Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΜΜΙ

Δ 2

Κορέ (Μ.)

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΚΑΙ ΤΩΝ
ΠΡΟΠΑΡΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΥΠΟ

Μ. ΚΟΡΕ
Διδάκτορος τῶν Μαθηματικῶν

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΗΣ ΒΟΥΛΗΣ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ «ΕΣΤΙΑΣ»
44 — Ὁδὸς Σταδίου — 44
1903

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄.

ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Ἀρχόμενοι τῆς σπουδῆς τῆς Γεωμετρίας, δέον νὰ στηρίξωμεν τὴν σπουδὴν ταύτης ἐπὶ ἐννοιῶν, ὧν ἡ ἀρχὴ εἶναι τελείως πειραματική. Διότι, λησμονοῦντες τὴν ἀνάγκην ταύτην ἐνίοτε, ἀγόμεθα εἰς τὸ νὰ περιπλέξωμεν τὰς λεπτομερείας τῶν ἀποδείξεων πέραν πάσης πραγματικῆς ὠφελείας.

Ἡ ὑπερβάλλουσα λεπτότης τῶν συλλογισμῶν βεβαίως εἶναι οὐσιώδης, ἀλλὰ μόνον ἐντὸς τῶν ὁρίων, ἅτινα ἐπιβάλλονται εἰς τὸ ἀνθρώπινον πνεῦμα ὑπ' αὐτῆς τῆς φύσεως τῶν πραγμάτων. Νομίζομεν λοιπὸν ὅτι ἐν τῇ ἐνάρξει τῆς σπουδῆς ἐπιστήμης τινὸς ἐνδιαφέρει τὰ μέγιστα ἡ ἐλευθέρα πλὴν ἐπιτυχὴς ἐκλογὴ τῶν ἀποδεικτικῶν ἐκείνων ἀληθειῶν καὶ τῶν πρώτων ἀρχῶν, αἵτινες χρησιμεύουσιν ὡς βάσις τῆς ἐπιστήμης, καὶ δὲν πρέπει νὰ ἐπιδιώκωμεν τὴν ἐλάττωσιν τοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν τῇ βοηθείᾳ βεβιασμένων ἀποδείξεων. Ὑπὸ τὴν ἔποψιν ταύτην θέλομεν χωρήσει εἰς τὴν μελέτην τῶν πρώτων γεωμετρικῶν ἀρχῶν.

2. Τὸ μέσον (ἢ τὸ ἀπεριόριστον διάστημα), ἐν τῷ ὁποίῳ εὑρίσκεται ἡ Γῆ (μετὰ τῶν ἐπ' αὐτῆς διαφόρων σωμάτων), ὁ Ἥλιος, ἡ Σελήνη καὶ τὰ λοιπὰ οὐράνια σώματα, καλεῖται *χῶρος*.

Παρατηροῦντες τὰ πέριξ ἡμῶν ὑλικὰ σώματα, διακρίνομεν τὴν θέσιν, τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν ἑκάστου.

Καλεῖται *ὄγκος* σώματος τὸ μέρος τοῦ χώρου, τὸ ὁποῖον κατέχει τὸ σῶμα ἐν τῷ ἀπεριορίστῳ διαστήματι.

Ἡ Γεωμετρία, παραλείπουσα πάσας τὰς λοιπὰς ἰδιότητας τῶν σωμάτων, ἐρευνᾷ μόνον τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν. Ἐν αὐτῇ δὲν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν οὔτε τὸ ἀδιαχώρητον, οὔτε τὸ πορῶδες, οὔτε ἡ ἐλαστικότης, οὔτε τὸ βάρος κ.τ.λ.

Ἀλλ' ἂν δεχθῶμεν πρὸς στιγμὴν ὅτι τὰ σώματα περιβάλλονται ὑπὸ ἀρκούντως πυκνῆς καὶ τοιαύτης ἀτμοσφαίρας, ὥστε νὰ διατηρηθῇ ἐν αὐτῇ ὁ τύπος ἑκάστου σώματος, τὸν τύπον τοῦτον ἐρευνᾷ ἡ Γεωμετρία.

3. Πάντα ἐν συνόλῳ τὰ ὅρια τοῦ ὄγκου τοῦ σώματος ἀποτελοῦσι τὴν *ἐπιφάνειαν* αὐτοῦ, ἥτις παριστᾷ καὶ τὸ *σχῆμα* τοῦ σώματος.

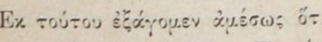
Ἡ ἐπιφάνεια δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀποτελουμένη ἐκ μερῶν· τὰ δὲ ὅρια μέρους ἐπιφανείας ἀποτελοῦσιν ἐν συνόλῳ τὴν λεγομένην *γραμμήν*.

Ὅπως πᾶσα ἐπιφάνεια, οὕτω καὶ πᾶσα γραμμὴ δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀποτελουμένη ἐκ μερῶν· τα ἄκρα λοιπὸν μέρους γραμμῆς, ἢ ὁλοκλήρου γραμμῆς πεπερασμένης, καλοῦνται *σημεῖα*.

Ἐπειδὴ δὲ πᾶσα γραμμὴ δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀποτελουμένη ἐξ ἀπειροστῶν μερῶν, τὰ δὲ ἄκρα τοῦ μέρους τούτου, ὅσον μικρὸν καὶ ἂν ὑποτεθῇ, εἶναι σημεῖα, ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν τὴν γραμμὴν ἀποτελουμένην ἐκ συνεχοῦς σειρᾶς ἀπειραρίθμων σημείων.

Ἡ γραμμὴ ὁρίζεται προσέτι ὡς *τόπος*, καθ' ὃν συναντῶνται δύο ἐπιφάνειαι, καὶ σημεῖον ὁ τόπος, ἔνθα δύο γραμμαὶ συναντῶνται.

4. Ἡ ἁπλουστέρα πασῶν τῶν γραμμῶν εἶναι ἡ *εὐθεῖα*, τῆς ὁποίας πᾶς τις ἔχει ἔννοιαν. Τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν διαγραφομένην ὑπὸ σημείου, τὸ ὁποῖον, κινούμενον σταθερῶς κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, τείνει πρὸς ἕτερον σημεῖον ἀκίνητον. Ἐκ τούτου ἐξάγομεν ἀμέσως ὅτι *δύο σημεῖα ὁρίζουσι τὴν θέσιν μιᾶς καὶ μόνης εὐθείας*. Προσέτι δὲ



Σχ. 1.

Δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, ἔχουσαι δύο κοινὰ σημεῖα, ταυτίζονται.

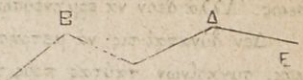
Καὶ *πᾶσα εὐθεῖα δύναται νὰ προεκταθῇ ἑκατέρωθεν, χωρὶς νὰ παύσῃ τοῦ νὰ εἶναι εὐθεῖα.*

Τεθλασμένη καλεῖται ἡ γραμμὴ ἡ διαγραφομένη ὑπὸ σημείου, τὸ ὁποῖον, κινούμενον, μεταβάλλει κατὰ διαφόρους χρονικὰς στιγμὰς διεύθυνσιν. Τοιαύτη εἶναι ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔΕ, (Σχ. 2) ἥτις απο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τελεῖται ἐξ εὐθειῶν γραμμῶν, ὁλόκληρος δὲ δὲν εἶναι εὐθεῖα.

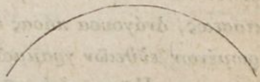
Καμπύλη καλεῖται ἡ γραμμὴ ἡ διαγραφομένη ὑπὸ σημείου κινουμένου καὶ κατὰ πᾶσαν στιγμὴν μεταβάλλοντος διεύθυνσιν. Οὕτω δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν καμπύλην γραμμὴν ὡς τεθλασμένην, ἀποτελουμένην ἐξ ἀπείρων μερῶν, ὧν ἕκαστον εἶναι ἀπειροστόν. (Σχ. 3).



Σχ. 2

6. Καλεῖται **ἐπίπεδος ἐπιφάνεια** ἢ ἁπλῶς **ἐπίπεδον** ἡ ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐφαρμόζει ἡ εὐθεῖα, ὅταν δύο σημεῖα αὐτῆς εἶναι σημεῖα καὶ τῆς ἐπιφανείας. Ἐφεξῆς θέλομεν δείξῃ ὅτι **δύο ἐπίπεδα ἔχοντα τρία σημεῖα κοινά, μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα, ταυτίζονται καὶ ἀποτελοῦσιν ἓν ἐπίπεδον.**

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἐξάγεται ὅτι **δύο οἱαδήποτε σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ὁρίζουσι μίαν διεύθυνσιν (εὐθεῖαν), ἥτις δύναται νὰ ἐκταθῇ ἐπ' ἄπειρον χωρὶς νὰ ἐξέλθῃ αὐτοῦ.**



Σχ. 3.

Ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὰς λοιπὰς ἐπιφανείας τὴν αὐτὴν σχέσιν, τὴν ὁποίαν καὶ ἡ εὐθεῖα πρὸς τὰς λοιπὰς γραμμάς. Πᾶς τις δὲ ἔχει τὴν ἔννοιαν αὐτῆς.

Ἡ Γεωμετρία διαιρεῖται εἰς **ἐπίπεδον Γεωμετρίαν** ἢ **Ἐπιπεδομετρίαν, καὶ Στερεομετρίαν.**

Ἡ ἐπίπεδος Γεωμετρία ἐξετάζει τὰ σχήματα, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἢ νὰ χαράξωμεν ἐπὶ ἐπιπέδου. Ἡ δὲ Στερεομετρία ἐξετάζει τὰ σχήματα, τῶν ὁποίων τὰ μέρη εἶναι κατὰ τοιοῦτον τρόπον διατεθειμένα, ὥστε νὰ μὴ ἀποτελῶσιν ἐπίπεδον.

7. Δύο σχήματα λέγονται **ἴσα**, ὅταν, ἐπιτιθέμενα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἑτέρου, ταυτίζωνται οὕτως, ὥστε πᾶν σημεῖον τοῦ ἑνὸς σχήματος νὰ εἶναι σημεῖον καὶ τοῦ ἑτέρου.

Δύο μήκη ἀποτελούμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μονάδων τοῦ μήκους, ὡς δύο ἐπιφάνειαι ἀποτελούμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μονάδων τῆς ἐπιφανείας, καὶ δύο ὄγκοι ἀποτελούμε-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νοι ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μονάδων τοῦ ὄγκου, ἀλλὰ κατ' οὐδένα τρόπον ταυτιζόμενοι, λέγονται ἰσοδύναμοι.

8. Ἀντικείμενον τῆς Γεωμετρίας εἶναι *ἡ μέτρησις τῆς ἐκτάσεως*. Ἀλλὰ δέον νὰ ἑρμηνεύσωμεν πλατύτερον τὸν ὁρισμὸν τοῦτον.

Δὲν δύναταί τις νὰ μετρήσῃ ἀμέσως εἰμὴ τὰς εὐθείας γραμμάς, συγκρίνων ταύτας πρὸς τὴν μονάδα τοῦ μήκους καὶ τὰς ὑποδιαιρέσεις αὐτῆς.

Ἀλλ' εἰς πλείστας περιστάσεις ἡ ἄμεσος αὕτη μέτρησις δὲν εἶναι δυνατή, ὡς π. χ. ἡ μέτρησις τῆς ἀποστάσεως σημείου ἀπὸ ἑτέρου ἀπροσίτου, ὡς καὶ τῆς ἀποστάσεως δύο ἀπροσίτων σημείων. Ὁμοίως ἡ ἄμεσος μέτρησις τῶν καμπύλων γραμμῶν, ὡς καὶ τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ὄγκων δὲν εἶναι δυνατή. Ἀνάγεται δὲ ἡ καταμέτρησις αὐτῶν εἰς τὴν μέτρησιν εὐθειῶν τινων γραμμῶν, αἵτινες ὁρίζουσι τὴν προτιθεμένην ἐπιφάνειαν ἢ τὸν ὄγκον.

Διὰ νὰ δώσωμεν ἀκριβῆ ὁρισμὸν τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας πρέπει νὰ εἴπωμεν ὅτι *ἡ Γεωμετρία ἔχει σκοπὸν τὴν μέτρησιν τῆς ἐκτάσεως, ἀνάγουσα πάσας τὰς διαφόρους μετρήσεις εἰς τὴν μέτρησιν ὡρισμένων εὐθειῶν γραμμῶν, καταλλήλως ἐκλελεγμένων εἰς πᾶσαν περίπτωσιν*. Πᾶσαι αἱ ἐν τῇ στοιχειώδει Γεωμετρίᾳ ἀποδεικνυόμεναι κατὰ σειρὰν ἰδιότητες συντρέχουσι πρὸς τὸν ὑποδειχθέντα σκοπόν.

9. Πᾶσα πρότασις περιέχει *ὑπόθεσιν* καὶ *συμπέρασμα*, ἀπορρέον ἐκ τῆς ὑποθέσεως. Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως εἶναι σειρὰ συλλογισμῶν, τοὺς ὁποίους κάμνομεν διὰ νὰ μεταβῶμεν ἐκ τῆς ὑποθέσεως εἰς τὸ συμπέρασμα, στηριζόμενοι ἐπὶ ἀμέσων ἢ καὶ πρότερον ἀποδειχθεισῶν ἀληθειῶν.

Δεδομένης προτάσεώς τινος, ἐὰν δεχθῶμεν συνάμα ὑπόθεσιν ἐναντίαν καὶ συμπέρασμα ἐναντίον, ἐκφράζομεν τὴν *ἐναντίαν* πρότασιν. Ἐκφράζομεν δὲ τὴν *ἀντίστροφον* πρότασιν δεδομένης τινὸς προτάσεως, λαμβάνοντες τὸ συμπέρασμα ταύτης ὡς ὑπόθεσιν, καὶ τὴν ὑπόθεσιν ὡς συμπέρασμα τῆς νέας προτάσεως.

Ἡ ἐναντία καὶ ἡ ἀντίστροφος πρότασις εἰσὶ πολλάκις ψευδεῖς, διότι τὸ συμπέρασμα τῆς ἀρχικῆς προτάσεως δύναται ν' ἀποδίδηται εἰς πλείονας τῶν ἐν τῇ ὑποθέσει περιεχομένων περιπτώσεων.

10. *Ἀξίωμα* εἶνε ἀλήθεια ἀφ' ἑαυτῆς φανερά. *Θεώρημα* εἶναι πρότασις, ἥτις ἔχει ἀνάγκην ἀποδείξεως. *Λῆμμα* καλεῖται πρότασις προκαταρκτική, διευκολύνουσα τὴν ἀπόδειξιν θεωρήματος. *Πόρισμα* εἶναι πρότασις ἀπορρέουσα ἀμέσως ἔκ τινος ἀποδειχθέντος θεωρήματος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

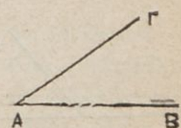
ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΕΡΙ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ά. Περὶ γωνιῶν

11. Ὅταν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ, ἀρχόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, διευθύνωνται διαφόρως, λέγομεν ὅτι σχηματίζουσι *γωνίαν* (Σχ. 4).

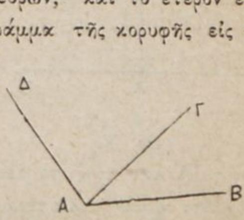


Σχ. 4.

Τὸ σημεῖον Α καλεῖται *κορυφή*, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ, ἐκτεινόμεναι ὅσον θέλομεν, καλοῦνται *πλευραὶ* τῆς γωνίας. Διὰ νὰ λάβωμεν ἀκριβῆ ἰδέαν τοῦ μεγέθους τῆς γωνίας, πρέπει νὰ ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον τὴν ΑΓ συμπίπτουσαν μετὰ τῆς ΑΒ· ἔπειτα νὰ θεωρήσωμεν τὴν μὲν ΑΒ ἐν σταθερᾷ θέσει, τὴν δὲ ΑΓ στρεφομένην συνεχῶς περὶ τὸ σημεῖον Α μέχρις ὅτου λάβῃ τὴν θέσιν, ἣν κατέχει. Τὸ ἄνοιγμα, τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ τότε πρὸς τὴν ΑΒ, ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ μέγεθος τῆς γωνίας.

Τὴν γωνίαν παριστῶμεν καὶ ἀπαγγέλλομεν διὰ τοῦ γράμματος τοῦ ἐπὶ τῆς κορυφῆς αὐτῆς τεθειμένου, λέγοντες ἡ *γωνία* Α. Ὅταν ὅμως πολλαὶ γωνίαι ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφήν, τότε ἑκάστην τῶν γωνιῶν τούτων παριστῶμεν καὶ ἀπαγγέλλομεν διὰ τριῶν γραμμάτων, ὧν τὰ δύο τίθενται ἐπὶ τῶν πλευρῶν, καὶ τὸ ἕτερον ἐπὶ τῆς κορυφῆς. Θέτομεν δὲ πάντοτε τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς εἰς τὸ μέσον.

12. Δύο γωνίαι λέγονται *ἐφεξῆς*, ὅταν ἔχωσι τὴν κορυφὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν· π. χ. αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΓΑΔ εἶναι ἐφεξῆς. (Σχ. 5).



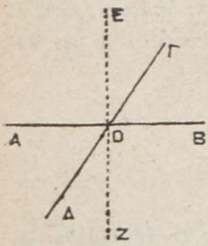
Σχ. 5.

13. Ὅταν μία εὐθεῖα ἄρχηται ἀπὸ τινος σημείου ἄλλης εὐθείας, σχημα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ τούτου ἐξάγομεν ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν, αἵτινες σχηματίζονται περὶ τὸ σημεῖον Δ καὶ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ εἶναι πάντοτε ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας.

18. *Ὅταν δύο εὐθεῖαι ὡς ἡ ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 10) διασταυρῶνται, σχηματίζουσι τέσσαρας γωνίας, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι τέσσαρες γωνίαι ὀρθαί.* Διότι αἱ μὲν δύο ἐφεξῆς γωνίαι, ἔστωσαν αἱ ΑΟΓ καὶ ΓΟΒ αἱ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ σχηματιζόμεναι, ἔχουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθῶν γωνιῶν, αἱ δὲ πρὸς τὸ ἕτερον μέρος ΑΟΔ καὶ ΔΟΒ ἔχουσιν ὁμοίως ἄθροισμα δύο ὀρθῶν.

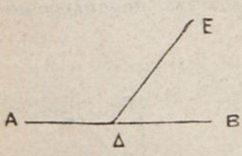


Σχ. 10.

Ἐὰν ἡ μία τῶν οὕτω σχηματιζομένων τεσσάρων γωνιῶν εἶναι ὀρθή, καὶ αἱ τρεῖς ἄλλαι θὰ εἶναι ὀρθαί.

Ἑπομένως. *Ἐὰν ἡ μία τῶν εὐθειῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἑτέραν, καὶ αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν πρώτην.* Καὶ τὸ *ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν, αἵτινες σχηματίζονται, ὅταν ἀπό τινος σημείου Ο ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι πέριξ αὐτοῦ, εἶναι 4 ὀρθαὶ γωνίαι.*

19. *Ὅταν τὸ ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας γραμμῆς.*



Σχ. 11.

Ἡ πρότασις αὕτη, ἀντίστροφος τῆς ἐν § 17, εἶναι ἀληθής· ἤτοι, ἐὰν αἱ γωνίαι ΑΔΕ καὶ ΕΔΒ εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ πλευραὶ ΑΔ καὶ ΔΒ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, καὶ ἡ ΑΔΒ εἶναι εὐθεῖα. Διότι ἡ προσεκβολὴ τῆς ΑΔ ὁρίζει τὴν γωνίαν, ἥτις θὰ εἶναι τὸ παραπλήρωμα τῆς ΑΔΕ, ἀλλ' ἡ ΔΒ εἶναι τοιαύτη· ἄρα ἡ ΔΒ εἶναι προσεκβολὴ τῆς ΑΔ, καὶ ἡ ΑΔΒ εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

20. Καλεῖται *διχοτόμος γωνίας* ἡ εὐθεῖα, ἥτις διαιρεῖ ταύτην εἰς δύο ἴσας γωνίας.

Αἱ διχοτόμοι δύο παραπληρωματικῶν γωνιῶν σχηματίζουσι μίαν γωνίαν ὀρθὴν (Σχ. 12).

Ἔστωσαν αἱ παραπληρωματικαὶ γωνίαι ΑΓΔ, ΔΓΒ, καὶ αἱ διχοτόμοι αὐτῶν ΓΘ καὶ ΓΕ· λέγω ὅτι ἡ γωνία ΘΓΕ εἶναι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὀρθή. Διότι $\Theta\Gamma\Delta = \frac{A\Gamma\Delta}{2}$ καὶ $\Delta\Gamma E = \frac{\Delta\Gamma B}{2}$.

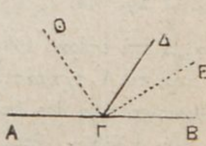
ἑπομένως $\Theta\Gamma\Delta + \Delta\Gamma E = \frac{A\Gamma\Delta}{2} + \frac{\Delta\Gamma B}{2} = \frac{A\Gamma\Delta + \Delta\Gamma B}{2} = \frac{2 \text{ ὀρθ.}}{2} = 1$ ὀρθ.

ἢ $\Theta\Gamma E = 1$ ὀρθ.

Θεώρημα.

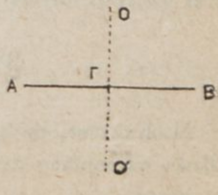
21. *Διὰ σημείου τινὸς Ο ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ κειμένου εἶναι δυνατὸν πάντοτε ν' ἀχθῇ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ μία μόνη.* (Σχ. 13).

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Ο κείμενον ἐκτὸς τῆς εὐθείας ταύτης. Ἂς περιστρέψωμεν τὸ σχῆμα ΟΑΓΒ περὶ τὴν ΑΒ μέχρις ὅτου τὸ σημεῖον Ο λάβῃ νέαν θέσιν Ο′ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἑτέρωθεν τῆς ΑΒ· ἐὰν ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα Ο καὶ Ο′ δι' εὐθείας ΟΟ′, αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ κατά τι σημεῖον Γ. Αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΟΓΒ καὶ Ο′ΓΒ θὰ εἶναι πάντως ἴσαι, διότι ἐπανερχομένου τοῦ σχήματος ΑΟ′Β εἰς τὴν προτέραν θέσιν ΑΟΒ διὰ στροφῆς αὐτοῦ περὶ τὴν ΑΒ, ἡ ΓΟ′ θὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ΓΟ, καὶ ἑπομένως ἡ γωνία Ο′ΓΒ θὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ΟΓΒ, ἄρα εἶναι ἴσαι. Ἀλλὰ διὰ νὰ εἶναι ἡ ΟΓ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἀρκεῖ ἡ γωνία ΟΓΒ νὰ εἶναι ὀρθή, ἤτοι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐφεξῆς ἴσων γωνιῶν ΟΓΒ καὶ Ο′ΓΒ νὰ εἶναι δύο ὀρθαί, ἐξ οὗ ἐξάγεται ὅτι αἱ πλευραὶ ΓΟ καὶ ΓΟ′ κεῖνται ἀπ' εὐθείας· ἄρα ἡ γωνία ΟΓΒ εἶναι ὀρθή, καὶ ἡ ΟΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Οὐδεμία δὲ ἄλλη· διότι διὰ τῶν σημείων Ο καὶ Ο′ μία καὶ μόνη εὐθεῖα διέρχεται.



Σχ. 12.

Ὅταν δύο εὐθεῖαι διασταυρῶνται (Σχ. 14), σχηματίζουσι τέσσαρας γωνίας· ἐκ τούτων ἀνὰ δύο αἱ μὴ ἔχουσαι κοινὴν πλευρὰν ὡς αἱ ΕΑΒ καὶ ΔΑΓ ἀφ' ἑνός, ΕΑΔ καὶ ΒΑΓ ἀφ' ἑτέρου καλοῦνται *κατὰ κορυφήν*.



Σχ. 13.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θεώρημα.

22. *Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.*

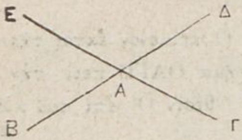
Ἔστωσαν αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΒΑΕ καὶ ΔΑΓ· λέγω ὅτι εἶναι ἴσαι. Τῷόντι, κατὰ τὰ ἐν § 17, θέλομεν ἔχει,

ΒΑΕ+ΕΑΔ=2 ὀρθαί, καὶ

ΔΑΓ+ΕΑΔ=2 ὀρθαί.

Ἑπομένως ΒΑΕ+ΕΑΔ=ΔΑΓ+ΕΑΔ. Ἄρα καὶ

ΒΑΕ=ΔΑΓ.



Σχ. 14.

Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι αἱ γωνίαι ΕΑΔ καὶ ΒΑΓ εἶναι ἴσαι.

23. Ἀντιστρόφως. Ἐὰν αἱ γωνίαι ΕΑΒ καὶ ΔΑΓ εἶναι ἴσαι, συνάμα δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΕΑΔ καὶ ΒΑΓ ἴσαι, τὰ σημεῖα Ε, Α καὶ Γ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ὡς καὶ τὰ σημεῖα Β, Α, καὶ Δ ἐπὶ ἑτέρας εὐθείας. Τῷόντι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν περὶ τὸ Α σχηματιζομένων γωνιῶν εἶναι 4 ὀρθαὶ γωνίαι (18), τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐφεξῆς γωνιῶν ΕΑΔ καὶ ΔΑΓ θὰ εἶναι ἥμισυ τῶν 4 ὀρθῶν, ἤτοι 2 ὀρθαί· ἑπομένως αἱ μὴ κοιναὶ αὐτῶν πλευραὶ ΑΕ καὶ ΑΓ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (19). Καθ' ὅμοιον τρόπον δεικνύεται ὅτι αἱ ΑΒ καὶ ΑΔ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι. *Ἐὰν δύο γωνίαι, ἔχουσαι τὴν αὐτὴν κορυφήν, ἔχωσι μίαν πλευρὰν τῆς μιᾶς γωνίας προσεκβολὴν μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ἑτέρας, καὶ εἶναι ἴσαι, αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων κεῖνται ἐπ' εὐθείας*

Ἐκ τούτου ἤδη ἕπεται ὅτι *καὶ αἱ δύο διχοτόμοι δύο κατὰ κορυφὴν γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας*. Ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν δύο εὐθείας διασταυρουμένας, καὶ φέρωμεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τούτων, αὗται θὰ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας. (§. 20).

β'. Περὶ τριγώνων.

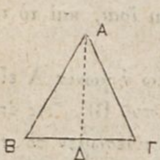
24. Καλεῖται *τρίγωνον* τὸ σχῆμα τὸ ἀποτελούμενον ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν τεμνομένων ἀνὰ δύο, καὶ περατουμένων κατὰ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

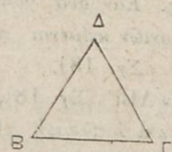
Αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁρίζουσαι τὸ σχῆμα τοῦ τριγώνου καλοῦνται *πλευραί*. Τὰ σημεῖα τῆς συναντήσεως τῶν πλευρῶν καλοῦνται *κορυφαί*, αἱ δὲ ὑπὸ τῶν πλευρῶν ἀνὰ δύο σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι αἱ *γωνίαι* τοῦ τριγώνου.

Τὸ τρίγωνον καλεῖται *ἰσοσκελὲς* (Σχ. 15), ὅταν ἔχῃ δύο πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἴσας. Ἡ πλευρὰ ΒΓ ἡ ἄνισος πρὸς τὰς δύο ἄλλας καλεῖται ἰδίᾳ *βάσις* αὐτοῦ, ὡς καὶ ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως κορυφὴ Α καλεῖται κυρίως *κορυφὴ* τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

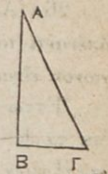
Ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη κάθετος ΑΔ (Σχ. 15) καλεῖται *ὕψος* τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.



Σχ. 15.



Σχ. 16



Σχ. 17.

Τρίγωνόν τι καλεῖται *ἰσόπλευρον* (Σχ. 16), ἐὰν ἔχῃ τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας πρὸς ἀλλήλας.

Τρίγωνόν τι καλεῖται *ὀρθογώνιον* (Σχ. 17), ἐὰν ἔχῃ μίαν γωνίαν Β ὀρθήν. Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας κειμένη πλευρὰ ΑΓ καλεῖται *ὑποτείνουσα*.

Θεώρημα.

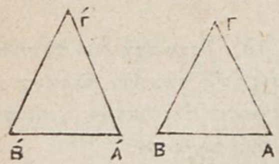
25. *Τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν κείμεναι γωνίαι εἶναι ἴσαι.* (Σχ. 18).

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἐν τῷ ὁποίῳ ἐξ ὑποθέσεως ἡ πλευρὰ ΑΓ εἶναι ἴση τῇ ΓΒ· θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι ἴση τῇ Β.

Πρὸς τοῦτο ἂς θεωρήσωμεν τὸ αὐτὸ τρίγωνον ἐπαναληφθέν, καὶ ἂς ἐπιθέσωμεν τὸ τρίγωνον Α′Β′Γ′ ἐπὶ τὸ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε τὸ Γ′ νὰ πέσῃ ἐπὶ τὸ Γ καὶ τὸ Β′ ἐπὶ τὸ Α, εἶναι δὲ δυνατὴ ἡ σύμπτωσις, αὕτη καθότι ἔχομεν ΑΓ = ΒΓ = Β′Γ′. Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο γωνίαι Γ καὶ Γ′ εἶναι ἴσαι, θὰ ταυτισθῶσι, καὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἡ πλευρὰ Γ'Α' θὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΓΒ· καὶ ἐπειδὴ Γ'Α'=Γ'Β'=ΓΒ, τὸ σημεῖον Α' θὰ πέσῃ ἐπὶ τὸ Β. Ἑπομένως τὰ δύο τρίγωνα θὰ ταυτισθῶσι, καὶ ἡ γωνία Β θὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς Α'. οὕτω δὲ ἡ μὲν γωνία Α εἶναι ἴση τῇ Α' ἐκ κατασκευῆς, ἡ δὲ Β ἴση τῇ Α' ἐκ τοῦ ταυτισμοῦ τῶν τριγώνων· ἑπομένως αἱ δύο γωνίαι Α καὶ Β οὖσαι ἴσαι ἀμφότεραι πρὸς τὴν Α', εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας ἴσαι.



Σχ. 18.

26. Ἀντιστρόφως. ***Ἐὰν δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἴσαι, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν κείμεναι πλευραὶ εἶναι ἴσαι, καὶ τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές. (Σχ. 18).***

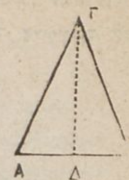
Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 18), ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ γωνία Α εἶναι ἴση τῇ Β. Λέγω ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ εἶναι ἴση τοῦ ΒΓ. Ἂς ἐπαναλάβωμεν καὶ ἤδη τὸ αὐτὸ τρίγωνον, καὶ ἂς ἐπιθέσωμεν τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' ἐπὶ τὸ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον Β' νὰ πέσῃ ἐπὶ τὸ Α καὶ τὸ Α' ἐπὶ τὸ Β, καὶ τὰ δύο τρίγωνα νὰ ἔχωσι κοινὴν τὴν πλευρὰν ΑΒ. Ἐπειδὴ ἡ γωνία Α=γων. Β=γων. Β', ἡ πλευρὰ Β'Γ' θὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΓ, τὸ δὲ σημεῖον Γ' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΓ ἢ ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς αὐτῆς. Ὁμοίως, ἐπειδὴ γων. Β=γων. Α= γων. Α', ἡ πλευρὰ Α'Γ' θὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΒΓ, καὶ τὸ σημεῖον Γ' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ ἢ ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς αὐτῆς· ἤτοι τὸ σημεῖον Γ' θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ ἐπὶ τὴν ΒΓ· ἑπομένως τὸ Γ' θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ Γ, διότι τοῦτο εἶναι τὸ μόνον κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΑΓ καὶ ΒΓ. ἄρα τὰ δύο τρίγωνα θὰ ταυτισθῶσιν, ὡς ἔχοντα τὰς αὐτὰς κορυφάς. Ἐκ τούτου δὲ ἡ πλευρὰ ΒΓ ταυτίζεται μετὰ τῆς Α'Γ', καὶ ἑπομένως εἶναι ἴση πρὸς αὐτήν· ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΓ εἶναι ἐκ κατασκευῆς ἴση τῇ Α'Γ', ἄρα αἱ δύο πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΓ, οὖσαι ἴσαι τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ Α'Γ', εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας ἴσαι, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

Πορίσματα

27. Ἐν ταῖς ἀποδείξεσι τῶν δύο προηγουμένων θεωρημάτων

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

προϋποτίθεται ὅτι εἶναι δυνατὸν ἓν τρίγωνον, περιστρεφόμενον περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ν' ἀντιστραφῇ, καὶ νὰ ἐπιτεθῇ ἐπὶ ἕτερον.



Σχ. 19.

Οὕτως, ἐὰν θεωρήσωμεν ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ (Σχ. 19) τὴν εὐθεῖαν ΓΔ ἑνώνουσαν τὴν κορυφὴν Γ μὲ τὸ μέσον Δ τῆς βάσεως, καὶ στρέψωμεν τὸ τρίγωνον ΔΓΒ περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΓΔ οὕτως, ὥστε τὸ Γ νὰ μείνῃ ἐν τῇ αὐτῇ θέσει, ὡς καὶ τὸ Δ, τὸ Β νὰ λάβῃ τὴν θέσιν τοῦ Α, καὶ τὸ Α τὴν τοῦ Β, κατὰ τὴν μετατόπισιν ταύτην αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΑΓΔ καὶ ΔΓΒ ταυτίζονται καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσαι· ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ἐφεξῆς παραπληρωματικαὶ γωνίαι ΑΔΓ καὶ ΓΔΒ ταυτίζονται καὶ ἐπομένως εἶναι ὀρθαί. (17), ἄρα

Εἰς πᾶν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς, καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν.

Ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀγομένη εὐθεῖα ΓΔ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι δύο σημεῖα ὁρίζουσι μίαν εὐθεῖαν, πληροῖ καὶ τὰς ἑξῆς δύο συνθήκας· α'. *πᾶσα γωνία ἔχει μίαν καὶ μόνην διχοτόμον·* β'. *ὅτι ἐκ σημείου μία καὶ μόνη κάθετος ἄγεται ἐπὶ εὐθεῖαν.*

28. *Πᾶν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον, καὶ πᾶν ἰσογώνιον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.*

29. Ἐν παντὶ τριγώνῳ διακρίνομεν ἓξ στοιχεῖα, ἤτοι τρεῖς πλευρὰς καὶ τρεῖς γωνίας. Ἵνα δὲ δύο τρίγωνα ὦσιν ἴσα, ἀρκεῖ νὰ ἔχωσι τρία ἐκ τῶν στοιχείων τούτων ἴσα, πάντως ὅμως ἓν τοὐλάχιστον ἐκ τῶν ἴσων στοιχείων νὰ εἶναι πλευρά.

Θεώρημα

30. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἴσα.

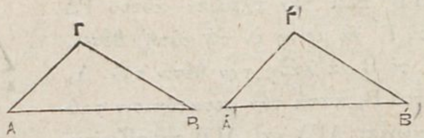
α'. *Ἐὰν ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας αὐτῇ γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ.*

β'. *Ἐὰν ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην ὑπὸ ἴσων πλευρῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γ'. *Ἐὰν ἔχωσι τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ.*

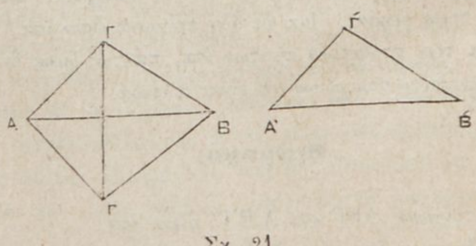
α'. Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΑΒ ἴσην τῇ Α'Β', καὶ τὰς γωνίας Α=Α' καὶ Β=Β'· λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.



Σχ. 20.

Ἂς ἐπιθέσωμεν τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ Α'Β' νὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ΑΒ, ἡ πλευρὰ Α'Γ' θὰ πέσῃ ἐπὶ τὴν ΑΓ, διότι αἱ γωνίαι Α καὶ Α' εἶναι ἴσαι· τὸ δὲ σημεῖον Γ' θὰ πέσῃ ἐπί τινος σημείου τῆς ΑΓ ἢ τῆς προσεκβολῆς αὐτῆς, ὁμοίως δὲ καὶ ἡ πλευρὰ Β'Γ' θὰ πέσῃ ἐπὶ τὴν ΒΓ, διότι ἡ γωνία Β εἶναι ἴση τῇ Β', τὸ δὲ σημεῖον Γ' θὰ πέσῃ ἐπί τινος σημείου τῆς ΒΓ ἢ τῆς προσεκβολῆς αὐτῆς. Ἐπειδὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ' θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἀναγκαίως πρέπει νὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ Γ, ὁπότε τὰ δύο τρίγωνα ταυτίζονται, καὶ εἶναι ἴσα.

β'. Ἂς ὑποθέσωμεν (Σχ. 20) ὅτι ἡ γωνία Γ' εἶναι ἴση τῇ Γ ἡ πλευρὰ Γ'Α' ἴση τῇ ΓΑ καὶ ἡ Γ'Β' ἴση τῇ ΓΒ· τὰ τρίγωνα



Σχ. 21.

εἶναι ἴσα. Διότι, ἐὰν ἐπιθέσωμεν τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ γωνία Γ' νὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς Γ καὶ ἡ πλευρὰ Γ'Α' νὰ πέσῃ ἐπὶ τὴν ΓΑ καὶ ἡ Γ'Β' ἐπὶ τὴν ΓΒ. Ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ Γ'Α' εἶναι ἴση τῇ ΓΑ, τὸ σημεῖον Α' θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

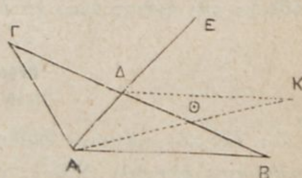
Α· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ Β΄ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β. οὕτω δὲ καὶ ἡ πλευρὰ Α΄Β΄ θὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ΑΒ, καὶ τὰ δύο τρίγωνα ταυτίζονται, καὶ εἶναι ἴσα.

γ΄. Ἂς ὑποθέσωμεν (Σχ. 21) ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἔχουσιν ΑΓ=Α΄Γ΄, ΓΒ=Γ΄Β΄ καὶ ΑΒ=Α΄Β΄· λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι μία γωνία τοῦ ἑνὸς ἰσοῦται μιᾷ γωνίᾳ τοῦ ἑτέρου, ὁπότε μεταπίπτομεν εἰς τὴν προηγουμένην β΄. περίπτωσιν. Ἂς θέσωμεν τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ πλησίον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ Α΄Β΄ νὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ΑΒ, ἀλλὰ τὸ ὅλον τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ νὰ πέσῃ ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ καὶ νὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΑΒΓ_1, ὁπότε θὰ ἔχωμεν Γ΄Β΄=Γ_1Β=ΓΒ, καὶ Γ΄Α΄=Γ_1Α=ΓΑ· ἂς ἑνώσωμεν δὲ τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ_1 διὰ τῆς εὐθείας ΓΓ_1, ὁπότε σχηματίζονται τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΓΓ_1 καὶ ΒΓΓ_1, ἔχοντα τὰς παρὰ τὴν βάσιν αὐτῶν γωνίας ἴσας (25)· ἤτοι ΑΓΓ_1=ΑΓ_1Γ καὶ ΒΓΓ_1=ΒΓ_1Γ· ἑπομένως καὶ ΑΓΓ_1+ΒΓΓ_1 ἢ γων. ΑΓΒ=γων.ΑΓ_1Β=Α΄Γ΄Β΄. Ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄, ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας ΑΓ=Α΄Γ΄ καὶ ΒΓ=Β΄Γ΄ ὡς καὶ τὰς ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένας γωνίας Γ καὶ Γ΄ ἴσας, εἶναι ἴσα.

31. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι *εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν κεῖνται ἴσαι πλευραί, καὶ ἀντιστρόφως ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν κεῖνται ἴσαι γωνίαι.*

Θεώρημα.

32. *Εἰς πᾶν τρίγωνον ἀπέναντι τῆς μεγαλειτέρας πλευρᾶς κεῖται ἡ μεγαλειτέρα γωνία.*



Σχ. 22.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ ΒΓ>ΓΑ, θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ γωνία ΓΑΒ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς Β.

Ἐπὶ τῆς ΓΒ ἂς λάβωμεν μέρος τὸ ΓΔ=ΓΑ, καὶ ἂς φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔΕ, ὁπότε σχηματίζεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία ΓΑΔ εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας ΓΑΒ ὡς μέρος ταύτης. Ἑπομένως καὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἡ γωνία ΓΔΑ ὡς καὶ ἡ κατὰ κορυφὴν ταύτης ΕΔΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΑΒ.

Ἀλλ' ἐὰν ἑνώσωμεν τὸ σημεῖον Α μὲ τὸ μέσον τῆς ΔΒ καὶ λάβωμεν ΘΚ=ΘΑ, τὰ τρίγωνα ΑΘΒ καὶ ΔΘΚ εἶναι ἴσα (30,2), καὶ ἡ γωνία ΑΒΘ ἴση τῷ ΚΔΘ (31)· ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς τὸ σημεῖον Κ κεῖται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΕΑΒ, ἐπομένως ἡ γωνία ΚΔΒ ὡς καὶ ἡ ἴση πρὸς ταύτην ΔΒΑ εἶναι μικροτέρα τῆς ΕΔΒ, καὶ ἔτι μᾶλλον τῆς ΓΑΒ.

33. Ἀντιστρόφως. *Εἰς πᾶν τρίγωνον ἀπέναντι τῆς μεγαλειτέρας γωνίας κεῖται ἡ μεγαλειτέρα πλευρά.* (Σχ. 22.)

Ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ ἔστω ἡ γωνία ΓΑΒ>τῆς Β· θ' ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ πλευρὰ ΓΒ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΓΑ.

Τῳόντι, ἐὰν ἡ πλευρὰ ΓΒ ἦτο ἴση τῇ ΓΑ, τότε καὶ ἡ γωνία Α θὰ ἦτο ἴση τῇ Β (25), ὅπερ ψευδὲς ὡς ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως (32)· ἐὰν δὲ ἡ ΓΒ ἦτο μικροτέρα τῆς ΓΑ, τότε καὶ ἡ γωνία Α θὰ ἦτο μικροτέρα τῆς Β, ὅπερ ψευδὲς ὡς ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως· ἐπομένως ἡ γωνία Α μὴ οὖσα οὔτε ἴση τῇ Β οὔτε μικροτέρα ταύτης, ἀναγκαίως θὰ εἶναι μεγαλειτέρα.

34. Ἡ ἀπόδειξις αὕτη εἶναι τὸ πρῶτον παράδειγμα τῆς εἰς ἄτοπον ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως, τῆς ὁποίας ἡ χρῆσις εἶναι τόσον συνήθης ἐν τῇ ἐπιστήμῃ.

Ἡ μέθοδος αὕτη συνίσταται εἰς τὸ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἀντίθετος πρὸς τὴν προκειμένην πρότασιν ἄγει εἰς ψευδὲς συμπέρασμα· τὸ δὲ ψευδὲς τοῦ συμπεράσματος συνεπάγεται τὸ ψευδὲς καὶ ἀδύνατος τῆς ὑποθέσεως. Τῆς μεθόδου ταύτης γίνεται χρῆσις ἰδίως πρὸς ἀπόδειξιν τῆς ἀντιστρόφου ἀποδειχθείσης ἤδη προτάσεως.

Θεώρημα.

35. *Εἰς πᾶν τρίγωνον ἑκάστη πλευρὰ εἶναι μικροτέρα μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, μεγαλειτέρα δὲ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.*

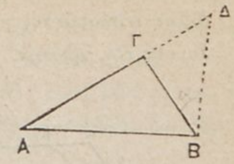
Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως διὰ τὴν μεγαλειτέραν πλευρὰν τοῦ τριγώνου καὶ τὸ δεύτερον διὰ τὴν μικροτέραν.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν μεγαλειτέρα πλευρὰ εἶναι ἡ ΑΒ, ἡ δὲ μικροτέρα ἡ ΒΓ. Ἂς προσεκβάλωμεν τὴν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΓ, καὶ ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς ἂς λάβωμεν ΓΔ=ΓΒ, καὶ ἂς ἑνώσωμεν τὸ Β μὲ τὸ Δ διὰ τῆς εὐθείας ΒΔ. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελές, ἡ γωνία Δ εἶναι ἴση τῇ ΓΒΔ, ἥτις εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας ΑΒΔ. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ (33),

ΑΒ<ΑΔ ἢ ΑΒ<ΑΓ+ΓΔ ἢ ΑΒ<ΑΓ+ΓΒ.



Σχ. 23.

Ἐὰν δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἀνισότητος ταύτης ἀφαιρέσωμεν ΑΓ, λαμβάνομεν.

ΓΒ>ΑΒ—ΑΓ

ΓΒ<ΑΒ—ΑΓ. <ΓΒ

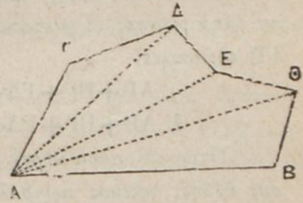
Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι *τρεῖς οἱαιδήποτε εὐθεῖαι δεδομέναι δὲν εἶναι πάντοτε δυνατόν, ὡς πλευραὶ λαμβανόμεναι, νὰ σχηματίσωσι τρίγωνον, ἀλλ' εἶναι ἀνάγκη πάντοτε ἑκάστη ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλειτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν*.

Πορίσματα.

ΑΜΥ

36. *Πᾶσα πεπερασμένη εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης γραμμῆς ἐχούσης τὰ αὐτὰ πέρατα.*

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ ἡ τεθλασμένη ΑΓΔΕΘΒ, ἔχουσαι τὰ αὐτὰ ἄκρα Α καὶ Β. Ἐὰν ἑνώσωμεν τὸ σημεῖον Α μὲ τὰ σημεῖα Δ,Ε καὶ Θ, θέλομεν ἔχει (35).



Σχ. 24.

ΑΔ<ΑΓ+ΓΔ.
ΑΕ<ΑΔ+ΔΕ
ΑΘ<ΑΕ+ΕΘ
ΑΒ<ΑΘ+ΘΒ.

καὶ προσθέτοντες τὰς ἀνισότητας κατὰ μέλη λαμβάνομεν.

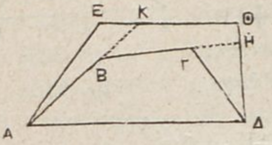
ΑΔ+ΑΕ+ΑΘ+ΑΒ<ΑΓ+ΓΔ+ΑΔ+ΔΕ+ΕΘ+ΑΘ+ΘΒ

καὶ ἀφαιροῦντες ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἀνισότητος ταύτης (ΑΔ+ΑΕ+ΑΘ) εὑρίσκομεν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$ΑΒ < ΑΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΕΘ + ΘΒ.$$

37. *Πᾶσα κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης τεθλασμένης γραμμῆς ἐχούσης τὰ αὐτὰ πέρατα καὶ περιβαλλούσης τὴν πρώτην.*



Σχ. 25.

Ἔστω ἡ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔ περιβαλλομένη ὑπὸ τῆς τεθλασμένης ΑΕΘΔ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ πρώτη εἶναι μικροτέρα τῆς δευτέρας.

Ἂς προσεκβάλωμεν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΒΓ μέχρι τῶν σημείων Κ καὶ Η, ἔνθα συναντῶσι τὴν περιβάλλουσαν τεθλασμένην· θέλομεν ἔχει (36).

$$ΑΒ + ΒΚ < ΑΕ + ΕΚ$$
$$ΒΓ + ΓΗ < ΒΚ + ΚΘ + ΘΗ$$
$$ΓΔ < ΓΗ + ΗΔ$$

καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἀνισότητας λαμβάνομεν

$$ΑΒ + ΒΚ + ΒΓ + ΓΗ + ΓΔ < ΑΕ + ΕΚ + ΒΚ + ΚΘ + ΘΗ + ΓΗ + ΗΔ$$

καὶ ἀφαιροῦντες ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὰ ἴσα μέρη ΒΚ καὶ ΓΗ εὑρίσκομεν

$$ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ < ΑΕ + ΕΚ + ΚΘ + ΘΗ + ΗΔ$$
$$\text{ἢ } ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ < ΑΕ + ΕΘ + ΘΔ.$$

Οὕτω καὶ *πᾶσα κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης, τελείως περιβαλλούσης αὐτήν.*

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀληθεύει μόνον, ὅταν ἡ περιβαλλομένη γραμμὴ εἶναι κυρτή.

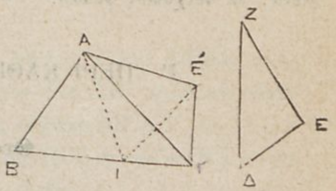
Θεώρημα

38. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὰς δὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἀνίσους, ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν τοῦ ἑτέρου, καὶ μεγαλειτέρα ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλειτέρας γωνίας κειμένη.*

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχοντα τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΖΔ ἴσας ὡς καὶ τὰς ΑΒ καὶ ΖΕ, καὶ τὴν γωνίαν ΒΑΓ μεγαλειτέραν τῆς Ζ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΔΕ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Δυνάμεθα πάντοτε νὰ τοποθετήσωμεν τὰ προκείμενα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ οὕτως, ὥστε αἱ δύο ἴσαι πλευραὶ αὐτῶν ΑΓ καὶ ΖΔ νὰ ταυτισθῶσι, τὸ δὲ τρίγωνον ΖΔΕ νὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΑΓΕ΄, καὶ ἀμφότερα νὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐὰν τότε φέρωμεν τὴν ΑΙ διχοτόμον τῆς γωνίας ΒΑΕ΄, αὕτη θὰ κεῖται ἐντὸς τῆς μεγαλειτέρας γωνίας ΒΑΓ, καὶ θὰ σχηματισθῶσι δύο τρίγωνα ἴσα, τὰ ΒΑΙ καὶ ΙΑΕ΄. Εἶναι δὲ ἴσα τὰ τρίγωνα ταῦτα ὡς ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΑΙ κοινήν, τὴν ΑΒ ἴσην τῇ ΑΕ΄ καὶ τὴν γωνίαν ΒΑΙ ἴσην τῇ ΙΑΕ΄. ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ἕπεται ὅτι καὶ ΒΙ=ΙΕ΄.



Σχ. 26.

Ἀλλ᾽ ἐκ τοῦ τριγώνου ΙΕ΄Γ ἔχομεν ΓΕ΄<ΙΕ΄+ΙΓ. ἢ ΓΕ΄<ΒΙ+ΙΓ· ἢ ΓΕ΄<ΒΓ· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΕ΄ εἶναι αὐτὴ ἡ ΔΕ, ἕπεται ὅτι καὶ ΔΕ<ΒΓ.

39. Ἀντιστρόφως. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἡ δὲ τρίτη πλευρὰ τοῦ ἑνὸς εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν τοῦ ἑτέρου τριγώνου, καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν ἀνίσων πλευρῶν κείμεναι γωνίαι εἶναι ἄνισοι, μεγαλειτέρα δὲ ἡ ἀπέναντ τῆς μεγαλειτέρας πλευρᾶς.*

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα (Σχ. 26) ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΑΒ ἴσην τῇ ΖΕ καὶ τὴν ΑΓ ἴσην τῇ ΖΔ, ἀλλὰ τὴν ΒΓ μεγαλειτέραν τῆς ΔΕ· θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΔΖΕ.

Τῳόντι, ἐὰν αἱ δύο γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΔΖΕ ἦσαν ἴσαι, τὰ δύο τρίγωνα θὰ ἦσαν ἴσα (30 β΄.) καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ θὰ ἦτο ἴση τῶν ΔΕ, ὅπερ ψευδές, ὡς ἐναντίον τῇ ὑποθέσει.

Ἐὰν δὲ ἡ γωνία ΒΑΓ ἦτο μικροτέρα τῆς ΔΖΕ, καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ θὰ ἦτο μικροτέρα τῆς ΔΕ (38), ὅπερ ὁμοίως εἶναι ψευδές· ἑπομένως ἡ γωνία ΒΑΓ, μὴ οὖσα οὔτε ἴση οὔτε μικροτέρα τῆς ΔΖΕ, θὰ εἶναι ἀναγκαίως μεγαλειτέρα ταύτης.

40. Ἡ ἀπόδειξις αὕτη παρέχει ἡμῖν τὴν συμπλήρωσιν τῆς εἰς ἄτοπον ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως, ἥτις οὕτω παρίσταται ὑπὸ τὴν ἑξῆς γενικὴν μορφήν.

Διὰ ν᾽ ἀποδείξωμεν μίαν πρότασιν διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἐπαγω-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γῆς, θέτομεν ὡς ὑπόθεσιν τὸ ἐναντίον τοῦ συμπεράσματος, καὶ ἐκ ταύτης ἀγόμεθα διὰ συλλογισμῶν εἰς ψευδὲς συμπέρασμα, ὅπερ συνεπάγεται καὶ τὸ ψευδὲς καὶ ἀδύνατον τῆς ὑποθέσεως, ἤτοι τοῦ συμπεράσματος τῆς προκειμένης ὑποθέσεως. Ἐὰν δὲ ἐκ μιᾶς ὑποθέσεως εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξάγωνται δύο ἢ περισσότερα συμπεράσματα, δέον πάντα τὰ λοιπά, πλὴν ἑνός, τοῦ προκειμένου, ἀκριβῶς ἀριθμούμενα, νὰ δειχθῶσι ψευδῆ.

Γ'. ΠΕΡΙ ΚΑΘΕΤΟΥ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΩΝ

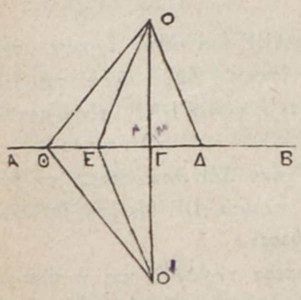
Θεώρημα.

41. *Ἐὰν ἐκ σημείου Ο ἐκτὸς εὐθείας τινὸς ΑΒ κειμένου ἀχθῇ ἡ κάθετος ΟΓ καὶ διάφοροι πλάγιαι ΟΔ, ΟΕ, ΟΘ…*

α'. Δύο πλάγιαι, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, εἶναι ἴσαι.

β'. Ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας.

γ'. Ὅσῳ μᾶλλον ὁ πους πλαγίας τινὸς ἀπέχει ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, τόσῳ μεγαλειτέρα εἶναι αὕτη. (Σχ. 27).



Σχ. 27.

Ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς ΟΓ λαμβάνομεν ΓΟ'=ΓΟ καὶ ἑνώνομεν τὸ σημεῖον Ο' μὲ τὸ Ε καὶ μὲ τὸ Θ.

α'. Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν ΓΕ=ΓΔ, τὰ δύο τρίγωνα ΟΕΓ καὶ ΟΔΓ εἶναι ἴσα (30 β')· ἑπομένως ΟΕ=ΟΔ.

Θὰ ἔχωμεν δὲ ὁμοίως ΟΕ=Ο'Ε καὶ ΟΘ=Ο'Θ ὡς πλαγίας ἀπεχούσας τοῦ ποδὸς Γ τῆς καθέτου ΟΓ.

β'. Ἡ κάθετος ΟΓ εἶναι μικροτέρα τῆς πλαγίας ΟΕ ἢ οἱασδήποτε ἄλλης· διότι ΟΟ'<ΟΕ+Ο'Ε καὶ ΟΟ'<ΟΘ+Ο'Θ· καὶ διαιροῦντες διὰ 2 ἀμφότερα τὰ μέλη ἑκατέρας τῶν ἀνισοτήτων, λαμβάνομεν ΟΓ<ΟΕ καὶ ΟΓ<ΟΘ.

γ'. Αἱ δύο πλάγιαι ΟΘ καὶ ΟΔ, ὧν οἱ πόδες Θ καὶ Δ ἀπέχουσιν ἄνισον ἀπὸ τοῦ ποδὸς Γ τῆς καθέτου, εἶναι ἄνισοι καὶ ἡ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μᾶλλον ἀπέχουσα ΟΘ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΟΔ· ἐὰν ἐπὶ τῆς ΓΘ λάβωμεν ΓΕ=ΓΔ, ἡ πλαγία ΟΕ εἶναι ἴση τῇ ΟΔ.

Ἀλλ' ἡ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ ΟΞΟ΄ εἶναι μικροτέρα τῆς ΟΘΟ΄ (37) ἤτοι ΟΕΟ΄<ΟΘΟ΄. διαιροῦντες δὲ διὰ 2 ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης, λαμβάνομεν ΟΕ<ΟΘ· ἑπομένως καὶ ΟΔ<ΟΘ.

Πορίσματα.

42. Ἡ κάθετος ΟΓ ὡς μικροτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου Ο πρός τι σημεῖον τῆς ΑΒ καλεῖται ***ἀπόστημα*** *τοῦ σημείου τούτου Ο ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ.*

43. Ἐπειδὴ ΟΓ<ΟΕ, ἐν τῷ τριγώνῳ ΟΓΕ ἡ γωνία ΟΕΓ, οὖσα μικροτέρα τῆς ΟΓΕ (32), εἶναι γωνία ὀξεῖα.

Ἐκ τούτου ἐξάγομεν ὅτι· *Ὅταν ἐκ τινος σημείου ἀχθῇ κάθετος καὶ πλαγία πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ἡ κάθετος κεῖται πάντοτε πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς πλαγίας, πρὸς ὃ καὶ ἡ ὑπ' αὐτῆς μετὰ τῆς εὐθείας σχηματιζομένη ὀξεῖα γωνία.*

44. Τὰ ἀντίστροφα τῶν προηγουμένων θεωρημάτων ἀληθεύουσιν. Ἰδία δέ· *ὅταν μία εὐθεῖα ΟΓ εἶναι ἡ μικροτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας ἀγομένης ἐκ τοῦ Ο ἐπὶ εὐθεῖαν, ΑΒ, αὕτη ἡ ΟΓ θὰ εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.*

Καλεῖται *ἐπίπεδος γεωμετρικὸς τόπος* σειρὰ σημείων, ἐχόντων ἰδιάζουσάν τινα ἰδιότητα.

Οὕτως ἡ περιφέρεια εἶναι γεωμετρικὸς τόπος σημείων, τὰ ὁποῖα πάντα ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου (τοῦ κέντρου).

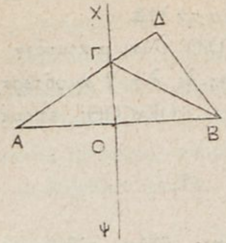
Θεώρημα.

45. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος πάντων τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ἕκαστον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων δεδομένης εὐθείας, εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ μέσου αὐτῆς.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΧΨ κάθετος κατὰ τὸ μέσον Ο ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἄς λάβωμεν σημεῖόν τι Γ οἱονδήποτε ἐπὶ τῆς ΧΨ, καὶ ἄς ἑνώσωμεν τοῦτο μετὰ τῶν σημείων Α καὶ Β· αἱ πλάγιαι ΓΑ καὶ ΓΒ, ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς Ο, εἶναι ἴσαι (41).

Ἄς λάβωμεν καὶ σημεῖον οἱονδήποτε, ἔστω τὸ Δ, ἐκτὸς τῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Σχ. 28.

ΧΨ, καὶ ἂς ἑνώσωμεν τοῦτο μετὰ τῶν σημείων Α καὶ Β· ἡ εὐθεῖα ΑΔ θὰ τέμνῃ τὴν ΧΨ κατὰ σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον ἑνώνομεν μὲ τὸ Β διὰ τῆς εὐθείας ΓΒ, καὶ θέλομεν ἔχει ΑΓ=ΓΒ. Ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου ΔΓΒ λαμβάνομεν ΒΔ<ΒΓ+ΓΔ ἢ ΒΔ<ΑΓ+ΓΔ καὶ ΒΔ<ΑΔ.

Τὰ ἐπὶ τῆς καθέτου λαμβανόμενα σημεῖα ἀπέχουσιν ἰσάκις τῶν ἄκρων Α καὶ Β· τὸ δὲ ἐκτὸς αὐτῆς σημεῖον ἀπέχει ἄνισον ἀπὸ τῶν αὐτῶν ἄκρων, ἡ δὲ κάθετος ΧΨ εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας ΑΒ.

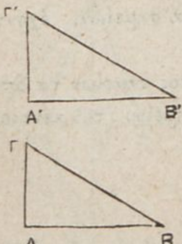
46. Δύο δεδομένα σημεῖα, ἴσον ἀπέχοντα τῶν ἄκρων δεδομένης εὐθείας, ἀρκοῦσιν ὅπως ὁρίσωσι τὴν διὰ τοῦ μέσου τῆς εὐθείας ταύτης διερχομένην κάθετον.

Θεώρημα.

47. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα·

α΄. Ἐὰν ἔχωσι τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην.

β΄. Ἐὰν ἔχωσι τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσην



Σχ. 29

α΄. Ἔστωσαν τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἔχοντα τὴν ΓΒ=Γ΄Β΄ καὶ τὴν γωνίαν Β ἴσην τῇ Β΄. Ἂς ἐπιθέσωμεν τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ ἐπὶ τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε ἡ Β΄Γ΄ νὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ΒΓ· ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν Β καὶ Β΄ ἡ Β΄Α΄ θὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΒΑ, καὶ τὸ σημεῖον Α΄ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Α, διότι αἱ κάθετοι Γ΄Α΄ καὶ ΓΑ ἔχουσι κοινὸν τὸ σημεῖον Γ, ἐκ τοῦ ὁποίου μία μόνη κάθετος ἄγεται ἐπὶ τὴν ΑΒ· ἑπομένως αἱ κάθετοι Γ΄Α΄ καὶ ΓΑ ταυτίζονται, ἄρα θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν πόδα Α, καὶ τὰ τρίγωνα ταυτίζονται.

β΄. Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ΓΒ=Γ΄Β΄ καὶ ΓΑ=Γ΄Α΄. Ἐὰν ἐπιθέσωμεν τὸ ἓν τρίγωνον ἐπὶ τοῦ ἑτέρου οὕτως, ὥστε ἡ Γ΄Α΄ νὰ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ταυτισθῇ μετὰ τῆς ΓΑ· ἐπειδὴ ἡ γωνία Α' εἶναι ἴση τῇ Α, ἡ πλευρὰ Α'Β' θὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΒ, καὶ τὸ σημεῖον Β' θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β, διότι αἱ πλάγιαι Γ'Β' καὶ ΓΒ εἶναι ἴσαι, καὶ ἐπομένως θ' ἀπέχωσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ ποδὸς Α τῆς καθέτου.

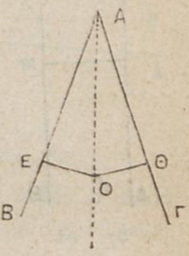
Πόρισμα.

Ἐὰν τὸ ἀπόστημα δύο σημείων τέμνηται δίχα ὑπὸ εὐθείας, τὰ σημεῖα ταῦτα ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τῆς εὐθείας ταύτης.

Θεώρημα.

48. *Ἡ διχοτόμος γωνίας οἱασδήποτε εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας* (Σχ. 30).

Ἔστω ἡ γωνία ΒΑΓ, καὶ ἡ διχοτόμος αὐτῆς ΑΔ. Ἂς λάβωμεν τυχὸν σημεῖον Ο ἐπὶ τῆς διχοτόμου, καὶ ἐκ τούτου ἂς φέρωμεν καθέτους ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας τὰς ΟΕ καὶ ΟΘ. Οὕτω σχηματίζονται δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΟΕ καὶ ΑΟΘ ἴσα (47 α'.)· ἐπομένως καὶ ΟΕ=ΟΘ. Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι καὶ παντὸς ἄλλου σημείου τῆς διχοτόμου τὰ ἀποστήματα ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας εἶναι ἴσα.



Σχ. 30.

Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι τὸ σημεῖον Ο κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς γωνίας ΒΑΓ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, ἤτοι ὅτι αἱ κάθετοι ΟΕ καὶ ΟΘ εἶναι ἴσαι, καὶ ἂς φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΟΑ· λέγω ὅτι αὕτη εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ. Διότι τὰ οὕτω σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΑΕ καὶ ΟΑΘ εἶναι ἴσα (47 β.)· ἐπομένως καὶ ἡ γωνία ΒΑΟ εἶναι ἴση τῷ ΟΑΓ· ἄρα τὸ σημεῖον Ο εἶναι σημεῖον τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν Α εὐθείας, καὶ *πᾶν σημεῖον ἴσον ἀπέχον τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν ταύτην εὐθείας.*

49. Ὅταν θέλωμεν νὰ δείξωμεν τὴν ὑπόστασιν γεωμετρικοῦ τόπου, πρέπει πάντοτε ν' ἀναπτύσσωμεν τὰς ἀποδείξεις ἢ δύο ἀντιστρόφων προτάσεων ἢ δύο ἀντιθέτων (9).

Οὕτω πρέπει νὰ ἐκθέτωμεν μετ' ἀποδείξεως ὅτι πᾶν σημεῖον τοῦ προτιθεμένου γεωμετρικοῦ τόπου μετέχει τῆς ἐκφραζομένης

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γωνία ΓΜΙ εἶναι ἴση τῇ ΚΜΘ, ἡ δὲ ΗλΟ ἴση τῇ ΔλΚ ὡς κατὰ κορυφήν· ἐπομένως αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι αἱ ἔχουσαι κορυφὴν Μ ὡς καὶ αἱ ὀξεῖαι γωνίαι αἱ ἔχουσαι κορυφὴν τὸ λ εἶναι πᾶσαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Προσέτι δὲ καὶ αἱ ἀμβλεῖαι γωνίαι ΙΜΘ, ΓΜΚ, ΚλΟ καὶ ΔλΗ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας ὡς παραπληρώματα τῶν ἴσων ὀξειῶν γωνιῶν.

Ἐὰν ἤδη θεωρήσωμεν ἀνὰ δύο οἱασδήποτε ἐκ τῶν ὀκτὼ τούτων γωνιῶν μὴ ἐχουσῶν τὴν αὐτὴν κορυφήν, εὑρίσκομεν ὅτι, ἐὰν μὲν ἀμφότεραι εἶναι ὀξεῖαι ἢ ἀμφότεραι ἀμβλεῖαι, θὰ εἶναι ἴσαι· ἐὰν δὲ ἡ μία ὀξεῖα καὶ ἡ ἑτέρα ἀμβλεῖα, θὰ εἶναι παραπληρωματικαί· ἐπομένως ἐξάγομεν ὅτι. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τέμνωνται ὑπὸ τρίτης, σχηματίζουσι (Σχ 34)*

α΄. *Τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας*. ΚΜΘ=ΚλΔ καὶ ΓΜΚ=ΚλΟ.

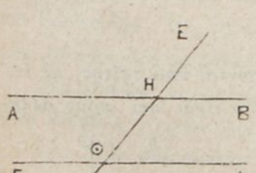
β΄. *Τὰς ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας*. ΓΜΙ=ΗλΟ καὶ ΙΜΘ=ΔλΗ.

γ΄. *Τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας*. ΙΜΘ=ΚλΟ, ΓΜΙ=ΔλΚ κτλ.

δ΄. *Τὰς ἐντὸς ἢ ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη παραπληρωματικάς* ΘΜΚ+ΚλΟ=2 ὀρθ. ΓΜΙ+ΔλΗ=2 ὀρθ. κ.τ.λ.

ε΄. *Τὰς ἐντὸς ἐκτὸς ἐναλλὰξ παραπληρωματικάς*. ΙΜΓ+ΚλΟ=2 ὀρθαί.

54. Ἀντιστρόφως. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι, τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης, σχηματίζωσι τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας, αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι.* Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΑΒ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΕΖ· καὶ ἔστω ὅτι αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΗΘ καὶ ΗΘΔ εἶναι ἴσαι· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῇ ΓΔ. Διότι πάντως κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν (α΄) ἡ διὰ τοῦ Η διερχομένη εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΓΔ θὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς ΕΖ γωνίαν ΑΗΘ ἴσην τῇ ΗΘΔ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα ΑΒ πληροῖ τὸν ἀπαραίτητον τοῦτον ὅρον, ἕπεται ὅτι εἶναι παράλληλος τῇ ΓΔ.



Σχ. 35

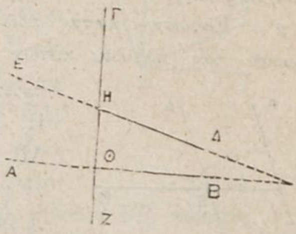
Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύονται αἱ ἀντίστροφοι καὶ τῶν λοιπῶν προτάσεων.

55. Αἱ ἐναντίαι τῶν ἀνωτέρω προτάσεις ἀληθεύουσιν. Ἀλλ' ἰδίᾳ, *ὅταν δύο εὐθεῖαι, τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης, σχηματίζωσι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν μικρότερον τῶν*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δύο ὀρθῶν, αἱ εὐθεῖαι αὗται συναντῶνται προεκτεινόμεναι πρὸς τὸ μέρος τῆς τεμνούσης, πρὸς ὃ καὶ αἱ γωνίαι αὗται. Οὕτως, ἐὰν ἐκ δύο εὐθειῶν ΘΒ καὶ ΗΔ ἡ μία ἡ ΗΔ εἶναι πλαγεία, ἡ δὲ ἑτέρα ΘΒ κάθετος ἐπὶ τρίτην τινὰ εὐθεῖαν τὴν ΕΖ, αὗται συναντῶνται πάντοτε, προεκτεινόμεναι πρὸς τὸ μέρος ἐκεῖνο τῆς τεμνούσης, πρὸς ὃ ἡ ὑπὸ τῆς πλαγίας σχηματιζομένη γωνία ΔΗΖ εἶναι ὀξεῖα. (Σχ. 36).

Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι τὸ περίφημον αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου στηρίζεται ἡ θεωρία τῶν παραλλήλων. Τοῦτο ἐξετέθη (ἐν § 50) ὡς ἑξῆς· *Διὰ σημείου, κειμένου ἐκτὸς εὐθείας, μία καὶ μόνη παράλληλος τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ ὑπάρχει.*

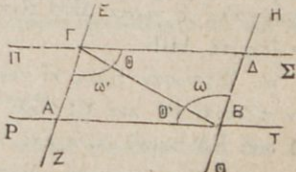


Σχ. 36.

Θεώρημα.

56. *Τὰ μέρη τῶν παραλλήλων εὐθειῶν τὰ μεταξὺ ἄλλων παραλλήλων περιεχόμενα εἶναι ἴσα.*

Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΗΘ τεμνόμεναι ὑπὸ τῶν παραλλήλων ΠΡ καὶ ΣΤ· λέγω ὅτι θὰ εἶναι ΑΒ=ΓΔ. Διότι, ἐὰν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΓΒ, σχηματίζονται τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα (§. 30) ὡς ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΓΒ κοινὴν καὶ τὰς προσκειμένας πρὸς ταύτην γωνίας ἴσας (θ=θ' καὶ ω=ω' § 53 α'), ἄρα καὶ ΑΓ=ΒΔ καὶ ΑΒ=ΓΔ.



Σχ. 37.

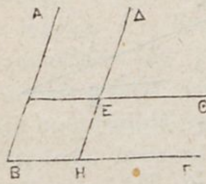
Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ ἦσαν κάθετοι πρὸς τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ, θὰ ἦσαν πάντως παράλληλοι· ἀλλὰ συνάμα θὰ παρίστων τὰ ἀποστήματα δύο σημείων Γ καὶ Δ τῆς εὐθείας ΓΔ ἀπὸ τῆς παραλλήλου ΑΒ. Ἐκ τούτου ἐξάγεται ὅτι *δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου καθ' ὅλην αὐτῶν τὴν ἔκτασιν.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θεώρημα.

57. *Δύο γωνίαι, ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους, εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.* (Σχ. 38).

α΄. Ἔστωσαν κατὰ πρῶτον αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΘ, ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους. Ἂς προεκτείνωμεν τὴν ΔΕ μέχρι τοῦ σημείου Η. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς παραλλήλους ΑΒ καὶ ΔΗ τεμνομένας ὑπὸ τῆς ΒΓ, αἱ γωνίαι ΑΒΗ καὶ ΔΗΓ εἶναι ἴσαι (§ 53 γ΄.) ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. Ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν τὰς παραλλήλους ΙΘ καὶ ΒΓ, τεμνομένας



Σχ. 38.

ὑπὸ τῆς ΔΗ, αἱ γωνίαι ΔΗΓ καὶ ΔΕΘ εἶναι ἴσαι (§ 53 γ΄.). Ἑπομένως αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἴσαι ἀμφότεραι τῇ ΔΗΓ, θὰ εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας ἴσαι.

β΄. Ἔστωσαν προσέτι αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΙΕΗ, ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἀλλ᾽ ἀντιρρόπους· λέγω ὅτι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι· διότι, ἐὰν προσεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας ΙΕΗ, σχηματίζεται ἡ γωνία ΔΕΘ ἴση τῇ ΙΕΗ ὡς κατὰ κορυφήν· ἀλλ᾽ ἡ γωνία ΔΕΘ εἶναι ἴση τῇ ΑΒΓ· ἄρα καὶ ἡ ΙΕΗ εἶναι ἴση τῇ ΑΒΓ.

γ΄. Ἔστωσαν τέλος αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΙ, τῶν ὁποίων αἱ μὲν πλευραὶ ΒΓ καὶ ΕΙ εἶναι παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι, αἱ δὲ ΒΑ καὶ ΕΔ παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι· λέγω ὅτι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι παραπληρωματικαί· Διότι ἡ γωνία ΔΕΙ, οὖσα παραπλήρωμα τῆς γωνίας ΔΕΘ, θὰ εἶναι παραπλήρωμα καὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΒΓ. ἤτοι ΔΕΙ+ΑΒΓ=2 ὀρθαὶ γωνίαι.

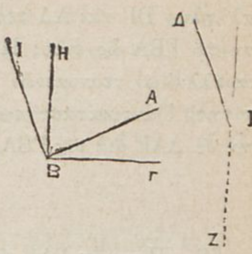
Ἑπομένως· *Ὅταν δύο γωνίαι ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους, αἱ γωνίαι αὗται θὰ εἶναι ἴσαι μέν, ἐὰν αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι, παραπληρωματικαὶ δέ, ἐὰν αἱ μὲν δύο ἀντιστοιχοῦσαι παράλληλοι εἶναι ὁμόρροποι, αἱ δὲ δύο ἄλλαι ἀντίρροποι.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θεώρημα.

58. *Δύο γωνίαι ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθέτους ἐπ' ἀλλήλας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.*

Ἔστωσαν δύο γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΘ ἔχουσαι τὴν πλευρὰν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΕ καὶ τὴν ΒΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΘ· λέγω ὅτι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι. Διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Β φέρωμεν τὴν μὲν ΒΗ παράλληλον τῇ ΕΘ, τὴν δὲ ΒΙ παράλληλον τῇ ΕΔ, ἡ σχηματιζομένη γωνία ΗΒΙ θὰ εἶναι ἴση τῇ ΔΕΘ. (§ 57). Ἀλλ' ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι συμπλήρωμα τῆς ΗΒΑ (διότι ἡ ΒΓ, κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΘ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον πρὸς ταύτην ΒΗ, καὶ ἡ γωνία ΗΒΓ εἶναι ὀρθή)· ὁμοίως δὲ καὶ ἡ γωνία ΗΒΙ εἶναι παραπλήρωμα τῆς αὐτῆς γωνίας ΑΒΗ· ἄρα αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΗΒΙ ὡς παραπληρώματα τῆς αὐτῆς γωνίας ΗΒΑ εἶναι ἴσαι· ἐπομένως ἡ γωνία ΔΕΘ, ὡς ἴση τῇ ΗΒΙ, θὰ εἶναι ἴση καὶ πρὸς τὴν ΑΒΓ.



Σχ. 39.

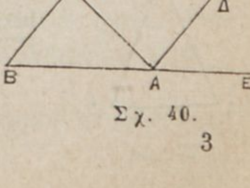
Ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν τὰς γωνίας ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γωνία ΔΕΖ, ὡς παραπλήρωμα τῆς γωνίας ΔΕΘ, θὰ εἶναι παραπλήρωμα καὶ τῆς ΑΒΓ.

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι· *Δύο γωνίαι, ἔχουσα τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθέτους ἐπ' ἀλλήλας, θὰ εἶναι ἴσαι μέν, ἐὰν ἀμφότεραι εἶναι ὀξεῖαι ἢ ἀμφότεραι ἀμβλεῖαι, παραπληρωματικαὶ δέ, ἐὰν ἡ μία εἶναι ὀξεῖα, ἡ δὲ ἑτέρα ἀμβλεῖα.*

Θεώρημα.

59. *Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι (Σχ. 40).*

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἂς προσεκβάλωμεν τὴν πλευρὰν ΒΑ μέχρι τινὸς σημείου Ε, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Α, ἂς φέρωμεν τὴν ΑΔ παράλληλον τῇ ΒΓ, καὶ ἂς θεωρήσωμεν τὰς τρεῖς περὶ τὸ



Σχ. 40.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Α σχηματισθείσας γωνίας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΒΕ· τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς (§ 17), ἤτοι ΒΑΓ+ΓΑΔ+ΔΑΕ =2 ὀρθ. (1). Ἐκ τῶν γωνιῶν τούτων ἡ ΒΑΓ εἶναι γωνία τοῦ τριγώνου· ἡ ΓΑΔ εἶναι ἴση τῇ ΒΓΑ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΒΓ καὶ ΑΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΓΑ· ἡ δὲ ΔΑΕ εἶναι ἴση τῇ ΓΒΑ ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν αὐτῶν παραλλήλων τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΕ· ἑπομένως, ἐὰν ἐν τῇ ἀνωτέρω ἰσότητι (1) ἀντικαταστήσωμεν τὴν μὲν ΓΑΔ διὰ τῆς ἴσης αὐτῇ ΒΓΑ, τὴν δὲ ΔΑΕ διὰ τῆς ΓΒΑ, θέλομεν ἔχει ΒΑΓ+ΑΓΒ+ΓΒΑ=2 ὀρθ.

Πορίσματα.

60. Ἡ γωνία ΓΑΕ ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῆς ΓΑ καὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς ἑτέρας ΒΑ καλεῖται *ἐκτὸς γωνία* τοῦ τριγώνου.

α΄. *Ἡ ἐκτὸς γωνία τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν*, ἤτοι ΓΑΕ=ΑΓΒ+ΓΒΑ.

Ἐκ τούτου ἐξάγεται ὅτι *δύο παράλληλοι εὐθεῖαι σχηματίζουσι πρὸς ἀλλήλας γωνίαν ἴσην τῷ μηδενί.*

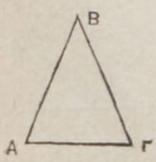
β΄. *Τρίγωνόν τι δύναται νὰ ἔχῃ μίαν μόνον ὀρθὴν ἢ ἀμβλεῖαν γωνίαν.*

γ΄. *Ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ αἱ δύο αὐτοῦ ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαί.*

δ΄. *Παντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ἑκάστη τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι τὰ* $\frac{2}{3}$ *τῆς ὀρθῆς γωνίας.*

ε΄. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, θὰ ἔχωσι καὶ τὴν τρίτην ἴσην.*

στ΄. Γνωστῆς οὔσης τῆς τιμῆς μιᾶς τῶν γωνιῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, εὐκόλως εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν λοιπῶν δύο.



Σχ. 41.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ἂς ὑποτεθῇ ὅτι ἡ γωνία Β εἶναι γνωστή· τότε θέλομεν ἔχει Α+Γ=2 ὀρθ.—Β. ἑπομένως

$$Α=\frac{2\text{ ὀρθ.}-Β}{2}=1\text{ ὀρθ.}-\frac{Β}{2} \text{ καὶ}$$

$$Γ=\frac{2\text{ ὀρθ}-Β}{2}=1\text{ ὀρθ.}-\frac{Β}{2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι *ἑκατέρα τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἰσοῦται μιᾷ ὀρθῇ ἠλαττωμένῃ κατὰ τὸ ἥμισυ τῆς πρὸς τὴν κορυφὴν γωνίας.*

Ἐὰν δὲ αἱ ἴσαι γωνίαι Α καὶ Γ εἶναι γνωσταί, θέλομεν ἔχει Β=2 ὀρθ.—(Α+Γ) ἢ Β=2 ὀρθ.—2 Α· ἢ Β=1 ὀρθ.—Α.

ζ'. *Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ δύο γωνίας ἴσα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ.*

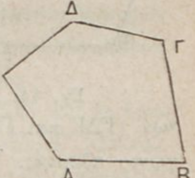
Διότι τὰ τρίγωνα θὰ ἔχωσι καὶ τὴν τρίτην γωνίαν ἴσην (ε'.) καὶ (κατὰ τὸ ἐν § 30 α'.) θὰ εἶναι ἴσα.

Ε'. ΠΕΡΙ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙᾼ ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ

61. *Καλεῖται πολύγωνον ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ὁριζομένη ὑπὸ κλειστῆς τεθλασμένης γραμμῆς.*

Πᾶσα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κλειστὴ τεθλασμένη γραμμὴ ἀποτελεῖ πολύγωνον. (Σχ. 42).

Αἱ πλευραὶ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς καλοῦνται *πλευραὶ* τοῦ πολυγώνου· αἱ δὲ κορυφαὶ καὶ αἱ γωνίαι ταύτης καλοῦνται *κορυφαὶ* καὶ *γωνίαι* τοῦ πολυγώνου· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τῆς τεθλασμένης γραμμῆς καλεῖται *περίμετρος* τοῦ πολυγώνου.



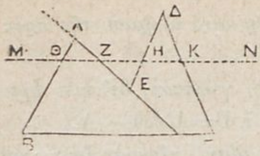
Σχ. 42.

Πολύγωνον ἔχον τρεῖς πλευρὰς ἔχει καὶ τρεῖς γωνίας, καὶ τοῦτο εἶναι τὸ τρίγωνον· τὸ πολύγωνον τὸ ἔχον τέσσαρας πλευρὰς καὶ τέσσαρας γωνίας καλεῖται *τετράπλευρον*· τὸ ἔχον πέντε *πεντάγωνον*, καὶ ἐν γένει τὸ κλειστὸν ἐπίπεδον σχῆμα τὸ ἔχον πολλὰς πλευρὰς καλεῖται ἁπλῶς *πολύγωνον*.

Τὸ πολύγωνον καλεῖται *κυρτόν*, ὅταν, οἱαδήποτε τῶν πλευρῶν αὐτοῦ προεκβαλλομένη ἑκατέρωθεν, ἀφίνει πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ὁλόκληρον τὸ πολύγωνον. Τοὐναντίον δὲ καλεῖται *μὴ κυρτόν*, ὅταν ὑπάρχῃ πλευρὰ αὐτοῦ, ἥτις προσεκβαλλομένη διαχωρίζει τὸ πολύγωνον.

62. *Εὐθεῖά τις μόνον εἰς δύο σημεῖα δύναται νὰ συναντᾷ τὴν περίμετρον κυρτοῦ πολυγώνου.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

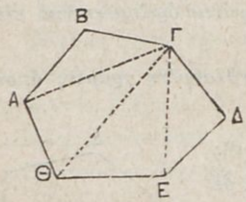


Σχ. 43.

Τῷόντι. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΜΝ συναντᾷ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ εἰς τρία σημεῖα Θ, Ζ, Η, τὰ σημεῖα Θ καὶ Η θὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς πλευρᾶς ΑΕ· ἑπομένως τὸ πολύγωνον τοῦτο μὴ κείμενον ὁλόκληρον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς προσεκβληθείσης αὐτοῦ πλευρᾶς ΑΕ δὲν εἶναι κυρτόν.

Θεώρημα.

63. *Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι τοσάκις δύο ὀρθαὶ γωνίαι, ὅσον εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἠλαττωμένον κατὰ 4.*



Σχ. 44.

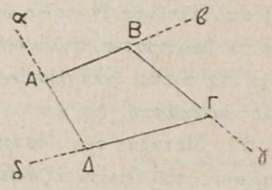
Ἔστω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΘ. Ἐὰν ἐκ μιᾶς κορυφῆς, ἔστω τῆς Γ, ἀχθῶσι πᾶσαι αἱ διαγώνιαι αἱ διὰ τοῦ Γ διερχόμεναι, τὸ πολύγωνον χωρίζεται εἰς τρίγωνα. Ἕκαστον τῶν τριγώνων τούτων ἔχει μίαν πλευρὰν κοινὴν μετὰ τοῦ πολυγώνου, πλὴν τῶν δύο ἄκρων τριγώνων (ΓΔΕ καὶ ΓΒΑ), τὰ ὁποῖα ἔχουσι δύο κοινὰς μετὰ τοῦ πολυγώνου πλευράς. Ἑπομένως, ἐὰν αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου εἶναι ν τὸ πλῆθος, ὁ ἀριθμὸς τῶν οὕτω σχηματιζομένων τριγώνων θὰ εἶναι (ν—2). Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων εἶναι προφανῶς καὶ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου· καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑκάστου τριγώνου εἶναι 2 ὀρθαί (59), ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν τριγώνων (ν—2), ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων τριγώνων, ἑπομένως καὶ τὸ τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου, θὰ εἶναι $\Sigma = 2.(\nu-2)$ ἢ $\Sigma = 2\nu - 4$ γωνίαι ὀρθαί. Ἔνθα Σ παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου.

Πορίσματα.

64. Ἐὰν ἐν τῷ ἀνωτέρω τύπῳ θέσωμεν $\nu=4$, εὑρίσκομεν $\Sigma = 2 \times 4 - 4 = 4$· ἤτοι *τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τετραπλεύρου εἶναι 4 ὀρθαὶ γωνίαι.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

65. *Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκτὸς γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζομεν ἐκτὸς πολυγώνου, προσεκβάλλοντες πάσας αὐτοῦ τὰς πλευρὰς πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος (Σχ. 45), ἰσοῦται πάντοτε μὲ 4 ὀρθάς*. Διότι, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, ἑπομένως καὶ τὸ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, εἶναι ν, τὸ ἄθροισμα τῶν τε ἐντὸς καὶ τῶν ἐκτὸς γωνιῶν εἶναι 2ν ὀρθαί· καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν εἶναι 2ν—4ὀρθαὶ γωνίαι, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκτὸς θὰ εἶναι 4 ὀρθαί.



Σχ. 45.

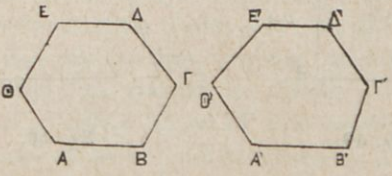
Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι· *Πολύγωνόν τι κυρτὸν δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἐσωτερικὰς γωνίας ὀξείας πλείονας τῶν τριῶν, οὔτε ἐξωτερικὰς ἀμβλείας πλείονας τῶν τριῶν.*

Θεώρημα.

66. *Δύο ὁμοειδῆ πολύγωνα* (*κυρτὰ ἢ μὴ κυρτά, ἔχοντα ἴσον ἀριθμὸν πλευρῶν*) *εἶναι ἴσα, ἐάν, ἐκτὸς δύο προσκειμένων πλευρῶν καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας, πᾶσαι αἱ λοιπαὶ πλευραὶ καὶ γωνίαι αὐτῶν δίδωνται κατὰ τάξιν ἴσοι ἑκάστη ἑκάστῃ.*

Ἔστωσαν τὰ ἑξάγωνα ΑΒΓΔΕΘ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄Θ΄ καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχουσι τὰς γωνίας Α=Α΄. Β=Β΄. Γ=Γ΄. Δ=Δ΄. Ε=Ε΄ καὶ τας πλευρὰς ΑΒ=Α΄Β΄, ΒΓ=Β΄Γ΄, ΓΔ=Γ΄Δ΄, ΔΕ=Δ΄Ε΄.

Ἂς ἐπιθέσωμεν δὲ τὰ δύο πολύγωνα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἑτέρου οὕτως, ὥστε αἱ γωνίαι Α καὶ Α΄ νὰ ταυτισθῶσιν· ἡ Α΄Θ΄ θὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΘ καὶ ἡ Α΄Β΄ θὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ΑΒ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία Β εἶναι ἴση μὲ τὴν Β΄, ἡ πλευρὰ Β΄Γ΄ θὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΒΓ, καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι, θὰ ταυτισθῶσιν



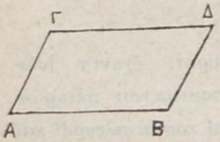
Σχ. 46.

ὥστε τὸ σημεῖον Γ΄ θὰ πέσῃ ἐπὶ τὸ Γ· κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον

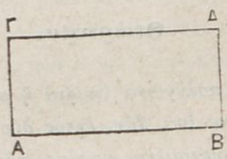
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ ἡ κορυφὴ Δ′ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Δ καὶ ἡ Ε′ ἐπὶ τῆς Ε· καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία Ε′ εἶναι ἴση τῇ Ε, ἡ πλευρὰ Ε′Θ′ θὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΕΘ, καὶ ἐπομένως ἡ κορυφὴ Θ′ θὰ εὑρεθῇ συμπίπτουσα μετὰ τῆς Θ, ὡς μόνον κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΕΘ′ καὶ ΑΘ. Τὰ δύο λοιπὸν πολύγωνα, συμπίπτοντα καθ' ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη καὶ ἀποτελοῦντα ἓν πολύγωνον, εἶναι ἴσα. Ἐντεῦθεν βλέπομεν ὅτι ἐὰν τὰ θεωρούμενα πολύγωνα ἔχωσιν ἕκαστον *ν* πλευράς, διὰ νὰ εἶναι ἴσα πρέπει νὰ ἔχωσι *ν—1* γωνίας ἴσας καὶ *ν—2* πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ.

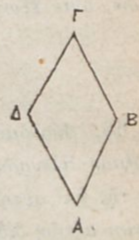
67. Μεταξὺ τῶν τετραπλεύρων διακρίνομεν τὸ *παραλληλόγραμμον*, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 47.



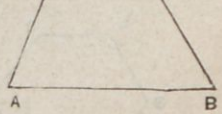
Σχ. 48. α′.



Σχ. 48 β′

Τὸ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου πᾶσαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαί. (Σχ. 48α′.)
Τὸν ῥόμβον, τοῦ ὁποίου αἱ τέσσαρες πλευραὶ εἶναι ἴσαι. (Σχ. 48β′.)
Τὸ τετράγωνον τοῦ ὁποίου πᾶσαι αἱ πλευραὶ καὶ πᾶσαι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι. (Σχ. 49).

Σχ. 49.



Σχ. 50.

Καὶ τὸ *τραπέζιον*, τοῦ ὁποίου αἱ δύο μόνον ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι. (Σχ. 50).

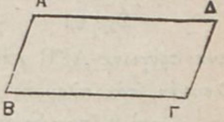
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θεώρημα.

68. *Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι.* (Σχ. 51).

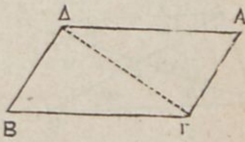
Αἱ μὲν ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι ὡς ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ ἀντιρρόπους (57)· αἱ δὲ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων περιεχόμεναι (56).

69. Ἀντιστρόφως· *Πᾶν τετράπλευρον ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς καὶ τὰς ἀπέναντι γωνίας ἴσας εἶναι παραλληλόγραμμον.* (Σχ. 51).



Σχ. 51.

Ἄς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον τὰς ἀπέναντι γωνίας ἴσας, ἤτοι Α=Γ καὶ Β=Δ· καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς δύο ἰσότητας λαμβάνομεν Α+Β=Γ+Δ· καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Α καὶ Β ἀποτελοῦσι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου, ἕπεται ὅτι ἔχουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθῶν γωνιῶν· ἐπειδὴ δὲ εἶναι γωνίαι ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν εὐθειῶν ΑΔ καὶ ΒΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ, αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι. (54). Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύεται ὅτι καὶ αἱ ἄλλαι δύο ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι· ἑπομένως τὸ τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον.



Σχ. 52.

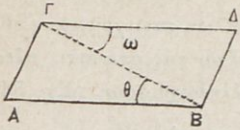
Ἄς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 52) ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας, ἤτοι ΑΔ=ΒΓ καὶ ΔΒ=ΑΓ. Ἐὰν φέρωμεν τὴν διαγώνιον ΔΓ, σχηματίζονται δύω τρίγωνα ΔΒΓ καὶ ΑΔΓ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν· ἑπομένως καὶ τὰς γωνίας ΑΔΓ καὶ ΔΓΒ ἴσας, ὡς κειμένας ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν ἴσων τριγώνων. καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΔΓ καὶ ΔΓΒ εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν εὐθειῶν ΑΔ καὶ ΒΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΔΓ, αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι. Ὁμοίως ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν ΒΔΓ καὶ ΑΓΔ ἐξάγεται ἡ παραλληλία τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ΒΔ καὶ ΓΑ· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχον τὰς ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρὰς παραλλήλους εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θεώρημα.

70. *Πᾶν τετράπλευρον ἔχον δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους εἶναι παραλληλόγραμμον.*

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (Σχ. 53) ἔχον τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ ἴσας καὶ παραλλήλους· λέγω ὅτι καὶ αἱ ἄλλαι δύο ἀπέναντι πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσαι, καὶ ἑπομένως τὸ τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον (69). Διότι, ἂν ἀχθῇ ἡ διαγώνιος ΓΒ, τὰ δύο σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΓΒ καὶ ΓΒΔ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΓΒ κοινὴν πλευράν, τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὰς γωνίας ω καὶ θ ἴσας ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΓΔ καὶ ΑΒ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΓΒ· ἑπομένως καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ εἶναι ἴση τῇ ΒΔ· ἄρα τὸ τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον ὡς ἔχον τὰς ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρὰς ἴσας (69).

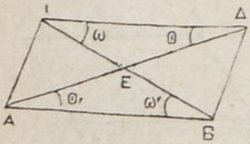


Σχ. 53.

Θεώρημα.

71. *Αἱ διαγώνιοι παντὸς παραλληλογράμμου τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς ἴσα μέρη.* (Σχ. 54).

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΔ καὶ ΒΓ τεμνόμεναι κατὰ τὸ Ε· λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει ΑΕ=ΕΔ καὶ ΒΕ=ΕΓ. Διότι τὰ τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΓΕΔ εἶναι ἴσα (30) ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ ἴσας, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου, τὰς γωνίας ω καὶ ω′ ἴσας ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΓΔ καὶ ΑΒ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΓΒ καὶ τὰς γωνίας θ καὶ θ′ ἴσας ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν αὐτῶν παραλλήλων τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΔ· ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ἐξάγομεν (31) ὅτι ΑΕ=ΕΔ καὶ ΓΕ=ΕΒ.



Σχ. 54.

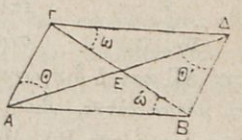
Τὸ ῥομβοειδὲς παραλληλόγραμμον, ἔχον τὰς προσκειμένας τῇ αὐτῇ πλευρᾷ γωνίας ἀνίσους, ἔχει καὶ τὰς διαγωνίους ἀνίσους.

Διότι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΒΓ ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΑΒ κοι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νὴν καὶ τὰς ΑΓ καὶ ΒΔ ἴσας, ἀλλὰ τὰς περιεχομένας γωνίας ΑΒΔ μεγαλειτέραν τῆς ΓΑΒ· ἑπομένως καὶ τὴν πλευρὰν ΑΔ μεγαλειτέραν τῆς ΓΒ (38).

72. Ἀντιστρόφως· *Ὅταν αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου τέμνωσιν ἀλλήλας εἰς ἴσα μέρη, τὸ τετράπλευρον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς αὐτοπαραλλήλους· ἤτοι εἶναι παραλληλόγραμμον.*



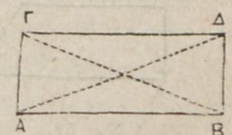
Σχ. 55.

Τῳόντι ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΓΔΕ καὶ ΑΕΒ ἐξάγεται ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν ω καὶ ω' (31) καὶ ἐκ ταύτης ἡ παραλληλία τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ (54)· ὁμοίως ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΕΓ καὶ ΒΕΔ ἐξάγεται ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν θ καὶ θ' καὶ ἑπομένως ἡ παραλληλία τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΒΔ.

Πορίσματα

73. Τὸ σημεῖον Ε, καθ' ὃ τέμνονται αἱ διαγώνιοι, καλεῖται καὶ **κέντρον** τοῦ παραλληλογράμμου· διότι πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Ε καὶ ἑνώνουσα δύο σημεῖα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν διχοτομεῖται κατὰ τὸ Ε, ὡς εὐκόλως δεικνύεται.

74. *Ὅταν μία τῶν γωνιῶν τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ὀρθή, καὶ αἱ λοιπαὶ αὐτοῦ γωνίαι θὰ εἶναι ὀρθαί, καὶ τὸ τετράπλευρον εἶναι ὀρθογώνιον.* (Σχ. 56).



Σχ. 56.

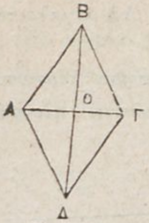
Διότι, ἐὰν ἡ γωνία, π.χ. Α, εἶναι ὀρθή, καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς Δ εἶναι ὀρθή (68)· αἱ δὲ ἄλλαι δύο γωνίαι Β καὶ Γ θ' ἀποτελῶσιν ἄθροισμα δύο ὀρθῶν· καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι (68), ἑκατέρα ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι ὀρθή.

75. *Τοῦ ὀρθογωνίου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι.* Τοῦτο ἀποδεικνύεται ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΓΑΒ καὶ ΑΒΔ. (Σχ. 56).

Ἀντιστρόφως· *Παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς διαγωνίους ἴσας, εἶναι ὀρθογώνιον (74).*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

76. *Ὁ ῥόμβος εἶναι παραλληλόγραμμον* (Σχ. 57).



Σχ. 57.

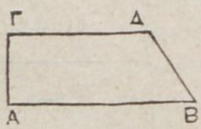
Διότι ἀφοῦ αἱ τέσσαρες αὐτοῦ πλευραὶ εἶναι πᾶσαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ἕπεται ὅτι ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας, καὶ ἑπομένως εἶναι παραλληλόγραμμον (69).

Τοῦ ῥόμβου αἱ διαγώνιοι εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας· τῷόντι ἡ διαγώνιος ΒΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς, διότι τὰ σημεῖα Β καὶ Δ ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς ΑΓ καὶ ἡ διαγώνιος ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ καὶ κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς, διότι τὰ σημεῖα Α καὶ Γ ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς ΒΔ (46).

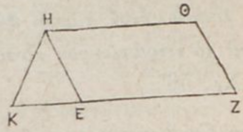
Τὰ τρίγωνα ΒΑΔ καὶ ΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελῆ· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς καὶ τοῦ μέσου τῆς βάσεως ἑκατέρου τούτων, ἕπεται ὅτι εἶναι *διχοτόμος τῶν γωνιῶν Α καὶ Γ*· ὁμοίως δεικνύεται ὅτι ἡ ἑτέρα διαγώνιος ΒΔ εἶναι διχοτόμος τῶν γωνιῶν Β καὶ Δ.

77. Τὸ τετράγωνον (Σχ. 49) ἔχει τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τοῦ ῥόμβου, ἤτοι· *Αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσαι, εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, καὶ διχοτομοῦσι τὰς ἀπέναντι γωνίας*.

78. Μεταξὺ τῶν τραπεζίων διακρίνομεν τὸ *ὀρθογώνιον τραπέζιον*, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ μία τῶν ἀπέναντι μὴ παραλλήλων πλευρῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς παραλλήλους πλευράς (Σχ. 58), καὶ τὸ



Σχ. 58.



Σχ. 59.

ἰσοσκελὲς τραπέζιον, τοῦ ὁποίου αἱ μὴ παράλληλοι ἐκ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν εἶναι ἴσαι (Σχ. 59). *Ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ τραπεζίῳ αἱ ὑφ' ἑκατέρας τῶν παραλλήλων πλευρῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι μετὰ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις*.

Ἄς ἀχθῇ ἡ ΗΕ παράλληλος τῇ ΘΖ· τὸ σχῆμα ΗΘΕΖ εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ ἑπομένως ΗΕ=ΘΖ· καὶ ἐπειδὴ ΗΚ=ΘΖ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

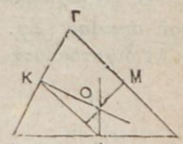
ἐξ ὑποθέσεως τὸ τρίγωνον ΚΗΕ εἶναι ἰσοσκελές, καὶ ἡ γωνία Κ εἶναι ἴση τῇ ΗΕΚ, καὶ ἑπομένως ἴση καὶ τῇ γωνίᾳ Ζ (53)· αἱ δὲ γωνίαι Η καὶ Θ εἶναι ἴσαι ὡς παραπληρώματα τῶν ἴσων γωνιῶν Κ καὶ Ζ.

79. *Δύο παραλληλόγραμμα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχωσι δύο προσκειμένας πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὰς ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας.*

Δύο ὀρθογώνια εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχωσι δύο προσκειμένας πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. Δύο ῥόμβοι εἶναι ἴσοι, ἐὰν ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην μιᾷ πλευρᾷ καὶ μίαν γωνίαν ἴσην. Δύο τετράγωνα εἶναι ἴσα ἐὰν ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην μιᾷ πλευρᾷ. (66).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

80. *Ἐν παντὶ τριγώνῳ αἱ ἐκ τῶν μέσων τῶν τριῶν πλευρῶν ἀγόμενοι κάθετοι ἐπὶ ταύτας διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου*(Σχ.60).



Σχ. 60.

Αἱ ἐκ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ ταύτας αἱ ΚΟ καὶ ΙΟ συναντῶνται εἴς τι σημεῖον Ο· διότι, ἂν ἀχθῇ ἡ ΚΙ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν ΟΚΙ καὶ ΟΙΚ εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν (55). Ἀλλὰ τὸ σημεῖον Ο, ὡς σημεῖον τῆς καθέτου ΟΙ, ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ὡς σημεῖον δὲ καὶ τῆς καθέτου ΚΟ, ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Γ· ἑπομένως τὸ σημεῖον τοῦτο Ο, ἀπέχον ἴσον καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ, θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου, ἥτις ἄγεται ἐπὶ τὴν ΓΒ διὰ τοῦ μέσου αὐτῆς Μ· ἤτοι ἡ ἐκ τοῦ Μ ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΒ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τούτου.

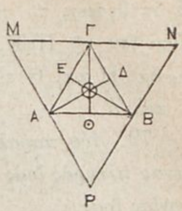
Πορίσματα

81. *Ἐν παντὶ τριγώνῳ αἱ ἐκ τῶν τριῶν κορυφῶν ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀπέναντι πλευράς,* (*ἤτοι τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου*) *διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.*

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰ ὕψη αὐτοῦ ΑΔ, ΒΕ καὶ ΓΘ.

Διὰ τῶν κορυφῶν Α,Β,Γ ἂς φέρωμεν ἀλληλοδιαδόχως παραλλήλους εὐθείας πρὸς τὰς ἀντικειμένας πλευρὰς τοῦ δεδομένου τριγώνου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



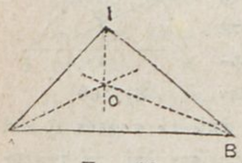
Σχ. 61

Αἱ παράλληλοι αὗται σχηματίζουσι τὸ τρίγωνον ΜΝΡ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ διέρχονται διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ δεδομένου τριγώνου, τεμνόμεναι κατὰ τὰ σημεῖα Α,Β, καὶ Γ δίχα. Διότι ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΡΒΓ ἔχομεν ΒΡ=ΑΓ, καὶ ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΓΝΒ ἔχομεν ΒΝ=ΑΓ· ἄρα ΒΡ = ΒΝ. Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι καὶ ΓΝ = ΓΜ καὶ ΑΡ=ΑΜ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΒΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΡΝ (51)· ὁμοίως ἡ ΓΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΝ, καὶ ἡ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΡ. Ἀλλ' αἱ ἐκ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τριγώνου κάθετοι ἐπὶ ταύτης διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (80)· ἑπομένως αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΕ καὶ ΓΘ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο.

*Θεώρημα.

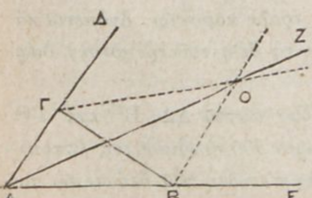
82. *Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου* (Σχ. 62).

Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας Α καὶ Β τέμνονται εἴς τι σημεῖον Ο, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν τριγώνου εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν (59, 55). Ἀλλὰ τὸ σημεῖον Ο ἀπέχον ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ (48) ὡς καὶ ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΒ, θὰ εἶναι ἀναγκαίως σημεῖον τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν Γ τοῦ τριγώνου εὐθείας.



Σχ. 62.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι *αἱ διχοτομοῦσαι δύο ἐκτὸς γωνίας τοῦ τριγώνου (60) συναντῶνται εἴς τι σημεῖον Ο κείμενον ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν προεκβληθεισῶν πλευρῶν.*



Σχ. 63.

Ἤτοι τὸ σημεῖον Ο, ὡς σημεῖον τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν ΔΓΒ, θ' ἀπέχῃ ἰσάκις τῶν πλευρῶν ΓΔ καὶ ΓΒ· ὁμοίως τὸ Ο, ὡς σημεῖον τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν ΓΒΕ, θ' ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΓΒ καὶ ΒΕ· ἄρα τὸ σημεῖον Ο, ἀπέχον

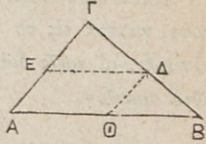
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἴσον καὶ τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΑΕ, θὰ εἶναι σημεῖον τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν ΓΑΒ.

Λῆμμα.

83. *Ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνώνουσα τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι παράλληλος τῇ τρίτῃ πλευρᾷ, καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς* (Σχ. 64).

Ἐπειδὴ δύο σημεῖα ὁρίζουσι μίαν καὶ μόνην εὐθεῖαν (4), καὶ ἐπειδὴ δι' ἑνὸς σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου μία μόνη παράλληλος τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ ὑπάρχει (50), θὰ θεωρήσωμεν τὴν προκειμένην πρότασιν ἀληθῆ, ὅταν δείξωμεν ὅτι, *ἐὰν διὰ τοῦ σημείου Δ μέσου τῆς πλευρᾶς ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀχθῇ ἡ ΔΕ παράλληλος τῇ ΑΒ, αὕτη συναντᾷ τὴν ΑΓ κατὰ τὸ μέσον.*



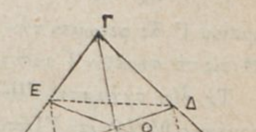
Σχ. 64.

Τῷόντι, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Δ ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΑΓ ἡ ΔΘ, τὸ σχῆμα ΑΘΔΕ εἶναι παραλληλόγραμμον (67) καὶ θὰ ἔχωμεν (68) ΔΘ=ΕΑ καὶ ΔΕ=ΑΘ. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΓΕΔ καὶ ΔΘΒ εἶναι ἴσα (30 1)· ἐξ οὗ ἕπεται ΔΘ=ΕΓ καὶ ΔΕ=ΒΘ· ἄρα καὶ ΓΕ=ΕΑ καὶ $ΔΕ=\frac{ΑΒ}{2}$·

Θεώρημα.

84. *Ἐν παντὶ τριγώνῳ αἱ διάμεσοι τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον, χωρίζον ἑκάστην τούτων εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ τριγώνου μέρος εἶναι διπλάσιον τοῦ πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευράν.* (Σχ. 65)

Ἂς φέρωμεν τὰς διαμέσους ΑΔ, ΒΕ καὶ ΓΘ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Αἱ δύο πρῶται διάμεσαι ΑΔ καὶ ΒΕ συναντῶνται εἴς τι σημεῖον Ο, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΟΒΑ καὶ ΟΑΒ εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν. Ἂς ἑνώσωμεν ἀφ' ἑνὸς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε



Σχ. 65.

διὰ τῆς εὐθείας ΔΕ καὶ ἀφ' ἑτέρου τὰ μέσα Ι καὶ Κ τῶν εὐθειῶν ΟΑ καὶ ΟΒ. Θὰ ἔχωμεν τότε κατὰ τὸ προηγούμενον λῆμμα $ΕΔ=\frac{ΑΒ}{2}=ΑΘ=ΙΚ$. Προσέτι δὲ ἡ ΕΔ καὶ ἡ ΙΚ θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΒ, ἐπομένως καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι (50)· ἄρα

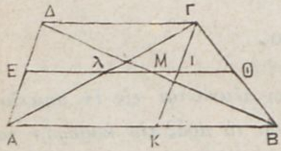
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸ σχῆμα ΕΙΚΔ εἶναι παραλληλόγραμμον (70), τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς ἴσα μέρη, ἤτοι ΟΕ=ΟΚ· ἀλλὰ καὶ ΟΚ = ΚΒ (ἐκ κατασκευῆς)· ἄρα ΟΒ=$\frac{2}{3}$ τῆς ΕΒ, καὶ ΟΕ=$\frac{1}{3}$ τῆς ΕΒ.

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ο, καθ' ὃ συναντῶνται δύο διάμεσοι οἱαιδήποτε, κεῖται εἰς τὸ τρίτον ἑκατέρας τούτων ἀπὸ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, *αἱ τρεῖς διάμεσοι τοῦ τριγώνου συναντῶνται εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον.*

Θεώρημα.

85. *Ἐν παντὶ τραπεζίῳ ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνώνουσα τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς τοῦ τραπεζίου, καὶ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν. Τὸ δὲ μεταξὺ τῶν διαγωνίων τοῦ τραπεζίου περιεχόμενον μέρος τῆς αὐτῆς εὐθείας ἰσοῦται τῷ ἡμίσει τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν(παραλλήλων) πλευρῶν τοῦ τραπεζίου.*



Σχ. 66.

Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ εἶναι αἱ ΑΔ καὶ ΒΓ. Διὰ τοῦ σημείου Θ μέσου τῆς ΒΓ ἂς φέρωμεν τὴν ΘΕ παράλληλον τῇ ΑΒ, ἐπομένως καὶ τῇ ΓΔ (50)· διὰ τοῦ σημείου Γ ἂς φέρωμεν τὴν ΓΚ παράλληλον τῇ ΑΔ συναντῶσαν τὴν ΕΘ εἰς τὸ σημεῖον Ι μέσον τῆς ΓΚ (83).

Τὰ δύο σχήματα ΓΙΕΔ καὶ ΑΚΙΕ εἶναι παραλληλόγραμμα, ἐπομένως θὰ ἔχομεν ΓΙ=ΔΕ καὶ ΙΚ ΕΑ· ἤτοι τὸ σημεῖον Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΔ, καὶ συνάμα ΙΕ=ΚΑ=ΓΔ.

Οὕτω θέλομεν ἔχει(83)ΘΕ=ΘΙ+ΙΕ=$\frac{ΚΒ}{2}$+ΓΔ=$\frac{ΑΒ-ΓΔ}{2}$+ΓΔ.

$$ΘΕ= \frac{ΑΒ-ΓΔ}{2} + \frac{2ΓΔ}{2} = \frac{ΑΒ+ΓΔ}{2}$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν ἔπειτα τὰς δύο διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ, αἵτινες συναντῶσι τὴν εὐθεῖαν ΘΕ εἰς τὰ σημεῖα λ καὶ Μ, ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΓΒ δείκνυται ὅτι τὸ λ εἶναι μέσον τῆς ΑΓ (83), καὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐκ τοῦ τριγώνου ΓΒΔ ὅτι τὸ σημεῖον Μ εἶναι μέσον τῆς ΒΔ.

Ἐπομένως $\lambda\Theta = \frac{AB}{2}$ καὶ $M\Theta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ καὶ ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς δύο ἰσότητας, λαμβάνομεν

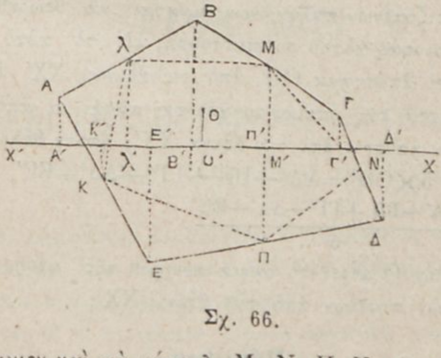
$$\lambda\Theta - M\Theta = \frac{AB}{2} - \frac{\Gamma\Delta}{2}$$

$$\text{ἢ } \lambda M = \frac{AB - \Gamma\Delta}{2}.$$

*Θεώρημα.

86. *Δεδομένων διαφόρων σημείων ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὑπάρχει πάντοτε ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ ὡρισμένον σημεῖον, τοῦ ὁποίου τὸ ἀπόστημα ἀπὸ εὐθείας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου λαμβανομένης ὡς ἄξονος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀποστημάτων τῶν δεδομένων σημείων ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος.*

Διὰ νὰ εἶναι γενικὸν τὸ θεώρημα πρέπει νὰ χαρακτηρίσωμεν δι' ἀντιθέτων σημείων τὰ ἀποστήματα τῶν ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος κειμένων σημείων. Θὰ θεωρήσωμεν δὲ ὡς θετικὰ μὲν τὰ ἄνωθεν τοῦ ἄξονος, ὡς ἀρνητικὰ δὲ τὰ κάτωθεν αὐτοῦ. Ἔστωσαν (Σχ. 66) τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, τὰ ὁποῖα ἑνούμενα δι' εὐθειῶν ἀποτελοῦσι κλειστὴν πολυγωνικὴν γραμμήν.



Σχ. 66.

Ἂς λάβωμεν καὶ τὰ μέσα λ, Μ, Ν, Π, Κ τῶν πλευρῶν τῆς γραμμῆς ταύτης, καὶ ἂς φέρωμεν ἐξ ἑνὸς ἑκάστου πάντων τῶν σημείων τούτων καθέτους ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄..... ΜΜ΄... ἐπὶ τὸν ἄξονα

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

XX'. Τὰ οὕτω σχηματιζόμενα τραπέζια δίδουσι κατὰ σειρὰν (85).

$$\lambda\lambda' = \frac{AA'+BB'}{2}, MM \frac{BB'+\Gamma\Gamma'}{2}, NN' = \frac{\Gamma\Gamma'-\Delta\Delta'}{2},$$

$$-\Pi\Pi' = -\frac{\Delta\Delta'+EE'}{2}, -KK' = -\frac{EE'-AA'}{2}.$$

καὶ προσθέτοντες πάσας ταύτας τὰς ἰσότητας κατὰ μέλη λαμβάνομεν.

$$\lambda\lambda'+M'M+NN'-\Pi\Pi'-KK'=AA'+BB'+\Gamma\Gamma'-\Delta\Delta-EE'$$

Ἡ περίμετρος τῆς νέας κλειστῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς τῆς σχηματιζομένης διὰ τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἑνοῦσι τὰ μέσα τῶν ἐφεξῆς πλευρῶν τῆς πρώτης περιμέτρου εἶναι πάντοτε μικροτέρα ἐκείνης. Καὶ θέλομεν ἔχει (35).

$\lambda M < \lambda B + BM$, $MN < M\Gamma + \Gamma N$, $N\Pi < N\Delta + \Delta\Pi$.....

Βλέπομεν ἐντεῦθεν ὅτι ἐάν, ἀρχόμενοι ἐκ τοῦ δεδομένου πολυγώνου ΑΒΓΔΕ, νοήσωμεν διαδοχικῶς κατασκευαζόμενα νέα πολύγωνα ἔχοντα ἕκαστον κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ προηγουμένου, αἱ περίμετροι αὐτῶν βαίνουσι πάντοτε ἐλαττούμεναι, ἐνῷ συνάμα τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀποστημάτων τῶν κορυφῶν αὐτῶν ἀπὸ τοῦ ἄξονος XX' μένει ἀμετάβλητον. Ἂς θεωρήσωμεν συνάμα ὅτι διὰ σειρὰν πολυγώνων κατασκευαζομένων κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον οἱ πόδες τῶν τελευταίων καθέτων (AA' καὶ AΔ', KK' καὶ NN'...) θὰ πλησιάζωσιν ἀλλήλους ἀπεριορίστως.

Εἰς τὸ ὅριον τὸ τελευταῖον ἐκ τῆς ἀπεριορίστου σειρᾶς τῶν οὕτω σχηματιζομένων πολυγώνων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἔχει πάσας τὰς κορυφὰς αὐτοῦ συμπιπτούσας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον O, τοῦ ὁποίου τὸ ἀπόστημα OO' ἀπὸ τοῦ ἄξονος XX' θὰ θεωρηθῇ ὡς εὐθεῖα, μετὰ τῆς ὁποίας συγχέονται πᾶσαι αἱ ἀπὸ τῶν κορυφῶν ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα XX', ὁπότε θέλομεν ἔχει.

$$5 \times OO' = AA'+BB'+\Gamma\Gamma'-\Delta\Delta'-EE'$$

$$\text{ἢ } OO' = \frac{AA'+BB+\Gamma\Gamma'-\Delta\Delta'-EE'}{5}$$

Τὸ σημεῖον O φέρει τὸ ὄνομα *κέντρον τῆς μέσης ἀποστάσεως* τῶν δεδομένων σημείων ἀπὸ τοῦ ἄξονος XX'.

Πόρισμα.

87. Ἂς παραστήσωμεν δι' Υ τὸ ἀπόστημα OO' καὶ δι' υ ἐν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

οἱονδήποτε τῶν ἀποστημάτων ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄... Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν θεωρηθέντων σημείων παρασταθῇ διὰ μ, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν συμβολικῶς.

$$\Upsilon = \frac{\Sigma \upsilon}{\mu}$$

ἐννοεῖται δὲ ὅτι Συ εἶναι ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα.

Αἱ δύο συνθῆκαι $\Upsilon=0$ καὶ $\Sigma\upsilon=0$ συνεπάγονται ἀπ' ἀλλήλων ἀμοιβαίως. Πᾶσα δὲ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τῶν μέσων ἀποστάσεων πληροῖ τὴν συνθήκην $\Sigma\upsilon=0$ καὶ ἀντιστρόφως. Ἡ τοιαύτη εὐθεῖα καλεῖται *ἄξων τῶν μέσων ἀποστημάτων*.

Ἐν τῷ τριγώνῳ τὸ κέντρον τῆς μέσης ἀποστάσεως τῶν κορυφῶν αὐτοῦ συμπίπτει μετὰ τοῦ σημείου τῆς συναντήσεως τῶν διαμέσων. Διότι ἑκάστη τῶν εὐθειῶν τούτων ὡς πρὸς τὰς τρεῖς κορυφὰς εἶναι ἄξων τῶν μέσων ἀποστημάτων, καθόσον διὰ τὰ σημεῖα ταῦτα πληροῖ προφανῶς τὴν συνθήκην $\Sigma\upsilon=0$.

Ὡσαύτως *ἐν παντὶ τετραπλεύρῳ τὸ κέντρον τῶν μέσων ἀποστημάτων εἶναι τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συναντῶνται αἱ τὰ μέσα τῶν ἀντικειμένων πλευρῶν ἑνώνουσαι εὐθεῖαι* (διάμεσοι τοῦ τετραπλεύρου)· διότι ἑκατέρα τῶν εὐθειῶν τούτων εἶναι προφανῶς ἄξων τῶν μέσων ἀποστημάτων τῶν τεσσάρων κορυφῶν τοῦ τετραπλεύρου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

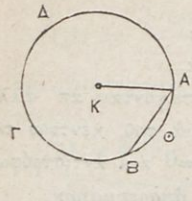
Α΄. ΠΕΡΙ ΤΟΞΟΥ ΚΑΙ ΠΕΡΙ ΧΟΡΔΗΣ

88. *Περιφέρεια κύκλου εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἐπιπέδου τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ ἑνὸς σημείου τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον σημεῖον καλεῖται κέντρον.*

Εἶναι δὲ ἡ περιφέρεια ἡ μόνη καμπύλη γραμμή, τὴν ὁποίαν θὰ ἐξετάσωμεν ἐν τῇ στοιχειώδει Γεωμετρίᾳ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὑπὸ περιφερείας περιοριζόμενον καλεῖται *κύκλος* (Σχ. 67).



Σχ. 67.

Πᾶσα εὐθεῖα ἀρχομένη ἐκ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη εἰς τὴν περιφέρειαν, ὡς ἡ ΚΑ, καλεῖται *ἀκτὶς* τοῦ κύκλου.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς περιφερείας, ἕπεται ὅτι· *πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι.*

Σημεῖόν τι κεῖται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τῆς περιφερείας, καθ' ὅσον τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ κέντρου εἶναι μικρότερον ἢ μεγαλείτερον τῆς ἀκτῖνος.

Πᾶν μέρος τῆς περιφερείας, ὡς τὸ ΑΘΒ ἢ τὸ ΒΓΔΑ, καλεῖται *τόξον*. Ἡ δὲ εὐθεῖα ἡ ἑνώνουσα τὰ ἄκρα τόξου, ὡς ἡ ΑΒ, καλεῖται *χορδή*. Εἰς ἑκάστην χορδὴν ἀντιστοιχοῦσι δύο τόξα, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖ ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν· συνήθως ὅμως τὴν χορδὴν θεωροῦμεν ἀνήκουσαν εἰς τὸ μικρότερον τόξον.

Δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας λέγονται *ἴσα*, ὅταν, ἐπιτιθέμενα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἑτέρου, ταυτίζωνται οὕτως, ὥστε πᾶν σημεῖον τοῦ ἑνὸς τόξου νὰ εἶναι σημεῖον καὶ τοῦ ἑτέρου.

Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσότερα τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας, θέτομεν αὐτὰ κατὰ σειρὰν τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ταύτης· τὸ δὲ τόξον τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῆς ἀρχῆς καὶ τοῦ πέρατος τῆς σειρᾶς τῶν τόξων τούτων εἶναι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Πᾶσα χορδὴ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καλεῖται *διάμετρος*. *Πᾶσαι αἱ διάμετροι τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι*, καθότι ἑκάστη ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἀκτίνων.

Ἡ περιφέρεια εἶναι *κυρτὴ καμπύλη*· ἤτοι δὲν δύναται νὰ συναντᾶται ὑπὸ εὐθείας εἰς σημεῖα περισσότερα τῶν δύο. Διότι ἄλλως αἱ ἐκ τοῦ κέντρου εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα ἀγόμεναι εὐθεῖαι ὡς ἀκτῖνες τοῦ κύκλου θὰ ἦσαν ἴσαι, καὶ θὰ εἴχομεν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου πρὸς τὴν εὐθεῖαν περισσοτέρας τῶν δύο εὐθειῶν ἴσας, ὅπερ ἀδύνατον.

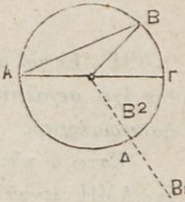
Καλεῖται *κυκλικὸν τμῆμα* τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύκλου τὸ μεταξὺ χορδῆς καὶ τόξου περιεχόμενον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θεώρημα.

1) 89. *Ἡ μεγαλειτέρα χορδὴ μιᾶς περιφερείας εἶναι διάμετρος. Πᾶσα δὲ διάμετρος διαιρεῖ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εἰς δύο ἴσα μέρη.*

α΄. Ἔστω ἡ χορδὴ ΑΒ (Σχ. 68). Ἄς φέρωμεν διὰ τοῦ σημείου Α τὴν διάμετρον ΑΓ, καὶ ἂς ἑνώσωμεν τὸ σημεῖον Ο μὲ τὸ Β. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΟΒ ἔχομεν ΑΒ $<$ΑΟ$+$ΟΒ ἢ ΑΒ$<$ΑΟ$+$ΟΓ ἢ ΑΒ$<$ΑΓ.



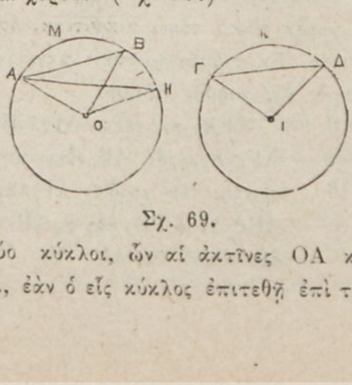
Σχ. 68.

β΄. Τὰ τόξα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ, εἰς ἃ ἡ διάμετρος ΑΓ διαιρεῖ τὴν περιφέρειαν, εἶναι ἴσα· ἐὰν στρέψωμεν τὸ τμῆμα ΑΒΓΑ περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, καὶ ἐπιθέσωμεν αὐτὸ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου τμήματος ΑΔΓΑ, τὸ τόξον ΑΒΓ θὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ τόξου ΑΔΓ. Διότι, ἂν σημεῖόν τι Β τοῦ ἑνὸς τόξου ἔπιπτεν ἐκτὸς ἢ ἐντὸς τοῦ ἄλλου τόξου, π. χ. εἰς τὸ B_1 ἢ B_2, αἱ ἀκτῖνες ΟΔ καὶ OB_1, OB_2 θὰ ἦσαν ἄνισοι, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὸν ὁρισμὸν τοῦ κύκλου. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τόξα ταυτίζονται, εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ τὰ δύο κυκλικὰ τμήματα ταυτίζονται, καὶ εἶναι ἴσα.

Τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας καλεῖται *ἡμιπεριφέρεια*· τὸ δὲ ἥμισυ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύκλου καλεῖται *ἡμικύκλιον*.

Θεώρημα.

2) 90. *Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις εἰς τὰ ἴσα τόξα ἀντιστοιχοῦσιν ἴσαι χορδαί.* (Σχ. 69.)



Σχ. 69.

Ἔστωσαν δύο κύκλοι, ὧν αἱ ἀκτῖνες ΟΑ καὶ ΙΓ εἶναι ἴσαι εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν ὁ εἷς κύκλος ἐπιτεθῇ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου οὕτως,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὥστε νὰ συμπέσωσι τὰ κέντρα αὐτῶν, οἱ κύκλοι θὰ ταυτισθῶσι. Δυνάμεθα δὲ νὰ ἐπιθέσωμεν αὐτοὺς οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον Γ νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Α· ἐὰν τὸ τόξον ΑΜΒ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΓΝΔ, τὸ σημεῖον Β θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Δ, ἑπομένως καὶ αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ θὰ ταυτισθῶσιν, ἄρα θὰ εἶναι ἴσαι.

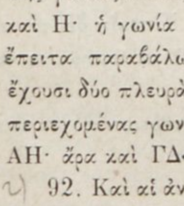
Θεώρημα.

91. *Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις τὸ μεγαλείτερον τόξον ἔχει μεγαλειτέραν χορδήν, ὅταν ἑκάτερον δὲν ὑπερβαίνῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν.*

Ἔστω ὁ κύκλος Ο ἴσος μὲ τὸν κύκλον Ι (Σχ. 69) καὶ τὸ τόξον ΑΜΗ μεγαλείτερον τοῦ τόξου ΑΝΔ. Ἂς λάβωμεν τὸ τόξον ΑΜΒ ἴσον πρὸς τὸ ΓΝΔ· ἡ χορδὴ ΑΒ θὰ εἶναι ἴση τῇ ΓΔ (90). οὕτω δὲ τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΗ. Πρὸς τοῦτο ἂς φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΒ καὶ ΟΗ, ὁπότε ἡ ἀκτὶς ΟΒ θὰ περιέχηται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΑΟΗ, διότι τὸ σημεῖον Β περιέχεται μεταξὺ τῶν Α καὶ Η· ἡ γωνία λοιπὸν ΑΟΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΟΗ. Ἐὰν ἔπειτα παραβάλωμεν τὰ τρίγωνα ΑΟΒ καὶ ΑΟΗ, βλέπομεν ὅτι ἔχουσι δύο πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ΑΟΒ καὶ ΑΟΗ ἀνίσους· ἑπομένως καὶ ΑΒ$<$ΑΗ· ἄρα καὶ ΓΔ$<$ΑΗ.

92. Καὶ αἱ ἀντίστροφοι τῶν δύο προηγουμένων προτάσεων ἀληθεύουσι.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι μεταξὺ δύο χορδῶν καὶ μεταξὺ δύο τόξων ὑφίσταται ἡ αὐτὴ σχέσις, ἐφ' ὅσον τὰ τόξα εἶναι μικρότερα ἡμιπεριφερείας. Ἐὰν ὅμως θεωρήσωμεν τόξα ὑπερβαίνοντα τὴν ἡμιπεριφέρειαν, ἡ χορδὴ εἶναι τόσῳ μικροτέρα, ὅσῳ τὸ τόξον αὐτῆς εἶναι μεγαλείτερον. Ἐκ τούτου γίνεται φανερὸν ὅτι *τὰ τόξα δὲν εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς χορδὰς αὐτῶν.*



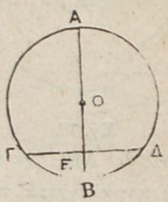
Σχ. 70.

Ἐὰν τὸ τόξον ΑΓΒ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΓ, ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν χορδῶν ΑΓ καὶ ΓΒ, ἤτοι ΑΒ$<$ΑΓ$+$ΓΒ· καὶ ἡ ΑΒ εἶναι μικροτέρα τοῦ διπλασίου τῆς ΑΓ, (Σχ. 70).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θεώρημα

93. *Ἡ διάμετρος κύκλου ἡ κάθετος ἐπὶ χορδὴν διαιρεῖ τὴν χορδὴν ταύτην καὶ τὰ ὑπ' αὐτῆς ὑποτεινόμενα τόξα εἰς δύο ἴσα μέρη.* (Σχ. 71).



Σχ. 71.

Ἔστω ἡ χορδὴ ΓΔ καὶ ἡ διάμετρος ΑΒ, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδήν. Ἂς στρέψωμεν τὸ ἡμικύκλιον ΑΔΒΑ περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ, καὶ ἂς ἐπιθέσωμεν αὐτὸ ἐπὶ τὸ ἕτερον ἡμικύκλιον· τὸ σημεῖον Δ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΕΓ, διότι αἱ γωνίαι ΑΕΔ καὶ ΑΕΓ ὡς ὀρθαὶ εἶναι ἴσαι, καὶ ἡ ΕΔ θὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ΕΓ· θὰ πέσῃ δὲ τὸ Δ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας ΒΓΑ, ἄρα θὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ Γ· ἑπομένως ἡ ΕΔ εἶναι ἴση τῇ ΕΓ, ἤτοι τὸ σημεῖον Ε εἶναι μέσον τῆς ΓΔ. Προσέτι δὲ τὸ τόξον ΔΒ θὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ ΒΓ ὡς καὶ τὸ ΔΑ μετὰ τοῦ ΑΓ· ἄρα τὸ Β εἶναι μέσον τοῦ τόξου ΓΒΔ, ὅπως καὶ τὸ Α εἶναι μέσον τοῦ τόξου ΓΑΔ.

Ἡ διάμετρος ΑΒ πληροῖ τὰς ἑξῆς τέσσαρας συνθήκας. Διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, *εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΓΔ, διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς, καὶ διαιρεῖ ἑκάτερον τῶν τόξων εἰς δύο ἴσα μέρη.*

Δύο δὲ τῶν συνθηκῶν τούτων ἀρκοῦσι διὰ νὰ ὁρισθῇ μία εὐθεῖα τοιαύτη (4, 15, 21), καθότι εὐθεῖα πληροῦσα δύο ἐκ τῶν ἀνωτέρω τεσσάρων συνθηκῶν θὰ πληροῖ καὶ τὰς λοιπὰς δύο.

Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων χορδῶν κύκλου παραλλήλων εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου τούτου κάθετος ἐπὶ τὰς χορδάς.

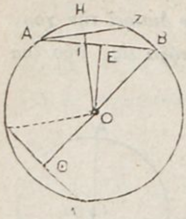
Θεώρημα.

94. *Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ αἱ ἴσαι χορδαὶ ἴσον ἀπέχουσι τοῦ κέντρου, καὶ ἐκ δύο ἀνίσων χορδῶν ἡ μικροτέρα ἀπέχει τοῦ κέντρου περισσότερον.*

Ἔστωσαν δύο ἴσαι χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ, καὶ αἱ ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ ταύτας κάθετοι αἱ ΟΕ καὶ ΟΘ, τὰ σημεῖα Ε καὶ Θ θὰ εἶναι τὰ μέσα τῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΓΔ (93). Ἑπομένως τὰ ὀρθογώνια τρί-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γωνα ΕΟΒ καὶ ΓΟΘ ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσην εἶναι ἴσα (47,6΄.)· καὶ ἑπομένως θέλομεν ἔχει ΟΕ=ΟΘ.



Σχ. 72.

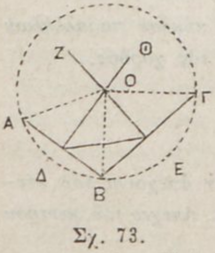
Ἂς λάβωμεν ἔπειτα τὸ τόξον ΑΖ μικρότερον τοῦ ΑΓ· ἡ χορδὴ ΑΖ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΒ (91)· ἡ κάθετος ΟΗ ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΖ θὰ τέμνῃ ἀναγκαίως τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον, διότι τὰ σημεῖα Ο καὶ Η κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ΑΒ. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν ΟΙ<ΟΗ· ἀλλ' ΟΙ ὡς πλαγία εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΟΕ· κατὰ μείζονα δὲ λόγον ἡ ΟΗ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΟΕ.

Καὶ ἡ ἀντίστροφος πρότασις ἀληθεύει· δηλ. ὅτι *αἱ ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπέχουσαι χορδαὶ εἶναι ἴσαι· καὶ αἱ ἄνισον ἄνισοι, καὶ μεγαλειτέρα εἶναι ἡ ὀλιγώτερον ἀπέχουσα τοῦ κέντρου*. Τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως ταύτης ἀποδεικνύεται ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΟΕΒ καὶ ΟΓΘ, τὰ δὲ δεύτερον διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἐπαγωγῆς.

Θεώρημα.

4) 95. *Τρία σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα ὁρίζουσι περιφέρειαν κύκλου καὶ μίαν μόνην.*

Ἔστωσαν τὰ τρία σημεῖα Α,Β,Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας. Ἂς φέρωμεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΒΓ, καὶ ἐκ τῶν μέσων Δ καὶ Ε τῶν εὐθειῶν τούτων ἂς ὑψώσωμεν καθέτους ἐπὶ ταύτας τὰς ΔΘ καὶ ΕΖ· αὗται αἱ κάθετοι συναντῶνται εἴς τι σημεῖον Ο, διότι, ἀχθείσης τῆς ΔΕ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη σχηματιζομένων γωνιῶν ΟΔΕ καὶ ΟΕΔ, ἀμφοτέρων ὀξειῶν, εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν. Τὸ σημεῖον Ο ὡς σημεῖον τῆς ΖΕ καθέτου ἐπὶ τὴν ΒΓ τὴν κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς θ' ἀπέχῃ ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτῆς Β καὶ Γ· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ σημεῖον Ο ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα Β καὶ Α. Ἑπομένως τὰ σημεῖα Α, Β, καὶ Γ ἴσον ἀπέχοντα τοῦ σημείου Ο, εἶναι σημεῖα περιφερείας ἐχούσης κέντρον τὸ Ο.

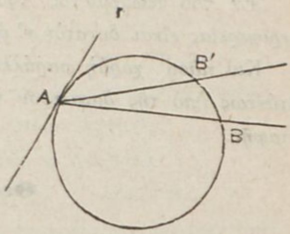


Σχ. 73.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου ἕπεται ὅτι *τρία σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα ἀρκοῦσι διὰ νὰ ὁρίσωσι μίαν περιφέρειαν κύκλου, καθόσον δύο περιφέρειαι ἔχουσαι τρία κοινὰ σημεῖα ταυτίζονται (88).*

4) 96. Ὅταν εὐθεῖα ὡς ἡ ΑΒ συναντᾷ περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β (Σχ. 74), καλεῖται *τέμνουσα* ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν. Ἐὰν δὲ φαντασθῶμεν τὴν τέμνουσαν ταύτην ΑΒ στρεφομένην περὶ τὸ σημεῖον Α ὅπως λάβῃ ἄλλην τινὰ θέσιν, ἔστω τὴν ΑΒ', τὸ δεύτερον σημεῖον τῆς συναντήσεως πλησιάζει πρὸς τὸ πρῶτον Α· ἐὰν δὲ ἐξακολουθήσωμεν συνεχῶς τὴν στροφὴν ταύτην ὁμοίαν, θὰ ἔλθῃ στιγμή, καθ' ἣν τὸ Β θὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ Α, καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΑΓ, ἔχουσα μετὰ τῆς περιφερείας ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, τὸ Α, ὁπότε λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΓ **ἐφάπτεται** τῆς περιφερείας κατὰ τὸ Α. Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ὡς **ἐφαπτομένην** περιφερείας τὴν εὐθεῖαν, ἥτις ἔχει ἓν μόνος κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς περιφερείας.

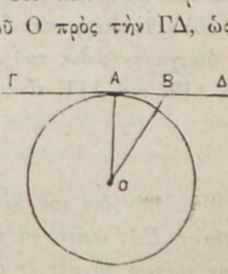


Σχ. 74.

Θεώρημα.

5) 97. ***Πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἀκτῖνα κύκλου κατὰ τὸ ἄκρον αὐτῆς εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου· καὶ ἀντιστρόφως. Ἡ ἐφαπτομένη περιφερείας εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου τὴν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς.***

Ἔστω ἡ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ κατὰ τὸ ἄκρον αὐτῆς Α. Πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα ἀγομένη ἀπὸ τοῦ Ο πρὸς τὴν ΓΔ, ὡς ἡ ΟΒ, θὰ εἶναι πλαγία ὡς πρὸς τὴν ΓΔ· καὶ θέλομεν ἔχει ΟΒ>ΟΑ, ἤτοι τὸ σημεῖον Β κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας· ὁμοίως καὶ πᾶν ἄλλο σημεῖον τῆς ΓΔ, πλὴν τοῦ Α, θὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας· ἑπομένως ἡ ΓΔ ἔχουσα ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς περιφερείας εἶναι ἐφαπτομένη ταύτης.



Σχ. 75.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀντιστρόφως· Ἔστω ἡ ΓΔ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας κατὰ τὸ Α. Τὸ τυχὸν σημεῖον Β τῆς ΓΔ θὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας ὡς καὶ πᾶν ἄλλο σημεῖον αὐτῆς· ἑπομένως ΟΒ>ΟΑ, ἤτοι ἡ ΟΑ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας ἀγομένης ἐκ τοῦ Ο εἴς τι σημεῖον τῆς ΓΔ· ἄρα εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν.

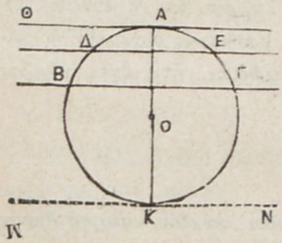
Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου ἕπεται, ὅτι *διὰ παντὸς σημείου περιφερείας εἶναι δυνατὸν ν' ἀχθῇ ἐφαπτομένη ταύτης καὶ μία μόνη.*

Καὶ *πᾶσα χορδὴ παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς διαμέτρου τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς.*

Θεώρημα.

6) 98. *Ἐὰν δύο παράλληλοι τέμνωσι περιφέρειαν κύκλου, τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων τούτων περιεχόμενα τόξα εἶναι ἴσα.*

Ἔστωσαν δύο παράλληλοι ΒΓ καὶ ΔΕ καὶ ἡ ἐφαπτομένη ΘΖ παράλληλος πρὸς ταύτας. Ἡ ἀκτὶς ΟΑ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην· ἑπομένως εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΒΓ καὶ ΔΕ· ἄρα τὸ σημεῖον Α εἶναι μέσον τοῦ τόξου ΒΑΓ ὡς καὶ τοῦ τόξου ΔΑΕ· ἤτοι τόξ. ΒΑ=τόξ. ΑΓ καὶ



Σχ. 76.

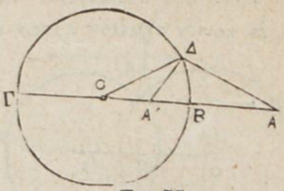
τόξ.ΔΑ=τόξ.ΑΕ. Ἀλλ' ἐὰν ἀπὸ ἴσα ἀφαιρεθῶσιν ἴσα, τὰ ὑπόλοιπα εἶναι ἴσα· ἄρα τόξ. ΒΑ—τόξ. ΔΑ=τόξ. ΑΓ—τόξ. ΑΕ ἢ τόξ. ΒΔ= τόξ. ΕΓ. Ἐὰν θεωρήσωμεν ἐφαπτομένην ΜΝ παράλληλον τῇ ΘΖ, αὕτη θὰ διέρχηται διὰ τοῦ ἑτέρου πέρατος τῆς διαμέτρου ΑΚ τῆς διερχομένης διὰ τοῦ Α· ἑπομένως τὰ μεταξὺ αὐτῶν περιεχόμενα τόξα ΑΒΚ καὶ ΑΓΚ εἶναι ἡμιπεριφέρειαι.

Θεώρημα.

7) 99. *Ἐὰν διὰ τοῦ κέντρου κύκλου καὶ σημείου τινὸς Α ἀχθῇ εὐθεῖα, ἡ ΓΑ, τέμνουσα τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα, ἐκ τῶν σημείων τούτων τὸ μὲν ἓν εἶναι τὸ πλησιέστερον πρὸς τὸ Α, τὸ δὲ ἕτερον τὸ ἀπώτερον ἐξ ὅλων τῶν σημείων τῆς περιφερείας.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω πρῶτον τὸ σημεῖον Α κείμενον ἐκτὸς τῆς περιφερείας. Ἂς φέρωμεν διὰ τοῦ Α καὶ τοῦ κέντρου Ο τὴν εὐθεῖαν ΑΟΓ τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ κείμενα ἑκατέρωθεν τοῦ Ο· λέγω ὅτι ἐξ ὅλων τῶν σημείων τῆς περιφερείας τὸ Β εἶναι τὸ πλεισιέστερον πρὸς τὸ Α, τὸ δὲ Γ τὸ ἀπώτερον.



Σχ. 77.

Ἂς λάβωμεν τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας, τὸ Δ, καὶ ἂς ἑνώσωμεν αὐτὸ μὲ τὸ Α καὶ τὸ Ο· σχηματίζεται οὕτω τὸ τρίγωνον ΟΑΔ, ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν

$$\text{ΑΔ} > \text{ΑΟ} - \text{ΟΔ} \text{ ἢ } \text{ΑΔ} > \text{ΑΟ} - \text{ΟΒ} \text{ ἢ } \text{ΑΔ} > \text{ΒΑ}\cdot$$

$$\text{καὶ } \text{ΔΑ} < \text{ΔΟ} + \text{ΟΑ} \text{ ἢ } \text{ΔΑ} < \text{ΓΟ} + \text{ΟΑ} \text{ ἢ } \text{ΔΑ} < \text{ΓΑ}.$$

Ἐὰν τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας θέλομεν ἔχει ἐκ τοῦ τριγώνου Α΄ΟΔ

$$\text{Α΄Δ} > \text{ΟΔ} - \text{ΟΑ΄} \text{ ἢ } \text{Α΄Δ} > \text{ΟΒ} - \text{ΟΑ΄} \text{ ἢ } \text{Α΄Δ} > \text{Α΄Β}\cdot$$

$$\text{καὶ } \text{Α΄Δ} < \text{Α΄Ο} + \text{ΟΔ} \text{ ἢ } \text{Α΄Δ} < \text{Α΄Ο} + \text{ΟΓ} \text{ ἢ } \text{Α΄Δ} < \text{Α΄Γ}.$$

Καλεῖται *κατακόρυφος ἐπὶ καμπύλην* ἡ εὐθεῖα ἥτις ἄγεται κάθετος ἐπὶ ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης κατὰ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς. ***Ἐν τῷ κύκλῳ πᾶσα κατακόρυφος διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου*** (97). Τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον ἀπόστημα σημείου ἀπὸ τῆς περιφερείας κύκλου συμπίπτουσι μετὰ τῆς ἐκ τοῦ σημείου τούτου κατακορύφου πρὸς τὸν κύκλον, διότι καὶ τὰ ἀποστήματα καὶ ἡ κατακόρυφος διέρχονται διὰ τοῦ δεδομένου σημείου καὶ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. Ἑπομένως ***τὸ ἀπόστημα σημείου Α ἀπὸ περιφερείας εἶναι αὐτὴ ἡ κατακόρυφος ΑΒ.***

Β΄. ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ

Θεώρημα.

4)

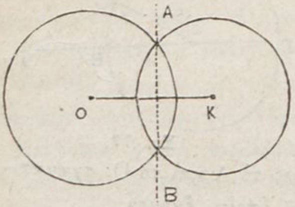
100. ***Ὅταν δύο περιφέρειαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνώνουσα τὰ κέντρα αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν χορδήν, καὶ τέμνει αὐτὴν δίχα. Ἐὰν δύο περιφέρειαι δὲν ταυτίζωνται, δύνανται νὰ ἔχωσι δύο μόνον κοινὰ σημεῖα (95), ὁπότε λέγομεν ὅτι τέμνονται.***

Οὕτως ***ἡ ἐκ τοῦ μέσου τῆς κοινῆς χορδῆς ἀγομένη κάθετος ἐπ' αὐτὴν διέρχεται διὰ τῶν κέντρων ἀμφοτέρων τῶν κύκλων*** (93)· αὕτη

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἄρα συμπίπτει μετὰ τῆς διὰ τῶν δύο κέντρων διερχομένης εὐθείας.

101. Δύο περιφέρειαι λέγομεν ὅτι *ἐφάπτονται ἀλλήλων*, ὅταν εἰς ἓν κοινὸν σημεῖον αὐτῶν ἔχωσι μίαν ἐφαπτομένην κοινήν.



Σχ. 78.

Ἂς θεωρήσωμεν δύο περιφερείας τεμνομένας (Σχ. 78). Ἐὰν ἡ μία μείνῃ ἀκίνητος, ἡ δὲ ἑτέρα στρέφηται περὶ τὸ ἓν τῶν σημείων τῆς συναντήσεως περὶ τὸ Α οὕτως, ὥστε τὸ δεύτερον σημεῖον τῆς τομῆς Β νὰ πλησιάζῃ ἀπεριορίστως πρὸς τὸ Α, ἡ διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β διερχομένη εὐθεῖα καταντᾷ κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων (96) κατὰ τὸ σημεῖον Α. Τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς τῆς ἐφαπτομένης ταύτης θὰ εἶναι ἀναγκαίως σημεῖον τῆς εὐθείας, ἥτις ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν δύο κύκλων, διότι ἀμφότεραι θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην κατὰ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς (15).

102. Δύο περιφέρειαι πέντε μόνον θέσεις δύνανται νὰ λάβωσι πρὸς ἀλλήλους.

α΄. Νὰ κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων οὐδὲν ἔχουσαι κοινὸν σημεῖον.

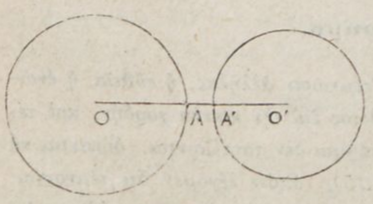
β΄. Νὰ ἐφάπτωνται ἀλλήλων καὶ ἡ μία νὰ κεῖται ὅλη ἐκτὸς τῆς ἄλλης.

γ΄. Νὰ τέμνωσιν ἀλλήλας.

δ΄. Νὰ ἐφάπτωνται ἀλλήλων καὶ ἡ μία νὰ κεῖται ὅλη ἐντὸς τῆς ἑτέρας.

ε΄. Ἡ μία νὰ κεῖται ἐντὸς τῆς ἄλλης οὐδὲν ἔχουσαι κοινὸν σημεῖον.

α΄. Ὅταν δύο περιφέρειαι κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων, τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων. Τῷ ὄντι θέλομεν ἔχει. (Σχ. 79).



Σχ. 79.

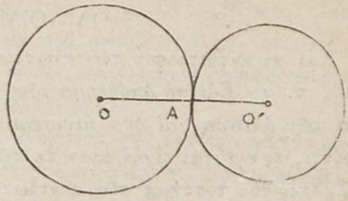
$$OO' = OA + AA' + O'A'.$$

ἐπομένως $OO' < OA + O'A'$.

β΄. *Ὅταν δύο περιφέρειαι ἐκτὸς ἀλλήλων ἐφάπτωνται (Σχ. 80), τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τῳόντι τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς τῶν δύο περιφερειῶν θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνωνούσης τὰ κέντρα τῶν δύο κύκλων (101). ἑπομένως θέλομεν ἔχει $OO' = OA + AO'$.



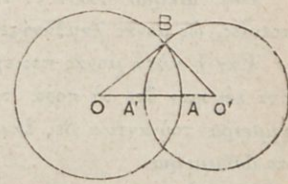
Σχ. 80.

γ'. *Ὅταν δύο περιφέρειαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων εἶναι μικρότερον μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, μεγαλείτερον δὲ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.* (Σχ. 81). Τῳόντι ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΟ'Β λαμβάνομεν

$OO' < OB + 'OB'$ ἢ $OO' < OA + O'A'$

καὶ $OO' > OB - O'B$

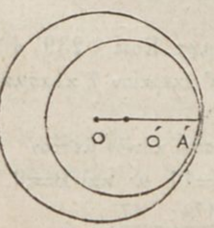
ἢ $OO' > OA - O'A'$.



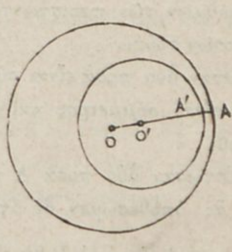
Σχ. 81.

δ'. *Ὅταν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, καὶ ἡ μία κεῖται ὅλη ἐντὸς τῆς ἑτέρας, τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν ἀκτίνων* (Σχ. 82).

Τῳόντι τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς τῶν δύο περιφερειῶν θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διὰ τῶν κέντρων τῶν κύκλων διερχομένης εὐθείας· (101)· ἑπομένως θέλομεν ἔχει προφανῶς $OO' = OA - O'A$.



Σχ. 82.



Σχ. 83

ε'. *Ὅταν ἐκ δύο περιφερειῶν ἡ μία κεῖται ἐντὸς τῆς ἄλλης, καὶ οὐδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον, τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων εἶναι μικρότερον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.*

Τῳόντι θέλομεν ἔχει

$AO > OA'$· ἑπομένως καὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\text{ΟΑ}-\text{Ο'Α'}>\text{ΟΑ'}-\text{Ο'Α'}$$
$$\text{ἢ ΟΑ}-\text{Ο'Α'}>\text{ΟΟ'}.$$

Καὶ αἱ ἀντίστροφοι τῶν ἀνωτέρω πέντε προτάσεων ἀληθεύουσι (40). π. χ. *Ἐὰν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων, αἱ δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐκτός*. Τῷόντι, ἐὰν αὗται εἶχον μίαν ἐκ τῶν ἄλλων τεσσάρων θέσεων πρὸς ἀλλήλας, τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων θὰ ἦτο μεγαλείτερον ἢ μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων.

Γ'. ΜΕΤΡΟΝ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

103. *Μετρῶ* ποσόν τι σημαίνει εὑρίσκω ποσάκις ἕτερον ποσὸν ὁμοειδές, ὡς μονὰς λαμβανόμενον, περιέχεται ἐν τῷ πρώτῳ.

Ἐὰν ἡ αὐτὴ μονὰς περιέχηται ἀκριβῶς εἰς δύο ὁμοειδῆ ποσά, τότε λέγομεν ὅτι τὰ ποσὰ ταῦτα ἔχουσι κοινὸν μέτρον καὶ εἶναι *σύμμετρα*· τοὐναντίον δέ, ἐὰν οὐδὲν ἔχωσι κοινὸν μέτρον, καλοῦνται *ἀσύμμετρα*.

Ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν τὸ μετρηθὲν ποσὸν καλεῖται *τιμὴ* τοῦ ποσοῦ ὡς πρὸς τὴν ληφθεῖσαν μονάδα.

Ὁ *Λόγος* δύο ποσῶν ὁμοειδῶν εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων τὸ πρῶτον, μετρηθέν, ὅταν τὸ δεύτερον ληφθῇ ὡς μονάς.

Φανερὸν ὅτι ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν ποσόν τι μετρηθὲν εἶναι ὁ λόγος τοῦ ποσοῦ τούτου πρὸς τὴν ληφθεῖσαν μονάδα· ὁ δὲ λόγος τῶν ἀριθμῶν τῶν παριστώντων δύο ὁμοειδῆ ποσὰ εἶναι καὶ λόγος τῶν ποσῶν τούτων.

Ὅταν δύο ποσὰ εἶναι *σύμμετρα* (Ἀριθμητ. Κορὲ § 239) ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι *σύμμετρος* καὶ παρίσταται δι' ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἔστωσαν δύο ποσὰ Α καὶ Β, καὶ ἔστω κοινὸν μέτρον αὐτῶν τὸ μ· ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι ἔχομεν $A=17$ μ· καὶ $B=9$. μ. ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Β θὰ εἶναι $\frac{A}{B}=\frac{17\mu}{9\mu}=\frac{17}{9}$.

Ὅταν δὲ δύο ποσὰ εἶναι *ἀσύμμετρα* (ἤτοι οὐδὲν ἔχωσι κοινὸν μέτρον), ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι ἀσύμμετρος, καὶ δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ οὔτε δι' ἀκεραίου οὔτε διὰ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν αὐτὸν μὲ ὅσην θέλομεν προσέγγισιν διὰ δεκαδικοῦ ἀπεράντου μὴ περιοδικοῦ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

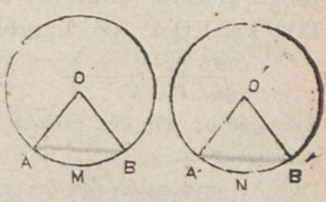
Δύο ἀσύμμετροι λόγοι εἶναι ἴσοι, ὅταν δι' οἱονδήποτε βαθμὸν προσεγγίσεως παρίστανται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· καὶ ὅταν ἡ διαφορὰ αὐτῶν τείνῃ νὰ γίνῃ μηδέν, καθ' ὅσον ὁ βαθμὸς προσεγγίσεως γίνεται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον μείζων.

Καλεῖται **ἐπίκεντρος γωνία** ἡ ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, πλευρὰς δὲ δύο ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Θεώρημα.

9) 104. *Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων*· καὶ ἀντιστρόφως.

Ἔστωσαν δύο ἴσοι κύκλοι (Σχ. 84) καὶ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΟΒ καὶ Α΄Ο΄Β΄ ἴσαι· λέγω ὅτι τὰ τόξα ΑΜΒ καὶ Α΄ΝΒ΄ εἶναι ἴσα. Διότι, ἂν φέρωμεν τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ Α΄Β΄, σχηματίζονται δύο τρίγωνα ΑΟΒ καὶ Α΄Ο΄Β΄ ἴσα (§ 30 β΄.) ἐπομένως καὶ αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ Α΄Β΄ θὰ εἶναι ἴσαι, ἄρα καὶ τὰ τόξα ΑΜΒ καὶ Α΄ΝΒ΄. (92).

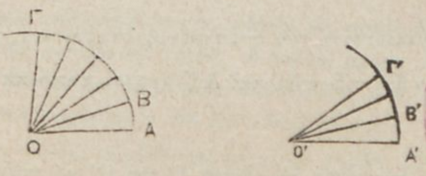


Σχ. 84.

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι τὰ τόξα ΑΜΒ καὶ Α΄ΝΑ΄ εἶναι ἴσα, τότε καὶ αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ Α΄Β΄ θὰ εἶναι ἴσαι (90), ἐπομένως καὶ τὰ τρίγωνα ΑΟΒ καὶ Α΄Ο΄Β΄ εἶναι ἴσα· ἄρα καὶ ἡ γωνία ΑΟΒ=Α΄Ο΄Β΄.

Θεώρημα.

10) 105. *Ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε γωνιῶν ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῶν περιεχομένων τόξων, ἅτινα γράφονται μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτήν.*



Σχ. 85.

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΗΣ ΒΟΥΛΗΣ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΑΟΓ καὶ Α'Ο'Γ' (Σχ. 85). Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα ἂς γράψωμεν τὰ τόξα ΑΓ καὶ Α'Γ', καὶ ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι τὰ τόξα ταῦτα ἔχουσι κοινὸν μέτρον, περιεχόμενον 5ις μὲν ἐν τῷ πρώτῳ ΑΓ τρὶς δὲ ἐν τῷ Α'Γ', ὁπότε θέλομεν ἔχει $\frac{\text{τόξ. ΑΓ}}{\text{τόξ. Α'Γ'}} = \frac{5}{3}$

Ἂς φέρωμεν ἔπειτα ἐκ τῶν κέντρων Ο καὶ Ο' πρὸς πάντα τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῶν τόξων ἀκτῖνας, ὁπότε ἡ μὲν γωνία ΓΟΑ διαιρεῖται εἰς 5 γωνίας ἴσας τῇ ΒΟΑ, ἡ δὲ Γ'Ο'Α' εἰς τρεῖς γωνίας ἴσας τῇ Β'Ο'Α'. Πᾶσαι δὲ αὗται αἱ σχηματισθεῖσαι γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας ὡς βαίνουσαι ἐπὶ ἴσων τόξων (104)· ἐπομένως μία ἐξ αὐτῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κοινὸν μέτρον τῶν γωνιῶν ΓΟΑ καὶ Γ'Ο'Α'· καὶ θέλομεν ἔχει

$$\frac{\text{γων. ΓΟΑ}}{\text{γων. Γ'Ο'Α'}} = \frac{5}{3}$$

ἄρα ὁ λόγος τῶν δύο γωνιῶν ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν τόξων, εἰς ἃ βαίνουσιν.

Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι τὰ δύο τόξα ΑΓ καὶ Α'Γ' οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν μέτρον. Ἂς διαιρέσωμεν τὸ τόξον Α'Γ' εἰς ὡρισμένον ἀριθμὸν μερῶν ἴσων, ἔστω μ, καὶ ἂς παραστήσωμεν ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων δι' α. θὰ ἔχωμεν Α'Γ'=μα. Ἂς μετρήσωμεν τὸ τόξον ΑΓ διὰ τῆς μονάδος α, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ληφθεῖσα μονὰς α περιέχεται ἐν αὐτῷ π φοράς, καὶ μένει ὑπόλοιπόν τι ρ μικρότερον τοῦ α καὶ ἀναγκαίως ἀσύμμετρον πρὸς τὸ α (διότι ἐτέθη ὅτι τὰ δύο τόξα οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν μέτρον). Θέλομεν ἔχει λοιπὸν ΑΓ=πα+ρ. ἐπομένως

$$\frac{\text{τόξ. ΑΓ}}{\text{τόξ. Α'Γ'}} = \frac{πα+ρ}{μα} = \frac{πα}{μα} + \frac{ρ}{μα} = \frac{π}{μ} + \frac{ρ}{μα}$$

ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{ρ}{α}$ εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος 1, τὸ κλάσμα $\frac{ρ}{μα}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{μ}$ ἐπομένως λαμβάνοντες τὸν ἀριθμὸν $\frac{π}{μ}$ ὡς λόγον τῶν δύο τόξων ΑΓ καὶ Α'Γ' ἔχομεν αὐτὸν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{μ}$

Ἐὰν δὲ ἑνώσωμεν τὰ κέντρα Ο καὶ Ο' μὲ πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἀνωτέρω διαιρέσεως τῶν δύο τόξων, ἡ μὲν γωνία Α'Ο'Γ' θὰ δι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

αιρεθῇ εἰς μ γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας (καὶ ἂς παρασταθῇ ἡ μία ἐξ αὐτῶν διὰ θ)· ἡ δὲ γωνία ΑΟΓ θὰ διαιρεθῇ εἰς π γωνίας ἁπάσας ἴσας τῇ θ μετὰ ὑπολοίπου μιᾶς γωνίας θ' μικροτέρας τῆς θ. ἑπομένως θέλομεν ἔχει.

$$\text{γων. } A'O'\Gamma' = \mu\theta \text{ καὶ γων. } AO\Gamma = \pi\theta + \theta' \text{ ἄρα}$$

$$\frac{\text{γων. } AO\Gamma}{\text{γων} A'O'\Gamma'} = \frac{\pi\theta+\theta'}{\mu\theta} = \frac{\pi\theta}{\mu\theta.} + \frac{\theta'}{\mu\theta} = \frac{\pi}{\mu} + \frac{\theta'}{\mu\theta}$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{\theta'}{\theta}$ εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος 1, τὸ κλάσμα $\frac{\theta'}{\mu\theta}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{\iota}{\mu}$ καὶ ἑπομένως τὸ κλάσμα $\frac{\pi}{\mu}$ παριστᾷ τὸν λόγον τῶν δύο γωνιῶν ΑΟΓ καὶ Α'Ο'Γ' κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\mu}$

Ἐὰν δὲ λάβωμεν τοὺς λόγους $\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$ καὶ $\frac{AO\Gamma}{A'O'\Gamma'}$ μὲ προσέγγισιν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον μεγαλειτέραν, (τοῦτο δὲ γίνεται καθ' ὅσον ὁ μ, αὐθαιρέτως λαμβανόμενος, γίνεται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον μεγαλείτερος), οὗτοι οἱ λόγοι τείνουσι νὰ γίνωσιν ἴσοι, διαφέροντες ἀλλήλων κατ' ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ $\frac{1}{\mu}$· ἑπομένως, καὶ ὅταν τὰ δύο τόξα εἶναι ἀσύμμετρα, τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἀληθεύει.

Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι γενικὴ ἐπὶ πάντων τῶν ἀναλόγων ποσῶν εἴτε συμμέτρων εἴτε ἀσυμμέτρων.

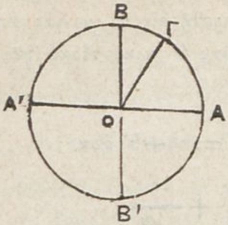
Θεώρημα

10) 1 106. *Ἐὰν πρὸς μέτρησιν γωνίας ληφθῇ ὡς μονὰς ἡ γωνία ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν μονάδα τοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον ἄγεται μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε, ἥ τε γωνία καὶ τὸ τόξον μετρούμενα παρίστανται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Πρὸς μέτρησιν γωνίας λαμβάνεται ὡς μονὰς ἡ ὀρθὴ γωνία (16). Ἂς φέρωμεν διὰ τοῦ κέντρου Ο περιφερείας δύο καθέτους ἐπ,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀλλήλας διαμέτρους ΑΑ΄ καὶ ΒΒ΄(Σχ.86) σχηματίζονται οὕτω τέσσαρες ἐπίκεντροι γωνίαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· ἐπομένως καὶ τὰ πρὸς ταύτας ἀντιστοιχοῦντα τόξα εἶναι ἴσα.



Σχ. 68.

Εἰς ἑκάστην λοιπὸν ὀρθὴν γωνίαν ἀντιστοιχεῖ τόξον τὸ ἓν τέταρτον τῆς περιφερείας, καὶ τὸ τόξον τοῦτο λαμβάνομεν ὡς μονάδα πρὸς μέτρησιν οἱουδήποτε τόξου.

Συγκρίνοντες δὲ μίαν οἱανδήποτε γωνίαν, ἔστω τὴν ΓΟΑ, πρὸς τὴν ὀρθήν, θέλομεν ἔχει (105) $\frac{ΑΟΓ}{ΑΟΒ}=\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$ ἢ $\frac{ΑΟΓ}{1 \text{ ὀρθ.}}=\frac{ΑΓ}{1 \text{ τεταρτ.}}$

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος παριστᾷ τὸ μέτρον τῆς γωνίας ΑΟΓ τὸ δὲ δεύτερον μέλος παριστᾷ τὸ μέτρον τοῦ τόξου ΑΓ· ἐπομένως ***ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς παριστᾷ τὴν γωνίαν καὶ τὸ εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦν τόξον***· ἤτοι τὸ μέτρον τόξου τινὸς εἶναι μέτρον καὶ τῆς γωνίας, ἥτις ὑποτείνει τὸ τόξον τοῦτο.

10) 107. Πρὸς ἁπλοποίησιν τῆς παραστάσεως τῶν τόξων διῃρέθη ἡ περιφέρεια εἰς 360 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται *μοῖραι*· ἑκάστη μοῖρα διῃρέθη εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται *πρῶτα λεπτά*, καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται *δεύτερα λεπτά*· τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας ἔχει 90 μοίρας ἢ 5400 πρῶτα λεπτὰ ἢ 324000 δεύτερα λεπτά. Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ ἐκφράσωμεν τόξον ἀποτελούμενον ἐπὶ παραδείγματι ἀπὸ 27 μοίρας 48 πρῶτα λεπτὰ καὶ 18 δεύτερα, γράφομεν αὐτὸ οὕτω $27^0\ 48'\ 18''$.

Μία γωνία $27^0\ 48'\ 18''$ εἶναι ἡ γωνία, ἥτις ὑποτείνει τόξον $27^0\ 48'\ 18''$ ἐπὶ περιφερείας, γραφομένης μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε. Ἵνα δὲ συγκρίνωμεν τὴν γωνίαν ταύτην πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν συγκρίνομεν τὸ τόξον 27^0 $48'\ 18''$ πρὸς 90^0· ὁ δὲ λόγος τῶν τόξων τούτων εἶναι τὸ μέτρον τῆς θεωρηθείσης γωνίας· εἶναι δὲ οὗτος $\frac{27^0\ 48'\ 18''}{90^0}=\frac{100098}{324000}$.

Καλεῖται γωνία ***ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον*** ἡ γωνία, τῆς ὁποίας ἡ μὲν κορυφὴ εἶναι ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραὶ εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου.

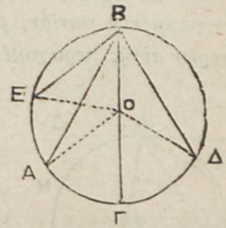
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θεώρημα.

//) 108. *Ἡ ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου, ἥτις ὑποτείνει τὸ αὐτὸ τόξον· ἤτοι ἡ ἐγγεγραμμένη ἐν κύκλῳ γωνία ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς.*

Ἐνταῦθα διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις (Σχ. 87).

α'. Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου δύναται νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας. Ἔστω π. χ. ἡ γωνία ΑΒΓ. ἂν ἑνώσωμεν τὸ Ο μὲ τὸ Α, τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι ἰσοσκελές, καὶ ἡ γωνία Α εἶναι ἴση τῇ ΟΒΑ· ἡ δὲ ἐκτὸς γωνία ΑΟΓ οὖσα ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν θὰ εἶναι διπλασία τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν, τῆς ΑΒΓ· ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΓ ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον, τὸ ὁποῖον καὶ τὸ τόξον ΑΓ, ἔπεται ὅτι καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ ὡς ἥμισυ τῆς ΑΟΓ θὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ μέτρον, τὸ ὁποῖον καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΓ (105)·



Σχ. 87.

β'. Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου δύναται νὰ περιέχηται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας. Ἔστω τοιαύτη ἡ γωνία ΑΒΔ· ἐὰν διὰ τῆς κορυφῆς Β φέρωμεν τὴν διάμετρον ΒΟΓ, ἡ γωνία ΑΒΔ χωρίζεται εἰς δύο γωνίας, ἑκατέρα τῶν ὁποίων ἔχει ὡς μέτρον τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου τόξου· ἄρα ἡ ὅλη γωνία ΑΒΓ οὖσα τὸ ἥμισυ τῆς ΑΟΔ, θὰ ἔχῃ ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλου τόξου ΑΓΔ·

γ'. Τὸ κέντρον δύναται νὰ κεῖται ἐκτὸς τῶν πλευρῶν τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας, ὅπως εἶναι ἡ γωνία ΑΒΕ· ἡ δὲ γωνία ΕΒΑ εἶναι διαφορὰ τῶν γωνιῶν ΕΒΓ καὶ ΑΒΓ, ἤτοι ΕΒΑ=ΕΒΓ—ΑΒΓ, ὅπως ἡ ΕΟΑ εἶναι διαφορὰ τῶν γωνιῶν ΕΟΓ καὶ ΑΟΓ, ἤτοι

$ΕΟΑ=ΕΟΓ-ΑΟΓ$· ἀλλὰ $ΕΒΓ=\frac{ΕΟΓ}{2}$ καὶ $ΑΒΓ=\frac{ΑΟΓ}{2}$, ἑπομένως

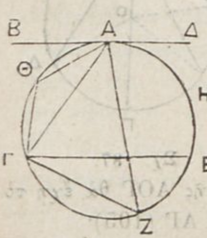
$$ΕΒΑ=\frac{ΕΟΓ}{2}-\frac{ΑΟΓ}{2} \text{ ἢ } ΕΒΑ=\frac{ΕΟΓ-ΑΒΓ}{2}=\frac{ΕΟΑ}{2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πορίσματα.

109. α'. *Πᾶσαι αἱ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ἢ ἐν ἴσοις τόξοις τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἴσων κύκλων βαίνουσαι ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· καὶ ἀντιστρόφως·*

β'. *Ἡ ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης σχηματιζομένη γωνία, ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς, ἰσοῦται μὲ ἐγγεγραμμένην γωνίαν, βαίνουσαν ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου.*



Σχ. 88.

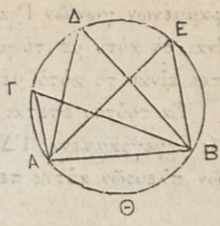
Ἔστω ἡ γωνία ΒΑΓ (Σχ. 88) σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΒΔ καὶ τῆς χορδῆς ΓΑ καὶ ἡ γωνία ΓΖΑ ἐγγεγραμμένη, βαίνουσα ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΘΑ. Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Γ φέρωμεν τὴν ΓΕ παράλληλον τῇ ΒΔ (98), αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΑΓΕ εἶναι ἴσαι ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΒΔ καὶ ΓΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ· ἀλλὰ τὰ τόξα ΓΘΑ καὶ ΑΗΕ εἶναι ἴσα (98)· ἐπομένως ἡ γωνία ΑΓΕ ἰσοῦται τῇ ἐγγεγραμμένῃ ΓΖΑ· ἄρα καὶ ΒΑΓ=ΓΖΑ.

Ὁμοίως ἡ γωνία ΔΑΓ ἰσοῦται τῇ ΑΘΓ· διότι, ἀφοῦ τὰ τόξα τῶν ἐγγεγραμμένων γωνιῶν ΓΘΑ καὶ ΓΖΑ ἀποτελοῦσιν ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν, ἡ γωνία ΓΘΑ θὰ εἶναι παραπλήρωμα τῆς γωνίας ΓΖΑ, ὅπως καὶ ἡ γωνία ΓΑΔ εἶναι παραπλήρωμα τῆς γωνίας ΒΑΓ· ἀλλὰ τὰ παραπληρώματα ἴσων γωνιῶν εἶναι γωνίαι ἴσαι· ἄρα ἡ ΓΘΑ=ΓΑΔ.

110. Καλεῖται *κυκλικὸν τμῆμα* τὸ μέρος τοῦ κύκλου τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ χορδῆς καὶ τοῦ τόξου αὐτῆς. Πᾶσα δὲ χορδὴ χωρίζει τὸν κύκλον εἰς δύο τμήματα. *Ἐγγεγραμμένη* δὲ ἐν τμήματι λέγεται ἡ γωνία, τῆς ὁποίας ἡ μὲν κορυφὴ εἶναι ἐπὶ τοῦ τόξου, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς περατοῦνται εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς.

Πᾶσαι αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

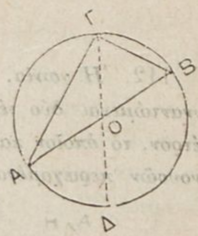


Σχ. 89.

Τῳόντι ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΑΓΒ, ΑΔΒ, ΑΕΒ κ.τ.λ. εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου γωνίας, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΘΒ· ἑπομένως πᾶσαι αὗται εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐὰν τὸ τμῆμα εἶναι ἡμικύκλιον, πᾶσα ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι ὀρθή.

Ἔστω ἡ γωνία ΑΓΒ ἐγγεγραμμένη ἐν ἡμικυκλίῳ· λέγω ὅτι αὕτη εἶναι ὀρθή.



Σχ. 90.

Διότι, ἐὰν ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΓΟΔ, θέλομεν ἔχει $\text{ΑΒΔ}=\frac{\text{ΑΟΔ}}{2}$ καὶ $\text{ΔΓΒ}=\frac{\text{ΔΟΒ}}{2}$·

ἑπομένως $\text{ΑΓΔ}+\text{ΔΓΒ}=\frac{\text{ΑΟΔ}}{2}+\frac{\text{ΔΟΒ}}{2}$

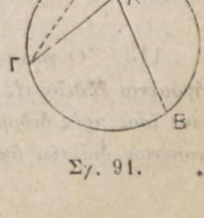
ἢ $\text{ΑΓΒ}=\frac{\text{ΑΟΔ}+\text{ΔΟΒ}}{2}=\frac{2\ \text{ὀρθ.}}{2}=1$ ὀρθή.

Ἡ ἐν τμήματι μικροτέρῳ ἡμικυκλίου ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ἐν μεγαλειτέρῳ ἡμικυκλίου εἶναι ὀξεῖα. Διότι ἡ μὲν ἐν τῷ μικροτέρῳ τμήματι ἐγγεγραμμένη, βαίνουσα ἐπὶ τόξου μείζονος ἡμιπεριφερείας, εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ ἡμίσεος δύο ὀρθῶν γωνιῶν, ἑπομένως ἀμβλεῖα· ἡ δὲ ἐν μεγαλειτέρῳ τμήματι ἐγγεγραμμένη, βαίνουσα ἐπὶ τόξου μικροτέρου ἡμιπεριφερείας, εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῶν δύο ὀρθῶν γωνιῶν, ἑπομένως ὀξεῖα.

Τμῆμά τι λέγομεν ὅτι *δέχεται δεδομένην γωνίαν*, ὅταν πᾶσα ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένη γωνία ἰσοῦται τῇ δεδομένῃ.

(4) 111. *Ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ δύο χορδῶν τεμνομένων ἐντὸς τοῦ κύκλου ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων τῶν μεταξὺ τῶν ἄκρων τῶν χορδῶν τούτων περιεχομένων.*

Ἔστω ἡ γωνία ΒΑΓ, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ περιέχουσι τὸ τόξον ΓΒ, αἱ δὲ προσεκβολαὶ αὐτῶν τὸ τόξον ΔΕ· λέγω ὅτι ἡ γωνία αὕτη ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον, τὸ ὁποῖον καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων ΓΒ καὶ ΔΕ. Διότι ἡ γωνία ΔΑΕ=ΓΑΒ (22), οὖσα δὲ ἐκτὸς γωνία τοῦ τριγώνου ΓΑΔ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἐγγε-



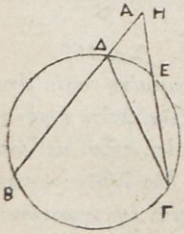
Σχ. 91.

γραμμένων γωνιῶν Γ καὶ Δ. Ἐπομένως τὸ μέτρον τῆς γωνίας ΓΑΒ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ μέτρον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν Γ καὶ Δ, ὅπερ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τῶν τόξων αὐτῶν ΓΒ καὶ ΔΕ.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ τοιαύτη γωνία ΓΑΒ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ἐγγεγραμμένης ΓΔΒ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΒ τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου.

Θεώρημα.

14) 112. *Ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουσιν ἐκτὸς περιφερείας συναντώμεναι δύο τέμνουσαι ταύτης τῆς περιφερείας, ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον, τὸ ὁποῖον καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τόξων τῶν μεταξὺ τῶν δύο τεμνουσῶν περιεχομένων.*



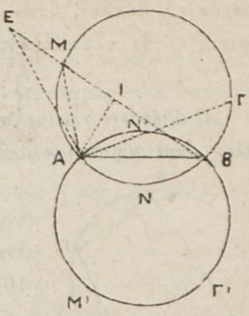
Σχ. 92.

Ἔστω ἡ γωνία ΒΑΓ, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ περιέχουσι τὰ τόξα ΒΓ καὶ ΔΕ· λέγω ὅτι ἡ γωνία Α ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον, τὸ ὁποῖον καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τόξων τούτων. Ἂς φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ· ἡ γωνία ΒΔΓ ὡς ἐκτὸς γωνία τοῦ τριγώνου ΔΑΓ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν γωνιῶν Α καὶ Γ· ἐπομένως ἡ γωνία ΒΑΓ ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν γωνιῶν ΒΔΓ καὶ ΔΓΑ ἐγγεγραμμένων· ἄρα ἡ γωνία ΒΑΓ ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον, τὸ ὁποῖον καὶ ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν ΒΔΓ καὶ ΔΓΑ, ὡς καὶ τῶν τόξων ΒΓ καὶ ΔΕ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ τοιαύτη γωνία Α εἶναι μικροτέρα τῆς ἐγγεγραμμένης ΒΔΓ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓ τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς Α περιεχομένου.

Πόρισμα.

113. *Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τῶν ὁποίων αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἰς τὰ ἄκρα δεδομένης εὐθείας ΑΒ σχηματίζουσι γωνίας ἴσας πρὸς δεδομένην γωνίαν Θ, εἶναι δύο τόξα περιφερειῶν διερχομένων διὰ τῶν ἄκρων τῆς δεδομένης εὐθείας.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Σχ. 93.

Ἔστω ἡ δεδομένη εὐθεῖα ΑΒ καὶ σημεῖόν τι Γ τοῦ τόπου κείμενον ὑπεράνω τῆς ΑΒ· ἡ γωνία ΑΓΒ θὰ εἶναι ἴση τῇ δεδομένῃ γωνίᾳ Θ. Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη περιφέρειαν κύκλου διερχομένην διὰ τῶν σημείων Α, Β, καὶ Γ· πᾶν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας ταύτης ἀνήκει εἰς τὸν προτιθέμενον γεωμετρικὸν τόπον, διότι ἡ γωνία ΑΜΒ εἶναι ἴση τῇ ΑΓΒ, καθόσον ἀμφότεραι εἶναι ἐγγεγραμμέναι ἐν τῷ αὐτῷ κυκλικῷ τμήματι (110). Πᾶν δὲ σημεῖον κείμενον ἐκτός, ὡς τὸ Ε, ἢ ἐντὸς τῆς περιφερείας ταύτης, ὡς τὸ Ι δὲν δύναται ν' ἀνήκῃ εἰς τὸν προκείμενον γεωμ. τόπον· διότι ἡ γωνία ΑΕΒ εἶναι μικροτέρα (112) καὶ ἡ γωνία ΑΙΒ εἶναι μεγαλειτέρα (111) τῆς γωνίας ΑΓΒ· ἐπομένως τὸ τόξον ΑΜΓΒ παριστᾷ ὑπεράνω τῆς ΑΒ τὸν ζητούμενον γεωμετρικὸν τόπον.

Ἐὰν δὲ τὸ σχῆμα περιστρέψωμεν περὶ τὴν ΑΒ καὶ τὸ ἐπιθέσωμεν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς ΑΒ, φανερὸν ὅτι θὰ ἔχωμεν ἕτερον τόξον, τὸ ΑΜ'Γ'Β, ἴσον πρὸς τὸ πρῶτον τόξον καὶ παριστῶν τὸν αὐτὸν γεωμετρικὸν τόπον.

Ἐν γένει δέ· *ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τῶν ὁποίων αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι πρὸς τὰ ἄκρα δεδομένης εὐθείας ΑΒ σχηματίζουσι γωνίας ἴσας, εἶναι δύο τόξα κυκλικὰ ἴσα πρὸς ἄλληλα, συμμετρικὰ* (1 *ὡς πρὸς τὴν ΑΒ καὶ διερχόμενα διὰ τῶν ἄκρων τῆς ΑΒ.*

(1) Δύο σημεῖα λέγονται **συμμετρικὰ** ὡς πρὸς εὐθεῖάν τινα, ὅταν ἡ εὐθεῖα αὐτὴ τέμνῃ δίχα καὶ καθέτως τὴν εὐθεῖαν, ἥτις ἑνώνει τὰ δύο ταῦτα σημεῖα. Δύο δὲ σχήματα λέγονται **συμμετρικὰ ὡς πρὸς εὐθεῖαν**, ὅταν ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἑνὸς σχήματος ἔχῃ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἄλλου σχήματος.

Τὰ ὑπολειπόμενα τόξα ΑΝΒ καὶ ΑΝ'Β εἶναι ὡσαύτως γεωμετρικὸς τόπος σημείων, ἀφ' ὧν αἱ ἀγόμεναι εἰς τὰ ἄκρα τῆς ΑΒ εὐθεῖαι σχηματίζουσι γωνίας ἴσας πρὸς ἄλλην τινὰ γωνίαν. Ἐὰν ὅμως ἡ δεδομένη γωνία εἶναι ὀρθή, τὰ δύο τόξα ΑΜΓΒ καὶ ΑΜ'Γ'Β θὰ εἶναι ἡμιπεριφέρειαι, ἔχουσαι διάμετρον τὴν ΑΒ (110)· ἐπομένως ὁ γεωμετρ. τόπος τῶν σημείων θὰ εἶναι μία περιφέρεια γραφομένη μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ.

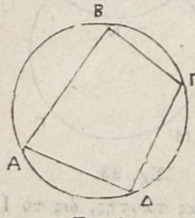
15) 114. Τετράπλευρον καὶ ἐν γένει πολύγωνον λέγεται *ἐγγεγραμ-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μένον εἰς κύκλον, ὅταν αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου.

Θεώρημα.

Αἱ ἀπέναντι γωνίαι παντὸς τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον εἶναι παραπληρωματικαί



Σχ. 94.

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἡ γωνία Α ὡς ἐγγεγραμμένη ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΓΔ (108)· καὶ ἡ γωνία Γ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΑΔ· ἐπομένως αἱ δύο γωνίαι Α καὶ Γ ἀποτελοῦσιν ἄθροισμα μετρούμενον ὑπὸ τοῦ ἡμίσεος τῆς περιφερείας· ἄρα θὰ ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς. Καὶ ἡ ἀντίστροφος τῆς προτάσεως ταύτης ἀληθεύει, ἤτοι· *Τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.*

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ γωνίαι Α καὶ Γ εἶναι παραπληρωματικαί· λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν σημείων Δ Α καὶ Β διερχομένη περιφέρεια θὰ διέρχηται καὶ διὰ τοῦ Γ· διότι, ἂν συνέβαινε τοὐναντίον, ἡ γωνία Γ θὰ ἦτο μεγαλειτέρα ἢ μικροτέρα τῆς ἐγγεγραμμένης τῆς βαινούσης ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΑΔ (111, 112), καὶ ἐπομένως δὲν θὰ ἦτο παραπλήρωμα τῆς Α· ὅπερ ψευδὲς ὡς ἐναντίον τῇ ὑποθέσει.

Δ'. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΛΥΟΜΕΝΑ ΔΙΑ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΥΣΩΝ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ.

115. *Γραφικὴ λύσις* προβλήματος γεωμετρικοῦ σημαίνει τὴν κατασκευὴν ὡρισμένων σχημάτων πληρούντων ὡρισμένας συνθήκας. Τὸ πλῆρες τῆς τοιαύτης λύσεως ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ πλήρους τῆς γεωμετρικῆς κατασκευῆς. Ἐνταῦθα θέλομεν περιορισθῆ εἰς τὰς γεωμετρικὰς κατασκευὰς σχημάτων, ἅτινα περιέχουσι μόνον εὐθείας, τὰς ὁποίας γράφομεν διὰ τοῦ κανόνος, καὶ περιφερείας, τὰς ὁποίας γράφομεν διὰ τοῦ διαβήτου.

Ὑποτιθεμένου ὅτι ἤδη εἶναι γνωστὴ ἡ χρῆσις τῶν ἀπαιτουμένων ὀργάνων, παρατηροῦμεν μόνον ὅτι δέον ν' ἀποφεύγωμεν τὸν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

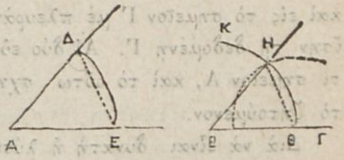
προσδιορισμὸν τῆς θέσεως σημείου διὰ τῆς τομῆς εὐθειῶν σχηματιζουσῶν ὑπερβαλλόντως ὀξεῖαν γωνίαν, καθότι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ χαρασσόμεναι γραμμαὶ ἕνεκα τοῦ πάχους αὐτῶν φαίνονται συμπίπτουσαι εἰς ἔκτασίν τινα κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον μεγάλην, καὶ τοῦτο παρέχει δισταγμόν τινα περὶ τῆς ἀκριβοῦς θέσεως τοῦ ζητουμένου σημείου.

Τὰ ἁπλούστερα τῶν ζητημάτων, περὶ τῶν ὁποίων θὰ πραγματευθῶμεν, παρέχουσιν ἡμῖν τὰ μέσα διὰ τὴν γραφικὴν λύσιν πλείστων ἐκ τῶν Γεωμετρικῶν προβλημάτων.)

Πρόβλημα

16) 116. *Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση τῇ δεδομένῃ Α.*

Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Α καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε γράφομεν τόξον, τέμνον τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας Α κατὰ τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Ἂς χαράξωμεν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, καὶ μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην τῇ ΑΔ ἂς γράψωμεν τόξον, τὸ ΘΚ· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Θ καὶ μὲ



Σχ. 95.

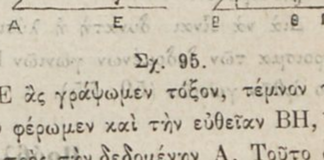
ἀκτῖνα ἴσην τῇ χορδῇ τοῦ τόξου ΔΕ ἂς γράψωμεν τόξον, τέμνον τὸ τόξον ΘΚ κατὰ τὸ σημεῖον Η· ἐὰν φέρωμεν καὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΗ, ἡ σχηματιζομένη γωνία Β εἶναι ἴση πρὸς τὴν δεδομένην Α. Τοῦτο δὲ δεικνύεται ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τόξων ΔΕ καὶ ΗΘ (104).

Ἡ ἀνωτέρω γεωμετρικὴ κατασκευὴ ἄγει ἡμᾶς εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τὴν τρίτην γωνίαν τριγώνου, ὅταν εἶναι δεδομέναι αἱ δύο ἄλλαι. (59).

Πρόβλημα.

17) 117. *Δεδομένων τῶν δύο πλευρῶν α καὶ β τριγώνου τινὸς καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας Γ, νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.*

Κατασκευάζομεν (116) γωνίαν Γ' ἴσην τῇ Γ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ταύτης Γ'Α ἴσην τῇ β καὶ Γ'Β ἴσην τῇ α, καὶ φέρομεν τὴν ΑΒ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ' εἶναι τὸ ζητούμενον.

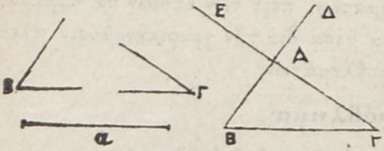


Σχ. 96.

Πρόβλημα.

18) 118. *Δεδομένων τῶν δύο γωνιῶν Β καὶ Γ τριγώνου τινὸς καὶ μιᾶς αὐτοῦ πλευρᾶς α, νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.*

Δυνάμεθα πάντοτε νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ δεδομέναι γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι προσκείμεναι τῇ πλευρᾷ α (59)· διότι εὐκόλως προσδιορίζεται ἡ τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου. Λαμβάνομεν εὐθεῖαν τὴν ΒΓ ἴσην τῇ *α*, καὶ εἰς τὸ σημεῖον Β κατασκευάζομεν γωνίαν ΑΒΓ ἴσην τῇ δεδομένῃ Β· καὶ εἰς τὸ σημεῖον Γ μὲ πλευρὰν τὴν ΓΒ ἑτέραν γωνίαν τὴν ΑΓΒ ἴσην τῇ δεδομένῃ Γ. Αἱ δύο εὐθεῖαι ΒΔ καὶ ΓΑ συναντῶνται εἴς τι σημεῖον Α, καὶ τὸ οὕτω σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

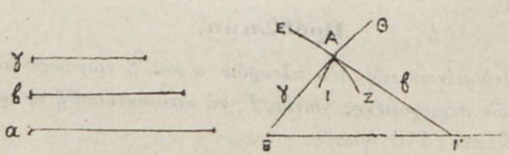


Σχ. 97

Διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ λύσις τοῦ προβλήματος, ἀνάγκη τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων γωνιῶν Β καὶ Γ νὰ εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν γωνιῶν (59, 55).

Πρόβλημα

18) 119. *Δεδομένων τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου, νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.*



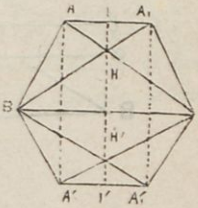
Σχ. 98.

Ἔστωσαν α, β, γ, αἱ τρεῖς δεδομέναι πλευραὶ τοῦ τριγώνου· λαμβάνομεν εὐθεῖαν ΒΔ, καὶ ἐπὶ ταύτης μέρος τὸ ΒΓ ἴσον τῇ *α*· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Β καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ *γ* γράφομεν τόξον ΕΖ, καὶ μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα ἴσην τῇ β γράφομεν ἕτερον τόξον τὸ ΘΙ. Ἐὰν αἱ δεδομέναι εὐθεῖαι εἶναι πραγματικῶς τοι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

αὗται, ὥστε ν' ἀποτελῶσι τρίγωνον, ἀνάγκη ἑκάστη ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι μικροτέρα μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, μεγαλειτέρα δὲ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν (35)· ἤτοι ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων τῶν δύο τόξων θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων καὶ μεγαλειτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, ἑπομένως τὰ δύο τόξα τέμνονται εἴς τι σημεῖον Α (102. γ΄.), τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

Τὰ τόξα τῶν γραφομένων περιφερειῶν τέμνονται καὶ κατὰ τὸ ἕτερον μέρος τῆς ΒΓ κατά τι σημεῖον Α΄, καὶ τὸ τρίγωνον Α΄ΒΓ (Σχ. 99) παριστᾷ τὸ ζητούμενον. Ἡ εὐθεῖα ΑΑ΄, ἥτις ἑνώνει τὰς δύο κορυφὰς Α καὶ Α΄ τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς ΒΓ (100), ὁπότε λέγομεν ὅτι τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄ΒΓ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰς ἀκτῖνας γ καὶ β, εὑρίσκομεν δύο ἄλλα τρίγωνα τὰ ΒΑ$_1$ Γ καὶ ΒΑ΄$_1$ Γ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ καὶ ἴσα πρὸς τὰ πρῶτα.



Σχ. 99.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι τὰ τέσσαρα τρίγωνα ΒΗΓ, ΑΗΑ$_1$, ΒΗ΄Γ, Α΄Η΄Α΄$_1$, εἶναι ἀναγκαίως ἰσοσκελῆ. Ἡ δὲ ΙΙ΄ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς, καὶ διέρχεται διὰ τῶν μέσων Ι καὶ Ι΄ τῶν εὐθειῶν ΑΑ, Α΄Α΄$_1$, παραλλήλων τῇ ΒΓ. Ἑπομένως αἱ κορυφαὶ Α καὶ Α$_1$, Α΄ καὶ Α΄$_1$ εἶναι ἀνὰ δύο συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν διὰ τοῦ μέσου τῆς ΒΓ κάθετον ἐπὶ ταύτην.

Ὅταν δύο ἐπίπεδα σχήματα οἱαδήποτε, ὡς τὰ δύο τρίγωνα ΒΑΓ καὶ ΒΑ΄Γ, ἔχωσι τὰς κορυφὰς αὐτῶν συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα, τὰ σχήματα ταῦτα εἶναι ἴσα, ἤτοι ταυτίζονται, ἐὰν τὸ ἕν, περιστραφὲν περὶ τὸν ἄξονα τῆς συμμετρίας, ἐπιπέσῃ ἐπὶ τὸ ἕτερον (Σχ. 100).

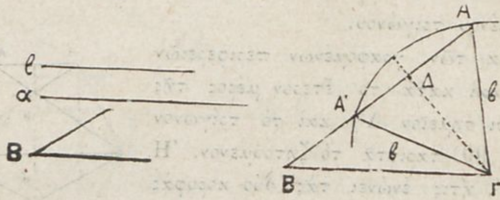
Πρόβλημα.

19) 120. *Δεδομένων τῶν δύο πλευρῶν τριγώνου καὶ μιᾶς γωνίας ἀντικειμένης εἰς τὴν μίαν τῶν πλευρῶν τούτων, νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον* (Σχ. 100).

Ἔστωσαν αἱ δεδομέναι πλευραὶ *α* καὶ *β* καὶ ἡ γωνία Β. Ἄς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λάβωμεν ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ταύτης μῆκος ΒΓ ἴσον τῇ α (μεγαλειτέρᾳ πλευρᾷ), καὶ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν β ἂς γράψωμεν τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον θὰ τέμνῃ τὴν ἑτέραν πλευρὰν τῆς γωνίας εἰς δύο σημεῖα, Α καὶ Α'· τὰ δύο τρίγωνα ΒΓΑ καὶ ΒΓΑ' πληροῦσι τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος.

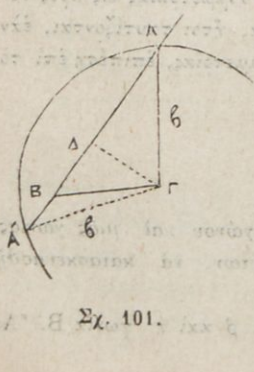


Σχ. 100.

Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατὸν ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει, πρέπει ἡ δεδομένη γωνία Β νὰ εἶναι ὀξεῖα. (59, 32).

Ἐὰν ἔχωμεν $\beta = \Gamma\Delta$, ἥτις εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Γ κάθετος ἐπὶ τὴν ἑτέραν πλευρὰν τῆς γωνίας Β, τὸ διαγραφόμενον τόξον μὲ κέντρον τὸ Γ θὰ ἐφάπτεται τῆς ἑτέρας πλευρᾶς ΒΑ τῆς γωνίας Β κατὰ τὸ Δ, καὶ τότε θὰ ἔχωμεν ἓν μόνον τρίγωνον, τὸ ὀρθογώνιον ΒΓΔ.

Ἐὰν ἡ β εἶναι μεγαλειτέρα τῆς α (Σχ. 101), τὸ δεύτερον τῆς τομῆς σημεῖον Α' θὰ κεῖται ἑτέρωθεν τοῦ Β, καὶ τὸ δεύτερον τρίγωνον ΒΓΑ' δὲν πληροῖ τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος, καθόσον ἐν τῷ τριγώνῳ τούτῳ ἀντὶ τῆς γωνίας Β ἔχομεν τὸ παραπλήρωμα αὐτῆς, ἤτοι τὴν γωνίαν ΓΒΑ'. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ γωνία Β δύναται νὰ εἶναι ἀμβλεῖα. Ἐὰν ὅμως εἶναι ὀρθή, αἱ δύο λύσεις ὑφίστανται, ἀλλὰ συμπίπτουσι, καθόσον δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσην ταυτίζονται. (47. β'.).



Σχ. 101.

Ἐὰν ἡ β εἶναι ἴση τῇ α, τὸ δεύτερον σημεῖον τῆς τομῆς Α' συμπίπτει μετὰ τοῦ Β, καὶ τότε μία μόνη λύσις ὑπάρχει.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ πρόβλημα τοῦτο δὲν εἶναι δυνατόν, ὅταν ἡ πλευρὰ β εἶναι μικροτέρα τῆς καθέτου ΓΔ, ἥτις παριστᾷ τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τοῦ Γ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΑΒ.

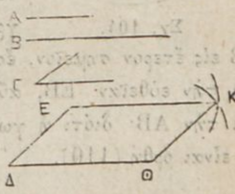
Ἐν γένει δὲ τὸ τρίγωνον δὲν εἶναι ὡρισμένον, ὅταν γνωρίζωμεν ἁπλῶς δύο τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ μίαν γωνίαν ἀντικειμένην εἰς τὴν ἑτέραν τῶν πλευρῶν τούτων· ἀλλὰ πρέπει νὰ ὁρίσωμεν τὰς μεταξὺ τῶν δεδομένων σχέσεις, διὰ νὰ δυνάμεθα ν' ἀποφανθῶμεν ὡρισμένως περὶ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος.

Ἄλλως τε δὲ ἡ μόνη περίπτωσις, καθ' ἣν ἔχομεν δύο μόνον λύσεις, εἶναι, ὅταν *ἡ μὲν δεδομένη γωνία εἶναι ὀξεῖα, ἡ δὲ ἀντικειμένη πρὸς ταύτην πλευρὰ εἶναι ἡ μικροτέρα ἐκ τῶν δύο δεδομένων πλευρῶν.*

Πρόβλημα.

20) 121. *Δεδομένων τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν παραλληλογράμμου καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας, νὰ κατασκευασθῇ τὸ παραλληλόγραμμον.*

Τὸ ζήτημα τοῦτο λύεται ἀμέσως διὰ τῆς κατασκευῆς ἑνὸς τριγώνου ΔΘΕ, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ δύο πλευραὶ καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία· καὶ ἔπειτα ἕτερον τρίγωνον ΕΘΚ, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ τρεῖς πλευραί.



Σχ. 102.

Πρόβλημα.

20) 122. *Διὰ δεδομένου σημείου, ἐπὶ δεδομένης εὐθείας κειμένου, ν' ἀχθῇ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην.*

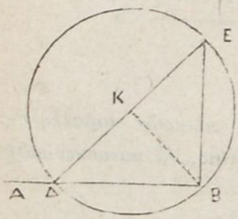
Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ σημεῖον ἐπὶ ταύτης τὸ Γ. Ἑκατέρωθεν τοῦ Γ λαμβάνομεν ΓΑ=ΓΒ· καὶ ἔπειτα μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, μεγαλειτέραν τοῦ ἡμίσεος τῆς ΑΒ, γράφομεν δύο τόξα κύκλου, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἴς τι σημεῖον Δ, ἐπειδὴ τὸ ἀπόστημα

Σχ. 103.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῶν κέντρων ΑΒ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων καὶ μεγαλείτερον τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, ἥτις εἶναι μηδέν· ἡ δὲ εὐθεῖα ΔΓ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, διότι τὰ σημεῖα Δ καὶ Γ ἀπέχοντα ἑκάτερον ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β κεῖνται ἐπὶ τῆς εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ ἀγομένης καθέτου (46).

Ἡ κατασκευὴ αὕτη εἶναι τόσῳ μᾶλλον ἀκριβής, ὅσῳ μᾶλλον τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀπέχουσιν ἀπ' ἀλλήλων. Ἐὰν δὲ τὰ σημεῖα εἶναι πλησίον ἀλλήλων, τότε ἐλάχιστον λάθος τῆς θέσεως τοῦ ἑνὸς τῶν σημείων τούτων παράγει σημαντικὸν λάθος τῆς θέσεως τῆς εὐθείας ΔΓ.



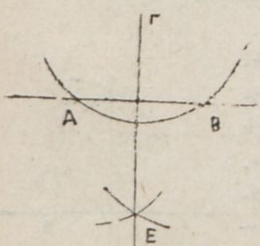
Σχ. 104.

Ἐὰν δὲν δυνάμεθα νὰ προεκτείνωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ πέραν τοῦ Β (Σχ. 104), καὶ θέλωμεν ἐκ τοῦ σημείου τούτου Β ν' ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς.

Ἔκ τινος σημείου Κ, λαμβανομένου ἐκτὸς τῆς ΑΒ, ὡς κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΚΒ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἰς ἕτερον σημεῖον, ἔστω τὸ Δ· ἂν φέρωμεν τὴν διάμετρον ΔΚΕ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΕΒ, αὕτη ἡ ΕΒ θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· διότι ἡ γωνία ΔΒΕ ὡς ἐγγεγραμμένη ἐν ἡμικυκλίῳ θὰ εἶναι ὀρθή (110).

Πρόβλημα.

21) 123. *Διὰ σημείου, κειμένου ἐκτὸς εὐθείας, ν' ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ ταύτην* (Σχ. 105).



Σχ. 105.

Μὲ κέντρον τὸ δεδομένον σημεῖον Γ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον νὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β. Μὲ τὰ σημεῖα, ταῦτα ὡς κέντρα καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτήν, ἀλλὰ μεγαλειτέραν τοῦ ἡμίσεος τῆς ΑΒ, γράφομεν δύο τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνονται κατά τι σημεῖον Ε ἑτέρωθεν τῆς ΑΒ· ἡ εὐθεῖα ΓΕ ἡ διὰ τοῦ δεδομένου σημείου Γ καὶ τοῦ

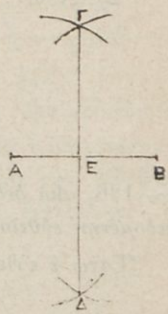
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ε διερχομένη εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος· διότι τὰ σημεῖα Γ καὶ Ε ἀπέχουσιν ἑκάτερον ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β.

Πρόβλημα.

21) 124. *Νὰ διχοτομηθῇ εὐθεῖα ἢ τόξον ἢ γωνία.*

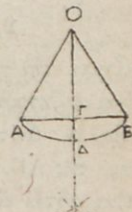
Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη (Σχ. 106), γράφομεν δύο περιφερείας μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ μὲ ἀκτῖνα πάντως μεγαλειτέραν τοῦ ἡμίσεος τῆς ΑΒ· αἱ περιφέρειαι αὗται τέμνονται εἰς δύο σημεῖα, Γ καὶ Δ, κείμενα ἑκατέρωθεν τῆς ΑΒ. Ἡ εὐθεῖα ΓΔ ἡ ἑνώνουσα τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου αὐτῆς.



Σχ. 106.

Ἐντεῦθεν παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ τεθῇ καὶ ὡς ἑξῆς· *Ἐκ τοῦ μέσου δεδομένης εὐθείας νὰ ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ ταύτην.*

Ἐὰν θέλωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ τόξον ΑΔΒ ἢ τὴν γωνίαν ΑΟΒ εἰς δύο ἴσα μέρη (Σχ. 107), ὁρίζομεν, ὅπως καὶ προηγουμένως, σημεῖόν τι Ε, ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β. Ἑνώνοντες δὲ τὸ σημεῖον Ε μετὰ τῆς κορυφῆς τῆς δεδομένης γωνίας, ἤτοι μετὰ τοῦ Ο, θὰ ἔχωμεν τὴν εὐθεῖαν ΟΕ κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ καὶ διερχομένην διὰ τοῦ μέσου αὐτῆς Γ. Αὕτη δὲ διαιρεῖ τὸ τόξον ΑΔΒ εἰς δύο ἴσα μέρη (93), ὡς καὶ τὴν γωνίαν ΑΟΒ (104).



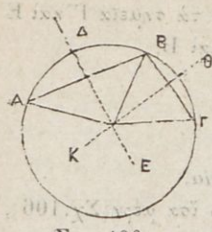
Σχ. 107.

Ἐφαρμόζοντες τὴν αὐτὴν κατασκευὴν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἑκάτερον ἥμισυ τοῦ τόξου, ὡς καὶ τὰς ἀντιστοιχούσας γωνίας, εἰς δύο ἴσα μέρη· οὕτω δὲ ἐξακολουθοῦντες δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν δεδομένον τόξον ἢ δεδομένην γωνίαν εἰς ἄρτιον ἀριθμὸν ἴσων μερῶν.

Πρόβλημα.

22) 125. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον δεδομένης περιφερείας ἢ δεδομένου τόξου* (Σχ. 108).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



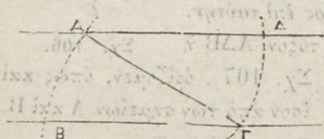
Σχ. 180.

Ἂς θεωρήσωμεν τρία τυχόντα σημεῖα τῆςπεριφερείας ἢ τόξου, τὰ Α, Β καὶ Γ, καὶ ἂς φέρωμεν τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΒΓ· ὑψοῦμεν καθέτους ἐπὶ ταύτας κατὰ τὸ μέσον τὰς ΕΔ καὶ ΚΘ, αἱ ὁποῖαι συναντῶνται εἴς τι σημεῖον Ο· τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον κέντρον τοῦ κύκλου (95).

Πρόβλημα.

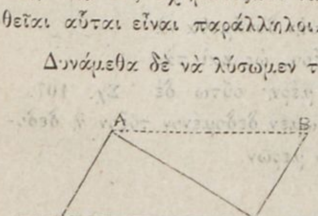
22. 126. *Διὰ δεδομένου σημείου ν' ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δεδομένην εὐθεῖαν.*

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΒΓ καὶ σημεῖον Α (Σχ. 109). Διὰ τοῦ σημείου Α φέρομεν εὐθεῖαν οἱανδήποτε, τὴν ΑΓ, συναντῶσαν τὴν ΒΓ εἴς τι σημεῖον Γ καὶ σχηματίζουσαν μετὰ τῆς ΒΓ τὴν γωνίαν ΑΓΒ· ἔπειτα μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Α καὶ μὲ πλευρὰν τὴν ΑΓ σχηματίζομεν τὴν γωνίαν ΔΑΓ ἴσην τῇ ΑΓΒ, καὶ λέγομεν ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος τῇ ΒΓ ἡ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου Α. Διότι, ὅταν δύο εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΓΒ τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης, τῆς ΑΓ, σχηματίζωσι τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας, αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 109.

Δυνάμεθα δὲ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα καὶ οὕτω· ἀφοῦ ἐκ τοῦ σημείου Α φέρωμεν δύο τυχούσας εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΕ, θὰ κατασκευάσωμεν παραλληλόγραμμον, τὸ ΑΒΓΘ, ἔχον τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΒΓ προσκειμένας πλευρὰς καὶ γωνίαν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν τὴν ΑΒΓ (121)· ἡ εὐθεῖα ΑΘ θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος τῇ ΔΕ.

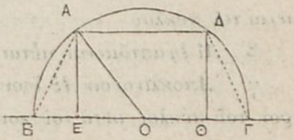


Σχ. 110.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Δυνάμεθα καὶ ἄλλως. Καταβιβάζομεν ἐκ τοῦ σημείου Α κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, τὴν ΑΕ (Σχ. 111), καὶ ἔπειτα ἐκ τοῦ σημείου Θ ὑψοῦμεν τὴν ΘΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ ἴσην τῇ ΑΕ· τὸ σημεῖον Δ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ Α ἀγομένης παραλλήλου τῇ ΒΓ (70).

Δυνάμεθα ἐπὶ τέλους νὰ λάβωμεν σημεῖόν τι Ο ἐπὶ τῆς ΒΓ, καὶ μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΑΟ νὰ γράψωμεν περιφέρειαν περατουμένην εἰς δύο σημεῖα, Β καὶ Γ, τῆς δεδομένης εὐθείας· λαμβάνοντες τότε τὴν ἀπόστασιν ΓΔ ἴσην τῇ ΒΑ (γίνεται δὲ τοῦτο, ἐὰν μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΒΑ ἀχθῇ τόξον τέμνον τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἴς τι σημεῖον Δ) εὑρίσκομεν σημεῖον Δ, ἀνῆκον εἰς τὴν εὐθεῖαν, ἥτις εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ (98), καὶ διέρχεται διὰ τοῦ Α.

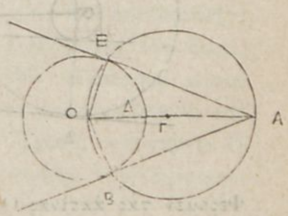


Σχ. 111.

Πρόβλημα.

2β) 127. *Διὰ δεδομένου σημείου, κειμένου ἐκτὸς κύκλου, ν' ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου τούτου* (Σχ. 112).

Ἔστω κύκλος, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εἶναι τὸ Ο, καὶ σημεῖόν τι Α κείμενον ἐκτὸς αὐτοῦ· ζητεῖται ν' ἀχθῇ ἐκ τοῦ Α ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Ο. Ἂς ἑνώσωμεν τὸ σημεῖον Α μετὰ τοῦ κέντρου Ο, καὶ ἐπὶ τῆς ΟΑ ὡς διαμέτρου ἃς γραφῇ περιφέρεια κύκλου, ἥτις θὰ συναντᾷ τὴν περιφέρειαν τοῦ δεδομένου κύκλου Ο κατὰ τὰ σημεῖα Β καὶ Β', καὶ ἃς φέρωμεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΒ'· αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι ἀμφότεραι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου Ο. Τῷόντι, ἐὰν φέρωμεν καὶ τὰς εὐθείας ΟΒ καὶ ΟΒ', σχηματίζονται αἱ γωνίαι ΟΒΑ καὶ ΟΒ'Α ὀρθαί, ὡς ἐγγεγραμμέναι ἐν ἡμικυκλίῳ· ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΒ', ὡς κάθετοι ἐπὶ τῶν ἀκτίνων ΟΒ καὶ ΟΒ' τοῦ δεδομένου κύκλου καὶ κατὰ τὰ ἄκρα αὐτῶν, εἶναι ἐφαπτόμεναι εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου (97).



Σχ. 112.

Ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἰσότητα τῶν δύο ὀρθογωνίων τριγώνων

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΟΒ καὶ ΑΟΒ′, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὴν ὑποτείνουσαν ΟΑ κοινὴν καὶ τὰς πλευρὰς ΟΒ καὶ ΟΒ′ ἴσας ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Ἐκ τούτου ἐξάγομεν ὅτι αἱ δύο ἐφαπτόμεναι ΑΒ καὶ ΑΒ′, ὡς καὶ αἱ γωνίαι ΟΑΒ καὶ ΟΑΒ′, εἶναι ἴσαι· ἑπομένως·

α′. Διὰ σημείου ἐκτὸς κύκλου ληφθέντος ἄγονται δύο ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου

β′. Αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται εἶναι ἴσαι

γ′. Ἀποκλίνουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ τῆς εὐθείας, ἥτις ἑνώνει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου μετὰ τοῦ κοινοῦ σημείου αὐτῶν τῶν ἐφαπτομένων· ἢ ὅτι ἡ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καὶ τοῦ σημείου Α διερχομένη εὐθεῖα διχοτομεῖ τὴν ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων σχηματιζομένην γωνίαν.

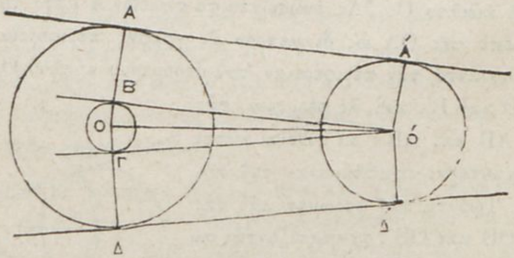
Πρόβλημα.

128. *Ν' ἀχθῇ κοινὴ ἐφαπτομένη δύο δεδομένων περιφερειῶν.*

Ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη δύναται ν' ἀφίνῃ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοὺς δύο κύκλους ἢ ἑκατέρωθεν αὐτῆς. Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην *ἐξωτερικὴν* καὶ ἐν τῇ δευτέρᾳ *ἐσωτερικήν*.

α′· Ἔστωσαν αἱ δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο′, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη ἡ ΑΑ′.

Ἂς ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον. ἔστω δὲ ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν Ο καὶ Ο′ ἡ ΑΑ′.



Σχ. 113.

Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ Ο′Α′. αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΑ′· ἐὰν διὰ τοῦ σημείου Ο′ φέρωμεν τὴν Ο′Β παράλληλον τῇ ΑΑ′, τὸ σχῆμα Ο′Α′ΑΒ εἶναι ὀρθογώνιον, καὶ ἑπομένως ΒΑ=Ο′Α′. ἄρα ἡ ΟΒ θὰ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἀκτίνων, τῶν δύο κύκλων, ἤτοι ΟΒ=ΟΑ—Ο′Α′.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Οὕτως, ἐὰν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΟΒ διαφορὰν τῶν ἀκτίνων ΟΑ καὶ Ο΄Α΄ γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου, αὕτη θὰ ἐφάπτηται τῆς εὐθείας Ο΄Β, ἥτις θὰ εἶναι παράλληλος τῇ κοινῇ ἐφαπτομένῃ. Ἐκ τούτου ἐξάγομεν ἀμέσως τὴν ἑξῆς γεωμετρικὴν κατασκευὴν πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος (Σχ. 113).

Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ διαφορᾷ τῶν ἀκτίνων τῶν δύο κύκλων γράφομεν περιφέρειαν. Ἐκ τοῦ σημείου Ο΄ φέρομεν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου τούτου τὴν Ο΄Β, καὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΒ, τὴν ὁποίαν προσεκβάλλομεν μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου Ο εἴς τι σημεῖον Α. Ἐκ τοῦ σημείου Α φέρωμεν εὐθεῖαν ΑΑ΄ παράλληλον τῇ ΒΟ΄· ἡ εὐθεῖα αὕτη ΑΑ΄ εἶναι ἡ ζητουμένη κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τοῦ σημείου Ο΄ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐφαπτομένας Ο΄Β καὶ Ο΄Γ, ἕπεται ὅτι ὑπάρχει καὶ δευτέρα κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων, ἡ ΔΔ΄.

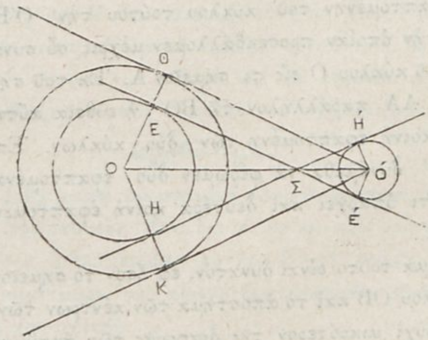
Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι δυνατόν, ἐφ' ὅσον τὸ σημεῖον Ο΄ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου ΟΒ καὶ τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων τῶν δεδομένων κύκλων εἶναι οὐχὶ μικρότερον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων. Ἐὰν τὸ ἀπόστημα ΟΟ΄ εἶναι ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν ἀκτίνων, τὸ σημεῖον Ο΄ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΟΒ καὶ ἐπὶ τῆς διὰ τῶν κέντρων διερχομένης εὐθείας, ὁπότε αἱ δύο λύσεις συμπτύσσονται εἰς μίαν, ἥτις εἶναι ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο δεδομένων περιφερειῶν ἐφαπτομένων ἐντός.

Οὕτω *δύο περιφέρειαι ἐκτὸς ἀλλήλων ἢ τεμνόμεναι ἔχουσι δύο κοινὰς ἐφαπτομένας ἐξωτερικάς. Δύο περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι καὶ κείμεναι ἐντὸς ἀλλήλων ἔχουσι μίαν μόνον κοινὴν ἐφαπτομένην. Ὅταν δὲ αἱ δεδομέναι περιφέρειαι κεῖνται ἡ μία ἐντὸς τῆς ἄλλης, οὐδεμίαν ἔχουσι κοινὴν ἐφαπτομένην. Αἱ δύο ἐξωτερικαὶ κοιναὶ ἐφαπτόμεναι τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς διὰ τῶν κέντρων τῶν κύκλων διερχομένης.* Τῳόντι τὰ σημεῖα Ο καὶ Ο΄ κεῖνται ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῶν δύο ἐφαπτομένων.

β΄. Ἔστωσαν δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο΄ καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη ἡ ΕΕ΄. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΕ καὶ Ο΄Ε΄, αἵτινες θὰ εἶναι πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι (50). Ἐὰν διὰ τοῦ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σημείου Ο′ φέρωμεν τὴν Ο′Θ παράλληλον τῇ ΕΕ′, τὸ σχῆμα Ο′Ε′ΕΘ εἶναι ὀρθογώνιον, ἐξ οὗ ἐξάγομεν ὅτι ἡ ΟΘ παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀκτίνων ΟΕ καὶ Ο′Ε′. Ἐπομένως, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Ο ὡς κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα ΟΘ γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη θὰ ἐφάπτηται τῆς εὐθείας Ο′Θ, ἥτις εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην. Ἐκ τούτου ἐξάγομεν ἀμέσως τὴν ἑξῆς κατασκευὴν πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος (Σχ. 114).



Σχ. 114.

Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀκτίνων τῶν δύο δεδομένων περιφερειῶν γράφομεν περιφέρειαν· ἐκ τοῦ σημείου Ο′ ἄγομεν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας ταύτης τὴν Ο′Θ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Ε, ἔνθα ἡ ἀκτὶς ΟΘ συναντᾷ τὴν περιφέρειαν Ο, ἄγομεν τὴν Ε Ε′ παράλληλον τῇ Ο′Θ· ἡ ΕΕ′ εἶναι ἡ ζητουμένη κοινὴ ἐφαπτομένη. Ἐπειδὴ ἐκ τοῦ σημείου Ο′ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐφαπτομένας Ο′Θ καὶ Ο′Κ τοῦ κύκλου, ἔχομεν ἐν γένει δύο λύσεις, ΕΕ′ καὶ ΗΗ′.

Τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν, ἐφ᾽ ὅσον τὸ σημεῖον Ο′ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου ΟΘ, ἤτοι ἐφ᾽ ὅσον τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων τῶν δεδομένων περιφερειῶν εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων αὐτῶν. Ἐὰν τὸ ἀπόστημα ΟΟ′ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων, τὸ σημεῖον Ο′ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΟΘ καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις ἑνώνει τὰ κέντρα αὐτων, ὁπότε αἱ δύο λύσεις ἀνάγονται εἰς μίαν, ἥτις εἶναι ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη δύο περιφερειῶν ἐφαπτομένων ἐκτός.

Οὕτως, *ἐὰν δύο περιφέρειαι κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων ἔχουσι δύο*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κοινὰς ἐφαπτομένας ἐσωτερικάς. Ἐὰν δὲ αἱ δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς, ἔχουσι μίαν μόνην κοινὴν ἐφαπτομένην. Ἐὰν δὲ ἡ μία περιφέρεια κεῖται ἐντὸς τῆς ἑτέρας καὶ οὐδὲν ἔχωσιν αὗται κοινὸν σημεῖον, οὐδεμία ὑπάρχει κοινὴ ἐφαπτομένη.

Αἱ δύο κοιναὶ ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Σ κείμενον ἐπὶ τῆς διὰ τῶν κέντρων διερχομένης εὐθείας (Σχ. 114).

Τῳόντι αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται σχηματίζουσι δύο κατὰ κορυφὴν γωνίας, τὰ δὲ σημεῖα Ο καὶ Ο' κεῖνται ἐπὶ τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τούτων· ἀλλ' αἱ διχοτόμοι δύο κατὰ κορυφὴν γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας (22).

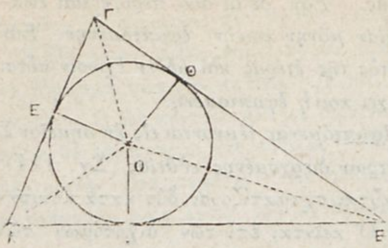
Ἐν τῇ περιπτώσει τῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων, ἐὰν αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο δεδομένων κύκλων εἶναι ἴσαι, ἡ περιφέρεια ΑΒ περιορίζεται εἰς ἓν σημεῖον, καὶ ἡ ἐφαπτομένη Ο'Β, παράλληλος πρὸς τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην, συμπίπτει μετὰ τῆς διὰ τῶν κέντρων διερχομένης εὐθείας. Ἑπομένως *αἱ δύο ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν διὰ τῶν κέντρων διερχομένην εὐθεῖαν.* Ἐὰν δὲ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ θεωρήσωμεν τὰς ἐσωτερικὰς ἐφαπτομένας, παρατηροῦμεν ὅτι *τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως αὐτῶν κεῖται εἰς τὸ μέσον τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων τῶν δύο δεδομένων περιφερειῶν,* τοῦτο δὲ ἐξάγεται ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΣΕ καὶ Ο'ΣΕ', τὰ ὁποῖα ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἔχουσι μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην.

Τὴν μέθοδον ταύτην, δι' ἧς ἐλύθη τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, μεταχειριζόμεθα, ὁσάκις στερούμεθα τῶν βάσεων τῆς ἀμέσου λύσεως τοῦ προτεινομένου προβλήματος, ἤτοι τῆς σχέσεως τῶν δεδομένων πρὸς τὰ ζητούμενα. Συνίσταται δὲ ἡ μέθοδος αὕτη εἰς τὸ νὰ ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον, νὰ γράψωμεν τὸ ἐκ τῆς λύσεως προερχόμενον σχῆμα, καὶ ἐκ τούτου ν' ἀνεύρωμεν τὰ σχέσεις τῶν δεδομένων πρὸς τὰ ἄγνωστα.

Πρόβλημα.

129. *Νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου ἐφαπτομένη τριῶν δεδομένων εὐθειῶν, τεμνομένων ἀνὰ δύο πρὸς ἀλλήλας.*

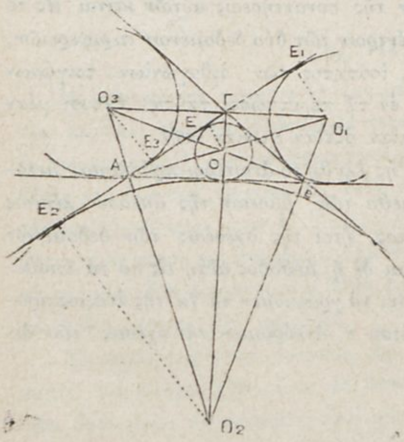
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Σχ. 115.

Αἱ τρεῖς διδόμεναι εὐθεῖαι σχηματίζουσιν ἓν τρίγωνον, τὸ ΑΒΓ (Σχ. 115). Ἐὰν φέρωμεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου τούτου, αὗται θὰ συναντῶνται εἰς ἓν σημεῖον Ο, ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν τριῶν πλευρῶν (82). Ἑπομένως, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου τούτου Ο ὡς κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΟΔ, ἀπόστημα τοῦ Ο ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΑΒ, γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ ἐφάπτηται (97) τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου κατὰ τὰ σημεῖα Δ, Θ καὶ Ε, ἤτοι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου Ο ἐφάπτεται τῶν τριῶν διδομένων εὐθειῶν· καὶ ὁ μὲν κύκλος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τρίγωνον, τοῦτο δὲ περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον.

*130. Ἐὰν ἤδη γράψωμεν (Σχ. 116) τὰς διχοτομούσας τῶν ἐκτὸς γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αὗται σχηματίζουσιν ἓν δεύτερον τρίγωνον τὸ $O_1 O_2 O_3$, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαί, κείμεναι ἐπὶ τῶν προσεκβολῶν τῶν διχοτόμων τῶν ἐντὸς γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (82), ἀπέχουσιν ἴσον τῶν τριῶν δεδομένων εὐθειῶν. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ὑπάρχουσι τρεῖς ἄλλαι περιφέρειαι αἱ O_1E_1, O_2E_2, O_3E_3 πληροῦσαι τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος. Ἑκάστη δὲ τῶν περιφερειῶν τούτων ἐφάπτεται μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ δεδομένου τριγώνου ΑΒΓ, καὶ τῶν προσεκβολῶν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ. Ἐν γένει δὲ εἶναι δυνατὸν ν' ἀχθῶσι τέσσαρες περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι τῶν τριῶν δεδομένων εὐθειῶν.



Σχ. 116

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν διὰ α, β, γ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ διὰ 2 Π τὴν περίμετρον αὐτοῦ $\alpha+\beta+\gamma$, ἀποδεικνύομεν εὐκόλως, στηριζόμενοι ἐπὶ τοῦ ὅτι αἱ ἔκ τινος σημείου ἐκτὸς κύκλου ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι εἶναι ἴσαι (128), ὅτι τὰ ἀποστήματα ἑκάστης τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἀπὸ τῶν σημείων τῆς ἐπαφῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τῆς διερχομένης διὰ τῆς κορυφῆς ταύτης καὶ ἐφαπτομένης τῶν τεσσάρων περιφερειῶν παρίστανται διὰ τῶν Π, Π—α, Π—β, Π—γ. Οὕτως ἀποβλέποντες εἰς τὸ (Σχ. 116) θὰ ἔχωμεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ

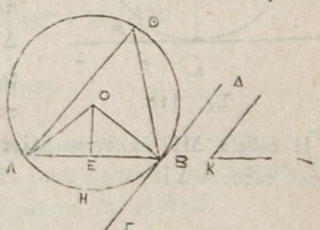
$$AE_1=\Pi,\quad AE=\Pi-\alpha,\quad AE_2=\Pi-\beta,\quad AE_3=\Pi-\gamma.$$

Πρόβλημα.

131. *Νὰ γραφῇ τμῆμα κύκλου ἔχον χορδὴν δεδομένην εὐθεῖαν, καὶ δεχόμενον ἐγγεγραμμένην γωνίαν ἴσην τῇ δεδομένῃ.*

Δυνάμεθα πάντοτε νὰ γράψωμεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ δύο δοθέντων σημείων τοιαύτην, ὥστε τὸ ἓν ἐκ τῶν ἀντιστοιχούντων τμημάτων τοῦ κύκλου πρὸς τὴν χορδήν, τὴν ὑπὸ τῶν δύο δεδομένων σημείων ὁριζομένην, νὰ δέχηται γωνίαν ἐγγεγραμμένην, ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ.

Ἔστω ἡ δεδομένη εὐθεῖα ΑΒ καὶ ἡ γωνία Κ. Ἂς φέρωμεν διὰ τοῦ σημείου Β εὐθεῖαν ΓΔ σχηματίζουσαν μετὰ τῆς ΑΒ τὴν γωνίαν ΑΒΓ ἴσην τῇ δεδομένῃ Κ, καὶ ἐκ τοῦ Β ἂς ὑψώσωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ τὴν ΒΟ· προσέτι δὲ ἐκ τοῦ μέσου Ε τῆς ΑΒ κάθετον ἐπὶ ταύτην τὴν ΕΟ· αἱ δύο αὗται κάθετοι θὰ συναντῶνται εἴς τι σημεῖον (55). Ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΟΒ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἥτις θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη.



Σχ. 117.

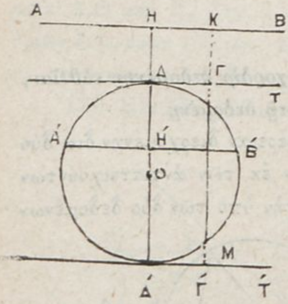
Τῳόντι ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν ταύτην, καὶ ἡ δεδομένη γωνία ΑΒΓ ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΗΒ. Ἐπομένως πᾶσα γωνία ὡς ἡ ΑΘΒ ἐγγεγραμμένη ἐν τῷ τμήματι ΑΘΒΑ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΗΒ καὶ εἶναι ἴση τῇ ΑΒΓ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θεώρημα.

132. *Διδομένης περιφερείας καὶ εὐθείας ἐκτὸς τῆς περιφερείας ταύτης κειμένης, ἐὰν ἀχθῇ διάμετρος τοῦ κύκλου κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, τὸ μὲν ἓν ἄκρον τῆς διαμέτρου ταύτης εἶναι τὸ ἐγγύτατον τὸ δὲ ἕτερον εἶναι τὸ ἀπώτατον ἐκ πάντων τῶν σημείων τῆς περιφερείας ἀπὸ τῆς εὐθείας.*

Ἔστωσαν ἡ περιφέρεια Ο καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἐκτὸς τῆς περιφερείας κειμένη, κάθετος δὲ ἐπὶ ταύτην ἡ διάμετρος ΔΔ′ κατὰ τὸ σημεῖον Η· λέγομεν ὅτι ἐξ ὅλων τῶν σημείων τῆς περιφερείας τὸ μὲν πλησιέστατον πρὸς τὴν ΑΒ εἶναι τὸ Δ, τὸ δὲ ἀπώτατον τὸ Δ′.



Σχ. 118.

Φέρομεν τὰς δύο ἐφαπτομένας ΔΤ καὶ Δ′Τ′, καὶ ἔκ τινος σημείου Μ τῆς περιφερείας κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ τὴν ΜΚ· θέλομεν ἔχει ΜΚ>ΓΚ ἤτοι ΜΚ> ΔΗ καὶ ΜΚ<Γ′Κ· ἤτοι ΜΚ<Δ′Η.

Ἐὰν δὲ φέρωμεν τὴν τέμνουσαν Α′Β′ (ὑποτιθεμένην ἐν τῷ σχήματι παράλληλον τῇ ΑΒ), τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ′ εἶναι τὰ ἀπώτατα σημεῖα τῶν τόξων ἀπὸ τῆς εὐθείας Α′Β′, τὸ μὲν Δ τοῦ τόξου Α′ΔΒ′, τὸ δὲ Δ′ τοῦ Α′Δ′Β′. Ἡ εὐθεῖα ΔΗ′ καλεῖται *βέλος* τοῦ τόξου Α′ΔΒ′, ἡ δὲ Η′Δ′ βέλος τοῦ τόξου Α′Δ′Β′.

Θεώρημα.

133. *Ὅταν δύο περιφέρειαι κεῖνται ἐκτὸς ἢ ἐντὸς ἀλλήλων, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον ἀπόστημα τῆς ἑτέρας τῶν περιφερειῶν ἀπὸ τῆς ἑτέρας κεῖνται ἐπὶ τῆς διὰ τῶν κέντρων τῶν κύκλων διερχομένης εὐθείας.*

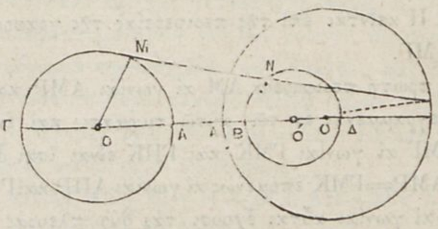
Ἔστωσαν αἱ ἐκτὸς ἀλλήλων περιφέρειαι Ο καὶ Ο′, καὶ ἂς φέρωμεν διὰ τῶν κέντρων τὴν εὐθεῖανΓΔ, καὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΜΝ ἑνώνουσαν δύο σημεῖα τῶν περιφερειῶν· εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ διάμετροι ΓΑ καὶ ΒΔ συμπίπτουσι μετὰ τῆς διὰ τῶν κέντρων τῶν κύκλων διερχομένης εὐθείας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ τοῦ τετραπλεύρου ΟΜΝΟ' θέλομεν ἔχει

$\mathrm{OO'} < \mathrm{OM} + \mathrm{MN} + \mathrm{O'N}$ ἢ $\mathrm{OA} + \mathrm{AB} + \mathrm{BO'} < \mathrm{OM} + \mathrm{MN} + \mathrm{NO'}$

καὶ ἀφαιροῦντες ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἀνισότητος ταύτης τὰ ἴσα ΟΑ καὶ ΟΜ, ΒΟ' καὶ ΝΟ' λαμβάνομεν $\mathrm{AB} < \mathrm{MN}$· ἀφ' ἑτέρου δὲ $\mathrm{MN} < \mathrm{OM} + \mathrm{OO'} + \mathrm{O'N}$ ἢ $\mathrm{MN} < \Gamma\Delta$.



Σχ. 119.

Ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν τὰς ἐντὸς ἀλλήλων περιφερείας Ο καὶ Ο' θέλομεν ἔχει ἐκ τοῦ τετραπλεύρου ΝΟΟΜ

$$\mathrm{OM} \text{ ἢ } \mathrm{OO'} + \mathrm{O'B} + \mathrm{AB} < \mathrm{OO'} + \mathrm{O'N} + \mathrm{MN}$$

καὶ ἂν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἀφαιρέσωμεν τὰ ἴσα, λαμβάνομεν

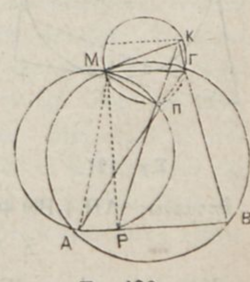
$$\mathrm{AB} < \mathrm{MN}\cdot \text{ καὶ ἀφ' ἑτέρου· } \mathrm{MN} < \mathrm{NO'} + \mathrm{OO'} + \mathrm{OM}$$

$$\text{ἢ } \mathrm{MN} < \mathrm{BO'} + \mathrm{OO'} + \mathrm{O}\Gamma \text{ ἢ } \mathrm{MN} < \mathrm{B}\Gamma.$$

Θεώρημα.

134. Ὅταν τρίγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, οἱ πόδες τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἔκ τινος σημείου τῆς περιφερείας ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ἡ περιγεγραμμένη εἰς τοῦτο περιφέρεια· ἐξ ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου Μ τῆς περιφερείας ἂς φέρωμεν καθέτους ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΜΚ, ΜΠ καὶ ΜΡ· θὰ δείξωμεν ὅτι οἱ πόδες αὐτῶν Ρ,Π καὶ Κ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Τὸ τετράπλευρον ΑΜΓΒ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, ἑπομένως ἡ



Σχ. 120.

γωνία ΜΑΒ εἶναι παραπλήρωμα τῆς γωνίας ΜΓΒ· ἄρα εἶναι ἴση

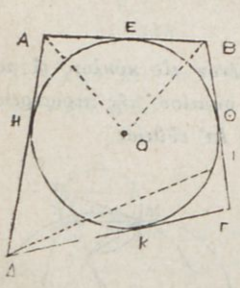
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῇ γωνίᾳ ΜΓΚ. Τὰ δὲ τρίγωνα ΑΜΡ καὶ ΓΜΚ εἶναι ὀρθογώνια, καὶ ἐπομένως αἱ γωνίαι ΑΜΡ καὶ ΓΜΚ εἶναι ἴσαι ὡς συμπληρώματα τῶν ἴσων γωνιῶν ΜΑΡ καὶ ΜΓΚ· ἀλλὰ ἡ διὰ τῆς ΑΜ ὡς διαμέτρου γραφομένη περιφέρεια διέρχεται διὰ τῶν σημείων Π καὶ Ρ, καθόσον αἱ γωνίαι ΜΡΑ καὶ ΜΠΑ, ὧν αἱ πλευραὶ διέρχονται διὰ τῶν σημείων Α καὶ Μ, εἶναι ὀρθαί. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ σημεῖα Κ καὶ Π κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς γραφομένης μὲ διάμετρον τὴν ΜΓ.

Ἐν τῇ πρώτῃ περιφερείᾳ ΑΜ αἱ γωνίαι ΑΜΡ καὶ ΑΠΡ εἶναι ἴσαι ὡς ἐγγεγραμμέναι ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι· καὶ ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφερείᾳ ΜΓ αἱ γωνίαι ΓΜΚ καὶ ΓΠΚ εἶναι ἴσαι διὰ τὸν αὐτὸν λόγον· ἀλλ' ΑΜΡ=ΓΜΚ· ἐπομένως αἱ γωνίαι ΑΠΡ καὶ ΓΠΚ εἶναι ἴσαι· καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι αὗται ἔχουσι τὰς δύο πλευρὰς ΑΠ καὶ ΠΓ ἀντιθέτως ἐπ' εὐθείας καὶ τὴν κορυφὴν κοινήν, ἀνάγκη καὶ αἱ δύο ἄλλαι αὐτῶν πλευραὶ ΡΠ καὶ ΠΚ, ἑκατέρωθεν τῆς ΑΓ καὶ ΜΠ κείμεναι, νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ἤτοι τὰ σημεῖα Ρ, Π καὶ Κ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΡΠΚ.

Θεώρημα

135. ***Παντὸς τετραπλεύρου περιγεγραμμένου εἰς κύκλον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν.***



Σχ. 121.

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ περιγεγραμμένον εἰς κύκλον· θὰ δείξωμεν ὅτι ΑΔ+ΒΓ=ΑΒ+ΔΓ·

τῳόντι ΑΗ=ΑΕ, ΒΘ=ΒΕ, ΔΗ=ΔΚ, ΓΘ=ΓΚ § 128

ἐπομένως ΑΗ+ΒΘ+ΔΗ+ΓΘ=ΑΕ+ΒΕ+ΔΚ+ΓΚ

ἢ ΑΔ+ΒΓ=ΑΒ+ΔΓ.

Καὶ ἀντιστρόφως. Ἐὰν ἡ ἀνωτέρω συνθήκη (ἤτοι ἐὰν ἡ ἰσότης ΑΔ+ΒΓ=ΑΒ+ΔΓ) ὑφίσταται, τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι περι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γράψιμον εἰς κύκλον, ἤτοι ὑπάρχει κύκλος, ὁ ὁποῖος κείμενος ἐντὸς τοῦ τετραπλεύρου ἐφάπτεται πασῶν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Διότι, ἐὰν φέρωμεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Α καὶ Β, αὗται συναντῶνται εἴς τι σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ ἐφαπτομένου τῶν πλευρῶν ΑΔ, ΑΒ καὶ ΒΓ, λέγω ὅτι ἡ αὐτὴ περιφέρεια θὰ ἐφάπτηται καὶ τῆς τετάρτης πλευρᾶς ΔΓ. Τῳόντι, ἐὰν ἡ ΓΔ δὲν ἦτο ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου τούτου, δυνάμεθα ἐκ τοῦ Δ ἢ τοῦ Γ νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω αὕτη ἡ ΔΙ. Ἐπειδὴ τότε τὸ τετράπλευρον ΑΒΙΔ εἶναι περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον, θέλομεν ἔχει· $ΑΒ+ΔΙ=ΑΔ+ΒΙ$ καὶ $ΓΔ<ΔΙ+ΙΓ$ καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$ΑΒ+ΔΙ+ΓΔ<ΑΔ+ΒΙ+ΙΓ+ΔΙ \text{ ἢ } ΑΒ+ΔΓ<ΑΔ+ΒΓ$$

ὅπερ ψευδές, ὡς ἐναντίον τῇ ὑποθέσει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Α'. ΜΕΤΡΟΝ ΚΑΙ ΛΟΓΟΣ ΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ

136. *Μετρῶ* εὐθεῖαν γραμμὴν σημαίνει συγκρίνω ταύτην πρὸς ἑτέραν εὐθεῖαν ὡρισμένην καὶ ὡς μονάδα λαμβανομένην, καὶ εὑρίσκω ποσάκις ἡ δευτέρα περιέχεται ἐν τῇ πρώτῃ.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ μετρήσωμεν, ὑπερβαίνῃ τὴν ληφθεῖσαν μονάδα (π. χ. τὸν πῆχυν), εὑρίσκομεν ποσάκις αὕτη ἡ μονὰς περιέχεται εἰς τὴν εὐθεῖαν· ἔστω δὲ ὅτι περιέχεται ἐν αὐτῇ 5κις καὶ μένει ὑπόλοιπόν τι μικρότερον τῆς μονάδος. Ζητοῦμεν τότε ποσάκις τὸ ἓν δέκατον τῆς μονάδος περιέχεται ἐν τῷ ὑπολοίπῳ τούτῳ· ἔστω δὲ ὅτι περιέχεται ἐν αὐτῷ 5κις καὶ μένει νέον ὑπόλοιπον μικρότερον τοῦ ἑνὸς δεκάτου. Μετροῦμεν τὸ νέον τοῦτο ὑπόλοιπον, λαμβάνοντες ὡς νέαν μονάδα τὸ ἓν ἑκατοστὸν τῆς ἀρχικῆς μονάδος, τὸ ὁποῖον ἔστω ὅτι περιέχεται ἀκριβῶς εἰς τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον 9 φοράς· λέγομεν τότε ὅτι ἡ θεωρηθεῖσα εὐθεῖα ἔχει μῆκος 5,59 πηχ.

Διὰ νὰ συγκρίνωμεν δύο μεγέθη, πρέπει νὰ σχηματίσωμεν τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι παριστῶσι ταῦτα. Πρέπει λοιπὸν νὰ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εὕρωμεν κατὰ πρῶτον ἂν τὰ μεγέθη ταῦτα περιέχουσιν ἀκριβῶς τὴν αὐτὴν μονάδα, ἤτοι ἂν ἔχωσι κοινὸν μέτρον.

Δεδομένων δὲ δύο εὐθειῶν γραμμῶν, εὑρίσκομεν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον αὐτῶν, ὅπως εὑρίσκομεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἀριθμῶν. Μετροῦμεν τὴν μεγαλειτέραν ἐξ αὐτῶν, λαμβάνοντες τὴν μικροτέραν ὡς μονάδα, ἔπειτα μετροῦμεν τὴν μικροτέραν λαμβάνοντες ὡς μονάδα τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ ἀπέμεινεν ἐκ τῆς μετρήσεως τῆς μεγαλειτέρας, ἔπειτα μετροῦμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς πρώτης μετρήσεως διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς δευτέρας μετρήσεως καὶ οὕτω καθεξῆς. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ἡ ἐργασία αὕτη περατοῦται, ὅταν φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον περιέχεται ἀκριβῶς εἰς τὸ ἀμέσως προηγούμενον, καὶ τοῦτο θὰ εἶναι τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν δύο εὐθειῶν.

Ἂς παραστήσωμεν δι' Α καὶ Β τὰς δύο δεδομένας εὐθείας, καὶ δι' υ, υ', υ'' τὰ εὑρεθέντα διαδοχικὰ ὑπόλοιπα. Ἂς ὑποθέσωμεν δ' ὅτι τὰ ἐξαγόμενα τῶν μετρήσεων τούτων εἶναι:

$$A=3B+\upsilon,\ B=5\upsilon+\upsilon',\ \Upsilon=2\upsilon'+\upsilon'', \text{ καὶ}$$
$$\upsilon'=7\upsilon''. \text{ κ.τ.λ.}$$

Ἐξάγομεν ἐκ τούτων εὐκόλως $\upsilon=15\,\upsilon''$, $B=82\,\upsilon''$, $A=261\,\upsilon''$

$$\text{καὶ } \frac{A}{B}=\frac{261\,\upsilon''}{82\,\upsilon''}=\frac{261}{82}.$$

Δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ εὑρεθὲν τοῦτο κλάσμα πρέπει νὰ εἶναι ἀνάγωγον. Διότι, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ 261 καὶ 82 εἶχον κοινόν τινα παράγοντα, π.χ. τὸν 5, τὰ μήκη τῶν εὐθειῶν Α καὶ Β θὰ εἶχον κοινὸν μέτρον τὸ 5 υ'', καὶ ἑπομένως τὸ υ'' δὲν θὰ εἶναι τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν δύο εὐθειῶν,

Αἱ δεδομέναι ὅμως εὐθεῖαι εἶναι δυνατὸν οὐδὲν νὰ ἔχωσι κοινὸν μέτρον, ὁπότε λέγονται *ἀσύμμετροι*. Ἐν τοιαύτῃ δὲ περιπτώσει ζητοῦντες κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν δύο τούτων εὐθειῶν οὐδέποτε εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον μηδέν.

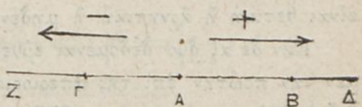
Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸν λόγον τῶν δύο ἀσυμμέτρων εὐθειῶν μὲ ὅσην θέλομεν προσέγγισιν. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι Α καὶ Β οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν μέτρον, καὶ ὅτι θέλομεν νὰ ὁρίσωμεν τὸν λόγον αὐτῶν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$. Διαιροῦμεν τὴν εὐθεῖαν Β εἰς 1000 ἴσα μέρη· καὶ ἂς παραστήσωμεν τὸ ἓν ἐκ τού-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

των δι' α. Εὑρίσκομεν ἔπειτα ποσάκις τὸ α περιέχεται ἐν τῇ εὐθείᾳ Α· καὶ ἔστω ὅτι περιέχεται ἐν αὐτῇ 7815 φορὰς μετά τινος ὑπολοίπου, ὁπότε ὁ λόγος $\frac{A}{B}$ θὰ περιέχηται προφανῶς μεταξὺ :

$\frac{7815}{1000}$ καὶ $\frac{7816}{1000}$ ἢ 7,815 καὶ 7,816. Ὁ πρῶτος ἀριθμὸς θὰ παριστᾷ τὸν ζητούμενον λόγον μὲ προσέγγισιν 0,001 κατ' ἔλλειψιν, ὁ δὲ δεύτερος μὲ προσέγγισιν ὡσαύτως 0,001 καθ' ὑπεροχήν.

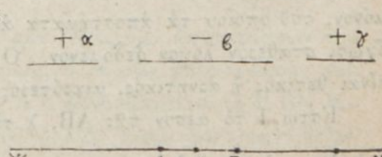
137. Ὅταν λάβωμεν σημεῖόν τι Α ἐπὶ εὐθείας δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης δύο μέρη διάφορα ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο, τὰ ὁποῖα διακρίνομεν ἐκ τῆς πρὸς τὸ ἓν ἢ πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τοῦ ληφθέντος σημείου θέσεως. Ἐπὶ παραδείγματι, ἐὰν παρατηρητὴς εὑρίσκηται ἐπὶ τοῦ σημείου Α τῆς εὐθείας ΖΔ, θὰ ἔχῃ τὸ ἕτερον μέρος τῆς εὐθείας πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ καὶ τὸ ἄλλο πρὸς τὰ ἀριστερά. Ἐὰν θεωρήσωμεν δύο σημεῖα Α καὶ Β, τὸ μεταξὺ



Σχ. 122. α

αὐτοῦ τμῆμα τῆς εὐθείας δέον νὰ λογίζηται κατὰ τὴν φορὰν εἴτε ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, εἴτε ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α. Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει τὸ μῆκος τῆς εὐθείας παρίσταται κατὰ συνθήκην ὡς θετικόν, φέρον τὸ σημεῖον +, ἐν τῇ δευτέρᾳ δὲ ὡς ἀρνητικόν, φέρον τὸ σημεῖον —. Καὶ ἐν γένει πᾶν μέρος τῆς εὐθείας λαμβανόμενον κατὰ τὴν φορὰν ΑΔ θεωρεῖται θετικόν (+), κατὰ δὲ τὴν ἀντίθετον ΑΖ ἀρνητικόν (—).

Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολλὰς δεδομένας τοιαύτας εὐθείας, ἔστω $+\alpha, -\beta, +\gamma$, θέτομεν αὐτὰς ἐπὶ ἀπεριορίστου εὐθείας καὶ ἀπό τινος σημείου αὐτῆς Α ὡς ἀρχῆς πάσας τὰς ὁμοειδεῖς, ἔστω τὰς θετικὰς $+\alpha$, καὶ $+\gamma$, κατὰ σειρὰν τὴν μίαν μετὰ τὴν ἄλλην πρὸς τὰ δεξιὰ (+) καὶ ἔπειτα ἀπὸ τοῦ ἄκρου Γ τῆς οὕτω ἀποτελεσθείσης εὐθείας ΑΓ ἀρχόμενοι θέτομεν ὁμοίως



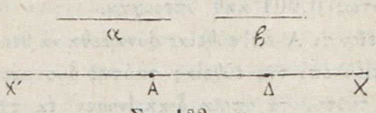
τὰς ἀρ- ἀλλ' ἀντιθέτως πάσας νητικάς, τὴν —β, τὸ μεταξὺ τῆς ἀρχῆς Α τῆς διατάξεως τῶν πρώτων καὶ τοῦ πέρατος τῆς διατάξεως τῶν δευτέρων Β

Σχ. 122. β

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

περιεχόμενον μέρος τῆς ἀπεριορίστου εὐθείας τὸ ΑΔ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων εὐθειῶν, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἢ μηδέν, καθ' ὅσον τὸ σημεῖον Δ κεῖται πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Α ἢ ἐπ' αὐτοῦ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν δύο εὐθειῶν α καὶ β ἀπολύτως λαμβανομένων, θέτομεν τὴν εὐθεῖαν α ἐπὶ τῆς ἀπεριορίστου εὐθείας ΑΧ οὕτως, ὥστε νὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΑΔ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ Α, ἔπειτα θέτομεν τὴν β ἐπὶ τῆς ΔΑ ἀντιθέτως ἐκ τοῦ Δ



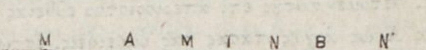
Σχ. 122. γ

πρὸς τὸ Α, ὁπότε τὸ ἕτερον ἄκρον τῆς εὐθείας β θὰ πέσῃ ἢ πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἢ ἐπ' αὐτοῦ τοῦ Α καὶ ἡ διαφορὰ θὰ εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ ἢ μηδέν.

Ἐὰν δὲ αἱ δύο δεδομέναι εὐθεῖαι α καὶ β φέρωσι σημεῖα, θέτομεν τὴν πρώτην ἐπὶ τῆς ἀπεριορίστου εὐθείας ἀπὸ τοῦ Α πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ αὐτοῦ, καθ' ὅσον ἡ εὐθεῖα α φέρει θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν σημεῖον, καὶ ἐπὶ ταύτης τὴν β ἀντιθέτως τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον αὕτη φέρει, ὁπότε τὸ ἕτερον ἄκρον αὐτῆς θὰ πέσῃ ἢ πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἢ ἐπὶ τοῦ Α, καὶ ἡ διαφορὰ θὰ εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ ἢ μηδέν.

Λῆμμα

138. Ἐὰν ἐπὶ ἀπεριορίστου εὐθείας ληφθῶσι δύο σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Β, θὰ ὑπάρχῃ ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης σημεῖον καὶ ἓν



Σχ. 122. δ

μόνον, τοῦ ὁποίου τὰ ἀποστήματα ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β θὰ ἔχωσι σταθερὸν λόγον δεδομένον. Ὁ δεδομένος λόγος δύναται νὰ εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικός, μικρότερος ἢ μεγαλείτερος τῆς μονάδος.

Ἔστω Ι τὸ μέσον τῆς ΑΒ, λ τὸ ἀπόστημα τῶν σημείων Α καὶ Β, καὶ $\frac{\alpha}{\beta}$ ὁ δεδομένος λόγος μικρότερος τῆς μονάδος 1 καὶ ἀπολύτως λαμβανόμενος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ μεταξὺ σημεῖον Μ, κείμενον ἀναγκαίως πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Ι, (διότι $\frac{AM}{BM}<1$) εἶναι τὸ πληροῦν τοὺς ἀνωτέρω ὅρους, θὰ ἔχωμεν·

$$\frac{MA}{MB}=\frac{\alpha}{\beta} \text{ καὶ } MA+MB=\lambda \text{· ἑπομένως}$$

$$\frac{MA}{MA+MB}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \text{ καὶ } MA=\frac{\alpha(MA+MB)}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha.\ \lambda}{\alpha+\beta}$$

ἐξ οὗ ὁρίζεται ἡ θέσις τοῦ σημείου Μ μεταξὺ τοῦ Α καὶ Β.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐκτὸς τῆς ΑΒ καὶ ἀναγκαίως πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Α κατὰ τὸ Μ′ (διότι $\alpha<\beta$), πληροῖ προσέτι τοὺς ὅρους τοῦ ζητήματος, καὶ θέλομεν ἔχει

$$\frac{M'A}{M'B}=\frac{\alpha}{\beta} \text{ καὶ } M'B-M'A=\lambda.$$

$$\text{ἑπομένως } \frac{M'A}{M'B-M'A}=\frac{\alpha}{\beta-\alpha} \text{ καὶ } M'A=\frac{\alpha.\ \lambda}{\beta-\alpha}$$

ἐξ οὗ ὁρίζεται μία καὶ μόνη θέσις τοῦ Μ′ ἐκτός.

Καταφαίνεται λοιπὸν ἐκ τούτου ὅτι δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ ἀρκοῦσι πρὸς πλήρωσιν τῆς προτεθείσης συνθήκης, ἀλλ᾿ ἐὰν τὰ τμήματα ΜΑ καὶ ΜΒ θεωρηθῶσι φέροντα σημεῖα, ταῦτα εἶναι ἀντιθέτων σημείων, ἐνῷ τὰ τμήματα Μ′Α καὶ Μ′Β ἔχουσι τὰ αὐτὰ σημεῖα· καὶ οἱ δύο λόγοι οἱ ἀναφερόμενοι πρὸς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ εἶναι ἴσοι ἀλλ᾿ ἀντιθέτων σημείων, καὶ θὰ ἔχωμεν οὕτω

$$\frac{MA}{MB}=-\frac{\alpha}{\beta}, \qquad \frac{M'A}{M'B}=\frac{\alpha}{\beta}$$

Συλλογιζόμενοι τελείως κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον βλέπομεν ὅτι, τοῦ δεδομένου λόγου $\frac{\alpha'}{\beta'}$ ὄντος μεγαλειτέρου τῆς μονάδος, δύο σημεῖα Ν καὶ Ν′ ληφθέντα πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ μέσου Ι τῆς ΑΒ, τὸ ἓν ἐντὸς καὶ τὸ ἕτερον ἐκτὸς τῆς ΑΒ, πληροῦσι τοὺς ὅρους τοῦ ζητήματος,, ἐὰν ὁ λόγος $\frac{\alpha'}{\beta'}$ ληφθῇ ἀπολύτως· ἀλλ᾿ ἐὰν ληφθῶσιν ὑπ᾿ ὄψιν τὰ σημεῖα τῶν τμημάτων, ὁ μὲν λόγος τῶν ἀποστημάτων τοῦ Ν ἀπὸ τῶν Α καὶ Β εἶναι ἀρνητικός, ὁ δὲ τῶν ἀποστημάτων τοῦ Ν′ θετικὸς (διότι ἀφ᾿ ἑνὸς τὸ μὲν ΑΝ εἶναι ἀρνητικὸν τὸ δὲ ΒΝ θετικόν, ἐξ ἄλλου δὲ τό τε ΑΝ′ καὶ τὸ ΒΝ′ εἶναι ἀρνητικά)· θέλομεν ἔχει λοιπόν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{NA}{NB}=\frac{\alpha'}{\beta'} \quad \text{καὶ} \quad NA=\frac{\lambda.\ \alpha'}{\alpha'+\beta'}$$

$$\frac{N'A}{N'B}=\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{καὶ} \quad N'A=\frac{\lambda\alpha'}{\alpha'-\beta'}$$

Πόρισμα.

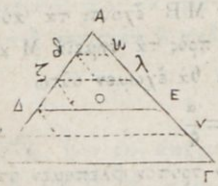
Ἐὰν δὲν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὰ σημεῖα, θὰ ἔχωμεν ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει $\left(\frac{\alpha}{\beta}<1\right)$ τὴν ἀναλογίαν

$$(1) \qquad \frac{MA}{MB}=\frac{M'A}{M'B}, \quad \text{ἥτις καλεῖται } \textit{ἁρμονική}.$$

Θεώρημα

139. *Πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τριγώνου διαιρεῖ τὰς δύο ἄλλας εἰς μέρη ἀνάλογα* (Σχ. 102).

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ δύο τμήματα ΑΔ καὶ ΔΒ ἔχουσι κοινὸν μέτρον, καὶ ὅτι τὸ κοινὸν τοῦτο μέτρον περιέχεται ἐν μὲν τῇ ΑΔ 3 φοράς, ἐν δὲ τῇ ΔΒ 2ίς· ὁπότε θέλομεν ἔχει· $\frac{A\Delta}{B\Delta}=\frac{3}{2}$



(Σχ. 123)

Διὰ τῶν σημείων θ, ζ, μ φέρομεν εὐθείας παραλλήλους τῷ ΔΕ. Τὰ τμήματα Ακ, κλ, λΕ, Εν καὶ νΓ, εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ ΑΓ ὑπὸ τῶν παραλλήλων τούτων εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα. Διότι, ἂν π.χ. φέρωμεν τὴν ΖΟ παράλληλον τῇ ΑΓ καὶ παραβάλωμεν τὰ τρίγωνα Αθκ καὶ ΔΖΟ, εὑρίσκομεν ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς ΑΘ καὶ ΖΔ ἴσας ἐκ κατασκευῆς καὶ τὰς εἰς ταύτας προσκειμένας γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ἐξάγομεν ὅτι Ακ=ΖΟ. Ἀλλὰ τὸ σχῆμα ΖΟΕλ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἐξ οὗ λΕ=ΖΟ· ἄρα καὶ Ακ=λΕ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύεται ὅτι ὅλα τὰ τμήματα τῆς ΑΓ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα· ἐπομένως τὸ τμῆμα Ακ δύναται νὰ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θεωρηθῇ ὡς κοινὸν μέτρον περιεχόμενον ἐν μὲν τῇ ΑΕ 3ίς, ἐν δὲ τῇ ΕΓ 2ίς· ἄρα θὰ ἔχωμεν

$\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=\frac{3}{2}$ ἔχομεν δὲ προηγουμένως καὶ

$\frac{ΑΔ}{ΔΒ}=\frac{3}{2}$· ἄρα $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=\frac{ΑΔ}{ΔΒ}$· ἢ ΑΔ:ΔΒ=ΑΕ:ΕΓ (1)

Ἀλλ' ἐκ τῆς Ἀριθμ. γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων ἀναλογίας ἔχει λόγον πρὸς τὸν δεύτερον, ὃν λόγον ἔχει καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν τέταρτον·

ἐπομένως $\frac{ΑΔ+ΔΒ}{ΔΒ}=\frac{ΑΕ+ΕΓ}{ΕΓ}$ ἢ $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΔΒ}{ΕΓ}$·

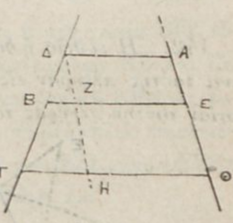
Ἐὰν δὲ μεταθέσωμεν τοὺς μέσους τῆς ἀναλογίας (1), λαμβάνομεν ΑΔ: ΑΕ=ΔΒ: ΕΓ.

Ἐὰν δὲ κάμωμεν τοὺς ἄκρους μέσους καὶ τοὺς μέσους ἄκρους (1), θὰ ἔχωμεν.

ΔΒ:ΑΔ=ΕΓ:ΑΕ· καὶ ἐκ ταύτης $\frac{ΔΒ+ΑΔ}{ΑΔ}=\frac{ΕΓ+ΑΕ}{ΑΕ}$ ἢ $\frac{ΑΒ}{ΔΑ}=\frac{ΓΑ}{ΕΑ}$

Πόρισμα.

140. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ σειρᾶς παραλλήλων εὐθειῶν, τέμνωνται εἰς μέρη ἀνάλογα ἤτοι τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων τούτων περιεχόμενα μέρη τῶν εὐθειῶν εἶναι ἀνάλογα.*



(Σχ. 104).

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ΔΓ καὶ ΑΘ τεμνόμεναι ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΑΔ,ΒΕ,ΓΘ. Ἄς φέρωμεν τὴν ΔΗ παράλληλον τῇ ΑΘ· ἐκ τοῦ τριγώνου ΓΔΗ θὰ ἔχομεν

$\frac{ΔΒ}{ΒΓ}=\frac{ΔΖ}{ΖΗ}$. Ἀλλ' ΔΖ=ΑΕ καὶ ΖΗ=ΕΘ (§ 68)

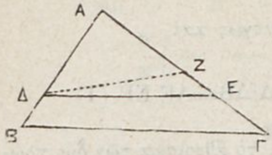
ἐπομένως $\frac{ΔΒ}{ΒΓ}$ $\frac{ΑΕ}{ΕΘ}$· Προσέτι θέλομεν

ἔχει καὶ $\frac{ΔΓ}{ΔΒ}=\frac{ΑΘ}{ΑΕ}$ καὶ $\frac{ΔΓ}{ΒΓ}=\frac{ΑΘ}{ΕΘ}$·

141. Ἀντιστρόφως. *Ἐὰν εὐθεῖα διαιρῇ τὰς δύο πλευρὰς τριγώ-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νου εἰς μέρη ἀνάλογα, αὕτη θὰ εἶναι παράλληλος τῇ τρίτῃ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου (Σχ. 125).



(Σχ. 125).

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ΔΕ διαιρεῖ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς μέρη ἀνάλογα, ἤτοι $\frac{ΑΔ}{ΔΒ}=\frac{ΑΕ}{ΕΓ}$, ἡ ΔΕ θὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ.

Ἂς ὑποθέσωμεν τὸ ἐναντίον, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΖ παράλληλος τῇ ΒΓ· τότε θέλομεν ἔχει

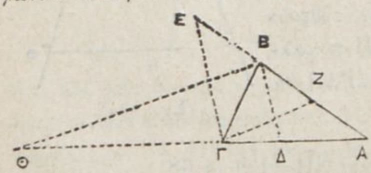
$\frac{ΑΔ}{ΒΔ}=\frac{ΑΖ}{ΖΓ}$· ἀλλ' ἐξ ἄλλου ἔχομεν $\frac{ΑΔ}{Β}=\frac{ΑΕ}{ΕΓ}$·

ἑπομένως καὶ $\frac{ΑΖ}{ΖΓ}=\frac{ΑΕ}{ΕΓ}$ ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη εἶναι ψευδής, διότι καὶ ΑΖ$<$ΑΕ καὶ ΓΖ$>$ΕΓ· ἄρα ἡ διὰ τοῦ σημείου Δ διερχομένη παράλληλος τῇ ΒΓ πάντως θὰ διέρχηται καὶ διὰ τοῦ Ε.

Σημείωσις. Ἐὰν ἐν τῷ ἀνωτέρω θεωρήματι (139) τὰ τμήματα ΑΔ καὶ ΔΒ δὲν ἔχωσι κοινὸν μέτρον, ἐφαρμόζομεν τὴν ἐν § 105 μέθοδον καὶ ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ πρότασις πάντοτε ἀληθεύει.

Θεώρημα.

142. *Ἡ εὐθεῖα ἡ διχοτομοῦσα γωνίαν τριγώνου διαιρεῖ τὴν ἀπέναντι ταύτης πλευρὰν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰς περιεχούσας τὴν γωνίαν ταύτην πλευρὰς τοῦ τριγώνου* (Σχ. 126).



Σχ. 126.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΒΓ ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει $\frac{ΑΔ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$.

Διὰ τοῦ σημείου Γ ἂς φέρωμεν τὴν ΓΕ παράλληλον τῇ ΒΔ μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν προσεκβολὴν τῆς ΑΒ εἴς τι σημεῖον Ε.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΓΕ θέλομεν ἔχει (§ 139) $\frac{ΑΔ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΒΕ}$· (1)

Ἀλλὰ τοῦ τριγώνου ΓΒΕ ἡ μὲν γωνία ΒΓΕ εἶναι ἴση τῇ ΓΒΔ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΒΔ καὶ ΕΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΓ· ἡ δὲ γωνία ΓΕΒ εἶναι ἴση τῇ ΔΒΑ ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν αὐτῶν παραλλήλων τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΕΑ, ἤτοι γων. ΕΓΒ=γων. ΓΒΔ καὶ γων ΓΕΒ=γων. ΔΒΑ· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως γων. ΓΒΔ=γων. ΔΒΑ· ἄρα καὶ γων. ΕΓΒ=γων. ΓΕΒ· ἐπομένως τὸ τρίγωνον ΕΓΒ εἶναι ἰσοσκελές, καὶ θέλομεν ἔχει ΒΓ=ΒΕ· καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἰσότητι (1) τὴν ΒΕ διὰ τῆς ἴσης αὐτῇ ΒΓ λαμβάνομεν $\frac{ΑΔ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$.

143. *Ἡ διχοτομοῦσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τριγώνου τέμνει τὴν ἀντικειμένην πρὸς ταύτην πλευρὰν εἰς σημεῖον, τοῦ ὁποίου τὰ ἀποστήματα ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς ταύτης εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς πλευρὰς τὰς περιεχούσας τὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου τὴν ἐφεξῆς πρὸς τὴν διχοτομηθεῖσαν* (Σχ. 126).

Ἃς θεωρήσωμεν τὴν ἐκτὸς γωνίαν ΓΒΕ, καὶ ἃς φέρωμεν τὴν διχοτόμον ταύτης τὴν ΒΘ. Θ' ἀποδείξωμεν ὅτι θὰ εἶναι $\frac{ΘΑ}{ΘΓ}=\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$.

Διὰ τοῦ σημείου Γ ἃς φέρωμεν τὴν ΓΖ παράλληλον τῇ ΒΘ ἐπεκτείνοντες ταύτην μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν πλευρὰν ΑΒ.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΘ θέλομεν ἔχει (§ 139) $\frac{ΘΑ}{ΘΓ} = \frac{ΑΒ}{ΒΖ}$ (2)

ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΓΒΖ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἡ μὲν γωνία ΒΓΖ εἶναι ἴση τῇ ΓΒΘ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΘΒ καὶ ΓΖ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΓ· ἡ δὲ γωνία ΒΖΓ εἶναι ἴση τῇ ΕΒΘ ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν αὐτῶν παραλλήλων τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΕΑ· ἤτοι γων.ΒΓΖ=γων.ΓΒΘ καὶ γων.ΒΖΓ=γων.ΕΒΘ· ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς γων. ΓΒΘ=γων. ΕΒΘ· ἄρα καὶ γων. ΒΓΖ=γων. ΒΖΓ.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι καὶ ΒΓ=ΒΖ· ἀντικαθιστῶντες δὲ ἐν τῇ ἰσότητι (2) τὴν ΒΖ διὰ τῆς ἴσης αὐτῇ ΒΓ λαμβάνομεν $\frac{ΘΑ}{ΘΓ}=\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$.

144. Καὶ αἱ ἀντίστροφοι τῶν δύο προηγουμένων προτάσεων ἀληθεύουσιν. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Δ, καθ' ὃ ἡ ΑΓ χωρίζεται εἰς δύο τμήματα ἀνάλογα πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΒ, εἶναι ἓν καὶ μόνον (§ 138), ἡ εὐθεῖα ΒΔ, ἥτις ὁρίζει σημεῖον πληροῦν τὴν συνθήκην

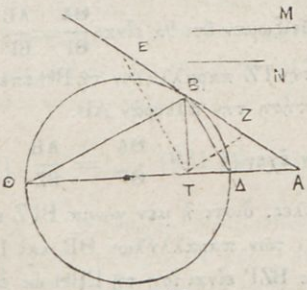
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ταύτην συμπίπτει μετὰ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν ΓΒΑ εὐθείας.

Ὁμοίως, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Θ, κείμενον ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς ΑΓ, οὕτως ὥστε τὰ ἀποστήματα αὐτοῦ ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Γ ἀποτελοῦσι λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΒ, εἶναι ἓν καὶ μόνον, ἡ εὐθεῖα ΒΘ, ἥτις ὁρίζει σημεῖον, πληροῦν τὴν συνθήκην ταύτην, συμπίπτει μετὰ τῆς διχοτομούσης τὴν ἐκτὸς γωνίαν ΓΒΕ εὐθείας.

*Θεώρημα.

145. *Ὁ Γεωμετρικὸς τόπος πάντων τῶν σημείων ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων τὰ ἀποστήματα ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων ἔχουσι δεδομένον λόγον, εἶναι περιφέρεια κύκλου* (Σχ. 127).



Σχ. 127.

Ἔστωσαν τὰ δύο δεδομένα σημεῖα Α καὶ Γ καὶ δύο εὐθεῖαι Μ καὶ Ν ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας δεδομένον λόγον. Ἂς ὁρίσωμεν ἐπὶ τῆς ΑΓ σημεῖόν τι Δ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἔχωμεν $\frac{ΑΔ}{ΔΓ}=\frac{Μ}{Ν}$· τὸ σημεῖον Δ θὰ εἶναι σημεῖον τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου. Ἂς ὁρίσωμεν ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς ΑΓ σημεῖόν τι Θ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἔχωμεν $\frac{ΘΑ}{ΘΓ} = \frac{Μ}{Ν}$· τὸ σημεῖον Θ θὰ εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου γεωμετρικοῦ τόπου.

Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι τὸ σημεῖον Β τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἓν ἐκ τῶν σημείων τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου· τότε θέλομεν ἔχει $\frac{ΑΒ}{ΓΒ}=\frac{Μ}{Ν}$.

Ἐξ ἄλλου δέ, ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ ΒΔ θὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΒΓ (144), καὶ ἡ ΘΒ θὰ εἶναι διχοτόμος τῆς ἐκτὸς γωνίας ΓΒΕ (§ 144)· αἱ εὐθεῖαι ΒΔ καὶ ΒΘ οὖσαι διχοτόμοι παραπληρωματικῶν γωνιῶν θ' ἀποτελῶσιν ὀρθὴν γωνίαν τὴν ΘΒΔ, καὶ ἑπομένως, ἂν γράψωμεν περιφέρειαν ἔχουσαν διάμετρον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὴν ΘΔ, αὐτὴ θὰ διέρχηται διὰ τοῦ σημείου Β. *Πάντα λοιπὸν τὰ σημεῖα τοῦ τόπου θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας ταύτης.*

Ὑπολείπεται ἔτι νὰ δείξωμεν ὅτι πάντα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ταύτης εἶναι σημεῖα τοῦ προτεθέντος γεωμετρικοῦ τόπου. Ἂς λάβωμεν τυχὸν σημεῖον Β ἐπὶ τῆς περιφερείας, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΘΔ. Ἂς ἑνώσωμεν δι' εὐθείας τὰ σημεῖα Δ καὶ Θ, καὶ ἂς σχηματίσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἂς φέρωμεν δὲ διὰ τοῦ σημείου Γ τὴν ΓΕ παράλληλον τῇ ΒΔ καὶ τὴν ΓΖ παράλληλον τοῦ ΒΘ. Αἱ εὐθεῖαι αὗται θὰ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας (57,γ'), διότι ἡ γωνία ΔΒΘ εἶναι ὀρθή, ἐπομένως ἡ ἐπὶ τῆς ΕΖ ὡς διαμέτρου γραφομένη περιφέρεια διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Γ. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΓΕ δίδει $\frac{ΑΔ}{ΓΔ}=\frac{ΑΒ}{ΒΕ}$, τὸ δὲ τρίγωνον ΑΒΘ δίδει $\frac{ΘΑ}{ΘΓ}=\frac{ΑΒ}{ΒΖ}$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $\frac{ΑΔ}{ΓΔ}=\frac{ΑΘ}{ΓΘ}$, ἕπεται ὅτι $\frac{ΑΒ}{ΒΖ}=\frac{ΑΒ}{ΒΕ}$· ἄρα ΒΖ=ΒΕ· τὸ σημεῖον λοιπὸν Β εἶναι τὸ κέντρον περιφερείας διαγραφομένης ἐπὶ τῆς ΕΖ ὡς διαμέτρου· ἐπομένως θὰ ἔχωμεν ΒΕ=ΒΓ, καὶ ἡ ἰσότης $\frac{ΑΔ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΒΕ}$ γίνεται $\frac{ΑΔ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΓΒ}=\frac{Μ}{Ν}$. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι τὸ σημεῖον Β εἶναι σημεῖον τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου· καὶ

Ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι περιφέρεια γραφομένη ἐπὶ τῆς ΔΘ ὡς διαμέτρου, τὰ δὲ σημεῖα Δ καὶ Θ τῆς εὐθείας ΑΓ εἶναι σημεῖα τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου.

Β'. ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑΣ

146. Δύο πολύγωνα ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν λέγονται *ὅμοια*, ἐὰν ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, καὶ περιεχομένας ὑπὸ πλευρῶν ἀναλόγων, αἵτινες (ἀνάλογοι πλευραὶ) εἶναι διατεθειμέναι κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

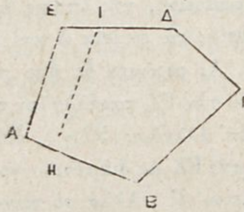
Καλοῦνται *ὁμόλογοι πλευραὶ* ἢ κορυφαὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς δύο ὅμοια πολύγωνα· οὕτως αἱ κορυφαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ὁμόλογα σημεῖα· αἱ διαγώνιοι αἵτινες ἑνώνουσι τὰς ὁμολόγους κορυφὰς εἶναι εὐθεῖαι ὁμόλογοι.

Καλεῖται *λόγος ὁμοιότητος* δύο ὁμοίων πολυγώνων ὁ σταθερὸς λόγος δύο ὁμολόγων πλευρῶν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ μεταβάλωμεν τὸν λόγον τῶν πλευρῶν πολυγώνου τινὸς χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὰς γωνίας αὐτοῦ.

Οὕτω, δεδομένου τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ (Σχ. 128), ἐὰν φέρωμεν τὴν ΙΗ παράλληλον τῇ ΑΕ σχηματίζεται νέον πολύγωνον τὸ ΙΗΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει ἴσας γωνίας πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ, ἀλλ' ὁ λόγος τῶν πλευρῶν δὲν εἶναι ὁ αὐτός, διότι αἱ πλευραὶ ΔΕ,ΕΑ καὶ ΑΒ μετεβλήθησαν, ἐνῷ αἱ ΔΓ,ΒΓ ἔμειναν ἀμετάβλητοι. Δυνάμεθα ὁμοίως νὰ μεταβάλωμεν τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου χωρὶς αἱ πλευραὶ νὰ μεταβληθῶσι· τοῦτο δὲ γίνεται, ἐὰν κάμωμεν, ὥστε δύο μὴ προσκείμεναι κορυφαὶ νὰ πλησιάσωσιν ἢ ν' ἀπομακρυνθῶσιν ἀπ' ἀλλήλων. Ἐκ τῆς παρατηρήσεως ταύτης ἐξάγομεν ὅτι, ἐὰν θεωρήσωμεν δύο οἱαδήποτε πολύγωνα, ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν, καὶ ἀντιστρόφως.



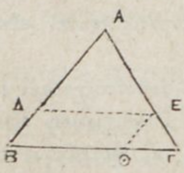
Σχ. 128.

Τοῦτο ὅμως δὲν ἐφαρμόζεται εἰς τὰ τρίγωνα, ὡς θὰ ἴδωμεν ἐφεξῆς.

Λῆμμα

146. ***Ἐὰν τμήσωμεν τρίγωνον δι' εὐθείας παραλλήλου μιᾷ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, τὸ σχηματιζόμενον νέον τρίγωνον καὶ τὸ δοθὲν εἶναι ὅμοια.***

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ἂς φέρωμεν τὴν ΔΕ παράλληλον τῇ πλευρᾷ ΒΓ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ ἔχουσι προφανῶς τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ, θέλομεν ἔχει $\frac{AB}{A\Delta}=\frac{A\Gamma}{AE}$. Ἐὰν δὲ φέρωμεν καὶ τὴν ΕΘ παράλληλον τῇ ΑΒ, θέλομεν ἔχει ὁμοίως $\frac{A\Gamma}{AE}=\frac{B\Gamma}{B\Theta}$· ἀλλὰ τὸ σχῆμα ΔΕΘΒ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἐπομένως ΘΒ=ΔΕ· ἄρα $\frac{AB}{A\Delta}=\frac{A\Gamma}{AE}=\frac{B\Gamma}{\Delta E}$.



Σχ. 129.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

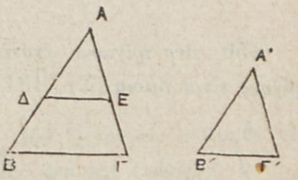
Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ, ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια. (§ 146).

Θεώρημα.

148. *Δύο τρίγωνα ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ εἶναι ὅμοια.* (Σχ. 130).

Ἔστωσαν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχοντα τὴν γωνίαν Α ἴσην τῇ Α' τὴν Β ἴσην τῇ Β' καὶ τὴν Γ ἴσην τῇ Γ'.

Ἄς λάβωμεν ΑΔ=Α'Β' καὶ ἄς φέρωμεν τὴν ΔΕ παράλληλον τῇ ΒΓ. Τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (146)· καὶ ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἴσα.



Σχ. 130.

Τῷόντι ἡ γωνία Α εἶναι ἴση τῇ Α' ἐξ ὑποθέσεως· ἡ γωνία Δ, οὖσα ἴση τῇ Β ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, εἶναι ἴση καὶ τῇ γωνίᾳ Β'· καὶ τέλος ἡ πλευρὰ ΑΔ ἴση τῇ Α'Β' ἐκ κατασκευῆς. Ἑπομένως τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΕ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἴσα κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν τοῦ ἐν §. 30 θεωρήματος.

Θεώρημα.

149. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην ὑπὸ πλευρῶν ἀναλόγων, εἶναι ὅμοια.*

Ἔστωσαν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ', ἔχοντα τὴν γωνίαν Α ἴσην τῇ Α' καὶ τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν $\frac{AB}{A'B'}=\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$ (1)· λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοια.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ΑΒ λάβωμεν ΑΔ ἴσον Α'Β', καὶ ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρωμεν τὴν ΔΕ παράλληλον τῇ ΒΓ, τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΒΓ (147)· ἑπομένως $\frac{AB}{A\Delta}=\frac{A\Gamma}{AE}$ (2).

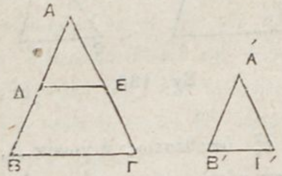
Ἐξ ἄλλου δὲ ἔχομεν δεδομένην τὴν ἀναλογίαν $\frac{AB}{A'B'}=\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀλλὰ $\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΑΒ}{Α'Β'}$ (διότι ΑΔ=Α'Β')· ἄρα καὶ $\frac{ΑΓ}{ΑΕ} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}$ (3).
ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ (3) ἐξάγομεν ὅτι καὶ ΑΕ=Α'Γ'· ἐπομένως τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ Α'Β'Γ' ἔχοντα τὴν ΑΔ ἴσην τῇ Α'Β', τὴν ΑΕ ἴσην τῇ Α'Γ' καὶ τὴν γωνίαν Α=Α' εἶναι ἴσα. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ, ἔπεται ὅτι καὶ τὸ Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΒΓ.

Θεώρημα.

150. *Δύο τρίγωνα ἔχοντα τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους εἶναι ὅμοια* (Σχ. 131).



Σχ. 131.

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχοντα τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους, ἤτοι

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΓΑ}{Γ'Α'} \quad (1)$$

λέγομεν ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ τὴν ΑΔ ἴσην τῇ Α'Β', καὶ ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρομεν τὴν ΔΕ παράλληλον τῇ ΒΓ, ὁπότε σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΔΕ ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ· ἐκ δὲ τῆς ὁμοιότητος τούτων θέλομεν ἔχει

$$\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΒΓ}{ΔΕ} = \frac{ΓΑ}{ΕΑ} \quad (2)$$

Αἱ δύο σειραὶ τῶν ἴσων λόγων (1) καὶ (2) ἔχουσι τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν ἴσους· καὶ οἱ παρονομασταὶ δὲ ΑΔ καὶ Α'Β' τῶν πρώτων λόγων εἶναι ἴσοι· ἄρα καὶ Β'Γ'=ΔΕ καὶ Γ'Α'=ΕΑ· ἐπομένως τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ Α'Β'Γ' ἔχοντα τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν εἶναι ἴσα, καὶ τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοιον τῇ ΑΒΓ (148).

Παρατήρησις.

151. Τὰ ἐν §§ 148 καὶ 150 θεωρήματα δεικνύουσιν ὅτι *εἰς τὰ τρίγωνα ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν συνεπάγεται τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευ-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρῶν· καὶ ἀντιστρόφως, *ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν συνεπάγεται τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν*. Ἑπομένως, ἵνα δείξωμεν ὅτι δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ἢ ὅτι ἔχουσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, ἢ ὅτι ἔχουσι τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους.

Ἐπειδὴ δέ, ὅταν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, θὰ ἔχωσι καὶ τὴν τρίτην ἴσην, ἕπεται ὅτι *δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ἐὰν ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ*.

Ἐφεξῆς δὲ ἐκθέτομεν καὶ ἕτερα ἁπλᾶ χαρακτηριστικὰ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων.

Θεώρημα.

152. *Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ἐὰν ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἢ καθέτους ἐπ' ἀλλήλας ἑκάστην ἑκάστῃ.*

Εἴδομεν (57, 58) ὅτι δύο γωνίαι, ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἢ καθέτους ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί. Ἄς παραστήσωμεν ἤδη τὰς γωνίας τῶν δύο προτεθέντων τριγώνων δι' Α,Β,Γ καὶ Α',Β',Γ'.

Αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων δύνανται νὰ ἔχωσι μόνον τὰς ἑξῆς πρὸς ἀλλήλας σχέσεις.

1) $A+A'=2$ὀρθ.	$B+B'=2$ὀρθ.	$\Gamma+\Gamma'=2$ὀρθ.
2) $A+A'=2$ὀρθ.	$B+B'=2$ὀρθ.	$\Gamma=\Gamma'$
3) $A+A'=2$ὀρθ.	$B=B'$	$\Gamma=\Gamma'$
4) $A=A'$	$B=B'$	$\Gamma=\Gamma'$

Ἡ πρώτη ὑπόθεσις καὶ ἡ δευτέρα ἀπορρίπτονται, καθ' ὅτι τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν τῶν δύο δεδομένων τριγώνων θὰ ὑπερβαίνῃ τὰς 4 ὀρθάς.

Ἐκ τῆς τρίτης ὑποθέσεως ἕπεται ὅτι καὶ ἡ γωνία Α εἶναι ἴση τῇ Α' (ὅτε τὰ τρίγωνα θὰ εἶναι ὀρθογώνια), καὶ ἑπομένως ἡ τετάρτη ὑπόθεσις περιλαμβάνουσα καὶ τὴν τρίτην εἶναι ἡ μόνη ἀληθής, ἤτοι τὰ τρίγωνα θὰ ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ καὶ θὰ εἶναι ὅμοια. (148).

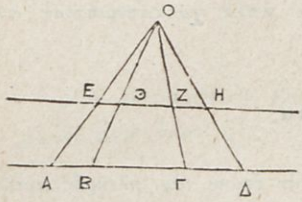
Παρατήρησις. *Εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα αἱ ἀνάλογοι πλευραὶ κεῖνται πάντοτε ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν.* Ἐν τῇ τελευταίᾳ ὑποθέσει

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

(152) αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι αἱ παράλληλοι ἢ κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

Θεώρημα.

153. *Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ σειρᾶς εὐθειῶν, ἀρχομένων ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.* (Σχ. 132).



Σχ. 132.

Ἔστωσαν αἱ δύο παράλληλοι ΑΔ καὶ ΕΗ τεμνόμεναι ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ,ΟΔ.

Τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΕΘ εἶναι ὅμοια (§ 147), καὶ ἐπομένως θὰ ἔχωμεν $\frac{ΟΒ}{ΟΘ} = \frac{ΑΒ}{ΕΘ}$. (1)

Προσέτι ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΟΒΓ καὶ ΟΘΖ ἔχομεν $\frac{ΟΒ}{ΟΘ} = \frac{ΒΓ}{ΘΖ}$ (2).

Καὶ ἐπειδὴ τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἰσοτήτων (1 καὶ 2) εἶναι ἴσα, καὶ τὰ δεύτερα μέλη θὰ εἶναι ἴσα, ἤτοι $\frac{ΑΒ}{ΕΘ} = \frac{ΒΓ}{ΘΖ}$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι καὶ $\frac{ΒΓ}{ΘΖ} = \frac{ΓΔ}{ΖΗ}$.

Ἀντιστρόφως. *Ἐὰν δύο παράλληλοι ΑΔ καὶ ΕΗ τέμνωνται ἀναλόγως ὑπὸ σειρᾶς τεμνουσῶν ΑΕ, ΒΘ. ΓΖ. ΔΗ, αἱ τέμνουσαι αὗται διέρχονται πᾶσαι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου* Ο.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΕ καὶ ΓΖ συναντῶνται εἰς ἓν σημεῖον Ο· ἔχομεν ἐξ ὑποθέσεως $\frac{ΑΒ}{ΕΘ} = \frac{ΒΓ}{ΘΖ}$.

Ἂς φέρωμεν τὴν ΟΘ· ἡ εὐθεῖα αὕτη προσεκβαλλομένη θὰ τμήσῃ τὴν ΑΓ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν τμημάτων ΕΘ καὶ ΘΖ κατὰ τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα· ὅθεν ὡς ἡ ΑΓ διῃρέθη ἤδη ὁμοίως κατὰ τὸ σημεῖον Β· ἐπομένως ἡ ΟΘ προσεκβαλλομένη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Β (138), τουτέστι τὰ τρία σημεῖα Β, Θ καὶ Ο κεῖνται ἐπ' εὐθείας, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι καὶ ΔΗ προσεκβαλλομένη διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ο.

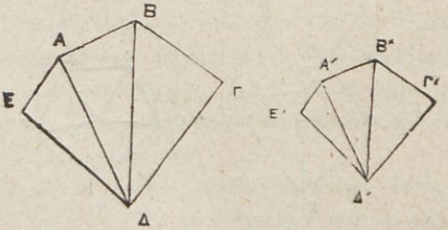
Τὸ (Σχ. 132) ὑποτίθησι τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως τῶν τε-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μνουσῶν κείμενον ἐκτὸς τῶν παραλλήλων, ἀλλὰ καὶ ἐὰν τὸ σημεῖον τοῦτο ἔκειτο μεταξὺ τῶν παραλλήλων, ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἡ αὐτή, μὲ μόνην τὴν παρατήρησιν ὅτι ἡ θέσις τῶν ἀναλόγων μερῶν ἤθελεν εἶναι ἀντίθετος ἐπὶ τῶν δύο παραλλήλων.

Θεώρημα.

154. *Δύο πολύγωνα, συντιθέμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων ὁμοίων ἓν πρὸς ἓν καὶ ὁμοίως κειμένων, εἶναι ὅμοια* (Σχ. 133).



Σχ. 133.

Ἔστωσαν ΑΕΔ καὶ Α'Ε'Δ', ΑΔΒ καὶ Α'Δ'Β', ΒΔΓ καὶ Β'Δ'Γ' δύο σειραὶ τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων.

Θ' ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν πρώτων τριγώνων εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ πολύγωνον Α'Β'Γ'Δ'Ε' τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν δευτέρων τριγώνων.

Κατὰ πρῶτον βλέπομεν ὅτι αἱ γωνίαι τῶν δύο πολυγώνων εἶναι ἴσαι εἴτε ὡς ὁμόλογοι γωνίαι τῶν ὁμοίων τριγώνων (ὡς ἡ Ε καὶ Ε', ἡ Γ καὶ Γ') εἴτε ὡς ἀθροίσματα πολλῶν ὁμολόγων γωνιῶν τῶν ὁμοίων τριγώνων (ὡς ἡ Α καὶ Α' κ.τ.λ.).

Ἀκολούθως βλέπομεν ὅτι καὶ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν δύο πολυγώνων εἶναι ἀνάλογοι· διότι τὰ ὅμοια τρίγωνα, θεωρούμενα ἀλληλοδιαδόχως, δίδουσιν

$$\frac{ΑΕ}{Α'Ε'}=\frac{ΕΔ}{Ε'Δ'}=\frac{ΑΔ}{Α'Δ'}=\frac{ΑΒ}{Α'Β'}=\frac{ΒΔ}{Β'Δ'}=\frac{ΒΓ}{Β'Γ'}=\frac{ΓΔ}{Γ'Δ'}$$

καὶ παραλείποντες τοὺς μεταξὺ λόγους, ἤτοι τὸν τρίτον καὶ πέμπτον, ἔχομεν

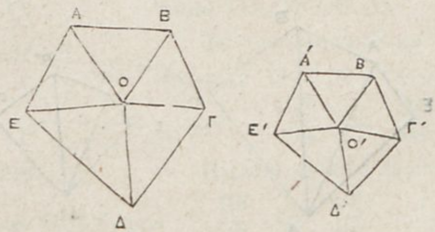
$$\frac{ΑΕ}{Α'Ε'}=\frac{ΕΔ}{Ε'Δ'}=\frac{ΑΒ}{Α'Β'}=\frac{ΒΓ}{Β'Γ'}=\frac{ΓΔ}{Γ'Δ'}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θεώρημα.

155. Ἀντιστρόφως. *Δύο ὅμοια πολύγωνα δύνανται πάντοτε νὰ χωρισθῶσιν εἰς ἴσον ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων* (Σχ. 134).

Ἔστωσαν τὰ δύο ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α′Β′Γ′Δ′Ε′, καὶ ἂς λάβωμεν τυχὸν σημεῖον Ο ἐντὸς τοῦ πρώτου πολυγώνου, καὶ ἂς ἑνώσωμεν τὸ σημεῖον τοῦτο μετὰ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, ὁπότε τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ χωρίζεται εἰς τρίγωνα.



Σχ. 134.

Ἂς ὁρίσωμεν δὲ ἐν τῷ δευτέρῳ πολυγώνῳ τὸ Ο′ ὁμόλογον πρὸς τὸ Ο. Πρὸς τοῦτο σχηματίζομεν εἰς τὸ σημεῖον Α′ ὡς κορυφὴν καὶ μὲ πλευρὰν Α′Β′ τὴν γωνίαν Β′Α′Ο′ ἴσην τῇ ΒΑΟ, καὶ εἰς τὸ σημεῖον Β′ ὡς κορυφὴν καὶ μὲ πλευρὰν τὴν Β′Α′ γωνίαν Α′Β′Ο′ ἴσην τῇ ΑΒΟ· τὸ τρίγωνον Α′Ο′Β′ εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΟΒ (148) καὶ τὸ σημεῖον Ο′ εἶναι ὁμόλογον τῷ Ο. Ἑνώνομεν ἔπειτα τὸ σημεῖον Ο′ μὲ τὰς λοιπὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου Α′Β′Γ′Δ′Ε′, καὶ οὕτω χωρίζεται καὶ τοῦτο εἰς τόσα τρίγωνα, ὅσα καὶ τὸ πρῶτον πολύγωνον. Ἐπειδὴ τὰ δύο πολύγωνα ὑπετέθησαν ὅμοια, ἡ γωνία Β τοῦ πρώτου εἶναι ἴση τῇ Β′ τοῦ δευτέρου. Ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς ἡ γωνία ΑΒΟ εἶναι ἴση τῇ Α′Β′Ο′· ἐπομένως καὶ ἡ γωνία ΟΒΓ εἶναι ἴση τῇ Ο′Β′Γ′. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν δύο πολυγώνων ἔχομεν $\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$· ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΟΒ καὶ Α′Ο′Β′ λαμβάνομεν $\frac{AB}{A'B'}=\frac{OB}{O'B'}$. ἄρα καὶ $\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{OB}{O'B'}$· ἐπομένως τὰ δύο τρίγωνα ΒΟΓ καὶ Β′Ο′Γ′, ἔχοντα τὴν γωνίαν ΟΒΓ=Ο′Β′Γ′ καὶ τὰς περιεχούσας πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύομεν ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ΓΟΔ καὶ Γ΄Ο΄Δ΄ εἶναι ὅμοια, ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ λοιπά.

Παρατήρησις

156. Πρέπει νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Ο ἠδύνατο νὰ συμπίπτῃ μετὰ μιᾶς τῶν κορυφῶν Α τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ, ὁπότε τὸ ὁμόλογον αὐτοῦ σημεῖον Ο΄ θὰ συνέπιπτε μετὰ τῆς κορυφῆς Α΄, καὶ τὰ πολύγωνα τότε διαιροῦνται ὑπὸ τῶν ὁμολόγων διαγωνίων τῶν διερχομένων διὰ τῶν κορυφῶν Α καὶ Α΄ εἰς τρίγωνα ὅμοια. Ἡ θεωρία αὕτη δεικνύει ὅτι εἰς δύο ὅμοια πολύγωνα ὁ *λόγος δύο ὁμολόγων διαγωνίων ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῆς ὁμοιότητος τῶν δύο τούτων πολυγώνων. Ὁ δὲ λόγος οὗτος εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν λόγον δύο ὁμολόγων εὐθειῶν τεμνομένων καθ᾽ οἱονδήποτε τρόπον ἐν τοῖς δυσὶ πολυγώνοις.*

Τὸ σημεῖον Ο δύναται ἀκόμη νὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ. (Σχ. 136). Τὸ αὐτὸ θεώρημα καὶ ἐνταῦθα ὑφίσταται μὲ μόνην τὴν παρατήρησιν, ὅτι τὸ πολύγωνον ἀποτελεῖται ἐκ σειρᾶς τριγώνων, τῶν ὁποίων ἄλλα μὲν προστίθενται, ἄλλα δὲ ἀφαιροῦνται. Οὕτω δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ (Σχ. 136) ἀποτελούμενον ἐκ τῶν τριγώνων ΣΑΒ, ΣΑΕ, ΣΕΔ, ἀφοῦ ἀφαιρεθῶσι τὰ τρίγωνα ΣΒΓ καὶ ΣΓΔ. Ἐν τούτοις ὁ λόγος δύο ὁμολόγων εὐθειῶν, π. χ. ΣΑ καὶ ΣΑ΄, θὰ εἶναι ὁ αὐτὸς τῆς ὁμοιότητος τῶν δύο πολυγώνων.

Θεώρημα.

157. Ὁ *λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων πολυγώνων ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῆς ὁμοιότητος τῶν πολυγώνων τούτων, ἤτοι τῷ λόγῳ δύο ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν.* (Σχ. 135).

Ἐπειδὴ τὰ δύο πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ εἶναι ὅμοια, θέλομεν ἔχει

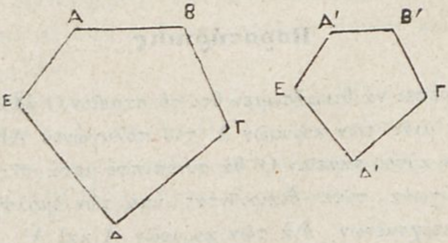
$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{Α΄Β΄}}=\frac{\text{ΒΓ}}{\text{Β΄Γ΄}}=\frac{\text{ΓΔ}}{\text{Γ΄Δ΄}}\quad\frac{\text{ΔΕ}}{\text{Δ΄Ε΄}}=\frac{\text{ΕΑ}}{\text{Ε΄Α΄}}$$

καὶ κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῆς Ἀριθμητικῆς ἐξάγομεν ἀμέσως

$$\frac{\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}+\text{ΓΔ}+\text{ΔΕ}+\text{ΕΑ}}{\text{Α΄Β΄}+\text{Β΄Γ΄}+\text{Γ΄Δ΄}+\text{Δ΄Ε΄}+\text{Ε΄Α΄}}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{Α΄Β΄}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁ ἀριθμητὴς τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἰσότητος παριστᾷ τὴν περίμετρον Π τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ, ὁ δὲ παρανομαστὴς τοῦ αὐτοῦ



Σχ. 135.

πρώτου μέλους παριστᾷ τὴν περίμετρον Π′ τοῦ δευτέρου πολυγώνου Α′Β′Γ′Δ′Ε′· θὰ ἔχωμεν λοιπὸν $\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{AB}{A'B'}$.

Θεώρημα.

158. *Ἐὰν σημεῖόν τι οἱονδήποτε ἑνώσωμεν δι' εὐθείας μὲ τὰς κορυφὰς πολυγώνου, καὶ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τούτων ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ,... λάβωμεν τὰ σημεῖα Α′, Β′, Γ′.... τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἔχωμεν τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων* $\frac{\Sigma A}{\Sigma A'} = \frac{\Sigma B}{\Sigma B'} = \frac{\Sigma \Gamma}{\Sigma \Gamma'} = \frac{\Sigma \Delta}{\Sigma \Delta'} = \frac{\Sigma E}{\Sigma E'}$, *τὰ δύο πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α′Β′Γ′Δ′Ε′ εἶναι ὅμοια.* (Σχ. 136).

Τῳόντι τὰ δύο τρίγωνα ΣΑΒ καὶ ΣΑ′Β′ ἔχοντα μίαν γωνίαν κοινὴν καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους εἶναι ὅμοια· ἄρα θέλομεν ἔχει $\frac{AB}{AB} = \frac{\Sigma B}{\Sigma B'}$ καὶ τὴν ΑΒ παράλληλον τῇ Α′Β′

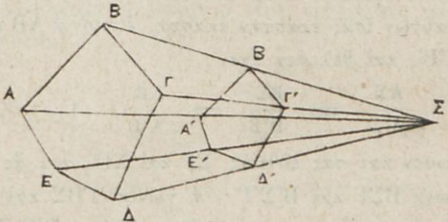
Παραβάλλοντες δὲ τὰ δύο τρίγωνα ΣΒΓ καὶ Σ′Β′Γ′, εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν τὴν ἰσότητα τῶν λόγων $\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Sigma B}{\Sigma B'}$ καὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ, Β′Γ′ παραλλήλους. Ἑπομένως καὶ

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} \ldots\ldots \text{ κ.τ.λ.}$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ δύο πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α′Β′Γ′Δ′Ε′ ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ διευθυνομένας κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, ἔχουσι πάσας αὐτῶν τὰς γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἔχουσι δὲ καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους, ἐπομένως εἶναι ὅμοια. Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη τὰ σημεῖα Α',Β',Γ' κείμενα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ κ.τ.λ. εἴτε ἐπὶ τῶν προσεκβολῶν αὐτῶν· τὸ σημεῖον Σ καλεῖται **κέντρον ὁμοιότητος**, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΣΑ, ΣΑ', ΣΒ, ΣΒ' κ.τ.λ. **ἐπιβατικαὶ ἀκτῖνες** τῶν σημείων Α, Α', Β, Β',.... Ὅταν τὰ δύο πολύγωνα κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Σ, λέγονται **ὁμοίως κείμενα** (Σχ.136), ὅταν δὲ ἑκατέρωθεν αὐτοῦ (Σχ.137), **ἀντιθέτως κείμενα**. Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει ἡ διάταξις καλεῖται **εὐθεῖα**, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ **ἀντίθετος**. Χάριν συντομίας καλοῦμεν τὴν τοιαύτην διάταξιν τῶν ὁμοίων πολυγώνων **ὁμοιοθεσίαν**. Τὰ δύο πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε' (Σχ. 136 καὶ 137) λέγονται **ὁμοιόθετα**, τὸ σημεῖον Σ **κέντρον** ὁμοιοθεσίας εὐθείας ἢ ἀντιθέτου, καὶ τὸν λόγον $\frac{\Sigma A}{\Sigma A'}$ **λόγον ὁμοιότητος** ἢ ὁμοιοθεσίας.



Σχ. 136.

Ὅταν δύο πολύγωνα εἶναι ὁμοιόθετα, αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνώνουσαι τὰ ὁμόλογα σημεῖα ἀνὰ δύο εἰσὶ παράλληλοι, καὶ ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῆς ὁμοιοθεσίας.

Ὅταν δύο πολύγωνα εἶναι ἀντιθέτως ὁμοιόθετα, ἵνα καταστῶσιν εὐθέως ὁμοιόθετα, ἀρκεῖ νὰ στραφῇ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν κατὰ 180^0 περὶ τὸ κέντρον τῆς ὁμοιοθεσίας.

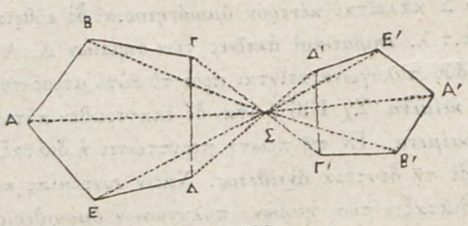
Μεταβάλλοντες συνεχῶς τὸν λόγον τῆς ὁμοιοθεσίας ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ ἀπείρου εὑρίσκομεν πάντα τὰ πολύγωνα, τὰ ὁμοιόθετα πρὸς δεδομένον πολύγωνον.

Θεώρημα.

159. Ἀντιστρόφως. *Ἐὰν δύο πολύγωνα ὅμοια ἔχωσι τὰς πλευ-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρὰς αὐτῶν παραλλήλους, αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνώνουσαι τὰς ὁμολόγους κορυφὰς διέρχονται πᾶσαι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κέντρον τῆς ὁμοιοθεσίας τῶν δύο πολυγώνων (Σχ. 137).



Σχ. 137.

Ἔστωσαν τὰ δύο πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε', τὰ ὁποῖα πληροῦσι τὰς προτεθείσας συνθήκας. Ἂς φέρωμεν τὰς εὐθείας ΑΑ' καὶ ΒΒ', καὶ ἔστω Σ τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως τῶν δύο τούτων εὐθειῶν· τὰ δύο τρίγωνα ΣΑΒ καὶ ΣΑ'Β' εἶναι ὅμοια ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῇ Α'Β', καὶ θέλομεν ἔχει

$$\frac{\text{ΑΣ}}{\text{Α'Σ}} = \frac{\text{ΒΣ}}{\text{Β'Σ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{Α'Β}} \quad (1)$$

Ἂς φέρωμεν καὶ τὰς εὐθείας ΣΓ καὶ ΣΓ', καὶ ἂς παραβάλωμεν τὰ τρίγωνα ΒΣΓ καὶ Β'Σ'Γ'· ἡ γωνία ΓΒΣ καὶ Γ'Β'Σ εἶναι ἴσαι ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΒΓ καὶ Β'Γ'· ἔχομεν προσέτι καὶ $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{Α'Γ'}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{Β'Γ'}}$ ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν δύο πολυγώνων. Θὰ ἔχωμεν ἑπομένως καὶ $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{Β'Γ'}} = \frac{\text{ΒΣ}}{\text{Β'Σ}}$ ἐκ τῆς ἀναλογίας (1).

καὶ τὰ δύο τρίγωνα ΒΣΓ καὶ Β'ΣΓ' εἶναι ὅμοια ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην ὑπὸ ἀναλόγων πλευρῶν· εἶναι ἄρα ἰσογώνια, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΣΓ καὶ ΣΓ' κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

Ὁμοίως δεικνύομεν ὅτι αἱ ΔΔ' καὶ ΕΕ' διέρχονται διὰ τοῦ σημείου Σ.

Σημείωσις.

160. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἀληθεύει ὁσαιδήποτε καὶ ἂν ὦσιν αἱ πλευραὶ τῶν ὁμοιοθέτων ὁμοίων πολυγώνων, καὶ οἱοσδήποτε ἂν εἶναι ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν· ἑπομένως καὶ ἐπὶ συστήματος

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σημείων κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Καθόσον δὲ τὸ σύστημα ἀποτελεῖται ἐκ σημείων μεμονωμένων ἢ ἐκ σημείων συνεχῶν, τὸ ὁμοιόθετον τοῦ συστήματος ὑφίσταται ὁμοίως· ἐπομένως αἱ προηγούμεναι προτάσεις περὶ ὁμοιοθεσίας ἀληθεύουσι καὶ ἐπὶ τῶν καμπύλων γραμμῶν.

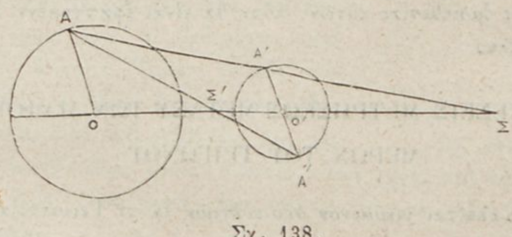
161. Ὅταν μεταθέσωμεν τὸ ἓν ἐκ τῶν ὁμοιοθέτων συστημάτων παραλλήλως ἑαυτῷ, ἡ ὁμοιοθεσία ὑφίσταται.

Ἐπομένως τὰ ἄκρα εὐθειῶν συναντωμένων καὶ τὰ ἄκρα ἄλλων εὐθειῶν συναντωμένων, παραλλήλων δὲ καὶ ἀναλόγων πρὸς τὰς πρώτας, σχηματίζουσι δύο συστήματα ὁμοιόθετα.

Ἡ ὁμοιοθεσία δύο συστημάτων εἶναι εὐθεῖα ἢ ἀντίθετος, καθόσον αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἢ ἀντίθετον φοράν.

Θεώρημα.

162. *Δύο οἱαιδήποτε περιφέρειαι εἶναι συγχρόνως εὐθέως καὶ ἀντιθέτως ὁμοιόθετοι.* (Σχ. 138).



Σχ. 138.

Τῳόντι, αἱ ἀκτῖνες τῶν περιφερειῶν τούτων δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ἀνὰ δύο παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς ἢ ἀντιθέτου φορᾶς· ἐνῷ ὁ λόγος αὐτῶν ρ εἶναι σταθερός. (160).

Διὰ νὰ ἔχωμεν τὰ δύο κέντρα τῆς ὁμοιοθεσίας τῶν δύο τούτων περιφερειῶν Ο καὶ Ο′ ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν παραλλήλως (Σχ. 138) τὴν ἀκτῖνα ΟΑ τοῦ κύκλου Ο καὶ τὴν διάμετρον Α′Α″ τοῦ ἑτέρου κύκλου· αἱ εὐθεῖαι ΑΑ′ καὶ ΑΑ″ συναντῶσι τὴν διὰ τῶν κέντρων τῶν κύκλων διερχομένην εὐθεῖαν εἰς τὰ σημεῖα Σ καὶ Σ′, καὶ θέλομεν ἔχει

$$\frac{\Sigma O}{\Sigma O'}=\frac{OA}{O'A'}=\frac{\Sigma A}{\Sigma A'}=\rho \quad \text{καὶ} \quad \frac{\Sigma' O}{\Sigma' O'}=\frac{OA}{O'A''}=\frac{\Sigma' A}{\Sigma' A''}=\rho.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ σημεῖον λοιπὸν Σ εἶναι τὸ κέντρον τῆς εὐθείας ὁμοιοθεσίας, καὶ τὸ Σ′ τὸ κέντρον τῆς ἀντιθέτου ὁμοιοθεσίας τῶν δύο κύκλων, ἐπειδὴ πᾶσαι αἱ ἐπιβατικαὶ ἀκτῖνες, ὡς ἡ ΑΑ′, συναντῶνται εἰς τὸ Σ καὶ πᾶσαι αἱ ἄλλαι ἐπιβατικαὶ ἀκτῖνες, ὡς ἡ ΑΑ″, συναντῶνται εἰς τὸ Σ′ (138).

Σημείωσις.

163. Ἐπειδὴ αἱ ἀκτῖνες δύο περιφερειῶν αἱ ἀγόμεναι εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς κοινῆς ἐφαπτομένης εἶναι παράλληλοι, αἱ μὲν κοιναὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ἔχουσαι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοὺς δύο κύκλους (ἐξωτερικαὶ) διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου τῆς εὐθείας ὁμοιοθεσίας, αἱ δὲ δύο κοιναὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ἔχουσαι ἑκατέρωθεν τοὺς δύο κύκλους (ἐσωτερικαὶ) διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀντιθέτου ὁμοιοθεσίας τῶν δύο κύκλων.

Ἑπομένως, ἵνα φέρωμεν κοινὴν ἐφαπτομένην δύο κύκλων, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην τοῦ ἑνὸς κύκλου διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου τῆς ὁμοιοθεσίας αὐτῶν· αὕτη θὰ εἶναι ἐφαπτομένη καὶ τοῦ ἑτέρου κύκλου.

Γ′. ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΜΕΡΩΝ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

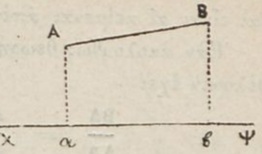
164. Καλεῖται *γινόμενον δύο εὐθειῶν* ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες παριστῶσι τὰ μήκη τῶν εὐθειῶν τούτων, μετρηθεισῶν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος. *Τετράγωνον δι᾽ εὐθείας* ἡ δευτέρα δύναμις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἐκφράζει τὸ μῆκος τῆς εὐθείας ταύτης.

Ἐὰν ἔχωμεν $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$ ἢ Α:Β=Γ:Δ, ἔνθα Α,Β,Γ,Δ παριστῶσι τὰ μήκη εὐθειῶν μετρηθεισῶν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος, λέγομεν ὅτι ἡ Δ εἶναι *τετάρτη ἀνάλογος* τῶν Α,Β,Γ.

Ἐὰν δὲ οἱ μέσοι τῆς ἀναλογίας εἶναι ἴσοι, ἤτοι ἐὰν ἔχωμεν Α:Β=Β:Δ, ἡ εὐθεῖα Δ τότε εἶναι *τρίτη ἀνάλογος* τῶν Α καὶ Β, ἡ δὲ Β καλεῖται *μέση ἀνάλογος* μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ, καὶ θὰ ἔχωμεν $B^2=A\times\Delta$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Καλεῖται *προβολὴ* σημείου Α ἐπὶ εὐθεῖαν γραμμὴν ΧΨ ὁ πούς α τῆς ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΧΨ ἀγομένης καθέτου. Ἐὰν δοθῇ εὐθεῖα ΑΒ πεπερασμένη, ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τὴν ΧΨ εἶναι τὸ μέρος (τῆςΧΨ) αβ, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν προβολῶν α καὶ β τῶν ἄκρων τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ.

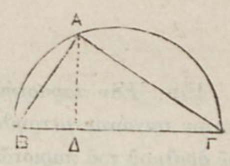


Σχ. 139.

Θεώρημα.

165. *Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, ἑκατέρα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς προβολῆς τῆς πλευρᾶς ταύτης ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν· ἡ δὲ κάθετος εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων, εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ ὑποτείνουσα ὑπὸ τῆς καθέτου ταύτης* (Σχ. 140).

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ἡ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἐκ τῆς κορυφῆς Α. Ἡ κάθετος ΑΔ διαιρεῖ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς δύο τρίγωνα ὅμοια πρὸς τὸ δεδομένον, καὶ ὅμοια πρὸς ἄλληλα. Τῳόντι τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ἔχοντα τὰς ὀρθὰς αὐτῶν γωνίας ΒΑΓ καὶ ΑΔΒ ἴσας καὶ τὴν γωνίαν Β κοινὴν εἶναι ὅμοια· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια· ἄρα καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια.



Σχ. 140.

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ἔχομεν

$$\frac{ΒΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} \text{ ἢ } ΒΔ : ΑΒ = ΑΒ : ΒΓ$$

$$\text{ἐξ οὗ } \quad ΑΒ^2 = ΒΔ \times ΒΓ \qquad (1).$$

Ὡσαύτως ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ θέλομεν ἔχει

$$\frac{ΓΔ}{ΑΓ} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} \text{ ἢ } ΓΔ : ΑΓ = ΑΓ : ΒΓ$$

$$\text{ἑπομένως καὶ } ΑΓ^2 = ΓΔ \times ΒΓ \qquad (2).$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Σημείωσις. Ἐνταῦθα δέον νὰ ὑπομνήσωμεν ὅτι ἀνάλογοι πλευραὶ εἶναι αἱ κείμεναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν.

Ἐὰν ἀκολούθως θεωρήσωμεν τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ, θέλομεν ἔχει

$$\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΓ}} \text{ ἢ } \text{ΒΔ}:\text{ΑΔ}=\text{ΑΔ}:\text{ΔΓ}\cdot$$

ἐπομένως καὶ $\text{ΑΔ}^2 = \text{ΒΔ} \times \text{ΔΓ}$ (3).

Ἐὰν γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου ἔχοντος διάμετρον τὴν ΒΓ, ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τῆς κορυφῆς Α (113). Ἐπομένως δυνάμεθα νὰ συνοψίσωμεν ὑπὸ τὴν ἀκόλουθον μορφὴν τὰς ἀποδειχθείσας προτάσεις.

Πᾶσα χορδὴ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς διαμέτρου τῆς διερχομένης δι' ἑνὸς τῶν ἄκρων αὐτῆς καὶ τῆς προβολῆς τῆς χορδῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ταύτην, ἡ δὲ ἔκ τινος σημείου τῆς περιφερείας ἀγομένη κάθετος ἐπὶ μίαν διάμετρον τοῦ κύκλου εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων τῆς διαμέτρου.

Θεώρημα.

166. *Ἐὰν παραστήσωμεν δι' ἀριθμῶν τὰς τρεῖς πλευρὰς ὀρθογωνίου τριγώνου μετρηθείσας διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος, τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ παριστῶντος τὴν ὑποτείνουσαν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν τῶν παριστώντων τὰς δύο πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας* (Σχ. 140).

Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἔχομεν

$$\text{ΑΒ}^2=\text{ΒΔ}.\ \text{ΒΓ} \text{ καὶ } \text{ΑΓ}^2=\text{ΓΔ}.\ \text{ΒΓ}$$

προσθέτοντες δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\text{ΑΒ}^2+\text{ΑΓ}^2=\text{ΒΔ}.\ \text{ΒΓ}+\text{ΓΔ}.\ \text{ΒΓ}.$$

$$\text{ἢ } \text{ΑΒ}^2+\text{ΑΓ}^2=(\text{ΒΔ}+\text{ΓΔ}).\ \text{ΒΓ}. \text{ Ἀλλὰ } \text{ΒΔ}+\text{ΓΔ}=\text{ΒΓ}.$$

$$\text{Ἐπομένως } \text{ΑΒ}^2+\text{ΑΓ}^2=\text{ΒΓ}\times\text{ΒΓ}=\text{ΒΓ}^2.$$

Πορίσματα.

167. Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὴν σχέσιν ταύτην δυνάμεθα εὐκόλως νὰ προσδιορίσωμεν τὴν μίαν τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν δίδωνται αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ αὐτοῦ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω ὅτι δίδονται αἱ δύο πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογ. τριγώνου, καὶ ἡ μὲν μία εἶναι 4μ, ἡ δὲ ἑτέρα 3μ. Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν ὑποτείνουσαν διὰ Ζ, θέλομεν ἔχει

$$Z = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \cdot \text{ ἐξ οὗ}$$

$$Z = \sqrt{25} = 5.$$

Ἐὰν δὲ ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογ. τριγώνου εἶναι π. χ. 13μ καὶ ἡ μία τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας 5μ, ἡ δὲ ἑτέρα παρασταθῇ διὰ χ, θέλομεν ἔχει $13^2 = 5^2 + \chi^2 \cdot$

$$\text{ἐξ οὗ } \chi^2 = 13^2 - 5^2 \text{ ἢ } \chi^2 = 169 - 25 = 144$$

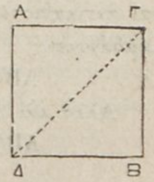
$$\text{καὶ } \chi^2 = \sqrt{144} = 12.$$

Ὁ λόγος τῆς διαγωνίου τοῦ τετραγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ παρίσταται διὰ τοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ $\sqrt{2}$.

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΔΒΓ (Σχ. 141) εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές, δίδει

$$\Delta\Gamma^2 = \Delta B^2 + B\Gamma^2 = 2\Delta B^2$$

$$\text{καὶ } \frac{\Delta\Gamma^2}{\Delta B^2} = 2 \cdot \text{ ἄρα } \frac{\Delta\Gamma}{\Delta B} = \sqrt{2}.$$



Σχ. 141.

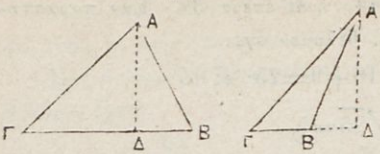
Ὀφείλομεν ἐνταῦθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ θεωρήματα (148, 149, 150) περὶ ὁμοιότητος τριγώνων καὶ τὸ ἀνωτέρω περὶ τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου εἶναι τὰ κυριώτερα καὶ τὰ μάλιστα χρήσιμα ἔν τε τῇ θεωρίᾳ καὶ ἐν τῇ ἐφαρμογῇ τῆς Γεωμετρίας. Διότι πάντα τὰ σχήματα δύνανται ν' ἀποσυντεθῶσιν εἰς τρίγωνα οἱαδήποτε, καὶ πᾶν τρίγωνον δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς δύο τρίγωνα ὀρθογώνια διὰ καθέτου, ἀγομένης ἐκ μιᾶς τῶν κορυφῶν αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἀντικειμένην πλευράν. Δυνάμεθα λοιπὸν πάντως νὰ ἐφαρμόσωμεν τὰς θεωρηθείσας προτάσεις.

Θεώρημα.

168. ***Ἐν παντὶ τριγώνῳ τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς, ἥτις κεῖται ἀπέναντι ὀξείας γωνίας, ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ἠλαττωμένῳ κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς μιᾶς τούτων ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἑτέρας ἐπὶ ταύτην*** (Σχ. 142).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ γωνία Γ εἶναι ὀξεῖα, ἔχουσα ἀπέναντι αὐτῆς τὴν πλευρὰν ΑΒ. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α φέρομεν τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΒ, ἥτις (κάθετος) πίπτει ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, καθ' ὅσον ἡ γωνία Β εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα. Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει ἔχομεν ΔΒ=ΒΓ—ΔΓ· ἐν τῇ δευτέρᾳ ΔΒ=ΓΔ—ΒΓ.



Σχ. 142.

Εἰς ἀμφοτέρας δὲ τὰς περιπτώσεις θέλομεν ἔχει

$$ΒΔ^2=ΒΓ^2+ΔΓ^2—2.ΒΓ.ΔΓ.$$

Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ὀρθογώνιον, ἐπομένως θέλομεν ἔχει $ΑΒ^2=ΑΔ^2+ΔΒ^2$. (1)

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἰσότητι (1) τὸ $ΒΔ^2$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ, λαμβάνομεν

$$ΑΒ^2=ΑΔ^2+ΒΓ^2+ΔΓ^2—2.ΒΓ.ΔΓ. \qquad (2)$$

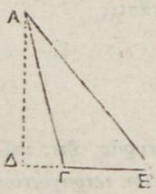
Ἀλλὰ καὶ $ΑΔ^2+ΔΓ^2=ΑΓ^2$. Ἐπομένως

$$ΑΒ^2=ΒΓ^2+ΑΓ^2—2.ΒΓ.ΔΓ. \qquad (3)$$

Θεώρημα.

169. ***Ἐν παντὶ τριγώνῳ τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς, ἥτις κεῖται ἀπέναντι ἀμβλείας γωνίας ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ηὐξημένῳ κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς μιᾶς τούτων ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης, πλευρᾶς ἐπὶ ταύτην.***

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ γωνία Γ ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ΑΒ εἶναι ἀμβλεῖα. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α φέρομεν ἐπὶ τὴν ΑΒ τὴν ΑΔ κάθετον, ἥτις θὰ πέσῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, καὶ θέλομεν ἔχει



Σχ. 143.

$$ΔΒ=ΒΓ+ΓΔ· \text{ ἐπομένως}$$

$$ΔΒ^2=ΒΓ^2+ΓΔ^2+2\ ΒΓ.\ ΓΔ.$$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ λαμβάνομεν $ΑΒ^2=ΑΔ^2+ΔΒ^2$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰ $ΔΒ^2$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ ἔχομεν

$$ΑΒ^2=ΑΔ^2+ΒΓ^2+ΓΔ^2+2\ ΒΓ.\ ΓΔ \qquad (1).$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ λαμβάνομεν $ΑΔ^2+ΔΓ^2=ΑΓ^2$· καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἰσότητι (1) λαμβάνομεν

$$ΑΒ^2=ΑΓ^2+ΒΓ^2+2\ ΒΓ.\ ΔΓ$$

Πόρισμα.

170. Ἐὰν ἀνασκοπήσωμεν τὰ προηγούμενα θεωρήματα, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γωνία τριγώνου τινὸς εἶναι ὀξεῖα, ἀμβλεῖα ἢ ὀρθή, καθόσον τὸ τετράγωνον τῆς ἀντικειμένης πρὸς ταύτην πλευρᾶς εἶναι μικρότερον, μεγαλείτερον ἢ ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

Δεδομένου ὅτι $ΑΒ=7^μ$ $ΑΓ=4^μ$ καὶ $ΒΓ=5^μ$, νὰ προσδιορισθῇ ἡ κάθετος ΑΔ (Σχ. 143). Ἐπειδὴ 7^2 εἶναι μεῖζον τοῦ ἀθροίσματος 4^2+5^2, ἡ γωνία ἡ εἰς τὴν πλευρὰν ΑΒ ἀντικειμένη εἶναι ἀμβλεῖα, καὶ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν

$$ΑΒ^2=ΒΓ^2+ΑΓ^2+2\ ΒΓ.\ ΓΔ\cdot \text{ ἤτοι}$$

$$49=25+16+2.\ 5.\ ΓΔ \text{ ἢ } 49=41+10.\ ΓΔ$$

$$\text{ἢ } 49-41=10.\ ΓΔ \text{ καὶ } ΓΔ=\frac{8}{10}=0{,}8.$$

Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΓ δίδει τότε

$$ΑΔ^2=4^2-(0{,}8)^2=16-0{,}64=15{,}36\cdot$$

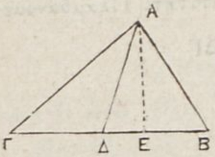
καὶ $ΑΔ=\sqrt{15{,}36}=3{,}919$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$.

Θεώρημα

171. *Ἐν παντὶ τριγώνῳ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο πλευρῶν ἰσοῦται τῷ διπλασίῳ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τοῦ ἡμίσεος τῆς τρίτης πλευρᾶς καὶ τῆς ἀντιστοιχούσης πρὸς ταύτην διαμέσου τοῦ τριγώνου* (Σχ. 144).

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ ἀντιστοιχοῦσα διάμεσος εἶναι ἡ ΑΔ ἡ ἑνώνουσα τὸ μέσον ταύτης μὲ τὴν ἀπέναντι κορυφὴν Α.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Σχ. 144.

Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δὲν εἶναι ἰσοσκελές, ἡ μία ἐκ τῶν περὶ τὸ Δ γωνιῶν θὰ εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ ἑτέρα ἀμβλεῖα. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ λαμβάνομεν (169)

$$ΑΓ^2 = ΓΔ^2 + ΑΔ^2 + 2\ ΓΔ.\ ΔΕ \qquad (1)\cdot$$

ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου ΑΔΒ λαμβάνομεν (168)

$$ΑΒ^2 = ΒΔ^2 + ΑΔ^2 - 2\ ΒΔ.\ ΔΕ. \qquad (2)$$

Ἐὰν δέ, ἀφοῦ ἐν τῇ ἰσότητι (2) ἀντικαταστήσωμεν τὴν ΒΔ διὰ τῆς ἴσης αὐτῇ ΓΔ, προσθέσωμεν τὰς δύο ἰσότητας κατὰ μέλη, θὰ ἔχωμεν· $ΑΓ^2 + ΑΒ^2 = 2\ ΓΔ^2 + 2\ ΑΔ^2 = 2\ (ΓΔ^2 + ΑΔ^2)$.

Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, ἡ πρότασις γίνεται ἀμέσως φανερά.

Πορίσματα.

172. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΒΓ δὲν μεταβάλληται, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΒ μένῃ σταθερόν, ἐνῷ αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ μεταβάλλονται (τῆς μιᾶς αὐξανομένης καὶ τῆς ἑτέρας ἐλαττουμένης), ἡ προηγουμένη ἰσότης δεικνύει ὅτι ἡ τιμὴ τῆς διαμέσου δὲν μεταβάλλεται. Ἐπομένως *ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστημάτων ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων ἀποτελοῦσιν ἄθροισμα σταθερόν, εἶναι περιφέρεια κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει κέντρον τὸ μέσον τῆς εὐθείας τῆς ἑνωνούσης τὰ δύο ταῦτα δεδομένα σημεῖα.*

$$\text{Ἐὰν ἔχωμεν } ΑΓ^2 + ΑΒ^2 = μ^2,$$

$$\text{θὰ εἶναι καὶ } μ^2 = 2\ (ΓΔ^2 + ΑΔ^2)$$

$$\text{καὶ } μ^2 = 2\ ΓΔ^2 + 2\ ΑΔ^2$$

$$\text{ἢ } 2\ ΑΔ^2 = μ^2 - 2\ ΓΔ^2, \text{ ἢ } ΑΔ^2 = \frac{μ^2}{2} - ΓΔ^2$$

$$\text{καὶ } ΑΔ = \sqrt{\frac{μ^2}{2} - ΓΔ^2}$$

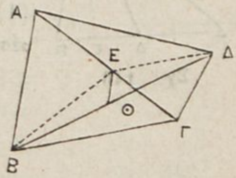
Ὁ τύπος οὗτος παριστᾷ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας· εἶνε δὲ τὸ πρόβλημα ἀδύνατον, ὅταν $\frac{μ^2}{2} < ΓΔ^2$ ἢ $μ^2 < 2\ ΓΔ^2$.

173. *Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν τε-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τραπλεύρου ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων αὐτοῦ, ηὐξημένῳ κατὰ τὸ τετραπλάσιον τετράγωνον τῆς εὐθείας, ἥτις ἑνώνει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων.

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, Ε δὲ καὶ Θ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ. Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΔΓ καὶ ΑΒΓ λαμβάνομεν



$$ΑΔ^2+ΔΓ^2=2\ (ΑΕ^2+ΔΕ^2)$$

$$\text{καὶ } ΑΒ^2+ΒΓ^2=2\ (ΑΕ^2+ΒΕ^2)$$

καί, προσθέτοντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, ἔχομεν

Σχ. 145.

$$ΑΔ^2+ΔΓ^2+ΑΒ^2+ΒΓ^2=2\ ΑΕ^2+2\ ΔΕ^2+2\ ΑΕ^2+2\ ΒΕ^2$$

$$\text{ἢ } ΑΔ^2+ΔΓ^2+ΑΒ^2+ΒΓ^2=4\ ΑΕ^2+2\ (ΔΕ^2+ΒΕ^2) \qquad (1).$$

ἀλλ' ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΕΔ ἔχομεν $ΒΕ^2+ΔΕ^2=2\ (ΒΘ^2+ΕΘ^2)$

$$\text{ἢ καὶ } 2\ (ΒΕ^2+ΔΕ^2)=4\ (ΒΘ^2+ΕΘ^2)=4\ ΒΘ^2+4\ ΕΘ^2$$

καί. ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἰσότητι (1) τὸ $2\cdot\ (ΒΕ^2+ΔΕ^2)$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ $4\ ΒΘ^2+4\ ΕΘ^2$, λαμβάνομεν

$$ΑΔ^2+ΔΓ^2+ΑΒ^2+ΒΓ^2=4\ ΑΕ^2+4\ ΒΘ^2+4\ ΒΘ^2 \qquad (2).$$

Ἀλλὰ $ΑΓ=2\ ΑΕ\cdot$ ἐπομένως $ΑΓ^2=4\ ΑΕ^2$ προσέτι $ΒΔ=2ΒΘ\cdot$ ἐπομένως $ΒΔ^2=4\ ΒΘ^2$, ἀντικαθιστῶντες δὲ καὶ ἐν τῇ ἰσότητι (2) τὸ $4\ ΒΘ^2$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ $ΒΔ^2$ καὶ τὸ $4\ ΑΕ^2$ διὰ $ΑΓ^2$ λαμβάνομεν τέλος

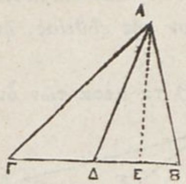
$$ΑΔ^2+ΔΓ^2+ΑΒ^2+ΒΓ^2=ΑΓ^2+ΒΔ^2+4.ΕΘ^2.$$

Ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ, ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι διχοτομοῦσιν ἀλλήλας, ἡ ΘΕ εἶναι μηδέν· ἐπομένως *ἐν παντὶ παραλληλογράμμῳ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων*· καὶ ἀντιστρόφως· *Πᾶν τετράπλευρον πληροῦν τὴν συνθήκην ταύτην εἶναι παραλληλόγραμμον.*

Θεώρημα

174. *Ἐν παντὶ τριγώνῳ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν δύο αὐτοῦ πλευρῶν ἰσοῦται τῷ διπλασίῳ γινομένῳ τῆς τρίτης πλευρᾶς ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς διομέσου, τῆς ἀντιστοιχούσης πρὸς ταύτην καὶ προβαλλομένης ἐπὶ ταύτην.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής


Σχ. 146.

Κατὰ τὰ ἐν §(171) ἔχομεν τὰς δύο ἰσότητας

$$ΑΓ^2=ΔΓ^2+ΑΔ^2+2\ ΓΔ.\ ΔΕ \qquad (1)$$

$$ΑΒ^2=ΒΔ^2+ΑΔ^2-2\ ΒΔ.\ ΔΕ \qquad (2)$$

Ἐὰν δέ, ἀφοῦ ἀντικαταστήσωμεν ἐν τῇ ἰσότητι (1) τὸ $ΔΓ^2$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ $ΒΔ^2$, καὶ ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας, λαμβάνομεν

$$ΑΓ^2-ΑΒ^2=4\ ΒΔ.\ ΔΕ$$

$$\text{ἢ } ΑΓ^2-ΑΒ^2=2\ ΒΓ.\ ΔΕ.$$

Πόρισμα.

175. Ἐάν, ἐνῷ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ μένουσι σταθερά, αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΒΓ μεταβάλλωνται οὕτως, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν νὰ εἶναι ἡ αὐτή, ἡ προηγουμένη ἰσότης δεικνύει ὅτι ἡ προβολὴ ΔΕ, ἑπομένως καὶ ἡ θέσις τοῦ σημείου Ε μένει σταθερά. Ἑπομένως· *ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστημάτων ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων εἶναι σταθερά, εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, ἥτις ἑνώνει τὰ δύο δεδομένα σημεῖα.* Οὕτως, ἐὰν ἔχωμεν

$$ΑΓ^2-ΑΒ^2=μ^2,$$

θὰ εἶναι καὶ $μ^2=2ΒΓ.ΔΕ$·

$$\text{ἐξ οὗ } ΔΕ=\frac{μ^2}{2ΒΓ}.$$

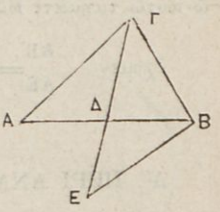
Τοιαύτη εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ΔΕ. Ἐὰν δὲ ΑΓ=ΑΒ, τότε καὶ $μ^2=0$· ἑπομένως καὶ ΔΕ=0· τοῦτο τῳόντι συμβαίνει ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν διέρχεται διὰ τοῦ μέσου αὐτῆς, καὶ τὸ Ε συμπίπτει μετὰ τοῦ Δ.

Θεώρημα.

176. *Τὸ γινόμενον τῶν δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται τῷ τετραγώνῳ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν αὗται σχηματίζουσιν, ηὐξημένῳ κατὰ τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων, εἰς ἃ αὕτη διαιρεῖ τὴν τρίτην πλευρὰν τοῦ τριγώνου.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Γ ἡ ΓΕ. Ἂς σχηματίσωμεν τὴν γωνίαν ΔΒΕ ἴσην τῷ ἡμίσει τῆς γωνίας Γ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΒΔΕ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὴν γωνίαν ΑΔΓ ἴσην τῇ ΒΔΕ ὡς κατὰ κορυφήν, τὴν γωνίαν ΑΓΔ ἴσην τῇ ΔΒΕ ἐκ κατασκευῆς· ἑπομένως καὶ τὴν γωνίαν Α ἴσην τῇ Ε. Καὶ τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΓΕΒ ἔχοντα τὴν γωνίαν Α ἴσην τῇ Ε, τὴν ΑΓΔ ἴσην τῇ ΕΓΒ, θὰ ἔχωσι καὶ τὴν ΑΔΓ ἴσην τῇ ΓΒΕ, ἑπομένως εἶναι ὅμοια· ἑπομένως θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν



Σχ. 147.

$$\frac{ΑΓ}{ΓΕ} = \frac{ΓΔ}{ΓΒ}\cdot \quad \text{ἐξ ἧς } ΑΓ.ΓΒ = ΓΔ.ΓΕ$$

καί, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὴν ΓΕ διὰ ΓΔ+ΔΕ, θέλομεν ἔχει

$$(1) \quad ΑΓ.ΓΒ = ΓΔ.(ΓΔ+ΔΕ) = ΓΔ^2 + ΓΔ.ΔΕ.$$

Ἀλλ' ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΓΔ καὶ ΔΒΕ λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{ΓΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΔ}{ΔΕ}\cdot$ ἐξ ἧς ΓΔ,ΔΕ=ΔΒ.ΑΔ, καί, ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἰσότητι (1) τὸ ΓΔ.ΔΕ διὰ τοῦ ΔΒ.ΑΔ· λαμβάνομεν

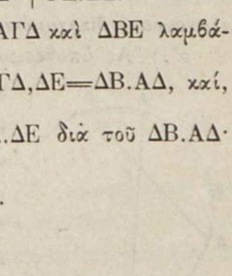
$$ΑΓ.ΓΒ = ΓΔ^2 + ΔΒ.ΔΑ.$$

*Θεώρημα

177. ***Τὸ γινόμενον τῶν δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ ὕψους, τοῦ ἀντιστοιχοῦντος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν, ἐπὶ τὴν διάμετρον τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου.***

Ὅταν ἓν τρίγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς περιφέρειαν, λέγομεν ὅτι ἡ περιφέρεια εἶναι περιγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου Ο, καὶ ΑΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΑΔ καὶ ἡ χορδὴ ΒΔ. Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΓΕ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουσι τὰς μὲν γωνίας ΑΒΔ καὶ ΑΕΓ



Σχ. 148

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἴσας ὡς ὀρθάς, τὰς δὲ ΒΔΑ καὶ ΕΓΑ ἴσας ὡς ἐγγεγραμμένας ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι ΒΔΓΑ· ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων τούτων

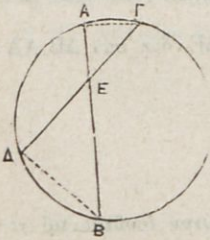
ἔχομεν $\frac{AB}{AE}=\frac{A\Delta}{A\Gamma}$· καὶ ἐκ ταύτης ΑΒ.ΑΓ=ΑΔ.ΑΕ.

Δ΄. ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ ΕΝ ΤΩ ΚΥΚΛΩ.

Θεώρημα.

178. *Ἐὰν διὰ σημείου κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κύκλου ἀχθῶσι τέμνουσαι, περατούμεναι εἰς τὴν περιφέρειαν, τὸ γινόμενον τῶν ἀποστημάτων τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τῶν σημείων, εἰς ἅ ἑκάστη τέμνουσα συναντᾷ τὴν περιφέρειαν, εἶναι σταθερὸν διὰ πᾶσαν τοιαύτην τέμνουσαν, διερχομένην διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.*

α΄.) Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι τὸ δεδομένον σημεῖον Ε κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου, καὶ δι' αὐτοῦ ἂς φέρωμεν δύο οἱασδήποτε χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ· ὡς καὶ τὰς εὐθείας ΔΒ καὶ ΑΓ, ὁπότε σχηματίζονται δύο τρίγωνα ΑΕΓ καὶ ΔΕΒ. Τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουσι τὴν γωνίαν Α ἴσην τῇ Δ ὡς ἐγγεγραμμένας καὶ βαινούσας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΒΓ, τὴν γωνίαν Γ ἴσην τῇ Β ὡς ἐγγεγραμμένας καὶ βαινούσας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΔ, ἄρα εἶναι ὅμοια. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων τούτων λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν



Σχ. 149.

$$\frac{AE}{\Delta E}=\frac{\Gamma E}{BE},$$ ἐξ ἧς ΑΕ×ΒΕ=ΔΕ×ΓΕ.

Τὸ θεώρημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς· *Ἐὰν δύο χορδαὶ κύκλου τέμνωνται ἐντὸς τοῦ κύκλου, τέμνονται εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα.*

β΄. Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι τὸ δεδομένον σημεῖον Ε κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου.

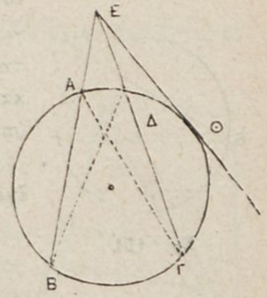
Διὰ τοῦ σημείου Ε ἂς φέρωμεν δύο οἱασδήποτε τεμνούσας ΕΑΒ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ ΕΔΓ, καὶ ἂς ἑνώσωμεν δι' εὐθειῶν τὸ σημεῖον Α μὲ τὸ Γ καὶ τὸ Β μὲ τὸ Δ. Τὰ δύο σχηματιζόμενα τρίγωνα ΒΔΕ καὶ ΑΓΕ εἶναι ὅμοια ὡς ἔχοντα τὴν γωνίαν ΒΕΓ κοινὴν καὶ τὰς γωνίας Β καὶ Γ ἴσας ὡς ἐγγεγραμμένας καὶ βαινούσας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΔ. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων λαμβάνομεν

$$\frac{ΕΓ}{ΕΒ} = \frac{ΕΑ}{ΕΔ}. \text{ ἐξ ἧς}$$

$$ΕΓ.ΕΔ = ΑΒ.ΕΑ.$$



Σχ. 150.

Τὴν πρότασιν ταύτην δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς·

Δύο τοιαῦται τέμνουσαι ἀγόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου κειμένου ἐκτὸς κύκλου εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρη αὐτῶν.

Πόρισμα

179. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν τέμνουσαν ΕΓ στρεφομένην περὶ τὸ Ε (ἀλλὰ πάντοτε μένουσαν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου), μέχρις ὅτου αὕτη γίνῃ ἐφαπτομένη ΕΘ τῆς περιφερείας, τὸ θεώρημα ἀληθεύει καὶ ἤδη, ἀλλ' ἐν τῷ ὁρίῳ τούτῳ ὁλόκληρος ἡ τέμνουσα καὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρος αὐτῆς εἶναι ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ΕΘ· ἑπομένως θέλομεν ἔχει

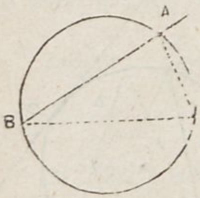
$$\frac{ΕΓ}{ΕΘ} = \frac{ΕΘ}{ΕΔ} \text{ ἐξ ἧς}$$

$$ΕΓ \times ΕΔ = ΕΘ \times ΕΘ \text{ ἢ } ΕΘ^2 = ΕΓ \times ΕΔ.$$

Τοῦτο δεικνύει ὅτι, ***ἐὰν ἐκ τινος σημείου ἀχθῇ ἐφαπτομένη κύκλου καὶ τέμνουσα, ἡ ἐφαπτομένη εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὅλης τεμνούσης καὶ τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρους τῆς τεμνούσης.***

Δυνάμεθα ἄλλως ν' ἀποδείξωμεν τὴν πρότασιν ταύτην ἀμέσως. Ἔστω ἡ ἐφαπτομένη ΕΘ καὶ ἡ τέμνουσα ΕΒ καὶ ἂς φέρωμεν τὰς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

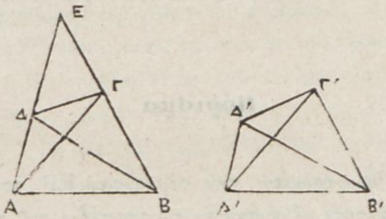


Σχ. 151·

εὐθείας ΑΘ καὶ ΒΘ (Σχ. 151). Τὰ δύο τρίγωνα ΒΕΘ καὶ ΕΑΘ εἶναι ὅμοια ὡς ἔχοντα τὴν γωνίαν Ε κοινὴν καὶ τὰς γωνίας ΕΒΘ καὶ ΕΘΑ ἴσας, διότι ἀμφότεραι μετροῦνται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΘ· ἐπομένως θέλομεν ἔχει $\frac{EB}{E\Theta} = \frac{E\Theta}{EA}$, ἐξ οὗ $E\Theta^2 = EB.EA$

Θεώρημα.

180. Ἀντιστρόφως. *Ὅταν δύο εὐθεῖαι ὡς ἡ ΑΔ καὶ ΒΓ προσεκβαλλόμεναι τέμνωσιν ἀλλήλας εἰς τοιοῦτον σημεῖον Ε, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἡ σχέσις ΑΕ ΔΕ=ΒΕ ΓΕ, τὰ ἄκρα αὐτῶν Α,Β,Γ,Δ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.* (Σχ. 152).



Σχ. 152.

Ἂς διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνωτέρω δεδομένης ἰσότητος διὰ ΒΕ. ΔΕ· θὰ ἔχωμεν

$$\frac{AE\times\Delta E}{BE\times\Delta E} = \frac{BE\times\Gamma E}{BE\times\Delta E} = \quad \text{ἢ} \quad \frac{AE}{BE} = \frac{\Gamma E}{\Delta E}.$$

τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΕ καὶ ΒΔΕ ἔχουσι μίαν γωνίαν τὴν Ε κοινὴν ἢ ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους· ἐπομένως εἶναι ὅμοια, καὶ ἔχουσι καὶ τὰς λοιπὰς αὐτῶν γωνίας ἴσας κατὰ μίαν. Ἐὰν λοιπὸν γράψωμεν κυκλικὸν τμῆμα ἔχον χορδὴν τὴν ΓΔ καὶ περιλαμβάνον τὴν γωνίαν ΓΑΔ ὡς ἐγγεγραμμένην ἐν αὐτῷ, ἡ περιφέρεια ἡ διερχομένη διὰ τῶν σημείων Γ,Α,Δ, θὰ διέρχηται καὶ διὰ τοῦ Β, διότι αἱ γωνίαι ΔΑΓ καὶ ΔΒΓ εἶναι ἴσαι, τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ δείξωμεν.

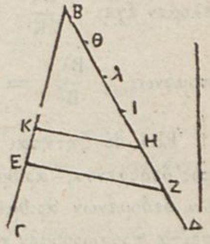
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ε'. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

Πρόβλημα.

181. Νὰ διαιρεθῇ δεδομένη εὐθεῖα εἰς ἴσα μέρη, ὅσα ἂν τις θελήσῃ (Σχ. 153).

Ἔστω ἡ εὐθεῖα Α νὰ διαιρεθῇ εἰς 5 ἴσα μέρη. Ἂς σχηματίσωμεν μίαν οἱανδήποτε γωνίαν ΓΒΔ, καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἂς λάβωμεν ἀπὸ τοῦ Β μέρος τὸ ΒΕ ἴσον τῇ δεδομένῃ εὐθείᾳ Α. Ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης πλευρᾶς ΒΔ ἂς λάβωμεν κατὰ σειρὰν 5 μέρη ἴσα πρὸς αὐθέρετόν τι μῆκος ΒΟ ληφθὲν ἀπὸ τοῦ Β. Ἔστωσαν δὲ Η καὶ Ζ τὰ δύο τελευταῖα σημεῖα τῆς διαιρέσεως, καὶ ἂς ἑνώσωμεν τὸ Ζ μὲ τὸ Ε, ἐκ δὲ τοῦ Η ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΚ παράλληλος τῇ ΖΕ· τὸ ΕΚ θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ΒΕ, ἤτοι τῆς Α.



Σχ. 153.

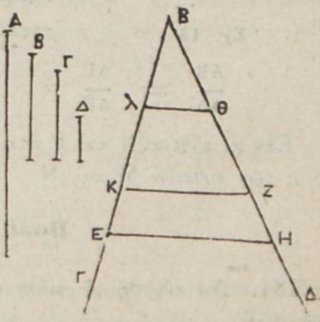
Τῷόντι ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΕΖ καὶ ΚΗ θέλομεν ἔχει $\frac{ΕΚ}{ΒΕ}=\frac{ΖΗ}{ΒΖ}=\frac{1}{5}$. Οὕτω δεικνύεται ὅτι αἱ ἐκ τῶν σημείων Η,Ι,λ,Ο ἀγόμεναι παράλληλοι τῇ ΖΕ διαιροῦσι τὴν ΒΕ εἰς ἴσα μέρη.

Πρόβλημα.

185. *Νὰ διαιρεθῇ εὐθεῖα εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς δεδομένας εὐθείας, ἢ πρὸς δεδομένους ἀριθμοὺς* (Σχ. 154).

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ἡ εὐθεῖα Α εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰς εὐθείας Β,Γ,Δ.

Σχηματίζομεν μίαν γωνίαν οἱανδήποτε, ΓΒΔ, καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ λαμβάνομεν ἓν μέρος τὸ ΒΕ ἴσον τῇ Α. Ἐπὶ δὲ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς ΒΔ λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ μέρη ΒΘ, ΘΖ, ΖΗ κατὰ τάξιν ἴσα πρὸς τὰς δεδομένας εὐ-



Σχ. 154.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

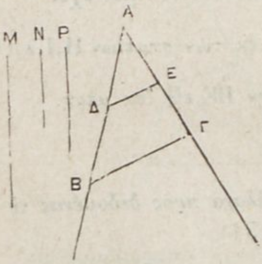
θείας Β,Γ,Δ. Ἑνώνομεν ἔπειτα τὸ σημεῖον Ε μετὰ τοῦ Η, καὶ ἐκ τῶν σημείων Ζ καὶ Θ φέρομεν τὰς εὐθείας ΖΚ καὶ Θλ παραλλήλους τῇ ΕΗ, καὶ οὕτως ἡ ΒΕ, ἤτοι ἡ Α, διαιρεῖται εἰς τὰ μέρη Βλ, λΚ καὶ ΚΕ ἀνάλογα πρὸς τὰς εὐθείας ΒΘ, ΘΖ καὶ ΖΗ, ἤτοι πρὸς τὰς Β, Γ καὶ Δ. Τῷόντι ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΕΗ, ΚΖ καὶ λΘ θέλομεν ἔχει $\frac{\text{Β}\lambda}{\lambda\text{Κ}} = \frac{\text{ΒΘ}}{\text{ΘΖ}} = \frac{\text{Β}}{\text{Γ}}$ καὶ $\frac{\lambda\text{Κ}}{\text{ΚΕ}} = \frac{\text{ΘΖ}}{\text{ΖΗ}} = \frac{\text{Γ}}{\text{Δ}}$.

ἐπομένως $\frac{\text{Β}\lambda}{\text{Β}} = \frac{\lambda\text{Κ}}{\text{Γ}} = \frac{\text{ΚΕ}}{\text{Δ}}$.

Ἐὰν δὲ ζητῆται νὰ διαιρεθῇ ἡ εὐθεῖα Α εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς δεδομένους ἀριθμούς, λαμβάνομεν εὐθείας ἐκφραζομένας ὑπὸ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν μετρηθείσας διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος, καὶ ἔπειτα προχωροῦμεν εἰς τὴν λύσιν ὡς ἀνωτέρω.

Πρόβλημα.

183. *Νὰ εὑρεθῇ διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς ἡ τετάρτη ἀνάλογος τριῶν δεδομένων εὐθειῶν* (Σχ. 155).



Σχ. 155.

Ἔστωσαν αἱ τρεῖς δεδομέναι εὐθεῖαι Μ,Ν,Ρ. Ἂς σχηματίσωμεν γωνίαν οἱανδήποτε, ΒΑΓ, καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἂς λάβωμεν ΑΒ ἴσον τῇ Μ καὶ ΑΔ ἴσην τῇ Ν· ἔπειτα ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ τὴν ΑΓ ἴσην τῇ Ρ. Ἂς φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Δ τὴν ΔΕ παράλληλον τῇ ΒΓ· ἡ ΑΕ εἶναι ἡ ζητουμένη τετάρτη ἀνάλογος· διότι θὰ ἔχωμεν

$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΕ}}$ ἢ $\frac{\text{Μ}}{\text{Ν}} = \frac{\text{Ρ}}{\text{ΑΕ}}$ (164).

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι Ν καὶ Ρ ἦσαν ἴσαι, ἡ ΑΕ θὰ ἦτο ἡ τρίτη ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν Μ καὶ Ν.

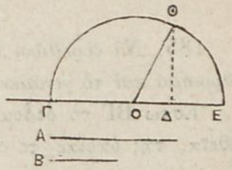
Πρόβλημα.

184. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ μέση ἀνάλογος δύο δεδομένων εὐθειῶν* (*Σχ.* 156).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστωσαν αἱ δύο δεδομέναι εὐθεῖαι Α καὶ Β. Ἂς λάβωμεν ἐπὶ ἀπεριορίστου εὐθείας τὴν ΓΔ ἴσην τῇ Α καὶ ΔΕ ἴσην τῇ Β, καὶ ἐπὶ τῆς ΓΕ ὡς διαμέτρου ἂς γράψωμεν ἡμιπεριφέρειαν, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Δ ἂς ὑψώσωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΕ τὴν ΔΘ· αὕτη θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος. Τῳόντι θέλομεν ἔχει

$$ΔΘ^2 = ΓΔ.ΔΕ \quad (165).$$

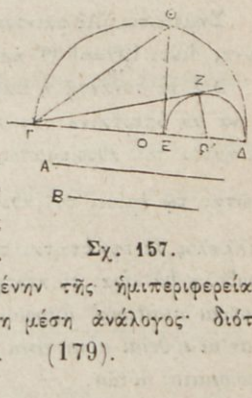


Σχ. 156.

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι Α καὶ Β εἶναι ἄνισοι, ἡ ἀκτὶς ΟΘ εἶναι πάντοτε μεγαλειτέρα τῆς καθέτου ΔΘ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ***ἡ μέση ἀνάλογος δύο εὐθειῶν ἀνίσων εἶναι πάντοτε μικροτέρα τοῦ ἡμιαθροίσματος αὐτῶν***.

Ἐὰν αἱ δεδομέναι εὐθεῖαι εἶναι πολὺ μεγάλαι, διὰ νὰ καταστήσωμεν μεθοδικωτέραν τὴν γεωμετρικὴν κατασκευήν, λαμβάνομεν ἐπὶ ἀπεριορίστου εὐθείας (Σχ. 157) ΓΔ ἴσην τῇ Α καὶ ΓΕ ἴσην τῇ Β. Ἐπὶ τῆς ΓΔ ὡς διαμέτρου γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ε ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον τὴν ΕΘ· λέγομεν ὅτι ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος εἶναι ἡ χορδὴ ΓΘ, διότι θέλομεν ἔχει

$$ΓΘ^2 = ΓΔ.ΓΕ = Α \times Β. \quad (165).$$



Σχ. 157.

Δυνάμεθα προσέτι ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει νὰ γράψωμεν ἡμιπεριφέρειαν ἐπὶ τῆς ΕΔ ὡς διαμέτρου, παριστώσης τὴν διαφορὰν τῶν δεδομένων εὐθειῶν, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην τῆς ἡμιπεριφερείας ταύτης τὴν ΓΖ, ἥτις θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος· διότι θὰ ἔχωμεν $ΓΖ^2 = ΓΔ.ΓΕ = Α \times Β. \quad (179).$

Ἔχομεν δὲ ἀμέσως

$$ΓΟ' = ΒΕ + ΕΟ' = Β + \frac{Α - Β}{2} = \frac{Α + Β}{2}. \text{ προσέτι}$$

$$Ο'Ζ = Ο'Δ = Α - ΓΟ' = Α - \frac{Α + Β}{2} = \frac{Α - Β}{2}.$$

Τὸ τρίγωνον ἄλλως ΓΟ'Ζ εἶναι ὀρθογώνιον· ἐκ τούτου ἐξάγομεν ὅτι ***τὸ ἡμιάθροισμα δύο εὐθειῶν, ἡ μέση ἀνάλογος καὶ ἡ ἡμι-***

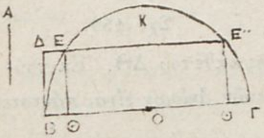
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διαφορὰ αὐτῶν παρίστανται ὑπὸ τῶν τριῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου.

Πρόβλημα.

185. *Νὰ εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων εἶναι γνωστὸν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον.* (*Σχ. 158*).

Ἔστω ΒΓ τὸ δεδομένον ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν καὶ ἔστω Α ἡ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον ἰσοῦται τῷ δεδομένῳ γινομένῳ τῶν εὐθειῶν. Ἐπὶ τῆς ΒΓ ὡς διαμέτρου γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Β ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, λαμβάνοντες ἐπὶ ταύτην ΒΔ ἴσην τῇ Α. Ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρομεν τὴν Δ΄Ε΄ παράλληλον τῇ διαμέτρῳ ΒΓ· ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα Ε καὶ Ε΄· διὰ τῶν σημείων δὲ τούτων φέρομεν καθέτους ΕΘ καὶ Ε΄Θ΄ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΒΓ, λέγω ὅτι αἱ δύο ζητούμεναι εὐθεῖαι εἶναι ἡ ΒΘ καὶ ΘΓ (ἢ ΒΘ΄ καὶ Θ΄Γ)· διότι $ΒΘ+ΘΓ=ΒΓ$ καὶ $ΒΘ\cdot ΘΓ=ΕΘ^2=Α$.



Σχ. 158.

Σημείωσις. Αἱ φαινόμεναι δύο λύσεις τοῦ προβλήματος εἶναι μία μόνη, διότι $ΕΘ=Ε΄Θ΄$ καὶ $ΒΘ΄=ΘΓ$.

Διὰ νὰ συναντᾷ ἡ παράλληλος ΔΕ΄ τὴν περιφέρειαν, πρέπει ἡ Α νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν ἀκτῖνα τῆς γραφομένης περιφερείας, ἤτοι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος ΒΓ τῶν ζητουμένων εὐθειῶν. Ἐὰν Α ἰσῶται τῷ ἡμίσει τοῦ ἀθροίσματος τούτου, ἤτοι εἶναι $\frac{ΒΓ}{2}$, ἡ παράλληλος θὰ ἐφάπτηται τῆς ἡμιπεριφερείας κατὰ τὸ Κ, τοῦ ὁποίου προβολὴ θὰ εἶναι τὸ κέντρον Ο. Ἑπομένως, *αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι ἔχουσαι σταθερὸν ἄθροισμα δίδουσι τὸ μέγιστον αὐτῶν γινόμενον, ὅταν αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι ἴσαι·* ἤτοι *ἑκατέρα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.*

Ὅμοιον πρόβλημα ἀπαντῶμεν ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ. *Νὰ μερισθῇ ἀριθμὸς εἰς δύο μέρη τοιαῦτα ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ εἶναι τὸ μέγιστον*

Πρόβλημα.

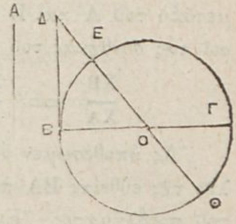
186. *Νὰ προσδιορισθῶσι δύο εὐθεῖαι, ὧν εἶναι γνωστὰ ἡ διαφορὰ καὶ τὸ γινόμενον.* (*Σχ. 159*).

Ἔστω ΒΓ ἡ δεδομένη διαφορὰ καὶ Α ἡ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τετράγωνον ἰσοῦται πρὸς τὸ δεδομένον γινόμενον τῶν εὐθειῶν.

Ἐπὶ τῆς ΒΓ ὡς διαμέτρου γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Β ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον, ΒΓ, λαμβάνοντες ἐπὶ ταύτης ΒΔ ἴσον τῇ Α. Διὰ τοῦ σημείου Δ, οὕτως ὁριζομένου, καὶ τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας φέρομεν τὴν τέμνουσαν ΔΘ. Αἱ δύο ζητούμεναι εὐθεῖαι θὰ εἶναι ἡ τέμνουσα ΔΘ καὶ ἡ ἑτέρα τὸ ἐκτὸς τῆς περιφερείας μέρος αὐτῆς τὸ ΔΕ. Τῳόντι θέλομεν ἔχει



Σχ. 159.

$$ΔΘ-ΔΕ=ΕΘ=ΒΓ$$

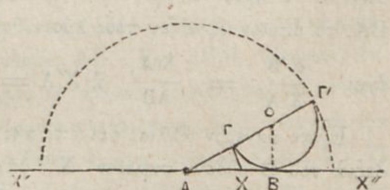
καὶ $$ΔΘ.ΔΕ=ΒΔ^2=Α^2 \qquad (179)$$

Σημ. Αἱ λύσεις τῶν δύο ἀνωτέρω προβλημάτων ἀνάγονται εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν ῥιζῶν ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

*Πρόβλημα

187. *Νὰ διαιρεθῇ δεδομένη εὐθεῖα εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον. (Σχ. 160).*

Νὰ διαιρεθῇ δεδομένη εὐθεῖα ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον σημαίνει νὰ εὕρωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης ἢ ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς αὐτῆς σημεῖον Χ, τοῦ ὁποίου τὸ ἀπόστημα ἀπὸ τοῦ ἑνὸς τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας, ἔστω τοῦ Α, νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τοῦ ἀποστήματος αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ ἄλλου ἄκρου Β καὶ τῆς ὅλης εὐθείας ΑΒ. Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον, κείμενον μεταξὺ τοῦ Α καὶ Β, πληροῖ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος· ἔχομεν τότε νὰ θεωρήσωμεν



Σχ. 160.

τοὺς λόγους $\frac{ΧΒ}{ΧΑ}$ καὶ $\frac{ΧΑ}{ΑΒ}$. Ὅταν τὸ σημεῖον Χ μετατοπίζηται ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, ὁ πρῶτος λόγος ἐλαττούμενος συνεχῶς τεί-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νει ἐκ τοῦ ἀπείρου πρὸς τὸ μηδέν, ἐνῷ ὁ δεύτερος λόγος αὐξάνει συνεχῶς ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τῆς μονάδος 1. Ὑπάρχει λοιπὸν μεταξὺ τοῦ Α καὶ Β σημεῖόν τι Χ καὶ ἓν μόνον, τὸ ὁποῖον πληροῖ τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος, καθ' ἃς θέλομεν ἔχει

$$\frac{XB}{XA} = \frac{XA}{XB} \quad \text{καὶ} \quad XA^2 = XB.BA. \quad (1)$$

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι σημεῖόν τι Χ′ κείμενον ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς εὐθείας ΒΑ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Α ἁρμόζει εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος. Ἔχομεν τότε νὰ θεωρήσωμεν τοὺς λόγους

$$\frac{X'B}{X'A} \quad \text{καὶ} \quad \frac{X'A}{AB}.$$

Ὅταν τὸ σημεῖον Χ′ μετατοπίζηται ἐκ τοῦ Χ′ πρὸς τὸ Α ὑποτιθεμένου ὅτι τοῦτο εὑρίσκεται κατὰ πρῶτον ἀπώτατα πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Α, ὁ πρῶτος λόγος $\frac{X'B}{X'A}$, τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ οὕτω $\frac{X'A+AB}{X'A} = 1+\frac{AB}{X'A}$, αὐξάνει συνεχῶς ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ἀπείρου, ἐνῷ ὁ δεύτερος λόγος $\frac{X'A}{AB}$ ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ ἀπείρου μέχρι τοῦ μηδενός. Ὑπάρχει ἄρα σημεῖόν τι πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Α καὶ ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς ΒΑ, τὸ ὁποῖον ἁρμόζει πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος, ὁπότε θέλομεν ἔχει $\frac{X'B}{X'A} = \frac{X'A}{AB}$ ἢ $X'A^{\,} = X'B.\ AB$ (2).

Εἶναι φανερὸν ἄλλως ὅτι ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς ΑΒ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ Β οὐδὲν σημεῖον Χ″ ὑπάρχει, ἁρμόζον εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, διότι καθ' ὅσον τὸ Χ″ ἀπομακρύνεται τοῦ σημείου Β ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς ΑΒ τὸ ἀπόστημα Χ″Α ὑπερβαίνει πάντοτε τὸ Χ″Β καὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ· ἑπομένως ἡ ἰσότης τῶν λόγων $\frac{X''B}{X''A}$ καὶ $\frac{X''A}{AB}$ εἶναι ἀδύνατος.

Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὰ δύο σημεῖα Χ καὶ Χ′, τὰ ὁποῖα μόνα πληροῦσι τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος, ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2), καὶ ἔχομεν

$$X'A^2 - XA^2 = (X'B - XB).AB.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀλλὰ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος δύναται νὰ τεθῇ καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν (Χ'Α—ΧΑ) (Χ'Α+ΧΑ)· ἐπομένως ἡ ἰσότης γίνεται

$$(X'A - XA)(X'A + XA) = (X'B - XB)\ AB$$

$$\text{ἀλλὰ} \quad X'A + XA = XX' \ \text{καὶ} \ X'B - XB = XX'$$

$$\text{καὶ} \ XX'(X'A - XA) = XX'.AB \ \text{ἢ} \ X'A - XA = AB \qquad (3)$$

Ἐκ μὲν τῆς σχέσεως (1) $XA^2 = XB.AB$

$$\text{ἢ} \ XA : XB = AB : XA \ \text{λαμβάνομεν}$$

$$\frac{XA + XB}{XA} = \frac{XA + AB}{AB}$$

ἐκ δὲ τῆς (3) λαμβάνομεν ΧΑ+ΑΒ=Χ'Α· ἐπομένως

$$\frac{AB}{XA} = \frac{X'A}{AB}$$

$$\text{καὶ} \qquad AB^2 = XA.X'A \qquad (4).$$

Ἡ εὕρεσις οὕτω τῶν σημείων Χ καὶ Χ' ἢ τῶν εὐθειῶν ΑΧ καὶ ΑΧ' ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4)· ἤτοι εἰς τὴν εὕρεσιν δύο εὐθειῶν, τῶν ὁποίων ἡ μὲν διαφορὰ εἶναι ΑΒ, τὸ δὲ γινόμενον AB^2. Τὸ ζήτημα ἄρα τῆς εὑρέσεως τοῦ μέσου καὶ ἄκρου λόγου εἶναι μία ἰδιαιτέρα περίπτωσις τοῦ λυθέντος προβλήματος (186), τὴν ὁποίαν ὑποκαθιστᾷ ἡ ἑξῆς γεωμετρικὴ κατασκευή.

Ἀπὸ τοῦ ἄκρου Β τῆς εὐθείας ΑΒ (Σχ. 160) ὑψοῦμεν ἐπ' αὐτὴν τὴν κάθετον ΒΟ ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ· καὶ μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΒ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις συναντᾷ τὴν διὰ τοῦ Α καὶ Ο διερχομένην εὐθεῖαν εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ'. Τὸ μέρος ΑΓ τῆς τεμνούσης ΑΟΓ' τὸ ἐκτὸς τῆς περιφερείας Ο κείμενον παριστᾷ τὸ ζητούμενον ΑΧ καὶ ὁλόκληρος ἡ τέμνουσα ΑΓ' παριστᾷ τὸ ΑΧ'.

Εὑρίσκομεν προσέτι τὰς τιμὰς τῶν εὐθειῶν ΑΧ καὶ ΑΧ' ἀλγεβρικῶς, παριστῶντες τὴν δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ δι' α.

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν

$$A\Gamma = AX = AO - O\Gamma = \chi \qquad \text{καὶ}$$

$$\chi \cdot (\chi + \alpha) = \alpha^2$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἢ $\chi^2+\alpha\chi=\alpha^2$· λύοντες δὲ τὴν δευτεροβάθμιον ταύτην ἐξίσωσιν, λαμβάνομεν

$$\chi=-\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\alpha^2+\frac{\alpha^2}{4}}=\sqrt{\frac{4\alpha^2+\alpha^2}{4}}-\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}\sqrt{5}-\frac{\alpha}{2}$$

$$\text{ἢ}\ \chi=\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

$$\text{καὶ}\ \chi'=-\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$$

Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ζητούμενον ἀπόστημα τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ Β, λαμβάνομεν τὴν αὐτὴν σχέσιν (1), ἤτοι $XA^2=XB.AB$, καὶ θέτομεν ἐν αὐτῇ $XB=\psi$, $AB=\alpha$ καὶ $XA=(\alpha-\psi)$· ὁπότε ἔχομεν

$$(\alpha-\psi)^2=\psi.\alpha\ \text{ἢ}\ \alpha^2+\psi^2-2\alpha\psi=\alpha\psi.$$

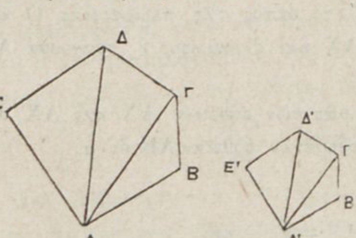
καὶ $\psi^2-3.\alpha\psi=-\alpha^2$· ἑπομένως

$$\psi=\frac{3\alpha}{2}+\sqrt{\frac{9\alpha^2}{4}-\alpha^2}=\frac{3\alpha}{2}+\sqrt{\frac{5\alpha^2}{4}}=\frac{3\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\sqrt{5}$$

$$=\frac{\alpha}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)\ \text{καὶ}\ \psi'=\frac{\alpha}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$$

Πρόβλημα

188. *Δεδομένης εὐθείας, νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἢ πολύγωνον, ὅμοιον πρὸς δεδομένον τρίγωνον ἢ πολύγωνον καὶ ἔχον πλευρὰν τὴν δεδομένην εὐθεῖαν.*



Σχ. 161.

'Αν θέλωμεν ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας Α'Β' ὁμολόγου τῇ ΑΒ νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ, κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν Β'Α'Γ' ἴσην τῇ γωνίᾳ ΒΑΓ καὶ τὴν γωνίαν Α'Β'Γ' ἴσην τῇ ΑΒΓ· τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' θὰ εἶναι ὅμοιον τῇ ΑΒΓ. Ἐὰν δὲ θέλωμεν ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας Α'Β' ὁμολόγου τῇ ΑΒ νὰ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κατασκευάσωμεν πολύγωνον ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔΕ, διαιροῦμεν τὸ δεδομένον πολύγωνον ΑΒΓΔΕ εἰς τρίγωνα, φέροντες τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΑΔ.

Ἔπειτα κατασκευάζομεν ἐπὶ τῆς Α΄Β΄ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ ὅμοιον τῷ ΑΒΓ, ὡς ἀνωτέρω, καὶ ἐπὶ τῆς Α΄Γ΄ ὁμολόγου τῇ ΑΓ ἕτερον τρίγωνον τὸ Α΄Γ΄Δ΄ ὅμοιον τῇ ΑΓΔ, καὶ τέλος ἐπὶ τῆς Α΄Δ΄ ὁμολόγου τῇ ΑΔ κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον Α΄Δ΄Ε΄ ὅμοιον τῷ ΑΔΕ. Τὰ δύο πολύγωνα Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ καὶ ΑΒΓΔΕ, ὡς ἀποτελούμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων ὁμοίων καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένων εἶναι ὅμοια.

Περὶ κλίμακος.

Κάτοψις γηίνου ἐκτάσεως σημαίνει τὴν ἐν ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ παράστασιν ἢ ἀποτύπωσιν τοῦ σχήματος αὐτῆς.

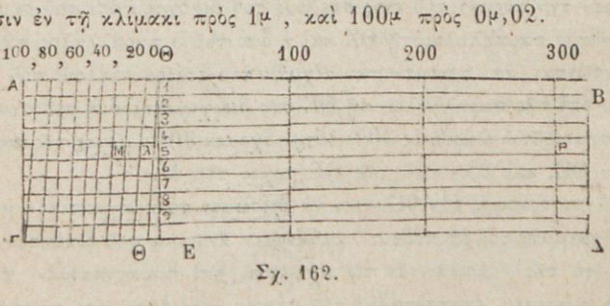
Ὅταν ἔχωμεν νὰ καταρτίσωμεν τὸ ἐπίπεδον σχέδιον μιᾶς γηίνου ἐκτάσεως, γράφομεν αὐτὸ ἐπὶ τοῦ χάρτου ὅμοιον καὶ μικρότερον τοῦ πραγματικοῦ. Ὁ λόγος δὲ μιᾶς ἐν τῷ σχήματι τούτῳ γραμμῆς πρὸς τὴν ἀντιστοιχοῦσαν γραμμὴν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ σχήματι τῆς γηίνου ἐκτάσεως καλεῖται *κλῖμαξ*. Ἐὰν ὁ λόγος οὗτος εἶναι π.χ. 0,01, λέγομεν ὅτι τὸ σχῆμα τῆς γηίνου ἐκτάσεως εἰς τὸ σχέδιον αὐτῆς ἐγένετο ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

Ἁπλούστερον καλεῖται *γραφικὴ κλῖμαξ* γεωμετρικὸν σχῆμα, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡμῖν ἀμέσως τὰ μήκη τῶν γραμμῶν ἀνηγμένων εἰς σταθερὸν λόγον· καὶ ἀντιστρόφως.

Πρόβλημα.

189. *Νὰ κατασκευασθῇ κλίμαξ.*

Ἔστω νὰ κατασκευασθῇ κλίμαξ $\frac{1}{5000}$. Τὰ 5000μ. ἀντιστοιχοῦσιν ἐν τῇ κλίμακι πρὸς 1μ, καὶ 100μ πρὸς 0μ,02.



Σχ. 162.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπὶ ἀπεριορίστου εὐθείας Α λαμβάνομεν μῆκος ΑΘ ἴσον πρὸς 0μ, 02, καὶ διαιροῦμεν τοῦτο εἰς 10 ἴσα μέρη. Ἐπειδὴ τὸ ΑΘ παριστᾷ 100μ, ἕκαστον μέρος ἐν τῇ ὑποδιαιρέσει αὐτοῦ παριστᾷ 10μ, καὶ θέτομεν εἰς τὰ σημεῖα τῆς ὑποδιαιρέσεως ταύτης τοὺς ἀριθμοὺς 0, 10, 20, 30.... 100. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἀπεριορίστου εὐθείας ἀπὸ τοῦ Θ καὶ ἐφεξῆς μήκη ἴσα τῇ ΑΘ, καὶ σημειοῦμεν κατὰ σειρὰν εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ταύτης τοὺς ἀριθμοὺς 200, 300, 400..... κ.τ.λ. μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς ἀριθμὸν ἑκατομμέτρων μεγαλείτερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχομεν νὰ θεωρήσωμεν. Διὰ τῶν σημείων Α, Θ, 100 200, 300.... κ.τ.λ. φέρομεν εὐθείας καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἔπειτα ἐπὶ τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν, ἔστω τῆς ΘΕ, λαμβάνομεν δεκάκις ἓν μῆκος αὐθαίρετον, καὶ διὰ τῶν σημείων 1, 2, 3, 4... 10 φέρομεν εὐθείας παραλλήλους τῇ ΑΒ. Λαμβάνομεν δὲ ἐπὶ τῆς ΓΕ καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ε τὸ μῆκος ΕΖ ἴσον πρὸς τὸ δέκατον τῆς ΑΘ, ἑνώνομεν τὸ σημεῖον Θ μὲ τὸ Ζ καὶ ἐκ τῶν λοιπῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ταύτης φέρομεν εὐθείας παραλλήλους τῇ ΘΖ.

Αἱ μὲν ἑκατοντάδες τῶν μέτρων παρίστανται τότε ὑπὸ τῶν διαιρέσεων τῆς ΘΒ, αἱ δὲ δεκάδες ὑπὸ τῶν διαιρέσεων τῆς ΑΘ, τὰ δὲ ἐννέα πρῶτα τμήματα τῶν παραλλήλων τὰ περιεχόμενα ἐν τῷ τριγώνῳ ΘΖΕ παριστῶσι κατὰ σειρὰν τὰ πρῶτα πολλαπλάσια τοῦ μέτρου, τὰ ἔχοντα ὀλιγώτερα τῶν 10 μέτρων. Τῷόντι, ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ τμῆμα λ5 τῆς πέμπτης παραλλήλου, θέλομεν ἔχει·

$$\frac{\Theta 5}{\Theta E} = \frac{\lambda 5}{ZE} = \frac{5}{10}$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΕ παριστᾷ 10 μέτρα, ἡ λ5 θὰ παριστᾷ 5 μέτρα.

Ἐὰν θέλωμεν π.χ. νὰ θεωρήσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου μῆκος 325μ, θέτομεν τὴν αἰχμὴν τοῦ ἑνὸς σκέλους τοῦ διαβήτου ἐπὶ τοῦ σημείου Μ, ἔνθα ἡ παράλληλος τῇ ΘΖ καὶ ἡ διά τοῦ 5 παράλληλος τῇ ΑΒ συναντῶνται, καὶ φέρομεν τὴν αἰχμὴν τοῦ ἑτέρου σκέλους τοῦ διαβήτου ἐπὶ τῆς παραλλήλου τῇ ΘΕ τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου ἔνθα σημειοῦται ὁ ἀριθμὸς 300· οὕτως ἔχομεν 300μ μέχρι τῆς παραλλήλου ΘΕ, καὶ 25μ ἀπὸ τῆς ΘΕ μέχρι τοῦ Μ.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν θέλωμεν νὰ ὁρίσωμεν τὸ πραγματικὸν μῆκος μιᾶς γραμμῆς τοῦ ἐπιπέδου, λαμβάνομεν ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου ἴσον πρὸς τὸ τῆς γραμμῆς ἐν τῷ σχήματι, καὶ παρατηροῦμεν πόσας τοῦτο περιέχει ἑκατοντάδας τοῦ μέτρου, καὶ ἔστω ὅτι περιέχεται

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μεταξὺ 200 καὶ 300. Θέτομεν τότε τὴν αἰχμὴν τοῦ ἑνὸς σκέλους τοῦ διαβήτου ἐπὶ τῆς παραλλήλου τῇ ΘΕ 200, καὶ κάμνομεν νὰ ὀλισθαίνῃ ἡ αἰχμὴ ἐπὶ τῆς παραλλήλου ταύτης μέχρις ὅτου ἡ αἰχμὴ τοῦ ἑτέρου σκέλους τοῦ διαβήτου διέλθῃ διὰ τῆς τομῆς μιᾶς τῶν παραλλήλων τῇ ΑΘ καὶ μιᾶς τῶν παραλλήλων τῇ ΘΖ· ἔστω δὲ ὅτι συναντᾷ τὴν παράλληλον 30 μεταξὺ τῆς ὀγδόης καὶ ἐνάτης παραλλήλου τῇ ΑΘ· τὸ ζητούμενον μῆκος θὰ εἶναι 200^{μ} πλέον 30^{μ} πλέον ἀριθμός τις μέτρων περιεχόμενος μεταξὺ 8 καὶ 9· τὸ μῆκος λοιπὸν τοῦτο θὰ εἶναι 238^{μ} ἢ 239^{μ} κατὰ προσέγγισιν ἡμίσεος μέτρου ἐὰν λάβωμεν τὸ μεγαλείτερον ἢ τὸ μικρότερον, καθόσον ἡ αἰχμὴ τοῦ διαβήτου πλησιάζει περισσότερον εἰς τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην παράλληλον τῇ ΑΘ.

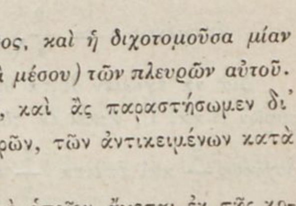
Ὅ,τι εἴπομεν ἤδη ἐφαρμοζόμενον ἐπὶ γηΐνων ἐπιφανειῶν ἐφαρμόζεται ὁμοίως πρὸς γραφικὴν παράστασιν οἰκοδομήματος, μηχανῆς καὶ ἐν γένει οἱουδήποτε ἀντικειμένου.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

190. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος, ἡ διάμεσος, καὶ ἡ διχοτομοῦσα μίαν τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου συναρτήσει (διὰ μέσου) τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.*

Ἔστω τὸ δεδομένον τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ἂς παραστήσωμεν δι' α, β, γ τὰ μήκη τῶν τριῶν αὐτοῦ πλευρῶν, τῶν ἀντικειμένων κατὰ σειρὰν εἰς τὰς γωνίας Α, Β καὶ Γ.

1ον. Ἂς ζητήσωμεν τὸ ὕψος ΑΕ, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς Α. Ἐκ τῶν δύο γωνιῶν Γ, Β, ἡ μία ἀναγκαίως θὰ εἶναι ὀξεῖα· καὶ ἔστω τοιαύτη ἡ Γ (Σχ. 163)



Σχ. 163

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΕΓ θὰ ἔχωμεν $AE^2=A\Gamma^2-\Gamma E^2$
ἢ $\upsilon^2=\beta^2-\Gamma E^2$. (1)

Ἐπειδὴ ἡ γωνίαΓ ὑπετέθη ὀξεῖα, θέλομεν ἔχει ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

$$AB^2=\Gamma B^2+A\Gamma^2-2\ B\Gamma.\ \Gamma E$$

ἢ $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\ \alpha.\ \Gamma E$, ἐξ οὗ

$$\Gamma E=\frac{-\gamma^2+\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀντικαθιστῶντες δὲ ἐν τῇ ἰσότητι (1) τὴν $ΓΕ^2$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτῆς $\frac{(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}{4\alpha^2}$, λαμβάνομεν

$$\upsilon^2=\beta^2-\frac{(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}{4\alpha^2}=\frac{4\alpha^2\beta^2-(\alpha^2+\beta^2\gamma^2)^2}{4\alpha^2}\cdot \text{ καὶ}$$

$$\upsilon^2=\frac{(2\alpha\beta+\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)(2\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)}{4\alpha^2}=\frac{[(\alpha+\beta)^2-\gamma^2[\gamma^2-(\alpha-\beta)^2]}{4\alpha^2}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\gamma+\alpha-\beta)(\gamma-\alpha+\beta)}{4\alpha^2} \qquad (2)$$

Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν τὴν περίμετρον $(\alpha+\beta+\gamma)$ διὰ 2σ, θέλομεν ἔχει καὶ $\alpha+\beta-\gamma=2\sigma-2\gamma=2(\sigma-\gamma)$

καὶ $\gamma+\alpha-\beta=2\sigma-2\beta=2(\sigma-\beta)$

καὶ $\gamma-\alpha+\beta=2\sigma-2\alpha=2(\sigma-\alpha)$

ἀντικαθιστῶντες δὲ τὰς τιμὰς ταύτας ἐν τῇ ἰσότητι (2) λαμβάνομεν.

$$\upsilon^2=\frac{2\sigma.\ 2(\sigma-\gamma).\ 2(\sigma-\beta).\ 2(\sigma-\alpha)}{4\alpha^2}=\frac{4\sigma(\sigma-\alpha)(\sigma-\beta)(\sigma-\gamma)}{\alpha^2}$$

$$\text{ἑπομένως } \upsilon=\frac{2}{\alpha}\sqrt{\sigma(\sigma-\alpha).(\sigma-\beta).(\sigma-\gamma)}. \qquad (3)$$

Διὰ νὰ ἔχωμεν δὲ τὰ ὕψη υ' καὶ υ'' τὰ ἀγόμενα ἀπὸ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ, ἀρκεῖ ἐν τῷ ἀνωτέρω τύπῳ (3) νὰ θέσωμεν διαδοχικῶς $\frac{2}{\beta}$ καὶ ἔπειτα $\frac{2}{\gamma}$ ἀντὶ $\frac{2}{\alpha}$.

2ον. Ἄς ζητήσωμεν τὴν διάμεσον ΑΔ, τὴν ὁποίαν ἂς παραστήσωμεν διὰ μ.. Ἐκ τοῦ θεωρήματος (171) λαμβάνομεν ἀμέσως·

$$\beta^2+\gamma^2=2\left(\frac{\alpha^2}{4}+\mu^2\right)$$

$$\text{ἢ } 2\beta^2+2\gamma^2=\alpha^2+4\mu^2\cdot \text{ ἑπομένως}$$

$$4\mu^2=2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2 \text{ καὶ } \mu^2=\frac{2(\beta^2+\gamma^2)-\alpha^2}{4}$$

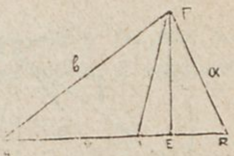
$$\text{καὶ } \mu=\frac{1}{2}\sqrt{2(\beta^2+\gamma^2)-\alpha^2}$$

οὕτω καὶ αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ ἀγόμεναι διάμεσοι μ' καὶ μ'' θὰ ἔχωσι τὰς τιμὰς

$$\mu'=\frac{1}{2}\sqrt{2(\alpha^2+\gamma^2)-\beta^2} \text{ καὶ } \mu''=\frac{1}{2}\sqrt{2(\alpha^2+\beta^2)-\gamma^2}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

3ον. Ἂς ζητήσωμεν τὴν διχοτόμον ΓΔ τῆς γωνίας Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ ἂς παραστήσωμεν αὐτὴν διὰ δ.



Σχ. 164.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος (176) λαμβάνομεν ἀμέσως $\alpha\beta = \delta^2 + ΑΔ.ΔΒ.$ (1)

Ἀλλ' ἐκ τοῦ θεωρήματος (142) ἔχομεν

$$\frac{ΑΔ}{\beta} = \frac{ΒΔ}{\alpha} = \frac{ΑΔ+ΔΒ}{\alpha+\beta} = \frac{\gamma}{\alpha+\beta}. \quad \text{ἑπομένως}$$

$$ΒΔ = \frac{\alpha.\gamma}{\alpha+\beta}$$

$$\text{καὶ} \quad ΔΑ = \frac{\beta\,\gamma}{\alpha+\beta}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἰσότητι (1) τὰς τιμὰς τῶν εὐθειῶν ΑΔ καὶ ΔΒ, λαμβάνομεν

$$\alpha\beta = \delta^2 + \frac{\beta.\gamma}{\alpha+\beta}.\times\frac{\alpha.\gamma}{\alpha+\beta} = \frac{\delta.^2(\alpha+\beta)^2 + \alpha\beta.\gamma^2}{(\alpha+\beta)^2}$$

$$\text{ἢ} \quad \alpha\beta.(\alpha+\beta)^2 = \delta^2(\alpha+\beta)^2 + \alpha\beta.\gamma^2$$

$$\text{ἢ} \quad \delta^2(\alpha+\beta)^2 = \alpha\beta[(\alpha+\beta)^2 - \gamma^2]$$

$$\text{ἢ} \quad \delta^2 = \frac{\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}{(\alpha+\beta)^2} \quad \text{καὶ παριστῶντες}$$

$\alpha+\beta+\gamma$ διὰ 2σ καὶ ἑπομένως $\alpha+\beta-\gamma$ διὰ $(\sigma-\gamma)$, λαμβάνομεν

$$\delta^2 = \frac{\alpha\beta 2\sigma.2(\sigma-\gamma)}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{4\alpha.\beta.\sigma(\sigma-\gamma)}{(\alpha+\beta)^2}$$

$$\text{καὶ} \quad \delta = \frac{2}{\alpha+\beta}\sqrt{\alpha\beta.\sigma(\sigma-\gamma)}.$$

Ἐὰν εἰς τὰς διχοτόμους τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν Β καὶ Α παραστήσωμεν διὰ δ' καὶ δ'', θέλομεν ἔχει ὁμοίως τὰς ἑξῆς αὐτῶν τιμὰς

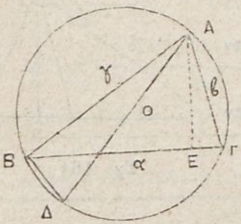
$$\delta' = \frac{2}{\alpha+\gamma}.\sqrt{\alpha\gamma.\sigma(\sigma-\beta)} \quad \text{καὶ} \quad \delta'' = \frac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\beta\gamma.\sigma(\sigma-\alpha)}.$$

Πρόβλημα.

191. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς τρίγωνον περιγεγραμένου κύκλου συναρτήσει (διὰ μέσου) τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω Ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κύκλου. Ἐκ τοῦ θεωρήματος 177 λαμβάνομεν ἀμέσως



Σχ. 165.

$$\alpha.\beta=2\text{Ρ}.\text{ΑΕ} \text{ ἢ } \alpha.\beta=2\text{Ρ},\upsilon \text{ ἢ } \text{Ρ}=\frac{\alpha\,\beta}{2\,\upsilon}$$

ἐὰν δὲ ἐν τῇ ἰσότητι ταύτῃ ἀντικαταστήσωμεν τὸ υ διὰ τῆς (ἐν § 193 1ον) τιμῆς αὐτοῦ λαμβάνομεν

$$\text{Ρ}=\frac{\alpha\beta\gamma}{4\sqrt{\sigma(-\alpha)(\sigma-\beta)(\sigma-\gamma)}}.$$

Πρόβλημα.

192. *Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γεωμετρικαὶ κατασκευαί, οἱ ἐκφραζόμεναι ὑπὸ τῶν ῥιζῶν ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.*

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, λαμβανομένου ἐν αὐτῷ ἑκάστου ὅρου μετὰ τοῦ σημείου + ἢ — λαμβάνει τὰς ἑξῆς τέσσαρας μορφάς.

$$\chi^2+\pi\chi+\kappa=0 \qquad \chi^2-\pi\chi+\kappa=0$$
$$\chi^2+\pi\chi-\kappa=0 \qquad \chi^2-\pi\chi-\kappa=0$$

Ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων τούτων ἀνάγεται εἰς τὴν δευτέραν, καὶ ἡ τρίτη εἰς τὴν τετάρτην μεταβαλλομένου τοῦ χ εἰς $-\chi$. Ἐπομένως θὰ ζητήσωμεν τὰς ῥίζας μόνον τῶν δύο ἐξισώσεων

$$\chi^2-\pi\chi+\kappa=0 \text{ καὶ } \chi^2-\pi\chi-\kappa=0.$$

καὶ τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν ἀμφοτέρων τῶν ἐξισώσεων θὰ εἶναι π, ἐνῷ τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εἶναι $=\kappa$. Καὶ θέτοντες ταύτας ὑπὸ τὴν μορφὴν

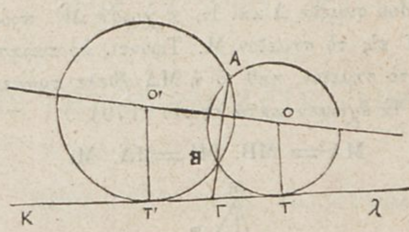
$$\chi\,(\pi-\chi)=\kappa \text{ καὶ } \chi\,(\chi-\pi)=\kappa$$

βλέπομεν ὅτι ἡ ὑπὸ μὲν τῆς πρώτης ἐκφραζομένη γεωμετρικὴ κατασκευὴ εἶναι· *Νὰ εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἄθροισμα εἶναι π, τὸ δὲ γινόμενον κ·* ἡ δὲ ὑπὸ τῆς δευτέρας εἶναι· *Νὰ εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων ἡ μὲν διαφορὰ εἶναι π, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν κ.* Τῷόντι, ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-\pi\chi-\kappa=0$, αὗται εἶναι ἀντιθέτων σημείων, καὶ μεγαλειτέρα εἶναι ἡ θετική· (διότι τὸ μὲν γινόμενον τῶν ῥιζῶν εἶναι ἀρνητικόν, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν θετικόν). Ἐὰν δὲ ἡ θετικὴ παρασταθῇ διὰ χ, ἡ ἀρνητικὴ θὰ ληφθῇ ὑπὸ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν $\chi-\pi$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πρόβλημα.

193. *Νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου διερχομένη διὰ δύο δεδομένων σημείων, καὶ ἐφπτομένη δεδομένης εὐθείας ἢ περιφερείας.*



Σχ. 166.

1ον Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ δύο δεδομένα σημεῖα καὶ Κλ ἡ δεδομένη εὐθεῖα. Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ τὸ πρόβλημα λελυμένον.

Ἐὰν ἡ χορδὴ ΑΒ προσεκβαλλομένη τέμνῃ τὴν Κλ, καὶ ἂν ΓΤ παριστᾷ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου τῆς συναντήσεως Γ ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς τῆς εὐθείας Κλ μετὰ τῆς ζητουμένης περιφερείας, πρέπει νὰ ἔχωμεν $ΓΤ^2 = ΑΓ.\ ΒΓ$. (181).

Ἑπομένως ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς μέσου ἀναλόγου ΓΤ τῶν εὐθειῶν ΑΓ καὶ ΒΓ (187), καὶ πρέπει νὰ λάβωμεν ταύτην ἐπὶ τῆς εὐθείας Κλ ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Γ, ἤτοι ΓΤ καὶ ΓΤ'. Ὑψοῦντες δὲ τότε ἐκ τῶν σημείων Τ καὶ Τ' τὰς καθέτους ΤΟ καὶ Τ'Ο' ἐπὶ τὴν Κλ καὶ φέροντες διὰ τοῦ μέσου τῆς ΑΒ κάθετον ἐπὶ ταύτην τὴν ΟΟ' ὁρίζομεν τὰ κέντρα Ο καὶ Ο' τῶν κύκλων, οἵτινες πληροῦσι τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος.

Ἐὰν ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῇ Κλ, θὰ ἔχωμεν μίαν καὶ μόνην λύσιν. Τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Τ θὰ εἶναι ὁ πούς τῆς ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΑΒ ἀγομένης καθέτου ἐπὶ τὴν Κλ.

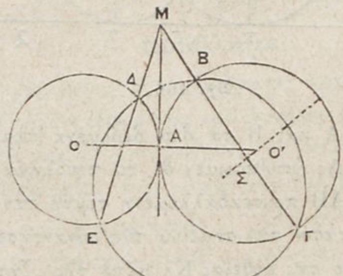
2ον Ἔστωσαν Β καὶ Γ τὰ δύο δεδομένα σημεῖα, καὶ Ο ἡ δεδομένη περιφέρεια. Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ τὸ πρόβλημα λελυμένον. Ἐν πρώτοις εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἐπιδεκτικὸν λύσεως μόνον ἐὰν τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Β κεῖνται ἀμφότερα ἐκτὸς ἢ ἀμφότερα ἐντὸς τῆς δεδομένης περιφερείας Ο.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν Α εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς τῆς δε-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δομένης περιφερείας Ο μετὰ τῆς ζητουμένης περιφερείας Ο′, βλέπομεν ὅτι ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον Μ, καθ' ὃ συναντᾶται ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη ΑΜ τῶν δύο περιφερειῶν μετὰ τῆς χορδῆς ΓΒ προσεκβαλλομένης. Ἑπομένως, ἐὰν διὰ τῶν σημείων Β καὶ Γ φέρωμεν ὡς βοηθητικὴν μίαν οἱανδήποτε περιφέρειαν, τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν Ο εἰς δύο σημεῖα Δ καὶ Ε, ἡ χορδὴ ΔΕ προσεκβαλλομένη τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Μ. Τῷόντι, ἂς παραστήσωμεν πρὸς στιγμὴν δι' ε τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἡ ΜΔ ἤθελε τμήσει τὴν περιφέρειαν Ο· τότε θὰ ἔχωμεν κατὰ σειρὰν (179).

$$ΜΑ^2 = ΜΒ. ΜΓ = ΜΔ. Με.$$



Σχ. 167.

Ἐκ τούτου ἐξάγομεν (180) ὅτι τὸ σημεῖον ε ἀνήκει εἰς τὴν περιφέρειαν, τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τῶν σημείων Β, Γ, καὶ Δ· ἄρα τὸ σημεῖον ε θὰ εἶναι αὐτὸ τὸ Ε. Οὕτως ἐκ τοῦ σημείου Μ, καθ' ὃ συναντῶνται αἱ εὐθεῖαι ΒΓ καὶ ΔΕ, φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΜΑ εἰς τὴν περιφέρειαν Ο.

Τὸ σημεῖον Α εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς τῆς περιφερείας ταύτης μετὰ τῆς ζητουμένης Ο′, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον θὰ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως τῆς ΟΑ προσεκβαλλομένης καὶ τῆς ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΒΓ ἀγομένης καθέτου ἐπὶ ταύτην τῆς ΣΟ′.

Ἡ δευτέρα ἐφαπτομένη ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Μ εἰς τὴν περιφέρειαν Ο προσθέτει δευτέραν λύσιν.

Ἐὰν τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἀπέχωσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ Ο, αἱ εὐθεῖαι ΒΓ καὶ ΔΕ θὰ εἶναι παράλληλοι· ἡ δὲ ἐφαπτομένη τότε θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς ἀμφοτέρας, καὶ τὸ πρόβλημα προσθέτει δύο ἔτι λύσεις.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΗΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

Α΄. ΠΕΡΙ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

194. Πολύγωνόν τι λέγεται *κανονικόν*, ὅταν ἔχῃ πάσας τὰς πλευρὰς καὶ πάσας τὰς γωνίας αὐτοῦ ἴσας πρὸς ἀλλήλας.

Μεταξὺ τῶν τριγώνων καὶ τῶν τετραπλεύρων τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ τὸ τετράγωνον εἶναι κανονικά.

Πολύγωνον λέγεται *ἐγγεγραμμένον* εἰς κύκλον, ὅταν πᾶσαι αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας· ὁ κύκλος τότε λέγεται *περιγεγραμμένος* εἰς τὸ πολύγωνον.

Πολύγωνον λέγεται *περιγεγραμμένον*, εἰς κύκλον ὅταν πᾶσαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ἐφάπτωνται τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου· ὁ δὲ κύκλος τότε λέγεται *ἐγγεγραμμένος* εἰς τὸ πολύγωνον.

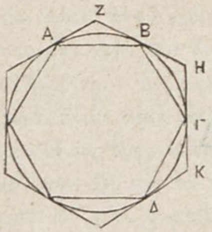
Πᾶν τρίγωνον εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον.

Θεώρημα.

195. *Ἐὰν διαιρεθῇ περιφέρεια κύκλου εἰς οἱονδήποτε ἀριθμὸν ἴσων μερῶν καὶ ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ τῶν τόξων τούτων, σχηματίζεται κανονικὸν πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον· ἐὰν δὲ ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας εἰς πάντα τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, σχηματίζεται κανονικὸν πολύγωνον, περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον.* (Σχ. 168).

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς ν ἴσα μέρη, καὶ ὅτι ἑνώνομεν τὰ ἐφεξῆς σημεῖα τῆς διαιρέσεως δι' εὐθειῶν. Θεωρήσωμεν δὲ μίαν οἱανδήποτε γωνίαν ΑΒΓ τοῦ σχηματισθέντος

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Σχ. 168.

πολυγώνου· αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας ταύτης εἶναι χορδαὶ τῶν δύο τμημάτων τῆς περιφερείας, καὶ ἡ γωνία ὡς ἐγγεγραμμένη ἔχει ὡς μέτρον τὸ τόξον τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῶν ν—2 ὑπολειπομένων τμημάτων τῆς περιφερείας· τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ πᾶσαν ἄλλην γωνίαν τοῦ πολυγώνου· ἑπομένως πᾶσαι ὡς γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσαι ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας· ἄρα τὸ πολύγωνον εἶναι κανονικόν.

Ἄς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι διὰ πάντων τῶν σημείων Α,Β,Γ.... τῆς διαιρέσεως τῆς περιφερείας εἰς ἴσα μέρη φέρομεν ἐφαπτομένας τὰς ΖΗ,ΗΚ.....κ.τ.λ. λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων τούτων σχηματιζόμενον πολύγωνον εἶναι κανονικόν. Τῷόντι, ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ τρίγωνα ΑΒΖ, ΒΗΓ....κ.τ,λ., παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν πλευρὰν ἴσην (ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ......) καὶ τὰς προσκειμένας τῇ πλευρᾷ ταύτῃ γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ· οἷον αἱ γωνίαι ΖΑΒ καὶ ΗΒΓ εἶναι ἴσαι ὡς σχηματιζόμεναι ἑκατέρα ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης καὶ μετρούμεναι ὑπὸ ἴσων τόξων· τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι καὶ ἰσοσκελῆ, διότι αἱ ἐξ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀγόμεναι δύο ἐφαπτόμεναι περιφερείας εἶναι ἴσαι. Ἄρα καὶ αἱ γωνίαι Ζ,Η,Κ....,κ.τ.λ. εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, καὶ ἡ ΖΗ, ἥτις εἶναι τὸ διπλάσιον τῆς ΒΗ, εἶναι ἴση τῇ ΗΚ, ἥτις εἶναι τὸ διπλάσιον τῆς ΗΓ· ἑπομένως καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι ἴσαι πᾶσαι πρὸς ἀλλήλας· ἄρα τὸ πολύγωνον εἶναι κανονικόν.

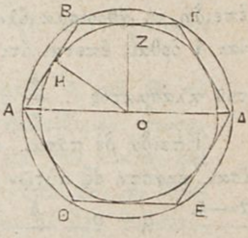
Σημ. Λαμβάνοντες τὰ ἐφεξῆς σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἀπεριορίστως πλησίον ἀλλήλων δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν περιφέρειαν ὡς ἓν κανονικὸν πολύγωνον ἔχον ἀριθμὸν πλευρῶν, ὅσον θέλομεν μέγα, καὶ τὰς πλευρὰς ὅσον θέλομεν μικράς.

Θεώρημα.

196. *Πᾶν κανονικὸν πολύγωνον εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω, π. χ. τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΘ. Ἄς ὁρίσωμεν τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου τοῦ διερχομένου διὰ τῶν τριῶν σημείων τῶν κορυφῶν Α, Β καὶ Γ· λέγω ὅτι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου τούτου θὰ διέρχηται καὶ διὰ τῆς κορυφῆς Δ. Τῷόντι, ἃς φέρωμεν ἐκ τοῦ σημείου Ο κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ τὴν ΟΖ· τὸ σημεῖον Ζ θὰ κεῖται εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ, καὶ ἃς ἐπιθέσωμεν τὸ τετράπλευρον ΟΑΒΖ ἐπὶ



Σχ. 169.

τοῦ ΟΔΓΖ, στρέφοντες αὐτὸ περὶ τὴν ΟΖ ὡς ἄξονα. Ἐπειδὴ αἱ περὶ τὸ Ζ δύο γωνίαι ΒΖΟ καὶ ΟΖΓ εἶναι ἴσαι ὡς ὀρθαί, ἡ εὐθεῖα ΖΒ θὰ πέσῃ ἐπὶ τὴν ΖΓ, καὶ ἐπειδὴ ΖΒ=ΖΓ, τὸ σημεῖον Β θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ· ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡ γωνία Β εἶναι ἴση τῇ Γ (διότι τὸ πολύγωνον ὑπετέθη κανονικόν), ἡ πλευρὰ ΒΑ θὰ πέσῃ ἐπὶ τὴν ΓΔ καὶ τὸ σημεῖον Α ἐπὶ τοῦ Δ, διότι ΒΑ=ΓΔ· ἄρα ἡ ΟΑ θὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ΟΔ (ἐνῷ τὸ Ο τηρεῖ σταθερὰν θέσιν), καὶ ἡ μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα ΟΑ γραφομένη περιφέρεια θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Δ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύεται ὅτι ἡ αὐτὴ περιφέρεια διέρχεται καὶ διὰ τῶν λοιπῶν κορυφῶν τοῦ δεδομένου κανονικοῦ πολυγώνου.

Τὸ αὐτὸ πολύγωνον εἶναι καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον· διότι αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ..., οὖσαι ἴσαι χορδαὶ τοῦ περιγραφέντος κύκλου, ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο· ἐπομένως, ἐὰν μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν κάθετον ΟΖ, γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη θὰ ἐφάπτηται πασῶν τῶν πλευρῶν τοῦ δεδομένου κανονικοῦ πολυγώνου, καὶ ἑκάστης κατὰ τὸ μέσον.

Σημείωσις.

197. Τὸ σημεῖον Ο κοινὸν κέντρον τοῦ τε περιγεγραμμένου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καλεῖται καὶ *κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου*, ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου *ἀκτὶς τοῦ πολυγώνου*, καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου *ἀπόστημα* τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Ἡ ὑπὸ δύο διαδοχικῶν ἀκτίνων ΟΒ καὶ ΟΓ σχηματιζομένη γωνία καλεῖται *ἐπίκεντρος γωνία τοῦ πολυγώνου*. *Πᾶσαι δὲ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι ἴσαι, διότι ὑποτείνονται ὑπὸ*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

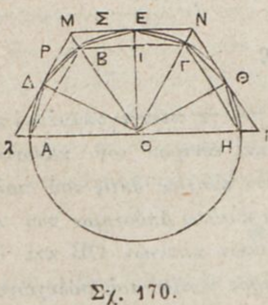
ἴσων τόξων. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου εἶναι ν, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν περὶ τὸ Ο ν τὸ πλῆθος γωνιῶν εἶναι 4 ὀρθαί, ἔπεται ὅτι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἐκφράζεται γενικῶς διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{4}{\nu}$

Ἐπειδὴ δὲ πᾶσαι αἱ γωνίαι τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσαι, ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἐκφράζεται γενικῶς διὰ τοῦ τύπου $\frac{2\nu-4}{\nu}$. ἢ $2-\frac{4}{\nu}$. *Ἡ γωνία κανονικοῦ πολυγώνου καὶ ἡ ἐπίκεντρος αὐτοῦ γωνία εἶναι παραπληρωματικαί*. ἑπομένως τὰ ἡμίση *αὐτῶν εἶναι γωνίαι συμπληρωματικαί*. Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι, ἂν θεωρήσωμεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΟΗ, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ ΟΗ εἶναι διχοτόμος τῆς ἐπικέντρου γωνίας ΑΟΒ, ἡ ΒΟ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΒΓ τοῦ πολυγώνου. Οὕτως *ἡ ἀκτὶς ἡ ἀγομένη εἰς κορυφήν τινα τοῦ πολυγώνου διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς ταύτης*.

Πόρισμα.

198. Δεδομένου κανονικοῦ πολυγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, ἐὰν προεκτείνωμεν τὰ ἀποστήματα αὐτοῦ μέχρι τῆς περιφερείας, καὶ διὰ τῶν οὕτως ὁριζομένων σημείων τῆς περιφερείας φέρωμεν ἐφαπτομένας, αὗται σχηματίζουσι κανονικὸν πολύγωνον περιγεγραμμένον. (Σχ. 170)

Τῳόντι, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Δ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΒ, καὶ τὸ σημεῖον Ε μέσον τοῦ τόξου ΒΓ, τὸ τόξον ΔΕ θὰ εἶναι ἴσον τῷ ΑΒ. Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι τὰ νέα σημεῖα τῆς διαιρέσεως Δ, Ε, Θ.... διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μερῶν ἴσων, ὅπως καὶ τὰ σημεῖα Α,Β,Γ...,. Τὸ περιγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον τὸ οὕτω κατασκευαζόμενον ἔχει τὰς πλευρὰς αὐτοῦ παραλλήλους πρὸς τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑκάστην ἑκάστη, καὶ αἱ ἀκτῖνες τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου προεκτεινόμεναι εἶναι ἀκτῖνες καὶ τοῦ περιγεγραμμένου· διότι, ἀφοῦ τὰ ὀρθογώνια τρί-



Σχ. 170.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γωνα ΜΟΔ,ΜΟΕ εἶναι ἴσα, ἡ ΜΟ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΔΟΕ, καὶ ἑπομένως δέον νὰ συμπίπτῃ μετὰ τῆς ΒΟ διχοτόμου τῆς αὐτῆς γωνίας.

Ἐὰν δὲ ἑνώσωμεν τὸ σημεῖον Δ μὲ τὰ σημεῖα Α καὶ Β, τὸ σημεῖον Ε μὲ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ....., σχηματίζομεν προφανῶς νέον πολύγωνον κανονικὸν ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον καὶ ἔχον διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν τοῦ δεδομένου· ἤτοι, ἐὰν τὸ δεδομένον ἔχῃ ν πλευράς, τὸ οὕτω κατασκευαζόμενον θὰ ἔχῃ 2ν πλευράς· ἡ δὲ περίμετρος τοῦ νέου πολυγώνου εἶναι μεγαλειτέρα τῆς τοῦ δεδομένου ΑΒΓ..... διότι ἔχομεν

$$ΑΔ+ΔΒ>ΑΒ. \quad ΒΕ+ΕΓ>ΒΓ.......$$

Ὁμοίως, ἐὰν φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὴν περιφέρειαν διὰ τῶν σημείων Β,Γ....περατουμένας εἰς τὰς ἐφαπτομένας, αἵτινες σχηματίζουσι τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον λΜΝ.,...σχηματίζομεν νέον κανονικὸν πολύγωνον περιγεγραμμένον, ἔχον 2ν πλευράς. Ἡ περίμετρος τοῦ νέου τούτου πολυγώνου εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ λΜΝ..... διότι ΡΜ+ΜΣ>ΡΣ......

Οὕτω, διπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, ἡ περίμετρος αὐτοῦ αὐξάνει. Διπλασιαζομένου δὲ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, ἡ περίμετρος αὐτοῦ ἐλαττοῦται.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΟΙ λαμβάνομεν

$$ΒΟ-ΟΙ<ΒΙ$$

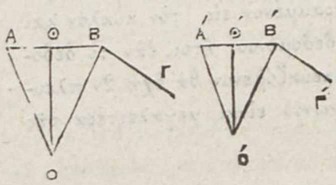
Ἡ διαφορὰ τῆς ἀκτῖνος καὶ τοῦ ἀποστήματος κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι πάντοτε μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου τούτου. Ἐφ' ὅσον δὲ διπλασιάζεται ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ἐλαττοῦται καὶ τείνει εἰς τὸ μηδέν, διότι αἱ ἐφεξῆς κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου πλησιάζουσιν ἀλλήλαις ἀπεριορίστως ἐπὶ τῆς περιφερείας· ἑπομένως ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἀκτῖνος καὶ τοῦ ἀποστήματος, ἐλαττουμένη ἀπεριορίστως, τείνει εἰς τὸ μηδέν, ἐφ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου αὐξάνει ἀπεριορίστως.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θεώρημα.

199. *Δύο κανονικὰ πολύγωνα, ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν, εἶναι ὅμοια, καὶ ὁ λόγος τῶν περιμέτρων αὐτῶν ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν ἀκτίνων καὶ τῷ λόγῳ τῶν ἀποστημάτων αὐτῶν.*

Ἡ τιμὴ τῆς γωνίας ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἐξαρτᾶται ἐκ μόνου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ· ἑπομένως τὰ δύο θεωρούμενα πολύγωνα ἔχουσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας· αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι, διότι οἱ λόγοι $\frac{AB}{A'B'}$, $\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$...... εἶναι ἀναγκαίως ἴσοι· ἑπομένως τὰ δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια.



Σχ. 171.

Αἱ περίμετροι Π καὶ Π′ τῶν δύο πολυγώνων ἔχουσι λόγον ὁμοιότητος τὸν $\frac{AB}{A'B'}$, ὁ ὁποῖος εἶναι προφανῶς ἴσος καὶ πρὸς τὸν λόγον $\frac{A\Theta}{A'\Theta'}$. Ἀλλὰ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΟΘ καὶ Α′Ο′Θ′ εἶναι προφανῶς ὅμοια, ἐπειδὴ αἱ ἀκτῖνες ΟΑ καὶ Ο′Α′ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α καὶ Α′ τῶν δύο πολυγώνων· ἑπομένως θέλομεν ἔχει

$$\frac{A\Theta}{A'\Theta'} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{O\Theta}{O'\Theta'}$$

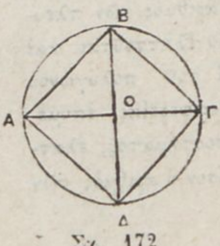
ἐκ τούτου ἐξάγομεν

$$\text{καὶ} \quad \frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{O\Theta}{O'\Theta'}.$$

Β′. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

200. *Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.*

Φέρομεν δύο διαμέτρους ΑΓ καὶ ΒΔ καθέτους ἐπ᾽ ἀλλήλας, καὶ ἑνώνομεν διὰ χορδῶν τὰ ἄκρα αὐτῶν Α,Β,Γ,Δ· τὸ οὕτω σχηματιζόμενον τετράπλευρον εἶναι τετράγωνον· διότι ἡ περιφέρεια διῃρέθη εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη ἕνεκεν τῆς ἰσότητος τῶν περὶ τὸ κέντρον γωνιῶν ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, ΔΟΑ, αἵτινες εἶναι ὀρθαί.



Σχ. 172

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΟΒ δίδει

$$AB^2 = 2\,AO^2 \text{ ἢ } AB = AO\sqrt{2}.$$

Ἑπομένως· *Ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἐπὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 2.*

Ἡ διάμετρος τοῦ εἰς τὸ τετράγωνον ἐγγεγραμμένου κύκλου εἶναι προφανῶς ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΑΒ. Ἑπομένως τὸ ἀπόστημα τοῦ τετραγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

Εὐκόλως δὲ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον περιγεγραμμένου τετραγώνου ἰσοῦται πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου.

Ἐὰν διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη ἕκαστον τῶν ὑπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου ὑποτεινομένων τόξων, τὰ σημεῖα ταῦτα τῆς διαιρέσεως καὶ αἱ κορυφαὶ τοῦ τετραγώνου χωρίζουσι τὴν περιφέρειαν τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς ὀκτὼ ἴσα τόξα. Ἑπομένως, ἐὰν ἑνώσωμεν ἀνὰ δύο ἐφεξῆς τῶν σημείων τούτων, σχηματίζομεν κανονικὸν ὀκτάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον.

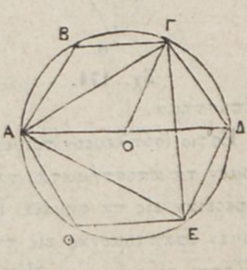
Πρόβλημα.

201. Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.

Ἄς ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστω ὅτι ἡ ΒΓ παριστᾷ τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου· ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΒΟΓ ἰσοῦται πρὸς $\frac{4}{6}$ ἢ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας· διότι $B + \Gamma = 2$ ὀρθ. $- \frac{2}{3}$

$$= \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \text{ καὶ}$$

$$B = \frac{2}{3} \text{ καὶ } \Gamma = \frac{2}{3}.$$



Σχ. 173.

Ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΒΟΓ, ὂν ἰσογώνιον, εἶναι καὶ ἰσόπλευρον· ἄρα ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου ἰσοῦται τῇ ἀκτῖνι τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον, ἀρκεῖ νὰ περιαγάγωμεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ὡς χορδὴν ἐπὶ τῆς περιφερείας.

202. Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς κύκλον ἑνώνομεν δι' εὐθειῶν ἐναλλὰξ τὰς τρεῖς κορυφὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν τῷ κύκλῳ κανονικοῦ ἑξαγώνου.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΔ (Σχ. 173) θὰ ἔχωμεν ἀμέσως ἐξ αὐτοῦ

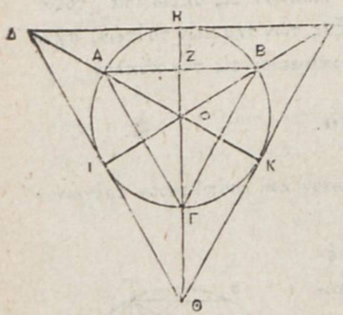
$$ΑΓ^2=ΑΔ^2-ΓΔ^2$$

ἀλλὰ $ΑΔ=2ΑΟ$ καὶ $ΓΔ=ΑΟ$· ἄρα $ΑΔ^2=4ΑΟ^2$ καὶ $ΓΔ^2=ΑΟ^2$·

ἐπομένως $$ΑΓ^2=4ΑΟ^2-ΑΟ^2=3ΑΟ^2$$

καὶ $$ΑΓ=ΑΟ\cdot\sqrt{3}$$

Ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 3.



Σχ. 174.

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν ἓν κανονικὸν πολύγωνον ἔχῃ ἄρτιον ἀριθμὸν πλευρῶν, ὡς τὸ ἑξάγωνον, ἑκάστη ἀκτὶς ΟΑ προσεκβαλλομένη πρὸς τὸ κέντρον γίνεται διάμετρος ΑΔ· ἐνῷ, ὅταν τὸ κανονικὸν πολύγωνον ἔχῃ περιττὸν ἀριθμὸν πλευρῶν, ὡς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, εἰς ἑκάστην ἀκτῖνα ΑΟ προσεκβαλλομένην ἀντιστοιχεῖ ἓν ἀπόστημα.

Ἔστω ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ (Σχ. 174) ἐγγεγραμμένον. Φέρομεν τὰ ἀποστήματα, τὰ ὁποῖα προσεκβαλλόμενα συναντῶσι τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Η, Ι, Κ. Ἐὰν διὰ τῶν σημείων τούτων φέρωμεν ἐφαπτομένας εἰς τὴν περιφέρειαν τὰς ΔΕ, ΕΘ, ΘΔ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΔΕΘ περιγεγραμμένον καὶ ἰσόπλευρον (198), τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΔΕ παρέχουσιν·

$$\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΟΑ}{ΟΔ}=\frac{ΟΖ}{ΟΗ}=\frac{1}{2} \quad ἤτοι$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

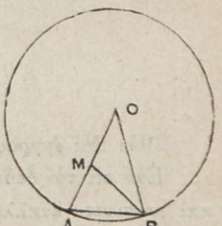
ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι διπλασία τῆς τοῦ ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Ἐκ τούτου ἕπεται ἀμέσως ὅτι καὶ ἡ περίμετρος τοῦ ἰσοπλεύρου περιγεγραμμένου τριγώνου εἶναι διπλασία τῆς περιμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου τριγώνου, καὶ ἰδίᾳ τὸ ὕψος τοῦ ἰσοπλεύρου περιγεγραμμένουτριγώνου εἶναι διπλάσιον τοῦ ὕψους τοῦ ἐγγεγραμμένου.

Πρόβλημα.

203. Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκάγωνον εἰς κύκλον. (Σχ. 175).

Θὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς δέκα ἴσα μέρη, θὰ ἑνώσωμεν ἀνὰ δύο τὰ ἐφεξῆς σημεῖα τῆς διαιρέσεως, καὶ θὰ εὕρωμεν οὕτω τὸ ζητούμενον κανονικὸν δεκάγωνον. Πρὸς τοῦτο δέον νὰ προσδιορίσωμεν τὴν πλευρὰν κανονικοῦ δεκαγώνου, καὶ ἔστω ὅτι αὐτὴ εἶναι ἡ ΑΒ· Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΒ, σχηματίζεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΟΑΒ. Ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΒ ὑπετέθη ὅτι εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς περιφερείας, ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τῶν 4 ὀρθῶν, ἤτοι $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας· ἑπομένως ἑκατέρα τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι $\frac{4}{5}$. Ἐὰν διχοτομήσωμεν



Σχ. 175.

τὴν γωνίαν Β διὰ τῆς εὐθείας ΒΜ, θέλομεν ἔχει (142)

$$\frac{AB}{OB} = \frac{AM}{OM} \quad \text{ἢ} \quad \frac{AB}{OA} = \frac{AM}{OM} \qquad (1)$$

Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΜΒ, ἔχον τὴν γωνίαν Α ἴσην μὲ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας, καὶ τὴν ΑΒΜ ἴσην μὲ $\frac{2}{5}$ (ὡς τὸ ἥμισυ τῆς Β), θὰ ἔχῃ καὶ τὴν γωνίαν ΑΜΒ ἴσην πρὸς $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς· ἑπομένως εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἔχει τὴν πλευρὰν ΒΜ ἴσην τῇ ΒΑ. Ὁμοίως

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ τὸ τρίγωνον ΟΜΒ, ἔχον τὴν γωνίαν Ο ἴσην τῇ ΟΒΜ (διότι ἑκατέρα εἶναι $\frac{2}{5}$ ὀρθῆς), εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἔχει τὴν ΜΟ ἴσην τῇ ΜΒ· ἔχομεν ἄρα ΟΜ = ΜΒ = ΑΒ· καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἰσότητι (1) τὴν ΟΜ δι' ΑΒ, λαμβάνομεν $\frac{AB}{OA} = \frac{AM}{AB}$· ἑπομένως $AB^2 = OA \cdot AM$.

Ἐκ τούτου ἐξάγομεν ὅτι· Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ εἰς δεδομένον κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον· τὸ μεγαλείτερον ἐκ τῶν δύο τούτων μερῶν τῆς ἀκτῖνος θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου δεκαγώνου.

Ἐὰν τὴν μὲν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου παραστήσωμεν δι' α, τὴν δὲ ζητουμένην πλευρὰν ΑΒ διὰ χ, θέλομεν ἔχει $\chi^2=\alpha\,(\alpha-\chi)$

$$\text{ἢ } \chi^2+\alpha\chi=+\alpha^2$$

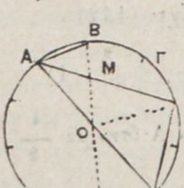
καὶ λύοντες τὴν δευτεροβάθμιον ταύτην ἐξίσωσιν λαμβάνομεν

$$\chi=\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

Πρόβλημα.

204. *Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν πεντάγωνον εἰς κύκλον.*

Ἐὰν εἰς τὸν δεδομένον κύκλον ἐγράψωμεν κανονικὸν δεκάγωνον, καὶ ἑνώσωμεν ἐναλλὰξ ἀνὰ δύο τὰς κορυφὰς τοῦ δεκαγώνου δι' εὐθειῶν, προφανῶς σχηματίζεται κανονικὸν πεντάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.



Σχ. 176.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς ΘΔ τοῦ πενταγώνου διὰ τῆς δεδομένης ἀκτῖνος τοῦ κύκλου ἂς φέρωμεν τὰς διαμέτρους ΑΘ καὶ ΒΖ, προσέτι δὲ τὰς χορδὰς ΑΔ καὶ ΔΘ ὡς καὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΔ. Ἔστω ἡ ΔΘ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου. Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΒΟ βαίνουσα ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΖ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὰ $\frac{4}{10}$ τῆς περιφερείας, θὰ εἶναι ἴση τῇ ἐπικέντρῳ γωνίᾳ ΒΟΔ, βαινούσῃ ἐπὶ τόξου ΒΔ,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸ ὁποῖον εἶναι τὰ $\frac{2}{10}$ τῆς περιφερείας, καὶ θὰ εἶναι ἴση πρὸς $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς. Ἐπομένως ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῇ ΟΔ, ἡ δὲ γωνία ΜΔΟ = ΒΑΜ, $= \frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας, καὶ ἡ ΔΜΟ $= \frac{4}{5}$ · ἄρα τὸ τρίγωνον ΔΟΜ εἶναι ἰσοσκελές, καὶ ἡ πλευρὰ ΜΔ εἶναι ἴση τῇ ἀκτῖνι ΟΔ· ἄρα ΑΔ = ΟΒ + ΑΜ = ΟΒ + ΑΒ (1).

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΘ λαμβάνομεν

$$Δ Θ^2 = ΑΘ^2 - ΑΔ^2. \qquad (2)$$

ἐὰν δὲ παραστήσωμεν τὴν μὲν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου δι' α τὴν δὲ πλευρὰν τοῦ πενταγώνου διὰ χ καὶ ἀντικαταστήσωμεν ἐν τῇ ἰσότητι (2) τὴν ΑΔ διὰ τῆς τιμῆς αὐτῆς, $\frac{\alpha(\sqrt{5}+1)}{2}$, ἔχομεν

$$\chi^2 = 4\alpha^2 - \frac{\alpha^2(1+\sqrt{5})^2}{4} = 4\alpha^2 - \frac{\alpha^2(6+2\sqrt{5})}{4}$$

$$= \frac{16\alpha^2 - 6\alpha^2 - 2\alpha^2\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{10\alpha^2 - 2\alpha^2\sqrt{5}}{4} = \frac{\alpha^2(10-2\sqrt{5})}{4}. \text{ καὶ}$$

$$\chi = \frac{\alpha}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Πρόβλημα.

205. *Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκαπεντάγωνον εἰς δεδομένον κύκλον.*

Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 15 ἴσα μέρη, καὶ νὰ φέρωμεν τὰς χορδὰς τῶν τόξων τούτων.

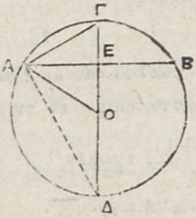
Ἐὰν ἀπὸ τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς περιφερείας ἀφαιρέσωμεν τὸ $\frac{1}{10}$ αὐτῆς, ἤτοι ἐὰν ἀπὸ τὸ τόξον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἀφαιρέσωμεν τὸ τόξον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, ἀπομένει τόξον ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{15}$ τῆς περιφερείας, ἤτοι τὸ τόξον τὸ ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὴν πλευ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρὰν τοῦ κανονικοῦ δεκαπενταγώνου· $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{4}{60}=\frac{1}{15}$.

Πρόβλημα.

206. *Δεδομένης τῆς ἀκτῖνος κύκλου καὶ τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον, νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ καὶ ἔχοντος διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.*



Σχ. 177.

Ἔστω ΑΒ $=\alpha$ ἡ πλευρὰ τοῦ δεδομένου πολυγώνου καὶ Ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ΑΒ φέρωμεν τὴν κάθετον διάμετρον ΓΔ καὶ τὴν χορδὴν ΑΓ, αὕτη θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη πλευρὰ τοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν. Ἐὰν τὴν ΑΓ παραστήσωμεν δι' α', θέλομεν ἔχει

$\text{ΑΓ}^2=\text{ΓΔ}.\text{ΓΕ}$ ἢ $\alpha'^2=2\text{Ρ}(\text{Ρ}-\text{ΟΕ})$. (1)

Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΕΟ λαμβάνομεν τὸ ἀπόστημα $\text{ΟΕ}^2=\text{ΟΑ}^2-\text{ΑΕ}^2$ καὶ $\text{ΟΕ}=\sqrt{\text{ΟΑ}^2-\text{ΑΕ}^2}$

$$\text{ἢ ΟΕ}=\sqrt{\text{Ρ}^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\sqrt{\text{Ρ}^2-\frac{\alpha^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4\text{Ρ}^2-\alpha^2}$$

Ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν ΟΕ διὰ τῆς τιμῆς αὐτῆς ἐν τῇ ἰσότητι (1) λαμβάνομεν

$$\text{καὶ } \alpha'=\sqrt{\text{Ρ}\left(2\text{Ρ}-\sqrt{4\text{Ρ}^2-\alpha^2}\right)}. \qquad (2)$$

Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν τὴν ἀκτῖνα $\text{Ρ}=1$, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha'=\sqrt{2-\sqrt{4-\alpha^2}}. \qquad (3)$$

Σημείωσις.

207. Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος ν πλευράς, δυνάμεθα ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (3) νὰ εὕρωμεν τὰς πλευρὰς καὶ τὰς περιμέτρους κανονικῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων ἐχόντων 2ν, 4ν, 8ν,... πλευράς. Δυ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

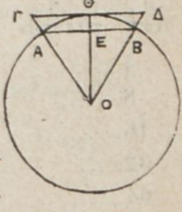
νάμεθα προσέτι νὰ εὕρωμεν τὰ ἀποστήματα τῶν ἐγγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων τῶν ἐχόντων ν, 2ν, 4ν... πλευράς.

Κατωτέρω παραθέτομεν τὰς τιμὰς τῶν ἡμιπεριμέτρων κανονικῶν πολυγώνων ἐγγεγραμμένων εἰς κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι 1.

Ἀριθ. πλευρῶν	ἡμιπερίμετρος	Ἀριθ. πλευρῶν	ἡμιπερίμετρος
4.......	2,82842	6.......	3,00000
8.......	3,06146	12.......	3,10582
16.......	3,12144	24.......	3,13262
32.......	3,13654	48.......	3,13935
64.......	3,14033	96.......	3,14103
128.......	3,14127	192.......	3,14145

Πρόβλημα.

208. Δεδομένης τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, ὁμοίου τῷ ἐγγεγραμμένῳ.



Σχ. 178.

Ἔστω ΑΒ $=$ α ἡ πλευρὰ τοῦ δεδομένου πολυγώνου καὶ ΟΒ $=$ Ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου. Ἐὰν ὁρίσωμεν τὸ σημεῖον Θ, καθ' ὃ τὸ ἀπόστημα ΟΕ, προσεκβαλλόμενον, συναντᾷ τὴν περιφέρειαν, καὶ διὰ τοῦ σημείου τούτου φέρωμεν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου, ὁριζομένην ὑπὸ τῶν προσεκβολῶν τῶν ἀκτίνων ΟΒ καὶ ΟΑ, γνωρίζομεν (198, 199) ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου ὁμοίου τῷ ἐγγεγραμμένῳ τῷ ἔχοντι πλευρὰν τὴν α.

Ἄς θέσωμεν ΓΔ$=$χ. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΟΕ καὶ ΓΟΘ δίδουσιν ἀμέσως

$$\frac{\Gamma\Theta}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{O}\Theta}{\mathrm{OE}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\frac{\chi}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\chi}{\alpha} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{OE}}$$

$$\text{ἀλλὰ (206) ΟΕ} = \frac{1}{2}\sqrt{4\,\mathrm{P}^2 - \alpha^2}$$

$$\text{ἑπομένως } \frac{\chi}{\alpha} = \frac{\mathrm{P}}{\frac{1}{2}\sqrt{4\,\mathrm{P}^2 - \alpha^2}} \text{ ἢ } \frac{\chi}{\alpha} = \frac{2\mathrm{P}}{\sqrt{4\,\mathrm{P}^2 - \alpha^2}}$$

$$\text{καὶ } \chi = \frac{2\alpha\mathrm{P}}{\sqrt{4\,\mathrm{P}^2 - \alpha^2}} \qquad (1).$$

καὶ ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ ἀκτὶς Ρ ἰσοῦται τῇ μονάδι 1, θὰ ἔχωμεν

$$\chi = \frac{2\alpha}{\sqrt{4 - \alpha^2}}. \qquad (2)$$

Σημείωσις.

209. Ὁ τύπος 2 παρέχει ἡμῖν τὸ μέσον εἰς τὸ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς ἡμιπεριμέτρους περιγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων, ὅπως καὶ ἐν (§ 207). Οὕτως ἔχομεν τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα κατὰ προσέγγισιν δεκαδικῆς μονάδος πέμπτης τάξεως,

Ἀριθ. πλευρῶν	ἡμιπερίμετρος	Ἀριθ. πλευρῶν	ἡμιπερίμετρος
4.......	4,00000	6........	3,46411
8.......	3,31371	12........	3,21540
16.......	3,18260	24........	3,15967
32.......	3,15173	48........	3,14609
64.......	3,14412	96........	3,14272
128........	3,14223	192........	3,14188

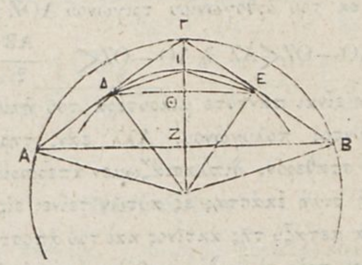
Πρόβλημα.

210. Δεδομένης τῆς ἀκτῖνος ρ καὶ τοῦ ἀποστήματος α κανονικοῦ πολυγώνου νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς ρ′ καὶ τὸ ἀπόστημα α′ κανονικοῦ πολυγώνου, ἔχοντος τὴν αὐτὴν μὲν περίμετρον μὲ τὸ δεδομένον ἀλλὰ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

Ἂς θεωρήσωμεν τὸν κύκλον Ο περιγεγραμμένον εἰς τὸ δεδομένον κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ΑΒ. Ἐὰν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΟΖΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, θέλομεν ἔχει ΟΓ$=$ρ καὶ ΟΖ $=$ α.



Σχ. 179.

Ἐὰν δὲ διχοτομήσωμεν τὰς χορδὰς ΑΓ καὶ ΓΒ, καὶ ἑνώσωμεν τὰ μέσα αὐτῶν διὰ τῆς εὐθείας ΔΕ, αὕτη ἡ ΔΕ, παράλληλος οὖσα τῇ ΑΒ καὶ ἴση τῷ ἡμίσει αὐτῆς θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος περίμετρον μὲν ἴσην πρὸς τὴν τοῦ δεδομένου, ἀριθμὸν δὲ πλευρῶν διπλάσιον. Διότι ἡ γωνία ΔΟΕ, οὖσα προφανῶς τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου γωνίας ΑΟΒ τοῦ πρώτου πολυγώνου, εἶναι ἐπίκεντρος γωνία τοῦ δευτέρου πολυγώνου, καὶ ἑπομένως ΟΔ $=$ ρ' καὶ ΟΘ $=$ α'.

Οὕτως, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Θ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΓΖ, θέλομεν ἔχει

$$\text{ΟΘ} = \text{ΟΖ} + \frac{1}{2}(\text{ΟΓ} - \text{ΟΖ}) = \frac{1}{2}(\text{ΘΖ}+\text{ΘΓ})$$

$$\text{ἤτοι } \alpha' = \frac{1}{2}(\alpha+\rho) \qquad (1)$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΔΓ λαμβάνομεν

$$\text{ΟΔ}^2 = \text{ΟΓ}.\ \text{ΟΘ}.\ \text{ἤτοι}$$

$$\rho' = \sqrt{\rho.\ \alpha'} \qquad (2)$$

Σημείωσις.

211. Ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται ἀμέσως ὅτι ἡ ΟΘ εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ ΟΖ, ἐνῷ ἡ ΟΔ εἶναι μικροτέρα τῆς ΟΓ. Οὕτως ὅταν μεταβαίνωμεν ἀπὸ δεδομένον κανονικὸν πολύγωνον εἰς ἕτερον ὁμοίως κανονικόν, ἔχον ἴσην μὲ τὸ δεδομένον περίμετρον, ἀλλὰ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν, τὸ μὲν ἀπόστημα αὐξάνει, ἡ δὲ ἀκτὶς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λαττοῦται· ἡ δὲ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἀκτῖνος καὶ τοῦ ἀποστήματος, συνεχῶς ἐλαττουμένη, δύναται νὰ γίνῃ ὅσον θέλομεν μικρά. Ἐξ ἄλλου δὲ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΟΖ ἔχομεν

$$\text{ΑΟ}-\text{ΟΖ}<\text{ΑΖ} \text{ ἢ } \text{ΑΟ}-\text{ΟΖ}<\frac{\text{ΑΒ}}{2}$$

ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι πάντοτε μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς πλευρᾶς τοῦ ἀντιστοιχοῦντος πολυγώνου. Ἀλλ' ἐάν, τηροῦντες τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου σταθερόν, διπλασιάζωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν, ἡ τιμὴ ἑκάστης ἐξ αὐτῶν τείνει εἰς τὸ μηδέν. Ἑπομένως ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἀκτῖνος καὶ τοῦ ἀποστήματος κανονικοῦ πολυγώνου τείνει πρὸς τὸ μηδέν, καθόσον ὁ μὲν ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν διαδοχικῶς διπλασιάζεται, ἡ δὲ περίμετρος μένει σταθερά· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ διαφορὰ $\rho'-\alpha'$ εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς $\rho-\alpha$, καὶ μάλιστα μικροτέρα τοῦ $\frac{\rho-\alpha}{4}$.

Τῳόντι οἱ τύποι (1) καὶ (2) (§ 210) δίδουσι

$$\rho'-\alpha'=\sqrt{\rho}.\sqrt{\frac{\alpha+\rho}{2}}-\frac{\alpha+\rho}{2}$$

$$\rho'-\alpha'=\sqrt{\frac{\alpha+\rho}{2}}\left(\sqrt{\rho}-\sqrt{\frac{\alpha+\rho}{2}}.\right)$$

Πολλαπλασιάζοντες δὲ καὶ διαιροῦντες ἅμα τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $\sqrt{\rho}+\sqrt{\frac{\alpha+\rho}{2}}$ λαμβάνομεν

$$\rho'-\alpha'=\frac{\sqrt{\frac{\rho+\alpha}{2}}.}{\sqrt{\rho}+\sqrt{\frac{\rho+\alpha}{2}}}\cdot\frac{\rho-\alpha}{2}.$$

Ἐνταῦθα ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι

$$\frac{\sqrt{\frac{\rho+\alpha}{2}}}{\sqrt{\rho}+\sqrt{\frac{\rho+\alpha}{2}}}<\frac{1}{2} \text{ ἢ } \frac{\sqrt{\alpha+\rho}}{\sqrt{2\rho}+\sqrt{\alpha+\rho}}<\frac{1}{2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ τῳόντι τοῦτο εἶναι ἀληθές, ἐπειδὴ $\alpha<\rho$· ἀλλὰ καὶ ἐὰν $\alpha=\rho$,

$$\frac{\sqrt{\alpha+\rho}}{\sqrt{2\rho}+\sqrt{\alpha+\rho}}=\frac{\sqrt{2\rho}}{\sqrt{2\rho}+\sqrt{\rho+\rho}}=\frac{\sqrt{2\rho}}{2\sqrt{2\rho}}=\frac{1}{2}$$

Ἑπομένως καὶ $\frac{\sqrt{\alpha+\rho}}{\sqrt{2\rho}+\sqrt{\alpha+\rho}}.\frac{\rho-\alpha}{2}=\frac{1}{2}.\frac{\rho-\alpha}{2}$ ἄρα

$$\rho'-\alpha'<\frac{\rho-\alpha}{4}.$$

Περὶ ὁρίων

212. Ἐὰν μία ποσότης χ συνεχῶς μεταβαλλομένη προσεγγίζῃ ἀπεριορίστως σταθερὰν ποσότητα Α οὕτως, ὥστε ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς $\chi-A$ νὰ δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα πάσης δεδομένης ποσότητος (ὅσον μικρὰ καὶ ἂν ὑποτεθῇ αὕτη), λέγομεν ὅτι ἡ ποσότης Α εἶναι τὸ ὅριον τῆς μεταβλητῆς χ· καὶ γράφεται οὕτως $\quad$ ὅρ. $\chi=A$.

π. χ. ἡ περίμετρος ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον πολυγώνου καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ εἶναι ποσότητες μεταβληταί· ἐνῷ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶναι ποσότης σταθερά, οὖσα συγχρόνως ὅριον τοῦ ἀποστήματος, διότι, καθ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου αὐξάνει καὶ αἱ πλευραὶ σμικρύνονται, τὸ ἀπόστημα αὐξάνει, χωρίς ποτε νὰ δύναται νὰ ὑπερβῇ τὴν ἀκτῖνα.

213. *Μία μεταβλητὴ ποσότης δὲν δύναται νὰ τείνῃ εἰς δύο ὅρια ἄνισα.*

Ἂς ὑποθέσωμεν τοὐναντίον ὅτι μία μεταβλητή, εὐθεῖα π. χ. δύναται νὰ ἔχῃ δύο διάφορα ὅρια α καὶ β, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ εἶναι δ, καὶ ἂς λάβωμεν $\delta'<\frac{\delta}{2}$.

Τὰ διάμεσα τὰ περιεχόμενα ἀφ' ἑνὸς μεταξὺ τοῦ $\alpha+\delta'$ καὶ $\alpha-\delta'$ καὶ ἀφ' ἑτέρου μεταξὺ τοῦ $\beta+\delta'$ καὶ $\beta-\delta'$ δὲν ἔχουσι προφανῶς οὐδὲν κοινόν, καὶ χωρίζονται συγχρόνως δι' ἑνὸς διαμέσου ἴσου πρὸς τὸ $\delta-2\delta'$. Τούτου τεθέντος, ἡ μεταβλητή, ἥτις ἤθελεν ἔχει ὡς ὅριον τὸ α, θὰ ἐπερατοῦτο μεταξὺ τοῦ $\alpha+\delta'$ καὶ $\alpha-\delta'$, ἐνῷ ἡ αὐτὴ μεταβλητὴ διατηροῦσα τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ ἔχουσα ὅριον τὸ β θὰ ἐπερατοῦτο μεταξὺ τοῦ $\beta+\delta'+\beta-\delta'$, καὶ τὸ πέρας αὐτῆς θὰ περιείχετο ἑκάστοτε μεταξὺ δύο τελείως χωριζομένων θέσεων, ὅπερ ἀδύνατον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

214. Ἂς θεωρήσωμεν μίαν ἰσότητα μεταξὺ μεταβλητῶν τεινουσῶν πρὸς τὰ ὅρια αὐτῶν· εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης αἱ μεταβληταὶ συνδέονται πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὰς σταθερὰς ποσότητας δι' οἱωνδήποτε πράξεων.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις οὕτως εἶναι συνεχής, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τιμὰς εἰς τὰς ἐν αὐτῷ περιεχομένας μεταβλητὰς ἀρκούντως προσεγγιζούσας, ὥστε αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως νὰ προσεγγίζωσι καὶ αὗται πρὸς ἀλλήλας ὅσον θέλομεν. Αἱ τιμαὶ λοιπὸν τῶν μεταβλητῶν τούτων χ, ψ, ω.... δύνανται νὰ διαφέρωσι τῶν ὁρίων αὐτῶν α, β, γ...., ὥστε ἡ ὑποτεθεῖσα συνάρτησις τῶν πρώτων νὰ διαφέρῃ ὅσον μικρὸν θέλομεν τῆς αὐτῆς συναρτήσεως τῶν δευτέρων, ἥτις θὰ εἶναι τὸ ὅριον τῆς μεταβλητῆς συναρτήσεως. Ἑπομένως·

Ἐὰν αἱ μεταβληταὶ τείνωσι πρὸς ὡρισμένα ὅρια, πᾶσα συνάρτησις τῶν μεταβλητῶν τούτων τείνει πρὸς τὴν αὐτὴν συνάρτησιν τῶν ὁρίων τῶν ἐν αὐτῷ μεταβλητῶν· καὶ ἰδίᾳ

Τὸ ὅριον ἀθροίσματος ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ὁρίων τῶν μερῶν αὐτοῦ.

Τὸ ὅριον γινομένου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν ὁρίων τῶν παραγόντων αὐτοῦ.

Σημείωσις. Ὑποτίθεται ἐνταῦθα ὅτι ἐν τῷ ἀθροίσματι ὁ ἀριθμὸς τῶν προσθετέων ὡς καὶ ἐν τῷ γινομένῳ ὁ ἀριθμὸς τῶν παραγόντων εἶναι ὡρισμένος.

Τὸ ὅριον πηλίκου ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τῶν ὁρίων τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου.

215. Ποσότης μεταβλητή, ἔχουσα ὅριον τὸ μηδέν, λέγεται ἀπειροστή.

216. ***Τὸ ὅριον ἀθροίσματος ἀπειροστῶν ποσοτήτων μένει τὸ αὐτό, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν αὐτὰς δι' ἄλλων ποσοτήτων, ὧν οἱ λόγοι πρὸς τὰς πρώτας ἔχουσι πάντες ὅριον τὴν μονάδα 1.***

Ἔστωσαν αἱ ἀπειροσταὶ ποσότητες

$$\alpha_1, \; \alpha_2, \; \alpha_3 \ldots\ldots\ldots \alpha_\nu$$

τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τείνει πρὸς ὡρισμένον ὅριον, ὅταν τὸ ν αὐξάνῃ ἀπεριορίστως.

Ἔστωσαν προσέτι ἕτεραι ἀπειροσταὶ ποσότητες

$$\beta_1, \; \beta_2, \; \beta_3 \ldots\ldots\ldots \beta_\nu$$

τοιαῦται, ὥστε οἱ λόγοι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1},\ \frac{\alpha_2}{\beta_2},\ \frac{\alpha_3}{\beta_3}\cdots\cdots\ \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$$

νὰ ἔχωσι πάντες ὅριον τὴν μονάδα.

Ἐὰν προσθέσωμεν τοὺς ὁμωνύμους ὅρους πάντων τῶν λόγων τούτων, λαμβανομένων ἀπολύτως (ἀνεξαρτήτως τῶν σημείων αὐτῶν), ὁ οὕτως ἀποτελούμενος λόγος τῶν δύο ἀθροισμάτων θὰ περιέχηται μεταξὺ τοῦ ἐλαχίστου καὶ τοῦ μεγίστου τῶν προτεθέντων λόγων (Ἀριθμ. Κορὲ § 185). Ἔχει λοιπὸν ὅριον τὴν μονάδα, καὶ ἑπομένως τὰ δύο ἀθροίσματα τῶν ἀπειροστῶν ποσοτήτων ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὅριον. Ἐκ τούτου ἐξάγεται ὅτι, ἐὰν τὸ ἓν τῶν ἀθροισμάτων τούτων ἔχῃ σταθερὰν τιμήν, τὸ ἕτερον ἄθροισμα ἔχει ὅριον τὴν σταθερὰν ταύτην τιμὴν τοῦ ἑτέρου.

217. *Τὸ ὅριον τοῦ λόγου δύο ἀπειροστῶν ποσοτήτων μένει τὸ αὐτό, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν ταύτας δι' ἄλλων ποσοτήτων, ὧν οἱ λόγοι πρὸς τὰς προτεθείσας ἀπειροστὰς ποσότητας ἔχουσιν ὅριον τὴν μονάδα.*

Ἔστωσαν δύο ζεύγη ἀπειροστῶν α καὶ β, α' καὶ β' τοιαῦτα, ὥστε οἱ λόγοι $\frac{\alpha'}{\alpha}$ καὶ $\frac{\beta'}{\beta}$ νὰ ἔχωσιν ὅριον τὴν μονάδα 1· καὶ οἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν λόγοι $\frac{\alpha}{\alpha'}$ καὶ $\frac{\beta}{\beta'}$ ἀναγκαίως θὰ ἔχωσι τὸ αὐτὸ ὅριον.

Τούτου τεθέντος, θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\alpha'}$$

καὶ μεταβαίνοντες εἰς τὰ ὅρια αὐτῶν (214), θὰ ἔχωμεν

$$\text{ὅρ.}\ \frac{\alpha}{\beta}=\text{ὅρ.}\ \frac{\alpha'}{\beta'}\ \text{ὅρ.}\ \frac{\beta'}{\beta}\ \text{ὅρ.}\ \frac{\alpha}{\alpha'}.$$

Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως τὰ δύο τελευταῖα ὅρια ἰσοῦνται πρὸς τὴν μονάδα 1· ἑπομένως ἀπολείπεται ἁπλῶς

$$\text{ὅρ.}\ \frac{\alpha}{\beta}=\text{ὅρ.}\ \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Γ'. ΜΕΤΡΟΝ ΤΗΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ

218. Δύο γραμμαὶ ἔχουσι τὸ αὐτὸ μῆκος, ἤτοι εἶναι ἴσαι, ὅταν δύνανται νὰ ταυτισθῶσιν (7).

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος δύναται ἀμέσως νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ ἴσων πεπερασμένων εὐθειῶν γραμμῶν, διότι αὗται ἢ ταυτίζονται, ἂν ἡ μία δύναται νὰ ἐπιτεθῇ ἐπὶ τῆς ἑτέρας, ἢ μετρούμεναι διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος παρίστανται ἀμφότεραι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ (136).

Τοῦτο ὅμως δὲν ἐφαρμόζεται καὶ ἐπὶ ἄλλων γραμμῶν, αἵτινες δὲν δύνανται νὰ ταυτισθῶσιν εἰμὴ εἰς ἐξαιρετικὰς περιπτώσεις· ὡς τὰ τόξα κύκλου, τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι, ἢ τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Ἐπειδὴ τὸ ἁπλούστερον μέτρον τοῦ μήκους εἶναι τὸ διὰ μετρήσιν τῆς εὐθείας, δέον καὶ τὰς ἄλλας γραμμὰς ν' ἀναγάγωμεν κατὰ τὴν μέτρησιν αὐτῶν εἰς τὸ αὐτὸ μέτρον. Ἐν γένει δὲ εὐθεῖα καὶ τόξον δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἴσαι, διότι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ταυτισθῶσι, δύνανται ὅμως νὰ εἶναι ἰσοδύναμοι, ἐὰν ἀμφότεροι περιέχωσιν ἰσάκις τὴν αὐτὴν μονάδα τοῦ μήκους.

Ἑπομένως, διὰ νὰ ἐπαληθεύσωμεν τὸ ἰσοδύναμον, ἀνάγκη νὰ παραστήσωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ μήκους καμπύλης γραμμῆς. Πρὸς τοῦτο δίδομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν·

Μῆκος καμπύλης γραμμῆς, περιεχομένης μεταξὺ δύο σημείων, καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ περίμετρος τεθλασμένης γραμμῆς, ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ μεταξὺ τῶν δύο σημείων τόξον, ὅταν αἱ πλευραὶ αὐτῆς τείνωσιν ἀπεριορίστως εἰς τὸ μηδέν.

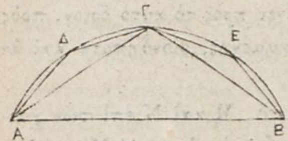
219. Ἀνάγκη δὲ, νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ θεωρούμενον ὅριον ὑπάρχει καὶ μένει ἀνεξάρτητον τῆς συνθήκης, καθ' ἣν ἐγγράφεται ἡ τεθλασμένη γραμμή, ἤτοι τοῦ τρόπου, καθ' ὃν αἱ πλευραὶ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς τείνουσιν εἰς τὸ μηδέν.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν τόξον κυρτῆς καμπύλης καθ' ὅλην αὐτῆς τὴν ἔκτασιν· αἱ ἐγγεγραμμέναι ἐν αὐτῷ κυρταὶ πολυγωνικαὶ τεθλασμέναι γραμμαὶ θὰ πληρῶσι τὴν αὐτὴν συνθήκην. Ἐὰν δὲ δὲν συμβαίνῃ τοῦτο (ἡ καμπύλη νὰ μὴ εἶναι ὅλη κυρτή), δυνάμεθα νὰ χωρίσωμεν τὸ δεδομένον τόξον εἰς πολλὰ κυρτὰ τόξα, καὶ εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν αὐτὸν συλλογισμόν.

220. Ἔστω λοιπὸν τόξον καμπύλης οἱασδήποτε ΑΒ (Σχ. 180),

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

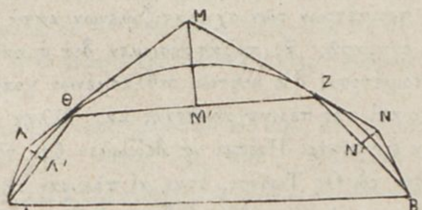
καὶ ἂς θέσωμεν τὴν ἑξῆς συνθήκην ἐγγραφῆς ἐν αὐτῷ τεθλασμένης



Σχ. 180.

γραμμῆς· λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς καμπύλης τὸ σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτῆς Α καὶ Β, ἔπειτα τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, τῶν ὁποίων τὸ μὲν Δ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Γ, τὸ δὲ Ε ἀπέχει ὁμοίως ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων Γ καὶ Β, καὶ οὕτω καθεξῆς ἀπεριορίστως. Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς ἐγγεγραμμένης τεθλασμένης γραμμῆς διηνεκῶς θὰ διπλασιάζηται καὶ θ' αὐξάνῃ ἀπεριορίστως, ἐνῷ συγχρόνως τὸ μέγεθος τῶν πλευρῶν θὰ τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, ἐπειδὴ τὰ ἐφεξῆς σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἐπὶ τῆς καμπύλης θὰ πλησιάζωσιν ἀπεριορίστως τὸ ἓν πρὸς τὸ ἕτερον.

Πᾶσα δὲ νέα ἐγγεγραμμένη περίμετρος θὰ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς προηγουμένης (35), ἀλλὰ θὰ μένῃ μικροτέρα τῆς κυρτῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς τῆς ἐχούσης τὰ αὐτὰ πέρατα καὶ περικλειούσης τὴν καμπύλην (37). Ἐκ τούτου ἐξάγομεν ὅτι αἱ συνεχῶς ἐγγραφόμεναι περίμετροι τείνουσι πρὸς ὡρισμένον ὅριον· διότι μέγεθος μεταβλητόν, τὸ ὁποῖον αὐξάνει συνεχῶς καὶ ἐν τούτοις πάντοτε μένει μικρότερον μεγέθους ὡρισμένου, τείνει ἀναγκαίως πρὸς ἓν ὅριον γνωστὸν ἢ ἄγνωστον.



Σχ. 181.

Ἔστω προσέτι (Σχ. 181). ἡ πολυγωνικὴ τεθλασμένη ΑΘΖΒ ἐγγραφεῖσα εἰς τὴν καμπύλην ὑπὸ ἄλλην συνθήκην, ἀλλ' ὑπὸ τὸν αὐτὸν ὅρον, ὥστε καὶ ταύτης αἱ πλευραὶ νὰ δύνανται νὰ τείνωσιν πάντοτε εἰς τὸ μηδέν.

Φέροντες τὰς ἐφαπτομένας τῆς καμπύλης κατὰ τὰς διαφόρους κορυφὰς Α, Θ, Ζ, Β κατασκευάζομεν τὴν εἰς ταύτην ἀντιστοι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

χοῦσαν περιγεγραμμένην πολυγωνικὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΑΛΜ ΝΒ. Εἶναι δὲ εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ περίμετρος τῆς περιγεγραμμένης ταύτης τεθλασμένης γραμμῆς τείνει πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον καὶ ἡ περίμετρος τῆς ἐγγεγραμμένης, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ ὅριον τοῦτο.

Τῷόντι, ἂς προβάλωμεν τὰς κορυφὰς Λ, Μ καὶ Ν ἐπὶ τῶν χορδῶν ΑΘ,ΘΖ καὶ ΖΒ, καὶ ἔστωσαν αἱ προβολαὶ αὐτῶν Λ′,Μ′ καὶ Ν′· ἂς παραβάλωμεν δὲ τὰς ΑΛ καὶ ΑΛ′ (Σχ. 181). Ὅταν ἡ ΑΘ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ἡ χορδὴ αὕτη πλησιάζει ἀπεριορίστως πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ΑΛ οὕτως, ὥστε ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΛ′Λ ἡ μὲν γωνία ΛΑΛ′ τείνει εἰς τὸ μηδέν, ὁ δὲ λόγος $\frac{\text{ΑΛ}}{\text{ΑΛ}'}$ τείνει πρὸς τὴν μονάδα 1. Ὁμοίως δὲ καὶ οἱ ἄλλοι λόγοι

$\frac{\text{ΛΘ}}{\text{Λ}'\text{Θ}}, \frac{\text{ΘΜ}}{\text{ΘΜ}'} \ldots\ldots \frac{\text{ΝΒ}}{\text{Ν}'\text{Β}}$ τείνουσι πρὸς τὴν μονάδα 1. Ἐκ τούτου ἀμέσως ἕπεται (216) ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρίων τῶν ἀριθμητῶν τῶν λόγων τούτων ὡς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρίων τῶν παρονομαστῶν, ἤτοι τό τε ὅριον τῆς περιμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου καὶ τὸ ὅριον ἐκείνης τοῦ ἐγγεγραμμένου ἔχουσι λόγον τείνοντα πρὸς τὴν μονάδα 1, ὅταν αἱ πλευραὶ τείνωσιν ἀπεριορίστως εἰς τὸ μηδὲν καθ' οἱανδήποτε συνθήκην καὶ ἂν γίνῃ ἡ ἐγγραφὴ τῆς ἐγγεγραμμένης τεθλασμένης γραμμῆς. Τούτου τεθέντος ἔστω Ο τὸ κοινὸν ὅριον τῶν δύο περιμέτρων τῶν σχηματιζομένων κατὰ τὴν πρώτην συνθήκην τῆς ἐγγραφῆς· ἂς παραστήσωμεν διὰ σ καὶ Σ τὰς ἀντιστοιχούσας περιμέτρους δύο κυρτῶν τεθλασμένων γραμμῶν τῆς τε ἐγγεγραμμένης καὶ τῆς περιγεγραμμένης κατ' ἄλλην τινὰ οἱανδήποτε συνθήκην ἐγγραφῆς. Πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ κοινὸν ὅριον αὐτῶν εἶναι ἴσον τῷ Ο. Τῷόντι, ὅταν αἱ πλευραὶ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς σ τείνωσιν εἰς τὸ μηδέν, ἡ διαφορὰ Σ—σ δύναται, κατὰ τὰ εἰρημένα, νὰ γίνῃ μικροτέρα ὡρισμένης ποσότης β, ὅσον θέλομεν μικρᾶς. Ἀφ' ἑτέρου δὲ ἡ Σ, οὖσα μεγαλειτέρα πάσης ἐγγεγραμμένης τεθλασμένης γραμμῆς οἱασδήποτε $(37)_2$ θὰ εἶναι ἴση ἢ μεγαλειτέρα τοῦ πρώτου ὁρίου Ο. Ἐπειδὴ Σ—σ εἶναι μικρότερον τοῦ β, θέλομεν ἔχει

$$σ+β > \text{όρ. } Ο, \text{ καὶ } σ > \text{όρ. } Ο-β$$

ἐξ ἄλλου δέ, ἐπειδὴ ἡ σ εἶναι μικροτέρα πάσης περιγεγραμμένης

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

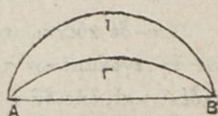
τεθλασμένης γραμμῆς, θὰ εἶναι τὸ πολὺ ἴση πρὸς τὸ ὅριον Ο ἐκείνης, ἥτις θεωρεῖται ὅτι κατέχει τὴν πρώτην θέσιν, καὶ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν σ $<$ἢ$=$ὅρ.Ο.

Τῆς σ οὕτω περιεχομένης μεταξὺ ὅρ.Ο καὶ ὅρ.Ο—ϐ καὶ τοῦ ϐ τείνοντος ἀπεριορίστως εἰς τὸ μηδέν, τὸ ὅριον τῆς σ (ὡς καὶ ἐκεῖνο τοῦ Σ) εἶναι προσέτι ἴσον τῷ ὅρ.Ο.

221. Ἡ ἀπόδειξις, τὴν ὁποίαν ἀνεπτύξαμεν, ἄγει εἰς ἐπωφελεῖς προτάσεις, αἵτινες συνοψίζονται ὡς ἑξῆς.

Ἡ χορδὴ ΑΒ (Σχ. 181) οὖσα μικροτέρα πάσης ἐγγεγραμμένης πολυγωνικῆς τεθλασμένης γραμμῆς, εἶναι μικροτέρα καὶ τοῦ ὁρίου αὐτῆς· ἤτοι εἶναι μικροτέρα τοῦ τόξου ΑΒ, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τοῦτο. Ἑπομένως *ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης γραμμῆς ἐχούσης τὰ αὐτὰ πέρατα.*

222. Ἐὰν θεωρήσωμεν τόξον τι κυρτὸν τὸ ΑΓΒ καὶ ἕτερον τὸ ΑΙΒ περατούμενον εἰς τὰ αὐτὰ μὲ τὸ πρῶτον σημεῖα Α καὶ Β, δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τὸ τόξον ΑΓΒ τεθλασμένην γραμμὴν σ καὶ εἰς τὸ ἕτερον ΑΙΒ ἑτέραν σ′ μὴ ἔχουσαν οὐδὲν κοινὸν σημεῖον μετὰ τοῦ τόξου ΑΓΒ· θὰ ἔχωμεν τότε (37) σ′$>$ σ, καὶ ἑπομένως μεταβαίνοντες εἰς τὰ ὅρια αὐτῶν θὰ ἔχωμεν τόξ. ΑΙΒ $>$ τόξ. ΑΓΒ. ἄρα:



Σχ. 182.

Πᾶν κυρτὸν τόξον εἶναι μικρότερον παντὸς ἄλλου περιβάλλοντος αὐτὸ καὶ ἔχοντος τὰ αὐτὰ πέρατα. Ἐξάγομεν προσέτι ὅτι *πᾶσα κυρτὴ γραμμὴ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης γραμμῆς περιβαλλούσης αὐτήν.*

223. Τέλος ἀναφερόμενοι εἰς τὸ Σχ. 181 θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ προηγούμενα χορδ. ΑΘ $<$ τόξ. ΑΘ $<$ ΑΛ$+$ΛΘ· καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης δι᾽ ΑΘ$=$ΑΑ′$+$Λ′Θ, λαμβάνομεν

$$1 < \frac{\text{τόξ. ΑΘ}}{\text{χορδ. ΑΘ}} < \frac{\text{ΑΛ}+\text{ΛΘ}}{\text{ΑΛ}'+\text{Λ}'\text{Θ}}$$

ἀλλ᾽ ὁ τελευταῖος λόγος ἔχει ὅριον τὴν μονάδα 1, ὅταν τὸ τόξον ΑΘ τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, καθότι ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν ὁμωνύμων ὅρων δύο λόγων, οἵτινες πληροῦσι τὴν αὐτὴν συνθήκην(216).

Ἑπομένως. *Τὸ ὅριον τόξου οἱασδήποτε καμπύλης πρὸς τὴν χορδὴν αὐτοῦ, ὅταν τὸ τόξον τοῦτο τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, εἶναι ἴσον τῇ μονάδι 1.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θεώρημα.

224. *Δύο οἱαιδήποτε περιφέρειαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ αἱ ἀκτῖνες ἢ αἱ διάμετροι αὐτῶν.*

Ἔστωσαν Π καὶ Π′ τὰ μήκη τῶν δύο δεδομένων περιφερειῶν τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἶναι Ρ καὶ Ρ′, αἱ δὲ διάμετροι Δ καὶ Δ′, Ἐγγράφομεν εἰς ἑκατέραν κανονικὸν πολύγωνον ἔχον τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν πρὸς τὸ ἕτερον, καὶ ἂς παραστήσωμεν τὰς περιμέτρους αὐτῶν διὰ Σ καὶ Σ′. Τὰ πολύγωνα ταῦτα θὰ εἶναι ὅμοια, καὶ ἑπομένως θέλομεν ἔχει (199)

$$\frac{\Sigma}{\Sigma'} = \frac{P}{P'}$$

Ἐὰν δὲ αὐξήσωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῶν δύο ἐγγεγραμμένων πολυγώνων, αἱ πλευραὶ αὐτῶν τείνουσιν εἰς τὸ μηδέν· καὶ, ἐπειδὴ ἡ ἀνωτέρω σχέσις ὑφίσταται πάντοτε, θέλομεν ἔχει εἰς τὰ ὅρια αὐτῶν (219),

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{P}{P'} = \frac{2P}{2P'} = \frac{\Delta}{\Delta'}.$$

Πόρισμα.

225. Ἡ ἀνωτέρω σχέσις δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω

$$\frac{\Pi}{\Delta} = \frac{\Pi'}{\Delta'}.$$

ἤτοι ὁ λόγος πάσης περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον αὐτῆς εἶναι ἀριθμὸς σταθερός.

Ὁ λόγος οὗτος, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς ἐχούσης διάμετρον τὴν μονάδα, παρίσταται πάντοτε διὰ τοῦ γράμματος π.

Ὁ ἀριθμὸς π εἶναι ἀσύμμετρος, ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν αὐτὸν μὲ ὅσην θέλομεν προσέγγισιν. Ἐφεξῆς δίδομεν τὴν τιμὴν τοῦ π, τὴν τοῦ ἀντιστρόφου αὐτῷ $\left(\frac{1}{\pi}\right)$, ὡς καὶ τὸν δεκαδικὸν λο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γάριθμον αὐτοῦ μὲ προσέγγισιν δεκαδικῆς μονάδος δεκάτης πέμπτης τάξεως.

$$\pi=3,14159265358979 3.....$$

$$\frac{1}{\pi}=0,318309886183790.....$$

$$\text{λογ. } \pi=0,497149872694133.....$$

226. Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{\Pi}{\Delta} = \frac{\Pi}{2P} = \pi$ ἐξάγομεν

$$\Pi=2\pi P \text{ καὶ } P=\frac{\Pi}{2\pi}$$

Οἱ τύποι οὗτοι παρέχουσιν ἡμῖν τὸ μέσον, ὅταν ἔχωμεν τὴν τιμὴν τοῦ π, νὰ εὑρίσκωμεν τὸ μῆκος περιφερείας, τῆς ὁποίας δίδεται ἡ ἀκτίς, καὶ εὑρίσκωμεν τὴν ἀκτῖνα, ὅταν ἔχωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας.

227. Περιφερείας ἐχούσης ἀκτῖνα P τὸ μῆκος τόξου 1^0 ἰσοῦται (107).

$$\frac{2\pi P}{360} = \frac{\pi P}{180}.$$

Ἐπομένως τὸ μῆκος μ. τόξου περιφερείας ν μοιρῶν δίδεται διὰ τοῦ τύπου

$$\mu=\frac{\pi P.\nu}{180}$$

Σημ. Ἡ σχέσις αὐτη, ἥτις παρέχει τὸν προσδιορισμὸν μιᾶς ἐκ τῶν τριῶν ποσοτήτων μ,P,ν, ὅταν αἱ δύο ἄλλαι εἶναι δεδομέναι, εἶναι τὰ μάλιστα ἐν χρήσει εἰς τὰς ἐφαρμογάς.

Θεώρημα.

228. *Δύο ὅμοια τόξα εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς ἀκτῖνας αὐτῶν.*

Καλοῦνται *ὅμοια* τὰ τόξα τὰ ὑποτεινόμενα ὑπὸ ἴσων ἐπικέντρων γωνιῶν καὶ ἀνήκοντα εἰς κύκλους ἔχοντας ἀκτῖνας ἀνίσους. Τὰ τοιαῦτα τόξα περιέχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μοιρῶν, καὶ ἕκαστον τῆς περιφερείας, εἰς ἣν ἀνήκει.

Ἔστωσαν μ καὶ μ' τὰ μήκη τῶν δεδομένων δύο ὁμοίων τόξων

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

περιφερειῶν, αἵτινες ἔχουσιν ἀκτῖνας Ρ καὶ Ρ', ν δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν ἑκατέρου.

Θέλομεν ἔχει (227)

$$\mu = \frac{\pi P.\nu}{180}, \quad \mu' = \frac{\pi P'.\nu}{180}. \quad \text{ἑπομένως}$$

$$\frac{\mu}{\mu'} = \frac{\pi P.\nu}{\pi P'.\nu} = \frac{P}{P'}$$

Σημείωσις.

229. Ἡ σχέσις αὕτη δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς·

$$\frac{\mu}{P} = \frac{\mu'}{P'}. \quad \text{ἑπομένως.}$$

Τὸ μῆκος τοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον ὑποτείνει δεδομένη γωνία μεταβάλλεται μετὰ τῆς ἀκτῖνος, ἀλλ' ὁ λόγος αὐτῶν μένει σταθερός. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ θεωρήσωμεν τὸν σταθερὸν τοῦτον λόγον ὡς μέτρον α τῆς προτιθεμένης γωνίας, καὶ νὰ θέσωμεν

$$\alpha = \frac{\mu}{P} \quad \text{ἢ} \quad \mu = \alpha.P.$$

Ἐν τῷ συστήματι τούτῳ ἡ *γωνία εἶναι ἀριθμητικῶς ἴση πρὸς τὸν λόγον τόξου ὡρισμένης περιφερείας, ἧς τὸ κέντρον εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας, πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς αὐτῆς περιφερείας· τὸ δὲ τόξον ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα.*

Ἐὰν $\mu = P$, τὸ α θὰ εἶναι ἴσον τῇ μονάδι 1.

Ἑπομένως ὡς μονὰς τότε πρὸς μέτρησιν τῶν γωνιῶν λαμβάνεται ἡ γωνία, ἥτις ὡς ἐπίκεντρος ὑποτείνει τόξον οἱασδήποτε περιφερείας ἴσον τῇ ἀκτῖνι αὐτῆς. Εὑρίσκομεν δὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν βαθμῶν τοῦ τόξου τούτου θέτοντες $\mu = P$ ἐν τῷ τύπῳ

$$\mu = \frac{\pi.P.\nu.}{1c0}. \quad \text{καὶ οὕτω λαμβάνομεν}$$

$$\nu = \frac{180}{\pi} = 57^0 \; 17' \; 44'',80.$$

Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ πλέον τὴν ληφθεῖσαν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ὡς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μονάδα τοῦ μήκους, ἀντὶ νὰ θεωρήσωμεν ταύτην αὐθαίρετον, θέλομεν ἔχει ἁπλῶς. $\alpha = \mu$.

Ἡ γωνία τότε θεωρουμένη ὡς ἐπίκεντρος, μετρεῖται διὰ τοῦ τόξου τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα τὴν μονάδα 1 καὶ εἶναι ἴση πρὸς 2 π. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ὀρθὴ γωνία παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{\pi}{2} = 1,5707963.....$ ἡ γωνία 45^0 διὰ $\frac{\pi}{4} = 0,7853981..$ κ. τ. λ.

Ὅταν μία γωνία οὕτω μετρηθεῖσα παρίσταται δι' ἀριθμοῦ τινος Α ἀφῃρημένου, ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν αὐτῆς ἐξάγεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\mu = \frac{\pi . P . \nu .}{180}$$

ἔνθα πρέπει νὰ θέσωμεν $\mu = A$ καὶ $P = 1$· καὶ θέλομεν ἔχει

$$\nu = \frac{180 . A}{\pi}$$

Δ'. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ π.

230. Προκειμένου περὶ τούτου θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ ὁ π μὲ ὅσην θέλομεν προσέγγισιν. Ἄλλως τε ἡ λύσις τοῦ ζητήματος τούτου ἀνάγεται εἰς τὴν ἀνωτέραν Μαθηματικήν.

Πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ π λαμβάνομεν τὸν τύπον (226)

$$\pi = \frac{\text{περιφ.} P}{2P}$$

καὶ μεταπίπτομεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ ἑνὸς τῶν ἑξῆς ζητημάτων.

α'. *Δεδομένης μιᾶς περιφερείας, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς. (Μέθοδος τῶν ἰσοπεριμέτρων).*

β'. *Δεδομένης τῆς ἀκτῖνος περιφερείας, νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος αὐτῆς. (Μέθοδος τῶν περιμέτρων).*

α'. Μέθοδος τῶν ἰσοπεριμέτρων. Ἡ μέθοδος αὕτη ἄγει εἰς ἐξαγόμενα ἀναμφισβητήτως ἁπλούστερα τῶν διὰ τῆς μεθόδου τῶν περιμέτρων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

231. Ἐὰν λάβωμεν 2 ὡς μῆκος τῆς προτεθείσης περιφερείας, θέλομεν ἔχει

$$\pi = \frac{2}{2P} = \frac{1}{P} \text{ ἢ } P = \frac{1}{\pi}.$$

ἡ ἀκτίς, δηλ, τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει μῆκος 2, παριστᾷ τὴν ἀντίστροφον τιμὴν τοῦ π.

Ἐκ τούτου ἐξάγεται ὅτι τὸ ἀπόστημα καὶ ἡ ἀκτὶς παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἔχοντος περίμετρον ἴσην τῷ ἀριθμῷ 2 ἔχουσι τιμὰς προσεγγιζούσας τῷ $\frac{1}{\pi}$ τὸ μὲν κατ' ἔλλειψιν, ἡ δὲ καθ' ὑπεροχήν· διότι, ἀφοῦ ἡ μὲν ἐγγεγραμμένη περιφέρεια ἐν τῷ πολυγώνῳ τούτῳ εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου 2 τοῦ πολυγώνου, ἡ δὲ περιγεγραμμένη μεγαλειτέρα ταύτης (218,220),αἱ ἀκτῖνες τῶν περιφερειῶν τούτων περιλαμβάνουσιν ἀναγκαίως τὴν ἀκτῖνα P τῆς περιφερείας, ἥτις ἰσοῦται τῷ **2** (224).

Τούτου τεθέντος λαμβάνομεν ὡς ἀφετηρίαν τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 2 ἢ ἡ πλευρὰ $\frac{1}{2}$. Παριστῶντες δὲ δι' α_1 τὸ ἀπόστημα καὶ διὰ ρ_1 τὴν ἀκτῖνα, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} \quad \rho_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Δυνάμεθα λοιπὸν τῇ βοηθείᾳ τῶν τύπων (228) νὰ εὕρωμεν ἀλληλοδιαδόχως τὰ ἀποστήματα καὶ τὰς ἀκτῖνας $\alpha_2\ \rho_2, \alpha_3\ \rho_3, \alpha_4\ \rho_4 \cdots$ τῶν ἰσοπεριμέτρων κανονικῶν πολυγώνων, τῶν ἐχόντων 8, 16, 32, 64....πλευράς.

Θέλομεν ἔχει

$$\alpha_2 = \frac{\alpha + \rho}{2}, \quad \rho_2 = \sqrt{\rho_1 \alpha_2}, \quad \alpha_3 = \frac{\alpha_2 + \rho_2}{2}, \quad \rho_3 = \sqrt{\rho_2 \alpha_3},$$

παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἐν τῇ σειρᾷ

$$\alpha_1, \rho_1, \alpha_2, \rho_2, \alpha_3, \rho_3, \ldots\ldots \alpha\nu, \rho\nu \ldots\ldots$$

ἕκαστος ὅρος ἀπὸ τοῦ τρίτου καὶ ἐφεξῆς εἶναι ἐναλλὰξ ὁ ἀριθμητι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κὸς μέσος καὶ ἡ μέση ἀνάλογος δύο προηγουμένων ὅρων. Προσέτι δὲ τὰ ἀποστήματα ἢ οἱ ὅροι περιττῆς τάξεως, οἱ α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots \alpha_\nu \ldots$ βαίνουσιν αὐξανόμενοι, ἀλλὰ πάντοτε ἀπομένουσι μικρότεροι τοῦ $\frac{1}{\pi}$, ἐνῷ αἱ ἀκτῖνες, ἤτοι οἱ ὅροι ἀρτίας τάξεως, οἱ ρ_1, ρ_2, $\rho_3 \ldots \rho_\nu \ldots$ βαίνουσιν ἐλαττούμεναι, ἀλλὰ πάντοτε ἀπομένουσι μεγαλείτεραι τοῦ $\frac{1}{\pi}$. Ἄλλως τε δέ, ἐπειδὴ ἔχομεν (211)

$$\rho_1 - \alpha_1 < \frac{\rho - \alpha}{4},$$

ἔχομεν ὁμοίως

$$\rho_2 - \alpha_2 < \frac{\rho_1 - \alpha_1}{4} \quad \text{καὶ} \quad \rho_2 \alpha_2 < \frac{\rho - \alpha}{4^2}$$

$$\rho_3 - \alpha_3 < \frac{\rho_2 - \alpha_2}{4} \quad \text{καὶ} \quad \rho_3 \alpha_3 < \frac{\rho - \alpha}{4^3}$$

$$\rho_\nu - \alpha_\nu < \frac{\rho_{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}}{4} \quad \text{καὶ} \quad \rho_\nu - \alpha_\nu < \frac{\rho - \alpha}{4^\nu}$$

Ἑπομένως, λαμβάνοντες τὸν ν ἀρκούντως μέγαν, δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν τὴν διαφορὰν $\rho_\nu - \alpha_\nu$ τῶν δύο διαδοχικῶν ὅρων, ἀρκούντως μεμακρυσμένων ἐν τῇ σειρᾷ, μικροτέραν πάσης δεδομένης ποσότητος.

Οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς ταύτης ἐναλλὰξ μικρότεροι καὶ μεγαλείτεροι τοῦ $\frac{1}{\pi}$ ἔχουσιν ὅριον τὸν ἀριθμὸν τοῦτον. (213).

Ἐὰν θεωρήσωμεν τέλος $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ ὡς μέσον ἀριθμητικὸν μεταξὺ τοῦ ο καὶ $\frac{1}{2}$, καὶ $\rho = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ὡς μέσην ἀνάλογον μεταξὺ τοῦ $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{1}{4}$, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὸ ἑξῆς θεώρημα, ἐν τῷ ὁποίῳ περιλαμβάνεται ἡ μέθοδος αὕτη.

Ἡ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν ἀρχόμενοι ἐκ τοῦ 0 καὶ τοῦ $\frac{1}{2}$ καὶ λαμβάνοντες ἐναλλὰξ τὸν ἀριθμητικὸν μέσον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο προηγουμένων, τείνει πρὸς ἓν ὅριον

ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{\pi}$, *ἀντίστροφον τοῦ π.*

Ἐὰν προεκτείνομεν τὸν ὑπολογισμὸν τῶν διαδοχικῶν μέσων μέχρις ὅτου δύο διαδοχικοὶ ὅροι νὰ ἔχωσι κοινὰ $\mu+1$ δεκαδικὰ ψηφία, τὰ δεκαδικὰ ταῦτα ψηφία θ' ἀνήκωσιν ἀναγκαίως εἰς τὴν τιμὴν τοῦ $\frac{1}{\pi}$, καὶ διαιροῦντες τὴν μονάδα 1 διὰ τοῦ οὕτως εὑρεθέντος ἀριθμοῦ εὑρίσκομεν τὸν π μετὰ μ δεκαδικῶν ψηφίων, ἤτοι κατὰ προσέγγισιν δεκαδικῆς μονάδος τῆς $\mu^{\tau\eta\varsigma}$ τάξεως.

Λαμβάνοντες δὲ τὰς τιμὰς τῶν ἀποστημάτων καὶ τῶν ἀκτίνων μετὰ ἑπτὰ δεκαδικῶν ψηφίων καὶ φθάνοντες εἰς πολύγωνον 128 πλευρῶν σχηματίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα.

Ἀριθ. πλευρῶν	Ἀπόστημα	Ἀκτῖνες
4	$\alpha_1 = 0,2500000$	$\rho_1 = 0,3535534$
8	$\alpha_2 = 0,3017767$	$\rho_2 = 0,3266407$
16	$\alpha_3 = 0,3142087$	$\rho_3 - 0,3203645$
32	$\alpha_4 = 0,3172866$	$\rho_4 = 0,3188218$
64	$\alpha_5 = 0,3180542$	$\rho_5 = 0,3184377$
128	$\alpha_6 = 0,3182459$	$\rho_6 = 0,3183418$

Ἡ τιμὴ λοιπὸν τοῦ $\frac{1}{\pi}$ ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ 0,318 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ ἢ εἶναι ἴση τῷ ἀριθμῷ 0,3184 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς δεκάκις χιλιοστοῦ, διότι ἡ διαφορὰ $\rho_6 - \alpha_6 = 0,0000959$. Διαιροῦντες δὲ τὴν μονάδα 1 διὰ 0, 3183 εὑρίσκομεν $\pi = 3,142$. κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ.

β'. Δεδομένης τῆς ἀκτῖνος περιφερείας νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ταύτης. (Μέθοδος διὰ τῶν περιμέτρων).

232. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν περιφέρειαν, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι 1, τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ταύτης θὰ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ π. Πρέπει λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, καὶ τούτου τὸ ἥμισυ θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς π.

Ἂς ἐγγράψωμεν εἰς τὴν προτεθεῖσαν περιφέρειαν κανονικὰ πολύ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γωνα 4, 8, 16, 32.... πλευρῶν καὶ ἂς προσδιορίσωμεν τὰς περιμέτρους αὐτῶν διὰ τῶν ἐν § 206 γνωστῶν τύπων.

Ἐὰν ὀνομάσωμεν γ_1, γ_2, γ_3.... τὰς πλευρὰς τῶν οὕτω κατασκευαζομένων διαδοχικῶς κανονικῶν πολυγώνων, καὶ α_1 α_2 α_3..... τὰ ἀποστήματα αὐτῶν, θέλομεν ἔχει (200).

$$2\alpha_1=\sqrt{2} \qquad \gamma_1=\sqrt{2}$$

$$2\alpha_2=2\sqrt{1-\frac{\gamma_1^2}{4}}=\sqrt{4-\gamma_1^2} \qquad \gamma_2=\sqrt{2-\sqrt{4-\gamma_1^2}}=\sqrt{2-2\alpha_2}$$

$$2\alpha_3=2\sqrt{1-\frac{\gamma_2^2}{4}}=\sqrt{4-\gamma_2^2} \qquad \gamma_3=\sqrt{2-\sqrt{4-\gamma_2^2}}=\sqrt{2-2\alpha_3}$$

. . . .

. . . .

$$2\alpha_\nu=2\sqrt{1-\frac{\gamma^2_{\nu-1}}{4}}=\sqrt{4-\gamma^2_{\nu-1}} \qquad \gamma_\nu=\sqrt{2-\sqrt{4-\gamma^2_{\nu-1}}}=\sqrt{2-2\alpha_\nu}$$

Δυνάμεθα νὰ περιορισθῶμεν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν διαμέτρων τῶν εἰς τὰ πολύγωνα ἐγγεγραμμένων κύκλων, ἤτοι τῶν διπλασίων ἀποστημάτων $2\alpha_1$, $2\alpha_2$, $2\alpha_3$..... $2\alpha_\nu$ καὶ τῆς τελευταίας πλευρᾶς γ_ν. Τῷόντι, ἐὰν ἐκ τῇ παραστάσει τοῦ $2\alpha_\nu$ ἀντικαταστήσωμεν τὸ $\gamma^2_{\nu-1}$ διὰ τῆς τιμῆς αὐτοῦ $\sqrt{2-2\alpha_{\nu-1}}$, εὑρίσκομεν

$$2\alpha_\nu=\sqrt{2+2\alpha_{\nu-1}}$$

Ἐπομένως ἑκάστη ἐγγεγραμμένη διάμετρος δύναται νὰ ὑπολογισθῇ τῇ βοηθείᾳ τῆς προηγουμένως προσδιορισθείσης.

Ἔστω ὅτι φθάνομεν εἰς κανονικὸν πολύγωνον ἔχον 256 πλευράς, καὶ τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ παρίσταται διὰ τοῦ γ_7. Δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τὸν ἑξῆς πίνακα

$$\begin{aligned}
2\alpha_1&=1,41421352\\
2\alpha_2&=1,84775905\\
2\alpha_3&=1,96157055\\
2\alpha_4&=1,99036945\\
2\alpha_5&=1,99759091\\
2\alpha_6&=1,99939764\\
2\alpha_7&=1,99984940
\end{aligned}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης τιμῆς ἐξάγομεν

$$\gamma_7=\sqrt{2-2\alpha_7}=0,02454302$$

καὶ πολλαπλασιάζοντες γ_7 ἐπὶ 256 εὑρίσκομεν ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι

$$\Pi=6,28301$$

Ἐφαρμόζοντες δὲ τὸν τύπον (199) $\frac{\Pi'}{\Pi}=\frac{1}{\alpha_7}$ · εὑρίσκομεν τὴν περίμετρον τοῦ περιγεγραμμένου ὁμοίου τῷ ἐγγεγραμμένῳ πολυγώνῳ

$$\Pi'=6,28349.$$

Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα 1 περιέχεται μεταξὺ Π καὶ Π′ (218, 220), πάντα τὰ κοινὰ δεκαδικὰ ψηφία τῶν τιμῶν τῶν δύο περιμέτρων ἀνήκουσι καὶ εἰς τὴν τιμὴν τῆς περιφερείας ταύτης. Ἔχομεν λοιπὸν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἐκπεφρασμένον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 6,283 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ καὶ διαιροῦντες τοῦτο διὰ 2 εὑρίσκομεν

$\pi=3,1415$ κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς δεκάκις χιλιοστοῦ.

233. Ἐκ τῶν προηγουμένως εὑρεθέντων τύπων φθάνομεν εἰς μίαν ἀξιοσημείωτον παράστασιν τοῦ π.

Ἐκ τοῦ $2\alpha_1=\sqrt{2}$ καὶ $2\alpha_\nu=\sqrt{2+2\alpha_{\nu-1}}$ ἐξάγομεν διαδοχικῶς

$$2\alpha_2=\sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad 2\alpha_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$2\alpha_\nu=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ldots\ldots}}}}}}$$

τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ῥιζικῶν τοῦ δευτέρου μέλους τῆς τελευταίας ἰσότητος ὄντος ἴσου τῷ ν.

Ἀκολούθως ἔχομεν $\gamma_\nu=\sqrt{2-2\alpha_\nu}$. ἤτοι

$$\gamma_\nu=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\ldots}}}}}}$$

τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ῥιζικῶν τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος ταύτης ὄντος ν+1.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἀρχόμεθα ἐκ τοῦ τετραγώνου τὸ γ_ν θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος $2^{\nu+1}$ πλευράς. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν ὡς περίμετρον τοῦ τελευταίου κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα 1,

$$\Pi = 2^{\nu+1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}}$$

ἤ, διαιροῦντες διὰ 2, καὶ ὑποθέτοντες τὸ ν τεῖνον εἰς τὸ ἄπειρον, θὰ ἔχωμεν

$$\pi = \text{ὅριον } 2^{\nu}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}}$$

ἔνθα ὁ ἀριθμὸς τῶν ῥιζικῶν τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι $\nu+1$.

234. Τὴν μέθοδον τῶν περιμέτρων ἠκολούθησεν ὁ ἔξοχος γεωμέτρης Ἀρχιμήδης ὁ Συρακούσιος, ὅστις πρῶτος (250 π. χ.) εὗρε μίαν προσεγγίζουσαν τιμὴν τοῦ π.

Ὁ Ἀρχιμήδης, ἀρχόμενος ἐκ τοῦ ἑξαγώνου καὶ φθάνων εἰς δύο κανονικὰ πολύγωνα τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον, τὸ δὲ περιγεγραμμένον ἐξ 96 πλευρῶν, ἀπέδειξεν ὅτι ὁ π περιλαμβάνεται μεταξὺ $3+\frac{10}{71}$ καὶ $3+\frac{10}{70}=\frac{22}{7}$. Ἡ τελευταία αὕτη τιμή, ἥτις ὑπερέχει τοῦ π ὀλιγώτερον τῶν 2 χιλιοστῶν, εἶναι συνηθέστατα ἐν χρήσει εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογάς.

Ὁ δὲ Μέτιος εὗρε τὸ κλάσμα $\frac{355}{113}$ ὡς τιμὴν τοῦ π καθ' ὑπεροχήν, διαφέρουσαν αὐτοῦ ὀλιγώτερον τοῦ ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ, καὶ ἀπομνημονευομένην εὐκόλως. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ ταύτην (τὸ κλάσμα $\frac{355}{113}$), γράφομεν δύο φορὰς κατὰ σειρὰς τοὺς τρεῖς πρώτους περιττοὺς ἀριθμούς, καὶ ἔχομεν οὕτω τὸν ἀριθμὸν 113355· τούτου δὲ τὰ μὲν τρία πρῶτα ψηφία γράφομεν ὡς παρονομαστὴν τῆς τιμῆς τοῦ π, τὰ δὲ τρία τελευταῖα ὡς ἀριθμητήν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΜΒΑΔΩΝ

Α'. ΕΜΒΑΔΑ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ.

235. Γραμμὴ κλειστὴ οἱουδήποτε σχήματος κεχαραγμένη ἐπὶ ἐπιπέδου ὁρίζει μίαν πεπερασμένην ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν.

Δύο πεπερασμέναι ἐπιφάνειαι εἶναι ἴσαι (7) ὅταν ταυτίζωνται τιθεμένης τῆς μιᾶς ἐπὶ τὴν ἑτέραν.

236. Νὰ προσθέσωμεν πολλὰς πεπερασμένας ἐπιπέδους ἐπιφανείας σημαίνει νὰ θέσωμεν αὐτὰς πλησίον ἀλλήλων καθ' οἱανδήποτε τάξιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε οὐδὲν μέρος ἐπιφανείας νὰ ἔχωσι κοινόν, μόνον δὲ μέρη τῶν γραμμῶν, εἰς ἃς αἱ ἐπιφάνειαι περατοῦνται.

Ἐὰν μία ἐπιφάνεια Α εἶναι οὕτω τὸ ἄθροισμα δύο ἐπιφανειῶν Β καὶ Γ, ἡ ἐπιφάνεια Γ ἄλλως εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἐπιφανειῶν Β καὶ Α.

237. Μέτρησις ὡρισμένης ἐπιπέδου ἐπιφανείας καλεῖται ἡ εὕρεσις τοῦ λόγου τῆς ἐπιφανείας ταύτης πρὸς ἑτέραν ἐπίσης ὡρισμένην καὶ λαμβανομένην ὡς μονάδα. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως ταύτης καλεῖται ἐμβαδὸν τῆς προτεθείσης ἐπιφανείας. Ἑπομένως μεταξὺ τῶν λέξεων ἐπιφανείας καὶ ἐμβαδοῦ ὑπάρχει ἡ αὐτὴ διαφορά, ἡ ὁποία καὶ μεταξὺ τῶν λέξεων γραμμῆς καὶ μήκους γραμμῆς. Δύο ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι πεπερασμέναι εἶναι μὲν δυνατὸν νὰ μὴ ἐφαρ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μόζωσιν ὅπως καὶ ἂν ἐπιτεθῇ ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, ἐν τούτοις νὰ ἔχωσιν ἴσα ἐμβαδά, ὁπότε αἱ ἐπιφάνειαι εἶναι ἰσοδύναμοι (7).

Ἐὰν π. χ. προσθέσωμεν τρεῖς οἱασδήποτε ἐπιπέδους ἐπιφανείας Α,Β,Γ, πρῶτον κατὰ τὴν τάξιν Α+Β+Γ, ἔπειτα κατὰ τὴν τάξιν Α+Γ+Β καὶ τέλος κατὰ τὴν τάξιν Γ+Α+Β αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι ἐπιφάνειαι (τὰ ἀθροίσματα) ἐν γένει μὲν δὲν εἶναι ἐφαρμόσιμοι, ἀλλ' ἀποτελοῦνται προφανῶς πᾶσαι ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μονάδων, καὶ ἑπομένως εἶναι ἰσοδύναμοι.

238. ***Ἐὰν εἰς ἐπίπεδα σχήματα ἔχοντα ἰσοδυνάμους ἐπιπέδους ἐπιφανείας προστεθῶσιν ἕτερα ἐπίπεδα σχήματα ἰσοδύναμα, τὰ προκύπτοντα ἀθροίσματα θὰ εἶναι ἰσοδύναμα. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἐπίπεδα σχήματα ἰσοδύναμα ἀφαιρεθῶσιν ἕτερα ἐπίπεδα σχήματα ἰσοδύναμα, αἱ προκύπτουσαι διαφοραὶ θὰ εἶναι σχήματα ἰσοδύναμα. Προσέτι, ἐὰν διαιρέσωμεν δύο ἰσοδύναμα σχήματα εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μερῶν ἴσων ἢ ἰσοδυνάμων, τὰ μέρη τοῦ πρώτου θὰ εἶναι ἴσα ἢ ἰσοδύναμα πρὸς τὰ μέρη τοῦ δευτέρου ἓν πρὸς ἕν.***

239. Τὸ πρόβλημα τῆς μετρήσεως τῶν ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν, ἤτοι τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν ἐμβαδῶν, παρουσιάζει τὴν δυσκολίαν τῆς ἀλληλεπαλλήλου ἐφαρμογῆς τῆς ληφθείσης μονάδος ἐπὶ τῆς μετρουμένης ἐπιφανείας. Ἑπομένως δὲν δύναται νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀμέσως εἰ μὴ εἰς ἐλαχίστας περιπτώσεις. Ἀλλὰ δυνάμεθα διὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἰσοδυνάμων νὰ παριστῶμεν τὰ ἐμβαδὰ πασῶν τῶν ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν περιοριζομένων ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν.

Ὡς ἀφετηρίαν δὲ πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τὸ ὀρθογώνιον.

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΗΣ ΒΟ

Ὁρισμοί.

240. *Βάσις* τριγώνου λαμβάνεται μία οἱαδήποτε τῶν πλευρῶν αὐτοῦ· *ὕψος* δὲ αὐτοῦ ἡ ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν.

Ἐὰν μία οἱαδήποτε πλευρὰ τοῦ παραλληλογράμμου ληφθῇ ὡς βάσις, τὸ ἀπόστημα τῆς βάσεως ἀπὸ τῆς ἀπέναντι παραλλήλου πλευρᾶς λαμβάνεται ὡς ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου.

Οὕτως ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ λαμβά-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νονται ἡ μὲν ὡς βάσις, ἡ δὲ ἑτέρα ὡς ὕψος, αἵτινες διαστάσεις τοῦ σχήματος καλοῦνται ἐξαιρετικῶς ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ.

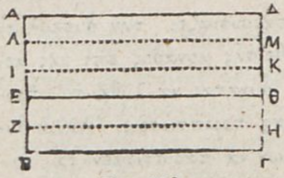
Ἐν τῷ τραπεζίῳ αἱ δύο παράλληλοι αὐτοῦ πλευραὶ λαμβάνονται ὡς βάσεις, τὸ δὲ ἀπόστημα αὐτῶν ὡς ὕψος τοῦ τραπεζίου.

241. Ὡς μονὰς πρὸς μέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν ἐν γένει λαμβάνεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἰσοῦται τῇ μονάδι τοῦ μήκους, ἤτοι τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ἢ πολλοστὸν αὐτοῦ.

Ἑπομένως τὸ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἐπιπέδου σχήματος σημαίνει νὰ εὕρωμεν ποσάκις τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ἢ πολλοστὸν αὐτοῦ περιέχεται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος.

Θεώρημα.

242. *Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὀρθογωνίων ἐχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν αὐτῶν.* (Σχ. 183).



Σχ. 183.

Τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου ἐξαρτᾶται προφανῶς ἐκ τῆς βάσεως καὶ ἐκ τοῦ ὕψους αὐτοῦ. Ἂς θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον τὴν βάσιν σταθεράν, καὶ ἂς ζητήσωμεν οὕτως ὁποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται τὸ ἐμβαδὸν ἐκ τῆς μεταβολῆς τοῦ ὕψους.

Δύο ὀρθογώνια ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἴσα, διότι ἐπιτιθέμενα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἑτέρου ταυτίζονται.

Τούτου τεθέντος, ἔστωσαν δύο ὀρθογώνια ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ, καὶ διάφορα ὕψη ΒΑ καὶ ΒΕ. Δυνάμεθα πάντοτε νὰ ὑποθέσωμεν ταῦτα τεθειμένα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα. καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ ὕψη ΒΑ καὶ ΒΕ ἔχουσι κοινὸν μέτρον περιεχόμενον ἐν μὲν τῷ ΑΒ 5κις ἐν δὲ τῷ ΑΕ δίς. θέλομεν ἔχει $\frac{BA}{BE} = \frac{5}{2}$.

Ἐὰν δὲ διὰ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως Ζ, Ι, λ φέρωμεν εὐθείας παραλλήλους τῇ ΒΓ, τὸ μὲν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ διαιρεῖται εἰς πέντε μερικὰ ὀρθογώνια, τὸ δὲ ΒΓΕΘ εἰς δύο μερικὰ ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα πάντα εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα

ὕψη. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ λάβωμεν τὸ ἓν ἐκ τῶν μερικῶν τούτων ὀρθογωνίων ὡς κοινὸν μέτρον (μονάδα) καὶ θέλομεν ἔχει
$\frac{ΑΒΓΔ}{ΒΓΕΘ} = \frac{5}{2}$. Ἑπομένως ὁ λόγος τῶν δύο ὀρθογωνίων ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν ὑψῶν αὐτῶν. Καὶ ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἄλλως ὡς βάσιν τοῦ πρώτου ὀρθογωνίου τὴν πλευρὰν ΒΑ, καὶ ὡς βάσιν τοῦ δευτέρου τὴν πλευρὰν ΒΕ, ὁπότε τὰ δύο ὀρθογώνια θὰ ἔχωσι κοινὸν ὕψος τὴν ΒΓ, λέγομεν ὡσαύτως ὅτι ὁ λόγος δύο ὀρθογωνίων, ἐχόντων τὸ αὐτὸ ὕψος, ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν βάσεων αὐτῶν.

Ἐὰν τὸ ὑποτεθὲν κοινὸν μέτρον μεταξὺ τῶν ὑψῶν ΒΑ καὶ ΒΕ δὲν ὑπάρχῃ, τότε ἀνατρέχομεν εἰς τὸν κατὰ προσέγγισιν προσδιορισμὸν τῶν ὑψῶν τούτων.

Ἐκ τῆς θεωρίας περὶ ἀναλόγων ποσῶν (Ἀριθμ. 272) ἐξάγομεν ἀμέσως ὅτι *τὰ ἐμβαδὰ δύο οἱωνδήποτε ὀρθογωνίων εἶναι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ γινόμενα τῶν διαστάσεων αὐτῶν.*

Θεώρημα.

243. *Ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα τὰ ἐμβαδὸν τετραγώνου ἔχοντος πλευρὰν τὴν μονάδα τοῦ μήκους, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν δύο αὐτοῦ διαστάσεων, ἤτοι τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τῶν παριστώντων τὰς δύο προσκειμένας αὐτοῦ πλτυρὰς μετρηθείσας διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος τοῦ μήκους.*

Ἂς παραστήσωμεν δι' Ε καὶ Ε΄ τὰ ἐμβαδὰ δύο οἱωνδήποτε ὀρθογωνίων, ὧν τὸ μὲν πρῶτον ἔχει βάσιν Β καὶ ὕψος Υ, τὸ δὲ δεύτερον Β΄ καὶ Υ΄· θέλομεν ἔχει (242)

$$\frac{Ε}{Ε'} = \frac{Β.Υ}{Β'.Υ'} = \frac{Β}{Β'} \cdot \frac{Υ}{Υ'}.$$

Ἐὰν Ε΄ παριστᾷ τὴν μονάδα τῆς ἐπιφανείας, ἤτοι τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν μονάδα τοῦ μήκους (241), θέλομεν ἔχει

$$\frac{Ε}{1μ^{τ}.} = \frac{Β}{1μ.} \cdot \frac{Υ}{1μ.}$$

Ἀλλ' ὁ λόγος $\frac{Ε}{1μ.τ}$, λόγος τοῦ Ε πρὸς τὴν μονάδα αὐτοῦ, εἶ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

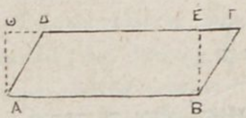
ναι τὸ μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πρώτου ὀρθογωνίου· προσέτι δὲ $\frac{B}{1\mu.}$ καὶ $\frac{\Gamma}{1\mu.}$ παριστῶσι τὰ μέτρα τῶν διαστάσεων τοῦ ὀρθογωνίου τούτου· ἐπομένως ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς παριστᾷ τὸ μέτρον τοῦ προτεθέντος ὀρθογωνίου ἐκπεφρασμένος εἰς τετραγωνικὰ μέτρα, καὶ τὸ γινόμενον τῶν δύο αὐτοῦ διαστάσεων ἐκπεφρασμένον εἰς μέτρα. Ἁπλούστερον δὲ ἐκφράζομεν τὸ θεώρημα τοῦτο ὡς ἑξῆς. *Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ἰσοῦται μὲ τὸ γενόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ἐντεῦθεν ἐξάγομεν ὅτι *τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου παρίσταται διὰ τῆς δευτέρας δυνάμεως τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος μετρᾷ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ*. Ἐκ τούτου προῆλθεν, ὥστε καὶ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ ἡ δευτέρα δύναμις ἀριθμοῦ νὰ καλῆται τετράγωνον αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ.

Θεώρημα.

244. *Τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες παριστῶσι τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ* (Σχ. 184).

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Διὰ τῶν ἄκρων τῆς βάσεως ΑΒ φέρομεν ἐπὶ ταύτην τὰς καθέτους ΑΘ καὶ ΒΕ, ὁπότε σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΕΘ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΕ, μετὰ τοῦ προστεθέντος παραλληλογράμμου. Τὸ ὀρθωγώνιον τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δεδομένον παραλληλόγραμμον.



Σχ. 184

Τὰ δύο ταῦτα σχήματα ἔχουσιν ἓν μέρος κοινὸν τὸ ΑΒΕΔ· ἐὰν ἀποδείξωμεν ὅτι τὰ μὴ κοινὰ αὐτῶν μέρη ἤτοι τὰ τρίγωνα ΒΓΕ καὶ ΑΔΘ εἶναι ἴσα, τὰ δύο σχήματα ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΘΕ προφανῶς θὰ εἶναι ἰσοδύναμα. Τῷόντι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΓΕ καὶ ΑΔΘ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας ΑΔ καὶ ΒΓ ἴσας ὡς ἀπέναντι πλευρὰς παραλληλογράμμου καὶ τὰς πλευρὰς ΑΘ καὶ ΒΕ ἴσας διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ (243). Ἐπομένως καὶ τὸ παραλληλόγραμμον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὡς ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ θὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ μέτρον, ἤτοι θὰ παρίσταται διὰ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Πόρισμα.

245. Ἔστωσαν δύο παραλληλόγραμμα Π καὶ Π΄. Ἂς παραστήσωμεν διὰ *Β* καὶ *Β′* τὰς βάσεις δι' *Υ* καὶ *Υ′* τὰ ὕψη αὐτῶν, ὁπότε θέλομεν ἔχει

$$\Pi = B \times \Upsilon \text{ καὶ } \Pi' = B' \times \Upsilon'.$$

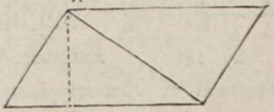
καὶ $\dfrac{\Pi}{\Pi'} = \dfrac{B \times \Upsilon}{B' \times \Upsilon'}$. Ἐὰν $B = B'$ καὶ $\Upsilon = \Upsilon'$, τότε καὶ $\Pi = \Pi'$

Ἐπομένως· *δύο παραλληλόγραμμα ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμα. Δύο παραλληλόγραμμα οἱαδήποτε εἶναι πρὸς ἄλληλα, ὡς καὶ τὰ γινόμενα τῶν βάσεων ἐπὶ τὰ ὕψη αὐτῶν. Δύο παραλληλόγραμμα ἔχοντα ἴσας βάσεις εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν. Δύο παραλληλόγραμμα ἔχοντα ἴσα ὕψη εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.*

Θεώρημα.

246. *Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.* (Σχ. 185).

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Διὰ τοῦ σημείου Α φέρομεν τὴν ΑΔ παράλληλον τῇ ΒΓ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ τὴν ΓΔ παράλληλον τῇ ΒΑ· σχηματίζεται οὕτω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· καὶ ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι προφανῶς τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.



Σχ. 185.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ παραλληλόγραμμον ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ΒΓ ἐπὶ τὸ ὕψος ΑΕ (244), τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὡς ἥμισυ αὐτοῦ, θὰ ἔχῃ ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ αὐτοῦ γινομένου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πόρισμα.

247. Ἔστωσαν Τ καὶ Τ′ δύο τρίγωνα οἱαδήποτε· καὶ ἂς παραστήσωσιν διὰ Β καὶ Β′ τὰς βάσεις καὶ διὰ Υ καὶ Υ′ τὰ ὕψη αὐτῶν· θέλομεν ἔχει

$$T = \frac{B.Y}{2} \quad \text{καὶ } T' = \frac{B'.Y'}{2}. \quad \text{καὶ} \quad \frac{T}{T'} = \frac{B.Y}{B'.Y'}.$$

Ἐὰν δὲ $B = B'$ καὶ $Y = Y'$, τότε καὶ $T = T'$.

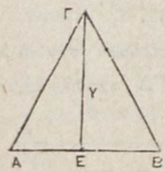
Ἐὰν δὲ μόνον $B = B'$, τότε καὶ $\frac{T}{T'} = \frac{Y}{Y'}$.

καὶ ἐὰν μόνον $Y = Y'$, τότε καὶ $\frac{T}{T'} = \frac{B}{B'}$.

Ἑπομένως· *Δύο τρίγωνα ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμα. Δύο οἱαδήποτε τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων ἐπὶ τὰ ὕψη αὐτῶν. Δύο τρίγωνα ἔχοντα ἴσας βάσεις εἶναι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν. Καὶ δύο τρίγωνα ἔχοντα ἴσα ὕψη εἶναι πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.*

248. Δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου διὰ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ, οὔσης γνωστῆς.

Ἐὰν παραστήσωμεν δι' α τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου, τὸ ὕψος αὐτοῦ Υ θὰ εἶναι ἴσον μὲ $\sqrt{\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4}}$ ἢ $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$



Σχ. 186.

καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ ἐκφράζηται διὰ τῆς παραστάσεως $\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$.

249. Ἐὰν παραστήσωμεν δι' Ε, β καὶ υ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι παριστῶσι τὸ ἐμβαδόν, τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος τριγώνου τινός, θέλομεν ἔχει

$$E = \frac{\beta . \upsilon}{2}$$

ἀλλὰ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πλευρὰν β ὡς βάσιν ἐκφράζεται (190) διὰ τοῦ τύπου

$$\upsilon = \frac{2}{\beta}\sqrt{\sigma(\sigma-\alpha)(\sigma-\beta)(\sigma-\gamma)}$$

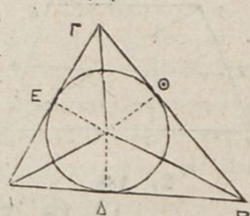
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ υ διὰ τῆς τιμῆς αὐτοῦ λαμβάνομεν

$$E=\sqrt{\sigma(\sigma-\alpha)(\sigma-\beta)(\sigma-\gamma)}\cdot$$

Ἐν τῷ τύπῳ τούτῳ, ὅστις δίδει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν τριῶν πλευρῶν, τὸ σ παριστᾷ τὸ ἥμισυ τῆς περιμέτρου $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ τοῦ τριγώνου.

250. Ἂς παραστήσωμεν δι' α, β, γ τὰς τρεῖς πλευρὰς τριγώνου τινὸς ΑΒΓ, ἡ πλευρὰ α ἀπέναντι τῆς κορυφῆς Α, ἡ πλευρὰ β ἀπέναντι τῆς κορυφῆς Β καὶ ἡ γ ἀπέναντι τῆς κορυφῆς Γ. Ἐὰν ἑνώσωμεν τὸ κέντρον Ο τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον ἐγγεγραμμένου κύκλου μὲ τὰς τρεῖς κορυφάς, τὸ τρίγωνον χωρίζεται εἰς τρία μερικὰ τρίγωνα, τῶν ὁποίων αἱ μὲν βάσεις εἶναι αἱ πλευραὶ α, β, γ, τὸ δὲ κοινὸν αὐτῶν ὕψος εἶναι ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἐκφράσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ διὰ τοῦ ἀθροίσματος $\frac{\alpha\rho}{2}+\frac{\beta\rho}{2}+\frac{\gamma\rho}{2}$ ἢ $\rho.\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)$.



Σχ. 187.

Καὶ παριστῶντες διὰ 2 σ τὴν περίμετρον $\alpha+\beta+\gamma$ τοῦ τριγώνου, παριστῶντες δὲ δι' Ε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. ἔχομεν τὸν γενικὸν τύπον $E=\sigma.\rho$, ἐξ οὗ $\rho=\frac{E}{\sigma}$.

251. Εἴδομεν (177) ὅτι τὸ γινόμενον τῶν δύο πλευρῶν α καὶ β τοῦ τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς γ ἀγόμενον ὕψος, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὴν διάμετρον 2ρ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον κύκλου· ἔχομεν λοιπὸν

$$\alpha.\beta=\upsilon.2\rho.$$

καὶ πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ἐπὶ γ λαμβάνομεν $\alpha.\beta.\gamma=\upsilon.\gamma.2\rho$

ἀλλὰ υ.γ παριστᾷ τὸ διπλάσιον 2Ε τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου· ἔχομεν λοιπὸν $\alpha.\beta.\gamma=4E.\rho$· ἐκ τούτου ἐξάγομεν τὸν γενικὸν τύπον $E=\frac{\alpha.\beta.\gamma}{4\rho}$, ἐξ οὗ $\rho=\frac{\alpha.\beta.\gamma}{4E}$. (191).

Σημ. Τὰ εὑρεθέντα ἐξαγόμενα ἐν §§ 249 καὶ 250 συντελοῦσιν

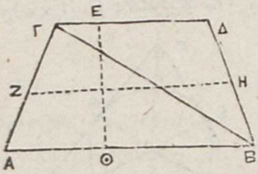
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἰς τὸ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς ἀκτῖνας τοῦ τε ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου εἰς τρίγωνον κύκλου, συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Θεώρημα.

252. *Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες παριστῶσι τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ἂς χωρίσωμεν τὸ δεδομένον τραπέζιον εἰς δύο τρίγωνα διὰ τῆς διαγωνίου ΒΓ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ὡς μέτρον (246) $\frac{AB \times E\Theta}{2}$, τὸ δὲ τρίγωνον ΒΓΔ ἔχει ὡς μέτρον $\frac{\Gamma\Delta \times E\Theta}{2}$. Τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄθροισμα τῶν δύο τούτων τριγώνων, θὰ ἔχῃ ὡς μέτρον



Σχ. 188.

τὸ ἄθροισμα $\frac{AB \times E\Theta}{2} + \frac{\Gamma\Delta \times EB}{2}$

$$\text{ἤτοι } AB\Gamma\Delta = \frac{AB \times E\Theta}{2} + \frac{\Gamma\Delta \times E\Theta}{2} = \frac{AB \times E\Theta + \Gamma\Delta \times E\Theta}{2}$$

$$= \frac{(AB + \Gamma\Delta)}{2} \cdot E\Theta.$$

253. Σχόλιον. Ἐὰν παραστήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου δι' Ε, τὰς βάσεις αὐτοῦ διὰ Β καὶ β καὶ τὸ ὕψος δι' υ, θέλομεν ἔχει τὸν γενικὸν τύπον $E = \frac{B + \beta}{2}\,\upsilon$.

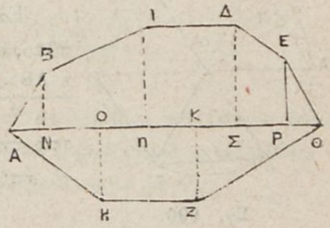
254. Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Ζ μέσου τῆς ΑΓ φέρωμεν τὴν ΖΗ παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις, γνωρίζομεν (85) ὅτι ἡ εὐθεῖα αὐτὴ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ΒΔ, καὶ παριστᾷ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο βάσεων τοῦ τραπεζίου. Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ εἴπωμεν ὅτι *τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους αὐτοῦ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, ἥτις ἑνώνει τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν*

Πρόβλημα.

255. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς οἱουδήποτε πολυγώνου.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς οἱουδήποτε πολυγώνου, δυνάμεθα νὰ χωρίσωμεν αὐτὸ εἰς τρίγωνα φέροντες ἐκ μιᾶς τῶν κορυφῶν αὐτοῦ ὅσας εἶναι δυνατὸν διαγωνίους· εὑρίσκομεν ἔπειτα τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων τούτων, καὶ προσθέτοντες ταῦτα λαμβάνομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου.



Σχ. 189.

Ἐὰν τὸ πολύγωνον εἶναι κεχαραγμένον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, κάμνομεν χρῆσιν ἑτέρας τινὸς μεθόδου κοινῆς, τῆς ἑξῆς.

Φέρομεν τὴν μεγίστην τῶν διαγωνίων ΑΘ τοῦ προτεθέντος πολυγώνου, καὶ φέρομεν ἐκ τῶν κορυφῶν τῶν ἐκτὸς τῆς διαγωνίου ταύτης τὰς καθέτους ΒΝ, ΙΠ,...

Αἱ κάθετοι αὗται χωρίζουσι τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα καὶ τραπέζια ὀρθογώνια. Μετροῦντες δὲ τὰ διάφορα τμήματα τῆς ΑΘ καὶ τὰς ἐπὶ ταύτης ἀχθείσας καθέτους ἔχομεν πάντα τὰ ἀναγκαῖα στοιχεῖα πρὸς εὕρεσιν τῶν ἐμβαδῶν τῶν διαφόρων μερῶν τοῦ πολυγώνου, ἑπομένως καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὅλου πολυγώνου.

Ὅταν τὸ προταθὲν πολύγωνον εἶναι κεχαραγμένον ἐπὶ χάρτου, δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν αὐτὸ εἰς ἓν τρίγωνον ἰσοδύναμον, (ὡς θὰ ἴδωμεν ἐφεξῆς), τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδόν.

Β΄. ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

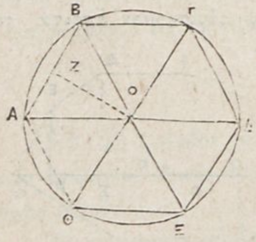
Θεώρημα.

256. *Τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου ἐπὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ.* (Σχ. 190).

Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΘ· ἂς ἑνώσωμεν τὸ σημεῖον τοῦτο Ο μετὰ πασῶν τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου, ὁπότε τοῦτο διαιρεῖται εἰς τόσα τρίγωνα ἴσα πρὸς ἄλληλα, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ. Ἂς θεωρήσωμεν ἰδιαιτέρως τὸ τρίγωνον ΑΟΒ· ἐὰν ἡ ΑΒ θεωρηθῇ ὡς βάσις τοῦ τριγώνου, τὸ ἀπό-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

στημα ΟΖ τοῦ πολυγώνου θὰ εἶναι ὕψος αὐτοῦ, καὶ τὸ μέτρον τοῦ



Σχ. 190.

ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου θὰ εἶναι $\frac{AB \times OZ}{2}$.

Ἐὰν τὸ προτεθὲν πολύγωνον ἔχῃ ν πλευράς, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ Ε θὰ εἶναι $\frac{\nu.\ AB \times OZ}{2}$ ἢ $E = \frac{\Sigma.\ \alpha}{2}$, ἔνθα Σ παριστᾷ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου καὶ α τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ.

Θεώρημα.

257. *Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ*

Ὅπως ἡ περιφέρεια εἶναι τὸ ὅριον τῶν περιμέτρων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς ταύτην κανονικῶν πολυγώνων, τῶν ὁποίων διπλασιάζομεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν, οὕτω καὶ ὁ κύκλος εἶναι τὸ ὅριον τῶν ἐμβαδῶν τῶν πολυγώνων τούτων. Προσέτι δὲ ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας εἶναι τὸ ὅριον τῶν ἀποστημάτων τῶν αὐτῶν πολυγώνων (198), καθόσον τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν αὐτῶν τείνει εἰς τὸ μηδέν.

Τούτου τεθέντος, ἔστωσαν Ε, Σ καὶ α τὸ ἐμβαδόν, ἡ περίμετρος καὶ τὸ ἀπόστημα ἑνὸς οἱουδήποτε τῶν πολυγώνων· θέλομεν ἔχει τὴν σταθερὰν σχέσιν, ὁσαιδήποτε καὶ ἂν ὦσιν αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου

$$E = \frac{\Sigma.\ \alpha}{2} \quad (256)$$

Ἐπομένως ἡ σχέσις αὕτη θὰ ὑφίσταται καὶ μεταξὺ τῶν ὁρίων τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος ταύτης.

$$\text{Κύκλος } P = \frac{\text{Περιφ. } P \times P}{2} \quad (1)$$

Εὕρομεν ἄλλως τε (226)

$$\text{Περιφέρεια } P = 2\pi P \quad (2)$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ προηγουμένῃ ἰσότητι (1), λαμβάνομεν

$$\text{Κύκλ. } P = \left(\frac{2\ \pi\ P.\ P}{2}\right) = \pi P^2 \quad (3)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Οὕτω. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, πολλαπλασιάζομεν τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν π.*

Ἐκ τοῦ προηγουμένου τύπου (3) ἐξάγομεν.

$$P = \sqrt{\frac{\text{Κυκλ. } P}{\pi}}$$

Ἤτοι. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα κύκλου, τοῦ ὁποίου δίδεται τὸ ἐμβαδόν, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου διὰ π, καὶ τοῦ πηλίκου νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν.*

Ἐὰν μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

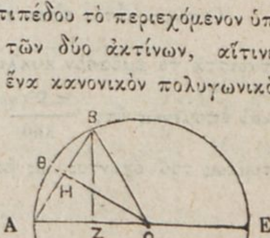
Κύκλος $P = \frac{\text{Περιφ. } P \times P}{2}$ καὶ Περιφ. $P = 2\pi P$ ἀπαλείψωμεν τὴν ἀκτῖνα P, φθάνομεν εἰς τὸν τύπον Κύκλος $P = \frac{(\text{Περιφ. } P)^2}{4\pi}$, ὅστις δίδει ἀμέσως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, γνωστῆς οὔσης τῆς περιφερείας, καὶ ἀντιστρόφως.

Καλεῖται κυκλικὸς τομεὺς τὸ μέρος τοῦ κύκλου ΑΟΒ τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἀκτίνων ΑΟ καὶ ΟΒ. Τὸ τόξον ΑΒ καλεῖται βάσις τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΟΒ.

Θεώρημα.

258. *Τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως (τοῦ τόξου) ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, εἰς ὃν ἀνήκει ὁ τομεύς.* (Σχ. 191).

Ἐὰν εἰς τὴν βάσιν τοῦ τομέως ἐγγράψωμεν κανονικὴν τεθλασμένην γραμμὴν (194), τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς τεθλασμένης ταύτης γραμμῆς καὶ τῶν δύο ἀκτίνων, αἵτινες ὁρίζουσι τὸν κυκλικὸν τομέα, ἀποτελεῖ ἕνα κανονικὸν πολυγωνικὸν τομέα ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κυκλικὸν τομέα, καὶ ἔχοντα ὡς βάσιν τὴν κανονικὴν τεθλασμένην γραμμήν.



Σχ. 191.

Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι αὐξάνεται ἀπεριορίστως ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς ἐγγεγραμμένης κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς, αὕτη ἔχει ὡς ὅριον τὸ τόξον ΑΒ (218,219), καὶ τὸ ἐμ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

βαδὸν οὕτω τοῦ κυκλικοῦ τομέως θὰ εἶναι τὸ ὅριον τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐγγεγραμμένων κανονικῶν πολυγωνικῶν τομέων, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐξάνῃ ἀπεριορίστως.

Τούτου τεθέντος, ἂς παραστήσωμεν διὰ Ρ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, δι' Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως ΑΟΒ καὶ διὰ μ τὸ μῆκος τῆς βάσεως αὐτοῦ. Ἔστωσαν δὲ ὁμοίως ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγωνικοῦ τομέως, σ ἡ περίμετρος τῆς βάσεως καὶ α τὸ ἀπόστημα τῆς βάσεως. Στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν ἐν § 256 εὑρίσκομεν ἀμέσως
$$\varepsilon = \frac{\sigma.\alpha}{2}.$$

Ἡ σχέσις αὕτη ὑφίσταται πάντοτε μεταξὺ τῶν θεωρηθεισῶν μεταβλητῶν ὁσαιδήποτε καὶ ἂν ὦσιν αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως, ἑπομένως ὑφίσταται καὶ μεταξὺ τῶν ὁρίων αὐτῶν (217)· ἤτοι $\text{ὅρ}.\varepsilon = \frac{\text{ὅρ}.\sigma.\ \text{ὅρ}.\ \alpha}{2}.$

καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὸν τύπον
$$E = \frac{\mu.\,P}{2}.$$

259. Πόρισμα. Ἐὰν τὸ τόξον ΑΒ εἶναι ν μοιρῶν, θέλομεν ἔχει (227)
$$\mu = \frac{\pi.P.\nu}{180}$$
καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου
$$E = \frac{\pi P^2.\nu}{360}.$$
Ὁ τύπος οὗτος εἶναι εὐμνημόνευτος, ἐὰν ἔχωμεν ὑπ' ὄψει ὅτι $\frac{\pi P^2}{360}$ παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως ἔχοντος ὡς βάσιν τόξον 1^0. καὶ ἑπομένως ὅτι $\frac{\pi.P^2.\nu}{360}$ θὰ παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως τοῦ ἔχοντος ὡς βάσιν τόξον ν μοιρῶν.

Σημείωσις.

260. Τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τμήματος ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὴν διαφορὰν τοῦ τόξου ΑΒ καὶ τοῦ ἡμίσεος τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου τόξου. (Σχ. 191).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἂς ζητήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος ΑΘΒ· τοῦτο εἶναι διαφορὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος κυκλικοῦ τομέως ΑΟΒ καὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΟΒ.

Ἐὰν τὸ τόξον ΑΒ ἀντιστοιχῇ πρὸς ἓν κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται ἡ πλευρὰ ΑΒ καὶ τὸ ἀπόστημα ΟΗ, θέλομεν ἔχει

ἀμέσως τομ. $AOB = \dfrac{\text{τόξ.}\, AB \times OA}{2}$ καὶ τρίγ. $AOB = \dfrac{AB \times OH}{2}$

$$\text{καὶ τμῆμα } A\Theta B = \frac{\text{τόξ.}\, AB \times OA - AB \times OH}{2}$$

Ἐὰν τὸ τόξον ΑΒ εἶναι οἱονδήποτε, γράφομεν

$$\text{τρίγ. } AOB = \frac{OA \times BZ}{2}$$

τῆς ΒΖ οὔσης καθέτου ἐκ τῆς κορυφῆς Β ἐπὶ τὴν ΟΑ, καὶ οὕτω φθάνομεν τμ. $A\Theta B = \dfrac{\text{τόξ.}\, AB \times OA - BZ \times OA}{2} = \dfrac{OA.\,(\text{τόξ.}\, AB - BZ)}{2}$

τὸ ὁποῖον ἐπρόκειτο νὰ δείξωμεν.

Γ΄. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΙΝ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΟΡΙΖΟΜΕΝΟΥ ΕΝ ΜΕΡΕΙ ΥΠΟ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ

*Τύπος τοῦ SIMPSON.

263. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Β καὶ Β΄ τὰς δύο βάσεις τραπεζίου διὰ Β΄΄ τὴν παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις εὐθεῖαν καὶ ἴσον ἀπέχουσαν τούτων καὶ δι᾽ υ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους τοῦ τραπεζίου, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τοῦ τύπου

$$(1) \qquad E = \frac{\upsilon}{3}\,(B + B' + 4B''),$$

ὁ ὁποῖος ἀνάγεται εἰς τὸν γνωστὸν τύπον $E = \upsilon,\ (B + B')$ ὅταν ἐν αὐτῷ ἀντικατασταθῇ ὁ Β΄΄ διὰ τῆς τιμῆς αὐτοῦ $\dfrac{1}{2}\,(B + B')$,

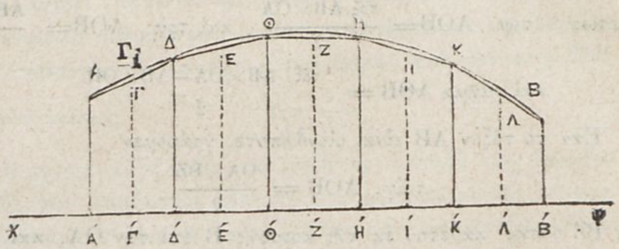
οὕτως $\dfrac{\upsilon}{3}(B + B' + 4B'') = \dfrac{\upsilon}{3}\left[B + B' + 4\left(\dfrac{B + B'}{2}\right)\right] =$

$\dfrac{\upsilon}{3}\left[B + B' + 2\,(B + B')\right] = \dfrac{\upsilon}{3}\,(B + B' + 2B + 2B') =$

$\dfrac{\upsilon}{3}\,(3B + 3B') = \dfrac{3\upsilon}{3}\,(B + B') = \upsilon\,(B + B')$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τούτου τεθέντος, ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ προσδιορίσωμεν κατὰ προσέγγισιν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας τῆς περιεχομένης μεταξὺ τόξου καμπύλης οἱασδήποτε ΑΒ, μιᾶς ὡρισμένης εὐθείας ΧΨ καὶ τῶν καθέτων ΑΑ' καὶ ΒΒ' τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν ἄκρων τῆς καμπύλης ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΧΨ.



Σχ. 192.

Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι τὸ τόξον ΑΒ εἶναι καθ' ὅλον αὐτοῦ τὸ μῆκος κοῖλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΧΨ.

Ἂς διαιρέσωμεν τὴν βάσιν Α'Β' εἰς ἄρτιον ἀριθμὸν ἴσων μερῶν, π. χ. εἰς δέκα καὶ διὰ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως Γ', Δ', Ε'..... ἂς ὑψώσωμεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΧΨ. Ἂς παραστήσωμεν δὲ διαδοχικῶς διὰ $\Upsilon_1\ \Upsilon_2\ \Upsilon_3 \ldots \Upsilon_{11}$ τὰς καθέτους ΑΑ', ΓΓ', Δ'Δ. . . . . ΒΒ' καὶ δι' υ τὸ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἐκ τούτων ἀπόστημα τοῦ Γ ὄντος τοῦ σημείου, ἔνθα ἡ χορδὴ ΑΔ τέμνει τὴν $\Gamma_1\Gamma'$, θέλομεν ἔχει ὡς ἐμβαδὸν τοῦ εὐθυγράμμου τραπεζίου ΑΔΔ'Α'

$$\frac{\upsilon}{3}\,(\mathrm{AA'}+\Delta\Delta'+4\ \Gamma\Gamma')$$

ἀλλὰ τὸ τραπέζιον τοῦτο εἶναι μικρότερον τοῦ καμπυλευθυγράμμου τραπεζίου ΑΓΔΔ'Α', τοῦτο δὲ ἄγει εἰς τὸ ν' ἀντικαταστήσωμεν ΓΓ' διὰ $\Gamma_1\Gamma'$, καὶ νὰ λάβωμεν ὡς προσεγγίζουσαν τιμὴν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ καμπυλευθυγράμμου τραπεζίου ΑΓΔΔ'Α' τὴν παράστασιν

$$\frac{\upsilon}{3}\,(\Upsilon_1+\Upsilon_3+4\ \Upsilon_2)$$

λαμβάνοντες ὁμοίως.

$$\frac{\upsilon}{3}(\Upsilon_3+\Upsilon_5+4\,\Upsilon_4),\ \frac{\upsilon}{3}\,(\Upsilon_5+\Upsilon_7+4\Upsilon_6),$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$\frac{\upsilon}{3}(\Upsilon_7 + \Upsilon_9 + 4\Upsilon_8)$, $\frac{\upsilon}{3}(\Upsilon_9 + \Upsilon_{11} + 4\Upsilon_{10})$, τὰς παραστάσεις τῶν ἐμβαδῶν τῶν λοιπῶν καμπυλευθυγράμμων τραπεζίων, καὶ προσθέτοντες ταύτας, εὑρίσκομεν τὴν προσεγγίζουσαν τιμὴν τοῦ ζητουμένου ἐμβαδοῦ.

$$E = \frac{\upsilon}{3}\left[(\Upsilon_1 + \Upsilon_{11}) + 2(\Upsilon_3 + \Upsilon_5 + \Upsilon_7 + \Upsilon_9) + 4(\Upsilon_2 + \Upsilon_4 + \Upsilon_6 + \Upsilon_8 + \Upsilon_{10})\right]$$

ἐνθυμούμεθα δὲ εὐκόλως τὸν τύπον τοῦτον λαμβάνοντες αὐτὸν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$E = \frac{\upsilon}{3}(\varepsilon + 2\lambda + 4\rho),$$

ἐν τῷ ὁποίῳ ε παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄκρων καθέτων ΑΑ′ καὶ ΒΒ′, λ τὸ ἄθροισμα τῶν περιττῆς, τὸ δὲ ρ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρτίας τάξεως καθέτων.

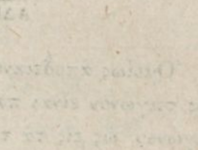
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β.

Α′. ΛΟΓΟΣ ΤΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΕΜΒΑΔΩΝ

Θεώρημα.

262. *Τὰ ἐμβαδὰ δύο τριγώνων ἐχόντων μίαν γωνίαν ἴσην μιᾷ γωνίᾳ ἢ παραπληρωματικὴν εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ γινόμενα τῶν πλευρῶν, αἵτινες περιέχουσι τὰς ἴσας ἢ παραπληρωματικὰς γωνίας.*

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην μιᾷ γωνίᾳ. Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸ ἓν τρίγωνον ἐπὶ τοῦ ἑτέρου οὕτως, ὥστε αἱ ἴσαι αὗται γωνίαι νὰ ταυτισθῶσι καὶ ἂς φέρωμεν τὴν ΒΕ, ὥστε νὰ σχηματισθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ. Ἐὰν λάβωμεν τὸ Β ὡς κοινὴν κορυφὴν τῶν δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΒΕ, τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχοντα τὰς βάσεις αὐτῶν ΓΑ καὶ ΕΑ ἐπὶ τῆς



Σχ. 193.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

αὐτῆς εὐθείας εἶναι ἰσοϋψῆ· ἑπομένως εἶναι πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν· ἔχομεν λοιπὸν

$$\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΑΒΕ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΕ}} \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ λάβωμεν τὸ σημεῖον Ε ὡς κοινὴν κορυφὴν τῶν δύο τριγώνων ΑΒΕ καὶ ΑΔΕ, τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν ΑΒ καὶ ΑΔ

ἤτοι
$$\frac{\text{ΑΒΕ}}{\text{ΑΔΕ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΔ}} \qquad (2)$$

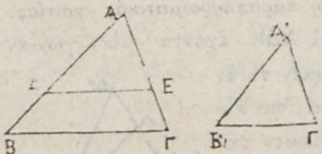
Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2), λαμβάνομεν $\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΑΒΕ}} \cdot \frac{\text{ΑΒΕ}}{\text{ΑΔΕ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΕ}} \cdot \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΔ}}$ ἢ

$$\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΑΔΕ}} = \frac{\text{ΑΓ}\times\text{ΑΒ}}{\text{ΑΕ}\times\text{ΑΔ}}.$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ σχέσις αὕτη, καὶ ὅταν μία γωνία τοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι παραπληρωματικὴ μιᾶς τῶν γωνιῶν τοῦ ἑτέρου τριγώνου· ὡς εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔ'Ε, ἔχοντα τὰς γωνίας ΒΑΓ καὶ Δ'ΑΕ παραπληρωματικάς.

Θεώρημα.

263. *Τὰ ἐμβαδὰ δύο ὁμοίων τριγώνων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν.* (Σχ. 194).



Σχ. 194.

Ἔστωσαν τὰ δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ'. Ἐὰν θέσωμεν τὸ δεύτερον τρίγωνον ἐπὶ τοῦ πρώτου οὕτως, ὥστε αἱ ἴσαι γωνίαι Α καὶ Α' νὰ ταυτισθῶσι, καὶ τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' νὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΑΔΕ, θέλομεν ἔχει

$$\frac{\text{Α Β}}{\text{Α'Β'}} = \frac{\text{Α Γ}}{\text{Α'Γ'}} \text{ ἢ } \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΕ}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τούτου τεθέντος, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην δίδουσι (262)

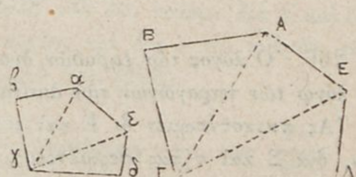
$$\frac{ΑΒΓ}{ΑΔΕ} = \frac{ΑΒ \times ΑΓ}{ΑΔ \times ΑΕ} = \frac{ΑΒ}{ΑΔ} \times \frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΑΒ^2}{ΑΔ^2} \text{ ἤτοι}$$

$$\frac{Α'Β'Γ}{Α'Β'Γ'} = \frac{Α'Β^2}{Α'Β'^2}$$

Πόρισμα

264. *Τὰ ἐμβαδὰ δύο ὁμοίων πολυγώνων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν.*

Ἂς χωρίσωμεν τὰ προτεθέντα πολύγωνα εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων, ἄγοντες ἐκ τῶν ὁμολόγων κορυφῶν Γ καὶ γ τὰς διαγωνίους. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια, θέλομεν



Σχ. 195.

ἔχει $\frac{ΒΓΑ}{βγα} = \frac{ΒΑ^2}{βα^2}$, $\frac{ΑΓΕ}{αγε} = \frac{ΑΕ^2}{αε^2}$, $\frac{ΕΓΔ}{εγδ} = \frac{ΕΔ^2}{εδ^2}$.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ πολύγωνα εἶναι ὅμοια, θέλομεν ἔχει

$$\frac{ΒΑ}{βα} = \frac{ΑΕ}{αε} = \frac{ΕΔ}{εδ} \text{ καὶ } \frac{ΒΑ^2}{βα^2} = \frac{ΑΕ^2}{αε^2} = \frac{ΕΔ^2}{εδ^2} \text{ καὶ ἑπομένως}$$

$$\frac{ΒΓΑ}{βγα} = \frac{ΑΓΕ}{αγε} = \frac{ΕΓΔ}{εγδ}.$$

Ἐκ δὲ τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι γνωστὸν ὅτι, ἐὰν προσθέσωμεν τοὺς ὁμωνύμους ὅρους πολλῶν ἴσων κλασμάτων, προκύπτει κλάσμα ἰσοδύναμον πρὸς ἕκαστον τῶν δεδομένων· οὕτω θέλομεν ἔχει

$$\frac{ΒΓΑ + ΑΓΕ + ΕΓΔ}{βγα + αγε + εγδ} = \frac{ΒΓΑ}{βγα} = \frac{ΒΑ^2}{βα^2} \text{ ἢ } \frac{ΓΒΑΕΔ}{γβαεδ} = \frac{ΒΑ^2}{βα^2}$$

265. Ἐὰν παραστήσωμεν δι' Ε καὶ ε τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο πολυ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γώνων, δι' Α δὲ καὶ α δύο ὁμολόγους αὐτῶν πλευράς, θέλομεν ἔχει

$$\frac{Ε}{ε} = \frac{Α^2}{α^2} \quad ἢ \quad \frac{Α}{α} = \sqrt{\frac{Ε}{ε}}.$$

Ἑπομένως, ὅταν θέλωμεν ν' αὐξήσωμεν ἢ νὰ ἐλαττώσωμεν ἓν πολύγωνον κατὰ δεδομένον λόγον ἢ νὰ κατασκευάσωμεν πολύγωνον ὅμοιον πρὸς δεδομένον καὶ ἔχον πρὸς τὸ πρῶτον δεδομένον λόγον, ἡ κλίμαξ καθ' ἣν δέον ν' αὐξηθῶσιν ἢ νὰ ἐλαττωθῶσιν αἱ πλευραὶ τοῦ δεδομένου ἰσοῦται πρὸς τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ λόγου τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο πολυγώνων.

Θεώρημα.

266. *Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο κανονικῶν πολυγώνων ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων ἢ τῶν ἀποστημάτων αὐτῶν.*

Ἄς παραστήσωμεν δι' Ε καὶ ε τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο πολυγώνων, διὰ Σ καὶ σ τὰς περιμέτρους, διὰ Ρ καὶ ρ τὰς ἀκτῖνας (τῶν περιγ. κύκλων) καὶ δι' Α καὶ α τὰ ἀποστήματα (ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων)· θέλομεν ἔχει

$$Ε = \frac{Σ.Α}{2} \quad καὶ \quad ε = \frac{σ.α}{2} \quad (256)\text{· ἐπομένως}$$

$$\frac{Ε}{ε} = \frac{Σ.Α}{σ.α} = \frac{Σ}{σ} \times \frac{Α}{α}$$

ἀλλὰ γνωρίζομεν (199) ὅτι

$$\frac{Σ}{σ} = \frac{Α}{α} = \frac{Ρ}{ρ}\text{· καὶ ἀντικαθιστῶντες } \frac{Σ}{σ}$$

διὰ τοῦ ἴσου λόγου $\frac{Α}{α}$ λαμβάνομεν $\frac{Ε}{ε} = \frac{Α}{α} \times \frac{Α}{α} = \frac{Α^2}{α^2} = \frac{Ρ^2}{ρ^2}$.

Θεώρημα.

267. *Δύο κύκλοι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστωσαν δύο κύκλοι οἱοιδήποτε ἔχοντες ἀκτῖνας Ρ καὶ Ρ'· θέλομεν ἔχει (257).

$$\text{Κύκλ. } Ρ = \pi Ρ^2, \text{ καὶ Κύκλ. } Ρ' = \pi Ρ'^2$$

ἐξ οὗ
$$\frac{\text{Κύκλ. } Ρ}{\text{Κύκλ. } Ρ'} = \frac{Ρ^2}{Ρ'^2}$$

Σημείωσις.

268. *Τὰ ἐμβαδὰ δύο ὁμοίων τομέων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.*

Ὠνομάσαμεν ὁμοίους τοὺς τομεῖς, οἵτινες ἔχουσιν ὡς βάσεις τόξα ὅμοια, ἤτοι τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μοιρῶν.

Ἄς παραστήσωμεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο τομέων διὰ Ε καὶ Ε', διὰ Ρ δὲ καὶ Ρ' τὰς ἀκτῖνας αὐτῶν, καὶ διὰ ν τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν τῶν βάσεων αὐτῶν· θέλομεν ἔχει (259).

$$Ε' = \frac{\pi Ρ^2 . \nu}{360} \quad \text{καὶ } Ε' = \frac{\pi Ρ'^2 . \nu}{360} \cdot \text{ ἐπομένως } \frac{Ε}{Ε'} = \frac{Ρ^2}{Ρ'^2}.$$

Καὶ τὰ ἐμβαδὰ δύο ὁμοίων κυκλ. τμημάτων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

Ὠνομάσαμεν ὅμοια τμήματα τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς ὁμοίους τομεῖς. Ἄς παραστήσωμεν διὰ Ε καὶ Τ τὰ ἐμβαδὰ τοῦ τομέως καὶ τοῦ ἐν αὐτῷ τριγώνου, ὧν διαφορὰ εἶναι τὸ πρῶτον τμῆμα· διὰ Ε' καὶ Τ' τὰ ἐμβαδὰ τοῦ δευτέρου τομέως καὶ τοῦ ἐν αὐτῷ τριγώνου, ὧν διαφορὰ εἶναι τὸ δεύτερον τμῆμα. Ἐπειδὴ οἱ δύο τομεῖς καὶ τὰ δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Ρ καὶ Ρ' τὰς ἀκτῖνας τῶν κύκλων, εἰς οὓς ἀνήκουσιν οἱ τομεῖς, θέλομεν ἔχει

$$\frac{Ε}{Ε'} = \frac{Ρ^2}{Ρ'^2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{Τ}{Τ'} = \frac{Ρ^2}{Ρ'^2}.$$

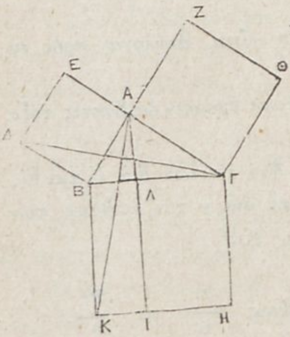
$$\text{ἐπομένως } \frac{Ε}{Ε'} = \frac{Τ}{Τ'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{Ε-Τ}{Ε'-Τ'} = \frac{Ε}{Ε'} = \frac{Ρ^2}{Ρ'^2}$$

Ἐν γένει δὲ *τὰ ἐμβαδὰ δύο οἱωνδήποτε ὁμοίων ἐπιφανειῶν εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα δύο ὁμολόγων εὐθειῶν κεχαραγμένων καθ' οἱονδήποτε τρόπον ἐπὶ τῶν δύο ἐπιφανειῶν.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θεώρημα.

269. *Τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας.*



Σχ. 196.

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ΑΒΔΕ, ΑΓΖΘ, ΒΓΗΚ. Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή, ἡ ΑΕ εἶναι προσεκβολὴ τῆς πλευρᾶς ΓΑ τοῦ τριγώνου καὶ ἡ πλευρὰ ΑΖ προσεκβολὴ τῆς πλευρᾶς ΒΑ.

Τούτου τεθέντος, ἂς φέρωμεν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας Α τὴν ΑΛ κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ, καὶ ἂς προεκτείνωμεν αὐτὴν μέχρι τοῦ σημείου Ι, ἔνθα τέμνει τὴν ΚΗ, ἂς φέρωμεν δὲ καὶ τὰς εὐθείας ΔΓ καὶ ΑΚ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΚ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΚ μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΒΚΙΛ, καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, διότι ἡ κορυφὴ αὐτοῦ Α κεῖται ἐπὶ τῆς ΙΛ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΚ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΒΚΙΛ (243, 246). Ὁμοίως τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου ΔΒΑΕ, διότι ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΔΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, διότι ἡ κορυφὴ αὐτοῦ Γ κεῖται ἐπὶ τῆς ΕΑ. Ἐξ ἄλλου δὲ τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΚ καὶ ΔΒΓ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην ὑπὸ ἴσων πλευρῶν· ἤτοι τὴν γωνίαν ΑΒΚ ἴσην τῇ γωνίᾳ ΓΒΔ (διότι ἑκατέρα ἐξ αὐτῶν ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ κοινοῦ μέρους ΑΒΓ καὶ ἐκ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας), τὴν πλευρὰν ΒΚ ἴσην τῇ ΒΓ ὡς πλευρὰς τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου ΒΚΗΓ καὶ τὰς πλευρὰς ΒΑ καὶ ΒΔ ἴσας ὡς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου ΔΒΑΕ. Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ἐξάγομεν ὅτι καὶ τὰ διπλάσια αὐτῶν, ἤτοι τὸ ὀρθογώνιον ΒΚΙΛ καὶ τὸ τετράγωνον ΑΒΔΕ εἶναι ἰσοδύναμα.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον φέροντες τὰς εὐθείας ΑΗ καὶ ΒΘ ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΛΙΗΓ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον ΑΓΘΖ. Ἐπομένως τὸ τετράγωνον ΒΗΚΓ, ἄθροισμα

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῶν δύο ὀρθογωνίων, θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τετραγώνων ΑΒΔΕ καὶ ΑΓΘΖ·

Πόρισμα.

270. *Ἐπειδὴ δύο ὀρθογώνια τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν,* θέλομεν ἔχει

$$\frac{\text{ΒΚΙΛ}}{\text{ΒΓΗΚ}} = \frac{\text{ΒΛ}}{\text{ΒΓ}} \text{ καὶ } \frac{\text{ΓΛΙΗ}}{\text{ΒΓΗΚ}} = \frac{\text{ΓΛ}}{\text{ΒΓ}}.$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰ ὀρθογώνια διὰ τῶν ἰσοδυνάμων τετραγώνων λαμβάνομεν

$$\frac{\text{ΑΒΔΕ}}{\text{ΒΓΗΚ}} = \frac{\text{ΒΛ}}{\text{ΒΓ}} \text{ καὶ } \frac{\text{ΑΓΘΖ}}{\text{ΒΓΗΚ}} = \frac{\text{ΓΛ}}{\text{ΒΓ}}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{\text{ΑΒΔΕ}}{\text{ΒΛ}} = \frac{\text{ΑΓΘΖ}}{\text{ΓΛ}} = \frac{\text{ΒΓΗΚ}}{\text{ΒΓ}}.$$

Τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς προβολὰς τῶν πλευρῶν τούτων ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης, ὡς καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης πρὸς αὐτὴν ταύτην.

271. Ἐὰν κατασκευάσωμεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ τρία πολύγωνα ὅμοια Π, Κ, Ρ, θέλομεν ἔχει (264)

$$\frac{\text{Π}}{\text{ΑΒ}^2} = \frac{\text{Κ}}{\text{ΑΓ}^2} = \frac{\text{Ρ}}{\text{ΒΓ}^2}. \text{ καὶ } \frac{\text{Π}+\text{Κ}}{\text{ΑΒ}^2+\text{ΑΓ}^2} = \frac{\text{Ρ}}{\text{ΒΓ}^2}.$$

καί, ἐπειδὴ $\text{ΑΒ}^2+\text{ΑΓ}^2 = \text{ΒΓ}^2$, ἕπεται ὅτι (165).

$$\text{Π}+\text{Κ} = \text{Ρ}$$

Σημείωσις.

272. Ἠδυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν τὸ προηγούμενον θεώρημα ἐκ τοῦ ἐν § 166 θεωρήματος· διότι, ἀφοῦ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐπί τινος εὐθείας κατασκευαζομένου τετραγώνου ἔχει ὡς μέτρον τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμένου ἀριθμοῦ, ὅστις παριστᾷ τὸ μῆκος τῆς εὐθείας

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ταύτης, βλέπομεν ὅτι τὸ ῥηθὲν θεώρημα ἐκφράζει ὅτι τὸ μέτρον τοῦ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης κατασκευασθέντος τετραγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας κατασκευασθέντων τετραγώνων, καὶ ἑπομένως ὅτι τὸ πρῶτον τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων· καὶ ἀντιστρόφως ἐκ τοῦ ἐν § 269 δυνάμεθα νὰ μεταπέσωμεν εἰς τὸ ἐν § 166, ἀντικαθιστῶντες τὰ ἐμβαδὰ διὰ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες μετροῦσιν αὐτά.

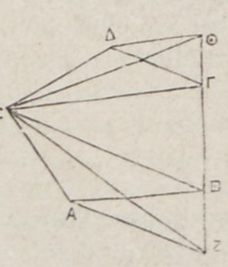
Ἡ αὐτὴ παρατήρησις δύναται νὰ γίνῃ καὶ ἐπὶ τῶν διαφόρων ἀριθμητικῶν σχέσεων, τὰς ὁποίας ἀπεδείξαμεν ἐν ταῖς §§ 164—178 τοῦ πρώτου βιβλίου μεταξὺ τῶν διαφόρων στοιχείων τοῦ τριγώνου ἀναφερομένων πρὸς μίαν μονάδα κοινήν. Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων ἐξάγονται ἀμέσως τὰ περὶ ἐμβαδῶν θεωρήματα· καὶ ἠδυνάμεθα ἀπ' εὐθείας ν' ἀποδείξωμεν τὰ τελευταῖα ταῦτα θεωρήματα, ὅπως ἐπραγματεύθη περὶ τούτων ὁ Εὐκλείδης, καὶ νὰ ἐξαγάγωμεν ἀκολούθως τὰς ἀντιστοιχούσας ἀριθμητικὰς σχέσεις.

Β΄. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΑ ΕΙΣ ΤΑ ΕΜΒΑΔΑ

Πρόβλημα.

273. ***Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δεδομένον πολύγωνον,*** ἤτοι ***νὰ τραπῇ δεδομένον πολύγωνον εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον.***

Ἔστω π. χ. τὸ κυρτὸν πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ (Σχ. 197). Φέροντες τὴν διαγώνιον ΕΓ ἀποχωρίζομεν ἀπὸ τοῦ δεδομένου πενταγώνου τὸ τρίγωνον ΕΓΔ. Ἐὰν διὰ τῆς κορυφῆς Δ φέρωμεν εὐθεῖαν ΔΘ παράλληλον τῇ διαγωνίῳ ΕΓ, πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα βάσιν τὴν ΕΓ καὶ τὰς κορυφὰς αὐτῶν ἐπὶ τῆς ΔΘ εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΓΔ (247) καὶ σχηματίζουσι μετὰ τοῦ τετραπλεύρου ΕΓΒΑ πολύγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δεδομένον πεντάγωνον. Ἑπομένως, ἵνα τὸ νέον πολύγωνον ἔχῃ μίαν κορυφὴν ὀλιγώτερον, ἀρκεῖ νὰ ἐκλέξωμεν ἐξ ὅλων τῶν τριγώνων τούτων τὸ ἔχον κορυφὴν τὸ Θ, κατὰ τὴν συνάντησιν



Σχ. 197.

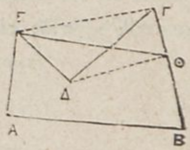
τῆς παραλλήλου ΔΘ καὶ τῆς προσεκβληθείσης πλευρᾶς ΒΓ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ ἐκτεθεῖσα κατασκευὴ ἄγει εἰς τὸν μετασχηματισμὸν ἑνὸς οἱουδήποτε πολυγώνου εἰς ἕτερον πολύγωνον ἰσοδύναμον καὶ ἔχον μίαν πλευρὰν ὀλιγώτερον· ἑπομένως ἐφαρμόζοντες τὴν αὐτὴν κατασκευὴν διαδοχικῶς δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸ δεδομένον πολύγωνον εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον.

Οὕτως ἄγομεν τὴν διαγώνιον ΕΒ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Α τὴν ΑΖ παράλληλον τῇ ΕΒ καὶ συναντῶσαν τὴν προσεκβολὴν τῆς ΓΒ εἰς τὸ σημεῖον Ζ· ἔπειτα φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΖ, ὁπότε σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΘΕΖ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράπλευρον ΘΕΑΒ καὶ ἑπομένως πρὸς τὸ δεδομένον πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ.

Ὅταν τὸ δεδομένον πολύγωνον δὲν εἶναι κυρτόν, ὡς τὸ ΑΒΓΔΕ (Σχ. 198), ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ αὐτή. Τὸ μὲν κυρτὸν πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ αὐξηθὲν κατὰ τὸ τρίγωνον ΕΔΓ γίνεται ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΕ καὶ τὸ τετράπλευρον τοῦτο ἐλαττούμενον κατὰ τὸ τρίγωνον ΕΘΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΔΓ, δίδει τὸ τετράπλευρον ΑΒΘΕ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν μὴ κυρτὸν πεντάγωνον, τὸ ΑΒΓΔΕ.



Σχ. 198.

Ὡς εἴδομεν (255), τὸ προηγούμενον πρόβλημα παρέχει ἡμῖν νέον μέσον πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ πολυγώνου τινός· τῳόντι δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν τὸ δεδομένον πολύγωνον εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον καὶ τούτου νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδόν.

Πρόβλημα

274. *Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δεδομένον πολύγωνον.*

Ὅταν τρέπωμεν σχῆμα οἱονδήποτε εἰς ἰσοδύναμον τετράγωνον, λέγομεν ὅτι τετραγωνίζομεν τὸ σχῆμα τοῦτο.

Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δεδομένον τρίγωνον. Κατὰ τὰ ἐν §§ 243 καὶ 246 πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$\chi^2 = \frac{B.\upsilon}{2} \quad \text{ἢ} \quad \chi^2 = \frac{B}{2}.\upsilon$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἔνθα χ παριστᾷ τὴν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, Β τὴν βάσιν τοῦ δεδομένου τριγώνου καὶ υ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης βλέπομεν ὅτι *ἡ ζητουμένη πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τοῦ ἡμίσεος τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους τοῦ δεδομένου τριγώνου.*

Προκειμένου δὲ περὶ παραλληλογράμμου, τραπεζίου, κανονικοῦ πολυγώνου, καὶ ἐν γένει περὶ οἱουδήποτε πολυγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν παρίσταται διὰ τοῦ γινομένου δύο εὐθειῶν, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο τούτων εὐθειῶν, ἵνα ἔχωμεν οὕτω τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου.

Ἐν πάσῃ ἄλλῃ περιπτώσει μετατρέπομεν τὸ δεδομένον πολύγωνον εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον, καὶ εὑρίσκομεν τετράγωνον ἰσοδύναμον (274) πρὸς τὸ τρίγωνον τοῦτο.

Πρόβλημα

275. *Νὰ εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἐμβαδὰ δύο δεδομένων πολυγώνων.*

Δυνάμεθα πάντοτε ν' ἀντικαθιστῶμεν τὰ δεδομένα πολύγωνα διὰ τῶν ἰσοδυνάμων τετραγώνων (274). Ἔστωσαν α καὶ α′ αἱ πλευραὶ τῶν τετραγώνων τούτων, χ δὲ καὶ ψ αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι. Ἀνάγκη νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἑξῆς σχέσις

$$\frac{\chi}{\psi} = \frac{\alpha^2}{\alpha'^2}$$

Δυνάμεθα νὰ λάβωμεν αὐθαιρέτως τὴν μίαν τῶν ζητουμένων εὐθειῶν, π.χ. τὴν ψ, καὶ ἑπομένως νὰ θέσωμεν $\psi = \alpha'$, ὁπότε θέλομεν ἔχει

$$\frac{\chi}{\alpha'} = \frac{\alpha^2}{\alpha'^2} \quad \text{ἢ} \quad \chi = \frac{\alpha^2}{\alpha'}$$

ἑπομένως κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην ἡ χ θὰ εἶναι τρίτη ἀνάλογος μεταξὺ τῶν πλευρῶν α καὶ α', καὶ ὁ λόγος τῆς τρίτης ταύτης ἀναλόγου πρὸς τὸ α' θὰ εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν λόγον τῶν δεδομένων πολυγώνων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πρόβλημα.

276. *Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ἰσοδύναμον πρὸς ἓν πολύγωνον Π καὶ ὅμοιον πρὸς ἕτερον πολύγωνον Κ.*

Ἐνταῦθα πρόκειται νὰ μετασχηματίσωμεν ἓν πολύγωνον δεδομένον Π εἰς ἕτερον πολύγωνον Χ ἰσοδύναμον τῷ Π καὶ ὅμοιον πρὸς δεδομένον πολύγωνον Κ.

Ἔστω κ μία οἱαδήποτε πλευρὰ τοῦ πολυγώνου Κ καὶ χ ἡ ὁμόλογος τῇ κ πλευρὰ τοῦ πολυγώνου Χ. Θὰ ἔχωμεν (264)

$$\frac{K}{X} = \frac{\kappa^2}{\chi^2}$$

Καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὰ πολύγωνα Κ καὶ Π διὰ τῶν ἰσοδυνάμων τετραγώνων α^2 καὶ β^2 (274), λαμβάνομεν

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\kappa^2}{\chi^2} \text{ ἢ } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\kappa}{\chi}.$$

ἤτοι ἡ πλευρὰ χ εἶναι τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν εὐθειῶν α, β, κ (183), καὶ ἀπομένει νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ταύτης, ὁμολόγου τῇ κ, πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ πολύγωνον Κ (188).

Πρόβλημα.

277. *Δεδομένων δύο ὁμοίων σχημάτων νὰ κατασκευασθῇ ἕτερον σχῆμα ὅμοιον πρὸς ἑκάτερον τούτων καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.*

Ἐὰν πρόκειται περὶ δύο τετραγώνων, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι α καὶ β ($\alpha > \beta$), ἡ πλευρὰ χ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχοντος πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας α καὶ β· ἡ δὲ πλευρὰ υ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δεδομένων τετραγώνων θὰ εἶναι ἡ μία τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἑτέρα τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι β ἡ δὲ ὑποτείνουσα αὐτοῦ α (269).

Ἐὰν δὲ πρόκειται περὶ δύο ὁμοίων πολυγώνων Α καὶ Β ($A > B$), τῶν ὁποίων δύο οἱαδήποτε ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι α καὶ β, ἡ ὁμόλογος πρὸς ταύτας πλευρὰ χ τοῦ ὁμοίου πολυγώνου $X = A + B$ θὰ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ κατασκευα-

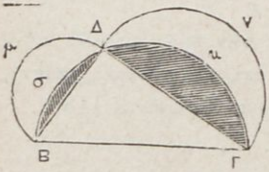
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ζομένου ἐπὶ τῶν εὐθειῶν α καὶ β ὡς πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας· ἡ δὲ ὁμόλογος πλευρὰ υ τοῦ ὁμοίου πολυγώνου Υ=Α—Β θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἑτέρα κάθετος πλευρὰ εἶναι β, ἡ δὲ ὑποτείνουσα αὐτοῦ α (271).

Ἐν τῇ περιπτώσει, καθ' ἣν ἔχομεν δύο κύκλους ἔχοντας ἀκτῖνας Ρ καὶ Ρ' καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ κύκλος ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν δεδομένων, ἀρκεῖ ν' ἀντικαταστήσωμεν ἐν τοῖς προηγουμένοις τὸ α καὶ β διὰ Ρ καὶ Ρ', διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ἀκτῖνας χ καὶ υ τῶν ζητουμένων κύκλων.

Σημείωσις.

278. Ἐὰν ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 199) ὡς διαμέτρων κατασκευάσωμεν ἡμικύκλια, τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης κατασκευαζόμενον ἡμικύκλιον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἡμικυκλίων τῶν γραφομένων ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ὡς διαμέτρων. Αἴροντες ἑκατέρωθεν τὰ κοινὰ μέρη ΔσΒ καὶ ΔκΓ (ἅτινα σημειοῦνται διὰ σκιᾶς ἐν τῷ σχήματι), παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μηνίσκων ΔμΒσΔ καὶ ΔνΓκΔ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΒΓ· (πρότασις τοῦ Ἱπποκράτους).



Σχ. 199.

*Πρόβλημα.

279. *Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον πρὸς δεδομένον πολύγωνον καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ δεδομένον, ὃν λόγον ἔχουσι δύο δεδομέναι εὐθεῖαι Μ καὶ Ν.* (Σχ. 200).

Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι τὸ δεδομένον πολύγωνον εἶναι τετράγωνον, καὶ ἔστω Α ἡ πλευρὰ αὐτοῦ. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ χ τὴν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, θὰ ἔχωμεν (264)

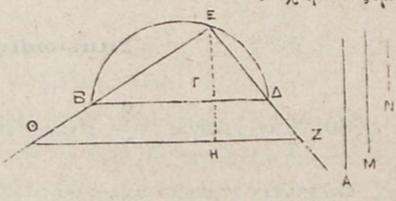
$$\frac{\chi^2}{A^2} = \frac{M}{N}.$$

Ἐπομένως τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν κατασκευὴν ὀρθογωνίου τριγώνου τοιούτου, ὥστε ὁ λόγος τῶν δύο τμημάτων τῆς ὑπο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τεινούσης, εἰς τὰ ὁποῖα αὕτη διαιρεῖται ὑπὸ τῆς ἐπ' αὐτὴν ἀγομένης καθέτου ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας, νὰ ἔχωσι λόγον ἴσον τῷ $\frac{M}{N}$, (270), καὶ ἡ προβαλλομένη πλευρὰ εἰς τὸ ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὴν Ν τμῆμα νὰ εἶναι ἴση τῇ Α.

Ὅθεν, ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ ἀπεριορίστου εὐθείας ΒΓ=Μ καὶ ΓΔ=Ν, γράψωμεν δὲ ἐπὶ τῆς ΒΔ ὡς διαμέτρου ἡμιπεριφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ Γ ὑψώσωμεν ἐπὶ τὴν ΒΔ τὴν κάθετον ΓΕ μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν, φέρωμεν δὲ καὶ τὰς εὐθείας ΕΒ καὶ ΕΔ, σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΕΔ, ἐν τῷ ὁποίῳ τὰ τμήματα τῆς ὑποτεινούσης θὰ παριστῶσι τὸν ζητούμενον λόγον· ὁ λόγος δὲ οὗτος θὰ ὑφίσταται μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχοντος κοινὴν μετὰ τοῦ ΒΕΔ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, τὴν δὲ ὑποτείνουσαν παράλληλον τῇ ΒΔ. Μεταξὺ δὲ τῶν τριγώνων τούτων ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἡ συμπίπτουσα μετὰ τῆς ΕΔ εἶναι ἴση τῇ Α, ἁρμόζει εἰς τὸ πρόβλημα.



Σχ. 200.

Ἂν λάβωμεν λοιπὸν ἐπὶ τῆς ΕΔ (ἐν ἀνάγκῃ προσεκβαλλομένης) ΕΖ=Α, καὶ διὰ τοῦ σημείου Ζ φέρωμεν εὐθεῖαν παράλληλον τῇ ΒΔ μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν ΕΒ εἴς τι σημεῖον Θ, ἡ ΘΕ θὰ παριστᾷ τὴν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Ἔχομεν τῷόντι,

$$\frac{ΕΘ^2}{ΕΖ^2} = \frac{ΘΗ}{ΖΗ} = \frac{ΒΓ}{ΓΔ} \text{ ἢ } \frac{ΕΘ^2}{Α^2} = \frac{Μ}{Ν}.$$

Ἔστω ἤδη πολύγωνον οἱονδήποτε Π. Ἂς παραστήσωμεν διὰ σ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ διὰ χ τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τοῦ ζητουμένου πολυγώνου Χ· θέλομεν ἔχει

$$\frac{Χ}{Π} = \frac{Μ}{Ν} \text{ ἢ } \frac{Χ}{Π} = \frac{χ^2}{σ^2} \text{ ἐπομένως καὶ } \frac{χ^2}{σ^2} = \frac{Μ}{Ν}.$$

Τὸ πρόβλημα οὕτως ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν τετραγώνου, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς δεδομένον τετράγωνον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν δεδομένων εὐθειῶν Μ καὶ Ν. Ὅταν δὲ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν χ, ὁμόλογον πρὸς τὴν σ, μένει νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ταύτης πολύγωνον, ὅμοιον πρὸς τὸ Π.

Ἐν ᾗ περιπτώσει πρόκειται περὶ δύο κύκλων, παριστῶντες τὰς ἀκτῖνας αὐτῶν διὰ χ καὶ ρ θέλομεν ἔχει

$$\frac{\pi\chi^2}{\pi\rho^2} = \frac{M}{N} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\chi^2}{\rho} = \frac{M}{N},$$

ὁπότε ἡ λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ αὐτή.

Σημείωσις.

280. Ἐὰν ὁ λόγος $\frac{M}{N}$ εἶναι δεδομένος ἀριθμητικῶς, π. χ. $\frac{5}{7}$, ἐκλέγομεν σταθερὸν μῆκος ὡς μονάδα, καὶ ἀνατρέχομεν εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, λαμβάνοντες τὰς εὐθείας ΒΓ ἴσην πρὸς τὸ πενταπλάσιον τοῦ μήκους τούτου καὶ τὴν ΔΓ ἴσην πρὸς τὸ ἑπταπλάσιον τοῦ αὐτοῦ μήκους.

284. Ἡ ἀναζήτησις κλίμακος ἀναγωγῆς (189) στηρίζεται ἐπὶ τοῦ προηγουμένου. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἐπιπέδου τινὸς σχήματος δέον νὰ εἶναι τὸ ἐν ἑκατομμυριοστὸν τοῦ ὑπ' αὐτοῦ παρισταμένου γηΐνου ἐμβαδοῦ. Θὰ ἔχωμεν τοὺς λόγους δύο ὁμολόγων εὐθειῶν ἐν ἀμφοτέροις

$$\frac{\chi^2}{\alpha^2} = \frac{1}{1000000} \quad \text{ἑπομένως} \quad \frac{\chi}{\alpha} = \frac{1}{1000}.$$

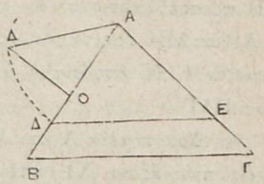
Ἑκάστη δηλ. εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου σχήματος δέον νὰ εἶναι τὸ ἓν χιλιοστὸν τῆς ἀντιστοιχούσης πρὸς ταύτην εὐθείας ἐν τῷ γηΐνῳ, ἤτοι ἓν μέτρον τῆς γηΐνης ἐκτάσεως θὰ παρίσταται ἐν τῷ σχήματι διὰ 0,001μ.

Πρόβλημα.

281. *Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω τὸ δεδομένον τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ἂς τεθῇ ὅτι ἡ ΔΕ παρέχει τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος· ὁ προσδιορισμὸς τῆς θέσεως τοῦ σημείου Δ ἀρκεῖ πρὸς ὁρισμὸν τῆς ζητουμένης εὐθείας, διότι αὕτη πρέπει νὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ.



Σχ. 201.

Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΔΕ, ὂν ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ, πρέπει νὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓ, θὰ ἔχωμεν (263)

$$\frac{ΑΔΕ}{ΑΒΓ} = \frac{ΑΔ^2}{ΑΒ^2} = \frac{1}{2}\cdot \quad \text{ἑπομένως}$$

$$2ΑΔ^2 = ΑΒ^2\cdot$$

ἤτοι ἡ ΑΒ εἶναι διαγώνιος (167) τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἄγνωστος πλευρὰ εἶναι ΑΔ· ταύτην δὲ προσδιορίζομεν διὰ τῆς ἀκολούθου κατασκευῆς.

Διὰ τοῦ σημείου Ο, μέσου τῆς ΑΒ, ὑψοῦμεν ἐπὶ ταύτην κάθετον ΟΔ΄ καὶ ἴσην τῇ ΟΑ. Στρέφομεν τὴν ΑΔ΄ περὶ τὸ Α μέχρις οὗ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ λάβῃ θέσιν τινὰ ΑΔ, ὁπότε τὸ Δ θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον τῆς ΑΒ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου δέον ν᾿ ἀχθῇ ἡ παράλληλος τῇ ΒΓ, ἡ πληροῦσα τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

1. Ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου εἶναι μεγαλειτέρα μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἑνώνουσι σημεῖον οἱονδήποτε, ἐντὸς τοῦ τριγώνου κείμενον, μετὰ τῶν τριῶν αὐτοῦ κορυφῶν, καὶ μικρότερον τοῦ διπλασίου τοῦ αὐτοῦ ἀθροίσματος.

2. Μία οἱαδήποτε διάμεσος τριγώνου περιέχεται μεταξὺ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν δύο πλευρῶν, αἵτινες μετὰ τῆς διαμέσου ἄρχονται ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς, καὶ τοῦ ἡμίσεος τῆς διαφορᾶς τοῦ ἀθροίσματος τῶν αὐτῶν πλευρῶν καὶ τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ περίμετρος τριγώνου περιέχεται μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν διαμέσων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ αὐτοῦ ἀθροίσματος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

3. Ἔστω τρίγωνον οἱονδήποτε τὸ ΑΒΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ προσεκβληθείσης, ἂν εἶναι ἀνάγκη, ΑΓ′=ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡ ΑΒ′=ΑΒ· ἔπειτα δὲ ἂς ἀχθῇ ἡ Β′Γ′ τέμνουσα τὴν ΒΓ εἴς τι σημεῖον Ι. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΙ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ.

4. Δύο σημεῖα Α καὶ Α′ λέγονται συμμετρικὰ ὡς πρὸς εὐθεῖαν, ἢ ὡς πρὸς ἄξονα ΧΥ ἀπεριόριστον, ὅταν ἡ εὐθεῖα αὕτη ἢ ὁ ἄξων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΑ′ καὶ κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς. Δυνάμεθα λοιπὸν εὐκόλως νὰ ὁρίσωμεν τὸ συμμετρικὸν δεδομένου σημείου ὡς πρὸς ἄξονα δεδομένον.

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι 1ον Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Α′ Β′, ὧν τὰ ἄκρα εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα, εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. 2ον Αἱ γωνίαι ΓΑΒ, Γ′Α′Β′ τῶν εὐθειῶν ΓΑ, ΓΒ καὶ τῶν συμμετρικῶν αὐτῶν Γ′Α′, Γ′Β′, ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα, εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

5. Διὰ τῆς κορυφῆς Α τριγώνου τινὸς ΑΒΓ φέρομεν ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α τὴν κάθετον ΧΥ ἀπεριόριστον. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν Μ εἶναι σημεῖον οἱοδήποτε τῆς ΧΨ, ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΜΒΓ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

6. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἀπό τινος δεδομένου σημείου πρὸς τὰ διάφορα σημεῖα δεδομένης εὐθείας.

7. Δεδομένου σημείου ἐντὸς ἢ ἐκτὸς γωνίας, ν' ἀχθῇ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας εὐθεῖα, ἥτις νὰ διαιρῆται ὑπὸ τοῦ σημείου τούτου ἢ διὰ τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας εἰς δύο ἴσα μέρη.

8. Ἐν τῷ τριγώνῳ πρὸς τὴν μεγαλειτέραν πλευρὰν ἀντιστοιχεῖ ἡ μικροτέρα διάμεσος.

9. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστημάτων οἱουδήποτε σημείου τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπὸ τῶν ἴσων αὐτοῦ πλευρῶν εἶναι σταθερόν, ποῖον θὰ εἶναι τὸ ἐξαγόμενον, ὅταν τὸ σημεῖον ληφθῇ ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς βάσεως;

10. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστημάτων σημείου κειμένου ἐντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀπὸ τῶν τριῶν αὐτοῦ πλευρῶν εἶναι σταθερόν, ποῖον θὰ εἶναι τὸ ἐξαγόμενον, ὅταν τὸ δεδομένον σημεῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου;

11. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι α′. Ἐὰν δύο γωνίαι ἔχωσι τὰς πλευρὰς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

αὐτῶν παραλλήλους ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι παράλληλοι ἢ κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας· β΄. Ἐὰν δύο γωνίαι ἔχωσιν ἀμοιβαίως τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθέτους ἐπ' ἀλλήλας, αἱ διχοτόμοι αὐτῶν εἶναι κάθετοι ἢ παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας.

12. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τριγώνου σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς καὶ περατούμεναι εἰς ταύτας νὰ εἶναι ἴσαι.

13. Δεδομένων δύο σημείων Α καὶ Β καὶ μιᾶς εὐθείας ΧΨ, νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ΜΑ+ΜΒ νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον.

14. Δεδομένων δύο σημείων Α καὶ Β καὶ μιᾶς εὐθείας ΧΨ, νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ἡ διαφορὰ ΜΒ—ΜΑ νὰ εἶναι ἡ μεγίστη.

15. Δεδομένου τριγώνου τοῦ ΑΒΓ καὶ ἑνὸς σημείου Ο ἐντὸς τοῦ τριγώνου, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ γωνία ΒΟΓ εἶναι πάντοτε μεγαλειτέρα τῆς γωνίας ΒΑΓ τοῦ τριγώνου.

16. Μιᾶς τῶν γωνιῶν τριγώνου οὔσης ὀρθῆς, ὀξείας ἢ ἀμβλείας, πότε ἡ διὰ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας ταύτης ἀγομένη διάμεσος εἶναι ἴση, μικροτέρα ἢ μεγαλειτέρα τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς;

17. Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Α ἐκτὸς εὐθείας τινὸς ΧΨ κειμένου φέρωμεν πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην τὴν κάθετον ΑΒ καὶ τὰς πλαγίας ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ καὶ οὕτως, ὥστε αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΓΑΔ, καὶ ΔΑΕ νὰ εἶναι ἴσαι, νὰ δειχθῇ ὅτι $ΒΓ < ΓΔ < ΔΕ$.

18. Ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς διχοτόμου γωνίας τινὸς Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ μετὰ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἰσοῦται τῇ ἡμιδιαφορᾷ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ.

19. Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἐὰν ἡ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν εἶναι διπλασία τῆς ἑτέρας, ἡ ὑποτείνουσα εἶναι διπλασία τῆς μικροτέρας πλευρᾶς· καὶ ἀντιστρόφως.

20. Πᾶν τετράπλευρον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται, ἐὰν φέρωμεν διὰ τῶν ἄκρων ἑκατέρας τῶν διαγωνίων παραλλήλους πρὸς τὴν ἑτέραν. Ἐκ τούτου δὲ νὰ εὑρεθῇ ὅτι δύο τετράπλευρα εἶναι ἰσοδύναμα, ἐὰν ἔχωσι τὰς διαγωνίους αὐτῶν ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένας γωνίας ἴσας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

21. Αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνώνουσαι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου σχηματίζουσι παραλληλόγραμμον, ὅπερ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀρχικοῦ τετραπλεύρου.

22. Δεδομένου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, λαμβάνομεν ἀντιθέτως ἐπὶ τῶν ἀντικειμένων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΔΓ δύο μήκη ΑΕ καὶ ΓΘ αὐθαίρετα μὲν ἀλλ' ἴσα πρὸς ἄλληλα· προσέτι δὲ καὶ ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ἀντιθέτως ΑΗ=ΓΖ. Ν' ἀποδειχθῇ α'. Ὅτι τὸ σχῆμα ΕΖΘΗ εἶναι παραλληλόγραμμον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ προτεθὲν παραλληλόγραμμον ἐγγεγραμμένον· β'. ὅτι τὸ κέντρον τοῦ προτεθέντος παραλληλογράμμου εἶναι προσέτι κέντρον παντός, ὡς ἀνωτέρω, γραφομένου παραλληλογράμμου.

23. Τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συναντῶνται αἱ τὰ μέσα τῶν ἀντικειμένων πλευρῶν τετραπλεύρου ἑνώνουσαι εὐθεῖαι, εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας, ἥτις ἑνώνει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ προτεθέντος τετραπλεύρου.

24. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν χορδὴν ἑνὸς τόξου τοῦ κύκλου εἰς τρία ἴσα μέρη, αἱ ἀκτῖνες αἱ διὰ τῶν σημείων τούτων τῆς διαιρέσεως διερχόμεναι χωρίζουσι τὸ τόξον εἰς τρία μέρη, ὧν τὰ δύο τελευταῖα εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα καὶ μικρότερα πρὸς τὸ μεταξὺ αὐτῶν μέρος.

25. Τῆς ΑΒ οὔσης σταθερᾶς διαμέτρου κύκλου καὶ τῆς ΓΔ χορδῆς παραλλήλου πρὸς τὴν διάμετρον ΑΒ, ἂς φέρωμεν τὰς εὐθείας ΓΒ καὶ ΔΑ συναντωμένας κατὰ τὸ σημεῖον Μ, καὶ τὰς ΓΑ καὶ ΔΒ συναντωμένας κατὰ τὸ σημεῖον Ν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ καὶ Ν, ὅταν ἡ χορδὴ ΓΔ ἀλλάσσῃ θέσιν, πάντοτε ὅμως μένῃ παράλληλος τῇ διαμέτρῳ.

26. Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν ἐχουσῶν τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, καὶ τεμνουσῶν δεδομένην περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη;

27. Α,Β,Γ, Α',Β',Γ', ἓξ σημεῖα λαμβάνονται ἐπὶ περιφερείας κύκλου οὕτως, ὥστε ἡ χορδὴ ΑΒ νὰ εἶναι παράλληλος τῇ Α'Β', καὶ ΑΓ τῇ Α'Γ'. Νὰ δειχθῇ ὅτι καὶ ἡ ΒΓ' εἶναι παράλληλος τῇ Β'Γ'.

28. Τὰ ὕψη ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' ἑνὸς οἱουδήποτε τριγώνου ΑΒΓ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ'.

29. Ἐὰν διὰ τοῦ σημείου Ο τῆς συναντήσεως τῶν διαγωνίων τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον φέρωμεν τὴν χορ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δὴν ΕΟΘ, τῆς ὁποίας τὸ μέσον εἶναι τὸ σημεῖον Ο, τὸ μέρος τῆς χορδῆς ταύτης τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν ἀντικειμένων πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου διαιρεῖται κατὰ τὸ σημεῖον Ο εἰς δύο ἴσα μέρη.

30. Ἐὰν τετραπλεύρου τινὸς προεκτείνωμεν τὰς ἀντικειμένας πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ μέχρις οὗ συναντηθῶσι κατὰ τὸ σημεῖον Ε, ἔπειτα τὰς ἀντικειμένας πλευρὰς ΑΔ καὶ ΒΓ μέχρις οὗ συναντηθῶσι κατά τι σημεῖον Θ, ἀποτελεῖται σχῆμα, τὸ ὁποῖον καλεῖται πλῆρες τετράπλευρον, καὶ τὸ ὁποῖον περιέχει τέσσαρα τρίγωνα ΑΒΘ, ΑΔΕ, ΒΓΕ, ΔΓΘ.

Ν' ἀποδειχθῇ α'. Ὅτι οἱ εἰς τὰ τρίγωνα ταῦτα περιγεγραμμένοι κύκλοι διέρχονται δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου· β'. ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ τὰ κέντρα τῶν τεσσάρων κύκλων κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

31. Ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου τοῦ ΑΒΓ κατασκευάζομεν ἰσόπλευρα τρίγωνα ἐξωτερικὰ τὰ ΑΒΓ', ΑΓΒ', ΒΓΑ'. Ν' ἀποδειχθῇ α' Ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' εἶναι ἴσαι· β'. ὅτι αὗται διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου· γ'. ὅτι αἱ γωνίαι αἱ ἔχουσαι κορυφὴν τὸ Ο καὶ πλευρὰς τὰς ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀγομένας εὐθείας εἶναι ἴσαι.

32. Διὰ σταθεροῦ σημείου ληφθέντος ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κύκλου φέρομεν χορδὰς τοῦ κύκλου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν τούτων.

33. Διὰ τοῦ ἑτέρου τῶν ἄκρων διαμέτρου ΑΒ κύκλου φέρομεν μίαν οἱανδήποτε χορδὴν ΑΓ, τὴν ὁποίαν προσεκβάλλομεν λαμβάνοντες ΓΜ ἴσον ΓΒ. Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου Μ;

34. Περιφέρεια κύκλου κυλινδεῖται ἐντὸς ἄλλου κύκλου ἔχοντος διπλασίαν ἀκτῖνα. Ποῖος εἶναι ὁ διαγραφόμενος γεωμετρικὸς τόπος ὑπὸ ἑνὸς σημείου τῆς περιφερείας ταύτης;

35. Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' εἶναι ἐφαπτόμεναι κατὰ τὸ σημεῖον Α. Ἐὰν ἀχθῇ χορδὴ τοῦ μεγαλειτέρου κύκλου ἐφαπτομένη κατὰ τὸ Δ τοῦ ἐσωτερικοῦ κύκλου, ἡ εὐθεῖα ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ.

36. Νὰ διαιρεθῇ μία γωνία ὀρθὴ εἰς τρία ἴσα μέρη.

37. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

α΄. Οἱ πόδες τῶν τριῶν αὐτοῦ ὑψῶν.

β΄. Μία γωνία, ἓν ὕψος, καὶ ἡ περίμετρος (δύο περιπτώσεις).

γ΄. Μία πλευρά, ἡ μία τῶν προσκειμένων πρὸς ταύτην γωνιῶν καὶ τὸ μῆκος τῆς διχοτόμου τῆς δεδομένης γωνίας.

δ΄. Ἡ περίμετρος καὶ αἱ γωνίαι.

38. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον γνωστῶν ὄντων τῶν τεσσάρων αὐτοῦ πλευρῶν, καὶ τῆς εὐθείας, ἥτις ἑνώνει τὰ μέσα δύο ἀντικειμένων πλευρῶν.

39. Δι' ἑνὸς τῶν σημείων τῆς συναντήσεως δύο κύκλων ν' ἀχθῇ κοινὴ τέμνουσα, τῆς ὁποίας μέσον νὰ εἶναι τὸ σημεῖον τοῦτο.

40. Διὰ σημείου κειμένου ἐκτὸς κύκλου ν' ἀχθῇ τέμνουσα, τῆς ὁποίας τὸ ὁλικὸν μῆκος νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρους αὐτῆς.

41. Ν' ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς δεδομένον κύκλον σχηματίζουσα μετὰ δεδομένης εὐθείας γωνίαν, ἴσην τῇ δεδομένῃ γωνίᾳ.

42. Διὰ τῶν κορυφῶν τριγώνου εἰς κέντρον ν' ἀχθῶσι τρεῖς περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι ἀλλήλων ἀνὰ δύο.

43. Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ διάμετρος τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ τῆς ὑποτεινούσης.

44. Τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον εἶναι τὸ μόνον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

45. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου εἶναι γνωσταὶ αἱ γωνίαι, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ νὰ κεῖνται ἐπὶ τριῶν δεδομένων παραλλήλων εὐθειῶν.

46. Νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος δεδομένῃ εὐθείᾳ καὶ τέμνων δεδομένον κύκλον ὑπὸ δεδομένην γωνίαν.

47. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν φέρωμεν μεταξὺ τῶν δύο πλευρῶν τριγώνου σειρὰν παραλλήλων τῇ βάσει, ἡ διάμεσος ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν βάσιν ταύτην εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῆς συναντήσεως τῶν διαγωνίων τῶν οὕτω σχηματιζομένων τραπεζίων.

48. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τῶν ὁποίων βλέπομεν ὑπὸ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν δεδομένην γωνίαν δύο δεδομένους κύκλους.

49. Ἔστω ΑΒ ἡ διάμετρος κύκλου, ΓΔ χορδὴ κάθετος ἐπὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὴν ΑΒ. Διὰ σημείου Π ληφθέντος ἐπὶ τῆς ΓΔ φέρομεν μίαν χορδὴν ΑΠΚ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον ΑΠ. ΑΚ εἶναι σταθερόν.

50. Εἰς πᾶν τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τοῦ τε ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου.

51. Διὰ δύο δεδομένων σημείων ν' ἀχθῇ κύκλος τέμνων δεδομένην περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη.

52. Ἐὰν αἱ διχοτομοῦσαι δύο ἐκ τῶν γωνιῶν τριγώνου εἶναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

53. Δεδομένων τεσσάρων σημείων ἐπὶ περιφερείας, ἐν ἑκάστῳ τῶν διὰ τῶν σημείων τούτων λαμβανομένων ἀνὰ τρία σχηματιζομένων τριγώνων τὰ ὕψη τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται ἐπὶ περιφερείας ἴσας πρὸς τὴν δεδομένην.

54. Ἐὰν αἱ τρεῖς πλευραὶ τριγώνου ἀποτελοῦσι διαδοχικῶς μετὰ τῶν τριῶν πλευρῶν ἑτέρου τριγώνου γωνίας ἴσας, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.

55. Δεδομένου τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἐγγραφῇ ἐν αὐτῷ τρίγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ δεδομένον καὶ ἔχον μίαν τῶν κορυφῶν αὐτοῦ εἰς δεδομένον σημεῖον, κείμενον ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

56. Ἐπὶ κυκλικοῦ σφαιριστηρίου κατὰ ποίαν διεύθυνσιν πρέπει νὰ ὠθήσωμεν τὴν σφαῖραν, ὥστε αὕτη ἀφοῦ προσκρούσῃ δὶς ἐπὶ τῆς περιφερίας τοῦ σφεριστηρίου νὰ διέλθῃ διὰ τῆς ἀρχικῆς θέσεως;

57. Εἰς δεδομένον τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ τρίγωνον ὅμοιον πρὸς ἕτερον δεδομένον τρίγωνον.

58. Εἰς πᾶν τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, 1ον) τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν γινομένων τῶν ἀντικειμένων πλευρῶν· 2ον) ὁ λόγος τῶν διαγωνίων ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν ἀθροισμάτων τῶν σχηματιζομένων ἐκ τῶν πλευρῶν, αἵτινες περατοῦνται εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστης τῶν διαγωνίων. Καὶ ἀντιστρόφως.

59. Ὅταν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας καὶ δύο γωνίας παραπληρωματικὰς ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ ἀντικείμεναι εἰς τὰς γωνίας ταύτας πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι.

60. Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, τὰ ἀποστή-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ματα τῶν σημείων ἐπαφῆς κοινῆς ἐξωτερικῆς ἐφαπτομένης τῶν κύκλων ἀπὸ τῆς ἐν τῷ κοινῷ σημείῳ τῶν περιφερειῶν ἐφαπτομένης εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς διαμέτρους τῶν κύκλων.

61. Δίδονται δύο κύκλοι, τῶν ὁποίων ὁ εἷς ἔχει τὸ κέντρον αὐτοῦ ἐπί τινος σημείου Ο τῆς περιφερείας τοῦ ἄλλου. Ἐὰν φέρωμεν ἐφαπτομένην τοῦ Ο τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν τοῦ δεδομένου κύκλου εἰς δύο σημεῖα Μ καὶ Μ', τὸ γινόμενον ΟΜ. ΟΜ' εἶναι σταθερόν.

62. Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου τῆς μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν οὕτως ὁριζομένων τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης ἰσοῦται τῷ τετραγώνῳ τῆς ἑτέρας τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

63. Ἐν παντὶ τετραπλεύρῳ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων εἶναι διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἑνώνουσι τὰ μέσα τῶν ἀντικειμένων πλευρῶν.

64. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο πλευρῶν τετραπλεύρου, ηὐξημένον κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων, ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ηὐξημένον κατὰ τὸ τετραπλάσιον τετράγωνον τῆς εὐθείας, ἥτις ἑνώνει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τούτων.

65. Ἐν παντὶ τραπεζίῳ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων ἔχει λόγον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν, ὃν λόγον ἔχει καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν παραλλήλων πλευρῶν πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

66. Δεδομένων τῶν τεσσάρων πλευρῶν τραπεζίου, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ.

67. Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον, ἔχον τὴν γωνίαν Α ὀρθὴν καὶ διῃρημένον εἰς δύο τρίγωνα ὑπὸ εὐθείας ἠγμένης ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Ρ, ρ καὶ ρ' τὰς ἀκτῖνας τῶν ἐν τοῖς τρισὶ τριγώνοις ἐγγεγραμμένων κύκλων, ν'ἀποδειχθῇ ὑπάρχουσα ἡ ἑξῆς σχέσις $P^2 = \rho^2 + \rho'^2$.

68. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, γνωστοῦ ὄντος τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς.

69. Πολύγωνον ἰσογώνιον περιγεγραμμένον εἰς κύκλον εἶναι κανονικόν.

70. Παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἔχοντος ἄρτιον ἀριθμὸν πλευ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρῶν καὶ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τὸ ἄθροισμα τῶν περιττῆς τάξεως ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρτίας τάξεως γωνιῶν.

71. Ἐπὶ δεδομένης εὐθείας ὡς πλευρᾶς νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν ὀκτάγωνον.

72. Εἰς δύο κύκλους ἀνίσους αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι αἱ βαίνουσαι ἐπὶ τόξων ἴσου μήκους εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ἀκτίνων.

73. Ἡ ἐπιφάνεια τραπεζίου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων αὐτοῦ πλευρῶν ἐπὶ τὴν κάθετον, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ μέσου τῆς ἑτέρας πλευρᾶς ἐπὶ ταύτην.

74. Δεδομένον ὀρθογώνιον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς διαστάσεις τὰς διαγωνίους τῶν τετραγώνων τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν τοῦ δεδομένου ὀρθογωνίου.

75. Ἐὰν διὰ τοῦ μέσου Ε τῆς διαγωνίου ΒΔ ἑνὸς τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρωμεν παράλληλον ΘΕΖ πρὸς τὴν ἑτέραν διαγώνιον ΑΓ, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΓ διαιρεῖ τὸ τετράπλευρον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

76. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραπλεύρου διὰ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ ἢ καὶ διὰ τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἑνώνουσι τὰ μέσα τῶν ἀντικειμένων πλευρῶν.

77. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἰσοῦται πρὸς τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου τῶν τεσσάρων αὐτοῦ πλευρῶν.

78. Δεδομένον τρίγωνον νὰ διαιρεθῇ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον δι' εὐθείας παραλλήλου τῇ βάσει αὐτοῦ.

79. Διὰ τοῦ μέσου ἑκατέρας τῶν διαγωνίων τετραπλεύρου φέρομεν παράλληλον τῇ ἑτέρᾳ, καὶ ἑνώνομεν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο τούτων εὐθειῶν πρὸς τὰ μέσα τῶν τεσσάρων πλευρῶν. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον χωρίζεται οὕτως εἰς τέσσαρα μέρη ἰσοδύναμα.

80. Τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον εἶναι τὰ τρία τέταρτα τοῦ ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ περιγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου.

81. Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον εἰς τρία τρίγωνα ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ σημείου κειμένου ἐντὸς τοῦ τριγώνου πρὸς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ.

82. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἰσοδύναμον πρὸς δεδομένον τρίγωνον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΕΡΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Α΄. ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

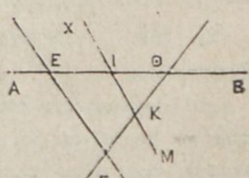
Πρῶται ἔννοιαι περὶ ἐπιπέδου, θεωρουμένου καθ' ἑαυτό. καὶ ἐν σχέσει πρὸς εὐθεῖαν.

282. Ὡς εἴπομεν ἤδη (6), ἐπίπεδον εἶναι ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ὁλόκληρος ἡ εὐθεῖα, ἡ ἔχουσα δύο κοινὰ σημεῖα μετὰ ταύτης. Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ εἶναι ἀπεριόριστος· ἀλλά, διὰ νὰ παραστήσωμεν ἐπιφάνειαν, δέον νὰ σημειῶμεν ὅρια ταύτης. Ἑπομένως παριστῶμεν ἐπίπεδόν τι διὰ σχήματος γραφομένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου· συνήθως δὲ κάμνομεν χρῆσιν τοῦ παραλληλογράμμου· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν τὸ ἐπίπεδον πανταχόθεν ἐκτεινόμενον ἀπεριορίστως, καὶ μὴ ἔχον ὡρισμένον σχῆμα.

Θεώρημα.

283. *Δύο ἐπίπεδα Π καὶ Κ συναντώμενα κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν ΑΒ, καὶ ἔχοντα ἕτερον κοινὸν σημεῖον Γ, ἐκτὸς τῆς εὐθείας κείμενον, ταυτίζονται καὶ ἀποτελοῦσιν ἓν ἐπίπεδον.*

Διὰ τοῦ σημείου Γ καὶ δύο σημείων Ε καὶ Θ, αὐθαιρέτως ληφθέντων ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἂς γράψωμεν τὰς ἀπεριορίστους εὐθείας ΓΕ καὶ ΓΘ. Ἐπειδὴ ἑκατέρα τούτων ἔχει δύο κοινὰ σημεῖα μετὰ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ μετὰ τοῦ Κ, ἕπεται ὅτι ὁλόκληρος κεῖται ἐπὶ ἑκατέρου τῶν ἐπιπέδων. (282).



Σχ. 202.

Τούτου τεθέντος, διὰ τυχόντος ση-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μείου Μ ἀνήκοντος εἰς τὸ ἐπίπεδον Π ἂς φέρωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου εὐθεῖαν οἱανδήποτε τὴν ΜΧ· ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ συναντᾷ (50) εἰς δύο τοὐλάχιστον σημεῖα τὰς τρεῖς εὐθείας ΑΒ, ΓΕ, ΓΘ, τὰ δὲ σημεῖα τῆς συναντήσεως Ι καὶ Κ θὰ κεῖνται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Κ· ἐπομένως ὁλόκληρος ἡ εὐθεῖα ΜΧ, καὶ ἰδίᾳ τὸ σημεῖον Μ, θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Κ. Οὕτω δὲ πᾶν σημεῖον κείμενον ἐπὶ τοῦ ἑτέρου τῶν ἐπιπέδων θὰ εἶναι σημεῖον καὶ τοῦ ἄλλου ἐπιπέδου· τὰ δύο λοιπὸν ἐπίπεδα ταυτίζονται καὶ ἀποτελοῦσιν ἓν ἐπίπεδον.

Θεώρημα.

284. Ἐπίπεδόν τι ὁρίζεται·

α΄. Δι' εὐθείας τινὸς ΑΒ καὶ ἑνὸς σημείου κειμένου ἐκτὸς τῆς εὐθείας ταύτης.

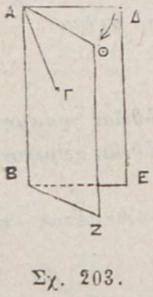
β΄. Διὰ τριῶν σημείων Α,Β,Γ, μὴ εὐθείας κειμένων·

γ΄. Διὰ δύο εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ συναντωμένων εἰς ἓν σημεῖον Α·

δ΄. Διὰ δύο παραλλήλων εὐθειῶν.

Τῷόντι·

α΄. Ἂς φέρωμεν ἐπίπεδον ΑΒΔΕ διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ, καὶ ἂς περιστρέψωμεν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο περὶ τὴν ΑΒ μέχρις ὅτου διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Γ. Θὰ ἔχωμεν τότε ἓν ἐπίπεδον τὸ ΑΒΖΘ διερχόμενον διὰ τῆς ΑΒ καὶ τοῦ σημείου Γ. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένον, διότι πᾶν ἄλλο ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ΑΒ καὶ τοῦ σημείου Γ θὰ ταυτίζηται μετ' αὐτοῦ (283).



Σχ. 203.

β΄. Ἡ δευτέρα αὕτη περίπτωσις ἀνάγεται εἰς τὴν πρώτην· διότι πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ διὰ τοῦ σημείου Γ θὰ περιλαμβάνῃ ἐν αὐτῷ τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, καὶ ἀντιστρόφως.

γ΄. Ὁμοίως τὴν τρίτην ταύτην περίπτωσιν ἀνάγομεν εἰς τὴν πρώτην, θεωροῦντες ὅτι πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ΑΒ καὶ σημείου τινὸς οἱουδήποτε Γ τῆς εὐθείας ΑΓ θὰ περιέχῃ ἐν αὐτῷ τὰς δύο εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ, καὶ ἀντιστρόφως.

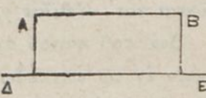
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δ'. Ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν παραλλήλων (50) ἐξάγεται ὅτι δύο εὐθεῖαι, παράλληλοι οὖσαι, δέον νὰ κεῖνται ἀμφότεραι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι διὰ τῆς μιᾶς τῶν παραλλήλων καὶ διὰ σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν παραλλήλων ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον ὁρίζεται· *ἄρα δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς καὶ μόνου ἐπιπέδου.*

Πόρισμα

285. *Ὅπως ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, οὕτω καὶ ἐν τῷ διαστήματι διὰ δεδομένου σημείου μίαν καὶ μόνην εὐθεῖαν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν, παράλληλον πρὸς δεδομένην εὐθεῖαν.*

Ἔστω ἡ ΑΒ ἠγμένη παράλληλος τῇ ΔΕ διὰ τοῦ σημείου Α· ἡ ΑΒ τότε θὰ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΔΕ· ἀλλὰ διὰ τοῦ σημείου Α δὲν εἶναι δυνατὸν ν' ἀχθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ ἑτέρα παράλληλος τῇ ΔΕ (50).



Σχ. 204.

Σημείωσις.

286. Ἐπίπεδον καὶ εὐθεῖα τρεῖς καὶ μόνας θέσεις δύνανται νὰ ἔχωσι μεταξύ των·

1ον. *Ἡ εὐθεῖα νὰ ἔχῃ δύο κοινὰ σημεῖα μετὰ τοῦ ἐπιπέδου* καὶ ἑπομένως *νὰ ἔχῃ καὶ πάντα τὰ λοιπὰ αὐτῆς σημεῖα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου* τούτου, καὶ νὰ κεῖται ὁλόκληρος ἐπ' αὐτοῦ·

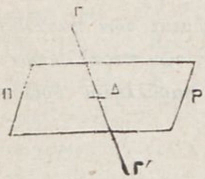
2ον. *Ἡ εὐθεῖα νὰ ἔχῃ ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τοῦ ἐπιπέδου*, ὁπότε ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον τέμνονται·

3ον. *Ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον οὐδὲν νὰ ἔχωσι κοινὸν σημεῖον*, ὁπότε λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον εἶναι *παράλληλα*.

Ὅταν μία εὐθεῖα ΓΓ' καὶ ἓν ἐπίπεδον ΠΡ τέμνωνται (Σχ. 205), τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον Δ χωρίζει τὴν εὐθεῖαν ΓΓ' εἰς δύο μέρη ΔΓ καὶ ΔΓ' κείμενα ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὰ ἀνωτέρω εἶναι προφανῆ, ὅταν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ἥ τε εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον ἐκτείνονται ἐπ' ἄπειρον.



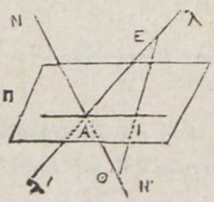
Σχ. 205.

Τὸ ἐπίπεδον οὕτω χωρίζει καὶ τὸν χῶρον (2) εἰς δύο χώρους, οἱ ὁποῖοι ὡς πρὸς τὸν παρατηρητὴν δύνανται νὰ χαρακτηρισθῶσιν ὑπεράνω καὶ ὑποκάτω τοῦ ἐπιπέδου, καθόσον τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως τῆς εὐθείας μετὰ τοῦ ἐπιπέδου, ἀναγκαίως χωρίζει ταύτην ὁμοίως. Παριστῶμεν δὲ τοῦτο, λέγοντες ὅτι ἡ εὐθεῖα διαπερᾷ τὸ ἐπίπεδον. Τὸ σημεῖον, καθ' ὃ εὐθεῖα συναντᾷ ἐπίπεδον, καλεῖται ***πούς*** τῆς εὐθείας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Θεώρημα.

287. ***Δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, ἔχοντα ἓν σημεῖον κοινόν, συναντῶνται κατ' εὐθεῖαν γραμμήν, διερχομένην διὰ τοῦ σημείου τούτου.***

Διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Α τῶν δύο ἐπιπέδων Π καὶ Ρ ἂς φέρωμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Ρ δύο οἱασδήποτε εὐθείας ΛΑΛ′ καὶ ΝΑΝ′. Ἐὰν ἡ μία ἐκ τούτων τῶν εὐθειῶν ἔχῃ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ ἕτερον σημεῖον κοινὸν πλὴν τοῦ Α, τοῦτο θὰ εἶναι κοινὸν τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ, καὶ τὸ θεώρημα ἀληθεύει.



Σχ. 206.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀμφότεραι αἱ εὐθεῖαι τέμνουσι τὸ ἐπίπεδον Π.

Ἂς λάβωμεν ἓν οἱονδήποτε σημεῖον Ε πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας λΑλ′, τὸ ὁποῖον κεῖται ὑπεράνω τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ ἕτερον οἱονδήποτε σημεῖον Θ πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΝΑΝ′, τὸ ὁποῖον κεῖται κάτωθεν τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἡ εὐθεῖα ΕΘ, ἥτις κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Ρ, θὰ τέμνῃ ἀναγκαίως τὸ ἐπίπεδον Π κατὰ τὸ σημεῖον Ι, καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΙ, ἔχουσα δύο σημεῖα ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ, θὰ κεῖται ἀναγκαίως ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν ἐπιπέδων τούτων.

Πόρισμα.

288. ***Ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων εἶναι εὐθεῖα γραμμή.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τῳόντι, ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα ἔχουσιν ἓν κοινὸν σημεῖον, θὰ ἔχωσι κοινὴν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου τούτου· δὲν δύνανται δὲ τὰ ἐπίπεδα νὰ ἔχωσι κοινὸν σημεῖον κείμενον ἐκτὸς τῆς εὐθείας ταύτης, διότι τότε θὰ ταυτίζωνται καὶ θ' ἀποτελῶσιν ἓν ἐπίπεδον (283).

289. *Δύο διάφορα ἐπίπεδα δύο μόνον διαφόρους θέσεις δύνανται νὰ ἔχωσι πρὸς ἄλληλα·*

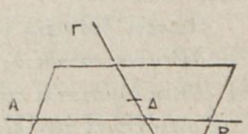
1ον. *Νὰ ἔχωσι κοινήν τινα μίαν καὶ μόνην εὐθεῖαν, καθ' ἣν συναντῶνται,* ὁπότε λέγομεν ὅτι τὰ δύο ἐπίπεδα *τέμνουσιν ἄλληλα·*

2ον. *Νὰ μὴ ἔχωσιν οὐδὲν κοινὸν σημεῖον,* ὁπότε λέγομεν ὅτι τὰ ἐπίπεδα εἶναι *παράλληλα*

Ὅταν δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ τέμνωνται κατὰ εὐθεῖαν τινὰ ΑΒ, ἀναγκαίως διασταυροῦνται. Τῳόντι μία εὐθεῖα οἱαδήποτε ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π, μὴ οὖσα παράλληλος τῇ ΑΒ, διασταυροῦται μετὰ ταύτης, καὶ τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον Ρ κατά τι σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ διαπερᾷ πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τοῦ ἐπιπέδου Ρ (286).

Σημείωσις.

290. Δεδομένων δύο εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ὁπωσδήποτε κειμένων ἐν τῷ διαστήματι, (Σχ. 207) τὸ ἐπίπεδον Π τὸ διὰ τῆς ΑΒ καὶ διὰ τοῦ σημείου Δ τῆς ΓΔ διερχόμενον, ἢ θὰ τέμνῃ τὴν ΓΔ, ἢ θὰ περιλαμβάνῃ ταύτην ὁλόκληρον.



Σχ. 207

Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει οὐδὲν ἐπίπεδον δύναται νὰ περιλαμβάνῃ ἀμφοτέρας τὰς εὐθείας, διότι ἐπίπεδον περιέχον τὴν ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Δ κοινὸν μετὰ τοῦ ἐπιπέδου Π θὰ ἐταυτίζετο μετ' αὐτοῦ, καὶ ἑπομένως θὰ περιεῖχε καὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Αἱ δύο λοιπὸν αὗται εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἑπομένως οὔτε νὰ τέμνωνται οὔτε νὰ εἶναι παράλληλοι. (284 3ον καὶ 4ον).

Δύο διάφοροι εὐθεῖαι δύνανται νὰ ἔχωσιν ἐν τῷ διαστήματι τὰς ἑξῆς τρεῖς πρὸς ἀλλήλας θέσεις·

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1ον. *Νὰ τέμνωνται*· 2ον. *Νὰ εἶναι παράλληλοι*· 3ον. *Νὰ μὴ κεῖνται ἀμφότεραι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.*

Ἐπειδὴ ἐν ταῖς δύο τελευταίαις περιπτώσεσιν αἱ εὐθεῖαι οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον, εἶναι ἀνάγκη ἐν τῇ ἀποδείξει τῆς παραλληλίας δύο εὐθειῶν οὐ μόνον νὰ ἐκτίθηται ὅτι αἱ εὐθεῖαι δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν ἐκταθῶσιν ἑκατέρωθεν (ὅπως ἐν τῇ ἐπιπεδομετρίᾳ), ἀλλὰ καὶ νὰ δεικνύηται ὅτι αἱ εὐθεῖαι κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

Γενίκευσις τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἐπιπέδου.

291. *Πᾶσα Γεωμετρικὴ ἐπιφάνεια δύναται νὰ θεωρηθῇ παραγομένη ὑπὸ εὐθείας ἢ καμπύλης γραμμῆς, καλουμένης γενετείρας, ἥτις κινεῖται ἐν τῷ διαστήματι καθ' ὡρισμένην τινὰ συνθήκην.*

Κατὰ τὴν συνθήκην ταύτην ἡ γενέτειρα δέον νὰ στηρίζηται ἐπὶ ὡρισμένης ἀκινήτου γραμμῆς, ἥτις καλεῖται *οδηγὸς* ἢ *ἰθύνουσα.*

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ἐπίπεδόν τι δύναται νὰ θεωρηθῇ παραγόμενον διὰ τῆς κινήσεως γενετείρας εὐθείας, ἥτις, διερχομένη διὰ σταθεροῦ σημείου τοῦ διαστήματος στηρίζεται διαρκῶς ἐπὶ σταθερᾶς δεδομένης εὐθείας ὡς ὁδηγοῦ.

Τῳόντι ἡ κινητὴ εὐθεῖα κεῖται συνεχῶς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ ὁριζομένῳ διὰ τῆς εὐθείας καὶ τοῦ δεδομένου σταθεροῦ σημείου (284 1ον).

Προσέτι δεδομένη εὐθεῖα ὀλισθαίνουσα παραλλήλως ἑαυτῇ ἐπὶ τῆς δεδομένης σταθερᾶς εὐθείας παράγει ἐπίπεδον. Τῳόντι ἡ κινητὴ εὐθεῖα εὑρίσκεται πάντοτε ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ ὁριζομένῳ ὑπὸ μιᾶς οἱασδήποτε τῶν διαδοχικῶν θέσεων αὐτῆς καὶ τῆς δεδομένης σταθερᾶς εὐθείας (284 4ον).

Πᾶν τρίγωνον κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου ὁριζομένου ὑπὸ τῶν τριῶν αὐτοῦ κορυφῶν. (284 2ον).

Β΄. ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΘΕΤΟΣ ΕΠΙ ΕΠΙΠΕΔΟΝ.

292. Ἐὰν εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον συναντῶνται, λέγομεν ὅτι εἶναι *κάθετα ἐπ' ἄλληλα*, ὅταν ἡ εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ πᾶσαν εὐθεῖαν κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ διερχομένην διὰ τοῦ σημείου τῆς συναντήσεως.

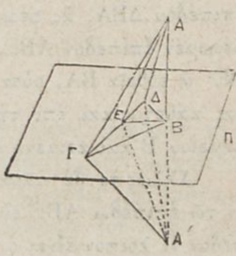
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Εὐθεῖά τις λέγεται *πλαγία ὡς πρὸς ἐπίπεδον*, ὅταν αὕτη συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον χωρὶς νὰ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτό.

Θεώρημα.

293. *Διὰ νὰ εἶναι εὐθεῖά τις κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, ἀρκεῖ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας κειμένας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ διερχομένας διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς.*

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας ΒΓ καὶ ΒΔ διερχομένας διὰ τοῦ ποδὸς Β καὶ κειμένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π· λέγω ὅτι θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ πᾶσαν ἄλλην εὐθεῖαν ΒΕ κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, καὶ διερχομένην διὰ τοῦ ποδὸς Β.



Σχ. 208.

Τῷόντι, ἂς γράψωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π εὐθεῖαν οἱανδήποτε, τέμνουσαν τὰς εὐθείας ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, εἰς τὰ σημεῖα Γ, Δ, Ε. Ἂς προσεκβάλωμεν τὴν ΑΒ κάτωθεν τοῦ ἐπιπέδου, καὶ ἀφοῦ λάβωμεν ἐπὶ ταύτας ΒΑ΄=ΒΑ, ἂς ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα Α καὶ Α΄ μετὰ τῶν σημείων Γ, Ε καὶ Δ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΔ καὶ Α΄ΓΔ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΓΔ κοινήν, τὴν πλευρὰν ΑΓ ἴσην τῇ Α΄Γ, διότι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΑΓΑ΄ κείμεναι εἶναι πλάγιαι, ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς Β, καὶ τὴν ΑΔ ἴσην τῇ Α΄Δ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων τούτων ἕπεται ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν ΑΓΕ καὶ Α΄ΓΕ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΕ καὶ Α΄ΓΕ εἶναι τότε ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην ὑπὸ ἴσων πλευρῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ἑπομένως καὶ ΑΕ=Α΄Ε. καὶ ἡ εὐθεῖα ΒΕ ἔχουσα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΕΑ΄ δύο σημεῖα Β καὶ Ε ἴσον ἀπέχοντα τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας ΑΑ΄, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΑ΄ ἢ ἐπὶ τὴν ΑΒ (46). Λοιπὸν ἡ ΑΒ, οὖσα κάθετος καὶ ἐπὶ μίαν οἱανδήποτε ἄλλην εὐθεῖαν ΒΕ κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

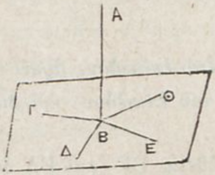
Θεώρημα.

294. *Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἐπὶ εὐ-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θεῖαν ΑΒ δι' ἑνὸς σημείου Β τῆς εὐθείας ταύτης, εἶναι ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο Β (Σχ. 209).

Διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἄπειρα ἐπίπεδα, καὶ διὰ τοῦ σημείου Β δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀνὰ μίαν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, κειμένην ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τούτων· αἱ κάθετοι δὲ αὗται θ' ἀποτελῶσι τὸν γεωμετρικὸν τόπον, τὸν ὁποῖον πρόκειται νὰ προσδιορίσωμεν.



Σχ. 209.

Διὰ τῶν δύο καθέτων ΒΓ καὶ ΒΔ ἀγομένων ἐπὶ τὴν ΑΒ διὰ τοῦ σημείου Β, καὶ κειμένων τῆς μὲν ΓΒ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, τῆς δὲ ΔΒ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΔΒΑ, ἂς φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον Π· ἔπειτα διὰ τῆς ΑΒ ἂς φέρωμεν ἐπίπεδον ΑΒΕ, τέμνον τὸ ἐπίπεδον Π κατά τινα εὐθεῖαν ΒΕ· ἡ εὐθεῖα ΒΑ, οὖσα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π (293), θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΒΕ, ἢ αὐτὴ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐκ τοῦ σημείου Β καὶ κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΕ.

Ἄλλως τε δὲ πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα, ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Β ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΕ εἶναι πλαγία ὡς πρὸς τὴν ΑΒ (15). Τὸ ἐπίπεδον Π λοιπὸν εἶναι ὁ θεωρηθεὶς γεωμετρικὸς τόπος τῶν καθέτων.

Πορίσματα.

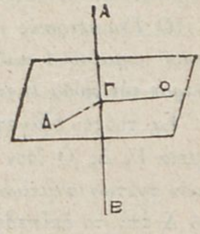
295. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἄγει εἰς νέον τρόπον γενικεύσεως ὁρισμοῦ τοῦ ἐπιπέδου (291). Δυνάμεθα δηλ. νὰ θεωρήσωμεν τὸ ἐπίπεδον παραγόμενον διὰ τῆς κινήσεως εὐθείας, ἥτις μένει συνεχῶς κάθετος ἐπὶ ἄλλην δεδομένην εὐθεῖαν καὶ κατὰ ἓν δεδομένον ταύτης σημεῖον.

296. *Διὰ δεδομένου σημείου δυνάμεθα πάντοτε νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν, καὶ ἓν μόνον.*

1ον. Ἐὰν τὸ δεδομένον σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας, π. χ. τὸ Β ἐπὶ τῆς ΑΒ (Σχ. 209), φέρομεν ἐπὶ τὴν ΑΒ τὰς καθέτους ΒΓ καὶ ΒΔ κειμένας τὴν μὲν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΓ, τὴν δὲ ἐν τῷ ΑΒΔ, καὶ φέρομεν διὰ τῶν δύο τούτων εὐθειῶν τὸ δι' αὐτῶν ὁριζόμενον ἐπίπεδον Π· τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Β (293) τὸ ὁποῖον αὐτὸ καὶ μόνον πληροῖ τὴν συνθήκην ταύτην (294).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

2ον. Ἐὰν τὸ δεδομένον σημεῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς δεδομένης εὐθείας, ὡς π.χ. τὸ Ο (Σχ. 210), φέρομεν διὰ τοῦ σημείου τούτου καὶ τῆς εὐθείας ΑΒ ἐπίπεδον (284 1ον). Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ ΑΒΟ φέρομεν τὴν ΟΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ ἂς ὑψώσωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ κειμένην ἐν ἐπιπέδῳ τινὶ ΑΒΔ· αἱ κάθετοι τότε ΓΟ καὶ ΓΔ ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου Π, καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ (293) καὶ διερχομένου διὰ τοῦ δεδομένου σημείου Ο. Μόνον δὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο πληροῖ τὰς δύο ταύτας συνθήκας, διότι ἐκ τοῦ σημείου Ο μία καὶ μόνη κάθετος ἄγεται ἐπὶ τὴν ΑΒ.



Σχ. 210.

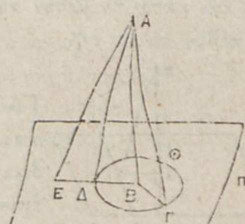
Θεώρημα.

297. *Ἐὰν ἐκ σημείου ληφθέντος ἐκτὸς ἐπιπέδου, φέρωμεν κάθετον ἐπ' αὐτὸ καὶ διαφόρους πλαγίας· Ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας· δύο πλάγιαι ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου εἶναι ἴσαι· καὶ ἐκ δύο πλαγίων ἡ μᾶλλον ἀπέχουσα τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου εἶναι μεγαλειτέρα.*

Ἔστωσαν τὸ σημεῖον Α, τὸ ἐπίπεδον Π ἡ κάθετος ΑΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ αἱ πλάγιαι ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ.

Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΓ ἡ κάθετος ΑΒ εἶναι μικροτέρα τῆς πλαγίας ΑΓ, καὶ οἱασδήποτε ἄλλης, (41).

Ἂς ὑποθέσωμεν ΒΓ=ΒΔ. Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην ὑπὸ πλευρῶν ἴσων ἑκατέρας ἑκατέρᾳ· ἑπομένως καὶ ΑΓ=ΑΔ.



Σχ. 211.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ΒΕ>ΒΓ, καὶ ἂς λάβωμεν ΒΔ=ΒΓ, ὁπότε θέλομεν ἔχει ΑΔ=ΒΓ. Ἀλλ' ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΕ, θέλομεν ἔχει ΑΕ>ΑΔ (41)· ἑπομένως καὶ ΑΕ>ΑΓ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πορίσματα.

298. Αἱ ἀντίστροφοι τῶν προτάσεων τούτων ἀληθεύουσι.

Ὁ Γεωμετρικὸς τόπος τῶν ποδῶν τῶν πλαγίων τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Α καὶ ἴσων τῇ ΑΓ εἶναι περιφέρεια κύκλου, ἔχοντος κέντρον τὸν πόδα Β τῆς καθέτου ΑΒ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΒΓ.

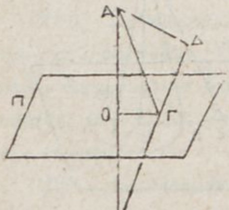
Ἐκ τούτου ἐξάγεται ὅτι, ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π ὁρίσωμεν τρία σημεῖα Γ, Δ, Ο ἴσον ἀπέχοντα τοῦ Α, τὸ κέντρον Β τῆς διὰ τῶν τριῶν τούτων σημείων ὁριζομένης περιφερείας εἶναι ὁ ποὺς τῆς ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π ἀγομένης καθέτου.

Ὁμοίως *ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ἐπὶ ἐπιπέδου τινὸς Π κειμένων καὶ ἴσον ἀπεχόντων τοῦ δεδομένου σημείου Α, εἶναι περιφέρεια ἔχουσα κέντρον τὸν πόδα τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.*

Θεώρημα.

299. *Ὁ γεωμετρικὸς τόπος πάντων τῶν σημείων τοῦ διαστήματος, τῶν ἴσον ἀπεχόντων (ἀνὰ ἓν) ἀπὸ τῶν ἄκρων δεδομένης εὐθείας εἶναι ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν καὶ κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς.*

Ἔστωσαν ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ ἐπίπεδον Π κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς Ο. Ἔστω δὲ καὶ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τὸ Γ.



Σχ. 212.

Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΓΒ αἱ δύο πλάγιαι ΓΑ καὶ ΓΒ εἶναι ἴσαι, ὡς ἀπέχουσαι ἴσον ἀπὸ τοῦ ποδὸς Ο τῆς καθέτου ΟΓ. Οὕτω δεικνύεται ὅτι καὶ πᾶν ἄλλο σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας ΑΒ· ἔστω δὲ καὶ τυχόν τι σημεῖον Δ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου Π κείμενον. ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΔ· τὰ ἀποστήματα ΑΔ καὶ ΒΔ εἶναι ἄνισα, διότι τὸ σημεῖον Δ κεῖται ἐκτὸς τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐκ τοῦ μέσου αὐτῆς καὶ κειμένης ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΔ. *Πᾶν λοιπὸν σημεῖον, ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου κείμενον, ἄνισον ἀπέχει τῶν ἄκρων τῆς ΑΒ. Ἄρα τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι ὁ θεωρηθεὶς γεωμετρικὸς τόπος.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

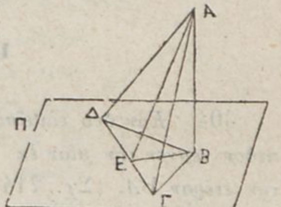
Πόρισμα.

300. *Τρία σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας ἀρκοῦσιν ὅπως ὁρίσωσι τὴν θέσιν ἐπιπέδου τινός* (284 2ον), *ἐξ οὗ καὶ ἂν ἐπίπεδον ἔχῃ τρία σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα καὶ ἴσον ἀπέχοντα τῶν ἄκρων εὐθείας, τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν καὶ κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς.*

Θεώρημα.

301. *Ἔστωσαν ἡ εὐθεῖα ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, καὶ τυχοῦσα εὐθεῖα ἡ ΓΔ κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π· ἐὰν φέρωμεν τὴν ΒΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ, καὶ ἑνώσωμεν τὸ Α μὲ τὸ Ε, ἡ εὐθεῖα ΑΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ* (Σχ. 213).

Ἂς λάβωμεν ΕΓ=ΕΔ, καὶ ἂς ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ μετὰ τῶν Β καὶ Α δι' εὐθειῶν.



Σχ. 213.

Αἱ εὐθεῖαι ΒΓ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσαι ὡς ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ΒΕ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π· ἀφ' ἑτέρου δὲ αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΑΓ εἶναι ἴσαι ὡς ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ΑΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π (297). Ἐπομένως τὸ τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι ἰσοσκελές, καὶ ἡ διὰ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ Α καὶ τοῦ μέσου Ε τῆς βάσεως διερχομένη εὐθεῖα ΑΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΔΓ (27). Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι γνωστὴ ὑπὸ τὸ ὄνομα Θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων.

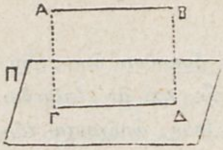
Θεώρημα.

302. *Πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος εὐθείᾳ τινί, κειμένῃ ἐπὶ ἐπιπέδου εἶναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ ἢ κεῖται ἐπ' αὐτοῦ* (Σχ. 214).

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ παράλληλος τῇ ΓΔ, κειμένῃ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ δὲν κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π, ὁρίζει μετὰ τῆς ΓΔ (284 4ον) ἓν ἐπίπεδον τὸ Κ, τοῦ ὁποίου ἡ τομὴ μετὰ τοῦ Π εἶναι ἡ εὐθεῖα ΓΔ. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἀνήκουσα εἰς τὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπίπεδον Κ, δὲν δύναται νὰ συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον Π εἰμὴ μόνον



Σχ. 214.

κατά τι σημεῖον τῆς κοινῆς τομῆς ΓΔ· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, διότι ἡ ΓΔ καὶ ΑΒ ὑπετέθησαν παράλληλοι· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ Π.

Θεώρημα.

303. *Ἐὰν δι' εὐθείας ΑΒ, παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, φέρωμεν ἐπίπεδον ΑΒΓΔ, τέμνον τὸ Π, ἡ τομὴ ΓΔ τῶν δύο ἐπιπέδων εἶναί παράλληλος τῇ ΑΒ.* (Σχ. 214).

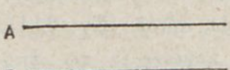
Τῳόντι αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ, παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ Π, δὲν δύνανται νὰ συναντᾷ τὴν ΓΔ κειμένην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ (290).

Πορίσματα.

304. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι παράλληλοι, πᾶν ἐπίπεδον τέμνον τὴν μίαν ἐκ τούτων, ἔστω τὴν ΑΓ, θὰ συναντᾷ καὶ τὴν ἑτέραν ΒΔ.* (Σχ. 214).

Τῳόντι ἡ εὐθεῖα ΒΔ μόνον τρεῖς θέσεις δύναται νὰ ἔχῃ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π (286)· καί, ἐὰν ἡ ΒΔ ἔκειτο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π ἢ ἦτο παράλληλος πρὸς αὐτό, ἡ ΑΓ, ἥτις ἐξ ὑποθέσεως ἔχει μετὰ τοῦ ἐπιπέδου Π κοινὸν τὸ σημεῖον Γ, θὰ ἔκειτο ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ (284 4ον, 303), καὶ δὲν θὰ ἐτέμνετο ὑπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει· ἄρα ἡ ΒΔ, ἐπειδὴ οὔτε κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π οὔτε εἶναι παράλληλος αὐτῷ, τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

305. *Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τρίτην τινὰ* (ἐν τῷ διαστήματι) *εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.*



Σχ. 215.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι Β καὶ Γ παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν Α· αὗται θὰ εἶναι πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι. Τῳόντι αἱ εὐθεῖαι Β καὶ Γ δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινόν τι σημεῖον, διότι ἀπὸ δε-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

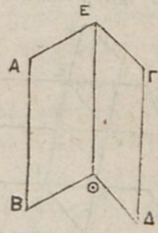
δομένου σημείου μία καὶ μόνη παράλληλος δεδομένη εὐθεία δύναται ν' ἀχθῇ (285).

Ἐπὶ πλέον δὲ αἱ εὐθεῖαι Β καὶ Γ κεῖνται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, τῷ ὁριζομένῳ ὑπὸ τῆς εὐθείας Β καὶ ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου τῆς Γ· ἐὰν δὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἔτεμνε τὴν εὐθεῖαν Γ (ἤτοι ἡ Β δὲν ἦτο παράλληλος τῇ Γ), θὰ ἔτεμνε καὶ τὴν Α (310), καὶ ἑπομένως τὴν Β, ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει. Αἱ εὐθεῖαι ἄρα Β καὶ Γ εἶναι παράλληλοι (290).

306. *Ἐὰν διὰ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ φέρωμεν δύο ἐπίπεδα, τέμνοντα ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εἶναι παράλληλος πρὸς ἑκατέραν τῶν δύο εὐθειῶν.*

Τῷόντι οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ διὰ τῆς ΑΒ διερχόμενον ἐπίπεδον, τὸ διὰ τῆς ΓΔ διερχόμενον θὰ τέμνῃ τοῦτο κατὰ εὐθεῖαν τινὰ ΕΘ παράλληλον τῇ ΓΔ (303,) καὶ ἑπομένως παράλληλον καὶ τῇ ΑΒ, διότι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῇ ΓΔ (305).

Ἐὰν φαντασθῶμεν μίαν οἱανδήποτε εὐθεῖαν παράλληλον τῇ ΑΒ καὶ τῇ ΓΔ, αὕτη θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς ἀμφότερα τὰ ἐπίπεδα καὶ πρὸς τὴν κοινὴν αὐτῶν τομήν. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν προσέτι ὅτι *ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων, παραλλήλων τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ, εἶναι παράλληλος τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ.*



Σχ. 216.

Θεώρημα.

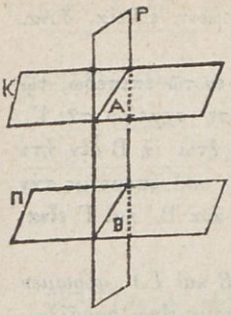
307. *Δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλα.*

Τῷόντι δύο ἐπίπεδα δύο μόνον θέσεις πρὸς ἄλληλα δύνανται νὰ ἔχωσι (289), καί, ἐὰν τὰ θεωρηθέντα ἐπίπεδα ἔτεμνον ἄλληλα, δι' ἑνὸς σημείου τῆς τομῆς αὐτῶν θὰ ἦτο δυνατὸν ν' ἀχθῶσι δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ὅπερ ψευδές (296)· ἄρα τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα.

Θεώρημα.

308. *Ὅταν δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνωνται ὑπὸ τρίτου ἐπιπέδου, αἱ τομαὶ εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

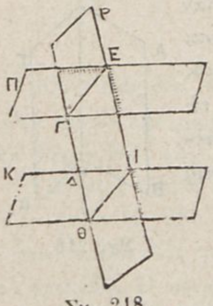


Σχ. 217.

Ἔστωσαν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ Κ τεμνόμενα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ρ κατὰ τὰς εὐθείας Α καὶ Β. Αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι· διότι, ἂν προσεκβαλλόμεναι συνηντῶντο εἴς τι σημεῖον, τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ ἦτο κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Κ, ἤτοι τὰ ἐπίπεδα ταῦτα θὰ συνηντῶντο, ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει· αἱ εὐθεῖαι ἄρα Α καὶ Β εἶναι παράλληλοι.

Θεώρημα.

309. *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα Π καὶ Κ εἶναι παράλληλα, α΄ Πᾶσα εὐθεῖα τέμνουσα τὸ ἓν ἐκ τῶν ἐπιπέδων τούτων θὰ τέμνῃ καὶ τὸ ἕτερον· β΄. Πᾶν ἐπίπεδον τέμνον τὸ ἓν ἐκ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων θὰ τέμνῃ καὶ τὸ ἕτερον* (Σχ. 218).



Σχ. 218.

α΄. Δι' ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου Ι τοῦ ἐπιπέδου Κ καὶ διὰ τῆς εὐθείας Δ, ἥτις τέμνει τὸ ἐπίπεδον Π κατὰ τὸ Γ, ἂς φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον Ρ· τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, ἔχον μεθ' ἑκατέρου τῶν δύο πρώτων ἐπιπέδων κοινὸν σημεῖον, θὰ τέμνῃ ταῦτα κατὰ εὐθείας παραλλήλους ΓΕ καὶ ΘΙ (308), διότι ἡ εὐθεῖα Δ, τέμνουσα τὴν ΓΕ, τέμνει καὶ τὴν παράλληλον ταύτῃ ΘΙ, ἄρα τέμνει καὶ τὸ ἐπίπεδον Κ.

β΄. Διὰ τοῦ ἐπιπέδου Ρ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἐπίπεδον Π κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΓΕ, ἂς φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ· ἡ εὐθεῖα αὕτη, τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον Π, θὰ τέμνῃ καὶ τὸ Κ (α΄.)· ἑπομένως τὸ ἐπίπεδον Ρ τέμνει τὸ ἐπίπεδον Κ.

Πορίσματα.

310. *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος τῷ πρώτῳ ἐπιπέδῳ, ἢ κειμένη ἐν αὐτῷ, ἢ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ δεύτερον ἐπίπεδον, ἢ κεῖται ἐν αὐτῷ.*

Διότι, ἐὰν αὕτη ἔτεμνε τὸ δεύτερον ἐπίπεδον, θὰ ἔτεμνε καὶ τὸ πρῶτον. Οὕτω· *Δύο παράλληλα ἐπίπεδα ἔχουσι τὰς παραλλήλους αὐτῶν κοινάς.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

311. *Διὰ σημείου τινὸς Α. ἐκτὸς ἐπιπέδου Β΄Α΄Γ΄ κειμένου, εἶναι δυνατὸν πάντοτε ν' ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ Α΄Β΄Γ΄, καὶ ἓν μόνον (Σχ. τὸ κατωτέρω (219)*.

Τῳόντι, ἂς φέρωμεν διὰ τοῦ Α δύο εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ παραλλήλους πρὸς τὸ ἐπίπεδον Β΄Α΄Γ΄. Τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ θὰ εἶναι παράλληλον τῷ Β΄Α΄Γ΄· διότι, ἐὰν τὰ ἐπίπεδα ταῦτα συναντῶντο, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ἔδει νὰ εἶναι παράλληλος πρός τε τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΑΓ (303), ὅπερ ἀδύνατον. Ἐπὶ πλέον δὲ πᾶν ἄλλο ἐπίπεδον, ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ, διερχόμενον διὰ τοῦ Α τέμνει τὸ ἐπίπεδον Β΄Α΄Γ΄, ἐπειδὴ τέμνει τὸ ἐπίπεδον ΒΑΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον τῷ Β΄Α΄Γ΄ (309).

312. *Δύο ἐπίπεδα Π καὶ Κ, παράλληλα πρὸς τρίτον ἐπίπεδον Ρ, εἶναι παράλληλα πρὸς ἄλληλα.* Διότι, ἐὰν εἶχον κοινόν τι σημεῖον, διὰ τοῦ σημείου τούτου θὰ διήρχοντο δύο ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ὅπερ ἀδύνατον (311).

313. *Ὁ Γεωμετρικὸς τόπος τῶν παραλλήλων εὐθειῶν πρὸς ἐπίπεδόν τι Κ, διὰ σημείου Α ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ἠγμένων, εἶναι ἐπίπεδον Π, διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου τούτου, παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ Κ.*

Τῳόντι πᾶσαι αἱ διὰ τοῦ Α ἀγόμεναι παράλληλοι τῷ ἐπιπέδῳ Κ εἶναι παράλληλοι τῷ ἐπιπέδῳ Π ἢ κεῖνται ἐν αὐτῷ (310). Ἡ δευτέρα δὲ αὕτη μόνον περίπτωσις ὑφίσταται, διότι αἱ προτεθεῖσαι παράλληλοι ἔχουσιν ἤδη κοινὸν σημεῖον μετὰ τοῦ ἐπιπέδου Π τὸ Α.

Θεώρημα.

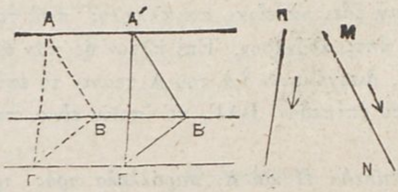
314. *Δύο γωνίαι, ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους, εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαὶ καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι παράλληλα.*

α΄. Ὅτι τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι παράλληλα ἐξάγεται ἐκ τοῦ ἐν § 311 θεωρήματος.

β΄. Δύο γωνίαι ΒΑΓ καὶ Β΄Α΄Γ΄, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ Α΄Β΄, ΑΓ καὶ Α΄Γ΄ εἶναι ἀνὰ δύο παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς, εἶναι ἴσαι. Τῳόντι, διὰ δύο σημείων Β καὶ Γ, αὐθαιρέτως λαμβανομένων ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α, ἂς φέρωμεν παραλλήλους τῇ ΑΑ΄ συναντώσας τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας Α΄ κατὰ τὰ σημεῖα Β΄ καὶ Γ΄· αἱ εὐθεῖαι ΒΓ καὶ Β΄Γ΄ εἶναι παράλληλοι ὡς κοι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΒΑΓ καὶ Β'Α'Γ' μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΒΒ' ΓΓ'. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ΒΑΓ καὶ Β'Α'Γ' ἔχουσι τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, ὡς παραλλήλους εὐθείας μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν περιεχομένας· ἑπομένως αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ Β'Α'Γ' εἶναι ἴσαι.



Σχ. 219.

Ἀποδεικνύομεν προσέτι, ὅπως ἐν τῇ ἐπιπέδῳ γεωμετρίᾳ, ὅτι *δύο γωνίαι ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ ἀντιρρόπους εἶναι ἴσαι, καὶ δύο γωνίαι ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους, καὶ προσέτι τὰ μὲν δύο τῶν πλευρῶν τούτων ὁμορρόπους, τὰς δὲ ἑτέρας δύο ἀντιρρόπους, εἶναι παραπληρωματικαί.*

Σχόλιον.

315. Ἐπὶ εὐθείας οἱασδήποτε διακρίνομεν δύο εἰδῶν φοράν· τὴν ΜΝ καὶ τὴν ΝΜ (Σχ. 219),

Καλοῦμεν γωνίαν δύο εὐθειῶν, τῶν ὁποίων ἡ θέσις ἐν τῷ διαστήματι καὶ ἡ φορὰ αὐτῶν εἶναι δεδομένη, τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζομεν, φέροντες ἀπὸ οἱουδήποτε σημείου τοῦ διαστήματος πρὸς ἑκατέραν τῶν δεδομένων εὐθειῶν παράλληλον καὶ ὁμόρροπον εὐθεῖαν.

Οὕτω δεδομένων τῶν εὐθειῶν ΜΝ καὶ ΠΚ, δι' οἱουδήποτε σημείου Α φέρομεν ἐν τῷ διαστήματι τὴν ΑΒ παράλληλον τῇ ΜΝ καὶ ὁμόρροπον καὶ τὴν ΑΓ παράλληλον καὶ ὁμόρροπον τῇ ΠΚ· ἡ γωνία ΒΑΓ θὰ εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν ἡ γωνία τῶν δύο εὐθειῶν ΜΝ καὶ ΠΚ.

Διὰ νὰ εἶναι πλήρης ὁ ὁρισμὸς οὗτος, πρέπει τὸ μέγεθος τῆς οὕτω σχηματιζομένης γωνίας νὰ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν κατέχει τὸ ὡς κορυφὴ τῆς γωνίας λαμβανόμενον σημεῖον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐν τῷ διαστήματι. Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ Β΄Α΄Γ΄ αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαὶ τῆς ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΜΝ καὶ ΠΚ γωνίας. Ὅταν φέρωμεν διὰ τῶν σημείων Α καὶ Α΄ τὰς παραλλήλους πρὸς τὰς εὐθείας ΜΝ καὶ ΠΚ, αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ Α΄Γ΄ οὖσαι παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι τῇ ΜΝ, εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι (305)· ὁμοίως ἡ ΑΒ τῇ Α΄Β΄· ἑπομένως αἱ δύο γωνίαι ΒΑΓ καὶ Β΄Α΄Γ΄ εἶναι ἴσαι (314).

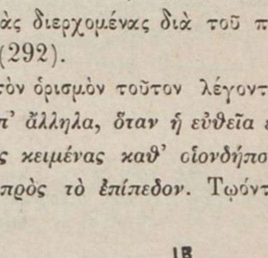
316. Λέγομεν ὅτι *δύο εὐθεῖαι, μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, ὅταν ἡ γωνία αὐτῶν εἶναι ὀρθή.*

Βλέπομεν, ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὁρισμοῦ τῆς γωνίας δύο εὐθειῶν, ὅτι, *ὅταν δύο εὐθεῖαι εἶναι οὕτω κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, πᾶσα εὐθεῖα, παράλληλος τῇ μιᾷ τούτων, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἑτέραν.*

Τὸ πόρισμα τοῦτο εἶναι ἐνδιαφέρον, διότι συντελεῖ εἰς τὴν γενίκευσιν θεωρημάτων τινῶν, ὧν ἡ κατανόησις ἄλλως θὰ ἦτο ἀτελὴς καὶ περιωρισμένη.

Εἴπομεν ὅτι εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, ὅταν ἡ εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς καὶ κειμένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (292).

Δυνάμεθα ἤδη νὰ συμπληρώσωμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦτον λέγοντες ὅτι *εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα, ὅταν ἡ εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς κειμένας καθ' οἱονδήποτε τρόπον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἢ παραλλήλων πρὸς τὸ ἐπίπεδον.* Τῷόντι, ἔστω ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, καὶ Α ὁ ποὺς τῆς καθέτου ταύτης ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. Ἔστωσαν Γ εὐθεῖα οἱαδήποτε ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π, καὶ Δ οἱαδήποτέ εὐθεῖα παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ. Ἐὰν φέρωμεν διὰ τοῦ Α εὐθεῖαν ΑΓ΄ παράλληλον τῇ Γ, αὕτη θὰ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π, κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ κατὰ τὸ Α· καὶ ἂν διὰ τῆς



Σχ. 220 α.

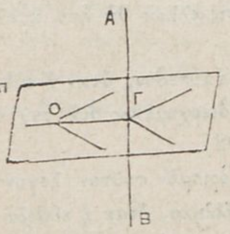
εὐθείας Δ καὶ τοῦ σημείου Α φέρωμεν ἐπίπεδον, τοῦτο θὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον Π κατά τινα εὐθεῖαν Δ΄Α παράλληλον τῇ Δ (303), καὶ προσέτι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Α. Ὁ πρῶτος λοιπὸν ὁρισμὸς περιλαμβάνεται ἐν τῷ δευτέρῳ.

Ἀπεδείξαμεν (293) ὅτι εὐθεῖά τις εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὅταν εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας διερχομένας διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς καὶ κειμένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ. Δυνάμεθα ἐκ τῶν προηγουμένων νὰ ἐπεκτείνωμεν τὴν ἰδιότητα ταύτην λέγοντες· *Διὰ νὰ εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο οἱασδήποτε εὐθείας κειμένας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἢ παραλλήλους πρὸς αὐτό.*

Προσέτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἐπὶ εὐθεῖαν δι' ἑνὸς τῶν σημείων αὐτῆς εἶναι ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου τούτου καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (294). Ἀλλ' ὅμοιον τόπον εὑρίσκομεν καὶ ὅταν τὸ δεδομένον σημεῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας. Τῷόντι, ἔστωσαν ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ ἐκτὸς ταύτης σημεῖον τὸ Ο. Ἂς καταβιβάσωμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΟ τὴν ΟΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ· τὸ ἐπίπεδον Π κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Γ εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν καθέτων ἐπὶ τὴν ΑΒ διὰ τοῦ σημείου Γ, καὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο περιέχει ταυτοχρόνως τὰς εὐθείας τὰς ἀγομένας διὰ τοῦ σημείου Ο παραλλήλους πρὸς τὰς καθέτους ταύτας· εἶναι ἄρα τοῦτο καὶ ὁ γεωμ. τόπος τῶν καθέτων ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ διερχομένων διὰ τοῦ Ο.

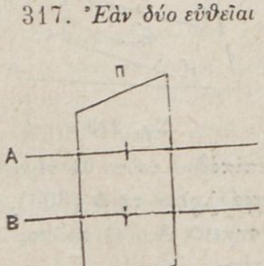


Σχ. 220 β.

Θεώρημα.

317. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι Α καὶ Β εἶναι παράλληλοι, πᾶν ἐπίπεδον Π κάθετον ἐπὶ τὴν μίαν εὐθεῖαν εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν ἑτέραν.*

Τῷόντι πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π ἢ κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ, οὖσα κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν Α (316), εἶναι προσέτι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν Β· ἑπομένως ἡ Β εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, ἄρα καὶ τὸ ἐπίπεδον Π κάθετον ἐπὶ τὴν Β.



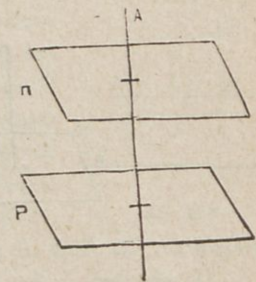
Σχ. 220 γ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θεώρημα.

318. *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα Α κάθετος ἐπὶ τὸ ἓν εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον.*

Τῳόντι πᾶσα εὐθεῖα κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Ρ ἢ παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, οὖσα παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ Π ἢ κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ (316), εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν Α· ἄρα ἡ Α εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ.



Σχ. 221.

Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ ἐν § (307).

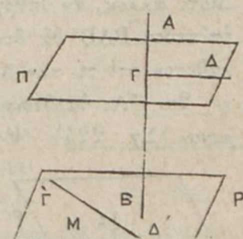
319. Παρατήρησις. Τὰς ἀνωτέρω δύο προτάσεις δυνάμεθα νὰ συγχωνεύσωμεν εἰς μίαν τὴν ἑξῆς·

Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ἔχουσι τὰ αὐτὰ παράλληλα ἐπίπεδα· δύο δὲ ἐπίπεδα παράλληλα ἔχουσι τὰς ἐπὶ ταῦτα καθέτους κοινάς.

Θεώρημα.

320. *Ἐὰν εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον Π, πᾶσα κάθετος ΓΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π ἢ κεῖται ἐπ' αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου.*

Τῳόντι, ἐὰν ἡ Γ΄Δ΄ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ δὲν κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π, δυνάμεθα διὰ σημείου τινὸς Μ τῆς Γ΄Δ΄ νὰ φέρωμεν ἐπίπεδόν τι Ρ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ (294, 316)· καὶ ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον περιέχει τὴν ΓΔ, εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π (307), τοῦτο θὰ συμπίπτῃ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου Ρ (310) καὶ ἡ Γ΄Δ΄ θὰ εἶναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ Π.



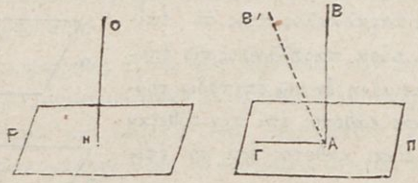
Σχ. 222.

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀνταποκρίνεται πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς καθετότητος μεταξὺ εὐθείας καὶ ἐπιπέδου (292, 316).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θεώρημα.

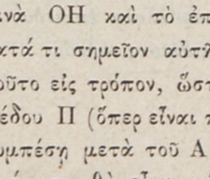
321. *Διὰ δεδομένου σημείου Α δυνάμεθα πάντοτε νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν, κάθετον ἐπὶ δεδομένον ἐπίπεδον, μίαν δὲ καὶ μόνην.*



Σχ. 223.

1ον Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον τὸ σημεῖον Α κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π, (Σχ. 223) καὶ ἂς θεωρήσωμεν ἰδιαιτέρως εὐθεῖαν τινὰ ΟΗ καὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην κατά τι σημεῖον αὐτῆς τὸ Η· ἔπειτα ἂς μεταφέρωμεν τὸ σχῆμα τοῦτο εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ἐπίπεδον Ρ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π (ὅπερ εἶναι πάντοτε δυνατόν· 283), καὶ τὸ σημεῖον Η νὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ Α· ἡ εὐθεῖα ΟΗ ἐν τῇ νέᾳ ταύτῃ θέσει τοῦ σχήματος θὰ εἶναι κάθετος ΑΒ ἠγμένη ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π διὰ τοῦ σημείου Α· λέγομεν ἤδη ὅτι ἐκτὸς τῆς ΑΒ οὐδεμία ἄλλη κάθετος δύναται ν' ἀχθῇ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α. Διότι ἄλλως, ἂν ὑπῆρχε καὶ δευτέρα κάθετος, ἔστω ἡ ΑΒ′, τὸ ἐπίπεδον ΒΑΒ′ θὰ ἔτεμνε τὸ ἐπίπεδον Π κατά τινα εὐθεῖαν ΑΓ, κάθετον ἐπί τε τὴν ΑΒ καὶ ΑΒ′, ὅπερ ἀδύνατον.

2ον. Ἂς ὑποθέσωμεν τὸ σημεῖον Α ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου Π κείμενον (Σχ. 224). Ἔστω δὲ τὸ διὰ τοῦ σημείου Α διερχόμενον ἐπίπεδον Ρ, παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ Π. Ἐπειδὴ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ ἔχουσι τὰς ἐπ' αὐτῶν καθέτους κοινάς (318), ἡ διὰ τοῦ σημείου Α μόνη κάθετος ΑΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ θὰ εἶναι ἡ μόνη κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π διὰ τοῦ σημείου Α.



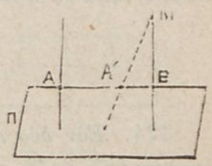
Σχ. 224.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πόρισμα

322. *Δύο εὐθεῖαι Α καὶ Β, κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Π, εἶναι παράλληλοι ἢ συμπίπτουσι.*

Τῳόντι, ἐὰν αἱ εὐθεῖαι Α καὶ Β ἔχωσιν ἓν κοινὸν σημεῖον, θὰ συμπίπτωσι, διότι ἐκ τοῦ σημείου τούτου μία καὶ μόνη κάθετος δύναται ν' ἀχθῇ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. Ἐὰν δὲ αἱ εὐθεῖαι Α καὶ Β οὐδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον, ἂς φαντασθῶμεν τὴν Α' διερχομένην διά τινος σημείου Μ τῆς Β καὶ παράλληλον τῇ Α, ἡ εὐθεῖα αὕτη Α' θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π (317), καὶ ἐπομένως θὰ συμπίπτῃ μετὰ τῆς Β, διότι ἐκ τοῦ σημείου Μ μία καὶ μόνη κάθετος δύναται ν' ἀχθῇ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.



Σχ. 225.

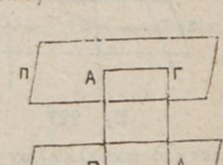
Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς ἐν § 317.

Θεώρημα.

323. 1ον. *Παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, περιεχόμεναι μεταξὺ ἐπιπέδου Ρ καὶ εὐθείας ΑΓ παραλλήλου τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ εἶναι ἴσαι.* (Σχ. 226).

2ον. *Παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Ρ περιεχόμεναι εἶναι ἴσαι* (Σχ. 226).

Ἡ διπλῆ αὕτη πρότασις ἐξάγεται ἐκ τοῦ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ὁριζόμενον ἐπίπεδον τέμνει, ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει, τὸ ἐπίπεδον Ρ κατά τινα εὐθεῖαν ΒΔ, παράλληλον τῇ ΑΓ, καὶ τέμνει ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ κατὰ εὐθείας ΑΓ καὶ ΒΔ παραλλήλους (303, 308)· ἐπομένως αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις εἶναι ἴσαι ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν περιεχόμεναι.



Σχ. 226.

Παρατήρησις.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ δύνανται νὰ εἶναι καὶ κάθετοι ἐπὶ τὰ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

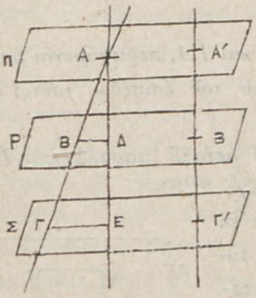
ἐπίπεδα Π καὶ Ρ· ὁπότε ἑκατέρα ἐξ αὐτῶν παριστᾷ τὸ ἀπόστημα τῶν δύο ἐπιπέδων ἢ τὸ ἀπόστημα σημείου τινὸς ἑκατέρου τῶν ἐπιπέδων ἀπὸ τοῦ ἑτέρου· ἑπομένως.

Εὐθείας καὶ ἐπιπέδου παραλλήλων ἢ δύο ἐπιπέδων παραλλήλων τὸ ἀπόστημα εἶναι πανταχοῦ τὸ αὐτό.

Θεώρημα.

324. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι οἱαιδήποτε ΑΓ καὶ Α′Γ′* (Σχ. 227) *τέμνωνται ὑπὸ τριῶν παραλλήλων ἐπιπέδων Π, Ρ καὶ Σ, τὰ μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τούτων περιεχόμενα μέρη τῶν εὐθειῶν εἶναι ἀνάλογα·*

ἤτοι θέλομεν ἔχει $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$. (1)



Σχ. 227.

Τῳόντι, ἂς φέρωμεν διὰ τοῦ σημείου Α τὴν ΑΕ παράλληλον τῇ Α′Γ′ καὶ ἔστωσαν Δ καὶ Ε τὰ σημεῖα, εἰς ἃ ἡ εὐθεῖα αὕτη τέμνει τὰ ἐπίπεδα Ρ καὶ Σ. Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΔΒ καὶ ΕΓ εἶναι παράλληλοι (308) θέλομεν ἔχει $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{AE}$.

Ἀλλὰ τὰ τμήματα ΑΔ, ΔΕ καὶ ΑΕ εἶναι κατὰ σειρὰν ἴσα πρὸς τὰ Α′Β′, Β′Γ′ καὶ Α′Γ′ ὡς παράλληλοι εὐθεῖαι μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμεναι· ἄρα ἡ σχέσις (1) εἶναι ἀληθής.

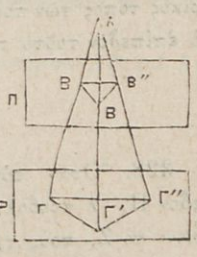
Πόρισμα.

325. *Ὅπως δύο εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΑΓ′ διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α διαιροῦνται ὑπὸ τοῦ σημείου Α καὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων εἰς μέρη ἀνάλογα, οὕτω καὶ πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα ΑΓ″ διερχομένη διὰ τοῦ Α καὶ συναντῶσα τὰ ἐπίπεδα διαιρεῖται ὁμοίως.* (Σχ. 228).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τῷόντι, ὑποτεθέντος ὅτι ὑπάρχουσι τρεῖς τοιαῦται εὐθεῖαι, ὁ λόγος τῶν τμημάτων τῆς πρώτης εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν λόγον τῶν ἀντιστοιχούντων τμημάτων τῆς δευτέρας καὶ μὲ τὸν λόγον τῶν τμημάτων τῆς τρίτης· ἤτοι θέλομεν ἔχει

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{AB'}{B'\Gamma'} = \frac{AB''}{B''\Gamma''}$$



Σχ. 228.

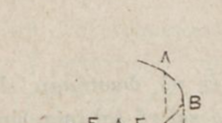
Δ'. ΠΡΟΒΟΛΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΕΠΙ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΓΩΝΙΑ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΑΠΟΣΤΗΜΑ ΔΥΟ ΟΙΩΝΔΗΠΟΤΕ ΕΥΘΕΙΩΝ ΕΝ ΤΩ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΙ

326. Καλεῖται *προβολὴ* σημείου *ἐπὶ ἐπίπεδον* Π ὁ πούς τῆς καθέτου, τῆς καταβιβαζομένης ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Σχ. 229).

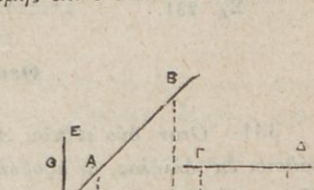
Ἡ προβολὴ γραμμῆς οἱασδήποτε ΑΒΓ... ἐπὶ ἐπίπεδον Π εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν προβολῶν α, β, γ... τῶν διαφόρων σημείων τῆς γραμμῆς ταύτης.

Θεώρημα.

327. *Ἡ προβολὴ εὐθείας γραμμῆς ἐπὶ ἐπίπεδον Π εἶναι εὐθεῖα γραμμή.* (Σχ. 230).



Σχ. 229.



Σχ. 230.

Ἐπειδὴ πᾶσαι αἱ κάθετοι Αα, Ββ... αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν διαφόρων σημείων τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι παράλληλοι (322), ὁ γεωμε-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τρικὸς αὐτῶν τόπος εἶναι ἐπίπεδον (291), καὶ ἐπομένως ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων εἶναι ἡ εὐθεῖα αβ, καθ' ἣν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὸ Π.

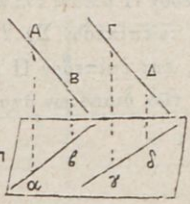
Παρατήρησις.

328. Ὅταν εὐθεῖα, καθὼς ἡ ΕΘ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι ἓν σημεῖον· τὸ Ζ, πούς τῆς καθέτου.

329. *Ὅταν εὐθεῖα, ὡς ἡ ΓΔ, εἶναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ Π, αὕτη εἶναι παράλληλος καὶ ἴση τῇ προβολῇ αὐτῆς γδ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (306).*

Πόρισμα.

330. *Αἱ προβολαὶ αβ καὶ γδ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Π εἶναι παράλληλοι (Σχ. 231).*



Σχ. 231.

Διότι ἡ προβάλλουσα Αα ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου τῆς ΑΒ καὶ ἡ προβάλλουσα Γγ ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου τῆς ΓΔ εἶναι παράλληλοι, καὶ αἱ γωνίαι ΒΑα, ΔΓγ ἔχουσι τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν παράλληλα (224), καὶ ἐπομένως αἱ εὐθεῖαι αβ καὶ γδ, καθ' ἃς τὸ ἐπίπεδον Π συναντᾷ τὰ δύο ταῦτα ἐπίπεδα, εἶναι παράλληλοι. (308).

Θεώρημα.

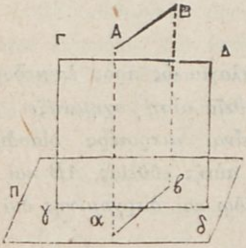
331. *Ὅταν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ ἐν τῷ διαστήματι εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, αἱ προβολαὶ αὐτῶν αβ καὶ γδ ἐπὶ ἐπίπεδόν τι Π, παράλληλον πρὸς τὴν μίαν ἐκ τῶν εὐθειῶν, ἔστω τὴν ΓΔ, εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.* (Σχ. 232).

Τῷόντι, ἡ εὐθεῖα γδ εἶναι, ὡς ἡ παράλληλος αὐτῇ ΓΔ, ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ μετὰ τῆς ΑΒ· αὕτη ἀφ' ἑτέρου εἶναι ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ μετὰ τῆς προβαλλούσης Αα, εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π τὸ περιέχον τὴν γδ. Λοιπὸν ἡ γδ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒαβ, καὶ ἐπομένως καὶ ἐπὶ τὴν αβ.

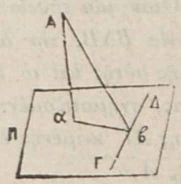
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Οὕτως ἡ προβολὴ ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι γωνία ὀρθή, ὅταν μία τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς προβολῆς.

332. Ἀντιστρόφως· *Δύο εὐθεῖαι, ἐν τῷ διαστήματι ΑΒ καὶ ΓΔ*



Σχ. 232.



Σχ. 233.

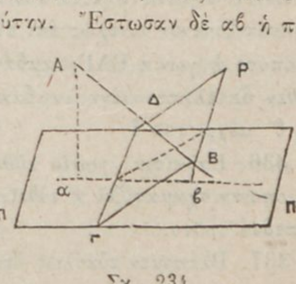
εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, ἐὰν αἱ προβολαὶ αὐτῶν αβ καὶ γδ ἐπὶ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν μίαν ἐκ τούτων, τὴν ΓΔ, εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας. (Σχ. 232).

Τῷόντι ἡ εὐθεῖα γδ σχηματίζουσα ὀρθὴν γωνίαν μετὰ τῆς αβ καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν Αα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒ βα· ἐπομένως καὶ ἡ παράλληλος αὐτῇ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒ βα, ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ἐν τῇ ὅλως ἐξαιρετικῇ περιπτώσει, καθ' ἣν τὸ ἐπίπεδον Π περιέχει τὴν ΓΔ, καὶ ἐν τούτῳ αἱ εὐθεῖαι Αβ καὶ ΓΔ τέμνουσιν ἀλλήλας, ἡ ἀντίστροφος αὕτη πρότασις ἀνάγεται εἰς τὸ γνωστὸν θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων (Σχ. 233), τὸ ἤδη ἀποδειχθὲν (301).

Πόρισμα.

333. Ἄς θεωρήσωμεν εὐθεῖαν οἱανδήποτε τὴν ΑΒ, καὶ ἐπίπεδον Ρ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην. Ἔστωσαν δὲ αβ ἡ προβολὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ ἐπίπεδόν τι Π (Σχ. 234) καὶ ΓΔ ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ ἢ ἡ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου Ρ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Π. Ἐπειδὴ αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας, καὶ αἱ προβολαὶ αὐτῶν αβ καὶ ΓΔ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας. Ἐκ τού-



Σχ. 234.

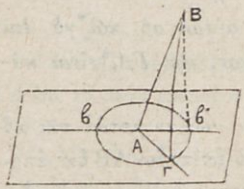
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

του ἐξάγεται τὸ θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Περιγραφικῆς Γεωμετρίας· *Ὅταν μία εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδόν τι P, ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας ταύτης καὶ ἡ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου P μετὰ οἱουδήποτε ἄλλου Π εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.*

Θεώρημα.

334. *Ὅταν μία εὐθεῖα ΑΒ εἶναι πλαγία ὡς πρὸς ἐπίπεδον Π, ἡ ὀξεῖα γωνία ΒΑβ, τὴν ὁποίαν ἡ εὐθεῖα αὕτη σχηματίζει μετὰ τῆς προβολῆς αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, εἶναι μικροτέρα οἱασδήποτε ἄλλης γωνίας, σχηματιζομένης ὑπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ καὶ οἱασδήποτε ἄλλης ΑΓ κειμένης ἐν τῷ ἐπιπέδῳ καὶ διερχομένης διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς Α.*

Τῷόντι, ἔστω β προβολὴ σημείου τινὸς Β τῆς εὐθείας ΑΒ, καὶ ἂς λάβωμεν ΑΓ = Αβ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΓ. Τὰ δύο τρίγωνα ΒΑβ καὶ ΒΑΓ ἔχουσι δύο πλευρὰς ἴσας, ἀλλὰ ἡ τρίτη πλευρὰ Ββ τοῦ πρώτου τριγώνου ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι μικροτέρα τῆς τρίτης πλευρᾶς ΒΓ τοῦ δευτέρου τριγώνου ὡς πλαγίας· ἑπομένως καὶ ἡ γωνία ΒΑβ εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΑΓ.



Σχ. 235.

335. Παρατήρησις. Ἐὰν μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν Αβ γράψωμεν περιφέρειαν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πλαγία ΒΓ αὐξάνει συνεχῶς ἀπὸ τοῦ β μέχρι τοῦ σημείου β', ἔπειτα δὲ ἐλαττοῦται, λαμβάνουσα διαδοχικῶς τὰς αὐτὰς τιμὰς μέχρι τοῦ β. Ἑπομένως ἡ γωνία ΒΑΓ οὖσα ἐλαχίστη, ὅταν τὸ σημεῖον Γ συμπίπτῃ μετὰ τοῦ β, αὐξάνει μέχρις οὗ τὸ σημεῖον Γ μετατοπιζόμενον συνεχῶς ἐπὶ τῆς περιφερείας συμπέσῃ μετὰ τοῦ β', ὁπότε ἡ γωνία ΒΑΓ λαμβάνει τὴν μεγίστην αὐτῆς τιμήν· ἐντεῦθεν δὲ ἐλαττουμένη λαμβάνει διαδοχικῶς τὰς αὐτὰς τιμὰς ἀπὸ τοῦ β' μέχρι τοῦ β.

336. Καλεῖται *γωνία εὐθείας μετὰ ἐπιπέδου* ἡ ὀξεῖα γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τῆς προβολῆς αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

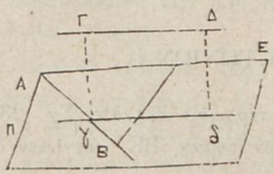
337. Βλέπομεν εὐκόλως ὅτι ἡ γωνία εὐθείας Δ μετὰ ἐπιπέδου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

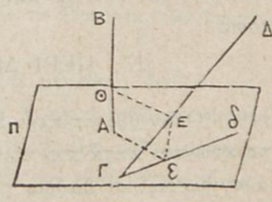
Π εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ εὐθείας οἱασδήποτε Δ΄, παραλλήλου τῷ Δ, καὶ ἐπιπέδου Π΄ παραλλήλου τῷ Π.

Θεώρημα.

338. *Δεδομένων δύο εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ μὴ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, 1ον ὑπάρχει εὐθεῖα καὶ μία μόνη κάθετος ἐπ' ἀμφοτέρας. 2ον Ἡ κοινὴ αὕτη κάθετος εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῶν δύο εὐθειῶν.* (Σχ. 236).



Σχ. 236.



Σχ. 237.

1ον. Διὰ σημείου οἱουδήποτε Α τῆς ΑΒ ἂς φέρωμεν τὴν ΑΕ παράλληλον τῇ ΓΔ· τὸ ἐπίπεδον ΒΑΕ, τὸ ὁποῖον παριστῶμεν διὰ Π, θὰ εἶναι παράλληλον τῇ ΓΔ· ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν προβολὴν τῆς ΓΑ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, ἄγοντες διὰ τοῦ σημείου δ, προβολῆς ἑνὸς σημείου Δ τῆς ΓΔ, τὴν γδ παράλληλον τῇ εὐθείᾳ ΓΔ. Τούτου γενομένου, ἵνα εὐθεῖά τις συναντᾷ καθέτως ἑκατέραν τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αὕτη νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, διερχομένη διά τινος σημείου τῆς ΑΒ, καὶ ἔχουσα τὸν πόδα αὐτῆς ἐπὶ τῆς γδ, ἥτις εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, τῶν ἀγομένων ἀπὸ τὰ διάφορα σημεῖα τῆς ΓΔ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. Ὅθεν ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π ἡ ὑψουμένη ἐκ τοῦ γ, κοινοῦ σημείου τῆς ΑΒ καὶ γδ, κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Γγ Δδ, εἶναι ἡ μόνη εὐθεῖα, ἥτις πληροῖ τὰς ἀνωτέρω συνθήκας. Ὑπάρχει ἄρα μία καὶ μόνη εὐθεῖα ἡ Γγ, ἥτις συναντᾷ πρὸς ὀρθὰς γωνίας τὰς δύο διδομένας εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ.

2ον Ἡ κοινὴ αὕτη κάθετος Γγ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας ΒΔ, ἥτις ἑνώνει ἓν σημεῖον τῆς ΑΒ μὲ ἓν σημεῖον τῆς ΓΔ. Διότι, τῆς Δ δ οὔσης προβαλλούσης τοῦ σημείου Δ, θέλομεν ἔχει προφανῶς $Γγ = Δδ$· καὶ $Δδ < ΔΒ$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

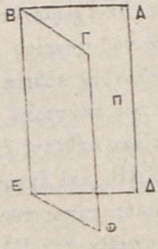
339. Παρατήρησις. Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις συμβάλλει εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν δύο εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἰδοὺ δὲ ἕτεροι πρὸς τοῦτο τρόποι τὰ μάλιστα ἐν χρήσει (Σχ. 237).

Προβάλλομεν τὴν μίαν τῶν εὐθειῶν ΓΔ ἐπὶ ἐπίπεδον Π κάθετον ἐπὶ τὴν ἑτέραν ΑΒ. Ἐκ τοῦ ποδὸς Α τῆς ΑΒ καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π φέρομεν τὴν Αε κάθετον ἐπὶ τὴν Γδ, προβολὴν τῆς ΓΔ· φέρομεν τὴν Εε παράλληλον τῇ ΑΒ συναντῶσαν τὴν ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Ε, καὶ τέλος τὴν ΘΕ παράλληλον τῇ Αε. Ἡ εὐθεῖα ΘΕ, οὖσα κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι *ἡ ἐλαχίστη μεταξὺ αὐτῶν ἀπόστασις*.

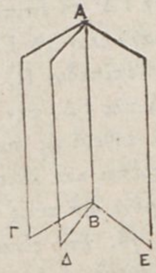
Ε΄. ΠΕΡΙ ΔΙΕΔΡΩΝ ΓΩΝΙΩΝ.

340. Ὅταν δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ τέμνωσιν ἄλληλα (Σχ. 238) καὶ περατῶνται κατὰ τὴν κοινὴν αὐτῶν τομὴν ΒΕ, λέγομεν ὅτι ταῦτα σχηματίζουσι *δίεδρον γωνίαν*.

341. Τὰ δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ καλοῦνται ἕδραι, ἡ δὲ εὐθεῖα ΒΕ ἀκμὴ τῆς διέδρου ταύτης γωνίας.



Σχ. 238



Σχ. 239.

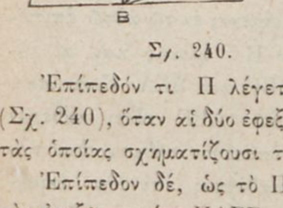
342. Διὰ νὰ παραστήσωμεν μίαν μεμονωμένην δίεδρον γωνίαν ἀρκεῖ νὰ ἀπαγγείλωμεν τὴν ἀκμὴν αὐτῆς. οὕτω λέγομεν (Σχ. 238) ἡ δίεδρος γωνία ΒΕ. Ὅταν ὅμως πολλαὶ δίεδροι γωνίαι ἔχωσι τὴν αὐτὴν ἀκμήν, διὰ νὰ παραστήσωμεν μίαν ἐκ τούτων, πρέπει νὰ κάμωμεν χρῆσιν τεσσάρων γραμμάτων, θέτοντες τὰ δύο γράμματα τῆς ἀκμῆς μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων γραμμάτων, παριστώντων τὰς ἕδρας. Οὕτως ἐν τῷ σχήματι 239 παριστῶμεν τὰς τρεῖς διέδρους γωνίας ὡς ἑξῆς· ΓΑΒΔ, ΔΑΒΕ, ΓΑΒΕ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

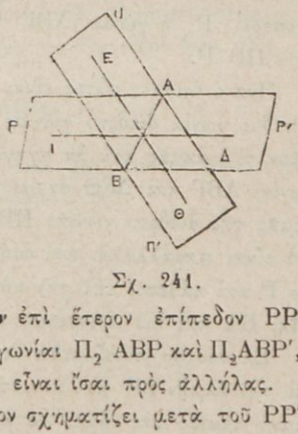
Δύο γωνίαι, ὡς αἱ ΓΑΒΔ καὶ ΔΑΒΕ (Σχ. 239), αἵτινες ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἀκμὴν ΑΒ καὶ μίαν ἕδραν ΑΒΔ κοινήν, τὰς δὲ ἄλλας ἕδρας κειμένας ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς, καλοῦνται ἐφεξῆς.

343. Δύο δίεδροι γωνίαι εἶναι *ἴσαι*, ὅταν, ἐπιτιθέμεναι ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, ταυτίζωνται, καὶ ἀποτελῶσι μίαν δίεδρον γωνίαν. Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο διέδρους γωνίας, θέτομεν τὴν μίαν πλησίον τῆς ἄλλης οὕτως, ὥστε ν' ἀποτελεσθῶσι δύο ἐφεξῆς δίεδροι γωνίαι, ὡς αἱ ΓΑΒΔ καὶ ΔΑΒΕ (Σχ. 239)· ἡ γωνία ΓΑΒΕ τῶν δύο μὴ κοινῶν ἑδρῶν ΑΒΓ καὶ ΑΒΕ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν προτεθεισῶν διέδρων γωνιῶν.

344. Διὰ νὰ λάβωμεν σαφῆ ἰδέαν τοῦ μεγέθους διέδρου γωνίας, πρέπει νὰ ὑποθέσωμεν τὸ ἐπίπεδον Π κατὰ πρῶτον συμπίπτον μετὰ τοῦ ἐπιπέδου Ρ (Σχ. 240)· ἔπειτα ὅτι τοῦτο μετατοπίζεται στρεφόμενον περὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ὡς περὶ ἄξονα οὕτως, ὥστε νὰ λάβῃ νέαν τινὰ θέσιν· τὸ *πλάτος* τῆς περιστροφικῆς ταύτης κινήσεως ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ μέγεθος τῆς διέδρου γωνίας, τὸ ὁποῖον κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἐπιπέδου αὐξάνει συνεχῶς.



Σχ. 240.



Σχ. 241.

Ἐπίπεδόν τι Π λέγεται *κάθετον* ἐπὶ ἕτερον ἐπίπεδον ΡΡ' (Σχ. 240), ὅταν αἱ δύο ἐφεξῆς δίεδροι γωνίαι $Π_2$ ΑΒΡ καὶ $Π_2$ΑΒΡ', τὰς ὁποίας σχηματίζουσι τὰ ἐπίπεδα εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

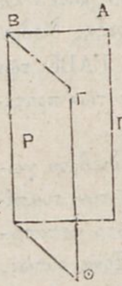
Ἐπίπεδον δέ, ὡς τὸ $Π_1$ τὸ ὁποῖον σχηματίζει μετὰ τοῦ ΡΡ' τὰς ἐφεξῆς γωνίας ΠΑΒΡ καὶ ΠΑΒΡ' ἀνίσους, λέγεται *πλάγιον* ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΡΡ'.

Καλεῖται *ὀρθὴ δίεδρος γωνία*, ὡς ἡ $Π_2$ΑΒΡ, ἐκείνη, τῆς ὁποίας ἡ μία ἕδρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἑτέραν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

345. Δύο δίεδροι γωνίαι λέγονται *κατὰ κορυφήν*, ὅταν αἱ ἕδραι τῆς μιᾶς εἶναι προσεκβολαὶ τῶν ἑδρῶν τῆς ἑτέρας.

Δύο ἐπίπεδα ἀπεριόριστα ΠΠ' καὶ ΡΡ' (Σχ. 141) σχηματίζουσι κατὰ τὴν τομὴν αὐτῶν τέσσαρας διέδρους γωνίας, αἵτινες ἀνὰ δύο εἶναι κατὰ κορυφήν.



Σχ. 242.

Καλεῖται *διχοτόμον ἐπίπεδον* διέδρου τινὸς γωνίας τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ἀκμῆς καὶ διαιροῦν τὴν δίεδρον ταύτην γωνίαν εἰς δύο ἴσας διέδρους γωνίας.

Καλεῖται *ἀντιστοιχοῦσα ἐπίπεδος γωνία* διέδρου γωνίας ἡ ἐπίπεδος γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ δύο εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῆς ἀκμῆς διέδρου γωνίας κάθετοι ἐπὶ ταύτην καὶ κεῖνται ἡ μὲν ἐπὶ τῆς μιᾶς, ἡ δὲ ἐπὶ τῆς ἑτέρας ἕδρας τῆς διέδρου γωνίας. Οὕτως, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Β τῆς ἀκμῆς ΒΕ τῆς διέδρου γωνίας ΠΒΕΡ (Σχ. 242) ὑψώσωμεν τὴν ΒΑ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΕ καὶ κειμένην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π, προσέτι δὲ τὴν ΒΓ κάθετον ἐπὶ τὴν αὐτὴν ἀκμὴν καὶ κειμένην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Ρ ἡ γωνία ΑΒΓ θὰ εἶναι ἡ ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου ΠΒΕΡ.

Ἵνα ὁ ὁρισμὸς οὗτος εἶναι πλήρης, πρέπει ἡ ἀντιστοιχοῦσα ἐπίπεδος γωνία διέδρου γωνίας νὰ μένῃ ἡ αὐτή, εἰς οἱονδήποτε σημεῖον τῆς ἀκμῆς καὶ ἂν σχηματισθῇ αὕτη. Ἔστωσαν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΘ σχηματιζόμεναι εἰς δύο σημεῖα Β καὶ Ε τῆς ἀκμῆς τῆς διέδρου γωνίας ΠΒΕΡ (Σχ. 242)· αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ ΕΘ εἶναι παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι ὡς κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ Ρ καὶ κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΒΕ· ὁμοίως καὶ αἱ εὐθεῖαι ΒΑ καὶ ΕΔ· ἑπομένως αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΑ εἶναι ἴσαι.

Ἐκ τούτου πορίζόμεθα ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΒΕ· καὶ ἀντιστρόφως πᾶν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν τέμνει τὰς ἕδρας κατὰ εὐθείας καθέτους ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ταύτην, καὶ ἑπομένως σχηματίζει τὴν ἐπίπεδον γωνίαν τῆς διέδρου γωνίας.

Θεώρημα.

346. *Δι' εὐθείας ΑΒ κειμένης ἔν τινι ἐπιπέδῳ ΡΡ' δυνάμεθα*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πάντοτε νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον P_2 *κάθετον ἐπὶ τὸ πρῶτον ἐπίπεδον, καὶ ἓν μόνον.* (Σχ. 240).

Πόρισμα.

347. *Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.*

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, ὡς καὶ τοῦ πορίσματος αὐτοῦ, εἶναι καθ' ὅλα ὁμοία πρὸς τὴν ἐν § 15 καὶ 16 τῆς ἐπιπεδομετρίας.

Ἡ δίεδρος γωνία λέγεται *ὀξεῖα* ἢ *ἀμβλεῖα*, καθ' ὅσον αὕτη εἶναι μικροτέρα ἢ μεγαλειτέρα τῆς ὀρθῆς διέδρου γωνίας.

Δύο δίεδροι γωνίαι εἶναι *συμπληρωματικαί*, ὅταν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι μία ὀρθὴ δίεδρος γωνία.

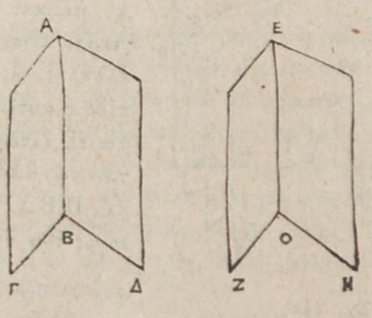
348. *Πᾶν ἐπίπεδον Π συναντῶν ἄλλο ἐπίπεδον PP' ἀποτελεῖ μετ' αὐτοῦ δύο ἐφεξῆς διέδρους γωνίας ΠΑΒΡ καὶ ΠΑΒΡ', τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς διέδρους γωνίας* (Σχ. 240).

Καὶ ἀντιστρόφως· *Ἐὰν δύο ἐφεξῆς δίεδροι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, ἤτοι ἔχωσιν ἄθροισμα δύο ὀρθὰς διέδρους γωνίας, μὴ κοιναὶ αὐτῶν ἕδραι P καὶ P' εἶναι προσεκβολὴ ἑκατέρα ἑκατέρας.* (§ 17 καὶ 19).

349. *Ὅταν δύο ἐπίπεδα ΠΠ' καὶ PP' διασταυρῶνται, αἱ σχηματιζόμεναι κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.* (Σχ. 241) (§ 22).

Θεώρημα.

350. *Δύο δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἐὰν καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίπεδοι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι.* (Σχ. 243).



Σχ. 243.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

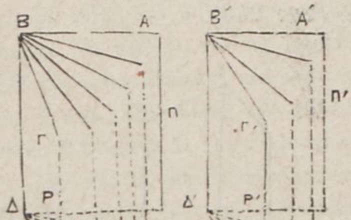
Ἔστωσαν αἱ δίεδροι γωνίαι ΑΒ καὶ ΕΘ, τῶν ὁποίων αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΓΒΔ καὶ ΖΘΗ ὑποτίθενται ἴσαι.

Ἂς θέσωμεν τὴν δευτέραν δίεδρον γωνίαν ἐπὶ τῆς πρώτης εἰς τρόπον, ὥστε ἡ γωνία ΖΘΗ νὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ΓΒΔ· ἡ ἀκμὴ ΘΕ, κάθετος κατὰ τὸ Ε ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΖΘΗ, θὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀκμῆς ΒΑ, καθέτου κατὰ τὸ Β ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΒΔ (321). Τὰ δύο ἐπίπεδα ΑΒΓ καὶ ΕΘΖ θὰ ἔχωσι τότε δύο εὐθείας κοινάς, καὶ ἑπομένως θὰ ταυτισθῶσι (284. 3ον)· διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον θὰ ταυτισθῶσι καὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΔ καὶ ΕΘΗ. Ἑπομένως αἱ δύο δίεδροι γωνίαι ΑΒ καὶ ΕΔ ταυτίζονται· ἄρα εἶναι ἴσαι.

Θεώρημα.

351. *Ὁ λόγος δύο διέδρων γωνιῶν ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν πρὸς ταύτας ἀντιστοιχουσῶν ἐπιπέδων γωνιῶν.*

Ἔστωσαν δύο δίεδροι γωνίαι ΠΒΔΡ καὶ Π′Β′Ρ′ (σχ. 244), καὶ ἂς τεθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αὐτῶν ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι $\frac{5}{3}$, ἤτοι ὅτι ἔχουσι κοινὸν μέτρον περιεχόμενον ἐν μὲν τῷ ΑΒΓ 5κις, ἐν δὲ τῷ Α′Β′Γ′ τρίς. Ἐὰν δι' ἑκάστης τῶν εὐθειῶν τῆς διαιρέσεως καὶ τῆς ἀντιστοιχούσης ἀκμῆς φέρωμεν ἐπίπεδα, ἡ γωνία ΠΒΔΡ διαιρεῖται εἰς πέντε διέδρους γωνίας καὶ ἡ Π′Β′Δ′Ρ′ ὁμοίως διαιρεῖται εἰς τρεῖς μερικὰς διέδρους γωνίας. Αἱ μερικαὶ δὲ αὗται δίεδροι γωνίαι εἶναι πᾶσαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ὡς ἔχουσαι τὰς ἐπιπέδους αὐτῶν γωνίας ἴσας, καὶ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν διέδρων γωνιῶν ΠΒΔΡ καὶ Π′Β′Δ′Ρ′, καὶ ἑπομένως ὁ λόγος τῶν δύο διέδρων γωνιῶν ἰσοῦται πρὸς $\frac{5}{3}$, ὡς καὶ ὁ λόγος τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν.



Σχ. 244.

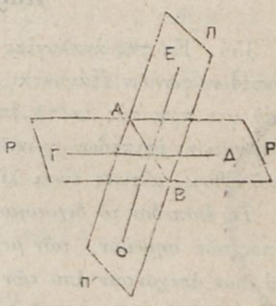
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι δὲν ἔχωσι κοινὸν μέτρον, ἀκολουθοῦμεν τὸν ἐν § 105 τρόπον μετρήσεως.

Πόρισμα.

352. *Ἡ ἐπίπεδος γωνία ὀρθῆς διέδρου γωνίας εἶναι ὀρθή· καὶ ἀντιστρόφως· εἰς ἐπίπεδον γωνίαν ὀρθὴν ἀντιστοιχεῖ δίεδρος γωνία ὀρθή.* (Σχ. 245).

Τῳόντι, ἔστωσαν ΠΑΒΡ καὶ ΠΑΒΡ' δύο ἐφεξῆς δίεδροι γωνίαι σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ συναντωμένων. Δι' ἑνὸς σημείου Ο τῆς κοινῆς ἀκμῆς ΑΒ φέρομεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ταύτην· τὸ ἐπίπεδον τοῦτο θὰ τέμνῃ τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ κατὰ τὰς αὐτὰς εὐθείας ΓΔ καὶ ΕΘ, καὶ αἱ εὐθεῖαι αὗται σχηματίζουσι δύο ἐφεξῆς γωνίας ΕΟΓ καὶ ΕΟΔ, αἵτινες θὰ εἶναι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῶν προτεθεισῶν διέδρων γωνιῶν. Ἐὰν αἱ δίεδροι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἤτοι ὀρθαί, καὶ αἱ ἐπίπεδοι αὐταὐτῶν γωνίαι θὰ εἶναι ὀρθαί· καὶ ἀντιστρόφως. (350).



Σχ. 245.

Θεώρημα.

353. *Ἐὰν θεωρήσωμεν ὡς μονάδα πρὸς μέτρησιν διέδρου γωνίας τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν μονάδα τῆς ἐπιπέδου γωνίας, ἥ τε δίεδρος καὶ ἡ ἐπίπεδος αὐτῆς ἔχουσι τὸ αὐτὸ μέτρον, ἤτοι μετρούμεναι ἀμφότεραι παρίστανται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Ὅπως ἐν τῇ μετρήσει τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ὡς μονὰς λαμβάνεται ἡ ὀρθὴ γωνία, οὕτω καὶ ἐν τῇ μετρήσει τῶν διέδρων γωνιῶν ὡς μονὰς λαμβάνεται ἡ ὀρθὴ δίεδρος γωνία. (351). Ἐὰν ὑποθέσωμεν τὴν γωνίαν Α' Β' Γ' ὀρθὴν (Σχ. 244), θέλομεν ἔχει (351).

$$\frac{\text{ΠΒΔΡ}}{1\,\text{διέδ.ὀρθ.}} = \frac{\text{ΑΒΓ}}{1\,\text{ἐπίπ.ὀρθ.}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὁ λόγος τῆς ΠΒΔΡ πρὸς μίαν ὀρθὴν δίεδρον γωνίαν εἶναι τὸ μέτρον τῆς διέδρου γωνίας ΠΒΔΡ, καὶ ὁ λόγος τῆς ΑΒΓ πρὸς μίαν ὀρθὴν εἶναι τὸ μέτρον τῆς ἐπιπέδου γωνίας ΑΒΓ (106)· τὰ δύο μέτρα λοιπὸν εἶναι προφανῶς ἐκπεφρασμένα διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Ἔχοντες πάντοτε ὑπ' ὄψει τὰς προηγουμένας ἐξηγήσεις, δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν ἄνευ δυσκολίας τὴν ἁπλουστέραν μὲν ἀλλ' ἀτελῆ ἔκφρασιν· *Πᾶσα δίεδρος γωνία ἔχει ὡς μέτρον τὴν ἐπίπεδον αὐτῆς γωνίαν.*

Ὅταν λέγωμεν ὅτι μία δίεδρος γωνία εἶναι π. χ. 27° 30′, εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ ἐπίπεδος αὐτῆς γωνία εἶναι 27° 30′ (107).

Παρατήρησις.

354. Ἐκ τῆς ἀναλογίας τῶν διέδρων καὶ τῶν ἀντιστοιχουσῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ἐξάγονται πολλαὶ προτάσεις περὶ διέδρων γωνιῶν, ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἐν τῇ ἐπιπέδῳ γεωμετρίᾳ ἐκτεθείσας περὶ εὐθυγράμμων ἐπιπέδων γωνιῶν. Τοιαύτας ἀναφέρομεν ἐνταῦθα τὰς ἀκολούθους, αἵτινες εἶναι λίαν χρήσιμοι.

Τὸ ἐπίπεδον τὸ διχοτομοῦν δίεδρον γωνίαν εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν μεταξὺ τῶν ἑδρῶν τῆς γωνίας κειμένων, καὶ ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἑδρῶν αὐτῆς. (Ἰδὲ § 48)·

Δύο δίεδροι γωνίαι, ἔχουσαι τὰς ἕδρας αὐτῶν παραλλήλους ἑκατέραν ἑκατέρᾳ εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί. (Ἰδὲ § 57).

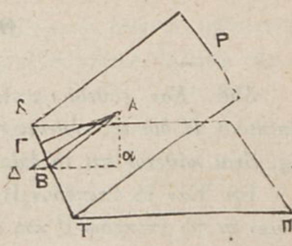
*Θεώρημα.

355. *Ἐξ ὅλων τῶν εὐθειῶν, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν διὰ σημείου τινὸς Α, κειμένου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π, ἡ σχηματίζουσα μετ' ἄλλου τινὸς ἐπιπέδου Ρ τὴν μεγίστην γωνίαν εἶναι ἡ ἐκ τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ ἀγομένη κάθετος ΑΒ.*

Ἔστωσαν ΑΓ εὐθεῖα οἱαδήποτε ἀγομένη διὰ τοῦ σημείου Α ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π, καὶ α ἡ προβολὴ τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π· αἱ αΒ καὶ αΓ θὰ εἶναι αἱ προβολαὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, καὶ καθ' ἃ ἀπεδείξαμεν (336) ἡ γωνία ΑΒα εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΑΓα. Ἐπομένως, τῆς εὐθείας αΒ οὔσης καθέτου ἐπὶ τὴν λΤ, κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων (332), ἡ εὐθεῖα αΓ εἶναι πλαγία,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ θέλομεν ἔχει αΒ<αΓ. Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας αΒ, ἀπὸ τοῦ σημείου α ἀρχόμενοι, μῆκος αΔ ἴσον τῷ αΓ, τὸ σημεῖον Δ θὰ κεῖται πέραν τοῦ Β, καὶ ἡ γωνία ΑΒα, ἐκτὸς γωνία τοῦ τριγώνου ΑΔΒ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ἐντὸς καὶ ἀπέναντι ΑΔα· ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑαΓ καὶ ΑαΔ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ὀρθὴν περιεχομένην ἐν ἑκατέρῳ ὑπὸ ἴσων πλευρῶν, ἡ γωνία ΑΔα εἶναι ἴση τῇ ΑΓα· ἡ γωνία ἄρα ΑΒα εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΑΓα.



Σχ. 246.

Παρατήρησις.

356. Ὅταν τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι ὁριζόντιον, ἡ εὐθεῖα ΑΒ καλεῖται *γραμμὴ τῆς μεγίστης κλίσεως* τοῦ ἐπιπέδου Ρ.

Ἡ γωνία τῆς γραμμῆς τῆς κλίσεως μετὰ τοῦ ἐπιπέδου Π εἶναι ἡ ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου γωνίας ΠΛΤΡ.

Δι' ἑκάστου δὲ σημείου ἐπιπέδου διέρχεται γραμμὴ τῆς μεγίστης κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου, καὶ μία μόνη.

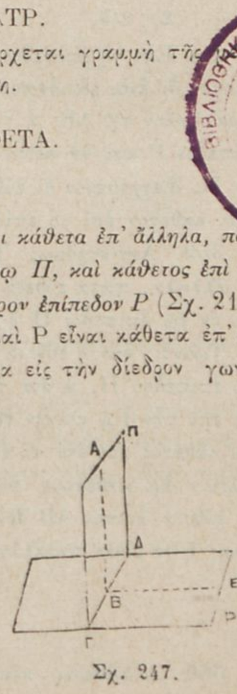
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΗΣ ΒΟΥΛΗΣ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

Ε'. ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΑΘΕΤΑ.

Θεώρημα

357. *Ὅταν δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα, πᾶσα εὐθεῖα ΑΒ, κειμένη ἐν τῷ πρώτῳ ἐπιπέδῳ Π, καὶ κάθετος ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΓΔ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον Ρ* (Σχ. 217).

Τῷόντι, ἐπειδὴ τὰ δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα, ἡ ἐπίπεδος γωνία ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν δίεδρον γωνίαν ΠΓΔΕ πρέπει νὰ εἶναι ὀρθή, ἐπομένως σχηματίζομεν τὴν ἐπίπεδον ταύτην γωνίαν ΑΒΕ ὑψοῦντες ἐκ τοῦ σημείου Β τὴν ΒΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ καὶ κειμένην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Ρ· ἡ ΑΒ λοιπὸν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΕ, εἶναι δὲ ἐξ ὑποθέσεως κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ.



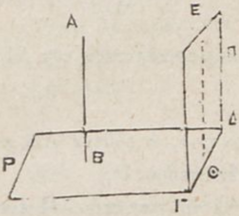
Σχ. 247.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θεώρημα.

358. *Ἐὰν εὐθεῖά τις ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον Ρ, πᾶν ἐπίπεδον Π διὰ τῆς εὐθείας ταύτης διερχόμενον, ἢ παράλληλον ταύτῃ, εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ.*

1ον Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον Π διέρχηται διὰ τῆς ΑΒ (Σχ.247), φέρομεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Ρ καὶ διὰ τοῦ σημείου Β τὴν ΒΕ κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν ΓΔ τῶν δύο ἐπιπέδων Π καὶ Ρ. Ἡ γωνία ΑΒΕ θὰ εἶναι ὀρθή, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ· ὥστε ἡ ὀρθὴ γωνία ΑΒΕ εἶναι ἡ ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου ΠΓΔΡ· ἑπομένως ἡ δίεδρος αὕτη γωνία εἶναι ὀρθή, καὶ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ Ρ.



Σχ. 248.

2ον Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι παράλληλον τῇ ΑΒ (Σχ. 248), φέρομεν δι' ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου Ε τοῦ ἐπιπέδου τούτου τὴν ΕΘ παράλληλον τῇ ΑΒ· ἡ εὐθεῖα αὕτη ΘΕ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ καὶ θὰ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π. Ἑπομένως τὸ ἐπίπεδον Π, διερχόμενον δι' εὐθείας ΘΕ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ, θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο (1ον).

359. Ἀντιστρόφως· Ἐὰν δύο ἐπίπεδα Ρ καὶ Π εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα, πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ πρῶτον ἐπίπεδον Ρ ἢ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π ἢ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτό.

Τῷόντι, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶχεν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τοῦ ἐπιπέδου Π, ἡ διὰ τοῦ σημείου τούτου ἀγομένη εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ κοινὴν τῶν ἐπιπέδων τομὴν Π καὶ Ρ (Σχ.248) θὰ ἦτο κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ, καὶ θὰ εἴχομεν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου δύο καθέτους ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ, ὅπερ ἀδύνατον (321). Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΑΒ δὲν δύναται νὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον Π, ἑπομένως ἢ θὰ εἶναι παράλληλος ἢ θὰ κεῖται ἐπ' αὐτοῦ.

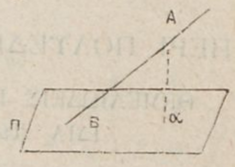
Πόρισμα.

360. *Δι' εὐθείας πλαγίας ὡς πρὸς ἐπίπεδόν τι Π* (Σχ. 249)

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ Π, καὶ ἓν μόνον.

Τῳόντι τὸ ἐπίπεδον ΒΑα, τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τῆς καθέτου Αα, τῆς ἀγομένης ἀπὸ τυχόντος σημείου τῆς ΑΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, εἶναι δὲ τὸ μόνον· διότι πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ΑΒ καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ Π πρέπει νὰ περιέχῃ τὴν κάθετον Αα (359).

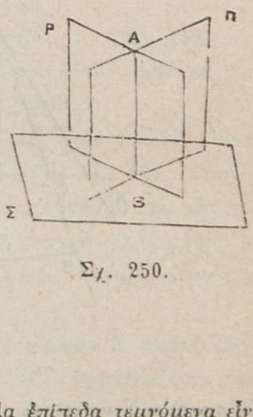


Σχ. 249.

Θεώρημα.

361. *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, τεμνόμενα, εἶναι ἀμφότερα κάθετα ἐπὶ τρίτον ἐπίπεδον Σ, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ τρίτον ἐπίπεδον.* (Σχ. 250).

Διότι, ἐὰν δι' ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου τῆς κοινῆς τομῆς ΑΒ φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Σ, αὕτη πρέπει νὰ κεῖται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ (359)· ἑπομένως ἡ κάθετος αὕτη δὲν δύναται νὰ εἶναι διάφορος τῆς ΑΒ.



Σχ. 250.

Πόρισμα.

362. *Ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δύο ἄλλα ἐπίπεδα τεμνόμενα εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν κοινὴν αὐτῶν τομήν.*

363. Ἐὰν τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ (Σχ. 250) σχηματίζωσιν ὀρθὴν δίεδρον γωνίαν, τὰ τρία ἐπίπεδα Π, Ρ καὶ Σ εἶναι ἀνὰ δύο κάθετα ἐπ' ἄλληλα, καὶ ἑκάστη τῶν τριῶν τομῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς δύο ἄλλας.

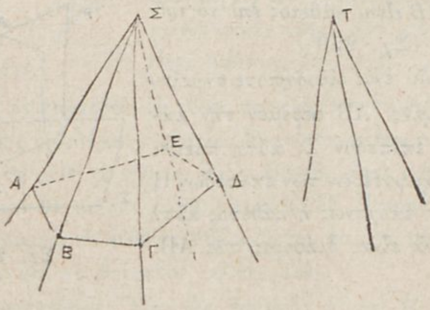
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β

ΠΕΡΙ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ Η ΣΤΕΡΕΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Α΄. ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΑ ΤΩΝ ΤΡΙΕΔΡΩΝ ΓΩΝΙΩΝ.

364. Ὅταν πολλὰ ἐπίπεδα ΑΣΒ, ΒΣΓ, ΓΣΔ..... (Σχ. 251) τεμνόμενα ἀλληλεπαλλήλως κατὰ τὰς εὐθείας ΣΒ, ΣΓ, ΣΔ.... καὶ περατούμενα κατὰ ταύτας διέρχωνται πάντα διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Σ, λέγομεν ὅτι σχηματίζουσι *στερεὰν ἢ πολύεδρον γωνίαν.*



Σχ. 251.

Τὸ σημεῖον Σ καλεῖται *κορυφὴ* τῆς στερεᾶς γωνίας, αἱ εὐθεῖαι ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ.... *ἀκμαί*, τὰ ἐπίπεδα ΑΣΒ, ΒΣΤ, ΓΣΔ.... *ἕδραι*, αἱ γωνίαι ΑΣΒ, ΒΣΓ, ΓΣΔ.... αἱ ὑπὸ τῶν ἐφεξῆς ἀκμῶν ἀποτελούμεναι καλοῦνται *ἐπίπεδοι γωνίαι* τῆς στερεᾶς γωνίας, καὶ αἱ ὑπὸ τῶν ἐφεξῆς ἑδρῶν σχηματιζόμεναι δίεδροι γωνίαι καλοῦνται δίεδροι γωνίαι τῆς στερεᾶς γωνίας.

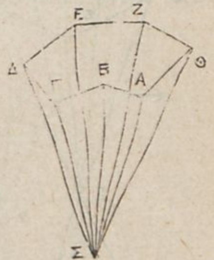
Τὴν στερεὰν γωνίαν παριστῶμεν μόνον διὰ τοῦ γράμματος τῆς κορυφῆς, ἢ ἐν συνδυασμῷ μετὰ τῶν γραμμάτων τῶν ἀκμῶν. Οὕτω, διὰ νὰ παραστήσωμεν τὴν στερεὰν γωνίαν τοῦ σχήματος 251, λέγομεν ἡ γωνία ΣΑΒΓΔΕ, ἢ ἁπλῶς ἡ γωνία Σ, ἐφ' ὅσον πλὴν τῆς προτεθείσης οὐδεμία ἄλλη στερεὰ γωνία ἔχει τὴν αὐτὴν κορυφὴν Σ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διὰ νὰ σχηματισθῇ στερεὰ γωνία, ἀπαιτοῦνται τοὐλάχιστον τρία ἐπίπεδα. Ὅταν δὲ ἡ στερεὰ γωνία ἀποτελῆται ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων ἢ ἑδρῶν καλεῖται *τρίεδρος*· τοιαύτη εἶναι ἡ στερεὰ γωνία Τ (Σχ. 251).

Πᾶσα στερεὰ γωνία ἔχει τόσας ἀκμὰς ὅσας καὶ διέδρους γωνίας.

365. Ἡ στερεὰ γωνία λέγεται *κυρτή*, ὅταν ὁλόκληρος κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος μιᾶς οἱασδήποτε τῶν ἑδρῶν αὐτῆς πανταχόθεν προσεκβαλλομένης (Σχ. 251)· τοὐναντίον δὲ καλεῖται *κοίλη* (Σχ. 252).



Σχ. 252.

Πᾶσα τρίεδρος γωνία εἶναι κυρτή.

Πᾶν ἐπίπεδον τέμνον κυρτὴν στερεὰν γωνίαν καὶ μὴ διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς αὐτῆς (Σχ 251) τέμνει αὐτὴν κατὰ κυρτὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, ἔχον τόσας πλευράς, ὅσας ἔχει ἕδρας ἡ στερεὰ γωνία.

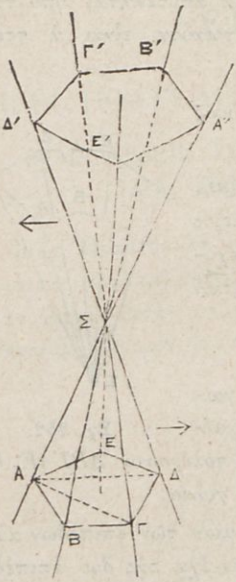
Ὅταν μία τρίεδρος γωνία ἔχῃ τὴν μίαν τῶν ἐπιπέδων αὐτῆς γωνιῶν ὀρθήν, καλεῖται *ὀρθογώνιος*· ὅταν ἔχῃ τὰς δύο ἐπιπέδους αὐτῆς γωνίας ὀρθάς, καλεῖται δισορθογώνιος, ὅταν δὲ καὶ τὰς τρεῖς καλεῖται τρισορθογώνιος. Τὸ πάτωμα ἑνὸς κανονικοῦ δωματίου καὶ δύο συνεχόμενοι τοῖχοι αὐτοῦ ἀποτελοῦσι τρισορθογώνιον τρίεδρον γωνίαν.

366. Ἐὰν προσεκβάλωμεν πρὸς τὴν κορυφὴν Σ πάσας τὰς ἀκμὰς πολυέδρου γωνίας ΣΑΒΓΔΕ (Σχ. 253), σχηματίζεται ἑτέρα πολύεδρος γωνία ΣΑ'Β'Γ'Δ'Ε', ἥτις καλεῖται *συμμετρικὴ* τῆς πρώτης.

Δύο πολυεδρικαὶ συμμετρικαὶ γωνίαι ΣΑΒΓΔΕ καὶ ΣΑ'Β'Γ'Δ'Ε' ἔχουσι πάντα τὰ συστατικὰ αὐτῶν ἴσα ἓν πρὸς ἕν· αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΣΒ καὶ ΑΣ'Β', ΑΣΓ καὶ ΑΣ'Γ'... ἴσαι (σχ. 253) ἀνὰ δύο ὡς κατὰ κορυφήν, ὡς πρὸς τὸ Σ. καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι ΣΑ καὶ ΣΑ', ΣΒ καὶ ΣΒ'.... εἶναι ἴσαι κατὰ κορυφὴν ὡς πρὸς τὴν ἀκμήν, ἡ διάταξις ὅμως τῶν ἴσων μερῶν τῶν στερεῶν γωνιῶν δὲν εἶναι ἡ αὐτή. Τῳόντι παρατηρητὴς κεκλιμένος ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΣΑ ἔχων τὴν κεφαλὴν εἰς τὸ Σ καὶ τοὺς πόδας πρὸς τὸ Α καὶ βλέπων τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΣΑΒΓΔΕ θὰ ἔχῃ ἔμπροσθεν αὐτοῦ τὰς ἀκμὰς κατὰ τάξιν ΣΒ, ΣΓ, ΣΔ, ΣΕ ἐκ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά·

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐνῷ ἕτερος παρατηρητὴς κεκλιμένος ἐπὶ τῆς ΣΑ', ἔχων τὴν κεφαλὴν εἰς τὸ Σ καὶ τοὺς πόδας εἰς τὸ Α' καὶ βλέπων πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΣΑ'Β'Γ'Δ'Ε' θὰ ἔχῃ ἐνώπιον αὐτοῦ τὰς ἀκμὰς ΣΑ', ΣΒ', ΣΓ', ΣΔ' κατὰ τάξιν ἀντίστροφον, ἤτοι ἐκ τῶν ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά.



Σχ. 253.

Διὰ τοῦτο αἱ σύμμετροι στερεαὶ γωνίαι, ἂν καὶ ἔχουσι πάντα τὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα κατὰ ἕν, ἐν τούτοις δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμόσωσιν ἐπιτιθέμεναι ὁπωσδήποτε ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης.

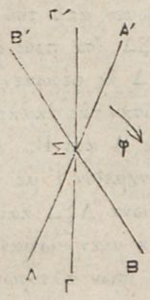
Ἂς θεωρήσωμεν π. χ. δύο τριέδρους γωνίας συμμέτρους τὰς ΣΑΒΓ καὶ ΣΑ'Β'Γ' (Σχ. 254), καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀκμὴ ΣΓ εἶναι ἔμπροσθεν τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΓ καὶ ἑπομένως ὅτι ἡ προσεκβολὴ αὐτῆς ΣΓ' εἶναι ὄπισθεν τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Κατὰ δύο τρόπους δυνάμεθα νὰ ἐπιθέσωμεν τὴν μίαν ἐπὶ τὴν ἑτέραν τῶν τριέδρων γωνιῶν.

1ον. Ἂς νοήσωμεν (Σχ. 254) κάθετον ὑψωμένην ἐκ τοῦ σημείου Σ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΣΒ, καὶ ἂς περιστρέψωμεν τὴν τρίεδρον γωνίαν ΣΑ'Β'Γ' κατὰ 180° περὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην κατὰ τὴν φοράν, ἣν δεικνύει τὸ βέλος φ· ἡ ἀκμὴ ΣΑ', ἥτις κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην δὲν ἐξέρχεται τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΒ, θὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς ΣΑ· ὁμοίως ἡ ΣΒ' θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὴν ΣΒ. Ἀλλ' ἡ ἀκμὴ ΣΓ' θὰ μένῃ πάντοτε ὄπισθεν τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΒ· ἑπομένως κατὰ τὴν νέαν ταύτην θέσιν ἡ τρίεδρος ΣΑ'Β'Γ' δὲν ταυτίζεται μετὰ τῆς ΣΑΒΓ.

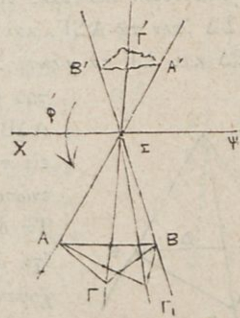
2ον. Φέρομεν (Σχ. 255) τὴν διχοτόμον ΧΨ τῆς γωνίας ΒΣΑ' καὶ περὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην, κειμένην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΣΒ, ἂς περιστρέψωμεν τὴν τρίεδρον γωνίαν ΣΑ'Β'Γ' κατὰ 180° πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ βέλους φ' δεικνυομένην φοράν· ἡ ἀκμὴ ΣΑ' θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΣΒ, ἡ ἀκμὴ ΣΒ' ἐπὶ τῆς ΣΑ, καὶ ἑπομένως ἡ ἕδρα Α'Σ'Β'

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς ΑΣΒ, ἡ δὲ ἀκμὴ ΣΓ' θὰ εἶναι ἔμπροσθεν τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΒ· ἀλλὰ ἡ νέα θέσις ΣΓ' θὰ εἶναι ἔμπροσθεν τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΒ· ἀλλὰ ἡ νέα θέσις ΣΓ τῆς ἀκμῆς ταύτης $Σ\Gamma_1$ θὰ εἶναι διάφορος τῆς ΣΓ, διότι αἱ δίεδροι γωνίαι αἱ ἔχουσαι ἀκμὰς τὰς ΣΑ καὶ ΣΒ εἶναι ἐν γένει ἄνισοι· ἐπομένως καὶ αἱ ΣΒ καὶ ΣΑ'· ἄρα τὰ ἐπίπεδα ΓΣΒ καὶ Γ_1ΣΒ ἀνίσως κεκλιμένα πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΣΒ δὲν ταυτίζονται.



Σχ. 254.



Σχ. 255.

Βλέπομεν ἐν τούτοις ὅτι ἠδύναντο νὰ ταυτισθῶσιν, ἐὰν ἡ τρίεδρος ΣΑΒΓ ἦτο ἰσοσκελής, ἤτοι ἐὰν εἶχε τὰς δύο δένδρους γωνίας ΣΑ καὶ ΣΒ ἴσας πρὸς ἀλλήλας· διότι ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ταύτῃ τὰ ἐπίπεδα Γ_1ΣΒ καὶ ΓΣΒ θὰ εἶχον τὴν αὐτὴν κλίσιν ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΣΒ, καὶ ἐπομένως θὰ ἐταυτίζοντο· τὸ αὐτὸ ἤθελε συμβῇ καὶ ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα Γ_1ΣΑ καὶ ΓΣΑ, καὶ ἐπομένως αἱ ἀκμαὶ ΣΓ καὶ $Σ\Gamma_1$. θὰ συνέπιπτον. Παρατηροῦμεν ἄλλως ὅτι ἡ ἕδρα Γ'ΣΑ', ἥτις εἶναι ἴση τῇ ΓΣΑ, ἐφαρμόζεται τότε ἐπὶ τῆς ΓΣΒ· οὕτως, ὥστε ἡ ἰσότης τῶν δύο διέδρων γωνιῶν ΣΑ καὶ ΣΒ ἐπάγεται τὴν ἰσότητα τῶν ἑδρῶν ΓΣΒ καὶ ΓΣΑ. Ἐπομένως *διὰ νὰ ταυτίζηται τρίεδρος γωνία μετὰ τῆς συμμετρικῆς αὐτῆς πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ τρίεδρος αὕτη γωνία νὰ ἔχῃ δύο διέδρους γωνίας ἴσας καὶ τὰς εἰς ταύτας ἀντικειμένας ἕδρας ἴσας.*

Θεώρημα.

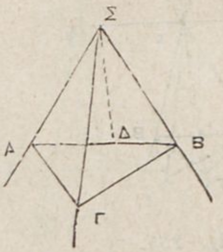
367. *Ἐν πάσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἑκάστη τῶν ἑδρῶν* (τῶν ἐπιπέ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δων πρὸς τὴν κορυφὴν γωνιῶν) *εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος πασῶν τῶν ἄλλων.*

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἔχει ἀνάγκην ἀποδείξεως μόνον ἐν τῇ περιπτώσει, καθ' ἣν ἡ θεωρουμένη ἐπίπεδος γωνία εἶναι μεγαλειτέρα ἑκάστης τῶν λοιπῶν.

Τούτου τεθέντος, ἂς θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον τὴν τρίεδρον γωνίαν ΣΑΒΓ (Σχ. 256). Ἐν τῇ ἕδρᾳ ΑΣΒ, τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν μεγαλειτέραν ἑκατέρας τῶν δύο ἄλλων, ἂς σχηματίσωμεν τὴν γωνίαν ΑΣΔ ἴσην τῇ ΑΣΓ, καὶ ἂς λάβωμεν ἀπὸ τοῦ Σ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΣΔ καὶ ΣΓ τὰ μήκη ΣΓ καὶ ΣΔ ἴσα πρὸς ἄλληλα· διὰ τοῦ σημείου Δ ἂς φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔΒ συναντῶσαν τὰς ἀκμὰς ΣΑ καὶ ΣΒ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, καὶ τέλος ἂς ἑνώσωμεν τὸ σημεῖον Γ μὲ τὸ Α καὶ Β. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΣΔ καὶ ΑΣΓ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην ὑπὸ ἴσων πλευρῶν· ἑπομένως καὶ ΑΔ=ΑΓ· ἀλλ' ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΓΒ ἔχομεν ΑΒ < ΑΓ + ΓΒ ἢ ΑΔ + ΔΒ < ΑΓ + ΓΒ καὶ ἀφαιροῦντες ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἀνισότητος τὰς ἴσας εὐθείας ΑΔ καὶ ΑΓ λαμβάνομεν ΔΒ < ΓΒ.



Σχ. 256.

Ἐξ ἄλλου δὲ τὰ τρίγωνα ΔΣΒ καὶ ΓΣΒ ἔχουσι τὴν ΣΒ κοινήν, τὴν ΣΔ=ΣΓ καὶ τὴν ΔΒ<ΓΒ· ἑπομένως ἡ γωνία ΔΣΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΣΒ (39) ἤτοι ΔΣΒ<ΓΣΒ· προσθέτοντες δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος τὰς ἴσας γωνίας ἐν μὲν τῷ πρώτῳ τὴν ΑΣΔ, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ τὴν ΑΣΓ, λαμβάνομεν

$$\text{ΑΣΔ} + \text{ΔΣΒ} < \text{ΑΣΓ} + \text{ΓΣΒ}\cdot$$

ἢ

$$\text{ΑΣΒ} < \text{ΑΣΓ} + \text{ΓΣΒ}.$$

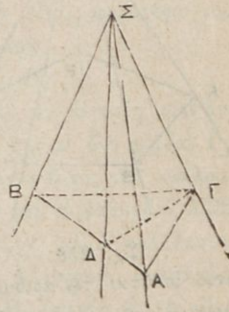
Διὰ νὰ ἐπεκτείνωμεν τὸ θεώρημα εἰς στερεὰν γωνίαν ἔχουσαν πλείονας τῶν τριῶν ἑδρῶν, ἀρκεῖ ν' ἀποσυνθέσωμεν τὴν στερεὰν ταύτην γωνίαν εἰς τριέδρους, ἄγοντες ἐπίπεδα διαγώνια ΑΣΒ, ΑΣΔ (Σχ. 253) διὰ μιᾶς τῶν ἀκμῶν αὐτῆς καὶ ἑκάστης τῶν ἀντικειμένων ἀκμῶν, ὁπότε ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἁπλουστάτη.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πόρισμα

368. *Ἐν πάσῃ τριέδρῳ γωνίᾳ ἀπέναντι τῆς μεγαλειτέρας διέδρου γωνίας κεῖται ἡ μεγαλειτέρα ἕδρα.*

Ἔστω (Σχ. 257) ἡ τρίεδρος γωνία ΣΑΒΓ, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἡ δίεδρος γωνία ΣΓ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς διέδρου ΣΒ. Δυνάμεθα διὰ τῆς ἀκμῆς ΣΓ νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον ΓΣΔ, τὸ ὁποῖον νὰ σχηματίζῃ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΣΒΓ δίεδρον γωνίαν ΒΣΓΔ ἴσην τῇ ΓΣΒΔ. Ἡ τρίεδρος ΣΒΓΔ, ἔχουσα δύο διέδρους γωνίας ἴσας, θὰ ἔχῃ καὶ τὰς ἀπέναντι αὐτῶν ἕδρας ΒΣΔ καὶ ΓΣΔ ἴσας (366). Ἐκ δὲ τῆς τριέδρου ΣΑΓΔ ἔχομεν $ΑΣΓ < ΑΣΔ + ΔΣΓ$· καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν ἕδραν ΔΣΓ διὰ τῆς ἴσης πρὸς ταύτην ΒΣΔ λαμβάνομεν



Σχ. 257.

$$ΑΣΓ < ΑΣΔ + ΔΣΒ \text{ ἢ } ΑΣΓ < ΑΣΒ.$$

Σχετίζοντες τὸ θεώρημα τοῦτο πρὸς τὰ ἐν τῷ τελευταίῳ ἐδαφίῳ τῆς § 366 ἀποδειχθέντα καὶ συλλογιζόμενοι ὅπως ἐν § 33 ἀποδεικνύομεν τὴν ἀντίστροφον πρότασιν· *Ἐὰν μία τρίεδρος γωνία ἔχῃ δύο ἕδρας ἴσας, αἱ ἀντικείμεναι πρὸς τὰς ἕδρας ταύτας δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι· καί, ἐὰν μία τρίεδρος γωνία ἔχῃ δύο ἕδρας ἀνίσους, ἀπέναντι τῆς μεγαλειτέρας ἕδρας θὰ κεῖται ἡ μεγαλειτέρα δίεδρος γωνία.*

369. *Ἐν πάσῃ κυρτῇ στερεᾷ γωνίᾳ τὸ ἄθροισμα τῶν πρὸς τὴν κορυφὴν ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν.*

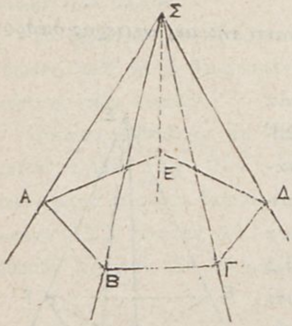
Ἔστω ΑΒΓΔΕ κυρτὸν πολύγωνον σχηματιζόμενον ἐκ τῆς τομῆς πολυεδρικῆς γωνίας ὑπὸ ἐπιπέδου τέμνοντος πάσας τὰς ἀκμὰς (365). Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἀνισότητας

$$ΕΑΒ < ΕΑΣ + ΒΑΣ$$
$$ΑΒΓ < ΑΒΣ + ΓΒΣ$$
$$ΒΓΔ < ΒΓΣ + ΔΓΣ$$

. . . .

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

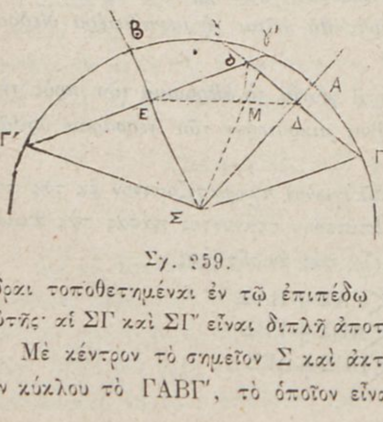
αἵτινες ἐξάγονται ἐκ τῶν τριέδρων γωνιῶν Α,Β,Γ.... (367), παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς γωνιῶν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν περὶ τὰς βάσεις γωνιῶν τῶν τριγώνων ΣΑΒ, ΣΒΓ.... τὰ ὁποῖα ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν τὸ Σ· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ τῶν τε ἐντὸς καὶ ἐκτὸς ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι πασῶν τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων, ἅτινα ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν τὸ Σ, καθόσον ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ τῶν τριγώνων τούτων. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν περὶ τὸ Σ γωνιῶν τῶν τριγώνων τούτων, ἤτοι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῆς στερεᾶς πολυεδρικῆς γωνίας, εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐκτὸς γωνιῶν τοῦ πολυγώνου, ἤτοι μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν (65).



Σχ. 258.

Σημείωσις.

370. Ἐκ τῶν προηγουμένων θεωρημάτων (367 καὶ 369) ἐξάγεται ὅτι διὰ νὰ σχηματισθῇ τρίεδρος γωνία ὑπὸ τριῶν δεδομένων ἑδρῶν, (ἐπιπέδων γωνιῶν) πρέπει ἡ μεγαλειτέρα ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἑδρῶν νὰ εἶναι μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. Θ' ἀποδείξωμεν δὲ ὅτι αἱ δύο αὗται συνθῆκαι ἀρκοῦσι πρὸς τοῦτο.



Σχ. 259.

Ἔστωσαν (Σχ. 259) ΑΣΒ ἡ μεγαλειτέρα ἕδρα, καὶ ΑΣΓ, ΒΣΓ' αἱ δύο ἄλλαι ἕδραι τοποθετημέναι ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς πρώτης καὶ ἑκατέρωθεν αὐτῆς· αἱ ΣΓ καὶ ΣΓ' εἶναι διπλῆ ἀποτύπωσις τῆς τρίτης ἀκμῆς ΑΓ.

Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Σ καὶ ἀκτῖνα οἱανδήποτε γράφομεν τόξον κύκλου τὸ ΓΑΒΓ', τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον ἡμιπεριφερείας

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διότι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τῶν τριῶν δεδομένων ἑδρῶν εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν. Ἐὰν φέρωμεν τὰς χορδὰς Γγ καὶ Γ'γ' καθέτους ἐπὶ τὰς ἀκμὰς ΣΑ καὶ ΣΒ, τὰ τόξα ΑΓ καὶ Αγ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, ὡς καὶ τὰ τόξα ΒΓ' Βγ' ἐπομένως ἡ σχέσις

$$\text{τόξ. } AB < \text{τόξ. } A\Gamma + \text{τόξ. } B\Gamma'$$

ἥτις ἐκφράζει ὅτι ἡ μεγαλειτέρα ἕδρα ΑΣΒ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων δύναται νὰ γραφῇ

$$\text{τόξ. } AB < \text{τόξ. } A\gamma + \text{τόξ. } B\gamma'.$$

Τοῦτο δεικνύει ὅτι τὸ σημεῖον γ κεῖται μεταξὺ τοῦ Β καὶ γ', καὶ ὅτι τὸ γ κεῖται μεταξὺ τοῦ γ καὶ Α, ἐπομένως ὅτι αἱ δύο χορδαὶ Γγ καὶ Γ'γ' συναντῶνται εἴς τι σημεῖον Ο κείμενον ἐντὸς τοῦ κύκλου.

Ἐκ τοῦ σημείου Ο ἂς ὑψώσωμεν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΣΒ τὴν ΟΜ, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΔΟΜ μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα ἴσην τῇ ΔΓ ἂς γράψωμεν τόξον, τὸ ὁποῖον θὰ τέμνῃ ἀναγκαίως τὴν κάθετον ΟΜ. κατά τι σημεῖον ἔστω τὸ Μ, ἐπειδὴ ἡ ΟΔ εἶναι μικροτέρα τῆς ΔΓ· ἂν ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ ΣΜ, ἡ τρίεδρος γωνία ΣΑΒΜ σχηματίζεται ἐκ τῶν τριῶν δεδομένων ἑδρῶν. Τῳόντι, ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΜΔ καὶ ΜΕ, αὗται θὰ εἶναι κάθετοι ἡ μὲν ἐπὶ τὴν ΣΑ, ἡ δὲ ἐπὶ τὴν ΣΒ κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων, καὶ τὰ τρίγωνα ΣΔΜ καὶ ΣΔΓ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ὀρθὴν περιεχομένην ὑπὸ πλευρῶν ἴσων· ἐκ τῆς ἰσότητος τούτων ἐξάγομεν ὅτι ἡ ἕδρα ΑΣΜ εἶναι ἴση τῇ δεδομένῃ ἕδρᾳ ΑΣΓ καὶ ὅτι ἡ ἀκμὴ ΣΜ εἶναι ἴση τῇ ΣΓ. Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΣΜΕ καὶ ΣΓ'Ε ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας ΣΜ καὶ ΣΓ' ἴσας καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, τὴν ΣΕ, εἶναι ἴσα· ἐξ οὗ ἐξάγεται ὅτι ἡ ἕδρα ΜΣΒ εἶναι ἴση τῇ ἑτέρᾳ δεδομένῃ ἕδρᾳ ΒΣΓ'.

Β'. ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΤΡΙΕΔΡΟΙ ΓΩΝΙΑΙ ΙΣΟΤΗΣ ΤΩΝ ΤΡΙΕΔΡΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

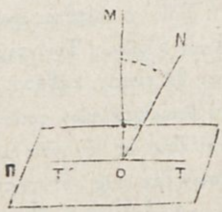
Θεώρημα.

371. *Ἐὰν μία τρίεδρος γωνία ΣΑ'Β'Γ' εἶναι παραπληρωματικὴ δεδομένης τριέδρου γωνίας ΣΑΒΓ, καὶ ἡ δευτέρα ἀντιστρόφως εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς πρώτης.*

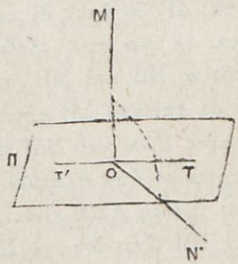
Ἵνα κατανοηθῇ ἡ παραπληρωματικὴ τριέδρου γωνίας, τὸ ἀντι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κείμενον τοῦ θεωρήματος τούτου, κάμνομεν τὴν ἑξῆς παρατήρησιν. Διὰ τοῦ σημείου Ο ἐπιπέδου τινὸς Π ἂς φέρωμεν τὴν κάθετον ΟΜ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καὶ μίαν πλαγίαν ΟΝ. Ἐὰν αἱ δύο εὐθεῖαι ΟΜ καὶ ΟΝ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου Π, ἡ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία ΜΟΝ εἶναι ὀξεῖα (Σχ. 260), διότι εἶναι μέρος μιᾶς τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΜΟΤ καὶ ΜΟΤ′, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ κάθετος ΟΜ μετὰ τῆς τομῆς ΤΟΤ′ τῶν ἐπιπέδων ΜΟΝ καὶ Π. Ἐὰν αἱ δύο εὐθεῖαι ΟΜ καὶ ΟΝ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου Π, ἡ γωνία ΜΟΝ εἶναι ἀμβλεῖα (Σχ. 261), διότι περιέχει ὡς μέρος αὐτῆς μίαν τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΜΟΤ ἢ ΜΟΤ′· καὶ ἀντιστρόφως· Καθ' ὅσον ἡ γωνία ΜΟΝ εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα, δυνάμεθα ν' ἀποφανθῶμεν ὅτι ἡ κάθετος ΟΜ καὶ ἡ πλαγία ΟΝ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἢ ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου Π.



Σχ. 260.



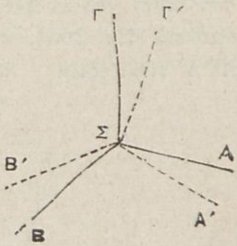
Σχ. 261.

Τούτου τεθέντος, ὀνομάζομεν τρίεδρον παραπληρωματικὴν δεδομένης τριέδρου γωνίας ΣΑΒΓ (Σχ. 262) ἑτέραν τρίεδρον γωνίαν ΣΑ′Β′Γ′ σχηματιζομένην κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

Διὰ τῆς κορυφῆς Σ ὑψοῦμεν κάθετον ΣΓ′ ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΣΒ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς ἕδρας ταύτης, πρὸς ὃ κεῖται καὶ ἡ ΣΒ· φέρομεν ἔπειτα τὴν ΣΒ′ κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΣΓ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς ἕδρας ταύτης πρὸς ὃ κεῖται καὶ ἡ ΣΒ· καὶ τέλος φέρομεν τὴν ΣΑ′ κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν ΒΣΓ πρὸς τὸ μέρος τῆς ἕδρας ταύτης, πρὸς ὃ καὶ ἡ ἀκμὴ ΣΑ. Μένει ἤδη νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ τρίεδρος γωνία ΣΑΒΓ γίνεται ἐκ τῆς τριέδρου ΣΑ′Β′Γ′, ὡς αὐτὴ ἐκ τῆς πρώτης, ἐν ἄλλαις λέξε-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σιν ὅτι ἡ ἀκμὴ ΣΓ, ἐπὶ παραδείγματι, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν Α΄ΣΒ΄ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἕδρας ταύτης, πρὸς ὃ καὶ ἡ ἀκμὴ ΣΓ΄. Τῳόντι ἡ ΣΑ΄ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΣΓ, καὶ ἑπομένως εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΣΓ· ὁμοίως ἡ ΣΒ΄ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΣΓ ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Α΄ΣΒ΄. καὶ ἐπειδὴ ἡ ΣΓ΄ ἤχθη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΣΒ καὶ πρὸς τὸ μέρος, πρὸς ὃ καὶ ἡ ΣΓ, ἡ γωνία ΓΣΓ΄ εἶναι ὀξεῖα· ἑπομένως, ἐπειδὴ ἡ κάθετος ΣΓ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Α΄ΣΒ΄ καὶ ἡ πλαγία ΣΓ΄ σχηματίζουσιν ὀξεῖαν γωνίαν, ἕπεται ὅτι ἀμφότεραι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου Α΄ΣΒ΄.



Σχ. 262.

Θεώρημα.

372. *Ἐὰν δύο τρίεδροι γωνίαι ΣΑΒΓ καὶ ΣΑ΄Β΄Γ΄ εἶναι παραπληρωματικαί, ἑκάστη δίεδρος γωνία τῆς μιᾶς ἐκ τῶν τριέδρων εἶναι παραπλήρωμα τῆς πρὸς ταύτην ἀντικειμένης ἐπιπέδου γωνίας (τῆς ἕδρας) τῆς ἑτέρας* (Σχ. 263).

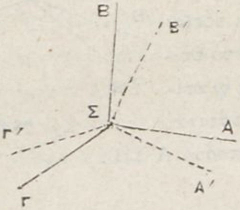
Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἑξῆς προτάσεως·

Ὅταν διὰ σημείου τινὸς Ο ληφθέντος ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΟΙ τριέδρου γωνίας ὑψώσωμεν ἐπὶ τὴν ἕδραν ΙΟΑ κάθετον τὴν ΟΑ΄, κειμένην πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΙΟΑ, πρὸς ὃ καὶ ἡ ἕδρα ΙΟΒ, καὶ ἐπὶ τὴν ἕδραν ΙΟΒ κάθετον τὴν ΟΒ΄ κειμένην πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΙΟΒ, πρὸς ὃ καὶ ἡ ἕδρα ΙΟΑ, ἡ γωνία Α΄ΟΒ΄ εἶναι παραπλήρωμα τῆς ἐπιπέδου γωνίας ΑΟΒ, τῆς μετρούσης τὴν δίεδρον ΟΙ. (Σχ. 264, 265).

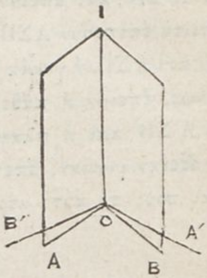
Τῳόντι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ΟΑ,ΟΒ,ΟΑ΄,ΟΒ΄ κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καθέτῳ ἐπὶ τὴν ΟΙ καὶ διερχομένῳ διὰ τοῦ σημείου Ο· ἐξ ἄλλου δὲ ἡ ΟΑ΄, κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΙΟΑ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ, ὁμοίως ἡ ΟΒ΄ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΒ· ἑπομένως αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ Α΄ΟΒ΄ κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθέτους ἐπ᾽ ἀλλήλας· διὰ νὰ δείξωμεν δὲ ὅτι εἶναι παραπληρωματικαί, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μία εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ ἄλλη ἀμβλεῖα, ὅπερ ἐξάγεται ἐξ αὐτῆς τῆς ὑποθέσεως, καθ' ἣν ὁρίζεται ἡ διεύθυνσις τῶν καθέτων. Διότι, ἐὰν ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι ὀξεῖα (Σχ. 264), ἡ γωνία Α'ΟΒ' περιέχουσα τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΑΟΑ' εἶναι ἀμβλεῖα· ἐὰν δὲ ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι ἀμβλεῖα (Σχ. 265), ἡ γωνία Α'ΟΒ', περιεχομένη ἐν τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ ΑΟΑ' εἶναι ὀξεῖα.

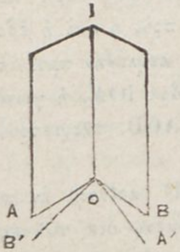


Σχ. 263.



Σχ. 264.

Τούτου τεθέντος, ἂς ἐπανέλθωμεν εἰς τὰς παραπληρωματικὰς τριέδρους γωνίας ΣΑΒΓ καὶ ΣΑ'Β'Γ' (Σχ. 263), καὶ ἂς θεωρήσωμεν π. χ. τὴν δίεδρον γωνίαν ΣΓ. Ἡ εὐθεῖα ΣΒ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΣΓ τῆς διέδρου ΣΓ πρὸς τὸ μέρος τῆς ΣΒ, καὶ ἑπομένως πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς ἕδρας ΒΣΓ· ὁμοίως ἡ ΣΑ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΒΣΓ, κειμένη πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς ἕδρας ΑΣΓ· ἑπομένως ἡ γωνία Α'ΣΒ' εἶναι παραπλήρωμα τῆς γωνίας, ἥτις μετρᾷ τὴν δίεδρον γωνίαν ΣΓ ἢ ἁπλῶς εἶναι παραπλήρωμα τῆς διέδρου γωνίας ΣΓ. Ὁμοίως συλλογιζόμεθα καὶ περὶ τῶν ἄλλων διέδρων γωνιῶν ΣΑ καὶ ΣΒ.



Σχ. 265.

Ἐπειδὴ αἱ δύο τρίεδροι γωνίαι ΣΑΒΓ καὶ ΣΑ'Β'Γ' παράγονται ἑκατέρα ἐκ τῆς ἑτέρας διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς, εἶναι φανερὸν ὅτι πᾶσα ἰδιότης τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς πρώτης ὑφίσταται καὶ ἐπὶ τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς δευτέρας.

Σημείωσις.

373. Ἂς παραστήσωμεν δι' α,β,γ τοὺς ἀριθμούς, τοὺς με-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τροῦντας τὰς ἐπιπέδους γωνίας καὶ δι' Α,Β,Γ τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς μετροῦντας τὰς διέδρους γωνίας τριέδρου τινὸς γωνίας, τῆς ὀρθῆς γωνίας λαμβανομένης ὡς μονάδος. Οἱ ἀριθμοὶ α', β', γ', οἵτινες θὰ μετρῶσι τὰς ἐπιπέδους γωνίας (ἕδρας), καὶ οἱ A', B', Γ' οἱ ἀριθμοί, οἵτινες θὰ μετρῶσι τὰς διέδρους γωνίας τῆς παραπληρωματικῆς τριέδρου γωνίας, εὑρίσκονται διὰ τῶν τύπων.

$$\begin{array}{ll} \alpha'=2^{\text{ὀρθ}}-A & A'=2^{\text{ὀρθ}}-\alpha \\ \beta'=2\quad -B & B'=2\quad -\beta \\ \gamma'=\Gamma\quad -\Gamma & \Gamma'=2\quad -\gamma. \end{array}$$

Ἐὰν γνωρίζωμεν οἱανδήποτε ἰδιότητα μιᾶς τριέδρου γωνίας, ἤτοι σχέσιν τινὰ μεταξὺ τῶν συστατικῶν αὐτῆς α, β, γ, A, B, Γ, ἐφαρμόζοντες τὴν σχέσιν ταύτην εἰς τὰ συστατικὰ α', β', γ', A', B', Γ' τῆς παραπληρωματικῆς τριέδρου γωνίας καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰ στοιχεῖα ταῦτα διὰ τῶν τιμῶν αὐτῶν, ἐξηγγμένων ἐκ τῶν προηγουμένων τύπων, θὰ ἔχωμεν νέαν τινὰ σχέσιν μεταξὺ τῶν α, β, γ, A, B, Γ, ἤτοι νέαν τινὰ ἰδιότητα τῆς ἀρχικῆς τριέδρου γωνίας.

Ὁμοίως πᾶσα ἰδιότης ἀναφερομένη εἰς περισσοτέρας τριέδρους γωνίας ἄγει διὰ τῆς θεωρίας τῶν προτεθεισῶν τριέδρων παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἰς νέαν ἰδιότητα τοῦ συστήματος τούτου τῶν τριέδρων. Ἐντεῦθεν δηλοῦται ἡ σπουδαιότης τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

Ἐκθέτομεν ἐπὶ τούτοις ἐφαρμογάς τινας τῆς γενικῆς ταύτης μεθόδου.

374. Εἴδομεν (369) ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν (τῶν ἑδρῶν) τριέδρου γωνίας περιλαμβάνεται πάντοτε μεταξὺ τοῦ μηδενὸς καὶ τῶν τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν. Ἂς ζητήσωμεν ἤδη τὸ ἀντίστοιχον θεώρημα. Ἐπὶ τούτῳ ἂς θεωρήσωμεν τὴν τρίεδρον γωνίαν τὴν παραπληρωματικὴν τῆς προτεθείσης. Παριστῶντες δι' α', β', γ' τὰς ἐπιπέδους γωνίας (ἕδρας) τῆς παραπληρωματικῆς τριέδρου γωνίας θέλομεν ἔχει.

$$0<\alpha'+\beta'+\gamma' < 4 \text{ ὀρθ.}$$

Ἑπομένως, παρισταμένων τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς προτεθείσης τριέδρου δι' A, B, Γ, θέλομεν ἔχει

$$0 < (2-A)+(2-B) + (2-\Gamma) < 4 \text{ ὀρθ.}$$
$$\text{ἢ} \quad A+B+\Gamma < 6 \text{ ὀρθ. καὶ } A+B+\Gamma > 2 \text{ ὀρθ.}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Οὕτως ἡ ζητουμένη πρότασις εἶναι ἡ ἑξῆς· *Ἐν πάσῃ τριέδρῳ γωνίᾳ, τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων αὐτῆς γωνιῶν εἶναι μεγαλείτερον μὲν τῶν 2, μικρότερον δὲ τῶν 6 ὀρθῶν γωνιῶν.*

Εἴδομεν προσέτι (367) ὅτι ἐν πάσῃ τριέδρῳ γωνίᾳ ἡ μεγαλειτέρα ἐπίπεδος γωνία (ἕδρα) εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Ἂς ζητήσωμεν δὲ καὶ ταύτης τὴν ἀντιστοιχοῦσαν πρότασιν ἐν τῇ παραπληρωματικῇ τῆς προτεθείσης τριέδρου.

Ἔστωσαν α′, β′, γ′ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι (ἕδραι) τῆς παραπληρωματικῆς τῆς θεωρηθείσης τριέδρου, καὶ α′ ἡ μεγαλειτέρα τῶν ἐπιπέδων αὐτῆς γωνιῶν· θέλομεν ἔχει

$$\alpha' < \beta' + \gamma'$$

Ἐπομένως, ἐὰν Α, Β, Γ εἶναι αἱ δίεδροι γωνίαι τῆς προτεθείσης τριέδρου γωνίας, θέλομεν ἔχει

$$2 - \mathrm{A} < (2 - \mathrm{B}) + (2 - \Gamma) \text{ ἢ } \mathrm{A} + 2 > \mathrm{B} + \Gamma.$$

Ἐξ ἄλλου, τοῦ παραπληρώματος μιᾶς γωνίας ἐλαττουμένου καθ' ὅσον ἡ γωνία αὕτη αὐξάνει, ἡ Α δέον νὰ εἶναι ἡ μικροτέρα τῶν διέδρων γωνιῶν Α, Β, Γ, καθότι ἡ α′ εἶναι ἡ μεγαλειτέρα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν (ἑδρῶν) α′, β′, γ′. Ἡ ἐξαγομένη λοιπὸν πρότασις εἶναι ἡ ἑξῆς· *Ἐν πάσῃ τριέδρῳ γωνίᾳ, ἡ μικροτέρα δίεδρος γωνία ηὐξημένη κατὰ δύο ὀρθὰς εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων διέδρων γωνιῶν.*

375. Ἐν γένει δέ, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τρίεδρον γωνίαν ἔχουσαν διέδρους γωνίας τρεῖς τοιαύτας Α,Β,Γ δεδομένας, ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ δύο καὶ ἓξ ὀρθῶν, καὶ ἡ μικροτέρα ἐξ αὐτῶν, ηὐξημένη κατὰ δύο ὀρθάς, νὰ εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

Αἱ συνθῆκαι αὗται ἀρκοῦσι, διότι, ὅταν αὗται πληρῶνται, τὰ παραπληρώματα α′, β′, γ′ τῶν δεδομένων γωνιῶν Α,Β,Γ ὑπόκεινται εἰς τὰς ἐν § 370 δύο συνθήκας πρὸς σχηματισμὸν τριέδρου γωνίας. Δυνάμεθα λοιπὸν διὰ τῶν τριῶν ἑδρῶν α′, β′, γ′ νὰ κατασκευάσωμεν μίαν τρίεδρον γωνίαν καὶ μίαν μόνην· ἔπειτα κατασκευάζοντες τὴν παραπληρωματικὴν ταύτης τρίεδρον γωνίαν εὑρίσκομεν τὴν τρίεδρον, τῆς ὁποίας αἱ δίεδροι γωνίαι εἶναι αἱ δεδομέναι γωνίαι Α, Β, Γ....

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θεώρημα.

376. *Δύο τρίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι·*

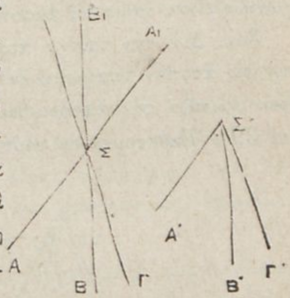
1ον. *Ἐὰν ἔχωσι μίαν ἐπίπεδον γωνίαν (ἕδραν) ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας διέδρους γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ ὁμοίως κειμένας·*

2ον. *Ὅταν ἔχωσι μίαν δίεδρον γωνίαν ἴσην περιεχομένην ὑπὸ ἑδρῶν ἴσων ἑκατέρας ἑκατέρᾳ καὶ ὁμοίως κειμένων.*

3ον. *Ὅταν ἔχωσι τὰς τρεῖς αὐτῶν ἕδρας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ καὶ ὁμοίως κειμένας.*

4ον. *Ὅταν ἔχωσι τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ καὶ ὁμοίως κειμένας·*

1ον. Ἔστωσαν δύο τρίεδροι γωνίαι ΣΑΒΓ καὶ Σ΄Α΄Β΄Γ΄ (Σχ. 266). Ἐξ ὑποθέσεως ἡ ἕδρα ΑΣΒ εἶναι ἴση τῇ ἕδρᾳ Α΄Σ΄Β΄, καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι ΣΒ καὶ Σ΄Β΄ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ὡς καὶ αἱ ΣΑ καὶ Σ΄Α΄. Ὑποθέτομεν προσέτι ὅτι ἡ διάταξις τῶν ἀποτελούντων αὐτὰς στοιχείων εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς ἀμφοτέρας· ἤτοι, ἂν παρατηρητής, ἔχων τὴν κεφαλὴν ἐπὶ τοῦ Σ, τὰ νῶτα ἐστραμμένα πρὸς τὴν ἕδραν ΑΣΒ καὶ τὸ πρόσωπον πρὸς τὴν ἀκμὴν ΣΓ, ἔχῃ συγχρόνως δεξιᾷ μὲν τὴν ἀκμὴν ΣΒ, ἀριστερᾷ δὲ τὴν ΣΑ, ἕτερος παρατηρητὴς ἔχων τὴν κεφαλὴν εἰς τὸ Σ΄, τὸ πρόσωπον ἐστραμμένον πρὸς τὴν ἀκμὴν Σ΄Γ΄ καὶ τὰ νῶτα πρὸς τὴν ἕδραν Α΄Σ΄Β΄, θὰ ἔχῃ συγχρόνως δεξιᾷ μὲν τὴν ἀκμὴν Σ΄Β΄, ἀριστερᾷ δὲ τὴν Σ΄Α΄.



Σχ. 266.

Ὑπὸ τὰς συνθήκας ταύτας αἱ δύο τρίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἤτοι ἐφαρμόζουσιν ἐπιτιθέμεναι ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης.

Τῷόντι, ἂς θέσωμεν τὴν ἕδραν Α΄Σ΄Β΄ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ἕδρας ΑΣΒ οὕτως, ὥστε ἡ Σ΄Α΄ νὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς ΣΑ καὶ ἡ Σ΄Β΄ μετὰ τῆς ΣΒ, ἡ δὲ ἀκμὴ Σ΄Γ΄ νὰ πέσῃ πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΒ, πρὸς ὃ καὶ ἡ ἀκμὴ ΣΓ, ἐπειδὴ αἱ δίεδροι γωνίαι ΣΑ καὶ Σ΄Α΄ εἶναι ἴσαι, τὸ ἐπίπεδον Α΄Σ΄Γ΄ θὰ ἐφαρμόσῃ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΓ· ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι ΣΒ καὶ Σ΄Β΄ εἶναι ἴσαι, τὸ ἐπίπεδον Β΄Σ΄Γ΄ θὰ ἐφαρμόσῃ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου

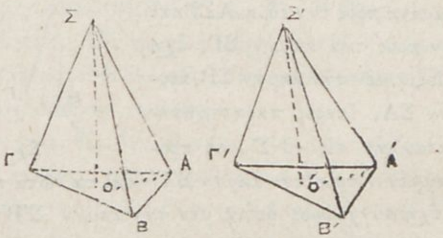
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΣΓ· ἐπομένως καὶ αἱ ἀκμαὶ Σ'Γ' καὶ ΣΓ συμπίπτουσιν· ἄρα αἱ δύο τρίεδροι γωνίαι ταυτίζονται, καὶ εἶναι ἴσαι.

2ον. Ἡ δευτέρα περίπτωσις ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς προηγουμένης προτάσεως, τῆς ὁποίας αὕτη εἶναι ἡ ἀντιστοιχοῦσα (367). Τῷόντι αἱ δύο τρίεδροι γωνίαι αἱ παραπληρωματικαὶ τῶν προτεθεισῶν ἔχουσι μίαν ἕδραν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας αὐτῶν διέδρους γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ ὁμοίως κειμένας, ἐπομένως ἐπιτιθέμεναι ἡ μία ἐπὶ τὴν ἄλλην ταυτίζονται· ἄρα ταυτίζονται καὶ αἱ δεδομέναι.

Ἄλλως τε δὲ ἡ ἄμεσος ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ταύτης οὐδεμίαν παρέχει δυσκολίαν. Βλέπομεν, συλλογιζόμενοι ὡς ἀνωτέρω, (1ον) ὅτι ἡ ἐπίθεσις καὶ ἐφαρμογὴ εἶναι δυνατή, ἐάν, συμφώνως πρὸς τὴν ὑπόθεσιν, ἡ διάταξις τῶν δεδομένων στοιχείων τῶν τριέδρων γωνιῶν εἶναι ὁμοία εἰς ἀμφοτέρας.

3ον. Διὰ τὴν τρίτην περίπτωσιν ἠδυνάμεθα ν' ἀκολουθήσωμεν τὴν εἰς ἄτοπον ἐπαγωγικὴν ἀπόδειξιν, ἐπεκτείνοντες ἐπὶ τῶν τριέδρων γωνιῶν τὰς ἀποδειχθείσας προτάσεις περὶ τριγώνων (§ 38 καὶ 39). Ἐκθέτομεν ἐν τούτοις μίαν ἄμεσον ἀπόδειξιν ἁπλῆν.



Σχ. 267.

Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τῆς πρώτης τριέδρου γωνίας τὰ μήκη ΣΑ=ΣΒ=ΣΓ· ἂς λάβωμεν δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τῆς δευτέρας τριέδρου γωνίας τὰ μήκη Σ'Α',Σ'Β',Σ'Γ' ἴσα πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς τὸ ΣΑ, καὶ ἂς σχηματίσωμεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ'. Τὰ ἓξ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΣΒ, Α'Σ'Β', ΑΣΓ, Α'Σ'Γ', ΒΣΓ, Β'Σ'Γ' εἶναι ἴσα ἀνὰ δύο, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην ὑπὸ ἴσων πλευρῶν. Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων τούτων ἐξάγεται ἡ ἰσότης τῶν πλευρῶν ΑΒ=Α'Β' ΒΓ=Β'Γ' ἡ ΑΒ=Α'Β', καὶ επο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μένως ἡ ἰσότης τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ'. Ἂς καταβιβάσωμεν ἐκ τοῦ σημείου Σ τὴν ΣΟ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ. Ἐπειδὴ αἱ τρεῖς πλάγιαι ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ εἶναι ἴσαι, τὸ σημεῖον Ο εἶναι τὸ κέντρον κύκλου περιγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (298). Ἐὰν καταβιβάσωμεν ὁμοίως τὴν Σ'Ο' κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Α'Β'Γ', τὸ σημεῖον Ο' εἶναι τὸ κέντρον τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' περιγεγραμμένου κύκλου. Ἐὰν ἤδη μεταθέσωμεν τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' καὶ θέσωμεν αὐτὸ ἐπὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ σημεῖον Ο' θὰ πέσῃ ἐπὶ τὸ Ο, καὶ ἡ εὐθεῖα Ο'Σ' θὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΟΣ. Ἀλλὰ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΣΟΑ καὶ Σ'Ο'Α' εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας καὶ μίαν πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσην (ΟΑ=Ο'Α').

Ἐκ τούτου ἐξάγεται ὅτι Ο'Σ'=ΟΣ, ἑπομένως ἡ κορυφὴ Σ' θὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς κορυφῆς Σ, καὶ αἱ δύο τρίεδροι γωνίαι, ἔχουσαι τὰς αὐτὰς ἀκμάς, ταυτίζονται.

4ον. Ἡ τελευταία αὕτη περίπτωσις ἐξάγεται ἐκ τῆς προηγουμένης προτάσεως, τῆς ὁποίας αὕτη εἶναι σχετική. Τῳόντι αἱ δύο τρίεδροι παραπληρωματικαὶ τῶν προτεθεισῶν τριέδρων γωνιῶν ἔχουσι τὰς ἀντιστοιχούσας αὐτῶν ἕδρας κατὰ μίαν ἴσας καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν κειμένας, καὶ εἶναι ἐφαρμόσιμοι, ἑπομένως καὶ αἱ δεδομέναι εἶναι ἐφαρμόσιμοι· ἄρα καὶ ἴσαι.

377. Ἐὰν ἐν ἑκάστῃ τῶν τεσσάρων ἐκτεθεισῶν περιπτώσεων ἡ διάταξις τῶν ἴσων στοιχείων ἦτο διάφορος εἰς τὰς δύο τριέδρους γωνίας, αὗται δὲν θὰ εἶναι πλέον ἴσαι ἀλλὰ μόνον *συμμετρικαί*. Τῳόντι ἔστωσαν Τ καὶ Τ' αἱ προτεθεῖται δύο τρίεδροι γωνίαι καὶ $Τ_1$ ἡ συμμετρικὴ τῆς Τ, ἤτοι ἡ σχηματιζομένη ἐκ τῆς Τ διὰ τῆς προσεκβολῆς τῶν ἀκμῶν αὐτῆς πρὸς τὴν κορυφὴν (Σχ. 269). Αἱ τρίεδροι Τ καὶ $Τ_1$, ἔχουσι τὰ συστατικὰ αὐτῶν ἴσα κατὰ ἓν ἀλλ' ἀντιστρόφως διατεταγμένα· ἑπομένως ἐπειδὴ αἱ Τ καὶ Τ' πληροῦσι πάσας τὰς ἐξ ὑποθέσεως συνθήκας μιᾶς τῶν περιπτώσεων τῆς ἰσότητος αὐτῶν, ἐκτὸς τῆς ἀναφερομένης εἰς τὴν διάταξιν τῶν ἴσων μερῶν, αἱ τρίεδροι Τ' καὶ $Τ_1$ θὰ πληρῶσι πάσας τὰς συνθήκας τῆς ἰσότητος ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει, διότι θὰ ἔχωσι καὶ ὁμοίως διατεταγμένα τὰ ἴσα συστατικὰ αὐτῶν, καὶ θὰ ἐφαρμόζωσιν· ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι ἡ Τ' εἶναι ἐφαρμόσιμος μετὰ τῆς συμμετρικῆς τῆς τριέδρου Τ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

378. Τὴν ἐν τῇ παραγράφῳ ταύτῃ ἀναφερομένην ἀναλογίαν μεταξὺ ὡρισμένων ἰδιοτήτων τῶν τριέδρων γωνιῶν καὶ τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ὑπὸ σπουδαίαν ἔποψιν. Ἐνδιαφέρει ὅμως νὰ παρατηρήσωμεν ἐν τέλει ὅτι, ἐνῷ εἰς πᾶσαν σχέσιν μεταξὺ τῶν τριγώνων ἀντιστοιχῇ μία σχέσις τῶν τριέδρων γωνιῶν, τὸ ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει· ἐπὶ παραδείγματι ἐνῷ ἡ ἰσότης τῶν διέδρων γωνιῶν δύο τριέδρων ἐπάγεται τὴν ἰσότητα τῶν ἑδρῶν αὐτῶν, ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν δύο τριγώνων συνεπάγεται μόνον τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν αὐτῶν.

Θεώρημα.

379. *Δύο πολύεδροι γωνίαι ὁμοειδεῖς* (κυρταὶ ἢ μὴ κυρταὶ) *εἶναι ἴσαι, ὅταν ἐκτὸς μιᾶς ἐπιπέδου γωνίας (ἕδρας) καὶ τῶν προσκειμένων ταύτῃ διέδρων γωνιῶν πάντα τὰ ἄλλα αὐτῶν στοιχεῖα δίδωνται ἴσα ἕκαστον ἑκάστῳ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν διατεταγμένα.*

Τῳόντι ἡ ἐπίθεσις καὶ ὁ ταυτισμὸς αὐτῶν γίνεται ἀπ' εὐθείας, ὁπότε καὶ αἱ ἕδραι αἱ μὴ περιλαμβανόμεναι ἐν τῇ ὑποθέσει ἀναγκαίως ταυτίζονται (66).

Ὅταν τὰ δεδομένα ἴσα συστατικὰ διαδέχωνται ἄλληλα κατ' ἀντίστροφον τάξιν ἐν ταῖς δυσὶ πολυεδρικαῖς γωνίαις, ἡ δευτέρα προφανῶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν συμμετρικὴν τῆς πρώτης (366).

Ἐκ τούτου τοῦ θεωρήματος βλέπομεν ὅτι πολυεδρικὴ γωνία ἔχουσα ν ἕδρας ὁρίζεται ὑπὸ ν—1 ἑδρῶν καὶ ν—2 διέδρων γωνιῶν.

*Πρόβλημα.

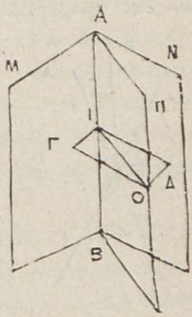
380. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν τριῶν ἑδρῶν τριέδρου γωνίας.*

Εἴπομεν ἤδη (354) ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἐντὸς διέδρου γωνίας κειμένων, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἑδρῶν τῆς γωνίας, εἶναι ἐπίπεδον διχοτομοῦν τὴν δίεδρον γωνίαν.

Ἔστωσαν (Σχ. 268) ΜΑΒ καὶ ΝΑΒ δύο ἐπίπεδα τεμνόμενα κατὰ τὴν ΑΒ, καὶ τὸ Ο ἓν σημεῖον τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου. Ἂς καταβιβάσωμεν ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἐπὶ τὰς δύο ἕδρας τὰς καθέ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τους ΟΓ καὶ ΟΔ, αἵτινες ὁρίζουσιν ἓν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Ι (309, 311).



Σχ. 268.

Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΓΙ καὶ ΟΔΙ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν ΟΙ κοινὴν καὶ τὰς πλευρὰς ΟΓ καὶ ΟΔ ἴσας. Ἑπομένως καὶ ἡ γωνία ΟΙΓ εἶναι ἴση τῇ ΟΙΔ. Ἐὰν διὰ τῆς εὐθείας ΟΙ καὶ τῆς ἀκμῆς ΑΒ ἀχθῇ ἐπίπεδον ΠΑΒ, τὸ ἐπίπεδον τοῦτο χωρίζει τὴν δίεδρον γωνίαν ΜΑΒΝ εἰς δύο ἴσας διέδρους γωνίας, διότι αἱ ἐπίπεδοι αὐτῶν γωνίαι ΟΙΓ καὶ ΟΙΔ εἶναι ἴσαι (299). Ἑπομένως ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διχοτομοῦντος τὴν προτεθεῖσαν δίεδρον γωνίαν.

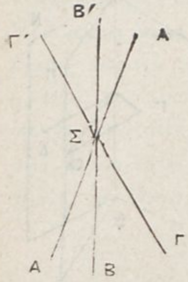
Ἐὰν δὲ προεκτείνωμεν τὰς ἕδρας τῆς διέδρου γωνίας ΜΑΒΝ πρὸς τὴν ἀκμὴν ΑΒ, σχηματίζονται περὶ τὴν ἀκμὴν ταύτην τέσσαρες δίεδροι γωνίαι ἀνὰ δύο κατὰ κορυφὴν καὶ ἀνὰ δύο παραπληρωματικαί. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ διαστήματος τῶν ἴσον ἀπεχόντων (ἀνὰ ἓν) ἀπὸ τῶν δύο δεδομένων ἐπιπέδων, προεκτεινομένων πέραν τῆς ΑΒ, θ' ἀποτελῆται προφανῶς ἐκ δύο ἐπιπέδων διχοτομούντων τὰς διέδρους γωνίας καὶ καθέτων ἐπ' ἄλληλα (20, 22).

Τούτου τεθέντος, ἂς θεωρήσωμεν μίαν τρίεδρον γωνίαν ΣΑΒΓ. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν κειμένων ἐντὸς τῆς τριέδρου γωνίας καὶ ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἑδρῶν τῆς τριέδρου γωνίας εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τῶν διχοτομούντων τὰς τρεῖς διέδρους γωνίας ΣΑ, ΣΒ καὶ ΣΓ. Τῳόντι ἡ τομὴ τῶν δύο πρώτων διχοτομούντων ἐπιπέδων ἀποτελουμένη ἐκ σημείων ἴσον ἀπεχόντων τῶν τριῶν ἑδρῶν ἀναγκαίως κεῖται καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διχοτομοῦντος τὴν τρίτην δίεδρον γωνίαν.

Ἀλλὰ προεκτείνοντες τὰς ἀκμὰς τῆς δεδομένης τριέδρου γωνίας πέραν τῆς κορυφῆς Σ σχηματίζομεν περὶ τὸ Σ ὀκτὼ τριέδρους γωνίας ἀνὰ δύο συμμετρικάς (366)· διότι διὰ τῆς προεκτάσεως δύο μόνον ἑδρῶν τῆς τριέδρου σχηματίζονται τὸ ὅλον τέσσαρες δίεδροι γωνίαι, διὰ τῆς προεκτάσεως καὶ τῆς τρίτης σχηματίζονται μεθ' ἑκάστης τῶν διέδρων τούτων γωνιῶν ἀνὰ δύο τρίεδροι γωνίαι. Ὁ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ διαστήματος τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν τριῶν δεδομένων ἐπιπέδων ΑΣΒ, ΒΣΓ, ΓΣΑ, ἐξ ὑποθέσεως προεκτεινομένων ἀπεριορίστως, ἀποτελεῖται ἐξ ὀκτὼ εὐθειῶν διερχομένων διὰ τοῦ Σ καὶ κειμένων ἀνὰ μίαν ἐντὸς μιᾶς τῶν ὀκτὼ ἐνδειχθεισῶν τριέδρων γωνιῶν.



Σχ. 269.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι αἱ κείμεναι ἐντὸς δύο συμμετρικῶν τριέδρων γωνιῶν ἀποτελοῦσι μίαν εὐθεῖαν, ἤτοι ἡ μία εἶναι προσεκβολὴ τῆς ἑτέρας.

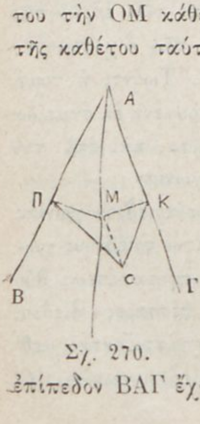
Ὁ ζητούμενος λοιπὸν γεωμετρικὸς τόπος ἀποτελεῖται πραγματικῶς ἐκ τεσσάρων εὐθειῶν διερχομένων διὰ τοῦ Σ, καὶ ἡ μία διέρχεται διὰ μέσου τῆς δεδομένης τριέδρου καὶ τῆς συμμετρικῆς αὐτῆς, αἱ δὲ τρεῖς ἄλλαι ἐκτός.

*Πρόβλημα.

381. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν τριῶν ἀκμῶν τριέδρου γωνίας*

Πρῶτον ἂς ζητήσωμεν τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων τοῦ διαστήματος τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν πλευρῶν δεδομένης γωνίας.

Ἔστωσαν ΒΑΓ ἡ δεδομένη γωνία, καὶ Ο ἓν σημεῖον τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου (Σχ. 270). Ἂς καταβιβάσωμεν ἐκ τοῦ σημείου τούτου τὴν ΟΜ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΑΓ. Ἐκ τοῦ σημείου Μ τῆς καθέτου ταύτης ἂς φέρωμεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς δεδομένης γωνίας τὰς καθέτους ΜΠ καὶ ΜΚ· ἔπειτα ἂς φέρωμεν τὰς εὐθείας ΟΠ καὶ ΟΚ. Αἱ εὐθεῖαι ΟΠ καὶ ΟΚ παριστῶσι τὰ ἀποστήματα τοῦ σημείου Ο ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ (301) εἶναι ἴσαι ἐξ ὑποθέσεως. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΜΠ καὶ ΟΜΚ εἶναι ἴσα, καὶ ἑπομένως ἔχομεν ΜΠ=ΜΚ, ἤτοι τὸ σημεῖον Μ εἶναι σημεῖον τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν ΒΑΓ. Αἱ κάθετοι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν διαφόρων σημείων τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΑΓ ἔχουσι τοὺς πόδας αὐτῶν ἐπὶ τῆς διχοτομούσης ΑΜ·



Σχ. 270.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἑπομένως ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι ἐπίπεδον διὰ τῆς διχοτόμου διερχόμενον καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΑΓ.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΒΑΓ προεκτεινομένας ἀπεριορίστως, ὁ γεωμετρικὸς τόπος σχηματίζεται ἐκ δύο διαφόρων ἐπιπέδων ἀγομένων διὰ τῶν διχοτομουσῶν τὰς παραπληρωματικὰς γωνίας τὰς σχηματιζομένας διὰ τῶν πλευρῶν τούτων. Τὰ ἐπίπεδα δὲ ταῦτα εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα, διότι ἡ δίεδρος αὐτῶν γωνία μετρεῖται διὰ τῆς γωνίας τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ τῶν διχοτομουσῶν τὰς παραπληρωματικὰς ταύτας γωνίας.

Τούτου τεθέντος ἂς θεωρήσωμεν μίαν τρίεδρον γωνίαν ΣΑΒΓ. Κατὰ τὰ προηγουμένως λεχθέντα ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ διαστήματος τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν δύο ἀκμῶν ΣΑ καὶ ΣΒ ἀπεριορίστως προεκτεινομένων, ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἐπιπέδων ἀγομένων καθέτως ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΣΒ διὰ τῶν διχοτομουσῶν τὰς παραπληρωματικὰς γωνίας τὰς σχηματιζομένας ὑπὸ τῶν δύο τούτων ἀκμῶν. Προσέτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ διαστήματος τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν δύο ἀκμῶν ΣΒ καὶ ΣΓ, ὡσαύτως προεκτεινομένων, ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἄλλων ἐπιπέδων ἀγομένων καθέτως ἐπὶ τὴν ἕδραν ΒΣΓ διὰ τῶν διχοτομουσῶν τὰς παραπληρωματικὰς γωνίας τὰς σχηματιζομένας διὰ τῶν δύο τούτων ἀκμῶν. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν γεωμετρικὸς τόπος σχηματίζεται διὰ τῶν ἀλλεπαλλήλων τομῶν τῶν τεσσάρων ἐνδειχθέντων ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα διέρχονται διὰ τοῦ σημείου Σ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΠΕΡΙ ΕΜΒΑΔΩΝ ΚΑΙ ΟΓΚΩΝ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Α'. ΠΕΡΙ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

Ὁρισμοί.

382. Σῶμα περατούμενον ὑπὸ ἐπιφανείας οἱουδήποτε σχήματος κατέχει ὡρισμένον μέρος τοῦ χώρου, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν ***ὄγκον*** τοῦ σώματος (2).

Οἱ ὄγκοι δύο σωμάτων εἶναι *ἴσοι* (7), ὅταν δύνανται, ἐπιτιθεμένου τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τοῦ ἄλλου, νὰ ταυτίζωνται.

Προσθέτω τοὺς ὄγκους δύο ἢ περισσοτέρων στερεῶν σημαίνει παραθέτω αὐτοὺς καθ' οἱανδήποτε τρόπον, ὥστε οὐδὲν ἐσωτερικὸν μέρος νὰ ἔχωσι κοινόν, καὶ τὸ ὅλον νὰ περιβάλληται ὑπὸ ὡρισμένων μερῶν τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν.

Ἐὰν ὄγκος τις Α εἶναι οὕτω τὸ ἄθροισμα δύο ὄγκων Β καὶ Γ, ὁ ὄγκος Γ εἶναι ***ἡ διαφορὰ*** τῶν ὄγκων Α καὶ Β.

383. ***Μετρῶ*** ὡρισμένον ὄγκον σημαίνει εὑρίσκω τὸν λόγον τοῦ ὄγκου τούτου πρὸς ἕτερον ὄγκον ὡρισμένον καὶ λαμβανόμενον ὡς μονάδα.

Δύο ἢ περισσότεροι ὄγκοι εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ εἶναι ἴσοι, ἤτοι νὰ μὴ ταυτίζωνται, ἐν τούτοις νὰ περιέχωσιν ἕκαστος ἰσάκις τὴν μονάδα τοῦ ὄγκου. Οἱ τοιοῦτοι ὄγκοι λέγομεν ὅτι εἶναι ***ἰσοδύναμοι*** (7). Π.χ. ἐὰν προσθέσωμεν τρεῖς οἱουσδήποτε ὄγκους Α,Β,Γ κατὰ διαφόρους τρόπους, ἤτοι (Α+Β+Γ), (Α+Γ+Β), (Γ+Α+Β), κ.τ.λ. τὰ ἀθροίσματα ὡς ἑνιαῖοι ὄγκοι δυνατὸν νὰ μὴ ἐφαρμόζωσιν, ἀλλὰ προφανῶς ἕκαστον ἐκ τούτων περιέχει ἰσάκις τὴν μονάδα τοῦ ὄγκου, καὶ εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐὰν εἰς ἰσοδυνάμους ὄγκους προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν ἀλ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λους ὄγκους ἰσοδυνάμους, τὰ ἀθροίσματα ἢ αἱ διαφοραὶ θὰ εἶναι ἰσοδύναμοι. Ὁμοίως, ἐὰν δύο ἰσοδυνάμους ὄγκους διαιρέσωμεν εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἰσοδυνάμων μερῶν, ἕκαστον μέρος τοῦ πρώτου θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἕκαστον μέρος τοῦ δευτέρου.

384. Τὸ πρόβλημα τῆς μετρήσεως τῶν περιωρισμένων ὄγκων παρουσιάζει ὅπως καὶ τὸ περὶ μετρήσεως τῶν περιοριζομένων ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν (239) τὸ ἰδιάζον χαρακτηριστικὸν ὅτι εἶναι δύσκολον νὰ εἰσαχθῇ ἐν τῷ μετρουμένῳ ὄγκῳ ὁ ὡς μονὰς τῆς μετρήσεως ὁρισθεὶς ὄγκος καὶ νὰ γίνῃ οὕτως ἄμεσος ἡ μέτρησις. Δὲν δυνάμεθα λοιπὸν νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀμέσως εἰμὴ μόνον εἰς λίαν περιωρισμένον ἀριθμὸν περιπτώσεων· ἀλλ' αἱ ἅπαξ εὑρεθεῖσαι αὗται λύσεις, ἡ γνῶσις τοῦ ἰσοδυνάμου καὶ ἡ θεωρία τῶν ὁρίων συντρέχουσιν εἰς τὴν λύσιν καὶ τῶν συνθετωτέρων ζητημάτων.

Ὁρισμοί.

385. Καλεῖται *πολύεδρον* πᾶν στερεὸν ὁριζόμενον πανταχόθεν ὑπὸ ἐπιπέδων.

Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα περιοριζόμενα διὰ τῆς ἀμοιβαίας συναντήσεως αὐτῶν σχηματίζουσι τὰς *ἀκμάς*, τὰς *ἕδρας* καὶ τὰς *κορυφὰς* τοῦ πολυέδρου. Αἱ δίεδροι καὶ αἱ πολύεδροι γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν ἑδρῶν εἶναι αἱ δίεδροι καὶ αἱ πολύεδροι γωνίαι τοῦ σχήματος.

Διαγώνιος πολυέδρου καλεῖται ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνώνουσα δύο κορυφὰς τοῦ πολυέδρου μὴ προσκειμένας εἰς τὴν αὐτὴν ἕδραν.

Εἰς τὸ πολύεδρον δίδεται ἰδιαιτέρα ὀνομασία ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ. Οὕτω πᾶν πολύεδρον ἔχον τέσσαρας ἕδρας καλεῖται *τετράεδρον*. Αἱ ὀνομασίαι *ἑξάεδρον*, *ὀκτάεδρον*, *δωδεκάεδρον*, *εἰκοσάεδρον*, δίδονται εἰς τὰ πολύεδρα ταῦτα ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν αὐτῶν.

386. Πολύεδρόν τι καλεῖται *κυρτόν*, ὅταν οἱαδήποτε τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ, προσεκβαλλομένη πανταχόθεν, ἀφίνει ὁλόκληρον τὸ πολύεδρον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

Εὐθεῖα οἱαδήποτε δὲν δύναται νὰ συναντᾷ τὴν ἐπιφάνειαν κυρτοῦ πολυέδρου εἰς περισσότερα τῶν δύο σημείων· διότι πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας ταύτης συναντᾷ ἀναγκαίως τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πολυέδρου κατὰ κυρτὸν πολύγωνον (62), τοῦ ὁποίου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

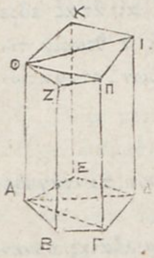
ἡ περίμετρος ἔχει μετὰ τῆς δεδομένης εὐθείας τὰ αὐτὰ κοινὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυέδρου.

Ἐφεξῆς θέλομεν πραγματευθῇ μόνον περὶ τῶν κυρτῶν πολυγώνων.

387. Μεταξὺ τῶν πολυέδρων διακρίνομεν τὸ *πρίσμα* καὶ τὴν *πυραμίδα*. Θὰ θεωρήσωμεν δὲ πρῶτον τὰ περὶ πρίσματος.

Πρίσμα καλεῖται τὸ πολύεδρον τὸ ἔχον δύο μὲν ἕδρας ἴσας καὶ παραλλήλους, τὰς δὲ λοιπὰς ἕδρας παραλληλόγραμμα.

Τὸ πρίσμα κατασκευάζομεν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. Ἔστω (Σχ. 271) ΑΒΓΔΕ ἓν ἐπίπεδον πολύγωνον οἱονδήποτε· διὰ τῆς κορυφῆς Α φέρομεν ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τούτου τὴν εὐθεῖαν ΑΘ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Θ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΓΔΕ· ἔπειτα διὰ τῶν κορυφῶν Β,Γ,Δ καὶ Ε φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΖ,ΓΗ,ΔΙ καὶ ΕΚ παραλλήλους τῇ ΑΘ καὶ συναντώσας τὸ διὰ τοῦ σημείου Θ ἀχθὲν ἐπίπεδον. Πᾶσαι αὗται αἱ εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι τῇ ΑΘ (323)· ἑπομένως πᾶσαι αἱ ἕδραι ΑΒΖΘ,ΒΓΗΖ,ΓΔΗΙ.... εἶναι παραλληλόγραμμα. Προσέτι δὲ τὰ δύο πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ ΘΖΗΙΚ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας καὶ παραλλήλους. Τὸ κατασκευασθὲν λοιπὸν πολύεδρον εἶναι πρίσμα.



Σχ. 271.

388. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔΕ τὸ πρίσμα καλεῖται *ὀρθόν*· ἄλλως καλεῖται *πλάγιον*.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΘ, ΒΖ,ΓΗ....καλοῦνται *παράπλευροι ἀκμαὶ* τοῦ πρίσματος· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν παραλληλογράμμων ἑδρῶν ΑΒΖΘ, ΒΓΗΖ....ἀποτελεῖ τὴν *κυρτὴν* ἢ *παράπλευρον ἐπιφάνειαν* τοῦ πρίσματος.

Τὸ πρίσμα ἔχει ὡς *βάσεις* τὰ δύο ἴσα καὶ παράλληλα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ ΘΖΗΙΚ, *ὕψος* δὲ τὸ ἀπόστημα τῶν ἐπιπέδων τῶν δύο τούτων βάσεων.

389. Ἐν τῷ ὀρθῷ πρίσματι ἑκάστη τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ὕψος αὐτοῦ, αἱ δὲ ἕδραι τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας εἶναι ὀρθογώνιαι.

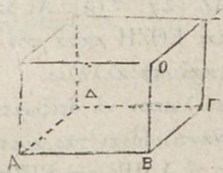
Ἐν τῷ πλαγίῳ πρίσματι τὸ ὕψος εἶναι μικρότερον ἑκάστης παραπλεύρου ἀκμῆς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

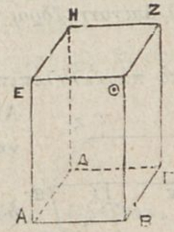
Καλεῖται *κανονικὸν* τὸ ὀρθὸν πρίσμα, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι κανονικὰ πολύγωνα.

390. Καθ' ὅσον αἱ βάσεις τοῦ πρίσματος εἶναι τρίγωνα ἢ τετράπλευρα ἢ πεντάγωνα κτλ., τὸ πρίσμα καλεῖται *τριγωνικόν*, *τετραγωνικόν*, *πενταγωνικὸν* κτλ.

391. Μεταξὺ τῶν τετραγωνικῶν πρισμάτων διακρίνομεν τὸ ἔχον τὰς βάσεις αὐτοῦ παραλληλόγραμμα, καὶ ὀνομάζομεν αὐτὸ *παραλληλεπίπεδον*.



Σχ. 272.

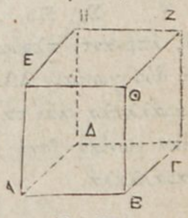


Σχ. 273.

392. *Πᾶσαι δὲ αἱ ἕδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι παραλληλόγραμμα.* (Σχ. 272).

Τὸ παραλληλεπίπεδον δύναται νὰ εἶναι ὀρθὸν ἢ πλάγιον (389). Μεταξὺ τῶν ὀρθῶν παραλληλεπιπέδων διακρίνομεν τὸ *ὀρθογώνιον*, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι ὀρθογώνια καὶ πᾶσαι αἱ λοιπαὶ αὐτοῦ ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια (Σχ. 272).

393. Καλεῖται κύβος τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις καὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι τετράγωνα ἴσα. (Σχ. 274).



Σχ. 274.

394. Ὅπως ἐν τῇ ἐπιπεδομετρίᾳ ὠνομάσαμεν **διαστάσεις** τοῦ ὀρθογωνίου τὰ μήκη δύο προσκειμένων πλευρῶν, οὕτως ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ παραλληλεπιπέδῳ ὀνομάζομεν **διαστάσεις** αὐτοῦ τρεῖς ἀκμὰς διερχομένας διὰ τῆς αὐτῆς κορυφῆς. Τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΑΖ (Σχ. 273) αἱ διαστάσεις εἶναι τὰ μήκη τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΔ καὶ ΑΕ.

Ὡς μονὰς πρὸς μέτρησιν ὄγκου τινὸς λαμβάνεται ἐν γένει *ὁ κύ-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

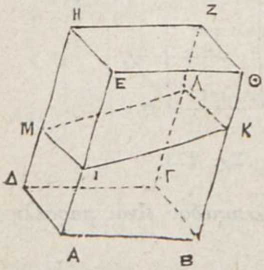
βος, ὁ ἔχων πλευρὰν τὴν μονάδα τοῦ μήκους, ἤτοι τὸ *κυβικὸν μέτρον*. Ἑπομένως *μετρῶ τὸν ὄγκον σώματός τινος* σημαίνει *εὑρίσκω ποσάκις τὸ κυβικὸν μέτρον καὶ τὰ πολλοστὰ αὐτοῦ περιέχονται ἐν αὐτῷ.*

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΑ ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΙΣΜΑ

Θεώρημα.

395. *Αἱ ἀπέναντι ἕδραι παντὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.*

Ἔστω τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΖ (Σχ. 275). Αἱ βάσεις αὐτοῦ ΑΒΓΔ καὶ ΕΘΖΗ κατὰ τὸν ὁρισμὸν εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.



Σχ. 275.

Πρέπει λοιπὸν νὰ δείξωμεν μόνον ὅτι δύο ἀπέναντι ἕδραι τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας, ὡς αἱ ΑΔΗΕ καὶ ΒΓΖΘ, εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Τῳόντι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ· προσέτι δὲ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΕ καὶ ΒΘ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΘΕ. Ἑπομένως αἱ δύο γωνίαι ΔΑΕ καὶ ΓΒΘ εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν παράλληλα· καὶ τὰ δύο παραλληλόγραμμα ΑΔΗΕ καὶ ΒΓΖΘ ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην ὑπὸ ἴσων πλευρῶν εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα.

Πόρισμα.

396. Ἐπειδὴ τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι πρίσμα περιεχόμενον ὑπὸ ἓξ παραλληλογράμμων ἑδρῶν, τῶν ὁποίων αἱ ἀντικείμεναι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, δυνάμεθα νὰ λαμβάνωμεν ὡς βάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου δύο οἱασδήποτε ἀντικειμένας αὐτοῦ ἕδρας (387).

397. *Ἡ τομὴ παραλληλεπιπέδου ὑπὸ ἐπιπέδου, τέμνοντος δύο ἀντικειμένας ἕδρας, εἶναι παραλληλόγραμμον.* Ἔστω τὸ ἐπίπεδον ΙΚλΜ (Σχ. (246) τέμνον τὰς δύο ἀντικειμένας ἕδρας ΑΔΗΕ καὶ ΒΓΖΘ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΖ· αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τῆς τομῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

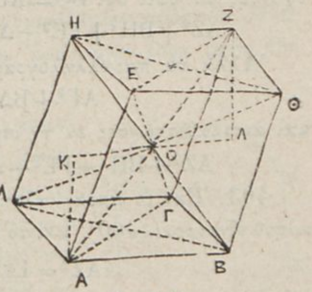
ΙΚΛΜ εἶναι παράλληλοι ὡς τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου, ἑπομένως ἡ τομὴ εἶναι παραλληλόγραμμος.

398. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν παραλληλεπίπεδον ἐπὶ τριῶν δεδομένων εὐθειῶν ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α καὶ μὴ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (Σχ. 275) ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν διὰ τοῦ ἑτέρου ἄκρου ἑκάστης τῶν εὐθειῶν τούτων ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων εὐθειῶν. Οὕτω διὰ τοῦ σημείου Ε φέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΒΑΔ, διὰ τοῦ σημείου Δ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΒΑΕ, διὰ τοῦ σημείου Β ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ΔΑΕ. Τὸ οὕτω σχηματιζόμενον πολύεδρον ὑπὸ τῶν ἓξ ἐπιπέδων θὰ εἶναι παραλληλεπίπεδον.

Θεώρημα.

399. *Τοῦ παραλληλεπιπέδου αἱ τέσσαρες διαγώνιοι τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα* (Σχ. 276).

Ἔστω τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΖ καὶ αἱ δύο διαγώνιοι αὐτοῦ ΒΗ καὶ ΔΘ (Σχ. 247). Ἐπειδὴ αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ ΒΘ καὶ ΔΗ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, τὸ σχῆμα ΒΔΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΒΗ καὶ ΔΘ εἶναι ἄνισοι καὶ τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς ἴσα μέρη κατὰ τὸ σημεῖον Ο (71).



Σχ. 276.

Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη τὰς δύο διαγωνίους ΔΘ καὶ ΑΖ. Ἐπειδὴ αἱ ἀκμαὶ ΑΔ καὶ ΘΖ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, τὸ σχῆμα ΑΔΖΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΔΘ καὶ ΑΖ τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς ἴσα μέρη. Τὸ σημεῖον Ο, μέσον τῆς ΔΘ, εἶναι συγχρόνως τὸ μέσον τῆς ΑΖ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι τὸ σημεῖον Ο εἶναι τὸ μέσον καὶ τῆς τετάρτης διαγωνίου ΓΕ.

Πορίσματα.

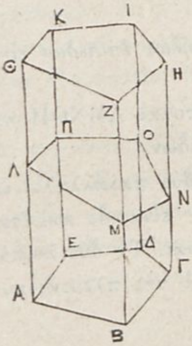
400. Ἐὰν τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθογώνιον, τὰ ἀνωτέρω

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΑΙ ΟΓΚΟΣ ΤΟΥ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ

Θεώρημα.

409. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς περιμέτρου τῆς καθέτου τομῆς αὐτοῦ ἐπὶ μίαν τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν.*



Σχ. 278.

Ἔστωσαν τὸ πρίσμα ΑΗ καὶ ἡ κάθετος αὐτοῦ τομὴ ΛΜΝΟΠ (Σχ. 278). Αἱ πλευραὶ τῆς καθέτου ταύτης τομῆς εἶναι τὰ ὕψη τῶν παραλληλογράμμων, τὰ ὁποῖα σχηματίζουσι τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος, ἐνῷ πάντα ἔχουσι βάσεις ἴσας, τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς τοῦ πολυέδρου. Ἐπομένως θέλομεν ἔχει

$$Ε = ΑΘ.ΛΜ + ΒΖ.ΜΝ + \ldots + ΚΕ.ΠΛ.$$

$$ἢ\ Ε = ΑΘ.(ΛΜ + ΜΝ + \ldots + ΠΛ).$$

Πόρισμα

410. Ἐὰν τὸ πρίσμα εἶναι ὀρθόν, ἡ κάθετος τομὴ ἰσοῦται τῇ βάσει, ἑκάστη δὲ παράπλευρος ἀκμὴ ἰσοῦται πρὸς τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος. (406 389). Ἐπομένως *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος ὀρθοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμεναν τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Παρατήρησις.

411. Ἐὰν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος προσθέσωμεν τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως αὐτοῦ, εὑρίσκομεν τὸ ὑλικὸν ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος.

Θεώρημα.

412. *Δύο ὀρθὰ πρίσματα ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἴσα.*

Διότι, ἐὰν ἐπιθέσωμεν τὸ ἓν πρίσμα ἐπὶ τὸ ἕτερον οὕτως, ὥστε νὰ ταυτισθῶσιν αἱ βάσεις αὐτῶν, αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ ἀνὰ δύο

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θὰ λάβωσι τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν (321), καὶ ἐπειδὴ εἶναι πᾶσαι ἴσαι πρὸς τὸ δεδομένον ὕψος ἀμφοτέρων τῶν πρισμάτων, αἱ ἄνω βάσεις τῶν δύο πρισμάτων θὰ ταυτισθῶσιν ὁμοίως· ἐπομένως τὰ δύο πρίσματα ταυτιζόμενα εἶναι ἴσα.

413. Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις ἐφαρμόζεται προκειμένου καὶ περὶ ἰσότητος ὀρθῶν κολοβῶν πρισμάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἴσας βάσεις, καὶ τὰς παραπλεύρους αὐτῶν ἀκμὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ.

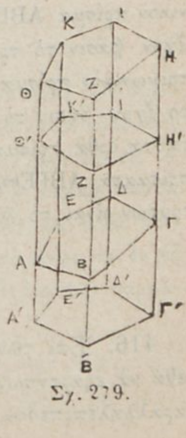
Θεώρημα.

414. *Πᾶν πλάγιον πρίσμα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθὸν πρίσμα, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶναι ἡ κάθετος τομὴ τοῦ πλαγίου πρίσματος, ὕψος δὲ μία τῶν παραπλεύρων αὐτοῦ ἀκμῶν.*

Ἔστω τὸ πλάγιον πρίσμα ΑΒΓΔΕΘΖΗΙΚ ἢ ΑΗ. Δι' ἑνὸς σημείου Ζ' τῆς ἀκμῆς ΒΖ ἂς φέρωμεν τὴν κάθετον τομὴν Θ'Ζ'Η'Ι'Κ'. ἂς προεκτείνωμεν δὲ τὴν ἀκμὴν ΒΖ κάτωθεν τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ κατὰ τὸ μῆκος ΒΒ'=ΖΖ', καὶ διὰ τοῦ σημείου Β' ἂς φέρωμεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς καθέτου τομῆς. Αἱ τομαὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου μετὰ τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν τοῦ πρίσματος προσεκβαλλομένων ὁρίζουσιν ἓν πολύγωνον Α'Β'Γ'Δ'Ε' ἴσον (406) πρὸς τὸ πολύγωνον Θ'Ζ'Η'Ι'Κ'.

Τὸ σχῆμα Α'Β'Γ'Δ'Ε'Θ'Ζ'Η'Ι'Κ' ἢ Α'Η' θὰ εἶναι ὀρθὸν πρίσμα ἔχον ὡς βάσιν μὲν τὴν κάθετον τομὴν τοῦ πλαγίου πρίσματος ΑΗ, ὕψος δὲ τὴν ἀκμὴν αὐτοῦ Β'Ζ' ἴσην τῇ ΒΖ.

Τούτου τεθέντος ὁ περιεχόμενος ὄγκος μεταξὺ τῆς κάτω βάσεως τοῦ πλαγίου πρίσματος ΑΗ καὶ τῆς ἄνω τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος Α'Η' εἶναι κοινὸν μέρος τῶν δύο πρισμάτων.



Σχ. 279.

Διὰ νὰ δείξωμεν δὲ ὅτι τὰ δύο πρίσματα εἶναι ἰσοδύναμα, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὰ δύο ὀρθὰ κολοβὰ πρίσματα ΑΒΓΔΕΑ'Β'Γ'Δ'Ε' καὶ Θ'Ζ'Η'Ι'Κ'ΘΖΗΙΚ ἢ Α'Γ καὶ Θ'Η εἶναι ἴσα (408)· ἡ ἰσότης δὲ τούτων ἀποδεικνύεται ἀμέσως διὰ τῆς ἐπιθέσεως (413), γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ δύο βάσεις Α'Β'Γ'Δ'Ε' καὶ

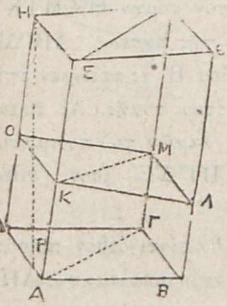
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θ′Ζ′Η′Ι′Κ′ εἶναι ἴσαι, προσέτι δὲ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι ἀκμαὶ Α′Α καὶ Θ′Θ, Β′Β καὶ Ζ′Ζ.... κ.τ.λ. Διότι Α′Α π.χ. ἰσοῦται μὲ τὴν παράπλευρον ἀκμὴν ἢ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος, ἠλαττωμένην κατὰ τὴν εὐθεῖαν Θ′Α καὶ ἡ Θ′Θ ἰσοῦται μὲ τὴν παράπλευρον ἀκμὴν ΑΘ τοῦ πλαγίου πρίσματος ΑΗ, ἠλαττωμένην κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν Θ′Α. κ.τ.λ.

Θεώρημα.

415. *Τὸ διὰ δύο ἀπέναντι ἀκμῶν παραλληλεπιπέδου διερχόμενον ἐπίπεδον διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο τριγωνικὰ πρίσματα ἰσοδύναμα.*

Ἔστω (Σχ. 251) τὸ τυχὸν παραλληλεπίπεδον ΑΖ. Τὸ διὰ τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ΑΕ καὶ ΓΖ διερχόμενον ἐπίπεδον ΑΕΖΓ διαιρεῖ τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦτο εἰς δύο τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΓ.ΘΖ καὶ ΑΓΔΕΖΗ, τὰ ὁποῖα θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι ἰσοδύναμα



Σχ. 280.

Ἂς φέρωμεν τὴν κάθετον τομὴν τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΖ. Ἡ τομὴ αὕτη ΟΚΛΜ εἶναι παραλληλόγραμμον (397) καὶ τὰ δύο ἴσα τρίγωνα ΚΛΜ καὶ ΚΜΟ, εἰς ἃ αὕτη διαιρεῖται ὑπὸ τῆς διαγωνίου ΚΜ, εἶναι αἱ κάθετοι τομαὶ τῶν τριγωνικῶν πρισμάτων ΑΒΓΕΖΗ, καὶ ΑΓΔΕΖΗ. Ἀλλὰ τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΕΗΖ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθὸν πρίσμα τὸ ἔχον βάσιν τὸ τρίγωνον ΚΛΜ καὶ ὕψος τὸ ΑΕ (414)· προσέτι τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΓΔΕΖΗ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθὸν πρίσμα τὸ ἔχον βάσιν τὸ τρίγωνον ΚΜΟ καὶ ὕψος τὴν ΑΕ. Τὰ δύο δὲ ταῦτα ὀρθὰ πρίσματα εἶναι ἴσα (412), ἐπομένως καὶ τὰ τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΓΕΘΖ καὶ ΑΓΔΕΖΗ εἶναι ἰσοδύναμα· ἄρα ἑκάτερον τούτων εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΖ.

Παρατήρησις

416. Ἐπὶ τῶν προηγουμένων θεωρημάτων στηριζόμενοι δυνάμεθα νὰ ἐξαρτήσωμεν τὴν μέτρησιν τοῦ πρίσματος ἐκ τῆς τοῦ παραλληλεπιπέδου, ἔχοντες συγχρόνως ὑπ᾿ ὄψει ὅτι ἡ μέτρησις

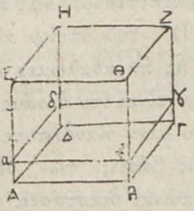
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ ὄγκου οἱουδήποτε παραλληλεπιπέδου ἀνάγεται εἰς τὴν μέτρησιν τοῦ ὄγκου τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

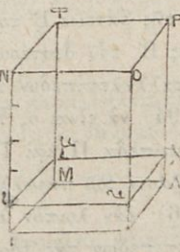
Διὰ νὰ εὕρωμεν πῶς ἐκφράζεται ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἂς ζητήσωμεν ὁποίας ὑφίσταται μεταβολὰς ὁ ὄγκος αὐτοῦ, ὅταν μεταβάλληται μόνον ἡ βάσις ἢ μόνον τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Θεώρημα.

417. *Οἱ ὄγκοι δύο ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, ἐχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν, εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν* (Σχ. 281, 282).



Σχ. 281



Σχ. 282

Ἔστωσαν τὰ δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ΑΖ καὶ ΙΡ, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις ΑΒΓΔ καὶ ΙΚΛΜ εἶναι ἴσαι. Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι τὰ ὕψη ΑΕ καὶ ΙΝ ἔχουσι κοινὸν μέτρον Αα=Ιι καὶ ἂς τεθῇ ὅτι ἡ μονὰς αὕτη τοῦ μήκους περιέχεται ἐν μὲν τῇ ΑΕ 4κις ἐν δὲ τῇ ΙΝ 5κις. Θέλομεν ἔχει $\frac{AE}{IN} = \frac{4}{5}$.

Δι' ἁπάντων δὲ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκατέρου τῶν ὑψῶν τῶν παραλληλεπιπέδων ἂς φέρωμεν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν· τὸ μὲν παραλληλεπίπεδον ΑΖ θὰ χωρισθῇ εἰς 4 ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα, τὸ δὲ ΙΡ εἰς 5. Τὰ μερικὰ ταῦτα παραλληλεπίπεδα θὰ εἶναι πάντα ἴσα πρὸς ἄλληλα, ὡς ὀρθὰ πρίσματα ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη (412)· ἐπομένως τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κοινὸν μέτρον τῶν δεδομένων παραλληλεπιπέδων ΑΖ καὶ ΙΡ, καὶ οὕτω θέλομεν ἔχει

$$\frac{\text{παραλλ. } AZ}{\text{παραλλ. } IP} = \frac{4}{5}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπομένως οἱ ὄγκοι τῶν παραλληλεπιπέδων τούτων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν.

Ἐὰν τὰ δύο ὕψη ΑΕ καὶ ΙΝ εἶναι ἀσύμμετρα, ἐφαρμόζομεν τὸν γνωστὸν συλλογισμόν (105).

Πόρισμα.

418. *Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα, ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.*

Ἔστωσαν Π καὶ Π′ δύο παραλληλεπίπεδα, καὶ ἂς παραστήσωμεν διὰ υ τὸ ὕψος αὐτῶν, διὰ β καὶ γ τὰς διαστάσεις (βάσιν καὶ ὕψος) τῆς βάσεως Β τοῦ πρώτου διὰ β′ καὶ γ′ τὰς διαστάσεις τῆς βάσεως Β′ τοῦ δευτέρου παραλληλεπιπέδου. Ἂς λάβωμεν δὲ τρίτον παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον Π″, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς διαστάσεις (394) νὰ εἶναι υ, β′ καὶ γ. Ἂς παραβάλωμεν ἤδη τὰ δύο παραλληλεπίπεδα Π καὶ Π″. Γνωστὸν εἶναι ὅτι δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς βάσιν τοῦ παραλληλεπιπέδου μίαν οἱανδήποτε τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ (396)· ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν ὡς βάσεις τῶν θεωρουμένων παραλληλεπιπέδων τὰς ἕδρας, ὧν αἱ κοιναὶ διαστάσεις εἶναι υ καὶ καὶ γ, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι τὰ δύο ταῦτα παραλληλεπίπεδα ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν, καὶ ἐπομένως εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν β καὶ β′· ἐπομένως θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\Pi}{\Pi''} = \frac{\beta}{\beta'} \qquad (1)$$

Ἂς παραβάλωμεν ἤδη τὰ παρελληλεπίπεδα Π′ καὶ Π″ καὶ ἂς λάβωμεν ὡς βάσεις αὐτῶν τὰς ἕδρας, ὧν αἱ διαστάσεις εἶναι υ καὶ β′. Τὰ δύο ταῦτα παραλληλεπίπεδα ἔχοντα οὕτω τὴν αὐτὴν βάσιν εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν γ καὶ γ′· καὶ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\Pi''}{\Pi'} = \frac{\gamma}{\gamma'} \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντες δὲ κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$\frac{\Pi'.\Pi''}{\Pi''.\Pi'} = \frac{\beta.\gamma.}{\beta'.\gamma'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\beta.\gamma}{\beta'.\gamma'} = \frac{B}{B'}$$

Ἐξαγγέλλομεν δὲ τὴν ἀποδειχθεῖσαν ταύτην πρότασιν καὶ ὡς ἑξῆς· *Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα, ἔχοντα μίαν τῶν τριῶν αὐ-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῶν διαστάσεων τὴν αὐτήν, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ γινόμενα τῶν δύο ἄλλων διαστάσεων αὐτῶν.

Θεώρημα.

419. *Παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ὁ ὄγκος παρίσταται διὰ τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες παριστῶσι τὰ μήκη τῶν τριῶν ἀκμῶν μιᾶς τῶν στερεῶν αὐτοῦ γωνιῶν.*

Ἔστωσαν πρῶτον δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα Π καὶ Π', ὧν αἱ τρεῖς διαστάσεις, μετρηθεῖσαι διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος τοῦ μήκους, παρίστανται διὰ τῶν ἀριθμῶν α, β, γ καὶ 1, β, γ· θέλομεν ἔχει (418)

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\alpha}{1} \quad (1).$$

Ἔστωσαν δεύτερον τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα Π' καὶ Π'' ἔχοντα διαστάσεις 1, β, γ, καὶ 1, 1, γ θέλομεν ἔχει ὁμοίως·

$$\frac{\Pi'}{\Pi''} = \frac{\beta}{1} \quad (2).$$

Ἔστωσαν τρίτον τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα Π'' καὶ Π''', ἔχοντα διαστάσεις 1, 1, γ καὶ 1, 1, 1· θέλομεν ἔχει

$$\frac{\Pi''}{\Pi'''} = \frac{\gamma}{1} \quad (3).$$

Πολλαπλασιάζοντες δὲ κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1, 2, 3) λαμβάνομεν·

$$\frac{\Pi.\Pi'.\Pi''}{\Pi'.\Pi''.\Pi'''} = \frac{\alpha.\ \beta.\ \gamma}{1.\ 1.\ 1} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Pi}{\Pi'''} = \alpha.\ \beta.\ \gamma. \quad (4).$$

Ἀλλὰ τὸ παραλληλεπίπεδον Π''' παριστᾷ κύβον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἰσοῦται τῇ μονάδι τοῦ μήκους· εἶναι λοιπὸν τοῦτο ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου 1κ.μ., καὶ ἡ ἀνωτέρω ἰσότης (4) γίνεται

$$\Pi = \alpha.\ \beta.\ \gamma.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον α. β (καὶ ἐν γένει τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἐκ τῶν τριῶν (ἀκμῶν) παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς τῶν ἑδρῶν, θεωρουμένης ὡς βάσεως τοῦ παραλληλεπιπέδου, ἐνῷ ἡ τρίτη ἀκμὴ παριστᾷ τὸ ὕψος, ἕπεται ὅτι *ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

420. Ἐὰν παραστήσωμεν δι' α, β, γ, τὰς τρεῖς διαστάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου Π καὶ δι' α', β', γ' τὰς διαστάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου Π', δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\alpha.\beta.\gamma}{\alpha'.\beta'.\gamma'}$$

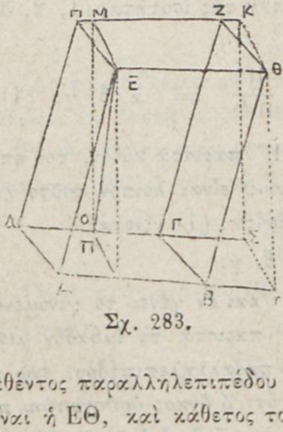
Ἤτοι ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν γινομένων τῶν τριῶν αὐτῶν διαστάσεων.

421. *Ὁ ὄγκος κύβου, κατὰ τὰ προηγουμένως ἐκτεθέντα, ἰσοῦται πρὸς τὴν τρίτην δύναμιν τῆς ἀκμῆς αὐτοῦ*, ἐξ οὗ καὶ ἡ συνωνυμία τῶν λέξεων κύβος καὶ τρίτη δύναμις ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ.

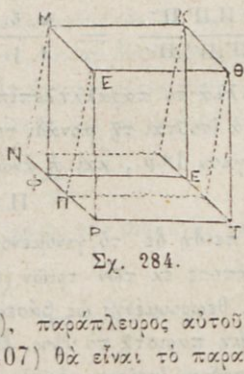
Θεώρημα

421. *Ὁ ὄγκος παραλληλεπιπέδου οἱουδήποτε ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ἔστω (Σχ. 283) τὸ τυχὸν παραλληλεπίπεδον ΑΖ, ἔχον βάσιν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἢ ΕΘΖΗ καὶ ὕψος τὴν κάθετον ΕΡ, ἠγμένην ἐκ τῆς κορυφῆς Ε ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ. Ἂς φέρωμεν ἐκ τοῦ σημείου Ε καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΕΘΖΗ τὴν ΕΜ κάθετον ἐπὶ τὴν ΗΖ. Ἐὰν λάβωμεν τὴν ἕδραν ΑΘΗΔ ὡς βάσιν τοῦ



Σχ. 283.



Σχ. 284.

προτεθέντος παραλληλεπιπέδου (394), παράπλευρος αὐτοῦ ἀκμὴ θὰ εἶναι ἡ ΕΘ, καὶ κάθετος τομὴ (407) θὰ εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΕΜΟΡ, ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΜΕΡ. Τὸ παραλληλεπίπεδον λοιπὸν ΑΖ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθὸν παραλλη-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λεπίπεδον ΕΣ ἔχον ὡς βάσιν τὴν κάθετον τομὴν ΕΜΟΡ καὶ ὕψος τὴν ἀκμὴν ΕΘ. (414).

Τούτου τεθέντος, ἂς ἀνασχηματίσωμεν ἰδιαιτέρως χάριν ἁπλότητος (Σχ. 284) τὸ ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον ΡΚ, καὶ ἂς κατασκευάσωμεν ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΠΚ, ἔχον διαστάσεις τὰς ΕΘ, ΕΜ, ΕΡ. Τὸ ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον ΡΚ καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΠΚ οὕτως ὁριζόμενα ἔχουσι μὴ κοινὰ μέρη τὰ δύο ὀρθὰ πρίσματα, τὰ ἔχοντα ὕψος μὲν τὴν εὐθεῖαν ΕΘ, βάσεις δὲ τὰ δύο τρίγωνα ΕΠΡ καὶ ΜΝΟ. Ἐπειδὴ τὰ δύο ταῦτα πρίσματα εἶναι ἴσα (412), τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΠΚ καὶ ΓΚ θὰ εἶναι ἰσοδύναμα· ἐπομένως καὶ τὸ δεδομένον τυχὸν παραλληλεπίπεδον ΑΖ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΠΚ. Ἄρα τὸ γινόμενον ΕΘ. ΕΜ. ΕΠ τὸ παριστῶν τὸ μέτρον (418) τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΠΚ παριστᾷ συγχρόνως τὸν ὄγκον τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΖ. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον ΕΘ. ΕΜ παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΕΘΖΗ τοῦ παραλληλεπιπέδου τούτου καὶ ΕΠ τὸ ὕψος αὐτοῦ, συμπεραίνομεν ὅτι *ὁ ὄγκος παντὸς παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Θεώρημα

423. *Ὁ ὄγκος οἱουδήποτε πρίσματος ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

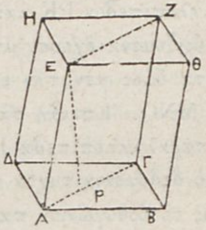
1ον. Ἔστω (Σχ. 285) τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΕΘΖ· διὰ τοῦ ἄκρου Α τῆς ἀκμῆς ΑΒ ἂς φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον ΑΔΗΕ παράλληλον πρὸς τὴν ἕδραν ΒΓΖΘ, καὶ διὰ τοῦ ἄκρου Γ τῆς ἀκμῆς ΒΓ τὸ ἐπίπεδον ΓΔΗΖ παράλληλον πρὸς τὴν ἕδραν ΑΒΘΕ, ἂς προεκβάλωμεν δὲ συγχρόνως τὰς δύο βάσεις τοῦ πρίσματος μέχρις οὗ συναντήσωσι τὰ ἐπίπεδα ταῦτα. Οὕτω σχηματίζεται (398) τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΖ, ἔχον ἀκμὰς μιᾶς τῶν στερεῶν αὐτοῦ γωνιῶν Β τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ καὶ ΒΘ.

Ἡ ἕδρα ΑΓΖΕ τοῦ προτεθέντος τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι διαγώνιον ἐπίπεδον τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΖ, καὶ τὸ πρίσμα τοῦτο ΑΒΓΕΘΖ θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ αὐτοῦ (415).

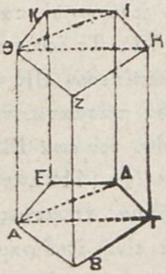
Καὶ ἐπειδὴ ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΖ ἔχει ὡς μέτρον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ΑΒΓΔ ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ ΕΡ (422), ὁ ὄγκος τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ΑΒΓΕΘΖ θὰ ἔχῃ ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τούτου, ἤτοι τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ΑΒΓ, ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, ἐπὶ τὸ ὕψος ΕΡ.



Σχ. 285.



Σχ. 286.

2ον. Ἔστω (Σχ. 286) τὸ τυχὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΘΖΗΙΚ. Χωρίζομεν αὐτὸ εἰς τριγωνικὰ πρίσματα δι' ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τῆς ἀκμῆς ΑΘ καὶ ἑκάστης τῶν ἀκμῶν ΓΗ καὶ ΔΙ. Τὰ τριγωνικὰ ταῦτα πρίσματα ἔχουσιν ὡς βάσεις τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ καὶ ΑΔΕ, τὰ ὁποῖα συναποτελοῦσι τὴν βάσιν τοῦ δεδομένου πρίσματος, καὶ ὕψος κοινὸν τὸ τοῦ πρίσματος υ· καὶ παριστῶντες διὰ Τ, Τ' καὶ Τ'' τοὺς ὄγκους τῶν τριγωνικῶν πρισμάτων καὶ δι' Ο τὸν ὄγκον τοῦ προτεθέντος πρίσματος θέλομεν ἔχει·

$$\mathrm{T} = \mathrm{ΑΒΓ}.\ \upsilon \qquad \mathrm{T}' = \mathrm{ΑΓΔ}.\ \upsilon \qquad \mathrm{T}'' = \mathrm{ΑΔΕ}.\ \upsilon$$

καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας ταύτας λαμβάνομεν

$$\mathrm{T} + \mathrm{T}' + \mathrm{T}'' = \mathrm{ΑΒΓ}.\upsilon + \mathrm{ΑΓΔ}.\upsilon + \mathrm{ΑΔΕ}.\upsilon$$

ἢ $$\mathrm{O} = (\mathrm{ΑΒΓ} + \mathrm{ΑΡΔ} + \mathrm{ΑΔΕ}).\ \upsilon$$

ἢ $$\mathrm{O} = \mathrm{ΑΒΓΔΕ}.\ \upsilon.$$

424. Παριστῶντες καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος διὰ Β, σχηματίζομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν τύπον

$$\mathrm{O} = \mathrm{B}.\ \upsilon$$

Δύο πρίσματα, ἔχοντα βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους καὶ ὕψος τὸ αὐτό, εἶναι ἰσοδύναμα. Καὶ δύο πρίσματα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων ἐπὶ τὰ ὕψη αὐτῶν. Δύο δὲ πρίσματα ἔχοντα ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους βάσεις εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

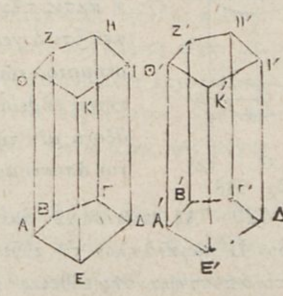
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Καὶ δύο πρίσματα ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.

Θεώρημα.

425. *Δύο πρίσματα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι τὰς βάσεις αὐτῶν ἴσας καὶ μίαν ἕδραν ἴσην μιᾷ ἕδρᾳ καὶ ὁμοίως κειμένην, προσέτι δὲ καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένας διέδρους γωνίας ἴσας* (Σχ. 287).

Ἔστωσαν τὰ δύο πρίσματα ΑΗ καὶ Α'Η' ἔχοντα τὴν βάσιν ΑΒΓΔΕ ἴσην τῇ Α'Β'Γ'Δ'Ε', τὴν ἕδραν ΑΒΘΖ ἴσην τῇ Α'Β'Θ'Ζ' καὶ τὴν δίεδρον γωνίαν ΑΒ ἴσην τῇ Α'Β'.



Σχ. 287.

Ἂς θέσωμεν τὸ ἓν πρίσμα ἐπὶ τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε αἱ βάσεις αὐτῶν νὰ ταυτισθῶσιν. Ἐπειδὴ ἡ δίεδρος γωνία Α'Β' εἶναι ἴση τῇ διέδρῳ ΑΒ, ἡ ἕδρα Α'Β'Ζ'Θ' θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας ΑΒΖΘ· καί, ἐπειδὴ αἱ ἕδραι αὗται εἶναι ἴσαι, ἡ γωνία ΑΒΖ εἶναι ἴση τῇ Α'Β'Ζ', καὶ ἡ ἀκμὴ Β'Ζ' θὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀκμῆς ΒΖ καὶ ἡ κορυφὴ Ζ' θὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ σημείου Ζ, διότι Β'Ζ'=ΒΖ. Ὁμοίως δὲ καὶ ἡ κορυφὴ Θ' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Θ, καὶ ἑπομένως καὶ αἱ ἄνω βάσεις τῶν δύο πρισμάτων θὰ ταυτισθῶσιν, ἄρα θὰ ταυτισθῶσι καὶ αἱ λοιπαὶ παράπλευροι αὐτῶν ἀκμαὶ καὶ αἱ ἕδραι ἑκάστη ἑκάστῃ, καὶ τὰ δύο πρίσματα, οὕτω ταυτιζόμενα, εἶναι ἴσα.

Β'. ΠΕΡΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

426. Καλεῖται *κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια* ἡ παραγομένη ὑπὸ εὐθείας ΖΖ' περιφερομένης περὶ ἄλλην ἀκίνητον εὐθεῖαν ΧΧ', παραλλήλου πρὸς ταύτην καὶ διατηρούσης σταθερὰν ἀπὸ τῆς ΧΧ' ἀπόστασιν (Σχ. 288).

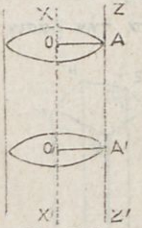
Ἡ ἀκίνητος εὐθεῖα ΧΧ' καλεῖται *ἄξων τῆς ἐπιφανείας*, ἡ δὲ κινητὴ εὐθεῖα ΖΖ' καλεῖται *γενέτειρα*.

427. Πᾶν σημεῖον Α τῆς εὐθείας ΖΖ' γράφει μίαν περιφέρειαν, τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ τὸ κέντρον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

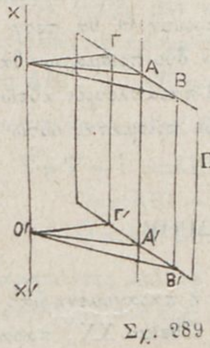
κεῖται ἐπ' αὐτοῦ τοῦ ἄξονος, διότι κατὰ τὴν περιφορὰν ἡ κάθετος ΑΟ ἡ ἠγμένη ἐκ τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὸν ἄξονα ΧΧ' μένει διαρκῶς κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ διατηρεῖ σταθερὸν τὸ μῆκος αὐτῆς.

428. Καλεῖται κάθετος τομὴ πᾶσα τομὴ γινομένη ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα. Ἐκ τῆς προηγουμένης θεωρίας ἐξάγεται ὅτι *αἱ κάθετοι τομαὶ τῆς αὐτῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας εἶναι περιφέρειαι κύκλων ἴσαι.* Ἡ κοινὴ ἀκτὶς τῶν κύκλων τούτων, ἤτοι τὸ ἀπόστημα τῶν δύο παραλλήλων ΧΧ' καὶ ΖΖ', εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, καὶ βλέπομεν ὅτι *ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ διαστήματος τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ δεδομένης ἀκινήτου εὐθείας εἶναι κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ἔχουσα ἄξονα μὲν τὴν εὐθεῖαν ταύτην, ἀκτῖνα δὲ τὸ δεδομένον ἀπόστημα ἑκάστου τῶν σημείων ἀπὸ τῆς εὐθείας.*

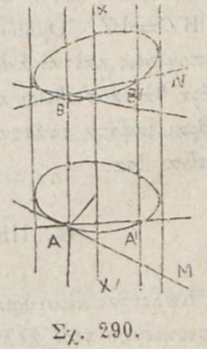


Σχ. 288.

429. Ἄς θεωρήσωμεν ἀκίνητον εὐθεῖαν ΧΧ' (Σχ. 289), ἓν ἐπίπεδον Π παράλληλον τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ, καὶ ἃς παραστήσωμεν διὰ Ρ τὸ ἀπόστημα τῆς εὐθείας ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, τὸ ἀπόστημα τῆς εὐθείας ἀπὸ τῆς προβολῆς αὐτῆς ΑΑ' ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.



Σχ. 289



Σχ. 290.

Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου Π τῶν κειμένων εἰς ὡρισμένην ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς εὐθείας ΧΧ' ἀποτελεῖται ἐκ δύο εὐθειῶν ΒΒ' καὶ ΓΓ' παραλλήλων τῇ εὐθείᾳ ΧΧ', κειμένων ἑκατέρωθεν τῆς ΑΑ' καὶ ἀπεχουσῶν ταύτης ἀπόστασιν ΑΒ, οὖσαν πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΟΒ, τοῦ ὁποίου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἡ ὑποτείνουσα ἰσοῦται δεδομένῃ εὐθείᾳ δ, καὶ ἡ ἑτέρα κάθετος πλευρὰ εἶναι ἴση τῇ Ρ.

Τοῦτο δὲ συμβαίνει ἐφ' ὅσον ἡ δ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς Ρ· ὅταν δὲ ἡ δ γείνῃ ἴση τῇ Ρ, ὁ γεωμετρικὸς τόπος εἶναι αὐτὴ ἡ εὐθεῖα ΑΑ'. Ὅταν δὲ ἡ εὐθεῖα δ εἶναι μικροτέρα τῆς Ρ, γεωμετρικὸς τόπος δὲν ὑφίσταται.

Οὕτως ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα κυλινδρικῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας φέρει δύο γενετείρας τῆς ἐπιφανείας ταύτης, ἢ μίαν, ἢ οὐδὲν ἔχει σημεῖον μετὰ τῆς ἐπιφανείας ταύτης κοινόν, καθόσον ἡ ἀπόστασις τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἀπὸ τοῦ ἄξονος εἶναι μικροτέρα, ἴση, ἢ μεγαλειτέρα τῆς ἀκτῖνος τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

430. Ἂς θεωρήσωμεν πρὸς στιγμὴν τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ ἐπίπεδον καὶ ἡ ἐπιφάνεια συναντῶνται κατὰ μίαν καὶ μόνην γενέτειραν ΑΓ τῆς ἐπιφανείας (Σχ. 290).

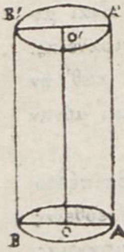
Τοιοῦτον ἐπίπεδον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς *ὁρικὴ θέσις* ἐπιπέδου διερχομένου δι' ἀκινήτου γενετείρας ΑΒ καὶ δι' ἑτέρας, Α'Β' εὐθείας ἥτις πλησίον ταύτης κειμένη κινεῖται ἐπὶ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας οὕτως, ὥστε νὰ τείνῃ συνεχῶς νὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ΑΒ. Ἔστω οὕτω ΒΒ' μία καμπύλη οἱαδήποτε κεχαραγμένη ἐπὶ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας· ἡ τέμνουσα ΒΒ' ἡ ἑνώνουσα τὰ σημεῖα Β καὶ Β', καθ' ἃ ἡ καμπύλη συναντᾷ τὰς γενετείρας ΑΒ καὶ Α'Β', μένει συνεχῶς ἐπὶ τοῦ στρεφομένου ἐπιπέδου ΑΒ Α'Β'· ἐξ ἄλλου δὲ ἡ τέμνουσα αὕτη γίνεται ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης ΒΒ', ὅταν ἡ κινητὴ γενέτειρα Α'Β' συμπέσῃ μετὰ τῆς ΑΒ, ἤτοι ὅταν τὸ κινητὸν ἐπίπεδον ΑΒΑ'Β' λάβῃ τὴν ὁρικὴν αὐτοῦ θέσιν· ἑπομένως τὸ ὁρικὸν τοῦτο ἐπίπεδον περιέχει τὴν ἐφαπτομένην ΒΝ'. Οὕτω τὸ θεωρηθὲν ὁρικὸν ἐπίπεδον περιέχει τὰς ἐφαπτομένας εἰς πάσας τὰς καμπύλας, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας καὶ κατὰ τὰ σημεῖα, καθ' ἃ αἱ καμύλαι αὗται σαναντῶσι τὴν γενέτειραν ΑΒ. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καλεῖται *ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον* κατὰ τὴν γενέτειραν ΑΒ.

Ἡ γενέτειρα ΑΒ καὶ ἡ ἐφαπτομένη εἰς οἱανδήποτε καμπύλην κεχαραγμένην ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως ταύτης μετὰ τῆς ΑΒ ἀρκοῦσιν ὅπως ὁρίσωσι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον κατὰ τὴν γενέτειραν ταύτην. Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψει ἰδιαι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τέρως τὴν ἐφαπτομένην ΑΜ εἰς τὴν κάθετον τομὴν ΑΑ', παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς γενετείρας, καθ' ἣν τὸ ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς ἐπιφανείας. Τῳόντι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον περιέχει τὴν εὐθεῖαν ΑΜ, ἥτις σχηματίζουσα ὀρθὴν γωνίαν μετὰ τῆς ΑΟ καὶ τῆς ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΒΑΟΧ.

431. Καλεῖται *κύλινδρος* ἐκ περιστροφῆς τὸ στερεὸν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καὶ δύο ἐπιπέδων καθέτων ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς ἐπιφανείας ταύτης· ἢ καὶ ἄλλως τὸ σχῆμα τὸ παραγόμενον ἐκ τῆς περιστροφῆς ὀρθογωνίου ΑΑ'ΟΟ' περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ΟΟ' (Σχ. 291).



Σχ. 291.

Ἡ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ἡ παραγομένη ὑπὸ τῆς πλευρᾶς ΑΑ' καλεῖται *παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου*· οἱ δὲ κύκλοι οἱ γραφόμενοι ὑπὸ τῶν πλευρῶν ΟΑ καὶ Ο'Α' καλοῦνται *βάσεις* καὶ ἡ εὐθεῖα ΟΟ' *ἄξων* ἢ *ὕψος* τοῦ κυλίνδρου.

432. Δύο κύλινδροι ἐκ περιστροφῆς λέγονται *ὅμοιοι*, ὅταν παράγωνται ὑπὸ ὁμοίων ὀρθογωνίων, ἤτοι ὅταν ὁ λόγος τῶν ὑψῶν ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων αὐτῶν.

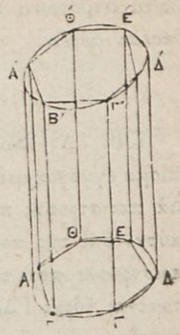
Θεώρημα.

433. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κυλίνδρου ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ἐὰν κατασκευάσωμεν ὀρθὸν πρίσμα ἔχον βάσιν μὲν τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΘ ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καὶ ὕψος τὸ τοῦ κυλίνδρου (Σχ. 292), τὸ ὀρθὸν τοῦτο πρίσμα θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον. Ἡ δὲ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθοῦ τούτου πρίσματος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ. (409). Ἐπομένως, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως αὐξηθῇ ἀπεριορίστως, ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου τείνει πρὸς ὡρισμένον ὅριον, ἀνεξάρτητον τοῦ νόμου, καθ' ὃν ἐνεγράφη, ὅπερ εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου (218), ἐνῷ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος μένει σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου. Ἄρα, καθ' ὅσον αὐξάνεται ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βά-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σεως, τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος αὐξάνει καὶ τείνει εἰς ὡρισμένον ὅριον (214), τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν *κυρτὴν* ἢ *παράπλευρον ἐπιφάνειαν* τοῦ κυλίνδρου.



Σχ. 292

Τούτου τεθέντος, ἔστωσαν Ε, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια, Π ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως καὶ Υ τὸ ὕψος τοῦ θεωρηθέντος κυλίνδρου· ἔστωσαν δὲ Ε΄ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καὶ Π΄ ἡ περίμετρος τῆς βάσεως τοῦ ἐγγεγραμμένου ὀρθοῦ πρίσματος· θέλομεν ἔχει

$$E' = \Pi' . \Upsilon$$

Ὅταν αὐξάνηται ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος, τὸ μὲν Ε΄ τείνει πρὸς τὸ Ε, τὸ δὲ Π΄ πρὸς τὸ Π· ἐπομένως εἰς τὸ ὅριον θέλομεν ἔχει

$$E = \Pi . \Upsilon .$$

Πορίσματα.

434. Ἐὰν παραστήσωμεν δι᾽ Α τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου θέλομεν ἔχει $\Pi = 2\pi A$· καὶ ἐπομένως $E = 2\pi A . \Upsilon$.

Προσθέτοντες δὲ εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο βάσεων, ἤτοι τὸ $2\pi A^2$ εὑρίσκομεν τὸ ὁλικὸν ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου

$$K = 2\pi A . \Upsilon + 2\pi A^2 = 2\pi A . (A + \Upsilon).$$

435. Ἔστωσαν Ε καὶ Ε΄ τὰ ἐμβαδὰ τῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν, Κ καὶ Κ΄ τὰ ὁλικὰ ἐμβαδὰ Υ καὶ Υ΄ τὰ ὕψη δύο ἐκ περιστροφῆς κυλίνδρων ὁμοίων. Θέλομεν ἔχει (432)

$$\frac{A}{A'} = \frac{\Upsilon}{\Upsilon'} = \frac{A+\Upsilon}{A'+\Upsilon'}.$$ ('Αριθμ. Κορὲ § 183). Ἐπομένως

$$\frac{E}{E'} = \frac{A.\Upsilon}{A'.\Upsilon'} = \frac{A}{A'} . = \frac{\Upsilon}{\Upsilon'} = \frac{\Upsilon^2}{\Upsilon'^2} = \frac{A^2}{A'^2}$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{K}{K'} = \frac{A.(A+\Upsilon)}{A'(A'+\Upsilon')} = \frac{A}{A'} . \frac{A+\Upsilon}{A'+\Upsilon'} = \frac{\Upsilon^2}{\Upsilon'^2} = \frac{A^2}{A'^2} .$$

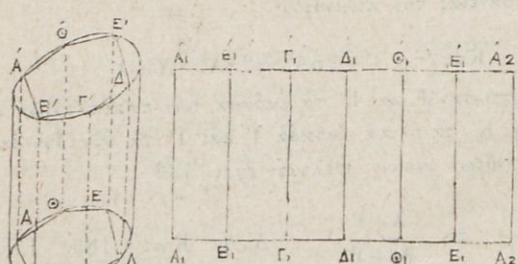
Ἤτοι· *Τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν ἢ μόνον τῶν κυρτῶν*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπιφανειῶν δύο ἐκ περιστροφῆς ὁμοίων κυλίνδρων εἶναι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὑψῶν ἢ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων αὐτῶν.

Σημείωσις.

436. Ἂς θεωρήσωμεν κύλινδρον ἐκ περιστροφῆς καὶ κανονικὸν πρίσμα ἐγγεγραμμένον ἐν αὐτῷ τὸ ΑΒΓΔΕΘΑ′Β′Γ′Δ′Ε′Θ′ (Σχ. 293). Διὰ περιστροφῆς περὶ τὴν ἀκμὴν ΒΒ′ τῆς ἕδρας ΑΒΒ′Α′ ἂς φέρωμεν ταύτην ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς ἕδρας ΒΓΓ′Β′· ἔπειτα δι' ὁμοίας περιστροφῆς περὶ τὴν ΓΓ′ ἂς θέσωμεν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τῆς ἑπομένης ἕδρας ΓΔΔ′Γ′ τὸ ἤδη σχηματισθὲν ὑπὸ τῶν δύο πρώτων ἐπίπεδον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις ὅτου πᾶσαι αἱ παράπλευροι ἕδραι τοῦ πρίσματος ταχθῶσι πᾶσαι κατὰ σειρὰν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς τελευταίας ἕδρας ΑΘΑ′Θ′. Κατὰ τὴν περιστροφὴν αὐτῆς περὶ τὴν ἀκμὴν ΒΒ′ ἡ πλευρὰ ΑΒ μένει διαρκῶς κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ταύτην, ἐπομένως κατὰ τὴν νέαν αὐτῆς θέσιν θὰ εἶναι προσεκβολὴ τῆς ΓΒ· ὁμοίως ἡ εὐθεῖα ΑΒΓ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς ΔΓ κτλ. Ἑπομένως εὑρίσκομεν ἐπὶ τέλους ἓν ὀρθογώνιον $Α_1, Α_2 Α'_2 Α_1'$, (Σχ. 293), τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι αὐτὸ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος, ἡ δὲ βάσις εἶναι ἡ περίμετρος τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος. Τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἶναι τὸ *ἀνάπτυγμα* τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος.



Σχ. 293.

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν τοῦ κανονικοῦ πρίσματος τοῦ εἰς τὸν κύλινδρον ἐγγεγραμμένου αὐξηθῇ ἀπεριορίστως, τὸ ὀρθογώνιον $Α_1, Α_2 Α'_2 Α_1'$, διατηρεῖ τὸ αὐτὸ ὕψος, τὸ δὲ μῆκος τῆς βάσεως

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

A_1 A_2 τείνει πρὸς τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου. Τὸ ὁρικὸν ὀρθογώνιον, ὅπερ ἔχει ὕψος τὸ τοῦ κυλίνδρου καὶ βάσιν ἴσην πρὸς τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, καλεῖται ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Θεώρημα.

437. *Ὁ ὄγκος κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ἐνθυμούμενοι τὰ ἐν § 433 δυνάμεθα ἀμέσως νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ ὅριον τῶν ὄγκων τῶν ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένων ὀρθῶν πρισμάτων, ὧν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν αὐξάνει ἀπεριορίστως. Κατὰ ταῦτα ἔστωσαν Ο ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου, Β τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ Υ τὸ ὕψος αὐτοῦ· ἔστωσαν προσέτι ο ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ ἐγγεγραμμένου πρίσματος, β τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ υ τὸ ὕψος αὐτοῦ· θέλομεν ἔχει (423).

$$ο = β. υ.$$

Ἀλλ' ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν τοῦ πρίσματος αὐξάνηται ἀπεριορίστως, τὸ ο τείνει πρὸς τὸ Ο καὶ τὸ β πρὸς τὸ Β· ἑπομένως εἰς τὸ ὅριον θέλομεν ἔχει

$$Ο = Β. Υ.$$

Πόρισμα.

438. Ἐὰν Α εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, θέλομεν ἔχει $Β=πΑ^2$· ἑπομένως

$$Ο = π\, Α.^2\, Υ.$$

439. Ἔστωσαν Ο καὶ Ο' οἱ ὄγκοι Α καὶ Α' αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων καὶ Υ, Υ' τὰ ὕψη δύο ὁμοίων κυλίνδρων· θέλομεν ἔχει

$$\frac{Α}{Α'} = \frac{Υ}{Υ'}. \quad \text{ἑπομένως}$$

$$\frac{Ο}{Ο'} = \frac{Α.^2 Υ}{Α'^2. Υ'} = \left(\frac{Α}{Α'}\right)^2 . \frac{Υ}{Υ'} = \frac{Α^3}{Α'^3} = \frac{Υ^3}{Υ'^3}. \quad \text{ἤτοι}$$

Οἱ ὄγκοι δύο ὁμοίων κυλίνδρων εἶναι πρὸς ἀλλήλους, ὡς οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων ἢ ὡς οἱ κύβοι τῶν ὑψῶν αὐτῶν.

440. Ἐν γένει καλεῖται *κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια* (Σχ. 294) πᾶσα

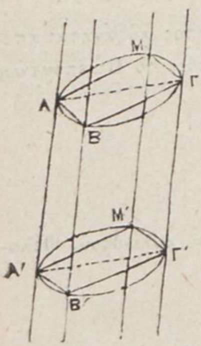
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπιφάνεια παραγομένη ὑπὸ εὐθείας ΑΑ', ἥτις μένουσα διαρκῶς παράλληλος ἑαυτῇ καθ' ὡρισμένην διεύθυνσιν στηρίζεται ἐπὶ καμπύλης οἱασδήποτε ΑΒΓ καὶ ὀλισθαίνει ἐπ' αὐτῆς. Ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι ἡ *ἰθύνουσα* τῆς ἐπιφανείας, ἡ δὲ κινητὴ εὐθεῖα ἡ *γενέτειρα* αὐτῆς.

Θεώρημα.

441. *Αἱ τομαὶ κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι ἴσαι* (Σχ. 294).

Τῷόντι ἔστωσαν ἡ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ΑΑ'ΓΓ' καὶ δύο τομαὶ ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' γινόμεναι ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων. Ἄς λάβωμεν τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Μ ἐπὶ τῆς πρώτης τομῆς, καὶ ἄς φέρωμεν τὰς γενετείρας ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' καὶ ΜΜ', αἵτινες συναντῶσι τὴν δευτέραν τομὴν εἰς τὰ σημεῖα Α', Β', Γ', Μ'. Τὰ τετράπλευρα ΑΒΓΜ καὶ Α'Β'Γ'Μ' εἶναι ἐφαρμόσιμα ὡς ἀντικείμεναι βάσεις τετραγωνικοῦ πρίσματος. Οὕτω δέ, ἐὰν θέσωμεν τὸ ἐπίπεδον τῆς δευτέρας τομῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς πρώτης οὕτως, ὥστε τὰ τρία σημεῖα Α', Β', Γ' νὰ πέσωσιν ἐπὶ τῶν ἀντιστοιχούντων σημείων Α, Β, Γ, πᾶν σημεῖον, ἔστω τὸ Μ', τῆς δευτέρας τομῆς θὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος αὐτῷ Μ τῆς πρώτης τομῆς.



Σχ. 294.

442. Ἐὰν φέρωμεν ἐξ ἑνὸς σημείου κάθετον ἢ πλαγίαν ἐπὶ ἐπίπεδον, ὁ ποὺς τῆς καθέτου ταύτης ἢ τῆς πλαγίας εἶναι ἡ *ὀρθογώνιος* ἢ *πλαγία προβολὴ* τοῦ σημείου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (326).

Ὅταν ἅπαξ ὁρίσωμεν πλαγίαν τινὰ προβολήν, ἡ διεύθυνσις τῆς προβαλλούσης εὐθείας πρέπει νὰ μένῃ ἡ αὐτὴ διὰ πάντα τὰ σημεῖα τοῦ προβαλλομένου σχήματος. Τούτου τεθέντος ἡ τομὴ Α'Β'Γ' δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πλαγία προβολὴ τῆς ΑΒΓ, καὶ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν ὡς ἑξῆς· ***Πᾶσα ἐπίπεδος καμπύλη ἰσοῦται πρὸς τὴν πλαγίαν ἢ τὴν ὀρθογώνιον αὐτῆς προβολὴν ἐπὶ παράλληλον ἐπίπεδον.***

443. Καλεῖται *κάθετος τομὴ* κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἡ τομὴ ἡ γινομένη ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν γενέτειραν τῆς ἐπιφανείας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

444. Ὁ *κύλινδρος εἶναι στερεὸν περιεχόμενον ὑπὸ κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων τομῶν*. Αἱ τομαὶ αὗται εἶναι αἱ βάσεις τοῦ κυλίνδρου, τὸ δὲ ἀπόστημα τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ τούτου. Ὁ κύλινδρος εἶναι ὀρθὸς ἢ πλάγιος καθ' ὅσον ἡ γενέτειρα αὐτῶν εἶναι κάθετος ἢ πλαγίαι πρὸς τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων. *Ὁ ὀρθὸς κύλινδρος ὁ ἔχων κυκλικὴν βάσιν εἶναι μόνος ὁ ἐκ περιστροφῆς παραγόμενος*, τοῦ ὁποίου τὰς ἰδιότητας ἐξεθέσαμεν ἀνωτέρω.

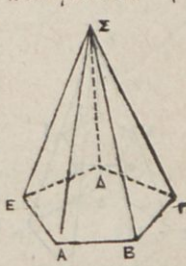
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β.

ΠΕΡΙ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ ΚΑΙ ΚΩΝΟΥ

Α'. ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

445. Ἡ *πυραμὶς* εἶναι πολύεδρον, ὅπερ ἔχει μίαν μὲν τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ οἱονδήποτε πολύγωνον, τὰς δὲ λοιπὰς ἕδρας τρίγωνα, ἔχοντα κοινὴν κορυφήν, καὶ βάσεις τὰς πλευρὰς τῆς πολυγωνικῆς ἕδρας.

Ἔστω πολύγωνόν τι τὸ ΑΒΓΔΕ (Σχ. 295) καὶ σημεῖον Σ κείμενον ἐκτὸς τοῦ πολυγώνου τούτου. Ἐὰν ἑνώσωμεν τὸ Σ μεθ' ἑκάστης τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ, σχηματίζεται τὸ στερεὸν ΣΑΒΓΔΕ, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τῆς πολυγωνικῆς ἕδρας ΑΒΓΔΕ καὶ ὑπὸ τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν ΣΑΒ, ΣΒΓ, ΣΓΔ, ΣΔΕ καὶ ΣΕΑ, καὶ εἶναι πυραμίς.



Σχ. 295.

Ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ ἔχει ὡς *βάσιν* τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ ὡς *κορυφὴν* τὸ σημεῖον Σ. Ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι τὸ ἀπόστημα τῆς κορυφῆς Σ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ, ἤτοι τὸ μῆκος τῆς καθέτου, τῆς ἀγομένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως. Αἱ δὲ εὐθεῖαι ΣΑ, ΣΒ.... καλοῦνται *παράπλευροι ἀκμαὶ* καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων *παράπλευρος ἐπιφάνεια* τῆς πυραμίδος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

446. Ἡ πυραμὶς καλεῖται *κανονική*, ὅταν ἡ βάσις αὐτῆς εἶναι κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εἶναι ὁ ποὺς τῆς ἐκ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένης καθέτου.

Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἀναγκαίως ἴσαι, ὡς πλάγιαι ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς τοῦ ὕψους αὐτῆς, ἑπομένως καὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι τρίγωνα ἰσοσκελῆ, ἴσα πρὸς ἄλληλα. Τὸ δὲ ὕψος ἑνὸς τῶν τριγώνων τούτων καλεῖται *ἀπόστημα* τῆς κανονικῆς πυραμίδος.

447. Καθόσον ἡ βάσις πυραμίδος εἶναι *τρίγωνον* ἢ *τετράπλευρον* ἢ *πεντάγωνον* κ.τ.λ...., ἡ πυραμὶς καλεῖται *τριγωνική*, *τετραγωνική*, *πενταγωνικὴ* κ.τ.λ., καὶ ἐν γένει πολυγωνικήν.

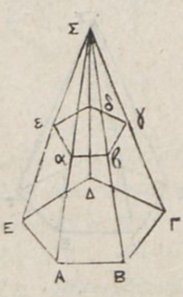
448. Πᾶσα τριγωνικὴ πυραμίς, ὡς ἀποτελουμένη ἐκ τεσσάρων ἑδρῶν, καλεῖται καὶ *τετράεδρον* (385).

Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῆς πυραμίδος δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς βάσιν τοῦ τετραέδρου μίαν οἱανδήποτε τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ, ἡ δὲ κορυφὴ ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς ληφθείσης ὡς βάσεως θὰ εἶναι ἡ *κορυφὴ* τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος.

Τὰ τετράεδρα ἐν τῇ Στερεομετρίᾳ ἐπέχουσι τὴν θέσιν καὶ τὴν σπουδαιότητα, ἣν τὰ τρίγωνα ἐν τῇ ἐπιπέδῳ Γεωμετρίᾳ.

Ὅπως ὁρίζομεν τὴν θέσιν σημείου ἐπὶ ἐπιπέδου, σχετίζοντες τοῦτο τὸ σημεῖον μετὰ δύο ἄλλων δεδομένων σημείων διὰ τριγώνου, ἔχοντος κορυφὰς τὰ σημεῖα ταῦτα, οὕτως ὁρίζομεν τὴν θέσιν σημείου ἐν τῷ διαστήματι, σχετίζοντες τοῦτο διὰ τετραέδρου μετὰ τριῶν δεδομένων σημείων.

449. Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου συναντῶντος ἁπάσας τὰς παραπλεύρους ἕδρας, τὸ μεταξὺ τῆς γενομένης τομῆς καὶ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος περιεχόμενον στερεὸν καλεῖται *κολοβὴ* ἢ *κόλουρος πυραμίς*.



Σχ. 296.

Ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος, ἡ κόλουρος πυραμὶς διακρίνεται διὰ τῆς ὀνομασίας *κόλουρος πυραμὶς μὲ παραλλήλους βάσεις*.

Ἔστω ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ (Σχ. 296), καὶ ἂς τμηθῇ αὕτη ὑπὸ ἐπιπέδου αβγδε, παραλλήλου τῇ βάσει καὶ κειμένου μεταξὺ τῆς κορυφῆς Σ καὶ τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ· ἡ τομὴ αβγδε καὶ ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ καλοῦν-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ται βάσεις τῆς κολούρου μὲ παραλλήλους βάσεις πυραμίδος ΑΒΓΔΕ αβγδε. Ὕψος δὲ τῆς τοιαύτης κολούρου πυραμίδος καλεῖται τὸ ἀπόστημα τῶν δύο παραλλήλων βάσεων αὐτῆς. Αἱ εὐθεῖαι αΑ, βΒ, γΓ.. καλοῦνται *παράπλευροι ἀκμαί*, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τραπεζίων αβΑΒ, βγΒΓ... καλεῖται *παράπλευρος ἐπιφάνεια* τῆς κολούρου πυραμίδος.

Ἐὰν ἡ θεωρηθεῖσα πυραμὶς εἶναι κανονική, καὶ ἡ πρὸς ταύτην ἀντιστοιχοῦσα κόλουρος μὲ παραλλήλους βάσεις πυραμὶς εἶναι κανονική.

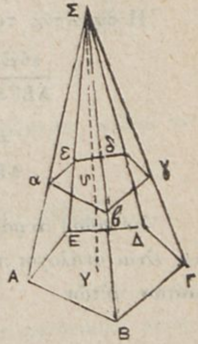
Θεώρημα.

450. *Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς·*

α΄. Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ καὶ τὸ ὕψος αὐτῆς τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα·

β΄. Ἡ τομὴ εἶναι πολύγωνον ὅμοιον τῇ βάσει τῆς πυραμίδος.

α΄. Ἔστω (Σχ. 297) ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ τεμνομένη ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου αβγδε, παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο συναντᾷ τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς ΣΑ, ΣΒ.... καὶ τὸ ὕψος ΣΥ τῆς πυραμίδος εἰς τὰ σημεῖα α, β, γ,..... υ. Ἐπειδὴ δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνουσιν εἰς μέρη ἀνάλογα σειρὰν εὐθειῶν διερχομένην διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (325), δυνάμεθα ἀμέσως νὰ γράψωμεν



Σχ. 297.

$$\frac{Σα}{ΣΑ} = \frac{Σβ}{ΣΒ} = \frac{Σγ}{ΣΓ} = \ldots\ldots = \frac{Συ}{ΣΥ}.$$

β΄. Τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀνὰ δύο παραλλήλους (308) καὶ ὁμορρόπους· ἑπομένως αἱ ὁμόλογοι γωνίαι τῶν πολυγώνων τούτων εἶναι ἴσαι (314). Ἐξ ἄλλου δὲ ἡ παραλληλία τῶν πλευρῶν αὐτῶν συνεπάγεται τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΣΑΒ καὶ Σαβ, ΣΒΓ καὶ Σβγ..... ἑπομένως

$$\frac{αβ}{ΑΒ} = \frac{Σβ}{ΣΒ} \text{ καὶ } \frac{Σβ}{ΣΒ} = \frac{βγ}{ΒΓ}, \text{ ἐξ οὗ}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{\alpha\beta}{AB} = \frac{\beta\gamma}{B\Gamma}.$$

Προχωροῦντες δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λαμβάνομεν

$$\frac{\alpha\beta}{AB} = \frac{\beta\gamma}{B\Gamma} = \frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta} = \frac{\delta\varepsilon}{\Delta E} = \frac{\varepsilon\alpha}{EA}.$$

Τὰ πολύγωνα λοιπὸν ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.

Πόρισμα.

451. Ἡ ὁμοιότης τῶν τριγώνων ΣΑΒ καὶ Σαβ δίδει

$$\frac{\alpha\beta}{AB} = \frac{\Sigma\alpha}{\Sigma A}$$

ἢ κατὰ τὰ προηγούμενα

$$\frac{\alpha\beta}{AB} = \frac{\Sigma\upsilon}{\Sigma\Upsilon}.$$

Ἡ ὁμοιότης τῶν πολυγώνων ΣΑΒΓΔΕ καὶ Σαβγδε δίδει

$$\frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{AB\Gamma\Delta E} = \frac{\alpha\beta^2}{AB^2} \quad \text{ἑπομένως καὶ}$$

$$\frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{AB\Gamma\Delta E} = \frac{\Sigma\upsilon^2}{\Sigma\Upsilon^2}. \quad \text{ἤτοι}$$

Ἐν πάσῃ πυραμίδι αἱ παράλληλοι τῇ βάσει τομαὶ καὶ αὐτὴ ἡ βάσις εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀποστημάτων αὐτῶν.

Παρατήρησις.

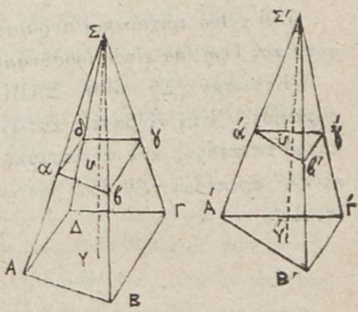
452. Ἐὰν κανονικὴ πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει, ἡ τομὴ αβγδε οὖσα ὁμοία τῇ βάσει εἶναι, ὡς καὶ ἡ βάσις, κανονικὸν πολύγωνον. Ὅπως αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσαι, οὕτω καὶ αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ σχηματιζομένης κανονικῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἴσαι. Ἐπομένως αἱ παράπλευραι ἕδραι τῆς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἰσοσκελῆ τραπέζια ἴσα πρὸς ἄλληλα· τὸ δὲ ὕψος ἑνὸς τῶν τραπεζίων τούτων εἶναι τὸ *ἀπόστημα* τῆς κολούρου πυραμίδος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θεώρημα.

453. *Ἐὰν δύο ἰσοϋψεῖς πυραμίδες τμηθῶσιν ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν κορυφῶν, αἱ τομαὶ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς βάσεις τῶν πυραμίδων.*

Ἔστωσαν (Σχ. 298) αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓΔ καὶ Σ΄Α΄Β΄Γ΄, τῶν ὁποίων τὰ ὕψη ΣΥ καὶ Σ΄Υ΄ εἶναι ἴσα. Ἂς λάβωμεν Συ=Σ΄υ΄ καὶ διὰ τῶν σημείων υ καὶ υ΄ ἂς φέρωμεν τὴν τομὴν αβγδ παράλληλον τῇ βάσει ΑΒΓΔ καὶ τὴν τομὴν α΄β΄γ΄ παράλληλον τῇ Α΄Β΄Γ΄. Θέλομεν ἔχει (451).



Σχ. 298.

$$\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{\mathrm{AB\Gamma\Delta}} = \frac{\Sigma\upsilon^2}{\Sigma\Upsilon^2}. \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{\mathrm{A'B'\Gamma'}} = \frac{\Sigma'\upsilon'^2}{\Sigma'\Upsilon'^2} = \frac{\Sigma\upsilon^2}{\Sigma\Upsilon^2}.$$

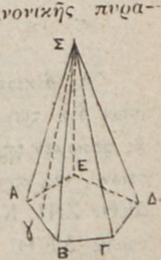
ἑπομένως
$$\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{\mathrm{AB\Gamma\Delta}} = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{\mathrm{A'B'\Gamma'}}.$$

454. *Ἐὰν αἱ βάσεις τῶν πυραμίδων εἶναι ἰσοδύναμοι, καὶ αἱ τομαὶ εἶναι ἰσοδύναμοι.*

Β΄. ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΑΙ ΟΓΚΟΣ ΤΗΣ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

Θεώρημα.

455. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἀπόστημα αὐτῆς.*



Σχ. 299.

Ἔστω ἡ κανονικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ. Ἐπειδὴ τὰ ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα τρίγωνα, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος, ἔχουσι βάσεις τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ.... τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος καὶ ὕψος τὸ ἀπόστημα ΣΓ (446), τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων τούτων, ἢ ὅπερ ταὐτό, τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ

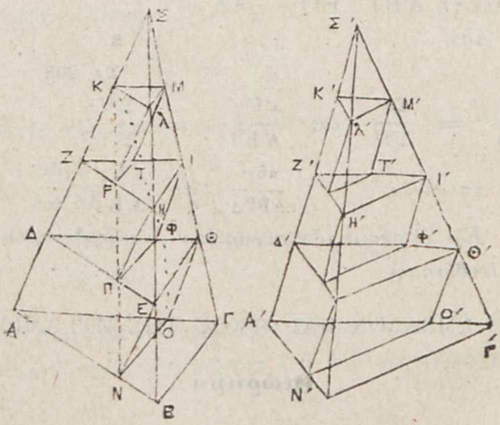
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γινομένου τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν ΑΒ,ΒΓ.....ΕΑ ἐπὶ τὸ ἀπόστημα ΣΥ, ἤτοι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος ἐπὶ τὸ ἀπόστημα αὐτῆς ΣΥ.

Θεώρημα.

456. *Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχουσαι βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα εἶναι ἰσοδύναμοι.*

Ἔστωσαν (Σχ. 300) ΣΑΒΓ καὶ Σ'Α'Β'Γ' αἱ δύο προτεθεῖσαι πυραμίδες. Ἐὰν αἱ βάσεις αὐτῶν ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' τεθῶσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ αἱ κορυφαὶ αὐτῶν θ' ἀπέχωσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ κοινοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο βάσεων, ἐπειδὴ αἱ πυραμίδες ὑπετέθησαν ἰσοϋψεῖς.



Σχ. 300.

Ἂς διαιρέσωμεν τὴν ἀκμὴν ΣΑ εἰς ὡρισμένον ἀριθμῶν μερῶν ἴσων διὰ τῶν σημείων Δ, Ζ καὶ Κ, καὶ διὰ τῶν σημείων τούτων ἂς φέρωμεν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὸ κοινὸν ἐπίπεδον τῶν βάσεων. Θὰ σχηματίσωμεν οὕτως ἐν τῇ πρώτῃ πυραμίδι τὰς τομὰς ΔΕΘ, ΖΗΙ, ΚλΜ, καὶ ἐν τῇ δευτέρᾳ πυραμίδι τὰς ἀντιστοιχούσας τομὰς Δ'Ε'Θ', Ζ'Η'Ι', Κ'λ'Μ'.

Ἂς κατασκευάσωμεν ἤδη ἓν πρίσμα ἔχον βάσιν τὴν ΔΕΘ καὶ ἀκμὴν τὴν ΔΑ· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο (387) νὰ φέρωμεν ἐκ τῶν ση-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μείων Ε καὶ Θ εὐθείας παραλλήλους τῇ ΔΑ τὰς ΕΝ καὶ ΘΟ, καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὸ σημεῖον Ν μὲ τὸ Ο. Καθ' ὅμοιον τρόπον σχηματίζομεν τόσα πρίσματα ἐγγεγραμμένα εἰς τὴν πυραμίδα ΣΑΒΓ, ὅσαι εἶναι αἱ τομαί· ἔχουσι δὲ πάντα ταῦτα ὕψος τὸ ἀπόστημα δύο διαδοχικῶν τομῶν.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον ἐγγράφομεν καὶ ἐν τῇ δευτέρᾳ πυραμίδι Σ'Α'Β'Γ' τὰ πρίσματα Δ'Ε'Θ'Α'Ν'Ο', Ζ'Η'Ι'Δ'Π'Φ'..... τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσάριθμα πρὸς τὰ ἐν τῇ πρώτῃ πυραμίδι ΣΑΒΓ.

Τὰ τῆς αὐτῆς τάξεως πρίσματα ἐν ταῖς δύο πυραμίσι ν εἶναι ἰσοδύναμα ὡς ἔχοντα βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα (424). Τὸ πρίσμα π. χ. Ζ'Η'Ι'Δ'Π'Φ' εἶναι ἰσοδύναμον τῷ πρίσματι ΖΗΙΔΠΦ, διότι αἱ δύο ἀντιστοιχοῦσαι τομαὶ ΖΗΙ καὶ Ζ'Η'Ι' εἶναι ἰσοδύναμοι, καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν ἴσα, καθ' ὅτι ἑκάτερον εἶναι τὸ ἓν νστὸν τοῦ κοινοῦ ὕψους ἀμφοτέρων τῶν πυραμίδων, ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ ΣΑ εἶναι διῃρημένη εἰς ν ἴσα μέρη. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν τῇ πυραμίδι ΣΑΒΓ ἐγγεγραμμένων πρισμάτων εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι τῶν ἐν τῇ πυραμίδι Σ'Α'Β'Γ' ἐγγεγραμμένων πρισμάτων.

Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν μερῶν τῆς διαιρέσεως τῆς ΣΑ αὐξάνῃ ἀπεριορίστως, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν τῇ πυραμίδι ΣΑΒΓ ἐγγεγραμμένων πρισμάτων ἔχει ὅριον τὸν ὄγκον αὐτῆς τῆς πυραμίδος. Τῷόντι, τὰ σημεῖα Κ,Ρ,Ν, κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, διότι αἱ εὐθεῖαι ΣΚ,λΡ,ΗΠ,ΕΝ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, καὶ ἡ εὐθεῖα ΚΝ εἶναι παράλληλος τῇ ΣΓ. Ὁμοίως τὰ σημεῖα Κ,Τ,Φ,Ο κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΚΟ, παραλλήλου τῇ ΣΓ. Ἐπομένως τὸ ἐπίπεδον ΚΝΟ εἶναι παράλληλον τῇ ἕδρᾳ ΣΒΓ, καὶ τὸ πολύεδρον ΚΝΟ ΣΒΓ εἶναι κόλουρος πυραμὶς (μὲ παραλλήλους βάσεις), τῆς ὁποίας τὸ ὕψος, (ἀπόστημα τῶν ἐπιπέδων ΚΝΟ καὶ ΣΒΓ) εἶναι τὸ πολὺ ἴσον τῇ ΣΚ=ΑΔ. Τὸ δὲ ὅριον τῆς ΑΔ, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἴσων διαιρέσεων τῆς ἀκμῆς ΣΑ αὐξάνῃ ἀπεριορίστως, εἶναι τὸ μηδέν. Τὸ ὕψος ἄρα τῆς κολούρου πυραμίδος ΚΝΟ ΣΒΓ τείνει εἰς μηδέν, ἑπομένως καὶ ὁ ὄγκος ταύτης τείνει εἰς τὸ μηδέν. Ἀλλ' ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος ΚΝΟ ΣΒΓ εἶναι προφανῶς ἡ ὑπεροχὴ τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὄγκων τῶν ἐγγεγραμμένων τριγωνικῶν πρισμάτων, ἥτις εἰς τὸ ὅριον μηδενίζεται.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς πυραμίδος

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

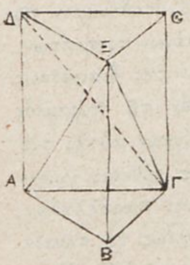
Σ'Α'Β'Γ' καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένων πρισμάτων ἔχει ὅριον τὸ μηδέν.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἀθροίσματα τῶν πρισμάτων εἶναι πάντοτε ἰσοδύναμα, τὰ ὅρια αὐτῶν (213), τὰ ὁποῖα εἶναι οἱ ὄγκοι τῶν δύο πυραμίδων ΣΑΒΓ καὶ Σ'Α'Β'Γ', εἶναι ἴσα.

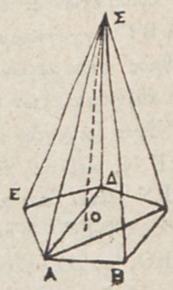
Θεώρημα.

457. *Ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἓν τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.*

1ον Ἔστω (Σχ. 391) ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΕΑΒΓ· διὰ τῶν κορυφῶν Α καὶ Γ ἂς φέρωμεν τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΓΘ παραλλήλους πρὸς τὴν ἀκμὴν ΒΕ συναντώσας κατὰ τὰ σημεῖα Δ καὶ Θ τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ Ε καὶ παράλληλον τῇ βάσει τῆς πυραμίδος. Τὸ πολύεδρον ΑΒΓΔΕΔ θὰ εἶναι τριγωνικὸν πρίσμα ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸς ὕψος μετὰ τῆς προτεθείσης πυραμίδος.



Σχ. 301.



Σχ. 302.

Ἐὰν διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν Δ,Ε,Γ φέρωμεν ἐπίπεδον, τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΘ εὑρίσκεται διῃρημένον εἰς τρεῖς τριγωνικὰς πυραμίδας ΕΑΒΓ, ΕΔΓΑ καὶ ΕΔΓΘ. Ἡ πρώτη ΕΑΒΓ εἶναι ἡ δεδομένη πυραμίς, αἱ δὲ δύο ἄλλαι εἶναι ἰσοδύναμοι (456), διότι ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ τὰς βάσεις αὐτῶν ἰσοδυνάμους, διότι ἑκατέρα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΓΘΔ.

Ἐὰν δὲ λάβωμεν τὴν ἕδραν ΔΕΘ ὡς βάσιν τῆς πυραμίδος ΕΔΓΘ, ἡ κορυφὴ αὐτῆς θὰ εἶναι τὸ σημεῖον Γ· ἐπομένως ἡ πυραμὶς αὕτη θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μετὰ τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΘ· ἐπομένως αὕτη, ἄρα καὶ ἡ ΕΑΓΔ θὰ εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς τὴν δεδομένην πυραμίδα ΑΒΓΕ.

Αἱ τρεῖς λοιπὸν πυραμίδες ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΘ εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ ἐπομένως ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι τὸ ἓν τρίτον τοῦ πρίσματος. Ἀλλ' ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος ἔχει ὡς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ· ἐπομένως καὶ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ΕΑΒΓ ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἓν τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

2ον Ἔστω (Σχ. 302) ἡ πολυγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ. Χωρίζομεν αὐτὴν εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας, φέροντες ἐπίπεδα διὰ τῆς ἀκμῆς ΣΑ καὶ ἑκατέρας τῶν ἀκμῶν ΣΓ καὶ ΣΔ. Αἱ τριγωνικαὶ αὗται πυραμίδες ἔχουσιν ὡς βάσεις τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ καὶ ΑΔΕ, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦσι τὴν βάσιν τῆς δεδομένης πυραμίδος, καὶ ὕψος κοινὸν τὸ τῆς πυραμίδος ταύτης. Ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων αὐτῶν, ἤτοι τὸ μέτρον τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ, θὰ ἰσοῦται τῷ τρίτῳ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς ΣΟ.

$$\Sigma A B \Gamma = \frac{1}{3} \; A B \Gamma . \Sigma O$$

$$\Sigma A \Gamma \Delta = \frac{1}{3} \; A \Gamma \Delta . \Sigma O$$

$$\Sigma A \Delta E = \frac{1}{3} \; A \Delta E . \Sigma O$$

$$\Sigma A B \Gamma + \Sigma A \Gamma \Delta + \Sigma A \Delta E = \frac{1}{3} \; (A B \Gamma + A \Gamma \Delta + A \Delta E) . \Sigma O$$

ἢ $$\Sigma A B \Gamma \Delta E = \frac{1}{3} \; A B \Gamma \Delta E . \Sigma O .$$

Πορίσματα.

458. Παριστῶντες δι' Ο τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος, διὰ Β τὴν βάσιν καὶ δι' Υ τὸ ὕψος αὐτῆς ἔχομεν τὸν γενικὸν τύπον

$$O = \frac{1}{3} \; B . Y .$$

Καὶ ἐπομένως· *Πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ ἓν τρίτον τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μετὰ τῆς πυραμίδος. Δύο οἱαιδήποτε πυραμίδες ἔχουσαι βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ εἶναι ἰσοδύναμοι. Δύο πυραμίδες εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων ἐπὶ τὰ ὕψη αὐτῶν. Δύο πυραμίδες, ἔχουσαι μόνον τὰς βάσεις αὐτῶν ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους, εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πυραμίδων συμπίπτουσιν, ἕπεται ὅτι αἱ πυραμίδες αὗται ταυτίζονται, καὶ εἶναι ἴσαι.

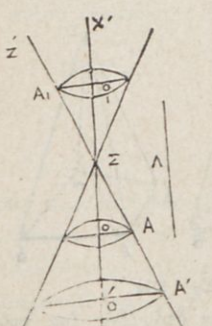
Σημείωσις.

462. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ ν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν μιᾶς τῶν βάσεων τῶν δύο πυραμίδων, ἡ ἰσότης τῶν βάσεων τῶν πυραμίδων τούτων ἀπαιτεῖ 2 ν—3 συνθήκας (66)· ἡ ἰσότης τῶν διέδρων γωνιῶν ΑΒ καὶ Α'Β' ὑφίσταται ὑπὸ μίαν συνθήκην, καὶ τέλος ἡ ἰσότης τῶν τριγώνων ΣΑΒ καὶ Σ'Α'Β' ἀπαιτεῖ δύο μόνον συνθήκας, ἐπειδὴ ἔχομεν ΑΒ=Α'Β' ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν βάσεων. Οὕτως ἡ ἰσότης τῶν δύο πυραμίδων ἀπαιτεῖ τὸ ὅλον 2 ν συνθήκας.

Γ'. ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΥ

463. Καλεῖται *κωνικὴ ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς* ἡ ἐπιφάνεια ἡ παραγομένη ὑπὸ εὐθείας ΖΣΖ' στρεφομένης πέριξ ἀκινήτου εὐθείας ΧΣΧ', τὴν ὁποίαν συναντᾷ ἡ πρώτη κατά τι σημεῖον Σ καὶ διέρχεται διαρκῶς δι' αὐτοῦ (Σχ. 305).

Ἡ ἀκίνητος εὐθεῖα ΧΧ' καλεῖται *ἄξων τῆς ἐπιφανείας*, ἡ δὲ κινητὴ εὐθεῖα ΖΖ' *γενέτειρα* ἢ *πλευρά*. Τὸ σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον καλεῖται *κορυφή*, διαιρεῖ τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν εἰς δύο μέρη ἀπεριόριστα, τὰ ὁποῖα καλοῦνται *χοάναι*.



Σχ. 305.

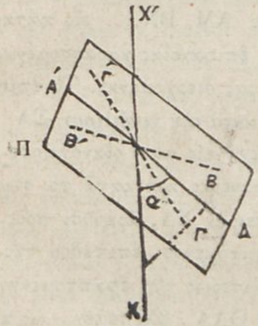
Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν εὐθειῶν, αἵτινες διερχόμεναι διὰ δεδομένου σημείου Σ σχηματίζουσι μετὰ δεδομένης εὐθείας Δ δεδομένην γωνίαν α, εἶναι κωνικὴ ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς, ἔχουσα κορυφὴν τὸ σημεῖον Σ καὶ ὡς ἄξονα εὐθεῖαν, παράλληλον τῇ Δ καὶ διερχομένην διὰ τοῦ σημείου Σ.

Πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας ΖΖ' γράφει περιφέρειαν, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος, τὸ δὲ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα (428). Ἐπομένως πᾶσα τομὴ γενομένη ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα εἶναι περιφέρεια, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶναι ἐπ' αὐτοῦ τοῦ ἄξονος. Ὡς πρὸς τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ

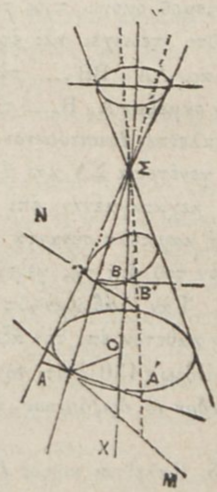
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ο'Α' τῶν οὕτω σχηματιζομένων κύκλων, ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΣΟΑ καὶ ΣΟ'Α' ἀποδεικνύεται ὅτι αὗται εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἀποστήματα ΣΟ καὶ ΣΟ' τῶν ἐπιπέδων τῶν κύκλων ἀπὸ τῆς κορυφῆς Σ καὶ τῶν ἀντιστοιχούντων τμημάτων ΣΑ καὶ ΣΑ' τῆς γενετείρας ΖΣΖ'· ἑπομένως καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν κύκλων τούτων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν τούτων.

464. Ἂς θεωρήσωμεν ἀκίνητον εὐθεῖαν ΧΣΧ' ἐν ἐπίπεδον Π διερχόμενον διὰ σημείου τινὸς Σ τῆς εὐθείας ταύτης, καὶ ἂς παραστήσωμεν δι' α τὴν γωνίαν τῆς εὐθείας μετὰ τοῦ ἐπιπέδου, ἤτοι τὴν ὀξεῖαν γωνίαν τῆς εὐθείας ΣΧ μετὰ τῆς προβολῆς αὐτῆς ΣΑ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο (Σχ. 276). Διὰ τοῦ σημείου Σ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π (335) δύο εὐθείας ΣΒ καὶ ΣΓ ἀποτελούσας μετὰ τῆς ΣΧ δεδομένην ὀξεῖαν γωνίαν ω. Αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν ΑΑ'. Τοῦτο δὲ συμβαίνει,



Σχ. 306



Σχ. 307.

ἐφ' ὅσον ἡ γωνία ω εἶναι μεγαλειτέρα τῆς α· ἀλλ', ὅταν ἡ γωνία ω γίνῃ ἴση ἢ μικροτέρα τῆς α, αἱ δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσι μετὰ τῆς εὐθείας ΣΑ ἢ δὲν ὑπάρχουσι πλέον (διότι ἡ ἐλαχίστη τῶν γωνιῶν, ἃς σχηματίζει εὐθεῖα τέμνουσα ἐπίπεδον μετὰ εὐθείας κειμένης ἐπὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ ἐπιπέδου τούτου, εἶναι ἡ μετὰ τῆς προβολῆς αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο σχηματιζομένη (340)).

Οὕτως, ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς περιέχει ἢ δύο γενετείρας τῆς ἐπιφανείας ἢ μίαν ἢ καμμίαν, καθ' ὅσον ἡ κλίσις τοῦ ἐπιπέδου τούτου ὡς πρὸς τὸν ἄξονα XX′ εἶναι μικροτέρα, ἴση ἢ μεγαλειτέρα τῆς ὀξείας γωνίας, ἣν σχηματίζει ἡ γενέτειρα τῆς ἐπιφανείας μετὰ τοῦ ἄξονος αὐτῆς, ἤτοι τοῦ ἡμίσεος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

Ἐν τῇ περιπτώσει, καθ' ἣν τὸ δεδομένον ἐπίπεδον περιέχει μίαν καὶ μόνην γενέτειραν ΣΑ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, ἡ τοιαύτη θέσις τοῦ ἐπιπέδου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁρικὴ θέσις κινητοῦ ἐπιπέδου διερχομένου δι' ἀκινήτου γενετείρας ΣΑ καὶ δι' ἄλλης πλησίον ταύτης γενετείρας, καὶ στρεφομένου περὶ τὴν ΣΑ μέχρις ὅτου ἡ γενέτειρα ΣΑ′ συμπέσῃ μετὰ τῆς ΣΑ. Ἐκ τούτου παρατηροῦμεν, διὰ συλλογισμοῦ ὁμοίου πρὸς τὸν περὶ κυλίνδρου (430), ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο περιέχει τὰς ἐφαπτομένας AM, BN.... εἰς πάσας τὰς καμπύλας, AA′, BB′.... τὰς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας χαρασσομένας καὶ διὰ τῶν σημείων A, B.... τῆς γενετείρας διερχομένας. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καλεῖται *ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον κατὰ τὴν γενέτειραν* ΣΑ.

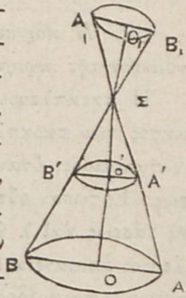
Ἡ γενέτειρα ΣΑ καὶ ἡ ἐφαπτομένη εἰς μίαν οἱανδήποτε καμπύλην, κεχαραγμένην ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας καὶ κατὰ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἡ καμπύλη συναντᾷ τὴν γενέτειραν ΣΑ, ἀρκοῦσι πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ διὰ τῆς γενετείρας ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας. Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ἰδιαιτέρως τὴν ἐφαπτομένην AM καὶ τὴν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τομὴν OAA′, βλέπομεν, ὡς καὶ ἐν τῷ κυλίνδρῳ (430), ὅτι *τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς γενετείρας τῆς ἐπαφῆς καὶ τοῦ ἄξονος.*

465. Καλεῖται *κῶνος ἐκ περιστροφῆς* τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον διὰ τῆς περιστροφῆς ὀρθογωνίου τριγώνου ΣΟΑ περὶ μίαν τῶν πλευρῶν ΣΟ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΣΟΑ (Σχ. 308).

Ἡ ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης παραγομένη ἐπιφάνεια καλεῖται *παράπλευρος ἐπιφάνεια* τοῦ κώνου, ὁ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς ΟΑ γραφόμενος κύκλος *βάσις*, ἡ εὐθεῖα ΣΟ *ὕψος* ἢ *ἄξων* καὶ ἡ ὑποτείνουσα ΣΑ *πλευρὰ* ἢ *ἀπόστημα* τοῦ κώνου τούτου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

466. Ἐὰν τμήσωμεν τὴν ἐκ περιστροφῆς κωνικὴν ἐπιφάνειαν (Σχ. 308) διὰ δύο ἐπιπέδων ΑΒ καὶ Α'Β' καθέτων ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ κειμένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κορυφῆς Σ, σχηματίζομεν στερεὸν περιοριζόμενον ὑπὸ τῶν δύο κυκλικῶν τομῶν ΒΑ καὶ Α'Β' καὶ μέρους τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τὸ στερεὸν τοῦτο, τὸ ὁποῖον καλεῖται *κόλουρος κῶνος*, εἶναι διαφορὰ τῶν δύο κώνων ΣΑΒ καὶ ΣΑ'Β'. Δυνάμεθα ἐπὶ πλέον νὰ θεωρήσωμεν τὸ στερεὸν τοῦτο παραγόμενον διὰ τῆς περιστροφῆς τοῦ ὀρθογωνίου τραπεζίου ΑΟΟ'Α' περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΟΟ'. Ἡ εὐθεῖα ΟΟ' εἶναι τὸ *ὕψος* τοῦ κολούρου κώνου, οἱ κύκλοι ΑΒ καὶ Α'Β' αἱ *δύο βάσεις*, καὶ ἡ ΑΑ' *ἡ πλευρὰ ἢ ἀπόστημα* αὐτοῦ.



Σχ. 308.

467. Ἐὰν κατασκευάσωμεν πυραμίδα ἔχουσαν κορυφὴν τὴν τοῦ κώνου καὶ βάσιν πολύγωνον ἐγγεγραμμένην εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου, ἡ πυραμὶς αὕτη εἶναι *ἐγγεγραμμένη* εἰς τὸν κῶνον (Σχ. 309).

Ἐὰν δὲ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι κανονικὸν πολύγωνον, ἡ πυραμὶς εἶναι κανονική.

Καλεῖται *παράπλευρος ἐπιφάνεια* τοῦ κώνου τὸ ὅριον τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πυραμίδος ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν αὐτῆς αὐξάνῃ ἀπεριορίστως. Τὸν ὁρισμὸν τοῦτον καθιστῶμεν τέλειον ἀποδεικνύοντες ὅτι τὸ θεωρηθὲν ὅριον ὑπάρχει καὶ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ νόμου, καθ' ὃν αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος τείνουσιν εἰς τὸ μηδέν. Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν ἐν § 433 ἀναπτυχθεῖσαν περὶ κυλίνδρου· μόνον δέ, ἐνῷ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύλινδρον μένει σταθερόν, τὸ ἀπόστημα τῆς ἐγγεγραμμένης κανονικῆς εἰς τὸν κῶνον πυραμίδος μεταβάλλεται καὶ τείνει πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.

☞ Βλέπομεν, ὅπως καὶ εἰς τὰ περὶ κυλίνδρου, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ἐκ περιστροφῆς κώνου εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνουσιν οἱ ὄγκοι ἐγγεγραμμένων πυραμίδων, ὧν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν αὐξάνει ἀπεριορίστως.

468. Δύο κῶνοι λέγονται *ὅμοιοι*, ὅταν παράγωνται ὑπὸ ὀρθογωνίων τριγώνων ὁμοίων, ἤτοι ὅταν τὰ ὕψη αὐτῶν εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεων αὐτῶν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θεώρημα.

469. *Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.*

Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν πάσης ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον πυραμίδος, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν αὐτῆς αὐξάνῃ ἀπεριορίστως. Ἔστωσαν οὕτως Ε ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια, Π ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως καὶ λ ἡ πλευρὰ τοῦ προτεθέντος κώνου, Ε′ δὲ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια, Π′ ἡ περίμετρος τῆς βάσεως καὶ λ′ τὸ ἀπόστημα κανονικῆς πυραμίδος ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον. Θέλομεν ἔχει (455).

$$\mathrm{E} = \Pi'.\frac{1}{2}\lambda'.$$

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος αὐξηθῇ ἀπεριορίστως, τὸ μὲν Ε′ εἰς τὸ ὅριον γίνεται Ε, τὸ Π′ γίνεται Π καὶ τὸ λ′ γίνεται λ.· καὶ ἔχομεν τότε

$$\mathrm{E} = \Pi.\frac{1}{2}\lambda.$$

470. Ἐὰν παραστήσωμεν δι' Α τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως τοῦ κώνου, θὰ ἔχωμεν $\Pi = 2\pi\mathrm{A}$· καὶ ἑπομένως

$$\mathrm{E} = 2\pi\mathrm{A}.\frac{1}{2}\lambda = \pi.\mathrm{A}.\lambda. \qquad (1)$$

Προσθέτοντες δὲ εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, ἤτοι $\pi\mathrm{A}^2$, λαμβάνομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου $\mathrm{E}_1 = \pi\mathrm{A}\lambda + \pi\,\mathrm{A}^2 = \pi\mathrm{A}\,(\lambda + \mathrm{A}) \qquad (2)$

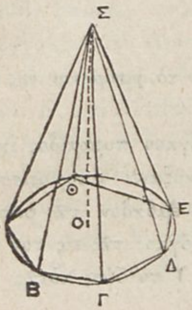
471. Σκεπτόμενοι δὲ ὡς ἐν § 435 ἀποδεικνύομεν ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν παραπλεύρων ἢ ὁλικῶν ἐπιφανειῶν δύο κώνων ὁμοίων εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων ἢ τῶν ἀποστημάτων, ἢ τῶν ὕψων αὐτῶν.

Σημείωσις.

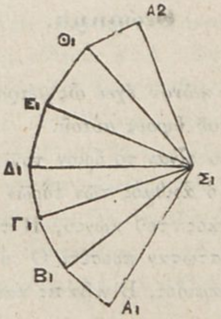
472. Ἂς θεωρήσωμεν κῶνον καὶ ἐγγεγραμμένην ἐν αὐτῷ κανονικὴν πυραμίδα τὴν ΣΑΒΓΔΕΘ (Σχ. 309). Διὰ περιστροφῆς περὶ τὴν ἀκμὴν ΣΒ ἂς θέσωμεν τὴν ἕδραν ΣΑΒ ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς ἕδρας ΣΒΓ. Ἔπειτα διὰ στροφῆς περὶ τὴν ΣΓ ἂς θέσωμεν τὰς ἤδη ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ συναφθείσας δύο ἕδρας ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

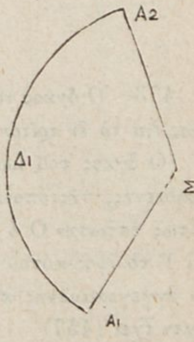
τῆς ἑπομένης ἕδρας ΣΓΔ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, μέχρις οὗ πᾶσαι αἱ παράπλευροι ἕδραι τῆς πυραμίδος ἐξελιχθῶσιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς τελευταίας ἕδρας ΒΣΑ.



Σχ. 309.



Σχ. 310.



Σχ. 311.

Θὰ σχηματίσωμεν οὕτω τὸν κανονικὸν πολυγωνικὸν τομέα $\Sigma_1 A_1 B_1 \Gamma_1 \Delta_1 E_1 \Theta_1 A_2$ (Σχ. 310), ἔχοντα ἀκτῖνα τὴν παράπλευρον ἀκμὴν τῆς κανονικῆς πυραμίδος, ἤτοι τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου, καὶ βάσιν τὴν κανονικὴν τεθλασμένην γραμμὴν $A_1 B_1 \Gamma_1 \Delta_1 E_1 \Theta_1 A_2$ ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος.

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν τῆς κανονικῆς πυραμίδος τῆς ἐγγεγραμμένης ἐν τῷ κώνῳ αὐξηθῇ ἀπεριορίστως, ἡ μὲν ἀκτὶς τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως $A_3 B_1 \Gamma_1 \Delta_1 E_1 \Theta_1 A_2$ μένει σταθερά, ἡ δὲ βάσις μεταβάλλεται εἰς τόξον κύκλου ἔχον μῆκος ἴσον πρὸς τὸ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κώνου. Ὁ κυκλικὸς τομεὺς $\Sigma_1 A_1 \Delta_1 A_2$ ὁ οὕτω παραγόμενος καλεῖται **ἀνάπτυγμα** τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κώνου. Εἶναι δὲ εὔκολον νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ἀριθμὸν **ν** τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου, τοῦ μετροῦντος τὴν γωνίαν τοῦ κυκλικοῦ τομέως $A_1 \Sigma_1 A_2$. Ἐὰν δὲ ἡ μὲν πλευρὰ τοῦ κώνου παρασταθῇ διὰ λ, ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς βάσεως αὐτοῦ δι' Α, θέλομεν ἔχει

$$\frac{\nu}{360} = \frac{\text{τόξ.}A\ A}{2\pi\Sigma\ A_1} = \frac{2\pi A}{2\pi\lambda}.\ \text{ἐξ οὗ}\ \nu = \frac{A}{\lambda}.360^0$$

Ἐὰν $\lambda = 2A$. θέλομεν ἔχει $\nu = 180^0$. ἐξ οὗ ἐξάγεται ὅτι τὸ ἀνάπτυγμα εἶναι ἡμικύκλιον. Ὁ ἀντιστοιχῶν δὲ κῶνος καλεῖται

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἰσόπλευρος· ἡ δὲ τομὴ τοῦ κώνου ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος ΣΟ εἶναι τρίγωνον ἰσόπλευρον ΣΑΔ.

Θεώρημα.

473. *Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἓν τρίτον τοῦ ὕψους αὐτοῦ.*

Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι τὸ ὅριον τοῦ ὄγκου πυραμίδος ἐγγεγραμμένης, τῆς ὁποίας ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν αὐξάνει ἀπεριορίστως. Οὕτως ἔστωσαν Ο ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, Β τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ Υ τὸ ὕψος αὐτοῦ· ἔστωσαν προσέτι Ο′ ὁ ὄγκος τῆς εἰς τὸν κῶνον ἐγγεγραμμένης πυραμίδος, Β′ ἡ βάσις καὶ Υ τὸ ὕψος αὐτῆς· θέλομεν ἔχει (457)

$$O' = \frac{1}{3} B'.\Upsilon$$

Ἀλλ' ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν τῆς πυραμίδος αὐξάνῃ ἀπεριορίστως, τὸ μὲν Ο′ τείνει πρὸς τὸ Ο καὶ τὸ Β′ εἰς τὸ Β, ἑπομένως εἰς τὸ ὅριον θέλομεν ἔχει

$$O = \frac{1}{3} B.\Upsilon.$$

Πορίσματα.

474. Ἐὰν παρασταθῇ δι' Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου, θέλομεν ἔχει $B = \pi A^2$ καὶ ἑπομένως

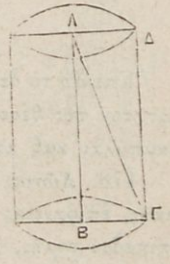
$$O = \frac{1}{3} \pi A^2.\Upsilon$$

βλέπομεν, ὡς ἐν § 439, ὅτι *οἱ ὄγκοι δύο κώνων ὁμοίων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς κύβους τῶν ὑψῶν ἢ καὶ τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων.*

475. Ὅταν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ στραφῇ περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ΑΒ (Σχ. 312), τὸ τρίγωνον ΑΒΓ παράγει κῶνον, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι τὸ τρίτον (437, 473) τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου τοῦ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

παραγομένου ὑπὸ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ. Ἑπομένως *ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ταυτοχρόνως ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ εἶναι τὰ δύο τρίτα τοῦ αὐτοῦ κυλίνδρου.*



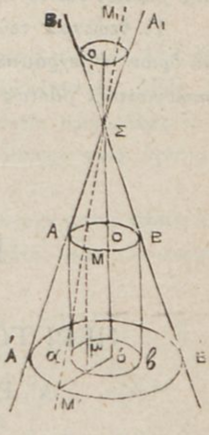
Σχ. 312.

476, Γενικῶς καλεῖται *κωνικὴ ἐπιφάνεια* ἡ παραγομένη ὑπὸ κινητῆς εὐθείας $ΑΣΑ_1$ (Σχ. 313), ἥτις συνεχῶς διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Σ, καὶ ὀλισθαίνει ἐπὶ ἀκινήτου καμπύλης ΑΜΒ ἐπιπέδου ἢ στρεβλῆς. Ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι ἡ *ἰθύνουσα* τῆς ἐπιφανείας, ἐνῷ ἡ κινητὴ εὐθεῖα εἶναι ἡ *γενέτειρα*. Τὸ σημεῖον Σ εἶναι ἡ *κορυφὴ* κωνικῆς ἐπιφανείας, καθ᾽ ὃ αὕτη χωρίζεται εἰς δύο χοάνας ΣΑΒ καὶ $ΣΑ_1Β_1$.

Θεώρημα.

477. *Αἱ τομαὶ κανικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι ὅμοιαι.*

Τῳόντι, ἔστωσαν ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ΣΑΜΒ, καὶ δύο τομαὶ ΑΜΒ καὶ Α΄Μ΄Β΄, γινόμεναι ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων (Σχ. 313).



Σχ. 313.

Ἄς φέρωμεν διὰ τῆς κορυφῆς εὐθεῖαν οἱανδήποτε ΣΟΟ΄, ἥτις συναντᾷ τὰ δύο ἐπίπεδα κατὰ τὰ σημεῖα Ο καὶ Ο΄, καὶ ἂς προβάλωμεν παραλλήλως τῇ ΣΟΟ΄ τὴν πρώτην τομὴν ΑΜΒ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς δευτέρας. Ἐπειδὴ ἡ προβολὴ αὕτη αμβ εἶναι ἴση τῇ ΑΜΒ (442), ἡ πρότασις θὰ εἶναι ἀποδεδειγμένη, ἐὰν δείξωμεν ὅτι ἡ αμβ εἶναι καὶ ὁμοιόθετος τῇ ΑΜΒ (160). Ἑπομένως, ἐὰν ἡ ΣΜΜ΄ εἶναι μία οἱαδήποτε γενέτειρα τῆς ἐπιφανείας, αἱ εὐθεῖαι ΟΜ καὶ Ο΄Μ΄ εἶναι παράλληλοι, καὶ θέλομεν ἔχει

$$\frac{ΟΜ}{Ο΄Μ΄} = \frac{ΣΟ}{ΣΟ΄}.$$

ἢ ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψει ὅτι ἡ προβολὴ μ τοῦ σημείου Μ κεῖται ἐπὶ τῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ο΄Μ΄ καὶ ὅτι Ο΄μ=ΟΜ, λαμβάνομεν καὶ

$$\frac{O'\mu}{O'M'} = \frac{\Sigma O}{\Sigma O'}$$

Ἐπειδὴ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης ἔχει τιμὴν ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τῆς καμπύλης Α΄Μ΄Β΄, αἱ καμπύλαι αμβ καὶ Α΄Μ΄Β΄ εἶναι ὁμοιόθετοι.

478. ***Κῶνος*** εἶναι στερεὸν περιεχόμενον ὑπὸ πεπερασμένης κωνικῆς ἐπιφανείας περιλαμβανομένης μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ μιᾶς ἐπιπέδου τομῆς, ἥτις καλεῖται *βάσις*· *ὕψος* δὲ τοῦ κώνου εἶναι τὸ ἀπόστημα τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν. Κῶνος ἔχων κυκλικὴν βάσιν εἶναι *ὀρθὸς* ἢ *πλάγιος* καθ' ὅσον ἡ ὀρθογώνιος προβολὴ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως συμπίπτει ἢ μὴ μετὰ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

Θεώρημα.

479. *Ὁ ὄγκος παντὸς κώνου ἰσοῦται τῷ τρίτῳ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀπορρέει ἐκ τῆς θεωρίας ὅτι *ὁ κῶνος εἶναι τὸ ὅριον ἐγγεγραμμένης ἐν αὐτῷ πυραμίδος, ὅταν αἱ πλευραὶ τῆς πολυγωνικῆς βάσεως αὐτῆς τείνωσιν εἰς τὸ μηδέν.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΟΛΟΥΡΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

Α΄. ΕΜΒΑΔΑ ΚΑΙ ΟΓΚΟΙ ΑΥΤΩΝ

Θεώρημα.

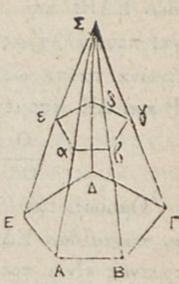
480. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς κολούρου πυραμίδος ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν περιμέτρων τῶν βάσεων ἐπὶ τὸ ἀπόστημα αὐτῆς. (Σχ. 314.)

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω ἡ κόλουρος πυραμὶς ΑΒΓΔΕ αβγδε. Τὰ ἰσοσκελῆ τραπέζια τὰ ἀποτελοῦντα τὴν παράπλευρον αὐτῆς ἐπιφάνειαν εἶναι πάντα ἴσα ἀλλήλοις (452)· ἑπομένως πολλαπλασιάζοντες τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ΑΕ αε ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ν (τὸν δηλοῦντα τὸ πλῆθος αὐτῶν), εὑρίσκομεν

$$\nu.\ \frac{\mathrm{AE}+\alpha\varepsilon}{2}\ \mathrm{H}\eta \quad \text{ἢ} \quad \frac{\nu.\ \mathrm{AE}+\nu.\alpha\varepsilon}{2}\ \mathrm{H}\eta.$$

ἔνθα τὰ γινόμενα ν. ΑΕ καὶ ν. αε παριστῶσι τὰς περιμέτρους τῶν δύο βάσεων τῆς κολούρου πυραμίδος. Τὸ θεώρημα ἄρα ἀπεδείχθη.



(Σχ. 314).

Θεώρημα.

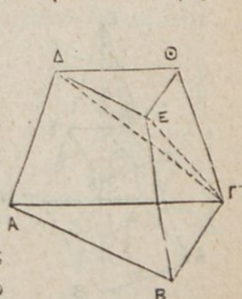
481. *Ὁ ὄγκος κολούρου πυραμίδος, ἐχούσης παραλλήλους τὰς βάσεις αὐτῆς, ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ὄγκων τριῶν πυραμίδων ἐχουσῶν κοινὸν μὲν ὕψος τὸ τῆς κολούρου πυραμίδος, βάσεις δὲ ἡ μὲν μία τὴν ἑτέραν τῶν βάσεων τῆς κολούρου, ἡ δευτέρα τὴν ἑτέραν βάσιν τῆς κολούρου, ἡ δὲ τρίτη τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο βάσεων αὐτῆς.*

1ον Ἔστω (Σχ. 315) ἡ κόλουρος τριγωνικὴ πυραμὶς ΑΒΓΔΕΘ ἔχουσα τὰς βάσεις αὐτῆς παραλλήλους. Τὰ ἐπίπεδα ΑΕΓ καὶ ΔΕΓ χωρίζουσι τὴν κόλουρον πυραμίδα εἰς τρεῖς τριγωνικὰς πυραμίδας, τὰς ΕΑΒΓ, ΕΔΓΘ καὶ ΕΔΓΑ, τῶν ὁποίων τοὺς ὄγκους ἂς παραστήσωμεν διὰ Ο, Ο΄, Ο΄΄.

Ἡ πρώτη πυραμὶς ΕΑΒΓ ἔχει ὡς βάσιν τὴν κάτω βάσιν ΑΒΓ τῆς κολούρου πυραμίδος καὶ κορυφὴν τὸ Ε, ἤτοι μίαν τῶν κορυφῶν τῆς ἄνω βάσεως.

Ἐὰν λάβωμεν τὸ σημεῖον Γ ὡς κορυφὴν τῆς δευτέρας πυραμίδος ΕΔΓΘ, βάσις αὐτῆς θὰ εἶναι ἡ ἄνω βάσις ΔΕΘ τῆς κολούρου καὶ ὕψος τὸ τῆς κολούρου διότι ἡ κορυφὴ αὐτῆς Γ κεῖται ἐπὶ τῆς κάτω βάσεως.

Διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν τρίτην πυραμίδα ΕΔΓΑ ἂς παραβάλωμεν ταύτην πρὸς ἑκατέραν τῶν δύο ἄλλων. Ἐὰν λάβωμεν τὸ σημεῖον Γ ὡς κοινὴν κορυφὴν τῶν δύο πυρα-



(Σχ. 315).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μίδων ΕΑΒΓ καὶ ΕΔΓΑ, αὗται θὰ εἶναι ἰσοϋψεῖς, ἐπομένως θὰ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν ΕΑΒ καὶ ΑΔΕ. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ταῦτα ὡς ἰσοϋψῆ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν ΑΒ καὶ ΔΕ. ἐπομένως δυνάμεθα νὰ γράψωμεν·

$$\frac{O}{O''} = \frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta\Theta} \quad (450, \beta'.).$$

Ὁμοίως, ἐὰν λάβωμεν τὸ σημεῖον Ε ὡς κοινὴν κορυφὴν τῶν δύο πυραμίδων ΕΔΓΑ καὶ ΕΔΓΘ, αὗται ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ ἐπομένως εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν ΔΑΓ καὶ ΓΔΘ, ἢ ὡς αἱ βάσεις τῶν ἰσοϋψῶν τούτων τριγώνων ΑΓ καὶ ΘΔ· καὶ θέλομεν ἔχει

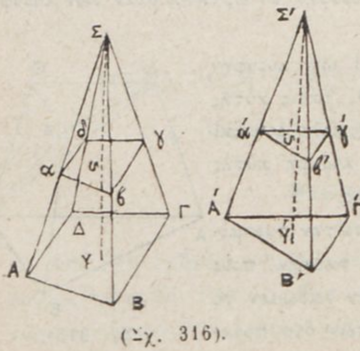
$$\frac{O''}{O'} = \frac{A\Gamma}{\Delta\Theta} \text{ ἐπομένως } \frac{O''}{O'} = \frac{O}{O''}$$

$$\text{ἄρα} \quad O''^2 = O.\,O'$$

Ὁ ὄγκος λοιπὸν τῆς τρίτης πυραμίδος εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν ὄγκων τῶν δύο ἄλλων πυραμίδων, ἤτοι ἡ πυραμὶς ΕΔΓΑ ἰσοδυναμεῖ πρὸς πυραμίδα ἔχουσαν ὕψος μὲν τὸ τῆς κολούρου, βάσιν δὲ τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο βάσεων αὐτῆς.

2ον Ἔστω (Σχ. 316) ἡ κόλουρος πολυγωνικὴ πυραμὶς ΑΒΓΔ αβγδ, ἥτις σχηματίζεται, ἐὰν ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓΔ τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν αὐτῆς ΑΒΓΔ.

Ἄς λάβωμεν σημεῖόν τι Σ′ ὑπεράνω τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ καὶ ἀπέχον αὐτοῦ ὅσον τὸ Σ· ἄς κατασκευάσωμεν δὲ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως ταύτης τρίγωνον Α′Β′Γ′ ἰσοδύναμον τῇ βάσει ταύτῃ. Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς Σ′Α′Β′Γ′ θὰ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν πολυγωνικὴν πυραμίδα ΣΑΒΓΔ (458). Ἐὰν προσεκβάλωμεν τὸ ἐπίπεδον αβγδ μέχρις ὅτου τμήσῃ τὴν πυραμίδα Σ′Α′Β′Γ′ κατὰ τὸ τρίγωνον α′β′γ′ ἰσοδύναμον πρὸς τὴν τομὴν αβγδ (454). Αἱ δύο πυραμίδες Σ′α′β′γ′ καὶ Σαβγδ θὰ εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἐπομένως ἡ κόλουρος πολυγωνικὴ πυραμὶς ΑΒΓΔ αβγδ, διαφορὰ τῶν πυραμίδων



(Σχ. 316).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΣΑΒΓΔ καὶ Σαβγδ, θὰ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν κόλουρον τριγωνικὴν πυραμίδα Α'Β'Γ' α'β'γ', διαφορὰν τῶν πυραμίδων Σ'Α'Β'Γ' καὶ Σ'α'β'γ'. Ὅπως δὲ ἡ κόλουρος τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, ἐχουσῶν ὕψος κοινὸν τὸ ὕψος τῆς κολούρου καὶ βάσεις ἡ μὲν τὴν ἄνω, ἡ δὲ τὴν κάτω, ἡ δὲ τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο τούτων βάσεων τῆς κολούρου τριγωνικῆς πυραμίδος, οὕτω καὶ ἡ πολυγωνικὴ κόλουρος πυραμὶς θ' ἀποτελῆται ἐκ τριῶν πολυγωνικῶν πυραμίδων, αἵτινες θὰ ἔχωσι τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσεις ἰσοδυνάμους πρὸς τὰς βάσεις τῶν ἀποτελουσῶν τὴν τριγωνικὴν κόλουρον πυραμίδα.

Πόρισμα.

482. Ἐὰν παραστήσωμεν δι' Ο τὸν ὄγκον, διὰ Β καὶ β τὰς παραλλήλους βάσεις καὶ δι' Υ τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος, θέλομεν ἔχει

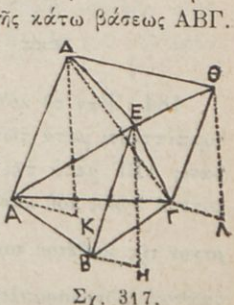
$$O = \frac{1}{3} B.\Upsilon + \frac{1}{3} \beta.\Upsilon + \frac{1}{3}\Upsilon.\sqrt{B.\beta}$$

$$\text{ἢ} \qquad O = \frac{1}{3}\left(B + \beta + \sqrt{B.\beta}\right).\Upsilon$$

Θεώρημα

488. *Ὁ ὄγκος κολούρου τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τριῶν πυραμίδων, ἐχουσῶν βάσιν μὲν κοινὴν τὴν κάτω βάσιν τοῦ κολούρου πρίσματος, κορυφὰς δὲ τὰς τρεῖς κορυφὰς τῆς ἄνω βάσεως.*

Ἔστω (Σχ. 317) τὸ κόλουρον τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΘ (408)· ἔστωσαν προσέτι ΕΗ, ΔΚ καὶ ΘΛ, τὰ ἀποστήματα τῶν τριῶν κορυφῶν τῆς ἄνω βάσεως ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῆς κάτω βάσεως ΑΒΓ.



Σχ. 317.

Τὰ ἐπίπεδα ΑΕΓ καὶ ΔΕΓ χωρίζουσι τὸ κόλουρον πρίσμα εἰς τρεῖς τριγωνικὰς πυραμίδας ΕΑΒΓ, ΕΔΓΘ καὶ ΕΔΓΑ.

Ἡ πρώτη ΕΑΒΓ ἔχει βάσιν τὴν κάτω βάσιν ΑΒΓ τοῦ κολούρου πρίσματος καὶ ὕψος ΕΗ. Διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν δευτέραν πυραμίδα ΕΔΓΘ, ἂς ζητήσωμεν τὸν λόγον ταύτης πρὸς τὴν πυραμίδα ΕΑΒΓ. Ἐὰν λάβωμεν ὡς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κορυφὰς τῶν πυραμίδων ΕΔΓΘ καὶ ΕΑΒΓ τὰ σημεῖα Δ καὶ Α, ὁπότε αἱ βάσεις αὐτῶν εἶναι τὰ τρίγωνα ΕΓΘ καὶ ΕΓΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτό, διότι ἡ ἀκμὴ ΔΑ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἕδραν ΕΒΓΘ.

Αἱ πυραμίδες λοιπὸν αὗται εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τρίγωνα ΕΓΘ καὶ ΕΓΒ. Ἐξ ἄλλου δὲ τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχοντα ἀλλεπαλλήλως τὰς βάσεις καὶ τὰς κορυφὰς αὐτῶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΕΒ καὶ ΘΓ εἶναι ἰσοϋψῆ, ἑπομένως εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν ΘΓ καὶ ΕΒ. Αἱ πυραμίδες λοιπὸν ΕΔΓΘ καὶ ΕΑΒΓ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκμαὶ ΘΓ καὶ ΕΒ ἢ ὡς τὰ ὕψη ΘΛ καὶ ΕΗ, τὰ ὁποῖα προφανῶς εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς ἀκμὰς ταύτας, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΕΒΗ καὶ ΘΓΛ.

Διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν τρίτην πυραμίδα ΕΔΓΑ, ἂς εὕρωμεν τὸν λόγον αὐτῆς πρὸς τὴν πρώτην ΕΔΓΘ.

Αἱ δύο αὗται πυραμίδες ἔχουσαι κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον Ε καὶ τὰς βάσεις αὐτῶν ΑΓΔ καὶ ΔΓΘ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΑΓΘΔ, εἶναι ἰσοϋψεῖς, ἑπομένως εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν ΑΓΔ καὶ ΔΓΘ ἢ ὡς αἱ ἀκμαὶ ΔΑ καὶ ΘΓ, διότι τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν ΑΔ καὶ ΘΓ. Αἱ πυραμίδες λοιπὸν ΕΔΓΑ καὶ ΕΔΓΘ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκμαὶ ΔΑ καὶ ΘΓ ἢ ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν ΔΚ καὶ ΘΛ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς ἀκμὰς ΔΑ καὶ ΘΓ, ὡς δείκνυται ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΔΑΚ καὶ ΘΓΛ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ τρεῖς πυραμίδες ΕΑΒΓ,ΕΔΓΘ,ΕΔΓΑ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν ΕΗ,ΘΛ,ΔΚ καὶ ὁ ὄγκος Ο τῆς πρώτης εἶναι

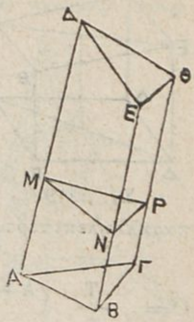
$$\mathrm{O} = \frac{\mathrm{AB\Gamma.EH}}{3},$$ οἱ ὄγκοι τῶν δύο ἄλλων θὰ εἶναι

$$\mathrm{O}' = \frac{\mathrm{AB\Gamma.\Theta\Lambda}}{3}, \qquad \mathrm{O}'' = \frac{\mathrm{AB\Gamma.\Delta K}}{3}$$

484. Ἐὰν τὸ κόλουρον πρίσμα εἶναι ὀρθόν, τὰ ὕψη ΕΗ,ΘΛ,ΔΚ συμπίπτουσι μετὰ τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν ΕΒ,ΘΓ καὶ ΔΑ, καὶ ἡ βάσις ΑΒΓ μετὰ τῆς καθέτου τομῆς τοῦ κολούρου πρίσματος, καὶ τότε *ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου τούτου στερεοῦ ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς καθέτου τομῆς ἐπὶ τὸν μέσον ὅρον* (τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀθροίσματος) *τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν αὐτοῦ.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Εὐκόλως ἐπεκτείνομεν τὴν ἔκφρασιν ταύτην καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ κόλουρον πρίσμα εἶναι πλάγιον οἱοδήποτε.



Σχ. 318.

Ἔστω (Σχ. 318) τὸ πλάγιον κόλουρον πρίσμα ΑΒΓΔΕΘ. Ἂς φέρωμεν τὴν κάθετον αὐτοῦ τομὴν ΜΝΡ· αὕτη χωρίζει τὸ προτεθὲν εἰς δύο ὀρθὰ ὡς πρὸς τὴν τομὴν ΜΝΡ κόλουρα πρίσματα ἔχοντα κοινὴν βάσιν τὴν τομὴν ταύτην, καὶ θέλομεν ἔχει

$$\text{ΜΝΡΔΕΘ} = \text{ΜΝΡ}.\left(\frac{\text{ΜΔ}+\text{ΝΕ}+\text{ΡΘ}}{3}\right)$$

$$\text{καὶ ΜΝΡΑΒΓ} = \text{ΜΝΡ}.\left(\frac{\text{ΜΑ}+\text{ΝΒ}+\text{ΡΓ}}{3}\right)$$

Ἐπομένως τὸ ὅλον κόλουρον πρίσμα ΑΒΓΔΕΘ, ὡς ἄθροισμα τῶν ΜΝΡΔΕΘ καὶ ΜΝΡΑΒΓ, θὰ εἶναι

$$\text{ΑΒΓΔΕΘ} = \text{ΜΝΡ}.\left(\frac{\text{ΜΔ}+\text{ΝΕ}+\text{ΡΘ}}{3}\right) + \text{ΜΝΡ}.\left(\frac{\text{ΜΑ}+\text{ΝΒ}+\text{ΡΓ}}{3}\right)$$

$$= \text{ΜΝΡ}.\left(\frac{\text{ΜΔ}+\text{ΝΕ}+\text{ΡΘ}+\text{ΜΑ}+\text{ΝΡ}+\text{ΡΓ}}{3}\right) = \text{ΜΝΡ}.\left(\frac{\text{ΑΔ}+\text{ΒΕ}+\text{ΓΘ}}{3}\right)$$

Πορίσματα.

485. Ἐὰν παραστήσωμεν δι' Ο τὸν ὄγκον τριγωνικοῦ κολούρου πρίσματος διὰ Β τὴν βάσιν καὶ διὰ β τὴν κάθετον αὐτοῦ τομήν, διὰ Υ, Υ' Υ'' τὰ ἀποστήματα τῶν ὑπὲρ τὴν τομὴν κορυφῶν ἀπὸ τῆς βάσεως, διὰ α, α', α'' τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς τοῦ κολούρου πρίσματος, θέλομεν ἔχει

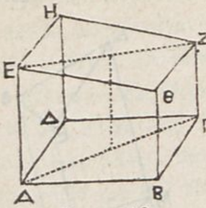
$$\text{Ο} = \text{Β}.\left(\frac{\text{Υ}+\text{Υ}'+\text{Υ}''}{3}\right) \qquad (1)$$

$$\text{καὶ Ο} = \beta.\left(\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{3}\right) \qquad (2)$$

486. Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν δι' Α καὶ α, Α΄ καὶ α΄ ἀνὰ δύο

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὰς ἀντικειμένας παραπλεύρους ἀκμὰς τυχόντος κολούρου παραλληλεπιπέδου (Σχ. 319) διὰ Τ τὴν κάθετον αὐτοῦ τομήν, καὶ διὰ ο καὶ ο΄ τοὺς ὄγκους τῶν δύο κολούρων τριγωνικῶν πρισμάτων εἰς ἃ χωρίζεται τὸ παραλληλεπίπεδον, θέλομεν ἔχει



Σχ. 319.

$$ο = \frac{T}{2} \cdot \left(\frac{A+α+α'}{3}\right) \text{ καὶ } ο = \frac{T}{2}\left(\frac{A+α+A'}{3}\right)$$

ἐπομένως ὁ ὄγκος $Ο = ο + ο'$ τοῦ κολούρου παραλληλεπιπέδου θὰ εἶναι

$$O = \frac{T}{2} \left(\frac{A+α+α'+A+α+A'}{3}\right) = \frac{T}{2} \left(\frac{2A+2α+A'+α'}{3}\right)$$

$$= \frac{T}{2} \; \frac{2(A+α)+(A'+α')}{3} = T. \; \frac{2(A+α)+(A'+α')}{6}$$

Ἀλλ' ἐὰν παραστήσωμεν διὰ δ τὸ μῆκος τῆς εὐθείας, τῆς ἑνωνούσης τὰ κέντρα τῶν δύο βάσεων τοῦ κολούρου τούτου στερεοῦ, θέλομεν ἔχει

$$A+A = A'+α' = 2δ.$$

Ἐπομένως

$$O = T. \; δ.$$

487. *Ὁ ὄγκος παντὸς κολούρου παραλληλεπιπέδου ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς καθέτου αὐτοῦ τομῆς ἐπὶ τὸν μέσον ὅρον δύο ἀντικειμένων παραπλεύρων ἀκμῶν.*

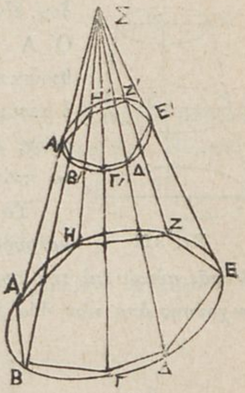
Θεώρημα.

488. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων ἐπὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.*

Ἡ κυρτὴ ἢ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου ΑΔΔ΄Α΄ (Σχ. 320) εἶναι διαφορὰ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κώνων ΣΑΔ καὶ ΣΑ΄Δ΄. Τούτου τεθέντος, ἂς ἐγγράψωμεν εἰς τὸν κῶνον ΣΑΔ κανονικὴν πυραμίδα ΣΑΒΓΔΕΘ· τὸ ἐπίπεδον Α΄Δ΄ τῆς ἄνω βάσεως τοῦ κολούρου κώνου χωρίζει τὴν πυραμίδα ταύτην εἰς δύο μέρη, τὸ ΣΑ΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄Θ΄, τὸ ὁποῖον εἶναι κανονικὴ πυραμὶς ἐγγεγραμμένη ἐν τῷ κώνῳ ΣΑ΄Δ΄, καὶ τὸ ΑΒΓΔΕΘ-Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄Θ΄, τὸ ὁποῖον εἶναι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κανονικὴ κόλουρος πυραμίς, ἐγγεγραμμένη ἐν τῷ κολούρῳ κώνῳ ΑΔΔ'Α'. Ὅθεν, ἐπειδὴ τὰ ἐμβαδὰ τῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν τῶν δύο κώνων ΣΑΔ καὶ ΣΑ'Δ' εἶναι τὰ ὅρια τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν τῶν ἐν αὐτοῖς ἐγγεγραμμένων πυραμίδων ΣΑΒΓΔΕΖΗ καὶ ΣΑ'Β'Γ'Δ'Ε'Ζ'Η', ὅταν ὁ κοινὸς ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν αὐτῶν αὐξάνῃ ἀπεριορίστως, τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου εἶναι τὸ ὅριον τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένης κολούρου κανονικῆς πυραμίδος. Ἔστω δὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ταύτης ἐπιφανείας, λ τὸ ἀπόστημα δύο ἀντιστοιχουσῶν πλευρῶν τῶν βάσεων τῆς κολούρου πυραμίδος, τ δὲ καὶ τ' αἱ περίμετροι τῶν βάσεων· ἔστωσαν προσέτι Ε, Λ, Τ, Τ' τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας, ἡ πλευρὰ καὶ αἱ περιφέρειαι τῶν δύο βάσεων τοῦ κολούρου κώνου· θέλομεν ἔχει (480)



Σχ. 320.

$$\Sigma = \frac{1}{2}\ (\tau + \tau').\ \lambda.$$

Ἀλλ' εἰς τὸ ὅριον, ὅταν αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΗ τείνωσιν εἰς τὸ μηδέν, τὸ μὲν ε τείνει εἰς τὸ Ε, τὸ τ πρὸς τὸ Τ, τὸ τ' πρὸς τὸ Τ καὶ τὸ λ πρὸς τὸ Λ καὶ θέλομεν ἔχει.

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\,(\mathrm{T} + \mathrm{T}'),\ \Lambda.$$

Πορίσματα.

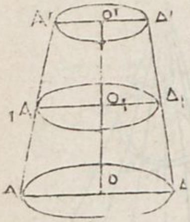
489. Ἐὰν παραστήσωμεν δι' *Α* καὶ *α* τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου, θέλομεν ἔχει $\mathrm{T} = 2\pi \mathrm{A}$ καὶ $\mathrm{T}' = 2\pi\alpha$, καὶ ἐπομένως·

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\ (2\pi\mathrm{A} + 2\pi\alpha).\ \Lambda = \ \pi\ (\mathrm{A} + \alpha).\ \Lambda.$$

Διὰ τοῦ μέσου A_1 τῆς πλευρᾶς ΑΑ' (Σχ. 321) ἂς φέρωμεν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις τοῦ κολούρου κώνου· ἡ ἀκτὶς O_1 A_1 τῆς κυκλικῆς τομῆς, τῆς γενομένης ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου, εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ Ο′ Α′ τῶν βάσεων, ἐπομένως ἰσοῦται τῷ ἡμιαθροίσματι αὐτῶν (85)· ἄρα ἡ περιφέρεια $A_1\Delta_1$ εἶναι ὁ μέσος ἀριθμητικὸς ὅρος τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων, καὶ δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὴν ἀνωτέρω πρότασιν, ὡς ἑξῆς·



Σχ. 321

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς κυκλικῆς τομῆς, τῆς ἰσάκις ἀπεχούσης ἀπὸ τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ.

Θεώρημα.

490. *Ὁ ὄγκος κολούρου ἐκ περιστροφῆς κώνου, ἔχοντος παραλλήλους τὰς βάσεις αὐτοῦ, εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τριῶν κόνων, ἐχόντων ὕψος μὲν κοινὸν τὸ ὕψος τοῦ κολούρου κώνου, βάσεις δὲ ὁ μὲν πρῶτος τὴν κάτω βάσιν, ὁ δεύτερος τὴν ἄνω βάσιν τοῦ κολούρου κώνου, καὶ ὁ τρίτος τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο τούτων βάσεων.*

Ἂς θεωρήσωμεν, ὡς ἐν § 488, κανονικὴν κόλουρον πυραμίδα ἐγγεγραμμένην ἐν τῷ κολούρῳ κώνῳ. Οἱ ὄγκοι τῶν δύο πυραμίδων, ὧν διαφορὰ εἶναι ἡ προκειμένη κόλουρος πυραμίς, ἔχουσι προφανῶς ὅρια τοὺς ὄγκους τῶν δύο κώνων, ὧν διαφορὰ εἶναι ὁ προτεθεὶς κόλουρος κῶνος· ἐπομένως ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου τούτου κώνου θὰ εἶναι τὸ ὅριον τῆς ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένης κολούρου πυραμίδος. Οὕτως, ἔστωσαν Ο ὁ ὄγκος, Β καὶ β αἱ δύο βάσεις καὶ Υ τὸ ὕψος τοῦ κολούρου κώνου· προσέτι δὲ Ο′ ὁ ὄγκος, Β′ καὶ β′ αἱ βάσεις τῆς ἐγγεγραμμένης κολούρου πυραμίδος· θέλομεν ἔχει (482).

$$O' = \frac{Y}{3}\left(B' + \beta' + \sqrt{B' \cdot \beta'}\right)$$

Ἀλλ᾽ ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν τῆς κολούρου πυραμίδος κύ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ξάνη ἀπεριορίστως, τὸ μὲν Ο΄ τείνει πρὸς τὸ Ο, τὸ Β΄ πρὸς τὸ Β, καὶ τὸ β΄ πρὸς τὸ β, καὶ εἰς τὸ ὅριον θέλομεν ἔχει τὸν τύπον·

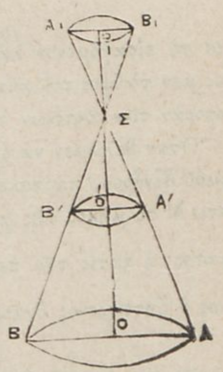
$$O = \frac{\Upsilon}{3}\left(B + \beta + \sqrt{B.\,\beta}\right)$$

Πόρισμα.

491. Ἐὰν παραστήσωμεν δι' Α τὴν ἀκτῖνα τῆς κάτω βάσεως Β, καὶ δι' α τὴν ἀκτῖνα τῆς ἄνω βάσεως β, θέλομεν ἔχει $B = \pi A^2$ καὶ $\beta = \pi\alpha^2$· καὶ ἑπομένως·

$$O = \frac{\pi\Upsilon}{3}\left(A^2 + \alpha^2 + A\alpha\right) \qquad (1)$$

491. Ἐὰν κανονικὴν ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνειαν τμήσωμεν δι ἐπιπέδων ΑΒ καὶ A_1B_1 καθέτων ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἀλλὰ κειμένην ἑκατέρωθεν τῆς κορυφῆς Σ (Σχ. 322), παρέχεται στερεὸν ἀποτελούμενον ἐκ δύο κώνων ΣΑΒ καὶ ΣA_1B_1. Τὸ στερεὸν τοῦτο δύναται προσέτι νὰ ὀνομασθῇ κόλουρος κῶνος, ἀλλὰ πρὸς διάκρισιν τούτου ἀπὸ τοῦ προηγουμένως θεωρηθέντος ὀνομάζεται οὗτος κόλουρος κῶνος τοῦ δευτέρου εἴδους.



Σχ. 322.

492. Αἱ προηγουμένως ῥηθεῖσαι ἰδιότητες ἐφαρμόζονται καὶ ἐπὶ τοῦ κολούρου κώνου τοῦ δευτέρου εἴδους τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς κορυφῆς Σ· δέον μόνον ν' ἀντικατασταθῇ ἡ λέξις διαφορὰ διὰ τῆς λέξεως ἄθροισμα, καὶ νὰ θεωρηθῇ ὅτι, ἐπειδὴ ἡ ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένη κόλουρος πυραμὶς εἶναι τοῦ δευτέρου εἴδους, τὸ ἐν τῇ παραστάσει τοῦ Ο΄ περιεχόμενον ῥιζικὸν πρέπει νὰ ληφθῇ μετὰ τοῦ σημείου· — εὑρίσκομεν δ' οὕτω πρὸς παράστασιν τοῦ ὄγκου κολούρου κώνου τοῦ δευτέρου εἴδους τὸν τύπον·

$$O = \frac{\Upsilon}{3}\left(B + \beta - \sqrt{B\beta}\right) = \frac{\pi\Upsilon}{3}\left(A^2 + \alpha^2 - A\alpha\right)$$

493. Ἐνίοτε ἐν ταῖς πρακτικαῖς ἐφαρμογαῖς, καὶ μάλιστα ἐν τῷ κυβισμῷ κορμῶν δένδρων, αἱ βάσεις ἐλάχιστα διαφέρουσιν, ὥστε

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δὲν δύναταί τις ἀσφαλῶς νὰ παραστήσῃ τὸν κόλουρον κῶνον διὰ κυλίνδρου ἔχοντος βάσιν μὲν τὴν τομὴν τοῦ κορμοῦ τὴν ἴσον ἀπέχουσαν τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ, ὕψος δὲ τὸ τοῦ κορμοῦ, ἀλλὰ τὸ οὕτως εἰσαγόμενον λάθος εἶναι ἄλλως εὔκολον νὰ ἐκτιμηθῇ, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ὁ κυλινδρικὸς ὄγκος

$$O_1 = \pi . \Upsilon \left(\frac{A+\alpha}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

ἀπὸ τοῦ ὄγκου τοῦ κολούρου κώνου, ὅστις παρίσταται ὑπὸ τοῦ τύπου (1). Εὑρίσκομεν δὲ οὕτω

$$O - O_1 = \frac{\pi . \Upsilon}{3} . \left(\frac{A-\alpha}{2}\right)^2$$

ἤτοι τὸ εἰσαγόμενον λάθος ἰσοῦται πρὸς τὸν ὄγκον κώνου ἔχοντος ὕψος μὲν τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ καὶ ἀκτῖνα τῆς βάσεως αὐτοῦ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων τοῦ κορμοῦ.

Ὅταν θέλωμεν νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (2) εἰς τὸν κυβισμὸν κορμοῦ δένδρου, παρασκευάζομεν τὴν ἐφαρμογὴν ταύτην ὡς ἑξῆς. Ἔστω Μ τὸ μῆκος τῆς μέσης περιφερείας, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν διὰ νήματος· ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας ταύτης θὰ εἶναι $\frac{M}{2\pi}$· καὶ ἑπομένως ὁ ζητούμενος ὄγκος θὰ εἶναι

$$O = \frac{\pi \Upsilon M^2}{4\pi^2} = \frac{\Upsilon M^2}{4\pi}.$$

494. Τὸ ζήτημα τῆς μετρήσεως τῆς χωρητικότητος βυτίου ἀνάγεται εἰς τὴν μέτρησιν κολούρου κώνου.

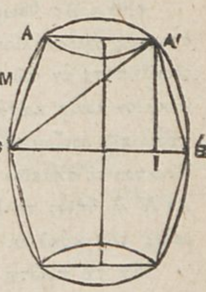
Θεωροῦντες τὸ βυτίον (Σχ. 293) ὡς ἀποτελούμενον ἐκ δύο κολούρων κώνων, κειμένων ἑκατέρωθεν τῆς μεγαλειτέρας καὶ κοινῆς αὐτῶν βάσεως, θέλομεν ἔχει τὸν τύπον

$$O = \frac{1}{3}\pi . \Upsilon . \left(A^2 + \alpha + A\alpha\right),$$

ἐν τῷ ὁποίῳ Υ εἶναι τὸ ὁλικὸν ὕψος τοῦ διπλοῦ κολούρου κώνου, α

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ΑΑ' καὶ Α ἡ ἀκτὶς τῆς μεγάλης βάσεως ΒΒ'. Ἀλλ' ὁ τύπος οὗτος παρέχει ἐξαγόμενον ἐλλιπές, διότι δὲν περιλαμβάνει τὸ διπλάσιον τοῦ ὄγκου τοῦ παραγομένου ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τμήματος ΑΜΒ τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τοῦ τόξου ΑΜΒ. Ἀντικαθιστῶντες δὲ ἐν τῇ παρενθέσει Αα διὰ A^2 εὑρίσκομεν τὸν τύπον



$$O = \frac{1}{3}\pi . \Upsilon \left(2A^2 + \alpha\right),$$

Σχ. 323.

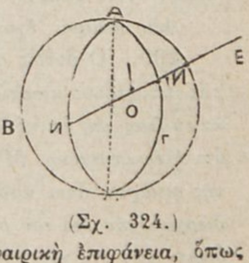
ὁ ὁποῖος περιέχει ἐξαγόμενον ἀρκούντως ἀσφαλές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Α'. ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ.

495. Καλεῖται *σφαιρικὴ ἐπιφάνεια* ἡ παραγομένη ἐκ τῆς περιστροφῆς ἡμιπεριφερείας ΑΒΑ' περὶ τὴν διάμετρον αὐτῆς ΑΑ'. (Σχ. 324).

Κατὰ τὴν περιστροφὴν πᾶν σημεῖον τῆς ἡμιπεριφερείας διαγράφει κύκλον, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς ΑΑ', τὸ δὲ ἐπίπεδον αὐτοῦ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦτον.



Σφαῖρα εἶναι στερεὸν περατούμενον ὑπὸ σφαιρικῆς ἐπιφανείας. Πολλάκις συγχέομεν

(Σχ. 324.)

ἐν τῇ ἀπαγγελίᾳ τὰς λέξεις *σφαῖρα* καὶ *σφαιρικὴ ἐπιφάνεια*, ὅπως ἐν τῇ ἐπιπεδομετρίᾳ τὰς λέξεις *κύκλος* καὶ *περιφέρεια κύκλου*. Ἑπομένως δέον μετὰ προσοχῆς νὰ διακρίνωμεν τὰ στοιχεῖα ταῦτα διὰ τῶν καθιερωμένων ὅρων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

496. Ἂς θεωρήσωμεν τὴν σφαῖραν παραγομένην ἐκ τῆς περιστροφῆς ἡμικυκλίου ΑΒΑ′ περὶ τὴν διάμετρον ΑΑ′, καὶ ἓν σημεῖον οἱονδήποτε ἐν τῷ διαστήματι. Ὅταν τὸ παράγον τὴν σφαῖραν ἡμικύκλιον λάβῃ κατὰ τὴν περιστροφὴν τὴν θέσιν ΑΓΑ′, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ ὁριζομένῳ ὑπὸ τῆς ΑΑ′ καὶ τοῦ θεωρηθέντος σημείου, δύναται τὸ σημεῖον τοῦτο, ὅπως τὸ Ε, νὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου ΑΓΑ′ ἢ ὅπως τὸ Ι ἐντὸς ἤ, τέλος, ὅπως τὸ Μ, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει τὸ σημεῖον Ε θὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο εἶναι μεγαλείτερον τῆς ἀκτῖνος Α τοῦ κύκλου. Ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει τὸ σημεῖον Ι θὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ΙΟ εἶναι μικρότερον τῆς ἀκτῖνος Α. Τέλος ἐν τῇ τρίτῃ περιπτώσει τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Ο εἶναι ἴσον τῇ ἀκτῖνι Α.

497. Ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς *γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ σταθεροῦ σημείου.*

Τὸ σταθερὸν τοῦτο σημεῖον Ο καλεῖται *κέντρον τῆς σφαίρας*. Πᾶσα δὲ εὐθεῖα, ὡς ἡ ΟΑ ἢ ΟΜ, ἀγομένη ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς ἓν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, καλεῖται *ἀκτὶς* τῆς σφαίρας.

498. *Πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι ἴσαι.*

Πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου Ο καὶ ἑνώνουσα δύο σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καλεῖται διάμετρος τῆς σφαίρας.

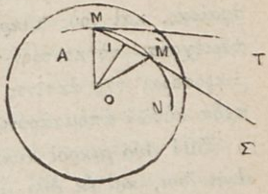
499. *Πᾶσαι αἱ διάμετροι τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας*, διότι ἑκάστη ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἀκτίνων.

Δύο σφαῖραι, ἔχουσαι ἴσας ἀκτῖνας, εἶναι ἴσαι.

500. Ὁ δοθεὶς ὁρισμὸς ἐν § 96 διὰ τὴν ἐφαπτομένην ὡς πρὸς τὰς ἐπιπέδους καμπύλας ἰσχύει καὶ διὰ τὰς ἐν τῷ διαστήματι καμπύλας μὴ ἐπιπέδους. Ἀρκεῖ δὲ πρὸς τοῦτο νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι *ἡ ἐφαπτομένη ΜΤ εἰς οἱανδήποτε καμπύλην κεχαραγμένην ἐπὶ τῆς σφαίρας εἶναι κάθετος κατὰ τὸ ἄκρον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΜ τὴν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς*. Τῷόντι (Σχ. 325) ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς καμπύλης ΑΜΒ σημεῖόν τι Μ′ πλησίον τοῦ σημείου Μ, καὶ ἂς φέρωμεν τὴν τέμνουσαν ΜΜ′Σ· ἂς ἑνώσωμεν δὲ τὸ κέντρον Ο μὲ τὸ μέσον Ι τῆς χορδῆς ΜΜ′. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΜΟΜ′ εἶναι ἰσοσκελές, ἡ εὐθεῖα ΟΙ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΜ′. Ἐντεῦ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θεν, ἐὰν ἡ τέμνουσα ΜΜ'Σ στραφῇ περὶ τὸ σημεῖον Μ οὕτως, ὥστε τὸ Μ' νὰ πλησιάζῃ συνεχῶς εἰς τὸ Μ, ἡ τέμνουσα ΜΜ'Σ εἰς τὸ ὅριον θὰ γίνῃ ἐφαπτομένη ΜΤ, τὸ δὲ σημεῖον Ι θὰ ταυτισθῇ μὲ τὸ Μ καὶ μὲ τὸ Μ'. Ἡ δὲ γωνία ΟΜΤ ὁρικὴ θέσις τῆς ὀρθῆς γωνίας ΟΙΣ θὰ εἶναι αὐτὴ αὕτη ἡ ὀρθὴ γωνία.



(Σχ. 325).

Θεώρημα.

501. *Ἡ τομὴ σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου εἶναι κύκλος.*

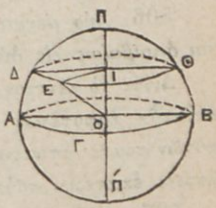
Τῳόντι τὰ σημεῖα τῆς τομῆς, ὡς σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, θ' ἀπέχωσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· ἐπομένως εἶναι γνωστὸν (88, 298) ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἐπιπέδου τῶν ἴσων ἀπεχόντων ἀπὸ σταθεροῦ σημείου εἶναι περιφέρεια κύκλου.

Πορίσματα.

502. Ἐὰν τὸ σταθερὸν σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον ἐνταῦθα εἶναι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας (Σχ. 326), κεῖται ἐπὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, φανερὸν ὅτι θὰ εἶναι αὐτὸ τοῦτο καὶ τὸ κέντρον τῆς τομῆς ΑΒΓ, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς θὰ εἶναι αὐτὴ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.

Ἐὰν τὸ σταθερὸν σημεῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, τὸ κέντρον τῆς τομῆς ΔΕΘ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ κέντρου Ο τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον (298), ὁπότε ἡ ἀκτὶς ΙΕ τῆς τομῆς εἶναι πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα ΟΕ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας καὶ ἡ ἑτέρα τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν ΟΙ εἶναι τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου. Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν τὴν μὲν ἀκτῖνα ΟΕ τῆς σφαίρας δι' Α, τὴν δὲ ἀκτῖνα ΙΕ τῆς τομῆς δι' α, καὶ τὸ ἀπόστημα ΟΙ διὰ δ, θέλομεν ἔχει.

$$\alpha^2 = A^2 - \delta^2$$



Σχ. 326.

503. Οὕτω δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν δύο εἰδῶν τομὰς τῆς σφαίρας –

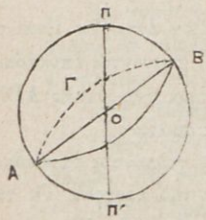
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τοὺς μεγίστους κύκλους, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν τῆς σφαίρας, καὶ τοὺς *μικροὺς κύκλους*, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα δὲν περιέχουσι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν οὖσαι μικρότεραι τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας, σμικρύνονται ἐφ' ὅσον τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν ἀπομακρύνονται τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

504. *Δύο μικροὶ κύκλοι ἴσον ἀπέχοντες τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας εἶναι ἴσοι, καὶ ἐκ δύο μικρῶν κύκλων ἄνισον ἀπεχόντων ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας μεγαλείτερος εἶναι ὁ πλησιέστερος πρὸς τὸ κέντρον.*

Διὰ νὰ ὁρισθῇ ἡ θέσις μικροῦ κύκλου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἀπαιτεῖται νὰ εἶναι γνωστὰ τρία τουλάχιστον σημεῖα αὐτοῦ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας· ἐνῷ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς θέσεως μεγίστου κύκλου ἀρκοῦσι δύο μόνον, διότι εἶναι γνωστὸν καὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ. Ἀλλ' ὅμως ἐν τῇ τελευταίᾳ ταύτῃ περιπτώσει τὰ δύο δεδομένα σημεῖα καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας δὲν πρέπει νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, διότι διὰ τῆς εὐθείας ταύτης, οὔσης διαμέτρου τῆς σφαίρας, εἶναι δυνατὸν ν' ἀχθῶσιν ἄπειρα ἐπίπεδα (284) τέμνοντα τὴν σφαῖραν.

505. *Πᾶς μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς εἰς δύο ἴσα μέρη.* Διότι, ἐὰν ἀποχωρίσωμεν τὰ δύο μέρη τῆς σφαίρας καὶ ἐπιθέσωμεν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἑτέρου οὕτως, ὥστε πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κοινῆς ἀμφοτέρων βάσεως νὰ κεῖται ἀμφοτέρων ἡ κυρτότης, αἱ δύο ἐπιφάνειαι θὰ ταυτισθῶσι, καθ' ὅσον ἄλλως σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας θ' ἀπεῖχον ἄνισον ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτῆς, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὸν ὁρισμὸν τῆς σφαίρας.



(Σχ. 327).

506. *Δύο μέγιστοι κύκλοι ΑΠΒΠ' καὶ ΑΒΓ (Σχ. 327) τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη.*

Διότι τὸ κέντρον Ο τῆς σφαίρας κείμενον ταυτοχρόνως εἰς τὰ ἐπίπεδα ἀμφοτέρων τῶν κύκλων τούτων εἶναι σημεῖον τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς· ἑπομένως ἡ κοινὴ τομὴ τῶν δύο κύκλων οὖσα διάμετρος ἑκατέρου τούτων διαιρεῖ αὐτὸν εἰς ἴσα μέρη.

507. *Εὐθεῖα δὲν δύναται νὰ συναντᾷ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς πλείονα τῶν δύο σημεῖα.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διότι ἡ εὐθεῖα αὐτὴ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ πλείονα τῶν δύο σημείων κοινὰ μετὰ τῆς περιφερείας τοῦ μεγίστου κύκλου, κείμενα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, τῷ ὁριζομένῳ ὑπὸ τῶν σημείων τούτων καὶ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

508. Ἡ σφαῖρα παράγεται ἐκ περιστροφῆς ἡμικυκλίου περὶ μίαν διάμετρον αὐτῆς οἱανδήποτε ΑΒ. Διότι ἡ περιφέρεια ΑΓΒ ἡ ὁριζομένη ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς ΑΒ, ἔχουσα τὸ αὐτὸ κέντρον Ο καὶ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα μὲ τὴν σφαῖραν, θὰ παραγάγῃ προφανῶς τὴν ἐπιφάνειαν ταύτην, στρεφομένη περὶ τὴν ΑΒ (Σχ. 327).

509. Καλοῦνται *πόλοι* κύκλου τῆς σφαίρας τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου.

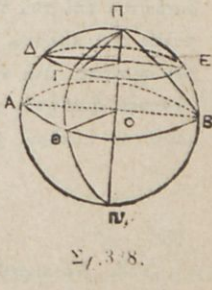
Δύο κύκλοι ΔΘΕ καὶ ΑΓΒ (Σχ. 326), *τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς πόλους Π καὶ Π΄.*

Τὸ κέντρον Ι κύκλου οἱουδήποτε ΔΕ, οἱ πόλοι Π καὶ Π΄ καὶ τὸ κέντρον Ο τῆς σφαίρας κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου.

Τὸ ἐπίπεδον παντὸς μεγίστου κύκλου ΠΓΠ΄ διερχομένου διὰ τῶν πόλων Π καὶ Π΄ κύκλου τινὸς ΔΓΕ (Σχ. 328) *εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου τούτου*, ἐπειδὴ διέρχεται διὰ τῆς εὐθείας ΠΠ΄, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μικροῦ κύκλου.

Θεώρημα.

510. *Πάντα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας κύκλου ΔΓΕ τῆς σφαίρας ἀπέχουσιν ἴσον ἀφ᾽ ἑκατέρου τῶν πόλων Π καὶ Π΄ τοῦ κύκλου.* (Σχ. 328).



Σχ. 328.

Τῳόντι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΠΙ ἡ ἑνώνουσα τὸν πόλον Π μετὰ τοῦ κέντρου Ι τοῦ κύκλου ΔΓΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΔΓΕ, αἱ εὐθεῖαι ΠΔ, ΠΓ, ΠΕ..... εἶναι πλάγιαι ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς Ι τῆς καθέτου, καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσαι.

Βλέπομεν προσέτι ὅτι τὰ τόξα τῶν μεγίστων κύκλων ΠΔ, ΠΓ, ΠΕ.....εἶναι ἴσα ὡς ὑποτείνοντα ἴσας χορδάς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐν τῇ περιπτώσει τέλος, καθ' ἣν ὁ προτεθεὶς κύκλος ΔΓΕ ἤθελε γίνει μέγιστος κύκλος ΑΘΒ, αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες ὑφίστανται· ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ΠΟΑ, ΠΟΘ, ΠΟΒ....ἔχουσαι τὰς κορυφὰς αὐτῶν ἐπὶ τοῦ κέντρου τῶν μεγίστων κύκλων ΠΑΠ', ΠΘΠ', ΠΒΠ'..... τὰ τόξα ΠΑ, ΠΘ, ΠΒ..... ἰσοῦνται ἕκαστον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου.

Σημείωσις.

511. Ἐκ τῶν δύο πόλων Π καὶ Π' μικροῦ κύκλου ΔΓΕ θέλομεν ἐφεξῆς λαμβάνει ὑπ' ὄψει μόνον τὸν πόλον Π, ὁ ὁποῖος εἶναι πλησιέστερος πρὸς τὸν κύκλον. Θὰ ὀνομάζωμεν δὲ τὴν εὐθύγραμμον ἀπόστασιν τοῦ πόλου Π ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου Δ τοῦ κύκλου ΔΓΕ *πολικὴν ἀπόστασιν* τοῦ κύκλου, καὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου μεγίστου κύκλου ΠΔ *σφαιρικὴν ἀκτῖνα* τοῦ κύκλου τούτου.

Ἡ σφαιρικὴ ἀκτὶς μεγίστου κύκλου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τούτου, ἡ δὲ πολικὴ αὐτοῦ ἀπόστασις ἰσοῦται πρὸς τὴν χορδὴν τοῦ τόξου τούτου, ἤτοι πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραγώνου.

512. Τὸ προηγούμενον θεώρημα παρέχει ἡμῖν τὸ μέσον, ὅπως χαράξωμεν ἐπὶ στερεᾶς σφαίρας περιφερείας, ὅπως χαράσσομεν αὐτὰς ἐπὶ ἐπιπέδου. Πρὸς τοῦτο δὲ μεταχειριζόμεθα διαβήτην, τοῦ ὁποίου τὰ σκέλη εἶναι καμπύλα. Ἀνοίγομεν τὸν διαβήτην τόσον, ὥστε τὸ ἀπόστημα τῶν δύο αἰχμῶν τῶν σκελῶν αὐτοῦ νὰ ἰσῶται πρὸς τὴν κατὰ βούλησιν πολικὴν ἀπόστασιν τοῦ χαραχθησομένου ἐπὶ τῆς σφαίρας κύκλου· ἔπειτα στηρίζομεν τὴν μίαν αἰχμὴν τοῦ διαβήτου ἐπὶ τοῦ σημείου τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ εἶναι πόλος τοῦ κύκλου, διὰ δὲ τῆς ἑτέρας χαράσσομεν τὸν κύκλον ἐπὶ τῆς σφαίρας. Διὰ νὰ γράψωμεν μέγιστον κύκλον, πρέπει τὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου νὰ ἰσῶται πρὸς τὴν χορδὴν τοῦ τεταρτημορίου μεγίστου κύκλου, ἀκτῖνα ἔχοντος τὴν τῆς σφαίρας.

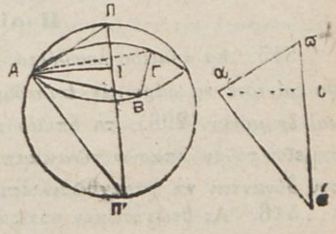
Πρόβλημα.

513. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον σφαίρας* (Σχ. 329).

Ἐκ τοῦ σημείου Π τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ὡς πόλου καὶ μὲ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου ὅσον θέλομεν γράφομεν κύκλον ΑΒΓ. Μεταφέρομεν διὰ τοῦ διαβήτου τὰς τρεῖς εὐθυγράμμους ἀποστάσεις ΑΒ, ΒΓ καὶ ΓΑ, καὶ κατασκευάζομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου τρίγωνον Α'Β'Γ' ἔχον πλευρὰς τὰς ἀνωτέρω τρεῖς ἀποστάσεις, καὶ εὑρίσκομεν τὸ κέντρον Ι τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον τοῦτο περιγεγραμμένου κύκλου, ὁπότε ὁρίζεται ἡ ΑΙ ἀκτὶς τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Ἔπειτα, ἐὰν σχηματίσωμεν τρίγωνον τὸ απι ἴσον πρὸς τὸ ΑΠΙ, ὑπολείπεται μόνον νὰ ὑψωθῇ ἡ απ' κάθετος ἐπὶ τὴν απ, ἥτις συναντᾷ τὴν προσεκβολὴν τῆς πι κατά τι σημεῖον π', ὁπότε ἡ ππ' θὰ εἶναι ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ὁριζομένη ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου απ π'.



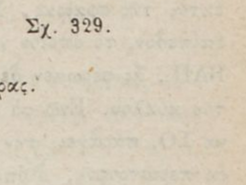
Σχ. 329.

Ἐπίπεδον λέγομεν ὅτι *ἐφάπτεται σφαίρας*, ὅταν ἔχῃ ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Θεώρημα.

514. *Πᾶν ἐπίπεδον ΑΓΒ, κάθετον ἐπὶ ἀκτῖνα ΟΓ καὶ κατὰ τὸ ἄκρον αὐτῆς Γ, εἶναι ἐφαπτόμενον τῇ σφαίρᾳ· καὶ ἀντιστρόφως· πᾶν ἐπίπεδον ΑΓΒ, ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΓ τὴν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς* (Σχ. 330).

Ἔστω ΑΓΒ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΓ κατὰ τὸ ἄκρον αὐτῆς Γ· ἔστω δὲ καὶ ἕτερον τυχὸν σημεῖον Δ τοῦ ἐπιπέδου τούτου· ἡ εὐθεῖα ΟΔ ὡς πλαγία, εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΟΓ, ἐπομένως τὸ σημεῖον Δ κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας· οὕτω δὲ καὶ πᾶν ἄλλο σημεῖον (πλὴν τοῦ Γ) τοῦ ἐπιπέδου κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας· ἐπομένως τὸ ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς σφαίρας κατὰ τὸ σημεῖον Γ.



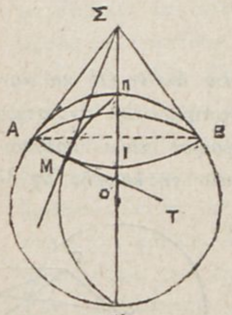
Σχ. 330.

Ἀντιστρόφως· ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ΑΓΒ ἐφάπτηται τῆς σφαίρας κατὰ τὸ σημεῖον Γ, πᾶν σημεῖον Δ τοῦ ἐπιπέδου τούτου διάφορον τοῦ Γ κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας· ἐπομένως ἡ εὐθεῖα ΟΔ ὡς καὶ πᾶσα ἄλλη ἀγομένη ἐκ τοῦ Ο εἰς τὸ ἐπίπεδον εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ἀκτῖνος ΟΓ· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΟΓ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας ἀγομένης ἐκ τοῦ Ο πρός τι σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, ἕπεται ὅτι ἡ ἀκτὶς ΟΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον καὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα κατὰ τὸ σημεῖον Γ.

Πορίσματα,

515. *Διὰ σημείου ληφθέντος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας δυνάμεθα πάντοτε νὰ φέρωμεν* **ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον** *τῆς ἐπιφανείας ταύτης καὶ ἕν μόνον* (296), τὸ ὁποῖον περιέχει τὰς ἐφαπτομένας κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο ἁπασῶν τῶν καμπύλων αἵτινες διὰ τοῦ σημείου τούτου δύνανται νὰ χαραχθῶσιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. (504, 294).

516. Ἂς θεωρήσωμεν σφαῖράν τινα Ο καὶ σημεῖον Σ κείμενον ἐκτὸς τῆς σφαίρας (Σχ. 321). Διὰ τῆς εὐθείας ΟΣ ἂς φέρωμεν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ τμήσῃ τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον ΒΑΠ′, ἂς φέρωμεν δὲ καὶ τὴν ΣΑ ἐφαπτομένην τοῦ μεγίστου τούτου κύκλου. Ἐνῷ τὸ ἡμικύκλιον ΠΑΠ′, στρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονα ΣΟ, παράγει τὴν σφαῖραν, ἡ ἐφαπτομένη ΣΑ παράγει κῶνον ἐκ περιστροφῆς, ὁ ὁποῖος ἔχει κοινὸν μετὰ τῆς σφαίρας τὸν κύκλον ΑΒ, τὸν γραφόμενον ὑπὸ τοῦ σημείου Α. Ἐπὶ πλέον δὲ εἰς πᾶν σημεῖον Μ τοῦ κύκλου τούτου ὁ κῶνος καὶ ἡ σφαῖρα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον, διότι ἡ γενέτειρα ΣΜ καὶ ἡ ἐφαπτομένη ΜΤ εἰς τὸν κύκλον ΑΒ, αἵτινες ὁρίζουσι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τὸν κῶνον (464) κεῖνται ἀμφότεραι (515) ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ ἐφαπτομένῳ τῆς σφαίρας. Λέγομεν δὲ τότε ὅτι *ὁ κῶνος εἶναι περιγεγραμμένος εἰς τὴν σφαῖραν*, καὶ ὅτι *ἡ σφαῖρα εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κῶνον* κατὰ τὸν κύκλον ΑΒ.



Σχ. 331.

Ἐντεῦθεν προσέτι παρατηροῦμεν ὅτι *διὰ σημείου Σ κειμένου ἐκτὸς τῆς σφαίρας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἄπειρα ἐπίπεδα ἐφαπτόμενα τῆς σφαίρας*, καὶ ὅτι πᾶσαι αἱ ἐφαπτόμεναι ΣΑ, ΣΜ, ΣΒ... τῆς σφαίρας, αἱ διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Σ, εἶναι ἴσαι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν τὸ σημεῖον Σ ἀπομακρύνηται ἀπεριορίστως ἐπὶ τῆς εὐθείας ΠΠ', ὁ κῶνος μετατρέπεται εἰς κύλινδρον περιγεγραμμένον, καὶ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῆς ἐπαφῆς τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κυλίνδρου γίνεται μέγιστος κύκλος, κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΠΠ'.

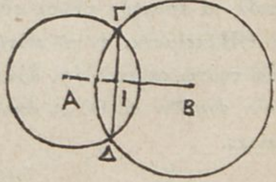
Θεώρημα.

517. *Ἡ ἀμοιβαία τομὴ δύο σφαιρῶν εἶναι περιφέρεια κύκλου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τὴν ἑνώνουσαν τὰ κέντρα τῶν δύο σφαιρῶν* (Σχ. 332).

Διότι ἡ τομὴ αὕτη εἶναι περιφέρεια παραγομένη ἐκ τῆς περιστροφῆς περὶ τὴν ΑΒ τοῦ κοινοῦ σημείου Γ τῶν δύο περιφερειῶν, αἵτινες περὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, τὴν διὰ τῶν κέντρων διερχομένην, περιστρεφόμεναι παράγουσι τὰς δύο σφαίρας.

Σημείωσις.

518. Ὅταν δύο σφαῖραι ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, λέγομεν ὅτι *ἐφάπτονται ἀλλήλων* κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο, τὸ ὁποῖον καλεῖται *σημεῖον τῆς ἐπαφῆς*.



Σχ. 332.

Τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν, καὶ διὰ τοῦ σημείου τούτου διέρχεται ἓν ἐπίπεδον, ἐφαπτόμενον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο εἰς ἀμφοτέρας τὰς σφαίρας (101).

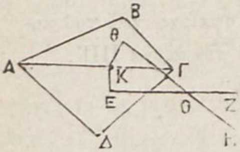
Δύο σφαῖραι δύνανται νὰ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλας τὰς αὐτὰς σχετικὰς θέσεις, τὰς ὁποίας καὶ δύο κύκλοι (102), καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι σχέσεις μεταξὺ τῶν ἀποστημάτων τῶν κέντρων καὶ τῶν ἀκτίνων αὐτῶν εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ τὰς τῶν μεγίστων κύκλων τῶν ὁριζομένων ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν κέντρων τῶν δύο σφαιρῶν.

Θεώρημα

519 *Διὰ τεσσάρων σημείων Α,Β,Γ,Δ, μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, διέρχεται ἐπιφάνεια σφαίρας, καὶ μία μόνη* (Σχ. 333).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ὑπάρχει σημεῖον ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῶν τεσσάρων τούτων σημείων.



Σχ. 333.

Πᾶν σημεῖον ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τὰ σημεῖα Α,Β,Γ καὶ Δ πρέπει νὰ κεῖται ἐπ' εὐθείας ΘΗ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, διότι ἡ κάθετος αὕτη εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τὰ σημεῖα Α,Β,Γ (298)· τὸ ζητούμενον ὅμως σημεῖον πρέπει νὰ κεῖται καὶ ἐπὶ ἑτέρας εὐθείας ΕΖ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΔΓ. Ἐπειδὴ αἱ δύο εὐθεῖαι ΘΗ καὶ ΕΖ ἓν καὶ μόνον κοινὸν σημεῖον δύνανται νὰ ἔχωσι, συμπεραίνομεν ὅτι ἓν μόνον σημεῖον δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ, ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῶν σημείων Α,Β,Γ,Δ. Ἔπειτα τοιοῦτον σημεῖον ὑπάρχει πάντοτε, ἐὰν κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Τῳόντι, ἐπειδὴ τὸ διὰ τοῦ μέσου Κ τῆς ΑΓ διερχόμενον ἐπίπεδον, κάθετον ἐπὶ ταύτην, εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Γ, θὰ περιέχῃ καὶ τὴν ΕΖ καὶ τὴν ΘΗ· ἄλλως αἱ δύο εὐθεῖαι ΚΘ καὶ ΚΕ, καθ' ἃς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο συναντᾷ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ, τέμνουσιν ἀλλήλας, ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα ταῦτα εἶναι διάφορα· αἱ δύο λοιπὸν εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΘΗ κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΕΚΘ καὶ οὖσαι ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κάθετοι ἐπὶ δύο εὐθείας ΚΘ καὶ ΚΕ τεμνομένας ἔχουσι κοινὸν σημεῖον τὸ Ο, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης σφαίρας.

Πορίσματα.

520. *Δύο σφαῖραι, ἔχουσαι τέσσαρα κοινὰ σημεῖα, μὴ κείμενα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ταυτίζονται.*

221. *Αἱ κάθετοι αἱ ἀγόμεναι ἐπὶ τῶν τεσσάρων ἑδρῶν τετραέδρου διὰ τῶν κέντρων τῶν περὶ αὐτὰς τὰς ἕδρας περιγεγραμμένων κύκλων τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.*

Θεώρημα.

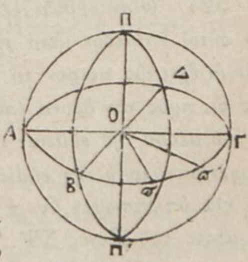
*522. *Ἡ γωνία ΑΠΒ δύο τόξων μεγίστου κύκλου ἔχει ὡς μέτρον τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου ΑΒ τὸ γραφόμενον μὲ πόλον τὴν*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κορυφὴν αὐτῆς Π, καὶ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς, ἢ τὸ ἐλάχιστον τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου ππ', τὸ ὁποῖον ἑνώνει τοὺς πόλους τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. (Σχ. 334).

Καλεῖται γωνία δύο καμπύλων, διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ διαστήματος, ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουσιν αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν καμπύλων κατὰ τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον. Ἑπομένως. *Ἡ γωνία δύο καμπύλων κεχαραγμένων ἐπὶ σφαίρας εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τῶν ἐπιπέδων τῶν διερχομένων διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ ἑκατέρας τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰς καμπύλας κατὰ τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον·* διότι, αἱ ἐφαπτόμεναι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τὴν καταλήγουσαν εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν δύο καμπύλων (500), καὶ ἑπομένως ἡ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία εἶναι τὸ μέτρον τῆς ὑπὸ τῶν θεωρηθέντων ἐπιπέδων σχηματιζομένης διέδρου γωνίας. Ἰδίᾳ δὲ ἡ γωνία τῶν δύο τόξων μεγίστων κύκλων εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τῶν ἐπιπέδων τῶν τόξων τούτων.

Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ τὰ τόξα ΠΑ καὶ ΠΒ εἶναι τεταρτημόρια, αἱ γωνίαι ΠΟΑ καὶ ΠΟΒ εἶναι ὀρθαί, καὶ ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι ἡ ἐπίπεδος γωνία ἡ μετροῦσα τὴν δίεδρον γωνίαν τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τῶν δύο μεγίστων κύκλων. Ἀλλ' ἡ δίεδρος αὕτη γωνία ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ ΑΠΒ τῶν δύο τόξων τῶν μεγίστων κύκλων, καὶ ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΒ ἔχει ὡς μέτρον τὸ τόξον ΑΒ· ἑπομένως τὸ τόξον ΑΒ εἶναι τὸ μέτρον καὶ τῆς γωνίας ΑΠΒ.



(Σχ. 334).

Δεύτερον ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς περιφερείας ΑΒΓ κατὰ τὴν διεύθυνσιν Α πρὸς τὸ Β δύο τόξα Απ καὶ Βπ', ἑκάτερον ἴσον πρὸς ἓν τεταρτημόριον· τὸ τόξον, ππ', εἶναι προφανῶς ἴσον τῷ τόξῳ ΑΒ, καὶ διὰ νὰ ἐπαληθεύσωμεν τὸ δεύτερον μέρος τοῦ προκειμένου θεωρήματος, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὰ σημεῖα π καὶ π' εἶναι πόλοι τῶν κύκλων ΠΑΠ' καὶ ΠΒΠ'. Τῷόντι, ἡ εὐθεῖα Οπ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ, διότι τὸ τόξον Απ εἶναι τεταρτημόριον τῆς περιφερείας, κάθετος δὲ καὶ ἐπὶ τὴν ΟΠ, διότι κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΓ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μεγίστου κύ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κλου ΠΑΠ′· ἐπομένως τὸ π εἶναι πόλος τοῦ μεγίστου τούτου κύκλου. Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι τὸ π′ εἶναι πόλος τοῦ μεγίστου κύκλου ΠΒΠ′.

Εἴπομεν ὅτι λαμβάνομεν τὰ τόξα Βπ καὶ Βπ′ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν ἀπὸ τοῦ Α καὶ Β ὡς ἀφετηριῶν. Ἐὰν δὲ λάβωμεν ταῦτα κατ' ἀντίθετον φοράν, τὸ τόξον ππ′ θὰ εἶναι τὸ παραπλήρωμα τῆς γωνίας τῶν δύο μεγίστων κύκλων. Ὑπάρχει ἐπομένως εἷς περιορισμὸς ἐν τῇ ἐπαληθεύσει τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ θεωρήματος. Πρέπει νὰ λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψιν διὰ μὲν τὸν μέγιστον κύκλον ΠΑ Β′τὸν πόλον π τὸν κείμενον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, πρὸς ὃ καὶ τὸ ἡμικύκλιον ΠΒΠ′, καὶ διὰ τὸν ἕτερον μέγιστον κύκλον ΠΒΠ′ τὸν πόλον π′ οὐχὶ τὸν κείμενον πρὸς τὸ μέρος, πρὸς ὃ καὶ τὸ ἡμικύκλιον ΠΑΠ′, ἀλλ' ἐπὶ τὰ ἀντίθετα.

523. Δύο μέγιστοι κύκλοι ΑΠΓ, ΒΠΔ (Σχ. 334) σχηματίζουσι κατὰ τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως αὐτῶν Π τέσσαρας γωνίας ΑΠΒ, ΒΠΓ, ΓΠΔ, ΔΠΑ. Ἐκ τούτων αἱ ἐφεξῆς γωνίαι, ὡς αἱ ΑΠΒ καὶ ΒΠΓ, εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ δὲ κατὰ κορυφὴν γωνίαι, ὡς αἱ ΑΠΒ καὶ ΓΠΔ εἶναι ἴσαι.

Β′. ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

Θεώρημα.

524. *Ὅταν εὐθεῖα ΑΒ στρέφηται περὶ ἄξονα ΧΨ, κείμενον ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μετὰ τῆς εὐθείας, ἡ ὑπ' αὐτῆς παραγομένη ἐπιφάνεια ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς προβολῆς τῆς εὐθείας ταύτης ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, τὴν ἔχουσαν ἀκτῖνα τὴν ἐκ τοῦ μέσου τῆς εὐθείας ἀγομένην κάθετον ἐπὶ ταύτην, καὶ περατουμένην μεταξὺ τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἄξονος.*

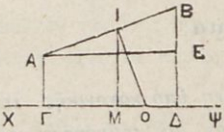
Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ κεῖται ὁλόκληρος πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἄξονος ΧΨ. Ὅταν ἡ θέσις τῆς εὐθείας εἶναι τοιαύτη ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ΧΨ, ἡ ὑπ' αὐτῆς παραγομένη ἐπιφάνεια ἔχει ὡς μέτρον (489)

$$Ε = 2\pi\ ΙΜ.\ ΑΒ$$

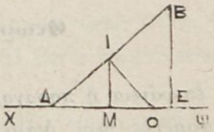
ἔνθα ΙΜ εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Ι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΧΨ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος τῇ ΧΨ, (Σχ. 335 γ΄.) τὸ προτεθὲν θεώρημα εἶναι τελείως ἀποδεδειγμένον, ἐφαρμοζομένης

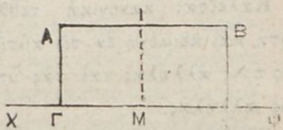


Σχ. 335. α΄.



Σχ. 335 β΄.

τῆς ἀνωτέρω παραστάσεως. Ἐὰν δὲ ἡ ΑΒ δὲν εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι ΧΨ (Σχ. 335 α΄.), ἃς φέρωμεν τὴν ΑΕ παράλληλον τῷ ἄξονι ΧΨ μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν προβάλλουσαν ΒΔ, καὶ τὴν ΙΟ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΙΜΟ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθέτους ἐπ' ἀλλήλας κατὰ μίαν, καὶ θέλομεν ἔχει



Σχ. 335 γ΄.

$$\frac{ΙΜ}{ΑΕ} = \frac{ΙΟ}{ΑΒ}. \text{ ἐξ ἧς } ΙΜ.\ ΑΒ = ΙΟ.\ ΑΕ$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἰσότητι (1) τὸ γινόμενον ΙΜ.ΑΒ διὰ τοῦ ΙΟ.ΑΕ, λαμβάνομεν

$$Ε = 2\pi.\ ΙΟ.\ ΑΕ = 2\pi\ ΙΟ.\ ΓΔ. \qquad (2)$$

Ἐν τῇ περιπτώσει, καθ' ἣν τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΧΨ (Σχ. 335 β΄.), ὁ συλλογισμὸς ὑφίσταται ὁ αὐτός· μόνον δὲ ἡ εὐθεῖα ΑΕ συμπίπτει μετὰ τοῦ ἄξονος.

Πόρισμα.

525. Παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τῶν τριῶν ἐν τῷ σχήματι 335 θέσεων τῆς ΑΒ παράγονται διὰ τῆς περιστροφῆς αὐτῆς τρία στερεά· ἤτοι κόλουρος κῶνος, ἁπλοῦς κῶνος καὶ κύλινδρος, ἅτινα πάντα ἔχουσιν ὕψος τὴν προβολὴν τῆς ΑΒ ἐπὶ τὸν ἄξονα ΧΨ.

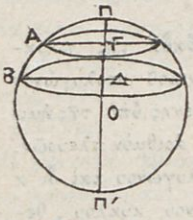
Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι *τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς οἱουδήποτε τῶν τριῶν τούτων στερεῶν ἰσοῦται τῷ*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Αἱ ἀνωτέρω παραστάσεις παρέχουσι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι αἱ κανονικαὶ τεθλασμέναι γραμμαὶ ἀντικαθίστανται ὑπὸ τῶν περιφερειῶν, αἵτινες εἶναι ὅρια αὐτῶν. ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ταύτῃ τὸ α γίνεται ἴσον τῇ Α· καὶ ἐπομένως

$$Ε = 4\pi Α^2.$$

528. Καλεῖται *σφαιρικὴ ζώνη* τὸ μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο κύκλων, ὧν τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα. Οἱ κύκλοι οὗτοι καλοῦνται *βάσεις* τῆς ζώνης, τὸ δὲ ἀπόστημα τῶν ἐπιπέδων τῶν βάσεων *ὕψος* τῆς ζώνης.



Σχ. 338.

Οὕτως ἐνῷ ἡ ἡμιπεριφέρεια ΠΑΒΠ′ περιστρεφομένη περὶ τὴν διάμετρον ΠΠ′ παράγει σφαῖραν (Σχ. 338), τὸ τόξον ΑΒ διαγράφει σφαιρικὴν ζώνην, τῆς ὁποίας αἱ βάσεις εἶναι αἱ περιφέρειαι ΒΔ καὶ ΑΓ αἱ γραφόμεναι ὑπὸ τῶν σημείων Β καὶ Α, τὸ δὲ ὕψος τῆς ζώνης εἶναι ἡ ΓΔ, προβολὴ τοῦ τόξου ΑΒ ἐπὶ τὸν ἄξονα ΠΠ′.

Ἐὰν τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο θεωρηθέντων ἐπιπέδων γίνῃ ἐφαπτόμενον εἰς τὴν σφαῖραν, ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς τοῦτο κύκλος γίνεται ἓν σημεῖον, καὶ ἡ ζώνη ἔχει τότε μίαν μόνον βάσιν. Οὕτω τὸ τόξον ΠΑ, στρεφόμενον περὶ τὴν ΠΠ′, παράγει σφαιρικὴν ζώνην, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι ὁ κύκλος ΑΓ καὶ ὕψος ἡ ΠΓ.

Θεώρημα.

529. ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαιρικῆς ζώνης ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους αὐτῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας.***

Ἡ ἐπιφάνεια σφαιρικῆς ζώνης εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ παραγομένη ἐπιφάνεια ὑπὸ κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς, ἐγγεγραμμένης ἐν τῷ τόξῳ τῷ παράγοντι τὴν ζώνην, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς τεθλασμένης γραμμῆς αὐξάνῃ ἀπεριορίστως.

Ἂς παραστήσωμεν δι᾽ Ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς ζώνης, δι᾽ Υ τὸ ὕψος καὶ διὰ Α τὴν ἀκτῖνα τοῦ παραγαγόντος τὴν ζώνην

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τόξου. Ἔστωσαν προσέτι ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς παραγομένης ὑπὸ κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τόξον, καὶ α τὸ ἀπόστημα τῆς τεθλασμέεης ταύτης γραμμῆς. Ἐπειδὴ ἡ προβολὴ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ἐπὶ τὸν ἄξονα εἶναι αὐτὸ τὸ ὕψος τῆς ζώνης Υ, θέλομεν ἔχει

$$\varepsilon = \Upsilon .\ 2\pi\alpha.$$

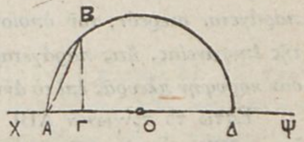
Ἀλλά, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς τεθλασμένης γραμμῆς αὐξάνῃ ἀπεριορίστως, τὸ μὲν Υ μένει σταθερόν, τὸ ε τείνει πρὸς τὸ Ε, καὶ τὸ α πρὸς τὸ *Α*· ἑπομένως εἰς τὸ ὅριον θέλομεν ἔχει

$$E = \Upsilon .\ 2\pi A.$$

Πορίσματα.

530. ***Ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ἢ ἐν ἴσαις σφαίραις δύο ζῶναι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν· καὶ ἑπομένως δύο ζῶναι ἰσοϋψεῖς εἶναι ἰσοδύναμοι.***

531. Ἂς θεωρήσωμεν τὴν σφαιρικὴν ζώνην τὴν παραγομένην ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΒ, στρεφομένου περὶ τὴν διάμετρον ΑΔ· τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς ζώνης ταύτης θὰ ἔχῃ ὡς μέτρον τὸ 2π ΑΟ.ΑΓ=πΑΔ.ΑΓ ἢ (165) πΑΒ².



Σχ. 339.

Ἑπομένως ***τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης μίαν ἐχούσης βάσιν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν χορδὴν τοῦ παραγαγόντος τὴν ζώνην τόξου.***

Θεώρημα.

532. ***Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας.***

Διότι ἡ ἐπιφάνεια αὕτη δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ διπλάσιον σφαιρικῆς ζώνης παραγομένης ἐκ τῆς περιστροφῆς τόξου ἴσου πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τῆς περιφερείας· ἑπομένως θὰ εἶναι

$$E = 2\pi .\ (OA\sqrt{2})^2\ (531, 165) = 2.\pi.OA^2.2 = 4\pi OA^2$$

$$\text{ἢ } E = 2\pi.OA.\ 2OA = 2\pi.OA.A\Delta\ (\Sigma\chi.\ 339).$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πορίσματα.

533. Ἐὰν δι' Ε παρασταθῇ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, δι' Α ἡ ἀκτὶς καὶ διὰ Δ ἡ διάμετρος αὐτῆς, θέλομεν ἔχει

$$Ε=2Α.\ 2πΑ=4πΑ^2=πΔ^2.$$

Ἑπομένως· *ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοδυναμεῖ μὲ τέσσαρας μεγίστους κύκλους τῆς αὐτῆς σφαίρας· ἢ ὅτι ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν κύκλου, ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας.*

534. *Τὰ ἐμβαδὰ δύο σφαιρῶν εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων ἢ τῶν διαμέτρων αὐτῶν.*

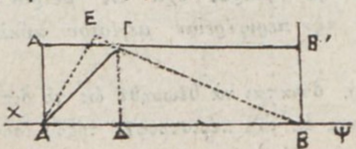
Γ'. ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

Θεώρημα.

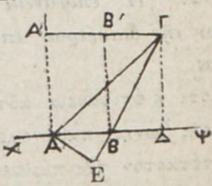
535. *Ἐὰν τρίγωνον στραφῇ περὶ ἄξονα κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ καὶ διερχόμενον διὰ μιᾶς τῶν κορυφῶν, χωρὶς νὰ τέμνῃ αὐτό, παράγεται στερεόν, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας, ἥτις παράγεται ὑπὸ τῆς ἀντικειμένης πρὸς τὴν ληφθεῖσαν κορυφὴν πλευρᾶς ἐπὶ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς ταύτην ὕψος τοῦ τριγώνου.*

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν κορυφὴν αὐτοῦ Α ἐπὶ τοῦ ἄξωνος ΧΨ καὶ τὴν ΑΕ ὡς ὕψος. Θὰ διακρίνωμεν τρεῖς περιπτώσεις.

Α'. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι μία τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ἡ ΑΒ, συμπίπτει μετὰ τοῦ ἄξονος ΧΨ. Καθόσον τὸ ὕψος ΓΔ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πλευρὰν ΑΒ πίπτει ἐντὸς (Σχ, 340) ἢ ἐκτὸς (Σχ. 341) τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὁ ὑπὸ τοῦ τριγώνου παραγόμενος ὄγκος εἶναι ἄθροισμα ἢ διαφορὰ τῶν κώνων τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ.



Σχ. 340.



Σχ. 341.

Συναμα ὁ παραγόμενος κύλινδρος ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ ὀρθο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γωνίου ΑΒΒ'Α' ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΓΔ μὲ τὸ δεδομένον τρίγωνον ΑΒΓ, εἶναι δὲ ἄθροισμα (Σχ. 340) ἢ διαφορὰ (Σχ. 341) τῶν κυλίνδρων τῶν παραγομένων διὰ τῆς περιστροφῆς τῶν ὀρθογωνίων ΑΔΓΑ' καὶ ΒΔΓΒ'. Ἐξ ἄλλου δὲ ὁ κῶνος ΑΓΔ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τοῦ κυλίνδρου ΑΔΓΑ' καὶ ὁ κῶνος ΒΓΔ τὸ τρίτον τοῦ κυλίνδρου ΒΔΓΒ' (473). Λοιπὸν εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιστάσεις ὁ παραγόμενος ὄγκος ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τοῦ κυλίνδρου ΑΒΒ'Α', καὶ θέλομεν ἔχει $\text{ὄγκ. ΑΒΓ} = \frac{1}{3}\pi\, \text{ΓΔ}^2 .\, \text{ΑΒ}.$

$$\text{ἢ} \quad \text{ὄγκ. ΑΒΓ} = \frac{1}{3}\pi \text{ΓΔ. ΒΓ. ΑΕ}$$

ἐπειδὴ τὰ γινόμενα ΓΔ. ΑΒ καὶ ΒΓ. ΑΕ παριστῶσιν ἀμφότερα τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ δεδομένου τριγώνου. ἑπομένως π.ΓΔ.ΒΓ παριστᾷ (469) τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κώνου ΒΓΔ ἢ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς παραγομένης ὑπὸ τῆς πλευρᾶς ΒΓ κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἄρα $\text{ὄγκ. ΑΒΓ} = \text{ἐπιφ. ΒΓ.} \frac{\text{ΑΕ}}{3}$

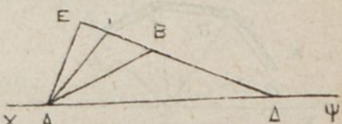
Β'. Ἂς ὑποθέσωμεν (Σχ. 342) ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ τοῦ τριγώνου ἔχει μόνον τὸ ἄκρον αὐτῆς Α ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΧΨ, καὶ ὅτι ἡ πλευρὰ ΒΓ προσεκβαλλομένη συναντᾷ τὸν ἄξονα εἴς τι σημεῖον Δ.

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι διαφορὰ τῶν τριγώνων ΑΓΔ καὶ ΑΒΔ, ὁ ὄγκος ὁ ὑπ' αὐτοῦ παραγόμενος εἶναι διαφορὰ τῶν ὄγκων τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν τριγώνων τούτων, καὶ θέλομεν ἔχει

$$\text{ὄγκ. ΑΒΓ} = (\text{ἐπιφ. ΔΓ} - \text{ἐπιφ. ΔΒ}). \frac{\text{ΑΕ}}{3}$$

$$\text{ἢ ὄγκ. ΑΒΓ} = \text{ἐπιφ. ΒΓ.} \frac{\text{ΑΕ}}{3}$$

Γ'. Ἂς ὑποθέσωμεν τέλος ὅτι, ἐνῷ ἡ πλευρὰ ΑΒ τοῦ τριγώνου ἔχει μόνον τὴν κορυφὴν Α ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΧΨ, ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα.



Σχ. 342.

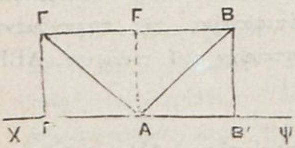
Ὁ παραγόμενος ὄγκος ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἄθροισμα (Σχ. 343) ἢ διαφορὰ (Σχ. 344) τῶν ὄγκων τῶν παραγομένων·

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

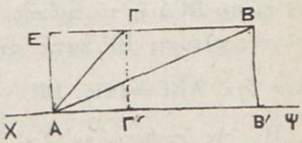
ὑπὸ τῶν τριγώνων ΑΒΕ καὶ ΑΓΕ· ἀλλ' ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΕ εἶναι τὰ δύο τρίτα (475) τοῦ κυλίνδρου τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΒ'Ε, καὶ ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΑΓΒ εἶναι τὰ δύο τρίτα τοῦ κυλίνδρου, τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΓ'ΕΓ. Ἑπομένως εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιστάσεις ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὰ δύο τρίτα τοῦ κυλίνδρου τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ ὀρθογωνίου Β'Γ'ΓΒ ἀθροίσματος (Σχ. 343) ἢ διαφορᾶς (Σχ. 344) τῶν ὀρθογωνίων ΑΒ'ΒΕ καὶ ΑΓΓ'Ε· καὶ θέλομεν ἔχει προσέτι

$$\text{ὄγκ. ΑΒΓ} = \frac{2}{3}\pi \text{ΑΕ}^2.\text{ΒΓ} = 2\pi \text{ΑΕ.ΒΓ}.\frac{\text{ΑΕ}}{3} = \text{ἐπιφ.ΒΓ}.\frac{\text{ΑΕ}}{3}.$$

Τὸ 2πΑΕ.ΒΓ παριστᾷ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ ὀρθογωνίου Β'Γ'ΓΒ, ἤτοι τὴν ἐπιφάνειαν τὴν γραφομένην ὑπὸ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου.



Σχ. 343.

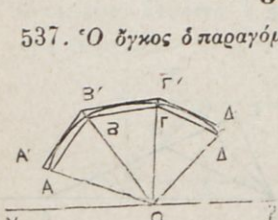


Σχ. 344.

536. Καλεῖται *κανονικὸς πολυγωνικὸς τομεὺς* ἡ ἐπιφάνεια ἡ περιεχομένη ὑπὸ κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς καὶ δύο ἀκτίνων, αἵτινες ἑνώνουσι τὰ ἄκρα τῆς τεθλασμένης γραμμῆς μετὰ τοῦ κέντρου τοῦ εἰς ταύτην περιγραφομένου κύκλου. Ἡ τεθλασμένη γραμμὴ καλεῖται *βάσις* τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως.

Θεώρημα.

537. *Ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ὑπὸ κανονικοῦ πολυγωνικοῦ τομέως στρεφομένου περὶ διάμετρον μὴ τέμνουσαν τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ὑπὸ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς γραφομένης ἐπιφανείας ἐπὶ τὸ ἓν τρίτον τοῦ ἀποστήματος αὐτῆς (τῆς ἀκτῖνος τοῦ εἰς ταύτην ἐγγραφομένου κύκλου).*



Σχ. 345

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω (Σχ. 345) ὁ κανονικὸς πολυγωνικὸς τομεὺς ΟΑΒΓΔ στρεφόμενος περὶ τὸν ἄξονα ΧΨ. Ἂς χωρίσωμεν τὸν τομέα τοῦτον εἰς τρίγωνα, ἑνώνοντες τὸ κέντρο Ο μὲ τὰς κορυφὰς τῆς βάσεως αὐτοῦ ΑΒΓΔ, καὶ ἂς παραστήσωμεν δι' α τὸ ἀπόστημα τῆς βάσεως.

Ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ὑπὸ τοῦ τομέως θὰ εἶναι ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν τριγώνων, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται ὁ τομεύς, καὶ θέλομεν ἔχει (535)

$$\text{ὄγκ. ΑΟΒ} = \text{ἐπιφ. ΑΒ}. \frac{\alpha}{3}$$

$$\text{ὄγκ. ΒΟΓ} = \text{ἐπιφ. ΒΓ}. \frac{\alpha}{3}$$

$$\text{ὄγκ. ΓΟΔ} = \text{ἐπιφ. ΓΔ}. \frac{\alpha}{3}$$

καὶ προσθέτοντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\text{ὄγκ. ΟΑΒΓΔ} = (\text{ἐπιφ. ΑΒ} + \text{ἐπιφ. ΒΓ} + \text{ἐπιφ. ΓΔ}). \frac{\alpha}{3}$$

$$\text{ἢ ὄγκ. ΟΑΒΓΔ} = \text{ἐπιφ. ΑΒΓΔ}. \frac{\alpha}{3}.$$

Σημείωσις.

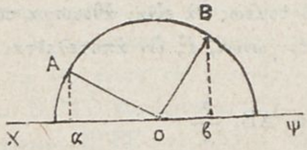
538. Ἐὰν ἀνατρέξωμεν εἰς τὰ ἐν § 527, βλέπομεν ὅτι οἱ παραγόμενοι ὄγκοι ὑπὸ κανονικῶν ἡμιπολυγώνων ἐχόντων ἄρτιον ἢ περιττὸν ἀριθμὸν πλευρῶν θὰ παρίστανται διὰ τῶν τύπων $\frac{4}{3}\pi \mathrm{A}\alpha^2$ καὶ $\frac{2}{3}\pi\alpha^2.(\mathrm{A}+\alpha)$. Ἀμφότεραι αἱ ἐκφράσεις αὗται συμβάλλουσι πρὸς παράστασιν τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ θεωρούμενα κανονικὰ πολύγωνα ἀντικαθίστανται ὑπὸ τῶν κύκλων, οἵτινες εἶναι ὅριον αὐτῶν· πρέπει δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην νὰ τεθῇ $\alpha = \mathrm{A}$, ὁπότε εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας ἐκφραζόμενον διὰ τοῦ τύπου $\mathrm{O} = \frac{4}{3}\pi \mathrm{A}^3$.

Θεώρημα.

539. *Ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τομέως ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας τῆς ζώνης, ἥτις ἀποτελεῖ τὴν βάσιν αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ ἓν τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστωσαν (Σχ. 346) ΧΑΒΨ τὸ παράγον τὴν σφαῖραν ἡμικύκλιον, καὶ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ τούτῳ ὁ τομεὺς ΑΟΒ, τοῦ ὁποίου ἡ προβολὴ τῆς βάσεως ΑΒ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΧΨ εἶναι ἡ αϐ. Ἐνῷ ἡ ἡμιπεριφέρεια στρεφομένη περὶ τὴν διάμετρον ΧΨ παράγει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, τὸ τόξον ΑΒ παράγει σφαιρικὴν ζώνην (528), καὶ αἱ ἀκτῖνες ΟΑ καὶ ΟΒ αἱ ὁρίζουσαι τὸν κυκλ. τομέα παράγουσι τὰς παραπλεύρους ἐπιφανείας δύο κώνων ἐκ περιστροφῆς, ἐχόντων βάσεις τοὺς ὑπὸ τῶν εὐθειῶν Αα καὶ Βϐ διαγραφομένους κύκλους. Τὸ μέρος τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν τῶν δύο τούτων κώνων καὶ τῆς ζώνης ΑΒ εἶναι *ὁ σφαιρικὸς τομεὺς* ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς τὸν κυκλικὸν τομέα ΟΑΒ. Ἤτοι ὁ σφαιρικὸς τομεὺς εἶναι τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ὑπὸ κυκλικοῦ τομέως, στρεφομένου περὶ διάμετρον μὴ τέμνουσαν αὐτόν· ἡ δὲ ζώνη ἡ παραγομένη ὑπὸ τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τομέως εἶναι ἡ βάσις τοῦ σφαιρικοῦ τομέως.



Σχ. 346.

Τούτου τεθέντος, ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως εἶναι κατα τὸν ὁρισμὸν τὸ ὅριον τοῦ ὄγκου τοῦ παραγομένου ὑπὸ κανονικοῦ πολυγωνικοῦ τομέως, ἐγγεγραμμένου εἰς κυκλικὸν τομέα, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτοῦ αὐξάνῃ ἀπεριορίστως.

Οὕτω δὲ ἔστωσαν *ο* ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ὑπὸ κανονικοῦ πολυγωνικοῦ τομέως ἐγγεγραμμένου, *ε* τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς διαγραφομένης ὑπὸ τῆς βάσεως καὶ *α* τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ. Ἔστωσαν προσέτι Ο ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, Ε ἡ ἐπιφάνεια τῆς ζώνης τῆς ἀποτελούσης τὴν βάσιν τοῦ τομέως καὶ Α ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας. Θέλομεν ἔχει (537)

$$ο = ε . \frac{α}{2}$$

Ἀλλ' ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως αὐξάνῃ ἀπεριορίστως, τὸ μὲν ο τείνει πρὸς τὸ Ο, τὸ δὲ ε πρὸς τὸ Ε καὶ τὸ α πρὸς τὸ Α. Ἐπομένως εἰς τὸ ὅριον θέλομεν ἔχει

$$Ο = Ε . \frac{Α}{2} . \qquad (1)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πόρισμα.

540. *Ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ἢ ἐν ἴσαις σφαίραις δύο σφαιρικοὶ τομεῖς εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ σφαιρικαὶ ζῶναι, αἵτινες εἶναι βάσεις αὐτῶν· καὶ ἑπομένως δύο σφαιρικοὶ τομεῖς ἔχοντες βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα εἶναι ἰσοδύναμοι.*

Θεώρημα.

541. *Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς.*

Διότι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σφαιρικὸς τομεὺς παραγόμενος ὑπὸ κυκλικοῦ τομέως, ὅστις εἶναι ἡμικύκλιον. Ἑπομένως κατὰ τὸν ἀνωτέρω τύπον (1) (539) θέλομεν ἔχει

$$\text{ὄγκ. Σφ.} = \text{ἐπιφ. Σφ.} \cdot \frac{Α}{3} = 4\pi Α^2 \cdot \frac{Α}{3} = \frac{4}{3}\pi . Α^3 .$$

ἔνθα Α παριστᾷ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

Πορίσματα.

542. Ἐὰν παραστήσωμεν διʼ Ο τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας καὶ διὰ Δ τὴν διάμετρον αὐτῆς, θέλομεν ἔχει

$$Ο = \frac{4\pi Α^3}{3} = 4\pi Α^2 \cdot \frac{Α}{3} = 4\pi \left(\frac{Δ}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{Δ}{2} = 4\pi \frac{Δ^2}{4} \cdot \frac{Δ}{6} = \frac{1}{6}\pi Δ^3$$

543. *Οἱ ὄγκοι δύο σφαιρῶν εἶναι ἀνάλογοι τῶν κύβων τῶν ἀκτίνων ἢ τῶν κύβων τῶν διαμέτρων αὐτῶν.*

Θεώρημα.

544. *Ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας, ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια κυλίνδρου περιγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν ταύτην, καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια ἰσοπλεύρου κώνου περιγεγραμμένου εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν εἶναι ὡς οἱ ἀριθμοὶ 4, 6, 9. Καὶ οἱ ὄγκοι δὲ τῶν τριῶν τούτων στερεῶν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν* (Σχ. 347).

Ἔστωσαν ὁ κύκλος ΟΑ, τὸ τετράγωνον ΒΓΔΕ περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον ὡς καὶ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΣΘΖ ὁμοίως περιγεγραμμένον εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.

Σχ. 347.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐνῷ ὁ κύκλος, στρεφόμενος περὶ τὸν ἄξονα ΣΑ παράγει τὴν σφαῖραν, τὸ τετράγωνον παράγει τὸν περιγεγραμμένον κύλινδρον καὶ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΣΘΖ τὸν περιγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν κῶνον.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Α τὴν ἀκτῖνα ΟΑ, θέλομεν ἔχει

$$\text{Ἐμβ. ἐπιφ. Σφ.}=4\pi A^2$$

Ἐπειδὴ ἡ βάσις τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου ἰσοῦται πρὸς μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ εἶναι διάμετρος τῆς σφαίρας, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας εἶναι

$$2\pi A . 2A + 2\pi A^2 . = 6\pi A^2 .$$

Ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου κώνου, ἥτις εἶναι αὐτὴ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον ΟΑ, ἰσοῦται πρὸς $2A\sqrt{3}$· ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως αὐτοῦ, ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἰσοῦται πρὸς $A\sqrt{3}$. Ἑπομένως ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ ἰσοπλεύρου κώνου εἶναι

$$\pi A\sqrt{3} . 2A\sqrt{3} + 3\pi A^2 = 6\pi A^2 + 3\pi A^2 = 9\pi A^2 .$$

Τὸ θεώρημα λοιπὸν εἶναι ἀληθές, καθόσον ἀφορᾷ τὰς ἐπιφανείας.

Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι $\frac{4}{3}\pi A^3$. Ὁ τοῦ κυλίνδρου εἶναι $\pi A^2 . 2A = 2\pi A^3$. Τὸ ὕψος τοῦ κώνου, ὅπερ εἶναι καὶ ὕψος τοῦ εἰς τὸν κύκλον ΟΑ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἰσοῦται πρὸς $3A$· ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ κώνου τούτου παρίσταται διὰ $\pi A^2 . 3A = 3\pi A^3$. Οἱ ὄγκοι λοιπὸν τῶν τριῶν τούτων στερεῶν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{4}{3}$, 2 καὶ 3, ἤτοι πρὸς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς 4, 6, 9, ὅπως καὶ αἱ ὁλικαὶ αὐτῶν ἐπιφάνειαι.

Πόρισμα.

545. Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ 6 εἶναι μέσος ἀνάλογος μεταξὺ τοῦ 4 καὶ τοῦ 9, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὰς ἑξῆς προτάσεις·

Τὸ ὁλικὸν ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ κυλίνδρου περιγεγραμμένου εἰς σφαῖραν εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ὁλικοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν ἰσοπλεύρου κώνου. Προσέτι δὲ ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου εἰς σφαῖραν ὀρθοῦ κυλίνδρου εἶναι μέσος ἀνάλογος μεταξὺ τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ὄγκου τοῦ εἰς ταύτην περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου κώνου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα (544) εἶναι μερικὴ περίπτωσις γενικωτέρου θεωρήματος, τὸ ὁποῖον ἐφεξῆς θέλομεν ἀποδείξει.

Θεώρημα.

546. *Οἱ ὄγκοι τῶν περὶ τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἢ εἰς ἴσας σφαίρας περιγεγραμμένων πολυέδρων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἐμβαδὰ τῶν αὐτῶν πολυέδρων.*

Πολύεδρόν τι λέγεται *περιγεγραμμένον* εἰς σφαῖραν, ὅταν πᾶσαι αἱ ἕδραι αὐτοῦ ἐφάπτωνται τῆς σφαίρας. *Ἐγγεγραμμένον* δὲ εἰς σφαῖραν καλεῖται τὸ πολύεδρον, τοῦ ὁποίου πᾶσαι αἱ κορυφαὶ εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει ἡ σφαῖρα λέγεται *ἐγγεγραμμένη* εἰς τὸ πολύεδρον, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ αὕτη καλεῖται *περιγεγραμμένη*.

Ἐὰν παραστήσωμεν τοὺς μὲν ὄγκους δύο οἱωνδήποτε τοιούτων πολυέδρων δι' Ο καὶ ο, τὰ δὲ ἐμβαδὰ τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν δι' Ε καὶ ε, καὶ τὴν κοινὴν ἀκτῖνα τῶν σφαιρῶν δι' Α, θέλομεν ἔχει

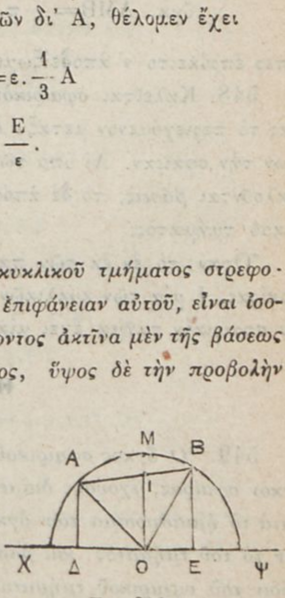
$$\mathrm{O}=\mathrm{E}.\frac{1}{3}\mathrm{A} \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{o}=\varepsilon.\frac{1}{3}\mathrm{A}$$

$$\text{Ἐπομένως}\ \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{o}}=\frac{\mathrm{E}}{\varepsilon}.$$

Θεώρημα.

547. *Ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ὑπὸ κυκλικοῦ τμήματος στρεφομένου περὶ διάμετρον μὴ τέμνουσαν τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ, εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ἓν ἕκτον κυλίνδρου, ἔχοντος ἀκτῖνα μὲν τῆς βάσεως αὐτοῦ τὴν χορδὴν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν προβολὴν τῆς χορδῆς ταύτης ἐπὶ τὸν ἄξονα.*

Τὸ τμῆμα ΑΜΒ (Σχ. 348) εἶναι διαφορὰ τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΟΒ καὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΟΒ· τὸ μέρος λοιπὸν τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας τὸ παραγόμενον ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΑΜΒ θὰ εἶναι διαφορὰ τῶν ὄγκων τῶν παραγομένων ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΟΑΜΒ καὶ τοῦ τριγώνου ΟΑΒ.



Σχ. 348.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω δὲ ἡ ΔΕ προβολὴ τῆς χορδῆς ΑΒ ἐπὶ τὸν ἄξονα, ΧΨ, καὶ ἡ ΟΙ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΟΒ· θέλομεν ἔχει (539, 528, 535, 500)

$$\text{Σφ.ΤομΑΟΒ} = \text{ΖωνΑΜΒ}.\ \frac{\text{ΟΑ}}{2} = \frac{2}{3}\ \pi \text{ΟΑ}^2.\text{ΔΕ}$$

$$\text{ὄγκ. Τριγ.ΑΟΒ} = \text{ἐπιφ.ΑΒ}.\frac{\text{ΟΙ}}{3} = \frac{2}{3}\ \pi\text{ΟΙ}^2.\text{ΔΕ}$$

$$\text{Ἐπομένως ὄγκ. ΑΜΒ} = \frac{2}{3}\pi\ (\text{ΟΑ}^2 - \text{ΟΙ}^2).\ \text{ΔΕ} \qquad (1)$$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΙΑ λαμβάνομεν

$$\text{ΟΑ}^2 - \text{ΟΙ}^2 = \text{ΑΙ}^2 = \frac{\text{ΑΒ}^2}{4}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν διαφορὰν $(\text{ΑΟ}^2 - \text{ΟΙ}^2)$ ἐν τῇ ἰσότητι (1) δι' $\frac{\text{ΑΒ}^2}{4}$ λαμβάνομεν

$$\text{ὄγκ. ΑΜΒ} = \frac{2}{3}\pi.\ \frac{\text{ΑΒ}^2}{4}.\ \text{ΔΕ} = \frac{1}{6}\pi.\ \text{ΑΒ}^2.\text{ΔΕ}.$$

ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

548. Καλεῖται *σφαιρικὸν τμῆμα* τὸ μέρος τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων συναντώντων τὴν σφαῖραν. Αἱ ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τούτων τομαὶ τῆς σφαίρας καλοῦνται *βάσεις*, τὸ δὲ ἀπόστημα αὐτῶν καλεῖται *ὕψος* τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

Ὅταν τὸ ἓν ἐκ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐφάπτηται τῆς σφαίρας, ἡ μία τῶν κυκλικῶν τομῶν περιορίζεται εἰς ἓν σημεῖον καὶ τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ἔχει μίαν μόνον βάσιν.

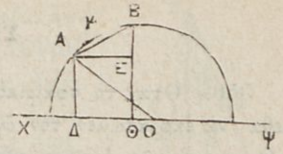
Θεώρημα.

549. *Ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τμήματος εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸν ὄγκον σφαίρας, ἐχούσης διάμετρον τὸ ὕψος τοῦ τμήματος, ηὐξημένον κατὰ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ὄγκων δύο κυλίνδρων ἐχόντων ὕψος κοινὸν τὸ τοῦ τμήματος καὶ βάσεις ὁ μὲν τὴν μίαν, ὁ δὲ τὴν ἑτέραν βάσιν τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.*

Ἐκ τοῦ σχήματος (349) παρατηροῦμεν ὅτι, ἐνῷ τὸ ἡμικύκλιον ΟΑ, στρεφόμενον περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ, παράγει τὴν σφαῖραν,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸ τραπεζοειδὲς σχῆμα ΔΑΒΘ, τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ καὶ ΒΘ καθέτων ἐπὶ τὸν ἄξονα ΧΨ, παράγει σφαιρικὸν τμῆμα, ὅπερ ἔχει βάσεις μὲν τοὺς κύκλους ΔΑ καὶ ΒΘ, ὕψος δὲ τὴν ΔΘ. Τὸ τμῆμα τοῦτο εἶναι ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν παραγομένων ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος



Σχ. 349.

ΑμΒ, καὶ τοῦ ὀρθογωνίου τραπεζίου ΔΑΒΘ. Καὶ θέλομεν ἔχει κατὰ πρῶτον (547)

$$\text{ὄγκ. } A\mu B = \frac{1}{6}\pi AB^2.\Delta\Theta.$$

Ὁ δὲ ὑπὸ τοῦ τραπεζίου παραγόμενος κόλουρος κῶνος ἐκφράζεται (490)

$$\text{ὄγκ. } \Delta AB\Theta = \frac{1}{3}\pi\Delta\Theta.(B\Theta^2 + A\Delta^2 + B\Theta.A\Delta)$$

ἑπομένως·

$$\text{ὄγκ. } \Delta A\mu B\Theta = \frac{1}{6}\pi\Delta\Theta.(AB^2 + 2B\Theta^2 + 2A\Delta^2 + 2B\Theta.A\Delta) \qquad (1)$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΕ λαμβάνομεν

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 = \Delta\Theta^2 + BE^2$$

ἀλλὰ $BE = B\Theta - E\Theta = B\Theta - \Delta A$· ἑπομένως

$$BE^2 = B\Theta^2 + A\Delta^2 - 2B\Theta.A\Delta.$$

καὶ $AB^2 = \Delta\Theta^2 + B\Theta^2 + A\Delta^2 - 2B\Theta.A\Delta.$

Ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ AB^2 ἐν τῇ ἰσότητι (1), καὶ ἁπλοποιοῦντες, λαμβάνομεν·

$$\text{ὄγκ. } \Delta A\mu B\Theta = \frac{1}{6}\pi\Delta\Theta.(\Delta\Theta^2 + 3B\Theta^2 + 3A\Delta^2)\cdot$$

$$\text{ἢ ὄγκ. } \Theta A\mu B\Theta = \frac{1}{6}\pi\Delta\Theta^3 + \frac{1}{2}(\pi B\Theta^2.\Delta\Theta + \pi A\Delta^2.\Delta\Theta).$$

(542, 437)

Ἐὰν τὸ θεωρούμενον τμῆμα ἔχῃ μίαν μόνον βάσιν, ἤτοι τὸ σημεῖον Δ συμπίπτῃ μετὰ τοῦ ἄκρου Δ' τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου Ο, ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γίνεται

$$\text{ὄγκ. } \Delta'\mu B\Theta = \frac{1}{6}\pi\Delta'\Theta^3 + \frac{1}{2}\pi B\Theta^2.\Delta\Theta \qquad (2)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διότι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ΑΔ εἶναι μηδέν.

Σημείωσις.

550. Ὅταν τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ἔχῃ μίαν μόνον βάσιν, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὸν ὄγκον αὐτοῦ Ο συναρτήσει τοῦ ὕψους Δ'Θ=υ καὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας Α, ὁπότε ἐκ τοῦ προηγουμένου τύπου (2) θέλομεν ἔχει

$$O=\frac{1}{6}\pi.\upsilon^3+\frac{1}{2}\pi B\Theta^2.\upsilon.$$

Ἀλλὰ (165) $B\Theta^2=\upsilon.(2A-\upsilon)$· ἐξ οὗ

$$O=\frac{1}{6}\pi.\upsilon^3+\frac{1}{2}\pi\upsilon^2(2A-\upsilon).$$

καὶ ἁπλοποιοῦντες λαμβάνομεν

$$O=\pi\upsilon^2.(A-\frac{1}{3}\upsilon).$$

ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

551. Δύο πολύεδρα λέγονται ὅμοια, ὅταν ἔχωσι στερεὰς αὐτῶν γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, καὶ τὰς ἕδρας αὐτῶν ἴσου ἀριθμοῦ, καὶ ὁμοίας ἑκάστην ἑκάστῃ.

Ἡ ἰσότης τῶν στερεῶν γωνιῶν συνεπάγεται προφανῶς καὶ τὴν ἰσότητα τῶν ὁμολόγων διέδρων γωνιῶν. Καλοῦνται δὲ ὁμόλογοι ἕδραι, ἀκμαί, δίεδροι γωνίαι κ.τ.λ. αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τοιαῦται εἰς τὰ δύο ὅμοια πολύεδρα.

552. *Αἱ ὁμόλογοι ἀκμαὶ δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ἀνάλογοι.*

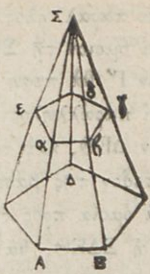
Διότι αἱ ὅμοιαι ἕδραι τῶν πολυέδρων τούτων ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον ὁμοιότητος· ἐπειδὴ δὲ ἑκάστη ἀκμὴ ἐν ἑκάστῳ πολυέδρῳ ἀνήκει σύναμα εἰς δύο προσκειμένας ἕδρας, *ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε ὁμολόγων ἀκμῶν εἶναι ὁ αὐτός*.

Θεώρημα.

553. *Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου, παραλλήλου τῇ βάσει, ἡ οὕτω σχηματιζομένη νέα πυραμὶς εἶναι ὁμοία τῇ πρώτῃ.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ (Σχ. 350), καὶ ἡ τομὴ αὐτῆς Σαβγδε, γενομένη ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει. Αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓΔΕ καὶ Σαβγδε ἔχουσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ὁμοίας, διότι τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε εἶναι ὅμοια (450), αἱ δὲ παράπλευροι ἕδραι ΣΑΒ καὶ Σαβ, ΣΒΓ καὶ Σβγ.....εἶναι ὡσαύτως ὅμοιαι ἕνεκα τῆς παραλληλίας τῶν ἀντιστοιχουσῶν πλευρῶν τῶν ὁμοίων πολυγώνων ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε. Καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι, ὡς αἱ Α καὶ α, εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχουσαι μίαν δίεδρον γωνίαν κοινὴν καὶ τὰς περιεχούσας ταύτην ἕδρας ἴσας καὶ ὁμοίως κειμένας· ἤτοι ἡ δίεδρος γωνία ΣΑ εἶναι κοινή, ἡ ἕδρα ΣΑΒ εἶναι ἴση τῇ ἕδρᾳ Σαβ, καὶ ἡ ἕδρα ΣΑΕ ἴση τῇ ἕδρᾳ Σαε· ἡ δὲ στερεὰ γωνία Σ εἶναι κοινὴ ἀμφοτέρων τῶν πυραμίδων.



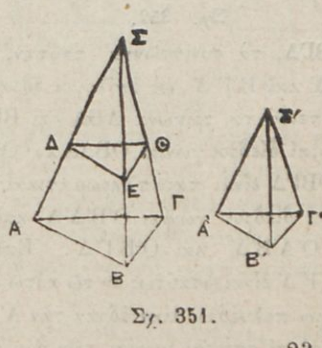
Σχ. 350.

Θεώρημα.

554. *Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι ἐὰν ἔχωσι μίαν δίεδρον γωνίαν ἴσην, περιεχομένην ὑπὸ ἑδρῶν ὁμοίων ἑκατέρας ἑκατέρᾳ καὶ ὁμοίως κειμένων.*

Ἔστωσαν (Σχ. 351) αἱ τριγωνικαὶ πυραμίδες ΣΑΒΓ καὶ Σ'Α'Β'Γ', αἵτινες ἔχουσι τὴν δίεδρον γωνίαν ΣΑ ἴσην τῇ Σ'Α' καὶ τὰς ἕδρας ΣΑΒ καὶ ΣΑΓ ὁμοίας πρὸς τὰς ἕδρας Σ'Α'Β' καὶ Σ'Α'Γ' καὶ ὁμοίως κειμένας.

Ἄς θέσωμεν τὴν δευτέραν πυραμίδα ἐπὶ τῆς πρώτης οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ αὐτῶν νὰ εἶναι ἡ αὐτή, καὶ αἱ ὁμόλογοι ἕδραι τῶν ἴσων διέδρων γωνιῶν νὰ συμπέσωσιν. Ἐπειδὴ τὸ τρίγων ν Σ'Α'Β' εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΣΑΒ, καὶ τὸ σημεῖο Α θὰ πέσῃ ἐπί τινος σημείου Δ τῆς ΣΑ, ἡ Σ'Β' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΣΒ,



Σχ. 351.

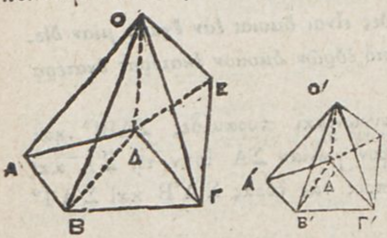
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ τὸ σημεῖον Β′ ἐπί τινος σημείου Ε τοιοῦτον, ὥστε ἡ ΔΕ νὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ. Ὁμοίως, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον Σ′Α′Γ′ εἶναι ὅμοιον τῇ ΣΑΓ, ἡ Σ′Γ′ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΣΓ, καὶ τὸ σημεῖον Γ′ θὰ πέσῃ ἐπί τινος σημείου Θ τοιούτου, ὥστε ἡ ΔΘ νὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΓ. Ἡ βάσις λοιπὸν Α′Β′Γ′ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΔΕΘ, καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς θὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως ΑΒΓ (314). Ἐπειδὴ δὲ ἡ πυραμὶς ΣΔΕΘ εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα ΣΑΒΓ, καὶ ἡ Σ′Α′Β′Γ′, ἣν παριστᾷ ἡ ΣΔΕΘ, θὰ εἶναι ὁμοία τῇ ΣΑΒΓ.

Θεώρημα.

555. *Δύο πολύεδρα ἀποτελούμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τετραέδρων ὁμοίων, ἑκάστου ἑκάστῳ, καὶ ὁμοίως κειμένων, εἶναι ὅμοια.*

Ἔστωσαν (Σχ. 352) ΟΑΒΔ, ΟΒΓΔ, ΟΒΔΕ..., καὶ Ο′Α′Β′Δ′, Ο′Β′Γ′Δ′, Ο′Γ′Δ′Ε′....δύο σειραὶ τετραέδρων ὁμοίων ἑκάστου ἑκάστῳ καὶ ὁμοίως κειμένων· τὸ ὑπὸ τῶν πρώτων τετραέδρων σχηματιζόμενον πολύεδρον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δευτέρων σχηματιζόμενον.



Σχ. 352.

Τῳόντι, αἱ ὁμόλογοι ἕδραι τῶν δύο πολυέδρων εἶναι ὅμοιαι καθ' ἑαυτὰς ἢ ὡς ἀποτελούμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων.

Ἂς θεωρήσωμεν π.χ. τὴν ἕδραν ΑΒΓΔ τοῦ πρώτου πολυέδρου· τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ, τὰ συνιστῶντα ταύτην, εἶναι ὅμοια πρὸς τὰ τρίγωνα Α′Β′Δ′ καὶ Β′Γ′Δ′, ὡς ὁμόλογοι ἕδραι ὁμοίων τετραέδρων, ἐπὶ πλέον δέ, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, αἱ δίεδροι γωνίαι ΟΒΔΑ καὶ ΟΒΔΓ τῶν δύο τετραέδρων ΟΑΒΔ καὶ ΟΒΓΔ εἶναι παραπληρωματικαί· ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ὁμόλογοι πρὸς ταύτας δίεδροι γωνίαι Ο′Β′Δ′Α′ καὶ Ο′Β′Δ′Γ′ τῶν ὁμοίων τετραέδρων Ο′Α′Β′Δ′ καὶ Ο′Β′Γ′Δ′. Ἑπομένως τὰ δύο τρίγωνα Α′Β′Δ′ καὶ Β′Γ′Δ′ εἶναι ὡσαύτως ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀποτελοῦσιν ἐν τῷ δευτέρῳ πολυέδρῳ μίαν ἕδραν τὴν Α′Β′Γ′Δ′, ὁμοίαν τῇ ἕδρᾳ ΑΒΓΔ.

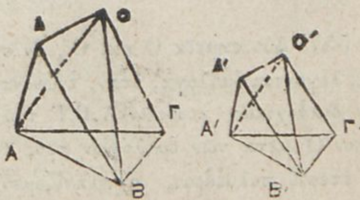
Καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι τῶν δύο πολυέδρων εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχου-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σαι πάντα τὰ συστατικὰ αὐτῶν ἴσα κατὰ ἓν καὶ ὁμοίως κείμενα· διότι, ἀφοῦ αἱ ὁμόλογοι ἕδραι τῶν δύο πολυέδρων εἶναι ὅμοιαι καὶ κεῖνται ὁμοίως, αἱ στερεαὶ αὐτῶν γωνίαι ἔχουσι τὰς ἐπιπέδους αὐτῶν γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ καὶ ὁμοίως κειμένας. Προσέτι δὲ αἱ ὁμόλογοι δίεδροι γωνίαι τῶν στερεῶν τούτων γωνιῶν εἶναι ἴσαι, εἴτε ὡς ὁμόλογοι δίεδροι γωνίαι δύο ὁμοίων τετραέδρων, εἴτε ὡς ἀθροίσματα ἴσων διέδρων γωνιῶν. Ἡ δίεδρος γωνία π. χ. ΒΓΔΕ, σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν δύο ἑδρῶν ΑΒΓΔ καὶ ΓΔΕ τοῦ πρώτου πολυέδρου εἶναι ἄθροισμα τῶν δύο διέδρων γωνιῶν ΒΓΔΟ καὶ ΕΓΔΟ, αἵτινες ἀνήκουσιν εἰς δύο τετράεδρα ΟΒΓΔ καὶ ΟΓΔΕ· καὶ ἡ δίεδρος γωνία Β΄Γ΄Δ΄Ε΄, ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν δύο ἑδρῶν Α΄Β΄Γ΄Δ΄ καὶ Γ΄Δ΄Ε΄ τοῦ δευτέρου πολυέδρου, εἶναι ἄθροισμα δύο ὁμολόγων διέδρων γωνιῶν Β΄Γ΄Δ΄Ο΄ καὶ ΕΓΔΟ, αἵτινες ἀνήκουσιν εἰς τὰ δύο ὅμοια τετράεδρα Ο΄Β΄Γ΄Δ΄ καὶ Ο΄Γ΄Δ΄Ε΄.

556. Ἀντιστρόφως. *Δύο ὅμοια πολύεδρα δύνανται νὰ χωρισθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τετραέδρων ὁμοίων κατὰ ἓν καὶ ὁμοίως κειμένων.*

Ἔστω (Σχ. 353) σημεῖόν τι Ο ληφθὲν ἐντὸς τοῦ πρώτου πολυέδρου· καὶ ἂς χωρίσωμεν τὸ πολύεδρον τοῦτο εἰς τετράεδρα, λαμβάνοντες τὸ σημεῖον Ο ὡς κέντρον τῆς διαιρέσεως (460), ἔστω δὲ τὸ ΟΑΒΓ ἓν ἐκ τῶν οὕτω σχηματισθέντων τετραέδρων. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Α,Β,Γ ἔχουσιν ὁμόλογα σημεῖα ἐν τῷ δευτέρῳ πολυέδρῳ τὰ σημεῖα Α΄,Β΄,Γ΄, ἂς φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον Ο΄Α΄Β σχηματίζον ὑπεράνω τοῦ Α΄Β΄Γ΄ δίεδρον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων ΑΟΒ καὶ ΑΒΓ, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ Ο΄Α΄Β΄ ἂς κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον Ο΄Α΄Β΄ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΟΑΒ.



Σχ. 353.

Λαμβάνοντες τὸ σημεῖον Ο΄ ὡς κέντρον διαιρέσεως χωρίζομεν τὸ δεύτερον πολύεδρον εἰς τετράεδρα, ἀντιστοιχοῦντα κατὰ ἓν πρὸς τὰ τοῦ πρώτου πολυέδρου· μένει ἤδη μόνον νὰ δείξωμεν ὅτι τὰ τετράεδρα ταῦτα εἶναι ἀνὰ δύο ὅμοια.

Ἔστω Δ ὡς τετάρτη κορυφὴ τοῦ πρώτου πολυέδρου, τοιαύτη, ὥστε τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ νὰ ἔχωσι μίαν πλευρὰν κοι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νην, καὶ νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας ἢ ἐπὶ δύο ἑδρῶν προσκειμένων, καὶ ἂς παραβάλωμεν τὰ δύο τετράεδρα ΟΑΒΔ καὶ Ο΄Α΄Β΄Δ΄. Αἱ ἕδραι ΟΑΒ καὶ Ο΄Α΄Β΄ εἶναι ὅμοιαι, ὡς ὁμόλογοι ἕδραι τῶν δύο ὁμοίων τετραέδρων ΟΑΒΓ καὶ Ο΄Α΄Β΄Γ΄· αἱ ἕδραι ΑΒΔ καὶ Α΄Β΄Δ΄ εἶναι ὡσαύτως ὅμοιαι, ὡς ὁμόλογα τρίγωνα δύο ὁμοίων ἑδρῶν τῶν δεδομένων πολυέδρων.

Ἐπὶ πλέον δέ, ἐὰν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, αἱ δύο δίεδροι γωνίαι ΟΑΒΔ καὶ Ο΄Α΄Β΄Δ΄ θὰ εἶναι ἴσαι, ὡς παραπληρώματα τῶν ἴσων διέδρων γωνιῶν ΟΑΒΓ καὶ Ο΄Α΄Β΄Γ΄. Ἐὰν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ δὲν κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, αἱ δύο δίεδροι γωνίαι ΟΑΒΔ καὶ Ο΄Α΄Β΄Δ΄ εἶναι προσέτι ἴσαι ὡς διαφοραὶ τῶν ἴσων διέδρων γωνιῶν ΔΑΒΓ καὶ ΟΑΒΓ ἀφ' ἑνὸς καὶ Δ΄Α΄Β΄Γ΄ καὶ Ο΄Α΄Β΄Γ΄ ἀφ' ἑτέρου. Εἰς ἀμφοτέρας δὲ τὰς περιπτώσεις τὰ τετράεδρα ΟΑΒΔ καὶ Ο΄Α΄Β΄Δ΄ εἶναι ὅμοια (554).

Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἐφαρμόζεται καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν τετραέδρων. Ἡ ὁμοιότης τῶν δύο τελευταῖον θεωρηθέντων τετραέδρων συντελεῖ πάντοτε πρὸς ἐπαλήθευσιν τῆς ὁμοιότητος τῶν δύο κατὰ σειρὰν ἑπομένων τετραέδρων.

Σημείωσις.

557. Δύο σημεῖα Ο καὶ Ο΄, ἐν σχέσει πρὸς δύο ὅμοια πολύεδρα, λέγονται ὁμόλογα, ὅταν, ἑνώνοντες τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, τὸ Ο, μετὰ τῶν διαδοχικῶν κορυφῶν Α,Β,Γ τοῦ ἑνὸς τῶν πολυέδρων, καὶ τὸ ἕτερον Ο΄ μετὰ τῶν ὁμολόγων πρὸς τὰς πρώτας κορυφῶν Α΄,Β΄,Γ΄ τοῦ ἑτέρου πολυέδρου, σχηματίζομεν δύο τετράεδρα ΟΑΒΓ καὶ Ο΄Α΄Β΄Γ΄ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα ὡς πρὸς τὰ δύο δεδομένα πολύεδρα.

Ἐκ τῆς προηγουμένης ἀποδείξεως ἐξάγεται ὅτι δύο οἱαδήποτε ὁμόλογα σημεῖα δύνανται νὰ ληφθῶσιν ὡς κέντρα τῆς διαιρέσεως δύο ὁμοίων πολυέδρων εἰς τετράεδρα ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Ο κεῖται ἐκτὸς τοῦ πρώτου πολυέδρου, καὶ τὸ ὁμόλογον αὐτῷ Ο΄ κεῖται ὡσαύτως ἐκτὸς τοῦ δευτέρου πολυέδρου, ὁπότε τὰ δύο πολύεδρα δέον νὰ θεωρηθῶσιν ὡς συνιστάμενα ἐκ τετραέδρων μέρος μὲν προστιθεμένων, μέρος δὲ ἀφαιρουμένων.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Ο συμπίπτῃ μετὰ μιᾶς τῶν κορυφῶν Α. το.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πρώτου, τὸ ὁμόλογον αὐτῷ Ο' συμπίπτει μετὰ τῆς κορυφῆς Α' τοῦ δευτέρου πολυέδρου, καὶ αἱ ὁμόλογοι διαγώνιοι τῶν δύο πολυέδρων αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν κορυφῶν Α καὶ Α' συμπίπτουσι μετὰ τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν τῶν ὁμολόγων τετραέδρων, εἰς ἃ χωρίζονται τὰ δεδομένα πολύεδρα.

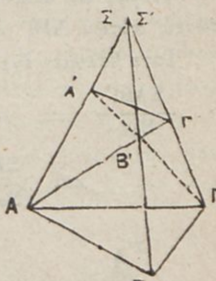
558. Δύο εὐθεῖαι, ἀνήκουσαι εἰς δύο ὅμοια πολύεδρα, λέγονται ὁμόλογοι, ὅταν τὰ ἄκρα αὐτῶν εἶναι ὁμόλογα ἑκάτερον ἑκατέρῳ. Τοιαῦται εἶναι π.χ. αἱ διαγώνιοι αἱ ἑνώνουσαι ὁμολόγους κορυφάς.

Ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε τοιούτων ὁμολόγων εὐθειῶν ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῆς ὁμοιότητος τῶν ὁμολόγων ἑδρῶν τῶν δύο πολυέδρων.

Θεώρημα.

559. ***Οἱ ὄγκοι δύο τετραέδρων ΣΑΒΓ καὶ Σ'Α'Β'Γ', τὰ ὁποῖα ἔχουσι μίαν τρίεδρον γωνίαν ἴσην μιᾷ τριέδρῳ γωνίᾳ*** (Σ=Σ'), ***εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ γινόμενα τῶν ἀκμῶν, αἵτινες περιέχουσι τὰς ἴσας τριέδρους γωνίας.*** (Σχ. 354).

Ἐπειδὴ τὰ δύο προτεθέντα τετράεδρα ἔχουσι μίαν τρίεδρον γωνίαν ἴσην, δυνάμεθα πάντοτε νὰ θέσωμεν τὸ ἓν ἐν τῷ ἑτέρῳ οὕτως, ὥστε αἱ ἴσαι τρίεδροι γωνίαι αὐτῶν νὰ ταυτισθῶσιν, ὡς δείκνυται ἐν τῷ σχήματι. Ἂς φέρωμεν ἔπειτα ἓν ἐπίπεδον διὰ τῶν κορυφῶν Α,Β',Γ. Τὰ δύο τετράεδρα Β'Α'Γ'Σ' καὶ Β'ΑΓΣ, ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν Σ'Α'Γ' καὶ ΣΑΓ, αἵτινες ἔχουσι μίαν γωνίαν, (τὴν ΑΣΓ) κοινήν. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν (265).



Σχ. 354

$$\frac{Β'Α'Σ'Γ'}{Β'ΑΣΓ} = \frac{Σ'Α'Γ'}{ΣΑΓ} = \frac{Σ'Α'.Σ'Γ'.}{ΣΑ.\ ΣΓ} \qquad (1)$$

Ὁμοίως τὰ τετράεδρα ΓΣ'ΑΒ' καὶ ΓΣΑΒ (λαμβανομένου τοῦ Γ ὡς κοινῆς αὐτῶν κορυφῆς) ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ ἑπομένως εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν Σ'ΑΒ' καὶ ΣΑΒ, αἵτινες ἔχουσι κοινὴν τὴν γωνίαν ΣΑΒ· ἑπομένως θέλομεν ἔχει

$$(2)\quad \frac{ΓΣ'ΑΒ'}{ΓΣΑΒ} = \frac{Σ'ΑΒ'}{ΣΑΒ} = \frac{Σ'Α.\ Σ'Β'}{ΣΑ.\ ΣΒ} = \frac{Σ'Β'}{ΣΒ}. \text{ διότι } (Σ'Α=ΣΑ).$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$\frac{\Sigma'A'B'\Gamma'.\ \Sigma'AB'\Gamma}{\Sigma AB'\Gamma.\ \Sigma AB\Gamma} = \frac{\Sigma'A'.\ \Sigma'B'.\Sigma'\Gamma'}{\Sigma A.\ \ \Sigma B.\ \ \Sigma\Gamma}$$

καὶ ἁπλοποιοῦντες τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος, ἔχοντες ὑπ' ὄψει ὅτι Σ'ΑΒ'Γ καὶ ΣΑΒ'Γ εἶναι τὸ αὐτὸ πολύεδρον, θέλομεν ἔχει

$$\frac{\Sigma'A'B'\Gamma'}{\Sigma ABB} = \frac{\Sigma'A'.\ \Sigma'B'.\ \Sigma'\Gamma'}{\Sigma A.\ \ \Sigma B.\ \ \Sigma\Gamma}.$$

Θεώρημα.

560. *Δύο ὅμοιαι πυραμίδες εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων πολυέδρων ἰσοῦται πρὸς τὸν κύβον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητος τῶν ὁμολόγων αὐτῶν ἀκμῶν.*

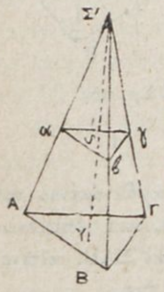
Ἔστωσαν κατὰ πρῶτον δύο ὅμοια τετράεδρα ΣΑΒΓ καὶ Σαϐγ (Σχ. 355), τὰ ὁποῖα δυνάμεθα πάντοτε νὰ ὑποθέσωμεν τὸ ἓν ἐν τῷ ἑτέρῳ, ὡς δείκνυται ἐν τῷ σχήματι (355), οὕτως, ὥστε αἱ βάσεις αὐτῶν ΑΒΓ καὶ αϐγ νὰ εἶναι παράλληλοι (554).

Τότε θέλομεν ἔχει (559,552).

$$\frac{\Sigma AB\Gamma}{\Sigma\alpha\beta\gamma} = \frac{\Sigma A.\Sigma B.\Sigma\Gamma}{\Sigma\alpha.\ \Sigma\beta.\ \Sigma\gamma} = \frac{\Sigma A}{\Sigma\alpha}.\ \frac{\Sigma B}{\Sigma\beta}.\ \frac{\Sigma\Gamma}{\Sigma\gamma}$$

$$\text{καὶ}\quad \frac{\Sigma A}{\Sigma\alpha} = \frac{\Sigma B}{\Sigma\beta} = \frac{\Sigma\Gamma}{\Sigma\gamma}$$

$$\text{ἑπομένως}\quad \frac{\Sigma AB\Gamma}{\Sigma\alpha\beta\gamma} = \frac{\Sigma A^3}{\Sigma\alpha^3}$$



Σχ. 355.

561. Ἔστωσαν ἤδη δύο ὅμοια πολύεδρα Π καὶ Π'. Ὁ λόγος ὁμοιότητος αὐτῶν θὰ εἶναι (552) ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν ΑΒ καὶ Α'Β'. Τὰ δύο ταῦτα πολύεδρα εἶναι δυνατὸν πάντοτε νὰ χωρισθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τετραέδρων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων (556), καὶ ὁ λόγος ὁμοιότητος τῶν ὁμολόγων ἑδρῶν δύο ὁμολόγων τετραέδρων ἰσοῦται (558) τῷ λόγῳ $\frac{AB}{A'B'}$.
Ἐὰν τὸ πολύεδρον Π ἀποτελῆται ἐκ τῶν τετραέδρων T, T_1, T_2,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ τὸ πολύεδρον Π′ ἐκ τῶν ὁμολόγων πρὸς τὰ πρῶτα τετραέδρων Τ′, $Τ_1'$, $Τ'_2$, θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ προηγούμενα

$$\frac{T}{T'}=\frac{AB^3}{A'B'^3},\quad \frac{T_1}{T_1'}=\frac{AB^3}{A'B'^3},\quad \frac{T_2}{T'_2}=\frac{AB^3}{A'B'^3}.$$

Καὶ κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῆς ἀριθμητικῆς (Κορέ. §. 183) θέλομεν ἔχει

$$\frac{T+T_1+T_2}{T'+T_1'+T'_2}=\frac{AB^3}{A'B'^3}\quad \text{ἢ}\quad \frac{\Pi}{\Pi'}=\frac{AB^3}{A'B'^3}$$

Σημείωσις.

562. *Αἱ ἐπιφάνειαι δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα δύο ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν.*

563. Ἐκ τῆς ἐν § 560 ἀποδειχθείσης σχέσεως ἐξάγομεν

$$\frac{AB}{A'B'}=\sqrt[3]{\frac{\Pi}{\Pi'}}$$

Ἐπομένως, ὅταν θέλωμεν νὰ συμπτύξωμεν ἢ ν' ἀναπτύξωμεν πολύεδρόν τι κατὰ δεδομένον λόγον, ἡ κλίμαξ, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν ὅπως ὁρίσωμεν τὰς ἀκμὰς τοῦ νέου πολυέδρου, δέον νὰ εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ δεδομένου λόγου. Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ὁ ὄγκος τοῦ νέου πολυέδρου πρόκειται νὰ εἶναι τὸ ἓν χιλιοστὸν τοῦ δεδομένου πολυέδρου, πρέπει ἑκάστην ἀκμὴν αὐτοῦ (τοῦ νέου πολυέδρου) νὰ εἶναι δεκάκις μικροτέρα τῆς ὁμολόγου ἀκμῆς τοῦ δεδομένου πολυέδρου.

ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΟΘΕΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Θεώρημα.

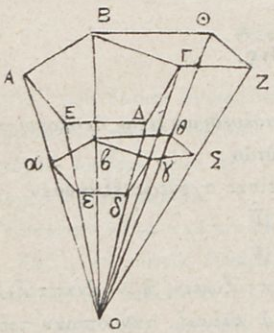
564. *Ἐὰν ἑνώσωμεν σημεῖον οἱονδήποτε Ο μὲ τὰς κορυφὰς πολυέδρου Π, καὶ λάβωμεν ἐπὶ τῶν ἐπιβατικῶν ἀκτίνων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ.... τὰ μήκη Οα, Οβ, Ογ......τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἔχωμεν τοὺς ἴσους λόγους*

$$\frac{OA}{O\alpha}=\frac{OB}{O\beta}=\frac{O\Gamma}{O\gamma}\ldots\ldots,$$

τὸ πολύεδρον Π, τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ σημεῖα α, β, γ,....εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ πολύεδρον Π. (Σχ. 356).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἕδραν ΑΒΓΔΕ τοῦ δεδομένου πολυέδρου καὶ τὸ σημεῖον α. Ἐὰν φέρωμεν διὰ τοῦ σημείου α ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔΕ, τοῦτο θὰ τέμνῃ τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓΔΕ (450) εἰς μέρη ἀνάλογα, καὶ ἐπομένως θὰ διέρχηται διὰ τῶν κορυφῶν α, β, γ, δ, ε. Αἱ κορυφαὶ αὗται σχηματίζουσιν ἐν τῷ πολυέδρῳ Π′ μίαν ἕδραν αβγδε ὁμοίαν πρὸς τὴν ἕδραν ΑΒΓΔΕ. Αἱ ἀντιστοιχοῦσαι λοιπὸν ἕδραι τῶν δύο πολυέδρων Π καὶ Π′ εἶναι ὅμοιαι.



Σχ. 356.

Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη τὰς ὁμολόγους ἀκμὰς τῶν δύο πολυέδρων παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους· αἱ ὁμόλογοι στερεαὶ γωνίαι τῶν δύο πολυέδρων θὰ ἔχωσι τὰς ἐπιπέδους αὐτῶν γωνίας ἴσας, καὶ τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ (354). Ἄλλως δέ, ἐπειδὴ ἡ διάταξις τῶν ἴσων μερῶν εἶναι ἡ αὐτὴ ἐν ἀμφοτέροις τοῖς πολυέδροις, αἱ στερεαὶ αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι· ἐπομένως τὰ πολύεδρα Π καὶ Π′ εἶναι ὅμοια.

Τὸ σημεῖον Ο εἶναι ***κέντρον εὐθείας ὁμοιότητος***. Ἐὰν τὰ μήκη Οα, Οβ, Ογ.... κεῖνται ἐπὶ τῶν πρὸς τὸ Ο προεκτάσεων τῶν ἐπιβατικῶν ἀκτίνων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ..... σχηματίζεται πολύεδρον Π″, τοῦ ὁποίου αἱ ἕδραι εἶναι μὲν ὅμοιαι πρὸς τὰς ἀντιστοιχούσας ἕδρας τοῦ πολυέδρου Π, ἀλλ' αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι *συμμετρικαὶ* (366) πρὸς τὰς στερεὰς γωνίας τοῦ πολυέδρου Π, ἕνεκα τῆς παραλληλίας καὶ τοῦ ἀντιθέτου τῆς φορᾶς τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν τῶν δύο πολυέδρων. Τὸ σημεῖον Ο ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἶναι ***κέντρον ἀντιστρόφου ὁμοιότητος***. Χάριν συντομίας ὀνομάζομεν *ὁμοιοθεσίαν* τὴν ὁμοιότητα τῆς μορφῆς καὶ τῆς θέσεως, τῶν σχημάτων τὰ ὁποῖα ἤδη ἀνωτέρω ἐξητάσαμεν. Τὰ οὕτω θεωρηθέντα πολύεδρα καλοῦνται *ὁμοιόθετα*, τὸ σημεῖον Ο εἶναι τὸ ***κέντρον*** τῆς ***εὐθείας*** ἢ ***ἀντιστρόφου ὁμοιοθεσίας***, καὶ ὁ σταθερὸς λόγος $\frac{ΟΑ}{Οα}$ εἶναι ὁ *λόγος ὁμοιότητος* ἢ *ὁμοιοθεσίας*. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸν λόγον τοῦτον μεταβαλλόμενον ἀπὸ τοῦ Ο μέχρι τοῦ ∞, εὑρίσκομεν πάντα τὰ ὅμοια πολύεδρα τὰ ὁμοίως ἢ ἀντιθέτως κείμενα ὡς πρὸς δεδομένον πολύεδρον (137,138).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Σημείωσις.

565. Ὅ,τι εἴπομεν ἐν σχέσει πρὸς τὰς κορυφὰς πολυέδρου δύναται προφανῶς νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ ἐπὶ οἱουδήποτε συστήματος σημείων.

Οὕτω γενικῶς, δεδομένου συστήματος σημείων Α, Β, Γ,...... κειμένων ὅπως δήποτε ἐν τῷ διαστήματι, ἐὰν ἐπὶ τῶν ἀκτίνων ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ,...., ἀγομένων ἔκ τινος σημείου Σ, κατ' ἀρέσκειαν ληφθέντος, λάβωμεν ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου τὰ μέρη ΣΑ΄ ΣΒ΄ ΣΓ΄... τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἔχωμεν

$$\frac{\Sigma A}{\Sigma A'} = \frac{\Sigma B}{\Sigma B'} = \frac{\Sigma \Gamma}{\Sigma \Gamma'} = \ldots\ldots = \lambda,$$

τοῦ λ ὄντος οἱουδήποτε ἀριθμοῦ, λέγομεν ὅτι τὸ νέον σύστημα τῶν σημείων Α΄, Β΄, Γ΄,.....εἶναι ὁμοιόθετον πρὸς τὸ πρῶτον. Καθ' ὅσον δὲ ὁ λόγος λ τῆς ὁμοιοθεσίας εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικός, τὰ ὁμόλογα σημεῖα ὡς τὰ Α καὶ Α΄, Β καὶ Β΄ κ.τ.λ. κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἢ ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου τῆς ὁμοιοθεσίας, τὰ δὲ δύο συστήματα τῶν σημείων Α, Β, Γ,.....καὶ Α΄, Β΄, Γ΄.,...λέγονται *εὐθέως ἢ ἀντιθέτως ὁμοιόθετα.*

Ὁ ὁρισμὸς ἄρα τῆς ὁμοιοθεσίας εἶναι ὁ αὐτὸς διά τε τὰ στερεὰ καὶ τὰ ἐπίπεδα σχήματα.

Ἐφ' ὅσον τὸ προτεθὲν σύστημα σχηματίζεται ἐκ σημείων μεμονωμένων ἢ διαδεχομένων ἄλληλα συνεχῶς, τὸ ὁμοιόθετον τοῦ δεδομένου συστήματος εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τῶν μεμονωμένων ἢ ἐκ τῶν συνεχῶν σημείων. Αἱ προηγούμεναι προτάσεις ἀληθεύουσιν ὁμοίως ἐπὶ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν.

566. Ἐὰν μετατοπίσωμεν ἓν ἐκ τῶν δύο ὁμοιοθέτων συστημάτων παραλλήλως ἑαυτῷ, ἡ ὁμοιοθεσία προφανῶς ὑφίσταται. Ἑπομένως *τὰ ἄκρα εὐθειῶν συναντωμένων, καὶ τὰ ἄκρα ἄλλων εὐθειῶν συναντωμένων, παραλλήλων δὲ καὶ ἀναλόγων ἀμοιβαίως πρὸς τὰς πρώτας, σχηματίζουσι δύο ὁμοιθετικὰ συστήματα.*

Ἡ ὁμοιοθεσία δύο συστημάτων εἶναι εὐθεῖα ἢ ἀντίθετος, καθόσον αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι διευθύνονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἢ ἐπὶ τὰ ἀντίθετα.

Ἐπὶ πλέον, ἐὰν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα τοῦ πρώτου συστήματος, Α΄ καὶ Β΄ τὰ δύο ὁμοιόθετα τοῦ δευτέρου στήματος, αἱ δύο

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Α'Β' εἶναι παράλληλοι καὶ ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῆς ὁμοιοθεσίας τῶν δύο συστημάτων· εἶναι δὲ τῆς αὐτῆς ἢ ἀντιθέτου φορᾶς, καθόσον ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι εὐθεῖα ἢ ἀντίθετος.

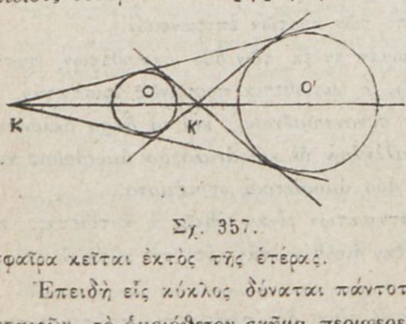
567. Αἱ ἑπόμεναι προτάσεις ἐξαρτῶνται ἀμέσως ἐκ τῶν προηγουμένων.

Τὸ ὁμοιόθετον σχῆμα μιᾶς εὐθείας εἶναι ἑτέρα εὐθεῖα παράλληλος τῇ πρώτῃ.

Ἡ γωνία δύο εὐθειῶν ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ τῶν ὁμοιοθέτων πρὸς ταύτας εὐθειῶν

Τὸ ὁμοιόθετον σχῆμα ἐπιπέδου εἶναι ἐπίπεδον παράλληλον τῷ πρώτῳ. Διότι, ἐὰν θεωρήσωμεν ἐν τῷ δεδομένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν στρεφομένην περὶ τὸ σημεῖον Α, ἐν ἑκάστῃ τῶν διαφόρων θέσεων, τὰς ὁποίας αὕτη λαμβάνει, θὰ ἔχῃ ὡς ὁμοιόθετον μίαν εὐθεῖαν παράλληλον, διερχομένην διὰ σταθεροῦ σημείου Α', ὁμοιοθέτου τῷ Α. Ἐντεῦθεν ἐξάγομεν, 1ον *ὅτι ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου ὁμοιοθεσίας, εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ ὁμοιόθετον αὐτῷ· 2ον ὅτι ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ τῶν δύο πρὸς ταῦτα ὁμοιοθέτων. Αἱ ἐφαπτόμεναι κατὰ δύο ὁμόλογα σημεῖα δύο ὁμολόγων καμπύλων ἢ ἀντιστρόφως ὁμοιοθέτων, εἶναι παράλληλοι,* ὡς ὅρια τεμνουσῶν παραλλήλων.

Δύο οἱαιδήποτε σφαῖραι εἶναι καὶ εὐθέως καὶ ἀντιθέτως (162) *ὁμοιόθετοι· τὰ δὲ δύο κέντρα τῆς ὁμοιοθεσίας διαιροῦσιν ἁρμονικῶς τὴν εὐθεῖαν, τὴν ἑνώνουσαν τὰ κέντρα τῶν δύο σφαιρῶν. Τὰ κέντρα ταῦτα τῆς ὁμοιοθεσίας εἶναι προσέτι αἱ κορυφαὶ δύο κώνων, τοὺς ὁποίους δυνάμεθα νὰ περιγράψωμεν εἰς τὰς δύο σφαίρας.*



Σχ. 357.

Ὅταν αἱ δύο σφαῖραι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς εἶναι τὸ κέντρον εὐθείας μὲν ὁμοιοθεσίας, ἐὰν ἡ μία σφαῖρα κεῖται ἐντὸς τῆς ἑτέρας· ἀντιθέτου δέ, ἐὰν ἡ μία σφαῖρα κεῖται ἐκτὸς τῆς ἑτέρας.

Ἐπειδὴ εἷς κύκλος δύναται πάντοτε νὰ θεωρηθῇ ὡς τομὴ δύο σφαιρῶν, *τὸ ὁμοιόθετον σχῆμα περιφερείας ὡς πρὸς οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ διαστήματος εἶναι μία περιφέρεια.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

*568. *Δύο συστήματα ὁμοιόθετα ὡς πρὸς τρίτον εἶναι καὶ ἀλλήλοις ὁμοιόθετα, καὶ τὰ τρία κέντρα τῆς ὁμοιοθεσίας κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἥτις καλεῖται ἄξων ὁμοιοθεσίας τῶν τριῶν τούτων συστημάτων.*

Τρεῖς σφαῖραι, ἀνὰ δύο θεωρούμεναι, ἔχουσι τρία μὲν κέντρα εὐθείας ὁμοιοθεσίας, τρία δὲ ἀντιθέτου. Ἐπομένως αἱ σφαῖραι αὗται ἔχουσι τρεῖς ἄξονας ὁμοιοθεσίας, ἕνα ἄξονα εὐθείας ὁμοιοθεσίας, ὅστις περιέχει τὰ τρία κέντρα τῆς ὁμοιοθεσίας ταύτης, καὶ τρεῖς ἄξονας ἀντιστρόφου ὁμοιοθεσίας, ἕκαστος τῶν ὁποίων περιέχει ἑκάτερον τῶν δύο κέντρων ἀντιθέτου ὁμοιοθεσίας καὶ τὸ κέντρον εὐθείας, ὅπερ ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἕκαστον τῶν κέντρων τῆς ἀντιθέτου ὁμοιοθεσίας. Οἱ τρεῖς οὗτοι ἄξονες ὁμοιοθεσίας εἶναι οἱ ἄξονες τῶν τριῶν κύκλων, τοὺς ὁποίους σχηματίζομεν τέμνοντες τὰς τρεῖς σφαίρας δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῶν τριῶν κέντρων αὐτῶν.

Θεώρημα.

*569. *Ὅταν τέσσαρα συστήματα $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \Sigma'''$ εἶναι ὁμοιόθετα ἀνὰ δύο, τὰ ἓξ αὐτῶν κέντρα ὁμοιοθεσίας κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.*

Τῷόντι, ἔστωσαν ἀμοιβαίως K_1, K_2, K_3 τὰ κέντρα ὁμοιοθεσίας τῶν συστημάτων Σ καὶ Σ', Σ καὶ Σ'', Σ καὶ Σ'''· τὸ ἐπίπεδον $K_1K_2K_3$ εἶναι τὸ ὁμόλογον ἑαυτῷ ἐν τοῖς συστήμασι Σ καὶ Σ', ἐπειδὴ τοῦτο περιέχει τὸ κέντρον K_1· εἶναι ὡσαύτως ὁμόλογον ἑαυτῷ ἐν τοῖς συστήμασι Σ καὶ Σ'', διότι περιέχει τὸ κέντρον K_2· εἶναι ἐπομένως ὁμόλογον καὶ ὡς πρὸς τὰ συστήματα Σ καὶ Σ''' (568), ἄρα περιέχει τὸ κέντρον τῆς ὁμοιοθεσίας αὐτῶν. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο διέρχεται διὰ τῶν κέντρων ὁμοιοθεσίας τῶν Σ' καὶ Σ'', Σ' καὶ Σ''', Σ'' καὶ Σ''', καὶ καλεῖται ἐπίπεδον ὁμοιοθεσίας τῶν τεσσάρων συστημάτων Σ, Σ', Σ'', Σ'''.

*570. Ἂς θεωρήσωμεν ἰδίᾳ τὴν περίπτωσιν τεσσάρων σφαιρῶν. Ἐπειδὴ δύο σφαῖραι εἶναι εὐθέως καὶ ἀντιθέτως ἅμα ὁμοιόθετοι, θέλομεν ἔχει δώδεκα κέντρα ὁμοιοθεσίας, ὧν ἓξ εὐθείας καὶ ἓξ ἀντιθέτου· εἶναι δὲ εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι ὑπάρχουσιν ὀκτὼ ἐπίπεδα ὁμοιοθεσίας τῶν τεσσάρων σφαιρῶν. Τῷόντι, ἂς φαντασθῶμεν τετράεδρον, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ εἶναι τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν τούτων· ἐπὶ ἑκάστης ἕδρας τοῦ τετραέδρου τούτου ὑπάρχουσιν ἓξ κέν-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τρα ὁμοιοθεσίας, τρία μὲν εὐθείας καὶ τρία ἀντιθέτου (568). Ἂς θεωρήσωμεν δὲ ἓν ἐκ τούτων τὸ Ο· τὸ σημεῖον τοῦτο ἀνήκει εἰς δύο εὐθείας Α καὶ Β, ὧν ἑκατέρα διέρχεται διὰ δύο ἄλλων κέντρων τῆς αὐτῆς ἕδρας. Ἄλλως τε δὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο εἶναι κοινὸν καὶ ὡς πρὸς μίαν ἄλλην ἕδραν τοῦ τετραέδρου, καὶ ἐπομένως ἀνήκει ὁμοίως εἰς δύο ἄλλας εὐθείας Γ καὶ Δ, κειμένας ἐπὶ τῆς δευτέρας ἕδρας. Συνδυάζοντες τὰς δύο εὐθείας Α καὶ Β τῆς πρώτης ἕδρας μετὰ τῶν δύο εὐθειῶν Γ καὶ Δ τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν τέσσαρα ἐπίπεδα ΑΟΓ, ΑΟΔ, ΒΟΓ, ΒΟΔ, ὧν ἕκαστον, διερχόμενον διὰ πέντε κέντρων ὁμοιοθεσίας φέρει ἀναγκαίως τὸ ἀντιστοιχοῦν ἕκτον κέντρον. Οὕτω δι' ἑκάστου κέντρου Ο τῆς πρώτης ἕδρας διέρχονται τέσσαρα ἐπίπεδα ὁμοιοθεσίας· ἀλλ' ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων τούτων εἶναι κοινὸν εἰς τρία κέντρα αὐτῆς ταύτης τῆς ἕδρας· ἐπομένως ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν ἐπιπέδων ὁμοιοθεσίας εἶναι ἴσος τῷ ὀκτώ.

571. Δύο στερεὰ σχήματα εἶναι ὅμοια, ὅταν τὸ ἕτερον διὰ καταλλήλου μετατοπίσεως λαμβάνῃ τὴν θέσιν σχήματος εὐθέως ὁμοιοθέτου πρὸς τὸ ἕτερον. Ὅθεν, κατὰ τὰ ἐν § 568, διὰ νὰ ἔχωμεν πάντα τὰ συστήματα τὰ ὁμοιόθετα πρὸς δεδομένον σύστημα, ἀρκεῖ, ἀφοῦ λάβωμεν αὐθαιρέτως ἓν σημεῖον ὡς κέντρον, νὰ δώσωμεν εἰς τὸν λόγον ὁμοιοθεσίας κ τιμὰς ἀπὸ τοῦ Ο μέχρι τοῦ ∞. Ὁπότε θὰ εὕρωμεν πάντα τὰ σχήματα τὰ ὅμοια πρὸς δεδομένον σχῆμα, κατασκευάζοντες τὰς ὁμοιοθέτους ἐπιφανείας, αἵτινες ἐξαρτῶνται ἐκ τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνει ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τοῦ ἀπείρου.

Οὕτω, *δύο σφαῖραι οἱαιδήποτε εἶναι ὅμοιαι* (566).

Τὸ μόνον σχῆμα τὸ ὅμοιον πρὸς κωνικὴν ἐπιφάνειαν εἶναι αὐτὴ αὕτη ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια, διότι, ἐὰν λάβωμεν τὴν κορυφὴν Ο ὡς κέντρον ὁμοιοθεσίας, τὸ ὁμόλογον Α′ ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου Α τῆς προτεθείσης κωνικῆς ἐπιφανείας κεῖται ἐπὶ τῆς γενετείρας ΟΑ (567).

Τέλος, δύο κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι εἶναι ὁμοιόθετοι, ὅταν αἱ γενέτειραι αὐτῶν εἶναι παράλληλοι καὶ αἱ ἰθύνουσαι αὐτῶν καμπύλαι ὁμοιόθετοι, διότι τὸ ὁμοιόθετον σχῆμα εὐθείας εἶναι εὐθεῖα παράλληλος ταύτῃ, ἐπομένως αἱ τομαὶ τῶν δύο ὁμορρύθμων κυλίνδρων ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶναι δύο καμπύλαι ὁμοιόθετοι, τῶν ὁποίων τὸ κέντρον εἶναι ἐπὶ τῆς συναντήσεως τοῦ τέμνοντος ἐπι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

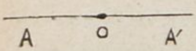
πέδου καὶ τῆς παραλλήλου τῇ γενετείρᾳ τῆς διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου τῆς ὁμοιοθεσίας τῶν δύο κυλίνδρων (567).

ΠΕΡΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

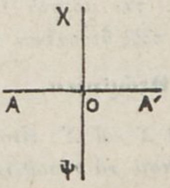
572. Δύο σημεῖα Α καὶ Α΄ λέγονται *συμμετρικὰ ὡς πρὸς σημεῖόν* τι Ο, ὅταν τὸ σημεῖον τοῦτο Ο εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΑΑ΄ (Σχ. 358 α΄).

Δύο σημεῖα Α καὶ Α λέγονται συμμετρικὰ ὡς πρὸς εὐθεῖάν τινα ΧΨ (Σχ. 355 β΄), ὅταν ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΑΑ΄.

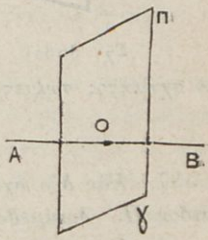
Δύο σημεῖα Α καὶ Β λέγονται συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἐπίπεδον Π (Σχ. 358 γ΄), ὅταν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΑ΄ καὶ κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς.



Σχ. 358 α΄



Σχ. 358 β



Σχ. 358 γ΄

Δύο σχήματα εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς σημεῖόν τι (κέντρον), ὡς πρὸς εὐθεῖάν τινα, ἢ ὡς πρὸς ἐπίπεδον, ὅταν τὰ σημεῖα αὐτῶν ἀνὰ δύο εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον Ο ἢ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΧΨ ἢ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π. Τὰ συμμετρικὰ σημεῖα δύο σχημάτων λέγονται ὁμόλογα.

Δύο σχήματα, συμμετρικὰ ὡς πρὸς εὐθεῖάν τινα εἶναι ἴσα· διότι, ἐὰν τὸ ἓν σχῆμα περιστραφῇ περὶ τὴν εὐθεῖαν κατὰ 180 μοίρας, καταλαμβάνει προφανῶς τὴν θέσιν τοῦ ἑτέρου σχήματος.

Ἡ συμμετρία λοιπὸν ὡς πρὸς εὐθεῖάν τινα οὐδὲν παρουσιάζει τὸ ἰδιάζον. Οὕτως ἐν τῇ σειρᾷ τοῦ κεφαλαίου τούτου θέλομεν ἐξε-

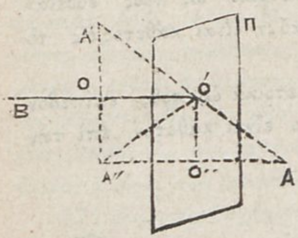
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τάσει μόνον τὰ περὶ συμμετρίας δύο σχημάτων ὡς πρὸς σημεῖον καὶ ὡς πρὸς ἐπίπεδον.

Θεώρημα.

573. *Δύο σχήματα Σ' καὶ Σ'' συμμετρικὰ πρὸς τὸ αὐτὸ σχῆμα Σ ὡς πρὸς δύο διάφορα σημεῖα συμμετρίας Ο καὶ Ο' εἶναι ἴσα* (Σχ. 359).

Ἔστωσαν Α ἓν οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ σχήματος Σ, Α' τὸ ἐν τῷ σχήματι Σ' ὁμόλογον αὐτοῦ καὶ Α'' τὸ ἐν τῷ σχήματι Σ''. Ἐπειδὴ τὸ Ο' εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΑ' καὶ Ο'' τὸ μέσον τῆς ΑΑ'', ἡ εὐθεῖα Α'Α'' εἶναι παράλληλος τῇ Ο'Ο'' καὶ ἴση πρὸς 2 Ο'Ο''. Ἐπομένως τὸ σχῆμα Σ'' εἶναι αὐτὸ τὸ Σ' μετατοπισθὲν παραλλήλως ἑαυτῷ κατὰ τὴν διεύθυνσιν Ο'Ο'' καὶ κατὰ διάστημα ἴσον τῷ 2.Ο'Ο''



(Σχ. 356ό)

574. Πόρισμα. Ἡ θέσις τοῦ κέντρου συμμετρίας δὲν ἐπηρεάζει οὔτε τὴν μορφὴν οὔτε τὸν προσανατολισμὸν σχήματος συμμετρικοῦ πρὸς δεδομένον σχῆμα.

Θεώρημα.

557. *Ἐὰν δύο σχήματα Σ καὶ Σ'' εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἐπίπεδον Π, δυνάμεθα πάντοτε νὰ τοποθετήσωμεν ταῦτα οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἓν σημεῖον Ο κατὰ βούλησιν ληφθὲν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ.* Καὶ ἀντιστρόφως· *Ἐὰν δύο σχήματα Σ καὶ Σ' εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἓν σημεῖον Ο', δυνάμεθα πάντοτε νὰ διατάξωμεν ταῦτα οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἐπίπεδον οἱοδήποτε Π, διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου τούτου* (Σχ. 359)

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ περιστραφῇ ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει τὸ σχῆμα Σ'' καὶ ἐν τῇ δευτέρᾳ τὸ Σ' κατὰ 180^0 περὶ τὴν κάθετον Ο'Β τὴν ὑψουμένην ἐκ τοῦ Ο' ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

Τῳόντι ἂς θεωρήσωμεν σχῆμά τι Σ, ἐν ἐπίπεδον Π, καὶ ἓν σημεῖον οἱονδήποτε Ο' ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Ἔστωσαν Σ' τὸ συμμετρικὸν τοῦ σχήματος Σ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο', καὶ Σ'' τὸ συμμετρικὸν σχῆμα τοῦ Σ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π. Ἐὰν καταστήσωμεν φανερὸν ὅτι τὰ σχήματα Σ' καὶ Σ'' εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν κάθετον Ο'Β τὴν ὑψουμένην ἐκ τοῦ Ο' ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

(572), τὸ θεώρημα καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ θὰ εἶναι ἀποδεδειγμένον. Πρὸς τοῦτο ἔστωσαν Α,Α΄,Α΄΄ τρία ὁμόλογα σημεῖα τῶν σχημάτων Σ,Σ΄,Σ΄΄ καὶ Ο΄΄ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἡ Α Α΄΄ συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον Π, ἐπειδὴ τὸ Ο΄ εἶναι τὸ μέσον τῆς Α Α΄, καὶ Ο΄΄ τὸ μέσον τῆς Α Α΄΄, ἡ εὐθεῖα Α΄ Α΄΄ εἶναι παράλληλος τῷ Ο΄ Ο΄΄, καὶ ἑπομένως κάθετος ἐπὶ τὴν Ο΄Β· ἐξ ἄλλου δέ, ἐπειδὴ ἡ Ο΄ Β ἤχθη παράλληλος τῇ ΑΑ΄΄ διὰ τοῦ μέσου τῆς ΑΑ΄, διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Γ τῆς Α΄Α΄΄, ἄρα τὰ σημεῖα Α΄ καὶ Α΄΄ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν Ο΄ Β.

Πορίσματα.

576. Δύο σχήματα συμμετρικὰ πρὸς τὸ αὐτὸ σχῆμα Σ ὡς πρὸς δύο διάφορα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ παριστῶσι τὴν μορφὴν τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ σχήματος Σ ὡς πρὸς σημεῖόν τι οἱονδήποτε (573). Ταῦτα λοιπὸν εἶναι ἴσα, ἀλλ' ὁ προσανατολισμὸς αὐτῶν ἐν τῷ διαστήματι δὲν εἶναι ὁ αὐτός, τοὐλάχιστον ἐφ' ὅσον τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ δὲν εἶναι παράλληλα.

577. Ἐν γένει δέ, ἐὰν δὲν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν προσανατολισμὸν (τὴν ὁμοίαν ἢ ἀντίθετον διάταξιν), ἀλλὰ μόνον τὴν μορφὴν παρατηροῦμεν ὅτι πᾶν σχῆμα Σ ἔχει ἓν καὶ μόνον σχῆμα ὡς συμμετρικὸν αὐτοῦ. Πάντα δὲ τὰ σχήματα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν ὡς συμμετρικὰ δεδομένου σχήματος ὡς πρὸς σημεῖον ἢ ὡς πρὸς ἐπίπεδον εἶναι τὰ αὐτά.

Σημείωσις.

578. Τὸ προηγούμενον θεώρημα (575) ἐπιτρέπει τὴν ἐκλογὴν τοῦ τρόπου τῆς συμμετρίας, διὰ τοῦ ὁποίου διευκολύνονται καὶ ἁπλοποιοῦνται οἱ συλλογισμοί. Τοῦτο κυρίως κατορθοῦται διὰ τῆς ὡς πρὸς σημεῖον συμμετρίας, ἥτις καθιστᾷ τὰς ἀποδείξεις ἁπλουστέρας, διότι, μετατιθεμένου τοῦ κέντρου τῆς συμμετρίας, δὲν ἀλλοιοῦται ὁ προσανατολισμὸς τοῦ συμμετρικοῦ σχήματος (574.)

Ἄλλως τε δέ, δύο σχήματα συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἓν σημεῖον (κέντρον τῆς συμμετρίας) εἶναι σύναμα σχήματα ἀντιθέτως ὁμοιόθετα, ὁ δὲ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας ἢ ὁμοιότητος αὐτῶν εἶναι ὁ —1. Ἡ ἀναλογία τῶν ὁμοιοθέτων ἢ ὁμολόγων μερῶν τῶν δύο σχημάτων μεταβάλλεται εἰς ἰσότητα, καὶ ἑπομένως μὴ λαμβανομένης

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ ὡς πρὸς ἐπίπεδον ἀναφερομένη συμμετρία καθιστᾷ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὴν ἀπόδειξιν ἁπλουστάτην· διότι, ἐφ' ὅσον ἡ πρότασις ἀφορᾷ τὸ μέγεθος καὶ οὐχὶ τὴν θέσιν, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν κατὰ βούλησιν τὸ ἐπίπεδον τῆς συμμετρίας (576). Οὕτω κατασκευάζοντες (Σχ. 361) τὸ σχῆμα Σ΄ΑΒΓ συμμετρικὸν τοῦ ΣΑΒΓ, βλέπομεν ὅτι τὸ σχῆμα Σ΄ΑΒΓ συμμετρικὸν τοῦ ΣΑΒΓ, βλέπομεν ὅτι τὰ δύο τετράεδρα ΣΑΒΓ καὶ Σ΄ΑΒΓ ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒΓ καὶ ὕψη ΣΟ καὶ Σ΄Ο ἴσα, ἐξ οὗ ἐξάγεται τὸ ἰσοδύναμον αὐτῶν.

Σημείωσις.

583. Τὰ δύο πρίσματα, εἰς ἃ χωρίζεται παραλληλεπίπεδον διὰ διαγωνίου ἐπιπέδου, εἶναι προφανῶς συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον Ο τοῦ παραλληλεπιπέδου (Σχ. 276)· καὶ ἔχουσι μὲν ἴσους ὄγκους (415), ἀλλ' ἐν γένει δὲν εἶναι ἐφαρμόσιμα. Δύνανται δὲ νὰ ἐφαρμόσωσι μόνον ἐὰν εἶναι ὀρθά.

*ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

584. *Σφαιρικὸν πολύγωνον* καλεῖται τὸ μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τριῶν ἢ περισσοτέρων τόξων μεγίστων κύκλων. Τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ, (Σχ. 362) καλοῦνται *πλευραὶ* τοῦ πολυγώνου, αἱ δὲ γωνίαι ΑΒΓ, ΒΓΔ.....,τὰς ὁποίας σχηματίζουσι τὰ τόξα, καλοῦνται *γωνίαι* τοῦ πολυγώνου, καὶ αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν *κορυφαὶ* αὐτοῦ.

Τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον λέγεται *κυρτόν*, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ προσεκβαλλομένη ἀφίνει πρὸς τὸ αὐτὸ ἡμισφαίριον ὁλόκληρον τὸ πολύγωνον.

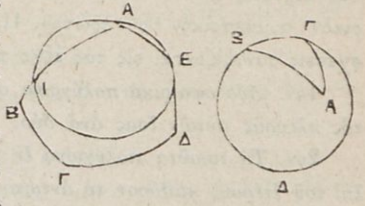
Ἑκάστη πλευρὰ σφαιρικοῦ πολυγώνου κυρτοῦ εἶναι μικροτέρα τῆς ἡμιπεριφερείας μεγίστου κύκλου.

Διότι, ἐὰν ἡ πλευρὰ ΑΒ π.χ. ἦτο μεγαλειτέρα τῆς ἡμιπεριφερείας, θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΑΒ μεταξὺ τοῦ Α καὶ Β σημεῖόν τι τοιοῦτον, ὥστε ΑΙ νὰ εἶναι ἴσον ἡμιπεριφερείᾳ, ὁπότε ὁ μέγιστος κύκλος, εἰς ὃν ἀνήκει ἡ πλευρὰ ΑΕ, θὰ διήρχετο διὰ τοῦ σημείου Ι (506), καὶ τὸ πολύγωνον δὲν θὰ ἔκειτο ὁλόκληρον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπὶ τοῦ ἑτέρου τῶν ἡμισφαιρίων, τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τοῦ μεγίστου τούτου κύκλου ΑΕ.

Σφαιρικὸν πολύγωνον κυρτὸν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ συναντᾶται εἰς πλείονα τῶν δύο σημεῖα ὑπὸ τόξου μεγίστου κύκλου (62).



Σχ. 362.

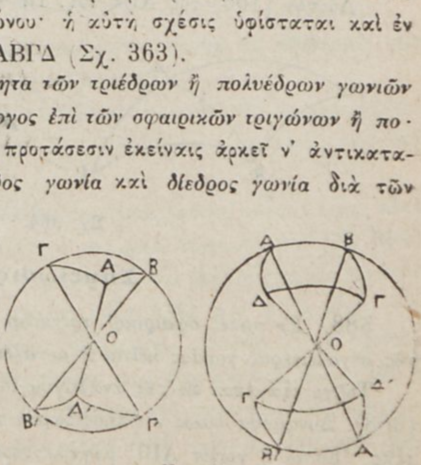
585. Τὸ ἁπλούστερον τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων εἶναι τὸ *σφαιρικὸν τρίγωνον*, εἶναι δὲ τοῦτο μέρος ΑΒΓ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, περιεχόμενον ὑπὸ τριῶν τόξων μεγίστων κύκλων ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, *ὧν ἕκαστον εἶναι μικρότερον ἡμιπεριφερείας· διὸ καὶ πᾶν σφαιρικὸν τρίγωνον εἶναι κυρτὸν* (Σχ. 362).

Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον καλεῖται *ἰσοσκελές*, ἐὰν ἔχῃ δύο πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας, ἰσόπλευρον, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς αὐτοῦ πλευρὰς ἴσας, καὶ ὀρθογώνιον, ἐὰν ἔχῃ μίαν τῶν γωνιῶν αὐτοῦ ὀρθήν.

Ἐὰν ἑνώσωμεν τὰς κορυφὰς σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 363) μὲ τὸ κέντρον Ο τῆς σφαίρας, σχηματίζεται τρίεδρος στερεὰ γωνία ΟΑΒΓ, τῆς ὁποίας αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ........ ἔχουσι τὸ αὐτὸ μέτρον, (522), τὸ ὁποῖον καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ....τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου· αἱ δὲ δίεδροι αὐτῆς γωνίαι ΟΑ, ΟΒ.....ἔχουσι τὸ αὐτὸ μέτρον (522), τὸ ὁποῖον καὶ αἱ γωνίαι Α, Β......τοῦ τριγώνου· ἡ αὐτὴ σχέσις ὑφίσταται καὶ ἐν παντὶ πολυγώνῳ σφαιρικῷ ΑΒΓΔ (Σχ. 363).

Οὕτως *εἰς ἑκάστην ἰδιότητα τῶν τριέδρων ἢ πολυέδρων γωνιῶν ἀντιστοιχεῖ μία ἰδιότης ἀνάλογος ἐπὶ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων ἢ πολυγώνων*. Ἐπομένως ἐν ταῖς προτάσεσιν ἐκείναις ἀρκεῖ ν' ἀντικαταστήσωμεν τὰς λέξεις *ἐπίπεδος γωνία* καὶ *δίεδρος γωνία* διὰ τῶν λέξεων *πλευρὰ* καὶ *γωνία*.

586. Ἐὰν προσεκβάλωμεν τὰς ἀκμὰς τῆς πολυεδρικῆς στερεᾶς γωνίας ΟΑΒΓΔ (Σχ. 363) πρὸς τὴν κορυφὴν Ο σχηματίζομεν πολυεδρικὴν γωνίαν ΟΑ'Β'Γ'Δ', ὁρίζουσαν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τὸ πολύγωνον



Σχ. 363.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Α'Β'Γ'Δ', τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ εἶναι ἐκ διαμέτρου ἀντικείμεναι πρὸς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔ, καὶ καλεῖται πολύγωνον σφαιρικὸν συμμετρικὸν τοῦ πρώτου. Πᾶσαι δὲ αἱ ἐν § 366 ἐκτεθεῖσαι σχέσεις συνοψίζονται εἰς τὰς ἑξῆς προτάσεις.

1ον. *Δύο σφαιρικὰ πολύγωνα συμμετρικὰ ἔχουσι τὰς γωνίας καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας ἀνὰ δύο.*

2ον. *Τὰ τοιαῦτα πολύγωνα ἐν γένει δὲν εἶναι ἐφαρμόσιμα τὸ ἐν ἐπὶ τοῦ ἑτέρου, καθόσον τὰ ἀντιστοιχοῦντα αὐτῶν ἴσα μέρη εἶναι ἀντιστρόφως διατεταγμένα.*

3ον. *Διὰ νὰ εἶναι σφαιρικόν τι τρίγωνον ἐφαρμόσιμον μετὰ τοῦ συμμετρικοῦ αὐτῷ πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ τρίγωνα ταῦτα νὰ ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας, καὶ αἱ ἀντικείμεναι εἰς τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ νὰ εἶναι ἴσαι, ἤτοι τὸ τρίγωνον νὰ εἶναι ἰσοσκελές.*

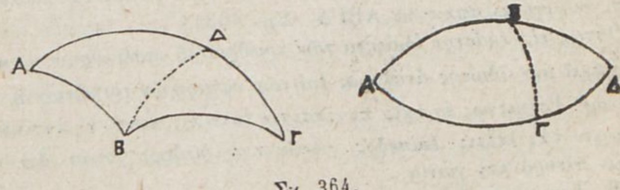
Θεώρημα.

587. *Εἰς πᾶν σφαιρικὸν πολύγωνον ἑκάστη πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν πλευρῶν.*

Τῳόντι· ἔστω ΑΒΓΔ τὸ προτεθὲν πολύγωνον (Σχ. 363). Ἐκ τῆς πολυεδρικῆς στερεᾶς γωνίας ΟΑΒΓΔ θέλομεν ἔχει (367)

$$\text{ΑΟΒ} < \text{ΒΟΓ} + \text{ΓΟΔ} + \text{ΔΟΑ}.$$

Λοιπὸν (106) τόξ ΑΒ $<$ τόξ. ΒΓ $+$ τόξ. ΓΔ $+$ τόξ. ΔΑ.



Σχ. 364.

Σημείωσις.

588. *Ἐν παντὶ σφαιρικῷ τριγώνῳ ΑΒΓ* (Σχ. 364) *ἀπέναντι τῆς μεγαλειτέρας γωνίας κεῖται ἡ μεγαλειτέρα πλευρά.*

Τοῦτο ἐξάγεται ἐκ τῆς ἀναλόγου ἰδιότητος τῆς τριέδρου γωνίας (368). Δυνάμεθα ὅμως ν' ἀποδείξωμεν τὴν πρότασιν ταύτην καὶ ὡς ἑξῆς. Ἔστω ἡ γωνία ΑΒΓ μεγαλειτέρα τῆς γωνίας Γ· δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐν τῇ γωνίᾳ ΑΒΓ τόξον μεγίστου κύκλου ΒΔ, τὸ ὁποῖον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ν' ἀποτελῇ μετὰ τῆς ΒΓ γωνίαν ΔΒΓ ἴσην τῇ γωνίᾳ Γ. Τὸ τρίγωνον ΒΔΓ, ἔχον δύο γωνίας ἴσας ΔΒΓ καὶ ΔΓΒ, θὰ εἶναι ἰσοσκελὲς (587) καὶ θέλομεν ἔχει ΒΔ=ΔΓ. Ἀλλ' ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ ἔχομεν (587)

$$ΑΒ < ΑΔ + ΒΔ.$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν πλευρὰν ΒΔ διὰ τῆς ἴσης αὐτῷ ΔΓ λαμβάνομεν

$$ΑΒ < ΑΔ + ΔΓ \text{ ἢ } ΑΒ < ΑΓ.$$

Συνδυάζοντες τὸ θεώρημα τοῦτο μετὰ τοῦ ἐν § 586 (3) καὶ συλλογιζόμενοι ὡς ἐν § 33 βλέπομεν ὅτι καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει· ἤτοι ὅτι, *ἐὰν σφαιρικὸν τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, αἱ γωνίαι αἱ ἀντικείμεναι εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς εἶναι ἴσαι, καὶ ἐὰν τρίγωνον σφαιρικὸν ἔχῃ δύο πλευρὰς ἀνίσους, ἀπέναντι τῆς μεγαλειτέρας πλευρᾶς κεῖται ἡ μεγαλειτέρα γωνία.*

589. Ἐκ τοῦ ὅτι τὸ ἰσοσκελὲς σφαιρικὸν τρίγωνον ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ αὐτῷ ἐξάγεται, ὡς ἐν § 27, ὅτι *ἐν παντὶ ἰσοσκελεῖ σφαιρικῷ τριγώνῳ τὸ τόξον μεγίστου κύκλου, ὅπερ ἑνώνει τὴν κορυφὴν μὲ τὸ μέσον τῆς βάσεως, εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν καὶ διαιρεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο ἴσα μέρη.*

Καὶ τέλος, ὡς ἐν § 28, *πᾶν ἰσογώνιον τρίγωνον σφαιρικὸν εἶνα καὶ ἰσόπλευρον, καὶ πᾶν ἰσόπλευρον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.*

Θεώρημα.

590. *Ἐν παντὶ σφαιρικῷ πολυγώνῳ κυρτῷ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν εἶναι μικρότερον μιᾶς περιφερείας.*

Διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῆς ἀντιστοιχούσης πολυεδρικῆς γωνίας ΟΑΒΓΔ (Σχ. 363) εἶναι μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν (369).

Ἡ ἄμεσος ἄλλως ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου εἶναι εὔκολος. Ἂς θεωρήσωμεν τὸ δεύτερον σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 364), καὶ ἂς προσεκβάλωμεν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ μέχρις οὗ συναντηθῶσι κατὰ τὸ σημεῖον Δ· τὰ δύο τόξα ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ εἶναι ἡμιπεριφέρειαι μεγίστου κύκλου (506), καί, ἐπειδὴ ἐν τῷ τριγώνῳ ΒΓΔ ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος ΒΔ+ΓΔ, τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τόξων ΑΒΓ+ΑΓΔ, ἤτοι μιᾶς περιφερείας μεγίστου κύκλου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

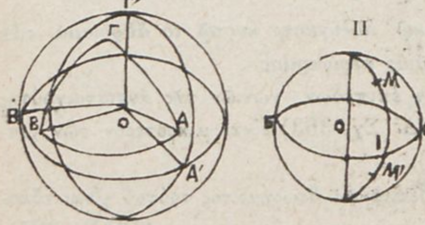
Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐν τῷ κυρτῷ σφαιρικῷ πολυγώνῳ ἀντικαθιστῶντες μίαν πλευρὰν διὰ τῶν προσεκβολῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, τῶν προσκειμένων εἰς τὴν πλευρὰν ταύτην, βλέπομεν ὅτι ἐὰν ἡ πρότασις ἀληθεύῃ διὰ πολύγωνόν τι κυρτόν, ἀληθεύει καὶ διὰ πολύγωνον κυρτόν, ἔχον μίαν πλευρὰν περισσότερον· ἄρα εἶναι γενικόν.

Θεώρημα.

591. ***Ἐὰν σφαιρικόν τι τρίγωνον, ὡς τὸ Α′Β′Γ′, εἶναι τὸ πολικὸν τρίγωνον ἄλλου τινὸς σφαιρικοῦ τριγώνου, ἔστω τοῦ ΑΒΓ, καὶ ἀντιστρόφως τὸ ΑΒΓ θὰ εἶναι τὸ πολικὸν τρίγωνον τοῦ Α′Β′Γ′.***

Ἔστω ΕΙΘ μέγιστος κύκλος (Σχ. 365) Π ὁ εἷς τῶν πόλων αὐτοῦ καὶ Μ σημεῖόν τι οἱονδήποτε τῆς σφαίρας. Ἐὰν τὰ σημεῖα Π καὶ Μ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μεγίστου κύκλου ΕΘ, τὸ μικρότερον τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου τὸ βαῖνον ἀπὸ τοῦ Π πρὸς τὸ Μ εἶναι μικρότερον τοῦ τεταρτημορίου ΠΙ. Ἐὰν δὲ τὰ σημεῖα Π. καὶ Μ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ μεγίστου κύκλου ΕΘ, τὸ μικρότερον τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου τὸ βαῖνον ἐκ τοῦ Π πρὸς τὸ Μ, ὡς τὸ ΠΜ′, εἶναι μεγαλείτερον τοῦ τεταρτημορίου.

Τούτου τεθέντος, καλοῦμεν *πολικὸν τρίγωνον* σφαιρικοῦ τινος τριγώνου ΑΒΓ, ἕτερον τρίγωνον Α′Β′Γ′ (Σχ. 365 α′), τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ ὁρίζονται ὡς ἑξῆς· Α′ εἶναι ὁ ἕτερος τῶν πόλων τοῦ μεγίστου κύκλου ΒΓ, ὁ κείμενος ὡς πρὸς τὸν μέγιστον τοῦτον κύκλον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, πρὸς ὃ καὶ ἡ κορυφὴ Α. Ὁμοίως τὸ Β′ εἶναι ὁ πόλος τοῦ μεγίστου κύκλου ΑΓ ὁ κείμενος ὡς πρὸς τὸν κύκλον τοῦτον πρὸς τὸ μέρος, πρὸς ὃ καὶ ἡ κορυφὴ Β, καὶ τὸ Γ′ εἶναι ὁ πόλος τοῦ ΑΒ ὁ κείμενος πρὸς τὸ μέρος αὐτοῦ, πρὸς ὃ καὶ ἡ κορυφὴ Γ.



Σχ. 365.

592. Ἀρκεῖ ἤδη ν' ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ πολικὸν τοῦ Α′Β′Γ′. Ἔστω τὸ τρίγωνον Α′Β′Γ′ πολικὸν τοῦ ΑΒΓ· λέγομεν ὅτι καὶ τὸ ΑΒΓ εἶναι τὸ πολικὸν τρίγωνον τοῦ Α′Β′Γ′.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τῳόντι· ἂς θεωρήσωμεν μίαν οἱανδήποτε τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, καὶ ἔστω π. χ. τὴν Γ. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Α΄ εἶναι ὁ πόλος τοῦ ΒΓ, τὸ τόξον ΓΑ΄ τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ διερχομένου διὰ τῶν σημείων τούτων Γ καὶ Α΄ εἶναι τεταρτημόριον περιφερείας· ὁμοίως τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου ΓΒ΄ εἶναι τεταρτημόριον περιφερείας διότι τὸ Β΄ εἶναι πόλος τοῦ ΑΓ. Ἄρα τὸ σημεῖον Γ (510) εἶναι ὁ πόλος τοῦ Α΄Β΄. Προσέτι, ἐπειδὴ τὸ Γ΄ εἶναι ὁ πόλος τοῦ ΑΒ ὁ κείμενος πρὸς τὸ μέρος αὐτοῦ, πρὸς ὃ καὶ τὸ Γ, τὸ μικρότερον τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ διερχομένου διὰ τῶν σημείων Γ καὶ Γ΄ εἶναι μικρότερον τεταρτημορίου· ἑπομένως τὸ Γ εἶναι ὁ πόλος τοῦ Α΄Β΄ ὁ κείμενος πρὸς τὸ μέρος αὐτοῦ, πρὸς ὃ καὶ τὸ σημεῖον Γ΄.

Σημείωσις.

593. Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς τρόπον πρὸς κατασκευὴν τοῦ πολικοῦ τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ ἑτέρου δεδομένου σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Μὲ πόλους διαδοχικῶς τὰ σημεῖα Α,Β,Γ γράφομεν τρεῖς περιφερείας μεγίστων κύκλων· αἱ τρεῖς αὗται περιφέρειαι χωρίζουσι τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας (Σχ. 365) εἰς ὀκτὼ τρίγωνα, τῶν ὁποίων τὸ ἓν Α΄Β΄Γ΄ εἶναι τὸ πολικὸν τοῦ ΑΒΓ· εἶναι δὲ ἐκεῖνο τῶν ὀκτὼ τριγώνων, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν κορυφὴ Α΄ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κύκλου ΒΓ, πρὸς ὃ καὶ τὸ Α, τὸ Β΄ πρὸς τὸ μέρος τοῦ ΑΓ, πρὸς τὸ ὁποῖον καὶ τὸ Β, καὶ τὸ Γ΄ πρὸς τὸ Γ.

594. ***Αἱ δύο τρίεδροι γωνίαι ΟΑΒΓ καὶ ΟΑ΄Β΄Γ΄ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς τὰ δύο πολικὰ τρίγωνα εἶναι παραπληρωματικαί*** (371), (ἤτοι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς μιᾶς εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῆς ἑτέρας). Τῳόντι κατὰ τὴν κατασκευὴν πρὸς εὕρεσιν τοῦ σημείου Γ΄ βλέπομεν ὅτι ἡ ἀκμὴ ΟΓ΄ εἶναι κάθετος (509) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΟΒ καὶ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τούτου, πρὸς ὃ καὶ ἡ ΟΓ· ὁμοίως δὲ σκεπτόμεθα καὶ περὶ τῶν ΟΒ΄ καὶ ΟΑ΄. Ἑκάστη λοιπὸν γωνία ἑκατέρου τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ θὰ εἶναι (372) παραπλήρωμα τῆς ἐν τῷ ἑτέρῳ τριγώνῳ ἀντικειμένης πλευρᾶς· διὸ καὶ τὰ τοιαῦτα πολικὰ τρίγωνα καλοῦνται καὶ ***παραπληρωματικὰ τρίγωνα***.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

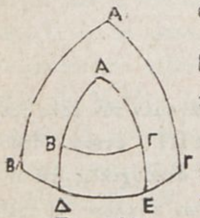
Θεώρημα

595. *Ἐὰν ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι πολικὰ τρίγωνα, ἑκάστη γωνία τοῦ ἑτέρου τῶν τριγώνων τούτων ἔχει ὡς μέτρον τὴν ἡμιπεριφέρειαν μεγίστου κύκλου ἠλαττωμένην κατὰ τὴν ἀντικειμένην πλευρὰν τοῦ ἑτέρου τριγώνου.*

Τῷόντι· ἂς θεωρήσωμεν ἐπὶ παραδείγματι τὴν γωνίαν Α, καὶ ἂς προσεκβάλωμεν, ἐὰν εἶναι ἀνάγκη, τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ μέχρις οὗ συναντήσωσι τὸ τόξον Β′Γ′ Ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι πόλος τοῦ Β′Γ′, ἡ γωνία Α ἔχει ὡς μέτρον τὸ τόξον ΔΕ (522)· ἀλλ' ἔχομεν ἀμέσως.

$$\Delta E = B'E + \Delta\Gamma' - B'\Gamma'$$

Ἐξ ἄλλου δὲ Β′Ε καὶ ΔΓ′ εἶναι τεταρτημόρια, ἐπειδὴ τὸ Β′ εἶναι πόλος τοῦ ΑΓ, καὶ Γ′ πόλος τοῦ ΑΒ· ἑπομένως θέλομεν ἔχει $\Delta E = \frac{1}{2}$ περιφ. μεγ. κύκλου—Β′Γ′.

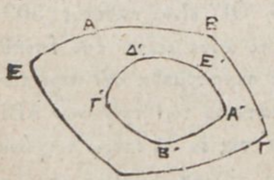


(Σχ. 366)

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ παράγονται τὸ ἓν ἐκ τοῦ ἑτέρου διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς (591), ἡ ἀποδειχθεῖσα ἰδιότης διὰ τὰς γωνίας Α,Β,Γ τοῦ πρώτου τριγώνου ὑφίσταται καὶ διὰ τὰς γωνίας τοῦ δευτέρου τριγώνου τὰς Α′,Β′,Γ′. Ἠδυνάμεθα δὲ καὶ ἀμέσως νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ γωνία Α′ π. χ. ἔχει ὡς μέτρον τὸ παραπλήρωμα τῆς ΒΓ, προσεκβάλλοντες τὴν ΒΓ μέχρις οὗ συναντήσῃ τὰς Α′Β′ καὶ Α′Γ′.

Σημείωσις

596. Αἱ ἰδιότητες τῶν πολικῶν τριγώνων ἐπεκτείνονται καὶ ἐπὶ τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων καὶ καμπύλων. Ἔστω (Σχ. 367) κυρτὸν σφαιρικὸν πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ· ἂς λάβωμεν ἐκ τῶν δύο πόλων τοῦ τόξου μεγίστου κύκλου ΕΑ τὸν πόλον Α′, ὁ ὁποῖος ὡς πρὸς τὸ ΕΑ κεῖται πρὸ, τὸ αὐτὸ ἡμισφαίριον πρὸς ὃ καὶ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ· καθ' ὅμοιον τρόπον ἂς λάβωμεν τοὺς πόλους Β′ Γ′, Δ′, Ε′ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ· τὸ πολύγωνον Α′Β′Γ′Δ′Ε′ θὰ εἶναι τὸ πολικὸν πο-



(Σχ. 367)

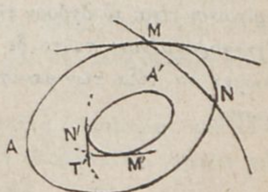
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λύγωνον τοῦ προτεθέντος ΑΒΓΔΕ, καὶ θ' ἀποδείξωμεν, ὡς ἐν § 591 καὶ 593, 1ον ὅτι, *ἐὰν σφαιρικόν τι πολύγωνον Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ εἶναι τὸ πολικὸν πολύγωνον τοῦ δεδομένου ΑΒΓΔΕ, ἀντιστρόφως τὸ ΑΒΓΔΕ εἶναι τὸ πολικὸν πολύγωνον τοῦ Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄·* 2ον ὅτι *εἰς δύο πολικὰ πολύγωνα πᾶσα γωνία τοῦ ἑνὸς εἶναι παραπλήρωμα τῆς πλευρᾶς τοῦ ἄλλου, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ τῆς ληφθείσης γωνίας ἶναι πόλος*.

597. Καλεῖται *ἐφαπτόμενον τόξον* μεγίστου κύκλου εἰς σημεῖόν τι Μ σφαιρικῆς καμπύλης ΑΜΝ τὸ ὅριον τῆς θέσεως, ἣν λαμβάνει ὁ μέγιστος κύκλος ὁ διερχόμενος διὰ τοῦ σημείου Μ καὶ ἑτέρου σημείου Ν τῆς καμπύλης, ὅταν τὸ σημεῖον Ν πλησιάζῃ ἀπεριορίστως πρὸς τὸ Μ. (Σχ. 368). Ἡ σφαιρικὴ καμπύλη λέγεται *κυρτή*, ἐὰν ὁ ἐφαπτόμενος μέγιστος κύκλος εἰς ἓν οἱοδήποτε σημεῖον αὐτῆς ἀφίνει ὁλόκληρον τὴν καμπύλην πρὸς τὸ αὐτὸ ἡμισφαίριον. (584).

598. *Σφαιρικὴ καμπύλη κυρτὴ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ συναντᾶται ὑπὸ περιφερείας μεγίστου κύκλου εἰς σημεῖα πλείονα τῶν δύο, καὶ ἐκ τῶν δύο τόξων τοῦ μεγίστου κύκλου, ὅστις συναντᾷ καμπύλην (σφαιρικὴν) εἰς δύο οἱαδήποτε σημεῖα, τὸ μικρότερον περιέχεται ἐντὸς τῆς καμπύλης ταύτης.*

Τούτου τεθέντος, ἔστω Α΄Μ΄ (Σχ. 368) μία κυρτὴ σφαιρικὴ καμπύλη, καὶ εἰς οἱονδήποτε σημεῖον Μ΄ τῆς καμπύλης ταύτης ἂς φέρωμεν τὸν ἐφαπτόμενον μέγιστον κύκλον, καὶ ἂς λάβωμεν τὸ πόλον Μ τοῦ κύκλου, ὅστις κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ ἡμισφαίριον, πρὸς ὃ καὶ ἡ καμπύλη Μ΄Α΄· ὁ τόπος τῶν σημείων



Σχ. 368.

Μ εἶναι ἡ ΑΜ *πολικὴ καμπύλη* τῆς Α΄Μ΄, τουτέστι τὸ σημεῖον Μ εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου μεγίστου κύκλου ἐφαπτομένου κατὰ τὸ Μ τῆς καμπύλης ΑΜ· διότι, ἐὰν Ν εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου μεγίστου κύκλου Ν΄Τ΄, ἐφαπτομένου τῆς καμπύλης Α΄Μ΄ κατὰ τὸ Ν΄ ἐγγὺς τοῦ Μ΄, τὸ σημεῖον Τ΄ θὰ εἶναι πόλος (510) τοῦ τέμνοντος τόξου ΜΝ, καί, ὅταν τὸ τελευταῖον τοῦτο τόξον γίνῃ ἐφαπτόμενον κατὰ τὸ Μ, τὸ σημεῖον Τ΄ θὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ Μ΄. Οὕτω τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ΄ τῶν δύο καμπύλων ἀντιστοιχοῦσιν ἀνὰ δύο πρὸς ἄλληλα, οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον Μ νὰ εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου μεγίστου κύ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κλου, ἐφαπτομένου εἰς τὸ Μ', καὶ τὸ σημεῖον Μ' νὰ εἶναι πόλος τόξου μεγίστου κύκλου ἐφαπτομένου κατὰ τὸ Μ.

Θεώρημα.

599. *Ἐν παντὶ σφαιρικῷ τριγώνῳ 1ον) τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν περιέχεται μεταξὺ δύο καὶ ἓξ ὀρθῶν· 2ον) ἡ μικροτέρα γωνία ηὐξημένη κατὰ δύο ὀρθὰς ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν.*

600. Ἡ ἀπόδειξις τῶν προτάσεων τούτων εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν περὶ τριέδρων γωνιῶν (374), καὶ δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς συνέπειαι τῶν περὶ τριέδρων γωνιῶν προτάσεων.

Ἐκ τούτου ἐξάγεται ὅτι *σφαιρικόν τι τρίγωνον δύναται νὰ ἔχῃ μίαν, δύο ἢ τρεῖς γωνίας ὀρθάς, ἢ καὶ δύο ἢ τρεῖς ἀμβλείας.* Ὅταν τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ἔχει δύο γωνίας ὀρθάς, ἤτοι εἶναι δισορθογώνιον, ἡ κορυφὴ τῆς μὲν ὀρθῆς γωνίας εἶναι ὁ πόλος τῆς ἀντικειμένης ταύτῃ πλευρᾶς, καὶ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν ταύτην εἶναι τεταρτημόρια περιφερείας. *Ἐν τῷ σφαιρικῷ τρισορθογωνίῳ τριγώνῳ πᾶσαι αἱ πλευραὶ εἶναι τεταρτημόρια· τὸ δὲ τρισορθογώνιον τρίγωνον εἶναι τὸ ὄγδοον τῆς ὅλης σφαιρικῆς ἐπιφανείας, εἰς ἣν εἶναι ἐγκεχαραγμένον·* τοῦτο δὲ γίνεται ἀμέσως φανερόν, ἐὰν προσεκβάλωμεν τὰ τόξα τῶν μεγίστων κύκλων, ἐξ ὧν σχηματίζεται τὸ τρίγωνον.

Θεώρημα.

601. *Δύο σφαιρικὰ τρίγωνα, ἐγκεχαραγμένα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν εἶναι ἴσα·*

1ον) Ἐὰν ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς τὴν πλευρὰν ταύτην γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ·

2ον) Ἐὰν ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην ὑπὸ πλευρῶν ἴσων ἑκατέρας ἑκατέρᾳ·

3ον) Ἐὰν ἔχωσι τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ.

4ον Ἐὰν ἔχωσι τὰς τρεῖς αὐτῶν γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ.

Ἐν πάσαις δὲ ταῖς ἀνωτέρω περιπτώσεσι τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα ἢ συμμετρικὰ καθ' ὅσον ἡ διάταξις τῶν δεδομένων στοιχείων εἶναι ἡ αὐτὴ ἢ ἀντίστροφος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι ἄμεσος συνέπεια τῶν ἀναλόγων προτάσεων (376, 377) περὶ τριέδρων γωνιῶν, καὶ δυνάμεθα οὕτω ν' ἀποδείξωμεν αὐτὸ ἀμέσως.

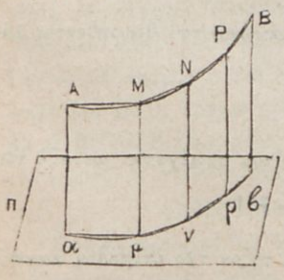
602. Παρατήρησις. Τρίεδρος γωνία, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι τὸ κέντρον δύο ὁμοκέντρων σφαιρῶν ὁρίζει προφανῶς ἐπὶ τῶν δύο τούτων σφαιρῶν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα, τῶν ὁποίων αἱ γωνίαι ἀμοιβαίως εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῶν ἀνάλογοι (228). Δύο τοιαῦτα σφαιρικὰ τρίγωνα καλοῦνται *ὅμοια*.

Θεώρημα.

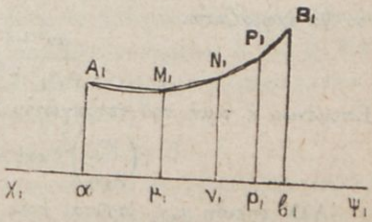
603. *Τὸ βραχύτερον διάστημα μεταξὺ δύο σημείων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι τὸ τόξον μεγίστου κύκλου, τὸ μικρότερον ἡμιπεριφερείας καὶ ἑνῶνον τὰ δύο ταῦτα σημεῖα.*

1ον. Ἀνάγκη πρὸ παντὸς νὰ ὁρίσωμεν τὸ μῆκος τόξου μὴ ἐπιπέδου (στρεβλῆς) καμπύλης, ἤτοι καμπύλης, τῆς ὁποίας πάντα τὰ σημεῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Τὸ μῆκος τοῦτο ὁρίζεται ὡς τὸ τῆς ἐπιπέδου καμπύλης· *εἶναι* δηλ. *τὸ ὅριον τῆς περιμέτρου ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τόξον τοῦτο τεθλασμένης γραμμῆς τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ τείνουσιν εἰς τὸ μηδέν.* Ἤδη θ' ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ ὅριον τοῦτο ὑπάρχει, καὶ ὅτι εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ νόμου, ὃν ἀκολουθοῦμεν, ὥστε αἱ διάφοροι πλευραὶ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς νὰ τείνωσιν εἰς τὸ μηδέν.

Ἔστωσαν (Σχ. 369) ΑΒ μία στρεβλὴ καμπύλη, καὶ αβ ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, Μ ἓν οἱονδήποτε σημεῖον τῆς ΑΒ, καὶ μ ἡ προβολὴ τοῦ σημείου τούτου.



(Σχ. 369)



(Σχ. 370)

Ἐν ἐπιπέδῳ, κατὰ βούλησιν ληφθέντι, ἂς φέρωμεν εὐθεῖαν ἀπεριόριστον $X_1\Psi_1$ (Σχ. 370) καὶ ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης καὶ ἀπό τινος σημείου α_1 μῆκος τι $\alpha_1\mu_1$ ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τοῦ τόξου αμ· ἔπειτα ἀπὸ τοῦ σημείου μ_1 ἂς ὑψώσωμεν τὴν κάθετον $\mu_1 M_1$ ἴσην πρὸς τὴν προβάλλουσαν Μμ. Εἰς πᾶν σημεῖον Μ τῆς καμπύλης ΑΒ θ' ἀντιστοιχῇ οὕτως ἓν σημεῖον M_1, καί, ὅταν τὸ σημεῖον Μ διαγράψῃ τὸ τόξον ΑΒ, τὸ σημεῖον M_1 θὰ διαγράψῃ τόξον τῆς ἐπιπέδου καμπύλης A_1B_1 τῆς ὁποίας τὸ τόξον ἂς παραστήσωμεν διὰ μ.

Τούτου τεθέντος, ἔστωσαν AMNPB μία τεθλασμένη γραμμὴ οἱαδήποτε ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τόξον ΑΒ, καὶ αμνρβ, $A_1M_1N_1P_1B_1$ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τεθλασμέναι γραμμαί, αἱ ἐγγεγραμμέναι ἐν τῇ προβολῇ αβ καὶ ἐν τῇ ἐπιπέδῳ γραμμῇ A_1B_1· ἡ τιμὴ τοῦ λόγου

$$\frac{AM+MN+NP+PB}{A_1M_1+M_1N_1+N_1P_1+P_1B_1} \qquad (1)$$

περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν τιμῶν δύο ἐκ τῶν λόγων

$$\frac{AM}{A_1M_1},\ \frac{MN}{M_1N_1},\ \frac{NP}{N_1P_1},\ \frac{PB}{P_1B_1} \quad (2)$$ (Θ. Ἀριθμ. Κορὲ § 185)

Ἑπομένως, ἐὰν δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν ὅτι ἕκαστος τῶν λόγων τούτων ἔχει ὅριον τὴν μονάδα, καὶ ὁ λόγος (1) θὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ ὅριον· καί, ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς τοῦ λόγου τούτου ἔχει ὅριον τὴν ὡρισμένην ποσότητα μ (καθ' οἱονδήποτε νόμον καὶ ἂν τείνωσι πρὸς τὸ μηδὲν αἱ πλευραὶ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς AMNPB (218, 219), καὶ ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ θὰ ἔχῃ ὅριον τὸ μ.

Ἂς λάβωμεν λοιπὸν ἕνα οἱονδήποτε ἐκ τῶν λόγων (2)· ἔστω τὸν $\frac{MN}{M_1N_1}$. Ἂς παραστήσωμεν δὲ διὰ δ τὴν διαφορὰν Νν—Μμ ἢ τὴν ἴσην αὐτῷ $N_1\nu_1 - M_1\mu_1$. Τὸ τετράγωνον τοῦ θεωρηθέντος λόγου θὰ ἐκφράζηται

$$\frac{\mu\nu^2+\delta^2}{\mu_1\nu_1{}^2+\delta^2}.$$

Ἑπομένως ἡ τιμὴ τοῦ τετραγώνου τούτου περιέχεται μεταξὺ τῶν

$$\left(\frac{\mu\nu}{\mu_1\nu_1}\right)^2 \text{ καὶ } \frac{\delta^2}{\delta^2} \text{ ἢ } 1.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ $\mu_1\nu_1$ ἰσοῦται πρὸς τὸ τόξον τῆς ἐπιπέδου καμπύλης, τοῦ ὁποίου μν εἶναι ἡ χορδή, ὁ λόγος $\frac{\mu\nu}{\mu_1\nu_1}$ ἔχει ὅριον τὴν μονά-

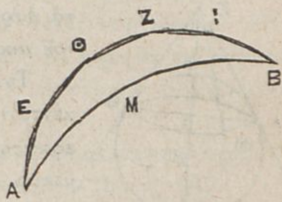
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δα 1, ὅταν τὸ μν τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν· ἄρα ὅρ. $\frac{MN}{M_1N_1} = 1$.

2ον. *Τὸ μῆκος τόξου σφαιρικῆς καμπύλης ἰσοῦται πρὸς τὸ ὅριον τῆς περιμέτρου τῆς ἐν τῷ τόξῳ τούτῳ ἐγγεγραμμένης σφαιρικῆς τεθλασμένης γραμμῆς, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ τείνουσιν εἰς τὸ μηδέν.*

Τῳόντι, ἔστωσαν ΑΖΒ (Σχ. 371) τόξον οἱασδήποτε καμπύλης, κεχαραγμένης ἐπὶ σφαίρας, καὶ ΑΕΘΖΙΒ σφαιρικὴ τεθλασμένη γραμμή, ἐγγεγραμμένη ἐν τῷ τόξῳ τούτῳ, ἤτοι γραμμή, σχηματιζομένη ἐκ τόξων μεγίστου κύκλου, περατουμένη εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, καὶ ἔχουσα τὰς μεταξὺ κορυφὰς αὐτῆς ἐπὶ τοῦ τόξου τῆς καμπύλης ΑΖΒ.

Ἐὰν τὰ τόξα μεγίστου κύκλου, τῶν ὁποίων ἄθροισμα εἶναι ἡ σφαιρικὴ τεθλασμένη γραμμή, τείνωσιν ἀπεριορίστως εἰς τὸ μηδὲν καθ' οἱονδήποτε τρόπον, ὁ λόγος ἑκάστου τούτων πρὸς τὴν χορδὴν αὐτοῦ ἔχει ὅριον τὴν μονάδα (223), ἑπομένως καὶ ὁ λόγος τῆς σφαιρικῆς τεθλασμένης γραμμῆς πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν χορδῶν ἔχει ὅριον τὴν μονάδα· καί, ἐπειδὴ (1ον) τὸ ἄθροισμα τῶν χορδῶν ἔχει ὅριον τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς καμπύλης ΑΖΒ, βλέπομεν ὅτι μῆκος τῆς σφαιρικῆς τεθλασμένης γραμμῆς τῆς ἐγγεγραμμένης ἐν τῷ τόξῳ οἱασδήποτε καμπύλης ΑΖΒ ἔχει ὡσαύτως ὅριον τὸ μῆκος τοῦ τόξου τούτου.



Σχ. 371.

3ον. Ἄς ἀναζητήσωμεν ἤδη τὸ συντομώτερον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας διάστημα μεταξὺ τῶν δύο σημείων Α καὶ Β. Ἔστωσαν ΑΜΒ τόξον μεγίστου κύκλου μικρότερον ἡμιπεριφερείας, ἑνῶνον τὰ σημεῖα Α καὶ Β· ἔστω δὲ καὶ μία οἱαδήποτε σφαιρικὴ καμπύλη ΑΖΒ, κεχαραγμένη μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β. Ἐπειδὴ τὸ ΑΕΘΖΙΒ εἶναι μέρος σφαιρικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν καμπύλην ταύτην, θέλομεν ἔχει (587)

$$AMB < AE + E\Theta + \Theta Z + ZI + IB$$

Ἐὰν δὲ θέσωμεν ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου τείνουσιν εἰς τὸ μηδέν, τὸ δεύτερον μέλος ἔχει ὅριον (2) τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς καμπύλης ΑΖΒ. *Τὸ τόξον ἄρα ΑΜΒ μεγίστου*

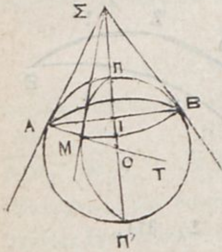
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κύκλου εἶναι μικρότερον πάσης ἄλλης σφαιρικῆς καμπύλης ἀγομένης ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β· ἤτοι τὸ συντομώτερον διάστημα μεταξὺ τοῦ Α καὶ Β ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι τὸ τόξον τοῦτο μεγίστου κύκλου.

Οὕτω καλοῦμεν *σφαιρικὸν ἀπόστημα* δύο σημείων Α καὶ Β σφαίρας τὸ μῆκος τοῦ τόξου μεγίστου κύκλου, μικροτέρου ἡμιπεριφερείας καὶ ἐπιζευγνύοντος τὰ δύο ταῦτα σημεῖα.

Θεώρημα.

604. *Ἵνα μέγιστος κύκλος εἶναι κάθετος ἐπὶ μικρὸν κύκλον ΑΜΒ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ μέγιστος κύκλος νὰ διέρχεται διὰ τῶν δύο πόλων Π καὶ Π′ τοῦ μικροῦ κύκλου.* (Σχ. 372).



Σχ. 372.

Τουτέστιν, ἐὰν σημειώσωμεν δι' Ο τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ διὰ ΜΣ, ΜΤ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὸν μέγιστον καὶ εἰς τὸν μικρὸν κύκλον κατὰ τὸ κοινὸν σημεῖον Μ, διὰ νὰ εἶναι ἡ γωνία ΣΜΤ ὀρθή, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ ἐπίπεδα ΟΜΣ καὶ ΜΠΠ′ νὰ συμπίπτωσι.

Τῷόντι· τὸ ἐπίπεδον ΜΠΠ′ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΜΤ, ἐπειδὴ περιέχει δύο εὐθείας ΟΜ καὶ ΠΠ′, σχηματιζούσας μετὰ τῆς ΜΤ γωνίας ὀρθάς. Ἐὰν λοιπὸν ἡ γωνία ΣΜΤ εἶναι ὀρθή, ἡ ΜΣ θὰ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΠΠ′, τὸ ὁποῖον ἑπομένως θὰ συμπίπτῃ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΟΜΣ. Καὶ ἀντιθέτως, ἐὰν τὰ ἐπίπεδα ΟΜΣ καὶ ΜΠΠ′ συμπίπτωσιν, ἡ εὐθεῖα ΜΣ, κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΠΠ′, σχηματίζει μετὰ τῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καθέτου ΜΤ γωνίαν ὀρθήν.

Πόρισμα.

605. *Διὰ σημείου τινὸς σφαίρας, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μέγιστον κύκλον ἕνα μόνον κάθετον ἐπὶ μικρὸν κύκλον δεδομένον ΑΒ· οὗτος δὲ θὰ εἶναι ὁ μέγιστος κύκλος ΟΠΓ′Π′Ι ὁ διερχόμενος διὰ τοῦ σημείου Ο καὶ διὰ τῶν πόλων Π καὶ Π′ τοῦ κύκλου ΑΒ.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θεώρημα.

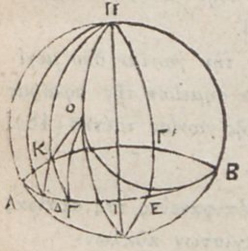
606. Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Ο σφαίρας φέρωμεν ἐφ' ἑνὸς κύκλου ΑΒ τὸ μικρότερον ΟΙ ἐκ τῶν δύο τόξων μεγίστου κύκλου κατακορύφου καὶ ἄλλα τόξα μεγίστων κύκλων πλαγίων ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ (Σχ. 373)·

1ον τὸ κάθετον τόξον ΟΙ εἶναι μικρότερον παντὸς πλαγίου τόξου ΟΓ·

2ον. Δύο πλάγια τόξα ΟΓ καὶ ΟΕ, ὧν οἱ πόδες Γ καὶ Ε ἀπέχουσιν ἴσον τοῦ ποδὸς Ι τοῦ καθέτου τόξου, εἶναι ἴσα·

3ον. Ἐκ δύο πλαγίων τόξων ΟΓ καὶ ΟΔ ἢ ΟΕ καὶ ΟΔ μεγαλείτερον εἶναι τὸ μᾶλλον ἀπέχον τοῦ ποδὸς τοῦ καθέτου τόξου ΟΙ.

Τωόντι· ὁ κύκλος ΑΒ διαιρεῖ τὴν σφαῖραν εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἓν θὰ περιέχῃ τὸ σημεῖον Ο· ἔστω Π ὁ πόλος τοῦ κύκλου ΑΒ ὁ κείμενος εἰς τὸ ἕτερον μέρος τῆς σφαίρας. Ἂς φέρωμεν τὰ τόξα μεγίστων κύκλων ΠΓ καὶ ΠΔ καὶ ἔστω Κ τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως τῶν τόξων ΟΔ καὶ ΠΓ.



Σχ. 373.

1ον. Ἐκ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΠΟΓ ἔχομεν ΠΓ — ΠΟ $<$ ΟΓ

ἤτοι ΠΙ — ΠΟ ἢ ΟΙ $<$ ΟΓ.

2ον. Ἐν τοῖς σφαιρικοῖς τριγώνοις ΟΙΓ καὶ ΟΙΕ αἱ γωνίαι ΟΙΓ καὶ ΟΙΕ εἶναι ἴσαι ὡς ὀρθαί, ἡ ΟΙ εἶναι κοινὴ πλευρὰ καὶ ΙΓ$=$ΙΕ ἐξ ὑποθέσεως. Τὰ δύο λοιπὸν ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἑπομένως καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν, ἤτοι τὰ πλάγια τόξα ΟΓ καὶ ΟΕ, εἶναι ἴσα.

3ον. Ἐκ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων ΟΚΓ καὶ ΠΚΔ ἔχομεν

$$ΟΓ < ΟΚ+ΚΓ \text{ καὶ } ΠΔ < ΠΚ+ΚΔ.$$

καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἀνισότητα ταύτας λαμβάνομεν·

$$ΟΓ+ΠΔ < ΟΚ+ΚΓ+ΠΚ+ΚΔ$$

$$\text{ἢ } ΟΓ+ΠΔ < ΟΔ+ΠΓ$$

ἀφαιροῦντες δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἀνισότητος ταύτης τὰ ἴσα τόξα ΠΔ καὶ ΠΓ λαμβάνομεν.

$$ΟΓ < ΟΔ.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πορίσματα.

607. Ἐὰν τὸ σημεῖον Γ διαγράψῃ τὸν κύκλον AB ἀρχόμενον ἀπὸ τοῦ σημείου I, τὸ τόξον ΟΓ, κατὰ πρῶτον ἴσον τῷ ΟΙ, αὐξάνον γίνεται ἴσον τῷ ΟΠΙ, ὁπότε ἔχει τὴν μεγίστην αὐτοῦ τιμήν, καὶ ἔπειτα ἐλαττοῦται μέχρι τῆς ἀρχικῆς αὐτοῦ τιμῆς ΟΙ, ἥτις εἶναι ἡ ἐλαχίστη· καὶ τὸ τόξον ΟΙ καλεῖται σφαιρικὸν ἀπόστημα τοῦ σημείου Ο ἀπὸ τοῦ κύκλου AB.

Καὶ αἱ ἀντίστροφοι τῶν προηγουμένων προτάσεων ἀληθεύουσι (40).

Δυνάμεθα ν' ἀρκεσθῶμεν εἰς τὴν ἁπλῆν ἔκφρασιν τῶν ἑπομένων θεωρημάτων, διότι αἱ ἀποδείξεις αὐτῶν δύνανται ν' ἀναχθῶσιν εἰς τὰς ἀποδείξεις ἀναλόγων προηγουμένων θεωρημάτων.

Ὁ Γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων σφαίρας τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ δύο σημείων τῆς ἐπιφανείας ταύτης εἶναι μέγιστος κύκλος κάθετος κατὰ τὸ μέσον τοῦ τόξου μεγίστου κύκλου, ὅπερ ἑνώνει τὰ δύο ταῦτα σημεῖα. (45, 299).

Δύο ὀρθογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα ἢ συμμετρικὰ 1ον) ἐὰν ἔχωσι τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν γωνίαν ἴσην· 2ον) ἐὰν ἔχωσι τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην (47).

Τὸ τόξον μεγίστου κύκλου τὸ διχοτομοῦν τὴν γωνίαν δύο μεγίστων κύκλων εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῆς σφαίρας τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν δύο πλευρῶν τῆς γωνίας ταύτης (48).

Ὁρισμοὶ

*608. Καλεῖται *ἄτρακτος* μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἡμιπεριφερειῶν μεγίστων κύκλων.

Σφαιρικὸς ὄνυξ καλεῖται τὸ μέρος τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἡμικυκλίων μεγίστων κύκλων καὶ τοῦ ἀτράκτου.

Βάσις τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος καλεῖται ὁ ἄτρακτος ὁ περιεχόμενος ὑπὸ τῶν ἡμικυκλίων τῶν ὁριζόντων τὸν σφαιρικὸν ὄνυχα.

Ὁ ἄτρακτος καὶ ὁ ὄνυξ λέγονται *ὀρθογώνιοι, ὀξυγώνιοι, ἀμβλυγώνιοι*, καθ' ὅσον ἡ ὑπὸ τῶν ἡμικυκλίων σχηματιζομένη δίεδρος γωνία εἶναι ὀρθή, ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα.

Σφαιρικὴ πυραμὶς καλεῖται τὸ μέρος τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων στερεᾶς γωνίας ἐχούσης κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τούτων, ὅπερ καλεῖται καὶ *βάσις* τῆς σφαιρικῆς πυραμίδος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θεώρημα.

609. *Δύο ἄτρακτοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ γωνίαι αὐτῶν, ἢ ὡς τὰ τόξα τὰ μετροῦντα τὰς γωνίας αὐτῶν.*

Διότι διπλασιαζομένης, τριπλασιαζομένης κ.τ.λ. τῆς γωνίας τῶν ἡμικυκλίων, διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κ.τ.λ. προφανῶς καὶ ὁ ἄτρακτος.

Πόρισμα.

610. Ἔστω Α ὁ τυχὼν ἄτρακτος καὶ Γ ἡ γωνία αὐτοῦ, Α' ὁ ἄτρακτος, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ὀρθή· θέλομεν ἔχει Α: Α'=Γ: 1 (λαμβανομένης τῆς ὀρθῆς γωνίας ὡς μέτρου). Ἐὰν λοιπὸν ληφθῇ ὡς μονὰς ἐπιφανείας ὁ ὀρθογώνιος ἄτρακτος Α', θὰ εἶναι

Α: 1=Γ: 1· ἤτοι Α=Γ.

καὶ ἑπομένως οἱοσδήποτε ἄτρακτος ἔχει ὡς μέτρον τὴν γωνίαν αὐτοῦ Γ, (τουτέστι τὸν παριστῶντα ἀριθμὸν τὴν γωνίαν τοῦ ἀτράκτου, ὅταν ὡς μονὰς ληφθῇ ἡ ὀρθὴ γωνία).

Ἀλλ' ἂν ληφθῇ ὡς μονὰς τὸ ἥμισυ τοῦ εἰρημένου ἀτράκτου Α' τουτέστι τὸ τρισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον, ὁ ἄτρακτος Α' θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 2, καὶ ἐκ τῆς προηγουμένης ἀναλογίας προκύπτει Α=2Γ, ἤτοι μέτρον παντὸς ἀτράκτου εἶναι τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας αὐτοῦ.

Σημείωσις.

611. Τὰ περὶ σφαιρικῶν ἀτράκτων ἐφαρμόζονται καὶ ἐπὶ τῶν σφαιρικῶν ὀνύχων, καὶ ἀποδεικνύοται ὁμοίως· οὕτω τοῦ ὄγκου παντὸς σφαιρικοῦ ὄνυχος μέτρον εἶναι τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας αὐτοῦ, ἐὰν ληφθῇ ὡς μονὰς ἡ σφαιρικὴ πυραμὶς ἡ ἔχουσα βάσιν τὸ τρισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον.

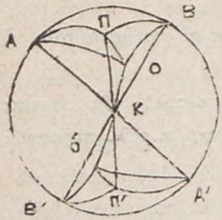
Θεώρημα.

612. Δύο συμμετρικὰ σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα(Σχ. 374).

Ἂς λάβωμεν τὸ πόλον Π μικροῦ κύκλου διερχομένου διὰ τῶν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σημείων Α,Β,Ο, καὶ ἂς φέρωμεν τὰ τόξα μεγίστων κύκλων ΠΑ,ΠΒ, ΠΟ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα(510).



Σχ. 374.

Ἂς γράψωμεν τὴν διάμετρον ΠΚΠ΄ καὶ τὰ τόξα μεγίστων κύκλων Π΄Α΄,Π΄Β΄,Π΄Ο΄. Ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν ΠΚΑ, Π΄ΚΑ΄ ἐπάγεται τὴν ἰσότητα τῶν τόξων ΠΑ καὶ Π΄Α΄. Βλέπομεν προσέτι ὅτι ΠΒ=Π΄Β΄ καὶ ΠΟ=Π΄Ο΄· ἑπομένως, ἀφοῦ ΠΑ=ΠΒ=ΠΟ, θὰ εἶναι καὶ Π΄Α΄=Π΄Β΄=Π΄Ο΄.

Οὕτω τὰ τρίγωνα ΠΑΒ, Π΄Α΄Β΄ εἶναι συμμετρικὰ καὶ ἰσοσκελῆ, ἑπομένως εἶναι ἐφαρμόσιμα ὅπως καὶ αἱ εἰς ταῦτα ἀντιστοιχοῦσαι τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι. Ὁμοίως τὰ τρίγωνα ΠΑΟ, Π΄Α΄Ο΄ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, ὡς καὶ τὰ τρίγωνα ΠΒΟ καὶ Π΄Β΄Ο΄.

Ἐν τέλει δὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΟ, ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΠΑΒ, ΠΑΟ, ΠΒΟ, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Ο΄, ὅπερ εἶναι ἄθροισμα τῶν τριγώνων Π΄Α΄Β΄,Π΄Α΄Ο΄,Π΄Β΄Ο΄.

Σημ. Ἐὰν ὁ πόλος Π ληφθῇ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΟ, τὸ τρίγωνον τοῦτο δὲν θὰ εἶναι πλέον ἄθροισμα, ἀλλὰ διαφορά τις.

Θεώρημα.

613. *Ἐὰν λάβωμεν τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὡς μονάδα πρὸς μέτρησιν τῶν γωνιῶν, καὶ τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον ὡς μονάδα πρὸς μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ἐπιφάνεια σφαιρικοῦ τριγώνου οἱουδήποτε ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες μετροῦσι τὰς γωνίας αὐτοῦ, ἠλαττωμένον κατὰ 2.*

Ἔστω (Σχ. 375) τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ. Τὸ τρίγωνον τοῦτο κεῖται ἐπὶ τοῦ ἡμισφαιρίου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς περιφερείας, εἰς ἣν ἀνήκει ἡ πλευρὰ ΑΒ. Ἂς περατώσωμεν ὡσαύτως τὰς περιφερείας, εἰς ἃς ἀνήκουσιν ὡς τόξα αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΓ.

Σχ. 375.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ηὐξημένον κατὰ τὸ τρίγωνον ΒΑΓ΄ σχηματίζει προφανῶς τὸν ἄτρακτον, τὸν ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν δύο ἡμι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

περιφερειῶν ΑΓΑ΄ καὶ ΑΒΑ΄, ἤτοι τὸν ἄτρακτον, τοῦ ὁποίου γωνία εἶναι ἡ γωνία Α τοῦ προτεθέντος τριγώνου.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ηὐξημένον κατὰ τὸ τρίγωνον ΑΓΒ΄, σχηματίζει ὡσαύτως ἄτρακτον, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ἡ γωνία Β τοῦ προτεθέντος τριγώνου.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τέλος τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ηὐξημένον κατὰ τὸ τρίγωνον Α΄ΓΒ΄, βλέπομεν ὅτι δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν τὸ τρίγωνον Α΄ΓΒ΄ διὰ τοῦ συμμετρικοῦ αὐτῷ τριγώνου ΑΓ΄Β, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον αὐτῷ (612). Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖ ἄτρακτον ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν δύο ἡμιπεριφερειῶν ΓΑΓ΄ καὶ ΓΒΓ΄, ἤτοι ἄτρακτον ἔχοντα γωνίαν τὴν γωνίαν Γ τοῦ προτεθέντος τριγώνου.

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς ἑπομένας ἰσότητας.

$$\text{ΑΒΓ} + \text{ΒΓΑ}' = \text{ἄτρακτ. Α}$$
$$\text{ΑΒΓ} + \text{ΑΓΒ}' = \text{ἄτρακτ. Β.}$$
$$\text{ΑΒΓ} + \text{Α}'\text{ΓΒ}' = \text{ἄτρακτ. Γ.}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων μελῶν τῶν τριῶν τούτων ἰσοτήτων ἰσοῦται προφανῶς, πρὸς τὸ ἡμισφαίριον πλέον δὶς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸ παραδεδεγμένον σύστημα τὸ ἡμισφαίριον παρίσταται, μετρηθέν, διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 4, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Σ Α,Β,Γ, τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς παριστῶντας τὸ ἐμβαδὸν καὶ τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θὰ ἔχωμεν τέλος ἐν σχέσει πρὸς τὸ μέτρον τοῦ ἀτράκτου (610)

$$4+2\Sigma = 2\text{Α}+2\text{Β}+2\Gamma. \quad \text{ἐξ οὗ}$$
$$(1) \qquad \Sigma = \text{Α}+\text{Β}+\Gamma - 2.$$

Θεώρημα.

614. Ὅταν λάβωμεν τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὡς μονάδα πρὸς μέτρησιν τῆς γωνίας καὶ τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον ὡς μονάδα πρὸς μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας, τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικοῦ πολυγώνου ἔχοντος ν πλευρὰς ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν μετρούντων τὰς γωνίας αὐτοῦ ἀριθμῶν ἠλαττωμένον κατὰ 2 (ν—2).

Εἰς τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο φθάνομεν, ἐὰν χωρίσωμεν τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα διὰ διαγωνίων τόξων μεγίστων κύκλων, καὶ ἐφαρ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μόσωμεν τὸν τύπον 1 (613) εἰς ἕκαστον τῶν (ν—2) οὕτω σχηματιζομένων σφαιρικῶν τριγώνων.

ΠΕΡΙ ΟΓΚΟΥ ΤΗΣ ΣΦ. ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

615. *Ὁ ὄγκος σφαιρικῆς πυραμίδος ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεως αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἓν τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.*

Ἀποδεικνύομεν ὅτι

α'. Δύο σφαιρικαὶ τριγωνικαὶ πυραμίδες συμμετρικαὶ εἶναι ἰσοδύναμοι (612).

β'. Ὅταν λάβωμεν ὡς μονάδα πρὸς μέτρησιν γωνίας τὴν ὀρθὴν γωνίαν, καὶ ὡς μονάδα πρὸς μέτρησιν σφαιρικοῦ ὄγκου τὴν τρισορθογώνιον πυραμίδα, ἥτις εἶναι τὸ ἓν ὄγδοον τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας ὁ σφαιρικὸς ὄνυξ ἔχει ὡς μέτρον τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ παριστῶντος τὴν γωνίαν αὐτοῦ (611).

γ'. Κατὰ τὸ αὐτὸ σύστημα μονάδων ὁ ὄγκος σφαιρικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ἔχει ὡς μέτρον τὸν ἀριθμὸν $A+B+\Gamma-2$, ἔνθα A, B, Γ παριστῶσι τὰς τιμὰς τῶν γωνιῶν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον εἶναι βάσις τῆς πυραμίδος (613).

Ἐκ τούτου ἐξάγεται ὅτι ὁ λόγος τοῦ ὄγκου σφαιρικῆς πυραμίδος τριγωνικῆς πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεως αὐτῆς ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῆς τρισορθογωνίου πυραμίδος πρὸς τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον· ὅπερ εἶναι βάσις αὐτῆς· ἀλλ' ὁ τελευταῖος οὗτος λόγος ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς, ἤτοι πρὸς τὸ ἓν τρίτον τῆς ἀκτῖνος. Ἑπομένως ὁ ὄγκος τῆς σφαιρικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἓν τρίτον τῆς ἀκτῖνος. Τὸ θεώρημα τοῦτο εὐκόλως ἐπεκτείνεται καὶ ἐπὶ οἱασδήποτε πολυγωνικῆς σφαιρικῆς πυραμίδος.

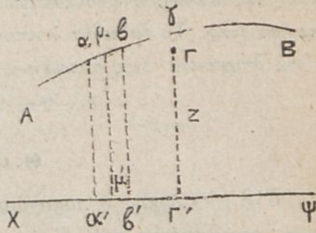
*Θεώρημα.

616. *Ἡ ἐπιφάνεια ἡ παραγομένη ὑπὸ ἐπιπέδου γραμμῆς οἱασδήποτε, στρεφομένης περὶ ἄξονα κείμενον μὲν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς γραμμῆς, ἀλλὰ μὴ τέμνοντα ταύτην ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ μήκους αὐτῆς (218) ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ κέντρον τῶν μέσων ἀποστημάτων αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἄξονος.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Προηγουμένως ὡρίσθη (86) τὸ κέντρον τοῦ μέσου ἀποστήματος σειρᾶς δεδομένων σημείων ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν ἐκεῖνον ἂς νοήσωμεν ὡς κέντρον τῶν μέσων ἀποστημάτων μιᾶς οἱασδήποτε ἐπιπέδου γραμμῆς τὸ κέντρον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν θεωροῦντες τὰ μέσα σημεῖα τῶν ἀπειροστῶν ἴσων μερῶν, εἰς ἃ δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν τὴν εὐθεῖαν ταύτην διῃρημένην.

Τούτου τεθέντος, ἔστω (Σχ. 376) ἡ ἐπίπεδος καμπύλη ΑΒ, τὸ μῆκος αὐτῆς Μ, καὶ ὁ ἄξων ΧΨ. Ἂς διαιρέσωμεν τὴν καμπύλην ταύτην εἰς μέρη ἴσα ὡς τὸ αβ καὶ ἂς παραστήσωμεν διὰ κ τὴν ἐπὶ τὸν ἄξονα ΧΨ προβάλλουσαν τοῦ μέσου σημείου μ τῆς αβ. Ἡ αβ οὖσα ἀπειροστὸν μέρος γραμμῆς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς εὐθεῖα (223)· τὸ στοιχεῖον δὲ τοῦτο, στρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονα, παράγει ἐπιφάνειαν Ε κολούρου κώνου, ἥτις παρίσταται (489) διὰ τοῦ τύπου



Σχ. 376.

$$E = \alpha\beta . 2\pi . \kappa .$$

Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν δι' Ε′ τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν τὴν παραγομένην διὰ τῆς περιστροφῆς ὁλοκλήρου τῆς καμπύλης ΑΒ, θέλομεν ἔχει

$$E' = \alpha\beta . 2\pi(\kappa + \kappa_1 + \kappa_2 + \ldots . \kappa_{\nu-1})\cdot$$

ἔνθα ν παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἴσων στοιχείων αβ, βγ....ἐξ ὧν ἀποτελεῖται ἡ γραμμή· καὶ παριστῶντες διὰ Ζ τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου Γ τῶν μέσων ἀποστημάτων τῶν σημείων τῆς καμπύλης ΑΒ θέλομεν ἔχει

$$E' = \alpha\beta . 2\pi\nu . Z \text{ ἢ } E' = \nu . \alpha\beta . 2\pi Z .$$

ἀλλὰ ὅρ. ν. αβ = Μ· ἑπομένως

$$E' = M . 2\pi Z .$$

617. Ἂς θέσωμεν ὡς ἐφαρμογὴν τὸ ἑξῆς ζήτημα· *Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράστασις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας τῆς παραγομένης ὑπὸ περιφερείας κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα ρ καὶ στρεφομένου περὶ ἄξονα ΧΨ κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου καὶ μὴ τέμνοντα αὐτόν.*

Ἔστω δ τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ τοῦ ἄξονος

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΧΨ. Τὸ κέντρον περιφερείας εἶναι προφανῶς τὸ κέντρον τῶν μέσων ἀποστημάτων τῶν ἴσων στοιχείων (μερῶν) τῆς περιφερείας· διότι εἰς τὴν ἀναζήτησιν τοῦ κέντρου τῶν μέσων ἀποστημάτων, εἶναι φανερὸν ὅτι δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν πολλὰ σημεῖα διὰ τοῦ ἰδίου ἑαυτῶν κέντρου· καὶ τὸ κέντρον, ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς οἱασδήποτε διαμέτρου εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ κέντρον τῆς περιφερείας. Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τῆς παραγομένης ἐπιφανείας, ἥτις εἶναι ἐπιφάνεια ἑνὸς στεφάνου, παρίσταται διὰ τοῦ τύπου

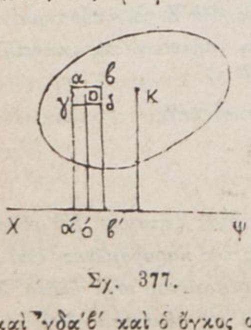
$$E=2\pi\rho.2\pi\delta=4\pi^2\rho\delta.$$

Θεώρημα

618. *Ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ὑπὸ οἱασδήποτε ἐπιπέδου ἐπιφανείας στρεφομένης περὶ ἄξονα, κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς, ἔχει ὡς μέτρον τὸ γινόμενον τῆς γενετείρας ἐπιφανείας ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τὴν ὁποίαν γράφει τὸ κέντρον τῶν μέσων ἀποστημάτων αὐτῆς.*

Ἂς νοήσωμεν ὡς κέντρον τῶν μέσων ἀποστημάτων ἐπιφανείας τινὸς οἱασδήποτε τὸ κέντρον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν θεωροῦντες τὰ κέντρα ὀρθογωνίων ἴσων, ἀπειροστῶν στοιχείων τῆς δεδομένης ἐπιφανείας, ἐξ ὧν αὕτη δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀποτελουμένη, διὰ τῆς διαιρέσεως τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ δύο σειρῶν παραλλήλων εὐθειῶν, ὧν αἱ μὲν τῆς μιᾶς σειρᾶς εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς τῆς ἑτέρας.

Τούτου τεθέντος (Σχ. 377) ἔστω ἡ ἐπιφάνεια ΑΜΒ, ἔχουσα ἐμβαδὸν τὸ Ε, καὶ ὁ ἄξων ΧΨ. Ἂς διαιρέσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν ταύτην εἰς ὀρθογώνια ἴσα μέρη, ὡς τὸ αβγδ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι αἱ μὲν παράλληλοι, αἱ δὲ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα ΧΨ καὶ ἂς παραστήσωμεν διὰ μ τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου Ο τοῦ ὀρθογωνίου αβγδ ἀπὸ τοῦ ἄξονος ΧΨ.



Σχ. 377.

Τὸ ὀρθογώνιον αβγδ στρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονα ΧΨ θὰ παραγάγῃ ὄγκον, ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι διαφορὰ δύο κυλίνδρων γραφομένων ὑπὸ τῶν ὀρθογωνίων αβα'β' καὶ γδα'β' καὶ ὁ ὄγκος οὗτος θὰ ἐκφράζηται

$$O=2\pi.\ \alpha\beta\ (\alpha\alpha'^2-\gamma\alpha'^2)=2\pi\alpha\beta.\ \frac{\alpha\alpha'+\gamma\alpha'}{3}.\ (\alpha\alpha'-\gamma\alpha').$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀλλὰ $(αα'-γα')=αγ$, καὶ τὸ γινόμενον $αβ.αγ$ παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου $αβγδ$. Προσέτι δὲ ἔχομεν ἀμέσως

$\frac{αα'+γα'}{2}=οο'=μ$. Ἑπομένως ὁ στοιχειώδης ὄγκος ὁ παραγόμενος

ὑπὸ τοῦ $αβγδ$ θὰ εἶναι $O=αβγδ.\ 2πμ$.

Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν δι' O' τὸν ὑπὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας παραγόμενον ὄγκον, θέλομεν ἔχει

$$O'=αβγδ.\ 2π(μ+μ_1+μ_2+\dots μ_{ν-1})\cdot$$

$$\text{ἢ}\quad O'=ν.αβγδ.2π\ \frac{1}{ν}\ (μ+μ_1+μ_2+\dots+μ_{ν-1})$$

$$\text{ἢ}\quad O'=ν.αβγδ.\ 2π.=E.2πZ\cdot$$

ἔνθα $ν$ παριστᾷ τὸ πλῆθος τῶν μικροτάτων ὀρθογωνίων, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται ἡ ἐπιφάνεια AMB, καὶ Z τὸ μέσον ἀπόστημα τῶν σημείων τῆς καμπύλης.

619. Ἔστω πρὸς ἐφαρμογὴν νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στεφάνου, ὅστις παράγεται ὑπὸ κύκλου στρεφομένου περὶ ἄξονα κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου καὶ μὴ τέμνοντα αὐτόν.

Ἐὰν παραστήσωμεν δι' O τὸν ὄγκον τοῦ οὕτω παραγομένου στερεοῦ (στεφάνου), διὰ $ρ$ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου καὶ $δ$ τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς, θέλομεν ἔχει

$$O=πρ^2.2πδ=4π^2ρ^2.δ=4π^2ρδ.ρ$$

ἤτοι ὁ ὄγκος τοῦ στεφάνου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ (617) ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ γενήτορος κύκλου.

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

1) Διὰ νὰ εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, ἀρκεῖ νὰ εἶναι αὕτη ἰσάκις κεκλιμένη ὡς πρὸς τρεῖς εὐθείας διερχομένας διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

2) Δεδομένου ἐπιπέδου Π καὶ δύο σημείων Α καὶ Β κειμένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστημάτων αὐτοῦ ἀπὸ τῶν δεδομένων σημείων νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον.

3) Δεδομένου ἐπιπέδου Π καὶ δύο σημείων κειμένων ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου τούτου, νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π ἐν ση-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μεῖον τοιοῦτον, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστημάτων αὐτοῦ ἀπὸ τῶν δεδομένων σημείων νὰ εἶναι ἡ μεγίστη.

4) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστημάτων ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων, ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου κειμένων, εἶναι σταθερά.

5). Ἐὰν διὰ μιᾶς τῶν διαγωνίων παραλληλεπιπέδου φέρωμεν ἐπίπεδον οἱοδήποτε, αἱ ἐκ τῶν ἄκρων ἑτέρας διαγωνίου ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι ἴσαι.

6). Τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἄγεται παράλληλον πρὸς δύο εὐθείας μὴ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ἀγομένης καθέτου, διέρχεται διὰ τοῦ μέσου πασῶν τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἑνώνουσιν ἓν σημεῖον τῆς πρώτης εὐθείας μὲ ἓν σημεῖον τῆς δευτέρας.

7). Ὅταν εὐθεῖα εἶναι παράλληλος ἐπιπέδῳ τινί, ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῆς εὐθείας ταύτης ἀπὸ πασῶν τῶν εὐθειῶν τῶν κειμένων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ μὴ παραλλήλων αὐτῷ εἶναι σταθερά.

8). Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἀπό τινος σημείου Α ἐπὶ δύο ἐπίπεδα ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἀπό τινος ἄλλου σημείου Β ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἐπίπεδα, καὶ τὸ ἄθροισμα ὁμοίων καθέτων ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἐπίπεδα ἀπὸ παντὸς σημείου τῆς διὰ τῶν Α καὶ Β διερχομένης εὐθείας θὰ εἶναι τὸ αὐτό. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀληθεύει, καὶ ἂν τὰ ἐπίπεδα εἶναι πλείονα τῶν δύο.

9). Ἔστωσαν τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ· ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο καθέτων τῶν ἀγομένων ἐξ ἑκάστου τῶν σημείων τούτων ἐπὶ τὰ δύο ἐπίπεδα εἶναι τὸ αὐτό, καὶ αἱ ἐκ παντὸς ἄλλου σημείου τοῦ ὑπὸ τῶν σημείων τούτων ὁριζομένου ἐπιπέδου ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ θὰ ἔχωσι τὸ αὐτὸ ἄθροισμα.

10). Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς ἔχουσι τὰς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου προβολὰς αὐτῶν ἴσας, παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς.

Δύο δίεδροι γωνίαι, ἔχουσαι τὰς ἀκμὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ τὰς ἕδρας αὐτῶν καθέτους ἐπ' ἀλλήλας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

12). Πᾶν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀκμῶν ὀρθογωνίου τριέδρου γωνίας τέμνει τὴν τρίεδρον ταύτην γωνίαν κατὰ τρίγωνον ὀρθογώνιον

13). Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουσιν αἱ ἀκμαὶ τριέδρου γωνίας μετὰ τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν, εἶναι μικρότερον μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῆς τριέδρου γωνίας, μεγαλείτερον δὲ τοῦ ἡμίσεος αὐτοῦ.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΑΙ ΟΓΚΟΣ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

14). Ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς τῶν παραπλεύρων αὐτοῦ ἑδρῶν ἐπὶ τὸ ἀπόστημα τῆς ἕδρας ταύτης ἀπὸ τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς.

15). Ἐὰν ἐπὶ τριῶν παραλλήλων εὐθειῶν μὴ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου λάβωμεν ὁσωνδήποτε τρία μέρη ἴσα πρὸς δεδομένην εὐθεῖαν, ὁ ὄγκος παντὸς οὕτω σχηματιζομένου πρίσματος εἶναι ὁ αὐτός.

16). Νὰ τμηθῇ κύβος ὑπὸ ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον.

17). Δύο πρίσματα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι τὰς βάσεις αὐτῶν ἴσας καὶ δύο προσκειμένας ἕδρας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρα καὶ ὁμοίως κειμένας.

18). Δύο ὀρθογώνια πρίσματα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι τὰς παραπλεύρους αὐτῶν ἕδρας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ καὶ ὁμοίως κειμένας.

19). Διὰ δεδομένης εὐθείας ν' ἀχθῇ ἐπίπεδον τέμνον δεδομένον παραλληλεπίπεδον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

20. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι δύο τετράεδρα εἶναι ἴσα· 1) Ἐὰν ἔχωσι μίαν δίεδρον γωνίαν ἴσην καὶ περιεχομένην ὑπὸ ἴσων καὶ ὁμοίως κειμένων ἑδρῶν· 2) Ἐὰν ἔχωσι μίαν ἕδραν ἴσην καὶ τὰς τρεῖς τριέδρους περὶ αὐτὴν γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ καὶ ὁμοίας κειμένας. 3) Ἐὰν ἔχωσι τρεῖς αὐτῶν ἕδρας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ καὶ ὁμοίως κειμένας· 4) Ἐὰν ἔχωσι μίαν ἀκμὴν ἴσην καὶ πέντε διέδρους γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ καὶ ὁμοίως κειμένας.

21. Ἐὰν πρίσμα ἢ πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου μὴ παραλλήλου τῇ βάσει, προεκταθῇ δὲ τὸ τέμνον ἐπίπεδον μέχρις οὗ συναν-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τήσῃ τὰς ἀντιστοιχούσας πλευρὰς τῆς βάσεως, τὰ σημεῖα τῆς συναντήσεως αὐτῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

22. Τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ μιᾶς τῶν ἀκμῶν τετραέδρου καὶ τοῦ μέσου τῆς ἀντικειμένης ἀκμῆς χωρίζει τὸ τετράεδρον εἰς δύο τετράεδρα ἰσοδύναμα.

23. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν ὄγκων κολούρου πυραμίδος ἐχούσης βάσεις παραλλήλους καὶ πρίσματος ἔχοντος τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων τῆς πυραμίδος.

24. Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τριγωνικῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ ἔχουσι μήκη λ,μ,ν. Τέμνομεν τὴν πυραμίδα ταύτην δι' ἐπιπέδου αβγ μὴ παραλλήλου τῇ βάσει, τὸ ὁποῖον συναντᾷ τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς κατὰ τὰ σημεῖα α,β,γ, ὧν αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῆς κορυφῆς Σ εἶναι λ',μ',ν'. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς οὕτω σχηματιζομένης κολούρου πυραμίδος.

25. Νὰ τμηθῇ τετράεδρον ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτοῦ οὕτως, ὥστε ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ οὕτω σχηματιζομένου τετραέδρου νὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς τοῦ δεδομένου.

26. Οἱ ὄγκοι οἱ παραγόμενοι διαδοχικῶς ὑπὸ ὀρθογωνίου στρεφομένου διαδοχικῶς περὶ ἑκατέραν τῶν δύο αὐτοῦ προσκειμένων πλευρῶν εἶναι ὁ μὲν α κυβικὸν μέτρον, ὁ δὲ β. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου τοῦ ὀρθογωνίου τούτου.

27. Δεδομένης τῆς πλευρᾶς ἰσοπλεύρου κώνου νὰ εὑρεθῇ ὁ ὁλικὸς ὄγκος, ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια καὶ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ. Ὑπὸ ποίαν τιμὴν τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια εἶναι 1 τετραγ. μέτρον ἢ ὁ ὄγκος αὐτοῦ 1 κυβ. μέτρον;

28. Νὰ διαιρεθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κώνου ἐκ περιστροφῆς εἰς ν ἴσα μέρη ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων τῇ βάσει.

28. Ἔστω ΑΒΓΔΕΘ ἓν κανονικὸν ἑξάγωνον περιγεγραμμένον εἰς κύκλον, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εἶναι Κ καὶ ἡ ἀκτίς Ρ. Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΘΓ καὶ τὰς εὐθείας ΑΓ καὶ ΒΘ, αἵτινες συναντῶνται κατὰ τὸ Ι σημεῖον τῆς ἀκτῖνος ΚΗ καθέτου ἐπὶ τὴν ΘΓ, καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορισθῶσι διὰ τῆς ἀκτῖνος οἱ ὄγκοι καὶ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κώνων τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν τριγώνων ΗΙΑ καὶ ΙΚΘ στρεφομένων περὶ τὴν ΚΗ ὡς ἄξονα.

29. Διὰ δεδομένης εὐθείας ν' ἀχθῇ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον δοθείσῃ σφαίρᾳ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

30. Διὰ δεδομένης εὐθείας ν' ἀχθῇ ἐπίπεδον τέμνον δεδομένην σφαῖραν κατὰ κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς ἥτις εἶναι δεδομένη.

31. Δοθεισῶν τῶν ἀκτίνων δύο παραλλήλων κύκλων σφαίρας καὶ τοῦ ἀποστήματος τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.

Ἐὰν ἐκ σημείου κειμένου ἐν τῷ διαστήματι φέρωμεν εὐθείας τεμνούσας ¦ δεδομένην σφαῖραν, τὸ γινόμενον τῶν ἀποστημάτων τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τῶν δύο σημείων τῆς τομῆς τῆς σφαίρας εἶναι σταθερὸν διὰ πᾶσαν τέμνουσαν.

33. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ ἑκάστου τῶν ὁποίων βλέπομεν δεδομένην σφαῖραν ὑπὸ τὴν αὐτὴν δεδομένην γωνίαν.

34. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ ἑκάστου τῶν ὁποίων βλέπομεν δεδομένην εὐθεῖαν ὑπὸ δεδομένην γωνίαν.

35. Νὰ κατασκευασθῇ σφαῖρα, διερχομένη διὰ τριῶν δεδομένων σημείων καὶ ἔχουσα δεδομένην ἀκτῖνα.

36. Νὰ κατασκευασθῇ σφαῖρα ἔχουσα δεδομένην ἀκτῖνα διερχομένην διὰ δεδομένων σημείων καὶ ἐφαπτομένων δεδομένῳ ἐπιπέδῳ.

37. Γνωστῶν ὄντων τοῦ Γεωγραφικοῦ πλάτους καὶ μήκους δύο τόπων τῆς Γῆς θεωρουμένης τελείας σφαίρας, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο τόπων μοίρας.

38. Δύο σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα ὅταν τὰ πολικὰ αὐτῶν τρίγωνα ἔχωσι ἴσας περιμέτρους.

39. Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς τετραγωνικὰ μυριάμετρα ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς ἑκάστης τῶν ζωνῶν τῆς Γῆς.

40. Ἐὰν ἑνώσωμεν τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν τριγώνου καὶ περιστρέψωμεν αὐτὸ περὶ τὴν τρίτην πλευρὰν ὡς ἄξονα, ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν ὑπὸ τῶν δύο μερῶν τοῦ τριγώνου παραγομένων ὄγκων;

41. Ἐὰν προσεκβάλωμεν μίαν τῶν πλευρῶν ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς ΓΖ λάβωμεν μῆκος ΓΘ ἴσον τῇ πλευρᾷ α τοῦ τριγώνου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου Θ ἀχθῇ ἡ ΘΧ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΖ, ποῖος ὁ ἀναπαραγόμενος ὄγκος ὑπὸ τοῦ τριγώνου **ΑΒΓ** στρεφομένου περὶ τὴν ΘΧ;

42. Δεδομένου ὀρθογωνίου τριγώνου ἐγγεγραμμένου ἐν ἡμικυκλίῳ, νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ὄγκου τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ τρι-

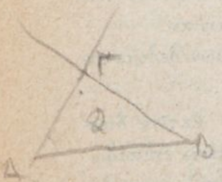
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

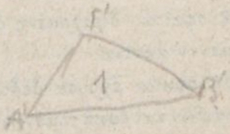
γώνου τούτου στρεφομένου περὶ τὴν διάμετρον πρὸς τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας τῆς παραγομένης ὑπὸ τοῦ ἡμικυκλίου περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα στρεφομένου. Νὰ εὑρεθῇ προσέτι ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν αὐτῶν στερεῶν. Νὰ ἐρευνηθῇ ἰδίᾳ ἡ περίπτωσις καθ' ἣν τὸ ἐγγεγραμμένον τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

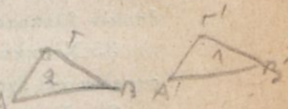
43. Τὰ τετράγωνα τῶν ὄγκων, δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς κύβοι δύο ὁμολόγων ἑδρῶν.

44. Δεδομένης τῆς ἀκτῖνος σφαίρας νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, καὶ ὁ ὄγκος κανονικοῦ πολυέδρου ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν.

ΤΕΛΟΣ







Γ' = Γ

~~ΑΓ = Α'Γ'~~

~~ΓΒ~~

ΑΒ = Α'Β'

Α = Α'

~~ΒΓ = Β'~~

ΑΒΓ = Α'Β'Γ'

Γ' = Γ

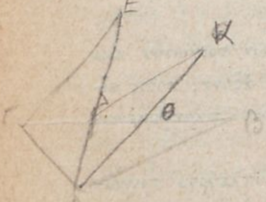
ΓΑ' = ΓΑ

~~Β'Γ = ΒΓ~~

Α'Β'Γ' = ΑΒΓ

Α' = Α

Β' = Β



ΓΒ > ΓΑ

~~Κ~~ΔΒ > ~~Α~~ΒΚ

ΓΑΔ = ΓΔΑ = ΕΔΒ < ΓΑΒ

ΘΚ = ΘΑ

ΑΘΒ = ΔΘΚ

ΚΔΒ = ΑΒΘ < ΕΔΒ < ΓΑΒ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

0020632633
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΒΟΥΛΗΣ
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής