ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
1954

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΤΕΧΝΙΚΟΥ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΤΟΜΟΣ Β'

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

ΤΙΜΑΤΑΙ Δρχ. 35

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΤΕΧΝΙΚΟΥ

1.— *Μαθηματικὰ* Α΄, Β΄

2.— *Φυσικὴ*

3.— *Χημεία*

4.— *Μηχανικὴ*

5.— *Μηχανουργικὴ Τεχνολογία* Α΄, Β΄

6.— *Ἠλεκτρολογία* Α΄, Β΄, Γ΄

7.— *Ραδιοτεχνία* Α΄, Β΄

8.— *Εἰσαγωγὴ στὴν Τεχνικὴ τῆς Τηλεφωνίας*

9.— *Κινητήριοι Μηχαναὶ* Α΄, Β΄

10.— *Στοιχεῖα Μηχανῶν*

11.— *Ὑλικὰ*

12.— *Γενικὴ Δομικὴ*

13.— *Οἰκοδομικὴ*

14.— *Ὑδραυλικὰ Ἔργα*

15.— *Συγκοινωνιακὰ Ἔργα*

16.— *Τοπογραφία*

17.— *Οἰκοδομικαὶ Σχεδιάσεις*

18.— *Σχεδιάσεις Τεχνικῶν Ἔργων*

19.— *Ὀργάνωσις — Διοίκησις Ἔργων*

20.— *Τεχνικὸν Σχέδιον*

Ὁ Εὐγένιος Εὐγενίδης, ἱδρυτὴς καὶ χορηγὸς τοῦ «Ἱδρύματος Εὐγενίδου» προεῖδεν ἐνωρίτατα καὶ ἐσχημάτισεν τὴν βαθεῖαν πεποίθησιν ὅτι ἀναγκαῖον παράγοντα διὰ τὴν πρόοδον τοῦ ἔθνους θὰ ἀπετέλει ἡ ἀρτία κατάρτισις τῶν τεχνικῶν μας ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν ἠθικὴν ἀγωγὴν αὐτῶν.

Τὴν πεποίθησίν του αὐτὴν τὴν μετέτρεψεν εἰς γενναιόφρονα πρᾶξιν εὐεργεσίας, ὅταν ἐκληροδότησε σεβαστὸν ποσὸν διὰ τὴν σύστασιν Ἱδρύματος ποὺ θὰ εἶχε σκοπὸν νὰ συμβάλῃ εἰς τὴν τεχνικὴν ἐκπαίδευσιν τῶν νέων τῆς Ἑλλάδος.

Διὰ τοῦ Β. Διατάγματος τῆς 10ης Φεβρουαρίου 1956, συνεστήθη τὸ Ἵδρυμα Εὐγενίδου καὶ κατὰ τὴν ἐπιθυμίαν τοῦ διαθέτου ἐτέθη ὑπὸ τὴν διοίκησιν τῆς ἀδελφῆς του Κυρίας Μαρ. Σίμου. Ἀπὸ τὴν στιγμὴν ἐκείνην ἤρχισαν πραγματοποιούμενοι οἱ σκοποὶ ποὺ ὡραματίσθη ὁ Εὐγένιος Εὐγενίδης καὶ συγχρόνως ἡ πλήρωσις μιᾶς ἀπὸ τὰς βασικωτέρας ἀνάγκας τοῦ ἐθνικοῦ μας βίου.

* * *

Κατὰ τὴν κλιμάκωσιν τῶν σκοπῶν του, τὸ Ἵδρυμα προέταξε τὴν ἔκδοσιν τεχνικῶν βιβλίων τόσον διὰ λόγους θεωρητικοὺς ὅσον καὶ πρακτικούς. Ἐκρίθη, πράγματι, ὅτι ἀπετέλει πρωταρχικὴν ἀνάγκην ὁ ἐφοδιασμὸς τῶν μαθητῶν μὲ σειρὰς βιβλίων, αἱ ὁποῖαι θὰ ἔθετον ὀρθὰ θεμέλια εἰς τὴν παιδείαν των καὶ αἱ ὁποῖαι θὰ ἀπετέλουν συγχρόνως πολύτιμον βιβλιοθήκην διὰ κάθε τεχνικόν.

Τὸ ὅλον ἔργον ἤρχισε μὲ τὴν ὑποστήριξιν τοῦ Ὑπουργείου Βιομηχανίας, τότε ἁρμοδίου διὰ τὴν τεχνικὴν ἐκπαίδευσιν, καὶ συνεχίζεται ἤδη μὲ τὴν ἔγκρισιν καὶ τὴν συνεργασίαν τοῦ Ὑπουργείου Ἐθνικῆς Παιδείας, βάσει τοῦ Νομοθετικοῦ Διατάγματος 3970/1959.

Αἱ ἐκδόσεις τοῦ Ἱδρύματος διηρέθησαν εἰς δύο βασικὰς σειρὰς αἱ ὁποῖαι φέρουν ἀντιστοίχως τοὺς τίτλους:

« Βιβλιοθήκη τοῦ Τεχνίτη » καὶ « Βιβλιοθήκη τοῦ Τεχνικοῦ ».

Καὶ ἡ μὲν πρώτη περιλαμβάνει τὰ βιβλία τῶν Σχολῶν Τεχνι-

τῶν ἡ δὲ δευτέρα τὰ βιβλία τοῦ ἑπομένου κύκλου τῆς Τεχνικῆς Ἐκπαιδεύσεως. Ἀμφότεραι αἱ σειραὶ θὰ ἐμπλουτισθοῦν καὶ μὲ βιβλία εὐρυτέρου τεχνικοῦ ἐνδιαφέροντος χρήσιμα κατὰ τὴν ἄσκησιν τοῦ ἐπαγγέλματος.

* * *

Οἱ συγγραφεῖς καὶ ἡ Ἐπιτροπὴ Ἐκδόσεων τοῦ Ἱδρύματος κατέβαλον κάθε προσπάθειαν ὥστε τὰ βιβλία νὰ εἶναι ἐπιστημονικῶς ἄρτια ἀλλὰ καὶ προσηρμοσμένα εἰς τὰς ἀνάγκας καὶ τὰς δυνατότητας τῶν μαθητῶν. Δι' αὐτὸ καὶ τὰ βιβλία αὐτὰ ἔχουν γραφῆ εἰς ἁπλῆν γλῶσσαν καὶ ἀνάλογον πρὸς τὴν στάθμην τῆς ἐκπαιδεύσεως δι' ἣν προορίζεται ἑκάστη σειρὰ τῶν βιβλίων. Ἡ τιμὴ τῶν βιβλίων ὡρίσθη τόσον χαμηλή, ὥστε νὰ εἶναι προσιτὰ καὶ εἰς τοὺς πλέον ἀπόρους μαθητάς.

Οὕτω προσφέρονται εἰς τὸ εὐρὺ κοινὸν τῶν καθηγητῶν καὶ τῶν μαθητῶν τῆς τεχνικῆς μας παιδείας αἱ ἐκδόσεις τοῦ Ἱδρύματος, τῶν ὁποίων ἡ συμβολὴ εἰς τὴν πραγματοποίησιν τοῦ σκοποῦ τοῦ Εὐγενίου Εὐγενίδου ἐλπίζεται νὰ εἶναι μεγάλη.

Ι Δ Ρ Υ Μ Α   Ε Υ Γ Ε Ν Ι Δ Ο Υ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΤΕΧΝΙΚΟΥ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Π. ΦΩΚΑ - ΚΟΣΜΕΤΑΤΟΥ
ΔΙΠΛΩΜ. ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΥ Ε.Μ.Π.
ΕΠΙΜΕΛΗΤΟΥ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΔΡΑΝ
ΤΕΧΝΙΚΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ Ε.Μ.Π.

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

ΑΘΗΝΑΙ
1966

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Διὰ τοὺς ἀνθρώπους, ἡ ζωὴ καὶ ἡ κίνησις εἶναι δύο ἔννοιαι ταυτόσημοι. Ὅπου ὑπάρχει ζωὴ ὑπάρχει καὶ κίνησις, ὡς τὸ ἀναγκαῖον ἐπακόλουθόν της. Ἡ κίνησις εἶναι ἡ ἐξωτερίκευσις τῆς ζωτικότητος, τῆς διαθέσεως πρὸς ἐργασίαν καὶ δρᾶσιν. Εἶναι ἡ ἀπόδειξις, ἀναμφισβητήτως ἡ κυριωτέρα ἀπόδειξις, ὅτι ὑπάρχει ζωή.

Καὶ εἰς μίαν ἐπιχείρησιν ὅμως, εἴτε ὀνομάζεται αὐτὴ ἐργοτάξιον, εἴτε μονὰς παραγωγῆς, εἴτε ὀργανισμὸς παροχῆς ὑπηρεσιῶν, εἴτε ὁ,τιδήποτε ἄλλο, ἡ «ζωή» της εἶναι κίνησις· κίνησις τῶν ἐπὶ μέρους ἐξαρτημάτων τῶν μηχανῶν, κίνησις τῶν ἐργαζομένων, κίνησις τῶν προϊόντων, κίνησις ἐργαλείων, ὑλικῶν, ἐγγράφων κλπ. Δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ νοηθῆ λειτουργία μηχανῆς ἢ οἱαδήποτε ἄλλη ἐπὶ μέρους δραστηριότης, χωρὶς τὴν ταυτόχρονον ὕπαρξιν κινήσεως. Ἐὰν λοιπὸν ἐπιθυμῆ κανεὶς νὰ μελετήση ὅλας ἐκείνας τὰς δραστηριότητας καὶ ἐργασίας, αἱ ὁποῖαι καταλλήλως συνδυαζόμεναι θὰ ὁδηγήσουν τὴν ἐπιχείρησιν εἰς τὴν πραγματοποίησιν τῶν ἀντικειμενικῶν της σκοπῶν, θὰ πρέπει νὰ ἀρχίση τὴν μελέτην του μὲ μελέτην τῶν κινήσεων· τῶν κινήσεων ποὺ ἐκτελοῦν τὰ ἐξαρτήματα τῶν μηχανῶν, οἱ ἐργαζόμενοι, τὰ ὑλικά.

Μία τοιαύτη μελέτη φαίνεται ἐκ πρώτης ὄψεως ἐξαιρετικῶς δύσκολη, κυρίως λόγω τῆς τεραστίας ποικιλίας τῶν κινήσεων, τὰς ὁποίας καθημερινῶς παρατηροῦμε. Εἶναι ἐν τούτοις συναρπαστικὸν τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ βαθμιαία καὶ μεθοδικὴ ἐμβάθυνσις εἰς τὸ πρόβλημα μελέτης τῶν κινήσεων, μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν πράγματι ἐνδιαφέρουσαν διαπίστωσιν, ὅτι ὅλα τὰ σώματα — ἔμψυχα καὶ ἄψυχα — ἀκολουθοῦν κατὰ τὴν κίνησίν των ὡρισμένους, ὀλίγους εὐτυχῶς εἰς ἀριθμόν, βασικοὺς νόμους κινήσεως. Ἡ γνῶσις τῶν νομῶν αὐτῶν μᾶς δίδει τὴν δυνατότητα νὰ περιγράψωμε καὶ νὰ μελετήσωμε οἱανδήποτε κίνησιν ἤθελε παρουσιασθῆ εἰς τὴν καθημερινὴν πρᾶξιν.

Τὸ βιβλίον τοῦτο τῆς σειρᾶς τῶν ἐκδόσεων τοῦ Ἱδρύματος Εὐγενίδου « Βιβλιοθήκη τοῦ Τεχνικοῦ » προορίζεται κατὰ βάσιν διὰ τὰς Μέσας Τεχνικὰς Ἐπαγγελματικὰς Σχολάς. Ἐν τούτοις, τόσον ἡ σύνθεσις τῆς ὕλης ὅσον καὶ τὸ ὅλον πνεῦμα, ὑπὸ τὸ ὁποῖον ἔχει γραφῆ, τὸ καθιστοῦν χρήσιμον καὶ διὰ τοὺς ἤδη ἐπαγγελματίας ἐργοδηγούς, κυρίως δὲ δι' ὅσους ἔχουν ὡς ἔργον των τὸν προγραμματισμὸν μιᾶς ἐργασίας ἢ μιᾶς σειρᾶς ἐργασιῶν διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ὁποίων εἶναι ὑπεύθυνοι.

Κατὰ τὴν συγγραφὴν τοῦ βιβλίου συνήντησα ἀρκετὰς δυσκολίας, κυρίως ἐπειδὴ ἐπεδίωξα νὰ συνδυάσω:

— σαφήνειαν εἰς τὴν παρουσίασιν τῶν σχετικῶν μὲ τὰς κινήσεις τῶν σωμάτων ἐννοιῶν,

— ἀποφυγὴν μακρῶν θεωρητικῶν ἀναπτύξεων,

— ἀποφυγὴν διατυπώσεως ὁρισμῶν καὶ ἀξιωμάτων κατ' αὐθαίρετον τρόπον,

— ἐννοιολογικὴν συνέχειαν κειμένου, δηλαδὴ ἀποφυγὴν ἐννοιολογικῶν κενῶν ἢ ἁλμάτων,

— πληρότητα καὶ αὐτοτέλειαν κειμένου,

— ποικιλίαν ἐφαρμογῶν καὶ παραδειγμάτων ἀποσκοποῦσαν εἰς τὸ νὰ καταστήση τὸ κείμενον εὐχάριστον καὶ ἐνδιαφέρον.

Ἔχων ὅμως συνεχῶς κατὰ νοῦν τὸν ἐκπαιδευόμενον μαθητήν, προσεπάθησα τελικῶς νὰ τοῦ προσφέρω ἕνα βιβλίον μέσω τοῦ ὁποίου θὰ δυνηθῇ :

— νὰ ἀγαπήση τὸν μεθοδικὸν καὶ λογικὸν τρόπον προσεγγίσεως καὶ ἀντιμετωπίσεως ἑνὸς οἱουδήποτε προβλήματος,

— νὰ ἀναπτύξη κριτικὴν διάθεσιν, ἀπαραίτητον προϋπόθεσιν διὰ τὴν ἐπαγγελματικὴν ἐπιτυχίαν ἑνὸς τεχνικοῦ καὶ τέλος

— νὰ διαπιστώση, ὅτι ἡ μελέτη τῶν νόμων κινήσεως τῶν σωμάτων προσφέρει τὴν δυνατότητα χρονικοῦ προγραμματισμοῦ καὶ προκοστολογήσεως μιᾶς σειρᾶς ἐργασιῶν, καθὼς ἐπίσης καὶ τὴν δυνατότητα ἐξευρέσεως τῆς πλέον οἰκονομικῆς — ἀπὸ πλευρᾶς χώρου, χρόνου καὶ χρήματος — λύσεως εἰς πολλὰ προβλήματα τῆς καθημερινῆς πράξεως.

Κλείων τὸν πρόλογον αὐτὸν θὰ ἤθελα νὰ εὐχαριστήσω τὴν ἐπιτροπὴν τοῦ Ἱδρύματος τόσον διὰ τὴν εὐκαιρίαν, τὴν ὁποίαν μοῦ παρέσχε, ὅπως συμβάλλω καὶ ἐγὼ εἰς τὴν ἐξύψωσιν τῆς ἐπαγγελματικῆς στάθμης τῶν τεχνικῶν μας, ὅσον καὶ διὰ τὴν ἀμέριστον βοήθειαν καὶ συμπαράστασιν τὴν ὁποίαν εὗρηκα εἰς τὴν προσπάθειαν πραγματοποιήσεως τῶν βασικῶν μου ἐπιδιώξεων.

Ὁ Συγγραφεὺς

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ

Δοθέντος ὅτι τὸ βιβλίον τοῦτο ἀπευθύνεται πρὸς τοὺς Τεχνικοὺς Βοηθοὺς - Ἐργοδηγούς :

1. Μηχανουργικῶν ἐγκαταστάσεων (Μ)
2. Ἠλεκτρολογικῶν ἐγκαταστάσεων (Η)
3. Δομικῶν ἔργων (Δ)

καὶ ὡς ἐκ τούτου παρέχει τὴν ἀναγκαίαν ὕλην διὰ τὴν ἐκπαίδευσιν τῶν Τεχνικῶν Βοηθῶν - Ἐργοδηγῶν ὅλων τῶν εἰδικοτήτων, συνιστᾶται εἰς τοὺς κ.κ. διδάσκοντας ὅπως διδάξουν τὰ ἁρμόζοντα εἰς ἑκάστην εἰδικότητα θέματα. Εἰς τὸν πίνακα περιεχομένων καὶ διὰ τῶν γραμμάτων Μ, Η καὶ Δ πρὸ ἑκάστης παραγράφου, ἔχομε σημειώσει κατὰ τὴν κρίσιν μας τὰ πρὸς διδασκαλίαν (κατὰ εἰδικότητας).

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1

Ἔννοιαι καὶ ὁρισμοὶ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 2

Κίνησις ὑπὸ σταθερὰν ἀριθμητικὴν τιμὴν ταχύτητος (Ὁμοιόμορφος κίνησις)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 3

Περιστροφικὴ κίνησις

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 4

Μὴ ὁμοιόμορφοι κινήσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 5

Σύνθετοι κινήσεις

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1

ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

1·1 Τί εἶναι κίνησις.

Λέγομε ὅτι ἕνα σῶμα κινεῖται, ὅταν ἀλλάζῃ θέσιν μέσα εἰς τὸν χῶρον ἐν σχέσει πρὸς ἕνα ἄλλο σῶμα, τὸ ὁποῖον θεωροῦμε ἀκίνητον.

Ἔτσι λέγομε ὅτι ἕνα πλοῖον *κινεῖται*, ἐπειδή, ὅταν ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὸν λιμένα, ἀλλάζει συνεχῶς θέσιν ἐν σχέσει πρὸς τὰς οἰκίας καὶ τοὺς φανοστάτας τῆς προκυμαίας. Ἀντιθέτως, λέγομε ὅτι αὐτὸ δὲν κινεῖται, δηλαδὴ ὅτι *ἠρεμεῖ*, ὅταν εἶναι ἀγκυροβολημένον εἰς τὸν λιμένα, διότι τότε αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τὰς οἰκίας τῆς προκυμαίας δὲν μεταβάλλονται ἀπὸ τὴν μίαν χρονικὴν στιγμὴν εἰς τὴν ἄλλην. Θεωροῦμε δηλαδὴ εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ τὴν Γῆν καὶ ὅλα τὰ ἀντικείμενα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἐπάνω εἰς αὐτὴν (οἰκίας, φανοστάτας κλπ.), ὡς ἀκίνητα σώματα, χωρὶς νὰ λαμβάνωμε ὑπ' ὄψιν μας οὔτε τὴν κίνησιν τῆς Γῆς γύρω ἀπὸ τὸν ἑαυτόν της οὔτε τὴν κίνησίν της γύρω ἀπὸ τὸν Ἥλιον.

Λέγομε ἐπίσης ὅτι τὸ ἔμβολον μιᾶς βενζινομηχανῆς *κινεῖται*, ὅταν ἡ μηχανὴ εὑρίσκεται εἰς λειτουργίαν, ἐπειδὴ ἀκριβῶς ἀλλάζει συνεχῶς θέσιν ἐν σχέσει πρὸς τὰ τοιχώματα τοῦ κυλίνδρου. Ἐὰν ὅμως ὑποθέσωμε ὅτι ἕνα αὐτοκίνητον κινεῖται ἐπάνω εἰς τὸ κατάστρωμα τῆς ὁδοῦ χωρὶς νὰ λειτουργῇ ἡ μηχανή του (π.χ. εἰς κατήφορον), τότε τὰ ἔμβολα τῆς μηχανῆς δὲν κινοῦνται ἐν σχέσει πρὸς τὰ τοιχώματα τῶν κυλίνδρων τῆς βενζινομηχανῆς τοῦ αὐτοκινήτου· θὰ πρέπει συνεπῶς νὰ τὰ θεωρήσωμε ἀκίνητα παρὰ τὸ ὅτι εἰς τὴν πραγματικότητα κινοῦνται σχετικῶς μὲ τὸ κατάστρωμα τῆς ὁδοῦ (μαζὶ μὲ τὸ αὐτοκίνητον).

Παρατηροῦμε, δηλαδή, ὅτι ἀναφέρομε τὴν κίνησιν ἑνὸς σώματος *πάντοτε* ἐν σχέσει πρὸς ἕνα ἄλλο σῶμα, τὸ ὁποῖον θεωροῦμε ἀκίνητον, ἀδιαφόρως ἐὰν εἰς τὴν πραγματικότητα καὶ τὸ σῶμα αὐτό, ποὺ θεωροῦμε ἀκίνητον, κινεῖται ἐπίσης ἐν σχέσει πρὸς κάποιο ἄλλο σῶμα. Μόλις λοιπὸν διαπιστώσωμε ὅτι ἕνα σῶμα κινεῖται, πρώτη μας ἐργασία εἶναι νὰ καθορίσωμε ἀμέσως, καὶ πρὶν προχωρήσωμε εἰς τὴν μελέτην τῆς κινήσεως, ὡς πρὸς ποῖον σῶμα θὰ ἀναφέρωμε τὴν κίνησίν του.

Ἡ παρατήρησις αὐτὴ εἶναι ἀπολύτως λογική, παρ᾽ ὅλον ποὺ ἴσως νὰ μᾶς φαίνεται ἐκ πρώτης ὄψεως περίεργον τὸ ὅτι ἐπιμένομε τόσον πολὺ εἰς αὐτήν. Ὁ λογος εἶναι ὅτι, ἐπειδὴ ἔχομε ἐξοικειωθῆ μὲ τὴν κίνησιν τῶν διαφόρων σωμάτων ἀπὸ μικροί, ἔχομε συνηθίσει νὰ ἀναφέρωμε τὴν κάθε κίνησιν ἐν σχέσει πρὸς τὸν ἑαυτόν μας, θεωροῦντες δηλαδὴ πάντοτε τὸν ἑαυτόν μας ὡς τὸ ἀκίνητον σῶμα. Ἔτσι λέγομε π.χ. ὅτι ἕνα σῶμα κινεῖται, μόνον ἐὰν τὸ βλέπωμε ἐμεῖς νὰ κινῆται καὶ ὅτι κινεῖται ἔτσι, ὅπως ἀκριβῶς τὸ βλέπομε ἐμεῖς νὰ κινῆται. Ὅπως, ὅμως, θὰ ἴδοῦμε εἰς τὴν συνέχειαν, ἡ νοοτροπία αὐτὴ θὰ μᾶς δημιουργήση εἰς πολλὰς περιπτώσεις δυσκολίας, ἐνῶ ἀντιθέτως, ἐὰν ἡ κίνησις ἀναφερθῆ ὡς πρὸς τὸ « κατάλληλον » εἰς κάθε περίπτωσιν σῶμα, ἡ μελέτη της ἠμπορεῖ νὰ γίνη ἁπλουστέρα.

Δὲν θὰ μᾶς ἀπασχολήση πρὸς τὸ παρὸν περισσότερον τὸ θέμα αὐτό. Τονίζομε πάντως ἀπὸ τώρα, ὅτι ἡ ἐκλογὴ τοῦ « καταλλήλου » αὐτοῦ σώματος, ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἀναφέρωμε τὴν κίνησιν ἑνὸς ἄλλου σώματος, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ συγκεκριμένον εἶδος κινήσεως ποὺ μελετοῦμε καὶ ἀπὸ τὸν σκοπὸν διὰ τὸν ὁποῖον μελετοῦμε τὴν κίνησιν αὐτήν.

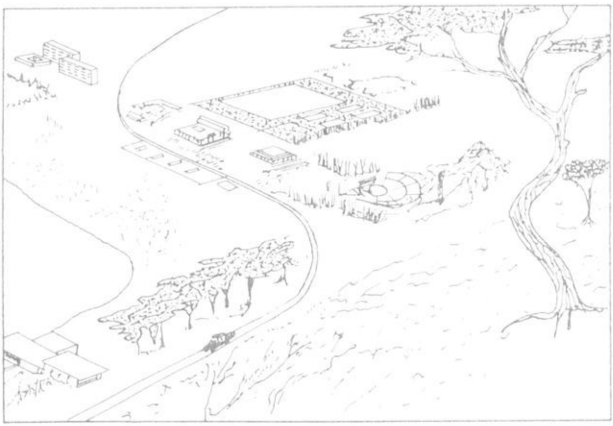
1·2 Τροχιά.

Εἶναι φανερὸν ὅτι δὲν ἀρκεῖ νὰ διαπιστώσωμε μόνον ὅτι ἕνα σῶμα κινεῖται σχετικῶς πρὸς ἕνα ἄλλο· πρέπει νὰ ἐξετάσωμε καὶ πῶς κινεῖται σχετικῶς μὲ τὸ ἄλλο αὐτὸ σῶμα. Αὐτὸ τὸ «πῶς» ἀποτελεῖ ἀκριβῶς τὴν μελέτην μιᾶς κινήσεως καὶ τὸ πρῶτον μας βῆμα εἶναι ἀναμφισβητήτως ἡ περιγραφὴ τῆς κινήσεως αὐτῆς. Σκεπτόμεθα, λοιπόν, ὅτι δυνάμεθα μὲ μεγάλην εὐκολίαν νὰ ἀποκτήσωμε μίαν πρώτην εἰκόνα τῆς κινήσεως ἑνὸς σώματος, ἐὰν περιγράψωμε τὴν «διαδρομὴν» ποὺ ἀκολουθεῖ τοῦτο κατὰ τὴν κίνησίν του. Τὴν διαδρομὴν αὐτὴν θὰ τὴν ὀνομάζωμε ἀπὸ τώρα καὶ εἰς τὸ ἑξῆς *τροχιάν*. *Ἡ τροχιά, ἑπομένως, ποὺ διαγράφει ἕνα κινούμενον σῶμα, δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο, παρὰ τὸ σύνολον τῶν θέσεων ἀπὸ τὰς ὁποίας διῆλθε ἢ πρόκειται νὰ διέλθῃ τὸ σῶμα κατὰ τὴν κίνησίν του.* Συμφώνως δὲ πρὸς ὅσα ἔχουν λεχθῆ μέχρι τώρα, ἡ τροχιὰ πρέπει νὰ νοῆται πάντοτε ἐν σχέσει πρὸς τὸ σῶμα, ποὺ θεωρεῖται ἀκίνητον καὶ ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ἀναφέρομε τὴν κίνησιν. Ἔτσι, ὅταν χαράσσωμε μίαν γραμμὴν μὲ τὴν βοήθειαν χάρακος, ἡ μύτη τοῦ μολυβιοῦ κινεῖται σχετικῶς μὲ τὸ χαρτὶ σχεδιάσεως, ἡ δὲ τροχιὰ ποὺ διαγράφει εἶναι μία εὐθεῖα. Ἠμποροῦμε συνεπῶς νὰ εἴπωμε ὅτι ἡ μύτη τοῦ μολυβιοῦ ἐκτελεῖ κατὰ τὴν χάραξιν τῆς γραμμῆς *εὐθύγραμμον κίνησιν*. Ἐάν, ἀντιθέτως, γίνῃ ἡ χάραξις τῆς γραμμῆς μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς καμπυλογράμμου, ἡ μύτη τοῦ μολυβιοῦ ἐκτελεῖ *καμπυλόγραμμον κίνησιν*, ἀκριβῶς ἐπειδὴ ἡ τροχιά, ποὺ διαγράφει ἐπάνω εἰς τὸ χαρτὶ σχεδιάσεως, εἶναι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν μία καμπύλη. Εἰδικώτερον κατὰ τὴν *κυκλικὴν κίνησιν*, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ μίαν εἰδικὴν περίπτωσιν καμπυλογράμμου κινήσεως, ἡ τροχιὰ ποὺ διαγράφει τὸ κινούμενον σῶμα εἶναι μία περιφέρεια κύκλου. Κυκλικὴν κίνησιν ἐκτελεῖ π.χ. ἡ μύτη τοῦ μολυβιοῦ κατὰ τὴν χάραξιν περιφερείας κύκλου μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς διαβήτου.

Ἀπὸ τὰ ὅσα ἐλέχθησαν, δημιουργεῖται ἴσως ἡ ἐντύπωσις ὅτι ἡ τροχιά, τὴν ὁποίαν διαγράφει ἕνα οἱονδήποτε σῶμα κατὰ τὴν κίνησίν του, ἠμπορεῖ νὰ καθορισθῆ μὲ πολὺ μεγάλην εὐκολίαν. Ἐν τούτοις ὑπάρχουν πολλαὶ περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας αὐτὸ δὲν συμβαίνει. Ἂς ὑποθέσωμε, λόγου χάριν, ὅτι ἐξετάζομε τὴν κίνησιν ἑνὸς αὐτοκινήτου ἐν σχέσει πρὸς τὸ κατάστρωμα τῆς ὁδοῦ. Ὅπως πιθανῶς θὰ ἔχωμε ὅλοι παρατηρήσει, λόγῳ τῆς παλμικῆς κινήσεως, ποὺ ὀφείλεται εἰς τὴν λειτουργίαν τῆς μηχανῆς καὶ κυρίως λόγῳ τῶν ταλαντώσεων, ποὺ ὑφίσταται συνεχῶς τὸ αὐτοκίνητον ἐξ αἰτίας τῶν ἀνωμαλιῶν τοῦ καταστρώματος τοῦ δρόμου, τὰ διάφορα ἐπὶ μέρους τμήματα τοῦ αὐτοκινήτου δὲν ἐκτελοῦν ὅλα τὴν ἰδίαν ἀκριβῶς κίνησιν. Γεννᾶται λοιπὸν τὸ ἐρώτημα: Ποιό ἀπὸ ὅλα αὐτὰ τὰ ἐπὶ μέρους τμήματα τοῦ αὐτοκινήτου θὰ θεωρήσωμε ὡς τὸ ἀντιπροσωπευτικώτερον, ὥστε ἀπὸ τὴν τροχιάν, ποὺ αὐτὸ διαγράφει, νὰ προσδιορίσωμε καὶ τὴν τροχιὰν ποὺ διαγράφει τὸ αὐτοκίνητον ὡς σύνολον;

Ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ λογικὸν αὐτὸ ἐρώτημα δὲν εἶναι, τουλάχιστον ἐκ πρώτης ὄψεως, καθόλου εὔκολος. Διερωτώμεθα ὅμως: Εἶναι ἀπαραίτητον κατὰ τὴν μελέτην τῆς κινήσεως ἑνὸς αὐτοκινήτου νὰ λάβωμε ὑπ' ὄψιν μας τὴν παλμικὴν κίνησιν, ποὺ ὀφείλεται εἰς τὴν μηχανήν, καὶ τὰς ταλαντώσεις, ποὺ ὀφείλονται εἰς τὰς ἀνωμαλίας τοῦ καταστρώματος τῆς ὁδοῦ; Ἂν παραδεχθοῦμε πρὸς στιγμὴν ὅτι εἶναι, τότε θὰ καταλήξωμε ἀναμφισβητήτως εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι κάθε αὐτοκίνητον κινεῖται καὶ κατὰ τρόπον διαφορετικὸν (ἀφοῦ καὶ μία πέτρα π.χ. ποὺ θὰ εὑρίσκετο ἐμπρὸς εἰς ἕνα τροχόν, θὰ ἦτο ἱκανὴ νὰ μεταβάλη ἐντελῶς τὴν κίνησίν του). Ἕνα τέτοιο συμπέρασμα ὅμως θὰ ἐδημιούργει πολλὰ προβλήματα καὶ θὰ μᾶς ἐδυσκόλευε χωρὶς λόγον εἰς τὴν μελέτην τῆς κινήσεως, διότι θὰ ἔπρεπε τότε διὰ κάθε συγκεκριμένην κίνησιν ἑνὸς αὐτοκινήτου νὰ γίνη ἰδιαιτέρα μελέτη, ἡ ὁποία μάλιστα δὲν θὰ ἦτο καὶ τόσον εὔκολος.

Σκεπτόμεθα λοιπὸν ὅτι θὰ πρέπει νὰ φαντασθοῦμε μίαν ἰδανικὴν κίνησιν αὐτοκινήτου, δηλαδὴ μίαν κίνησιν εἰς τὴν ὁποίαν ὁ μὲν δρόμος θὰ ἦτο ἀπολύτως λεῖος καὶ ἡ μηχανὴ τελείως απομονωμένη, ὥστε νὰ μὴ προκαλῇ κραδασμούς. Αὐτὴν τὴν ἰδανικὴν εἰκόνα δὲν δυνάμεθα βεβαίως νὰ τὴν συναντήσωμε εὐκόλως εἰς τὴν πραγματικότητα, δυνάμεθα ὅμως νὰ τὴν ἀποκτήσωμε μὲ τὴν φαντασίαν μας. Ἂν φαντασθοῦμε π.χ. ὅτι παρακολουθοῦμε τὴν κίνησιν ἑνὸς αὐτοκινήτου ἀπὸ μεγάλην ἀπόστασιν, π.χ. ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἑνὸς ὑψηλοῦ βουνοῦ, τότε θὰ ἐβλέπαμε ὅτι τὸ αὐτοκίνητον φαίνεται τόσον μικρόν, ὥστε θὰ ἦτο τελείως ἀδύνατον νὰ διακρίνωμε ὅλας τὰς δευτερευούσας κινήσεις, ποὺ ἀνεφέραμε προηγουμένως. Θὰ εἴχαμε μάλιστα τὴν ἐντύπωσιν ὅτι παρακολουθοῦ-



Σχ. 1·2 α.

με τὴν κίνησιν ἑνὸς σημείου (ὅπως θὰ ἐφαίνετο ἀπὸ ἐκεῖ ἐπάνω τὸ αὐτοκίνητον) ἐπάνω εἰς μίαν γραμμὴν (ὅπως θὰ ἐφαίνετο ὁ δρόμος) (σχ. $1 \cdot 2\,\alpha$).

Ὁδηγούμεθα, λοιπόν, εἰς τὴν σκέψιν ὅτι θὰ ἠμπορούσαμε ἴσως νὰ θεωρήσωμε ὅτι τὸ σῶμα, τοῦ ὁποίου μελετοῦμε τὴν κίνησιν, εὑρίσκεται συγκεντρωμένον εἰς ἕνα πολὺ μικρὸν χῶρον, τόσο μικρόν, ὥστε νὰ δυνάμεθα νὰ τὸν παρομοιάσωμε μὲ ἕνα σημεῖον. Τὸ σημεῖον αὐτὸ καλοῦμε *ὑλικὸν σημεῖον*. Ὁ καθορισμὸς τῆς τροχιᾶς, ποὺ διαγράφει ἕνα αὐτοκίνητον, ἕνα ἀεροπλάνον, ἕνας τεχνητὸς δορυφόρος τῆς γῆς κ.ο.κ. δὲν παρουσιάζει τότε καμμίαν δυσκολίαν.

Ὅπως βλέπομε, ἡ ἔννοια τοῦ ὑλικοῦ σημείου μᾶς διευκολύνει εἰς τὴν μελέτην πολλῶν κινήσεων, αἱ ὁποῖαι μᾶς φαίνονται ἐκ πρώτης ὄψεως ἐξαιρετικῶς πολύπλοκοι. Αὐτὸ συμβαίνει, ἐπειδή, ὅπως εἴπαμε, μᾶς βοηθεῖ νὰ διαπιστώσωμε ποῖαι ἐπὶ μέρους κινήσεις εἶναι κύριαι κινήσεις καὶ πρέπει συνεπῶς νὰ μελετηθοῦν, καὶ ποῖαι εἶναι δευτερεύουσαι κινήσεις, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἀγνοηθοῦν.

Διὰ νὰ ἀντιληφθοῦμε τὴν βοήθειαν ποὺ μᾶς παρέχει ἡ ἔννοια τοῦ *ὑλικοῦ σημείου*, ἂς ὑποθέσωμε π.χ. ὅτι θέλομε νὰ μελετήσωμε τὴν κίνησιν, ποὺ ἐκτελεῖ ἡ γῆ ὡς πρὸς τὸν ἥλιον. Καθὼς ὅλοι γνωρίζομε, ἡ γῆ κινεῖται ἐπίσης καὶ γύρω ἀπὸ τὸν ἄξονά της. Ἂν δεχθοῦμε, ὅπως εἶναι φυσικόν, ὅτι ἡ κίνησίς της αὐτὴ δὲν ἐπηρεάζει καθόλου τὴν κίνησίν της γύρω ἀπὸ τὸν ἥλιον, ἠμποροῦμε νὰ τὴν ἀγνοήσωμε. Διὰ τὸν ἴδιον λόγον ἠμποροῦμε νὰ ἀγνοήσωμε καὶ τὰς διαφόρους κινήσεις, ποὺ παρουσιάζονται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς, αἱ ὁποῖαι ὀφείλονται εἰς σεισμούς, ἐκρήξεις ἡφαιστείων κλπ. Ἂν λοιπὸν γίνῃ δεκτόν, κατὰ τὴν μελέτην τῆς κινήσεως αὐτῆς, ὅτι ἡ γῆ εἶναι συγκεντρωμένη εἰς ἕνα ἀπειροελάχιστον χῶρον γύρω ἀπὸ τὸ κέντρον της, τότε θὰ ἀποκτήσωμε μίαν πολὺ παραστατικὴν εἰκόνα τῆς κινήσεώς της γύρω ἀπὸ τὸν ἥλιον. Αὐτὸ συμβαίνει ἐπειδὴ ἀγνοοῦμε ἔτσι αὐτομάτως ὅλας τὰς δευτερευούσας κινήσεις, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν φαινομενικῶς πολύπλοκον τὴν κυρίως κίνησιν, δηλαδὴ ἐκείνην ἀκριβῶς ἡ ὁποία μᾶς ἐνδιαφέρει.

1·3 Διάστημα.

Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμόν, ποὺ ἐδώσαμε εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, ἡ τροχιά, τὴν ὁποίαν διαγράφει ἕνα κινούμενον σῶμα, δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο ἀπὸ τὸ γεωμετρικὸν σχῆμα τῆς διαδρομῆς, ποὺ ἀκολουθεῖ τὸ σῶμα αὐτὸ κατὰ τὴν κίνησίν του. Δὲν σημαίνει δηλαδὴ τίποτε ἀπολύτως, ἐὰν εἰποῦμε ὅτι ἡ τροχιά, ποὺ διαγράφει ἕνα σῶμα, εἶναι μεγάλη ἢ ὅτι εἶναι μικρὴ ἢ ἀκόμη ὅτι εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν τροχιὰν ποὺ διαγράφει ἕνα ἄλλο σῶμα. Ἐπιβάλλεται λοιπὸν νὰ ὁρίσωμε καὶ ἕνα ἄλλο μέγεθος, μὲ τὸ ὁποῖον νὰ ἠμποροῦμε νὰ ἐκφραζώμεθα καὶ ποσοτικῶς· ἕνα μέγεθος δηλαδὴ μὲ τὸ ὁποῖον νὰ ἠμποροῦμε νὰ χαρακτηρίσωμε καὶ τὸ πόσο μεγάλη ἢ τὸ πόσο μικρὴ εἶναι ἡ διαδρομή, ποὺ ἀκολουθεῖ τὸ κινούμενον σῶμα. Τὸ μέγεθος αὐτὸ θὰ τὸ ὀνομάσωμε *διάστημα* καὶ θὰ τὸ συμβολίσωμε μὲ τὸ γράμμα s. Τὸ διάστημα εἶναι αὐτὸ ποὺ ὀνομάζομε εἰς τὴν καθημερινήν μας ζωὴν *ἀπόστασιν*· ἐπομένως, ὡς ἔννοια μᾶς εἶναι ἤδη γνωστόν. Αὐτὸ ὅμως, ποὺ πρέπει νὰ ἔχωμε πάντοτε ὑπ' ὄψιν μας, εἶναι ὅτι τὸ διάστημα, ὡς ἔννοια καὶ ὡς μέγεθος, ἔχει μόνον τότε νόημα, ὅταν μετρῆται κατὰ μῆκος τῆς τροχιᾶς, ποὺ διαγράφει τὸ σῶμα κατὰ τὴν κίνησίν του.

Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ διαστήματος χρησιμοποιοῦμε μίαν ἀπὸ τὰς μονάδας μήκους. Γνωρίζομε δὲ ὅτι ἡ συνηθεστέρα μονὰς μήκους εἶναι τὸ *μέτρον* (m) μὲ τὰ πολλαπλάσια καὶ ὑποπολλαπλάσιά του. Αὐτὴν χρησιμοποιεῖ σχεδὸν ὅλος ὁ κόσμος.

Πολλαπλάσια:	τὸ χιλιόμετρον	(km),	1 km = 1 000 m
Ὑποπολλαπλάσια:	τὸ δεκατόμετρον	(dm),	1 dm = 0,1 m
	τὸ ἑκατοστόμετρον	(cm),	1 cm = 0,01 m
	τὸ χιλιοστόμετρον	(mm),	1 mm = 0,001 m
	τὸ μικρὸν	(μ),	1 μ = 0,001 mm = 0,000001 m.

Εἰς τὴν Ἀγγλίαν ὅμως καὶ τὴν Ἀμερικὴν χρησιμοποιοῦν ἄλλας μονάδας διὰ τὴν μέτρησιν μηκῶν. Ἀπὸ αὐτὰς θὰ ἀναφέρωμε δύο, τὴν *ἴντσαν* καὶ τὸν *πόδα*:

1 ἴντσα = 1 in = 1'' = 2,54 cm = 25,4 mm
1 πούς = 1 ft = 12 in = 30,5 cm.

Ἡ ὕπαρξις τόσον μεγάλου ἀριθμοῦ μονάδων διὰ τὴν μέτρησιν ἑνὸς μεγέθους δὲν παρουσιάζεται μόνον, ὅταν ἔχωμε νὰ μετρήσωμε μήκη, ἀλλὰ καὶ εἰς ὅλας σχεδὸν τὰς περιπτώσεις, ὅπου ἀσχολούμεθα μὲ τὴν μέτρησιν φυσικῶν μεγεθῶν. Ἀναγκαζόμεθα λοιπὸν πολλάκις νὰ ἐκφράσωμε ἕνα μέγεθος εἰς ἄλλας μονάδας ἀπὸ αὐτὰς εἰς τὰς ὁποίας μᾶς δίδεται, διὰ νὰ ἠμπορέσωμε ἔτσι νὰ χρησιμοποιήσωμε τοὺς τύπους, ποὺ τὸ συνδέουν μὲ ἄλλα φυσικὰ μεγέθη. Ἐπίσης γίνεται αὐτὸ ἁπλῶς καὶ μόνον διὰ νὰ ἀποκτήσωμε τὴν δυνατότητα νὰ τὸ συγκρίνωμε μὲ ἄλλα ὁμοειδῆ μεγέθη, ποὺ δίδονται ὅμως εἰς ἄλλας μονάδας. Ἡ μετατροπὴ αὐτὴ τῶν μονάδων φυσικὸν εἶναι νὰ μᾶς ὁδηγῇ πολὺ συχνὰ εἰς ἀριθμητικὰ λάθη. Δι' αὐτὸ εἶναι σκόπιμον νὰ ἀκολουθήσωμε ἀπὸ τώρα ἕνα ἑνιαῖον καὶ συστηματικὸν τρόπον ἐργασίας, ὥστε νὰ ἐλαττώσωμε εἰς τὸ ἐλάχιστον τὰς πιθανότητας τέτοιων λαθῶν.

Ἂς ὑποθέσωμε π.χ. ὅτι θέλομε νὰ ἐκφράσωμε τὸ μῆκος 8,2 m εἰς ἑκατοστόμετρα. Ὅπως γνωρίζομε ἤδη, 1 m = 100 cm. Ἠμποροῦμε λοιπὸν νὰ γράψωμε:

$$8{,}2\ \mathrm{m} = 8{,}2 \cdot 100\ \mathrm{cm} = 820\ \mathrm{cm}.$$

Ἔστω τώρα ὅτι θέλομε νὰ ἐκφράσωμε τὸ μῆκος $2\,{}^3/_4$ in εἰς χιλιοστόμετρα. Ὅπως γνωρίζομε 1 in = 25,4 mm. Ἠμποροῦμε λοιπὸν νὰ γράψωμε:

$$2\,{}^3/_4\ \mathrm{in} = 2{,}75\ \mathrm{in} = 2{,}75 \cdot 25{,}4\ \mathrm{mm} = 69{,}85\ \mathrm{mm}.$$

Μὲ τὸν ἴδιον ἀκριβῶς συλλογισμὸν εὑρίσκομε ὅτι:

$$31{,}95\ \mathrm{mm} = 31{,}95 \cdot \frac{1}{25{,}4}\ \mathrm{in} = \frac{31{,}95}{25{,}4}\ \mathrm{in} = 1{,}25\ \mathrm{in} = 1\,{}^1/_4\ \mathrm{in} = 1^1/_4{}''$$

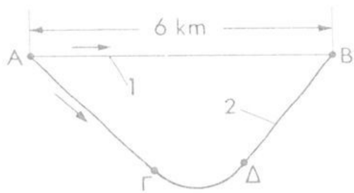
(διότι ἀφοῦ 1 in = 25,4 mm, θὰ εἶναι $1\ \mathrm{mm} = \frac{1}{25{,}4}\ \mathrm{in}$),

ἐπίσης ὅτι $6{,}1\ \mathrm{km} = 6{,}1 \cdot 1\,000\ \mathrm{m} = 6{,}1 \cdot 1\,000 \cdot 100\ \mathrm{cm} =$

$$6{,}1 \cdot 1\,000 \cdot 100 \cdot \frac{1}{30{,}5}\ \mathrm{ft} = \frac{610\,000}{30{,}5}\ \mathrm{ft} = 20\,000\ \mathrm{ft}\ \text{κλπ.}$$

᾿Ασκήσεις.

1. Ἕνα αὐτοκίνητον ἔχει τὴν δυνατότητα νὰ μεταβῇ ἀπὸ τὴν πόλιν Α εἰς τὴν πόλιν Β κατὰ δύο διαφορετικοὺς τρόπους, δηλαδὴ ἀπὸ τὸν δρόμον 1 ἢ ἀπὸ τὸν δρόμον 2 (σχῆμα 1·3 α). ᾿Απὸ μίαν σύντομον μελέτην τῶν δύο δρόμων 1 καὶ 2 προέκυψαν ὡρισμένα συμπεράσματα, τὰ ὁποῖα σημειώνονται ἀμέσως παρακάτω (α ἕως ζ). Τὰ συμπεράσματα ὅμως αὐτὰ δὲν ἔχουν διατυπωθῆ ὅλα ὀρθῶς: Νὰ ἐλέγξετε λοιπὸν ποιὰ δὲν εἶναι διατυπωμένα ὀρθῶς καὶ νὰ τὰ γράψετε ὅπως θὰ ἔπρεπε νὰ εἶχαν γραφῆ:



Σχ. 1·3 α.

α. Ἡ τροχιὰ 1, ποὺ διαγράφει τὸ αὐτοκίνητον διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ τὴν πόλιν Α εἰς τὴν πόλιν Β, εἶναι εὐθύγραμμος, ἐνῶ ἡ τροχιὰ 2 εἶναι κατὰ μὲν τὰ τμήματα ΑΓ καὶ ΔΒ εὐθύγραμμος κατὰ δὲ τὸ τμῆμα ΓΔ καμπυλόγραμμος.

β. Τὸ διάστημα, ποὺ διανύει τὸ αὐτοκίνητον κατὰ μῆκος τῆς τροχιᾶς 2, διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ τὴν πόλιν Α εἰς τὴν πόλιν Β, εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ 6 km.

γ. Τὸ διάστημα, ποὺ διανύει τὸ αὐτοκίνητον διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ τὴν θέσιν Γ εἰς τὴν θέσιν Δ, εἶναι καμπυλόγραμμον καὶ ἀνηφορικόν.

δ. Τὸ διάστημα, ποὺ διανύει τὸ αὐτοκίνητον κατὰ μῆκος τῆς τροχιᾶς 1, διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ τὴν πόλιν Α εἰς τὴν πόλιν Β, εἶναι διαφορετικὸν ἀπὸ τὸ διάστημα ποὺ διανύει κατὰ μῆκος τῆς τροχιᾶς 2, διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ τὴν πόλιν Α εἰς τὴν πόλιν Β.

ε. Ἡ τροχιὰ 1 εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν τροχιὰν 2.

ζ. Τὸ διάστημα, ποὺ διανύει τὸ αὐτοκίνητον κατὰ μῆκος τῆς τροχιᾶς 1, εἶναι ἴσον πρὸς 6 km.

η. Τὸ διάστημα, ποὺ διανύει τὸ αὐτοκίνητον διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ τὴν πόλιν Α εἰς τὴν πόλιν Β, εἶναι ἴσον πρὸς 6 km.

2. Δύο μήκη εὑρέθησαν τὸ μὲν πρῶτον ἴσον πρὸς 30 mm, τὸ δὲ δεύτερον ἴσον πρὸς $1\,^1/_4''$. Ποιό ἀπὸ τὰ δύο εἶναι μεγαλύτερον;

1·4 Ταχύτης.

Ἂς ὑποθέσωμε ὅτι παρακολουθοῦμε τὴν κίνησιν πολλῶν αὐτοκινήτων ἐπάνω εἰς ἕνα εὐθύγραμμον δρόμον καὶ εἰδικώτερον ἐπάνω εἰς ἕνα τμῆμα αὐτοῦ, μήκους ἑνὸς χιλιομέτρου. Ὅλα τὰ αὐτοκίνητα διαγράφουν κατὰ τὴν κίνησίν των εὐθύγραμμον τροχιάν: ἑπομένως, ὅλα ἐκτελοῦν εὐθύγραμμον κίνησιν. Εἶναι ἐν τούτοις εὔκολον νὰ διαπιστώσωμε ὅτι δὲν κινοῦνται ὅλα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Ἄλλα κινοῦνται περισσότερον γρήγορα καὶ ἄλλα ὀλιγώτερον γρήγορα, ἄρα ἄλλα φθάνουν ταχύτερον καὶ ἄλλα βραδύτερον εἰς τὸ τέρμα. Διὰ τὴν περιγραφὴν δηλαδὴ μιᾶς κινήσεως, δὲν ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμε μόνον ὅτι ἡ κίνησις π.χ. εἶναι εὐθύγραμμος καὶ ὅτι τὸ σῶμα διανύει κατὰ τὴν κίνησίν του διάστημα π.χ. ἑνὸς χιλιομέτρου. Πρέπει ἐπίσης νὰ γνωρίζωμε καὶ πόσον *χρόνον* χρειάζεται τὸ σῶμα διὰ νὰ διανύσῃ τὸ διάστημα αὐτὸ τοῦ ἑνὸς χιλιομέτρου.

Ὁδηγούμεθα λοιπὸν εἰς τὴν σκέψιν νὰ ὁρίσωμε ἕνα νέον μέγεθος, τὴν *ταχύτητα*, τὸ ὁποῖον νὰ συσχετίζῃ κατὰ κάποιον τρόπον τὸ διάστημα, ποὺ διανύει ἕνα σῶμα κατὰ τὴν κίνησίν του, μὲ τὸν χρόνον, ποὺ χρειάζεται διὰ νὰ τὸ διανύσῃ. Ἐκ πρώτης ὄψεως σκεπτόμεθα νὰ θεωρήσωμε ἕνα ὡρισμένον καὶ σταθερὸν διάστημα, π.χ. τὸ διάστημα ἑνὸς χιλιομέτρου, καὶ νὰ ὁρίσωμε τὴν ταχύτητα ὡς τὸν χρόνον ποὺ χρειάζεται τὸ κινούμενον σῶμα διὰ νὰ διανύσῃ τὸ διάστημα αὐτό. Καὶ πράγματι, ἡ χαρακτηριστικὴ καὶ ἐξαιρετικὰ συνήθης ἔκφρασις « ἕνα τσιγάρο δρόμος », δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ μία ἔκφρασις ταχύτητος, ποὺ ὁρίζεται ὑποσυνειδήτως ὡς ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον χρειάζεται ἕνας ὁδοιπόρος διὰ νὰ διανύσῃ ἕνα ὡρισμένον διάστημα (μίαν ὡρισμένην ἀπόστασιν). Ἀπεδείχθη ἐν τούτοις ἀπὸ τὴν πρᾶξιν ὅτι μᾶς ἐξυπηρετεῖ καλύτερον νὰ μὴ θεωρήσωμε ἕνα ὡρισμένον διάστημα, ἀλλὰ ἕνα ὡρισμένον χρόνον π.χ. μίαν ὥραν (h) ἢ ἕνα πρῶτον λεπτὸν τῆς ὥρας (min) ἢ ἕνα δευτερόλεπτον (sec) καὶ νὰ ὁρίσωμε ὅτι: *ταχύτης εἶναι τὸ διάστημα ποὺ διανύει τὸ κινούμενον σῶμα κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ὡρισμένου αὐτοῦ χρόνου*. Ἔτσι, ὅταν λέγωμε ὅτι ἕνα αὐτοκίνητον κινεῖται μὲ ταχύτητα 60 χιλιομέτρων τὴν ὥραν (60 χιλιομέτρων ἀνὰ ὥραν ἢ 60 km ἀνὰ h ἢ τέλος $60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$), ἐννοοῦμε ὅτι ἐὰν ἐξακολουθήσῃ νὰ κινῆται μὲ τὴν ὡς ἄνω ταχύτητα ἐπὶ μίαν ὥραν, θὰ διανύσῃ συνολικῶς διάστημα 60 χιλιομέτρων. Ἀντιθέτως, ἕνα αὐτοκίνητον, ποὺ κινεῖται μὲ ταχύτητα 70 χιλιομέτρων τὴν ὥραν (70 km/h), θὰ διανύσῃ διάστημα 70 χιλιομέτρων εἰς μίαν ὥραν. Δηλαδὴ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον τῆς μιᾶς ὥρας θὰ διανύσῃ διάστημα μεγαλύτερον ἀπὸ ὅ,τι τὸ αὐτοκίνητον, ποὺ κινεῖται μὲ ταχύτητα 60 χιλιομέτρων τὴν ὥραν (60 km/h). Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ δεύτερον αὐτοκίνητον κινεῖται «πιὸ γρήγορα» ἀπὸ ὅ,τι τὸ πρῶτον. Βλέπομε λοιπὸν ὅτι ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον ὡρίσαμε τὸ μέγεθος ποὺ συνδέει τὸ διάστημα μὲ τὸν ἀντίστοιχον χρόνον, ἀποτελεῖ πράγματι μέτρον τοῦ πόσον «γρήγορα» κινεῖται ἕνα σῶμα· αὐτὸς εἶναι ἄλλωστε καὶ ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον τὸ ὠνομάσαμε ταχύτητα.

Ἡ ταχύτης εἶναι ἀναμφισβητήτως ἕνα μέγεθος, μὲ τὸ ὁποῖον εἴμεθα ὅλοι ἐξοικειωμένοι. Ἀπὸ μικροὶ ἔχομε συνδέσει τὴν ἔννοιαν τῆς ταχύτητος μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς κινήσεως, διότι πράγματι, ὅπου ὑπάρχει κίνησις ὑπάρχει καὶ ταχύτης, ἐνῶ ὅπου δὲν ὑπάρχει κίνησις δὲν ὑπάρχει οὔτε ταχύτης. Ἔτσι ὁδηγούμεθα εἰς τὸ πολὺ λογικὸν συμπέρασμα ὅτι, ἐφ᾽ ὅσον, ὅπως εἴπαμε, ἡ κίνησις ἑνὸς σώματος ἀναφέρεται πάντοτε ὡς πρὸς ἕνα ἄλλο σῶμα, θὰ πρέπει καὶ ἡ ταχύτης τοῦ κινουμένου σώματος νὰ ἀναφέρεται ὡς πρὸς ἕνα ἄλλο σῶμα, καὶ μάλιστα τὸ ἴδιο, ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται καὶ ἡ κίνησις.

Εἰς πολλὰς βεβαίως περιπτώσεις παραλείπομε τὸ σῶμα ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται μία κίνησις — ἑπομένως καὶ ἡ ταχύτης τοῦ κινουμένου σώματος — διότι θεωρεῖται τοῦτο αὐτονόητον (βλ. πίνακα 1). Ἔτσι, λέγομε ὅτι ἡ ταχύτης ἑνὸς αὐτοκινήτου εἶναι ἴση πρὸς 70 km/h καὶ ὄχι ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου σχετικῶς μὲ τὸ κατάστρωμα τῆς ὁδοῦ εἶναι ἴση πρὸς 70 km/h, ἀκριβῶς ἐπειδὴ θεωρεῖται αὐτονόητον ὅτι ἀναφέρομε τὴν ταχύτητα τοῦ αὐτοκινήτου σχετικῶς πρὸς τὸ κατάστρωμα τῆς ὁδοῦ καὶ ὄχι π.χ. σχετικῶς πρὸς ἕνα ἄλλο κινούμενον αὐτοκίνητον. Αὐτὸ ὅμως δὲν πρέπει κατ' οὐδένα τρόπον νὰ μᾶς κάνῃ νὰ λησμονήσωμε ὅτι ἡ ταχύτης ἀναφέρεται πάντοτε ὡς *σχετικὴ ταχύτης*, δηλαδὴ ὡς ταχύτης σχετικῶς πρὸς ἕνα ἄλλο σῶμα.

ΠΙΝΑΞ 1

Πεζὸς μὲ κανονικὸν βάδισμα	90 m/min
Δρομεὺς ταχύτητος	9 m/sec
Δρομεὺς ἡμιαντοχῆς	350 m/min
Δρομεὺς ἀντοχῆς	0,35 km/min
Ἵπποι ἀγώνων	70 km/h
Αὐτοκίνητον	40 - 120 km/h
Ἄνεμος μέτριος	10 m/sec
Ἄνεμος ἰσχυρὸς	20 m/sec
Ἁμαξοστοιχία συνήθης	17 m/sec
Ἁμαξοστοιχία ταχεῖα	28 m/sec
Ἀεροπλάνον σύνηθες	600 km/h
Ἀεροπλάνον πυραυλοκίνητον	1 500 km/h
Σφαῖρα ὅπλου	500 m/sec
Ἦχος εἰς τὸν ἀέρα	340 m/sec
Φῶς	300 000 km/sec

Ἀπὸ τὰς τιμὰς τοῦ Πίνακος 1 εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ διαπιστώσωμε ἀμέσως ὅτι ἡ ταχύτης ἑνὸς ἀεροπλάνου εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ταχύτητα ἑνὸς αὐτοκινήτου, ὅτι ἡ ταχύτης τῆς σφαίρας ἑνὸς ὅπλου εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου (δηλαδὴ ὅτι ἡ σφαῖρα θὰ φθάσῃ εἰς τὸν στόχον της πρὶν ἀκουσθῇ ἡ ἐκπυρσοκρότησις τοῦ ὅπλου) κ.ο.κ.

Ἡ σύγκρισις τῶν διαφόρων αὐτῶν ταχυτήτων τοῦ Πίνακος 1 ἀνὰ δύο εἶναι δυνατὴ δι᾽ ἁπλῆς συγκρίσεως τῶν ἀριθμητικῶν των τιμῶν, μόνον καὶ μόνον ἐπειδὴ καὶ αἱ δύο ἐκφράζονται μὲ τὰς αὐτὰς μονάδας. Ἐὰν ὅμως θελήσωμε νὰ συγκρίνωμε π.χ. τὴν ταχύτητα ἑνὸς πυραυλοκινήτου ἀεροπλάνου μὲ τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου, θὰ εἶναι μεγάλον τὸ σφάλμα ἂν συμπεράνωμε, πάλιν δι᾽ ἁπλῆς συγκρίσεως τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν, ὅτι τὸ ἀεροπλάνον κινεῖται μὲ μεγαλυτέραν, καὶ μάλιστα τετραπλασίαν ταχύτητα, ἀπὸ ὅ,τι ὁ ἦχος· καὶ τοῦτο διότι ἡ μὲν ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου εἶναι ἐκπεφρασμένη εἰς χιλιόμετρα ἀνὰ ὥραν ἡ δὲ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς μέτρα ἀνὰ δευτερόλεπτον. Θὰ πρέπει συνεπῶς, πρὶν ἀπὸ οἱανδήποτε σύγκρισιν, νὰ ἐκφράσωμε καὶ τὰς δύο ταχύτητας μὲ τὰς ἰδίας μονάδας. Αἱ μονάδες αὐταὶ δύνανται βεβαίως νὰ εἶναι οἱαιδήποτε (π.χ. m/min, km/sec, ft/h, κ.ο.κ.). Εἶναι ὅμως φανερὸν ὅτι καλὸν εἶναι νὰ διαλέξωμε κατὰ τέτοιον τρόπον τὰς μονάδας, ὥστε αἱ ἀριθμητικαὶ πράξεις, ποὺ θὰ γίνουν, νὰ καταστοῦν ὅσον τὸ δυνατὸν ἁπλούστεραι. Ἔτσι θὰ πρέπει ἢ νὰ ἐκφράσωμε τὴν ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου εἰς m/sec, ποὺ εἶναι ἡ μονὰς μετρήσεως τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου, ἢ νὰ ἐκφράσωμε τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἰς km/h, ποὺ εἶναι ἡ μονὰς μετρήσεως τῆς ταχύτητος τοῦ ἀεροπλάνου. Ἂν λοιπὸν λάβωμε ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι 1 km = 1 000 m καὶ ὅτι 1 h = 3 600 sec, θὰ ἔχωμε εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν:

$$\upsilon_{\alpha\epsilon\rho} = 1\,500\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1\,500 \times \frac{1\,000\ \text{m}}{3\,600\ \text{sec}} = 417\ \text{m/sec}$$

$$\upsilon_{\eta\chi} = 340\ \text{m/sec},$$

εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν:

$$\upsilon_{\alpha\varepsilon\rho} = 1\,500\,\mathrm{km/h}$$

$$\upsilon_{\eta\chi} = 340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} = 340 \times \frac{\frac{1}{1\,000}\,\mathrm{km}}{\frac{1}{3\,600}\mathrm{h}} = 340 \times \frac{3\,600\,\mathrm{km}}{1\,000\,\mathrm{h}} =$$

$$= 34 \times 36\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 1\,224\,\mathrm{km/h}$$

ὁπότε ἡ σύγκρισις τῶν ταχυτήτων ἤχου καὶ πυραυλοκινήτου ἀεροπλάνου δὲν παρουσιάζει πλέον καμμίαν δυσκολίαν.

Ἀσκήσεις.

1. Ὡς πρὸς ποῖον σῶμα ὑποτίθεται ὅτι ἀναφέρεται κάθε ταχύτης τοῦ Πίνακος 1 ;

Τί συμπεράσματα ἠμπορεῖτε νὰ ἐξαγάγετε διὰ τὴν κίνησιν, ποὺ ἐκτελεῖ μία ἀεροσυνοδός, ὅταν βαδίζῃ ἐντὸς τοῦ ἀεροπλάνου της ;

2. α) Διατὶ ἐλήφθη ὡς μονὰς μετρήσεως τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου τὸ m/sec καὶ ὄχι τὸ km/h ;

β) Διατί ἐλήφθη ὡς μονὰς μετρήσεως τῆς ταχύτητος ἑνὸς ἀεροπλάνου τὸ km/h καὶ ὄχι τὸ m/sec ;

γ) Μήπως ἠμποροῦν νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἄλλαι, καταλληλότεραι μονάδες διὰ τὴν μέτρησιν ὡρισμένων ἐκ τῶν ταχυτήτων, ποὺ γράφονται εἰς τὸν Πίνακα 1 ;

Ἂν ναί, ποῖαι εἶναι αὐταὶ καὶ διατί τὰς προτείνετε ὡς καταλληλοτέρας ;

3. α) Μὲ ποίαν ταχύτητα, εἰς km/h, πρέπει νὰ κινῆται τὸ νοσοκομειακὸν αὐτοκίνητον διὰ νὰ ἀκολουθῇ ἐκ τοῦ πλησίον μίαν ὁμάδα μαραθωνοδρόμων ;

β) Πόσας φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτός ;

1·5 Ἡ ταχύτης ὡς ἀνυσματικὸν μέγεθος.

Ὅταν ἀνεφέραμε προηγουμένως τὴν ταχύτητα ἑνὸς αὐτοκινήτου καὶ ἐλέγαμε ὅτι εἶναι ἴση πρὸς 60 km/h, δὲν εἴχαμε ὑπ' ὄψιν μας κανένα συγκεκριμένον αὐτοκίνητον. Δὲν μᾶς ἐνδιέφερε δηλαδὴ ἐὰν ἐκινεῖτο μὲ τὴν ταχύτητα αὐτὴν τῶν 60 km/h πρὸς τὴν Λαμίαν ἢ πρὸς τὴν Κόρινθον ἢ πρὸς οἱανδήποτε ἄλλην πόλιν. Κάθε φορὰν ὅμως, ποὺ ἀναφερόμεθα εἰς τὴν κίνησιν ἑνὸς συγκεκριμένου αὐτοκινήτου, εἶναι φανερὸν ὅτι δὲν μᾶς ἀρκεῖ μόνον ἡ γνῶσις τῆς ταχύτητός του, διὰ νὰ ἀποκτήσωμε μίαν πλήρη καὶ σαφῆ εἰκόνα τῆς κινήσεώς του. Πρέπει ἀπαραιτήτως νὰ γνωρίζωμε καὶ τὴν τροχιάν, τὴν ὁποίαν διαγράφει κατὰ τὴν κίνησίν του.

Πράγματι, ἡ ταχύτης, ὅπως τὴν ὡρίσαμε εἰς τὰ προηγούμενα, συνδέει τὸ διάστημα, ποὺ διανύει ἕνα σῶμα κατὰ τὴν κίνησίν του, μὲ τὸν χρόνον ποὺ ἐχρειάσθη διὰ νὰ τὸ διανύσῃ: ἀποτελεῖ δηλαδὴ ἔννοιαν καθαρῶς ποσοτικήν. Ἡ τροχιὰ ἀντιθέτως εἶναι μία ἔννοια περιγραφικὴ καὶ μᾶς δεικνύει, καθὼς γνωρίζομε, τὸ σύνολον τῶν θέσεων διὰ τῶν ὁποίων διῆλθε ἢ πρόκειται νὰ διέλθῃ τὸ κινούμενον σῶμα. Μὲ ἄλλα λόγια, μᾶς δεικνύει τὴν *κατεύθυνσιν* κατὰ τὴν ὁποίαν κινεῖται εἰς κάθε μίαν θέσιν τὸ σῶμα. Ἐφ' ὅσον ὅμως γίνεται λόγος διὰ τὴν κατεύθυνσιν μιᾶς κινήσεως, εἶναι ἀπαραίτητον νὰ καθορίσωμε καὶ τὴν κατεύθυνσιν τῆς ταχύτητος. Ἡ ταχύτης εἶναι δηλαδὴ ἕνα μέγεθος *ἀνυσματικόν*.

Ὅπως ὅλα τὰ ἀνυσματικὰ μεγέθη, ἔτσι καὶ ἡ ταχύτης ἠμπορεῖ νὰ παρασταθῇ γραφικῶς μὲ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα καὶ ἕνα βέλος, ποὺ σημειοῦται εἰς τὸ ἕνα του ἄκρον. Τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος παριστᾷ ὑπὸ κατάλληλον κλίμακα τὸ πόσο μεγάλη εἶναι ἡ ταχύτης, δηλαδὴ τὴν *ἀριθμητικήν της τιμήν*, τὸ δὲ βέλος τὴν *κατεύθυνσίν της*. Τὸ σύνολον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος καὶ τοῦ βέλους ὀνομάζεται, ὡς γνωστόν, *ἄνυσμα*. Ἔτσι, ἐὰν θεωρήσωμε ὅτι τὸ μῆκος 1 mm παριστᾷ ὑπὸ κλίμακα ταχύτητα 2 km/h, τὸ ἄνυσμα τοῦ σχήματος 1·5 α θὰ ἀποτελῇ γραφικὴν παράστασιν τῆς ταχύτητος τοῦ ὑλικοῦ σημείου Α.

Τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ταχύτης εἶναι ἕνα μέγεθος, ποὺ χαρακτηρίζεται καὶ ἀπὸ ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ ἀπὸ κατεύθυνσιν, μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸ ἑξῆς σημαντικώτατον συμπέρασμα: Διὰ νὰ θεωρήσωμε ὅτι ἡ ταχύτης ἑνὸς ὑλικοῦ σημείου δὲν μεταβάλλεται κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεώς του, θὰ πρέπει νὰ παραμένῃ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως σταθερὰ καὶ ἡ ἀριθμητική της τιμὴ καὶ ἡ κατεύθυνσίς της. Τότε λέγομε ὅτι τὸ ὑλικὸν σημεῖον ἐκτελεῖ *ἰσοταχῆ κίνησιν*. Ἀντιθέτως, ὅταν κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως ἑνὸς σώματος εἶναι δυνατὸν νὰ μεταβάλλεται μόνον ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος (ὅπως π.χ. συμβαίνει κατὰ τὴν ἐκκίνησιν ἑνὸς αὐτοκινήτου ἐπὶ εὐθυγράμμου ὁδοῦ) ἢ μόνον ἡ κατεύθυνσις τῆς ταχύτητος (ὅπως συμβαίνει ὅταν ἕνα αὐτοκίνητον κινῆται ἐπὶ καμπυλογράμμου ὁδοῦ, ἡ δὲ ἔνδειξις τοῦ χιλιομετρικοῦ μετρητοῦ του παραμένει συνεχῶς ἡ ἰδία) ἢ τέλος καὶ τὰ δύο (ὅπως συμβαίνει κατὰ τὴν συνήθη κίνησιν ποὺ ἐκτελεῖ ἕνα αὐτοκίνητον), τότε ἡ κίνησις αὐτὴ ὀνομάζεται *ἀνισοταχής*.

Κλῖμαξ: $1\,mm \triangleq 2\,\frac{km}{h}$

Σχ. 1·5 α.
Τὸ ὑλικὸν σημεῖον Α κινεῖται μὲ ταχύτητα 60 km/h κατὰ τὴν κατεύθυνσιν τοῦ βέλους.

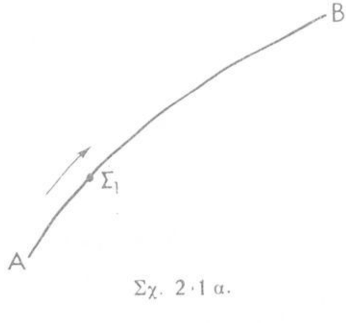
Ὁ χαρακτηρισμὸς μιᾶς κινήσεως εἰς ἰσοταχῆ ἢ ἀνισοταχῆ μὲ βάσιν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ τὴν κατεύθυνσιν τῆς ταχύτητος, ποὺ ἔχει τὸ σῶμα εἰς κάθε θέσιν τῆς τροχιᾶς του, θὰ μᾶς φανῇ, ὅπως θὰ ἰδοῦμε, ἐξαιρετικὰ χρήσιμος κατὰ τὴν μελέτην τῶν συνηθεστέρων μορφῶν κινήσεως, τὰς ὁποίας θὰ ἐξετάσωμε λεπτομερῶς ἀπὸ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου κεφαλαίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 2

ΚΙΝΗΣΙΣ ΥΠΟ ΣΤΑΘΕΡΑΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΝ ΤΙΜΗΝ ΤΑΧΥΤΗΤΟΣ (ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΣ ΚΙΝΗΣΙΣ)

2·1 Ὁ Τύπος $s = \upsilon \cdot t$.

Ἂς θεωρήσωμε ὅτι ἕνα σῶμα Σ κινεῖται ἐπὶ μιᾶς τυχούσης τροχιᾶς AB καὶ μάλιστα ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ B (σχ. 2·1α). Ἂς θεωρήσωμε ἐπίσης ὅτι ἐπάνω εἰς τὸ σῶμα αὐτὸ εὑρίσκεται ἕνας μετρητής, ὁ ὁποῖος μᾶς δεικνύει τὴν ταχύτητα μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ σῶμα. Ἔστω λοιπὸν ὅτι ὁ μετρητὴς δεικνύει ταχύτητα 50



Σχ. 2·1α.

km/h, ὅταν τὸ σῶμα διέρχεται ἀπὸ τὴν θέσιν Σ_1. Ὅπως εἴδαμε εἰς τὴν παράγραφον 1·4, αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ σῶμα θὰ διανύση κατὰ μῆκος τῆς τροχιᾶς του διάστημα 50 χιλιομέτρων, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι θὰ ἐξακολουθήση νὰ κινῆται μὲ τὴν ταχύτητα αὐτὴν τῶν 50 km/h ἐπὶ μίαν συνεχῆ ὥραν. Ἐὰν λοιπὸν ὑποθέσωμε ὅτι τὸ σῶμα κινεῖται πράγματι συνεχῶς μὲ ταχύτητα 50 km/h, εἶναι βέβαιον ὅτι θὰ διανύση διάστημα 50 χιλιομέτρων, ἐὰν κινηθῆ ἐπὶ μίαν ὥραν, ἀνεξαρτήτως τοῦ συγκεκριμένου γεωμετρικοῦ σχήματος τῆς τροχιᾶς AB, τὴν ὁποίαν διαγράφει κατὰ τὴν κίνησίν του.

Ἐὰν ἀντιθέτως κινηθῇ ἐπὶ ἡμίσειαν ὥραν, εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ διανύσῃ διάστημα $\frac{1}{2} \times 50 = 25$ χιλιομέτρων, ἐνῷ, ἐὰν κινηθῇ ἐπὶ δύο ὥρας, θὰ διανύσῃ διπλάσιον διάστημα, δηλαδὴ διάστημα 100 χιλιομέτρων.

Βλέπομε λοιπὸν ὅτι, ἐὰν κατὰ τὴν κίνησιν ἑνὸς σώματος ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ σῶμα, παραμένῃ συνεχῶς σταθερά, τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον διανύει τὸ σῶμα, εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸν χρόνον κατὰ τὸν ὁποῖον κινεῖται. Εἶναι ὅμως φανερὸν ὅτι εἶναι ἀνάλογον καὶ πρὸς τὴν σταθερὰν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς ταχύτητος, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ σῶμα. Διότι, ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι αὐτή, τόσον μεγαλύτερον θὰ εἶναι τὸ διάστημα, ποὺ θὰ διανύσῃ τὸ σῶμα εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον.

Ἐὰν ἀπεικονίσωμε τὰ ἀνωτέρω συμπεράσματά μας μὲ σύμβολα, θὰ καταλήξωμε εἰς τὸν θεμελιώδη τύπον:

$$s = \upsilon \cdot t \tag{1}$$

ὅπου υ = σταθερὰ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ σῶμα καὶ s = τὸ διάστημα, ποὺ διανύει τὸ σῶμα εἰς χρόνον t.

Ὁ τύπος $s = \upsilon \cdot t$ διέπει κάθε κίνησιν εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος παραμένει σταθερὰ καὶ μᾶς δίδει τὴν δυνατότητα νὰ ὑπολογίσωμε ἕνα οἱονδήποτε ἐκ τῶν τριῶν μεγεθῶν s, υ ἢ t, ὅταν εἶναι γνωστὰ τὰ ἄλλα δύο.

Δηλαδὴ ἠμποροῦμε νὰ ὑπολογίσωμε:

α) Τὸ διάστημα, ποὺ θὰ διανύσῃ ἕνα σῶμα εἰς χρόνον t, ἐὰν κινῆται μὲ ταχύτητα υ.

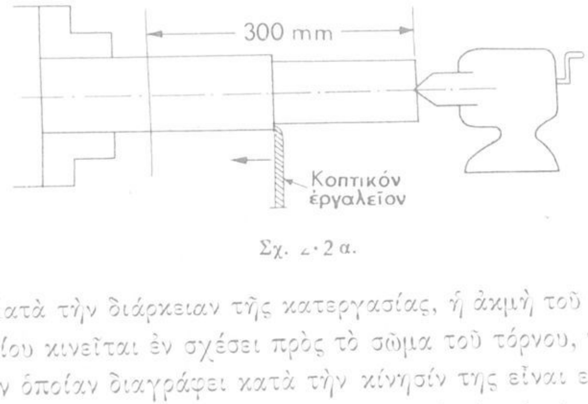
β) Τὴν ταχύτητα, μὲ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ κινηθῇ ἕνα σῶμα, διὰ νὰ διανύσῃ διάστημα s εἰς χρόνον t.

γ) Τὸν χρόνον, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ διανύσῃ ἕνα σῶμα διάστημα s, ἐὰν κινῆται μὲ ταχύτητα υ.

Τὴν κίνησιν ὑπὸ σταθερὰν ἀριθμητικὴν τιμὴν ταχύτητος θὰ τὴν ὀνομάζωμε εἰς τὸ ἑξῆς *ὁμοιόμορφον κίνησιν*. Ὅταν δηλαδὴ λέμε ὅτι ἕνα σῶμα ἐκτελεῖ «ὁμοιόμορφον κίνησιν», θὰ ἐννοοῦμε ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ σῶμα, παραμένει συνεχῶς σταθερά, ἀνεξαρτήτως τοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος τῆς τροχιᾶς, ποὺ διαγράφει τὸ κινούμενον σῶμα.

2·2 Ἐφαρμογαὶ τοῦ τύπου s = υ·t.

1. Ἔστω ὅτι θέλομε νὰ μελετήσωμε τὴν κατεργασίαν ἑνὸς κυλινδρικοῦ δοκιμίου εἰς τὸν τόρνον καὶ εἰδικώτερον τὴν τελευταίαν της φάσιν, δηλαδὴ τὴν λείανσιν (σχ. 2·2 α).



Σχ. 2·2 α.

Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς κατεργασίας, ἡ ἀκμὴ τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου κινεῖται ἐν σχέσει πρὸς τὸ σῶμα τοῦ τόρνου, ἡ δὲ τροχιὰ τὴν ὁποίαν διαγράφει κατὰ τὴν κίνησίν της εἶναι εὐθύγραμμος. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται ἡ κοπτικὴ ἀκμὴ τοῦ ἐργαλείου, παραμένει καθ'ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως σταθερά. Ἡ κίνησις λοιπόν, τὴν ὁποίαν θὰ μελετήσωμε, εἶναι μία *κίνησις ἰσοταχής*, δηλαδὴ μία εἰδικὴ περίπτωσις ὁμοιομόρφου κινήσεως, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ τροχιά, ποὺ διαγράφει τὸ σῶμα, εἶναι εὐθύγραμμος.

Τὸ μῆκος τοῦ δοκιμίου ποὺ κατεργαζόμεθα εἶναι γνωστὸν ἐκ τῶν προτέρων, ἔστω δὲ ὅτι εἶναι ἴσον πρὸς 300 mm. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι 300 mm θὰ εἶναι τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον θὰ διανύσῃ ἡ κοπτικὴ ἀκμὴ τοῦ ἐργαλείου κατὰ τὴν κίνησίν της, δηλαδὴ $s = 300\,\text{mm}$. Ἡ ταχύτης, μὲ τὴν ὁποίαν θὰ κινηθῇ τὸ ἐργαλεῖον σχετικῶς πρὸς τὸ ἀκίνητον σῶμα τοῦ τόρνου, ὀνομάζεται συνήθως *ταχύτης προώσεως τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου* ἢ ἁπλῶς *ταχύτης προώσεως*, καὶ ἐξαρτᾶται:

α) Ἀπὸ τὸ εἶδος τῆς κατεργασίας (λείανσις, ξεχόνδρισμα κλπ.).

β) Ἀπὸ τὸ ὑλικὸν τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου.

γ) Ἀπὸ τὸ ὑλικὸν τοῦ κατεργαζομένου δοκιμίου.

δ) Ἀπὸ τὴν διάμετρον τοῦ δοκιμίου, δηλαδὴ ἀπὸ τὰς συνθήκας ὑπὸ τὰς ὁποίας γίνεται ἡ τόρνευσις.

Τὸ πῶς καθορίζεται ἡ ταχύτης αὐτὴ δὲν θὰ μᾶς ἀπασχολήσῃ εἰς τὸ βιβλίον αὐτό. Θὰ θεωρήσωμε συνεπῶς τὴν ταχύτητα προώσεως τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου γνωστὴν καὶ ἴσην ἔστω πρὸς $\upsilon = 24\,\frac{\text{mm}}{\text{min}}$. Ἐκεῖνο ἀπ' ἐναντίας, τὸ ὁποῖον δὲν γνωρίζομε, ἐνῶ μᾶς ἐνδιαφέρει πολύ, εἶναι ὁ χρόνος ποὺ θὰ ἀπαιτηθῇ διὰ νὰ διανύσῃ ἡ κοπτικὴ ἀκμὴ τοῦ ἐργαλείου διάστημα 300 χιλιοστομέτρων, ἐὰν κινηθῇ μὲ τὴν ὡς ἄνω ταχύτητα τῶν 24 mm/min. Ὁ χρόνος αὐτὸς εἶναι καὶ ὁ χρόνος, ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ τὴν κυρίως κατεργασίαν τῆς λειάνσεως καὶ ἠμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ πολὺ εὔκολα μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνωστοῦ μας τύπου $s = \upsilon \cdot t$. Πράγματι:

$$t = \frac{s}{\upsilon} = \frac{300}{24}\,\text{min} = 12{,}5\ \text{min}.$$

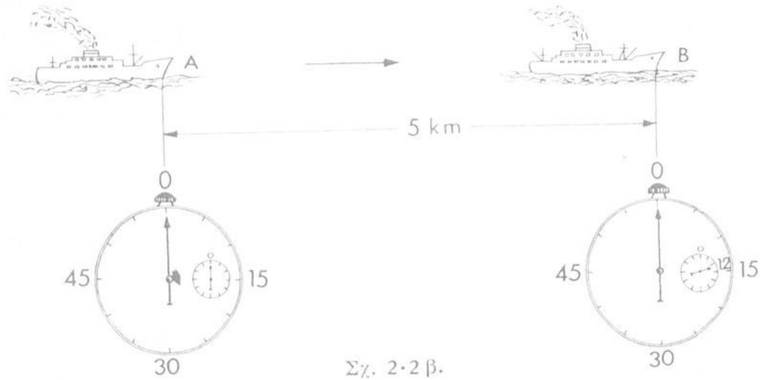
Ἐὰν τώρα προσθέσωμε εἰς τὸν χρόνον τῶν 12,5 min τὸ σύνολον τῶν βοηθητικῶν χρόνων (χρόνους χειρισμῶν, χρόνους οἱ ὁποῖοι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν σύνδεσιν καὶ ἀποσύνδεσιν τοῦ δοκιμίου κλπ.), θὰ καταλήξωμε εἰς τὸν συνολικὸν χρόνον, ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ὅλην κατεργασίαν τῆς λειάνσεως.

2. Μία ἄλλη χαρακτηριστικὴ περίπτωσις ὁμοιομόρφου κινήσεως εἶναι ἡ κίνησις, τὴν ὁποίαν ἐκτελεῖ ἕνα πλοῖον. Τὸ ὅτι ἡ

κίνησις ἑνὸς πλοίου διέπεται ἀπὸ τὸν νόμον $s = υ \cdot t$ εἶναι κάτι τὸ ὁποῖον θὰ ἔχωμε ἀναμφισβητήτως ὅλοι κατὰ κάποιον τρόπον διαπιστώσει· ἐκεῖνο ὅμως, τὸ ὁποῖον δὲν θὰ ἔχωμε ἴσως ποτὲ σκεφθῆ, εἶναι πόσα χρήσιμα συμπεράσματα ἠμποροῦμε νὰ ἐξαγάγωμε ἀναφορικῶς μὲ τὴν κίνησιν τοῦ πλοίου.

α) Ἄς ὑποθέσωμε ὅτι ἕνα ἐπιβατικὸν πλοῖον ἐναυπηγήθη μόλις χθές. Εἶναι πλέον ἕτοιμον διὰ τὴν ἐκτέλεσιν δρομολογίων μεταξὺ λιμένων. Τὸ πρόβλημα ὅμως εἶναι: Μὲ ποίαν ταχύτητα θὰ κινῆται τὸ πλοῖον αὐτό;

Ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ ἐρώτημα αὐτὸ δὲν εἶναι κάτι τὸ τόσον εὔκολον. Ἐκ πρώτης ὄψεως, τουλάχιστον, δὲν φαίνεται νὰ ὑπάρχῃ δυνατότης ἐκτιμήσεως τῆς ταχύτητος τοῦ πλοίου, π.χ. διὰ συγ-



Σχ. 2·2 β.

κρίσεώς της μὲ μίαν γνωστὴν ταχύτητα ἢ δι' ἀπ' εὐθείας μετρήσεως. Μήπως ὅμως εἶναι δυνατὸν νὰ καταλήξωμε εἰς συμπέρασμα μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου $υ = \frac{s}{t}$, βασιζόμενοι δηλαδὴ εἰς τὸ ὅτι τὸ πλοῖον ἐκτελεῖ κίνησιν ὁμοιόμορφον;

Ἡ ἰδέα αὐτὴ φαίνεται πραγματοποιήσιμος. Ἐὰν ὁρίσωμε δύο σημεῖα Α καὶ Β (σχ. 2·2β), τὰ ὁποῖα νὰ ἀπέχουν μεταξύ των ἀπόστασιν π.χ. 5 χιλιομέτρων καὶ θέσωμε τὸ πλοῖον εἰς κίνησιν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, θὰ διανύσῃ συνολικῶς διάστημα 5 χιλιομέτρων (ἐὰν βεβαίως κινηθῇ ἐπὶ εὐθυγράμμου τροχιᾶς) εἰς χρόνον, τὸν ὁποῖον εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ μετρήσωμε πολὺ εὔκολα. Ἐὰν λοιπὸν μετρήσωμε χρόνον ἴσον π.χ. πρὸς 12 min θὰ ἔχωμε:

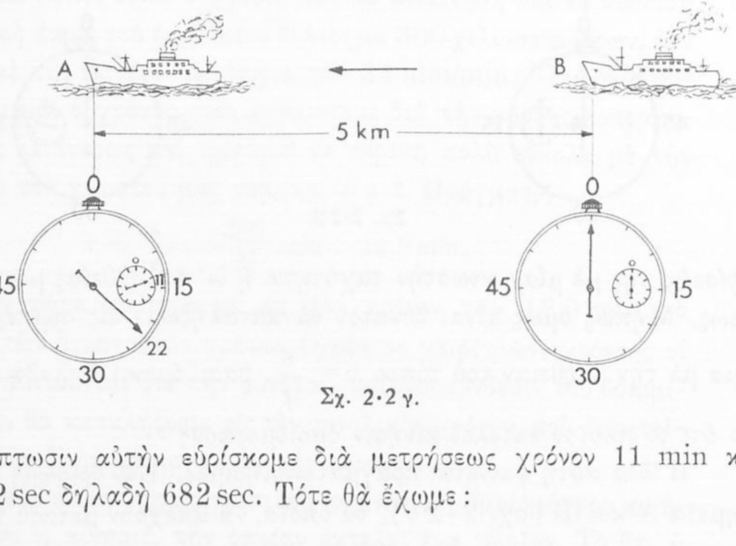
$$\upsilon = \frac{s}{t} = \frac{5\,\mathrm{km}}{12\,\mathrm{min}} = \frac{5\,\mathrm{km}}{\frac{12}{60}\,\mathrm{h}} = \frac{5 \times 60}{12}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 25\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

$$\text{ἢ } \upsilon = 25\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \times \frac{1}{1{,}852} \cdot \frac{\text{ναυτικὰ μίλια}}{\mathrm{km}} = 13{,}5 \text{ ναυτικὰ μίλια}$$

ἀνὰ ὥραν, ἐφ' ὅσον 1 ναυτικὸν μίλιον = 1,852 km = 1 852 m.

Μήπως ὅμως κατὰ τὴν κίνησίν του ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β εἶχε τὸ πλοῖον ἀντίθετον τὸν ἄνεμον ἢ τὰ θαλάσσια ρεύματα;

Διὰ νὰ δώσωμε ἀπάντησιν εἰς τὸ εὔλογον αὐτὸ ἐρώτημα, δὲν ἔχομε παρὰ νὰ μετρήσωμε πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ διανύσῃ τὸ πλοῖον τὸ διάστημα τῶν 5 χιλιομέτρων, ἐὰν κινηθῇ ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α (σχ. 2·2γ). Ἔστω λοιπὸν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν



Σχ. 2·2 γ.

ρίπτωσιν αὐτὴν εὑρίσκομε διὰ μετρήσεως χρόνον 11 min καὶ 22 sec δηλαδὴ 682 sec. Τότε θὰ ἔχωμε:

$$\upsilon = \frac{s}{t} = \frac{5\,\mathrm{km}}{682\,\mathrm{sec}} = \frac{5\,\mathrm{km}}{682 \times \frac{1}{3\,600}\,\mathrm{h}} = \frac{5 \times 3600}{682}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} =$$

$$26{,}4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 26{,}4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \times \frac{1}{1{,}852}\,\frac{\text{ν.μ.}}{\mathrm{km}} = 14{,}3 \text{ ναυτικὰ μίλια ἀνὰ ὥραν.}$$

Εἶναι λογικὸν τώρα νὰ ὑποθέσωμε ὅτι, ἐὰν τὸ πλοῖον ἐκινεῖτο εἰς θάλασσαν ἀπολύτως γαληνιαίαν, θὰ εἶχε ταχύτητα ἴσην πρὸς τὸν μέσον ὅρον τῶν δύο ταχυτήτων $13{,}5\,\frac{\text{ν.μ.}}{\mathrm{h}}$ καὶ $14{,}3\,\frac{\text{ν.μ.}}{\mathrm{h}}$, δηλαδὴ ταχύτητα ἴσην πρός:

$$\upsilon = \frac{13{,}4 + 14{,}3}{2}\,\frac{\text{ν. μ.}}{\mathrm{h}} = \frac{27{,}8}{2}\,\frac{\text{ν. μ.}}{\mathrm{h}} = 13{,}9\,\frac{\text{ν. μ.}}{\mathrm{h}}.$$

Συμπέρασμα: Ἐὰν ἕνα σῶμα ἐκτελῇ ὁμοιόμορφον κίνησιν, ἡ ταχύτης του εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθῇ μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου $s = \upsilon \cdot t$.

β) Ἂς ὑποθέσωμε ὅτι τὸ πλοῖον αὐτὸ πρόκειται νὰ ἐξυπηρετήσῃ τὴν συγκοινωνίαν Πειραιῶς - Τήνου. Ἀμέσως τίθεται τὸ ἐρώτημα: πόσος χρόνος θὰ ἀπαιτηθῇ διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ εἰς τὴν Τῆνον;

Μία πρώτη ἰδέα εἶναι νὰ ἐκτελέσωμε ἕνα δοκιμαστικὸν δρομολόγιον καὶ νὰ μετρήσωμε τὸν ζητούμενον χρόνον μὲ ἕνα χρονόμετρον. Ἡ λύσις ὅμως αὐτὴ εἶναι ἀντιοικονομική. Θὰ καθυστερήσωμε τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ πλοίου ἐπὶ μίαν ἡμέραν, θὰ καταναλώσωμε καύσιμα, θὰ ἀπασχολήσωμε ἀσκόπως τὸ πλήρωμά του κ.ο.κ. Μήπως λοιπὸν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογίσωμε τὸ χρόνον, ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ νὰ μεταβῇ τὸ πλοῖον ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ εἰς τὴν Τῆνον, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου $s = \upsilon \cdot t$;

Γνωρίζομε ὅτι υ εἶναι ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ πλοῖον καὶ ἰσοῦται, ὅπως εἴδαμε ἀνωτέρω, πρὸς $13{,}9\,\frac{\text{ν.μ.}}{\mathrm{h}}$. Τὸ s παριστᾶ τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ Πειραιῶς καὶ Τήνου. Ἡ ἀπόστασις ὅμως αὐτὴ μᾶς εἶναι ἄγνωστος καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι εἶναι τελείως ἀδύνατον νὰ τὴν μετρήσωμε ἀπ' εὐθείας. Γνωρίζομε ἐν τούτοις ὅτι τὸ προηγούμενον πλοῖον, ποὺ ἐκτελοῦσε τὴν διαδρομὴν Πειραιῶς - Τήνου, ἐκινεῖτο μὲ ταχύτητα $10{,}8\,\frac{\text{ν.μ.}}{\text{h}}$ καὶ ὅτι ἐχρειάζετο χρόνον 8 ὡρῶν διὰ νὰ ἐκτελέση τὴν ἁπλῆν διαδρομήν. Ἔτσι ἡ ἀπόστασις Πειραιῶς - Τήνου ἠμπορεῖ πλέον νὰ ὑπολογισθῇ βάσει τοῦ νόμου κινήσεως τοῦ προηγουμένου πλοίου ποὺ ἐκτελοῦσε τὴν διαδρομήν, ὡς ἑξῆς:

$$s = 10{,}8\,\frac{\text{ν.μ.}}{\text{h}} \times 8\,\text{h} = 10{,}8 \times 8\,(\text{ν.μ.}) = 86{,}4 \text{ ναυτικὰ μίλια.}$$

Ἐφ' ὅσον λοιπὸν γνωρίζομε τὰ δύο μεγέθη $\upsilon = 13{,}9\,\frac{\text{ν.μ.}}{\text{h}}$ καὶ $s = 86{,}4$ ν.μ. εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ ὑπολογίσωμε ὅτι τὸ νεοναυπηγηθὲν πλοῖον θὰ χρειασθῇ χρόνον:

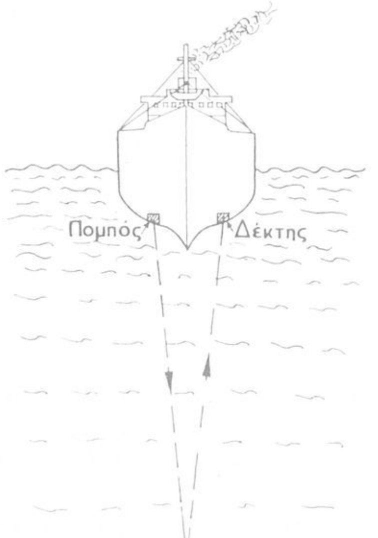
$$t = \frac{s}{\upsilon} = \frac{86{,}4\ \text{ν.μ.}}{13{,}9\,\frac{\text{ν.μ.}}{\text{h}}} = \frac{86{,}4}{13{,}9}\,\text{h} = 6{,}2,\ \text{h}$$

δηλαδὴ χρόνον 6 h καὶ 12 mim περίπου. Ἔτσι, ἂν ἐπιθυμοῦμε νὰ φθάνη τὸ πλοῖον εἰς τὴν Τῆνον εἰς τὰς 14.00, θὰ πρέπει νὰ ἀναχωρῇ ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ κατὰ τὰς 7.45.

3. Τὰ πλέον χαρακτηριστικὰ παραδείγματα ἰσοταχῶν κινήσεων εἰς τὴν φύσιν εἶναι ἴσως ἡ διάδοσις ἠχητικῶν, φωτεινῶν καὶ ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάνσεων ἐντὸς ὁμοειδῶν ὑλικῶν μέσων. Τόσον ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ φωτὸς ὅσον καὶ ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου ἔχουν προσδιορισθῇ πειραματικῶς. Ἐπενοήθησαν δηλαδὴ διατάξεις εἰς τὰς ὁποίας κατέστη δυνατὴ ἡ ἀκριβὴς μέτρησις τοῦ χρόνου t, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ φθάση μία ἠχητικὴ ἢ φωτεινὴ κύμανσις εἰς γνωστὴν ἀπόστασιν s ἀπὸ τοῦ σημείου ὅπου παρήχθη. Ἡ ταχύτης διαδόσεως τῶν κυμάνσεων αὐτῶν εὑρέθη τότε εὐκόλως, δι' ἐφαρμογῆς τοῦ γνωστοῦ τύπου $s = \upsilon \cdot t$.

Σκοπός μας ὅμως δὲν εἶναι ἡ περιγραφὴ τῶν πολυπλόκων τούτων διατάξεων. Ἀπεναντίας, θὰ θεωρήσωμε τὰς ταχύτητας διαδόσεως τοῦ ἤχου καὶ τοῦ φωτὸς γνωστὰς καὶ θὰ ἀναφέρωμε δύο χαρακτηριστικὰς περιπτώσεις ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου $s = \upsilon \cdot t$, διὰ τὸν προσδιορισμὸν ἀποστάσεων, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθοῦν δι᾽ ἀπ᾽ εὐθείας μετρήσεως.

α) Ἂς ὑποθέσωμε ὅτι θέλομε νὰ μετρήσωμε τὸ βάθος τῆς θαλάσσης εἰς μίαν ὡρισμένην θέσιν. Εἶναι φανερὸν ὅτι εἰς μεγάλα βάθη ἡ ἀπ᾽ εὐθείας μέτρησις εἶναι πρακτικῶς ἀδύνατος. Ἐπενοήθη λοιπὸν μία διάταξις, ἡ ὁποία παρίσταται σχηματικῶς εἰς τὸ σχῆμα 2·2δ.



Σχ. 2·2 δ.

Κατ᾽ αὐτήν, ἕνας πομπὸς ἐκπέμπει ἠχητικὰ κύματα πρὸς τὸν βυθὸν τῆς θαλάσσης. Τὰ κύματα αὐτά, συμφώνως πρὸς ὅσα γνωρίζομε ἀπὸ τὴν Φυσικήν, ἀνακλῶνται καὶ ἐπιστρέφουν πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν, ὅπου τὰ δέχεται ὁ δέκτης Δ. Μὲ μίαν ἠλεκτρικὴν χρονομετρικὴν μέθοδον μετρεῖται τότε ὁ συνολικὸς χρόνος t, ὁ ὁποῖος παρῆλθε ἀπὸ τῆς στιγμῆς ποὺ παρήχθησαν τὰ ἠχητικὰ κύματα εἰς τὸν πομπὸν μέχρι τῆς στιγμῆς ποὺ ἔγιναν αὐτὰ ἀντιληπτὰ ὑπὸ τοῦ δέκτου.

Εἶναι ἑπόμενον, συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω, ὅτι ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ διαδοθοῦν τὰ ἠχητικὰ κύματα ἀπὸ τοῦ πομποῦ μέχρι τοῦ βυθοῦ εἶναι ἴσος πρὸς $\frac{t}{2}$, ὁπότε τὸ βάθος s τῆς θαλάσσης θὰ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$s = \upsilon \cdot \frac{t}{2}.$$

Γνωρίζομε ὅτι ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου εἰς τὸ θαλάσσιον ὕδωρ εἶναι ἴση πρὸς $1\,500 \frac{m}{sec}$. Ἔτσι, ἂν εἰς μίαν θέσιν, ὅπου ἔγινε βυθομέτρησις, προσδιωρίσθη χρόνος t ἴσος πρὸς 11 sec, τὸ βάθος τῆς θαλάσσης εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν θὰ εἶναι:

$$s = \frac{1}{2} \times 1\,500 \frac{m}{sec} \times 11\,sec = \frac{1\,500 \times 11}{2} \, \frac{m \cdot sec}{sec} = 8\,250\,m.$$

Ἡ μέθοδος αὐτὴ διὰ τὸν προσδιορισμὸν ἀποστάσεων εὑρίσκει εὐρυτάτην ἐφαρμογὴν καὶ κυρίως διὰ τὸν ἐντοπισμὸν ἄλλων ἀντικειμένων, ποὺ εὑρίσκονται ἐντὸς τῆς θαλάσσης, ὡς π.χ. σμήνους ἰχθύων, παγοβούνων, ὑφάλων, ὑποβρυχίων κλπ.

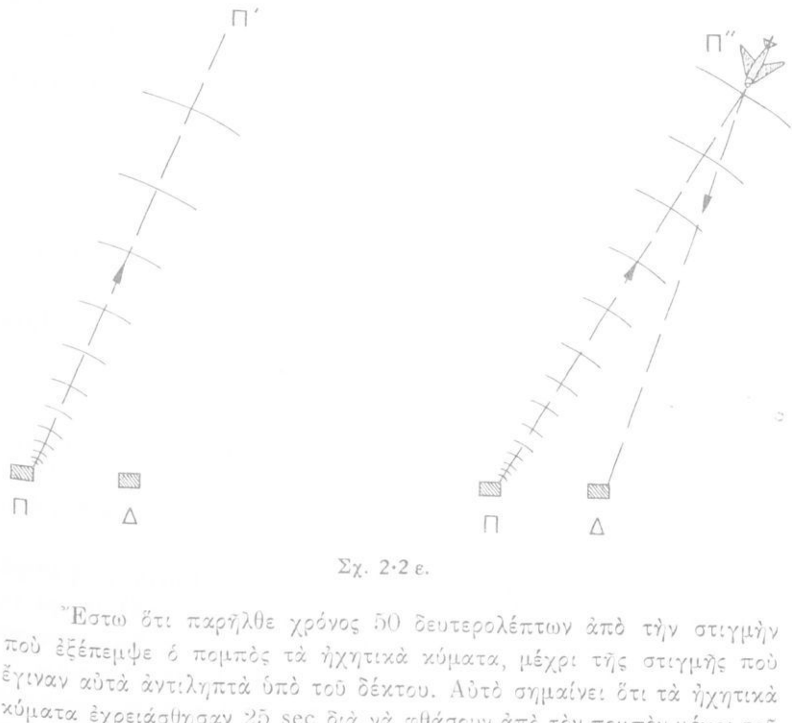
β) Ἡ ἔκβασις τοῦ δευτέρου παγκοσμίου πολέμου ἐκρίθη κατὰ μέγα ποσοστὸν ἀπὸ τὴν χρησιμοποίησιν πολεμικῶν ἀεροπλάνων κατὰ τὰς ἐχθροπραξίας. Οἱ ἀντίπαλοι τὸ ἀντελήφθησαν ἐγκαίρως καὶ ὅλη των ἡ προσοχὴ ἐστράφη εἰς τὸ νὰ ἀνακαλύψουν ἕνα τρόπον ἐγκαίρου ἐντοπισμοῦ τῆς θέσεως ἑνὸς ἐχθρικοῦ ἀεροπλάνου, ὥστε νὰ τοὺς δίδεται ἐπαρκὴς χρόνος διὰ τὴν ὀργάνωσιν ἀποτελεσματικῆς ἀντιαεροπορικῆς ἀμύνης.

Πρώτη ἰδέα ὑπῆρξεν ἡ χρησιμοποίησις μιᾶς διατάξεως, ὅπως εἶναι αὐτὴ ποὺ περιγράψαμε προηγουμένως.

Ἐὰν ὁ πομπὸς Π ἐκπέμπῃ ἠχητικὰ κύματα κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ΠΠ′ (σχ. 2·2ε), αὐτὰ δὲν συναντοῦν κανένα ἐμπόδιον καὶ ὡς ἐκ τούτου δὲν ἀνακλῶνται. Ὁ δέκτης Δ δὲν δέχεται, ἑπομένως, ἠχητικὰ κύματα προερχόμενα ἐξ ἀνακλάσεως. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι δὲν ὑπάρχει κανένα ἐχθρικὸν ἀεροπλάνον κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ΠΠ′.

Ἂς ὑποθέσωμε τώρα ὅτι, ὅταν ὁ πομπὸς εἶναι ἐστραμμένος κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ΠΠ″, ὁ δέκτης Δ δέχεται ἠχητικὰ κύματα. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ΠΠ″ ὑπάρχει κάποιο ἐμπόδιον, τὸ ὁποῖον ἐξηνάγκασε τὰ ἠχητικὰ κύματα, ποὺ ἐξέπεμψε ὁ πομπός, νὰ ἀνακλασθοῦν.

Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι μὲ μίαν παρομοίαν διάταξιν πομποῦ - δέκτου εἴμεθα πράγματι εἰς θέσιν νὰ ἐπισημάνωμε τὴν ἄφιξιν ἑνὸς ἐχθρικοῦ ἀεροπλάνου, καθὼς ἐπίσης καὶ τὴν διεύθυνσιν ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἔρχεται. Μένει τώρα νὰ ἐξετάσωμε κατὰ πόσον εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ ἐκτιμήσωμε καὶ τὴν θέσιν εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται.



Σχ. 2·2 ε.

Ἔστω ὅτι παρῆλθε χρόνος 50 δευτερολέπτων ἀπὸ τὴν στιγμὴν ποὺ ἐξέπεμψε ὁ πομπὸς τὰ ἠχητικὰ κύματα, μέχρι τῆς στιγμῆς ποὺ ἔγιναν αὐτὰ ἀντιληπτὰ ὑπὸ τοῦ δέκτου. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὰ ἠχητικὰ κύματα ἐχρειάσθησαν 25 sec διὰ νὰ φθάσουν ἀπὸ τὸν πομπὸν μέχρι τοῦ ἀεροπλάνου καὶ ἄλλα 25 sec διὰ νὰ φθάσουν ἀπὸ τὸ ἀεροπλάνον μέχρι τοῦ δέκτου. Ἐὰν ληφθῇ ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι ἴση πρὸς 340 $\frac{m}{sec}$, συμπεραίνομε ὅτι τὰ ἠχητικὰ κύματα, τὰ προερχόμενα ἐξ ἀνακλάσεως ἐπὶ τοῦ ἀεροπλάνου, διεδόθησαν ἐπὶ ἀποστάσεως :

$$s = 340 \frac{m}{sec} \times 25 \ sec = 340 \times 25 \frac{m \cdot sec}{sec} = 8\,500 \ m.$$

Συνεπῶς ἡ ἀπόστασις, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται τὸ ἀεροπλάνον τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ἀνεκλάσθησαν ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας του τὰ ἠχητικὰ κύματα, ποὺ ἐξέπεμψεν ὁ πομπός, εἶναι 8,5 χιλιόμετρα. Ἀπὸ τὴν στιγμὴν ὅμως ἐκείνην μέχρι τῆς στιγμῆς ποὺ τὰ ἠχητικὰ κύματα ἔφθασαν εἰς τὸν δέκτην, παρῆλθον 25 δευτερόλεπτα, κατὰ τὰ ὁποῖα βεβαίως τὸ ἀεροπλάνον δὲν παρέμεινε ἀκίνητον. Ἐὰν λοιπὸν ὑποθέσωμε ὅτι ἐκινεῖτο πρὸς τὴν θέσιν τοῦ πομποῦ καὶ τοῦ δέκτου ἰσοταχῶς, μὲ ταχύτητα $900 \frac{km}{h}$, θὰ διήνυσε κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν 25 αὐτῶν δευτερολέπτων διάστημα:

$$s' = 900 \frac{km}{h} \times 25 \ sec = 900 \times 25 \frac{km \cdot sec}{h} =$$

$$900 \times 25 \times \frac{1\,000 \ m \cdot sec}{3\,600 \ sec} = \frac{900 \times 25 \times 1\,000}{3\,600} \ m = 6\,250 \ m.$$

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι, τὴν στιγμὴν ποὺ ἐπληροφορήθημεν ὅτι ἔρχεται ἕνα ἐχθρικὸν ἀεροπλάνον, τοῦτο εὑρίσκετο ἤδη εἰς ἀπόστασιν:

$$s - s' = 8\,500 \ m - 6\,250 \ m = 2\,250 \ m$$

ἀπὸ τοῦ πομποῦ καὶ τοῦ δέκτου. Ἐὰν μάλιστα ἐκινεῖτο τὸ ἀεροπλάνον μὲ ταχύτητα μεγαλυτέραν τῆς ταχύτητος διαδόσεως τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα, θὰ ἔφθανε πρὶν φθάσουν εἰς τὸν δέκτην τὰ ἐξ ἀνακλάσεως ἠχητικὰ κύματα!

Βλέπομε, δηλαδή, ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὅπου ἡ ἐπιφάνεια ἀνακλάσεως τῶν ἠχητικῶν κυμάτων κινεῖται, καὶ μάλιστα μὲ ταχύτητα ἀρκετὰ μεγάλην ἐν σχέσει πρὸς τὴν ταχύτητα διαδόσεως τοῦ ἤχου, ἡ διάταξις τὴν ὁποίαν ἔχομε περιγράψει δὲν εἶναι χρήσιμος. Τὸ μειονέκτημά της συνίσταται εἰς τὸ ὅτι, ὅπως εἴπαμε, ἡ ταχύτης διαδόσεως τῶν ἠχητικῶν κυμάτων δὲν εἶναι ἀρκετὰ μεγάλη, ὥστε νὰ μᾶς δίδεται ἡ δυνατότης νὰ ἐπισημαίνωμε ἀντικείμενα τὰ ὁποῖα κινοῦνται μὲ μεγάλην ταχύτητα. Μήπως λοιπὸν εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιήσωμε μίαν παρομοίαν διάταξιν, εἰς τὴν ὁποίαν ὅμως ὁ πομπὸς νὰ ἐκπέμπη ἄλλου εἴδους κύματα, τὰ ὁποῖα νὰ διαδίδωνται μὲ ταχύτητα μεγαλυτέραν ἀπὸ ὅ,τι τὰ ἠχητικά;

Ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ ἐρώτημα αὐτὸ εἶναι καταφατική. Οἱ μελεταὶ ἐσκέφθησαν νὰ ἀντικαταστήσουν τὴν ἐκπομπὴν καὶ λῆψιν ἠχητικῶν κυμάτων μὲ ἐκπομπὴν καὶ λῆψιν ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων, τὰ ὁποῖα, ὅπως γνωρίζομε, διαδίδονται μὲ τὴν ταχύτητα τοῦ φωτός. Ἔτσι κατέληξαν εἰς τὴν ἐπινόησιν, καὶ κατόπιν πολλῶν πειραματισμῶν εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ τόσον γνωστοῦ εἰς ὅλους μας *ραντάρ*. Ἡ βασικὴ ἰδέα; ἡ ὁποία ὡδήγησε εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ραντάρ, εἶναι καὶ πάλιν ἡ δυνατότης ἐκτιμήσεως μιᾶς ἀποστάσεως ὡς γινομένου ταχύτητος ἐπὶ τὸν χρόνον ($s = \upsilon \cdot t$).

Ἀσκήσεις.

1. Εἶναι σωστὸν τὸ ὅτι ἡ ἰσοταχὴς κίνησις ὀνομάζεται πολλὰς φορὰς « εὐθύγραμμος ὁμοιόμορφος κίνησις » ;

2. Ἡ τόρνευσις τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας χυτοσιδηρῶν τροχαλιῶν γίνεται εἰς δύο στάδια, τὸ ξεχόνδρισμα καὶ τὴν λείανσιν.
Δίδονται : α) Κατεργαζόμενον μῆκος $s = 150$ mm ἴσον πρὸς τὸ πλάτος τῆς τροχαλίας.

β) Ταχύτης προώσεως κατὰ τὸ ξεχόνδρισμα $\upsilon_\xi = 25{,}5\ \dfrac{\text{mm}}{\text{min}}$.

γ) Ταχύτης προώσεως κατὰ τὴν λείανσιν $\upsilon_\lambda = 11\ \dfrac{\text{mm}}{\text{min}}$.

δ) Σύνολον βοηθητικῶν χρόνων κατὰ τὴν κατεργασίαν μιᾶς τροχαλίας $t_\beta = 3$ min.

Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν :

α) Ὁ χρόνος t_ξ, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται διὰ τὸ ξεχόνδρισμα τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας μιᾶς τροχαλίας.

β) Ὁ χρόνος t_λ, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται διὰ τὴν λείανσιν τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας μιᾶς τροχαλίας.

γ) Ὁ συνολικὸς χρόνος t, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται διὰ τὴν κατεργασίαν τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας μιᾶς τροχαλίας.

δ) Ὁ ἀριθμὸς τῶν τροχαλιῶν, τὰς ὁποίας ἠμπορεῖ νὰ κατεργασθῇ ἕνας τεχνίτης εἰς ἕνα ὀκτάωρον.

3. Τί εἴδους κίνησιν (σχετικῶς μὲ τὴν γῆν) ἐκτελεῖ ἕνα σῶμα, τὸ ὁποῖον εἶναι τοποθετημένον ἐπὶ μιᾶς μεταφορικῆς ταινίας ;

Πῶς δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμε τὴν ταχύτητα μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ σῶμα αὐτό ;

Ἐὰν τοποθετήσωμε ἐπὶ τῆς μεταφορικῆς ταινίας ἕνα ἄλλο σῶμα, μὲ ποίαν ταχύτητα θὰ κινηθῇ ; Τί συμπεράσματα ἠμποροῦν νὰ ἐξαχθοῦν;

4. Ἡ ἐργασία εἰς ἕνα ἐργοστάσιον λήγει εἰς τὰς τρεῖς τὸ ἀπόγευμα ἀκριβῶς ὁπότε καὶ σημαίνει ἡ σειρήνα τοῦ ἐργοστασίου. Ἐὰν ἀκούσετε τὸν συριγμὸν τῆς σειρήνας τοῦ ἐργοστασίου εἰς τὰς τρεῖς καὶ 30 δευτερόλεπτα, εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἐργοστασίου εὑρίσκεσθε ;

2·3 Τὸ διάγραμμα διαστήματος - χρόνου.

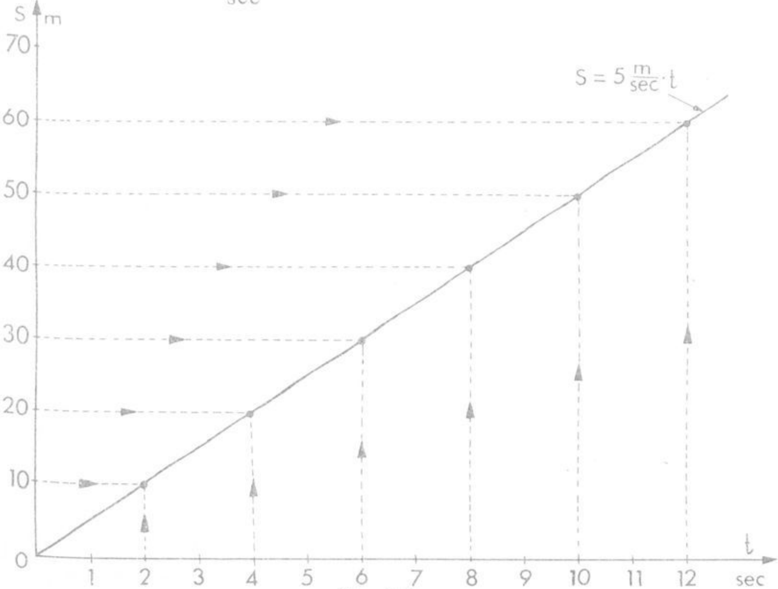
Ἄς θεωρήσωμε ἕνα οἱονδήποτε σῶμα, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ ὁμοιόμορφον κίνησιν· ἔστω δὲ ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητός του εἶναι ἴση πρὸς $5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$. Καθὼς γνωρίζομε, τὸ διάστημα s, ποὺ θὰ διανύσῃ τὸ σῶμα ἐὰν κινηθῇ ἐπὶ χρόνον t, δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $s = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\cdot t$. Τὸ διάστημα αὐτὸ ἐκφράζεται εἰς μέτρα (m), ἐὰν ὁ χρόνος t μετρηθῇ εἰς δευτερόλεπτα (sec).

Μία σχέσις τῆς ἀνωτέρω μορφῆς ἠμπορεῖ, ὡς γνωστόν, νὰ παρασταθῇ γραφικῶς μὲ μίαν εὐθεῖαν (σχ. 2·3 α). Πράγματι, ἐὰν βαθμολογήσωμε τὸν ὁριζόντιον ἄξονα - ἄξων χρόνων - εἰς δευτερόλεπτα, καὶ τὸν κατακόρυφον ἄξονα - ἄξων διαστημάτων - εἰς μέτρα καὶ ἀπεικονίσωμε μὲ ἕνα σημεῖον κάθε ζεῦγος τιμῶν τῶν s καὶ t (ὅπως προκύπτουν ἀπὸ τὸν τύπον $s = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\cdot t$), διαπιστώνομε ὅτι ὅλα αὐτὰ τὰ σημεῖα θὰ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.

Ἡ παρατήρησις αὐτὴ μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸ ἑξῆς σημαντικώτατον συμπέρασμα : ἐφ᾽ ὅσον ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς σχέσεως $s = \upsilon \cdot t$ εἶναι μία εὐθεῖα γραμμή, ἀρκεῖ διὰ τὴν χάραξιν τῆς εὐθείας αὐτῆς νὰ καθορισθῇ ἡ θέσις δύο μόνον σημείων της. Τὸ ἕνα ὅμως ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ σημεῖα εἶναι προφανῶς ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς $t = 0$ καὶ $s = 0$ (διότι πράγματι, ἐὰν τὸ σῶμα κινηθῇ ἐπὶ χρόνον $t = 0\,\mathrm{sec}$, θὰ διανύσῃ κατὰ τὸ μηδενικὸν αὐτὸν χρόνον διάστημα s ἴσον πρὸς $0\,\mathrm{m}$). Εἰς τὴν πραγματικότητα ἀρκεῖ λοιπὸν ὁ καθορισμὸς ἑνὸς μόνον σημείου τῆς εὐθείας, π.χ. τοῦ σημείου Μ, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὸ ζεῦγος τιμῶν:

$$t = 10\,\mathrm{sec} \qquad \text{καὶ}$$

$$s = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} \times 10\,\mathrm{sec} = 50\,\mathrm{m} \ (\sigma\chi.\ 2\cdot3\,\beta).$$



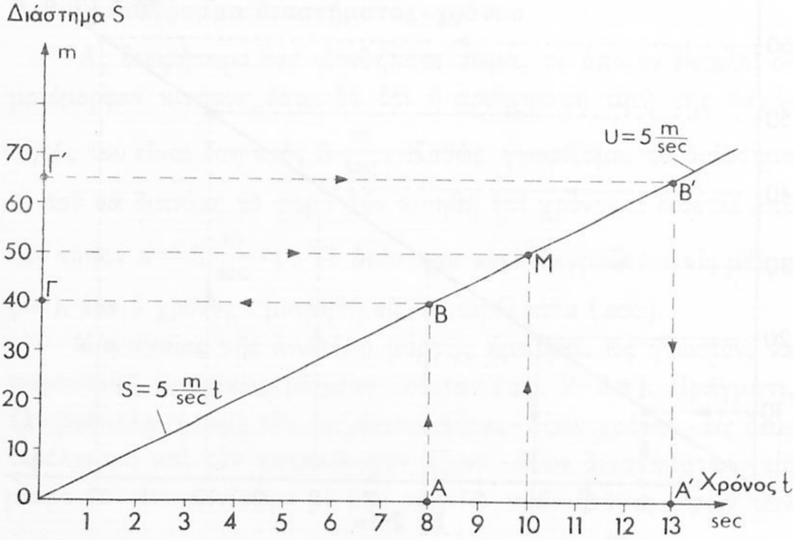
Σχ. 2·3 α.

Διερωτώμεθα ὅμως: Εἰς τί εἶναι δυνατὸν νὰ μᾶς χρησιμεύσῃ ἡ χάραξις τῆς εὐθείας τοῦ σχήματος 2 · 3 β;

1) Ἄς ὑποθέσωμε, ὅτι ζητοῦμε τὸ διάστημα τὸ ὁποῖον θὰ διανύσῃ ἕνα σῶμα, ἐὰν κινηθῇ ὁμοιομόρφως μὲ ταχύτητα 5 m/sec ἐπὶ χρόνον 8 sec. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος, ὅπου μετροῦμε τοὺς χρόνους, λαμβάνομε τμῆμα ΟΑ, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς χρόνον 8 sec. Ἐκ τοῦ σημείου Α φέρομε τὴν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν χρόνων, ἡ ὁποία τέμνει τὴν χαραχθεῖσαν εὐθεῖαν ΟΜ εἰς τὸ σημεῖον Β. Ἐκ τοῦ Β φέρομε ἐν συνεχείᾳ τὴν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν

χρόνων, ἡ ὁποία θὰ εἶναι καὶ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν διαστημάτων, καὶ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν διαστημάτων εἰς τὸ σημεῖον Γ. Τὸ μῆκος ΟΓ ἀντιστοιχεῖ εἰς διάστημα 40 m.

Συμπέρασμα: Ἐὰν ἕνα σῶμα κινηθῇ ὁμοιομόρφως μὲ ταχύτητα $\upsilon = 5 \dfrac{m}{sec}$ ἐπὶ χρόνον 8 sec, θὰ διανύσῃ διάστημα 40 μέτρων.



Σχ. 2·3 β.

2) Ἄς ὑποθέσωμε τώρα ὅτι ζητοῦμε τὸν χρόνον, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται, διὰ νὰ διανύσῃ ἕνα σῶμα κινούμενον μὲ ταχύτητα $\upsilon = \dfrac{5m}{sec}$ διάστημα 65 m. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος, ὅπου μετροῦμε τὰ διαστήματα, λαμβάνομε τμῆμα ΟΓ′ ποὺ νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς διάστημα 65 m. Ἐκ τοῦ σημείου Γ′ φέρομε τὴν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν διαστημάτων, ἡ ὁποία τέμνει τὴν χαραχθεῖσαν εὐθεῖαν ΟΜ εἰς τὸ σημεῖον Β′. Ἐκ τοῦ Β′ φέρομε τὴν κάθετον ἐπὶ τὸν

ἄξονα τῶν χρόνων καὶ ὁρίζομε τὸ σημεῖον Α΄. Τὸ μῆκος ΟΑ΄ ἀντιστοιχεῖ εἰς χρόνον 13 sec.

Συμπέρασμα: Ἐὰν ἕνα σῶμα κινῆται ὁμοιομόρφως μὲ ταχύτητα $\upsilon = 5 \frac{m}{sec}$ θὰ χρειασθῆ χρόνον 13 sec διὰ νὰ διανύση διάστημα 65 μέτρων.

Ἤδη ὅμως θὰ ἔχουν γεννηθῆ ἀπορίαι καὶ θὰ ὑπάρχουν ἀναμφισβητήτως ἀντιρρήσεις ὡς πρὸς τὴν χρησιμότητα τοῦ περιγραφέντος διαγράμματος.

Πράγματι, ἡ χάραξις τῆς εὐθείας ΟΜ ἀπαιτεῖ προσοχὴν καὶ ἐπιμέλειαν, συνεπῶς ἀπαιτεῖ χρόνον. Προϋποθέτει ἐπίσης τὴν εὕρεσιν ἑνὸς τουλάχιστον σημείου της, πρᾶγμα ποὺ σημαίνει ὅτι θὰ πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμε τουλάχιστον μίαν φορὰν τὸν τύπον $s = \upsilon \cdot t$. Προκύπτει λοιπὸν τὸ ἐρώτημα: Εἶναι ἀνάγκη νὰ χαράξωμε τὴν εὐθεῖαν ΟΜ καὶ νὰ προσδιορίσωμε ἐν συνεχείᾳ γραφικῶς τὸ διάστημα, ποὺ θὰ διανύση τὸ σῶμα εἰς χρόνον 8 sec ἢ τὸν χρόνον, ποὺ θὰ χρειασθῆ τὸ σῶμα, διὰ νὰ διανύση π.χ. διάστημα 65 μέτρων; Δὲν εἶναι εὐκολώτερον νὰ χρησιμοποιήσωμε ἀπ' εὐθείας τὸν τύπον $s = \upsilon \cdot t$ καὶ νὰ ἐργασθοῦμε ἐξ ἀρχῆς ἀναλυτικῶς;

Εἰς πολλὰς περιπτώσεις ναί. Δὲν μᾶς εἶναι δηλαδὴ πάντοτε χρήσιμον τὸ διάγραμμα διαστήματος - χρόνου. Ὑπάρχουν ἐν τούτοις περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας ὁ γραφικὸς προσδιορισμὸς τῶν μεγεθῶν s ἢ t μᾶς διευκολύνει πάρα πολὺ καὶ μᾶς ἀπαλλάσσει ἀπὸ περιττὸν κόπον.

Εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον εἴδαμε ὅτι ὁ χρόνος t, ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ τὴν κατεργασίαν τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλινδρικοῦ δοκιμίου εἰς τὸν τόρνον, ἠμπορεῖ — ἀντὶ νὰ μετρηθῆ ἀπ' εὐθείας — νὰ ὑπολογισθῆ μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου $s = \upsilon \cdot t$, ὅπου υ ἡ ταχύτης προώσεως τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου καὶ s τὸ πρὸς κατεργασίαν μῆκος τοῦ δοκιμίου. Εἰς τὸ ἀριθμητικὸν παράδειγμα, ποὺ ἐξετάσαμε τότε, εἴχαμε λάβει ὡς τιμὰς τὰς ἑξῆς:

$$\upsilon = 24\,\frac{\text{mm}}{\text{min}} \quad \text{καὶ } s = 300\,\text{mm}.$$

Εἶναι ὅμως φανερὸν ὅτι τὸ μῆκος, ποὺ θὰ κατεργαζώμεθα κάθε φοράν, δὲν θὰ εἶναι πάντοτε ἴσον πρὸς 300 mm. Κάθε φορὰν συνεπῶς, ποὺ θὰ γίνεται κατεργασία ἑνὸς δοκιμίου μὲ μῆκος διάφορον τῶν 300 mm, θὰ πρέπει νὰ γίνεται ξεχωριστὸς ἀναλυτικὸς ὑπολογισμὸς τοῦ χρόνου κατεργασίας t.

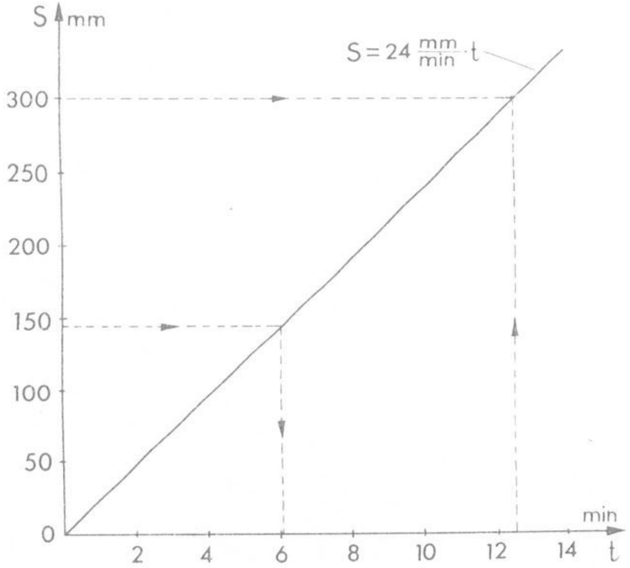
Ἡ δυσκολία αὐτή, καὶ ἑπομένως ἡ ἀπώλεια χρόνου, δύναται νὰ ἀντιμετωπισθῇ ἐπιτυχῶς, ἐὰν ἐργασθοῦμε ὄχι μὲ ἀναλυτικὸν ὑπολογισμόν, ἀλλὰ μὲ τὸ διάγραμμα. Πράγματι, ἐὰν χαράξωμε τὴν εὐθεῖαν $s = 24\,\frac{\text{mm}}{\text{min}} \cdot t$, ὁ χρόνος, ποὺ θὰ ἀπαιτῆται διὰ τὴν κατεργασίαν ἑνὸς δοκιμίου, οἱουδήποτε πλέον μήκους, εὑρίσκεται εὐκολώτατα χωρὶς τὴν ἀνάγκην ἐκτελέσεως ἀριθμητικῶν πράξεων (σχ. 2·3 γ). Ἡ γραφικὴ αὐτὴ ἐργασία εἶναι βεβαίως ὀρθὴ μόνον ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ ταχύτης προώσεως τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου θὰ εἶναι ἴση πρὸς 24 mm/min. Τί θὰ κάνωμε ὅμως εἰς τὰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας εἶναι π.χ. $\upsilon = 40$ mm/min ἢ $\upsilon = 32$ mm/min;

Εἶναι προφανὲς ὅτι διὰ τοὺς ὑπολογισμούς μας δὲν ἐπαρκεῖ πλέον ἡ εὐθεῖα τοῦ σχήματος 2·3 γ. Ἡ μόνη λύσις, λοιπόν, ποὺ μᾶς ἀπομένει, εἶναι νὰ χαράξωμε κατὰ τὰ γνωστὰ καὶ τὰς εὐθείας

$$s = 40\,\frac{\text{mm}}{\text{min}} \cdot t, \quad s = 32\,\frac{\text{mm}}{\text{min}} \cdot t.$$

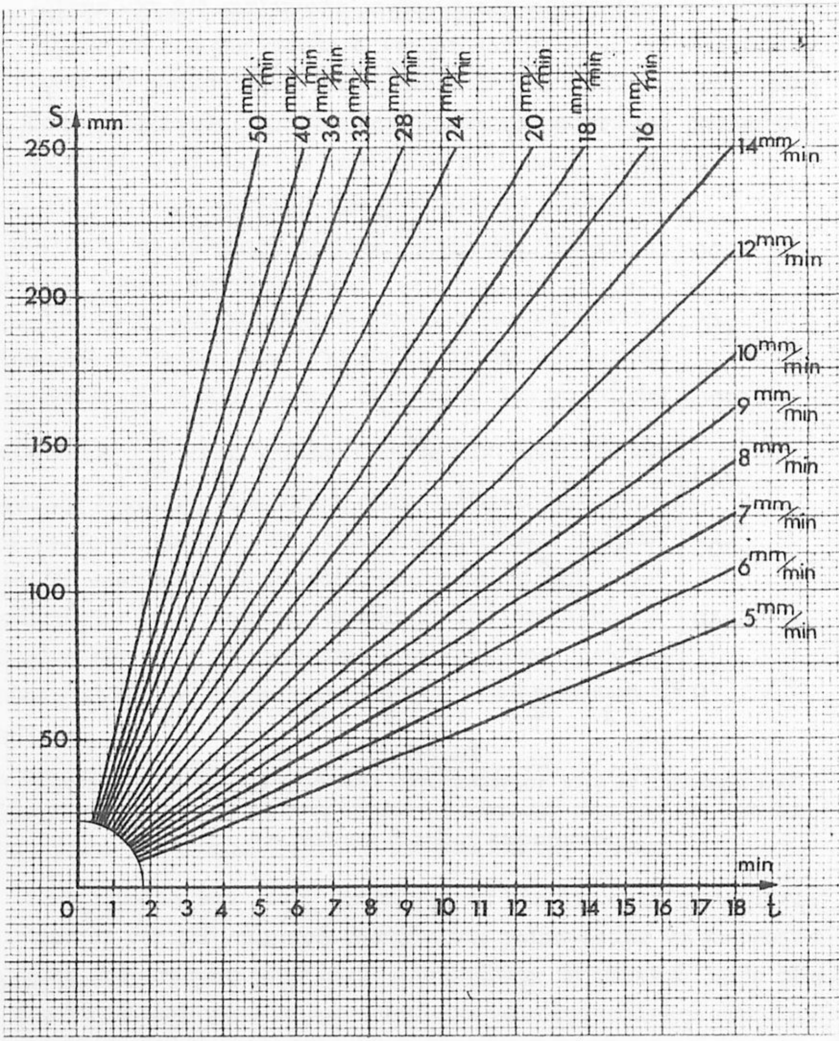
Καταλήγομε ἔτσι εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι πρέπει νὰ κατασκευάσωμε ἕνα διάγραμμα, εἰς τὸ ὁποῖον νὰ χαράξωμε ὄχι μόνον μίαν, ἀλλὰ πολλὰς εὐθείας, κάθε μία ἀπὸ τὰς ὁποίας θὰ ἀντιστοιχῇ καὶ εἰς μίαν διαφορετικὴν τιμὴν ταχύτητος προώσεως τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου (σχ. 2·3 δ).

Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαγράμματος αὐτοῦ θὰ εἴμεθα λοιπὸν εἰς θέσιν νὰ καθορίσωμε πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται διὰ τὴν κατεργασίαν ἑνὸς δοκιμίου εἰς τὸν τόρνον, ἀνεξαρτήτως τοῦ συγκεκριμένου μήκους ποὺ θὰ ἔχῃ τὸ δοκίμιον καὶ ἀνεξαρτήτως τῆς συγκεκριμένης ταχύτητος προώσεως τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου, ποὺ



Σχ. 2·3 γ.
Ἐὰν πρόκειται νὰ γίνῃ τόρνευσις ἑνὸς κυλινδρικοῦ δοκιμίου εἰς μῆκος 145 mm ὑπὸ ταχύτητα προώσεως $\upsilon = 24$ mm/min, θὰ ἀπαιτηθῆ διὰ τὴν κατεργασίαν χρόνος 6 περίπου min.

χρησιμοποιεῖται κατὰ τὴν κατεργασίαν. Ἔτσι, ἐὰν λάβωμε μίαν παραγγελίαν κατεργασίας κυλινδρικῶν δοκιμίων εἰς τὸν τόρνον, μᾶς εἶναι δυνατὸν νὰ προβλέψωμε, ἀναλόγως πάντοτε τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργαλειομηχανῶν ποὺ διαθέτομε, πόσος χρόνος θὰ ἀπαιτηθῆ διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς παραγγελίας. Ἐπίσης εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ προβλέψωμε ἐπὶ πόσον χρόνον θὰ ἀπασχοληθοῦν συνολικῶς οἱ τεχνῖται τοῦ μηχανουργείου, ἑπομένως πόσα χρήματα θὰ δαπα-


S mm
250
200
150
100
50
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 t
min
50 mm/min
40 mm/min
36 mm/min
32 mm/min
28 mm/min
24 mm/min
20 mm/min
18 mm/min
16 mm/min
14 mm/min
12 mm/min
10 mm/min
9 mm/min
8 mm/min
7 mm/min
6 mm/min
5 mm/min

Σχ. 2·3 δ.

νηθοῦν διὰ πληρωμὴν ἡμερομισθίων (ἢ ὡρομισθίων). Αὐτὸ ἔχει ἰδιαιτέραν σημασίαν, διότι τὰ ἐργατικὰ ἔξοδα ἀποτελοῦν ἕνα σημαντικώτατον ποσοστὸν τοῦ ὅλου κόστους κατεργασίας τῶν δοκιμίων.

Διὰ νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τέτοιου εἴδους διάγραμμα ἀπαιτεῖται βεβαίως ἐργασία. Ἂν ὅμως κατασκευασθῇ μίαν φορὰν μὲ ἐπιμέλειαν εἰς μεγάλου σχήματος τετραγωνισμένον χαρτί, ἠμπορεῖ πλέον νὰ χρησιμοποιηθῇ ἐπ' ἄπειρον. Μὲ αὐτὸν τὸν τρόπον ἀποφεύγεται ἡ ἐπίπονος λογιστικὴ ἐργασία τῆς συνεχοῦς ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου $s = \upsilon \cdot t$.

Τὸ συμπέρασμα λοιπόν, εἰς τὸ ὁποῖον καταλήγομε, εἶναι τὸ ἑξῆς: Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας διὰ τοὺς διαφόρους ὑπολογισμούς μας ἀπαιτεῖται ἐπανειλημμένη χρῆσις τοῦ τύπου $s = \upsilon \cdot t$, συμφέρει ἡ κατασκευὴ τοῦ διαγράμματος s - t, διότι καὶ κόπον πολὺν ἀποφεύγομε καὶ χρόνον πολὺν ἐξοικονομοῦμε.

Ἄσκησις.

Ἐπιλύσατε τὴν ὑπ' ἀριθμὸν 2 ἄσκησιν τῆς προηγουμένης παραγράφου διὰ χρησιμοποιήσεως τοῦ διαγράμματος διαστήματος - χρόνου.

2·4 Ὁμοιόμορφος κυκλικὴ κίνησις.

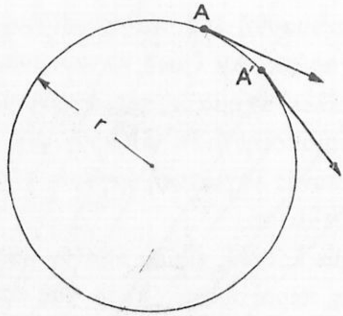
Ὅταν ἐχαρακτηρίσαμε τὰ εἴδη τῶν κινήσεων (βλ. παράγραφον 1·2) εἴπαμε ὅτι ἕνα εἶδος κινήσεως εἶναι καὶ ἡ ὁμοιόμορφος κυκλικὴ κίνησις, κατὰ τὴν ὁποίαν ἕνα σῶμα κινεῖται ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς, δηλαδὴ ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος r.

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος τοῦ σώματος, ἀφοῦ ἡ κίνησις εἶναι ὁμοιόμορφος, παραμένει καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως σταθερά. Τὸ διάστημα συνεπῶς, τὸ ὁποῖον διανύει τὸ σῶμα εἰς χρόνον t, ὑπολογίζεται μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνωστοῦ μας τύπου $s = \upsilon \cdot t$ καὶ μετρεῖται κατὰ μῆκος τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς ἀκτῖνος r.

Ἡ κατεύθυνσις τῆς ταχύτητος ἀντιθέτως μεταβάλλεται συνεχῶς.

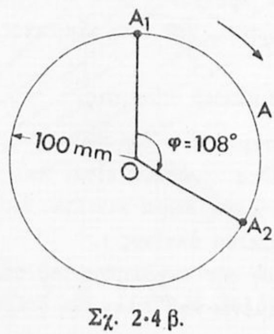
Πράγματι, καθὼς γνωρίζομε, ἡ κατεύθυνσις τῆς ταχύτητος συμπίπτει εἰς κάθε χρονικὴν στιγμὴν μὲ τὴν κατεύθυνσιν τῆς κινήσεως.

Ἡ κατεύθυνσις ὅμως κατὰ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ σῶμα, ὅταν τοῦτο εὑρίσκεται εἰς μίαν τυχοῦσαν θέσιν Α τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς του, καθορίζεται ἀπὸ τὴν κατεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς περιφερείας εἰς τὸ σημεῖον Α (σχ. 2 · 4 α). Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι ἡ κατεύθυνσις τῆς



Σχ. 2·4 α.

ταχύτητος θὰ καθορίζεται καὶ αὐτὴ ἀπὸ τὴν κατεύθυνσιν τῆς ἐν λόγω ἐφαπτομένης. Εἶναι λοιπὸν φανερὸν ὅτι, ἐὰν τὸ σῶμα μεταβῆ εἰς μίαν γειτονικὴν θέσιν Α′, ἡ κατεύθυνσις τῆς κινήσεως θὰ μεταβληθῆ καὶ ἂν ἀκόμη τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Α′ εὑρίσκωνται πολὺ κοντὰ τὸ ἕνα εἰς τὸ



Σχ. 2·4 β.

ἄλλο. Θὰ μεταβληθῆ συνεπῶς καὶ ἡ κατεύθυνσις τῆς ταχύτητος τοῦ κινουμένου σώματος.

Ἂς θεωρήσωμε τώρα ὅτι ἕνα σῶμα κινεῖται ὁμοιομόρφως ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς ἀκτῖνος $r = 100$ mm, μὲ ταχύτητα $\upsilon = 1{,}57$ m/sec. Ἐὰν τὸ σῶμα αὐτὸ ἐκκινήση ἀπὸ τὸ σημεῖον A_1 (σχ. 2 · 4 β) καὶ κινηθῆ κατὰ τὴν κατεύθυνσιν τοῦ βέλους ἐπὶ χρόνον $t = 0{,}12$ sec, θὰ διανύσῃ διάστημα:

$$s = \upsilon \cdot t = 1{,}57 \frac{m}{sec} \cdot 0{,}12\ sec = 1{,}57 \times 0{,}12\ m = 0{,}1884\ m = 18{,}84\ cm.$$

Ἑπομένως, θὰ φθάσῃ εἰς ἕνα σημεῖον A_2, τὸ ὁποῖον θὰ ἀπέχῃ τόσον ἀπὸ τὸ A_1, ὥστε τὸ τόξον $A_1 A A_2$ νὰ ἔχῃ μῆκος ἴσον πρὸς 18,84 cm.

Διὰ νὰ καθορίσωμε ἀκριβῶς τὴν θέσιν τοῦ σημείου A_2 θὰ ἐργασθοῦμε ὡς ἑξῆς:

Τὸ ὅλον μῆκος τῆς περιφερείας ἀκτῖνος 100 mm εἶναι, ὡς γνωστόν, ἴσον πρὸς $S = 2\pi r = 6{,}28 \times 100\ mm = 628\ mm = 62{,}8\ cm$.

Τὸ κινούμενον σῶμα διήνυσε κατὰ τὴν κίνησίν του διάστημα $s = 18{,}84$ cm, διήνυσε δηλαδὴ διάστημα ἴσον πρὸς τὰ $\frac{18{,}84}{62{,}8} = 0{,}3$, δηλαδὴ τὰ τρία δέκατα τοῦ συνολικοῦ μήκους τῆς περιφερείας.

Ἂς φαντασθοῦμε τώρα ὅτι ἡ ἀκτὶς OA_1 παρηκολούθησε τὴν κίνησιν τοῦ σώματος ἀπὸ τοῦ A_1 μέχρι τοῦ A_2. Ἐὰν τὸ σῶμα διήνυε κατὰ τὴν κίνησίν του διάστημα 62,8 cm, ἡ ἐν λόγῳ ἀκτὶς θὰ ἐστρέφετο κατὰ γωνίαν 360^0. Τὸ σῶμα ὅμως διήνυσε διάστημα ἴσον πρὸς τὰ 3/10 τοῦ 62,8 cm. Ἡ ἀκτὶς OA_1 ἐστράφη ἑπομένως κατὰ γωνίαν φ ἴσην πρὸς τὰ 3/10 τῶν 360^0· δηλαδὴ κατὰ γωνίαν $\varphi = 108^0$. Μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς γωνίας φ, εἴμεθα πλέον εἰς θέσιν νὰ καθορίσωμε πλήρως τὴν τελικὴν θέσιν OA_2 τῆς ἀκτῖνος, καὶ συνεπῶς τὸ σημεῖον A_2 τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ φθάσῃ τὸ κινούμενον σῶμα μετὰ τὴν παρέλευσιν τοῦ χρόνου t.

Γενικῶς, λοιπόν, διὰ νὰ καθορίσωμε τὴν θέσιν τοῦ σημείου A_2, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ φθάσῃ ἕνα σῶμα, ἐὰν ἐκκινήσῃ ἀπὸ τὸ σημεῖον A_1 καὶ κινηθῇ ὁμοιομόρφως ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς μὲ ταχύτητα υ, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ὑπολογίζομε κατ' ἀρχὰς τὸ διάστημα s, τὸ ὁποῖον θὰ διανύσῃ τὸ σῶμα κατὰ τὸν χρόνον t. Ἐν συνεχείᾳ προσδιορίζομε τὴν γωνίαν φ, κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ στραφῇ ἡ ἀκτὶς OA ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς της θέσεως OA_1 μέχρι τῆς τελικῆς της θέσεως OA_2 μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου:

$$\varphi = \frac{s}{S} \cdot 360^0$$

ὅπου s εἶναι τὸ ὑπολογισθὲν προηγουμένως διάστημα καὶ S τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἀκτῖνος r.

Ἡ γωνία φ εἶναι βεβαίως δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ καὶ εἰς ἀκτίνια μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου $\varphi = \frac{s}{S} \cdot 2\pi$ διότι, ὅπως γνωρίζομε, γωνία 360 μοιρῶν ἀντιστοιχεῖ πρὸς γωνίαν 2π ἀκτινίων:

Γωνιακὴ ταχύτης.

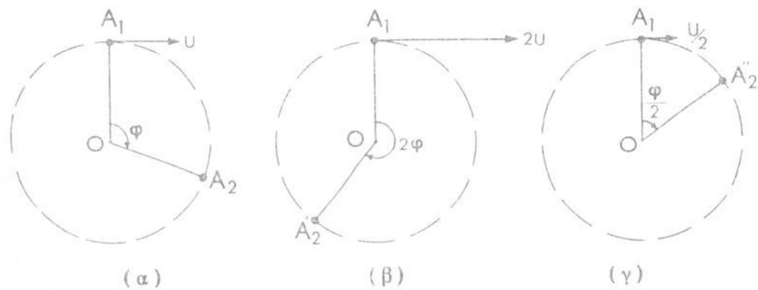
Ἐὰν ἀνακεφαλαιώσωμε τὰ ὅσα εἴπαμε μέχρι στιγμῆς διὰ τὴν ὁμοιόμορφον κυκλικὴν κίνησιν, παρατηροῦμε ὅτι τὸ διάστημα s, τὸ ὁποῖον διανύει ἕνα σῶμα κινούμενον ὁμοιομόρφως ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς διαμέτρου d, ὑπολογίζεται βάσει τοῦ γνωστοῦ μας τύπου $s = \upsilon \cdot t$. Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι πρὸς καθορισμὸν τῆς θέσεως, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ φθάσῃ τὸ σῶμα μετὰ παρέλευσιν χρόνου t, πρέπει ἀπαραιτήτως νὰ προσδιορίσωμε προηγουμένως τὸ μέγεθος τῆς γωνίας φ, κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ στραφῇ, εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον t, ἡ ἀκτὶς ἡ παρακολουθοῦσα τὴν κίνησιν τοῦ σώματος. Ἡ παρατήρησις αὐτὴ ἔχει τεραστίαν σημασίαν, διότι μᾶς ἐφιστᾶ ἐμμέσως τὴν προσοχὴν εἰς τὸ ὅτι διὰ τὴν περιγραφὴν καὶ μελέτην μιᾶς ὁμοιομόρφου κυκλικῆς κινήσεως ἡ γνῶσις τῆς γωνίας φ παρουσιάζει μεγαλύτερον πρακτικὸν ἐνδιαφέρον ἀπὸ ὅ,τι ἡ γνῶσις τοῦ διαστήματος s, τὸ ὁποῖον θὰ διανύσῃ τὸ σῶμα εἰς χρόνον t κατὰ μῆκος τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς του.

Διερωτώμεθα λοιπόν: Μήπως εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποφύγωμε τὸ ἐνδιάμεσον στάδιον ὑπολογισμοῦ τοῦ s καὶ νὰ ὑπολογίσωμε ἀπ' εὐθείας τὸ μέγεθος τῆς γωνίας φ;

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν τὸ σῶμα κινηθῇ ἐπὶ τῆς αὐτῆς κυκλικῆς τροχιᾶς, μὲ διπλασίαν ὅμως ταχύτητα, θὰ διανύσῃ εἰς χρόνον t διπλάσιον διάστημα, δηλαδὴ διάστημα ἴσον πρὸς 2 s. Συνεπῶς ἡ ἀκτὶς ΟΑ θὰ στραφῇ κατὰ διπλασίαν γωνίαν, δηλαδὴ κατὰ γωνίαν ἴσην πρὸς 2φ [σχ. 2.4-γ(β)]. Εἶναι ἐπίσης φανερὸν ὅτι, ἐὰν τὸ σῶμα κινηθῇ μὲ ταχύτητα ἴσην πρὸς $\frac{\upsilon}{2}$, θὰ διανύσῃ εἰς χρόνον t διάστημα ἴσον πρὸς $\frac{s}{2}$. Συνεπῶς ἡ ἀκτὶς ΟΑ θὰ στραφῇ κατὰ γωνίαν ἴσην πρὸς $\frac{\varphi}{2}$ [σχ. 2.4γ(γ)]. Σκεπτόμεθα λοιπὸν ὅτι τὸ μέγεθος τῆς γωνίας φ, κατὰ τὴν ὁποίαν στρέφεται ἡ ἀκτὶς ΟΑ εἰς χρόνον t, δύναται ἐπίσης νὰ ἀποτελέση ἕνα μέτρον τῆς ταχύτητος μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ σῶμα ἐπὶ τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς του.

Ὅπως ἤδη γνωρίζομε, τὸ πηλίκον $\frac{s}{t}$ παριστᾶ τὴν ταχύτητα μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ σῶμα κατὰ μῆκος τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς του. Τὴν ταχύτητα αὐτὴν τὴν συμβολίζομε μὲ τὸ γράμμα υ καὶ θὰ τὴν ὀνομάζωμε ἀπὸ τώρα καὶ εἰς τὸ ἑξῆς *περιφερειακὴν ταχύτητα*, ἀκριβῶς ἐπειδὴ ἀναφέρεται εἰς ἕνα σῶμα κινούμενον ἐπὶ περιφερείας κύκλου· δηλαδή:

$$\text{Περιφερειακὴ Ταχύτης: } υ = \frac{s}{t}$$



Σχ. 2·4 γ.

Ἐὰν τὸ σῶμα κινηθῇ ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς διαμέτρου d μὲ ταχύτητα υ, θὰ διανύσῃ εἰς χρόνον t διάστημα $A_1A_2 = s$, συνεπῶς ἡ ἀκτὶς ΟΑ θὰ στραφῇ κατὰ γωνίαν φ.

Ἐὰν τὸ σῶμα κινηθῇ ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς διαμέτρου d μὲ ταχύτητα 2υ, θὰ διανύσῃ εἰς χρόνον t διάστημα $A_1A_2' = 2/s$, συνεπῶς ἡ ἀκτὶς ΟΑ θὰ στραφῇ κατὰ γωνίαν 2φ.

Ἐὰν τὸ σῶμα κινηθῇ ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς διαμέτρου d μὲ ταχύτητα υ/2 θὰ διανύσῃ εἰς χρόνον t διάστημα $A_1A''_2 = s/2$, συνεπῶς ἡ ἀκτὶς ΟΑ θὰ στραφῇ κατὰ γωνίαν φ/2.

Κατ' ἀντιστοιχίαν, τὸ πηλίκον $\frac{φ}{t}$ παριστᾶ τὴν ταχύτητα, μὲ τὴν ὁποίαν περιστρέφεται ἡ ἀκτὶς ἡ παρακολουθοῦσα τὴν κίνησιν τοῦ σώματος. Τὴν ταχύτητα αὐτὴν θὰ τὴν ὀνομάζωμε λοιπὸν *γωνιακὴν ταχύτητα* καὶ θὰ τὴν συμβολίζωμε μὲ τὸ γράμμα ω. Δηλαδή:

$$\text{Γωνιακὴ Ταχύτης: } ω = \frac{φ}{t} \qquad (2)$$

Ἡ μονὰς μετρήσεως τῆς περιφερειακῆς ταχύτητος εἶναι ὡς γνωστόν: μῆκος ἀνὰ χρόνον (π.χ. $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$, $\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}$, $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ κ.α.).

Ἡ μονὰς μετρήσεως τῆς γωνιακῆς ταχύτητος εἶναι, ὅπως βλέπομε ἀπὸ τὸν τύπον (2), μονὰς μετρήσεως γωνίας διὰ μονάδος μετρήσεως χρόνου. Ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν διαγράφει ἡ ἀκτίς, ποὺ παρακολουθεῖ τὴν κίνησιν τοῦ σώματος, δύναται βεβαίως νὰ μετρῆται εἰς μοίρας ἢ ἀκτίνια ἢ εἰς οἱανδήποτε ἄλλην μονάδα μετρήσεως γωνιῶν. Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμε ἐν τούτοις τοὺς ὑπολογισμούς, θὰ καθιερώσωμε καὶ θὰ χρησιμοποιοῦμε εἰς τὸ ἑξῆς ὡς μόνην μονάδα μετρήσεως τῆς γωνίας τὸ ἀκτίνιον (rad). Ἡ μονὰς μετρήσεως τῆς γωνιακῆς ταχύτητος, ποὺ χρησιμοποιεῖται συνηθέστερον εἰς τὴν πρᾶξιν, εἶναι: $\frac{\text{ἀκτίνιον}}{\mathrm{sec}}$ $\left(\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}\right)$.

Συμπέρασμα: Ἐὰν ἔχωμε ἕνα σῶμα κινούμενον ἐπὶ μιᾶς ὡρισμένης κυκλικῆς τροχιᾶς, δυνάμεθα νὰ περιγράψωμε τὴν κίνησίν του ὄχι μόνον μὲ τὴν περιφερειακήν του ταχύτητα υ, ὅπως ἐκάναμε εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα ὁμοιομόρφου κυκλικῆς κινήσεως, τὸ ὁποῖον ἐξετάσαμε, ἀλλὰ καὶ μὲ τὴν γωνιακὴν ταχύτητα ω. Ἔτσι, ἐὰν δοθῇ π.χ. ὅτι $\omega = 0{,}2 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}$, αὐτὸ θὰ σημαίνῃ ὅτι ἡ ἀκτίς, ποὺ παρακολουθεῖ τὴν κίνησιν τοῦ σώματος, διαγράφει εἰς ἕνα δευτερόλεπτον γωνίαν 0,2 ἀκτινίων (ἢ εἰς μοίρας, γωνίαν $0{,}2 \frac{360^0}{2\pi} = 11^0$ καὶ 28′) καὶ συνεπῶς ὅτι θὰ διαγράψῃ γωνίαν π.χ. $0{,}2 \cdot 16 = 3{,}2$ ἀκτινίων (183,5 μοιρῶν), ἐὰν τὸ σῶμα κινηθῇ ἐπὶ χρόνον 16 sec.

Σχέσις ἡ ὁποία συνδέει τὴν περιφερειακὴν μὲ τὴν γωνιακὴν ταχύτητα.

Ὅπως εἴδαμε εἰς τὰ προηγούμενα, μία ὁμοιόμορφος κυκλικὴ κίνησις εἶναι πλήρως καθωρισμένη, ὅταν δοθοῦν, ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν ἡ ἀκτὶς τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ εἴτε ἡ περιφερειακὴ εἴτε ἡ γωνιακὴ ταχύτης. Ἡ διαπίστωσις αὐτὴ μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι τὰ δύο μεγέθη τῆς περιφερειακῆς καὶ τῆς γωνιακῆς ταχύτητος δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι μεταξύ των ἀνεξάρτητα· θὰ πρέπει ὁπωσδήποτε νὰ ὑπάρχῃ κάποια σχέσις ἡ ὁποία νὰ τὰ συνδέῃ.

Ἂς συμβολίσωμε μὲ τὸ γράμμα T τὸν χρόνον, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ διανύσῃ τὸ σῶμα διάστημα ἴσον πρὸς $S = \pi d = 2\pi r$, δηλαδὴ τὸν χρόνον, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἐκτελέσῃ τὸ σῶμα μίαν πλήρη περιστροφήν. Ὁ χρόνος αὐτὸς T ἠμπορεῖ νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ δύο τρόπους:

— μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου $\upsilon = \frac{s}{t}$ ὡς $T = \frac{S}{\upsilon} = \frac{2\pi r}{\upsilon}$

— μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου $\omega = \frac{\varphi}{t}$ ὡς $T = \frac{2\pi}{\omega}$,

ὅπου ὡς μονὰς μετρήσεως τῆς γωνίας λαμβάνεται τὸ ἀκτίνιον, ὁπότε ἡ γωνιακὴ ταχύτης ω θὰ μετρῆται εἰς ἀκτίνια ἀνὰ μονάδα χρόνου.

Εἶναι ὅμως φανερὸν ὅτι ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἐκτελέσῃ τὸ σῶμα μίαν πλήρη περιστροφήν, εἶναι *ἕνας καὶ μόνον*, ἀνεξαρτήτως τοῦ τρόπου μὲ τὸν ὁποῖον θὰ ὑπολογισθῇ. Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι:

$$\frac{2\pi r}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\omega} \text{ ἢ τελικῶς ὅτι } \upsilon = \omega \cdot r. \tag{3}$$

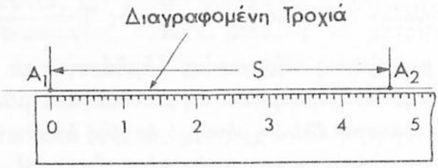
Ὁ ὡς ἄνω τύπος εἶναι ἐξαιρετικῶς χρήσιμος, διότι συνδέει κατὰ τρόπον ἁπλούστατον τὰ τρία θεμελιώδη μεγέθη, ποὺ χαρακτηρίζουν μίαν ὁμοιόμορφον κυκλικὴν κίνησιν, δηλαδὴ τὴν περιφερειακὴν ταχύτητα υ, τὴν γωνιακὴν ταχύτητα ω καὶ τὴν ἀκτῖνα r τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς.

Ἀνακεφαλαίωσις.

Ὅπως εἴδαμε εἰς τὴν παράγραφον 2·1, ὁ τύπος $s = \upsilon \cdot t$ εἶναι τύπος γενικῆς ἰσχύος καὶ διέπει οἱανδήποτε ὁμοιόμορφον κίνησιν, δηλαδὴ οἱανδήποτε κίνησιν εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος παραμένει συνεχῶς σταθερά. Πράγματι, ὅταν γνωρίζωμε τὴν ταχύτητα υ μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται ἕνα σῶμα, εἴμεθα ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν εἰς θέσιν νὰ προσδιορίσωμε πόσον διάστημα s θὰ διανύσῃ τὸ σῶμα, ἐὰν κινηθῇ ἐπὶ χρόνον t.

Ὅταν ἔχωμε ἰσοταχῆ κίνησιν, δηλαδὴ ὁμοιόμορφον κίνησιν εἰς τὴν ὁποίαν ἡ τροχιὰ εἶναι εὐθύγραμμος, τὸ νὰ γνωρίζωμε τὸ μέγεθος s εἶναι μεγάλο πλεονέκτημα: Δὲν ἔχομε παρὰ νὰ ἀναγάγωμε τὸ μέγεθος αὐτὸ s εἰς τὴν κλίμακα τοῦ σχεδίου μας καὶ νὰ ὁρίσωμε ἀμέσως μὲ ἕνα ὑποδεκάμετρον τὴν θέσιν εἰς τὴν ὁποίαν θὰ εὑρίσκεται τὸ σῶμα μετὰ παρέλευσιν χρόνου t (σχ. 2·4δ).

Ἀντιθέτως, ὅταν ἡ τροχιά, τὴν ὁποίαν διαγράφει τὸ σῶμα κατὰ τὴν κίνησίν του, εἶναι περιφέρεια κύκλου, τότε ἡ γνῶσις τοῦ μεγέθους s δὲν μᾶς προσφέρει τίποτε. Τὸ ὑποδεκάμετρον μᾶς εἶναι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τελείως ἄχρηστον, ἐνῶ παραλλήλως

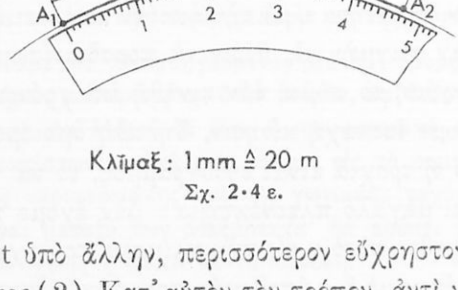


Κλῖμαξ : 1 mm ≙ 20 m

Σχ. 2·4 δ.

δὲν διαθέτομε ὄργανα σχεδιάσεως, μὲ τὰ ὁποῖα νὰ μετροῦμε μήκη κατὰ μῆκος καμπύλης γραμμῆς (σχ. 2 · 4 ε).

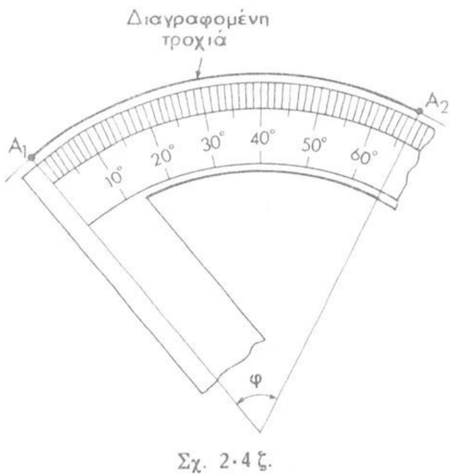
Ἡ δυσκολία αὐτὴ μᾶς ὡδήγησε εἰς τὸ νὰ ὁρίσωμε ἕνα νέον μέγεθος, *τὴν γωνιακὴν ταχύτητα ω*, καὶ νὰ γράψωμε τὸν βασικὸν



Κλῖμαξ : 1 mm ≙ 20 m

Σχ. 2·4 ε.

τύπον $s = υ \cdot t$ ὑπὸ ἄλλην, περισσότερον εὔχρηστον μορφήν, τὴν $φ = ω \cdot t$, τύπος (2). Κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον, ἀντὶ νὰ ὑπολογίζωμε τὸ διάστημα s, τὸ ὁποῖον διανύει τὸ σῶμα κατὰ μῆκος τῆς κυκλικῆς του τροχιᾶς εἰς χρόνον t, ὑπολογίζομε τὴν γωνίαν φ κατὰ τὴν ὁποίαν στρέφεται εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον t ἡ ἀκτίς, ποὺ παρακολουθεῖ τὴν κίνησιν τοῦ σώματος. Βεβαίως, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ πρέπει νὰ μᾶς εἶναι γνωστὸν ὄχι τὸ διάστημα, ποὺ διανύει τὸ σῶμα (κατὰ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος r) εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου — δηλαδὴ ἡ *περιφερειακὴ ταχύτης* υ τοῦ σώματος — ἀλλὰ ἡ γωνία κατὰ τὴν ὁποίαν στρέφεται ἡ ἀκτὶς ΟΑ (ἡ ὁποία παρακολουθεῖ τὴν κίνησιν τοῦ σώματος) εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου — δηλαδὴ ἡ γωνιακὴ ταχύτης ω (σχ. 2·4ζ). Ἔτσι, ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ γωνιακὴ ταχύτης ω εἶναι γνωστή, ὁ προσδιορισμὸς τῆς ἀκριβοῦς θέσεως, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ φθάσῃ τὸ σῶμα μετὰ παρέλευσιν χρόνου t, ἐπιτυγχάνεται εὐκολώτατα μὲ ἕνα μοιρογνωμόνιον (σχ. 2·4ζ).

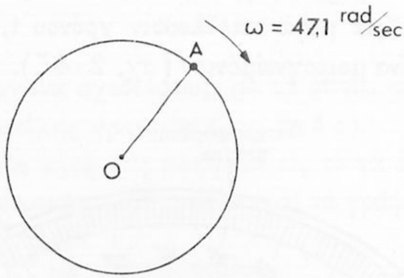


Σχ. 2·4ζ.

Ἡ γωνιακὴ ταχύτης ω καὶ ἡ περιφερειακὴ ταχύτης υ συνδέονται μεταξύ των διὰ τῆς θεμελιώδους σχέσεως $υ = ω \cdot r$, ὅπου r ἡ ἀκτὶς τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς.

Περιστροφικὴ ταχύτης.

Εἰς τὰς περισσοτέρας περιπτώσεις ὁμοιομόρφου κυκλικῆς κινήσεως, ποὺ θὰ συναντήσωμε εἰς τὰς ἐφαρμογάς, ἡ γωνιακὴ ταχύτης ω εἶναι ἀρκετὰ μεγάλη. Ἔτσι, ἐὰν π.χ. μᾶς δοθῇ ὅτι ἕνα σῶμα Α ἐκτελεῖ ὁμοιόμορφον κυκλικὴν κίνησιν μὲ γωνιακὴν ταχύτητα $\omega = 47{,}1$ rad/sec (σχ. 2·4 η), γνωρίζομε βεβαίως ὅτι ἡ ἀκτὶς ΟΑ διαγράφει γωνίαν 47,1 ἀκτινίων ἀνὰ δευτερόλεπτον. Ἐν τούτοις δὲν ἔχομε κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον ἀρκετὰ σαφῆ εἰκόνα τῆς ἐκτελουμένης κινήσεως. Παρατηροῦμε ἀμέσως ὅτι ἡ γωνία τῶν 47,1 ἀκτινίων, ποὺ διαγράφει ἡ ἀκτὶς ΟΑ εἰς ἕνα



Σχ. 2·4 η.

δευτερόλεπτον, εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν γωνίαν τῶν $2\pi = 6{,}28$ ἀκτινίων, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν πλήρη περιστροφὴν τοῦ σώματος. Μᾶς γεννᾶται λοιπὸν ἀμέσως τὸ ἐρώτημα: Πόσο μεγαλυτέρα εἶναι ἡ γωνία τῶν 47,1 ἀκτινίων ἀπὸ τὴν γωνίαν τῶν 6,28 ἀκτινίων; Ἡ ἀπάντησις εἶναι ἁπλῆ:

$$\frac{47{,}1}{6{,}28} = 7{,}5.$$

Ἄρα ἡ γωνία τῶν 47,1 ἀκτινίων εἶναι 7,5 φορὰς μεγαλυτέρα τοῦ 2π.

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ ἀκτὶς ΟΑ διαγράφει εἰς κάθε δευτερόλεπτον 7,5 φορὰς τὴν γωνίαν τῶν 6,28 ἀκτινίων, δηλαδὴ ὅτι τὸ σῶμα ἐκτελεῖ εἰς ἕνα δευτερόλεπτον 7,5 πλήρεις περιστροφάς. Ἀντὶ λοιπὸν νὰ εἰποῦμε ὅτι τὸ σῶμα Α κινεῖται μὲ γωνιακὴν ταχύτητα $\omega = 47{,}1$ rad/sec, δυνάμεθα κάλλιστα νὰ εἰποῦμε ὅτι τὸ σῶμα ἐκτελεῖ κατὰ τὴν κίνησίν του 7,5 περιστροφὰς ἀνὰ δευτερόλεπτον ἢ $7{,}5 \times 60 = 450$ περιστροφὰς ἀνὰ πρῶτον λεπτόν. Αὐτὸ μᾶς περιγράφει ἀναμφισβητήτως κατὰ πολὺ παραστατικώτερον τρόπον τὴν κίνησιν μὲ τὴν ὁποίαν ἀσχολούμεθα. Μὲ αὐτὸν τὸν φυσικὸν καὶ λογικὸν τρόπον ἐφθάσαμε εἰς τὸν ὁρισμὸν ἑνὸς τρίτου μεγέθους, μὲ τὸ ὁποῖον εἶναι δυνατὸν νὰ περιγραφῇ μία ὁμοιόμορφος κυκλικὴ κίνησις. Τὸ μέγεθος αὐτὸ θὰ τὸ ὀνομάζωμε *περιστροφικὴν ταχύτητα*. Ὅταν λοιπὸν ἀναφέρωμε τὴν περιστροφικὴν ταχύτητα, θὰ ἐννοοῦμε τὸν ἀριθμὸν τῶν περιστροφῶν ποὺ ἐκτελεῖ τὸ σῶμα εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου. Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης συμβολίζεται μὲ τὸ γράμμα n καὶ ἐκφράζεται συνήθως εἰς ἀριθμὸν περιστροφῶν ἀνὰ πρῶτον λεπτὸν τῆς ὥρας. Ἔτσι, ὅταν λέγωμε ὅτι ἕνα σῶμα κινεῖται ὁμοιομόρφως ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς μὲ περιστροφικὴν ταχύτητα $n = 450$ στρ/min, θὰ ἐννοοῦμε ὅτι τὸ σῶμα ἐκτελεῖ 450 πλήρεις περιστροφὰς εἰς ἕνα λεπτόν.

Ἐκεῖνο ὅμως ποὺ ὑπολείπεται ἀκόμη νὰ κάνωμε, εἶναι ἡ εὕρεσις ἑνὸς τύπου, ὁ ὁποῖος νὰ συνδέῃ τὰ δύο μεγέθη τῆς γωνιακῆς καὶ τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος.

Κάθε πλήρης περιστροφὴ τοῦ σώματος ἀντιστοιχεῖ εἰς στροφὴν τῆς ἀκτῖνος, ἡ ὁποία φανταζόμεθα ὅτι παρακολουθεῖ τὴν κίνησιν τοῦ σώματος, κατὰ γωνίαν 360^0 ἢ 2π ἀκτινίων. Εἰς ἕνα λεπτὸν (min) τὸ σῶμα ἐκτελεῖ η πλήρεις περιστροφάς, συνεπῶς ἡ ἀκτὶς στρέφεται εἰς τὸ αὐτὸ χρονικὸν διάστημα τοῦ ἑνὸς λεπτοῦ κατὰ γωνίαν $2\pi \cdot \eta$ ἀκτινίων. Γωνία ὅμως ἀνὰ μονάδα χρόνου εἶναι, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν ποὺ ἐδώσαμε [(σελ. 44, τύπος (2)], γωνιακὴ ταχύτης ω.

Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι $\omega = 2\pi n \ \frac{\text{ἀκτίνια}}{\text{min}} \left(\text{ἢ} \ \frac{\text{rad}}{\text{min}} \right)$. Συμφωνήσαμε ὅμως νὰ ἐκφράζωμε τὴν γωνιακὴν ταχύτητα ω εἰς $\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$. Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς στρέφεται κατὰ γωνίαν 2πn ἀκτινίων εἰς ἕνα λεπτόν, εἶναι προφανὲς ὅτι εἰς ἕνα δευτερόλεπτον θὰ στρέφεται κατὰ γωνίαν $\frac{2\pi n}{60}$ ἀκτινίων. Συνεπῶς:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \, \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \tag{4}$$

ὅπου n ἡ περιστροφικὴ ταχύτης εἰς στρ/min.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 3

ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΙΣ

3·1 Τί εἶναι ἡ περιστροφικὴ κίνησις.

Πάρετε ἕνα μικρὸ παιδάκι καὶ δείξατέ του ἕνα ἀνεμιστῆρα ἐν λειτουργία, σὰν αὐτοὺς ποὺ μᾶς δροσίζουν τὸ καλοκαῖρι ἢ ἕνα ἐξαεριστῆρα ἑστιατορίου ἢ μιᾶς κουζίνας καὶ ρωτήσατέ το: Γιαννάκη, βλέπεις τίποτε νὰ κινῆται ἐκεῖ ἐπάνω; Εἶναι βέβαιον ὅτι ὁ Γιαννάκης θὰ σᾶς ἀπαντήση «ὄχι» καὶ μάλιστα θὰ ἦτο πρόθυμος νὰ σᾶς τὸ ἀποδείξη ἐμπράκτως, ἐὰν εἴχατε τὴν ἀφέλειαν νὰ τὸν ἀφήσετε νὰ πλησιάση πρὸς τὰ ἐκεῖ.

Φαντασθῆτε τώρα ἕνα σμυριδοτροχὸν καὶ ἕνα ἠλεκτροκινητῆρα ἐγκατεστημένους τὸν ἕνα κοντὰ εἰς τὸν ἄλλον. Σκεφθῆτε πρὸς στιγμὴν ὅτι εὑρίσκεσθε εἰς μεγάλην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰ σώματα αὐτά, εἰς τρόπον ὥστε νὰ τὰ βλέπετε ὡς ὑλικὰ σημεῖα καὶ ἀπαντήσατε μὲ εἰλικρίνειαν εἰς τὸ ἑξῆς ἐρώτημα:

Εἶσθε εἰς θέσιν νὰ διαπιστώσετε ὀπτικῶς, ἐὰν ὁ τροχὸς ἢ ὁ ἄξων τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος κινοῦνται;

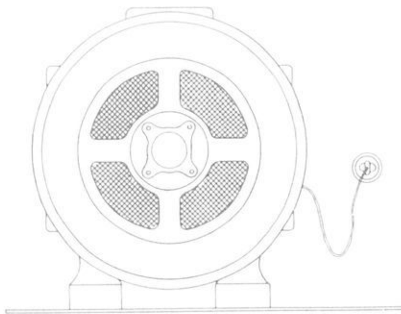
Ἡ ἀπάντησίς σας θὰ εἶναι προφανῶς: Ὄχι!

Ἀρχίσατε τώρα νὰ πλησιάζετε σιγὰ - σιγὰ πρὸς τὸ σημεῖον τοῦ μηχανουργείου, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγκατεστημένοι ὁ σμυριδοτροχὸς καὶ ὁ ἠλεκτροκινητήρ. Ἀφοῦ πλησιάσετε ἀρκετά, θὰ διαπιστώσετε ὅτι ὁ σμυριδοτροχὸς δὲν ὁμοιάζει νὰ εἶναι ἀκίνητος. Διατί ὅμως; Μήπως τὸν βλέπετε πράγματι νὰ κινῆται, νὰ μεταβάλλη δηλαδὴ συνεχῶς θέσιν ἐν σχέσει πρὸς τὰ πλησίον του εὑρισκόμενα ἀντικείμενα; Ὄχι! Ἁπλῶς δὲν διακρίνετε εὐκρινῶς τὴν ἐξωτερικὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειάν του, ἐπειδὴ δὲν εἶναι λεία. Τὸ γεγονὸς δὲ αὐτὸ καὶ μόνον σᾶς κάνει νὰ ὑποπτεύεσθε ὅτι ὁ σμυριδοτροχὸς κινεῖται. Ἀντιθέτως, τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ἐκάνατε τὴν παρατήρησιν αὐτὴν διὰ τὸν σμυριδοτροχόν, ὁ ἄξων τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος σᾶς ἐφαίνετο ἀκόμη ἀκίνητος· ἐὰν μάλιστα εἶχεν ἀπολύτως λείαν ἐξωτερικὴν ἐπιφάνειαν καὶ ἐὰν τὸ σχῆμα του ἦτο τελείως κυλινδρικόν, εἶναι βέβαιον ὅτι, ὁσονδήποτε πλησίον καὶ ἐὰν ἐφθάνατε, δὲν θὰ διαπιστώνατε ποτὲ τὴν κίνησίν του ὀπτικῶς. Καὶ ἀμέσως γεννᾶται τὸ ἐρώτημα: Διατί;

Ἡ ἀπάντησις εἶναι πολὺ ἁπλῆ: Τόσον ὁ σμυριδοτροχός, ὅσον καὶ ὁ ἄξων τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος κινοῦνται μέν, ἀλλὰ δὲν διαγράφουν κατὰ τὴν κίνησίν των καμμίαν τροχιὰν ὡς πρὸς ἐμᾶς, ποὺ τοὺς βλέπομε. Ἐφ' ὅσον λοιπόν, συμφώνως πρὸς ὅσα γνωρίζομε ἕως τώρα, ἡ ὕπαρξις τροχιᾶς εἶναι ἐκεῖνο ποὺ μᾶς ὑποδηλοῖ μίαν κίνησιν, εἶναι λογικὸν τὸ ὅτι δὲν κατωρθώσαμε νὰ διαπιστώσωμε ὀπτικῶς τὴν κίνησιν ποὺ ἐκτελοῦν ὁ σμυριδοτροχὸς καὶ ὁ ἄξων τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος.

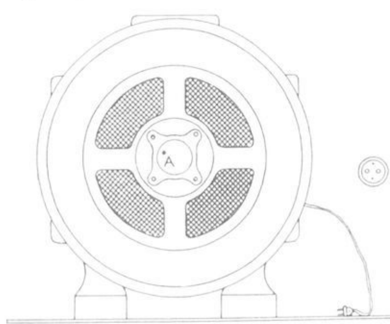
Τὸ πρόβλημα ἐν τούτοις, ποὺ μᾶς ἀπασχολεῖ, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθῆ ὅτι ἔχει λυθῆ μὲ αὐτὴν μόνον τὴν ἐξήγησιν. Εὑρισκόμεθα πρὸ ἑνὸς νέου εἴδους κινήσεως, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ κινούμενον σῶμα δὲν διαγράφει καμμίαν τροχιάν. Ἐπειδὴ δὲ τὸ εἶδος αὐτὸ τῆς κινήσεως εἶναι ἐξαιρετικῶς σύνηθες εἰς τὴν πρᾶξιν, ἐπιβάλλεται νὰ τὸ διερευνήσωμε περισσότερον.

Ἂς θεωρήσωμε πάλιν τὴν περίπτωσιν τοῦ ἰδανικοῦ κυλινδρικοῦ ἄξονος (σχ. 3·1 α). Ἐὰν ἀποσυνδέσωμε τὸν ἠλεκτροκινητῆρα ἀπὸ τὸ δίκτυον, ἡ κίνησις τοῦ ἄξονος θὰ σταματήση, πρᾶγμα ποὺ θὰ ἀντιληφθοῦμε μόνον διὰ τῆς ἀκοῆς ἢ ἐνδεχομένως διὰ τῆς ἀφῆς. Ἂς κάνωμε τώρα μὲ κιμωλίαν ἕνα μικρὸν σημαδάκι Α εἰς μίαν τυχοῦσαν θέσιν τοῦ ἄξονος (σχ. 3·1 β) καὶ ἂς ἐπανασυνδέσωμε τὸν ἠλεκτροκινητῆρα μὲ τὸ δίκτυον. Παρατηροῦμε ὅτι τὸ σημαδάκι Α ἐξαφανίζεται καὶ ἀντὶ αὐτοῦ ἐμφανίζεται μία περιφέρεια κύκλου (σχ. 3·1 γ), ἡ ὁποία μετασχηματίζεται πάλιν εἰς σημεῖον, μόλις ἀποσυνδέσωμε τὸν κινητῆρα ἀπὸ τὸ δίκτυον (σχ. 3·1 δ). Τί παριστάνει ὅμως αὐτὴ ἡ περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία ἐμφανίζεται μετὰ τὴν σύνδεσιν τοῦ κινητῆρος μὲ τὸ δίκτυον; Μὰ προφανῶς τὴν τροχιάν, τὴν ὁποίαν διαγράφει τὸ σημεῖον Α. Πράγματι, ἡ μεγάλη ταχύτης, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖ-



Σχ. 3·1 α.

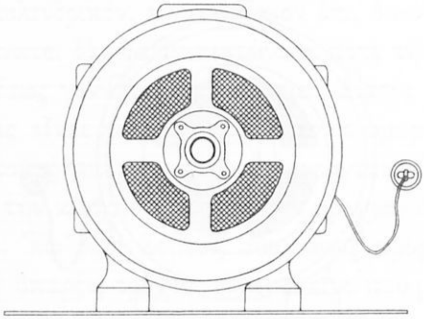
ται ὁ ἄξων τῆς μηχανῆς, καὶ ἡ ἀδράνεια, τὴν ὁποίαν παρουσιάζει ἐκ φύσεως ὁ ἀνθρώπινος ὀφθαλμός, δὲν μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ παρακολουθήσωμε μίαν πρὸς μίαν ὅλας τὰς διαδοχικὰς θέσεις ἀπὸ τὰς



Σχ. 3·1 β.

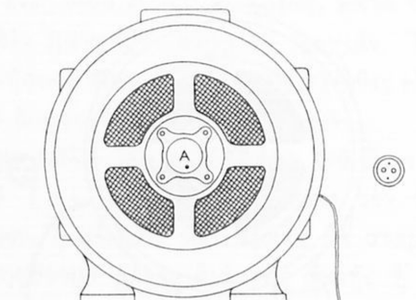
ὁποίας διέρχεται τὸ σημεῖον Α. Ἐπομένως, εἰς τὸν ἀμφιβληστροειδῆ χιτῶνα τοῦ ὀφθαλμοῦ σχηματίζεται μόνον ἡ συνολικὴ εἰκὼν τῆς κινήσεως τοῦ σημείου Α, δηλαδὴ ἡ τροχιὰ τὴν ὁποίαν τοῦτο διαγράφει.

Τὸ συμπέρασμα εἶναι ὅτι τὸ σημεῖον Α ἐκτελεῖ μίαν ὁμοιόμορφον κυκλικὴν κίνησιν. Διὰ τὸν ἴδιον ὅμως λόγον καὶ ἕνα οἱονδήποτε ἄλλο σημεῖον τοῦ ἄξονος ἐκτελεῖ ἐπίσης ὁμοιόμορφον κί-



Σχ. 3·1 γ.

νησιν, ἀφοῦ ἡ ἐκλογὴ τοῦ Α ἔγινε κατὰ τελείως τυχαῖον τρόπον. Ὅλα συνεπῶς τὰ σημεῖα τοῦ κυλινδρικοῦ ἄξονος ἐκτελοῦν ὁμοιόμορφον κυκλικὴν κίνησιν, ὅλα ἐκτελοῦν *περιστροφὰς* κατὰ



Σχ. 3·1 δ.

μῆκος κυκλικῶν τροχιῶν. Δυνάμεθα, ὡς ἐκ τούτου, νὰ ὀνομάσωμε τὴν κίνησιν, τὴν ὁποίαν ἐκτελεῖ ὁ ἄξων τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος, *περιστροφικὴν κίνησιν*.

Ἀνακεφαλαίωσις: Λέγεται ὅτι ἕνα σῶμα ἐκτελεῖ *περιστρο-*

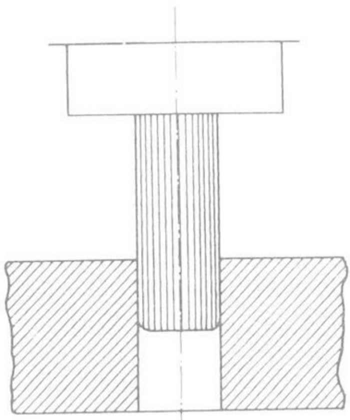
φικὴν κίνησιν σχετικῶς πρὸς ἕνα ἄλλο σῶμα, ὅταν ὅλα του τὰ σημεῖα ἐκτελοῦν ὡς πρὸς τὸ ἄλλο αὐτὸ σῶμα ὁμοιόμορφον κυκλικὴν κίνησιν, χωρὶς ἐν τούτοις νὰ μᾶς δίδῃ τὸ ἴδιον τὸ σῶμα τὴν ἐντύπωσιν ὅτι κινεῖται.

Ἀσκήσεις :

1. Σκεφθῆτε καὶ ἄλλα παραδείγματα σωμάτων, τὰ ὁποῖα ἐκτελοῦν περιστροφικὴν κίνησιν.

2. Τί εἴδους κίνησιν ἐκτελεῖ ὁ ἀνεμιστὴρ τοῦ ψυγείου ἑνὸς αὐτοκινήτου, σχετικῶς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας του :

α) ὅταν τὸ αὐτοκίνητον εὑρίσκεται ἐν στάσει, ἐνῷ ὁ κινητήρ του λειτουργεῖ ;



Σχ. 3·1 ε.

β) ὅταν τὸ αὐτοκίνητον κινῆται ἰσοταχῶς ;

γ) ὅταν τὸ αὐτοκίνητον ἐκτελῇ ὁμοιόμορφον κυκλικὴν κίνησιν ;

3. Τί εἴδους κίνησιν ἐκτελοῦν οἱ ὀπίσθιοι τροχοὶ ἑνὸς αὐτοκινήτου, σχετικῶς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας των, ὅταν τὸ αὐτοκίνητον κινῆται ὁμοιομόρφως ;

4. Τί εἴδους κίνησιν ἐκτελεῖ ἕνα μηχανοκίνητον γλύφανον (σχ. 3·1 ε) :

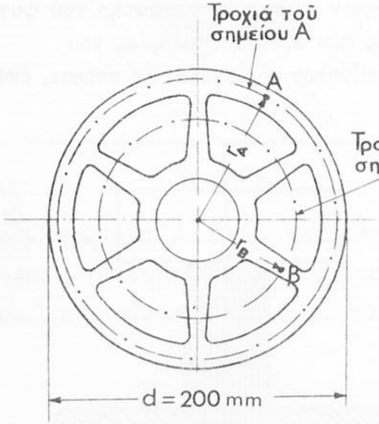
α) σχετικῶς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας του;

β) σχετικῶς πρὸς ἕνα τεχνίτην, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ μηχανουργείου;

5) Τί τροχιὰν διαγράφει τὸ γλύφανον κατὰ τὴν κίνησίν του;

3·2 Ἡ πρακτικὴ σημασία τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος.

Εἰς τὸ σχῆμα 3·2α παρίσταται μία τροχαλία, ποὺ ἐκτελεῖ περιστροφικὴν κίνησιν. Ὅπως ἤδη γνωρίζομε, τὰ δύο τυχόντα ση-



Σχ. 3·2α.

μεῖα A καὶ B ἐκτελοῦν ὁμοιόμορφον κυκλικὴν κίνησιν ὡς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας τῆς τροχαλίας, τὸ μὲν A ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς ἀκτῖνος r_A τὸ δὲ B ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς ἀκτῖνος r_B. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἐφ᾽ ὅσον ἡ τροχαλία εἶναι στερεὸν σῶμα, ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο σημείων A καὶ B θὰ παραμένῃ καθ᾽ ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως σταθερά, πρᾶγμα ποὺ σημαίνει ὅτι τὸ A δὲν κινεῖται σχετικῶς πρὸς τὸ B. Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι τὰ δύο σημεῖα A καὶ B, συμφώνως πρὸς ὅσα ἔχομε ἤδη ἀναφέρει, θὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν γωνιακὴν ταχύτητα ω καὶ συνεπῶς τὴν αὐτὴν περιστροφικὴν ταχύτητα n. Εἶναι ἐπίσης φανερὸν ὅτι τὸ συμπέρασμά μας αὐτὸ δὲν ἰσχύει μόνον διὰ τὰ δύο συγκεκριμένα σημεῖα

A καὶ B· ἰσχύει διὰ οἱαδήποτε σημεῖα τῆς τροχαλίας. Ὅταν λοιπὸν ἕνα σῶμα ἐκτελῇ περιστροφικὴν κίνησιν, ὅλα του τὰ σημεῖα ἐκτελοῦν ὁμοιόμορφον κυκλικὴν κίνησιν μὲ τὴν ἰδίαν γωνιακὴν ταχύτητα. Τὴν κοινὴν αὐτὴν γωνιακὴν ταχύτητα ὀνομάζομε *γωνιακὴν ταχύτητα* τοῦ περιστρεφομένου σώματος. Κατὰ τελείως ἀντίστοιχον τρόπον ὀνομάζομε *περιστροφικὴν ταχύτητα τοῦ σώματος* τὴν κοινὴν περιστροφικὴν ταχύτητα ὅλων τῶν σημείων τοῦ σώματος.

Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης περὶ τῆς ὁποίας ὡμιλήσαμε εἰς τὴν παράγραφον 2·4, δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς περιστροφῶν τὰς ὁποίας ἐκτελεῖ ἕνα σῶμα εἰς ἕνα λεπτόν, εἶναι ἕνα μέγεθος ἐξαιρετικῆς σημασίας, διότι συνδέεται στενώτατα μὲ τὴν λειτουργίαν τῶν μηχανῶν, ποὺ ἔχουν περιστρεφόμενα μέρη (ἐργαλειομηχανῶν, μηχανῶν ἐσωτερικῆς καύσεως, στροβίλων, ἠλεκτρικῶν μηχανῶν κ.ο.κ.). Οἱονδήποτε μηχανολογικὸν ἢ ἠλεκτρολογικὸν βιβλίον καὶ ἂν φυλλομετρήσωμε, ποὺ ἔχει σχέσιν μὲ τὰς μηχανὰς αὐτάς, θὰ συναντήσωμε ὁπωσδήποτε τύπους μὲ τὸ σύμβολον n ἢ πίνακας, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὴν ἐπίδρασιν ποὺ ἐξασκεῖ τὸ μέγεθος τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος εἰς τὴν λειτουργίαν τῶν ἀντιστοίχων μηχανῶν ἢ ἀκόμη καὶ καμπύλας, αἱ ὁποῖαι μᾶς δίδουν τὴν περιστροφικὴν ταχύτητα συναρτήσει ἄλλων μεγεθῶν. Οἱονδήποτε διαφημιστικὸν φυλλάδιον καὶ ἂν λάβωμε διὰ μίαν μηχανὴν ἀπὸ τὸ ἐργοστάσιον κατασκευῆς της, θὰ περιλαμβάνῃ ἀπαραιτήτως καὶ στοιχεῖα διὰ τὰς τιμὰς τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος ὑπὸ τὰς ὁποίας πρέπει αὐτὴ νὰ λειτουργῇ, ἀναλόγως βεβαίως πρὸς τὰς συνθήκας λειτουργίας της. Ἀλλὰ καὶ οἱανδήποτε ἐργασίαν ἐὰν θέλωμε νὰ ἐκτελέσωμε μὲ τὴν βοήθειαν μιᾶς μηχανῆς, πρέπει νὰ γνωρίζωμε ποίαν τιμὴν περιστροφικῆς ταχύτητος θὰ δώσωμε εἰς τὴν μηχανήν, ὥστε νὰ ἐπιτύχωμε τὸ ἄριστον δυνατὸν ἀποτέλεσμα μὲ τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν κόστος.

Ἔτσι, ἐὰν θέλωμε νὰ διανύσωμε μὲ αὐτοκίνητον ἕνα διάστημα ἐπὶ ὁριζοντίας ὁδοῦ μὲ σταθερὰν ταχύτητα 30 km/h, δὲν πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμε 2αν ταχύτητα πολὺ δὲ περισσότερον 1ην, διότι αὐτὸ θὰ ἔχῃ ὡς ἀποτέλεσμα, καθὼς γνωρίζομε ἐκ πείρας, μεγάλην κατανάλωσιν καυσίμου ὕλης (πολὺ γκάζι) καὶ μείωσιν τῆς διαρκείας ζωῆς τοῦ κινητῆρος, διότι ἀκριβῶς θὰ τὸν ἀναγκάζωμε νὰ ἐργάζεται συνεχῶς μὲ μεγάλην περιστροφικὴν ταχύτητα. Οὔτε ὅμως καὶ 4ην ταχύτητα θὰ πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμε (πολὺ λίγο γκάζι), διότι τότε ναὶ μὲν θὰ ἔχωμε οἰκονομίαν καυσίμων, ἐν τούτοις ὅμως θὰ προκαλέσωμε βαθμιαίαν καταστροφὴν τοῦ κινητῆρος, διότι θὰ τοῦ ζητοῦμε συνεχῶς μεγαλυτέραν ἰσχὺν ἀπὸ αὐτὴν τὴν ὁποίαν εἶναι εἰς θέσιν νὰ μᾶς ἀποδώσῃ (Πίναξ 2).

Ὁμοίως, ἐὰν ἐπιθυμοῦμε νὰ ἐλαττώσωμε εἰς τὸν τόρνον τὴν ἐξωτερικὴν διάμετρον ἑνὸς χαλυβδίνου δοκιμίου ἀπὸ 55 mm εἰς 50 mm, χρησιμοποιοῦντες κοπτικὸν ἐργαλεῖον π.χ. ἐκ σκληρομετάλλου, θὰ πρέπει νὰ ἐπιδιώξωμε ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν μίαν ἱκανοποιητικὴν ποιότητα τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ δοκιμίου, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ τὴν ἀποπεράτωσιν τῆς κατεργασίας εἰς ὅσον τὸ δυνατὸν μικρότερον χρόνον, διότι αὐτὰ τὰ δύο σημαίνουν καλὴν ἐκμετάλλευσιν τῆς ἐργαλειομηχανῆς. (Ἐννοεῖται ὅτι εἰς καμμίαν περίπτωσιν δὲν ἐπιτρέπεται νὰ ἐκτίθεται εἰς κίνδυνον ἡ σωματικὴ ἀκεραιότης τοῦ χειριστοῦ τῆς ἐργαλειομηχανῆς τεχνίτου — ἐνδεχόμενον θραύσεως τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου, ὑπὲρ τὸ δέον μεγάλη παραγωγὴ ἐρυθροπυρωμένων ἀποβλίττων κ.ο.κ.). Ἐὰν λοιπὸν κατὰ τὴν κατεργασίαν χρησιμοποιήσωμε μικρὰν περιστροφικὴν ταχύτητα τῆς κυρίας ἀτράκτου τοῦ τόρνου, γνωρίζομε ἐκ πείρας ὅτι ἡ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια τοῦ δοκιμίου τῶν 50 mm θὰ προκύψῃ τραχεῖα, χωρὶς ἐν τούτοις αὐτὸ νὰ σημαίνῃ ὅτι τὸ κοπτικὸν ἐργαλεῖον εἶναι ἀτρόχιστον ἢ ὅτι ἡ ἐργαλειομηχανή, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιοῦμε, εἶναι παλαιὰ καὶ κατεστραμμένη. Ἐὰν πάλι χρησιμοποιήσωμε μεγάλην περιστροφικὴν ταχύτητα τῆς κυρίας ἀτράκτου τοῦ τόρνου κατὰ τὴν κατεργασίαν, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιτύχωμε μείωσιν τῆς

ΠΙΝΑΞ 2

Περιστροφικὴ ταχύτης / Εἶδος Μηχανῆς καὶ Συνθῆκαι λειτουργίας	α) *Ἐξαιρετικῶς Μεγάλη* ἐξαιρετικῶς πολὺ γκάζι (1η ταχύτης)	β) *Μεγάλη* πολὺ γκάζι (2α ταχύτης)	γ) *Μικρὴ* λίγο γκάζι (3η ταχύτης)	δ) *Ἐξαιρετικῶς Μικρὴ* ἐξαιρετικῶς λίγο γκάζι (4η ταχύτης)
Βενζινοκινητὴρ συνήθους εὐρωπαϊκοῦ αὐτοκινήτου Τὸ αὐτοκίνητον κινεῖται ὁμοιομόρφως ἐπὶ ὁριζοντίας ὁδοῦ μὲ ταχύτητα 30 km/h.	— Ταχεῖα φθορὰ κινουμένων μερῶν, πολὺ μικρὴ συνεπῶς διάρκεια ζωῆς τοῦ κινητῆρος. — Κίνδυνος καταστροφῆς τοῦ κινητῆρος. — Κίνδυνος ἀτυχημάτων.	— Μεγάλη ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος. — Μεγάλη κατανάλωσις καυσίμων. — Μικρὴ διάρκεια ζωῆς τοῦ κινητῆρος.	— Μικρὰ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος. — Μικρὰ κατανάλωσις καυσίμων (οἰκονομία). — Μεγάλη διάρκεια ζωῆς τοῦ κινητῆρος (οἰκονομία).	— Ἐξαιρετικῶς μικρὰ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος. — Μὴ ὁμαλὴ λειτουργία τοῦ κινητῆρος. — Ὑπερθέρμανσις τοῦ κινητῆρος. — Ταχεῖα φθορὰ τοῦ κινητῆρος λόγῳ κρουστικῆς καύσεως.

Ἐπίδρασις, τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ ἐπὶ τῆς ἀποδόσεως καὶ τῆς λειτουργίας τοῦ βενζινοκινητῆρος ἑνὸς αὐτοκινήτου ἡ τιμὴ τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος (τοῦ ἀριθμοῦ στροφῶν ἀνὰ πρῶτον λεπτὸν) ὑπὸ τὴν ὁποίαν αὐτὸς λειτουργεῖ.

διαμέτρου τοῦ δοκιμίου κατὰ 5 mm μετὰ μίαν μόνον διαδρομὴν τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου· τότε θὰ ἀναγκασθοῦμε νὰ ἐπαναλάβωμε τὴν κατεργασίαν πολλὰς φοράς. Ὡς ἐκ τούτου ἡ ὅλη κατεργασία θὰ ἀπαιτήση πολὺν χρόνον (Πίναξ 3).

Αὐτὸς εἶναι ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον ἡ κατεργασία ἑνὸς δοκιμίου εἰς τὸν τόρνον γίνεται πάντοτε εἰς δύο στάδια: τὴν *ἐκχόνδρισιν* μὲ μικρὰν περιστροφικὴν ταχύτητα καὶ τὴν *λείανσιν* μὲ μεγάλην περιστροφικὴν ταχύτητα. Μόνον ἔτσι ἐπιτυγχάνεται ὁ συνδυασμὸς τῶν δύο ἀρχικῶν ἀπαιτήσεών μας, δηλαδὴ τῆς καλῆς ποιότητος τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας τοῦ δοκιμίου ἀφ' ἑνὸς καὶ τῆς εἰς ὅσον τὸ δυνατὸν μικρότερον χρόνον ἐκτελέσεως τῆς ἐργασίας ἀφ' ἑτέρου.

Τὰ δύο αὐτὰ παραδείγματα δὲν ἔχουν βεβαίως ὡς σκοπὸν νὰ μᾶς ὁδηγήσουν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν ἀρχῶν, ἐπὶ τῶν ὁποίων βασίζεται ἡ ὀρθὴ ἐκλογὴ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στροφῶν, ποὺ πρέπει νὰ δίδωμε εἰς τὴν κυρίαν ἄτρακτον μιᾶς μηχανῆς ἀναλόγως πρὸς τὰς συνθήκας ὑπὸ τὰς ὁποίας τὴν χρησιμοποιοῦμε. Μία τέτοιου εἴδους ἐπιδίωξις θὰ ἦτο ὁπωσδήποτε ἐκτὸς τοῦ σκοποῦ διὰ τὸν ὁποῖον γράφεται τὸ βιβλίον αὐτό.

Καὶ τοῦτο, διότι τὸ πρόβλημα καθορισμοῦ τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος εἶναι ἐξαιρετικῶς δύσκολον, ἴσως ἕνα ἀπὸ τὰ δυσκολώτερα προβλήματα, ποὺ ἔχει νὰ ἀντιμετωπίση ἕνας τεχνικὸς κατὰ τὴν ἐργασίαν του. Συνήθως ἡ δυσκολία ἑνὸς προβλήματος ἔχει τὴν τάσιν νὰ μᾶς φοβίζη καὶ νὰ μᾶς ἀπωθῆ ἀπὸ τὸ πρόβλημα. *Δὲν πρέπει ὅμως νὰ συμβαίνη αὐτό* καὶ κυρίως ὅταν ἀπὸ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος ἐξαρτᾶται ἡ σωματικὴ ἀκεραιότης τῶν ἐργαζομένων, ἡ φήμη τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς τὴν ἀγορὰν — λόγω τῆς καλῆς ποιότητος τῶν προϊόντων της — καὶ ἡ οἰκονομικὴ εὐμάρεια τῆς ἐπιχειρήσεως, ποὺ θὰ ἔχη ὡς ἄμεσον ἀποτέλεσμα καὶ τὴν εὐμάρειαν ὅλων μας. Ὁ μόνος λοιπὸν τρόπος, διὰ νὰ ἀντιμετωπίσωμε μὲ αὐτοπεποίθησιν καὶ ἐπιμονὴν ἕνα πρόβλημα

ΠΙΝΑΞ 3

Περιστροφικὴ ταχύτης / Εἶδος Μηχανῆς καὶ Συνθῆκαι λειτουργίας	Μικρὴ περιστροφικὴ ταχύτης μὲ βάθος κοπῆς 5 mm.	Μεγάλη περιστροφικὴ ταχύτης μὲ βάθος κοπῆς μικρότερον, π.χ. 1 mm.	Συνδυασμὸς μικρῆς περιστροφικῆς ταχύτητος μὲ βάθος κοπῆς 4mm καὶ ἐν συνεχείᾳ μεγάλης περιστροφικῆς ταχύτητος μὲ βάθος κοπῆς 1 mm.
Συνήθης Μηχανουργικὸς τόρνος *Ἐργασία:* Μείωσις τῆς διαμέτρου ἑνὸς κυλινδρικοῦ δοκιμίου ἀπὸ 55mm εἰς 50mm. *Κατεργαζόμενον ὑλικόν:* Χάλυψ. *Κοπτικὸν ἐργαλεῖον:* Σκληρομέταλλον. *Συνθῆκαι:* Σταθερὰ διάρκεια ζωῆς τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου.	— Μικρὸς χρόνος κατεργασίας. — Κακὴ ποιότης κατεργαζομένης ἐπιφανείας. — Κακὴ ἐκμετάλλευσις τῆς μηχανῆς (θὰ ἠδύνατο δηλαδὴ νὰ γίνῃ ἡ ἰδία κατεργασία μὲ ἄλλην μηχανὴν μικροτέρας ἀκριβείας, συνεπῶς οἰκονομικωτέραν).	— Καλὴ ποιότης κατεργαζομένης ἐπιφανείας. — Μεγάλος χρόνος κατεργασίας. — Κακὴ ἐκμετάλλευσις τῆς μηχανῆς (θὰ ἠδύνατο δηλαδὴ νὰ γίνῃ ἡ ἰδία κατεργασία μὲ ἄλλην μηχανήν, μικροτέρας ἰσχύος, συνεπῶς οἰκονομικωτέραν).	— Καλὴ ποιότης κατεργαζομένης ἐπιφανείας. — Ἱκανοποιητικῶς μικρὸς χρόνος κατεργασίας. — Ἱκανοποιητικὴ ἐκμετάλλευσις τῆς ἐργαλειομηχανῆς.

Ἐπίδρασις τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ ἐπὶ τῆς οἰκονομικῆς ἐκμεταλλεύσεως ἑνὸς τόρνου καὶ τῆς ποιότητος τῆς κατεργαζομένης ἐπιφανείας τοῦ δοκιμίου ἡ τιμὴ τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος, ποὺ προσδίδεται εἰς τὴν κυρίαν ἄτρακτον τῆς ἐργαλειομηχανῆς.

κατὰ πρόσωπον, ὅσον δύσκολον καὶ ἂν μᾶς φαίνεται τοῦτο, εἶναι νὰ πεισθοῦμε κατ᾽ ἀρχὰς πλήρως διὰ τὴν σημασίαν του καὶ νὰ διαβλέψωμε τὰς οἰκονομικὰς συνεπείας, ποὺ θὰ προκύψουν ἐκ τῆς ἐπιλύσεώς του. Αὐτὸ ἀκριβῶς ἐπεδιώχθη μὲ τὰ παραδείγματα τῆς προηγουμένης παραγράφου.

Γεννῶνται ἐν τούτοις ὡρισμένα ἐρωτήματα: Δὲν θὰ ἀπεφεύγετο ἡ ἀντιμετώπισις ἑνὸς τόσον δυσχεροῦς προβλήματος, ἐὰν ὅλαι αἱ μηχαναὶ εἰργάζοντο ὑπὸ ἕνα καὶ μόνον σταθερὸν ἀριθμὸν στροφῶν; Πράγματι, διατί νὰ κατασκευάζωνται αἱ μηχαναὶ μὲ τόσον εὐρείας δυνατότητας μεταβολῆς τῶν στροφῶν των; (Πίναξ 4). Διατὶ νὰ μὴ ἀποτελῇ ἡ περιστροφικὴ ταχύτης ἕνα δεδομένον καὶ σταθερὸν στοιχεῖον κάθε μηχανῆς;

ΠΙΝΑΞ 4

Εἶδος μηχανῆς	Περιστροφικὴ ταχύτης
Τόρνος γενικῆς χρήσεως	25 — 1 500
Φραιζομηχανὴ γενικῆς χρήσεως	15 — 1 500
Δράπανα γενικῆς χρήσεως	125 — 2 500
Μεγάλα ἀκτινωτὰ δράπανα	16 — 500
Βενζινομηχανὴ συνήθους αὐτοκινήτου	800 — 5 000
Βενζινομηχανὴ αὐτοκινήτου ἀγώνων	2 500 — 10 000

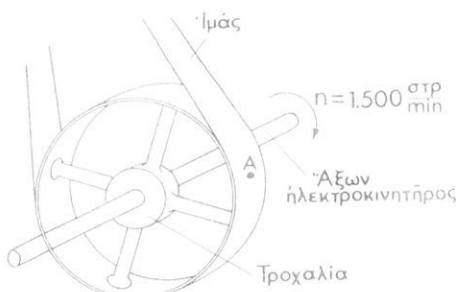
Περιοχὴ τιμῶν τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος, ὑπὸ τὰς ὁποίας λειτουργοῦν μερικαί συνήθεις μηχαναί.

Τὰ ἐρωτήματα αὐτὰ εἶναι ἀπολύτως λογικὰ καὶ ἀποτελοῦν ἐνδεχομένως μίαν διέξοδον δι᾽ ὅσους ἀπὸ ἐμᾶς ἀπεχθάνονται ἐκ φύσεως κάθε παρουσιαζομένην δυσκολίαν. Ὑπάρχει ὅμως ἀπάντησις, ἡ ὁποία μάλιστα εἶναι ἐξαιρετικῶς σημαντική. *Μία μηχανή, ἡ ὁποία μᾶς προσφέρει δυνατότητα μεταβολῆς τῆς περιστροφικῆς της ταχύτητος, ἰσοδυναμεῖ μὲ πολλὰς μηχανάς.*

Ἡ ἀπάντησις αὐτὴ φαίνεται ἴσως ἐπὶ τοῦ παρόντος αὐθαίρετος. Εἶναι ἐν τούτοις σκόπιμον νὰ τὴν συγκρατήσωμε καλὰ εἰς τὸ μυαλό μας, ἐπιφυλασσόμενοι νὰ τὴν δικαιολογήσωμε ἐπαρκῶς εἰς τὸ βιβλίον «Δυναμική».

3·3 Πρακτικαὶ ἐφαρμογαί.

1) Μία τροχαλία διαμέτρου 200 mm εἶναι σφηνωμένη ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἑνὸς ἠλεκτροκινητῆρος (σχ. 3·3α). Κατὰ τὴν σύνδεσιν τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος μὲ τὸ δίκτυον, ὁ ἄξων του περιστρέ-



Σχ. 3·3α.

φεται μὲ ταχύτητα 1 500 στρ/min. Πόση εἶναι ἡ περιφερειακὴ ταχύτης ἑνὸς τυχόντος σημείου τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας (ζάντας) τῆς τροχαλίας; Πόση εἶναι συνεπῶς ἡ ταχύτης ἑνὸς τυχόντος σημείου τοῦ ἱμάντος;

Ἐφ᾽ ὅσον ἡ τροχαλία εἶναι στερεῶς συνδεδεμένη ἐπάνω εἰς τὸν ἄξονα τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος, εἶναι φανερὸν ὅτι δὲν ὑπάρχει σχετικὴ κίνησις μεταξὺ τροχαλίας καὶ ἄξονος, κατὰ συνέπειαν ἡ τροχαλία θὰ κινῆται καὶ αὐτὴ μὲ τὴν περιστροφικὴν ταχύτητα τῶν 1 500 στρ/min.

Τὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας τῆς τροχαλίας θὰ ἔχῃ τότε περιφερειακὴν ταχύτητα:

$$\upsilon_A = \omega \cdot r = \frac{2\pi n}{60} \cdot r = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}2 \cdot 1\,500}{60} \frac{m}{sec} =$$

15,7m/sec.

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμε ὅτι δὲν ὑπάρχει ὀλίσθησις μεταξὺ ἱμάντος καὶ τροχαλίας, τὸ σημεῖον Α θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν ταχύτητα, εἴτε θεωρηθῆ ὡς σημεῖον τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας τῆς τροχαλίας εἴτε θεωρηθῆ ὡς σημεῖον τοῦ ἱμάντος. Ἑπομένως, ἡ ταχύτης ἑνὸς τυχόντος σημείου τοῦ ἱμάντος (ἢ ἁπλούστερα *ἡ ταχύτης κινήσεως τοῦ ἱμάντος*) θὰ εἶναι ἴση κατ᾽ ἀριθμητικὴν τιμὴν μὲ τὴν περιφερειακὴν ταχύτητα τῶν σημείων τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας τῆς τροχαλίας (ἢ ἁπλούστερα τῆς περιφερειακῆς ταχύτητος τῆς τροχαλίας) δηλαδὴ ἴση πρὸς 15,7 m/sec.

Γνωρίζομε ὅμως ἐκ πείρας ὅτι πάντοτε ὑπάρχει σχετικὴ κίνησις μεταξὺ ἱμάντος καὶ τροχαλίας, ἀκριβῶς ἐπειδὴ ὁ ἱμὰς ὀλισθαίνει ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τῆς τροχαλίας κατὰ τὴν κίνησίν του. Ἔτσι, ἡ ταχύτης κινήσεως τοῦ ἱμάντος εἶναι πάντοτε μικροτέρα ἀπὸ τὴν περιφερειακὴν ταχύτητα τῆς τροχαλίας καὶ μάλιστα τόσον μικροτέρα, ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ὀλίσθησις. Ἐὰν λοιπὸν δεχθοῦμε ὅτι ἡ ὀλίσθησις τοῦ ἱμάντος ἐπὶ τῆς τροχαλίας εἶναι π.χ. ἴση πρὸς 2 %, αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ ταχύτης κινήσεως τοῦ ἱμάντος εἶναι κατὰ 2 % μικροτέρα ἀπὸ τὴν περιφερειακὴν ταχύτητα τῆς τροχαλίας, δηλαδὴ εἶναι ἴση πρός:

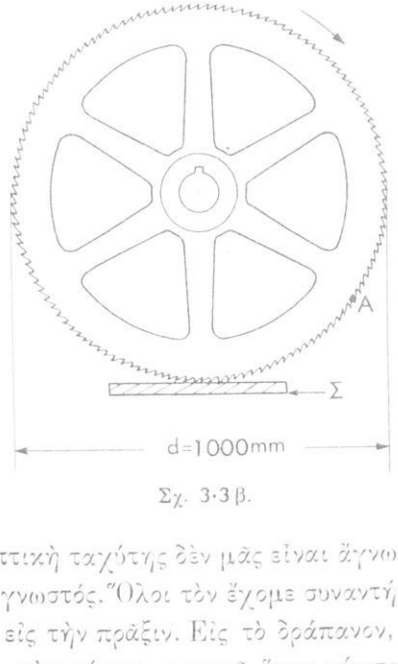
$$\upsilon_{\iota\mu} = \upsilon_{\tau\rho} - 2\,\% \; \upsilon_{\tau\rho} = 15{,}7 - 0{,}02 \times 15{,}7 =$$
$$15{,}7 - 0{,}314 \simeq 15{,}4 \text{ m/sec.}$$

2) *Ἕνα πριόνι κυκλικῆς μορφῆς (σχ. 3·3β) ἐξωτερικῆς διαμέτρου 1000 mm, κινεῖται μὲ περιστροφικὴν ταχύτητα 450 στροφῶν ἀνὰ πρῶτον λεπτόν. Ποία εἶναι ἡ ταχύτης τῶν σημείων τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας τοῦ πριονιοῦ;*

Κατὰ τὰ γνωστά, ἡ ζητουμένη ταχύτης εἶναι ἴση πρός:

$$\upsilon = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60} = \frac{3,14 \cdot 1 \cdot 450}{60} \text{ m/sec} = 23,55 \text{ m/sec}.$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ὅταν τὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας τοῦ πριονιοῦ ἔλθῃ εἰς ἐπαφὴν μὲ τὴν κοπτομένην σανίδα ξύλου Σ, θὰ κινῆται σχετικῶς πρὸς αὐτὴν μὲ ταχύτητα $\upsilon = 23,55$ m/sec· συνεπῶς υ εἶναι ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν κόπτεται εἰς τὸ παράδειγμά μας τὸ ξύλο. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ τὴν ὀνομάσωμε *κοπτικὴν ταχύτητα* ἢ *ταχύτητα κοπῆς τοῦ πριονιοῦ*.



Σχ. 3·3 β.

Ὁ ὅρος κοπτικὴ ταχύτης δὲν μᾶς εἶναι ἄγνωστος· ἀπεναντίας μᾶς εἶναι πολὺ γνωστός. Ὅλοι τὸν ἔχομε συναντήσει εἴτε εἰς ἄλλα βιβλία εἴτε καὶ εἰς τὴν πρᾶξιν. Εἰς τὸ δράπανον, τὴν πλάνην, τὴν φραιζομηχανήν, τὸν τόρνον, παντοῦ ὅπου γίνεται κοπὴ ἑνὸς ὑλικοῦ ὑπὸ ἑνὸς ἄλλου, ἕνα ἀπὸ τὰ μεγέθη ποὺ χαρακτηρίζουν τὴν κατεργασίαν καὶ ποὺ ὡς ἐκ τούτου μᾶς ἐνδιαφέρουν πολὺ εἶναι καὶ ἡ κοπτικὴ ταχύτης. Αὐτὴ ὁρίζεται πάντοτε ὡς ἡ σχετικὴ ταχύτης ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἔρχονται τὰ δύο ὑλικὰ (κοπτικὸν ἐργαλεῖον καὶ κατεργαζόμενον ὑλικὸν) εἰς ἐπαφὴν κατὰ τὴν κοπήν.

Ἡ κοπτικὴ ταχύτης ἐξαρτᾶται ἀπὸ ἕνα πλῆθος μεταβλητῶν παραγόντων ὅπως π.χ.:

— Τὸ εἶδος τοῦ χρησιμοποιουμένου κοπτικοῦ ἐργαλείου καὶ τὸν τρόπον τροχίσεώς του.

— Τὴν σύνθεσιν, τὴν σκληρότητα καὶ τὴν ἀντοχὴν τοῦ ὑπὸ κατεργασίαν ὑλικοῦ.

— Τὰς συνθήκας κατεργασίας, δηλαδὴ τὴν διάρκειαν τῆς κατεργασίας, τὸ χρησιμοποιούμενον ψυκτικὸν ὑγρόν, τὴν πρόωσιν τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου, τὸ βάθος κοπῆς κ.ο.κ.

Κατὰ τὰ τελευταῖα 50 ἔτη κατεβλήθησαν πολλαὶ προσπάθειαι, τόσον θεωρητικαὶ ὅσον καὶ πειραματικαί, διὰ νὰ εὑρεθοῦν σχέσεις (νόμοι), αἱ ὁποῖαι νὰ συνδέουν τὸ μέγεθος τῆς κοπτικῆς ταχύτητος μὲ τὰς λοιπὰς συνθήκας κατεργασίας καὶ τοῦτο διὰ κάθε δυνατὸν συνδυασμὸν κοπτικοῦ ἐργαλείου καὶ ὑπὸ κατεργασίαν ὑλικοῦ. Τὰ ἀποτελέσματα τῶν μακροχρονίων αὐτῶν ἐρευνῶν ἔχουν συνοψισθῆ εἰς πίνακας, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν τὸ πλέον ἀπαραίτητον βοήθημα δι' ὅσους ἀπασχολοῦνται εἰς ἐργασίας, ποὺ ἔχουν σχέσιν μὲ κοπὴν ἢ ἀκόμη καὶ λείανσιν ὑλικῶν. Ἡ ἀκριβὴς τήρησις τῶν ὅσων γράφονται εἰς τοὺς πίνακας αὐτοὺς ἐξασφαλίζει τὴν ἀρίστην δυνατὴν ἀξιοποίησιν τῶν μηχανῶν μας, τὴν οἰκονομικὴν ἐκμετάλλευσιν μηχανῶν καὶ κοπτικῶν ἐργαλείων καθὼς ἐπίσης καὶ τὴν ἀσφάλειαν τῶν χειριζομένων τὰς μηχανὰς τεχνιτῶν.

3) *Κυλινδρικὸν δοκίμιον ἀπὸ σκληρὸν χάλυβα διαμέτρου 65 mm εἶναι προσδεδεμένον εἰς ἕνα μηχανουργικὸν τόρνον. Δοθέντος ὅτι ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τῆς κυρίας ἀτράκτου τοῦ τόρνου εἶναι ἴση πρὸς 184 στρ/min, νὰ εὑρεθῇ ἡ περιφερειακὴ ταχύτης τῶν σημείων τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας τοῦ δοκιμίου εἰς m/min.*

Θὰ χρησιμοποιήσωμε τὸν γνωστόν μας τύπον $\upsilon = \dfrac{\pi \cdot d \cdot n}{60}$

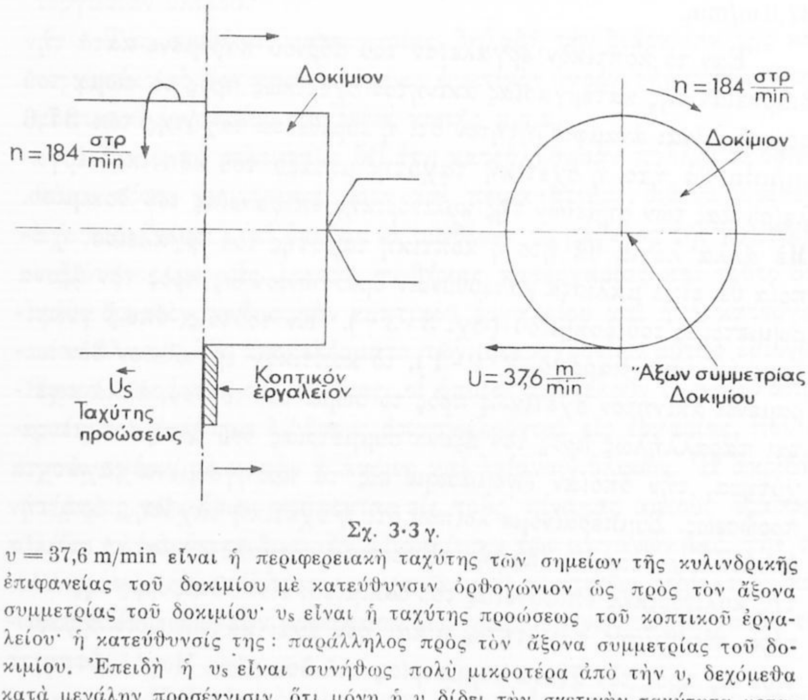
ὅπου, ὡς γνωστόν, ἡ ταχύτης υ θὰ εὑρεθῇ εἰς m/sec, ἐὰν ἡ διάμετρος d ἐκφρασθῇ εἰς m καὶ ἡ περιστροφικὴ ταχύτης n εἰς στρ/min·

$$υ = \frac{3{,}14 \times 0{,}065 \times 184}{60}\ \text{m/sec} = 3{,}14 \times 0{,}065 \times 184\ \text{m/min} =$$

37,6 m/min.

Ἐὰν τὸ κοπτικὸν ἐργαλεῖον τοῦ τόρνου παρέμενε κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς κατεργασίας ἀκίνητον σχετικῶς πρὸς τὸ σῶμα τοῦ τόρνου, εἶναι ἀναμφισβήτητον ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα ταχύτης τῶν 37,6 m/min θὰ ἦτο ἡ σχετικὴ ταχύτης μεταξὺ τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου καὶ τῶν σημείων τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας τοῦ δοκιμίου. Μὲ ἄλλα λόγια θὰ ἦτο ἡ κοπτικὴ ταχύτης τοῦ ἐργαλείου, ἡ ὁποία θὰ εἶχε μάλιστα κατεύθυνσιν ὀρθογώνιον ὡς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας τοῦ δοκιμίου (σχ. 3·3γ). Ἐν τούτοις, ὅπως γνωρίζομε (βλ. καὶ παράγρ. 2·2-1), τὸ κοπτικὸν ἐργαλεῖον δὲν παραμένει ἀκίνητον σχετικῶς πρὸς τὸ σῶμα τοῦ τόρνου, ἀλλὰ κινεῖται παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας τοῦ δοκιμίου μὲ ταχύτητα, τὴν ὁποίαν ὠνομάσαμε εἰς τὰ προηγούμενα ταχύτητα προώσεως. Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι ἡ σχετικὴ ταχύτης, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἔρχονται εἰς ἐπαφὴν τὸ κοπτικὸν ἐργαλεῖον καὶ τὰ σημεῖα τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας τοῦ δοκιμίου, εἶναι διάφορος τῆς ἀνωτέρω εὑρεθείσης ταχύτητος υ καὶ δὲν ἔχει κατεύθυνσιν ὀρθογώνιον ὡς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας τοῦ δοκιμίου. Παρ᾽ ὅλον τοῦτο ὅμως, ἐπειδὴ ἡ ταχύτης προώσεως τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου εἶναι κατὰ πολὺ μικροτέρα τῆς ταχύτητος τῶν σημείων τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας τοῦ δοκιμίου, δεχόμεθα δι᾽ ἁπλούστευσιν, καὶ χωρὶς αὐτὸ νὰ σημαίνῃ ὅτι ἀπέχομε πολὺ ἀπὸ τὴν πραγματικότητα, ὅτι ἡ κοπτικὴ ταχύτης τοῦ ἐργαλείου εἶναι ἴση πρὸς τὴν ταχύτητα τῶν σημείων τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας τοῦ δοκιμίου (σχ. 3·3γ). Ἔτσι εἰς τὸ παράδειγμά μας δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμε κατὰ μεγάλην προσέγγισιν, ὅτι ἡ κατεργασία λαμβάνει χώραν ὑπὸ κοπτικὴν ταχύτητα τοῦ ἐργαλείου ἴσην πρὸς 37,6 m/min.

Ἡ κοπτικὴ ταχύτης τοῦ ἐργαλείου τοῦ τόρνου, ὅπως καὶ αἱ κοπτικαὶ ταχύτητες τῶν ἐργαλείων ὅλων τῶν ἄλλων ἐργαλειομηχανῶν, δίδονται συνήθως εἰς m/min. Ἐπειδὴ δὲ αἱ διάμετροι τῶν



Σχ. 3·3 γ.

$\upsilon = 37{,}6$ m/min εἶναι ἡ περιφερειακὴ ταχύτης τῶν σημείων τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας τοῦ δοκιμίου μὲ κατεύθυνσιν ὀρθογώνιον ὡς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας τοῦ δοκιμίου· υ_s εἶναι ἡ ταχύτης προώσεως τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου· ἡ κατεύθυνσίς της: παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας τοῦ δοκιμίου. Ἐπειδὴ ἡ υ_s εἶναι συνήθως πολὺ μικροτέρα ἀπὸ τὴν υ, δεχόμεθα κατὰ μεγάλην προσέγγισιν, ὅτι μόνη ἡ υ δίδει τὴν σχετικὴν ταχύτητα μεταξὺ κοπτικοῦ ἐργαλείου καὶ ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ δοκιμίου. Δεχόμεθα δηλαδὴ ὅτι ἡ υ εἶναι ἡ κοπτικὴ ταχύτης τοῦ ἐργαλείου.

κατεργαζομένων δοκιμίων — ἢ εἰς ἄλλας περιπτώσεις τῶν κοπτικῶν ἐργαλείων — δίδονται σχεδὸν πάντοτε εἰς mm, εἶναι σκόπιμον νὰ μετασχηματίσωμε τὸν γνωστόν μας τύπον $\upsilon = \dfrac{\pi \cdot d \cdot n}{60}$ κατὰ τέτοιον τρόπον, ὥστε νὰ συνδέσωμε τὰ μεγέθη υ, n καὶ d ἐκπεφρασμένα ἀπ' εὐθείας εἰς τὰς μονάδας, αἱ ὁποῖαι συνήθως χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν πρᾶξιν: m/min, στρ/min καὶ mm ἀντιστοίχως.

Ὁ τύπος $\upsilon = \dfrac{\pi \cdot d \cdot n}{60}$ μᾶς δίδει τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον διανύει εἰς ἕνα sec ἕνα σημεῖον κινούμενον ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς διαμέτρου d μὲ περιστροφικὴν ταχύτητα n (εἰς στρ/min). Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον διανύει τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον εἰς ἕνα min, θὰ εἶναι 60 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ προηγουμένου, συνεπῶς ἴσον πρὸς $\pi \cdot d \cdot n$. Ἐὰν θέσωμε τὸ μέγεθος d εἰς mm, ἡ ταχύτης $\upsilon = \pi \cdot d \cdot n$ θὰ εὑρεθῇ προφανῶς εἰς mm/min. Ἐὰν ἐν τούτοις ἐπιθυμοῦμε νὰ ἐκφρασθῇ αὐτὴ ἀπ' εὐθείας εἰς m/min, θὰ πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμε τὸν τύπον $\upsilon = \dfrac{\pi \cdot d \cdot n}{1\,000}$, διότι μία ταχύτης ἐκπεφρασμένη εἰς m/min εἶναι 1 000 φορὰς μικροτέρα ἀπὸ τὴν ἰδίαν ταχύτητα ἐκπεφρασμένην εἰς mm/min.

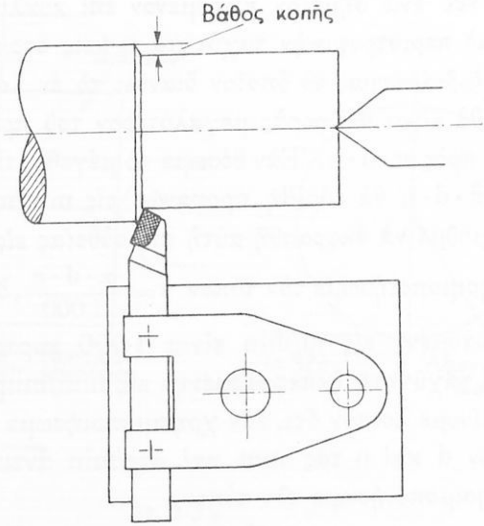
Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι, ἐὰν χρησιμοποιήσωμε ὡς μονάδας μετρήσεως τῶν d καὶ n τὰς mm καὶ στρ/min ἀντιστοίχως, θὰ πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμε τὸν τύπον:

$$\upsilon = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{1\,000} \qquad (1)$$

διὰ νὰ προσδιορίσωμε τὴν ταχύτητα υ ἀπ' εὐθείας εἰς m/min. Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν γνωρίζωμε τὴν κοπτικὴν ταχύτητα υ τοῦ ἐργαλείου (εἰς m/min) ὑπὸ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ γίνῃ ἡ τόρνευσις ἑνὸς δοκιμίου, εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ προσδιορίσωμε μὲ ἁπλούστατον τρόπον τὸν ἀριθμὸν στροφῶν, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ δώσωμε εἰς τὴν κυρίαν ἄτρακτον τοῦ τόρνου· δὲν ἔχομε παρὰ νὰ χρησιμοποιήσωμε τὸν τύπον $\upsilon = \dfrac{\pi \cdot d \cdot n}{1\,000}$ καὶ νὰ τὸν γράψωμε ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$n = \frac{1\,000\ \upsilon}{\pi \cdot d}. \qquad (2)$$

Ἐδῶ θὰ πρέπει νὰ ἀναφέρωμε ὅτι αὐτὴ εἶναι καὶ ἡ συνήθης περίπτωσις ποὺ συναντοῦμε εἰς τὴν πρᾶξιν. Εἰς εἰδικοὺς πίνακας εὑρίσκομε ποῖοι εἶναι οἱ συνδυασμοὶ κοπτικῆς ταχύτητος καὶ ταχύτητος προώσεως, τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμε κατὰ τὴν κατεργασίαν, διὰ διαφόρους τιμὰς τοῦ βάθους κοπῆς



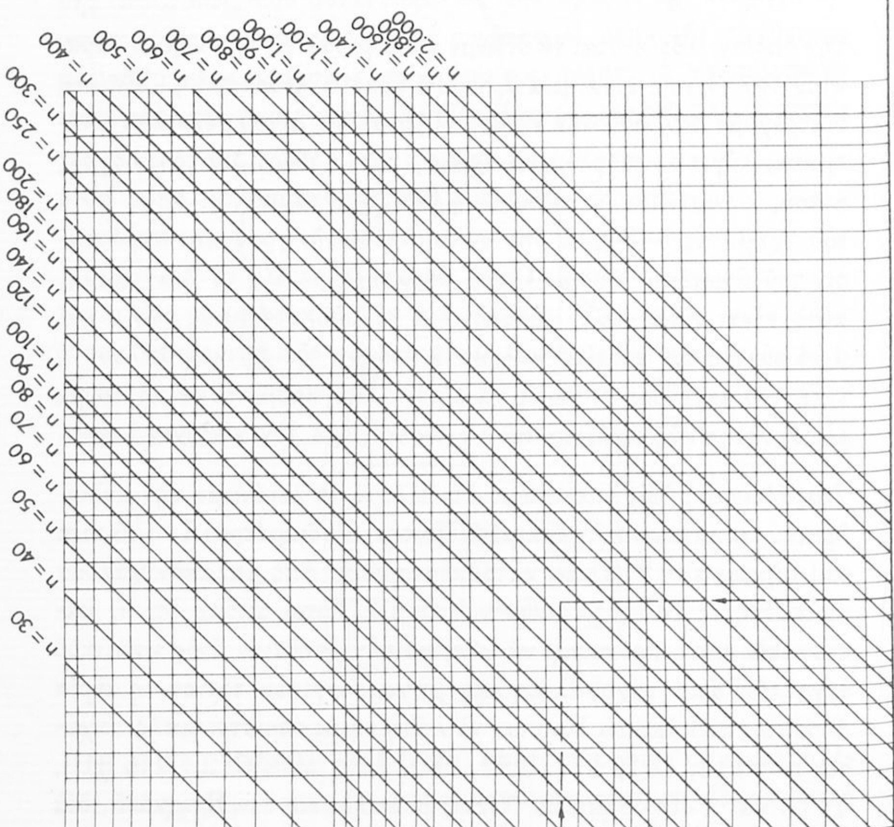
Σχ. 3·3 δ.

(σχ. 3 · 3 δ). Βεβαίως λαμβάνεται ἀπαραιτήτως ὑπ᾽ ὄψιν καὶ τὸ εἶδος τοῦ χρησιμοποιουμένου κοπτικοῦ ἐργαλείου, τὸ εἶδος τοῦ ὑπὸ κατεργασίαν ὑλικοῦ, αἱ συνθῆκαι ψύξεως κ.ο.κ. Ἀφοῦ καθορίσωμε τὸ ἐπιθυμητὸν βάθος κοπῆς καὶ τὸν ἐπιθυμητὸν συνδυασμὸν κοπτικῆς ταχύτητος καὶ ταχύτητος προώσεως, δὲν ἔχομε παρὰ νὰ ὑπολογίσωμε ἐπίσης τὴν περιστροφικὴν ταχύτητα n τῆς κυρίας ἀτράκτου τοῦ τόρνου, πρᾶγμα ἁπλούστατον, ἐὰν χρησιμοποιήσωμε τὸν τύπον $n = \frac{1\,000}{\pi} \cdot \frac{\upsilon}{d}$ (υ εἰς m/min, d εἰς mm).

Βεβαίως, τὸ νὰ ἐφαρμόζωμε συνεχῶς εἰς τὴν πρᾶξιν τὸν τύπον

$n = \frac{1\,000}{\pi} \cdot \frac{v}{d}$, διὰ νὰ καθορίζωμε τὴν περιστροφικὴν ταχύτητα, τὴν ὁποίαν ἐνδείκνυται νὰ δίδωμε κάθε φορὰν εἰς τὴν κυρίαν ἄτρακτον τοῦ τόρνου, εἶναι μία ἐργασία ἀρκετὰ κουραστική. Ἐπίσης διατρέχομε τὸν κίνδυνον νὰ καταλήξωμε εἰς ἐσφαλμένα ἀποτελέσματα, λόγω ἀναποφεύκτων ἀριθμητικῶν λαθῶν. Διὰ τοὺς λόγους αὐτοὺς συνιστᾶται ἡ κατασκευὴ ἑνὸς διαγράμματος, ὅπως αὐτὸ τοῦ σχήματος 3·3ε, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὴν γραφικὴν παράστασιν τοῦ ἀνωτέρω τύπου. Ὅπως παρατηροῦμε εἰς τὸ διάγραμμα, αὐτὸ εἶναι πάρα πολὺ εὔκολον διὰ οἱασδήποτε τιμὰς τῶν v καὶ d νὰ εὑρεθῇ ἀπ᾽ εὐθείας καὶ κατὰ τρόπον ἐξαιρετικῶς ἁπλοῦν ἡ τιμὴ τοῦ μεγέθους n, χωρὶς νὰ εἴμεθα ἀναγκασμένοι νὰ προβοῦμε εἰς ἀριθμητικὰς πράξεις καὶ νὰ διατρέξωμε τὸν κίνδυνον λαθῶν.

Παράδειγμα: Ἂς ὑποθέσωμε ὅτι θέλομε νὰ λειάνωμε τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς δοκιμίου ἐξωτερικῆς διαμέτρου $d = 55$ mm καὶ μήκους $s = 210$ mm κατασκευασμένου ἀπὸ μαλακὸν χάλυβα σκληρότητος 140 π.χ. βαθμῶν Brinell. Ἔστω ἀκόμη ὅτι ἡ κατεργασία αὐτὴ πρόκειται νὰ γίνῃ μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς κοπτικοῦ ἐργαλείου ἀπὸ ταχυχάλυβα εἰς μηχανουργικὸν τόρνον, ἡ κυρία ἄτρακτος τοῦ ὁποίου δύναται νὰ λάβῃ τιμὰς περιστροφικῆς ταχύτητος $n = 112$, 141, 177, 222, 280, 362, 455, 572, 719, 916, 1115 καὶ 1 400 στρ/min. Ὅπως βλέπομε εἰς τὸν Πίνακα 5, διὰ βάθος κοπῆς ἴσον πρὸς 1,5 mm, ὑπὸ τὸ ὁποῖον ἔστω ὅτι θὰ γίνῃ ἡ κατεργασία τῆς λειάνσεως, πρέπει νὰ ἐκλέξωμε ἕνα ἀπὸ τοὺς τρεῖς δυνατοὺς συνδυασμοὺς προώσεως καὶ κοπτικῆς ταχύτητος (στήλη ἀναφερομένη εἰς ἐργαλεῖον ἐκ ταχυχάλυβος). Τὰ κριτήρια, βάσει τῶν ὁποίων γίνεται ἡ ἐν λόγω ἐκλογή, δὲν εἶναι θέμα τοῦ παρόντος βιβλίου· ἀρκούμεθα ὡς ἐκ τούτου εἰς τὸ νὰ ὑποθέσωμε ὅτι ἔχομε ἐκλέξει ἤδη μίαν ἀπὸ τὰς καταλλήλους τιμὰς κοπτικῆς ταχύτητος, ἔστω τὴν $v = 75$ m/min.


n = 30
n = 40
n = 50
n = 60
n = 70
n = 80
n = 90
n = 100
n = 120
n = 140
n = 160
n = 180
n = 200
n = 250
n = 300
n = 400
n = 500
n = 600
n = 700
n = 800
n = 900
n = 1.000
n = 1.200
n = 1.400
n = 1.600
n = 1.800
n = 2.000
d(mm)
300
200
180
160
140
120
100
90
80
70
60
50
40
30
20
18
16
14
12
10
6
7
8
9
10
12
14
16
18
20
30
40
50
60
80
100
140
180
300

Σχ. 3·3 ε.

ΠΙΝΑΞ 5

Βάθος κοπῆς εἰς mm	Πρόωσις εἰς mm/στρ.	Κοπτικὴ ταχύτης εἰς m/min (κατεργαζόμενον ὑλικόν: χάλυψ σκληρότητος 140° Brinell)	
		Ἐργαλεῖον ἐκ ταχυχάλυβος	Ἐργαλεῖον ἐκ σκληρομετάλλου
1	0,2	115	290
	0,4	85	205
1,5	0,2	105	245
	0,4	75	185
	0,8	55	140
2	0,2	95	230
	0,4	70	175
	0,8	50	125
3	0,2	80	200
	0,4	60	155
	0,8	40	110
	1,6	30	80
5	0,2	70	170
	0,4	50	130
	0,8	35	90
	1,6	25	55
8	0,2	65	140
	0,4	45	105
	0,8	30	75
	1,6	22	40
	2,4	18	—

Γνωρίζομε ἤδη τὰ μεγέθη d = 55 mm καὶ υ = 75 m/min.

Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης n εὑρίσκεται πλέον εἴτε μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου:

$$n = \frac{1000}{\pi} \cdot \frac{\upsilon}{d} \quad \text{ὡς} \quad n = \frac{1000}{3{,}14} = \frac{75}{55} = 435 \ \text{στρ/min}$$

εἴτε, ἀκόμη ἁπλούστερα, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαγράμματος τοῦ σχήματος 3·3 ε.

Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ δὲν συμπεριλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δυνατῶν τιμῶν περιστροφικῆς ταχύτητος, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ δώσωμε εἰς τὴν κυρίαν ἄτρακτον τοῦ τόρνου· αὐτὸ δὲ εἶναι ἄλλωστε κάτι ποὺ συμβαίνει συχνά. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν θὰ λάβωμε τὴν τιμὴν n = 455 στρ/min, ἡ ὁποία πλησιάζει περισσότερον πρὸς τὴν εὑρεθεῖσαν καὶ εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ κοπτικὴ ταχύτης ἴση πρὸς 78,5 m/min.

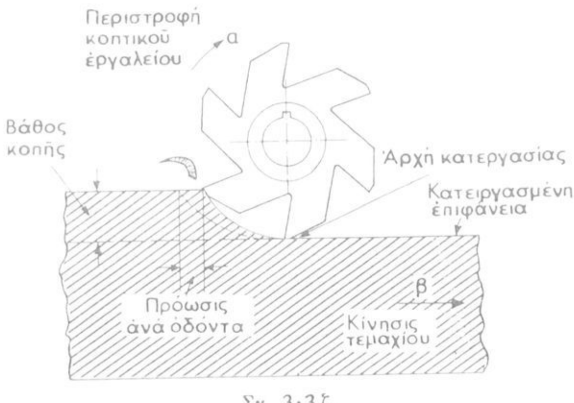
Σημείωσις: Παρατηροῦμε ὅτι εἰς τὸν Πίνακα 5 δὲν ἀναγράφονται τιμαὶ τῆς ταχύτητος προώσεως υ_s, ὅπως ἀναφέραμε εἰς προηγουμένην παράγραφον, ἀλλὰ αἱ τιμαὶ ἑνὸς ἄλλου μεγέθους, τῆς *προώσεως*. Ἡ πρόωσις εἶναι καὶ αὐτὴ μία ταχύτης, δηλαδὴ ἕνα μέγεθος, ποὺ ὑποδηλοῖ πόσον γρήγορα κινεῖται τὸ κοπτικὸν ἐργαλεῖον, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι δὲν μετρεῖται εἰς mm/min, ὅπως ἡ ταχύτης προώσεως (βλ. παράγραφον 2·2-1), ἀλλὰ εἰς mm ἀνὰ στροφὴν τῆς κυρίας ἀτράκτου. Εἶναι ἐν τούτοις φανερὸν ὅτι, ἐφ᾽ ὅσον ἡ κυρία ἄτρακτος ἐκτελεῖ n πλήρεις περιστροφὰς εἰς ἕνα min, τὸ κοπτικὸν ἐργαλεῖον θὰ διανύῃ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον τοῦ ἑνὸς min διάστημα ἴσον πρὸς n φορὰς τὸ διάστημα, ποὺ διανύει εἰς κάθε μίαν περιστροφὴν τῆς κυρίας ἀτράκτου· ἡ ταχύτης προώσεως εἶναι συνεπῶς ἴση πρὸς n φορὰς τὴν πρόωσιν. Εἰς τὸ συγκεκριμένον παράδειγμα ποὺ ἐξετάσαμε, ἡ πρόωσις εἶναι ἴση πρὸς 0,4 mm/στρ, ἡ δὲ περιστροφικὴ ταχύτης ἴση πρὸς 455 στρ/min (Πίναξ 5). Ἔτσι ἡ ταχύτης προώσεως υ_s τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου θὰ εἶναι ἴση πρός:

$$\upsilon_s = 0{,}4 \frac{\text{mm}}{\text{στρ.}} \times 455 \frac{\text{στρ.}}{\text{min}} = 182 \text{ mm/min.}$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ μῆκος τοῦ δοκιμίου εἶναι s = 210 mm, συμπεραίνομε ὅτι ὁ χρόνος ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ τὴν λείανσιν ἑνὸς δοκιμίου (μὴ συμπεριλαμβανομένων τῶν χρόνων χειρισμῶν ἢ τῶν χρόνων συνδέσεως καὶ ἀποσυνδέσεως τοῦ δοκιμίου), εἶναι ἴσος πρὸς

$$t_\lambda = \frac{s}{\upsilon_s} = \frac{210}{182} \text{ min} = 1{,}15 \text{ min.}$$

4) *Τὸ κοπτικὸν ἐργαλεῖον μιᾶς φραιζομηχανῆς (σχ. 3·3 ζ) ἔχει διάμετρον τριῶν ἰντσῶν, κινεῖται δὲ μὲ περιστροφικὴν ταχύτητα 1 000 στρ/min κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους α.*



Σχ. 3·3 ζ.

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ περιφερειακὴ ταχύτης τοῦ σημείου Α εἶναι ἴση πρός:

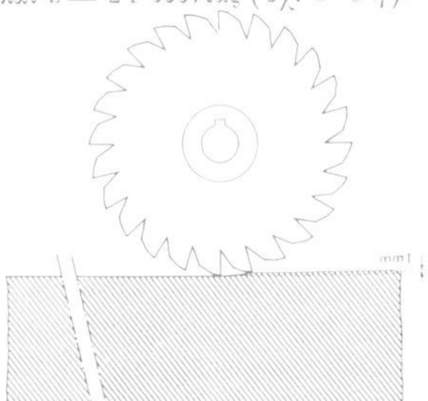
$$\upsilon = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{1\,000} = \frac{3{,}14 \times 3 \times 25{,}4 \times 1\,000}{1\,000} = 239 \text{ m/min.}$$

Ἐὰν ἀγνοήσωμε πρὸς στιγμὴν τὴν ταχύτητα, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ ὑπὸ κατεργασίαν πλακίδιον κατὰ τὴν κατεύθυνσιν τοῦ βέλους β, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμε μὲ ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν, ὅτι ἡ ὡς ἄνω εὑρεθεῖσα ταχύτης υ εἶναι ἡ σχετικὴ ταχύτης ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἔρχονται εἰς ἐπαφὴν τὸ πρὸς κατεργασίαν ὑλικὸν καὶ τὸ κοπτικὸν ἐργαλεῖον, δηλαδὴ ὅτι εἶναι ἡ κοπτικὴ ταχύτης τοῦ ἐργαλείου τῆς φραιζομηχανῆς.

Τὸ πρὸς κατεργασίαν τεμάχιον ἐκτελεῖ εἰς τὸν τόρνον μόνον περιστροφικὴν κίνησιν, τὸ δὲ κοπτικὸν ἐργαλεῖον μόνον ἰσοταχῆ κίνησιν. Ἀντιθέτως, εἰς τὴν φραιζομηχανήν, τὸ κοπτικὸν ἐργαλεῖον εἶναι ἐκεῖνο ποὺ ἐκτελεῖ μόνον περιστροφικὴν κίνησιν καὶ τὸ πρὸς κατεργασίαν τεμάχιον αὐτὸ ποὺ ἐκτελεῖ μόνον ἰσοταχῆ κίνησιν. Ἡ ταχύτης αὐτὴ μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ πρὸς κατεργασίαν τεμάχιον ὀνομάζεται ταχύτης προώσεως τοῦ τεμαχίου, μετρεῖται δὲ εἰς mm/min. Τὸ βάθος κοπῆς, προκειμένου μάλιστα περὶ κατεργασίας εἰς φραιζομηχανάς, ὁρίζεται ὡς τὸ βάθος κατὰ τὸ ὁποῖον εἰσέρχεται τὸ κοπτικὸν ἐργαλεῖον ἐντὸς τοῦ τεμαχίου (σχ. 3 · 3 ζ).

Ἡ κατάλληλος ἐκλογὴ τοῦ βάθους κοπῆς, τῆς ταχύτητος προώσεως καὶ τῆς κοπτικῆς ταχύτητος, παίζει τεράστιον ρόλον τόσον διὰ τὴν καλὴν ἐκμετάλλευσιν τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου καὶ τῆς φραιζομηχανῆς, ὅσον καὶ διὰ τὸ ἱκανοποιητικὸν χρονικὸν καὶ ποιοτικὸν ἀποτέλεσμα τῆς κατεργασίας. Ὡς ἐκ τούτου πρέπει πάντοτε νὰ ἀκολουθοῦμε μὲ σχολαστικότητα τὰς τιμάς, αἱ ὁποῖαι δίδονται εἰς τοὺς πίνακας, ποὺ ἔχουν συνταχθῆ μετὰ ἀπὸ πολυετεῖς καὶ ἐπιμόνους προσπαθείας διαπρεπῶν ἐρευνητῶν. Οἱ ἐν λόγῳ πίνακες ὁμοιάζουν πολὺ πρὸς ἐκείνους ποὺ ἐμελετήσαμε εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον προκειμένου περὶ κατεργασιῶν εἰς τόρνον. Ἡ μόνη διαφορά των εἶναι ὅτι ἡ πρόωσις δὲν ἀναγράφεται εἰς mm ἀνὰ στροφὴν τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου, ἀλλὰ εἰς mm ἀνὰ ὀδόντα τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου. Ἐὰν λοιπὸν ἀναγνώσωμε ὅτι ἡ πρόωσις πρέπει νὰ ληφθῆ π.χ. ἴση πρὸς 0,2 mm ἀνὰ ὀδόντα, αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ πρὸς κατεργασίαν τεμάχιον πρέπει νὰ διανύση διάστημα 0,2 mm κατὰ τὸν χρόνον ποὺ παρέρχεται ἀπὸ τῆς στιγμῆς κατὰ τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται ἕνας ὀδοὺς τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸ τεμάχιον, μέχρι τῆς στιγμῆς κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ ἔλθῃ εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸ τεμάχιον ὁ ἀμέσως ἑπόμενος ὀδοὺς τοῦ ἐργαλείου. Ἡ πρόωσις τοῦ τεμαχίου, ἐκφραζομένη εἰς τὴν γνώριμον μονάδα mm/στρ, θὰ εἶναι τότε ἴση πρὸς $z \times 0,2$ mm/στρ, ἐὰν z εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὀδόντων τοῦ χρησιμοποιουμένου κοπτικοῦ ἐργαλείου.

Παράδειγμα: Ἔστω ὅτι ἐπιθυμοῦμε νὰ λειάνωμε μίαν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν μικροῦ πλάτους καὶ μήκους s = 450 mm μὲ τὴν βοήθεια ἑνὸς κοπτικοῦ ἐργαλείου, ποὺ ἔχει ἐξωτερικὴν διάμετρον d = 120 mm καὶ z = 24 ὀδόντας (σχ. 3 · 3 η).



Σχ. 3·3 η.

Ὑλικὸν ἐργαλείου : ταχυχάλυψ
Ὑλικὸν τεμαχίου : μαλακὸς χάλυψ
Βάθος κοπῆς : 1 mm
Πρόωσις : 0,4 mm/ὀδόντα
Κοπτικὴ ταχύτης : 38 m/min.

Ἡ ταχύτης, μὲ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ περιστρέφεται τὸ κοπτικὸν ἐργαλεῖον, εὑρίσκεται ἀμέσως ἀπὸ τὸ σχῆμα 3 · 3 ε ἴση πρὸς 100 στρ/min.

Ἡ πρόωσις τοῦ τεμαχίου δίδεται ἴση πρὸς 0,4 mm ἀνὰ ὀδόντα ἢ

$$24 \frac{\text{ὀδόντ.}}{\text{στροφὴν}} \times 0{,}4 \frac{\text{mm}}{\text{ὀδόντα}} = 9{,}6 \text{ mm/στρ.}$$

Ἡ ταχύτης προώσεως τοῦ τεμαχίου εἰς mm/min θὰ εἶναι συνεπῶς ἴση πρός:

$$\upsilon_s = 9{,}6 \frac{\text{mm}}{\text{στρ.}} \times 100 \frac{\text{στρ.}}{\text{min}} = 960 \frac{\text{mm}}{\text{στρ}}$$

ὁπότε ἡ διάρκεια τῆς λειάνσεως εὑρίσκεται εὐκόλως ἴση πρός:

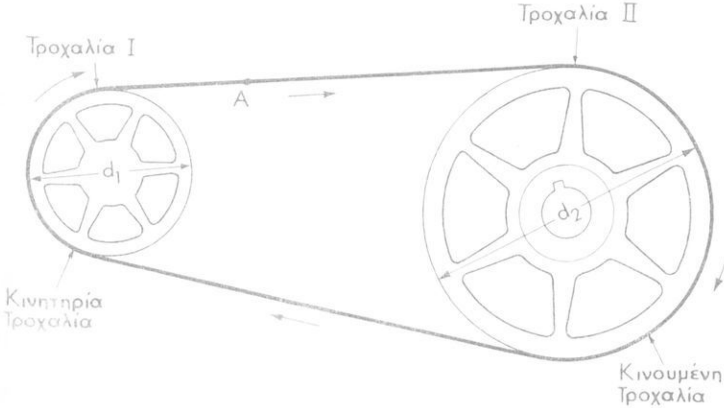
$$t = \frac{s}{\upsilon_s} = \frac{450}{960} = 0{,}47 \text{ min.}$$

3·4 Ἡ μετάδοσις τῆς περιστροφικῆς κινήσεως ὑπὸ ἑνὸς ἄξονος (κινητηρίου) εἰς ἕνα ἄλλον ἄξονα (κινούμενον).

Ὁ ἁπλούστερος τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον εἶναι δυνατὸν νὰ θέσωμε ἕνα ἀντικείμενον εἰς περιστροφικὴν κίνησιν, εἶναι βεβαίως ἡ ἀπ' εὐθείας σύνδεσις τοῦ ἀντικειμένου αὐτοῦ μὲ τὸν ἄξονα ἑνὸς ἠλεκτροκινητῆρος. Μία σύνδεσις ὅμως τοῦ εἴδους αὐτοῦ εἶναι, ὅπως γνωρίζομε, κάτι τὸ ἀσύνηθες εἰς τὴν πρᾶξιν, διότι μᾶς δεσμεύει τόσον ὡς πρὸς τὴν τιμὴν περιστροφικῆς ταχύτητος, τὴν ὁποίαν θέλομε νὰ δώσωμε εἰς τὸ ἀντικείμενον, ὅσον καὶ ὡς πρὸς τὴν θέσιν, εἰς τὴν ὁποίαν θέλομε νὰ τοποθετήσωμε τὸ ἀντικείμενον μέσα εἰς τὸν χῶρον ἐργασίας. Διὰ τοὺς λόγους αὐτοὺς παρεμβάλλονται σχεδὸν πάντοτε μεταξὺ τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος καὶ τοῦ ἀντικειμένου ὡρισμέναι διατάξεις, μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ὁποίων προσδίδομε εἰς τὸ ἀντικείμενον μεγάλην ποικιλίαν τιμῶν περιστροφικῆς ταχύτητος καὶ μάλιστα χωρὶς νὰ μᾶς ἀπασχολῇ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς ἡ συγκεκριμένη θέσις τοῦ ἀντικειμένου μέσα εἰς τὸν χῶρον ἐργασίας. Αὐτὰς ἀκριβῶς τὰς διατάξεις θὰ μελετήσωμε λεπτομερῶς εἰς τὴν παράγραφον αὐτήν.

1. Μετάδοσις περιστροφικῆς κινήσεως μέσω ἑνὸς ζεύγους τροχαλιῶν καὶ ἱμάντος.

Ἐὰν συνδέσωμε δύο τροχαλίας μεταξύ των μὲ τὴν βοήθειαν ἱμάντος, ὁ ὁποῖος ὅμως νὰ εἶναι καλὰ τεντωμένος, ὥστε νὰ ἀποφύγωμε κάθε ἐνδεχόμενον ὀλισθήσεως εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ μεταφέρωμε τὴν κίνησιν τῆς μιᾶς τροχαλίας εἰς τὴν ἄλλην (σχ. 3·4α).



Σχ. 3·4 α.

Πράγματι, ἔστω ὅτι ἔχομεν δύο τροχαλίας τὰς I καὶ II, αἱ ὁποῖαι συνδέονται μὲ ἕναν ἱμάντα. Ἐξ αὐτῶν ἔστω ὅτι ἡ τροχαλία I ἔχει διάμετρον d_1 καὶ περιστρέφεται μὲ ταχύτητα n_1 στροφὰς εἰς κάθε λεπτὸν τῆς ὥρας. Καθὼς γνωρίζομε (ἄσκησις 1 τῆς παραγράφου 3·3) ἡ ταχύτης ἑνὸς τυχόντος σημείου A τοῦ ἱμάντος εἶναι ἴση, κατ᾽ἀριθμητικὴν τιμήν, μὲ τὴν περιφερειακὴν ταχύτητα τῆς τροχαλίας I, δηλαδὴ ἴση πρός:

$$\upsilon_A = \upsilon_1 = \frac{\pi d_1 \cdot n_1}{60}.$$

Ἐφ᾽ὅσον ὅμως, συμφώνως πρὸς τὴν ὑπόθεσιν ποὺ ἐκάναμε, δὲν ὑπάρχει σχετικὴ κίνησις μεταξὺ ἱμάντος καὶ τροχαλίας II, ἡ περιφερειακὴ ταχύτης υ_2 τῆς τροχαλίας II θὰ εἶναι καὶ αὐτὴ ἴση κατ᾽ἀριθμητικὴν τιμὴν μὲ τὴν ταχύτητα υ_A τοῦ σημείου Α. Αὐτὸ ὅμως σημαίνει ὅτι καὶ ἡ τροχαλία II κινεῖται καὶ μάλιστα μὲ περιστροφικὴν ταχύτητα n_2, ἡ ὁποία συνδέεται μὲ τὴν υ_2 βάσει τοῦ γνωστοῦ τύπου:

$$\upsilon_2 = \frac{\pi d_2 \cdot n_2}{60}$$

ὅπου d_2 εἶναι ἡ διάμετρος τῆς τροχαλίας II.

Δοθέντος τώρα ὅτι $\upsilon_1 = \upsilon_A$ καὶ $\upsilon_2 = \upsilon_A$, συμπεραίνομε ὅτι $\upsilon_1 = \upsilon_2$, δηλαδὴ ὅτι αἱ περιφερειακαὶ ταχύτητες τῶν δύο τροχαλιῶν ἔχουν τὴν ἰδίαν ἀριθμητικὴν τιμήν.

Ἡ ἰσότης $\upsilon_1 = \upsilon_2$ συνεπάγεται τὴν $\dfrac{\pi d_1 \cdot n_1}{60} = \dfrac{\pi d_2 \cdot n_2}{60}$

$$\text{δηλαδὴ τὴν } d_1 n_1 = d_2 n_2. \tag{3}$$

Ἂν ἡ ἰσότης αὐτὴ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{d_1}{d_2}$ βλέπομε ἀμέσως ὅτι ὁ λόγος τῶν περιστροφικῶν ταχυτήτων, μὲ τὰς ὁποίας κινοῦνται αἱ δύο τροχαλίαι, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὸν λόγον τῶν ἐξωτερικῶν διαμέτρων των. Ἐὰν δηλαδὴ ἡ διάμετρος τῆς τροχαλίας II εἶναι 3 φορὰς μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου τῆς τροχαλίας I, αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ τροχαλία II θὰ κινηθῇ μὲ περιστροφικὴν ταχύτητα 3 φορὰς μικροτέραν τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος τῆς τροχαλίας I.

Εἰς τὴν πραγματικότητα ὅμως ὑπάρχει πάντοτε κάποια ὀλίσθησις μεταξὺ ἱμάντος καὶ τροχαλιῶν. Ἔτσι, δὲν ἰσχύουν αἱ σχέσεις $\upsilon_1 = \upsilon_A$ καὶ $\upsilon_2 = \upsilon_A$ ἀλλὰ αἱ $\upsilon_1 > \upsilon_A$ καὶ $\upsilon_A > \upsilon_2$,

$$\text{δηλαδὴ ἡ } n_2 < \frac{d_1}{d_2}\, n_1.$$

Συγκεκριμένως, ἐὰν δεχθοῦμε ὅτι ἡ ὀλίσθησις μεταξὺ κινητηρίου τροχαλίας καὶ ἱμάντος ἀνέρχεται π.χ. εἰς 2 %, αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ ταχύτης υ_A τοῦ σημείου Α θὰ εἶναι εἰς τὴν πραγματικότητα κατὰ 2 % μικροτέρα τῆς περιφερειακῆς ταχύτητος τῆς τροχαλίας I, δηλαδὴ ἴση πρός:

$$\upsilon_A = \upsilon_1 - 0{,}02\ \upsilon_1 = (1 - 0{,}02)\ \upsilon_1.$$

Ἀντιστοίχως, ἐὰν δεχθοῦμε ὅτι ἡ ὀλίσθησις μεταξὺ ἱμάντος καὶ κινουμένης τροχαλίας ἀνέρχεται π.χ. εἰς 1,5 %, αὐτὸ θὰ σημαίνῃ ὅτι ἡ περιφερειακὴ ταχύτης τῆς τροχαλίας II θὰ εἶναι κατὰ 1,5 % μικροτέρα τῆς ταχύτητος υ_A, δηλαδὴ ἴση πρός:

$\upsilon_2 = \upsilon_A - 0{,}015\,\upsilon_A = (1 - 0{,}015)\,\upsilon_A = (1 - 0{,}015)\cdot(1 - 0{,}02)\,\upsilon_1$ ἢ $\upsilon_2 = \upsilon_1 - 0{,}015\ \upsilon_1 - 0{,}02\,\upsilon_1 + 0{,}0003\ \upsilon_1$ ἢ κατὰ μεγάλην προσέγγισιν $\upsilon_2 = \upsilon_1 - (0{,}015 + 0{,}02)\ \upsilon_1$.

Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι ἡ περιφερειακὴ ταχύτης τῆς κινουμένης τροχαλίας δὲν θὰ εἶναι εἰς τὴν πραγματικότητα ἴση μὲ τὴν περιφερειακὴν ταχύτητα τῆς κινητηρίου τροχαλίας, ἀλλὰ κατὰ 2 % + 1,5 % = 3,5 % μικροτέρα ἀπὸ αὐτήν.

Ἔτσι, ἡ ἱμαντοκίνησις δὲν διέπεται ἀπὸ τὴν θεωρητικὴν σχέσιν $n_2 = \dfrac{d_1}{d_2}\cdot n_1$ ἀλλὰ ἀπὸ τήν:

$$n_2 = [1 - (0{,}02 + 0{,}0\,15\,])\ \frac{d_1}{d_2}\,n_1 = 0{,}965\cdot\frac{d_1}{d_2}\,n_1.$$

Διὰ τὰς πρακτικάς μας ἐφαρμογὰς δυνάμεθα γενικῶς νὰ δεχθοῦμε ὅτι:

$$n_2 = (0{,}95\ \ldots\ldots\ 0{,}98)\cdot\frac{d_1}{d_2}\cdot n_1 \qquad (4)$$

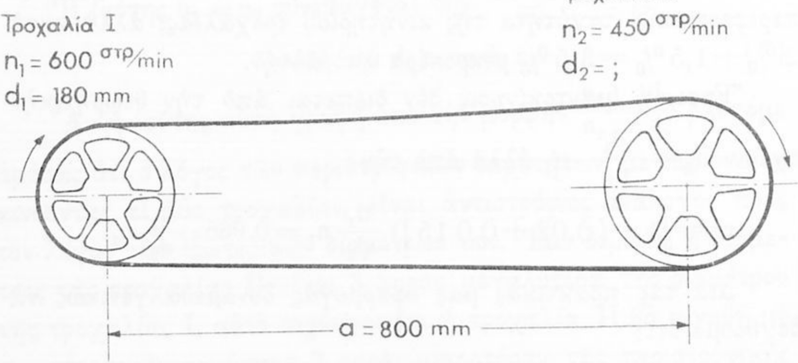
Ὁ λόγος $\dfrac{n_2}{n_1}$ ὀνομάζεται συνήθως *σχέσις μεταδόσεως* τῆς κινήσεως.

Παράδειγμα: Ὁ ἄξων ἑνὸς ἠλεκτροκινητῆρος καὶ ὁ ἄξων μιᾶς μηχανῆς, τὴν ὁποίαν θέλομε νὰ θέσωμε εἰς περιστροφικὴν κίνησιν, εἶναι μεταξύ των παράλληλοι καὶ ἀπέχουν ἀπόστασιν $\alpha = 800$ mm (σχ. 3 · 4 β). Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος εἶναι ἴση πρὸς $n_1 = 600$ στρ/min, ἡ δὲ περιστροφική ταχύτης, τὴν ὁποίαν θέλομε νὰ προσδώσωμε εἰς τὴν μηχανὴν εἶναι $n_2 = 450$ στρ/min.

Ἐπάνω εἰς τὸν ἄξονα τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος εἶναι σφηνωμένη μία τροχαλία ἐξωτερικῆς διαμέτρου $d_1 = 180$ mm. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ διάμετρος τῆς τροχαλίας, ποὺ θὰ σφηνωθῇ ἐπάνω εἰς τὴν κυρίαν ἄτρακτον τῆς μηχανῆς;

Ἐὰν χρησιμοποιήσωμε τὴν θεωρητικὴν σχέσιν $n_2 = \frac{d_1}{d_2} \cdot n_1$ τύπος (3) εὑρίσκομε μὲ μεγάλην εὐκολίαν ὅτι:

$$d_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot d_1 = \frac{600}{450} \cdot 180 = 240 \text{ mm}.$$



Σχ. 3·4 β.

Ἐὰν ὅμως τοποθετήσωμε ἐπάνω εἰς τὸν ἄξονα τῆς μηχανῆς μίαν τροχαλίαν μὲ ἐξωτερικὴν διάμετρον 240 mm, εἶναι βέβαιον, ὅτι ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τῆς μηχανῆς δὲν θὰ εἶναι ἴση πρὸς 450 στρ/min, ἀλλὰ μικροτέρα ἀπὸ αὐτήν. Θὰ πρέπει συνεπῶς νὰ λάβωμε ὑπ' ὄψιν μας τὴν ἀναπόφευκτον ὀλίσθησιν, ποὺ δημιουργεῖται μεταξὺ ἱμάντος καὶ τροχαλιῶν καὶ ἡ ὁποία ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τὴν μείωσιν τῆς πραγματικῆς περιφερειακῆς ταχύτητος τῆς κινουμένης τροχαλίας κατὰ 2 ἕως 5 τοῖς ἑκατὸν ὡς πρὸς τὴν θεωρητικὴν ταχύτητα. (Τύπος 4). Ἡ δυσκολία αὐτὴ εἶναι δυνατὸν νὰ παρακαμφθῇ εἰς τὴν πρᾶξιν, ἐὰν αὐξήσωμε τὴν τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{d_1}{d_2}$ κατὰ 2 ἕως 5 τοῖς ἑκατόν· διὰ νὰ τὸ ἐπιτύχωμε, ἠμποροῦμε εἴτε νὰ αὐξήσωμε τὸ d_1 εἴτε νὰ ἐλαττώσωμε τὸ d_2. Εἰς τὸ παράδειγμά μας ἡ κινητηρία τροχαλία μὲ διάμετρον $d_1 = 180$ mm ἐλήφθη ὅτι εἶναι ἤδη σφηνωμένη ἐπάνω εἰς τὸν ἄξονα τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος· δυνάμεθα ὡς ἐκ τούτου νὰ αὐξήσωμε τὴν τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{d_1}{d_2}$ μόνον ἐὰν ἐλαττώσωμε τὴν διάμετρον τῆς κινουμένης τροχαλίας κατὰ 2 ἕως 5 τοῖς ἑκατὸν ὡς πρὸς τὴν θεωρητικὴν τιμήν της. Ἔτσι καταλήγομε εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ διάμετρος τῆς κινουμένης τροχαλίας πρέπει νὰ ληφθῇ ἴση πρὸς $d'_2 = (0{,}95 \ldots\ldots 0{,}98)\, d_2$ π. χ. ἴση πρὸς $d'_2 = 0{,}96 \cdot d_2 = 0{,}96 \times 240 \simeq 230$ mm, πάντως ὅμως μικροτέρα τῶν 240 mm.

2. *Μέσω πολλῶν ζευγῶν τροχαλιῶν καὶ ἱμάντων.*

Ἤδη ὅμως θὰ ἔχῃ γεννηθῇ ἡ ἀπορία: Τί μᾶς χρειάζεται τὸ μέγεθος $\alpha = 800$ mm, τὸ ὁποῖον μᾶς ἐδόθη εἰς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προηγουμένου παραδείγματος, ἐνῶ δὲν τὸ ἐλάβαμε ὑπ' ὄψιν κατὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος; Ἂς ὑποθέσωμε ὅτι ἠθέλαμε νὰ προσδώσωμε εἰς τὴν μηχανὴν περιστροφικὴν ταχύτητα $n_2 = 70$ στρ/min ἀντὶ τῆς $n_2 = 450$ στρ/min. Ἐὰν ἐφαρμόσωμε τὸν τύπον 4 (ἐδ. 3 · 4 - 1), θὰ καταλήξωμε, ὅπως καὶ πρὶν ἐργαζόμενοι, εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ διάμετρος τῆς κινουμένης τροχαλίας θὰ ἔπρεπε νὰ ληφθῇ ἴση πρὸς $d_2 = 0{,}96\, d_1 \cdot \frac{n_1}{n_2} = 0{,}96 \times 180 \times \frac{600}{75} = 1\,480$ mm. Θὰ ἀγοράζαμε λοιπὸν μίαν τόσον μεγάλην τροχαλίαν καὶ μοιραίως θὰ εὑρισκόμεθα πρὸ ἐκπλήξεως, ὅταν θὰ ἐπεδιώκαμε νὰ τὴν συνδέσωμε μὲ τὸν ἄξονα τῆς μηχανῆς (σχ. 3 · 4 γ).

παμε, αἱ τροχαλίαι II καὶ III εἶναι σφηνωμέναι ἐπάνω εἰς τὸν ἴδιον ἄξονα. Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι:

$$n_4 = \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{d_3}{d_4} \cdot n_1 = \frac{\text{Σύνολον δεδομένων, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὰς κινητηρίας τροχαλίας}}{\text{Σύνολον ὑπολοίπων δεδομένων, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὰς κινουμένας τροχαλίας}}$$

Ἔτσι, ἐὰν δίδωνται τὰ μεγέθη n_1, d_1, d_2, d_3 καὶ d_4 δυνάμεθα εὐκολώτατα νὰ ὑπολογίσωμε τὴν περιστροφικὴν ταχύτητα τῆς κινουμένης τροχαλίας IV.

Ἐὰν πάλι δίδωνται τὰ μεγέθη n_1, n_4, d_1, d_2 καὶ d_3, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμε τὴν διάμετρον τῆς τροχαλίας IV, ἂν χρησιμοποιήσωμε τὸν τύπον:

$$d_4 = \frac{n_1}{n_4} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot d_3 = \frac{\text{Σύνολον δεδομένων, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὰς κινητηρίας τροχαλίας}}{\text{Σύνολον ὑπολοίπων δεδομένων, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὰς κινουμένας τροχαλίας}}$$

Εἰς τὴν πρᾶξιν θὰ πρέπει βεβαίως νὰ λαμβάνωμε ὑπ᾽ ὄψιν μας καὶ τὸ φαινόμενον τῆς ὀλισθήσεως, τὸ ὁποῖον, καθὼς γνωρίζομε, ἀντιμετωπίζεται εἴτε διὰ τῆς ἐλαττώσεως τῶν « κινουμένων » μεγεθῶν, εἴτε διὰ τῆς αὐξήσεως τῶν « κινητηρίων » μεγεθῶν κατὰ ἕνα ὡρισμένον συνολικῶς ποσοστόν. Τὸ ποσοστὸν αὐτὸ ἐξαρτᾶται ἀπὸ πολλοὺς παράγοντας, ὅπως π.χ. τὸ εἶδος καὶ τὴν ποιότητα τῶν χρησιμοποιουμένων ἱμάντων, τὰς ἐπὶ μέρους σχέσεις μεταδόσεως, τὴν ὕπαρξιν ἢ ὄχι τροχοῦ τανύσεως, τὸ μέγεθος τῆς μεταφερομένης ἰσχύος κ.ἄ., δίδεται δὲ εἰς τὰ εἰδικὰ κείμενα ἐπὶ ἱμαντοκινήσεως (Βιβλίον « Στοιχεῖα Μηχανῶν »).

Γενικῶς, ἐὰν μεταξὺ κινητηρίας καὶ κινουμένης τροχαλίας παρεμβάλλωνται πολλὰ ζεύγη ἐνδιαμέσων τροχαλιῶν, ὁ τύπος, ὁ ὁποῖος μᾶς δίδει τὴν περιστροφικὴν ταχύτητα τοῦ ἄξονος, εἰς τὸν ὁποῖον θέλομε τελικῶς νὰ μεταφέρωμε τὴν κίνησιν, εἶναι:

θεωρητικὴν ταχύτητα. (Τύπος 4). Ἡ δυσκολία αὐτὴ εἶναι δυνατὸν νὰ παρακαμφθῇ εἰς τὴν πρᾶξιν, ἐὰν αὐξήσωμε τὴν τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{d_1}{d_2}$ κατὰ 2 ἕως 5 τοῖς ἑκατόν· διὰ νὰ τὸ ἐπιτύχωμε, ἠμποροῦμε εἴτε νὰ αὐξήσωμε τὸ d_1 εἴτε νὰ ἐλαττώσωμε τὸ d_2. Εἰς τὸ παράδειγμά μας ἡ κινητηρία τροχαλία μὲ διάμετρον $d_1 = 180$ mm ἐλήφθη ὅτι εἶναι ἤδη σφηνωμένη ἐπάνω εἰς τὸν ἄξονα τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος· δυνάμεθα ὡς ἐκ τούτου νὰ αὐξήσωμε τὴν τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{d_1}{d_2}$ μόνον ἐὰν ἐλαττώσωμε τὴν διάμετρον τῆς κινουμένης τροχαλίας κατὰ 2 ἕως 5 τοῖς ἑκατὸν ὡς πρὸς τὴν θεωρητικὴν τιμήν της. Ἔτσι καταλήγομε εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ διάμετρος τῆς κινουμένης τροχαλίας πρέπει νὰ ληφθῇ ἴση πρὸς $d'_2 = (0{,}95 \ldots\ldots 0{,}98)\, d_2$ π. χ. ἴση πρὸς $d'_2 = 0{,}96 \cdot d_2 = 0{,}96 \times 240 \simeq 230$ mm, πάντως ὅμως μικροτέρα τῶν 240 mm.

2. *Μέσω πολλῶν ζευγῶν τροχαλιῶν καὶ ἱμάντων.*

Ἤδη ὅμως θὰ ἔχῃ γεννηθῇ ἡ ἀπορία: Τί μᾶς χρειάζεται τὸ μέγεθος $\alpha = 800$ mm, τὸ ὁποῖον μᾶς ἐδόθη εἰς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προηγουμένου παραδείγματος, ἐνῶ δὲν τὸ ἐλάβαμε ὑπ' ὄψιν κατὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος; Ἂς ὑποθέσωμε ὅτι ἠθέλαμε νὰ προσδώσωμε εἰς τὴν μηχανὴν περιστροφικὴν ταχύτητα $n_2 = 70$ στρ/min ἀντὶ τῆς $n_2 = 450$ στρ/min. Ἐὰν ἐφαρμόσωμε τὸν τύπον 4 (ἐδ. 3 · 4 - 1), θὰ καταλήξωμε, ὅπως καὶ πρὶν ἐργαζόμενοι, εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ διάμετρος τῆς κινουμένης τροχαλίας θὰ ἔπρεπε νὰ ληφθῇ ἴση πρὸς $d_2 = 0{,}96\, d_1 \cdot \frac{n_1}{n_2} = 0{,}96 \times 180 \times \frac{600}{75} = 1\,480$ mm. Θὰ ἀγοράζαμε λοιπὸν μίαν τόσον μεγάλην τροχαλίαν καὶ μοιραίως θὰ εὑρισκόμεθα πρὸ ἐκπλήξεως, ὅταν θὰ ἐπεδιώκαμε νὰ τὴν συνδέσωμε μὲ τὸν ἄξονα τῆς μηχανῆς (σχ. 3 · 4 γ).

παμε, αἱ τροχαλίαι II καὶ III εἶναι σφηνωμέναι ἐπάνω εἰς τὸν ἴδιον ἄξονα. Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι :

$$n_4 = \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{d_3}{d_4} \cdot n_1 = \frac{\text{Σύνολον δεδομένων, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὰς κινητηρίας τροχαλίας}}{\text{Σύνολον ὑπολοίπων δεδομένων, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὰς κινουμένας τροχαλίας}}$$

Ἔτσι, ἐὰν δίδωνται τὰ μεγέθη n_1, d_1, d_2, d_3 καὶ d_4 δυνάμεθα εὐκολώτατα νὰ ὑπολογίσωμε τὴν περιστροφικὴν ταχύτητα τῆς κινουμένης τροχαλίας IV.

Ἐὰν πάλι δίδωνται τὰ μεγέθη n_1, n_4, d_1, d_2 καὶ d_3, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμε τὴν διάμετρον τῆς τροχαλίας IV, ἂν χρησιμοποιήσωμε τὸν τύπον :

$$d_4 = \frac{n_1}{n_4} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot d_3 = \frac{\text{Σύνολον δεδομένων, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὰς κινητηρίας τροχαλίας}}{\text{Σύνολον ὑπολοίπων δεδομένων, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὰς κινουμένας τροχαλίας}}$$

Εἰς τὴν πρᾶξιν θὰ πρέπει βεβαίως νὰ λαμβάνωμε ὑπ' ὄψιν καὶ τὸ φαινόμενον τῆς ὀλισθήσεως, τὸ ὁποῖον, καθὼς γνωρίζομε, ἀντιμετωπίζεται εἴτε διὰ τῆς ἐλαττώσεως τῶν « κινουμένων » μεγεθῶν, εἴτε διὰ τῆς αὐξήσεως τῶν « κινητηρίων » μεγεθῶν κατὰ ἕνα ὡρισμένον συνολικῶς ποσοστόν. Τὸ ποσοστὸν αὐτὸ ἐξαρτᾶται ἀπὸ πολλοὺς παράγοντας, ὅπως π.χ. τὸ εἶδος καὶ τὴν ποιότητα τῶν χρησιμοποιουμένων ἱμάντων, τὰς ἐπὶ μέρους σχέσεις μεταδόσεως, τὴν ὕπαρξιν ἢ ὄχι τροχοῦ τανύσεως, τὸ μέγεθος τῆς μεταφερομένης ἰσχύος κ.ἄ., δίδεται δὲ εἰς τὰ εἰδικὰ κείμενα ἐπὶ ἱμαντοκινήσεως (Βιβλίον « Στοιχεῖα Μηχανῶν »).

Γενικῶς, ἐὰν μεταξὺ κινητηρίας καὶ κινουμένης τροχαλίας παρεμβάλλωνται πολλὰ ζεύγη ἐνδιαμέσων τροχαλιῶν, ὁ τύπος, ὁ ὁποῖος μᾶς δίδει τὴν περιστροφικὴν ταχύτητα τοῦ ἄξονος, εἰς τὸν ὁποῖον θέλομε τελικῶς νὰ μεταφέρωμε τὴν κίνησιν, εἶναι :

$$n_{2\kappa} = \frac{\text{Σύνολον «κινητηρίων» μεγεθῶν}}{\text{Σύνολον ὑπολοίπων κινουμένων μεγεθῶν}} = \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{d_3}{d_4} \cdot \frac{d_5}{d_6} \cdots$$

$$\cdots \frac{d_{2\kappa-1}}{d_{2\kappa}} \cdot n_1 .$$

Παρατηροῦμε ὅτι εἰς τὸν γενικὸν αὐτὸν τύπον τὰ μεγέθη, ποὺ ἀναφέρονται (ἀντιστοιχοῦν) εἰς τὰς κινητηρίας τροχαλίας, ἔχουν ὡς δείκτην περιττὸν ἀριθμόν, ἐνῶ τὰ μεγέθη, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς κινουμένας τροχαλίας, ἔχουν ὡς δείκτην ἄρτιον ἀριθμόν.

Εἰς τὰ προβλήματα, ποὺ ἀντιμετωπίζομε καθημερινῶς εἰς τὴν πρᾶξιν, εἶναι κατὰ κανόνα γνωστὰ μόνον τὰ δύο μεγέθη n_1 καὶ $n_{2\kappa}$, δηλαδὴ ἡ σχέσις μεταδόσεως $\frac{n_{2\kappa}}{n_1}$, τὴν ὁποίαν ἐπιδιώκομε νὰ ἐπιτύχωμε. Ἐν τούτοις ὑπάρχουν σχεδὸν πάντοτε ὡρισμένα ἄλλα δεδομένα ἢ περιορισμοί, ὅπως π.χ.:

— Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ κινητηρίου καὶ κινουμένου ἄξονος. Αὐτὴ καθορίζεται ἀπὸ τὰς θέσεις ὅπου εἶναι ἐγκατεστημένοι ὁ ἠλεκτροκινητὴρ καὶ ἡ μηχανή, εἰς τὴν ὁποίαν ἐπιθυμοῦμε νὰ μεταδώσωμε περιστροφικὴν κίνησιν.

— Αἱ διάμετροι τῶν ἐπὶ μέρους κινητηρίων τροχαλιῶν, αἱ ὁποῖαι δὲν δύνανται νὰ ληφθοῦν μικρότεραι ἑνὸς ὁρίου, διότι τότε ἡ ὀλίσθησις μεταξὺ ἱμάντων καὶ τροχαλιῶν θὰ εἶναι σημαντική, μὲ ἀποτέλεσμα σημαντικὴν ἀπώλειαν ἐνεργείας καὶ ταχεῖαν φθορὰν τῶν ἱμάντων.

— Αἱ θέσεις τῶν ἐνδιαμέσων ἀξόνων κινήσεως, αἱ ὁποῖαι περιορίζονται συνήθως ἀπὸ τὴν ὕπαρξιν τοῦ δαπέδου, τῆς ὀροφῆς, τῶν τοίχων, ἄλλων μηχανημάτων κλπ.

— Αἱ τροχαλίαι, αἱ ὁποῖαι παραμένουν τυχὸν ἀχρησιμοποίητοι εἰς τὴν ἀποθήκην καὶ αἱ ὁποῖαι καλὸν εἶναι νὰ χρησιμοποιηθοῦν, διότι τότε θὰ ἐξοικονομήσωμε τὴν δαπάνην ἀγορᾶς ἢ κατασκευῆς νέων τροχαλιῶν.

μέσως ὅτι ὁ λόγος $\frac{d_1}{d_2}$ τῶν διαμέτρων κινητηρίας καὶ κινουμένης τροχαλίας πρέπει νὰ ληφθῇ ἴσος πρὸς τὴν σχέσιν μεταδόσεως $\frac{n_2}{n_1}$, ποὺ εἶναι γνωστὴ καὶ ἴση πρὸς $\frac{60}{600}=\frac{1}{10}$. Εἶναι ἐν τούτοις φανερὸν ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρα ζεύγη τροχαλιῶν, τὰ ὁποῖα ἁρμόζουν εἰς τὴν σχέσιν $\frac{d_1}{d_2}=\frac{1}{10}$. Συμφώνως λοιπὸν μὲ τὴν νοοτροπίαν ποὺ ἐπικρατεῖ εἰς τὰ μαθηματικά, θὰ πρέπει ὁπωσδήποτε νὰ ἐκλέξωμε τὴν διάμετρον τῆς μιᾶς τροχαλίας αὐθαιρέτως. (Ἐφ' ὅσον ἔχομε μίαν ἐξίσωσιν μὲ δύο ἀγνώστους). Τὸ πρόβλημα ὅμως τὸ ὁποῖον ἀντιμετωπίζομε δὲν εἶναι πρόβλημα μαθηματικῶν ἀλλὰ πρόβλημα φυσικῆς· ἡ ἐκλογὴ ἑπομένως τῶν τιμῶν δὲν θὰ πρέπει νὰ γίνῃ αὐθαιρέτως, ἀλλὰ μὲ βάσιν οἰκονομικὰ κριτήρια. Συγκεκριμένως, συμφέρει ἡ προμήθεια τροχαλιῶν μὲ ὅσον τὸ δυνατὸν μικροτέρας διαμέτρους, διότι τότε τὸ κόστος ἀγορᾶς καὶ ἐγκαταστάσεώς των θὰ εἶναι μικρόν. Δυστυχῶς ὅμως, ἡ ὁμαλὴ λειτουργία τοῦ ὅλου συστήματος μᾶς ἐπιβάλλει περιορισμοὺς ὡς πρὸς τὸ μέγεθος τῶν τροχαλιῶν ποὺ θὰ χρησιμοποιηθοῦν. Ἔτσι, ὑπὸ τὸ βάρος τῶν ἀνωτέρω περιορισμῶν, ἡ πλέον οἰκονομικὴ λύσις εἶναι ἡ ἐκλογὴ κινητηρίου τροχαλίας μὲ διάμετρον $d_1 = 120$ mm. Ἡ διάμετρος τῆς κινουμένης τροχαλίας προκύπτει τότε ἴση πρὸς $d_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot d_1 = \frac{600}{60} \cdot 120 = 1200$ mm, πρᾶγμα ποὺ σημαίνει ὅτι, διὰ νὰ ἐπιτύχωμε τὴν ἐπιδιωκομένην μετάδοσιν κινήσεως, θὰ πρέπει νὰ τρυπήσωμε τὴν ὀροφήν! (σχ. 3·4ζ). Μία λύσις τοῦ εἴδους αὐτοῦ, ἐκτὸς τοῦ ὅτι εἶναι πρακτικῶς ἀνεφάρμοστος, δὲν θὰ προκαλέσῃ καὶ ὁμαλὴν λειτουργίαν τοῦ ὅλου συστήματος, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέτρων τῶν δύο τροχαλιῶν εἶναι τελικῶς μεγαλύτερον ἀπὸ τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ κινητηρίου καὶ κινουμένου ἄξονος. Μοιραίως λοιπὸν θὰ πρέπει νὰ ἐγκαταλείψωμε τὴν ἰδέαν τῆς ἀπ' εὐθείας μεταδόσεως τῆς κινήσεως ἀπὸ τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος εἰς τὸ μηχά-

$$n_{2\kappa} = \frac{\text{Σύνολον «κινητηρίων» μεγεθῶν}}{\text{Σύνολον ὑπολοίπων κινουμένων μεγεθῶν}} = \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{d_3}{d_4} \cdot \frac{d_5}{d_6} \cdots$$

$$\cdots \frac{d_{2\kappa-1}}{d_{2\kappa}} \cdot n_1.$$

Παρατηροῦμε ὅτι εἰς τὸν γενικὸν αὐτὸν τύπον τὰ μεγέθη, ποὺ ἀναφέρονται (ἀντιστοιχοῦν) εἰς τὰς κινητηρίας τροχαλίας, ἔχουν ὡς δείκτην περιττὸν ἀριθμόν, ἐνῶ τὰ μεγέθη, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς κινουμένας τροχαλίας, ἔχουν ὡς δείκτην ἄρτιον ἀριθμόν.

Εἰς τὰ προβλήματα, ποὺ ἀντιμετωπίζομε καθημερινῶς εἰς τὴν πρᾶξιν, εἶναι κατὰ κανόνα γνωστὰ μόνον τὰ δύο μεγέθη n_1 καὶ $n_{2\kappa}$, δηλαδὴ ἡ σχέσις μεταδόσεως $\frac{n_{2\kappa}}{n_1}$, τὴν ὁποίαν ἐπιδιώκομε νὰ ἐπιτύχωμε. Ἐν τούτοις ὑπάρχουν σχεδὸν πάντοτε ὡρισμένα ἄλλα δεδομένα ἢ περιορισμοί, ὅπως π.χ.:

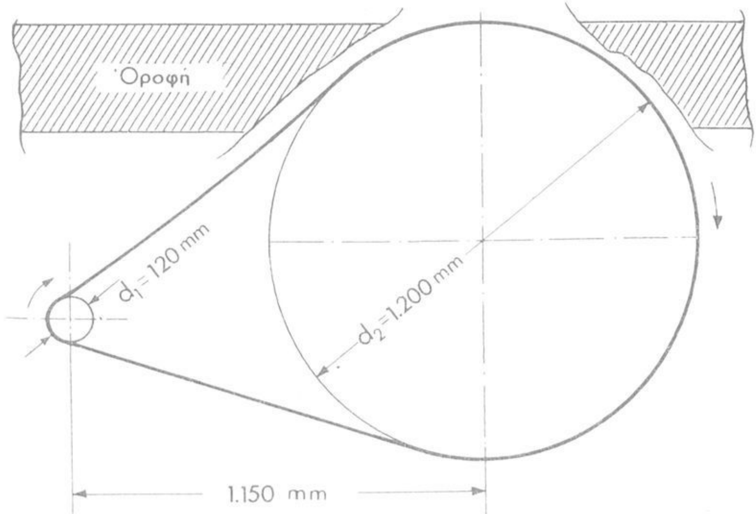
— Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ κινητηρίου καὶ κινουμένου ἄξονος. Αὐτὴ καθορίζεται ἀπὸ τὰς θέσεις ὅπου εἶναι ἐγκατεστημένοι ὁ ἠλεκτροκινητὴρ καὶ ἡ μηχανή, εἰς τὴν ὁποίαν ἐπιθυμοῦμε νὰ μεταδώσωμε περιστροφικὴν κίνησιν.

— Αἱ διάμετροι τῶν ἐπὶ μέρους κινητηρίων τροχαλιῶν, αἱ ὁποῖαι δὲν δύνανται νὰ ληφθοῦν μικρότεραι ἑνὸς ὁρίου, διότι τότε ἡ ὀλίσθησις μεταξὺ ἱμάντων καὶ τροχαλιῶν θὰ εἶναι σημαντική, μὲ ἀποτέλεσμα σημαντικὴν ἀπώλειαν ἐνεργείας καὶ ταχεῖαν φθορὰν τῶν ἱμάντων.

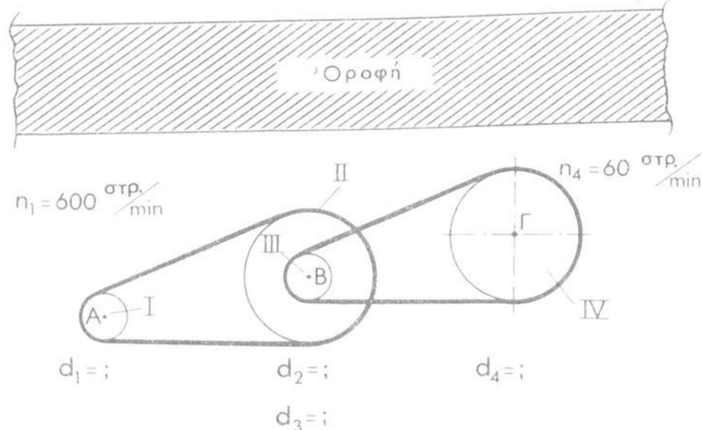
— Αἱ θέσεις τῶν ἐνδιαμέσων ἀξόνων κινήσεως, αἱ ὁποῖαι περιορίζονται συνήθως ἀπὸ τὴν ὕπαρξιν τοῦ δαπέδου, τῆς ὀροφῆς, τῶν τοίχων, ἄλλων μηχανημάτων κλπ.

— Αἱ τροχαλίαι, αἱ ὁποῖαι παραμένουν τυχὸν ἀχρησιμοποίητοι εἰς τὴν ἀποθήκην καὶ αἱ ὁποῖαι καλὸν εἶναι νὰ χρησιμοποιηθοῦν, διότι τότε θὰ ἐξοικονομήσωμε τὴν δαπάνην ἀγορᾶς ἢ κατασκευῆς νέων τροχαλιῶν.

μέσως ὅτι ὁ λόγος $\frac{d_1}{d_2}$ τῶν διαμέτρων κινητηρίας καὶ κινουμένης τροχαλίας πρέπει νὰ ληφθῇ ἴσος πρὸς τὴν σχέσιν μεταδόσεως $\frac{n_2}{n_1}$, ποὺ εἶναι γνωστὴ καὶ ἴση πρὸς $\frac{60}{600} = \frac{1}{10}$. Εἶναι ἐν τούτοις φανερὸν ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρα ζεύγη τροχαλιῶν, τὰ ὁποῖα ἁρμόζουν εἰς τὴν σχέσιν $\frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{10}$. Συμφώνως λοιπὸν μὲ τὴν νοοτροπίαν ποὺ ἐπικρατεῖ εἰς τὰ μαθηματικά, θὰ πρέπει ὁπωσδήποτε νὰ ἐκλέξωμε τὴν διάμετρον τῆς μιᾶς τροχαλίας αὐθαιρέτως. (Ἐφ' ὅσον ἔχομε μίαν ἐξίσωσιν μὲ δύο ἀγνώστους). Τὸ πρόβλημα ὅμως τὸ ὁποῖον ἀντιμετωπίζομε δὲν εἶναι πρόβλημα μαθηματικῶν ἀλλὰ πρόβλημα φυσικῆς· ἡ ἐκλογὴ ἑπομένως τῶν τιμῶν δὲν θὰ πρέπει νὰ γίνῃ αὐθαιρέτως, ἀλλὰ μὲ βάσιν οἰκονομικὰ κριτήρια. Συγκεκριμένως, συμφέρει ἡ προμήθεια τροχαλιῶν μὲ ὅσον τὸ δυνατὸν μικροτέρας διαμέτρους, διότι τότε τὸ κόστος ἀγορᾶς καὶ ἐγκαταστάσεώς των θὰ εἶναι μικρόν. Δυστυχῶς ὅμως, ἡ ὁμαλὴ λειτουργία τοῦ ὅλου συστήματος μᾶς ἐπιβάλλει περιορισμοὺς ὡς πρὸς τὸ μέγεθος τῶν τροχαλιῶν ποὺ θὰ χρησιμοποιηθοῦν. Ἔτσι, ὑπὸ τὸ βάρος τῶν ἀνωτέρω περιορισμῶν, ἡ πλέον οἰκονομικὴ λύσις εἶναι ἡ ἐκλογὴ κινητηρίου τροχαλίας μὲ διάμετρον $d_1 = 120$ mm. Ἡ διάμετρος τῆς κινουμένης τροχαλίας προκύπτει τότε ἴση πρὸς $d_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot d_1 = \frac{600}{60} \cdot 120 = 1200$ mm, πρᾶγμα ποὺ σημαίνει ὅτι, διὰ νὰ ἐπιτύχωμε τὴν ἐπιδιωκομένην μετάδοσιν κινήσεως, θὰ πρέπει νὰ τρυπήσωμε τὴν ὀροφήν! (σχ. 3·4ζ). Μία λύσις τοῦ εἴδους αὐτοῦ, ἐκτὸς τοῦ ὅτι εἶναι πρακτικῶς ἀνεφάρμοστος, δὲν θὰ προκαλέσῃ καὶ ὁμαλὴν λειτουργίαν τοῦ ὅλου συστήματος, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέτρων τῶν δύο τροχαλιῶν εἶναι τελικῶς μεγαλύτερον ἀπὸ τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ κινητηρίου καὶ κινουμένου ἄξονος. Μοιραίως λοιπὸν θὰ πρέπει νὰ ἐγκαταλείψωμε τὴν ἰδέαν τῆς ἀπ' εὐθείας μεταδόσεως τῆς κινήσεως ἀπὸ τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος εἰς τὸ μηχάνημα καὶ νὰ σκεφθοῦμε νὰ χρησιμοποιήσωμε ἕνα ἐνδιάμεσον ἄξονα κινήσεως (σχ. 3·4 η).



Σχ. 3·4 ζ.



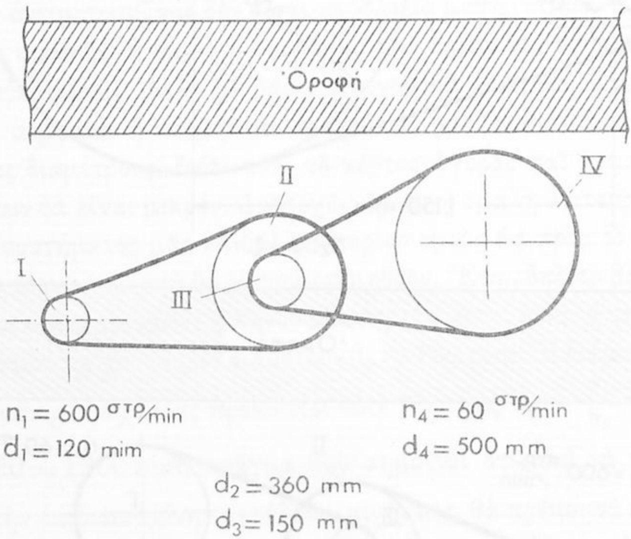
Σχ. 3·4 η.

Καὶ πάλιν ὅμως ὑπάρχει πρόβλημα μαθηματικῶς ἀπροσδιό-

$$d_2 = \frac{\text{Σύνολον « κινητηρίων » μεγεθῶν}}{\text{Σύνολον ὑπολοίπων « κινουμένων » μεγεθῶν}}$$

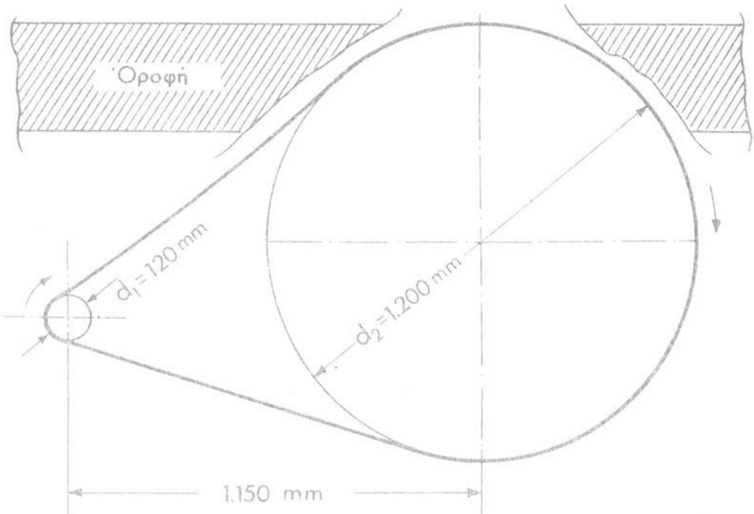
δυνάμεθα πλέον νὰ προσδιορίσωμε τὴν διάμετρον τῆς κινουμένης τροχαλίας II. Εἶναι $d_2 = \frac{600 \times 150 \times 120}{60 \times 500} = 360\,\text{mm}$.

Διὰ νὰ λάβωμε τέλος ὑπ' ὄψιν τὴν ὀλίσθησιν μεταξὺ τροχαλιῶν καὶ ἱμάντων, ἐλαττώνομε τὴν διάμετρον τῆς τροχαλίας II (αὐτὴ εἶναι ἡ πλέον οἰκονομικὴ λύσις) περίπου κατὰ 5 %, ὁπότε εὑρίσκομε ὅτι ἡ διάμετρος τῆς κινουμένης τροχαλίας II πρέπει νὰ ληφθῇ ἴση πρὸς 340 mm.

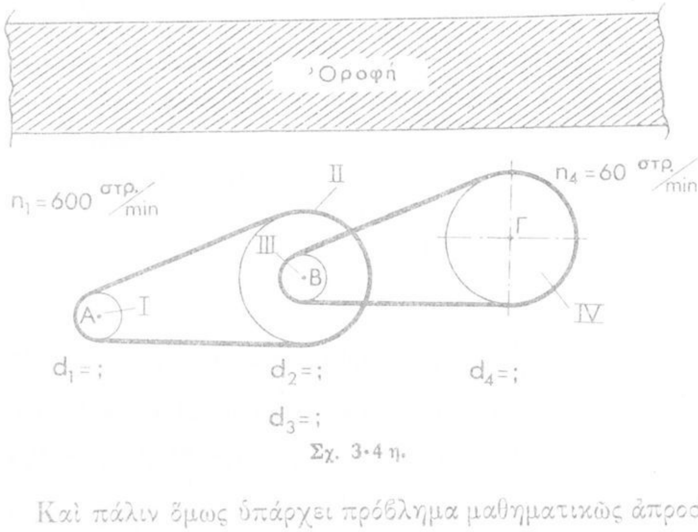


Σχ. 3·4 θ.

Ὁ λόγος $\frac{d_1}{d_2} = \frac{150}{340} \simeq 0{,}44$ παριστάνει κατὰ προσέγγισιν τὴν σχέσιν μεταδόσεως μεταξὺ κινητηρίου καὶ ἐνδιαμέσου ἄξονος, ὁ δὲ λόγος $\frac{d_3}{d_4} = \frac{120}{500} = 0{,}23$ τὴν σχέσιν μεταδόσεως μεταξὺ ἐνδιαμέσου καὶ κινουμένου ἄξονος. Ἡ πεῖρα ἔχει ἀποδείξει ὅτι ἡ λει-νημα καὶ νὰ σκεφθοῦμε νὰ χρησιμοποιήσωμε ἕνα ἐνδιάμεσον ἄξονα κινήσεως (σχ. 3·4 η).



Σχ. 3·4 ζ.



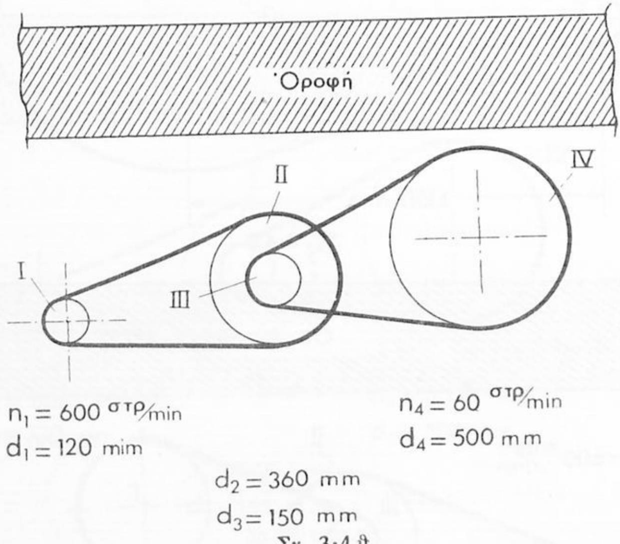
Σχ. 3·4 η.

Καὶ πάλιν ὅμως ὑπάρχει πρόβλημα μαθηματικῶς ἀπροσδιό-

$$d_2 = \frac{\text{Σύνολον « κινητηρίων » μεγεθῶν}}{\text{Σύνολον ὑπολοίπων « κινουμένων » μεγεθῶν}}$$

δυνάμεθα πλέον νὰ προσδιορίσωμε τὴν διάμετρον τῆς κινουμένης τροχαλίας II. Εἶναι $d_2 = \dfrac{600 \times 150 \times 120}{60 \times 500} = 360 \text{ mm}.$

Διὰ νὰ λάβωμε τέλος ὑπ' ὄψιν τὴν ὀλίσθησιν μεταξὺ τροχαλιῶν καὶ ἱμάντων, ἐλαττώνομε τὴν διάμετρον τῆς τροχαλίας II (αὐτὴ εἶναι ἡ πλέον οἰκονομικὴ λύσις) περίπου κατὰ 5 %, ὁπότε εὑρίσκομε ὅτι ἡ διάμετρος τῆς κινουμένης τροχαλίας II πρέπει νὰ ληφθῇ ἴση πρὸς 340 mm.



Σχ. 3·4 ϑ.

Ὁ λόγος $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{150}{340} \simeq 0{,}44$ παριστάνει κατὰ προσέγγισιν τὴν σχέσιν μεταδόσεως μεταξὺ κινητηρίου καὶ ἐνδιαμέσου ἄξονος, ὁ δὲ λόγος $\dfrac{d_3}{d_4} = \dfrac{120}{500} = 0{,}23$ τὴν σχέσιν μεταδόσεως μεταξὺ ἐνδιαμέσου καὶ κινουμένου ἄξονος. Ἡ πεῖρα ἔχει ἀποδείξει ὅτι ἡ λειτουργία ἑνὸς συστήματος μεταδόσεως κινήσεως, ὡσὰν αὐτὸ ποὺ μελετᾶμε τώρα, εἶναι πολὺ καλυτέρα ὅταν αἱ ἐπὶ μέρους σχέσεις μεταδόσεως εἶναι περίπου ἴσαι μεταξύ των. Εἶναι λοιπὸν σκόπιμον νὰ θέσωμε $d_1 = 120$ mm καὶ $d_3 = 150$ mm.

Ἡ λύσις, εἰς τὴν ὁποίαν κατελήξαμε, εἶναι τόσον ἀπὸ λειτουργικῆς ὅσον καὶ ἀπὸ οἰκονομικῆς πλευρᾶς ἡ καλυτέρα δυνατή, παρίσταται δὲ εἰς τὸ σχῆμα 3·4 θ.

3) Μετάδοσις κινήσεως μέσω ὀδοντωτῶν τροχῶν.

Ἡ μετάδοσις τῆς περιστροφικῆς κινήσεως ἀπὸ ἕνα κινητήριον ἄξονα εἰς ἕνα ἄλλον κινούμενον μὲ τὴν βοήθειαν τροχαλιῶν καὶ ἱμάντων, τὴν ὁποίαν ἐξετάσαμε εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, παρουσιάζει δύο σημαντικὰ μειονεκτήματα.

α) Τὸ πρῶτον μειονέκτημα προέρχεται ἀπὸ τὴν ἀναπόφευκτον ὀλίσθησιν μεταξὺ ἱμάντων καὶ τροχαλιῶν.

Πιθανῶς νὰ ἔχῃ δημιουργηθῆ ἡ ἐντύπωσις εἰς πολλοὺς ὅτι τὸ φαινόμενον τῆς ὀλισθήσεως ἀποτελεῖ πλεονέκτημα τῆς ἱμαντοκινήσεως, διότι μᾶς ἐπιτρέπει νὰ μειώνωμε τὰς διαμέτρους τῶν κινουμένων τροχαλιῶν καὶ συνεπῶς νὰ ἐξοικονομοῦμε χῶρον καὶ χρήματα. Παρ' ὅλα αὐτὰ δὲν πρέπει ποτὲ νὰ μᾶς διαφεύγῃ ὅτι ὀλίσθησις σημαίνει τριβὴν καὶ ὅτι τριβὴ σημαίνει μετατροπὴν ἐνεργείας εἰς θερμότητα, πρᾶγμα ἄκρως ἀνεπιθύμητον.

Εἶναι λοιπὸν σκόπιμον νὰ προσπαθήσωμε νὰ ἐπινοήσωμε, ἐὰν εἶναι δυνατόν, μίαν ἄλλην διάταξιν, ἡ ὁποία νὰ μᾶς παρέχῃ ἐπίσης τὴν δυνατότητα νὰ μεταδίδωμε περιστροφικὴν κίνησιν ἀπὸ ἕνα ἄξονα (κινητήριον) εἰς ἕνα ἄλλον (κινούμενον), χωρὶς ὅμως ἀπωλείας ἐνεργείας λόγω τριβῶν.

Ἡ ἄλλη αὐτὴ διάταξις θὰ προκύψῃ ἂν ἀντικαταστήσωμε τοὺς ἱμάντας μὲ ἁλύσεις καὶ τὰς τροχαλίας μὲ ἁλυσοτροχοὺς (σχ. 3·4 ι).

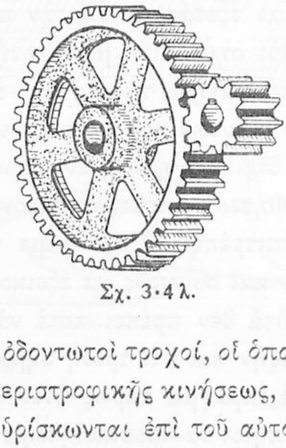
Καὶ ἐδῶ, ὅπως καὶ εἰς τὴν ἱμαντοκίνησιν, ὁ λόγος τῶν τιμῶν

Δὲν ἔχομε λοιπὸν παρὰ νὰ ἐξοπλίσωμε τοὺς κυλινδρικοὺς τροχοὺς μὲ ὀδόντας!

Αὐτὴ ἡ ἁπλῆ καὶ τόσον λογικὴ σειρὰ συλλογισμῶν εἶναι ἐκείνη ποὺ ὡδήγησε τοὺς μελετητὰς εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν πλέον σήμερον τὸ Α καὶ τὸ Ω, σχεδὸν κάθε μηχανῆς.

Ὑπάρχουν βασικῶς τρία εἴδη ὀδοντωτῶν τροχῶν:

α) Οἱ *παράλληλοι* ὀδοντωτοὶ τροχοί, οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν μετάδοσιν περιστροφικῆς κινήσεως, ὅταν ὁ κινητήριος καὶ ὁ κινούμενος ἄξων εἶναι μεταξύ των παράλληλοι (σχ. 3·4λ).



Σχ. 3·4λ.

β) Οἱ *κωνικοὶ* ὀδοντωτοὶ τροχοί, οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν μετάδοσιν περιστροφικῆς κινήσεως, ὅταν ὁ κινητήριος καὶ ὁ κινούμενος ἄξων εὑρίσκωνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου χωρὶς νὰ εἶναι παράλληλοι (σχ. 3·4μ).

γ) Οἱ *ἑλικοειδεῖς* ὀδοντωτοὶ τροχοί, οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν μετάδοσιν περιστροφικῆς κινήσεως, ὅταν ὁ κινητήριος καὶ ὁ κινούμενος ἄξων δὲν εὑρίσκωνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (σχ. 3·4ν).

Ἡ μελέτη τῶν διαφόρων προβλημάτων, ποὺ προκύπτουν κατὰ τὴν μετάδοσιν περιστροφικῆς κινήσεως μέσω ὀδοντωτῶν τροχῶν, γίνεται κατὰ παραπλήσιον τρόπον, ἀνεξαρτήτως τοῦ εἴτουργία ἑνὸς συστήματος μεταδόσεως κινήσεως, ὡσὰν αὐτὸ ποὺ μελετᾶμε τώρα, εἶναι πολὺ καλυτέρα ὅταν αἱ ἐπὶ μέρους σχέσεις μεταδόσεως εἶναι περίπου ἴσαι μεταξύ των. Εἶναι λοιπὸν σκόπιμον νὰ θέσωμε $d_1 = 120$ mm καὶ $d_3 = 150$ mm.

Ἡ λύσις, εἰς τὴν ὁποίαν κατελήξαμε, εἶναι τόσον ἀπὸ λειτουργικῆς ὅσον καὶ ἀπὸ οἰκονομικῆς πλευρᾶς ἡ καλυτέρα δυνατή, παρίσταται δὲ εἰς τὸ σχῆμα 3·4θ.

3) *Μετάδοσις κινήσεως μέσω ὀδοντωτῶν τροχῶν.*

Ἡ μετάδοσις τῆς περιστροφικῆς κινήσεως ἀπὸ ἕνα κινητήριον ἄξονα εἰς ἕνα ἄλλον κινούμενον μὲ τὴν βοήθειαν τροχαλιῶν καὶ ἱμάντων, τὴν ὁποίαν ἐξετάσαμε εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, παρουσιάζει δύο σημαντικὰ μειονεκτήματα.

α) Τὸ πρῶτον μειονέκτημα προέρχεται ἀπὸ τὴν ἀναπόφευκτον ὀλίσθησιν μεταξὺ ἱμάντων καὶ τροχαλιῶν.

Πιθανῶς νὰ ἔχῃ δημιουργηθῆ ἡ ἐντύπωσις εἰς πολλοὺς ὅτι τὸ φαινόμενον τῆς ὀλισθήσεως ἀποτελεῖ πλεονέκτημα τῆς ἱμαντοκινήσεως, διότι μᾶς ἐπιτρέπει νὰ μειώνωμε τὰς διαμέτρους τῶν κινουμένων τροχαλιῶν καὶ συνεπῶς νὰ ἐξοικονομοῦμε χῶρον καὶ χρήματα. Παρ' ὅλα αὐτὰ δὲν πρέπει ποτὲ νὰ μᾶς διαφεύγῃ ὅτι ὀλίσθησις σημαίνει τριβὴν καὶ ὅτι τριβὴ σημαίνει μετατροπὴν ἐνεργείας εἰς θερμότητα, πρᾶγμα ἄκρως ἀνεπιθύμητον.

Εἶναι λοιπὸν σκόπιμον νὰ προσπαθήσωμε νὰ ἐπινοήσωμε, ἐὰν εἶναι δυνατόν, μίαν ἄλλην διάταξιν, ἡ ὁποία νὰ μᾶς παρέχῃ ἐπίσης τὴν δυνατότητα νὰ μεταδίδωμε περιστροφικὴν κίνησιν ἀπὸ ἕνα ἄξονα (κινητήριον) εἰς ἕνα ἄλλον (κινούμενον), χωρὶς ὅμως ἀπωλείας ἐνεργείας λόγῳ τριβῶν.

Ἡ ἄλλη αὐτὴ διάταξις θὰ προκύψῃ ἂν ἀντικαταστήσωμε τοὺς ἱμάντας μὲ ἀλύσεις καὶ τὰς τροχαλίας μὲ ἀλυσοτροχοὺς (σχ. 3·4ι).

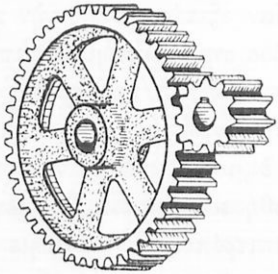
Καὶ ἐδῶ, ὅπως καὶ εἰς τὴν ἱμαντοκίνησιν, ὁ λόγος τῶν τιμῶν

Δὲν ἔχομε λοιπὸν παρὰ νὰ ἐξοπλίσωμε τοὺς κυλινδρικοὺς τροχοὺς μὲ ὀδόντας!

Αὐτὴ ἡ ἁπλῆ καὶ τόσον λογικὴ σειρὰ συλλογισμῶν εἶναι ἐκείνη ποὺ ὡδήγησε τοὺς μελετητὰς εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν πλέον σήμερον τὸ Α καὶ τὸ Ω, σχεδὸν κάθε μηχανῆς.

Ὑπάρχουν βασικῶς τρία εἴδη ὀδοντωτῶν τροχῶν:

α) Οἱ *παράλληλοι* ὀδοντωτοὶ τροχοί, οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν μετάδοσιν περιστροφικῆς κινήσεως, ὅταν ὁ κινητήριος καὶ ὁ κινούμενος ἄξων εἶναι μεταξύ των παράλληλοι (σχ. 3·4 λ).



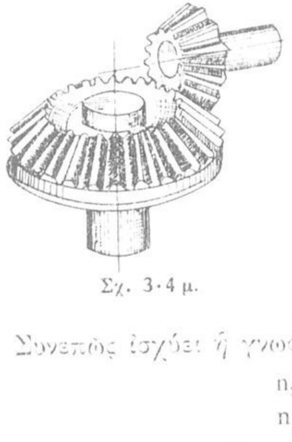
Σχ. 3·4 λ.

β) Οἱ *κωνικοὶ* ὀδοντωτοὶ τροχοί, οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν μετάδοσιν περιστροφικῆς κινήσεως, ὅταν ὁ κινητήριος καὶ ὁ κινούμενος ἄξων εὑρίσκωνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου χωρὶς νὰ εἶναι παράλληλοι (σχ. 3·4 μ).

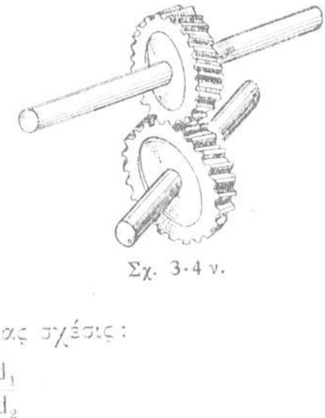
γ) Οἱ *ἑλικοειδεῖς* ὀδοντωτοὶ τροχοί, οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν μετάδοσιν περιστροφικῆς κινήσεως, ὅταν ὁ κινητήριος καὶ ὁ κινούμενος ἄξων δὲν εὑρίσκωνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (σχ. 3·4 ν).

Ἡ μελέτη τῶν διαφόρων προβλημάτων, ποὺ προκύπτουν κατὰ τὴν μετάδοσιν περιστροφικῆς κινήσεως μέσῳ ὀδοντωτῶν τροχῶν, γίνεται κατὰ παραπλήσιον τρόπον, ἀνεξαρτήτως τοῦ εἴθους τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν ποὺ θὰ χρησιμοποιηθοῦν. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν θὰ μᾶς ἀπασχολήσῃ εἰς τὴν συνέχειαν σχεδὸν ἀποκλειστικῶς ἡ περίπτωσις χρησιμοποιήσεως παραλλήλων ὀδοντωτῶν τροχῶν. Ἡ περίπτωσις αὐτὴ εἶναι ἡ ἁπλουστέρα ἀλλὰ καὶ ἡ πιὸ συνηθισμένη εἰς τὴν πρᾶξιν ἀπὸ ὅλας.

Κατὰ τὴν ἐμπλοκὴν δύο παραλλήλων ὀδοντωτῶν τροχῶν, αἱ περιφερειακαί των ταχύτητες εἶναι ἀναμφισβητήτως ἴσαι μεταξύ των. Τοῦτο συμβαίνει διότι μεταξὺ δύο οἱωνδήποτε κινουμένων σημείων, ἐφ' ὅσον ἔρχονται εἰς ἐπαφὴν μεταξύ των, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρξῃ σχετικὴ ταχύτης.



Σχ. 3·4 μ.



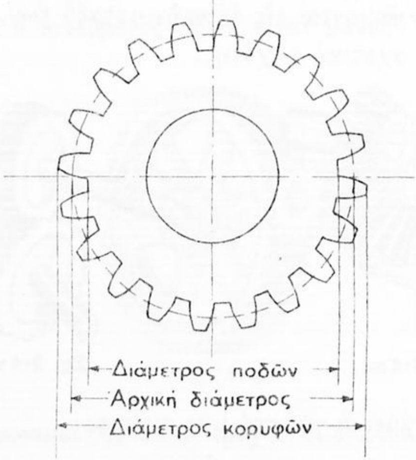
Σχ. 3·4 ν.

Συνεπῶς ἰσχύει ἡ γνωστή μας σχέσις:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{d_1}{d_2} \qquad (1)$$

ὅπου n_1 καὶ n_2 εἶναι αἱ περιστροφικαὶ ταχύτητες κινητηρίου καὶ κινουμένου τροχοῦ ἀντιστοίχως. Τὰ μεγέθη d_1 καὶ d_2 δὲν εἶναι δυνατὸν προφανῶς νὰ ἀντιστοιχοῦν οὔτε εἰς τὰς διαμέτρους κορυφῶν οὔτε εἰς τὰς διαμέτρους ποδῶν τῶν δύο ὀδοντωτῶν τροχῶν· εἶναι ἀκριβῶς αἱ διάμετροι τῶν περιφερειῶν ἐκείνων, μὲ τὰς ὁποίας θὰ ἤρχοντο εἰς ἐπαφὴν οἱ δύο τροχοί, ἐὰν δὲν εἶχον ὀδόντας ἀλλὰ λείας ἐξωτερικὰς κυλινδρικὰς ἐπιφανείας. Εἶναι δηλαδὴ αἱ διάμετροι τῶν «ἀρχικῶν» περιφερειῶν ἢ ὅπως λέγονται *αἱ ἀρχικαὶ διάμετροι* (σχ. 3·4 ξ).

Παράδειγμα: Ὁ ἄξων ἑνὸς ἠλεκτροκινητῆρος περιστρέφεται μὲ ταχύτητα $n_1 = 900$ στρ/min. Ἐπιθυμοῦμε νὰ μεταδώσωμε περιστροφικὴν κίνησιν εἰς ἕνα μηχάνημα, τοῦ ὁποίου ἡ κυρία ἄτρακτος ἀπέχει ἀπὸ τοῦ ἄξονος τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος ἀπόστασιν $\alpha = 200$ mm. Ἐὰν ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ προσδώσωμε εἰς τὸ μηχάνημα εἶναι $n_2 = 300$ στρ/min, ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγεθος τῶν δύο παραλλήλων ὀδοντωτῶν τροχῶν, ποὺ θὰ πρέπει νὰ χρησιμοποιηθοῦν.



Σχ. 3 · 4 ξ.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμε μίαν γνωστήν μας ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν, εἶναι εὔκολον νὰ μετασχηματίσωμε τὴν θεμελιώδη σχέσιν $\frac{n_2}{n_1} = \frac{d_1}{d_2}$ καὶ νὰ τὴν γράψωμε ὑπὸ τὴν μορφήν:

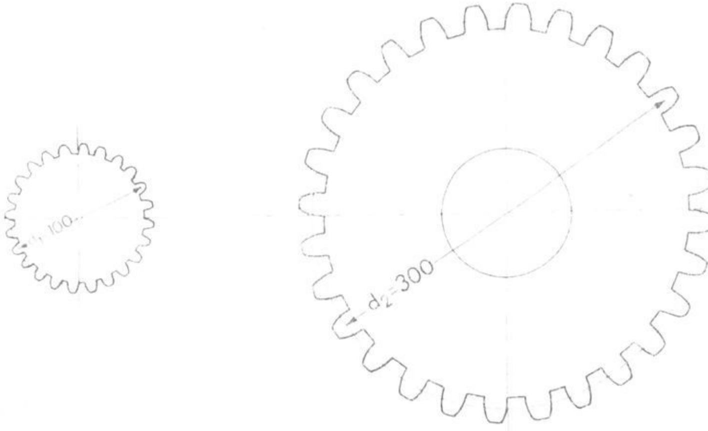
$$\frac{n_2}{n_1 + n_2} = \frac{d_1}{d_1 + d_2}.$$

Ἐπειδὴ d_1 καὶ d_2 παριστοῦν τὰς ἀρχικὰς διαμέτρους τῶν δύο ὀδοντωτῶν τροχῶν, συμπεραίνομε ὅτι $d_1 + d_2 = 2\alpha = 400$ mm, ὁπότε εὑρίσκομε εὐκόλως ὅτι:

$$d_1 = \frac{n_2}{n_1 + n_2}\,(d_1 + d_2) = \frac{300}{1\,200} \cdot 400 = 100\,\text{mm}$$

καὶ συνεπῶς ὅτι $d_2 = 300$ mm.

Παρ' ὅλον ὅτι καθωρίσαμε τὰς ζητουμένας διαμέτρους, ἐν τούτοις δὲν δυνάμεθα νὰ παραγγείλωμε δύο ὀδοντωτοὺς τροχοὺς μὲ ἀρχικὰς διαμέτρους 100 mm καὶ 300 mm ἀντιστοίχως καὶ νὰ εἴμεθα ἥσυχοι. Διότι εὐθὺς ἀμέσως ἀνακύπτει ἕνα νέον πρόβλημα : Πῶς θὰ ἐπιτύχωμε τὴν ἐμπλοκὴν τῶν δύο τροχῶν, ἐὰν οἱ ὀδόντες τοῦ ἑνὸς ἔχουν μεγαλυτέρας διαστάσεις ἀπὸ τοὺς ὀδόντας τοῦ ἄλλου; (σχ. 3·4 ο).

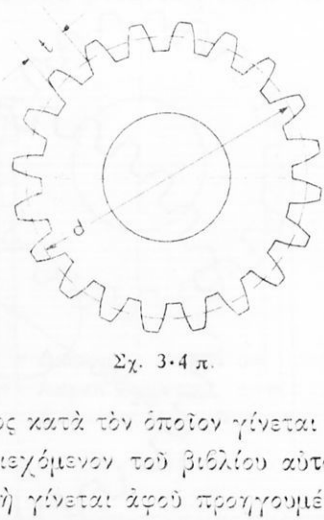


Σχ. 3·4 ο.

Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι μία παραγγελία ὀδοντωτῶν τροχῶν, βάσει τῶν ἀρχικῶν των διαμέτρων μόνον, δὲν σημαίνει τίποτε. Πρέπει ἀπαραιτήτως νὰ σημειώσωμε κατὰ κάποιον τρόπον καὶ τὰς διαστάσεις τῶν ὀδόντων. Αὐτὸ γίνεται, ἂν καθορίσωμε τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀδόντων z κάθε τροχοῦ ἢ τὸ βῆμα τοῦ ὀδόντος $t = \frac{\pi \cdot d}{z}$ (σχ. 3·4 π) ἢ τέλος τὸ μοντοὺλ (modul):

$$m = \frac{t}{\pi} = \frac{d}{z}. \qquad (5)$$

Εἰς τὸ παράδειγμα τὸ ὁποῖον ἐξετάζομε πρέπει προφανῶς νὰ εἶναι $t_1 = t_2$, δηλαδὴ $\frac{\pi d_1}{z_1} = \frac{\pi d_2}{z_2}$ ἢ τέλος $\frac{d_1}{d_2} = \frac{z_1}{z_2}$, διότι τότε μόνον δύνανται νὰ ἔλθουν εἰς ἐμπλοκὴν οἱ δύο τροχοί. Διὰ τὴν συμπλήρωσιν συνεπῶς τῆς παραγγελίας θὰ πρέπει νὰ ἐκλεγῇ τὸ μέγεθος $t_1 = t_2 = t$, ἢ τὸ $m = m_1 = m_2$ ἢ ἕνα ἀπὸ τὰ



Σχ. 3·4 π.

z_1 καὶ z_2. Ὁ τρόπος κατὰ τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ ἐκλογὴ αὐτὴ δὲν ἀνήκει εἰς τὸ περιεχόμενον τοῦ βιβλίου αὐτοῦ. Ἀναφέρομε ἁπλῶς ὅτι ἡ ἐκλογὴ γίνεται ἀφοῦ προηγουμένως ὑπολογισθῇ ἡ ἀντοχὴ τῶν τροχῶν μὲ βάσιν τὴν ἰσχύν, ποὺ μεταφέρεται μὲ τὴν ὀδοντοκίνησιν.

Ἀνακεφαλαιώνοντες, θὰ πρέπει νὰ γράψωμε τὴν σχέσιν:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{d_1}{d_2} \qquad (6)$$

ἡ ὁποία, ὅπως θὰ ἐξηγήσωμε εἰς τὴν συνέχειαν, διέπει οἱονδήποτε ζεῦγος ὀδοντωτῶν τροχῶν, ποὺ θέλομε νὰ φέρωμε εἰς ἐμπλοκήν.

4. Ἐφαρμογή: Τὸ κιβώτιον ταχυτήτων.

Καθὼς γνωρίζομε ἤδη, ἡ περιστροφικὴ ταχύτης, τὴν ὁποίαν πρέπει καὶ ὀφείλομε νὰ δίδωμε εἰς τὴν κυρίαν ἄτρακτον μιᾶς ἐργαλειομηχανῆς, ἐξαρτᾶται ἀπὸ πολλοὺς παράγοντας, ὅπως π.χ. ἀπὸ τὴν κοπτικὴν ταχύτητα, τὴν πρόωσιν, τὸ εἶδος τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου, τὸ εἶδος τοῦ κατεργαζομένου ὑλικοῦ, τὴν διάμετρον τοῦ δοκιμίου ἢ τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου, τὰς συνθήκας ψύξεως κ.ο.κ. Ὑπάρχουν βεβαίως καὶ περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας μία ἐργαλειομηχανὴ χρησιμοποιεῖται ἀποκλειστικῶς καὶ μόνον δι' ἕνα ὡρισμένον εἶδος κατεργασίας, ὁπότε προφανῶς ἀρκεῖ *μία* μόνον τιμὴ περιστροφικῆς ταχύτητος τῆς κυρίας ἀτράκτου της. Ἐν τούτοις αἱ περιπτώσεις αὐταὶ εἶναι ἐξαιρετικῶς σπάνιαι καὶ μάλιστα ὄχι μόνον ἐδῶ εἰς τὴν Ἑλλάδα, ἀλλὰ ἀκόμη καὶ εἰς τὰς ξένας προηγμένας χώρας. Ἀντιθέτως, συνήθης εἶναι ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν μία ἐργαλειομηχανὴ χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν ἐκτέλεσιν μεγάλης ποικιλίας ἐργασιῶν, ὁπότε ἡ δυνατότης ἐκλογῆς τῆς καταλλήλου τιμῆς περιστροφικῆς ταχύτητος διὰ κάθε μίαν ἐργασίαν ἀποτελεῖ πλέον μίαν ἀνάγκην.

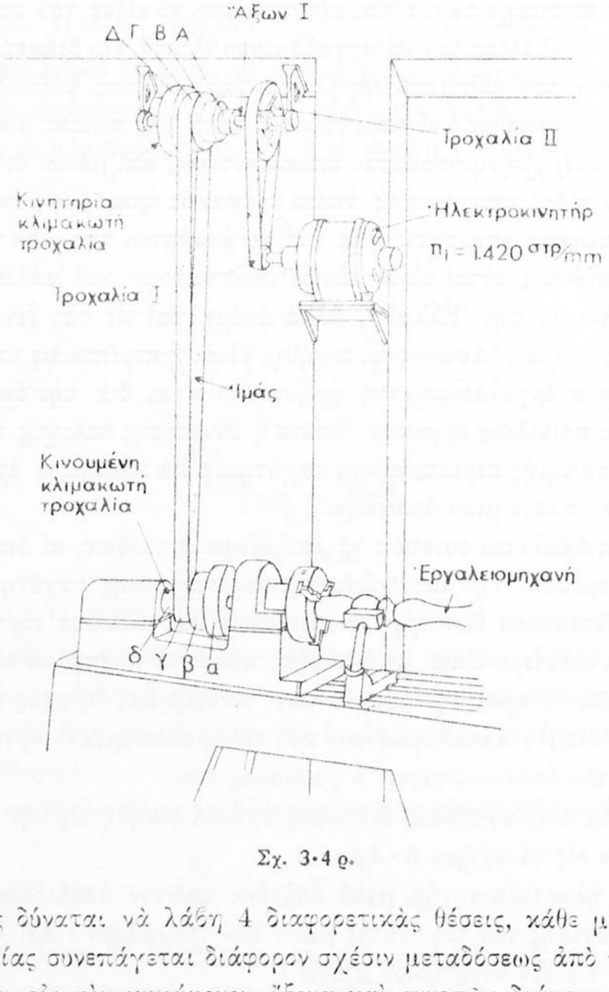
Ἐπιβάλλεται συνεπῶς νὰ ἐπιλέξωμε διατάξεις, αἱ ὁποῖαι νὰ μᾶς ἐπιτρέπουν τὴν μεταβολὴν τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος τῆς κυρίας ἀτράκτου τῶν ἐργαλειομηχανῶν καὶ μάλιστα εἰς ὅσον τὸ δυνατὸν εὐρύτερα ὅρια. Αἱ διατάξεις αὐταὶ θὰ πρέπει νὰ εἶναι οἰκονομικαὶ ὡς πρὸς τὴν ἀγοράν των, οἰκονομικαὶ ὡς πρὸς τὸν χῶρον τὸν ὁποῖον καταλαμβάνουν καὶ τέλος οἰκονομικαὶ ὡς πρὸς τὸν χρόνον τὸν ὁποῖον ἀπαιτεῖ ὁ χειρισμός των.

Μία τέτοιου εἴδους διάταξιν, ἀρκετὰ συνήθη εἰς τὴν πρᾶξιν, βλέπομε εἰς τὸ σχῆμα 3·4 ρ.

Ὁ ἠλεκτροκινητήρ, μετὰ ἀπὸ ἕνα πρῶτον ὑποβιβασμὸν τῆς περιστροφικῆς του ταχύτητος μέσῳ τῶν τροχαλιῶν I καὶ II, δίδει κίνησιν εἰς τὸν κινητήριον ἄξονα 1.

Ἡ κυρία ἄτρακτος τῆς ἐργαλειομηχανῆς λαμβάνει τὴν κίνησιν μέσῳ ἑνὸς ζεύγους *κλιμακωτῶν* τροχαλιῶν, ὅπως λέγονται, καὶ ἱμάντος. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι:

$$d_A + d_\alpha \simeq d_B + d_\beta \simeq d_\Gamma + d_\gamma \simeq d_\Delta + d_\delta.$$



Σχ. 3·4 ρ.

Ὁ ἱμὰς δύναται νὰ λάβῃ 4 διαφορετικὰς θέσεις, κάθε μία ἀπὸ τὰς ὁποίας συνεπάγεται διάφορον σχέσιν μεταδόσεως ἀπὸ τοῦ κινητηρίου εἰς τὸν κινούμενον ἄξονα καὶ συνεπῶς διάφορον τιμὴν περιστροφικῆς ταχύτητος εἰς τὴν κυρίαν ἄτρακτον τῆς ἐργαλειομηχανῆς.

Ἔτσι, ἐὰν $n_1 = 1\,420$ στρ/min εἶναι ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος, $d_1 = 150$ mm, $d_2 = 450$ mm, $d_A = 260$ mm, $d_\alpha = 490$ mm, $d_B = 320$ mm, $d_\beta = 430$ mm, $d_\Gamma = 380$ mm, $d_\gamma = 370$ mm, $d_\Delta = 440$ mm καὶ $d_\delta = 310$ mm, δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμε τὰς ἑξῆς, κατὰ μεγάλην προσέγγισιν, τιμὰς περιστροφικῆς ταχύτητος εἰς τὸν ἄξονα τῆς κινουμένης κλιμακωτῆς τροχαλίας, δηλαδὴ εἰς τὸν ἄξονα τῆς ἐργαλειομηχανῆς. (Διὰ νὰ ἁπλουστεύσωμε τοὺς ὑπολογισμοὺς ἀγνοοῦμε τὴν μεταξὺ τροχαλιῶν καὶ ἱμάντων ὀλίσθησιν).

$$n_A = \frac{\text{Σύνολον «κινητηρίων» μεγεθῶν}}{\text{Σύνολον ὑπολοίπων «κινουμένων» μεγεθῶν}} =$$

$$n_1 \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{d_A}{d_\alpha} = 1\,420 \cdot \frac{150}{450} \cdot \frac{260}{490} = 251 \text{ στρ/min}$$

$$n_B = \frac{\text{Σύνολον «κινητηρίων» μεγεθῶν}}{\text{Σύνολον ὑπολοίπων «κινουμένων» μεγεθῶν}} =$$

$$n_1 \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{d_B}{d_\beta} = 1\,420 \cdot \frac{150}{450} \cdot \frac{320}{430} = 352 \text{ στρ/min}$$

$$n_\Gamma = \frac{\text{Σύνολον «κινητηρίων» μεγεθῶν}}{\text{Σύνολον ὑπολοίπων «κινουμένων» μεγεθῶν}} =$$

$$n_1 \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{d_\Gamma}{d_\gamma} = 1\,420 \cdot \frac{150}{450} \cdot \frac{380}{370} = 485 \text{ στρ/min}$$

$$n_\Delta = \frac{\text{Σύνολον «κινητηρίων» μεγεθῶν}}{\text{Σύνολον ὑπολοίπων «κινουμένων» μεγεθῶν}} =$$

$$n_1 \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{d_\Delta}{d_\delta} = 1\,420 \cdot \frac{150}{450} \cdot \frac{440}{310} = 672 \text{ στρ/min.}$$

Ἐὰν χρησιμοποιήσωμε καὶ δευτέραν κλιμακωτὴν τροχαλίαν μεταξὺ τοῦ ἄξονος τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος καὶ τοῦ ἄξονος I, ἀντὶ τῶν δύο τροχαλιῶν I καὶ II καὶ τοῦ ἱμάντος, θὰ ἠμπορούσαμε βεβαίως νὰ αὐξήσωμε τὰς τιμὰς περιστροφικῆς ταχύτητος τῆς κυρίας ατράκτου της εργαλειομηχανής από 4 εις 16. Έν τούτοις εις αρκετάς περιπτώσεις, και μάλιστα όταν πρόκειται περί εργαλειομηχανών επεξεργασίας ξύλου, η δυνατότης εκλογής μεταξύ έστω και 4 μόνων τιμών περιστροφικής ταχύτητος θεωρείται πάρα πολύ ικανοποιητική. Έτσι η διάταξις του σχήματος 3·4 ρ είναι αρκετά συνήθης.

Η διάταξις την οποίαν έχομε περιγράψει, αποτελεί αναμφισβητήτως ένα σημαντικόν βήμα προόδου, παρουσιάζει όμως και αυτή ωρισμένα μειονεκτήματα. Συγκεκριμένως:

α) Καταλαμβάνει σχετικώς πολύν χώρον.

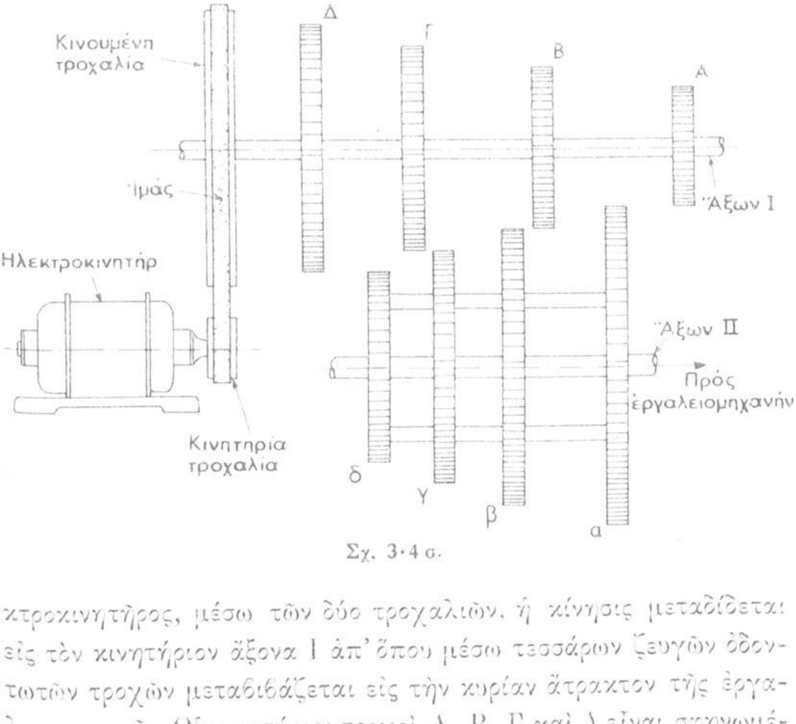
β) Έχει σαν αποτέλεσμα απωλείας ενεργείας, λόγω της αναποφεύκτου ολισθήσεως μεταξύ τροχαλιών και ιμάντων.

γ) Απαιτεί πολύν χρόνον διά την μετακίνησιν του ιμάντος των κλιμακωτών τροχαλιών από την μίαν θέσιν εις την άλλην.

Ο τρόπος διά να αποφευχθούν όλα αυτά τα μειονεκτήματα είναι εξαιρετικά απλούς. Γνωρίζομε ότι κατά την μετάδοσιν περιστροφικής ταχύτητος με την βοήθειαν οδοντωτών τροχών, οι οδοντωτοί τροχοί ευρίσκονται εις επαφήν, πράγμα πού σημαίνει, ότι εξοικονομούμε κατ' αυτόν τον τρόπον όλον τον χώρον, πού καταλαμβάνουν οι ιμάντες. Γνωρίζομε επίσης ότι κατά την μετάδοσιν περιστροφικής ταχύτητος με την βοήθειαν οδοντωτών τροχών δεν υπάρχει περίπτωσις ολισθήσεως, επομένως και απωλειών ενεργείας. Τέλος διαισθανόμεθα ότι και ο χρόνος πού απαιτείται, διά την μεταβολήν της τιμής της περιστροφικής ταχύτητος, δύναται να μειωθή σημαντικώς αν χρησιμοποιήσωμε π.χ. μοχλούς, οπότε η εμπλοκή δύο οδοντωτών τροχών θα είναι πιθανώτατα θέμα δευτερολέπτων αν όχι και δεκάτων του δευτερολέπτου.

Διατί λοιπόν να μη επινοήσωμε μίαν διάταξιν αντίστοιχον με αυτήν του σχήματος 3·4 ρ, εις την οποίαν όμως να χρησιμοποιήσωμε οδοντωτούς τροχούς αντί τροχαλιών και ιμάντων; (σχ. 3·4 σ).

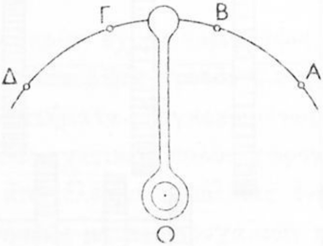
Ἡ ἰδέα αὐτὴ εἶναι, ὅπως βλέπομε, πάρα πολὺ ἁπλὴ καὶ ἀπολύτως ἐφαρμόσιμος. Καὶ εἰς τὴν νέαν μας διάταξιν μετὰ ἀπὸ ἕνα πρῶτον ὑποβιβασμὸν τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος τοῦ ἠλε-



Σχ. 3·4 σ.

κτροκινητῆρος, μέσω τῶν δύο τροχαλιῶν, ἡ κίνησις μεταδίδεται εἰς τὸν κινητήριον ἄξονα Ι ἀπ' ὅπου μέσω τεσσάρων ζευγῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν μεταβιβάζεται εἰς τὴν κυρίαν ἄτρακτον τῆς ἐργαλειομηχανῆς. Οἱ κινητήριοι τροχοὶ Α, Β, Γ καὶ Δ εἶναι σφηνωμένοι στερεῶς ἐπάνω εἰς τὸν ἄξονα Ι εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἀποκλείεται οἱαδήποτε σχετικὴ κίνησις αὐτῶν μεταξύ των ἢ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα. Ἀντιθέτως, οἱ τέσσαρες κινούμενοι ὀδοντωτοὶ τροχοὶ α, β, γ καὶ δ, εἶναι μὲν στερεῶς συνδεδεμένοι μεταξύ των, ὥστε νὰ ἀποκλείεται ἡ σχετικὴ κίνησις αὐτῶν μεταξύ των, δὲν εἶναι ὅμως στερεῶς σφηνωμένοι ἐπάνω εἰς τὸν κινητήριον ἄξονα ΙΙ. Συγκεκριμένως, δὲν ἠμποροῦν μὲν νὰ περιστραφοῦν ἐλευθέρως γύρω ἀπὸ τὸν ἄξονα, ἔχουν ὅμως τὴν δυνατότητα νὰ κινηθοῦν κατὰ μῆκος αὐτοῦ. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται, ἐὰν χρησιμοποιήσωμε μίαν ὀλισθαίνουσαν σφῆνα, κατὰ τὴν σύνδεσίν των μὲ τὸν ἄξονα.

Ἡ ὀλίσθησις τῶν κινουμένων ὀδοντωτῶν τροχῶν κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος ΙΙ ἐλέγχεται ἐξωτερικῶς μὲ ἕνα μοχλὸν (σχ. 3·4 τ).



Σχ. 3·4 τ.

Ὅταν ὁ μοχλὸς εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν ΟΑ, ἡ περιστροφικὴ κίνησις μεταδίδεται εἰς τὴν κυρίαν ἄτρακτον τῆς μηχανῆς μέσῳ τοῦ ζεύγους ὀδοντωτῶν τροχῶν Α καὶ α, ὁπότε ἡ περιστροφικὴ ταχύτης αὐτῆς θὰ εἶναι ἴση πρός:

$$n_A = n_1 \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{d_A}{d_\alpha} = n_1 \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{z_A}{z_\alpha}$$

ὅπου n_1 ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος, d_1, d_2 αἱ διάμετροι τῶν δύο τροχαλιῶν καὶ z_A, z_α οἱ ἀριθμοὶ ὀδόντων τῶν δύο τροχῶν Α καὶ α. Ὅταν μεταθέσωμε τὸν μοχλὸν εἰς τὴν θέσιν ΟΒ, ἐμπλέκονται πλέον οἱ ὀδοντωτοὶ τροχοὶ Β καὶ β, ὁπότε ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τῆς κυρίας ἀτράκτου τῆς μηχανῆς γίνεται ἴση πρός:

$$n_B = n_1 \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{d_B}{d_\beta} = n_1 \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{z_B}{z_\beta}.$$

Διὰ τὰς ἄλλας δύο θέσεις ποὺ δύναται νὰ λάβῃ ὁ μοχλός, ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τῆς κυρίας ἀτράκτου τῆς μηχανῆς λαμβάνει ἀντιστοίχως τιμὰς ἴσας πρός:

$$n_\Gamma = n_1 \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{d_\Gamma}{d_\gamma} = n_1 \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{z_\Gamma}{z_\gamma} \quad \text{καὶ}$$

$$n_\Delta = n_1 \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{d_\Delta}{d_\delta} = n_1 \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{z_\Delta}{z_\delta}.$$

Ἔτσι, ἐὰν θεωρήσωμε ὅτι $n_1 = 1\,420$ στρ/min, $d_1 = 150$ mm καὶ $d_2 = 450$ mm, ὅπως καὶ προηγουμένως, καθὼς ἐπίσης ὅτι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο ἀξόνων I καὶ II εἶναι π.χ. ἴση πρὸς $\alpha = 167{,}5$ mm, εὑρίσκομε τὰ ἑξῆς:

Διὰ $d_A = 130$ mm, $d_B = 160$ mm, $d_\Gamma = 190$ mm, $d_\Delta = 220$ mm, $d_\alpha = 245$ mm, $d_\beta = 215$ mm, $d_\gamma = 185$ mm καὶ $d_\delta = 155$ mm

αἱ τιμαὶ περιστροφικῆς ταχύτητος, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ δώσωμε εἰς τὴν κυρίαν ἄτρακτον τῆς ἐργαλειομηχανῆς, εἶναι $n_A = 251$ στρ/min, $n_B = 352$ στρ/min, $n_\Gamma = 485$ στρ/min καὶ $n_\Delta = 672$ στρ/min.

Ἐὰν ἐν συνεχείᾳ ὑποθέσωμε ὅτι ὅλοι οἱ ὀδοντωτοὶ τροχοὶ ἔχουν τὸ ἴδιο modul, ποὺ εἶναι ἴσον π.χ. πρὸς 5, εὑρίσκομε ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν $m = \frac{d}{z}$ (τύπος 5) ὅτι οἱ ἀριθμοὶ ὀδόντων κάθε ὀδοντωτοῦ τροχοῦ εἶναι $z_A = 26$, $z_B = 32$, $z_\Gamma = 38$, $z_\Delta = 44$, $z_\alpha = 49$, $z_\beta = 43$, $z_\gamma = 37$ καὶ $z_\delta = 31$.

Τὸ συγκρότημα αὐτὸ καὶ τῶν ὀκτὼ ὀδοντωτῶν τροχῶν ἀποτελεῖ ἀκριβῶς τὸ τόσον γνωστὸν εἰς ὅλους μας *κιβώτιον ταχυτήτων*, μὲ τὸ ὁποῖον εἶναι ἐφωδιασμέναι ὅλαι σχεδὸν αἱ ἐργαλειομηχαναί.

Συμβολισμοί.

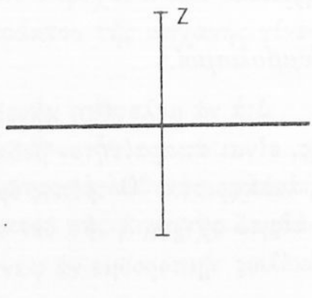
Διὰ νὰ μελετήσῃ κανεὶς τὸ κιβώτιον ταχυτήτων μιᾶς μηχανῆς, εἶναι ἀπαραίτητον βεβαίως νὰ ἔχῃ ἕνα καλὸν σχῆμα, ποὺ νὰ τὸ ἀναπαριστᾷ. Ὁ τρόπος ὅμως κατὰ τὸν ὁποῖον ἐσχεδιάσθη τοῦτο εἰς τὸ σχῆμα 3·4σ δὲν εἶναι αὐτὸς ποὺ θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι. Εὐκόλως ἠμποροῦμε νὰ φαντασθοῦμε πόσον χρόνον καὶ κόπον θὰ ἀπαιτοῦσε ἡ σχεδίασις ἑνὸς κιβωτίου ταχυτήτων μὲ πολλοὺς ὀδοντωτοὺς τροχοὺς καὶ πόσον δύσκολη θὰ ἦτο τότε ἡ μελέτη του, ὥστε νὰ καθορισθοῦν ὅλαι αἱ δυναταὶ τιμαὶ περιστροφικῆς ταχύτητος, ποὺ θὰ ἠδύνατο νὰ λάβῃ ἡ κυρία ἄτρακτος τῆς ἐργαλειομηχανῆς. Δι᾽ αὐτὸ ἔχει υἱοθετηθῆ καὶ καθιερωθῆ διεθνῶς ἡ ἑξῆς συμβολικὴ παράστασις τῶν κυριωτέρων ἐπὶ μέρους στοιχείων, ποὺ ἀποτελοῦν ἕνα κιβώτιον ταχυτήτων:

— Ἄξων κινήσεως 1

— Ἄξων κινήσεως καὶ ἕδρανα στηρίξεώς του. 2

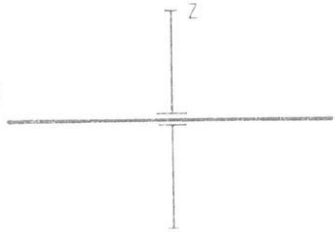
— Παράλληλος ὀδοντωτὸς τροχὸς καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀδόντων του. 3

— Παράλληλος ὀδοντωτὸς τροχός, στερεῶς σφηνωμένος ἐπάνω εἰς τὸν ἄξονα. 4



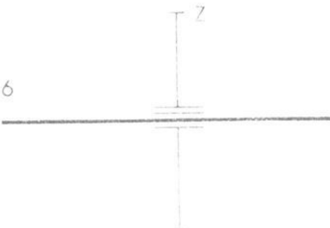
— Παράλληλος ὀδοντωτὸς τροχός, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴν δυνατότητα νὰ περιστρέφεται ἐλευθέρως γύρω ἀπὸ τὸν ἄξονα, ὄχι ὅμως καὶ τὴν δυνατότητα σχετικῆς κινήσεως κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος αὐτοῦ.

5



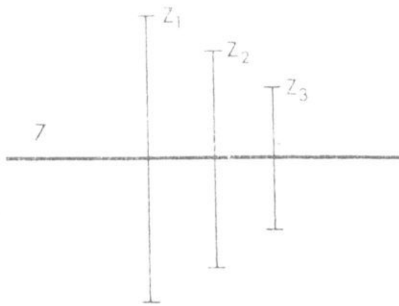
— Παράλληλος ὀδοντωτὸς τροχὸς μὲ δυνατότητα σχετικῆς κινήσεως κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος, ὄχι ὅμως καὶ ἐλευθέρας περιστροφῆς γύρω ἀπὸ αὐτόν.

6



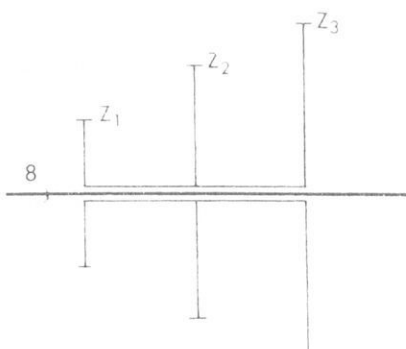
— Συγκρότημα παραλλήλων ὀδοντωτῶν τροχῶν σφηνωμένων στερεῶς ἐπάνω εἰς τὸν ἄξονα.

7

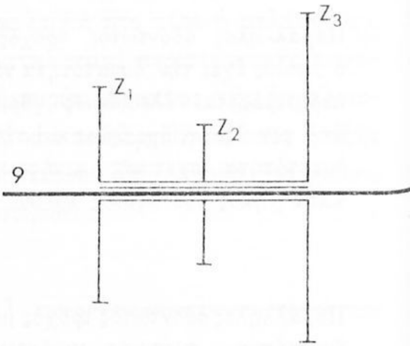


— Συγκρότημα παραλλήλων ὀδοντωτῶν τροχῶν, οἱ ὁποῖοι συνδέονται στερεῶς μεταξύ των καὶ ἔχουν τὴν δυνατότητα ἐλευθέρας περιστροφῆς γύρω ἀπὸ τὸν ἄξονα, ὄχι ὅμως καὶ σχετικῆς κινήσεως κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος αὐτοῦ.

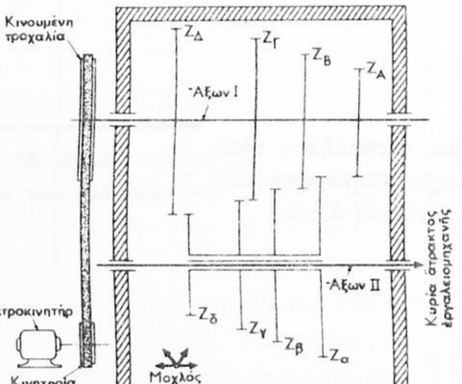
8



— Συγκρότημα παραλλήλων ὀδοντωτῶν τροχῶν, οἱ ὁποῖοι συνδέονται στερεῶς μεταξύ των καὶ ἔχουν τὴν δυνατότητα σχετικῆς κινήσεως κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος, ὄχι ὅμως καὶ ἐλευθέρας περιστροφῆς γύρω ἀπὸ αὐτόν.



Ἂν ἀκολουθήσωμε τοὺς συμβολισμοὺς αὐτούς, δυνάμεθα πλέον, χωρὶς δυσκολίαν, νὰ σχεδιάσωμε κατὰ ἁπλὸν καὶ παραστατικὸν τρόπον τὸ κιβώτιον ταχυτήτων τοῦ σχήματος 3·4σ (βλ. σχ. 3·4υ).

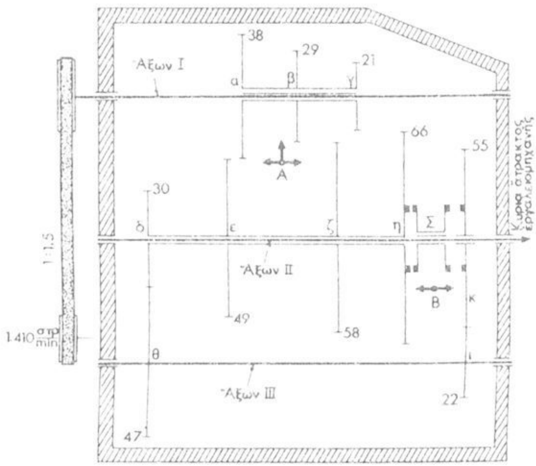


Σχ. 3·4 υ.

Παράδειγμα:

Εἰς τὸ σχῆμα 3·4φ δίδεται ἡ σχηματικὴ παράστασις τοῦ κιβωτίου ταχυτήτων τῆς κυρίας ἀτράκτου ἑνὸς ἁπλοῦ τόρνου. Ζητοῦνται αἱ τιμαὶ περιστροφικῆς ταχύτητος, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ δώσωμε εἰς τὴν κυρίαν ἄτρακτον τοῦ τόρνου.

α) Πρῶτον στάδιον τῆς μελέτης μας πρέπει ἀναμφισβητήτως νὰ εἶναι ἡ προσεκτικὴ παρατήρησις τοῦ σχήματος, εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐνημερωθοῦμε πλήρως ἐπὶ τῶν λειτουργιῶν, τὰς ὁποίας εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιτελέσουν ὅλα τὰ ἐπὶ μέρους στοιχεῖα τοῦ κιβωτίου ταχυτήτων. Ἡ προσεκτικὴ αὐτὴ παρατήρησις μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἑξῆς σειρὰν διαπιστώσεων :



Σχ. 3·4 φ.

— Τὸ κιβώτιον ταχυτήτων ποὺ μελετοῦμε περιέχει τρεῖς ἄξονας κινήσεως, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ I εἶναι ὁ κινητήριος, διότι αὐτὸς πρῶτος λαμβάνει τὴν περιστροφικὴν κίνησιν ἀπὸ τὸν ἠλεκτροκινητῆρα, ὁ δὲ II εἶναι ὁ κινούμενος, διότι αὐτὸς συμπίπτει κατ' οὐσίαν μὲ τὴν κυρίαν ἄτρακτον τοῦ τόρνου, τὴν ὁποίαν καὶ ἐπιθυμοῦμε νὰ κινήσωμε.

— Ὁ ἠλεκτροκινητὴρ περιστρέφεται μὲ ταχύτητα 1 410 στρ/min. Ἡ κίνησις μεταφέρεται εἰς τὸν ἄξονα I μέσῳ ἑνὸς ζεύγους τροχαλιῶν καὶ ἑνὸς ἱμάντος. Μόλις λοιπὸν συνδέσωμε τὸν ἠλεκτροκινητῆρα μὲ τὸ δίκτυον, ὁ κινητήριος ἄξων τοῦ κιβωτίου ταχυτήτων ἀρχίζει νὰ περιστρέφεται μὲ ταχύτητα $n_\kappa = \frac{1\,410}{1{,}5} =$ 940 στρ/min.

— Οἱ τρεῖς ὀδοντωτοὶ τροχοὶ α, β, γ συνδέονται στερεῶς μεταξύ των καὶ δὲν ἔχουν τὴν δυνατότητα ἐλευθέρας περιστροφῆς. Μόλις λοιπὸν ἀρχίσῃ ἡ περιστροφὴ τοῦ κινητηρίου ἄξονος, ἀρχίζει ταυτοχρόνως καὶ ἡ περιστροφὴ τῶν α, β, γ. Ἡ περιστροφική των ταχύτης εἶναι προφανῶς καὶ αὐτὴ ἴση πρὸς 940 στρ/min.

— Οἱ ὀδοντωτοὶ τροχοὶ α, β, καὶ γ ἔχουν τὴν δυνατότητα νὰ κινοῦνται κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος Ι. Ἡ κίνησίς των αὐτή, ἐλέγχεται μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ μοχλοῦ Α, ὁ ὁποῖος, ὅπως βλέπομε εἰς τὸ σχῆμα, δύναται νὰ λάβῃ τρεῖς θέσεις. Ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν «ἀριστερὰ» (←) προκαλεῖ μετατόπισιν τοῦ συγκροτήματος τῶν τροχῶν α, β καὶ γ πρὸς τὰ ἀριστερά, μέχρις ὅτου ἔλθουν εἰς ἐμπλοκὴν οἱ δύο ὀδοντωτοὶ τροχοὶ α καὶ ε. Ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν «μέσον» (↑) προκαλεῖ μετακίνησιν τοῦ συγκροτήματος τῶν τροχῶν α, β καὶ γ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ἔλθουν εἰς ἐμπλοκὴν οἱ δύο ὀδοντωτοὶ τροχοὶ β καὶ ζ. Ὅταν τέλος εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν «δεξιὰ» (→) προκαλεῖ μετατόπισιν τοῦ συγκροτήματος τῶν τροχῶν α, β καὶ γ πρὸς τὰ δεξιά, μέχρις ὅτου ἔλθουν εἰς ἐμπλοκὴν οἱ δύο ὀδοντωτοὶ τροχοὶ γ καὶ η.

— Μόλις συνδεθῇ ὁ ἠλεκτροκινητὴρ μὲ τὸ δίκτυον, ἀρχίζει νὰ περιστρέφεται ἕνας ἀπὸ τοὺς τροχοὺς ε, ζ ἢ η, ἀναλόγως τῆς θέσεως εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται ὁ μοχλὸς Α. Ὅπως βλέπομε ὅμως εἰς τὸ σχῆμα, οἱ τροχοὶ ε, ζ καὶ η μαζὺ ἐπίσης καὶ μὲ τὸν δ, εἶναι μεταξύ των στερεῶς συνδεδεμένοι. Αὐτὸ ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα νὰ τεθοῦν ὅλοι μαζὺ εἰς περιστροφικὴν κίνησιν, μόλις συνδεθῇ ὁ ἠλεκτροκινητὴρ μὲ τὸ δίκτυον, ἀνεξαρτήτως τοῦ ποία θὰ εἶναι ἡ συγκεκριμένη θέσις τοῦ μοχλοῦ Α.

— Τὸ συγκρότημα τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν δ, ε, ζ καὶ η ἔχει τὴν δυνατότητα νὰ περιστρέφεται ἐλευθέρως γύρω ἀπὸ τὸν ἄξονα II. Ἑπομένως ἡ κίνησίς του δὲν μᾶς ἐξασφαλίζει περιστροφικὴν κίνησιν τοῦ κινουμένου ἄξονος.

— Τὸ συγκρότημα τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν, δ, ε, ζ καὶ η δὲν ἔχει τὴν δυνατότητα νὰ κινῆται κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος II. Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι, ἐφ᾽ ὅσον καὶ ὁ τροχὸς θ εἶναι στερεῶς σφηνωμένος ἐπάνω εἰς τὸν ἄξονα III, τὸ ζεῦγος τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν δ καὶ θ θὰ εὑρίσκεται μονίμως εἰς ἐμπλοκήν. Ἔτσι, ὅταν τὸ συγκρότημα τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν δ, ε, ζ καὶ η τεθῇ εἰς περιστροφικὴν κίνησιν, θὰ τεθοῦν αὐτομάτως εἰς περιστροφικὴν κίνησιν ὁ ὀδοντωτὸς τροχὸς θ, ὁ ἄξων κινήσεως III καὶ ὁ ὀδοντωτὸς τροχὸς ι, ὁ ὁποῖος εἶναι ἐπίσης στερεῶς σφηνωμένος ἐπάνω εἰς τὸν ἄξονος III.

— Ὁ ὀδοντωτὸς τροχὸς κ δὲν ἔχει ἐπίσης τὴν δυνατότητα νὰ κινῆται κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος II. Συνεπῶς θὰ εὑρίσκεται μονίμως εἰς ἐμπλοκὴν μὲ τὸν ὀδοντωτὸν τροχὸν ι. Ὅταν λοιπὸν τεθῇ εἰς περιστροφικὴν κίνησιν ὁ τροχὸς ι, θὰ τεθῇ αὐτομάτως εἰς περιστροφικὴν κίνησιν καὶ ὁ τροχὸς κ. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ κ ἔχει τὴν δυνατότητα ἐλευθέρας περιστροφῆς περὶ τὸν ἄξονα II, ἡ περιστροφική του κίνησις δὲν μᾶς ἐξασφαλίζει καὶ περιστροφικὴν κίνησιν τῆς κυρίας ἀτράκτου τοῦ τόρνου.

Τελικῶς συμπεραίνομε ὅτι, κατὰ τὴν σύνδεσιν τοῦ ἠλεκροκινητῆρος μὲ τὸ δίκτυον, τίθενται — ἀνεξαρτήτως τῆς θέσεως τοῦ μοχλοῦ Α — εἰς περιστροφικὴν κίνησιν οἱ ἄξονες I καὶ III, καθὼς ἐπίσης καὶ ὅλοι οἱ ὀδοντωτοὶ τροχοὶ τοῦ κιβωτίου ταχυτήτων. Ὁ μόνος, ποὺ δὲν τίθεται εἰς περιστροφικὴν κίνησιν, εἶναι ὁ ἄξων, τὸν ὁποῖον ἐπιδιώκομε νὰ κινήσωμε!

— Ὁ Σ παριστᾶ συμβολικῶς ἕνα συμπλέκτην μὲ ἐμπλεκομένους ὀδόντας. Ὁ ἐν λόγῳ συμπλέκτης ἔχει τὴν δυνατότητα σχετικῆς κινήσεως κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος II, ἡ δὲ κίνησίς του αὐτὴ ἐλέγχεται ἐξωτερικῶς μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ μοχλοῦ Β. Ὅταν ὁ μοχλὸς Β εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν « ἀριστερὰ » (←), ὁ συμπλέκτης ἐμπλέκεται μὲ τὸν ὀδοντωτὸν τροχὸν η καὶ παρασύρεται εἰς περιστροφικὴν κίνησιν. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ συμπλέκτης δὲν ἔχει τὴν δυνατότητα ἐλευθέρας περιστροφῆς γύρω ἀπὸ τὸν ἄξονα II, παρασύρει εἰς περιστροφικὴν κίνησιν τὸν ἄξονα II, ἐπομένως καὶ τὴν κυρίαν ἄτρακτον τοῦ τόρνου. Ὅταν τώρα ὁ μοχλὸς Β εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν « δεξιὰ » (→), ὁ συμπλέκτης ἐμπλέκεται μὲ τὸν ὀδοντωτὸν τροχὸν κ καὶ παρασύρει εἰς περιστροφικὴν κίνησιν τὴν κυρίαν ἄτρακτον τοῦ τόρνου. Καταλήγομε λοιπὸν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι, ἐὰν ἐπενεργήσωμε εἰς τὸν μοχλὸν Β, δυνάμεθα νὰ θέσωμε εἰς περιστροφικὴν κίνησιν καὶ τὴν κυρίαν ἄτρακτον τοῦ τόρνου, πρᾶγμα ποὺ ἀποτελεῖ ἄλλωστε τὸν ἀντικειμενικόν μας σκοπόν.

β) Ἀφοῦ βεβαιωθοῦμε ὅτι κατενοήσαμε ἐπαρκῶς τὴν λειτουργίαν ὅλων τῶν ἐπὶ μέρους στοιχείων τοῦ κιβωτίου ταχυτήτων, εἴμεθα πλέον ἕτοιμοι νὰ προχωρήσωμε εἰς τὴν « ποσοτικὴν » μελέτην.

Πράγματι, κατὰ τὸ πρῶτον στάδιον τῆς μελέτης μας ἐλέγαμε ἁπλῶς ὅτι ὁ τάδε ἄξων ἢ ὁ τάδε τροχὸς τίθεται εἰς περιστροφικὴν κίνησιν, χωρὶς ὅμως νὰ ἐρευνήσωμε ἢ ἔστω νὰ θίξωμε τὴν τιμὴν τῆς περιστροφικῆς κινήσεως, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται ὁ καθεὶς ἀπὸ αὐτούς.

Κατὰ τὸ δεύτερον ὅμως στάδιον τῆς μελέτης μας γνωρίζομε πλέον καλῶς τί κινεῖται, πῶς κινεῖται καὶ ὑπὸ ποίας προϋποθέσεις κινεῖται. Δὲν ἀπομένει, λοιπόν, παρὰ νὰ ὑπολογίσωμε καὶ τὸ πόσον γρήγορα κινεῖται.

Ὅταν ὁ μοχλὸς Β εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν « ἀριστερά », ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τοῦ ἄξονος II εἶναι ἴση μὲ τὴν περιστροφικὴν ταχύτητα τοῦ συγκροτήματος τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν δ, ε, ζ, καὶ η. Ἡ τιμὴ τῆς ταχύτητος αὐτῆς ἐξαρτᾶται προφανῶς ἀπὸ τὴν θέσιν εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται ὁ μοχλὸς Α, διότι εἶναι διαφορετικὴ εἰς κάθε περίπτωσιν ἡ σχέσις μεταδόσεως τῆς κινήσεως ἀπὸ τὸν κινητήριον ἄξονα εἰς τὸ συγκρότημα τῶν τεσσάρων ὀδοντωτῶν τροχῶν. Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι, διὰ τὴν θέσιν « ἀριστερὰ » τοῦ μοχλοῦ Β, ἡ κυρία ἄτρακτος τοῦ τόρνου δύναται νὰ λάβῃ τρεῖς διαφορετικὰς τιμὰς περιστροφικῆς ταχύτητος, δηλαδὴ μίαν τιμὴν διὰ κάθε μίαν ἀπὸ τὰς τρεῖς θέσεις τοῦ μοχλοῦ Α.

Ὅταν ὁ μοχλὸς Β εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν « δεξιά », ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τοῦ ἄξονος ΙΙ εἶναι ἴση μὲ τὴν περιστροφικὴν ταχύτητα τοῦ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ κ, ἡ ὁποία μὲ τὴν σειράν της ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος τοῦ συγκροτήματος τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν δ, ε, ζ, η καὶ ἑπομένως ἀπὸ τὴν θέσιν πάλιν εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται ὁ μοχλὸς Α. Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι καὶ διὰ τὴν θέσιν « δεξιὰ » τοῦ μοχλοῦ Β, ἡ κυρία ἄτρακτος τοῦ τόρνου δύναται νὰ λάβῃ πάλιν τρεῖς διαφορετικὰς τιμὰς περιστροφικῆς ταχύτητος, δηλαδὴ μίαν τιμὴν διὰ κάθε μίαν θέσιν τοῦ μοχλοῦ Α.

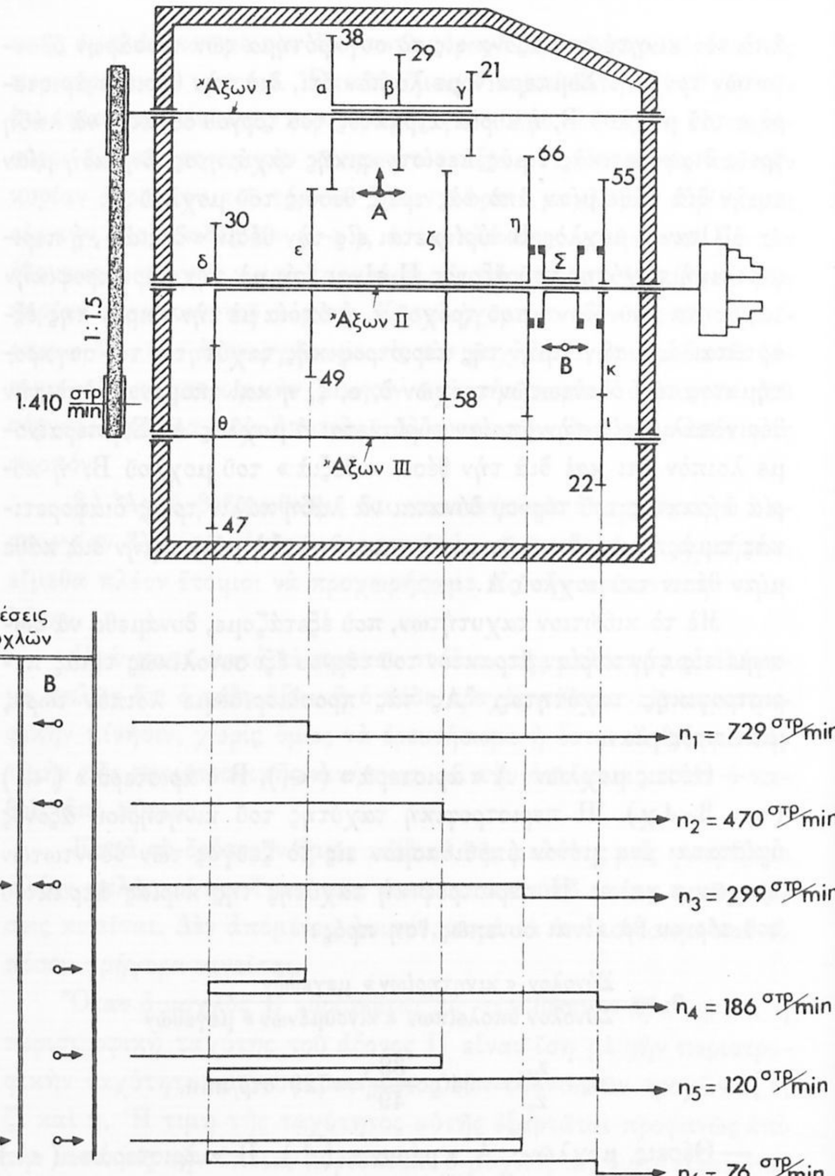
Μὲ τὸ κιβώτιον ταχυτήτων, ποὺ ἐξετάζομε, δυνάμεθα νὰ δώσωμε εἰς τὴν κυρίαν ἄτρακτον τοῦ τόρνου ἕξι συνολικῶς τιμὰς περιστροφικῆς ταχύτητος. Ἂς τὰς προσδιορίσωμε λοιπὸν τώρα, μίαν πρὸς μίαν.

— Θέσεις μοχλῶν: Α « ἀριστερὰ » (←), Β « ἀριστερὰ » (←) (σχ. 3·4χ). Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τοῦ κινητηρίου ἄξονος ὑφίσταται ἕνα μόνον ὑποβιβασμὸν εἰς τὸ ζεῦγος τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν α καὶ ε. Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τῆς κυρίας ἀτράκτου τοῦ τόρνου θὰ εἶναι συνεπῶς ἴση πρός:

$$n_1 = \frac{\text{Σύνολον « κινητηρίων » μεγεθῶν}}{\text{Σύνολον ὑπολοίπων « κινουμένων » μεγεθῶν}} =$$

$$n_\kappa \cdot \frac{z_\alpha}{z_\varepsilon} = 940 \cdot \frac{38}{49} = 729 \text{ στρ/min.}$$

— Θέσεις μοχλῶν: Α « μέσον » (↑), Β « ἀριστερὰ » (←) (σχ. 3·4χ). Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τοῦ κινητηρίου ἄξονος


38
29
21
Ἄξων I
α
β
γ
66
55
A
30
δ
ε
ζ
η
Σ
Ἄξων II
1:1.5
49
B
κ
1.410 στρ/min
58
θ
ι
Ἄξων III
22
47
Θέσεις Μοχλῶν
A
B
n1 = 729 στρ/min
n2 = 470 στρ/min
n3 = 299 στρ/min
n4 = 186 στρ/min
n5 = 120 στρ/min
n6 = 76 στρ/min

Σχ. 3·4 χ.

ὑφίσταται πάλιν ἕνα μόνον ὑποβιβασμὸν εἰς τὸ ζεῦγος ὀδοντωτῶν τροχῶν β καὶ ζ.

Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τῆς κυρίας ἀτράκτου τοῦ τόρνου θὰ εἶναι συνεπῶς ἴση πρός:

$$n_2 = \frac{\text{Σύνολον « κινητηρίων » μεγεθῶν}}{\text{Σύνολον ὑπολοίπων « κινουμένων » μεγεθῶν}} =$$

$$n_\kappa \cdot \frac{z_\beta}{z_\zeta} = 940 \cdot \frac{29}{58} = 470 \text{ στρ/min.}$$

— Θέσεις μοχλῶν: Α « δεξιὰ » (→), Β « ἀριστερὰ » (←) (σχ. 3·4χ). Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τοῦ κινητηρίου ἄξονος ὑφίσταται καὶ πάλιν ἕνα μόνον ὑποβιβασμὸν εἰς τὸ ζεῦγος ὀδοντωτῶν τροχῶν γ καὶ η. Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τῆς κυρίας ἀτράκτου τοῦ τόρνου θὰ εἶναι συνεπῶς ἴση πρός:

$$n_3 = \frac{\text{Σύνολον « κινητηρίων » μεγεθῶν}}{\text{Σύνολον ὑπολοίπων « κινουμένων » μεγεθῶν}} =$$

$$n_\kappa \cdot \frac{z_\gamma}{z_\eta} = 940 \cdot \frac{21}{66} = 299 \text{ στρ/min.}$$

— Θέσεις μοχλῶν: Α « ἀριστερὰ » (←), Β « δεξιὰ » (→) (σχ. 3·4χ). Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τοῦ κινητηρίου ἄξονος ὑφίσταται τρεῖς ὑποβιβασμούς, ἕνα εἰς τὸ ζεῦγος ὀδοντωτῶν τροχῶν α καὶ ε, ἕνα εἰς τὸ ζεῦγος ὀδοντωτῶν τροχῶν δ καὶ θ καὶ τέλος ἕνα εἰς τὸ ζεῦγος ὀδοντωτῶν τροχῶν ι καὶ κ. Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τῆς κυρίας ἀτράκτου τοῦ τόρνου θὰ εἶναι συνεπῶς ἴση πρός:

$$n_4 = \frac{\text{Σύνολον « κινητηρίων » μεγεθῶν}}{\text{Σύνολον ὑπολοίπων « κινουμένων » μεγεθῶν}} =$$

$$n_\kappa \cdot \frac{z_\alpha}{z_\varepsilon} \cdot \frac{z_\delta}{z_\theta} \cdot \frac{z_\iota}{z_\kappa} = 940 \cdot \frac{38}{49} \cdot \frac{30}{47} \cdot \frac{22}{55} = 186 \text{ στρ/min.}$$

— Θέσεις μοχλῶν: Α « μέσον » (↑), Β « δεξιὰ » (→) (σχ. 3·4χ). Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τοῦ κινητηρίου ἄξονος ὑφίσταται καὶ πάλιν τρεῖς ὑποβιβασμούς, ἕνα εἰς τὸ ζεῦγος ὀδοντωτῶν τροχῶν β καὶ ζ, ἕνα εἰς τὸ ζεῦγος ὀδοντωτῶν τροχῶν δ καὶ θ καὶ τέλος ἕνα εἰς τὸ ζεῦγος ὀδοντωτῶν τροχῶν ι καὶ κ. Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τῆς κυρίας ἀτράκτου τοῦ τόρνου θὰ εἶναι συνεπῶς ἴση πρός:

$$n_5 = \frac{\text{Σύνολον « κινητηρίων » μεγεθῶν}}{\text{Σύνολον ὑπολοίπων « κινουμένων » μεγεθῶν}} =$$

$$n_\kappa \cdot \frac{z_\beta}{z_\zeta} \cdot \frac{z_\delta}{z_\theta} \cdot \frac{z_\iota}{z_\kappa} = 940 \cdot \frac{29}{58} \cdot \frac{30}{47} \cdot \frac{22}{55} = 120 \text{ στρ/min.}$$

— Θέσεις μοχλῶν: Α « δεξιὰ » (→), Β « δεξιὰ » (→), (σχ. 3·4 χ). Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τοῦ κινητηρίου ἄξονος ὑφίσταται καὶ πάλιν τρεῖς ὑποβιβασμούς, ἕνα εἰς τὸ ζεῦγος ὀδοντωτῶν τροχῶν γ καὶ η, ἕνα εἰς τὸ ζεῦγος ὀδοντωτῶν τροχῶν δ καὶ θ καὶ τέλος ἕνα εἰς τὸ ζεῦγος ὀδοντωτῶν τροχῶν ι καὶ κ. Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τῆς κυρίας ἀτράκτου τοῦ τόρνου θὰ εἶναι συνεπῶς ἴση πρός:

$$n_6 = \frac{\text{Σύνολον « κινητηρίων μεγεθῶν »}}{\text{Σύνολον ὑπολοίπων « κινουμένων » μεγεθῶν}} =$$

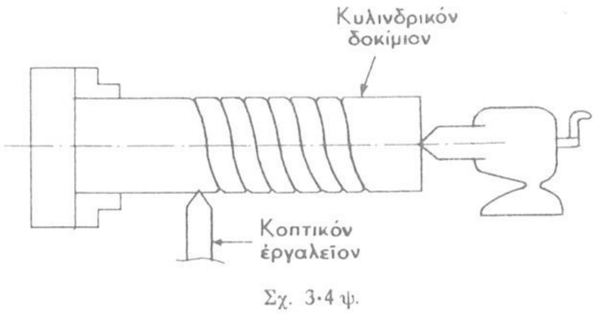
$$n_\kappa \frac{z_\gamma}{z_\eta} \cdot \frac{z_\delta}{z_\theta} \cdot \frac{z_\iota}{z_\kappa} = 940 \cdot \frac{21}{66} \cdot \frac{30}{47} \cdot \frac{22}{55} = 76 \text{ στρ/min.}$$

Αἱ ἕξι τιμαὶ τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ δώσωμε εἰς τὴν κυρίαν ἄτρακτον τοῦ τόρνου, εἶναι ἑπομένως αἱ: 76, 120, 186, 299, 470 καὶ 729 στροφαὶ ἀνὰ πρῶτον λεπτόν.

5. *Ἐφαρμογή: Κοπὴ σπειρωμάτων εἰς τὸν τόρνον.*

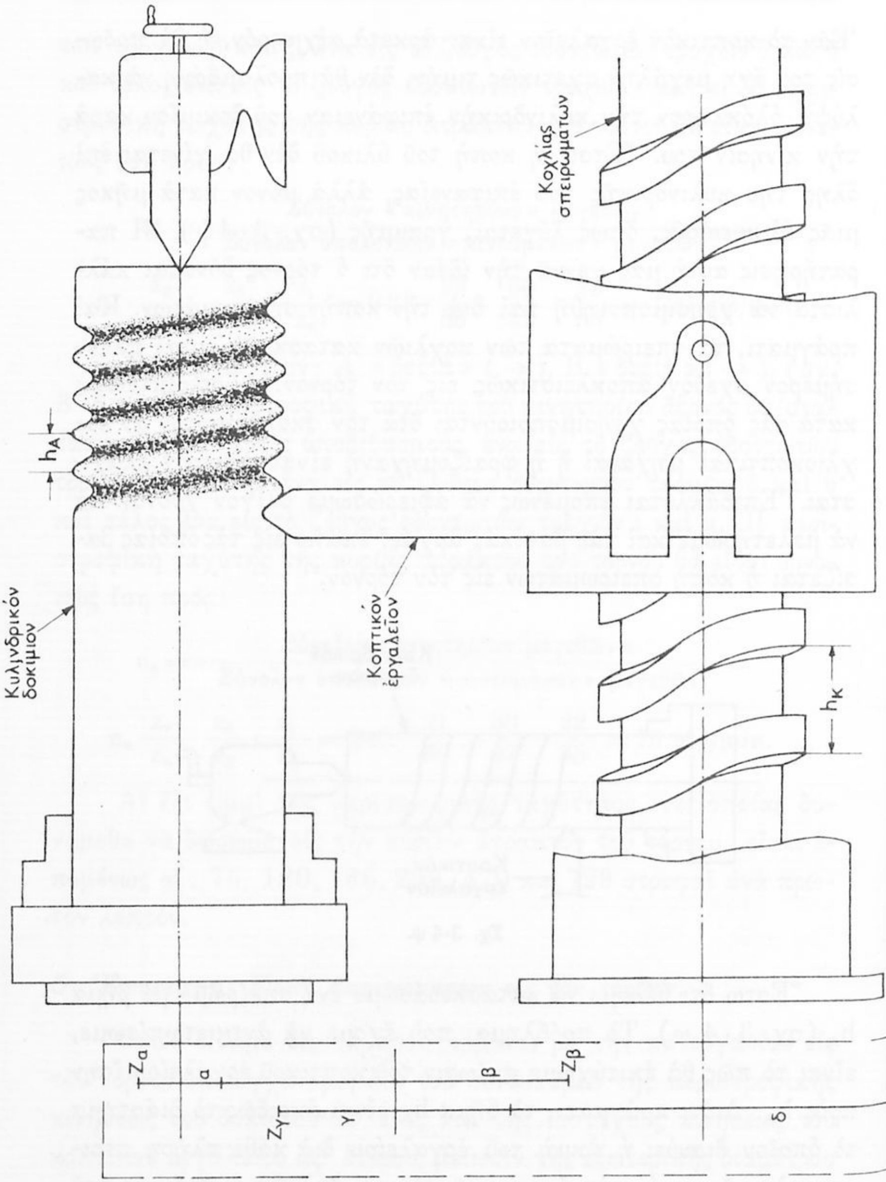
Ὅπως εἴδαμε εἰς τὰ προηγούμενα, μὲ τὴν κατεργασίαν εἰς τὸν τόρνον ἐπιτυγχάνομε, διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τοῦ δοκιμίου ἀφ᾽ ἑνὸς καὶ τῆς ἰσοταχοῦς κινήσεως τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου ἀφ᾽ ἑτέρου, μείωσιν τῆς ἐξωτερικῆς διαμέτρου ἑνὸς κυλινδρικοῦ δοκιμίου. Τοῦτο ὅμως δὲν εἶναι πάντοτε ἀληθές.

Ἐὰν τὸ κοπτικὸν ἐργαλεῖον εἶναι ἀρκετὰ αἰχμηρόν, ἡ δὲ πρόωσίς του ἔχῃ μεγάλην σχετικῶς τιμήν, δὲν θὰ προλαμβάνῃ νὰ καλύψῃ ὁλόκληρον τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δοκιμίου κατὰ τὴν κίνησίν του. Ἔτσι, ἡ κοπὴ τοῦ ὑλικοῦ δὲν θὰ γίνεται ἐπὶ ὅλης τῆς κυλινδρικῆς του ἐπιφανείας, ἀλλὰ μόνον κατὰ μῆκος μιᾶς *ἑλικοειδοῦς*, ὅπως λέγεται, γραμμῆς (σχ. 3·4 ψ). Ἡ παρατήρησις αὐτὴ μᾶς γεννᾷ τὴν ἰδέαν ὅτι ὁ τόρνος δύναται κάλλιστα νὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ διὰ τὴν κοπὴν σπειρωμάτων. Καὶ πράγματι, τὰ σπειρώματα τῶν κοχλιῶν κατασκευάζονται πλέον σήμερον σχεδὸν ἀποκλειστικῶς εἰς τὸν τόρνον. Αἱ περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦνται διὰ τὸν σκοπὸν αὐτὸν αἱ κοχλιοκοπτικαὶ μηχαναὶ ἢ ἡ φραιζομηχανὴ εἶναι σήμερον ἐλάχισται. Ἐπιβάλλεται ἑπομένως νὰ ἀφιερώσωμε ὀλίγον χρόνον διὰ νὰ μελετήσωμε καὶ τὰς βασικὰς ἀρχάς, ἐπάνω εἰς τὰς ὁποίας βασίζεται ἡ κοπὴ σπειρωμάτων εἰς τὸν τόρνον.



Σχ. 3·4 ψ.

Ἔστω ὅτι θέλομε νὰ κατασκευάσωμε ἕνα σπείρωμα μὲ βῆμα h_A (σχ. 3·4 ω). Τὸ πρόβλημα, ποὺ ἔχομε νὰ ἀντιμετωπίσωμε, εἶναι τὸ πῶς θὰ ἐπιτύχωμε πρόωσιν τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου ἴσην πρὸς h_A. Διότι πράγματι, τὸ βῆμα h_A εἶναι ἀκριβῶς τὸ διάστημα τὸ ὁποῖον διανύει ἡ ἀκμὴ τοῦ ἐργαλείου διὰ κάθε πλήρη περιστροφὴν τῆς κυρίας ἀτράκτου τοῦ τόρνου, δηλαδὴ ἡ πρόωσις τοῦ


Κοχλίας σπειρωμάτων
h_A
Κυλινδρικόν δοκίμιον
Κοπτικόν ἐργαλεῖον
h_K
Z_α
α
β
Z_β
Z_γ
γ
δ

Σχ. 3 · 4 ω.

κοπτικοῦ ἐργαλείου. (Βλ. τὴν τρίτην ἐφαρμογὴν τῆς παραγράφου 3·3).

Τὸ κοπτικὸν ἐργαλεῖον κινεῖται μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κοχλίου σπειρωμάτων, ὁ ὁποῖος ἔχει ἕνα ὡρισμένον βῆμα h_K. Συνεπῶς, ὅταν ὁ κοχλίας αὐτὸς ἐκτελέσῃ μίαν πλήρη περιστροφήν, τὸ κοπτικὸν ἐργαλεῖον θὰ μετακινηθῇ κατὰ μῆκος ἴσον πρὸς h_K. Τὸ πρόβλημά μας περιορίζεται ἑπομένως εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῆς «καταλλήλου» σχέσεως μεταδόσεως ἀπὸ τῆς κυρίας ἀτράκτου εἰς τὸν κοχλίαν σπειρωμάτων. Ἡ μετάδοσις αὐτὴ τῆς κινήσεως πρέπει νὰ γίνεται κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον: ὅταν ἡ κυρία ἄτρακτος ἐκτελῇ μίαν πλήρη περιστροφήν, ὁ κοχλίας σπειρωμάτων νὰ ἐκτελῇ ἕνα τέτοιο πολλαπλάσιον ἢ ὑποπολλαπλάσιον μιᾶς πλήρους περιστροφῆς, ὥστε νὰ μετατοπίζῃ τὸ κοπτικὸν ἐργαλεῖον κατὰ μῆκος ἴσον πρὸς τὸ ἐπιθυμητὸν βῆμα h_A.

Ἂς συμβολίσωμε διὰ τοῦ n_A τὴν περιστροφικὴν ταχύτητα τῆς κυρίας ἀτράκτου καὶ διὰ τοῦ n_K τὴν περιστροφικὴν ταχύτητα τοῦ κοχλίου σπειρωμάτων. Εἶναι φανερὸν ὅτι, εἰς χρόνον ἑνὸς λεπτοῦ, τὸ κοπτικὸν ἐργαλεῖον θὰ διανύσῃ κατὰ μῆκος τοῦ κοχλίου σπειρωμάτων διάστημα ἴσον πρὸς $h_K \cdot n_K$. Ἐμεῖς ὅμως θέλομε νὰ διανύσῃ καὶ διάστημα ἴσον πρὸς $h_A \cdot n_A$ κατὰ μῆκος τῆς κυρίας ἀτράκτου τοῦ τόρνου. Ἀπὸ τὴν προφανῆ ἰσότητα $h_A \cdot n_A = h_K \cdot n_K$, λαμβάνομε τὴν ἀναλογίαν:

$$\frac{n_K}{n_A} = \frac{h_A}{h_K}. \tag{I}$$

Ὁ ὑποβιβασμὸς τώρα τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος τῆς κυρίας ἀτράκτου τοῦ τόρνου ἐπιτυγχάνεται μὲ τὴν βοήθειαν ὀδοντωτῶν τροχῶν, τὸ σύνολον τῶν ὁποίων ἀποτελεῖ τὸ λεγόμενον *κιβώτιον ταχυτήτων τοῦ κοχλίου σπειρωμάτων*. Συμφώνως πρὸς τὸ σχῆμα 3·4 ω εἶναι:

$$\frac{n_K}{n_A} = \frac{\text{Σύνολον «κινητηρίων» μεγεθῶν}}{\text{Σύνολον «κινουμένων» μεγεθῶν}} = \frac{z_\alpha}{z_\beta} \cdot \frac{z_\gamma}{z_\delta}. \tag{II}$$

Διὰ συνδιασμοῦ τῶν (I) καὶ (II) λαμβάνομε τὴν σχέσιν:

$$\frac{h_A}{h_K} = \frac{z_\alpha}{z_\beta} \cdot \frac{z_\gamma}{z_\delta}.$$

Ἔτσι, ἐὰν τὸ βῆμα τοῦ κοχλίου σπειρωμάτων εἶναι $h_K = 6$ mm καὶ θέλωμε νὰ κατασκευάσωμε σπείρωμα μὲ βῆμα $h_A = 0{,}8$ mm, θὰ πρέπει νὰ ἐκλέξωμε τοὺς ὀδοντωτοὺς τροχοὺς α, β, γ καὶ δ κατὰ τέτοιον τρόπον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$\frac{z_\alpha}{z_\beta} \cdot \frac{z_\gamma}{z_\delta} = \frac{0{,}8}{6} \text{ (π.χ. } z_\alpha = 20,\ z_\beta = 90,\ z_\gamma = 60 \text{ καὶ } z_\delta = 100).$$

Εἶναι τότε βέβαιον ὅτι ἡ πρόωσις τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου θὰ εἶναι ἴση πρὸς 0,8 mm ἀνὰ στροφὴν τῆς κυρίας ἀτράκτου καὶ συνεπῶς ὅτι τὸ σπείρωμα, τὸ ὁποῖον θὰ κατασκευάσωμε, θὰ ἔχῃ βῆμα ἴσον πρὸς 0,8 mm.

3·5 Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

1) Διὰ τὴν ἀνύψωσιν ὑλικῶν εἰς τὸν πέμπτον ὄροφον μιᾶς πολυκατοικίας, χρησιμοποιεῖται χειροκίνητον βαροῦλκον διαμέτρου 300 mm (σχ. 3·5α). Ἐὰν τὸ τύμπανον τοῦ βαρούλκου ἐκτελῇ ἀνὰ πρῶτον λεπτὸν 25 περιστροφάς, νὰ εὑρεθῇ πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀνύψωσιν ἑνὸς δοχείου μὲ ὑλικὰ εἰς ὕψος 18 μέτρων. ($t \simeq 46$ sec)

2) Κατὰ τὴν κοπὴν σανίδων ἀπὸ μαλακὸν ξύλον μὲ τὴν βοήθειαν πριονίου κυκλικῆς μορφῆς καὶ ἐξωτερικῆς διαμέτρου 600 mm, ἐνδείκνυται νὰ ληφθῇ κοπτικὴ ταχύτης ἴση πρὸς 22 m/sec. Ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς στροφῶν n τοῦ πριονιοῦ εἰς κάθε πρῶτον λεπτόν; (σχ. 3·3β). ($n = 700$ στρ/min)

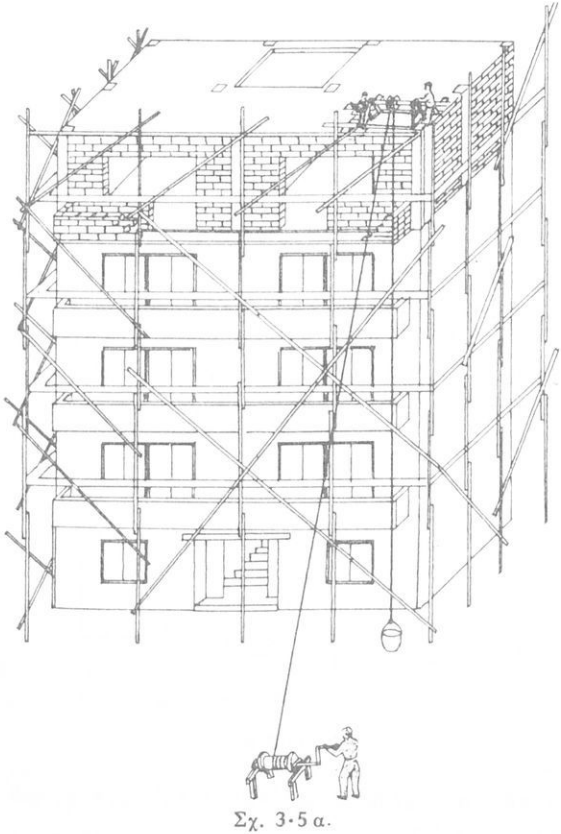
3) Εἰς ἕνα ξυλουργεῖον ὑπάρχουν δύο πριόνια κυκλικῆς μορφῆς. Τὸ πρῶτον ἀπὸ αὐτὰ ἔχει ἐξωτερικὴν διάμετρον 600 mm, δύναται δὲ νὰ λάβῃ περιστροφικὰς ταχύτητας $n_1 = 760$ στρ/min καὶ $n_2 = 920$ στρ/min. Τὸ δεύτερον ἔχει ἐξωτερικὴν διάμετρον 800 mm, δύναται δὲ νὰ λάβῃ περιστροφικὰς ταχύτητας $n_3 = 500$ στρ/min καὶ $n_4 = 630$ στρ/min.

Ἐλήφθη μία παραγγελία κοπῆς σανίδων ἀπὸ σκληρὸν ξύλον. Διὰ τὴν κοπὴν αὐτὴν ἐνδείκνυται νὰ ληφθῇ κοπτικὴ ταχύτης 26 m/sec ἕως

28 m/sec. Μὲ βάσιν τὰ ἀνωτέρω δεδόμενα, ποῖον ἀπὸ τὰ δύο πριόνια πρέπει νὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ μὲ ποίαν περιστροφικὴν ταχύτητα;

(Τὸ δεύτερον μὲ $n_4 = 630$ στρ/min)

4) Διατί ἐπεκράτησε ἡ χρησιμοποίησις τῆς μονάδος m/min διὰ τὴν μέτρησιν τῆς κοπτικῆς ταχύτητος εἰς τὰς ἐργαλειομηχανάς; Διατί ἐπεκράτησε ἡ χρησιμοποίησις τῆς μονάδος mm/min διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ταχύτητος προώσεως;



Σχ. 3·5 α.

5) Ἔμβολα ἀπὸ ἀλουμίνιον μὲ ἐξωτερικὴν διάμετρον d = 55 mm καὶ μῆκος s = 40 mm ὑφίστανται κατεργασίαν εἰς ἕνα τόρνον, ἡ κυρία ἄτρακτος τοῦ ὁποίου δύναται νὰ λάβῃ περιστροφικὰς ταχύτητας n = 400,

462, 533, 616, 711, 822, 950, 1 097, 1 268 καὶ 1 462 στρ/min. Ἡ κοπτικὴ ταχύτης λαμβάνεται ἴση πρὸς 220 m/min ἡ δὲ πρόωσις ἴση πρὸς 0,05 mm/στρ.

Ζητοῦνται: α) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τῆς κυρίας ἀτράκτου τοῦ τόρνου; (n = 1 268 στρ/min)

β) Ποία θὰ εἶναι τότε ἡ ταχύτης προώσεως τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου; (υ_s = 63,4 mm/min)

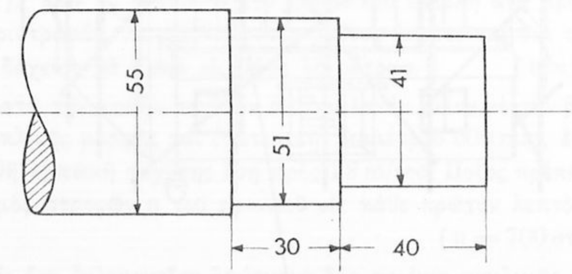
γ) Ἀπὸ προηγουμένας, παρομοίας φύσεως, κατεργασίας, ὑπάρχουν τὰ ἑξῆς δεδομένα:

— Χρόνος συνδέσεως καὶ ἀποσυνδέσεως κάθε ἐμβόλου: 0,10 min.

— Χρόνος χειρισμῶν κατὰ τὴν κατεργασίαν ἑνὸς ἐμβόλου: 0,09 min.

Μὲ βάσιν αὐτά, πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται διὰ τὴν κατεργασίαν ἑνὸς ἐμβόλου; Ποῖος εἶναι συνεπῶς ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐμβόλων, ποὺ εἶναι δυνατὸν νὰ ὑποστοῦν τὴν ἀνωτέρω κατεργασίαν εἰς χρόνον μιᾶς ὥρας; (0,82 min, 73 ἔμβολα)

6) Εἰς ἕνα μηχανουργεῖον ἐλήφθησαν 205 κυλινδρικὰ δοκίμια μὲ ἐξωτερικὴν διάμετρον 55 mm· εἶναι κατασκευασμένα ἀπὸ μαλακὸν χάλυβα σκληρότητος 140 βαθμῶν Brinell περίπου. Κατὰ τὴν παραγγελίαν, τὰ δοκίμια αὐτὰ πρέπει νὰ ὑποστοῦν τέτοιου εἴδους κατεργασίαν, ὥστε νὰ λάβουν τὴν τελικὴν μορφήν, ποὺ ἐμφαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 3 · 5 β.



Σχ. 3·5 β.

Μετὰ ἀπὸ τὴν σχετικὴν μελέτην, ὁ ἐπὶ κεφαλῆς τοῦ μηχανουργείου ἀπεφάσισε τὰ ἑξῆς:

α) Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς παραγγελίας θὰ ἀπασχοληθῇ ἕνας μόνον τόρνος τοῦ μηχανουργείου, διότι οἱ ὑπόλοιποι πρέπει νὰ διατεθοῦν διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἄλλων ἐργασιῶν.

Ἡ ἄτρακτος τοῦ τόρνου, ποὺ πρόκειται νὰ χρησιμοποιηθῆ, δύναται νὰ λάβη περιστροφικὰς ταχύτητας n = 225, 259, 298, 343, 394, 453, 521, 599, 689, 794, 912, καὶ 1050 στρ/min.

β) Θὰ χρησιμοποιηθῆ κοπτικὸν ἐργαλεῖον ἀπὸ ταχυχάλυβα.

γ) Ἡ κατεργασία κάθε δοκιμίου θὰ γίνῃ εἰς τρία στάδια:

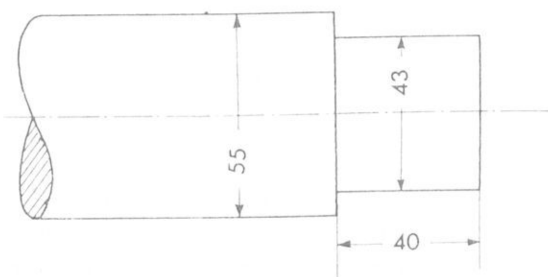
I. Τόρνευσις τοῦ δοκιμίου εἰς μῆκος 40 mm (σχ. 3·5γ).

Διάμετρος: 55 mm

Βάθος κοπῆς: 6 mm

Πρόωσις: 0,6 mm/στρ.

Κοπτικὴ ταχύτης: 40 m/min.



Σχ. 3·5γ.

II. Τόρνευσις τοῦ δοκιμίου εἰς μῆκος 40 mm (σχ. 3·5δ).

Διάμετρος: 43 mm

Βάθος κοπῆς: 1 mm

Πρόωσις: 0,2 mm/στρ.

Κοπτικὴ ταχύτης: 115 m/min.

III. Τόρνευσις τοῦ δοκιμίου εἰς μῆκος 30 mm (σχ. 3·5β).

Διάμετρος: 55 mm

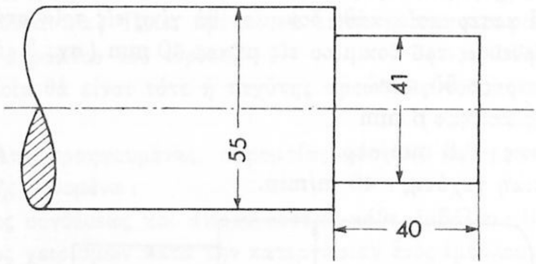
Βάθος κοπῆς: 2 mm

Πρόωσις: 0,2 mm

Κοπτικὴ ταχύτης: 95 m/min.

Μὲ βάσιν τὰ στοιχεῖα, ποὺ ὑπάρχουν ἀπὸ προηγουμένας παρομοίας ἐργασίας, δύναται νὰ ὑπολογισθῆ ὅτι τὸ σύνολον τῶν βοηθητικῶν χρόνων (χρόνου συνδέσεως καὶ ἀποσυνδέσεως, χρόνου χειρισμῶν κλπ.) ἀνέρχεται εἰς 0,75 min διὰ κάθε δοκίμιον.

Ἐὰν ληφθῆ ὑπ' ὄψιν ὅτι προβλέπεται χρόνος 5 min διὰ τὴν ἀνάπαυσιν τοῦ χειριζομένου τὸν τόρνον τεχνίτου μετὰ ἀπὸ κάθε 55 min συνεχοῦς ἐργασίας, ζητεῖται πόσος χρόνος θὰ ἀπαιτηθῇ διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς παραγγελίας. (περίπου 6 h)



Σχ. 3 · 5 δ.

Σημείωσις: Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῆς ἀσκήσεως θὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ ὁ Πίναξ 5.

7) Εἰς ἕνα μηχανουργεῖον παρελήφθησαν 200 κυλινδρικὰ δοκίμια ἀπὸ μαλακὸν χάλυβα ἐξωτερικῆς διαμέτρου $d = 85$ mm καὶ μήκους $s = 200$ mm. Τὰ δοκίμια αὐτὰ πρόκειται νὰ ὑποστοῦν δύο εἴδη κατεργασιῶν κατὰ τὴν ἑξῆς σειράν:

α) Κατεργασίαν εἰς τὸν τόρνον διὰ τὴν ἐλάττωσιν τῆς ἐξωτερικῆς διαμέτρου των ἀπὸ 85 mm εἰς 80 mm.

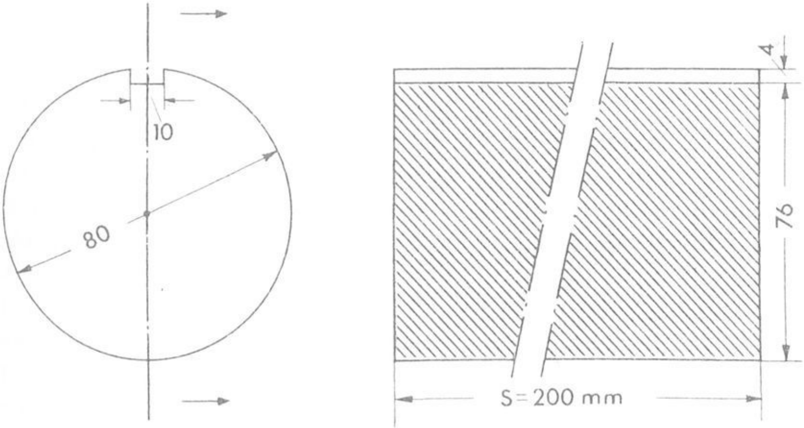
β) Κατεργασίαν εἰς τὴν φραιζομηχανήν, διὰ τὴν κατασκευὴν ἐγκοπῆς καθ' ὅλον τὸ μῆκος των, βάθους 4 mm καὶ πλάτους 10 mm (σχ. 3 · 5 ε).

Ὁ ἐπὶ κεφαλῆς τοῦ μηχανουργείου, ἀφοῦ λάβῃ ὑπ' ὄψιν του ὅτι μόνον ἕνας τόρνος καὶ μόνον μία φραιζομηχανὴ εἶναι δυνατὸν νὰ διατεθοῦν διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς παραγγελίας, καὶ μάλιστα μὲ τὴν μεγίστην δυνατὴν οἰκονομίαν χρόνου, καλεῖται νὰ προγραμματίσῃ τὴν σειρὰν τῶν ἐργασιῶν καὶ νὰ προϋπολογίσῃ, εἰ δυνατόν, μετὰ πόσον χρόνον θὰ εἶναι εἰς θέσιν νὰ παραδώσῃ ἕτοιμα τὰ δοκίμια εἰς τὸν πελάτην. Κατόπιν μελέτης κατέληξε εἰς τὰ ἑξῆς συμπεράσματα:

α) Ἡ κατεργασία τῆς τορνεύσεως θὰ γίνῃ μὲ τὴν βοήθειαν δύο κοπτικῶν ἐργαλείων ἀπὸ ταχυχάλυβα. Τὸ ἕνα θὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν ἐκχόνδρισιν καὶ τὸ ἄλλο διὰ τὴν λείανσιν.

β) Ἡ κατεργασία τοῦ φραιζαρίσματος θὰ γίνῃ μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς κοπτικοῦ ἐργαλείου ἀπὸ ταχυχάλυβα μὲ ἐξωτερικὴν διάμετρον d′ = 80 mm καὶ μὲ z = 22 ὀδόντας.

γ) Ἡ κατεργασία τῆς τορνεύσεως θὰ γίνῃ εἰς δύο στάδια:



Σχ. 3·5 ε.

I. Τὴν ἐκχόνδρισιν καὶ τῶν 200 δοκιμίων, διαδοχικῶς:

Διάμετρος δοκιμίων: 85 mm

Βάθος κοπῆς: 2 mm

Πρόωσις 0,8 mm/στροφὴν

Κοπτικὴ ταχύτης: 50 m/min

Σύνολον βοηθητικῶν χρόνων: 0,15 min διὰ κάθε δοκίμιον.

II. Τὴν λείανσιν τῶν 200 δοκιμίων ποὺ ὑπέστησαν τὴν προηγουμένην κατεργασίαν:

Διάμετρος δοκιμίων: 81 mm

Βάθος κοπῆς: 0,5 mm

Πρόωσις: 0,2 mm/στροφὴν

Κοπτικὴ ταχύτης: 130 m/min

Σύνολον βοηθητικῶν χρόνων: 0,14 min ἀνὰ δοκίμιον.

δ) Ἡ κατεργασία τοῦ φραιζαρίσματος θὰ γίνῃ εἰς ἕνα στάδιον

Βάθος κοπῆς: 4 mm

Πρόωσις: 0,2 mm/ὀδόντα

Κοπτικὴ ταχύτης: 55 m/min

Σύνολον βοηθητικῶν χρόνων: 0,19 min ἀνὰ δοκίμιον.

Ἐὰν ληφθῇ ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι ἡ κυρία ἄτρακτος τοῦ τόρνου, ποὺ πρόκειται νὰ χρησιμοποιηθῇ, δύναται νὰ λάβῃ περιστροφικὰς ταχύτητας n = 131, 157, 189, 226, 272, 326, 391, 469, 563, καὶ 675 στρ/min, καθὼς ἐπίσης ὅτι τὸ κοπτικὸν ἐργαλεῖον τῆς φραιζομηχανῆς δύναται νὰ λάβῃ περιστροφικὰς ταχύτητας n = 66, 80, 98, 119, 145, 177, 216, 264, 322 καὶ 393 στρ/min ζητοῦνται:

α) Ἐπὶ πόσον χρόνον θὰ ἀπασχοληθῇ ὁ τεχνίτης μὲ τὴν ἐκχόνδρισιν κάθε δοκιμίου; (1,32 min/δοκίμ.)

β) Ἐπὶ πόσον χρόνον θὰ ἀπασχοληθῇ ὁ τόρνος διὰ τὴν ἐκχόνδρισιν καὶ τῶν 200 δοκιμίων; (Ὁ τεχνίτης ἔχει ἐπαρκῆ χρόνον δι᾽ ἀνάπαυσιν κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἐκχονδρίσεως κάθε δοκιμίου. Συνεπῶς εἶναι περιττὴ ἡ πρόβλεψις πενταλέπτου ἀναπαύσεως μετὰ ἀπὸ κάθε 55 λεπτὰ συνεχοῦς ἐργασίας). (4h καὶ 25 min)

γ) Ἐπὶ πόσον χρόνον ἀπασχολεῖται ὁ τεχνίτης μὲ τὴν λείανσιν κάθε δοκιμίου; (1,78 min/δοκίμιον)

δ) Ἐπὶ πόσον χρόνον θὰ ἀπασχοληθῇ ὁ τόρνος διὰ τὴν λείανσιν καὶ τῶν 200 δοκιμίων; (Νὰ μὴ προβλεφθῇ εἰδικῶς χρόνος ἀναπαύσεως τοῦ τεχνίτου). (5h καὶ 56 min)

ε) Πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται διὰ τὸ φραιζάρισμα κάθε δοκιμίου (0,4 min/δοκίμιον)

ζ) Ἄς ὑποθέσωμε ὅτι ἡ κατεργασία τῆς ἐκχονδρίσεως ἀρχίζει τὴν 7ην πρωϊνὴν ὥραν τῆς Δευτέρας. Ὅταν γνωρίζωμε ὅτι τὸ ὡράριον ἐργασίας εἰς τὸ μηχανουργεῖον εἶναι 7.00 ἕως 12.00 καὶ 12.30 ἕως 15.30, εἰς ποίαν ὥραν τῆς ἡμέρας κατ᾽ ἐλάχιστον εἶναι δυνατὸν νὰ ἀρχίσῃ ἡ κατεργασία τοῦ φραιζαρίσματος; (τὴν 11ην καὶ 27 min)

Ἐπὶ πόσον χρόνον θὰ ἀπασχοληθῇ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ φραιζομηχανὴ διὰ τὴν κατεργασίαν καὶ τῶν 200 δοκιμίων; (5 h καὶ 55 min)

Ἡ ἀπασχόλησις τοῦ τεχνίτου τῆς φραιζομηχανῆς θὰ εἶναι συνεχής; Θὰ ἀπασχολῆται δηλαδὴ συνεχῶς μὲ κατεργασίαν δοκιμίων ἢ θὰ ἀναγκάζεται νὰ περιμένῃ τὴν ἀποπεράτωσιν τῆς λειάνσεως κάθε δοκιμίου; (Θὰ ἀναγκάζεται νὰ ἀναμένῃ ἐπὶ χρόνον 1.38 min πρὶν ἀπὸ κάθε φραιζάρισμα).

Συμφέρει μία τέτοια κατάστασις διὰ τὸ μηχανουργεῖον καὶ ἐὰν ὄχι διατί; (προφανῶς ὄχι)

η) Πότε πρέπει νὰ ἀρχίσῃ ἡ κατεργασία τοῦ φραιζαρίσματος; (τὴν 8ην πρωϊνὴν τῆς Τρίτης)

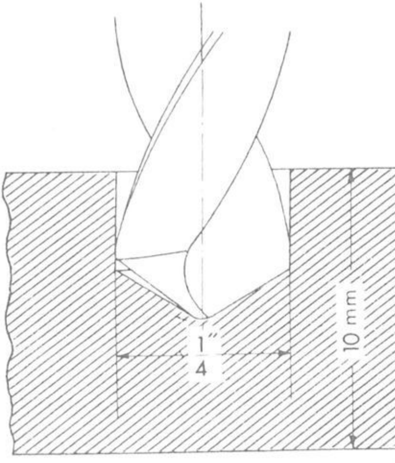
Πόσα δοκίμια θὰ ἔχουν ἤδη ὑποστῆ τὴν κατεργασίαν τῆς λειάνσεως μέχρι τῆς χρονικῆς αὐτῆς στιγμῆς; (155 δοκίμια)

Τί πλεονεκτήματα παρουσιάζει ὁ τελευταῖος αὐτὸς τρόπος προγραμματισμοῦ τῆς ὅλης σειρᾶς ἐργασιῶν;

("Ετσι μόνον δικαιολογεῖται τὸ ἡμερομίσθιον τοῦ χειριζομένου τὴν φραιζομηχανὴν τεχνίτου. Ἡ φραιζομηχανὴ χρησιμοποιεῖται μόνον ἐπὶ 1 h καὶ 20 min καὶ ὄχι ἐπὶ 5 h καὶ 55 min).

θ) Πότε θὰ μπορέσῃ νὰ παραλάβῃ ἕτοιμα τὰ 200 δοκίμιά του ὁ πελάτης; (τὴν Τρίτην εἰς τὰς 9.20 περίπου)

8. Εἰς τὸ σχῆμα 3·5ζ παρίσταται σχηματικῶς ἡ κατεργασία διανοίξεως διαμπεροῦς ὀπῆς εἰς ἕνα πλακίδιον ἀπὸ ἀλουμίνιον πάχους 10 mm μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς τρυπάνου ἐξωτερικῆς διαμέτρου 1/4 in.



Σχ. 3·5ζ.

Τὸ πλακίδιον αὐτὸ προσδένεται στερεῶς ἐπάνω εἰς τὴν ἀκίνητον τράπεζαν τοῦ δραπάνου. Τὸ τρύπανον περιστρέφεται μὲ ταχύτητα 2000 στρ/min, ἡ δὲ πρόωσίς του εἶναι ἴση πρὸς 0,1 mm/στρ.

Ζητοῦνται α) Πῶς νομίζετε ὅτι πρέπει νὰ ὁρισθῇ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ κοπτικὴ ταχύτης τοῦ ἐργαλείου;

β) Πόση εἶναι, συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα, ἡ κοπτικὴ ταχύτης τοῦ τρυπάνου (εἰς m/min); ($\upsilon = 40$ m/min)

γ) Πόση εἶναι ἡ ταχύτης προώσεως τοῦ τρυπάνου (εἰς mm/min);
($\upsilon_s = 200$ mm/min)

δ) Πόσας φορὰς μεγαλυτέρα τῆς ταχύτητος προώσεως εἶναι ἡ κοπτικὴ ταχύτης; (200)

Ἑπομένως δικαιολογεῖται ἡ παραδοχή, τὴν ὁποίαν ἐκάνατε κατὰ τὴν ἀπάντησιν τοῦ ἐρωτήματος (α); (ἀπολύτως)

ε) Πόσος χρόνος εἰς min ἀπαιτεῖται διὰ τὴν διάνοιξιν τῆς ὀπῆς;
($t = 0{,}05$ min)

9. Ἡ κοπτικὴ ταχύτης υ τῶν γλυφάνων, ἐκφραζομένη εἰς m/min, ὁρίζεται ὡς $\upsilon = \dfrac{\pi \cdot d \cdot n}{1\,000}$, ὅπου d ἡ διάμετρός των εἰς mm καὶ n ἡ περιστροφική των ταχύτης εἰς στρ/min.

Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα διάγραμμα, τὸ ὁποῖον νὰ μᾶς δίδῃ τὴν περιστροφικὴν ταχύτητα, ποὺ πρέπει νὰ δώσωμε εἰς ἕνα γλύφανον, συναρτήσει τῆς κοπτικῆς του ταχύτητος διὰ τὰς 4 περιπτώσεις γλυφάνων μὲ $d = 1$ in, $1\,^1/_4$ in, $1\,^1/_2$ in καὶ 2 in. Κατὰ τὴν χάραξιν τοῦ διαγράμματος νὰ ληφθῇ ὡς κλῖμαξ μετρήσεως τῶν διαμέτρων ἡ 1 cm $\widehat{=}$ 5 m/min καὶ ὡς κλῖμαξ μετρήσεως τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος ἡ 1 cm $\widehat{=}$ 50 στρ/min.

Ἀφοῦ κάνετε χρῆσιν τοῦ ἀνωτέρω διαγράμματος, νὰ προσδιορίσετε ποίαν τιμὴν περιστροφικῆς ταχύτητος πρέπει νὰ δώσωμε εἰς τὸ γλύφανον κατὰ τὴν κατεργασίαν λειάνσεως μιᾶς ὀπῆς διαμέτρου $1\,^1/_2$ in, ἐὰν ἡ κοπτικὴ ταχύτης τοῦ γλυφάνου πρέπει νὰ ληφθῇ ἴση πρὸς $\upsilon = 45$ m/min;

Εἰς ποίας περιπτώσεις νομίζετε ὅτι εἶναι ἀπαραίτητος ἡ χάραξις ἑνὸς διαγράμματος τοῦ εἴδους αὐτοῦ; Εἰς ποίας πάλιν περιπτώσεις νομίζετε ὅτι ἡ χάραξις ἑνὸς διαγράμματος, ὅπως αὐτό, δὲν ἔχει καμμίαν ἀπολύτως χρησιμότητα;

10) Εἰς τὸ σχῆμα 3·5η φαίνεται ἡ διάταξις καθαρισμοῦ μιᾶς μεταφορικῆς ταινίας.

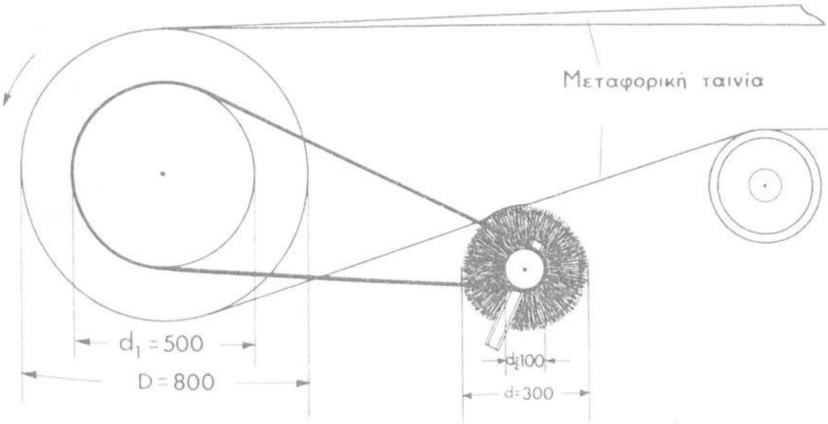
Δίδονται τὰ ἑξῆς στοιχεῖα:

— Ταχύτης μεταφορικῆς ταινίας: $\upsilon = 10$ m/min

— Ὀλίσθησις μεταξὺ μεταφορικῆς ταινίας καὶ κυλινδρικοῦ τυμπάνου: 1 %.

— Ἐξωτερικὴ διάμετρος τυμπάνου: $D = 800$ mm.

— Ἐξωτερικὴ διάμετρος κινητηρίας τροχαλίας: $d_1 = 500$ mm.
— Ἐξωτερικὴ διάμετρος κινουμένης τροχαλίας: $d_2 = 100$ mm.
— Ἐξωτερικὴ διάμετρος κυλινδρικῆς βούρτσας καθαρισμοῦ τῆς μεταφορικῆς ταινίας: $d = 300$ mm.
— Ὀλίσθησις μεταξὺ ἱμάντος καὶ κινητηρίας τροχαλίας: 1 %.
— Ὀλίσθησις μεταξὺ ἱμάντος καὶ κινουμένης τροχαλίας: 2 %.



Σχ. 3·5 η.

— Τὸ κυλινδρικὸν τύμπανον τοῦ σχήματος 3·5 η εἶναι τὸ κινούμενον τύμπανον τοῦ ὅλου συστήματος. Ὁ ἠλεκτροκινητὴρ εἶναι δηλαδὴ συνδεδεμένος μὲ τὸ τύμπανον, ποὺ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς μεταφορικῆς ταινίας.

Ζητοῦνται:

α) Ἡ περιφερειακὴ ταχύτης τοῦ κυλινδρικοῦ τυμπάνου εἰς m/min. (9,90 m/min)

β) Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τοῦ κυλινδρικοῦ τυμπάνου εἰς στρ/min. (3,94 στρ/min)

γ) Ἡ περιφερειακὴ ταχύτης τῆς κινητηρίας τροχαλίας εἰς m/sec. (0,103 m/sec)

δ) Ἡ ταχύτης τοῦ ἱμάντος εἰς m/sec. (0,102 m/sec)

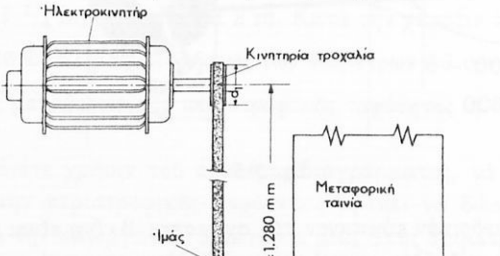
ε) Ἡ περιφερειακὴ ταχύτης τῆς κινουμένης τροχαλίας εἰς m/sec. (0,100 m/sec) στ) Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τῆς κινουμένης τροχαλίας εἰς στρ/min. (19,11 στρ/min)

ζ) Ἡ σχέσις μεταδόσεως τῆς ἱμαντοκινήσεως. (4,85 : 1)

η) Ἡ περιφερειακὴ ταχύτης τῆς κυλινδρικῆς βούρτσας εἰς m/sec. (0,30 m/sec)

θ) Ἡ σχετικὴ ταχύτης μεταξὺ μεταφορικῆς ταινίας καὶ κυλινδρικῆς βούρτσας εἰς m/sec, δηλαδὴ ἡ ταχύτης τῶν σημείων τῆς βούρτσας, ποὺ εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς περιφερείας διαμέτρου 300 mm, ἐν σχέσει πρὸς τὰ σημεῖα τῆς μεταφορικῆς ταινίας, ὅταν αὐτὰ ἔρχωνται εἰς ἐπαφὴν μεταξύ των. (0,47 m/sec)

ι) Τί τιμὰς θὰ εἶχον ὅλα τὰ ζητούμενα μεγέθη, ἐὰν δὲν ἐλαμβάνοντο ὑπ' ὄψιν οὔτε ἡ ὀλίσθησις μεταξὺ μεταφορικῆς ταινίας καὶ τυμπάνου, οὔτε ἡ ὀλίσθησις μεταξὺ ἱμάντος καὶ τροχαλιῶν: (10 m/min — 3,98 στρ/min — 0,104 m/sec — 0,104 m/sec — 0,104 m/sec — 19,9 στρ/min — 5 : 1 — 0,31 m/sec — 0,48 m/sec).



Σχ. 3 · 5 θ.

11. Προκειμένου νὰ δοθῇ ταχύτης 50 m/min εἰς μίαν μεταφορικὴν ταινίαν, ἀντιμετωπίζομε τὴν δυνατότητα νὰ μεταδώσωμε τὴν περιστροφικὴν κίνησιν εἰς τὸ τύμπανον Τ μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς ἠλεκτροκινητῆρος (σχ. 3 · 5 θ).

Δίδονται τὰ ἑξῆς στοιχεῖα:

— Περιστροφικὴ ταχύτης ἠλεκτροκινητῆρος: $n_1 = 500$ στρ/min.

— Διάμετρος κινητηρίας τροχαλίας: $d_1 = 90$ mm.

— Διάμετρος τυμπάνου: $D = 250$ mm.

— Ἀπόστασις μεταξὺ ἀξόνων συμμετρίας κινητηρίας καὶ κινουμένης τροχαλίας: $\alpha = 1\,280$ mm.

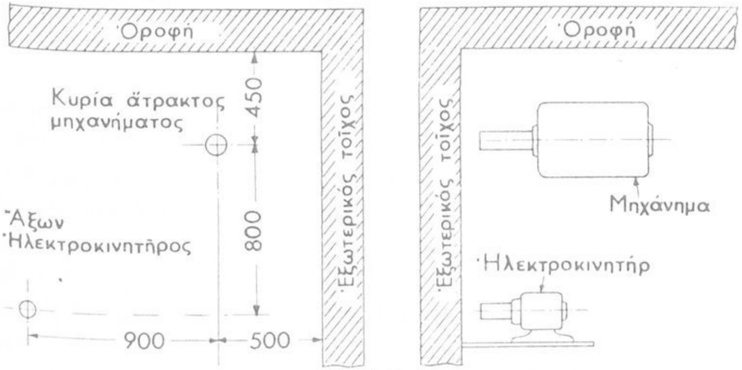
— Ὀλίσθησις μεταξὺ κινητηρίας τροχαλίας καὶ ἱμάντος: 1 %.

— Ὀλίσθησις μεταξὺ ἱμάντος καὶ κινουμένης τροχαλίας: 1,5 %.

— Ὀλίσθησις μεταξὺ μεταφορικῆς ταινίας καὶ τυμπάνου: 2,5 %.

Ἂν ληφθῇ ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι διὰ τὴν ὁμαλὴν λειτουργίαν τοῦ συστήματος ἱμάντος καὶ τροχαλιῶν πρέπει νὰ εἶναι $\alpha > d_1 + d_2 + 500$ mm, ζητεῖται νὰ ἐξετασθῇ, ἐὰν εἶναι δυνατὴ μία τέτοιου εἴδους μετάδοσις κινήσεως καὶ ἐὰν ναί, νὰ προσδιορισθῇ ἡ διάμετρος d_2 τῆς κινουμένης τροχαλίας. ($d_2 \simeq 670$ mm)

12) Ἠλεκτροκινητὴρ περιστρεφόμενος μὲ ταχύτητα 1 500 στρ/min πρόκειται νὰ τροφοδοτήσῃ μηχάνημα μὲ περιστροφικὴν ταχύτητα 200 στρ/min μέσω μιᾶς διατάξεως ἱμάντων καὶ τροχαλιῶν (σχ. 3·5ι).



Σχ. 3·5ι.

— Ἡ συνολικὴ ἀπώλεια περιστροφικῆς ταχύτητος ἀπὸ τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος εἰς τὸ μηχάνημα, ἡ ὁποία ὀφείλεται εἰς τὴν ἀναπόφευκτον ὀλίσθησιν μεταξὺ ἱμάντων καὶ τροχαλιῶν, δύναται νὰ ἐκτιμηθῇ εἰς 5 περίπου τοῖς ἑκατόν.

— Αἱ διάμετροι τῶν κινητηρίων τροχαλιῶν δὲν πρέπει νὰ ληφθοῦν μικρότεραι ἀπὸ 150 mm.

—Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν ἀξόνων συμμετρίας δύο τροχαλιῶν, αἱ ὁποῖαι συνδέονται μεταξύ των δι' ἱμάντος, δὲν πρέπει νὰ ληφθῇ μικροτέρα τοῦ διπλασίου ἀθροίσματος τῶν διαμέτρων των δηλαδή :

$$[\,\alpha_\kappa \geqslant 2\,(\,d_{2\kappa-1} + d_{2\kappa}\,)\,].$$

Μὲ τὰς συνθήκας αὐτὰς εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιτευχθῇ ἡ ζητουμένη μετάδοσις τῆς κινήσεως ἀπὸ τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος εἰς τὸ μηχάνημα ἢ ὄχι;

α) Ἐὰν ναί, ὑπολογίσατε τότε τὸ πλῆθος καὶ τὰς διαμέτρους τῶν τροχαλιῶν, τὰς ὁποίας πρόκειται νὰ χρησιμοποιήσετε, καθὼς ἐπίσης καὶ τὴν ἀκριβῆ θέσιν τῶν ἀξόνων, ἐπάνω εἰς τοὺς ὁποίους θὰ στερεωθοῦν αὗται.

β) Ἐὰν ὄχι, τότε ἀποφασίζεται νὰ χρησιμοποιηθοῦν τροχοὶ τανύσεως τῶν ἱμάντων, πρᾶγμα ποὺ θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν :

—Ἐλάττωσιν τῆς συνολικῆς ἀπωλείας περιστροφικῆς ταχύτητος ἀπὸ 5 εἰς 1 μόνον τοῖς ἑκατόν.

—Δυνατότητα χρησιμοποιήσεως κινητηρίων τροχαλιῶν μὲ διαμέτρους μέχρι καὶ 100 mm ἀκόμη.

—Δυνατότητα ἐλαττώσεως τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ τῶν ἀξόνων συμμετρίας δύο τροχαλιῶν, αἱ ὁποῖαι συνδέονται μεταξύ των δι' ἱμάντος, μέχρι τῆς τιμῆς $\alpha_\kappa = 1{,}5\,(\,d_{2\kappa-1} + d_{2\kappa}\,)$.

Ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτὰς εἶναι δυνατὴ ἡ μετάδοσις τῆς κινήσεως ἀπὸ τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος εἰς τὸ μηχάνημα ; Ἐὰν ναί, νὰ καθορισθῇ τὸ πλῆθος καὶ αἱ διάμετροι τῶν τροχαλιῶν, ποὺ πρέπει νὰ χρησιμοποιηθοῦν, καθὼς ἐπίσης καὶ αἱ ἀκριβεῖς θέσεις τῶν ἀξόνων ἐπάνω εἰς τοὺς ὁποίους καὶ θὰ στερεωθοῦν.

13) Προκειμένου νὰ μεταδοθῇ περιστροφικὴ κίνησις ἀπὸ ἕνα ἠλεκτροκινητῆρα εἰς ἕνα μηχάνημα, ἐπινοεῖται ἡ διάταξις τοῦ σχήματος 3·5κ.

Δίδονται τὰ ἑξῆς στοιχεῖα :

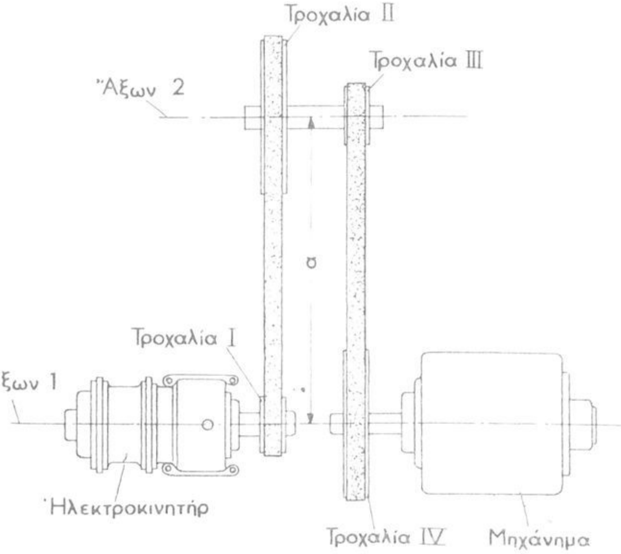
— Οἱ ἄξονες ἠλεκτροκινητῆρος καὶ μηχανήματος κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

—Ὁ ἠλεκτροκινητὴρ περιστρέφεται μὲ ταχύτητα $n_1 = 1\,200$ στρ/min.

—Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης, ποὺ πρέπει νὰ δοθῇ εἰς τὸ μηχάνημα, εἶναι $n_4 = 250$ στρ/min.

—Αἱ κινητήριαι τροχαλίαι I καὶ III δὲν πρέπει νὰ ἔχουν διαμέτρους μικροτέρας ἀπὸ 150 mm.

— Ἡ ἀπόστασις α μεταξὺ τῶν ἀξόνων 1 καὶ 2 πρέπει νὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέτρων τῶν δύο κινουμένων τροχαλιῶν. — Ἡ συνολικὴ ἀπώλεια περιστροφικῆς ταχύτητος, λόγῳ ὀλισθήσεως μεταξὺ ἱμάντων καὶ τροχαλιῶν, ἀνέρχεται εἰς 2 περίπου τοῖς ἑκατόν.



Σχ 3·5 κ.

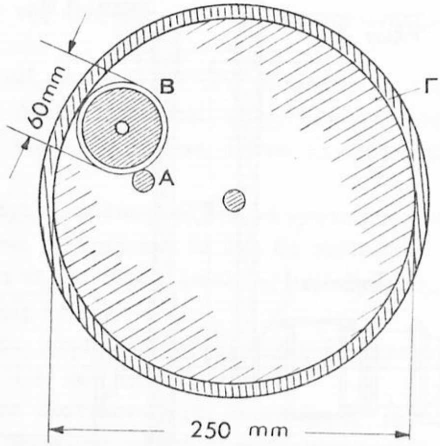
Ἐὰν ἔχωμε τὸν περιορισμὸν ὅτι ἡ ἀπόστασις α πρέπει νὰ εἶναι ὅσον τὸ δυνατὸν μικροτέρα, νὰ καθορισθῇ τὸ μέγεθος τῶν τροχαλιῶν, ποὺ θὰ πρέπει νὰ χρησιμοποιηθοῦν, καθὼς ἐπίσης καὶ ἡ ἀκριβὴς θέσις εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ὁ ἄξων 2.

Ὑποτίθεται ὅτι οἱ ἄξονες 1 καὶ 2 εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. ($d_2 = d_4 = 420$ mm, $\alpha = 840$ mm)

14) Ὁ μηχανισμὸς κινήσεως ἑνὸς ἠλεκτροφώνου (pick - up) ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν κινητήριον ἄξονα Α, ὁ ὁποῖος κινεῖ τὸν τροχὸν τριβῆς Β ἐξωτερικῆς διαμέτρου 60 mm (σχ. 3·5 λ). Ὁ τροχὸς Β πιέζεται ἐπάνω εἰς τὸ ἐσωτερικὸν χεῖλος, τὸ ὁποῖον ἔχει διάμετρον 250 mm, τοῦ κυκλικοῦ δίσκου περιστροφῆς Γ τοῦ ἠλεκτροφώνου. Ἐὰν ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τοῦ δίσκου πρέπῃ νὰ εἶναι 78 στρ/min, ἡ δὲ περιστροφικὴ ταχύτης τοῦ ἠλεκτροκινητῆρος εἶναι ἴση πρὸς 3 600 στρ/min,

νὰ καθορισθῇ ποία θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ κινητηρίου ἄξονος.

Ἡ ὀλίσθησις μεταξὺ τροχοῦ τριβῆς καὶ κυκλικοῦ δίσκου δύναται νὰ ληφθῇ ἴση πρὸς $2\,\%$. Ἡ ὀλίσθησις μεταξὺ κινητηρίου ἄξονος καὶ τροχοῦ τριβῆς ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μέγεθος τῆς διαμέτρου τοῦ κινητηρίου ἄξονος, ὡς ἀκολούθως:



Σχ. 3·5λ.

Διὰ διάμετρον κινητηρίου ἄξονος ἀπὸ 2 ἕως 3 mm, δύναται νὰ ληφθῇ ἴση πρὸς $10\,\%$.

Διὰ διάμετρον κινητηρίου ἄξονος ἀπὸ 3 ἕως 4 mm, δύναται νὰ ληφθῇ ἴση πρὸς $7\,\%$.

Διὰ διάμετρον κινητηρίου ἄξονος ἀπὸ 4 ἕως 5 mm, δύναται νὰ ληφθῇ ἴση πρὸς $5\,\%$.

Διὰ διάμετρον κινητηρίου ἄξονος ἀπὸ 5 ἕως 6 mm, δύναται νὰ ληφθῇ ἴση πρὸς $4\,\%$. (5,75 mm)

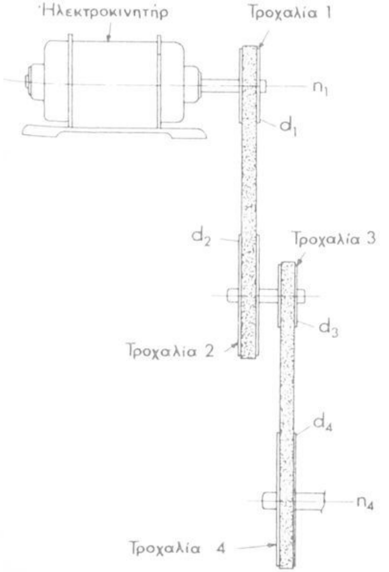
15) Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο ἀξόνων κινήσεως εἶναι $\alpha = 300$ mm. Ποῖαι πρέπει νὰ εἶναι αἱ ἀρχικαὶ διάμετροι τῶν δύο παραλλήλων ὀδοντωτῶν τροχῶν, ποὺ θὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ τὴν μετάδοσιν τῆς περιστροφικῆς κινήσεως ἀπὸ τὸν ἕνα ἄξονα εἰς τὸν ἄλλον, ἐὰν ἐπιδιώκωμε νὰ ἐπιτύχωμε μίαν σχέσιν μεταδόσεως $1:2$;

Εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθοῦν ὀδοντωτοὶ τροχοὶ μὲ modul $m = 3$ ἢ ὄχι καὶ διατί;

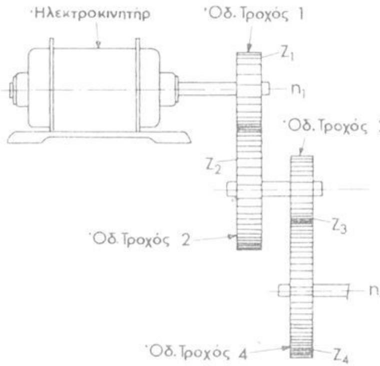
Εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθοῦν ὀδοντωτοὶ τροχοὶ μὲ modul $m = 5$;

Ποῖος θὰ εἶναι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ ἀριθμὸς ὀδόντων κάθε τροχοῦ;

16) Διὰ συγκρίσεως τῶν δύο σχημάτων 3·5μ καὶ 3·5ν νὰ εὑρεθῇ ἕνας τύπος, ποὺ νὰ μᾶς δίδῃ τὴν περιστροφικὴν ταχύτητα n_4 συναρτήσει τῶν μεγεθῶν n_1, z_1, z_2, z_3 καὶ z_4.



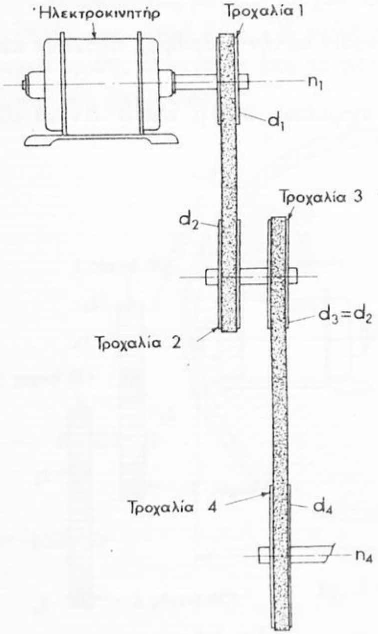
Σχ. 3·5μ.



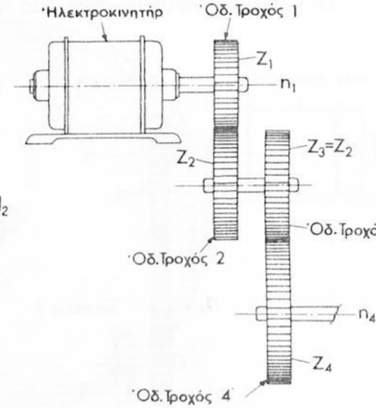
Σχ. 3·5ν.

17) Διὰ συγκρίσεως τῶν σχημάτων 3·5ξ, 3·5ο καὶ 3·5π νὰ εὑρεθῇ ἕνας τύπος, ποὺ νὰ μᾶς δίδῃ τὴν περιστροφικὴν ταχύτητα n_4 (σχ. 3·5π) συναρτήσει τῶν μεγεθῶν n_1, z_1 καὶ z_4.

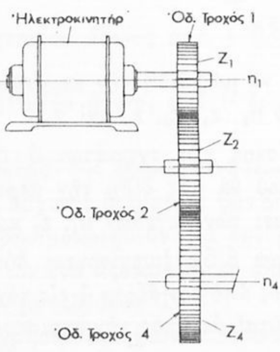
18) Εἰς τὸ σχῆμα 3·5ρ ἐμφαίνονται δύο διατάξεις μεταδόσεως περιστροφικῆς κινήσεως ἀπὸ τὸν ἄξονα I εἰς τὸν ἄξονα II. Κατὰ τί διαφέρουν αἱ διατάξεις αὐταὶ ὡς πρὸς τὴν περιστροφικὴν ταχύτητα τοῦ κινουμένου ἄξονος;



Σχ. 3·5 ξ.

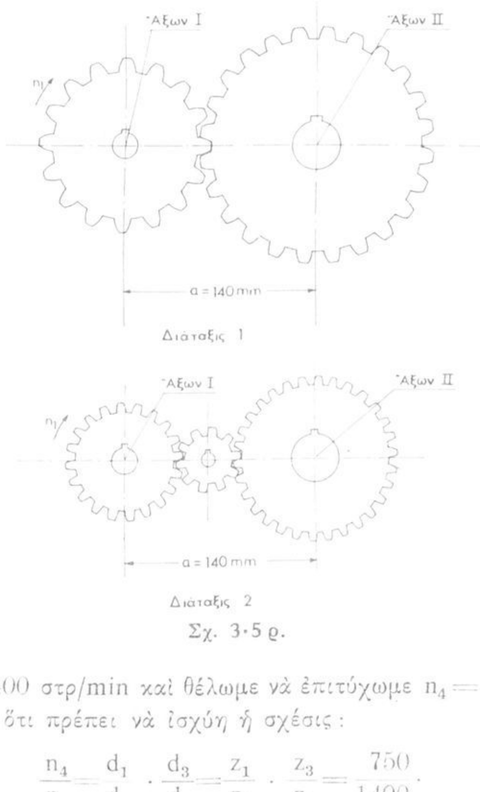


Σχ. 3·4 ο.



Σχ. 3·5 π.

19) Διὰ τὸν ὑποβιβασμὸν τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος ἑνὸς ἠλεκτροκινητῆρος χρησιμοποιεῖται ἡ διάταξις τοῦ σχήματος 3·5 σ. Ἐὰν



Σχ. 3·5 ρ.

εἶναι $n_1 = 1\,400$ στρ/min καὶ θέλωμε νὰ ἐπιτύχωμε $n_4 = 750$ στρ/min εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ ἰσχύη ἡ σχέσις:

$$\frac{n_4}{n_1} = \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{d_3}{d_4} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} = \frac{750}{1400}.$$

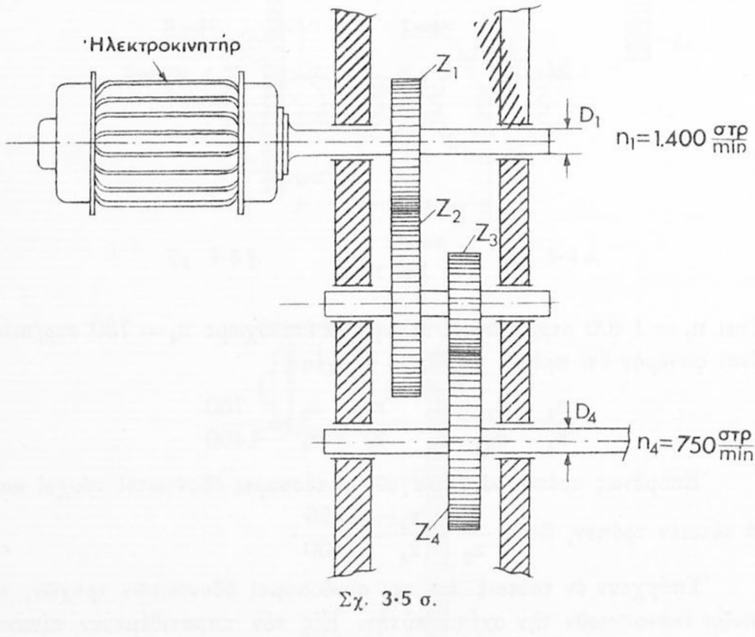
Ἑπομένως πρέπει νὰ ἐπιλεγοῦν οἱ τέσσαρες ὀδοντωτοὶ τροχοὶ κατὰ τέτοιον τρόπον, ὥστε $\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} = \frac{750}{1400}$.

Ὑπάρχουν ἐν τούτοις ἄπειροι συνδυασμοὶ ὀδοντωτῶν τροχῶν, οἱ ὁποῖοι ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν αὐτήν. Εἰς τὸν παρατιθέμενον πίνακα ἀναγράφονται 5 ἀπὸ αὐτούς. Ἂν ληφθῆ ὑπ' ὄψιν ὅτι οἱ ὀδοντωτοὶ τροχοὶ κάθε τετράδος ἔχουν τὸ αὐτὸ modul m, ζητεῖται:

α/α τετράδος	z_1	z_2	z_3	z_4
1η	33	44	25	35
2α	39	35	25	52
3η	16	56	30	20
4η	18	30	25	28
5η	20	28	51	68

α) Νὰ ἐπαληθευθῇ ὅτι αἱ τετράδες ὀδοντωτῶν τροχῶν τοῦ πίνακος ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} = \frac{750}{1400}$.

β) Νὰ σχεδιασθῇ ὑπὸ κατάλληλον κλίμακα τὸ σύστημα τῶν τεσσάρων ὀδοντωτῶν τροχῶν τοῦ σχήματος 3·5 σ.

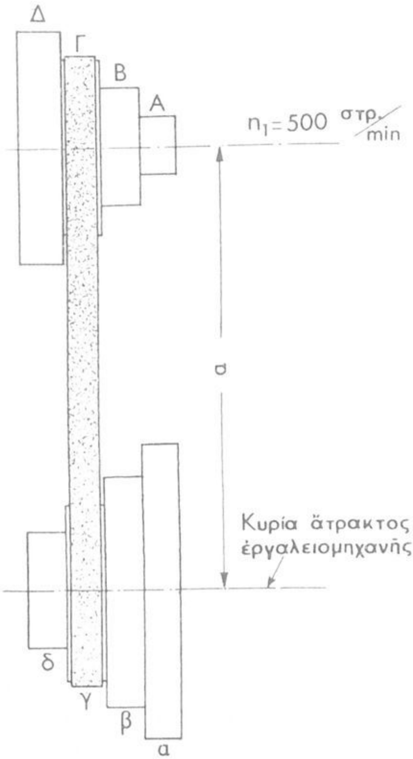


Σχ. 3·5 σ.

Διατί δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ σχεδίασις αὐτὴ καὶ εἰς τὰς πέντε περιπτώσεις;

γ) Ποῖοι ἀνισωτικοὶ περιορισμοὶ πρέπει συνεπῶς νὰ ἰσχύουν μεταξὺ τῶν z_1, z_2, z_3, z_4, m, D_1 καὶ D_4, ὥστε νὰ εἶναι δυνατὴ μία μετάδοσις κινήσεως, ὁμοία πρὸς αὐτὴν ποὺ ἐμφαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 3·5 σ;

20) Ἀντιμετωπίζεται τὸ πρόβλημα κινήσεως μιᾶς ἐργαλειομηχανῆς κατεργασίας ξύλου μέσω δύο κλιμακωτῶν τροχαλιῶν καὶ ἑνὸς ἱμάντος (σχ. 3.5 τ). Θεωρεῖται γνωστόν:



Σχ. 3·5 τ.

α) ὅτι ὁ ἄξων τῆς κινητηρίας κλιμακωτῆς τροχαλίας ἔχει περιστροφικὴν ταχύτητα $n_1 = 500$ στρ/min καὶ

β) ὅτι αἱ τιμαὶ περιστροφικῆς ταχύτητος, ποὺ θὰ πρέπει νὰ εἶμεθα εἰς θέσιν νὰ δώσωμε εἰς τὴν κυρίαν ἄτρακτον τῆς ἐργαλειομηχανῆς, εἶναι $n_\alpha = 120$, $n_\beta = 240$, $n_\gamma = 480$ καὶ $n_\delta = 960$ στρ/min.

Ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν:

— ὅτι ἡ ὀλίσθησις μεταξὺ ἱμάντος καὶ τροχαλιῶν ἀνέρχεται εἰς 4 περίπου τοῖς ἑκατόν,

— ὅτι αἱ διάμετροι καὶ τῶν ὀκτὼ τροχαλιῶν δὲν πρέπει νὰ εἶναι μικρότεραι ἀπὸ 130 mm, καὶ

— ὅτι ἡ ἀπόστασις α μεταξὺ κινητηρίου καὶ κινουμένου ἄξονος δὲν πρέπει νὰ εἶναι μικροτέρα τῆς τιμῆς:

$$d_A + d_\alpha + 350\,\text{mm} = d_B + d_\beta + 350\,\text{mm} = d_\Gamma + d_\gamma + 350\,\text{mm} = d_\Delta + d_\delta + 350\,\text{mm},$$

ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διάμετροι d_A, d_α, d_B, d_β, d_Γ, d_γ, d_Δ καὶ d_δ καθὼς ἐπίσης καὶ ἡ ἀπόστασις α, κατὰ τέτοιον ὅμως τρόπον, ὥστε ἡ ὅλη ἐγκατάστασις μεταδόσεως τῆς κινήσεως νὰ καταλαμβάνῃ ὅσον τὸ δυνατὸν μικρότερον χῶρον. ($\alpha = 1000$ mm)

21) Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ὀκτὼ τιμαὶ περιστροφικῆς ταχύτητος, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ δώσωμε εἰς τὴν κυρίαν ἄτρακτον ἑνὸς τόρνου, τοῦ ὁποίου τὸ κιβώτιον ταχυτήτων παρίσταται εἰς τὸ σχῆμα 3·5υ.

22) Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ 12 τιμαὶ περιστροφικῆς ταχύτητος τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ δώσωμε εἰς τὴν κυρίαν ἄτρακτον ἑνὸς τόρνου, τοῦ ὁποίου τὸ κιβώτιον ταχυτήτων παρίσταται εἰς τὸ σχῆμα 3·5φ (διὰ μεγαλυτέραν ἁπλούστευσιν, νὰ μὴ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ ὀλίσθησις μεταξὺ ἱμάντος καὶ κλιμακωτῶν τροχαλιῶν).

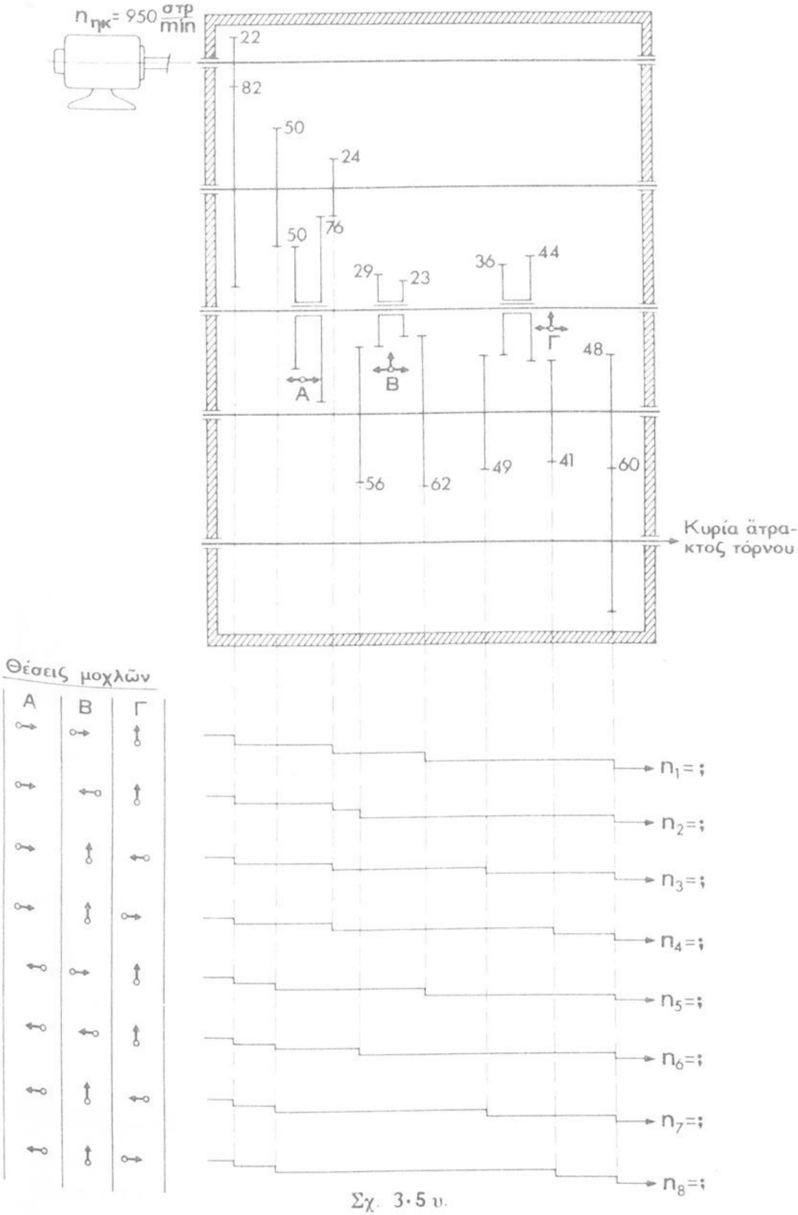
23) Εἰς τὸ σχῆμα 3·5χ ἐμφαίνεται τὸ κιβώτιον ταχυτήτων ἑνὸς αὐτοκινήτου μὲ τρεῖς ταχύτητας καὶ ὄπισθεν, ὅταν οἱ μοχλοὶ Α, Β εὑρίσκωνται καὶ οἱ δύο εἰς τὴν θέσιν «μέσον» (θέσις «νεκρόν»).

— Ἡ περιστροφικὴ κίνησις τοῦ ἄξονος τῆς βενζινομηχανῆς μεταδίδεται ἀπ' εὐθείας εἰς τὸν ὀδοντωτὸν τροχὸν α.

— Ἡ κίνησις τῶν δύο ὀδοντωτῶν τροχῶν β καὶ γ κατὰ μῆκος τοῦ κινουμένου ἄξονος ἐπιτυγχάνεται εἰς τὴν πραγματικότητα μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς μόνον μοχλοῦ καὶ ὄχι δύο, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 3·5χ. Ὁ μοχλὸς αὐτὸς ὀνομάζεται ὡς γνωστὸν μοχλὸς ταχυτήτων τοῦ αὐτοκινήτου (λεβιέ).

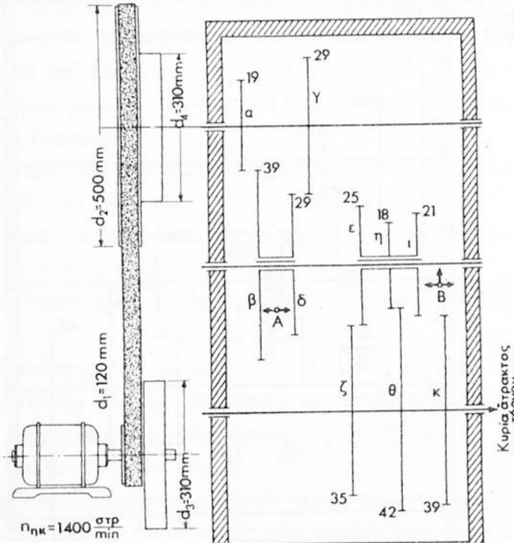
— Ὅλοι οἱ ὀδοντωτοὶ τροχοὶ τοῦ κιβωτίου ταχυτήτων ἔχουν τὸ ἴδιο modul.

— Ὁ ἐνδιάμεσος ἄξων ΙΙ δὲν εὑρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον τὸ ὁ-

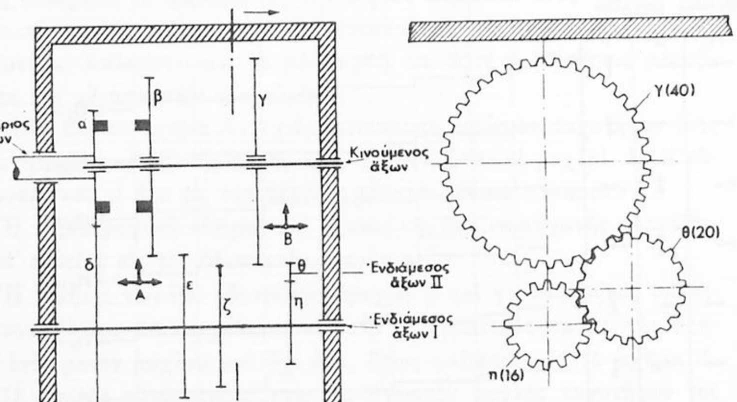


$n_{ηκ} = 950 \frac{στρ}{min}$
22
82
50
24
50
76
29
23
36
44
A
B
Γ
48
56
62
49
41
60
Κυρία ἄτρακτος τόρνου
Θέσεις μοχλῶν
A
B
Γ
$n_1 = ;$
$n_2 = ;$
$n_3 = ;$
$n_4 = ;$
$n_5 = ;$
$n_6 = ;$
$n_7 = ;$
$n_8 = ;$

Σχ. 3·5 υ.

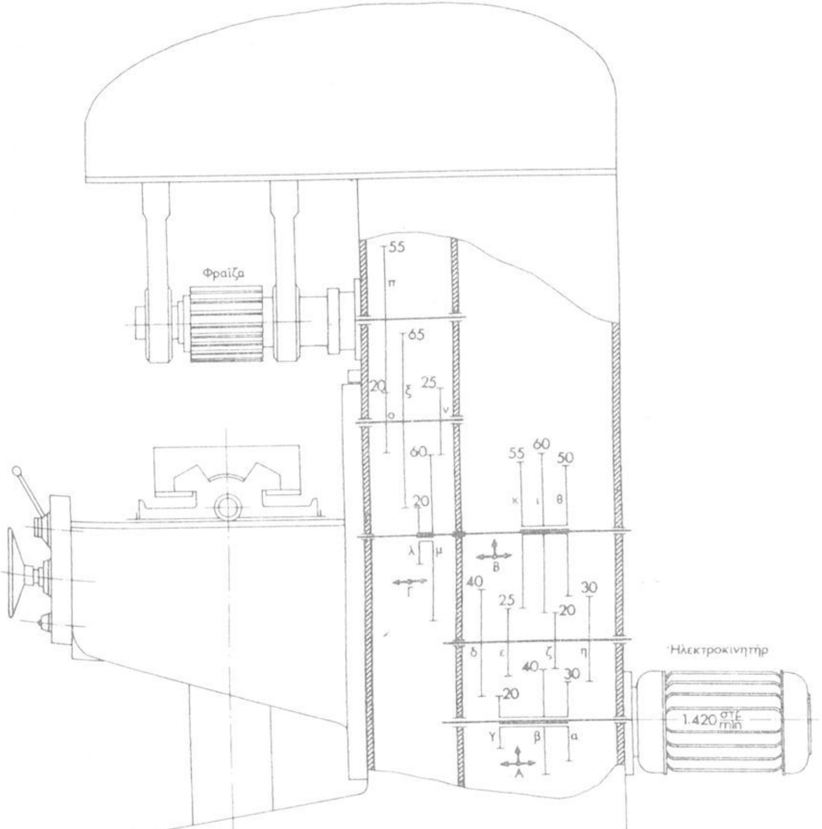

19
29
γ
α
d_4=310mm
d_2=500mm
39
29
25
18
21
ε
η
ι
β
δ
A
B
d_1=120 mm
ζ
θ
κ
Κυρία άτρακτος τόρνου
35
42
39
d_3=310mm
$n_{πκ}=1400 \frac{στρ}{min}$

Σχ. 3 · 5 φ.


Κινητήριος άξων
α
β
γ
Κινούμενος άξων
B
A
δ
ε
ζ
θ
η
Ἐνδιάμεσος ἄξων II
Ἐνδιάμεσος ἄξων I
Υ(40)
θ(20)
η(16)

Σχ. 3·5 χ.

ποῖον ὁρίζουν ὁ ἐνδιάμεσος ἄξων I καὶ ὁ κινούμενος ἄξων (σχ. 3·5χ).



Σχ. 3·5 ψ.

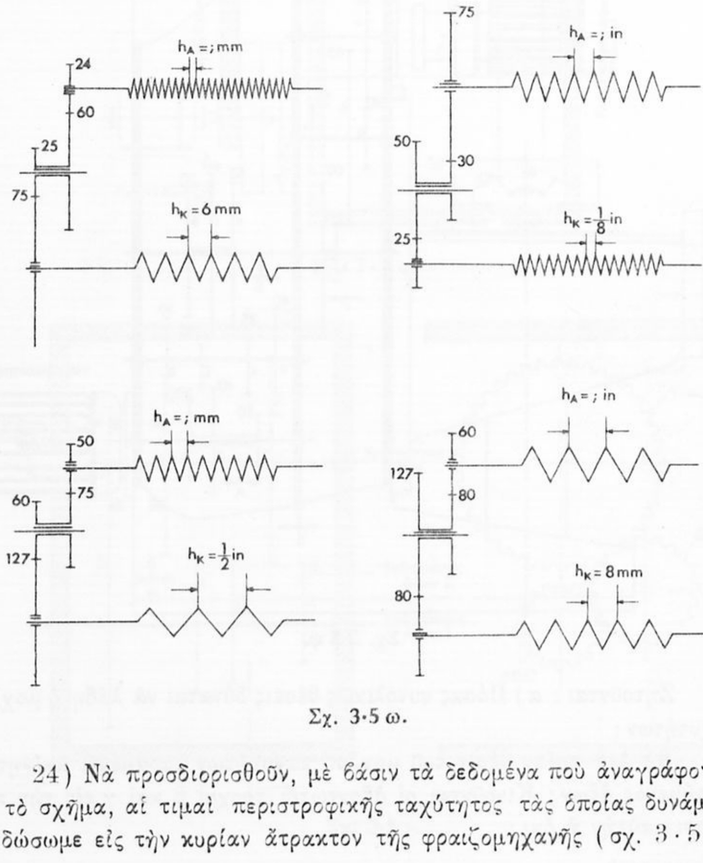
Ζητοῦνται: α) Πόσας συνολικῶς θέσεις δύναται νὰ λάβη ὁ μοχλὸς ταχυτήτων;

β) Διὰ ποίαν θέσιν τοῦ μοχλοῦ ταχυτήτων παραμένει ἀκίνητος ὁ κινούμενος ἄξων; Κινοῦνται οἱ ὀδοντωτοὶ τροχοὶ β καὶ γ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἢ ὄχι;

γ) Μὲ ποίαν ἐμπλοκὴν τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν ἐπιτυγχάνεται ἡ κίνησις «ὄπισθεν» τοῦ αὐτοκινήτου;

δ) Μὲ ποίαν ἐμπλοκὴν τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν ἐπιτυγχάνεται ἡ τρίτη ταχύτης; Ποῖοι ὀδοντωτοὶ τροχοὶ καὶ ποῖοι ἄξονες ἐκτελοῦν περιστροφικὴν κίνησιν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν;

ε) Ἐὰν $z_\alpha = 24$, $z_\beta = 36$, $z_\gamma = 40$, $z_\delta = 40$, $z_\varepsilon = 28$, $z_\zeta = 24$, $z_\eta = 16$ καὶ $z_\theta = 20$, ποῖαι αἱ σχέσεις μεταδόσεως ἀπὸ τοῦ κινητηρίου εἰς τὸν κινούμενον ἄξονα δι' ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις τοῦ μοχλοῦ ταχυτήτων;



Σχ. 3·5 ω.

24) Νὰ προσδιορισθοῦν, μὲ βάσιν τὰ δεδομένα ποὺ ἀναγράφονται εἰς τὸ σχῆμα, αἱ τιμαὶ περιστροφικῆς ταχύτητος τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ δώσωμε εἰς τὴν κυρίαν ἄτρακτον τῆς φραιζομηχανῆς (σχ. 3·5ψ).

25) Ὁ κοχλίας σπειρωμάτων ἑνὸς τόρνου ἔχει βῆμα $h_K = 8$ mm. Ἐὰν διαθέτωμε 6 τροχοὺς μὲ ἀριθμοὺς δδόντων 16, 25, 30, 40, 50 καὶ 100, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμε σπειρώματα μὲ βήματα 1,2 2,5 5 καὶ 10 mm ἢ πρέπει νὰ ἀγοράσωμε καὶ ἄλλους δδοντωτοὺς τροχούς; (σχ. 3·4ψ).

26) Δίδονται τὰ βήματα h_K τοῦ κοχλίου σπειρωμάτων τεσσάρων τόρνων καὶ οἱ ἀριθμοὶ δδόντων τῶν τροχῶν, ποὺ χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν μετάδοσιν τῆς περιστροφικῆς κινήσεως ἀπὸ τὴν κυρίαν ἄτρακτον εἰς τὸν κοχλία σπειρωμάτων (σχ. 3·5ω). Ποῖα εἶναι τὰ βήματα h_A τῶν σπειρωμάτων ποὺ θὰ κατασκευασθοῦν;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 4

ΜΗ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ

4·1 Εἰσαγωγή.

Ἕνας καθηγητὴς τῶν μαθηματικῶν ἔχει τὴν συνήθειαν νὰ συγκεντρώνῃ εἰς πίνακας τοὺς βαθμούς, τοὺς ὁποίους λαμβάνουν οἱ μαθηταί του κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἑξαετοῦς φοιτήσεώς των εἰς τὸ γυμνάσιον. Ἕνας παρόμοιος πίναξ συγκεντρωτικῆς βαθμολογίας ἀναφερόμενος εἰς 9 μαθητάς του εἶναι καὶ ὁ Πίναξ 6.

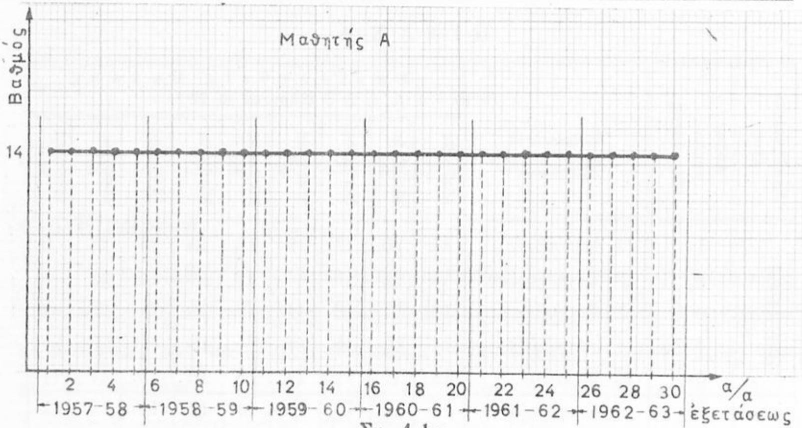
Καλούμεθα τώρα νὰ ἀπαντήσωμε εἰς τὸ ἑξῆς ἐρώτημα: Ποίαν ἐντύπωσιν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποκομίσωμε διὰ τὴν ἐπίδοσιν τῶν 9 μαθητῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΣΤ, Ζ, Η καὶ Θ ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν 30 βαθμῶν, τοὺς ὁποίους ἔχομε εἰς τὴν διάθεσίν μας διὰ τὸν κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτούς;

1. *Μαθητὴς Α.*

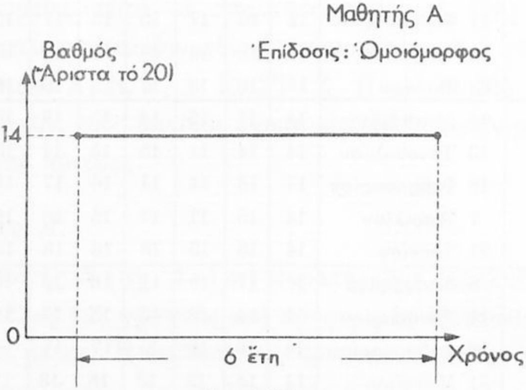
Ὁ μαθητὴς Α (σχ. 4·1 α) παρατηροῦμε ὅτι ἔλαβε τὸν ἴδιον βαθμὸν εἰς ὅλας τὰς γραπτὰς καὶ προφορικὰς ἐξετάσεις εἰς τὰς ὁποίας ἔλαβε μέρος. Ἡ ἐπίδοσίς του δύναται συνεπῶς νὰ χαρακτηρισθῇ ἀνεπιφυλάκτως ὡς ἀπολύτως *ὁμοιόμορφος*. Ὁ χαρακτηρισμὸς αὐτὸς εἶναι ἐν τούτοις ἐλλειπής. Μὲ αὐτὸν μόνον δὲν εἴμεθα π.χ. εἰς θέσιν νὰ συγκρίνωμε τὴν ἐπίδοσιν τοῦ μαθητοῦ Α μὲ τὴν ἐπίδοσιν ἑνὸς ἄλλου μαθητοῦ, οὔτε νὰ κατατάξωμε τὸν μαθητὴν Α εἰς τὴν κατηγορίαν τοῦ ἀρίστου, τοῦ μετρίου, τοῦ κακοῦ κλπ. μαθητοῦ. Θὰ πρέπει λοιπὸν νὰ συμπληρώσωμε τὸν χαρακτηρισμὸν αὐτόν, ποὺ εἶναι καθαρῶς ποιοτικός, καὶ μὲ ἕνα ποσοτικὸν στοιχεῖον. Εἰς τὴν συγκεκριμένην περίπτωσιν τοῦ μαθητοῦ Α, ἀρκεῖ ἕνα μόνον ποσοτικὸν στοιχεῖον καὶ αὐτὸ εἶναι ὁ κοινὸς βαθμός, ποὺ ἔλαβε ὁ μαθητὴς εἰς τὰς 30 γραπτὰς καὶ προφορικὰς ἐξετάσεις.

ΠΙΝΑΞ 6

Ἀκαδημαϊκὸν ἔτος	Αὔξων ἀριθμὸς Ἐξετάσεως	Ἡμερομηνία Ἐξετάσεως	Ἐπιτευχθεὶς Βαθμός (ἄριστα τὸ 20)								
			Μαθητὴς Α	Μαθητὴς Β	Μαθητὴς Γ	Μαθητὴς Δ	Μαθητὴς Ε	Μαθητὴς ΣΤ	Μαθητὴς Ζ	Μαθητὴς Η	Μαθητὴς Θ
1957 - 1958	1	11 Δεκεμβρίου	14	16	13	13	13	15	14	18	9
	2	10 Ἰανουαρίου	14	16	16	15	13	16	14	18	9
	3	13 Φεβρουαρίου	14	17	18	14	13	15	15	18	9
	4	4 Ἀπριλίου	14	15	14	17	14	15	14	17	10
	5	16 Ἰουνίου	14	17	14	17	13	16	15	17	11
1958 - 1959	6	15 Δεκεμβρίου	14	15	16	14	14	15	14	17	11
	7	14 Ἰανουαρίου	14	17	12	14	14	16	15	18	12
	8	17 Φεβρουαρίου	14	16	17	15	15	17	15	17	13
	9	20 Ἀπριλίου	14	18	14	18	14	16	15	16	12
	10	23 Ἰουνίου	14	16	18	17	15	16	16	16	13
1959 - 1960	11	14 Δεκεμβρίου	14	17	15	14	15	16	15	16	13
	12	13 Ἰανουαρίου	14	14	11	15	15	17	15	17	14
	13	18 Φεβρουαρίου	14	16	14	14	16	17	16	16	14
	14	7 Ἀπριλίου	14	15	17	17	15	16	16	14	15
	15	21 Ἰουνίου	14	16	13	18	16	18	15	15	15
1960 - 1961	16	8 Δεκεμβρίου	14	17	19	14	16	17	16	15	15
	17	11 Ἰανουαρίου	14	14	18	13	15	17	16	14	16
	18	16 Φεβρουαρίου	14	16	16	15	17	17	16	15	15
	19	31 Μαρτίου	14	15	13	18	18	18	17	14	16
	20	20 Ἰουνίου	14	17	18	18	17	17	16	14	16
1961 - 1962	21	11 Δεκεμβρίου	14	16	14	15	17	17	17	14	16
	22	10 Ἰανουαρίου	14	15	12	14	17	18	17	13	17
	23	13 Φεβρουαρίου	14	17	12	14	18	18	18	14	17
	24	12 Ἀπριλίου	14	16	15	17	19	19	17	13	16
	25	20 Ἰουνίου	14	16	17	17	18	18	17	13	17
1962 - 1963	26	10 Δεκεμβρίου	14	15	13	14	18	18	18	12	17
	27	9 Ἰανουαρίου	14	18	16	13	18	19	18	13	18
	28	14 Φεβρουαρίου	14	16	12	14	19	18	17	12	17
	29	10 Ἀπριλίου	14	15	15	17	19	19	18	12	18
	30	17 Ἰουνίου	14	17	19	18	19	19	18	12	18



Σχ. 4·1 α.



Σχ. 4·1 β.

Συμπέρασμα (σχ. 4 · 1 β).

α) *Ποιοτικὸν*

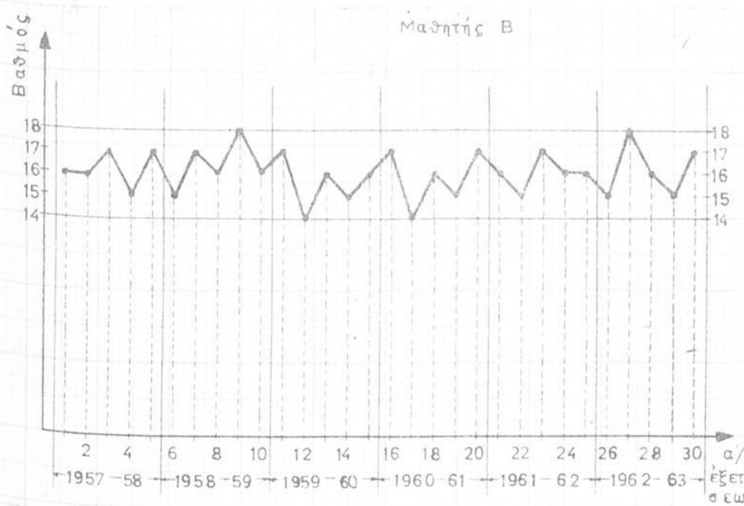
Ἐπίδοσις: ὁμοιόμορφος.

β) *Ποσοτικὸν*

Κοινὸς βαθμός: 14 μὲ ἄριστα τὸ 20.

2. *Μαθητὴς Β.*

Εἶναι πολὺ εὔκολον νὰ διαπιστώσωμε ὅτι τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 4·1 γ μᾶς δίδει μίαν κατὰ πολὺ παραστατικωτέραν καὶ σαφεστέραν εἰκόνα τῆς ἐπιδόσεως τοῦ μαθητοῦ Β, ἀπὸ ὅ,τι ἡ ἀντίστοιχος στήλη τοῦ Πίνακος 6. Εἶναι εὔκολον λοιπὸν μὲ βάσιν τὴν σύγκρισιν μεταξὺ τοῦ Πίνακος 6 καὶ τοῦ διαγράμματος τοῦ σχήματος 4·1 γ ὡς πρὸς τὸν μαθητὴν Β, νὰ καταλήξωμε εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἕνα διάγραμμα εἶναι καταλληλότερον διὰ μελέτην ἀπὸ ὅ,τι ἕνας πίναξ τιμῶν. Δι' ἁπλῆς παρατηρήσεως τοῦ σχήματος 4·1 γ διαπιστώνομε ἀμέσως ὅτι ἡ ἐπίδοσις τοῦ μαθητοῦ Β εἰς τὰ



Σχ. 4·1 γ.

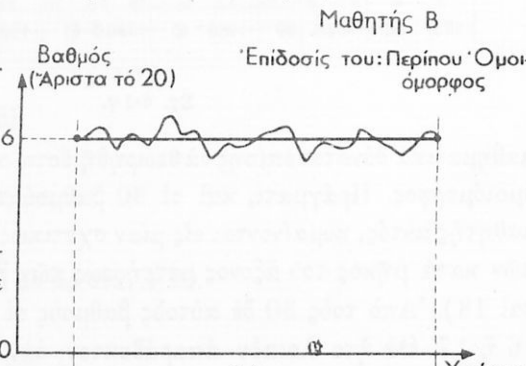
μαθηματικὰ δύναται ἐπίσης νὰ θεωρηθῇ ἔστω καὶ κατὰ προσέγγισιν ὁμοιόμορφος. Πράγματι, καὶ οἱ 30 βαθμοί, τοὺς ὁποίους ἔλαβε ὁ μαθητὴς αὐτός, κυμαίνονται εἰς μίαν σχετικῶς στενὴν περιοχὴν τιμῶν κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος μετρήσεως τῶν βαθμῶν (ἀπὸ 14 ἕως καὶ 18). Ἀπὸ τοὺς 30 δὲ αὐτοὺς βαθμοὺς οἱ 26 ἔχουν τιμὰς 15, 16 ἢ 17. Θὰ ἦτο λοιπὸν ἀπαράδεκτον, ἐὰν αἱ μικραὶ αὐταὶ διακυμάνσεις, ποὺ παρουσιάζουν οἱ βαθμοὶ τοῦ μαθητοῦ Β, μᾶς ἔκαναν νὰ συμπεράνωμε ὅτι ὁ Β εἶναι ἀσταθὴς μαθητής, δηλαδὴ μαθητὴς μὲ μεταπτώσεις ἐπιδόσεως! Ἀπεναντίας, εἶναι πολὺ πιθανὸν νὰ μὴ ὀφείλωνται κἂν αἱ διακυμάνσεις βαθμῶν εἰς μεταπτώσεις ἐπιδόσεως, ἀλλὰ εἰς ἄλλους ἐξωτερικοὺς παράγοντας, ὅπως π.χ. « τρὰκ » κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν προφορικῶν ἐξετάσεων, τύχην ἢ ἀτυχίαν ὡς πρὸς τὴν ἐκλογὴν τῶν θεμάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ἐκλήθη νὰ ἐξετασθῇ, μὴ ὁλοκληρωτικὴν συγκέντρωσιν τοῦ μυαλοῦ του κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν ἐξετάσεων εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν ζητημάτων, λόγω κάποιου θέματος ποὺ τὸν ἀπησχόλει κ.ο.κ. Εἶναι ἑπομένως λογικὸν νὰ θεωρήσωμε καὶ τὴν ἐπίδοσιν τοῦ μαθητοῦ Β ὡς ὁμοιόμορφον ἢ τουλάχιστον ὡς *περίπου ὁμοιόμορφον*.

Τὸ πρόβλημα ὅμως εἶναι ἄλλο: ποῖον θὰ εἶναι τὸ ποσοτικὸν στοιχεῖον μὲ τὸ ὁποῖον θὰ συμπληρώσωμε τὸν χαρακτηρισμὸν τῆς ἐπιδόσεως τοῦ μαθητοῦ Β; Βεβαίως κάποιος βαθμὸς ἀπὸ αὐτοὺς ποὺ ἔλαβε. Ἀλλὰ ποιός; Ὁ μέγιστος (18); Ὁ ἐλάχιστος (14); Ἕνας οἱοσδήποτε ἐνδιάμεσος (π.χ. ὁ 17); Διαισθανόμεθα ἀμέσως ὅτι ὄχι. Θὰ πρέπει νὰ ἀντιπροσωπεύωνται, εἰ δυνατόν, καὶ οἱ 30 βαθμοὶ εἰς τὸν βαθμὸν ποὺ θὰ ἀποτελέσῃ τὸ ποσοτικὸν μέτρον τῆς ἐπιδόσεως τοῦ μαθητοῦ Β. Σκεπτόμεθα λοιπὸν νὰ λάβωμε ὡς μέτρον τὸν *μέσον ὅρον* καὶ τῶν 30 βαθμῶν.

Συμπέρασμα (σχ. 4·1 δ).

α) *Ποιοτικὸν*
Ἐπίδοσις: περίπου ὁμοιόμορφος.

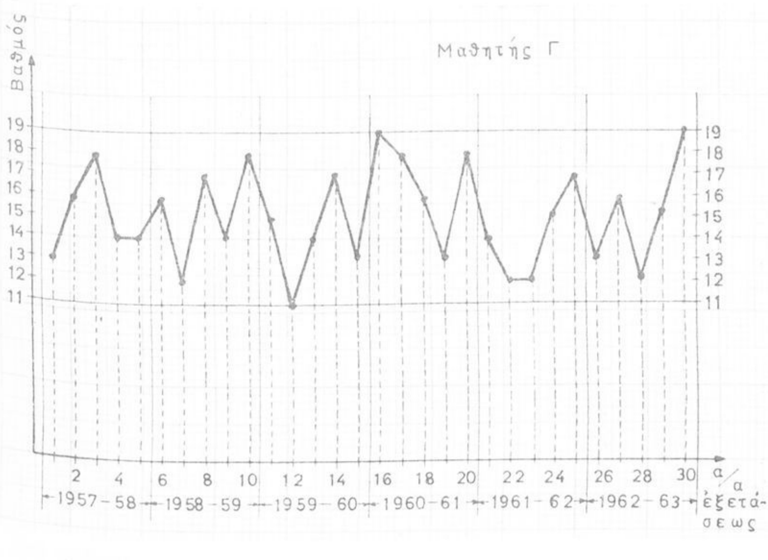
β) *Ποσοτικὸν*
Μέσος ὅρος τῶν 30 βαθμῶν: Περίπου 16 μὲ ἄριστα τὸ 20.



Σχ. 4·1 δ.

3. *Μαθητὴς Γ.*

Μὲ μίαν ἁπλῆν παρατήρησιν τοῦ σχήματος 4·1 ε διαπιστώνομε ἀμέσως ὅτι ὁ μαθητὴς Γ εἶναι *σχετικῶς ἀσταθὴς* εἰς τὰς ἐπιδόσεις του. Αἱ μεγάλαι διακυμάνσεις, τὰς ὁποίας παρατηροῦμε μεταξὺ τῶν βαθμῶν του, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ δικαιολογηθοῦν μόνον μὲ τὴν ὕπαρξιν «τράκ», ἀτυχίας, ἀδικίας κατὰ τὴν βαθμολογίαν κλπ. Ἀναμφισβητήτως θὰ ὀφείλωνται καὶ εἰς τὸ ὅτι ὁ μαθητὴς Γ δὲν ἐπιδεικνύει πάντοτε τὴν ἰδίαν ἐπιμέλειαν κατὰ τὴν μελέτην του ἢ εἰς τὸ ὅτι δὲν εἶναι εἰς θέσιν νὰ ἀφομοιώση ἐξ ἴσου καλὰ ὅλα τὰ κεφάλαια τῶν μαθηματικῶν.



Σχ. 4·1 ε.

Ὑπάρχουν ὅμως ἀσφαλῶς πολλοὶ μαθηταί, ὅπως ὁ Γ. Θὰ πρέπει συνεπῶς νὰ ὁρίσωμε πάλιν κάποιον μέγεθος, τὸ ὁποῖον νὰ μᾶς ἐπιτρέπῃ τὴν ποσοτικὴν σύγκρισιν τῆς ἐπιδόσεως ὅλων αὐτῶν

τῶν μαθητῶν εἰς τὰ μαθηματικά. Τὸ καταλληλότερον μέγεθος εἶναι καὶ εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ὁ μέσος ὅρος τῶν 30 βαθμῶν.

Συμπέρασμα (σχ. 4·1 ζ).

α) *Ποιοτικὸν*

Ἐπίδοσις: σχετικῶς ἀσταθής.

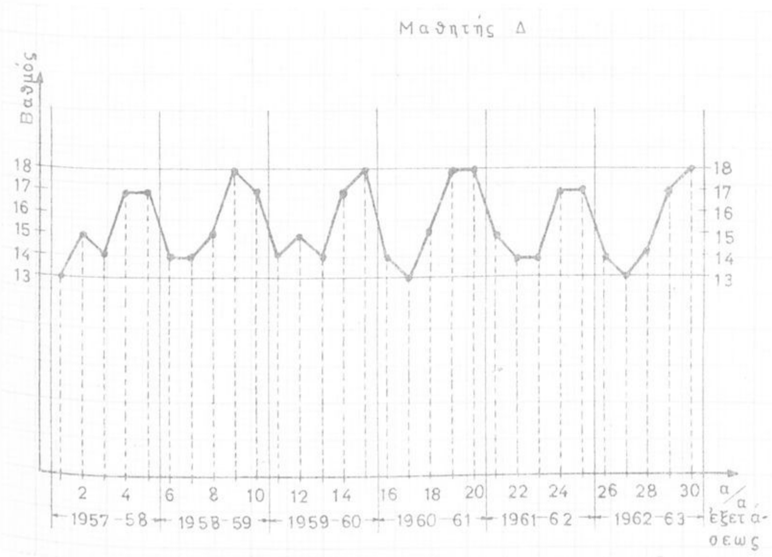
β) *Ποσοτικὸν*

Μέσος ὅρος τῶν βαθμῶν: περίπου 15 μὲ ἄριστα τὸ 20.

Σχ. 4·1 ζ.

4. *Μαθητὴς Δ.*

Τὸ σχῆμα 4·1 η μᾶς φαίνεται ἐκ πρώτης ὄψεως παρόμοιον μὲ τὸ σχῆμα 4·1 ε. Δὲν θὰ πρέπει ὅμως ἐμεῖς νὰ σπεύσωμε καὶ νὰ συμπεράνωμε ἀμέσως ὅτι ὁ Δ εἶναι μαθητὴς ἐπίσης σχετικῶς ἀσταθὴς εἰς τὰς ἐπιδόσεις του. Διότι πράγματι, ἐὰν μελετήσωμε κάπως προσεκτικώτερον τὸ σχῆμα 4·1 η, θὰ παρατηρήσωμε ὅτι ὁ μαθητὴς Δ παρουσιάζει μίαν ἰδιομορφίαν. Συγκεκριμένως, κατὰ τὸ πρῶτον ἑξάμηνον καὶ τῶν 6 γυμνασιακῶν ἐτῶν, οἱ βαθμοί του κυμαίνονται μεταξὺ 13 καὶ 15, ἐνῶ ἀντιθέτως κατὰ τὸ δεύτερον ἑξάμηνον ἐμφανίζουν μίαν ἁλματώδη ἄνοδον. Μὲ ἀρκετὴν προσέγγισιν δυνάμεθα πλέον νὰ συμπεράνωμε ὅτι ἡ ἐπίδοσις τοῦ μαθητοῦ Δ δὲν εἶναι ἀσταθής. Πράγματι, κατὰ τὸ πρῶτον μὲν ἥμισυ τοῦ σχολικοῦ ἔτους ἡ ἐπίδοσίς του εἶναι περίπου ὁμοιόμορφος καὶ ἀξιολογεῖται ποσοτικῶς μὲ τὸν βαθμὸν 14,1 (μέσος ὅρος τῶν βαθμῶν, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὸ πρῶτον ἑξάμηνον), ἐνῶ κατὰ τὸ δεύτερον ἥμισυ τοῦ σχολικοῦ ἔτους ἡ ἐπίδοσίς του εἶναι μὲν ἐπίσης περίπου ὁμοιόμορφος, ἀλλὰ ἀξιολογεῖται ποσοτικῶς μὲ τὸν βαθμὸν 17,4 (μέσος ὅρος τῶν βαθμῶν, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὸ δεύτερον ἑξάμηνον).



Σχ. 4·1 η.

Συμπέρασμα (σχ. 4·1 θ).

α) *Ποιοτικὸν*

I. Ἐπίδοσις κατὰ τὸ πρῶτον ἑξάμηνον: περίπου ὁμοιόμορφος.

II. Ἐπίδοσις κατὰ τὸ δεύτερον ἑξάμηνον: περίπου ὁμοιόμορφος.

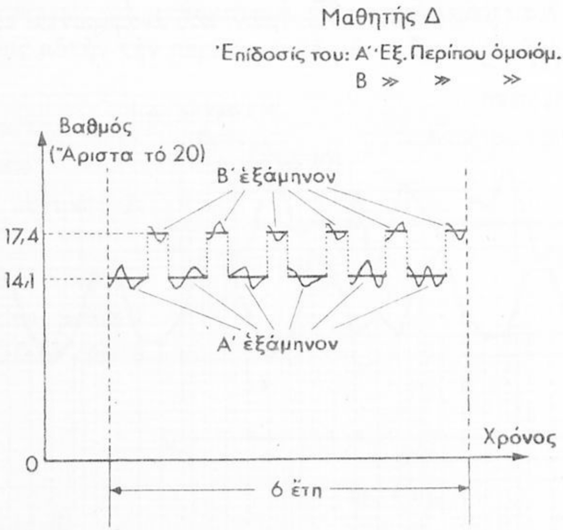
β) *Ποσοτικὸν*

I. Μέσος ὅρος τῶν 18 βαθμῶν, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὸ πρῶτον ἑξάμηνον: 14,1 μὲ ἄριστα τὸ 20.

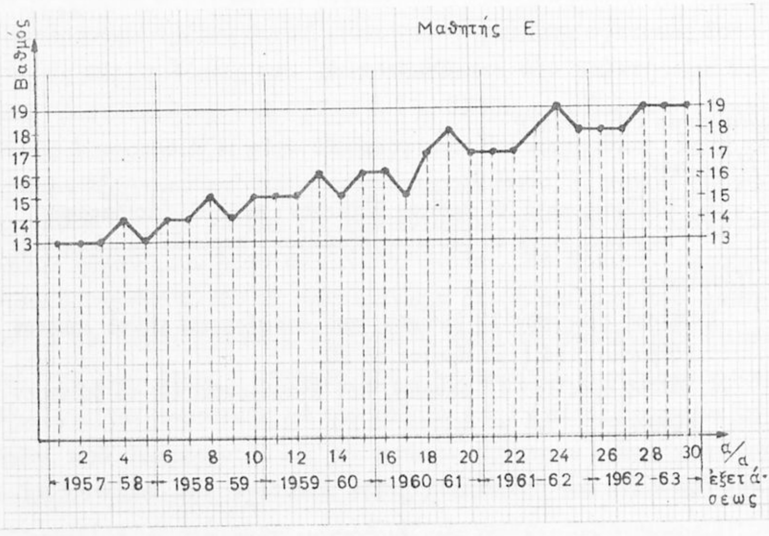
II. Μέσος ὅρος τῶν 12 βαθμῶν, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὸ δεύτερον ἑξάμηνον: 17,4 μὲ ἄριστα τὸ 20.

5. *Μαθηταὶ Ε, ΣΤ καὶ Ζ* (σχήματα 4·1 ι, 4·1 κ, καὶ 4·1 λ).

Ἡ συγκριτικὴ μελέτη τῶν διαγραμμάτων, ποὺ ἀναφέρονται


Μαθητής Δ
Ἐπίδοσίς του: Α΄ Ἐξ. Περίπου ὁμοιόμ.
Β » » »
Βαθμός
(Ἄριστα τό 20)
Β΄ ἑξάμηνον
17,4
14,1
Α΄ ἑξάμηνον
Χρόνος
0
6 ἔτη

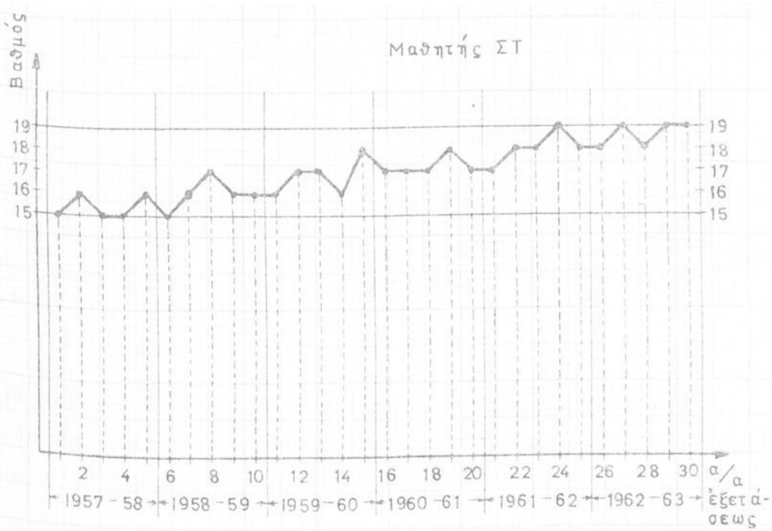
Σχ. 4·1 θ.


Μαθητής Ε
Βαθμός
19
18
17
16
15
14
13
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30
α/α
1957-58 1958-59 1959-60 1960-61 1961-62 1962-63
ἐξετάσεως

Σχ. 4·1 ι.

εἰς τοὺς τρεῖς αὐτοὺς μαθητάς, μᾶς ὑποδηλοῖ ὅτι καὶ οἱ τρεῖς ἐνεφάνισαν μίαν βαθμιαίαν καὶ σταθερὰν ἄνοδον εἰς τὴν ἐπίδοσίν των, κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν γυμνασιακῶν των σπουδῶν.

Τὸ γεγονὸς αὐτὸ εἶναι ἀναμφισβήτητον. Ἀξίζει ὅμως νὰ τονισθῇ διὰ μίαν ἀκόμη φορὰν ὅτι ἕνας παρόμοιος χαρακτηρισμὸς τῆς ἐπιδόσεως ἑνὸς μαθητοῦ δὲν εἶναι πλήρης, ἀκριβῶς διότι τοῦ λείπει τὸ ποσοτικὸν στοιχεῖον. Καὶ πράγματι, ὁ δοθεὶς χαρακτηρισμὸς μᾶς δίδει τὴν ἀπατηλὴν ἐντύπωσιν ὅτι καὶ οἱ τρεῖς μαθηταὶ εἶναι τῆς ἰδίας περίπου ἐπιδόσεως, πρᾶγμα πού, ὅπως βλέπομε εἰς τὰ σχήματα 4·1 ι, 4·1 κ καὶ 4·1 λ, δὲν συμβαίνει:



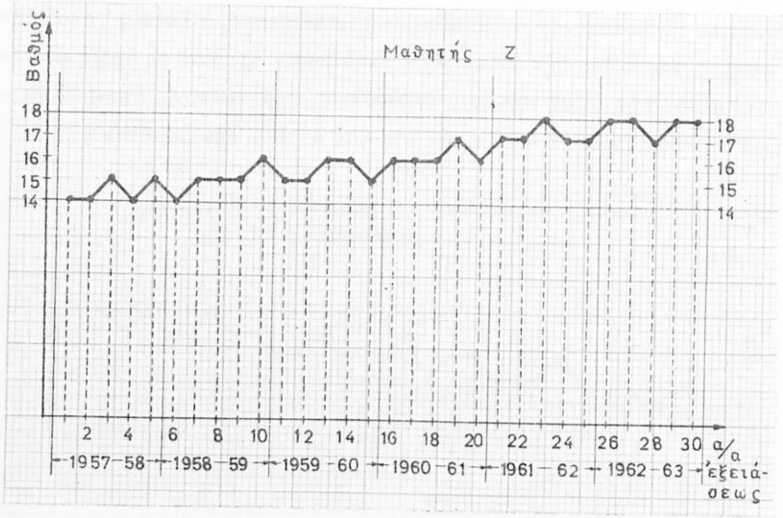
Σχ. 4·1 κ.

α) Ὁ μέσος ὅρος τῶν βαθμῶν τοῦ μαθητοῦ Ε εἶναι ἴσος πρὸς 16.

Ὁ μέσος ὅρος τῶν βαθμῶν τοῦ μαθητοῦ Ζ εἶναι ἐπίσης ἴσος πρὸς 16.

Ἀπεναντίας ὁ μέσος ὅρος τῶν βαθμῶν τοῦ μαθητοῦ ΣΤ εἶναι ἴσος πρὸς 17.

β) Ἡ συνολικὴ αὔξησις τῶν βαθμῶν τοῦ μαθητοῦ ΣΤ κατὰ τὰ ἕξι ἔτη τῶν σπουδῶν του εἰς τὸ γυμνάσιον ἀνέρχεται εἰς τέσσαρες περίπου βαθμοὺς (δηλαδὴ 0,67 περίπου βαθμοὺς διὰ κάθε ἔτος σπουδῶν).



Σχ. 4·1λ.

Ἡ συνολικὴ αὔξησις τῶν βαθμῶν τοῦ μαθητοῦ Ζ κατὰ τὰ ἕξι ἔτη τῶν σπουδῶν του εἰς τὸ γυμνάσιον ἀνέρχεται ἐπίσης εἰς τέσσαρες περίπου βαθμοὺς (δηλαδὴ 0,67 περίπου βαθμοὺς διὰ κάθε ἔτος σπουδῶν).

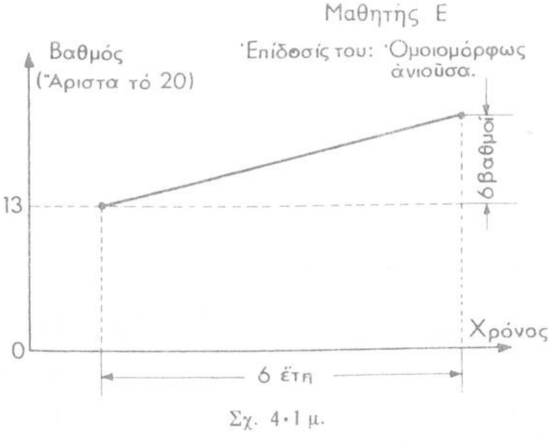
Ἀντιθέτως, ἡ συνολικὴ αὔξησις τῶν βαθμῶν τοῦ μαθητοῦ Ε κατὰ τὰ ἕξι ἔτη τῶν σπουδῶν του εἰς τὸ γυμνάσιον ἀνέρχεται εἰς 6 περίπου βαθμοὺς (δηλαδὴ εἰς ἕνα περίπου βαθμὸν διὰ κάθε ἔτος σπουδῶν).

γ) Ὁ Ε ἦτο μαθητὴς τοῦ 13 εἰς τὴν πρώτην τάξιν τοῦ γυμνασίου.

Ὁ ΣΤ ἦτο μαθητὴς τοῦ 15 εἰς τὴν πρώτην τάξιν τοῦ γυμνασίου.

Ὁ Ζ ἀντιθέτως ἦτο μαθητὴς τοῦ 14 εἰς τὴν πρώτην τάξιν τοῦ γυμνασίου.

Γίνεται ἀμέσως φανερὸν ὅτι τὸ οἱονδήποτε ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω μεγέθη δὲν ἐπαρκεῖ μόνο του διὰ τὴν πλήρη περιγραφὴν τῆς ἐπιδόσεως ἑνὸς μαθητοῦ εἰς τὰ μαθηματικά. Χρειάζεται ἀπαραιτήτως νὰ ὁρισθοῦν δύο ἀπὸ αὐτὰ καὶ μάλιστα εἴτε τὸ α) καὶ τὸ β) εἴτε τὸ α) καὶ τὸ γ), εἴτε τέλος τὸ β) καὶ τὸ γ). Διὰ λόγους, οἱ ὁποῖοι θὰ γίνουν ἀντιληπτοὶ εἰς τὴν ἑπομένην παράγραφον τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ, θὰ χρησιμοποιήσωμε διὰ τὴν ποσοτικὴν περιγραφὴν τῆς ἐπιδόσεως κάθε μαθητοῦ τὰ δύο μεγέθη β) καὶ γ).



Σχ. 4·1 μ.

Συμπέρασμα διὰ τὸν μαθητὴν Ε (σχ. 4·1 μ).

α) *Ποιοτικὸν*

Ἐπίδοσις: ὁμοιομόρφως ἀνιοῦσα.

β) *Ποσοτικὸν*

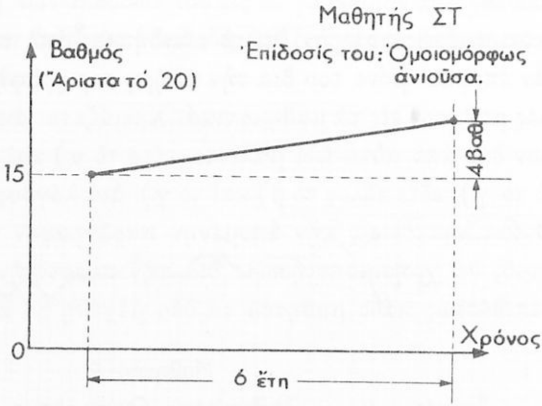
I. Αὔξησις βαθμῶν ἀνὰ ἔτος σπουδῶν: 1.

II. Βαθμοὶ πρώτου ἔτους σπουδῶν: 13.

Συμπέρασμα διὰ τὸν μαθητὴν ΣΤ (σχ. 4 · 1 ν).

α) *Ποιοτικὸν*

Ἐπίδοσις : ὁμοιομόρφως ἀνιοῦσα.

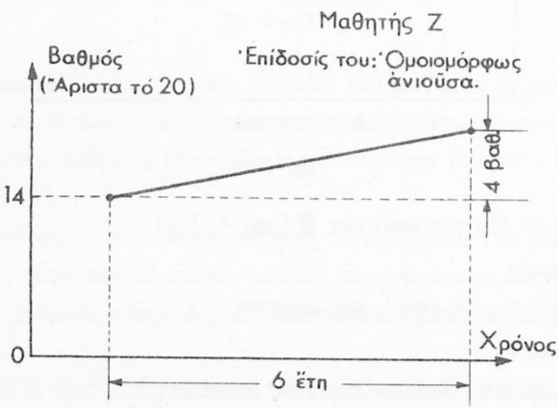


Σχ. 4·1 ν.

β) *Ποσοτικὸν*

I. Αὔξησις βαθμῶν διὰ κάθε ἔτος σπουδῶν : 0,67.

II. Βαθμοὶ πρώτου ἔτους σπουδῶν : 15.



Σχ. 4·1 ξ.

Συμπέρασμα διὰ τὸν μαθητὴν Ζ (σχ. 4·1 ξ).

α) *Ποιοτικὸν*

Ἐπίδοσις: ὁμοιομόρφως ἀνιοῦσα.

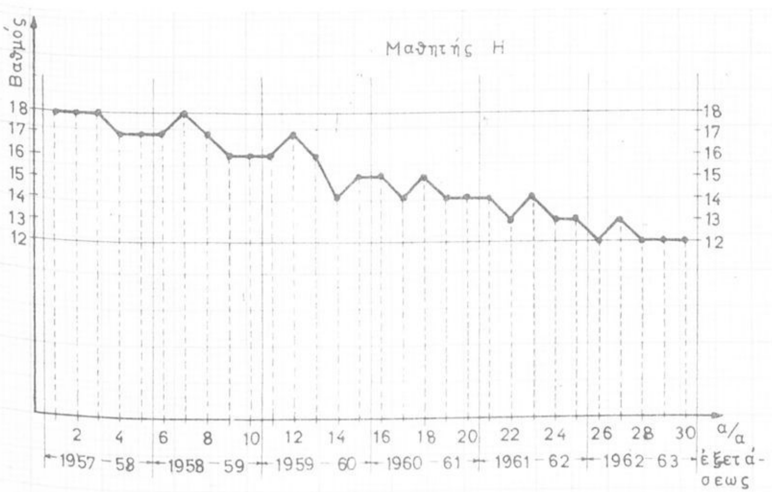
β) *Ποσοτικὸν*

I. Αὔξησις βαθμῶν διὰ κάθε ἔτος σπουδῶν: 0,67.

II. Βαθμοὶ πρώτου ἔτους σπουδῶν: 14.

6. *Μαθητὴς Η.*

Ὅπως βλέπομε εἰς τὸ σχῆμα 4·1 ο, ἡ ἐπίδοσις τοῦ μαθητοῦ Η εἰς τὰ μαθηματικὰ ἐνεφάνισε μίαν σαφῆ πτῶσιν κατὰ τὴν



Σχ. 4·1 ο.

διάρκειαν τῶν σπουδῶν του. Οἱ 30 βαθμοὶ τοὺς ὁποίους ἔλαβε ὁ ἐν λόγῳ μαθητὴς παρουσιάζουν μίαν *σταθερὰν* μείωσιν ἀπὸ ἔτους εἰς ἔτος. Ἡ ἐπίδοσίς του δύναται συνεπῶς νὰ χαρακτηρισθῇ ἀνεπιφυλάκτως ὡς *ὁμοιομόρφως κατιοῦσα.*

Διὰ τὴν ποσοτικὴν περιγραφὴν τῆς ἐπιδόσεως τοῦ μαθητοῦ

Η θὰ πρέπει καὶ πάλιν, ὅπως καὶ πρίν, νὰ ὁρίσωμε δύο μεγέθη, δηλαδὴ τὴν σταθερὰν μείωσιν τῶν βαθμῶν του διὰ κάθε ἔτος σπουδῶν καὶ τὸν βαθμὸν ποὺ ἔλαβε εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν γυμνασιακῶν του σπουδῶν. Ἐργαζόμεθα, ὅπως καὶ διὰ κάθε ἕνα ἀπὸ τοὺς μαθητὰς Ε, Ζ, ΣΤ, καὶ εὑρίσκομε:

Συμπέρασμα διὰ τὸν μαθητὴν Η (σχ. 4·1 π).

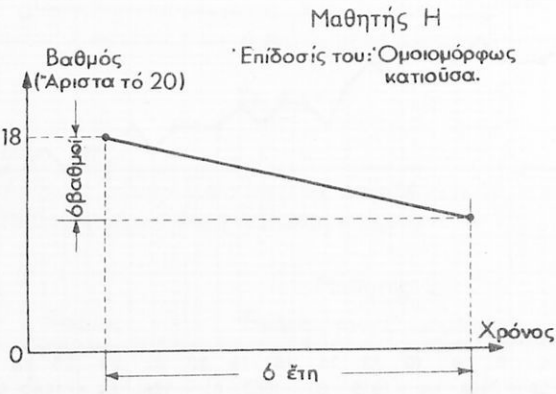
α) *Ποιοτικὸν*

Ἐπίδοσις: ὁμοιομόρφως κατιοῦσα.

β) *Ποσοτικὸν*

I. Μείωσις βαθμῶν ἀνὰ ἔτος σπουδῶν: 1.

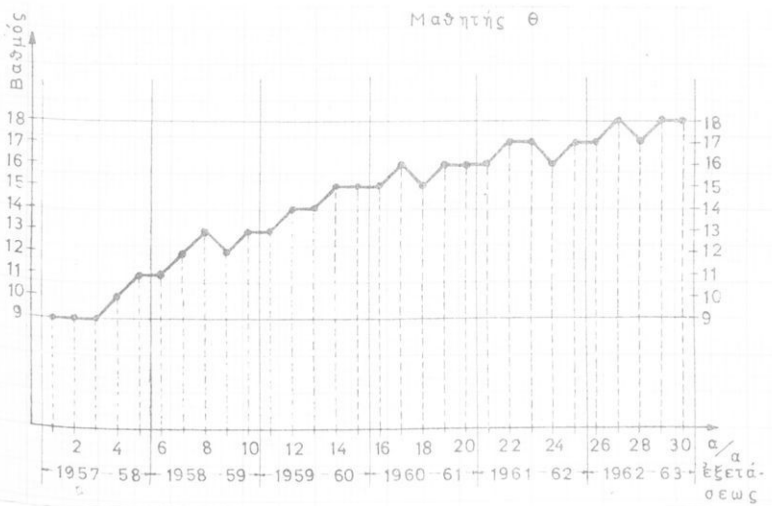
II. Βαθμοὶ πρώτου ἔτους σπουδῶν: 18.



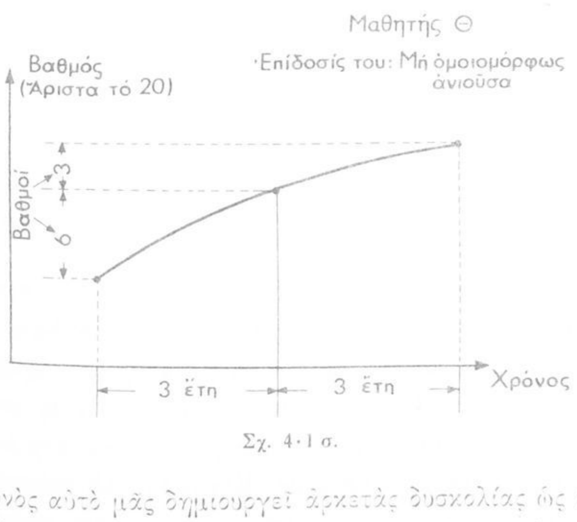
Σχ. 4·1 π.

7. *Μαθητὴς Θ.*

Ἡ ἐπίδοσις τοῦ μαθητοῦ Θ εἰς τὰ μαθηματικὰ ἐνεφάνισε μίαν ἁλματώδη ἄνοδον (σχήματα 4·1 ρ καὶ 4·1 σ). Ἡ ἄνοδος ὅμως αὐτὴ δὲν ὑπῆρξε σταθερὰ (*ἐπίδοσις μὴ ὁμοιομόρφως ἀνιοῦσα*). Πράγματι, κατὰ τὰ τρία πρῶτα ἔτη, οἱ βαθμοὶ τοῦ μαθητοῦ Θ ηὐξήθησαν κατὰ 6 μονάδας (ἀπὸ 9 εἰς 15), ἐνῶ κατὰ τὰ τρία τελευταῖα ἔτη, κατὰ 3 μόνον μονάδας (ἀπὸ 15 ἕως 18).



Σχ. 4·1 ρ.



Σχ. 4·1 σ.

Τὸ γεγονὸς αὐτὸ μᾶς δημιουργεῖ ἀρκετὰς δυσκολίας ὡς πρὸς τὴν ποσοτικὴν περιγραφὴν τῆς ἐπιδόσεως τοῦ μαθητοῦ αὐτοῦ.

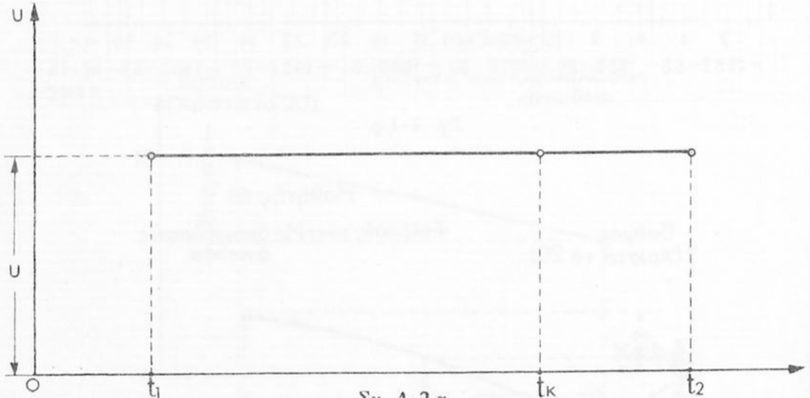
Δὲν θὰ προχωρήσωμε περισσότερον εἰς τὴν ἀνάλυσιν παρομοίων διαγραμμάτων βαθμολογίας.

Ὅσον ὅμως καὶ ἂν φανῇ τοῦτο περίεργον, εἴμεθα ἤδη ἐπαρκῶς προετοιμασμένοι διὰ νὰ προχωρήσωμε εἰς τὴν μελέτην πολυπλόκων κινήσεων.

4·2 Μὴ ὁμοιόμορφοι κινήσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι δυνατὸν νὰ μελετηθοῦν ὡς ὁμοιόμορφοι.

1. Σύντομος ἀνακεφαλαίωσις.

Πρὶν εἰσέλθωμε εἰς τὴν κυρίως μελέτην τῶν μὴ ὁμοιομόρφων κινήσεων, ἀξίζει τὸν κόπον νὰ κάνωμε μίαν σύντομον ἀνασκόπησιν τοῦ ὁρισμοῦ, τὸν ὁποῖον εἴχαμε δώσει εἰς τὸ κεφάλαιον



Σχ. 4·2 α.

2 διὰ τὰς ὁμοιομόρφους κινήσεις. Εἴχαμε ὁρίσει τότε ὅτι : ὁμοιόμορφος κίνησις εἶναι ἐκείνη, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος τοῦ κινουμένου σώματος παραμένει συνεχῶς σταθερά. Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς ὅμως δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ μὲ ἄλλον τρόπον καὶ συγκεκριμένως μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ λεγομένου διαγράμματος *ταχύτητος - χρόνου*. Πράγματι, τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 4 · 2 α μᾶς λέγει τὰ ἑξῆς : τόσον κατὰ τὴν χρονικὴν στι-

γμὴν t_1 (ἀρχὴ μελέτης τῆς κινήσεως), ὅσον καὶ κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_2 (τέλος μελέτης τῆς κινήσεως), ὅσον καὶ κατὰ οἱανδήποτε ἄλλην ἐνδιάμεσον χρονικὴν στιγμὴν t_κ, ἡ ταχύτης τοῦ κινουμένου σώματος παραμένει συνεχῶς σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς υ. Ἡ τιμὴ υ τῆς ταχύτητος δὲν ἐξαρτᾶται δηλαδὴ ἀπὸ τὴν συγκεκριμένην χρονικὴν στιγμήν, εἰς τὴν ὁποίαν ἀναφερόμεθα· εἶναι, ὅπως λέγεται, ἀνεξάρτητος τοῦ χρόνου. Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ δώσωμε ἕνα νέον ὁρισμὸν καὶ νὰ εἴπωμε ὅτι: *ὁμοιόμορφος εἶναι ἐκείνη ἡ κίνησις, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ χρόνου.*

Τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 4·2 α ἔχει ἀναμφισβητήτως τὴν ἰδίαν μορφὴν μὲ τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 4·1 β. Ἡ καταπληκτικὴ αὐτὴ ὁμοιότης μεταξὺ τῶν δύο διαγραμμάτων μᾶς ἐμβάλλει εἰς σκέψεις καὶ μᾶς ἐξαναγκάζει νὰ διερευνήσωμε καὶ νὰ μελετήσωμε τὸ ἐρώτημα: Μήπως ὑπάρχει ὁμοιότης ἢ ἀντιστοιχία καὶ μεταξὺ τῶν δύο πραγματικῶν καταστάσεων, τὰς ὁποίας ἀπεικονίζουν τὰ δύο διαγράμματα;

Ὡς πρὸς τὴν ἐρώτησιν αὐτὴν παρατηροῦμε τὰ ἑξῆς:

— Εἰς τὰ σχήματα 4·1 α καὶ 4·1 β ἀπεικονίσαμε γραφικῶς τὴν ἐπίδοσιν, τὴν ὁποίαν εἶχεν ὁ μαθητὴς Α εἰς τὰ μαθηματικὰ κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν σπουδῶν του εἰς τὸ γυμνάσιον, δηλαδὴ κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα ἀπὸ $t_1 = 11/12/1957$ ἕως $t_2 = 17/6/1963$.

Εἰς τὸ σχῆμα 4·2 α ἀπεικονίσαμε γραφικῶς τὴν κίνησιν, τὴν ὁποίαν ἐκτελεῖ ἕνα σῶμα κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα ἀπὸ t_1 ἕως t_2.

— Τὸ μέγεθος, διὰ τοῦ ὁποίου περιγράφεται ποσοτικῶς ἡ ἐπίδοσις ἑνὸς μαθητοῦ, εἶναι ὁ βαθμὸς τὸν ὁποῖον λαμβάνει ὁ μαθητὴς εἰς τὰς γραπτὰς καὶ προφορικὰς ἐξετάσεις.

Τὸ μέγεθος, διὰ τοῦ ὁποίου περιγράφεται ποσοτικῶς ἡ κίνησις ἑνὸς σώματος, εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος, τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ σῶμα εἰς διαφόρους χρονικὰς στιγμάς.

— Οἱ βαθμοὶ τοὺς ὁποίους ἔλαβε ὁ μαθητὴς Α κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν σπουδῶν του ἦσαν ὅλοι ἴσοι μεταξύ των (ὁμοιόμορφος ἐπίδοσις). Ἡ ταχύτης, τὴν ὁποίαν εἶχε τὸ σῶμα κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεώς του, εἶχε σταθερὰν τιμὴν (ὁμοιόμορφος κίνησις).

— Ἡ ἐπίδοσις τοῦ μαθητοῦ Α δύναται νὰ περιγραφῇ ποσοτικῶς μὲ τὴν τιμὴν ἑνὸς μόνον μεγέθους, δηλαδὴ τοῦ κοινοῦ βαθμοῦ τὸν ὁποῖον ἔλαβε εἰς ὅλας τὰς ἐξετάσεις (14 μὲ ἄριστα τὸ 20).
Ἡ κίνησις τοῦ σώματος δύναται νὰ περιγραφῇ ποσοτικῶς μὲ τὴν τιμὴν ἑνὸς μόνον μεγέθους, δηλαδὴ τῆς σταθερᾶς ταχύτητος μὲ τὴν ὁποίαν ἐκινήθη τοῦτο (π.χ. 70 km/h).

— Βαθμὸς π.χ. 14 δὲν σημαίνει τίποτε. Ἀντιθέτως, βαθμὸς 14 μὲ ἄριστα τὸ 20 κάτι σημαίνει.

Ἀντιστοίχως, ταχύτης 70 δὲν σημαίνει ἐπίσης ἀπολύτως τίποτε, ἐνῶ ἀντιθέτως, ταχύτης 70 km/h κάτι σημαίνει. Ὅσην σημασίαν ἔχει δηλαδὴ τὸ «ἄριστα» προκειμένου περὶ βαθμῶν, τόσην καὶ μεγαλυτέραν σημασίαν ἔχει ἡ μονὰς μετρήσεως προκειμένου περὶ ταχύτητος.

Βλέπομε λοιπὸν ὅτι ὑπάρχει πράγματι μία πλήρης ἀντιστοιχία μεταξὺ «ἐπιδόσεως» ἑνὸς μαθητοῦ καὶ «κινήσεως» ἑνὸς σώματος (Πίναξ 7). Ἡ πλήρης αὐτὴ ἀντιστοιχία θὰ μᾶς ἐπιτρέψῃ νὰ μελετήσωμε ὅλα τὰ εἴδη κινήσεως ἐν συνδυασμῷ μὲ τὰ ἀν-

ΠΙΝΑΞ 7

Μαθητὴς	Σῶμα
Ἐπίδοσις μαθητοῦ	Κίνησις σώματος
Βαθμὸς	Ἀριθμητικὴ τιμὴ ταχύτητος
Ὁμοιόμορφος ἐπίδοσις	Ὁμοιόμορφος κίνησις
Ποῖον εἶναι τὸ «ἄριστα»	Ποία εἶναι ἡ μονὰς μετρήσεως

τίστοιχα παραδείγματα, τὰ ὁποῖα ἀναφέραμε εἰς τὴν παράγραφον 4·1. Αὐτὸ θὰ μᾶς διευκολύνῃ πάρα πολύ, τόσον εἰς τὴν περιγραφὴν κάθε εἴδους κινήσεως, ὅσον καὶ εἰς τὴν κατανόησιν τῶν διαφόρων συναφῶν ἐννοιῶν.

2. *Κίνησις ἀνθρώπων - Κίνησις ὑλικῶν μεταφερομένων ἀπὸ ἀνθρώπους.*

Τί εἴδους κίνησιν ἐκτελεῖ ἕνας ἐργάτης, ποὺ μεταφέρει τοῦβλα; Κατὰ πᾶσαν πιθανότητα ὄχι ὁμοιόμορφον. Εἶναι βέβαιον ὅτι εἰς ὡρισμένας χρονικὰς στιγμάς, ὅπως π.χ. ὅταν συναντᾷ ὁ ἐργάτης ἕνα οἱασδήποτε φύσεως ἐμπόδιον (σκαλοπάτι, πέτρα, ἄλλον ἐργάτην κλπ.) θὰ ἀνακόπτῃ τὸν βηματισμόν του. Ἀνακοπὴ

Σχ. 4·2 β.

ὅμως τοῦ βηματισμοῦ τοῦ ἐργάτου σημαίνει μείωσιν τῆς ταχύτητός του, ἐνῶ ἀντιθέτως, ἐπίσπευσις τοῦ βηματισμοῦ του σημαίνει αὔξησιν τῆς ταχύτητός του. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται ὁ ἐργάτης δὲν εἶναι ἑπομένως συνεχῶς σταθερά· δὲν εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ χρόνου. Ἐν τούτοις διαισθανόμεθα ὅτι αἱ αὐξομειώσεις τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τῆς ταχύτητος, ἀπὸ τὴν μίαν χρονικὴν στιγμὴν εἰς ἄλλην, δὲν εἶναι μεγάλαι (σχ. 4·2 β). Ἔτσι, τὸ διάγραμμα ταχύτητος -

χρόνου, ποὺ ἀναφέρεται εἰς τὴν κίνησιν τοῦ ἐργάτου, μᾶς θυμίζει πολὺ τὰ διαγράμματα τῶν σχημάτων 4 · 1 γ καὶ 4 · 1 δ, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὴν ἐπίδοσιν τοῦ μαθητοῦ Β εἰς τὰ μαθηματικά. Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι ἡ κίνησις τοῦ ἐργάτου δύναται κάλλιστα νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς περίπου ὁμοιόμορφος.

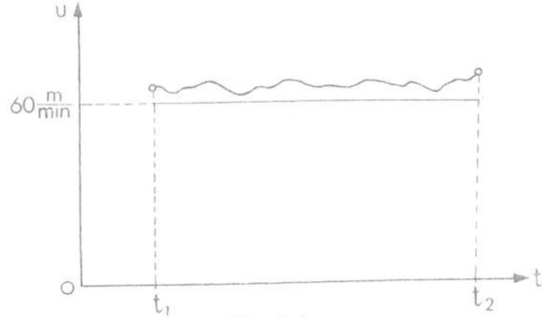
Διὰ τὴν ποσοτικὴν περιγραφὴν τῆς ἐπιδόσεως τοῦ μαθητοῦ Β ἐχρησιμοποιήσαμε ἕνα καὶ μόνον μέγεθος, τὸν μέσον ὅρον τῶν βαθμῶν του. Εἶναι συνεπῶς λογικὸν νὰ ὑποθέσωμε ὅτι, ἐπειδὴ ὑπάρχει πλήρης ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν δύο διαγραμμάτων, θὰ πρέπει καὶ ἡ ποσοτικὴ περιγραφὴ τῆς κινήσεως τοῦ ἐργάτου νὰ γίνεται μὲ βάσιν ἕνα καὶ μόνον μέγεθος. Τὸ μέγεθος αὐτὸ δὲν δύναται νὰ εἶναι ἄλλο ἀπὸ τὴν μέσην ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς ταχύτητός του (ἢ ἁπλούστερον τὴν *μέσην ταχύτητά του*).

Ὅλοι γνωρίζομε τὸ νόημα τοῦ μέσου ὅρου ἑνὸς συνόλου βαθμῶν. Ποῖον εἶναι ὅμως τὸ νόημα τῆς μέσης ταχύτητος;

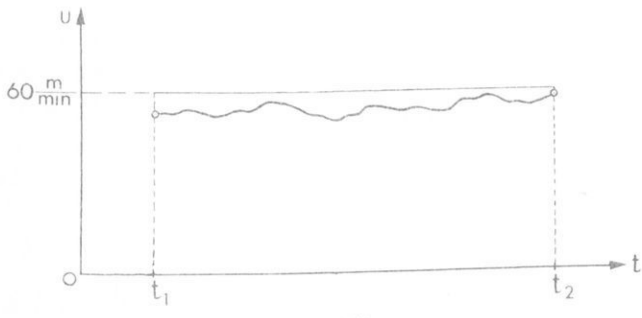
Διὰ νὰ ἀπαντήσωμε εἰς τὸ ἐρώτημα αὐτό, θὰ κάνωμε ἕνα πείραμα: Θὰ χρονομετρήσωμε τὸν ἐργάτην κατὰ τὴν κίνησίν του ἐπὶ ἀποστάσεως π.χ. $s = 120$ μέτρων. Ἂς ὑποθέσωμε δὲ ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα τῆς χρονομετρήσεως ὑπῆρξε $t = 2$ min.

Τὸ μέγεθος $\frac{s}{t} = \frac{120\,\text{m}}{2\,\text{min}} = 60$ m/min παριστάνει ἀναμφισβητήτως ταχύτητα. Ποίαν ταχύτητα ὅμως; Μὰ προφανῶς τὴν ταχύτητα ἑνὸς ἰδανικοῦ ἐργάτου, ὁ ὁποῖος θὰ ἐκινεῖτο ἀπολύτως ὁμοιομόρφως κατὰ τρόπον, ὥστε νὰ χρειάζεται χρόνον 2 min διὰ νὰ διανύσῃ διάστημα 120 m. Ὁ δικός μας ἐργάτης δὲν εἶναι ὅμως ἰδανικός. Δὲν κινεῖται πάντοτε μὲ τὴν ἰδίαν ταχύτητα. Ἄλλοτε κινεῖται πιὸ γρήγορα καὶ ἄλλοτε πιὸ ἀργὰ (σχ. 4 · 2 β).

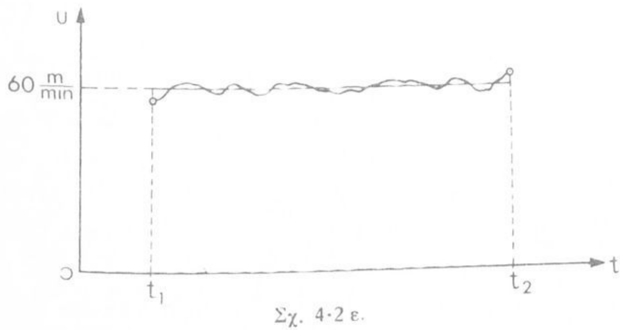
Ἐὰν ἐκινεῖτο (σχ. 4 · 2 γ) συνεχῶς μὲ ταχύτητα μεγαλυτέραν ἀπὸ 60 m/min, θὰ ἐχρειάζετο χρόνον μικρότερον ἀπὸ 2 min διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν προορισμόν του. Ἐὰν πάλιν ἐκινεῖτο συνεχῶς μὲ ταχύτητα μικροτέραν ἀπὸ 60 m/min, θὰ ἐχρειάζετο χρόνον μεγαλύτερον ἀπὸ 2 min διὰ νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν τῶν 120 m (σχ. 4·2 δ).



Σχ. 4·2 γ.



Σχ. 4·2 δ.



Σχ. 4·2 ε.

Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι, ἐφ' ὅσον ὁ πραγματικὸς ἐργάτης, τοῦ ὁποίου μελετᾶμε τὴν κίνησιν, χρειάζεται χρόνον 2 min διὰ νὰ διανύσῃ τὸ διάστημα τῶν 120 m, δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ ταχύτητα συνεχῶς μεγαλυτέραν ἢ συνεχῶς μικροτέραν ἀπὸ 60 m/min. Θὰ πρέπει νὰ ἔχῃ ταχύτητα ἄλλοτε μὲν μεγαλυτέραν, ἄλλοτε δὲ μικροτέραν ἀπὸ τὴν ταχύτητα τῶν 60 m/min (σχ. 4·2 ε).

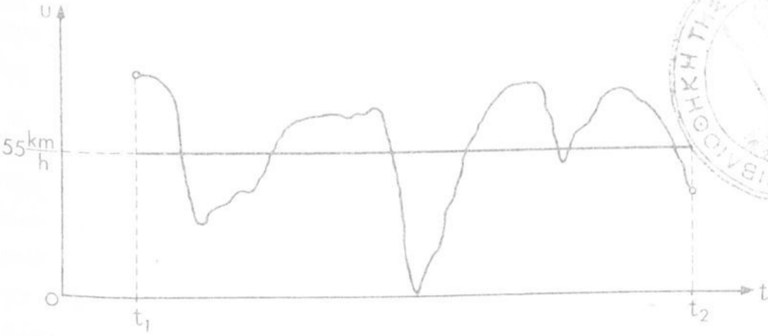
Ἡ ταχύτης τῶν 60 m/min ἀντιπροσωπεύει συνεπῶς μίαν μέσην κατάστασιν. Εἶναι ἀκριβῶς ἡ μέση ταχύτης, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται ὁ ἐργάτης (ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῆς ταχύτητος τοῦ ἐργάτου εἰς διαφόρους χρονικὰς στιγμάς).

3. *Κίνησις αὐτοκινήτων - Κίνησις ὑλικῶν ποὺ μεταφέρονται ἀπὸ αὐτοκίνητα.*

Αἱ Πάτραι ἀπέχουν ἀπόστασιν 220 περίπου χιλιομέτρων ἀπὸ τὰς Ἀθήνας. Τί ἐννοοῦμε, ὅταν λέγωμε ὅτι ἕνα αὐτοκίνητον χρειάζεται χρόνον τεσσάρων ὡρῶν διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ τὰς Ἀθήνας εἰς τὰς Πάτρας; Ἐννοοῦμε ὅτι ἡ ταχύτης, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ αὐτοκίνητον, ἔχει ἀριθμητικὴν τιμὴν $\upsilon = \frac{220\,\mathrm{km}}{4\,\mathrm{h}} = 55\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$;

Δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ἔχωμε κάνει τὴν διαδρομὴν αὐτὴν μὲ αὐτοκίνητον διὰ νὰ ἀπαντήσωμε εἰς τὸ ἐρώτημα αὐτό. Ὅλοι ἔχομε ταξιδεύσει μὲ αὐτοκίνητον. Ὅλοι γνωρίζομε ὅτι ἡ ταχύτης, τὴν ὁποίαν ἀναπτύσσει ἕνα αὐτοκίνητον, δὲν ἐξαρτᾶται πάντοτε ἀπὸ τὴν καλὴν διάθεσιν τοῦ ὁδηγοῦ του καὶ τὴν καλὴν κατάστασιν τῆς μηχανῆς, ἀλλὰ ἀπὸ πολλοὺς ἀσταθμήτους ἐξωτερικοὺς παράγοντας, ὅπως π.χ. τὴν ἔντασιν τῆς κυκλοφορίας, τὸ εἶδος τῆς διαγραφομένης τροχιᾶς, τὸ πλάτος τῆς ὁδοῦ, τὰς καιρικὰς συνθήκας, τὴν ὥραν τῆς ἡμέρας κ.ἄ. Θὰ ἦτο ἑπομένως ἐκτὸς πραγματικότητος ὅποιος θὰ ἰσχυρίζετο ὅτι εἶναι ποτὲ δυνατὸν νὰ κινηθῇ ἕνα αὐτοκίνητον ἀπὸ τὰς Ἀθήνας εἰς τὰς Πάτρας μὲ σταθερὰν ταχύτητα 55 km/h. Ἡ τιμὴ 55 km/h δεικνύει τὴν *μέσην ταχύτητα* τοῦ αὐτοκινήτου (σχ. 4·2 ζ), δηλαδὴ τὴν σταθερὰν ταχύτητα, μὲ τὴν ὁποίαν θὰ ἔπρεπε νὰ κινηθῇ ἕνα αὐτοκίνητον ὑπὸ ἰδανικὰς συνθήκας διὰ νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν Ἀθηνῶν - Πατρῶν εἰς χρόνον τεσσάρων ὡρῶν.

Εἶναι ἀναμφισβήτητον ὅτι αὐτὴ καθ᾽ ἑαυτὴν ἡ κίνησις ἑνὸς αὐτοκινήτου εἶναι πολύπλοκος, ἡ δὲ λεπτομερὴς μελέτη της πάρα πολὺ δυσχερής. Ἂς ὑποθέσωμε ὅμως ὅτι εἶχε κάποιος τὴν ἐπιμονὴν καὶ τὴν ὑπομονὴν νὰ μελετήσῃ μέτρον πρὸς μέτρον τὴν κίνησιν ἑνὸς αὐτοκινήτου ἀπὸ τὰς Ἀθήνας εἰς τὰς Πάτρας. Εἰς



Σχ. 4·2 ζ.

τί θὰ ἀπέβλεπε αὐτὴ ἡ λεπτομερὴς μελέτη; Ποίαν σκοπιμότητα θὰ εἶχε; Ποία θὰ ἦτο ἡ πρακτικὴ σημασία τῶν συμπερασμάτων μιᾶς μελέτης τοῦ εἴδους αὐτοῦ; Ἀπολύτως καμμία. Διότι εἶναι βέβαιον ὅτι, ὁσασδήποτε φορὰς καὶ ἂν μελετήσωμε κατὰ παρόμοιον τρόπον τὴν κίνησιν ἑνὸς ἄλλου ἢ καὶ τοῦ ἰδίου ἀκόμη αὐτοκινήτου κατὰ τὴν ἰδίαν διαδρομήν, *οὐδέποτε* πρόκειται νὰ καταλήξωμε εἰς ἕνα ἑνιαῖον ἀποτέλεσμα. Ἄρα δὲν ἔχει κανένα νόημα νὰ ὑποβληθοῦμε εἰς τόσον κόπον χωρὶς κανένα πρακτικὸν ἀποτέλεσμα. Ἐδῶ ἀκριβῶς ἔγκειται ἡ ἀξία τῆς ἐννοίας τῆς μέσης ταχύτητος. Διότι πράγματι, τί μᾶς ἐνδιαφέρει τὸ κατὰ πόσον ἕνα αὐτοκίνητον ἐκτελεῖ ὁμοιόμορφον κίνησιν, ἐνῷ ἕνα ἄλλο ὄχι, ἐὰν χρειάζωνται καὶ τὰ δύο τὸν ἴδιον χρόνον διὰ νὰ διανύσουν μίαν ὡρισμένην ἀπόστασιν; Διατί λοιπὸν νὰ μὴ ἀναγάγωμε τὴν κίνησιν κάθε αὐτοκινήτου εἰς ὁμοιόμορφον κίνησιν; Θὰ καταλήξωμε εἰς τὰ ἴδια περίπου συμπεράσματα, ἐνῷ θὰ ἔχωμε ἐξοικονομήσει πολὺν χρόνον καὶ κόπον!

4. *Κίνησις κοπτικοῦ ἐργαλείου πλάνης.*

Τὸ κοπτικὸν ἐργαλεῖον τῆς πλάνης ἐκτελεῖ κίνησιν ἀρκετὰ πολύπλοκον. Εἰς τὰς δύο ἀκραίας θέσεις τῆς διαδρομῆς του παραμένει πρὸς στιγμὴν ἀκίνητον, εἰς ἄλλας θέσεις κινεῖται μὲ μεγάλην σχετικῶς ταχύτητα, εἰς ἄλλας πάλιν μὲ μικράν. Ὅλα αὐτὰ ὅμως μᾶς προκαλοῦν μίαν ἔντονον ἀπορίαν: πῶς εἶναι ποτὲ δυνατὸν νὰ μελετηθῇ μία κίνησις τοῦ εἴδους αὐτοῦ;

Ἂν φέρωμε εἰς τὸν νοῦν μας ὡστόσον τὴν ἐντύπωσιν, ἡ ὁποία μᾶς προεκλήθη ὅταν διὰ πρώτην φορὰν παρηκολουθήσαμε μίαν πλάνην κατὰ τὴν λειτουργίαν της, θὰ διαπιστώσωμε ὅτι ἦτο πολὺ διαφορετική. Τὸ μόνον ἴσως πρᾶγμα, ποὺ θὰ παρετηρήσαμε τότε, ἦτο ὅτι τὸ ἐργαλεῖον τῆς πλάνης ἐκινεῖτο ταχύτερον κατὰ τὴν μίαν διαδρομήν του ἀπὸ ὅ,τι κατὰ τὴν ἄλλην. Καὶ αὐτὴ ἡ ἁπλῆ, ἡ ἀφελὴς ἴσως παρατήρησις, εἶναι ἀκριβῶς ἐκείνη ποὺ θὰ μᾶς ἐπιτρέψῃ νὰ μελετήσωμε τὴν κίνησιν τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου τῆς πλάνης κατὰ τρόπον εὔκολον καὶ συγχρόνως ἀρκετὰ ἀκριβῆ. Θὰ θεωρήσωμε δηλαδὴ ὅτι τὸ ἐργαλεῖον τῆς πλάνης κινεῖται ὁμοιομόρφως καὶ κατὰ τὰς δύο διαδρομάς του, μὲ διαφορετικὴν ὅμως ταχύτητα εἰς κάθε μίαν (περίπου κάτι ἀνάλογον μὲ τὴν ἐπίδοσιν τοῦ μαθητοῦ Δ εἰς τὰ μαθηματικά, ὅπως εἴδαμε εἰς τὴν παράγραφον 4·1-4).

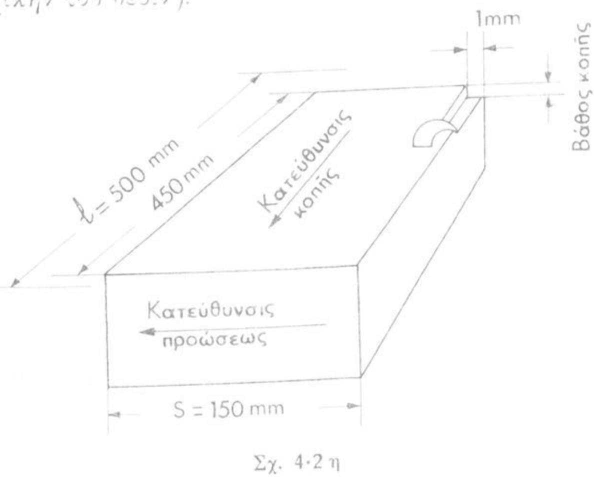
Μετὰ τὰς διευκρινήσεις αὐτάς, ὁ χρονικὸς προγραμματισμὸς μιᾶς σειρᾶς ἐργασιῶν εἰς τὴν πλάνην ἐμφανίζεται πάρα πολὺ ἁπλοῦς, ἴσως μάλιστα ἁπλούστερος ἀπὸ ἐκεῖνον, τὸν ὁποῖον ἐμελετήσαμε εἰς τὴν παράγραφον 3·3, προκειμένου περὶ κατεργασιῶν εἰς τὸν τόρνον, τὴν φραιζομηχανὴν ἢ τὸ δράπανον.

Παράδειγμα : Γίνεται λείανσις μιᾶς ὀρθογωνικῆς ἐπιφανείας ἀπὸ σκληρὸν χάλυβα διαστάσεων 450 mm × 150 mm εἰς μηχανουργικὴν πλάνην (σχ. 4·2 η). Δίδονται τὰ ἑξῆς στοιχεῖα:

α) Τὸ διάστημα l, τὸ ὁποῖον διανύει τὸ κοπτικὸν ἐργαλεῖον εἰς κάθε ἁπλῆν διαδρομήν, εἶναι ἴσον πρὸς 500 mm.

β) Ἡ μέση ταχύτης $υ_1$, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ ἐργαλεῖον κατὰ τὴν κοπήν, εἶναι ἴση πρὸς 10 m/min.

γ) Ἡ μέση ταχύτης $υ_2$, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ ἐργαλεῖον κατὰ τὴν ἐπιστροφή του εἰς τὴν ἀρχικήν θέσιν, εἶναι ἴση πρὸς 20 m/min. (Ὅπως βλέπομε, ἡ μέση ταχύτης ἐπιστροφῆς εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν μέσην ταχύτητα κοπῆς καὶ τοῦτο διὰ νὰ ἐλαττοῦται εἰς τὸ ἐλάχιστον ὁ νεκρὸς — μὴ παραγωγικὸς — χρόνος, ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἐπιστροφὴν τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν).



Σχ. 4·2 η

δ) Ἡ ταχύτης προώσεως τοῦ ἐργαλείου εἶναι ἴση πρὸς 1 mm διὰ κάθε πλήρη διαδρομήν του (κοπὴν καὶ ἐπιστροφήν).

Μὲ βάσιν τὰ δεδομένα αὐτὰ καλούμεθα νὰ ὑπολογίσωμε τὸν χρόνον t, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται διὰ τὴν κατεργασίαν τῆς λειάνσεως.

Ὁ ζητούμενος χρόνος θὰ προκύψῃ διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου $t = \frac{s}{\upsilon_s}$, ὅπου υ_s εἶναι ἡ ταχύτης προώσεως τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου καὶ s τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον θὰ διανύσῃ τὸ ἐργαλεῖον κατὰ τὴν κατεύθυνσιν τῆς ταχύτητος προώσεως. Τὸ μέγεθος s εἶναι γνωστὸν καὶ ἴσον πρὸς 150 mm. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμε συνεπῶς τὸν χρόνον t εἰς min, ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμε τὴν ταχύτητα προώσεως υ_s εἰς $\frac{\text{mm}}{\text{min}}$. Ἡ ταχύτης προώσεως ἔχει ὅμως δοθῆ εἰς ἄλλην μονάδα, δηλαδὴ εἰς mm διὰ κάθε πλήρη διαδρομὴν τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου. Τὸ πρῶτον λοιπὸν στάδιον τοῦ ὑπολογισμοῦ μας πρέπει νὰ εἶναι ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλήρων διαδρομῶν, τὰς ὁποίας ἐκτελεῖ τὸ κοπτικὸν ἐργαλεῖον εἰς κάθε ἕνα λεπτόν.

Ὁ χρόνος ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἐκτελέσῃ τὸ ἐργαλεῖον τῆς πλάνης μίαν πλήρη διαδρομὴν εἶναι ἴσος πρός:

$$t_1 + t_2 = \frac{l}{\upsilon_1} + \frac{l}{\upsilon_2} = \frac{500\,\text{mm}}{10\,\frac{\text{m}}{\text{min}}} + \frac{500\,\text{mm}}{20\,\frac{\text{m}}{\text{min}}} = \frac{0{,}5\,\text{m}}{10\,\frac{\text{m}}{\text{min}}} + \frac{0{,}5\,\text{m}}{20\,\frac{\text{m}}{\text{min}}} = 0{,}05\,\text{min} + 0{,}025\,\text{min} = 0{,}075\,\text{min}.$$

Ὁ ἀριθμὸς συνεπῶς τῶν πλήρων διαδρομῶν, τὰς ὁποίας ἐκτελεῖ τὸ ἐργαλεῖον εἰς κάθε πρῶτον λεπτόν, εἶναι ἴσος πρός:

$$\frac{1}{t_1 + t_2} = \frac{1}{0{,}075\,\text{min}} = 13{,}3 \text{ πλήρεις διαδρομαὶ /min.}$$

Τότε $\upsilon_s = 1\,\frac{\text{mm}}{\text{πλήρη διαδρομὴν}} \times 13{,}3\,\frac{\text{πλήρεις διαδρομαὶ}}{\text{min}} = 13{,}3\,\frac{\text{mm}}{\text{min}}$

καὶ κατὰ συνέπειαν ὁ χρόνος, ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ τὴν λείανσιν τῆς ὀρθογωνικῆς ἐπιφανείας, εἶναι ἴσος πρός:

$$t = \frac{s}{\upsilon_s} = \frac{150\,\text{mm}}{13{,}3\,\frac{\text{mm}}{\text{min}}} = 11{,}25 \text{ min.}$$

Ὁ χρόνος, ποὺ ἐπετύχαμε νὰ προσδιορίσωμε κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, ἔχει μεγάλην πρακτικὴν σημασίαν διὰ τὸν ἐπὶ κεφαλῆς ἑνὸς μηχανουργείου, διότι ἀποτελεῖ τὸ βασικὸν μέγεθος, ποὺ θὰ τοῦ ἐπιτρέψῃ νὰ προϋπολογίσῃ τὸν χρόνον ἀπασχολήσεως τεχνιτῶν καὶ μηχανημάτων καὶ τὸ κόστος ἐκτελέσεως οἱασδήποτε σχετικῆς παραγγελίας.

4·3 Ἐπιταχυνομένη - Ἐπιβραδυνομένη κίνησις.

1. Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνομένην κίνησιν.

Τὸ παιδάκι, τὸ ὁποῖον βλέπομε εἰς τὸ σχῆμα 4·3 α, ἑτοι-

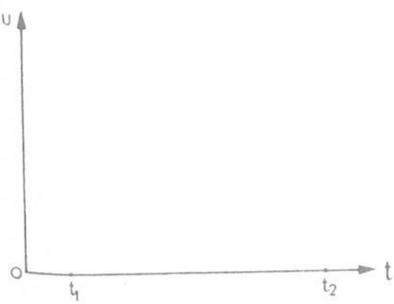
Σχ. 4·3 α.

μάζεται νὰ ρίξῃ ἕνα ἀντικείμενον ἀπὸ τὸ παράθυρον τοῦ σπιτιοῦ του. Δὲν σκέπτεται ὅμως τί συνεπείας ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ ἡ πρᾶξις του αὐτή. Δὲν σκέπτεται δηλαδὴ ὅτι ὑπάρχει φόβος νὰ τραυματίσῃ ἢ ἀκόμη χειρότερα νὰ σκοτώσῃ κάποιον ἀπὸ τοὺς πεζούς, ποὺ διέρχονται ἀνυπόπτως, οὔτε ὅτι εἶναι πιθανὸν νὰ συλληφθῇ καὶ νὰ καταδικασθῇ δι' ἀνθρωποκτονίαν ἐξ ἀμελείας! Ἐμεῖς ὅμως, ποὺ γνωρίζομε τὰ ὅσα εἶναι πιθανὸν νὰ συμβοῦν, τί πρέπει νὰ κάνωμε; Ἀναμφισβητήτως θὰ πρέπει μὲ κάθε τρόπον νὰ τὸ ἐμποδίσωμε. Παρ' ὅλα αὐτὰ θὰ κάνωμε ἕνα μικρὸν συμβιβασμὸν μὲ τὴν συνείδησίν μας. Μᾶς παρουσιάζεται ἡ μοναδικὴ εὐκαιρία νὰ μελετήσωμε ἕνα νέον εἶδος κινήσεως. Δὲν πρέπει νὰ τὴν χάσωμε! Ἄς φανοῦμε λοιπὸν ψύχραιμοι καὶ ἄς ἐντείνωμε τὴν παρατηρητικότητά μας, ἔχοντες ὡς ἐπίκεντρον τῆς προσοχῆς μας τὸ ἀντικείμενον.

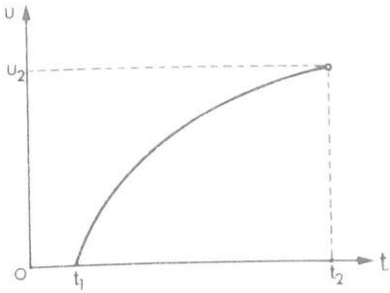
« Τὸ παιδὶ κρατεῖ τὸ ἀντικείμενον εἰς τὴν δεξιάν του χεῖρα, ἡ ὁποία εἶναι τεντωμένη καὶ ἀκίνητος. Δὲν βρέχει. Δὲν φυσᾷ. Βλέπομε τὸ παιδὶ νὰ χαλαρώνη βαθμηδὸν τοὺς μῦς τῶν δακτύλων του. Τὸ ἀντικείμενον ἀρχίζει νὰ ἀπελευθερώνεται. Αἰφνιδίως διακόπτεται ἡ ἐπαφὴ μεταξὺ δακτύλων καὶ ἀντικειμένου. Ἡ κίνησις ἔχει μόλις ἀρχίσει. Ἡ ταχύτης τοῦ σώματος ἀρχίζει νὰ αὐξάνεται. Ἡ πτῶσις του γίνεται κατακορύφως. Ἡ ταχύτης του ἐξακολουθεῖ νὰ αὐξάνεται. Μετὰ ἀπὸ ὀλίγον χρόνον ἀκούεται ἕνας δυνατὸς θόρυβος. Τὸ ἀντικείμενον ἔχει ἤδη προσκρούσει ἐπὶ τοῦ πεζοδρομίου. Ἡ κίνησίς του ἔχει τελειώσει ».

Ἡ πτῶσις τοῦ σώματος διήρκεσε ἐπὶ ἐλάχιστον χρόνον, δὲν κατέστη δὲ δυνατὸν νὰ τὴν κινηματογραφήσωμε, ὥστε νὰ μᾶς δοθῇ ἐκ τῶν ὑστέρων ἡ εὐκαιρία νὰ τὴν ἐπαναλάβωμε καὶ νὰ τὴν μελετήσωμε πλήρως.

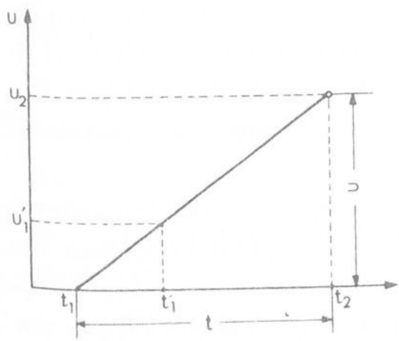
Εἴμεθα συνεπῶς δικαιολογημένοι διὰ τὰ σχετικῶς πτωχὰ συμπεράσματα εἰς τὰ ὁποῖα κατελήξαμε. Ἐν πάσῃ περιπτώσει, τὸ γεγονὸς εἶναι ἕνα: Ἡ κίνησις, τὴν ὁποίαν παρηκολουθήσαμε, πολὺ ἀπέχει ἀπὸ τοῦ νὰ θεωρηθῇ ὁμοιόμορφος. Καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς πτώσεως ἡ ταχύτης τοῦ σώματος ηὔξανε συνεχῶς, διαισθανόμεθα δὲ ὅτι θὰ ηὔξανε ἀκόμη περισσότερον, ἐὰν συνεχίζετο. Γεννᾶται ὅμως ἕνα ἐρώτημα: Κατὰ ποῖον τρόπον ηὔξανε ἡ ταχύτης τοῦ σώματος ἀπὸ τῆς χρονικῆς στιγμῆς t_1 κατὰ τὴν ὁποίαν ἤρχισε ἡ κίνησις, μέχρι τῆς χρονικῆς στιγμῆς t_2, κατὰ τὴν ὁποίαν προσέκρουσε τὸ σῶμα εἰς τὸ πεζοδρόμιον; (σχ. 4·3β). Ηὔξανε μὲ ταχὺν ρυθμὸν εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς κινήσεως καὶ βραδὺν εἰς τὸ τέλος της; (σχ. 4·3γ). Ηὔξανε ὁμοιομόρφως, δηλαδὴ μὲ σταθερὸν ρυθμὸν καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως; (σχ.



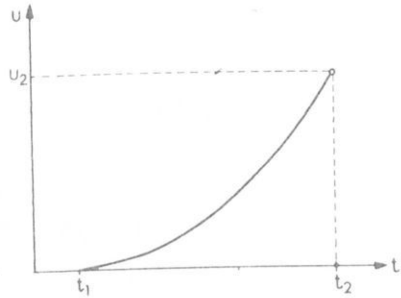
Σχ. 4·3β.



Σχ. 4·3γ.



Σχ. 4·3δ.



Σχ. 4·3ε.

4·3δ). Ἢ μήπως ηὔξανε μὲ βραδὺ ρυθμὸν εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς κινήσεως καὶ ταχὺν ρυθμὸν περὶ τὸ τέλος της; (σχ. 4·3ε). Ποῖον εἶναι μὲ ἄλλους λόγους τὸ διάγραμμα ταχύτητος-χρόνου, τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται εἰς τὴν ὑπὸ μελέτην κίνησιν;

Ἐπὶ τοῦ παρόντος θὰ ἀπαντήσωμε εἰς τὰ ἐρωτήματα αὐτὰ κατὰ τρόπον αὐθαίρετον, ἐπιφυλασσόμενοι νὰ δικαιολογήσωμε τὴν ἀπάντησιν ἐπαρκῶς εἰς τὸ βιβλίον τῆς Δυναμικῆς. Ἔχει ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ ταχύτης ἑνὸς σώματος, ποὺ πίπτει ἐλευθέρως, αὐξάνεται μὲ *σταθερὸν* ρυθμὸν καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεώς του. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ διάγραμμα ταχύτητος-χρόνου, ποὺ ἀναφέρεται εἰς μίαν κίνησιν τοῦ εἴδους αὐτοῦ, ἔχει τὴν ἰδίαν μορφὴν μὲ τὸ διάγραμμα, ποὺ παρίσταται εἰς τὸ σχῆμα 4·3 δ. Ἂν τώρα ἐπιχειρήσωμε μίαν σύγκρισιν μεταξὺ τοῦ σχήματος αὐτοῦ καὶ τῶν διαγραμμάτων, ποὺ ἀνεφέροντο εἰς τὴν ἐπίδοσιν τῶν μαθητῶν εἰς τὰ μαθηματικά, θὰ ἀντιληφθοῦμε ὅτι ὁμοιάζει ἀρκετὰ μὲ τὰ διαγράμματα τῶν σχημάτων 4·1 μ, 4·1 ν καὶ 4·1 ξ, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὴν ἐπίδοσιν τῶν μαθητῶν Ε, ΣΤ, καὶ Ζ. Εἰς τὴν παράγραφον 4·1 εἴχαμε χαρακτηρίσει τὴν ἐπίδοσιν τῶν μαθητῶν Ε, ΣΤ καὶ Ζ ὡς ὁμοιομόρφως ἀνιοῦσαν (βαθμιαία αὔξησις τῶν βαθμῶν των, σταθερὰ διὰ κάθε ἔτος σπουδῶν). Κατ' ἀντιστοιχίαν δυνάμεθα νὰ χαρακτηρίσωμε τὴν κίνησιν τοῦ ἀντικειμένου, τὸ ὁποῖον ἔρριψε τὸ παιδὶ εἰς τὸ πεζοδρόμιον, ὡς *ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνομένην* (βαθμιαία αὔξησις τῆς ταχύτητός του, σταθερὰ διὰ κάθε μονάδα χρόνου).

Διὰ τὴν ποσοτικὴν περιγραφὴν τῆς ἐπιδόσεως τοῦ μαθητοῦ Ε εἰς τὰ μαθηματικά, εἴχαμε δεχθῆ ὅτι πρέπει νὰ ὁρίσωμε δύο μεγέθη καί, συγκεκριμένως, τὸν βαθμὸν τὸν ὁποῖον ἔλαβε εἰς τὴν πρώτην ἐξέτασιν τῶν μαθηματικῶν καὶ τὴν σταθερὰν αὔξησιν τῶν βαθμῶν του διὰ κάθε χρόνον σπουδῶν. Ἀντιστοίχως, διὰ τὴν ποσοτικὴν περιγραφὴν τῆς ὑπὸ μελέτην κινήσεως, ἀπαιτεῖται νὰ καθορίσωμε δύο μεγέθη καὶ συγκεκριμένως:

α) Τὴν λεγομένην *ἀρχικὴν ταχύτητα*, δηλαδὴ τὴν ταχύτητα, τὴν ὁποίαν εἶχε τὸ σῶμα κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς μελέτης τῆς κινήσεως.

β) Τὴν σταθερὰν αὔξησιν τῆς ταχύτητος τοῦ σώματος διὰ κάθε μονάδα χρόνου (π.χ. διὰ κάθε δευτερόλεπτον).

Εἰς τὴν συγκεκριμένην αὐτὴν περίπτωσιν, τὴν ὁποίαν ἐξετάζομε, ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ σώματος εἶναι $\upsilon_1 = 0$, διότι ἡ μελέτη τῆς κινήσεως ὑποτίθεται ὅτι ἄρχισε τὴν χρονικὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ἀφέθη τὸ ἀντικείμενον ἐλεύθερον. Ἐὰν ὅμως ἀρχίζαμε τὴν μελέτην τῆς κινήσεως εἰς μίαν χρονικὴν στιγμὴν t'_1 (σχ. 4·3δ), εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης υ_1 δὲν θὰ ἔπρεπε νὰ ληφθῇ ἴση πρὸς 0, ἀλλὰ ἴση πρὸς υ'_1, δηλαδὴ ἴση πρὸς τὴν ταχύτητα τὴν ὁποίαν εἶχε τὸ σῶμα κατὰ τὴν στιγμὴν t'_1.

Ὅσον ἀφορᾷ τώρα εἰς τὴν αὔξησιν τῆς ταχύτητος διὰ κάθε μονάδα χρόνου, ποὺ παρέρχεται, γνωρίζομε ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ σώματος ηὐξήθη κατὰ $\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1 = \upsilon_2$ εἰς χρονικὸν διάστημα $t = t_2 - t_1$. (σχ. 4·3δ). Γνωρίζομε ὅμως ἀκόμη ὅτι ἡ αὔξησις τῆς ταχύτητος τοῦ σώματος ὑπῆρξε σταθερὰ διὰ κάθε δευτερόλεπτον κινήσεως. Ἡ παρατήρησις αὐτὴ μᾶς ἐπιτρέπει ἑπομένως νὰ συμπεράνωμε ὅτι ἡ ἀνὰ μονάδα χρόνου αὔξησις τῆς ταχύτητος τοῦ σώματος ὑπῆρξε ἴση πρὸς $\frac{\upsilon}{t}$. Ἔτσι, ἐὰν ἡ συνολικὴ αὔξησις τῆς ταχύτητος τοῦ σώματος υ ἐκφρασθῇ εἰς m/sec, ὁ δὲ χρόνος t, κατὰ τὸν ὁποῖον διήρκεσε ἡ κίνησις, εἰς sec, τὸ μέγεθος $\frac{\upsilon}{t}$ μᾶς φανερώνει πόσα m/sec ηὔξανε ἡ ταχύτης τοῦ ἀντικειμένου εἰς κάθε δευτερόλεπτον.

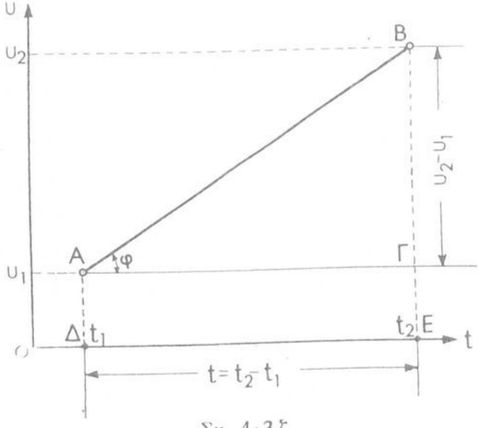
Εἶναι προφανὲς ὅτι, ὅσον μεγαλυτέραν τιμὴν ἔχει τὸ μέγεθος $\frac{\upsilon}{t}$, τόσον ταχύτερος εἶναι ὁ ρυθμὸς μὲ τὸν ὁποῖον αὐξάνεται ἡ ταχύτης τοῦ σώματος. Τὸ μέγεθος αὐτὸ μᾶς δίδει δηλαδὴ ἕνα μέτρον τοῦ πόσον γρήγορα αὐξάνεται ἡ ταχύτης ἑνὸς σώματος ἢ ἄλλως τοῦ πόσον ἐπιταχύνεται ἕνα σῶμα. Εἶναι συνεπῶς λογικὸν νὰ τὸ ὀνομάσωμε *ἐπιτάχυνσιν*.

Ἡ ἐπιτάχυνσις συμβολίζεται γενικῶς μὲ τὸ γράμμα γ. Ἔτσι, ἐὰν ἕνα σῶμα κινῆται κατὰ τέτοιον τρόπον, ὥστε ἡ ταχύτης του νὰ αὐξάνεται σταθερῶς κατὰ 3 m/sec εἰς κάθε δευτερόλεπτον, δυνάμεθα νὰ γράψωμε $\gamma = 3 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ ἀνὰ sec, ἢ συντομώτερον $\gamma = 3 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec} \cdot \mathrm{sec}} = 3 \dfrac{\mathrm{m}}{(\mathrm{sec})^2}$. Εἰδικώτερον, ὅταν ἀναφερώμεθα εἰς τὴν κίνησιν σωμάτων, τὰ ὁποῖα πίπτουν ἐλευθέρως λόγῳ τῆς ἕλξεως τῆς γῆς, συμβολίζομε τὴν ἐπιτάχυνσιν μὲ τὸ λατινικὸν γράμμα g καὶ τὴν ὀνομάζομε *ἐπιτάχυνσιν βαρύτητος*. Ἀπεδείχθη ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν $g = 9{,}81 \ \mathrm{m/(sec)^2}$ δι' ὅλα τὰ σώματα, ἀνεξαρτήτως τοῦ ὄγκου των, τῶν διαστάσεών των ἢ τοῦ εἰδικοῦ των βάρους.

2. Μελέτη μιᾶς ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνομένης κινήσεως.

Εἰς τὴν παράγραφον 4 · 3 (1) εἴπαμε ὅτι διὰ τὴν περιγραφὴν μιᾶς ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνομένης κινήσεως ἀρκεῖ ὁ καθορισμὸς δύο μόνον μεγεθῶν, συγκεκριμένως τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος τοῦ σώματος υ_1 καὶ τῆς σταθερᾶς του ἐπιταχύνσεως γ. Ὁ ἰσχυρισμὸς αὐτός, παρ' ὅλον ὅτι ἐβασίσθη ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον εἰς τὴν ἀνάλογον περίπτωσιν τῆς ἐπιδόσεως τῶν μαθητῶν Ε, ΣΤ καὶ Ζ εἰς τὰ μαθηματικά, δὲν παύει νὰ εἶναι κατ' οὐσίαν αὐθαίρετος. Θὰ πρέπει συνεπῶς κατὰ κάποιον τρόπον νὰ τὸν ὑποστηρίξωμε. Διὰ τὸν σκοπὸν αὐτὸν θὰ θεωρήσωμε ὅτι ἕνα σῶμα κινεῖται μὲ ἐπιτάχυνσιν γ, γνωστὴν καὶ σταθεράν, καὶ θὰ ὑποθέσωμε ὅτι ἡ ταχύτης του υ_1 κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_1 (ἀρχὴ μελέτης τῆς κινήσεως) εἶναι ἐπίσης γνωστή. Θὰ ἀποδείξωμε δὲ ὅτι μὲ βάσιν τὰ μεγέθη αὐτὰ εἶναι δυνατὸν νὰ προβλέψωμε, τόσον τὴν ταχύτητα υ_2, μὲ τὴν ὁποίαν θὰ κινῆται τὸ σῶμα εἰς μίαν οἱανδήποτε χρονικὴν στιγμὴν t_2, ὅσον καὶ τὸ διάστημα s, ποὺ θὰ διανύσῃ αὐτὸ κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα $t = t_2 - t_1$.

Τὸ διάγραμμα ταχύτητος-χρόνου τῆς ὑπὸ μελέτην κινήσεως παρίσταται εἰς τὸ σχῆμα 4 · 3 ζ. Κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_1 (ἀρχὴ μελέτης τῆς κινήσεως) τὸ σῶμα κινεῖται μὲ ταχύτα υ_1 ἴσην πρὸς τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος (ΑΔ). Μετὰ πάροδον χρόνου t, δηλαδὴ κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_2 (τέλος μελέτης τῆς κινήσεως) τὸ σῶμα ἀποκτᾶ ταχύτητα υ_2 ἴσην πρὸς τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος (ΒΕ). Ἡ διαφορὰ $\upsilon_2 - \upsilon_1 = (\text{ΒΕ}) - (\text{ΑΔ}) = (\text{ΒΕ}) - (\text{ΓΕ}) = (\text{ΒΓ})$ παριστάνει προφανῶς τὸ *πόσο* ηὐξήθη ἡ ταχύτης τοῦ σώματος κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα t. Τὸ πηλίκον λοιπὸν $\frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t}$ δίδει τὴν αὔξησιν τῆς ταχύτητος τοῦ σώματος εἰς κάθε μονάδα χρόνου, δηλαδή, συμφώνως πρὸς ὅσα εἴπαμε εἰς τὴν παράγραφον 4·3 (1), τὴν ἐπιτάχυνσιν γ, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ σῶμα.



Σχ. 4·3ζ.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν $\gamma = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t}$ συνάγομε τότε εὐκόλως τήν:

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 + \gamma t \qquad (1)$$

ἡ ὁποία μᾶς δίδει τὴν ταχύτητα υ_2 μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ σῶμα κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_2.

Προτοῦ προχωρήσωμε εἰς τὴν εὕρεσιν ἑνὸς τύπου, ὁ ὁποῖος νὰ μᾶς ἐπιτρέπῃ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ διαστήματος s, ποὺ θὰ διανύσῃ τὸ σῶμα κατὰ τὸν χρόνον $t = t_2 - t_1$, ἀξίζει τὸν κόπον νὰ κάνωμε μίαν ἐνδιαφέρουσαν παρατήρησιν: Ἡ ἐπιτάχυνσις γ τοῦ σώματος δίδεται εἰς τὸ διάγραμμα ταχύτητος - χρόνου τῆς κινήσεως ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας φ, δηλαδὴ ἀπὸ τὴν κλίσιν τῆς εὐθείας ΑΒ, διότι πράγματι $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{(\mathrm{B\Gamma})}{(\mathrm{A\Gamma})} = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t}$. Ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι λοιπὸν ἡ ἐπιτάχυνσις, τόσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ κλίσις τῆς εὐθείας ΑΒ (σχ. 4·3 ζ) καὶ συνεπῶς τόσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ αὔξησις τῆς ταχύτητος τοῦ σώματος ἐντὸς δεδομένου χρόνου t. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐπαληθεύεται καὶ γραφικῶς τὸ ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις ἀποτελεῖ πράγματι ἕνα μέτρον τοῦ πόσον γρήγορα αὐξάνεται ἡ ταχύτης τοῦ κινουμένου σώματος.

Ἂς συμβολίσωμε τώρα διὰ τοῦ υ_μ τὴν μέσην ταχύτητα τοῦ σώματος κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα t. Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμόν, τὸν ὁποῖον ἐδώσαμε εἰς τὴν παράγραφον 4·2(2) διὰ τὴν μέσην ταχύτητα, συμπεραίνομε ὅτι τὸ διάστημα s, ποὺ θὰ διανύσῃ τὸ σῶμα κατὰ τὸν χρόνον t, θὰ εἶναι ἴσον πρὸς $\upsilon_\mu \cdot t$. Ἀποδεικνύεται ὅμως ὅτι, ὅταν ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος εἶναι καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως σταθερά, ἡ μέση ταχύτης υ_μ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος υ_1 καὶ τῆς τελικῆς ταχύτητος υ_2, δηλαδὴ ἴση πρὸς $\upsilon_\mu = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{t}$.

Πράγματι ἡ μέση ταχύτης ὁρίζεται ὡς ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῆς ταχύτητος τοῦ σώματος εἰς διαφόρους χρονικὰς στιγμὰς (σχ. 4·3 η).

Δηλαδή:

$$\upsilon_\mu = \frac{1}{\nu+1}\,[\,\upsilon_1 + (\upsilon_1 + \gamma\cdot\Delta t) + (\upsilon_1 + \gamma\cdot 2\Delta t) + \ldots + (\upsilon_1 + \gamma\cdot\nu\Delta t)\,] \;\; \text{ἢ}$$

$$\upsilon_\mu = \frac{1}{\nu+1}\,[\,(\nu+1)\,\upsilon_1 + \gamma\cdot\Delta t\,(1 + 2 + \ldots + \nu)\,] \;\; \text{ἢ}$$

$$\upsilon_\mu = \frac{1}{\nu+1}[\,(\nu+1)\,\upsilon_1 + \gamma\cdot\Delta t\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2}\,] \;\; \text{ἢ}$$

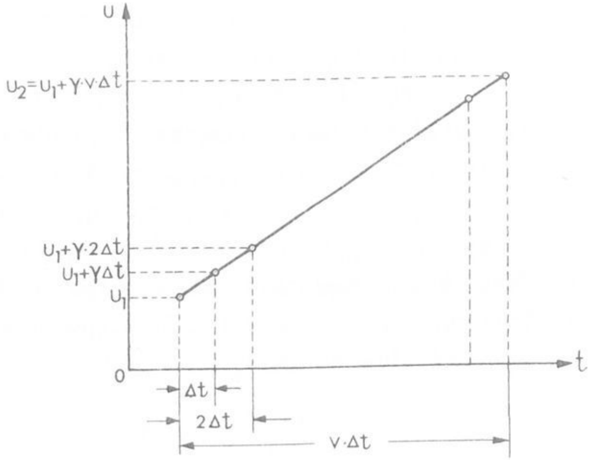
$$\upsilon_\mu = \upsilon_1 + \frac{1}{2}\,\gamma\cdot(\nu\,\Delta t) = \upsilon_1 + \frac{1}{2}\,\gamma t = \frac{2\upsilon_1 + \gamma t}{2}.$$

Ἀλλὰ $\upsilon_1 + \gamma t = \upsilon_2$, ἐπομένως $\upsilon_\mu = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2}$.

Ἔτσι θὰ ἔχωμε $s = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2}\cdot t = \frac{\upsilon_1 + (\upsilon_1 + \gamma t)}{2}\cdot t$ ἢ

$$\text{τέλος}\quad s = \upsilon_1\cdot t + \frac{1}{2}\,\gamma t^2. \qquad (2)$$

Ὁ τύπος, τὸν ὁποῖον μόλις τώρα προσδιωρίσαμε, μᾶς δίδει τὴν εὐκαιρίαν νὰ κάνωμε μίαν ἐξαιρετικῆς σημασίας παρατήρησιν, ἡ ὁποία ἔχει γενικὴν ἰσχὺν καὶ μᾶς βοηθεῖ, ὅπως θὰ ἴδοῦμε, πάρα πολὺ εἰς τὴν μελέτην προβλημάτων κινήσεως.



Σχ. 4·3 η.

Ὁ ὅρος $\upsilon_1 t$ παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΓΕΔ, διότι $\upsilon_1 = (\text{ΑΔ})$ καὶ $t = (\text{ΔΕ})$, ὁ δὲ ὅρος $\frac{1}{2}\,\gamma t^2$ παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, διότι πράγματι $(\text{ΑΓ}) = t$ καὶ $(\text{ΒΓ}) = \upsilon_2 - \upsilon_1 = \gamma t$, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (1). Τὸ διάστημα s συνεπῶς, τὸ ὁποῖον διανύει τὸ σῶμα εἰς χρόνον t, δύναται νὰ προσδιορισθῇ καὶ γραφικῶς ὡς τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ ἄξονος τῶν χρόνων, τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τῶν δύο τεταγμένων ΑΔ καὶ ΒΕ. Ἡ παρατήρησις αὐτὴ μᾶς ἐξυπηρετεῖ πάρα πολὺ κατὰ τὴν μελέτην κινήσεων, εἰς τὰς ὁποίας ἡ ταχύτης τοῦ σώματος μεταβάλλεται κατὰ πολύπλοκον τρόπον ἀπὸ τὴν μίαν χρονικὴν στιγμὴν εἰς τὴν ἄλλην.

3. *Μελέτη μιᾶς ὁμοιομόρφως ἐπιβραδυνομένης κινήσεως.*

Ὑπάρχουν καὶ περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας ἡ ταχύτης τοῦ κινουμένου σώματος παρουσιάζει μίαν βαθμιαίαν καὶ σταθερὰν μείωσιν τῆς τιμῆς της. (Χαρακτηριστικὸν παράδειγμα ἀποτελεῖ ἡ κίνησις ποὺ ἐκτελεῖ μία πέτρα, τὴν ὁποίαν ρίπτομε κατακορύφως πρὸς τὰ ἐπάνω). Ἡ κίνησις αὐτὴ χαρακτηρίζεται ὡς *ὁμοιομόρφως ἐπιβραδυνομένη*. Ἡ σταθερὰ μείωσις τῆς ταχύτητος τοῦ σώματος εἰς κάθε μονάδα χρόνου ὀνομάζεται *ἐπιβράδυνσις*, συμβολίζεται δὲ ἐπίσης μὲ τὸ ἑλληνικὸν γράμμα γ καὶ ἀποτελεῖ ἕνα μέτρον τοῦ πόσον γρήγορα ἐλαττώνεται ἡ ταχύτης τοῦ σώματος. Τὸ διάγραμμα ταχύτητος - χρόνου, τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται εἰς μίαν κίνησιν τοῦ εἴδους αὐτοῦ, παρίσταται εἰς τὸ σχῆμα 4·3 θ, οἱ δὲ τύποι ποὺ δίδουν τὴν ταχύτητα υ_2 καὶ τὸ διάστημα, ποὺ διανύει τὸ σῶμα εἰς χρόνον t, εἶναι ἀντιστοίχως:

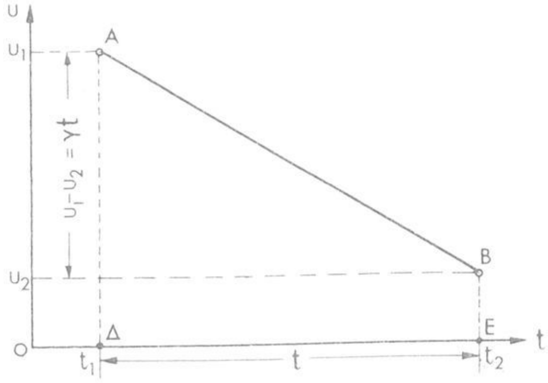
$$\upsilon_2 = \upsilon_1 - \gamma \cdot t \qquad (3)$$

καὶ

$$s = \upsilon_1 \cdot t - \frac{1}{2} \gamma t^2. \qquad (4)$$

Ἀξίζει τὸν κόπον νὰ ὑπογραμμίσωμε καὶ πάλιν ὅτι τὸ διάστημα s, ποὺ διανύει τὸ σῶμα εἰς χρόνον t, δύναται ἐπίσης νὰ προσδιορισθῇ γραφικῶς ὡς τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ ἄξονος τῶν χρόνων, τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τῶν δύο τεταγμένων ΑΔ καὶ ΒΕ.

Ὅταν μελετοῦμε κινήσεις ὁμοιομόρφως ἐπιβραδυνομένας, μᾶς ἐνδιαφέρει συνήθως ἡ εὕρεσις τοῦ διαστήματος s, ποὺ θὰ διανύση



Σχ. 4·3 θ.

τὸ σῶμα μέχρις ὅτου σταματήση τελείως. Ἐὰν θέσωμε εἰς τὸν τύπον (3) $υ_2 = 0$, εὑρίσκομε:

$$t = \frac{υ_1}{γ}, \qquad (5)$$

ὁπότε ὁ τύπος (4) ἠμπορεῖ νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$s = υ_1 \cdot \frac{υ_1}{γ} - \frac{1}{2}\, γ \cdot \frac{υ_1^2}{γ^2}$$

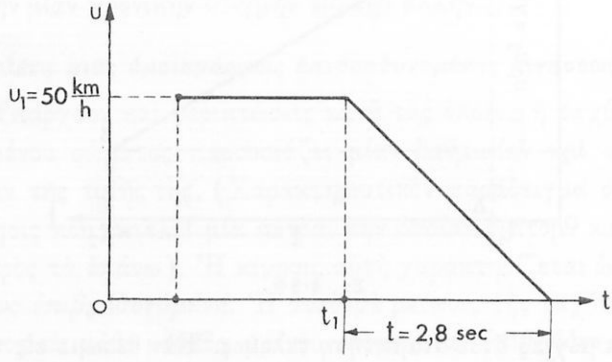
$$ἢ\ s = \frac{1}{2} \cdot \frac{υ_1^2}{γ}. \qquad (6)$$

Ἔτσι, ἐὰν ἕνα αὐτοκίνητον κινῆται ὁμοιομόρφως μὲ ταχύτητα $υ_1 = 50\ \frac{km}{h}$ καὶ αἰφνιδίως παρουσιασθῇ κάποιο ἐμπόδιον, ὁ ὁδηγός του θὰ ἀναγκασθῇ νὰ πατήση ἐσπευσμένως τὸ ποδόφρενον, κατὰ τὴν χρονικὴν π.χ. στιγμὴν t_1 (σχ. 4·3 ι). Αὐτὸ θὰ ἔχη ὡς ἀποτέλεσμα νὰ προσδοθῇ εἰς τὸ αὐτοκίνητον σταθερὰ ἔστω ἐπιβράδυνσις ἴση πρὸς π.χ. $5\ m/sec^2$.

Ἂν χρησιμοποιήσωμε τὸν τύπον (5), εὑρίσκομε ὅτι τὸ αὐτοκίνητον θὰ σταματήσῃ μετὰ χρόνον:

$$t = \frac{\upsilon_1}{\gamma} = \frac{50}{5} \cdot \frac{\text{km/h}}{\text{m/sec}^2} = 10 \cdot \frac{\text{km} \cdot (\text{sec})^2}{\text{m} \cdot \text{h}}$$

$$= 10 \cdot \frac{1\,000\,\text{m} \cdot (\text{sec})^2}{\text{m} \cdot 3\,600\,\text{sec}} = 2{,}8 \text{ sec},$$



Σχ. 4·3 ι.

ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα $s = \frac{1}{2} \cdot \frac{\upsilon^2_1}{\gamma} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(50)^2 \frac{(\text{km})^2}{\text{h}^2}}{5 \frac{\text{m}}{(\text{sec})^2}} =$

$$= \frac{2\,500}{10} \cdot \frac{(\text{km})^2 \cdot (\text{sec})^2}{\text{h}^2 \cdot \text{m}} = 250 \cdot \frac{(1\,000\,\text{m})^2 \cdot (\text{sec})^2}{(3600\ \text{sec})^2 \cdot \text{m}} =$$

$$= 250 \cdot \frac{1\,000\,000\ \text{m}^2 \cdot (\text{sec})^2}{36 \times 36 \times 10\ 000\ (\text{sec})^2\text{m}} = \frac{25\,000}{36 \times 36}\text{m} \simeq 19{,}3\text{m}.$$

4. *Κίνησις μὴ ὁμοιομόρφως μεταβαλλομένη.*

Μέση ἐπιτάχυνσις.

Κατὰ καιροὺς πληροφορούμεθα ἀπὸ τὰς ἐφημερίδας καὶ τὰ περιοδικὰ ὅτι κατεσκευάσθη καὶ εἰσήχθη εἰς τὸ ἐμπόριον ἕνας νέος τύπος αὐτοκινήτου. Παραλλήλως πρὸς τὰ τεχνικὰ χαρακτηριστικὰ καὶ τὰ περιγραφικὰ στοιχεῖα, ὅπως π.χ. αἱ διαστάσεις, τὸ σχῆμα κλπ. τοῦ νέου αὐτοκινήτου, δίδονται συνήθως εἰς τὴν σχετικὴν στήλην τῆς ἐφημερίδος ἢ τοῦ περιοδικοῦ καὶ στοιχεῖα ἀναφερόμενα εἰς τὴν ἐπιτάχυνσιν, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ ἐπιτύχῃ τὸ αὐτοκίνητον κατὰ τὴν ἐκκίνησιν. Χαρακτηριστικὸς τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον δίδονται τὰ τελευταῖα αὐτὰ στοιχεῖα εἶναι ὁ ἑξῆς:

«Ἐπιτάχυνσις ἀπὸ 0 ἕως 100 km/h: 20 sec» ἢ ἀναλυτικώτερον:

Χρόνος ἀπαιτούμενος διὰ νὰ ἀποκτήσῃ τὸ αὐτοκίνητον ταχύτητα 20 km/h, ἐὰν ἐκκινήσῃ ἐκ τῆς ἠρεμίας: 1,6 sec.

Χρόνος ἀπαιτούμενος διὰ νὰ ἀποκτήσῃ ταχύτητα 40 km/h: 4,0 sec.

Χρόνος ἀπαιτούμενος διὰ νὰ ἀποκτήσῃ ταχύτητα 60 km/h: 7,2 sec.

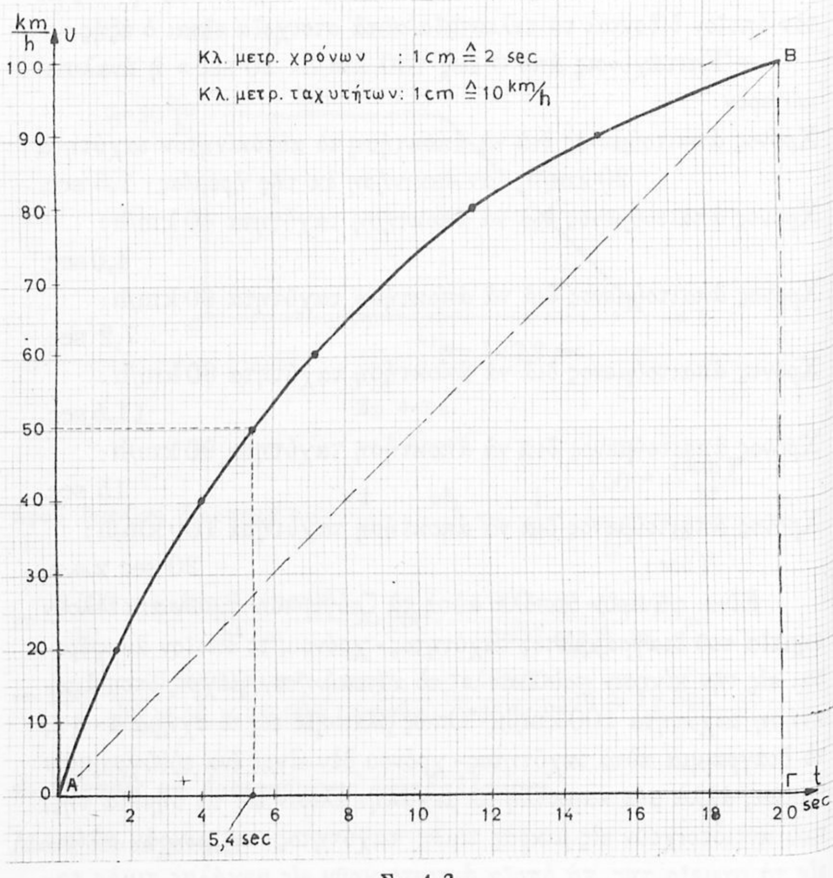
Χρόνος ἀπαιτούμενος διὰ νὰ ἀποκτήσῃ ταχύτητα 80 km/h: 11,5 sec.

Χρόνος ἀπαιτούμενος διὰ νὰ ἀποκτήσῃ ταχύτητα 90 km/h: 15 sec.

Χρόνος ἀπαιτούμενος διὰ νὰ ἀποκτήσῃ ταχύτητα 100 km/h: 20 sec κ.ο.κ.

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὅλα αὐτὰ τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν ἀποτελοῦν σημεῖα τοῦ διαγράμματος ταχύτητος - χρόνου, τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται εἰς τὴν κίνησιν ποὺ ἐκτελεῖ τὸ αὐτοκίνητον, μέχρις ὅτου ἀποκτήσῃ ταχύτητα 100 km/h. Ὅπως βλέπομε εἰς τὸ σχῆμα 4·3 κ, τὸ διάγραμμα αὐτὸ ταχύτητος - χρόνου δὲν εἶναι ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα, ἀλλὰ μία καμπύλη μὲ μεγάλην κλίσιν εἰς τὰ σημεῖα της, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς μικρὰς τιμὰς ταχύτητος καὶ μικρὰν κλίσιν εἰς τὰ σημεῖα της, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς μεγάλας τιμὰς ταχύτητος. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ ἐπιτύχῃ τὸ αὐτοκίνητον, εἶναι μεγαλυτέρα εἰς τὰς μικρὰς ταχύτητας ἀπὸ ὅ,τι εἰς τὰς μεγάλας. Ἡ κίνησις εἶναι δηλαδὴ ἀναμφισβητήτως μὲν ἐπιταχυνομένη, ἀλλὰ ὄχι ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνομένη. Ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ αὐτοκινήτου λαμβάνει τιμὰς ἀπό:

$\dfrac{(100-80)\ \mathrm{km/h}}{(20-11{,}5)\ \mathrm{sec}} = \dfrac{20\ \mathrm{km/h}}{8{,}5\ \mathrm{sec}} = 2{,}35\ \dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}/\mathrm{sec}$ (αὔξησις ταχύ-



Σχ. 4·3 κ.

τητος κατὰ 2,35 χιλιόμετρα τὴν ὥραν διὰ κάθε δευτερόλεπτον κινήσεως) μέχρι $\dfrac{(20-0)\dfrac{\text{km}}{\text{h}}}{1{,}6\,\text{sec}} = 12{,}5\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}/\text{sec}$ (αὔξησις ταχύτητος κατὰ 12,5 χιλιόμετρα τὴν ὥραν διὰ κάθε δευτερόλεπτον κινήσεως). Γεννᾶται λοιπὸν τὸ ἐρώτημα: Ποία ἀπὸ ὅλας αὐτὰς τὰς τιμὰς ἐπιταχύνσεως πρέπει νὰ ληφθῇ ὡς ἀντιπροσωπευτικὴ τοῦ ἐν λόγῳ αὐτοκινήτου;

Τὸ σημεῖον αὐτὸ ἔχει πολὺ συζητηθῆ. Σήμερον ἔχει θεσπισθῆ διεθνῶς ὡς προσδιοριστικὴ τοῦ εἴδους αὐτοῦ τιμή, ἡ *μέση ἐπιτάχυνσις* τοῦ αὐτοκινήτου εἰς τὴν περιοχὴν ταχυτήτων ἀπὸ 0 ἕως 100 km/h. Εἰς τὸ παράδειγμα, τὸ ὁποῖον ἐξετάζομε, ἡ μέση ἐπιτάχυνσις τοῦ αὐτοκινήτου εἶναι ἐκείνη μὲ τὴν ὁποίαν θὰ ἔπρεπε νὰ κινηθῇ τὸ αὐτοκίνητον διὰ νὰ ἀποκτήσῃ ταχύτητα $\upsilon_2 = 100$ χιλιομέτρων τὴν ὥραν εἰς χρόνον $t = 20$ δευτερολέπτων. Ὑπὸ μίαν προϋπόθεσιν ὅμως: ὅτι τὸ αὐτοκίνητον θὰ ἐκκινοῦσε ἀπὸ τὴν θέσιν ἠρεμίας (ἀρχικὴ ταχύτης $\upsilon_1 = 0$) καὶ θὰ ἐκινεῖτο πλέον ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνόμενον. Εἶναι δηλαδὴ ἡ ἐπιτάχυνσις:

$$\gamma = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t} = \frac{\upsilon_2}{t} = \frac{100\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}}{20\,\text{sec}} = 5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}/\text{sec}.$$

Ἔτσι, ἐὰν ἡ μέση ἐπιτάχυνσις ἑνὸς αὐτοκινήτου δοθῇ π.χ. ἴση πρὸς $\gamma = 5\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}/\text{sec}$, αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου αὐξάνεται κατὰ $5\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ διὰ κάθε δευτερόλεπτον κινήσεως, δηλαδὴ ὅτι τὸ αὐτοκίνητον θὰ χρειασθῇ χρόνον:

$$t = \frac{\upsilon_2}{\gamma} = \frac{100\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}}{5\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}/\text{sec}} = 20\,\text{sec}$$

διὰ νὰ ἀποκτήσῃ ταχύτητα $100\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$, ἐὰν βεβαίως ἐκκινήσῃ ἀπὸ θέσιν ἠρεμίας. Ἀντιθέτως, ἐὰν ἡ μέση ἐπιτάχυνσις ἑνὸς ἄλλου αὐτοκινήτου δοθῇ π.χ. ἴση πρὸς $\gamma = 8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}/\text{sec}$, αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ δεύτερον αὐτοκίνητον θὰ χρειασθῇ χρόνον:

$$t' = \frac{\upsilon_2}{\gamma'} = \frac{100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}/\text{sec}} = 12{,}5 \text{ sec}$$

διὰ νὰ ἀποκτήσῃ ταχύτητα $100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ἐὰν βεβαίως ἐκκινήσῃ ἐπίσης ἀπὸ θέσιν ἠρεμίας.

Τὸ μέγεθος ὅμως τῆς μέσης ἐπιταχύνσεως, ὅπως τὸ ὡρίσαμε, δὲν εἶναι συνήθως κατανοητὸν ἀπὸ τοὺς πολλούς. Ὡς ἐκ τούτου, εἰς τὴν καθημερινὴν ζωὴν λαμβάνομε συχνὰ ὡς μέτρον τῆς ἐπιταχύνσεως ἑνὸς αὐτοκινήτου ὄχι τὴν αὔξησιν τῆς ταχύτητός του διὰ κάθε δευτερόλεπτον κινήσεως, ἀλλὰ τὸν χρόνον, ποὺ ἀπαιτεῖται, διὰ νὰ ἀποκτήσῃ τὸ αὐτοκίνητον ταχύτητα $100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ἐὰν ἐκκινήσῃ ἐκ τῆς ἠρεμίας.

Λέγομε π.χ. ὅτι «ἡ ἐπιτάχυνσις ἑνὸς αὐτοκινήτου ἀπὸ τὴν ταχύτητα 0 ἕως τὴν ταχύτητα τῶν $100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ εἶναι ἴση πρὸς 20 sec» (ὅπως ἄλλως τε ἀνεφέραμε καὶ εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτῆς τῆς παραγράφου), πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι βεβαίως θεωρητικῶς ὀρθόν, συμφώνως τουλάχιστον πρὸς τὸν ὁρισμὸν τὸν ὁποῖον ἐδώσαμε διὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν. Ἀντιθέτως, εἶναι ὀρθὸν θεωρητικῶς, ἐὰν λεχθῇ π.χ. ὅτι τὸ τάδε αὐτοκίνητον ἀγώνων ποὺ «πιάνει τὰ 100» εἰς χρόνον 6,2 sec ἔχει μεγάλην ἐπιτάχυνσιν ἢ ὅτι ἔχει μεγαλυτέραν ἐπιτάχυνσιν ἀπὸ ἕνα ἄλλο αὐτοκίνητον ποὺ «πιάνει τὰ 100» εἰς χρόνον 11,4 sec.

Μελέτη διαστημάτων.

Ἕνα ἐνδιαφέρον ἐρώτημα, εἰς τὸ ὁποῖον καλούμεθα νὰ δώσωμε ἀπάντησιν, εἶναι καὶ τὸ ἑξῆς: Πόσον διάστημα θὰ διανύσῃ τὸ αὐτοκίνητον, τοῦ ὁποίου τὴν ἐκκίνησιν ἐμελετήσαμε μόλις πρὸ ὀλίγου, μέχρις ὅτου ἀποκτήσῃ τὴν ταχύτητα τῶν 100 km/h;

Μία πρώτη σκέψις θὰ ἦτο νὰ χρησιμοποιήσωμε τὸν τύπον (2), ποὺ ἰσχύει προκειμένου περὶ ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνομένης κινήσεως, εἰς τὸν ὁποῖον νὰ θέσωμε $\upsilon_1 = 0$, $t = 20$ sec καὶ $\gamma = 5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}/\text{sec}$. Γνωρίζομε ὅμως ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ αὐτοκινήτου εἶναι μεγαλυτέρα εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς κινήσεώς του ἀπὸ ὅ,τι περὶ τὸ τέλος της. Ἑπομένως, τὸ αὐτοκίνητον θὰ φθάσῃ συντόμως τὴν ταχύτητα τῶν $50\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ὅπως δὲ βλέπομε εἰς τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 4·3κ, μόνον ἐπὶ χρόνον 5,4 sec θὰ κινῆται μὲ ταχύτητα μικροτέραν τῶν 50 km/h, ἐνῶ ἐπὶ χρόνον (20 — 5,4) sec = 14,6 sec θὰ κινῆται μὲ ταχύτητα σημαντικῶς μεγαλυτέραν τῆς ταχύτητος τῶν 50 km/h.

Ἔτσι, ἡ μέση ταχύτης του υ_μ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τιμῆς $\frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2} = 50$ km/h καὶ ἑπομένως, ὁ τύπος $s = \frac{1}{2}\gamma t^2$ θὰ μᾶς δώσῃ ὡς ἀποτέλεσμα διάστημα μικρότερον ἀπὸ αὐτό, ποὺ εἰς τὴν πραγματικότητα θὰ ἔχῃ διανυθῆ. Πράγματι, τὸ διάστημα $\frac{1}{2}\gamma t^2$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐνῶ τὸ πραγματικὸν διάστημα, ποὺ θὰ διανύσῃ τὸ αὐτοκίνητον, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ ἄξονος τῶν χρόνων, τῆς τεταγμένης ΒΓ καὶ τῆς καμπύλης ΑΒ [βλ. «παρατήρησιν» εἰς τὸ τέλος τῆς παραγράφου 4·3(2)]. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον καταλήγομε εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ ἀρχική μας σκέψις νὰ χρησιμοποιήσωμε μόνον τὸν τύπον $s = \frac{1}{2}\gamma t^2$ δὲν εἶναι ὀρθή. Τουναντίον, διὰ νὰ ὑπολογίσωμε τὸ πραγματικὸν διάστημα, τὸ ὁποῖον θὰ διανύσῃ τὸ αὐτοκίνητον μέχρις ὅτου ἀναπτύξῃ ταχύτητα 100 km/h, θὰ πρέπει νὰ προσθέσωμε εἰς τὸ διάστημα

$s = \frac{1}{2}\gamma t^2$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς εὐθείας AB καὶ τῆς καμπύλης AB.

Ἀπὸ τὸ σχῆμα 4·3 κ προσδιορίζομε τὸ ἐμβαδὸν αὐτὸ ἴσον πρὸς 1 640 mm² (κάθε τετραγωνίδιον ἔχει ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγωνικοῦ χιλιοστομέτρου). Εἴμεθα ἀναγκασμένοι ὅμως τώρα νὰ ἐκφράσωμε τὸ εὑρεθὲν ἐμβαδὸν εἰς μονάδας μήκους. Διὰ νὰ τὸ ἐπιτύχωμε αὐτὸ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Αἱ πλευραὶ κάθε τετραγωνιδίου, ποὺ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χρόνων, παριστάνουν, συμφώνως πρὸς τὴν κλίμακα τοῦ σχεδίου, μίαν τιμὴν χρόνου. Βάσει τῆς κλίμακος τοῦ σχήματος 4·3 κ, 1 mm $\triangleq$ 0,2 sec. Ἀντιστοίχως, αἱ πλευραὶ κάθε τετραγωνιδίου, ποὺ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα τῶν ταχυτήτων, παριστάνουν μίαν τιμὴν ταχύτητος, ἡ ὁποία εἰς τὸ παράδειγμά μας, καὶ πάντοτε μὲ βάσιν τὴν κλίμακα τοῦ σχεδίου, εἶναι 1 mm $\triangleq$ 1 km/h. Τὸ ἐμβαδὸν κάθε τετραγωνιδίου ἰσοδυναμεῖ συνεπῶς πρὸς διάστημα:

$$0{,}2\ \mathrm{sec} \cdot 1\ \mathrm{km/h} = 0{,}2\,\frac{\mathrm{km}\cdot\mathrm{sec}}{\mathrm{h}} = 0{,}2\,\frac{1000\mathrm{m}\cdot\mathrm{sec}}{3.600\ \mathrm{sec}} = \frac{1}{18}\ \mathrm{m}.$$

Ἑπομένως, τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας, ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς εὐθείας AB καὶ τῆς καμπύλης AB, ἰσοδυναμεῖ πρὸς διάστημα:

$$1\,640\ \frac{1}{18}\ \mathrm{m} = 91\ \mathrm{m}.$$

Ἔτσι, τὸ πραγματικὸν διάστημα, ποὺ θὰ διανύσῃ τὸ αὐτοκίνητον μέχρις ὅτου ἀποκτήσῃ τὴν ταχύτητα τῶν 100 km/h, εἶναι ἴσον πρός:

$$s' = \frac{1}{2}\ \gamma\cdot t^2 + 91\mathrm{m} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 20^2\cdot\frac{\mathrm{km}\cdot\mathrm{sec}^2}{\mathrm{h}\cdot\mathrm{sec}} + 91\mathrm{m} =$$

$$100\cdot\frac{1\,000\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{sec}}{3\,600\ \mathrm{sec}} + 91\mathrm{m}$$

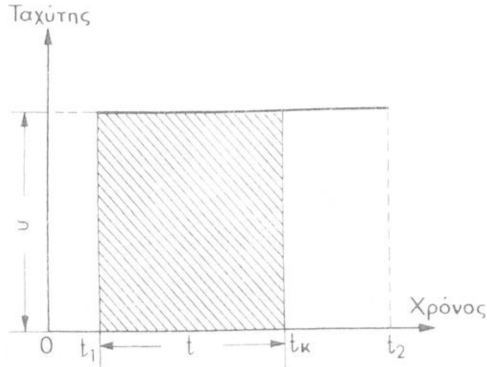
$$s' = 278\ \mathrm{m} + 91\ \mathrm{m} = 370\ \mathrm{m}.$$

Ἡ γραφικὴ αὐτὴ μέθοδος προσδιορισμοῦ τοῦ διαστήματος, τὸ ὁποῖον διανύει ἕνα σῶμα ἐντὸς δεδομένου χρόνου, ὅταν γνωρίζωμε τὸν νόμον μεταβολῆς τῆς ταχύτητός του κατὰ τὸ χρονικὸν αὐτὸ διάστημα, ἔχει γενικὴν ἐφαρμογὴν καὶ χρησιμοποιεῖται εὐρύτατα, ὅταν ἡ κίνησις μὲ τὴν ὁποίαν ἀσχολούμεθα εἶναι σχετικῶς πολύπλοκος. Ἀπαιτεῖται ὅμως πάρα πολὺ μεγάλη προσοχὴ κατὰ τὴν μετατροπὴν εἰς μονάδας μήκους τοῦ ἐμβαδοῦ, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ τὴν ἐμβαδομέτρησιν καὶ τὸ ὁποῖον ἐκφράζεται εἰς τετραγωνικὰ ἑκατοστόμετρα ἢ τετραγωνικὰ χιλιοστόμετρα.

4·4 Τὸ διάγραμμα διαστήματος — χρόνου (s — t) ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὸ διάγραμμα ταχύτητος — χρόνου (υ — t).

1. *Εἰσαγωγικαὶ σκέψις.*

Εἰς τὸ σχῆμα 4·4 α ἐμφαίνεται τὸ διάγραμμα ταχύτητος - χρόνου, ποὺ ἀναφέρεται εἰς μίαν ὁμοιόμορφον κίνησιν. Ἀπὸ τὸ διάγραμμα αὐτὸ συμπεραίνομε τὰ ἑξῆς:



Σχ. 4·4 α.

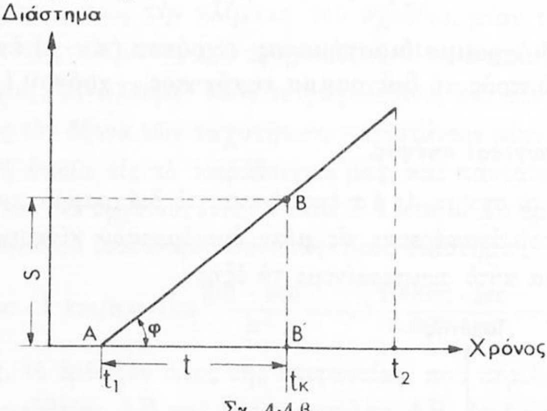
α) Τὸ σῶμα ἐκινήθη ἀπὸ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_1 ἕως τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_2.

β) Κατὰ τὴν τυχοῦσαν χρονικὴν στιγμὴν t_κ εἶχε ταχύτητα ἴσην πρὸς υ.

γ) Κατὰ τὸν χρόνον $t = t_\kappa - t_1$ διήνυσε διάστημα ἴσον πρὸς $\upsilon \cdot t$, δηλαδὴ ἴσον πρὸς τὸ διαγραμμισμένον ἐμβαδόν.

Εἰς τὸ σχῆμα 4·4 β ἐμφαίνεται τὸ διάγραμμα διαστήματος - χρόνου, ποὺ ἀναφέρεται εἰς ἕνα σῶμα, τὸ ὁποῖον κινεῖται ὁμοιομόρφως. Ἀπὸ τὸ διάγραμμα αὐτὸ συνάγομε τὰ ἑξῆς:

α) Τὸ σῶμα ἐκινήθη ἀπὸ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_1 μέχρι τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_2.



Σχ. 4·4 β.

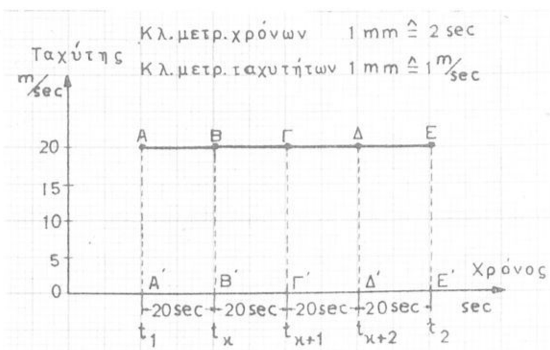
β) Κατὰ τὸν χρόνον $t = t_\kappa - t_1$ διήνυσε διάστημα s ἴσον πρὸς τὴν τεταγμένην ΒΒ΄.

γ) Κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_κ εἶχε ταχύτητα υ ἴσην πρὸς $\frac{BB'}{AB'} = \frac{BB'}{t}$, δηλαδὴ ἴσην πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας φ ἢ ἄλλως ἴσην πρὸς τὴν κλίσιν τῆς εὐθείας ΑΒ.

Βλέπομε λοιπὸν ὅτι καὶ τὰ δύο διαγράμματα μᾶς δίδουν οὐσιαστικῶς τὰς ἰδίας πληροφορίας, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὴν κίνησιν τοῦ σώματος. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ γνῶσις τοῦ ἑνὸς θὰ πρέπει ὁπωσδήποτε νὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν τὴν γνῶσιν καὶ τοῦ ἄλλου. Εἰς τὰς παραγράφους, αἱ ὁποῖαι ἀκολουθοῦν ἀμέσως, θὰ ἐξετάσωμε ἀκριβῶς πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορίσωμε γραφικῶς τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ διαγράμματα, ὅταν μᾶς εἶναι γνωστὸν τὸ ἄλλο. Εἰδικώτερον, εἰς τὴν παράγραφον 4·4 (6) θὰ ἐρευνήσωμε μὲ ἕνα παράδειγμα τὸν τρόπον, κατὰ τὸν ὁποῖον ἀντιμετωπίζομε γραφικῶς πολυσύνθετα εἴδη κινήσεων, ὅπως π.χ. εἶναι ἡ κίνησις τοῦ ἐμβόλου ἑνὸς κινητῆρος ἐσωτερικῆς καύσεως ἢ ἡ κίνησις τοῦ βάκτρου τῆς βαλβῖδος.

2. *Ὁμοιόμορφος κίνησις.*

α) Ἔστω κατ᾿ ἀρχὰς ὅτι γνωρίζομε τὸ διάγραμμα ταχύτητος - χρόνου, ποὺ ἀναφέρεται εἰς μίαν ὁμοιόμορφον κίνησιν (σχ. 4·4 γ). Διὰ τὴν χάραξίν του ἐχρησιμοποιήθησαν αἱ ἑξῆς κλίμακες:



Σχ. 4·4 γ.

Κλῖμαξ μετρήσεως τῶν χρόνων: 1 mm ≙ 2 sec.

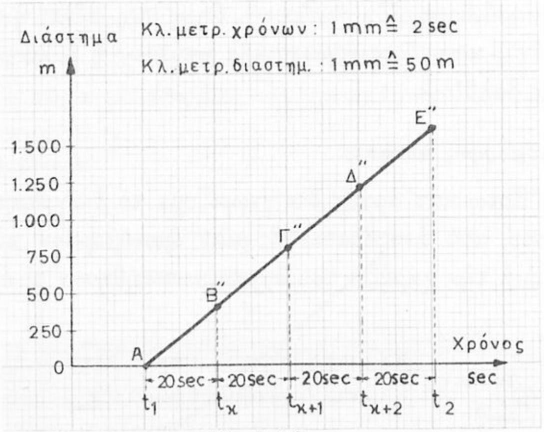
Κλῖμαξ μετρήσεως τῶν ταχυτήτων: 1 mm ≙ 1 m/sec.

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ σῶμα, εἶναι γνωστὴ καὶ ἴση πρὸς $\upsilon = 20$ m/sec.

Ἡ διάρκεια τῆς κινήσεως εἶναι ἐπίσης γνωστὴ καὶ ἴση πρὸς $t_2 - t_1 = 80$ sec.

Διὰ τὴν χάραξιν τοῦ διαγράμματος διαστήματος - χρόνου (σχ. 4·4 δ), θὰ χρησιμοποιήσωμε τὰς ἑξῆς κλίμακας σχεδιάσεως:

Κλῖμαξ μετρήσεως τῶν χρόνων: 1 mm $\triangleq$ 2 sec.
Κλῖμαξ μετρήσεως τῶν διαστημάτων: 1 mm $\triangleq$ 50 m.



Σχ. 4·4 δ.

Κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_κ (σχ. 4·4 γ) τὸ σῶμα εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $\upsilon \cdot (t_\kappa - t_1) = 20 \dfrac{m}{sec} \times 20\ sec = 400$ μέτρων ἀπὸ τὴν θέσιν ἐκκινήσεώς του (ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΒ′Α′).

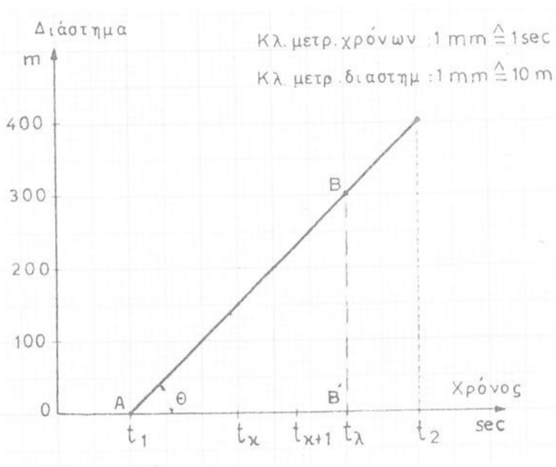
Κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t_{\kappa+1}$ τὸ σῶμα εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $\upsilon(t_{\kappa+1} - t_1) = 20 \dfrac{m}{sec} \times 40\ sec = 800$ μέτρων ἀπὸ τῆς θέσεως ἐκκινήσεώς του (ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΓΓ′Α′).

Κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t_{\kappa+2}$ τὸ σῶμα εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $\upsilon(t_{\kappa+2} - t_1) = 20 \dfrac{m}{sec} \times 60\ sec = 1\,200$ μέτρων ἀπὸ τῆς θέσεως ἐκκινήσεώς του (ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΔΔ′Α′).

Τέλος, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_2, τὸ σῶμα εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $\upsilon \cdot (t_2 - t_1) = 20\ \frac{m}{sec} \cdot 80\,sec = 1\,600$ μέτρων ἀπὸ τῆς θέσεως ἐκκινήσεώς του (ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΕΕ′Α′).

Μὲ αὐτὸν τὸν τρόπον ἔχομε ἤδη προσδιορίσει τὰ 4 σημεῖα Β″, Γ″, Δ″ καὶ Ε″ εἰς τὸ διάγραμμα s — t (σχ. 4·4 δ). Εὐκόλως διαπιστώνομε ὅτι τὰ σημεῖα αὐτὰ εὑρίσκονται ὅλα ἐπάνω εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ μάλιστα εἰς τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὸν ἄξονα τῶν χρόνων εἰς τὸ σημεῖον t_1.

β) Ἔστω τώρα ὅτι γνωρίζομε τὸ διάγραμμα διαστήματος-χρόνου, ποὺ ἀναφέρεται εἰς τὴν κίνησιν ἑνὸς σώματος (σχ. 4·4 ε).

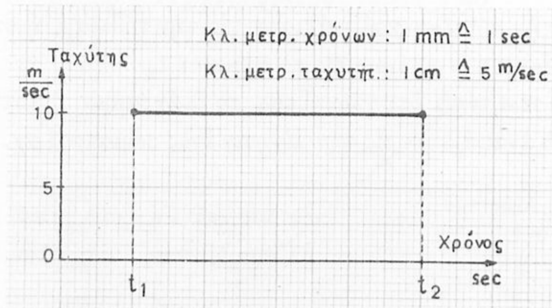


Σχ. 4·4 ε.

Τόσον κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_x, ὅσον καὶ κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_{x+1} ὅσον καὶ κατὰ οἱανδήποτε ἄλλην χρονικὴν στιγμήν, γνωρίζομε ὅτι τὸ σῶμα ἔχει ταχύτητα ἴσην πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας θ, δηλαδὴ ἴσην πρὸς τὴν κλίσιν τῆς εὐθείας ΑΒ [βλ. παράγραφον 4·4(1)]. Ἡ κίνησις εἶναι συνεπῶς ὁμοιόμορφος. Ἡ σταθερὰ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ σῶμα, εὑρίσκεται πλέον μὲ εὐκολίαν ἀπὸ τὸν τύπον:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{BB'}{t_\lambda - t_1} = \frac{300\ m}{30\ sec} = 10\ m/sec,$$

ὁπότε ἡ χάραξις τοῦ ἀντιστοίχου διαγράμματος ταχύτητος - χρόνου δὲν παρουσιάζει καμμίαν δυσκολίαν (σχ. 4·4 ζ) καὶ γίνεται κατὰ τὰ γνωστά.



Σχ. 4·4 ζ.

Συμπέρασμα:

Ὅταν ἕνα σῶμα ἐκτελῇ ὁμοιόμορφον κίνησιν, ἡ γνῶσις τοῦ διαγράμματος ταχύτητος - χρόνου, ποὺ ἀναφέρεται εἰς τὴν κίνησιν αὐτήν, μᾶς ἐπιτρέπει πράγματι τὴν χάραξιν τοῦ ἀντιστοίχου διαγράμματος διαστήματος - χρόνου. Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν γνωρίζωμε τὸ διάγραμμα διαστήματος - χρόνου, ποὺ ἀναφέρεται εἰς μίαν ὁμοιόμορφον κίνησιν, εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ χαράξωμε τὸ ἀντίστοιχον διάγραμμα ταχύτητος - χρόνου.

3. *Ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνομένη κίνησις εἰς τὴν ὁποίαν τὸ σῶμα ἔχει ἀρχικὴν ταχύτητα ἴσην πρὸς Ο.*

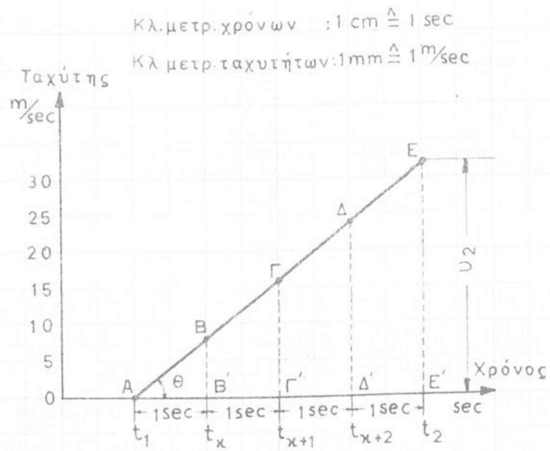
α) Εἰς τὸ σχῆμα 4·4 η ἔχει σχεδιασθῆ τὸ διάγραμμα ταχύτητος - χρόνου, ποὺ ἀναφέρεται εἰς μίαν κίνησιν τοῦ εἴδους αὐτοῦ. Ἀπὸ τὰς κλίμακας σχεδιάσεως, ποὺ ἐχρησιμοποιήθησαν, εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστώσωμε τὰ ἑξῆς:

1. Τὸ σῶμα κινεῖται ἐπὶ χρόνον $t_2 - t_1 = 4$ sec.

2. Ἡ ταχύτης τοῦ σώματος κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_2 ἔχει τιμὴν $\upsilon_2 = (\mathrm{EE'}) = 32$ m/sec.

3. Ἡ ἐπιτάχυνσις γ τοῦ σώματος εἶναι καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς $\dfrac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\upsilon_2}{t_2 - t_1} =$

$\dfrac{(\mathrm{EE'})}{(\mathrm{AE'})} = \dfrac{32\ \mathrm{m/sec}}{4\ \mathrm{sec}} = 8\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}/\mathrm{sec}$, δηλαδὴ ἴση πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας θ, συμφώνως ἄλλωστε πρὸς τὰ ὅσα εἴπαμε εἰς τὴν παράγραφον 4·3 (1).



Σχ. 4·4 η.

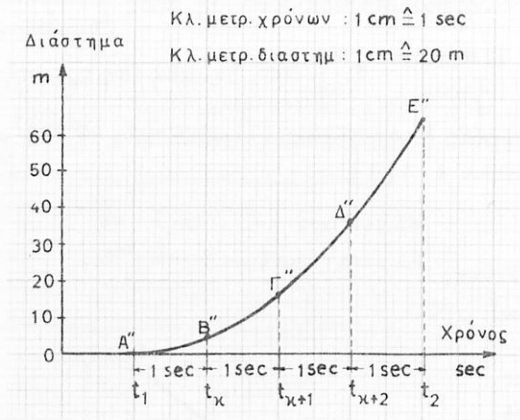
Θὰ ἐξετάσωμε τώρα κατὰ πόσον εἶναι δυνατὸν νὰ χαράξωμε μὲ βάσιν τὰ στοιχεῖα αὐτὰ τὸ διάγραμμα s — t τῆς συγκεκριμένης αὐτῆς κινήσεως.

Εἰς τὴν ἀρχὴν θὰ πρέπει βεβαίως νὰ ἐκλέξωμε καὶ νὰ ἀποφασίσωμε ὑπὸ ποίας κλίμακας θὰ γίνῃ ἡ χάραξις τοῦ διαγράμματος. Εἰς τὸ παράδειγμά μας λαμβάνομε τὰς ἑξῆς κλίμακας:

α) Κλῖμαξ μετρήσεως τῶν χρόνων: 1 cm ≙ 1 sec.

β) Κλῖμαξ μετρήσεως τῶν διαστημάτων: 1 mm ≙ 2 m.

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χρόνων σημειώνομε τὰ t_1 (ἀρχὴ μελέτης τῆς κινήσεως) καὶ t_2 (πέρας μελέτης τῆς κινήσεως) κατὰ τέτοιον τρόπον, ὥστε $t_2 - t_1 = 4\,\text{sec}$ (σχ. 4·4θ).



Σχ. 4·4 θ.

Μὲ ἐφαρμογὴν τοῦ τύπου (2) τῆς παραγράφου 4·3 (2) προσδιορίζομε εὐκόλως ὅτι κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_κ (σχ. 4·4 η) τὸ σῶμα εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $\frac{1}{2}\,[\gamma(t_\kappa - t_1)]\cdot[t_\kappa - t_1] = \frac{1}{2}\,(BB')\cdot(AB') = \frac{1}{2}\cdot 8\,\frac{m}{sec}\cdot 1\,sec = 4$ μέτρων ἀπὸ τῆς θέσεως ἐκκινήσεώς του (ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΒ΄).

Κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t_{\kappa+1}$, τὸ σῶμα εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $\frac{1}{2}\cdot[\gamma(t_{\kappa+1} - t_1)]\cdot[t_{\kappa+1} - t_1] = \frac{1}{2}\,(\Gamma\Gamma')\cdot(A\Gamma') = \frac{1}{2}\cdot 16\,\frac{m}{sec}\cdot 2\,sec = 16$ μέτρων ἀπὸ τῆς θέσεως ἐκκινήσεώς του (ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΓΓ΄).

Κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t_{\kappa+2}$, τὸ σῶμα εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $\frac{1}{2}\cdot[\gamma(t_{\kappa+2} - t_1)]\cdot[t_{\kappa+2} - t_1] = \frac{1}{2}\,(\Delta\Delta')\cdot(A\Delta') =$

$= \frac{1}{2} \cdot 24 \frac{m}{sec} \cdot 3\,sec = 36$ μέτρων ἀπὸ τῆς θέσεως ἐκκινήσεώς του (ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΔΔ′).

Τέλος, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_2, τὸ σῶμα εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $\frac{1}{2} \cdot [\gamma(t_2 - t_1)] \cdot [t_2 - t_1] = \frac{1}{2}$ (ΕΕ′)·(ΑΕ′) $= \frac{1}{2} \cdot 32 \frac{m}{sec} \cdot 4\,sec = 64$ μέτρων ἀπὸ τῆς θέσεως ἐκκινήσεώς του (ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΕΕ′).

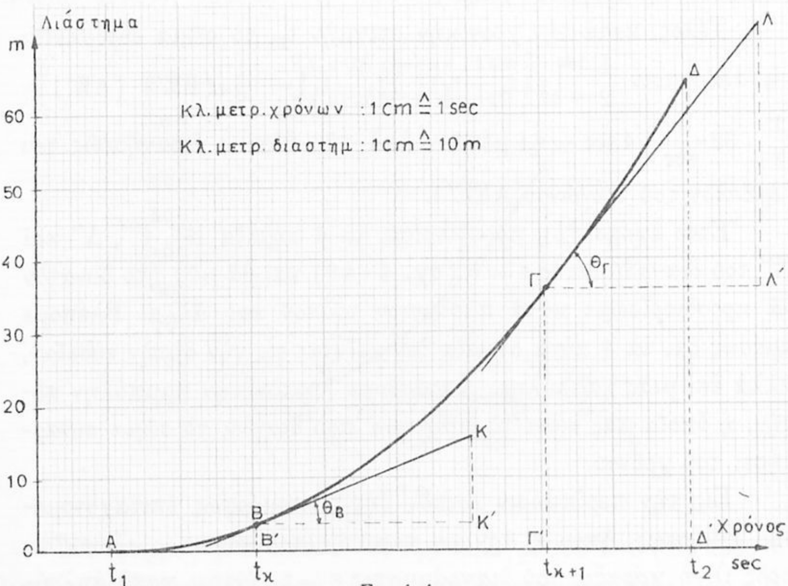
Ἔτσι ἔχομε ἤδη προσδιορίσει τὰ 4 σημεῖα Β′′, Γ′′, Δ′′ καὶ Ε′′ τοῦ διαγράμματος s — t (σχ. 4·4 θ) καὶ θὰ μᾶς ἦτο δυνατὸν νὰ προσδιορίσωμε κατὰ παρόμοιον τρόπον καὶ ἄλλα. Βλέπομε ἀμέσως ὅτι τὰ 4 αὐτὰ σημεῖα δὲν κεῖνται εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ἀλλὰ ἐπὶ μιᾶς καμπύλης. Χαράσσομε λοιπὸν τὴν καμπύλην αὐτήν, ἡ ὁποία μᾶς δίδει τὸ διάστημα ποὺ διανύει τὸ σῶμα συναρτήσει τοῦ χρόνου.

Εἰς τὴν περίπτωσιν λοιπὸν τῆς ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνομένης κινήσεως, ὅπου ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ σώματος εἶναι ἴση πρὸς 0, ἡ χάραξις τοῦ διαγράμματος s — t γίνεται κατὰ ἁπλούστατον τρόπον, ἐὰν εἶναι γνωστὸν τὸ διάγραμμα υ — t.

β) Ἂς ἐξετάσωμε τώρα τὸ ἀντίστροφον πρόβλημα. Ὑποτίθεται ὅτι γνωρίζομε τὸ διάγραμμα διαστήματος-χρόνου, ποὺ ἀναφέρεται εἰς τὴν κίνησιν ἑνὸς σώματος (σχ. 4·4 ι) καὶ ζητοῦμε τὸ ἀντίστοιχον διάγραμμα ταχύτητος-χρόνου. Κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_κ τὸ σῶμα εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 4 μέτρων (ἴσην πρὸς τὴν τεταγμένην ΒΒ′) ἀπὸ τῆς θέσεως ἐκκινήσεώς του.

Ἐκεῖνο, ποὺ δὲν γνωρίζομε καὶ ποὺ πρέπει συνεπῶς νὰ προσδιορίσωμε, εἶναι ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ σῶμα κατὰ τὴν ἐν λόγῳ χρονικὴν στιγμὴν t_κ. Πρὸς τοῦτο θὰ ἐπεκτείνωμε τοὺς συλλογισμούς, τοὺς ὁποίους ἐκάναμε εἰς τὴν παράγραφον 4·4 (2β). *Θὰ θεωρήσωμε δηλαδὴ ὅτι ἡ ζητουμένη ταχύτης δί-*

δεται ἀπὸ τὴν κλίσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης (ΑΒΓΛ) εἰς τὸ σημεῖον Β (σχ. 4·4ι).



Σχ. 4·4ι.

Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν θὰ φέρωμε τὴν εὐθεῖαν ΒΚ, ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Β καὶ τὴν ΒΚ΄ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χρόνων. Ἡ τριγωνομετρικὴ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας θ_B, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ δύο εὐθεῖαι ΒΚ καὶ ΒΚ΄, θὰ εἶναι τότε ἴση μὲ τὴν ταχύτητα, τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ σῶμα κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t_\varkappa$ δηλαδή:

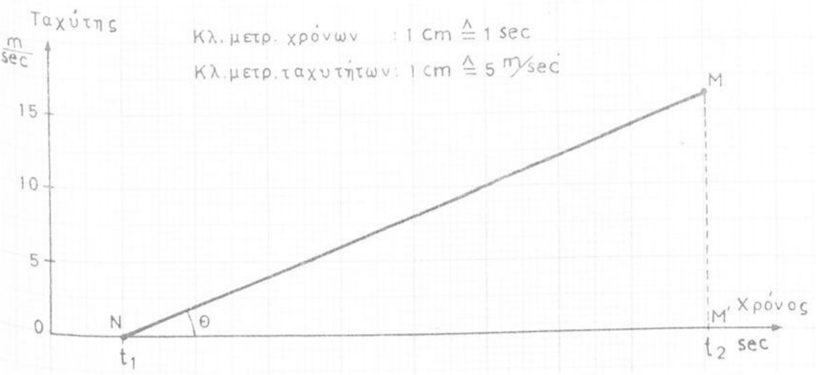
$$\upsilon_\kappa = \varepsilon\varphi\theta_B = \frac{KK'}{BK'} = \frac{12\ \mathrm{m}}{3\ \mathrm{sec}} = 4\ \mathrm{m/sec}.$$

Κατὰ παρόμοιον τρόπον εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορίσωμε τὴν ταχύτητα, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ σῶμα κατὰ μίαν οἱανδήποτε ἄλλην χρονικὴν στιγμήν. Ἔτσι, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν π.χ. $t_{\varkappa+1}$ τὸ σῶμα κινεῖται μὲ ταχύτητα:

$$υ_{κ+1} = εφθ_Γ = \frac{ΛΛ'}{ΓΛ'} = \frac{36\ m}{3\ sec} = 12\ \frac{m}{sec}.$$

Εἶναι ἀξιοσημείωτον τὸ γεγονὸς ὅτι κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_1, ἡ καμπύλη τοῦ σχήματος 4·4ι ἐφάπτεται εἰς τὸν ἄξονα τῶν χρόνων. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Α μὲ τὸν ἄξονα τῶν χρόνων, εἶναι μηδενική, συνεπῶς ὅτι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ σώματος εἶναι ἐπίσης ἴση πρὸς μηδέν.

Ἀφοῦ ὑπολογίσωμε καὶ διαφόρους ἄλλας τιμὰς τῆς ταχύτητος, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ σῶμα κατὰ διαφόρους ἐνδιαμέσους χρονικὰς στιγμάς, ἠμποροῦμε εὐκόλως νὰ χαράξωμε τὸ διάγραμμα υ — t. Ὅπως δὲ βλέπομε εἰς τὸ σχῆμα 4·4κ, τὸ διάγραμμα ταχύτητος - χρόνου εἶναι μία εὐθεῖα, ἡ κλίσις τῆς ὁποίας εἶναι ἴση



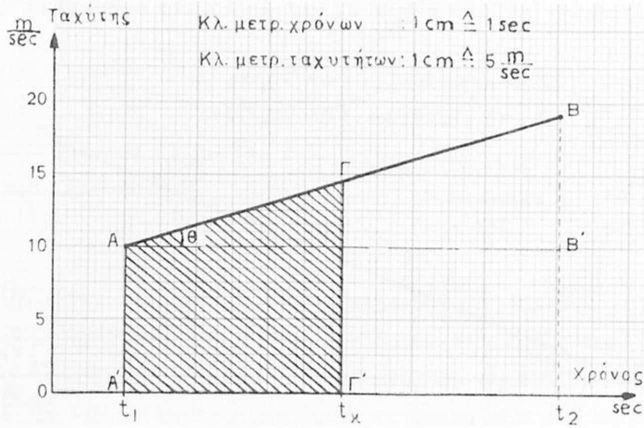
Σχ. 4·4 κ.

πρὸς $εφθ = \frac{MM'}{NM'} = \frac{16\ m/sec}{8\ sec} = 2\ \frac{m}{sec}/sec$. Ἔτσι συμπεραίνομε ὅτι τὸ διάγραμμα s—t, τὸ ὁποῖον μᾶς ἐδόθη, ἀναφέρεται εἰς ἕνα σῶμα ποὺ ἐκτελεῖ ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνομένην κίνησιν μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $υ_1 = 0$ καὶ ἐπιτάχυνσιν $γ = 2\ \frac{m}{sec}/sec$.

4. *Ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνομένη κίνησις, εἰς τὴν ὁποίαν τὸ σῶμα ἔχει ἀρχικὴν ταχύτητα διάφορον τοῦ μηδενός.*

Εἰς τὰ σχήματα 4·4λ καὶ 4·4μ ἐμφαίνεται ὁ τρόπος κατὰ τὸν ὁποῖον εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορίσωμε τὸ διάγραμμα s — t (διαστήματος - χρόνου), ὅταν εἶναι γνωστὸν τὸ διάγραμμα υ — t (ταχύτητος - χρόνου). Ἔτσι, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t_\varkappa$ (σχ. 4·4λ) τὸ σῶμα εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ διαγραμμισμένον ἐμβαδὸν (ΑΓΓ΄Α΄) ἀπὸ τῆς θέσεως ἐκκινήσεώς του (συμφώνως πρὸς ὅσα εἴπαμε εἰς τὴν παράγραφον 4·3(2).

Δι' ἐμβαδομετρήσεως εὑρίσκομε ἐκ τοῦ σχήματος 4·4λ ὅτι (ΑΓΓ΄Α΄) = 735 mm². Ἐὰν τώρα λάβωμε ὑπ' ὄψιν μας τὰς κλί-



Σχ. 4·4λ.

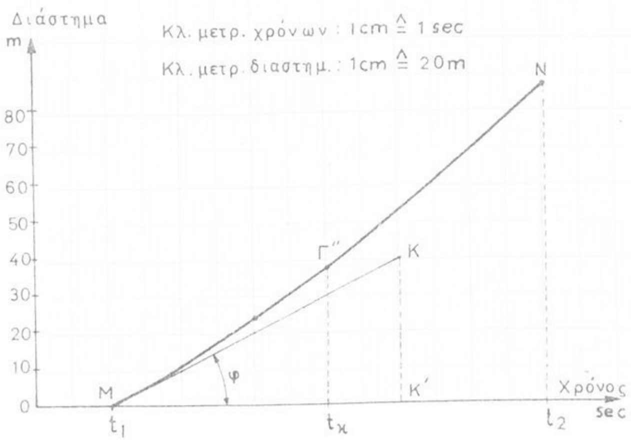
μακας μετρήσεως τῶν χρόνων, 1 mm ≙ 0,1 sec, καὶ τῶν ταχυτήτων, 1 mm ≙ 0,5 m/sec, αἱ ὁποῖαι ἐχρησιμοποιήθησαν διὰ τὴν χάραξιν τοῦ διαγράμματος υ — t καὶ ἐργασθοῦμε, ὅπως εἴχαμε ἐργασθῆ εἰς τὸ ἀντίστοιχον παράδειγμα τῆς παραγράφου 4·3(4), ἠμποροῦμε νὰ ἐκφράσωμε τὸ ἐμβαδὸν (ΑΓΓ΄Α΄) εἰς μέτρα.

Πράγματι $(\text{ΑΓΓ΄Α΄}) = 735 \cdot 0{,}1\ \text{sec} \cdot 0{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{sec}} = 36{,}75\ \text{m}.$

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὁρίζομε ἕνα σημεῖον, τὸ Γ'', τοῦ διαγράμματος διαστήματος - χρόνου (σχ. 4·4μ).

Τὸ σημεῖον Γ'' θὰ ἠμπορούσαμε βεβαίως νὰ τὸ ὁρίσωμε καὶ κατ' ἄλλον τρόπον, ἂν ἐφαρμόσωμε τὸν γνωστόν μας τύπον:

$$s_\kappa = \upsilon_1 (t_\kappa - t_1) + \frac{1}{2} \gamma (t_\kappa - t_1)^2$$



Σχ. 4·4 μ.

ὅπου $\upsilon_1 = 10 \dfrac{m}{sec}$, $t_\kappa - t_1 = 3\,sec$ καὶ γ ἡ σταθερὰ ἐπιτάχυνσις, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ σῶμα καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρός:

$$\gamma = \varepsilon\varphi\theta = \frac{BB'}{AB'} = \frac{9 \dfrac{m}{sec}}{6\,sec} = 1{,}5 \frac{m}{sec} / sec \qquad (\sigma\chi.\ 4 \cdot 4\lambda).$$

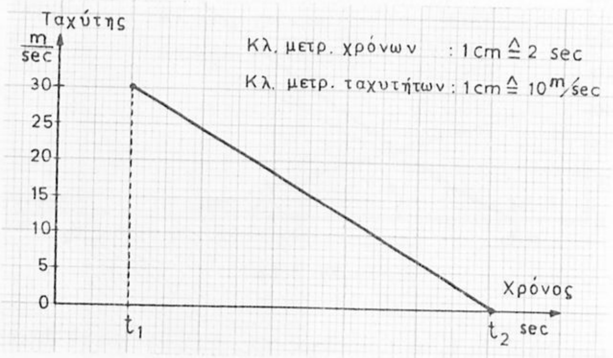
Ἂν ἐπαναλάβωμε τὴν ἰδίαν σειρὰν συλλογισμῶν, εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρίσωμε καὶ ἄλλα σημεῖα τοῦ διαγράμματος $s - t$, ὁπότε ἡ χάραξις τῆς καμπύλης ΜΓ''Ν τοῦ σχήματος 4·4μ δὲν παρουσιάζει πλέον καμμίαν δυσκολίαν.

Εἶναι ἀξιοσημείωτον τὸ γεγονὸς ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, κατὰ τὴν ὁποίαν $\upsilon_1 \neq 0$, ἡ καμπύλη s — t δὲν ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος τῶν χρόνων εἰς τὸ σημεῖον Μ (σχ. 4·4 μ). Ἡ κλίσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης s — t εἰς τὸ σημεῖον Μ ἰσοῦται ἀκριβῶς πρὸς τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα υ_1 τοῦ σώματος.

Πράγματι: $\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{KK'}{MK'} = \dfrac{40\ m}{4\ sec} = 10 \cdot \dfrac{m}{sec} = \upsilon_1.$

5. Ὁμοιομόρφως ἐπιβραδυνομένη κίνησις.

Εἰς τὰ σχήματα 4·4 ν καὶ 4·4 ξ ἐμφαίνεται ὁ τρόπος κατὰ τὸν ὁποῖον προσδιορίζεται τὸ διάγραμμα διαστήματος - χρόνου, ὅταν εἶναι γνωστὸν τὸ διάγραμμα υ — t, εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ

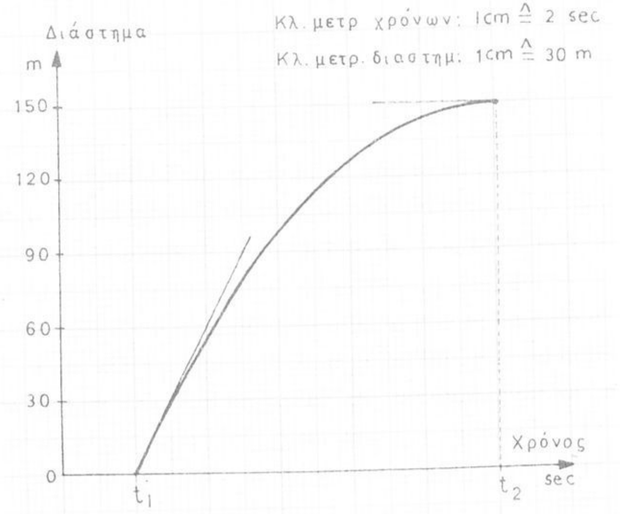


Σχ. 4·4 ν.

τὴν ὁποίαν τὸ σῶμα ἐκτελεῖ κίνησιν ὁμοιομόρφως ἐπιβραδυνομένην. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ κλίσις τῆς καμπύλης s — t εἰς τὰ διάφορα σημεῖα της, ποὺ μᾶς δίδουν, ὅπως γνωρίζομε, τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς ταχύτητος μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ σῶμα, εἶναι ἀνομοιόμορφος. Εἰς τὰς πλησίον τοῦ t_1 χρονικὰς στιγμὰς εἶναι μεγάλη, ἐνῶ εἰς τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_2 εἶναι μηδενική, πρᾶγμα ποὺ συμβιβάζεται ἀπολύτως μὲ τὴν μορφὴν τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ διάγραμμα υ — t.

6. Μὴ ὁμοιομόρφως μεταβαλλομένη κίνησις.

Εἶναι ἀναμφισβήτητον τὸ γεγονὸς ὅτι μεταξὺ τῶν τριῶν μεγεθῶν s, t καὶ υ, ἐκεῖνο ποὺ εἶναι σχεδὸν ἀδύνατον νὰ προσδιορισθῇ ἀπ' εὐθείας, εἶναι ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ



Σχ. 4·4 ξ.

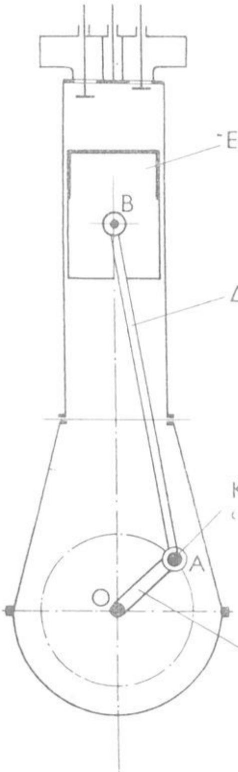
σῶμα εἰς διαφόρους χρονικὰς στιγμάς. Καὶ ἡ δυσκολία γίνεται ἀκόμη μεγαλυτέρα, ὅταν ἡ κίνησις δὲν εἶναι ὁμοιόμορφος. Ἀντιθέτως, τὸ διάστημα, ποὺ διανύει τὸ σῶμα συναρτήσει τοῦ χρόνου, δηλαδὴ τὸ διάγραμμα s — t, εἶναι δυνατὸν νὰ καθορισθῇ εὐκολώτερον καὶ μάλιστα εἰς τὰς περισσοτέρας περιπτώσεις κατὰ τρόπον ἁπλοῦν. Αὐτὸ ἐπιτυγχάνεται εἴτε μὲ θεωρητικοὺς ὑπολογισμούς, εἴτε καὶ πειραματικῶς, ἂν χρησιμοποιήσωμε χρονόμετρον καὶ μετροταινίαν ἢ ἀκόμη καὶ διὰ κινηματογραφήσεως. (Κινηματογραφοῦμε δηλαδὴ τὴν κίνησιν ποὺ παρατηροῦμε καὶ κατόπιν ἀναλύομε καὶ μελετᾶμε τὰς ἐπὶ μέρους εἰκόνας τῆς ταινίας).

Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ μελετήσωμε μίαν ἐξαιρετικῶς συνήθη κίνησιν, τὴν κίνησιν, ποὺ ἐκτελεῖ τὸ ἔμβολον ἑνὸς βενζινοκινητῆρος. Κατὰ τὴν μελέτην αὐτὴν θὰ χαράξωμε κατὰ πρῶτον τὸ διάγραμμα s — t ἀναπαριστῶντες τὰς διαδοχικὰς φάσεις τῆς κινήσεως εἰς ἕνα φύλλον τετραγωνισμένου χάρτου. Κατόπιν θὰ προσδιορίσωμε γραφικῶς τόσον τὴν ταχύτητα, ὅσον καὶ τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ ἐμβόλου εἰς διαφόρους χρονικὰς στιγμάς.

Κίνησις τοῦ ἐμβόλου ἑνὸς βενζινοκινητῆρος.

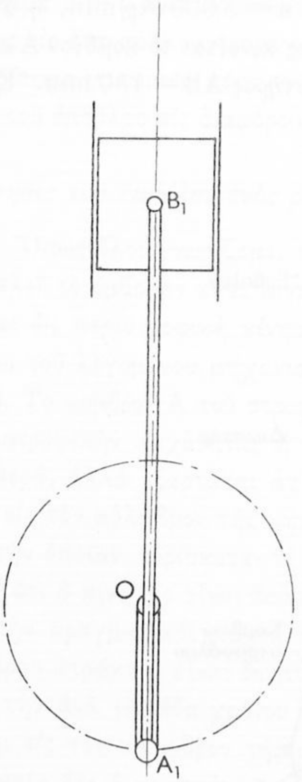
Ὅπως ὅλοι γνωρίζομε, ἡ παλινδρομικὴ κίνησις, τὴν ὁποίαν ἐκτελεῖ τὸ ἔμβολον κάθε κινητῆρος ἐσωτερικῆς καύσεως, μεταφέρεται ὡς περιστροφικὴ κίνησις εἰς τὴν στροφαλοφόρον ἄτρακτον μέσῳ τοῦ λεγομένου μηχανισμοῦ διωστῆρος - στροφάλου (σχ. 4 · 4 ο). Τὸ κομβίον Α τοῦ στροφάλου ἐκτελεῖ κυκλικὴν κίνησιν μὲ περιστροφικὴν ταχύτητα, ἡ τιμὴ τῆς ὁποίας δὲν εἶναι ἐν γένει σταθερά, ἀλλὰ ἐξαρτᾶται ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν ἀπὸ τὴν παροχὴν καυσίμου εἰς τὸν κύλινδρον τῆς μηχανῆς, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ ἀπὸ τὴν θέσιν εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται τὸ ἔμβολον. Ἐὰν ὅμως γίνη παραδεκτὸν ὅτι ὁ κινητὴρ εἶναι πολυκύλινδρος, ὅπως ἄλλωστε συμβαίνει εἰς τὴν πραγματικότητα, ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τῆς στροφαλοφόρου ἀτράκτου εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθῆ ὅτι ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν ἀνὰ μονάδα χρόνου ποσότητα τοῦ καυσίμου, ποὺ εἰσάγεται εἰς τὸν κύλινδρον τῆς μηχανῆς. Ἐὰν λοιπὸν ὑποτεθῆ ἐν συνεχείᾳ ὅτι ἡ παροχὴ καυσίμου τηρεῖται σταθερὰ καὶ ἔστω ὅτι αὐτὴ εἶναι ἡ μεγίστη δυνατὴ παροχή, ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τῆς στροφαλοφόρου ἀτράκτου θὰ εἶναι σταθερὰ καὶ γνωστή. (Ἐὰν ἡ ταχύτης αὐτὴ δὲν δίδεται ἀπὸ τὸν κατασκευαστὴν τῆς μηχανῆς, εἶναι πολὺ εὔκολον νὰ προσδιορισθῆ πειραματικῶς μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς στροφομέτρου).

Ἡ τελευταία αὐτὴ παρατήρησις ἔχει μεγάλην σημασίαν, διότι μᾶς ἐπιτρέπει νὰ καθορίσωμε πλήρως ποίαν θέσιν κατέχει τὸ κομβίον Α καὶ ποίαν τὸ ἔμβολον εἰς οἱανδήποτε χρονικὴν στιγμήν. Πράγματι, ἔστω ὅτι ἡ τιμὴ τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος τῆς στροφαλοφόρου ἀτράκτου εἶναι n = 5 000 στρ/min, ἡ ἀκτὶς τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς ἐπὶ τῆς ὁποίας κινεῖται τὸ κομβίον Α εἶναι ΟΑ = 40 mm καὶ τὸ μῆκος τοῦ διωστῆρος ΑΒ = 150 mm. Ἔστω

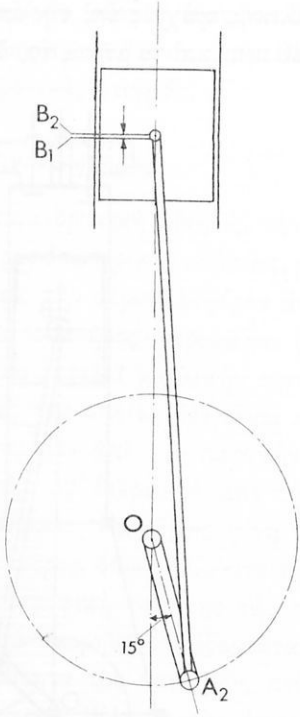


Σχ. 4·4 ο.

ἀκόμη ὅτι τὸ ἄκρον Β τοῦ διωστῆρος εὑρίσκεται κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_1 εἰς τὴν κάτω ἀκραίαν θέσιν τοῦ B_1 (σχ. 4·4 π). Ὅταν ἡ ἀκτὶς ΟΑ στραφῆ κατὰ γωνίαν 15^0 (σχ. 4·4 ρ), τὸ ἄκρον τοῦ διωστῆρος θὰ φθάση εἰς τὴν θέσιν B_2, δηλαδὴ θὰ ἔχῃ διανύση διάστημα $B_1B_2 \simeq 1$ mm. Ἐν τῷ μεταξὺ θὰ ἔχῃ παρέλθῃ



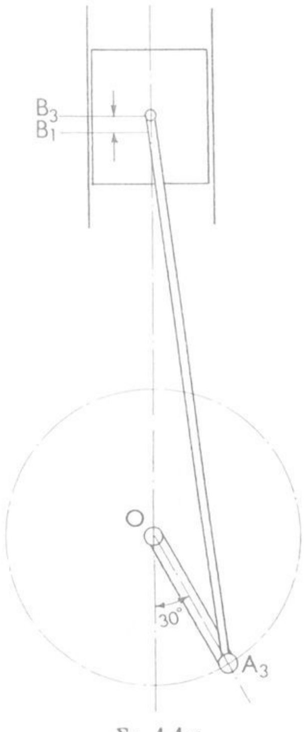
Σχ. 4·4 π.



Σχ. 4·4 ρ.

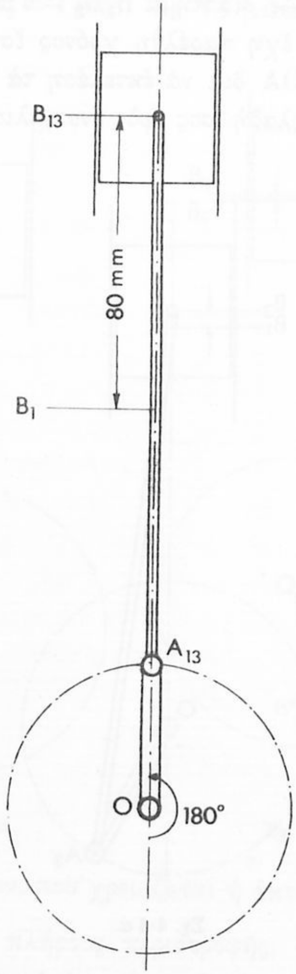
χρόνος ἴσος μὲ ἐκεῖνον, ποὺ χρειάζεται ἡ ἀκτὶς ΟΑ διὰ νὰ ἐκτελέση τὰ $\frac{15}{360}$ μιᾶς πλήρους περιστροφῆς, δηλαδὴ ἴσος πρὸς $\frac{1}{n} \cdot \frac{15}{360} = \frac{1}{5\,000} = \frac{15}{360}\,\text{min} = \frac{60 \times 15}{5\,000 \times 360}\,\text{sec} = \frac{1}{2\,000}\,\text{sec}$ = ἥμισυ χιλιοστὸν τοῦ δευτερολέπτου.

Ὅταν ἡ ἀκτὶς ΟΑ φθάση εἰς τὴν θέσιν OA_3 (σχ. 4·4σ), τὸ ἄκρον τοῦ διωστῆρος θὰ φθάση εἰς τὴν θέσιν B_3, δηλαδὴ θὰ ἔχη διανύσει συνολικῶς διάστημα $B_1B_3 \simeq 4\,mm$. Ἀπὸ τῆς χρονικῆς στιγμῆς t_1 θὰ ἔχη παρέλθη χρόνος ἴσος μὲ ἐκεῖνον, ποὺ χρειάζεται ἡ ἀκτὶς ΟΑ διὰ νὰ ἐκτελέση τὰ 30/360 μιᾶς πλήρους περιστροφῆς, δηλαδὴ ἴσος πρὸς ἕνα χιλιοστὸν τοῦ δευτερολέπτου.



Σχ. 4·4 σ.

Ἐὰν συνεχίσωμε τὴν ἐργασίαν αὐτὴν καὶ δι' ἄλλας θέσεις τοῦ κομβίου Α ἐπάνω εἰς τὴν κυκλικὴν τροχιάν του, εἶναι πολὺ εὔκολον νὰ προσδιορίσωμε τὸ διάγραμμα s—t, ποὺ ἀναφέρεται εἰς τὴν κίνησιν τοῦ σημείου Β, μέχρις ὅτου φθάση τοῦτο εἰς τὴν ἄνω ἀκραίαν θέσιν του A_{13} (σχ. 4·4τ). Ἡ ὅλη γραφικὴ κατασκευὴ



Σχ. 4·4 τ.

φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 4·4υ, τὸ δὲ διάγραμμα s — t, ποὺ προκύπτει, εἰς τὸ σχῆμα 4·4φ.

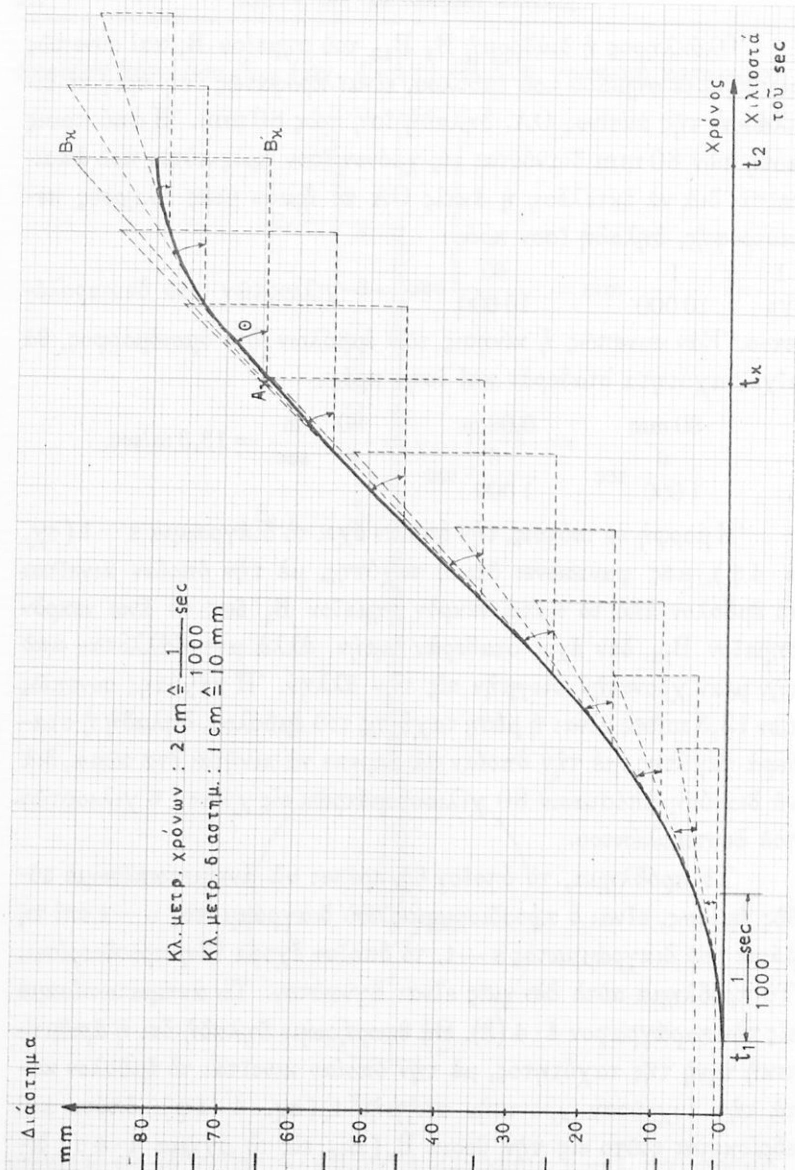
Ὁλόκληρος ἡ διαδρομὴ B_1 B_{13} τοῦ σημείου B, καὶ συνεπῶς οἱουδήποτε σημείου τοῦ ἐμβόλου, εἶναι προφανῶς ἴση πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος OA, δηλαδὴ ἴση πρὸς 80 mm. Ἡ ἀπόστασις αὐτὴ τῶν 80 mm διανύεται εἰς χρόνον ἴσον πρὸς αὐτὸν ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἐκτελέσῃ ἡ ἀκτὶς OA τὸ ἥμισυ μιᾶς πλήρους περιστροφῆς, δηλαδὴ ἴσον πρός:

$\frac{1}{2n} = \frac{1}{10\,000}$ min $= \frac{60}{10\,000}$ sec $= 6$ χιλιοστῶν τοῦ δευτερολέπτου. Ἐὰν συνεπῶς ἡ κίνησις τῶν ἐμβόλων ἦτο ὁμοιόμορφος, θὰ εἶχε ταχύτητα σταθερὰν καὶ ἴσην πρός:

$$\frac{80\text{ mm}}{\frac{6}{1\,000}\text{ sec}} = \frac{0{,}08\text{ m}}{\frac{6}{1\,000}\text{ sec}} = \frac{80}{6}\,\frac{\text{m}}{\text{sec}} = 13{,}3\text{ m/sec}.$$

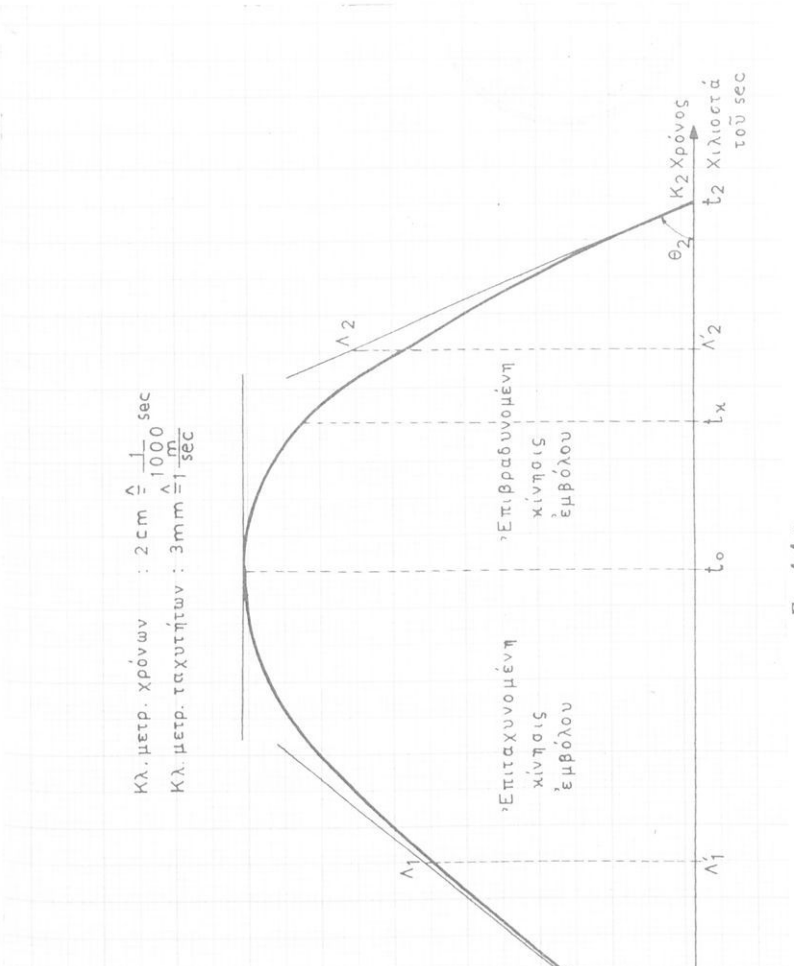
Ἡ μορφὴ ἐν τούτοις, τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ διάγραμμα s — t (σχ. 4·4φ), μᾶς φανερώνει ὅτι ἡ ταχύτης, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ ἔμβολον ἀπὸ τὸ κάτω νεκρὸν σημεῖον B_1 ἕως τὸ ἄνω νεκρὸν σημεῖον B_{13}, δὲν ἔχει σταθερὰν τιμήν, ἀλλὰ μεταβάλλεται ἀπὸ τὴν μίαν χρονικὴν στιγμὴν εἰς τὴν ἄλλην. Ἡ ταχύτης συνεπῶς τῶν 13,3 m/sec εἶναι ἡ μέση ταχύτης τοῦ ἐμβόλου, δηλαδὴ ἡ σταθερὰ ταχύτης, μὲ τὴν ὁποίαν θὰ ἔπρεπε νὰ κινῆται ἕνα σῶμα, διὰ νὰ διανύσῃ ἀπόστασιν 80 χιλιοστομέτρων εἰς χρόνον 6 χιλιοστῶν τοῦ δευτερολέπτου.

Τὸ πρόβλημα, τὸ ὁποῖον θὰ πρέπει νὰ ἀντιμετωπίσωμε εὐθὺς ἀμέσως, εἶναι ὁ προσδιορισμὸς τοῦ διαγράμματος υ — t ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ διαγράμματος s — t, τὸ ὁποῖον ἔχομε ἤδη προσδιορίσει. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ δὲν μᾶς εἶναι ἄγνωστον. Τὸ ἀντιμετωπίσαμε εἰς τὴν παράγραφον 4·4 (3). **Θὰ** θεωρήσωμε δηλαδὴ ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ ἔμβολον κατὰ τὴν τυχοῦσαν χρονικὴν στιγμὴν $t_κ$ (σχ. 4·4φ), ὁπότε καὶ εὑρίσκεται τοῦτο εἰς τὴν θέσιν $B_κ$ (B_{10} εἰς τὸ σχῆμα 4·4υ) δίδεται ἀπὸ τὴν κλίσιν τῆς καμπύλης s — t εἰς τὸ σημεῖον $A_κ$.



Διάστημα
mm
80
70
60
50
40
30
20
10
0
B13
B12
B11
B10
B9
B8
B7
B6
B5
B4
B3
B2
Κλ. μετρ. χρόνων : 2 cm ≙ 1/1000 sec
Κλ. μετρ. διαστημ. : 1 cm ≙ 10 mm
t1
1/1000 sec
tx
t2
Χρόνος
Χιλιοστά του sec
Bχ
B'χ
Aχ
Θ

Σχ. 4·4 φ.



Ταχύτης
m/sec
0
5
10
15
20
Κλ. μετρ. χρόνων : 2 cm ≙ 1/1000 sec
Κλ. μετρ. ταχυτήτων : 3 mm ≙ 1 m/sec
Κ1
θ1
Λ1
Λ2
θ2
Κ2
t1
Λ'1
t0
tx
Λ'2
t2
Χρόνος
Χιλιοστά τοῦ sec
Ἐπιταχυνομένη κίνησις ἐμβόλου
Ἐπιβραδυνομένη κίνησις ἐμβόλου

Σχ. 4·4 χ.

Ἔτσι, $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{(B_\kappa B'_\kappa)}{(A_\kappa B'_\kappa)} = \dfrac{27\text{ mm}}{\dfrac{1{,}5}{1\,000}\text{sec}} = \dfrac{27}{.1{,}5}\text{ m/sec} = 18\text{ m/sec}$

εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ταχύτητος, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ ἔμβολον, ὅταν τοῦτο εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν B_{10} (σχ. 4·4χ).

Ἐὰν ἐπαναλάβωμε τὴν ἰδίαν γραφικὴν ἐργασίαν καὶ διὰ ἄλλας χρονικὰς στιγμάς, εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορίσωμε ἀρκετὰ σημεῖα τοῦ διαγράμματος υ—t. Ἐὰν δὲ ἑνώσωμε ἐν συνεχείᾳ ὅλα αὐτὰ τὰ σημεῖα μὲ μίαν συνεχῆ γραμμήν, θὰ λάβωμεν τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 4·4χ. Εἶναι ἀξιοσημείωτον τὸ γεγονὸς ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς καμπύλης s—t εἰς τὰ δύο σημεῖα της, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς χρονικὰς στιγμὰς t_1 καὶ t_2, εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χρόνων· αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ ἔμβολον ἔχει μηδενικὴν ταχύτητα, ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὰ δύο νεκρὰ σημεῖα. Ἀντιθέτως, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_0 (σχ. 4·4χ), ἡ ταχύτης τοῦ ἐμβόλου καθίσταται μεγίστη καὶ ἴση πρὸς 20,7 m/sec.

Δι' ἁπλῆς παρατηρήσεως τοῦ σχήματος 4·4χ συμπεραίνομε ἀμέσως τὰ ἑξῆς:

I. Ὅταν τὸ ἔμβολον κινῆται μὲ κατεύθυνσιν ἀπὸ τὸ B_1 πρὸς τὸ B_{13}, ἐκτελεῖ δύο εἴδη κινήσεων. Δηλαδὴ ἀπὸ τῆς χρονικῆς στιγμῆς t_1 μέχρι τῆς χρονικῆς στιγμῆς t_0, (ἀπὸ τοῦ σημείου B_1 μέχρι τοῦ σημείου B_8) ἡ κίνησις εἶναι ἐπιταχυνομένη, ἐνῶ ἀπὸ τῆς χρονικῆς στιγμῆς t_0 μέχρι τῆς χρονικῆς στιγμῆς t_2 (δηλαδὴ ἀπὸ τοῦ σημείου B_8 μέχρι τοῦ σημείου B_{13}) ἡ κίνησις εἶναι ἐπιβραδυνομένη.

II. Ἡ μὲν ἐπιταχυνομένη κίνησις δὲν εἶναι ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνομένη, ἡ δὲ ἐπιβραδυνομένη κίνησις τοῦ ἐμβόλου δὲν εἶναι ἐπίσης ὁμοιομόρφως ἐπιβραδυνομένη, διότι πράγματι ἡ μεταβολὴ τῆς ταχύτητος τοῦ ἐμβόλου εἰς κάθε ἕνα π.χ. χιλιοστὸν τοῦ δευτερολέπτου δὲν εἶναι σταθερά.

Ἕνα ἀπὸ τὰ προβλήματα, ποὺ παρουσιάζει τεράστιον ἐνδιαφέρον διὰ τὸν τεχνικόν, εἶναι, ὅπως θὰ μάθωμε εἰς τὸ βιβλίον τῆς Δυναμικῆς, καὶ ὁ καθορισμὸς τῆς μεγίστης ἐπιταχύνσεως — ἢ ἐπιβραδύνσεως — τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ ἕνα σῶμα κατὰ τὴν κίνησίν του.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ὁμοιομόρφως μεταβαλλομένης κινήσεως εἴδαμε ὅτι ἡ σταθερὰ ἐπιτάχυνσις — ἢ ἐπιβράδυνσις — τοῦ σώματος, δίδεται ἀπὸ τὴν κλίσιν τῆς εὐθείας ταχύτητος - χρόνου [παράγραφος 4·(3 2)]. Κατ' ἐπέκτασιν, εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρήσωμε ὅτι, εἰς τὴν περίπτωσιν μὴ ὁμοιομόρφως μεταβαλλομένης κινήσεως, ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος εἰς μίαν τυχοῦσαν χρονικὴν στιγμὴν t_κ δίδεται ἀπὸ τὴν κλίσιν, ποὺ ἔχει ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης υ — t εἰς τὸ σημεῖον της, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_κ.

Εἰς τὸ συγκεκριμένον λοιπὸν παράδειγμα ποὺ μελετᾶμε, παρατηροῦμε ὅτι κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ ἐμβόλου ἀπὸ τὸ σημεῖον B_1 πρὸς τὸ B_{13} συμβαίνουν τὰ ἑξῆς:

I. Ἡ μεγίστη ἐπιτάχυνσις τοῦ ἐμβόλου εἶναι ἴση πρός:

$$\varepsilon\varphi\theta_1 = \frac{(\Lambda_1\Lambda_1')}{(K_1\Lambda_1')} = \frac{12{,}3\ \text{m/sec}}{\dfrac{1{,}5}{1\,000}\ \text{sec}} = 8\,200\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}\ /\ \text{sec} = 8{,}2\ \frac{\text{km}}{\text{sec}}\ /\ \text{sec}.$$

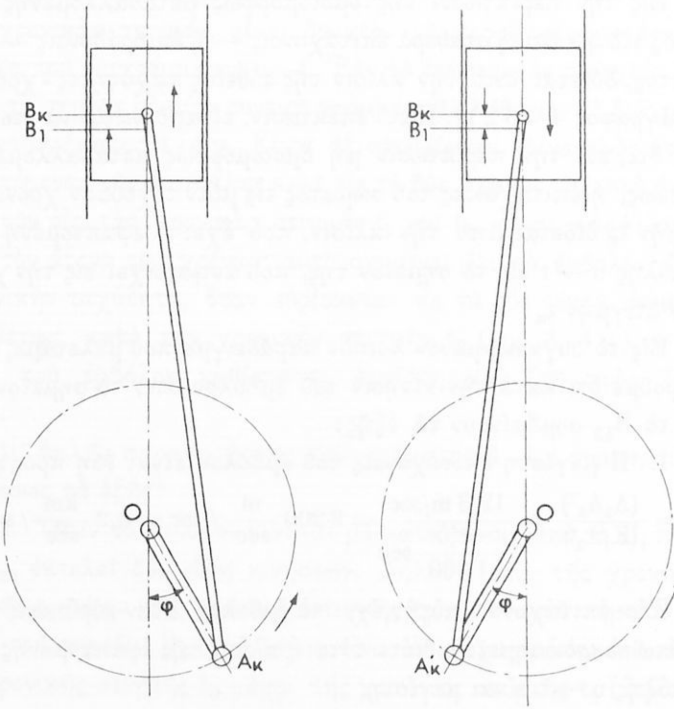
Τὴν ἐπιτάχυνσιν αὐτὴν ἔχει τὸ ἔμβολον, ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὸ κάτω νεκρὸν σημεῖον, διότι τότε ἡ κλίσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης υ — t εἶναι μεγίστη.

II. Ἡ μεγίστη ἐπιβράδυνσις τοῦ ἐμβόλου εἶναι ἴση πρός:

$$\varepsilon\varphi\theta_2 = \frac{(\Lambda_2\Lambda_2')}{(K_2\Lambda_2')} = \frac{15{,}6\ \text{m/sec}}{\dfrac{1}{1\,000}\ \text{sec}} = 15\,600\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}\ /\ \text{sec} = 15{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{sec}}\ /\ \text{sec}.$$

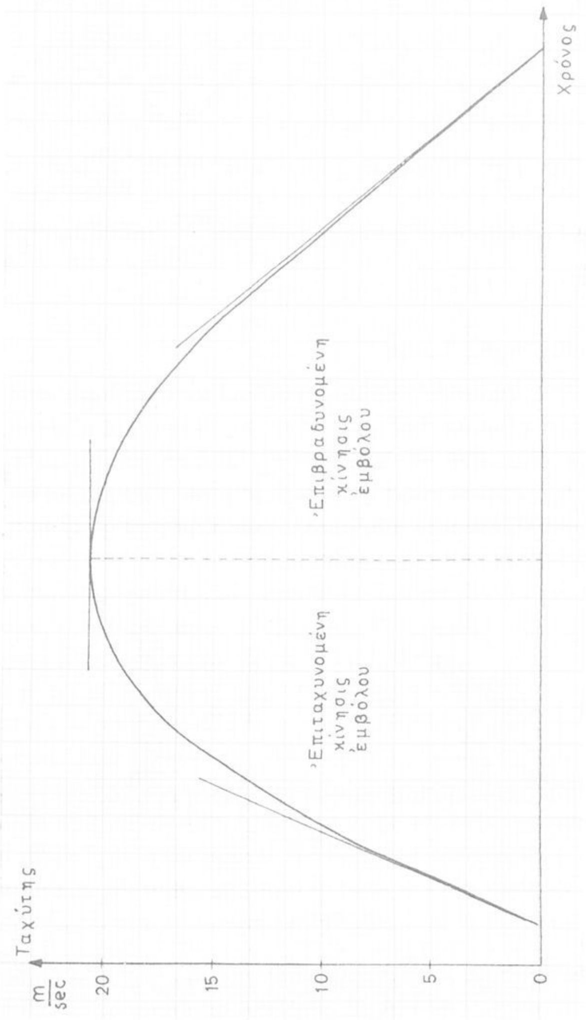
Τὴν ἐπιβράδυνσιν αὐτὴν ἔχει τὸ ἔμβολον, ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄνω νεκρὸν σημεῖον, διότι τότε ἡ κλίσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης υ — t εἶναι μεγίστη.

Μετὰ τὴν μελέτην, ποὺ ἐκάναμε ἕως τώρα, γεννᾶται ἀναμφισβητήτως τὸ ἐρώτημα: Διατί δὲν ἐμελετήσαμε τὴν κίνησιν τοῦ ἐμβόλου, ὅταν τοῦτο κινῆται ἀπὸ τὸ σημεῖον B_{13} πρὸς τὸ B_1, δηλαδὴ ὅταν αὐτὸ κινῆται ἀπὸ τὸ ἄνω νεκρὸν σημεῖον πρὸς τὸ κάτω νεκρὸν σημεῖον;



Σχ. 4·4 ψ.

Ὁ λόγος εἶναι πολὺ ἁπλοῦς: Ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 4·4 ψ, ἡ ταχύτης τοῦ σημείου B, διὰ τὰς δύο συμμετρικὰς θέσεις τοῦ μηχανισμοῦ διωστῆρος - στροφάλου, ποὺ παρουσιάζονται, θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν τιμήν. Ἡ μόνη διαφορὰ ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι τὸ ἔμβολον κινεῖται εἰς μὲν τὴν μίαν περίπτωσιν ἀπὸ τὸ B_1 πρὸς τὸ

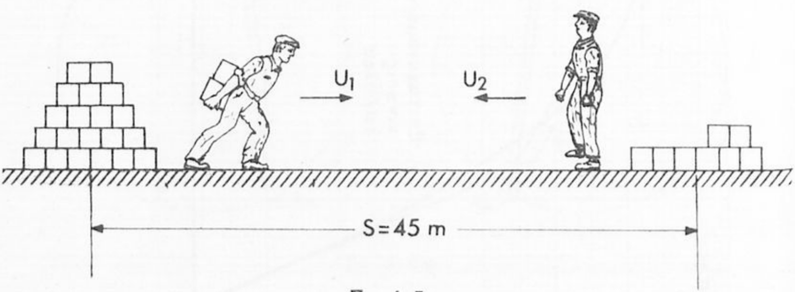

m/sec
Ταχύτης
20
15
10
5
0
Ἐπιταχυνομένη κίνησις ἐμβόλου
Ἐπιβραδυνομένη κίνησις ἐμβόλου
Χρόνος

Σχ. 4·4 ω.

B_{13}, εἰς δὲ τὴν ἄλλην ἀπὸ τὸ B_{13} πρὸς τὸ B_1. Τὸ διάγραμμα συνεπῶς ταχύτητος - χρόνου, ποὺ ἀναφέρεται εἰς τὴν ἀπὸ τὸ B_{13} πρὸς τὸ B_1 κίνησιν τοῦ ἐμβόλου, εἶναι δυνατὸν νὰ προκύψη ἀπ' εὐθείας ἀπὸ τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 4 · 4 χ, διότι ἀκριβῶς θὰ ἔχη τὴν ἰδίαν μορφὴν μὲ αὐτὸ (σχ. 4 · 4 ω). Εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστώσωμε ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν $15{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{sec}}/\text{sec}$ εἶναι ἡ μεγίστη ἐπιτάχυνσις τοῦ ἐμβόλου καὶ $8{,}2\frac{\text{km}}{\text{sec}}/\text{sec}$ εἶναι ἡ μεγίστη ἐπιβράδυνσις τοῦ ἐμβόλου.

4 · 5 Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

1. Εἰς ἕνα ἐργοτάξιον ἀντιμετωπίζεται τὸ πρόβλημα μεταφορᾶς 450 μεταλλικῶν κιβωτίων ἀπὸ μίαν θέσιν εἰς ἄλλην, ποὺ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $s = 45$ m ἀπὸ τὴν πρώτην (σχ. 4 · 5 α). Δὲν ἔχομε τὴν δυνατότητα νὰ χρησιμοποιήσωμε μεταφορικὰ μέσα. Ὡς ἐκ τούτου ἀποφασίζεται ὅπως ἡ μεταφορὰ τῶν μεταλλικῶν κιβωτίων γίνη ἀπὸ ἐργάτας καὶ μάλιστα κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον:



Σχ. 4·5 α.

Ὁ κάθε ἐργάτης θὰ μεταφέρη δύο κιβώτια εἰς κάθε διαδρομήν. Ὅταν εἶναι φορτωμένος, θὰ κινῆται μὲ μέσην ταχύτητα $υ_1 = 125$ m/min ($= 4{,}5$ km/h), ἐνῶ ὅταν θὰ ἐπιστρέφη εἰς τὸν ἀρχικὸν σωρόν, μὲ ταχύτητα $υ_2 = 85$ m/min (περίπου 3 km/h). Μέχρις ὅτου φορτωθῆ τὰ δύο κιβώτια, θὰ καθυστερῆ ἀναγκαστικῶς ἐπὶ χρόνον 0,05 min (3 sec) περίπου, μέχρις ὅτου δὲ τὰ ἀποθέση εἰς τὸν νέον σωρόν, ἐπὶ χρόνον 0,10 min (6 sec).

Δοθέντος ὅτι ἡ μεταφορὰ τῶν κιβωτίων πρέπει νὰ συμπληρωθῇ εἰς μίαν τὸ πολὺ ὥραν, ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ πόσοι ἐργάται κατ᾿ ἐλάχιστον ὅριον πρέπει νὰ ἀπασχοληθοῦν ὡς μεταφορεῖς. (τέσσαρες).

2. Διὰ τὴν ἐπισκευὴν τῆς στέγης μιᾶς διωρόφου οἰκίας, ἀπαιτεῖται μεταξὺ ἄλλων ἡ ἀνύψωσις εἰς ὕψος 7 μέτρων 500 τσιμεντοπλακῶν διαστάσεων 40 cm × 40 cm Ἡ ἀνύψωσις τῶν 500 τσιμεντοπλακῶν εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ κατὰ δύο μεθόδους καὶ συγκεκριμένως:

α) Ἀπὸ ἕνα ἐργάτην-μεταφορέα (σχ. 4·5β).

β) Μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς χειροκινήτου βαρούλκου καὶ τροχαλίας (σχ. 4·5γ).

Διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ ἐργάτου-μεταφορέως, δίδονται τὰ ἑξῆς στοιχεῖα:

— μέση ταχύτης ἀνόδου: 60 σκαλοπάτια/min
— μέση ταχύτης καθόδου: 80 σκαλοπάτια/min
— ἀριθμὸς ἀνυψουμένων τσιμεντοπλακῶν εἰς κάθε διαδρομήν: 10
— ἀριθμὸς σκαλοπατιῶν τοῦ ἐξωτερικοῦ κλιμακοστασίου: 40
— ὁ ἐργάτης-μεταφορεὺς ἀποθέτει τὰς τσιμεντόπλακας εἰς σωρούς.

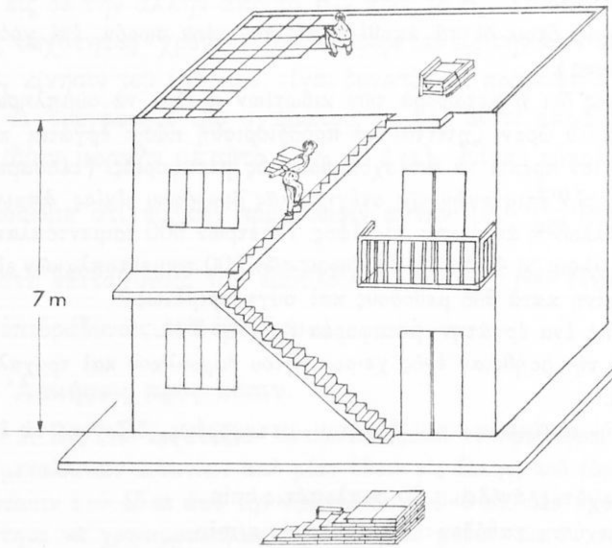
Διὰ τὴν περίπτωσιν ἀνυψώσεως τῶν τσιμεντοπλακῶν μὲ τὴν βοήθειαν βαρούλκου, δίδονται τὰ ἑξῆς στοιχεῖα:

— ἐξωτερικὴ διάμετρος τοῦ τυμπάνου: 30 cm
— περιστροφικὴ ταχύτης τοῦ τυμπάνου κατὰ τὴν ἀνύψωσιν: 20στρ/min
— περιστροφικὴ ταχύτης τοῦ τυμπάνου, κατὰ τὴν καταβίβασιν τοῦ δοχείου τοποθετήσεως τῶν τσιμεντοπλακῶν: 40 στρ/min
— ἀριθμὸς ἀνυψουμένων τσιμεντολακῶν εἰς κάθε διαδρομήν: 10
— ὁ χειριζόμενος τὸ βαροῦλκον ἐργάτης ἀναπαύεται καθ᾿ ὃν χρόνον ἐκφορτώνονται αἱ τσιμεντόπλακες εἰς τὴν στέγην τῆς διωρόφου οἰκίας.

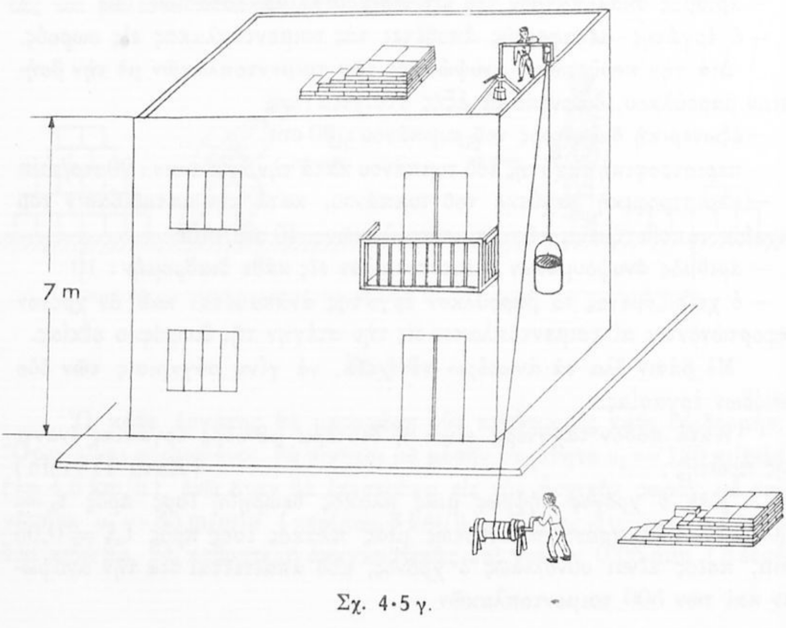
Μὲ βάσιν ὅλα τὰ ἀνωτέρω στοιχεῖα, νὰ γίνῃ σύγκρισις τῶν δύο μεθόδων ἐργασίας.

Κατὰ πόσον ταχυτέρα εἶναι ἡ δευτέρα μέθοδος ἐργασίας ἔναντι τῆς πρώτης; (Κατὰ 118 min)

Ἐὰν ὁ χρόνος λήψεως μιᾶς πλακὸς θεωρηθῇ ἴσος πρὸς $t_\lambda =$ 0,07 min ὁ δὲ χρόνος ἀποθέσεως μιᾶς πλακὸς ἴσος πρὸς $t_{\alpha\pi} =$ 0,03 min, ποῖος εἶναι συνολικῶς ὁ χρόνος, ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀνύψωσιν καὶ τῶν 500 τσιμεντοπλακῶν



Σχ. 4·5 β.



Σχ. 4·5 γ.

α) Μὲ ἐφαρμογὴν τῆς πρώτης μεθόδου; (3 h καὶ 16 min)

β) Μὲ ἐφαρμογὴν τῆς δευτέρας μεθόδου; (1 h καὶ 18 min)

Εἰς τί ἀποδίδετε τὴν τόσον μεγάλην ὑπεροχὴν τῆς δευτέρας μεθόδου;

Σημείωσις 1η: Δεχόμεθα δι' ἁπλούστευσιν ὅτι οἱ χρόνοι λήψεως καὶ ἀποθέσεως μιᾶς πλακὸς εἶναι καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις οἱ αὐτοί.

Σημείωσις 2α: Αἱ τιμαὶ ὅλων τῶν μεγεθῶν ἔχουν ἐπιλεγῆ κατὰ τέτοιον τρόπον, ὥστε νὰ καταπονοῦνται ἐξ ἴσου, τόσον ὁ ἐργάτης-μεταφορεύς, ὅσον καὶ ὁ ἐργάτης ὁ ἀσχολούμενος μὲ τὴν περιστροφὴν τοῦ τυμπάνου τοῦ βαρούλκου.

3. Τὸ γραφεῖον μελετῶν ἑνὸς τουριστικοῦ ὀργανισμοῦ κατέληξε εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι πρὸς ἀξιοποίησιν μιᾶς περιοχῆς ἀπαιτεῖται ἡ ἰσοπέδωσίς της, πρᾶγμα ποὺ σημαίνει ἐκσκαφὴν καὶ ἀπομάκρυνσιν 16 περίπου χιλιάδων κυβικῶν μέτρων χώματος.

Ἡ ὅλη ἐργασία τῆς ἐκχωματώσεως ἔχει προγραμματισθῆ ὡς ἑξῆς:

— Θὰ χρησιμοποιηθῆ ἕνας μηχανικὸς ἐκσκαφεὺς μὲ μεγίστην δυναμικότητα 25 κυβικῶν μέτρων χώματος εἰς κάθε ὥραν.

— Τὸ χῶμα θὰ μεταφέρεται εἰς ἀπόστασιν 10 χιλιομέτρων μὲ φορτηγὰ αὐτοκίνητα χωρητικότητος 5 κυβικῶν μέτρων.

— Ἡ μέση ταχύτης κινήσεως τῶν φορτηγῶν αὐτοκινήτων προβλέπεται κατὰ μὲν τὴν μετάβασιν ἴση πρὸς 22 km/h κατὰ δὲ τὴν ἐπιστροφὴν ἴση πρὸς 30 km/h.

— Ὁ χρόνος ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ τὴν φόρτωσιν ἑνὸς αὐτοκινήτου μὲ χῶμα θὰ εἶναι ἴσος πρὸς 12 min (ἡ φόρτωσις κάθε αὐτοκινήτου θὰ γίνεται δηλαδὴ ἀπ' εὐθείας ἀπὸ τὸν μηχανικὸν ἐκσκαφέα).

— Ὁ χρόνος ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἐκκένωσιν ἑνὸς αὐτοκινήτου θὰ εἶναι ἴσος πρὸς 1 min.

Βασικὴ ἐπιδίωξις τοῦ τουριστικοῦ ὀργανισμοῦ εἶναι ἡ κατὰ τὸ δυνατὸν ἀρίστη ἐκμετάλλευσις τόσον τοῦ μηχανικοῦ ἐκσκαφέως, ὅσον καὶ τῶν φορτηγῶν αὐτοκινήτων ποὺ θὰ χρησιμοποιηθοῦν. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ἐπιδίωξιν αὐτὴν ἐρωτᾶται:

α) Τί θὰ συμβῆ, ἐὰν χρησιμοποιηθοῦν δύο φορτηγὰ αὐτοκίνητα διὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ χώματος;

β) Τί θὰ συμβῆ, ἐὰν χρησιμοποιηθοῦν δέκα φορτηγὰ αὐτοκίνητα διὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ χώματος;

γ) Πόσα φορτηγὰ αὐτοκίνητα νομίζετε ὅτι πρέπει νὰ χρησιμοποιηθοῦν; (πέντε). Πόσαι ἡμέραι θὰ χρειασθοῦν τότε διὰ τὴν ἰσοπέδωσιν τῆς περιοχῆς, ἐὰν ἡ ἐργασία τῆς ἐκχωματώσεως ἐκτελῆται ἐπὶ 16 ὥρας τὸ εἰκοσιτετράωρον; (περίπου 40)

4. Ἕνα μηχανουργεῖον ἔλαβε παραγγελίαν ἐλαττώσεως κατὰ 1 mm τοῦ πάχους 150 τεμαχίων ἀπὸ μαλακὸν χάλυβα σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ διαστάσεων 350 mm × 200 mm × 13 mm. Κατόπιν σχετικῆς μελέτης, ὁ ἐπὶ κεφαλῆς τοῦ μηχανουργείου ἀπεφάσισε τὰ ἑξῆς:

— Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς παραγγελίας αὐτῆς θὰ χρησιμοποιηθῇ μία καὶ μόνον πλάνη.

— Ἡ μέση ταχύτης κοπῆς $υ_1$ θὰ ληφθῇ ἴση πρὸς 30 m/min.

— Ἡ μέση ταχύτης ἐπιστροφῆς τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν $υ_2$ θὰ ληφθῇ ἴση πρὸς 50 m/min.

— Τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον θὰ διανύῃ τὸ ἐργαλεῖον τῆς πλάνης ἀνὰ ἁπλῆν διαδρομήν, θὰ ληφθῇ $l = 400$ mm.

— Ἡ ταχύτης προώσεως τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου θὰ ληφθῇ ἴση πρὸς 1,2 mm ἀνὰ πλήρη διαδρομήν.

Ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι οἱ χρόνοι συνδέσεως καὶ ἀποσυνδέσεως τῶν τεμαχίων, χειρισμῶν, περιοδικῶν ἐλέγχων τοῦ τελικοῦ πάχους τῶν τεμαχίων κλπ. δύνανται νὰ ἐκτιμηθοῦν ἐκ τῶν προτέρων συνολικῶς εἰς 1,4 min διὰ κάθε τεμάχιον, ζητεῖται νὰ προϋπολογισθῇ ὁ χρόνος ποὺ θὰ ἀπαιτηθῇ διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς παραγγελίας. (12 h καὶ 23 min)

5. Τὸ πλάνισμα μιᾶς ὀρθογωνικῆς ἐπιφανείας διαστάσεων 350 mm × 550 mm ἀπεφασίσθη νὰ γίνῃ μὲ μέσην ταχύτητα κοπῆς $υ_1 =$ 15 m/min, μέσην ταχύτητα ἐπιστροφῆς τοῦ κοπτικοῦ ἐργαλείου $υ_2 =$ 25 m/min καὶ ταχύτητα προώσεως 1,2 mm διὰ κάθε πλήρη διαδρομὴν τοῦ ἐργαλείου. Τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον διανύει τὸ ἐργαλεῖον τῆς πλάνης διὰ κάθε ἁπλῆν διαδρομήν του, δύναται μεταξὺ ἄλλων νὰ λάβῃ τὰς τιμὰς $l = 400$ mm καὶ $l = 600$ mm.

Πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται διὰ τὴν κατεργασίαν 15 παρομοίων ὀρθογωνικῶν ἐπιφανειῶν; (4 h καὶ 40 min)

Σημείωσις: Νὰ ἀγνοηθοῦν, πρὸς ἁπλούστευσιν τῶν ὑπολογισμῶν, ὅλοι οἱ βοηθητικοὶ χρόνοι.

6. Ἡ στάθμη τοῦ ὕδατος εἰς ἕνα φρέαρ εὑρίσκεται εἰς βάθος 51,2

μέτρων ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐδάφους. Ἀφήνομε μίαν πέτραν νὰ πέσῃ μέσα εἰς τὸ φρέαρ. Ἐρωτᾶται:

α) Μετὰ πόσον χρόνον θὰ φθάσῃ ἡ πέτρα εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος (ἐπιτάχυνσις βαρύτητος $g \simeq 10 \frac{m}{sec}/sec$). (3,2 sec)

β) Ποίαν ταχύτητα θὰ ἔχῃ τότε; (32 m/sec)

γ) Μετὰ πόσον χρόνον θὰ ἀντιληφθοῦμε ἐμεῖς ὅτι ἡ πέτρα ἔφθασε εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος; (ταχύτης ἤχου $υ = 340$ m/sec). (3,35 sec)

δ) Εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπινοήσωμε μίαν μέθοδον διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ βάθους ἑνὸς φρέατος, ὅταν δὲν ἔχωμε εἰς τὴν διάθεσίν μας μετροταινίαν ἢ ἔστω σχοινί; Ἡ μέθοδος αὐτὴ εἶναι πρακτικῶς ἐφαρμόσιμος;

7. Μία σφαῖρα ἐκσφενδονίζεται ἀπὸ τὴν κάννην ἑνὸς ὅπλου κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $υ_1 = 300$ m/sec. Ζητοῦνται:

α) Ποῖον εἶναι τὸ ἀνώτατον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ φθάσῃ ἡ σφαῖρα; (4,5 km)

β) Τί ταχύτητα ἔχει ἡ σφαῖρα, ὅταν εὑρίσκεται εἰς ὕψος 1 500 μέτρων; (245 m/sec)

γ) Μετὰ πόσον χρόνον θὰ φθάσῃ ἐκ νέου ἡ σφαῖρα εἰς τὸ ἔδαφος καὶ ποίαν ταχύτητα θὰ ἔχῃ τότε; (60 sec, 300 m/sec)

δ) Νὰ σχεδιασθῇ τὸ διάγραμμα ταχύτητος - χρόνου, ποὺ ἀναφέρεται εἰς τὴν ὅλην κίνησιν τῆς σφαίρας.

Δίδεται ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος ἴση πρὸς $g = 10 \frac{m}{sec}/sec$.

8. Κατὰ τὴν δοκιμὴν ἑνὸς νέου τύπου αὐτοκινήτων ἐσημειώθησαν αἱ ἐπιδόσεις, ποὺ ἀναγράφονται εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα. Ζητοῦνται:

α) Νὰ χαραχθῇ τὸ διάγραμμα ταχύτητος-χρόνου μὲ βάσιν τὰ δεδομένα τοῦ πίνακος.

β) Πόσον διάστημα θὰ διανύσῃ τὸ αὐτοκίνητον μέχρις ὅτου ἀποκτήσῃ ταχύτητα 130 km/h; (335 m)

γ) Ποία εἶναι ἡ μέση ἐπιτάχυνσις τοῦ αὐτοκινήτου εἰς τὴν περιοχὴν ταχυτήτων ἀπὸ 0 ἕως $100 \frac{km}{h}$; $\left(10{,}2 \frac{km}{h}/sec\right)$

9. Εἰς τὸ σχῆμα 4·5δ παρίσταται τὸ διάγραμμα ταχύτητος - χρόνου, τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται εἰς τὴν κίνησιν ἑνὸς σώματος. Τί εἴδους κίνη-

Ταχύτης υ, ποὺ ἀποκτᾶ τὸ αὐτοκίνητον εἰς χρόνον t (km/h)	Χρόνος t, ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἀποκτήση τὸ αὐτοκίνητον ταχύτητα υ (sec)
20	1,1
40	2,6
60	4,5
80	6,7
100	9,8
120	13,7
130	15,9
140	18,7
150	22,6
160	29,6

σιν ἐκτελεῖ τὸ σῶμα; Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος; Νὰ χαραχθῆ τὸ διάγραμμα διαστήματος - χρόνου, ποὺ ἀναφέρεται εἰς τὴν κίνησιν αὐτήν.

10. Εἰς τὸ σχῆμα 4 · 5ε ἔχει χαραχθῆ τὸ διάγραμμα διαστήματος - χρόνου, τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται εἰς τὴν κίνησιν ἑνὸς σώματος.

Ζητοῦνται:

α) Ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ σώματος, δηλαδὴ ἡ ταχύτης τοῦ σώματος κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_1.

β) Ἡ τελικὴ ταχύτης τοῦ σώματος, δηλαδὴ ἡ ταχύτης τοῦ σώματος κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_2.

γ) Ἡ ταχύτης τοῦ σώματος κατὰ τὰς χρονικὰς στιγμάς:

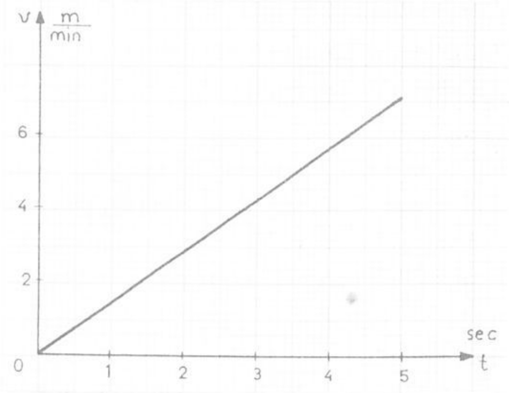
$$t_1 + 1{,}5\ \text{sec},\ t_1 + 3\ \text{sec} \text{ καὶ } t_1 + 4{,}5\ \text{sec}.$$

δ) Τὸ διάγραμμα υ — t μὲ βάσιν τὰ 5 προσδιορισθέντα ἤδη σημεῖα του.

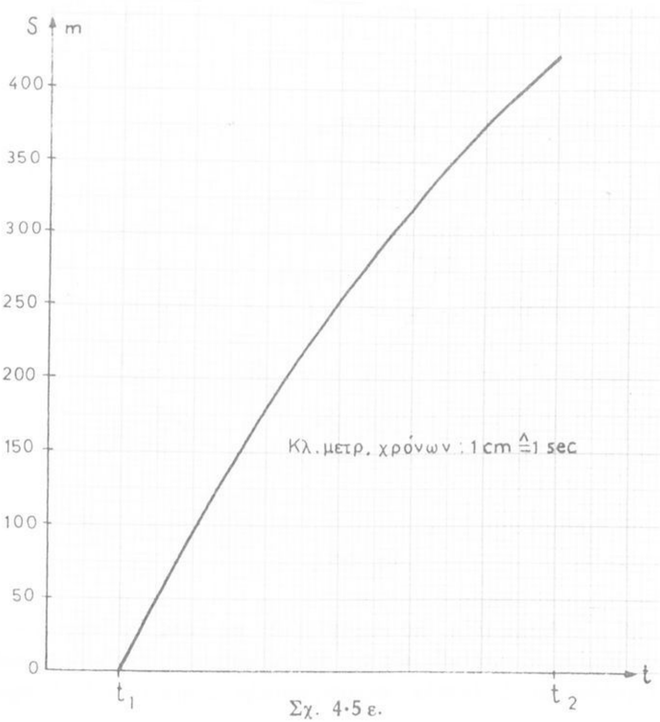
ε) Ἡ τιμὴ τῆς ἐπιβραδύνσεως τοῦ σώματος.

11. Διὰ τὴν κίνησιν τῶν βαλβίδων ἑνὸς κινητῆρος ἐσωτερικῆς καύσεως χρησιμοποιοῦνται συνήθως οἱ κνώδακες, δηλαδὴ οἱ δίσκοι τῆς μορφῆς τοῦ σχήματος 4 · 5ζ, οἱ ὁποῖοι εἶναι σφηνωμένοι ἐπὶ τοῦ λεγομένου ἐκκεντροφόρου ἄξονος ἀπὸ τὸν ὁποῖον καὶ λαμβάνουν κίνησιν.

Ἂς θεωρήσωμε ἕνα κνώδακα τοῦ εἴδους αὐτοῦ (σχ. 4 · 5ζ). Τὸ τόξον $\widehat{\text{ΑΒΓ}}$, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς γωνίαν $360^0 - 2\alpha = 360^0 - 2 \times 61^0 =$

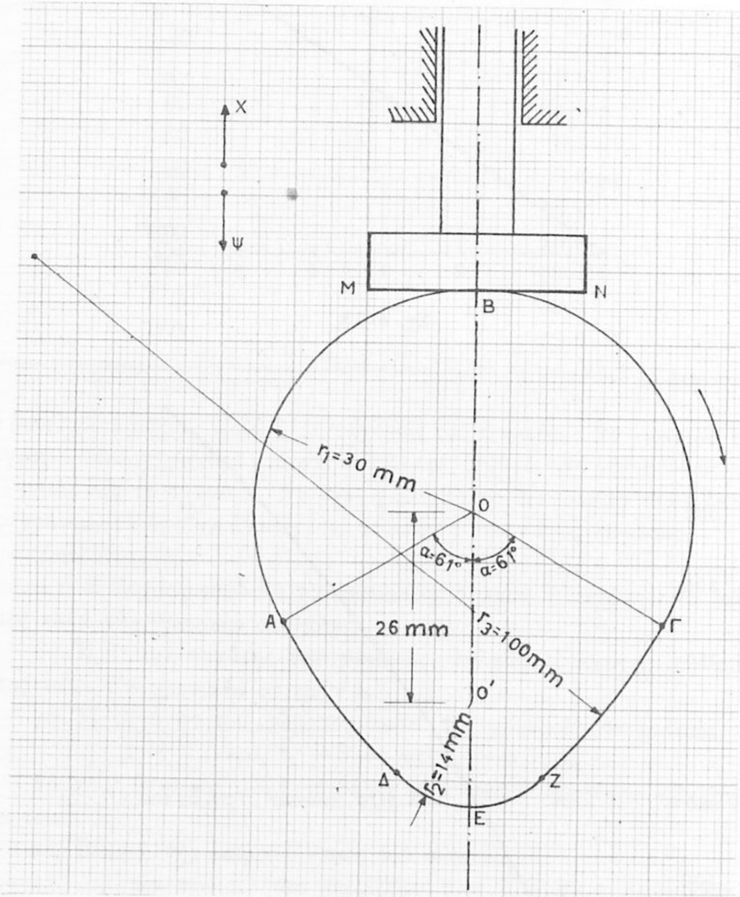

v
m/min
6
4
2
0
1
2
3
4
5
sec
t

Σχ. 4·5 δ.


S
m
400
350
300
250
200
150
100
50
0
Κλ. μετρ. χρόνων : 1 cm ≙ 1 sec
t_1
t_2
t

Σχ. 4·5 ε.

238^0, εἶναι τόξον περιφερείας κέντρου 0 καὶ ἀκτῖνος $r_1 = 30$ mm. Τὸ τόξον $\widehat{\Delta E Z}$ εἶναι ἐπίσης τόξον περιφερείας κέντρου 0΄ καὶ ἀκτῖνος $r_2 = 14$ mm. Ἡ ἀπόστασις (00΄) εἶναι γνωστὴ καὶ ἴση πρὸς 26 mm. Τέλος



Σχ. 4·5 ζ

τὰ $\widehat{A\Delta}$ καὶ $\widehat{\Gamma Z}$ εἶναι τόξα δύο περιφερειῶν μὲ ἴσας ἀκτῖνας $r_3 = 100$ mm ἐφαπτόμενα ἐξωτερικῶς εἰς τὰς δύο περιφερείας ἀκτίνων r_1 καὶ r_2.

Ο κνώδαξ αὐτὸς ἐκτελεῖ περιστροφικὴν κίνησιν περὶ τὸ σημεῖον

0 καὶ κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους, μὲ ταχύτητα n = 1 500 στρ/min. Εἶναι φανερὸν ὅτι κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ κνώδακος, ἡ πλὰξ MN τοῦ βάκτρου :

— Παραμένει ἀκίνητος, ὅταν ἐφάπτεται τοῦ τόξου « ἀκινησίας » $\widehat{AB\Gamma}$.

— Κινεῖται εὐθυγράμμως κατὰ τὴν κατεύθυνσιν x, ὅταν ἐφάπτεται τοῦ τόξου « ἀνυψώσεως » $\widehat{A\Delta E}$.

— Κινεῖται εὐθυγράμμως κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ψ, ὅταν ἐφάπτεται τοῦ τόξου « ἐπικαθήσεως » $\widehat{EZ\Gamma}$.

Ζητοῦνται :

α) Ποῖον τὸ διάγραμμα διαστήματος - χρόνου τῆς κινήσεως, τὴν ὁποίαν ἐκτελεῖ τὸ βάκτρον τῆς βαλβῖδος τοῦ σχήματος 4·5ζ, ἐὰν ὁ κνώδαξ περιστραφῆ κατὰ ἡμίσειαν πλήρη στροφήν ;

β) Ποῖον τὸ ἀντίστοιχον διάγραμμα ταχύτητος - χρόνου ;

γ) Ποία ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς ἐπιταχύνσεως τοῦ βάκτρου τῆς βαλβῖδος ;

δ) Ποία ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς ἐπιβραδύνσεως τοῦ βάκτρου τῆς βαλβῖδος ;

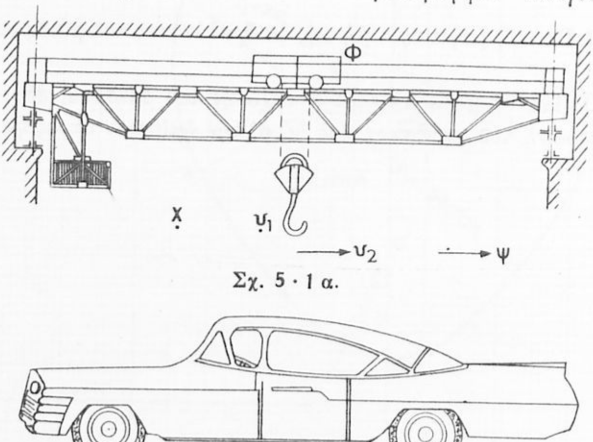
ε) Πῶς θὰ μεταβάλλεται ἡ ταχύτης τοῦ βάκτρου, ἐὰν συνεχισθῆ ἡ περιστροφὴ τοῦ κνώδακος καὶ δι' ἄλλην ἡμίσειαν στροφήν ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 5

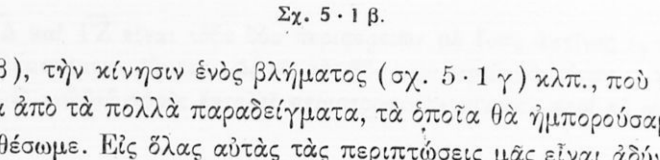
ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ

5·1 Εἰσαγωγή.

Ἀρκετὰ συχνὰ παρουσιάζεται ἡ ἀνάγκη νὰ μελετήσωμε ὡρισμένας κινήσεις, τὰς ὁποίας ἀδυνατοῦμε νὰ ἐντάξωμε εἰς μίαν ἀπὸ τὰς ἤδη γνωστάς μας κινήσεις, μὲ ἀποτέλεσμα νὰ ἀνατρέχωμε εἰς πειραματικὰς μεθόδους, αἱ ὁποῖαι, ἐνῷ προϋποθέτουν πολὺν χρόνον καὶ κόπον, δὲν εἶναι πάντοτε ἀρκετὰ ἀκριβεῖς. Εἰς τὴν κατηγορίαν αὐτὴν τῶν κινήσεων ἀναφέρομε μόνον τὴν κίνησιν τοῦ φορείου Φ μιᾶς γερανογεφύρας (σχ. 5·1 α), τὴν κίνησιν τῶν τροχῶν ἑνὸς αὐτοκινήτου, ποὺ ἐκτελεῖ ὁμοιόμορφον κίνησιν (σχ.

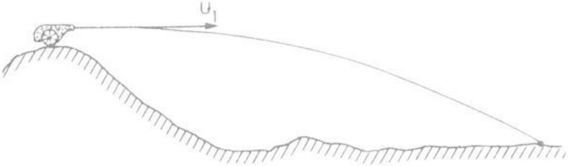


Σχ. 5·1 α.



Σχ. 5·1 β.

5·1 β), τὴν κίνησιν ἑνὸς βλήματος (σχ. 5·1 γ) κλπ., ποὺ εἶναι ὀλίγα ἀπὸ τὰ πολλὰ παραδείγματα, τὰ ὁποῖα θὰ ἠμπορούσαμε νὰ παραθέσωμε. Εἰς ὅλας αὐτὰς τὰς περιπτώσεις μᾶς εἶναι ἀδύνατον νὰ προχωρήσωμε κατὰ ἁπλοῦν τρόπον εἰς τὴν μελέτην τῶν κινήσεων μὲ γνώμονα μόνον τὰς γνώσεις, ποὺ ἔχομε ἀποκτήσει μέχρι στιγμῆς.



Σχ. 5 · 1 γ.

Ἐὰν ἐν τούτοις ἐμβαθύνωμε κάπως περισσότερον, θὰ παρατηρήσωμε ὅτι ὅλαι αὐταὶ αἱ κινήσεις εἶναι δυνατόν, κατὰ κάποιον τρόπον, νὰ θεωρηθοῦν ὡς « σύνθεσις » δύο ἁπλῶν κινήσεων. Πράγματι, τὸ φορεῖον τῆς γερανογεφύρας ἐκτελεῖ συγχρόνως δύο ἰσοταχεῖς κινήσεις: Ὡς ἀναπόσπαστον τμῆμα τῆς γερανογεφύρας κινεῖται μὲ ταχύτητα ἔστω $υ_1$ κατὰ τὴν κατεύθυνσιν x, κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον σχεδιάσεως (σχ. 5 · 1 α)· σχετικῶς ὅμως πρὸς τὴν ὑπόλοιπον γερανογέφυραν κινεῖται κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ψ μὲ ταχύτητα ἔστω $υ_2$. Αἱ δύο αὐταὶ κινήσεις λαμβάνουν χώραν ταυτοχρόνως. Ἔτσι, ἡ θέσις εἰς τὴν ὁποίαν θὰ φθάσῃ τὸ φορεῖον τῆς γερανογεφύρας μετὰ πάροδον χρόνου t, θὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς τιμὰς καὶ τῶν δύο ταχυτήτων $υ_1$ καὶ $υ_2$. Ἐὰν π.χ. ἡ $υ_1$ εἶναι πολὺ μεγαλυτέρα τῆς $υ_2$, ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι τὸ φορεῖον τῆς γερανογεφύρας θὰ μετακινηθῇ πολὺ περισσότερον κατὰ τὴν κατεύθυνσιν x ἀπὸ ὅ,τι κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ψ· ἐὰν ἀντιθέτως ἡ $υ_2$ εἶναι πολὺ μεγαλυτέρα τῆς $υ_1$, τὸ φορεῖον θὰ μετακινηθῇ πολὺ περισσότερον κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ψ ἀπὸ ὅ,τι κατὰ τὴν κατεύθυνσιν x. Εἰς τὴν εἰδικὴν βεβαίως περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν $υ_2 = 0$, θὰ μετακινηθῇ μόνον κατὰ τὴν κατεύθυνσιν x, ἐνῶ ἐὰν $υ_1 = 0$, θὰ μετακινηθῇ μόνον κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ψ. Εἰς τὰς δύο αὐτὰς εἰδικὰς περιπτώσεις θὰ ἐκτελῇ ἑπομένως ἰσοταχῆ κίνησιν. Εἰς ὅλας ὅμως τὰς περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας $\upsilon_1 \neq 0$ καὶ $\upsilon_2 \neq 0$, τὸ φορεῖον θὰ ἐκτελῇ «σύνθετον» κίνησιν, δηλαδὴ μίαν κίνησιν ποὺ ἠμπορεῖ νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο «συνιστώσας» ἰσοταχεῖς κινήσεις, αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν χώραν ταυτοχρόνως.

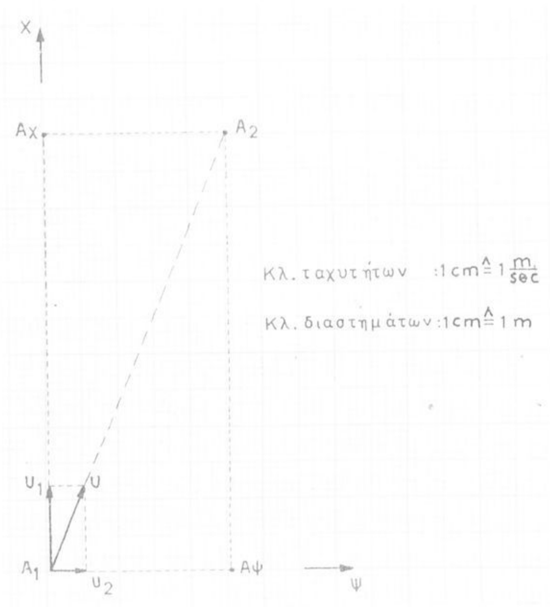
Οἱ τροχοὶ τοῦ αὐτοκινήτου (σχ. 5·1 β) ἐκτελοῦν ἐπίσης δύο κινήσεις ταυτοχρόνως, μίαν ὁμοιόμορφον (ὡς ἀναπόσπαστα τμήματα τοῦ αὐτοκινήτου) καὶ μίαν περιστροφικὴν (γύρω ἀπὸ τὸν ἄξονα συμμετρίας των).

Τέλος, ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ τὸ βλῆμα, ποὺ ἐκσφενδονίζει τὸ πυροβόλον τοῦ σχήματος 5·2 γ, ἐκτελεῖ δύο κινήσεις ταυτοχρόνως, μίαν ἰσοταχῆ κατὰ τὴν ὁριζοντίαν διεύθυνσιν μὲ ταχύτητα υ_1 καὶ μίαν ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνομένην μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα μηδενικὴν καὶ ἐπιτάχυνσιν ἴσην πρὸς τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος g κατὰ τὴν κατακόρυφον διεύθυνσιν.

Κάθε μία ἀπὸ τὰς περιγραφείσας κινήσεις εἶναι δηλαδὴ δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ ὡς «συνισταμένη» δύο ἐπὶ μέρους κινήσεων (δύο «συνιστωσῶν» κινήσεων). Ἡ διαπίστωσις αὐτὴ εἶναι ἐξαιρετικῶς σημαντική, διότι εἶναι ἀκριβῶς ἐκείνη, ἡ ὁποία θὰ μᾶς ὁδηγήσῃ εἰς τὸν τρόπον ἀντιμετωπίσεως καὶ μελέτης τῶν συνθέτων κινήσεων. Ὅπως θὰ ἐξετάσωμε εἰς τὰς ἀμέσως ἑπομένας παραγράφους, ἡ μελέτη μιᾶς συνθέτου κινήσεως ἀνάγεται κατὰ βάσιν εἰς τὴν μελέτην τῶν συνιστωσῶν της κινήσεων.

5·2 Κίνησις, ἡ ὁποία εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ ὡς σύνθεσις δύο ἰσοταχῶν κινήσεων.

Ἂς θεωρήσωμε καὶ πάλιν τὸ παράδειγμα τοῦ φορείου μιᾶς γερανογεφύρας, τὸ ὁποῖον ἀναφέραμε εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον. Ἔστω ὅτι αἱ ταχύτητες υ_1 καὶ υ_2 δίδονται ἴσαι πρὸς 1,2 m/sec καὶ 0,5 m/sec ἀντιστοίχως. Ὅπως γνωρίζομε, ἡ ταχύτης εἶναι ἕνα μέγεθος ἀνυσματικόν, εἶναι δηλαδὴ ἕνα μέγεθος, ποὺ δὲν χαρακτηρίζεται μόνον ἀπὸ ἀριθμητικὴν τιμήν, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ κατεύθυνσιν. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμε τὸ ὅλον φορεῖον διὰ τοῦ ὑλικοῦ σημείου A_1, καὶ ἐκλέξωμε ὡς κλίμακα μετρήσεως τῶν ταχυτήτων τὴν $1\ \text{cm} \triangleq 1\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, εἶναι πολὺ εὔκολον νὰ ἀπεικονίσωμε γραφικῶς τὰ δεδομένα τῆς ὑπὸ μελέτην κινήσεως (σχ. 5·2 α).



Σχ. 5·2 α.

Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μόνον τῆς ταχύτητος υ_1, τὸ φορεῖον τῆς γερανογεφύρας θὰ ἐκινεῖτο κατὰ τὴν κατεύθυνσιν x (μαζὶ μὲ ὁλόκληρον τὴν γερανογέφυραν), θὰ διήνυε δὲ μετὰ πάροδον π.χ. 5 sec διάστημα 6 m ($A_1 A_x = 1{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{sec}} \cdot 5\ \text{sec} = 6\ \text{m}$). Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δὲ μόνον τῆς υ_2, τὸ φορεῖον τῆς γερανογεφύρας θὰ ἐκινεῖτο κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ψ, (δηλαδὴ κατὰ μῆκος τῆς γερανογεφύρας) καὶ θὰ διήνυε μετὰ πάροδον 5 sec διάστημα 2,5 m ($A_1 A_\psi$

$= 0{,}5 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} \cdot 5\,\mathrm{sec} = 2{,}5\,\mathrm{m}$). Εἶναι ἑπομένως λογικὸν νὰ συμπεράνωμε ὅτι ὑπὸ τὴν ταυτόχρονον ἐπίδρασιν τῶν ταχυτήτων υ_1 καὶ υ_2 τὸ φορεῖον θὰ κινηθῇ κατὰ τὴν κατεύθυνσιν τῆς διαγωνίου τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμου $A_1\,A_x\,A_2\,A_\psi$, καὶ θὰ εὑρεθῇ μετὰ πάροδον 5 sec εἰς τὴν θέσιν A_2.

Τὸ συμπέρασμα αὐτὸ μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὰς ἑξῆς σημαντικὰς παρατηρήσεις:

1) Ἡ σύνθεσις δύο ἰσοταχῶν κινήσεων εἶναι ἐπίσης ἰσοταχὴς κίνησις.

2) Ἡ ταχύτης υ τῆς ἰσοταχοῦς αὐτῆς κινήσεως προκύπτει κατ᾽ ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ κατεύθυνσιν, ἂν συνθέσωμε μὲ τὴν γνωστὴν μέθοδον τοῦ παραλληλογράμμου, τὰς δύο συνιστώσας ταχύτητας (σχ. 5·2 α).

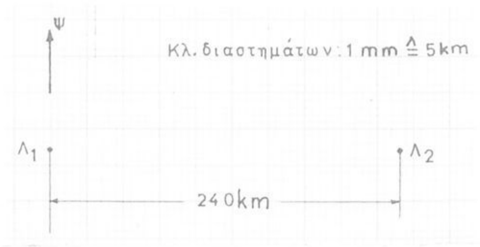
3) Ἡ θέσις, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ φθάσῃ τὸ κινούμενον σῶμα μετὰ παρέλευσιν χρόνου t, εὑρίσκεται, ἐὰν θεωρηθῇ ὅτι αἱ ἐπὶ μέρους κινήσεις, τὰς ὁποίας ἐκτελεῖ τὸ σῶμα, δὲν λαμβάνουν χώραν συγχρόνως, ἀλλὰ ἡ μία κατόπιν τῆς ἄλλης καὶ δὴ ἀνεξαρτήτως σειρᾶς διαδοχῆς. Ὑποτίθεται βεβαίως ὅτι κάθε μία ἀπὸ τὰς κινήσεις διαρκεῖ ἐπὶ χρόνον t, ἐπὶ ὅσον δηλαδὴ χρόνον διαρκεῖ ἡ σύνθετος κίνησις τοῦ σώματος. Ἔτσι, εἰς τὸ συγκεκριμένον παράδειγμα, τὸ ὁποῖον ἐξετάζομε, τὸ φορεῖον τῆς γερανογεφύρας θὰ φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν A_x, ἐὰν κινηθῇ κατὰ τὴν κατεύθυνσιν x ἐπὶ χρόνον $t = 5$ δευτερολέπτων ὑπὸ ταχύτητα $\upsilon_1 = 1{,}2\,\mathrm{m/sec}$· θὰ φθάσῃ δὲ ἐν συνεχείᾳ εἰς τὴν τελικήν του θέσιν A_2, ἐὰν κινηθῇ κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ψ ὑπὸ ταχύτητα $\upsilon_2 = 0{,}5\,\mathrm{m/sec}$ καὶ ἐπὶ χρόνον 5 πάλιν δευτερολέπτων. Εἰς τὸ ἴδιον ἐπίσης συμπέρασμα καταλήγομε, ἐὰν θεωρήσωμε ὅτι τὸ φορεῖον τῆς γερανογεφύρας κινεῖται πρῶτα κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ψ ἐπὶ χρόνον 5 δευτερολέπτων καὶ μετὰ κατὰ τὴν κατεύθυνσιν x ἐπὶ χρόνον 5 πάλιν δευτερολέπτων.

4) Ὁ χρόνος, κατὰ τὸν ὁποῖον διαρκεῖ ἡ σύνθετος κίνησις τοῦ σώματος, εἶναι ἴσος μὲ τὸν χρόνον, κατὰ τὸν ὁποῖον διαρκεῖ κάθε μία ἀπὸ τὰς συνιστώσας κινήσεις.

Ὅπως θὰ ἀντιληφθοῦμε καλύτερον εἰς τὴν συνέχειαν, αἱ τρεῖς τελευταῖαι ἀπὸ τὰς παρατηρήσεις αὐτὰς εἶναι γενικῆς ἰσχύος καὶ μᾶς βοηθοῦν πάρα πολὺ εἰς τὴν ἀντιμετώπισιν καὶ μελέτην συνθέτων κινήσεων.

Παράδειγμα.

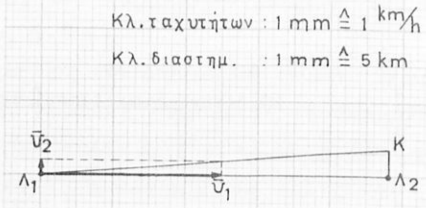
Ἕνα πλοῖον πρέπει νὰ καλύψῃ μὲ θαλασσοταραχὴν τὸ ταχύτερον δυνατὸν τὴν ἀπόστασιν τῶν 240 χιλιομέτρων, ποὺ χωρίζει τοὺς δύο λιμένας $Λ_1$ καὶ $Λ_2$ (σχ. 5·2β). Ἡ μεγίστη ταχύτης,



Σχ. 5·2β.

τὴν ὁποίαν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναπτύξῃ τὸ πλοῖον, δίδεται κατ᾽ ἀριθμητικὴν τιμὴν ἴση ἔστω πρὸς 25 km/h, δηλαδὴ ἴση πρὸς 14 περίπου ναυτικὰ μίλια τὴν ὥρα. Ἡ θαλασσοταραχὴ ὑπολογίζεται ὅτι θὰ προκαλῇ μετατόπισιν τοῦ πλοίου κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ψ μὲ ταχύτητα 2 km/h. Ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτάς, ποίαν κατεύθυνσιν ἐνδείκνυται νὰ δώσῃ ὁ κυβερνήτης εἰς τὸ πλοῖον;

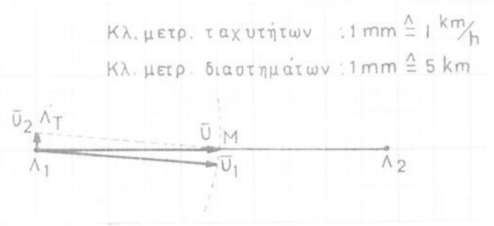
Ἐὰν ἀπαντήσωμε μὲ ἐπιπολαιότητα ὅτι ὁ κυβερνήτης πρέπει νὰ δώσῃ εἰς τὸ πλοῖον τὴν κατεύθυνσιν ἀπὸ $Λ_1$ εἰς $Λ_2$ (σχ. 5·2γ), ἡ ἀπάντησίς μας θὰ εἶναι ἐσφαλμένη, διότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ πλοῖον θὰ φθάση μετὰ χρόνον $t = \frac{s}{\upsilon_1} = \frac{240\,km}{25\,km/h}$ $= 9{,}6\,h$, ὄχι εἰς τὸν λιμένα Λ_2, ἀλλὰ εἰς τὸ σημεῖον Κ, ὅπου $(\Lambda_2 K) = \upsilon_2 \cdot t = 2\,\frac{km}{h} \times 9{,}6\,h = 19{,}2\,km$, ἀφοῦ κινηθῇ κατὰ τὴν κατεύθυνσιν τῆς εὐθείας $\Lambda_1 K$. Ἔτσι θὰ χρειασθῇ πρόσθετον χρόνον $\frac{19{,}2\,km}{\upsilon_1 - \upsilon_2} = \frac{19{,}2\,km}{23\,km/h} = 0{,}83\,h$ διὰ νὰ φθάση εἰς τὸν προορισμόν του, κινούμενον πλέον τώρα κατὰ τὴν κατεύθυνσιν τῆς $(K\Lambda_2)$. Συνολικῶς θὰ χρειασθῇ δηλαδὴ χρόνον περίπου 10 ὡρῶν καὶ 26 λεπτῶν διὰ νὰ φθάση ἀπὸ τὸν λιμένα Λ_1 εἰς τὸν λιμένα Λ_2 καὶ θὰ κινηθῇ ἐπὶ τῆς τεθλασμένης τροχιᾶς $\Lambda_1 K \Lambda_2$.



Σχ. 5 · 2 γ.

Λογικώτερον εἶναι νὰ σκεφθοῦμε ὅτι θὰ πρέπει ἡ συνισταμένη ταχύτης νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν κατεύθυνσιν $\Lambda_1\Lambda_2$. Ἔτσι, μὲ κέντρον τὸν ἄκρον Λ'_1 τοῦ ἀνύσματος $\bar{\upsilon}_2$ γράφομε περιφέρειαν κύκλου ἀκτῖνος ἴσης πρὸς τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν υ_1 (ἐννοεῖται ὑπὸ τὴν κλίμακα τοῦ σχεδίου), ἡ ὁποία τέμνει τὴν $\Lambda_1\Lambda_2$ εἰς τὸ σημεῖον Μ (σχ. 5 · 2 δ). Ἡ κατεύθυνσις, τὴν ὁποίαν ἐνδείκνυται νὰ δώσῃ ὁ κυβερνήτης εἰς τὸ πλοῖον του, δίδεται τότε ἀπὸ τὸ ἄνυσμα $\bar{\upsilon}_1$, ποὺ εὑρίσκεται εὐκολώτατα, ἐὰν συμπληρωθῇ ἡ χάραξις τοῦ παραλληλογράμμου. Τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος υ, μὲ τὴν ὁποίαν θὰ κινηθῇ τὸ πλοῖον, δίδεται συνεπῶς ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος $(\Lambda_1 M)$. Μὲ βάσιν τὴν κλίμακα τοῦ σχεδίου, εὑρίσκομε $\upsilon = 25\,km/h$ ($\triangleq 25\,mm$), ὁπότε ὁ χρόνος, ὁ ἀπαιτούμενος διὰ νὰ διανύσῃ τὸ πλοῖον τὴν ἀπόστασιν τῶν 240 χιλιομέτρων εἶναι ἴσος πρός:

$$t' = \frac{s}{\upsilon} = \frac{240\ \text{km}}{25\ \text{km/h}} = 9{,}6\ \text{h}.$$



Σχ. 5·2 δ.

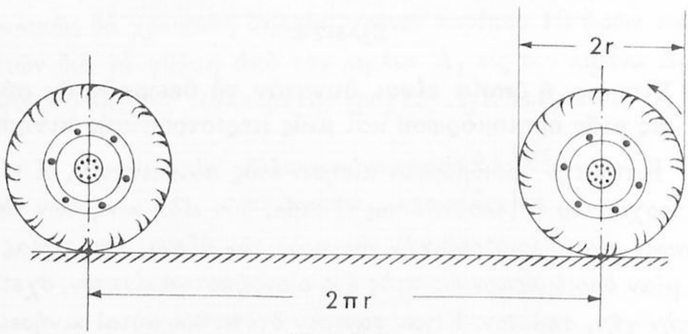
5·3 Κίνησις, ἡ ὁποία εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ ὡς σύνθεσις μιᾶς ὁμοιομόρφου καὶ μιᾶς περιστροφικῆς κινήσεως.

Κατὰ τὴν ὁμοιόμορφον κίνησιν ἑνὸς αὐτοκινήτου, οἱ τέσσαρες τροχοί του ἐκτελοῦν, ὅπως εἴπαμε, δύο εἴδη κινήσεων ταυτοχρόνως: μίαν περιστροφικὴν ὡς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας των καὶ μίαν ὁμοιόμορφον ὡς πρὸς ἕνα οἱονδήποτε ἀκίνητον, σχετικῶς μὲ τὴν γῆν, σημεῖον. Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ δύο αὐταὶ κινήσεις δὲν εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταξύ των· ἡ μία προϋποθέτει τὴν ἄλλην. Ὅλοι γνωρίζομε ὅτι, ὅσον ταχύτερον περιστρέφονται οἱ τροχοί, τόσον ταχύτερον κινεῖται τὸ αὐτοκίνητον καὶ ὅτι ἀντιστρόφως, ὅσον ταχύτερον κινεῖται τὸ αὐτοκίνητον, τόσον ταχύτερον θὰ περιστρέφωνται καὶ οἱ τροχοί του. Θὰ πρέπει συνεπῶς νὰ ὑπάρχῃ κάποια σχέσις, ἡ ὁποία νὰ συνδέῃ ποσοτικῶς τὴν περιστροφικὴν ταχύτητα τῶν τροχῶν μὲ τὴν ταχύτητα κινήσεως τοῦ αὐτοκινήτου.

Πράγματι, ἂς ὑποθέσωμε ὅτι οἱ τροχοὶ ἑνὸς αὐτοκινήτου περιστρέφονται μὲ ταχύτητα n στρ/min. Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ χρόνος, ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ τὴν συμπλήρωσιν μιᾶς πλήρους περιστροφῆς, εἶναι ἴσος πρὸς $\frac{1}{n}$ min. Κατὰ τὸν χρόνον αὐτὸν τοῦ $\frac{1}{n}$ min, τὸ αὐτοκίνητον, ὡς σύνολον, θὰ ἔχῃ διανύσῃ διάστημα ἴσον πρὸς $2\pi r$ (σχ. 5·3 α), ὅπου r ἡ ἀκτὶς τῶν τροχῶν του. Ἐφ' ὅσον λοιπὸν τὸ αὐτοκίνητον διήνυσε διάστημα $2\pi r$ εἰς χρόνον $\frac{1}{n}$ min, συμπεραίνομε ὅτι εἰς ἕνα λεπτὸν θὰ διανύση διάστημα ἴσον πρὸς $2\pi rn$ καὶ συνεπῶς ὅτι ἡ ταχύτης υ τῆς κινήσεώς του θὰ εἶναι ἴση πρός:

$$υ = 2\pi rn.$$

Ἡ ταχύτης αὐτὴ ἐκφράζεται εἰς m/min, ἐὰν ἡ ἀκτὶς r ἐκφρασθῇ εἰς m.



Σχ. 5·3 α.

Εἰς τὴν περίπτωσιν π.χ. κατὰ τὴν ὁποίαν $n = 450$ στρ/min καὶ $r = 0{,}37$ m ἡ ταχύτης κινήσεως τοῦ ὀχήματος θὰ εἶναι ἴση πρός:

$$υ = 2\pi r = 6{,}28 \cdot 0{,}37 \cdot 450 \frac{\text{m}}{\text{min}} = 6{,}28 \times 0{,}37 \times 450 \times$$

$$\times \frac{0{,}001\ \text{km}}{\frac{1}{60}\ \text{h}} = 6{,}28 \times 0{,}37 \times 0{,}45 \times 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 63 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Ἀντιστρόφως, ἐὰν ἕνα αὐτοκίνητον, τοῦ ὁποίου οἱ τροχοὶ ἔχουν διάμετρον 0,45 m, κινῆται ὁμοιομόρφως μὲ ταχύτητα $υ = 120$ km/h, ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τῶν τροχῶν του θὰ εἶναι ἴση πρός:

$$n = \frac{\upsilon}{2\,\pi r} = \frac{120\ \text{km/h}}{(3{,}14 \times 0{,}45)\ \text{m/στρ}} = \frac{120\,000\ \text{m/h}}{(3{,}14 \times 0{,}45)\ \text{m/στρ}} =$$

$$\frac{120\,000\ \text{στρ}}{3{,}14 \times 0{,}45\ \text{h}} = \frac{120\,000}{3{,}14 \times 0{,}45 \times 60}\ \frac{\text{στρ}}{\text{min}} = 1\,415\ \text{στρ/min}.$$

5·4 Κίνησις, ἡ ὁποία εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθῆ ὡς σύνθεσις μιᾶς ἰσοταχοῦς καὶ μιᾶς ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνομένης κινήσεως.

Χαρακτηριστικὸν παράδειγμα μιᾶς κινήσεως τοῦ εἴδους αὐτοῦ εἶναι ἡ κίνησις, τὴν ὁποίαν ἐκτελεῖ ἕνα σῶμα, ὅταν πίπτη ὑφιστάμενον τὴν ἐπίδρασιν τῆς γηίνης ἕλξεως καὶ ἔχη ἀρχικὴν ταχύτητα διάφορον τοῦ μηδενός.

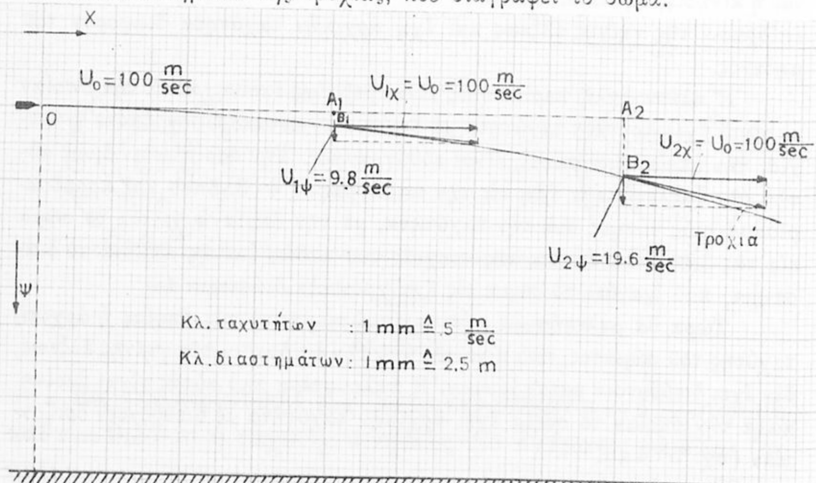
Ἡ πλέον ἁπλῆ περίπτωσις εἶναι βεβαίως ἐκείνη, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ σῶμα ἔχει ἀρχικὴν ταχύτητα μὲ διεύθυνσιν κατακόρυφον, ὁπότε ἡ τροχιά, τὴν ὁποίαν διαγράφει, εἶναι εὐθύγραμμος. Τὴν περίπτωσιν ὅμως αὐτὴν τὴν ἐμελετήσαμε ἤδη εἰς τὴν παράγραφον 4 · 3, ὅπου καὶ προσδιωρίσαμε τοὺς τύπους διὰ τὴν ταχύτητα, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ σῶμα εἰς τὰς διαφόρους θέσεις τῆς τροχιᾶς του καθὼς ἐπίσης καὶ διὰ τὸ διάστημα, ποὺ διανύει τὸ σῶμα εἰς ἕνα χρονικὸν διάστημα t.

Τώρα θὰ μελετήσωμε τὰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ σώματος, ποὺ κινεῖται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς γηίνης ἕλξεως, δὲν ἔχει διεύθυνσιν κατακόρυφον. Ἡ ἁπλουστέρα ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ἐκείνη, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ σῶμα ἔχει ἀρχικὴν ταχύτητα μὲ διεύθυνσιν ὁριζοντίαν (σχ. 5 · 4α).

Ὅπως ἀναφέραμε εἰς τὴν παράγραφον 5 · 1, εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθῆ ὅτι τὸ σῶμα ἐκτελεῖ ταυτοχρόνως δύο κινήσεις, μίαν ἰσοταχῆ μὲ ταχύτητα υ_0 ἴσην ἔστω πρὸς 100 m/sec κατὰ τὴν κατεύθυνσιν x καὶ μίαν ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνομένην κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ψ μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα μηδενικὴν καὶ ἐπιτάχυνσιν $g = 9{,}81\ \text{m/sec}^2$.

Διὰ τὴν μελέτην τῆς κινήσεως, ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμε τὰς τρεῖς τελευταίας παρατηρήσεις ποὺ ἔγιναν εἰς τὴν παράγραφον 5 · 2. Ὅπως θὰ ἰδοῦμε, ὁ καθορισμὸς τῆς τροχιᾶς, τὴν ὁποίαν διαγράφει τὸ σῶμα κατὰ τὴν κίνησίν του, καθὼς ἐπίσης καὶ ὁ προσδιορισμὸς τῆς ταχύτητός του εἰς ὅλας τὰς θέσεις τῆς τροχιᾶς του, δὲν παρουσιάζουν τότε καμμίαν δυσκολίαν.

Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι τὸ σῶμα ἐκτελεῖ κατ' ἀρχὰς μόνον τὴν ἰσοταχῆ κίνησιν, εἶναι φανερὸν ὅτι μετὰ πάροδον χρόνου $t = 1$ sec θὰ εὑρεθῇ εἰς τὴν θέσιν A_1, ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα $(OA_1) = \upsilon_0 \cdot t = 100 \frac{m}{sec} \cdot 1\ sec = 100\ m$. Ἐὰν κατόπιν ἀλλάξῃ κατεύθυνσιν καὶ κινηθῇ κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ψ ἐπὶ χρόνον ἑνὸς πάλιν δευτερολέπτου, θὰ διανύσῃ διάστημα $(A_1B_1) = 0 + \frac{1}{2} gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \frac{m}{sec^2},\ 1^2 sec^2 = 4{,}9\ m$ [βλ. τύπον (2) τῆς παραγράφου 4 · 3 (2)]. Ἔτσι, συμπεραίνομε ὅτι μετὰ πάροδον 1 sec τὸ σῶμα θὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν B_1. Τὸ B_1 ἀποτελεῖ συνεπῶς ἕνα σημεῖον τῆς τροχιᾶς, ποὺ διαγράφει τὸ σῶμα.



Σχ. 5 4 α.

Μὲ τοὺς ἰδίους ἀκριβῶς συλλογισμοὺς εὑρίσκομε ὅτι μετὰ πάροδον $t = 2$ sec τὸ σῶμα θὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν B_2, ὅπου $(OA_2) = \upsilon_0 \cdot t = 100 \frac{m}{sec} \times 2\ sec = 200\ m$ καὶ $(A_2B_2) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 =$

$$\frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \frac{m}{sec^2} \times 2^2\, sec^2 = 19{,}6\ m.$$

Σημεῖον πρὸς σημεῖον εἶναι λοιπὸν δυνατὸν νὰ χαράξωμε τὴν τροχιάν, ποὺ διαγράφει τὸ σῶμα κατὰ τὴν κίνησίν του. Ὅπως βλέπομε εἰς τὸ σχῆμα 5·4β, ἡ τροχιὰ δὲν εἶναι εὐθύγραμμος· τὸ σῶμα ἐκτελεῖ δηλαδὴ καμπυλόγραμμον κίνησιν.

Ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ σῶμα, ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν B_1 (σχ. 5·4α), προσδιορίζεται, ὅπως εἴπαμε εἰς τὴν παράγραφον 5·2, διὰ συνθέσεως τῶν δύο συνιστωσῶν ταχυτήτων:

$$\upsilon_{1x} = \upsilon_0 = 100 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} \text{ καὶ } \upsilon_{1\psi} = \upsilon_1 + gt = 0 + 9{,}8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2} \times 1\,\mathrm{sec} =$$

$$9{,}8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}.$$

[βλ. τύπον (1) τῆς παραγράφου 4·3 (2)]. Ἐντελῶς ἀντιστοίχως, ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ σῶμα, ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν B_2, προσδιορίζεται πάλιν κατ' ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ κατεύθυνσιν διὰ συνθέσεως τῶν δύο συνιστωσῶν ταχυτήτων $\upsilon_{2x} = \upsilon_0 = 100 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ καὶ

$$\upsilon_{2\psi} = \upsilon_1 + gt = 0 + 9{,}8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2} \times 2\,\mathrm{sec} = 19{,}6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}.$$

Ἡ μελέτη τῆς κινήσεως ἔχει οὐσιαστικῶς τελειώσει, ἀφοῦ γνωρίζομε τὴν ταχύτητα καὶ τὴν θέσιν τοῦ σώματος εἰς οἱανδήποτε χρονικὴν στιγμήν. Εἶναι ἐν τούτοις σκόπιμον νὰ γράψωμε ὅλους τοὺς συλλογισμούς, τοὺς ὁποίους ἐκάναμε μὲ τὴν μορφὴν τῶν γνωστῶν μας τύπων, ποὺ διέπουν τὰς δύο συνιστώσας κινήσεις τοῦ σώματος. Ἔτσι:

$\upsilon_{tx} = \upsilon_o$, εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης τῆς ταχύτητος τοῦ σώματος, ἡ ὁποία εἶναι προφανῶς ἀνεξάρτητος τοῦ χρόνου, ἀφοῦ ἡ ὁριζοντία κίνησις ὑπετέθη ἰσοταχής.

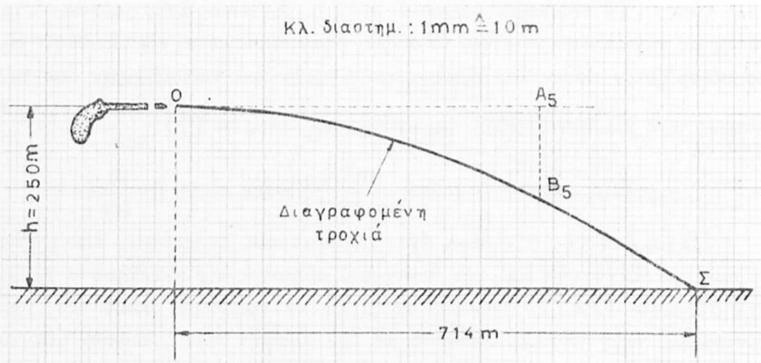
$\upsilon_{t\psi} = g \cdot t$, εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς κατακορύφου συνιστώσης τῆς ταχύτητος τοῦ σώματος, ἡ ὁποία ὅμως ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ t, δηλαδὴ ἀπὸ τὸν χρόνον, κατὰ τὸν ὁποῖον ἐκινήθη τὸ σῶμα μέχρις ὅτου φθάση εἰς τὴν θεωρουμένην θέσιν.

$s_{tx} = \upsilon_o t$, εἶναι τὸ διάστημα ποὺ διανύει τὸ σῶμα κατὰ τὴν κατεύθυνσιν x, ἐὰν κινηθῇ ἐπὶ χρόνον t.

$s_{t\psi} = \frac{1}{2} gt^2$, εἶναι τὸ διάστημα ποὺ διανύει τὸ σῶμα κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ψ, ἐὰν κινηθῇ ἐπὶ χρόνον t.

Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἀνωτέρω τύπων εὑρίσκομε π.χ. ὅτι, ἐὰν τὸ σῶμα κινηθῇ ἐπὶ χρόνον $t = 5\,\mathrm{sec}$, θὰ φθάση εἰς τὴν θέσιν B_5 (σχ.

5·4β), ὅπου $(OA_5) = s_{5x} = \upsilon_o t = 100 \dfrac{m}{sec} \times 5\,sec = 500\,m$ καὶ $(A_5B_5) = s_{5\psi} = \dfrac{1}{2} gt^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 9{,}8 \dfrac{m}{sec^2} \times 5^2 sec^2 = 122{,}5\,m$ καὶ ὅτι θὰ κινῆται τότε μὲ ταχύτητα ἴσην πρὸς τὴν συνισταμένην τῶν δύο ταχυτήτων $\upsilon_{5x} = \upsilon_o = 100 \dfrac{m}{sec}$ καὶ $\upsilon_{5\psi} = g \cdot t = 9{,}8 \dfrac{m}{sec^2} \times 5\ sec = 49 \dfrac{m}{sec}$ (σχ. 5·4γ).



Σχ. 5·4 β.

Τέλος εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ σῶμα θὰ προσκρούσῃ εἰς τὸ ἔδαφος ὅταν $s_{t\psi} = h$ (β σχ. 5·4β). Ἔτσι, ἐὰν εἰς τὸ συγκεκριμένον παράδειγμα, τὸ ὁποῖον ἐξετάζομε, ληφθῇ $h = 250\,m$, εὑρίσκομε ἀπὸ τὴν σχέσιν $\dfrac{1}{2} gt^2 = h$ ὅτι ἡ κίνησις τοῦ σώματος θὰ διαρκέσῃ συνολικῶς ἐπὶ χρόνον:

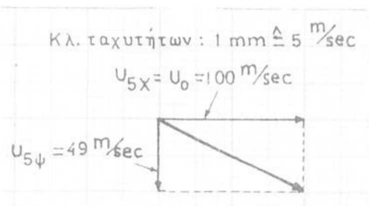
$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 250\,m}{9{,}8 \dfrac{m}{sec^2}}} = \sqrt{\frac{500\,sec}{9{,}8}} \simeq 7{,}14\,sec.$$

Ἡ θέσις Σ, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ εὑρεθῇ τότε τὸ σῶμα, προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν $s_{tx} = \upsilon_o \cdot t$, ὅπου $\upsilon_o = 100 \dfrac{m}{sec}$ καὶ $t = 7{,}14\,sec$ (σχ. 5·4β), ἡ δὲ ταχύτης του, ὡς ἡ συνισταμένη τῶν δύο ταχυτήτων

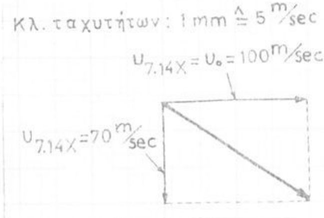
$$\upsilon_{tx} = \upsilon_o = 100\,\frac{\text{m}}{\text{sec}} \;\; \text{καὶ} \;\; \upsilon_{t\psi} = \upsilon_{7,14\,\psi} = \text{g}\cdot\text{t} = 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \times 7{,}14\,\text{sec} \simeq$$

$$= 70\,\frac{\text{m}}{\text{sec}} \;(\sigma\chi.\ 5\cdot 4\,\delta).$$

Εὐκόλως ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι ἡ κίνησις, τὴν ὁποίαν ἐμελετήσαμε, ἀποτελεῖ μερικὴν μόνον περίπτωσιν τῶν κινήσεων, ποὺ ἠμποροῦν νὰ ἀναλυθοῦν εἰς μίαν ἰσοταχῆ καὶ εἰς μίαν ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνομένην (ἢ βεβαίως ἐπιβραδυνομένην) κίνησιν. Πράγματι, ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ σώματος δὲν θὰ ἔχῃ ἐν γένει διεύθυνσιν παράλληλον πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, ἀλλὰ διεύθυνσιν, τὴν ὁποίαν θὰ σχηματίζῃ μία γωνίαν φ μὲ τὸ

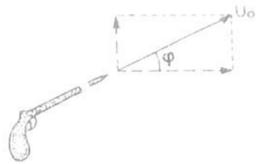


Σχ. 5·4 γ.



Σχ. 5·4 δ.

Σχ. 5·4 ε.



Σχ. 5·4 ζ.

ὁριζόντιον ἐπίπεδον (σχήματα 5·4 ε καὶ 5·4 ζ). Ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν γενικὴν ἀκόμη αὐτὴν περίπτωσιν, δὲν ἔχομε παρὰ νὰ ἀναλύσωμε τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0 τοῦ σώματος εἰς δύο συνιστώσας, μίαν ὁριζοντίαν καὶ μίαν κατακόρυφον καὶ νὰ ἐργασθοῦμε μὲ τὸν ἴδιον ἀκριβῶς τρόπον, ὅπως καὶ προηγουμένως.

Παραδείγματα :

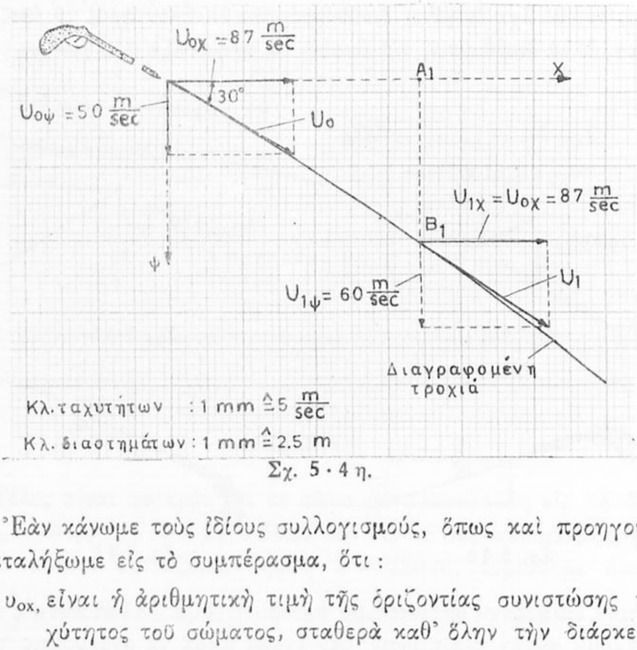
α) Ἔστω ὅτι πρέπει νὰ μελετήσωμε τὴν κίνισιν ἑνὸς βλήματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχικὴν ταχύτητα $\upsilon_o = 100\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ μὲ κατεύθυνσιν αὐτήν, πού φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 5·4ζ. Ἡ κίνησις αὐτὴ εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ ὡς σύνθεσις δύο κινήσεων, μιᾶς ἰσοταχοῦς μὲ ταχύτητα

$$\upsilon_{ox} = \upsilon_o \text{ συν } 30^0 = 100\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{m}{sec} \simeq 87\,\frac{m}{sec}$$ κατὰ τὴν κατεύθυνσιν x καὶ

μιᾶς ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνομένης, μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $\upsilon_{o\psi} = \upsilon_o$ ημ 30^0

$$= 100 \cdot \frac{1}{2}\,\frac{m}{sec} = 50\,\frac{m}{sec}$$ καὶ ἐπιτάχυνσιν $g = 9{,}8\,\frac{m}{sec^2}$ κατὰ τὴν

κατεύθυνσιν ψ.



Σχ. 5·4 η.

Ἐὰν κάνωμε τοὺς ἰδίους συλλογισμούς, ὅπως καὶ προηγουμένως, θὰ καταλήξωμε εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι :

$\upsilon_{tx} = \upsilon_{ox}$, εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης τῆς ταχύτητος τοῦ σώματος, σταθερὰ καθ᾿ ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως.

$\upsilon_{t\psi} = \upsilon_{o\psi} + gt$, εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς κατακορύφου συνιστώσης τῆς ταχύτητος τοῦ σώματος.

$s_{tx} = \upsilon_{o\psi} \cdot t$, εἶναι τὸ διάστημα ποὺ διανύει τὸ σῶμα κατὰ τὴν κατεύθυνσιν x, ἐὰν κινηθῇ ἐπὶ χρόνον t καὶ τέλος ὅτι

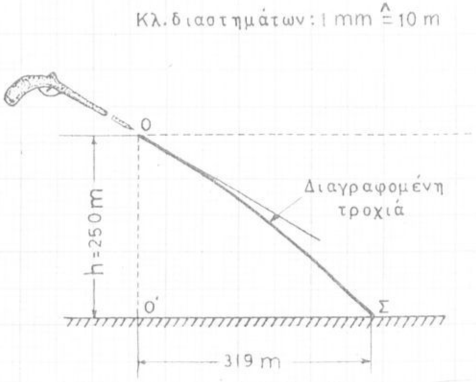
$s_{t\psi} = \upsilon_{o\psi} \cdot t + \frac{1}{2}\,gt^2$, εἶναι τὸ διάστημα ποὺ διανύει τὸ σῶμα κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ψ, ἐὰν κινηθῇ ἐπὶ χρόνον t.

Ἔτσι, ἐὰν τὸ σῶμα κινηθῆ ἐπὶ χρόνον $t = 1$ sec, θὰ φθάση εἰς τὴν θέσιν B_1 (σχ. 5·4η), ὅπου $(OA_1) = s_{tx} = \upsilon_{ox} \cdot t = 87 \dfrac{m}{sec} \times 1\ sec = 87\ m$ καὶ $(A_1 B_1) = s_{t\psi} = \upsilon_{o\psi} \cdot t + \dfrac{1}{2} gt^2 = 50 \dfrac{m}{sec} \cdot 1\ sec + \dfrac{1}{2} \cdot 9{,}8 \dfrac{m}{sec^2} \cdot 1^2\ sec^2 = 50\ m + 4{,}9\ m \simeq 55\ m$ καὶ θὰ κινῆται μὲ ταχύτητα υ_1 ἴσην πρὸς τὴν συνισταμένην τῶν δύο ταχυτήτων $\upsilon_{tx} = \upsilon_o = 87 \dfrac{m}{sec}$ καὶ $\upsilon_{t\psi} = \upsilon_{o\psi} + gt = 50 \dfrac{m}{sec} + 9{,}8 \dfrac{m}{sec^2} \cdot 1\ sec = 60 \dfrac{m}{sec}$.

Ὁ χρόνος ἀφ' ἑτέρου, κατὰ τὸν ὁποῖον θὰ διαρκέση ἡ κίνησις, προσδιορίζεται καὶ πάλιν ἀπὸ τὴν σχέσιν $s_{t\psi} = h$ (σχ. 5·4θ) δηλαδὴ ἀπὸ τὴν $gt^2 + 2\upsilon_{o\psi} \cdot t - 2h = 0$ ὡς:

$$t = \frac{-\upsilon_{o\psi} + \sqrt{\upsilon^2_{o\psi} + 2gh}}{g}.$$

Ἐὰν θέσωμε εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν $\upsilon_{o\psi} = 50 \dfrac{m}{sec}$, $g = 9{,}8 \dfrac{m}{sec^2}$ καὶ $h = 250$ m, εὑρίσκομε $t = 3{,}67$ sec.



Σχ. 5·4 θ.

Ὅπως εἶναι λογικόν, ἡ τιμὴ αὐτὴ εἶναι πολὺ μικροτέρα ἀπὸ τὴν τιμὴν τῶν 7,14 sec, ποὺ εὑρέθη εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ σώματος εἶχε διεύθυνσιν ὁριζοντίαν. Ἡ θέσις Σ, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ εὑρεθῆ τὸ βλῆμα, κατὰ τὴν πρόσκρουσίν του ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῆ μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου:

$$(O'\Sigma) = s_{tx} = \upsilon_{ox} \cdot t$$

ὅπου $\upsilon_{ox} = 87$ m/sec καὶ $t = 3{,}67$ sec.

β) Ἔστω τώρα ὅτι ἔχομε νὰ μελετήσωμε τὴν περίπτωσιν τῆς κινήσεως, ποὺ παρίσταται εἰς τὸ σχῆμα 5·4ι. Διαισθανόμεθα ὅτι κατὰ τὸ πρῶτον στάδιον τῆς κινήσεώς του, τὸ βλῆμα ἐκτελεῖ ταυτοχρόνως μίαν ἰσοταχῆ κίνησιν μὲ ταχύτητα $\upsilon_{ox} = 87$ m/sec κατὰ τὴν κατεύθυνσιν x καὶ μίαν δμοιομόρφως ἐπιβραδυνομένην κίνησιν μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $\upsilon_{o\psi'} = 50$ m/sec καὶ ἐπιβράδυνσιν $g = 9{,}8$ m/sec^2 κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ψ′. Μόλις ὅμως φθάση εἰς τὸ ὑψηλότερον σημεῖον τῆς τροχιᾶς του Κ, μόλις δηλαδὴ μηδενισθῆ ἡ ταχύτης του $\upsilon_{t\psi'}$, θὰ ἀρχίση πλέον τὸ βλῆμα νὰ ἐκτελῆ ταυτοχρόνως μίαν ἰσοταχῆ κίνησιν, ὅπως προηγουμένως, κατὰ τὴν κατεύθυνσιν x καὶ μίαν δμοιομόρφως ἐπιταχυνομένην μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα μηδενικὴν καὶ ἐπιτάχυνσιν $g = 9{,}8$ m/sec^2 κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ψ.

Αἱ ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι διέπουν τὴν κίνησιν αὐτήν, εἶναι αἱ ἑξῆς:

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_{tx} &= \upsilon_{ox} \\ \upsilon_{t\psi'} &= \upsilon_{o\psi'} - gt \\ s_{tx} &= \upsilon_{ox} \cdot t \\ s_{t\psi'} &= \upsilon_{o\psi'} \cdot t - \frac{1}{2} gt^2 \end{aligned}\right\} \text{διὰ } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\upsilon_{o\psi'}}{g} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_{tx} &= \upsilon_{ox} \\ \upsilon_{t\psi} &= g\left(t - \frac{\upsilon_{o\psi'}}{g}\right) \\ s_{tx} &= \upsilon_{o\psi} \cdot t \\ s_{t\psi'} &= \upsilon_{o\psi'} \cdot t + \frac{1}{2} gt^2 - \left(\upsilon_{o\psi'} \cdot t \cdot + \frac{1}{2} gt^2\right) \end{aligned}\right\} \text{διὰ } \frac{\upsilon_{o\psi'}}{g} \leqslant t \leqslant 2\frac{\upsilon_{o\psi'}}{g} \qquad (2)$$

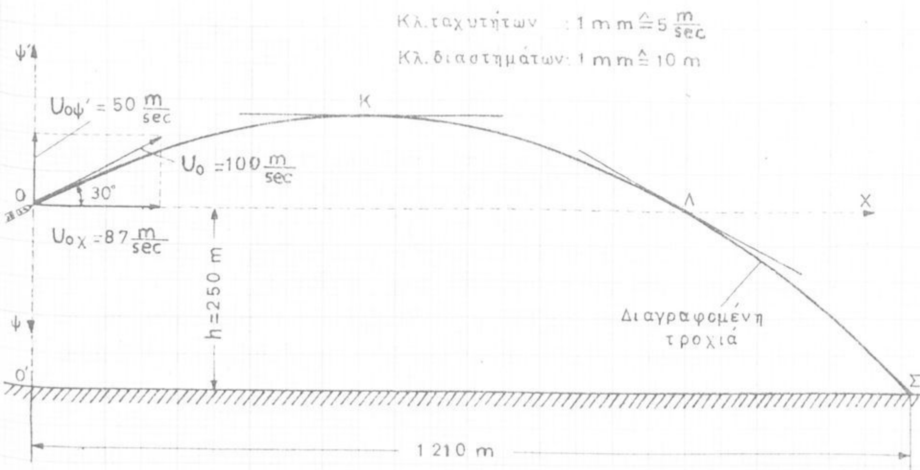
καὶ

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_{tx} &= \upsilon_{ox} \\ \upsilon_{t\psi} &= g\left(t - \frac{\upsilon_{o\psi'}}{g}\right) \\ s_{tx} &= \upsilon_{ox} \cdot t \\ s_{t\psi} &= \frac{1}{2} gt^2 - \upsilon'_{o\psi} \cdot t \end{aligned}\right\} \text{διὰ } t \geqslant 2\frac{\upsilon_{o\psi'}}{g} \qquad (3)$$

ὅπου :

$\frac{\upsilon_{o\psi'}}{g}$ εἶναι ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ φθάσῃ τὸ βλῆμα ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς του θέσεως O μέχρι τοῦ ὑψηλοτέρου σημείου K τῆς τροχιᾶς του (σχ. 5·4 ι). Αἱ ἐξισώσεις (1) συνεπῶς ἀναφέρονται εἰς τὴν χρονικὴν περίοδον κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ βλῆμα ἐκτελεῖ ἐπιβραδυνομένην κίνησιν.

$2\frac{\upsilon_{o\psi'}}{g}$ εἶναι ὁ χρόνος, ὁποῖος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ φθάσῃ τὸ βλῆμα ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς του θέσεως O μέχρι τῆς θέσεως Λ, ποὺ εὑρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον ὡς καὶ τὸ σημεῖον O (σχ. 5·4 ι). Αἱ ἐξισώσεις (2) ἀναφέρονται συνεπῶς εἰς τὴν κίνησιν, τὴν ὁποίαν ἐκτελεῖ τὸ βλῆμα ἀπὸ τοῦ σημείου K μέχρι τοῦ σημείου Λ. Ἀξίζει νὰ παρατηρήσωμε ὅτι ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα τῆς ταχύτητος τοῦ βλήματος, ὅταν τοῦτο διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Λ, εἶναι ἴση κατ᾽ ἀριθμητικὴν τιμὴν μὲ τὴν $\upsilon_{o\psi'}$.



Σχ. 5·4 ι.

Αἱ ἐξισώσεις (3) ἀναφέρονται τέλος εἰς τὴν κίνησιν τὴν ὁποίαν ἐκτελεῖ τὸ σῶμα ἀπὸ τοῦ Λ μέχρι τῆς τελικῆς του θέσεως Σ (Σχ. 5·4 θ).

Ἐὰν θέσωμε $s_{t\psi} = \frac{1}{2} gt^2 - \upsilon_{o\psi'} \cdot t = h$, εὑρίσκομε, καθὼς καὶ προηγουμένως, τὸν συνολικὸν χρόνον κατὰ τὸν ὁποῖον διαρκεῖ ἡ κίνησις τοῦ βλήματος. Ἔτσι, διὰ $\upsilon_{o\psi'} = 50 \frac{m}{sec}$, $g = 9{,}8 \frac{m}{sec^2}$ καὶ $h = 250\ m$, ἔχομε:

$$4{,}9\,t^2 - 50\,t - 250 = 0, \quad \text{ὁπότε}$$

$$t = \frac{25 + \sqrt{25^2 + 4{,}9 \cdot 250}}{4{,}9} = \frac{25 + \sqrt{1\,850}}{4{,}9} = \frac{68}{4{,}9} \quad \text{ἢ τέλος}$$

$$t = 13{,}9\ sec.$$

Ὁ συνολικὸς χρόνος, κατὰ τὸν ὁποῖον διαρκεῖ ἡ κίνησις τοῦ βλήματος, ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ ὅ,τι εἰς τὰς δύο προηγουμένας περιπτώσεις. Ἡ θέσις δὲ Σ, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ εὑρεθῇ τὸ βλῆμα κατὰ τὴν πρόσκρουσίν του εἰς τὸ ἔδαφος, εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ πάλιν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου:

$$(O'\Sigma) = s_{tx} = \upsilon_{ox} \cdot t$$

ὅπου $\upsilon_o = 87\ m/sec$ καὶ $t = 3{,}67\ sec$.

5·5 Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

1. Ἕνας κολυμβητὴς ἐπιθυμεῖ νὰ διασχίση κατὰ πλάτος ἕνα ποταμόν, τοῦ ὁποίου αἱ ὄχθαι ἀπέχουν μεταξύ των ἀπόστασιν $l = 80\ m$.

Δεδομένα: α) Ὁ κολυμβητὴς ἔχει λάβει ἐπανειλημμένως μέρος εἰς ἀγῶνας, ποὺ τελοῦνται εἰς κλειστὸν κολυμβητήριον. Συνήθως διανύει τὴν ἀπόστασιν τῶν 100 μέτρων εἰς χρόνον 1,04 min.

β) Ἐὰν ἀφεθῇ ἕνα ξύλινον ἀντικείμενον νὰ παρασυρθῇ ἀπὸ τὸ ρεῦμα τοῦ ποταμοῦ, διανύει ἀπόστασιν 50 μέτρων εἰς χρόνον 0,85 min.

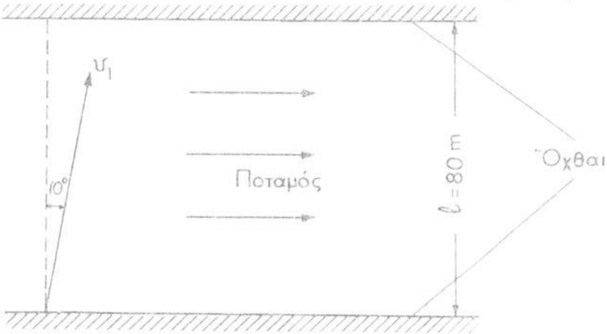
Ζητοῦνται: α) Ποία εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ υ_1 (εἰς $\frac{m}{sec}$) τῆς ταχύτητος, μὲ τὴν ὁποίαν κολυμβᾷ ὁ κολυμβητὴς εἰς τὸ κλειστὸν κολυμβητήριον;

β) Ποία εἶναι ἡ ἀριθμημτική τιμὴ υ_2 (εἰς $\frac{m}{sec}$), τῆς ταχύτητος μὲ τὴν ὁποίαν ρέει τὸ ὕδωρ τοῦ ποταμοῦ;

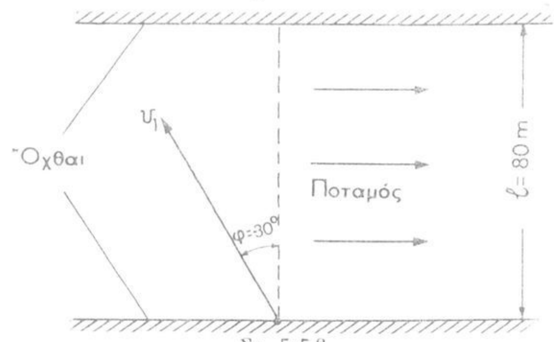
γ) Ἐπὶ πόσον χρόνον θὰ παραμείνη ὁ κολυμβητὴς ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ἐὰν προσπαθήσῃ νὰ διασχίσῃ τὸν ποταμὸν κατὰ τὴν κατεύθυνσιν, ποὺ φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 5·5 α. [50,6 sec]

δ) Ἐπὶ πόσον χρόνον θὰ παραμείνῃ ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ἐὰν προσπαθήσῃ νὰ διασχίσῃ τὸν ποταμὸν κατὰ τὴν κατεύθυνσιν, ποὺ φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 5·5 β. [57,5 sec]

ε) Νὰ σχεδιασθῇ τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 5·5 γ, ὅπου φ εἶναι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ κατεύθυνσις τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος υ_1 τοῦ κολυμβητοῦ μὲ τὴν κάθετον εἰς τὰς παραλλήλους ὄχθας



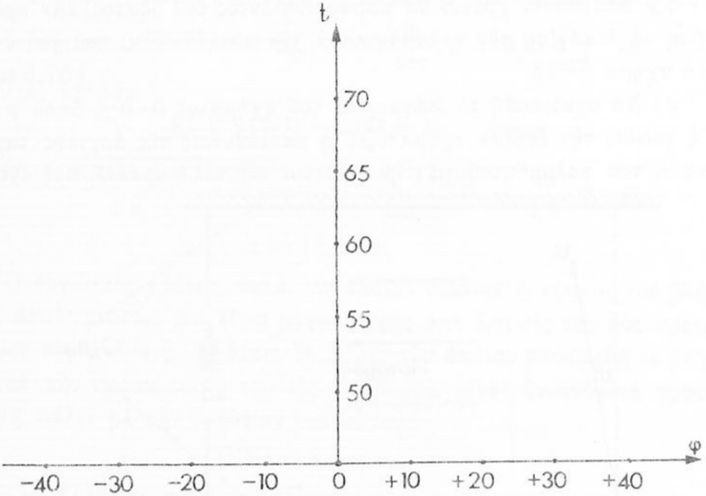
Σχ. 5·5 α.



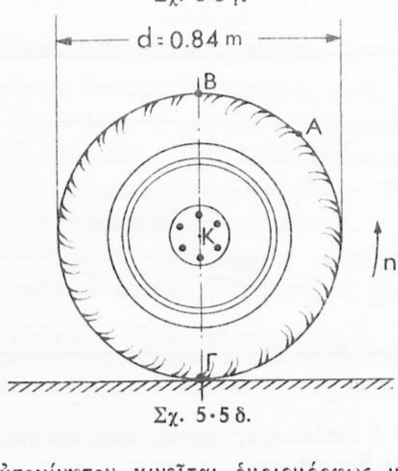
Σχ. 5·5 β.

τοῦ ποταμοῦ καὶ t ὁ ἀντίστοιχος χρόνος, κατὰ τὸν ὁποῖον θὰ παραμείνῃ ὁ κολυμβητὴς ἐντὸς τοῦ ὕδατος

στ) Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαγράμματος αὐτοῦ νὰ προσδιορισθῇ ἡ κατεύθυνσις, κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ κολυμβήσῃ ὁ κολυμβητής, ὥστε νὰ παραμείνῃ ἐντὸς τοῦ ὕδατος ὅσον τὸ δυνατὸν ὀλιγώτερον. Ποία θὰ εἶναι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ταχύτης τοῦ κολυμβητοῦ ἐν σχέσει μὲ τὰς ὄχθας τοῦ ποταμοῦ;



Σχ. 5·5 γ.



Σχ. 5·5 δ.

2. Ἕνα αὐτοκίνητον κινεῖται ὁμοιομόρφως μὲ ταχύτητα $\upsilon = 60\ \dfrac{km}{h}$. Ἡ ἐξωτερικὴ διάμετρος d τῶν τροχῶν του εἶναι ἴση πρὸς 0,84 m. Ζητοῦνται (σχ. 5·5 δ):

α) Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης n τῶν τροχῶν τοῦ αὐτοκινήτου εἰς στρ/min.

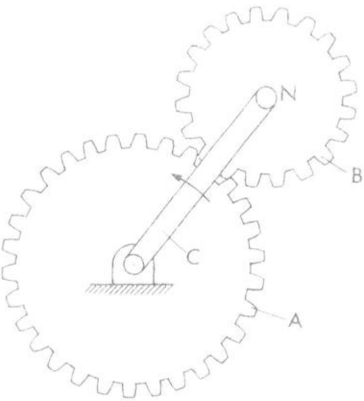
β) Ἡ ταχύτης τοῦ σημείου Α σχετικῶς μὲ τὸν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ τροχοῦ κατ᾽ ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ κατεύθυνσιν.

γ) Ἡ ταχύτης τοῦ σημείου Β τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ σχετικῶς μὲ τὸ ἀκίνητον κατάστρωμα τῆς ὁδοῦ (θὰ εὑρεθῇ ὡς συνισταμένη δύο ταχυτήτων).

δ) Ἡ ταχύτης τοῦ σημείου Γ σχετικῶς μὲ τὸ ἀκίνητον κατάστρωμα τῆς ὁδοῦ.

ε) Ἡ ταχύτης τοῦ κέντρου Κ τοῦ τροχοῦ σχετικῶς μὲ τὸ ἀκίνητον κατάστρωμα τῆς ὁδοῦ.

3. Εἰς τὸν μηχανισμὸν τοῦ σχήματος 5·5 ε, ὁ ὀδοντωτὸς τροχὸς Α εἶναι ἀκίνητος καὶ ἔχει ἀρχικὴν διάμετρον $d_A = 150$ mm, ὁ τροχὸς Β ἔχει ἀρχικὴν διάμετρον $d_B = 100$ mm, ἡ δὲ ῥάβδος c ἐκτελεῖ περιστροφικὴν κίνησιν μὲ ταχύτητα $n_C = 200$ στρ/min.



Σχ. 5·5 ε.

Ζητοῦνται:

α) Τί εἴδους κίνησιν ἐκτελεῖ τὸ σημεῖον Ν;

β) Ποία ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος τοῦ σημείου Ν;

γ) Τί εἴδους κίνησιν ἐκτελεῖ ὁ ὀδοντωτὸς τροχὸς Β;

δ) Ποία ἡ περιστροφικὴ ταχύτης n_B τοῦ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ Β;

Εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ ἡ ταχύτης αὐτὴ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τὸν ὁποῖον προσδιωρίσαμε εἰς τὴν παράγραφον 5·3;

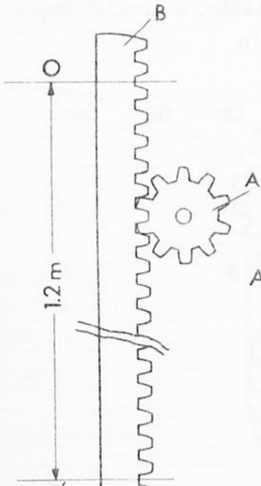
ε) Πῶς συνδέεται ὁ λόγος $\frac{n_B}{n_C}$ μὲ τὰ μεγέθη d_A καὶ d_B;

4. Ὁ ὀδοντωτὸς κανὼν B τοῦ σχήματος 5·5ζ παραμένει ἀκίνητος. Ὁ τροχὸς A τίθεται εἰς κίνησιν καὶ φθάνει ἀπὸ τὴν θέσιν O εἰς τὴν θέσιν O′ ἐντὸς χρονικοῦ διαστήματος 12,5 sec. Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ ἀρχικὴ διάμετρος τοῦ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ εἶναι $d_A = 30$ mm, ἡ δὲ ἀπόστασις (OO′) ἴση πρὸς 1,2 m, ζητοῦνται:

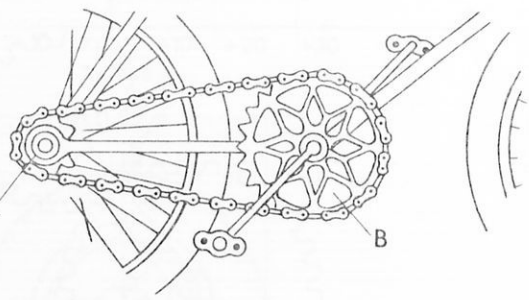
α) Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος τοῦ κέντρου τοῦ τροχοῦ.

β) Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τοῦ τροχοῦ εἰς στρ/sec.

5. Αἱ διάμετροι τῶν δύο ἁλυσοτροχῶν ἑνὸς ποδηλάτου εἶναι ἀντιστοίχως $d_A = 6$ cm καὶ $d_B = 18$ cm, ἡ δὲ διάμετρος τῶν τροχῶν του



Σχ. 5·5ζ.



Σχ. 5·5η.

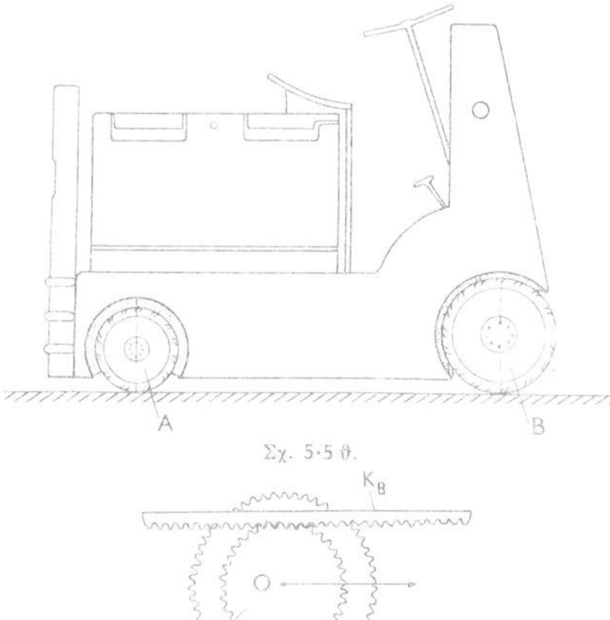
$d = 65$ cm (σχ. 5·5η). Ποία ἡ περιστροφικὴ ταχύτης, τὴν ὁποίαν προσδίδει ὁ ποδηλάτης εἰς τὸν ἁλυσοτροχὸν B (εἰς στρ/min), ὅταν κινῆται ἐπὶ ὁριζοντίας ὁδοῦ μὲ ταχύτητα $υ = 40$ km/h; [109 στρ/min].

6. Ἕνα ὄχημα κινεῖται ἰσοταχῶς μὲ ταχύτητα υ (σχ. 5·5θ). Οἱ κινητήριοι τροχοί του A περιστρέφονται μὲ ταχύτητα $n_A = 175$ στρ/min.

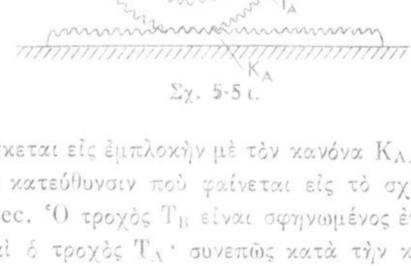
Ποία εἶναι ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τῶν ἐμπροσθίων τροχῶν τοῦ ὀχήματος;

Αἱ διάμετροι τῶν ὀπισθίων καὶ ἐμπροσθίων τροχῶν τοῦ ὀχήματος εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς $d_A = 300$ mm καὶ $d_B = 420$ mm.

7. Εἰς τὸ σχῆμα 5·5 ι παρίσταται ἕνας μηχανισμός, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς δύο ὀδοντωτοὺς κανόνας K_A, K_B καὶ τοὺς δύο ὀδοντωτοὺς τροχοὺς T_A, T_B. Ὁ κανὼν K_A παραμένει συνεχῶς ἀκίνητος. Ὁ



Σχ. 5·5 θ.



Σχ. 5·5 ι.

τροχὸς T_A εὑρίσκεται εἰς ἐμπλοκὴν μὲ τὸν κανόνα K_A καὶ κινεῖται ἰσοταχῶς κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ποὺ φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 5·5 ι μὲ ταχύτητα 20 cm/sec. Ὁ τροχὸς T_B εἶναι σφηνωμένος ἐπάνω εἰς τὸν ἴδιον ἄξονα, ὅπως καὶ ὁ τροχὸς T_A· συνεπῶς κατὰ τὴν κίνησίν του παρασύρει εἰς κίνησιν καὶ τὸν ὀδοντωτὸν κανόνα K_B.

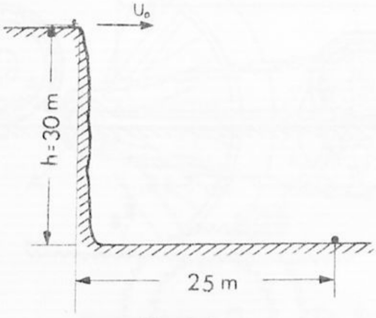
Ζητοῦνται: α) Ποία ἡ περιστροφικὴ ταχύτης n_A τοῦ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ T_A;

β) Ποία ἡ περιστροφικὴ ταχύτης n_B τοῦ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ T_B;

γ) Ἐὰν πρὸς στιγμὴν ὑποτεθῇ ὅτι ὁ ὀδοντωτὸς τροχὸς T_B ἐκτελεῖ μόνον περιστροφικὴν κίνησιν μὲ ταχύτητα n_B, ποία θὰ εἶναι τότε ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται ὁ ὀδοντωτὸς κανὼν K_B (ἀριθμητικὴ τιμὴ καὶ κατεύθυνσις). Ποία εἶναι μὲ ἄλλους λόγους ἡ ταχύτης τοῦ ὀδοντωτοῦ κανόνος K_B σχετικῶς μὲ τὸ κέντρον O τοῦ τροχοῦ T_B;

δ) Ποία εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ὀδοντωτοῦ κανόνος K_B σχετικῶς μὲ τὸν ὀδοντωτὸν κανόνα K_A;

8. Ἕνα παιδὶ ἀπὸ τὸ ἄκρον ἑνὸς κατακορύφου κρημνοῦ ὕψους 30 μέτρων πετᾷ μίαν πέτραν μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $υ_0$ καὶ μὲ κατεύθυνσιν ὁριζοντίαν. Δοθέντος ὅτι ἡ πέτρα κτυπᾷ τὸ ἔδαφος εἰς ὁριζοντίαν ἀπόστασιν 25 μέτρων ἀπὸ τὸ χεῖλος τοῦ κρημνοῦ (σχ. 5·5 κ) ζητεῖται νὰ προσδιορισθοῦν:



Σχ. 5·5 κ.

α) Ἡ ἀρχικὴ ταχύτης $υ_0$ τῆς πέτρας.

β) Ἡ τροχιά, ποὺ διαγράφει ἡ πέτρα κατὰ τὴν κίνησίν της.

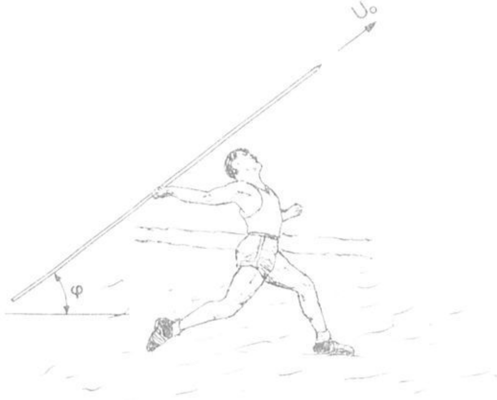
γ) Τὸ διάγραμμα ταχύτητος - χρόνου τῆς κινήσεως.

δ) Τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον θὰ διανύσῃ ἡ πέτρα, μέχρις ὅτου προσκρούσῃ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.

9. Ἕνας ἀθλητὴς εἶναι εἰς θέσιν νὰ προσδώσῃ εἰς τὸ ἀκόντιον ἀρχικὴν ταχύτητα $υ_0 = 30$ m/sec. Νὰ χαραχθῇ διάγραμμα, τὸ ὁποῖον νὰ μᾶς δεικνύῃ τὴν ἀπόστασιν, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ φθάσῃ τὸ ἀκόντιον, ἀπὸ τοῦ σημείου ἐξακοντίσεώς του διὰ διαφόρους τιμὰς τῆς γωνίας φ,

τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ κατεύθυνσις τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον (σχ. 5·5λ). Ὑπὸ ποίαν γωνίαν ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον ἐνδείκνυται νὰ ρίψῃ ὁ ἀθλητὴς τὸ ἀκόντιον, ἐὰν ἐπιθυμῇ νὰ διακριθῇ εἰς ἀγῶνας; (ὑπὸ γωνίαν 45°).

Σημείωσις: Πρὸς ἁπλούστευσιν τῶν ὑπολογισμῶν νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἡ θέσις ἐκκινήσεως τοῦ ἀκοντίου καὶ ἡ θέσις προσκρούσεώς του εἰς τὸ ἔδαφος, εὑρίσκονται εἰς τὸ ἴδιον ὁριζόντιον ἐπίπεδον.



Σχ. 5·5λ.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

(Παρακαλῶ νὰ διορθωθοῦν πρὶν χρησιμοποιηθῆ τὸ βιβλίον)

Σελ. 5 Κεφαλίδα. Ἀντὶ « 1·3 Τροχιὰ » γράφε « 1·2 Τροχιὰ »

» 9 στίχος 6 ἐκ τῶν ἄνω. Ἀντὶ « (α ἕως ζ) » γράφε « (α ἕως η) »

» 24 » 13 » » » Ἀντὶ « 12 mim » γράφε « 12 min »

» 39 » 4 ἐκ τῶν κάτω. Ἀντὶ «προδιορίζομε» γράφε «προσδιορίζομε»

» 72 » 3 ἐκ τῶν ἄνω. Ἀντὶ « $\frac{1000}{3,14} = \frac{75}{55} = 435$ στρ/min »

γράφε « $\frac{1000}{3,14} \cdot \frac{75}{55} \simeq 435$ στρ/min »

» 90 » 2 ἐκ τῶν κάτω. Ἀντὶ « ἐλαττώσσωμε » γράφε « ἐλαττώσωμε »

» 111 Κεφαλίδα. Ἀντὶ « κινήσεις » γράφε « κινήσεως »

» 113 στ. 11 ἐκ τῶν κάτω. Ἀντὶ « ἠλεκρο- » γράφε « ἠλεκτρο- »

» 112 στ. 1 » » ἄνω. Ἀντὶ « συνδιασμοῦ » γράφε « συνδυασμοῦ »

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ – ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ : ΑΣΠΙΩΤΗ ΕΛΚΑ – ΜΕΤΑΛΛΕΙΑ ΧΡΩΜΙΟΥ Α.Ε.