\nu$  τὸ πλῆθος τῶν χρονικῶν τούτων διαστημάτων.

Ἐὰν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται καθ' ἑξαμηνίαν ἢ κατὰ τριμηνίαν ἢ κατὰ μῆνα, τότε τὸ ἐπιτόκιον δὲν εἶναι τὸ ἡμισυ ἢ τὸ τέταρτον ἢ τὸ δωδέκατον ἀντιστοίχως τοῦ ἐτήσιου ἐπιτοκίου, ἀλλὰ ἄλλο, τὸ ὁποῖον ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς :

Ἐστω  $\tau_1$  τὸ ἐπιτόκιον μὲ χρονικὴν περίοδον τὴν ἑξαμηνίαν καὶ  $\tau$  τὸ ἐπιτόκιον μὲ χρονικὴν περίοδον τὸ ἔτος. Σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω (§ 224), εὐρίσκομεν ὅτι ἡ 1 δραχμὴ εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης ἑξαμηνίας θὰ γίνῃ  $(1 + \tau_1)$  καὶ εἰς τὸ τέλος τῆς δευτέρας ἑξαμηνίας θὰ γίνῃ  $(1 + \tau_1)^2$ . Ἐπίσης ἡ μία δραχμὴ εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους ἀνατοκιζομένη θὰ γίνῃ  $(1 + \tau)$ . Ἐπειδὴ ἡ μία δραχμὴ εἴτε καθ' ἑξαμηνίαν ἀνατοκισθῇ εἴτε κατ' ἔτος πρέπει νὰ δίδῃ τὸ αὐτὸ ποσὸν χρημάτων, θὰ ἔχωμεν :  $(1 + \tau_1)^2 = (1 + \tau)$  καὶ συνεπῶς εἶναι :

$$\tau_1 = \sqrt{1 + \tau} - 1 \quad (3)$$

Ὁ τύπος (3) συνδέει τὸ ἑξαμηνιαῖον καὶ τὸ ἐτήσιον ἐπιτόκιον.

Ἄν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται κατὰ τριμηνίαν, ἐπειδὴ τὸ ἔτος ἔχει 4 τριμηνίας, ἂν  $\tau_2$  εἶναι τὸ τριμηνιαῖον ἐπιτόκιον, θὰ ἔχωμεν σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω :

$$(1 + \tau_2)^4 = 1 + \tau \quad \text{καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι :}$$

$$\tau_2 = \sqrt[4]{1 + \tau} - 1 \quad (4)$$

Ὁ τύπος (4) συνδέει τὸ τριμηνιαῖον καὶ τὸ ἐτήσιον ἐπιτόκιον.

## Παραδείγματα ἐπὶ τοῦ ἀνατοκισμοῦ

**Παράδειγμα 1ον :** Δανεῖζει τις 5.000 δρχ. μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 6 % κατ' ἔτος. Πόσας δραχμάς θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ μετὰ 8 ἔτη;

Λύσις : Ἐχομεν :  $k_0 = 5000$ ,  $\tau = 0,06$ ,  $\nu = 8$ ,  $1 + \tau = 1,06$ .

Ὅθεν ὁ τύπος (1) τῆς § 224 γίνεται :

$$k_8 = 5000 \cdot (1,06)^8.$$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων μελῶν ἔχομεν :

$$\log k_8 = \log 5000 + 8 \cdot \log (1,06).$$

Ἐξ αὐτοῦ, ἐπειδὴ εἶναι  $\log 5000 = 3,69897$  καὶ  $\log (1,06) = 0,02531$ , λαμβάνομεν :

$$\log k_8 = 3,90145.$$

Ἐξ οὗ :

$$k_8 = 7969,83.$$

Ἦτοι ὁ τοκίσας τὰς 5000 μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 6 % θὰ λάβῃ μετὰ 8 ἔτη ἐν ὅλῳ 7969,83 δραχμάς.

**Σημ.** Ἐὰν ὁ ἀνατοκισμὸς ἐγένετο ἐπὶ 8 ἔτη καὶ ἡμέρας τινάς, ἔστω π.χ. 72, τότε εἰς τὸν τύπον

$$k = k_0 (1 + \tau)^{\nu} \cdot \left(1 + \frac{\tau_1}{360}\right)$$

τὸ μὲν  $k_0 (1 + \tau)^v$  εἶναι 7969,83, τὸ δὲ

$$1 + \frac{\tau\eta}{360} \quad \text{εἶναι:} \quad 1 + \frac{72 \times 0,06}{360} = 1,012.$$

\*Αρα:  $k = 7969,83 \times 1,012 = 8065,46.$

**Παράδειγμα 2ον:** Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ ἀνατοκίσῃ τις κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς γεννήσεως τῆς θυγατρὸς του πρὸς 6 % κατ' ἔτος, διὰ νὰ ἔχῃ προῖκα δι' αὐτὴν 300.000 δρχ. ἅμα συμπληρώσῃ τὸ 20ον ἔτος;

Λύσις: Ἐχομεν  $v = 20$ ,  $k_v = 300000$ ,  $\tau = 0,06$ ,  $1 + \tau = 1,06$ .

Ὁ τύπος (1) τοῦ ἀνατοκισμοῦ λυόμενος ὡς πρὸς  $k_0$  γίνεται:

$$k_0 = \frac{k_v}{(1 + \tau)^v}. \quad (\alpha)$$

Ἡ (α) λογαριθμιζομένη δίδει:

$$\log k_0 = \log k_v - v \cdot \log (1 + \tau) \quad (\beta)$$

ἢ  $\log k_0 = \log 300000 - 20 \cdot \log (1,06).$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης, ἐπειδὴ εἶναι  $\log 300000 = 5,47712$  καὶ  $\log(1,06) = 0,02531$  λαμβάνομεν:

$$\log k_0 = 4,97092.$$

Ἐξ οὗ:  $k_0 = 93524.$

**Παράδειγμα 3ον:** Ἀνατοκίζει τις 80.000 δραχμὰς πρὸς 6 % ἐτησίως. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ μετὰ 9 ἔτη, ἂν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεταί καθ' ἑξαμηνίαν;

Λύσις: Τὸ ἑξαμηνιαῖον ἐπιτόκιον  $\tau_1$  εὐρίσκόμενον ἐκ τοῦ τύπου

$$\tau_1 = \sqrt[12]{1 + \tau} - 1 \quad \text{εἶναι:} \quad \tau_1 = \sqrt[12]{1,06} - 1 = 0,0295.$$

Ἐχομεν δὲ ἐν προκειμένῳ:

$$k_0 = 80000, \quad \tau_1 = 0,0295, \quad v = 9 \times 2 = 18.$$

Ὅθεν ὁ τύπος (1) γίνεται:

$$k_{18} = 80000 (1,0295)^{18}.$$

Ἐξ αὐτοῦ, ἐργαζόμενοι ὡς καὶ εἰς τὸ παράδειγμα 1, εὐρίσκομεν:

$$k = 135140,6 \text{ δραχμὰς.}$$

**Παράδειγμα 4ον:** Μετὰ πόσον χρόνον 12589 δραχμαὶ ἀνατοκίζονται κατ' ἔτος πρὸς 5 % γίνονται 45818 δρχ.;

Λύσις: Ὁ τύπος (1) τοῦ ἀνατοκισμοῦ λυόμενος ὡς πρὸς  $v$  δίδει:

$$v = \frac{\log k_v - \log k_0}{\log (1 + \tau)} \quad (1)$$

Ἐχομεν:  $k_v = 45818$ ,  $k_0 = 12589$ ,  $\tau = 0,05$ ,  $1 + \tau = 1,05$ .

Ἐξ ἄλλου ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν:

$$\log k_v = \log 45818 = 4,66104$$

$$\log k_0 = \log 12589 = 4,09999$$

$$\text{Διαφορά} = 0,56105$$

$$\log (1 + \tau) = \log (1,05) = 0,02119.$$

καὶ ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν:

$$v = \frac{\log 45818 - \log 12589}{\log 1,05} = \frac{0,56105}{0,02119} = \frac{56105}{2119}. \quad (2)$$

\*Εκτελούντες την διαιρέσιν ταύτην εὑρίσκομεν πηλίκον 26 καὶ υπόλοιπον 0,01011. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, διὰ νὰ συμβῇ τὸ ζητούμενον πρέπει τὸ δάνειον νὰ διαρκέσῃ 26 ἔτη καὶ ἡμέρας τινάς, ἔστω  $\eta$ .

Διὰ νὰ εὐρώμεν τὰς ἡμέρας αὐτὰς ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Γνωρίζομεν, ὅτι ὁ τύπος τοῦ ἀνατοκισμοῦ, ὅταν ὁ χρόνος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἔτη καὶ ἡμέρας

εἶναι :

$$k = k_0 (1 + \tau)^v \cdot \left( 1 + \frac{\eta \cdot \tau}{360} \right).$$

\*Ἐὰν εἰς τὸν τύπον αὐτὸν θέσωμεν :

$$k = 45818, k_0 = 12589, \tau = 0,05, v = 26$$

εὑρίσκομεν :

$$45818 = 12589 \cdot (1,05)^{26} \cdot \left( 1 + \frac{0,05 \cdot \eta}{360} \right).$$

\*Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαριθμοὺς τῶν ἰσων τούτων ἔχομεν :

$$\log 45818 = \log 12589 + 26 \cdot \log (1,05) + \log \left( 1 + \frac{0,05 \cdot \eta}{360} \right)$$

ἢ

$$\log 45818 - \log 12589 - 26 \cdot \log (1,05) = \log \left( 1 + \frac{0,05 \cdot \eta}{360} \right). \quad (3)$$

\*Ἐχομεν ἐξ ἄλλου ἐκ τῆς (2) ὅτι :

$$\log 45818 - \log 12589 - 26 \cdot \log (1,05) = 0,01011.$$

Παραβάλλοντες ταύτην πρὸς τὴν (3) συμπεραίνομεν ὅτι :

$$\log \left( 1 + \frac{0,05 \eta}{360} \right) = 0,01011$$

ἢ

$$\log \left( 1 + \frac{\eta}{7200} \right) = 0,01011.$$

\*Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης εὑρίσκομεν διαδοχικῶς ὅτι :

$$1 + \frac{\eta}{7200} = 1,02355 \quad \eta \quad \frac{\eta}{7200} = 0,02355.$$

\*Ἐς οὗ :

$$\eta = 169,56 \quad \eta \quad \eta \simeq 170 \text{ ἡμέραι.}$$

\*Ὡστε ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι 26 ἔτη καὶ 170 ἡμέραι, τοῦ ἔτους λογιζομένου μὲ 360 ἡμέρας.

**Παρατήρησις.** Γενικῶς εἶναι :

$$v = \frac{\log k_v - \log k_0}{\log (1 + \tau)}.$$

\*Ἄν δὲ  $v$  εἶναι τὸ υπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης, θὰ εἶναι :

$$v = \log \left( 1 + \frac{\tau \eta}{360} \right)$$

\*Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν τὸ  $1 + \frac{\tau \eta}{360}$  καὶ συνεπῶς τὸ  $\eta$ .

Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ ἀνατοκισμοῦ ὑπάγονται καὶ προβλήματα τινὰ σχεῖσιν ἔχοντα πρὸς τὴν αὐξησιν ἢ ἐλάττωσιν τοῦ πληθυσμοῦ πόλεως ἢ χώρας, οἷον τὸ κάτωθι:

**Παράδειγμα 5ον :** 'Ο πληθυσμός μιᾶς πόλεως εἶναι  $\Pi$  κάτοικοι· παρατηρήθη δὲ ὅτι οὗτος αὐξάνει κατ' ἔτος κατὰ τὸ  $\frac{1}{\mu}$  τοῦ προηγούμενου ἔτους. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ πόσος θὰ εἶναι ὁ πληθυσμός της μετὰ  $\nu$  ἔτη ;

**Λύσις :** Μετὰ ἓν ἔτος ὁ πληθυσμός τῆς πόλεως θὰ εἶναι :

$$\Pi + \Pi \cdot \frac{1}{\mu} \quad \eta \quad \Pi \cdot \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right).$$

Μετὰ ἓν ἀκόμη ἔτος, δηλ. εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους ὁ πληθυσμός τῆς πόλεως θὰ εἶναι :

$$\Pi \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right) + \Pi \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right) \cdot \frac{1}{\mu} \quad \eta \quad \Pi \cdot \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right)^2.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον προχωροῦντες εὐρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ νιοστοῦ ἔτους ὁ πληθυσμός τῆς πόλεως θὰ εἶναι :

$$\Pi_{\nu} = \Pi \cdot \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right)^{\nu}$$

**Σημ.** Ἐὰν ὁ πληθυσμός  $\Pi$  ἐλαττωθῇ κατὰ τὸ  $1/\mu$  τοῦ προηγούμενου ἔτους, τότε ὁ ἀνωτέρω τύπος γίνεται :

$$\Pi_{\nu} = \Pi \cdot \left( 1 - \frac{1}{\mu} \right)^{\nu}$$

## Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

**499.** Καταθέτει τις εἰς τὸ ταχυδρομικὸν ταμιευτήριον 7200 δραχμὰς αἱ ὁποῖαι ἀνατοκίζονται καθ' ἑξαμηνίαν πρὸς 4,5 % ἑτησίως. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ ἐν ὧλῳ μετὰ 15 ἔτη ;

**500.** Πόσον ποσὸν πρέπει νὰ τοκίσωμεν μὲ ἀνατοκισμόν καθ' ἑξαμηνίαν πρὸς 4 %, ἵνα μετὰ 18 ἔτη γίνῃ 200.000 δρχ.;

**501.** Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον 24850 δρχ. ἀνατοκίζόμενα κατ' ἔτος γίνονται μετὰ 12 ἔτη 50000 δραχμαί;

**502.** Μετὰ πόσον χρόνον 40000 δρχ. ἀνατοκίζόμενα κατ' ἔτος πρὸς 5 % γίνονται 68524 δρχ.;

**503.** Κατέθεσέ τις εἰς τὸ ταχυδρομικὸν ταμιευτήριον ποσὸν χρημάτων, τὸ ὁποῖον ἀνατοκίζεται κατ' ἑξαμηνίαν πρὸς 6 % ἑτησίως. Μετὰ 5 ἔτη ἔλαβε 26000 δρχ. Πόσα χρήματα εἶχε καταθέσει;

**504.** Κεφάλαιόν τι ἀνατοκίζόμενον κατ' ἔτος γίνεται μετὰ 3 ἔτη 5625 δρχ., μετ' ἄλλα δὲ δύο ἀκόμη γίνεται 6084 δρχ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἔγινε ὁ ἀνατοκισμός;

**505.** Μετὰ πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι τριπλασιάζεται ἀνατοκίζόμενον καθ' ἑξαμηνίαν πρὸς 6 % ἑτησίως;

**506.** Δύο κεφάλαια τὸ ἓν ἐκ 5000 δρχ. καὶ τὸ ἕτερον ἐξ 8000 δραχμῶν ἀνατοκίζονται ἀντιστοιχῶς μὲ ἐπιτόκια 5 % καὶ 3 % ἑτησίως. Μετὰ πόσον χρόνον τὰ δύο κεφάλαια θὰ καταστοῦν ἴσα;

**507.** Νὰ ἐξετασθῇ τί εἶναι συμφερότερον νὰ ἀνατοκίσῃ τις 60.000 δρχ. ἐπὶ 10 ἔτη πρὸς 5 % ἑτησίως ἢ νὰ δανείσῃ τὸ αὐτὸ ποσὸν μὲ ἀπλοῦν τόκον πρὸς 7 % καὶ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον;

**508.** Ποσὸν τι  $\alpha$  δραχμῶν ἀνατοκίζεται ἐπὶ τι χρονικὸν διάστημα. Ἐὰν ἀνατοκίζετο τοῦτο  $\rho$  ἔτη ὀλιγώτερον, τότε τὸ τελικὸν κεφάλαιον θὰ ἦτο κατὰ  $\beta$  δραχμὰς ὀλιγώτερον, ἔαν ὁμοῦς ἀνατοκίζετο  $\rho$  ἔτη περισσώτερον, τότε τὸ τελικὸν κεφάλαιον θὰ ἦτο κατὰ  $\gamma$  δραχμὰς περισσώτερον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἡ διάρκεια τοῦ ἀνατοκισμοῦ.

509. Ὁ πληθυσμὸς ἐνὸς κράτους αὐξάνεται κατ' ἔτος κατὰ τὸ ὀγδοηκοστὸν τοῦ προηγουμένου ἔτους. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ διπλασιασθῇ ἢ θὰ τριπλασιασθῇ ὁ πληθυσμὸς αὐτοῦ;

510. Μία πόλις ἔχει 8.000 κατοίκους καὶ ὁ πληθυσμὸς αὐτῆς ἐλαττοῦται ἐτησίως κατὰ 160 κατοίκους. Ἐὰν ἡ ἐλάττωσις ἐξακολουθήσῃ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν, μετὰ πόσα ἔτη ἡ πόλις αὕτη θὰ ἔχῃ 5.000 κατοίκους;

511. Εἰς μίαν πόλιν ἡ θνησιμότης εἶναι τὸ  $\frac{1}{42}$  τοῦ πληθυσμοῦ τῆς, αἱ δὲ γεννήσεις τὸ  $\frac{1}{35}$  τοῦ πληθυσμοῦ. Ἐπὶ τῇ παραδοχῇ ὅτι ἡ ἀναλογία αὕτη θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς τὰ ἐπόμενα ἔτη, νὰ εὐρεθῇ μετὰ πόσον χρόνον θὰ διπλασιασθῇ ὁ πληθυσμὸς τῆς.

## 2. Ἴσαι καταθέσεις

§ 225.— Συχνὰ οἱ ἄνθρωποι ἀπὸ τὰς οἰκονομίας των καταθέτουν ἓνα σταθερὸν χρηματικὸν ποσὸν εἴτε εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔτους (ἢ συμπεφωνημένης χρονικῆς μονάδος) πρὸς σχηματισμὸν ἐνὸς κεφαλαίου, εἴτε εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους (ἢ συμπεφωνημένης χρονικῆς μονάδος) πρὸς ἐξόφλησιν ἐνὸς χρέους.

Τὸ σταθερὸν αὐτὸ χρηματικὸν ποσὸν καλεῖται **κατάθεσις**.

Εἰς ζητήματα ἴσων καταθέσεων διακρίνομεν ἐκάστοτε δύο περιπτώσεις:

α'). Αἱ καταθέσεις γίνονται εἰς τὴν **ἀρχὴν** ἐκάστου ἔτους, καὶ

β'). Αἱ καταθέσεις γίνονται εἰς τὸ **τέλος** ἐκάστου ἔτους.

Αἱ ἴσαι καταθέσεις δύνανται νὰ γίνωνται καθ' ἑξαμηνίαν ἢ κατὰ τριμηνίαν καὶ ἐπὶ ἓνα ὥρισμένον χρόνον.

Τὰ προβλήματα τῶν ἴσων καταθέσεων λύομεν διὰ δύο τύπων, τοὺς ὁποίους εὐρίσκομεν διὰ τῆς λύσεως τῶν ἀκολουθῶν δύο προβλημάτων.

§ 226. **Πρόβλημα I.**— Καταθέτει τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔτους  $\alpha$  δραχ. μὲ ἀνατοκισμὸν καὶ μὲ τόκον  $\tau$  τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος. Ζητεῖται τί ποσὸν θὰ σχηματίσῃ διὰ τῶν καταθέσεων τούτων μετὰ  $n$  ἔτη;

**Λύσις:** Ἡ πρώτη κατάθεσις τῶν  $\alpha$  δραχμῶν θὰ μείνῃ εἰς τὸν ἀνατοκισμὸν  $n$  ἔτη καὶ συνεπῶς ἀνατοκίζομένη θὰ γίνῃ:  $\alpha(1+\tau)^n$ .

Ἡ δευτέρα κατάθεσις, ὡς ἀνατοκίζομένη ἐπὶ ἓν ἔτος ὀλιγώτερον, θὰ γίνῃ ἴση πρὸς:  $\alpha(1+\tau)^{n-1}$ , ἡ τρίτη θὰ γίνῃ:  $\alpha(1+\tau)^{n-2}$  κ.ο.κ.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον προχωροῦντες εὐρίσκομεν, ὅτι ἡ τελευταία κατάθεσις  $\alpha$  δραχμῶν θὰ μείνῃ εἰς τὸν ἀνατοκισμὸν ἓν ἔτος καὶ συνεπῶς θὰ γίνῃ ἴση πρὸς:

$$\alpha(1+\tau)^1 = \alpha(1+\tau).$$

Ἐὰν συνεπῶς παραστήσωμεν διὰ  $\Sigma$  τὸ ποσόν, ὅπερ διὰ τῶν καταθέσεων τούτων θὰ σχηματισθῇ εἰς τὸ τέλος τοῦ νιοστοῦ ἔτους, θὰ ἔχωμεν:

$$\Sigma = \alpha(1+\tau)^n + \alpha(1+\tau)^{n-1} + \dots + \alpha(1+\tau)$$

$$\text{ἢ } \Sigma = \alpha(1+\tau) + \alpha(1+\tau)^2 + \dots + \alpha(1+\tau)^{n-1} + \alpha(1+\tau)^n.$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς τελευταίας ἰσότητος εἶναι ἄθροισμα ὄρων γεωμετρικῶν

κῆς προόδου, με λόγον  $(1 + \tau)$ , ἄρα κατὰ τὸν τύπον (1), § 169 θὰ ἰσοῦται μέ :

$$\frac{\alpha (1 + \tau)^v (1 + \tau) - \alpha (1 + \tau)}{1 + \tau - 1}.$$

Ὡστε :

$$\Sigma = \alpha \cdot (1 + \tau) \cdot \frac{(1 + \tau)^v - 1}{\tau} \quad (1)$$

Ὁ τύπος (1) καλεῖται **τύπος τῶν ἰσῶν καταθέσεων**, ἐκάστης καταβαλλομένης εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς ἐκάστοτε χρονικῆς περιόδου.

**Σημ.** Αἱ δυνάμεις  $(1 + \tau)^v$  διὰ  $\tau = 0.03, 0.04, \dots, 0.06$  καὶ διὰ  $v = 1, 2, \dots, 50$  παρέχονται ἀπὸ εἰδικούς πίνακας καὶ οὕτω διευκολύνεται ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ  $\Sigma$ .

**Παράδειγμα :** Καταθέτει τις εἰς τὴν Τράπεζαν με ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος 5 % ποσὸν 2.500 δρχ. εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔτους. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ μετὰ 10 ἔτη;

**Λύσις :** Ἐχομεν  $\alpha = 2500$ ,  $\tau = 0.05$ ,  $v = 10$  καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεταί :

$$\Sigma = 2500 \times 1.05 \times \frac{(1.05)^{10} - 1}{0.05}.$$

Ἡ παράστασις  $(1.05)^{10}$  ὑπολογιζομένη χωριστὰ εἶναι ἴση πρὸς : 1.628.

Ἄρα  $(1.05)^{10} - 1 = 0.628$  καὶ ἐπομένως :

$$\Sigma = 2500 \times 1.05 \times \frac{0.628}{0.05}.$$

Ἐκ ταύτης, διὰ τῶν λογαριθμῶν ἢ δι' ἀπ' εὐθείας ἐκτελέσεως τῶν πράξεων, εὐρίσκομεν :

$$\Sigma = 33016,97 \text{ δρχ.}$$

**§ 227. Πρόβλημα II.**— Καταθέτει τις εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους  $\alpha$  δρχ. με ἀνατοκισμὸν καὶ με τόκον  $\tau$  τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος. Ζητεῖται, τί ποσὸν θὰ σχηματισθῇ εἰς τὸ τέλος τοῦ νιοστοῦ ἔτους, ἥτοι ἅμα τῇ νιοστῇ καταθέσει ;

**Λύσις :** Αἱ  $\alpha$  δραχμαί, αἱ ὁποῖαι κατατίθενται εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ μείνουν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ ἐπὶ  $(v - 1)$  ἔτη καὶ συνεπῶς θὰ γίνουν :  $\alpha(1 + \tau)^{v-1}$ . Αἱ  $\alpha$  δραχμαί αἱ ὁποῖαι κατατίθενται εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους θὰ μείνουν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ ἐπὶ  $(v - 2)$  ἔτη καὶ συνεπῶς θὰ γίνουν :  $\alpha(1 + \tau)^{v-2}$ .

Δι' ὁμοιον λόγον αἱ  $\alpha$  δραχμαί τῆς τρίτης καταθέσεως θὰ γίνουν :  $\alpha(1 + \tau)^{v-3}$ .

Προχωροῦντες ὁμοίως εὐρίσκομεν ὅτι αἱ  $\alpha$  δραχμαί τῆς προτελευταίας καταθέσεως, αἱ ὁποῖαι θὰ μείνουν ἐπ' ἀνατοκισμῷ μόνον ἓν ἔτος, θὰ γίνουν :  $\alpha(1 + \tau)$ . Τέλος ἡ τελευταία κατάθεσις δὲν τοκίζεται, καθ' ὅσον θὰ γίνῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ τελευταίου ἔτους καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι  $\alpha$ . Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν κατατεθέντων ποσῶν (μετὰ τῶν τόκων τῶν) θὰ εἶναι :

$$\Sigma = \alpha(1 + \tau)^{v-1} + \alpha(1 + \tau)^{v-2} + \dots + \alpha(1 + \tau) + \alpha$$

ἢ (§ 170, τύπος 1) :

$$\Sigma = \alpha \cdot \frac{(1 + \tau)^v - 1}{\tau} \quad (2)$$

Ὁ τύπος (2) καλεῖται **τύπος τῶν χρεωλυτικῶν καταταθέσεων** καὶ συνδέει τὰ τέσσαρα ποσὰ  $\Sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $v$ .



**Παράδειγμα.** Εἰς καπνιστὴς ἐξοδεύει διὰ τὸ κάπνισμά του 12 δρχ. ἡμερησίως κατὰ μέσον ὄρον. Νὰ υπολογισθῇ τί ποσὸν θὰ εἰσέπραττεν εἰς τὸ 60ον ἔτος τῆς ἡλικίας του, ἐὰν κατέθετε εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους τὰ χρήματα ποῦ διέθετε διὰ τὴν ἀγορὰν σιγαρέττων εἰς μίαν Τράπεζαν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 6 %, γνωστοῦ ὄντος ὅτι οὗτος ἤρχισε καπνίζων ἀπὸ τοῦ 20οῦ ἔτους τῆς ἡλικίας του ;

**Λύσις :** Τὰ ἐτήσια ἐξοδα τοῦ καπνιστοῦ ἀνέρχονται εἰς  $12 \cdot 365 = 4.380$  δρχ.

Ἔχομεν τότε :  $\alpha = 4380$ ,  $\tau = 0,06$ ,  $\nu = 40$ .

Ὅθεν ὁ τύπος (2) γίνεταί :

$$\Sigma = 4380 \cdot \frac{(1,06)^{40} - 1}{0,06} \quad (1)$$

Ὑπολογίζομεν ἐν πρώτοις τὴν δύναμιν  $(1,06)^{40}$ . Πρὸς τοῦτο θέτομεν :  $y = (1,06)^{40}$  καὶ ἔχομεν :

$$\log y = 40 \cdot \log (1,06) = 1,0124.$$

Ἐκ ταύτης εὐρίσκομεν :  $y = 10,2895$ .

Ἀρα  $(1,06)^{40} - 1 = 9,2895$  καὶ συνεπῶς

$$\Sigma = 4380 \cdot \frac{9,2895}{0,06}.$$

Ἐκ ταύτης λογαριθμίζοντες εὐρίσκομεν :

$$\log \Sigma = \log 4380 + \log 9,2895 - \log 0,06.$$

Ἡ ἰσότης αὕτη, ἐπεὶδὴ εἶναι :  $\log 4380 = 3,64147$ ,  $\log 9,2895 = 0,96800$  καὶ  $\log 0,06 = -2,77815$  γίνεταί :

$$\log \Sigma = 5,83132.$$

Ἐκ ταύτης εὐρίσκομεν :  $\Sigma = 678142,86$ .

Ὡστε θὰ εἰσέπραττεν 678142,86 δραχμὰς (!).

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**512.** Καταθέτει τις ἐπὶ ἀνατοκισμῷ ποσὸν 8050 δραχμῶν πρὸς 4,5 %, εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔτους. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ μετὰ πάροdon 18 ἐτῶν;

**513.** Πατήρ τις ἀποκτήσας κόρην θέλει νὰ καταθέτῃ κατ' ἔτος ποσὸν τι ὠρισμένον δι' αὐτήν, ἵνα τοῦτο ἀνατοκίζομενον κατ' ἔτος πρὸς 5 % γίνῃ μετὰ 21 ἔτη 250.000 δρχ. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐτήσια κατάθεσις;

**514.** Καταθέτει τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔτους 10.000 δραχμὰς ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 5 % ἐτησίως. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ λάβῃ 150.000 δραχμὰς;

**515.** Καταθέτει τις ἐπὶ ἀνατοκισμῷ ποσὸν 2050 δραχμῶν πρὸς 4,5 %, εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔτους. Μετὰ πάροdon δεκαπενταετίας ἔπαυσε νὰ καταθέτῃ, ἀλλ' ἀφῆκε τὸ σχηματισθὲν κεφάλαιον ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 5 % ἐτησίως. Πόσα θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τῶν 24 ἐτῶν ἀπὸ τῆς πρώτης καταθέσεως;

**516.** Καταθέτει τις κατὰ τὴν ἡμέραν τῶν γενεθλίων τῆς κόρης του εἰς τὸ ταμιευτήριον τῆς Ἑθνικῆς Τραπεζῆς 5000 δρχ. ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 4,5 %. Ζητεῖται, τί ποσὸν θὰ ἔχῃ σχηματισθῇ κατὰ τὴν εἰκοστὴν πρώτην ἐπέτειον τῶν γενεθλίων τῆς κόρης του;

## 3. Χρεωλυσία

**§ 228. Ὅρισμοί.**— Χρεωλυσία καλεῖται ἡ ἐντὸς ὠρισμένου χρόνου ἀπόσβεσις χρέους δι' ἴσων δόσεων, αἱ ὁποῖαι καταβάλλονται εἰς τὸ τέλος ἐκάστης χρονικῆς περιόδου, π.χ. εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους ἢ τοῦ ἑξαμήνου κλπ.

Τὸ ποσὸν ἐκάστης τῶν ἴσων δόσεων, τὸ ὁποῖον καταβάλλεται εἰς τὸ τέλος ἐκάστης χρονικῆς περιόδου διὰ τὴν ἀπόσβεσιν τοῦ χρέους, καλεῖται **χρεωλύσιον**.

Είναι φανερόν ὅτι μέρος μὲν τοῦ χρεωλυσίου χρησιμεύει διὰ τὴν πληρωμὴν τῶν δεδουλευμένων τόκων τοῦ χρέους, τὸ ὑπόλοιπον δὲ συντελεῖ εἰς τὴν βαθμιαίαν ἀπόσβεσιν τοῦ χρέους.

Ἀποσβέννυται δὲ τὸ χρέος, ὅταν τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν χρεωλυσίων μετὰ τῶν συνθέτων τόκων αὐτῶν ἀποτελεῖ ποσὸν ἴσον πρὸς τὴν τελικὴν ἀξίαν τοῦ ἀνατοκίζομένου ἀρχικοῦ κεφαλαίου.

Τὰ συνηθέστερα προβλήματα τῆς χρεωλυσίας λύομεν διὰ τοῦ τύπου, τὸν ὁποῖον εὐρίσκομεν ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ἀκολουθοῦ γενικοῦ προβλήματος.

**§ 229. Πρόβλημα.**—Ἐδανείσθη τις  $\alpha$  δραχμὰς ἐπὶ ἀνατοκισμῷ μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του διὰ  $n$  ἴσων ἐτησίων δόσεων καταβαλλομένων εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους. Ζητεῖται νὰ εὕρεθῇ τὸ ποσὸν ἐκάστης δόσεως (χρεωλύσιον), γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἐκάστη δραχμὴ φέρει εἰς ἓν ἔτος τόκον  $\tau$  δραχμὰς.

**Λύσις :** Τὸ δανεισθὲν ποσὸν  $\alpha$ , ἀνατοκίζομενον, μετὰ  $n$  ἔτη θὰ ἔχῃ ἀνέλθῃ εἰς :  $\alpha (1 + \tau)^n$ , ὅπερ καὶ ὀφείλει νὰ πληρώσῃ ὁ δανειστὴς.

Οὗτος ὅμως πληρώνει εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους ἓνα χρεωλύσιον, ἔστω δὲ τοῦτο  $x$  δραχ. Δικαιοῦται λοιπὸν νὰ ζητήσῃ καὶ αὐτὸς τοὺς τόκους τῶν ἐτησίων δόσεων, τοὺς ὁποίους ἄλλως τε θὰ ἐλάμβανε, ἐὰν ἀνετόκιζε ἐκάστην δόσιν. Αἱ δόσεις αὗται (μὲ τοὺς τόκους των) θ' ἀποτελέσουν, κατὰ τὸν τύπον (2) τῶν χρεωλυτικῶν καταθέσεων (§ 227), ποσὸν ἴσον πρὸς :

$$x \cdot \frac{(1 + \tau)^n - 1}{\tau}.$$

Ἀλλὰ τὸ ποσὸν αὐτὸ πρέπει νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀφειλόμενον :  $\alpha (1 + \tau)^n$ .

Ἐντεῦθεν ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς χρεωλυσίας :

$$x \cdot \frac{(1 + \tau)^n - 1}{\tau} = \alpha (1 + \tau)^n \quad (1)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προσδιορίζομεν τὸ ζητούμενον χρεωλύσιον  $x$ . Αὕτη λυομένη ὡς πρὸς  $x$  ἢ  $\alpha$  δίδει τοὺς τύπους :

$$x = \frac{\alpha \tau (1 + \tau)^n}{(1 + \tau)^n - 1}$$

(1') καὶ

$$\alpha = \frac{x \cdot [(1 + \tau)^n - 1]}{\tau (1 + \tau)^n} \quad (1'')$$

Ἐνίοτε ἡ πρώτη καταβολὴ τοῦ χρεωλυσίου γίνεται ἔτη τινὰ μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου, λ.χ. μετὰ  $\mu$  ἔτη. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἀντίστοιχος ἐξίσωσις τῆς χρεωλυσίας εἶναι :

$$x \cdot \frac{(1 + \tau)^{n-\mu+1} - 1}{\tau} = \alpha (1 + \tau)^n \quad (\text{διατί;})$$

## Παραδείγματα ἐπὶ τῆς χρεωλυσίας

**Παράδειγμα 1ον.** Νὰ εὐρεθῇ τὸ χρεωλύσιον τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πληρώνη μία κοινότης, ἡ ὁποία ἐδανείσθη ἐπὶ ἀνατοκισμῷ ποσὸν 300.000 δραχμῶν πρὸς 5% μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος τοῦτο δι' ἑτησίων χρεωλυτικῶν δόσεων ἐντὸς 50 ἐτῶν.

**Λύσις :** Κατὰ τὸν τύπον (1') εἶναι

$$x = \frac{300.000 \cdot (1,05)^{50} \cdot 0,05}{(1,05)^{50} - 1}$$

Ἐπειδὴ  $(1,05)^{50} = 11,4674$  (διατί);, ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γράφεται

$$x = \frac{300.000 \times 11,4674 \times 0,05}{10,4674}$$

ἢ  $\log x = (\log 300.000 + \log 11,4674 + \log 0,05) - \log 10,4674$ .

Ἡ ἰσότης αὕτη, ἐπειδὴ εἶναι:  $\log 300.000 = 5,47712$ ,  $\log 11,4674 = 1,05946$ ,  $\log 0,05 = \bar{2},69897$  καὶ  $\log 10,4674 = 1,01984$ , γίνεται:

$$\log x = 4,21571.$$

Ἐξ οὗ:  $x = 16432,69$ .

**Παράδειγμα 2ον :** Ποῖον ποσὸν δύναται νὰ δανεισθῇ τις, ἐὰν θέλῃ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος αὐτοῦ εἰς 20 ἔτη δι' ἑτησίου χρεωλυσίου 5000 δρχ., ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4%;

**Λύσις :** Ἐχομεν ἐνταῦθα  $x = 5000$ ,  $\tau = 0,04$ ,  $v = 20$  καὶ ἡ ἐξίσωσις (1'') γίνεται:

$$\alpha = \frac{5000 [(1,04)^{20} - 1]}{0,04 \cdot (1,04)^{20}}$$

Ὑπολογίζομεν ἐν πρώτοις τὴν δύναμιν  $(1,04)^{20}$  καὶ ἀκολουθῶς εὐρίσκομεν διὰ τῶν λογαρίθμων:

$$\alpha = 67953 \text{ δραχμάς.}$$

**Παράδειγμα 3ον :** Δανεῖζεται τις ποσὸν 120000 δραχμῶν ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 8%. Πόσας ἑτησίας χρεωλυτικὰς δόσεις τῶν 15000 δραχμῶν πρέπει νὰ πληρώσῃ διὰ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ δάνειον;

**Λύσις :** Ἐκ τῆς ἐξίσωσεως (1) λαμβάνομεν:

$$x(1 + \tau)^v - x = \alpha\tau(1 + \tau)^v,$$

$$\text{ὅθεν} \quad (1 + \tau)^v = \frac{x}{x - \alpha\tau}, \quad (2)$$

$$\text{ἐξ οὗ:} \quad v \cdot \log(1 + \tau) = \log x - \log(x - \alpha\tau)$$

$$\text{καὶ} \quad v = \frac{\log x - \log(x - \alpha\tau)}{\log(1 + \tau)}. \quad (3)$$

Ἐπειδὴ εἶναι  $x = 15000$ ,  $\alpha = 120000$ ,  $\tau = 0,08$  καὶ συνεπῶς  $x - \alpha\tau = 5400$ , ὁ τύπος (3) δίδει:

$$v = \frac{\log 15000 - \log 5400}{\log 1,08}$$

Ἐξ αὐτῆς, ἐπειδὴ  $\log 15000 = 4,17609$ ,  $\log 5400 = 3,73239$  καὶ  $\log 1,08 = 0,03342$ , λαμβάνομεν:

$$v = \frac{0,44370}{0,0342} = 13 \text{ ἔτη... ἥτοι } 13 < v < 14.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δεικνύει, ὅτι πρέπει νὰ πληρώσῃ 13 δόσεις τῶν 15000 δρχ. καὶ μίαν ἀκόμη, ἡ ὁποία θὰ εἶναι μικροτέρα τῶν 15000 δρχ., ἥτις ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς:

Ὑπολογίζομεν πόσον γίνεται τὸ δάνειον τῶν 120000 εἰς τὸ τέλος τῶν 14 ἐτῶν, ἥτοι ὑπολογίζομεν τὸ:  $K = 120000 \cdot (1,08)^{14}$ . Μετὰ ταῦτα ὑπολογίζομεν τὸ ποσὸν, τὸ ὁποῖον

έχει πληρώσει με τās 13 δόσεις τών 15000 εκάστη εις τὸ τέλος τών αὐτῶν ἐτῶν, ἦτοι τό :

$$\Sigma = \frac{15000 [(1,08)^{14} - 1]}{0,08},$$

ὅτε ἡ διαφορά  $K - \Sigma$  δίδει τὴν τελευταίαν δόσιν. Οὕτως εὐρίσκομεν ὅτι ἡ δόσις αὕτη ἀνέρχεται εις 4252 δραχμάς.

**Παρατήρησις.** Κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (2) τῆς παρδ. 3, ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν, πρέπει νὰ εἶναι  $x > \alpha\tau$ , δηλαδὴ τὸ χρεωλύσιον πρέπει νὰ ὑπερβαίνει τὸν ἐτήσιον τόκον τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου, ὅπερ καὶ προφανές, διότι ἄλλως δὲν θὰ ἐγίνετο ποτὲ ἡ ἐξόφλησις τοῦ χρέους. Ἄν  $x = \alpha\tau$ , τότε ἡ ἐξίσωσις (2) δὲν ἔχει λύσιν, διότι ὁ παρονομαστής τοῦ β' μέλους μηδενίζεται. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ δάνειον λέγεται **πάγιον**, διότι οὐδέποτε ἐξοφλεῖται, τὸ δὲ καταβαλλόμενον ποσὸν  $x$  χρησιμεύει διὰ τὴν πληρωμὴν τῶν ἐτησίων τόκων τοῦ κεφαλαίου.

## Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

**517.** Κοινότης ἐδανείσθη δι' ἀνέγερσιν σχολικοῦ κτηρίου 120.000 δραχμάς πρὸς 6% ἐτησίως ἐξοφλητέας χρεωλυτικῶς εις 25 ἐτησίας δόσεις. Πόσον χρεωλύσιον θὰ πληρώνη ἐτησίως ;

**518.** Ἐμπορος ὑπολογίζει ὅτι δύναται νὰ διαθέτῃ ἐτήσιον χρεωλύσιον 8.650 δραχμῶν ἐπὶ 20 ἔτη. Πόσον δάνειον δύναται νὰ συνάψῃ διὰ τὴν προαγωγὴν τῶν ἐμπορικῶν του ἐπιχειρήσεων πρὸς 6% ἐτησίως ;

**519.** Δανείζεται τις χρεωλυτικῶς ποσὸν  $\alpha$  δραχμῶν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ μὲ τόκον  $\tau$  τῆς μιᾶς δραχμῆς. Νὰ εὐρεθῇ τὸ κατ' ἔτος χρεωλύσιον, ἵνα μετὰ  $\nu$  ἔτη τὸ χρέος του ἐλαττωθῇ κατὰ τὸ ἡμισυ. (Ἐφαρμογή :  $\alpha = 40000$ ,  $\tau = 0,05$ ,  $\nu = 12$ ).

**520.** Ἡ ἐξόφλησις χρέους πρέπει νὰ γίνῃ εις 20 ἔτη χρεωλυτικῶς. Ἐκάστη δόσις (ἐτησία) θὰ εἶναι 46130 δρχ., θὰ ἀρχίσῃ δὲ ἡ πληρωμὴ μετὰ τὸ 5ον ἔτος ἀπὸ τοῦ δανείου. Πόσον εἶναι τὸ ἀρχικῶς δανεισθὲν ποσόν, ἂν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4,5% ;

**521.** Συνῆψε τις δάνειον χρεωλυτικὸν 250.000 δρχ. πρὸς 7%, ἐξοφλητέον ἐντὸς 8 ἐτῶν. Τρεῖς μῆνας μετὰ τὴν κατάθεσιν τῆς πέμπτης χρεωλυτικῆς δόσεως θέλει νὰ ἐξοφλήσῃ τοῦτο ἐξ ὁλοκλήρου. Πόσα πρέπει νὰ καταβάλλῃ ;

**522.** Διὰ πόσων χρεωλυτικῶν δόσεων ἐξοφλεῖται δάνειον 25.000 δρχ. ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 6%, διατίθεται δὲ ἐτησίως χρεωλύσιον 3000 δραχμῶν.

**523.** Συμφωνεῖ τις νὰ πληρώσῃ εις ἓνα ἀσφαλιστικὸν ὄργανισμὸν  $\nu$  ἐτησίας δόσεις πρὸς  $\alpha$  δρχ. ἐκάστην ὑπὸ τὸν ὅρον, ὅτι ὁ ὄργανισμὸς θὰ τοῦ ἐξασφαλίσῃ διὰ τὰ ἐπόμενα  $2\nu$  ἔτη ἐτήσιον εἰσόδημα ἐκ  $\beta$  δραχμῶν. Τὸ πρῶτον εἰσόδημα τῶν  $\beta$  δραχμῶν θὰ καταβληθῇ μετὰ τὴν τελευταίαν κατάθεσιν αὐτοῦ. Οἱ τόκοι εἶναι σύνθετοι καὶ τὸ ἐπιτόκιον εἶναι  $\tau$  διὰ μίαν δραχμὴν εις ἓν ἔτος. Ζητεῖται :

1ον : Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος  $\frac{\alpha}{\beta}$ , καὶ

2ον : Νὰ ὀρισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ  $\nu$ , ἐὰν εἶναι  $\beta = 2\alpha$  καὶ  $\tau = 0,05$ .

**524.** Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ ἐξοφληθῇ δάνειον 20.000 δραχμῶν διὰ 16 ἐτησίων δόσεων ἐκ 1780,30 δρχ. ἐκάστην ;

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Χ

### ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΣ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

**§ 230. Εισαγωγή.**— Εἰς τὴν προηγουμένην τάξιν (βλ. Μαθηματικά Δ' Γυμνασίου, τόμος Α, κεφ. ΙΧ) εἶδομεν πῶς ἐπιλύονται προβλήματα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως πρώτου βαθμοῦ, ἀκριβέστερον ἡσυχολήθημεν μὲ τὴν ἐπίλυσιν, ἐντὸς τοῦ  $Z$ , ἐξισώσεων τῆς μορφῆς :

$$\alpha x + \beta y = \gamma, \quad \text{ὅπου } \alpha, \beta, \gamma \in Z.$$

Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὴν μελέτην εἰδικῶν τινῶν περιπτώσεων τοῦ κάτωθι γενικοῦ προβλήματος ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως β' βαθμοῦ, τῆς γενικῆς περιπτώσεως μὴ ὑπαγομένης ἐντὸς τῶν ὁρίων τοῦ παρόντος βιβλίου.

**§ 231. Πρόβλημα.**— Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ  $Z$ , ἡ ἐξίσωσις :

$$f(x, y, \dots) = 0, \tag{1}$$

ὅπου  $f(x, y, \dots)$  ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς  $x, y, \dots$ , δευτέρου βαθμοῦ, ἔχον πάντας τοὺς συντελεστὰς του ἀκεραίους.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο δὲν ἐπιλύεται πάντοτε. Κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν εἰδικὰς τινὰς περιπτώσεις καθ' ὅς ἐπιτυγχάνεται ἡ ἐπίλυσις τοῦ προβλήματος, ἀσχολούμενοι κυρίως μὲ ἐπίλυσιν εἰδικῶν τινῶν ἐξισώσεων, δευτέρου βαθμοῦ, μὲ δύο ἀγνώστους.

Ἡ γενικὴ (πλήρης) μορφή μιᾶς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς  $x$  καὶ  $y$  εἶναι ἡ κάτωθι :

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \eta = 0. \tag{2}$$

Δεχόμεθα, χωρὶς τοῦτο νὰ περιορίζῃ τὴν γενικότητα, ὅτι οἱ συντελεσταὶ  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$  καὶ  $\eta$  εἶναι ἀκέραιοι καὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει τοὺς καθιστῶμεν τοιούτους (πῶς;).

Ἡδὴ θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὴν ἐπίλυσιν τῶν κάτωθι μερικῶν περιπτώσεων τῆς (2) :

**Περίπτωσις I.** Ἐὰν εἶναι  $\gamma = 0, \beta \neq 0$ . (Δηλ. ἐλλείπει τὸ  $y^2$ ). Τότε ἡ (2) ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν :

$$\alpha x^2 + \beta xy + \delta x + \epsilon y + \eta = 0. \tag{3}$$

Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν :

$$(\beta x + \epsilon) y = -\alpha x^2 - \delta x - \eta. \tag{4}$$

Διακρίνομεν ἤδη δύο περιπτώσεις :

Ια. 'Εάν  $\beta x + \varepsilon / -\alpha x^2 - \delta x - \eta$ , τότε:  $-\alpha x^2 - \delta x - \eta \equiv (\beta x + \varepsilon) \cdot (kx + \lambda)$  και ή (4) γίνεται :

$$(\beta x + \varepsilon) y - (\beta x + \varepsilon) (kx + \lambda) = 0 \quad \eta \quad (\beta x + \varepsilon) \cdot (y - kx - \lambda) = 0.$$

Αυτή είναι ισοδύναμος προς το ζεύγος των εξισώσεων :

$$\{\beta x + \varepsilon = 0 \text{ (i)}, \quad y - kx - \lambda = 0 \text{ (ii)}\}.$$

'Η (i) έχει άκεραία λύσιν τότε, και μόνον τότε, αν  $\beta | \varepsilon$ , δηλ. αν  $\frac{\varepsilon}{\beta} \in \mathbb{Z}$ . Τότε όμως ή (3) έχει απείρους το πλήθος λύσεις τās :

$$x = -\frac{\varepsilon}{\beta}, \quad y = h, \quad (\text{ένθα } h \text{ τυχών άκεραίος}).$$

'Η (ii), πρωτοβάθμιος ως προς  $x$  και  $y$ , λυομένη κατά τὰ γνωστά (άπροσδ. άνάλυσις πρώτου βαθμού) δίδει απείρους άκεραίας λύσεις, αί όποίαι δίδονται υπό των τύπων :

$$x = x_0 + h, \quad y = y_0 + kh,$$

ένθα  $h \in \mathbb{Z}$  και  $(x_0, y_0)$  μία άκεραία λύσις τής (ii).

Ιβ. 'Εάν  $\beta x + \varepsilon f - \alpha x^2 - \delta x - \eta$ , τότε, αν  $kx + \lambda$  είναι το πηλίκον και  $u$  το υπόλοιπον τής διαιρέσεως  $(-\alpha x^2 - \delta x - \eta) : (\beta x + \varepsilon)$ , ή εξίσωσις (4) είναι ισοδύναμος προς τήν :

$$y = (kx + \lambda) + \frac{u}{\beta x + \varepsilon} \quad (5)$$

και εάν οί αριθμοί  $k, \lambda$  και  $u$  δέν είναι πάντες άκεραίοι, αλλά κλασματικοί, έστω με έλάχιστον κοινόν πολλαπλάσιον των παρονομαστών αυτών τον  $\rho$ , πολλαπλασιάζομεν άμφότερα τὰ μέλη τής (5) επί  $\rho$  και έχομεν προς επίλυσιν τήν :

$$\rho y = (k_1 x + \lambda_1) + \frac{u_1}{\beta x + \varepsilon}, \quad (5')$$

ένθα οί  $\rho, k_1 = k\rho, \lambda_1 = \lambda\rho, u_1 = u\rho$  είναι πάντες άκεραίοι.

"Ηδη παρατηρούμεν τὰ εξής : Διά νά έχη άκεραία λύσιν ή (5') πρέπει και άρκεί νά ύπάρχη άκεραίος  $x$  τοιοϋτος, ώστε ό  $\beta x + \varepsilon$  νά είναι διαιρέτης του  $u_1$ . 'Εξισούμεν λοιπόν τον  $\beta x + \varepsilon$  με όλους τους διαιρέτας  $\delta_1, \delta_2, \dots$  του  $u_1$  και έκ των προκυπτουσών εξισώσεων  $\beta x + \varepsilon = \delta_1, \beta x + \varepsilon = \delta_2, \dots$  εύρίσκομεν (αν ύπάρχουν) τās άκεραίας τιμές του  $x$ . 'Ακολουθως, τās εύρεθείσας άκεραίας τιμές του  $x$  άντικαθιστῶμεν εις τήν (5') και ξεετάζομεν διά ποίας εξ αυτών λαμβάνομεν άκεραίας τιμές του  $y$ . Κατά ταϋτα διατηρούμεν τελικῶς μόνον εκείνας (αν ύπάρχουν), αί όποίαι καθιστοϋν τὸ β' μέλος τής (5') πολλαπλάσιον του  $\rho$ .

**Παρατήρησις.** 'Ομοίως ξεετάζεται και ή περίπτωση  $\alpha = 0, \beta \neq 0$ .

**'Εφαρμογαι :** 1η : Νά επίλυθῃ, έντός του  $\mathbb{Z}$ , ή εξίσωσις :

$$2x^2 - 7xy - 3x + 14y - 2 = 0.$$

**Λύσις :** Αυτή είναι ισοδύναμος προς τήν εξίσωσιν :

$$(7x - 14)y = 2x^2 - 3x - 2.$$

Τὸ  $7x - 14/2x^2 - 3x - 2$  και τὸ πηλίκον τής διαιρέσεως  $(2x^2 - 3x - 2) : (7x - 14)$  είναι τὸ  $\frac{2}{7}x + \frac{1}{7}$ , ὁθεν :  $2x^2 - 3x - 2 \equiv (7x - 14) \cdot \left(\frac{2}{7}x + \frac{1}{7}\right) \equiv (x - 2) \cdot (2x + 1)$ .

Τότε ή δοθείσα εξίσωσις γίνεται :

$$(x-2)(2x+1)-7y(x-2)=0 \text{ ή } (x-2)(2x-7y+1)=0.$$

Αυτή είναι ισοδύναμος πρὸς τὸ ζεύγος τῶν εξισώσεων :

$$\{ x-2=0 \text{ (i)}, \quad 2x-7y+1=0 \text{ (ii)} \}.$$

Αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς (i) εἶναι αἱ  $x=2$ ,  $y=h$ , ἐνθα  $h$  τυχὼν ἀκέραιος.

Ἡ (ii), λυομένη κατὰ τὰ γνωστά, δίδει τὰς λύσεις :

$$x=3+7h, \quad y=1+2h, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

2α: Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ  $\mathbb{Z}$ , ἡ εξίσωσις :

$$3x^2+2xy+x+y+1=0.$$

Λύσεις: Αὕτη εἶναι ισοδύναμος πρὸς τὴν εξίσωσιν :

$$(2x+1)y=-3x^2-x-1. \quad (\alpha')$$

Τὸ  $2x+1 \nmid -3x^2-x-1$ . Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν  $(-3x^2-x-1):(2x+1)$

εὐρίσκομεν πηλίκον  $-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$  καὶ ὑπόλοιπον  $\nu=-\frac{5}{4}$ , καὶ ἡ  $(\alpha')$  εἶναι ισοδύναμος πρὸς τὴν εξίσωσιν :

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{5/4}{2x+1}. \quad (\beta')$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς  $(\beta')$  ἐπὶ 4 (δηλ. ἐπὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων  $3/2, 1/4, 5/4$ ) λαμβάνομεν τὴν ισοδύναμον εξίσωσιν :

$$4y=-6x+1-\frac{5}{2x+1}. \quad (\gamma')$$

Οἱ διαιρέται τοῦ 5 εἶναι οἱ  $\pm 1, \pm 5$ .

Ἐξισοῦντες τὸ  $2x+1$  πρὸς τοὺς διαιρέτας αὐτοὺς λαμβάνομεν τὰς εξισώσεις :

$$2x+1=1, \quad 2x+1=-1, \quad 2x+1=5, \quad 2x+1=-5.$$

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν ἀντιστοίχως:  $x=0, x=-1, x=2, x=-3$ .

Αἱ τιμαὶ αὗται τοῦ  $x$  τίθενται διαδοχικῶς εἰς τὴν  $(\gamma')$  δίδουν ἀντιστοίχως :

$$y=-1, \quad y=3, \quad y=-3, \quad y=5.$$

Ἄρα ἡ δοθείσα εξίσωσις ἔχει 4 ἀκεραίας λύσεις τὰς :

$$(x=0, y=-1), \quad (x=-1, y=3), \quad (x=2, y=-3), \quad (x=-3, y=5).$$

**Περίπτωσις II.** Ἐὰν εἶναι  $\beta=\gamma=0$ . (Δηλ. ἔλλείπει τὸ  $y^2$  καὶ τὸ  $xy$ ). Τότε ἡ (2) ἀνάγεται εἰς τὴν εξίσωσιν :

$$ax^2+\delta x+\epsilon y+\eta=0. \quad (6)$$

Αὕτη λυομένη ὡς πρὸς  $y$  δίδει :

$$y=-\frac{ax^2+\delta x+\eta}{\epsilon}. \quad (7)$$

Ἡδη ἀποδεικνύομεν τὰς κάτωθι προτάσεις :

Ιη: Ἐὰν ἡ (6) δέχεται ἀκεραίαν τινα λύσιν  $(x_0, y_0)$ , θὰ δέχεται ὡς ἀκεραίας λύσεις καὶ τὰς :

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \epsilon h \\ y &= y_0 - (2ax_0 + \delta)h - a\epsilon h^2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ἐνθα  $h \in \mathbb{Z}$ .

Πράγματι, αν εις την (7) θέσωμεν ὅπου  $x = x_0 + \epsilon h$ ,  $h \in \mathbb{Z}$ , ἔχομεν :

$$y = -\frac{\alpha(x_0 + \epsilon h)^2 + \delta(x_0 + \epsilon h) + \eta}{\epsilon} = -\frac{\alpha x_0^2 + \delta x_0 + \eta}{\epsilon} - (2\alpha x_0 + \delta)h - \alpha \epsilon h^2.$$

Ἀλλὰ :

$$-\frac{\alpha x_0^2 + \delta x_0 + \eta}{\epsilon} = y_0.$$

Ὅθεν :  $y = y_0 - (2\alpha x_0 + \delta)h - \alpha \epsilon h^2$ , δηλ. ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως συνάγομεν τώρα τὸ ἐξῆς : ἂν ἡ ἐξίσωσις (6) ἔχη ἀκεραίας λύσεις, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν μίαν τυχοῦσαν ἐξ αὐτῶν καὶ ἀκολουθῶς ἐκ τῶν τύπων (8) θὰ ἔχωμεν ἀπείρους τὸ πλῆθος ἀκεραίας λύσεις. Τὸ πρόβλημα συνεπῶς ἀνάγεται εἰς τὴν ἀναζητήσιν μιᾶς ἀκεραίας λύσεως τῆς (6). Πρὸς τοῦτο ἀποδεικνύομεν τὴν κάτωθι πρότασιν :

2α: Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις (6) δέχεται ἀκεραίας λύσεις, τότε ὑπάρχει ἀκεραία λύσις αὐτῆς  $(x'_0, y'_0)$  τοιαύτη, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$0 \leq x'_0 < |\epsilon|. \quad (9)$$

Πράγματι, ἔστω  $(x_0, y_0)$  μία ἀκεραία λύσις τῆς (6). Τότε, ἂν ὁ  $x_0$  πληροῖ τὴν (9) ἡ πρότασις ἐδείχθη, ἂν ὅχι, ἐπειδὴ, ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν προηγούμενην πρότασιν, ὁ  $x_0 + \epsilon h$ ,  $h \in \mathbb{Z}$ , τιθέμενος εἰς τὴν (6) ἀντὶ τοῦ  $x$  δίδει διὰ τὸ  $y$  ἀκεραίαν τιμὴν, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ὑπάρχει ἀκέραιος  $h$ , ὥστε νὰ εἶναι :

$$0 \leq x_0 + \epsilon h < |\epsilon|$$

ἤτοι :

$$-\frac{x_0}{\epsilon} \leq h < 1 - \frac{x_0}{\epsilon} \quad \text{ἀντιστοίχως} \quad -\frac{x_0}{\epsilon} \geq h > -1 - \frac{x_0}{\epsilon},$$

καθ' ὅσον εἶναι  $\epsilon > 0$  ἀντιστοίχως  $\epsilon < 0$ .

Ὡστε, ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπάρχει ἀκέραιος  $h$  τοιοῦτος, ὥστε :

$$h \in \left[ -\frac{x_0}{\epsilon}, 1 - \frac{x_0}{\epsilon} \right) \quad \text{ἀντιστοίχως} \quad h \in \left( -1 - \frac{x_0}{\epsilon}, -\frac{x_0}{\epsilon} \right].$$

Τοῦτο ὁμῶς συμβαίνει, διότι τὸ μῆκος τοῦ διαστήματος (§ 114, δ')

$$\left[ -\frac{x_0}{\epsilon}, 1 - \frac{x_0}{\epsilon} \right) \quad \text{ἀντιστοίχως} \quad \left( -1 - \frac{x_0}{\epsilon}, -\frac{x_0}{\epsilon} \right]$$

εἶναι 1. Οὕτως ἐδείχθη ὅτι ὑπάρχει ἀκεραία τιμὴ τοῦ  $x$ , θετικὴ ἢ μηδὲν καὶ μικρότερα τοῦ  $|\epsilon|$ , δίδουσα, ἐκ τῆς (7), διὰ τὸ  $y$  ἀκεραίαν τιμὴν.

Κατόπιν τούτου διὰ τὴν εὕρεσιν ἀκεραίας λύσεως τῆς (6) ἐργαζόμεθα ὡς ἐξῆς : Δίδομεν εἰς τὸ  $x$  διαδοχικῶς τὰς ἀκεραίας τιμὰς : 0, 1, 2, 3, ...,  $(|\epsilon| - 1)$ , ὅτε, ἐὰν ἡ (6) ἔχη ἀκεραίας λύσεις, ὁ τύπος (7) θὰ δώσῃ, διὰ μίαν τοῦλάχιστον τῶν τιμῶν αὐτῶν τοῦ  $x$ , ἀκεραίαν τιμὴν διὰ τὸ  $y$ . Ἐὰν δι' οὐδεμίαν τῶν ἀνωτέρω τιμῶν τοῦ  $x$  ὁ τύπος (7) δὲν δώσῃ ἀκεραίαν τιμὴν διὰ τὸ  $y$ , τοῦτο θὰ σημαίνῃ ὅτι ἡ (6) δὲν ἐπιδέχεται ἀκεραίας λύσεις.

**Σημείωσις :** Ἐὰν εὕρωμεν διὰ τὸ  $x$  τιμὰς τοῦ διαστήματος  $[0, |\epsilon|)$  π.χ. τὰς :  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_p$  ὥστε δι' αὐτὰς ἐκ τῆς (7) νὰ λαμβάνωμεν ἀκεραίας τιμὰς τοῦ  $y$ , τὰς  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_p$  ἀντὶ



στοίχως, τότε θα έχουμε δια την (6) τὰς ἀκεραίας λύσεις :  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_p, y_p)$ . Ἐφαρμόζοντες δι' ἐκάστην τῶν λύσεων τούτων τοὺς τύπους (8) εὐρίσκομεν ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξίσωσης (6), αἱ ὁποῖαι ὁμως δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην πᾶσαι αἱ λύσεις αὐτῆς.

**Παρατήρησις.** Ὅμοιως ἐξετάζεται καὶ ἡ περίπτωσις  $\alpha = \beta = 0$ .

**Ἐφαρμογή:** Νὰ εὐρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξίσωσης :

$$3x^2 + 2x - 5y - 1 = 0. \quad (\alpha')$$

**Λύσις:** Λύοντες τὴν  $(\alpha')$  ὡς πρὸς  $y$  λαμβάνομεν :

$$y = \frac{3x^2 + 2x - 1}{5} \quad (\beta')$$

Ἐνταῦθα εἶναι  $\varepsilon = -5$ . Διὰ νὰ εὐρωμεν ἀκεραίαν λύσιν τῆς  $(\alpha')$ , δίδομεν εἰς τὸ  $x$  τὰς ἀκεραίας τιμὰς τοῦ διαστήματος  $[0, |\varepsilon|) \equiv [0, 5)$ , ἥτοι τὰς τιμὰς : 0, 1, 2, 3, 4 καὶ λαμβάνομεν ἐκ τῆς  $(\beta')$  ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς :

$$y_0 = -\frac{1}{5}, \quad y_1 = \frac{4}{5}, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = \frac{32}{5}, \quad y_4 = 11.$$

Οὕτως ἔχομεν τὰς ἀκεραίας λύσεις :

$$(x = 2, y = 3) \quad \text{καὶ} \quad (x = 4, y = 11).$$

Τότε ὁμως ἡ  $(\alpha')$  θὰ δέχεται ἀπείρους ἀκεραίας λύσεις, αἱ ὁποῖαι δίδονται ἀπὸ τοὺς τύπους (8). Οὕτω διὰ τὴν λύσιν  $(x = 2, y = 3)$  οἱ τύποι (8) δίδουν :

$$x = 2 - 5h, \quad y = 3 - 14h + 15h^2, \quad h \in \mathbb{Z}$$

καὶ διὰ τὴν λύσιν  $(x = 4, y = 11)$  οἱ αὐτοὶ τύποι δίδουν :

$$x = 4 - 5h, \quad y = 11 - 26h + 15h^2, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

**Περίπτωσις III.** Ἐὰν εἶναι  $\alpha \neq 0$ ,  $\gamma \neq 0$  καὶ  $\beta^2 - 4\alpha\gamma = k^2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . (Δηλ. ἡ ποσότης  $\beta^2 - 4\alpha\gamma$  εἶναι τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου ἀριθμοῦ).

Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν, ἐντὸς τοῦ  $\mathbb{Z}$ , τὴν ἐξίσωσιν (1) :  $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \eta = 0$ , ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς κάτωθι δύο προτάσεις :

**Ιη :** Ἐὰν  $\alpha \neq 0$ ,  $\gamma \neq 0$  καὶ  $\beta^2 - 4\alpha\gamma$  ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον ἀκεραίου τινὸς  $k \neq 0$ , τότε ἡ (1) τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$(px + qy + r) \cdot (p'x + q'y + r') = d, \quad (10)$$

ὅπου  $p, q, r, p', q', r'$  καὶ  $d$  ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Πράγματι, θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι δυνατόν προσθέτοντες εἰς τὰ μέλη τῆς (1) κατ'ἀλληλον ἀριθμὸν  $\lambda$  νὰ φέρωμεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφήν (10).

Ἐστω λοιπὸν ἡ ἐξίσωσις :

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \eta + \lambda = \lambda. \quad (11)$$

Ἡ (11) γράφεται ὡς τριώνυμον τοῦ  $x$  οὕτω :

$$\alpha x^2 + (\beta y + \delta) x + (\gamma y^2 + \varepsilon y + \eta + \lambda) = \lambda. \quad (12)$$

Διὰ νὰ φέρωμεν τώρα τὸ πρῶτον μέλος τῆς (12) εἰς τὴν μορφήν τοῦ πρώτου μέλους τῆς (10), ἀρκεῖ νὰ προσδιορισθῇ ὁ  $\lambda$  ὥστε ἡ διακρίνουσα  $\Delta(y)$  τοῦ τριωνύμου :

$$\alpha x^2 + (\beta y + \delta) x + (\gamma y^2 + \varepsilon y + \eta + \lambda) \quad (13)$$

νά είναι τετράγωνον πρωτοβαθμίου πολυωνύμου ως πρὸς  $y$  μὲ συντελεστὰς συμμετρους ἀριθμούς. Τοῦτο εἶναι δυνατόν — καὶ μάλιστα τὸ πρωτοβάθμιον πολυώνυμον θὰ εἶναι τῆς μορφῆς  $ky + \sigma$ , ὅπου  $\sigma$  σύμμετρος ἀριθμὸς — διότι ἔχομεν :

$$\Delta(y) \equiv (\beta y + \delta)^2 - 4\alpha(\gamma y^2 + \epsilon y + \eta + \lambda) \\ = (\beta^2 - 4\alpha\gamma)y^2 - 2(2\alpha\epsilon - \beta\delta)y + (\delta^2 - 4\alpha\eta - 4\alpha\lambda) \quad (14)$$

καὶ τὸ τριώνυμον (14), ἐφ' ὅσον εἶναι ἐξ ὑποθέσεως  $\beta^2 - 4\alpha\gamma = k^2$  ( $k$  ἀκέραιος  $\neq 0$ ), δύναται νὰ τεθῇ, ὡς γνωστόν, ὑπὸ τὴν μορφήν  $(ky + \sigma)^2$ , ἐνθα  $\sigma$  σύμμετρος ἀριθμὸς.

Διὰ νὰ εἶναι τὸ  $\Delta(y)$  τέλειον τετράγωνον ἀρκεῖ νὰ προσδιορισθῇ ὁ  $\lambda$  ὥστε ἡ διακρίνουσα  $\Delta$  τοῦ  $\Delta(y)$  νὰ εἶναι μηδέν (διαιτί;), δηλ. νὰ εἶναι :

$$(2\alpha\epsilon - \beta\delta)^2 - k^2(\delta^2 - 4\alpha\eta - 4\alpha\lambda) = 0. \quad (15)$$

Ἐκ τῆς (15) ὅμως προσδιορίζεται τὸ  $\lambda$ , διότι ἔχομεν :

$$\lambda = \frac{k^2(\delta^2 - 4\alpha\eta) - (2\alpha\epsilon - \beta\delta)^2}{4\alpha k^2}. \quad (16)$$

Οὕτως, ὀριζομένου τοῦ  $\lambda$ , ἡ (12) λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\alpha \left[ x - \frac{-(\beta y + \delta) + (ky + \sigma)}{2\alpha} \right] \cdot \left[ x - \frac{-(\beta y + \delta) - (ky + \sigma)}{2\alpha} \right] = \lambda$$

$$\eta \quad [2\alpha x + (\beta - k)y + (\delta - \sigma)] \cdot [2\alpha x + (\beta + k)y + (\delta + \sigma)] = 4\alpha\lambda. \quad (17)$$

Ὡστε, πράγματι ἡ (1) τίθεται, ὑπὸ τὰς τεθείσας ὑποθέσεις, ὑπὸ τὴν μορφήν (10). Ἀποδεικνύομεν τὴν ἐξῆς πρότασιν :

2α : Ἐὰν ὁ ἀκέραιος  $d \neq 0$  ἔχη  $n$  θετικούς διαιρέτας :  $1 = \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n = |d|$ , τότε ἡ ἐξίσωσις :  $(px + qy + r) \cdot (p'x + q'y + r') = d$  (10') καὶ τὰ 2ν συστήματα :

$$\left\{ px + qy + r = \epsilon\delta_i, \quad p'x + q'y + r' = \epsilon \frac{d}{\delta_i} \right\} \quad (18)$$

ὅπου  $\epsilon = 1$  ἢ  $-1$  καὶ  $i = 1, 2, \dots, n$ , ἔχουν τὰς αὐτὰς ἀκεραίας λύσεις.

Πράγματι, ἂν  $(x_0, y_0)$  εἶναι ἀκεραία λύσις τῆς (10'), τότε :  $px_0 + qy_0 + r + \epsilon = k$  καὶ  $p'x_0 + q'y_0 + r' = \lambda$ , ὅπου  $k, \lambda \in \mathbb{Z}$  καὶ  $k \cdot \lambda = d$ . Ἄρα  $k | d$  καὶ  $\lambda | d$ , ἐπομένως  $k = \epsilon\delta_i$ , ὅπου  $\epsilon = \pm 1$  καὶ  $\delta_i, i = 1, 2, \dots, n$  εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοί, οἱ ὅποιοι διαιροῦν τὸν  $d$  καὶ  $\lambda = \frac{d}{k} = \frac{d}{\epsilon\delta_i} = \frac{\epsilon\delta}{\epsilon^2\delta_i} = \epsilon \frac{d}{\delta_i}$ , διότι  $\epsilon^2 = 1$ , ἥτοι ἡ τυχούσα ἀκεραία λύσις  $(x_0, y_0)$  τῆς (10') εἶναι καὶ λύσις ἐνὸς ἐκ τῶν συστημάτων (18).

Ἀντιστρόφως, ἂν  $(x_0, y_0)$  εἶναι ἀκεραία λύσις ἐνὸς ἐκ τῶν συστημάτων (18) ἔχομεν :

$$px_0 + qy_0 + r = \epsilon\delta_i \quad \text{καὶ} \quad p'x_0 + q'y_0 + r' = \epsilon \frac{d}{\delta_i}.$$

Τότε όμως εξ αὐτῶν προκύπτει :

$$(px_0 + qy_0 + r) \cdot (p'x_0 + q'y_0 + r') = (\varepsilon\delta_1) \cdot \left( \varepsilon \frac{d}{\delta_1} \right) = \varepsilon^2 \delta_1 \frac{d}{\delta_1} = d,$$

ἥτοι ἡ  $(x_0, y_0)$  εἶναι λύσις καὶ τῆς (10'). Ἡ πρότασις ὅθεν ἀπεδείχθη.

Ἡδη, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ἀνωτέρω προτάσεις 1 καὶ 2, δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν ἐντὸς τοῦ  $Z$  τὴν (1) εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν εἶναι :  $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0, \beta^2 - 4\alpha\gamma = k^2 \neq 0, k \in Z$  ἐργαζόμενοι ὡς ἐξῆς : Φέρομεν ἐν πρώτοις τὴν (1) ὑπὸ τὴν μορφήν (10) καὶ ἀκολουθῶς ἐφαρμόζομεν τὴν πρότασιν 2.

**Ἐφαρμογαί :** 1η : Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξίσωσως :  $y^2 = 9x^2 - 11$ .

**Λύσις :** Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :  $9x^2 - y^2 = 11$ . (α')

Ἐνταῦθα ἔχομεν :  $\alpha = 9, \beta = 0, \gamma = -1, \beta^2 - 4\alpha\gamma = 36 = 6^2$ .

Ἡ (α') εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν :  $(3x + y) \cdot (3x - y) = 11$ . (β')

Οἱ διαιρέται τοῦ 11 εἶναι :  $\pm 1, \pm 11$ . Ἀρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις καὶ τὰ τέσσαρα συστήματα :

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 3x - y = 11, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = 11 \\ 3x - y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 3x - y = -11, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = -11 \\ 3x - y = -1, \end{cases}$$

ἔχουν τὰς αὐτὰς ἀκεραίας λύσεις. Ἡ ἐπίλυσις τούτων εἶναι πολὺ ἀπλή.

2α : Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ  $Z$ , ἡ ἐξίσωσις :

$$2x^2 + 6xy + 4y^2 + 5x + y + 2 = 0. \quad (\gamma')$$

**Ἐπίλυσις :** Ἐπειδὴ  $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 6^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 4 = 2^2$  προσδιορίζομεν κατάλληλον ἀριθμὸν  $\lambda$  ὥστε τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξίσωσως :  $2x^2 + 6xy + 4y^2 + 5x + y + 2 + \lambda = \lambda$  νὰ τίθεται ὑπὸ μορφήν γινομένου δύο πρωτοβαθμίων πολυωνύμων ὡς πρὸς  $x$  καὶ  $y$ .

Ἐκ τοῦ τύπου (16) ἔχομεν :

$$\lambda = \frac{4(25 - 4 \cdot 2 \cdot 2) - (2 \cdot 2 \cdot 1 - 6 \cdot 5)^2}{4 \cdot 2 \cdot 4} = -20.$$

Ὁ  $-20$  εἶναι λοιπὸν ὁ κατάλληλος ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὰ μέλη τῆς (γ') ὥστε τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς νὰ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν (10). Πράγματι, ἐκ τῆς (γ') ἔχομεν :

$$2x^2 + (6y + 5)x + 4y^2 + y - 18 = -20, \quad (\delta')$$

ὁπότε τὸ πρῶτον μέλος τῆς (δ') θεωρούμενον τριώνυμον ὡς πρὸς  $x$  ἔχει ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς :

$$\rho_{1,2} = \frac{-(6y + 5) \pm \sqrt{(6y + 5)^2 - 8(4y^2 + y - 18)}}{4} = \frac{-(6y + 5) \pm (2y + 13)}{4},$$

$$\text{ἥτοι :} \quad \rho_1 = -y + 2, \quad \rho_2 = -2y - \frac{9}{2}.$$

Τότε ὁμοῦς ἡ ἐξίσωσις (δ') λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2) \equiv 2(x + y - 2) \cdot \left(x + 2y + \frac{9}{2}\right) = -20$$

$$\text{ἥ} \quad (x + y - 2) \cdot (2x + 4y + 9) = -20. \quad (\epsilon')$$

Οἱ θετικοὶ διαιρέται τοῦ  $-20$  εἶναι οἱ : 1, 2, 4, 5, 10, 20.

Τότε ἡ (ε') εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰ  $2 \cdot 6 = 12$  συστήματα :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - 2 = \varepsilon\delta_1, \quad 2x + 4y + 9 = \varepsilon \frac{-20}{\delta_1} \end{array} \right\}$$

ὅπου  $\varepsilon = +1$  ἢ  $-1$  καὶ  $\delta_1 \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ .

Οὕτω, π.χ., διὰ  $\varepsilon = 1, \delta_1 = 4$  ἔχομεν τὸ σύστημα :

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 2 = 4 \\ 2x + 4y + 9 = -5, \end{array} \right\}, \quad \text{ἥτοι :} \quad \left. \begin{array}{l} x + y = 6 \\ x + 2y = -7 \end{array} \right\}$$

τὸ ὁποῖον δέχεται τὴν λύσιν  $(x = 19, y = -13)$ , ἡ ὁποία εἶναι καὶ λύσις τῆς δοθείσης.

**Περίπτωσης IV.** Ἐὰν εἶναι  $\alpha = \gamma = 0$  καὶ  $\beta\delta\epsilon\eta \neq 0$ . Τότε ἡ (2) ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν :  $\beta xy + \delta x + \epsilon y + \eta = 0$ .

Αὕτη γράφεται διαδοχικῶς :

$$\begin{aligned} & \beta^2 xy + \beta\delta x + \beta\epsilon y + \beta\eta = 0 \\ \eta & \quad \beta^2 xy + \beta\delta x + \beta\epsilon y + \delta\epsilon = \delta\epsilon - \beta\eta \\ \eta & \quad (\beta y + \delta)(\beta x + \epsilon) = \delta\epsilon - \beta\eta. \end{aligned} \quad (19)$$

Αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς (19) εἶναι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῶν συστημάτων :

$$\left\{ \beta x + \epsilon = k, \quad \beta y + \delta = \frac{\delta\epsilon - \beta\eta}{k} \right\},$$

ὅπου  $k \mid \delta\epsilon - \beta\eta$ .

**Ἐφαρμογή :** Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ  $\mathbb{Z}$ , ἡ ἐξίσωσις :

$$2xy - 3x + y + 1 = 0. \quad (\zeta')$$

**Ἐπίλυσις :** Ἐχομεν  $\alpha = \gamma = 0$ ,  $\beta\delta\epsilon\eta = -6 \neq 0$ .

Ἡ δοθεῖσα εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν :  $4xy - 6x + 2y + 2 = 0$  καὶ αὕτη πρὸς τὴν :  $(2x + 1)(2y - 3) = -5$ .

Οἱ θετικαὶ διαιρέται τοῦ  $-5$  εἶναι οἱ : 1 καὶ 5. Ἡ ἐπίλυσις συνεπῶς τῆς ( $\zeta'$ ) ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν τεσσάρων συστημάτων :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 1 = 1 \\ 2y - 3 = -5 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x + 1 = -5 \\ 2y - 3 = +1 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x + 1 = -1 \\ 2y - 3 = 5 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x + 1 = 5 \\ 2y - 3 = -1 \end{array} \right\}.$$

Αἱ λύσεις τῶν συστημάτων αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως :

$$(x = 0, y = -1), \quad (x = -3, y = 2), \quad (x = -1, y = 4), \quad (x = 2, y = 1).$$

Αὗται εἶναι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς δοθείσης ἐξίσωσως.

**Περίπτωσης V.** (Γενικὴ περίπτωσις). Ἐὰν εἶναι  $\alpha \neq 0$ ,  $\gamma \neq 0$  καὶ  $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq k^2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (δηλ. τὸ  $\beta^2 - 4\alpha\gamma$  δὲν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου). Τότε ἡ ἐξίσωσις (2) (σελὶς 285) λυομένη ὡς πρὸς  $x$  δίδει :

$$x = \frac{-(\beta y + \delta) \pm \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)y^2 - 2(2\alpha\epsilon - \beta\delta)y + (\delta^2 - 4\alpha\eta)}}{2\alpha}. \quad (20)$$

Ἰνα ἡ (1) ἐπιλύεται ἐντὸς τοῦ  $\mathbb{Z}$  θὰ πρέπει νὰ συμβαίνουν τὰ ἑξῆς : πρῶτον νὰ εἶναι :  $\Delta \equiv (\beta^2 - 4\alpha\gamma)y^2 - 2(2\alpha\epsilon - \beta\delta)y + (\delta^2 - 4\alpha\eta) = k^2$ , ἔνθα  $y, k$  ἐν  $\mathbb{Z}$  καὶ δευτέρον πρέπει :  $2\alpha \mid -(\beta y + \delta) \pm k$ . Ζητοῦμεν λοιπὸν κατὰ πρῶτον ποῖαι τιμαὶ τοῦ  $y$  καθιστοῦν τὸ ὑπόρριζον θετικόν. Ἐὰν εἰς τὸ δευτεροβάθμιον ὡς πρὸς  $y$  τριώνυμον  $\Delta$ , ὁ συντελεστὴς  $\beta^2 - 4\alpha\gamma$  τοῦ  $y^2$  εἶναι ἀρνητικὸς καὶ αἱ ρίζαι  $\rho_1, \rho_2$  πραγματικάι, τότε πρέπει ὁ  $y$  νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν, διὰ νὰ καθίσταται τοῦτο θετικόν. Ἐπομένως εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν περιοριζόμεθα εἰς τὰς ἀκεραίας τιμὰς  $y$  τὰς πληροῦσας τὴν :

$$\rho_1 \leq y \leq \rho_2.$$

Ἐκ τῶν ἀκεραίων τούτων τιμῶν τοῦ  $y$  ἐκλέγομεν μόνον ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὸ ὑπόρριζον  $\Delta$  τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου καὶ τέλος, ἐξ αὐτῶν ἐκείνας αἱ ὁποῖαι τιθέμεναι εἰς τὴν (20) καθιστοῦν τὸ  $x$  ἀκεραίου.

**Ἐφαρμογή :** Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ  $\mathbb{Z}$ , ἡ ἐξίσωσις :

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 7y - 9 = 0 \quad (\alpha')$$

**Ἐπίλυσις.** Αὕτη γράφεται:  $2x^2 + 2(y-1)x + (2y^2 - 7y - 9) = 0$ .

Λύοντες ταύτην ὡς πρὸς  $x$  ἔχομεν:

$$x = \frac{-(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - 2(2y^2 - 7y - 9)}}{2} = \frac{-y+1 \pm \sqrt{-3y^2 + 12y + 19}}{2} \quad (\beta')$$

Ἐν πρώτοις πρέπει:

$$-3y^2 + 12y + 19 \geq 0, \text{ δηλ. } -1 \leq y \leq 5 \text{ καὶ ἐπειδὴ } y \in \mathbb{Z}, \text{ ἔχομεν:}$$

$y = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Ἐκ τῶν τιμῶν αὐτῶν λαμβάνομεν μόνον ἐκείνας αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὸ ὑπόρριζον τέλειον τετράγωνον. Αὗται εἶναι αἱ  $y = -1$  καὶ  $y = 5$ .

Διὰ τὴν τιμὴν  $y = -1$  ἡ (β') δίδει:  $x = 2, x = 0$ .

Διὰ τὴν τιμὴν  $y = 5$  ἡ (β') δίδει:  $x = -1, x = -3$ .

Ἄρα ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἔχει τέσσαρας ἀκεραίας λύσεις τὰς:

$$(x = 2, y = -1), (x = 0, y = -1), (x = -1, y = 5), (x = -3, y = 5).$$

### § 232. Ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξίσωσεως:

$$x^2 + ky^2 = z^2, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Ἄνευ βλάβης τῆς γενικότητος δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν τὸν ἀκέραιον  $k$  πάντοτε θετικόν, διότι ἄλλως ἢ (1) θὰ ἡδύνατο νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν:  $z^2 + (-k)y^2 = x^2$ , εἰς ἣν ὁ  $(-k)$  θὰ ἦτο πάλιν θετικὸς.

Ἡ (1) ἐπιδέχεται προφανῶς τὴν λύσιν:  $x = y = z = 0$ . Ἐπίσης διὰ  $y = 0$  ἔχομεν:  $x = \pm z$ , ὅτε ἡ (1) ἐπιδέχεται τὰς ἀκεραίας λύσεις:  $x = z, y = 0$  καὶ  $x = -z, y = 0$ . Θὰ ζητήσωμεν τῶρα ἀκεραίας λύσεις τῆς (1) μὲ  $y \neq 0$ . Διαίρωντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) διὰ  $y^2$ , λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{x^2}{y^2} + k = \frac{z^2}{y^2}. \quad (2)$$

Θέτομεν  $\frac{z}{y} = \frac{x}{y} + \frac{n}{m}$  (3), ἔνθα οἱ  $m, n$  ἀκέραιοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν:

$$\frac{z^2}{y^2} = \frac{x^2}{y^2} + \frac{n^2}{m^2} + \frac{2nx}{my}. \quad (4)$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (4) ἔχομεν:

$$k = \frac{n^2}{m^2} + \frac{2nx}{my} \quad (5)$$

καὶ ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν:

$$\frac{x}{y} = \frac{km^2 - n^2}{2mn}. \quad (6)$$

Εἶναι προφανές ὅτι ἡ (6) ἀληθεύει, ἐὰν εἶναι  $x = (km^2 - n^2)h$  καὶ  $y = 2mnh$ , ἔνθα  $h \in \mathbb{Z}$ . Ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν  $x$  καὶ  $y$ :  $z = (km^2 + n^2)h$ . Ἄρα αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς (1) δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων:

|                     |            |                     |
|---------------------|------------|---------------------|
| $x = (km^2 - n^2)h$ | $y = 2mnh$ | $z = (km^2 + n^2)h$ |
|---------------------|------------|---------------------|

(7)

ἔνθα οἱ  $m, n, h$  εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Ὁμοίως ἐπιλύεται ἡ ἐξίσωσις  $kx^2 + y^2 = z^2$ .

**Σημείωσις.** Ἡ (1) διὰ  $k = 1$  ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν :  $x^2 + y^2 = z^2$ , ἡ ὁποία καλεῖται καὶ **πυθαγόρειος ἐξίσωσις**, διότι δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι συνδέει τὰς πλευρὰς ὀρθογωνίου τριγώνου. Αἱ ἀκέραιαι λύσεις αὐτῆς θὰ δίδωνται ὑπὸ τῶν τύπων (7), ἂν θέσωμεν  $k = 1$ , ἤτοι :

$$x = (m^2 - n^2)h, \quad y = 2mnh, \quad z = (m^2 + n^2)h, \quad h \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Οἱ θετικοὶ ἀκέραιοι οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τὴν  $x^2 + y^2 = z^2$  καλοῦνται **πυθαγόρειοι ἀριθμοί**. Ἡ ἀπλουστερά τριάς πυθαγορείων ἀριθμῶν εἶναι : 3, 4, 5.

Διὰ  $n = h = 1$  οἱ τύποι (8) γίνονται :

$$x = m^2 - 1, \quad y = 2m, \quad z = m^2 + 1 \quad (m \in \mathbb{N}, \quad m \neq 1)$$

καὶ καλοῦνται **πυθαγόρειοι τύποι**, ἂν καὶ ὡς πυθαγόρειοι τύποι φέρονται οἱ γνωστοὶ εἰς τοὺς Πυθαγορείους :

$$x = \frac{m^2 - 1}{2}, \quad y = m, \quad z = \frac{m^2 + 1}{2},$$

ἐνθα  $m$  τυχὼν περιττὸς φυσικὸς ἀριθμὸς  $\neq 1$ .

**Ἐφαρμογή.** Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως :

$$x^2 + 4y^2 = z^2.$$

**Λύσις :** Αὕτη προφανῶς ἐπιδέχεται τὴν λύσιν :  $x = y = z = 0$ , καθὼς ἐπίσης καὶ τὰς λύσεις :  $x = z, y = 0$  καὶ  $x = -z, y = 0$ . Αἱ λοιπαὶ ἀκέραιαι λύσεις εὐρίσκονται ἐκ τῶν τύπων (7) διὰ  $k = 4$  καὶ εἶναι αἱ κάτωθι :

$$x = (4m^2 - n^2)h, \quad y = 2mnh, \quad z = (4m^2 + n^2)h, \quad \text{ἐνθα } m, n, h \in \mathbb{Z}.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

525. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῶν ἐξισώσεων :

$$1. \quad 2x^2 - 2xy - 5x - y - 3 = 0, \quad 2. \quad 3xy - 2y^2 + 2x - 3y + 4 = 0,$$

$$3. \quad 3y^2 - 2y - 5x - 1 = 0, \quad 4. \quad 5xy - 2x - 3y - 18 = 0.$$

526. Νὰ ἐπιλυθοῦν, ἐντὸς τοῦ  $\mathbb{Z}$ , αἱ ἐξισώσεις :

$$1. \quad 2x^2 - xy - 3y^2 - 13x + 17y + 6 = 0, \quad 2. \quad (x + 7)(y + 8) = 5xy,$$

$$3. \quad 2x^2 + 5xy - 12y^2 - 28 = 0, \quad 4. \quad 2x^2 + 7xy + 3y^2 - 5y - 2 = 0.$$

527. Ὅμοιως αἱ ἐξισώσεις :

$$1. \quad 3x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 4y + 2 = 0, \quad 2. \quad x^2 - 2xy + 2y^2 - 3x + 3y - 4 = 0,$$

$$3. \quad 3x^2 - 6xy + 4x - 5y - 31 = 0, \quad 4. \quad x^2 + 2xy + y^2 - x + y - 4 = 0,$$

$$5. \quad x^2 - 3y^2 = z^2, \quad 6. \quad 5x^2 + y^2 = z^2, \quad 7. \quad z^2 - y^2 = 2x^2.$$

528. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως :

$$x(3 - |y|) + y(3 - |x|) + |xy| = 6.$$

529. Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του δίδει γινόμενον ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ψηφίων του.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΧΙ

### ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

**§ 233. Εισαγωγικαὶ ἔννοιαι – συμβολισμοί.**—Ἡ Συνδυαστικὴ Ἀνάλυσις ἐμφανίζεται τὸ πρῶτον κατὰ τὸν 17ον αἰῶνα εἰς ἐργασίας τῶν Fermat καὶ Pascal διὰ τὴν συστηματικὴν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων τὰ ὅποια παρουσιάζονται εἰς τὰ «*τυχηρὰ παιγνίδια*». Ἐκτοτε ἡ ἀνάλυσις αὕτη εὗρε πλείστας ἐφαρμογὰς. Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς εἰς τὴν Θεωρίαν τῶν Πιθανοτήτων, περὶ τῆς ὁποίας γίνεται λόγος εἰς τὸ ἐπόμενον κεφάλαιον, εἶναι ὄχι μόνον ἡ ἀρχαιοτέρα, ἀλλὰ καὶ μία ἀπὸ τὰς πλέον σημαντικὰς.

Διὰ τὴν συντομωτέραν καὶ αὐστηροτέραν διατύπωσιν τῶν ἐν τῷ παρόντι κεφαλαίῳ διαπραγματευομένων θεμάτων, ὀρίζομεν τὰ κάτωθι :

α'). Καλοῦμεν **τμήμα**  $T_v$  τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν μέχρι καὶ τοῦ φυσικοῦ  $v$  τὸ ὑποσύνολον :

$$T_v \equiv \{ k \in \mathbb{N} : \text{μέ } k \leq v \} \text{ τοῦ } \mathbb{N}.$$

Τὸ  $T_v$  συμβολίζεται, συνήθως, καὶ μέ :  $T_v \equiv \{ 1, 2, 3, \dots, v \}.$

Παράδειγμα :  $T_5 \equiv \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}.$

β'). Τὸ γινόμενον τῶν θετικῶν ἀκεραίων (φυσικῶν) ἀπὸ 1 ἕως  $v$  θὰ τὸ παριστῶμεν συντόμως μέ  $v!$  (Τὸ σύμβολον  $v!$  ἀναγινώσκεται «*ν παραγοντικόν*»). Τὸ σύμβολον  $v!$  ὀρίζεται ὡς κάτωθι :

$$1! = 1, \quad 2! = (1!) 2 = 1 \cdot 2, \quad 3! = (2!) 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \quad \text{καὶ ἐπαγωγικῶς}$$

$$v! = (v-1)! \cdot v = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (v-2) \cdot (v-1) \cdot v$$

(1)

Διὰ τὴν πληρότητα τοῦ συμβόλου  $v!$  δεχόμεθα ὅτι :  $0! = 1.$

Διὰ τὸ σύμβολον  $v!$  ἰσχύει ἡ ἰδιότης :

$$v! = (v-k)! (v-k+1) (v-k+2) \dots (v-1) v, \quad k \leq v.$$

Οὕτω :  $10! = 7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10.$

Ἡ χρησιμοποίησις τοῦ θαυμαστικοῦ (!) εἰς τὸν συμβολισμόν τῶν παραγοντικῶν σχετίζεται μέ τὴν καταπληκτικὴν αὐξησιν αὐτῶν. Τοῦτο φαίνεται ἀπὸ τὸν κάτωθι πίνακα :

|          |            |               |                    |
|----------|------------|---------------|--------------------|
| $1! = 1$ | $4! = 24$  | $7! = 5040$   | $10! = 3628800$    |
| $2! = 2$ | $5! = 120$ | $8! = 40320$  | $11! = 39916800$   |
| $3! = 6$ | $6! = 720$ | $9! = 362880$ | $12! = 479001600.$ |

# Ι. ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

§ 234. 'Απλαϊ μεταθέσεις.— Έστω τὸ πεπερασμένον σύνολον :

$$E \equiv \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \}.$$

Καλοῦμεν **μετάθεσιν** τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου  $E$  κάθε ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ  $E$  ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του, ἥτοι :

$$M: E \longleftrightarrow E.$$

Καλοῦμεν **ἀπαρίθμησιν** τοῦ συνόλου  $E$  κάθε ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ τμήματος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν  $T_v \equiv \{ 1, 2, 3, \dots, v \}$  ἐπὶ τοῦ  $E$ , ἥτοι :

$$T_v \ni k \longleftrightarrow \alpha_i \in E, \quad i \in T_v.$$

Ἐκάστη ἀπαρίθμησις, ὡς καὶ ἡ μετάθεσις, παρίσταται συμβολικῶς (§ 87) δι' ἐνὸς ὀρθογωνίου σχήματος (πίνακος) ἐκ δύο γραμμῶν, π.χ.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & v \\ \alpha_3 & \alpha_5 & \dots & \alpha_v \end{pmatrix}$ .

Εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν τοῦ πίνακος γράφονται τὰ πρότυπα καὶ εἰς τὴν δευτέραν κάτωθεν ἐκάστου προτύπου ἡ εἰκὼν αὐτοῦ. Συνήθως ὅμως ἡ πρώτη γραμμὴ παραλείπεται καὶ γράφονται (παρατάσσονται) μόνον αἱ εἰκόνες κατὰ μῆκος μιᾶς εὐθείας, π.χ. ὡς κάτωθι :



εἰς τρόπον ὥστε τὸ πρῶτον στοιχεῖον τῆς παρατάξεως νὰ εἶναι εἰκὼν τοῦ 1, τὸ δεύτερον εἰκὼν τοῦ 2, τὸ τρίτον εἰκὼν τοῦ 3, κ.ο.κ. Ἐνεκα τούτου καὶ διὰ παιδαγωγικοὺς κυρίως σκοποὺς πολλοὶ συγγραφεῖς ὀρίζουν ὡς μετάθεσιν  $v$  πραγμάτων (στοιχείων) κάθε κατάταξιν αὐτῶν εἰς μίαν σειράν. Εἶναι φανερόν ὅτι δύο μεταθέσεις  $v$  πραγμάτων εἶναι διάφοροι μεταξὺ τῶν, ἂν καὶ μόνον, ἂν ἔν (ἐπομένως τοῦλάχιστον δύο) ἐκ τῶν  $v$  πραγμάτων εὐρίσκεται τοποθετημένον εἰς διαφορετικὴν θέσιν ἐντὸς αὐτῶν.

Ἐπειδὴ τὸ  $T_v$  καὶ τὸ  $E$  ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος στοιχείων, εἶναι φανερόν ὅτι τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων τοῦ  $E$  ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀπαριθμήσεων αὐτοῦ. Εἶναι ἐπίσης φανερόν ὅτι τὸ πλῆθος τοῦτο δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν φύσιν τῶν στοιχείων τοῦ  $E$ , ἀλλὰ μόνον ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων αὐτοῦ. Ἀρὰ τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων τοῦ  $T_v$ . Διὰ τὸν λόγον τοῦτον πολλάκις  $v$  διακεκριμένα πράγματα, διὰ τὰ ὅποια δὲν μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ φύσις, τὰ σημειώνομεν μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, ...,  $v$ . Κατόπιν τούτου αἱ ἔννοιαι ἀπαρίθμησις καὶ μετάθεσις θὰ χρησιμοποιῶνται κατωτέρω ἀδιακρίτως.

Ἄς ὑπολογίσωμεν ἤδη τὸ πλῆθος ὅλων τῶν μεταθέσεων τῶν  $v$  διαφόρων μεταξὺ τῶν στοιχείων. Εἶναι φανερόν ὅτι τὸ πλῆθος τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος ὅλων τῶν δυνατῶν παρατάξεων τῶν  $v$  στοιχείων (πραγμάτων) εἰς μίαν σειράν. Τὸ πλῆθος τοῦτο τῶν μεταθέσεων τῶν  $v$  στοιχείων θὰ παριστῶμεν μὲ τὸ σύμβολον  $M_v$ .

Εἶναι φανερόν ὅτι δι' ἓν πρᾶγμα ὑπάρχει μία μόνον μετάθεσις, ἥτοι :

$$M_1 = 1 = 1!$$



Αί δυνατά μεταθέσεις δύο πραγμάτων, π.χ. τῶν  $\alpha_1, \alpha_2$  εἶναι δύο, αἱ :

$$\alpha_1\alpha_2 \quad \text{καὶ} \quad \alpha_2\alpha_1,$$

διότι τὸ  $\alpha_1$  ἢ θὰ εἶναι πρῶτον ἢ θὰ εἶναι δεύτερον. Συνεπῶς ἔχομεν :

$$M_2 = 2 = 1 \cdot 2 = 2!$$

Αἱ μεταθέσεις τριῶν στοιχείων  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  εἶναι αἱ ἀκόλουθοι ἕξ :

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \quad \alpha_1\alpha_3\alpha_2, \quad \alpha_3\alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_2\alpha_1\alpha_3, \quad \alpha_2\alpha_3\alpha_1, \quad \alpha_3\alpha_2\alpha_1.$$

Δηλαδή :

$$M_3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$$

Γενικῶς ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος :

**Πρότασις.**—Τὸ πλῆθος  $M_n$  τῶν μεταθέσεων  $n$  στοιχείων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ , ἥτοι :

$$M_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n! = \prod_{k=1}^n k \quad (1)$$

**Ἀπόδειξις.** Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς (1) θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἀποδεικτικήν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς.

Ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ  $n=1$  (ἐπίσης, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, ἰσχύει καὶ διὰ  $n=2, 3$ ).

Ἐστω ὅτι αὕτη ἰσχύει διὰ  $n=k$ , ἥτοι :

$$M_k = 1 \cdot 2 \cdots k = k! \quad (k \geq 1) \quad (2)$$

Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἰσχύει καὶ διὰ  $n=k+1$ , ἥτοι :

$$M_{k+1} = 1 \cdot 2 \cdots k(k+1) = (k+1)! \quad (3)$$

Πράγματι, ἂς θεωρήσωμεν ὅλας τὰς μεταθέσεις τῶν  $(k+1)$  στοιχείων καὶ χωρίσωμεν αὐτὰς εἰς ομάδας θέτοντες εἰς τὴν πρώτην ομάδα ὅλας τὰς μεταθέσεις αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν π.χ. ἀπὸ τὸ στοιχεῖον  $\alpha_1$ , εἰς μίαν δευτέραν ομάδα ὅλας τὰς μεταθέσεις αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ στοιχεῖον  $\alpha_2$ , κ.ο.κ. καὶ τέλος εἰς μίαν  $k+1$  τάξεως ομάδα τὰς μεταθέσεις αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ στοιχεῖον  $\alpha_{k+1}$ .

Εἶναι φανερόν ὅτι αἱ διάφοροι ἀλλήλων μεταθέσεις ἐκάστης ομάδος εἶναι  $k!$ , διότι αὗται λαμβάνονται ἂν μετὰ τὸ πρῶτον στοιχεῖον, μὲ τὸ ὁποῖον ἀρχίζουν, γράψωμεν ὅλας τὰς μεταθέσεις τῶν λοιπῶν  $k$  στοιχείων, αἱ ὁποῖαι λόγῳ τῆς γενομένης ὑποθέσεως (2) τῆς τελείας ἐπαγωγῆς εἶναι :  $M_k = 1 \cdot 2 \cdots k = k!$  Ἐπομένως τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων τῶν  $(k+1)$  στοιχείων εἶναι :

$$M_{k+1} = (k+1) M_k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k(k+1) = (k+1)!$$

δηλ. ἡ πρότασις (1) ἰσχύει καὶ διὰ  $n=k+1$ , ἄρα ἰσχύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $n$ .

**Ἐφαρμογαί :** 1η. Κατὰ πόσους τρόπους δύνανται νὰ παραταχθοῦν ἐφ' ἐνὸς ζυγοῦ 10 μαθηταί ;

**Λύσις :** Τὸ πλῆθος ὅλων τῶν δυνατῶν παρατάξεων θὰ εἶναι ἀκριβῶς ὅσαι αἱ ἀπλᾶι μεταθέσεις τῶν 10 πραγμάτων, ἥτοι :

$$M_{10} = 10! = 3\,628\,800.$$

2α : Νὰ εὐρεθῇ τὸ πλῆθος ὄλων τῶν ἀριθμῶν τῶν μεγαλυτέρων τοῦ 1000, οἱ ὁποῖοι σχηματίζονται μὲ ὅλα τὰ ψηφία 5, 3, 0, 9 μὴ ἐπιτρεπομένης τῆς ἐπαναλήψεως ψηφίου τινός.

Λύσις : Κάθε ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 1000 ἀντιστοιχεῖ εἰς κάποιαν μετὰθεσιν τῶν ψηφίων 5, 3, 0, 9 ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅμως ὅτι τὸ ψηφίον 0 δὲν κατέχει τὴν πρώτην πρὸς τὰ ἀριστερὰ θέσιν. Οἱ ἀριθμοὶ ὅμως εἰς τοὺς ὁποίους προηγείται τὸ μηδὲν (π.χ. 0395, 0539, ...) εἶναι τόσοι τὸ πλῆθος, ὅσοι καὶ αἱ μετὰθεσεις τῶν τριῶν ψηφίων 5, 3, 9, ἥτοι  $M_3 = 3! = 6$ . Οἱ τετραψήφιοι ἀριθμοὶ εἶναι  $M_4 = 4! = 24$ . Ἄρα τὸ ζητούμενον πλῆθος εἶναι :

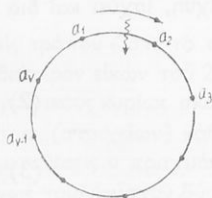
$$M_4 - M_3 = 4! - 3! = 18.$$

**§ 235. Κυκλικαὶ μετὰθεσεις.**— Μία εἰδικὴ περίπτωσις μετὰθεσεως εἶναι ἑκείνη καθ' ἣν ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ συνόλου  $E$  ἀπεικονίζεται εἰς τὸ ἐπόμενόν του τὸ δὲ «τελευταῖον» στοιχεῖον  $\alpha_n$  εἰς τὸ «πρῶτον»  $\alpha_1$ . Δηλαδή ἡ μετὰθεσις :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Μία τοιαύτη μετὰθεσις καλεῖται **κυκλική** (§ 87).

Ἡ ὀνομασία αὕτη ἐξηγεῖται ἁμέσως, ἂν τὰ  $n$  διάφορα στοιχεῖα  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  φαντασθῶμεν ὅτι εἶναι τοποθετημένα ἐπὶ ἐνὸς κύκλου, ὡς δεικνύει καὶ τὸ κάτωθι σχῆμα (Σχ. 15). Κατὰ ταῦτα μία κυκλικὴ μετὰθεσις εἶναι ἡ παράταξις τῶν  $n$  στοι-



Σχ. 15

χείων κατὰ μῆκος ἐνὸς κύκλου. Οὕτω θεωρουμένη μία κυκλικὴ μετὰθεσις  $n$  στοιχείων δὲν ἔχει οὔτε ἀρχὴν οὔτε πέρας, δυνάμεθα ὅθεν νὰ θεωρῶμεν οἰονδήποτε ἐκ τῶν  $n$  στοιχείων ὡς πρῶτον κατὰ τὴν ἐν λόγω μετὰθεσιν. Εἶναι τῶρα φανερόν ὅτι : τὸ πλῆθος ὄλων τῶν κυκλικῶν μετὰθεσεων  $n$  στοιχείων, τὸ ὁποῖον συμβολίζεται μὲ  $k_n$ , εἶναι ἴσον πρὸς :  $(n-1)!$ , ἥτοι :

$$k_n = (n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) = \prod_{k=1}^{n-1} k.$$

Πράγματι, ἂς φαντασθῶμεν ὅλας τὰς κυκλικὰς μετὰθεσεις τῶν  $n$  στοιχείων  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  ἀναγεγραμμένας εἰς ἕνα πίνακα. Εἶναι φανερόν ὅτι ἐξ ἑκάστης κυκλικῆς μετὰθεσεως τῶν  $n$  στοιχείων, π.χ. τὴν  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n$  προκύπτουν  $n$  ἀπλᾶι μετὰθεσεις, αἱ κάτωθι :

$$\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \alpha_1, \alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_n \alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n.$$

Κατόπιν τούτου, ἐπειδὴ ἀπὸ κάθε κυκλικῆς μετὰθεσεως τῶν  $n$  στοιχείων προκύπτουν  $n$  ἀπλᾶι μετὰθεσεις τῶν  $n$  στοιχείων, ἔπεται ὅτι ἐξ ὄλων τῶν κυκλικῶν μετὰθεσεων, αἱ ὁποῖαι εἶναι  $k_n$  τὸ πλῆθος, θὰ προκύψουν  $n \cdot k_n$  ἀπλᾶι μετὰθεσεις, αἱ ὁποῖαι θὰ ἰσοῦνται μὲ τὸν συνολικὸν ἀριθμὸν τῶν ἀπλῶν μετὰθεσεων  $n$  στοιχείων δηλ.  $n!$ . Ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$$n \cdot k_n = M_n = n!$$

Ἐξ οὗ :

$$k_n = \frac{M_n}{n} = (n-1)!$$

(1)

Ἐφαρμογή. Κατὰ πόσους τρόπους τὰ μέλη μιᾶς ἑπταμελοῦς οἰκογενείας δύνανται νὰ καθίσουν περὶ μιᾶς κυκλικῆς τραπέζης;

Λύσις: Κάθε ἓνας ἀπὸ τοὺς τρόπους αὐτοὺς εἶναι μία κυκλικὴ μετὰθεσις τῶν 7 ἀτόμων.

Ἄρα:  $k_7 = 6! = 720$ .

**§ 236. Ἐπαναληπτικαὶ μεταθέσεις.**— Ἐστω ἐν πλῆθος  $v$  πραγμάτων

$$\underbrace{\alpha, \alpha, \dots, \alpha}_{k_1}, \underbrace{\beta, \beta, \dots, \beta}_{k_2}, \dots, \underbrace{\theta, \theta, \dots, \theta}_{k_p},$$

ὅπου τὰ  $k_1$  συμπίπτουν μὲ  $\alpha$ , τὰ  $k_2$  μὲ  $\beta, \dots$ , τὰ  $k_p$  μὲ  $\theta$ , ὁπότε φυσικὰ θὰ εἶναι

$$k_1 + k_2 + \dots + k_p = v.$$

Καλοῦμεν ἑπαναληπτικὴν μετὰθεσιν τῶν  $v$  αὐτῶν πραγμάτων μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ τμήματος  $T_v \equiv \{1, 2, \dots, v\}$  ἐπὶ τοῦ συνόλου  $E \equiv \{\alpha, \beta, \dots, \theta\}$ , τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς στοιχεῖα τὰ διάφορα ἀλλήλων πράγματα  $\alpha, \beta, \dots, \theta$ , τοιαύτη ὥστε αἱ  $k_1$  εἰκόνες νὰ συμπίπτουν μὲ  $\alpha$ , αἱ  $k_2$  εἰκόνες νὰ συμπίπτουν μὲ  $\beta, \dots$ , αἱ  $k_p$  εἰκόνες νὰ συμπίπτουν μὲ  $\theta$ .

Ἐὰν  $\rho$  τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ  $E$ , τότε:  $\rho \leq v$ .

Οὕτω π.χ. αἱ ἑπαναληπτικαὶ μεταθέσεις τῶν τριῶν πραγμάτων  $\alpha, \alpha, \beta$  εἶναι αἱ:

$$\alpha\alpha\beta, \alpha\beta\alpha, \beta\alpha\alpha.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ τὸ σύμβολον  $M_v^e$  τὸ πλῆθος ὅλων τῶν ἑπαναληπτικῶν μεταθέσεων  $v$  πραγμάτων, ἐξ ὧν  $k_1$  τὸ πλῆθος συμπίπτουν μὲ τὸ  $\alpha$ ,  $k_2$  τὸ πλῆθος συμπίπτουν μὲ τὸ  $\beta, \dots$ ,  $k_p$  τὸ πλῆθος συμπίπτουν μὲ τὸ  $\theta$ , τότε ἰσχύει:

$$M_v^e = \frac{v!}{k_1! k_2! \dots k_p!} = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_p)!}{k_1! k_2! \dots k_p!} \quad (1)$$

**Ἀπόδειξις.** Ὡς ὑποθέσωμεν πρὸς στιγμήν, ὅτι τὰ  $v$  πράγματα εἶναι διάφορα μεταξύ των καὶ ὅτι σχηματίζομεν τὰς  $v!$  μεταθέσεις των. Θεωροῦμεν τὰς ἐν λόγῳ μεταθέσεις χωρισμένας εἰς ὁμάδας ὡς ἑξῆς: Θέτομεν εἰς τὴν αὐτὴν ὁμάδα μίαν μετὰθεσιν μαζί μὲ ὅλας ὅσαι προκύπτουν ἀπὸ αὐτὴν, ὅταν διατηρήσωμεν τὴν τάξιν ὅλων τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα ἀρχικῶς διέφερον τοῦ  $\alpha$  κατατάξωμεν δὲ τὰ λοιπὰ (δηλ. τὰ ταυτιζόμενα ἀρχικῶς μὲ τὸ  $\alpha$ ) καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους. Εἶναι φανερόν ὅτι μετὰ τὸ πέρασ τῆς τοιαύτης διαδικασίας θὰ προκύψουν  $k_1!$  μεταθέσεις, αἱ ὁποῖαι θὰ παριστοῦν (ἐὰν ἐπαναθέσωμεν  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k_1} = \alpha$ ) τὴν αὐτὴν ἑπαναληπτικὴν μετὰθεσιν. Ἄρα τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων  $v$  πραγμάτων, ὅπου μεταξύ των ὑπάρχουν μόνον  $k_1$  τὸ πλῆθος ταυτιζόμενα μὲ τὸ  $\alpha$ , τὰ δὲ ἄλλα διαφέρουν μεταξύ των καὶ ἀπὸ τὸ  $\alpha$ , εἶναι  $\frac{v!}{k_1!}$ .

Ἄν τώρα εἰς τὰ μέχρι τοῦδε ὡς διάφορα θεωρηθέντα  $v - k_1$  λοιπὰ πράγματα ταυτοποιήσωμεν  $k_2$  τὸ πλῆθος μὲ τὸ  $\beta$ , τότε, κατὰ τὸν αὐτὸν συλλογισμόν,  $k_2!$  τὸ πλῆθος διαφέρουσαι πρὶν μεταθέσεις θὰ παριστοῦν τὴν αὐτὴν ἑπαναληπτικὴν μετὰθεσιν καὶ ἐπομένως τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων  $v$  πραγμάτων ὅταν μεταξύ των ὑπάρχουν  $k_1$  τὸ πλῆθος συμπίπτοντα μὲ τὸ  $\alpha$  καὶ  $k_2$  τὸ πλῆθος συμπίπτοντα μὲ τὸ  $\beta$  ( $\alpha \neq \beta$ ), τὰ δὲ λοιπὰ διαφέρουν μεταξύ των καθὼς ἐπίσης καὶ ἀπὸ

$$\frac{v!}{k_1! k_2!}.$$

τὰ  $\alpha$  καὶ  $\beta$  εἶναι:

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον σκεπτόμενοι, μετὰ  $\rho$  βήματα, φθάνομεν εἰς τὴν (1).

**Έφαρμογαι:** 1η: Πόσες λέξεις \* (αναγραμματισμούς) σχηματίζουμε μεταθέτοντας τα γράμματα της λέξεως «Έλλάς»;

**Λύσις:** Εἰς τὴν λέξιν «Ἑλλάς» τὸ γράμμα λ ἐπαναλαμβάνεται 2 φορές. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν:

$$M_5^e = \frac{5!}{2!} = 60 \text{ λέξεις.}$$

**2α:** Πόσες λέξεις δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μεταθέτοντες τὰ γράμματα τῆς λέξεως «Πανεπιστήμιον».

**Λύσις:** Ἡ λέξις «Πανεπιστήμιον» περιέχει 13 γράμματα, ἐκ τῶν ὁποίων 2 εἶναι π, 2 εἶναι ν καὶ 2 εἶναι ι, ὅρα πρόκειται περὶ μεταθέσεων 13 γραμμάτων μετ' ἐπαναλήψεως ὁρισμένων ἐξ αὐτῶν. Συνεπῶς τὸ ζητούμενον πλήθος ἰσοῦται πρὸς:

$$M_{13}^e = \frac{13!}{2! 2! 2!} = 778\,377\,600 \text{ λέξεις.}$$

**Σημειώσεις:** Διὰ νὰ ἴδωμεν πόσα γράμματα θὰ χρειασθοῦν διὰ νὰ γραφοῦν αἱ λέξεις αὗται θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν ἐπὶ 13, ἥτοι:

$$\bullet 778\,377\,600 \times 13 = 10\,118\,908\,800 \text{ γράμματα.}$$

Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀποκτήσωμεν μίαν ἰδίαν περὶ τοῦ μεγέθους τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, γνωρίζομεν τὰ ἑξῆς: Μία σελὶς ἐνὸς κανονικοῦ βιβλίου χρειάζεται περίπου 2000 γράμματα. Μὲ τὰ ἀνωτέρω γράμματα θὰ τυπωθοῦν:

$$10\,118\,908\,800 : 2\,000 = 5.059.454 \text{ σελίδες.}$$

Ἄν λάβωμεν τόμους τῶν 300 σελίδων, θὰ γίνουν:  $5059454 : 300 = 16865$  τόμοι.

Τέλος, ἂν εἰς μίαν κανονικὴν βιβλιοθήκην δύναται νὰ τοποθετηθοῦν 100 τόμοι, θὰ ἀπαιτηθοῦν  $16865 : 100 \simeq 169$  βιβλιοθήκαι διὰ νὰ τοποθετηθοῦν οἱ ἐν λόγῳ τόμοι.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**530.** Νὰ ἀπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα:

$$\alpha) \frac{7! 5!}{6! 4!}, \quad \beta) \frac{v!}{(v-1)!}, \quad \gamma) \frac{(v+2)!}{v!}, \quad \delta) \frac{(v+1)!}{(v-1)!}, \quad \epsilon) \frac{(v-1)!}{(v+2)!}.$$

**531.** Νὰ ἀπλοποιηθῇ ἡ παράστασις:

$$\frac{(v+1)!}{(v+1)^{v+1}} : \frac{v!}{v^v}.$$

**532.** Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ἰσότητες:

$$\alpha) (v+2)! + (v+1)! + v! = v! (v+2)^2$$

$$\beta) v! + 2(v-1)! = (v-1)! (v+2).$$

$$\gamma) (v-1)! - (v-2)! = (v-2)! (v-2).$$

$$\delta) 2M_v - (v-1) M_{v-1} = M_v + M_{v-1}.$$

**533.** Ἄν ὑπάρχουν 3 δρόμοι ἀπὸ τὴν πόλιν Α πρὸς τὴν πόλιν Β καὶ 4 δρόμοι ἀπὸ τὴν Β πρὸς τὴν Γ, κατὰ πόσους τρόπους δυνάμεθα νὰ μεταβῶμεν ἐκ τῆς Α εἰς τὴν Γ διὰ μέσου τῆς Β; Πόσαι εἶναι αἱ δυνατὰ διαδρομαὶ διὰ ταξιδίου μετ' ἐπιστροφῆς ἐκ τῆς Α εἰς τὴν Γ;

**534.** Κατὰ πόσους τρόπους 6 μαθηταὶ δύνανται νὰ παραταχθοῦν ἐφ' ἐνὸς ζυγοῦ; Ἐὰν ἐκαστὴ παράταξις ἀπαιτῇ χρόνον 15 sec, πόσος εἶναι ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος δι' ὅλους τὰς δυνατὰς παρατάξεις.

**535.** Πόσοι ἀναγραμματισμοὶ τῆς λέξεως «γραφεῖον» ὑπάρχουν; Πόσοι ἐξ αὐτῶν ἀρχίζουν μετ' φ; Πόσοι ἀρχίζουν μετ' α καὶ τελειώνουν μετ' ο;

\* Αἱ λέξεις δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ἔχουν νόημα.

536. Πόσαι διαφορετικά λέξεις δύνανται να σχηματισθούν με όλα τα γράμματα της λέξεως «Mississippi».

537. Πόσοι αριθμοί μεγαλύτεροι του 10 000 γράφονται με τα ψηφία 8, 5, 8, 0, 8.

538. Κατά πόσους τρόπους 15 βιβλία δύνανται να διανεμηθούν εις 3 μαθητάς, ώστε ο πρώτος (α) να λάβη 4 βιβλία, ο δεύτερος (β) να λάβη 5 βιβλία και ο τρίτος (γ) να λάβη 6 βιβλία;

## II. ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

**§ 237. Ἀπλαῖ διατάξεις.**— Ἐστωσαν  $n$  τὸ πλῆθος διάφορα μεταξύ των στοιχεῖα (πράγματα)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \dots, \alpha_n$  τὰ ὁποῖα θεωροῦνται στοιχεῖα ἐνὸς συνόλου  $E$ .

Καλεῖται **διάταξις** τῶν  $n$  αὐτῶν στοιχείων ἀνά  $\mu$ , ὅπου  $1 \leq \mu \leq n$ , κάθε ἀμφοιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ τμήματος  $T_\mu \equiv \{1, 2, \dots, \mu\}$  ἐν τῷ συνόλῳ  $E \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ . Οὕτω μία διάταξις τῶν  $n$  πραγμάτων ἀνά  $\mu$  εἶναι μία παράταξις εἰς σειρὰν  $\mu$  πραγμάτων ἀπὸ τὰ δοθέντα  $n$ . Ἐπομένως δύο διατάξεις τῶν  $n$  στοιχείων ἀνά  $\mu$  θεωροῦνται διάφοροι ὅταν ἢ δὲν ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰ αὐτὰ ἀκριβῶς στοιχεῖα ἢ ἀποτελοῦνται μὲν ἀπὸ τὰ αὐτὰ στοιχεῖα ἀλλὰ διαφέρουν ὡς πρὸς τὴν σειρὰν τῶν στοιχείων. Κατὰ τὸν ὅρισμόν τῆς ἀπλῆς διατάξεως ἕκαστον πρᾶγμα περιέχεται εἰς αὐτὴν ἅπαξ. Ἐπὶ πλέον εἰς ἕκαστην διάταξιν, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, πταίζει ρόλον ὅχι μόνον ποῖα  $\mu$  πράγματα θὰ λάβωμεν ἐκ τῶν  $n$ , ἀλλὰ καὶ πῶς θὰ τὰ τοποθετήσωμεν εἰς σειρὰν ἐπὶ ἀνοικτῆς γραμμῆς (π.χ. εὐθείας). Οὕτως ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ 5 στοιχεῖα  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  ἢ μετὰθεσις  $\alpha_3\alpha_2\alpha_5$  εἶναι μία διάταξις τῶν 5 τούτων πραγμάτων ἀνά 3, ἢ δὲ μετὰθεσις  $\alpha_3\alpha_2\alpha_5$  εἶναι μία ἄλλῃ διάταξις τῶν αὐτῶν 5 πραγμάτων ἀνά 3. Εἶναι φανερόν τώρα ὅτι αἱ διατάξεις εἶναι καὶ αὐταὶ μετὰθεσις, ἀλλὰ ὅχι συγχρόνως ὅλων τῶν πραγμάτων.

Θὰ ὑπολογίσωμεν ἤδη τὸ πλῆθος τῶν διαφόρων μεταξύ των διατάξεων τῶν  $n$  πραγμάτων ἀνά  $\mu$ . Τὸ πλῆθος τοῦτο θὰ τὸ παριστῶμεν μὲ τὸ σύμβολον  $\Delta_n^\mu$ , τὸ ὁποῖον ἀναγινώσκεται «διατάξεις τῶν  $n$  ἀνά  $\mu$ ». Πρὸς τοῦτο ἀποδεικνύομεν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν:

**Πρότασις.**— Τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων τῶν  $n$  πραγμάτων ἀνά  $\mu$  δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\Delta_n^\mu = n(n-1)(n-2)\cdots(n-\mu+1). \quad (1)$$

**Ἀπόδειξις.** Ἀς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐσχηματίσαμεν πάσας τὰς διατάξεις τῶν  $n$  πραγμάτων:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  ἀνά  $(\mu-1)$ , τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι:  $\Delta_{n-1}^{\mu-1}$ . Ἄν θεωρήσωμεν τυχούσαν ἐξ αὐτῶν, π.χ. τὴν  $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\mu-1}$ , αὕτη θὰ περιέχῃ  $(\mu-1)$  ἐκ τῶν πραγμάτων  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  καὶ συνεπῶς ὑπάρχουν  $n-(\mu-1) = (n-\mu+1)$  ἀκόμη στοιχεῖα (πράγματα) μὴ ἀνήκοντα εἰς τὴν ἐν λόγω διάταξιν. Ἐὰν δὲ εἰς τὸ τέλος τῆς ἐν λόγω διατάξεως ἐπισυνάψωμεν ἐν οἷονδήποτε ἀπὸ τὰ  $(n-\mu+1)$  ὑπόλοιπα στοιχεῖα θὰ προκύψῃ μία διάταξις τῶν  $n$  ἀνά  $\mu$ . Οὕτως ἀπὸ τὴν διάταξιν  $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\mu-1}$  θὰ προκύψουν αἱ  $(n-\mu+1)$  διατάξεις τῶν  $n$  ἀνά  $\mu$ :  $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\mu-1}\alpha_\mu, \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\mu-1}\alpha_{\mu+1}, \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\mu-1}\alpha_{\mu+2}, \dots, \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\mu-1}\alpha_n$ .

Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ ἐκάστην διάταξιν τῶν  $n$  πραγμάτων ἀνὰ  $(\mu - 1)$  προκύπτουν  $(n - \mu + 1)$  διατάξεις τῶν  $n$  ἀνὰ  $\mu$ , ἔπεται ὅτι ἀπὸ τὰς  $\Delta_{\mu-1}^v$  διατάξεις θὰ προκύψουν  $(n - \mu + 1) \cdot \Delta_{\mu-1}^v$  διατάξεις τῶν  $n$  ἀνὰ  $\mu$ . Αὗται δὲ εἶναι π ᾱ σ α ι α ῖ διατάξεις τῶν  $n$  πραγμάτων ἀνὰ  $\mu$  καὶ δ ι ᾱ φ ο ρ ο ι μεταξύ των (διατί;).

Κατὰ ταῦτα ἰσχύει ὁ ἀναγωγικὸς τύπος :

$$\Delta_{\mu}^v = (n - \mu + 1) \cdot \Delta_{\mu-1}^v \quad (2)$$

Ἐφαρμόζοντες τὴν (2) διὰ  $\mu = 2, 3, \dots, \mu$  καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι αἱ διατάξεις τῶν  $n$  πραγμάτων ἀνὰ ἓν εἶναι, προφανῶς,  $n$  λαμβάνομεν τὰς  $\mu$  ἰσότητας :

$$\begin{aligned} \Delta_1^v &= n \\ \Delta_2^v &= (n - 1) \cdot \Delta_1^v \\ \Delta_3^v &= (n - 2) \cdot \Delta_2^v \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta_{\mu}^v &= (n - \mu + 1) \cdot \Delta_{\mu-1}^v. \end{aligned} \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη καὶ παραλείποντες τοὺς κοινούς παράγοντας εὐρίσκομεν :

$$\Delta_{\mu}^v = n (n - 1) (n - 2) \dots (n - \mu + 1).$$

Ἦτοι : τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων τῶν  $n$  πραγμάτων ἀνὰ  $\mu$  εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον  $\mu$  διαδοχικῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἡλαττουμένων κατὰ μονάδα μὲ πρῶτον παράγοντα τὸ  $n$ .

Κατὰ ταῦτα εἶναι :  $\Delta_3^7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ .

Εὐκόλως τώρα διαπιστοῦμεν ὅτι :

$$\begin{aligned} n (n - 1) (n - 2) \dots (n - \mu + 1) &= \frac{n (n - 1) (n - 2) \dots (n - \mu + 1) (n - \mu)!}{(n - \mu)!} = \\ &= \frac{n!}{(n - \mu)!} \end{aligned}$$

Μὲ ἄλλας λέξεις :

**Π ό ρ ι σ μ α I.**—Τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων  $n$  πραγμάτων ἀνὰ  $\mu$  δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\Delta_{\mu}^v = \frac{n!}{(n - \mu)!} \quad (4)$$

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν  $\mu = n$ , ἔχομεν :

$$\Delta_n^v = n (n - 1) (n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Μὲ ἄλλας λέξεις :

**Π ό ρ ι σ μ α II.**—Τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων  $n$  πραγμάτων ἀνὰ  $n$  ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων τῶν  $n$  πραγμάτων, ἥτοι :

$$\Delta_n^v = n! = M_n \quad (5)$$

**Ἐ φ α ρ μ ο γ α ῖ 1η :** Ἐὰν εἰς μαθητὴς ἔχη 9 βιβλία καὶ θέλῃ νὰ τοποθετήσῃ 5 τυχόντα ἐξ αὐτῶν εἰς ἓνα ράφι, κατὰ πόσους τρόπους δύναται νὰ πράξῃ τοῦτο;

**Λύσις :** Οι διάφοροι τρόποι είναι τόσοι, όσας και αι διατάξεις των 9 ανά 5, ήτοι :

$$\Delta_5^* = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120.$$

**2α :** Πόσοι πενταψήφιοι αριθμοί υπάρχουν, έχοντες πάντα τα ψηφία διάφορα μεταξύ των :

**Λύσις :** Έκαστος πενταψήφιος αριθμός (π.χ. 0 38906, 72925, ...) είναι μία διάταξις των 10 ψηφίων : 0, 1, 2, 3, ..., 8, 9 ανά 5, με μόνην τήν διαφοράν τὸ ψηφίον 0 δὲν πρέπει νὰ κατέχη τήν πρώτην πρὸς τὰ ἀριστερὰ θέσιν (π.χ. 05382, 03948, ...). Ἀλλὰ αι διατάξεις αι ἔχουσιν ὡς πρῶτον στοιχείον τὸ 0 εἶναι ὅσαι καὶ αι διατάξεις των 9 ψηφίων 1, 2, 3, ..., 9 ανά 4. Ἀρα τὸ ζητούμενον πλῆθος  $x$  εἶναι :

$$x = \Delta_5^* - \Delta_4^* = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 - 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 (10 - 1) = 9^2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216.$$

**§ 238. Ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις.**—Ἐστώσαν  $n$  τὸ πλῆθος διάφορα μεταξύ των πράγματα  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  τὰ ὁποῖα θεωροῦνται στοιχεῖα ἐνὸς συνόλου  $E$ .

Καλοῦμεν **ἐπαναληπτικὴν διάταξιν** των  $n$  αὐτῶν πραγμάτων ἀνὰ  $\mu$ , μίαν τυχοῦσαν ἀπεικόνισιν τοῦ τμήματος  $T_\mu \equiv \{1, 2, \dots, \mu\}$  εἰς τὸ σύνολον  $E$ . Οὕτω μία ἐπαναληπτικὴ διάταξις των  $n$  πραγμάτων ἀνὰ  $\mu$  εἶναι μία παράταξις κατὰ μῆκος μιᾶς εὐθείας  $\mu$  πραγμάτων ληφθέντων ἐκ των  $n$ , ἀλλὰ εἰς τὰ ὁποῖα ἕκαστον πρᾶγμα δυνατόν νὰ ἐπαναλαμβάνεται τὸ πολὺ  $\mu$  φορές. Εἶναι φανερόν ὅτι ἐν προκειμένῳ δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἢ  $\mu \leq n$  ἢ  $\mu > n$ .

Θὰ ὑπολογίσωμεν τώρα τὸ πλῆθος των ἐπαναληπτικῶν διατάξεων των  $n$  πραγμάτων ἀνὰ  $\mu$ . Διὰ τὸ πλῆθος τοῦτο, ὅπερ παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου  $\delta_\mu^n$ , ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος :

**Πρότασις.**—Τὸ πλῆθος των ἐπαναληπτικῶν διατάξεων των  $n$  πραγμάτων ἀνὰ  $\mu$  δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\delta_\mu^n = v^\mu \quad (1)$$

**Ἀποδείξεις.** Διὰ  $\mu = 1$  ἰσχύει, διότι αι ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις των  $n$  πραγμάτων ἀνὰ ἓν εἶναι ὅσαι καὶ τὰ πράγματα, ἥτοι  $\delta_1^n = n = v^1$ .

Ἐστω ὅτι ἰσχύει διὰ  $\mu = k$ , ἥτοι ἔστω ὅτι  $\delta_k^n = v^k$  καὶ ἔστω μία τυχοῦσα ἐπαναληπτικὴ διάταξις των  $n$  πραγμάτων ἀνὰ  $k$ , π.χ. ἡ  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$ . Ἐὰν εἰς τὸ τέλος τῆς ἐν λόγω ἐπαναληπτικῆς διατάξεως ἐπισυνάψωμεν ἐν οἷονδήποτε ἐκ των  $n$  πραγμάτων θὰ προκύψῃ μία ἐπαναληπτικὴ διάταξις των  $n$  πραγμάτων ἀνὰ  $(k+1)$ . Οὕτως ἀπὸ τήν διάταξιν  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$  θὰ προκύψουν  $n$  ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις των  $n$  ἀνὰ  $k+1$  αἱ ἐξῆς :

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \alpha_1, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \alpha_2, \dots, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \alpha_k, \dots, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \alpha_n.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ ἐκάστην διάταξιν (ἐπαναληπτικὴν) των  $n$  πραγμάτων ἀνὰ  $k$  προκύπτουν  $n$  ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις των  $n$  ἀνὰ  $k+1$ , ἔπεται ὅτι ἀπὸ τὰς  $\delta_k^n$  ἐπαναληπτικὰς διατάξεις θὰ προκύψουν  $n \cdot \delta_k^n$  ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις των  $n$  ἀνὰ  $k+1$ .

Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν :  $\delta_{k+1}^n = n \cdot \delta_k^n$  καὶ λόγῳ τῆς ὑποθέσεως τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, καθ' ἣν  $\delta_k^n = v^k$ , ἔχομεν :  $\delta_{k+1}^n = n \cdot v^k = v^{k+1}$ , ἥτοι ἡ πρότασις ἰσχύει καὶ διὰ  $n = k+1$ , ὅρα ἰσχύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν  $n$ .

**Ἐφαρμογή 1η :** Πόσοι πενταψήφιοι ἀριθμοὶ υπάρχουν ἔχοντες ὡς ψηφία τοὺς ἀριθμοὺς 2, 5, 7;

**Λύσις :** Ἐκαστος των ἀριθμῶν αὐτῶν (π.χ. 52752, 77522, 55555, ...) εἶναι μία ἐπαναληπτικὴ διάταξις των 3 ψηφίων 2, 5, 7 ἀνὰ 5.

\*Αρα τὸ ζητούμενον πλῆθος εἶναι ἴσον πρὸς :

$$\delta_3^3 = 3^5 = 243.$$

**Ἐφαρμογὴ 2α :** (Τὸ πρόβλημα τοῦ ΠΡΟ-ΠΟ). Νὰ εὑρεθῇ πόσα δελτία τῶν δύο στηλῶν τοῦ ΠΡΟ-ΠΟ πρέπει νὰ συμπληρώσῃ εἰς παίκτης διὰ νὰ ἐπιτύχῃ ἓνα 13-άρι :

**Λύσις :** Ἐάν ὁ ἀγὼν ἦτο μοναδικός, θὰ ὑπῆρχον τρία προγνωστικά, τὰ ὁποῖα σημειοῦνται μὲ τὰ στοιχεῖα : 1, 2, x καὶ ἐπομένως θὰ ἔπρεπεν ὁ παίκτης νὰ συμπληρώσῃ 3 στήλας. Ἐάν οἱ ἀγῶνες ἦσαν δύο θὰ ἔπρεπεν νὰ συμπληρώσῃ 9 στήλας, εἰς τὰς ὁποίας θὰ ἀναγράφῃ τὰ ἐξῆς στοιχεῖα :

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1  | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | x | x | x |
| 11 | 1 | 2 | x | 1 | 2 | x | 1 | 2 | x |

(1)

Αἰ ὡς ἄνω 9 στήλαι εἶναι αἱ ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις τῶν τριῶν στοιχείων 1, 2, x ἀνὰ δύο, δηλ. εἶναι :  $\delta_2^3 = 3^2 = 9$ .

Ἐάν οἱ ἀγῶνες ἦσαν τρεῖς θὰ ἔπρεπεν ὁ παίκτης νὰ συμπληρώσῃ 27 στήλας, εἰς τὰς ὁποίας θὰ ἀναγράφῃ τὰ ἐξῆς στοιχεῖα :

$$(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, x), (1, 2, 1), \dots, (x, x, x).$$

Αἱ 27 στήλαι προκύπτουν ἀπὸ τὰ 9 στοιχεῖα τοῦ πίνακος (1), ἐὰν παραπλεύρως ἐκάστης δυάδος τοῦ πίνακος θέσωμεν τὰς ἐνδείξεις : 1, 2, x. Εἶναι δὲ ἐπίσης αἱ 27 στήλαι, αἱ ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις τῶν τριῶν στοιχείων (ἐνδείξεων) 1, 2, x ἀνὰ 3, ἥτοι εἶναι :  $\delta_3^3 = 3^3 = 27$ . Ἐπομένως διὰ νὰ ἐπιτύχῃ ὁ παίκτης ἓνα 13-άρι πρέπει νὰ συμπληρώσῃ τὸσας στήλας, ὅσας καὶ αἱ ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις τῶν τριῶν στοιχείων 1, 2, x ἀνὰ 13, ἥτοι :

$$\delta_{13}^3 = 3^{13} = 1\,594\,323 \quad \text{στήλας.}$$

\*Αρα :  $1\,594\,323 : 2 = 797\,162$  δελτία ΠΡΟ-ΠΟ.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

539. Ὑπολογίσατε τὰς :  $\Delta_3^6$ ,  $\Delta_6^3$ ,  $\Delta_6^{10}$  καὶ δείξατε ὅτι :  $\Delta_6^{10} = M_7$ .

540. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ν εἰς τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

$$\alpha) \quad \Delta_v^v = 12 \cdot \Delta_v^v, \quad \beta) \quad \Delta_2^{2v} = 2 \cdot \Delta_v^v$$

$$\gamma) \quad \Delta_v^v = 18 \cdot \Delta_2^{v-1}, \quad \delta) \quad 3\Delta_v^v = \Delta_v^{v-1}.$$

541. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :  $\Delta_\mu^{v+1} = \Delta_\mu^v + \mu \cdot \Delta_{\mu-1}^v$ .

542. Νὰ ἀπλοποιηθῇ ἡ παράστασις :

$$\Delta_v^v - 2 \cdot \Delta_{v-1}^{v-1} - (v-1)! (v-2).$$

543. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ :  $\Delta_1^5 + \Delta_2^5 + \Delta_3^5 + \Delta_4^5 + \Delta_5^5$ .

544. Πόσοι τετραψήφιοι ἀριθμοὶ ὑπάρχουν ἔχοντες διαφορετικὰ ψηφία καὶ μὴ περιέχοντες τὸ 0 καὶ τὸ 9;

545. Δύο πόλεις Α καὶ Β συνδέονται μὲ 6 ἀμαξοστοιχίας. Κατὰ πόσους τρόπους δυνάμεθα νὰ ταξιδεύσωμεν ἐκ τῆς Α πρὸς τὴν Β καὶ ἀντιστρόφως, χρησιμοποιοῦντες κατὰ τὴν ἐπιστροφὴν :

α) διαφορετικὴν ἀμαξοστοιχίαν, β) ἔστω καὶ τὴν αὐτὴν ἀμαξοστοιχίαν.



### III. ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

**§ 239. Ἀπλοὶ συνδυασμοί.**—Ἐστω  $E$  ἓν σύνολον μὲ  $n$  στοιχεῖα:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Προτιθέμεθα νὰ ὀρίσωμεν τὸ πλῆθος τῶν διαφορῶν μεταξύ των ὑποσυνόλων τοῦ  $E$ , εἰς τὰ ὁποῖα ἀνήκουν  $k$  στοιχεῖα, ἔνθα  $k \leq n$ . Ἀς ἐξετάσωμεν κατ' ἀρχὴν μερικὰ παραδείγματα. Ἐὰν  $n = 1$ , τότε τὸ σύνολον  $E$  ἔχει δύο ὑποσύνολα:  $\emptyset$  καὶ  $E$ . Ἐὰν  $n = 2$ , τότε τὸ σύνολον  $E \equiv \{\alpha_1, \alpha_2\}$  ἔχει τέσσαρα ὑποσύνολα:

$$\begin{array}{lll} k=0 & k=1 & k=2 \\ \emptyset & \{\alpha_1\}, \{\alpha_2\} & \{\alpha_1, \alpha_2\} \equiv E. \end{array}$$

Ἐὰν  $n = 3$ , τότε τὸ σύνολον  $E \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  ἔχει ὀκτὼ ὑποσύνολα:

$$\begin{array}{llll} k=0 & k=1 & k=2 & k=3 \\ \emptyset & \{\alpha_1\} & \{\alpha_1, \alpha_2\} & \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \equiv E \\ & \{\alpha_2\} & \{\alpha_1, \alpha_3\} & \\ & \{\alpha_3\} & \{\alpha_2, \alpha_3\} & \end{array}$$

Οὕτω π.χ. ἀπὸ τὸ σύνολον μὲ τρία στοιχεῖα δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τρία ὑποσύνολα μὲ δύο στοιχεῖα. Ἐκαστον δὲ τῶν ὑποσυνόλων αὐτῶν καλεῖται καὶ «εἰς συνδυασμὸς τῶν τριῶν στοιχείων (πραγμάτων) ἀνὰ δύο».

Γενικῶς: Καλοῦμεν **συνδυασμὸν** τῶν  $n$  πραγμάτων ἀνὰ  $k$ , ἔνθα  $k \leq n$ , κάθε ὑποσύνολον τοῦ  $E$  μὲ  $k$  στοιχεῖα.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου εἶναι φανερόν ὅτι εἰς ἓνα συνδυασμὸν τῶν  $n$  πραγμάτων ἀνὰ  $k$ , ἐνδιαφερόμεθα μόνον οὐκ ἐν τῇ φύσει τῶν ληφθέντων πραγμάτων, οὐχὶ δὲ καὶ διὰ τὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν ἔχουν μεταξύ των, ὅπως εἰς τὰς διατάξεις. Συνεπῶς δύο συνδυασμοὶ τῶν  $n$  πραγμάτων ἀνὰ  $k$  εἶναι διαφορετικοὶ μόνον ὅταν δὲν ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰ αὐτὰ πράγματα.

Θὰ ὑπολογίσωμεν ἤδη τὸ πλῆθος τῶν διαφορετικῶν συνδυασμῶν τῶν  $n$  πραγμάτων ἀνὰ  $k$ . Διὰ τὸ πλῆθος τοῦτο, ὅπερ παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου

$\binom{n}{k}$  ἢ  $\Sigma_k^n$  ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος:

**Πρόταση.**—Τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν  $n$  πραγμάτων ἀνὰ  $k$  δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \quad (1)$$

**Ἀπόδειξις:** Ἀς καλέσωμεν  $x$  τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν  $n$  ἀνὰ  $k$ . Ἐὰν εἰς ἓνα τυχόντα συνδυασμὸν τῶν  $n$  ἀνὰ  $k$ , δηλ. ἔαν εἰς ἓν τυχόν ὑποσύνολον μὲ  $k$  στοιχεῖα τοῦ  $E$  ἐκτελέσωμεν πάσας τὰς δυνατὰς μεταθέσεις τῶν στοιχείων του, αἱ ὁποῖαι, ὡς γνωστόν, εἶναι  $k!$ , θὰ προκύψουν  $k!$  διατάξεις τῶν  $n$  ἀνὰ  $k$  (διότι ἐκάστη ἐκ τῶν μεταθέσεων αὐτῶν περιέχει  $k$  στοιχεῖα ἐκ τῶν  $n$ ). Ἐὰν τοῦτο γίνῃ εἰς ὅλους τοὺς συνδυασμοὺς τῶν  $n$  ἀνὰ  $k$ , ὧν τὸ πλῆθος ἐκαλέσαμεν  $x$ , θὰ προκύψουν:  $x \cdot k!$  διατάξεις τῶν  $n$  ἀνὰ  $k$ .

Είναι δὲ αὐταὶ πᾶσαι αἱ διατάξεις τῶν  $v$  ἀνὰ  $k$ , διότι ἡ τυχοῦσα ἐξ αὐτῶν προέκυψεν ἀπὸ τὸν συνδυασμὸν τὸν ἔχοντα τὰ ἴδια πράγματα. Αἱ διατάξεις αὐταὶ ἐξ ἄλλου εἶναι διάφοροι μεταξύ των, διότι ὅσαι μὲν προέκυψαν ἐκ τοῦ αὐτοῦ συνδυασμοῦ διαφέρουν κατὰ τὴν τάξιν τῶν πραγμάτων αὐτοῦ, ὅσαι δὲ προέκυψαν ἐκ διαφόρων συνδυασμῶν διαφέρουν κατὰ ἓν τοῦλάχιστον πρᾶγμα.

Συνεπῶς ἔχομεν :

$$x \cdot k! = \Delta_k^v$$

Ἀλλὰ (§ 237) :  $\Delta_k^v = v(v-1) \cdots (v-k+1).$

\* Ἀρα :  $x = \frac{\Delta_k^v}{k!} = \frac{v(v-1) \cdots (v-k+1)}{k!}$  (2)

ἢ ἂν τεθῇ  $x = \binom{v}{k}$  προκύπτει ὁ τύπος (1).

Κατὰ ταῦτα εἶναι :

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10, \quad \binom{7}{4} = \Sigma_4^7 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35.$$

Ἐξ ὁρίσμου δεχόμεθα ὅτι :

$$\boxed{\binom{v}{0} = \binom{v}{v} = 1} \quad (3)$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τῆς (2) ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν :  $(v-k)(v-k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ , ὅστις γράφεται καὶ :  $(v-k)!$  ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$x = \frac{v(v-1) \cdots (v-k+1)}{k!} = \frac{v(v-1) \cdots (v-k+1)(v-k)(v-k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{k! (v-k)(v-k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{v!}{k! (v-k)!}.$$

Μὲ ἄλλας λέξεις :

**Πόρισμα.**— Τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν  $v$  πραγμάτων ἀνὰ  $k$  δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\boxed{\binom{v}{k} = \frac{v!}{k! (v-k)!}} \quad (4)$$

**Ἐφαρμογὰί :** 1η : Δίδονται ἐπτά σημεῖα μὴ κείμενα ἀνὰ τρία ἐπὶ εὐθείας. Πόσα τρίγωνα εἶναι δυνατόν νὰ κατασκευασθοῦν, ἂν ἐνώσωμεν ταῦτα δι' εὐθειῶν.

**Λύσις :** Προφανῶς κατασκευάζονται τόσα τρίγωνα, ὅσοι εἶναι οἱ συνδυασμοὶ τῶν 7 πραγμάτων ἀνὰ 3. Οὕτως ἔχομεν :

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 \text{ τρίγωνα.}$$

**2α :** Μία ἐκπαιδευτικὴ περιφέρεια πρόκειται νὰ συμμετάσχῃ εἰς μίαν ἐορταστικὴν ἐκδήλωσιν διὰ πενταμελοῦς ἀντιπροσωπείας. Ἐπελέγησαν ἀρχικῶς 4 μαθητρίαι καὶ 7 μαθηταί. Ἐκ τῶν 11 αὐτῶν ἀτόμων πόσας διαφορετικὰς πενταμελεῖς ὁμάδος δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ὥστε νὰ περιέχωνται : α) 2 μαθητρίαι, β) τοῦλάχιστον δύο μαθητρίαι, γ) τὸ πολὺ δύο μαθητρίαι;

**Λύσις :** α). Αί δύο μαθήτριαι δύνανται νά ληφθούν από τās 4 έκλεγείσας κατὰ  $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$  τρόπους, ἔνῳ οἱ 3 μαθηταί, οἱ ὅποιοι θὰ συμπληρώσουν τήν ὁμάδα, δύνανται νά ληφθούν ἀπό τοὺς 7 ἐκλεγέντας κατὰ  $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$  τρόπους. Ἐὰν ἕκαστος τῶν πρώτων συνδυασμῶν συνδυασθῇ μέ ἕκαστον τῶν δευτέρων θὰ ἔχωμεν :

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 210.$$

β). Εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν ἡ ὁμάς θὰ περιέχῃ ἡ 2 μαθητρίας καὶ 3 μαθητὰς

(ὅτε οἱ τρόποι σχηματισμοῦ εἶναι :  $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = 210$ ), ἡ 3 μαθητρίας καὶ 2 μαθητὰς

(ὅτε οἱ τρόποι σχηματισμοῦ εἶναι :  $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$ ), ἡ 4 μαθητρίας καὶ 1 μαθητὴν

(ὅτε οἱ τρόποι σχηματισμοῦ εἶναι :  $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = 7$ ).

Ἄρα :

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = 210 + 4 + 7 = 221.$$

γ). Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ὁμάς θὰ περιέχῃ ἡ 0 μαθητρίας καὶ 5 μαθητὰς, ἡ 1 μαθητρίαν καὶ 4 μαθητὰς ἡ 2 μαθητρίας καὶ 3 μαθητὰς. Σκεπτόμενοι ὥς καὶ εἰς τήν περίπτωσιν β) ἔχομεν :

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 21 + 4 \cdot 35 + 210 = 371.$$

## § 240. Ἀξιοσημεῖωτοι ιδιότητες τῶν ἀπλῶν συνδυασμῶν.— Ἐὰν εἰς

ἐν ὑποσύνολον Α τοῦ Ε ἀνήκουν  $k$  στοιχεῖα, εἰς τὸ συμπληρωματικόν του Α' θὰ ἀνήκουν  $v - k$  στοιχεῖα. Ἐπομένως εἰς ἐκάστην ἐκλογὴν ἑνὸς ὑποσυνόλου μέ  $k$  στοιχεῖα ἀντιστοιχεῖ καὶ μία ἐκλογὴ τοῦ συμπληρωματικοῦ του συνόλου μέ  $(v - k)$  στοιχεῖα καὶ ἀντιστρόφως. Κατ' ἀκολουθίαν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὑποσυνόλων μέ  $k$  στοιχεῖα ἐντὸς τοῦ Ε εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ὑποσυνόλων μέ  $v - k$  στοιχεῖα. Τοῦτο δὲ διατυπῶνται καὶ ὥς ἑξῆς :

**Ἰδιότης I.**—Τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν  $v$  πραγμάτων ἀνὰ  $k$  εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν  $v$  ἀνὰ  $v - k$ .

Ἦτοι :

$$\boxed{\begin{pmatrix} v \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v - k \end{pmatrix}} \quad (1)$$

Ἡ ἀλγεβρική ἀπόδειξις εἶναι ἐπίσης εὐκόλος.

Πράγματι :

$$\begin{pmatrix} v \\ v - k \end{pmatrix} = \frac{v!}{(v - k)! [v - (v - k)]!} = \frac{v!}{(v - k)! k!} = \begin{pmatrix} v \\ k \end{pmatrix}.$$

**Παρατηρήσεις :** α'). Ἐκ τοῦ τύπου  $\begin{pmatrix} v \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v - k \end{pmatrix}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, v$

ἔχομεν προφανῶς :  $(v - k) + k = v$  διὰ κάθε  $v$  καὶ διὰ κάθε  $k$ . Μὲ ἄλλας λέξεις ἐὰν  $\alpha + \beta = v$ , τότε  $\begin{pmatrix} v \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \beta \end{pmatrix}$ .

Οὕτως ἐκ τῆς  $\begin{pmatrix} 20 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ k + 2 \end{pmatrix}$ , ἔπεται  $k = 9$ .

β'). Εἰς τὴν πράξιν ἡ ἰδιότης I μᾶς διδὲι τὴν δυνατότητα νὰ περιορισθῶμεν εἰς τὸν ὑπολογισμόν τοῦ  $\binom{v}{k}$  μόνον διὰ  $k \leq \frac{v}{2}$ , διότι, ἂν  $k > \frac{v}{2}$ , τότε ὑπολογίζομεν τὸ  $\binom{v}{v-k}$  ἀντὶ τοῦ  $\binom{v}{k}$ , καθόσον εἶναι τότε:  $v-k < \frac{v}{2}$ .

$$\text{Οὕτω π.χ.} \quad \binom{50}{46} = \binom{50}{4} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 230\,300.$$

**Ἰδιότης II.**—Τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν  $v$  πραγμάτων ἀνὰ  $k$  ἰσοῦται μὲ τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν  $v-1$  πραγμάτων ἀνὰ  $k$ , ἠϋζημένον κατὰ τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν  $v-1$  πραγμάτων ἀνὰ  $k-1$ .

Ἦτοι:

$$\boxed{\binom{v}{k} = \binom{v-1}{k} + \binom{v-1}{k-1}} \quad (2)$$

**Ἀπόδειξις.** Ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὸ δεύτερον μέλος τῆς (2) ἔχομεν:

$$\begin{aligned} \binom{v-1}{k} + \binom{v-1}{k-1} &= \frac{(v-1)!}{k! (v-1-k)!} + \frac{(v-1)!}{(k-1)! (v-1-k+1)!} = \\ &= \frac{(v-1)!}{(k-1)! (v-k-1)!} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{v-k} \right) = \\ &= \frac{(v-1)!}{(k-1)! (v-k-1)!} \cdot \frac{v}{k(v-k)} = \frac{v!}{k! (v-k)!} = \binom{v}{k}. \quad \text{ὁ.ἔ.δ.} \end{aligned}$$

**Ἰδιότης III.**—Ἰσχύει:

$$\boxed{\binom{v}{k+1} = \binom{v}{k} \cdot \frac{v-k}{k+1}} \quad (3)$$

Πράγματι:

$$\binom{v}{k+1} = \frac{v(v-1) \cdots (v-k+1)(v-k)}{1 \cdot 2 \cdots k \cdot (k+1)} = \binom{v}{k} \cdot \frac{(v-k)}{k+1}.$$

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

546. Ὑπολογίσατε τοὺς:  $\binom{12}{7}$ ,  $\binom{15}{5}$ ,  $\binom{11}{8}$ ,  $\binom{13}{9}$ ,  $\binom{9}{7}$ .

547. Δείξατε ὅτι:  $\binom{17}{6} = \binom{16}{5} + \binom{16}{6}$ .

548. Ἐὰν  $\binom{18}{k} = \binom{18}{k+2}$ , νὰ εὑρεθοῦν οἱ  $\binom{k}{5}$ .

549. Ἐὰν  $\binom{2v}{3} : \binom{v}{2} = 44 : 3$ , νὰ εὑρεθῇ ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς  $v$ .

550. Ἐὰν  $\Delta_k^v = 3024$  καὶ  $\binom{v}{k} = 126$ , νὰ εὑρεθῇ ὁ  $k$ .

551. Πόσα ὑποσύνολα μὲ  $k$  στοιχεῖα, ἐξ ὧν 2 στοιχεῖα εἶναι ὠρισμένα, ὑπάρχουν εἰς ἓνα σύνολον μὲ  $v$  στοιχεῖα ( $v \geq 5$ ); Ὁμοίως μὲ 3 ὠρισμένα στοιχεῖα; Ὁμοίως μὲ 4;

552. Πόσαι 5-ἀδες χαρτιῶν ἀπὸ μίαν δέσμην 52 παιγνιοχαρτῶν δύνανται νὰ περιέχουν 4 ἄσους;

(Ὑπόδειξις: Λάβετε ὑπ' ὄψιν τὴν προηγουμένην ἄσκησην).

**§ 241. Έπαναληπτικοί συνδυασμοί.**— Έστωσαν  $v$  διαφορετικά πράγματα  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$  τὰ ὁποῖα θεωροῦνται στοιχεῖα ἐνὸς συνόλου  $E$ .

Καλοῦμεν **ἐπαναληπτικὸν συνδυασμὸν** τῶν  $v$  αὐτῶν πραγμάτων ἀνὰ  $k$  κάθε συνδυασμὸν εἰς τὸν ὁποῖον ἕκαστον στοιχεῖον (πρᾶγμα) δύναται νὰ ἐπαναλαμβάνεται τὸ πολὺ  $k$  φορές.

Εἶναι φανερόν ὅτι τώρα δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἢ  $k \leq v$  ἢ  $k > v$ .

Ὅπως εἰς τοὺς ἀπλοὺς συνδυασμοὺς οὕτω καὶ εἰς τοὺς ἐπαναληπτικοὺς ἐνδιαφερόμεθα μόνον διὰ τὴν φύσιν τῶν ληφθέντων στοιχείων εἰς ἕκαστον συνδυασμὸν, οὐχὶ δὲ διὰ τὰς θέσεις, ἃς ἔχουν ταῦτα μεταξύ των. Ἐπομένως δύο ἐπαναληπτικοὶ συνδυασμοὶ θὰ θεωροῦνται διαφορετικοὶ ἐφ' ὅσον διαφέρουν κατὰ τὴν φύσιν ἐνὸς τοῦλάχιστον στοιχείου ποὺ περιέχουν. Οὕτως οἱ ἐπαναληπτικοὶ συνδυασμοὶ τῶν  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ἀνὰ δύο εἶναι οἱ ἑξῆς :

$$\begin{array}{lll} \alpha_1\alpha_1, & \alpha_1\alpha_2, & \alpha_1\alpha_3 \\ & \alpha_2\alpha_2, & \alpha_2\alpha_3 \\ & & \alpha_3\alpha_3. \end{array}$$

Ὅμοίως, οἱ ἐπαναληπτικοὶ συνδυασμοὶ τῶν  $\alpha_1, \alpha_2$  ἀνὰ τρία εἶναι οἱ ἑξῆς :

$$\alpha_1\alpha_1\alpha_1, \quad \alpha_1\alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_2, \quad \alpha_2\alpha_2\alpha_2,$$

δηλ. κάθε συνδυασμὸς (ἐπαναληπτικὸς) ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 στοιχεῖα, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ δύο ἢ καὶ τὰ τρία δύναται νὰ εἶναι τὰ αὐτά.

Θὰ ὑπολογίσωμεν ἤδη τὸ πλῆθος τῶν ἐπαναληπτικῶν συνδυασμῶν τῶν  $v$  πραγμάτων ἀνὰ  $k$ . Διὰ τὸ πλῆθος τοῦτο, ὅπερ παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου  $\mathcal{E}_k^v$ , ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος :

**Πρόταση.**— Τὸ πλῆθος τῶν ἐπαναληπτικῶν συνδυασμῶν τῶν  $v$  διαφόρων μεταξὺ των πραγμάτων ἀνὰ  $k$ , ἰσοῦται μὲ τὸ πλῆθος τῶν ἀπλῶν συνδυασμῶν τῶν  $v + k - 1$  πραγμάτων ἀνὰ  $k$ .

Ἦτοι :

$$\mathcal{E}_k^v = \Sigma_{k+v-1}^{v+k-1} = \binom{v+k-1}{k} \quad (1)$$

**Ἀπόδειξις.** Εἶναι φανερόν ὅτι οἱ ἐπαναληπτικοὶ συνδυασμοὶ τῶν  $v$  ἀνὰ ἓν εἶναι ὅσα καὶ τὰ πράγματα, ἤτοι:  $\mathcal{E}_1^v = v$ .

Ὑποθέσωμεν ὅλους τοὺς ἐπαναληπτικοὺς συνδυασμοὺς τῶν  $v$  ἀνὰ  $k$ , γεγραμμένους εἰς ἓνα πίνακα. Εἰς αὐτὸν θὰ εὑρωμεν, κατὰ δύο τρόπους, πόσας φορές ἐμφανίζεται τὸ ἓν ἐκ τῶν δοθέντων πραγμάτων, π.χ. τὸ  $\alpha_1$ .

α'). Ἐκαστος ἐπαναληπτικὸς συνδυασμὸς περιέχει  $k$  πράγματα, ὅλοι οἱ ὑπ' ὧν συνδυασμοὶ θὰ περιέχουν  $k \cdot \mathcal{E}_k^v$  πράγματα. Δοθέντος δὲ ὅτι τὰ  $v$  διαφορετικὰ πράγματα ἐμφανίζονται ἰσάκεις εἰς τὸν πίνακα, ἕκαστον ἐξ αὐτῶν, ἄρα καὶ τὸ  $\alpha_1$ , ἐμφανίζεται :

$$\frac{k \cdot \mathcal{E}_k^v}{v} = \frac{k}{v} \mathcal{E}_k^v \text{ φορές.} \quad (2)$$

β'). Τοὺς συνδυασμοὺς τοῦ πίνακος διακρίνομεν εἰς δύο κατηγορίας: εἰς τοὺς περιέχοντας τὸ στοιχεῖον  $\alpha_1$  καὶ εἰς τοὺς μὴ περιέχοντας αὐτό. Θὰ εὑρωμεν τώρα καὶ κατ' ἄλλον τρόπον πόσας φορές τὸ  $\alpha_1$  περιέχεται εἰς τὸν πίνακα τῶν ἐπαναληπτικῶν συνδυασμῶν. Θεωροῦμεν τοὺς ἐπα-

ναληπτικούς συνδυασμούς οι οποίοι περιέχουν το  $\alpha_1$ . 'Εάν αφαιρέσωμεν από αυτούς ένα μόνον από τα  $\alpha_1$ , τα όποια περιέχουν, τότε αυτοί θα περιέχουν  $k-1$  πράγματα και θα είναι όλοι οι επαναληπτικοί συνδυασμοί των  $v$  πραγμάτων ανά  $k-1$ , ήτοι θα είναι πλήθους  $\mathcal{E}_k^v$  και συνεπώς κατά την  $\alpha'$ ) το στοιχείον  $\alpha_1$  θα εμφανίζεται:  $\frac{k-1}{v} \mathcal{E}_{k-1}^v$  φορές. 'Εάν τώρα εις το πλήθος  $\frac{k-1}{v} \mathcal{E}_{k-1}^v$  των  $\alpha_1$  προσθέσωμεν το πλήθος των αφαιρεθέντων  $\alpha_1$ , το όποιον είναι  $\mathcal{E}_{k-1}^v$  (διότι εκάστη αφαίρεσις του  $\alpha_1$  έδωσε ένα επαναληπτικόν συνδυασμόν των  $v$  ανά  $k-1$ ), εύρισκομεν πόσας φορές εμφανίζεται το  $\alpha_1$  εις τον πίνακα, ήτοι επανευρίσκομεν τον αριθμόν, όστις παρέχεται υπό της έκφράσεως (2).

'Εξισούντες τας δύο εκφράσεις έχομεν :

$$\frac{k}{v} \mathcal{E}_k^v = \frac{k-1}{v} \mathcal{E}_{k-1}^v + \mathcal{E}_{k-1}^v.$$

'Εκ του όποιου προκύπτει ο αναγωγικός τύπος :

$$\mathcal{E}_k^v = \frac{v+k-1}{k} \cdot \mathcal{E}_{k-1}^v. \quad (3)$$

'Εφαρμόζοντες αυτόν διά  $k=2, 3, \dots, k$  και πολλαπλασιάζοντες τας προκύπτούσας ισότητας κατά μέλη, μετά τας άπλοποιήσεις εύρισκομεν :

$$\mathcal{E}_k^v = \frac{v(v+1)(v+2)\dots(v+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}. \quad (4)$$

'Εάν εις την (4) θέσωμεν:  $v+k-1 = \mu$ , ότε είναι  $v = \mu - k + 1$ , εύρισκομεν :

$$\mathcal{E}_k^v = \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} = \Sigma_k^\mu.$$

$$\eta \quad \mathcal{E}_k^v = \Sigma_k^{v+k-1} = \binom{v+k-1}{k}.$$

'Η πρότασις όθεν άπεδείχθη.

Κατά ταύτα είναι :

$$\mathcal{E}_3^6 = \Sigma_3^{6+3-1} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

**'Ε φ α ρ μ ο γ ή :** Πόσους όρους έχει εν πλήρες όμογενές πολυώνυμον πέμπτου βαθμού ως πρὸς  $x, y, z$ ;

**Λ ύ σ ι ς :** Οι όροι του πολυωνύμου θα είναι της μορφής:  $x^k y^\lambda z^\mu$ , ένθα  $k+\lambda+\mu=5$ . 'Αλλά έκαστος όρος είναι εις επαναληπτικός συνδυασμός των τριών γραμμάτων  $x, y, z$  ανά 5 (π.χ.  $xy^3z = xyzyz, x^3y^2 = xxxyy, \dots$ )

'Αρα το ζητούμενον πλήθος ίσοῦται πρὸς το πλήθος των επαναληπτικῶν συνδυασμῶν των 3 πραγμάτων ανά 5, ήτοι :

$$\mathcal{E}_3^5 = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21.$$

#### Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

**553.** Πόσα άκέραια μονώνυμα της μορφής  $\alpha^k \beta^\lambda \gamma^\mu$  τετάρτου βαθμού ως πρὸς όλα όμοῦ τα γράμματα  $\alpha, \beta, \gamma$  δυνάμεθα να σχηματίσωμεν;

**554.** 'Εάν  $\Delta_4^v = 840$ , να ύπολογισθῇ ο αριθμός:  $\mathcal{E}_3^v$ .

**555.** Γνωστοῦ όντος ότι  $\binom{18}{k} = \binom{18}{k+2}$ , να εύρεθοῦν οι  $\Sigma_5^v$  και  $\mathcal{E}_5^v$ .

**556.** Να άποδειχθῇ, διά της θεωρίας των συνδυασμῶν, ότι το γινόμενον  $v$  διαδοχικῶν άκεραίων είναι πάντοτε διαιρετόν διά του γινομένου:  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots v$ .

557. Να εύρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων πολυγώνου ἔχοντος  $n$  κορυφάς.

558. Να ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha) \binom{v}{k} + 2 \binom{v}{k-1} + \binom{v}{k-2} = \binom{v+2}{k}, \quad \beta) \left( \frac{v+1}{k} - 1 \right) \binom{v}{k-1} = \binom{v}{k}.$$

559. Δείξατε ὅτι :

$$1 + \sum_{k=1}^5 \binom{5}{k} = 2^5.$$

560. Να ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha) \binom{v}{\rho+1} - \binom{v}{\rho-1} = \frac{(v+1)! (v-2\rho)}{(\rho+1)! (v-\rho+1)!},$$

$$\beta) \binom{v}{\rho} + 2 \binom{v}{\rho-1} \binom{v}{\rho-2} = \binom{v+2}{\rho}.$$

**§ 242. Τὸ διωνυμικὸν θεώρημα.**— Ἡ ἐπομένη πρότασις φέρουσα τὸ ὄνομα τοῦ Newton (\*) ἀποτελεῖ τὸ διωνυμικὸν θεώρημα, τὸ ὁποῖον δίδει τὴν γενικὴν ἔκφρασιν τοῦ ἀναπτύγματος  $(x + \alpha)^v$ .

**Πρότασις.**— Διὰ κάθε ζευγὸς πραγματικῶν ἀριθμῶν  $x, \alpha$  καὶ διὰ κάθε  $v \in \mathbb{N}$ , ἰσχύει ὁ τύπος (τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος) :

$$(x + \alpha)^v = \binom{v}{0} x^v + \binom{v}{1} x^{v-1} \alpha + \binom{v}{2} x^{v-2} \alpha^2 + \dots + \binom{v}{k} x^{v-k} \alpha^k + \dots \\ \dots + \binom{v}{v-1} x \alpha^{v-1} + \binom{v}{v} \alpha^v \quad (1)$$

\*Απόδειξις. Ἡ πρότασις προφανῶς ἀληθεύει διὰ  $v = 1$ .

\*Ἐστω ὅτι ἰσχύει διὰ  $v = k$ , τότε :

$$(x + \alpha)^k = \binom{k}{0} x^k + \binom{k}{1} x^{k-1} \alpha + \binom{k}{2} x^{k-2} \alpha^2 + \dots + \binom{k}{k-1} x \alpha^{k-1} + \binom{k}{k} \alpha^k$$

$$\text{καὶ } (x + \alpha)^{k+1} = (x + \alpha)^k \cdot (x + \alpha) = \left[ \binom{k}{0} x^k + \binom{k}{1} x^{k-1} \alpha + \dots + \binom{k}{k-1} x \alpha^{k-1} + \right.$$

$$\left. + \binom{k}{k} \alpha^k \right] \cdot (x + \alpha) = \binom{k}{0} x^{k+1} + \binom{k}{1} x^k \cdot \alpha + \dots + \binom{k}{k-1} x^2 \alpha^{k-1} + \binom{k}{k} x \alpha^k +$$

$$+ \binom{k}{0} x^k \alpha + \dots + \binom{k}{k-2} x^2 \alpha^{k-1} + \binom{k}{k-1} x \alpha^k + \binom{k}{k} \alpha^{k+1} =$$

$$= \binom{k}{0} x^{k+1} + \left[ \binom{k}{1} + \binom{k}{0} \right] x^k \alpha + \dots + \left[ \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} \right] x \alpha^k + \binom{k}{k} \alpha^{k+1}.$$

Ἐπειδὴ ὁμοίως (§ 240, β) :

$$\binom{v-1}{k} + \binom{v-1}{k-1} = \binom{v}{k}, \text{ διὰ κάθε } k \text{ μέ: } 0 \leq k \leq v$$

καὶ (§ 239) :

$$\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0}, \quad \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1},$$

ἔχομεν τελικῶς :

$$(x + \alpha)^{k+1} = \binom{k+1}{0} x^{k+1} + \binom{k+1}{1} x^k \alpha + \binom{k+1}{2} x^{k-1} \alpha^2 + \dots + \\ + \binom{k+1}{k} x \alpha^k + \binom{k+1}{k+1} \alpha^{k+1}.$$

\* Isaac Newton (1642 - 1727) διάσημος Ἀγγλὸς μαθηματικὸς, φυσικὸς καὶ φιλόσοφος.

ήτοι ή πρότασις άληθεύει καί διά τόν φυσικόν άριθμόν  $k + 1$ , έπομένως, δυνάμει τής άρχής τής τελείας έπαγωγής, αύτη ισχύει διά κάθε φυσικόν άριθμόν  $v$ .

Ο τύπος (1) του διωνύμου γράφεται συντόμως ώς έξής :

$$(x + a)^v = \sum_{k=0}^v \binom{v}{k} x^{v-k} a^k \quad (2)$$

Έπειδή δέ (§ 239) είναι :  $\binom{v}{1} = v$ ,  $\binom{v}{2} = \frac{v(v-1)}{1 \cdot 2}, \dots$ ,

$$\binom{v}{k} = \frac{v(v-1) \cdots (v-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k},$$

ο τύπος (1) δύναται νά γραφή και ούτω :

$$(x + a)^v = x^v + vx^{v-1}a + \frac{v(v-1)}{1 \cdot 2} x^{v-2} a^2 + \frac{v(v-1)(v-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{v-3} a^3 + \cdots + a^v \quad (3)$$

Κατά ταύτα είναι :

$$\begin{aligned} (x + a)^6 &= x^6 + 6x^5a + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} x^4 a^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 a^3 + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} x^2 a^4 + 6x a^5 + a^6 = \\ &= x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + a^6. \end{aligned}$$

**Παρατηρήσεις επί του άναπτύγματος του διωνύμου : α').** Το άνάπτυγμα του  $(x + a)^v$  είναι έν πλήρες όμογενές πολώνυμον,  $v$  βαθμού, διατεταγμένον κατά τās κατιούσας δυνάμεις του  $x$  και τās ανιούσας του  $a$ . Είς έκαστον όρυν τούτου τὸ άθροισμα τών έκθετῶν του  $x$  και  $a$  είναι σταθερόν και ίσον πρὸς  $v$ .

**β').** Το πλήθος τών όρων του άναπτύγματος είναι  $v + 1$ , διότι υπάρχουν πᾶσαι αί δυνάμεις του  $x$  από τής μηδενικής μέχρι τής  $v$ -οστής.

**γ').** Οί όροι του άναπτύγματος του  $(x + a)^v$ , οί ισάκεις άπέχοντες τών άκρων, έχουν ίσους συντελεστές. Τοῦτο προκύπτει άμέσως από τόν τύπον (1) τής § 240, δεδομένου ότι οί συντελεστές τών όρων του άναπτύγματος είναι κατά σειράν :

$$\binom{v}{0} \binom{v}{1} \binom{v}{2} \cdots \binom{v}{k} \cdots \binom{v}{v-k} \cdots \binom{v}{v-2} \binom{v}{v-1} \binom{v}{v}.$$

**δ').** Ο όρος τάξεως  $\lambda$  του άναπτύγματος του  $(x + a)^v$  είναι ό :

$$\binom{v}{\lambda-1} x^{v-\lambda+1} a^{\lambda-1}.$$

Τοῦτο προκύπτει από την διάταξιν τών συντελεστών του άναπτύγματος, καθ' ἣν βλέπομεν ότι ό 1ος όρος έχει συντελεστήν  $\binom{v}{0}$ , ό 2ος :  $\binom{v}{1}$ , ό 3ος :  $\binom{v}{2}$  και ό  $\lambda$ ος έχει συντελεστήν  $\binom{v}{\lambda-1}$ .



ε'). 'Εάν  $v$  ἄρτιος, ἴσος πρὸς  $2\mu$ , τότε τὸ πλῆθος  $v+1$  τῶν ὁρῶν εἶναι περιττὸν καὶ συνεπῶς ὑπάρχει ὁρος μὲ μέγιστον συντελεστήν. Ὁ ὁρος οὗτος καλεῖται μεσαῖος ὁρος καὶ εἶναι τάξεως  $\frac{v}{2} + 1 = \mu + 1$ , εἶναι δὲ ὁ:  $\binom{v}{\mu} x^\mu \cdot \alpha^\mu$ .

στ'). 'Εάν  $v$  περιττός καὶ ἴσος πρὸς  $2\mu+1$ , τότε τὸ πλῆθος  $v+1$  τῶν ὁρῶν τοῦ ἀναπτύγματος  $(x+\alpha)^v$  εἶναι ἄρτιον καὶ συνεπῶς ὑπάρχουν δύο «μεσαῖοι» ὅροι (οἱ ἔχοντες μεγίστους συντελεστές). Οὗτοι εἶναι οἱ:

$$\binom{v}{\mu} x^{\mu+1} \alpha^\mu \quad \text{καὶ} \quad \binom{v}{\mu+1} x^\mu \alpha^{\mu+1}$$

καὶ ἔχουν ἴσους συντελεστές.

Ἐφαρμογαί: 1η: Νὰ εὑρεθῇ ὁ μεσαῖος ὁρος τοῦ ἀναπτύγματος  $(2x-x^2)^{12}$ .

Λύσις: Τὸ πλῆθος τῶν ὁρῶν τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι:  $12+1=13$ , ἐπομένως ὁ μεσαῖος ὁρος εἶναι ὁ  $\frac{v}{2} + 1 = 7$ ος, ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι:

$$\binom{12}{6} (2x)^6 \cdot (-x^2)^6 = 59136 x^{18}.$$

2α: Νὰ εὑρεθῇ, ἐὰν ὑπάρχῃ, ὁ ἀνεξάρτητος τοῦ  $x$  ὁρος εἰς τὸ ἀνάπτυγμα:

$$\left(2x^3 + \frac{3}{x}\right)^{16}.$$

Λύσις: Ὁ γενικὸς ὁρος τοῦ ὡς ἄνω ἀναπτύγματος εἶναι:

$$\binom{16}{k} (2x^3)^{16-k} \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^k = \binom{16}{k} 2^{16-k} \cdot 3^k \cdot x^{48-4k}$$

Διὰ νὰ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ  $x$  θὰ πρέπει:  $48-4k=0$ , ἐξ οὗ:  $k=12$ .

Ἀρα ὁ ἀνεξάρτητος τοῦ  $x$  ὁρος τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι ὁ 13ος, ὅστις εἶναι:

$$\binom{16}{12} \cdot 2^4 \cdot 3^{12} = \binom{16}{4} \cdot 2^4 \cdot 3^{12} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 2^4 \cdot 3^{12} = 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2^6 \cdot 3^{12}.$$

3η: Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς τοῦ  $x^{12}$  εἰς τὸ ἀνάπτυγμα:  $(2x^3 + \alpha)^{17}$ .

Λύσις: Ὁ γενικὸς ὁρος τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι:

$$\binom{17}{k} (2x^3)^{17-k} \cdot \alpha^k = \binom{17}{k} 2^{17-k} \cdot x^{3(17-k)} \cdot \alpha^k.$$

Ἵνα ὁ  $x$  εὐρίσκεται ὑψωμένος εἰς τὴν 12ην πρέπει:  $3(17-k)=12$  ἢ  $k=13$ .

Ἀρα ὁ συντελεστὴς τοῦ  $x^{12}$  εἶναι:

$$\binom{17}{13} \cdot 2^4 = \binom{17}{4} \cdot 2^4 = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 16 = 38080.$$

**§ 243. Ἰδιότητες τῶν διωνυμικῶν συντελεστῶν.**—α'). 'Εὰν εἰς τὸν τύπον (1) τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ διωνύμου § 242 θέσωμεν  $x=1$ ,  $\alpha=1$ , λαμβάνομεν:

$$\boxed{\binom{v}{0} + \binom{v}{1} + \binom{v}{2} + \cdots + \binom{v}{v} = 2^v} \quad (1)$$

Ὁ τύπος (1) γράφεται συντόμως ὡς ἑξῆς:

$$\sum_{k=0}^v \binom{v}{k} = 2^v \quad \text{ἢ} \quad \sum_{k=1}^v \binom{v}{k} = 2^v - 1. \quad (2)$$

**Πόρισμα.**—'Από κάθε σύνολον τὸ ὁποῖον περιέχει  $v$  στοιχεῖα, σχηματίζονται  $2^v$  ἀκριβῶς ὑποσύνολα.

Πράγματι, ὑπάρχουν  $\binom{v}{0}$  ὑποσύνολα μὲ 0 στοιχεῖα,  $\binom{v}{1}$  ὑποσύνολα μὲ ἓν στοιχεῖον,  $\binom{v}{2}$  ὑποσύνολα μὲ δύο στοιχεῖα, κ.ο.κ. Τὸ ὅλικόν πλήθος τῶν ὑποσυνόλων αὐτῶν εἶναι, λόγῳ καὶ τῆς 1 :

$$\binom{v}{0} + \binom{v}{1} + \binom{v}{2} + \cdots + \binom{v}{v} = 2^v.$$

β'). Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (1) τῆς § 242 θέσωμεν  $x = 1$ ,  $\alpha = -1$ , λαμβάνομεν :

$$\binom{v}{1} + \binom{v}{3} + \binom{v}{5} + \cdots = \binom{v}{0} + \binom{v}{2} + \binom{v}{4} + \cdots = 2^{v-1} \quad (3)$$

γ'). Ἐὰν τὴν ταυτότητα :  $(1+x)^{2v} \equiv (1+x)^v \cdot (x+1)^v$  γράψωμεν ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$\begin{aligned} & \binom{2v}{0} + \binom{2v}{1}x + \binom{2v}{2}x^2 + \cdots + \binom{2v}{v}x^v + \cdots + \binom{2v}{2v}x^{2v} \equiv \\ & \equiv \left\{ \binom{v}{0} + \binom{v}{1}x + \binom{v}{2}x^2 + \cdots + \binom{v}{v}x^v \right\} \cdot \left\{ \binom{v}{0}x^v + \binom{v}{1}x^{v-1} + \right. \\ & \quad \left. + \binom{v}{2}x^{v-2} + \cdots + \binom{v}{v} \right\} \end{aligned}$$

καὶ ἐξισώσωμεν τοὺς συντελεστὰς τῶν  $x^v$  εἰς τὰ δύο μέλη, λαμβάνομεν :

$$\binom{v}{0}^2 + \binom{v}{1}^2 + \binom{v}{2}^2 + \cdots + \binom{v}{v}^2 = \binom{2v}{v} \quad (4)$$

Ἡ (4) γράφεται συντόμως ὡς ἐξῆς :

$$\sum_{k=0}^v \binom{v}{k}^2 = \binom{2v}{v}.$$

#### \* § 244. Μία ἀξιόλογος ἐφαρμογὴ τοῦ διωνυμικοῦ τύπου.

Ἐστω ἡ ἀκολουθία  $\alpha_v = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$ ,  $v = 1, 2, \dots$

Αὕτη, ὡς θὰ δείξωμεν, εἶναι γνησίως αὐξουσα καὶ φραγμένη, ὁπότε κατὰ τὸ ἀξίωμα (§ 150) συγκλίνει ἐν  $\mathbf{R}$ .

Πράγματι, ἂν εἰς τὸν τύπον (1) τῆς § 242 θέσωμεν  $x = 1$ ,  $\alpha = \frac{1}{v}$ , τότε ἔχομεν :

$$\begin{aligned} \alpha_v = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v &= 1 + \frac{v}{1} \cdot \frac{1}{v} + \frac{v(v-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{v^2} + \cdots + \frac{v(v-1)(v-2) \cdots (v-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} \cdot \frac{1}{v^k} + \\ &+ \cdots + \frac{1}{v^v}. \end{aligned}$$

Ο γενικός όρος του ανωτέρω ανάπτυγματος γράφεται :

$$\frac{v(v-1) \cdot (v-2) \cdots (v-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} \cdot \frac{1}{v^k} = \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{v}\right) \left(1 - \frac{2}{v}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{v}\right)$$

Οθεν :

$$\alpha_v = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{v}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{v}\right) \left(1 - \frac{2}{v}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{v}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{v}\right) + \cdots + \frac{1}{v!} \left(1 - \frac{1}{v}\right) \left(1 - \frac{2}{v}\right) \cdots \left(1 - \frac{v-1}{v}\right)$$

και

$$\alpha_{v+1} = \left(1 + \frac{1}{v+1}\right)^{v+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{v+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{v+1}\right) \left(1 - \frac{2}{v+1}\right) +$$

$$\cdots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{v+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{v+1}\right) + \cdots + \frac{1}{(v+1)!} \left(1 - \frac{1}{v+1}\right) \left(1 - \frac{2}{v+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{v}{v+1}\right),$$

όπου οι όροι εις τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ  $\alpha_{v+1}$  εἶναι κατὰ μονάδα περισσότεροι ἐκείνων τοῦ  $\alpha_v$ .  
 Ἄν συγκρίνωμεν εἰς τὰ ἀνάπτυγματα τῶν  $\alpha_v$ ,  $\alpha_{v+1}$  ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοὺς δύο πρώτους ὅρους, ἔπεται τοὺς δύο δευτέρους κ.ο.κ. βλέπομεν, ὅτι διὰ  $2 \leq k \leq v$  οἱ ὅροι τοῦ δευτέρου εἶναι μεγαλύτεροι, διότι :

$$\frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{v}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{v}\right) < \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{v+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{v+1}\right).$$

Ἐξ ἄλλου ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ  $\alpha_{v+1}$ , ὁ ὁποῖος δὲν ἔχει ἀντίστοιχον εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ  $\alpha_v$ , δηλ. ὁ  $\frac{1}{(v+1)^{v+1}}$  εἶναι  $> 0$ .

Ὡστε εἶναι :

$$\alpha_v < \alpha_{v+1} \quad \text{διὰ } v = 1, 2, 3, \dots$$

ἦτοι : ἡ ἀκολουθία  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  εἶναι γνησίως αὐξουσα.

Αὕτη εἶναι καὶ φραγμένη. Ἐν ἄνω φράγμα διὰ τὴν ἀκολουθίαν  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3, διότι :

$$\alpha_v = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{v}\right) + \cdots + \frac{1}{v!} \left(1 - \frac{1}{v}\right) \left(1 - \frac{2}{v}\right) \cdots \left(1 - \frac{v-1}{v}\right) \leq 1 +$$

$$+ \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{v!}.$$

Ἰσχύει ὁμως :

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots k} < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2^{k-2}} = \frac{1}{2^{k-1}} \quad \text{διὰ } k = 3, 4, \dots$$

Οθεν :

$$\alpha_v \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{v!} < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{v-1}}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1 - 2^{-v}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Ἐξ ἄλλου ἀπὸ τὴν ἀνίσωτητα τοῦ Bernoulli ἔχομεν :

$$\alpha_v = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v \geq 1 + v \cdot \frac{1}{v} = 1 + 1 = 2 \quad \forall \quad v = 1, 2, \dots$$

“Ητοι τελικώς :

$$2 < \alpha_v = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v < 3$$

(διότι τὸ 2 εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς αὐξοῦσης ἀκολουθίας  $\alpha_v$ , ἥτοι  $\alpha_1 = 2$ ).

Ἡ  $\alpha_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$  εἶναι ὁδὸν γνησίως αὐξοῦσα καὶ φραγμένη ἀκολουθία, συνεπῶς συγκλίνει. Καλοῦμεν :

$$e = \lim_{\text{ορσ}} \alpha_v \equiv \lim \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v.$$

Ὁ ἀνωτέρω ὁρισθεὶς ἀριθμὸς  $e$  παίζει σπουδαῖον ρόλον εἰς τὴν Ἀνάλυσιν καὶ γενικῶς τὰ Μαθηματικά, σπουδαιότερον ἀκόμη καὶ αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ  $\pi$  (σταθεροῦ λόγου τοῦ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον αὐτοῦ), συνδέονται δὲ μεταξύ των διὰ σχέσεως, ὥστε, ἂν ὁρισθῇ ὁ εἰς νὰ ὁρίζεται καὶ ὁ ἄλλος· ὁ συμβολισμὸς μὲ τὸ λατινικὸν γράμμα « $e$ » εἰσήχθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Euler (1707 – 1783) τὸ 1736.

Δίδομεν κατωτέρω τὰ 20 πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ  $e$  κατὰ τὴν παράστασιν τούτου ὡς δεκαδικῆς σειρᾶς :

$$e = 2, 71828\ 1828\ 4590\ 4523\ 536\ \dots$$

Ὁ ἀριθμὸς  $e$  δὲν εἶναι ρητός· εἶναι δὲ εἰς ὑπερβατικὸς ἀριθμὸς (§ 55).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

561. Ἀναπτύξτε τὴν παράστασιν  $(x + 3y)^6$  καὶ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ἀναπτύγματος ὑπολογίσατε τὸ  $(1,03)^6$  μὲ ἀκρίβειαν 5 δεκαδικῶν ψηφίων.

562. Δείξατε ὅτι :

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4.$$

563. Εὑρετε τὸν ὅρον εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ  $\left(2x^2 - \frac{1}{2}y^3\right)^8$ , ὁ ὁποῖος περιέχει τὸ  $x^8$ .

564. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀνεξάρτητος τοῦ  $x$  ὅρος τῶν κάτωθι ἀναπτύγματος :

$$\alpha) \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^{12}, \quad \beta) \left(\frac{9x^3 - 2}{6x}\right)^9.$$

565. Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς τοῦ ὅρου  $x^{18}$  εἰς τὸ ἀνάπτυγμα :  $(x + 2x^2)^{10}$ .

566. Ὑπάρχει εἰς τὸ ἀνάπτυγμα  $\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3x}\right)^9$  ὅρος ἀνεξάρτητος τοῦ  $x$  καὶ ποῖος;

567. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες :

$$\alpha). \binom{v}{0} + 2\binom{v}{1} + 2^2\binom{v}{2} + \dots + 2^v\binom{v}{v} = 3^v$$

$$\beta). \binom{v}{1} + 2\binom{v}{2} + 3\binom{v}{3} + \dots + v\binom{v}{v} = v \cdot 2^{v-1}$$

$$\gamma). 1 + 2\binom{v}{1} + 3\binom{v}{2} + \dots + (v+1)\binom{v}{v} = 2^v + v \cdot 2^{v-1}$$

$$\delta). 1 + \frac{1}{2} \cdot \binom{v}{1} + \frac{1}{3} \cdot \binom{v}{2} + \dots + \frac{1}{v+1} \binom{v}{v} = \frac{1}{v+1} \cdot (2^{v+1} - 1).$$

568. Ἐὰν  $v \in \mathbb{N}$  καὶ  $v > 1$ , δείξατε ὅτι :

$$\binom{2v}{v} > \frac{4^v}{2\sqrt{v}}.$$

(Ὑπόδειξις : Ἐφαρμόσατε τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς).

569. Ἐὰν  $v \in \mathbb{N}$ ,  $v \neq 1$ , νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\left(\frac{v+1}{2}\right)^v > v! > (v+1) \frac{v-1}{2}.$$

# IV. ΠΙΝΑΚΕΣ

§ 245. Εισαγωγικά "Εννοιαι — Όρισμοί.— Θεωρούμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων :

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 &= \beta_2, \end{aligned} \quad (\Sigma)$$

ὅπου οἱ συντελεσταὶ  $\alpha_{ij}$  τῶν ἀγνώστων  $x_j$ , ὡς καὶ οἱ γνωστοὶ ὅροι  $\beta_i$ , εἶναι τυ-  
χόντες πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ( $i, j = 1, 2$ ). Ἀφ' ἂν φαντασθῶμεν τώρα τοὺς συντελε-  
στάς τῶν ἀγνώστων ἀναγεγραμμένους εἰς ὀρθογώνιον παράταξιν τῆς μορφῆς :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \quad \eta \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Τὴν ὀρθογώνιον ταύτην παράταξιν καλοῦμεν **πίνακα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων**. Ἐὰν εἰς τὴν ὀρθογώνιον παράταξιν (1) συμπεριλάβωμεν καὶ τοὺς σταθεροὺς ὅρους, τότε θὰ ἔχωμεν τὸν πίνακα :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2 \end{pmatrix} \quad \eta \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

τὸν ὁποῖον καλοῦμεν **πίνακα ὅλων τῶν συντελεστῶν ἢ ἐξηνηχθέντα πίνακα**.

Ὁ πίναξ (2) ἔχει δύο γραμμάς καὶ 3 στήλας, εἶναι, ὡς λέγομεν, εἰς  $2 \times 3$  πίναξ.

Κατόπιν τῆς ἐνορατικῆς ταύτης εἰσαγωγῆς εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ πίνακος ἰδομεν τὸν ἐξῆς γενικὸν ὅρισμόν :

Καλοῦμεν **πίνακα ἢ μήτρα (matrix)** μὲ  $\mu$  γραμμάς καὶ  $\nu$  στήλας, καὶ τὸν συμβο-  
λίζομεν μὲ  $A_{\mu \times \nu}$  ἢ ἀπλῶς μὲ  $A$ , μίαν ὀρθογώνιον (εἴτε τετραγωνικὴν) παράταξιν  
ἀριθμῶν  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, \mu, j = 1, 2, \dots, \nu$ ),  $a_{ij} \in \mathbf{R}$  ἢ γενικώτερον  $a_{ij} \in \mathbf{C}$ , ἥτοι :

$$A \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu \nu} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Ὁ ἀνωτέρω πίναξ συμβολίζεται ἐπίσης καὶ ὡς  $[a_{ij}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, \mu, j = 1, 2, \dots, \nu$  ἢ  $[a_{ij}]_{\mu, \nu}$  ἢ ἀπλῶς  $[a_{ij}]$ .

Αἱ  $\mu$  ὀρίζοντιαι  $\nu$ -ᾶδες :

$$(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1\nu}), (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2\nu}), \dots, (\alpha_{\mu 1}, \alpha_{\mu 2}, \dots, \alpha_{\mu \nu})$$

εἶναι αἱ **γραμμαὶ** τοῦ πίνακος, καὶ αἱ  $\nu$  κατακόρυφοι  $\mu$ -ᾶδες :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{\mu 1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{\mu 2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{2\nu} \\ \vdots \\ \alpha_{\mu \nu} \end{bmatrix}$$

εἶναι αἱ **στήλαι** αὐτοῦ.

Οί αριθμοί  $\mu$  και  $\nu$  καλούνται *διαστάσεις του πίνακος* και ειδικώτερον ὁ μὲν ἀριθμὸς  $\mu$ , ὅστις φανερώνει τὸ πλῆθος ὅλων τῶν γραμμῶν, καλεῖται «*ὕψος*» τοῦ πίνακος, ὁ δὲ ἀριθμὸς  $\nu$ , ὅστις φανερώνει τὸ πλῆθος ὅλων τῶν στηλῶν, καλεῖται «*μῆκος*» αὐτοῦ. Εἰς πίναξ μὲ  $\mu$  γραμμὰς καὶ  $\nu$  στήλας καλεῖται εἰς  $\mu$  ἐπὶ  $\nu$  πίναξ ἢ πίναξ διαστάσεων  $\mu \times \nu$ . Οὕτως, ὁ πίναξ (1) εἶναι διαστάσεων  $2 \times 2$ , ἐνῶ ὁ πίναξ (2) εἶναι διαστάσεων  $2 \times 3$ . Οἱ ἀριθμοὶ  $a_{ij}$  καλοῦνται *στοιχεῖα* τοῦ πίνακος. Τὸ στοιχεῖον  $a_{ij}$  καλεῖται ἢ «*ij-συντεταγμένη*» καὶ ἐμφανίζεται εἰς τὴν  $i$ -γραμμὴν καὶ  $j$ -στήλην. Ὁ πρῶτος δείκτης  $i$  τοῦ στοιχείου  $a_{ij}$ , ἐπειδὴ φανερώνει τὴν γραμμὴν, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ στοιχεῖον καλεῖται *δείκτης γραμμῆς*, ὁ δὲ δεῦτερος δείκτης  $j$ , ἐπειδὴ φανερώνει τὴν στήλην καλεῖται *δείκτης στήλης*. Ἐὰν εἶναι  $\mu = 1$ , δηλαδὴ ἂν ὁ πίναξ (3) ἔχῃ μίαν μόνον γραμμὴν, τότε λέγεται «*πίναξ-γραμμὴ*», ἐνῶ ἂν εἶναι  $\nu = 1$ , δηλ. ἂν ὁ πίναξ ἔχῃ μίαν μόνον στήλην, τότε λέγεται «*πίναξ-στήλη*». Εἰς τοιοῦτους πίνακας γράφομεν τὰ στοιχεῖα τῶν συνήθως μὲ ἓνα δείκτην, ὅστις δηλοῖ ἀντιστοίχως τὴν στήλην ἢ τὴν γραμμὴν, ἥτοι γράφομεν :

$$A \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu) \quad \eta \quad B \equiv \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix} \quad (4)$$

Ἐὰν εἶναι  $\mu = \nu$ , δηλαδὴ ὅταν τὸ πλῆθος τῶν γραμμῶν συμπίπτῃ μὲ τὸ πλῆθος τῶν στηλῶν ἐνὸς πίνακος, τότε οὗτος καλεῖται *τετραγωνικὸς πίναξ διαστάσεως  $\nu$* .

Τὰ στοιχεῖα :  $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{\nu\nu}$  τοῦ τετραγωνικοῦ πίνακος

$$A \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \quad (5)$$

λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν τὴν *πρωτεύουσαν διαγώνιον* αὐτοῦ, καὶ τὰ στοιχεῖα :  $\alpha_{1\nu}, \alpha_{2,\nu-1}, \dots, \alpha_{\nu 1}$ , τὴν *δευτερεύουσαν διαγώνιον* αὐτοῦ.

Ἐὰν  $\mu = \nu = 1$ , δηλαδὴ ἂν ὁ πίναξ ἔχῃ ἓν μόνον στοιχεῖον, τότε γράφεται  $(\alpha_{11})$  ἢ ἀπλούστερον  $\alpha_{11}$ , ἐφ' ὅσον δὲν ὑπάρχει φόβος συγχύσεως.

Εἰς τετραγωνικὸς πίναξ τοῦ ὁποῖου ὅλα τὰ στοιχεῖα τὰ κείμενα ἐκτὸς τῆς πρωτευούσης διαγωνίου εἶναι μηδὲν καλεῖται *διαγώνιος*.

Ὅταν εἰς ἓνα διαγώνιον πίνακα ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς πρωτευούσης διαγωνίου ἰσοῦνται μὲ 1, τότε οὗτος καλεῖται *μοναδιαῖος ἢ πίναξ μονάς* καὶ παρίσταται συνήθως μὲ τὰ γράμματα  $E$  ἢ  $I$ . Οὕτως, ἐκ τῶν κάτωθι πινάκων :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ὁ πρῶτος εἶναι διαγώνιος καὶ ὁ δεῦτερος μοναδιαῖος.

Εἰς πίναξ τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ στοιχεῖα εἶναι μηδέν, καλεῖται **μηδενικός** πίναξ, καὶ παρίσταται μὲ **O**, ἥτοι :

$$O \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ἐὰν εἰς τετραγωνικὸς πίναξ ἔχη τὰ συμμετρικὰ πρὸς τὴν πρωτεύουσαν διαγώνιον στοιχεῖα ἴσα, δηλ. ἂν  $a_{ij} = a_{ji}$ , καλεῖται **συμμετρικός**.

Ἐὰν τὰ στοιχεῖα ἐνὸς τετραγωνικοῦ πίνακος τὰ συμμετρικὰ πρὸς τὴν πρωτεύουσαν διαγώνιον εἶναι ἀντίθετα, ἥτοι ἂν  $a_{ij} = -a_{ji}$ , ὁπότε  $a_{ii} = 0$ , τότε καλεῖται **ἀντισυμμετρικός**.

Οὕτως, ἐκ τῶν κάτωθι πινάκων :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

ὁ πρῶτος εἶναι συμμετρικός καὶ ὁ δεύτερος ἀντισυμμετρικός.

Οἱ πίνακες δὲν σημαίνουν πρᾶξιν τινὰ μεταξύ τῶν στοιχείων αὐτῶν, τοῦτο ὅμως δὲν ἐμποδίζει νὰ ἔχουν οὗτοι μίαν μαθηματικὴν ἔννοιαν. Οὕτως, π.χ. ὁ πίναξ  $(\alpha, \beta)$ , ὅπου  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ , εἶναι ἐν διατεταγμένον ζεῦγος ἀριθμῶν καὶ παριστᾷ, ὡς γνωρίζομεν, ἓνα μιγαδικὸν ἀριθμὸν. Οἱ πίνακες δὲν ἀποτελοῦν μόνον νέα μαθηματικὰ σύμβολα, εἰσάγονται καὶ ὡς νέα στοιχεῖα ἐπὶ τῶν ὁποίων δίδεται ὁ ὁρισμὸς τῆς ἰσότητος καὶ ὀρίζονται πράξεις, ὡς ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν πινάκων μὲ  $\mu$  γραμμὰς καὶ  $\nu$  στήλας, θὰ παρίσταται μὲ  $\mathcal{M}_{\mu \times \nu}$ .

Μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ  $\mathcal{M}_{\mu \times \nu}$  ὀρίζομεν τὰ ἑξῆς :

**§ 246. Ἰσότης πινάκων.**— Δύο πίνακες  $A \equiv [a_{ij}]$  καὶ  $B \equiv [\beta_{ij}]$  τῶν αὐτῶν διαστάσεων θὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι ἴσοι, καὶ θὰ γράφωμεν :  $A = B$ , τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα αὐτῶν εἶναι ἴσα, ἥτοι :

$$A_{\mu \times \nu} = B_{\mu \times \nu} \iff a_{ij} = \beta_{ij} \quad \forall \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, \mu \\ j = 1, 2, \dots, \nu \end{matrix} \quad (1)$$

Ἡ σχέσηις αὕτη εἶναι προφανῶς *αὐτοπαθής, συμμετρική* καὶ *μεταβατική* (διὰ τί ;). Ἐκ τῆς (1) προκύπτει ὅτι ἡ ἰσότης δύο  $\mu \times \nu$  πινάκων εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ἓν σύστημα  $\mu \cdot \nu$  ἰσοτήτων μίαν δ' ἑκαστον ζεῦγος στοιχείων. Ὁ ὁρισμὸς τῆς ἰσότητος πινάκων, μεταξύ ἄλλων πλεονεκτημάτων, μᾶς παρέχει καὶ μίαν διευκόλυνσιν εἰς τὴν σύντομον γραφὴν διαφόρων σχέσεων, ὡς π.χ. διὰ τὴν σύντομον ἑκφρασιν συστημάτων. Κατὰ ταῦτα ἡ ἑκφρασις :

Να λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :  $\begin{pmatrix} x+y & 2z+\omega \\ x-y & z-\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  εἶναι ἰσοδύναμος,

συμφώνως πρὸς τὸν ὀρισμὸν (1), μὲ τὸ κάτωθι σύστημα :

$$x+y=3, \quad x-y=1, \quad 2z+\omega=5, \quad z-\omega=4.$$

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος τούτου εἶναι :  $x=2, \quad y=1, \quad z=3, \quad \omega=-1$ .

## § 247. Πρόσθεσις πινάκων καὶ ἀριθμητικὸς πολλαπλασιασμός.

Διὰ νὰ ὀρίσωμεν τὸ ἄθροισμα δύο πινάκων, θεωροῦμεν ἀναγκαῖον, ὅπως οἱ δύο πίνακες ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν γραμμῶν καὶ στηλῶν. Κατόπιν τούτου, ἂν οἱ πίνακες  $A \equiv [\alpha_{ij}]$  καὶ  $B \equiv [\beta_{ij}]$  εἶναι τῶν αὐτῶν διαστάσεων  $\mu \times \nu$ , τότε ὡς **ἄθροισμα** αὐτῶν ὀρίζεται ὁ  $\mu \times \nu$  πίναξ  $\Gamma \equiv [\gamma_{ij}]$ , τοῦ ὁποῖου τυχὸν στοιχεῖον εἶναι ἄθροισμα τῶν ἀντιστοιχούντων στοιχείων τῶν πινάκων  $A$  καὶ  $B$ , ἥτοι :

$$\Gamma = A + B \iff \gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \quad \forall \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, \mu \\ j = 1, 2, \dots, \nu \end{matrix} \quad (1)$$

Ἀναλυτικώτερον, ἔάν :

$$A \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu \nu} \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad B \equiv \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1\nu} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{\mu 1} & \beta_{\mu 2} & \dots & \beta_{\mu \nu} \end{bmatrix},$$

τότε ὡς ἄθροισμα αὐτῶν ὀρίζεται ὁ πίναξ :

$$A + B \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} + \beta_{1\nu} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} + \beta_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} + \beta_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} + \beta_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu \nu} + \beta_{\mu \nu} \end{bmatrix}.$$

Ὡς **γινόμενον ἐνὸς ἀριθμοῦ  $\lambda \in \mathbb{R}$  ἐπὶ πίνακα  $A$**  ὀρίζεται εἰς πίναξ, ὅστις ση-  
μειοῦται μὲ  $\lambda \cdot A$  ἢ ἀπλῶς  $\lambda A$ , καὶ προκύπτει ἐκ τοῦ  $A$  ἂν ὅλα τὰ στοιχεῖα του πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ  $\lambda$ , ἥτοι :

$$\lambda A \equiv \begin{bmatrix} \lambda \alpha_{11} & \lambda \alpha_{12} & \dots & \lambda \alpha_{1\nu} \\ \lambda \alpha_{21} & \lambda \alpha_{22} & \dots & \lambda \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \alpha_{\mu 1} & \lambda \alpha_{\mu 2} & \dots & \lambda \alpha_{\mu \nu} \end{bmatrix}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ  $\lambda A$  εἶναι ἐπίσης εἰς  $\mu \times \nu$  πίναξ.

Ἐπίσης ὀρίζομεν :

$$-A = (-1) \cdot A \quad \text{καὶ} \quad A - B = A + (-B).$$

Ὁ πίναξ  $-A$  τοῦ ὁποῖου στοιχεῖα εἶναι τὰ ἀντίθετα τῶν στοιχείων τοῦ  $A$  καλεῖται **ἀντίθετος** τοῦ  $A$ .



**Εφαρμογή.** Έστω  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$  και  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ . Τότε :

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+0 & 3+2 \\ 4-7 & 5+1 & -6+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -18 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 0 & -6 \\ 21 & -3 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 0 \\ 29 & 7 & -36 \end{pmatrix}.$$

**\* § 248. Έννοια του διανυσματικού χώρου.**—Το σύνολο  $\mathcal{M}_{\mu \times \nu}$  των

πινάκων με  $\mu$  γραμμές και  $\nu$  στήλες έχει έφωδιασθή με δύο πράξεις : την πρόσθεση πινάκων και τον πολλαπλασιασμό ενός πίνακος επί πραγματικών αριθμών. Αι πράξεις αυτές έχουν τας ακόλουθους βασικές ιδιότητες, ως δύναται τις να αποδείξει εύκολως :

Διά τυχόντας πίνακας  $A, B, \Gamma \in \mathcal{M}_{\mu \times \nu}$  και τυχόντας πραγματικούς αριθμούς  $k, \lambda$  ισχύουν :

| <i>Πρόσθεσις</i>                           | <i>Πολλαπλασιασμός επί αριθμών</i> |
|--------------------------------------------|------------------------------------|
| (i) $A + B = B + A$                        | $k(A + B) = kA + kB$               |
| (ii) $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$ | $(k + \lambda)A = kA + \lambda A$  |
| (iii) $A + O = O + A = A$                  | $k(\lambda A) = (k\lambda)A$       |
| (iv) $A + (-A) = (-A) + A = O$             | $1A = A$                           |

Σύνολα, ως το σύνολο των πινάκων  $\mathcal{M}_{\mu \times \nu}$  με  $\mu$  γραμμές και  $\nu$  στήλες, έφωδιασμένα με δύο πράξεις την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό επί αριθμών (συντελεστήν) και διά τας όποιās ισχύουν αι άνωτέρω ιδιότητες, καλούνται **διανυσματικοί χώροι**.

Είς την περίπτωσιν αυτήν τὰ στοιχεία του  $\mathcal{M}_{\mu \times \nu}$  καλούνται **διανύσματα**, τὰ δὲ στοιχεία του  $\mathbf{R}$  καλούνται **βαθμωτά** (ἢ *έκτελεσται*). Οί πίνακες λοιπὸν εἶναι τὰ διανύσματα ἑνὸς διανυσματικοῦ χώρου. Περί τῆς θεμελιώδους ἑννοίας του διανυσματικοῦ χώρου θὰ γνωρίσωμεν περισσότερα εἰς τὴν ἑκτὴν τάξιν.

**§ 249. Πολλαπλασιασμός πινάκων.**—Έστω  $\mathcal{M}$  τὸ σύνολο ὅλων τῶν πινάκων· τότε μεταξύ ὠρισμένων ζευγῶν ἐξ αὐτῶν ὀρίζεται μία πρᾶξις καλουμένη **πολλαπλασιασμός** ὡς ἑξῆς :

α'). Πολλαπλασιασμός «γραμμὴ ἐπὶ στήλην» : Έστωσαν  $A \equiv (\alpha_i)$  καὶ  $B \equiv [\beta_j]$  δύο πίνακες, ἐξ ὧν ὁ πρῶτος εἶναι εἰς πίναξ—γραμμὴ με  $\nu$  στήλες καὶ ὁ δευτέρος\*πίναξ—στήλη με  $\nu$  γραμμές· τότε ὀρίζομεν ὡς γινόμενον αὐτῶν  $A \cdot B$  ἕνα πίνακα με ἕνα στοιχεῖον οὕτω :

$$A \cdot B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu) \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\nu \end{bmatrix} = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_\nu\beta_\nu) \quad (1)$$

β'). Πολλαπλασιασμός πινάκων : Έστωσαν τώρα δύο πίνακες  $A_{\mu \times \nu} \equiv [\alpha_{ij}] \in \mathcal{M}$  καὶ  $B_{\nu \times \rho} \equiv [\beta_{jk}] \in \mathcal{M}$ , οἱ ὅποιοι πληροῦν τὴν συνθήκην : Τὸ πλῆθος τῶν στηλῶν τοῦ (πρώτου)  $A$  ἰσοῦται με τὸ πλῆθος τῶν γραμμῶν τοῦ (δευτέρου)  $B$ . Τότε ὀρί-

ζομεν ὡς γινόμενον  $A_{\mu\nu} \cdot B_{\nu\rho}$  τῶν πινάκων τούτων, ἓνα πίνακα  $\Gamma_{\mu\rho} \equiv [\gamma_{ik}]$ , τοῦ ὁποῖου τὸ τυχόν στοιχεῖον  $\gamma_{ik}$  προέρχεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς  $i$  γραμμῆς τοῦ πίνακος  $A$  ἐπὶ τὴν  $k$  στήλην τοῦ  $B$ , εἶναι δηλαδή :

$$A_{\mu\nu} \cdot B_{\nu\rho} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1\rho} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2\rho} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{\nu 1} & \beta_{\nu 2} & \dots & \beta_{\nu\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1\rho} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2\rho} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{\mu 1} & \gamma_{\mu 2} & \dots & \gamma_{\mu\rho} \end{bmatrix} = \Gamma,$$

$$\text{ὅπου } \gamma_{ik} = \alpha_{i1} \beta_{1k} + \alpha_{i2} \beta_{2k} + \dots + \alpha_{i\nu} \beta_{\nu k} = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{ij} \beta_{jk}.$$

Προφανῶς ὁ πίναξ  $\Gamma$  ἔχει  $\mu$  γραμμὰς (ὅσας ὁ  $A$ ) καὶ  $\rho$  στήλας (ὅσας ὁ  $B$ ), δηλ. θὰ ἔχωμεν :

$$A_{\mu\nu} \cdot B_{\nu\rho} = \Gamma_{\mu\rho}.$$

**Τονίζομεν ὅτι :** τὸ γινόμενον  $AB$  δὲν ὀρίζεται, ἂν ὁ  $A$  εἶναι εἰς  $\mu \times k$  πίναξ καὶ ὁ  $B$  εἶναι εἰς  $\lambda \times \rho$  πίναξ, ὅπου  $k \neq \lambda$ .

**Παράδειγμα 1ον :**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-6) \\ -1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & -1 \cdot 4 + 3 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -8 \\ 5 & 9 & -22 \end{pmatrix}$$

**2ον :**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ἐκ τοῦ δευτέρου παραδείγματος συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ ιδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ δὲν ἰσχύει γενικῶς ἐπὶ τῶν πινάκων.

Ὅπως δὴποτε ὁμως ὁ πολλαπλασιασμός πινάκων ἱκανοποιεῖ τὰς ἀκολουθοῦσας ιδιότητες, ἐφ' ὅσον βεβαίως αἱ σημειούμεναι κάτωθεν πράξεις εἶναι ἐκτελεσταί, ἥτοι ἐφ' ὅσον κατὰ τὸν πολλαπλασιασμόν δύο πινάκων  $AB$  τὸ πλῆθος τῶν στηλῶν τοῦ  $A$  συμφωνεῖ μὲ τὸ πλῆθος τῶν γραμμῶν τοῦ  $B$  :

- 1)  $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$  (προσεταιριστικὴ ιδιότης)
- 2)  $A(B + \Gamma) = AB + A\Gamma$  (ἐπιμεριστικὴ ιδιότης ἐξ ἀριστερῶν)
- 3)  $(B + \Gamma)A = BA + \Gamma A$  (ἐπιμεριστικὴ ιδιότης ἐκ δεξιῶν)
- 4)  $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ , ὅπου  $k \in \mathbf{R}$ .

Παρατηροῦμεν ὅτι  $OA = AO = O$ , ὅπου  $O$  εἶναι ὁ μηδενικὸς πίναξ.

**§ 250. Ὁ ἀνάστροφος ἐνὸς πίνακος.**— Δοθέντος ἐνὸς πίνακος  $A_{\mu\nu} \equiv [\alpha_{ij}]$  καλοῦμεν **ἀνάστροφον** αὐτοῦ καὶ τὸν συμβολίζομεν μὲ  $A^t$ , τὸν πίνακα, ὅστις προκύπτει ἐκ τοῦ  $A_{\mu\nu}$ , ἂν αἱ γραμμαὶ του γραφοῦν, κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, ὡς στήλαι (καὶ αἱ στήλαι του ὡς γραμμαί), ἥτοι :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{\mu 1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{\mu 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1\nu} & \alpha_{2\nu} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀνάστροφος τοῦ  $A_{\mu\nu}$  εἶναι εἰς  $\nu \times \mu$  πίναξ.

Παράδειγμα :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Διὰ τοὺς ἀναστροφούς πίνακας ἀποδεικνύονται εὐκόλως αἱ ἀκόλουθοι ιδιότητες :

- 1)  $(A^t)^t = A$ , 2)  $O^t = O$ , 3)  $(-A)^t = -A^t$ , 4)  $(A+B)^t = A^t + B^t$ ,  
5)  $(A-B)^t = A^t - B^t$ , 6)  $(kA)^t = kA^t$ ,  $\forall k \in \mathbb{R}$ , 7)  $(AB)^t = B^t \cdot A^t$ .

**§ 251. Ὁ ἀντίστροφος τετραγωνικοῦ πίνακος.**—Ἐστώσαν δύο τετραγωνικοὶ πίνακες  $A_n \equiv A$  καὶ  $B_n \equiv B$ . Τότε, ὡς γνωστόν, ὀρίζεται ὁ πίναξ  $A \cdot B$  ὡς καὶ ὁ πίναξ  $B \cdot A$ . Ἐν συμβῇ :  $A \cdot B = B \cdot A = E$ , ἔνθα  $E$  εἶναι ὁ μοναδιαῖος πίναξ, τότε λέγομεν ὅτι ὁ πίναξ  $B$  εἶναι **ἀντίστροφος** τοῦ πίνακος  $A$  καὶ γράφομεν :  $B = A^{-1}$ . Λόγῳ τῆς συμμετρίας καὶ ὁ πίναξ  $A$  εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ πίνακος  $B$ , ἥτοι :  $A = B^{-1}$ .

Παράδειγμα. Ἐστω :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ἐχομεν :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

\*Ὅθεν οἱ  $A$  καὶ  $B$  εἶναι ἀντίστροφοι.

**§ 252. Πίνακες καὶ συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων.**—Τὸ κάτωθι σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων :

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 7 \\ x - 2y - 5z &= 3 \end{aligned} \quad (1)$$

εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὴν «ἐξίσωσιν πίνακος» :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{ἢ συντόμως } AX = B, \quad (2)$$

ὅπου

$$A \equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad X \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{καὶ} \quad B \equiv \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

\*Ἦτοι πᾶσα λύσις τοῦ συστήματος (1) εἶναι μία λύσις τῆς ἐξισώσεως (2) καὶ ἀντιστρόφως. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἀντίστοιχον ὁμογενὲς σύστημα τοῦ (1) εἶναι τότε ἰσοδύναμον πρὸς τὴν ἐξίσωσιν πίνακος :  $AX = O$ . Ὁ πίναξ  $A$  τῶν συντελεστῶν καλεῖται **πίναξ τῶν συντελεστῶν τοῦ συστήματος**, ἐνῶ ὁ πίναξ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

καλεῖται **ἐπηνυξημένος πίναξ** τοῦ (1). Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύστημα (1) ὀρίζεται πλήρως ἐκ τοῦ ἐπηνυξημένου πίνακος.

570. Υπολογίσατε τὰ κάτωθι :

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad 3) -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

571. Δίδονται :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Εύρετε : 1)  $3A + 4B - 2\Gamma$ , 2)  $A + 2B - 4\Gamma$ , 3)  $A^t + B^t - \Gamma^t$ , 4)  $AA^t$ , 5)  $A^tA$ .

572. Εύρετε τὰ  $x, y, z, \omega$  εάν :

$$3 \begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z & 3 \end{pmatrix}.$$

573. Δίδεται :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ .

Εύρετε : 1)  $A^2$ , 2)  $A^3$ , 3)  $f(A)$ , όπου  $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$ .

574. Δείξατε ότι ο πίναξ  $A$  τῆς ἀνωτέρω ἀσκῆσεως εἶναι ρίζα τοῦ πολυνύμου :

$$g(x) = x^2 + 2x - 11.$$

575. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\alpha & \eta\mu\alpha \\ -\eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\nu\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\alpha & \eta\mu\alpha \\ -\eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\nu\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu 2\alpha & \eta\mu 2\alpha \\ -\eta\mu 2\alpha & \sigma\upsilon\nu 2\alpha \end{bmatrix}.$$

576. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}.$$

577. Προσδιορίσατε τούς πίνακες  $X, Y \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ , γνωστοῦ ὄντος ὅτι :

$$3 \cdot X + 4 \cdot Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$$

$$-2 \cdot X + 3 \cdot Y = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}.$$

578. Ἐάν  $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , νὰ ὁρισθοῦν οἱ  $k$  καὶ  $\lambda$  εἰς τὴν ἐξίσωσιν :

$$X^2 - kX + \lambda E = O, \quad (E = \text{μοναδιαῖος πίναξ}, O = \text{μηδενικός πίναξ}).$$

579. Δίδεται ὁ τετραγωνικός πίναξ :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συνθήκαι ὑπάρξεως τοῦ ἀντιστρόφου πίνακος καὶ νὰ ὑπολογισθῇ οὗτος.

580. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀντίστροφος τοῦ πίνακος.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

581. Νὰ λυθῇ ἡ «ἐξίσωσις» :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

582. Δείξατε ὅτι : ὁ ἀνάστροφος τοῦ ἀντιστρόφου ἐνὸς πίνακος  $A$  ἰσοῦται μετὸν ἀντίστροφον τοῦ ἀναστρόφου τοῦ  $A$ , ἥτοι :  $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ .

# ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΧΙΙ

### ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

#### Ι. ΕΝΟΡΑΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

##### § 253. Ἱστορική εἰσαγωγή.

Ἡ θεωρία τῶν Πιθανοτήτων ὀφείλει τὴν γένεσιν της εἰς τὰ τυχερὰ παιγνίδια καὶ συγκακριμένως εἰς τὰ παιγνίδια τῶν κύβων (ζάρια). Πρὸ τριακοσίων περίπου ἐτῶν ὁ Γάλλος ἱππότης Chevalier de Méré (1654), διάσημος παίκτης, ἐνδιεφέρετο διὰ τὰς περιπτώσεις ἐπιτυχίας εἰς ἓνα τυχερὸν παιγνίδιον πολὺ διαδεδεμένον κατὰ τὸν 17ον αἰῶνα. Ἐπειδὴ εἶχε τὴν ἐντύπωσιν ὅτι οἱ ὑπολογισμοὶ τοῦ ἦσαν λανθασμένοι, συμβουλευθεὶς τὸν Blaise Pascal (1623 - 1662), τοῦ ὁποῦ ἡ μεγαλοφυΐα κατεγίνετο μὲ τὴν θεολογίαν, τὰ μαθηματικὰ καὶ τὰς φυσικὰς ἐπιστήμας. Ἐνῶ ἐργάζετο ἐπὶ τοῦ προβλήματος τοῦ de Méré, ὁ Pascal ἀντιμετώπισε καὶ ἄλλα ἐνδιαφέροντα ἐρωτήματα ἐπὶ τῶν πιθανοτήτων. Τὰ ἐρωτήματα αὐτὰ ἐδωσαν ἀφορμὴν διὰ μίαν καρποφόρον ἀλληλογραφίαν μεταξὺ Pascal καὶ Fermat (1608 - 1665), ἐνὸς ἄλλου ἐπίσης μεγάλου μαθηματικοῦ. Ὁ Fermat ἐμελέτησεν τὸσον τὰ ἐν λόγω προβλήματα, ὅσον καὶ τὰς λύσεις τὰς δοθείσας ὑπὸ τοῦ Pascal, πολλὰς τῶν ὁποίων καὶ ἐγενίκευσεν. Τοιοῦτοτρόπως, εἰς τὴν ἀλληλογραφίαν τῶν δύο αὐτῶν σοφῶν ἐτέθησαν οὐσιαστικῶς αἱ πρῶται βάσεις τῆς θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων, διὰ τὴν ὁποίαν ὁ Pascal ἐπρότεινεν τὸ ὄνομα «Γεωμετρία τῆς τύχης».

Ἡ θεωρία τῶν Πιθανοτήτων ἀπασχόλησεν ἐν συνεχείᾳ πλείστους μεγάλους μαθηματικούς, ὡς τὸν J. Bernoulli, τὸν Leibnitz, τὸν De Moivre, τὸν Euler, τὸν Lagrange, τὸν Gauss. Ἐπεφυλάσσετο ὅμως εἰς τὸν Laplace (1749 - 1827) ἡ τιμὴ νὰ συστηματοποιήσῃ ὅλας τὰς μέχρι αὐτοῦ γνώσεις, νὰ ἐπεκτείνῃ αὐτάς, χρησιμοποιῶν τὰς πλέον προηγμένας μεθόδους τῆς Ἀναλύσεως καὶ νὰ δώσῃ εἰς τὴν θεωρίαν αὐτὴν τὴν κλασσικὴν τῆς μαθηματικῆς μορφήν, ὑπὸ τὴν ὁποίαν μᾶς εἶναι γνωστὴ σήμερον.

Ἐπὶ ἑβδομήκοντα καὶ πλέον ἔτη αἱ ἰδέαι τοῦ Laplace ἐκυριάρχησαν καὶ ἐδέσμευσαν τὴν θεωρίαν τῶν Πιθανοτήτων. Περί τὰ τέλη τοῦ παρελθόντος αἰῶνος δύο μεγάλοι μαθηματικοὶ ὁ J. Bertrand καὶ ὁ H. Poincaré ἐσημείωσαν νέαν ἐποχὴν. Οὗτοι μὲ τὴν αὐστηρὰν κριτικὴν των κατὰ τοῦ ὁρίσμου τῆς πιθανότητος τοῦ υἱοθετηθέντος ὑπὸ τοῦ Laplace ἐδημιούργησαν περίοδον κρίσεως διὰ τὴν θεωρίαν τῶν Πιθανοτήτων, περίοδον ἣτις κατὰ τὴν διαρρέυσασαν πεντηκονταετίαν ὑπῆρξεν ἐξαιρετικὰ γόνιμος ἀπὸ πάσης ἀπόψεως.

Ἡ γεωμετέρα ἀνάπτυξις τῆς θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων χαρακτηρίζεται τὸσον ἀπὸ ἐνδιαφέρον πρὸς αὐτὴν ταύτην τὴν θεωρίαν ὅσον καὶ πρὸς τὴν κατεύθυνσιν διευρύνσεως τῶν ἐφαρμογῶν αὐτῆς. Σημαντικὴ εἶναι ἡ συμβολὴ τῆς Μαθηματικῶν τοῦ πρέχοντος αἰῶνος Lindeberg, S. Bernstein, A. Kolmogorov, P. Lévy καὶ Emile Borel.

Ἡ θεωρία τῶν Πιθανοτήτων, δημιουργηθεῖσα ἀρχικῶς, ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω, διὰ νὰ ἱκανοποιήσῃ ἀπορίας, αἱ ὁποῖαι προέκυψαν ἀπὸ τὰ τυχερὰ παιγνίδια, κατέστη σήμερον τὸσον σημαντικὴ, ὥστε νὰ ἀποτελῇ βασικὴν συμβολὴν εἰς τὸ ἔργον τῶν κοινωνικῶν καὶ φυσικῶν ἐπιστημῶν καὶ εἰς τὴν ἀντιμετώπισιν τῶν πρακτικῶν προβλημάτων τῆς διοικήσεως καὶ τῆς βιομηχανίας. Τοιοῦτοτρόπως, εἰς τὴν θεωρίαν τῶν Πιθανοτήτων προστρέχουν οἱ Φυσικοὶ διὰ νὰ ἐπεκτείνουν τὰ ὅρια τῆς κλασσικῆς Φυσικῆς. Δι' αὐτῆς οἱ Βιολόγοι κατορθώνουν νὰ ἀντιμετωπίζουν τοὺς ποσοτικούς νόμους τῆς κληρονομικότητος. Οἱ Μετεωρολόγοι, οἱ Ἀστρονόμοι δι' αὐτῆς ἐπεξεργά-

ζονται τὰς παρητηρήσεις των καὶ εἰς τὴν θεωρίαν αὐτὴν βασιζοῦν μέγαν ἀριθμὸν τῶν προβλέψεων των. Οἱ Οἰκονομολόγοι δι' αὐτῆς προσπαθοῦν νὰ ἀνακαλύψουν τοὺς νόμους τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων. Εἰς τὴν Βιομηχανίαν ἡ ἐν σειρᾷ παραγωγῇ ὑπόκειται εἰς τοὺς νόμους τῶν Πιθανοτήτων. Ὅλοι ἄλλως τε αἱ παρατηρήσεις, ὅλοι αἱ μετρήσεις τῶν Θετικῶν Ἐπιστημῶν ὀφείλουν τελικῶς νὰ ὑποστοῦν ἐπεξεργασίαν διὰ τῶν μεθόδων τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων. Τέλος ἡ Στατιστική, τῆς ὁποίας ἡ σημασία ἀποδεικνύεται διαρκῶς μεγαλυτέρα εἰς ὅλας τὰς περιοχὰς τῆς ἀνθρωπίνης γνώσεως, ἀποτελεῖ τὴν σπουδαιότεραν ἐφαρμογὴν τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων.

Τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα ἐφαρμογῶν δεικνύουν τὴν εὐρύτητα τῶν ἐφαρμογῶν τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων, καὶ συνεπῶς τὴν χρησιμότητα ταύτης, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐνδιαφέροντος καὶ τῆς ὠραιότητος τὴν ὁποίαν παρουσιάζει αὐτὴ ὡς κλάδος τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης με ἰδίας μεθόδους καὶ προβλήματα.

**§ 254. Ἀρχικαὶ ἔννοιαι τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων.**— Ὡς γνωστόν, κάθε κλάδος τῶν Μαθηματικῶν θεμελιούται ἐπὶ ἐλαχίστων ἀπλῶν ἐννοιῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἔμφυτοι εἰς τὸν ἀνθρώπινον νοῦν καὶ αἱ ὁποῖαι δὲν δύνανται νὰ ὀρισθοῦν τῇ βοήθειᾳ ἄλλων ἐννοιῶν, δι' ὃ καὶ καλοῦνται **ἀρχικαὶ ἔννοιαι**. Οὕτω, π.χ. εἰς τὰ δύο πρῶτα κεφάλαια τοῦ παρόντος βιβλίου ἐγνωρίσαμεν τοιαύτας ἐννοίας, ὡς τὴν ἔννοιαν τῆς «λογικῆς προτάσεως», τὴν ἔννοιαν τοῦ «συνόλου» κ.ἄ. Ἐπίσης εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἔχομεν τὴν ἔννοιαν τοῦ σημείου, τῆς εὐθείας, τοῦ χώρου κλπ. ὡς ἀρχικὰς ἐννοίας.

Εἰς τὴν Θεωρίαν τῶν Πιθανοτήτων ὡς ἀρχικαὶ ἔννοιαι εἶναι αἱ ἐξῆς δύο :

α') Ἡ ἔννοια τοῦ «**πειράματος τύχης**», καὶ

β') Ἡ ἔννοια τοῦ «**ἀπλοῦ συμβάντος ἢ ἐνδεχόμενου**», ἢ ἄλλως τοῦ «**στοιχειώδους γεγονότος**»

Θὰ κάμωμεν μίαν πρῶτην γνωριμίαν με τὰς ἐννοίας αὐτὰς μερικὰ παραδείγματα :

**Παράδειγμα 1ον :** Ὅλοι γνωρίζομεν ὅτι κάθε μεταλλικὸν νόμισμα (κέρμα) ἔχει δύο ὄψεις, ἐκ τῶν ὁποίων τὴν μίαν καλοῦμεν συνήθως «**κορώνα**» καὶ τὴν ἄλλην «**γράμματα**». Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ρίπτομεν εἰς τὸν ἀέρα ἓν κέρμα καὶ ἀκολουθῶς ἄς κατευθύνωμεν τὴν προσοχήν μας εἰς τὴν ἔνδειξιν, ἣτις φέρεται ἐπὶ τῆς ὁρατῆς ὄψεως τοῦ κέρματος, ὅταν τοῦτο καταπέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ ἡρεμήσῃ (Ἡ ρίψις δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἂν τὸ κέρμα σταθῇ ὀρθιον). Ἡ ρίψις τοῦ κέρματος εἰς τὸν ἀέρα ἀποτελεῖ ἓνα «**πείραμα**». Λέγομεν δὲ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅτι ἐκτελοῦμεν ἓνα «**πείραμα τύχης**» ἀκριβέστερον ἐν «**ἀπλοῦν πείραμα τύχης**». Τὸ νόμισμα πίπτει ἐπὶ τοῦ ἐδάφους θὰ ἐμφανίσῃ (ἐπὶ τῆς ὁρατῆς ὄψεως) τὴν ἔνδειξιν «**κορώνα**» ἢ τὴν ἔνδειξιν «**γράμματα**». Τὸ ἀποτέλεσμα δηλαδὴ τοῦ ἀνωτέρω πειράματος εἶναι ἡ ἐμφάνισις ἐπὶ τῆς ἄνω ὄψεως τοῦ νομίσματος ἀκριβῶς μιᾶς τῶν δύο ἐνδείξεων : «**κορώνα**», «**γράμματα**». Κάθε δὲ τοιαύτη ἐμφάνισις καλεῖται ἓνα «**ἀπλοῦν συμβάν**», ἢ ἄλλως ἓνα «**στοιχειῶδες γεγονός**».

Ὡστε, εἰς τὸ πείραμα «**κορώνα—γράμματα**» ἔχομεν δύο ἀπλᾶ συμβάντα :

1ον). Τὸ ἀπλοῦν συμβάν : «**Τὸ νόμισμα δεικνύει τὴν ὄψιν κορώνα**» (συμβολ. «**Κ**»).

2ον). Τὸ ἀπλοῦν συμβάν : «**Τὸ νόμισμα δεικνύει τὴν ὄψιν γράμματα**» (συμβολ. «**Γ**»).

Ἔχομεν λοιπὸν ἐν προκειμένῳ ἓνα πείραμα τύχης καὶ δύο ἀπλᾶ συμβάντα συνηρημένα μὲ τὸ πείραμα.

**Παράδειγμα 2ον :** (*Πείραμα μὲ κύβον*).

Ὅλοι γνωρίζομεν ἐπίσης τὸν κύβον (ζάρι), ὁ ὁποῖος χρησιμοποιεῖται εἰς τὰ τυχηρὰ παιγνίδια. Οὗτος εἶναι μικρὸς κύβος, κατὰ τὸ δυνατόν συμμετρικός, ἐπὶ τῶν 6 ὀψεων (ἐδρῶν) τοῦ ὁποῖου εἶναι ἀναγεγραμμένοι (συνήθως μὲ κοκκίδας) ἀνὰ εἰς τῶν ἀριθμῶν : 1, 2, 3, 4, 5, 6. Αἱ ἐνδείξεις αὗται εἶναι διατεταγμέναι οὕτως ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων δύο παραλλήλων ὀψεων εἶναι πάντοτε 7.

Ρίπτομεν τώρα ἓνα τοιοῦτον κύβον εἰς τὸν ἀέρα καὶ κατευθύνομεν τὴν προσοχήν μας εἰς τὸν ἀριθμόν, ὅστις φέρεται ἐπὶ τῆς ἄνω ἑδρας, ὅταν ὁ κύβος ἡρεμήσῃ. Καὶ αὐτὸ εἶναι ἓνα πείραμα τύχης. Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ πειράματος τούτου εἶναι ἡ ἐμφάνισις ἐπὶ τῆς ἄνω ἑδρας τοῦ κύβου, ἐνὸς ἐκ τῶν ἀριθμῶν : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Κάθε τοιαύτη ἐμφάνισις καλεῖται, ὡς καὶ προηγουμένως ἐλέχθη, ἐν ἀπλοῦν συμβάν. Φανερόν εἶναι ὅτι εἰς τὸ πείραμα μὲ κύβον ἔχομεν τὰ ἐξῆς 6 ἀπλᾶ συμβάντα :

1ον) «Ὁ κύβος δεικνύει εἰς τὴν ἄνω ἑδραν τὸ 1».

2ον) «Ὁ κύβος δεικνύει εἰς τὴν ἄνω ἑδραν τὸ 2».

...

6ον) «Ὁ κύβος δεικνύει εἰς τὴν ἄνω ἑδραν τὸ 6».

Ἔχομεν λοιπὸν εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα ἓνα πείραμα τύχης καὶ 6 ἀπλᾶ συμβάντα.

Ἐὰν ρίψωμεν διὰ δευτέραν φοράν τὸν κύβον εἰς τὸν ἀέρα ἐκτελοῦντες τὴν αὐτὴν διαδικασίαν, τότε λέγομεν ὅτι ἐπαναλαμβάνομεν τὸ πείραμα τύχης. Κατὰ τὴν ἐπανειλημμένην ἐκτέλεσιν τοῦ ἰδίου πειράματος θὰ προκύψῃ μία «ἀκολουθία» ἀπλῶν συμβάντων. Αὕτη δύναται νὰ παρασταθῇ ἀπὸ μίαν ἀκολουθίαν ψηφίων εἰλημμένων ἐκ τοῦ συνόλου τῶν ἐνδείξεων τοῦ κύβου, δηλ. ἐκ τοῦ συνόλου {1, 2, 3, 4, 5, 6} καὶ διαδεχομένων ἀτάκτως ἄλληλα. Οὕτως, ἐπαναλαμβάνοντες τὸ πείραμα μὲ κύβον εἴκοσι φορές δὲν ἀποκλείεται νὰ ἔχωμεν τὴν «πεπερασμένην ἀκολουθίαν» :

3, 5, 2, 2, 6, 1, 6, 3, 4, 4, 4, 2, 1, 5, 3, 5, 6, 4, 2, 5.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι τὰ **χαρακτηριστικὰ** ἐνὸς πειράματος τύχης εἶναι :

α). Τὸ ἀποτέλεσμά του δὲν δύναται μὲ κανέναν τρόπον νὰ προβλεφθῇ.

β). Τὸ πείραμα δύναται νὰ ἐπαναληφθῇ πολλὰκις ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας (δηλ. τῆς αὐτῆς διαδικασίας).

**§ 255. Δειγματικὸς χῶρος — Δεῖγμα.**— Εἰς τὸ πείραμα τῆς ρίψεως ἐνὸς νομίσματος ὑπάρχουν δύο δυνατὰ ἀποτελέσματα τὰ ὁποῖα συμβολίζομεν ὡς

K, Γ, (1)

ὅπου K σημαίνει «κορώνα» καὶ Γ «γράμματα».

Ἐὰν ρίψωμεν ἓνα ζάρι ὑπάρχουν 6 δυνατὰ ἀποτελέσματα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ παρασταθοῦν μὲ τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἐδρῶν :

1, 2, 3, 4, 5, 6.



Ἀναγράφοντες ὅλα τὰ δυνατὰ ἀποτελέσματα ἑνὸς πειράματος, λέγομεν ὅτι σχηματίζομεν ἓνα δειγματικὸν χῶρον. Κατὰ ταῦτα :

Δειγματικὸς χῶρος εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀπλῶν συμβάντων, ἧτοι τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ἐμφανισθοῦν εἰς ἓνα πείραμα τύχης.

Ἐκαστον δὲ ἀπλοῦν συμβάν, ἧτοι ἀτομικὸν (ἀδιαίρετον) ἀποτέλεσμα, καλεῖται δειγμα.

Οὕτω, π.χ. εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα, ὁ δειγματικὸς χῶρος εἶναι τὸ σύνολον  $\Omega \equiv \{K, \Gamma\}$ , ἐνῶ εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα ὁ δειγματικὸς χῶρος εἶναι τὸ σύνολον :  $\Omega \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τῆς ἐννοίας τοῦ δειγματικοῦ χῶρου ἀναφέρομεν καὶ τὰ ἐξῆς παραδείγματα :

α'). *Λήψις σφαιριδίων (βόλων) ἐξ ἑνὸς σάκκου.* Ἐντὸς σάκκου ὑπάρχει ἀριθμὸς σφαιριδίων ὁμοίων ἀπὸ πάσης ἀπόψεως ἐκτὸς τοῦ χρώματος. Ἐστω ὅτι μερικά εἶναι κυανᾶ (κ), ἄλλα λευκὰ (λ) καὶ ἄλλα ἐρυθρὰ (ε). Λαμβάνομεν «τυχαίως» (δηλ. μετὴν γνωστὴν διαδικασίαν ἀνακατεύματος τῶν σφαιριδίων κ.τ.λ.) ἓνα σφαιρίδιον καὶ χωρὶς νὰ τὸ ἐπανατοποθετήσωμεν ἐντὸς τοῦ σάκκου ἀνασύρομεν καὶ δεύτερον, προσέχοντες ποίου χρώματος σφαιρίδιον ἐξήχθη πρῶτον καὶ ποίου δεύτερον. Λέγομεν τότε ὅτι ἐκτελοῦμεν ἓνα πείραμα τύχης, ἀκριβέστερον ἓνα σύνθετον πείραμα τύχης, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τοῦ πειράματος τούτου εἶναι ἓν διατεταγμένον ζεύγος ἐνδείξεων π.χ. (λ, ε).

Ἄς ἴδωμεν τώρα ποῖος εἶναι ὁ δειγματικὸς χῶρος αὐτοῦ τοῦ «συνθέτου πειράματος». Ἐπειδὴ αἱ μόναι δυνατὰ ἐκβάσεις (ἀποτελέσματα), τὰς ὁποίας δύνανται νὰ παρουσιάσῃ ἡ λήψις ἑνὸς σφαιριδίου ἐκ τοῦ σάκκου εἶναι ἡ ἐμφάνισις ἑνὸς ἐκ τῶν τριῶν γραμμάτων κ, λ, ε ἡ τυχαία ἐξαγωγή ἐκάστου σφαιριδίου κεχωρισμένως ἔχει ὡς δειγματικὸν χῶρον τὸ σύνολον  $\Sigma \equiv \{κ, λ, ε\}$ . Ἐπομένως αἱ διάφοροι ἐκβάσεις τῆς λήψεως τῶν δύο σφαιριδίων ἀντιστοιχοῦν ἀμφοιμονοσημάντως εἰς τὰ διάφορα διατεταγμένα ζεύγη (x, y) μὲ  $x \in \Sigma$  καὶ  $y \in \Sigma$ . Ὅθεν κατάλληλος δειγματικὸς χῶρος τοῦ ἀνωτέρω συνθέτου πειράματος τύχης εἶναι τὸ σύνολον :

$$\Omega \equiv \Sigma \times \Sigma = \{ (x, y) : x \in \Sigma, y \in \Sigma \} = \left\{ \begin{array}{lll} (κ, κ), & (κ, λ), & (κ, ε) \\ (λ, κ), & (λ, λ), & (λ, ε) \\ (ε, κ), & (ε, λ), & (ε, ε) \end{array} \right\}.$$

Κάθε στοιχεῖον τοῦ  $\Omega$ , δηλ. κάθε διατεταγμένον ζεύγος ἐνδείξεων εἶναι ἓν ἀπλὸν συμβάν.

β'). *Ρίψις δύο κύβων.* Ἐστω ὅτι ρίπτομεν εἰς τὸν ἀέρα δύο κύβους (ζάρια), ἓνα λευκὸν καὶ ἓνα ἐρυθρόν καὶ ὅτι σημειώνομεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἄνω ἐδρῶν. Ὁ λευκὸς κύβος ἔχει ἐξ (6) δυνατὰ ἀποτελέσματα : 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ὁμοίως καὶ ὁ ἐρυθρός. Ἄς συμβολίσωμεν μὲ λ τὴν ἐνδείξιν τῆς ἄνω ἐδρας, τὴν ὁποίαν θὰ παρουσιάσῃ ὁ λευκὸς κύβος καὶ μὲ ε τὴν ἀντίστοιχον διὰ τὸν ἐρυθρόν, τότε τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συνδυασμένης ρίψεως τῶν δύο κύβων παρίσταται διὰ τοῦ διατεταγμένου ζεύγους (λ, ε). Πόσα τοιαῦτα διατεταγμένα ζεύγη ὑπάρχουν;



Δηλαδή πόσα είναι τα άπλᾶ συμβάντα τοῦ πειράματος : Ρίψις δύο κύβων ; Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι τὰ ἀπλᾶ συμβάντα τοῦ πειράματος εἶναι 36 διατεταγμένα ζεύγη :

(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1), ..., (5,6), (6,5), (6,6).

(ὅσαι δηλ. καὶ αἱ ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις τῶν 6 στοιχείων 1, 2, 3, ..., 6 ἀνὰ δύο, § 238).

Εἶναι πολλὰκίς χρήσιμον νὰ γράψωμεν τὰ διατεταγμένα ζεύγη ἀριθμῶν εἰς ἓνα πίνακα διπλῆς εἰσόδου ὡς κάτωθι :

|                         |       | Ἀποτέλεσμα ἐρυθροῦ κύβου |       |       |       |       |       |
|-------------------------|-------|--------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Ἀποτέλεσμα λευκοῦ κύβου | λ \ ε | 1                        | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     |
|                         | 1     | (1,1)                    | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
|                         | 2     | (2,1)                    | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
|                         | 3     | (3,1)                    | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
|                         | 4     | (4,1)                    | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
|                         | 5     | (5,1)                    | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
|                         | 6     | (6,1)                    | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |

Ὁ πίναξ οὗτος παρέχει τὸ σύνολον ὅλων τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων (ἀπλῶν συμβάντων) τοῦ πειράματος τῆς ρίψεως δύο κύβων. Τὸ σύνολον τοῦτο εἶναι ὁ δειγματικὸς χώρος  $\Omega$  τοῦ πειράματος. Γράφομεν δὲ συντόμως ἐν προκειμένῳ :

$$\Omega = \Sigma \times \Sigma = \{ (\lambda, \epsilon) : \lambda \in \Sigma, \epsilon \in \Sigma \},$$

ὅπου  $\Sigma$  τὸ σύνολον  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Τὰ διατεταγμένα ζεύγη  $(\lambda, \epsilon)$  εἶναι τὰ στοιχεῖα τοῦ δειγματικοῦ χώρου, δηλ. τὰ ἀπλᾶ συμβάντα.

Γενικεύοντες τώρα ὅσα ἐξετέθησαν εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὸν κάτωθι ὅρισμόν τοῦ δειγματικοῦ χώρου :

**Δειγματικὸς χώρος  $\Omega$**  ἐνὸς πειράματος τύχης εἶναι ἓν σύνολον, τοῦ ὁποῖου τὰ στοιχεῖα εὐρίσκονται εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου τῶν ἐκβάσεων (ἀποτελεσμάτων) τοῦ πειράματος.

Ἐπειδὴ κάθε στοιχεῖον ἐνὸς συνόλου καλεῖται καὶ σημεῖον τοῦ συνόλου, διὰ τοῦτο τὰ ἀπλᾶ συμβάντα καλοῦνται καὶ **δειγματικὰ σημεῖα** ἢ ἀπλῶς **σημεῖα** (σημεῖα — δείγματα). Ὁ δειγματικὸς χώρος καλεῖται καὶ **βασικὸν σύνολον** (ἢ **σύνολον ἀναφορᾶς**) δι' ἓν πείραμα.

**Σημειώσεις.** Τὸ βασικὸν σύνολον, ὡς εἶδομεν καὶ εἰς τὸ δεύτερον κεφάλαιον, διὰ καθαρῶς ἐποπτικούς λόγους, παρίσταται μὲ ἐν ὀρθογώνιον, οὕτω καὶ ὁ δειγματικὸς χώρος παρίσταται ὁμοίως, δηλ. μὲ ὀρθογώνιον ἐντὸς τοῦ ὁποῖου τὰ ἀπλᾶ συμβάντα σημειοῦνται μὲ στιγμάς.

**Γενική παρατήρησις.** Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ πεπερασμένους δειγματικούς χώρους, δηλ. τὸ πλῆθος τῶν ἀπλῶν συμβάντων θὰ εἶναι πεπερασμένος ἀριθμός.

Παντοῦ κατωτέρω μὲ τὸ γράμμα  $\Omega$  συμβολίζομεν τὸν δειγματικὸν χῶρον τοῦ ἐκάστοτε πειράματος τύχης.

**§ 256. Συμβάν.**— Ἐκτελοῦμεν τὸ πείραμα τῆς ρίψεως δύο κύβων. Ὡς ἐλέχθη εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον τὰ ἀπλᾶ συμβάντα τοῦ πειράματος εἶναι τὰ 36 διατεταγμένα ζεύγη τοῦ πίνακος τῆς προηγουμένης σελίδος. Ἐὰν τώρα ἐνδιαφερώμεθα διὰ τὰς περιπτώσεις ἐκείνας, καθ' ἃς π.χ. τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τῶν δύο κύβων ἰσοῦται μὲ 7 θὰ πρέπει νὰ θεωρήσωμεν τὸ ὑποσύνολον :

$$A \equiv \{ (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) \}$$

τοῦ δειγματικοῦ χώρου  $\Omega$ . Τὸ ὑποσύνολον  $A$  καλεῖται **συμβάν** ἢ **γεγονός**.

Γενικῶς: **Συμβάν ἢ γεγονός καλεῖται κάθε ὑποσύνολον τοῦ δειγματικοῦ χώρου.** Ἐὰν τὸ  $A$  εἶναι μονομελὲς σύνολον, δηλ. ἔχει ἓν μόνον στοιχεῖον, τὸ συμβάν καλεῖται **ἀπλοῦν**.

Ὅταν ἐν συμβάν ἔχη δύο ἢ περισσότερα στοιχεῖα, δηλ. σύγκειται ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων ἀπλῶν συμβάντων, τότε καλεῖται **πολλάκις**, πρὸς διάκρισιν, **ὀλικὸν συμβάν**.

Κατωτέρω διὰ τοῦ ὅρου συμβάν θὰ ἐννοῶμεν τὸ ὀλικὸν συμβάν.

Θὰ λέγωμεν ὅτι ἐν συμβάν  $A$  πραγματοποιεῖται (ἢ ἄλλως ἐμφανίζεται) εἰς ἓνα πείραμα τύχης τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ἐκτέλεσις τοῦ πειράματος δίδει ἀποτέλεσμα τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἓν στοιχεῖον τοῦ ὑποσυνόλου  $A$ .

Συγκεκριμένως: Ἐὰν  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$  εἶναι ὅλα τὰ ἀπλᾶ συμβάντα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ἐμφανισθοῦν εἰς ἓνα πείραμα τύχης καὶ ἀπὸ τὰ  $n$  αὐτὰ ἀπλᾶ συμβάντα θεωρήσωμεν  $k$  ὠρισμένα, ἔστω τὰ  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  ( $k \leq n$ ), τότε τὸ ὑποσύνολον  $A \equiv \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$  τοῦ δειγματικοῦ χώρου  $\Omega \equiv \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$  ἀντιπροσωπεύει ἐν συμβάν, τὸ ὁποῖον ἔγκειται εἰς τὴν ἐμφάνισιν εἴτε τοῦ  $\theta_1$ , εἴτε τοῦ  $\theta_2, \dots$ , εἴτε τοῦ  $\theta_k$  καὶ μόνον αὐτῶν.

Ἐπειδὴ  $\{\theta_1\} \cup \{\theta_2\} \cup \dots \cup \{\theta_k\} \equiv \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$  λέγομεν ὅτι τὸ συμβάν  $A$  εἶναι **ἔνωσις ἀπλῶν συμβάντων** ἢ ἄλλως τὸ  $A$  «*ἀναλύεται*» εἰς  $k$  ἀπλᾶ συμβάντα. Τὸ  $A$  πραγματοποιεῖται κάθε φοράν ποὺ παρουσιάζεται ἐν τῶν ἀπλῶν συμβάντων  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  καὶ ἀντιστρόφως, πραγματοποιουμένου τοῦ  $A$  πραγματοποιεῖται ἀναγκαστικῶς ἐν τῶν ἀπλῶν συμβάντων  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ .

Τὰ ἀπλᾶ συμβάντα  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  ( $k \leq n$ ) λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν τὰς «**ἐκὸνοῦν περιπτώσεις**» τοῦ συμβάντος  $A$ , ἐνῶ τὰ  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ , δηλ. τὰ στοιχεῖα τοῦ δειγματικοῦ χώρου  $\Omega$  λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν τὰς «**δυνατὰς περιπτώσεις**» τοῦ πειράματος τύχης.

Τέλος, ἐπειδὴ ἐξ ὀρισμοῦ εἶναι:  $\Omega \subseteq \Omega$  καὶ  $\emptyset \subseteq \Omega$  ἔπεται ὅτι ὁ δειγματικὸς χῶρος  $\Omega$  καὶ τὸ κενὸν σύνολον εἶναι συμβάντα.

Τὸ συμβάν τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν δειγματικὸν χῶρον λέγομεν ὅτι εἶναι «**βέβαιον συμβάν**» ἢ «**βέβαιον γεγονός**», ἐνῶ τὸ συμβάν τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ

κενόν σύνολον, λέγομεν ὅτι εἶναι «ἀδύνατον ἐνδεχόμενον» ἢ «κενὸν συμβάν» καὶ συμβολίζεται μὲ  $\emptyset$ .

### Παραδείγματα :

1). Ἐκτελοῦμεν τὸ πείραμα διπλῆς ρίψεως ἐνὸς κέρματος καὶ ἐνδιαφερόμεθα διὰ τὰς ἐνδείξεις του. Ὁ κατάλληλος δειγματικὸς χώρος θὰ εἶναι τὸ σύνολον :

$\Omega = \{ (K, K), (K, \Gamma), (\Gamma, K), (\Gamma, \Gamma) \}$  ἢ ἀπλούστερον  $\Omega = \{ KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma \}$ ,  
ὅπου  $K (= \text{κορώνα})$  καὶ  $\Gamma (= \text{γράμματα})$ .

Τὸ ὑποσύνολον  $A = \{ KK, K\Gamma, \Gamma K \}$  ὀρίζει τὸ συμβάν :

$A : \langle \text{Τὸ νόμισμα εἰς τὰς δύο ρίψεις παρουσιάζει τοὐλάχιστον μίαν φορὰν κορώνα} \rangle$ .

Ἐξ ἄλλου τὸ ὑποσύνολον  $B = \{ KK, \Gamma\Gamma \}$  ὀρίζει τὸ συμβάν.

$B : \langle \text{Τὸ νόμισμα καὶ εἰς τὰς δύο ρίψεις παρουσιάζει τὴν αὐτὴν ἐνδειξιν} \rangle$ .

2ον. Ἐστω ὅτι εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα 1 ἐνδιαφερόμεθα διὰ τὸ πλῆθος τῶν ἐμφανισθέντων  $K$  (καὶ εἰς τὰς δύο ρίψεις). Αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶναι 0, 1, 2.

Ἄρα θὰ ἔχωμεν τώρα νέον δειγματικὸν χώρον :  $\Omega = \{ 0, 1, 2 \}$ .

Τὸ ὑποσύνολον  $A = \{ 1, 2 \}$  ὀρίζει τὸ συμβάν :

$A : \langle \text{Ἐμφάνισις τοὐλάχιστον μιᾶς } K \rangle$ .

Ἀξιόλογος παρατήρησις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο παραδειγμάτων γίνεται καταφανὲς ὅτι : εἰς ἓνα πείραμα τύχης δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν, ἀναλόγως τοῦ σκοποῦ τῆς μελέτης μας, πλείονας τοῦ ἐνὸς δειγματικοὺς χώρους, ὀρίζοντες ἐκάστοτε διαφορετικὰ ἀπλᾶ συμβάντα. Χαρακτηριστικὸν εἶναι ὅμως ὅτι : τὰ ἀπλᾶ συμβάντα εἶναι τὰ μονοσύνολα τοῦ δειγματικοῦ χώρου.

3ον. Εἰς ἓν κυτίον ἔχομεν τέσσαρα σφαιρίδια : Κυανοῦν, λευκόν, ἐρυθρόν καὶ πράσινον. Ἐχομεν κατὰ συνέπειαν τὰ ἐξῆς 4 ἀπλᾶ συμβάντα :

$\theta_K : \langle \text{Κυανοῦν σφαιρίδιον} \rangle$

$\theta_\lambda : \langle \text{Λευκὸν σφαιρίδιον} \rangle$

$\theta_\epsilon : \langle \text{Ἐρυθρὸν σφαιρίδιον} \rangle$

$\theta_\pi : \langle \text{Πράσινον σφαιρίδιον} \rangle$ .

Ἐν προκειμένῳ ὁ δειγματικὸς χώρος εἶναι :  $\Omega \equiv \{ \theta_K, \theta_\lambda, \theta_\epsilon, \theta_\pi \}$ .

Τὸ ὑποσύνολον αὐτοῦ  $E \equiv \{ \theta_K, \theta_\epsilon, \theta_\pi \}$  ὀρίζει τὸ συμβάν :

$E : \langle \text{Ἐξάγεται ἔγχρωμον σφαιρίδιον} \rangle$ .

Τὸ  $E$  πραγματοποιεῖται, μόνον ὅταν ἐν οἷονδήποτε ἐκ τῶν τριῶν στοιχείων τοῦ  $\theta_K, \theta_\epsilon, \theta_\pi$  πραγματοποιηθῇ καὶ ἀντιστρόφως, ἂν τις ἀναγγεῖλῃ ὅτι ἐξήχθη ἔγχρωμον σφαιρίδιον, συνάγομεν ὅτι κάποιο ἐκ τῶν τριῶν ἀπλῶν συμβάντων  $\theta_K, \theta_\epsilon, \theta_\pi$  ἔχει πραγματοποιηθῇ.

## § 257. Θεμελιώδεις ὀρισμοὶ καὶ πράξεις μεταξὺ συμβάντων.

α'). Δύο συμβάντα θὰ λέγονται ξένα πρὸς ἄλληλα ἢ ἀμοιβαίως ἀποκλειόμενα, ἄλλως ἀσυμβίβαστα τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ πραγματοποίησις τοῦ ἐνὸς ἀποκλείῃ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ ἄλλου. Κατόπιν τούτου τὰ ξένα συμβάντα ἀντιστοιχοῦν εἰς ὑποσύνολα τοῦ  $\Omega$  μὴ ἔχοντα κοινὰ ἀπλᾶ συμβάντα.

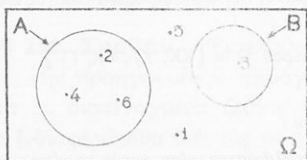
Προφανῶς δύο ἀπλᾶ συμβάντα εἶναι πάντοτε ξένα μεταξὺ τῶν.

Παράδειγμα. Τὰ συμβάντα :

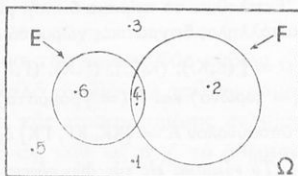
A : «Ο κύβος δεικνύει ἄρτιον ἀριθμὸν»

B : «Ο κύβος δεικνύει 3»

Εἶναι ξένα πρὸς ἀλλήλα, διότι τὸ ἓν ἀποκλείει τὸ ἄλλο.



Σχ. 16



Σχ. 17

Τούναντίον τὰ συμβάντα :

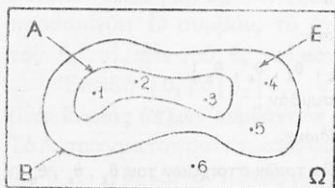
E : «Ο κύβος δεικνύει ἄρτιον  $> 2$ ».

F : «Ο κύβος δεικνύει ἄρτιον  $< 5$ ».

δὲν εἶναι ξένα μεταξύ των.

**Παρατήρησης :** Εἰς τὴν περίπτωσιν δύο ξένων συμβάντων ἡ μὴ πραγματοποίησις τοῦ ἑνὸς δὲν συνεπάγεται ἀναγκαίως τὴν πραγματοποίησιν τοῦ ἄλλου. Οὕτως, εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα, ἐξὸν ὁ κύβος δὲν φέρῃ ἄρτιον ἀριθμὸν, δὲν ἔπεται ἀναγκαίως ὅτι οὗτος θὰ φέρῃ 3, καθόσον δύναται νὰ φέρῃ τὸν ἀριθμὸν 5 ἢ τὸν 1.

β'). Ἐὰν A καὶ B εἶναι δύο μὴ ξένα συμβάντα ἑνὸς πειράματος τύχης, τότε θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ A περιέχεται εἰς τὸ B (ἢ ὅτι τὸ B περιέχει τὸ A) ἄλλως τὸ A **συνεπάγεται** τὸ B καὶ θὰ γράφωμεν  $A \subseteq B$  (ἢ  $B \supseteq A$ ) τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν πραγματοποιηθῇ τοῦ A πραγματοποίησις καὶ τὸ B. Ἐὰν  $A \subset B$ , τότε ἡ πραγματοποίησις τοῦ B δὲν συνεπάγεται ὑποχρεωτικῶς τὴν πραγματοποίησιν τοῦ A. Ἡ πραγματοποίησις τοῦ B χωρὶς τὴν πραγματοποίησιν τοῦ A ἀποτελεῖ τὸ συμβάν  $B - A$ , τὸ ὁποῖον καλεῖται **διαφορὰ** τῶν συμβάντων B καὶ A.



Σχ. 18

Παράδειγμα. Θεωρήσωμεν τὰ συμβάντα :

A : «Ο κύβος δεικνύει ἀριθμὸν  $\leq 3$ ».

B : «Ο κύβος δεικνύει ἀριθμὸν  $\leq 5$ ».

Προφανῶς  $A \subset B$ . Ἡ διαφορὰ  $B - A$  παριστᾷ τὸ συμβάν :

E : «Ο κύβος δεικνύει 4 ἢ 5».

γ'). **Ἑνωσις συμβάντων.** Καλεῖται ἑνωσις συμβάντων  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , ὑπαγομένων εἰς τὸ αὐτὸ πείραμα τύχης, ἓν νέον συμβάν A, τὸ ὁποῖον πραγματοποιεῖται τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν πραγματοποιηθῇ **τοῦλάχιστον** ἓν τῶν  $A_1, A_2, \dots, A_k$ .

Γράφομεν τότε :

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \equiv \bigcup_{i=1}^k A_i.$$

Ἐὰν τὰ θεωρηθέντα συμβάντα  $A_1, A_2, \dots, A_k$  εἶναι ξένα μεταξύ των ἀνά

δύο, τότε τὸ  $A$  λέγεται «**ἄθροισμα**» αὐτῶν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ γράψωμεν :

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_k = \sum_{i=1}^k A_i .$$

Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν ἡ ἐμφάνισις (πραγματοποιήσις) τοῦ  $A$  συνεπάγεται τὴν ἐμφάνισιν ἑνὸς καὶ μόνον ἐκ τῶν  $A_1, A_2, \dots, A_k$ .

#### Παραδείγματα :

1ον. Τὸ συμβάν  $A$  : «*Ὁ κύβος παρουσιάζει ἄρτιον ἀριθμὸν*» εἶναι ἑνώσις τῶν συμβάντων :

$A_1$  : «*Ὁ κύβος παρουσιάζει ἄρτιον ἀριθμὸν  $< 5$* ».

$A_2$  : «*Ὁ κύβος παρουσιάζει ἄρτιον ἀριθμὸν  $> 3$* ».

2ον. Τὸ συμβάν : «*Ὁ κύβος παρουσιάζει ἀριθμὸν μεγαλύτερον τοῦ 3*» εἶναι ἄθροισμα τῶν τριῶν ἀπλῶν συμβάντων : «*Ὁ κύβος δεικνύει 4*», «*Ὁ κύβος δεικνύει 5*», «*Ὁ κύβος δεικνύει 6*».

δ'). Τομὴ ἢ γινόμενον συμβάντων. Καλεῖται τομὴ συμβάντων  $A_1, A_2, \dots, A_k$  ὑπαγομένον εἰς τὸ αὐτὸ πείραμα τύχης, ἔν νεον συμβάν  $A$ , τὸ ὁποῖον πραγματοποιεῖται τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν πραγματοποιοῦνται **ὅλα συγχρόνως** τὰ συμβάντα  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . Γράφομεν δὲ τότε :

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k = \bigcap_{i=1}^k A_i .$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι, ἐὰν δύο συμβάντα  $A_1, A_2$  εἶναι ξένα πρὸς ἀλλήλα, τότε  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ .

Παράδειγμα. Τὸ συμβάν :

$A$  : «*Ὁ κύβος παρουσιάζει 4 ἢ 5*»

εἶναι τομὴ τῶν συμβάντων :

$A_1$  : «*Ὁ κύβος παρουσιάζει ἀριθμὸν  $\leq 5$* »

$A_2$  : «*Ὁ κύβος παρουσιάζει ἀριθμὸν  $> 3$* ».

ε'). Συμπληρωματικὸν ἑνὸς συμβάντος. Δύο συμβάντα ξένα πρὸς ἀλλήλα, ἔχοντα ἄθροισμα τὸ «**βέβαιον γεγονός**» καλοῦνται **συμπληρωματικά** ἢ **ἀντίθετα** συμβάντα.

Τὸ συμπληρωματικὸν ἑνὸς συμβάντος  $A$  παρίσταται μὲ  $A'$  (ἢ  $A^c$ ).

Ὡς συμπληρωματικὸν τοῦ «**βεβαίου συμβάντος**» λαμβάνεται τὸ «**κενὸν συμβάν**» καὶ ἀντιστρόφως. Εἶναι φανερόν ὅτι, ἐὰν δύο συμβάντα εἶναι συμπληρωματικά, τότε ἡ πραγματοποίησις τοῦ ἑνὸς **ἀποκλείει** τὴν πραγματοποίησιν τοῦ ἄλλου καὶ ἡ μὴ πραγματοποίησις τοῦ ἑνὸς **συνεπάγεται** ἂν ἀγκαίως τὴν πραγματοποίησιν τοῦ ἄλλου. Συνεπῶς πᾶσα **εὐνοϊκὴ** περίπτωσις διὰ τὸ ἐν εἶναι «**δυσμενὴς**» (μὴ εὐνοϊκὴ) διὰ τὸ ἕτερον καὶ πᾶσα **δυσμενὴς** περίπτωσις διὰ τὸ ἐν εἶναι εὐνοϊκὴ διὰ τὸ ἕτερον.

Κατὰ ταῦτα τὸ  $A'$  σημαίνει ὅτι τὸ συμβάν  $A$  δὲν συμβαίνει (δὲν πραγματοποιεῖται).

#### Παραδείγματα :

1ον. Τὰ συμβάντα :

$A$  : «*Ὁ κύβος δεικνύει ἄρτιον ἀριθμὸν*»

$A'$  : «*Ὁ κύβος δεικνύει περιττὸν ἀριθμὸν*»

εἶναι συμπληρωματικά.

**2ον.** Εἰς τὸ γνωστὸν πείραμα τῆς ρίψεως δύο νομισμάτων, τὸ συμβάν  $A = \{KK\}$ , ἥτοι  $A: \text{«Τὰ δύο νομίσματα δεικνύουν κορώνα»}$  εἶναι συμπληρωματικὸν τοῦ συμβάντος  $A' \equiv \{KG, GK, GG\}$ , ἥτοι τοῦ συμβάντος :

$A': \text{«Παρουσιάζονται τοὐλάχιστον μία φορὰ ροάμματα»}$ , ἢ ἄλλως

$A': \text{«Δὲν παρουσιάζεται κορώνα καὶ τὰς δύο ρίψεις»}$ .

**§ 258. Στοιχειώδης ὁρισμὸς τῆς πιθανότητος.**— Ὁ ὁρισμὸς αὐτός, τοῦ ὁποῦν ἡ ἀρχὴ εὐρίσκεται εἰς τὰ τυχερὰ παιγνίδια, εἶναι ὁ εἰσαχθεὶς ὑπὸ τῶν θεμελιωτῶν τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων καὶ διατυπωθεὶς σαφῶς ὑπὸ τοῦ Laplace ὡς ἑξῆς :

**Πιθανότης** ἐνὸς συμβάντος καλεῖται ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εὐνοϊκῶν δι' αὐτὸ περιπτώσεων πρὸς τὸν ἀριθμὸν ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων, ἐφ' ὅσον ὅλαι αἱ περιπτώσεις εἶναι ἐξ ἴσου δυναταί.

Ἦτοι, ἐὰν  $A$  εἶναι ἐν συμβάν ὑπαγόμενον εἰς ἐν πείραμα τύχης καὶ παραστήσωμεν διὰ τοῦ  $P(A)$  \*) τὴν πιθανότητα πραγματοποιήσεως τοῦ  $A$ , θὰ ἔχωμεν :

$$P(A) = \frac{\text{'Αριθμὸς τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων τοῦ } A}{\text{'Αριθμὸς ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων τοῦ πειράματος}} \quad (1)$$

Εἰς τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ὑπονοεῖται ἡ ὑπόθεσις τοῦ ἰσαπιθάνου τῶν περιπτώσεων ἢ ἀπλῶν συμβάντων.

Ἐκ τοῦ δοθέντος ὁρισμοῦ ἔπονται ἀμέσως αἱ προτάσεις :

**α').** Ἡ πιθανότης συμβάντος  $A$  εἶναι ἀριθμὸς μὴ ἀρνητικὸς καὶ μικρότερος ἢ ἴσος πρὸς τὴν μονάδα, ἥτοι :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

**β').** Ἡ πιθανότης τοῦ βεβαίου συμβάντος ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα, ἥτοι :

$$P(\Omega) = 1$$

**γ').** Ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν ἀπλῶν συμβάντων ἐνὸς πειράματος τύχης εἶναι  $v$ , τότε ἡ πιθανότης ἐκάστου ἀπλοῦ συμβάντος εἶναι  $\frac{1}{v}$ .

Πράγματι, ἐὰν  $\Omega \equiv \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_v\}$  εἶναι ὁ δειγματικὸς χῶρος τοῦ πειράματος, τότε εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις διὰ τὸ ἀπλοῦν συμβάν  $\{\theta_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, v$  εἶναι μόνον μία, ἐπεὶδὴ τὸ  $\{\theta_i\}$  κατὰ ἓνα καὶ μόνον τρόπον δύναται νὰ ἐμφανισθῇ. Ἐξ ἄλλου τὸ πλῆθος τῶν δυνατῶν περιπτώσεων τοῦ πειράματος εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ (βλ. § 256), ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀπλῶν συμβάντων, δηλ.  $v$ . Ἀρα ὁ τύπος (1) δίδει :

$$P(\{\theta_i\}) = \frac{1}{v}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, v.$$

\* Τὸ  $P$  εἶναι τὸ ἀρχικὸν γράμμα τῆς λέξεως Probability (ἀγγλ.) – Probabilité (γαλ.) = Πιθανότης.

δ'). Το άθροισμα των πιθανοτήτων δύο συμπληρωματικών συμβάντων ισούται με 1.

Πράγματι, εάν  $k$  είναι το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων δια το  $A$  και  $v$  των δυνατών, τότε το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων δια το  $A'$  θα είναι  $v - k$ , διότι (§ 257) πᾶσα ευνοϊκή περίπτωση δια το  $A$  είναι δυσμενής δια το  $A'$  και πᾶσα δυσμενής δια το  $A$  είναι ευνοϊκή δια το  $A'$ . 'Εάν συνεπώς  $P(A)$  και  $P(A')$  είναι ἀντιστοίχως αἱ πιθανότητες των συμβάντων  $A$  και  $A'$  θὰ ἔχωμεν :

$$P(A) = \frac{k}{v} \quad \text{καὶ} \quad P(A') = \frac{v-k}{v}.$$

'Εξ αὐτῶν δια προσθέσεως λαμβάνομεν :

$$P(A) + P(A') = 1$$

"Αρα ἡ πιθανότης τοῦ συμπληρωματικοῦ συμβάντος εἶναι :

$$P(A') = 1 - P(A)$$

## § 259. Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω προτάσεων.

**1η :** Εἰς τὸ παιγνίδιον «*κορώνα — γράμματα*», τὰ ἀπλᾶ συμβάντα εἶναι δύο, αἱ δύο ὁψεις : «*κορώνα*», «*γράμματα*», τὰς ὁποίας ἄς συμβολίσωμεν, ὥς καὶ πρότερον  $K, \Gamma$  ἀντιστοίχως. Συμφῶνως πρὸς τὴν πρότασιν (γ') αἱ πιθανότητες αὐτῶν εἶναι :  $P(K) = \frac{1}{2}, P(\Gamma) = \frac{1}{2}$ .

Αὐτὸ δὲν σημαίνει βεβαίως ὅτι, ἐὰν ρίψωμεν δύο φορές κατ' ἐπανάληψιν τὸ νόμισμα, τὴν μίαν φοράν θὰ ἐμφάνισῃ «*κορώνα*» καὶ τὴν ἄλλην «*γράμματα*». Οὐτε ὅτι εἰς 10 ρίψεις θὰ ἔχωμεν 5 «*κορώνας*» καὶ 5 «*γράμματα*». Ἡ στοιχειώδης πιθανότης τὴν ὁποίαν ὑπελογίσασαμεν ἰσχύει δι' ἐν τλήθος ρίψεων, δηλαδή δι' ἓνα πολὺν μεγάλον ἀριθμὸν ρίψεων.

'Εξ ἄλλου ἔχομεν : 
$$P(K) + P(\Gamma) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Τοῦτο προφανῶς τὸ ἀνεμέναμεν, διότι τὰ δύο συμβάντα εἶναι συμπληρωματικά.

**2α :** Εἰς τὸ παιγνίδιον τῆς ρίψεως ἐνὸς κύβου, τὰ ἀπλᾶ συμβάντα εἶναι ἐν ὅλῳ 6, αἱ ἑξ ὁψεις (ἑδραι) τοῦ κύβου. 'Εὰν στοιχηματίζωμεν δια τὴν ἐμφάνισιν μιᾶς συγκεκριμένης ἐνδείξεως, ἡ στοιχειώδης πιθανότης εἶναι  $\frac{1}{6}$ , ἀφοῦ τὸ πλήθος τῶν δυνατῶν περιπτώσεων εἶναι 6, ἡ δὲ ευνοϊκὴ περιπτώσις εἶναι μόνον μία. "Ωστε :

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6},$$

ὅπου  $P(x)$  = πιθανότης τοῦ ἀπλοῦ συμβάντος : «*Ὁ κύβος παρουσιάζει τὸν ἀριθμὸν  $x$* ».

'Εὰν ἀντὶ ἐνὸς χρησιμοποιήσωμεν  $n$  ὁμοίους κύβους, τὰ συμβάντα θὰ εἶναι αἱ ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις τῶν 6 ἐνδείξεων ἀνά  $n$ . Ὁ ἀριθμὸς τῶν διατάξεων αὐτῶν εἶναι :

$$6^n$$

'Η στοιχειώδης πιθανότης μιᾶς συγκεκριμένης διατάξεως, δηλ. ἐνὸς ὠρισμένου συμβάντος,

$$\frac{1}{6^n}.$$



Οὕτως, εἰς τὴν περίπτωσηὶν ρίψεως δύο κύβων (§ 255), ἡ πιθανότης τοῦ συμβάντος : «ὁ λευκὸς κύβος νὰ φέρῃ 2 καὶ ὁ ἐρυθρὸς 3» εἶναι  $\frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$ , ἥτοι :

$$P((2,3)) = \frac{1}{36}, \text{ ἢ ἀπλούστερον } P(2,3) = \frac{1}{36}.$$

**3η :** Εἰς τὰ παιγνίδια τῶν παιγνιοχάρτων χρησιμοποιοῦνται ἄλλοτε  $4 \times 13 = 52$  παιγνιόχαρτα καὶ ἄλλοτε  $4 \times 8 = 32$  (πρέφα). Εἰς τὰ παιγνίδια τῶν 52 παιγνιοχάρτων, ὑπάρχουν δι' ἕκαστον τῶν τεσσάρων «χρωμάτων» («σπαθί», «καρρό», «κούπια», «μπιστούνι»), ἀνὰ 10 ἀριθμοὶ (1 — 10) καὶ 3 φιγοῦραι.

Ἡ πιθανότης νὰ ἀνασύρῃ τις ἐκ μιᾶς δέσμης, καλῶς ἀναμεμιγμένης ἐν ὠρισμένον παιγνιόχαρτον εἶναι κατὰ ταῦτα  $\frac{1}{52}$ , ἡ πιθανότης νὰ ἀνασύρῃ ἐν ὠρισμένον χρῶμα εἶναι  $\frac{1}{4}$ , ἡ πιθανότης νὰ ἀνασύρῃ φιγοῦραν (γενικῶς) εἶναι  $\frac{12}{52}$ , ἡ πιθανότης νὰ ἀνασύρῃ ἓνα ὠρισμένον ἀριθμόν, π.χ. ἄσσον, ἀνεξαρτήτου χρώματος εἶναι  $\frac{4}{52}$  (ὑπάρχουν 4 ἄσσοι, ἥτοι 4 εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις καὶ 52 παιγνιόχαρτα, ἥτοι 52 δυνατὰ περιπτώσεις).

**4η :** Ἐκ δέσμης 52 παιγνιοχάρτων ἐξάγονται συγχρόνως δύο παιγνιόχαρτα. Ποία ἡ πιθανότης νὰ εἶναι καὶ τὰ δύο ἄσσοι ;

**Λύσις :** Ἐστω Α τὸ συμβάν : «Ἀμφότερα νὰ εἶναι ἄσσοι».

Αἱ δυνατὰ περιπτώσεις εἶναι  $\binom{52}{2}$ . Αἱ εὐνοϊκαὶ εἶναι τόσαι, ὅσοι καὶ οἱ διάφοροι τρόποι, καθ' οὓς δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀπὸ τοὺς 4 ἄσσους τοὺς 2, δηλ.  $\binom{4}{2}$ .

$$\text{* Ἀρα : } P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \binom{4}{2} : \binom{52}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} : \frac{52 \cdot 51}{1 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 3}{52 \cdot 51} = \frac{1}{221} \simeq 45\%.$$

**5η :** Ποία ἡ πιθανότης νὰ μὴ παρουσιασθῇ τὸ 3, ὅταν ρίψωμεν ἓνα κύβον εἰς τὸν ἀέρα;

**Λύσις :** Τὸ συμβάν «νὰ φέρῃ ὁ κύβος 3» εἶναι συμπληρωματικὸν τοῦ συμβάντος «νὰ μὴ φέρῃ ὁ κύβος 3». Ἡ πιθανότης τοῦ πρώτου συμβάντος εἶναι  $\frac{1}{6}$ , ἄρα ἡ πιθανότης τοῦ δευτέρου εἶναι :

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**583.** Ρίπτομεν εἰς τὸν ἀέρα δύο κύβους καὶ μᾶς ἐνδιαφέρει τὸ συμβάν Α : «τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῶν ἄνω ἐδρῶν εἶναι  $\leq 7$ » καὶ τὸ συμβάν Β : «τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῶν ἄνω ἐδρῶν εἶναι ἄρτιος ἀριθμός». Ζητοῦνται :

α) Νὰ σχηματισθῇ ὁ κατάλληλος δειγματικὸς χῶρος καὶ νὰ καθορισθοῦν ἐν αὐτῷ τὰ Α καὶ Β.

β) Νὰ ὀρισθοῦν τὰ  $A', B', A \cup B, A \cap B, A' \cup B', A' \cap B', (A \cup B') \cap A'$ .

γ) Ποία ἡ πιθανότης τοῦ συμβάντος : «Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῶν ἄνω ἐδρῶν εἶναι ἀκριβῶς 7 ;».

**584.** Ρίπτομεν δύο κύβους εἰς τὸν ἀέρα. Ποία ἡ πιθανότης ἐκάστου τῶν κάτωθι συμβάντων :

α) Νὰ φέρωμεν 6,6.

β) Ὁ εἰς κύβος νὰ φέρῃ 3 καὶ ὁ ἄλλος 5.

γ) Οἱ δύο κύβοι νὰ φέρουν διαδοχικοὺς ἀριθμούς.

δ) Οἱ κύβοι νὰ φέρουν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ 9.



585. Ρίπτει τις δύο κύβους και φέρει άθροισμα 9. Ποία ή πιθανότης ίνα ό συμπαίκτης του φέρη μεγαλύτερον άθροισμα ;

586. Είς έν δοχείον υπάρχουν 5 σφαίραι λευκαί, 7 κυαναί και 4 έρυθραί. Τό πείραμα συνίσταται είς την τυχαίαν λήψιν 3 σφαιρών. Ποία ή πιθανότης νά είναι και αί τρεις σφαίραι λευκαί;

587. Έκ δέσμης 52 παιγνιοχάρτων έξάγομεν τυχαίως 5 χαρτιά. Ζητούνται :

α) Ποία ή πιθανότης νά εξαχθούν μόνον κόκκινα; (Τά 26 έχουν χρώμα κόκκινον και τά λοιπά 26 μαύρο).

β) Ποία ή πιθανότης νά εξαχθούν 3 μαύρα και 2 κόκκινα;

588. Είς μίαν τάξιν 43 μαθητών είναι 24 άγόρια και 19 κορίτσια. Άν λάβωμεν τυχαίως πέντε κλήρους τής τάξεως : α) Ποία ή πιθανότης νά κληθούν μόνον άγόρια. β) Ποία ή πιθανότης νά κληθούν 3 άγόρια και 2 κορίτσια;

589. Ρίπτομεν τρεις κύβους, ποία ή πιθανότης νά εμφανισθί είς τούλάχιστον άσσος;

590. Ρίπτομεν δύο κύβους είς τόν άέρα. Ποία ή πιθανότης έκάστου τών κάτωθι συμβάντων :

α) Τό άθροισμα τών ένδείξεων είναι μικρότερον του 5.

β) Τό άθροισμα τών ένδείξεων είναι ίσον με 8.

γ) » » » » είναι μεγαλύτερον του 9.

δ) » » » » είναι διάφορον του 4.

591. Υποθέσωμεν ότι σκοπεύομεν νά κάμωμεν μίαν μελέτην επί τών οικογενειών, αί όποιαί έχουν τρία παιδιά και ότι θέλομεν νά καταγράψωμεν τό φύλον έκάστου παιδιοϋ κατά σειράν γεννήσεως. Γράψατε τόν κατάλληλον δειγματικόν χώρον. Υποθέτοντες άκολούθως ότι κάθε στοιχείον του δειγματικού χώρου έχει την αύτην πιθανότητα, νά εύρεθί :

α) Ή πιθανότης ίνα μία οίκογένεια με τρία παιδιά τά δύο πρώτα είναι άγόρια και τό τρίτο κορίτσι.

β) Ή πιθανότης ίνα έχη ένα τούλάχιστον άγόρι.

γ) Ή πιθανότης ίνα έχη μόνον ένα κορίτσι.

δ) Ή πιθανότης ίνα έχη δύο κορίτσια και ένα άγόρι.

592. Έχομεν μίαν δέσμη παιγνιοχάρτων τών 52 φύλλων. Ζητείται ή πιθανότης τών εξής συμβάντων :

α) Λαμβάνοντες τυχαίως ένα χαρτί, τούτο νά είναι άσσος μπαστούνι.

β) Λαμβάνοντες τυχαίως ένα χαρτί, τούτο νά είναι άσσος.

γ) Λαμβάνοντες 6 χαρτιά συγχρόνως, νά περιέχωνται είς αυτά οι 4 άσσοι.

593. Ποία ή πιθανότης ρίπτοντες τρεις κύβους, νά φέρωμεν άθροισμα μεγαλύτερον του 15;

594. Έκ δέσμης 52 παιγνιοχάρτων λαμβάνομεν κατά σειράν έκ τών άνω τά παιγνιόχαρτα, έως ότεν εύρωμεν διά πρώτην φοράν άσσον. Ποία ή πιθανότης ίνα τό τέταρτον χαρτί είναι άσσος;

## II. ΔΙΑΜΟΡΦΩΜΕΝΗ ΠΡΟΣΠΕΛΑΣΙΣ ΕΙΣ ΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

§ 260. Ό όρισμός τής πιθανότητος, τόν όποϊον διευτυπώσαμεν είς την § 258 παρουσιάζει δύο βασικά μειονεκτήματα :

1ον) Δέν είναι εύχερης, άν μή δυνατός, ό άκριβής καθορισμός άφ' ενός τών δυνατών και άφ' έτέρου τών εύνοϊκών περιπτώσεων, ίδίως όταν ό δειγματικός χώρος δέν είναι πεπερασμένος.

2ον) Ή περικοπή αύτου «... έφ' όσον όλαι αί περιπτώσεις είναι έξ ίσου δυνατάι» είναι ταυτόσημος με την «έφ' όσον όλαι αί περιπτώσεις είναι έξ ίσου πιθαναί», τοιουτοτρόπως όμως ή πιθανότης όρίζεται έκ νέου διά τής πιθανότητος, διαπράττεται δηλαδή φαϋλος κύκλος.

Ἡ τοιαύτη θεώρησις τῆς ἐννοίας τῆς πιθανότητος, μολονότι χρησιμωτάτη εἰς τὴν ἐφαρμογὴν, παρουσιάζει δυσχερείας ἀπὸ λογικῆς πλευρᾶς, δι' ὃ καὶ ἡ νεωτέρα Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων ἀναπτύσσεται κατὰ τρόπον **τυπικῶς ἀξιοματικόν**, διὰ τοῦ καθορισμοῦ ἐνὸς πλήρους συστήματος προτάσεων (ἀξιωμάτων) τῇ βοηθείᾳ τῶν ὁποίων ἐξάγονται, διὰ τῆς παραγωγικῆς πλέον ὁδοῦ ὅλαι αἱ ἐννοιαὶ καὶ προτάσεις τῆς θεωρίας αὐτῆς.

Κατόπιν τούτων, θὰ ἀρχίσωμεν τὴν συστηματικωτέραν ἐξέτασιν τῶν πιθανοτήτων μὲ τὴν ἤδη γνωστὴν ἐννοίαν τοῦ δειγματικοῦ χώρου ἐνὸς πειράματος.

**§ 261. Πιθανότης ἀπλῶν συμβάντων.**— Ἐστω ὁ δειγματικὸς χώρος  $\Omega = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ . Εἰς ἕκαστον ἀπλοῦν συμβάν  $(\theta_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  ἐκχωροῦμεν ἓνα πραγματικὸν ἀριθμὸν  $P(\{\theta_k\})$ , τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν **πιθανότητα** τοῦ συμβάντος  $\{\theta_k\}$ .

Θὰ λέγωμεν ὅτι μία ἐκχώρησις πιθανοτήτων πρὸς τὰ ἀπλᾶ συμβάντα τοῦ δειγματικοῦ χώρου  $\Omega$ , δηλαδὴ πρὸς τὰ  $\{\theta_1\}, \{\theta_2\}, \dots, \{\theta_n\}$  εἶναι δεκτὴ, ἐὰν ἱκανοποιῇ τὰς δύο συνθήκας :

**P<sub>1</sub> :** Ἡ πιθανότης ἐκάστου ἀπλοῦ συμβάντος εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς, ἥτοι :

$$P(\{\theta_k\}) > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

**P<sub>2</sub> :** Τὸ ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων τῶν ἐκχωρουμένων εἰς ὅλα τὰ ἀπλᾶ συμβάντα τοῦ δειγματικοῦ χώρου  $\Omega$  ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα, ἥτοι :

$$P(\{\theta_1\}) + P(\{\theta_2\}) + \dots + P(\{\theta_n\}) = 1,$$

συντόμως :

$$\sum_{k=1}^n P(\{\theta_k\}) = 1.$$

Ἐνα σύστημα τοιούτων ἀριθμῶν  $P(\{\theta_k\})$  πληρύντων τὰς **P<sub>1</sub>** καὶ **P<sub>2</sub>** εἶναι τό :

$$P(\{\theta_1\}) = P(\{\theta_2\}) = P(\{\theta_3\}) = \dots = P(\{\theta_n\}) = \frac{1}{n}.$$

Εἰς τὴν εἰδικὴν αὐτὴν περίπτωσιν λέγομεν ὅτι τὰ ἀπλᾶ συμβάντα εἶναι **ισοπίθανα**.

**§ 262. Πιθανότης συμβάντος (ὀλικοῦ).**— Κάθε συμβάν  $A \neq \emptyset$  εἶναι, ὡς ἐλέχθη, ἔνωσις, ἀκριβέστερον ἄθροισμα ἀπλῶν συμβάντων, ἥτοι :

$$A = \{\theta_1\} + \{\theta_2\} + \dots + \{\theta_k\}, \quad (k \leq n).$$

Ὅρίζομεν ὡς **πιθανότητα τοῦ A**,  $A \neq \emptyset$ , τὸν ἀριθμὸν **P(A)**, ὅστις εἶναι ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων τῶν  $\{\theta_1\}, \{\theta_2\}, \dots, \{\theta_k\}$ , ἥτοι :

$$P(A) = P(\{\theta_1\}) + P(\{\theta_2\}) + \dots + P(\{\theta_k\}) = \sum_{i=1}^k P(\{\theta_i\})$$

Ἐὰν A εἶναι τὸ κενὸν συμβάν, ἥτοι ἂν  $A = \emptyset$ , τότε δεχόμεθα ἐξ ὁρισμοῦ ὅτι :

$$P(\emptyset) = 0$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπονται τώρα αἱ κάτωθι προτάσεις :

α'). Ἡ πιθανότης τοῦ «βεβαίον συμβάντος» εἶναι μονάς, ἤτοι  $P(\Omega) = 1$ .

Πράγματι, ἔχομεν :

$$P(\Omega) = \sum_{i=1}^v P(\{\theta_i\}) = (\text{λόγω τῆς συνθήκης } P_2, \S 261) = 1.$$

β'). Ἐὰν  $A$  καὶ  $B$  εἶναι συμβάντα ξένα πρὸς ἀλλήλα, τότε :

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Πράγματι, ἐὰν  $A = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$ ,  $B = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p\}$  καὶ  $A \cap B = \emptyset$ , τότε :

$$A + B = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p\}.$$

\*Ἐχομεν ὁμῶς :

$$P(A) = P(\{\theta_1\}) + P(\{\theta_2\}) + \dots + P(\{\theta_k\}) = \sum_{i=1}^k P(\{\theta_i\})$$

$$P(B) = P(\{\varepsilon_1\}) + P(\{\varepsilon_2\}) + \dots + P(\{\varepsilon_p\}) = \sum_{j=1}^p P(\{\varepsilon_j\})$$

$$P(A + B) = P(\{\theta_1\}) + P(\{\theta_2\}) + \dots + P(\{\theta_k\}) + P(\{\varepsilon_1\}) + P(\{\varepsilon_2\}) + \dots + P(\{\varepsilon_p\}) = \sum_{i=1}^k P(\{\theta_i\}) + \sum_{j=1}^p P(\{\varepsilon_j\}) = P(A) + P(B).$$

Γενικώτερον ἰσχύει ἡ κάτωθι πρότασις :

γ'). Ἐὰν  $A_1, A_2, \dots, A_v$  εἶναι συμβάντα ἀνὰ δύο ξένα πρὸς ἀλλήλα καὶ εἶναι :

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_v,$$

τότε :  $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_v)$ .

Ὑπόθεσις : Ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ  $v = 2$ . Ὑποθέσατε ὅτι ἰσχύει διὰ  $v = k$  καὶ δείξατε ὅτι ἰσχύει διὰ  $v = k + 1$ .

Σημείωσις : Ἡ ἀνωτέρω πρότασις καλεῖται : Ἀθροιστικὸν θεώρημα τῶν πιθανοτήτων, διατυπῶνται δὲ συντόμως, οὕτω :

$$P\left(\sum_{i=1}^v A_i\right) = \sum_{i=1}^v P(A_i)$$

δ'). Δι' οἰονδήποτε συμβάν  $A$ , ἰσχύει :  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

Πράγματι, ἐπεὶ  $P(A) \geq 0$  διὰ κάθε συμβάν  $A$ , ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι  $P(A) \leq 1$ . Τοῦτο ὁμῶς ἰσχύει, διότι, ἂν θεωρήσωμεν καὶ τὸ συμπληρωματικὸν  $A'$  τοῦ  $A$ , ὅτε  $A \cup A' = \Omega$  καὶ  $A \cap A' = \emptyset$ , θὰ ἔχωμεν, δυνάμει τῶν προτάσεων β' καὶ α', ὅτι :

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A') = P(\Omega) = 1.$$

Ὅθεν :  $P(A) = 1 - P(A') \leq 1$ , διότι, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη,  $P(A') \geq 0$ .

ε'). Ἐὰν  $A$  καὶ  $B$  εἶναι δύο οἰαδήποτε συμβάντα, τότε :

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Ἡ ὁπερ τὸ αὐτό :

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B).$$

Πράγματι, επειδή  $A = (A - B) \cup (A \cap B)$  και  $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$  θα έχουμε, δυνάμει της ανωτέρω προτάσεως β', ότι :

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B),$$

έξ ού :

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

## Ἑφαρμογαὶ

**1η :** Ἐάν τὰ ν ἀπλᾶ συμβάντα τοῦ δειγματικοῦ χώρου  $\Omega = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$  εἶναι ἰσοπίθανα, τότε :

$$P\left(\sum_{i=1}^n \{\theta_i\}\right) = \sum_{i=1}^n P(\{\theta_i\}) = n \cdot P(\{\theta_i\}). \quad (1)$$

$$\text{Ἀλλὰ} \quad P(\Omega) = P\left(\sum_{i=1}^n \{\theta_i\}\right) = 1. \quad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) συνάγομεν ὅτι :  $P(\{\theta_i\}) = \frac{1}{n}, \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n.$

Δηλαδή ἐπιανευρίσκομεν τὴν πρότασιν (γ') τῆς § 258.

**2α :** Ἐάν τὰ k ἀπλᾶ συμβάντα ἐνὸς γεγονότος  $A = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$  εἶναι ἰσοπίθανα πιθανότητος  $\frac{1}{n}$ , τότε :

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^k \{\theta_i\}\right) = \sum_{i=1}^k P(\{\theta_i\}) = k \cdot P(\{\theta_i\}) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{\text{ἀριθμὸς εὐνοϊκῶν περιπτώσεων}}{\text{ἀριθμὸς δυνατῶν περιπτώσεων}}.$$

Δηλαδή τῇ βοήθειᾳ τῶν ἀνωτέρω προτάσεων καὶ ὁρισμῶν εὐρίσκομεν ὡς συνέπειαν τὸν στοιχειώδη ὁρισμὸν τῆς πιθανότητος κατὰ Laplace (βλ. § 258).

**3η :** Ἐάν E καὶ E' εἶναι δύο συμπληρωματικὰ συμβάντα ἐνὸς δειγματικοῦ χώρου  $\Omega$  καὶ εἶναι  $P(E) = p$ , τότε  $P(E') = 1 - p$ .

**Ἀπόδειξις.** Ἀφ' οὗ  $E + E' = \Omega$ , τότε, συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν β', θα ἔχωμεν :

$$P(E + E') = P(E) + P(E') = P(\Omega), \quad \text{ἀλλὰ} \quad P(\Omega) = 1,$$

$$\text{ἄρα} \quad p + P(E') = 1,$$

$$\text{έξ οὗ :} \quad P(E') = 1 - p.$$

**4η :** Ἐάν A καὶ B συμβάντα καὶ  $A \subset B$ , τότε  $P(A) < P(B)$ .

**Ἀπόδειξις :** Ἐστω Δ τὸ συμπλήρωμα τοῦ A ὡς πρὸς B, ἥτοι  $\Delta = C_B A \equiv B - A$ .

Προφανῶς ἔχομεν :

$$A \cup \Delta = B \quad \text{καὶ} \quad A \cap \Delta = \emptyset.$$

Ὅπότε :

$$P(A \cup \Delta) = P(A + \Delta) = P(A) + P(\Delta) = P(B).$$

\*Ἀρα :

$$P(A) < P(B), \quad \text{καθόσον} \quad P(\Delta) > 0.$$

**5η :** Ποία ἡ πιθανότης ἵνα εἰς κόβος ριπτόμενος εἰς τὸν ἀέρα φέρῃ ἄρτιον ἀριθμὸν;

**Λύσις :** Τὸ συμβάν A : «Ὁ κύβος νὰ φέρῃ ἄρτιον ἀριθμὸν» εἶναι ἀθροισμα τῶν ἐξῆς τριῶν ἀμοιβαίως ἀποκλειομένων συμβάντων :

$$A_1 : \quad \text{«Ὁ κύβος νὰ φέρῃ 2»}.$$

$$A_2 : \quad \text{«Ὁ κύβος νὰ φέρῃ 4»}.$$

$$A_3 : \quad \text{«Ὁ κύβος νὰ φέρῃ 6»}.$$

$$\text{ἥτοι :} \quad A = A_1 + A_2 + A_3.$$

$$\text{*Ἀρα :} \quad P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

6η: Ρίπτομεν δύο κύβους. Ποία ή πιθανότης ώστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τῶν δύο κύβων νὰ εἶναι 3 ἢ 7;

Λύσις: Ὡς γνωστὸν (§ 255) τὰ ἀπλᾶ συμβάντα τοῦ πειράματος εἶναι 36 διατεταγμένα ζεύγη: (1,1), (1,2), (2,1), ..., (6,6) εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων ἐκχωροῦμεν πιθανότητα  $\frac{1}{36}$ .

Τὸ συμβάν A: «Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τῶν δύο κύβων εἶναι 3 ἢ 7», εἶναι ἄθροισμα τῶν ἑξῆς δύο ξένων ἀλλήλων συμβάντων:

$A_1$ : «Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδ. ἰξεων τῶν δύο κύβων εἶναι 3».

$A_2$ : «Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τῶν δύο κύβων εἶναι 7».

Τὸ συμβάν  $A_1$  εἶναι τὸ σύνολον  $\{(1,2), (2,1)\}$ , με  $P(A_1) = \frac{2}{36}$ .

Τὸ συμβάν  $A_2$  εἶναι  $\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$ , με  $P(A_2) = \frac{6}{36}$ .

\*Αρα:  $P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{2}{36} + \frac{6}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ .

7η: Ἐστώσαν A καὶ B δύο συμβάντα με  $P(B) = \frac{1}{2}$  καὶ  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ . Νὰ εὑρεθῇ ἡ  $P(B \cap A')$ .

Λύσις: Ἐχομεν, δυνάμει τῆς προτάσεως ε':

$$P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

595. Ἐν δοχείῳ περιέχει 3 λευκά σφαιρίδια, 4 κυανὰ καὶ 6 μαύρα. Τὸ πείραμα συνίσταται εἰς τὴν τυχαίαν λήψιν 2 σφαιριδίων ἐκ τῶν 13. Ποία ἡ πιθανότης νὰ εἶναι ἀμφοτέρω τοῦ ἰδίου χρώματος;

596. Ἐν κυτίῳ περιέχει λευκά καὶ μαύρα σφαιρίδια, ὃ δὲ ἀριθμὸς τῶν λευκῶν εἶναι δεκάπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαύρων. Ποία ἡ πιθανότης νὰ ληφθῇ ἓν λευκὸν σφαιρίδιον;

597. Ἐὰν ἡ πιθανότης νὰ ἐμφανισθῇ ἓν συμβάν εἶναι τριπλασία τῆς πιθανότητος νὰ μὴ ἐμφανισθῇ, ποία ἡ πιθανότης νὰ ἐμφανισθῇ τοῦτο;

598. Ρίπτει τις δύο κύβους. Ποία ἡ πιθανότης νὰ δείξουν ἀμφοτέροι τὴν ἰδίαν ὄψιν;

599. Εἰς μίαν γραπτὴν ἐξέτασιν εἰς τὸ μάθημα τῆς ἱστορίας δίδονται τρία ἱστορικὰ γεγονότα  $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$  καὶ τρεῖς χρονολογίαι  $(x_1, x_2, x_3)$ , ζητεῖται δὲ ὅπως ἕκαστος μαθητὴς συσχετίσῃ τὰ τρία γεγονότα πρὸς τὰς τρεῖς χρονολογίας. Ἄς υποθέσωμεν ὅτι εἰς μαθητὴς δὲν κατέχει τὸ θέμα καὶ κάμνει τυχαίαν συσχέτισιν, εἰς τρόπον ὥστε ὅλαι αἱ δυναταὶ συσχετίσεις νὰ εἶναι ἐξ ἴσου πιθαναί.

α) Σχηματίσατε τὸν δειγματικὸν ὥρον διὰ τὰ δυνατὰ ἀποτελέσματα.

β) Ποία ἡ πιθανότης νὰ μὴ ὑπάρχουν τρεῖς ὀρθαὶ συσχετίσεις εἰς τὴν ἀπάντησιν τοῦ μαθητοῦ.

γ) Ποία ἡ πιθανότης νὰ ὑπάρχουν ἀκριβῶς δύο ὀρθαὶ συσχετίσεις;

δ) Ποία ἡ πιθανότης νὰ εἶναι ὅλαι αἱ συσχετίσεις ὀρθαί;

ε) Ποία ἡ πιθανότης νὰ ὑπάρχουν περισσότεραι τῆς μιᾶς ὀρθαὶ συσχετίσεις;

στ) Ἡ πιθανότης νὰ περιέχῃ ἡ ἀπάντησις τρεῖς ὀρθὰς συσχετίσεις εἶναι μεγαλύτερα τῆς πιθανότητος νὰ περιέχῃ μόνον δύο;

600. Ρίπτομεν τρεῖς κύβους συγχρόνως. Ποία ἡ πιθανότης τοῦ συμβάντος: «Αἱ ἐνδείξεις τῶν τριῶν κύβων εἶναι διαδοχικοὶ ἀριθμοί».

601. Δοχεῖον περιέχει 6 λευκάς, 8 ἐρυθράς καὶ 10 μαύρας σφαῖρας, ὁμοίας ἀπὸ πάσης ἀπόψεως ἐκτὸς τοῦ χρώματος. Τὸ πείραμα ἐγκτεται εἰς τὴν τυχαίαν ἐξαγωγήν δύο ἐκ τῶν 24 σφαιρῶν. Ποία ἡ πιθανότης νὰ εἶναι ἀμφοτέροι αἱ ἐξαγόμεναι σφαῖραι τοῦ αὐτοῦ χρώματος;

602. Έκ δέσμης 52 παιγνιοχάρτων λαμβάνομεν τυχαίως ὀκτὼ χαρτιά.

α) Ποία ἡ πιθανότης νὰ εἶναι τοῦ αὐτοῦ χρώματος; (Υπάρχουν 26 «κόκκινα» καὶ 26 «μαῦρα»).

β) Ποία ἡ πιθανότης νὰ μὴν εὐρίσκεται «ἄσσος» μετὰξὺ αὐτῶν;

γ) Ποία ἡ πιθανότης νὰ ὑπάρχουν δύο τοῦλάχιστον ἄσσοι;

**§ 263. Πιθανόνητες ὑπὸ συνθήκην.**— Ἐστῶσαν  $A$  καὶ  $B$  δύο συμβάντα τοῦ αὐτοῦ πειράματος τύχης καὶ ὅτι  $P(A) > 0$ . Τότε: Ἡ πιθανότης τοῦ  $B$  ὑπὸ συνθήκην  $A$ , ἢ ἄλλως ἡ ὑπὸ συνθήκην πιθανότης τοῦ  $B$  δοθέντος ὅτι τὸ  $A$  συνέβη ἢ ὅτι θὰ συμβῇ, συμβολιζομένη διὰ τοῦ  $P(B|A)$ , ὀρίζεται ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (P(A) > 0).$$

Ἦτοι: Πιθανότης τοῦ  $B$  ὑπὸ συνθήκην  $A$  καλεῖται ὁ λόγος τῆς πιθανότητος τοῦ  $A$  καὶ  $B$  πρὸς τὴν πιθανότητα τοῦ  $A$ .

**Παράδειγμα:** Δοθέντος ὅτι εἰς μίαν οἰκογένειαν μὲ δύο τέκνα τὸ ἓν εἶναι ἀγόρι, ποία ἡ πιθανότης ἵνα ἀμφότερα τὰ τέκνα εἶναι ἀγόρια;

**Λύσις:** Ἐχομεν ἓν πρῶτον τὸν δειγματικὸν ὥρον:

$$\Omega = \{ \alpha\alpha, \alpha\kappa, \kappa\alpha, \kappa\kappa \},$$

ὅπου «α» σημαίνει ἀγόρι καὶ «κ» κορίτσι.

Θεωροῦμεν τὰ συμβάντα:

$A$ : «Ἡ οἰκογένεια ἔχει ἓν τοῦλάχιστον ἀγόρι», ἦτοι  $A = \{ \alpha\alpha, \alpha\kappa, \kappa\alpha \}$ .

$B$ : «Ἡ οἰκογένεια ἔχει καὶ τὰ δύο τέκνα ἀγόρια», ἦτοι  $B = \{ \alpha\alpha \}$ .

Τότε τὸ συμβάν  $B|A$ : «Ἀμφότερα τὰ τέκνα εἶναι ἀγόρια δοθέντος ὅτι τὸ ἓν εἶναι ἀγόρι» ἔχει πιθανότητα:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P[\text{ἀκριβῶς δύο ἀγόρια}]}{P[\text{ἓν τοῦλάχιστον ἀγόρι}]} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

**Σημείωσις.** Ἡ  $P(B|A)$  ὀνομάζεται καὶ δεσμευμένη πιθανότης ἐν ἀντιδιαστολῇ πρὸς τὴν  $P(B)$ , ἣτις καλεῖται καὶ ἀδέσμευτος ἢ ἄνευ συνθήκης πιθανότης.

Οὕτως, εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἡ ἀδέσμευτος πιθανότης εἶναι:  $P(B) = 1/4$ .

**§ 264. Πιθανότης τομῆς δύο συμβάντων (νόμος τῶν συνθέτων πιθανοτήτων).**— Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς πιθανότητος τῆς τομῆς δύο συμβάντων  $A$  καὶ  $B$  δύναται νὰ γίνῃ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ τύπου τῆς ὑπὸ συνθήκην πιθανότητος.

Πράγματι, ἐκ τῆς σχέσεως  $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ , (ὅπου  $P(A) > 0$ ) προκύπτει:  $P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B|A)$ . Ἐὰν δὲ καὶ  $P(B) > 0$ , τότε δι' ἀντιμεταθέσεως τῶν γραμμάτων  $A$  καὶ  $B$  ἔχομεν:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Ἀλλὰ  $A \cap B = B \cap A$  καὶ ἐπομένως :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B) \quad (1)$$

Ἦτοι: Ἡ πιθανότης πραγματοποίησεως συγχρόνως δύο συμβάντων ἰσοῦται μὲ τὴν πιθανότητα πραγματοποίησεως τοῦ ἑνός, ἐπὶ τὴν πιθανότητα πραγματοποίησεως τοῦ ἑτέρου ὑπὸ τὴν συνθήκην ὅμως ὅτι συνέβη τὸ πρῶτον.

**Παράδειγμα:** Ἐν κυτίον περιέχει 15 λευκὰ καὶ 10 πράσινα σφαιρίδια. Τὸ πείραμα συνίσταται εἰς τὴν ἐξαγωγήν δύο σφαιριδίων ἀλληλοδιαδόχως, χωρὶς τὸ ἐξαγόμενον σφαιρίδιον νὰ ἐπανατίθεται. Ποία ἡ πιθανότης νὰ ἐξαχθῇ πρῶτα λευκὸν καὶ κατόπιν πράσινον σφαιρίδιον;

**Λύσις:** Ἐὰν  $\Lambda$  σημαίνῃ λευκὸν σφαιρίδιον καὶ  $\Pi$  πράσινον, θὰ ἔχωμεν :

$$P(\Lambda \cap \Pi) = P(\Lambda) \cdot P(\Pi|\Lambda).$$

$$\text{Ἀλλὰ } P(\Lambda) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \text{ καὶ } P(\Pi|\Lambda) = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \text{ (διότι τὸ ἐξαχθὲν δὲν ἐπανατίθεται).}$$

$$\text{Ἄρα: } P(\Lambda \cap \Pi) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{4}.$$

**§ 265. Συμβάντα ἀνεξάρτητα ἀλλήλων.**—Ἐστῶσαν δύο συμβάντα  $A$  καὶ  $B$ , μὴ κενά, ἀναφερόμενα εἰς ἓνα πείραμα τύχης. Θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ συμβάν  $B$  εἶναι **στατιστικῶς ἢ στοχαστικῶς ἀνεξάρτητον**, συντόμως **ἀνεξάρτητον** τοῦ  $A$  τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ ἡσχέσις :

$$P(B|A) = P(B)$$

Ἡσχέσις αὕτη ἔχει ὡς ἄμεσον συνέπειαν ἓνα σημαντικὸν κανόνα πολλαπλασιασμοῦ πιθανοτήτων ἀνεξαρτήτων συμβάντων. Ὁ κανὼν οὗτος δίδεται διὰ τοῦ κατωτέρω θεωρήματος :

**§ 266. Θεώρημα.**—Ἐὰν τὸ συμβάν  $B$  εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ  $A$ , τότε ἡ πιθανότης τῆς τομῆς των ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν πιθανοτήτων των.

Ἦτοι:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (1)$$

**Ἀπόδειξις:** Πράγματι, δυνάμει τοῦ ὁρίσμου τῶν ἀνεξαρτήτων συμβάντων καὶ τῆς σχέσεως (1) τῆς § 264, ἔχομεν :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B).$$

**Παρατήρησις.** Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τοὺς ρόλους τῶν  $A$  καὶ  $B$  τόσον εἰς τὴν ὑπόθεσιν ὅσον καὶ εἰς τὸ συμπέρασμα τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, ἔχομεν πάλιν τὴν (1). Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι, ἂν ἓν ἐκ τῶν συμβάντων εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ ἄλλου, τότε ἰσχύει :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ὅταν ἰσχύῃ ἡσχέσις αὕτη λέγομεν ὅτι τὰ δύο συμβάντα εἶναι **ἀνεξάρτητα ἀλλήλων**.

Ἐὰν δύο συμβάντα δὲν εἶναι ἀνεξάρτητα, θὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι **ἐξηρημένα**.

**Παράδειγμα :** Ρίπτομεν εις τὸν ἀέρα ἓνα κύβον καὶ ἕν νόμισμα. Ποία ἡ πιθανότης τοῦ συνθέτου συμβάντος : «ὁ κύβος νὰ φέρῃ 5 ἢ 6 καὶ τὸ νόμισμα κορώνα»;

**Λύσις :** Ἐστω  $A$  τὸ συμβάν : «Ὁ κύβος φέρει 5 ἢ 6» καὶ  $B$  τὸ συμβάν : «Τὸ νόμισμα φέρει κορώνα ( $K$ )»

Ὁ δειγματικὸς χῶρος τοῦ συνθέτου πειράματος εἶναι :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{K, \Gamma\} =$$

$$= \{(1, K), (2, K), (3, K), (4, K), (5, K), (6, K), (1, \Gamma), (2, \Gamma), (3, \Gamma), (4, \Gamma), (5, \Gamma), (6, \Gamma)\}.$$

Εἶναι :  $A = \{(5, K), (6, K), (5, \Gamma), (6, \Gamma)\}$

$$B = \{(1, K), (2, K), (3, K), (4, K), (5, K), (6, K)\}$$

$$A \cap B = \{(5, K), (6, K)\}.$$

Ἐπίσης  $P(A) = \frac{4}{12}, \quad P(B) = \frac{6}{12}, \quad P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$

Παρατηροῦμεν ὅτι :  $P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{12} \cdot \frac{6}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$  καὶ  $P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$

Ἄρα :  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6}.$

Τοῦτο τὸ ἀνεμέναμεν, διότι τὸ ἀποτέλεσμα τὸ ὁποῖον θὰ μᾶς δώσῃ ὁ κύβος εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ ἀποτελέσματος τὸ ὁποῖον θὰ μᾶς δώσῃ τὸ νόμισμα.

## § 267. Ἰδιότητες ἀνεξαρτήτων συμβάντων.

**1η :** Ἐὰν  $A$  καὶ  $B$  ἀνεξάρτητα συμβάντα, θὰ εἶναι ἀνεξάρτητα συμβάντα καὶ τὰ  $A$  καὶ  $B'$ .

**Ἀπόδειξις.** Ὡς γνωστὸν (§ 262, ε')  $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ , καὶ ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ , θὰ ἔχωμεν :

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) [1 - P(B)] = P(A) \cdot P(B'),$$

διότι  $P(B) + P(B') = 1.$

**2α :** Ἐὰν  $A$  καὶ  $B$  ἀνεξάρτητα συμβάντα, θὰ εἶναι ἀνεξάρτητα καὶ τὰ  $A'$  καὶ  $B.$

Ἦτοί :  $P(A' \cap B) = P(A') \cdot P(B).$

**Ἐπόδειξις.** Παρατηρήσατε ὅτι  $(A \cap B) \cup (A' \cap B) = B$  καὶ ἐργασθῆτε ὡς καὶ προηγουμένως.

**3η :** Ἐὰν  $A$  καὶ  $B$  ἀνεξάρτητα συμβάντα, θὰ εἶναι ἀνεξάρτητα συμβάντα καὶ τὰ  $A'$  καὶ  $B'.$

Ἦτοί :  $P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B').$

**Ἀπόδειξις.** Ἐπειδὴ  $(A' \cap B) \cup (A' \cap B') = A'$  καὶ  $(A' \cap B) \cap (A' \cap B') = \emptyset$ , ἔχομεν :

$$\begin{aligned} \eta \quad P(A' \cap B) + P(A' \cap B') &= P(A') \\ P(A' \cap B') &= P(A') - P(A' \cap B) = \quad (\text{λόγω τῆς 2ας}) \\ &= P(A') - P(A') \cdot P(B) = \\ &= P(A') \cdot [1 - P(B)] = P(A') \cdot P(B'). \end{aligned}$$



**Εφαρμογή:** Ἡ πιθανότητα νὰ λυθῇ ἓν πρόβλημα ἀπὸ ἓνα μαθητὴν  $x$  εἶναι  $\frac{3}{5}$  καὶ ἡ πιθανότητα νὰ λυθῇ ἀπὸ ἓνα ἄλλον μαθητὴν  $y$  εἶναι  $\frac{2}{3}$ . Ποία ἡ πιθανότητα νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα ἀπὸ τὸν ἓνα καὶ νὰ μὴ λυθῇ ἀπὸ τὸν ἄλλον;

**Λύσις:** Ἐὰν καλέσωμεν  $A$  τὸ συμβάν: «Ὁ μαθητὴς  $x$  λύει τὸ πρόβλημα» καὶ  $B$  τὸ συμβάν: «Ὁ μαθητὴς  $y$  λύει τὸ πρόβλημα», τότε:

$A \cap B'$  σημαίνει: Ὁ  $x$  θὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα, ἀλλ' ὄχι ὁ  $y$ .

$A' \cap B$  σημαίνει: Ὁ  $x$  δὲν θὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα, ἀλλὰ ὁ  $y$  θὰ τὸ λύσῃ.

$(A \cap B') \cup (A' \cap B)$  σημαίνει: Νὰ λυθῇ ἀπὸ τὸν ἓνα καὶ νὰ μὴν λυθῇ ἀπὸ τὸν ἄλλον.

Ἄρα, ἡ ζητούμενη πιθανότητα εἶναι, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι  $A \cap B'$  καὶ  $A' \cap B$  εἶναι ξένα συμβάντα

$$\begin{aligned} P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] &= P(A \cap B') + P(A' \cap B) = P(A) \cdot P(B') + P(A') \cdot P(B) = \\ &= \frac{3}{5} \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(1 - \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{15}. \end{aligned}$$

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

603. Ἡ πιθανότητα λύσεως ἑνὸς προβλήματος ἀπὸ τὸν μαθητὴν  $\alpha$  εἶναι  $\frac{2}{3}$  καὶ ἀπὸ τὸν συμμαθητὴν του  $\beta$  εἶναι  $\frac{4}{5}$ . Ποία ἡ πιθανότητα νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα ἀπὸ ἀμφοτέρους;

604. Δείξατε ὅτι:

$$\alpha) P(A|B) + P(A'|B) = 1$$

$$\beta) P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}, \text{ γνωστοῦ ὄντος ὅτι } A \subset B \text{ καὶ } P(B) > 0.$$

605. Κατὰ τὴν ρίψιν ἑνὸς κύβου, ποία εἶναι ἡ πιθανότητα νὰ παρουσιασθῇ τὸ «6» διὰ πρῶτην φορὰν κατὰ τὴν τετάρτην ρίψιν;

606. Ἐκ μιᾶς κληρωτίδος περιεχοῦσης 30 κλήρους, ἡριθμημένους ἀπὸ 1 ἕως 30 ἀνασύρουμεν «τυχαίως» ἓνα κλῆρον. Ποία εἶναι ἡ πιθανότητα ὁ ἀνασυρθεὶς κλῆρος νὰ φέρῃ ἀριθμὸν περιττὸν καὶ διαιρετὸν διὰ τοῦ ἑννέα;

607. Ἐὰν  $A$  καὶ  $B$  συμβάντα ξένα πρὸς ἄλληλα μὲ  $P(A \cup B) > 0$ , νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}.$$

608. Ρίπτομεν δύο κύβους εἰς τὸν ἀέρα. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ 1ος κύβος ἔφερε τὸν ἀριθμὸν 5, ποία ἡ πιθανότητα τοῦ συμβάντος: «τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων εἶναι  $\geq 10$ »;

609. Ἐκ δέσμης 52 παιγνιοχάρτων λαμβάνομεν τρία παιγνιοχάρτα. Ποία ἡ πιθανότητα τοῦ συμβάντος: «Οὐδὲν ἐκ τῶν τριῶν παιγνιοχάρτων εἶναι φιγούρα».

610. Ἐκλέγομεν τυχαίως δύο φυσικοὺς ἀριθμοὺς ἐκ τοῦ τμήματος  $T_{10} \equiv \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$ . Ποία ἡ πιθανότητα νὰ εἶναι ὁ εἰς ἄρτιος καὶ ὁ ἕτερος περιττός;

611. Ρίπτομεν δύο κύβους. Ποία ἡ πιθανότητα νὰ φέρωμεν διπλοῦν ἑξ; Ποία δὲ ἡ πιθανότητα νὰ φέρωμεν τοῦλάχιστον ἓνα ἑξ;

612. Πόσας φορές πρέπει νὰ ρίψωμεν ἓνα κύβον, ὥστε ἡ ἐμφάνισις ἑνὸς τοῦλάχιστον ἑξ νὰ ἔχῃ πιθανότητα 0,5;

**§ 268. Πιθανότης τομῆς τριῶν συμβάντων.**— Ἐὰν  $A, B, \Gamma$  συμβάντα τοῦ δειγματικοῦ χώρου  $\Omega$ , τότε ἰσχύει:

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(\Gamma|A \cap B), \quad (P(A \cap B) > 0)$$

Ἀπόδειξις : Ἐάν  $A \cap B = E$ , ἔχομεν :

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(E \cap \Gamma) = P(E) P(\Gamma | E) = P(A \cap B) \cdot P(\Gamma | A \cap B) = \\ = P(A) \cdot P(B | A) \cdot P(\Gamma | A \cap B), \text{ ὁ.ἔ.δ.}$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι :

$$P(A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta) = P(A) \cdot P(B | A) \cdot P(\Gamma | A \cap B) \cdot P(\Delta | A \cap B \cap \Gamma).$$

Γενικῶς :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

**Παράδειγμα :** Ἐν δοχείον περιέχει 3 λευκά σφαιρίδια, 4 κυανὰ καὶ 6 μαύρα. Τὸ πείραμα συνίσταται εἰς τὴν ἐξαγωγήν τριῶν σφαιριδίων, τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου, χωρὶς τὸ ἐξαγόμενον σφαιρίδιον νὰ ἐπανατίθεται. Ποία ἡ πιθανότης τὰ ἐξαγόμενα σφαιρίδια νὰ εἶναι κατὰ σειρὰν : 1) λευκόν, 2) κυανοῦν, 3) μαῦρον.

**Λύσις :** Ἐάν  $\Lambda$  σημαίνει λευκὸν σφαιρίδιον,  $K$  κυανοῦν καὶ  $M$  μαῦρον, θὰ ἔχωμεν :

$$P(\Lambda \cap K \cap M) = P(\Lambda) \cdot P(K | \Lambda) \cdot P(M | \Lambda \cap K).$$

Ἀλλὰ  $P(\Lambda) = \frac{3}{13}$ ,  $P(K | \Lambda) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$  (διότι τὸ ἐξαχθὲν δὲν ἐπανατίθεται) καὶ

$$P(M | \Lambda \cap K) = \frac{6}{11} \text{ (διότι τὰ ἐξαχθέντα δὲν ἐπανατίθενται).}$$

Ὅθεν :

$$P(\Lambda \cap K \cap M) = \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{11} = \frac{6}{143}.$$

**§ 269. Ἀνεξαρτησία  $n$  συμβάντων.** — Τρία ἢ περισσότερα συμβάντα  $A_1, A_2, \dots, A_n$  καλοῦνται **ἀμοιβαίως ἢ τελείως ἀνεξάρτητα** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ὑπὸ συνθήκη (δεσμευμένη) πιθανότης οἰουδήποτε τούτων, δοθέντων οἰωνδήποτε τῶν λοιπῶν, ἰσοῦται πρὸς τὴν συνήθη (ἀδέσμευτον) πιθανότητα.

Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὰς ἐξῆς σχέσεις :

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \text{ (ἀνεξάρτητα ἀνὰ ζεύγη).}$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i) P(A_j) P(A_k), \text{ (ἀνεξάρτητα ἀνὰ τρία), κ.ο.κ.}$$

.....

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Οὕτω, π.χ., τρία συμβάντα τοῦ δειγματικοῦ χώρου  $\Omega$ , ἔστω τὰ  $A, B, \Gamma$  θὰ λέγονται τελείως ἀνεξάρτητα ἔάν, καὶ μόνον ἔάν, ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις :

$$\left. \begin{array}{l} 1. P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ 2. P(A \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(\Gamma) \\ 3. P(B \cap \Gamma) = P(B) \cdot P(\Gamma) \end{array} \right\} \quad (I)$$

$$4. P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) \quad (II)$$

Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ ἀνεξαρτησία τριῶν συμβάντων ἀνὰ δύο λαμβανομένων δὲν ἐξασφαλίζει τὴν τελείαν ἀνεξαρτησίαν αὐτῶν. Ἐπομένως διὰ νὰ εἶναι τρία συμβάντα τελείως ἀνεξάρτητα πρέπει νὰ ἰσχύουν συγχρόνως αἱ (I) καὶ (II).

**Παρατήρησης.** Όταν έχουμε ν ανεξάρτητα συμβάντα, τότε :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) \quad (1)$$

Η σχέσις όμως (1) δέν είναι ικανή συνθήκη διὰ τὴν τελείαν ανεξαρτησίαν τῶν  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

**Παράδειγμα τ α :** 1ον. Κατὰ τρόπους ανεξαρτήτους, ρίπτομεν ἓνα νόμισμα, λαμβάνομεν ἓνα παιγνιόχαρτον ἀπὸ μίαν δέσμην καὶ ρίπτομεν ἓνα κύβον. Ποία ἡ πιθανότης νὰ ἐμφανίσουν τὸ νόμισμα «κορώνα», τὸ παιγνιόχαρτον «ἄσπρον» καὶ ὁ κύβος «6»;

**Λύσις :** Ἐὰν Α σημαίνει : «Τὸ νόμισμα δεικνύει κορώνα», Β : «Τὸ παιγνιόχαρτον εἶναι ἄσπρον» καὶ Γ : «Ὁ κύβος φέρει 6», θὰ ἔχωμεν :

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma),$$

διότι τὰ συμβάντα εἶναι ανεξάρτητα.

$$\text{Ἀλλὰ} \quad P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \quad P(\Gamma) = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Ἀρα:} \quad P(A \cap B \cap \Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{156}.$$

Θὰ δώσωμεν τώρα καὶ ἓν χαρακτηριστικὸν παράδειγμα, δι' οὗ ἐμφαίνεται ὅτι ἡ ανεξαρτησία τριῶν συμβάντων ἀνὰ δύο λαμβανομένων δέν ἐξασφαλίζει τὴν πλήρη ανεξαρτησίαν αὐτῶν.

**2ον :** Αἱ ἑδραὶ κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι χρωματισμέναι ὡς ἑξῆς : Μαύρη, λευκή, ἐρυθρά καὶ ἡ τετάρτη ἑδρα ἔχει καὶ τὰ τρία χρώματα. Ρίπτομεν τὸ τετράεδρον καὶ παρατηροῦμεν τὸ χρῶμα τῆς ἑδρας ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζεται. Καλοῦμεν :

Α τὸ συμβάν : «Ὁ κύβος στηρίζεται ἐπὶ ἑδρας, ἡ ὁποία εἶναι χρωματισμένη μαύρη»  
 Β τὸ συμβάν : «Ὁ » » » » » » » λευκή»  
 Γ τὸ συμβάν : «Ὁ » » » » » » » ἐρυθρά».

$$\text{Τότε:} \quad P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(\Gamma) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B).$$

$$P(A \cap \Gamma) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(\Gamma).$$

$$P(B \cap \Gamma) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B) \cdot P(\Gamma).$$

Ἐπομένως τὰ Α, Β, Γ εἶναι ανεξάρτητα ἀνὰ δύο.

$$\text{Ἀλλὰ} \quad P(A \cap B \cap \Gamma) = \frac{1}{4} \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) = \frac{1}{8}.$$

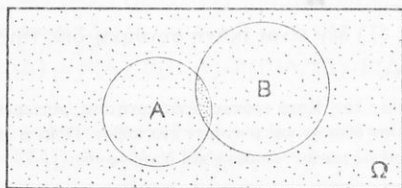
**§ 270. Προσθετικὸν θεώρημα τῶν πιθανοτήτων.**— Ἐὰν Α καὶ Β δύο συμβάντα ἐνὸς δειγματικοῦ χώρου Ω, τότε ἰσχύει :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ἦτοι : ἡ πιθανότης ὅτι συμβαίνει ἓν τοῦλάχιστον ἐκ τῶν Α καὶ Β εὐρίσκεται διὰ τῆς προσθέσεως τῆς πιθανότητος ὅτι συμβαίνει τὸ Α μὲ τὴν πιθανότητα ὅτι συμβαί-

νει το  $B$  και άκολούθως διά τής άφαιρέσεως τής πιθανότητας ότι συμβαίνουν άμφο-  
τερα.

Άπόδειξις. Άς παρατηρήσωμεν τό κατωτέρω διάγραμμα του Venn (Σχ. 19).



Σχ. 19

$A \cup B$  είναι τό σύνολον τών στοιχείων τά όποία ανήκουν είτε εις τό  $A$ , είτε εις τό  $B$ , είτε εις άμφοτέρα. Πιθανότης αύτου είναι τό άθροισμα τών πιθανοτήτων τών στοιχείων του (δηλ. τών άπλών συμβάντων). Έπειδή  $P(A) + P(B)$  είναι τό άθροισμα τών πιθανοτήτων τών στοιχείων του  $A$  και τών στοιχείων του  $B$ , έπεται ότι αί πιθανότητες τών στοιχείων τής τομής  $A \cap B$  έχουν ληφθῆ δύο φορές. Έάν λοιπόν άφαιρέσωμεν τήν  $P(A \cap B)$ , θά έχωμεν τό άθροισμα τών πιθανοτήτων όλων τών στοιχείων του  $A \cap B$ , όπου έκαστον έχει ληφθῆ μία φοράν. Ωστε :

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B). \quad \text{δ.έ.δ.}$$

Θά δώσωμεν όμως μίαν αύστηροτέραν άπόδειξιν του άνωτέρω θεωρήματος : Εύκόλως διαπιστούμεν ότι τό συμβάν  $A \cup B$  δύναται νά παρασταθῇ ως ένω-  
σις (άθροισμα) τών άμοιβαίως άποκλειόμενων συμβάντων  $A - B$  και  $B$ ,  
ήτοι :

$$A \cup B = (A - B) \cup B, \text{ ένθα } (A - B) \cap B = \emptyset.$$

Τότε όμως, δυνάμει τών προτάσεων β' και ε' τής § 262, έχομεν :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A - B) + P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

**Πόρισμα I.** — Έάν  $A$  και  $B$  είναι άμοιβαίως άποκλειόμενα (ξένα μεταξύ των) συμβάντα, θά είναι :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (\text{βλ. και § 262, β})$$

**Πόρισμα II.** — Έάν  $A$  και  $A'$  είναι δύο συμπληρωματικά συμβάντα ενός δειγ-  
ματικού χώρου  $\Omega$  θά είναι :

$$P(A) + P(A') = 1. \quad (\text{βλ. και § 258, δ})$$

**Πόρισμα III.** —  $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$  (ύποπροσθετική ιδιότης τής  $P$ ).

**Έφαρμογή 1η :** Έκ δέσμης 32 παιγνιοχάρτων (πρέφα) λαμβάνομεν τυχαίως δύο εξ αυ-  
τών συγχρόνως. Ποία ή πιθανότης νά είναι τό έν τουλάχιστον εξ αυτών άσσοις;

**Λύσις :** Ονομάζομεν  $A$  τό συμβάν : «Τό έν νά είναι άσσος» και  $B$  τό συμβάν : «Τό έτε-  
ρον νά είναι άσσος». Τότε  $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ ,  $P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$  και ή πιθανότης νά είναι

άμφοτέρα άσσοις είναι :  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} = \frac{3}{248}$ .

Τότε ή πιθανότης του συμβάντος  $A \cup B$  : «Τό έν τουλάχιστον εξ αυτών νά είναι άσσος»  
είναι :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{3}{248} = \frac{59}{248}$ .

**Εφαρμογή 2α:** Έστωσαν δύο συμβάντα A και B με  $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ ,  $P(A') = \frac{2}{3}$  και  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ . Να εύρεθῇ: (i)  $P(A)$ , (ii)  $P(B)$ .

**Λύσεις:** (i). Ὡς γνωστόν (§ 258, δ') ἔχομεν:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

(ii). Ἐκ τῆς σχέσεως  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  λαμβάνομεν:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4}, \quad \text{ἐξ ἧς: } P(B) = \frac{2}{3}.$$

**§ 271.** Ἐὰν A, B, Γ συμβάντα τοῦ αὐτοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω, θὰ εἶναι:

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma)$$

**Ἀπόδειξις.** Ἐστω  $\Delta = B \cup \Gamma$ . Τότε ἔχομεν  $A \cap \Delta = A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$  καὶ  $P(A \cap \Delta) = P(A \cap B) + P(A \cap \Gamma) - P(A \cap B \cap \Gamma)$ , καθ' ὅσον  $(A \cap B) \cap (A \cap \Gamma) = (A \cap B \cap \Gamma)$ .

Ὅθεν:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup \Gamma) &= P(A \cup \Delta) = P(A) + P(\Delta) - P(A \cap \Delta) = \\ &= P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(B \cap \Gamma) - [P(A \cap B) + P(A \cap \Gamma) - P(A \cap B \cap \Gamma)] \\ &= P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(B \cap \Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma). \end{aligned}$$

**Πόρισμα.** — Ἐὰν A, B, Γ εἶναι συμβάντα ἀμοιβαίως ἀποκλειόμενα (ξένα μεταξύ των) ἀνὰ δύο, τότε ἰσχύει:

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma).$$

### Ἐφαρμογαὶ

**1η:** Ἡ πιθανότης νὰ ζῇ κάποιος μετὰ 20 ἔτη εἶναι  $\frac{3}{4}$  καὶ ἡ πιθανότης νὰ ζῇ ἡ σύζυγός του μετὰ 20 ἔτη εἶναι  $\frac{9}{10}$ . Ποία ἡ πιθανότης νὰ ζῇ τοῦλάχιστον εἰς τούτων μετὰ 20 ἔτη;

**Λύσεις:** Ἐστω A τὸ συμβάν: «Ὁ σύζυγος ζῇ μετὰ 20 ἔτη» καὶ B τὸ συμβάν: «Ἡ σύζυγος ζῇ μετὰ 20 ἔτη». Τότε:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cup B) &= \frac{3}{4} + \frac{9}{10} - \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{10} = \frac{39}{40}. \end{aligned}$$

**2α:** Ἡ πιθανότης νὰ ζῇ κάποιος μετὰ 40 ἔτη εἶναι  $\frac{8}{10}$  καὶ ἡ πιθανότης νὰ ζῇ ἡ σύζυγός του μετὰ 40 ἔτη εἶναι  $\frac{7}{10}$ . Ποία ἡ πιθανότης νὰ ζῇ μόνον ὁ σύζυγος μετὰ 40 ἔτη;

**Λύσεις:** Ἐὰν καλέσωμεν A τὸ συμβάν: «Ὁ σύζυγος νὰ ζῇ μετὰ 40 ἔτη» καὶ B τὸ συμβάν: «Νὰ ζῇ ἡ σύζυγος μετὰ 40 ἔτη», τότε ἀρκεῖ νὰ εὗρωμεν τὴν  $P(A \cap B')$ .

$$\text{Ἀλλὰ } P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B') = P(A) \cdot [1 - P(B)],$$

$$\text{ὁθεν: } P(A \cap B') = P(A) \cdot [1 - P(B)] = \frac{8}{10} \cdot \left(1 - \frac{7}{10}\right) = \frac{8}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{24}{100}.$$

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

613. 'Εάν  $A \subset B$ , τότε δείξате ότι :  $P(B|A) = 1$ .

614. Δείξате χρησιμοποιώντας τον νόμον του De Morgan  $A' \cap B' = (A \cup B)'$ , ότι εάν τὰ  $A$  και  $B$  είναι ανεξάρτητα συμβάντα, θὰ είναι ανεξάρτητα και τὰ  $A'$  και  $B'$ .

615. Είς άκέραιος περιλαμβάνεται κατά τύχην μεταξύ τών πρώτων 200 θετικών άκεραίων. Ποία ή πιθανότης ότι ό λαμβανόμενος αριθμός είναι διαιρετός είτε διά 6 είτε διά 8 ;

616. 'Η πιθανότης νά ζή κάποιος μετά 20 έτη είναι  $\frac{3}{4}$  και ή πιθανότης νά ζή ή σύζυγός του μετά 20 έτη είναι  $\frac{3}{5}$ . Ποία ή πιθανότης :

- α) Νά ζοϋν άμφότεροι,                      β) Νά ζή μόνον ό σύζυγος,  
γ) Νά ζή μόνον ή σύζυγος,                      δ) Νά ζή τούλάχιστον εις τούτων.

617. 'Εάν  $A$  και  $B$  είναι συμβάντα με  $P(A) = \frac{3}{8}$ ,  $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$  και  $P(B') = \frac{1}{2}$ , νά εύρεθοϋν αί :  $P(A \cap B)$ ,  $P(A' \cap B')$ ,  $P(A' \cup B')$  και  $P(B \cap A')$ .

618. 'Εάν  $A$  και  $B$  είναι συμβάντα με  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B') = \frac{2}{3}$  και  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ , νά εύρεθοϋν αί :  $P(A|B)$ ,  $P(B|A)$ ,  $P(A \cup B)$ ,  $P(A'|B')$ ,  $P(B'|A')$ .

619. Νά άποδειχθῇ ότι :

$$P[(A \cup A')|B] = P(A|B) + P(A'|B).$$

620. Δοθέντος ότι  $P(A) = \frac{3}{8}$ ,  $P(B) = \frac{5}{8}$  και  $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ , νά εύρεθοϋν αί πιθανότητες :  $P(A|B)$  και  $P(B|A)$ .

621. 'Εάν  $E$  και  $F$  ανεξάρτητα συμβάντα, θὰ είναι :

$$P(E'|F) = 1 - P(E|F), \quad (P(F) > 0).$$

622. 'Εάν  $E$  και  $F$  είναι συμβάντα τοϋ αϋτοϋ δειγματικού χώρου  $\Omega$ , τότε :

- 1)  $0 \leq P(E/F) \leq 1$   
2)  $P(\Omega|F) = 1$   
3)  $P(E) = P(F) \cdot P(E|F) + P(F') \cdot P(E|F')$ .

623. 'Εάν  $A$  και  $B$  είναι συμβάντα άμοιβαίως άποκλειόμενα, τότε :

$$P(A \cup B|E) = P(A|E) + P(B|E), \quad (P(E) > 0).$$

624. Δείξате ότι : 'Εάν  $A \subset B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$ , ένθα  $B_i \cap B_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ , τότε ισχύει :

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A|B_n).$$

# ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ \*

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

### ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ

**1ον :** *Έφαρμοστὸν διάνυσμα.*— Καλοῦμεν ἑφαρμοστὸν διάνυσμα ἓν διατεταγμένον ζεῦγος δύο σημείων,  $A$  καὶ  $B$ .

Τὸ συμβολίζομεν δὲ ὡς ἐξῆς :  $\vec{AB}$ .

**2ον :** *Μηδενικὸν διάνυσμα.*— Μηδενικὸν διάνυσμα εἶναι τὸ διάνυσμα, τοῦ ὁποῖου ἡ ἀρχή,  $A$ , καὶ τὸ τέλος,  $B$ , συμπίπτουν.

Τοῦτο τὸ συμβολίζομεν ὡς ἐξῆς :  $\vec{0}$ .

Ὁ φορεὺς τοῦ μηδενικοῦ διανύσματος εἶναι ἀκαθόριστος.

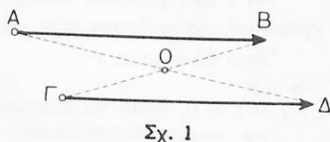
**3ον :** *Ίσοδύναμα ἑφαρμοστὰ διανύσματα.*— Δύο ἑφαρμοστὰ διανύσματα,  $\vec{AB}$  καὶ  $\vec{\Gamma\Delta}$ , εἶναι ἰσοδύναμα, ὅταν τὰ τμήματα  $A\Delta$  καὶ  $B\Gamma$  (σχ. 1) ἔχουν τὸ αὐτὸ μέσον.

\* Ἀρα :  $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta} \iff A\Delta \text{ καὶ } B\Gamma \text{ ἔχουν τὸ αὐτὸ μέσον.}$

Συνέπεται : Θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσοδυναμίας :

$$\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta} \iff \vec{A\Gamma} = \vec{B\Delta}$$

$$\vec{AB} = \vec{A\Gamma} \iff B \text{ καὶ } \Gamma \text{ συμπίπτουν.}$$



**Πρατήρησις :** Εἰς τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων (ἑφαρμοστών) θὰ λέγωμεν ὅτι τὰ ἀνωτέρω διανύσματα ἀποτελοῦν μίαν κλάσιν ἰσοδυναμίας. Αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας καλοῦνται *ἐλεύθερα διανύσματα*.

**4ον :** *Έλεύθερον διάνυσμα.*— Έλεύθερον διάνυσμα καλεῖται τὸ σύνολον τῶν ἑφαρμοστών διανυσμάτων, ἰσοδυνάμων πρὸς δοθὲν ἑφαρμοστὸν διάνυσμα. Ἐν τοιοῦτον διάνυσμα τὸ συμβολίζομεν εἴτε δι' ἑνὸς γράμματος ( $\vec{u}$ , π.χ.), εἴτε

\* Ὑπὸ Ἰωάννου Πανάκη

δι' ενός τυχόντος εκ τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων, τὸ ὁποῖον παριστᾷ αὐτὸ (ἀντιπροσώπος). Π.χ.  $\vec{AB}$  :

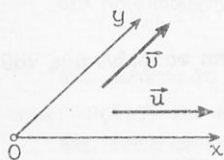
**5ον :** ἴσα ἐλεύθερα διανύσματα.— Δύο ἐλεύθερα διανύσματα,  $\vec{u}$  καὶ  $\vec{v}$ , λέγονται ἴσα, ὅταν ἐπιδέχωνται ὡς ἀντιπροσώπους τὸ αὐτὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα ἢ δύο ἐφαρμοστὰ διανύσματα ἰσοδύναμα, δηλ. ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμὴν καὶ φοράν. Συμβολίζομεν δὲ ταῦτα ὡς ἑξῆς :

$$\vec{u} = \vec{v}.$$

**6ον :** Μῆκος ἐλευθέρου διανύσματος.— Μῆκος ἐλευθέρου διανύσματος καλεῖται τὸ μῆκος,  $AB$ , ἐνὸς ἀντιπροσώπου  $\vec{AB}$  τοῦ διανύσματος τούτου. Τὸ συμβολίζομεν ὡς ἑξῆς :

$$|\vec{u}| = u \quad \eta \quad |\vec{AB}| = AB$$

**7ον :** Γωνία δύο διανυσμάτων,  $\vec{u}$  καὶ  $\vec{v}$ , προσανατολισμένου ἐπιπέδου.— Καλοῦμεν γωνίαν δύο διανυσμάτων  $\vec{u}$  καὶ  $\vec{v}$ , κειμένων ἐπὶ προσανατολισμένον ἐπιπέδου, τὴν προσανατολισμένην γωνίαν τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ δύο ἡμιευθειῶν,  $Ox$  καὶ  $Oy$ , τῆς αὐτῆς ἀρχῆς, ἀντιστοίχως παραλλήλων πρὸς τὰ διανύσματα  $\vec{u}$  καὶ  $\vec{v}$  (σχ. 2) καὶ τῆς αὐτῆς φοράς.



Σχ. 2

Μία τοιαύτη γωνία παρίσταται ὡς ἑξῆς :  $(\vec{u}, \vec{v})$ . Ἡ δὲ ἀλγεβρική τιμὴ αὐτῆς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \pm \vartheta + 2k\pi, \text{ με } 0 \leq \vartheta \leq \pi \text{ (}\vartheta \text{ κυρτὴ γωνία), } k \in \mathbb{Z}.$$

**8ον :** Συγγραμμικὰ διανύσματα.— Δύο διανύσματα,  $\vec{u}$  καὶ  $\vec{v}$  λέγονται συγγραμμικά, ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν.

Ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = 0, \text{ ὅταν τὰ διανύσματα εἶναι ὁμόρροπα ἢ } (\vec{u}, \vec{v}) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{καὶ } (\vec{u}, \vec{v}) = \pi, \text{ ὅταν ταῦτα εἶναι ἀντίρροπα ἢ } (\vec{u}, \vec{v}) = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**9ον :** Συνεπίπεδα διανύσματα.— Δύο διανύσματα λέγονται συνεπίπεδα, ὅταν αἱ διευθύνσεις των εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

**Παρατήρησις :** Δύο διανύσματα εἶναι πάντοτε συνεπίπεδα ;

## ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

**1ον :** Πρόσθεσις διανυσμάτων.— Ἐστώσαν  $\vec{u}$  καὶ  $\vec{v}$  δύο ἐλεύθερα διανύσματα με ἀντιπροσώπους ἀντιστοίχως τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα  $\vec{AB}$  καὶ  $\vec{BI}$  (σχ. 3).

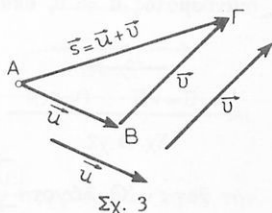


Καλοῦμεν ἄθροισμα τῶν δύο τούτων διανυσμάτων τὸ διάνυσμα  $\vec{s}$ , τοῦ ὁποίου ἀντιπρόσωπος εἶναι τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα  $\vec{AG}$ . Τὸ συμβολίζομεν δὲ ὡς ἑξῆς :

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}.$$

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος γενικεύεται καὶ διὰ πλείονα τῶν δύο διανυσμάτων.

**2ον :** Ἀντίθετα διανύσματα. — Δύο διανύσματα λέγονται ἀντίθετα, ὅταν τὸ ἄθροισμά των εἶναι τὸ μηδενικὸν διάνυσμα.



Ἐὰν  $\vec{AB}$  εἶναι ἓνας ἀντιπρόσωπος τοῦ διανύσματος  $\vec{u}$ , τότε ὁ ἀντιπρόσωπος τοῦ ἄλλου θὰ εἶναι ὁ  $\vec{BA}$ . Τὸ ἀντίθετον τοῦ διανύσματος  $\vec{u}$  εἶναι τὸ  $-\vec{u}$ .

**3ον :** Τριγωνικὴ ἀνισότης δύο διανυσμάτων. — Μεταξὺ τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν τριῶν διανυσμάτων  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  καὶ  $\vec{u} + \vec{v}$  ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον ἀνισοτικήν σχέσιν :

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|,$$

προκύπτουσιν ἐκ τοῦ τριγώνου  $ABG$  τοῦ (σχ. 3), ὅπου τὸ  $=$  λαμβάνει χώραν, ὅταν τὰ  $\vec{u}$  καὶ  $\vec{v}$  εἶναι παράλληλα καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς.

Γενικώτερον, διὰ τὰ διανύσματα :  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  ἰσχύει :

$$|\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots + \vec{u}_n| \leq |\vec{u}_1| + |\vec{u}_2| + \dots + |\vec{u}_n|$$

**4ον :** Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως. — Αὗται συνοψίζονται εἰς τὰς :

α)  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  (ἀντιμεταθετική),

β)  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$  (προσεταιριστική),

γ)  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$  ( $\vec{0}$  = οὐδέτερον στοιχείον),

δ)  $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$  ( $-\vec{u}$  = ἀντίθετον τοῦ  $\vec{u}$ ).

**5ον :** Ἀφαίρεσις δύο διανυσμάτων. — Οἷωνδήποτε ὄντων τῶν διανυσμάτων  $\vec{u}$  καὶ  $\vec{v}$ , ἡ ἐξίσωσις :  $\vec{u} + \vec{x} = \vec{v}$ , ἐπιδέχεται πάντοτε μίαν, καὶ μίαν μόνον, λύσιν, τὴν :

$$\vec{x} = \vec{v} + (-\vec{u}), \text{ τὴν ὁποίαν γράφομεν : } \vec{x} = \vec{v} - \vec{u}.$$

Τὸ διάνυσμα  $\vec{x}$  καλεῖται **διαφορὰ** τῶν διανυσμάτων  $\vec{v}$  καὶ  $\vec{u}$ .

δον : Γινόμενον διανύσματος  $\vec{u}$  επί πραγματικών αριθμών  $k$ .

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δεχόμεθα ὅτι : « Δοθέντος πραγματικού αριθμοῦ  $k \neq 0$  καὶ διανύσματος  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , ὑπάρχει διάνυσμα  $\vec{v}$  τοιοῦτον ὥστε :

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\vec{u}} \\ \xleftarrow{\vec{v}=k\vec{u}} \quad (k < 0) \end{array}$$

Σχ. 4

1ον : Τὸ  $\vec{v}$  νὰ ἔχη τὴν διεύθυνσιν τοῦ  $\vec{u}$ .

2ον : Τὸ  $\vec{v}$  νὰ εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς μὲ τὸ  $\vec{u}$ , ἐὰν  $k > 0$ , ἀντιθέτου δὲ φορᾶς μὲ τὸ  $\vec{u}$ , ὅταν  $k < 0$ .

3ον : Ὁ λόγος  $\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$ , δηλαδή τὸ μήκος τοῦ  $\vec{v}$  πρὸς τὸ μήκος τοῦ  $\vec{u}$  νὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ  $k$ · ἤτοι :

$$\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} = |k| \iff |\vec{v}| = |k| \cdot |\vec{u}|.$$

Παρατηρήσεις : α') Ἐὰν  $k = 0$ , τότε  $\vec{v} = \vec{0}$ , οἰουδήποτε ὄντος τοῦ  $\vec{u}$ .

β') Ἐὰν  $\vec{u} = \vec{0}$ , τότε  $\vec{v} = \vec{0}$ , οἰουδήποτε ὄντος τοῦ  $k$ .

γ') Ἐὰν  $k \cdot \vec{u} = \vec{0}$ , τότε ἢ  $k = 0$ , ἢ  $\vec{u} = \vec{0}$  ἢ  $k = 0$  καὶ  $\vec{u} = \vec{0}$ .

δ') Θὰ εἶναι :  $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$  καὶ  $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$ .

Σημειώσεις : Διὰ τοῦ ἀνωτέρω ἀπεικονίζεται τὸ Σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας κατὰ τὸν μέχρι τοῦδε γνωστὸν τρόπον. Τὸ ἀξίωμα τοῦτο εἶναι θεμελιῶδες διὰ τὴν Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν καὶ συνδέει τὴν Ἀλγεβραν μὲ τὴν Γεωμετρίαν. Θεμελιωτὴς εἶναι ὁ Γάλλος Μαθηματικὸς καὶ φιλόσοφος Καρτέσιος.

Ἀπὸ τοῦδε καὶ εἰς τὸ ἐξῆς τὰ διανύσματα θεωροῦνται ὡς διατεταγμένα ζεύγη πραγματικῶν ἀριθμῶν : τῶν συντεταγμένων προβολῶν αὐτῶν (13). Ἡ τοιαύτη θεώρησις ἀποτελεῖ τὴν Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν.

**7ον : Ἰδιότητες τοῦ γινομένου διανύσματος ἐπὶ ἀριθμὸν  $k \in \mathbb{R}$ .**— Αὗται συνοφίζονται ὡς ἀκολούθως

α')  $\vec{u} = \vec{v} \implies k\vec{u} = k\vec{v}$ , καὶ ἂν  $k \neq 0$ ,  $k\vec{u} = k\vec{v} \implies \vec{u} = \vec{v}$ .

β') Ἐὰν  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , τότε  $k\vec{u} = k_1\vec{u} \implies k = k_1$ .

γ') Εἶναι :  $k(k_1\vec{u}) = k_1(k\vec{u}) = k_1 k_2\vec{u}$ .

δ') Εἶναι  $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ .

Γενικώτερα :  $k \cdot \sum \vec{u}_i = \sum k \vec{u}_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$

ε') Εἶναι :  $(k + k_1) \vec{u} = k\vec{u} + k_1\vec{u}$ .

Γενικώτερα :

$$(k_1 + k_2 + \dots + k_n) \vec{u} = k_1\vec{u} + k_2\vec{u} + \dots + k_n\vec{u} \quad \text{ἢ} \quad \vec{u} \cdot \sum k_i = \sum k_i \vec{u}$$

μὲ  $i = 1, 2, 3, \dots, n$

**3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΒΑΣΙΣ ΜΙΑΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.**— Έστω ευθεία  $xy$  και διάνυσμα  $\vec{i} \neq \vec{0}$ , παράλληλον πρὸς τὴν ευθείαν ταύτην (σχ. 5). Πᾶν ἄλλο διάνυσμα,  $\vec{u}$ , παράλληλον πρὸς τὴν  $xy$  εἶναι τῆς μορφῆς:  $\vec{u} = X \vec{i}$ .

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον, πᾶς ἀντιπρόσωπος τοῦ  $\vec{i}$  φερόμενος ὑπὸ τῆς  $xy$  καλεῖται **διανυσματικὴ βάση τῆς ευθείας ταύτης**.

Ὁ ἀριθμὸς  $X$  καλεῖται **τετμημένη** τοῦ διανύσματος  $\vec{u}$  εἰς τὴν βάσιν  $\vec{i}$ .

Ἀποκαθίσταται οὕτω μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τοῦ Συνόλου τῶν διανυσμάτων τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν  $xy$  καὶ τοῦ συνόλου,  $R$ , τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

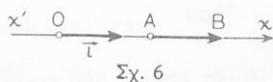
**4. ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΒΑΣΙΣ (ἢ ΦΥΣΙΚΗ).**— Ἡ βάση  $\vec{i}$  καλεῖται **κανονικὴ**, ὅταν τὸ διάνυσμα  $\vec{i}$  ἐκλεγῇ ὡς τὸ **μοναδιαῖον διάνυσμα**. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὁ ἀριθμὸς  $X$  καλεῖται **ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ διανύσματος**  $\vec{u}$ .

Ὁ ἀριθμὸς  $|X|$  εἶναι τὸ μήκος τοῦ διανύσματος τούτου.

**5. ΑΞΩΝ.**— Ἄξων εἶναι ἡ ευθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθῇ ἡ θετικὴ φορά, ἡ ἀρχὴ τοῦ ἄξωνος καὶ τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα,  $\vec{i}$ , τοῦ ὁποίου φορά εἶναι ἡ τοῦ ἄξωνος.

Εἰς τὸ (σχ. 6) εἰκονίζεται ὁ ἄξων  $x'Ox$ , μὲ ἀρχὴν τὸ σημεῖον  $O$ , θετικὴν φοράν τὴν  $Ox$  καὶ μὲ μονάδα μήκους:  $|\vec{i}| = 1$ .

Ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ διανύσματος  $\vec{u}$ , παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξωνα  $x'Ox$ , παρίσταται πολλακίς καὶ διὰ τοῦ  $\vec{u}$ .



Σχ. 6

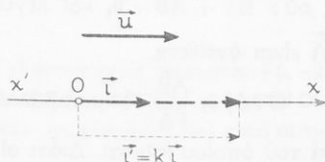
Οὕτως, εἰς τὸ (σχ. 6), ἂν τὸ  $\vec{AB}$  κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξωνος  $x'Ox$ , ὁ λόγος

$\frac{\vec{AB}}{\vec{i}} = \overline{AB}$  εἶναι ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ  $\vec{AB}$ . Ἄρα:

$$\vec{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{i} \quad \eta \quad |\vec{AB}| = |\overline{AB}| \cdot |\vec{i}| = \overline{AB} \cdot 1 = \overline{AB}.$$

**6. ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΕΩΣ.**— Έστω  $\vec{i}$  μία βάση (κανονικὴ ἢ οὐ) ευθείας  $x'Ox$  καὶ  $\vec{i}'$  δευτέρα βάση, ὀριζομένη, ὡς πρὸς τὴν πρώτην, ὑπὸ τῆς σχέσεως  $\vec{i}' = k \vec{i}$ . Έστω τέλος τὸ διάνυσμα  $\vec{u}$  παράλληλον πρὸς τὴν  $x'Ox$ , ἔχον τετμημένην  $X$  εἰς τὴν πρώτην βάσιν καὶ  $X'$  εἰς τὴν δευτέραν. Θὰ ἔχωμεν:

$$\vec{u} = X \vec{i} \quad \text{καὶ} \quad \vec{u} = X' \cdot \vec{i}' = k X' \vec{i}, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad X = k X' \quad \text{καὶ ὅθεν:} \quad X' = \frac{X}{k}.$$



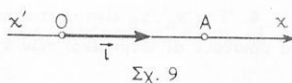
Σχ. 7



**8. ΤΕΤΜΗΜΕΝΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ ΕΠΙ ΑΞΟΝΟΣ.**—'Επί άξονος  $x'Ox$  (σχ. 9) θεωρούμεν σημείον Α.

'Ο λόγος :  $\frac{\overrightarrow{OA}}{1} = \overline{OA} = X_A$  είναι, ως γνωστόν, ή άλγεβρική τιμή του δια-

νύσματος  $\overrightarrow{OA}$  και καλείται **τετμημένη** του σημείου Α. Συμβολίζεται δέ με  $X_A$ . Το Ο καλείται **άρχη** των τετμημένων. Το Ο έχει τετμημένην **μηδέν**.



Είς πᾶν σημείον του άξονος  $x'Ox$  αντιστοιχεί μία, και μόνον μία, τετμημένη.

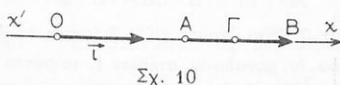
**9. ΕΚΦΡΑΣΙΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΚΕΙΜΕΝΟΥ ΕΠΙ ΑΞΟΝΟΣ.**—'Επί άξονος  $x'Ox$  (σχ. 10) θεωρούμεν τὸ διάνυσμα  $\overrightarrow{AB}$ . Θὰ είναι :

$$\overline{OA} = X_A \quad \text{και} \quad \overline{OB} = X_B.$$

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Chasles θὰ είναι :

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = \overline{OB} + \overline{AO} \quad \text{ἢ} \quad \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

$$\quad \text{ἢ} \quad \overline{AB} = X_B - X_A. \quad (1)$$



Δηλαδή: 'Η άλγεβρική τιμή διανύσματος κειμένου ἐπὶ άξονος ἰσοῦται πρὸς τὴν τετμημένην τοῦ τέματος μείον τὴν τῆς ἀρχῆς.

\*Αρα :

$$\overline{AB} = |X_B - X_A| \quad (2)$$

Παράδειγμα: 'Εάν  $X_A = +3$  και  $X_B = -5$ , τότε :

$$\overline{AB} = (-5) - (+3) = -5-3 = -8 \quad \text{και} \quad AB = |-8| = 8.$$

**10. ΤΕΤΜΗΜΕΝΗ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ.**—'Εάν Γ είναι τὸ μέσον τοῦ διανύσματος  $\overrightarrow{AB}$  (σχ. 10), θὰ ἔχωμεν :

$$\overline{GA} + \overline{GB} = 0 \quad \text{ἢ} \quad (\overline{OA} - \overline{OG}) + (\overline{OB} - \overline{OG}) = 0 \quad \text{ἢ} \quad 2\overline{OG} = \overline{OA} + \overline{OB} \quad \text{ἢ}$$

$$2X_G = X_A + X_B, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad X_G = \frac{X_A + X_B}{2}.$$

Δηλαδή: 'Η τετμημένη τοῦ μέσου διανύσματος κειμένου ἐπὶ άξονος, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμίθροισμα τῶν τετμημένων τῶν ἄκρων του.

Παράδειγμα: 'Εάν  $X_A = +6$  και  $X_B = -10$ , τότε ή τετμημένη  $x_G$  τοῦ μέσου Γ τοῦ διανύσματος  $\overrightarrow{AB}$  θὰ είναι :

$$x_G = \frac{1}{2} (+6 - 10) = -2.$$

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. 'Επὶ τοῦ άξονος  $x'Ox$  θεωρούμεν τὰ σημεία Α, Β, Γ με ἀντιστοίχους τετμημένας +6, -2 καὶ 1ον) Νὰ υπολογισθοῦν οἱ ἀριθμοὶ  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BG}$ ,  $\overline{GA}$ . 2ον) Λαμβάνομεν ὡς ἀρχὴν τὸ σημεῖον Ο', τοιούτον ὥστε  $\overline{OO'} = -3$ . Ποῖαι εἶναι αἱ νέαι τετμημένοι τῶν σημείων Α, Β, Γ και ποῖαι αἱ τιμαὶ τῶν  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BG}$ ,  $\overline{GA}$  ;

2. Έστωσαν A, B δύο σημεία ενός άξονος x'Ox με τετμημένες -2 και 4 αντίστοιχως. Να όρισθῇ σημείον M του άξονος, τοιοϋτον ώστε :  $\overline{MA} = 2 \cdot \overline{MB}$ .

3. Έάν A, B είναι δύο σημεία του άξονος x'Ox με τετμημένες αντίστοιχως -1 και 2,5, να όρισθῇ σημείον M του άξονος, τοιοϋτον ώστε :  $\overline{MA} + 2\overline{MB} = \overline{AB}$  και να όρισθῇ ο λόγος  $\overline{MA} : \overline{MB}$ .

4. Έάν  $x_A, x_B$  είναι αντίστοιχως αἱ τετμημένοι των σημείων A, B ἐπὶ ενός άξονος x'Ox, να όρισθοϋν αἱ τετμημένοι των σημείων Γ και Δ του άξονος, οϋτως ώστε :

$$\overline{AG} = \overline{GD} = \overline{DB}.$$

5. Αἱ τετμημένοι των σημείων A, B, Γ, ενός άξονος x'Ox είναι αντίστοιχως -2, +8, +3. Ὑπάρχει σημείον M του άξονος, τοιοϋτον ώστε :  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MG} = 0$ ;

6. Των σημείων A, B, Γ, Δ όπωςδῆποτε κειμένων ἐπὶ άξονος x'Ox, να αποδειχθῇ ότι :

1ον :  $\overline{DA} \cdot \overline{BG} + \overline{DB} \cdot \overline{GA} + \overline{DG} \cdot \overline{AB} = 0$ .

2ον :  $\overline{DA}^2 \cdot \overline{BG} + \overline{DB}^2 \cdot \overline{GA} + \overline{DG}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BG} \cdot \overline{GA} \cdot \overline{AB} = 0$ .

3ον :  $\overline{BG} \cdot \overline{GD} \cdot \overline{DB} - \overline{GD} \cdot \overline{DA} \cdot \overline{AG} + \overline{DA} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BD} - \overline{AB} \cdot \overline{BG} \cdot \overline{GA} = 0$ .

7. Ἐπὶ άξονος x'Ox διδονται τὰ σημεία A, B, Γ. Δείξτε ότι ὑπάρχει ἐπὶ του άξονος τούτου ἐν μοναδικόν σημείον I, τοιοϋτον ώστε :  $\overline{IA}^3 + \overline{IB}^3 + \overline{IG}^3 - 3 \cdot \overline{IA} \cdot \overline{IB} \cdot \overline{IG} = 0$ .

Έάν M είναι τυχόν σημείον του ἐν λόγω άξονος, τότε :

$$\overline{MA}^3 + \overline{MB}^3 + \overline{MG}^3 - 3 \overline{MA} \cdot \overline{MB} \cdot \overline{MG} = \frac{3}{2} \overline{MI} (\overline{AB}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{GA}^2)$$

και  $\overline{MA}^3 \cdot \overline{BG} + \overline{MB}^3 \cdot \overline{GA} + \overline{MG}^3 \cdot \overline{AB} + 3 \overline{MI} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BG} \cdot \overline{GA} = 0$  (Euler)

## 11. ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.— Καλοϋμεν γραμμικόν συνδυασμόν των ν διανυσμάτων, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ , πᾶν διάνυσμα $\vec{u}$ τῆς μορ-

φῆς :  $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$  ἢ  $(\vec{u} = \sum_1^n \lambda_i \vec{u}_i)$

ἐνθα  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ .

A) Γραμμικὴ ἐξάρτησις δύο διανυσμάτων : Δύο διανύσματα  $\vec{u}_1$  και  $\vec{u}_2$  λέγονται γραμμικῶς ἐξηρητημένα (ἢ ότι ἀποτελοϋν ἐφαρμοστὸν σύστημα), όταν ὑπάρχουν δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$ , ὄχι μηδέν και οἱ δύο, οϋτως ώστε να ἰσχύῃ ἡ ἰσότης :

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 = \vec{0}. \quad (1)$$

Έκ τῆς (1) ἐπεται ότι :  $\lambda_1 \vec{u}_1 = -\lambda_2 \vec{u}_2$ . Έάν δὲ  $\lambda_1 \neq 0$ , τότε  $\vec{u}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{u}_2$ ,

ἡ ὁποία σχέσης ἐκφράζει ότι τὰ διανύσματα  $\vec{u}_1$  και  $\vec{u}_2$  είναι συγγραμμικά.

Εϋκόλως δὲ ἀποδεικνύεται και τὸ ἀντίστροφον. Ὡστε :

Δύο διανύσματα, ὄχι ἀμφότερα μηδενικά, είναι γραμμικῶς ἐξηρητημένα όταν είναι συγγραμμικά.

Παρατηρήσεις :  $\vec{u}_2 = \vec{0}$  και  $\lambda_2 \neq 0 \implies \vec{u}_1 = \vec{0}$  (ἢ  $\lambda_1 = 0$ ),

$\vec{u}_2 \neq \vec{0}$  και  $\lambda_2 = 0 \implies \vec{u}_1 = \vec{0}$  (διότι  $\lambda_1 \neq 0$ ).

Β) Δύο διανύσματα γραμμικῶς ἀνεξάρτητα : Δύο διανύσματα  $\vec{u}_1$  καὶ  $\vec{u}_2$  εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα (συνιστοῦν ἐλεύθερον σύστημα), ἂν :

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 = \vec{0} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \quad (1)$$

1ον : Παρατηροῦμεν : α)  $\vec{u}_2 = \vec{0}$  καὶ  $\vec{u}_1 = \vec{0}$  εἶναι ἀδύνατον, διότι οἱ  $\lambda_1$  καὶ  $\lambda_2$  δύνανται νὰ ἐκλεγοῦν διάφοροι τοῦ μηδενός.

β)  $\vec{u}_2 = \vec{0}$  εἶναι ἀδύνατον, διότι ἡ (1) δύναται νὰ ἐπαληθευθῇ διὰ  $\lambda_1 = 0$  καὶ  $\lambda_2 = 1$ , ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα.

Ἐὰν δύο διανύσματα εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, οὐδὲν ἐξ αὐτῶν εἶναι μηδέν.

2ον : Τὰ δύο διανύσματα  $\vec{u}_1$  καὶ  $\vec{u}_2$  δὲν εἶναι παράλληλα (διότι ἄλλως θὰ ἦσαν γραμμικῶς ἐξηρητημένα). Αἱ διευθύνσεις των ὀρίζουν μίαν διεύθυνσιν ἐπιπέδων.

Γ) Τρία διανύσματα γραμμικῶς ἐξηρητημένα : Τρία διανύσματα, μὴ μηδενικά,  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ , θὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι γραμμικῶς ἐξηρητημένα (σχηματίζουν σύστημα ἐφαρμοστών), ἂν ὑπάρχουν τρεῖς πραγματικοὶ ἀριθμοὶ  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , ὅχι ὅλοι μηδέν, εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἔχωμεν :

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 = \vec{0}.$$

Ὑποθέτομεν τὰ  $\vec{u}_1$  καὶ  $\vec{u}_2$  γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, ὁπότε δὲν θὰ εἶναι  $\lambda_3 = 0$  (διότι, ἄλλως, θὰ εἴχομεν  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ). Ἄρα δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$\vec{u}_3 = -\lambda_1 \vec{u}_1 - \lambda_2 \vec{u}_2 \quad \eta \quad \vec{u}_3 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \vec{u}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \vec{u}_2.$$

Ἐὰν δὲ τεθῇ  $-\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = x_1$  καὶ  $-\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = x_2$ , τότε :

$$\vec{u}_3 = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 \quad (1)$$

Ὡστε : Ἐὰν δύο διανύσματα  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  (οὔτε παράλληλα, οὔτε μηδενικά) εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, καὶ ἂν μετὰ τρίτου εἶναι γραμμικῶς ἐξηρητημένα, κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἢ εἶναι παράλληλα πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Ὑπάρχουν δὲ δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ  $x_1$  καὶ  $x_2$ , τοιοῦτοι ὥστε νὰ ἰσχύη ἡ (1).

Ἀντιστρόφως : Ἐὰν τρία διανύσματα  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  εἶναι παράλληλα πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, τῶν  $\vec{u}_1$  καὶ  $\vec{u}_2$  ὄντων γραμμικῶς ἀνεξαρτητῶν, τὰ διανύσματα  $\vec{AB}_1 = \vec{u}_1, \vec{AB}_2 = \vec{u}_2, \vec{AB}_3 = \vec{u}_3$  κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ Α καὶ παραλλήλου πρὸς τοὺς φορεῖς τῶν  $\vec{u}_2$  καὶ  $\vec{u}_3$ .

Κατασκευάζομεν τὸ παραλληλόγραμμον  $AP_1B_3P_2$  (σχ. 11), τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ φέρονται ὑπὸ τῶν  $\vec{AB}_1$  καὶ  $\vec{AB}_2$ . Θὰ ἔχωμεν :  $\vec{AB}_3 = \vec{AP}_1 + \vec{AP}_2$ .

Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:  $\vec{AP}_1 = x_1 \cdot \vec{AB}_1 = x_1 \vec{u}_1$  καὶ  $\vec{AP}_2 = x_2 \vec{AB}_2 = x_2 \vec{u}_2$ .

\* Ἀρα:  $\vec{AB}_3 = x_1 \cdot \vec{u}_1 + x_2 \cdot \vec{u}_2$  ἢ  $\vec{u}_3 = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2$  (1)

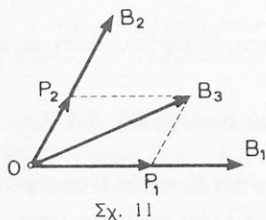
Οἱ  $x_1$ , καὶ  $x_2$  εἶναι μοναδικοί. Πράγματι· ἐὰν ὑπῆρχον δύο ἄλλοι πραγματικοὶ ἀριθμοί,  $x'_1$  καὶ  $x'_2$ , τοιοῦτοι ὥστε  $\vec{u}_3 = x'_1 \vec{u}_1 + x'_2 \vec{u}_2$  (2), τότε ἀφαιρούμεντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2), θὰ ἔχωμεν:

$$\vec{0} = (x_1 - x'_1) \vec{u}_1 + (x_2 - x'_2) \vec{u}_2.$$

\* Ἀρα (§ 11, Β) θὰ εἶναι  $x_1 - x'_1 = 0$ , ἐξ οὗ  $x_1 = x'_1$  καὶ  $x_2 - x'_2 = 0$ , ἐξοῦ  $x_2 = x'_2$ .

Ὡστε: Ἡ ἀναγκαία καὶ ἰκανὴ συνθήκη ἵνα τρία διανύσματα  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ , ὧν δύο  $\vec{u}_1$  καὶ  $\vec{u}_2$  εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, ἀποτελοῦν σύστημα ἐφαρμοστόν, εἶναι νὰ ὑπάρχουν δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ  $x_1$  καὶ  $x_2$ , τοιοῦτοι ὥστε

$$\vec{u}_3 = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2.$$





## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

### ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

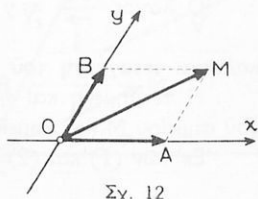
#### ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**12. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑΙ ΣΥΝΙΣΤΩΣΑΙ.**— Ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) θεωροῦμεν τὸ

διάνυσμα  $\vec{OM}$  καὶ δύο διακεκριμένας διευθύνσεις  $Ox$  καὶ  $Oy$  (σχ. 12). Αἱ ἐκ τοῦ  $M$  ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς τὰς  $Oy$  καὶ  $Ox$  τέμνουσιν τὴν  $Ox$  εἰς τὸ  $A$  καὶ τὴν  $Oy$  εἰς τὸ σημεῖον  $B$ . Σχηματίζεται οὕτω τὸ παραλληλόγραμμον  $BOAM$ . Θὰ ἔχωμεν :

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} \iff \vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}.$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι τὸ διάνυσμα  $\vec{OM}$  ἀνέ-  
λύθη κατὰ τὰς διευθύνσεις  $Ox$  καὶ  $Oy$  εἰς τὰ διανύ-  
σματα  $\vec{OA}$  καὶ  $\vec{OB}$ .



Τὰ δύο διανύσματα  $\vec{OA}$  καὶ  $\vec{OB}$  καλοῦνται **διανυσματικαὶ συνιστώσαι** τοῦ διανύσματος  $\vec{OM}$  ἐπὶ τῶν ἀξόνων  $Ox$  καὶ  $Oy$ .

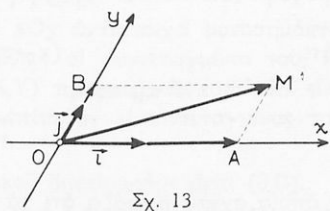
Τὰ διανύσματα  $\vec{OA}$  καὶ  $\vec{OB}$  λέγονται καὶ **προβολαὶ** τοῦ διανύσματος  $\vec{OM}$  ἐπὶ τῶν ἀξόνων  $Ox$  καὶ  $Oy$  ἀντιστοίχως παραλλήλως πρὸς τὸν ἀξονα  $Oy$  καὶ  $Ox$ .

Ἀντιστρόφως, εἰς δύο διανυσματικὰς συνιστώσας  $\vec{OA}$  καὶ  $\vec{OB}$ , δοθείσας, ἀντιστοιχεῖ τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα  $\vec{OM}$ , καὶ μόνον τοῦτο.

**13. ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΑΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ.**— Ἐστωσαν δύο ἄξονες  $Ox$  καὶ  $Oy$  (σχ. 13), τῶν ὁποίων τὰ μοναδιαῖα διανύσματα εἶναι ἀντιστοίχως τὰ διανύσματα  $\vec{i}$  καὶ  $\vec{j}$  ἀντιστοίχως, κοινῆς ἀρχῆς  $O$ .

Τὸ διατεταγμένον ζεῦγος  $(\vec{i}, \vec{j})$  θὰ λέ-  
γωμεν ὅτι ἀποτελεῖ μετὰ τοῦ  $O$  ἐπί-πεδον **βά-  
σεως** καὶ θὰ συμβολίζεται οὕτως :  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Ὁ ἄξων  $Ox$  καλεῖται ἄξων τῶν **τετμημέ-  
νων** καὶ ὁ ἄξων  $Oy$  καλεῖται ἄξων τῶν **τεταγμένων**. Τὸ σημεῖον  $O$  καλεῖται **ἀρχὴ**  
τῶν ἀξόνων  $Ox$  καὶ  $Oy$ , οἱ ὅποιοι καλοῦνται καὶ ἄξονες τῶν συντεταγμένων.



Τὸ σύστημα τῶν συντεταγμένων θὰ λέγεται **κανονικόν**, ὅταν τὰ  $\vec{i}$  καὶ  $\vec{j}$  ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος. Θὰ λέγεται δὲ **ὀρθογώνιον**, ἔαν τὰ  $\vec{i}$  καὶ  $\vec{j}$  εἶναι κάθετα, καὶ **ὀρθοκανονικόν**, ὅταν τὰ  $\vec{i}$  καὶ  $\vec{j}$  εἶναι κάθετα καὶ τοῦ αὐτοῦ μήκους.

Ἡδη, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων θεωροῦμεν τὸ διάνυσμα  $\vec{OM}$ . Ἐὰν ἀχθοῦν αἱ παράλληλοι  $MA$  καὶ  $MB$  πρὸς τοὺς ἀξονας  $Oy$  καὶ  $Ox$  ἀντιστοίχως, προκύπτουν τὰ διανύσματα  $\vec{OA}$  καὶ  $\vec{OB}$ , τὰ ὅποια εἶναι αἱ συνιστώσαι τοῦ  $\vec{OM}$ .

Ὁ λόγος  $\frac{\vec{OA}}{i} = x$  (1) εἶναι ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ διανύσματος  $\vec{OA}$  καὶ καλεῖται **τετμημένη** τοῦ σημείου  $M$ .

Ὁ λόγος  $\frac{\vec{OB}}{j} = y$  (2) εἶναι ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ διανύσματος  $\vec{OB}$  καὶ καλεῖται **τεταγμένη** τοῦ σημείου  $M$ .

Ἡ τετμημένη καὶ ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου  $M$  καλοῦνται **συντεταγμέναι** τοῦ σημείου  $M$  καὶ σημειώνομεν  $M(x,y)$ .

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\vec{OA} = x \vec{i} \quad \text{καὶ} \quad \vec{OB} = y \vec{j}$$

Ἐπειδὴ δὲ  $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$ , ἔπεται ὅτι :  $\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j}$ , καὶ ἂν  $\vec{OM} = \vec{u}$ , τότε :

$$\boxed{\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j}} \quad (3)$$

καὶ θὰ λέγωμεν ὅτι ἀνελύσαμεν τὸ διάνυσμα  $\vec{u}$  εἰς δύο διανύσματα, τῶν ὁποίων αἱ διευθύνσεις εἶναι αἱ τῶν  $\vec{i}$  καὶ  $\vec{j}$ .

Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἀνάλυσις (3) εἶναι **μοναδική**. Διότι, ἔαν εἴχομεν συγχρόνως :

$$\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$$

τότε :

$$(x - x_1) \vec{i} = (y_1 - y) \vec{j}$$

Ἐὰν δὲ  $x \neq x_1$ , τότε :

$$\vec{i} = \frac{y_1 - y}{x - x_1} \cdot \vec{j} \quad (4)$$

ἡ ὁποία σχέσις ἐκφράζει ὅτι τὰ διανύσματα  $\vec{i}$  καὶ  $\vec{j}$  εἶναι συγγραμμικά, ὅπερ ἄτοπον. Ἀρα :  $x = x_1$  καὶ  $y = y_1$ .

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι : πᾶν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα  $\vec{u}$  τοῦ ἐπιπέδου

τῶν ἀξόνων χαρακτηρίζεται ὑπὸ τῶν δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν  $x$  καὶ  $y$  (τῶν συντεταγμένων του).

#### 14. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ.— Ἐπὶ τοῦ ἐπι-

πέδου τῶν ἀξόνων  $x'Ox$  καὶ  $y'Oy$  θεωροῦμεν τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα  $\vec{V}$ , τοῦ ὁποίου αἱ προβολαὶ ἐπὶ τῶν ἀξόνων  $Ox$  καὶ  $Oy$  εἶναι τὰ διανύσματα  $\vec{V}_1$  καὶ  $\vec{V}_2$  ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν δὲ καὶ τὸν ἀντιπρόσωπον τοῦ  $\vec{V}$ , τὸ διάνυσμα  $\vec{OM}$ .

Ἐὰν  $\vec{OA}$  καὶ  $\vec{OB}$  εἶναι αἱ προβολαὶ τοῦ  $\vec{OM}$  ἐπὶ τῶν ἀξόνων  $Ox$  καὶ  $Oy$  ἀντιστοίχως, τότε, ὡς γνωστόν, θὰ εἶναι :

$$\vec{V}_1 = \vec{OA} \quad \text{καὶ} \quad \vec{V}_2 = \vec{OB} \quad \text{καὶ} \quad \vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \quad (1)$$

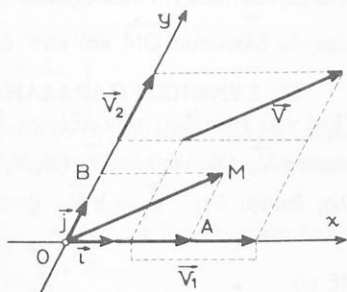
Ἐὰν δὲ  $X$  καὶ  $Y$  εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ  $M$ , τότε :

$$\vec{OA} = X\vec{i} \quad \text{καὶ} \quad \vec{OB} = Y\vec{j},$$

ὁπότε :  $\vec{V}_1 = X\vec{i}$  καὶ  $\vec{V}_2 = Y\vec{j}$  καὶ κατ' ἀ-

κολουθίαν :

$$\boxed{\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}} \quad (2)$$



Σχ. 14

Οἱ ἀριθμοὶ  $X$  καὶ  $Y$  καλοῦνται **συντεταγμέναι προβολαὶ** τοῦ διανύσματος  $\vec{V}$  καὶ σημειώνομεν :  $\vec{V}(X,Y)$ .

Τὰ διανύσματα  $X\vec{i}$  καὶ  $Y\vec{j}$  ὀνομάζονται **συνιστώσαι** τοῦ ἐλευθέρου διανύσματος  $\vec{V}$  κατὰ τοὺς ἀξονας  $Ox$  καὶ  $Oy$ .

Ἀντιστρόφως, δοθεῖσιν τῶν συντεταγμένων προβολῶν  $X$  καὶ  $Y$  ἐνὸς ἐλευθέρου διανύσματος  $\vec{V}$ , ὑπάρχει ἐπὶ τοῦ ἀξονος  $Ox$  διάνυσμα  $\vec{V}_1$ , τοιοῦτον ὥστε  $\vec{V}_1 = X$ , καὶ ἐπὶ τοῦ ἀξονος  $Oy$  διάνυσμα  $\vec{V}_2$ , τοιοῦτον ὥστε  $\vec{V}_2 = Y$ . Πᾶν δὲ διάνυσμα  $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$  ἔχει συνιστώσας ἐπὶ τῶν ἀξόνων τούτων ἴσας πρὸς  $X, Y$ .

Ὡστε : Εἰς πᾶν διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου  $xOy$  ἀντιστοιχεῖ μονοσημάντως ἓν διατεταγμένον ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν : αἱ συντεταγμέναι του, καὶ ἀντιστρόφως : Πᾶν διατεταγμένον ζεῦγος  $(X,Y)$  πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀντίστοιχον ἐνὸς καὶ μόνον διανύσματος εἰς τὸ ἐπίπεδον μὲ συντεταγμένας τοὺς ἐν λόγω ἀριθμούς.

**Σημείωσις :** Αἱ συντεταγμέναι τοῦ μηδενικοῦ διανύσματος εἶναι  $(0,0)$ .

Ἄρα : Τὸ διατεταγμένον ζεῦγος  $(X, Y)$  ὀρίζει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων  $Ox$  καὶ  $Oy$  ἓν, καὶ μόνον ἓν, ἐλεύθερον διάνυσμα  $\vec{V}$ .

**Παρατηρήσεις :** Ἐὰν  $\vec{V} = \vec{0}$ , τότε  $X = Y = 0$  καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐὰν τὸ  $\vec{V}$  εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα  $x'Ox$ , τότε  $Y = 0$  καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐὰν τὸ  $\vec{V}$  εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα  $y'Oy$ , τότε  $X = 0$  καὶ ἀντιστρόφως.

Αἱ καρτεσιαναὶ συντεταγμέναι ἐνὸς σημείου  $M$  εἶναι αἱ ἀλγεβρικοὶ τιμαὶ τῶν συνιστωσῶν τοῦ διανύσματος  $\vec{OM}$  ( $O$  ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων).

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι : Ἐὰν δύο ἐλεύθερα διανύσματα  $\vec{V}_1$  καὶ  $\vec{V}_2$ , ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων ( $Ox, Oy$ ) κείμενα, ἔχουν τὰς διανυσματικὰς συνιστώσας αὐτῶν ἴσας ἐπὶ τῶν ἀξόνων  $x'Ox$  καὶ  $y'Oy$ , θὰ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα  $\vec{OM}$  καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἴσα μετὰξὺ τῶν.

### 15. ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ ΔΥΟ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.—

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων  $Ox$  καὶ  $Oy$  θεωροῦμεν δύο παράλληλα διανύσματα  $\vec{V}_1 (X_1, Y_1)$  καὶ  $\vec{V}_2 (X_2, Y_2)$  ἐλεύθερα. Ἀφοῦ τὰ  $\vec{V}_1$  καὶ  $\vec{V}_2$  εἶναι παράλληλα, ἔπεται ὅτι :  $\vec{V}_1 = k \vec{V}_2$ , ὅπου  $k \in \mathbb{R}$  ἢ

$$X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} = k (X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j})$$

ἔξ οὗ

$$X_1 = kX_2 \text{ καὶ } Y_1 = kY_2$$

ἢ

$$X_1 Y_2 = k X_2 Y_2 \text{ καὶ } X_2 Y_1 = k X_2 Y_2$$

$$\text{* Ἀρα : } X_1 Y_2 = X_2 Y_1 \quad \text{ἢ} \quad \frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2}. \quad (1)$$

Ἀντιστρόφως, ἐὰν  $\vec{V}_2 \neq \vec{0}$  καὶ τεθῇ  $\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \lambda \in \mathbb{R}$ , τότε

$$\left. \begin{array}{l} X_1 = \lambda X_2 \\ Y_1 = \lambda Y_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} X_1 \vec{i} = \lambda X_2 \vec{i} \\ Y_1 \vec{j} = \lambda Y_2 \vec{j} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} = \lambda (X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j}) \quad \text{ἢ} \quad \vec{V}_1 = \lambda \vec{V}_2$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὰ διανύσματα  $\vec{V}_1$  καὶ  $\vec{V}_2$  εἶναι παράλληλα. Ὡστε :

Ἡ ἀναγκαία καὶ ἰκανὴ συνθήκη ἵνα δύο ἐλεύθερα διανύσματα εἶναι παράλληλα, εἶναι ἡ :

$$X_1 Y_2 = X_2 Y_1 \quad \text{ἢ} \quad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2}}$$

Ἐὰν  $X_1 Y_2 \neq X_2 Y_1$  τὰ διανύσματα εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα.

Ἐὰν  $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$ , τότε  $k = 1$  καὶ κατ' ἀκολουθίαν  $\vec{V}_1 = \vec{V}_2 \iff X_1 = X_2$  καὶ  $Y_1 = Y_2$ , ἐφ' ὅσον εἶναι ἴσα πρὸς τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα  $\vec{OM}$  (σχ. 14).

Ὡστε : Ἴνα δύο ἐλεύθερα διανύσματα εἶναι ἴσα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ὁμώνυμοι συντεταγμέναι προβολαὶ τῶν νὰ εἶναι ἴσαι.

**16. ΘΕΩΡΗΜΑ I.**— Αί συντεταγμένοι προβολαί τοῦ ἄθροίσματος ἐλευθέρων διανυσμάτων ἰσοῦνται ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων προβολῶν αὐτῶν.

Ἐστω  $\vec{\Sigma}(X, Y)$  τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων :

$$\vec{V}_1(X_1, Y_1), \vec{V}_2(X_2, Y_2), \dots, \vec{V}_v(X_v, Y_v)$$

Θὰ εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν  $\vec{\Sigma} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \dots + \vec{V}_v$ , ἀφ' ἑτέρου δέ:  $\vec{\Sigma} = X\vec{i} + Y\vec{j}$

$$\text{καὶ } \vec{V}_1 = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j}, \vec{V}_2 = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j}, \dots, \vec{V}_v = X_v\vec{i} + Y_v\vec{j}$$

$$\begin{aligned} \eta \quad X\vec{i} + Y\vec{j} &= (X_1\vec{i} + Y_1\vec{j}) + (X_2\vec{i} + Y_2\vec{j}) + \dots + (X_v\vec{i} + Y_v\vec{j}) \\ &= (X_1 + X_2 + \dots + X_v)\vec{i} + (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_v)\vec{j} \end{aligned}$$

$$\text{ἐξ οὗ: } \left. \begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_v \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_v \end{aligned} \right\}$$

**17. ΘΕΩΡΗΜΑ II.**— Αί συντεταγμένοι προβολαί τῆς διαφορᾶς δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων προβολῶν αὐτῶν.

Ἐστωσαν  $\vec{V}_1 = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j}$  καὶ  $\vec{V}_2 = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j}$  τὰ δύο ἐλεύθερα διανύσματα καὶ  $\vec{W} = X\vec{i} + Y\vec{j}$  ἡ διαφορὰ αὐτῶν. Θὰ εἶναι :

$$\vec{W} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$$

$$\begin{aligned} \eta \quad X\vec{i} + Y\vec{j} &= (X_1\vec{i} + Y_1\vec{j}) - (X_2\vec{i} + Y_2\vec{j}) \\ &= (X_1 - X_2)\vec{i} + (Y_1 - Y_2)\vec{j} \end{aligned}$$

$$\text{ἐξ οὗ: } \left. \begin{aligned} X &= X_1 - X_2 \\ Y &= Y_1 - Y_2 \end{aligned} \right\}$$

**Παρατήρησις :** Ἐάν  $\lambda \in \mathbb{R}$ , τότε θὰ ἔχωμεν :

$$\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} \implies \lambda \vec{V} = \lambda X\vec{i} + \lambda Y\vec{j}$$

**18. ΣΥΝΙΣΤΩΣΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΟΡΙΖΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΤΩΝ ΑΚΡΩΝ ΤΟΥ.**— Ἐστω  $\vec{AB}$  διάνυσμα ἀρχῆς Α ( $x_1, y_1$ ) καὶ πέρατος Β ( $x_2, y_2$ ).

Κατὰ τὰ γνωστά θὰ εἶναι :

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \quad (1)$$

Ἀλλὰ:  $\vec{OB} = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j}$  καὶ

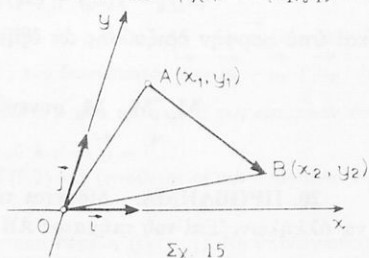
$\vec{OA} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j}$  καὶ ἡ (1) γίνεταί :

$$\vec{AB} = (X_2\vec{i} + Y_2\vec{j}) - (X_1\vec{i} + Y_1\vec{j})$$

ἐξ οὗ :

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

(2)



Ἐὰν δὲ  $X$  καὶ  $Y$  εἶναι αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τοῦ  $\vec{AB}$ , τότε :

$$\vec{AB} = X\vec{i} + Y\vec{j},$$

καὶ ἡ (2) γίνεται :  $X\vec{i} + Y\vec{j} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$

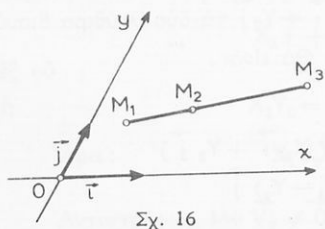
ἐξ οὗ :

$$\begin{cases} X = x_2 - x_1 \\ Y = y_2 - y_1 \end{cases} \quad (3)$$

Δηλαδή : Αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ διανύσματος ἰσοῦνται ἀντιστοίχως πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων τῶν ἄκρων του (τοῦ πέρατος μείον τῆς ἀρχῆς).

**19. ΣΥΝΘΗΚΗ ΙΝΑ ΤΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΚΕΙΝΤΑΙ ΕΠ' ΕΥΘΕΙΑΣ.**— Ἐστωσαν  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3)$  τρία σημεῖα (σχ. 16).

Ἡ ἀναγκαία καὶ ἰκανὴ συνθήκη ἵνα τὰ τρία ταῦτα σημεῖα κείνται ἐπ' εὐ-



θείας, εἶναι τὰ διανύσματα  $\vec{V} = \vec{M_1M_2}$  καὶ  $\vec{V}' = \vec{M_1M_3}$ , μὴ μηδενικά ἐξ ὑποθέσεως, νὰ κείνται ἐπ' εὐθείας. Ἀλλὰ :

$$\vec{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j},$$

$$\text{καὶ } \vec{M_1M_3} = (x_3 - x_1)\vec{i} + (y_3 - y_1)\vec{j}.$$

Ἄρα κατὰ τὴν (§ 15) εἶναι :

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0.$$

Ἡ συνθήκη αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἐξῆς :

$$(x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_3 - y_2x_3) + (x_3y_1 - y_3x_1) = 0$$

καὶ ὑπὸ μορφήν ὀριζούσης ὡς ἐξῆς :

$$M_1, M_2, M_3 \text{ συνευθειακὰ} \iff \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

**20. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.**— Δίδονται τὰ σημεῖα  $A(x_1, y_1)$  καὶ  $B(x_2, y_2)$  διακεκριμένα ἀλλήλων. Ἐπὶ τοῦ τμήματος  $AB$  νὰ εὑρεθῇ σημεῖον  $M$ , τοιοῦτον ὥστε :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -k \neq -1, \text{ ὅπου } k \in \mathbb{R}$$

Ἐκ τῆς δοθείσης ἰσότητος ἔπεται ὅτι :  $\vec{MA} = -k \cdot \vec{MB}$  (σχ. 17).

$$\eta \quad \vec{OA} - \vec{OM} = -k (\vec{OB} - \vec{OM})$$

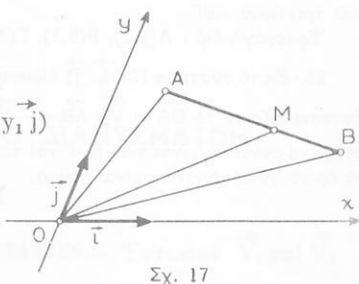
$$\eta \quad \vec{OM} (k+1) = k \cdot \vec{OB} + \vec{OA}$$

$$\eta \quad (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j})(k+1) = k(x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}) + (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j})$$

$$= (kx_2 + x_1) \vec{i} + (ky_2 + y_1) \vec{j}$$

ἐξ οὗ :

$$x = \frac{kx_2 + x_1}{k+1} \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{ky_2 + y_1}{k+1} \quad (2)$$



**21. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ.** — Αὗται συνάγονται ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) τῆς (§ 20) διὰ  $k = 1$ . Ἄρα :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Δηλαδή : Αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου ἐνὸς διανύσματος ἰσοῦνται ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων τῶν ἄκρων του.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8. Δείξατε ὅτι τὰ διανύσματα  $\vec{V}_1(2, -1)$  καὶ  $\vec{V}_2(6, -3)$  εἶναι γραμμικῶς ἐξηρητημένα.

9. Δείξατε ὅτι τὰ διανύσματα  $\vec{V}_1(2, 1)$  καὶ  $\vec{V}_2(3, 1)$  εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα.

10. Δίδονται τὰ διανύσματα :  $\vec{u}_1(-1, 2)$ ,  $\vec{u}_2(2, 3)$ ,  $\vec{u}_3(-5, -4)$ .

Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ διανύσματα :

$$\vec{x} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \quad \vec{y} = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3, \quad \vec{z} = -\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3.$$

11. Νὰ ὁρισθῇ ὁ  $\alpha$ , ὥστε τὰ διανύσματα  $\vec{u}_1(\alpha, 4)$  καὶ  $\vec{u}_2(3, \alpha-1)$  νὰ εἶναι παράλληλα.

12. Διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ  $\lambda$  τὰ διανύσματα  $\vec{u}_1(\lambda+3, \lambda+1)$  καὶ  $\vec{u}_2(-3, \lambda-1)$  συνιστοῦν ἐπίπεδον βάσεως ;

13. α) Διὰ ποίας τιμᾶς τῶν  $\lambda$  καὶ  $\mu$  τὰ διανύσματα  $\vec{u}(\lambda-4, \mu-4)$  καὶ  $\vec{v}(3\lambda+8, 4\mu-1)$  εἶναι ἴσα ;

β) Δίδονται τὰ διανύσματα  $\vec{u}_1(3, -2)$ ,  $\vec{u}_2(2\lambda-\mu, \lambda+2\mu-4)$  καὶ  $\vec{u}_3(\lambda-3\mu+2, -3\lambda+3\mu-2)$  καὶ ζητοῦνται αἱ συνιστώσαι  $(X, Y)$  τοῦ διανύσματος  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$ , ὥς καὶ ἡ σχέση, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν  $\lambda, \mu$  ἵνα τὸ  $\vec{u}$  εἶναι συγγραμμικὸν τοῦ  $\vec{v}(-3, 4)$ . Ἀκολουθῶς νὰ εὗρητε διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ  $\lambda$  εἶναι  $\vec{u} = \vec{0}$ .

γ) Δίδονται τὰ σημεία  $A(-1, 2)$ ,  $B(3, -1)$  καὶ  $\Gamma(5, 1)$  καὶ ζητοῦνται αἱ συντεταγμέναι τῆς κορυφῆς  $\Delta$  τοῦ παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ .

14. Δίδονται  $A(3, 2)$  καὶ  $\vec{AB}(5, -3)$  εἰς τὸ σύστημα βάσεως  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ  $B$  καὶ νὰ ὁρισθῇ ἡ θέσις τοῦ  $AB$ .

15. Δίδονται τὰ διακεκριμένα σημεία  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  καὶ  $\Gamma(x_3, y_3)$ . Νὰ υπολογισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου  $M$  τοῦ  $B\Gamma$  καὶ ἀκολούθως αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου βάρους  $Z$  τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Ἐφαρμογή διὰ:  $A(1,2)$ ,  $B(5,3)$ ,  $\Gamma(3,5)$ .

16. Εἰς τὸ σύστημα  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  δίδονται τὰ διανύσματα  $\vec{V}_1(1,1)$ ,  $\vec{V}_2(-3,2)$  καὶ  $\vec{V}_3(2,1)$ . Κατασκευάζομεν τὸ  $\vec{OA} = \vec{V}_1$ ,  $\vec{AB} = -\vec{V}_2$ ,  $\vec{B\Gamma} = \vec{V}_3$ . 1ον) Νὰ γίνη τὸ σχῆμα, 2ον) Νὰ ὁρισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν  $B$ ,  $\Gamma$  καὶ τοῦ μέσου  $M$  τοῦ  $B\Gamma$ , 3ον) Κατασκευάζομεν τὸ  $\vec{AD} = \vec{B\Gamma}$ , νὰ ὁρισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ  $D$ .



### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

## ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΝ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

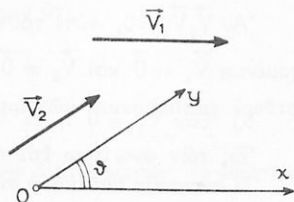
### ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**22. ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.**— Έστωσαν  $\vec{V}_1$  και  $\vec{V}_2$  δύο ελεύθερα διανύσματα (σχ. 18).

Έκ του τυχόντος σημείου  $O$  του χώρου ἄγομεν δύο ἡμιευθείας  $Ox$  καὶ  $Oy$  παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους πρὸς τὰ διανύσματα  $\vec{V}_1$  καὶ  $\vec{V}_2$ . Ἡ προκύπτουσα γωνία  $xOy$  εἶναι :

α) Ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ σημείου  $O$ , καθόσον αἱ γωνίαι μὲ πλευράς παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους εἶναι ἴσαι.

β) Εἶναι μηδέν, ἂν τὰ διανύσματα  $\vec{V}_1$  καὶ  $\vec{V}_2$  εἶναι παράλληλα καὶ ὁμόρροπα· ἴση δὲ πρὸς 2 ὀρθός, ἂν τὰ διανύσματα ταῦτα εἶναι παράλληλα καὶ ἀντίρροπα.



Σχ. 18

γ) Ἀνεξάρτητος τῆς τάξεως τῶν διανυσμάτων  $\vec{V}_1$  καὶ  $\vec{V}_2$ .

Ὡστε : Δοθέντων δύο διανυσμάτων  $\vec{V}_1$  καὶ  $\vec{V}_2$ , ἀντιστοιχίζομεν εἰς αὐτὰ τὴν γωνίαν  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2$  ὀρθῶν), ἡ ὁποία καλεῖται γωνία τῶν δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων  $\vec{V}_1$  καὶ  $\vec{V}_2$ .

Παρατήρησις : Μία τοιαύτη γωνία  $\theta$  δὲν εἶναι προσανατολισμένη.

**23. ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΝ ἢ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΝ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.**— Καλοῦμεν ἐσωτερικὸν ἢ ἀριθμητικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν, ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν τῶν δύο διανυσμάτων ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας αὐτῶν.

Έστωσαν δύο διανύσματα  $\vec{V}_1$  καὶ  $\vec{V}_2$  (σχ. 18) καὶ  $\theta$  ἡ γωνία αὐτῶν. Ἐὰν  $|\vec{V}_1|$  καὶ  $|\vec{V}_2|$  εἶναι τὰ μήκη τῶν διανυσμάτων τούτων, τότε τὸ γινόμενον :

$$|\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \cos \theta \in \mathbb{R}$$

εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῶν διανυσμάτων  $\vec{V}_1$  καὶ  $\vec{V}_2$  καὶ σημειώνεται ὡς ἑξῆς :

$$\vec{V}_1 \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \cos \theta = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \cos \theta \in \mathbb{R} \quad (1)$$

**Συνέπεται :** 1ον. "Εστω  $0 \leq \theta \leq \pi$ , ή γωνία τῶν  $\vec{V}_1 \neq \vec{0}, \vec{V}_2 \neq \vec{0}$ , ὁπότε :

α) 'Εάν  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \implies \text{συν}\theta > 0$ , καὶ ἄρα  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$  θετικόν

'Αντιστρόφως : 'Εάν  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 > 0$ , τότε  $|\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \text{συν}\theta > 0$  ἢ  $\text{συν}\theta > 0$ , ἐξ οὗ ἔπεται ὅτι  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ .

β) 'Εάν  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \implies \text{συν}\theta < 0$  καὶ  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$  ἀρνητικόν.

'Αντιστρόφως : 'Εάν  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 < 0$ , τότε  $|\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \text{συν}\theta < 0$  ἢ  $\text{συν}\theta < 0$ , ἐξ οὗ  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ .

γ) 'Εάν  $\theta = \frac{\pi}{2} \implies \text{συν}\theta = 0$  καὶ ἄρα  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$ .

"Αν  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$ , τότε τοῦτο σημαίνει ὅτι τὰ  $\vec{V}_1$  καὶ  $\vec{V}_2$  εἶναι κάθετα (ἢ ἐνδεχομένως  $\vec{V}_1 = \vec{0}$  καὶ  $\vec{V}_2 \neq \vec{0}$  ἢ  $\vec{V}_1 \neq \vec{0}$  καὶ  $\vec{V}_2 = \vec{0}$  ἢ  $\vec{V}_1 = \vec{0}$  καὶ  $\vec{V}_2 = \vec{0}$ ).

δ) 'Εάν  $\vec{V}_1 = \vec{0}$  ἢ  $\vec{V}_2 = \vec{0}$  ἢ  $\vec{V}_1 = \vec{0}$  καὶ  $\vec{V}_2 = \vec{0}$ , τότε  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$ .

'Εκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι :

'Η ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα δύο διανύσματα εἶναι κάθετα ἐπ' ἀλλήληα, ἐκφράζεται διὰ τοῦ μηδενισμοῦ τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου αὐτῶν.

Δύο τοιαῦτα διανύσματα θὰ καλοῦνται ὀρθογώνια.

Τὸ μηδενικὸν διάνυσμα εἶναι κάθετον πρὸς πᾶν διάνυσμα (μὴ ἐξαιρουμένου τοῦ ἑαυτοῦ του).

2ον : 'Επειδὴ  $|\vec{i}| = 1$  καὶ  $|\vec{j}| = 1 \implies \vec{i} \cdot \vec{j} = \text{συν}\theta$

3ον : 'Επειδὴ ἡ γωνία  $\theta$  εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς τάξεως τῶν διανυσμάτων

$\vec{V}_1$  καὶ  $\vec{V}_2$ , ἔπεται ὅτι :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \text{συν}\theta = |\vec{V}_2| |\vec{V}_1| \text{συν}\theta = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$$

ἥτοι :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1.$$

"Ωστε : Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων ἰσχύει ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως.

4ον : "Εστω τυχὸν διάνυσμα  $\vec{V}$ . Τοῦτο μὲ τὸν ἑαυτὸν του σχηματίζει γωνίαν  $\theta = 0$ . "Αρα  $\text{συν}\theta = 1$  καὶ κατ' ἀκολουθίαν :

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = |\vec{V}| \cdot |\vec{V}| \text{συν}\theta = |\vec{V}|^2 \cdot 1 = |\vec{V}|^2$$

ἥτοι :

$$\vec{V}^2 = |\vec{V}|^2.$$

5ον : Θεωροῦμεν δύο διανύσματα  $\vec{u} \neq \vec{0}$  καὶ  $\vec{v} \neq \vec{0}$  γραμμικῶς ἐξηρημένα. Θέτομεν  $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ .

Ἐὰν  $k > 0$ , δύο ἀντιπρόσωποι  $\vec{AB}$  καὶ  $\vec{A_1B_1}$  τῶν διανυσμάτων τούτων εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς. Ἄρα :

$$\gamma\omega\nu(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad \text{καὶ} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}|.$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν ἄξονα *παράλληλον* πρὸς τὸ  $\vec{u}$  ἢ πρὸς τὸ  $\vec{v}$ , εἶναι προφανὲς ὅτι :  $|\vec{u}| = \vec{u} \cdot \vec{u}$  ἢ  $|\vec{u}| = -\vec{u} \cdot \vec{u}$ . Ὁμοίως καὶ διὰ τὸ  $\vec{v}$ . Ἄρα :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Ἐὰν  $k < 0$ , τότε  $\gamma\omega\nu(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$  καὶ  $\text{syn}(\vec{u}, \vec{v}) = -1$ .

Κατ' ἀκολουθίαν :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| |\vec{v}|$ .

Ἐργαζόμενοι δὲ ὅπως προηγουμένως, εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

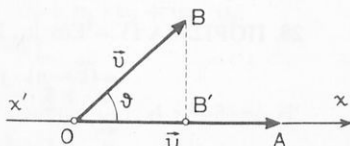
Ὡστε : Τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο συγγραμμικῶν διανυσμάτων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν αὐτῶν.

Σημείωσις : Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν φορὰν ἑνὸς τῶν διανυσμάτων, τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον ἀλλάσσει πρόσημον.

**24. ΘΕΩΡΗΜΑ I.**—Τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὴν ὀρθογώνιον προβολὴν τοῦ ἄλλου διανύσματος ἐπὶ ἄξονα τῆς αὐτῆς διευθύνσεως καὶ φορᾶς μετὰ τὸ πρῶτον.

Ἐστῶσαν  $\vec{OA} = \vec{u}$  καὶ  $\vec{OB} = \vec{v}$  οἱ ἀντιπρόσωποι τῶν διανυσμάτων  $\vec{u}$  καὶ  $\vec{v}$  (σχ.19).

Ἐστω  $B'$  ἡ ὀρθή προβολὴ τοῦ  $B$  ἐπὶ τὴν εὐθεΐαν  $OA$ . Ἐπὶ τοῦ ἄξονος, τοῦ ὁποῦ φο-



Σχ. 19

ρεὺς εἶναι ἡ εὐθεΐα  $OA$  καὶ φορὰ εἶναι ἡ τοῦ διανύσματος  $\vec{OA}$ , ἔχομεν :

$$\vec{OB'} = \vec{OB} \text{ συν} \theta = v \text{ συν} \theta$$

ἐνθα  $\theta$  ἡ γωνία τῶν δύο διανυσμάτων. Ἄρα :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB'} = u \cdot v \cdot \text{συν} \theta = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

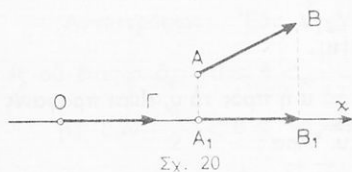
Ὡστε :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB'}.$$

Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν φορὰν τοῦ ἄξονος  $x'Ox$ , τὸ γινόμενον  $\vec{OA} \cdot \vec{OB'}$  μένει ἀμετάβλητον. Ἄρα, οἰαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ φορὰ τοῦ ἄξονος  $x'Ox$ , θὰ ἔχομεν :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB'} = \vec{OB} \cdot \vec{OA'}.$$

**25. ΠΟΡΙΣΜΑ I.**—Το έσωτερικόν γινόμενον δύο διανυσμάτων δέν μεταβάλλεται εάν έν τών διανυσμάτων άντικατασταθής υπό τής όρθής προβολής του επί τόν φορέα του άλλου.



Ούτως, εις τό (σχ. 20) έχομεν :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{A_1B_1} \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{A_1B_1} \cdot \overrightarrow{OG}.$$

Έάν τό Α (ή Β) μετατίθεται επί έπιπέδου καθέτου πρὸς τό διάνυσμα  $\overrightarrow{OG}$ , τό έσωτερικόν γινόμενον  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OG}$  μένει άμετάβλητον, διότι τά  $A_1$  καί  $B_1$  μένουν σταθερά.

**26. ΠΟΡΙΣΜΑ II.**— Η άλγεβρική τιμή τής όρθής προβολής ένός διανύσματος επί άξονα είναι τό έσωτερικόν γινόμενον του διανύσματος τούτου καί του μοναδιαίου διανύσματος του άξονος τούτου.

Ούτως, εάν εις τό (σχ. 20) είναι  $|\overrightarrow{OG}| = 1$ , τότε :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{A_1B_1} \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{A_1B_1}$$

**27. ΠΟΡΙΣΜΑ III.**—Έάν τό έν τών διανυσμάτων έσωτερικού γινομένου πολλαπλασιασθής επί τόν πραγματικόν αριθμόν  $k$ , τότε τό έσωτερικόν γινόμενον τών δύο διανυσμάτων πολλαπλασιάζεται επί  $k$ .

Δηλαδή:  $(k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = k (\vec{u} \cdot \vec{v})$  (Προσεταιριστική ως πρὸς τόν  $k$ ).

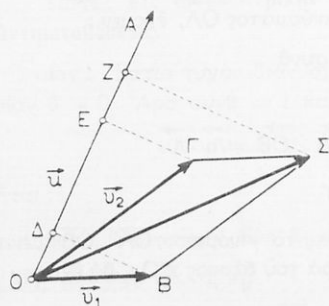
Η άπόδειξις έκ του όρισμοϋ.

**28. ΠΟΡΙΣΜΑ IV.**—Έάν  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ , νά άποδειχθῇ ὅτι :

$$(k_1 \cdot \vec{u}) \cdot (k_2 \cdot \vec{v}) = k_1 \cdot k_2 (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Η άπόδειξις έκ του όρισμοϋ.

**29. ΘΕΩΡΗΜΑ.**— Νά άποδειχθῇ ὅτι :  $\vec{u} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \vec{u} \cdot \vec{v}_2$



Άπόδειξις : Έστωσαν  $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{v}_1$

καί  $\overrightarrow{OG} = \vec{v}_2$  οί άντιπρόσωποι τών διανυσμάτων  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}_1$  καί  $\vec{v}_2$  άντιστοίχως. Έστω ὅτι :

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG}$$

Έαν Δ, Ε, Ζ είναι αί όρθαι προβολαί τών Β, Γ καί Σ επί τήν ευθείαν ΟΑ, τής οποίας φορά είναι ή φορά του διανύσματος  $\overrightarrow{OA}$ , θά έχομεν :

$$\vec{u} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OZ} \quad (1)$$

Επειδή δὲ εἶναι  $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ , ἡ (1) γίνεται :

$$\vec{u} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OE} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \vec{u} \cdot \vec{v}_2$$

ἤτοι :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \vec{u} \cdot \vec{v}_2.$$

Ἡ ιδιότης αὕτη καλεῖται **ἐπιμεριστική**.

**Γενίκευσις :** Εἶναι :  $\vec{u} \cdot \sum_{i=1}^n \vec{v}_i = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \vec{u} \cdot \vec{v}_2 + \dots + \vec{u} \cdot \vec{v}_n.$

Γενικώτερον ἀποδεικνύεται ὅτι :

Ἐὰν  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots + \vec{u}_\mu$  καὶ  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_\nu$

τότε :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum \vec{u}_i \cdot \vec{v}_j$ , ἐνθα  $i = 1, 2, 3, \dots, \mu$  καὶ  $j = 1, 2, 3, \dots, \nu$ .

**1ον :** Ὁμοίως ἐργαζόμενοι, εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\begin{aligned} \vec{u} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) &= \vec{u} \cdot [\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)] = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \vec{u} \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \\ &= \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 + \vec{u} \cdot \vec{v}_2 + \vec{u} \cdot \vec{v}_3 \end{aligned}$$

**2ον :** Διὰ τὴν εὐρωμεν τὸ γινόμενον :

$$P = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3)$$

θέτομεν  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$  καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$\begin{aligned} P &= \vec{u} \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \vec{u} \cdot \vec{v}_2 + \vec{u} \cdot \vec{v}_3 = \\ &= (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot \vec{v}_1 + (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot \vec{v}_2 + (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot \vec{v}_3 = \\ &= \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 + \vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1 + \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{u}_2 \cdot \vec{v}_2 + \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_3 + \vec{u}_2 \cdot \vec{v}_3. \end{aligned}$$

**3ον :** Εὐκόλως ἀποδεικνύονται αἱ ἰσότητες :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2.$$

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

**I. —** Τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, τὸ τετράγωνον μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

Πράγματι, ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 22). Θὰ εἶναι :

$$\vec{AB} + \vec{BG} = \vec{AG} \implies \vec{BG} = \vec{AG} - \vec{AB}.$$

Ἄρα :

$$(\vec{BG})^2 = (\vec{AG} - \vec{AB})^2 = (\vec{AG})^2 + (\vec{AB})^2 - 2 \vec{AG} \cdot \vec{AB}$$

ἢ

$$BG^2 = AG^2 + AB^2 - 2 \vec{AG} \cdot \vec{AB}. \quad (1)$$

α) 'Εάν τὸ τρίγωνον  $AB\Gamma$  εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ  $A$ , τότε:  $\vec{A\Gamma} \cdot \vec{AB} = 0$   
καὶ ἡ (1) γίνεται:  $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$ .

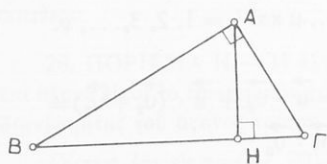
β) 'Εάν τὸ  $AB\Gamma$  εἶναι τοιοῦτον ὥστε  $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$ , ἡ (1) γράφεται:

$$2 \vec{A\Gamma} \cdot \vec{AB} = 0 \quad \eta \quad \vec{A\Gamma} \cdot \vec{AB} = 0 \implies A\Gamma \perp AB.$$

II.- 'Η σχέση  $AH^2 = -\vec{HB} \cdot \vec{H\Gamma}$  (εἰς τὴν ὁποίαν  $H$  εἶναι ὁ ποὺς τοῦ ὕψους  $AH$  τριγώνου  $AB\Gamma$ ) χαρακτηρίζει τὸ τρίγωνον ὀρθογώνιον εἰς τὸ  $A$ .

Πράγματι, οἷονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ τρίγωνον  $AB\Gamma$ , ἐπειδὴ  $AH \perp H\Gamma$  εἶναι:

$$\vec{AH} \cdot \vec{H\Gamma} = 0$$



Σχ. 22

$$\begin{aligned} \text{καὶ} \quad \vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} &= (\vec{BA} + \vec{AH}) \cdot \vec{H\Gamma} \\ &= \vec{BA} \cdot \vec{H\Gamma} + \vec{AH} \cdot \vec{H\Gamma} = \vec{BA} \cdot \vec{H\Gamma} \\ &= \vec{BA} \cdot (\vec{HA} + \vec{A\Gamma}) = \vec{BA} \cdot \vec{HA} + \vec{BA} \cdot \vec{A\Gamma} \\ \text{ἤτοι:} \quad \vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} &= \vec{BA} \cdot \vec{HA} + \vec{BA} \cdot \vec{A\Gamma} \quad (1) \end{aligned}$$

α) 'Εάν  $A = 90^\circ$ , τότε  $\vec{BA} \cdot \vec{A\Gamma} = 0$  καὶ ἡ (1) γίνεται:

$$\vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} = \vec{BA} \cdot \vec{HA} = (\vec{BH} + \vec{HA}) \cdot \vec{HA} = \vec{BH} \cdot \vec{HA} + (\vec{HA})^2$$

'Αλλὰ  $\vec{BH} \perp \vec{HA}$ , ἄρα  $\vec{BH} \cdot \vec{HA} = 0$ , ὁπότε

$$\vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} = (\vec{HA})^2$$

καὶ ἐπειδὴ τὰ  $\vec{BH}$  καὶ  $\vec{H\Gamma}$  εἶναι συγγραμμικά, ἔπεται:

$$HA^2 = \vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} \quad \eta \quad HA^2 = -\vec{HB} \cdot \vec{H\Gamma}.$$

β) Θεωροῦμεν τρίγωνον  $AB\Gamma$ , εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι  $HA^2 = \vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma}$ . 'Η ἰσότης αὕτη ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν:

$$\vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} = (\vec{HA})^2 = \vec{BH} \cdot \vec{HA} + (\vec{HA})^2 = (\vec{BH} + \vec{HA}) \cdot \vec{HA} = \vec{BA} \cdot \vec{HA} \quad (2)$$

Συγκρίνοντας τὰς (1) καὶ (2) ἔχομεν:

$$\vec{BA} \cdot \vec{A\Gamma} = 0 \implies AB \perp A\Gamma.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

17. Εἰς τυχὸν σύστημα ἀξόνων εἶναι:

$$\begin{array}{c|c|c|c} \vec{u}(4,3) & \vec{u}(-3,5) & \vec{u}(3,7) & \text{Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ ἄθροισματος} \\ \vec{v}(1,-4) & \vec{v}(-4,-2) & \vec{v}(-2,-7) & \vec{W} = \vec{u} + \vec{v}. \end{array}$$

18. Εἰς τυχόν σύστημα ἀξόνων δίδονται :

$$\begin{array}{l} \vec{u} (5, -2) \\ \vec{v} (-1, 4) \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{u} (2, 6) \\ \vec{v} (1, 8) \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{u} (-7, 4) \\ \vec{v} (-5, 4) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{καὶ ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμένα.} \\ \text{τῆς διαφορᾶς } \vec{W} = \vec{u} - \vec{v}. \end{array}$$

19. Εἰς τετράεδρον ΑΒΓΔ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$1\text{ον} : \vec{BG} \cdot \vec{AD} + \vec{GA} \cdot \vec{BD} + \vec{AB} \cdot \vec{GD} = 0 \quad (\text{θέσατε } \vec{AB} = \vec{AG} + \vec{GB})$$

2ον : Ἐὰν αἱ ἄκμαι ΒΓ, ΑΔ εἶναι ὀρθογώνιοι καὶ ΓΑ ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ΒΔ, τότε καὶ ἡ ΑΒ θὰ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ΓΔ.

20. Τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, μία διάμεσός του εἶναι τὸ ἡμισυ τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς.

21. Ἐὰν ΑΗ εἶναι τὸ ὕψος τριγώνου ΑΒΓ, αἱ σχέσεις :

$$\overline{BG} \cdot \overline{BH} = BA^2 \quad \eta \quad \overline{GB} \cdot \overline{GH} = GA^2$$

χαρακτηρίζουν τὸ τρίγωνον ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α.

22. Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (ἐνθα ΑΗ ὕψος) νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$1\text{ον} : AB \cdot AG = BG \cdot AH, \quad 2\text{ον} : \frac{\overline{HB}}{\overline{HT}} = -\frac{AB^2}{AG^2}, \quad 3\text{ον} : \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AG^2} = \frac{1}{AH^2} \quad (\alpha\acute{\iota} \text{ ἀπο-}$$

δείξεις νὰ γίνουν διανυσματικῶς).

23. Ἐὰν ΑΜ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τότε :

$$1\text{ον} : AB^2 + AG^2 = 2AM^2 + \frac{BG^2}{2} \quad (\text{διανυσματικῶς}).$$

$$2\text{ον} : AB^2 - AG^2 = 2\overline{BG} \cdot \overline{MH} \quad (\text{ΑΗ ὕψος}).$$

24. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ διανυσματικῶς ὅτι :

$$\alpha') \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sin A, \quad \beta') \beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sin B \quad \text{καὶ}$$

$$\gamma') \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sin \Gamma.$$

25. Ἐὰν Η εἶναι τὸ ὀρθόκέντρον ἐνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' τὰ ὕψη αὐτοῦ :

$$1\text{ον}) \text{ Ποία ἡ τιμὴ τοῦ } \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AG}; \quad 2\text{ον}) \text{ Νὰ δειχθῇ ὅτι : } \overrightarrow{A'A} \cdot \overrightarrow{A'H} = -\overline{A'B} \cdot \overline{A'G},$$

$$3\text{ον}) \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \overline{AG'} = \overline{AH} \cdot \overline{AA'} \quad \text{καὶ} \quad \overline{AB'} \cdot \overline{AG} = \overline{AB} \cdot \overline{AG'}, \quad 4\text{ον}) \text{ Νὰ δειχθῇ ὅτι :}$$

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overline{HA} \cdot \overline{AA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'} \quad \text{καὶ} \quad \overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{HG} \cdot \overline{HG'}.$$

26. Ἐπὶ μιᾷ εὐθείᾳ δίδονται τὰ σημεία Α, Β, Γ καὶ Μ ἄλλο τυχόν σημεῖον, τοῦ ὁποῖου ἔστω Η ἡ προβολὴ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$MA^2 \cdot \overline{BG} + MB^2 \cdot \overline{GA} + MG^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BG} \cdot \overline{GA} \cdot \overline{AB} = 0 \quad (\text{Stewart}).$$

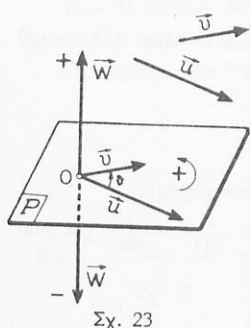
27. Ἐὰν  $|\vec{u}| = u$ ,  $|\vec{v}| = v$  καὶ  $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta$ , νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  εἰς τὰς ἀκολουθοῦς περιπτώσεις :

|       |                                                                    |       |                                                                      |       |                                                                                      |       |                                                                                     |
|-------|--------------------------------------------------------------------|-------|----------------------------------------------------------------------|-------|--------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 1ον : | $\begin{array}{l} u = 5 \\ v = 7 \\ \theta = 30^\circ \end{array}$ | 2ον : | $\begin{array}{l} u = 12 \\ v = 18 \\ \theta = 60^\circ \end{array}$ | 3ον : | $\begin{array}{l} u = \sqrt{5} \\ v = \frac{2}{3} \\ \theta = 150^\circ \end{array}$ | 4ον : | $\begin{array}{l} u = \sqrt{17} \\ v = 7\sqrt{2} \\ \theta = 135^\circ \end{array}$ |
|-------|--------------------------------------------------------------------|-------|----------------------------------------------------------------------|-------|--------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|

28. Εἰς κανονικὸν σύστημα  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  νὰ κατασκευασθοῦν τὰ διανύσματα  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$  καὶ  $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ .

Ἀκολουθῶς νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ . Ποίαν ἰδιότητα τῶν διχοτόμων γωνίας ἐπαληθεύομεν ἐνταῦθα ;

ξωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων  $\vec{u}$  καὶ  $\vec{v}$  (προσανατολισμένων) τὸ ὀρθογώνιον διάνυσμα  $\vec{w}$  πρὸς τὰς διευθύνσεις τῶν δοθέντων, τοιοῦτον ὥστε ἡ τριέδρος  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  νὰ ἔχῃ τὸν θετικὸν προσανατολισμόν, ἐφ' ὅσον  $(\vec{u}, \vec{v}) = \text{θετική}$ , τὸν ἀρνητικὸν δέ, ἂν  $(\vec{u}, \vec{v}) = \text{ἀρνητική}$  καὶ μέτρον  $|\vec{w}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \eta\mu\theta$  (1), ἔνθα  $\theta$  ἡ γωνία τῶν  $\vec{u}, \vec{v}$  καὶ  $0 \leq \theta \leq \pi$ .



σχ. 23

Ἐάν  $\theta = 0$  ἢ  $\theta = \pi$ , τότε  $\eta\mu\theta = 0$  καὶ ὁ τύπος (1)

δίδει  $\vec{w} = \vec{0}$ .

α) Σύμφωνα με τὸν ὅρισμόν εἶναι :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\vec{v} \cdot \vec{u}$ .  
Δηλαδή εἰς τὸ ἐξωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων δὲν ἰσχύει ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως.

β) Ἐάν  $\theta = 0$  ἢ  $\theta = \pi$ , τότε  $\eta\mu\theta = 0$  καὶ ἄρα  $\vec{w} = \vec{0}$  καὶ ἀντιστρόφως. Ἄν  $\vec{u} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{v} \neq \vec{0}$  καὶ  $\vec{w} = \vec{0}$ , τότε  $\eta\mu\theta = 0$  καὶ ἄρα  $\theta = 0$  ἢ  $\theta = \pi$ . Ὡστε :

Ἵνα δύο μὴ μηδενικά διανύσματα εἶναι συγγραμμικά, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἐξωτερικὸν γινόμενον αὐτῶν νὰ εἶναι τὸ μὴ μηδενικὸν διάνυσμα.

γ) Ἐάν  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , τότε  $\eta\mu\theta = 1$  καὶ ἄρα  $|\vec{w}| = |\vec{u}| |\vec{v}|$ .

Δηλαδή: Ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ ἐξωτερικοῦ γινομένου δύο καθέτων διανυσμάτων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν δοθέντων διανυσμάτων.

δ) Ἐάν  $\vec{u} = \vec{0}$  ἢ  $\vec{v} = \vec{0}$  ἢ  $\eta\mu\theta = 0$ , τότε  $\vec{w} = \vec{0}$  καὶ ἄρα  $|\vec{w}| = 0$ .

Ἄρα: Τὸ ἐξωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων εἶναι μηδὲν ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, ἐν τοῦλάχιστον τῶν διανυσμάτων εἶναι τὸ μηδενικὸν διάνυσμα ἢ ὅταν τὰ δύο διανύσματα εἶναι συγγραμμικά.

ε) Εἰς τὸ ἐξωτερικὸν γινόμενον διανυσμάτων ἰσχύει ὁ ἐπιμεριστικός νόμος ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν διανυσμάτων. Ἀποδεικνύομεν τὸν νόμον τοῦτον διὰ τρία τυχόντα διανύσματα  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ .

Χωρὶς νὰ καταστραφῇ ἡ γενικότης, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ διανύσματα  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$  ἔχουν κοινὴν ἀρχὴν O, καὶ ὅτι τὸ διάνυσμα  $\vec{V}_1$  εἶναι τὸ μοναδιαῖον.

Θέτομεν  $\vec{S} = \vec{V}_2 + \vec{V}_3$  καὶ  $\vec{W} = \vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$ , (σχ. 24).

Θεωροῦμεν τὸ ἐπίπεδον (P) κάθετον ἐπὶ τὸ  $\vec{V}_1$  εἰς τὸ O καὶ ἔστωσαν  $\vec{u}_2, \vec{u}_3$ , αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ ἐπὶ τὸ (P) τῶν  $\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{S}$  ἀντιστοίχως.

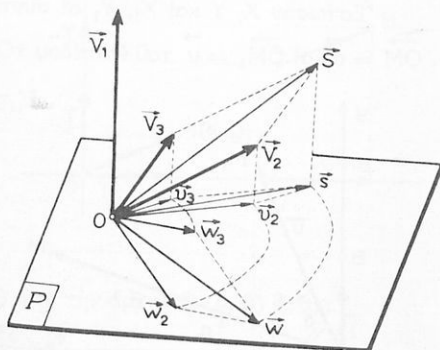


**1ον :** Κατασκευάζομεν τὸ διάνυσμα  $\vec{W}_2 = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ . Τοῦτο ἔχει, ὡς γνωστόν, διεύθυνσιν κάθετον πρὸς τὰ  $\vec{V}_1$  καὶ  $\vec{V}_2$ . Ἀρα τὸ  $\vec{W}_2$  θὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὰ  $\vec{V}_1$  καὶ  $\vec{u}_2$ . Κατ' ἀκολουθίαν :

$$|\vec{W}_2| = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \eta\mu (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

Ἀλλὰ  $|\vec{V}_1| = 1$  καὶ  $\vec{u}_2$  εἶναι ἡ ὀρθογώνιος προβολὴ τοῦ  $\vec{V}_2$  ἐπὶ τὸ (P).

Συνεπῶς :  $|\vec{W}_2| = |\vec{u}_2|$  καὶ τὸ  $\vec{W}_2$  προκύπτει ἐκ τοῦ  $\vec{u}_2$  διὰ στροφῆς περὶ τὸ O κατὰ γωνίαν  $\frac{\pi}{2}$ .



Σχ. 24

**2ον :** Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον κατασκευάζομεν τὸ διάνυσμα  $\vec{W}_3 = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3$

καὶ τὸ  $\vec{W}_3$  προκύπτει ἐκ τοῦ  $\vec{u}_3$  διὰ στροφῆς περὶ τὸ O καὶ κατὰ γωνίαν  $\frac{\pi}{2}$ .

**3ον :** Κατασκευάζομεν τὸ διάνυσμα  $\vec{W} = \vec{V}_1 \cdot \vec{s}$  κατὰ τὸν προηγουμένως ἐκτεθέντα τρόπον. Τὸ  $\vec{W}$  προκύπτει ἐκ τοῦ  $\vec{s}$  διὰ στροφῆς περὶ τὸ O κατὰ γωνίαν  $\frac{\pi}{2}$ .

Ἀλλὰ τὸ  $\vec{s} = \vec{w}_2 + \vec{w}_3$ . Ἀρα  $\vec{W} = \vec{w}_2 + \vec{w}_3 = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3$

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3.$$

Ἡ ἄνωτέρω ιδιότης γενικεύεται : Οὕτω, θὰ εἶναι :

$$(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) (\vec{V}_3 + \vec{V}_4 + \vec{V}_5) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_4 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_5 + \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_3 + \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_4 + \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_5$$

Χρήσις τοῦ ἔξωτερικοῦ γινομένου γίνεται εἰς τὴν Φυσικὴν, καὶ δὴ εἰς τὸ Κεφάλαιον « περὶ ροπῆς δυνάμεων ».

**Σημείωσις :** Τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων εἶναι πραγματικὸς ἀριθμὸς. Ἐνῷ τὸ ἐξωτερικὸν εἶναι διάνυσμα.

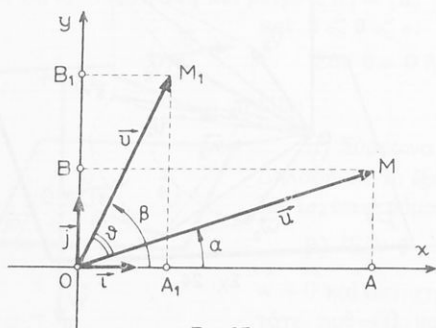
Ἐπειδὴ  $|\vec{u}| |\vec{v}| \eta\mu\theta$  εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, ὅπερ ἔχει πλευρὰς  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  καὶ περιεχομένην γωνίαν  $\theta$ , ἔπεται ὅτι τὸ  $|\vec{W}|$  εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου τούτου.

**31. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΙΣ ΤΟΥ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.**— Ἐστω xOy (σχ. 25) ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων. Δηλαδή τὰ μοναδιαῖα διανύσματα  $\vec{i}$  καὶ  $\vec{j}$  τῶν ἀξόνων Ox καὶ Oy ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος 1 καὶ εἶναι κάθετα.

Κατὰ τὰ γνωστά :

$$\vec{i}^2 = 1, \vec{j}^2 = 1 \quad \text{καὶ} \quad \vec{j} \cdot \vec{i} = 0.$$

Ἐστώσαν  $X, Y$  καὶ  $X_1, Y_1$  αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τῶν διανυσμάτων  $\vec{OM} = \vec{u}$  καὶ  $\vec{OM}_1 = \vec{v}$  τοῦ ἐπιπέδου  $xOy$  εἰς τὸ θεωρηθὲν σύστημα.



Σχ. 25

Γνωρίζομεν ὅτι :

$$\vec{u} = X\vec{i} + Y\vec{j} \quad \text{καὶ} \quad \vec{v} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j}.$$

Ἄρα :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (X\vec{i} + Y\vec{j}) \cdot (X_1\vec{i} + Y_1\vec{j}) = \\ &= XX_1\vec{i}^2 + (XY_1 + YX_1)(\vec{i} \cdot \vec{j}) + YY_1\vec{j}^2 \\ &\text{ἐξ οὗ :} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = XX_1 + YY_1} \quad (1)$$

Δηλαδή : Τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ὁμώνυμων συντεταγμένων προβολῶν αὐτῶν.

Συνέπεια : Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι :

$$1ον : |\vec{u}|^2 = XX + YY = X^2 + Y^2, \quad \text{ἐξ οὗ} : |\vec{u}| = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (2)$$

$$2ον : \text{Ἐπειδὴ} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta, \quad \text{ἔπεται ὅτι} :$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{XX_1 + YY_1}{\sqrt{X^2 + Y^2} \cdot \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}} \quad (3)$$

**32. ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΟΣ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.**—Ἐὰν τὰ διανύσματα εἶναι κάθετα, τότε  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  καὶ ἡ (1) τῆς (§ 31) γίνεται :

$$XX_1 + YY_1 = 0.$$

Ἀντιστρόφως, ἐὰν  $XX_1 + YY_1 = 0$ , τότε, ἂν  $\vec{u} \neq 0$  καὶ  $\vec{v} \neq 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{ἢ} \quad u \cdot v \cos \theta = 0 \quad \text{ἢ} \quad \cos \theta = 0, \quad \text{ἐξ οὗ} : \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Ὡστε : Εἰς τὸ ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων, ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα δύο μὴ μηδενικὰ διανύσματα  $\vec{u}(X, Y)$  καὶ  $\vec{v}(X_1, Y_1)$  εἶναι κάθετα εἶ-

ναι ἡ :

$$\boxed{XX_1 + YY_1 = 0}$$

**33. ΑΠΟΣΤΑΣΙΣ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ.**— Εἰς ἓνα ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων  $xOy$  (σχ. 26) θεωροῦμεν δύο σημεῖα  $A(x_1, y_1)$  καὶ  $B(x_2, y_2)$ . Αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τοῦ διανύσματος

τοῦ  $\vec{AB}$  εἶναι

$$X = x_2 - x_1 \quad \text{καὶ} \quad Y = y_2 - y_1.$$

Ἐπειδὴ δέ :

$$\vec{AB}^2 = \overline{AB}^2 = X^2 + Y^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

ἔπεται ὅτι :

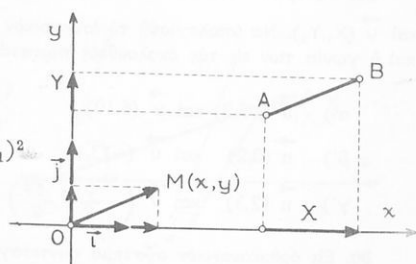
$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ἐὰν τεθῇ  $|\vec{AB}| = AB = d$ , τότε :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ἡ ἀπόστασις ἑνὸς σημείου  $M(x, y)$  ἀπὸ τὴν ἀρχὴν  $O(0, 0)$  εἶναι :

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Σχ. 26

**34. ΗΜΙΤΟΝΟΝ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ** (προσανατολισμένης) **ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.**— Ὑποθέτομεν τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων ὀρθοκανονικὸν καὶ τοῦ προσανατολισμοῦ :  $(\vec{i}, \vec{j}) = +\frac{\pi}{2}$ . Ἐστώσαν  $\alpha, \beta, \theta$  αἱ ἀλγεβρικοὶ τιμαὶ τῶν γωνιῶν

$(\vec{Ox}, \vec{u})$ ,  $(\vec{Ox}, \vec{v})$  καὶ  $(\vec{u}, \vec{v})$ . Θὰ εἶναι (σχ. 25)

$$\theta = \beta - \alpha \quad \text{καὶ} \quad \eta\mu\theta = \eta\mu\beta \sin\alpha - \eta\mu\alpha \sin\beta \quad (1)$$

$$\begin{array}{l|l} \text{Ἀλλὰ :} & \begin{array}{l} X = OM \sin \alpha \\ Y = OM \eta\mu \alpha \end{array} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} X_1 = OM_1 \sin \beta \\ Y_1 = OM_1 \eta\mu \beta \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{ὁπότε ἡ (1) γίνεταί :} \end{array}$$

$$\eta\mu\theta = \frac{XY_1 - X_1Y}{OM \cdot OM_1} \quad \eta\mu\theta = \frac{XY_1 - X_1Y}{\sqrt{X^2 + Y^2} \cdot \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}} \quad (2)$$

Εὐκόλως τῶρα ἀποδεικνύεται ὅτι :

$$\eta\mu^2\theta + \sin^2\theta = \frac{(XX_1 + YY_1)^2 + (XY_1 - X_1Y)^2}{(X^2 + Y^2)(X_1^2 + Y_1^2)} = \frac{(X^2 + Y^2)(X_1^2 + Y_1^2)}{(X^2 + Y^2)(X_1^2 + Y_1^2)} = 1$$

$$\text{καὶ} \quad \varepsilon\varphi\theta = \frac{XY_1 - X_1Y}{XX_1 + YY_1} \quad (3)$$

Ἴνα δὲ τὰ διανύσματα  $\vec{u}$  καὶ  $\vec{v}$  εἶναι παράλληλα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ  $\eta\mu\theta$  νὰ εἶναι μηδέν. Δηλαδή

$$XY_1 - X_1Y = 0 \iff \frac{X_1}{X} = \frac{Y_1}{Y}$$

τοῦτο ὅμως ἀπεδείχθη καὶ εἰς τὴν (§ 15).

29. Εις ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων  $xOy$  δίδονται τὰ διανύσματα  $\vec{u}$  ( $X, Y$ ) καὶ  $\vec{v}$  ( $X_1, Y_1$ ). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον αὐτῶν, τὸ συνημίτονον, τὸ ἡμίτονον καὶ ἡ γωνία των εἰς τὰς ἀκολουθοῦσας περιπτώσεις :

$$\alpha') \quad \vec{u} (-5, 3) \text{ καὶ } \vec{v} (6, 10)$$

$$\beta') \quad \vec{u} (0, 2) \text{ καὶ } \vec{v} (-\sqrt{3}, 1)$$

$$\gamma') \quad \vec{u} (2, 3) \text{ καὶ } \vec{v} \left(-\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\delta') \quad \vec{u} (2, 4) \text{ καὶ } \vec{v} (-3\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$$\epsilon') \quad \vec{u} (\alpha, \beta) \text{ καὶ } \vec{v} (-\kappa\beta, \kappa\alpha)$$

$$\sigma\tau) \quad \vec{u} (3, 4) \text{ καὶ } \vec{v} (5, 13).$$

30. Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων δίδονται τὰ σημεῖα  $A(0, -2)$ ,  $B(-2, -1)$ ,  $\Gamma(2, 2)$ . Εἶναι ὀρθογώνιον τὸ τρίγωνον  $AB\Gamma$  ;

31. Τὸ αὐτὸ διὰ τὰ σημεῖα  $A(4, 0)$ ,  $B(-1, 0)$ ,  $\Gamma(0, 2)$ .

32. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα  $A(4, 0)$ ,  $B(7, 8)$ ,  $\Gamma(0, 10)$  καὶ  $\Delta(-3, 2)$  εἶναι κορυφαὶ παραλλήλων (σύστημα ὀρθοκανονικόν).

33. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα  $A(8, 0)$ ,  $B(6, 6)$ ,  $\Gamma(-3, 3)$  καὶ  $\Delta(-1, -3)$  εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου. Ποῖα τὰ μήκη τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ; (σύστημα ὀρθοκανονικόν).

34. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα  $A(10, 8)$ ,  $B(-3, 9)$ ,  $\Gamma(-4, -4)$  καὶ  $\Delta(9, -5)$  εἶναι κορυφαὶ τετραγώνου. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του, τῶν διαγωνίων του, αἱ συντεταγμέναι τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ διαγώνιοι διχοτομοῦν τὰς γωνίας του (σύστημα ὀρθοκανονικόν).

35. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα  $A(-3, -7)$ ,  $B(0, -2)$ ,  $\Gamma(6, 8)$  κεῖνται ἐπ' εὐθείας (σύστημα ὀρθοκανονικόν).

36. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα  $A(-1, -3)$ ,  $B(8, 3)$ ,  $\Gamma(3, 4)$ ,  $\Delta(0, 2)$  εἶναι κορυφαὶ ἰσοσκελοῦς τραπέζιου (σύστημα ὀρθοκανονικόν).

37. Νὰ ὀρίσθῃ ὁ  $x$ , ὥστε τὰ σημεῖα  $A(x, -3)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $\Gamma(-4, 3)$  νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (σύστημα ὀρθοκανονικόν).

38. Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων  $xOy$  δίδονται τὰ σημεῖα  $A(3, 8)$  καὶ  $B(2, -3)$ .

\*Ἴνα σημεῖον  $M$  κεῖται ἐπὶ τοῦ κύκλου διαμέτρου  $AB$ , πρέπει καὶ ἀρκεῖ :  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ .

39. Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων δίδονται τὰ σημεῖα  $A(0, 3)$ ,  $B(5, 2)$  καὶ  $\Gamma(-3, 7)$ . \*Ἴνα σημεῖον  $M$  κεῖται ἐπὶ τοῦ ὕψους  $AH_1$ , πρέπει καὶ ἀρκεῖ  $\vec{AM} \cdot \vec{B\Gamma} = 0$ .

40. Δίδονται τὰ σημεῖα  $A(-2, -2)$ ,  $B(2, 1)$ ,  $\Gamma(0, 2)$ . Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μήκος τῆς ὑποτείνουσας, καθὼς καὶ τὸ συνημίτονον μιᾶς ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.

## ΑΛΛΑΓΗ ΑΞΟΝΩΝ

**35. ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ.**—Θεωροῦμεν δύο συστήματα παραλλήλων ἀξόνων  $xOy$  καὶ  $x_1O_1y_1$  καὶ ὑποθέτομεν ὅτι τὰ μοναδιαῖα διανύσματα τῶν ἀξόνων  $Ox$  καὶ  $O_1x_1$  εἶναι ἰσοδύναμα, καθὼς καὶ τὰ τῶν ἀξόνων  $Oy$  καὶ  $O_1y_1$ .

\*Υποθέτομεν ἐπίσης γνωστὰς τὰς συντεταγμένας  $(x_0, y_0)$  τοῦ  $O_1$ .

Θὰ ἔχωμεν τότε :

$$\vec{OO_1} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} \quad (1)$$

Εστώσαν  $(x, y)$  αἱ συντεταγμέναι ενός σημείου  $M$  τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς ἄξονας  $Ox, Oy$  καὶ  $(X, Y)$  αἱ συντεταγμέναι του  $M$  ὡς πρὸς ἄξονας  $Ox_1$  καὶ  $Oy_1$ .  
Θὰ εἶναι :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad (2), \quad \vec{O_1M} = X\vec{i}_1 + Y\vec{j}_1 \quad (3).$$

Ἀλλὰ  $\vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M}$  (4)

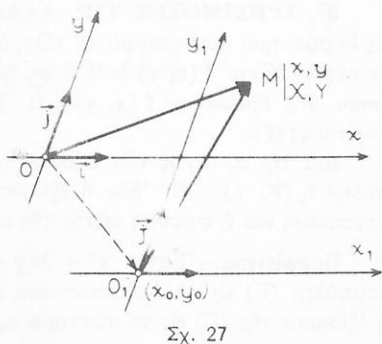
Ἡ (4), βάσει τῶν (1), (2) καὶ (3), γίνεταί :

$$\begin{aligned} x\vec{i} + y\vec{j} &= x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + X\vec{i}_1 + Y\vec{j}_1 = \\ &= (x_0 + X)\vec{i} + (y_0 + Y)\vec{j} \end{aligned}$$

ἐξ οὗ :  $x = x_0 + X$  καὶ  $y = y_0 + Y$ ,

ἐξ οὗ πάλιν :

$$\begin{aligned} X &= x - x_0 \\ Y &= y - y_0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} x &= x_0 + X \\ y &= y_0 + Y \end{aligned}$$



Σχ. 27

**36. ΣΤΡΟΦΗ ΤΟΥ ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΠΕΡΙ ΤΗΝ ΑΡΧΗΝ Ο.**—Εστω  $xOy$  ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων (σχ. 28) καὶ  $M(x, y)$  τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου.

Τὸ σύστημα  $xOy$  στρέφεται περὶ τὸ  $O$  κατὰ γωνίαν  $\theta$  καὶ λαμβάνει τὴν θέσιν  $x_1Oy_1$ .

Εστώσαν  $(X, Y)$  αἱ συντεταγμέναι τοῦ  $M$  ὡς πρὸς τὸ σύστημα  $x_1Oy_1$ .

Ἀγομεν τὴν  $BD$  κάθετον πρὸς τὴν  $Ox$  καὶ τὴν  $B\Gamma$  κάθετον πρὸς τὴν  $MA$ . Θὰ εἶναι

$$\widehat{GMB} = \theta \text{ καὶ}$$

$$\begin{aligned} x &= \overline{OA} = \overline{OD} - \overline{AD} = \overline{OD} - \overline{GB} = \\ &= \overline{OB} \sin \theta - \overline{BM} \eta \mu \theta = X \sin \theta - Y \eta \mu \theta \end{aligned}$$

$$\text{καὶ } y = \overline{AM} = \overline{AG} + \overline{GM} = \overline{DB} + \overline{GM} = \overline{OB} \cdot \eta \mu \theta + \overline{BM} \sin \theta = X \eta \mu \theta + Y \sin \theta$$

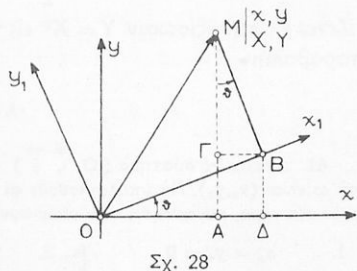
$$\text{Ἀρα : } \left. \begin{aligned} x &= X \sin \theta - Y \eta \mu \theta \\ y &= X \eta \mu \theta + Y \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο ὡς πρὸς  $X$  καὶ  $Y$  εὐρίσκομεν :

$$\left. \begin{aligned} X &= x \sin \theta + y \eta \mu \theta \\ Y &= -x \eta \mu \theta + y \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Παράδειγμα : Διὰ  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , οἱ τύποι (1) δίδουν

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} (X - Y) \text{ καὶ } y = \frac{\sqrt{2}}{2} (X + Y)$$



Σχ. 28

και οι (2) δίδουν :  $X = \frac{\sqrt{2}}{2} (x + y)$  και  $Y = \frac{\sqrt{2}}{2} (-x + y)$ .

**37. ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΣ ΤΗΣ ΑΛΛΑΓΗΣ ΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ.**— Γνωρίζομεν ότι, εις έν σύστημα συντεταγμένων  $xOy$ , ό γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M(x, y)$ , τοιούτων ώστε  $f(x, y) = 0$  είναι, γενικώς, μία καμπύλη ( $\Gamma$ ), καλουμένη **γράφημα** τής εξίσωσης  $f(x, y) = 0$ . Η εξίσωσις αύτη ονομάζεται **εξίσωσις τής καμπύλης** ( $\Gamma$ ).

Διά τής αλλαγής των άξόνων ή εξίσωσις αύτη μετασχηματίζεται εις μίαν άλλην  $f_1(X, Y) = 0$ . Έάν ή εξίσωσις αύτη είναι άπλουστέρα τής πρώτης, ή κατασκευή και ή σπουδή αύτής τής καμπύλης ( $\Gamma$ ) θά είναι εύκολωτέρα.

**Παράδειγμα.**— Έστω  $x^2 + 2xy + y^2 + \sqrt{2}(x - y) = 0$  ή εξίσωσις μιās καμπύλης ( $\Gamma$ ) εις τὸ ὀρθοκανονικόν σύστημα συντεταγμένων. Νά σχηματισθῇ ή εξίσωσις τής ( $\Gamma$ ) εις τὸ σύστημα  $x_1Oy_1$ , ὁμολόγου τοῦ πρώτου, διά στροφῆς περὶ τὸ  $O$ , κατὰ γωνίαν  $\frac{\pi}{4}$ .

Η δοθεῖσα εξίσωσις γράφεται :  $(x + y)^2 + \sqrt{2}(x - y) = 0$ .

Αύτη, βάσει των  $X = \frac{\sqrt{2}}{2} (x + y)$  και  $Y = \frac{\sqrt{2}}{2} (-x + y)$ , μετασχηματίζεται εις τήν εξίσωσιν  $Y = X^2$  εις τὸ νέον σύστημα, και παριστᾷ, ὡς γνωστόν, παραβολήν.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**41.** Δίδεται τὸ σύστημα  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  και τὸ  $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$ , τοῦ ὁποῖου αἱ συντεταγμένοι τοῦ  $\omega$  είναι  $(x_0, y_0)$ . Νά ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμένοι  $(x, y)$  ἐνὸς σημείου  $M$ , ὡς πρὸς τὸ ἀρχικὸν σύστημα, συναρτήσῃ των νέων συντεταγμένων  $(X, Y)$ , εις τὰς ἀκολουθοῦς περιπτώσεις :

- |                                                                                      |                                                                                 |                                                                                             |
|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $x_0 = y_0 = 0$<br>$\vec{I} = 2\vec{i}, \vec{J} = 3\vec{j}$                       | 2. $x_0 = y_0 = 0$<br>$\vec{I} = -4\vec{i}, \vec{J} = \frac{1}{2}\vec{j}$       | 3. $x_0 = 2, y_0 = 0$<br>$\vec{I} = \vec{i}, \vec{J} = \vec{j}$                             |
| 4. $x_0 = y_0 = 0$<br>$\vec{I} = \vec{i} + \vec{j}$<br>$\vec{J} = \vec{i} - \vec{j}$ | 5. $x_0 = 0, y_0 = 3$<br>$\vec{I} = \vec{i}$<br>$\vec{J} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ | 6. $x_0 = 1, y_0 = -2$<br>$\vec{I} = \vec{i} - 2\vec{j}$<br>$\vec{J} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ |

**42.** Ὁρθοκανονικόν σύστημα συντεταγμένων  $xOy$  στρέφεται κατὰ τήν ὀρθήν φοράν και κατὰ γωνίαν  $\theta$  περὶ τὸ  $O$ . Νά ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμένοι  $(x, y)$  ἐνὸς σημείου εις τὸ παλαιὸν σύστημα συναρτήσῃ των νέων  $(X, Y)$ , εις τὰς ἀκολουθοῦς περιπτώσεις :

- |                                                                                                                                  |                                                                                                                                     |                                                                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{4} \\ \theta &= \frac{\pi}{3} \\ \theta &= \frac{\pi}{6} \end{aligned} \right\}$ | 2. $\left. \begin{aligned} \theta &= -\frac{\pi}{4} \\ \theta &= \frac{2\pi}{3} \\ \theta &= -\frac{\pi}{6} \end{aligned} \right\}$ | 3. $\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{3\pi}{4} \\ \theta &= -\frac{2\pi}{3} \\ \theta &= \frac{5\pi}{6} \end{aligned} \right\}$ |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

43. Μία καμπύλη  $f(x,y) = 0$  δίδεται εις τὸ σύστημα  $xOy$ . Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ταύτης εις τὸ νέον σύστημα  $x_1Oy_1$ , εις τὰς ἀκολουθοῦσας περιπτώσεις :

$$1. \quad 2x + 3y - 6 = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{3} \quad \eta \quad \theta = \frac{\pi}{6} \quad \eta \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$2. \quad x^2 - y^2 - 6xy + 4y + 5 = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \eta \quad \theta = \frac{\pi}{8} \quad \eta \quad \theta = -\frac{\pi}{6}$$

# Η ΕΥΘΕΙΑ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

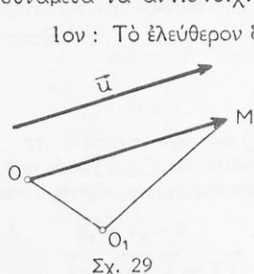
## ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

38. Εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο θὰ ἀναζητήσωμεν τὴν ἀναγκαίαν καὶ ἱκανὴν συνθήκην, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἱκανοποιοῦν αἱ συντεταγμέναι μεταβλητοῦ σημείου τοῦ ἐπιπέδου  $\chi O\psi$ , ἵνα τὸ Σύνολον τῶν σημείων τούτων εἶναι εὐθεῖα.

Ἡ συνθήκη αὕτη ὀνομάζεται ἐξίσωσις τῆς εὐθείας εἰς τὸ Καρτεσιανὸν τοῦτο ἐπίπεδον.

Μία εὐθεῖα εἶναι ὠρισμένη δι' ἑνὸς τῶν σημείων της καὶ ἑνὸς διανύσματος *παραλλήλου* πρὸς τὴν εὐθεῖαν (διευθύνον διάνυσμα) ἢ καὶ διὰ δύο *διακεκρυμένων* σημείων της.

39. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ. — Δοθέντος σταθεροῦ σημείου,  $O$ , τοῦ χώρου, τὸ ὁποῖον καλεῖται *ἀρχή*, εἰς πᾶν σημεῖον  $M$  τοῦ χώρου δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν :



1ον : Τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα  $\vec{u}$ , τοῦ ὁποίου εἰς ἀντιπρόσωπος εἶναι τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα  $\vec{OM}$  ( $\vec{OM} = \vec{u}$ ) (σχ. 29).

2ον : Τὸ διάνυσμα  $\vec{OM}$  πρὸς τὸν ἑαυτὸν του.

Ἀντιστρόφως : Εἰς πᾶν ἐλεύθερον διάνυσμα  $\vec{u}$ , ἢ εἰς πᾶν σημεῖον  $M$ , ἀντιστοιχεῖ ἓν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα,  $\vec{OM}$ , καὶ ἓν μόνον. Οὕτως, ὀρίζομεν :

1ον : Μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ Συνόλου τῶν σημείων τοῦ χώρου ἐπὶ τοῦ Συνόλου τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων του.

2ον : Μίαν ἀπεικόνισιν ἀμφιμονοσήμαντον τοῦ Συνόλου τῶν σημείων τοῦ χώρου ἐπὶ τοῦ Συνόλου τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων, ἀρχῆς  $O$ .

Τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα  $\vec{OM}$  καλεῖται *διανυσματικὴ ἀκτίς* τοῦ σημείου  $M$ .

Ἀλλαγὴ τῆς ἀρχῆς : Ἐστω  $O_1$  μία νέα ἀρχὴ (σχ. 29), ὀριζομένη, ὥς πρὸς τὸ  $O$ , ὑπὸ τῆς διανυσματικῆς τῆς ἀκτίνος  $\vec{OO_1}$ . Ἡ νέα διανυσματικὴ ἀκτίς  $\vec{O_1M}$  τοῦ σημείου  $M$  συνδέεται μετὰ τῆς παλαιᾶς διανυσματικῆς ἀκτίνος  $\vec{OM}$  διὰ τῆς σχέσεως :

$$\boxed{\vec{O_1M} = \vec{O_1O} + \vec{OM}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{O_1M} = \vec{OM} - \vec{OO_1}}$$



**Διανυσματική εξίσωση εὐθείας (δ).**—Παριστῶμεν διὰ τοῦ  $O$  τὴν ἀρχὴν τῶν διανυσμάτων καὶ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

**Πρώτη περίπτωση :** Ἡ εὐθεῖα (δ) εἶναι ὠρισμένη δι' ἑνὸς σημείου  $A$  καὶ τοῦ διευθύνοντος διανύσματος  $\vec{u}$ .

Ἡ εὐθεῖα (δ) εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων  $M$ , τοιοῦτων ὥστε τὰ διανύσματα  $\vec{AM}$  καὶ  $\vec{u}$  νὰ εἶναι συγγραμμικά. Δηλαδή τοιαῦτα ὥστε :

$$\vec{AM} = \lambda \vec{u} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\eta \quad \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + \lambda \vec{u} \quad \eta$$

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \lambda \vec{u} \quad (1) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Ἡ ἐξίσωση (1) καλεῖται **διανυσματικὴ παραμετρικὴ ἐξίσωση τῆς εὐθείας (δ)**.

Ἐὰν τὸ σημεῖον  $A$  συμπίπτῃ μὲ τὸ  $O$ , ἡ (1) γίνεται :

$$\vec{OM} = \lambda \vec{u} \quad (1')$$

**Δευτέρα περίπτωση.**—Εὐθεῖα ὁριζομένη ὑπὸ δύο σημείων : Ἡ εὐθεῖα (δ) εἶναι ὠρισμένη διὰ δύο σημείων,  $A$  καὶ  $B$  (σχ. 30).

Τὸ διάνυσμα  $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$  εἶναι τὸ διευθύνον διάνυσμα τῆς (δ). Ἄρα ἔχει διανυσματικὴν ἐξίσωσιν :

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \lambda (\vec{OB} - \vec{OA}) \quad \eta \quad \vec{OM} = (1 - \lambda) \vec{OA} + \lambda \vec{OB} \quad (2) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Ἡ (2) δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ συμμετρικωτέραν μορφήν :

$$(2') \quad \vec{OM} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB}, \quad \mu \epsilon \quad \alpha + \beta = 1.$$

Ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (2), ἐπειδὴ εἶναι γραμμικὴ συνάρτησις τοῦ  $\lambda$  προκύπτει ἀμέσως ὅτι τὸ σύνολον τῶν σημείων  $M$  τοῦ τμήματος  $AB$  ἀντιστοιχεῖ εἰς τιμὰς τοῦ  $\lambda$ , τοιαύτας ὥστε :  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Τοῦτο ἐκφράζομεν καὶ ὡς ἑξῆς :

$$M \in AB \iff \lambda \in [0, +1].$$

#### 40. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ. — Α') Ἡ εὐθεῖα (δ) ὀρίζεται

ἀπὸ τὸ σημεῖον  $M_0(x_0, y_0)$  καὶ τοῦ διευθύνοντος διανύσματος  $\vec{u}(\alpha, \beta)$ .

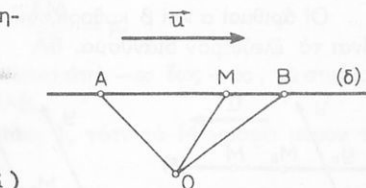
Ἐν σημεῖον  $M(x, y)$  τοῦ ἐπιπέδου θὰ κεί-  
ται ἐπὶ τῆς (δ), ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, ἔχωμεν

$$\vec{M_0M} = \lambda \vec{u}, \quad \text{δηλαδή :}$$

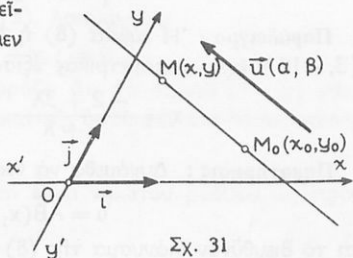
$$(x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} = \lambda (\alpha \vec{i} + \beta \vec{j}),$$

ἔς οὗ :

$$(I) \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha \lambda \\ y = y_0 + \beta \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$



Σχ. 30



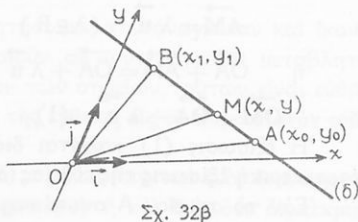
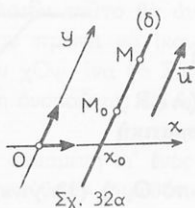
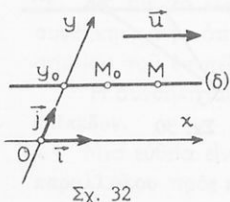
Σχ. 31

Αί εξισώσεις (I) καλούνται **παραμετρικοί εξισώσεις** της ευθείας (δ).

**Μερικοί περιπτώσεις :** 'Εάν  $\alpha = 0$ , τότε  $x = x_0$ , και ή ευθεία (δ) είναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Oy (σχ. 32α).

'Εάν  $\beta = 0$ , τότε  $y = y_0$  και ή ευθεία (δ) είναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Ox (σχ. 32).

Οί αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  καθορίζουν τὴν διεύθυνσιν τῆς ευθείας και τὸ  $\vec{u}$  ( $\alpha, \beta$ ) εἶναι τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα.



**Παράδειγμα :** 'Η ευθεία (δ) ή διερχομένη διὰ τοῦ σημείου  $M_0 (-4, +7)$  και ὀριζομένη ὑπὸ τοῦ διευθύνοντος διανύσματος  $\vec{u} (-2, 3)$  ἔχει παραμετρικὰς εξισώσεις :

$$x = -4 - 2\lambda \quad \text{και} \quad y = 7 + 3\lambda.$$

B') 'Η ευθεία (δ) ὀρίζεται ἀπὸ δύο σημεία A ( $x_0, y_0$ ) και B ( $x_1, y_1$ ).

Τὸ σημεῖον M ( $x, y$ ), (σχ. 32β) θὰ κείται ἐπὶ τῆς ευθείας (δ) τῶν A, B ὅταν, και μόνον ὅταν :

$$\vec{MA} + \lambda \vec{MB} = 0, \quad \eta \quad \vec{OA} - \vec{OM} + \lambda (\vec{OB} - \vec{OM}) = 0,$$

ἐξ οὗ :

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \lambda \vec{OB}}{1 + \lambda}$$

'Η σχέσηis αὕτη ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ Σύνολον τῶν δύο εξισώσεων :

$$(II) \quad \begin{cases} x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda} \end{cases} \quad \mu \epsilon \quad (\lambda \neq -1).$$

**Παράδειγμα :** 'Η ευθεία (δ) ή διερχομένη διὰ τῶν σημείων A ( $-2, 5$ ) και B ( $3, -10$ ) ἔχει παραμετρικὰς εξισώσεις :

$$x = \frac{-2 + 3\lambda}{1 + \lambda} \quad \text{και} \quad y = \frac{5 - 10\lambda}{1 + \lambda}$$

**Παρατήρησις :** Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ διάνυσμα :

$$\vec{u} = \vec{AB}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

εἶναι τὸ διευθύνον διάνυσμα τῆς (δ) και νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν παραμετρι-

κὴν παράστασιν τῆς εὐθείας (δ), διερχομένης διὰ τοῦ  $A(x_0, y_0)$  καὶ διευθύνσεως  $\vec{u}$ .  
 u. Λαμβάνομεν τότε :

$$(III) \quad \begin{array}{|l|l|} \hline x = x_0 + \mu(x_1 - x_0) & y = y_0 + \mu(y_1 - y_0) \\ \hline \end{array}$$

ἐνθα  $\mu$  μεταβλητὴ παράμετρος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην δὲν θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\lambda, \quad \text{ἀλλὰ} \quad \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \mu.$$

Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους (III) τὸ  $\mu$  μεταβάλλεται ἀπὸ  $-\infty$  ἕως  $+\infty$ , τὸ σημεῖον  $M(x, y)$  διαγράφει ὁλόκληρον τὴν εὐθεῖαν  $AB$ .

Ἄλλ' ὅταν τὸ  $\mu$  μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως 1, τότε τὸ  $M$  γράφει μόνον τὸ τμήμα  $AB$ .

### ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

**41. ΘΕΩΡΗΜΑ.**—Σύνολον σημείων ἀποτελεῖ εὐθεῖαν ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, αἱ συντεταγμέναι  $(x, y)$  τῶν σημείων τούτων ἱκανοποιοῦν τὴν ἐξίσωσιν :  $Ax + By + \Gamma = 0$ , ἐνθα οἱ συντελεσταὶ  $A$  καὶ  $B$  δὲν εἶναι συγχρόνως μηδέν ( $A, B, \Gamma$  ἀνεξάρτητοι τῶν  $x, y$ ).

Πράγματι, ἂν μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (I) τῆς (§ 40, A).

$$\left. \begin{array}{l} x = x_0 + \alpha\lambda \\ y = y_0 + \beta\lambda \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{ἀπαλείψωμεν τὸν } \lambda, \text{ εὐρίσκομεν :} \\ \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0 \end{array} \quad (1)$$

$$\eta \quad \beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0.$$

Ἄν δὲ τεθῇ :  $A = \beta, \quad B = -\alpha, \quad \Gamma = \alpha y_0 - \beta x_0$ , λαμβάνομεν :

$$Ax + By + \Gamma = 0. \quad (2)$$

**Ἀντιστρόφως :** Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι  $A \neq 0$ , τὸ ὅποιον εἶναι δυνατόν, ἀφοῦ οἱ  $A$  καὶ  $B$  δὲν δύνανται νὰ εἶναι συγχρόνως μηδέν. Ἐὰν τεθῇ  $y = k$ , τότε ἐκ τῆς

$$(2) \text{ λαμβάνομεν } x = -\frac{Bk + \Gamma}{A}.$$

Ἄρα, τὸ σημεῖον  $\left( -\frac{Bk + \Gamma}{A}, k \right)$  ἀνήκει εἰς τὸ Σύνολον.

Ἐστω λοιπὸν  $P(x_0, y_0)$  ἐν σημείον τοῦ Συνόλου : Ἄρα :

$$Ax_0 + By_0 + \Gamma = 0. \quad (3)$$

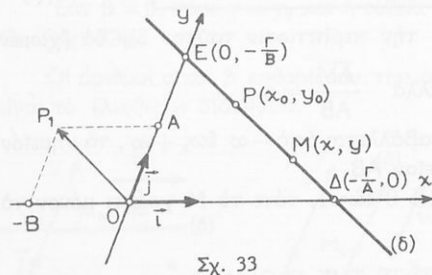
Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (2) καὶ (3), λαμβάνομεν :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (4)$$

Ἡ (4), συγκρινομένη μὲ τὴν (1), ἐκφράζει ὅτι τὰ σημεία  $M(x, y)$  κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας, τῆς διερχομένης διὰ τοῦ  $P$ , καὶ τῆς ὁποίας ἐν διευθύνον διάνυσμα εἶναι τὸ  $\vec{u}(-B, A)$ .

Ἡ ἐξίσωσις (2) καλεῖται **γραμμικὴ** καὶ εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς  $x$  καὶ  $y$ .

**Παρατηρήσεις\***: Ἀφοῦ ἡ εὐθεῖα (δ), ἐξισώσεως  $Ax + By + \Gamma = 0$ , δέχεται ὡς διευθύνον διάνυσμα  $\vec{OP}_1$ , τὸ ἔχον συντεταγμένας προβολὰς  $-B$  (ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων) καὶ  $A$  (ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων), (σχ. 33), ἐπεταί ὅτι:

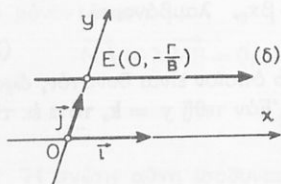


Σχ. 33

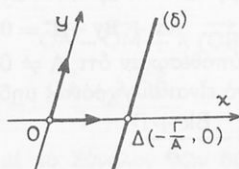
α') Πᾶσα εὐθεῖα, ἐξισώσεως  $Ax + By + \Gamma = 0$  εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα  $Ox$  ὅταν, καὶ μόνον ὅταν,  $A = 0$  (σχ. 33α), ὁπότε κατ' ἀνάγκην  $B \neq 0$ , διότι τὰ  $A, B$  δὲν δύνανται νὰ εἶναι συγχρόνως μηδέν. Ἡ (δ) τέμνει τὸν ἄξονα  $Oy$  εἰς τὸ σημεῖον  $E\left(0, -\frac{\Gamma}{B}\right)$ .

β) Πᾶσα εὐθεῖα, ἐξισώσεως  $Ax + By + \Gamma = 0$ , εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα  $Oy$  ὅταν, καὶ μόνον ὅταν,  $B = 0$  (σχ. 34), καὶ ἡ ὁποία τέμνει τὸν ἄξονα  $Ox$  εἰς τὸ σημεῖον  $\Delta\left(-\frac{\Gamma}{A}, 0\right)$ .

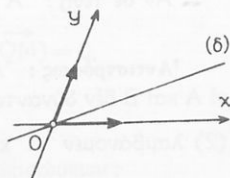
γ') Πᾶσα εὐθεῖα, ἐξισώσεως  $Ax + By + \Gamma = 0$  διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς  $O$  τῶν ἀξόνων ὅταν, καὶ μόνον ὅταν,  $\Gamma = 0$ , (σχ. 35), διότι αἱ συντεταγμένας  $(0, 0)$  τοῦ  $O$  ἱκανοποιοῦν τὴν  $Ax + By + \Gamma = 0$ , ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ  $\Gamma = 0$ .



Σχ. 33α



Σχ. 34



Σχ. 35

Εἰς τὸ (σχ. 33) ἔχομεν τὴν εὐθεῖαν (δ) ἐξισώσεως  $Ax + By + \Gamma = 0$ , ἡ ὁποία τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεία  $\Delta\left(-\frac{\Gamma}{A}, 0\right)$  καὶ  $E\left(0, -\frac{\Gamma}{B}\right)$ , τὰ ὁποῖα προκύπτουν, ὅταν εἰς τὴν ἐξίσωσιν  $Ax + By + \Gamma = 0$  θέσωμεν  $y = 0$ ,  $x = 0$  ἀντιστοίχως καὶ ἐξ ἀρχῆς ὑποτεθῇ  $A \cdot B \neq 0$ .

Ἡ τετμημένη  $\left(-\frac{\Gamma}{A}\right)$  τοῦ  $\Delta$  καλεῖται **τετμημένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν** τῆς εὐθείας (δ), καὶ ἡ τεταγμένη  $\left(-\frac{\Gamma}{B}\right)$  τοῦ  $E$  καλεῖται **τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν** τῆς εὐθείας (δ). Ἀμφότεραι δὲ **συντεταγμένα ἐπὶ τὴν ἀρχὴν** τῆς εὐθείας ταύτης.

**Παράδειγμα 1ον:** 'Η εξίσωσις  $2x + 10 = 0$  παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα  $Oy$  μὲ τετμημένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν  $x = -\frac{10}{2} = -5$ .

**Παράδειγμα 2ον:** 'Η εξίσωσις  $4y - 24 = 0$  παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα  $Ox$  μὲ τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν  $y = \frac{24}{4} = 6$ .

**Παράδειγμα 3ον:** 'Η εξίσωσις  $2x + 3y = 0$  παριστᾷ εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς  $O$  τῶν ἀξόνων, καθόσον  $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$  ἢ  $0 = 0$ .

**Παράδειγμα 4ον:** 'Η εξίσωσις  $4x + 3y - 12 = 0$  παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸ διάνυσμα  $\vec{u}(-3, 4)$  καὶ ἔχουσιν συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν

$$x = -\frac{\Gamma}{A} = \frac{12}{4} = 3 \quad \text{καὶ} \quad y = -\frac{\Gamma}{B} = \frac{12}{3} = 4.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων προκύπτει ὅτι: Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν μίαν εὐθεῖαν  $(\delta)$ , ἐξισώσεως  $Ax + By + \Gamma = 0$ , ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰς συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν αὐτῆς  $x = -\frac{\Gamma}{A}$  καὶ  $y = -\frac{\Gamma}{B}$  καὶ νὰ χαράξωμεν τὴν εὐθεῖαν, τὴν διερχομένην διὰ τῶν σημείων τούτων.

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

44. Νὰ σχηματισθῇ ἡ εξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον  $M$  καὶ παραλλήλου πρὸς τὸ διάνυσμα  $\vec{V}$ , ἂν:

|               |                 |               |                  |
|---------------|-----------------|---------------|------------------|
| 1) $M(-2, 2)$ | $\vec{V}(2, 3)$ | 5) $M(0, -5)$ | $\vec{V}(0, 1)$  |
| 2) $M(-2, 3)$ | $\vec{V}(0, 1)$ | 6) $M(-3, 0)$ | $\vec{V}(0, 2)$  |
| 3) $M(4, 0)$  | $\vec{V}(2, 0)$ | 7) $M(4, -5)$ | $\vec{V}(-1, 1)$ |
| 4) $M(0, 0)$  | $\vec{V}(2, 5)$ | 8) $M(1, 2)$  | $\vec{V}(2, -3)$ |

καὶ ἀκολούθως νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι εἰς ἑκάστην περίπτωσιν.

45. Νὰ κατασκευασθοῦν τὰ διευθύνοντα διανύσματα τῶν εὐθειῶν:

|                 |                      |                   |
|-----------------|----------------------|-------------------|
| 1) $x + 2y = 1$ | 3) $4x - 3y + 8 = 0$ | 5) $5x + 10y = 0$ |
| 2) $2x - y = 3$ | 4) $2x + 7y - 5 = 0$ | 6) $2x - 8y = 0$  |

46. Νὰ εὕρεθοῦν αἱ συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῶν εὐθειῶν:

|                       |                      |
|-----------------------|----------------------|
| 1) $3x - 4y - 12 = 0$ | 3) $2x - 6y = -3$    |
| 2) $3x - y + 5 = 0$   | 4) $4x + 6y + 3 = 0$ |

**42. ΑΝΗΓΜΕΝΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.**—Θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν  $(\delta)$ , ἐξισώσεως  $Ax + By + \Gamma = 0$ , μὴ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα  $Oy$  ( $B \neq 0$ ).

'Η δοθεῖσα εξίσωσις γράφεται:

$$\psi = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$$

καὶ ἂν τεθῇ  $\lambda = -\frac{A}{B}$ ,  $\beta = -\frac{\Gamma}{B}$ , τότε:

$$y = \lambda x + \beta \quad (1)$$

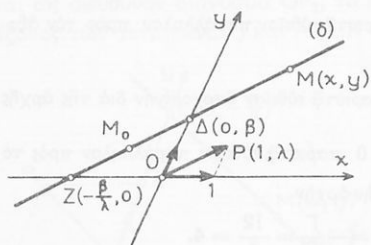
Ἡ ἐξίσωσις (1) καλεῖται **ἀνηγμένη μορφή τῆς ἐξισώσεως τῆς εὐθείας (δ)**.

Ἡ (δ) τέμνει τὸν ἄξονα Oy εἰς τὸ σημεῖον  $\Delta(0, \beta)$  καὶ εἶναι παράλληλος

πρὸς τὸ διάνυσμα  $\vec{OP}(1, \lambda)$ , καθόσον ἡ (1) γράφεται

$$\frac{x}{1} = \frac{y - \beta}{\lambda}.$$

Ἐξ ὁρίσμοῦ, ὁ συντελεστής  $\beta$  καλεῖται **τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν** καὶ ὁ συντελεστής  $\lambda$  εἶναι ὁ **συντελεστής\*** διευθύνσεως τῆς (δ).



Σχ. 36

**Νέα ἔκφρασις τοῦ συντελεστοῦ διευθύνσεως εὐθείας (δ).**— Ἐστώσαν δύο σημεῖα  $A_1(x_1, y_1)$  καὶ  $A_2(x_2, y_2)$ , μὲ  $(x_2 \neq x_1)$ , τῆς εὐθείας (δ), ἐξισώσεως  $y = \lambda x + \beta$ . Θὰ εἶναι :

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \lambda x_1 + \beta \\ y_2 &= \lambda x_2 + \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_2 - y_1 = \lambda(x_2 - x_1) \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**43. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.**— Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον  $M_1(x_1, y_1)$  καὶ ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως δοθέντα ἀριθμὸν ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

Ἐὰν  $M(x, y)$  εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ζητουμένης εὐθείας, τότε τὸ διάνυσμα  $\vec{M_1M}(x - x_1, y - y_1)$  θὰ ἔχῃ συντελεστὴν διευθύνσεως

$$\lambda = \frac{y - y_1}{x - x_1}, \quad \text{ἐξ οὗ :}$$

$$y - y_1 = \lambda(x - x_1) \quad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἐὰν τὸ  $M_1$  κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος Oy, τότε  $x_1 = 0$  καὶ  $y_1 = \beta$ , καὶ ἡ (1) λαμβάνει τὴν μορφήν :  $y = \lambda x + \beta$ .

Μεταβαλλομένου τοῦ  $\lambda$ , ἡ (1) ὀρίζει τὴν **οἰκογένειαν** τῶν εὐθειῶν, τῶν διερχομένων διὰ τοῦ  $M_1(x_1, y_1)$ , **ἐξαιρουμένης τῆς εὐθείας τῆς παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα Oy**.

**Παράδειγμα :** Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας (δ) τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου  $M(3, 5)$  καὶ ἐχούσης συντελεστὴν διευθύνσεως  $\lambda = -\frac{3}{4}$  εἶναι :

$$y - 5 = -\frac{3}{4}(x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 4y - 29 = 0.$$

\* Καλοῦμεν **συντελεστὴν διευθύνσεως εὐθείας** τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως διανύσματος (μὴ μηδενικοῦ), παραλλήλου πρὸς τὴν εὐθεῖαν.

Συντελεστής διευθύνσεως ἡ κλίσις ἐνὸς μὴ μηδενικοῦ διανύσματος  $\vec{u}(a, \beta)$  καλεῖται τὸ πηλίκον  $\frac{\beta}{a} = \lambda$ , ὅπου  $a \neq 0$ .

**44. ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΗΣ ΔΙΑ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ  $A_1(x_1, y_1)$  ΚΑΙ  $A_2(x_2, y_2)$ .**— Εἰς τὴν (§ 40, Β) εὑρομεν ὅτι αἱ παραμετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας  $A_1A_2$ , ἂν  $(x_2 \neq x_1)$ , εἶναι :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x - x_1 &= \lambda(x_2 - x_1) \\ y - y_1 &= \lambda(y_2 - y_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

ἡ ὁποία, βάσει τῶν ιδιοτήτων τῶν ἀναλογιῶν, γράφεται :

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \quad (1)$$

καὶ ὑπὸ μορφήν ὀριζούσης :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

**Παράδειγμα :** Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας (δ), ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα  $A_1(3, -2)$  καὶ  $A_2(0, -1)$  εἶναι :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 3y + 3 = 0.$$

**45. Η ΕΥΘΕΙΑ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ  $A_1(a, 0)$ ,  $A_2(0, \beta)$  ΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ Οx ΚΑΙ Οy ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΩΣ.**— Ἐν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τῆς προηγούμενης παραγράφου θέσωμεν  $x_1 = a$ ,  $y_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $y_2 = \beta$ , λαμβάνομεν :

$$\frac{x - a}{y - 0} = \frac{0 - a}{\beta - 0} \quad \Leftrightarrow \quad \beta x + \alpha y = \alpha\beta. \quad (1)$$

Ἐπειδὴ εἶναι δυνατόν νὰ ὑποθέσωμεν  $\alpha\beta \neq 0$  (διότι ἄλλως τὰ σημεῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος, καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς  $A_1A_2$  θὰ ἦτο ἡ  $x = 0$  ἢ  $y = 0$ ), ἡ (1) γράφεται :

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{\beta} = 1} \quad (1')$$

**Παράδειγμα :** Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν σημείων  $A_1(5, 0)$  καὶ  $A_2(0, 3)$  ἔχει ἐξίσωσιν :

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 5y - 15 = 0.$$

**46. ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ ( $\delta_1$ ) ΚΑΙ ( $\delta_2$ ).**

Ἐστωσαν ( $\delta_1$ ) καὶ ( $\delta_2$ ) δύο εὐθεῖαι, ὧν αἱ Καρτεσιαναὶ ἐξισώσεις, εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα ἄξόνων, εἶναι ἀντιστοίχως :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left\{ \begin{aligned} A_1x + B_1y + \Gamma_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2 &= 0 \end{aligned} \right. & \begin{aligned} \mu \epsilon \quad & |A_1| + |B_1| > 0 \\ \mu \epsilon \quad & |A_2| + |B_2| > 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸ διάνυσμα  $\vec{u}(-B_1, A_1)$

καὶ ἡ (2) παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸ διάνυσμα  $\vec{u}(-B_2, A_2)$ . Ἵνα αἱ εὐθεῖαι (1) καὶ (2) εἶναι παράλληλοι, πρέπει καὶ ἄρκεῖ τὰ  $\vec{u}$  καὶ  $\vec{v}$  νὰ εἶναι γραμμικῶς ἐξηγητημένα. Ἀρα (§ 15), πρέπει καὶ ἄρκεῖ :

$$(-B_1) \cdot A_2 - (A_1) \cdot (-B_2) = 0 \iff \boxed{A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0} \quad (3)$$

Ὡστε : Ἵνα δύο εὐθεῖαι, ἐξισώσεων  $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$  καὶ  $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$  εἶναι παράλληλοι (ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν σημασίαν), πρέπει καὶ ἄρκεῖ νὰ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης (3).

Ἡ (3) γράφεται καὶ ὑπὸ τὴν μορφήν :  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ . (3')

**Παρατήρησις :** Ἡ συνθήκη παραλληλίας δύο εὐθειῶν, τῶν ὁποίων αἱ Καρτεσιανὰ ἐξισώσεις εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα ἀξόνων εἶναι :

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0, \quad |A_1| + |B_1| > 0$$

καὶ  $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0, \quad |A_2| + |B_2| > 0,$

δύναται νὰ γραφῇ :

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ἀλλὰ μία τοῦλάχιστον τῶν} \quad \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}$$

νὰ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

**Μερικὴ περίπτωσις :** Ἐάν αἱ εὐθεῖαι  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$  ἔχουν ἐξισώσεις ἀντιστοίχως :

$$\left. \begin{array}{l} y = \lambda_1 x + \beta_1 \\ y = \lambda_2 x + \beta_2 \end{array} \right\} \text{ ἡ συνθήκη (3) γίνεται : } \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \implies \boxed{\lambda_1 = \lambda_2}$$

ἡ ὁποία ἐκφράζει ὅτι :

Ἵνα δύο εὐθεῖαι, μὴ παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα  $Oy$ , εἶναι παράλληλοι, πρέπει καὶ ἄρκεῖ οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσοι.

**Παράδειγμα 1ον :** Αἱ εὐθεῖαι  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$ , ἐξισώσεων  $3x - 4y + 1 = 0$  καὶ  $9x - 12y + 7 = 0$  ἀντιστοιχῶς, εἶναι παράλληλοι, διότι :

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 3(-12) - (-4) \cdot 9 = -36 + 36 = 0.$$

**Παράδειγμα 2ον :** Αἱ ἐξισώσεις  $y = 5x - 3$  καὶ  $y = 5x + 7$  παριστάνουν εὐθείας παράλληλους καὶ πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ἐξισώσεως  $y = 5x$ , διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς  $O(0,0)$ .

**47. ΕΥΘΕΙΑ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΗ ΔΙΑ ΔΟΘΕΝΤΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ  $M_0(x_0, y_0)$  ΚΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ ΠΡΟΣ ΔΟΘΕΙΑΝ ΕΥΘΕΙΑΝ.**— Ἐστω  $(\delta)$  εὐθεῖα, ἐξισώσεως  $Ax + By + \Gamma = 0$  καὶ  $(\delta_1)$  εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ  $M_0(x_0, y_0)$  καὶ παράλληλος πρὸς τὴν  $(\delta)$ .

Ἐπειδὴ ἡ  $(\delta)$  εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ διάνυσμα  $\vec{u}(-B, A)$ , ἐὰν  $M(x, y)$



είναι τυχόν σημείον τῆς  $(\delta_1)$ , τὸ διάνυσμα  $\vec{M_0M}(x-x_0, y-y_0)$  θὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ  $\vec{u}$ . Ἄρα

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ -B & A \end{vmatrix} = 0 \iff \boxed{A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0}$$

**Παράδειγμα :** Ἡ εὐθεῖα  $(\delta)$  ἡ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου  $M_0(3,-2)$  καὶ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν  $(\delta_1)$ , ἐξισώσεως  $2x-3y-4=0$ , ἔχει ἐξίσωσιν :

$$2(x-3) + (-3)(y+2) = 0 \iff 2x-3y-12=0.$$

## Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

47. Νὰ μορφωθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ σημείου  $(3,-4)$  καὶ ἔχει συντελεστὴν διευνύσεως :

$$\begin{array}{l|l|l} 1) & \lambda = -2 & 3) & \lambda = -\frac{3}{4} & 5) & \lambda = 4,25 \\ 2) & \lambda = 5 & 4) & \lambda = \frac{5}{8} & 6) & \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}$$

48. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων  $A_1, A_2$ , εἰς τὰς ἀκολουθοῦσας περιπτώσεις :

$$\begin{array}{l|l|l} 1) & A_1(1,2), & A_2(-2,3), & 5) & A_1(-3,2), & A_2(5,2), \\ 2) & A_1(-1,-2), & A_2(-3,-6), & 6) & A_1(0,0), & A_2(0,1), \\ 3) & A_1(3,0), & A_2(0,4), & 7) & A_1(-4,5), & A_2(2,1), \\ 4) & A_1(4,5), & A_2(4,7), & 8) & A_1(-1,2), & A_2(3,2). \end{array}$$

49. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποίου κορυφαὶ εἶναι τὰ σημεία  $(-3,2)$ ,  $(3,-2)$  καὶ  $(0,1)$ .

50. Τοῦ προηγουμένου τριγώνου νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν διαμέσων του.

51. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεία  $(10,8)$ ,  $(-3,9)$ ,  $(-4,-4)$ ,  $(9,-5)$ .

52. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεία  $(-3,-7)$ ,  $(0,-2)$ ,  $(6,8)$  κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

53. Νὰ ὁρισθῇ ὁ  $x$ , εἰς τρόπον ὥστε τὰ σημεία  $(x,-3)$ ,  $(1,1)$  καὶ  $(-4,3)$  νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

54. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, τῆς ὁποίας αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν εἶναι :

$$\begin{array}{l|l} 1) & 4 \text{ καὶ } 5 \\ 2) & -6 \text{ καὶ } 8 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 3) & -5 \text{ καὶ } -3 \\ 4) & 7 \text{ καὶ } -2. \end{array}$$

55. Ποῖαι αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν ἐκάστης τῶν εὐθειῶν :

$$\begin{array}{l|l} 1) & 2x + 5y - 10 = 0 \\ 2) & 3x - 4y + 24 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 3) & 5x - 4y - 20 = 0 \\ 4) & x - 3y + 9 = 0. \end{array}$$

48. **ΕΥΘΕΙΑΙ ΣΥΜΠΗΠΤΟΥΣΑΙ.** — Ἐστῶσαν αἱ εὐθεῖαι  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$ , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως :

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0,$$

ἢ παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα  $Oy$ .

Οί συντελεσται διευθύνσεως αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως  $\lambda_1 = -\frac{A_1}{B_1}$  καὶ  $\lambda_2 = -\frac{A_2}{B_2}$ . Αἱ δὲ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν εἶναι ἀντιστοίχως :

$$\beta_1 = -\frac{\Gamma_1}{B_1} \quad \text{καὶ} \quad \beta_2 = -\frac{\Gamma_2}{B_2}.$$

Ἀφοῦ αἱ  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$  συμπίπτουν, ἔπεται ὅτι :

$$\lambda = \lambda_2 \quad \text{καὶ} \quad \beta_1 = \beta_2 \quad \eta \quad -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} \quad \text{καὶ} \quad -\frac{\Gamma_1}{B_1} = -\frac{\Gamma_2}{B_2},$$

$$\xi \text{ ὡν λαμβάνομεν:} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \quad (1)$$

**Παρατήρησις :** Ἡ συνθήκη (1) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Τὸ ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως. Ὡστε :

Ἵνα δύο εὐθεῖαι συμπίπτουν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ ὁμώνυμοι συντελεσται τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν νὰ εἶναι ἀνάλογοι.

**Παράδειγμα 1ον :** Αἱ εὐθεῖαι  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$ , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως  $3x + 5y - 12 = 0$  καὶ  $6x + 10y - 24 = 0$  συμπίπτουν, καθόσον εἶναι :

$$\frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{-12}{-24}.$$

**Παράδειγμα 2ον :** Νὰ ὀρίσθωσι οἱ  $\alpha$  καὶ  $\beta$ , ἵνα αἱ ἐξισώσεις  $2\alpha x + 2y - 5 = 0$  καὶ  $4x - 3y + 7\beta = 0$  παριστάνουν τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ :

$$\frac{2\alpha}{4} = \frac{2}{-3} = \frac{-5}{7\beta} \implies \frac{2\alpha}{4} = -\frac{2}{3} \quad \text{καὶ} \quad \frac{-5}{7\beta} = -\frac{2}{3}$$

$$\xi \text{ ὧν προκύπτει:} \quad \alpha = -\frac{4}{3} \quad \text{καὶ} \quad \beta = \frac{15}{14}.$$

**49. ΕΥΘΕΙΑΙ ΤΕΜΝΟΜΕΝΑΙ.**—Ἐστωσαν αἱ εὐθεῖαι  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$ , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως :

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 & (1) \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Ἐὰν αὗται δὲν εἶναι παράλληλοι, θὰ ἔχουν διαφόρους συντελεστὰς διευθύνσεως. Δηλαδή :

$$-\frac{A_1}{B_1} \neq -\frac{A_2}{B_2} \iff \boxed{A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0}$$

καὶ θὰ τέμνονται εἰς σημεῖον  $M(x,y)$ , τοῦ ὁποῖου αἱ συντεταγμέναι θὰ ἰκανοποιοῦν ἐκάστην τῶν ἐξισώσεων (1), (2).

Ἄρα τὸ διατεταγμένον ζεύγος  $(x,y)$  θὰ εἶναι ἡ κοινὴ λύσις τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων τούτων.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον. Ὡστε :

“Ινα δύο εὐθείαι τέμνονται, πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως αὐτῶν νὰ εἶναι διάφοροι (νὰ πληροῦται ἡ συνθήκη  $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ ).

**Παράδειγμα:** Αἱ εὐθείαι  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$ , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως  $2x + 4y - 26 = 0$  καὶ  $4x - 3y + 3 = 0$ , τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον  $M$ , τοῦ ὁποῖου αἱ συντεταγμέναι  $(x, y)$  εἶναι λύσις τοῦ συστήματος

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 4y - 26 = 0 \\ 4x - 3y + 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 3 \quad \text{καὶ} \quad y = 5$$

καὶ καθόσον εἶναι  $A_1B_2 - A_2B_1 = 2(-3) - 4 \cdot 4 = -6 - 16 = -22 \neq 0$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

56. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τομῆς  $M(x, y)$  ἐκάστης τῶν εὐθειῶν  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$ , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως:

- 1)  $x - y = 1$ ,  $x + y = 1$ .
- 2)  $6x - 2y - 8 = 0$ ,  $3x + y = 14$ .
- 3)  $4x - 5y + 20 = 0$ ,  $12x - 15y + 6 = 0$ .
- 4)  $2x + 3y - 6 = 0$ ,  $4x + 6y + 9 = 0$ .
- 5)  $2 - 3x = y$ ,  $6x + 2y = 4$ .

57. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν τριγώνου  $AB\Gamma$ , τοῦ ὁποῖου αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν του εἶναι:  $2x + 3y = 0$ ,  $x + 3y + 3 = 0$ ,  $x + y + 1 = 0$ .

58. Τοῦ προηγουμένου τριγώνου νὰ εὐρεθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του, αἱ ἐξισώσεις τῶν διαμέσων του καὶ αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ.

59. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν, τῶν παραλλήλων πρὸς τὰς πλευράς τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$ , τοῦ ὁποῖου αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν εἶναι  $2x + 3y = 0$ ,  $x + 3y + 3 = 0$ ,  $x + y + 1 = 0$ , τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου τούτου.

60. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθείαι  $(\delta_1)$ ,  $(\delta_2)$ ,  $(\delta_3)$ ,  $(\delta_4)$ , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως  $2x - 3y + 5 = 0$ ,  $6x + 10y + 15 = 0$ ,  $6x - 9y - 20 = 0$ ,  $3x + 5y - 20 = 0$ , σχηματίζουν παραλληλόγραμμον. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν του.

61. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα  $(\delta_1)$ , ἐξισώσεως  $3x + 4y - 2 = 0$ , εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν  $(\delta_2)$  ἐξισώσεως  $9x + 12y + 7 = 0$ , καὶ συμπίπτει μετὰ τῆς εὐθείας  $(\delta_3)$ , ἐξισώσεως  $15x + 20y - 10 = 0$ .

## 50. ΣΥΝΘΗΚΗ ΙΝΑ ΤΡΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΙ ΕΧΟΥΝ ΚΟΙΝΟΝ ΣΗΜΕΙΟΝ.—

Ἐστωσαν αἱ εὐθείαι  $(\delta_1)$ ,  $(\delta_2)$ ,  $(\delta_3)$ , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως:

$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$  (1),  $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$  (2) καὶ  $A_3x + B_3y + \Gamma_3 = 0$  (3).

Ἰνα αὗται ἔχουν κοινὸν σημεῖον  $M_0(x_0, y_0)$ , πρέπει αἱ συντεταγμέναι:

$$x_0 = \frac{B_1\Gamma_2 - B_2\Gamma_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \quad \text{καὶ} \quad y_0 = \frac{A_2\Gamma_1 - A_1\Gamma_2}{A_1B_2 - A_2B_1} \quad (k)$$

τῆς τομῆς τῶν (1) καὶ (2) νὰ ἐπαληθεύουν τὴν (3). Ἦτοι:

$$A_3 \cdot \frac{B_1\Gamma_2 - B_2\Gamma_1}{A_1B_2 - A_2B_1} + B_3 \cdot \frac{A_2\Gamma_1 - A_1\Gamma_2}{A_1B_2 - A_2B_1} + \Gamma_3 = 0$$

$$\text{ἢ} \quad A_3(B_1\Gamma_2 - B_2\Gamma_1) + B_3(A_2\Gamma_1 - A_1\Gamma_2) + \Gamma_3(A_1B_2 - A_2B_1) = 0 \quad (k_1)$$

καὶ ὑπὸ μορφήν ὀριζούσης:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Ἐὰν καλέσωμεν χάριν συντομίας.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} B_2 & \Gamma_2 \\ B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \Gamma_2 & A_2 \\ \Gamma_3 & A_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$$

τὰς ἐλάσσονας ὀριζούσας τῆς  $\Delta$ , τότε ἡ  $\Delta$  γράφεται :

$$\Delta = A_1\Delta_1 + B_1\Delta_2 + \Gamma_1\Delta_3 \quad (5)$$

καὶ διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

α) Αἱ τρεῖς ἐλάσσονες εἶναι μηδέν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι οἱ συντελεσταὶ  $A_2, B_2, \Gamma_2$  εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς  $A_3, B_3, \Gamma_3$  καὶ αἱ εὐθεῖαι (2) καὶ (3) ταυτίζονται. Οἱ  $A_1, B_1, \Gamma_1$  δύνανται νὰ εἶναι ἢ οὐ ἀνάλογοι πρὸς τοὺς  $A_2, B_2, \Gamma_2$ . Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ταυτίζονται, εἰς τὴν δευτέραν, ἡ πρώτη ἔχει κοινὸν σημεῖον μετὰ τῶν δύο τελευταίων, αἱ ὁποῖαι ταυτίζονται.

Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις ἔχομεν :  $\Delta = A_1\Delta_1 + B_1\Delta_2 + \Gamma_1\Delta_3 = 0$ .

β) Ἐκ τῶν τριῶν ὀριζουσῶν  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  ἡ μία, ἔστω ἡ  $\Delta_3 \neq 0$ . Τότε αἱ (2) καὶ (3) ἔχουν μίαν κοινὴν λύσιν  $x_0, y_0$ , πεπερασμένην, τὴν (κ). Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν  $(k_1)$ .

γ) Ἐκ τῶν τριῶν ὀριζουσῶν  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  αἱ δύο, ἔστω  $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$ .

Τότε  $\Delta_3 = 0$  ἢ  $\frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}$  καὶ αἱ (2), (3) εἶναι παράλληλοι.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, διὰ νὰ ἔχουν αἱ τρεῖς εὐθεῖαι κοινὸν σημεῖον (τὸ  $\infty$ ), θὰ πρέπει νὰ εἶναι παράλληλοι.

\*Ἀρα :

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}$$

Ὅταν ὁμως συμβαίνει τοῦτο, ἡ  $\Delta$  εἶναι πάλιν μηδέν.

Ἡ συνθήκη  $\Delta = 0$  εἶναι, ἐπομένως : ἀναγκαῖα, ἵνα εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις αἱ εὐθεῖαι  $(\delta_1), (\delta_2), (\delta_3)$  ἔχουν κοινὸν σημεῖον.

Ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι εἶναι καὶ ἐπαρκής.

**Παράδειγμα :** Αἱ εὐθεῖαι  $(\delta_1), (\delta_2), (\delta_3)$ , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως :

$$3x - 5y - 10 = 0, \quad x + y + 1 = 0, \quad 21x - 11y - 31 = 0,$$

ἔχουν κοινὸν σημεῖον, διότι ἡ ὀρίζουσα :

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & -10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 21 & -11 & -31 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -11 & -31 \end{vmatrix} - (-5) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 21 & -31 \end{vmatrix} + (-10) \begin{vmatrix} 1 & 21 \\ 21 & -11 \end{vmatrix} = 0$$

**51. ΛΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ.**— Θεωροῦμεν δύο εὐθείας  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$  ἐξισώσεων ἀντιστοίχως :

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0, \quad (2)$$

τεμνομένης εἰς τι σημεῖον  $M(x_1, y_1)$ . Πᾶσα εὐθεῖα  $(\delta_3)$  διερχομένη διὰ τῆς τομῆς τῶν (1) καὶ (2) θὰ ἔχη ἐξίσωσιν :

$$(\delta_3) : \quad A_1x + B_1y + \Gamma_1 + k(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0, \quad (3)$$

διότι, ἀφοῦ τὸ  $M(x_1, y_1)$  εἶναι τομὴ τῶν (1) καὶ (2), ἔπεται ὅτι :

$$(4) \quad A_1x_1 + B_1y_1 + \Gamma_1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad A_2x_1 + B_2y_1 + \Gamma_2 = 0 \quad (5)$$

$$\text{Ἐὰν} \quad k \neq 0, \quad \text{τότε} \quad k(A_2x_1 + B_2y_1 + \Gamma_2) = 0 \quad (6)$$

ὁπότε διὰ προσθέσεως τῶν (4) καὶ (6), λαμβάνομεν :

$$A_1x_1 + B_1y_1 + \Gamma_1 + k(A_2x_1 + B_2y_1 + \Gamma_2) = 0 \quad (7)$$

Ἡ (7) ἐκφράζει ὅτι τὸ σημεῖον  $M(x_1, y_1)$  κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας :

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 + k(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0 \quad (8)$$

**Παρατήρησης :** 'Εάν αί  $(\delta_1)$  καί  $(\delta_2)$  είναι παράλληλοι, τότε ή (8) παριστᾷ σύστημα παραλλήλων εὐθειῶν πρὸς τὰς  $(\delta_1)$  καί  $(\delta_2)$ . Διότι τότε θὰ εἶναι :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \Rightarrow \frac{A_1}{kA_2} = \frac{B_1}{kB_2} \Rightarrow \frac{A_1 + kA_2}{A_1} = \frac{B_1 + kB_2}{B_1},$$

ή ὅποια σχέσις ἐκφράζει ὅτι αἱ  $(\delta_1)$  καί  $(\delta_3)$  εἶναι παράλληλοι.

**Παράδειγμα 1ον :** Νά εὐρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἣτις διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον  $M_1(2,1)$  καὶ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν  $(\delta_1)$ ,  $(\delta_2)$ , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως:  $3x - 5y - 10 = 0$  καὶ  $x + y + 1 = 0$ .

**Λύσις :** 'Η ζητουμένη ἐξίσωσις θὰ εἶναι τῆς μορφῆς :

$$3x - 5y - 10 + k(x + y + 1) = 0 \quad (9)$$

'Επειδὴ τὸ  $M_1(2, 1)$  κεῖται ἐπ' αὐτῆς, ἔπεται :

$$3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 - 10 + k(2 + 1 + 1) = 0 \Rightarrow k = \frac{9}{4}, \text{ ὅτε ἡ (9) γίνεται :}$$

$$21x - 11y - 31 = 0.$$

**Παράδειγμα 2ον :** Νά εὐρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, τῆς διερχομένης διὰ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν  $(\delta_1)$ ,  $(\delta_2)$ , ἐξισώσεων :

$$2x + y + 1 = 0 \text{ καὶ } x - 2y + 1 = 0$$

καὶ παραλλήλου πρὸς τὴν εὐθεῖαν  $(\delta_3)$ , ἐξισώσεως  $4x - 3y - 7 = 0$ .

**Λύσις :** 'Η ζητουμένη θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν :

$$2x + y + 1 + k(x - 2y + 1) = 0$$

$$\eta \quad (2 + k)x + (1 - 2k)y + (1 + k) = 0 \quad (10)$$

'Εάν αὕτη εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν  $(\delta_3)$ , θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{2 + k}{4} = \frac{1 - 2k}{-3} \Rightarrow k = 2$$

καὶ ἡ (10) γίνεται :

$$4x - 3y + 3 = 0$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**62.** Νά εὐρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὅποια διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν  $(\delta_1)$ ,  $(\delta_2)$ , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως  $2x - 3y + 2 = 0$ ,  $3x - 4y - 2 = 0$  καὶ τοῦ σημείου  $O(0, 0)$ .

**63.** Νά εὐρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν, τῶν διερχομένων διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν εὐθειῶν  $(\delta_1)$ ,  $(\delta_2)$ ,  $(\delta_3)$ , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως  $2x - 3y + 1 = 0$ ,  $x - y = 0$ ,  $3x + 4y - 2 = 0$  καὶ παραλλήλων πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς του.

**64.** Νά εὐρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὅποια διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν  $2x + 5y - 3 = 0$ ,  $3x - 2y - 1 = 0$  καὶ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν  $x - y = 0$ ,  $x + 3y - 6 = 0$ .

## ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

**52. ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ.** — Θεωροῦμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων.

$$(I) \quad \begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma & (1) \\ \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 & (2) \end{cases}$$

'Εστωσαν  $(\delta)$  καὶ  $(\delta_1)$  αἱ εὐθεῖαι, ἐξισώσεων (1) καὶ (2), εἰς τυχὸν σύστημα συντεταγμένων. Τὸ σημεῖον  $M(x, y)$ , ἐὰν ὑπάρχῃ, κοινὸν τῶν δύο εὐθειῶν, ἔχει συντεταγμένας, αἱ ὅποια εἶναι λύσις τοῦ συστήματος (1). 'Αντιστρόφως, πᾶσα

λύσεις  $(x, y)$  τοῦ συστήματος (1), δίδει σημείον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ τομὴ τῶν εὐθεϊῶν  $(\delta)$  καὶ  $(\delta_1)$ .

**1ον :** Ἐὰν  $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0$ , αἱ εὐθεῖαι  $(\delta)$  καὶ  $(\delta_1)$  δὲν ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν. Θὰ ἔχουν ἓν κοινὸν σημείον,  $M$ , καὶ ἓν μόνον. Τὸ σύστημα (1) ἐπιδέχεται μίαν μοναδικὴν λύσιν, ἡ ὁποία παρέχεται ὑπὸ τῶν τύπων τοῦ Cramer :

$$x = \frac{\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}.$$

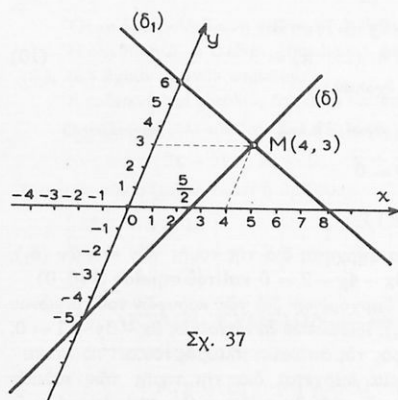
**2ον :** Ἐὰν  $\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} \neq \frac{\gamma}{\gamma_1}$ , αἱ εὐθεῖαι  $(\delta)$  καὶ  $(\delta_1)$  εἶναι παράλληλοι ὑπὸ τὴν στενὴν σημασίαν, δηλαδὴ δὲν ἔχουν κοινὸν σημείον. Τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

**3ον :** Ἐὰν  $\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1}$ , αἱ εὐθεῖαι  $(\delta)$  καὶ  $(\delta_1)$  συμπίπτουν. Τὸ σύστημα ἐπιδέχεται ἀπείρους λύσεις. Εἶναι ἀόριστον.

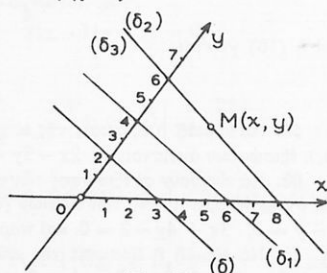
**Παράδειγμα 1ον :** Αἱ εὐθεῖαι  $(\delta)$  καὶ  $(\delta_1)$  ἐξισώσεων ἀντιστοίχως:  $2x - y = 5$  καὶ  $3x + 4y = 24$ , τέμνονται εἰς τὸ σημείον  $M$ , τοῦ ὁποῖου αἱ συντεταγμέναι εἶναι λύσεις τοῦ συστήματος :

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 4y = 24 \end{cases} \Rightarrow x = 4, y = 3.$$

Αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς μὲν  $(\delta)$  εἶναι  $\frac{5}{2}$  καὶ  $-5$ , τῆς δὲ  $(\delta_1)$  εἶναι αἱ 8 καὶ 6, ὥς δεικνύει τὸ (σχ. 37).



Σχ. 37



Σχ. 38

**Παράδειγμα 2ον :** Αἱ εὐθεῖαι  $(\delta)$  καὶ  $(\delta_1)$ , ἐξισώσεων  $2x + 3y - 6 = 0$  καὶ  $4x + 6y - 24 = 0$  εἶναι παράλληλοι, διότι  $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{-6}{-24}$ , αἱ δὲ σχετικαὶ θέσεις αὐτῶν παρέχονται ὑπὸ τοῦ ἀνωτέρω (σχ. 38).

Τὸ σύστημα λοιπὸν  $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = 24 \end{cases}$  εἶναι ἀδύνατον.

**Παράδειγμα 3ον :** Αἱ εὐθεῖαι  $(\delta_2)$  καὶ  $(\delta_3)$  ἐξισώσεων  $3x + 4y - 24 = 0$  καὶ  $6x + 8y = 48$  ἀντιστοίχως, συμπίπτουν, ὥς δεικνύει τὸ (σχ. 38).

Ἄρα, πᾶν σημείον  $M(x, y)$  τῆς μίᾳς ἔχει συντεταγμένας, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν ἀμφοτέρως τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος

$$\begin{cases} 3x + 4y - 24 = 0 & (1) \\ 6x + 8y - 48 = 0 & (2) \end{cases}$$

Διότι, διὰ τυχούσας τιμῆς τοῦ  $y$  ἐκ τῆς (1), ἔστω  $y = 0$ , εὐρίσκομεν  $x = 8$ . Τὸ ζεύγος  $(x = 8, y = 0)$  ἐπαληθεύει καὶ τὴν (2). Ἦτοι  $6 \cdot 8 + 8 \cdot 0 - 48 = 0$  ἢ  $48 - 48 = 0$ .

Ὁμοίως, διὰ  $y = 3$ , ἡ (1) δίδει  $x = 4$ . Τὸ ζεύγος τοῦτο  $(x = 4, y = 3)$  ἐπαληθεύει καὶ τὴν (2), ἦτοι:  $6 \cdot 4 + 8 \cdot 3 - 48 = 24 + 24 - 48 = 0$ .

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

65. Νὰ ἐπιλυθοῦν γραφικῶς τὰ συστήματα τῶν ἀκολουθῶν ἐξισώσεων :

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} 2x - y = -7 \\ x + 3y = -7 \end{cases} & 3) \begin{cases} 4x - 10y = -27 \\ 2x - 14y = -36 \end{cases} & 5) \begin{cases} 6x - 3y = -26 \\ 15x + 2y = -27 \end{cases} \\ 2) \begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 5x - 3y = 17 \end{cases} & 4) \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 6x - 6y = -17 \end{cases} & 6) \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 6x - 2y = -31 \end{cases} \end{array}$$

66. Νὰ ὀρισθῇ ὁ  $k$ , ἵνα αἱ εὐθεῖαι αἱ παριστῶμεναι ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων:  $3x - 4y + 15 = 0$ ,  $5x + 2y - 1 = 0$ ,  $kx - (2k - 1)y + 9k - 13 = 0$  ἔχουν κοινὸν σημεῖον.

67. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ  $\mu$ , αἱ εὐθεῖαι αἱ ὀριζόμεναι ὑπὸ τῶν ἀκολουθῶν ἐξισώσεων διέρχονται διὰ σταθεροῦ σημείου, τοῦ ὁποῖου νὰ ὀρισθοῦν αἱ συντεταγμέναι :

$$\begin{array}{l} 1) \quad 3x - 2y + 5 + \mu(x - 2y + 4) = 0, \\ 2) \quad (2\mu - 3)x + (7 - 2\mu)y + 4 = 0, \\ 3) \quad \mu x + (5\mu - 3)y + 9 - 3\mu = 0, \\ 4) \quad (\mu^2 - 1)x + (3\mu^2 - 2\mu + 1)y - 5\mu^2 + 4\mu - 3 = 0. \end{array}$$

Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον θὰ ἐξετάσωμεν τὴν εὐθεϊαν εἰς ὀρθοκανονικοὺς ἄξονας συντεταγμένων. Ἄπαντα τὰ προηγουμένως ἐκτεθέντα ἰσχύουν καὶ εἰς τὸ σύστημα τοῦτο. Πέραν δὲ τούτων καὶ τὰ ἀκόλουθα.

$$Ax + By + \Gamma = 0 \quad (1)$$
$$Ax_0 + By_0 + \Gamma = 0 \quad (2)$$
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (3)$$
$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$$

**Παράδειγμα 1ον:** Ἡ εὐθεῖα (δ), ἐξισώσεως  $5x + 8y - 10 = 0$  εἶναι κάθετος πρὸς τὸ διάνυσμα  $\overrightarrow{OP}$  (5, 8).

$$(\delta) \perp \overrightarrow{OP} (\lambda, -1).$$



**55. ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΝ.**— Πᾶσα εὐθεΐα κάθετος ἐπὶ τὸ διάνυσμα

$\vec{OP}(A, B)$  ἔχει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς :  $Ax + By + \Gamma = 0$ .

Ἀπόδειξις : Ἐστω  $M_0(x_0, y_0)$  τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας  $(\delta)$ . Ἴνα σημεῖον τι

$M(x, y)$  τοῦ ἐπιπέδου κεῖται ἐπὶ τῆς  $(\delta)$ , πρέπει καὶ ἀρκεῖ  $\vec{OP} \cdot \vec{M_0M} = 0$ , ἥτοι

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

ἢ  $Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0$  (1)

Ἐὰν τεθῇ  $\Gamma = -(Ax_0 + By_0)$ , ἡ (1) γίνεται :  $Ax + By + \Gamma = 0$ .

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι : πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς  $Ax + By + k = 0$ ,

( $k \in \mathbb{R}$ ) εἶναι κάθετος πρὸς τὸ διάνυσμα  $\vec{OP}(A, B)$  καὶ κατ' ἀκολουθίαν παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεΐαν  $(\delta)$ , ἐξισώσεως  $Ax + By + \Gamma = 0$ .

**Παρατήρησις :** Ἡ παράστασις  $E = Ax + By$  εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῶν διανυσμάτων  $\vec{OP}(A, B)$  καὶ  $\vec{OM}(x, y)$ . Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας  $(\delta)$  γράφεται :

$$Ax + By = -\Gamma \iff \vec{OP} \cdot \vec{OM} = -\Gamma.$$

Ἐὰν  $H$  εἶναι ἡ τομὴ τῶν  $(\delta)$  καὶ  $OP$ , τότε :

$$\vec{OP} \cdot \vec{OM} = \vec{OP} \cdot \vec{OH} \implies \boxed{\Gamma = -\vec{OP} \cdot \vec{OH}}$$

**Παράδειγμα :** Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς μεσοκαθέτου εὐθυγράμμου τμήματος.

**Λύσις :** Ἐστώσαν  $A_1(x_1, y_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2)$  αἱ συντεταγμέναι τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος

$A_1A_2$ . Ἡ μεσοκάθετος αὐτοῦ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ διάνυσμα  $\vec{A_1A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$  καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου  $M_1\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$  τοῦ τμήματος  $A_1A_2$ .

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος  $A_1A_2$  εἶναι :

$$(x_2 - x_1)\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) + (y_2 - y_1)\left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 0.$$

**56. ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΟΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ.**— Γνωρίζομεν ὅτι

αἱ εὐθεΐαι  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$ , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως  $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$  καὶ

$A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ , εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι πρὸς τὰ διανύσματα  $\vec{OP}_1(A_1, B_1)$

καὶ  $\vec{OP}_2(A_2, B_2)$ . Ἴνα αἱ  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$  εἶναι κάθετοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ διανύσματα  $\vec{OP}_1$  καὶ  $\vec{OP}_2$  νὰ εἶναι κάθετα. Ἄρα (§ 32).

$$\vec{OP}_1 \cdot \vec{OP}_2 = 0 \iff \boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0} \quad (1)$$

**Παράδειγμα :** Αἱ εὐθεΐαι  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$ , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως  $4x + 8y - 7 = 0$  καὶ  $6x - 2y + 11 = 0$  εἶναι κάθετοι, διότι :

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 4 \cdot 6 + 8(-2) = 24 - 24 = 0.$$

Ἡ συνθήκη:  $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$  γράφεται:  $\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\left(-\frac{A_2}{B_2}\right) = -1$ , ἂν  $B_1B_2 \neq 0$ .

Ἐπειδὴ δὲ  $-\frac{A_1}{B_1} = \lambda_1$  εἶναι ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς  $(\delta_1)$ , καὶ  $-\frac{A_2}{B_2} = \lambda_2$  εἶναι ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς  $(\delta_2)$ , ἔπεται:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \quad (2)$$

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι:

Ἵνα δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ (εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα) τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν διευθύνσεως αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσον πρὸς  $-1$ .

Παράδειγμα: Αἱ εὐθεῖαι  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$ , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως:  $y = 7x + 4$  καὶ  $y = -\frac{1}{7}x + 15$  εἶναι κάθετοι, διότι:

$$\lambda_1 \lambda_2 = 7 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = -1.$$

**57. ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΗΣ ΔΙΑ ΔΟΘΕΝΤΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ  $M_0(x_0, y_0)$  ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΟΥ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΗ ΜΗΛΕΝΙΚΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑ  $\vec{u}(A, B)$ .**—Ἐὰν  $M(x, y)$  εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ζητουμένης εὐθείας, τότε:

$$\vec{u} \cdot \vec{M_0M} = 0 \iff A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (1)$$

Αὕτη εἶναι ἡ ζητούμενη ἐξίσωσις.

**58. ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΗΣ ΔΙΑ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ  $M_0(x_0, y_0)$  ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΟΥ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑΝ  $(\delta)$  ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ:**  
 $Ax + By + \Gamma = 0$ .

Ἄν  $M(x, y)$  εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ζητουμένης εὐθείας  $(\delta_1)$ , τότε τὸ διάνυσμα  $\vec{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$  θὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὴν εὐθεῖαν  $(\delta)$ , ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρὸς τὸ διάνυσμα  $\vec{u}(A, B)$ . Ἀρα τὰ διανύσματα  $\vec{M_0M}$  καὶ  $\vec{u}$  θὰ εἶναι παράλληλα. Κατ' ἀκολουθίαν:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} \iff B(x - x_0) + A(y - y_0) = 0 \quad (1)$$

Αὕτη εἶναι ἡ ζητούμενη ἐξίσωσις.

Παράδειγμα: Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας  $(\delta_1)$  τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου  $M_0(3, 5)$  καὶ κάθετου πρὸς τὴν εὐθεῖαν  $(\delta)$ , ἐξισώσεως  $4x - 9y + 7 = 0$ , εἶναι:

$$\frac{x - 3}{4} = \frac{y - 5}{-9} \iff 9x + 4y - 47 = 0.$$

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

68. Νά αποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα  $3x + 4y - 2 = 0$  εἶναι κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν  $8x - 6y + 5 = 0$ .

69. Νά αποδειχθῇ ὅτι αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

$$x - 3y + 2 = 0, \quad 12x + 4y + 31 = 0, \quad 2x - 6y - 7 = 0, \quad 9x + 3y - 40 = 0$$

εἶναι αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν ἐνὸς ὀρθογωνίου. Νά κατασκευασθῇ τοῦτο.

70. Νά εὐρεθῇ ἡ ἐξίσωσις εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον :

1)  $(-1, 2)$  καὶ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν  $3x - 4y + 1 = 0$

2)  $(-7, 2)$  καὶ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν  $x - 3y + 4 = 0$ .

71. Τρίγωνον  $AB\Gamma$  ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα  $A(-3, 2)$ ,  $B(3, -2)$  καὶ  $\Gamma(0, -1)$ . Νά εὐρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν ὑψῶν αὐτοῦ καὶ νά αποδειχθῇ ὅτι τὰ ὑψη ταῦτα διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

72. Νά εὐρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν μεσοκαθέτων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τοῦ προηγουμένου προβλήματος καὶ νά αποδειχθῇ ὅτι αὗται διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἰσάκεις τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου.

**59. ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ.**— Εἰς τὸ ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἀξόνων  $xOy$  (σχ. 40) θεωροῦμεν δύο εὐθείας  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$  ἐξισώσεων ἀντιστοίχως :

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{καὶ} \quad A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \quad (2)$$

Ἄν αὗται τέμνονται, αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζουν εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τῶν ἐπ' αὐτῶν καθέτων διανυσμάτων  $\vec{N}_1(A_1, B_1)$  καὶ  $\vec{N}_2(A_2, B_2)$  ἢ παραπληρωματικαὶ τούτων.

Ἐστω  $\theta$  ἡ γωνία τῶν διανυσμάτων τούτων, τοιαύτη ὥστε  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Κατὰ τὴν (§ 31) θὰ εἶναι :

$$\cos \theta = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (3)$$

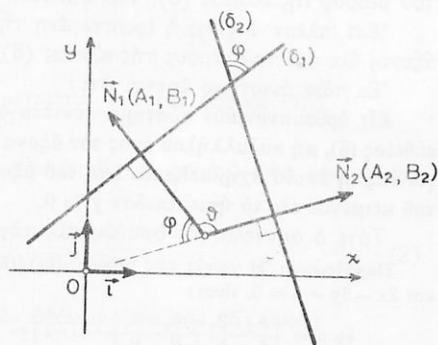
Ἐὰν  $\varphi$  εἶναι ἡ ὀξεία γωνία τῶν  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$ , τότε  $\theta + \varphi = \pi$  καὶ ἄρα  $\sin \varphi = \pm \cos \theta$ . Ἐπειδὴ ὑπετέθη  $\varphi < \frac{\pi}{2}$ , ἔπεται  $\sin \varphi > 0$ . Καὶ ἄρα :

$$\sin \varphi = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (4)$$

**Παρατηρήσεις :** Α) Ἐὰν  $(\delta_1) \perp (\delta_2)$ , τότε  $\sin \varphi = 0$ , καὶ ὁ τύπος (4) δίδει :

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

σχέσις εὐρεθεῖσα καὶ εἰς τὴν (§ 56).



Σχ. 40

Β) Γνωρίζομεν ὅτι :

$$1 + \varepsilon\varphi^2\varphi = \frac{1}{\sigma\sigma\nu^2\varphi} \iff \varepsilon\varphi^2\varphi = \frac{1}{\sigma\sigma\nu^2\varphi} - 1 = \frac{(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2) - (A_1A_2 + B_1B_2)^2}{(A_1A_2 + B_1B_2)^2}$$

ἐξ οὗ :

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{|A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1|}{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2|} = \frac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{|1 + \lambda_1\lambda_2|} \quad (5)$$

καθόσον  $\varepsilon\varphi\varphi > 0$ , διότι  $\varphi < 90^\circ$  καὶ  $\lambda_1, \lambda_2$  αἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως τῶν εὐθειῶν  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$ .

Ἄν αἱ  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$  εἶναι παράλληλοι, τότε :

$$\varphi = 0 \iff A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0 \quad (6)$$

σχέσις εὐρεθεῖσα καὶ εἰς τὴν (§ 46).

Γ) Ἐὰν ὁ τύπος (5) ἐφαρμοσθῇ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς γωνίας τῶν εὐθειῶν  $(Ox)$ , ἐξισώσεως  $(y=0)$ , καὶ τῆς εὐθείας  $(\delta)$ , ἐξισώσεως  $y = \lambda x + \beta$ , τότε :

$$\varepsilon\varphi\varphi = |\lambda|$$

Ἐὰν  $\lambda > 0$ , ἡ ὀξεῖα γωνία  $\varphi$  εἶναι ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τοῦ ἄξονος  $Ox$  καὶ τοῦ μέρους τῆς  $(\delta)$ , τοῦ ἄνωθεν τοῦ ἄξονος  $Ox$  κειμένου.

Ἐὰν  $\lambda < 0$ , ἡ ὀξεῖα γωνία  $\varphi$  εἶναι ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τοῦ ἄξονος  $Ox$  καὶ τοῦ μέρους τῆς εὐθείας  $(\delta)$ , τοῦ κάτωθεν τοῦ ἄξονος  $Ox$  κειμένου.

Ἐπὶ πλέον  $\lambda$  εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας, ἥτις σχηματίζεται ὑπὸ τοῦ ἄξονος  $Ox$  καὶ τοῦ μέρους τῆς εὐθείας  $(\delta)$ , τοῦ ἄνωθεν τοῦ ἄξονος  $Ox$  κειμένου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι :

Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως μιᾶς εὐθείας  $(\delta)$ , μὴ παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα  $Oy$ , ἰσοῦται πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ τοῦ ἄξονος  $Ox$  καὶ τοῦ μέρους τῆς εὐθείας  $(\delta)$  τοῦ κειμένου εἰς τὸ ἡμιπέδιον  $y \geq 0$ .

Τότε ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς  $(\delta)$  καλεῖται κλίσις αὐτῆς.

Παράδειγμα : Ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν  $(\delta_1)$ ,  $(\delta_2)$ , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως  $7x - 3y + 6 = 0$  καὶ  $2x - 5y - 4 = 0$ , εἶναι :

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{|A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1|}{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2|} = |-1| = 1 \implies \varphi = \frac{\pi}{4} \quad \eta \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

73. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία (ὀξεῖα) τῶν εὐθειῶν  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$  ἐξισώσεων ἀντιστοίχως  $7x + 3y + 6 = 0$  καὶ  $2x + 5y - 4 = 0$ .

74. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$ , ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα  $A(10,8)$ ,  $B(-3,9)$ ,  $\Gamma(-4,-4)$ ,  $\Delta(9,-5)$  καὶ τὸ εἶδος τοῦ τετραπλεύρου τούτου.

75. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ γωνίαι τῶν εὐθειῶν, ἐξισώσεων ἀντιστοίχως :

1)  $2x - 5y + 1 = 0$  καὶ  $x - 2y + 3 = 0$

2)  $x + y + 1 = 0$  καὶ  $x - y + 1 = 0$

3)  $6x - 3y + 3 = 0$  καὶ  $x = 6$ .

76. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας  $(\delta_1)$ , τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου  $A(3,5)$  καὶ σχηματιζομένης γωνίαν  $\frac{\pi}{3}$  μετὰ τῆς εὐθείας  $(\delta_2)$ , ἐξισώσεως  $x - y + 6 = 0$ .

77. Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν εὐθείαν τὴν διερχομένην διὰ τοῦ  $A(1, -3)$  καὶ τέμνουσαν τὴν  $(\delta_2)$ , ἐξισώσεως  $x + 2y + 4 = 0$  ὑπὸ γωνίαν  $135^\circ$ .

78. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$ , ὅπερ ἔχει κορυφὰς  $A(0,0)$ ,  $B(-4,4)$  καὶ  $\Gamma(2\sqrt{3}-2, 2\sqrt{3}+\sqrt{2})$ .

**60. ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΑΠΟΣΤΑΣΙΣ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ  $M_0(x_0, y_0)$  ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑΝ  $(\delta)$ , ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ:  $Ax + By + \Gamma = 0$ , ἂν  $|A| + |B| > 0$ .**

Ἐστω  $\vec{OZ}$  ὁ ἄξων ὁ ἀγόμενος ἐκ τοῦ  $O$  καθέτως πρὸς τὴν εὐθείαν  $(\delta)$  καὶ προσανατολισμένος κατὰ τὴν φορὰν τοῦ διανύσματος  $\vec{u}(A, B)$  καὶ ἔστω  $H(x_1, y_1)$  ἡ προβολὴ τοῦ  $M_0$  ἐπὶ τὴν  $(\delta)$ .

Θὰ ἔχωμεν :

$$\vec{u} \cdot \vec{HM}_0 = u \cdot \overline{HM}_0 = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \overline{HM}_0,$$

δηλαδή :

$$A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \overline{HM}_0$$

ἐξ οὗ :

$$\overline{HM}_0 = \frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ τὸ  $H$  κεῖται ἐπὶ τῆς  $(\delta)$ , θὰ εἶναι  $Ax_1 + By_1 = -\Gamma$  καὶ ἡ (1) γίνεται :

$$\overline{HM}_0 = \frac{Ax_0 + By_0 + \Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (\overline{HM}_0 \text{ μετρεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος } \vec{OZ}).$$

Ἀρα ἡ ἀπόστασις τοῦ  $M_0$  (κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν) ἀπὸ τὴν εὐθείαν  $(\delta)$  δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$d = |M_0H| = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (2)$$

Ἡ ἀπόστασις  $OK$  τῆς ἀρχῆς  $O$  τῶν ἄξόνων ἀπὸ τὴν  $(\delta)$  εἶναι :

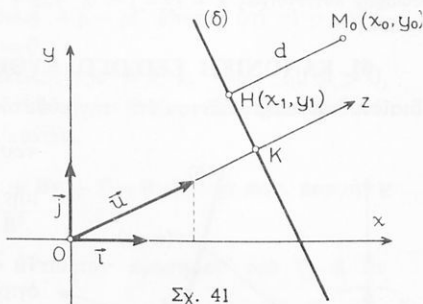
$$OK = \frac{|\Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3)$$

**Παράδειγμα 1ον :** Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου  $M_0(2,5)$  ἀπὸ τὴν εὐθείαν  $(\delta)$ , ἐξισώσεως  $3x + 4y - 10 = 0$  εἶναι :

$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6 + 20 - 10|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{16}{5} = 3,2.$$

**Παράδειγμα 2ον :** Ἡ ἀπόστασις τῆς ἀρχῆς  $O(0,0)$  τῶν ἄξόνων ἀπὸ τὴν εὐθείαν  $(\delta)$ , ἐξισώσεως  $6x + 8y - 9 = 0$  εἶναι :

$$d = \frac{|-9|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{|-9|}{10} = \frac{9}{10} = 0,9.$$



Σχ. 41

79. Δίδονται τὰ σημεία  $A(1,5)$ ,  $B(-3,3)$  καὶ  $\Gamma(6,2)$ . Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$ .

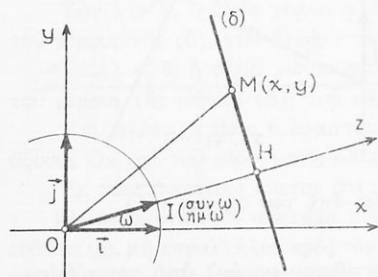
80. Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ τρίγωνον, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεία 1)  $A(2,3)$ ,  $B(-4,0)$ ,  $\Gamma(-1,-4)$  καὶ 2)  $A(3,5)$ ,  $B(1,-2)$ ,  $\Gamma(6,-5)$ .

81. Δίδεται τὸ σημείον  $A(4,6)$  καὶ αἱ εὐθεῖαι  $(\delta)$ , ἐξισώσεων :  
 $(\mu-1)x - (2\mu-3)y - 4\mu + 1 = 0$  καὶ ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ ὁ  $\mu$ , εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἀπόστασις τοῦ  $A$  ἀπὸ τὴν  $(\delta)$  νὰ εἶναι 3.

82. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας  $(\delta)$ , ἡ ὁποία ἀπέχει ἰσάκεις τῶν εὐθειῶν  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$ , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως :  $3x + 4y - 5 = 0$  καὶ  $3x + 4y + 7 = 0$ .

83. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀποστάσεις τῆς ἀρχῆς  $O(0,0)$  ἀπὸ τῶν εὐθειῶν  $(\delta)$  καὶ  $(\delta_1)$  ἐξισώσεων ἀντιστοίχως  $x + 2y - 1 = 0$ ,  $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y - 1 = 0$ . Ποῖον συμπέρασμα ἐξάγεται ἐν-τεῦθεν ;

**61. ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.**—Ἐστω  $\vec{OI}$  (συνω, ημω) μονα-  
 διαῖον διάνυσμα κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν  $(\delta)$ ,  $\vec{OZ}$  ὁ ἄξων τοῦ μοναδιαίου τού-  
 του διανύσματος  $\vec{OI}$  καὶ  $H$  τὸ σημεῖον το-  
 μῆς τῆς  $(\delta)$  καὶ τοῦ  $\vec{OZ}$ .



Σχ. 42

Θέτομεν  $\overline{OH} = p$ . Ἡ εὐθεῖα  $(\delta)$  εἶναι  
 τὸ σύνολον τῶν σημείων  $M(x,y)$ , διὰ τὰ  
 ὁποῖα :

$$\vec{OI} \cdot \vec{HM} = 0 \quad \eta \quad (\S 55 \text{ παρατήρησις})$$

$$\vec{OI} \cdot \vec{OM} = \vec{OI} \cdot \vec{OH} = p \quad \eta$$

$$x \text{ συνω} + y \text{ ημω} = p \quad (1)$$

Ἡ (1) εἶναι ἡ κανονικὴ ἐξίσωσις τῆς  $(\delta)$  καὶ ὀφείλεται εἰς τὸν **Hesse**.

Προφανῶς, ἡ θέσις τῆς εὐθείας  $(\delta)$  ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἀποστάσεως  $\overline{OH} = p$ , θεωρουμένης πάντοτε θετικῆς, καὶ τῆς γωνίας  $\omega$ , θεωρουμένης καὶ ταύτης θετικῆς, εἰς τρόπον ὥστε :  $0 \leq \omega \leq 2\pi$ .

**Παράδειγμα :** Ἐάν  $\omega = \frac{\pi}{3}$  καὶ  $\overline{OH} = \frac{5}{2}$ , ἡ ἐξίσωσις τῆς  $(\delta)$  εἶναι :

$$x \cdot \text{συν} \frac{\pi}{3} + y \cdot \text{ημ} \frac{\pi}{3} = \frac{5}{2} \iff \frac{x}{2} + y \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} = 0 \iff x + \sqrt{3} \cdot y - 5 = 0.$$

**62. ΑΝΑΓΩΓΗ ΤΗΣ  $Ax + By + \Gamma = 0$  ΕΙΣ ΤΗΝ ΚΑΝΟΝΙΚΗΝ ΜΟΡΦΗΝ ΑΥΤΗΣ.**—Ἀρκεῖ νὰ ὁρίσωμεν τὴν γωνίαν  $\omega$  καὶ τὸ  $p$ , εἰς τρόπον ὥστε αἱ ἐξισώσεις :

$$(1) \quad x \text{ συν} \omega + y \text{ ημ} \omega - p = 0 \quad \text{καὶ} \quad Ax + By + \Gamma = 0 \quad (2)$$

νὰ παριστάνουν τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Πρὸς τοῦτο, πρέπει καὶ ἀρκεῖ :

$$\frac{\text{συν} \omega}{A} = \frac{\text{ημ} \omega}{B} = \frac{-p}{\Gamma} = \rho \implies \text{συν} \omega = \rho A, \quad \text{ημ} \omega = \rho B, \quad -p = \rho \Gamma$$

$$\text{"Όθεν: } \rho^2(A^2 + B^2) = \sin^2 \omega + \eta \mu^2 \omega = 1 \implies \rho = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad (3)$$

καί κατ' ακολουθίαν :

$$(4) \quad \sin \omega = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{καί} \quad \eta \mu \omega = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad (5)$$

"Αρα ή (1) γράφεται :

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{\Gamma}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad (6)$$

**Σημείωσις :** 'Εάν  $\rho > 0$ , εκ τῆς σχέσεως  $-\rho = \rho \Gamma$  έπεται ότι οί  $\rho$  καί  $\Gamma$  θά εἶναι **έτερόσημοι** ἀριθμοί, εκτός εάν  $\Gamma = 0$ .

'Εάν  $\Gamma = 0$ , τότε  $\rho = 0$  καί κατ' ακολουθίαν  $\omega < \pi$ . "Αρα  $\eta \mu \omega > 0$ , όπότε εκ τῆς σχέσεως  $\eta \mu \omega = \rho B$ , έπεται ότι οί  $\rho$  καί  $B$  εἶναι **όμόσημοι** ἀριθμοί.

'Εκ τῶν ἀνωτέρω έπεται ό **χρήσιμος κανών**.

**ΚΑΝΩΝ :** Διὰ νά ἀναγάγωμεν τήν  $Ax + By + \Gamma = 0$  εἰς τήν καν. μορφήν :

1ον : Εὐρίσκομεν τήν τιμήν :  $\sqrt{A^2 + B^2}$ ,

2ον : Δίδομεν εἰς τήν τιμήν  $\sqrt{A^2 + B^2}$  ἀντίθετον πρόσημον τοῦ  $\Gamma$ , ἢ ἂν  $\Gamma = 0$ , τὸ αὐτὸ πρόσημον μέ τὸ τοῦ  $B$ , καί :

3ον : Διαιροῦμεν ἀμφοτέρα τὰ μέλη τῆς  $Ax + By + \Gamma = 0$  διὰ τοῦ ἀποτελέσματος τοῦ 2ον :

Προκύπτει οὕτως ἡ ζητούμενη ἐξίσωσις :

**Παράδειγμα :** 'Εστω ἡ ἐξίσωσις  $4x - 3y + 15 = 0$ . Εἶναι :

$\rho = -\sqrt{A^2 + B^2} = -\sqrt{16 + 9} = -5$ , διότι πρέπει  $\rho \Gamma < 0$ . Διαιροῦντες διὰ  $-5$ , λαμβάνομεν τήν ἐξίσωσιν :  $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 3 = 0$ , ἥτις εἶναι ἡ ζητούμενη, μέ  $\sin \omega = -\frac{4}{5}$ ,  $\eta \mu \omega = \frac{3}{5}$  καί  $\rho = 3$ .

## Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

84. Νά μορφοθοῦν αἱ ἐξισώσεις καί νά κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεΐαι, διὰ τὰς οποίας εἶναι :

|                               |            |                               |             |
|-------------------------------|------------|-------------------------------|-------------|
| 1. $\omega = 0,$              | $\rho = 5$ | 5. $\omega = \frac{\pi}{2},$  | $\rho = 10$ |
| 2. $\omega = \frac{3\pi}{2},$ | $\rho = 3$ | 6. $\omega = \frac{2\pi}{3},$ | $\rho = 2$  |
| 3. $\omega = \frac{\pi}{4},$  | $\rho = 3$ | 7. $\omega = \pi,$            | $\rho = 5$  |
| 4. $\omega = \frac{7\pi}{4},$ | $\rho = 4$ | 8. $\omega = \frac{5\pi}{4},$ | $\rho = 1.$ |

85. Νά ἀναχθοῦν ὑπὸ τήν κανονικὴν μορφήν αἱ ἐξισώσεις :

|                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| 1. $3x + 4y - 10 = 0$  | 3. $x + y + 8 = 0$     |
| 2. $5x - 12y + 39 = 0$ | 4. $\sqrt{3} - y = 0.$ |

**63. ΑΠΟΣΤΑΣΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ  $M_0(x_0, y_0)$  ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑΣ  $(\delta)$  ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ**  
 $x \sin \omega + y \eta \mu \omega - p = 0$ .

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην (σχ. 41) εἶναι  $u = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\sin^2 \omega + \eta \mu^2 \omega} = 1$  καὶ ὁ τύπος (2) τῆς (§ 60) γίνεται :

$$d = |x_0 \sin \omega + y_0 \eta \mu \omega - p| \quad (1)$$

Ἐὰν τὸ  $M_0$  ἔχη τὴν θέσιν  $O(0, 0)$  τῶν ἀξόνων, τότε ἡ (1) γίνεται :

$$d = |p|. \quad (2)$$

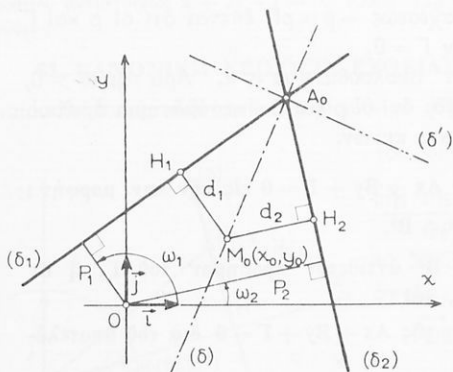
**64. ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΤΩΝ ΔΙΧΟΤΟΜΩΝ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ.—**

Ἐστώσαν  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$  δύο εὐθεῖαι ἐξισώσεων :

$$A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{καὶ} \quad A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = 0 \quad (2)$$

Θὰ ζητήσωμεν νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον  $M_0(x_0, y_0)$  κεῖται ἐπὶ τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης τῶν διχοτόμων τῆς γωνίας  $A_0$  τῶν εὐθειῶν  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$ . Ἀναγκαῖα καὶ ἰκανὴ συνθήκη εἶναι : αἱ ἀποστάσεις τοῦ  $M_0(x_0, y_0)$  ἀπὸ τὰς  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$  νὰ εἶναι ἴσαι : Δηλαδή :  $MH_1 = MH_2$



Σχ. 43

$$\eta \quad \frac{|A_1 x_0 + B_1 y_0 + \Gamma_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2 x_0 + B_2 y_0 + \Gamma_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Κατ' ἀκολουθίαν ἡ μία τῶν διχοτόμων ἔχει ἐξίσωσιν :

$$\frac{A_1 x_0 + B_1 y_0 + \Gamma_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} - \frac{A_2 x_0 + B_2 y_0 + \Gamma_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0 \quad (3)$$

καὶ ἡ ἄλλη διχοτόμος θὰ ἔχη ἐξίσωσιν :

$$\frac{A_1 x_0 + B_1 y_0 + \Gamma_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} + \frac{A_2 x_0 + B_2 y_0 + \Gamma_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0. \quad (4)$$

**Σημείωσις :** Διὰ νὰ εὐρωμεν ποία ἐκ τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4) παριστᾷ τὴν ἐσωτερικὴν καὶ ποία τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας  $A_0$ , ἐργαζόμεθα ὡς ἐξῆς :

Θεωροῦμεν τὰς ἐξισώσεις τῶν  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$  ὑπὸ τὴν κανονικὴν μορφήν αὐτῶν :

$$(\delta_1) : x \sin \omega_1 + y \eta \mu \omega_1 - p_1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad (\delta_2) : x \sin \omega_2 + y \eta \mu \omega_2 - p_2 = 0.$$

Ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων αὐτῶν ἀπὸ σημείου τῆς εὐθείας :

$$(\delta) : x \sin \omega_1 + y \eta \mu \omega_1 - p_1 + k(x \sin \omega_2 + y \eta \mu \omega_2 - p_2) = 0$$

εἶναι  $-k$ , ( $k \in \mathbb{R}$ ).



Πράγματι, έστω  $M_0(x_0, y_0)$  τυχόν σημείον τής  $(\delta)$ . Θα έχωμεν :

$$x_0 \text{ συν} \omega_1 + y_0 \text{ ημ} \omega_1 - p_1 + k (x_0 \text{ συν} \omega_2 + y_0 \text{ ημ} \omega_2 - p_2) = 0,$$

έξ ου :

$$-k = \frac{x_0 \text{ συν} \omega_1 + y_0 \text{ ημ} \omega_1 - p_1}{x_0 \text{ συν} \omega_2 + y_0 \text{ ημ} \omega_2 - p_2} \quad (5)$$

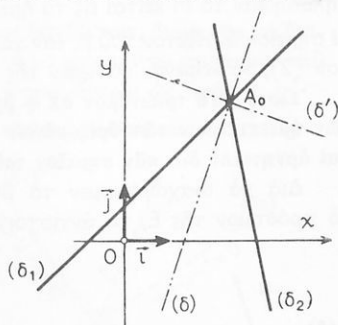
Ο αριθμητής τής (5) είναι ή απόστασις τής  $(\delta_1)$  από τὸ  $M_0$ , καὶ ὁ παρονομαστής ή απόστασις τής  $(\delta_2)$  από τὸ  $M_0$ . Κατ' ἀκολουθίαν,  $-k$  εἶναι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τῶν  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$  από τὸ  $M_0$  τῆς εὐθείας  $(\delta)$ .

Ἐάν  $k = \pm 1$ , ή  $(\delta)$  εἶναι μία ή ἄλλη τῶν διχοτόμων τῆς γωνίας τῶν  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$ .

Ἡ γωνία τῶν  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$ , ἐντὸς τῆς ὁποίας εὐρίσκεται ή ἀρχή  $O$  τῶν ἀξόνων, ή ἡ κατακορυφήν τῆς, εἶναι ή ἐσωτερική γωνία τῶν  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$ . Αἱ ἄλλαι εἶναι ἐξωτερικαὶ τῶν εὐθειῶν τούτων.

Κατὰ τὸν κανόνα τῆς (§ 64) ἔπεται ὅτι ή  $(\delta)$  κείται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας τῶν  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$ , ὅταν  $k < 0$  καὶ εἰς τὸ ἐξωτερικόν, ὅταν  $k > 0$ .

Ἐάν ή ἀρχή  $O$  κείται ἐπὶ τῆς  $(\delta_1)$  ή τῆς  $(\delta_2)$ , θὰ πρέπη νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι  $(\delta_1)$  καὶ  $(\delta_2)$  καὶ αἱ γωνίαι εἰς τὰς ὁποίας  $k > 0$  ἀντιστοιχοῦν αἱ διχοτόμοι (ἐσωτερική-ἐξωτερική) κατὰ τὸ σχῆμα.



Σχ. 44

## Α Σ Κ Η Σ Ι Σ

86. Νὰ μορφωθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν διχοτόμων τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$ , τοῦ ὁποίου αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν εἶναι :

$$4x - 3y - 12 = 0, \quad 5x - 12y - 4 = 0, \quad 12x - 5y - 13 = 0$$

καὶ νὰ δεიχθῇ ὅτι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

65. ΣΗΜΕΙΟΝ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ  $ax + by + \gamma$ .— Τὸ σημείον τῆς παραστάσεως  $E = ax + by + \gamma$  ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν  $x$  καὶ  $y$ , δηλαδὴ ἐκ τῆς θέσεως τοῦ σημείου  $M(x, y)$  τοῦ Καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου  $xOy$  (σχ. 45).

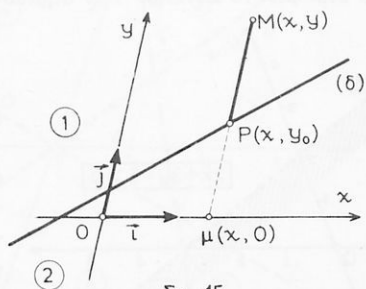
Ἵνα ή παράστασις  $E$  εἶναι μηδέν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ  $M(x, y)$  νὰ κείται ἐπὶ τῆς εὐθείας  $(\delta)$ , ἐξισώσεως :

$$ax + by + \gamma = 0.$$

$$\text{Ὡστε : } E = 0 \iff M \in (\delta).$$

Ἐάν  $M \in (\delta)$ , παριστῶμεν διὰ τοῦ  $P$  τὴν τομὴν τῆς  $(\delta)$  μετὰ τῆς ἐκ τοῦ  $M$  παραλλήλου  $M\mu$  πρὸς τὸν ἀξόνα  $Oy$ . Τὸ  $p$  ἔχει συντεταγμένας, προφανῶς,  $(x, y_0)$ .

$$\text{Ἀρα : } ax + by_0 + \gamma = 0 \quad (1)$$



Σχ. 45

Διὰ τὸ σημεῖον  $M(x, y)$  θὰ ἔχωμεν :

$$E = ax + by + \gamma = (ax + by + \gamma) - (ax + by_0 + \gamma) = by - by_0$$

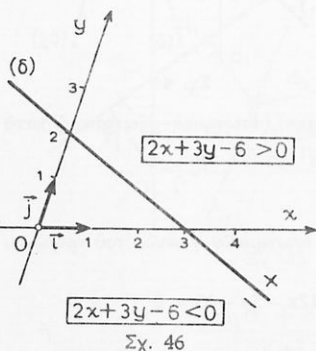
$$\eta \quad E = \beta(y - y_0) = \beta \cdot \overline{PM}. \quad (2)$$

Ἐκ τῆς (2) φαίνεται ὅτι ἡ παράστασις  $E$  ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ  $\beta$ , ἐὰν τὸ  $\overline{PM} > 0$ , δηλαδὴ ἐὰν τὸ  $M$  κεῖται εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον (1), κειμένου ἄνωθεν τῆς (δ). Θὰ ἔχη δὲ σημεῖον ἀντίθετον τοῦ  $\beta$ , ἐὰν τὸ  $\overline{PM} < 0$ , δηλαδὴ τὸ  $M$  κεῖται εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον (2), τὸ κείμενον κάτωθεν τῆς εὐθείας (δ).

Ὡστε : Τὸ τριώνυμον  $ax + by + \gamma$  εἶναι θετικὸν διὰ πᾶν σημεῖον τοῦ ἐνὸς τῶν ἡμιεπιπέδων τῶν ὀριζομένων ὑπὸ τῆς εὐθείας, ἐξισώσεως  $ax + by + \gamma = 0$  καὶ ἀρνητικὸν διὰ πᾶν σημεῖον τοῦ ἄλλου ἡμιεπιπέδου.

Διὰ νὰ διαχωρίσωμεν τὰ δύο ταῦτα ἀνοικτὰ ἡμιεπίπεδα, ἀναζητοῦμεν τὸ πρόσημον τῆς  $E$ , τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ἀρχὴν  $O(0,0)$  τῶν ἀξόνων, εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν  $\gamma \neq 0$ . Εἰς τοῦτο εἶναι  $E = \gamma$ . Ἄρα :

Τὸ σημεῖον τῆς  $E = ax + by + \gamma$  εἶναι τὸ τοῦ  $\gamma$  εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον, εἰς ὃ κεῖται ἡ ἀρχὴ  $O(0,0)$  τῶν συντεταγμένων.

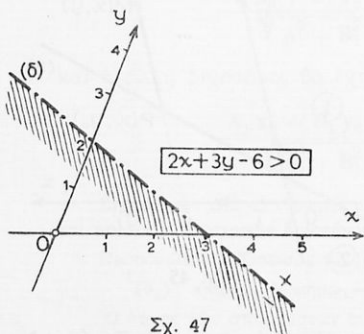


Σχ. 46

**Παράδειγμα :** Τὸ τριώνυμον  $2x + 3y - 6$  εἶναι ἀρνητικὸν εἰς τὸ ἀνοικτὸν ἡμιεπίπεδον, τὸ περιέχον τὴν ἀρχὴν  $O(0,0)$ , εἰς τὸ ὁποῖον χωρίζεται ὑπὸ τῆς εὐθείας (δ), ἐξισώσεως  $2x + 3y - 6 = 0$  (σχ. 46) καὶ θετικὸν εἰς τὸ ἄλλο ἀνοικτὸν ἡμιεπίπεδον. Πρὸς διάκρισιν τοποθετοῦμεν τὸ σημεῖον + καὶ τὸ σημεῖον - ἐκατέρωθεν τῆς εὐθείας (δ) διὰ νὰ δειξωμεν τὸ θετικὸν ἢ τὸ ἀρνητικὸν πρόσημον τοῦ τριώνυμου  $ax + by + \gamma$ .

## 66. ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΑΝΙΣΩΣΕΩΣ : $ax + by + \gamma > 0$ .— Ἀρκεῖ

νὰ εὑρωμεν τὸ Σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι  $x$  καὶ  $y$  ἐπαληθεύουν τὴν ἀνίσωσιν  $ax + by + \gamma > 0$ .



Σχ. 47

Κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν (δ), ἐξισώσεως  $ax + by + \gamma = 0$  καὶ προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον τῆς παραστάσεως  $ax + by + \gamma$  εἰς ἕκαστον τῶν ἀνοικτῶν ἡμιεπιπέδων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ ἐπίπεδον  $xOy$  ὑπὸ τῆς εὐθείας (δ). Καλύπτομεν ἀκολουθῶς διὰ παραλλήλων γραμμῶν (γραμμοσκίασμα) τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον δὲν ἀρμόζει εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Οὕτω, διὰ νὰ λάβωμεν τὰ σημεία τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 47), τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὴν ἀνίσωσιν

$2x + 3y - 6 > 0$ , γραμμοσκιάζουμεν τὸ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περιέχει τὴν ἀρχὴν  $O(0,0)$  τῶν συντεταγμένων.

Ἡ εὐθεῖα  $(\delta)$  παρίσταται δι' ἐστιγμένης γραμμῆς, διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων αὐτῆς μηδενίζουν τὸ τριώνυμον  $2x + 3y - 6$ , ἐκτὸς ἂν εἶχομεν πρὸς λύσιν τὴν  $2x + 3y - 6 \geq 0$ , ὁπότε ἡ  $(\delta)$  θὰ πρέπει νὰ γραφῇ συνεχῆς γραμμὴ.

**67. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ.**— Βάσει τῶν προηγουμένως ἐκτεθέντων, δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν σύστημα ἀνισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἢ νὰ εὕρωμεν τὸ πρόσημον τοῦ γινομένου (ἐπίλυσις ἀνισώσεων) πρωτοβαθμίων παραγόντων ὡς πρὸς  $x, y$ .

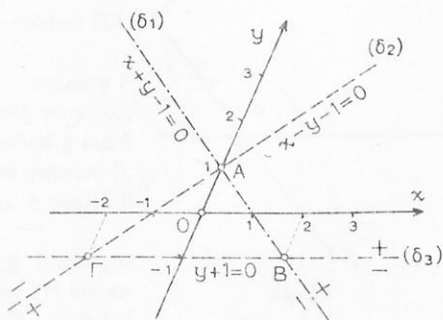
**Παράδειγμα 1ον:** Διὰ ποίας τιμῆς τῶν  $x, y$  συναληθεύουν αἱ ἀνισώσεις;

$$x + y - 1 < 0 \quad (1), \quad x - y + 1 > 0 \quad (2), \\ y + 1 > 0 \quad (3).$$

Κατασκευάζομεν (σχ. 48) τὰς εὐθείας  $(\delta_1), (\delta_2), (\delta_3)$ , ἐξισώσεων:

$$x + y - 1 = 0, \quad x - y + 1 = 0, \\ y + 1 = 0.$$

Ἐὰν γραμμοσκιάσωμεν ἕκαστον ἡμιεπίπεδον, εἰς ὃ αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τοῦ δὲν ἐπαληθεύουν τὴν ἀντίστοιχον ἀνίσωσιν, καταλήγωμεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι μόνον τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$  ἔχουν συντεταγμένας ἐπαληθεύσας συγχρόνως καὶ τὰς τρεῖς ἀνισώσεις.



Σχ. 48

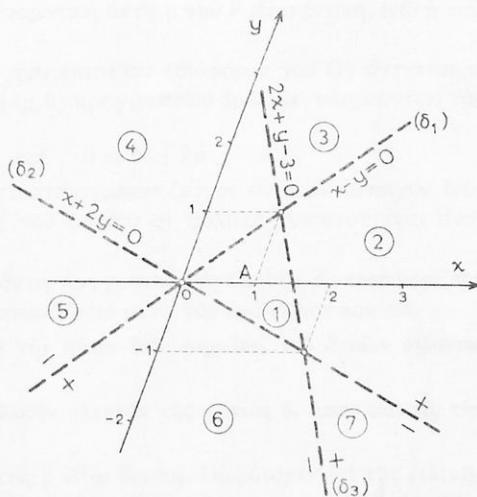
**Παράδειγμα 2ον:** Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις:

$$(x - y)(x + 2y)(2x + y - 3) < 0, \quad (1)$$

Κατασκευάζομεν (σχ. 49) τὰς εὐθείας  $(\delta_1), (\delta_2), (\delta_3)$ , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως:

$$x - y = 0, \quad x + 2y = 0, \\ 2x + y - 3 = 0.$$

Αἱ εὐθεῖαι αὗται χωρίζουν τὸ ἐπίπεδον τῶν ὁξόνων  $xOy$  εἰς ἑπτὰ ἐπίπεδα χωρία. Εἰς ἕκαστον τῶν χωρίων τούτων, τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) λαμβάνει ἓνα ὠρισμένον πρόσημον. Προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ παραλείπομεν τὸ χωρίον ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον τὸ γινόμενον τοῦτο γίνεται θετικόν. Παρατηροῦμεν εὐκόλως ὅτι ἡ ἀνίσωσις (1) ἀληθεύει διὰ τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων τῶν κειμένων εἰς τὰ ἐπίπεδα χωρία 1, 3, 5 καὶ 7, ἐξαρουμένων τῶν σημείων τῶν κειμένων ἐπὶ τῶν εὐθειῶν  $(\delta_1), (\delta_2)$  καὶ  $(\delta_3)$ .



Σχ. 49

# Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

87. Να γίνει γραφική επίλυση των συστημάτων :

- |    |                     |                     |                    |
|----|---------------------|---------------------|--------------------|
| 1) | $x + y - 3 > 0,$    | $x - y + 4 < 0,$    | $x - 4 > 0$        |
| 2) | $2x - 3y + 6 > 0,$  | $4x - y - 4 < 0,$   | $4x + 3y + 12 > 0$ |
| 3) | $2x - y + 5 < 0,$   | $2x + y + 7 < 0,$   | $3 - y > 0$        |
| 4) | $5x - 2y + 10 < 0,$ | $7x - 2y + 14 > 0,$ | $2x + y - 5 < 0.$  |

ΠΟΛΙΚΑΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ

68. ΠΟΛΙΚΑΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ.—

Εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον θὰ θεωρήσωμεν νέαν μέθοδον προσδιορισμοῦ τῆς θέσεως τῶν σημείων ἐπιπέδου, τῇ βοηθεῖα δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ὑποθέτομεν δεδομένα τὸ σημεῖον  $O$ , τὸ ὁποῖον καλοῦμεν **πόλον**, καὶ μίαν σταθεράν εὐθεῖαν  $OA$ , καλουμένην **πολικὸν ἄξονα** (σχ. 50).

Ὑπὸ τὰς συνθήκας ταύτας, τυχὸν σημεῖον  $P$  τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ὠρισμένον, ἂν δοθῇ τὸ μῆκος  $OP = \rho$  καὶ ἡ γωνία  $AOP = \theta$ . Οἱ ἀριθμοὶ  $\rho$  καὶ  $\theta$  καλοῦνται **πολικάι συντεταγμέναι** τοῦ σημείου  $P$ . Τὸ  $\rho$  καλεῖται **διανυσματικὴ ἀκτὶς** καὶ ἡ γωνία  $\theta$  καλεῖται **πολικὴ γωνία**.

Ἡ πολικὴ γωνία  $\theta$  εἶναι **θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ**, ὅπως καὶ εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν. Ἡ διανυσματικὴ ἀκτὶς  $\rho$  εἶναι θετικὴ, ἔὰν τὸ  $P$  κεῖται ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας  $\theta$ , καὶ ἀρνητικὴ, ὅταν τὸ  $P$  κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας  $\theta$ .

Οὕτως, εἰς τὸ (σχ. 50) ἡ διανυσματικὴ ἀκτὶς  $\rho$  τοῦ  $P$  εἶναι θετικὴ, ἐνῶ ἡ τοῦ  $P_1$  εἶναι ἀρνητικὴ.

**Σημείωσις :** Εἰς πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (διάφορον τοῦ  $O$ ) ἀντιστοιχεῖ ἓν ὠρισμένον διατεταγμένον ζεῦγος  $(\rho, \theta)$  πραγματικῶν ἀριθμῶν, πληροῦντων τὰς σχέσεις :

$$0 < \rho \quad \text{καὶ} \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

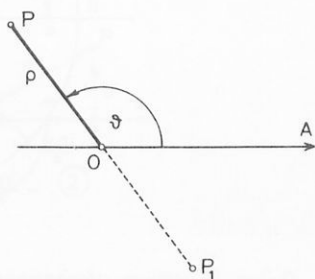
καὶ ἀντιστρόφως : Πᾶν τοιοῦτον διατεταγμένον ζεῦγος εἶναι ἀντίστοιχον ἑνὸς καὶ μόνου σημείου τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ὁποῖου αἱ πολικάι συντεταγμέναι εἶναι τὸ δοθὲν ζεῦγος.

\*Εἶναι προφανὲς ὅτι : δύο τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοὶ  $(\rho, \theta)$  προσδιορίζουν ἓν μόνον σημεῖον, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται κατὰ τὸν ἀκόλουθον κανόνα.

**ΚΑΝΩΝ.—** Διὰ νὰ ὀρίσωμεν τὴν θέσιν ἑνὸς σημείου, τοῦ ὁποῖου δίδονται αἱ πολικάι συντεταγμέναι  $(\rho, \theta)$  :

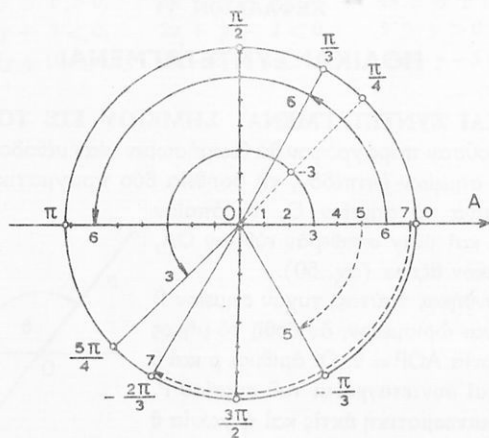
**1ον :** Κατασκευάζομεν τὴν τελικὴν πλευρὰν τῆς γωνίας  $\theta$ , ὅπως καὶ εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν.

**2ον :** Ἐὰν ἡ διανυσματικὴ ἀκτὶς  $\rho$  εἶναι θετικὴ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας  $\theta$  τὸ τμήμα  $OP = \rho$ . Ἐὰν δὲ ἡ διανυσματικὴ ἀκτὶς εἶναι ἀρ-



Σχ. 50

νητική, προεκτείνομεν τὴν τελικὴν πλευρὰν τῆς γωνίας  $\theta$  καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως, ἐκ τοῦ πόλου, τμήμα  $OP$  ἴσον πρὸς τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν (ἢ ἀπόλυτον) τοῦ  $\rho$ . Τὸ σημεῖον  $P$  θὰ εἶναι τότε τὸ ζητούμενον.



Σχ. 51

Εἰς τὸ (σχ. 51) ἔχομεν προσδιορίσει τὴν θέσιν τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι εἶναι :

$$\left(6, \frac{\pi}{3}\right), \left(3, \frac{5\pi}{4}\right), \left(-3, \frac{5\pi}{4}\right), (6, \pi), \left(7, -\frac{2\pi}{3}\right) \text{ καὶ } \left(5, -\frac{\pi}{3}\right).$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων ἔπεται ὅτι :

**Πᾶν σημεῖον  $P$  ὀρίζει ἀπειρίαν διατεταγμένων ζευγῶν  $(\rho, \theta)$ .**

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

88. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ σημεῖα, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι εἶναι :

$$\left(4, \frac{\pi}{4}\right), \left(6, \frac{2\pi}{3}\right), \left(-2, \frac{2\pi}{3}\right), \left(4, \frac{\pi}{3}\right), \left(-4, \frac{4\pi}{3}\right), (5, \pi).$$

89. Ὁμοίως τὰ σημεῖα :

$$\left(6, \pm \frac{\pi}{4}\right), \left(-2, \pm \frac{\pi}{2}\right), (3, \pi), (-4, \pi), (6, 0), (-6, 0).$$

90. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα  $(\rho, \theta)$  καὶ  $(\rho, -\theta)$  εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν πολικὸν ἄξονα.

91. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα  $(\rho, \theta)$  καὶ  $(-\rho, \theta)$  εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν πόλον.

92. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα  $(-\rho, \pi - \theta)$  καὶ  $(\rho, \theta)$  εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν πολικὸν ἄξονα.

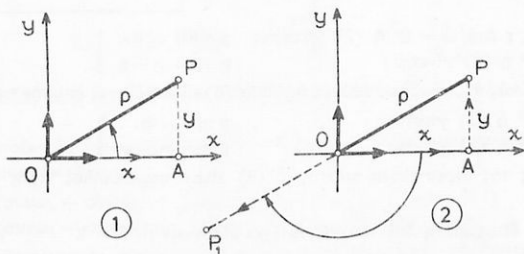
**69. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΙΣ ΠΟΛΙΚΑΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΣ.**— Έστωσαν  $Ox$  καὶ  $Oy$  οἱ ἄξονες τῶν ὀρθοκανονικῶν συντεταγμένων,  $O$  ὁ πόλος, καὶ  $Ox$  ὁ πολικὸς ἄξων ἐνὸς συστήματος πολικῶν συντεταγμένων (σχ. 52).

Έστωσαν  $(x, y)$  αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι καὶ  $(\rho, \theta)$  αἱ πολικαὶ τοιαῦται ἐνὸς σημείου  $P$ . Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον εἶναι  $\rho > 0$  καὶ  $\rho < 0$ .

**1ον :** Έάν  $\rho > 0$  (σχ. 52-1), ἐκ τοῦ τριγώνου  $OAP$  θὰ ἔχωμεν :

$$x = \rho \text{ συν} \theta \quad \text{καὶ} \quad y = \rho \text{ ημ} \theta \quad (1)$$

εἰς οἷονδήποτε τεταρτημόριον καὶ ἂν εὑρίσκηται τὸ σημεῖον  $P$ .



Σχ. 52

**2ον :** Έάν  $\rho < 0$  (σχ. 52-2), θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν σημεῖον  $P_1$  τοῦ  $P$  ὡς πρὸς τὸν πόλον  $O$ , τοῦ ὁποῖου αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι θὰ εἶναι  $(-x, -y)$  καὶ αἱ πολικαὶ  $(-\rho, \theta)$ . Ἡ διανυσματικὴ ἀκτίς τοῦ  $P_1$ ,  $(-\rho)$  εἶναι θετική, διότι  $\rho < 0$  ἐξ ὑποθέσεως. Δυνάμεθα, κατὰ συνέπειαν, νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰς ἐξισώσεις (1). Διὰ τὸ  $P_1$  θὰ ἔχωμεν λοιπὸν :

$$\left. \begin{aligned} -x &= -\rho \text{ συν} \theta \\ -y &= -\rho \text{ ημ} \theta \end{aligned} \right\}, \text{ ὁπότε διὰ τὸ } P \text{ θὰ εἶναι : } \left. \begin{aligned} x &= \rho \text{ συν} \theta \\ y &= \rho \text{ ημ} \theta \end{aligned} \right\}.$$

Έντεῦθεν προκύπτει τὸ ἀκόλουθον θεώρημα :

**70. ΘΕΩΡΗΜΑ :** Έάν ὁ πόλος συμπίπτῃ μὲ τὴν ἀρχὴν  $O$  τῶν συντεταγμένων καὶ ὁ πολικὸς ἄξων μὲ τὸν θετικὸν ἡμιάξονα  $Ox$ , θὰ ἔχωμεν :

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \text{ συν} \theta \\ y &= \rho \text{ ημ} \theta \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

ἐνθα  $(x, y)$  αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου  $P$  τοῦ ἐπιπέδου καὶ  $(\rho, \theta)$  αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι αὐτοῦ.

Αἱ ἐξισώσεις (I) φέρουν τὸ ὄνομα ἐξισώσεις μετασχηματισμοῦ τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων εἰς πολικάς τοιαύτας.

Έκ τῶν ἐξισώσεων (I) λαμβάνομεν εὐκόλως τὰς :

$$\left. \begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 \quad \text{καὶ} \quad \theta = \text{τοξ} \varepsilon \varphi \left( \frac{y}{x} \right), \quad x \neq 0 \\ \eta \mu \theta &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{καὶ} \quad \text{συν} \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

**Σημείωσις :** Ἡ γωνία  $\theta$  ὑπολογίζεται ἀπὸ τοὺς δύο τελευταίους τύπους μαζί.

**71.\* ΠΟΛΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.— 1ον:** 'Εάν ή εύθεία (δ) έχη εξίσωσιν τής μορφής  $Ax + By + \Gamma = 0$ , τότε διά τών τύπων (1) αὕτη μετασχηματίζεται εἰς τήν :

$$\rho (A \text{ συν}\theta + B \text{ ημ}\theta) + \Gamma = 0 \quad (1)$$

**2ον:** 'Εάν ή εύθεία (δ) έχη εξίσωσιν τής μορφής :

$$x \text{ συν}\omega + y \text{ ημ}\omega = p,$$

τότε αὕτη διά τών (1) γίνεται :

$$\rho \text{ συν}\theta \text{ συν}\omega + \rho \text{ ημ}\theta \text{ ημ}\omega = p, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \rho \text{ συν}(\theta - \omega) = p \quad (2)$$

**Παρατηρήσεις :** Διά  $\omega = 0^\circ$  ή (2) γίνεται :  $\rho \text{ συν}\theta = p$  }

Διά  $\omega = 180^\circ$  ή (2) γίνεται :  $\rho \text{ συν}\theta = -p$  }.

Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ταύτας ή εύθεία (δ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν πολικὸν ἄξονα  $Ox$ .

Διά  $\omega = 90^\circ$  ή (2) γίνεται :  $\rho \text{ ημ}\theta = p$  }

καὶ διά  $\omega = 270^\circ$  ή (2) γίνεται :  $\rho \text{ ημ}\theta = -p$  }

Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ταύτας ή (δ) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν πολικὸν ἄξονα  $Ox$ .

**Πᾶσα εύθεία διερχομένη διά τοῦ πόλου ἔχει εξίσωσιν :**  $\theta = k$

ὅπου  $k$  ὠρισμένος πραγματικὸς ἀριθμὸς.

**72. ΕΦΑΡΜΟΓΗ.—** Νὰ εὐρεθῇ ή ἀπόστασις τῶν σημείων  $A_1(\rho_1, \theta_1)$  καὶ  $A_2(\rho_2, \theta_2)$ .

**Λύσις :** Γνωρίζομεν ὅτι ή ἀπόστασις τῶν σημείων  $A_1, A_2$  εἰς Καρτεσιανὰς συντεταγμένας εἶναι :

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad (1)$$

'Αλλὰ  $\left. \begin{matrix} x_1 = \rho_1 \text{ συν}\theta_1 \\ y_1 = \rho_1 \text{ ημ}\theta_1 \end{matrix} \right\}$  καὶ  $\left. \begin{matrix} x_2 = \rho_2 \text{ συν}\theta_2 \\ y_2 = \rho_2 \text{ ημ}\theta_2 \end{matrix} \right\}$ , ὁπότε ή (1) γίνεται :

$$d^2 = (\rho_2 \text{ συν}\theta_2 - \rho_1 \text{ συν}\theta_1)^2 + (\rho_2 \text{ ημ}\theta_2 - \rho_1 \text{ ημ}\theta_1)^2$$

καὶ μετὰ τὰς καταλλήλους πράξεις λαμβάνομεν τὸν τύπον :

$$d^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \text{ συν}(\theta_1 - \theta_2) \quad (2)$$

Διά  $\theta_1 = \theta_2$  ἔχομεν τὴν ἐπέκτασιν τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**93.** Αἱ ἀκόλουθοι εξισώσεις νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς πολικάς :

|                     |                               |                      |
|---------------------|-------------------------------|----------------------|
| 1) $x - 3y = 0$     | 4) $x^2 + y^2 - \alpha x = 0$ | ἄξονες ὀρθοκανονικοὶ |
| 2) $y + 5 = 0$      | 5) $x^2 - y^2 = \alpha^2$     |                      |
| 3) $x^2 + y^2 = 16$ | 6) $2xy = 7$                  |                      |

**94.** Αἱ ἀκόλουθοι εξισώσεις νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς Καρτεσιανὰς καὶ ὀρθογωνίους συντεταγμένας καὶ κανονικάς.

|                                     |                                                          |                                          |
|-------------------------------------|----------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| 1) $\rho = 10$                      | 5) $\rho^2 \text{ συν}^2 2\theta = \alpha^2$             | 9) $\rho = \alpha(1 - \text{συν}\theta)$ |
| 2) $\rho = 16 \text{ συν}\theta$    | 6) $\rho = \alpha \text{ ημ} 2\theta$                    | 10) $\rho^2 \text{ ημ} 2\theta = 16$     |
| 3) $\rho \text{ ημ}\theta = 4$      | 7) $\rho = \alpha \text{ συν} 2\theta$                   | 11) $\rho^2 = 16 \text{ ημ} 2\theta$     |
| 4) $\rho = \alpha \text{ ημ}\theta$ | 8) $\rho \text{ συν}\theta = \alpha \text{ ημ}^2 \theta$ | 12) $\rho = \alpha \text{ ημ} 3\theta$   |



95. Νά εὑρεθοῦν αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι τῶν σημείων :

$$\left(5, \frac{\pi}{2}\right), \left(-2, \frac{3\pi}{4}\right), (3, \pi).$$

96. Νά ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν του εἰς ὀρθοκανονικοὺς ἄξονας, πρῶτον εἰς Καρτεσιανὰς συντεταγμένας καὶ δεῦτερον εἰς πολικὰς.

97. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεία  $\left(4, \frac{5\pi}{6}\right), \left(12 - 4\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}\right), \left(12, \frac{\pi}{3}\right)$  κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

98. Νά ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποῖου κορυφαὶ εἶναι τὰ σημεία :

$$1) A\left(4, \frac{\pi}{3}\right), B\left(6, \frac{2\pi}{3}\right), \Gamma\left(8, \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$2) A\left(12, \frac{\pi}{6}\right), B\left(8, \frac{5\pi}{6}\right), \Gamma\left(5, \frac{5\pi}{6}\right).$$

99. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων  $A\left(5, \frac{2\pi}{3}\right), B\left(8, \frac{\pi}{3}\right).$

100. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἐξισώσεις τῶν διχοτόμων γωνίας δύο τεμνομένων εὐθειῶν ὑπὸ τὴν κανονικὴν μορφὴν εἶναι :

$$\text{καὶ} \quad \left. \begin{aligned} x(\sin \omega_1 + \sin \omega_2) + \beta(\eta \mu \omega_1 + \eta \mu \omega_2) - (p_1 + p_2) &= 0 \\ x(\sin \omega_1 - \sin \omega_2) + y(\eta \mu \omega_1 - \eta \mu \omega_2) + (p_2 - p_1) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

101. Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων θεωροῦμεν τὰ σημεία Α(1,6), Β(-4,2), Γ(3,-1). Νά ὑπολογισθῇ :

1) Τὸ μήκος ΒΓ.

2) Τὸ ὕψος ΑΗ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

3) Αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

4) Αἱ ἐξισώσεις καὶ τὰ μήκη τῶν διαμέσων του καὶ τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων του.

5) Αἱ ἐξισώσεις τῶν μεσοκαθέτων τῶν πλευρῶν του.

6) Αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του.

#### ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ.

102. Νά εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς εὐθείας  $(\delta)$  ἐξισώσεως  $3x - 5y + 6 = 0$ , τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον τῶν σημείων (3,-4), (2,1).

103. Νά εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ σημείου (2,5) καὶ τοιαύτης ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν ἄξόνων τμήμα αὐτῆς νὰ διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ σημείου τούτου εἰς δύο ἴσα μέρη.

104. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι  $y = \lambda x + \beta$ , ὅπου  $\lambda = \beta$ , διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Ποῖαι αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τούτου ;

105. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις  $E = ax + by$  εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῶν διανυσμάτων  $\overrightarrow{OB}(\alpha, \beta)$  καὶ  $\overrightarrow{OM}(x, y)$ .

106. Πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι  $Ax + By + \Gamma = 0$ , διὰ τὰς ὁποίας  $A + B + \Gamma = 0$ , διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τοῦ ὁποῖου ζητοῦνται αἱ συντεταγμέναι.

107. Νά εὑρεθῇ ὁ λόγος, εἰς τὸν ὁποῖον ἡ εὐθεῖα  $x + 3y - 6 = 0$  διαιρεῖ τὸ τμήμα, τὸ ἔχον συντεταγμένας τῶν ἄκρων (-3,2), (6,1).

108. Νά ὀρίσθῃ ὁ  $\mu$ , οὕτως ὥστε ἡ εὐθεῖα  $y = \mu x - 7$  νὰ διαιρῇ τὸ τμήμα  $A_1(3,2), A_2(1,4)$  εἰς λόγον  $\frac{3}{2}$ .

109. Νά εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τῶν εὐθειῶν  $4x - 3y - 1 = 0$  καὶ  $3x - 4y + 2 = 0$  καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αὗται εἶναι κάθετοι.

110. Να εύρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ὧν ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς εὐθείας, ἐξισώσεων:  $4x - 3y + 4 = 0$  καὶ  $5x + 12y - 8 = 0$  εἶναι  $\frac{13}{5}$ .

111. Αἱ πλευραὶ ἐνὸς τριγώνου  $AB\Gamma$  ἔχουν ἐξισώσεις:

$$3x + 4y - 12 = 0, \quad 3x - 4y = 0, \quad 4x + 3y + 24 = 0.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς  $A$  καὶ αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν  $B, \Gamma$  διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τοῦ ὁποίου ζητοῦνται αἱ συντεταγμέναι.

112. Νὰ εύρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας  $(\delta)$ , συντελεστοῦ διευθύνσεως  $\lambda = \frac{3}{4}$ , καὶ τῆς ὁποίας ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸ σημεῖον  $(2,4)$  εἶναι 2.

113. Νὰ εύρεθῶν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου  $AB\Gamma$ , τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἔχουν ἐξισώσεις  $3x + 2y - 4 = 0$ ,  $x - 3y + 6 = 0$ ,  $4x - 3y - 10 = 0$ , καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\epsilon\phi A + \epsilon\phi B + \epsilon\phi \Gamma = \epsilon\phi \hat{A} + \epsilon\phi B + \epsilon\phi \Gamma, \quad \text{καὶ} \quad A + B + \Gamma = 180^\circ.$$

114. Δίδεται ἐπιπέδον  $(P)$ , μία εὐθεῖα  $(\delta)$  ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἐν σημείῳ  $A$  ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου. Ἐστω  $H$  ἡ προβολὴ τοῦ  $A$  ἐπὶ τὸ ἐπιπέδον  $(P)$  καὶ  $K$  ἡ προβολὴ τοῦ  $H$  ἐπὶ τὴν  $(\delta)$ . Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ  $K$  εἶναι προβολὴ τοῦ  $A$  ἐπὶ τὴν  $(\delta)$ .

115. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων  $(Ox, Oy)$  δίδονται τὰ σημεία  $A(-2, 1)$ ,  $B(4, -1)$ ,  $\Gamma(7, 2)$ . Νὰ ὁρισθῶν αἱ συντεταγμέναι τῆς κορυφῆς  $\Delta$  τοῦ παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ .

116. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων  $(Ox, Oy)$  θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν  $(\delta)$ , ἐξισώσεως:  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$  καὶ τὰ σημεία  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  μὴ κείμενα ἐπὶ τῆς  $(\delta)$ . Ἐάν  $I$  εἶναι ἡ τομὴ τῆς  $(\delta)$  καὶ τοῦ τμήματος  $M_1M_2$ , νὰ ὁρισθῇ ὁ λόγος  $\overrightarrow{IM_1} : \overrightarrow{IM_2}$ .

117. Δίδεται τρίγωνον  $AB\Gamma$  καὶ τὰ σημεία  $M, N, P$  ἐπὶ τῶν πλευρῶν  $B\Gamma, \Gamma A, AB$  ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι τὰ σημεία  $M, N, P$  θὰ κείνται ἐπ' εὐθείας ὅταν, ἔχωμεν:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{M\Gamma}} \cdot \frac{\overline{NF}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$$

118. Δίδονται τὰ σημεία  $A(2,1)$  καὶ  $B(6,4)$ . Νὰ ὁρισθῶν αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν  $\Gamma, \Delta$  τοῦ τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ , τὸ ὁποῖον ἔχει πλευράν τὴν  $AB$ .

119. Δίδονται τὰ σημεία  $A(1,0)$  καὶ  $B(3,6)$ . Νὰ ὁρισθῶν αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν  $\Gamma$  καὶ  $\Delta$  τοῦ ρόμβου  $AB\Gamma\Delta$ , οὕτως ὥστε  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} = \frac{2\pi}{3}$ .

120. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία  $(\vec{u}, \vec{v})$  τῶν διανυσμάτων:

$$\vec{u}(\sqrt{2}, -\sqrt{3}) \quad \text{καὶ} \quad \vec{v}(3 - \sqrt{2}, \sqrt{3} + \sqrt{6}).$$

121. Δίδονται τὰ διανύσματα  $\vec{u}(4\sqrt{3} - 3, 3\sqrt{3} + 4)$ ,  $\vec{v}(4, 3)$  καὶ ζητοῦνται τὰ:

$$\sin(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{καὶ} \quad \eta\mu(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{καὶ} \quad (\vec{u}, \vec{v}).$$

122. Θεωροῦμεν τὰ διανύσματα:  $\vec{u}(-0,5, 6)$ ,  $\vec{v}(2,5, -1)$ .

Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία τῶν διανυσμάτων  $\left\{ \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \right\}$ .

123. Ἐπιλύσατε γραφικῶς τὰς ἀνισώσεις:

$$0 \leq \frac{(x-1)(y-1)}{x+y-3} \leq 1.$$

124. Δίδεται ἡ εὐθεῖα  $(\delta)$ , ἐξισώσεως  $x \sin \alpha + y \eta \mu \alpha = p$ .

Δείξατε ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου  $M_1(x_1, y_1)$  ἀπὸ τὴν  $(\delta)$  εἶναι:

$$d = x_1 \sin \alpha + y_1 \eta \mu \alpha - p.$$

Ἐφαρμογὴ  $(\delta)$ :  $7x + y - 10 = 0$  καὶ  $M_1(3,4)$ .

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

#### ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΟΥ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

|                                                                                                                                                                                         |                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| 1. Πρότασις—Προτασιακός τύπος—Ποσοδείκται—Σύνθετοι προτάσεις—"Αλγεβρα (λογισμός) τῶν προτάσεων—Πράξεις μεταξύ τῶν λογικῶν προτάσεων—Ταυτολογίαι καὶ αὐτοαντιφάσεις—'Εφαρμογαί—'Ασκήσεις | Σελίς<br>5 - 18 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

#### ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

|                                                                                                                                                                                                                                                                          |         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| 2. 'Εννοια τοῦ συνόλου—Παράστασις συνόλου—Τὸ κενὸν σύνολον—'Υποσύνολον ἄλλου συνόλου, ὑπερσύνολον, ἰσότης δύο συνόλων—Βασικὸν σύνολον ἢ σύνολον ἀναφορᾶς—Πράξεις μεταξύ συνόλων—Καρτεσιανὸν γινόμενον συνόλων—'Ασκήσεις—Μαθηματικὴ ἢ τελεία ἐπαγωγή—'Εφαρμογαί—'Ασκήσεις | 19 - 37 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|

## ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

#### ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

|                                                                                                                                                                                                                                                                          |         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| 3. 'Ορισμός—'Ιδιότητες τῶν ἀπολύτων τιμῶν—'Εφαρμογαί—'Ασκήσεις—'Εξισώσεις με ἀπολύτους τιμὰς τῶν ἀγνώστων ἐπιλυομένας ἐντὸς τοῦ $R$ —'Ανισώσεις με ἀπολύτους τιμὰς τῶν ἀγνώστων—Συστήματα με ἀπολύτους τιμὰς τῶν ἀγνώστων ἐπιλυόμενα ἐντὸς τοῦ $R$ —'Εφαρμογαί—'Ασκήσεις | 38 - 69 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙV

#### ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 4. 'Ακέραια πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς—'Εννοια τοῦ πολυωνύμου—"Αλγεβρα (λογισμός) τῶν πολυωνύμων—'Εφαρμογαί—Διαιρετότης ἀκεραίων πολυωνύμων—'Ιδιότητες τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων—'Εφαρμογαί—'Ασκήσεις—'Ακέραια πολυώνυμα πολλῶν μεταβλητῶν—'Ομογενῆ καὶ συμμετρικὰ πολυώνυμα—'Εφαρμογαί—'Ασκήσεις—'Ανάλυσις ρητοῦ κλάσματος εἰς ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων—'Εφαρμογαί—'Ασκήσεις—Διωνύμιο ἐξισώσεις—Τριγωνομετρικὴ μορφή μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ—Τύπος τοῦ De Moivre—Ρίζαι μιγαδικῶν ἀριθμῶν—'Εφαρμογαί—'Ασκήσεις. | 70 - 140 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

### ΠΕΡΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Σελίς

5. Ἡ ἔννοια τῆς ἀκολουθίας—Μηδενικαὶ ἀκολουθίαι—Ἰδιότητες τῶν μηδενικῶν ἀκολουθιῶν—Συγκλίνουσαι ἀκολουθίαι, ἔννοια τοῦ ὁρίου—Ἰδιότητες τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν—Ἐφαρμογαί—Μονότονοι ἀκολουθίαι—Ἐφαρμογαί ἐπὶ τῶν μονότονων ἀκολουθιῶν—Ἀσκήσεις ..... 141 - 176

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

### ΠΕΡΙ ΠΡΟΟΔΩΝ

6. Ἀριθμητικαὶ πρόοδοι—Ἀρμονικαὶ πρόοδοι—Γεωμετρικαὶ πρόοδοι—Ἐφαρμογαί—Ἀσκήσεις ..... 177 - 198

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

### ΣΕΙΡΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

7. Συμβολισμὸς ἀθροισμάτων—Ἡ ἔννοια τῆς σειρᾶς—Σύγκλισις σειρᾶς—Μέθοδοι εὐρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν  $n$  πρώτων ὄρων σειρᾶς—Ἰδιότητες συγκλίσεως σειρῶν—Σειραὶ μὲ θετικούς ὅρους—Παράστασις πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ δεκαδικὰς σειρὰς—Γινόμενον πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ πεπερασμένους τὸ πλῆθος παράγοντας—Ἀπειρογινόμενα—Ἐφαρμογαί—Ἀσκήσεις ..... 199 - 229

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

### ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ — ΕΚΘΕΤΙΚΑΙ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ — ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

8. Λογάριθμοι. Ὅρισμοι—Ἰδιότητες—Δεκαδικοὶ λογάριθμοι—Περὶ λογαριθμικῶν πινάκων—Χρῆσις λογαριθμικῶν πινάκων—Ἐφαρμογαί—Ἀσκήσεις—Ἐκθετικά καὶ λογαριθμικαὶ ἐξισώσεις καὶ συστήματα—Ἐφαρμογαί—Ἀσκήσεις ..... 230 - 272

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

### ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ — ΙΣΑΙ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ — ΧΡΕΩΛΥΣΙΣ

9. Ἀνατοκισμὸς—Προβλήματα ἐπ' αὐτοῦ—Ἰσαὶ καταθέσεις—Προβλήματα ἐπ' αὐτῆς—Χρεωλύσις—Προβλήματα ἐπ' αὐτῆς—Ἀσκήσεις ..... 273 - 284

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

### ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΣ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

10. Εἰσαγωγή—Ἐπίλυσις εἰδικῶν τινῶν περιπτώσεων—Ἐφαρμογαί—Ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως:  $x^2 + ky^2 = z^2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ —Ἀσκήσεις ..... 285 - 294

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

### ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

11. Μεταθέσεις—Κυκλικαὶ μεταθέσεις—Ἐπαναληπτικαὶ μεταθέσεις—Διατάξεις—Ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις—Συνδυασμοί—Ἐπαναληπτικοὶ συνδυασμοί—Τύπος τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος—Ἐφαρμογαί—Ἀσκήσεις—Στοιχεῖα ἐκ τῆς θεωρίας τῶν πινάκων—Ἐφαρμογαί—Ἀσκήσεις ..... 295 - 324

## ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΧΙΙ

#### ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

12. Ένορατική είσαγωγή εἰς τὰς πιθανότητες—Περὶ τοῦ δειγματικοῦ χώρου—Θεμελίωδεις ὁρίσμοι καὶ πράξεις μεταξύ συμβάντων—Στοιχειώδης ὁρισμὸς τῆς πιθανότητος—Έφαρμογαί—Διαμορφωμένη προσπέλασις εἰς τὰς πιθανότητες—Όρισμὸς τῆς πιθανότητος μετὰ τὴν βοήθειαν τῶν ὑποσυνόλων τοῦ δειγματικοῦ χώρου—Πιθανότης ὑπὸ συνθήκην—Πιθανότης τομῆς συμβάντων—Συμβάντα ἀνεξάρτητα ἀλλήλων—Προσθετικὸν θεώρημα τῶν πιθανοτήτων—Έφαρμογαί—Άσκήσεις ..... 325 - 350

Σελίς

## ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

1. Έπαναλήψεις ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ διανυσματικοῦ λογισμοῦ—Πράξεις ἐπὶ τῶν διανυσμάτων — Λόγος συγγραμμικῶν διανυσμάτων — Τετμημένη σημείου — Γραμμικὸς συνδυασμὸς — Άσκήσεις ..... 351 - 360

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

2. Συντεταγμένοι διανύσματα — Συντεταγμένοι ἐλευθέρου διανύσματος — Συνθήκη παραλληλίας — Συνιστώσαι διανύσματος διὰ τῶν συντεταγμένων — Άσκήσεις . 361 - 368

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

3. Έσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων — Γεωμετρικαὶ ἐφαρμογαὶ αὐτοῦ — Έξωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων — Συνθήκη καθετότητος — Άλλαγή ἀξόνων — Άσκήσεις ..... 369 - 383

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙV

4. Έ εὐθεῖα εἰς τὸ ἐπίπεδον — Έξίσωσις εὐθείας — Διάφοροι μορφαὶ αὐτῆς — Παραλληλία — Καθετότης — Διάφοροι συνθηκαὶ εὐθειῶν — Δέσμη εὐθειῶν — Έφαρμογαὶ — Άσκήσεις ..... 384 - 399

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

5. Σπουδὴ τῆς εὐθείας εἰς τὸ ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων — Γωνία δύο εὐθειῶν — Άπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθείαν — Σημεῖον τοῦ τριωνύμου  $\alpha\chi + \beta\psi + \gamma$  — Γραφικὴ ἐπίλυσις τῆς ἀνίσώσεως  $\alpha\chi + \beta\psi + \gamma > 0$  — Άσκήσεις ..... 400 - 412

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VΙ

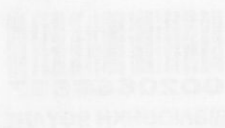
6. Πολικαὶ συντεταγμένοι — Μετασχηματισμὸς τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων σημείου εἰς πολικὰς — Άσκήσεις ..... 413 - 418

## ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελίς 67 ή άσκησης 111 νά γραφή ούτω: Δίδονται τά τριώνυμα  $f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ,  $\varphi(x) \equiv \alpha' x^2 + \beta' x + \gamma'$  με συντελεστάρ πραγματικούς άριθμούς και ρίζας πραγματικάρ και άνίσους. Έάν  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) αί ρίζαι τοῦ  $f(x)$  και  $\rho_1, \rho_2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ) αί ρίζαι τοῦ  $\varphi(x)$ , νά άποδειχθῇ ή ίσοδυναμία:

$$(|f(x)| \geq |\varphi(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (x_1 = \rho_1, x_2 = \rho_2 \text{ και } |\alpha| \geq |\alpha'|).$$

- » 68 » 1, κάτωθεν: » 'Επιλύσατε τάρ εξισώσεις... » 'Επιλύονται εν  $\mathbb{R}$  αί εξισώσεις (1) και (2);
- » 100 » 4 κάτωθεν νά γίνη ή εξῆς προσθήκη: Ποιον τὸ ὑπόλοιπον αν  $\alpha = \beta$ ;
- » 140 » 6 » νά γίνη ή εξῆς προσθήκη: Ποίαι αί λοιπαί ρίζαι αὔτης;
- » 184 » 14 άνωθεν » » » Είναι άρμονική πρόσδος τότε, και μόνον τότε, αν ισχύη:  $\alpha_n \neq 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots$  και ή άκολουθία...





0020558637

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΒΟΥΛΗΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ Δ'. 1972 (VI) - ΑΝΤ. 131.000 - ΣΥΜΒΑΣΙΣ 2256/18-4-72

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ: ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΟΥΤΣΗΣ - ΒΙΒΛΙΟΔ. Ι. ΚΑΜΠΑΝΑΣ Α.Ε.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής





