ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
Τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΝ ΤΩ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩ ΣΧΟΛΕΙΩ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΠΟΣΤΟΛΟΥ Κ. ΣΤΑΥΡΑΚΑ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΔΙΑ ΤΑΣ
ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑΣ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ ΣΧΟΛΑΣ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α.Ε.
38 — ΟΔΟΣ ΤΣΩΡΤΣΙΛ — 38
1953

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
Τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΝ ΤΩ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩ ΣΧΟΛΕΙΩ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΠΟΣΤΟΛΟΥ Κ. ΣΤΑΥΡΑΚΑ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΔΙΑ ΤΑΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑΣ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ ΣΧΟΛΑΣ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α. Ε.
38 — ΟΔΟΣ ΤΣΩΡΤΣΙΛ — 38
1953

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουν τὰς ὑπογραφὰς τῶν συγγραφέων καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ βιβλιοπωλείου τῆς «Ἑστίας».

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΕΣΤΙΑΣ
Ι.Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & Σ^ΑΣ
Α.Ε.
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

Τύποις: Ἑλληνικῆς Ἐκδοτικῆς Ἑταιρείας Α.Ε. Παπαδιαμαντοπούλου 44, Ἀθῆναι.
Ἐκμετάλλευσις Ἀλεξάνδρου Φιλοπούλου.

ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῆς ἀριθμήσεως.

1. Πόσοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι ἐν τῷ δεκαδικῷ συστήματι γράφονται διὰ δύο, τριῶν, τεσσάρων ψηφίων; Καὶ πόσοι εἶναι οἱ γραφόμενοι ἐν αὐτῷ διὰ ν ψηφίων; (Ἀπ. 90 ἢ 9 δεκάδες, 9 ἑκ., 9 χιλ. καὶ γενικῶς 9 μονάδες ν τάξεως).

2. *Δίδεται ὁ ἀριθμὸς 43652· ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται οὗτος, ἂν παρεμβάλωμεν 1, 2, 3, ... ν μηδενικὰ μεταξὺ τοῦ 6 καὶ τοῦ 5;*

Ἂν παρεμβάλωμεν 1 μηδενικόν, ἑκάστη ἑκατοντὰς γίνεται χιλιάς· ὥστε ὁ ἀριθμὸς αὐξάνεται κατὰ 436×900, ἂν δὲ παρεμβάλωμεν 2 μηδενικά, ὁ ἀριθμὸς αὐξάν ται κατὰ 436×9900, ἂν δὲ παρεμβάλωμεν 3 μηδενικὰ ὁ ἀριθμὸς αὐξάνεται κατὰ 436×99900 κ.ο.κ.

3. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ οἱουδήποτε τριψηφίου ἀριθμοῦ, οὗ τὰ ψηφία εἶναι διαδοχικὰ καὶ τοῦ προκύπτοντος διὰ τῆς ἀντιστροφῆς τῶν ψηφίων του εἶναι πάντοτε 198.

4. Διατί εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα τῆς ἀριθμήσεως δέκα χαρακτῆρες ἢ ψηφία εἶναι ἀναγκαῖα καὶ ἐπαρκῆ, ἵνα γραφοῦν ὅλοι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί;

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν τεσσάρων πράξεων.

5. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι εἶναι μικρότεροι τοῦ 100 καὶ λήγουν εἰς 2.

6. Κατὰ τὴν πρόσθεσιν πολλῶν ἀριθμῶν, τὸ ***κρατούμενον*** εἶναι πάντοτε μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος.

7. Ἂν εἰς τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν προστεθῇ ἡ διαφορὰ αὐτῶν προκύπτει τὸ διπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου· ἂν δέ, ἡ διαφορὰ αὕτη ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν, προκύπτει τὸ διπλάσιον τοῦ μικροτέρου.

8. *Ἔστω ἡ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν $\alpha, \beta, \alpha+\beta, \alpha+2\beta, 2\alpha+3\beta\ldots$, τοιαύτη ὥστε ἀπὸ τοῦ τρίτου ὅρου τῆς σειρᾶς καὶ ἐφεξῆς, ἕκαστος ὅρος νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προηγουμένων. 1) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τυχὼν ὅρος τῆς σειρᾶς αὐτῆς ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν προηγουμένων ὅρων, πλὴν τοῦ τελευταίου τούτων ηὐξημένου κατὰ β. 2) Νὰ γραφοῦν οἱ 20 πρῶτοι ὅροι τῆς σειρᾶς αὐτῆς ὅταν $\alpha=1$ καὶ $\beta=2$.*

1) Τὴν σειρὰν αὐτὴν τῶν ἀριθμῶν τὴν παριστάνομεν ὡς ἑξῆς: $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4\ldots$ Τότε ὁ γενικὸς ὅρος αὐτῆς γράφεται $\varkappa_{\nu+3}=\varkappa_{\nu+2}+\varkappa_{\nu+1}$· ὥστε ἂν δώσωμεν εἰς τὸν ν διαδοχικῶς τὰς τιμὰς 0, 1, 2, 3,... λαμβάνομεν τὰς ἰσότητας $\varkappa_3=\varkappa_2+\varkappa_1$, $\varkappa_4=\varkappa_3+\varkappa_2$, $\varkappa_5=\varkappa_4+\varkappa_3\ldots$ Ἂν δὲ ἤδη προσθέσωμεν

τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἀπὸ τὰ προκύπτοντα ἀθροίσματα ἀφαιρέσωμεν τὰ ἴσα κ_3, κ_4, κ_5... προκύπτει ἡ ἰσότης

$$\kappa_{\nu+3}=\kappa_2+\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\ldots+\kappa_\nu+\kappa_\nu+1$$

ἥτις, ἐπειδὴ ὁ τελευταῖος τῶν προηγουμένων ὅρων εἶναι ὁ $\kappa_{\nu+2}$ γράφεται οὕτω:

$$\kappa_{\nu+3}=\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\ldots+\kappa_{\nu+1}+\kappa_{\nu+2}-\kappa_{\nu+2}+\beta.$$

9. Θεωρήσωμεν μίαν σειρὰν ἀριθμῶν α_1, α_2, α_3...α_ν φθίνουσαν, ἧς σειρᾶς δηλαδὴ οἱ ὅροι βαίνουσιν ἐλαττούμενοι. Ἂν ἤδη θέσωμεν $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_1-\alpha_2$, $\beta_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_4=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$ νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ β μὲ δείκτην περιττὸν εἶναι μεγαλύτεροι τῶν β μὲ δείκτην ἄρτιον.

10. ***Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοί:***

$1\cdot 9+2$, $12\cdot 9+3$, $123\cdot 9+4,\ldots$ $123456789\cdot 9+10$ ἔχουν ὅλα τὰ ψηφία των μονάδας.

Πρὸς τοῦτο θέτομεν $9=10-1$. Οὕτως π. χ. ἔχομεν

$$123\cdot 9+4=123\cdot(10-1)+4=1230-123+4=1111.$$

11. ***Νὰ δειχθῇ ὅτι*** *1)* $1+2+2^2+\ldots+2^\nu=2^{\nu+1}-1$

2) $(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^\nu)(\alpha-1)=\alpha^{\nu+1}-1$

3) $1+2+3+\ldots+(\nu-1)+\nu=\nu(\nu+1):2.$

Θέτοντες $A=1+2+2^2+\ldots+2^\nu$ ἔχομεν $2A=2+2^2+2^3+\ldots+2^{\nu+1}$.

Ἂν δὲ ἀπὸ τὴν δευτέραν ἰσότητα ἀφαιρέσωμεν τὴν πρώτην κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $2A-A=A=2^{\nu+1}-1$.

Ὁμοίως δεικνύονται καὶ αἱ ἄλλαι δύο ἰσότητες.

12. ***Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι*** $2\cdot 6\cdot 10\cdot 14\ldots(4\nu-6)(4\nu-2)=$
$=(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\ldots(\nu+\nu-1)(\nu+\nu)$ ***δηλαδὴ ὅτι***

$$2\cdot 6\cdot 10\cdot 14\ldots(4\nu-6)(4\nu-2)=(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\ldots(2\nu-1)(2\nu) \quad (1)$$

Ἔστω ὅτι ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἀληθὴς διὰ 3 παράγοντας, ἤτοι ἔστω ὅτι: $2\cdot 6\,10=(3+1)(3+2)(3+3)$ ἤτοι $2\cdot 6\cdot 10=4\cdot 5\cdot 6$ (2). Τότε ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αὕτη εἶναι ἀληθὴς καὶ διὰ 4 παράγοντας, ἤτοι ὅτι $2\cdot 6\cdot 10\cdot 14=$ $=(4+1)(4+2)(4+3)(4+4)$ δηλαδὴ $2\cdot 6\cdot 10\cdot 14=5\cdot 6\cdot 7\cdot 8$. Ἀλλὰ τότε εἶναι $2\cdot 6\cdot 10\cdot 14=5\cdot 6\cdot 7\cdot 4\cdot 2$ ἢ $2\cdot 6\cdot 10\cdot 14=4\cdot 5\cdot 6\cdot 14$. Ἡ ἰσότης δὲ αὕτη εἶναι ἀληθής, ἀφοῦ καὶ ἡ (1) εἶναι ἀληθής. Καὶ γενικῶς ἂν ἡ ἀνωτέρω πρότασις εἶναι ἀληθὴς διὰ ν—1 παράγοντας, ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ἀληθὴς καὶ διὰ ν παράγοντας. Ἀλλ' ἡ ἰσότης (1) διὰ ν—1 παράγοντας γράφεται:

$$2\cdot 6\cdot 10\cdot 14\ldots[4(\nu-1)-6]\,[4(\nu-1)-2]=\nu\cdot(\nu+1)(\nu+2)\ldots(2\nu-3)(2\nu-2)$$

ἤτοι $2\cdot 6\cdot 10\cdot 14\ldots(4\nu-10)(4\nu-6)=\nu\cdot(\nu+1)(\nu+2)\ldots(2\nu-3)(2\nu-2)$ (3).

Ἀλλ' ἐὰν ἡ ἰσότης (3) εἶναι ἀληθής, θὰ εἶναι ἀληθὴς καὶ ἡ διὰ ν παράγοντας ἰσότης (1) ἥτις γράφεται:

$2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \ldots (4\nu - 10)(4\nu - 6)(4\nu - 2) = \nu \cdot (\nu + 1)(\nu + 2) \ldots (2\nu - 3)(2\nu - 2) \cdot$
$\cdot (2\nu - 1) \cdot 2$ ἤτοι
$2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \ldots (4\nu - 10)(4\nu - 6)(4\nu - 2) = \nu(\nu+1)(\nu+2) \ldots (2\nu - 3)(2\nu - 2)(4\nu - 2)$
διότι ὡς βλέπομεν ἡ τελευταία αὕτη ἰσότης προκύπτει ἐκ τῆς (3) διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν μελῶν της ἐπὶ τὸν αὐτὸν παράγοντα $(4\nu - 2)$.

Σημείωσις. Ἡ μέθοδος αὕτη τῆς ἀποδείξεως λέγεται ***ἐπαγωγή***.

13. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐὰν διαιρέσωμεν δύο ἀριθμοὺς Α καὶ Β διὰ τῆς διαφορᾶς Α—Β θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπα ἴσα καὶ πηλίκα διαφέροντα κατὰ μονάδα.

14. Νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶς ἀριθμὸς τῆς σειρᾶς $1, 2, 3, \ldots \nu$ εἶναι διαιρέτης ἑνὸς τοὐλάχιστον ἀριθμοῦ τῆς σειρᾶς $\nu+1, \nu+2, \ldots 2\nu$.

15. Ἐὰν υ_1, υ_2, υ_3 εἶναι τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν ἀριθμῶν α_1, α_2, α_3 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ β, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ διὰ τοῦ β ;

(Μάλιστα· εἶναι δὲ τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $\upsilon_1 \cdot \upsilon_2 \cdot \upsilon_3 : \beta$).

16. Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν διαιρέσεώς τινος ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι διαιροῦμεν τὸν διαιρετέον διὰ τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πηλίκον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως θὰ εἶναι ἢ ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ διαιρέτου τῆς πρώτης διαιρέσεως. Ἴσον δὲ εἶναι ἂν τὸ ὑπόλοιπον τῆς πρώτης διαιρέσεως εἶναι μικρότερον τοῦ πηλίκου αὐτῆς, μεγαλύτερον δὲ ἂν τουναντίον.

17. Εἰς πᾶσαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶναι πάντοτε μεγαλύτερος τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπολοίπου. (Ὁ διαιρετέος ὑποτίθεται τουλάχιστον ἴσος μὲ τὸν διαιρέτην).

18. Εἰς ποίαν περίπτωσιν τὰ πηλίκα ἑνὸς ἀριθμοῦ Α διὰ δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴσα ;

Δύναται νὰ λεχθῇ τοῦτο καὶ διὰ τὰ ὑπόλοιπα ;

(Τὰ ὑπόλοιπα θὰ εἶναι ἄνισα καὶ τὸ μεγαλύτερον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ πηλίκου καὶ τοῦ μικροτέρου ὑπολοίπου.

19. Ἐὰν ὁ διαιρετέος ἀτελοῦς διαιρέσεως πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀριθμὸν ὁ δὲ διαιρέτης παραμείνει ἀμετάβλητος, ποίαν μεταβολὴν πάσχει τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον ;

20. Ποίας μορφῆς εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οἵτινες διαιρούμενοι διὰ τοῦ ἀκεραίου Α δίδουν πηλίκον ἴσον μὲ τὸ ὑπόλοιπον ;

21. Τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων ἑνὸς πηλίκου εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ πλήθους τῶν ψηφίων τῶν δύο ἀριθμῶν ἢ μὲ τὴν διαφορὰν ταύτην ηὐξημένην κατὰ μονάδα.

22. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δὲν ἀλλάσσει αὐξάνοντες τὸν διαιρετέον κατὰ ἀριθμὸν μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου.

Τί πάσχει τὸ ὑπόλοιπον τότε ;

23. Εἰς μίαν διαίρεσιν $\Delta : \delta$ ποῖος εἶναι ὁ μεγαλύτερος τῶν ἀριθμῶν ποὺ δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν Δ χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ πηλίκον ;

24. Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν δίδει γινόμενον ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν δύο αὐτῶν ἀριθμῶν. Δηλαδὴ $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῆς διαιρετότητος καὶ χαρακτήρων αὐτῆς.

25. Ποίας τιμὰς πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς τὸν α, ἵνα τὸ ἄθροισμα $\alpha + 12$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ α ;

26. Πᾶς περιττὸς ἀριθμὸς $A(=2\nu+1)$ εἶναι πολλ $\cdot 4 \pm 1$.

27. Νὰ δειχθῇ ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς ὅστις διαιρούμενος διὰ 12 καὶ 15 ν' ἀφίνῃ ὑπόλοιπα 5 καὶ 4 ἀντιστοίχως.

28. ***Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 4, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων αὐτοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 4 καὶ ἀντιστρόφως.***

Διότι ἑκάστη ἑκατοντὰς εἶναι πολλ $\cdot 4$ καὶ ἑκάστη δεκὰς εἶναι πολλ $\cdot 4+2$. Οὕτως ἐὰν ἀριθμοῦ τινος A τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι β καὶ τὸ ψηφίων τῶν μονάδων εἶναι γ, ἡ μορφή του εἶναι $A = \text{πολλ} \cdot 4 + 10\beta + \gamma$. Ὥστε εἶναι $A = \text{πολ} \cdot 4 + (2\beta + \gamma)$ καὶ κατὰ συνέπειαν ἐὰν ὁ ἀριθμὸς $2\beta + \gamma$ εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 καὶ ὁ A θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 4. Ἀντιστρόφως δὲ ἐὰν ἀριθμός τις A εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, τὸ ψηφίον τῶν μονάδων ηὐξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων, εἶναι διαιρετὸν διὰ 4.

29. ***Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 8, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων, τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων καὶ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων αὐτοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 8 καὶ ἀντιστρόφως.***

Διότι ἑκάστη ἑκατοντὰς εἶναι πολλ. $8+4$ καὶ ἑκάστη δεκὰς εἶναι ἄθροισμα τοῦ 8 καὶ τοῦ 2, ἤτοι πᾶς ἀριθμὸς A εἶναι τῆς μορφῆς $A = \text{πολλ.}\ 8+4\beta+\text{πολλ.}\ 8+2\gamma+\delta$, ἂν εἶναι β τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων αὐτοῦ, γ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ δ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, κλπ. ὡς ἄνω.

30. Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 6 ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν ἄλλων ψηφίων αὐτοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 6 καὶ ἀντιστρόφως.

Ἡ ἀπόδειξις στηρίζεται εἰς τὸ ὅτι πάντες οἱ ἀριθμοὶ 10, 100, 1000,... διαιρούμενοι διὰ 6 δίδουν ὑπόλοιπον 4.

31. Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 99, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων τμημάτων εἰς ἃ χωρίζεται οὗτος ἐκ δεξιῶν, εἶναι διαιρετὸν διὰ 99.

32. Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, ὧν τὰ ψηφία εἶναι τὰ αὐτά, ἀλλὰ μὲ τάξιν διάφορον, εἶναι διαιρετὴ διὰ 9. Καὶ εἰς ποίαν περίπτωσιν συμβαίνει τὸ αὐτὸ διὰ τὸ ἄθροισμά των;

33. ***Οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ ἀριθμοὶ α, β, ν, ἡ διαφορὰ $α^ν - β^ν$ εἶναι διαιρετὴ διὰ α—β.***

Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β διαιρούμενοι διὰ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν α—β, δίδουν ὑπόλοιπα ἴσα, ἐπειδὴ διαφέρουν κατὰ τὸν διαιρέτην (Ἀριθμ. § 34, ἰδιότης 4΄). Ἑπομένως εἶναι $α =$ πολλ. $(α-β) + υ$ καὶ $β =$ πολλ. $(α-β)+υ$ καὶ κατὰ συνέπειαν εἶναι $α^ν =$ πολλ. $(α - β) + υ^ν$, $β^ν =$ πολλ. $(α-β)=υ^ν$. Ὅθεν $α^ν - β^ν =$ πολλ. $(α-β)$.

34. ***Οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ἀριθμὸς ν τὸ ἄθροισμα τῶν 2ν+1 διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ 2ν+1.***

Διότι ἂν α εἶναι ὁ μικρότερος τούτων τὸ ἄθροισμα Κ τῶν $2ν+1$ ἀριθμῶν αὐτῶν γράφεται

$$Κ=α+(α+1)+(α+2)+\ldots+(α+2ν) = (2ν+1)α+(1+2+3+\ldots+2ν)$$

$$= (2ν+1)α + 2ν(2ν+1) \quad (\text{ἄσκ. } 11,3), \quad \text{ἤτοι} \quad Κ = (α+2ν)(2ν+1).$$

35. Ἂν ἀριθμός τις ἔχῃ ἄρτιον πλῆθος ψηφίων, τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ καὶ τοῦ προκύπτοντος διὰ τῆς ἀντιστροφῆς τῶν ψηφίων του εἶναι διαιρετὸν διὰ 11.

36. Ἂν ὁ ν δὲν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3, ὁ $ν^2 + 2$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3.

37. Ἂν ὁ ν δὲν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6, τὸ γινόμενον $(2ν + 1)(7ν + 1)$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6.

38. Ἂν αἱ διαφοραὶ $α—α_1$, $β—β_1$, $γ—γ_1$ εἶναι διαιρεταὶ διὰ δ καὶ ἡ διαφορὰ $αβγ—α_1β_1γ_1$ εἶναι διαιρετὴ διὰ δ.

39. Ἂν ὁ α δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 5, ὁ $α^4—1$ εἶναι διαιρετὸς διὰ 5.

40. Ἂν ὁ α δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 7, ὁ $α^6—1$ εἶναι διαιρετὸς διὰ 7.

41. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χαρακτὴρ διαιρετότητος διὰ 14 καὶ 18. Ὁμοίως διὰ 19 καὶ 21.

42. Ἂν ὁ $α^2$ διαιρούμενος διὰ 9 δίδει ὑπόλοιπον 4, ὁ α διαιρούμενος διὰ 9 δίδει ὑπόλοιπον 2 ἢ 7 καὶ ἀντιστρόφως.

43. ***Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ $α^5$ λήγουν εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον.***

Πρὸς τοῦτο θ' ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ διαφορὰ $α^5 - α = α(α^4 - 1) = Δ$ εἶναι διαιρετὴ διὰ $2 \times 5 = 10$. Διότι ἂν ὁ α εἶναι ἄρτιος ἀριθμός, καὶ ὁ Δ εἶναι ἄρτιος ἀριθμός. Ἂν δὲ ὁ α εἶναι περιττός, καὶ ὁ $α^4$ εἶναι περιττός. Ἑπομένως ἡ διαφορὰ $α^4—1$ εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ ὁ Δ εἶναι ἄρτιος.

Ἂν ὁ α εἶναι διαιρετὸς διὰ 5 καὶ ὁ Δ εἶναι διαιρετὸς διὰ 5. Ἂν ὅμως ὁ α δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 5 τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $α:5$ εἶναι 1 ἢ 2 ἢ 3 ἢ 4. Ἐπομένως τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $\alpha^2 : 5$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 5 τοῦ 1^2 ἢ 2^2 ἢ 3^2 ἢ 4^2 ἤτοι 1 ἢ 4. Ὥστε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $(\alpha^2)^2 = \alpha^4$ διὰ 5, εἶνα, ἴσον μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 5 τοῦ 1^2 ἢ 4^2 ἤτοι 1· καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ διαφορὰ $\alpha^4 - 1$ εἶναι διαιρετὴ διὰ 5. Ἀφοῦ λοιπὸν ὁ $\Delta = \alpha(\alpha^4 - 1) = \alpha^5 - \alpha$ εἶναι διαιρετὸς διὰ 2 καὶ 5 ἤτοι διὰ 10, ἕπεται ὅτι ὁ $\Delta = \alpha^5 - \alpha$ λήγει εἰς 0 ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ α^5 καὶ α λήγουν εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον.

44. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α^ν καὶ $\alpha^{\nu+4}$ λήγουν εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον.

45. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $\alpha^3 : 5$.

46. Τὸ αὐτὸ εἰς τὴν διαίρεσιν $\alpha^3 : 7$.

47. Ἂν $3^\nu + 1 =$ πολλ. 10 καὶ τὸ $3^{\nu + 4\lambda} + 1 =$ πολλ. 10.

48. Νὰ δειχθῇ ὅτι $27^2 + 8^4 =$ πολλ. 25.

49. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον $\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+\nu-1) =$ πολλ. ν.

50. *Μὲ ποῖα ψηφία πρέπει νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὰ χ καὶ ψ εἰς τὸν ἀριθμὸν 1χ8ψ2 ἵνα οὗτος εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 καὶ δι' 9;*

Ἵνα ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι διαιρετὸς δι' 9 πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του νὰ εἶναι διαιρετὸν δι' 9. Ὥστε ἔχομεν $1+\chi+8+\psi+2 =$ πολλ. 9 ἤτοι $\chi+\psi =$ πολλ. $9 - 11 =$ πολλ. $9 + 18 - 11 =$ πολλ. $9 + 7$. Ἐπειδὴ ὅμως οἱ χ καὶ ψ εἶναι μονοψήφιοι ἀριθμοὶ τὸ ἄθροισμα $\chi+\psi$ θὰ εἶναι ἴσον μὲ 7 ἢ 16. Ἐξ ἄλλου ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 1χ8ψ2 εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ ψ2 νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 4. Ἐκ τῶν ἀνωτέρων λοιπὸν ἔχομεν τὰς λύσεις $\chi = 6$, $\psi = 1$· $\chi = 4$, $\psi = 3$· $\chi = 2$, $\psi = 5$· $\chi = 0$, $\psi = 7$· $\chi = 9$, $\psi = 7$, $\chi = 7$, $\psi = 9$· ἤτοι τοὺς ἀριθμοὺς 16812, 14832, 12852, 10872, 19872, 17892.

51. Ἵνα ἀριθμὸς Α εἶναι διαιρετὸς διὰ 18 ἢ 45 πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ δεκαπλασίου τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν ἄλλων ψηφίων αὐτοῦ νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ 18 ἢ 45.

52. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β δὲν διαιροῦνται διὰ 3, ἡ διαφορὰ δύο ἀρτίων δυνάμεων αὐτῶν εἶναι πολλ. 3. Ἐπιπροσθέτως ἡ διαφορὰ $\alpha^6 - \beta^6$ εἶναι πολλ. 9.

53. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ $\dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} : 5$. Νὰ δειχθῇ δὲ ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τῆς διαιρέσεως $\nu(\nu+1)(2\nu+1) : 5$.

54. Ἐὰν $\alpha^2 + \beta^2$ εἶναι διαιρετὸν διὰ 7, τότε οἱ α καὶ β εἶναι πάντοτε πολλ. 7.

(Ὑποθέτομεν ὅτι ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν α καὶ β ἔχει μίαν τῶν μορφῶν $7\mu \pm 1$, $7\mu \pm 2$, $7\mu \pm 3$, 7μ).

55. Νὰ εὑρεθῇ ὅτι ἐὰν $\alpha =$ πολλ. $3 + \upsilon$ τότε θὰ εἶναι $\alpha^3 =$ πολλ. $9 + \upsilon^3$.

56. Ἐὰν $\alpha = \text{πολ}. 3 - \upsilon$ τότε καὶ $\alpha^3 = \text{πολ}. 9 - \upsilon^3$.

57. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον $\nu(\nu+1) = \text{πολ}. 2$.

58. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον $\nu(\nu+1)(\nu+2) = \text{πολ}. 3$.

59. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\nu^3 - \nu = \text{πολ}. 3$.

60. Ὁμοίως τὸ γινόμενον $\nu(\nu+1)(2\nu+1) = \text{πολ}. 6$.

61. Ἐὰν ν ἀκέραιος τότε τὸ γινόμενον $\nu(\nu^2+5) = \text{πολ}. 6$.

62. Ἐὰν $\alpha^2+\beta^2 = \text{πολ}. 5$ οἱ ἀριθμοὶ $A = 2\alpha+\beta$ καὶ $B = 2\beta-\alpha$ ἢ οἱ ἀριθμοὶ $A' = 2\alpha-\beta$ καὶ $B' = 2\beta+\alpha$ εἶναι πολ. 5.

63. Ἐὰν ν ἀκέραιος ὁ ἀριθμὸς $10^\nu - (9\nu+1) = \text{πολ}. 81$.

64. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ Α διὰ 12 εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 12 διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος ποὺ προκύπτει, προσθέτοντες τὸν ἀριθμὸν τῶν δύο τελευταίων ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τὸ 4πλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὑπολοίπων ψηφίων.

65. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον $(\nu+1)(\nu+2)\ldots(2\nu-1)2\nu = \text{πολ}. 2^\nu$ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον Π τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου τούτου διὰ 2^ν.

66. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς $A = 7^{2\nu+1} - 48\nu - 7$ εἶναι διαιρετὸς διὰ 288 τοῦ ν ὄντος τυχόντος ἀκεραίου.

(Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ Α γράφεται: $A = 7(7^{2\nu}-1) - 48\nu$ καὶ ὅτι ἡ διαφορὰ $7^{2\nu} - 1 = \text{πολ}. 48$).

67. Τοῦ ν ὄντος ἀκεραίου ὁ ἀριθμὸς $A = 2^{2\nu-1} \cdot 3^{\nu+2} + 1 = \text{πολ}. 11$.

68. Ὁμοίως $2^{2\nu} + 15\nu - 1 = \text{πολ}. 9$.

69. Ὁμοίως $3 \cdot 5^{2\nu+1} + 2^{3\nu+1} = \text{πολ}. 17$.

(Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $5^2 : 17$ εἶναι 8, καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 17 τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τοῦ ἀριθμοῦ $8^\nu(3 \cdot 5 + 2) = 8^\nu \cdot 17$.

70. Ἐπίσης $3^{2\nu+2} + 2^{6\nu+1} = \text{πολ}. 7$.

71. Ἐπίσης $3^{4\nu+2} + 2 \cdot 4^{3\nu+1} = \text{πολ}. 17$.

72. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον $\nu(\nu+1)(2\nu+1)(3\nu^2+3\nu-1)$ εἶναι πολ. 30.

73. Μαθητὴς πολλαπλασιάζων ἀριθμόν τινα ἐπὶ ἄλλον τριψήφιον ἀνέγραψεν ἐξ ἀπροσεξίας τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ 3ου μερικοῦ γινομένου ὑπὸ τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ 1ου μερικοῦ γινομένου. Θὰ δείξῃ ἂν ὑπάρχῃ σφάλμα ἡ διὰ 9 ἢ 11 δοκιμὴ καὶ διατί;

74. Πῶς πρέπει νὰ ἐκλεγῇ ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς ν ἵνα ὁ ἀριθμὸς $A = 2^\nu + 1$ εἶναι πολ. 3, πολ. 5;

75. Τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν διαιρούμενον διὰ 3 οὐδέποτε δίδει ὡς ὑπόλοιπον τὸν ἀριθμὸν 2.

76. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ψηφία χ καὶ ψ ὥστε ὁ ἀριθμὸς $1234\chi\psi$ νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 8 καὶ 9 (ὡς ἡ ἄσκησις 50).

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ μ.κ.δ. καὶ ἐ.κ.π.

77. Ἂν διαιρέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 4031 καὶ 763 διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ προκύπτουν ὑπόλοιπα 8 καὶ 7 ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος. (Ὁ μ.κ.δ. τῶν 4031—8 καὶ 763—7).

78. Ὁ μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν εἶναι 12, τὰ δὲ διαδοχικὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων αἱ ὁποῖαι ἔγειναν διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ 12 εἶναι 8, 2, 7. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοί. (1524, 180).

79. Ἂν ὁ μ.κ.δ. τῶν Α, Β καὶ ὁ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιασθοῦν, τὸ προκῦπτον γινόμενον εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν $Α \cdot Γ$, $Α \cdot Δ$, $Β \cdot Γ$, $Β \cdot Δ$.

80. Ὁ μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν Α, Β εἶναι καὶ μ.κ.δ. τῶν ὑπολοίπων $υ_1$, $υ_2$ κατ' ἔλλειψιν καὶ καθ' ὑπεροχὴν τῆς διαιρέσεως $Α : Β$.

81. *Ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι καὶ μ.κ.δ. τῶν $α+β\cdot γ$ καὶ $α+β(γ-1)$.*

Πᾶς κ.δ. τῶν α καὶ β εἶναι καὶ κ.δ. τῶν $α+βγ$ καὶ $α+β(γ-1)$. Ἀλλὰ καὶ πᾶς κ.δ. τῶν $α+βγ$ καὶ $α+β(γ-1)=α+βγ-β$ διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν β καὶ κατὰ συνέπειαν διαιρεῖ καὶ τὸ γινόμενον βγ. Ἀλλὰ ὡς διαιρῶν τὸ $α+βγ$ καὶ τὸ βγ διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν α.

82. Ἂν ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν μ, β, γ εἶναι 1, ὁ μ.κ.δ. τῶν μα, β, γ εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν μ.κ.δ. τῶν α, β, γ.

83. Νὰ δειχθῇ ὅτι τρεῖς περιττοὶ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ ἔχουν τὸν αὐτὸν μ.κ.δ. μὲ τοὺς $\frac{Α+Β}{2}$, $\frac{Α+Γ}{2}$, $\frac{Β+Γ}{2}$.

84. Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\frac{ν(ν+1)}{2}$, $\frac{ν(ν+1)(2ν+1)}{6}$ εἶναι ἀκέραιοι κατόπιν δὲ νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. αὐτῶν.

85. Ὁμοίως καὶ διὰ τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{(ν-1)\cdot ν\cdot(ν+1)}{6}$ καὶ $\frac{ν(ν+1)(ν+2)}{6}$

86. Ἂν Δ εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν α καὶ β ποῖος εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν $α+β$ καὶ $α-β$;

87. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ $α+β$ καὶ $α-β$ ἔχουν μ.κ.δ. 1 ἢ 2.

88. *Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $Α=35α+57$ καὶ $Β=45α+76$ ἔχουν μ.κ.δ. 19 ἢ 1.*

Πᾶς ἀριθμὸς ὅστις διαιρεῖ τοὺς $Α=5\cdot 7α+3\cdot 19$ καὶ $Β=5\cdot 9α+4\cdot 19$ διαιρεῖ καὶ τοὺς $9Α=5\cdot 7\cdot 9α+27\cdot 19$ καὶ $7Β=5\cdot 7\cdot 9α+28\cdot 19$. Ἑπομένως διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν $7Β-9Α=19$. Ἀλλ' ὁ 19 δὲν ἔχει ἄλλους διαιρέτας πλὴν τοῦ 19 καὶ τοῦ 1.

89. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. 1ον. Ἂν ὁ εἷς τῶν ἀριθμῶν $Α=11α+2β$, $Β=18α+5β$ εἶναι διαιρετὸς διὰ 19, θὰ εἶναι διαιρετὸς δι' αὐτοῦ καὶ ὁ ἄλλος. 2ον. Οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β δὲν δύνανται νὰ ἔχουν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην πλὴν τοῦ 19 καὶ 1.

(Εὑρίσκομεν τὰς διαφορὰς $5A-2B$ καὶ $11B-18A$ κλπ. ὡς ἄνω).

90. Ἂν ὁ ἀριθμὸς $A=100\alpha+10\beta+\gamma$ εἶναι διαιρετὸς διὰ 21, θὰ εἶναι διαιρετὸς δι' αὐτοῦ καὶ ὁ $B=\alpha-2\beta+4\gamma$.

91. ***Οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ἀκέραιος ν, ὁ ἀριθμὸς***

$A=\nu(\nu+2)(5\nu-1)(5\nu+1)$ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 24.

Ἐπειδὴ $24=8\times3$, καὶ οἱ 8 καὶ 3 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ὁ Α εἶναι διαιρετὸς χωριστὰ διὰ 8 καὶ 3.

1ον. Οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ν, ὁ Α εἶναι διαιρετὸς διὰ 3. Διότι ὁ ν θὰ εἶναι ἢ πολλ. 3 ἢ πολλ. $3+1$ ἢ πολλ. $3+2$. Ἀλλ' ἂν εἶναι $\nu=$πολλ. $3+1$, ὁ $\nu+2=$πολλ. 3. Ἂν δὲ $\nu=$πολλ. $3+2$, ἐκ τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων $5\nu-1$, 5ν, $5\nu+1$, ὁ εἷς τῶν $5\nu-1$ καὶ $5\nu+1$ θὰ εἶναι πολλ. 3.

2ον. Ἂν ὁ ν ἄρτιος, θὰ εἶναι ἄρτιος καὶ ὁ $\nu+2$. Ἀλλὰ τότε ὁ μὲν εἷς τούτων θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 2, ὁ δὲ ἄλλος διὰ 4 (ἀφοῦ εἶναι διαδοχικοὶ ἄρτιοι). Ἑπομένως τὸ γινόμενον $\nu(\nu+2)$ θὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 8. Ἀλλ' ἐὰν ν περιττός, οἱ $5\nu-1$, $5\nu+1$ θὰ εἶναι διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ ἄρτιοι καὶ τὸ γινόμενον $(5\nu-1)(5\nu+1)$ θὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ 8.

92. Οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ν:

1) Ὁ ἀριθμὸς $\nu^2(\nu^2-1)$ θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 12.
2) » » $\nu(\nu+1)(2\nu+1)$ θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 6.
3) » » $\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)$ θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 120.
4) » » $3^{6\nu}-2^{6\nu}$ θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 35.

93. ***Ἂν ὁ α εἶναι περιττὸς ἀριθμός, ὁ $A=\alpha^4+9(9-2\alpha^2)$ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 64.***

Εἶναι $A=\alpha^4-2\cdot9\alpha^2+9^2=(\alpha^2-9)^2$. Ὥστε ἂν ὁ α^2-9 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 8, ὁ Α θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ $8^2=64$. Ἀλλ' ἀφοῦ ὁ α εἶναι περιττὸς ἀριθμὸς εἶναι τῆς μορφῆς $4\nu\pm1$. Ὅθεν $\alpha^2=(4\nu\pm1)^2=$ $=16\nu^2\pm8\nu+1=8(2\nu^2\pm\nu)+1=$πολλ. $8+1$. Ὁμοίως δὲ εἶναι $9=$πολλ.$8+1$. Ὅθεν $\alpha^2-9=$πολλ. 8· ἤτοι διαιρετὸν διὰ τοῦ 8.

94. Ἂν ὁ α εἶναι περιττὸς ἀριθμός, ὁ $A=\alpha(\alpha^2+2)(\alpha^2+7)$ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 24.

95. Ὁ ἀριθμὸς $A=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)$ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 30, οἱωνδήποτε ὄντων τῶν α καὶ β.

Σημειοῦμεν ὅτι $30=2\cdot3\cdot5$.

96. ***Δύο ἀριθμοὶ λήγουν εἰς 6. Εἰς ποίαν περίπτωσιν τὸ γινόμενον αὐτῶν λήγει εἰς 36;***

Εἶναι φανερὸν ὅτι τοῦτο ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ψηφίων τῶν δεκάδων τῶν δύο ἀριθμῶν. Ἔστω δὲ α τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ β τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ ἄλλου. Τότε δὲ τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τῶν δύο ἀριθμῶν κάμνουν τοὺς ἀριθμοὺς $10\alpha+6$ καὶ $10\beta+6$, ὁπότε τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι $(10\alpha+6)(10\beta+6)=100\alpha\beta+10\cdot6\alpha+10\cdot6\beta+36=100\alpha\beta+$ $+10\cdot6\cdot(\alpha+\beta)+36$. Ὥστε ἵνα τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν λήγῃ εἰς 36, πρέπει τὸ γινόμενον $10\cdot6\cdot(\alpha+\beta)$ νὰ λήγῃ εἰς δύο 0, ἤτοι πρέπει τὸ $6(\alpha+\beta)$ νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 10 ἢ τὸ $\alpha+\beta$ νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5. Ὥστε διὰ τὰ α καὶ β εὑρίσκομεν τὰ ζεύγη 0,0· 0,5· 1,4· 2,3· 3,2· 4,1· 2,8· 3,7· 8,2· 7,3.

97. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μικρότερος ἀριθμὸς ὅστις διαιρούμενος διὰ 8, 9, 12 δίδει ἀντιστοίχως ὑπόλοιπα 7, 8, 11. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἄλλοι ἀριθμοὶ ποὺ πληροῦν τὰς συνθήκας ταύτας.

(Εἶναι τὸ ἐ.κ.π. τῶν 8, 9, 12 ἠλαττωμένον κατὰ 1).

98. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μικρότερον πολλ. 3, τὸ ὁποῖον διαιρούμενον διὰ 7 δίδει ὑπόλοιπον 2.

99. Νὰ διαιρεθοῦν οἱ 2112 καὶ 381 ὑπὸ ἑνὸς ἀριθμοῦ τοιούτου ὥστε τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων δι' αὐτοῦ νὰ εἶναι 36 καὶ 35. (Διὰ 173).

100. Νὰ εὑρεθοῦν ἀριθμοὶ μικρότεροι τοῦ 100 οἵτινες μετὰ τοῦ 360 ἔχουν μ.κ.δ. 4.

101. Νὰ δειχθῇ ὅτι κατὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μ.κ.δ. πολλῶν ἀριθμῶν, δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν ὡρισμένους ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν

102. Τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὸ ἐ.κ.π. πολλῶν ἀριθμῶν.

103. Ἂν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, πᾶσα δύναμις τοῦ ἑνὸς εἶναι πρώτη πρὸς πᾶσαν δύναμιν τοῦ ἄλλου.

104. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ α, β ἔχουν μ.κ.δ. Δ καὶ ἐ. κ. π. Ε, αἱ τυχοῦσαι δυνάμεις α^μ, β^μ ἔχουν μ.κ.δ. Δ^μ καὶ ἐ.κ.π. E^μ.

105. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον τριῶν διαδοχικῶν ἀρτίων εἶναι πολ. 48.

106. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ μ.κ.δ. τῶν α,βγ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ μ.κ.δ. τῶν α, β. Πῶς δὲ πρέπει νὰ ἐκλεγῇ ὁ γ, ἵνα οἱ δύο μ.κ.δ. εἶναι ἴσοι;

107. Τρεῖς οἱοιδήποτε περιττοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ ἔχουν τὸν αὐτὸν μ.κ.δ. μὲ τὸν μ.κ.δ. τῶν πηλίκων $(\beta+\gamma):2$, $(\gamma+\alpha):2$, $(\alpha+\beta):2$.

108. ***Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ α καὶ β, οἵτινες ἔχουν ἄθροισμα 192 καὶ μ.κ.δ. 24.***

Ἂν $\alpha:24=\pi$ καὶ $\beta:24=\pi'$, εἶναι $(\alpha+\beta):24=\pi+\pi'$. Ὅθεν $\pi+\pi'=192:24=8$. Ἀλλὰ τὰ πηλίκα π καὶ π′ εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα. Ὥστε ταῦτα θὰ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 7 ἢ οἱ 3 καὶ 5. Ὥστε θὰ εἶναι $\alpha=1\times24=24$ καὶ $\beta=7\times24=168$ ἢ οἱ $\alpha=3\times24=72$ καὶ $\beta=5\times24=120$.

109. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ ὧν γνωρίζομεν τὴν διαφορὰν καὶ τὸν μ.κ.δ.

110. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ ὧν γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ ἐ.κ.π. (Ἀριθ. ἄσκ. 114).

111. ***Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι ἔχουν γινόμενον 5670 καὶ ἐ.κ.π. 630.***

Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι ἔχουν μ.κ.δ. $= 5670 : 630 = 90$ εἶναι ἴσοι μὲ $9α$ καὶ $9β$, ὅπου οἱ $α$ καὶ $β$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ὥστε $αβ = 630 : 9 = 70$. Ὥστε οἱ $α$ καὶ $β$ θὰ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 70 ἢ 2 καὶ 35 ἢ 5 καὶ 14 ἢ 7 καὶ 10· ὅθεν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ $1 \times 9 = 9$, $70 \times 9 = 630$ κλπ.

112. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι 171 καὶ τὸ ἐ.κ.π. εἶναι τὸ 20πλάσιον τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν. (Ἀπ. 95 καὶ 76).

113. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ.κ.π. τῶν ἀριθμῶν $ν$, $ν+1$, $ν+2$.***

Οἱ $ν$ καὶ $ν+1$ ὡς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔχουν ἐ.κ.π. $= ν(ν+1)$. Ὥστε τὸ ζητούμενον ἐ.κ.π. εἶναι τὸ ἐ.κ.π. τῶν $ν(ν+1)$ καὶ $ν+2$. Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ $ν+1$ και $ν+2$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἔχουν μ.κ.δ. τὸν μ.κ.δ. τῶν $ν$ καὶ $ν+2$ ἢ τῶν $ν$ καὶ $ν+2-ν = 2$. Ἀλλ' ἂν ὁ $ν$ περιττός, οἱ $ν(ν+1)$ καὶ $(ν+2)$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ὥστε τὸ ζητούμενον ἐ.κ.π. εἶναι $ν(ν+1)(ν+2)$. Ἂν δὲ ὁ $ν$ ἄρτιος οἱ $ν(+1)$ καὶ $(ν+2)$ ἔχουν μ.κ.δ. τὸν 2. Ὥστε τότε τὸ ζητούμενον ἐ.κ.π. εἶναι $ν(ν+1)(ν+2) : 2$.

114. Ἂν τὸ ἐ.κ.π. πολλῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον αὐτῶν, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. (Διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς).

115. ***Οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ἀριθμὸς $γ$, τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν ἀριθμῶν: $γ+α$, $γ+2α$, $γ+3α$... $γ+βα$,... διὰ τοῦ $β$, ἐπαναλαμβάνονται περιοδικῶς. Μετὰ πόσας δὲ διαιρέσεις, ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ ὑπόλοιπα;***

Ἵνα δύο ἀριθμοὶ $γ+μα$ καὶ $γ+να$ $(ν>μ)$ τῆς ἄνω σειρᾶς διαιρούμενοι διὰ $β$ δίδουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ διαφορὰ αὐτῶν $(ν-μ)α$ νὰ εἶναι διαιρετὴ διὰ $β$. Καὶ 1ον) Ἂν οἱ $α$ καὶ $β$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ $β$ νὰ διαιρῇ τὴν διαφορὰν $ν-μ$· εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ἡ μικροτέρα τιμὴ τῆς διαφορᾶς $ν-μ$ εἶναι $β$, καὶ ὅτι τὰ ὑπόλοιπα ἐπαναλαμβάνονται περιοδικῶς ἀνὰ $β$. 2) Ἂν οἱ $α$ καὶ $β$ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ἔχουν μ.κ.δ. τὸν $δ$, τότε διαιροῦμεν τοὺς $α$ καὶ $β$ διὰ τοῦ $δ$. Ἂν δὲ τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα εἶναι $π$ καὶ $π'$, ἔχομεν $α=δπ$ καὶ $β=δπ'$, ὁπότε πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ $δπ'$ νὰ διαιρεῖ τὸ $(ν-μ)δπ$ ἤτοι τὸ $π'$ νὰ διαιρεῖ τὸ $(ν-μ)π$· ἐπειδὴ δὲ εἶναι πρῶτον πρὸς τὸ $π$ πρέπει τὸ $π'$ νὰ διαιρῇ τὴν διαφορὰν $ν-μ$. Ἀλλ' ἡ μικροτέρα τιμὴ τοῦ $ν-μ$ εἶναι $π'$· ὥστε τὰ ὑπόλοιπα ἐπαναλαμβάνονται περιοδικῶς ἀνὰ $π'$, ὅπου ὡς εἴδομεν $π'$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $β$ διὰ τοῦ μ.κ.δ. τῶν $α$ καὶ $β$.

116. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 400 γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἂν ἀριθμήσωμεν τὰς μονάδας του ἀνὰ 2 ἢ 3 ἢ 4 ἢ 5 ἢ ἀνὰ 6 νὰ μένῃ πάντοτε ὑπόλοιπον 1, ἐὰν δὲ τὰς ἀριθμήσωμεν ἀνὰ 7 νὰ μείνῃ ὑπόλοιπον 0. (Ἀπ. 301).

117. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ἄγνωστα ψηφία x, y, z τοῦ ἀριθμοῦ $13xy45z$ οὕτως ὥστε ὁ ἀριθμὸς οὗτος νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 792.

(Ἐπειδὴ $792 = 8 \times 9 \times 11$, ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι διαιρετὸς χωριστὰ διὰ 8, 9 καὶ 11. Ἀκολούθως δὲ εὑρίσκομεν $x=8$, $y=0$, $z=6$, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὁ 1380456).

118. Δοθέντα ἀριθμὸν ὅστις δὲν εἶναι διαιρετὸς οὔτε διὰ 2, οὔτε διὰ 3, ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ἄνω εὑρεθὲν τετράγωνον ἠλαττωμένον κατὰ 2. Ζητεῖται τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ εὑρεθέντος γινομένου διὰ τοῦ 24.

(Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς Α εἶναι περιττὸς καὶ τῆς μορφῆς πολλ. 6 ± 1. Ἀποδεικνύομεν δὲ ὅτι $A^2 =$ πολλ. $24+1$, καὶ κατόπιν ὅτι $A^2(A^2-2) =$ $=$ πολλ. $24+23$).

119. Δοθέντα ἄρτιον ἀριθμὸν ὑψοῦμεν εἰς τὸν κύβον, εἰς ὃν κύβον προσθέτομεν τὸ ἄθροισμα τοῦ 20πλασίου τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ ἄλλου δοθέντος ἀριθμοῦ α. Τέλος τὸ λαμβανόμενον ἄθροισμα τὸ ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ εὑρεθέντος τετραγώνου διὰ τοῦ 48.

(Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι τῆς μορφῆς 2Α· ἀποδεικνύομεν δὲ ὅτι $2^3 \cdot A^3 + 20 \cdot 2A = 8A(A^2+5) =$ πολλ. 48 καὶ κατόπιν ὅτι $[8A(A^2+5)+\alpha]^2 =$ $=$ πολλ. $48 + \upsilon^2$, ὅπου υ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $48 : \alpha$).

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

120. ***Τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους, εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ἀντιστρόφως.***

Ἔστω οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· τότε καὶ οἱ $\alpha+\beta$ καὶ αβ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι ἂν εἶχον οὗτοι κοινὸν διαιρέτην πρῶτον ἀριθμὸν δ, οὗτος ὡς διαιρῶν τὸ γινόμενον αβ, θὰ διῄρει ἕνα τουλάχιστον τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἔστω τὸν α· ὡς διαιρῶν δὲ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ καὶ τὸν α, θὰ διῄρει καὶ τὸν β, ὁπότε οἱ α καὶ β δὲν θὰ ἦσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Εὐκόλως δὲ ἤδη ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον.

121. Οἱ ἀριθμοὶ $2\nu+1$ καὶ $2\nu(\nu+1)$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ν.

(Ἐφαρμογὴ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως).

122. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν $\alpha+\beta$ καὶ $\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta$, ὅπου οἱ α καὶ β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. (Ἀπ. 3).

123. Ἂν οἱ α καὶ β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ οἱ 1) $\alpha-\beta$ καὶ αβ καὶ 2) $\alpha^\nu+\beta^\nu$ καὶ αβ.

124. ***Πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 3 εἶναι τῆς μορφῆς $6\nu \pm 1$.***
Εἷς τοιοῦτος ἀριθμὸς δὲν εἶναι οὔτε ἄρτιος, οὔτε πολλαπλάσιον τοῦ 3. Ὥστε εἶναι τῆς μορφῆς $3\mu \pm 1$· ἐπειδὴ δὲ $\mu = 2\nu$, καταλήγομεν εἰς τὴν μορφὴν $6\nu \pm 1$.

125. Ἂν ἡ διαφορὰ $\alpha^2-\beta^2$ εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς θὰ εἶναι $\alpha^2-\beta^2 =$ $= \alpha+\beta$.

126. Ἂν ὁ α εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 5, ἡ διαφορὰ α^4-1 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 240.

127. Τὸ γινόμενον $\nu(2\nu+7)(7\nu+1)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 6.

128. Τὸ γινόμενον $\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 30.

129. Ἂν ὁ ν εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 2, ὁ ἀριθμός $\nu^2(\nu^2-1)(\nu^4-16)$ εἶναι διαιρετὸς διὰ 360.

130. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γενικὴ μορφὴ τῶν ἀριθμῶν οἵτινες εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 8· διαιρούμενοι δὲ διαδοχικῶς διὰ 3, 5, 7 δίδουν ὑπόλοιπα 2, 4, 6 ἀντιστοίχως.

131. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ α, β οἵτινες ἔχουν διαιρέτας ἀντιστοίχως τοὺς 10 καὶ 21 καὶ ὧν ὁ μ. κ. δ. εἶναι 18. ('Απ. 90, 126).

132. Ἐὰν α, β, α′, β′, εἶναι ἀντιστοίχως πρῶτοι πρὸς τὸν γ καὶ ἐὰν $\alpha\beta-\alpha'\beta'$ καὶ $\alpha-\alpha'$ εἶναι πολ·γ, τότε καὶ ὁ ἀριθμὸς $\beta-\beta'$ εναι πολ·γ·

133. Τὸ γινόμενον $\nu(\nu^2+2)(\nu^2+7)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ 24 ὅταν ὁ ν εἶναι περιττός.

134. Τὸ γινόμενον $\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ 6 καὶ τὸ πηλίκον εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5 ἢ πολ·5 ± 1.

135. Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ 413, 581, 648, 735, 74256. Νὰ εὑρεθῇ ποῖος ἐξ αὐτῶν εἶναι πρῶτος καὶ οἱ ἄλλοι ν' ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων.

136. ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ ν, ὅταν $3\nu(\nu+1)=5166$.***

Εἶναι $\nu(\nu+1)=1722$ καὶ οἱ διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ ν καὶ $\nu+1$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ἀναλύσωμεν τὸν 1722 εἰς γινόμενον δύο τοιούτων ἀριθμῶν. Οὕτως εὑρίσκομεν $1722=41\cdot42$ καὶ $\nu=41$.

137. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ν ὅταν $\nu(\nu+1)(2\nu+1)=84$. (Οἱ τρεῖς παράγοντες εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο. Εὑρίσκομεν δὲ ὡς ἄνω $\nu=3$).

138. Τὸ γινόμενον $\alpha\beta(\alpha^4-\beta^4)$ εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ 30.

139. Ὁ ἀριθμὸς $\alpha^7-\alpha$ εἶναι διαιρετὸς διὰ 42. (Παρατηροῦμεν ὅτι $\alpha^7-\alpha=\alpha(\alpha^6-1)$ καὶ $42=2\cdot3\cdot7$).

140. ***Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἀριθμός τις πρῶτος α εἶναι παράγων τοῦ γινομένου $1\cdot2\cdot3.....\nu$ μὲ ἐκθέτην ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα $\mu+\mu'+\mu''+.....$ ὅπου $\mu=\nu:\alpha$ (πηλίκον ἀκριβὲς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος), $\mu'=\mu:\alpha$, $\mu''=\mu':\alpha$ κ.ο.κ.***

Εἰς τὴν σειρὰν τῶν πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν 1, 2, 3... ν ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι περιέχουν τὸν α εἶναι πολλαπλάσια τοῦ α μικρότερα τοῦ ν, ὧν ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἴσος πρὸς $\mu=\nu:\alpha$. Ὥστε τὸ γινόμενον $1\cdot2\cdot3...\nu$ περιέχει τὸ α^μ. Λαμβάνομεν ἤδη τὰ ὡς ἄνω μ πολλαπλάσια τοῦ α ἤτοι α, 2α, 3α,.... μα καὶ ἕκαστον διαιροῦμεν διὰ τοῦ α. Τότε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου $1\cdot2\cdot3...\nu$ διὰ τοῦ α^μ θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον

$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \mu$, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐργαζόμενοι ὡς προηγουμένως, ἀποδεικνύομεν τὴν ἄνω πρότασιν.

141. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγαλυτέρα δύναμις τοῦ 11, ἥτις διαιρεῖ τὸ γινόμενον τῶν 1000 πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν.***

Κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν ἔχομεν $1000 : 11 = 90$, $90 : 11 = 8$. Ὥστε ἡ ζητουμένη μεγαλυτέρα δύναμις εἶναι ἡ $11^{90+8} = 11^{98}$.

142. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγαλυτέρα δύναμις τοῦ 7 ἥτις διαιρεῖ τὸ γινόμενον τῶν 500 πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν. (Ἀπ. 7^{82}).

143. ***Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον ν ἀκεραίων διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ν πρώτων ἀριθμῶν.***

Ν' ἀποδείξωμεν δηλαδὴ ὅτι τὸ γινόμενον
$P = (\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)\ldots(\mu+\nu)$ εἶναι διαιρετὸν τοῦ γινομένου
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \nu$, ἤτοι ὅτι τὸ πηλίκον $\dfrac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)\ldots(\mu+\nu)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \nu}$ εἶναι ἀκριβές. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζοντες διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \mu$

ἔχομεν $$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+\nu)}{1 \cdot 2\, 3 \ldots \mu \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \nu}.$$

Ἵνα ὅμως τὸ πηλίκον τοῦτο εἶναι ἀκριβές, πρέπει ἀριθμός τις πρῶτος α, νὰ εὑρίσκεται εἰς τὸν διαιρετέον μὲ ἐκθέτην τουλάχιστον ἴσον, μὲ τὸν ὁποῖον οὗτος εὑρίσκεται εἰς τὸν διαιρέτην. Ἀλλὰ διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν μεγαλυτέραν δύναμιν τοῦ α ἡ ὁποία διαιρεῖ τὰ γινόμενα $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \mu+\nu$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \mu$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \nu$ εὑρίσκομεν (ἄσκησις 141) τὰ πηλίκα $(\mu+\nu) : \alpha = \pi$, $\mu : \alpha = \pi'$, $\nu : \alpha = \pi''$, $\pi : \alpha = \pi_1$, $\pi' : \alpha = \pi'_1$, $\pi'' : \alpha = \pi''_1$ κ.ο.κ. Θὰ εἶναι δὲ $\pi \geqslant \pi' + \pi''$, $\pi_1 \geqslant \pi'_1 + \pi''_1$, $\pi_2 \geqslant \pi'_2 + \pi''_2 \ldots \pi_\nu \geqslant \pi'_\nu + \pi''_\nu$. Ἂν ἤδη προσθέσωμεν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\pi+\pi_1+\pi_2+\ldots\pi_\nu \geqslant (\pi'+\pi'_1+\ldots\pi'_\nu) + (\pi''+\pi''_1+\ldots+\pi''_\nu)$.

Οὕτω δὲ προκύπτει ὅτι ὁ α εὑρίσκεται εἰς τὸν διαιρετέον μὲ ἐκθέτην τουλάχιστον ἴσον μὲ τὸν ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὸν διαιρέτην.

144. Τὸ γινόμενον 4 διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 24 καὶ τὸ γινόμενον 5 διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 120 (Ἐφαρμογὴ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως).

145. Τὸ γινόμενον 15 ἀριθμῶν διαδοχικῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 120^3.

146. Ἀριθμὸς περιττὸς καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου του εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

147. ***Ὁ μ. κ. δ. Δ τῶν α καὶ β εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν μ. κ. δ. τοῦ (α±β) καὶ τοῦ ἑ. κ. π. τῶν α καὶ β.***

Ἔστω $\alpha : \Delta = \pi$ καὶ $\beta : \Delta = \pi'$ ἤτοι $\alpha = \Delta\pi$ καὶ $\beta = \Delta\pi'$. Τότε εἶναι $\alpha \pm \beta = \Delta(\pi \pm \pi')$. Ἀλλ' ἐὰν Ε εἶναι τὸ ἑ.κ.π. τῶν α καὶ β ἔχομεν $E = \Delta\pi\pi'$. Οὕτως ἵνα Δ εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν $\alpha \pm \beta$ καὶ Ε ἀρκεῖ οἱ ἀριθμοὶ $\pi \pm \pi'$ καὶ $\pi\pi'$ νὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Εἶναι δὲ τοιοῦτοι ἀφοῦ καὶ τὰ π καὶ π' εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα.

148. Δύο ἀριθμοὶ α, β ἔχουν μ.κ.δ, τὸν Δ. Ποῖος εἶναι τότε ὁ μ.κ.δ. τῶν α καὶ α+β ;

149. Ὁ μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ὅταν διαιρέσωμεν τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν δι' ἀριθμοῦ πρώτου πρὸς τὸν ἄλλον.

150. Ἀριθμὸς ἀναλελυμένος ὑψοῦται εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν (ἤτοι εἰς τὸ τετράγωνον), ἂν διπλασιασθοῦν οἱ ἐκθέται πάντων τῶν παραγόντων του· εἰς τὴν τρίτην ἂν τριπλασιασθοῦν καὶ ἐν γένει εἰς τὴν μυοστὴν ἂν πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ μ.

(Ἂν παράγων τις δὲν ἔχῃ ἐκθέτην, ἵνα ἀληθεύῃ ἡ πρότασις αὕτη, πρέπει νὰ θεωρῆται ἐκθέτης αὐτοῦ ἡ μονάς).

151. Ἀριθμὸς εἶναι τετράγωνον, ἂν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ διαιροῦνται πάντες διὰ τοῦ 2· καὶ τότε μόνον· κύβος δὲ ἂν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων του διαιροῦνται πάντες διὰ τοῦ 3· καὶ τότε μόνον.

(Ἡ πρότασις αὕτη ἀληθεύει καὶ διὰ πᾶσαν δύναμιν).

152. Ἐκ τῶν ἀριθμῶν 4900, 1764, 27 000 καὶ 640 000, ποῖοι εἶναι τετράγωνα ἄλλων καὶ ποίων ;

153. Ἐκ τῶν ἀριθμῶν 27 000, 5 932 000, 42 592 ποῖοι εἶναι κύβοι ἄλλων καὶ ποίων ;

154. Τὸ διπλάσιον τετράγωνον δὲν εἶναι τετράγωνον, οὐδὲ τὸ τριπλάσιον· καὶ γενικῶς τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ μὴ τετραγώνου ἐπὶ ἄλλον, ὅστις εἶναι τετράγωνον, δὲν εἶναι τετράγωνον (ἄσκ. 151).

155. Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ μὴ κύβου, ἐπὶ ἄλλον ὅστις εἶναι κύβος, δὲν εἶναι κύβος.

156. ***Νὰ εὑρεθοῦν ὅλοι οἱ διαιρέται δοθέντος ἀριθμοῦ.***

Ἔστω ὡς παράδειγμα ὁ ἀριθμὸς 504. Ἀναλύοντες αὐτὸν εὑρίσκομεν $504 = 2^3 . 3^2 . 7$. Ἀλλ' ἤδη εἶναι φανερὸν (Ἀριθμ. § 62,1') ὅτι ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν.

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 2^2, & 2^3 \\ 1, & 3, & 3^2 & \\ 1, & 7, & & \end{array} \qquad (\alpha)$$

θὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ 504. Ὁμοίως θὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ 504 καὶ ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν.

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 2^2, & 2^3 \\ 3, & 2\times3, & 2^2\times3, & 2^3\times3 \\ 3^2, & 2\times3^2, & 2^2\times3^2, & 2^3\times3^2 \end{array} \qquad (\beta)$$

τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν (α), ἐφ' ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας, ὁμοίως πάλιν θὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ 504 καὶ ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 2^2, & 2^3 \\ 3, & 2\times3, & 2^2\times3, & 2^3\times3 \\ 3^2, & 2\times3^2, & 2^2\times3^2, & 2^3\times3^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 7, & 2\times7, & 2^2\times7, & 2^3\times7 \\ 3\times7, & 2\times3\times7, & 2^2\times3\times7, & 2^3\times3\times7 \\ 3^2\times7, & 2\times3^2\times7, & 2^2\times3^2\times7, & 2^3\times3^2\times7, \end{array}$$

τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες ἕκαστον τῶν γινομένων (β) ἐφ' ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς τρίτης σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν (α). Ὥστε ὅλοι οἱ διαιρέται τοῦ 504 εἶναι οἱ ἑξῆς:

1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 7, 14, 28, 56, 21, 42, 84, 168, 63, 126, 252, 504.

Παρατηροῦμεν δὲ ἤδη ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν τοῦ 504, εἶναι $4\times3\times2=24$, ἤτοι τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουν πόσους ἀριθμοὺς ἔχει ἑκάστη σειρὰ (α).

157. Νὰ εὑρεθοῦν ὅλοι οἱ διαιρέται τοῦ ἀριθμοῦ 540.

158. ***Ἂν πάντες οἱ διαιρέται ἀριθμοῦ γραφοῦν εἰς μίαν σειρὰν κατὰ τάξιν μεγέθους, τὸ γινόμενον δύο διαιρετῶν ἐξ ἴσου ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀριθμόν.***

Ἔστω ὅτι ὅλοι οἱ διαιρέται τοῦ ἀριθμοῦ Α κατὰ τάξιν μεγέθους εἶναι οἱ:

$$1<\delta<\delta_1<\delta_2\ldots<\delta_{\nu-2}<\delta_{\nu-1}<\delta_\nu<A$$

Ἀλλὰ τότε ἡ σειρά:

$$\frac{A}{A}<\frac{A}{\delta\nu}<\frac{A}{\delta_{\nu-1}}<\ldots<\frac{A}{\delta_2}<\frac{A}{\delta_1}<\frac{A}{\delta}<\frac{A}{1}$$

παριστᾷ ὁμοίως τοὺς αὐτοὺς διαιρέτας κατὰ τάξιν μεγέθους. Ὅθεν εἶναι:

$$1=\frac{A}{A},\qquad \delta=\frac{A}{\delta_\nu},\qquad \delta_1=\frac{A}{\delta_{\nu-1}}\ldots\ \delta\nu=\frac{A}{\delta},\qquad A=\frac{A}{1}$$

ἤτοι: $A=1\cdot A,\quad A=\delta\cdot\delta\nu,\quad A=\delta_1\cdot\delta_{\nu-1}\ldots$

159. Ἵνα ἀριθμός τις Α εἶναι τετράγωνον ἄλλου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ πλῆθος τῶν διαιρετῶν αὐτοῦ νὰ εἶναι περιττὸς ἀριθμός.

160. ***Ἂν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ Κ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ ἀριθμοὶ α, 2α, 3α, ... (Κ-1)α (1) διαιρούμενοι διὰ Κ δίδουν ὡς ὑπόλοιπα τοὺς (Κ—1) πρώτους ἀκεραίους ἀριθμοὺς εἰς μίαν οἱανδήποτε τάξιν.***

Εἷς οἱοσδήποτε ἀριθμὸς μα τῆς σειρᾶς (1), οὐδέποτε εἶναι διαιρετὸς διὰ Κ· διότι ἄλλως ὁ Κ ὡς πρῶτος πρὸς τὸν α θὰ διῄρει τὸν μ μικρότερον αὐτοῦ. Οὕτω τὰ ὑπόλοιπα τῶν ὡς ἄνω διαιρέσεων εἶναι ὅλα διάφορα μεταξύ των. Διότι ἂν δύο ἀριθμοὶ μα καὶ να τῆς σειρᾶς (1) διαιρούμενοι διὰ Κ ἔδιδον τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, ἡ διαφορὰ (μ—ν)α θὰ ἦτο διαιρετὴ διὰ Κ καὶ ἑπομένως ὁ Κ θὰ διῄρει τὸν ἀριθμὸν μ—ν μικρότερον αὐτοῦ. Οὕτως ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι τὰ ὡς ἄνω ὑπόλοιπα εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3,... (Κ—1) εἰς μίαν οἱανδήποτε τάξιν.

161. ***Ἂν ἀριθμὸς πρῶτος Κ δὲν διαιρεῖ ἄλλον ἀριθμὸν α, διαιρεῖ τὴν διαφορὰν $\alpha^{k-1}-1$. (Θεώρημα τοῦ Fermat).***

Ἔστω υ_1, υ_2, $\upsilon_3 \ldots \upsilon_{k-1}$ τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν ἀριθμῶν α, 2α, $3\alpha, \ldots (k-1)\alpha$ διὰ τοῦ k. Τότε εἶναι

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{πολ. } k + \upsilon_1 \\ 2\alpha &= \text{πολ. } k + \upsilon_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (k-1)\alpha &= \text{πολ. } k + \upsilon_{k-1} \end{aligned}$$

Ἂν δὲ ἤδη πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$\alpha \cdot 2\alpha \cdot 3\alpha \ldots\ldots (k-1)\alpha = \text{πολ. } k + \upsilon_1 \upsilon_2 \upsilon_3 \ldots \upsilon_{k-1}, \text{ ἤτοι (ἄσκ. 157).}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (k-1)\alpha^{k-1} = \text{πολ. } k + 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (k-1) \text{ ἢ τέλος}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (k-1)\,[\alpha^{k-1} - 1] = \text{πολ. } k.$$

Οὕτω βλέπομεν ὅτι τὸ πρῶτον μέλος τῆς τελευταίας αὐτῆς ἰσότητος διαιρεῖται διὰ k. Ἀλλ' ὁ k εἶναι πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (k-1)$. Ἐξ' οὗ ἕπεται ὅτι ὁ k διαιρεῖ τὴν διαφορὰν $\alpha^{k-1} - 1$.

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦ Fermat διατυποῦται ὡς ἑξῆς: ***Ἂν ἀριθμὸς πρῶτος k δὲν διαιρεῖ ἄλλον ἀριθμὸν α, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $\alpha^{k-1} : k$ εἶναι 1.***

162. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $6^{843} : 11$.***

Εἶναι $6^{843} = 6^{10 \cdot 84} \cdot 6^3$. Ἀλλὰ (ἄσκ. 161) $6^{10} = \text{πολ. } 11 + 1$ καὶ $6^3 = 216 = \text{πολ. } 11 + 7$. Ὅθεν $6^{643} = (\text{πολ. } 11 + 1)(\text{πολ. } 11 + 7) = \text{πολ. } 11 + 7$. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ὑπόλοιπον εἶναι 7.

163. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $8^{592} : 11$.

164. ***Ν' αποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $\alpha^{\beta-1} + \beta^{\alpha-1} - 1$ εἶναι διαιρετὴ διὰ τοῦ γινομένου αβ, ἂν οἱ α καὶ β εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι.***

Ὁ α διαιρεῖ τὴν δύναμιν $\alpha^{\beta-1}$ καὶ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Fermat διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν $\beta^{\alpha-1} - 1$. Ὥστε ὁ α διαιρεῖ τὴν ὅλην παράστασιν. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι διαιρεῖ αὐτὴν καὶ ὁ β. Ὥστε αὕτη διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αβ.

165. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $(\beta\gamma)^{\alpha-1} + (\alpha\gamma)^{\beta-1} + (\alpha\beta)^{\gamma-1} - 1$ εἶναι διαιρετὴ διὰ τοῦ γινομένου αβγ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι πρῶτοι.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν κλασμάτων.

166. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα ἑνὸς ἀκεραίου καὶ ἑνὸς ἀναγώγου κλάσματος εἶναι ἀνάγωγον κλάσμα. (Ἀριθμ. ἄσκ. 138).

167. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐὰν $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = \dfrac{\alpha_2}{\beta_2}$, τὸ κλάσμα $\dfrac{\alpha\nu + \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2}{\beta\nu + \beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2}$, ὅπου ν, ν_1, ν_2 τυχόντες ἀκέραιοι ἀριθμοί, εἶναι ἴσον μὲ ἕκαστον τῶν δοθέντων κλασμάτων. (Ἀριθμ. ἄσκ. 139).

168. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κλάσμα $\dfrac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}$ εἶναι ἀνάγωγον, ὅταν ὁ ν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

169. Τὸ ἄθροισμα δύο ἀναγώγων κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ δὲν δύναται νὰ ἰσοῦται πρὸς ἀκέραιον ἀριθμόν, ἐὰν δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν. (Ἂν $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=K$ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=K-\frac{\gamma}{\delta}=\frac{K\delta-\gamma}{\delta}$ (1). Ἂν δὲ β καὶ δ διάφορα, ἡ ἰσότης (1) εἶναι ἀδύνατος. Διότι ἀποδεικνύομεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{K\delta-\gamma}{\delta}$ εἶναι ἀνάγωγον).

170. Ἡ διαφορὰ δύο ἀναγώγων κλασμάτων, ὧν οἱ παρονομασταὶ διαφέρουν δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

171. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνθήκη ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία, ἵνα τὸ γινόμενον δύο ἀναγώγων κλασμάτων εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

172. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τὸ πηλίκον δύο ἀναγώγων κλασμάτων εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

173. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τὸ κλάμσα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι τέλειον τετράγωνον ἑνὸς κλάσματος εἶναι τὸ γινόμενον $\alpha\cdot\beta$ νὰ εἶναι τετράγωνον ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

174. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ κλάσματα :

$$\frac{23}{99},\quad \frac{2323}{9999},\quad \frac{232323}{999999}\ \text{εἶναι ἰσοδύναμα.}$$

175. ***Τὸ ἄθροισμα δύο ἀντιστρόφων κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\beta}{\alpha}$ εἶναι πάντοτε μεγαλύτερον τοῦ 2.***

Ἂν $\frac{\alpha}{\beta}>1$ θὰ εἶναι $\frac{\beta}{\alpha}<1$· ἀλλὰ τότε ἔχομεν $\frac{\alpha}{\beta}-1=\frac{\alpha-\beta}{\beta}$ καὶ $1-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha}$, εἶναι δὲ $\frac{\alpha}{\beta}-1>1-\frac{\beta}{\alpha}$. Ἤδη ἀφαιροῦντες $\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)-\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)$ εὑρίσκομεν $\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)-2$. Ὅ.ἔ.δ.

176. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{\nu-1}{\nu}$, $\frac{\nu}{2\nu+1}$, $\frac{2\nu+1}{2\nu(\nu+1)}$ εἶναι ἀνάγωγα.

177. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων $\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\dots\dots+\frac{1}{2\nu}$, ὅπου ν ἀκέραιος, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\frac{1}{2}$.

Νὰ εὑρεθῇ :

178. Τὸ ἄθροισμα $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\dots+\frac{1}{(2\nu-1)\cdot(2\nu+1)}$

(Θὰ εὑρεθῇ ἐκ τῆς προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων

$$\frac{2}{1\cdot3}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3},\quad \frac{2}{3\cdot5}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5},\quad \frac{2}{(2\nu-1)(2\nu+1)}=\frac{1}{2\nu-1}-\frac{1}{2\nu+1}\Big)$$

179. Τὸ ἄθροισμα :

$$\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{3\,.\,4}+\ldots\ldots+\frac{1}{\nu(\nu+1)}$$

(Θὰ εὑρεθῇ ἐκ τῆς προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\Big)$$

180. Τὸ ἄθροισμα.

$$\frac{1}{2\,.\,4}+\frac{1}{4\,.\,6}+\ldots\ldots+\frac{1}{(2\nu-2)2\nu}$$

(Ὁμοίως τῶν ἰσοτήτων

$$\frac{2}{2\cdot 4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4},\quad \frac{2}{4\,.\,6}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6},\ldots,\frac{2}{(2\nu-2)\,(2\nu)}=\frac{1}{2\nu-2}-\frac{1}{2\nu}\Big)$$

181. ***Δίδονται δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ καὶ τοιαῦτα ὥστε $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=1$. Ν' ἀποδειχθῇ :***

1ον) ***Ὅτι τὰ κλάσματα ταῦτα εἶναι ἀνάγωγα.***

2ον) ***Ἂν ν τυχὸν ἀκέραιος τὰ κλάσματα $\frac{\nu\alpha+\alpha_1}{\nu\beta+\beta_1}$ καὶ $\frac{\alpha+\nu\alpha_1}{\beta+\nu\beta_1}$ εἶναι ἐπίσης ἀνάγωγα.***

1ον) Ἂν τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ δὲν ἦτο ἀνάγωγον, οἱ ὅροι του α καὶ β θὰ εἶχον κοινόν τινα διαιρέτην $\delta\neq 1$. Ἀλλὰ τότε ὁ δ θὰ διῄρει καὶ τὰ $\alpha\beta_1$ καὶ $\alpha_1\beta$· ἑπομένως θὰ διῄρει καὶ τὴν διαφοράν των $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=1$. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον. Ὁμοίως σκεπτόμεθα καὶ διὰ τὸ $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

2ον) Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\nu\alpha+\alpha_1}{\nu\beta+\beta_1}$ εἶναι ἀνάγωγα· διότι πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῶν ὅρων των θὰ διῄρει καὶ $\alpha(\nu\beta+\beta_1)-\beta\cdot(\nu\alpha+\alpha_1)=\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=1$. Ὁμοίως σκεπτόμεθα καὶ διὰ τὰ κλάσματα $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $\frac{\alpha+\nu\alpha_1}{\beta+\nu\beta_1}$ Οὕτω δὲ ἀποδεικνύεται ἡ περίπτωσις 2.

182. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{\nu}{2\nu-1}$, $\frac{2\nu+1}{3\nu+1}$ εἶναι ἀνάγωγα ὅταν ν ἀκέραιος.

183. Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta}<1$ θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha+x}{\beta+x}>\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\alpha-x}{\beta-x}<\frac{\alpha}{\beta}$.

Ἐὰν δὲ $\frac{\alpha}{\beta}>1$ θὰ εἶναι $\frac{\alpha+x}{\beta+x}<\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\alpha-x}{\beta-x}>\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν α, β, x πληρούντων ὅμως τὰς σχέσεις $\alpha>x$ καὶ $\beta>x$.

184. Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\gamma}{\delta}<\frac{}{\gamma}$ θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon}{\beta+\delta+\zeta}<\frac{\varepsilon}{\zeta}$.
(Ἀριθμ. ἄσκ. 140).

185. ***Ἐὰν τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ εἶναι ἀνάγωγα καὶ οἱ ἀριθμοὶ β καὶ δ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, διὰ νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\varepsilon}{\zeta}$ ἀκέραιος ἀριθμός, πρέπει νὰ εἶναι $\zeta=\beta\delta$.***

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν κλασμάτων θὰ εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος ἂν ὁ παρονομαστὴς $\beta\delta\zeta$ διαιρεῖ τὸν ἀριθμητὴν $\alpha\delta\zeta+\beta\gamma\zeta+\beta\delta\varepsilon$ (1). Ἀλλ' ὁ β ὀφείλων νὰ διαιρῇ τὸν ἀριθμητὴν αὐτόν, ὀφείλει νὰ διαιρῇ τὸ $\alpha\delta\zeta$, διότι τοὺς ἄλλους προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος (1) τοὺς διαιρεῖ. Ὁ β ὅμως εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν α καὶ πρὸς τὸν δ· ὥστε ὁ β διαιρεῖ τὸ ζ· ἔστω δὲ $\zeta=\beta\mu$. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι ὁ δ ὀφείλει νὰ διαιρῇ τὸν ζ, δηλαδὴ τὸ $\beta\mu$· ἐπειδὴ ὅμως ὁ δ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν β διαιρεῖ τὸ μ· ἔστω δὲ $\mu=\delta\nu$· οὕτω δὲ εἶναι $\zeta=\beta\delta\nu$. Τέλος βλέπομεν ὅτι ὁ ζ ὀφείλει νὰ διαιρῇ τὸ $\beta\delta\varepsilon$ ἤτοι τὸ $\beta\delta$, ἀφοῦ ὁ ζ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ε. Ἀλλ' ὡς εἴδομεν ὁ ζ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ $\beta\delta$. Οὕτω δὲ συνάγομεν ὅτι $\zeta=\beta\delta$.

186. ***Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀκέραιοι x, y μεγαλύτεροι τοῦ ἀκεραίου ν καὶ τοιοῦτοι ὥστε $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{\nu}$.***

Ἂν $x=\nu+\kappa$ καὶ $y=\nu+\lambda$, θὰ εἶναι $\frac{1}{\nu+\kappa}+\frac{1}{\nu+\lambda}>\frac{1}{\nu}$ ἢ $\frac{2\nu+\kappa+\lambda}{(\nu+\kappa)(\nu+\lambda)}>\frac{1}{\nu}$ ἢ $2\nu^2+\nu(\kappa+\lambda)>\nu^2+(\kappa+\lambda)\nu+\kappa\lambda$ ἢ $\nu^2>\kappa\lambda$. Ἂν λοιπὸν ὑποθέσωμεν $\nu^2=\kappa\lambda+1$ θὰ εἶναι $\nu^2-1=\kappa\cdot\lambda$ ἤτοι $(\nu+1)(\nu-1)=\kappa\cdot\lambda$. Ὅθεν $\kappa=\nu+1$, $\lambda=\nu-1$ καὶ $x=2\nu+1$ καὶ $y=2\nu-1$.

187. ***Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ἀνάγωγον, τοιοῦτον ὥστε $\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)-2=\frac{16}{45}$.***

Εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-2=\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta}$. Ὅθεν $\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta}=\frac{16}{45}$ (1).

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ὅπως τὸ κλάσμα $\frac{16}{45}$ εἶναι ἀνάγωγον, οὕτω καὶ τὸ $\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta}$ εἶναι ἀνάγωγον. Διότι ἂν οἱ ὅροι αὐτοῦ εἶχον διαιρέτην κοινὸν πρῶτον ἀριθμόν, οὗτος θὰ διήρει τοὺς ἀριθμοὺς $(\alpha-\beta)$ καὶ $\alpha\beta$. Ἐπομένως θὰ διήρει καὶ τοὺς $(\alpha-\beta)\alpha$ καὶ $\alpha\beta$ καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ ἄθροισμά α^2. Ὁμοίως δὲ θὰ διήρει καὶ τοὺς $(\alpha-\beta)\beta$ καὶ $\alpha\beta$ καὶ κατὰ συνέπειαν τὴν διαφοράν των $\alpha\beta-(\alpha-\beta)\beta=\beta^2$. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον. Ἀφοῦ λοιπὸν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (1) εἶναι κλάσματα ἀνάγωγα, ἕπεται (Ἀριθ. § 77) $(\alpha-\beta)^2=16=4^2$ καὶ $\alpha\beta=45$, ἤτοι $\alpha-\beta=4$ καὶ $\alpha\beta=45$. Οὕτω βλέπομεν ὅτι οἱ δύο ὅροι τοῦ ἀναγώγου κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ ἔχουν γινόμενον 45 καὶ διαφορὰν 4. Ἀλλ' ἐπειδὴ $45=1\times45$, $45=5\times9$, $45-1=44$ καὶ

$9-5=4$, ἕπεται ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι δυνατὸν ἂν λάβωμεν ὡς α καὶ β τοὺς ἀριθμοὺς 9 καὶ 5. Ὥστε τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶναι τὸ $\frac{5}{9}$ ἢ τὸ $\frac{9}{5}$.

188. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ μεγαλύτερον κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν τὴν μονάδα 1 καὶ τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον πρὸς κλάσμα δοθὲν μικρότερον τῆς μονάδος 1.***

Ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ δοθὲν κλάσμα μικρότερον τῆς μονάδος 1. Ἔστω δὲ πάλιν ν ὁ παρονομαστὴς τοῦ ζητουμένου κλάσματος. Ὅθεν θὰ εἶναι $\frac{1}{\nu} \leqslant \frac{\alpha}{\beta} < \frac{1}{\nu-1}$, ἤτοι $\nu-1 < \frac{\beta}{\alpha} \leqslant \nu$. Ἔχοντες ἤδη ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ ν καὶ $\frac{\beta}{\alpha}$ εἶναι μικροτέρα τοῦ 1, ἔχομεν $\frac{\beta}{\alpha} \leqslant \nu < \frac{\beta}{\alpha} + 1$ (1). Οὕτω τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶναι τὸ $\frac{1}{\nu} \leqslant \frac{\alpha}{\beta}$, ὅπου ὁ παρονομαστής του ν εἶναι ὁ μικρότερος ἀκέραιος ἴσος ἢ μεγαλύτερος τοῦ κλάσματος $\frac{\beta}{\alpha}$.

189. ***Νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶν κλάσμα μικρότερον τῆς μονάδος 1, δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν ἀθροίσματος πεπερασμένου πλήθους κλασμάτων, ὁλοὲν μικροτέρων καὶ ἐχόντων ὅλων ἀριθμητὴν τὴν μονάδα 1. Ἤτοι τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν***

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{\nu_k}, \quad \textit{ὅπου} \quad \nu < \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_k.$$

Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς ἐπανειλημμένης ἐφαρμογῆς τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

Διότι ἐὰν ὁ β εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ α, τότε εὑρίσκομεν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\nu}$. ἂν ὅμως ὄχι, εὑρίσκομεν ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, ἕνα ἀριθμὸν ν τοιοῦτον ὥστε $\frac{1}{\nu} < \frac{\alpha}{\beta}$. Οὕτως εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\nu} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ (2), ὅπου $\alpha_1 < 1$ καὶ $\frac{\alpha_1}{\beta_1} < 1$. Διότι εἶναι $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha\nu - \beta}{\beta\nu}$ καὶ $\alpha\nu - \beta < \alpha$ (ἄσκ. 188, ἀνισότητες 1). Οὕτως ἐκ τῆς ἰσότητος (2) προκύπτει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\nu} + \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ (3). Ἤδη ἐργαζόμεθα ὁμοίως ἐπὶ τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ καὶ ἐὰν $\beta_1 : \alpha_1 = \nu_1$, ἔχομεν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu_1}$.
Ἂν ὅμως ὁ β_1 δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ α_1, εὑρίσκομεν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2}$, ὅπου $\alpha_2 < \alpha$ καὶ $\frac{\alpha_2}{\beta_2} < 1$. Ἀλλ' εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ἔχομεν

$\nu_1 \geqslant \frac{\beta\nu}{\alpha\nu-\beta}$. 'Αλλ' ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω εἶναι $\alpha > \alpha\nu-\beta$. Ὥστε $\nu_1 \geqslant \frac{\beta\nu}{\alpha}$ καὶ κατὰ συνέπειαν $\nu_1 > \nu$. 'Εξακολουθοῦντες ὁμοίως θὰ φθάσωμεν ἀναγκαίως εἰς ἕνα κλάσμα $\frac{\alpha_k}{\beta_k}=\frac{1}{\nu_k}$. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu_1}+\dots\frac{1}{\nu_k}$ καὶ ὅπου $\nu < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_k$.

190. 'Εφαρμογὴ τῶν ἀνωτέρω εἰς τὸ κλάσμα $\frac{7}{22}$.

(Θὰ εὕρωμεν $\frac{7}{22}=\frac{1}{4}+\frac{1}{15}+\frac{1}{660}$).

'Ασκήσεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

191. ***Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἀνάγωγον $\frac{\alpha}{\beta}$ τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι ἔχουν γινόμενον 550 καὶ ἴσον πρὸς δεκαδικὸν κλάσμα.***

Ὁ παρονομαστὴς τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος εἶναι τῆς μορφῆς $2^\kappa \cdot 5^\psi$. 'Επειδὴ δὲ $550=2\cdot 5^2\cdot 11$ συνάγομεν ὅτι:

$\alpha=11,\quad \beta=2\cdot 5^2=50.$ Ὥστε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{11}{50}$

$\alpha=11\cdot 2,\quad \beta=5^2=25$ » $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{22}{25}$

$\alpha=11\cdot 5^2,\quad \beta=2$ » $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{275}{2}$.

192. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κοινοῦ κλάσματος ἐξ οὗ παράγεται μεικτὸν περιοδικόν, οὐδέποτε λήγει εἰς 0.

193. Νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶς ἀριθμὸς Α, μὴ ἔχων τὸν παράγοντα 2, μηδὲ τὸν 5, διαιρεῖ ἀριθμόν τινα, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ ψηφία εἶναι 9, ἤτοι διαιρεῖ ἀριθμόν τινα τῆς μορφῆς $10^\nu-1$. Ἂν δὲ ἐκ πασῶν τῶν δυνάμεων 10^ν λάβωμεν τὴν ἐλαχίστην, ὁ ἐκθέτης αὐτῆς δεικνύει τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τῆς περιόδου ἐν τῷ περιοδικῷ κλάσματι, τῷ παραγομένῳ ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{1}{A}$ καὶ ἐκ παντὸς κλάσματος $\frac{B}{A}$ ἀναγώγου.

194. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ ἢ τὸ γινόμενον δύο ἁπλῶν περιοδικῶν κλασμάτων, εἶναι ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα.

195. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πηλίκον δύο ἁπλῶν περιοδικῶν κλασμάτων δὲν εἶναι πάντοτε ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα.

196. ***Νὰ δειχθῇ, ὅτι οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀκεραίου ν, τὸ ἄθροισμα $\frac{1}{\nu-1}+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu+1}$ δίδει μεικτὸν περιοδικὸν κλάσμα.***

Τὸ ἄθροισμα εἶναι $\frac{3\nu^2-1}{\nu(\nu-1)(\nu+1)}$· καὶ 1ον) ἂν ν ἄρτιος ὁ ἀριθμητὴς εἶναι περιττός, μὴ διαιρετὸς διὰ 3, ἐνῷ ὁ παρονομαστὴς εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 καὶ ἄρτιος. 2ον) Ἂν ὁ ν περιττὸς ὁ ἀριθμητὴς εἶναι ἄρτιος διαιρετὸς μόνον διὰ 2, ἐνῷ ὁ παρονομαστής, οὗ οἱ παράγοντες $(\nu-1)$ καὶ $(\nu+1)$ εἶναι δύο διαδοχικοὶ ἄρτιοι, εἶναι διαιρετὸς διὰ 8 (καὶ διὰ 3). Οὕτως εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις, τὸ ἄθροισμα καθιστάμενον ἀνάγωγον θὰ δίδει κλάσμα μὲ παρονομαστὴν ἔχοντα τοὐλάχιστον ἕνα τῶν παραγόντων 2 ἢ 5, καὶ ἀκόμη ἄλλον ἐκτὸς τοῦ 2 ἢ 5· οἱ παράγοντες δὲ οὗτοι δὲν θὰ ὑπάρχουν εἰς τὸν ἀριθμητήν, εἰμὴ εἰς μικροτέρας δυνάμεις.

197. Πῶς πρέπει νὰ ἐκλεγῇ ὁ ἀκέραιος ν, ἵνα τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}$ (ἄσκ. 168) εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς δεκαδικὸν κλάσμα;

198. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ παρονομασταὶ τῶν ἀναγώγων κλασμάτων ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτουν ἁπλᾶ περιοδικὰ κλάσματα, ὧν ἡ περίοδος ἔχει 1, 2, 3,...ν ψηφία.

(Μὲ περίοδον 1 ψηφίου, 3 καὶ 9· μὲ περίοδον 2 ψηφίων, 11, 33, 99· μὲ περίοδον 3 ψηφίων, 27, 37, 111, 333, 999 κ.ο.κ.).

199. Ἂν δύο ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{\alpha}{\alpha_1}$, $\frac{\beta}{\beta_1}$ δίδουν ἁπλᾶ περιοδικὰ καὶ ἐὰν α_1 καὶ β_1 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ κλάσμα $\frac{\alpha\beta}{\alpha_1\beta_1}$ δίδει ἐπίσης ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος εἶναι τὸ ἐ.κ.π. τῶν περιόδων τῶν κλασμάτων $\frac{\alpha}{\alpha_1}$, $\frac{\beta}{\beta_1}$.

200. Καθιστῶμεν τὸ κλάσμα $\frac{1}{7}$ δεκαδικὸν ἀριθμόν. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν περίοδον αὐτοῦ ἐπὶ 2, 3, 4, 5, 6 προκύπτουν ἀριθμοὶ μὲ τὰ αὐτὰ ψηφία. Νὰ εὑρεθῇ διατί;

201. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ περίοδος ἑνὸς ἁπλοῦ περιοδικοῦ κλάσματος, ἐὰν ἡ περίοδος αὕτη ἔχει τρία ψηφία καὶ ἐκ τοῦ ὅτι τὸ κλάσμα ποὺ προέκυψεν εἶναι κύβος ἑνὸς κοινοῦ κλάσματος.

202. Νὰ εὑρεθῇ ἕνα κλάσμα ἀνάγωγον τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι 66 καὶ τὸ ὁποῖον τρεπόμενον εἰς δεκαδικόν, δίδει ἁπλοῦν περιοδικὸν ἀριθμὸν μὲ περίοδον ἔχουσαν 4 ψηφία.

203. Τρέπομεν εἰς δεκαδικοὺς τὰ ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{\alpha}{7}$ καὶ $\frac{\alpha}{13}$. Ἐὰν Π καὶ Π′ εἶναι αἱ περίοδοι αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν $\frac{\Pi}{\Pi'}=\frac{13}{7}$.

204. Δίδονται δύο κλάσματα τῆς μορφῆς $\frac{\alpha}{10^\nu-1}$, $\frac{\beta}{10\ \ -1}$. Νὰ εὑρεθῇ ὅτι τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{\gamma}{10^k-1}$ (τὰ γράμματα παριστῶσι ἀκεραίους ἀριθμούς).

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ τετραγώνου καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

205. Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγῃ εἰς ἓν τῶν ψηφίων 2, 3, 7, 8, δὲν εἶναι τετράγωνον.

206. Ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον ἐὰν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 5, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων δὲν εἶναι 2.

207. Ἀκέραιος δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐὰν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 6, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι ἄρτιον.

208. Ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον ἐὰν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 9, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι περιττόν.

209. Τὸ τετράγωνον ἀκεραίου ἀριθμοῦ λήγοντος εἰς 5, δὲν δύναται νὰ λήγῃ εἰς 125.

210. Ἵνα κλάσμα εἶναι τέλειον τετράγωνον πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ γινόμενον τῶν δύο ὅρων αὐτοῦ νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

211. Παντὸς περιττοῦ ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνον εἶναι πολλ $8+1$.

212. Πᾶς περιττὸς ἀριθμός, ὅστις εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων εἶναι πολλ $4+1$.

213. Τὸ τετράγωνον παντὸς ἀρτίου ἀριθμοῦ εἶναι πολλ 16 ἢ πολλ $16+4$.

214. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο τυχόντων ἀκεραίων εἶναι πολλ 4 ἢ πολλ $4+1$ ἢ πολλ $4+2$ οὐδέποτε δὲ εἶναι πολλ $4+3$.

215. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τριῶν ἀριθμῶν μὴ διαιρετῶν διὰ 3, εἶναι διαιρετὸν διὰ 3.

216. Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν μὴ διαιρετῶν διὰ 3 εἶναι διαιρετὴ διὰ 3.

217. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς τετραγώνου διὰ τοῦ 9, εἶναι 0, 1, 4 ἢ 7.

218. Ἂν α εἶναι περιττὸς ἀριθμός, ὁ $\alpha+\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^2$ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

219. Ἂν τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι τέλειον τετράγωνον, τὸ πηλίκον ἑκάστου τῶν δύο αὐτῶν ἀριθμῶν, διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

220. ***Ἂν τὸ ἄθροισμα δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν λήγῃ εἰς 0, τὰ τετράγωνα αὐτῶν λήγουν εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον.***

Οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶναι τῆς μορφῆς $A=10\delta+\mu$ καὶ $A_1=10\delta_1+\mu_1$, ὅπου

δ, δ_1 ἐκφράζουν τὸ σύνολον τῶν δεκάδων των καὶ μ, μ_1 εἶναι τὰ ψηφία τῶν μονάδων των. Ἀλλὰ τότε εἶναι $A^2 = 100\delta + 20\delta\mu + \mu^2$ καὶ $A_1^2 = 100\delta_1 + 20\delta_1\mu_1 + \mu_1^2$ ἢ ἐπειδὴ $\mu + \mu_1 = 10$, ἤτοι $\mu_1 = 10 - \mu$, εἶναι $A_1^2 = 100\delta_1 + 20\delta_1(10-\mu) + (10-\mu)^2 = 100\delta_1 + 20\delta_1(10-\mu) + 10^2 - 20\mu + \mu^2$. Οὕτω βλέπομεν, ὅτι $A^2 =$ πολλ. $10 + \mu^2$ καὶ $A_1^2 =$ πολλ. $10 + \mu^2$. Ὥστε τὰ A^2 καὶ A_1^2 λήγουν εἰς ὃ ψηφίον λήγει τὸ μ^2.

221. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀνίσων ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου γινομένου αὐτῶν.

222. Τὸ γινόμενον δύο ἀνίσων ἀριθμῶν εἶναι μικρότερον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἡμιαθροίσματος αὐτῶν.

223. ***Τὸ γινόμενον τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, δὲν δύναται νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον.***

Οἱ τρεῖς διαδοχικοὶ ἀκέραιοι εἶναι τῆς μορφῆς $\nu-1$, ν, $\nu+1$. Ὅθεν τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι $(\nu-1)\cdot\nu\cdot(\nu+1) = \nu(\nu^2-1)$. Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ ν καὶ ν^2-1 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οὐδεὶς δὲ τούτων εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἵνα καὶ τὸ γινόμενόν των εἶναι τετράγωνον· διότι ἐὰν ἦτο τέλειον τετράγωνον ὁ ν, θὰ ἦτο τοιοῦτον καὶ ὁ ν^2· οὕτως ὁ ν^2-1 δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

224. Τὸ γινόμενον τεσσάρων διαδοχικῶν ἀριθμῶν ηὐξημένον κατὰ 1 εἶναι τέλειον τετράγωνον. [Διότι $(\nu-1)\cdot\nu\cdot(\nu+1)(\nu+2) = (\nu^2-1)(\nu^2+2\nu) = (\nu^2-1)(\nu^2-1+2\nu+1) = (\nu^2-1)(\nu^2-1) + (\nu^2-1)(2\nu+1) = (\nu^2-1)^2 + 2\nu(\nu^2-1) + (\nu^2-1) = (\nu^2-1+\nu)^2 - 1$].

225. ***Ἂν οἱ α καὶ β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὁ εἷς ἄρτιος καὶ ὁ ἄλλος περιττός, ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των, δὲν δύναται νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐκτὸς ἐὰν $\alpha+\beta$ καὶ $\alpha-\beta$ εἶναι τέλεια τετράγωνα.***

Οἱ $\alpha+\beta$ καὶ $\alpha-\beta$ εἶναι περιττοὶ ἀριθμοί· εἶναι δὲ καὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· διότι ἂν οὗτοι εἶχον κοινὸν διαιρέτην, οὗτος θὰ διῄρει τὸ ἄθροισμά των 2α καὶ τὴν διαφοράν των 2β· οὕτω συνάγομεν ὅτι ὁ κοινὸς αὐτὸς διαιρέτης θὰ ἦτο ὁ 2· ὅπερ ἀδύνατον. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι $\alpha^2-\beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$· ἀλλ' ἀφοῦ οἱ παράγοντες $(\alpha+\beta)$ καὶ $(\alpha-\beta)$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ γινόμενόν των $\alpha^2-\beta^2$ δὲν δύναται νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐκτὸς ἂν οἱ $\alpha+\beta$ καὶ $\alpha-\beta$ εἶναι τέλεια τετράγωνα.

226. Ἐὰν α, β εἶναι δύο τυχόντες ἀκέραιοι, ὁ λόγος $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$ δὲν εἶναι ποτὲ ἀκέραιος ἀριθμός.

227. Τὸ τετράγωνον ἑνὸς πρώτου ἀριθμοῦ διαφόρου τοῦ 2 καὶ 3 εἶναι ἕνα πολλ 24 ηὐξημένον κατὰ 1.

228. Τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι διαιρετὸν διὰ 12, ἐὰν ὁ μεγαλύτερος εἶναι ἕνα τετράγωνον. Τὸ γινόμενον τριῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι πολλ 60, ἐὰν ὁ μεσαῖος εἶναι τέλειον τετράγωνον.

229. Τὸ τετράγωνον ἑνὸς τυχόντος ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἶναι τῆς μορφῆς 5ν ἢ $5\nu+1$ ἢ $5\nu-1$.

230. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους εἶναι τετράγωνον, τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι διαιρετὸν διὰ 6.

231. Ἐὰν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε νὰ ὑφίσταται ἡ σχέσις $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ ὁ εἷς ἐκ τούτων τοὐλάχιστον εἶναι διαιρετὸς διὰ 5.

232. Ἐὰν ἕνας ἄρτιος ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων, τὸ ἥμισυ αὐτοῦ εἶναι ἐπίσης ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

233. Ἕνας ἀριθμὸς μὲ 4 ψηφία εἶναι τέλειον τετράγωνον ἄλλου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐὰν τὰ δύο πρῶτα ψηφία εἶναι ἴσα ὡς καὶ τὰ δύο τελευταῖα ψηφία ἐπίσης ἴσα.

234. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους εἶναι πολλ $4+1$ ἢ πολλ $4+2$.

235. Ἐὰν α εἶναι δοθεὶς ἀκέραιος ἀριθμός, ποῖαι εἶναι αἱ τιμαὶ τοῦ β διὰ τὰς ὁποίας ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\beta}$ εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$;

236. Ποῖος ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν $\nu+1$ καὶ $\nu+2$ πλησιάζει περισσότερον πρὸς τὸν $\sqrt{(\nu+1)(\nu+2)}$;

237. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{1175}{28}$ κατὰ προσέγγισιν 2/9.

238. Νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ προσέγγισιν 0,01 ἡ τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ

$$N=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$$

239. Ἔστωσαν α, β αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν Α καὶ Β κατὰ προσέγγισιν μονάδος κατ' ἔλλειψιν.

Εἰς ποίαν περίπτωσιν τὸ $\alpha\cdot\beta$ εἶναι τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $A\cdot B$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος κατ' ἔλλειψιν;

240. Ποία εἶναι ἡ συνθήκη ἵνα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ $\alpha^2-\beta$ κατ' ἔλλειψιν εἶναι $\alpha-1$; Ποία ἡ συνθήκη ἵνα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι $\alpha-\gamma$ ὅπου $\gamma<\alpha$; ($\gamma=$δοθεὶς ἀριθμός).

241. Τὸ κλάσμα $\frac{\nu-1}{\nu}$ εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἑαυτοῦ του.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν λόγων καὶ ἀναλογιῶν.

242. Εἰς δύο ἀναλογίας, ἂν οἱ ἄκροι ὅροι εἶναι ἴσοι, οἱ μέσοι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι· ἂν δὲ οἱ μέσοι ὅροι εἶναι ἴσοι, οἱ ἄκροι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι.

243. Ἐκ τῶν δύο λόγων $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$, $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$, ὅπου $\alpha>\beta$ ποῖος εἶναι ὁ μεγαλύτερος ;

244. Ἂν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}=\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma+\delta)^2}$.

245. Ἂν $\frac{\mu\alpha+\nu\beta}{\mu\alpha_1+\nu\beta_1}=\frac{\alpha}{\alpha_1}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\alpha_1}=\frac{\beta}{\beta_1}$, οἱωνδήποτε ὄντων τῶν ἀριθμῶν μ καὶ ν καὶ ἀντιστρόφως.

246. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἐκ τῶν δύο ἀναλογιῶν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ καὶ $\frac{\mu\alpha+\nu\beta}{\kappa\alpha-\varrho\beta}=\frac{\mu\alpha_1+\nu\beta_1}{\kappa\alpha_1-\varrho\beta_1}$ ἡ μία προκύπτει ἐκ τῆς ἄλλης, οἱωνδήποντε ὄντων τῶν ἀριθμῶν μ, ν, κ, ϱ.

247. Τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι ἐν ἁρμονικῇ ἀναλογίᾳ ὅταν τὸ ἀντίστροφον τοῦ μέσου ἁρμονικοῦ β ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιστρόφων τῶν δύο ἄκρων α καὶ γ· ἤτοι ὅταν $\frac{1}{\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\right)$. Ν' ἀποδειχθῇ τότε ὅτι $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ ἀντιστρόφως.

248. Ἂν ὁ γ εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν α, β θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{(\alpha+\gamma)^2}{(\beta+\gamma)^2}$

249. Ἂν Α, Κ, Η εἶναι ἀντιστοίχως τὸ ἀριθμητικόν, γεωμετρικὸν καὶ ἁρμονικὸν μέσον δύο ἀριθμῶν, θὰ εἶναι $\mathrm{A}\geqslant\mathrm{K}\geqslant\mathrm{H}$.

250. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$ καὶ $\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\delta}\right)$, οἱ τέσσαρες αὐτοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν ἀναλογίαν.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν διαφόρων συστημάτων ἀριθμήσεως.

Εἴδομεν εἰς τὴν ἀριθμητικὴν (§ 11, σελὶς 6), ὅτι ***βάσις*** συστήματος ἀριθμήσεως λέγεται ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων μιᾶς τάξεως, ὅστις ἀποτελεῖ μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Οὕτως τὸ ἐκτεθὲν σύστημα ἀριθμήσεως εἰς τὴν ἀριθμητικὴν (§ 7 - 10) ἔχει βάσιν τὸ δέκα καὶ διὰ τοῦτο λέγεται δεκαδικόν.

Εἰς σύστημα ἀριθμήσεως μὲ βάσιν Μ χρειάζονται, διὰ τὴν γραφὴν τοῦ ἀριθμοῦ, Μ—1 σημαντικὰ ψηφία καὶ τὸ μηδέν. Γράφεται δὲ ἡ βάσις πάντοτε μὲ τὸ σύμβολον 10. Οὕτως εἰς τὸ ὀκταδικὸν π.χ. σύστημα ἀριθμήσεως, δηλαδὴ εἰς τὸ σύστημα ἀριθμήσεως μὲ βάσιν ὀκτώ, ἡ μονὰς δευτέρας τάξεως εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὀκτὼ (ἢ ἡ ὀκτὰς καὶ γράφεται 10), ἡ μονὰς τρίτης τάξεως, εἶναι ὁ ὀκτάκις ὀκτὼ καὶ γράφεται 100, ἡ μονὰς τετάρτης τάξεως γράφεται 1000 καὶ ἡ μονὰς νης τάξεως γράφεται μὲ τὴν μονάδα 1 ἀκολουθουμένη μὲ ν μηδενικά. Ὁ δὲ ἀριθμὸς 9 γράφεται 11, ὁ δέκα 12 κλπ.

251. ***Νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμὸς 853 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς ἀριθμὸν τοῦ ὀκταδικοῦ.***

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ 853 ἁπλαῖ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ, ἀποτελοῦν τόσας μονάδας δευτέρας τάξεως (ἤτοι ὀκτάδας), ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 853 τὸν 8· διαιροῦμεν λοιπὸν τὸν 853 διὰ τοῦ 8 καὶ εὑρίσκομεν 106 μονάδας δευτέρας τάξεως καὶ μένουν 5 ἁπλαῖ μονάδες.

Αἱ 106 δὲ μονάδες τῆς δευτέρας τάξεως, εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι ἀποτελοῦν $106:8=13$ τῆς τρίτης τάξεως καὶ μένουν 2 μονάδες τῆς δευτέρας τάξεως, ἐνῷ αἱ 13 μονάδες τρίτης τάξεως ἀποτελοῦν 1 μονάδα τῆς τετάρτης τάξεως καὶ μένουν 5 μονάδες τῆς τρίτης τάξεως. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς 853 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος,, εἰς τὸ ὀκταδικὸν γράφεται 1525.

252. ***Ὁ εἰς τὸ τριαδικὸν σύστημα γραμμένος ἀριθμὸς 1202 νὰ τραπῇ εἰς ἀριθμὸν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος.***

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι περιέχει 2 μονάδας πρώτης τάξεως ἤτοι 2 ἁπλᾶς μονάδας, 2 μονάδας τρίτης τάξεως ἤτοι $2\times3^2=18$ ἁπλᾶς μονάδας καὶ 1 μονάδα τετάρτης τάξεως ἤτοι $1\times3^3=27$ ἁπλᾶς μονάδας. Ἤτοι ὁ ἀριθμὸς 1202 τοῦ τριαδικοῦ συστήματος, εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα περιέχει ἁπλᾶς μονάδας $2+2\times3^2+1\times3^3=2+18+27=47$, ἤτοι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα γράφεται 47.

253. ***Ὁ ἀριθμὸς 2112 τοῦ τριαδικοῦ συστήματος νὰ γραφῇ εἰς ἀριθμὸν τοῦ πενταδικοῦ.***

Γράφομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα (ὡς εἰς τὴν ἄσκ. 252) καὶ τὸ ἐξαγόμενον τὸ γράφομεν εἰς τὸ πενταδικὸν (ὡς εἰς τὴν ἄσκ. 251).

254. Ὁ ἀριθμὸς 1000 νὰ γραφῇ εἰς τὸ δυαδικὸν σύστημα.

255. Ὁ ἀριθμὸς 101010 τοῦ δυαδικοῦ συστήματος νὰ τραπῇ εἰς ἀριθμὸν τοῦ δεκαδικοῦ.

256. Ὁ ἀριθμὸς 8504 τοῦ συστήματος μὲ βάσιν 9 νὰ τραπῇ εἰς ἀριθμὸν τοῦ ἑπταδικοῦ.

Ἀσκήσεις ἀνάμεικτοι.

257. Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς διάφορος τῆς μονάδος 1 εἶναι ἢ δύναμις τοῦ 2 ἢ δύναμις τοῦ 2 ηὐξημένη κατὰ 1 ἢ ἄθροισμα διαφόρων δυνάμεων τοῦ 2 ἢ τοιοῦτον ἄθροισμα ηὐξημένον κατὰ 1.

258. Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς Α δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$A=\alpha_0+2\alpha_1+2^2\alpha_2+2^3\alpha_3+\ldots+2^\nu\alpha_\nu$, ὅπου ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν α_0, α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_\nu$ εἶναι ἴσος μὲ 0 ἢ μὲ 1, καὶ κατὰ ἕνα μόνον τρόπον.

259. Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 1, 2, 3,.. ,8, 9 νὰ γραφοῦν εἰς τρόπον ὥστε ν' ἀποτελέσουν πίνακα ἐκ τριῶν γραμμῶν καὶ τριῶν στηλῶν· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἑκάστης γραμμῆς, ἢ ἑκάστης στήλης ἢ ἑκάστης διαγωνίου νὰ εἶναι πάντοτε τὸ αὐτὸ (μαγικὸν τετράγωνον). Νὰ δειχθῇ δὲ α) ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἑκάστης γραμμῆς εἶναι 15 καὶ β) ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 9 πρέπει νὰ γραφοῦν εἰς τὸ μέσον μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου.

260. Ὅταν τὸ ἄθροισμα τοῦ πηλίκου καὶ τοῦ ὑπολοίπου μιᾶς διαιρέσεως εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου ἠλαττωμένου κατὰ μονάδα, δὲν ἀλλάσσει τὸ πηλίκον, ὅταν ἐλαττώσωμεν τὸν διαιρέτην κατὰ 1.

261. Ἵνα ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 7, τοῦ 13, τοῦ 77, τοῦ 91 ἢ διὰ τοῦ 143 πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἵνα ἡ διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριψηφίων τμημάτων τάξεως περιττῆς, εἰς ἃ διαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς ἐκ δεξιῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριψηφίων τμημάτων τάξεως ἀρτίας εἶναι 0 ἢ διαιρετὴ διὰ 7, 13, 77, 91, 143.

262. Ἐκ τοῦ ἐξαγομένου τοῦ ἀθροίσματος $(\alpha-1)^3+\alpha^3+(\alpha+1)^3$, ὅπου α ἀκέραιος, γνωρίζομεν ὅλα τὰ ψηφία πλὴν ἑνὸς σημαντικοῦ.

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τοῦτο ; Καὶ πῶς ;

263. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ν πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ $\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}$.

264. Ἂν τρεῖς ἀκέραιοι ἀριθμοὶ α, β, γ συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$. 1ον) Εἷς τοὐλάχιστον τῶν ἀριθμῶν α, β εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 2. 2ον) Εἷς τοὐλάχιστον τῶν ἀριθμῶν α, β εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 3. 3ον) Εἷς τοὐλάχιστον τῶν ἀριθμῶν α, β εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 4 καὶ 4ον) Εἷς τοὐλάχιστον τῶν ἀριθμῶν α, β, γ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 5.

265. Ἔστωσαν δ, δ_1, δ_2 οἱ μ. κ. δ. τοῦ ἀριθμοῦ Ν καὶ ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ. Τότε ἂν οἱ Α, Β, Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, ὁ μ. κ. δ. τοῦ Ν καὶ τοῦ γινομένου ΑΒΓ εἶναι τὸ γινόμενον $\delta\, \delta_1\, \delta_2$.

266. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ α, ὁ ἀριθμὸς $\alpha+2$ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ $\alpha-1$; (ἀπ. 2 καὶ 4).

267. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, ὧν γνωρίζομεν τὸν λόγον καὶ τὸν μ. κ. δ.

Ἐφαρμογή: λόγος=7 : 11 καὶ μ. κ. δ.=18.

268. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, ὧν γνωρίζομεν τὸν λόγον καὶ τὸ ἐ.κ.π.

Ἐφαρμογή: λόγος=4 : 13 καὶ ἐ.κ.π.=7956.

269. Ἡ διαφορὰ τριψηφίου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ προκύπτοντος διὰ τῆς ἀντιστροφῆς τῶν ψηφίων του, οὐδέποτε εἶναι τέλειον τετράγωνον.

270. Τὸ τετράγωνον ἀκεραίου ἀριθμοῦ λήγει εἰς 9. Ποῖον τότε δύναται νὰ εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ τετραγώνου τούτου ;

271. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ γενικὴ μορφὴ τῶν κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$, τοιούτων ὥστε τὰ κλάσματα $\frac{\alpha-18}{\beta}$ καὶ $\frac{\alpha}{\beta+12}$ νὰ εἶναι ἴσα.***

Ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\alpha-18}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta+12}$ προκύπτει ἡ $(\alpha-18)(\beta+12)=\alpha\beta$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $2\alpha-3\beta=36$ (1). Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 2 ὡς διαιρῶν τὸ 2α καὶ 36, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ 3β· ἐπειδὴ ὅμως εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 3, θὰ διαιρῇ τὸ β· Οὕτως εἶναι $\beta=2\mu$, ὅπου μ ἀκέραιος. Οὕτως ἐκ τῆς σχέσεως (1) εὑρίσκομεν $2\alpha-6\mu=36$ καὶ $\alpha=3\mu+18$. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν μορφὴ εἶναι ἡ $\frac{3\mu+18}{2\mu}$.

272. Νὰ εὑρεθοῦν δύο κλάσματα ἔχοντα διαφορὰν $\frac{6}{35}$ καὶ λόγον $\frac{7}{5}$ $\left(\text{ἀπ.}\ \frac{3}{5}\ \text{καὶ}\ \frac{3}{7}\right)$

273. ***Νὰ δειχθῇ ὅτι :***

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots+\frac{1}{10^\nu}+\frac{1}{10^\nu}\times\frac{1}{9} \qquad 1)$$

Διότι ἂν ἔχωμεν νὰ μοιράσωμεν 1 δραχμὴν εἰς 9 ἀνθρώπους καὶ παραδεχθῶμεν ἀκόμη ἕνα ἄνθρωπον, ἕκαστος θὰ λάβῃ $\frac{1}{10}$ τῆς δραχμῆς καὶ θὰ περισσεύσῃ καὶ τὸ μερίδιον τοῦ προσθέτου ἀνθρώπου ἤτοι $\frac{1}{10}$. Ἐὰν δὲ καὶ εἰς τὸν νέον μερισμὸν τοῦ $\frac{1}{10}$ τούτου κάμωμεν τὸ αὐτό, εὑρίσκομεν ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$ καὶ θὰ περισσεύσῃ καὶ $\frac{1}{100}$ πρὸς νέαν διανομήν. Ἐξακολουθοῦντες οὕτως, ἐφ' ὅσον θέλομεν, εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ μερίδιον ἑκάστου θὰ εἶναι $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots+\frac{1}{10_\nu}$ καὶ θὰ περισσεύσῃ πρὸς διανομὴν $\frac{1}{10_\nu}$. Οὕτως ἕπεται ἡ ἰσότης (1).

274. Νὰ δειχθῇ, ὡς ἄνω, ἡ ἰσότης

$$\frac{\alpha}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}+\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3}+\ldots\ldots+\frac{\alpha\gamma^{\nu-1}}{\beta^\nu}+\frac{\alpha\gamma^\nu}{\beta^\nu}\times\frac{1}{\beta-\gamma},$$

ὅπου β καὶ γ εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ $\beta > \gamma$.

ΤΕΛΟΣ

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ

1) ΜΕΓΑΛΗ ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ. Εἰσαγωγή. Τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις. Τριγωνομετρικαὶ ταυτότητες, ἐξισώσεις, καὶ ἀνισότητες. Τριγωνομετρικὰ συστήματα. Ἀντίστροφοι κυκλικαὶ συναρτήσεις. Ἀπαλοιφή. Ἐπιλύσεις. Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα. Ἀπροσδιόριστοι μορφαί. Ἐφαρμογαὶ εἰς τὴν Τοπογραφίαν, Φυσικήν, Ναυτιλίαν, Ἀεροπλοΐαν, Κοσμογραφίαν κ. ἄ. Ποικίλαι ἀσκήσεις μεθ' ἕκαστον κεφάλαιον. Ἀσκήσεις ἐπὶ ἀπολύτων τιμῶν.

Τὸ βιβλίον τοῦτο κατὰ τὴν κρίσιν τῶν ἁρμοδίων τοῦ Ὑπουργείου Παιδείας ἀποτελεῖ **πολύτιμον βοήθημα** καὶ εἶναι **χρησιμώτατον** εἰς ταὺς μαθητὰς τῶν ἀνωτέρων γυμνασιακῶν τάξεων καὶ εἰς τοὺς ὑποψηφίους τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν. Δι' ὃ συνιστᾶται ὑπὸ τοῦ Ὑπουργείου Παιδείας διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 92102/22-9-51 ἐγκυκλίου του.

2) ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΑΥΤΩΝ. Εἶναι αἱ περιεχόμεναι εἰς τὴν Μεγάλην Ἐπίπεδον Τριγωνομετρίαν. Ὑποβοηθοῦν δὲ μεγάλως τὴν προπαρασκευὴν τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς Ἀνωτάτας Σχολάς.

3) ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ἢ ΜΕΓΑΛΗ ΑΛΓΕΒΡΑ. Περιέχει ὅλην τὴν ὕλην τὴν ἀπαραίτητον εἰς τοὺς μαθητὰς τῶν Γυμνασίων καὶ εἰς τοὺς ὑποψηφίους διὰ τὰς ἀνωτέρας σχολάς.

4) ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ.

5) ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΟΔΗΓΙΑΙ ΔΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ. Περιέχει ὅλας τὰς Γεωμετρικὰς μεθόδους αἱ ὁποῖαι μὲ τὰς ὁδηγίας διὰ τὴν χρησιμοποίησιν αὐτῶν δίδουν εἰς τὸν μαθητὴν τὴν ἱκανότητα νὰ λύῃ μὲ εὐχέρειαν καὶ δυσκόλους ἀσκήσεις Ἐπιπεδομετρίας καὶ Στερεομετρίας.

Τὸ βιβλίον τοῦτο εἶναι χρησιμώτατον εἰς τοὺς ὑποψηφίους τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν.

6) ΠΙΝΑΚΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ (νέα ἔκδοσις) τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων. Ἐκτὸς τούτων περιέχει τοὺς πίνακας τῶν φυσικῶν τιμῶν καὶ τῶν ἓξ τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων καὶ 29 ἄλλους χρησίμους πίνακας καὶ μέγαν ἀριθμὸν τύπων ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, Ἀλγέβρας, Γεωμετρίας, Τριγωνομετρίας (ἐπιπέδου καὶ σφαιρικῆς), Μηχανικῆς, Φυσικῆς καὶ Κοσμογραφίας. Ἀκόμη δὲ περιέχει παραγώγους καὶ ἀρχικὰς συναρτήσεις.

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ

7) ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ *τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων.* Ἐκτὸς τῶν λύσεων περιέχει: Τὰς ἀποδείξεις τῶν ἀναποδείκτων θεωρημάτων καὶ πορισμάτων αὐτῆς. Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν γεωμετρικῶν ἐννοιῶν καὶ ἐπὶ τῶν γεωμετρικῶν μεθόδων. Σημειώσεις ἐπὶ σημαντικῶν προβλημάτων. Πίνακας τύπων καὶ ὁδηγίας διὰ τὴν ταχυτέραν λύσιν γεωμετρικῶν ζητημάτων.

8) ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ *τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων.* Ἐκτὸς τῶν λύσεων περιέχει: Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἐννοιῶν. Κανόνας, πίνακας τύπων καὶ ὁδηγίας ὡς ἀνωτέρω.

9) ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ *τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων.* Ἐκτὸς τῶν λύσεων περιέχει: Παρατηρήσεις καὶ γενικεύσεις τῶν ἐννοιῶν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, πίνακας τύπων καὶ ὁδηγίας ὡς ἀνωτέρω.

10) ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΚΟΣΜΟΓΡΑΦΙΑΣ *τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων.* (Πρὸ ἑκάστης ὁμάδος ἀσκήσεων ἐκτίθεται κατὰ τρόπον ἁπλοῦν καὶ σύντομον καὶ μὲ τὰ νεώτερα δεδομένα ἡ ὕλη τῆς Κοσμογραφίας ἡ σχετικὴ μὲ τὰς ἀσκήσεις).

11) ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ *τοῦ Ο.Ε.Σ.Β.* μὲ ἁπλουστεύσεις μαθηματικῶν ἐννοιῶν, παρατηρήσεις, ἐπεξηγήσεις, πρακτικοὺς κανόνας, τύπους, ὁδηγίας καὶ ἀριθμητικοὺς πίνακας, διὰ τὴν εὐκολωτέραν καὶ ταχυτέραν λύσιν τῶν ζητημάτων.

12) ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ *τοῦ Ο.Ε.Σ.Β.* ὁμοίως ὡς ἄνω.

13) ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ (Χρ. Μπαρμπαστάθη - Ἀ. Σταύρακα) πρὸς χρῆσιν τῶν ὑποψηφίων διὰ τὸ Μικρὸν Πολυτεχνεῖον, διὰ τὴν Ἀνωτάτην Γεωπονικήν, τὴν Ἀνωτάτην Ἐμπορικήν, τῶν Βιομηχανικῶν Σπουδῶν, διὰ τὴν σχολὴν τῶν Ἐμποροπλοιάρχων, διὰ τὰς Τραπέζας, τὸ Ι.Κ.Α. κλπ.