ΒΑΣΙΛΗ Χ. ΚΟΡΝΗΛΑΚΗ

Νεωτερη αλγεβρα

για τη μεση εκπαιδευση

ΑΘΗΝΑ

ΒΑΣΙΛΗ Χ. ΚΟΡΝΗΛΑΚΗ
Μαθηματικού

Νεωτερη αλγεβρα

για τη μεση εκπαιδευση

ΑΘΗΝΑ

ΒΑΣΙΛΗ Χ. ΚΟΡΝΗΛΑΚΗ

Μαθηματικου

Κορνηλάκης, Βασίλης Χ.

Νεωτερη αλγεβρα

για τη μεση εκπαιδευση

ΑΘΗΝΑ

Κάθε γνήσιο ἀντίτυπο ἔχει τήν
ὑπογραφή τοῦ συγγραφέα

ΑΦΙΕΡΩΜΕΝΟ

ΣΤΗ ΜΝΗΜΗ ΤΟΥ ΠΑΤΕΡΑ ΜΟΥ

ΧΑΡΙΛΑΟΥ

ΚΑΙ ΤΗΣ ΜΗΤΕΡΑΣ ΜΟΥ

ΚΛΕΑΝΘΗΣ

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Στό βιβλίο αὐτό περιέχονται θέματα ἀπό τή "Νεώτερη Ἄλγεβρα" πού ἀναφέρονται σήμερα στά σχολικά προγράμματα. Βέβαια εἶναι γραμμένο "ἐλεύθερα" ὅπως ἄλλωστε καί κάθε βιβλίο πού δέν εἶναι "ἐπίσημα" σχολικό. Σκοπό ἔχει νά ἐνημερώσει τό μαθητή σέ μερικά ἐνδιαφέροντα θέματα, νά δημιουργήσει μιά εὐχέρεια στό χειρισμό τῶν ἐννοιῶν καί νά ἀναπτύξει τή μαθηματική σκέψη ἀπαλλάσσοντάς την ἀπό τή χρήση ἐξωμαθηματικῶν ἐννοιῶν γεγονός πού ἀνταποκρίνεται στό βαθμό ἀνάπτυξης π.χ. τῶν σπουδαστῶν τῶν Λυκείων. Ὅπως θά διαπιστώσει ὁ ἀναγνώστης χρησιμοποιεῖται πολύ ὁ μαθηματικός συμβολισμός, κι'αὐτό γιατί εἶναι ἡ καλύτερη γλώσσα τόσο γιά τή διατύπωση ὅσο καί γιά τήν ἀκριβή κατανόηση τῶν μαθηματικῶν προτάσεων. Ὁ κόπος εἶναι μικρός καί ἡ ἀποζημίωση μετά εἶναι μόνιμη καί μεγάλη. Κατά τή συγγραφή τοῦ βιβλίου εἴχαμε κυρίως ὑπόψη τίς διαλέξεις τοῦ διαπρεπῆ γερμανοῦ καθηγητῆ καί ἀκαδημαϊκοῦ Otto Haupt πού δόθηκαν στή μαθηματική ἑταιρεία καί ἦταν σχετικές μέ τήν εἰσαγωγή νεωτέρων μαθηματικῶν στή μέση ἐκπαίδευση. Ἔτσι τό βιβλίο αὐτό περιέχει καί γνώσεις πού δέν ἀναφέρονται σήμερα στά σχολικά προγράμματα, ὅμως καί αὐτές ἀποτελοῦν πεδία ἐφαρμογῆς γνώσεων ἀπό τά σχολικά προγράμματα καί συντελοῦν στήν καλύτερη κατανόηση τῶν τελευταίων. Δέν πρέπει ἄλλωστε νά ξεχνᾶμε ὅτι ἡ "ἀκριβής ὁριοθέτηση" τῆς ὕλης ἑνός βιβλίου μερικές φορές βλάπτει τήν κεντρική ἰδέα του καί περιορίζει τήν ἀποτελεσματικότητα τοῦ σκοποῦ του.

Μέ τήν ἐλπίδα ὅτι τό βιβλίο αὐτό θά βοηθήσει στήν ἀνάπτυξη τῆς μαθηματικῆς σκέψης καί θά αὐξήσει τίς γνώσεις ἐκείνων πού θά παρακολουθήσουν ἀνώτερες σπουδές σέ ἐπιστῆμες πού χρειάζεται μαθηματική σκέψη καί κατάρτιση, τό παραδίνουμε στήν κυκλοφορία.

Ἀθήνα 31/1/81

Βασίλης Χ. Κορνηλάκης

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Στό βιβλίο αὐτό περιέχονται θέματα ἀπό τή "Νεώτερη Ἄλγεβρα" πού συμπεριλαμβάνονται σήμερα στά σχολικά προγράμματα. Θέματα εἶναι γνωσμένο "ἐλεύθερο" ὅπως ἄλλωστε καί κάθε βιβλίο πού δέν εἶναι "ἐπίσημα" σχολικό. Σκοπό ἔχει νά ἐνημερώσει τό μαθητή σέ μερικά ἐνδιαφέροντα θέματα, νά δημιουργήσει μιά τάξη στό χειρισμό τῶν ἐννοιῶν καί νά ἀναπτύξει τή μαθηματική σκέψη ἀπαλλάσσοντάς την ἀπό τή χρήση ἐξωμαθηματικῶν ἐννοιῶν γενικῶς πού ἀνταποκρίνεται στό βαθμό ἀνάπτυξης π.χ. τῶν ἀποδείξεων τῶν λυκείων. Ὅπως θά διαπιστώσει ὁ ἀναγνώστης χρησιμοποιεῖται πολύ ὁ μαθηματικός συμβολισμός, κι αὐτό γιατί εἶναι ἡ καλύτερη γλώσσα τόσο γιά τή διατύπωση ὅσο καί γιά τήν ἄμεση κατανόηση τῶν μαθηματικῶν προτάσεων. Ὁ κόπος εἶναι μικρός καί ἡ ἀποζημίωση μετά εἶναι μόνιμη καί μεγάλη. Κατά τή συγγραφή τοῦ βιβλίου εἴχαμε κυρίως ὑπόψη τίς διαλέξεις τοῦ διακεκριμένου γερμανοῦ καθηγητή καί ἀκαδημαϊκοῦ Otto Haupt πού δώσαμε στό μαθηματικό ἰνστιτοῦτο καί εἶχαν σχέση μέ τήν εἰσαγωγή νεωτέρων μαθηματικῶν στή μέση ἐκπαίδευση. Ἔτσι τό βιβλίο αὐτό περιέχει καί γνώσεις πού δέν ἀναφέρονται σήμερα στά σχολικά προγράμματα, ὅμως καί αὐτές ἀποτελοῦν πεδίο ἐφαρμογῆς γνώσεων ἀπό τά σχολικά προγράμματα καί συντελοῦν στήν καλύτερη κατανόηση τῶν τελευταίων. Δέν πρέπει ἄλλωστε νά ξεχνᾶμε ὅτι ἡ "ἀκριβής ὁριοθέτηση" τῆς ὕλης ἑνός βιβλίου μερικές φορές βλάπτει τήν κεντρική ἰδέα του καί περιορίζει τήν ἀποτελεσματικότητα τοῦ σκοποῦ του.

Μέ τήν ἐλπίδα ὅτι τό βιβλίο αὐτό θά βοηθήσει στήν ἀνάπτυξη τῆς μαθηματικῆς σκέψης καί θά καλύψει τίς γνώσεις ἐκείνων πού θά παρακολουθήσουν ἀνώτερες σπουδές σέ ἐπιστήμες πού χρειάζεται μαθηματική σκέψη καί κατάρτιση, τό παραδίνουμε στήν κυκλοφορία.

Ἀθήνα 31/1/81

Βασίλης Σ. Κουνιλάκης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

1. Λογική πρόταση · Λογικές παραστάσεις. Λογικοί σύνδεσμοι. Λογικές πράξεις.

1.1 Μία λογική πρόταση εἶναι μία ἔκφραση πού ἐπιδέχεται μόνο ἕνα ἀπό τούς χαρακτηρισμούς: ἀληθής - ψευδής. π.χ. ἡ "2 >1" εἶναι μία λογική πρόταση ἀληθής ʽΗ "2+3=6" Εἶναι μία λογική πρόταση ψευδής. Στά ἑπόμενα ὅταν θά χρησιμοποιοῦμε τόν ὅρο "πρόταση" θά ἐννοοῦμε λογική πρόταση. Οἱ παραπάνω προτάσεις εἶναι ἁπλές ὅμως μέ τή βοήθεια τῶν λογικῶν συνδέσμων ἀπό μία ἤ ἀπό δύο ὑπάρχουσες προτάσεις παράγονται νέες προτάσεις. Οἱ νέες προτάσεις εἶναι σύνθετες, ἀλλά καί ἀπό σύνθετες προτάσεις παράγονται ἄλλες περισσότερο σύνθετες. Οἱ.σχετικές διαδικασίες ὀνομάζονται λογικές πράξεις.

1.2 ῎Εχουμε τά ἑπόμενα παραδείγματα σύνθετων λογικῶν προτάσεων μέ ἕνα λογικό σύνδεσμο:

(α΄) " 2>1 Λ 5=6". ʽΗ λογική πράξη λέγεται σύζευξη καί ὁ λογικός σύνδεσμος Λ διαβάζεται: "καί".

(β΄) " $4>3 \vee 2<1$ ". Ἡ λογική πράξη λέγεται ἐγκλειστική διάζευξη καί διαβάζεται: "$4>3$ ἤ $2<1$ ἤ $4>3$ καί $2<1$".

(γ΄) "$4>3 \underline{\vee} 2<1$". Ἡ λογική πράξη ὀνομάζεται ἀποκλειστική διάζευξη καί διαβάζεται: "μόνο $4>3$ ἤ μόνο $2<1$".

(δ΄) "$5+3=7 \Rightarrow 2>3$". Ἡ λογική πράξη ὀνομάζεται συνεπαγωγή. Λογικός σύνδεσμος εἶναι τό σύμβολο $\Rightarrow$.

(ε΄) "$2+2=4 \Leftrightarrow 4\neq4$" . Ἡ λογική πράξη ὀνομάζεται λογική ἰσοδυναμία. Λογικός σύνδεσμος εἶναι τό σύμβολο $\Leftrightarrow$.

(στ΄) "Ὄχι, $3>4$". Πρόκειται γιά τήν ἄρνηση τῆς πρότασης $3>4$. Λογικός σύνδεσμος εἶναι ὁ "Ὄχι" πού συμβολίζεται καί μέ $\sim$ μπροστά στήν πρόταση π.χ. $\sim(3>4)$ ἤ καί μέ — πάνω ἀπό τήν πρόταση π.χ. $\overline{3>4}$. Εἶναι μονομελής λογικός σύνδεσμος γιατί δέν συνδέει δύο προτάσεις ὅπως οἱ προηγούμενοι πού εἶναι διμελεῖς λογικοί σύνδεσμοι. Ὅμοιες ὀνομασίες ἔχουν καί οἱ ἀντίστοιχες λογικές πράξεις (μονομελεῖς-διμελεῖς).

1.3 Ὅπως στήν ἄλγεβρα ἔχουμε ἀριθμούς π.χ. 2,3,1 κ.λ.π καί ἀλγεβρικές παραστάσεις. π.χ. τήν $3\alpha^2+\beta+2\gamma$ καί τά α,β,γ μποροῦν νά ἀντικατασταθοῦν ἀπό ἀριθμούς. Ἔτσι καί στή Λογική ἔχουμε προτάσεις π.χ τίς $2>1$, $4=6$, $2>1 \Rightarrow 4=6$ κ.λ.π καί λογικές παραστάσεις π.χ τίς $p, q, p\Rightarrow q, p\vee q$, $(p \underline{\vee} q)\wedge r$ κ.λ.π.

Ἔχουμε λοιπόν τούς ὁρισμούς: Μία ἁπλή λογική παράσταση εἶναι ἕνα σύμβολο π.χ. p,q κ.λ.π πού μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό ὁποιαδήποτε ἁπλή πρόταση. Μία σύνθετη λογική παράσταση εἶναι μία ἔκφραση ἀπό ἁπλές λογικές παραστάσεις καί λογικούς συνδέσμους, καί πού ἀπό κάθε ἀντικατάσταση τῶν ἁπλῶν λογικῶν παραστάσεών της ἀπό ἁπλές προτάσεις προκύπτει μιά σύνθετη λογική πρόταση. Μία λογική παράσταση βρίσκεται λοιπόν σέ άντιστοιχία μέ πολλές λογικές προτάσεις.

1.4 Οἱ τιμές ἀληθείας συνθέτων λογικῶν παραστάσεων ὁρίζονται μέ τή βοήθεια είδικῶν κανόνων. Ἡ τιμή ἀληθείας μιᾶς σύνθετης λογικῆς πρότασης εἶναι ἐκεῖνες πού ἔχει ἡ άντίστοιχη λογική παράσταση γιά τιμές ἀληθείας τῶν ἁπλῶν λογικῶν παραστάσεών της ἐκεῖνες πού ἔχουν οἱ ἀντίστοιχες ἁπλές προτάσεις τῆς σύνθετης πρότασης π.χ. ἡ πρόταση "$2>1 \wedge 2=12$" ἔχει τιμή ἀληθείας ἐκείνη πού ἔχει ἡ λογική παράσταση $p \wedge q$ ἄν $T(p)=\alpha$ (εἶναι ἀληθής ἡ ἁπλή πρόταση $2>1$) καί $T(q)=\psi$ (εἶναι ψευδής ἡ $2=12$). Πρόκειται δηλαδή γιά τήν $T(p\wedge q)$ ὅταν $T(p)=\alpha$ καί $T(q)=\psi$. ($T(p)$ σημαίνει τιμή ἀληθείας τῆς p).

Ἔχουμε τούς ἑπόμενους κανόνες σχετικούς μέ τίς τιμές ἀληθείας λογικῶν παραστάσεων

(α΄) Εἶναι $T(p\wedge q)=\alpha$ ἄν καί μόνο ἄν $T(p)=T(q)=\alpha$

Ἔχουμε τόν ἑπόμενο πίνακα τιμῶν ἀληθείας τῆς λογικῆς παράστασης $p\wedge q$.

p	q	$p\wedge q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ

Ὁ παραπάνω πίνακας ἔχει $2^2=4$ γραμμές, δηλαδή ὅσες εἶναι οἱ ἐπαναληπτικές διατάξεις τῶν δύο ἀντικειμένων (α καί ψ) ἀνά δύο (p καί q).

(β΄) εἶναι $T(p\vee q)=\psi$ ἄν καί μόνο ἄν $T(p)=T(q)=\psi$

Ἀπό αὐτό τόν κανόνα προκύπτει ὁ ἑπόμενος πίνακας ἀληθείας τῆς λογικῆς παράστασης $p\vee q$.

p	q	$p \vee q$
α	α	α
α	ψ	α
ψ	α	α
ψ	ψ	ψ

(γ΄) Εἶναι $T(p \underline{\vee} q)=α$ ἄν καί μόνο ἄν $T(p) \neq T(q)$.

p	q	$p \underline{\vee} q$
α	α	ψ
α	ψ	α
ψ	α	α
ψ	ψ	ψ

(δ΄) Εἶναι $T(p \Rightarrow q)=ψ$ ἄν καί μόνο ἄν $T(p)=α$ καί $T(q)=ψ$. Ἀπό αὐτό τόν κανόνα προκύπτει ὁ ἑπόμενος πίνακας τιμῶν ἀληθείας τῆς λογικῆς παράστασης $p \Rightarrow q$.

p	q	$p \Rightarrow q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

(ε΄) Εἶναι $T(p \Leftrightarrow q)=α$ ἄν καί μόνο ἄν $T(p)=T(q)$.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	α

(στ΄) Εἶναι $T(p) \neq T(\bar{p})$

p	$\bar{p}$
α	ψ
ψ	α

1.5 Ἡ πρόταση $2=1 \vee 5>4$ εἶναι ἀληθής ὅπως φαίνεται ἀπό τήν τρίτη γραμμή τοῦ πίνακα τῆς παρ. 1.4 β΄γιατί $T(2=1)=\psi$ καί $T(5>4)=\alpha$.

Ἡ πρόταση $5=5 \Leftrightarrow 2+2=5$ εἶναι ψευδής ὅπως φαίνεται ἀπό τή δεύτερη γραμμή τοῦ πίνακα τῆς παρ. 1.4 ε΄γιατί $T(5=5)=\alpha$ καί $T(2+2=5)=\psi$.

Τέλος, ἡ πρόταση $6\neq 6 \Rightarrow 2+2=4$ εἶναι ἀληθής ὅπως φαίνεται ἀπό τήν τρίτη γραμμή τοῦ πίνακα τῆς παρ. 1.4δ΄ γιατί $T(6\neq 6)=\psi$ καί $T(2+2=4)=\alpha$.

1.6 Θά κατασκευάσουμε τώρα τόν πίνακα τιμῶν ἀληθείας τῆς λογικῆς παράστασης $(p \underline{\vee} q) \Rightarrow (\bar{q} \Rightarrow r)$ πού περιέχει τρεῖς ἁπλές λογικές παραστάσεις. Τήν συμβολίζουμε σύντομα μέ $A(p,q,r)$ ἤ καί μέ A. Ὁ παρακάτω πίνακας ἔχει $2^3=8$ γραμμές, δηλαδή ὅσες εἶναι οἱ ἐπαναληπτικές διατάξεις τῶν 2 ἀντικειμένων (α καί ψ) ἀνά τρία (p, q, r).

p	q	r	$\bar{q}$	$p \underline{\vee} q$	$\bar{q} \Rightarrow r$	A
α	α	α	ψ	ψ	α	α
α	α	ψ	ψ	ψ	α	α
α	ψ	α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	α	α	ψ	ψ
ψ	α	α	ψ	α	α	α
ψ	α	ψ	ψ	α	α	α
ψ	ψ	α	α	ψ	α	α
ψ	ψ	ψ	α	ψ	ψ	α

Ἡ πρόταση $(5^2=25 \underline{\vee} 5^3=100) \Rightarrow (5^3\neq 100 \Rightarrow 2>3)$ εἶναι ψευδής ὅπως φαίνεται ἀπό τήν τέταρτη γραμμή τοῦ παραπάνω πίνακα γιατί $T(5^2=25)=\alpha$, $T(5^3=100)=\psi$ καί $T(2>3)=\psi$. Βέβαια εἶναι εὔκολο ὅταν γνωρίζει κανείς τούς κανόνες τῆς παρ. 1.4 νά βρεῖ τήν τιμή ἀληθείας μιᾶς πρότασης χωρίς νά κατασκευάσει τόν πίνακα τιμῶν ἀληθείας τῆς ἀντίστοιχης λογικῆς παράστασης.

2. Ταυτολογίες. Αὐτοαντιφάσεις. Ταυτολογική ἰσοδυναμία.

2.1 Μία λογική παράσταση εἶναι μία ταυτολογία ἄν καί μόνο ἄν ἔχει τιμή ἀληθείας α γιά κάθε περίπτωση τιμῶν ἀληθείας τῶν ἁπλῶν λογικῶν παραστάσεών της.

Ἐπίσης: Μία πρόταση εἶναι μία ταυτολογία ἄν καί μόνο ἄν ἡ ἀντίστοιχη λογική παράσταση εἶναι ταυτολογία. π.χ ὅπως φαίνεται ἀπό τήν τελευταία στήλη τοῦ παρακάτω πίνακα ἡ λογική παράσταση $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ εἶναι μία ταυτολογία. Γράφουμε: $\vdash [p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ ὅπου $\vdash$ εἶναι τό διακριτικό τῶν ταυτολογιῶν.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	ψ	α
ψ	α	α	ψ	α
ψ	ψ	α	ψ	α

Ἐπίσης, ἡ πρόταση $[2=3 \wedge (2=3 \Rightarrow 1+1=4)] \Rightarrow (1+1=4)$ εἶναι ταυτολογία γιατί ἡ ἀντίστοιχη λογική παράσταση $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ εἶναι ὅπως εἴδαμε προηγούμενα μία ταυτολογία. Ἡ πρόταση $2>1 \wedge 5=5$ εἶναι ἀληθής (1η γραμμή τοῦ 1ου πίνακα τῆς παρ. 1.4) ὅμως δέν εἶναι ταυτολογία γιατί ἡ ἀντίστοιχη λογική παράσταση $p \wedge q$ δέν εἶναι ταυτολογία ὅπως φαίνεται ἀπό τήν τελευταία στήλη τοῦ 1ου πίνακα τῆς παρ. 1.4.

2.2 Μία λογική παράσταση εἶναι μία αὐτοαντίφαση ἄν καί μόνο ἄν ἔχει τιμή ἀληθείας ψ γιά κάθε περίπτωση τιμῶν ἀληθείας τῶν ἁπλῶν λογικῶν παραστάσεών της.

Ἐπίσης: Μία πρόταση εἶναι μία αὐτοαντίφαση ἄν καί μόνο ἄν ἡ ἀντίστοιχη λογική παράσταση εἶναι μία αὐτοαντίφαση. π.χ ἡ λογική παράσταση $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ εἶναι μία αὐτοαντίφαση ὅπως φαίνεται ἀπό τήν τελευταία στήλη τοῦ ἑπόμενου πίνακα (τή συμβολίζουμε σύντομα μέ Σ).

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$p\wedge(q\vee r)$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$	$\overline{(p\wedge q)\vee(p\wedge r)}$	Σ
α	α	α	α	α	α	α	α	ψ	ψ
α	α	ψ	α	α	ψ	α	α	ψ	ψ
α	ψ	α	α	ψ	α	α	α	ψ	ψ
α	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α	ψ
ψ	α	α	α	ψ	ψ	ψ	ψ	α	ψ
ψ	α	ψ	α	ψ	ψ	ψ	ψ	α	ψ
ψ	ψ	α	α	ψ	ψ	ψ	ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α	ψ

Γράφουμε: $\sim\vdash p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow\overline{(p\wedge q)\vee(p\wedge r)}$ ὅπου $\sim\vdash$ εἶναι τό σύμβολο τῶν αὐτοαντιφάσεων. Εὔκολα φαίνεται ὅτι ἡ ἄρνηση μίας ταυτολογίας εἶναι μία αὐτοαντίφαση καί ἡ ἄρνηση μιᾶς αὐτοαντίφασης εἶναι μία ταυτολογία.

2.3 Ἰσχύουν οἱ ἑπόμενοι "Νόμοι τῆς Λογικῆς" πού εἶναι οἱ ταυτολογίες:

$\vdash p\Rightarrow p$ (Νόμος τῆς ταυτότητας)

$\vdash p\wedge\bar{p}$ (Νόμος τῆς ἀντίφασης)

$\vdash p\vee\bar{p}$ καί $p\veebar\bar{p}$ (Νόμος τοῦ ἀποκλεισμοῦ τοῦ τρίτου)

$\vdash p\Leftrightarrow\bar{\bar{p}}$ (Νόμος τῆς διπλῆς ἄρνησης)

Ἔχουμε τόν ἑπόμενο ὁμαδικό πίνακα τιμῶν ἀληθείας.

p	$\bar{p}$	$\bar{\bar{p}}$	$p\Rightarrow p$	$p\wedge\bar{p}$	$\overline{p\wedge\bar{p}}$	$p\vee\bar{p}$	$p\veebar\bar{p}$
α	ψ	α	α	ψ	α	α	α
ψ	α	ψ	α	ψ	α	α	α

ὁ Πίνακας ἔχει δύο γραμμές γιατί ἔχουμε μόνο μία ἁπλή λογική παράσταση, τήν p.

Ἡ πρόταση $2>1\wedge 2\leqq 1$ εἶναι μία αὐτοαντίφαση γιατί ἡ ἀντίστοιχη λογική παράσταση $p\wedge\bar{p}$ (ἡ $2\leqq 1$ εἶναι ἡ ἄρνηση τῆς $2>1$)

εἶναι μία αὐτοαντίφαση (5η στήλη τοῦ παραπάνω πίνακα).

2.4 Οἱ λογικές παραστάσεις πού δέν εἶναι ταυτολογίες ἤ αὐτοαντιφάσεις λέγονται σχετικές λογικές παραστάσεις π.χ οἱ $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \veebar q$ κ.λ.π τῆς παρ. 1.4. Ἡ πρόταση $2^3=8 \veebar 3^2=9$ εἶναι ψευδής ὅμως δέν εἶναι αὐτοαντίφαση ὅπως φαίνεται ἀπό τόν τρίτο πίνακα τῆς παρ. 1.4. Εἶναι μία σχετική πρόταση γιατί ἡ ἀντίστοιχη λογική παράσταση $p \veebar q$ εἶναι σχετική.

2.5 Δύο λογικές παραστάσεις Α καί Β εἶναι ταυτολογικά ἰσοδύναμες ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ $\vdash A \Leftrightarrow B$. Γράφουμε τότε $A \equiv B$. Ἐπίσης μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι: Δύο λογικές παραστάσεις Α καί Β εἶναι ταυτολογικά ἰσοδύναμες ἄν καί μόνο ἄν ἔχουν ἴσες τιμές ἀληθείας γιά κάθε περίπτωση τιμῶν ἀληθείας τῶν ἁπλῶν λογικῶν παραστάσεών τους. π.χ οἱ λογικές παραστάσεις $\overline{p \wedge q}$ καί $\bar{p} \vee \bar{q}$ εἶναι ταυτολογικά ἰσοδύναμες. Ἔχουμε τόν ἑπόμενο πίνακα τιμῶν ἀληθείας.

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$
α	α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	α
α	ψ	ψ	α	ψ	α	α	α
ψ	α	α	ψ	ψ	α	α	α
ψ	ψ	α	α	ψ	α	α	α

Ἀπό τή σύγκριση τῆς 6ης καί τῆς 7ης στήλης προκύπτει ὅτι οἱ λογικές παραστάσεις $\overline{p \wedge q}$ καί $\bar{p} \vee \bar{q}$ εἶναι ταυτολογικά ἰσοδύναμες. Ἐπίσης (ἄν προχωρήσουμε), φαίνεται καί ἀπό τήν τελευταία στήλη ὅπου διαπιστώνουμε ὅτι ἡ $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$ εἶναι μία ταυτολογία. Γράφουμε λοιπόν, $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$.

Δύο προτάσεις εἶναι ταυτολογικά ἰσοδύναμες ἄν καί μόνο ἄν οἱ ἀντίστοιχες πρός αὐτές λογικές παραστάσεις εἶναι ταυτολογικά ἰσοδύναμες. π.χ ἡ πρόταση "ὄχι, $2>1 \wedge 5=5$" καί ἡ πρόταση "ὄχι $2>1 \vee$ ὄχι $5=5$ " εἶναι ταυτολογικά ἰσοδύναμες ὅπως φαίνεται ἀπό τόν παραπάνω πίνακα. Ἡ δεύτερη ἀπό τίς παραπάνω προτάσεις γράφεται καί: "$2 \leq 1 \vee 5 \neq 5$".

2.6 Ἀναφέρουμε τίς ἐπόμενες ταυτολογικές ἰσοδυναμίες,

(α΄) $p \wedge q \equiv q \wedge p$, $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \veebar q \equiv q \veebar p$ (ἀντιμεταθετικοί νόμοι).

(β΄) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$, $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$, $(p \veebar q) \veebar r \equiv p \veebar (q \veebar r)$ (προσεταιριστικοί νόμοι)

(γ΄) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $p \wedge (q \veebar r) \equiv (p \wedge q) \veebar (p \wedge r)$ (ἐπιμεριστικοί νόμοι)

(δ΄) $p \equiv p \wedge (p \vee q)$, $p \equiv p \vee (p \wedge q)$ (Νόμοι τῆς ἀπορρόφησης)

(ε΄) $p \wedge p \equiv p$, $p \vee p \equiv p$ (ταυτοδυναμία ἤ ἀδύναμο τῶν $\wedge$ καί $\vee$).

(στ΄) $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$, $\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$ (Νόμοι τοῦ de Morgan).

(ζ΄) $p \equiv p$ (Νόμος τῆς ταυτότητας)

(η΄) $p \equiv \bar{\bar{p}}$ (Νόμος τῆς διπλῆς ἄρνησης)

(θ΄) $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

(ι΄) $p \Rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$

(ι΄α) $p \Rightarrow q \equiv \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$

(ι΄β) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$

(ι΄γ) $p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})$

(ι΄δ) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q)$

(ι΄ε) $p \veebar q \equiv (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$

3. Προτασιακές συναρτήσεις.

3.1 Μία προτασιακή συνάρτηση (βλέπετε κεφ. II παρ.15) εἶναι μία συνάρτηση μέ πεδίο τιμῶν ἕνα σύνολο λογικῶν προτάσεων. π.χ ἡ ἔκφραση P_1:"$x \in N$, $2|x$" εἶναι μία προτασιακή συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Τύπος τῆς προτασιακῆς συνάρτησης P_1 εἶναι ὁ $2|x$ δηλαδή $P_1(x)$="$2|x$". Ὁ τύπος μιᾶς προτασιακῆς συνάρτησης ὀνομάζεται προτασιακός τύπος. Ὁ "$2|x$" διαβάζεται "ὁ 2 διαιρεῖ τόν x" ἤ διαφορετικά "Ὁ x εἶναι ἄρτιος". Πεδίο τιμῶν τῆς P_1 εἶναι τό σύνολο $P_1(N)$. Γιά $x=3\in N$ ἔχει σάν τιμή ἡ προτασιακή συνάρτηση P_1 τήν πρόταση "$2|3$" $\in P_1(N)$ πού εἶναι ψευδής γιατί ὁ 2 δέν διαιρεῖ τόν 3. Γιά $x=8\in N$ ἡ P_1 ἔχει τιμή τήν πρόταση "$2|8$" $\in P_1(N)$ πού εἶναι ἀληθής. Βλέπουμε ὅτι τό πεδίο τιμῶν τῆς P_1 ἀποτελεῖται ἀπό ἀληθεῖς καί ἀπό ψευδεῖς προτάσεις. Σύνολο ἀληθείας ἤ σύνολο λύσεων τῆς προτασιακῆς συνάρτησης εἶναι τό ὑποσύνολο τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της γιά τά στοιχεῖα τοῦ ὁποίου ἡ προτασιακή συνάρτηση ἔχει τιμές πού εἶναι ἀληθεῖς προτάσεις. Στήν περίπτωση τῆς προτασιακῆς συνάρτησης P_1, σύνολο ἀληθείας εἶναι τό N_{2n} τῶν ἀρτιων φυσικῶν ἀριθμῶν. Ἡ προτασιακή συνάρτηση P_1 ἔχει μόνο μία ἀνεξάρτητη μεταβλητή, τήν x.

3.2 Ἡ προτασιασκή συνάρτηση P_2 "$(x,\psi)\in R^2$, $x^2+\psi^2 \geqq 2x\psi$" τῶν δύο ἀνεξάρτητων μεταβλητῶν x καί ψ ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο R^2. Σύνολο ἀληθείας ἐπίσης τό R^2 γιατί ὅπως ξέρουμε ἀπό τήν ἄλγεβρα ἡ $x^2+\psi^2 \geqq 2x\psi$ ἰσχύει γιά ὁποιεσδήποτε πραγματικές τιμές τῶν x καί ψ. Τό πεδίο τιμῶν λοιπόν $P_2(R^2)$ τῆς P_2 ἀποτελεῖται μόνο ἀπό ἀληθεῖς προτάσεις. Τέτοιες προτασιακές συναρτήσεις ὀνομάζονται ταυτότητες π.χ γιά $(x,\psi)=(3,-4)\in R^2$ ἔχουμε τήν ἀληθή πρόταση "$3^2+(-4)^2 \geqq 2\cdot 3\cdot(-4)$" $\in P_2(R^2)$. Προτασιακός τύπος τῆς P εἶναι ὁ $P_2(x,\psi)$ δηλαδή ὁ "$x^2+\psi^2 \geqq 2x\psi$".

3.3 Ἡ προτασιακή συνάρτηση P_3:"$(x_1,x_2)\in N\times(Z-N)$: $x_1<x_2$ ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $N\times(Z-N)$ καί προτασιακό τύπο τόν $x_1<x_2$ Τό σύνολο ἀληθείας εἶναι κενό ἀφοῦ δέν ὑπαρχει φυσικός ἀριθμός μικρότερος ἀπό μή θετικό ἀκέραιο ἀριθμό. Ἄν ὁρίσουμε $K=N\times(Z-N)$ τότε τό σύνολο $P_3(K)$ εἶναι τό πεδίο τιμῶν τῆς P_3 καί ἀποτελεῖται ἀποκλει-

στικά άπό ψευδεῖς προτάσεις π.χ γιά $(x_1,x_2)=(3,-5)$ ἔχουμε τήν ψευδή πρόταση "$3<-5 \in P_3(K)$.

3.4 Γενικά ή προτασιακή συνάρτηση P:" $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$" ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $M=M_1 x M_2 x \ldots x M_n$ καί πεδίο τιμῶν τό P(M). Προτασιακός τύπος εἶναι ὁ $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Σύνολο ἀληθείας ἤ λύσεων εἶναι τό M_α ὑποσύνολο τοῦ M. Ἀποτελεῖται ἀπό τά στοιχεῖα τοῦ M γιά τά ὁποῖα ή συνάρτηση ἔχει τιμές πού εἶναι ἀληθεῖς προτάσεις. Τό P(M) ἀποτελεῖται μόνο ἀπό ἀληθεῖς ἤ μόνο ἀπό ψευδεῖς ἤ ἀπό ἀληθεῖς καί ψευδεῖς προτάσεις ἄν καί μόνο ἄν $M_\alpha = M$ ἤ $M_\alpha=\emptyset$ ἤ $\emptyset \subset M_\alpha \subset M$.

4. Ποσοδεῖκτες καί ποσοδεικτικές προτάσεις.

4.1 Οἱ ποσοδεῖκτες εἶναι εἰδικά σύμβολα πού παρουσιάζονται σέ προτάσεις οἱ ὁποῖες χωρίς αὐτούς θά ἦταν προτασιακές συναρτήσεις. Προτάσεις πού ἔχουν ποσοδεῖκτες ὀνομάζονται ποσοδεικτικές. π.χ ἡ πρόταση τῆς μορφῆς $\forall x \in A$, P(x) πού χωρίς τόν γενικό ἤ καθολικό ποσοδείκτη $\forall$ (γιά κάθε) θά ἦταν ἡ προτασιακή συνάρτηση $x \in A$, P(x). Ἡ $\forall x \in A$, P(x) διαβάζεται "Γιά κάθε x στοιχεῖο τοῦ A ἰσχύει ἡ P(x)". Ἐκτός ἀπό τίς καθολικές ποσοδεικτικές προτάσεις ἔχουμε καί τίς ὑπαρξιακές ποσοδεικτικές προτάσεις π.χ ἡ πρόταση τῆς μορφῆς $\exists x \in A$, P(x) πού διαβάζεται: "Ὑπάρχει ἕνα (τουλάχιστον) x στοιχεῖο τοῦ A γιά τό ὁποῖο ἰσχύει ἡ P(x)". Ὁ $\exists$ εἶναι ὁ ὑπαρξιακός ποσοδείκτης πού διαβάζεται: " Ὑπάρχει ἕνα" ἤ ταυτόσημα "Ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο". Μερικές φορές χρησιμοποιεῖται καί ὁ ποσοδείκτης $\exists_1$ (συμβολίζεται καί μέ $\exists'$ ἤ $\exists!$) πού διαβάζεται "ὑπάρχει ἀκριβῶς ἕνα" ἤ "ὑπάρχει μόνο ἕνα". π.χ ἡ $\exists_1 x \in A$, P(x) διαβάζεται "ὑπάρχει μόνο ἕνα στοιχεῖο x τοῦ A γιά τό ὁποῖο ἰσχύει ἡ P(x)".

4.2 Ἡ Πρόταση $\forall x \in Z$, $x<0$ εἶναι ψευδής γιατί δέν εἶναι μικρότερος ἀπό τό μηδέν κάθε ἀκέραιος ἀριθμός. Ἡ πρόταση $\exists x \in Z, x<0$ εἶναι ἀληθής γιατί ὑπάρχει ἕνας ἀκέραιος π.χ ὁ -5 γιά τόν ὁποῖο ἔχουμε $-5<0$ ὅμως δέν εἶναι μόνο ὁ -5, ἀλλά ὅλοι οἱ ἀρνητικοί γιά τούς ὁποίους ἰσχύει ἡ $x<0$. Ἔτσι ἡ πρόταση $\exists_1 x \in Z$, $x<0$ εἶναι ψευδής ἀφοῦ δέν ἐπαληθεύει μόνο ἕνας ἀκέραιος τήν $x<0$. Ἡ πρόταση $\forall x \in R, \forall \psi \in R$, $x^2 - \psi^2 \leqq x^2$ εἶναι ἀληθής. Τό ἴδιο καί ἡ $\exists x \in R$, $\exists \psi \in R$, $x^2-\psi^2 \leqq x^2$. Ἡ πρόταση $\forall x \in N, \forall \psi \in (Z-N)$, $x<\psi$ εἶναι ψευδής. Τό ἴδιο καί ἡ $\exists x \in N, \exists \psi \in (Z-N)$, $x<\psi$ εἶναι ψευδής.

4.3 Ἡ πρόταση $\forall x \in R$, $\exists \psi \in N$, $\psi>x$ εἶναι ἀληθής. Πραγματικά γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x ὑπάρχει ἕνας φυσικός ἀριθμός ψ μεγαλύτερος ἀπό τόν x. Ὅμως ἡ πρόταση $\exists \psi \in N, \forall x \in R$, $\psi>x$ εἶναι ψευδής γιατί δέν ὑπάρχει φυσικός ἀρθιμός ψ πού νά εἶναι μεγαλύτερος ἀπό κάθε πραγματικό ἀριθμό x. Ἡ ἀντιμετάθεση τῶν ποσοδεικτῶν $\forall$ καί $\exists$ βλέπουμε ὅτι μᾶς ἔδωσε μία νέα πρόταση καί μάλιστα μέ διαφορετική τιμή ἀληθείας ἀπό τήν προηγούμενη. Αὐτό βέβαια δέν γίνεται πάντοτε ὡς πρός τήν τιμή ἀληθείας, ὅμως ἡ νέα πρόταση ἔχει διαφορετικό νόημα π.χ ἡ πρόταση $\forall x \in R$, $\exists \psi \in R$, $x+\psi=x$ εἶναι ἀληθής καθώς καί ἡ πρόταση $\exists \psi \in R, \forall x \in R, x+\psi=x$. Ὑπάρχει πραγματικά ὁ πραγματικός $\psi=0$. Τό νόημα στίς δύο προτάσεις δέν εἶναι τό ἴδιο. Στήν πρώτη πρόταση λέμε ὅτι σέ κάθε x ἀντιστοιχεῖ ἕνα τουλάχιστον ψ ὥστε νά εἶναι $x+\psi=x$ ἐνῶ στή δεύτερη λέμε ὅτι ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστον $\psi \in R$ πού μέ ὁποιοδήποτε x μᾶς δίνει $x+\psi=x$. Ὅταν μιλᾶμε γιά ἀντιμετάθεση τῶν ποσοδεικτῶν ἐννοῦμε ὅτι οἱ ποσοδεῖκτες δέν θά παύσουν νά ἀναφέρονται στίς ἴδιες μεταβλητές καί μάλιστα οἱ τελευταῖες θά διατρέχουν τά ἴδια σύνολα. Ὅταν οἱ ποσοδεῖκτες δέν εἶναι διαφορετικοί μποροῦν νά ἀντιμετατεθοῦν ἐλεύθερα.

5. Προτασιακές συναρτήσεις μέ ποσοδεῖκτες

Αὐτό σημαίνει ὅτι στίς ἐκφράσεις αὐτές ὑπάρχουν μεταβλητές πού συνοδεύονται ἀπό ποσοδεῖκτες καί ἄλλες μεταβλητές ἐλεύθερες π.χ ἡ ἔκφραση "$x \in N, \forall \psi \in Z$, $x\psi > 0$" εἶναι ποσοδεικτική προτασιακή συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο N. Γιά $x=2 \in N$ ἔχει σάν τιμή τήν ποσοδεικτική πρόταση $\forall \psi \in Z$, $2\psi > 0$ πού εἶναι ψευδής γιατί π.χ γιά $\psi=-5$ τό $2\cdot(-5)=-10$ εἶναι ἀρνητικό καί συνεπῶς ὄχι μεγαλύτερο ἀπό τό 0. Τό ἴδιο, ψευδής πρόταση εἶναι κάθε τιμή τῆς παραπάνω προτασιακῆς συνάρτησης. Τό πεδίο τιμῶν τῆς προτασιακῆς συνάρτησης "$x \in N, \forall \psi \in Z$, $x\psi > 0$" ἀποτελεῖται μόνο ἀπό ποσοδεικτικές προτάσεις ὅπως τήν $\forall \psi \in Z$, $2\psi > 0$. Ἔτσι ἔχουμε τόν ἑπόμενο ὁρισμό.

Μιά ποσοδεικτική προτασιακή συνάρτηση εἶναι μία προτασιακή συνάρτηση μέ πεδίο τιμῶν ἀποτελούμενο ἀποκλειστικά ἀπό ποσοδεικτικές προτάσεις.

6. Ἐναλλαγή τῶν ποσοδεικτῶν στήν ἄρνηση

6.1 Θά δείξουμε ὅτι οἱ προτάσεις τῆς μορφῆς $\forall x \in M$, $P(x)$ καί τῆς μορφῆς $\overline{\exists x \in M, \overline{P(x)}}$ εἶναι καί οἱ δυό ἀληθεῖς ἤ καί οἱ δυό ψευδεῖς ἀνεξάρτητα ἀπό τό ποιά εἶναι ἡ προτασιακή συνάρτηση $x \in M$, $P(x)$. Γράφουμε:

$$\forall x \in M,\ P(x) \equiv \overline{\exists x \in M,\ \overline{P(x)}}.$$

Πραγματικά ἄν ἰσχύει ἡ $\forall x \in M$, $P(x)$ δηλαδή ἄν γιά ὅλα τά στοιχεῖα x τοῦ M ἰσχύει ἡ $P(x)$ τότε εἶναι ψευδές ὅτι ὑπάρχει στοιχεῖο τοῦ M γιά τό ὁποῖο ἰσχύει ἡ $\overline{P(x)}$. Μέ ἄλλα λόγια εἶναι ψευδής ἡ πρόταση $\exists x \in M$, $\overline{P(x)}$. Ἡ τελευταία συνεπάγεται ὅτι ἡ $\overline{\exists x \in M, \overline{P(x)}}$ εἶναι ἀληθής. Οἱ συνεπαγωγές αὐτές εὔκολα ἀντιστρέφονται, ἐπομένως ὅταν εἶναι ἀληθής ἡ μία πρόταση τότε εἶναι καί ἡ ἄλλη. Ἐπίσης ἄν εἶναι ψευδής ἡ μία τότε εἶναι καί ἡ ἄλλη γιατί ἄν αὐτή εἶναι ἀληθής σύμφωνα μέ τά παραπάνω θά εἶναι καί οἱ δυό ἀληθεῖς. Οἱ $\forall x \in M,\ P(x)$ καί $\overline{\exists x \in M,\ \overline{P(x)}}$ λοιπόν εἶναι ἤ καί οἱ δύο ἀληθεῖς ἤ καί οἱ δύο ψευδεῖς.

6.2 Μέ τήν ἐναλλαγή τῶν προτασιακῶν τύπων $P(x)$ καί $\overline{P(x)}$ στήν ἰσοδυναμία τῆς παρ. 6.1 προκύπτει ἡ $\forall x \in M, \overline{P(x)} \equiv \overline{\exists x \in M,\ P(x)}$ πού θά μποροῦσε νά ἀποδειχτεῖ καί ἀπ᾽εὐθείας ὅπως στήν παρ. 6.1

Τώρα, ἄν πάρουμε τίς ἀρνήσεις καί τῶν δύο μελῶν τῆς παραπάνω ἰσοδυναμίας καί ἐκείνης τῆς παρ. 6.1 προκύπτουν οἱ ἑπόμενες δύο ἰσοδυναμίες πού θά μποροῦσαν βέβαια νά ἀποδειχτοῦν καί ἀπ᾽εὐθείας.

$\overline{\forall x \in M,\ P(x)} \equiv \exists x \in M, \overline{P(x)}$, $\overline{\forall x \in M,\ \overline{P(x)}} \equiv \exists x \in M, P(x)$

6.3 Μερικές φορές συναντοῦμε τό σύμβολο $\nexists$ π.χ στήν "$\nexists x \in M,\ P(x)$" διαβάζουμε: "Δέν ὑπάρχει στοιχεῖο x τοῦ M γιά τό ὁποῖο ἰσχύει ἡ P(x)". Αὐτό σημαίνει ὅτι γιά ὅλα τά στοιχεῖα x τοῦ M ἰσχύει ἡ $\overline{P(x)}$ Μέ ἄλλα λόγια ἡ "$\nexists x \in M,\ P(x)$" εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν $\forall x \in M,\ \overline{P(x)}$ καί ἐπειδή ἡ τελευταία (παρ.6.2) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν $\overline{\exists x \in M,\ P(x)}$ ἔχουμε: $\nexists x \in M,\ P(x) \equiv \overline{\exists x \in M,\ P(x)} \equiv \forall x \in M.\ \overline{P(x)}$. Μέ ἄλλα λόγια, ἡ $\nexists x \in M,\ P(x)$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἄρνηση τῆς $\exists x \in M$, $P(x)$. π.χ ἡ πρόταση $\nexists x \in R,\ x^2 < 0$ εἶναι ἀληθής γιατί εἶναι ἀληθής ἡ $\overline{\exists x \in R,\ x^2 < 0}$ ἤ ἀκόμη γιατί εἶναι ἀληθής ἡ $\forall x \in R,\ x^2 \geq 0$.

6.4 Οἱ ἰσοδυναμίες τῶν παρ. 6.1-6.3 ἰσχύουν ἀνεξάρτητα ἀπό τό ποιά εἶναι ἡ προτασιακή συνάρτηση $x \in M,\ P(x)$. Στήν πραγματικότητα πρόκειται γιά μιά πρόταση μέ δυό διαφορετικές διατυπώσεις.

7. Λογικές συναρτήσεις

Μία λογική συνάρτηση εἶναι μία συνάρτηση· μέ τύπο μία λογική παράσταση πεδίο ὁρισμοῦ μία δύναμη ἑνός συνόλου ἁπλῶν προτάσεων καί πεδίο τιμῶν ἕνα σύνολο προτάσεων (βλέπετε κεφ. ΙΙ παρ 15) π.χ $\Pi\times\Pi \ni (p,q) \rightarrow p\wedge q \in L$ (δύο λογικῶν μεταβλητῶν p καί q). Ἐπίσης $\Pi \ni p \rightarrow p\vee\bar{p} \in L$ (μιᾶς λογικῆς μεταβλητῆς) κ.λ.π. Ἐκεῖνο πού ἔχει σημασία· στίς λογικές συναρτήσεις εἶναι ἡ τιμή ἀληθείας τῶν ἁπλῶν προτάσεων ἀπό τίς ὁποῖες ἀντικαθίστανται οἱ λογικές μεταβλητές καθώς καί ἡ τιμή ἀληθείας τῶν προτάσεων πού προκύπτουν. Στά ἑπόμενα λοιπόν Π θά εἶναι τό σύνολο {α,ψ} καί L ἐπίσης τό σύνολο {α,ψ}. Βέβαια ἄν ἡ λογική παράσταση πού εἶναι καί τύπος τῆς λογικῆς συνάρτησης εἶναι ταυτολογία ἤ αὐτοαντίφαση τό πεδίο τιμῶν θά εἶναι ἀντίστοιχα τό {α} ἤ τό {ψ}. Ὕστερα ἀπό αὐτά μποροῦμε νά ἔχουμε τόν ἑπόμενο ὁρισμό: Μία λογική συνάρτηση n λογικῶν μεταβλητῶν $p_1, p_2, \ldots, p_n$ εἶναι μία μονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ συνόλου $\{\alpha,\psi\}^n$ στό ἤ πάνω στό {α,ψ}. Ὑπάρχουν 4 διαφορετικές μεταξύ τους λογικές συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς. Στήν πρώτη στήλη τοῦ παρακάτω πίνακα ἐμφανίζεται τό πεδίο ὁρισμοῦ καί στίς ἑπόμενες στῆλες οἱ ἀντιστοιχοῦσες τιμές, στοιχεῖα τοῦ πεδίου τιμῶν τῶν συναρτήσεων. Στήν ἐπικεφαλίδα τῆς πρώτης στήλης ἐμφανίζεται ἡ λογική μεταβλητή p καί στίς ἐπικεφαλίδες τῶν ἄλλων 4 στηλῶν οἱ λογικές παραστάσεις πού εἶναι οἱ τύποι τῶν 4 συναρτήσεων.

p	p	$\bar{p}$	$p\vee\bar{p}$	$p\wedge\bar{p}$
α	α	ψ	α	ψ
ψ	ψ	α	α	ψ

Βέβαια οἱ τύποι τῶν 4 συναρτήσεων πού εἶναι στίς ἐπικεφαλίδες θά μποροῦσαν νά εἶναι καί διαφορετικοί δηλαδή λογικές παραστάεις ταυτολογικά ίσοδύναμες πρός τίς άναγραφόμενες π.χ άντί τῆς p στή δεύτερη στήλη νά ἔχουμε τήν $\bar{\bar{p}}$, άντί τῆς $\bar{p}$ τήν $\bar{p}\wedge\bar{p}$, άντί τῆς $p\vee\bar{p}$ τήν $p\veebar\bar{p}$ καί άντί τῆς $p\wedge\bar{p}$ τήν $\overline{p\vee\bar{p}}$.

Ἀσκήσεις

1. Ποιές άπό τίς παρακάτω έκφράσεις εἶναι λογικές προτάσεις; "Ὁ 3 διαιρεῖ τόν άκέραιο x", "ὁ 3 διαιρεῖ τόν 12", "Τά παιδιά εἶναι μικρότερα άπό τούς γονεῖς τους", "4+6=7", "Ὅταν θά πάω στή Γερμανία θά φέρω ἕνα αύτοκίνητο", "Εἶναι μεγάλο κράτος ἡ Κίνα;".

2. Νά γραφοῦν μερικές λογικές προτάσεις πού νά περιέχουν ἕνα άπό τά σύμβολα $\wedge$, $\vee$, $\veebar$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ καί $\sim$. Ἐπίσης ἄλλες μέ δύο άπό τά σύμβολα αύτά. Ἀκόμη μερικές μέ τρία άπό τά σύμβολα αύτά. Νά προσδιοριστεῖ ἡ τιμή άληθείας τους χωρίς νά κατασκευαστοῦν οἱ πίνακες άληθείας καί νά έπισημανθοῦν οἱ γραμμές τῶν πινάκων πού δίνουν τήν τιμή άληθείας τῶν προτάσεων πού γράψαμε.

3. Ὅταν μία άποκλειστική διάζευξη εἶναι άληθής τότε εἶναι άληθής καί σάν έγκλειστική. Τό άντίστροφο εἶναι άληθές;

4. Ποιά πρόταση εἶναι ἡ ἄρνηση τῆς πρότασης "$5>7$";

5. Μέ πίνακες τιμῶν άληθείας νά άποδειχτοῦν οἱ ταυτολογικές ίσοδυναμίες τῆς παρ. 2.6.

6. Πόσες γραμμές ἔχει ὁ πίνακας τιμῶν άληθείας λογικῶν παραστάσεων πού περιέχουν 4 ἁπλές λογικές παραστάσεις; γιατί; Γενικότερα, n ἁπλές λογικές παραστάσεις;

7. Νά δειχτεῖ ὅτι ἡ λογική παράσταση $[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)]\Rightarrow(p\Rightarrow r)$ εἶναι μιά ταυτολογία.

8. Ἂν οἱ λογικές παραστάσεις A καί B εἶναι ταυτολογίες, νά δειχτεῖ ὅτι οἱ $A\wedge B$, $A\vee B$, $A\Rightarrow B$, $A\Leftrightarrow B$ εἶναι ἐπίσης ταυτολογίες. Ἀκόμη νά δειχτεῖ ὅτι ἡ $A\veebar B$ εἶναι μία αὐτοαντίφαση.

9. Νά δειχτεῖ ὅτι ἰσχύει ἡ $(p\wedge q)\vee(r\wedge s)\equiv(p\vee r)\wedge(p\vee s)\wedge(q\vee r)\wedge(q\vee s)$ καί αὐτή πού προκύπτει μέ τήν ἐναλλαγή τῶν $\wedge$ καί $\vee$.

10. Νά δειχτοῦν οἱ <u>γενικοί νόμοι ταυτοδυναμίας</u> $p\wedge p\wedge\ldots\wedge p\equiv p$ καί $p\vee p\vee\ldots\vee p\equiv p$.

11. Ἔχοντας ὑπόψη ὅτι $p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\ \ldots\wedge p_{n-1}\wedge p_n\equiv(p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\ldots\wedge p_{n-1})\wedge p_n$ γιά $n\geqq 3$, νά δειχτοῦν οἱ γενικοί τύποι τοῦ de Morgan $\overline{p_1\wedge p_2\wedge\ldots\wedge p_n}\equiv\bar p_1\vee\bar p_2\vee\ldots\vee\bar p_n$ καί $\overline{p_1\vee p_2\vee\ldots\vee p_n}\equiv\bar p_1\wedge\bar p_2\wedge\ldots\wedge\bar p_n$

(Γιά τόν πρῶτο θεωροῦμε τήν περίπτωση πού ὅλες οἱ p_1, p_2, ..., p_n εἶναι ἀληθεῖς καί τήν περίπτωση πού μία τουλάχιστον ἀπό αὐτές εἶναι ψευδής. Εὔκολα φαίνεται ὅτι σέ κάθε περίπτωση καί τά δυό μέλη ἔχουν τήν ἴδια τιμή ἀληθείας).

12. Νά γραφοῦν προτασιακές συναρτήσεις μιᾶς καί δύο ἀνεξάρτητων μεταβλητῶν καί μέ σύνολα ἀληθείας ἤ κενά ἤ μή κενά γνήσια ὑποσύνολα τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τους ἤ ἴσα μέ τό πεδίο ὁρισμοῦ τους.

13. Ἡ προτασιακή συνάρτηση "$(x,\psi)\in N^2$, $x+\psi=\psi+x$", ἐκφράζει τόν ἀντιμεταθετικό νόμο τῆς πρόσθεσης στό N ἤ μήπως ὄχι;

14. Νά γραφοῦν ποσοδεικτικές προτάσεις μέ $\forall$, $\exists$ καί $\exists_1$ ἀληθεῖς καί ψευδεῖς.

15. Νά γραφοῦν ποσοδεικτικές προτάσεις μέ δύο ὅμοιους ποσοδεῖκτες. Ἐπίσης μέ τούς ποσοδεῖκτες $\forall$ καί $\exists$ (διαφο ρετικούς). Ἀντιμεταθέσατε τούς ποσοδεῖκτες καί

ἐξετάστε ἄν οἱ προτάσεις πού προκύπτουν ἔχουν διαφορετική τιμή ἀληθείας.

16. Νά γραφεῖ μία ποσοδεικτική προτασιακή συνάρτηση μέ πεδίο τιμῶν ἀποτελούμενο ἀπό ἀληθεῖς καί ἀπό ψευδεῖς προτάσεις.

17. Νά δειχτεῖ ὅτι οἱ προτάσεις τῆς μορφῆς $\forall x \in M, P(x)$, $\wedge \exists x \in M, \overline{P(x)}$ εἶναι ψευδεῖς ὁποιαδήποτε καί ἄν εἶναι ἡ προτασιακή συνάρτηση $x \in M, P(x)$.

18. Ἡ ἐξίσωση $x^2-5x+6=0$ στό R εἶναι ἤ ὄχι μία προτασιακή συνάρτηση; Τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἀληθείας της τί εἶναι γιά τήν ἐξίσωση;

19. Ὑπάρχει περίπτωση καί ποιά νά εἶναι συγχρόνως ἀληθεῖς (ψευδεῖς) ἡ $\forall x \in M, P(x)$ ἡ $\exists x \in M, P(x)$ καί ἡ $\exists_1 x \in M, P(x)$;

20. Εἶναι ἀληθής ἤ ὄχι ἡ πρόταση $\nexists x \in N-\{1\}, x=x^2$; Νά γραφοῦν δύο ἰσοδύναμες προτάσεις, ἡ μία μόνο μέ τόν $\forall$ καί ἡ ἄλλη μέ τόν $\exists$.

21. Ἡ ἔκφραση "Ἡ ἰσότητα 2=3 εἶναι ψευδής" εἶναι λογική πρόταση ἤ ὄχι; Ἄν ναί, εἶναι ἀληθής ἤ ψευδής;

22. Ἰσχύει ἤ ὄχι ἡ $p \veebar p \equiv p$;

23. Ἡ πρόταση $7 \geqq 4$ εἶναι ἀληθής ἤ ψευδής;

24. Ἰσχύουν ἤ ὄχι
ἡ $\forall x \in A, \forall \psi \in B, P(x,\psi) \equiv \overline{\exists x \in A, \exists \psi \in B, \overline{P(x,\psi)}}$,
ἡ $\exists x \in A, \forall \psi \in B, P(x,\psi) \equiv \overline{\forall x \in A, \exists \psi \in B, \overline{P(x,\psi)}}$
καί ἡ $\forall x \in A, \exists \psi \in B, P(x,\psi) \equiv \overline{\exists x \in A, \forall \psi \in B, \overline{P(x,\psi)}}$

25. Νά κατασκευαστεῖ ὁ πίνακας τιμῶν ἀληθείας τῆς λογικῆς παράστασης $[(p \vee q) \wedge (q \veebar r)] \vee (p \veebar r)$.

26. Ἄν ἰσχύουν οἱ $\sim\vdash A, \sim\vdash B$, νά δειχτεῖ ὅτι ἰσχύουν καί οἱ $\sim\vdash(A \wedge B)$, $\sim\vdash(A \vee B)$, $\sim\vdash(A \veebar B)$, $\vdash A \Rightarrow B$, $\vdash A \Leftrightarrow B$.

27. Ἄν ἰσχύουν οἱ $\vdash A, \sim\vdash B$, νά δειχτεῖ ὅτι τότε ἰσχύουν

καί οἱ $\sim\vdash(A\wedge B)$, $\vdash(A\vee B)$, $\vdash(A\veebar B)$, $\sim\vdash(A\Rightarrow B)$, $\vdash(B\Rightarrow A)$, $\sim\vdash(A\Leftrightarrow B)$.

28. Νά κατασκευαστεῖ ὁ πίνακας τιμῶν ἀληθείας τῆς λογικῆς παράστασης $[p\vee(2>1)] \Rightarrow (p\veebar\bar{q})$ (Ἡ πρόταση 2>1 εἶναι μία σταθερά τῆς λογικῆς παράστασης γιατί παίρνει μόνο μία τιμή ἀληθείας καί ὄχι δύο ὅπως ἡ ἀπλή λογική παράσταση).

29. Νά κατασκευαστεῖ ὁ πίνακας τιμῶν ἀληθείας τῆς λογικῆς παράστασης $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(r\Rightarrow S)$ καί νά προσδιοριστεῖ ἡ τιμή ἀληθείας τῆς πρότασης $(6>6 \Rightarrow 5=5) \Leftrightarrow (2+2=4 \Rightarrow 2+3=5)$.

30. Μέ τή βοήθεια τῶν ταυτολογιῶν $p\vee\bar{p}$ καί $p\veebar\bar{p}$ νά κατασκευαστοῦν μερικές ἀκόμη ταυτολογίες καί αὐτοαντιφάσεις.

31. Νά γραφεῖ μία πρόταση ἀληθής ἀλλά ὄχι ταυτολογία καί μία πρόταση ψευδής ἀλλά ὄχι αὐτοαντίφαση. Ἐπίσης μία πρόταση ταυτολογία καί μία πρόταση πού νά εἶναι αὐτοαντίφαση.

32. Νά γραφοῦν σάν ταυτολογίες οἱ ταυτολογικές ἰσοδυναμίες τῆς παρ. 2.6.

33. Νά γραφοῦν μερικές αὐτοαντιφάσεις πού ἐμπνέεται κανείς ἀπό τίς ταυτολογικές ἰσοδυναμίες τῆς παρ. 2.6.

34. Εἶναι δυνατό δύο ταυτολογικά ἰσοδύναμες λογικές παραστάσεις νά μήν περιέχουν ἀκριβῶς τίς ἴδιες ἀπλές λογικές παραστάσεις;

35. Πόσες εἶναι οἱ διαφορετικές λογικές συναρτήσεις δύο λογικῶν μεταβλητῶν; Νά κατασκευαστεῖ ἕνας πίνακας ὅπως ἐκεῖνος τῆς παρ. 7 μέ τίς λογικές μεταβλητές p καί q στίς δύο πρῶτες στῆλες (4 περιπτώσεις) καί τίς τιμές τῶν συναρτήσεων στίς ἑπόμενες στῆλες. Ἐπίσης στίς ἐπικεφαλίδες τους νά γραφοῦν οἱ λογικές παραστάσεις πού ἔχουν αὐτές τίς τιμές.

36. Κατά τί διαφέρει ἡ προτασιακή συνάρτηση ὅπως ὁρίστηκε στήν παρ. 3.1 ἀπό τή λογική συνάρτηση ὅπως ὁρίστηκε στήν παρ. 7;

37. Νά ἀναφερθεῖ μία λογική συνάρτηση μέ πεδίο τιμῶν τό $\{\alpha\}$. Ἐπίσης μέ πεδίο τιμῶν τό $\{\psi\}$ καί νά δειχτεῖ ὅτι αὐτό πραγματικά συμβαίνει.

38. Νά δειχτεῖ ὅτι ὅλες οἱ λογικές παραστάσεις μέ τρεῖς ἁπλές λογικές παραστάσεις πού εἶναι ταυτολογίες ὁρίζουν μόνο μία λογική συνάρτηση τριῶν λογικῶν μεταβλητῶν.

39. Διαφέρει ἡ λογική συνάρτηση δύο λογικῶν μεταβλητῶν μέ τύπο μία ταυτολογία ἀπό τή λογική συνάρτηση 3 λογικῶν μεταβλητῶν μέ τύπο ἐπίσης μία ταυτολογία;

40. Ἀπό τίς 4 λογικές συναρτήσεις μιᾶς λογικῆς μεταβλητῆς τῆς παρ. 7 ποιές εἶναι ἀμφιμονοσήμαντες;

41. Νά δειχτεῖ ὅτι οἱ ἐπόμενες λογικές παραστάσεις εἶναι ταυτολογίες.

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow p),\ (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow \bar{p}],\ \bar{p} \Rightarrow (p \Rightarrow q),$$
$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)].$$

42. Μέ τή βοήθεια τῶν λογικῶν παραστάσεων τῆς προηγούμενης ἄσκησης νά γραφοῦν 4 προτάσεις πού νά εἶναι ταυτολογίες.

43. Νά δειχτεῖ ὅτι ἡ λογική παράσταση $(p \Rightarrow q) \wedge [(p \wedge r) \wedge \overline{q \wedge r}]$ εἶναι μία αὐτοαντίφαση. Μέ τή βοήθειά της νά σχηματιστεῖ μία πρόταση πού νά εἶναι αὐτοαντίφαση.

44. Ἡ $(p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q)$ εἶναι ταυτολογία, αὐτοαντίφαση ἤ σχετική λογική παράσταση; Ἄν εἶναι σχετική νά γραφεῖ μία πρόταση ἀληθής καί μία πρόταση ψευδής πού νά προέρχονται ἀπό τήν ἀντικατάσταση τοῦ p καί q ἀπό ἁπλές προτάσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

ΣΥΝΟΛΑ - ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

1. Σύνολο. Στοιχείο συνόλου. Παράσταση συνόλου.

Ένα σύνολο εἶναι μία ἑνιαία παρουσίαση ἀντικειμένων καθορισμένων καί διαφορετικῶν μεταξύ τους. Τά ἀντικείμενα πού τό ἀποτελοῦν ὀνομάζονται στοιχεῖα τοῦ συνόλου. π.χ τό $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ εἶναι ἕνα σύνολο πού ἀποτελεῖται ἀπό τρία στοιχεῖα. Γιά σύντομη παράσταση μποροῦμε νά γράφουμε A ὅπου $A \underset{\text{ὁρσ}}{=\!=} \{\alpha,\beta,\gamma\}$. Ἀντί γιά τό σύμβολο $\underset{\text{ὁρσ}}{=\!=}$ χρησιμοποιοῦμε καί τό $\equiv$ ἤ μόνο τό $=$. Εἶναι μία ἰσότητα ἐξ ὁρισμοῦ. Θεωροῦμε ὅτι ὑπάρχουν σύνολα μέ ἕνα μόνο στοιχεῖο π.χ. τό $\{\alpha\}$ ὅμως $\{\alpha\} \neq \alpha$ καί σύνολο χωρίς στοιχεῖα. Πρόκειται γιά τό κενό σύνολο πού τό παριστάνουμε μέ $\emptyset$. Γράφουμε $\alpha \in \{\alpha,\beta,\gamma\}$ ἤ $\alpha \in A$ καί διαβάζουμε "Τό α εἶναι στοιχεῖο τοῦ A" ἤ "Τό α ἀνήκει στό σύνολο A". Ἰσοδύναμα γράφουμε: $A \ni \alpha$ καί διαβάζουμε "Ἀπό τό σύνολο A τό στοιχεῖο α". Γιά τό στοιχεῖο λ διαφορετικό ἀπό τά α,β,γ γράφουμε; $\lambda \notin A$ καί διαβάζουμε "Τό λ δέν εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου A" ἤ "Τό λ δέν ἀνήκει στό σύνολο A". Ἐπίσης ἰσοδύναμα: $A \not\ni \lambda$ καί διαβάζουμε "Ὄχι ἀπό τό A τό στοιχεῖο λ". Τά στοιχεῖα ἑνός συνόλου εἶναι δυνατό νά εἶναι καί αὐτά σύνολα.

Ἕνα σύνολο τό παριστάνουμε ἀναγράφοντας ὅλα τά στοιχεῖα του ἄν φυσικά αὐτά δέν εἶναι πάρα πολλά π.χ $\{1,2,8,4,5,10,11\}$ ἤ ἀναγράφοντας μερικά κατά τρόπο πού νά ἐννοοῦνται καί τά ὑπόλοιπα π.χ $\{1,2,3,4,...\}$ Πρόκειται γιά τό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Τέλος τά χαρακτηρίζουμε μέ μία κοινή ἰδιότητα πού ἔχουν τά στοιχεῖα τους π.χ μέ $\{x\colon x \in R,\ 2 \leqq x \leqq \frac{13}{2}\}$ ἤ $\{x \in R\colon\ 2 \leqq x \leqq \frac{13}{2}\}$ παριστάνουμε τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν πού εἶναι ἴσοι ἤ μεγαλύτεροι ἀπό τόν 2 καί ἴσοι ἤ μικρότεροι ἀπό τόν $\frac{13}{2}$. Στήν πραγματικότητα τό τελευταῖο σύνολο εἶναι τό σύνολο ἀληθείας (λύσεων) τῆς προτασιακῆς συνάρτησης "$x \in R,\ 2 \leqq x \leqq \frac{13}{2}$" Τό σύμβολο x ὀνομάζεται γενικό στοιχεῖο τοῦ συνόλου καί μπορεῖ νά παρασταθεῖ μέ ὁποιοδήποτε γράμμα.

2. Ὑποσύνολο. Ὑπερσύνολο.

2.1 Ἕνα σύνολο A εἶναι ὑποσύνολο ἑνός σύνόλου B (γράφουμε: $A \subseteqq B$) ἄν καί μόνο ἄν κάθε στοιχεῖο τοῦ A εἶναι καί στοιχεῖο τοῦ B. Συμβολικά:

$$A \subseteqq B \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (\forall x \in A,\ x \in A \Rightarrow x \in B)$$

π.χ $\{2,3\} \subseteqq \{2,3\}$, $\{1,4\} \subseteqq \{5,4,1,6\}$, $\{2,3\} \nsubseteqq \{2,7\}$. Ἡ τελευταία εἶναι ἡ ἄρνηση τῆς σχέσης ὑποσυνόλου. Τό κενό σύνολο θεωρεῖται ὑποσύνολο ὁποιουδήποτε συνόλου.

2.2 Ἕνα σύνολο A εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο ἑνός συνόλου B (γράφουμε: $A \subset B$) ἄν καί μόνο ἄν τό A εἶναι ὑποσύνολο τοῦ B καί ὑπάρχει ἕνα (τουλάχιστο) στοιχεῖο τοῦ B πού δέν ἀνήκει στό A. Συμβολικά:

$$A \subset B \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} A \subseteqq B \wedge \exists\, x \in B,\ x \notin A.$$

π.χ $\{2,3\} \subset \{2,3,5\}$, $\{2,3\} \not\subset \{2,3\}$, $\{2,3\} \not\subset \{4,7\}$ κ.λ.π. Εἶναι $\emptyset \subset A$ γιά κάθε σύνολο A διαφορετικό ἀπό τό κενό. Ἐπίσης $\emptyset \not\subset \emptyset$.

2.3 Ὁρίζουμε καί τίς σχέσεις τοῦ ὑπερσυνόλου καί γνήσιου ὑπερσυνόλου π.χ $B \supseteqq A \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} A \subseteqq B$ καί $B \supset A \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} A \subset B$ π.χ $\{2,3\} \supseteqq \{2,3\}$, $\{5,4,1,6\} \supseteqq \{1,4\}$, $\{2,3,5\} \supset \{2,3\}$

3. Ἴσα σύνολα

3.1 Συμβολικά: $A=B \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
Ἐπειδή ἡ $(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ ἰσοδυναμεῖ (παρ.2.1) μέ τή $A \subseteqq B \wedge B \subseteqq A$ ἰσχύει ἡ $A=B \Leftrightarrow A \subseteqq B \wedge B \subseteqq A$ πού χρησιμεύει ἐπίσης σάν ὁρισμός τῆς ἰσότητας τῶν συνόλων. Γιά τόν ἴδιο λόγο ἡ σχέση $\subseteqq$ χαρακτηρίζεται σάν ἀντισυμμετρική (κεφ. III). π.χ $\{2,4,5\} = \{2,5,4\}$. Βλέπουμε ὅτι ἔχουν τά ἴδια ἀκριβῶς στοιχεῖα. Ἐπίσης ἰσχύουν οἱ $\{2,4,5\} \subseteqq \{2,5,4\}$ καί $\{2,5,4\} \subseteqq \{2,4,5\}$. Ἡ διαφορετική σειρά ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων δέν καταστρέφει τήν ἰσότητα τῶν συνόλων γιατί δέν περιέχεται τέτοιος ὅρος στόν ὁρισμό τῆς ἰσότητας μεταξύ τῶν συνόλων. Ὅταν δύο σύνολα δέν εἶναι ἴσα τά λέμε διαφορετικά π.χ $\{2,3\} \neq \{2,3,5\}$ καί $\{4,5\} \neq \{3,8\}$. Ὅμως τά δύο πρῶτα τά συνδέει ἡ σχέση $\{2,3\} \subseteqq \{2,3,5\}$ ἐνῶ τά δύο τελευταῖα δέν συνδέονται μέ τή $\subseteqq$ δέν εἶναι δηλαδή συγκρίσιμα (ἑπομένως οὔτε μέ τίς $\supseteqq$, $=$, $\subset$ καί $\supset$ συνδέονται).

3.2 Ὕστερα ἀπό αὐτά πού εἴδαμε στήν παρ. 2.2 καί 3.1 ἔχουμε τήν: $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteqq B \wedge A \neq B$ πού χρησιμεύει ἐπίσης σάν ὁρισμός τῆς σχέσης τοῦ γνήσιου ὑποσυνόλου.

3.3 Ἰσχύει ἡ ἑπόμενη ἰσοδυναμία πού συνδέει τίς σχέσεις $\in$ καί $\subseteqq$.

$$\alpha \in A \Leftrightarrow \{\alpha\} \subseteqq A$$

4. Δυναμοσύνολο.

Τό σύνολο $\mathscr{P}(E)$ εἶναι δυναμοσύνολο τοῦ συνόλου E ἄν καί μόνο ἄν κάθε ὑποσύνολο τοῦ E εἶναι στοιχεῖο τοῦ $\mathscr{P}(E)$ καί κάθε στοιχεῖο τοῦ $\mathscr{P}(E)$ εἶναι ὑποσύνολο τοῦ

Ε. Συμβολικά:

$$A \in \mathscr{P}(E) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} A \subseteq E$$

π.χ ἄν $E=\{1,2,3\}$ τότε $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$. Βλέπουμε ὅτι $E \in \mathscr{P}(E)$ καί $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$. Ἄν τό Ε ἔχει n στοιχεῖα τότε τό $\mathscr{P}(E)$ ἔχει 2^n στοιχεῖα ὅσες δηλαδή εἶναι οἱ ἐπαναληπτικές διατάξεις τῶν 2 πραγμάτων ἀνά n.

5. Καρτεσιανό γινόμενο συνόλων.

5.1 Καρτεσιανό γινόμενο $\Gamma_n = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$ τῶν συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n$ εἶναι τό σύνολο $\{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n): \alpha_i \in A_i, \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}\}$. Τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου Γ_n δηλαδή τά $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ ὀνομάζονται διατεταγμένες n-άδες. Ἡ ἰσότητα στό Γ_n ὁρίζεται ὡσεξῆς:

$$(\alpha_1',\alpha_2',\ldots,\alpha_n') = (\alpha_1'',\alpha_2'',\ldots,\alpha_n'') \text{ στό } \Gamma_n \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \forall i \in \{1,2,3,\ldots,n\}, \alpha_i' = \alpha_i''$$

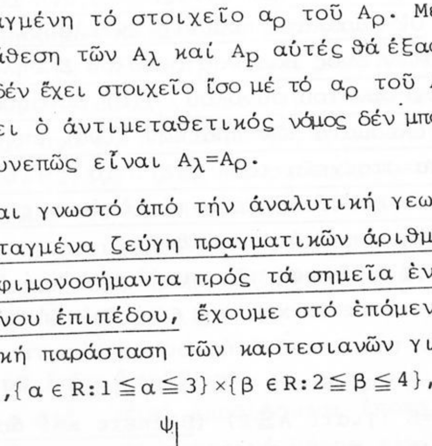
Τό α_i ὀνομάζεται i-οστή, συντεταγμένη ἤ προβολή τοῦ στοιχείου $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$. Ἄν n=2 τότε $\Gamma_2 = A_1 \times A_2$ καί τό καρτεσιανό γινόμενο ἔχει μόνο δύο παράγοντες. Τά στοιχεῖα του (α_1,α_2) ὀνομάζονται τότε διατεταγμένα ζεύγη. Τό α_1 λέγεται καί τετμημένη τοῦ (α_1,α_2) καί τό α_2 λέγεται καί τεταγμένη τοῦ (α_1,α_2). π.χ $\{2,3\} \times \{3,7,8\} = \{(2,3),(2,7),(2,8),(3,3),(3,7),(3,8)\}$. Ἄν $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ τότε γράφουμε A^n ἀντί γιά $A \times A \times \ldots \times A$. Τό A^n ὀνομάζεται n-οστή δύναμη τοῦ Α

5.2 Ὁρίζουμε $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$ γιά ὁποιοδήποτε σύνολο Α. Ἰσχύει ἐπομένως καί ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος ὅταν ἕνα τουλάχιστον ἀπό τά σύνολα εἶναι κενό. Τά ἴδια ἰσχύουν ὁσουσδήποτε παράγοντες καί ἄν ἔχει τό καρτεσιανό γινόμενο.

5.3 Σέ ἕνα καρτεσιανό γινόμενο n παραγόντων π.χ τό $\Gamma_n = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ διαφορετικό ἀπό τό $\emptyset$ ἰσχύει ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος μεταξύ τῶν παραγόντων A_λ καί A_ρ

(λ καί $\rho\in\{1,2,\ldots,n\}$καί $\lambda\neq\rho$) ἄν καί μόνο ἄν $A_\lambda=A_\rho$. Πραγματικά, ἄν $A_\lambda=A_\rho$ εἶναι προφανές ὅτι δέν θά μεταβληθεῖ τό καρτεσιανό γινόμενο μέ τήν ἀντιμετάθεση τῶν A_λ καί A_ρ. Θά δείξουμε λοιπόν μόνο τό ἀντίστροφο, δηλαδή: ἄν ἡ ἀντιμετάθεση τῶν A_λ καί A_ρ δέν μεταβάλλει τό Γ_n τότε $A_\lambda=A_\rho$. Πραγματικά, ἄν ἦταν $A_\lambda\neq A_\rho$ τότε ἤ (ἐγκλειστικό) ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο στοιχεῖο α_λ τοῦ A_λ πού δέν ἀνήκει στό A_ρ ἤ ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο στοιχεῖο τοῦ A_ρ πού δέν ἀνήκει στό A_λ Στήν πρώτη περίπτωση ὑπάρχουν διατεταγμένες n-άδες πού ἔχουν λ-οστή συντεταγμένη τήν α_λ. Μετά τήν ἀντιμετάθεση τῶν A_λ καί A_ρ αὐτές θά ἐξαφανιστοῦν γιατί τό A_ρ δέν ἔχει στοιχεῖο ἴσο μέ τό α_λ τοῦ A_λ. Στή δεύτερη περίπτωση ὑπάρχουν διατεταγμένες n-άδες μέ ρ-οστή συντεταγμένη τό στοιχεῖο α_ρ τοῦ A_ρ. Μετά ὅμως τήν ἀντιμετάθεση τῶν A_λ καί A_ρ αὐτές θά ἐξαφανιστοῦν ἀφοῦ τό A_λ δέν ἔχει στοιχεῖο ἴσο μέ τό α_ρ τοῦ A_ρ. Ὅταν λοιπόν ἰσχύει ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος δέν μπορεῖ νά εἶναι $A_\lambda\neq A_\rho$ συνεπῶς εἶναι $A_\lambda=A_\rho$.

5.4 Ἐπειδή εἶναι γνωστό ἀπό τήν ἀναλυτική γεωμετρία ὅτι τά διατεταγμένα ζεύγη πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀντιστοιχοῦν ἀμφιμονοσήμαντα πρός τά σημεῖα ἑνός προσανατολισμένου ἐπιπέδου, ἔχουμε στό ἑπόμενο σχῆμα τή γεωμετρική παράσταση τῶν καρτεσιανῶν γινομένων. $\{1,3\}\times\{2,4\}$, $\{\alpha\in R: 1\leqq\alpha\leqq 3\}\times\{\beta\in R: 2\leqq\beta\leqq 4\}$, $R\times R$ (δηλαδή R^2).



Ἔχουμε $\{1,3\}\times\{2,4\} = \{(1,2),(1,4),(3,4),(3,2)\}$. Τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου αὐτοῦ ἀντιστοιχοῦν κατά σειράν πρός τίς κορυφές Α,Β,Γ,Δ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ. Τό δεύτερο ἀπό τά παραπάνω τρία καρτεσιανά γινόμενα ἀντιστοιχίζεται ἀμφιμονοσήμαντα πρός τά σημεῖα ὁλόκληρου τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ καί τά στοιχεῖα τοῦ R^2 ἀντιστοιχοῦν ἀμφιμονοσήμαντα μέ τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων. Ἀκόμη τά στοιχεῖα τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $R\times\{0\}$ ἀντιστοιχοῦν ἀμφιμονοσήμαντα πρός τά σημεῖα τοῦ ἄξονα τῶν χ (προσοχή νά μή γίνει σύγχυση τοῦ $\times$ πού εἶναι τό σημεῖο τῆς πράξης τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου μέ τό χ τῶν τετμημένων τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου).

6. Πράξεις στό δυναμοσύνολο.

Οἱ παρακάτω πράξεις ἐκτελοῦνται μεταξύ τῶν ὑποσυνόλων ἑνός βασικοῦ συνόλου Ε δηλαδή μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου $\mathcal{P}(E)$ δυναμοσυνόλου τοῦ Ε. Τά ἀποτελέσματα τῶν πράξεων εἶναι ἐπίσης σύνολα καί μάλιστα στοιχεῖα τοῦ $\mathcal{P}(E)$. Τό $\mathcal{P}(E)$ λοιπόν εἶναι σύνολο κλειστό ὡς πρός τίς ἑπόμενες πράξεις. (Βλέπετε παρατήρηση στήν παρ. 8.7)

(α΄) **Ἕνωση** τῶν συνόλων Α καί Β εἶναι τό σύνολο $A\cup B = \{x\in E: x\in A \vee x\in B\}$ δηλαδή τό σύνολο τῶν στοιχείων τοῦ Ε πού ἀνήκουν τουλάχιστο σέ ἕνα ἀπό τά σύνολα Α καί Β π.χ $\{2,3\}\cup\{3,5,7\} = \{2,3,5,7\}$, $A\cup\emptyset=A$, $A\cup E=E$ (γιατί $A\subseteqq E$) (Βλέπετε καί ἄσκηση 34 κεφ.ΙΙΙ).

(β΄) **Τομή** τῶν συνόλων Α καί Β εἶναι τό σύνολο $A\cap B=\{x\in E: x\in A\wedge x\in B\}$ δηλαδή τό σύνολο τῶν στοιχείων τοῦ Ε πού ἀνήκουν καί στά δύο σύνολα Α καί Β π.χ $\{2,3\}\cap\{3,6\}=\{3\}$, $\{5,1\}\cap\{8,4\} = \emptyset$, $A\cap\emptyset=\emptyset$, $A\cap E=$ $=A$ (γιατί $A\subseteqq E$) (Βλέπετε καί ἄσκηση 35 κεφ ΙΙΙ).

Δύο σύνολα ὀνομάζονται ξένα μεταξύ τους ἄν καί μόνο ἄν ἡ τομή τους εἶναι σύνολο κενό.

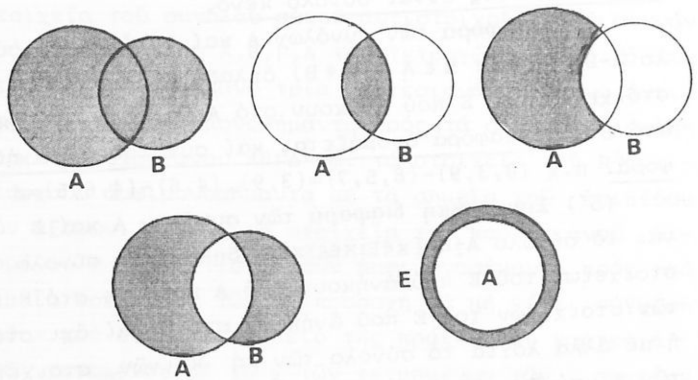
(γ΄) **Διαφορά** τῶν συνόλων Α καί Β εἶναι τό σύνολο $A-B=\{x\in E:\ x\in A \wedge x\notin B\}$ δηλαδή τό σύνολο τῶν στοιχείων τοῦ Ε πού ἀνήκουν στό Α καί δέν ἀνήκουν στό Β. Ἡ διαφορά ὀνομάζεται καί συνολοθεωρητικήδιαφορά. π.χ $\{8,3,9\}-\{8,5,7\}=\{3,9\}$, $\{4,6\}-\{4,6,5\}=\emptyset$

(δ΄) **Συμμετρική διαφορά** τῶν συνόλων Α καί Β εἶναι τό σύνολο $A\dotplus B=\{x\in E: x\in A \veebar x\in B\}$ δηλαδή τό σύνολο τῶν στοιχείων τοῦ Ε πού ἀνήκουν στό Α καί ὄχι στό Β καί τῶν στοιχείων τοῦ Ε πού ἀνήκουν στό Β καί ὄχι στό Α ἤ μέ ἄλλα λόγια τό σύνολο τῶν μή κοινῶν στοιχείων τῶν Α καί Β. Ἔχουμε λοιπόν ἐπίσης $A\dotplus B=\{x\in E:$ $(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\notin A\wedge x\in B)$ ἤ καί $A\dotplus B=\{x\in E: (x\in A\wedge x\notin B)$ $\veebar(x\notin A\wedge x\in B)$. π.χ $\{2,3\}\dotplus\{2,6,7\}=\{3,6,7\}$. Ἡ συμμετρική διαφορά $A\dotplus B$ ὀνομάζεται καί ἄθροισμα modulo 2.

(ε΄) **Συμπλήρωμα** τοῦ συνόλου Α εἶναι τό σύνολο $A'=E-A$ δηλαδή $A'=\{x\in E: x\notin A\}$. Ἀντί γιά A' γράφουμε καί A^c. Μέ ἄλλα λόγια τό A' ἔχει τά στοιχεῖα τοῦ Ε πού δέν ἀνήκουν στό Α. π.χ ἄν $E=\{1,2,3,4,5\}$ καί $A=\{1,4\}$ τότε $A'=\{2,3,5\}$. Εἶναι συνεπῶς $E=A\cup A'$ καί $A\cap A'=\emptyset$. Βλέπουμε ὅτι τό συμπλήρωμα A' τοῦ Α τό παίρνουμε ὡς πρός τό βασικό σύνολο Ε, βέβαια θά μπορούσαμε νά ἔχουμε συμπλήρωμα καί ὡς πρός ἕνα ἄλλο σύνολο Κ ἀρκεῖ νά εἶναι $A\subseteq K$.

7. Διαγράμματα τοῦ Euler ἤ τοῦ Venn.

Οἱ πράξεις στό $\mathcal{P}(E)$ ἀποδίδονται ἐποπτικά μέ τά ἑπόμενα διαγράμματα. Τό σκοτεινό μέρος τῶν διαγραμμάτων ἀντιστοιχεῖ στά σύνολα πού εἶναι τά ἀποτελέσματα τῶν διαφόρων πράξεων. Ἡ σειρά τῶν διαγραμμάτων εἶναι ὅμοια μέ ἐκείνη πού ἀναφέρθηκαν οἱ πράξεις στήν παρ. 6



8. Ἰδιότητες τῶν πράξεων στό δυναμοσύνολο $\mathscr{P}(E)$. Μέθοδοι ἀπόδειξης ἰσοτήτων καί σχέσεων ὑπόσυνόλου.

8.1 Ἰσχύουν οἱ <u>ἀντιμεταθετικοί νόμοι</u> ὡς πρός τίς πράξεις $\cup$, $\cap$ καί $\underset{\cdot}{+}$. Θά ἀποδείξουμε τήν $A\cap B=B\cap A$ γιά ὁποιαδήποτε σύνολα A καί B στοιχεῖα τοῦ $\mathscr{P}(E)$. Ἔχουμε: $x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B$ (ὁρισμός παρ.6β') $\Leftrightarrow x\in B \wedge x\in A$ (ἀντιμεταθετικός νόμος ὡς πρός τήν πράξη $\wedge$, κεφ. I παρ.2.6α) $\Leftrightarrow x\in B\cap A$. Ἐπειδή ἡ ἰσοδυναμία $\Leftrightarrow$ εἶναι μεταβατική, ἰσχύει ἡ $x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in B\cap A$ πού σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῶν ἴσων συνόλων ἰσοδυναμεῖ μέ τήν $A\cap B= =B\cap A$.

8.2 Ἰσχύουν οἱ <u>προσεταιριστικοί νόμοι</u> ὡς πρός τίς πράξεις $\cup$, $\cap$ καί $\underset{\cdot}{+}$. Θά ἀποδείξουμε τόν $(A\underset{\cdot}{+}B)\underset{\cdot}{+}\Gamma=A\underset{\cdot}{+}(B\underset{\cdot}{+}\Gamma)$ γιά ὁποιαδήποτε A,B,Γ ὑποσύνολα τοῦ E. Ἔχουμε : $x\in(A\underset{\cdot}{+}B)\underset{\cdot}{+}\Gamma \Leftrightarrow x\in A\underset{\cdot}{+}B \veebar x\in\Gamma$ (ὁρισμός παρ. 6 δ') $\Leftrightarrow$ $(x\in A \veebar x\in B) \veebar x\in\Gamma \Leftrightarrow$ (κεφ. I. παρ.2.6 προσεταιριστικός νόμος ὡς πρός τήν πράξη $\veebar$) $x\in A \veebar (x\in B \veebar x\in\Gamma) \Leftrightarrow$ $x\in A \veebar x\in B\underset{\cdot}{+}\Gamma \Leftrightarrow x\in A\underset{\cdot}{+}(B\underset{\cdot}{+}\Gamma)$. Ἕνεκα τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Leftrightarrow$ ἰσχύει τελικά ἡ $x\in(A\underset{\cdot}{+}B)\underset{\cdot}{+}\Gamma \Leftrightarrow x\in A\underset{\cdot}{+}(B\underset{\cdot}{+}\Gamma)$ πού ἰσοδυναμεῖ (ὁρισμός ἰσότητας συνόλων) μέ τήν $(A\underset{\cdot}{+}B)\underset{\cdot}{+}\Gamma=$ $A\underset{\cdot}{+}(B\underset{\cdot}{+}\Gamma)$.

8.3 Ἰσχύουν οἱ ἑπόμενοι ἐπιμεριστικοί νόμοι, γιά ὁποιαδήποτε σύνολα Α,Β,Γ ὑποσύνολα τοῦ Ε.

(α') $A\cup(B\cap\Gamma)=(A\cup B)\cap(A\cap\Gamma)$ τῆς πράξης $\cup$ ὡς πρός τήν $\cap$

(β') $A\cap(B\cup\Gamma)=(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$ τῆς πράξης $\cap$ ὡς πρός τήν $\cup$

(γ') $A\cap(B\dotplus\Gamma)=(A\cap B)\dotplus(A\cap\Gamma)$ τῆς πράξης $\cap$ ὡς πρός τήν $\dotplus$

Θά ἀποδείξουμε τόν (γ'). Ἔχουμε: $x\in A\cap(B\dotplus\Gamma)\Leftrightarrow$
$x\in A\wedge x\in B\dotplus\Gamma \Leftrightarrow x\in A\wedge(x\in B\veebar x\in\Gamma)\Leftrightarrow$(κεφ.Ι παρ.2.6.γ' ἐ-
πιμεριστικός νόμος τῆς πράξης $\wedge$ ὡς πρός τήν $\veebar$)
$(x\in A\wedge x\in B)\veebar(x\in A\wedge x\in\Gamma)\Leftrightarrow x\in A\cap B\veebar x\in A\cap\Gamma\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\dotplus(A\cap\Gamma)$.
ἕνεκα τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Leftrightarrow$ ἰσχύει τελικά ἡ
$x\in A\cap(B\dotplus\Gamma)\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\dotplus(A\cap\Gamma)$ πού ἰσοδυναμεῖ μέ τήν
$A\cap(B\dotplus\Gamma)=(A\cap B)\dotplus(A\cap\Gamma)$.

Παρατήρηση ἐπί τῆς μεθόδου ἀπόδειξης.

Οἱ ἀποδείξεις τῶν ἰσοτήτων στίς παρ. 8.1 - 8.3
στηρίζονται στόν ὁρισμό τῶν ἴσων συνόλων. Προηγού-
μενα ὅμως χρησιμοποιοῦμε τούς ὁρισμούς τῶν πράξεων
στό $\mathscr{P}$(Ε) μέ τή βοήθεια τῶν λογικῶν συνδέσμων (κεφ.Ι)
καθώς καί γνωστές ἰδιότητες τῶν λογικῶν πράξεων. Ἡ
προσεκτική μελέτη τῶν παρ. 8.1-8.3 καί τῶν ἄλ-
λων πού θά ἀκολουθήσουν βοηθοῦν στήν κατανόηση αὐ-
τῆς τῆς μεθόδου.

8.4 Ἰσχύουν οἱ νόμοι τῆς ἀπορρόφησης $A\cup(A\cap B)=A$ καί
$A\cap(A\cup B)=A$ γιά ὁποιαδήποτε σύνολα Α καί Β στοιχεῖα
τοῦ $\mathscr{P}$(Ε). Γιά τόν πρῶτο εἶναι: $x\in A\cup(A\cap B)\Leftrightarrow$
$x\in A\vee x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A\vee(x\in A\wedge x\in B)\Leftrightarrow x\in A$ (κεφ.Ι
παρ. 2.6 δ'). Ἕνεκα τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Leftrightarrow$ ἰσχύ-
ει τελικά ἡ $x\in A\cup(A\cap B)\Leftrightarrow x\in A$ πού ἰσοδυναμεῖ μέ
τή $A\cup(A\cap B)=A$.

8.5 Ἰσχύουν οἱ νόμοι τῆς ταυτοδυναμίας ἤ τοῦ ἀδύναμου
τῶν πράξεων $\cup$ καί $\cap$ δηλαδή οἱ ἰσότητες $A\cup A=A$ καί
$A\cap A=A$ γιά ὁποιοδήποτε σύνολο Α. π.χ γιά τό δεύτερο
ἔχουμε: $x\in A\cap A\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in A\Leftrightarrow x\in A$ (κεφ.Ι.παρ.2.6ε')
Ἡ $x\in A\cap A\Leftrightarrow x\in A$ ἰσοδυναμεῖ μέ τήν $A\cap A=A$.

8.6 Ἰσχύουν οἱ νόμοι τοῦ de Morgan. Πρόκειται γιά τίς ἰσότητες $(A\cap B)'=A'\cup B'$ καί $(A\cup B)'=A'\cap B'$. Ἰσχύουν γιά ὁποιαδήποτε σύνολα ὑποσύνολα ἑνός βασικοῦ συνόλου Ε καί ἀποδείχνονται ὅπως εἴδαμε στίς παρ.8.1 -8.5. (Βλέπετε καί παρ. 19.10).

Παρατήρηση ἐπί τῆς ἀπόδειξης μέ πίνακα τιμῶν ἀληθείας.

Θεωροῦμε ὅλες τίς δυνατές περιπτώσεις πού τό x ἀνήκει ἤ δέν ἀνήκει στό καθένα ἀπό τά σύνολα Α καί Β. Στήν καθεμιά περίπτωση πρέπει ἐφόσον ἰσχύει ἡ ἰσότητα νά ἀποδειχτεῖ ὅτι τό x ἀνήκει καί στά δύο μέλη της ἤ δέν ἀνήκει καί στά δύο μέλη της, διαφορετικά ἡ ἰσότητα εἶναι ψευδής. Ἡ διαδικασία αὐτή ἀπεικονίζεται στόν ἑπόμενο πίνακα σχετικά μέ τήν $(A\cap B)'=$ $=A'\cup B'$

$x\in A$	$x\in B$	$x\in A'$	$x\in B'$	$x\in A\cap B$	$x\in(A\cap B)'$	$x\in A'\cup B'$
α	α	ψ	ψ	α	ψ	ψ
α	ψ	ψ	α	ψ	α	α
ψ	α	α	ψ	ψ	α	α
ψ	ψ	α	α	ψ	α	α

Τό σύμβολο α σέ μία στήλη ἔχει τή σημασία ὅτι ἡ πρόταση πού ἀναγράφεται στό ἄνω μέρος τῆς στήλης εἶναι ἀληθής. Ἐπίσης τό ψ ἔχει τή σημασία ὅτι ἡ πρόταση τῆς ἐπικεφαλίδας εἶναι ψευδής. Στήν προκειμένη περίπτωση διαπιστώνουμε τήν ἀλήθεια τῆς ἰσότητας $(A\cap B)'=A'\cup B'$ μέ τή σύγκριση τῶν δύο τελευταίων στηλῶν. Ἄν τά ἐμφανιζόμενα στήν ἰσότητα σύνολα εἶναι τρία π.χ τά Α,Β,Γ τότε ὁ πίνακας θά ἔχει $2^3=8$ γραμμές ὅσες δηλαδή εἶναι οἱ ἐπαναληπτικές διατάξεις τῶν δύο ἀντικειμένων ($\in$ καί $\notin$ δηλαδή α καί ψ) ἀνά τρία (Α,Β,Γ) κ.ο.κ. Θά ἀποδείξουμε τώρα τήν ἰσότητα $(A\cup B)'=$ $=A'\cap B'$ μέ τή μέθοδο τῶν παρ. 8.1 - 8.5. Ἔχουμε :

$x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \overline{x \in A \cup B} \Leftrightarrow \overline{x \in A \vee x \in B} \Leftrightarrow$ (κεφ. Ι
παρ. 2.6 στ') $\overline{x \in A} \wedge \overline{x \in B} \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A' \wedge x \in B' \Leftrightarrow$
$x \in A' \cap B'$. Ἕνεκα τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Leftrightarrow$ ἰσχύει
τελικά ἡ $x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \in A' \cap B'$ πού ἰσοδυναμεῖ μέ
τήν $(A \cup B)' = A' \cap B'$

8.7 Ἰσχύει ἡ πρόταση $A-B=A \cap B'$ γιά ὁποιαδήποτε σύνολα
Α καί Β ὑποσύνολα τοῦ βασικοῦ συνόλου Ε ὡς πρός τό
ὁποῖο ἔχει παρθεῖ καί τό συμπλήρωμα Β' τοῦ Β. Εἶ-
ναι: $x \in A-B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B' \Leftrightarrow x \in A \cap B'$. Ἡ
$\Leftrightarrow$ εἶναι μεταβατική ἐπομένως ἰσχύει ἡ $x \in A-B \Leftrightarrow$
$x \in A \cap B'$ πού ἰσοδυναμεῖ μέ τήν ἰσότητα $A-B=A \cap B'$.

Παρατήρηση: Ἄν $A \nsubseteq E$ τότε $\exists \alpha \in A,\ \alpha \notin E$ καί ἐπειδή
$B \cup B'=E$ εἶναι $\alpha \notin B,\ \alpha \notin B'$. Ἰσχύουν συνεπῶς τότε οἱ
$\alpha \in A-B$ καί $\alpha \notin A \cap B'$ μέ ἀποτέλεσμα $A-B \neq A \cap B'$ π.χ ἄν
$E=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,2,3,6\}$, $B=\{2,4,5\}$ τότε $B'=E-B=$
$=\{1,3\}$, $A-B=\{1,3,6\}$, $A \cap B'=\{1,3\}$. Βλέπουμε ὅτι $A-B \neq$
$A \cap B'$ γιατί $\{1,3,6\} \neq \{1,3\}$. Τό παράδοξο ὀφείλεται
στό ὅτι τό $A=\{1,2,3,6\}$ δέν εἶναι ὑποσύνολο τοῦ $E=$
$=\{1,2,3,4,5\}$ ὅπως εἶναι τό $B=\{2,4,5\}$ καί ὡς πρός τό ὁ-
ποῖο πάρθηκε καί τό συμπλήρωμα τοῦ Β. Τώρα ἄν $A=\{1,2,3,5\}$
εἶναι $A-B=\{1,3\}$, $A \cap B'=\{1,3\}$ καί βλέπουμε ὅτι $A-B=A \cap B'$.

8.8 Ἰσχύει ἡ $(A')'=A$ γιά ὁποιοδήποτε σύνολο Α. Εἶναι:
$x \in (A')' \Leftrightarrow x \notin A' \Leftrightarrow x \in A$. Η $x \in (A')' \Leftrightarrow x \in A$ ἰσοδυναμεῖ
μέ τήν $(A')'=A$.

8.9 Ἰσχύει ἡ ἰσότητα $A \dotplus B=(A-B) \cup (B-A)$. Πραγματικά $x \in A \dotplus B \Leftrightarrow$
$x \in A \veebar x \in B \Leftrightarrow$ (παρ. 6δ') $(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B) \Leftrightarrow$
$x \in A-B \vee x \in B-A \Leftrightarrow x \in (A-B) \cup (B-A)$. Ἕνεκα τῆς μετα-
βατικότητας τῆς $\Leftrightarrow$ ἰσχύει ἡ $x \in A \dotplus B \Leftrightarrow x \in (A-B) \cup (B-A)$
πού ἰσοδυναμεῖ μέ τήν $A \dotplus B=(A-B) \cup (B-A)$.

8.10 Ἰσχύει ἡ ἰσότητα $A \dotplus B=(A \cap B') \cup (B \cap A')$ Ἀποδείχνεται
μέ τίς γνωστές μεθόδους ὅμως καί ὡς ἑξῆς: Ἐπειδή εἶ-

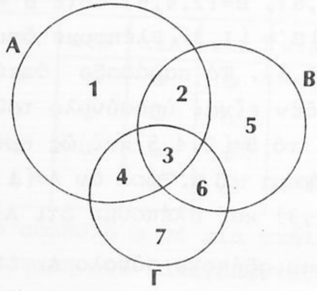
ναι (παρ.8.7) $A-B=A\cap B'$ καί $B-A=B\cap A'$ ἀπό τήν (παρ. 8.9) $A\dot{+}B=(A-B)\cup(B-A)$ προκύπτει ἡ $A\dot{+}B=(A\cap B')\cup(B\cap A')$.

Παρατήρηση: Βλέπουμε λοιπόν ὅτι στίς ἀποδείξεις μποροῦμε νά χρησιμοποιοῦμε καί ἄλλες προηγούμενα ἀποδειγμένες προτάσεις.

8.11 Ἰσχύει ἡ $A\subseteqq B \Leftrightarrow A'\supseteqq B'$ $(B'\subseteqq A')$. Πραγματικά, $A\subseteqq B \Leftrightarrow (x\in A \Rightarrow x\in B) \Leftrightarrow (x\notin B \Rightarrow x\notin A) \Leftrightarrow (x\in B' \Rightarrow x\in A') \Leftrightarrow B'\subseteqq A' \Leftrightarrow A'\supseteqq B'$ (Βλέπετε καί παρ. 19.5)

8.12 Εὔκολα φαίνεται ὅτι οἱ σχέσεις $A\subseteqq B$, $A\cup B=B$, $A\cap B=A$ εἶναι ἀνά δύο ἰσοδύναμες.

8.13 Θά ἀποδείξουμε τόν ἐπιμεριστικό νόμο (παρ.8.3) $A\cup(B\cap\Gamma)=(A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$ μέ τήν γραφική μέθοδο. Στό ἑπόμενο σχῆμα ἀριθμοῦμε τά διάφορα χωρία πού σχηματίζονται ἀπό τίς θέσεις πού ἔχουν οἱ κύκλοι Α,Β,Γ.



$A=1\cup 2\cup 3\cup 4$

$B=2\cup 3\cup 5\cup 6$

$\Gamma=3\cup 4\cup 6\cup 7$

$B\cap\Gamma=3\cup 6$

$A\cup B=1\cup 2\cup 3\cup 4\cup 5\cup 6$

$A\cup\Gamma=1\cup 2\cup 3\cup 4\cup 6\cup 7$

$A\cup(B\cap\Gamma)=1\cup 2\cup 3\cup 4\cup 6$

$(A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)=1\cup 2\cup 3\cup 4\cup 6$

Ἀπό τίς δύο τελευταῖες ἰσότητες προκύπτει ἡ ἀλήθεια τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου τῆς πράξης $\cup$,ὡς πρός τήν $\cap$ Γιά τήν ἀκρίβεια, τό θέμα δέν ἐξαντλεῖται ἐδῶ γιατί οἱ κύκλοι Α,Β,Γ μποροῦν νά ἔχουν καί ἄλλες θέσεις μεταξύ τους.

Παρατήρηση ἐπί τῆς γραφικῆς μεθόδου.

Ἡ γραφική μέθοδος δέν εἶναι μία αὐστηρή μαθηματική μέθοδος καί γιά τό λόγο αὐτό θά τήν ἀποφεύγουμε.

8.14 <u>Οἱ ἀποδείξεις τῶν προτάσεων τῶν προηγουμένων παραγράφων γίνονται καί μέ τή βοήθεια τῆς χαρακτηριστικῆς συνάρτησης (παρ. 19 καί ἰδιαίτερα 19.5 καί 19.10)</u>

8.15 Θά δείξουμε μέ τή μέθοδο τῆς παρ. 8.10 τήν ἰσότητα $(A-B)-(A-\Gamma)=A\cap B'\cap\Gamma$ στό δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(E)$. Πραγματικά, $(A-B)-(A-\Gamma)=$(παρ.8.7), $(A\cap B')-(A\cap\Gamma')=$(παρ.8.7) $(A\cap B')\cap(A\cap\Gamma')'=$ (παρ.8.6) $(A\cap B')\cap(A'\cup\Gamma'')=$ $=(A\cap B')\cap(A'\cup\Gamma)=$(παρ.8.3) $[(A\cap B')\cap A']\cup[(A\cap B')\cap\Gamma]$ $=[(A\cap A')\cap B']\cup(A\cap B'\cap\Gamma)=(\emptyset\cap B')\cup(A\cap B'\cap\Gamma)=$ $=\emptyset\cup(A\cap B'\cap\Gamma)=A\cap B'\cap\Gamma$.

8.16 Θά δείξουμε στό δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(E)$ τήν πρόταση $(A-B)\times(\Gamma-\Delta)=(A\times\Gamma)\cap(B'\times\Delta')$. Πραγματικά, $(\alpha,\beta)\in[(A-B)\times(\Gamma-\Delta)]\Leftrightarrow\alpha\in A-B\wedge\beta\in\Gamma-\Delta\Leftrightarrow\alpha\in A\wedge\alpha\notin B\wedge\beta\in\Gamma\wedge\beta\notin\Delta\Leftrightarrow\alpha\in A\wedge\alpha\in B'\wedge\beta\in\Gamma\wedge\beta\in\Delta'\Leftrightarrow(\alpha,\beta)\in A\times\Gamma\wedge(\alpha,\beta)\in B'\times\Delta'\Leftrightarrow(\alpha,\beta)\in(A\times\Gamma)\cap(B'\times\Delta')$. Ἕνεκα τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Leftrightarrow$ ἰσχύει τελικά ἡ $(\alpha,\beta)\in[(A-B)\times(\Gamma-\Delta)]=(\alpha,\beta)\in[(A\times\Gamma)\cap(B'\times\Delta')]$ πού σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς ἰσότητας τῶν συνόλων ἰσοδυναμεῖ μέ τήν $(A-B)\times(\Gamma-\Delta)=(A\times\Gamma)\cap(B'\times\Delta')$

<u>Γιά τήν ἀπόδειξη ἐφαρμόζουμε τήν συνήθη μέθοδο τῆς παρ. 8.3 (Βλέπετε παρατήρηση). Βέβαια ἐπειδή τά δύο μέλη εἶναι καρτεσιανά γινόμενα μέ δύο παράγοντες χρησιμοποιήσαμε γιά τήν παράσταση τοῦ στοιχείου τήν ἔκφραση (α,β) δηλαδή τό διατεταγμένο ζεῦγος (α,β).</u>

8.17 Θά δείξουμε τή σχέση $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\subseteqq\mathcal{P}(A\cup B)$. Τά Α,Β,Γ εἶναι ὑποσύνολα ἑνός βασικοῦ συνόλου Ε. Ἑπομένως τά $\mathcal{P}(A\cup B)$, $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$ εἶναι ὑποσύνολα τοῦ $\mathcal{P}(E)$. Ἔχουμε: $K\in\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\Leftrightarrow K\in\mathcal{P}(A)\vee K\in\mathcal{P}(B)\Leftrightarrow K\subseteqq A\vee K\subseteqq B\Rightarrow$ (ἐδῶ μόνο συνεπαγωγή γιατί ἀντίστροφη συνεπαγωγή δέν ἰσχύει γιά ὁποιαδήποτε Α καί Β) $K\subseteqq A\cup B\Leftrightarrow K\in\mathcal{P}(A\cup B)$. Γιά τό λόγο πού ἀναφέρουμε παραπάνω εἴμαστε ὑποχρεωμένοι καί τά σύμβολα $\Leftrightarrow$ νά τά ἀντικαταστήσουμε ἀπό τό $\Rightarrow$. Ἕνεκα τῆς μεταβατικότητας τοῦ τελευταίου ἰσχύει τελικά ἡ $K\in\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\Rightarrow K\in\mathcal{P}(A\cup B)$ πού ἰσοδυναμεῖ μέ τήν $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\subseteqq\mathcal{P}(A\cup B)$.

8.18 Θά δείξουμε στό $\mathcal{P}(E)$ τήν ἰσότητα $(A\times B)'=(A'\times B')\cup(A'\times B)\cup(A\times B')$. Πραγματικά: $(\lambda,\mu)\in(A\times B)'\Leftrightarrow(\lambda,\mu)\notin A\times B\Leftrightarrow(\lambda\notin A\wedge\mu\notin B)\vee(\lambda\notin A\wedge\mu\in B)\vee(\lambda\in A\wedge\mu\notin B)\Leftrightarrow(\lambda\in A'\wedge\mu\in B')\vee(\lambda\in A'\wedge\mu\in B)\vee(\lambda\in A\wedge\mu\in B')\Leftrightarrow(\lambda,\mu)\in A'\times B'\vee(\lambda,\mu)\in A'\times B\vee(\lambda,\mu)\in A\times B'\Leftrightarrow(\lambda,\mu)\in[(A'\times B')\cup(A'\times B)\cup(A\times B')]$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Leftrightarrow$ ἰσχύει τελικά ἡ παραπάνω πρόταση.

8.19 Θά δείξουμε στό $\mathcal{P}(E)$ τήν $B\subseteqq\Gamma\subseteqq B\cup A'\Rightarrow A\cap\Gamma=A\cap B$. Πραγματικά, $x\in A\cap\Gamma\Rightarrow x\in A\wedge x\in\Gamma\Rightarrow$ (ἕνεκα τῆς $\Gamma\subseteqq B\cup A'$) $x\in A\wedge x\in B\cup A'\Rightarrow x\in[A\cap(B\cup A')]\Rightarrow x\in[(A\cap B)\cup(A\cap A')]\Rightarrow x\in[(A\cap B)\cup\varnothing]\Rightarrow x\in A\cap B$. Ἀποδείχτηκε λοιπόν ἡ $x\in A\cap\Gamma\Rightarrow x\in A\cap B$ πού ἰσοδυναμεῖ μέ τήν $A\cap\Gamma\subseteqq A\cap B$. Ἔχουμε τώρα: $x\in A\cap B\Rightarrow x\in A\wedge x\in B\Rightarrow$ (ἕνεκα τῆς $B\subseteqq\Gamma$) $x\in A\wedge x\in\Gamma\Rightarrow x\in A\cap\Gamma$. Ἀποδείχτηκε καί ἡ $x\in A\cap B\Rightarrow x\in A\cap\Gamma$ πού ἰσοδυναμεῖ μέ τήν $A\cap B\subseteqq A\cap\Gamma$. Ἡ τελευταία καί ἡ παραπάνω $A\cap\Gamma\subseteqq A\cap B$ συνεπάγονται τήν $A\cap\Gamma=A\cap B$.

9. Γενίκευση τῶν πράξεων $\cup$, $\cap$ καί $\dotplus$ στό $\mathcal{P}(E)$.

Ἰσχύει ἐξ ὁρισμοῦ καί ἡ $A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots\cup A_n=(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{n-1})\cup A_n$ γιά $n\geqq 3$. Πιό συμβολικά: $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)\cup A_n$. Τά ἴδια ὁρίζουμε γιά τίς πράξεις $\cap$ καί $\dotplus$ π.χ $\dot{+}_{i=1}^{n}A_i=\left(\dot{+}_{i=1}^{n-1}A_i\right)\dotplus A_n$

Ἀπό τόν ὁρισμό τῶν πράξεων αὐτῶν γιά δύο μόνο σύνολα (παρ.6) καί τούς παραπάνω ὁρισμούς προκύπτουν οἱ ἑπόμενες δύο ἰσότητες γιά τίς πράξεις $\cup$ καί $\cap$. Τή γενικευμένη ἰσότητα γιά τή $\dotplus$ τήν παραλείπουμε.

$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\left\{x\in E:\exists i\in\{1,2,\ldots,n\},x\in A_i\right\}$, $\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\Big\{x\in E:$

$\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $x \in A_i \}$ π.χ $\{2,3\} \cup \{8\} \cup \emptyset \cup \{3,5,6\} =$
$\{2,3,8,5,6\}$ καί $\{3,9,7\} \cap \{3,7\} \cap \{1,2,3,9,7\} = \{3,7\}$.

10. Ἀπεικόνιση.

10.1 Μία ἀπεικόνιση F μέ σύνολο ἀφετηρίας ἤ ἀναχώρησης τό A καί ἄφιξης ἤ κατάληξης τό σύνολο B εἶναι ἕνα ὑποσύνολο τοῦ καρτεσιανοῦ γινόμενου A×B. Εἶναι $F \subseteq A \times B$. Ἄν καί μόνο ἄν: $F=\emptyset$ ἡ ἀπεικόνιση εἶναι κενή καί $F=A\times B$ ἡ ἀπεικόνιση εἶναι πλήρης. Ἕνα πρότυπο τῆς F εἶναι ἕνα στοιχεῖο α τοῦ A γιά τό ὁποῖο ἰσχύει ἡ (α,ψ) ∈ F γιά ἕνα τουλάχιστο στοιχεῖο ψ τοῦ B. Τό ὑποσύνολο Π_F τοῦ A τά στοιχεῖα τοῦ ὁποίου εἶναι πρότυπα κατά τήν F ἀπεικόνιση ὀνομάζεται σύνολο προτύπου τῆς F. Μία εἰκόνα τῆς F εἶναι ἕνα στοιχεῖο β τοῦ συνόλου B γιά τό ὁποῖο ἰσχύει ἡ (x,β)∈F γιά ἕνα τουλάχιστον στοιχεῖο x τοῦ A. Τό ὑποσύνολο E_F τοῦ B τά στοιχεῖα τοῦ ὁποίου εἶναι εἰκόνες κατά τήν F ἀπεικόνιση, ὀνομάζεται σύνολο εἰκόνων τῆς F.

Ἡ F εἶν αι ἀπεικόνιση ἀπό τό A στό B ἄν καί μόνο ἄν δέν εἶναι κενή καί ἰσχύουν οἱ $\Pi_F \subset A$ καί $E_F \subset B$. Ἡ F εἶναι ἀπεικόνιση τοῦ A πάνω στό B (ἐπί τοῦ B) ἄν καί μόνο ἄν δέν εἶναι κενή καί ἰσχύουν οἱ $\Pi_F = A$ καί $E_F = B$. Ἡ F εἶναι ἀπεικόνιση ἀπό τό A πάνω στό B ἄν καί μόνο ἄν δέν εἶναι κενή καί ἰσχύουν οἱ $\Pi_F \subset A$ καί $E_F = B$. Τέλος, ἡ F εἶναι ἀπεικόνιση τοῦ A στό B ἄν καί μόνο ἄν δέν εἶναι κενή καί ἰσχύουν οἱ $\Pi_F = A$ καί $E_F \subset B$.

10.2 Ἄν $A=\{1,2,3\}$ καί $B=\{1,2,4,7\}$ ἡ ἀπεικόνιση $F_1 = \{(1,1),(1,7),(2,4),(3,7)\}$ ἔχει σύνολο προτύπων τό $\Pi_{F_1} = \{1,2,3\} = A$ καί σύνολο εἰκόνων τό $E_{F_1} = \{1,4,7\} \subset B$. Πρόκειται λοιπόν γιά ἀπεικόνιση τοῦ A στό B (ὄχι πάνω στό B). Βλέπουμε ὅτι τό πρότυπο 1 ἔχει δύο εἰκόνες στό B κατά τήν F_1, τήν εἰκόνα 1 καί τήν εἰκόνα 7. Τό σύνολο $\{1,7\}$ εἶναι τό σύνολο τῶν εἰκόνων τοῦ προτύπου 1 κατά τήν F_1.

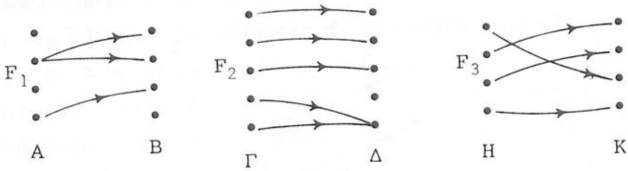
Σύνολο εἰκόνων τοῦ $2 \in A$ εἶναι τό $\{4\}$ κ.λ.π Σύνολο προτύπων τοῦ $7 \in B$ εἶναι τό $\{1,3\}$.

11. Μονοσήμαντες καί ἀμφιμονοσήμαντες ἀπεικονίσεις.

11.1 Μία ἀπεικόνιση F εἶναι μονοσήμαντη ἄν καί μόνο ἄν κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου προτύπων της ἔχει μόνο μία (ἀκριβῶς μία) εἰκόνα. Διακρίνουμε δύο εἴδη μονοσημάντων ἀπεικονίσεων τήν ἀμφιμονοσήμαντη καί τήν ἀπεικόνιση "πολλῶν πρός ἕνα".

Μία ἀπεικόνιση F εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη ἤ "ἕνα πρός ἕνα" ἄν καί μόνο ἄν σέ κάθε πρότυπο ἀντιστοιχεῖ μία μόνο εἰκόνα καί κάθε εἰκόνα ἔχει ἕνα μόνο πρότυπο. Ἰσοδύναμα:...ἄν καί μόνο ἄν εἶναι μονοσήμαντη καί κάθε εἰκόνα ἔχει ἕνα μόνο πρότυπο. Ἐπίσης ἰσοδύναμα:... ἄν καί μόνο ἄν εἶναι μονοσήμαντη καί ἤ τό σύνολο προτύπων τῆς εἶναι μονοσύνολο ἤ γιά ὁποιαδήποτε διαφορετικά πρότυπα x_1 καί x_2 ἰσχύει ἡ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2)$. Οἱ $F(x_1)$ καί $F(x_2)$ εἶναι οἱ εἰκόνες τῶν x_1 καί x_2. Γιά τίς μονοσήμαντες ἀπεικονίσεις γράφουμε: $\Pi_F \ni x \rightarrow F(x) \in E_F$. Ἄν ἡ F εἶναι καί ἀμφιμονοσήμαντη καί θέλουμε αὐτό νά τό τονίσουμε τότε γράφουμε: $\Pi_F \ni x \leftrightarrow F(x) \in E_F$. Μία ἀπεικόνιση εἶναι ἀπεικόνιση "πολλῶν πρός ἕνα" ἄν καί μόνο ἄν εἶναι μονοσήμαντη χωρίς νά εἶναι καί ἀμφιμονοσήμαντη, δηλαδή ἄν καί μόνο ἄν εἶναι μονοσήμαντη καί ὑπάρχει μία τουλάχιστον εἰκόνα πού ἔχει δύο τουλάχιστον πρότυπα. Τέλος, ἡ ἀπεικόνιση F εἶναι μή μονοσήμαντη ἄν καί μόνο ἄν ἕνα τουλάχιστο πρότυπό της ἔχει δύο τουλάχιστο εἰκόνες. Ὀνομάζεται ἐπίσης καί ἀπεικόνιση ἑνός πρός πολλά. Τέτοια εἶναι ἡ ἀπεικόνιση τῆς παρ. 10.2.

11.2 Τά ἑπόμενα σχήματα ἀποδίδουν τήν ἀπεικόνιση F_1 ἀπό τό A στό B πού εἶναι μή μονοσήμανη. Ἐπίσης τήν F_2 πού εἶναι μονοσήμαντη ἀλλά ὄχι ἀμφιμονοσήμαντη (πολλῶν πρός ἕνα) τοῦ Γ στό Δ καί τήν F_3 πού εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη τοῦ Η πάνω στό Κ.



Ἄν σύνολο ἀναχώρησης τῶν ἀπεικονίσεων $F_4=\{(1,7),(3,6),(1,9)\}$, $F_5=\{(1,6),(3,9),(5,6)\}$, $F_6=\{(1,9),(3,7),(5,10)\}$ εἶναι τό $M=\{1,3,5\}$ καί ἄφιξης τό $\Sigma=\{4,6,7,9,10\}$ τότε ἡ F_4 εἶναι μία μή μονοσήμαντη ἀπεικόνιση ἀπό τό Μ στό Σ. Ἡ F_5 εἶναι μία μονοσήμαντη ἀλλά ὄχι ἀμφιμονοσήμαντη (πολλῶν πρός ἕνα) ἀπεικόνιση τοῦ Μ στό Σ. Τέλος ἡ F_6 εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ Μ στό Σ.

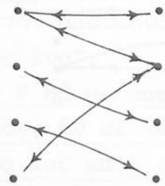
12. Ἴσες καί ἀντίστροφες ἀπεικονίσεις.

Οἱ ἀπεικονίσεις F_1 καί F_2 εἶναι ἴσες ἄν καί μόνο ἄν τά σύνολα F_1 καί F_2 εἶναι ἴσα ($F_1=F_2$). Στήν περίπτωση αὐτή θεωροῦμε ἀκόμη ὅτι F_1 καί F_2 ἔχουν τό ἴδιο σύνολο ἀναχώρησης. Ἐπίσης τό ἴδιο σύνολο ἄφιξης.

Ἡ ἀπεικόνιση F^{-1} εἶναι ἀντίστροφη πρός τήν ἀπεικόνιση F ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ $(\alpha,\beta)\in F^{-1} \Leftrightarrow (\beta,\alpha)\in F$. Ἀπό τόν ὁρισμό αὐτό ἀμέσως φαίνεται ὅτι καί ἡ F εἶναι ἀντίστροφη πρός τήν F^{-1}. Μέ ἄλλα λόγια οἱ F καί F^{-1} εἶναι ἀντίστροφες μεταξύ τους. Στήν περίπτωση αὐτή θεωροῦμε ἀκόμη ὅτι τό σύνολο ἀναχώρησης τῆς F συμπίπτει μέ τό σύνολο ἄφιξης τῆς F^{-1} καί τό σύνολο ἀναχώρησης τῆς F^{-1} συμπίπτει μέ τό σύνολο ἄφιξης τῆς F. Οἱ $F_3=\{(1,2),(3,4)\}$ καί $F_4=\{(3,4),(1,2)\}$ εἶναι ἴσες μεταξύ τους καί οἱ $F_5=\{(3,4),(5,6),(4,4)\}$ καί $F_6=\{(4,3),(6,5),(4,4)\}$ εἶναι ἀντίστροφες. Εἶναι δηλαδή $F_5^{-1}=F_6$ καί $F_5=F_6^{-1}$. Στό ἑπόμενο σχῆμα διακρίνουμε δύο ἀντίστροφες ἀπεικονίσεις F_7 καί F_8.

$F_7 \longrightarrow$

$F_8 \longleftarrow$



Σύμφωνα μέ τά ἀναφερθέντα εἶναι $F=(F^{-1})^{-1}$

13. Τύπος ἀπεικόνισης.

Τύπος μιᾶς ἀπεικόνισης F εἶναι ἡ ἔκφραση πού ἀντιστοιχίζει στά στοιχεῖα τοῦ συνόλου προτύπων τῆς F τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου εἰκόνων της. Θά τόν παριστάνουμε μέ F(x) ὅπου τό x εἶναι μεταβλητή πού διατρέχει τό Π_F. Ὅταν ὅμως τό x εἶναι ἕνα στοιχεῖο τοῦ Π_F τότε τό F(x) εἶναι μία εἰκόνα τοῦ x κατά τήν F. Πολλές φορές, τό πεδίο προτύπων εἶναι καρτεσιανό γινόμενο η συνόλων π.χ τό $M=M_1xM_2x...xM_n$. Τύπος σ'αὐτή τήν περίπτωση εἶναι ἡ ἔκφραση $F(x_1,x_2,...,x_n)$ ὅπου τό $(x_1,x_2,...,x_n)$ διατρέχει τό M. Μερικές φορές γράφουμε $\psi=F(x_1,x_2,...,x_n)$ ὅπου ψ εἶναι μία σύντομη γραφή τοῦ $F(x_1,x_2,...,x_n)$. Ὅταν λέμε "τύπος τῆς ἀπεικόνισης" δέν ἐννοοῦμε ὁπωσδήποτε μία ἀλγεβρική ἤ γενικότερα ἀναλυτική ἔκφραση ἀλλά καί ὁποιοδήποτε κανόνα ἀντιστοίχησης ἤ ἀκόμα καί μία περιγραφή ἀπό τό ἴδιο τό σύνολο F στό ὁποῖο φαίνονται ὅλα τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα ὅταν εἶναι πεπερασμένο. π.χ. ἡ ἀπεικόνιση $F_1:R\ni x \longleftrightarrow 3x+5\in R$ ἤ καί $R\ni x\longleftrightarrow \psi=3x+5\in R$, ἔχει τύπο τήν ἔκφραση 3x+5 ἤ τήν ψ=3x+5 δηλαδή $F_1(x)=$ $=3x+5$. Γιά $x=5\in R$ ἔχουμε $\psi=3\cdot5+5=20$. Εἶναι λοιπόν $(5,20)\in F_1$. Σύνολο προτύπων καί σύνολο εἰκόνων τῆς F_1 εἶναι τό ἴδιο σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Γράφουμε $F_1(R)=R$. Γενικότερα γιά τήν ἀπεικόνιση F εἶναι $F(\Pi_F)=E_F$. Ἐπίσης ἔχουμε τήν ἀπεικόνιση F_2: $Z^2 \ni (x,\psi) \longrightarrow \omega=x^2+\psi^2 \in N\cup\{0\}$. Ἔχει δύο ἀνεξάρτητες μεταβλητές τήν x καί τή ψ. Τό $x^2+\psi^2$ τό παριστάνουμε σύντομα μέ ω. Πρόκειται γιά ἀπεικόνιση "πολλῶν πρός ἕνα" δηλαδή μονοσήμαντη ἀλλά ὄχι ἀμφιμονοσήμαντη π.χ. γιά $(3,-4)\in Z^2$ ἔχουμε $\omega=x^2+\psi^2=3^2+(-4)^2$ $=9+16=25\in N\cup\{0\}$, ἀλλά καί γιά $(-3,4)\in Z^2$ ὅπου $(3,-4)$ $\neq(-3,4)$ ἔχουμε τό ἴδιο στοιχεῖο 25 στό $N\cup\{0\}$. Στό $(0,0)\in Z^2$ ἀντιστοιχεῖ τό $0^2+0^2=0$ στό $N\cup\{0\}$. Ἡ F_2 ἔχει τύπο τήν ἔκφραση $F_2(x,\psi)=x^2+\psi^2$ ἤ $\omega=x^2+\psi^2$ ἤ καί μόνο τήν $x^2+\psi^2$. Εἶναι $\Pi_{F_2}=Z^2$ ὅμως $E_{F_2}\neq N\cup\{0\}$ ἤ ἀκριβέστερα $E_{F_2}\subset N\cup\{0\}$. Πραγματικά δέν γράφονται ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ $N\cup\{0\}$ ὑπό μορφή ἀθροίσματος τετραγώνων δύο ἀκέραιων ἀριθμῶν. Τό σύνολο λοιπόν $F_2(Z^2)$ δηλαδή τό E_{F_2} εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ $N\cup\{0\}$.

14. Ἀντιστοιχία

Ἡ ἔννοια τῆς ἀντιστοιχίας εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἔννοια τῆς ἀπεικόνισης καί δέν θά ἀσχοληθοῦμε ἰδιαίτερα π.χ. τό σύνολο $F=\{(1,3),(6,5),(7,8),(6,9)\}$ εἶναι μία ἀπεικόνιση τοῦ συνόλου $\{1,6,7\}$ πάνω στό σύνολο $\{3,5,8,9\}$ ὅμως εἶναι συγχρόνως καί μία ἀντιστοιχία στοιχείων τοῦ πρώτου συνόλου πρός τά στοιχεῖα τοῦ δεύτερου συνόλου.

15. Συνάρτηση.

Μία μονοσήμαντη ἀπεικόνιση φ τοῦ συνόλου M στό σύνολο T ὀνομάζεται συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό M καί τιμές στό Τ. Γράφουμε συμβολικά: $\varphi:\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in M$ ὅπου $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in M = M_1 x M_2 x\ldots x M_n$ ἤ σάν σύνολο $\varphi=\{((x_1,x_2,\ldots,x_n),\psi):\ \psi==\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$. Τύπος εἶναι ὁ $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ἤ καί $\psi=\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Πρόκειται γιά συνάρτηση n ἀνεξάρτητων μεταβλητῶν. Τό σύνολο $\varphi(M)$ εἶναι τό σύνολο εἰκόνων τῆς ἀπεικόνισης φ καί ὀνομάζεται πεδίο τιμῶν τῆς φ. Εἶναι $\varphi(M)=E_\varphi\subseteqq T$.

Ἡ συνάρτηση φ σάν ἀπεικόνιση πού εἶναι ἔχει τήν ἀντίστροφη ἀπεικόνιση φ^{-1} ἀπό τό Τ (ἄν $\varphi(M)\subset T$) πάνω στό Μ ἤ τοῦ $\varphi(M)$ πάνω στό Μ, ὅμως ἡ φ^{-1} δέν εἶναι πάντοτε συνάρτηση γιατί δέν εἶναι πάντοτε μονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ $\varphi(M)$ πάνω στό Μ. Ἔτσι δέν ὑπάρχει πάντοτε ἡ ἀντίστροφη συνάρτηση φ^{-1} μιᾶς συνάρτησης φ. Ἀποδείχνεται ὅτι γιά νά ὑπάρχει ἡ φ^{-1} σάν συνάρτηση καί ὄχι ἁπλῶς σάν ἀντίστροφη ἀπεικόνιση πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ φ νά εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ Μ πάνω στό $\varphi(M)$. Ἡ φ τότε θά εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντη συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό Μ καί πεδίο τιμῶν τό $\varphi(M)$. Τό ἴδιο καί ἡ φ^{-1} μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $\varphi(M)$ καί τιμῶν τό Μ.

16. Ἀκολουθία

Μία ἀκολουθία στοιχείων ἑνός συνόλου Ε εἶναι μία συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο Ν (τό πεδίο ὁρισμοῦ ἐδῶ ὀνομάζεται σύνολο δεικτῶν) καί τιμές στό Ε (μερικές φορές χρησιμοποιεῖται καί ὁ δείκτης μηδέν). Ἔχουμε συμβολικά γιά τήν ἀκολουθία α: $N\ni n\rightarrow \alpha_n\in E$ Τή συμβολίζουμε καί μέ $\alpha_n, n\in N$ ἤ $(\alpha_n)_{n\in N}$ ἤ (α_n) ἤ καί $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\ldots,\alpha_n,\ldots$ Τά στοιχεῖα $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ κ.λπ. ὀνομάζονται ὅροι τῆς ἀκολουθίας (πρῶτος, δεύτερος, τρίτος κ.λπ). Όταν τό n εἶναι μεταβλητή πού διατρέχει τό N τότε α_n εἶναι ὁ γενικός ὅρος ἤ τύπος τῆς ἀκολουθίας α καί μποροῦμε νά τόν γράφουμε καί $\alpha(n)$. Ἡ ἀκολουθία α σάν ἀπεικόνιση εἶναι ὑποσύνολο τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $N\times E$. Στήν πραγματικότητα πρόκειται γιά τό σύνολο $\alpha=\{(1,\alpha_1),(2,\alpha_2),(3,\alpha_3),\ldots\}$ ἤ $\alpha=\{(n,\alpha_n):n\in N,\ \alpha_n\in E\}$. Ἡ ἀκολουθία α σάν συνάρτηση α ἔχει πεδίο τιμῶν τό σύνολο $\alpha(N)\subseteqq E$. Ἡ ἀκολουθία β μέ τύπο $\beta_n=2n-1$ ἔχει τούς ἑπόμενους ὅρους (γιά $n=1,2,3,\ldots$): $1,3,5,7,9,\ldots$ Σάν σύνολο γράφεται $\beta=\{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7),\ldots\}$ ἤ $\beta=\{(n,2n-1): n\in N\}$. Ἔχει πεδίο τιμῶν $\beta(N)=\{1,3,5,7,9,\ldots\}$. Ἄς πάρουμε ἀκόμη τήν ἀκολουθία γ μέ τύπο:

$$\gamma_n=\begin{cases}7 \text{ ἄν } n \text{ εἶναι περιττός}\\ 5 \text{ ἄν } n \text{ εἶναι ἄρτιος}\end{cases}$$

. Ἔχει πεδίο τιμῶν τό σύνολο $\{5,7\}$ δηλαδή $\gamma(N)=\{5,7\}$. Οἱ ὅροι γράφονται: $7,5,7,5,7,5,\ldots$ Σάν σύνολο ἡ ἀκολουθία γράφεται: $\gamma=\{(1,7),(2,5),(3,7),(4,5),\ldots\}$ ἤ $\gamma=\{(n,x):x=5$ ἄν n ἄρτιος καί $x=7$ ἄν n περιττός$\}$. Ἄν σύνολο δεικτῶν εἶναι τό πεπερασμένο σύνολο $\{1,2,3,\ldots,n\}$ τότε ἔχουμε τούς ὅρους $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n$ μιᾶς πεπερασμένης ἀκολουθίας.

17. Ἰσοδύναμα σύνολα. Ἀριθμήσιμα σύνολα. Πληθάριθμοι.

17.1 Τό σύνολο A εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό σύνολο B (γράφουμε $A\sim B$) ἄν καί μόνο ἄν ὑπάρχει μία ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ A πάνω στό B. Ἐπειδή σ᾽αὐτή τήν περίπτωση ἡ ἀντίστροφη ἀπεικόνιση εἶναι κι᾽αὐτή ἀμφιμονοσήμαντη τοῦ B πάνω στό A, εἶναι ἰσοδύναμο καί τό σύνολο B μέ τό σύνολο A (γράφουμε $B\sim A$). Ἔτσι λέμε ἀνεξάρτητα ἀπό τή σειρά ὅτι τά σύνολα A καί B ἤ B καί A εἶναι ἰσοδύναμα. Αὐτό ἀκόμη σημαίνει ὅτι ἡ σχέση $\sim$ μεταξύ δύο συνόλων εἶναι συμμετρική (κεφ. III). Εἶναι προφανές ὅτι δύο σύνολα μέ πεπερασμένο ἀριθμό στοιχείων (πεπερασμένα) εἶναι ἰσοδύναμα ἄν καί μόνο ἄν ἔχουν τόν ἴδιο ἀριθμό (τόν ἴδιο πλῆθος) στοιχείων, γιατί τότε μόνο μποροῦμε νά ἔχουμε μία ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ ἑνός συνόλου πάνω στό ἄλλο.

17.2 Ἀριθμήσιμα λέγονται τά σύνολα πού εἶναι ἰσοδύναμα μέ τό σύνολο $N=\{1,2,3,4,...\}$ Τό σύνολο $N_{2n}=\{2,4,6,...\}$ τῶν ἄρτιων φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό σύνολο N παρόλο ὅτι τό N_{2n} εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ N. Πραγματικά, ἔχουμε τήν ἑπόμενη ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ N πάνω στό N_{2n}: $N \ni n \longleftrightarrow 2n \in N_{2n}$. Εἶναι λοιπόν $N \sim N_{2n}$ καί τό σύνολο N_{2n} εἶναι κι᾽αὐτό ἀριθμήσιμο. Εἶναι ἐπίσης $N \sim N_{2n-1}$ ὅπως φαίνεται ἀπό τήν $N \ni n \longleftrightarrow 2n-1 \in N_{2n-1}$. Τό N_{2n-1} εἶναι τό σύνολο τῶν περιττῶν φυσικῶν ἀριθμῶν δηλαδή ἕνα γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ N. Ἐκεῖνο πού διακρίνει τά πεπερασμένα σύνολα ἀπό τά ἀπειροσύνολα ὅπως π.χ τά N, N_{2n}, N_{2n-1} εἶναι ὅτι τά πεπερασμένα σύνολα δέν εἶναι ποτέ ἰσοδύναμα μέ ἕνα γνήσιο ὑποσύνολό τους π.χ ἕνα σύνολο μέ 5 στοιχεῖα δέν μπορεῖ νά εἶναι ἰσοδύναμο μέ ἕνα γνήσιο ὑποσύνολό του μέ 4 στοιχεῖα. Ἀντίθετα ἀποδείχνεται ὅτι τά ἀπειροσύνολα εἶναι ἰσοδύναμα μέ ἕνα γνήσιο ὑποσύνολό τους ὅπως π.χ. τό N εἶναι ἰσοδύναμο μέ τά γνήσια ὑποσύνολά του N_{2n} καί N_{2n-1} ὅπως εἴδαμε παραπάνω.

17.3 Πληθάριθμος ἤ πληθικός ἀριθμός ἑνός συνόλου A εἶναι ἕνα σύμβολο (ἀριθμός) πού ἐκφράζει τό πλῆθος τῶν στοιχείων του π.χ ὁ πληθάριθμος τῶν συνόλων $\{\alpha,\beta\}$, $\{3,4\}$,$\{1,2\}$,$\{5,6\}$ εἶναι ὁ φυσικός ἀριθμός 2. Ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ κενοῦ συνόλου εἶναι ὁ ἀκέραιος μηδέν. Τόν πληθάριθμο τοῦ A θά τόν παριστά νουμε μέ $|A|$. Εἶναι λοιπόν $|\emptyset|=0$, $|\{5,6\}|=2$, $|\{\alpha,\beta\}|=2$.

Τά ἰσοδύναμα σύνολα ἔχουν ἴσους πληθαρίθμους καί ἀντίστροφα. Συμβολικά:

$$A\sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$$

Τά ἀριθμήσιμα σύνολα εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ τους ἑπομένως ἔχουν τόν ἴδιο πληθάριθμο πού θά τόν παριστάνουμε μέ α. Ἔχουμε $|N|=\alpha$, $|N_{2n}|=\alpha$, $|N_{2n-1}|=\alpha$. Ὁ πληθάριθμος α δέν εἶναι ἕνας πεπερασμένος ἀριθμός. Ἐκφράζει μία ἀπειρία στοιχείων, ὅμως ἀριθμήσιμη ἀπειρία στοιχείων. Δέν εἶναι ὅλα τά ἀπειροσύνολα ἀριθμήσιμα π.χ. τό σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δέν εἶναι ἀριθμήσιμο, ἐπίσης δέν εἶναι ἀριθμήσιμο τό $(0,1)=\{x\in R: 0<x<1\}$. Ἀποδείχνεται ὅτι ὑπάρχουν ἄπειροι διαφορετικοί μεταξύ τους μή πεπερασμένοι πληθάριθμοι. Ἀλλά καί οἱ πεπερασμένοι πληθάριθμοι εἶναι ἄπειροι π.χ. οἱ 0,1,2,3,4, κ.λ.π.

Ὁρίζονται πράξεις μεταξύ μή πεπερασμένων πληθαρίθμων καθώς καί μεταξύ πεπερασμένων καί μή πεπερασμένων πληθαρίθμων. Μεταξύ τῶν πληθαρίθμων γενικά ὁρίζονται καί οἱ σχέσεις $<, \leqq, >$ καί $\geqq$ πού μᾶς εἶναι γνωστές ἀπό τούς πεπερασμένους πληθάριθμους, κατά τρόπο πού νά διατηρεῖται ὅτι γνωρίζουμε.

18. Τά σύνολα $\varphi(A\cup B)$, $\varphi(A\cap B)$ καί ἡ πρόταση $A\subseteqq B \Rightarrow \varphi(A)\subseteqq \varphi(B)$.

18.1 Θά δείξουμε τήν ἰσότητα $\varphi(A\cup B)=\varphi(A)\cup\varphi(B)$. Ἡ φ εἶναι μία ἀπεικόνιση τοῦ συνόλου M στό σύνολο Σ. Τά A καί B εἶναι ὑποσύνολα τοῦ M καί τά φ(A) καί φ(B) εἶναι προφανῶς ὑποσύνολα τοῦ Σ. Ἔχουμε:
$\psi\in\varphi(A\cup B)\Leftrightarrow \exists x\in A\cup B, \varphi(x)=\psi \Leftrightarrow \exists x\in A, \varphi(x)=\psi \vee \exists x\in B, \varphi(x)=\psi \Leftrightarrow \psi\in\varphi(A)\vee\psi\in\varphi(B)\Leftrightarrow \psi\in\varphi(A)\cup\varphi(B)$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Leftrightarrow$ ἰσχύει τελικά ἡ $\psi\in\varphi(A\cup B)\Leftrightarrow \psi\in\varphi(A)\cup\varphi(B)$ πού ἰσοδυναμεῖ μέ τήν $\varphi(A\cup B)=\varphi(A)\cup\varphi(B)$

18.2 Ὅπως στήν παρ. 18.1 ἔτσι θά ἀποδείξουμε ἐδῶ καί τήν $\varphi(A \cap B)=\varphi(A) \cap \varphi(B)$.

Πραγματικά, $\psi\in\varphi(A\cap B) \Leftrightarrow \exists x\in A\cap B, \varphi(x)=\psi \Leftrightarrow \exists x\in A, \varphi(x)=\psi \wedge \exists x\in B, \varphi(x)=\psi \Leftrightarrow \psi\in\varphi(A) \wedge \psi\in\varphi(B) \Leftrightarrow \psi\in\varphi(A)\cap\varphi(B)$

Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Leftrightarrow$ ἰσχύει τελικά ἡ $\psi\in\varphi(A\cap B) \Leftrightarrow \psi\in\varphi(A)\cap\varphi(B)$ πού ἰσοδυναμεῖ μέ τήν $\varphi(A\cap B) \Leftrightarrow \varphi(A)\cap\varphi(B)$.

18.3 Σύμφωνα μ'αὐτά πού ἀναφέραμε στήν παρ. 18.1 θά ἀποδείξουμε τήν πρόταση:

$$A\subseteq B \Rightarrow \varphi(A)\subseteq\varphi(B).$$

Πραγματικά, $\psi\in\varphi(A) \Rightarrow \exists x\in A, \psi=\varphi(x) \Rightarrow$ (ἕνεκα καί τῆς $A\subseteq B$) $\Rightarrow \exists x\in B, \psi=\varphi(x) \Rightarrow \psi\in\varphi(B)$. Ἐπειδή ἡ $\Rightarrow$ εἶναι μεταβατική ἰσχύει τελικά ἡ $\psi\in\varphi(A) \Rightarrow \psi\in\varphi(B)$ (ὅταν $A\subseteq B$) πού ἰσοδυναμεῖ μέ τήν $\varphi(A)\subseteq\varphi(B)$. Εἶναι λοιπόν ἀληθής ἡ πρόταση $A\subseteq B \Rightarrow \varphi(A)\subseteq\varphi(B)$

19. Χαρακτηριστική συνάρτηση συνόλου.

19.1 Ὀνομάζεται χαρακτηριστική συνάρτηση τοῦ συνόλου A ὑποσυνόλου τοῦ $E\neq\emptyset$ δηλαδή στοιχείου τοῦ δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(E)\neq\mathcal{P}(\emptyset)$ ἡ ἑπόμενη μονοσήμαντη ἀπεικόνιση

$$f_A: E\ni x \rightarrow f_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ ἄν } x\in A \\ 0 \text{ ἄν } x\notin A \end{cases}$$

π.χ ἄν $E=\{7,8\}$ καί $A=\{7\}\subseteq E$ τότε εἶναι $f_A=\{(7,1),(8,0)\}$ Ἐπίσης ἄν $B=\{8\}$ τότε $f_B=\{(7,0),(8,1)\}$. Ἀκόμη, $f_E= =\{(7,1),(8,1)\}$. Τέλος, $f_\emptyset=\{(7,0),(8,0)\}$. Ἰσχύουν οἱ $\forall x\in E, f_\emptyset(x)=0$ καί $\forall x\in E, f_E(x)=1$.

19.2 Ἄν τά σύνολα M καί Σ εἶναι ὑποσύνολα ἑνός βασικοῦ συνόλου $E\neq\emptyset$ τότε ἰσχύει ἡ πρόταση:

$$M=\Sigma \Leftrightarrow \forall x\in E,\ f_M(x)=f_\Sigma(x) \quad (\text{δηλαδή}, f_M=f_\Sigma)$$

Πραγματικά, $M=\Sigma \Leftrightarrow \forall x\in E, [x\in M\wedge x\in\Sigma] \veebar [x\notin M\wedge x\notin\Sigma] \Leftrightarrow \forall x\in E, (f_M(x)=f_\Sigma(x)=1) \veebar (f_M(x)=f_\Sigma(x)=0) \Leftrightarrow \forall x\in E, f_M(x)=f_\Sigma(x)$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Leftrightarrow$ ἰσχύει ἡ παραπάνω πρόταση

19.3 <u>Θά δείξουμε τώρα τήν πρόταση: $M\subset\Sigma \Rightarrow \forall x\in E,\ f_M(x)\leqq f_\Sigma(x)$</u>. Τά M καί Σ θεωροῦνται ὑποσύνολα τοῦ $E\neq\emptyset$. Πραγματικά, $M\subset\Sigma \Rightarrow \forall x\in E,\ (x\in M\wedge x\in\Sigma)\vee(x\notin M\wedge x\in\Sigma)\vee(x\notin M\wedge x\notin\Sigma)\Rightarrow \forall x\in E, (f_M(x)=1\wedge f_\Sigma(x)=1)\vee(f_M(x)=0 \wedge (f_\Sigma(x)=1)\vee(f_M(x)=0 \wedge (f_\Sigma(x)=0)\Rightarrow \forall x\in E,\ (f_M(x) = (f_\Sigma(x))\vee(f_M(x)<f_\Sigma(x))\Rightarrow \forall x\in E,(f_M(x)\leqq f_\Sigma(x))$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Rightarrow$ ἰσχύει τελικά ἡ παραπάνω πρόταση (δέν ἀναφέραμε τήν περίπτωση πού τό $x\in E$ ἱκανοποιεῖ τήν $x\in M\wedge x\notin\Sigma$ γιατί τήν ἀποκλείει ἡ ὑπόθεση $M\subset\Sigma$).

19.4 Θά δείξουμε τώρα τήν πρόταση $M\subseteqq\Sigma\Leftrightarrow\forall x\in E,\ f_M(x)\leqq f_\Sigma(x)$ ($E\neq\emptyset$ καί $M\subseteqq E$, $\Sigma\subseteqq E$). Εἶναι: $M\subseteqq\Sigma\Leftrightarrow\forall x\in E,\ (x\in M\wedge x\in\Sigma)\vee(x\notin M\wedge x\in\Sigma)\vee(x\notin M\wedge x\notin\Sigma)\Leftrightarrow\forall x\in E,\ (f_M(x)=1\wedge f_\Sigma(x)=1)\vee(f_M(x)=0\wedge f_\Sigma(x)=1)\vee(f_M(x)=0\wedge f_\Sigma(x)=0)\Leftrightarrow\forall x\in E,\ (f_M(x)=f_\Sigma(x))\vee(f_M(x)<f_\Sigma(x))\Leftrightarrow\forall x\in E, f_M(x)\leqq f_\Sigma(x)$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Leftrightarrow$ ἰσχύει τελικά ἡ παραπάνω πρόταση (Δέν ἀναφέραμε παραπάνω καί τήν περίπτωση πού τό $x\in E$ ἱκανοποιεῖ τήν $x\in M\wedge x\notin\Sigma$ γιατί ἀπό ἀριστερά τήν ἀποκλείει ἡ ὑπόθεση $M\subseteqq\Sigma$ καί ἀπό δεξιά τήν ἀποκλείει ἡ ὑπόθεση $\forall x\in E,\ f_M(x)\leqq f_\Sigma(x)$).

19.5 Μέ τή βοήθεια τῆς πρότασης τῆς παρ. 19.4 <u>θά δείξουμε τήν πρόταση $A\subseteqq B\Leftrightarrow B'\subseteqq A'$</u> τῆς παρ. 8.11. Πραγματικά, $A\subseteqq B\Leftrightarrow\forall x\in E,\ f_A(x)\leqq f_B(x)\Leftrightarrow\forall x\in E, -f_B(X)\leqq -f_A(x)\Leftrightarrow\forall x\in E,\ 1-f_B(x)\leqq 1-f_A(x)\Leftrightarrow\forall x\in E, f_{B'}(x)\leqq f_{A'}(x)$ (Βλέπετε τήν παρακάτω πρόταση) $\Leftrightarrow B'\subseteqq A'$. Ἕνεκα τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Leftrightarrow$ ἰσχύει τελικά ἡ πρόταση $A\subseteqq B \Leftrightarrow B'\subseteqq A'$.

<u>Ἰσχύει ἡ πρόταση:</u> $\forall x\in E, f_A(x) = 1-f_{A'}(x)$ ὅπου τό σύνολο A εἶναι ὑποσύνολο τοῦ $E\neq\emptyset$ καί τό A' συμπλήρωμα τοῦ A ὡς πρός τό E. Πραγματικά,

$x\in E \Rightarrow x\in A \veebar x\in A' \Rightarrow (f_A(x)=1 \wedge f_{A'}(x)=0) \veebar (f_A(x)=0 \wedge f_{A'}(x)=1) \Rightarrow (f_A(x)=1 \wedge 1-f_{A'}(x)=1) \veebar (f_A(x)=0 \wedge 1-f_{A'}(x)=0) \Rightarrow \quad (f_A(x)=1-f_{A'}(x))$.

19.6 <u>Θά δείξουμε τήν πρόταση: $\forall x\in E,\ f_{A\cap B}(x)=f_A(x)\cdot f_B(x)$</u>

Πραγματικά, $x\in E \Rightarrow (x\in A\wedge x\in B) \vee (x\in A\wedge x\notin B) \vee (x\notin A\wedge x\in B) \vee (x\notin A\wedge x\notin B\wedge x\in E) \Rightarrow (x\in A\wedge x\in B\wedge x\in A\cap B) \vee (x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin A\cap B) \vee (x\notin A\wedge x\in B\wedge x\notin A\cap B) \vee (x\notin A\wedge x\notin B\wedge x\notin A\cap B\wedge x\in E) \Rightarrow (f_A(x)=1\wedge f_B(x)=1\wedge f_{A\cap B}(x)=1) \vee (f_A(x)=1\wedge f_B(x)=0\wedge f_{A\cap B}(x)=0) \vee (f_A(x)=0 \wedge f_B(x)=1\wedge f_{A\cap B}(x)=0) \vee (f_A(x)=0\wedge f_B(x)=0\wedge f_{A\cap B}(x)=0) \Rightarrow f_{A\cap B}(x) = f_A(x)\cdot f_B(x)$

19.7 <u>Θά δείξουμε τήν πρόταση:</u>

<u>$\forall x\in E,\ f_{A\cup B}(x)=f_A(x)+f_B(x)-f_A(x)\cdot f_B(x)$</u> Πραγματικά, $x\in E \Rightarrow (x\in A\wedge x\in B) \vee (x\in A\wedge x\notin B) \vee (x\notin A\wedge x\in B) \vee (x\notin A\wedge x\notin B\wedge x\in E) \Rightarrow (x\in A\wedge x\in B\wedge x\in A\cup B) \vee (x\in A\wedge x\notin B\wedge x\in A\cup B) \vee (x\notin A\wedge x\in B\wedge x\in A\cup B) \vee (x\notin A\wedge x\notin B\wedge x\notin A\cup B\wedge x\in E) \Rightarrow (f_A(x)=1\wedge f_B(x)=1\wedge f_{A\cup B}(x)=1) \vee (f_A(x)=1\wedge f_B(x)=0\wedge f_{A\cup B}(x)=1) \vee (f_A(x)=0\wedge f_B(x)=1\wedge f_{A\cup B}(x)=1) \vee (f_A(x)=0\wedge f_B(x)=0\wedge f_{A\cup B}(x)=0) \Rightarrow (f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x)-f_A(x)\cdot f_B(x))$.

19.8 <u>Θά δείξουμε τήν πρόταση $\forall x\in E,\ F_{A-B}(x)=f_A(x)\cdot\big(1-f_B(x)\big)$</u>

Πραγματικά, $f_{A-B}(x)=f_{A\cap B'}(x)=f_A(x)\cdot f_{B'}(x)=f_A(x)\cdot[1-f_B(x)]$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς ἰσότητας ἰσχύει τελικά ἡ παραπάνω πρόταση.

19.9 <u>Θά δείξουμε τήν πρόταση:</u>

<u>$\forall x\in E, f_{A\dotplus B}(x)=f_A(x)+f_B(x)-2f_A(x)\cdot f_B(x)$</u>. Πραγματικά, $x\in E \Rightarrow (x\in A\wedge x\in B) \vee (x\in A\wedge x\notin B) \vee (x\notin A\wedge x\in B) \vee (x\notin A\wedge x\notin B\wedge x\in E) \Rightarrow (x\in A\wedge x\in B\wedge x\notin A\dotplus B) \vee (x\in A\wedge x\notin B\wedge x\in A\dotplus B) \vee (x\notin A\wedge x\in B\wedge x\in A\dotplus B) \vee (x\notin A\wedge x\notin B\wedge x\notin A\dotplus B\wedge x\in E) \Rightarrow (f_A(x)=1\wedge f_B(x)=1\wedge f_{A\dotplus B}(x)=0) \vee (f_A(x)=1\wedge f_B(x)=0\wedge f_{A\dotplus B}(x)=1) \vee (f_A(x)=0\wedge f_B(x)=1\wedge$

$f_{A\dot{+}B}(x)=1) \vee (f_A(x)=0 \wedge f_B(x)=0 \wedge f_{A\dot{+}B}(x)=0) \Rightarrow$
$f_A(x)+f_B(x)-2f_A(x)\cdot f_B(x) = f_{A\dot{+}B}(x)$.

19.10 Στήν παρ.19.2 εἴδαμε ὅτι δύο σύνολα εἶναι ἴσα ἄν καί μόνο ἄν ἔχουν ἴσες χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Πρόκειται γιά τήν πρόταση $M=\Sigma \Leftrightarrow \forall x\in E, f_M(x)=f_\Sigma(x)$. Θά ἀποδείξουμε μέ τήν μέθοδο αὐτή τό νόμο τοῦ de Morgan $(A\cap B)'=A'\cup B'$. Θά δείξουμε δηλαδή τήν πρόταση $\forall x\in E$, $f_{(A\cap B)'}(x)=f_{A'\cup B'}(x)$. Πραγματικά,
$f_{(A\cap B)'}(x)=1-f_{A\cap B}(x)=1-f_A(x)\cdot f_B(x)=1-f_A(x)+1-f_B(x)-1+f_A(x)+f_B(x)-f_A(x)\cdot f_B(x)=(1-f_A(x))+(1-f_B(x))-(1-f_A(x))\cdot(1-f_B(x))=f_{A'}(x)+f_{B'}(x)-f_{A'}(x)\cdot f_{B'}(x)=f_{A'\cup B'}(x)$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς ἰσότητας ἰσχύει ἡ παραπάνω πρόταση.

Ἀσκήσεις

1. Ἄν $\lambda\in\{\alpha,\beta,\gamma\}$ τί μπορεῖ νά ἰσχύει μεταξύ τῶν α,β,γ καί λ;

2. Κατά τί διαφέρει τό σύνολο $A=\{\alpha,\beta\}$ ἀπό τό σύνολο $\{A\}$ ἤ μήπως εἶναι ἴσα;

3. Ἄν $\lambda\in\{\alpha,\beta\}$, $\mu\in\{\alpha,\beta\}$, $\nu\in\{\alpha,\beta\}$ ποιές σχέσεις εἶναι δυνατό νά συνδέουν τά λ,μ,ν;

4. Διαφέρουν ἤ ὄχι τά σύνολα Σ καί $\{x:x\in\Sigma\}$; Τό $\{\psi:\psi\in\Sigma\}$ διαφέρει ἀπό τά προηγούμενα;

5. Νά παρασταθεῖ τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν πού διαιροῦνται ἀκριβῶς διά τοῦ πέντε.

6. Νά παρασταθεῖ τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν πού ἀνά δύο λαμβανόμενοι ἔχουν ἄθροισμα τό πολύ 6.

7. Νά παρασταθεῖ τό σύνολο τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν πού εἶναι μεγαλύτεροι ἀπό τόν -2300 καί μικρότεροι ἤ ἴσοι μέ τόν 100.

8. Νά πρασταθεῖ τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν πού εἶναι μεγαλύτεροι ἀπό τόν ἀριθμό $\frac{1}{2}$.

9. Ἀνάμεσα σέ δύο σύνολα Α καί Β ἰσχύει ἤ ὄχι ὑποχρεωτικά μία ἀπό τίς σχέσεις $A\subset B$, $B\subset A$, $A=B$;

10. Ἀνάμεσα σέ δύο σύνολα Α καί Β ἰσχύει ἤ ὄχι ὑποχρεωτικά μία ἀπό τίς σχέσεις $A\subset B$, $B\subset A$, $A=B$, $A\cap B=\emptyset$;

11. Ποιό εἶναι τό σύνολο Α ὅταν ἰσχύει ἡ $\{1,4,7\}\subseteqq A\subset\{1,4,7,8\}$;

12. Νά δοθοῦν οἱ ὁρισμοί τοῦ ὑπερσυνόλου καί τοῦ γνήσιου ὑπερσυνόλου ἀπ᾽εὐθείας χωρίς τή βοήθεια τοῦ ὑποσυνόλου καί τοῦ γνήσιου ὑποσυνόλου.

13. Νά γραφοῦν δύο σύνολα πού νά μήν εἶναι συγκρίσιμα.

14. Νά δοθοῦν παραδείγματα τῶν σχέσεων $\subseteqq$, $\supseteqq$, $=$, $\subset$ καί $\supset$.

15. Ποιές ἀπό τίς σχέσεις $\subseteqq$, $\supseteqq$, $=$, $\neq$, $\subset$, $\supset$ ἀποκλείουν ἡ μία τήν ἄλλη;

16. Πόσα καί ποιά στοιχεῖα ἔχει τό σύνολο $\mathscr{P}(\emptyset)$ δυναμοσύνολο τοῦ κενοῦ συνόλου;

17. Ὅταν τό σύνολο Ε ἔχει n στοιχεῖα τότε τό $\mathscr{P}(E)$ ἔχει 2^n στοιχεῖα (παρ.4). Πῶς μπορεῖ νά γίνει ὁ ὑπολογισμός;

18. Ἄν $A\subseteqq B$ καί $\Gamma\subseteqq\Delta$ νά δειχτεῖ ὅτι $A\times\Gamma\subseteqq B\times\Delta$.

19. Ἄν $A\subset B$ καί $\Gamma\subset\Delta$ τότε εἶναι πάντοτε καί $A\times\Gamma\subset B\times\Delta$ ἤ ὄχι;

20. Ἄν $A\times B=A\times\Gamma$ ἰσχύει ἡ $B=\Gamma$ πάντοτε ἤ ὄχι;

21. Πόσα στοιχεῖα ἔχει τό σύνολο $A\times B$ ὅταν τό Α ἔχει 3 στοιχεῖα καί 15 τό Β;

22. Ἰσχύει ὁ προσεταιριστικός νόμος $(A\times B)\times\Gamma=A\times(B\times\Gamma)$ ἤ ὄχι;

23. Νά δειχτεῖ ὅτι τό καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\eta$ δέν μεταβάλλεται μέ ὁποιαδήποτε σειρά καί ἄν γραφοῦν οἱ παράγοντές του ἄν καί μόνο ἄν ἕνας τουλάχιστο παράγοντας εἶναι κενό σύνολο ἤ $A_1 = A_2 = \ldots = A_\eta$.

24. Νά ἀποδειχτοῦν προτάσεις τῆς παρ.8 ἀπό αὐτές πού δέν ἔχουμε ἀποδείξει μέ τή μέθοδο πού περιγράφεται στή παρ. 8.3. Ἐπίσης μέ τή μέθοδο τῆς παρ. 8.6.

25. Νά ἀποδειχτοῦν μέ τή γραφική μέθοδο μερικές ἀπό τίς προτάσεις τῆς παρ. 8. Ἐπίσης μέ τή βοήθεια τῶν χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων.

26. Γνωρίζουμε ὅτι $(A')' = A$. Νά δειχτεῖ ὅτι τό A μέ άρτιο ἀριθμό τόνων εἶναι ἴσο μέ τό A καί μέ περιττό ἀριθμό τόνων εἶναι ἴσο μέ τό A'.

27. Νά δειχτεῖ μέ τή μέθοδο τῆς παρ. 8.10 ἡ ἰσότητα $(A \dotplus B)' = (A \cup B') \cap (A' \cup B)$.

28. Νά ἀποδειχτοῦν οἱ δύο προτάσεις τῆς παρ. 9

29. Ἡ ἀπεικόνιση $A \ni x \longleftrightarrow x \in A$ ὀνομάζεται <u>ταυτοτική</u>. Νά δειχτεῖ ὅτι εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη.

30. Νά δοθοῦν παραδείγματα ἀπεικονίσεων 1) πολλῶν πρός ἕνα 2) ἕνα πρός ἕνα 3) ἕνα πρός πολλά.

31. Μέ τήν ἀπεικόνιση $N \ni n \longleftrightarrow 2n \in N_{2n}$ ἀντιστοιχίζονται τά στοιχεῖα τοῦ N μέ τά στοιχεῖα τοῦ N_{2n} (παρ.17.2) χωρίς νά περισσεύει κανένα στοιχεῖο τοῦ N. Ὅμως ὑπάρχει καί ἡ ἀπεικόνιση $N_{2n} \ni 2n \longleftrightarrow 2n \in N$ (τοῦ N_{2n} στό N) κατά τήν ὁποία περισσεύουν ἀπό τό N τά στοιχεῖα του πού εἶναι περιττοί ἀριθμοί. Εἶναι συμβιβαστά αὐτά μέ τόν ὁρισμό τῶν ἰσοδυνάμων συνόλων καί γιατί;

32. Νά δειχτεῖ ἡ ἰσότητα $A - (B - \Gamma) = A \cap (B' \cup \Gamma)$.

33. Ἰσχύει ἤ ὄχι ἡ ἰσότητα $\varphi(A \dotplus B) = \varphi(A) \dotplus \varphi(B)$;

34. Τά ἴσα σύνολα εἶναι ἰσοδύναμα; Τά ἰσοδύναμα σύνολα εἶναι ἴσα;

35. Νά δειχτεῖ ἡ ἰσότητα $A \cap B \times \Gamma \cap \Delta = A \times \Gamma \cap B \times \Delta$

36. Νά δειχτεῖ ἡ ἰσότητα $[\varphi(A)]' = \varphi(A')$ ἄν φ εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ συνόλου E πάνω στό $\varphi(E)$ καί A εἶναι ἕνα ὑποσύνολο τοῦ E. Ἐπίσης τό συμπλήρωμα τοῦ $\varphi(A)$ ἔχει παρθεῖ ὡς πρός τό σύνολο $\varphi(E)$.

37. Νά ὁριστοῦν τά x καί ψ στό R ὥστε νά ἰσχύει ἡ σχέση $\{x+\psi, x-\psi\} \subseteqq \{5, \frac{1}{2}\}$. Ἐπίσης ἡ $\{x+\psi, x-\psi\} \subseteqq \{1, 2, -5\}$.

38. Νά δειχτεῖ ἡ $A-(B \cap \Gamma) = (A-B) \cup (A-\Gamma)$ στό $\mathscr{P}(E)$.

39. Ἄν τά σύνολα A, B, Γ εἶναι ὑποσύνολα τοῦ βασικοῦ συνόλου E, νά δειχτοῦν οἱ:

$$A \subseteqq B \Leftrightarrow \mathscr{P}(A) \subseteqq \mathscr{P}(B)$$
$$\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$$

40. E εἶναι τό σύνολο τῶν φοιτητῶν τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν καί A_1, A_2, A_3, A_4 τά σύνολα τῶν πρωτοετῶν, δευτεροετῶν, τριτοετῶν καί τεταρτοετῶν, ἀντίστοιχα. Ἀκόμη B εἶναι τό σύνολο τῶν φοιτητριῶν καί K τό σύνολο τῶν Κυπρίων φοιτητῶν. Νά προσδιοριστεῖ ποιοί φοιτητές ἀνήκουν στά ἑπόμενα σύνολα: $(A_1 \cup A_2)' \cap B$, $B \cap K'$, $A_1 \cap B' \cap K$, $A_3 \cap B \cap K'$, $(A_1 \cup A_2) \cap K \cap B$ (Ἀπό τή θεωρία πιθανοτήτων τοῦ κ.Θ.Κάκουλλου).

41. Ἄν A, B, Γ εἶναι ὑποσύνολα τοῦ βασικοῦ συνόλου E νά δειχτοῦν οἱ ἰσότητες:

$A-(B \cup \Gamma) = (A-B) \cap (A-\Gamma)$, $(A-B) \cup (A-B') = A$, $A \dotplus (A \cap B) = A-B$, $A-(A-B) = A \cap B$ καί ἡ $A \subseteqq B \Rightarrow \Gamma - B \subseteqq \Gamma - A$.

42. Ἄν A, B, Γ, Δ εἶναι ὑποσύνολα τοῦ βασικοῦ συνόλου E, νά δειχτοῦν οἱ: $(A-B) \times (\Gamma-\Delta) = (A \times \Gamma) \cap (B' \times \Delta')$, $(A-B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) - (B \times \Gamma)$, $(\Gamma \times \Delta) - (A \times B) = [(\Gamma - A) \times \Delta] \cup [\Gamma \times (\Delta - B)]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ. ΣΧΕΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗΣ.

1. Διμελεῖς σχέσεις

1.1 Μία διμελής ἤ δυαδική σχέση σ ἀπό τό σύνολο A στό σύνολο B εἶναι ἕνα ὑποσύνολο τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου A×B. Μέ ἄλλα λόγια, εἶναι μία ἀπεικόνιση μέ σύνολο ἀφετηρίας τό A καί ἄφιξης τό B. Ἔχουμε: $\sigma \subseteqq A\times B$.

Ἄν A=B τότε ἔχουμε μία δυαδική σχέση στό σύνολο A (ἤ καί B), δηλαδή μία διμελής ἤ δυαδική σχέση σ στό A εἶναι ἕνα ὑποσύνολο τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου A×A (τοῦ A^2). Μέ ἄλλα λόγια, εἶναι μία ἀπεικόνιση μέ σύνολο ἀφετηρίας καί ἄφιξης τό A. Ἔχουμε: $\sigma \subseteqq A\times A$ ἤ $\sigma \subseteqq A^2$. Τά στοιχεῖα τοῦ A πού εἶναι πρότυπα κατά τήν ἀπεικόνιση σ ὁρίζουν τό σύνολο Π_σ πού ὀνομάζεται πεδίο ὁρισμοῦ τῆς σχέσης σ. Εἶναι προφανῶς $\Pi_\sigma \subseteqq A$. Πεδίο τιμῶν τῆς σ εἶναι τό σύνολο τῶν στοιχείων τοῦ A πού εἶναι εἰκόνες κατά τήν σ ἀπεικόνιση. Θά τό παριστάνουμε μέ E_σ. Εἶναι $E_\sigma \subseteqq A$. Ἀκόμη $\Pi_\sigma \cup E_\sigma \subseteqq A$. Ἐπίσης $\sigma \subseteqq \Pi_\sigma \times E_\sigma$.

Στά ἐπόμενα ὅταν θά ἀναφερόμαστε σέ μία σχέση σ στό σύνολο Α ὡς Α θά θεωροῦμε τό σύνολο $\Pi_\sigma \cup E_\sigma$ ἤ ἕνα γνήσιο ὑπερσύνολό του.

῾Η σ εἶναι κενή ἄν καί μόνο ἄν $\sigma=\emptyset$. ῾Η σ εἶναι πλήρης ἄν καί μόνο ἄν $\sigma=A\times A$. Σύμφωνα μ᾿αὐτά πού εἴδαμε καί στό κεφ. II μία συνάρτηση φ εἶναι μία διμελής σχέση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό πεδίου ὁρισμοῦ Μ τῆς συνάρτησης καί μέ πεδίο τιμῶν τό φ(Μ). Εἶναι $\varphi\subseteqq M\times\varphi(M)$. ᾿Επίσης μία ἀκολουθία α (κεφ. II) στοιχείων τοῦ Ε εἶνει διμελής σχέση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο Ν καί πεδίο τιμῶν τό $\alpha(N)\subseteqq E$. Εἶναι $\alpha\subseteqq N\times\alpha(N)$.

῾Η σχέση σάν ἀπεικόνιση πού εἶναι ἔχει καί τό λεγόμενο τύπο. ᾿Ισχύουν ὅσα στό κεφ II ἀναφέραμε γιά τήν ἀπεικόνιση.

῾Η διμελής σχέση σ στό σύνολο Α ($\sigma\subseteqq A^2$) ἰσχύει μεταξύ τῶν στοιχείων x καί ψ τοῦ Α ἄν καί μόνο ἄν $(x,\psi)\in\sigma$. ᾿Αντί γιά $(x,\psi)\in\sigma$ γράφουμε $x\sigma\psi$. Συμβολικά:

$$x\sigma\psi \underset{o\rho\sigma}{\Longleftrightarrow} (x,\psi)\in\sigma.$$

1.2 ῾Η σχέση $\sigma_1=\{(1,2),(1,4),(3,4)\}$ στό σύνολο $A_1=\{1,2,3,4\}$ εἶναι διμελής μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $\Pi_{\sigma_1}=\{1,3\}$ καί πεδίο τιμῶν τό $E_{\sigma_1}=\{2,4\}$. Εἶναι $1\sigma_1 4$ γιατί $(1,4)\in\sigma_1$ ὅμως $4\not\sigma_1 3$ γιατί $(4,3)\notin\sigma_1$. ῾Η σ_1 δέν εἶναι συνάρτηση γιατί στό $1\in\Pi_{\sigma_1}$ ἀντιστοιχοῦν δύο στοιχεῖα, τά 2 καί 4 τοῦ E_{σ_1}.

῾Η σχέση $\sigma_2=\{(1,6),(2,6),(3,5),(4,5)\}$ στό σύνολο $A_2=\{1,2,3,4,5,6\}$ ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $\{1,2,3,4\}$ καί πεδίο τιμῶν τό σύνολο $\{5,6\}$. Ἔχουμε $1\sigma_2 6$ γιατί $(1,6)\in\sigma_2$ ὅμως $5\not\sigma_2 6$ γιατί $(5,6)\notin\sigma_2$.

῾Η σχέση $<$ τοῦ μικρότερου στό σύνολο Ν εἶναι τό σύνολο $\{(x,\psi)\in N^2 : x<\psi\}$ ὑποσύνολο τοῦ N^2. Τό Ν εἶναι πεδίο ὁρισμοῦ. ᾿Ακόμη εἶναι πεδίο τιμῶν τῆς $<$. ᾿Επίσης ἡ σχέση = τῆς ἰσότητας στό Ν εἶναι τό σύνολο

$\{(1,1),(2,2),(3,3),\ldots\}$ δηλαδή $\{(x,\psi)\in N^2 : x=\psi\}$.

Ἡ σχέση $\subseteqq$ τοῦ ὑποσυνόλου στό σύνολο $\mathcal{P}(E)$ εἶναι τό σύνολο $\{(A,B)\in \mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E) : A\subseteqq B\}$. Πρόκειται γιά ὑποσύνολο τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $\mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E)$. Πεδίο ὁρισμοῦ καί πεδίο τιμῶν τῆς $\subseteqq$ εἶναι τό $\mathcal{P}(E)$.

1.3 Γιά τίς ἴσες καί τίς ἀντίστροφες σχέσεις ἰσχύουν τά ἀναφερθέντα στό κεφάλαιο ΙΙ, παρ. 12 γενικά γιά τίς ἀπεικονίσεις.

2. Σχέσεις αὐτοπαθεῖς ἤ ἀνακλαστικές καί ἀναυτοπαθεῖς ἤ ἀνανακλαστικές.

2.1 Μία μή κενή διμελής σχέση σ στό σύνολο Α εἶναι αὐτοπαθής ἤ ἀνακλαστική ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall x\in A$, $x\sigma x$ (δηλασή $(x,x)\in\sigma$).

2.2 Μία μή κενή διμελής σχέση σ στό σύνολο Α εἶναι μή αὐτοπαθής ἤ μή ἀνακλαστική ἄν καί μόνο ἄν δέν εἶναι αὐτοπαθής, δηλαδή ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση $\exists x\in A$, $x\not\sigma x$ (κεφ. Ι. παρ.6). Ἕνα εἶδος μή ἀνακλαστικῆς σχέσης εἶναι ἡ ἀναυτοπαθής ἤ ἀνανακλαστική. Ἔχουμε τόν ἑπόμενο ὁρισμό: "Μία μή κενή διμελής σχέση σ στό σύνολο Α εἶναι ἀναυτοπαθής ἤ ἀνανακλαστική, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall x\in A, x\not\sigma x$" Εἶναι σχέση μή ἀνακλαστική γιατί ἰσχύει ἡ πρόταση

$\forall x\in A,\ x\not\sigma x \Rightarrow \exists x\in A,\ x\not\sigma x$

2.3 Ἡ σχέση $\sigma_1=\{(3,1),(1,1),(2,2),(3,3)\}$ εἶναι αὐτοπαθής στό σύνολο $A_1=\{1,2,3\}$ εἶναι ὅμως μή αὐτοπαθής στό σύνολο $A_2=\{1,2,3,4\}$ γιατί $4\not\sigma_1 4$. Ἐπίσης δέν εἶναι ἀναυτοπαθής στό A_1 καί στό A_2 γιατί π.χ. ἰσχύει ἡ $1\sigma_1 1$. Ἡ σχέση $\sigma_2=\{(1,1),(2,2),(3,4)\}$ εἶναι μή αὐτοπαθής στό σύνολο A_2 καθώς καί σέ ὁποιοδήποτε ὑπερσύνολο τοῦ A_2. Ἐπίσης δέν εἶναι ἀνανακλαστική. Τέλος, ἡ $\sigma_3=\{(1,2),(3,4)\}$ εἶναι μή αὐτοπαθής καί ειδικότερα ἀναυτοπαθής στό A_2 καί σέ κάθε ὑπερσύνολο τοῦ A_2

Ἡ σχέση τῆς ἰσότητας σέ ὁποιοδήποτε σύνολο εἶναι αὐτοπαθής (πρόκειται γιά ἀξίωμα) π.χ στό σύνολο $\{1,5,9\}$ ἡ σχέση τῆς ἰσότητας εἶναι τό σύνολο: $\{(1,1),(5,5),(9,9)\}$ ὑποσύνολο τοῦ $\{1,5,9\}\times\{1,5,9\}$. Γενικότερα ἡ σχέση τῆς ἰσότητας σέ ἕνα σύνολο A εἶναι τό σύνολο $\{(x,\psi)\in A^2 : x=\psi\}$ ὑποσύνολο τοῦ A^2. Ἡ σχέση ἰσοδυναμίας μεταξύ προτάσεων εἶναι αὐτοπαθής. Ἐπίσης ἡ σχέση ἰσοδυναμίας μεταξύ συνόλων (κεφ. II) εἶναι αὐτοπαθής, δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall A\in\mathcal{P}(E)$, $A\sim A$. Οἱ σχέσεις τοῦ ὑποσυνόλου $\subseteqq$ καί τοῦ ὑπερσυνόλου $\supseteqq$ εἶναι αὐτοπαθεῖς γιατί σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τους ἰσχύουν οἱ προτάσεις:
$\forall A\in\mathcal{P}(E)$, $A\subseteqq A$ καί $\forall A\in\mathcal{P}(E)$, $A\supseteqq A$. Μία πλήρης μή κενή σχέση σ στό A εἶναι αὐτοπαθής, γιατί ἡ $\forall\alpha\in A$, $\alpha\sigma\alpha$ εἶναι ἀληθής. Πραγματικά, γιά $\alpha\in A$ ἔχουμε $(\alpha,\alpha)\in A^2$ καί ἐπειδή $\sigma=A^2$ εἶναι καί $(\alpha,\alpha)\in\sigma$ δηλαδή $\alpha\sigma\alpha$. Ἡ σχέση $\leqq$ καθώς καί ἡ $\geqq$ στό σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι αὐτοπαθής γιατί ἰσχύει ἡ $\forall x\in R$, $x\leqq x$ καί ἡ $\forall x\in R$, $x\geqq x$.
Ἡ σχέση I τοῦ "διαιρεῖ" εἶναι αὐτοπαθής στό Z γιατό κάθε ἀκέραιος ἀριθμός διαιρεῖ ἀκριβῶς τόν ἑαυτό του. Ἡ σχέση τῆς ὁμοιότητας μεταξύ τῶν κυρτῶν πολυγώνων ἑνός ἐπιπέδου εἶναι αὐτοπαθής γιατί κάθε πολύγωνο εἶναι ὅμοιο μέ τόν ἑαυτό του. Ἐπίσης ἡ σχέση τῆς συμπτωσιμότητας ἤ παραλληλίας μεταξύ τῶν εὐθειῶν ἑνός ἐπιπέδου εἶναι αὐτοπαθής γιατί κάθε εὐθεία συμπίπτει μέ τόν ἑαυτό της.

Ἡ σχέση τοῦ γνήσιου ὑποσυνόλου δέν εἶναι αὐτοπαθής γιατί σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό της ἰσχύει ἡ $\forall A\in\mathcal{P}(E), A\not\subset A$ ἐπομένως ἰσχύει καί ἡ $\exists A\in\mathcal{P}(E), A\not\subset A$ δηλαδή εἶναι μή αὐτοπαθής καί μάλιστα ἀναυτοπαθής. Ἐπίσης ἡ σχέση τοῦ γνήσιου ὑπερσυνόλου εἶναι μή αὐτοπαθής. Μή αὐτοπαθεῖς στό R εἶναι καί οἱ σχέσεις τοῦ μικρότερου $<$ καί τοῦ μεγαλύτερου $>$ γιατί π.χ. ἰσχύει ἡ $5\not<5$. Ἡ σχέση καθετότητας μεταξύ τῶν εὐθειῶν ἑνός ἐπιπέδου εἶναι μή ἀνακλαστική γιατί καμμιά εὐθεία δέν εἶναι κάθετη στόν ἑαυτό της. Οἱ παραπάνω μή αὐτοπαθεῖς σχέσεις εἶναι εἰδικότερα ἀναυτοπαθεῖς.

3. Σχέσεις συμμετρικές καί μή συμμετρικές.

3.1 Μία μή κενή διμελής σχέση σ στό σύνολο Α εἶναι συμμετρική ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση $x\sigma\psi \Rightarrow \psi\sigma x$. Μέ βάση τόν ἴδιο ὁρισμό, ὅταν ἰσχύει ἡ $\psi\sigma x$ τότε ἰσχύει καί ἡ $x\sigma\psi$ καί οἱ $x\sigma\psi \Rightarrow \psi\sigma x$, $\psi\sigma x \Rightarrow x\sigma\psi$, $x\sigma\psi \Leftrightarrow \psi\sigma x$ εἶναι ἰσοδύναμες. Ἡ σχέση $\sigma_1=\{(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(1,1)\}$ εἶναι συμμετρική στό σύνολο $A_1=\{1,2,3\}$ καθώς καί σέ κάθε ὑπερσύνολο τοῦ A_1.

3.2 Ἔχουμε ἀκόμη τόν ἑπόμενο ὁρισμό τῆς συμμετρικῆς σχέσης.

Μία μή κενή διμελής σχέση σ στό σύνολο Α εἶναι συμμετρική ἄν καί μόνο ἄν εἶναι ἴση (συμπίπτει) μέ τήν ἀντίστροφή της σ^{-1} (δηλαδή $\sigma=\sigma^{-1}$). Οἱ ὁρισμοί τῶν παραγράφων 3.1 καί 3.2 εἶναι ἰσοδύναμοι: Πραγματικά: [Ἡ σ εἶναι συμμετρική στό $A \Leftrightarrow x\sigma\psi \Leftrightarrow \psi\sigma x$ (ὁρισμός παρ. 3.1)] $\Leftrightarrow$ [Ἡ σ εἶναι συμμετρική στό Α $\Leftrightarrow (x\sigma\psi \Leftrightarrow x\sigma^{-1}\psi)$] $\Leftrightarrow$ [Ἡ σ εἶναι συμμετρική στό $A \Leftrightarrow \sigma=\sigma^{-1}$ (παρ. 1.3)]. Ἄν πάρουμε ὑπόψη καί τή μεταβατικότητα τῆς $\Leftrightarrow$ ἡ ἰσοδυναμία τῶν δύο ὁρισμῶν εἶναι ἀποδειγμένη.

3.3 Ἡ σχέση $\sigma_1=\{(1,3),(4,5),(1,1),(5,4),(3,1)\}$ εἶναι συμμετρική γιατί συμπίπτει (εἶναι ἴση) μέ τήν ἀντίστροφή της $\sigma_1^{-1}=\{(3,1),(5,4),(1,1),(4,5),(1,3)\}$. Ἡ σχέση $\sigma_2=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ εἶναι συμμετρική γιατί εἶναι ἴση μέ τήν ἀντίστροφή της $\sigma_2^{-1}=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

Ἡ σχέση τῆς ἰσότητας σέ ὁποιοδήποτε σύνολο Α εἶναι συμμετρική, ἰσχύει δηλαδή ἡ $x=\psi \Rightarrow \psi=x$. Πρόκειται γιά ἀξίωμα. Ἡ σχέση τῆς ἰσοδυναμίας μεταξύ προτάσεων εἶναι συμμετρική. Ἡ σχέση ἰσοδυναμίας μεταξύ συνόλων εἶναι συμμετρική (κεφ.II) γιατί ἰσχύει ἡ $A \sim B \Rightarrow B \sim A$. Μία πλήρης μή κενή σχέση σ_3 σέ ἕνα σύνολο A εἶναι συμμετρική. Πραγματικά γιά τά στοιχεῖα x καί ψ τοῦ A ἰσχύει ἡ $(x,\psi) \in A^2 \Rightarrow (\psi,x) \in A^2$ καί ἐπειδή $\sigma_3 = A^2$ ἰσχύει ἡ $(x,\psi) \in \sigma_3 \Rightarrow (\psi,x) \in \sigma_3$ δηλαδή ἡ $x\sigma_3\psi \Rightarrow \psi\sigma_3 x$. Ἡ σχέση καθετότητας $\perp$ μεταξύ τῶν εὐθειῶν ἑνός ἐπιπέδου εἶναι συμμετρική γιατί ἄν $\alpha \perp \beta$ εἶναι καί $\beta \perp \alpha$. Ἡ σχέση συμπτωσιμότητας ἤ παραλληλίας εἶναι συμμετρική. Τό ἴδιο εἶναι συμμετρική καί ἡ σχέση τῆς παραλληλίας μέ τή στενή ἔννοια (ἐκείνη πού ἀποκλείει τήν συμπτωσιμότητα).

.4 Μία μή κενή διμελής σχέση σ στό σύνολο A εἶναι μή συμμετρική ἄν καί μόνο ἄν δέν εἶναι συμμετρική, δηλαδή ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ $\exists x \in A, \exists \psi \in A, x\sigma\psi \wedge \psi \not\sigma x$.

3.5 Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς παρ. 3.2 προκύπτει ὁ ἑπόμενος: Μία μή κενή διμελής σχέση σ στό σύνολο A εἶναι μή συμμετρική ἄν καί μόνο ἄν, $\sigma \neq \sigma^{-1}$ π.χ ἡ σχέση $\sigma_1 = \{(1,1),(2,3),(3,2),(1,2)\}$ δέν εἶναι συμμετρική γιατί $\sigma_1^{-1} = \{(1,1),(3,2),(2,3),(2,1)\}$ καί εἶναι $\sigma_1 \neq \sigma_1^{-1}$ ἀφοῦ $(1,2) \in \sigma_1$ καί $(1,2) \notin \sigma_1^{-1}$.

3.6 Ἡ σχέση τοῦ "διαιρεῖ" στό Z εἶναι μή συμμετρική ἀφοῦ (παρ. 3.4) γιά $x=2 \in Z$ καί $\psi=-4 \in Z$ ἰσχύει ἡ $2|-4$ (ὁ 2 διαιρεῖ ἀκριβῶς τόν -4) ὅμως δέν ἰσχύει καί ἡ $-4|2$. Ἡ σχέση $<$ στό R δέν εἶναι συμμετρική ἀφοῦ π.χ (παρ.3.4) ἰσχύει ἡ πρόταση $2<8 \wedge 8 \nless 2$. Τά ἴδια ἰσχύουν καί γιά τή σχέση $>$ τοῦ μεγαλύτερου, τή σχέση $\leqq$ τοῦ μικρότερου ἤ ἴσου καί τήν $\geqq$. Ἐπίσης δέν εἶναι συμμετρικές οἱ σχέσεις $\subset$ καί $\supset$. Τέλος, ἡ σχέση $\subseteqq$ στό $\mathscr{P}(E)$ εἶναι μή συμμετρική ὅταν τό E δέν εἶναι κενό. π.χ ἄν $E=\{\alpha\}$ τότε $\mathscr{P}(E)=\{\emptyset,\{\alpha\}\}$ καί ἐνῶ ἰσχύει ἡ $\emptyset \subseteqq \{\alpha\}$

δέν ἰσχύει ἡ $\{\alpha\} \subseteqq \emptyset$. Ὅμως ἄν $E=\emptyset$ τότε $\mathscr{P}(E)=\{\emptyset\}$ καί ἡ $\subseteqq$ τότε εἶναι συμμετρική. Τά ἴδια ἰσχύουν καί γιά τήν σχέση $\supseteqq$.

4. Σχέσεις ἀντισυμμετρικές καί μή ἀντισυμμετρικές. Σχέση συμμετρική καί ἀντισυμμετρική μαζί.

4.1 Μία μή κενή διμελής σχέση σ, στό σύνολο Α εἶναι ἀντισυμμετρική, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση: $x\sigma\psi \wedge \psi\sigma x \Rightarrow x=\psi$ (Ἰσοδύναμα: Ἡ $x\neq\psi \wedge x\sigma\psi \Rightarrow \psi\not\sigma x$. Ἐπίσης ἡ $\nexists x \in A, \nexists\psi \in A$, $x\neq\psi \wedge x\sigma\psi \wedge \psi\sigma x$).

4.2 Μία μή κενή διμελής σχέση σ στό σύνολο Α εἶναι μή ἀντισυμμετρική ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση: $\exists x \in A$, $\exists \psi \in A$, $x\sigma\psi \wedge \psi\sigma x \wedge x\neq\psi$.

4.3 Ἡ σχέση τῆς ἰσότητας σέ ἕνα ὁποιοδήποτε σύνολο Α εἶναι ἀντισυμμετρική. Πραγματικά, ἰσχύει ἡ $x=\psi \wedge \psi=x \Rightarrow x=\psi$ γιατί $x=\psi \wedge \psi=x \Rightarrow$ (ἐπειδή εἶναι καί συμμετρική) $x=\psi \wedge x=\psi$ (ταυτοδυναμία) $\Rightarrow x=\psi$. Ἐπειδή ὅμως γνωρίζουμε ὅτι ἡ σχέση ἰσότητας εἶναι καί συμμετρική ἰσχύει ἡ πρόταση: Ἡ σχέση ἰσότητας σέ ἕνα ὁποιοδήποτε σύνολο Α εἶναι συμμετρική καί ἀντισυμμετρική.

Θά δείξουμε τώρα τήν πρόταση. Μία διμελής σχέση σ σέ ἕνα σύνολο Α συμμετρική καί ἀντισυμμετρική σ' αὐτό, εἶναι ὑποσύνολο τῆς σχέσης ἰσότητας στό Α. Στήν περίπτωση μάλιστα πού $A=\Pi_\sigma \cup E_\sigma$ τότε ἡ σ εἶναι σχέση ἰσότητας στό Α. Πραγματικά, γιά ἕνα ὁποιοδήποτε στοιχεῖο x τοῦ $\Pi_\sigma \cup E_\sigma$ ὑπάρχει ἕνα στοιχεῖο ψ τοῦ $\Pi_\sigma \cup E_\sigma$ τέτοιο ὥστε νά ἰσχύει ἡ $(x,\psi) \in \sigma$ ἤ ἡ $(\psi,x) \in \sigma$. Ἰσχύουν ὅμως καί οἱ δύο ἐπειδή ἡ σ ὑποτέθηκε συμμετρική δηλαδή ἰσχύει ἡ $x\sigma\psi$ καί ἡ $\psi\sigma x$ ἐπομένως καί ἡ $x\sigma\psi \wedge \psi\sigma x$. Ἀπό τήν τελευταία ἐπειδή ἡ σ εἶναι καί ἀντισυμμετρική προκύπτει ἡ $x=\psi$. Ἡ σ λοιπόν εἶναι σχέση ἰσότητας στό $\Pi_\sigma \cup E_\sigma$ (φυσικά εἶναι αὐτοπαθής στό $\Pi_\sigma \cup E_\sigma$).

Ἄν ἰσχύει ἡ $\Pi_\sigma \cup E_\sigma \subset A$ τότε ἡ σ εἶναι σχέση καί στό Α ἀφοῦ ἡ $\sigma \subseteqq (\Pi_\sigma \cup E_\sigma)^2$ συνεπάγεται τήν $\sigma \subseteqq A^2$ ὅμως τότε ὑπάρχει ἕνα στοιχεῖο λ τοῦ Α πού δέν ἀνήκει στό $\Pi_\sigma \cup E_\sigma$ ἐπομένως καί $(\lambda,\lambda) \notin \sigma$. Σ' αὐτή τήν περίπτωση λοιπόν ἡ σ δέν εἶναι σχέση ἰσότητας στό Α ἀλλά ἕνα γνήσιο ὑποσύνολό της (φυσικά εἶναι μή αὐτοπαθής στό Α).

4.4 Ἡ σχέση τοῦ ὑποσυνόλου $\subseteqq$ εἶναι ἀντισυμμετρική (κεφ. ΙΙ). Τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τή σχέση τοῦ ὑπερσυνόλου. Ἐπίσης ἡ σχέση $\leqq$ καί ἡ $\geqq$ στό σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν π.χ ἰσχύει ἡ $x \leqq \psi \wedge \psi \leqq x \Rightarrow x=\psi$. Ἡ σχέση τοῦ "διαιρεῖ" στό σύνολο N εἶναι ἀντισυμμετρική, δηλαδή ἰσχύει ἡ $x|\psi \wedge \psi|x \Rightarrow x=\psi$. Πραγματικά, ἄν ὁ x διαιρεῖ τόν ψ δηλαδή ἰσχύει ἡ $x|\psi$ τότε ὑπάρχει ἕνα $\lambda \in N$ τέτοιο ὥστε νά εἶναι $\psi=\lambda x$. Ἐπίσης ἡ $\psi|x$ συνεπάγεται τήν $x=\mu\psi$ ὅπου $\mu \in N$. Ἀπό τίς $\psi=\lambda x$ καί $x=\mu\psi$ προκύπτει ἡ $\psi=\lambda(\mu\psi)$. Στή συνέχεια ἔχουμε τήν $\psi=(\lambda\mu)\psi$ ἀπό τήν ὁποία προκύπτει ἡ $\lambda\mu=1$ καί $\lambda=\mu=1$. Ἀπό τήν $\mu=1$ καί τήν $x=\mu\psi$ προκύπτει ἡ $x=\psi$ καί ἡ σχέση τοῦ "διαιρεῖ" εἶναι ἀντισυμμετρική.

Ἀντίθετα ἡ σχέση τοῦ "διαιρεῖ" στό Z εἶναι μή ἀντισυμμετρική γιατί π.χ γιά $x=5$ καί $\psi=-5$ ἰσχύει ἡ πρόταση $5|-5 \wedge -5|5 \wedge 5 \neq -5$ (παρ. 4.2)

4.5 Ἡ σχέση $\sigma_1=\{(1,2),(2,1),(3,3),(4,5),(6,7)\}$ στό σύνολο $A_1=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ εἶναι μή ἀντισυμμετρική. Πραγματικά γιά $x=1$ καί $\psi=2$ ἰσχύει ἡ πρόταση $1\sigma_1 2 \wedge 2\sigma_1 1 \wedge 1 \neq 2$ (παρ. 4.2). Ἡ σχέση $\sigma_2=\{(1,1),(2,3),(4,5),(2,5)\}$ στό σύνολο $A_2=\{1,2,3,4,5\}$ εἶναι ἀντισυμμετρική. Πραγματικά, οἱ προτάσεις $1\sigma_2 1 \wedge 1\sigma_2 1 \wedge 1 \neq 1$, $2\sigma_2 3 \wedge 3\sigma_2 2 \wedge 2 \neq 3$, $4\sigma_2 5 \wedge 5\sigma_2 4 \wedge 4 \neq 5$, $2\sigma_2 5 \wedge 5\sigma_2 2 \wedge 2 \neq 5$ εἶναι ψευδεῖς (στήν πρώτη εἶναι ψευδές τό $1 \neq 1$, στήν δεύτερη ἡ $3\sigma_2 2$, στήν τρίτη ἡ $5\sigma_2 4$ καί στήν τέταρτη ἡ $5\sigma_2 2$) ἐπομένως εἶναι ἀληθής ἡ πρόταση $\nexists x \in A_2\ \nexists\psi \in A_2, x\sigma_2\psi \wedge \psi\sigma_2 x \wedge x\neq\psi$ (παρ. 4.1) καί ἡ σ_2 ἐπομένως εἶναι ἀντισυμμετρική. Ἡ σχέση $\sigma_3=\{(1,2)(3,4)\}$ στό σύνολο $A_3=\{1,2,3,4\}$ εἶναι ἀντισυμμετρική. Πραγματικά, οἱ προτάσεις $1\sigma_3 2\wedge 2\sigma_3 1\wedge 1\neq 2$, $3\sigma_3 4\wedge 4\sigma_3 3\wedge 3\neq 4$ εἶναι ψευδεῖς (ἡ πρώτη γιατί εἶναι ψευδής ἡ $2\sigma_3 1$ καί ἡ δεύτερη γιατί εἶναι ψευδής ἡ $4\sigma_3 3$). Ἡ πρόταση λοιπόν $\nexists x\in A_3, \nexists\psi\in A_3, x\sigma_3\psi\wedge \psi\sigma_3 x\wedge x\neq\psi$ (παρ.4.1) εἶναι ἀληθής καί ἡ σ_3 εἶναι συνεπῶς ἀντισυμμετρική. Εὔκολα φαίνεται ὅτι ἡ πρόταση τῆς παρ. 4.1 ἄν ἰσχύει (ἀντίστοιχα: δέν ἰσχύει) γιά μία σχέση σ σέ ἕνα σύνολο Α, τότε ἰσχύει (ἀντίστοιχα δέν ἰσχύει) καί στά ὑπερσύνολα τοῦ Α. Θά εἶναι λοιπόν ἡ σ καί στά ὑπερσύνολα τοῦ Α ἀντισυμμετρική (ἀντίστοιχα: μή ἀντισυμμετρική). Ἡ σχέση τοῦ γνήσιου ὑποσυνόλου εἶναι ἀντισυμμετρική γιατί εἶναι ἀληθής ἡ: $\nexists A\in \mathscr{P}(E), \nexists B\in\mathscr{P}(E), A\subset B\wedge B\subset A\wedge A\neq B$ (παρ. 4.1). Ἐπίσης ἀντισυμμετρική εἶναι καί ἡ σχέση $<$ στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν R γιατί εἶναι ἀληθής ἡ πρόταση $\nexists x\in R, \nexists\psi\in R,\ x<\psi\wedge\psi<x\wedge x\neq\psi$ (παρ. 4.1).

5. Σχέσεις μεταβατικές καί μή μεταβατικές. Σχέσεις συμμετρικές καί μεταβατικές μαζί.

5.1 Ἡ μή κενή διμελής σχέση σ εἶναι μεταβατική στό σύνολο Α ἄν καί μόνο ἄν, ἰσχύει ἡ πρόταση: $x\sigma\psi\wedge\psi\sigma\omega\Rightarrow x\sigma\omega$. Ἰσοδύναμα ἡ πρόταση: $\nexists x\in A, \nexists\psi\in A, \nexists\omega\in A, x\sigma\psi\wedge\psi\sigma\omega\wedge x\not\sigma\omega$.

5.2 Ἡ μή κενή διμελής σχέση σ στό σύνολο Α εἶναι μή μεταβατική ἄν καί μόνο ἄν δέν εἶναι μεταβατική δηλαδή ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση $\exists x\in A, \exists\psi\in A, \exists\omega\in A, x\sigma\psi\wedge \psi\sigma\omega\wedge x\not\sigma\omega$.

5.3 Ἡ σχέση ἰσότητας σέ ἕνα σύνολο Α εἶναι μεταβατική, δηλαδή ἰσχύει ἡ $x=\psi\wedge\psi=\omega\Rightarrow x=\omega$. Πρόκειται γιά ἀξίωμα. Ἡ σχέση ἰσοδυναμίας μεταξύ προτάσεων εἶναι μεταβατική. Ἡ σχέση ἰσοδυναμίας μεταξύ συνόλων (κεφ. II) εἶναι μεταβατική, δηλαδή ἰσχύει ἡ $A\sim B \wedge B\sim \Gamma \Rightarrow A\sim \Gamma$. Ἐπίσης μία πλήρης μή κενή διμελής σχέση σ στό A εἶναι μεταβατική. Πραγματικά, γιά x,ψ,ω στοιχεῖα τοῦ A ἰσχύει ἡ $(x,\psi)\in A^2 \wedge (\psi,\omega)\in A^2 \Rightarrow (x,\omega)\in A^2$ πού ἐπειδή $\sigma=A^2$ ἰσοδυναμεῖ μέ τήν $(x,\psi)\in\sigma \wedge (\psi,\omega)\in\sigma \Rightarrow (x,\omega)\in\sigma$ δηλαδή μέ τήν $x\sigma\psi \wedge \psi\sigma\omega \Rightarrow x\sigma\omega$.

Ἡ σχέση τοῦ ὑποσυνόλου εἶναι μεταβατική, δηλαδή ἰσχύει ἡ $A\subseteqq B \wedge B\subseteqq \Gamma \Rightarrow A\subseteqq \Gamma$. Τό ἴδιο, μεταβατική εἶναι καί ἡ σχέση τοῦ ὑπερσυνόλου. Ἐπίσης οἱ σχέσεις τοῦ γνήσιου ὑποσυνόλου καί τοῦ γνήσιου ὑπερσυνόλου εἶναι μεταβατικές. Ἡ σχέση τοῦ "διαιρεῖ" στά σύνολα N καί Z εἶναι μεταβατική δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση $x|\psi \wedge \psi|\omega \Rightarrow x|\omega$. Πραγματικά στό Z, $x|\psi \wedge \psi|\omega \Rightarrow \psi=\lambda x \wedge \omega=\mu\psi$ $(\lambda\in Z, \mu\in Z) \Rightarrow \omega=\mu(\lambda x) \Rightarrow \omega=(\mu\lambda)x$ $(\mu\lambda=\rho\in Z) \Rightarrow \omega=\rho x \Rightarrow x|\omega$. Οἱ σχέσεις $\leqq$, $\geqq$, $<$ καί $>$ εἶναι μεταβατικές στό σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καί στά ὑποσύνολά του N, Z καί Ω τῶν φυσικῶν, τῶν ἀκέραιων καί τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

Ἡ σχέση καθετότητας μεταξύ τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου εἶναι μή μεταβατική ὅμως ἡ σχέση παραλληλίας ἤ συμπτωσιμότητας εἶναι μεταβατική.

5.4 Ἡ σχέση $\sigma_1=\{(2,3),(3,4),(2,4),(1,2)\}$ στό σύνολο $A_1=\{1,2,3,4\}$ εἶναι μή μεταβατική γιατί γιά $x=1,\psi=2,\omega=3$ ἰσχύει ἡ πρόταση $1\sigma_1 2 \wedge 2\sigma_1 3 \wedge 1\not\sigma_1 3$ δηλαδή ἡ πρόταση τῆς παρ. 5.2.

Ἡ σχέση $\sigma_2=\{(1,1),(2,3),(3,4),(2,4),(5,6)\}$ εἶναι μεταβατική στό σύνολο $A_2=\{1,2,3,4,5,6\}$ γιατί ἰσχύει ἡ πρόταση τῆς παρ. 5.1

$\nexists x\in A_2\ \nexists\psi\in A_2,\ \nexists\omega\in A_2, x\sigma_2\psi \wedge \psi\sigma_2\omega \wedge x\not\sigma_2\omega$. Τέλος ἡ σχέση $\sigma_3=\{(1,2),(3,4)\}$ στό σύνολο $A=\{1,2,3,4,5\}$ εἶναι μεταβατική γιατί ἰσχύει ἡ πρόταση τῆς παρ.5.1 δηλαδή ἡ

$\nexists x\in A, \nexists \psi\in A, \nexists \omega\in A, x\sigma_3\psi\wedge\psi\sigma_3\omega\wedge x\not\sigma_3\omega$. Μία μεταβατική σχέση (ἀντίστοιχα: μή μεταβατική) σ σέ ἕνα σύνολο Α εἶναι μεταβατική (ἀντίστοιχα μή μεταβατική) καί στά ὑπερσύνολα τοῦ Α. Πραγματικά ἀμέσως φαίνεται ὅτι ἡ πρόταση τῆς παρ. 5.1 ἤ τῆς 5.2 δέν ἀλλάζει τιμή ἀληθείας μέ τό νά ἀναφερθοῦμε σέ ὑπερσύνολο τοῦ Α.

5.5 Θά δείξουμε τήν πρόταση: Μία διμελής σχέση σ συμμετρική καί μεταβατική στό σύνολο Α εἶναι καί αὐτοπαθής στό Α, ἄν καί μόνο ἄν $A=\Pi_\sigma\cup E_\sigma$

Πραγμαικά, γιά ὁποιοδήποτε στοιχεῖο x τοῦ $\Pi_\sigma\cup E_\sigma$ ὑπάρχει στοιχεῖο ψ τοῦ $\Pi_\sigma\cup E_\sigma$ τέτοιο ὥστε νά ἰσχύει ἡ $(x,\psi)\in\sigma$ ἤ ἡ $(\psi,x)\in\sigma$. Ἐπειδή ἡ σ ὑποτέθηκε συμμετρική ἰσχύουν καί οἱ δύο καί γράφονται καί $x\sigma\psi$, $\psi\sigma x$. Ἰσχύει λοιπόν ἡ $x\sigma\psi\wedge\psi\sigma x$. Ἡ τελευταία ἐπειδή ἡ σ ὑποτέθηκε μεταβατική συνεπάγεται τήν $x\sigma x$ καί ἔτσι ἡ σ εἶναι καί αὐτοπαθής στό $\Pi_\sigma\cup E_\sigma$ ἀφοῦ x εἶναι ὁποιοδήποτε στοιχεῖο τοῦ $\Pi_\sigma\cup E_\sigma$. Ὅμως ἄν $\Pi_\sigma\cup E_\sigma\subset A$ ἡ σχέση σ στό Α δέν εἶναι αὐτοπαθής. Πραγματικά, ὑπάρχει στοιχεῖο λ τοῦ Α πού δέν ἀνήκει στό $\Pi_\sigma\cup E_\sigma$ ἐπομένως $(\lambda,\lambda)\notin\sigma$ καί ἡ σ στό Α ὅταν $A\supset\Pi_\sigma\cup E_\sigma$ εἶναι μή αὐτοπαθής παρόλο πού καί στό Α ἡ σ εἶναι συμμετρική καί μεταβατική (παρ. 3.1 καί 5.4).

6. Σχέσεις ἰσοδυναμίας.

6.1 Θά ἐξετάσουμε ἕνα εἶδος διμελῶν σχέσεων πού ὀνομάζονται σχέσεις ἰσοδυναμίας. Θά τίς συμβολίζουμε μέ τό γενικό σύμβολο $\approx$ ὅμως γιά μερικές πολύ γνωστές σχέσεις ἰσοδυναμίας χρησιμοποιοῦμε εἰδικά σύμβολα.

"Μία διμελής σχέση $\approx$ στό σύνολο Α εἶναι μία σχέση ἰσοδυναμίας ἄν καί μόνο ἄν, εἶναι αὐτοπαθής, συμμετρική καί μεταβατική στό Α". Συμβολικά:

Ἡ διμελής σχέση $\approx$ στό Α εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$

'Ισχύουν στό A οἱ προτάσεις

(α΄) $\forall x \in A,\ x \approx x \quad ((x,x) \in \approx)$.

(β΄) $x \approx \psi \Rightarrow \psi \approx x$

(γ΄) $x \approx \psi \wedge \psi \approx \omega \Rightarrow x \approx \omega$

Ὅταν ἀντί γιά σύνολο A γενικά, ἀναφερόμαστε στό $\Pi_{\approx} \cup E_{\approx}$ μποροῦμε νά παραλείπουμε τήν ἰδιότητα (α΄) γιατί τήν συνεπάγονται οἱ (β΄) καί (γ΄) (παρ. 5.5) διαφορετικά πρέπει νά τήν ἀναφέρουμε γιατί μᾶς ἐξασφαλίζει τήν $A=\Pi_{\approx} \cup E_{\approx}$ δεδομένου ὅτι στά γνήσια ὑπερσύνολα τοῦ $\Pi_{\approx} \cup E_{\approx}$ ἡ $\approx$ δέν μπορεῖ νά εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας ἀφοῦ δέν θά εἶναι αὐτοπαθής, ἐνῶ οἱ (β΄) καί (γ΄) μποροῦν καί τότε νά ἰσχύουν.

Δυό στοιχεῖα x καί ψ τοῦ A γιά τά ὁποῖα ἰσχύει ἡ $x \approx \psi$ καί φυσικά ἕνεκα τῆς ἰδιότητας (β΄) καί ἡ $\psi \approx x$ ὀνομάζονται ἰσοδύναμα στό A. Διαφορετικά λέγονται μή ἰσοδύναμα καί σημειώνουμε $x \not\approx \psi$.

6.2 Ἡ σχέση $\sigma_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\}$ εἶναι αὐτοπαθής, συμμετρική καί μεταβατική στό σύνολο $A_1=\{1,2,3\}$. Εἶναι συνεπῶς μία σχέση ἰσοδυναμίας στό A_1. Ἡ σχέση $\sigma_2=\{(1,1),(2,3),(3,4),(4,3)\}$ στό σύνολο $A_2=\{1,2,3,4\}$ δέν εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας γιατί δέν εἶναι αὐτοπαθής π.χ $3 \in A_2$ ὅμως $3 \not\sigma_2 3$. Ἐπίσης εἶναι μή μεταβατική γιατί ἰσχύει ἡ $3\sigma_2 4 \wedge 4\sigma_2 3 \wedge 3 \not\sigma_2 3$ (παρ. 5.2) καί μή συμμετρική.

6.3 Ἡ σχέση ἰσοδυναμίας μεταξύ προτάσεων εἶναι μία σχέση ἰσοδυναμίας γιατί εἶναι αὐτοπαθής, συμμετρική, μεταβατική. Ἡ σχέση $\sim$ τῆς ἰσοδυναμίας μεταξύ συνόλων εἶναι μία σχέση ἰσοδυναμίας. Ἡ ἁπλούστερη σχέση ἰσοδυναμίας, εἶναι ἡ ἰσότητα σέ ἕνα σύνολο A (σύμβολο τό =) γιατί ὅπως ἔχουμε ἀναφέρει ἡ ἰσότητα εἶναι αὐτοπαθής, συμμετρική, μεταβατική. Ὅταν λέμε ἰσότητα ἐννοοῦμε τή σχέση πού συνδέει τά διάφορα στοιχεῖα ἑνός συνόλου μέ τόν ἑαυτό τους. Μία πλήρης μή κενή σχέση στό σύνολο Α, δηλαδή ἡ σ=Α μέ $A \neq \emptyset$ εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας στό Α, γιατί ὅπως ἔχουμε διαπιστώσει εἶναι αὐτοπαθής, συμμετρική καί μεταβατική. Ἡ σχέση παραλληλίας ἤ συμπτωσιμότητας εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας. Ἐπίσης ἡ σχέση ὁμοιότητας μεταξύ τῶν κυρτῶν πολυγώνων ἑνός ἐπιπέδου.

6.4 Ἡ σχέση τοῦ ὑποσυνόλου $\subseteq$ στό σύνολο $\mathcal{P}(E)$ δέν εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας γιατί δέν εἶναι συμμετρική. Ὅμως ἄν $E=\emptyset$ τότε στό $\mathcal{P}(\emptyset)$ ἡ σχέση $\subseteq$ εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας. Τά ἴδια ἰσχύουν γιά τή σχέση τοῦ ὑπερσυνόλου. Ἐπίσης δέν εἶναι σχέσεις ἰσοδυναμίας οἱ $\leqq$ καί $\geqq$ στό R. π.χ ἐνῶ $5 \leqq 8$ εἶναι $8 \nleqq 5$. Ἡ σχέση τοῦ γνήσιου ὑποσυνόλου $\subset$ δέν εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας ὁποιοδήποτε καί ἄν εἶναι τό σύνολο Ε. Τό ἴδιο ἰσχύει γιά τήν σχέση $\supset$. Ἐπίσης οἱ σχέσεις $<$ καί $>$ στό R δέν εἶναι σχέσεις ἰσοδυναμίας γιατί εἶναι μή αὐτοπαθεῖς καί μή συμμετρικές. Ἡ σχέση τοῦ "διαιρεῖ" στό N καί στό Z δέν εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας γιατί δέν εἶναι συμμετρική π.χ. $-5|10$ ὅμως ὁ 10 δέν διαιρεῖ τό -5.

7. Διαμερισμός συνόλου.

Τό σύνολο Δ(Α) εἶναι ἕνας διαμερισμός τοῦ συνόλου Α ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν τά ἑπόμενα: 1) $\forall M \in \Delta(A)$, $\emptyset \subset M \subseteqq A$ 2) Ἡ ἕνωση τῶν στοιχείων τοῦ Δ(Α) εἶναι ἴση μέ τό σύνολο Α 3) Ἡ τομή δύο ὁποιωνδήποτε διαφορετικῶν στοχείων τοῦ Δ(Α) εἶναι τό κενό σύνολο.

Τό σύνολο $\mathcal{P}(E)$ δυναμοσύνολο τοῦ Ε δέν εἶναι ἕνας διαμερισμός τοῦ Ε. Τό σύνολο $A_1=\{1,2,3,4,5\}$ π.χ ἔχει τό διαμερισμό $\Delta_1(A_1)=\{\{1\},\{2,3\}\{4,5\}\}$. Ἐπίσης ἕνας ἄλλος διαμερισμός τοῦ A_1 εἶναι ὁ $\Delta_2(A_1) = \{\{1,2,5\},\{3,4\}\}$. Τό σύνολο $\{\{1,2,3\},\{5\}\}$ δέν εἶναι διαμερισμός τοῦ A_1 γιατί $4 \notin \{1,2,3\} \cup \{5\}$ δηλαδή

$\{1,2,3\} \cup \{5\} \neq A_1$.

8. Κλάσεις ισοδυναμίας.

8.1 "Σέ ἕνα σύνολο Α ἐφοδιασμένο μέ μία σχέση ἰσοδυναμίας $\approx$, μία κλάση ἰσοδυναμίας C_x μέ ἀντιπρόσωπο τό στοιχεῖο x τοῦ Α, εἶναι τό ὑποσύνολο τοῦ Α στό ὁποῖο ἀνήκουν μόνο τά ἰσοδύναμα πρός τό x στοιχεῖα τοῦ Α". Εἶναι λοιπόν $C_x \subseteq A$. Ἐπίσης ἐπειδή ἡ $\approx$ εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας στό Α καί συνεπῶς αὐτοπαθής, ἰσχύει ἡ $x \approx x$ ἄρα καί ἡ $x \in C_x$. Τήν C_x τήν παριστάνουμε καί μέ $[x]_\approx$.

8.2 Θά δείξουμε τήν πρόταση $x \approx \psi$ στό $A \Longleftrightarrow C_x = C_\psi$. Πραγματικά, ὑποθέτουμε ὅτι $x \approx \psi$ καί ὅτι $\alpha \in C_x$ ἐπομένως $\alpha \approx x$. Ἀπό τίς $\alpha \approx x$ καί $x \approx \psi$ ἐπειδή ἡ $\approx$ εἶναι μεταβατική προκύπτει ἡ $\alpha \approx \psi$ πού συνεπάγεται τήν $\alpha \in C_\psi$. Ἀποδείχτηκε λοιπόν ἡ $\alpha \in C_x \Rightarrow \alpha \in C_\psi$ πού ἰσοδυναμεῖ μέ τήν $C_x \subseteq C_\psi$. Τώρα ὑποθέτουμε ὅτι $\alpha \in C_\psi$ ἐπομένως ἰσχύει ἡ $\alpha \approx \psi$ ἄρα καί ἡ $\psi \approx \alpha$. Ἀπό τίς $x \approx \psi$ καί $\psi \approx \alpha$ προκύπτει ἡ $x \approx \alpha$ καί ἀπό αὐτήν ἡ $\alpha \in C_x$. Ἰσχύει λοιπόν ἡ $\alpha \in C_\psi \Rightarrow \alpha \in C_x$ πού ἰσοδυναμεῖ μέ τήν $C_\psi \subseteq C_x$. Ἡ τελευταία μαζί μέ τήν $C_x \subseteq C_\psi$ ἰσοδυναμοῦν μέ τήν $C_x = C_\psi$ πού ἰσχύει ὅπως ἀποδείξαμε ὅταν ἰσχύει ἡ $x \approx \psi$. Ἀντίστροφα, ὑποθέτουμε ὅτι ἰσχύει ἡ $C_x = C_\psi$. Ἐπειδή $\psi \in C_\psi$ καί $C_\psi = C_x$ εἶναι καί $\psi \in C_x$. Ἡ τελευταία μαζί μέ τήν $x \in C_x$ συνεπάγονται τήν $x \approx \psi$. Ἄν πάρουμε τίς ἀρνήσεις τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσοδυναμίας ἔχουμε τήν ἰσοδύναμη πρόταση $x \not\approx \psi$ στό $A \Longleftrightarrow C_x \neq C_\psi$.

8.3 Θά δείξουμε τήν $x \not\approx \psi \Longleftrightarrow C_x \cap C_\psi = \emptyset$. Ὑποθέτουμε ὅτι $x \not\approx \psi$. Ἄν δέν ἴσχυε ἡ $C_x \cap C_\psi = \emptyset$ τότε θά ὑπῆρχε ἕνα τουλάχιστον στοιχεῖο ω τοῦ Α γιά τό ὁποῖο θά ἴσχυαν οἱ $\omega \in C_x$ καί $\omega \in C_\psi$. Αὐτές συνεπάγονται τίς $\omega \approx x$ καί $\omega \approx \psi$. Ὅμως ἐπειδή ἡ $\approx$ εἶναι μεταβατική καί συμμετρικη θά ἴσχυε καί ἡ $x \approx \psi$ ἀντίθετα πρός τήν ὑπόθεση $x \not\approx \psi$. Εἶναι λοιπόν $C_x \cap C_\psi = \emptyset$ ὅταν $x \not\approx \psi$. Ἀντίστροφα, ὑποθέτουμε ὅτι $C_x \cap C_\psi = \emptyset$, ἄν ἴσχυε ἡ $x \approx \psi$ τότε (παρ. 8.2) θά ἦταν $C_x = C_\psi$ καί $C_x \cap C_\psi = C_x \neq \emptyset$ ἀντίθετα μέ τήν ὑπόθεση. Δέν ἰσχύει λοιπόν ἡ $x \approx \psi$ ἀλλά ἡ $x \not\approx \psi$ καί ἡ πρόταση ἔχει ἀποδειχτεῖ.

8.4 Ἡ σχέση $\approx$ στό σύνολο $A_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$ πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα $\approx\, = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)$ $(6,6),(3,4),(4,3),(5,6),(6,5)\}$ εἶναι αὐτοπαθής, συμμετρική καί μεταβατική, εἶναι λοιπόν μία σχέση ἰσοδυναμίας. Ἔχουμε τίς ἑπόμενες κλάσεις ἰσοδυναμίας.
$\{1\},\{2\},\{3,4\},\{5,6\}$.

9. Σύνολο τῶν κλάσεων ἰσοδυναμίας ἤ σύνολο πηλίκον.

9.1 Θεωροῦμε τό σύνολο A ἐφοδιασμένο μέ μία σχέση ἰσοδυναμίας $\approx$. Εἴδαμε στήν παρ. 8 γιά τίς κλάσεις ἰσοδυναμίας στό A. Πρόκειται γιά μή κενά ὑποσύνολα τοῦ A. Οἱ τομές τους ἀνά δύο εἶναι τό κενό σύνολο (ὅταν εἶναι διαφορετικές κλάσεις) καί ἡ ἕνωσή τους εἶναι τό A ἀφοῦ δέν ὑπάρχει κανένα στοιχεῖο τοῦ A πού νά μήν ἀνήκει σέ κάποια κλάση (π.χ μπορεῖ τό $x \in A$ νά μήν εἶναι ἰσοδύναμο μέ κάποιο ἄλλο στοιχεῖο τοῦ A, ὅμως εἶναι $x \approx x$ ἐπειδή ἡ $\approx$ εἶναι αὐτοπαθής, ὁπότε τό x ἀνήκει στήν κλάση C_x πού εἶναι τότε ἕνα μονοσύνολο).

Τό σύνολο λοιπόν $A/\approx$ τῶν κλάσεων ἰσοδυναμίας στό A εἶναι ἕνας διαμερισμός τοῦ A (παρ.7). Μέ ἄλλα λόγια μία σχέση ἰσοδυναμίας σέ ἕνα σύνολο ὁρίζει ἕνα διαμερισμό τοῦ συνόλου αὐτοῦ. Τό σύνολο $A/\approx$ τό ὀνομάζουμε καί σύνολο πηλίκον τοῦ A διά τῆς σχέσεως $\approx$. Στήν περίπτωση τῆς σχέσης ἰσοδυναμίας στό A_1 τῆς παρ. 8.4 εἶναι $A_1/\approx\, = \{\{1\},\{2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$. Ἡ ἰσότητα στό N ὅπως ξέρουμε εἶναι μία σχέση ἰσοδυναμίας ὅμως κάθε στοιχεῖο τοῦ N ἀνήκει καί σέ μία ξεχωριστή κλάση γιατί ἡ = ἰσχύει μόνο μεταξύ ἑνός στοιχείου καί τοῦ ἑαυτοῦ του ἑπομένως κλάσεις ἰσοδυναμίας στό N ὡς πρός τήν = εἶναι οἱ $\{1\},\{2\},\{3\}$ κ.λπ. καί εἶναι $(N/=)=\{\{1\},\{2\},\{3\},\ldots\}$

9.2 Γιά τήν ἰσότητα στό σύνολο $A/\approx$ ἔχουμε: $C_x=C_\psi$ στό $A/\approx \Leftrightarrow x\approx\psi$ στό A ὅπως εἴδαμε στήν παρ. 8.2.

Γιά τίς πράξεις στό $A/\approx$ ὁρίζουμε π.χ ἐνδεικτικά τήν πράξη ο ὡς ἑξῆς: $C_x \circ C_\psi = C_{x\circ\psi}$. Βέβαια πρέπει νά εἶναι γνωστή ἡ πράξη ο στό A, δηλαδή ἡ σημασία τοῦ $x \circ \psi$ στό A.

10. Σχέσεις διάταξης (αὐτοπαθοῦς ἤ ἀνακλαστικῆς).

10.1 Μετά τίς σχέσεις ἰσοδυναμίας θά δοῦμε ἕνα ἄλλο εἶδος σχέσεων πού θά τίς ὀνομάζουμε σχέσεις διάταξης. Θά χρησιμοποιοῦμε γι'αὐτές τό γενικό σύμβολο $\leqq$. (Δέν πρέπει νά τό συγχέουμε μέ τό $\leqq$ πού εἶναι μία εἰδική περίπτωση). Ἔχουμε τόν ἑπόμενο ὁρισμό:

Μία διμελής σχέση στό σύνολο A εἶναι μία σχέση διάταξης ἄν καί μόνο ἄν, εἶναι αὐτοπαθής, ἀντισυμμετρική καί μεταβατική. Συμβολικά:

"Η διμελής σχέση $\leqq$ εἶναι μία σχέση διάταξης στό $A \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ ἰσχύουν στό A οἱ προτάσεις:

1) $\forall x\in A,\ x\leqq x$

2) $x\leqq\psi \wedge \psi\leqq x \Rightarrow x=\psi$

3) $x\leqq\psi \wedge \psi\leqq\omega \Rightarrow x\leqq\omega$

Τή διάταξη $\leqq$ ὅπως τήν ὁρίσαμε θά μπορούσαμε νά τήν ὀνομάσουμε αὐτοπαθή ἤ ἀνακλαστική διάταξη γιά νά τήν ξεχωρίσουμε ἀπό ἄλλα εἴδη διατάξεων πού δέν εἶναι αὐτοπαθεῖς. Ὅμως ὁ ἀναγνώστης ἄς ἔχει ὑπόψη του ὅτι ὁ ὅρος αὐτός δέν ἔχει χρησιμοποιηθεῖ καί ὅταν λέμε διάταξη θά ἐννοοῦμε αὐτό τό εἶδος τῆς διάταξης.

10.2 Διακρίνουμε δύο εἴδη σχέσεων διάταξης, τή σχέση τῆς ὁλικῆς ἤ γραμμικῆς διάταξης καί τή σχέση τῆς μερικῆς διάταξης.

Ἡ σχέση διάταξης στό Α εἶναι σχέση ὁλικῆς ἤ γραμμικῆς διάταξης ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση
$\forall x \in A, \forall \psi \in A, x \leqq \psi \vee \psi \leqq x$

Ἡ σχέση διάταξης στό Α εἶναι σχέση μερικῆς διάταξης ἄν καί μόνον ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση
$\exists x \in A, \exists \psi \in A, x \nleqq \psi \wedge \psi \nleqq x$. Οἱ δύο τελευταῖες προτάσεις εἶναι ἡ καθεμιά ἄρνηση τῆς ἄλλης (κεφ. Ιπαρ. 2.6στ΄ καί 6).

Ἄν $\leqq$ εἶναι μία σχέση διάταξης σέ ἕνα σύνολο Α τά στοιχεῖα α καί β εἶναι συγκρίσιμα μεταξύ τους διά τῆς $\leqq$ ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση $\alpha \leqq \beta \vee \beta \leqq \alpha$. Μή συγκρίσιμα διά τῆς $\leqq$ εἶναι ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση $\alpha \nleqq \beta \wedge \beta \nleqq \alpha$. Εὔκολα φαίνεται ὅτι μή συγκρίσιμα στοιχεῖα ὑπάρχουν στό Α ἄν καί μόνο ἄν ἡ διάταξη $\leqq$ στό Α εἶναι μερική. Ὅταν ἰσχύει ἡ $\alpha \leqq \beta$ μεταξύ τῶν στοιχείων α καί β τοῦ Α, λέμε ὅτι τό στοιχεῖο α εἶναι μικρότερο ἤ ἴσο μέ τό στοιχεῖο β. Δέν πρέπει νά γίνεται σύγχυση μέ τό σύμβολο $\leqq$ στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν R πού εἶναι μία ειδική περίπτωση τοῦ συμβόλου $\leqq$. Στήν $\alpha \leqq \beta$ ἡ ἔκφραση "τό α εἶναι μικρότερο ἤ ἴσο μέ τό β" ἔχει τή σημασία ὅτι "τό α εἶναι ἕνα προηγούμενο ἤ τό ἴδιο μέ τό στοιχεῖο β". Στήν παρ. 10.6 βλέπουμε καί τήν ἰσοδύναμη σχέση $\geqq$. Ἐκεῖ ἡ $\beta \geqq \alpha$ διαβάζεται "τό β εἶναι ἕνα ἑπόμενο ἤ τό ἴδιο μέ τό στοιχεῖ α" ὅμως ἐπεκτείνοντας καί ἐδῶ τήν ὁρολογία πού χρησιμοποιοῦμε γιά τήν ἀντίστοιχη σχέση $\geqq$ στό R μποροῦμε νά λέμε γιά τήν $\beta \geqq \alpha$ ὅτι "τό β εἶναι μεγαλύτερο ἤ ἴσο μέ τό α". Ὑπάρχουν ὅπως ξέρουμε καί ἄλλες ειδικότερες ὀνομασίες π.χ τήν $A \subseteqq B$ στό $\mathscr{P}(E)$ τή διαβάζουμε "τό Α εἶναι ὑποσύνολο τοῦ Β" καί τήν $B \supseteqq A$ "Τό Β εἶναι <u>ὑπερσύνολο</u> τοῦ Α".

10.3 Ἡ σχέση $\sigma_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(1,2)\}$ εἶναι στό $A_1=\{1,2,3\}$ αὐτοπαθής, ἀντισυμμετρική καί μεταβατική εἶναι συνεπῶς μία σχέση διάταξης. Ἡ διάταξη αὐτή εἶναι μερική γιατί π.χ ἰσχύει ἡ πρόταση $2\not\sigma_1 3 \wedge 3\not\sigma_1 2$ (παρ.10.2, x=2, ψ=3). Τήν διάταξη $\leqq$ ἐδῶ τήν ἔχουμε παραστήσει μέ σ_1. Γιά τά στοιχεῖα 2 καί 3 λέμε ὅτι <u>δέν εἶναι συγκρίσιμα διά τῆς σ_1</u>. Ἀντίθετα τά στοιχεῖα 1 καί 3 <u>εἶναι συγκρίσιμα</u> γιατί ἰσχύει ἡ $1\sigma_1 3$. Ἡ σχέση $\sigma_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),(2,3)\}$ στό $A_1=\{1,2,3\}$ εἶναι σχέση ὁλικῆς διάταξης. Πραγματικά, ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ A_1 εἶναι συγκρίσιμα ἀνά δύο διά τῆς σ_2 ὅπως ἀμέσως φαίνεται (περιλαμβάνεται καί ἡ σύγκριση τῶν στοιχείων μέ τόν ἑαυτό τους ἀφοῦ ἡ σχέση διάταξης εἶναι αὐτοπαθής).

10.4 Ἡ σχέση τοῦ ὑποσυνόλου $\subseteqq$ (ἀντί τοῦ γενικοῦ συμβόλου $\leqq$) εἶναι σχέση μερικῆς διάταξης στό $\mathscr{P}(E)$. Ὅτι εἶναι αὐτοπαθής, ἀντισυμμετρική καί μεταβατική, δηλαδή σχέση διάταξης τό γνωρίζουμε. Ἡ σχέση διάταξης $\subseteqq$ εἶναι μερική γιατί π.χ ἄν $E=\{1,2,3\}$ γιά τά στοιχεῖα $\{1,2\}$ καί $\{2,3\}$ τοῦ $\mathscr{P}(E)$ δέν ἰσχύει ἡ $\{1,2\}\subseteqq\{2,3\}$. Ἐπίσης δέν ἰσχύει ἡ $\{2,3\}\subseteqq\{1,2\}$ δηλαδή ἰσχύει ἡ $\{1,2\}\nsubseteqq\{2,3\} \wedge \{2,3\} \nsubseteqq \{1,2\}$ (παρ.10.2) Ὅμως ἄν τό Ε εἶναι κενό ἤ εἶναι μονοσύνολο τότε ἡ διάταξη $\subseteqq$ στό $\mathscr{P}(E)$ εἶναι ὁλική.

Ἡ σχέση τοῦ "διαιρεῖ" στό Ν εἶναι σχέση αὐτοπαθής, ἀντισυμμετρική καί μεταβατική δηλαδή εἶναι μία σχέση διάταξης. Ἡ διάταξη αὐτή εἶναι μερική ἀφοῦ π.χ τά 3 καί 5 στοιχεῖα τοῦ Ν δέν εἶναι συγκρίσιμα γιατί οὔτε τό 3 διαιρεῖ ἀκριβῶς τό 5 οὔτε τό 5 διαιρεῖ τό 3. Εἶναι ψευδής καί ἡ $3|5$ καί ἡ $5|3$. Στό Ζ ἡ σχέση τοῦ "διαιρεῖ" δέν εἶναι σχέση διάταξης γιατί δέν εἶναι ἀντισυμμετρική. Ἡ σχέση $\leqq$ τοῦ "μικρότερου ἤ ἴσου" στό R εἶναι σχέση ὁλικῆς διάταξης. Πραγματικά γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x καί ψ ἰσχύει ἡ $x \leqq \psi$ ἤ ἡ $\psi \leqq x$ ἤ καί οἱ δύο (ὅταν $x=\psi$) δηλαδή ἰσχύει πάντοτε ἡ $x \leqq \psi \vee \psi \leqq x$ (παρ.10.2).

10.5 Τό σύνολο A ἐφοδιασμένο μέ μιά σχέση διάταξης $\leqq$ ὀνομάζεται "Τό διατεταγμένο σύνολο $(A, \leqq)$". Μπορεῖ νά εἶναι ὁλικά (γραμμικά) διατεταγμένο ἤ μερικά διατεταγμένο.

10.6 Μέ τήν ἐξ ὁρισμοῦ ἰσοδυναμία $\psi \geqq x \underset{\varphi\sigma}{\Longleftrightarrow} x \leqq \psi$ ὁρίζεται καί ἡ σχέση $\geqq$ μέ τή βοήθεια τῆς σχέσης διάταξης $\leqq$ στό A. Εὔκολα ἀποδείχνεται ὅτι καί ἡ διμελής σχέση $\geqq$ στό A εἶναι μία σχέση διάταξης π.χ οἱ τρεῖς προτάσεις τῆς παρ. 10.1 μέ βάση τήν παραπάνω ἰσοδυναμία γίνονται.

1) $\forall x \in A,\ x \geqq x$

2) $\psi \geqq x \wedge x \geqq \psi \Rightarrow x = \psi$

3) $\psi \geqq x \wedge \omega \geqq \psi \Rightarrow \omega \geqq x$

Ἔτσι καί ἡ σχέση $\geqq$ στό A εἶναι μία σχέση διάταξης. Ἐπίσης οἱ δύο προτάσεις τῆς παρ. 10.2 γίνονται: $\forall x \in A,\ \forall \psi \in A, \psi \geqq x \vee x \geqq \psi$ γιά τήν ὁλική διάταξη καί $\exists x \in A,\ \exists \psi \in A,\ \psi \ngeqq x \wedge x \ngeqq \psi$ γιά τήν μερική. Ἔχουμε τώρα τό διατεταγμένο σύνολο $(A, \geqq)$. π.χ τό σύνολο $(\mathscr{P}(E), \supseteqq)$ διατεταγμένο μέ τή σχέση $\supseteqq$ τοῦ ὑπερσυνόλου. Ἐπίσης τό διατεταγμένο σύνολο $(R, \geqq)$ μέ τή σχέση τοῦ μεγαλύτερου ἤ ἴσου".

11. Σχέσεις γνήσιας ἤ ἀναυτοπαθοῦς (ἀνανακλαστικῆς) διάταξης.

11.1 Θά χρησιμοποιήσουμε τό γενικό σύμβολο $<$. "Μιά διμελής σχέση $<$ στό σύνολο A εἶναι μία σχέση γνήσιας διάταξης ἄν καί μόνο ἄν:

1) εἶναι μεταβατική, δηλαδή ἰσχύει στό A ἡ πρόταση $x < \psi \wedge \psi < \omega \Rightarrow x < \omega$ (παρ. 5.1)

2) εἶναι ἀναυτοπαθής δηλαδή ἰσχύει στό A ἡ πρόταση $\forall x \in A,\ x \not\prec x$

Ἡ γνήσια διάταξη εἶναι ὁλική ἤ γραμμική ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση: $\forall x \in A,\ \forall \psi \in A,\ x \prec \psi \veebar \psi \prec x \veebar x = \psi$. Ἡ γνήσια διάταξη εἶναι μερική ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση $\exists x \in A, \exists \psi \in A,\ x \not\prec \psi \wedge \psi \not\prec x \wedge x \neq \psi$.

Δύο στοιχεῖα τοῦ A τά x καί ψ λέγονται συγκρίσιμα διά τῆς $\prec$ ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση $x \prec \psi \veebar \psi \prec x$ δηλαδή ἰσχύει ἤ μόνο ἡ $x \prec \psi$ ἤ μόνο ἡ $\psi \prec x$. Τά ἴσα στοιχεῖα $(x=\psi)$ δέν εἶναι συγκρίσιμα διά τῆς $\prec$ ὅμως αὐτό δέν καταστρέφει τήν ὁλικότητα μιᾶς γνήσιας διάταξης. Μή συγκρίσιμα διαφορετικά στοιχεῖα ἐμφανίζονται στίς μερικές γνήσιες διατάξεις μόνο.

Ἡ $x \prec \psi$ μέ τό γενικό σύμβολο $\prec$ ὁποιασδήποτε γνήσιας διάταξης διαβάζεται "x μικρότερο ἀπό τό ψ" μέ τή σημασία "Τό x εἶναι ἕνα στοιχεῖο προηγούμενο τοῦ ψ στό A". Ἡ σχέση $<$ στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μία ειδική περίπτωση. Τό ἴδιο καί ἡ σχέση $\subset$ τοῦ γνήσιου ὑποσυνόλου εἶναι μία ειδική περίπτωση γνήσιας διάταξης στό $\mathscr{P}(E)$.

Ἡ σχέση $\sigma_1 = \{(1,1),(5,4),(2,4),(3,4)\}$ δέν εἶναι σχέση γνήσιας διάταξης γιατί δέν εἶναι ἀναυτοπαθής. Ἰσχύει π.χ ἡ $1\sigma_1 1$. Ἄν παραληφθεῖ τό (1,1) τότε ἔχουμε τή σχέση $\sigma_2 = \{(5,4),(2,4),(3,4)\}$ πού εἶναι σχέση γνήσιας διάταξης γιατί εἶναι ἀναυτοπαθής καί μεταβατική. Βέβαια δέν πρόκειται γιά ὁλική διάταξη γιατί π.χ τά στοιχεῖα 2 καί 3 δέν εἶναι συγκρίσιμα. Εἶναι ψευδεῖς ἡ $2\sigma_2 3$ καί ἡ $3\sigma_2 2$. Ἴσως παρατηρήσει κανείς ὅτι στήν σ_2 τό 5 εἶναι μικρότερο ἀπό τό 4, ὅμως ἐδῶ ἡ σ_2 δέν εἶναι ἡ γνωστή ἀπό τούς ἀριθμούς διάταξη $<$ καί τά σύμβολα 2,3,4,5 δέν ἔχουν ὑποχρεωτικά τή σημασία πού ἔχουν στά σύνολα τῶν ἀριθμῶν. Μπορεῖ π.χ ἡ πρόταση "τό 5 εἶναι μικρότερο ἀπό τό 4" νά σημαίνει ὅτι τό ἀντικείμενο 5 προηγεῖται τοῦ ἀντικειμένου 4 στή διάταξη σ_2.

11.2 Ἔχουμε τό γνήσια διατεταγμένο σύνολο $(A, \prec)$. Μπορεῖ νά εἶναι ὁλικά (γραμμικά) γνήσια διατεταγμένο σύνολο ἤ μερικά γνήσια διατεταγμένο σύνολο. Τό ὁλικά γνήσια διατεταγμένο σύνολο τό ὀνομάζουμε καί σύνολο ἁπλά διατεταγμένο,

11.3 Ὁρίζουμε μέ τήν ἑπόμενη ἰσοδυναμία τή σχέση $\succ$ τοῦ "μεγαλύτερου" σέ ἕνα σύνολο A γνήσια διατεταγμένο μέ τή σχέση $\prec$. Ἔχουμε:
$\psi \succ x \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} x \prec \psi$. Εὔκολα ἀποδείχνεται ὅτι καί ἡ σχέση $\succ$ εἶναι σχέση γνήσιας διάταξης ὅπως εἶναι ἡ $\prec$ καί μάλιστα ὁλικῆς ἤ μερικῆς ἄν καί μόνο ἄν ἡ $\prec$ εἶναι ὁλική ἤ μερική. Μποροῦμε νά ἀντικαταστήσουμε μέ βάση τήν παραπάνω ἰσοδυναμία τό σύμβολο $\prec$ μέ τό $\succ$ στίς σχέσεις τῆς παρ.11.1 ὁπότε θά προκύψουν προτάσεις ἀληθεῖς πού ἀποδείχνουν ὅτι ἡ $\succ$ εἶναι σχέση γνήσιας διάταξης ὁλικῆς ἤ μερικῆς. Ἡ $\psi \succ x$ διαβάζεται ψ εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό x. Μέ τήν εὐρύτερη σημασία τοῦ ὅρου "μεγαλύτερο" πού καλύπτει ὅλες τίς περιπτώσεις γνησίων διατάξεων. Λέμε ἀκόμη ὅτι "τό ψ εἶναι ἕνα στοιχεῖο ἑπόμενο τοῦ x στό A". Φυσικά αὐτό δέν σημαίνει ὅτι ὑποχρεωτικά δέν ὑπάρχει στοιχεῖο τοῦ A μεταξύ τῶν x καί ψ. Ἄν στό A ἰσχύει ἡ $x \prec \psi$ καί δέν ὑπάρχει στό A στοιχεῖο ω μεταξύ τῶν x καί ψ (Ἰσχύουν οἱ: $x \nprec \omega$ καί $\omega \nprec \psi$) τότε μποροῦμε νά λέμε ὅτι τό x προηγεῖται ἄμεσα τοῦ ψ. Γιά τήν $\psi \succ x$ μέ $\psi \nsucc \omega$ καί $\omega \nsucc x$ λέμε ὅτι τό ψ εἶναι ἀμέσως ἑπόμενο τοῦ x.

12. Μή αὐτοπαθής – μή ἀναυτοπαθής (μή ἀνακλαστική–μή ἀνακλαστική) διάταξη. Κοινά γνωρίσματα τῶν σχέσεων διάταξης.

12.1 Μία διμελής σχέση σ στό σύνολο A εἶναι σχέση μή αὐτοπαθοῦς-μή ἀναυτοπαθοῦς διάταξης, ἄν καί μόνο ἄν εἶναι 1)μή αὐτοπαθής 2) μή ἀναυτοπαθής 3) ἀντισυμμετρική 4) μεταβατική. π.χ ἡ σχέση $\sigma_1=\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,3),(4,5)\}$ στό σύνολο $A_1=\{1,2,3,4,5\}$ εἶναι μή αὐτοπαθής γιατί π.χ ἰσχύει ἡ $4\not\sigma_1 4$. Ἐπίσης εἶναι μή ἀναυτοπαθής γιατί ἰσχύει π.χ. ἡ $1\sigma_1 1$. Ἀκόμη, εὔκολα φαίνεται ὅτι ἡ σ_1 εἶναι ἀντισυμμετρική καί μεταβατική.

12.2 Ὅλες οἱ σχέσεις διάταξης (παρ.10.1,11.1 καί 12.1) εἶναι ἀντισυμμετρικές καί μεταβατικές. Ἡ ἀντισυμμετρικότητα ἐμποδίζει γιά δύο στοιχεῖα α καί β νά ὑπάρχει προήγηση τοῦ α ἔναντι τοῦ β καί συγχρόνως προήγηση τοῦ β ἔναντι τοῦ α. Ἕνα τέτοιο ἐνδεχόμενο θά ἦταν ἀπαράδεκτο γιά σχέση διάταξης. Ἡ μεταβατικότητα εἶναι αὐτονόητη ἀφοῦ ὅταν τό α προηγεῖται τοῦ β καί τό β τοῦ γ πρέπει καί τό α νά προηγεῖται τοῦ γ. Εἴδαμε στά προηγούμενα ὅτι ἐκεῖνο πού διακρίνει τίς σχέσεις διάταξης μεταξύ τους εἶναι ἡ θέση τους ἀπέναντι στήν ἰδιότητα τῆς αὐτοπάθειας. Ἡ διάταξη τῆς παρ. 12.1 θά μποροῦσε νά ὀνομαστεῖ καί ἡμιαυτοπαθής διάταξη καί νά συμβολιστεῖ μέ τό $\prec^*$.

13. Τό μικρότερο καί τό μεγαλύτερο στοιχεῖο διατεταγμένου συνόλου. Ἐλάχιστα καί μέγιστα στοιχεῖα.

13.1 Τό στοιχεῖο μ ἑνός διατεταγμένου συνόλου $(A,\leqq)$ εἶναι τό μικρότερο στοιχεῖο τοῦ Α, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall x\in A,\ \mu\leqq x$ (Ἰσοδύναμα στό $(A,\geqq)$ ἡ $\forall x\in A,\ x\geqq\mu$). Δέν ἔχει πάντοτε μικρότερο στοιχεῖο ἕνα διατεταγμένο σύνολο, ὅμως ἄν ἔχει τότε αὐτό εἶναι μόνο ἕνα. Πραγματικά ἄν ὑπῆρχε καί τό μ΄ θά εἴχαμε σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τήν $\mu\leqq\mu'$ καί τήν $\mu'\leqq\mu$ ἀλλά ἡ $\leqq$ (ἐπίσης ἡ $\geqq$) εἶναι ἀντισυμμετρική στό Α συνεπῶς εἶναι $\mu=\mu'$ καί τό μικρότερο στοιχεῖο εἶναι μόνο ἕνα. π.χ τό σύνολο $N=\{1,2,3,\dots\}$ διατεταγμένο μέ τή σχέση $\leqq$ ἔχει μικρότερο στοιχεῖο τό 1. Εἶναι $\forall x\in N$, $1\leqq x$. Τό σύνολο $\Sigma=\{\{2,3\},\{2,3,5\},\{2,3,10\}\}$ διατετεγμένο μέ τή σχέση $\subseteq$ ἔχει μικρότερο στοιχεῖο τό $\{2,3\}$ γιατί $\{2,3\}\subseteq\{2,3\}$, $\{2,3\}\subseteq\{2,3,5\}$, $\{2,3\}\subseteq\{2,3,10\}$ δηλαδή $\forall x\in\Sigma$, $\{2,3\}\subseteq x$ (τά x ἐδῶ εἶναι σύνολα). Τό σύνολο $(0,1)=\{x\in R:\ 0<x<1\}$ δέν ἔχει μικρότερο στοιχεῖο.

13.2 Ἔχουμε τόν ἑπόμενο ὁρισμό. "Τό στοιχεῖο α ἑνός διατεταγμένου συνόλου Α εἶναι ἕνα ἐλάχιστο στοιχεῖο του ἄν καί μόνο ἄν δέν ὑπάρχει μικρότερο ἀπό τό α στοιχεῖο στό Α". Αὐτή τήν ἰδιότητα βέβαια τήν ἔχει τό μικρότερο στοιχεῖο τοῦ Α ὅπως τό ὁρίσαμε στήν παρ. 13.1 ὅμως ὅταν δέν ἔχει τό Α μικρότερο στοιχεῖο εἶναι δυνατόν νά ἔχει ἕνα ἤ καί περισσότερα ἐλάχιστα π.χ τό σύνολο $B=\{\{2,3\},\{2,3,5\},\{2,7\},\{2,7,8\}\}$ δέν ἔχει μικρότερο στοιχεῖο γιατί κανένα στοιχεῖο του δέν εἶναι ὑποσύνολο ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ Β. Ὅμως τό $\{2,3\}$ δέν ἔχει γνήσιο ὑποσύνολο ἕνα στοιχεῖο τοῦ Β εἶναι συνεπῶς ἕνα ἐλάχιστο στοιχεῖο τοῦ Β. Τό ἴδιο συμβαίνει καί μέ τό $\{2,7\}$. Ἀντίθετα τό $\{2,3,5\}$ ἔχει μικρότερο (γνήσιο ὑποσύνολο) τό $\{2,3\}$ καί τό $\{2,7,8\}$ ἔχει μικρότερο τό $\{2,7\}$. Μέ ἄλλα λόγια ἕνα στοιχεῖο α τοῦ διατεταγμένου συνόλου $(A,\preceq)$ εἶναι ἕνα ἐλάχιστο στοιχεῖο του ἄν καί μόνο ἄν τό α εἶναι τό μικρότερο στοιχεῖο τοῦ ὑποσυνόλου A_1 τοῦ Α πού ἀποτελεῖται ἀπό ἐκεῖνα τά στοιχεῖα τοῦ Α πού εἶναι συγκρίσιμα μέ τό α διά τῆς $\leqq$. Προφανῶς ἄν $A_1=A$ τότε τό α εἶναι τό μικρότερο στοιχεῖο τοῦ Α. Ὅμως ἄν $A_1\subset A$ τότε τό α εἶναι ἕνα ἐλάχιστο στοιχεῖο τοῦ Α χωρίς νά εἶναι τό μικρότερο στοιχεῖο τοῦ Α πού σ'αὐτή τήν περίπτωση δέν ὑπάρχει. Πολλοί συγγραφεῖς λέγοντας ἐλάχιστο στοιχεῖο συνόλου ἐννοοῦν τό μικρότερο στοιχεῖο τοῦ συνόλου.

13.3 Τό στοιχεῖο ν ἐνός διατεταγμένου συνόλου (A, $\geqq$) εἶναι τό μεγαλύτερο στοιχεῖο τοῦ A, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall x \in A,\ \nu \geqq x$ (Ἰσοδύναμα στό (A,$\leqq$): $\forall x \in A,\ x \leqq \nu$). Τό μεγαλύτερο στοιχεῖο ὅταν ὑπάρχει εἶναι μόνο ἕνα. Ἀποδείχνεται ὅπως στήν παρ. 13.1. π.χ τό σύνολο Z^- τῶν ἀρνητικῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν ἔχει μεγαλύτερο στοιχεῖο τόν ἀριθμό -1 δηλαδή ἰσχύει ἡ $\forall x \in Z^-, -1 \geqq x$. Τό μεγαλύτερο στοιχεῖο τῶν μή θετικῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν εἶναι ὁ ἀκέραιος μηδέν. Τό σύνολο E εἶναι τό μεγαλύτερο στοιχεῖο τοῦ δυναμοσυνόλου του $\mathscr{P}(E)$ δηλαδή τό E εἶναι ὑπερσύνολο ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ $\mathscr{P}(E)$. Τό σύνολο $\{\{1,2\},\{3,4\},\{1,2,3,4\}\}$ ἔχει μεγαλύτερο στοιχεῖο τό $\{1,2,3,4\}$. Τό σύνολο $\{x \in R: 2 \leqq x < 8\}$ δέν ἔχει μεγαλύτερο στοιχεῖο. Τό ἴδιο καί τό σύνολο $\{\{2,3\},\{3,5,7\},\{3,7,5,8\}\}$ δέν ἔχει μεγαλύτερο στοιχεῖο.

13.4 Ἔχουμε τόν ἑπόμενο ὁρισμό: "Τό στοιχεῖο β ἑνός διατεταγμένου συνόλου A εἶναι ἕνα μέγιστο στοιχεῖο του ἄν καί μόνο ἄν δέν ὑπάρχει στό A στοιχεῖο μεγαλύτερο ἀπό τό β". Αὐτή βέβαια τήν ἰδιότητα τήν ἔχει τό μεγαλύτερο στοιχεῖο τοῦ A ὅπως τό ὁρίσαμε στήν παρ. 13.3 ὅμως ὅταν δέν ἔχει τό A μεγαλύτερο στοιχεῖο εἶναι δυνατό νά ἔχει ἕνα ἤ καί περισσότερα μέγιστα π.χ τό σύνολο B= {1,2},{3,4} δέν ἔχει μεγαλύτερο στοιχεῖο κατά τόν ὁριμό της παρ. 13.3 γιατί κανένα στοιχεῖο του δέν εἶναι ὑπερσύνολο ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ B. Ὅμως τό {1,2} δέν ἔχει γνήσιο ὑπερσύνολο κάποιο στοιχεῖο τοῦ B καί συνεπῶς εἶναι ἕνα μέγιστο στοιχεῖο τοῦ B. Τό ἴδιο καί τό {3,4} εἶναι ἕνα μέγιστο στοιχεῖο τοῦ B. Μέ ἄλλα λόγια ἕνα στοιχεῖο β τοῦ διατεταγμένου συνόλου (A, $\geqq$) εἶναι ἕνα μέγιστο στοιχεῖο του ἄν καί μόνο ἄν τό β εἶναι τό μεγαλύτερο στοιχεῖο τοῦ ὑποσυνόλου A_1 τοῦ Α πού ἀποτελεῖται ἀπό ἐκεῖνα τά στοιχεῖα τοῦ Α πού εἶναι συγκρίσιμα μέ τό β διά τῆς $\geq$. Προφανῶς ἄν $A_1=A$ τότε τό β εἶναι τό μεγαλύτερο στοιχεῖο τοῦ Α. Ὅμως ἄν $A_1 \subset A$ τότε τό β εἶναι ἕνα μέγιστο στοιχεῖο τοῦ Α χωρίς νά εἶναι τό μεγαλύτερο στοιχεῖο τοῦ Α πού σ'αὐτή τήν περίπτωση δέν ὑπάρχει. Πολλοί συγγραφεῖς λέγοντας μέγιστο στοιχεῖο συνόλου ἐννοοῦν τό μεγαλύτερο στοιχεῖο τοῦ συνόλου.

14. Σύνολα φραγμένα καί περατωμένα.

14.1 Ἕνα στοιχεῖο φ_κ τοῦ συνόλου $(B, \leqq)$ εἶναι ἕνα κάτω φράγμα τοῦ συνόλου Α στό Β ὅπου $A \subseteqq B$ ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall x \in A, \varphi_\kappa \leqq x$ (Ἰσοδύναμα στό $(B, \geqq)$: $\forall x \in A,\ x \geqq \varphi_\kappa$). Εἶναι δυνατό τό φ_κ νά ἀνήκει καί στό Α.

Ἕνα στοιχεῖο π_κ τοῦ συνόλου $(B, \leqq)$ (Ἰσοδύναμα τοῦ $B, \geqq$) εἶναι ἕνα κατώτερο πέρας τοῦ Α στό Β ὅπου $A \subseteqq B$ ἄν καί μόνο ἄν εἶναι τό μεγαλύτερο κάτω φράγμα τοῦ Α στό Β (εἶναι δυνατό τό π_κ νά ἀνήκει καί στό Α).

Ἕνα σύνολο Α εἶναι φραγμένο κάτω στό σύνολο $(B, \leqq)$ (Ἰσοδύναμα στό $B, \geqq$) ὅπου $A \subseteqq B$ ἄν καί μόνο ἄν τό Α ἔχει ἕνα τουλάχιστο κάτω φράγμα στό Β.

Ἕνα σύνολο Α εἶναι περατωμένο κάτω στό σύνολο $(B, \leqq)$ (Ἰσοδύναμα στό $B, \geqq$) ὅπου $A \subseteqq B$, ἄν καί μόνο ἄν τό σύνολο τῶν κάτω φραγμάτων τοῦ Α στό Β ἔχει μεγαλύτερο στοιχεῖο. (ἄν καί μόνο ἄν τό Α ἔχει κατώτερο πέρας στό Β).

Ἄν τό σύνολο Α εἶναι περατωμένο κάτω, στό $(B, \leqq)$ τότε ἔχει ἕνα ἀκριβῶς κατώτερο πέρας. Πραγματικά, ἄν ἐκτός ἀπό τό π_κ εἶχε καί τό π'_κ θά ἦταν $\pi_\kappa \leqq \pi'_\kappa$ καί $\pi'_\kappa \leqq \pi_\kappa$. Ὅμως ἐπειδή ἡ $\leqq$ εἶναι ἀντισυμμετρική στό Β αὐτές συνεπάγονται τήν $\pi_\kappa = \pi'_\kappa$ καί τό π_κ εἶναι μοναδικό ὅταν ὑπάρχει.

Ὅταν ἕνα σύνολο A ἔχει μικρότερο στοιχεῖο τότε αὐτό εἶναι καί κατώτερο πέρας τοῦ A ὡς πρός τόν ἑαυτό του ἤ καί ὁποιοδήποτε ἄλλο ὑπερσύνολό του. Ἐπίσης ὅταν τό κατώτερο πέρας τοῦ A στό B ὅπου $A \subseteqq B$ ἀνήκει στό A τότε εἶναι τό μικρότερο στοιχεῖο τοῦ A.

14.2 Τό σύνολο N εἶναι κάτω φραγμένο στό R. Κάθε πραγματικός ἀριθμός ἴσος ἤ μικρότερος ἀπό τόν 1 εἶναι ἕνα κάτω φράγμα τοῦ $(N, \leqq)$ στό $(R, \leqq)$. Κατώτερο πέρας τοῦ N στό R εἶναι τό 1 πού ἀνήκει καί στό N. Τό σύνολο $(3,4)=\{x \in R:\ 3<x<4\}$ εἶναι φραγμένο κάτω στό $[3,4]=\{x \in R:\ 3 \leqq x \leqq 4\}$ ὡς πρός τή σχέση $\leqq$ μέ μοναδικό κάτω φράγμα τό 3 πού δέν ἀνήκει στό $(3,4)$ (ἐδῶ δέν πρόκειται γιά διατεταγμένα ζεύγη). Τό 3 εἶναι καί τό κατώτερο πέρας τοῦ $(3,4)$ στό $[3,4]$.

Τό σύνολο $A_1=\left\{\{2,3\},\{2,3,4\},\{2,3,4,5\}\right\}$ διατεταγμένο μέ τή σχέση $\subseteqq$ ἔχει στό σύνολο $B_1=\left\{\{2,3\},\{2,3,4\},\{2\},\{2,3,4,5\},\{2,3,4,6\},\ \emptyset\right\}$ ἐπίσης διατεταγμένο μέ τήν $\subseteqq$, κάτω φράγματα τά $\{2,3\}$, $\{2\}$ καί $\emptyset$. Ἀπό αὐτά κατώτερο πέρας τοῦ A_1 εἶναι τό $\{2,3\}$.

14.3 Ἕνα στοιχεῖο φ_α τοῦ συνόλου $(B, \geqq)$ εἶναι ἕνα ἄνω φράγμα τοῦ συνόλου A στό B ὅπου $A \subseteqq B$ ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall x \in A, \varphi_\alpha \geqq x$ (Ἰσοδύναμα στό $(B, \leqq)$: $\forall x \in A,\ x \leqq \varphi_\alpha$). (Τό φ_α εἶναι δυνατό νά ἀνήκει καί στό A).

Ἕνα στοιχεῖο π_α τοῦ συνόλου $(B, \geqq)$ (Ἰσοδύναμα τοῦ $B, \leqq$) εἶναι ἕνα ἀνώτερο πέρας τοῦ A στό B ὅπου $A \subseteqq B$, ἄν καί μόνο ἄν εἶναι τό μικρότερο ἀπό τά ἄνω φράγματα τοῦ A στό B. Δέν ὑπάρχει πάντοτε ἀνώτερο πέρας, ὅμως ἄν ὑπάρχει τότε εἶναι ἀκριβῶς ἕνα. Αὐτό ἀποδείχνεται ὅπως στήν παρ. 14.1.

Ἕνα σύνολο A εἶναι ἄνω φραγμένο στό $(B, \geqq)$ (Ἰσοδύναμα στό B, ≦) ὅπου A ⊆ B ἄν καί μόνο ἄν ἔχει ἕνα τουλάχιστο ἄνω φράγμα στό B.

Ἕνα σύνολο A εἶναι ἄνω περατωμένο στό σύνολο (B, ≧) (Ἰσοδύναμα στό B, ≦) ὅπου A ⊆ B ἄν καί μόνο ἄν ἔχει ἀνώτερο πέρας στό B.

14.4 Τό σύνολο A τῶν ἀρνητικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἄνω φραγμένο στό Z. Ἐπίσης εἶναι ἄνω περατωμένο. Ἄνω φράγματα εἶναι τό -1, τό μηδέν καί οἱ θετικοί ἀκέραιοι. Ἀνώτερο πέρας εἶναι τό -1 πού ἀνήκει καί στό A. Ἐπίσης τό σύνολο A ∪ {o} εἶναι ἄνω φραγμένο μέ ἄνω φράγματα στό Z τά στοιχεῖα τοῦ N ∪ {o}. Ἐπίσης τό A ∪ {o} ἔχει ἀνώτερο πέρας στό Z τό μηδέν πού ἀνήκει καί στό A ∪ {o}.

14.5 Τό σύνολο A εἶναι φραγμένο στό (B, ≦) (Ἰσοδύναμα στό B, ≧) ὅπου A ⊆ B, ἄν καί μόνο ἄν εἶναι ἄνω καί κάτω φραγμένο στό B.

Τό σύνολο A εἶναι περατωμένο στό (B, ≦) (Ἰσοδύναμα στό B, ≧) μέ A ⊆ B ἄν καί μόνο ἄν εἶναι ἄνω καί κάτω περατωμένο στό B.

Τό σύνολο $\{x \in R: 2 \leqq x \leqq 5\}$ εἶναι φραγμένο καί περατωμένο στό R. Ὅμως τό σύνολο $\{x \in R: 2 \leqq x\}$ δέν εἶναι φραγμένο, δέν εἶναι περατωμένο στό R. Τό σύνολο τῶν θετικῶν ρητῶν πού τό τετράγωνο τους εἶναι μικρότερο ἀπό τόν ρητό 3 εἶναι φραγμένο στό Q ὅμως δέν εἶναι περατωμένο στό Q (Βλέπετε στό κεφάλαιο περί πραγματικῶν ἀριθμῶν). Γι'αὐτό οἱ ὅροι φραγμένο καί περατωμένο δέν πρέπει νά συγχέονται.

15. Πράξεις σέ ἕνα σύνολο.

Μία μονοσήμαντη διμελής ἤ δυαδική πράξη π σέ ἕνα σύνολο A εἶναι μία μονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ συνόλου A×A (ἤ ἀπό τό σύνολο A×A) στό σύνολο A ἤ πάνω στό A. Πρόκειται δηλαδή γιά μία διμελή σχέση ὑποσύνολο τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου (A×A)×A.

Συμβολικά: $A\times A \ni (\alpha,\beta) \longrightarrow \alpha\pi\beta=\gamma\in A$. Ἐπειδή περιοριζόμαστε μόνο στό Α ἡ πράξη π λέγεται ἐσωτερική στό Α. π.χ γιά τήν πρόσθεση στό Ν ἔχουμε τήν περίπτωση $N\times N \ni (5,6) \longrightarrow 5+6=11\in N$. Πρόκειται γιά μονοσήμαντη ἀπεικόνιση στό Ν καί ὄχι πάνω στό Ν γιατί ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall x\in N, \forall \psi\in N, x+\psi\neq 1\in N$

Τό σύνολο Α εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη π ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall x\in A, \forall\psi\in A, x\pi\psi\in A$. π.χ Τό Ν εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης, ὅμως δέν εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τῆς ἀφαίρεσης. Ἡ ἀφαίρεση ἐκτελεῖται μερικά στό Ν. Μποροῦμε νά μιλάμε γιά μονοσήμαντη ἀπεικόνιση ἀπό τό $N\times N$ πάνω στό Ν.

16. Ὁμομορφισμοί καί ἰσομορφισμοί.

16.1 Ἕνας ὁμομορφισμός φ τοῦ συνόλου $(A,\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m,\pi_1,\pi_2,\pi_3,\ldots,\pi_n)$ ἐφοδιασμένουμέ m σχέσεις καί n πράξεις στό (πάνω στό) σύνολο $(B,\sigma_1',\sigma_2',\ldots,\sigma_m',\pi_1',\pi_2',\ldots,\pi_n')$ ὡς πρός τίς ἀντίστοιχες m σχέσεις καί n πράξεις μέ τίς ὁποῖες εἶναι ἐφοδιασμένο καί τό Β, εἶναι μία μονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ Α στό (πάνω στό) Β στήν ὁποία ἰσχύουν τά ἑπόμενα:

1) $x\sigma_i\psi$ στό $A \Rightarrow \varphi(x)\sigma_i'\varphi(\psi)$ στό Β, $i=1,2,3,\ldots,m$

2) $\varphi(x\pi_i\psi)=\varphi(x)\pi_i\varphi(\psi)$ στό Β, $i=1,2,3,\ldots,n$

Ἄν ἡ ἀπεικόνιση φ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη τότε ἔχουμε ἰσομορφισμό.

16.2 Στά ἑπόμενα κεφάλαια θά συναντήσουμε διάφορες περιπτώσεις ἰσομορφισμῶν, ἐδῶ μποροῦμε ἀκόμη νά ἀναφέρουμε τά ἑπόμενα. Ἡ συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο R πεδίο τιμῶν ἐπίσης τό R καί τύπο τόν $\psi = 3x+6$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ R πάνω στό R. Για τή σχέση τοῦ μικρότερου δηλαδή τήν $<$ ἰσχύει ἡ $x_1<x_2 \Rightarrow \psi_1<\psi_2$ ὅπου $\psi_1=3x_1+6$ καί $\psi_2=3x_2+6$. Ἐδῶ ἔχουμε ἕνα ἰσομορφισμό τοῦ R πάνω στό R ὡς πρός τίς σχέσεις $<$ καί $<$ στά σύνολα R καί R πού μᾶς δίνει τήν ἔννοια τῆς γνήσια αὔξουσας συνάρτησης. Ἐδῶ βέβαια τό πεδίο ὁρισμοῦ συμπίπτει μέ τό πεδίο τιμῶν καθώς καί οἱ ἀντίστοιχες σχέσεις ὅμως καί οἱ περιπτώσεις αὐτές συμπεριλαμβάνονται στό γενικό κανόνα.

Ἡ ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση $\varphi: R^+ \ni x \longleftrightarrow \lambda o \gamma x \in R$ εἶναι ἕνας ἰσομορφισμός τοῦ R^+ πάνω στό R μέ ἀντίστοιχες πράξεις τόν πολλαπλασιασμό στό R^+ καί τήν πρόσθεση στό R. Πραγματικά, $\varphi(\alpha\beta)=\lambda o\gamma(\alpha\beta)=\lambda o\gamma\alpha+\lambda o\gamma\beta= =\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$· εἶναι λοιπόν $\varphi(\alpha\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$ καί ἡ φ εἶναι ἕνας ἰσομορφισμός. Ἰσχύει ἀκόμη ἡ: $x<\psi$ στό $R^+ \Leftrightarrow \lambda o\gamma x < \lambda o\gamma\psi$ στό R.

Ἀσκήσεις

1. Νά γραφεῖ μία διμελής σχέση σ_1 μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $\Pi_{\sigma_1}=\{1,3,5\}$ καί πεδίο τιμῶν τό σύνολο $E_{\sigma_1} = \{3,4,5\}$

2. Ἡ σχέση φ μέ τύπο τόν $\varphi(x)=x^2$ ἤ $\psi=x^2$ καί πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, εἶναι συνάρτηση ἤ ὄχι; Ποιό εἶναι τό πεδίο τιμῶν της; Γράψτε την σάν σύνολο. Νά ἀναφέρετε μερικά στοιχεῖα της (διατεταγμένα ζεύγη).

3. Ποιός εἶναι ὁ τύπος τῆς σχέσης φ^{-1} ἀντίστροφης πρός τήν σχέση φ τῆς προηγούμενης ἄσκησης;

4. Νά δόσετε συμβολικά τόν ὁρισμό τῆς μή ἀνακλαστικῆς-μή ἀνανακλαστικῆς σχέσης καί νά φέρετε ἕνα παράδειγμα.

5. Γιά τή μή κενή διμελή σχέση σ στό σύνολο A ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall x \in A,\ x \not\sigma x$. Νά γραφεῖ ἡ ἀντίθετη πρόταση καί νά διαπιστωθεῖ ἄν ἡ σχέση πού θά ὁρίζεται ἀπό τή ἀντίθετη αὐτή πρόταση εἶναι αὐτοπαθής ἤ ὄχι.

6. Ἡ σχέση $\sigma=\{(3,4),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,4)\}$ στό σύνολο $A=\{1,2,3,4\}$ εἶναι αὐτοπαθής ἤ ὄχι;

7. Νά γραφεῖ στό σύνολο $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ μία σχέση αὐτοπαθής. Ἐπίσης δύο σχέσεις μή αὐτοπαθεῖς. Ἀπό αὐτές ἡ μία νά εἶναι ἀναυτοπαθής καί ἡ ἄλλη ὄχι.

8. Ἡ σχέση τῆς καθετότητας μεταξύ τῶν εὐθειῶν ἑνός ἐπιπέδου Ε εἶναι ἀντισυμμετρική ἤ ὄχι;

9. Ἡ σχέση $\sigma=\{(1,1),(1,3),(3,1),(2,4),(4,2),(1,4)\}$ εἶναι συμμετρική ἤ ὄχι; μήπως εἶναι ἀντισυμμετρική;

10. Νά γραφεῖ μία σχέση μή συμμετρική καί μή ἀντισυμμετρική.

11. Ἡ σχέση $\sigma=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ εἶναι μή αὐτοπαθής στό σύνολο Α. Ποιά ἀπό τίς σχέσεις $\{1,2,3\}=A$, $\{1,2,3\}\subset A$, $A\subset\{1,2,3\}$ εἶναι ἀληθής; Ἡ σ εἶναι ἀναυτοπαθής ἤ ὄχι;

12. Ἡ σχέση $\sigma=\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$ εἶναι ἀντισυμμετρική ἤ ὄχι;

13. Μία διμελής σχέση σ στό R μέ τύπο τόν $x^2-\psi^2=0$ εἶναι συμμετρική ἤ ὄχι;

14. Ἡ σχέση $\{(2,3),(4,5),(1,6)\}$ εἶναι ἀντισυμμετρική ἤ ὄχι;

15. Οἱ σχέσεις $\sigma_1=\{(1,2),(3,4)\}$, $\sigma_2=\{(1,2),(2,3),(1,3),(3,2)\}$ $\sigma_3=\{(1,2),(2,3)\}$ εἶναι μεταβατικές ἤ ὄχι;

16. Ἡ σχέση $\sigma=\{(1,2),(2,3),(1,3),(1,4)\}$ εἶναι μεταβατική ἤ ὄχι στό σύνολο $A=\{1,2,3,4\}$; Στό σύνολο $B=\{1,3,4\}$;

17. Διακρίνουμε τίς αὐτοπαθεῖς, συμμετρικές, ἀντισυμμετρικές καί μεταβατικές σχέσεις. Γράψτε σχέσεις πού νά ἔχουν μόνο μία ἀπό τίς παραπάνω ἰδιότητες μόνο δύο, μόνο τρεῖς, καί τίς 4 παραπάνω ἰδιότητες.

18. Νά γραφεῖ μία διμελής σχέση πού νά μήν εἶναι οὔτε σχέση ἰσοδυναμίας, οὔτε σχέση διάταξης.

19. Ἡ σχέση $\sigma=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(3,4),(4,3)\}$ εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας ἤ ὄχι στό σύνολο $A=\{1,2,3,4\}$; Νά γραφεῖ τό σύνολο πηλίκον τοῦ A διά τῆς σ ἄν πρόκειται γιά σχέση ἰσοδυναμίας στό A.

20. Πόσους διαμερισμούς τοῦ συνόλου $A=\{1,2,3\}$ μποροῦμε νά ἔχουμε;

21. Ἀπό τίς ἑπόμενες δύο σχέσεις ποιά εἶναι σχέση διάταξης (αὐτοπαθοῦς) στό $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ καί ποιά εἶναι σχέση γνήσιας διάταξης;

$$\sigma_1=\{(\alpha,\alpha),(\beta,\beta),(\gamma,\gamma),(\alpha,\beta)\}$$
$$\sigma_2=\{(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma),(\beta,\gamma)\}$$

22. Ἀπό τά ἑπόμενα σύνολα ποιά ἔχουν μικρότερο ἤ μεγαλύτερο στοιχεῖο (παρ.12.1 καί 12.3); Ποιά εἶναι αὐτά τά στοιχεῖα ὅπου ὑπάρχουν;

$$A_1=\{x\in R:\ 4\leqq x\leqq 7\},\quad A_2=\{x\in N:\ x>7\},$$
$$A_3=\{x\in Z:\ x<-20\},\quad A_4=\{x\in R:\ 4<x<5\}$$

23. Τό $\{\{5,6\},\{3,4\},\{3,4,5,6\}\}$ ἔχει μικρότερο ἤ μεγαλύτερο στοιχεῖο; Ἄν ὄχι, μήπως ὑπάρχουν ἐλάχιστα ἤ μέγιστα στοιχεῖα; Τό ἴδιο γιά τό σύνολο $\{\{3,4\},\{3,4,5,6\},\{3,4,7,8\}\}$.

24. Νά γραφεῖ ἕνα σύνολο φραγμένο καί περατωμένο σέ κάποιο ὑπερσύνολό του.

25. Νά γραφεῖ ἕνα σύνολο φραγμένο καί περατωμένο μόνο κάτω σέ ἕνα ὑπερσύνολό του. Τό ἴδιο ἕνα σύνολο φραγμένο καί περατωμένο μόνο ἄνω.

26. Ἡ πράξη ρ ὁρίζεται ὡσεξῆς στό R: $\alpha\rho\beta=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$ (π.χ $3\rho5=\frac{3^2+5^2}{2}$ ἤ $3\rho5=17$). Ἡ πράξη ρ εἶναι ἀντιμεταθετική; Εἶναι προσεταιριστική;

27. Ἡ πράξη τ ὁρίζεται ὡσεξῆς στό R: $\alpha\tau\beta=\alpha^3-\frac{\beta^2}{3}$ (π.χ $2\tau5=2^3-\frac{5^2}{3}$ ἤ $2\tau5=-\frac{1}{3}$). Ἰσχύει ὁ ἀντιμεταθετικός καί ὁ προσεταιριστικός νόμος στήν πράξη αὐτή;

28. Εἶναι ἤ ὄχι καί γιατί ἀντισυμμετρικές οἱ σχέσεις γνήσιας διάταξης;

29. Στό σύνολο $A=\{x:\ x=10^\nu,\ \nu\in N\}$ ὁρίζεται ἡ πράξη * ὡσεξῆς: $\forall\alpha\in A,\ \forall\beta\in A,\ \alpha*\beta=\lambda o\gamma\alpha+\lambda o\gamma\beta$. Νά γίνουν μερικές πράξεις μεταξύ στοιχείων τοῦ A. Εἶναι κλειστό ἤ ὄχι τό σύνολο A ὡς πρός τήν *;

30. Ἡ σχέση $\sigma=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ εἶναι αὐτοπαθής ἤ ὄχι στό σύνολο $A=\{1,2,3,4\}$;

31. Ἡ σχέση $\sigma=\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$ εἶναι συμμετρική στό σύνολο $A=\{1,2,3,4\}$;

32. Ἡ σχέση $\sigma=\{(1,1),(2,2),(3,4)\}$ εἶναι ἀντισυμμετρική ἤ ὄχι στό σύνολο $A=\{1,2,3,4,5\}$;

33. Ἡ σχέση $\sigma=\{(2,2),(2,3),(4,5)\}$ εἶναι μεταβατική ἤ ὄχι στό σύνολο $A=\{1,2,3,4,5\}$;

34. Ἕνωση τῶν συνόλων A καί B στοιχείων τοῦ $\mathscr{P}(E)$ εἶναι τό σύνολο $X\in\mathscr{P}(E)$ ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν ἡ $A\subseteq X\wedge B\subseteq X$ καί ἡ $A\subseteq M\wedge B\subseteq M\Rightarrow X\subseteq M$.
Νά δειχτεῖ ὅτι $X=A\cup B$ ($A\cup B$ ὁρίστηκε στήν παρ. 6α' τοῦ κεφ. II).

35. Τομή τῶν συνόλων A καί B στοιχείων τοῦ $\mathscr{P}(E)$ εἶναι τό σύνολο $X\in\mathscr{P}(E)$ ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν ἡ $X\subseteq A\wedge X\subseteq B$ καί ἡ $M\subseteq A\wedge M\subseteq B\Rightarrow M\subseteq X$. Νά δειχτεῖ ὅτι $X=A\cap B$ ($A\cap B$ ὁρίστηκε στήν παρ. 6β' τοῦ κεφ. II).

36. Οἱ ἑπόμενοι τύποι ὁρίζουν διμελεῖς σχέσεις στό R
$x^2-\psi^2=0,\ x^2+\psi^2=1,\ x+\psi\leqq 0,\ 10\,|\,x^2-\psi^2,\ x\psi\geqq 0, x^2-x\psi\leqq 0$
Νά ἐπισημανθεῖ ποιές ἀπό τίς σχέσεις αὐτές εἶναι

αὐτοπαθεῖς ἤ συμμετρικές ἤ ἀντισυμμετρικές ἤ μεταβατικές. Ἐπίσης σχέσεις ἰσοδυναμίας.

37. Νά δειχτεῖ ὅτι ἡ διμελής σχέση σ στό C (σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν) πού ὁρίζεται ἀπό τήν
$(\alpha+\beta i)\ \sigma\ (\gamma+\delta i)$ στό C $\underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} \alpha < \gamma \vee (\alpha=\gamma \wedge \beta \leqq \delta)$ στό R
εἶναι σχέση ὁλικῆς διάταξης στό C.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ - ΕΠΑΓΩΓΗ

1. Τά ἀξιώματα τοῦ Peano

Τό σύνολο $N=\{1,2,3,4,...\}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται ἀπό τά ἑπόμενα πέντε ἀξιώματα τοῦ Peano

(α)' $1 \in N$

(β)' $\forall n \in N, n \in N \Rightarrow n' \in N$

(γ)' $[A \subseteq N \wedge 1 \in A \wedge \forall n \in A, n \in A \Rightarrow n' \in A] \Rightarrow A=N$

(δ)' $m'=n' \Rightarrow m=n$ (Ἰσοδύναμα: $m \neq n \Rightarrow m' \neq n'$)

(ε)' $\forall n \in N,\ n' \neq 1$

Ἰσχύει ἀκόμα καί ἡ ἀντίστροφη πρός τήν δ' πρόταση

$\forall m \in N, \forall n \in N, m=n \Rightarrow m'=n'$

ὁ ἀριθμός n' ὀνομάζεται διάδοχος (ἀμέσως ἑπόμενος) τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ n.

2. Τά ἀξιώματα τῆς πρόσθεσης καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό N

Ἡ πρόσθεση στό N ὁρίζεται ἀπό τά ἑπόμενα δύο ἀξιώματα.

(α)' $\forall n \in N, n'=n+1$

(β)' $\forall m \in N, \forall n \in N, (m+n)'=m+n'$

Ὁ πολλαπλασιασμός στό N ὁρίζεται ἀπό τά ἑπόμενα δύο ἀξιώματα.

(α)' $\forall n \in N,\ n.1=n$

(β)' $\forall m \in N, \forall n \in N,\ mn'=mn+m$

3. Πρώτη ἀρχή τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς.

Ἰσχύει ἡ πρόταση:

"Αν εἶναι ἀληθεῖς 1) ἡ πρόταση $P(1)$ καί 2) ἡ πρόταση $\forall n \in N, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ τότε εἶναι ἀληθής καί ἡ πρόταση 3) $\forall n \in N, P(n)$

Ἡ πρόταση αὐτή ὀνομάζεται πρώτη ἀρχή τῆς τέλειας ἤ μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς. Εἶναι συνέπεια τοῦ γ' ἀξιώματος τοῦ Peano.

Ἡ ἀρχή τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς ἐφαρμόζεται γιά τήν ἀπόδειξη προτάσεων τῆς μορφῆς $\forall n \in N, P(n)$. Ἀντί λοιπόν νά ἀποδειχτεῖ μία τέτοια πρόταση πού στήν ἀρχή τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς ἐμφανίζεται σάν συμπέρασμα ἀποδείχνονται οἱ δύο ὑποθέσεις τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς καί ἡ πρόταση θεωρεῖται ἀποδειγμένη.

3.2 Ἡ πρώτη ἀρχή τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς γράφεται συμβολικά:

$$P(1) \wedge [\forall n \in N,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)] \Rightarrow \forall n \in N, P(n)$$

Μποροῦμε ἀντί γιά $n+1$ νά θέσουμε n'. Ἐπίσης ἡ ὑπόθεση $\forall n \in N, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό τήν $\forall n \in N - \{1\}, P(n-1) \Rightarrow P(n)$ (ὅπου $(n-1)' = n$)

3.3 Ἡ πρώτη ἀρχή τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς γενικεύεται στήν ἑπόμενη πρόταση "Ἄν εἶναι ἀληθεῖς 1) ἡ πρόταση $P(n_0)$ καί 2) ἡ $\forall n \in \{n \in N : n \geqq n_0 \in N\},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$ τότε εἶναι ἀληθής καί ἡ πρόταση 3) $\forall n \in \{n \in N : n \geqq n_0\}, P(n)$. Γιά $n_0 = 1$ ἔχουμε τήν πρόταση τῆς παρ. 3.1

4. Πολλαπλή τέλεια ἐπαγωγή.

4.1 Προκειμένου νά ἀποδειχτεῖ πρόταση τῆς μορφῆς $\forall m \in N, \forall n \in N, P(m,n)$ μερικές φορές χρειαζόμαστε δύο διαδοχικές ἁπλές τέλειες ἐπαγωγές. Στήν ἀρχή ἀποδείχνουμε τήν πρόταση $P(1,1)$ καί στή συνέχεια τήν $\forall m \in N, P(m,1) \Rightarrow P(m',1)$. Αὐτές οἱ δύο προτάσεις συνεπάγονται τήν ἀλήθεια τῆς πρότασης $\forall m \in N, P(m,1)$ καί ἡ ἐπαγωγή ὡς πρός m ἔχει τελειώσει. Ἡ τελευταία αὐτή πρόταση ἀποτελεῖ καί τήν πρώτη ὑπόθεση τῆς ἐπαγωγῆς ὡς πρός n. Θά πρέπει νά ἀποδειχτεῖ ἀκόμη ἡ πρόταση:

$\forall m \in N, \forall n \in N, P(m,n) \Rightarrow P(m,n')$ πού μέ τή προηγούμενη συνεπάγονται τήν $\forall m \in N, \forall n \in N, P(m,n)$.

Ἡ παραπάνω διαδικασία ἀποτελεῖ τή λεγόμενη διπλή ἐπαγωγή καί διατυπώνεται ὡς ἑξῆς: "Ἄν εἶναι ἀληθεῖς οἱ προτάσεις (α') $P(1,1)$ (β') $\forall m \in N, P(m,1) \Rightarrow P(m',1)$ (γ') $\forall m \in N, \forall n \in N, P(m,n) \Rightarrow P(m,n')$, τότε εἶναι ἀληθής καί ἡ πρόταση (δ') $\forall m \in N, \forall n \in N, P(m,n)$"

4.2 Προκειμένου τώρα νά ἀποδειχτεῖ ἡ πρόταση : $\forall m \in N, \forall n \in N, \forall r \in N, P(m,n,r)$ μέ τριπλή ἐπαγωγή ἀποδείχνεται στήν ἀρχή ἡ (α') $P(1,1,1)$ καί στή συνέχεια ἡ (β') $\forall m \in N, P(m,1,1) \Rightarrow P(m',1,1)$. Αὐτές συνεπάγονται τήν ἀλήθεια τῆς (γ') $\forall m \in N, P(m,1,1)$ καί ἡ ἐπαγωγή ὡς πρός m ἔχει τελειώσει. Ἀποδείχνουμε τώρα τήν πρόταση (δ') $\forall m \in N, \forall n \in N, P(m,n,1) \Rightarrow P(m,n',1)$. Οἱ (γ') καί (δ') συνεπάγονται τήν (ε') $\forall m \in N$ $\forall n \in N, P(m,n,1)$. Ἡ ἐπαγωγή ὡς πρός n ἔχει τελειώσει. Ἀποδείχνουμε ἀκόμη τήν πρόταση: (στ') $\forall m \in N, \forall n \in N, \forall r \in N, P(m,n,r) \Rightarrow P(m,n,r')$. Οἱ προτάσεις (ε') καί (στ') συνεπάγονται τήν πρόταση (z') $\forall m \in N, \forall n \in N, \forall r \in N, P(m,n,r)$. Γιά τήν ἀπόδειξη τῆς τελευταίας μέ τριπλή ἐπαγωγή χρειάζεται νά ἀποδειχτοῦν 4 προτάσεις, (ὑποθέσεις τῆς τριπλῆς ἐπαγωγῆς) οἱ (α'), (β'), (δ'), (στ').

4.3 Ἡ πολλαπλή ἐπαγωγή γενικεύεται ὅπως ἔγινε καί γιά τήν ἁπλή στήν παρ. 3.3

4.4 Δέν εἶναι πάντοτε ἀπαραίτητο νά ἐφαρμοστεῖ π.χ τριπλή ἐπαγωγή γιά τήν ἀπόδειξη μιᾶς πρότασης τῆς μορφῆς $\forall m \in N, \forall n \in N, \forall r \in N, P(m,n,r)$ καί τοῦτο γιατί μερικές ἀπό τίς ὑποθέσεις πού πρέπει νά ἀποδειχτοῦν εἶναι κιόλας γνωστές προτάσεις ἤ ἀξιώματα (παρ. 5.1, 5.2 κ.λ.π)

4.5 Στά ἑπόμενα θά δοῦμε ἰδιότητες τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν πού θά ἀποδειχτοῦν μέ ἐφαρμογή τῆς πρώτης ἐπαγωγικῆς ἀρχῆς.

5. Ἰδιότητες τῆς πρόσθεσης στό N

5.1 Τό σύνολο N εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης. Μέ ἄλλα λόγια εἶναι ἀληθής ἡ πρόταση: $\forall m \in N, \forall n \in N, m+n \in N$. Θά χρησιμοποιήσουμε ἁπλή τέλεια ἐπαγωγή. Ἡ προτασιακή συνάρτηση $n \in N, \forall m \in N, m+n \in N$ γιά $n=1$ δίνει τήν πρόταση $\forall m \in N, m+1 \in N$ πού εἶναι ἀληθής (β'ἀξίωμα τοῦ Peano, α'ἀξίωμα τῆς πρόσθεσης).

Ἔτσι ἀποφεύγουμε τήν ἐπαγωγή ὡς πρός m καί ἡ ἐπαγωγή εἶναι ἁπλή. Ἡ τελευταία πρόταση εἶναι καί ἡ πρώτη ὑπόθεσητῆς ἐπαγωγῆς ὡς πρός n. Θά ἀποδείξουμε τώρα καί τήν δεύτερη ὑπόθεση δηλαδή τήν πρόταση:

$\forall m \in N, \forall n \in N, m+n \in N \Rightarrow m+n' \in N$

Πραγματικά, $m+n \in N \Rightarrow (m+n)' \in N$ (β'ἀξίωμα τοῦ Peano) $\Rightarrow m+n' \in N$ (β'ἀξίωμα τῆς πρόσθεσης). Οἱ δύο παραπάνω ὑποθέσεις συνεπάγονται τήν ἀλήθεια τῆς :

$\forall m \in N, \forall n \in N, m+n \in N$.

5.2 Ἰσχύει ὁ προσεταιριστικός νόμος στό N ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης δηλαδή ἡ πρόταση $\forall m \in N, \forall n \in N, \forall r \in N, (m+n)+r = m+(n+r)$. Ἡ προτασιακή συνάρτηση $r \in N, \forall m \in N, \forall n \in N, (m+n)+r = m+(n+r)$ γιά $r=1$ ἔχει σάν τιμή τήν πρόταση $\forall m \in N, \forall n \in N, (m+n)+1 = m+(n+1)$ πού εἶναι ἀληθής ἄν λάβουμε ὑπόψη ὅτι: $(m+n)+1=(m+n)'$ (α'ἀξίωμα τῆς πρόσθεσης), $m+(n+1)=m+n'$ (α'ἀξίωμα τῆς πρόσθεσης) καί $(m+n)' = m+n'$ (β' ἀξίωμα τῆς πρόσθεσης). Ἔτσι προχωροῦμε ἀμέσως σέ ἐπαγωγή ὡς πρός r καί ἀποφεύγουμε τήν τριπλή ἐπαγωγή. Χρειάζεται νά ἀποδείξουμε ἀκόμη τήν πρόταση:

$\forall m \in N, \forall n \in N, \forall r \in N, (m+n)+r=m+(n+r) \Rightarrow (m+n)+r' = m+(n+r')$. Πραγματικά, $(m+n)+r = m+(n+r) \Rightarrow [(m+n)+r]' = [m+(n+r)]'$ (πρόταση ἀντίστροφη πρός τό δ' ἀξίωμα τοῦ Peano) $\Rightarrow (m+n)+r' = m+(n+r)'$ (β'ἀξίωμα τῆς πρόσθεσης) $\Rightarrow (m+n)+r' = m+(n+r')$ (β' ἀξίωμα τῆς πρόσθεσης). Ἡ πρόταση αὐτή πού ἀποδείχτηκε καί ἡ προηγούμενη $\forall m \in N, \forall n \in N, (m+n)+1= m+(n+1)$ συνεπάγονται τήν άλήθεια τοῦ προσεταιριστικοῦ νόμου.

5.3 Ἰσχύει ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος στό N ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης. Μέ ἄλλα λόγια ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall m \in N, \forall n \in N, m+n= n+m$.

Θά ἐφαρμόσουμε διπλή ἐπαγωγή. Ἡ προτασιακή συνάρτηση $m \in N, n \in N, m+n= n+m$ γιά $m = n = 1$ ἔχει τιμή τήν πρόταση $1+1=1+1$ πού προφανῶς εἶναι ἀληθής. Συνεχίζουμε τήν ἐπαγωγή ὡς πρός m ἀποδεικνύοντας τήν δεύτερη ὑπόθεση $\forall m \in N, m+1=1+m \Rightarrow m'+1=1+m'$. Πραγματικά $m+1=1+m \Rightarrow (m+1)'=(1+m)'$ (ἀντίστροφη τοῦ δ΄ἀξιώματος τοῦ Peano) $\Rightarrow (m')'= 1+m'$ (α΄καί β΄ἀξιώματα τῆς πρόσθεσης) $\Rightarrow m'+1=1+m'$ (α΄ἀξίωμα τῆς πρόσθεσης) Ἀποδείχτηκε λοιπόν ἡ πρόταση $\forall m \in N, m+1 = 1+ m \Rightarrow m'+1=1+ m'$ πού μαζί μέ τήν $1+1=1+1$ συνεπάγονται τήν ἀλήθεια τῆς πρότασης $\forall m \in N, m+1=1+m$. Ἡ τελευταία αὐτή πρόταση ἀποτελεῖ καί τήν 1η ὑπόθεση τοῦ δεύτερου βήματος τῆς ἐπαγωγῆς. Θά ἀποδείξουμε τώρα τή 2η ὑπόθεση τοῦ 2ου βήματος δηλαδή τήν ἀλήθεια τῆς πρότασης $\forall m \in N, \forall n \in N, m+n= n+m \Rightarrow m+n'= n'+ m$ Πραγματικά, $m+n= n+m \Rightarrow (m+n)'=(n+m)'$ (ἀντίστροφη δ΄ἀξιώματος Peano) $\Rightarrow m+n'= n+ m'$ (β΄ ἀξίωμα πρόσθεσης) $\Rightarrow m+n'=n+(m+1)$ (α΄ἀξίωμα πρόσθεσης) $\Rightarrow m+n'= n+(1+m)$. (μόλις ἀποδείχτηκε ὅτι $m+1=1+m$) $\Rightarrow m+n' = (n+1)+m$ (προσεταιριστικός νόμος) $\Rightarrow m+n'=n'+m$ (α΄ ἀξίωμα τῆς πρόσθεσης). Ἀποδείχτηκε λοιπόν καί ἡ 2η ὑπόθεση τοῦ 2ου βήματος τῆς ἐπαγωγῆς, συνεπῶς ἡ πρόταση $\forall m \in N, \forall n \in N, m+n = n+m$ θεωρεῖται ἀποδειγμένη.

5.4 Ἰσχύει καί ἀποδείχνεται μέ ἁπλή ἐπαγωγή καί ὁ δεξιός νόμος διαγραφῆς στήν πρόσθεση, δηλαδή ἡ πρόταση $m+r= n+r \Rightarrow m=n$. Μέ ἄλλα λόγια γιά ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς m,n,r γιά τούς ὁποίους ἰσχύει ἡ $m+r=n+r$ ἴσχύει καί ἡ $m=n$. Εὔκολα φαίνεται (παρ.5.3) ὅτι ἰσχύει καί ὁ ἀριστερός νόμος διαγραφῆς στήν πρόσθεση δηλαδή ἡ πρόταση $r+m=r+n \Rightarrow m = n$

5.5 Ἰσχύει καί ἡ πρόταση $m = n \wedge r = s \Rightarrow m+r = n+s$ δηλαδή γιά ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς m,n,r,s γιά τούς ὁποίους ἰσχύει ἡ $m= n \wedge r=s$ ἰσχύει καί ἡ $m+r=n+s$

6. Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό N

6.1 Τό σύνολο N εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Μέ ἄλλα λόγια θά δείξουμε τήν πρόταση $\forall m \in N, \forall n \in N, mn \in N$. Πραγματικά, ἡ προτασιακή συνάρτηση, $n \in N, \forall m \in N, mn \in N$ γιά $n=1$ ἔχει τιμή τήν πρόταση $\forall m \in N, m.1 \in N$ πού εἶναι ἀληθής γιατί $m.1=m \in N$ (α΄ ἀξίωμα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ). Θά ἀποδείξουμε τώρα τή δεύτερη ὑπόθεση τῆς ἐπαγωγῆς ὡς πρός τό n, δηλαδή τήν πρόταση $\forall m \in N, \forall n \in N, mn \in N \Rightarrow mn' \in N$. Πραγματικά, $mn \in N \wedge m \in N \Rightarrow mn+ m \in N$ (παρ.5.1) $\Rightarrow mn' \in N$ (β΄ ἀξίωμα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ). Ἀποδείχτηκε λοιπόν ἡ πρόταση $\forall m \in N, \forall n \in N, mn \in N \Rightarrow mn' \in N$ πού μαζί μέ τήν $\forall m \in N, m.1 \in N$ συνεπάγονται τήν πρόταση $\forall m \in N, \forall n \in N$ $mn \in N$.

6.2 Θά ἀποδείξουμε τό δεξιό ἐπιμεριστικό νόμο τῆς πράξης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης π.χ. $\forall m \in N, \forall n \in N, \forall r \in N, (m+n)r= mr+ nr$ Πραγματικά ἡ προτασιακή συνάρτηση $r \in N, \forall m \in N, \forall n \in N$ $(m+n)r= mr+nr$ γιά $r=1$ ἔχει τιμή τήν πρόταση $\forall m \in N,$ $\forall n \in N, (m+n).1 =m.1+n.1$ πού εἶναι ἀληθής γιατί σύμφωνα μέ τό α΄ ἀξίωμα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι: $(m+n).1=m+n, m.1=m$ καί $n.1=n$. Ἔτσι ἀποφεύγουμε τήν ἐπαγωγή ὡς πρός m καί n καί ἔχουμε κιόλας διαπιστώσει τήν ἀλήθεια τῆς πρώτης ὑπόθεσης τῆς ἐπαγωγῆς ὡς πρός r. Θά ἀποδείξουμε τώρα τή δεύτερη ὑπόθεση δηλαδη τήν πρόταση $\forall m \in N, \forall n \in N, \forall r \in N, (m+n)r= mr+nr \Rightarrow$

$(m+n)r' = mr'+nr'$. Πραγματικά, $(m+n)r = mr+nr \Rightarrow (m+n)r + (m+n) = (mr+nr) + (m+n)$ (παρ. 5.5) $\Rightarrow (m+n)r' = (mr+m)+(nr+n)$ (β΄ἀξίωμα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, προσεταιριστικός καί ἀντιμεταθετικός νόμος τῆς πρόσθεσης στό N) $\Rightarrow (m+n)r' = mr'+nr'$. Ἀποδείχτηκε λοιπόν ἡ δεύτερη ὑπόθεση τῆς ἐπαγωγῆς ὡς πρός r καί μαζί μέ τήν πρώτη συνεπάγονται τήν πρόταση $\forall m \in N, \forall n \in N, \forall r \in N, (m+n)r = mr+nr$.

6.3 Θά δείξουμε τώρα τήν πρόταση $\forall m \in N, \forall n \in N, \forall r \in N, r(m+n) = rm + rn$ δηλαδή τόν ἀριστερό ἐπιμεριστικό νόμο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεση. Πραγματικά ἡ προτασιακή συνάρτηση $n \in N, \forall m \in N, \forall r \in N, r(m+n) = rm + rn$ γιά $n = 1$ ἔχει τιμή τήν πρόταση $\forall m \in N, \forall r \in N, r(m+1) = rm+r.1$ πού εἶναι ἀληθής γιατί $r(m+1) = rm' = rm+r = rm+r.1$ (α΄ἀξίωμα τῆς πρόσθεσης, α΄καί β΄ἀξιώματα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ). Ἔτσι ἀποφεύγουμε τήν ἐπαγωγή ὡς πρός m καί r καί ἔχουμε κιόλας ἀποδείξει τήν πρώτη ὑπόθεση τῆς ἐπαγωγῆς ὡς πρός n. Θά ἀποδειξουμε τώρα τή δεύτερη ὑπόθεση δηλαδή τήν πρόταση $\forall m \in N, \forall n \in N, \forall r \in N, r(m+n) = rm+rn \Rightarrow r(m+n') = rm+rn'$. Πραγματικά, $r(m+n) = rm+rn \Rightarrow r(m+n)+r = (rm+rn)+r$ (παρ 5.5) $\Rightarrow r(m+n)' = rm+(rn+r)$ (2ο ἀξίωμα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καί προσεταιριστικός νόμος τῆς πρόσθεσης) $\Rightarrow r(m+n') = rm+rn'$. Ἀποδείχτηκε λοιπόν ἡ παραπάνω πρόταση πού μαζί μέ τήν $\forall m \in N, \forall r \in N, r(m+1) = rm+r.1$ συνεπάγονται τόν ἀριστερό ἐπιμεριστικό νόμο.

6.4 Θά ἀποδείξουμε τόν ἀντιμεταθετικό νόμο γιά τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό N, δηλαδή τήν πρόταση $\forall m \in N, \forall n \in N, mn = nm$. Θά χρησιμοποιήσουμε διπλή ἐπαγωγή. Πραγματικά, ἡ προτασιακή συνάρτηση $m \in N, n \in N, mn = nm$ γιά $m = n = 1$ ἔχει τιμή τήν πρόταση $1.1 = 1.1$ πού προφανῶς εἶναι ἀληθής. Θά δείξουμε τώρα τήν πρόταση $\forall m \in N, m.1 = 1.m \Rightarrow m'.1 = 1.m'$. Εἶναι $m.1 = 1.m \Rightarrow m.1+1.1 = 1.m+1.1$ (παρ. 5.5) $\Rightarrow (m+1).1 = 1.(m+1) \Rightarrow m'.1 = 1.m'$ (παρ. 6.2 καί 6.3 καί α΄ἀξίωμα τῆς πρόσθεσης). Ἀποδείχτηκε λοιπόν καί ἡ β΄ὑπόθεση τῆς ἐπαγωγῆς ὡς πρός m πού μαζί μέ τήν α΄ ὑπόθεση $1.1 = 1.1$ συνεπάγονται τήν:

$\forall m \in N$, $m.1 = 1.m$ πού ἀποτελεῖ καί τήν α' ὑπόθεση τοῦ β'βήματος τῆς ἐπαγωγῆς (ὡς πρός n). Θά ἀποδείξουμε τώρα τήν β' ὑπόθεση τῆς ἐπαγωγῆς ὡς πρός n δηλαδή τήν $\forall m \in N$, $\forall n \in N$, $mn = nm \Rightarrow mn' = n'm$. Πραγματικά $mn=nm \Rightarrow mn+m = nm+m$ (παρ.5.5) $\Rightarrow mn' = (n+1)m$ (παρ.6.2) $\Rightarrow mn' = n'm$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας της $\Rightarrow$ ἰσχύει τελικά ἡ πρόταση:

$\forall m \in N, \forall n \in N, mn=nm \Rightarrow mn' = n'm$ πού μαζί μέ τήν $\forall m \in N, m.1=1.m$ συνεπάγονται τήν $\forall m \in N, \forall n \in N$, $mn=nm$ δηλαδή τόν ἀντιμεταθετικό νόμο γιά τόν πολλαπλασιασμό στό N.

6.5 Ἰσχύει ἡ πρόταση, $\forall m \in N$, $\forall n \in N$, $\forall r \in N$, $(mn)r = m(nr)$ δηλαδή <u>ὁ προσεταιριστικός νόμος γιά τόν πολλαπλασιασμό στό N.</u> Ἡ προτασιακή συνάρτηση $r \in N$, $\forall m \in N$, $\forall n \in N$, $(mn)r=m(nr)$ γιά $r=1$ ἔχει τιμή τήν πρόταση $\forall m \in N$, $\forall n \in N$, $(mn).1 = m(n.1)$ πού εἶναι ἀληθής γιατί κάθε μέλος τῆς ἰσότητας εἶναι ἴσο μέ mn (α'ἀξίωμα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ). Ἔτσι ἀποφεύγεται ἡ τριπλή ἐπαγωγή καί ἀπομένει μία ἁπλή ἐπαγωγή ὡς πρός r τῆς ὁποίας ἡ πρώτη ὑπόθεση ἔχει κιόλας ἀποδειχτεῖ. Θά ἀποδείξουμε ἀκόμη τή δεύτερη ὑπόθεση δηλαδή τήν πρόταση: $\forall m \in N$, $\forall n \in N$, $\forall r \in N$, $(mn)r=m(nr) \Rightarrow$ $\Rightarrow (mn)r' = m(nr')$. Ἔχουμε: $(mn)r=m(nr) \Rightarrow (mn)r+mn = m(nr)+mn$ (παρ.5.5) $\Rightarrow (mn)r' = m[nr+n]$ (β' ἀξίωμα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καί ἀριστερός ἐπιμεριστικός νόμος) $\Rightarrow (mn)r' = m(nr')$ (β'ἀξίωμα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ). Ἀποδείχτηκε λοιπόν καί ἡ δεύτερη ὑπόθεση πού μαζί μέ τήν πρώτη συνεπάγονται τήν ἀλήθεια τοῦ προσεταιριστικοῦ νόμου στό N γιά τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

6.6 <u>Ἰσχύουν στό N οἱ νόμοι τῆς διαγραφῆς δεξιός καί ἀριστερός γιά τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.</u> Γιά ὅλους τούς φυσικούς m,n,r γιά τούς ὁποίους ἰσχύει ἡ $mr=nr$ ἰσχύει καί ἡ $m=n$. Συμβολικά: $mr=nr \Rightarrow m=n$. Ἰσχύει ἀκόμη ἡ $rm=rn \Rightarrow m=n$.

6.7 Γιά ὅλους τούς φυσικούς m,n,r,s γιά τούς ὁποίους ἰσχύει ἡ $m=n \wedge r=s$. Ἰσχύει καί ἡ $mr=ns$. Συμβολικά: $m=n \wedge r=s \Rightarrow mr=ns$.

7. Σχέσεις γνήσιας διάταξης στό N

7.1 Ὁρίζουμε τή σχέση < τοῦ μικρότερου ὡς ἑξῆς:

$$\text{Στό } N, m<n \underset{ορσ}{\Leftrightarrow} \exists r \in N,\ m+r=n$$

Ὁ φυσικός r τότε εἶναι μόνο ἕνας γιατί διαφορετικά ἄν ὑπῆρχε καί ὁ s θά ἦταν $m+r=n$ καί $m+s=n$. Αὐτές συνεπάγονται τήν $m+r=m+s$ καί αὐτή (παρ.5.4) τήν $r=s$

7.2 Ἡ σχέση τοῦ μικροτέρου ὅπως ὁρίστηκε στό N εἶναι σχέση ὁλικῆς γνήσιας διάταξης. Πραγματικά, εἶναι μεταβατική, δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση: $m<n \wedge n<r \Rightarrow m<r$. Ἔχουμε: $m<n \wedge n<r \Leftrightarrow \exists \lambda \in N, m+\lambda=n \wedge \exists \mu \in N\ n+\mu=r \Rightarrow \exists \lambda \in N, \exists \mu \in N, (m+\lambda)+\mu=r \Rightarrow \exists \lambda \in N, \exists \mu \in N, m+(\lambda+\mu)=r \Rightarrow \exists p \in N (p=\lambda+\mu), m+p=r \Rightarrow m<r$. Ἡ < λοιπόν εἶναι μεταβατική στό N. Στό N ἰσχύει ὁ νόμος τῆς τριχοτομίας $\forall m \in N, \forall n \in N, m<n \veebar n<m \veebar m=n$ ἐπομένως ἐπειδή ἰσχύει ἡ σχέση $m=m$ ἀποκλείεται νά ἰσχύει ἡ: $m<m$. Ἰσχύει λοιπόν στό N ἡ πρόταση $\forall m \in N, m \not< m$ πού δείχνει ὅτι ἡ < εἶναι ἀναυτοπαθής στό N. Ἡ μεταβατικότητα καί ἡ ἀναυτοπάθεια τῆς < στό N δείχνουν ὅτι πρόκειται γιά σχέση γνήσιας διάταξης. Ὁ νόμος τῆς τριχοτομίας ἐπίσης δείχνει ὅτι ἡ < εἶναι ὁλική διάταξη στό N.

7.3 Θά ἀποδείξουμε τήν πρόταση $m<n \Rightarrow m+r<n+r$. Πραγματικά, $m<n \Rightarrow \exists \lambda \in N, m+\lambda=n \Rightarrow \exists \lambda \in N, (m+\lambda)+r=n+r \Rightarrow \exists \lambda \in N, m+(\lambda+r)=n+r \Rightarrow \exists \lambda \in N, m+(r+\lambda)=n+r \Rightarrow \exists \lambda \in N, (m+r)+\lambda=n+r \Rightarrow m+r<n+r$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητάς της $\Rightarrow$ ἰσχύει τελικά ἡ παραπάνω πρόταση.

7.4 Ἰσχύει στό N ἡ πρόταση $m<n \Rightarrow mr<nr$.

Ἔχουμε: $m<n \Rightarrow \exists\lambda \in N,\ m+\lambda=n \Rightarrow \exists\lambda \in N,(m+\lambda)r=nr$ (παρ.6.7) $\Rightarrow \exists\lambda \in N, mr+\lambda r=nr$ (δεξιός ἐπιμεριστικός νόμος) $\Rightarrow$ (παρ.7.1) $mr<nr$.

7.5 Θά ἀποδειχτεῖ στό N ἡ πρόταση: $\underline{m<n \wedge r<s \Rightarrow m+r<n+s}$
Πραγματικά, $m<n \wedge r<s \Rightarrow \exists\lambda \in N, \exists\mu \in N, m+\lambda=n \wedge r+\mu=s \Rightarrow \exists\lambda \in N, \exists\mu \in N, (m+\lambda)+(r+\mu)=n+s \Rightarrow \exists\lambda \in N, \exists\mu \in N, (m+r)+(\lambda+\mu)=n+s \Rightarrow \exists p \in N\ (p=\lambda+\mu), (m+r)+p=n+s \Rightarrow m+r <n+s$.

7.6 Θά ἀποδειχτεῖ στό N ἡ πρόταση: $\underline{m<n \wedge r\leq s \Rightarrow mr<ns}$.
Πραγματικά, $m<n \wedge r<s \Rightarrow \exists\lambda \in N, \exists\mu \in N, m+\lambda=n \wedge r+\mu=s \Rightarrow \exists\lambda \in N, \exists\mu \in N, (m+\lambda)(r+\mu)=ns \Rightarrow \exists\lambda \in N, \exists\mu \in N, mr+(m\mu+\lambda r+\lambda\mu)=ns \Rightarrow \exists p \in N, mr+p=ns \Rightarrow mr<ns$.

7.7 <u>Ὁρίζουμε στό N καί τή σχέση τοῦ μεγαλύτερου</u> π.χ $n>m \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} m<n$. Ἰσχύουν καί γιά τή σχέση τοῦ μεγαλύτερου τά ἀναφερθέντα στίς προηγούμενες παραγραφους.

8. Σχέσεις διαταξης στό N.

8.1 Ὁρίζουμε τή σχέση τοῦ μικρότερου ἤ ἴσου στό N πού τή συμβολίζουμε μέ $\leqq$ ὡς ἑξῆς:
$m\leqq n$ στό $N \Leftrightarrow m<n \veebar m=n$ (γράφουμε καί: $m<n \vee m=n$).

8.2 <u>Ἡ σχέση $\leqq$ στό N εἶναι σχέση ὁλικῆς διάταξης στό N.</u>
Πραγματικά, εἶναι <u>αὐτοπαθής</u> δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall m \in N, m\leqq m$. Ἡ πρόταση αὐτή εἶναι ἀληθής γιατί ἡ $m=m$ εἶναι ἀληθής καί ἡ $m<m$ εἶναι ψευδής. Ἐπομένως ἡ $m<m \vee m=m$ (ἐπίσης ἡ $m<n \veebar m=n$) δηλαδή ἡ $m\leqq m$ εἶναι ἀληθής. Ἡ σχέση $\leqq$ στό N εἶναι <u>ἀντισυμμετρική</u>. Μέ ἄλλα λόγια ἰσχύει ἡ πρόταση $m\leqq n \wedge n\leqq m \Rightarrow m=n$. Εἶναι $m\leqq n \wedge n\leqq m \Rightarrow (m<n \vee m=n) \wedge (n<m \vee m=n) \Rightarrow$ (κεφ. I, παρ. 2.6γ) $(m<n \wedge n<m) \vee (m<n \wedge m=n) \vee (m=n \wedge n<m) \vee (m=n \wedge m=n)$ Οἱ προτάσεις τῶν τριῶν πρώτων παρενθέσεων εἶναι ψευδεῖς (νόμος τριχοτομίας παρ.7.2), Ἐπομένως τῆς τελευταίας πρέπει νά εἶναι ἀληθής γιατί τό συμπέρασμα εἶναι ἀληθές Ἡ $m=n \wedge m=n$ ἕνεκα τῆς ταυτο-

δυναμίας γίνεται $m=n$ καί δείχνει ὅτι ἡ $\leqq$ εἶναι ἀντισυμμετρική στό N (ἀντί γιά τό $\vee$ μπορούσαμε νά χρησιμοποιήσουμε τό $\underline{\vee}$). Ἡ $\leqq$ εἶναι ἀκόμη μεταβατική, δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση $m\leqq n \wedge n\leqq r \Rightarrow m\leqq r$. Πραγματικά, $m\leqq n\wedge n\leqq r \Rightarrow (m<n \vee m=n) \wedge (n<r \vee n=r) \Rightarrow$ $(m<n\wedge n<r) \vee (m<n\wedge n=r) \vee (m=n\wedge n<r) \vee (m=n\wedge n=r) \Rightarrow m<r \vee m<r \vee m<r \vee m=r \Rightarrow m<r \vee m=r \Rightarrow m\leqq r$.

Ἀποδείχτηκε λοιπόν ὅτι ἡ σχέση $\leqq$ στό N εἶναι αὐτοπαθής, ἀντισυμμετρική καί μεταβατική ἐπομένως εἶναι μιά σχέση διάταξης στό N.

Ἐπίσης εἴδαμε στήν παρ.7.2 τήν πρόταση $\forall m\in N$, $\forall n\in N, \forall r\in N, m<n \underline{\vee} n<m \underline{\vee} m=n$. Παρατηροῦμε ὅτι ἄν ἰσχύει ἡ $m<n$ τότε ἰσχύει καί ἡ $m\leqq n$. Ἐπίσης ὅταν ἰσχύει ἡ $n<m$ τότε ἰσχύει καί ἡ $n\leqq m$. Τέλος ὅταν ἰσχύει ἡ $m=n$ τότε ἰσχύει ἡ $m\leqq n$ καί ἡ $n\leqq m$. Ἰσχύει λοιπόν γενικά ἡ πρόταση $\forall m\in N, \forall n\in N, m\leqq n \vee n\leqq m$, πού δείχνει ὅτι ἡ $\leqq$ εἶναι σχέση ὁλικῆς διάταξης στό N.

8.3 Ὁρίζουμε στό N καί τή σχέση τοῦ μεγαλυτέρου ἤ ἴσου πού τή συμβολίζουμε μέ $\geqq$.

π.χ $n\geqq m \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} m\leqq n$

8.4 Ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall m\in N, 1\leqq m$. Πραγματικά γιά $m=1$ ἡ προτασιακή συνάρτηση $m\in N, 1\leqq m$ ἔχει τιμή τήν πρόταση $1\leqq 1$ πού εἶναι ἀληθής γιατί $1=1$. Θά ἀποδείξουμε τώρα τή δεύτερη ὑπόθεση τῆς ἐπαγωγῆς, δηλαδή τήν πρόταση $\forall m\in N, 1\leqq m \Rightarrow 1\leqq m+1$.

Ἔχουμε: $1\leqq m\wedge m\leqq m+1 \Rightarrow 1\leqq m+1$ (μεταβατικότητα). Ἀποδείχτηκαν λοιπόν καί οἱ δύο ὑποθέσεις τῆς ἐπαγωγῆς ἐπομένως ἰσχύει ἡ $\forall m\in N, 1\leqq m$. Μέ ἄλλα λόγια τό σύνολο N ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο τό φυσικό ἀριθμό 1.

8.5 Ἰσχύει ἡ πρόταση $m<n \Rightarrow m'\leqq n$. Πραγματικά, $m<n \Rightarrow$ $\exists r\in N, n=m+r \Rightarrow n=m+1$ (ἄν $r=1$) $\underline{\vee}\ n=m+r_1$ (μέ $r_1>1$ ὁπότε $\exists r_2\in N, r_1=1+r_2$) $\Rightarrow n=m' \underline{\vee}\ n=m+(1+r_2) \Rightarrow$

$n=m' \vee n=(m+1)+r_2 \Rightarrow n=m' \vee n=m'+r_2 \Rightarrow n=m' \vee m'<n \Rightarrow m' \leqq n$.

9. **Καλή διάταξη. Ἡ ἀρχή τῆς καλῆς διάταξης τοῦ N.**

Ἕνα διατεταγμένο σύνολο A εἶναι καλά διατεταγμένο ἄν καί μόνο ἄν κάθε μή κενό ὑποσύνολό του ἔχει μικρότερο στοιχεῖο

Συμβολικά: A εἶναι καλά διατεταγμένο $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall M \in (\mathscr{P}(A)-\phi), \exists \alpha \in M, \forall x \in M, \alpha \leqq x$

"Τό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι καλά διατεταγμένο". Μέ ἄλλα λόγια: "Κάθε μή κενό ὑποσύνολο τοῦ N ἔχει μικρότερο στοιχεῖο". Ἰσοδύναμη εἶναι ἡ πρόταση: "Κάθε ὑποσύνολο K τοῦ N χωρίς μικρότερο στοιχεῖο εἶναι κενό σύνολο". Ὑποθέτουμε ὅτι δέν εἶναι κενό τό K. Ἰσχύει ἡ $\forall m \in K, 1<m$ ὅπως φαίνεται ἀπό τήν παρ. 8.4 ἀποκλειομένης τῆς περίπτωσης τό 1 νά εἶναι ἴσο μέ κάποιο στοιχεῖο m_1 τοῦ K γιατί τότε τό 1 θά ἦταν τό μικρότερο στοιχεῖο τοῦ K ἀντίθετα μέ τήν ὑπόθεση. Ἡ πρώτη λοιπόν ὑπόθεση τῆς ἐπαγωγῆς ἰσχύει. Θά δείξουμε τώρα τή δεύτερη ὑπόθεση τῆς ἐπαγωγῆς δηλαδή τήν πρόταση: $\forall n \in N, \forall m \in K, n<m \Rightarrow n'<m$ Ἔχουμε, $n<m \Rightarrow n' \leqq m$ (παρ. 8.5) ὅμως ἀποκλείεται γιά κάποιο n ἀπό τό N γιά τό ὁποῖο ἰσχύει ἡ $n<m$ γιά ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ m τοῦ K, νά εἶναι $n'=m_2$ ὅπου m_2 κάποιο στοιχεῖο τοῦ K. Ἄν συνέβαινε κάτι τέτοιο τότε τό m_2 θά ἦταν τό μικρότερο στοιχεῖο τοῦ K σέ ἀντίφαση μέ τήν ὑπόθεση. Ἰσχύει λοιπόν ἡ $n'<m$ δηλαδή ἡ δεύτερη ὑπόθεση τῆς ἐπαγωγῆς $\forall n \in N, \forall m \in K, n<m \Rightarrow n'<m$. Οἱ δύο ἀποδειγμένες ὑποθέσεις τῆς ἐπαγωγῆς συνεπάγονται τήν ἀλήθεια τῆς πρότασης $\forall n \in N, \forall m \in K$ $n<m$ πού δείχνει ὅτι ἔχουμε ὁδηγηθεῖ σέ ἀντίφαση. Εἶναι κενό λοιπόν τό K (πραγματικά, ἄν τό K εἶχε στοιχεῖα αὐτά θά ἦταν φυσικοί ἀριθμοί, ὅμως τότε τά στοιχεῖα του δέν μπορεῖ νά εἶναι μεγαλύτερα ἀπό κάθε στοιχεῖο τοῦ N).

10. Δεύτερη ἀρχή τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

10.1 ""Αν εἶναι ἀληθεῖς 1) ἡ πρόταση $P(1)$ (τιμή τῆς προτασιακῆς συνάρτησης $n \in N$, $P(n)$ γιά $n=1$) καί 2)ἡ πρόταση $\forall n \in N-\{1\}$, $P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots P(n-1) \Rightarrow P(n)$ τότε εἶναι ἀληθής καί ἡ πρόταση 3) $\forall n \in N$, $P(n)$".

Πραγματικά, ἄν μέ M παραστήσουμε ἕνα ὑποσύνολο τοῦ N γιά τά στοιχεῖα τοῦ ὁποίου ἡ προτασιακή συνάρτηση $n \in N$, $P(n)$ ἔχει σάν τιμές ψευδεῖς προτάσεις, τότε $1 \notin M$ γιατί σύμφωνα μέ τήν πρώτη ὑπόθεση τῆς ἐπαγωγῆς ἡ $P(1)$ εἶναι ἀληθής. "Αν τό M δέν εἶναι κενό θά ἔχει (παρ.9) ὡς μικρότερο στοιχεῖο ἕνα φυσικό ἀριθμό n μέ $n>1$ ἀφοῦ $1 \notin M$. Αὐτό σημαίνει ὅτι γιά τούς φυσικούς ἀριθμούς $1,2,\ldots(n-1)$ πού εἶναι μικρότεροι ἀπό τό n καί συνεπῶς δέν ἀνήκουν στό M ἔχουμε τίς ἀληθεῖς προτάσεις $P(1)$, $P(2)$, ...$P(n-1)$ ἐνῶ ἡ $P(n)$ εἶναι ψευδής ἀφοῦ τό n ἀνήκει στό M ὡς τό μικρότερο στοιχεῖο του. Τό ἐξαγόμενο ὅμως αὐτό βρίσκεται σέ ἀντίφαση μέ τή δεύτερη ὑπόθεση τῆς ἐπαγωγῆς πού θέλει καί τήν $P(n)$ ἀληθή. Τό M λοιπόν δέν μπορεῖ νά ἔχει στοιχεῖα, εἶναι κενό καί ἡ προτασιακή συνάρτηση $n \in N$, $P(n)$ γιά κάθε στοιχεῖο τοῦ N ἔχει σάν τιμή ἀληθή πρόταση. Ἰσχύει συνεπῶς ἡ πρόταση $\forall n \in N$, $P(n)$.

10.2 Ἡ πρόταση τῆς παρ. 10.1 γενικεύεται ὅπως ἔγινε καί γιά τήν πρόταση τῆς παρ. 3.1 στήν παρ. 3.3. Ἐδῶ θά ἔχουμε τήν πρόταση: ""Αν εἶναι ἀληθεῖς 1) ἡ πρόταση $P(n_o)$ (n_o εἶναι ἕνας φυσικός ἀριθμός) καί 2) ἡ πρόταση $\forall n \in N-\{1,2,\ldots,n_o\}$, $P(n_o) \wedge P(n_o+1) \wedge \ldots \wedge P(n-1) \Rightarrow P(n)$ τότε εἶναι ἀληθής καί ἡ πρόταση 3) $\forall n \in N-\{1,2,\ldots(n_o-1)\}$, $P(n)$".

10.3 Μία διπλή ἐπαγωγή μέ τήν βοήθεια τῆς πρότασης τῆς παρ.10.1 γιά τήν ἀπόδειξη τῆς πρότασης $\forall m \in N, \forall n \in N$,

$P(m,n)$. Εἶναι ἡ ἑπόμενη: Ἀποδείχνουμε στήν ἀρχή τήν πρόταση 1) $P(1,1)$ καί στή συνέχεια τήν πρόταση 2) $\forall m \in N-\{1\}$, $P(1,1) \wedge P(2,1) \wedge \ldots \wedge P(m-1,1) \Rightarrow P(m,1)$ Οἱ δύο αὐτές προτάσεις συνεπάγονται τήν ἀλήθεια τῆς 3) $\forall m \in N$, $P(m,1)$ πού ἀποτελεῖ καί τήν πρώτη ὑπόθεση τοῦ δεύτερου βήματος τῆς ἐπαγωγῆς (ὡς πρός n). Ἀποδείχνουμε στή συνέχεια τήν πρόταση 4) $\forall m \in N$, $\forall n \in N-\{1\}$, $P(m,1) \wedge P(m,2) \wedge \ldots \wedge P(m,n-1) \Rightarrow P(m,n)$ πού εἶναι ἡ δεύτερη ὑπόθεση τοῦ δευτέρου βήματος τῆς ἐπαγωγῆς. Ὕστερα ἀπό αὐτά ἡ πρόταση $\forall m \in N, \forall n \in N$, $P(m,n)$ εἶναι ἀποδειγμένη. Χρειάστηκε νά ἀποδειχτοῦν τρεῖς ἄλλες προτάσεις πού τήν συνεπάγονται (οἱ 1,2 καί 4).

11. Ἐφαρμογές τῆς δεύτερης ἐπαγωγικῆς ἀρχῆς. Τό θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Ἀριθμητικῆς.

11.1 Θά ἀποδείξουμε τήν πρόταση $\forall n \in N$, $3^{3n} > 5^{2n}$ Γιά n=1 Ἔχουμε τήν πρόταση $3^3 > 5^2$ πού εἶναι ἀληθής γιατί πρόκειται γιά τήν $27 > 25$. Ὑποθέτουμε τώρα ὅτι ἡ $3^{3n} > 5^{2n}$ ἰσχύει γιά τούς φυσικούς $1,2,\ldots,n-1$, $(n>1)$ καί θά δείξουμε ὅτι τότε ἰσχύει καί γιά τόν φυσικό n. Ἐπειδή ἡ $3^{3n} > 5^{2n}$ ἰσχύει γιά τίς $1,2,\ldots,n-1$ ἰσχύει γιά τούς 1 καί n-1 δηλαδή εἶναι ἀληθεῖς οἱ προτάσεις $3^3 > 5^2$ καί $3^{3(n-1)} > 5^{2(n-1)}$. Τίς δύο τελευταῖες ἀνισότητες τίς πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη καί ἔχουμε τήν $3^3 \cdot 3^{3(n-1)} > 5^2 \cdot 5^{2(n-1)}$ δηλαδή τήν $3^{3n} > 5^{2n}$ Ἀποδείχτηκε λοιπόν καί ἡ δεύτερη ὑπόθεση τῆς ἐπαγωγῆς. Οἱ δύο ὑποθέσεις τῆς ἐπαγωγῆς πού ἀποδείχτηκαν συνεπάγονται τήν ἰσχύ τῆς πρότασης $\forall n \in N, 3^{3n} > 5^{2n}$

11.2 Θά δείξουμε τήν πρόταση: "Κάθε φυσικός ἀριθμός $n > 1$ εἶναι πρῶτος ἤ εἶναι ἴσος μέ γινόμενο πρώτων (ἀναλύεται σέ γινόμενο πρώτων)". Θά ἐφαρμόσουμε τή μέθοδο τῆς παρ. 10.2.

Πραγματικά γιά $n=2$ ἡ πρόταση εἶναι ἀληθής γιατί ὁ 2 εἶναι πρῶτος. Ὑποθέτουμε τώρα ὅτι ἡ πρόταση ἰσχύει γιά $2.3,...,n-1$ καί θά δείξουμε ὅτι τότε ἰσχύει καί γιά n. Ὅμως ἤ ὁ n θά εἶναι πρῶτος ὁπότε ἰσχύει ἡ πρόταση καί γιά n ἤ θά διαιρεῖται ἀπό κάποιον φυσικό δ_1 καί θά ἔχουμε πηλίκον τόν φυσικό δ_2. Θά εἶναι λοιπόν $n=\delta_1\cdot\delta_2$ καί οἱ διαιρέτες δ_1 καί δ_2 εἶναι ἀριθμοί ἀπό τούς $2,3,...,n-1$ γιά τούς ὁποίους ὑποθέσαμε ὅτι ἤ εἶναι πρῶτοι ἤ ἀναλύονται σέ γινόμενο πρώτων. Ἔτσι λοιπόν ὁ n ἀναλύεται σέ γινόμενο πρώτων καί ἡ πρόταση πάλι ἰσχύει γιά τό n. Ἀποδείχτηκε συνεπῶς καί ἡ δεύτερη ὑπόθεση τῆς ἐπαγωγῆς. Οἱ δύο ἀποδειγμένες ὑποθέσεις τῆς ἐπαγωγῆς συνεπάγονται τήν ἀλήθεια τῆς πρότασης πού ἀναφέραμε στήν ἀρχή τῆς παραγράφου.

11.3 Ἰσχύει τό ἑπόμενο θεώρημα πού ὀνομάζεται, "Θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Ἀριθμητικῆς". Ἔχουμε τήν πρόταση: "Κάθε φυσικός ἀριθμός $n>1$ ἀναλύεται κατά ἕνα μόνο τρόπο (μονότροπα) σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων, ἄν φυσικά ἀδιαφορήσουμε γιά τή σειρά ἀναγραφῆς τῶν παραγόντων καί θεωροῦμε σάν γινόμενο ἀκόμα καί ἕνα μεμονωμένο φυσικό πρῶτο ἀριθμό".

Ὑποθέτουμε ὅτι ἔχουμε δύο διαφορετικούς τρόπους ἀνάλυσης τοῦ n σέ γινόμενο πρώτων τούς ἑξῆς: $n=\lambda_1\lambda_2\lambda_3...\lambda_\rho$ καί $n=\mu_1\mu_2\mu_3...\mu_\sigma$ μέ $\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq...\leqq\lambda_\rho$ καί $\mu_1\leqq\mu_2\leqq\mu_3\leqq...\leqq\mu_\sigma$. Ἰσχύει συνεπῶς ἡ ἰσότητα $\lambda_1\lambda_2\lambda_3...\lambda_\rho=\mu_1\mu_2\mu_3...\mu_\sigma$. Ὁ πρῶτος λ_1 διαιρεῖ τό πρῶτο μέλος αὐτῆς τῆς ἰσότητας ἑπομένως θά διαιρεῖ καί τό δεύτερο καί γιά τό λόγο αὐτό θά εἶναι ἴσος μέ ἕνα ἀπό τούς πρώτους παράγοντες τοῦ γινομένου $\mu_1\mu_2\mu_3..\mu_\sigma$ π.χ μέ τόν μ_i ὅπου $1\leqq i\leqq\sigma$ θά εἶναι λοιπόν $\lambda_1=\mu_i$. Μέ τήν ἴδια σκέψη ἔχουμε ὅτι $\mu_1=\lambda_j$ ὅπου $1\leqq j\leqq\rho$. Ἀπό τά ἀναφερθέντα ἰσχύουν οἱ $\mu_i=\lambda_1 \leqq \lambda_j=\mu_1 \leqq \mu_i$ ἀπό τίς ὁποῖες προκύπτει ἡ $\lambda_1=\mu_1$ καί στή συνέχεια ἡ $\frac{n}{\lambda_1}=\frac{n}{\mu_1}$

Ἐρχόμαστε τώρα στό θέμα τῆς ἐπαγωγῆς. Ἡ πρώτη ὑπόθεση ἰσχύει, δηλαδή ἡ πρόταση ἰσχύει προφανῶς γιά τόν φυσικό ἀριθμό 2. Σχετικά μέ τή δεύτερη ὑπόθεση τῆς ἐπαγωγῆς ὑποθέτουμε ὅτι ἡ πρόταση ἰσχύει γιά τό ἀριθμό $\frac{n}{\lambda_1}$ ἤ τόν ἴσο του $\frac{n}{\mu_1}$ ἀφοῦ εἶναι ἀριθμός ἀπό τούς $2,3,\ldots,n-1$ καί θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά τόν n. Μέ ἄλλα λόγια ὑποθέτουμε ὅτι ὁ $\frac{n}{\lambda_1}=\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_\rho$ γράφεται μονότροπα σέ γινόμενο πρώτων, δηλαδή ὑποθέτουμε ὅτι $\rho-1=\sigma-1$ καί $\lambda_2=\mu_2, \lambda_3=\mu_3, \ldots, \lambda_\rho=\mu_\sigma$ ἀφοῦ $\frac{n}{\lambda_1}=\frac{n}{\mu_1}=\mu_2\mu_3\ldots\mu_\sigma$ καί θά δείξουμε ὅτι αὐτό ἰσχύει καί γιά τόν n. Πραγματικά, ἄν λάβουμε ὑπόψη μας καί τήν ἀποδειχθεῖσα $\lambda_1=\mu_1$ ἔχουμε ὅτι $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_\rho=\mu_1\mu_2\ldots\mu_\sigma=n$ μέ $\lambda_1=\mu_1, \lambda_2=\mu_2, \ldots, \lambda_\rho=\mu_\rho$ ὅπου $\sigma=\rho$. Οἱ δύο ὑποθέσεις της ἐπαγωγῆς συνεπάγονται τήν ἀλήθεια τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τῆς Ἀριθμητικῆς.

12. Μία ἄλλη μορφή τῆς ἀρχῆς τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

12.1 Ἰσχύει ἡ πρόταση: "Ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση: 1) $P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(\lambda)$ καί ἡ πρόταση 2) $\forall n \in N-\{1,2,3,\ldots,\lambda\}, P(n-\lambda) \wedge P(n-\lambda+1) \wedge \ldots \wedge P(n-1) \Rightarrow P(n)$ τότε ἰσχύει καί ἡ πρόταση 3) $\forall n \in N, P(n)$".

Πραγματικά, ἄν M εἶναι ἕνα ὑποσύνολο τοῦ N γιά τά στοιχεῖα τοῦ ὁποίου ἡ προτασιακή συνάρτηση $n \in N, P(n)$ ἔχει σάν τιμές ψευδεῖς προτάσεις τότε ἕνεκα τῆς πρώτης ὑπόθεσης τῆς ἐπαγωγῆς ἰσχύουν οἱ $1 \notin M, 2 \notin M, \ldots, \lambda \notin M$. Τό M ἄν δέν εἶναι κενό ἔχει ἕνα μικρότερο στοιχεῖο π.χ τό n ὅπου $n>\lambda$ ἕνεκα τῶν $1 \notin M, 2 \notin M, \ldots, \lambda \notin M$ Ὅμως τότε ἐπειδή οἱ $n-1, n-2, \ldots, n-\lambda$ δέν ἀνήκουν στό M καί ὑπάρχουν ὅλοι ἀφοῦ $n>\lambda$ ἔχουμε τήν πρόταση $P(n-\lambda) \wedge P(n-\lambda+1) \wedge \ldots \wedge P(n-1)$ χωρίς νά εἶναι ἀληθής καί ἡ $P(n)$ (γιατί $n \in M$) ἀντίθετα μέ τή δεύτερη ὑπόθεση τῆς ἐπαγωγῆς. Τό M λοιπόν εἶναι κενό καί ἡ προτασιακή συνάρτηση $n \in N, P(n)$ δίνει γιά κάθε n ἀπό τό N ἀληθεῖς προτάσεις. Μέ ἄλλα λόγια τότε εἶναι ἀληθής ἡ πρόταση $\forall n \in N, P(n)$.

12.2 Ἄν πάρουμε $\lambda=2$ τότε ἡ πρόταση τῆς παρ. 12.1 ἔχει τήν ἑπόμενη διατύπωση.

"Ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση 1) $P(1) \wedge P(2)$ καί ἡ πρόταση 2) $\forall n \in N-\{1,2\}$, $P(n-2) \wedge P(n-1) \Rightarrow P(n)$ τότε ἰσχύει καί πρόταση $\forall n \in N$, $P(n)$".

12.3 Μέ τή βοήθεια τῆς πρότασης τῆς παρ. 12.2 θά δείξουμε τήν πρόταση $\forall n \in N, (1+\sqrt{5})^n+(1-\sqrt{5})^n=$πολ.$2^n$ (πολ.2^n = πολλαπλάσιο τοῦ 2^n). Πραγματικά, γιά $n=1$ καί $n=2$ ἡ προτασιακή συνάρτησῃ $n \in N, (1+\sqrt{5})^n+(1-\sqrt{5})^n=$πολ.$2^n$ ἔχει σάν τιμές τίς προτάσεις $(1+\sqrt{5})^1+(1-\sqrt{5})^1=$πολ.$2^1$, $(1+\sqrt{5})^2+(1-\sqrt{5})^2=$πολ.$2^2$ πού εἶναι ἀληθεῖς ὅπως εὔκολα μπορεῖ νά διαπιστωθεῖ. Ἡ πρώτη λοιπόν ὑπόθεση τῆς ἐπαγωγῆς εἶναι ἀληθής. Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ἀριθμοί $x_1=1+\sqrt{5}$ καί $x_2=1-\sqrt{5}$ εἶναι ρίζες τῆς ἐξίσωσης $x^2-2x-4=0$ Ἔχουμε λοιπόν $x_1^2-2x_1-4=0$ καί $x_2^2-2x_2-4=0$. Μέ πολλαπλασιασμό καί τῶν δύο ἀντίστοιχα ἐπί x_1^{n-2} καί x_2^{n-2} προκύπτουν οἱ ἰσότητες $x_1^n-2x_1^{n-1}-4x_1^{n-2}=0$ καί $x_2^n-2x_2^{n-1}-4x_2^{n-2}=0$ πού γράφονται καί $4x_1^{n-2}+2x_1^{n-1}=x_1^n$, $4x_2^{n-2}+2x_2^{n-1}=x_2^n$. Μέ τήν ἀντικατάσταση τῶν x_1 καί x_2 ἀπό τούς $1+\sqrt{5}$ καί $1-\sqrt{5}$ ἔχουμε τίς $4(1+\sqrt{5})^{n-2}+2(1+\sqrt{5})^{n-1}=(1+\sqrt{5})^n$, $4(1-\sqrt{5})^{n-2}+2(1-\sqrt{5})^{n-1}=(1-\sqrt{5})^n$. Τίς ὁποῖες προσθέτουμε κατά μέλη καί ἔχουμε τήν :
$4[(1+\sqrt{5})^{n-2}+(1-\sqrt{5})^{n-2}]+2[(1+\sqrt{5})^{n-1}+(1-\sqrt{5})^{n-1}]=(1+\sqrt{5})^n+(1-\sqrt{5})^n$. Σύμφωνα μέ τή δεύτερη ὑπόθεση τῆς ἐπαγωγῆς (παρ.12.2) ὑποθέτουμε ὅτι εἶναι ἀληθεῖς οἱ $(1+\sqrt{5})^{n-2}+(1-\sqrt{5})^{n-2}=$ πολ.2^{n-2} καί $(1+\sqrt{5})^{n-1}+(1-\sqrt{5})^{n-1}=$πολ.$2^{n-1}$ καί θά ἀποδείξουμε ὅτι τότε εἶναι ἀληθής καί ἡ $(1+\sqrt{5})^n+(1-\sqrt{5})^n=$ πολ.2^n. Πραγματικά,

μέ ἀντικατάσταση στήν παραπάνω ἰσότητα προκύπτει ἡ $(1+\sqrt{5})^n+(1-\sqrt{5})^n=4\cdot(\text{πολ}.2^{n-2})+2\cdot(\text{πολ}.2^{n-1})$ πού γράφεται καί $(1+\sqrt{5})^n+(1-\sqrt{5})^n=2^2\cdot(\text{πολ}.2^{n-2})+2\cdot(\text{πολ}2^{n-1})$ ἤ $(1+\sqrt{5})^n+(1-\sqrt{5})^n=\text{πολ}.2^n+\text{πολ}.2^n$ καί τελικά $(1+\sqrt{5})^n+(1-\sqrt{5})^n=\text{πολ}.2^n$. Ἰσχύει λοιπόν καί ἡ δεύτερη ὑπόθεση τῆς ἐπαγωγῆς τῆς παρ.12.2 Οἱ δύο ἀποδειγμένες ὑποθέσεις τῆς ἐπαγωγῆς συνεπάγονται τήν ἀλήθεια τῆς πρότασης $\forall n\in N,\ (1+\sqrt{5})^n+(1-\sqrt{5})^n=\text{πολ}.2^n$

Ἀσκήσεις

1. Ἄν πρόκειται ἡ πρόταση $\forall m\in N, \forall n\in N, \forall r\in N, \forall s\in N, P(m,n,r,s)$ νά ἀποδειχτεῖ μέ τετραπλή ἐπαγωγή. Πόσες καί ποιές ὑποθέσεις πρέπει νά ἀποδειχτοῦν;

2. Νά διατυπωθεῖ ἡ πρώτη ἐπαγωγική ἀρχή γιά τήν ἀπόδειξη τῆς πρότασης $\forall m\in N-\{1,2,3,\ldots,m_o-1\}$, $\forall n\in N-\{1,2,3,\ldots,n_o-1\}$, $P(m,n)$ μέ διπλή ἐπαγωγή.

3. Νά ἀποδειχτοῦν οἱ προτάσεις τῶν παρ. 5.4 καί 5.5

4. Νά ἀποδειχτοῦν οἱ προτάσεις 6.6 καί 6.7

5. Στό N ὁρίζεται τό <u>γινόμενο πολλῶν παραγόντων</u> ὡσεξῆς: $x_1x_2x_3\ldots x_n \underset{\text{ορσ}}{=} (x_1x_2x_3\ldots x_{n-1})x_n$ γιά $n\geqq 3$. Οἱ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ εἶναι ὁποιοιδήποτε φυσικοί ἀριθμοί. Νά ἀποδειχτεῖ ἐπαγωγικά ἡ πρόταση $\forall x_1\in N, \forall x_2\in N,\ldots \forall x_{\lambda+\rho}\in N, (x_1x_2\ldots x_\lambda)\cdot(x_{\lambda+1}\cdot x_{\lambda+2}\cdot\ldots x_{\lambda+\rho})=$ $=(x_1\,x_2\,x_3\ldots x_{\lambda+\rho})$.

6. Νά δειχτεῖ ἐπαγωγικά ἡ πρόταση $\forall m\in N, \forall n\in N, \forall r\in N$, $m^n\cdot m^r=m^{n+r}$

7. Νά δειχτεῖ ἐπαγωγικά ἡ πρόταση $\forall m\in N, \forall n\in N, \forall r\in N$, $(m^n)^r=m^{nr}$

8. Νά δειχτεῖ ἐπαγωγικά ἡ πρόταση $\forall m\in N, \forall n\in N, \forall r\in N$, $(mn)^r=m^rn^r$

9. Νά ἀποδειχτεῖ στό N ἡ πρόταση $m<n \Rightarrow m^r<n^r$

10. Νά ἀποδειχτεῖ στό N ἡ πρόταση $m=n \Rightarrow m^r=n^r$

11. Νά ἀποδειχτεῖ στό N ἡ πρόταση $m>n \wedge r>s \Rightarrow mr>ns$

12. Νά δειχτεῖ στό N ἡ πρόταση $m\leqq n \Leftrightarrow m+r\leqq n+r$

13. Νά δειχτεῖ στό N ἡ πρόταση $m\leqq n \Leftrightarrow mr\leqq nr$.

14. Νά δειχτεῖ ἐπαγωγικά ἡ πρόταση $\forall n\in\{n\in N: n\geqq 3\}$, $\delta_n=\frac{n(n-3)}{2}$ ὅπου δ_n εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν διαγωνίων ἑνός κυρτοῦ n-πλεύρου.

15. Νά δειχτεῖ ἐπαγωγικά ἡ πρόταση $\forall n\in N,\ 1+2+\ldots+n=\frac{1+n}{2}\cdot n$

16. Νά δειχτεῖ ἐπαγωγικά ἡ πρόταση $\forall n\in N, 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

17. Νά δειχτεῖ ἐπαγωγικά ἡ πρόταση $\forall n\in N, 2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

18. Νά δειχτεῖ ἡ πρόταση $\forall n\in N, \forall\alpha\in\{\alpha\in R:\alpha>-1\}, (1+\alpha)^n\geqq 1+n\alpha$ πού λέγεται ἀνισότητα τοῦ Bernoulli.

19. Νά ἀποδειχτεῖ ἡ πρόταση $\forall n\in\{n\in N: n\geqq 4\}, \left(\frac{3}{2}\right)^n>n+1$

20. Νά δειχτεῖ ἡ πρόταση $\forall n\in N, 54\,|\,2^{2n+1}-9n^2+3n-2$

21. Νά δειχτεῖ ἡ πρόταση $\forall n\in N, \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\geqq 1-\frac{1}{n}$

22. Νά δειχτεῖ ἡ πρόταση $\forall n\in N, (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_n}\right)\geqq n^2$ ὅπου $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ εἶναι θετικοί πραγματικοί ἀριθμοί.

23. Ἄν οἱ ἀριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n$ εἶναι θετικοί διαφορετικοί ἀπό τόν 1 νά δειχτεῖ ὅτι $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)>2^n\cdot\sqrt{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$

24. Νά δειχτεῖ ἡ πρόταση $\forall n\in N, \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n}>\frac{2}{3}\sqrt{n}$

25. Νά δειχτεῖ ἡ πρόταση $\forall n\in N, 9\,|\,10^n+3\cdot 4^{n+2}+5$

26. Νά δειχτεῖ ἡ πρόταση $\forall n \in N$, $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ καί ἡ πρόταση $\forall n \in N$, $2+4+6+...+2n = n(n+1)$

27. Νά δειχτοῦν οἱ προτάσεις $1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2= = \frac{1}{3} n(4n^2-1)$, $\forall n \in N$, $2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2=2n^2(n+1)^2$

28. Νά δειχτεῖ ἡ πρόταση $\forall n \in N, \forall \lambda \in \{\lambda \in R: \lambda > 1\}, 0 < \sqrt[n]{\lambda}-1 < \frac{1}{n}(\lambda-1)$

29. Νά δειχτοῦν οἱ ἑπόμενες ἀνισότητες τοῦ Weierstrass

$\forall n \in N$, $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(1+\alpha_n) \geqq 1+(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n)$,

$\forall n \in N$, $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(1+\alpha_n) < \frac{1}{1-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n)}$

Οἱ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ εἶναι θετικοί πραγματικοί ἀριθμοί καί στή δεύτερη ἀνισότητα προφανῶς εἶναι $\alpha_1+\alpha_2+... +\alpha_n < 1$.

30. Νά δειχτεῖ ἡ πρόταση $\forall n \in \{n \in N: n > 3\}$, $\sqrt[3]{3} > \sqrt[n]{n}$

31. Νά δειχτεῖ ἡ πρόταση $\forall n \in N$, $\frac{1+\Theta^2+\Theta^4+...+\Theta^{2n}}{\Theta+\Theta^3+...+\Theta^{2n-1}} > 1+\frac{1}{n}$ ὅπου $\Theta \in R^+-\{1\}$.

32. Νά δειχτεῖ ἡ πρόταση $\forall n \in N, 2^n \mid (\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^n+(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^n$ μέ $\alpha \in Z$, $\beta \in Z$, $\gamma \in Z_0^+$ καί $4 \mid \alpha^2-\beta^2\gamma$

33. Νά δειχτεῖ ἡ πρόταση $\forall n \in N$, $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \in N$.

34. Δεχόμαστε ὅτι ὑπάρχει ἡ τετραγωνική ρίζα θετικοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καί εἶναι θετικός πραγματικός ἀριθμός. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι τότε ὑπάρχει καί ἡ ρίζα μέ δείκτη τόν 2^n γιά ὁποιοδήποτε φυσικό ἀριθμό n

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.

1. Ἡ ἀφαίρεση στό N

Στό σύνολο N πού ἐξετάσαμε στό προηγούμενο κεφάλαιο εἰσάγεται καί μία ἄλλη πράξη, ἡ ἀφαίρεση, ὡσεξῆς.

$n-m = r$ στό N $\underset{\text{ὁρσ}}{\Longleftrightarrow}$ $n = m+r$ στό N

Ἄν λάβουμε ὑπόψη τόν ὁρισμό τῆς σχέσης $<$ (κεφ. IV παρ. 7.1) βλέπουμε ὅτι ἡ παραπάνω ἀφαίρεση ἐκτελεῖται στό N (ὑπάρχει ἡ διαφορά $r \in N$) ἄν καί μόνο ἄν $m<n$.

2. Εἰσαγωγή στούς ἀκέραιους ἀριθμούς.

Σκοπός μας εἶναι νά ἐπεκτείνουμε τό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν κατά τρόπο πού τό νέο σύνολο νά εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τῆς ἀφαίρεσης. Τό νέο σύνολο θά ὁριστεῖ κατά τέτοιο τρόπο ὥστε τά ἰσχύοντα σ'αὐτό νά συμπίπτουν μέ τά γνωστά ἀπό τό N γιά τούς ἀκέραιους ἐκείνους πού εἶναι καί στοιχεῖα τοῦ N.

Ὅπως λέμε ὅτι ὑπάρχει ὁ ἀκέραιος ἀριθμός 5-3 δηλαδή ὁ 2 πού εἶναι φυσικός ἀριθμός ἔτσι θά λέμε ὅτι ὑπάρχει καί ὁ ἀκέραιος ἀριθμός 4-7 πού δέν εἶναι φυσικός. Ὁ ἀκέραιος ἀριθμός ἐδῶ παρουσιάζεται σάν διαφορά φυσικῶν ἀριθμῶν σάν ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος φυσικῶν ἀριθμῶν π.χ ἡ διαφορά 5-3 μέ τό (5,3) καί ἡ 4-7 μέ τό (4,7). Ὅμως παρατηροῦμε ὅτι οἱ διαφορές 5-3, 8-6, 10-8 κ.λ.π. παριστάνουν τόν ἴδιο ἀκέραιο. Ἔτσι ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός παρουσιάζεται σάν μία κλάση ἰσοδύναμων μεταξύ τους διατεταγμένων ζευγῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Στά ἑπόμενα θά ἀναφερθοῦμε μέ λεπτομέρειες πάνω στήν ἔννοια τοῦ ἀκέραιου ἀριθμοῦ.

3. Τό σύνολο N^2

3.1 Ἡ σημασία τοῦ συνόλου N^2 φάνηκε ἀπό τά ἀναφερθέντα στήν προηγούμενη παράγραφο.

Ἡ ἰσότητα στό N^2 ὁρίζεται ὅπως καί σέ κάθε καρτεσιανό γινόμενο μέ τήν ἑπόμενη ἐξ ὁρισμοῦ ἰσοδυναμία.

$$(\alpha,\beta)=(\gamma,\delta) \text{ στό } N^2 \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \alpha=\gamma \wedge \beta=\delta \text{ στό } N$$

3.2 Ὁρίζουμε μία διμελή σχέση $\approx$ στό N^2 καί θά ἀποδείξουμε ὅτι πρόκειται γιά μία σχέση ἰσοδυναμίας. Γι᾽αὐτή τή σχέση ἡ ἀρχική ἰδέα ἀναφέρθηκε κιόλας στήν προηγούμενη παράγραφο. Ἔχουμε τήν ἑπόμενη ἐξ ὁρισμοῦ ἰσοδυναμία:

$$(\kappa,\lambda)\approx(\mu,\rho) \text{ στό } N^2 \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \kappa+\rho=\lambda+\mu \text{ στό } N.$$

Τά διατεταγμένα ζεύγη (κ,λ) καί (μ,ρ) χαρακτηρίζονται ἐδῶ σάν ἰσοδύναμα. Τά (α,β) καί (γ,δ) πού στήν παρ. 3.1 χαρακτηρίστηκαν ἴσα, εἶναι κι᾽ αὐτά ἰσοδύναμα ἀφοῦ $(\alpha,\beta)=(\gamma,\delta)$ στό $N^2 \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \alpha=\gamma \wedge \beta=\delta$ στό N $\Rightarrow \alpha+\delta=\beta+\gamma$ στό $N \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (\alpha,\beta)\approx(\gamma,\delta)$ στό N^2. Ἀποδείχτηκε ὅτι τά ἴσα διατεταγμένα ζεύγη στό N^2 εἶναι καί ἰσοδύναμα, ὅμως τό ἀντίστροφο δέν ἰσχύει πάντοτε (ἕνα ἀπό τά παραπάνω σύμβολα εἶναι τό $\Rightarrow$ καί ὄχι τό $\Longleftrightarrow$).

Ἡ παραπάνω ἐξ ὁρισμοῦ ἰσοδυναμία μᾶς ὑποβάλλεται π.χ ἀπό τήν παρατήρηση ὅτι οἱ φυσικοί ἀριθμοί

5-1 (ὁ 4) καί 10-6 (ὁ 4) εἶναι ἴσοι ἄν καί μόνο ἄν στό N, 5+6=1+10. Αὐτό γενικεύεται γιά ὅλους τούς ἀκέραιους.

3.3 Θά δείξουμε ὅτι ἡ σχέση $\approx$ ὅπως ὁρίστηκε στήν παρ. 3.2 εἶναι μία σχέση ἰσοδυναμίας στό N^2. Πραγματικά, εἶναι αὐτοπαθής δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall(\alpha,\beta)\in N^2$, $(\alpha,\beta)\approx(\alpha,\beta)$. Εἶναι $(\alpha,\beta)\approx(\alpha,\beta)$ στό N^2 γιατί εἶναι $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ στό N πού ἰσχύει ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος. Ἐπίσης ἡ $\approx$ εἶναι συμμετρική στό N^2 γιατί ἰσχύει ἡ πρόταση $(\alpha,\beta)\approx(\gamma,\delta)\Rightarrow(\gamma,\delta)\approx(\alpha,\beta)$. Πραγματικά, $(\alpha,\beta)\approx(\gamma,\delta)$ στό $N^2 \Leftrightarrow \alpha+\delta=\beta+\gamma$ στό $N \Leftrightarrow \gamma+\beta=\delta+\alpha$ στό $N \Leftrightarrow (\gamma,\delta)\approx(\alpha,\beta)$ στό N^2. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Leftrightarrow$ ἰσχύει τελικά ἡ παραπάνω πρόταση μέ τό σύμβολο $\Leftrightarrow$ ἐπομένως καί μέ τό $\Rightarrow$. Τέλος ἡ $\approx$ εἶναι μεταβατική στό N^2 δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση $(\alpha,\beta)\approx(\gamma,\delta)\wedge(\gamma,\delta)\approx(\lambda,\mu)\Rightarrow(\alpha,\beta)\approx(\lambda,\mu)$. Ἡ πρόταση αὐτή ἰσοδυναμεῖ στό N μέ τήν $\alpha+\delta=\beta+\gamma\wedge\gamma+\mu=\delta+\lambda\Rightarrow \alpha+\mu=\beta+\lambda$. Εἶναι $\alpha+\delta=\beta+\gamma\wedge\gamma+\mu=\delta+\lambda$

$\Rightarrow(\alpha+\delta)+(\gamma+\mu)=(\beta+\gamma)+(\delta+\lambda)\Rightarrow(\alpha+\mu)+(\delta+\gamma)=(\beta+\lambda)+(\delta+\gamma)$

$\Rightarrow \alpha+\mu=\beta+\lambda$. Ἡ $\approx$ λοιπόν εἶναι μεταβατική στό N^2 καί ἐπειδή εἶναι ἐπίσης αὐτοπαθής καί συμμετρική, εἶναι μία σχέση ἰσοδυναμίας στό N^2 (ὑποσύνολο τοῦ $N^2\times N^2$)

4. Τό σύνολο Z τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἤ σύνολο πηλίκον $N^2/\approx$. Ἰσότητα στό Z.

4.1 Ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός εἶναι μία κλάση ἰσοδύναμων μεταξύ τους διατεταγμένων ζευγῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. (Ἡ ἰσοδυναμία ὁρίζεται στήν παρ. 3.2) π.χ ὁ ἀκέραιος $C_{(\alpha,\beta)}$ εἶναι ἡ κλάση στοιχείων τοῦ N^2 πού εἶναι ἰσοδύναμα μέ τόν ἀντιπρόσωπο (α,β). Μέ ἄλλα λόγια ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός $C_{(\alpha,\beta)}$ $(\alpha\in N,\beta\in N)$ εἶναι ἕνα στοιχεῖο τοῦ συνόλου $N^2/\approx$. Τό σύνολο $N^2/\approx$ τῶν κλάσεων ἰσοδυναμίας στό N^2 ἤ σύνολο πηλίκον τοῦ N^2 διά τῆς σχέσεως $\approx$ θά τό συμβολίζουμε μέ τό Z καί θά τό ὀνομάζουμε "τό σύνολο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν".

4.2 Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ ἀκέραιου (παρ.4.1) καί τῆς σχέσης ἰσοδυναμίας $\approx$ στό N^2 ἡ ἰσότητα στό Z (δηλαδή στό $N^2/\approx$) ὁρίζεται ὡσεξῆς:

$C_{(\kappa,\lambda)} = C_{(\mu,\rho)}$ στό Z $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $(\kappa,\lambda) \approx (\mu,\rho)$ στό N^2 ἤ χωρίς ἀναφορά στό N^2 ἀλλά ἀπ'εὐθείας στό N.

$C_{(\kappa,\lambda)} = C_{(\mu,\rho)}$ στό Z $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $\kappa+\rho)=\lambda+\mu$ στό N.

π.χ $C_{(4,1)} = C_{(20,17)}$ γιατί $4+17=1+20$ στό N. Πρόκειται γιά τόν ἀκέραιο 3 πού εἶναι καί φυσικός ἀριθμός. Ἐπίσης $C_{(20,25)} = C_{(10,15)}$ στό Z γιατί εἶναι $20+15=25+10$ στό N. Πρόκειται γιά τόν ἀκέραιο -5 πού δέν εἶναι φυσικός ἀριθμός. Τέλος, $C_{(4,4)} = C_{(9,9)}$ στό Z γιατί εἶναι $4+9=4+9$ στό N. Πρόκειται γιά τόν ἀκέραιο μηδέν. Γιά τίς διακρίσεις αὐτές τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν θά ἐπανέλθουμε.

5. Πρόσθεση, ἀφαίρεση καί πολλαπλασιασμός στό Z.

5.1 Ἡ πρόσθεση στό Z ὁρίζεται ὡσεξῆς:

$$C_{(\alpha,\beta)} + C_{(\gamma,\delta)} \underset{\text{ορσ}}{=\!=} C_{(\alpha+\gamma,\beta+\delta)}$$

Ὁ ὁρισμός αὐτός δέν μεταβάλλει τό ἀποτέλεσμα τῆς πρόσθεσης στό N. π.χ $3+4=7$ στό N. Στό Z εἶναι

$C_{(5,2)} + C_{(10,6)} = C_{(5+10,2+6)} = C_{(15,8)}$, δηλαδή πάλι γιά τόν ἀκέραιο 7 πρόκειται (15-8).

5.2 Ἡ Ἀφαίρεση στό Z ὁρίζεται ὡσεξῆς:

$C_{(\alpha,\beta)} - C_{(\gamma,\delta)} \underset{\text{ορσ}}{=\!=} C_{(\alpha,\beta)} + C_{(\delta,\gamma)}$ ἑπομένως (παρ.5.1)

$C_{(\alpha,\beta)} - C_{(\gamma,\delta)} \underset{\text{ορσ}}{=\!=} C_{(\alpha+\delta,\beta+\gamma)}$. Βλέπουμε ὅτι προσθέτουμε στόν μειωτέο τόν ἀντίθετο τοῦ ἀφαιρετέου. Οἱ $C_{(x,\psi)}$ καί $C_{(\psi,x)}$ εἶναι ἀκέραιοι ἀντίθετοι. Ὁ ὁρισμός αὐτός δέν μεταβάλλει τό ἀποτέλεσμα τῆς ἀφαίρεσης στό N στίς περιπτώσεις πού αὐτή ἐκτελεῖται π.χ

5-2=3 στό N. Στό Z εἶναι $C_{(12,7)} - C_{(5,3)} = C_{(12,7)} + C_{(3,5)} = C_{(12+3,7+5)} = C_{(15,12)}$ δηλαδή πάλι γιά τόν ἀκέραιο 3 πρόκειται (15-12).

Ἀμέσως φαίνεται ὅτι ἡ ἀφαίρεση ἔτσι ὅπως ὁρίστηκε πάντοτε ἐκτελεῖται στό Z. Μέ ἄλλα λόγια τό σύνολο Z εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τῆς ἀφαίρεσης.

5.3 Ὁ πολλαπλασιασμός στό Z ὁρίζεται ὡσεξῆς:

$$C_{(\alpha,\beta)} \cdot C_{(\gamma,\delta)} \underset{\text{ορσ}}{=\!=} C_{(\alpha\gamma+\beta\delta,\alpha\delta+\beta\gamma)}$$

Ὁ ὁρισμός αὐτός δέν μεταβάλλει τό ἀποτέλεσμα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό N π.χ $4\cdot5=20$ στό N Στό Z ἔχουμε $C_{(5,1)} \cdot C_{(7,2)} = C_{(5\cdot7+1\cdot2,5\cdot2+1\cdot7)} = C_{(37,17)}$ δηλαδή πάλι γιά τόν ἀκέραιο 20 πρόκειται (37-17).

6. Θετικοί καί ἀρνητικοί ἀκέραιοι. Ὁ ἀκέραιος μηδέν.

6.1 Ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός $C_{(\alpha,\beta)}$ εἶναι θετικός, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ $\beta<\alpha$ στό N. Βέβαια γιά νά γίνει ἀποδεκτός ὁ ὁρισμός αὐτός πρέπει νά ἀποδειχτεῖ ἡ πρόταση $\beta<\alpha \wedge (\alpha,\beta) \approx (\gamma,\delta) \Rightarrow \delta<\gamma$ γιά νά ἀποφύγουμε τήν πιθανή ἀντίφαση ὁ $C_{(\gamma,\delta)}$ ἴσος πρός τόν $C_{(\alpha,\beta)}$ νά μή εἶναι θετικός.

Πραγματικά, $\beta<\alpha \wedge (\alpha,\beta) \approx (\gamma,\delta) \Rightarrow \beta<\alpha \wedge \alpha+\delta=\beta+\gamma$ στό N $\Rightarrow \delta<\gamma$ στό N (γιατί ἄν ἦταν $\gamma \leqq \delta$ ἕνεκα καί τῆς $\beta<\alpha$ θά ἴσχυε στό N ἡ $\beta+\gamma<\alpha+\delta$ καί ὄχι ἡ $\alpha+\delta=\beta+\gamma$). Ἀπό τήν $\delta<\gamma$ συμπεραίνουμε ὅτι καί ὁ $C_{(\gamma,\delta)}$ εἶναι θετικός ὅπως ὁ ἴσος του $C_{(\alpha,\beta)}$ καί οἱ δοθέντες ὁρισμοί τῆς ἰσότητας τῶν ἀκεραίων καί τοῦ θετικοῦ ἀκεραίου δέν ὁδηγοῦν σέ ἀντίφαση. π.χ ὁ ἀκέραιος $C_{(5,3)}$ εἶναι θετικός γιατί $3<5$ στό N, ὅμως οἱ ἀκέραιοι $C_{(4,8)}$ καί, $C_{(3,3)}$ δέν εἶναι θετικοί γιατί π.χ στό N ὁ 8 δέν εἶναι μικρότερος ἀπό τόν 4.

Ὁ ἀκέραιος $C_{(\alpha+x,\alpha)}$ ὅπου $\alpha \in N$ καί $x \in N$ εἶναι θετικός γιατί $\alpha<\alpha+x$ στό N. Ὅταν τό α θεωρηθεῖ σταθερό καί τό x διατρέχει τό N ἔχουμε τούς ἀκέραιους θετικούς $C_{(\alpha+1,\alpha)}$, $C_{(\alpha+2,\alpha)}$ $C_{(\alpha+3,\alpha)}$, πού ἀντιστοιχοῦν στούς φυσικούς ἀριθμούς 1,2,3,...

6.2 Ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός $C_{(\lambda,\mu)}$ εἶναι ἀρνητικός ἄν καί μόνο ἄν $\lambda<\mu$ στό N. Γιά νά ἀποδεχτοῦμε αὐτόν τόν ὁρισμό πρέπει προηγούμενα νά ἀποδείξουμε τήν πρόταση $\lambda<\mu \wedge (\lambda,\mu)\approx(\rho,\varkappa) \Rightarrow \rho<\varkappa$. Πραγματικά $\lambda<\mu \wedge (\lambda,\mu)\approx(\rho,\varkappa) \Rightarrow \lambda<\mu \wedge \lambda+\varkappa=\mu+\rho$ στό $N \Rightarrow \rho<\varkappa$ (γιατί ἄν ἦταν $\varkappa\leqq\rho$ μαζί μέ τήν $\lambda<\mu$ θά συμπεραίναμε ὅτι $\lambda+\varkappa<\mu+\rho$ καί ὄχι $\lambda+\varkappa=\mu+\rho$ στό N). Εἶναι λοιπόν ὁ $C_{(\rho,\varkappa)}$ καί αὐτός ἀρνητικός ὅπως ὁ ἴσος του $C_{(\lambda,\mu)}$ καί δέν ὑπάρχει κίνδυνος νά ὁδηγήσουν σέ ἀντίφαση οἱ δοθέντες ὁρισμοί στήν ἰσότητα ἀκεραίων ἀριθμῶν καί στό ἀκέραιο ἀρνητικό ἀριθμό. π.χ ὁ ἀκέραιος $C_{(4,8)}$ εἶναι ἀρνητικός γιατί $4<8$ στό N. Ὁ ἀκέραιος $C_{(\alpha,\alpha+x)}$ ὅπου $\alpha\in N$ καί $x\in N$ εἶναι ἀρνητικός γιατί $\alpha<\alpha+x$ στό N. Ἄν τό α εἶναι σταθερό καί τό x διατρέχει τό N ἔχουμε τούς ἀκέραιους ἀρνητικούς ἀριθμούς $C_{(\alpha,\alpha+1)}$, $C_{(\alpha,\alpha+2)}$, $C_{(\alpha,\alpha+3)}$,... πού ἀργότερα θά δοῦμε ὅτι γράφονται -1,-2,-3,...

6.3 Ὁ ἀκέραιος $C_{(\alpha,\beta)}$ εἶναι μηδέν ἄν καί μόνο ἄν στό N, $\alpha=\beta$. Γιά νά ἀποδεχτοῦμε αὐτό τόν ὁρισμό θά πρέπει νά ἀποδείξουμε ἀκόμη τήν πρόταση $\alpha=\beta \wedge (\alpha,\beta)\approx(\gamma,\delta)\Rightarrow \gamma=\delta$. Πραγματικά, $\alpha=\beta \wedge (\alpha,\beta)\approx(\gamma,\delta) \Rightarrow \alpha=\beta \wedge \alpha+\delta=\beta+\gamma \Rightarrow \gamma=\delta$ (νόμος διαγραφῆς τῶν ἴσων α καί β στό N). Ἀπό τήν $\gamma=\delta$ βλέπουμε ὅτι ὁ ἀκέραιος $C_{(\gamma,\delta)}$ ἴσος μέ τόν $C_{(\alpha,\beta)}$ εἶναι καί αὐτός μηδέν. Οἱ ὁρισμοί λοιπόν τῆς ἰσότητας μεταξύ ἀκεραίων ἀριθμῶν καί τοῦ ἀκέραιου μηδέν δέν ὁδηγοῦν σέ ἀντίφαση. π.χ ὁ ἀκέραιος $C_{(7,7)}$ εἶναι μηδέν. Γενικά $\forall x\in N$, $C_{(x,x)}=0$. Εὔκολα φαίνε-

ται ὅτι ἐνῶ οἱ θετικοί ἀκέραιοι εἶναι ἄπειροι καί τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τούς ἀρνητικούς ἀκέραιους ὁ ἀκέραιος μηδέν εἶναι μοναδικός π.χ $C_{(x,x)} = C_{(\psi,\psi)}$ στό Z γιατί $x+\psi=x+\psi$ στό N(παρ. 4.2).
Τόν ἀκέραιο μηδέν τόν συμβολίζουμε μέ 0.

6.4 Στό κεφ.IV παρ. 7.2 εἴδαμε τήν πρόταση $\forall m \in N, \forall n \in N, m<n \veebar n<m \veebar m=n$ πού ἰσχύει στό N, ἐπομένως στό Z σύμφωνα καί μέ αὐτά πού εἴδαμε στίς παρ. 6.1-6.3. Ἰσχύει ἡ πρόταση "Κάθε ἀκέραιος ἀριθμός ἤ εἶναι μόνο θετικός ἤ εἶναι μόνο ἀρνητικός ἤ εἶναι μόνο μηδέν". Πρόκειται γιά τό λεγόμενο νόμο τῆς τριχοτομίας στό Z.

7. Βασικές ἰδιότητες τῆς πρόσθεσης στό Z.

7.1 Τό σύνολο Z εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης σ'αὐτό. Συμβολικά: $\forall C_{(\alpha,\beta)} \in Z, \forall C_{(\gamma,\delta)} \in Z, C_{(\alpha,\beta)}+C_{(\gamma,\delta)} \in Z$. Πραγματικά, $C_{(\alpha,\beta)}+C_{(\gamma,\delta)} = C_{(\alpha+\gamma,\beta+\delta)}$. Ὁ $C_{(\alpha+\gamma,\beta+\delta)}$ εἶναι στοιχεῖα τοῦ Z ἀφοῦ $\alpha+\gamma \in N$ καί $\beta+\delta \in N$.

7.2 Ἡ πράξη τῆς πρόσθεσης εἶναι μονότονη ὡς πρός τήν ἰσότητα στό Z. Μέ ἄλλα λόγια ἰσχύει ἡ πρόταση: $C_{(\alpha,\beta)}=C_{(\gamma,\delta)} \wedge C_{(\lambda,\mu)}=C_{(\kappa,\sigma)} \Rightarrow C_{(\alpha,\beta)}+C_{(\lambda,\mu)}=C_{(\gamma,\delta)}+C_{(\kappa,\sigma)}$. Πραγματικά, $C_{(\alpha,\beta)}=C_{(\gamma,\delta)} \wedge C_{(\lambda,\mu)}=C_{(\kappa,\sigma)}$ στό Z $\Rightarrow \alpha+\delta=\beta+\gamma \wedge \lambda+\sigma=\mu+\kappa$ στό N $\Rightarrow (\alpha+\delta)+(\lambda+\sigma)=(\beta+\gamma)+(\mu+\kappa)$ στό N $\Rightarrow (\alpha+\lambda)+(\delta+\sigma)=(\beta+\mu)+(\gamma+\kappa)$ στό N $\Rightarrow C_{(\alpha+\lambda,\beta+\mu)}=C_{(\gamma+\kappa,\delta+\sigma)}$ στό Z $\Rightarrow C_{(\alpha,\beta)}+C_{(\lambda,\mu)}=C_{(\gamma,\delta)}+C_{(\kappa,\sigma)}$ στό Z. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Rightarrow$ ἰσχύει ἡ παραπάνω πρόταση.

7.3 Ἰσχύει στό Z ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος. Συμβολικά, $\forall C_{(\alpha,\beta)} \in Z, \forall C_{(\gamma,\delta)} \in Z, C_{(\alpha,\beta)}+C_{(\gamma,\delta)}=C_{(\gamma,\delta)}+C_{(\alpha,\beta)}$

Πραγματικά, ἰσχύει στό N ἕνεκα τοῦ ἀντιμεταθετικοῦ νόμου ἡ $(\alpha+\gamma)+(\delta+\beta)=(\beta+\delta(+(\gamma+\alpha)$ πού συνεπάγεται τήν $C_{(\alpha+\gamma,\beta+\delta)}=C_{(\gamma+\alpha,\delta+\beta)}$ στό Z. Ἡ τελευταία μέ τή σειρά της συνεπάγεται τήν $C_{(\alpha,\beta)}+C_{(\gamma,\delta)}=C_{(\gamma,\delta)}+C_{(\alpha,\beta)}$

7.4 Ἰσχύει στό Z ὁ προσεταιριστικός νόμος ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης, δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση: $\forall C_{(\alpha,\beta)}\in Z, \forall C_{(\gamma,\delta)}\in Z, \forall C_{(\lambda,\mu)}\in Z,\ C_{(\alpha,\beta)}+\left[C_{(\gamma,\delta)}+\right.$ $\left.+C_{(\lambda,\mu)}\right]=\left[C_{(\alpha,\beta)}+C_{(\gamma,\delta)}\right]+C_{(\lambda,\mu)}$. Πραγματικά ἕνεκα τοῦ ἀντιμεταθετικοῦ καί τοῦ προσεταιριστικοῦ νόμου στό N εἶναι: $[\alpha+(\gamma+\lambda)]+[(\beta+\delta)+\mu]=[\beta+(\delta+\mu)]+[(\alpha+\gamma)+\lambda]$ στό $N\Rightarrow C_{[\alpha+(\gamma+\lambda),\beta+(\delta+\mu)]}=C_{[(\alpha+\gamma)+\lambda,(\beta+\delta)+\mu]}$ στό $Z\Rightarrow$ $C_{(\alpha,\beta)}+C_{(\gamma+\lambda,\delta+\mu)}=C_{(\alpha+\gamma),\beta+\delta)}+C_{(\lambda,\mu)}$ στό $Z\Rightarrow C_{(\alpha,\beta)}+$ $\left[C_{(\gamma,\delta)}+C_{(\lambda,\mu)}\right]=\left[C_{(\alpha,\beta)}+C_{(\gamma,\delta)}\right]+C_{(\lambda,\mu)}$ στό Z.

Τή σειρά τῶν συλλογισμῶν τή βρήκαμε ξενικώντας ἀντίστροφα, δηλαδή ἀπό τήν πρόταση πού θέλουμε νά ἀποδείξουμε στό Z φθάνοντας σέ μιά γνωστή μας πρόταση ἀπό τό N. Αὐτό βέβαια γίνεται ὅταν ἀντιστρέφονται οἱ συλλογισμοί, δηλαδή ὅταν καί οἱ ἀντίστροφες προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς.

7.5 Τό στοιχεῖο μηδέν τοῦ Z εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης σ'αὐτό.

Μέ ἄλλα λόγια ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall C_{(\alpha,\beta)}\in Z,\ C_{(\alpha,\beta)}+$ $+0=C_{(\alpha,\beta)}\wedge 0+C_{(\alpha,\beta)}=C_{(\alpha,\beta)}$. Πραγματικά, $C_{(\alpha,\beta)}+0=$ $C_{(\alpha,\beta)}+C_{(x,x)}=C_{(\alpha+x,\beta+x)}=C_{(\alpha,\beta)}$ (γιατί $(\alpha+x)+\beta=$ $(\beta+x)+\alpha$ στό N). Ὅμοια καί $0+C_{(\alpha,\beta)}=C_{(\alpha,\beta)}$ ἄλλωστε ἰσχύει καί ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος.

7.6 Ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall C_{(\alpha,\beta)}\in Z, C_{(\beta,\alpha)}+C_{(\alpha,\beta)}=0$. Ὁ $C_{(\beta,\alpha)}$ εἶναι ὁ ἀντίθετος τοῦ $C_{(\alpha,\beta)}$ καί ἀντίστροφα.

Πραγματικά, $C_{(\beta,\alpha)}+C_{(\alpha,\beta)}=C_{(\beta+\alpha,\alpha+\beta)}=0$ (ἐπειδή $\alpha+\beta=$ $\beta+\alpha$ στό N). Ὅμοια $C_{(\alpha,\beta)}+C_{(\beta,\alpha)}=0$

Ἀργότερα πού θά παριστάνουμε τούς ἀκεραίους μέ ἕνα μόνο γράμμα π.χ μέ α τόν ἀντίθετο τοῦ α θά τόν παριστάνουμε μέ -α. Εἶναι καί ὁ α ἀντίθετος τοῦ -α δηλαδή ἰσχύει ἡ $\alpha=-(-\alpha)$. Ἀντίθετος πρός τόν $C_{(\alpha,\beta)}$ εἶναι γενικά ὁ $C_{(x,\psi)}$ ἄν καί μόνο ἄν $x+\alpha=\psi+\beta$ γιατί τότε καί μόνο τότε ἰσχύει ἡ $C_{(x,\psi)}=C_{(\beta,\alpha)}$.

8. Βασικές ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό Z

8.1 Τό σύνολο Z εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Μέ ἄλλα λόγια ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall C_{(\alpha,\beta)}\in Z,\ \forall C_{(\gamma,\delta)}\in Z,\ C_{(\alpha,\beta)}\cdot C_{(\gamma,\delta)}\in Z$. Πραγματικά, $C_{(\alpha,\beta)}\cdot C_{(\gamma,\delta)}=C_{(\alpha\gamma+\beta\delta,\alpha\delta+\beta\gamma)}$. Ἐπειδή οἱ $\alpha\gamma+\beta\delta$ καί $\alpha\delta+\beta\gamma$ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί ὁ $C_{(\alpha\gamma+\beta\delta,\alpha\delta+\beta\gamma)}$ ἄρα καί ὁ $C_{(\alpha,\beta)}\cdot C_{(\gamma,\delta)}$ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός δηλαδή στοιχεῖο τοῦ Z.

8.2 Ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι πράξη μονότονη ὡς πρός τήν ἰσότητα στό Z δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση $C_{(\alpha,\beta)}=C_{(\gamma,\delta)}\wedge C_{(\lambda,\mu)}=C_{(\kappa,\sigma)}\Rightarrow C_{(\alpha,\beta)}\cdot C_{(\lambda,\mu)}=C_{(\gamma,\delta)}\cdot C_{(\kappa,\sigma)}$. Πραγματικά $C_{(\alpha,\beta)}=C_{(\gamma,\delta)}\wedge C_{(\lambda,\mu)}=C_{(\kappa,\sigma)}$ στό Z $\Rightarrow$ $\alpha+\delta=\beta+\gamma\wedge\lambda+\sigma=\mu+\kappa$ στό N $\Rightarrow$ $(\alpha+\delta)\lambda=(\beta+\gamma)\lambda\wedge(\beta+\gamma)\mu=(\alpha+\delta)\mu\wedge\gamma(\lambda+\sigma)=\gamma(\mu+\kappa)\wedge\delta(\mu+\kappa)=\delta(\lambda+\sigma)$ στό N $\Rightarrow$ $(\alpha+\delta)\lambda+(\beta+\gamma)\mu+\gamma(\lambda+\sigma)+\delta(\mu+\kappa)=(\beta+\gamma)\lambda+(\alpha+\delta)\mu+\gamma(\mu+\kappa)+\delta(\lambda+\sigma)$ στό N $\Rightarrow$ $\alpha\lambda+\delta\lambda+\beta\mu+\gamma\mu+\gamma\lambda+\gamma\sigma+\delta\mu+\delta\kappa=\beta\lambda+\gamma\lambda+\alpha\mu+\delta\mu+\gamma\mu+\gamma\kappa+\delta\lambda+\delta\sigma$ στό N $\Rightarrow$ $(\alpha\lambda+\beta\mu)+(\gamma\sigma+\delta\kappa)=(\alpha\mu+\beta\lambda)+(\gamma\kappa+\delta\sigma)$ στό N $\Rightarrow$ $C_{(\alpha\lambda+\beta\mu,\alpha\mu+\beta\lambda)}=C_{(\gamma\kappa+\delta\sigma,\gamma\sigma+\delta\kappa)}$ στό Z $\Rightarrow$ $C_{(\alpha,\beta)}\cdot C_{(\lambda,\mu)}=C_{(\gamma,\delta)}\cdot C_{(\kappa,\sigma)}$ στό Z.

8.3 Ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall C_{(\alpha,\beta)}\in Z,\ \forall C_{(\gamma,\delta)}\in Z,\ C_{(\alpha,\beta)}\cdot C_{(\gamma,\delta)}=C_{(\gamma,\delta)}\cdot C_{(\alpha,\beta)}$ δηλαδή ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος τοῦ πολ/σμοῦ στό Z.

Πραγματικά, γιά ὁποιαδήποτε στοιχεῖα α,β,γ,δ τοῦ N ἰσχύει ἡ $(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\gamma\beta+\delta\alpha)=(\alpha\delta+\beta\gamma)+(\gamma\alpha+\delta\beta)$ (ἀντιμεταθετικός νόμος στό N ὡς πρός τήν πρόσθεση καί τόν πολλαπλασιασμό) $\Rightarrow C_{(\alpha\gamma+\beta\delta,\alpha\delta+\beta\gamma)} = C_{(\gamma\alpha+\delta\beta,\gamma\beta+\delta\alpha)}$ στό Z $\Rightarrow$

$C_{(\alpha,\beta)}\cdot C_{(\gamma,\delta)} = C_{(\gamma,\delta)}\cdot C_{(\alpha,\beta)}$ Στό Z.

8.4 Ἰσχύει ὁ προσεταιριστικός νόμος $\forall C_{(\alpha,\beta)} \in Z$, $\forall C_{(\gamma,\delta)} \in Z$, $\forall C_{(\lambda,\mu)} \in Z$, $\left[C_{(\alpha,\beta)}\cdot C_{(\gamma,\delta)}\right] C_{(\lambda,\mu)} = C_{(\alpha,\beta)}\left[C_{(\gamma,\delta)} C_{(\lambda,\mu)}\right]$. Πραγματικά, ἰσχύει στό N ἡ

$[(\alpha\gamma+\beta\delta)\lambda+(\alpha\delta+\beta\gamma)\mu]+[\alpha(\gamma\mu+\delta\lambda)+\beta(\gamma\lambda+\delta\mu)] = [(\alpha\gamma+\beta\delta)\mu + (\alpha\delta+\beta\gamma)\lambda]+[\alpha(\gamma\lambda+\delta\mu)+\beta(\gamma\mu+\delta\lambda)] \Rightarrow C_{[(\alpha\gamma+\beta\delta)\lambda+(\alpha\delta+\beta\gamma)\mu,\ (\alpha\gamma+\beta\delta)\mu+(\alpha\delta+\beta\gamma)\lambda]} = C_{[\alpha(\gamma\lambda+\delta\mu)+\beta(\gamma\mu+\delta\lambda),\ \alpha(\gamma\mu+\delta\lambda)+\beta(\gamma\lambda+\delta\mu)]}$

στό Z $\Rightarrow C_{(\alpha\gamma+\beta\delta,\alpha\delta+\beta\gamma)}\cdot C_{(\lambda,\mu)} = C_{(\alpha,\beta)}\cdot C_{(\gamma\lambda+\delta\mu,\gamma\mu+\delta\lambda)}$ στό Z

$\Rightarrow \left[C_{(\alpha,\beta)}\cdot C_{(\gamma,\delta)}\right]\cdot C_{(\lambda,\mu)} = C_{(\alpha,\beta)}\cdot\left[C_{(\gamma,\delta)}\cdot C_{(\lambda,\mu)}\right]$ στό Z.

8.5 Ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall C_{(\alpha,\beta)} \in Z, \forall C_{(\gamma,\delta)} \in Z, \forall C_{(\lambda,\mu)} \in Z$, $\left[C_{(\alpha,\beta)} + C_{(\gamma,\delta)}\right]\cdot C_{(\lambda,\mu)} = C_{(\alpha,\beta)}\cdot C_{(\lambda,\mu)} + C_{(\gamma,\delta)}\cdot C_{(\lambda,\mu)}$ δηλαδή ὁ δεξιός ἐπιμεριστικός νόμος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεση.

Πραγματικά, ἰσχύει στό N ἡ πρόταση

$[(\alpha+\gamma)\lambda+(\beta+\delta)\mu]+[(\alpha\mu+\beta\lambda)+(\gamma\mu+\delta\lambda)] =$

$[(\alpha+\gamma)\mu+(\beta+\delta)\lambda]+[(\alpha\lambda+\beta\mu)+(\gamma\lambda+\delta\mu)] \Rightarrow$ Στό Z

$C_{[(\alpha+\gamma)\lambda+(\beta+\delta)\mu,\ (\alpha+\gamma)\mu+(\beta+\delta)\lambda]} = C_{[(\alpha\lambda+\beta\mu)+(\gamma\lambda+\delta\mu),\ (\alpha\mu+\beta\lambda)+(\gamma\mu+\delta\lambda)]} \Rightarrow C_{(\alpha+\gamma,\beta+\delta)}\cdot C_{(\lambda,\mu)} = C_{(\alpha\lambda+\beta\mu,\alpha\mu+\beta\lambda)} + C_{(\gamma\lambda+\delta\mu,\gamma\mu+\delta\lambda)} \Rightarrow$

$\left[C_{(\alpha,\beta)} + C_{(\gamma,\delta)}\right]\cdot C_{(\lambda,\mu)} = C_{(\alpha,\beta)}\cdot C_{(\lambda,\mu)} + C_{(\gamma,\delta)}\cdot C_{(\lambda,\mu)}$ στό Z.

Ὅμοια ἀποδείχνεται καί ὁ ἀριστερός ἐπιμεριστικός νόμος ἄλλωστε προκύπτει ἀμέσως καί μέ εφαρμογή τοῦ ἀντιμεταθετικοῦ νόμου πάνω στόν ἀποδειχθέντα.

8.6 Ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall C_{(\alpha,\beta)} \in Z$, $C_{(\alpha,\beta)}\cdot C_{(1+x,x)} = C_{(\alpha,\beta)} \wedge C_{(1+x,x)}\cdot C_{(\alpha,\beta)} = C_{(\alpha,\beta)}$. Μέ ἄλλα λόγια ὁ ἀκέραιος $C_{(1+x,x)}$ εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο τοῦ Z ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ὁ ἀκέραιος $C_{(1+x,x)}$ ὀνομάζεται ἀκέραια θετική μονάδα ἤ μόνο ἀκέραια μονάδα. Εἶναι τό στοιχεῖο τοῦ Z πού ἀντι-στοιχεῖ μέ τόν φυσικό ἀριθμό 1. Καί ὡς ἀκέραιο θά τόν παριστάνουμε μέ 1.

Πραγματικά, $C_{(\alpha,\beta)}C_{(1+x,x)}=C_{[\alpha(1+x)+\beta x,\alpha x+\beta(1+x)]}=C_{(\alpha,\beta)}$ γιατί στό N ἰσχύει ἡ $[\alpha(1+x)+\beta x]+\beta=[\alpha x+\beta(1+x)]+\alpha$ (παρ.4.2). Ὅμοια ἀποδείχνεται καί ἡ $C_{(1+x,x)}\ C_{(\alpha,\beta)}=C_{(\alpha,\beta)}$ ἄλλωστε ἰσχύει καί ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος.

9. Ἄλλες ἰδιότητες τῶν πράξεων στό Z.

9.1 Ἰσχύει στό Z ὁ δεξιός νόμος διαγραφῆς ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης, δηλαδή ἡ πρόταση: $x+\omega=\psi+\omega\Rightarrow x=\psi$ Πραγματικά, $x+\omega=\psi+\omega\Rightarrow$(παρ.7.2)$(x+\omega)+(-\omega)=(\psi+\omega)+(-\omega)\Rightarrow$(παρ.7.4) $x+[\omega+(-\omega)]=\psi+[\omega+(-\omega)]\Rightarrow$(παρ.7.6)$x+0=\psi+0\Rightarrow$(παρ.7.5)$x=\psi$ Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς ⇒ ἰσχύει τελικά ἡ παραπάνω πρόταση. Ὅμοια ἀποδείχνεται καί ὁ ἀριστερός νόμος διαγραφῆς (τό ω ἀριστερά τῶν x καί ψ) ἄλλωστε ἰσχύει καί ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος. Τούς ἀκεραίους ἐδῶ τούς παραστήσαμε μέ ἕνα μόνο γράμμα π.χ x,ψ,ω γιατί ἡ ἰδιότητα αὐτή μποροῦσε νά ἀποδειχτεῖ ἀπό τίς γνωστές πλέον ἄλλες ἰδιότητες τῶν ἀκεραίων.

9.2 Κάθε ἀκέραιος ἀριθμός ἔχει μόνο ἕνα ἀντίθετο. Πραγματικά, ἄν ὁ ἀκέραιος x ἔχει ἀντίθετο τόν x_1 ἀλλά καί τόν x_2 θά ἰσχύουν (παρ.7.6) οἱ $x+x_1=0$ καί $x+x_2=0$ Αὐτές συνεπάγονται τήν $x+x_1=x+x_2$ καί μέ ἐφαρμογή τοῦ νόμου διαγραφῆς ἔχουμε $x_1=x_2$. Στήν ἀντίφαση $x_1=x_2\wedge x_1\neq x_2$ μᾶς ὁδήγησε ἡ ὑπόθεση $x_1\neq x_2$. Εἶναι λοιπόν $x_1=x_2$

9.3 Θά δείξουμε τήν πρόταση:

$C_{(\alpha,\beta)}C_{(\gamma,\delta)}=0\Rightarrow C_{(\alpha,\beta)}=0\vee C_{(\gamma,\delta)}=0$, στό Z.

Πραγματικά, $C_{(\alpha,\beta)}C_{(\gamma,\delta)}=0\Rightarrow C_{(\alpha\gamma+\beta\delta,\alpha\delta+\beta\gamma)}=0$ στό Z (παρ.6.3) $\Rightarrow \alpha\gamma+\beta\delta=\alpha\delta+\beta\gamma$ στό N $\Rightarrow(\alpha\gamma+\beta\delta=\alpha\delta+\beta\gamma\wedge\alpha=\beta)$

$\vee (\alpha\gamma+\beta\delta)=\alpha\delta+\beta\gamma \wedge \alpha>\beta) \vee (\alpha\gamma+\beta\delta=\alpha\delta+\beta\gamma \wedge \alpha<\beta)$ στό N $\Rightarrow (\alpha=\beta) \vee (\alpha\gamma-\beta\gamma=\alpha\delta-\beta\delta \wedge \alpha>\beta) \vee (\beta\delta-\alpha\delta=\beta\gamma-\alpha\gamma \wedge \alpha<\beta)$ στό N $\Rightarrow \alpha=\beta \vee (\alpha-\beta)\gamma=(\alpha-\beta)\delta, \alpha>\beta \vee (\beta-\alpha)\delta=(\beta-\alpha)\gamma, \alpha<\beta$ στό N $\Rightarrow$ $\alpha=\beta \vee \gamma=\delta \vee \delta=\gamma \Rightarrow \alpha=\beta \vee \gamma=\delta \vee \gamma=\delta \Rightarrow \alpha=\beta \vee \gamma=\delta$ στό N $\Rightarrow$ $C_{(\alpha,\beta)}=0 \vee C_{(\gamma,\delta)}=0$ στό Z.

9.4 <u>Θά δείξουμε τήν άντίστροφη πρός τήν πρόταση τῆς παρ. 9.3 πρόταση,</u> δηλαδή τήν

$C_{(\alpha,\beta)}=0 \vee C_{(\gamma,\delta)}=0 \Rightarrow C_{(\alpha,\beta)} \cdot C_{(\gamma,\delta)}=0$, στό Z.

Πραγματικά, ἕνεκα τῆς $C_{(\alpha,\beta)}=0 \vee C_{(\gamma,\delta)}=0$ μία τουλάχιστο ἀπό τίς προτάσεις $C_{(\alpha,\beta)}=0$, $C_{(\gamma,\delta)}=0$ εἶναι ἀληθής. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἰσχύει ἡ $C_{(\alpha,\beta)}=0$ στό Z. Αὐτή συνεπάγεται τήν $\alpha=\beta$ στό N. Ἔχουμε τώρα $\alpha=\beta$ στό N $\Rightarrow$ (μονότονο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό N) $\alpha\gamma=\beta\gamma \wedge \beta\delta=\alpha\delta$ στό N $\Rightarrow \alpha\gamma+\beta\delta=\alpha\delta+\beta\gamma$ στό N $\Rightarrow C_{(\alpha\gamma+\beta\delta,\alpha\delta+\beta\gamma)}=0$ στό Z $\Rightarrow C_{(\alpha,\beta)} \cdot C_{(\gamma,\delta)}=0$ στό Z. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας της $\Rightarrow$ ἰσχύει ἡ παραπάνω πρόταση (Στό ἴδιο συμπέρασμα καταλήγουμε καί ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἰσχύει ἡ $C_{(\gamma,\delta)}=0$).

<u>Μποροῦμε νά συμβολίσουμε τούς ἀκέραιους μέ ἕνα μόνο γράμμα καί νά ἀποδείξουμε τήν ἴδια πρόταση ὡσεξῆς.</u> Στό Z, $x=0 \vee \psi=0 \Rightarrow x\psi=0$. Ἀπό τήν $x=0 \vee \psi=0$ προκύπτει ὅτι ἕνας τουλάχιστο ἀπό τούς ἀκέραιους x,ψ εἶναι μηδέν. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι εἶναι μηδέν ὁ ψ. Ἔχουμε $x+x\cdot 0=x\cdot 1+x\cdot 0$ (παρ.8.6) $=x(1+0)$ (παρ.8.5) $= x\cdot 1$ (παρ.7.5) $=x\cdot 1+0$ (παρ.7.5) $=x+0$ (παρ.8.6). Ἕνεκα τῆς μεταβατικότητας τῆς ἰσότητας ἰσχύει τελικά ἡ $x+x.0=x+0$ πού (παρ.9.1) συνεπάγεται τήν $x\cdot 0=0$. Ὅμοια ἐργαζόμαστε ἄν $x=0$. Θά εἶναι τότε $0\cdot\psi=0$. (Μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε καί τόν ἀντιμεταθετικό νόμο). Γενικά, εἶναι $x\psi=0$ ὅταν ἰσχύει ἡ $x=0 \vee \psi=0$.

9.5 Θά συμβολίσουμε καί πάλι τούς ἀκέραιους μέ ἕνα μόνο γράμμα καί θά δείξουμε τήν πρόταση, Στό Z, $x=\psi \Leftrightarrow x-\psi=0$ Πραγματικά, $x=\psi \Leftrightarrow$ (παρ.9.1 καί 7.2) $x+(-\psi) = \psi+(-\psi) \Leftrightarrow x-\psi=0$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Leftrightarrow$ ἰσχύει τελικά ἡ παραπάνω πρόταση (Τό $x-\psi$ κατά τόν ὁρισμό τῆς ἀφαίρεσης γράφεται καί $x+(-\psi)$).

9.6 Θά δείξουμε τήν πρόταση $\forall x \in Z, \forall \psi \in Z, (-x)\psi=-(x\psi)$. Τό $-(x\psi)$ γράφεται καί $-x\psi$. Πραγματικά, τό ἀντίθετο τοῦ $x\psi$ εἶναι προφανῶς τό $-(x\psi)$ δηλαδή τό $-x\psi$, ὅμως καί τό $(-x)\psi$ εἶναι ἀντίθετο τοῦ $x\psi$ ἐπειδή ἰσχύει ἡ $x\psi+(-x)\psi=[x+(-x)]\psi=0\cdot\psi=0$. Ὁ ἀκέραιος $x\psi$ ὅμως ἔχει ἕνα ἀντίθετο (παρ.9.2) ἐπομένως $(-x)\psi=-(x\psi)$. Γράφουμε καί $(-x)\psi=-x\psi$. Ὅμοια ἀποδείχνεται ὅτι $x(-\psi)=-(x\psi)$.

9.7 Θά δείξουμε τόν ἐπιμεριστικό νόμο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πράξη τῆς ἀφαίρεσης στό Z, δηλαδή τήν πρόταση $\forall\psi\in Z, \forall\omega\in Z, \forall x \in Z, (x-\psi)\omega=x\omega-\psi\omega$. Πραγματικά, $(x-\psi)\omega=[x+(-\psi)]\omega=$ (παρ.8.5) $x\omega+(-\psi)\omega=$ (παρ.9.6) $x\omega+(-\psi\omega) =x\omega-\psi\omega$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς = ἰσχύει τελικά ἡ παραπάνω πρόταση. Ὅμοια ἀποδείχνεται καί ἡ $\forall x \in Z, \forall \psi \in Z, \forall \omega \in Z, \omega(x-\psi)=\omega x-\omega\psi$ ἀλλά προκύπτει καί μέ ἐφαρμογή τοῦ ἀντιμεταθετικοῦ νόμου στήν προηγούμενη πρόταση.

9.8 Θά δείξουμε τό δεξιό νόμο διαγραφῆς ὡς πρός τήν πράξη πολλαπλασιασμοῦ στό Z, δηλαδή τήν πρόταση, $x\omega=\psi\omega \wedge \omega\neq 0 \Rightarrow x=\psi$ στό Z. Πραγματικά, $x\omega=\psi\omega\wedge\omega\neq 0 \Rightarrow$ (παρ. 9.5) $x\omega-\psi\omega=0\wedge\omega\neq 0 \Rightarrow$ (παρ.9.7) $(x-\psi)\omega=0 \wedge\omega\neq 0\Rightarrow$ (παρ. 9.3) $x-\psi=0 \Rightarrow$ (παρ.9.5) $x=\psi$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Rightarrow$ ἰσχύει ἡ παραπάνω πρόταση. Ἰσχύει καί ἀποδείχνεται ὅμοια ἤ μέ ἐφαρμογή τοῦ ἀντιμεταθετικοῦ νόμου καί ὁ ἀριστερός νόμος διαγραφῆς στόν πολλαπλασιασμό στό Z, δηλαδή ἡ πρόταση $\omega x=\omega\psi\wedge\omega\neq 0\Rightarrow x=\psi$

9.9 Ἡ πρόταση τῆς παρ. 9.8 ἀποδείχτηκε στό Z μέ τή βοήθεια τῆς πρότασης τῆς παρ. 9.3. Ὅμως καί ἡ πρόταση τῆς παρ. 9.3 ἀποδείχνεται μέ τή βοήθεια τῆς πρότασης τῆς παρ. 9.8. Θά συμβολίσουμε τούς ἀκεραίους ὄχι ὅπως στήν παρ. 9.3 ἀλλά μέ ἕνα μόνο γράμμα. Θά ἀποδείξουμε λοιπόν τήν πρόταση: Στό Z, $x\psi=0 \Rightarrow x=0 \vee \psi=0$

Πραγματικά, ἐπειδή εἶναι $x\psi=0$ εἶναι δυνατό (παρ.9.4) νά ἰσχύουν οἱ $x=0$ καί $\psi=0$ ἑπομένως καί ἡ $x=0 \vee \psi=0$. Ἄν ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ἕνας ἀπό τούς ἀκέραιους x καί ψ π.χ ὁ x εἶναι διαφορετικός ἀπό τό μηδέν. Ἡ $x\psi=0$ γράφεται καί $x\psi=x\cdot 0$ (παρ. 9.4, $x\cdot 0=0$). Μέ ἐφαρμογή τοῦ νόμου διαγραφῆς (παρ. 9.8) προκύπτει ἡ $\psi=0$ πού συνεπάγεται τήν $x=0 \vee \psi=0$. Στό ἴδιο συμπέρασμα καταλήγουμε καί ἄν ὑποθέσουμε ὅτι $\psi\neq 0$. Ἀποκλείεται λοιπόν νά εἶναι διαφορετικοί ἀπό τό μηδέν καί οἱ δύο ἀκέραιοι x καί ψ καί συνεπῶς ἡ $x=0 \vee \psi=0$ ἰσχύει πάντοτε ὅταν $x\psi=0$. Οἱ προτάσεις τῶν παρ. 9.3 καί 9.8 εἶναι ἰσοδύναμοι στό Z ἀφοῦ ὅπως εἴδαμε στίς παρ. 9.8 καί 9.9 ἡ κάθε μία ἀπό αὐτές μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ στό Z μέ ὑπόθεση τήν ἄλλη.

9.10 <u>"Τό ἄθροισμα δύο ὁποιωνδήποτε θετικῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμός θετικός"</u>.

Πραγματικά, $C_{(\alpha,\beta)} \in Z^+$, $C_{(\gamma,\delta)} \in Z^+ \Rightarrow \beta<\alpha \wedge \delta<\gamma$ στό $N \Rightarrow \beta+\delta<\alpha+\gamma$ στό $N \Rightarrow C_{(\alpha+\gamma,\beta+\delta)} \in Z^+ \Rightarrow C_{(\alpha,\beta)} + C_{(\gamma,\delta)} \in Z^+$. Μέ Z^+ συμβολίζουμε τό σύνολο τῶν θετικῶν ἀκεραίων ὑποσύνολο τοῦ Z.

9.11 <u>"Τό γινόμενο δύο ὁποιωνδήποτε θετικῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμός θετικός"</u>.

Πραγματικά, $C_{(\alpha+x,x)}\cdot C_{(\beta+\psi,\psi)}=C_{[(\alpha+x)(\beta+\psi)+x\psi,\ (\alpha+x)\psi+x(\beta+\psi)]}$ ὅπου $\alpha,\beta,x,\psi \in N$. Εὔκολα φαίνεται ὅτι στό N ἰσχύει ἡ $(\alpha+x)\psi+x(\beta+\psi) < (\alpha+x)(\beta+\psi)+x\psi$. Ἑπομένως τό άποτέλεσμα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι ἀκέραιος θετικός.

9.12 Ὁ ἀντίθετος ἑνός θετικοῦ ἀκεραίου εἶναι ἀρνητικός ἀκέραιος. Πραγματικά $C_{(\alpha,\beta)} \in Z^{+} \Leftrightarrow \beta<\alpha$ στό $N \Leftrightarrow C_{(\beta,\alpha)} \in Z^{-}$. Μέ Z^{-} παριστάνουμε τό ὑποσύνολο τοῦ Z μέ στοιχεῖα τά ἀρνητικά στοιχεῖα τοῦ Z. Οἱ ἴδιες παραπάνω ἰσοδυναμίες δείχνουν καί ὅτι ὁ ἀντίθετος ἑνός ἀρνητικοῦ ἀκεραίου εἶναι θετικός ἀκέραιος.

Ὁ ἀντίθετος τοῦ ἀκέραιου μηδέν εἶναι ἐπίσης μηδέν. Πραγματικά, $C_{(\alpha,\beta)}=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$ στό $N \Leftrightarrow C_{(\beta,\alpha)}=0$. Τό ἀντίθετο τοῦ 0 θά τόν παριστάνουμε ἐπίσης μέ 0 γιατί $-0=0$.

9.13 Ἰσχύει στό Z ἡ πρόταση $\forall\alpha \in Z, \forall\beta \in Z, \ \alpha\beta=(-\alpha)\cdot(-\beta)$
Πραγματικά, $\alpha\beta=\alpha\beta+[\alpha+(-\alpha)]\cdot(-\beta)$ (παρ.7.5,9.4,8.5) $=$ $=\alpha\beta+[\alpha\cdot(-\beta)+(-\alpha)\cdot(-\beta)]=[\alpha\beta+\alpha\cdot(-\beta)]+(-\alpha)(-\beta)$ (προσεταιριστικός νόμος)$=\alpha\cdot[\beta+(-\beta)]+(-\alpha)\cdot(-\beta)=\alpha\cdot 0+(-\alpha)\cdot(-\beta)$ $= 0+(-\alpha)\cdot(-\beta)=(-\alpha)\cdot(-\beta)$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς ἰσότητας ἰσχύει τελικά ἡ παραπάνω πρόταση.

10. Σχέσεις γνήσιας διάταξης στό Z.

10.1 Ὁρίζουμε στό Z τή σχέση τοῦ "μικρότερου" ὡσεξῆς:
$x<\psi$ στό $Z \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} \psi-x \in Z^{+}$ ἤ ἄν $x=C_{(\alpha,\beta)}$ καί $\psi=C_{(\gamma,\delta)}$
$C_{(\alpha,\beta)}<C_{(\gamma,\delta)} \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} C_{(\gamma,\delta)}-C_{(\alpha,\beta)} \in Z^{+}$

10.2 Ἡ σχέση $<$ στό Z ὁρίζεται καί μέ τή βοήθεια τῆς ἀντίστοιχης σχέσης στό N ὡσεξῆς:
$C_{(\alpha,\beta)}<C_{(\gamma,\delta)}$ στό $Z \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} \alpha+\delta<\beta+\gamma$ στό N.

Οἱ ὁρισμοί τῶν παραγράφων 10.1 καί 10.2 εἶναι ἰσοδύναμοι ὅπως φαίνεται παρακάτω.

$C_{(\alpha,\beta)} < C_{(\gamma,\delta)} \Leftrightarrow C_{(\gamma,\delta)} - C_{(\alpha,\beta)} \in Z^+ \Leftrightarrow C_{(\gamma,\delta)} + C_{(\beta,\alpha)} \in Z^+$
$\Leftrightarrow C_{(\gamma+\beta,\delta+\alpha)} \in Z^+ \Leftrightarrow \delta+\alpha < \gamma+\beta$ στό $N \Leftrightarrow \alpha+\delta < \beta+\gamma$ στό N.

10.3 Ὅπως ὁρίστηκε ἡ σχέση $<$ στό Z δέν ἀντιφάσκει πρός τόν ὁρισμό τῆς ἀντίστοιχης σχέσης στό N. π.χ στό Z ἰσχύει ἡ $C_{(3,1)} < C_{(6,2)}$ γιατί $3+2 < 1+6$ στό N. Ἀντίστοιχα ἰσχύει στό N ἡ $2 < 4$ δηλαδή ἡ $3-1 < 6-2$.

Ὑπενθυμίζουμε ὅτι στό Z εἰσάγονται οἱ σχέσεις καί πράξεις κατά τρόπο πού νά μή βλάπτονται οἱ ἀντίστοιχες σχέσεις καί πράξεις στό N.

10.4 Ἡ σχέση $<$ στό Z εἶναι σχέση ὁλικῆς γνήσιας διάταξης. Πραγματικά εἶναι μεταβατική ἰσχύει ἡ πρόταση.
$C_{(\alpha,\beta)} < C_{(\gamma,\delta)} \wedge C_{\gamma,\delta)} < C_{(\lambda,\mu)} \Rightarrow C_{(\alpha,\beta)} < C_{(\lambda,\mu)}$.
Ἔχουμε: $C_{(\alpha,\beta)} < C_{(\gamma,\delta)} \wedge C_{(\gamma,\delta)} < C_{(\lambda,\mu)} \Rightarrow$
$\alpha+\delta < \beta+\gamma \wedge \gamma+\mu < \delta+\lambda$ στό $N \Rightarrow (\alpha+\delta)+(\gamma+\mu) < (\beta+\gamma)+(\delta+\lambda)$ στό $N \Rightarrow (\alpha+\mu)+(\delta+\gamma) < (\beta+\lambda)+(\delta+\gamma)$ στό $N \Rightarrow \alpha+\mu < \beta+\lambda$ στό $N \Rightarrow C_{(\alpha,\beta)} < C_{(\lambda,\mu)}$ στό Z. Ἡ $<$ λοιπόν εἶναι μεταβατική.

Ἄν παραστήσουμε τούς ἀκεραίους μέ ἕνα μόνο γράμμα θά ἔχουμε τήν πρόταση. Στό Z, $x < \psi \wedge \psi < \omega \Rightarrow x < \omega$. καί ἡ μεταβατικότητα τῆς $<$ ἀποδείχνεται ὡσεξῆς:
Πραγματικά (παρ.10.1), $x < \psi \wedge \psi < \omega \Rightarrow$
$(\psi - x) \in Z^+ \wedge (\omega - \psi) \in Z^+ \Rightarrow$ (παρ.9.10) $[\psi + (-x)] + [\omega + (-\psi)] \in Z^+$
(ἀντιμεταθετικός καί προσεταιριστικός νόμος στό Z)
$\Rightarrow [\psi + (-\psi)] + [\omega + (-x)] \in Z^+ \Rightarrow 0 + [\omega + (-x)] \in Z^+ \Rightarrow (\omega - x) \Rightarrow Z^+$
$\Rightarrow$ (παρ.10.1) $x < \omega$ στό Z. Ἡ σχέση $<$ λοιπόν τοῦ "μικροτέρου" εἶναι μεταβατική στό Z. Ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall x \in Z, \forall \psi \in Z, x < \psi \underline{\vee} \psi < x \underline{\vee} x = \psi$. Πραγματικά, ἀπό τό νόμο τῆς τριχοτομίας στό Z (παρ.6.4) ἰσχύει ἡ
$\forall (\psi - x) \in Z, (\psi - x) \in Z^+ \underline{\vee} (x - \psi) \in Z^+ \underline{\vee} x - \psi = 0$ πού (παρ.10.1 καί 9.5) ἰσοδυναμεῖ μέ τήν προηγούμενη. Ἡ σχέση $<$

στό Z εἶναι ἀκόμη <u>ἀναυτοπαθής</u> γιατί ἰσχύει ἡ $x=x$ ἐπομένως ἀποκλείεται ἡ $x<x$ καί ἰσχύει ἡ $\forall x \in Z, x \nless x$. Ἡ ἀναυτοπάθεια καί ἡ μεταβατικότητα τῆς $<$ στό Z ὁδηγοῦν στό συμπέρασμα ὅτι πρόκειται γιά σχέση γνήσιας διάταξης στό Z. Ἐπίσης ἡ πρόταση

$\forall x \in Z, \forall \psi \in Z,\ x<\psi \veebar \psi<x \veebar x=\psi$ δείχνει ὅτι ἡ $<$ εἶναι σχέση ὁλικῆς γνήσιας διάταξης στό Z.

10.5 Ὁρίζεται στό Z καί <u>ἡ σχέση $>$ τοῦ "μεγαλύτερου"</u> μέ τή βοήθεια τῆς σχέσης $<$ στό ἴδιο σύνολο.

$$C_{(\gamma,\delta)} > C_{(\alpha,\beta)} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} C_{(\alpha,\beta)} < C_{(\gamma,\delta)}$$

ἤ $\psi > x$ στό $Z \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} x < \psi$ στό Z

Ἐπίσης ἔχουμε καί τούς ἀπ' εὐθείας ὁρισμούς:

$$C_{(\gamma,\delta)} > C_{(\alpha,\beta)} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} C_{(\gamma,\delta)} - C_{(\alpha,\beta)} \in Z^+$$

ἤ $\psi > x$ στό $Z \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \psi - x \in Z^+$

$$C_{(\gamma,\delta)} > C_{(\alpha,\beta)} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \beta+\gamma > \alpha+\delta \text{ στό } N$$

Ὅλα ὅσα ἀναφέραμε γιά τή σχέση $<$ ἰσχύουν καί γιά τή σχέση $>$ στό Z. Μπορούσαμε φυσικά νά ὁρίσουμε πρῶτα τήν $>$ καί ὕστερα τήν $<$.

10.6 Ὕστερα ἀπό αὐτά πού εἴδαμε γιά τή σχέση $<$ στό Z, μποροῦμε νά ἔχουμε καί τούς ἑπόμενους ὁρισμούς γιά τόν θετικό καί ἀρνητικό ἀκέραιο ἀριθμό. <u>"Ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός εἶναι θετικός ἄν καί μόνο ἄν εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν ἀκέραιο μηδέν"</u>. Ἐπίσης: <u>" Ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός εἶναι ἀρνητικός ἄν καί μόνο ἄν εἶναι μικρότερος ἀπό τόν ἀκέραιο μηδέν"</u>.

Πραγματικά, γιά τούς ἀκέραιους 0 καί x ἔχουμε $x>0 \Leftrightarrow x-0 \in Z^+ \Leftrightarrow x+(-0) \in Z^+ \Leftrightarrow x+0 \in Z^+ \Leftrightarrow x \in Z^+$. Ἐπίσης εἶναι $\psi<0 \Leftrightarrow 0-\psi \in Z^+ \Leftrightarrow 0+(-\psi) \in Z^+ \Leftrightarrow -\psi \in Z^+ \Leftrightarrow \psi \in Z^-$.

Προκύπτουν λοιπόν ἀπό τά παραπάνω οἱ ἰσοδυναμίες: $x>0 \Leftrightarrow x \in Z^+$ καί $\psi<0 \Leftrightarrow \psi \in Z^-$ ἤ $\psi<0 \Leftrightarrow -\psi \in Z^+$.

10.7 <u>Κάθε ἀρνητικός ἀκέραιος ἀριθμός εἶναι μικρότερος ἀπό κάθε θετικό ἀκέραιο.</u> Ἡ σχέση $<$ εἶναι μεταβατική στό Z ἑπομένως ἐπειδή οἱ ἀρνητικοί ἀκέραιοι εἶναι μικρότεροι ἀπό τόν ἀκέραιο μηδέν καί ὁ ἀκέραιος μηδέν μικρότερος ἀπό τούς θετικούς ἀκεραίους, εἶναι οἱ ἀρνητικοί ἀκέραιοι μικρότεροι ἀπό τούς θετικούς ἀκεραίους. <u>Ἀκόμη, διαφορετικά:</u>

$C_{(\alpha+x,x)}-C_{(\beta,\beta+\psi)}=C_{(\alpha+x,x)}+C_{(\beta+\psi,\beta)}\in Z^+$ (παρ.9.10)

Ἡ $C_{(\alpha+x,x)}-C_{(\beta,\beta+\psi)}\in Z^+$ ὅμως ἰσοδυναμεῖ μέ τήν

$C_{(\beta,\beta+\psi)}<C_{(\alpha+x,x)}$ (παρ.10.1)

<u>Ἡ ἴδια πρόταση</u> ἀποδείχνεται καί ὡσεξῆς: Ἄν $x\in Z^+$ καί $-\psi\in Z^+$ (ψ ἀρνητικός) θά δείξουμε ὅτι $\psi<x$. Πραγματικά (παρ.10.1) $x-\psi=x+(-\psi)\in Z^+$ (παρ.9.10). Ἡ $x-\psi\in Z^+$ (παρ.9.10) ἰσοδυναμεῖ μέ τήν $\psi<x$ (παρ. 10.1).

11. Σχέσεις διάταξης στό Z.

11.1 <u>Ἡ σχέση $\leqq$ ὁρίζεται ὡσεξῆς.</u> $x\leqq\psi$ στό $Z \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} x<\psi \veebar x=\psi$ στό Z (ἀντί γιά $\veebar$ βάζουμε καί $\vee$)

ἤ $x\leqq\psi$ στό $Z \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} (\psi-x)\in Z_0^+$

εἶναι $Z_0^+=Z^+\cup\{0\}$

Ἐπίσης $C_{(\alpha,\beta)}\leqq C_{(\gamma,\delta)} \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} \alpha+\delta\leqq\beta+\gamma$ στό N.

Ἐκτός ἀπό τή σχέση τοῦ <u>"μικρότερου ἤ ἴσου"</u> ὁρίζεται καί ἡ σχέση τοῦ <u>"μεγαλύτερου ἤ ἴσου"</u> ὡσεξῆς:

$x\geqq\psi$ στό $Z \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} \psi\leqq x$ στό Z.

Ἡ $\geqq$ ὁρίζεται καί ἀπ' εὐθείας ὅπως παραπάνω ἡ $\leqq$.

11.2 <u>Ἡ σχέση $\leqq$ στό Z εἶναι αὐτοπαθής,</u> δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall x\in Z, x\leqq x$. Πραγματικά, ἰσχύει ἡ $x=x$ γιατί ἡ ἰσότητα εἶναι αὐτοπαθής στό Z. Ἡ $x=x$ συνεπάγεται τήν $x=x\vee x<x$ δηλαδή τήν $x\leqq x$. Ἡ σχέση $\leqq$ στό Z εἶναι ἀντισυμμετρική δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση

$x \leqq \psi \wedge \psi \leqq x \Rightarrow x=\psi$. Πραγματικά, $x \leqq \psi \wedge \psi \leqq x \Rightarrow$ $(x=\psi \vee x<\psi) \wedge (x=\psi) \vee \psi<x) \Rightarrow$ (κεφ. I, παρ. 2.6γ) $(x=\psi \wedge x=\psi) \vee (x=\psi \wedge \psi<x) \vee (x<\psi \wedge x=\psi) \vee (x<\psi \wedge \psi<x) \Rightarrow$ $(x=\psi \wedge x=\psi) \Rightarrow x=\psi$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Rightarrow$ ἰσχύει τελικά ἡ παραπάνω πρόταση καί ἡ $\leqq$ εἶναι ἀντισυμμετρική. (Ἀπό τίς 4 παραπάνω σέ διάζευξη παρενθέσεις ἡ πρώτη μόνο εἶναι ἀληθής γιατί τό περιεχόμενο τῶν ἄλλων εἶναι ψευδές σύμφωνα μέ τό νόμο τῆς τριχοτομίας τόν σχετικό μέ τήν $<$ στό Z). <u>Ἡ σχέση $\leqq$ στό Z εἶναι ἀκόμη μεταβατική,</u> δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση $x \leqq \psi \wedge \psi \leqq \omega \Rightarrow x \leqq \omega$. Πραγματικά, $x \leqq \psi \wedge \psi \leqq \omega \Rightarrow$ $(x=\psi \vee x<\psi) \wedge (\psi=\omega \vee \psi<\omega) \Rightarrow (x=\psi \wedge \psi=\omega) \vee (x=\psi \wedge \psi<\omega) \vee$ $(x<\psi \wedge \psi=\omega) \vee (x<\psi \wedge \psi<\omega) \Rightarrow (x=\omega) \vee (x<\omega) \vee (x<\omega) \vee (x<\omega) \Rightarrow$ $x=\omega \vee x<\omega \Rightarrow x \leqq \omega$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Rightarrow$ ἰσχύει τελικά ἡ παραπάνω πρόταση καί ἡ $\leqq$ εἶναι μεταβατική (χρησιμοποιήσαμε τήν μεταβατικότητα τῶν σχέσεων $=$ καί $<$).

<u>Ἡ σχέση $\leqq$ ὅπως εἴδαμε εἶναι αὐτοπαθής, ἀντισυμμετρική καί μεταβατική ἐπομένως εἶναι μία σχέση διάταξης στό Z.</u> Ἡ διάταξη αὐτή εἶναι <u>ὁλική,</u> δηλαδή ἰσχύει στό Z ἡ πρόταση $\forall x \in Z, \forall \psi \in Z, x \leqq \psi \vee \psi \leqq x$ Πραγματικά, στήν παρ. 10.4 εἴδαμε τήν πρόταση $\forall x \in Z, \forall \psi \in Z, x<\psi \veebar \psi<x \veebar x=\psi$. Ἔχουμε λοιπόν $x<\psi \veebar \psi<x \veebar x=\psi \Rightarrow x \leqq \psi \vee \psi \leqq x$.

11.3 <u>Θά ἀποδείξουμε (ὡς παράδειγμα)</u> ὅτι στό Z ἰσχύει ἡ πρόταση $x \leqq \psi \wedge \omega<0 \Rightarrow x\omega \geqq \psi\omega$. Πραγματικά, $x \leqq \psi \wedge \omega<0 \Rightarrow$ $(x<\psi \veebar x=\psi) \wedge 0<-\omega \Rightarrow (x<\psi \wedge 0<-\omega) \veebar (x=\psi \wedge 0<-\omega)$ $\Rightarrow (0<\psi-x \wedge 0<-\omega) \veebar (x=\psi \wedge 0<-\omega) \Rightarrow$ (παρ. 9.11 καί 8.2) $0<(\psi-x)\cdot(-\omega) \veebar -x\omega=-\psi\omega \Rightarrow$ (παρ. 9.7) $0<x\omega-\psi\omega \veebar x\omega=\psi\omega \Rightarrow$ (παρ.10.1) $\psi\omega<x\omega \veebar x\omega=\psi\omega \Rightarrow$ (παρ.10.5) $x\omega>\psi\omega \veebar x\omega=\psi\omega \Rightarrow x\omega \geqq \psi\omega$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Rightarrow$ ἰσχύει τελικά ἡ παραπάνω πρόταση.

12. Ένας ισομορφισμός τοῦ N στό Z (πάνω στό Z^+)

12.1 Θεωροῦμε τή μονοσήμαντη ἀπεικόνιση:

$$\varphi: N \ni \alpha \longleftrightarrow C_{(\alpha+x,x)} \in Z$$

Εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη, γιατί $\alpha \neq \alpha' \Rightarrow C_{(\alpha+x,x)} \neq C_{(\alpha'+x,x)}$

Πραγματικά, $\alpha \neq \alpha'$ στό N $\Rightarrow \alpha+2x \neq \alpha'+2x$ στό N $\Rightarrow (\alpha+x)+x \neq x+(\alpha'+x)$ στό N $\Rightarrow C_{(\alpha+x,x)} \neq C_{(\alpha'+x,x)}$ στό Z.

12.2 Ἀπό τά παραπάνω φαίνεται ὅτι ἡ φ εἶναι ἕνας ἰσομορφισμός τοῦ N στό Z (πάνω στό Z^+) ὡς πρός τήν σχέση τῆς ἰσότητας στό N καί στό Z. Γράφουμε: $\alpha=\alpha'$ στό N $\Leftrightarrow C_{(\alpha+x,x)}=C_{(\alpha'+x,x)}$ στό Z.

12.3 Ἰσχύει καί ἡ $\alpha<\beta$ στό N $\Leftrightarrow C_{(\alpha+x,x)}<C_{(\beta+x,x)}$ στό Z. Πραγματικά, ἔχουμε: $\alpha<\beta$ στό N $\Leftrightarrow \alpha+2x<\beta+2x$ στό N $\Leftrightarrow (\alpha+x)+x<x+(\beta+x)$ στό N $\Leftrightarrow C_{(\alpha+x,x)}<C_{(\beta+x,x)}$ στό Z.

Ἔχουμε λοιπόν ἰσομορφισμό τοῦ N στό Z (πάνω στό Z^+) ὡς πρός τίς σχέσεις $<$ καί $<$ στό N καί στό Z.

12.4 Θά δείξουμε στό Z τήν ἰσότητα $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$ ὅπου $\alpha \in N$, $\beta \in N$. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς φ, εἶναι $\varphi(\alpha)=C_{(\alpha+x,x)}$, $\varphi(\beta)=C_{(\beta+x,x)}$, $\varphi(\alpha+\beta)=C_{(\alpha+\beta+x,x)}$. Ἐπίσης $\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)=C_{(\alpha+x,x)}+C_{(\beta+x,x)}=C_{(\alpha+\beta+2x,2x)}=C_{(\alpha+\beta+x,x)}$ (γιατί ἰσχύει στό N ἡ $\alpha+\beta+2x+x=2x+\alpha+\beta+x$) $=\varphi(\alpha+\beta)$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς = ἰσχύει τελικά ἡ $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$ καί ἔχουμε <u>ἕνα ἰσομορφισμό τοῦ N στό Z (πάνω στό Z^+) ὡς πρός τήν πρόσθεση στό N καί τήν πρόσθεση στό Z.</u>

12.5 Θά δείξουμε τήν ἰσότητα $\varphi(\alpha\beta)=\varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ στό Z. Πραγματικά, $\varphi(\alpha\beta)=C_{(\alpha\beta+x,x)}$. Εἶναι (βλέπετε καί παρ. 5.3) $\varphi(\alpha)\varphi(\beta)=C_{(\alpha+x,x)}\cdot C_{(\beta+x,x)}=C_{[(\alpha+x)(\beta+x)+x^2,(\alpha+x)x+x(\beta+x)]}$ $=C_{(\alpha\beta+\alpha x+x\beta+2x^2,\alpha x+x\beta+2x^2)}=C_{(\alpha\beta+x,x)}$ (γιατί ἰσχύει στό N ἤ $[\alpha\beta+\alpha x+x\beta+2x^2]+x=[\alpha x+x\beta+2x^2]+\alpha x+\beta)=\varphi(\alpha\beta)$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς ἰσότητας ἰσχύει τελικά ἡ $\varphi(\alpha\beta)=\varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ καί ἔχουμε ἕνα ἰσομορφισμό τοῦ N στό Z (πάνω στό Z^+) ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό στό N καί τόν πολλαπλασιασμό στό Z.

12.6 Ὁ ἰσομορφισμός φ τοῦ N στό Z (πάνω στό Z^+) ἰσχύει καί ὡς πρός τίς σχέσεις $\leqq, >$ καί $\geqq$ στό N καί στό Z.

12.7 Ὅπως εἴδαμε στίς παρ. 12.1-12.6 τά σύνολα N καί Z^+ εἶναι ἰσόμορφα ἐπομένως τό N μποροῦμε νά τό θεωρήσουμε ταυτιζόμενο μέ τό Z^+ καί ἐπειδή τό Z^+ εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ Z θά θεωροῦμε καί τό N ὑποσύνολο τοῦ Z. Βλέπουμε ὅτι οἱ σχέσεις καί οἱ πράξεις στό N δέν βλάπτονται μέ τήν ἐπέκταση τοῦ N στό Z. Ἀκόμη οἱ βασικές ἰδιότητες τῶν πράξεων στό N διατηροῦνται καί στό Z

Ἀσκήσεις.

1. Εἶναι ἀκέραιος ἤ ὄχι τό σύμβολο $C_{(4,0)}$ καί τό σύμβολο $C_{(3,-2)}$;

2. Νά γίνουν οἱ πράξεις:

   $C_{(4,2)}+C_{(3,7)}=, C_{(1,8)}-C_{(3,7)}=, C_{(1,2)}\cdot C_{(2,1)}=$.

3. Ἀπό τούς ἑπόμενους ἀκεραίους ἀριθμούς ποιοί εἶναι οἱ θετικοί; Ποιοί εἶναι οἱ ἀρνητικοί; Ποιοί εἶναι ἴσοι μέ τόν ἀκέραιο μηδέν;

   $C_{(4,6)}, C_{(5,1)}, C_{(6,6)}, C_{(6,8)}, C_{(3,3)}, C_{(8,7)}$

4. Νά παρασταθοῦν οἱ προτάσεις τῶν παρ. 7.2-7.6 μέ συμβολισμό τῶν ἀκεραίων μέ ἕνα μόνο γράμμα π.χ τήν πρόταση τῆς παρ. 7.1 τήν παριστάνουμε μέ $\forall x \in Z, \forall \psi \in Z, x+\psi \in Z$.

5. Νά γραφοῦν οἱ προτάσεις τῶν παρ. 8.1-8.6 κατά τόν

τρόπο πού ὁρίζουμε στήν ἄσκηση 4.

6. Νά δειχτεῖ ὅτι τό οὐδέτερο στοιχεῖο τοῦ Z ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (παρ.8.6) εἶναι μοναδικό. Τό ἴδιο καί τό μηδέν ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης (παρ. 7.5).

7. Ἡ ἀπεικόνιση $\varphi: N \ni \alpha \leftrightarrow C_{(x,\alpha+x)} \in Z$ εἶναι ἕνας ἰσομορφισμός τοῦ N στό Z ἤ ὄχι; 1) ὡς πρός τίς σχέσεις $<$ στό N καί $>$ στό Z. 2) ὡς πρός τίς σχέσεις $=$ καί $=$ στό N καί στό Z 3) ὡς πρός τήν πρόσθεση 4) ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό.

8. Νά δειχτεῖ ὅτι $C_{(3,2)} < C_{(5,1)}$. Ἐπίσης ὅτι:
$C_{(1,10)} < C_{(2,3)}$ καί $C_{(4,10)} < C_{(5,5)}$

9. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι τό ἄθροισμα ἀκέραιου θετικοῦ καί ἀκέραιου ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁμόσημο πρός τόν ἔχοντα μεγαλύτερη ἀπόλυτη τιμή προσθετέο ἤ εἶναι μηδέν ἄν ἔχουν ἴσες ἀπόλυτες τιμές.

10. Νά ἀποδειχτεῖ στό σύνολο Z ἡ πρόταση:
$(x_1x_2x_3\ldots x_\rho x_{\rho+1}x_{\rho+2}\ldots x_{\rho+n}) = (x_1x_2x_3\ldots x_\rho)(x_{\rho+1}x_{\rho+2}\ldots x_{\rho+n})$

12. Ἄν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ εἶναι ἀκέραιοι καί ἰσχύουν οἱ $\alpha<\beta$ καί $\gamma<\delta$ ἰσχύει καί ἡ $\alpha\gamma<\beta\delta$ ἤ ὄχι;

12. Νά δειχτεῖ ἡ πρόταση $\forall\alpha\in Z, \forall\beta\in Z, \forall\gamma\in Z, \forall\delta\in Z,$
$(\alpha+\beta)\cdot(\gamma-\delta) = (\alpha\gamma+\beta\gamma)-(\alpha\delta+\beta\delta)$

13. Νά δειχτεῖ ἡ πρόταση $\forall\alpha\in Z-\{0\},\ \alpha^2>0$

14. Νά δειχτεῖ ἡ πρόταση:
$\alpha<\beta \wedge \gamma \leqq \delta \Rightarrow \alpha+\gamma<\beta+\delta$ στό Z.

15. Νά δειχτεῖ ἡ πρόταση $(\alpha<\beta \Rightarrow \alpha\gamma=\beta\gamma) \Rightarrow \gamma=0$ στό Z.

16. Νά δειχτεῖ στό Z ἡ πρόταση $\alpha<\beta \Rightarrow \alpha^3<\beta^3$ ἰσχύει καί ἡ ἀντίστροφη πρόταση ἤ ὄχι;

17. Εἶναι σωστό νά γράφουμε $-C_{(\alpha,\beta)}$ ἤ ὄχι καί γιατί;

18. Γιατί τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ταυτίζεται μέ τό σύνολο τῶν ἀκέραιων θετικῶν ἀριθμῶν;

19. Ὁ ἀκέραιος $C_{(x,1+x)}$ συμβολίζεται μέ -1 καί ὀνομάζεται ἀρνητική μονάδα. Νά δειχτεῖ ἡ πρόταση: $1\cdot(-1)=(-1)\cdot 1=-1$ καί ἡ $(-1)\cdot(-1)=1$

20. Πῶς ἀπλοποιεῖται καί γιατί ἡ ἔκφραση $-(-\alpha)$ μέ $\alpha\in Z$.

21. Νά δειχτεῖ ἡ πρόταση $\alpha<\beta \Longleftrightarrow -\beta<-\alpha$ γιά θετικούς ἀκεραίους α καί β.

22. Νά δειχτεῖ ὅτι $\forall \alpha\in Z$, $(-1)\cdot\alpha=\alpha\cdot(-1)=-\alpha$

23. Νά δειχτεῖ ἡ πρόταση $\forall\alpha\in Z, \forall\beta\in Z$, $-(\alpha+\beta)=(-\alpha)+(-\beta)$

24. Νά δειχτεῖ στό Z ἡ πρόταση $x<0 \wedge \psi<0 \Rightarrow x+\psi<0$.

25. Νά δειχτεῖ στό Z ἡ πρόταση $\alpha<\beta \Rightarrow \alpha+\gamma<\beta+\gamma$.

26. Νά δειχτεῖ ἡ πρόταση, $\alpha<\beta \wedge 0<\gamma \Rightarrow \alpha\gamma<\beta\gamma$, στό Z.

27. Μέ τήν πρόταση τῆς παρ. 9.6 νά ἀποδειχτεῖ ὅτι τό γινόμενο ἑνός ἀρνητικοῦ ἐπί ἕνα θετικό ἀκέραιο εἶναι ἀρνητικός ἀκέραιος. Ἐπίσης ἡ πρόταση αὐτή νά ἀποδειχτεῖ καί μέ γραφή τῶν ἀκεραίων μέ τή μορφή $C_{(\alpha,\beta)}$

28. Νά δειχτοῦν οἱ προτάσεις τῶν παρ. 9.5, 9.7, 9.8, μέ γραφή τῶν ἀκεραίων ὑπό τήν μορφή $C_{(x,\psi)}$. Νά δειχτεῖ ὅτι τό γινόμενο δύο ἀρνητικῶν ἀκεραίων εἶναι θετικός ἀκέραιος μέ τή βοήθεια τῆς παρ. 9.13. Ἐπίσης μέ γραφή τῶν ἀκεραίων μέ τή μορφή $C_{(x,\psi)}$.

29. Νά δειχτεῖ ὅτι ἡ σχέση $\leqq$ εἶναι σχέση διάταξης στό Z μέ γραφή τῶν ἀκεραίων ὑπό τή μορφή $C_{(x,\psi)}$.

30. Νά ἀποδειχτεῖ ἡ πρόταση τῆς παρ. 11.3 μέ τούς ἀκεραίους γραμμένους ὑπό τή μορφή $C_{(x,\psi)}$

31. Διαφέρουν ἤ ὄχι τά σύνολα πού ὁρίζονται ἀπό τίς ἐκφράσεις: "Τό σύνολο τῶν ἀκεραίων", "ἕνα σύνολο ἀκεραίων";

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΟΙ ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Ἡ διαίρεση στό σύνολο Z.

Ἡ διαίρεση στό σύνολο Z ὁρίζεται ὡσεξῆς: $\alpha:\beta=\gamma \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \alpha=\beta\gamma$ καί δέν ἐκτελεῖται πάντοτε, δηλαδή ἐκτελεῖται μερικά στό Z. π.χ $10:(-2)=-5$ γιατί $10=(-2)\cdot(-5)$. Ὅμως τό πηλίκον 9:4 δέν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, δηλαδή ἡ ἐξίσωση $9=4x$ δέν ἔχει ἀκέραια λύση (βλέπουμε ὅτι $4\cdot 2<9<4\cdot 3$).

2. Εἰσαγωγή στό σύνολο τῶν ρητῶν

Σκοπός μας εἶναι ἡ ἐπέκταση τοῦ συνόλου Z τῶν ἀκεραίων στό σύνολο Q τῶν ρητῶν κατά τρόπο πού νά ἐκτελεῖται πάντοτε ἡ διαίρεση (ἐκτός ἀπό τήν περίπτωση πού ὁ διαιρέτης εἶναι μηδέν). Ἀπό τήν προηγούμενη παράγραφο καί ἀπό τήν ἰσότητα $10:(-2)=-5$ μᾶς ὑποβάλλεται ἡ ἰδέα νά θεωροῦμε τόν ἀκέραιο -5 πού τώρα θά θεωρεῖται ρητός σάν ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος ἀκέραιων ἀριθμῶν. Μέ ἄλλα λόγια πρόκειται γιά τόν $(10,-2)$. Ἔτσι καί τό πηλίκον τῆς διαίρεσης 9:4 πού θά θεωροῦμε ὅτι ὑπάρχει θά τό παριστάνουμε μέ $(9,4)$ καί θά εἶναι ἕνας μή ἀκέραιος ρητός ἀριθμός. Ἐμφανίζεται λοιπόν ὁ ρητός ἀριθμός σάν ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος (α,β) μέ $\alpha \in Z$ καί $\beta \in Z-\{0\}$. Βέβαια ὅπως θά δοῦμε τώρα μποροῦμε νά ἐκφρασθοῦμε ἀκριβέστερα. Παρατηροῦμε ὅτι τά (10,-2) καί(20,-4) παριστάνουν τόν ἴδιο ρητό ἀριθμό ἀφοῦ 10: (-2) καί 20:(-4) εἶναι ὁ ἴδιος ἀκέραιος ἀριθμός -5. Ἔτσι ὁ ρητός ἀριθμός ἐμφανίζεται σάν μία κλάση ἰσοδύναμων μεταξύ τους διατεταγμένων ζευγῶν ἀπό ἀκέραιους ἀριθμούς μέ δεύτερο στοιχεῖο ≠0. Αὐτά σάν μιά πρώτη εἰσαγωγή. Στά ἑπόμενα πάνω σ'αὐτά τά χνάρια θά ὁρίσουμε μέ ἀκρίβεια τά ἀναφερθέντα.

3. Τό σύνολο $M = Z \times \left(Z-\{0\}\right)$

3.1 Πρόκειται γιά τό σύνολο $M=\{(x,\psi): x \in Z$ καί $\psi \in Z, \psi \neq 0\}$
Ἡ ἰσότητα στό Μ ὁρίζεται ὡσεξῆς:

$(x,\psi)=(x',\psi')$ στό $M \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} x=x' \wedge \psi=\psi', \psi\neq 0, \psi'\neq 0$ στό Z

3.2 Στό Μ ὁρίζεται καί μία ἄλλη σχέση ἡ $\approx$ πού θά δείξουμε ὅτι πρόκειται γιά σχέση ἰσοδυναμίας στό Μ.

$(x,\psi) \approx (\lambda,\mu)$ στό $M \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} x\mu=\psi\lambda \wedge \psi,\mu\neq 0$ στό Z.

3.3 Εὔκολα φαίνεται ὅτι δύο ἴσα στοιχεῖα τοῦ Μ (παρ.3.1) εἶναι καί ἰσοδύναμα (παρ.3.2) χωρίς νά ἰσχύει πάντοτε τό ἀντίστροφο.

Πραγματικά, $(x,\psi)=(x',\psi')$ στό $M \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} x=x' \wedge \psi=\psi', \psi\neq 0, \psi'\neq 0$ στό $Z \Rightarrow x\psi'=\psi x', \psi\neq 0, \psi'\neq 0$ στό $Z \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (x,\psi)\approx(x',\psi')$ στό Μ. Τό ἀντίστροφο δέν ἀληθεύει πάντοτε γιατί ἀνάμεσα στίς δύο ἐξ'ὁρισμοῦ ἰσοδυναμίες ὑπάρχει μία συνεπαγωγή πού δέν μπορεῖ πάντοτε νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό μία ἰσοδυναμία π.χ ἰσχύει ἡ $3\cdot 10=2\cdot 15$ χωρίς νά εἶναι 3=15 καί 2=10

3.4 Ἡ $\approx$ εἶναι σχέση αὐτοπαθής στό Μ, δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall\ (x,\psi)\in M,\ (x,\psi)\approx(x,\psi)$. Πραγματικά ἰσχύει ἡ $(x,\psi)\approx(x,\psi)$ στό Μ γιατί ἰσχύει στό Z ἡ $x\psi=\psi x, \psi\neq 0$.

3.5 Ἡ σχέση $\approx$ εἶναι συμμετρική στό Μ, δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση $(x,\psi)\approx(\lambda,\mu) \Rightarrow (\lambda,\mu)\approx(x,\psi)$. Πραγματικά $(x,\psi)\approx(\lambda,\mu)$ στό $M \Rightarrow x\mu=\psi\lambda \wedge \psi,\mu\neq 0$ στό $Z \Rightarrow \lambda\psi=\mu x \wedge \psi,\mu\neq 0$ στό $Z \Rightarrow (\lambda,\mu)\approx(x,\psi)$ στό M.

3.6 Ἡ σχέση $\approx$ εἶναι μεταβατική στό M, δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση $(x,\psi)\approx(x',\psi') \wedge (x',\psi')\approx(x'',\psi'') \Rightarrow (x,\psi)\approx(x'',\psi'')$. Πραγματικά,

$(x,\psi)\approx(x',\psi') \wedge (x',\psi')\approx(x'',\psi'')$ στό $M \Rightarrow$

$x\psi'=\psi x' \wedge x'\psi''=\psi' x'' \wedge \psi,\psi',\psi''\neq 0$ στό $Z \Rightarrow$

$(x\psi')(x'\psi'')=(\psi x')(\psi' x'') \wedge \psi,\psi',\psi''\neq 0$ στό $Z \Rightarrow$

$(x\psi'')(x'\psi')=(\psi x'')(x'\psi') \wedge \psi,\psi',\psi''\neq 0$ στό $Z \Rightarrow$

$x\psi''=\psi x'' \wedge \psi,\psi''\neq 0$ στό $Z \Rightarrow (x,\psi)\approx(x'',\psi'')$ στό M.

Ἡ διαγραφή παραπάνω τοῦ παράγοντα $x'\psi'$ ἔγινε ὑποθέτοντας ὅτι $x'\psi'\neq 0$ καί ἐπειδή $\psi'\neq 0$ ὑποθέσαμε ὅτι $x'\neq 0$. Ἄν ὅμως $x'=0$ ἀπό τήν $x\psi'=\psi x'$ ἐπειδή $\psi'\neq 0$ εἶναι καί $x=0$. Ἐπίσης ἀπό τήν $x'\psi''=\psi' x''$ ἄν $x'=0$ ἐπειδή $\psi'\neq 0$ εἶναι καί $x''=0$. Ὅταν ὅμως $x=x'=x''=0$ ἰσχύουν πάλι οἱ $x\psi'=\psi x'$, $x'\psi''=\psi' x''$ καί $x\psi''=\psi x''$ καί ἡ $\approx$ εἶναι πάλι μεταβατική.

3.7 Εἴδαμε στίς παρ. 3.4-3.6 ὅτι ἡ $\approx$ εἶναι αὐτοπαθής συμμετρική καί μεταβατική στό $M=Z\times(Z-\{0\})$. Πρόκειται συνεπῶς γιά μιά σχέση ἰσοδυναμίας. Ὅταν τά (x,ψ) καί (λ,μ) στοιχεῖα τοῦ M εἶναι ἰσοδύναμα γράφουμε $(x,\psi)\approx(\lambda,\mu)$ στό M. Γιά δύο μή ἰσοδύναμα στοιχεῖα τοῦ M π.χ τά (α,β) καί (γ,δ) θά γράφουμε $(\alpha,\beta)\not\approx(\gamma,\delta)$.

3.8 Εἶναι $(4,5)=(4,5)$ στό $M=Z\times(Z-\{0\})$ γιατί εἶναι $4=4$ καί $5=5$ στό Z. Ἐπίσης εἶναι $(4,5)\approx(4,5)$ (παρ.3.3) Εἶναι $(-2,3)\approx(8,-12)$ στό M γιατί $(-2)\cdot(-12)=3\cdot 8$ καί $3\neq 0$, $-12\neq 0$ στό Z . Ἰσχύει ἀκόμη ἡ $(3,4)\not\approx(-6,-7)$ στό M γιατί ἰσχύει ἡ $3\cdot(-7)\neq 4\cdot(-6)$ στό Z.

4. Τό σύνολο τῶν ρητῶν $\mathbb{Q}$. Ἰσότητα στό $\mathbb{Q}$.

Ἕνας ρητός ἀριθμός εἶναι μία κλάση διατεταγμένων ζευγῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν μέ δεύτερο στοιχεῖο διαφορετικό ἀπό τό μηδέν. (Ἡ ἰσοδυναμία ὁρίζεται στήν παρ. 3.2). Τό σύνολο $M/\approx$ τό συμβολίζουμε μέ Q καί τό ὀνομάζουμε σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

Εἶναι λοιπόν $Q = Z \times (Z - \{0\})/\approx$.

Ἡ ἰσότητα στό Q ὁρίζεται ὡσεξῆς:

Στό Q $C_{(\alpha,\beta)} = C_{(\gamma,\delta)} \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} (\alpha,\beta) \approx (\gamma,\delta)$ στό $Z\times(Z-\{0\})$

Μέ ἀναγωγή στό Z εἶναι:

$C_{(\alpha,\beta)} = C_{(\gamma,\delta)}$ στό $Q \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} \alpha\delta = \beta\gamma \wedge \beta,\delta \neq 0$ στό Z.

Συμφωνοῦμε νά γράφουμε ἀντί γιά $C_{(\alpha,\beta)}$ τό σύμβολο $\frac{\alpha}{\beta}$

Ἐπαναλαμβάνουμε: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ στό $Q \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} (\alpha,\beta) \approx (\gamma,\delta)$ στό $Z\times(Z-\{0\})$ καί $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ στό $Q \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} \alpha\delta = \beta\gamma \wedge \beta,\delta \neq 0$ στό Z. Γιά αἰτία πού διακρίνεται στίς παρ. 9.2 καί 10.1 ἡ τελευταία ἰσοδυναμία γράφεται καί ὡσεξῆς:

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ στό $Q \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} (\alpha\beta)\cdot\delta^2 = (\gamma\delta)\cdot\beta^2 \wedge \beta,\delta \neq 0$ στό Z.

5. Οἱ πράξεις στό $\mathbb{Q}$

5.1 Γιά τήν πρόσθεση ὁρίζουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} \underset{\text{ορσ}}{=} \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta} \quad \text{ἤ} \quad C_{(\alpha,\beta)} + C_{(\gamma,\delta)} \underset{\text{ορσ}}{=} C_{(\alpha\delta+\beta\gamma,\beta\delta)}$$

Ἄν $\beta=\delta$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta}$ γιατί σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἰσότητα $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha\beta+\beta\gamma}{\beta^2}$ καί $\frac{\alpha\beta+\beta\gamma}{\beta^2} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta}$ ἀφοῦ (παρ. 4) $(\alpha\beta+\beta\gamma)\beta = \beta^2(\alpha+\gamma)$ στό Z.

5.2 Γιά τήν ἀφαίρεση ὁρίζουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} \underset{\text{ορσ}}{=} \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta\delta} \quad \text{ἤ} \quad C_{(\alpha,\beta)} - C_{(\gamma,\delta)} \underset{\text{ορσ}}{=} C_{(\alpha\delta-\beta\gamma,\beta\delta)}$$

. Ἄν $\beta=\delta$ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha-\gamma}{\beta}$ (βλέπετε καί παρ. 5.1)

5.3 Γιά τόν πολλαπλασιασμό ὁρίζουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \underset{\text{ορσ}}{=} \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} \quad \text{ἤ} \quad C_{(\alpha,\beta)} \cdot C_{(\gamma,\delta)} \underset{\text{ορσ}}{=} C_{(\alpha\gamma,\beta\delta)}$$

5.4 Γιά τήν διαίρεση ὁρίζουμε:

$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$, $\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ (τό πηλίκο $\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$ εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τοῦ διαιρετέου ἐπί τόν ἀντίστροφο τοῦ διαιρέτη) π.χ $C_{(\alpha,\beta)} : C_{(\gamma,\delta)} = C_{\text{ορσ}(\alpha\delta,\beta\gamma)}$ Ὅπως γιά τούς ἀκέραιους ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενο τοῦ διαιρέτη ἐπί τό πηλίκο ἔτσι καί ἐδῶ στούς ρητούς εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$ γιατί ἰσχύει, στό Z ἡ $\alpha \cdot \delta \cdot (\beta\gamma) = \beta \cdot \gamma (\alpha\delta)$.

6. Βασικές ἰδιότητες τῆς πρόσθεσης στό Q.

6.1 <u>Τό σύνολο Q εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης.</u>

Πρόκειται γιά τήν πρόταση $\forall \frac{\alpha}{\beta} \in Q, \forall \frac{\gamma}{\delta} \in Q, \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} \in Q$. Πραγματικά, $\frac{\alpha}{\beta} \in Q \wedge \frac{\gamma}{\delta} \in Q \Rightarrow \alpha,\beta,\gamma,\delta \in Z \wedge \beta,\delta \neq 0$ στό $Z \Rightarrow \alpha\delta + \beta\gamma \in Z \wedge \beta\delta \in Z$, $\beta\delta \neq 0 \Rightarrow \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta} \in Q \Rightarrow$ (παρ. 5.1) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} \in Q$.

6.2 <u>Ἡ πρόσθεση στό Q εἶναι μονότονη ὡς πρός τήν ἰσότητα στό ἴδιο σύνολο.</u> Ἰσχύει δηλαδή ἡ πρόταση: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \wedge \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho}{\sigma} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\rho}{\sigma}$. Πραγματικά, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \wedge \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho}{\sigma}$ στό $Q \Rightarrow \alpha\delta = \beta\gamma \wedge \lambda\sigma = \mu\rho \wedge \beta,\delta,\mu,\sigma \neq 0$ στό $Z \Rightarrow (\mu\sigma)(\alpha\delta) = (\mu\sigma)(\beta\gamma) \wedge (\beta\delta)(\lambda\sigma) = (\beta\delta)(\mu\rho) \wedge \beta,\delta,\mu,\sigma \neq 0$ στό $Z \Rightarrow \alpha\mu\delta\sigma = \beta\mu\gamma\sigma \wedge \beta\lambda\delta\sigma = \beta\mu\delta\rho \wedge \beta,\delta,\mu,\sigma \neq 0$ στό $Z \Rightarrow$ $\alpha\mu\delta\sigma + \beta\lambda\delta\sigma = \beta\mu\gamma\sigma + \beta\mu\delta\rho \wedge \beta,\delta,\mu,\sigma \neq 0$ στό $Z \Rightarrow$ $(\alpha\mu + \beta\lambda)\delta\sigma = \beta\mu(\gamma\sigma + \delta\rho) \wedge \beta,\delta,\mu,\sigma \neq 0$ στό $Z \Rightarrow$ $\frac{\alpha\mu+\beta\lambda}{\beta\mu} = \frac{\gamma\sigma+\delta\rho}{\delta\sigma}$ στό $Q \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\rho}{\sigma}$ στό Q.

6.3 Ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall \frac{\alpha}{\beta} \in Q, \forall \frac{\gamma}{\delta} \in Q, \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\alpha}{\beta}$ δηλαδή <u>ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος γιά τήν πρόσθεση στό Q.</u>

Πραγματικά, ἕνεκα τοῦ ἀντιμεταθετικοῦ νόμου γιά τήν πρόσθεση καί τόν πολλαπλασιασμό στό Z ἰσχύουν στό Z οἱ $\alpha\delta+\beta\gamma=\gamma\beta+\delta\alpha$, $\delta\beta=\beta\delta$ γιά ὁποιαδήποτε στοιχεῖα $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ τοῦ Z, ὅμως ἐμεῖς ὑποθέτουμε $\beta\neq 0$, $\delta\neq 0$. Αὐτές συνεπάγονται τήν $(\alpha\delta+\beta\gamma)(\delta\beta)=(\beta\delta)(\gamma\beta+\delta\alpha)$, $\beta\neq 0$, $\delta\neq 0$ στό Z (στή συνέχεια) $\Rightarrow$

$$\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}=\frac{\gamma\beta+\delta\alpha}{\delta\beta} \text{ στό } Q \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\alpha}{\beta} \text{ στό } Q.$$

6.4 Ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall\frac{\alpha}{\beta}\in Q, \forall\frac{\gamma}{\delta}\in Q, \forall\frac{\lambda}{\mu}\in Q$, $\left[\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}\right]+\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\alpha}{\beta}+\left[\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\lambda}{\mu}\right]$ δηλαδή ὁ προσεταιριστικός νόμος τῆς πρόσθεσης στό Q.

Πραγματικά, ἕνεκα τοῦ ἀντιμεταθετικοῦ, τοῦ προσεταιριστικοῦ καί τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου στό Z ἰσχύει στό Z γιά ὁποιαδήποτε $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\lambda,\mu$ στοιχεῖα τοῦ Z (ἐμεῖς ἐδῶ ὑποθέτουμε $\beta,\delta,\mu\neq 0$) ἡ

$$[(\alpha\delta+\beta\gamma)\mu+(\beta\delta)\lambda]\cdot[\beta(\delta\mu)]=[(\beta\delta)\mu]\cdot[\alpha(\delta\mu)+\beta(\gamma\mu+\delta\lambda)]$$

καί $\beta,\delta,\mu\neq 0$ (στή συνέχεια) $\Rightarrow \dfrac{(\alpha\delta+\beta\gamma)\mu+(\beta\delta)\lambda}{(\beta\delta)\mu}=$

$$\frac{\alpha(\delta\mu)+\beta(\gamma\mu+\delta\lambda)}{\beta(\delta\mu)} \text{ στό } Q \Rightarrow \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}+\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma\mu+\delta\lambda}{\delta\mu} \text{ στό}$$

$$Q \Rightarrow \left[\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}\right]+\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\alpha}{\beta}+\left[\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\lambda}{\mu}\right] \text{ στό } Q.$$

6.5 Ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall\frac{\alpha}{\beta}\in Q, \frac{\alpha}{\beta}+\frac{0}{1}=\frac{\alpha}{\beta}\wedge\frac{0}{1}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$. Μέ ἄλλα λόγια τό στοιχεῖο $\frac{0}{1}$ τοῦ Q εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης. Πραγματικά,

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{0}{1}=\frac{\alpha\cdot 1+\beta\cdot 0}{\beta\cdot 1}=\frac{\alpha}{\beta}$$ γιατί στό Z εἶναι $\alpha\cdot 1=\alpha$ καί $\beta\cdot 1=\beta$. Ἐπίσης $\beta\cdot 0=0$ καί $\alpha+0=\alpha$. Ὅμοια ἀποδείχνεται καί ἡ $\frac{0}{1}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$, ἄλλωστε ἰσχύει ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος.

Ὁ ρητός $\frac{0}{1}$ εἶναι ὁ ρητός μηδέν. Στή θέση τοῦ 1 μπορεῖ νά εἶναι ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός μέ ἐξαίρεση τόν ἀκέραιο μηδέν, δηλαδή ἰσχύει ἡ

$\forall \frac{\alpha}{\beta} \in Q, \forall \frac{0}{x} \in Q, \ \frac{\alpha}{\beta} + \frac{0}{x} = \frac{\alpha}{\beta} \wedge \frac{0}{x} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$

6.6 $\forall \frac{\alpha}{\beta} \in Q, \ \frac{\alpha}{\beta} + \frac{-\alpha}{\beta} = \frac{0}{1}$

Πραγματικά, $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{-\alpha}{\beta} = \frac{\alpha+(-\alpha)}{\beta} = \frac{0}{\beta} = \frac{0}{1}$ (γιατί $0 \cdot 1 = \beta \cdot 0$ καί $\beta \neq 0$, $1 \neq 0$ στό Z).

Όμοια ἰσχύει καί ἡ $\frac{-\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{0}{\beta}$ καί ἀποδείχνεται ὅπως παραπάνω ἤ μέ ἐφαρμογή τοῦ ἀντιμεταθετικοῦ νόμου. Τό στοιχεῖο $\frac{-\alpha}{\beta}$ ὀνομάζεται <u>ἀντίθετο τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$</u>. Ἐπίσης καί τό $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀντίθετο τοῦ $\frac{-\alpha}{\beta}$. Τό $\frac{-\alpha}{\beta}$ γράφεται καί $\frac{\alpha}{-\beta}$. Πραγματικά, $\frac{-\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{-\beta}$ στό Q γιατί $(-\alpha)(-\beta) = \beta\alpha$ καί $\beta \neq 0$, $-\beta \neq 0$ στό Z. <u>Συμφωνοῦμε νά γράφουμε $-\frac{\alpha}{\beta}$ καί νά έννοοῦμε $\frac{-\alpha}{\beta}$ ἐπίσης $\frac{\alpha}{-\beta}$</u>.

7. Βασικές ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό Q

7.1 <u>Τό σύνολο Q εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ</u>, δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση

$\forall \frac{\alpha}{\beta} \in Q, \forall \frac{\gamma}{\delta} \in Q, \ \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \in Q.$

Πραγματικά, $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$. Ἐπειδή $\alpha\gamma$ καί $\beta\delta$ εἶναι ἀκέραιοι ὁ $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ εἶναι στοιχεῖο τοῦ Q. Ἐπομένως $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \in Q$ (εἶναι $\beta\delta \neq 0$ γιατί $\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$ ἀφοῦ οἱ $\frac{\alpha}{\beta}$ καί $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι ρητοί).

7.2 <u>Ἰσχύει τό μονότονο τῆς πράξης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν ἰσότητα στό Q:</u>

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \wedge \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho}{\sigma} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\rho}{\sigma}$ στό Q.

Πραγματικά, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \wedge \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho}{\sigma}$ στό Q $\Rightarrow \alpha\delta = \beta\gamma \wedge \lambda\sigma = \mu\rho \wedge \beta,\delta,\mu,\sigma \neq 0$ στό Z $\Rightarrow (\alpha\delta)(\lambda\sigma) = (\beta\gamma)(\mu\rho) \wedge \beta,\delta,\mu,\sigma \neq 0$ στό Z $\Rightarrow (\alpha\lambda)(\delta\sigma) = (\beta\mu)(\gamma\rho) \wedge \beta,\delta,\mu,\sigma \neq 0$ στό Z $\Rightarrow$

$$\frac{\alpha\lambda}{\beta\mu} = \frac{\gamma\rho}{\delta\sigma} \text{ στό } Q \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\rho}{\sigma} \text{ στό } Q.$$

7.3 Ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall \frac{\alpha}{\beta} \in Q, \forall \frac{\gamma}{\delta} \in Q, \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$ δηλαδή ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό Q. Πραγματικά, $(\alpha\gamma)(\delta\beta) = (\beta\delta)(\gamma\alpha) \wedge \beta, \delta \neq 0$ (ἀντιμεταθετικός νόμος στό Z ὑποθέτουμε καί $\beta, \delta \neq 0$) $\Rightarrow \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = \frac{\gamma\alpha}{\delta\beta}$ στό $Q \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$ στό Q

7.4 Ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall \frac{\alpha}{\beta} \in Q, \forall \frac{\gamma}{\delta} \in Q, \forall \frac{\lambda}{\mu} \in Q, \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta}\right) \cdot \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\lambda}{\mu}\right)$ δηλαδή ὁ προσεταιριστικός νόμος στήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό Q. Πραγματικά, ἕνεκα τῆς ἰσχύος τοῦ προσεταιριστικοῦ νόμου στό Z, ἰσχύει στό Z γιά ὁποιαδήποτε στοιχεῖα $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu \in Z$ ἡ $(\alpha\gamma)\lambda = \alpha(\gamma\lambda) \wedge \beta(\delta\mu) = (\beta\delta)\mu$ (στήν συνέχεια) $\Rightarrow$

$(\alpha\gamma)\lambda = \alpha(\gamma\lambda) \wedge \beta(\delta\mu) = (\beta\delta)\mu \wedge \beta, \delta, \mu \neq 0$

στό $Z \Rightarrow [(\alpha\gamma)\lambda][\beta(\delta\mu)] = [(\beta\delta)\mu][\alpha(\gamma\lambda)] \wedge \beta, \delta, \mu \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{(\alpha\gamma)\lambda}{(\beta\delta)\mu} = \frac{\alpha(\gamma\lambda)}{\beta(\delta\mu)} \text{ στό } Q \Rightarrow \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} \cdot \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma\lambda}{\delta\mu} \text{ στό } Q \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta}\right) \cdot \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\lambda}{\mu}\right) \text{ στό } Q$$

7.5 Ἰσχύει στό Q ὁ ἐπιμεριστικός νόμος τῆς πράξης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης, δηλαδή ἡ πρόταση

$$\forall \frac{\alpha}{\beta} \in Q, \forall \frac{\gamma}{\delta} \in Q, \forall \frac{\lambda}{\mu} \in Q, \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta}\right) \cdot \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\lambda}{\mu}$$

Πραγματικά, γιά ὁποιαδήποτε $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu \in Z$ ἐπομένως καί γιά $\beta, \delta, \mu \neq 0$ ἰσχύει στό Z ὅπως εὔκολα ἀποδείχνεται ἡ $[(\alpha\delta + \beta\gamma)\lambda][(\beta\mu)(\delta\mu)] = [(\beta\delta)\mu][(\alpha\lambda)(\delta\mu) + (\beta\mu)(\gamma\lambda)]$ (στή συνέχεια) $\Rightarrow$

$$\frac{(\alpha\delta + \beta\gamma)\lambda}{(\beta\delta)\mu} = \frac{(\alpha\lambda)(\delta\mu) + (\beta\mu)(\gamma\lambda)}{(\beta\mu)(\delta\mu)} \text{ στό } Q \Rightarrow \frac{(\alpha\delta + \beta\gamma)\lambda}{(\beta\delta)\mu} = \frac{\alpha\lambda}{\beta\mu} + \frac{\gamma\lambda}{\delta\mu}$$

στό $Q \Rightarrow \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta\delta} \cdot \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\lambda}{\mu}$ στό $Q \Rightarrow$

$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}\right)\cdot\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\lambda}{\mu}$ στό Q.

7.6 Ὁ ρητός ἀριθμός $\frac{1}{1}$ ὀνομάζεται μονάδα, τό ἴδιο μονάδα ὀνομάζεται ὁ ρητός $\frac{x}{x}$ γιά ὁποιοδήποτε ἀκέραιο x διαφορετικό ἀπό τόν ἀκέραιο μηδέν (εἶναι $\frac{1}{1}=\frac{x}{x}$ στό Q γιατί $1\cdot x=1\cdot x$ καί $1\neq 0$, $x\neq 0$ στό Z). Ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall\frac{\alpha}{\beta}\in Q,\ \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{1}=\frac{\alpha}{\beta}\wedge\frac{1}{1}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$. Πραγματικά, $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{1}=\frac{\alpha\cdot 1}{\beta\cdot 1}=\frac{\alpha}{\beta}$. Ὅμοια ἀποδείχνεται καί ἡ $\frac{1}{1}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$. Τό στοιχεῖο $\frac{1}{1}$ τοῦ Q εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

7.7 Κάθε ρητός ἀριθμός μέ ἐξαίρεση τόν ρητό μηδέν (παρ. 6.5) ἔχει ἀντίστροφο στοιχεῖο στό Q. π.χ ὁ ρητός $\frac{\alpha}{\beta}$ μέ $\alpha\neq 0$ καί $\beta\neq 0$ ἔχει ἀντίστροφο στοιχεῖο τόν ρητό $\frac{\beta}{\alpha}$. Αὐτό σημαίνει ὅτι τό γινόμενο $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}$ καθώς, καί τό $\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἴσο μέ τό στοιχεῖο τοῦ Q πού ὀνομάσαμε μονάδα. Πραγματικά, $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha\beta}{\beta\alpha}=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}$ (εἶναι στό Z $\beta\alpha=\alpha\beta$) $=\frac{1}{1}$ (γιατί στό Z ἰσχύει ἡ $(\alpha\beta)\cdot 1=1\cdot(\alpha\beta)$). Τό ἴδιο εἶναι καί $\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta\alpha}{\alpha\beta}=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{1}$. Ἐπειδή ἰσχύουν καί οἱ δύο $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1}{1}$ καί $\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{1}$ εἶναι καί τό $\frac{\alpha}{\beta}$ ἀντίστροφο τοῦ $\frac{\beta}{\alpha}$.

Ὁ ρητός μηδέν δηλαδή ὁ $\frac{0}{1}$ δέν ἔχει ἀντίστροφο γιατί ἄν π.χ ἀντίστροφός του ἦταν ὁ ρητός $\frac{x}{\psi}$ θά ἔπρεπε νά ἰσχύει ἡ $\frac{0}{1}\cdot\frac{x}{\psi}=\frac{1}{1}$ (Στή συνέχεια)

$\frac{0\cdot x}{1\cdot\psi}=\frac{1}{1}\Rightarrow\frac{0}{\psi}=\frac{1}{1}\ \Rightarrow\ 0\cdot 1=\psi\cdot 1\ \wedge\ \psi\neq 0$ στό Z $\Rightarrow 0=\psi\wedge\psi\neq 0$ στό Z. Ἡ τελευταία ἀντίφαση ἀποδείχνει ὅτι ὁ ρητός $\frac{0}{1}$ δέν ἔχει ἀντίστροφο στό Q.

8. Διάκριση τῶν ρητῶν σέ θετικούς, ἀρνητικούς καί μηδέν.

8.1 Ἕνας ρητός ἀριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι θετικός ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ $0<\alpha\beta$ στό Z.

Ἕνας ρητός ἀριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀρνηνικός ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ $\alpha\beta<0$ στό Z (ἰσοδύναμα ἡ $0<-\alpha\beta \in Z$)

Τέλος, ἕνας ρητός ἀριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ὁ ρητός μηδέν ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ $\alpha\beta=0$ ($\beta\neq 0$ ἀφοῦ ὁ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ρητός) στό Z. Ἐπειδή ὁ ρητός $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἡ κλάση $C_{(\alpha,\beta)}$ ἰσοδυναμίας στό Z γιά νά γίνουν ἀποδεκτοί οἱ παραπάνω ὁρισμοί πρέπει νά ἰσχύουν ὁποιοδήποτε στοιχεῖο τοῦ $M=Zx(Z-\{0\})$ καί ἄν εἶναι ὁ ἀντιπρόσωπος τῆς κλάσης αὐτῆς π.χ τό (γ,δ) ἀντί τοῦ (α,β) ὅπου $(\alpha,\beta)\approx(\gamma,\delta)$ στό M ἤ $C_{(\alpha,\beta)}=C_{(\gamma,\delta)}$ στό Q ἤ ἁπλούστερα $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ στό Q. Παρατηροῦμε ὅτι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ στό Q καί $0<\alpha\beta$ στό Z $\Rightarrow \alpha\delta=\beta\gamma \wedge 0<\alpha\beta \wedge \alpha,\beta,\delta\neq 0$ στό Z $\Rightarrow$ $\alpha\delta=\beta\gamma\neq 0 \wedge 0<\alpha\beta$ στό Z $\Rightarrow 0<(\alpha\delta)(\beta\gamma) \wedge 0<\alpha\beta$ στό Z $\Rightarrow$ $0<(\alpha\beta)(\gamma\delta) \wedge 0<\alpha\beta$ στό Z $\Rightarrow 0<\gamma\delta$ στό Z $\Rightarrow \frac{\gamma}{\delta}$ θετικός ρητός (Παραπάνω, ἕνεκα τῆς $\alpha\delta=\beta\gamma\neq 0$ τά $\alpha\delta$ καί $\beta\gamma$ εἶναι ἤ θετικά καί τά δύο ἤ καί τά δύο ἀρνητικά αὐτό ὅμως συνεπάγεται τήν $0<(\alpha\delta)(\beta\gamma)$ στό Z).

Ἔχουμε τώρα γιά τήν περίπτωση τοῦ ἀρνητικοῦ ρητοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ στό Q καί $\alpha\beta<0$ στό Z $\Rightarrow$
$\alpha\delta=\beta\gamma \wedge \alpha\beta<0 \wedge \alpha,\beta,\delta\neq 0$ στό Z $\Rightarrow$
$\alpha\delta=\beta\gamma\neq 0 \wedge \alpha\beta<0$ στό Z $\Rightarrow 0<(\alpha\delta)(\beta\gamma) \wedge \alpha\beta<0$ στό Z $\Rightarrow$
$0<(\alpha\beta)(\gamma\delta) \wedge \alpha\beta<0$ στό Z $\Rightarrow \gamma\delta<0$ στό Z $\Rightarrow \frac{\gamma}{\delta}$ ἀρνητικός ρητός.

Τέλος ἔχουμε τήν περίπτωση τοῦ ρητοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ πού εἶναι ὁ ρητός μηδέν.

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ στό $Q \wedge \alpha=0$ στό $Z \wedge \beta\neq 0 \wedge \delta\neq 0$ στό Z $\Rightarrow$
$\alpha\delta=\beta\gamma \wedge \alpha=0 \wedge \beta\neq 0 \wedge \delta\neq 0$ στό Z $\Rightarrow \alpha\delta=\beta\gamma \wedge \alpha\delta=0 \wedge \beta\neq 0 \wedge \delta\neq 0 \Rightarrow$
$0=\beta\gamma \wedge \beta\neq 0 \wedge \delta\neq 0 \Rightarrow \gamma=0 \wedge \delta\neq 0$ στό Z $\Rightarrow \frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι στό Q ὁ

ρητός μηδέν.

Δέν ὑπάρχει λοιπόν κίνδυνος ὁ ὁρισμός της ἰσότητας δύο ρητῶν καί οἱ ὁρισμοί τοῦ θετικοῦ, τοῦ ἀρνητικοῦ καί τοῦ μηδενικοῦ ρητοῦ νά ὁδηγήσουν σέ ἀντίφαση.

8.2 "Τό ἄθροισμα δύο ὁποιωνδήποτε θετικῶν ρητῶν εἶναι θετικός ρητός" Μέ ἄλλα λόγια θά δείξουμε τήν πρόταση $\forall \frac{\alpha}{\beta} \in Q^+, \forall \frac{\gamma}{\delta} \in Q^+, \frac{\alpha}{\beta} \in Q^+ \wedge \frac{\gamma}{\delta} \in Q^+ \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} \in Q^+$.

Πραγματικά, $\frac{\alpha}{\beta} \in Q^+ \wedge \frac{\gamma}{\delta} \in Q^+ \Rightarrow 0 < \alpha\beta \wedge 0 < \gamma\delta$, $\beta, \delta \neq 0$ στό $Z \Rightarrow 0 < \alpha\beta \wedge 0 < \gamma\delta \wedge 0 < \beta^2 \wedge 0 < \delta^2$ στό $Z \Rightarrow$ $0 < (\alpha\beta)\delta^2 \wedge 0 < \beta^2(\gamma\delta)$ στό $Z \Rightarrow$ $0 < (\alpha\beta)\delta^2 + \beta^2(\gamma\delta)$ στό $Z \Rightarrow 0 < (\alpha\delta)(\beta\delta) + (\beta\gamma)(\beta\delta)$ στό Z $\Rightarrow 0 < (\alpha\delta + \beta\gamma)(\beta\delta)$ στό $Z \Rightarrow \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta} \in Q^+ \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} \in Q^+$

8.3 "Τό γινόμενο δύο ὁποιωνδήποτε θετικῶν ρητῶν εἶναι θετικός ρητός" δηλαδή θά δείξουμε τήν πρόταση $\forall \frac{\alpha}{\beta} \in Q^+, \forall \frac{\gamma}{\delta} \in Q^+, \quad \frac{\alpha}{\beta} \in Q^+ \wedge \frac{\gamma}{\delta} \in Q^+ \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \in Q^+$.

Πραγματικά, $\frac{\alpha}{\beta} \in Q^+ \wedge \frac{\gamma}{\delta} \in Q^+ \Rightarrow 0 < \alpha\beta \wedge 0 < \gamma\delta$ στό $Z \Rightarrow 0 < (\alpha\beta)(\gamma\delta)$ στό $Z \Rightarrow 0 < (\alpha\gamma)(\beta\delta)$ στό $Z \Rightarrow$ $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} \in Q^+ \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \in Q^+$.

8.4 Κάθε ρητός ἀριθμός εἶναι ἤ μόνο θετικός ἤ μόνο ἀρνητικός ἤ μόνο μηδέν. Συμβολικά: $\forall \frac{\alpha}{\beta} \in Q, \frac{\alpha}{\beta} \in Q^+ \veebar \frac{\alpha}{\beta} \in Q^- \veebar \frac{\alpha}{\beta} = \frac{0}{1}$. Στό Z ἔχουμε τό νόμο τῆς τριχοτομίας $0 < \alpha\beta \veebar \alpha\beta < 0 \veebar \alpha\beta = 0$ (μέ $\beta \neq 0$ ἀφοῦ ὁ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ρητός, πού ἰσοδυναμεῖ μέ τήν παραπάνω πρόταση ἅμα λάβουμε ὑπόψη τούς ὁρισμούς τῆς παρ. 8.1. Ἰσχύει λοιπόν καί στό Q ὁ νόμος τῆς τριχοτομίας.

9. **Σχέσεις γνήσιας διάταξης στό Q.**

9.1 Στό Q ὁρίζουμε τή σχέση τοῦ "μικρότερου" ὡσεξῆς:

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta} \in Q^+$$

9.2 Ἡ σχέση τοῦ "μικρότερου" στό Q ὁρίζεται καί μέ τή βοήθεια τῆς ἀντίστοιχης σχέσης στό Z.

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (\alpha\beta)\delta^2 < (\gamma\delta)\beta^2 \text{ στό } Z.$$

9.3 Οἱ ὁρισμοί τῶν παρ. 9.1 καί 9.2 εἶναι ἰσοδύναμοι: Παραγματικά, $\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta} \in Q^+ \Leftrightarrow \frac{\gamma\beta-\delta\alpha}{\delta\beta} \in Q^+ \Leftrightarrow$ $0 < (\gamma\beta-\delta\alpha)(\delta\beta)$ στό $Z \Leftrightarrow 0 < (\gamma\beta)(\delta\beta)-(\delta\alpha)(\delta\beta)$ στό $Z \Leftrightarrow$ $0 < (\gamma\delta)\beta^2 - (\alpha\beta)\delta^2$ στό $Z \Leftrightarrow (\alpha\beta)\delta^2 < (\gamma\delta)\beta^2$ στό Z. Ἕνεκα τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Leftrightarrow$ ἰσχύει τελικά ἡ $\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta} \in Q^+ \Leftrightarrow (\alpha\beta)\delta^2 < (\gamma\delta)\beta^2$ στό Z καί οἱ δύο ὁρισμοί εἶναι ἰσοδύναμοι δηλαδή ὁρίζουν τήν $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$ καί οἱ δύο.

9.4 Ἡ σχέση $<$ εἶναι μεταβατική στό Q, δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση, $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \wedge \frac{\gamma}{\delta} < \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\lambda}{\mu}$. Πραγματικά,

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \wedge \frac{\gamma}{\delta} < \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \left(\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta}\right) \in Q^+ \wedge \left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{\gamma}{\delta}\right) \in Q^+ (\text{παρ. } 8.2) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{\gamma}{\delta}\right) \in Q^+ \Rightarrow \left(\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\gamma}{\delta}\right) + \left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{\alpha}{\beta}\right) \in Q^+ \Rightarrow$$

$$\frac{0}{1} + \left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{\alpha}{\beta}\right) \in Q^+ \Rightarrow \left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{\alpha}{\beta}\right) \in Q^+ \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\lambda}{\mu} \text{ στό } Q$$

9.5 Ἡ σχέση $<$ εἶναι ἀναυτοπαθής στό Q δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall \frac{\alpha}{\beta} \in Q,\ \frac{\alpha}{\beta} \not< \frac{\alpha}{\beta}$. Πραγματικά, ἐπειδή ἰσχύει ἡ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$ ἀποκλείεται ἡ $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha}{\beta}$ (παρ.9.7) δηλαδή ἰσχύει ἡ $\forall \frac{\alpha}{\beta} \in Q,\ \frac{\alpha}{\beta} \not< \frac{\alpha}{\beta}$.

9.6 Οἱ προτάσεις τῶν παραγράφων 9.4 καί 9.5 ἀποδείχνουν ὅτι ἡ σχέση τοῦ "μικρότερου" εἶναι μία σχέση γνήσιας διάταξης στό Q.

9.7 Ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall \frac{\alpha}{\beta} \in Q, \forall \frac{\gamma}{\delta} \in Q,\ \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \veebar \frac{\gamma}{\delta} < \frac{\alpha}{\beta} \veebar \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Θεωροῦμε τόν ρητό $\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta}$. Κατά τόν νόμο τῆς τριχοτομίας στό Q (παρ.8.4) ἰσχύει ἡ

$\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta} \in Q^+ \veebar \frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta} \in Q^- \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} \in Q^+\right) \veebar \frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{0}{1}$. Ἡ πρόταση αὐτή συνεπάγεται τήν ἀρχική πρόταση πού δείχνει ὅτι ἡ γνήσια διάταξη $<$ εἶναι ὁλική στό Q.

9.8 Ὁρίζουμε στό Q καί τή σχέση τοῦ "μεγαλύτερου" μέ τή βοήθεια τῆς σχέσης τοῦ "μικρότερου".

$$\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\alpha}{\beta} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$$

Ἔχουμε καί τούς ἀπ᾽εὐθείας ὁρισμούς

$$\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\alpha}{\beta} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta} \in Q^+$$

Ἐπίσης:

Στό Q $\quad \frac{\gamma}{\delta} > \frac{\alpha}{\beta} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (\gamma\delta)\beta^2 > (\alpha\beta)\delta^2$ στό Z. Ὅμοια ἀποδείχνεται ὅτι καί ἡ $>$ εἶναι σχέση ὁλικῆς γνήσιας διάταξης στό Q.

9.9 Ὁ ἀντίθετος ἑνός θετικοῦ ρητοῦ εἶναι ἀρνητικός ρητός. Ὁ ἀντίθετος ἑνός ἀρνητικοῦ ρητοῦ εἶναι θετικός ρητός. Ὁ ρητός μηδέν ἔχει γιά ἀντίθετο τόν ἑαυτό του.

Πραγματικά, ἄν $\frac{\alpha}{\beta} \in Q^+$ τότε $0 < \alpha\beta$ στό Z. Ἡ τελευταία συνεπάγεται τήν $-\alpha\beta < 0$ στό Z καί αὐτή τήν $\frac{-\alpha}{\beta} \in Q^-$ δηλαδή τήν $-\frac{\alpha}{\beta} \in Q^-$.

Ἐπίσης ἄν $\frac{\alpha}{\beta} \in Q^-$ τότε $\alpha\beta < 0$ στό Z. Στή συνέχεια ἔχουμε στό Z τήν $0 < -\alpha\beta$ πού συνεπάγεται τήν $-\frac{\alpha}{\beta} \in Q^+$

Ὁ ρητός μηδέν $\frac{0}{1}$ ἔχει γιά ἀντίθετο τόν ἑαυτό του

Πραγματικά, $\frac{0}{1} = \frac{-0}{1}$ γιατί στό Z ἰσχύει ἡ $0\cdot 1 = 1\cdot(-0)$.

Ὡς γνωστόν στό Z εἶναι $0=-0$ καί $0\cdot 1=0$, $1\cdot(-0)=(1\cdot 0)=0$.

9.10 Ὁ ρητός μηδέν εἶναι μικρότερος μόνο ἀπό τούς θετικούς ρητούς στό Q. Οἱ ἀρνητικοί ρητοί μόνο εἶναι μικρότεροι ἀπό τόν ρητό μηδέν στό Q. Κάθε ἀρνητικός ρητός εἶναι μικρότερος ἀπό κάθε θετικό ρητό.

Πραγματικά, $\frac{0}{1} < \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} - \frac{0}{1} \in Q^+$ (παρ. 9.1) $\Leftrightarrow$

$\frac{\alpha}{\beta} + \left(-\frac{0}{1}\right) \in Q^+ \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{0}{1} \in Q^+ \Leftrightarrow$ (παρ.6.5) $\frac{\alpha}{\beta} \in Q^+$. Ἰσχύει λοιπόν ἡ $\frac{0}{1} < \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} \in Q^+$

Ἐπίσης: $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{0}{1} \Leftrightarrow \frac{0}{1} - \frac{\gamma}{\delta} \in Q^+ \Leftrightarrow \frac{0}{1} + \left(-\frac{\gamma}{\delta}\right) \in Q^+ \Leftrightarrow -\frac{\gamma}{\delta} \in Q^+ \Leftrightarrow$

$\frac{\gamma}{\delta} \in Q^-$. Ἰσχύει λοιπόν ἡ $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{0}{1} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\delta} \in Q^-$

Τέλος θά ἀποδείξουμε στό Q τήν πρόταση:

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{0}{1} \wedge \frac{0}{1} < \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$$

Ἡ πρόταση αὐτή φαίνεται ἀμέσως ὅτι ἰσχύει ἄν λάβουμε ὑπόψη ὅτι ἡ σχέση < στό Q εἶναι μεταβατική.

Ἐπίσης: $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{0}{1} \wedge \frac{0}{1} < \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \left(\frac{0}{1} - \frac{\alpha}{\beta}\right) \in Q^+ \wedge \left(\frac{\gamma}{\delta} - \frac{0}{1}\right) \in Q^+ \Rightarrow$

$\left(\frac{0}{1} - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \left(\frac{\gamma}{\delta} - \frac{0}{1}\right) \in Q^+ \Rightarrow \left(\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \left(\frac{0}{1} - \frac{0}{1}\right) \in Q^+ \Rightarrow$

$\left(\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \left[\frac{0}{1} + \left(-\frac{0}{1}\right)\right] \in Q^+ \Rightarrow \left(\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{0}{1} \in Q^+ \Rightarrow \left(\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta}\right) \in Q^+ \Rightarrow$

$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$ στό Q.

9.11 Ἀπό τήν πρόταση τῆς παρ.9.10 ἔχουμε ἕνα νέο ὁρισμό τοῦ θετικοῦ καί τοῦ ἀρνητικοῦ ρητοῦ (βλέπετε καί παρ. 8.1). Ἕνας ρητός εἶναι θετικός ἄν καί μόνο ἄν ὁ ρητός μηδέν εἶναι μικρότερος ἀπό αὐτόν. Ἕνας ρητός εἶναι ἀρνητικός ἄν καί μόνο ἄν εἶναι μικρότερος ἀπό τόν ρητό μηδέν.

10 Σχέσεις διάταξης στό Q.

10.1 Ἡ σχέση τοῦ "μικρότερου ἤ ἴσου" ὁρίζεται ὡσεξῆς στό Q: $\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{\gamma}{\delta} \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \veebar \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ (Μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τό $\vee$ ἀντί γιά τό $\veebar$).

Ἔχουμε ἀκόμη:

$\frac{\alpha}{\beta} \leqq \frac{\gamma}{\delta} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta} \in Q_0^+ \left(\frac{0}{1} \leqq \frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta}\right)$

καί $\frac{\alpha}{\beta} \leqq \frac{\gamma}{\delta} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (\alpha\beta)\delta^2 \leqq (\gamma\delta)\beta^2$,$\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$ στό Z

10.2 <u>῾Η σχέση $\leqq$ εἶναι αὐτοπαθής στό Q</u>, δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall \frac{\alpha}{\beta} \in Q$, $\frac{\alpha}{\beta} \leqq \frac{\alpha}{\beta}$. Πραγματικά ἐπειδή ἰσχύει ἡ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$ καί ὄχι ἡ $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha}{\beta}$,ἰσχύει ἡ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \veebar \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha}{\beta}$ (᾿Επίσης ἡ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \vee \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha}{\beta}$) δηλαδή ἡ $\frac{\alpha}{\beta} \leqq \frac{\alpha}{\beta}$.

10.3 <u>῾Η σχέση $\leqq$ εἶναι ἀντισυμμετρική στό Q</u>. Μέ ἄλλα λόγια ἰσχύει ἡ πρόταση, $\frac{\alpha}{\beta} \leqq \frac{\gamma}{\delta} \wedge \frac{\gamma}{\delta} \leqq \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Πραγματικά, $\frac{\alpha}{\beta} \leqq \frac{\gamma}{\delta} \wedge \frac{\gamma}{\delta} \leqq \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \veebar \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}\right) \wedge \left(\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \veebar \frac{\gamma}{\delta} < \frac{\alpha}{\beta}\right) \Rightarrow$

$\left(\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \wedge \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}\right) \veebar \left(\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \wedge \frac{\gamma}{\delta} < \frac{\alpha}{\beta}\right) \veebar \left(\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \wedge \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}\right) \veebar \left(\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \wedge \frac{\gamma}{\delta} < \frac{\alpha}{\beta}\right)$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

Οἱ τρεῖς τελευταῖες παρενθέσεις περιέχουν ψευδεῖς προτάσεις γιατί δέν μπορεῖ νά εἶναι ἀληθεῖς καί οἱ δύο περιλαμβανόμενες σέ κάθε παρένθεση προτάσεις. ῾Η πρώτη παρένθεση περιέχει ἀληθή πρόταση γιατί ἄν κι᾿αὐτή ἦταν ψευδής θά ἦταν ψευδής καί ἡ ἐκ 4 παρενθέσεων ἀποτελουμένη πρόταση. Εἶναι λοιπόν ἀληθής ἡ πρόταση $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \wedge \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ καί κατά τό νόμο τῆς ταυτοδυναμίας τῆς $\wedge$ ἡ πρόταση $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

10.4 <u>῾Η σχέση $\leqq$ στό Q εἶναι μεταβατική</u>, δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση, $\frac{\alpha}{\beta} \leqq \frac{\gamma}{\delta} \wedge \frac{\gamma}{\delta} \leqq \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \leqq \frac{\lambda}{\mu}$

Πραγματικά, $\frac{\alpha}{\beta} \leqq \frac{\gamma}{\delta} \wedge \frac{\gamma}{\delta} \leqq \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow$

$\left(\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \vee \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}\right) \wedge \left(\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\lambda}{\mu} \vee \frac{\gamma}{\delta} < \frac{\lambda}{\mu}\right) \Rightarrow$

$\left(\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \wedge \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\lambda}{\mu}\right) \vee \left(\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \wedge \frac{\gamma}{\delta} < \frac{\lambda}{\mu}\right) \vee \left(\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \wedge \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\lambda}{\mu}\right) \vee \left(\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \wedge \frac{\gamma}{\delta} < \frac{\lambda}{\mu}\right) \Rightarrow$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\lambda}{\mu}\right)\vee\left(\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\lambda}{\mu}\right)\vee\left(\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\lambda}{\mu}\right)\vee\left(\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\lambda}{\mu}\right)\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}\leqq\frac{\lambda}{\mu}\ .$$

10.5 Ἀπό τίς προτάσεις τῶν παραγράφων 10.2, 10.3 καί 10.4 προκύπτει ὅτι ἡ σχέση $\leqq$ στό Q εἶναι σχέση διάταξης καί μάλιστα ὁλικῆς ἀφοῦ ἰσχύει ἡ πρόταση

$\forall\frac{\alpha}{\beta}\in Q, \forall\frac{\gamma}{\delta}\in Q,\ \frac{\alpha}{\beta}\leqq\frac{\gamma}{\delta}\vee\frac{\gamma}{\delta}\leqq\frac{\alpha}{\beta}$. Ἰσχύει (παρ.9.7) ἡ πρόταση $\forall\frac{\alpha}{\beta}\in Q,\ \forall\frac{\gamma}{\delta}\in Q,\ \frac{\alpha}{\beta}<\frac{\gamma}{\delta}\ \underline{\vee}\ \frac{\gamma}{\delta}<\frac{\alpha}{\beta}\ \underline{\vee}\ \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$.

Αὐτή σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς $\leqq$ συνεπάγεται τήν

$\frac{\alpha}{\beta}\leqq\frac{\gamma}{\delta}\vee\frac{\gamma}{\delta}\leqq\frac{\alpha}{\beta}$ στό Q .

10.6 Ὁρίζεται στό Q καί ἡ σχέση τοῦ "μεγαλύτερου ἤ ἴσου" δηλαδή ἡ $\geqq$, εἴτε μέ τή βοήθεια τῆς σχέσης $\leqq$ εἴτε ἀπ' εὐθείας.

11. Ἕνας ἰσομορφισμός τοῦ Z στό Q (πάνω στό Q_Z)

11.1 Πρόκειται γιά τήν μονοσήμαντη ἀπεικόνιση φ τοῦ Z στό Q (πάνω στό Q_Z)

$$\varphi:\ Z\ni\alpha\longleftrightarrow\frac{\alpha}{1}\in Q$$

Ἡ φ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη γιατί ἰσχύει ἡ $\alpha\neq\beta$ στό $Z\Rightarrow\frac{\alpha}{1}\neq\frac{\beta}{1}$ στό Q. Πραγματικά, $\alpha\neq\beta$ στό $Z\Rightarrow\alpha\cdot1\neq1\cdot\beta$ στό $Z\Rightarrow\frac{\alpha}{1}\neq\frac{\beta}{1}$ στό Q. Ἀπό τά ἀναφερθέντα προκύπτει ἡ $\alpha=\beta$ στό $Z\Leftrightarrow\frac{\alpha}{1}=\frac{\beta}{1}$ στό Q πού δείχνει ὅτι ἔχουμε ἕνα ἰσομορφισμό τοῦ Z στό Q ὡς πρός τίς σχέσεις τῆς ἰσότητας στό Z καί στό Q.

11.2 Θά δείξουμε τήν πρόταση:

$$\alpha<\beta \text{ στό } Z\Leftrightarrow\varphi(\alpha)<\varphi(\beta) \text{ στό } Q.$$

Γνωρίζουμε ὅτι $\varphi(\alpha)=\frac{\alpha}{1}$ καί $\varphi(\beta)=\frac{\beta}{1}$ στό Q. Ἔχουμε: $\alpha<\beta$ στό $Z\Leftrightarrow(\alpha\cdot1)\cdot1^2<(\beta\cdot1)\cdot1^2$ στό $Z\Leftrightarrow$ (παρ.9.2) $\frac{\alpha}{1}<\frac{\beta}{1}$ στό $Q\Leftrightarrow\varphi(\alpha)<\varphi(\beta)$ στό Q. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Leftrightarrow$ ἰσχύει ἡ παραπάνω πρόταση. Ἰσχύει ἐπίσης ἡ:

$\beta > \alpha$ στό $Z \Leftrightarrow \varphi(\beta) > \varphi(\alpha)$ στό Q.

11.3 Γιά τήν πράξη τῆς πρόσθεσης στό Z καί τήν ἀντίστοιχη πράξη στό Q ἔχουμε τήν πρόταση:

$\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$ στό Q γιά ὁποιαδήποτε στοιχεῖα α καί β τοῦ Z.

Πραγματικά,

$$\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\alpha+\beta}{1} = \frac{\alpha}{1} + \frac{\beta}{1} = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$$

Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς ἰσότητας ἰσχύει τελικά ἡ $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$.

11.4 Γιά τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό Z καί στό Q ἔχουμε τήν πρόταση $\varphi(\alpha\beta)=\varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ γιά ὁποιαδήποτε στοιχεῖα α καί β τοῦ Z.

Πραγματικά,

$$\varphi(\alpha\beta) = \frac{\alpha\beta}{1} = \frac{\alpha\beta}{1\cdot 1} = \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{1} = \varphi(\alpha)\varphi(\beta).$$

Ἰσχύει λοιπόν ἡ $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ στό Q

11.5 Γιά τήν πράξη τῆς ἀφαίρεσης παρατηροῦμε ὅτι $\varphi(\alpha-\beta)=\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)$ στό Q γιά ὁποιαδήποτε στοιχεῖα α καί β τοῦ Z.

Πραγματικά, $\varphi(\alpha-\beta) = \frac{\alpha-\beta}{1} = \frac{\alpha}{1} - \frac{\beta}{1} = \varphi(\alpha)-\varphi(\beta)$

Ἰσχύει λοιπόν ἡ $\varphi(\alpha-\beta)=\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)$

11.6 Γιά τήν πράξη τῆς διαίρεσης στό Z καί Q καί γιά τά στοιχεῖα α καί β τοῦ Z γιά τά ὁποῖα ἐκτελεῖται ἡ διαίρεση στό Z ἔχουμε ἐπίσης:

$$\varphi(\alpha:\beta) = \varphi(\alpha):\varphi(\beta)$$

Ἐπειδή οἱ ἀκέραιοι α καί β εἶναι τέτοιοι ὥστε νά ἐκτελεῖται ἡ διαίρεση τοῦ α διά τοῦ β στό Z, ἔχουμε, $\alpha:\beta=K \in Z$ καί $\alpha=\beta\cdot K$. Ἐπειδή τά ,α,β,K εἶναι στοιχεῖα τοῦ Z ἔχουμε (παρ.11.4) $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta\cdot K)=\varphi(\beta)\cdot\varphi(K)$ στό Q δηλαδή $\varphi(K)=\varphi(\alpha):\varphi(\beta)$ στό Q. Ἰσχύει λοιπόν στό Q ἡ $\varphi(\alpha:\beta)=\varphi(\alpha):\varphi(\beta)$ ὅταν καί μόνο ὅταν εἶναι στοιχεῖο τοῦ Z τό $\alpha:\beta$ γιατί ἡ φ μόνο τά στοιχεῖα τοῦ Z ἀπεικονίζει στό Q (πάνω στό Q_Z).

11.7 Εὔκολα φαίνεται ὅτι ὑπάρχουν στοιχεῖα τοῦ Q πού δέν εἶναι εἰκόνες στοιχείων τοῦ Z κατά τήν φ ἀπεικόνιση ὅπως ὁρίστηκε στήν παρ. 11.1. π.χ ὁ ρητός $\frac{-3}{5}$ δηλαδή ἡ κλάση ἰσοδυναμίας $C_{(-3,5)}$ διατεταγμένων ζευγῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν μέ ἀντιπρόσωπο τόν (-3,5) δέν εἶναι εἰκόνα κάποιου στοιχείου τοῦ Z κατά τήν φ, γιατί ἄν ἦταν π.χ τοῦ $\alpha \in Z$ θά ἴσχυε ἡ $\frac{\alpha}{1} = \frac{-3}{5}$ ἐπομένως ἡ $5\alpha=-3\cdot 1$ καί ἡ $5\alpha=-3$ στό Z. Ὅμως ἡ ἐξίσωση αὐτή δέν ἔχει ἀκέραια λύση ὡς πρός α γιατί γιά $\alpha=-1$ εἶναι $5\alpha=5\cdot(-1)=-5$ καί γιά $\alpha=0$ εἶναι $5\cdot 0=0$ $(-5<-3<0)$

11.8 Τά στοιχεῖα τοῦ Q πού εἶναι εἰκόνες τῶν στοιχείων τοῦ Z κατά τήν φ, ὁρίζουν τό σύνολο Q_Z γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ Q. Ἔτσι ἡ φ εἶναι ἕνας ἰσομορφισμός τοῦ Z πάνω στό Q_Z καί τά σύνολα Z καί Q_Z εἶναι ἰσόμορφα ὡς πρός τίς ἀναφερθεῖσες σχέσεις καί πράξεις στό Z καί στό Q. Οἱ πράξεις καί οἱ σχέσεις λοιπόν στό Z μεταφέρονται στό Q καί συγκεκριμένα στό Q_Z γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ Q. Τά Z καί Q_Z λοιπόν τά θεωροῦμε ταυτιζόμενα καί τό Z τό θεωροῦμε σάν ἕνα γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ Q ἀκριβῶς ἐπειδή αὐτή ἡ σχέση ἰσχύει μεταξύ τῶν Q_Z καί Q.

11.9 Τούς ρητούς $\frac{\alpha}{1}$, $\frac{\beta}{1}$ κ.λ.π θά τούς γράφουμε α, β κ.λπ. Τόν ρητό μηδέν δηλαδή τόν $\frac{0}{1}$ θά τόν παριστάνουμε μέ 0. Ἐπίσης τόν $\frac{x}{x}$ $(x\neq 0)$ μέ 1. Γενικά τώρα πού οἱ βασικές ἰδιότητες τῶν ρητῶν ἀποδείχτηκαν μποροῦμε νά τούς γράφουμε καί μέ ἕνα μόνο γράμμα ὅταν θέλουμε νά ἀποδείξουμε ἰδιότητες πού ἀπορρέουν ἀπό τίς βασικές.

Ἀσκήσεις

1. Οἱ ρητοί $\frac{3}{5}$, $\frac{-2}{3}$, $\frac{0}{4}$ νά γραφτοῦν κατά τρόπο πού νά φαίνεται καλύτερα ὅτι εἶναι κλάσεις ἰσοδυναμίας στό Z.

2. Μεταξύ τῶν ρητῶν $\frac{5}{-7}$, $\frac{-10}{14}$, $\frac{1}{2}$ νά βρεθοῦν δύο ἴσοι καί δύο ἄνισοι στό Q.

3. Μέ τό σύμβολο $-\frac{3}{4}$ ποιά ἀκριβῶς κλάση ρητῶν ἐννοοῦμε: Συμπληρῶστε τά x καί ψ στό σύμβολο $C_{(x,\psi)}$

4. Νά δειχτεῖ (παρ.6.5) ὅτι τό οὐδέτερο στοιχεῖο τοῦ Q ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης εἶναι μόνο ἕνα.(Τούς ρητούς νά τούς συμβολίσετε μέ ἕνα μόνο γράμμα τόν καθένα)

5. Νά δειχτεῖ (παρ.6.6) ὅτι κάθε ρητός ἔχει ἕνα μόνο ἀντίθετο.

6. Νά δειχτεῖ ὅτι $-\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)=\frac{\alpha}{\beta}$

7. Νά δειχτεῖ (παρ.7.5) ὁ ἐπιμεριστικός νόμος τοῦ πολλαπλασιάσμοῦ ὡς πρός τήν ἀφαίρεση στό Q.

8. Νά δειχτεῖ (παρ.7.6) ὅτι τό οὐδέτερο στοιχεῖο τοῦ Q ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι μόνο ἕνα.

9. Ἄν x΄x =x΄x =1 στό Q καί εἶναι $x=\frac{\alpha}{\beta}\in Q-\{0\}$. Πῶς θά συμβολίσουμε τό x΄; Ἄν εἶναι $x'=\lambda\in Q-\{0\}$ Πῶς θά συμβολίζουμε τό x; Τέλος ἄν εἶναι $x=-\mu\in Q-\{0\}$ πῶς θά συμβολίσουμε τό x΄;

10. Νά δειχτεῖ ὅτι τό ἄθροισμα δύο ἀρνητικῶν ρητῶν εἶναι ἀρνητικός ρητός.

11. Νά δειχτεῖ ὅτι τό ἄθροισμα θετικοῦ καί ἀρνητικοῦ εἶναι ρητός ὁμόσημος πρός τόν ἔχοντα τή μεγαλύτερη ἀπόλυτη τιμή ρητό ἤ εἶναι ὁ ρητός μηδέν στήν περί-

πτωση ἰσότητας τῶν ἀπόλυτων τιμῶν.

12. Τά ἀναφερθέντα στήν παρ.9 γιά τή σχέση $<$ τοῦ μικρότερου, νά ἀναφερθοῦν, ὅμοια καί γιά τή σχέση $>$ τοῦ μεγαλύτερου στό σύνολο Q.

13. Ἀπό ποιές παραγράφους φαίνεται ἀμέσως ὅτι οἱ σχέσεις καί οἱ πράξεις πού ξέρουμε ἀπό τό Z διατηροῦνται καί στό Q;

14. Νά δειχτεῖ ὅτι στό Q ἰσχύει ἡ πρόταση $\alpha \geqq \beta \wedge \gamma \geqq 0 \Rightarrow \alpha\gamma \geqq \beta\gamma$. Σέ ποιές περιπτώσεις ἔχουμε ἰσότητα;

15. Νά δειχτεῖ στό Q ἡ πρόταση

$$\alpha \geqq \beta \wedge \gamma > \delta \Rightarrow \alpha+\gamma > \beta+\delta$$

16. Νά δειχτεῖ στό σύνολο Q_0^+ ἡ πρόταση

$$\alpha > \beta \wedge \gamma \geqq \delta \Rightarrow \alpha\gamma \geqq \beta\delta.$$

17. Νά δειχτεῖ στό Q ἡ πρόταση

$$\alpha > \beta \wedge \gamma > 0 \Rightarrow \alpha:\gamma > \beta:\gamma$$

18. Νά δειχτεῖ στό Q ἡ πρόταση

$$(\alpha > \beta \Rightarrow \alpha:\gamma < \beta:\gamma) \Rightarrow \gamma < 0$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

ΟΜΑΔΕΣ-ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ ΑΚΕΡΑΙΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ-ΣΩΜΑΤΑ

1. Ἡ ἔννοια τῆς ὁμάδας

1.1 Μία ὁμάδα εἶναι ἕνα σύνολο ἐφοδιασμένο μέ μία πράξη καί στό ὁποῖο ἰσχύουν οἱ ἑπόμενες ἰδιότητες (ἀξιώματα τῆς ὁμάδας).

(α΄) $\forall x \in H, \forall \psi \in H, x \pi \psi \in H$ (Μέ Η παραστήσαμε τό σύνολο καί μέ π τήν πράξη) δηλαδή τό Η εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν π

(β΄) $x=\psi \wedge \lambda=\mu \Rightarrow x \pi \lambda = \psi \pi \mu$ στό Η, δηλαδή ἡ π εἶναι μονότονη ὡς πρός τήν ἰσότητα στό Η.

(γ΄) $\forall x \in H, \forall \psi \in H, \forall \omega \in H, (x \pi \psi) \pi \omega = x \pi (\psi \pi \omega)$ (προσεταιριστικός νόμος)

(δ΄) $\exists \tau \in H, \forall x \in H, \tau \pi x = x$ δηλαδή ὑπάρχει ἀριστερό ταυτοτικό (οὐδέτερο) στοιχεῖο (Μποροῦμε νά ὑποθέσουμε τήν $x \pi \tau = x$ δηλαδή τήν ὕπαρξη δεξιοῦ οὐδέτερου στοιχείου. Ἀργότερα θά ἀποδείξουμε ὅτι σέ κάθε ὁμάδα ὅταν ὑπάρχει ἀριστερό στοιχεῖο τότε ὑπάρχει καί δεξιό καί ἀντίστροφα)

(ε΄) $\forall x \in H, \exists x' \in H, x' \pi x = \tau$ δηλαδή κάθε στοιχεῖο τῆς ὁμάδας ἔχει ἀριστερό συμμετρικό στοιχεῖο (Μποροῦμε νά ὑποθέσουμε τήν ὕπαρξη δεξιοῦ συμμετρικοῦ στοιχείου δηλαδή τήν $x\pi x'=\tau$. Ἀργότερα θά ἀποδείξουμε ὅτι σέ κάθε ὁμάδα ἡ $x'\pi x=\tau$ συνεπάγεται τήν $x\pi x'=\tau$ καί ἀντίστροφα)

(στ΄) $\forall x\in H$, $\forall \psi\in H$, $x\pi\psi=\psi\pi x$. Πρόκειται γιά τόν ἀντιμεταθετικό νόμο πού ὅμως δέν ἰσχύει σέ ὅλες τίς ὁμάδες (δηλαδή γιά ὅλα τά στοιχεῖα x καί ψ τῆς ὁμάδας) ἀλλά μόνο στίς λεγόμενες ἀβελιανές ὁμάδες ἤ ὁμάδες τοῦ Abel (ὀνομάζονται καί ἀντιμεταθετικές ὁμάδες).

Ἡ παραπάνω ὁμάδα θά συμβολίζεται μέ (H,π)

1.2 Ἡ ὁμάδα ὀνομάζεται ἐπίσης πλέγμα ἤ σύμπλεγμα. Ἄν ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες (α΄),(β΄) καί (γ΄) τῆς παρ.1.1 τότε ἔχουμε ἡμιομάδα. Ἄν ἰσχύει ἀκόμη ἡ ἰδιότητα (στ΄) τότε ἡ ἡμιομάδα εἶναι ἀβελιανή. Προφανῶς κάθε ὁμάδα εἶναι καί ἡμιομάδα ἐνῶ τό ἀντίστροφο δέν ἰσχύει ὑποχρεωτικά. Γιά τήν ἰδιότητα (δ΄) ἀργότερα θά ἀποδειχτεῖ ὅτι τό οὐδέτερο στοιχεῖο εἶναι μοναδικό. Ἀκόμη θά ἀποδειχτεῖ ὅτι σέ κάθε ὁμάδα ἀνεξάρτητα ἄν εἶναι ἀβελιανή ἤ ὄχι ἰσχύει ἡ

$\exists\tau\in H, \forall x\in H, \tau\pi x=x\wedge x\pi\tau=x$. Ἐμεῖς ἀναγράφουμε τήν $\exists\tau\in H, \forall x\in H, \tau\pi x=x$ γιατί θέλουμε νά ἔχουμε λιγότερες ὑποθέσεις. Γιά τήν ἰδιότητα (ε΄) ἀργότερα θά ἀποδειχτεῖ ὅτι κάθε στοιχεῖο x τῆς H ἔχει ἀκριβῶς ἕνα στοιχεῖο x΄ τῆς H ὡς συμμετρικό. Ἀκόμη θά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἰσχύει σέ κάθε ὁμάδα ἡ

$\forall x\in H, \exists x'\in H, x'\pi x=\tau\wedge x\pi x'=\tau$. Ἐμεῖς ἀναγράφουμε $\forall x\in H, \exists x'\in H, x'\pi x=\tau$ γιά νά ἔχουμε λιγότερες ὑποθέσεις. Ἀπό αὐτό θά φανεῖ ἀκόμη ὅτι καί τό στοιχεῖο x εἶναι συμμετρικό τοῦ x΄. Γενικά στήν ὁμάδα δέν ὑπάρχει διάκριση μεταξύ ἀριστεροῦ καί δεξιοῦ ταυτοτικοῦ στοιχείου οὔτε μεταξύ ἀριστερῶν καί δεξιῶν συμμετρικῶν στοιχείων.

1.3 Μερικές φορές τήν πράξη τῆς ὁμάδας τήν ὀνομάζουμε πρόσθεση καί χρησιμοποιοῦμε τό σύμβολο + χωρίς αὐτό νά σημαίνει ὅτι πρόκειται γιά τό + τῆς πρόσθεσης στούς ἀκέραιους ἀριθμούς πού ὅπως θά δοῦμε παρακάτω καί τό Z εἶναι ὁμάδα καί μάλιστα ἀβελιανή ὡς πρός τήν πρόσθεση. Ἔτσι ὑπάρχουν οἱ ὅροι "προσθετική ὁμάδα" ἤ "προσθετική γραφή τῆς ὁμάδας" χωρίς νά πρόκειται γιά τίποτε ἰδιαίτερο. Ὅμοια μέ τό σύμβολο· ἔχουμε τήν "πολλαπλασιαστική γραφή τῆς ὁμάδας".Στήν προσθετική γραφή τό οὐδέτερο στοιχεῖο τό παριστάνουμε συνήθως μέ 0 (μηδέν) χωρίς νά πρόκειται ὑποχρεωτικά γιά τόν ἀριθμό μηδέν. Τό ὀνομάζουμε "τό μηδενικό στοιχεῖο τῆς ὁμάδας" ἤ "τό μηδέν τῆς ὁμάδας" Στίς πολλαπλασιαστικές ὁμάδες τό οὐδέτερο στοιχεῖο τό παριστάνουμε συνήθως μέ 1 χωρίς νά πρόκειται ὑποχρεωτικά γιά τόν ἀριθμό 1. Τό ὀνομάζουμε "τό μοναδιαῖο στοιχεῖο τῆς ὁμάδας" ἤ "ἡ μονάδα τῆς ὁμάδας". Ἐπίσης στίς προσθετικές ὁμάδες τό συμμετρικό στοιχεῖο τοῦ x συμβολίζεται μέ $-x$ καί ὀνομάζεται ἀντίθετο στοιχεῖο τοῦ x. Στίς πολλαπλασιαστικές ὁμάδες τό συμμετρικό στοιχεῖο τοῦ x. ὀνομάζεται ἀντίστροφο στοιχεῖο τοῦ x καί συμβολίζεται μέ $\frac{1}{x}$.

2 Παραδείγματα ὁμάδων.

2.1 Ἀπό ὅσα ἀναφέραμε γιά τούς ἀκέραιους καί τούς ρητούς ἀριθμούς στά προηγούμενα κεφάλαια καθώς καί στήν παρ. 1.1 τοῦ παρόντος προκύπτει ὅτι τά σύνολα Z καί Q εἶναι ἀβελιανές ὁμάδες ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης. Τό ἴδιο ἰσχύει γιά τό σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καί τό σύνολο C τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Τά παραπάνω σύνολα δέν εἶναι ὁμάδες ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ π.χ στό Z δέν ἰσχύει ἡ ἰδιότητα (ε΄) δηλαδή δέν ὑπάρχει ἀντίστροφο στοιχεῖο σέ κάθε στοιχεῖο τοῦ Z (μόνο τό 1 καί τό -1 ἔχουν σάν ἀντίστροφο στοιχεῖο τόν ἑαυτό τους). Εὔκολα φαίνεται ὅτι τό σύνολο τῶν ἄρτιων ἀκεραίων εἶναι ἀβελιανή ὁμάδα ὡς πρός τήν πρόσθεση. Ἐδῶ τό μηδέν ἔχει ὡς ἀντίθετο στοιχεῖο τόν ἑαυτό του γιατί 0+0=0 (οὐδέτερο στοιχεῖο) ἐπομένως -0=0. Τό σύνολο τῶν περιττῶν ἀκεραίων δέν εἶναι ὁμάδα ὡς πρός τήν πρόσθεση γιατί δέν ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο καί δέν εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πρόσθεση π.χ 3+5=8 ὅμως τό 8 εἶναι ἄρτιος.

2.2 Τό δυναμοσύνολο $\mathscr{P}$(E) ἑνός βασικοῦ συνόλου Ε, ἐφοδιασμένο μέ τήν πράξη $\dotplus$ τῆς συμμετρικῆς διαφορᾶς εἶναι μία ἀβελιανή ὁμάδα. Μέ ἄλλα λόγια ἔχουμε τήν ἀβελιανή ὁμάδα ($\mathscr{P}$(E), $\dotplus$). Πραγματικά, εὔκολα φαίνεται ὅτι ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες (α΄) καί (β΄) τῆς παρ. 1.1. Ὁ προσεταιριστικός νόμος ἔχει ἀποδειχτεῖ στήν παρ. 8.2 τοῦ δεύτερου κεφαλαίου. Οὐδέτερο στοιχεῖο εἶναι τό κενό σύνολο γιατί $\emptyset \dotplus A=A$ γιά ὁποιοδήποτε σύνολο Α στοιχεῖο τοῦ $\mathscr{P}$(E). Ἐπίσης κάθε στοιχεῖο τοῦ $\mathscr{P}$(E) π.χ τό Α ἔχει συμμετρικό στοιχεῖο τόν ἑαυτό του $A+A=\emptyset$ (οὐδέτερο στοιχεῖο). Ἰσχύει ἀκόμη ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος.

2.3 Τό μονοσύνολο {α} ἐφοδιασμένο μέ τήν πράξη · (δέν εἶναι ὁ πολλαπλασιασμός τῶν ἀριθμῶν) πού ὁρίζεται μέ τήν ἰσότητα αα=α εἶναι μία ἀβελιανή ὁμάδα. Τή συμβολίζουμε μέ ({α}, ·). Πραγματικά εὔκολα φαίνεται ὅτι ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες (α΄) καί (β΄) τῆς παρ. 1.1. Γιά τόν προσεταιριστικό νόμο ἔχουμε (αα)α=α(αα) γιατί αα=α $\wedge$ α=αα σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς πράξης καί κατά τήν ἰδιότητα (β΄) τῆς παρ.1.1 εἶναι (αα)α=α(αα). Οὐδέτερο στοιχεῖο εἶναι τό α καί συμμετρικό (ἀντίστροφο, ἀφοῦ τήν πράξη τήν ὀνομάσαμε πολλαπλασιασμό) στοιχεῖο τοῦ α εἶναι ἐπίσης τό α.

Ἡ αα=αα εἶναι προφανής, ἐπομένως ἰσχύει καί ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος.

2.4 Τό σύνολο {α,β} ἐφοδιασμένο μέ τήν πράξη. πού θά τή λέμε πολλαπλασιασμό (Δέν εἶναι ὁ πολλαπλασιασμός τῶν ἀριθμῶν. Τό · συνήθως παραλείπεται καί γράφουμε τά στοιχεῖα τοῦ {α,β} κοντά τό ἕνα στό ἄλλο) εἶναι ἀβελιανή ὁμάδα ἄν ὁρίσουμε τήν πράξη · ὡσεξῆς: αα=β, αβ=βα=α, ββ=β. Αὐτό εὔκολα μποροῦμε νά τό διαπιστώσουμε. Οὐδέτερο στοιχεῖο δηλαδή ἡ μονάδα τῆς ὁμάδας (τή λέμε μονάδα γιατί τήν πράξη τήν ὀνομάσαμε πολλαπλασιασμό)εἶναι τό β. Ἐπίσης ἀντίστροφα στοιχεῖα τοῦ α καί τοῦ β εἶναι ὁ ἑαυτός τους (τά λέμε ἀντίστροφα γιατί τήν πράξη τήν ὀνομάσαμε πολλαπλασιασμό. Πρόκειται γιά τά συμμετρικά στοιχεῖα). Ἡ πράξη ὁρίζεται καί μέ τόν ἐπόμενα πίνακα.

·	α	β
α	β	α
β	α	β

Ὁ πρῶτος παράγοντας παίρνεται ἀπό τήν πρώτη στήλη καί ὁ δεύτερος ἀπό τήν πρώτη γραμμή. Στή διασταύρωση τῆς στήλης καί τῆς γραμμῆς βρίσκεται τό ἀποτέλεσμα τῆς πράξης. Ἀπό τόν πίνακα φαίνεται ὅτι ἡ ὁμάδα εἶναι ἀβελιανή γιατί καί ἀπό τήν πρώτη γραμμή νά πάρουμε τόν πρῶτο παράγοντα καί ἀπό τήν πρώτη στήλη τόν δεύτερο τό ἀποτέλεσμα εἶναι τό ἴδιο.

2.5 Ἡ θεωρία τῶν ὁμάδων εἶναι ἀλγεβρική θεωρία ὅμως ἔχει ἐφαρμογές καί στούς ἄλλους μαθηματικούς κλάδους π.χ στήν ἀνάλυση, τή γεωμετρία κ.λ.π. Ἐπίσης στήν Φυσική καί σέ ἄλλους τομεῖς. Ἡ ἀνάπτυξη τῆς θεωρίας τῶν ὁμάδων μετασχηματισμῶν ἀπό τό μεγάλο Νορβηγό μαθηματικό Lie ἐπέτρεψε τήν πλήρη συσχέτιση τῶν διαφόρων γεωμετρικῶν συστημάτων μέ τή θεωρία αὐτή.

Τό ἔργο αὐτό συμπληρώθηκε ἀργότερα ἀπό τούς Klein, Poincaré καί Hilbert. Οἱ πρωτοπόροι μαθηματικοί Abel καί Calois ἐφάρμοσαν τή θεωρία τῶν ὁμάδων πού κυρίως αὐτοί θεμελίωσαν στή λύση τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων.

3. Ἡ ὁμάδα τῶν μεταθέσεων ἤ τῶν μετασχηματισμῶν ἑνός συνόλου.

Ἀπό τή συνδυαστική θεωρία εἶναι γνωστό ὅτι ἕνα πεπερασμένο σύνολο μέ n στοιχεῖα ἔχει συνολικά $1\cdot 2\cdot 3 \ldots n = n!$ μεταθέσεις, π.χ τό $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ ἔχει $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$ μεταθέσεις (ἀμφιμοσήμαντες ἀπεικονίσεις τοῦ A πάνω στόν ἑαυτό του) τίς $A_1=\{(\alpha,\alpha),(\beta,\beta),(\gamma,\gamma)\}$, $A_2=\{(\alpha,\alpha),(\beta,\gamma),(\gamma,\beta)\}$, $A_3=\{(\alpha,\gamma),(\beta,\alpha),(\gamma,\beta)\}$ $A_4=\{(\alpha.\gamma),(\beta,\beta),(\gamma,\alpha)\}$, $A_5=\{(\alpha,\beta),(\beta,\gamma),(\gamma,\alpha)\}$, $A_6=\{(\alpha,\beta),(\beta,\alpha),(\gamma,\gamma)\}$. Ἔχουμε τώρα τό σύνολο $M_A=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6\}$ τῶν μεταθέσεων τοῦ A. Ἄν τό σύνολο εἶναι ἀπειροσύνολο π.χ τό N τότε τό πλῆθος τῶν μεταθέσεων τῶν στοιχείων του πού στήν περίπτωση αὐτή ὀνομάζονται <u>μετασχηματισμοί,</u> εἶναι ἐπίσης ἄπειρο. Τό σύνολο λοιπόν M_N τῶν μετασχηματισμῶν τοῦ N εἶναι καί αὐτό ἕνα ἄπειρο σύνολο. Ἐκεῖνο πού θέλουμε νά τονίσουμε εἶναι ὅτι <u>τό σύνολο M_Σ τῶν μεταθέσεων ἤ τῶν μετασχηματισμῶν ἑνός συνόλου Σ εἶναι μία ὁμάδα ὡς πρός μία πράξη πού τήν ὀνομάζουμε πολλαπλασιασμό καί πού τήν ὁρίζουμε ὡσεξῆς:</u> Ἄν Σ_1 καί Σ_2 εἶναι δύο μετασχηματισμοί τοῦ Σ δηλαδή στοιχεῖα τοῦ M_Σ καί $\Sigma_1: \Sigma \ni \alpha \leftrightarrow \beta \in \Sigma$, $\Sigma_2: \Sigma \ni \beta \leftrightarrow \gamma \in \Sigma$, τότε $\Sigma_1\cdot\Sigma_2: \Sigma \ni \alpha \leftrightarrow \gamma \in \Sigma$. Ἀμέσως φαίνεται ὅτι $\Sigma_1\cdot\Sigma_2$ εἶναι ἕνας μετασχηματισμός τοῦ Σ δηλαδή $\Sigma_1\cdot\Sigma_2 \in M_\Sigma$ καί τό M_Σ εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τοῦ <u>πολλαπλασιασμοῦ</u> (ἰδιότητα (α΄) παρ. 1.1). Ταυτοτικό στοιχεῖο (μονάδα) στό M_Σ ἔχουμε τόν μετασχηματισμό

$\Sigma_\tau : \Sigma \ni \alpha \leftrightarrow \alpha \in \Sigma$ δηλαδή τήν ταυτοτική ἀπεικόνιση πού τή συμβολίζουμε μέ Σ_τ. Πραγματικά, $\Sigma_\tau \cdot \Sigma_1 : \Sigma \ni \alpha \leftrightarrow \beta \in \Sigma$ σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀλλά καί $\Sigma_1 : \Sigma \ni \alpha \leftrightarrow \beta \in \Sigma$ δηλαδή $\Sigma_\tau \cdot \Sigma_1 = \Sigma_1$. Κάθε στοιχεῖο τοῦ M_Σ π.χ τό Σ_1 ἔχει ἀντίστροφο στοιχεῖο τήν ἀπεικόνιση Σ_1': $\Sigma \ni \beta \leftrightarrow \alpha \in \Sigma$ δηλαδή τήν ἀντίστροφη ἀπεικόνιση τῆς Σ_1. Ὁ προσεταιριστικός νόμος ἰσχύει. Ἄν πχ εἶναι $\Sigma_3 : \Sigma \ni \gamma \leftrightarrow \lambda \in \Sigma$ ἔχουμε $(\Sigma_1\Sigma_2)\Sigma_3 = \Sigma_1(\Sigma_2\Sigma_3)$. Πραγματικά ὁ Σ_1 ἀπεικονίζει τό α στό β (ἀμφιμονοσήμαντα) καί ὁ Σ_2 τό β στό γ συνεπῶς ὁ $\Sigma_1\Sigma_2$ ἀπεικονίζει τό α στό γ καί ἐπειδή ὁ Σ_3 ἀπεικονίζει τό γ στό λ εἶναι $(\Sigma_1\Sigma_2)\Sigma_3$: $\Sigma \ni \alpha \leftrightarrow \lambda \in \Sigma$. Ἐπίσης $\Sigma_2\Sigma_3$: $\Sigma \ni \beta \leftrightarrow \lambda \in \Sigma$ καί $\Sigma_1(\Sigma_2\Sigma_3)$: $\Sigma \ni \alpha \leftrightarrow \lambda \in \Sigma$ εἶναι λοιπόν $(\Sigma_1\Sigma_2)\Sigma_3 = \Sigma_1(\Sigma_2\Sigma_3)$ Ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος δέν ἰσχύει γενικά δηλαδή γιά ὅλα τά στοιχεῖα τῆς ὁμάδας μετασχηματισμῶν. Ὅμως γιά τά ἀντίστροφα στοιχεῖα ἰσχύει γιατί μέ ὁποιαδήποτε σειρά καί ἄν γίνει ὁ πολλαπλασιασμός ἐξαγόμενο πρέπει νά εἶναι τό ταυτοτικό στοιχεῖο π.χ $\Sigma_1 \cdot \Sigma_1' = \Sigma_\tau$ καί $\Sigma_1' \cdot \Sigma_1 = \Sigma_\tau$ ἄρα $\Sigma_1 \cdot \Sigma_1' = \Sigma_1' \cdot \Sigma_1$. Ὅτι δέν ἰσχύει γενικά φαίνεται ἀπό τό ἀρχικό παράδειγμα γιά τό M_A μέ $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$. εἶναι $A_2 \cdot A_3 = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\beta),(\gamma,\alpha)\} = A_4$ καί $A_3 \cdot A_2 = \{(\alpha,\beta),(\beta,\alpha),(\gamma,\gamma)\} = A_6$. Εἶναι λοιπόν $A_2 \cdot A_3 \neq A_3 \cdot A_2$. Ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος ἰσχύει γενικά ὅταν καί μόνο ὅταν τό σύνολο τοῦ ὁποίου θεωροῦμε τούς μετασχηματισμούς (τίς μεταθέσεις) ἔχει τό πολύ δύο στοιχεῖα π.χ τό $B=\{\alpha,\beta\}$. Εἶναι $M_B=\{B_1,B_2\}$ ὅπου $B_1=\{(\alpha,\alpha),(\beta,\beta)\}$ καί $B_2=\{(\alpha,\beta),(\beta,\alpha)\}$. Τό B_1 εἶναι τό ταυτοτικό στοιχεῖο. Εἶναι $B_1.B_2=\{(\alpha,\beta),(\beta,\alpha)\}=B_2$ καί $B_2.B_1=\{(\alpha,\beta),(\beta,\alpha)\}=B_2$. Εἶναι λοιπόν $B_1.B_2=B_2.B_1$. Στήν περίπτωση πού ἔχουμε ἕνα μονοσύνολο π.χ τό $\Gamma=\{\alpha\}$ τότε $M_\Gamma=\{\Gamma_1\}$ ὅπου $\Gamma_1=\{(\alpha,\alpha)\}$. Εἶναι προφανές ὅτι ἰσχύει ἡ $\Gamma_1.\Gamma_1=\Gamma_1.\Gamma_1$. Εἶναι $\Gamma_1.\Gamma_1=\Gamma_1$. Ἡ ὁμάδα μετασχηματισμῶν λοιπόν M_Σ ἑνός συνόλου Σ εἶναι ἀβελιανή ἄν καί μόνο ἄν τό Σ ἔχει τό πολύ δύο στοιχεῖα. Γράφουμε $(M_{\Sigma}, .)$.

4. Ὑποομάδες.

Ἡ ὁμάδα (H_1, π_1) εἶναι μία ὑποομάδα τῆς ὁμάδας (H, π) ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall x \in H_1, \forall \psi \in H_1, x\pi_1\psi = x\pi\psi$. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ πράξη π_1 εἶναι ἕνας περιορισμός τῆς πράξης π ἀπό τό Η στό ὑποσύνολο H_1 (Συνήθως χρησιμοποιοῦμε τό ἴδιο σύμβολο π καί διά τήν πράξη στήν ὑποομάδα. Θά γράφουμε τότε $x \pi \psi$ στό $H_1 = x \pi \psi$ στό Η) π.χ τό σύνολο τῶν ἄρτιων ἀκεραίων εἶναι μία ὑποομάδα τῆς ὁμάδας $(Z, +)$. Τό σύνολο τῶν περιττῶν ἀκεραίων δέν εἶναι ὑποομάδα τῆς ὁμάδας $(Z, +)$ γιατί εἶναι μέν ὑποσύνολο τοῦ Ζ ἀλλά δέν εἶναι ὁμάδα. Ἡ ὁμάδα $(\{\alpha\}, \cdot)$ μέ $\alpha\alpha = \alpha$ δέν εἶναι ὑποομάδα τῆς ὁμάδας $(\{\alpha, \beta\}, .)$ (βλέπετε παρ. 2.3 καί 2.4) γιατί ναί μέν ἰσχύει ἡ $\{\alpha\} \subseteqq \{\alpha, \beta\}$ ὅμως $\alpha\alpha = \beta$ στήν $(\{\alpha, \beta\}, .)$ ἐνῶ $\alpha\alpha = \alpha$ στήν $(\{\alpha\}, .)$. Μέ ἄλλα λόγια ἡ πράξη · στό $\{\alpha\}$ δέν εἶναι ἕνας περιορισμός τῆς πράξης · στό $\{\alpha, \beta\}$ ἀπό τό $\{\alpha, \beta\}$ στό $\{\alpha\}$. Ὅτι ἰσχύει ἡ $H_1 \subseteqq H$ εἶναι συνέπεια τοῦ παραπάνω ὁρισμοῦ τῆς ὑποομάδας (ἄσκηση 30).

5. Ὁμομορφισμός μιᾶς ὁμάδας πάνω σέ μία ἄλγεβρα μέ μιά πράξη.

Ἄν ἡ φ εἶναι ἕνας ὁμομορφισμός τῆς ὁμάδας (H, π) πάνω στό σύνολο H_1 ἐφοδιασμένο μέ τήν πράξη π_1 τότε καί ἡ (H_1, π_1) εἶναι ὁμάδα καί μάλιστα ἀβελιανή ἄν ἡ (H, π) εἶναι ἀβελιανή.

Θά δείξουμε τό ἀξίωμα (α΄) τῆς παρ.1.1 δηλαδή τήν πρόταση $\forall x_1 \in H_1, \forall \psi_1 \in H_1, x_1\pi_1\psi_1 \in H_1$. Πραγματικά, ἕνεκα τοῦ ὁμομορφισμοῦ φ εἶναι $\exists x \in H, x_1 = \varphi(x)$ καί $\exists \psi \in H, \psi_1 = \varphi(\psi)$. Συνεπῶς $x_1\pi_1\psi_1 = \varphi(x)\pi_1\varphi(\psi) = \varphi(x \pi \psi)$. Ὅμως $\varphi(x \pi \psi) \in H_1$ ἐπομένως καί $x_1\pi_1\psi_1 \in H_1$.

Θά δείξουμε τώρα τήν ἰδιότητα (β΄) τῆς παρ.1.1 δηλαδή τήν πρόταση $x_1 = \psi_1 \wedge \omega_1 = \lambda_1 \Rightarrow x_1\pi_1\omega_1 = \psi_1\pi_1\lambda_1$ στό H_1

Πραγματικά, $x_1=\psi_1 \wedge \omega_1=\lambda_1$ στό $H_1 \Rightarrow \exists x \in H, \exists \psi \in H, \exists \omega \in H,$ $\exists \lambda \in H, x_1=\varphi(x) \wedge \psi_1=\varphi(\psi) \wedge \omega_1=\varphi(\omega) \wedge \lambda_1=\varphi(\lambda) \wedge x=\psi \wedge \omega=\lambda \Rightarrow$ (ἐπειδή ἡ (H,π) εἶναι ὁμάδα) $\exists x \in H, \exists \psi \in H, \exists \omega \in H,$ $\exists \lambda \in H, x_1= \varphi(x) \wedge \psi_1=\varphi(\psi) \wedge \omega_1=\varphi(\omega) \wedge \lambda_1=\varphi(\lambda) \wedge x \pi \omega = \psi \pi \lambda \Rightarrow$ (φ εἶναι μονοσήμαντη) $\exists x \in H, \exists \psi \in H, \exists \omega \in H, \exists \lambda \in H, x_1=\varphi(x) \wedge \psi_1=\varphi(\psi) \wedge \omega_1=\varphi(\omega) \wedge \lambda_1=\varphi(\lambda) \wedge \varphi(x \pi \omega) = \varphi(\psi \pi \lambda) \Rightarrow$ (φ εἶναι ὁμομορφισμός)
$\exists x \in H, \exists \psi \in H, \exists \omega \in H, \exists \lambda \in H, x_1=\varphi(x) \wedge \psi_1=\varphi(\psi) \wedge \omega_1= \varphi(\omega) \wedge \lambda_1=\varphi(\lambda) \wedge \varphi(x) \pi_1 \varphi(\omega)=\varphi(\psi) \pi_1 \varphi(\lambda) \Rightarrow x_1 \pi_1 \omega_1=\psi_1 \pi_1 \lambda_1$
Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Rightarrow$ ἰσχύει τελικά ἡ $x_1=\psi_1 \wedge \omega_1=\lambda_1 \Rightarrow x_1 \pi_1 \omega_1=\psi_1 \pi_1 \lambda_1$.

Θά δείξουμε τώρα τήν ἰσχύ τοῦ προσεταιριστικοῦ νόμου τῆς π_1 στό H_1 (ἰδιότητα γ΄ τῆς παρ.1.1) δηλαδή τήν πρόταση $\forall x_1 \in H_1, \forall \psi_1 \in H_1, \forall \omega_1 \in H_1, (x_1 \pi_1 \psi_1) \pi_1 \omega_1 = x_1 \pi_1 (\psi_1 \pi_1 \omega_1)$. Πραγματικά, $\exists x \in H, \exists \psi \in H, \exists \omega \in H, x_1 = \varphi(x) \wedge \psi_1=\varphi(\psi) \wedge \omega_1=\varphi(\omega) \wedge (x \pi \psi) \pi \omega = x \pi (\psi \pi \omega)$ (ἐπειδή τό (H,π) εἶναι ὁμάδα) $\Rightarrow$ (φ εἶναι μονοσήμαντη)
$\exists x \in H, \exists \psi \in H, \exists \omega \in H, x_1=\varphi(x) \wedge \psi_1=\varphi(\psi) \wedge \omega_1=\varphi(\omega) \wedge \varphi[(x \pi \psi) \pi \omega]=\varphi[x \pi (\psi \pi \omega)] \Rightarrow$ (φ εἶναι ὁμομορφισμός)
$\exists x \in H, \exists \psi \in H, \exists \omega \in H, x_1=\varphi(x) \wedge \psi_1=\varphi(\psi) \wedge \omega_1=\varphi(\omega) \wedge \varphi(x \pi \psi) \pi_1 \varphi(\omega) = \varphi(x) \pi_1 \varphi(\psi \pi \omega) \Rightarrow \exists x \in H, \exists \psi \in H, \exists \omega \in H,$ $x_1=\varphi(x) \wedge \psi_1=\varphi(\psi) \wedge \omega_1=\varphi(\omega) \wedge [\varphi(\chi) \pi_1 \varphi(\psi)] \pi_1 \varphi(\omega) = \varphi(x) \pi_1 [\varphi(\psi) \pi_1 \varphi(\omega)] \Rightarrow (x_1 \pi_1 \psi_1) \pi_1 \omega_1=x_1 \pi_1 (\psi_1 \pi_1 \omega_1)$.

Θά δείξουμε τήν ὕπαρξη ταυτοτικοῦ στοιχείου στό H_1 δηλαδή τήν ἀλήθεια τῆς πρότασης $\exists \tau_1 \in H_1, \forall x_1 \in H_1, \tau_1 \pi_1 x_1=x_1$. Πραγματικά, μέ τ_1 παριστάνουμε τήν εἰκόνα τοῦ τ τῆς (H,π). Ἔχουμε $\tau_1=\varphi(\tau), \exists x \in H, x_1=\varphi(x) \wedge \tau \pi x=x \Rightarrow \tau_1=\varphi(\tau), \exists x \in H, x_1=\varphi(x) \wedge \varphi(\tau \pi x)=\varphi(x)$ (ἡ φ εἶναι μονοσήμαντη) $\Rightarrow \tau_1=\varphi(\tau), \exists x \in H, x_1=\varphi(x) \wedge \varphi(\tau) \pi_1 \varphi(x) = \varphi(x) \Rightarrow \tau_1 \pi_1 x_1=x_1$. Ἀποδείχτηκε λοιπόν ὅτι ἡ εἰκόνα τ_1 τοῦ ταυτοτικοῦ στοιχείου τ τῆς (H,π) εἶναι ταυτοτικό στοιχεῖο στό σύνολο (H_1,π_1).

Θά δείξουμε τώρα στό (H_1,π_1) τήν πρόταση

$\forall x_1 \in H_1, \exists x_1' \in H_1,\ x_1' \pi_1 x_1 = \tau_1$. Πραγματικά, $\exists x \in H,\ x_1 = \varphi(x)$, έπίσης ὡς x_1' παίρνουμε τό $\varphi(x')$ ὅπου x' εἶναι τό συμμετρικό τοῦ x στήν (H,π). Ἀπό τήν $x'\pi x = \tau$ πού ἰσχύει στήν (H,π) ἔχουμε $\varphi(x'\pi x) = \varphi(\tau)$ (φ εἶναι μονοσήμαντη) καί $\varphi(x')\pi_1\varphi(x) = \tau_1$ (φ εἶναι ὁμομορφισμός) ἤ $x_1'\pi_1 x_1 = \tau_1$.

Θά δείξουμε ἀκόμη ὅτι στήν ὁμάδα πλέον (H_1,π_1). ἰσχύει ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος δηλαδή ἡ πρόταση $\forall x_1 \in H_1, \forall \psi_1 \in H_1, x_1\pi_1\psi_1 = \psi_1\pi_1 x_1$ ὅταν στήν ὁμάδα (H,π) ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall x \in H, \forall \psi \in H,\ x\pi\psi = \psi\pi x$. Πραγματικά, $\exists x \in H, \exists \psi \in H,\ x_1 = \varphi(x) \wedge \psi_1 = \varphi(\psi) \wedge \varphi(x\pi\psi) = \varphi(\psi\pi x)$ $\Rightarrow \exists x \in H, \exists \psi \in H,\ x_1 = \varphi(x) \wedge \psi_1 = \varphi(\psi) \wedge \varphi(x)\pi_1\varphi(\psi) = \varphi(\psi)\pi_1\varphi(x) \Rightarrow x_1\pi_1\psi_1 = \psi_1\pi_1 x_1$.

6. Μερικές συνέπειες τῶν ἀξιωμάτων τῆς ὁμάδας.

6.1 Θά δείξουμε τήν πρόταση $\omega\pi x = \omega\pi\psi \Rightarrow x = \psi$ στήν ὁμάδα (H,π). Ἀπό τήν $\omega\pi x = \omega\pi\psi$ καί τήν προφανή $\omega' = \omega'$ σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα (β΄) τῆς παρ.1.1 προκύπτει ἡ $\omega'\pi(\omega\pi x) = \omega'\pi(\omega\pi\psi)$. Ἡ έφαρμογή τοῦ προσεταιριστικοῦ νόμου μᾶς ὁδηγεῖ στήν $(\omega'\pi\omega)\pi x = (\omega'\pi\omega)\pi\psi$. Σύμφωνα μέ τό (ε΄) ἀξίωμα τῆς παρ.1.1 (ὑποθέτουμε τήν ὕπαρξη ἀριστεροῦ συμμετρικοῦ στοιχείου) προκύπτει ἡ $\tau\pi x = \tau\pi\psi$ πού σύμφωνα μέ τήν (δ΄) ἰδιότητα τῆς παρ.1.1 συνεπάγεται τήν $x=\psi$. Ἀποδείχτηκε λοιπόν ὁ ἀριστερός νόμος διαγραφῆς στήν ὁμάδα (H,π).

6.2 Θά δείξουμε ὅτι σέ μία ὁμάδα ὄχι ὑποχρεωτικά ἀβελιανή τό ἀριστερό ταυτοτικό στοιχεῖο εἶναι καί δεξιό ταυτοτικό στοιχεῖο. Μέ ἄλλα λόγια θά δείξουμε τήν πρόταση $\forall x \in H,\ x\pi\tau = x$. Πραγματικά, ἀπό τήν $x'\pi x = \tau$ (ἰδιότητα ε΄παρ. 1.1) καί τήν προφανή $\tau = \tau$ προκύπτει ἡ $(x'\pi x)\pi\tau = \tau\pi\tau$. Ὅμως $\tau\pi\tau = \tau$ καί $\tau = x'\pi x$. Ἐπειδή ἡ ἰσότητα εἶναι μεταβατική ἔχουμε τήν $(x'\pi x)\pi\tau = x'\pi x$ καί ἕνεκα τοῦ προσεταιριστικοῦ νόμου τήν $x'\pi(x\pi\tau) = x'\pi x$ Ἐφαρμόζοντας τόν ἀριστερό νόμο διαγραφῆς ἔχουμε τήν

$x\,\pi\,\tau = x$.

6.3 Θά δείξουμε ὅτι σέ μία ὁμάδα (H,π) ὄχι κατ'ἀνάγκη ἀβελιανή τό ἀριστερό συμμετρικό στοιχεῖο ὁποιουδήποτε στοιχείου τῆς ὁμάδας εἶναι καί δεξιό. Εὔκολα φαίνεται ὅτι ἰσχύουν οἱ ἰσότητες:

$x'\pi(x\,\pi\,x') = (x'\pi\,x)\pi\,x' = \tau\,\pi\,x' = x' = x'\pi\,\tau$ (παρ. 6.2)

Ἀπό τήν $x'\pi(x\pi x') = x'\pi\,\tau$ μέ διαγραφή ἀπό τά ἀριστερά τοῦ x' προκύπτει ἡ $x\,\pi\,x' = \tau$ πού ἀποδείχνει τήν πρόταση.

6.4 Θά δείξουμε ὅτι τό ταυτοτικό στοιχεῖο μιᾶς ὁμάδας (H,π) εἶναι μοναδικό. Πραγματικά, ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἐκτός ἀπό τό τ ὑπάρχει καί τό τ_1 μέ $\tau\neq\tau_1$ τότε γιά τό στοιχεῖο x τοῦ H θά ἔχουμε $x\,\pi\,\tau = x$ καί $x\,\pi\,\tau_1 = x$ (παρ.6.2). Ἀπό αὐτές προκύπτει ἡ $x\,\pi\,\tau = x\,\pi\,\tau_1$ καί τελικά ἡ $\tau=\tau_1$ (παρ.6.1). Στήν ἀντίφαση $\tau\neq\tau_1 \wedge \tau=\tau_1$ μᾶς ὁδήγησε ἡ ὑπόθεση $\tau\neq\tau_1$. Εἶναι λοιπόν $\tau=\tau_1$ καί τό ταυτοτικό στοιχεῖο τῆς ὁμάδας εἶναι μοναδικό.

6.5 Θά δείξουμε τώρα ὅτι σέ μία ὁμάδα τό συμμετρικό στοιχεῖο ὁποιουδήποτε στοιχείου της εἶναι μοναδικό. Πραγματικά, ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό στοιχεῖο x τῆς ὁμάδας ἔχει γιά συμμετρικά τά x' καί x_1' μέ $x'\neq x_1'$. Ἰσχύουν τότε (παρ. 6.3) ἡ $x\,\pi\,x' = \tau$ καί ἡ $x\,\pi\,x_1' = \tau$. Αὐτές συνεπάγονται τήν $x\,\pi\,x' = x\,\pi\,x_1'$ πού συνεπάγεται τήν (παρ. 6.1) $x' = x_1'$. Στήν ἀντίφαση $x'\neq x_1' \wedge x' = x_1'$ μᾶς ὁδήγησε ἡ ὑπόθεση $x'\neq x_1'$ εἶναι λοιπόν $x' = x_1'$ καί ἡ πρόταση ἀποδείχτηκε.

6.6 Ἰσχύει σέ μία ὁμάδα (H,π) καί ὁ δεξιός νόμος διαγραφῆς, δηλαδή ἡ πρόταση $x\,\pi\,\omega = \psi\,\pi\,\omega \Rightarrow x = \psi$. Πραγματικά, ἡ $x\,\pi\,\omega = \psi\,\pi\,\omega$ καί ἡ προφανής $\omega' = \omega'$ συνεπάγονται (ἰδιότητα β΄ παρ. 1.1) τήν $(x\,\pi\,\omega)\pi\,\omega' = (\psi\,\pi\,\omega)\pi\,\omega'$. Ὁ προσεταιριστικός νόμος μᾶς ὁδηγεῖ στήν $x \pi (\omega \pi \omega') = \psi \pi (\omega \pi \omega')$ καί αὐτή (παρ.6.3) στήν $x \pi \tau = \psi \pi \tau$. Ἡ τελευταία συνεπάγεται (παρ.6.2) τή $x=\psi$.

6.7 Θά δείξουμε ὅτι σέ μία ὁμάδα (H,π) ἡ ἐξίσωση $\alpha \pi x = \beta$ ἔχει πάντοτε λύση καί μάλιστα ἀκριβῶς μία. Ἡ λύση φυσικά εἶναι στοιχεῖο τοῦ H. Πρόκειται γιά τό στοιχεῖο $x = \alpha' \pi \beta$. Πραγματικά, $\alpha \pi (\alpha' \pi \beta) = (\alpha \pi \alpha') \pi \beta = \tau \pi \beta = \beta$. Τώρα ἄν ἡ $\alpha \pi x = \beta$ ἔχει δύο λύσεις π.χ τίς x_1 καί x_2 μέ $x_1 \neq x_2$ τότε θά ἰσχύουν οἱ $\alpha \pi x_1 = \beta$, $\alpha \pi x_2 = \beta$. Θά ἔχουμε συνεπῶς $\alpha \pi x_1 = \alpha \pi x_2$ καί μέ τή διαγραφή τοῦ α εἶναι $x_1 = x_2$. Ἡ ὑπόθεση $x_1 \neq x_2$ ὁδήγησε στήν ἀντίφαση $x_1 \neq x_2 \wedge x_1 = x_2$. Εἶναι λοιπόν $x_1 = x_2$ καί ἡ λύση τῆς $\alpha \pi x = \beta$ εἶναι μοναδική. Τά ἴδια ἰσχύουν καί γιά τήν ἐξίσωση $\psi \pi \alpha = \beta$. Ἔχει τήν μοναδική λύση $\psi = \beta \pi \alpha'$. Ἄν ἡ ὁμάδα εἶναι ἀβελιανή οἱ λύσεις $\alpha' \pi \beta$ καί $\beta \pi \alpha'$ ἀντίστοιχα τῶν $\alpha \pi x = \beta$ καί $\psi \pi \alpha = \beta$ συμπίπτουν.

6.8 Θά δείξουμε ὅτι ὅτι σέ μία ὁμάδα (H,π) ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall x \in H, \forall \psi \in H, (x \pi \psi)' = \psi' \pi x'$. Πραγματικά, $(x \pi \psi) \pi (\psi' \pi x') = \left[(x \pi \psi) \pi \psi'\right] \pi x' = \left[x \pi (\psi \pi \psi')\right] \pi x' = (x \pi \tau) \pi x' = x \pi x' = \tau$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς ἰσότητας ἰσχύει ἡ $(x \pi \psi) \pi (\psi' \pi x') = \tau$ πού δείχνει ὅτι τό $\psi' \pi x'$ εἶναι στοιχεῖο συμμετρικό τοῦ $x \pi \psi$. ὅμως συμμετρικό στοιχεῖο τοῦ $x \pi \psi$ εἶναι καί τό $(x \pi \psi)'$ καί ἐπειδή τό $x \pi \psi$ ἕνα μόνο συμμετρικό στοιχεῖο ἔχει (παρ.6.5) εἶναι $(x \pi \psi)' = \psi' \pi x'$. Ἄν ἡ (H,π) εἶναι ἀβελιανή μποροῦμε νά γράφουμε καί $(x \pi \psi)' = x' \pi \psi'$.

7. Ἀντιμεταθετικοί δακτύλιοι μέ μονάδα.

7.1 Ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μονάδα εἶναι ἕνα σύνολο Δ ἐφοδιασμένο μέ δύο πράξεις (τίς ὀνομάζουμε συνήθως πρόσθεση καί πολλαπλασιασμό χωρίς νά ἐννοοῦμε ὑποχρεωτικά τίς γνωστές ἀπό τήν Ἀριθμητική πράξεις) ὡς πρός τίς ὁποῖες ἰσχύουν οἱ ἑπόμενες ἰδιότητες (ἀξιώματα τοῦ ἀντιμεταθετικοῦ δακτύλιουμέ μονάδα). Γράφουμε: $(\Delta, +, \cdot)$.

(α΄) $\forall x \in \Delta, \forall \psi \in \Delta, \; x+\psi \in \Delta$

(β΄) $x=\psi \wedge \lambda=\mu \Rightarrow x+\lambda = \psi+\mu$ στό Δ

(γ΄) $\forall x \in \Delta, \forall \psi \in \Delta, \forall \omega \in \Delta, \quad (x+\psi)+\omega=x+(\psi+\omega)$

(δ΄) $\exists 0 \in \Delta, \forall x \in \Delta, \; 0+x=x\,(x+0=x)$

(ε΄) $\forall x \in \Delta, \; \exists(-x)\in\Delta, \; (-x)+x = 0 \; (x+(-x) = 0)$

(στ΄) $\forall x \in \Delta, \forall \psi \in \Delta, \; x+\psi = \psi+x$

(ζ΄) $\forall x \in \Delta, \forall \psi \in \Delta, \; x\psi \in \Delta$

(η΄) $x=\psi \wedge \lambda=\mu \Rightarrow x\lambda=\psi\mu$

(θ΄) $\forall x \in \Delta, \forall \psi \in \Delta, \forall \omega \in \Delta, \quad (x\psi)\omega = x(\psi\omega)$

(ι΄) $\exists 1 \in \Delta, \forall x \in \Delta, \; 1\cdot x = x \wedge x\cdot 1 = x$

(ια΄) $\forall x \in \Delta, \forall \psi \in \Delta, \; x\psi = \psi x$

(ιβ΄) $\forall x \in \Delta, \forall \psi \in \Delta, \forall \omega \in \Delta, \quad x(\psi+\omega) = x\psi+x\omega$

7.2 Οἱ πρῶτες ἔξη ἰδιότητες ἀφοροῦν τήν πρόσθεση. Ἄν γίνει σύγκριση μέ τά ἀξιώματα τῆς παρ. 1.1 βλέπουμε ὅτι ὁ ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μονάδα εἶναι ἀβελιανή ὁμάδα ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης. Οἱ ἑπόμενες πέντε ἰδιότητες ἀφοροῦν τόν πολλαπλασιασμό (ὄχι κατ΄ἀνάγκη τό γνωστό μας ἀπό τήν Ἀριθμητική) καί ἡ τελευταία ἰδιότητα εἶναι ὁ ἐπιμεριστικός νόμος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεση.

Στήν ἰδιότητα (δ΄) βλέπουμε τό ταυτοτικό στοιχεῖο νά τό παριστάνουμε μέ 0. Αὐτό γιατί τήν πράξη τήν ὀνομάσαμε πρόσθεση. Πάντως δέν ἀποκλείεται ἄλλος συμβολισμός. Τό ἴδιο ἰσχύει γιά τό σύμβολο +. Στό ἀξίωμα (ε΄) βλέπουμε τό συμμετρικό στοιχεῖο τοῦ x συμβολιζόμενο μέ −x (ἀντίθετο). Ἡ ἰδιότητα (ι΄) ἀναφέρεται στό ταυτοτικό στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Τό συμβολίσαμε μέ 1 ὅμως δέν ἀποκλείεται καί ἄλλος συμβολισμός.

Τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τήν τελεία πού χρησιμοποιοῦμε γιά τό συμβολισμό τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ὑπάρχουν δακτύλιοι πού δέν ἔχουν μονάδα ὅμως δέν θά ἀσχοληθοῦμε μ' αὐτούς τούς δακτύλιους. Ἡ ἰδιότητα ια' μᾶς δείχνει ὅτι ἰσχύει ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ὑπάρχουν δακτύλιοι πού δέν εἶναι ἀντιμεταθετικοί δηλαδή δέν ἰσχύει ἡ ἰδιότητα ια' ὅμως δέν θά ἀσχοληθοῦμε μ'αὐτούς. Ἀκόμη σέ ὅλους τούς δακτύλιους ἀντιμεταθετικούς καί μή ἰσχύει ἡ ἰδιότητα στ' δηλαδή ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης. Στούς ἀντιμεταθετικούς δακτύλιους μέ μονάδα ἐκτός ἀπό τήν ἰδιότητα ιβ'(ἀριστερός ἐπιμεριστικός νόμος) εἶναι φυσικό νά ἰσχύει καί ἡ ἰδιότητα $\forall x \in \Delta, \forall \psi \in \Delta, \forall \omega \in \Delta$, $(\psi+\omega)x=\psi x + \omega x$ (δεξιός ἐπιμεριστικός νόμος) ἀφοῦ ἰσχύει ἡ ἰδιότητα ια'. Ὅμως καί γιά τούς μή ἀντιμεταθετικούς δακτύλιους ὁρίζουμε ὅτι πρέπει νά ἰσχύουν ὁ ἀριστερός καί ὁ δεξιός ἐπιμεριστικός νόμος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεση. Οἱ ἀντιμεταθετικοί δακτύλιοι μέ μονάδα δέν εἶναι ὑποχρεωτικά ἀβελιανές μονάδες ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γιατί τά στοιχεῖα τους δέν ἔχουν ἀντίστροφα (συμμετρικά) στοιχεῖα, δηλαδή δέν ἰσχύει καί γιά τόν πολλαπλασιασμό ὑποχρεωτικά ἰδιότητα παρόμοια μέ τήν (ε') πού ἰσχύει γιά τήν πρόσθεση. Λέμε "ὑποχρεωτικά" γιατί ἄν σέ κάποιο δακτύλιο ἰσχύει καί αὐτή ἡ ἰδιότητα αὐτός δέν θά παύσει, νά εἶναι δακτύλιος ἀφοῦ ἐκεῖνα πού ὑποχρεωτικά ἀπαιτοῦνται τά διαθέτει.

8. Παραδείγματα δακτυλίων.

8.1 Τό σύνολο Z εἶναι ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μονάδα ὡς πρός τίς πράξεις + καί · τῆς Ἀριθμητικῆς. Τό ἴδιο καί τά σύνολα Q, R καί C. Ἐπίσης τό σύνολο τῶν πολυωνύμων μέ συντελεστές πραγματικούς ἀριθμούς.

8.2 Τό σύνολο $\{\alpha\}$ ἄν οἱ πράξεις ὁριστοῦν $\alpha+\alpha=\alpha$ καί $\alpha\alpha=\alpha$ εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μονάδα. Ἐδῶ τό μηδέν τοῦ δακτύλιου καί ἡ μονάδα τοῦ δακτύλιου συμπίπτουν στό α. Ἀντίθετο στοιχεῖο τοῦ α εἶναι τό α. Ἀκόμη τό α ἔχει ἀντίστροφο στοιχεῖο τόν ἑαυτό του ἰδιότητα ὄχι ὑποχρεωτική γιά ἕνα ἀντιμεταθετικό δακτύλιο μέ μονάδα.

8.3 Τό σύνολο τῶν ἄρτιων ἀκέραιων ἀριθμῶν εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος ὡς πρός τίς πράξεις + καί · τῆς Ἀριθμητικῆς ἀλλά δέν ἔχει μονάδα δηλαδή ταυτοτικό στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

8.4 Τό σύνολο Z^2 μέ τήν πράξη τῆς πρόσθεσης ὁριζόμενη ἀπό τήν $(\alpha,\beta) + (\gamma,\delta) = (\alpha+\gamma,\beta+\delta)$ καί τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὁριζόμενη ἀπό τήν $(\alpha,\beta)\cdot(\gamma,\delta)=(\alpha\gamma,\beta\delta)$ εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μονάδα. Ἐδῶ δέν πρέπει νά γίνει σύγχυση μέ τίς ἀντίστοιχες πράξεις τῆς Ἀριθμητικῆς. Τό μηδέν τοῦ δακτύλιου $(Z^2,+,\cdot)$ εἶναι τό $(0,0)\in Z^2$. Πραγματικά, $(\alpha,\beta)+(0,0)=$ (σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς πρόσθεσης) $(\alpha+0,\beta+0)=(\alpha,\beta)$. Τό στοιχεῖο (α,β) ἔχει ὡς ἀντίθετο τό $(-\alpha, -\beta)$. Πραγματικά $(\alpha,\beta)+(-\alpha,-\beta)=(\alpha-\alpha,\beta-\beta)=(0,0)$. Μοναδιαῖο στοιχεῖο ὑπάρχει, εἶναι τό $(1,1)\in Z^2$ π.χ $(1,1)\cdot(\alpha,\alpha)=$ (σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ πολλαπλασιασμοῦ) $(1\cdot\alpha,1\cdot\beta)=(\alpha,\beta)$. Ἰσχύει ἀκόμη ἡ $(\alpha,\beta)\cdot(\gamma,\delta)=(\gamma,\delta)\cdot(\alpha,\beta)$. Πραγματικά, $(\alpha,\beta)\cdot(\gamma,\delta)=(\alpha\gamma,\beta\delta)=(\gamma\alpha,\delta\beta)=(\gamma,\delta)(\alpha,\beta)$. Πρόκειται γιά ἀντιμεταθετικό δακτύλιο μέ μονάδα. Ἀποδείχνουμε ἐνδεικτικά καί τόν ἐπιμεριστικό νόμο. Ἔχουμε:

$$(\alpha,\beta)\cdot[(\gamma,\delta)+(\lambda,\mu)]=(\alpha,\beta)\cdot(\gamma+\lambda,\delta+\mu)=[\alpha(\gamma+\lambda),\beta(\delta+\mu)]$$
$$=(\alpha\gamma+\alpha\lambda,\ \beta\delta+\beta\mu)=(\alpha\gamma,\beta\delta)+(\alpha\lambda,\beta\mu)=$$
$$(\alpha,\beta)\cdot(\gamma,\delta)+(\alpha,\beta)\cdot(\lambda,\mu).$$

8.5 Τό σύνολο $\mathscr{P}(E)$ μέ τήν πράξη $\dotplus$ ὡς πρόσθεση (συμμε -

τρική διαφορά) καί τήν $\cap$ ώς πολλαπλασιασμό (τομή)εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μονάδα. Γράφουμε: $(\mathscr{P}(E), \dotplus, \cap)$. Ὅτι εἶναι ἀβελιανή ὁμάδα ὡς πρός τήν $\dotplus$ τό εἴδαμε στήν παρ. 2.2. Ὅμως καί οἱ ἰδιότητες Ζ΄-ιβ΄τῆς παρ. 7.1 ἰσχύουν π.χ μονάδα εἶναι τό βασικό σύνολο Ε ἀφοῦ $A \cap E = E \cap A = A$. Ὁ δακτύλιος εἶναι ἀντιμεταθετικός ἀφοῦ $A \cap B = B \cap A$. Ὁ ἐπιμεριστικός νόμος $A \cap (B \dotplus \Gamma) = (A \cap B) \dotplus (A \cap \Gamma)$ ἔχει ἀποδειχτεῖ στό κεφ. ΙΙ παρ. 8.3.

9 Ἄλλες ἰδιότητες τῶν ἀντιμεταθετικῶν δακτύλιων μέ μονάδα.

9.1 Εἴδαμε ὅτι οἱ ἀντιμεταθετικοί δακτύλιοι μέ μονάδα εἶναι ἀβελιανές ὁμάδες ὡς πρός τή μία πράξη, δηλαδή ὡς πρός ἐκείνη τήν πράξη πού ὀνομάζουμε πρόσθεση. Ἔτσι ὅλες οἱ ἰδιότητες πού ἀναφέρουμε στίς ὁμάδες καί μάλιστα στίς ἀβελιανές ἰσχύουν καί στούς ἀντιμεταθετικούς δακτύλιους μέ μονάδα.

9.2 <u>Τό μοναδιαῖο στοιχεῖο ἑνός ἀντιμεταθετικοῦ δακτύλιου εἶναι μοναδικό.</u> Ἄν π.χ ὁ $(\Delta, +, \cdot)$ ἔχει δύο μοναδιαῖα στοιχεῖα τά 1 καί 1΄ μέ $1 \neq 1'$ θά εἶναι $1 \cdot 1' = 1' \cdot 1 = 1'$ ὅταν θεωροῦμε τό 1 ὡς μοναδιαῖο στοιχεῖο καί $1 \cdot 1' = 1' \cdot 1 = 1$ ὅταν θεωροῦμε τό 1΄ὡς μοναδιαῖο στοιχεῖο. Οἱ παραπάνω συνεπάγονται τήν $1 = 1'$ καί ἡ ἀντίφαση $1 \neq 1' \wedge 1 = 1'$ ὀφείλεται στήν $1 \neq 1'$. Εἶναι λοιπόν $1 = 1'$ καί τό 1 εἶναι μοναδικό.

9.3 Στόν ἀντιμεταθετικό δακτύλιο μέ μονάδα $(\Delta, +, \cdot)$ ἰσχύει ἡ πρόταση: $\forall \alpha \in \Delta,\ \alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$. Πραγματικά, $\alpha + \alpha\, 0 = \alpha \cdot 1 + \alpha\, 0 = \alpha \cdot (1+0) = \alpha \cdot 1 = \alpha = \alpha + 0$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς ἰσότητας ἰσχύει ἡ $\alpha + \alpha \cdot 0 = \alpha + 0$ ἀπό τήν ὁποία μέ διαγραφή τοῦ α (ὁ Δ εἶναι ἀβελιανή ὁμάδα ὡς πρός τήν πρόσθεση) προκύπτει ἡ $\alpha\, 0 = 0$. Ἰσχύει καί $0\, \alpha = 0$ Στά σύνολα Ζ καί Q πού μελετήσαμε ἰσχύει αὐτή ἡ ἰδιότητα καί δέν χρειάζεται ἰδιαίτερη ἀπόδειξη ἀφοῦ θά ἔχει δειχτεῖ ὅτι εἶναι ἀντιμεταθετικοί δακτύλιοι μέ μονάδα.

9.4 Σέ ἕνα ἀντιμεταθετικό δακτύλιο $(\Delta, +, \cdot)$ μέ μονάδα ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall \alpha \in \Delta, \forall \beta \in \Delta$, $\alpha\beta=(-\alpha)\cdot(-\beta)$
Πραγματικά $[\alpha\beta+\alpha(-\beta)]+(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta+[\alpha(-\beta)+(-\alpha)(-\beta)]$ (προσεταιριστικός νόμος) $\Leftrightarrow \alpha\,[\beta+(-\beta)]+(-\alpha)\cdot(-\beta)=$ $\alpha\beta+[\alpha+(-\alpha)]\cdot(-\beta) \Leftrightarrow \alpha\cdot 0+(-\alpha)\cdot(-\beta)=\alpha\beta+0\cdot(-\beta) \Leftrightarrow 0+(-\alpha)(-\beta)=$ $\alpha\beta+0 \Leftrightarrow (-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta$. Στά σύνολα Z καί Q πού μελετήσαμε καί πού εἶναι ἀντιμεταθετικοί δακτύλιοι μέ μονάδα ἰσχύει αὐτή ἡ ἰδιότητα. Ἐπίσης ἰσχύει στό σύνολο R.

9.5 Σέ ἕνα ἀντιμεταθετικό δακτύλιο μέ μονάδα $(\Delta, +, \cdot)$ ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall \alpha \in \Delta, \forall \beta \in \Delta$, $\alpha(-\beta)=(-\alpha)\beta=-(\alpha\beta)$. Τό $-(\alpha\beta)$ θά τό γράφουμε $-\alpha\beta$. Πραγματικά, $\alpha\cdot 0=0 \Leftrightarrow$ $\alpha\cdot[(-\beta)+\beta]=0 \Leftrightarrow \alpha\cdot(-\beta)+\alpha\beta=-(\alpha\beta)+\alpha\beta) \Leftrightarrow \alpha(-\beta)=-(\alpha\beta)$. Ὅμοια ἀποδείχνεται καί ἡ $(-\alpha)\beta = -(\alpha\beta)$. Ἡ ἰδιότητα αὐτή ἰσχύει στά σύνολα Z καί Q πού μελετήσαμε καί πού εἶναι ἀντιμεταθετικοί δακτύλιοι μέ μονάδα. Ἐπίσης στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν R.

10. Διατεταγμένοι δακτύλιοι.

10.1 Ἕνας δακτύλιος $(\Delta, +, \cdot)$ εἶναι διατεταγμένος (ὁλικά) ἄν καί μόνο ἄν ὑπάρχει πάντοτε ἕνα γνήσιο ὑποσύνολο Δ^+ τοῦ Δ καί ἰσχύουν οἱ ἑπόμενες ἰδιότητες.

(α΄) $\forall \alpha \in \Delta^+, \forall \beta \in \Delta^+,\ \alpha+\beta \in \Delta^+$

(β΄) $\forall \alpha \in \Delta^+, \forall \beta \in \Delta^+,\ \alpha\beta \in \Delta^+$

(γ΄) $\forall \alpha \in \Delta,\quad \alpha \in \Delta^+ \veebar -\alpha \in \Delta^+ \veebar \alpha=0$

Ἡ πρόταση (γ΄) εἶναι ὁ <u>νόμος τῆς τριχοτομίας.</u> Τά στοιχεῖα τοῦ Δ^+ ὀνομάζονται <u>θετικά</u> στοιχεῖα τοῦ Δ. Τά στοιχεῖα τοῦ Δ πού τά ἀντίθετά τους εἶναι στοιχεῖα τοῦ Δ^+ ὀνομάζονται <u>ἀρνητικά</u> στοιχεῖα τοῦ Δ.

10.2 Οἱ δακτύλιοι Z καί Q πού ἔχουμε μελετήσει εἶναι διατεταγμένοι. Ἐπίσης διατεταγμένος εἶναι ὁ δακτύλιος (R, +, ·). (Βλέπετε κεφ. VIII).

10.3 Σέ ἕνα διατεταγμένο δακτύλιο (Δ, +,·) ὁρίζεται ἡ σχέση τοῦ "μικρότερου" πού τή συμβολίζουμε μέ $<$ ὡσεξῆς:

$$\alpha<\beta \text{ στό } \Delta \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} \beta-\alpha \in \Delta^+$$

Μέ β-α παριστάνουμε τό β+(-α). Ἡ σχέση εἶναι ἀναυτοπαθής, δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall \alpha \in \Delta,\ \alpha \not< \alpha$. Πραγματικά, εἶναι $\alpha-\alpha=\alpha+(-\alpha)=0$ στό Δ καί κατά τό νόμο τῆς τριχοτομίας (παρ. 10.1) εἶναι ψευδής ἡ $\alpha-\alpha \in \Delta^+$ δηλαδή (σύμφωνα μέ τόν δοθέντα παραπάνω ὁρισμό) εἶναι ψευδής ἡ $\alpha<\alpha$ γιά ὅλα τά α τοῦ Δ, ἰσχύει συνεπῶς ἡ πρόταση $\forall \alpha \in \Delta,\ \alpha \not< \alpha$ καί ἡ $<$ εἶναι ἀναυτοπαθής στό Δ.

Ἡ σχέση $<$ εἶναι μεταβατική δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall \alpha \in \Delta, \forall \beta \in \Delta, \forall \gamma \in \Delta,\ \alpha<\beta \wedge \beta<\gamma \Rightarrow \alpha<\gamma$. Πραγματικά, $\alpha<\beta \wedge \beta<\gamma \Rightarrow (\beta-\alpha) \in \Delta^+ \wedge (\gamma-\beta) \in \Delta^+$ (παρ. 10.1α') $[(\beta-\alpha)+(\gamma-\beta)] \in \Delta^+ \Rightarrow [(\beta-\beta)+(\gamma-\alpha)] \in \Delta^+ \Rightarrow 0+(\gamma-\alpha) \in \Delta^+ \Rightarrow (\gamma-\alpha) \in \Delta^+ \Rightarrow \alpha<\gamma$ στό Δ.

Ἡ σχέση $<$ λοιπόν στόν διατεταγμένο δακτύλιο (Δ, +,·) εἶναι σχέση γνήσιας διάταξης (ἀναυτοπαθής καί μεταβατική). Ἡ σχέση αὐτή γνήσιας διάταξης εἶναι ὁλική γιατί ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall\alpha \in \Delta, \forall\beta \in \Delta, \alpha<\beta \,\underline{\vee}\, \beta<\alpha \,\underline{\vee}\, \alpha=\beta$ (νόμος τῆς τριχοτομίας ὡς πρός τήν $<$). Πραγματικά, (παρ.10.1γ') ἰσχύει ἡ πρόταση (νόμος τριχοτομίας) $\forall(\alpha-\beta) \in \Delta,\ \alpha-\beta \in \Delta^+ \,\underline{\vee}\, -(\alpha-\beta) \in \Delta^+ \,\underline{\vee}\, \alpha-\beta = 0$ πού συνεπάγεται τήν παραπάνω πρόταση.

10.4 Ἰσχύει ἡ πρόταση $\alpha \in \Delta^+ \Leftrightarrow 0<\alpha$ στό Δ. Πραγματικά $\alpha \in \Delta^+ \Leftrightarrow \alpha+0 \in \Delta^+ \Leftrightarrow \alpha+(-0) \in \Delta^+ \Leftrightarrow \alpha-0 \in \Delta^+ \Leftrightarrow 0<\alpha$ στό Δ. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Leftrightarrow$ ἰσχύει τελικά ἡ $\alpha \in \Delta^+ \Leftrightarrow 0<\alpha$ στό Δ.

Ἰσχύει ἡ πρόταση $-\alpha \in \Delta^+ \Leftrightarrow \alpha < 0$ στό Δ. Πραγματικά, $-\alpha \in \Delta^+ \Leftrightarrow 0+(-\alpha) \in \Delta^+ \Leftrightarrow 0-\alpha \in \Delta^+ \Leftrightarrow \alpha < 0$ στό Δ.

Μετά ἀπό αὐτά μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι, μόνο τά θετικά στοιχεῖα τοῦ Δ εἶναι μεγαλύτερα ἀπό τό μηδέν τοῦ Δ (ἀπό τό οὐδέτερο στοιχεῖο τοῦ Δ ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης). Μόνο τά ἀρνητικά στοιχεῖα τοῦ Δ εἶναι μικρότερα ἀπό τό μηδενικό στοιχεῖο τοῦ Δ. Οἱ ἰδιότητες αὐτές μποροῦν νά χρησιμεύσουν καί σάν ὁρισμοί τῶν θετικῶν καί τῶν ἀρνητικῶν στοιχείων τοῦ Δ.

10.5 Στόν ἀντιμεταθετικό δακτύλιο μέ μονάδα $(\Delta, +, \cdot)$ κάθε ἀρνητικό στοιχεῖο α εἶναι μικρότερο ἀπό κάθε θετικό στοιχεῖο του Θ, δηλαδή ἰσχύει ἡ $\alpha < \Theta$. Πραγματικά, ἡ διαφορά $\Theta-\alpha=\Theta+(-\alpha)$ εἶναι θετική ἀφοῦ Θ εἶναι θετικός καί $-\alpha$ εἶναι θετικός (παρ. 10.1γ'). Εἶναι λοιπόν $\Theta-\alpha \in \Delta^+$ καί $\alpha < \Theta$. Διαφορετικά: ἰσχύουν οἱ $\alpha < 0$ καί $0 < \Theta$ καί ἡ $<$ εἶναι μεταβατική. Ἄρα $\alpha < \Theta$.

10.6 Θά ἀποδείξουμε στόν $(\Delta, +, \cdot)$ τήν πρόταση

$$\alpha < \beta \wedge \gamma < 0 \text{ στό } \Delta \Rightarrow \beta\gamma < \alpha\gamma \text{ στό } \Delta.$$

Πραγματικά, $\alpha < \beta \wedge \gamma < 0$ στό $\Delta \Rightarrow (\beta-\alpha) \in \Delta^+ \wedge -\gamma \in \Delta^+$ (παρ. 10.1) $(\beta-\alpha)(-\gamma) \in \Delta^+ \Rightarrow [\beta+(-\alpha)] \cdot (-\gamma) \in \Delta^+ \Rightarrow$ (ἐπιμεριστικός νόμος) $\beta(-\gamma)+(-\alpha)(-\gamma) \in \Delta^+ \Rightarrow -(\beta\gamma)+\alpha\gamma \in \Delta^+ \Rightarrow \alpha\gamma-\beta\gamma \in \Delta^+ \Rightarrow \beta\gamma < \alpha\gamma$ στό Δ. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Rightarrow$ ἰσχύει τελικά ἡ παραπάνω πρόταση.

10.7 Σέ ἕνα διατεταγμένο δακτύλιο ὁρίζεται καί ἡ ἔννοια τῆς ἀπόλυτης τιμῆς ἤ μέτρου ἑνός στοιχείου του. π.χ $|\alpha|$ εἶναι ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ α. Ὁρίζουμε: Ἄν $0 < \alpha$ τότε $|\alpha|=\alpha$, ἄν $\alpha < 0$ τότε $|\alpha|=-\alpha$ καί ἄν $\alpha=0$ τότε εἶναι $|\alpha|=\alpha$ ἀλλά καί $|\alpha|=-\alpha$ γιατί $|0|=0$ ἀλλά καί $|0|=-0$ $(-0=0)$. Ἰσχύει λοιπόν πάντοτε ἡ $0 \leqq |\alpha|$ δηλαδή γιά κάθε στοιχεῖο τοῦ διατεταγμένου δακτύλιου $(\Delta, +, \cdot)$.

10.8 Σέ ένα διατεταγμένο δακτύλιο $(\Delta, +, \cdot)$ ὁρίζεται καί ἡ σχέση $>$ τοῦ "μεγαλύτερου" καί δείχνεται μέ τόν ἴδιο τρόπο πού ἐφαρμόσαμε καί στή $<$ ὅτι εἶναι σχέση ὁλικῆς γνήσιας διάταξης στό Δ.

Ἔχουμε: $\beta > \alpha \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \alpha < \beta$. Ἐπίσης ἀπ᾽εὐθείας $\beta > \alpha$ στό $\Delta \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \beta - \alpha \in \Delta^+$ $(\beta - \alpha > 0)$.

Ἀκόμη ἔχουμε τή σχέση $\leqq$ τοῦ "μικρότερου ἤ ἴσου" στό Δ πού ὁρίζεται ἀπό τήν:

$$\alpha \leqq \beta \text{ στό } \Delta \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \beta - \alpha \in \Delta_{\circ}^{+} \quad (\Delta_{\circ}^{+} = \Delta^{+} \cup \{0\})$$

δηλαδή τήν $\alpha \leqq \beta$ στό $\Delta \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \alpha < \beta \,\underline{\vee}\, \alpha = \beta$ (μποροῦμε ἀντί γιά $\underline{\vee}$ νά βάλουμε καί $\vee$). Ἐπίσης ἡ σχέση $\geqq$ τοῦ "μεγαλύτερου ἤ ἴσου" ὁρίζεται ὡσεξῆς: $\beta \geqq \alpha$ στό $\Delta \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \alpha \leqq \beta$ στό Δ. Ἐπίσης ἀπ᾽εὐθείας $\beta \geqq \alpha$ στό $\Delta \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \beta > \alpha \,\underline{\vee}\, \alpha = \beta$ στό Δ. Ἀκόμη $\beta \geqq \alpha \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (\beta - \alpha) \in \Delta_{\circ}^{+}$. Οἱ σχέσεις $\leqq$ καί $\geqq$ ἀποδείχνεται εὔκολα ὅτι εἶναι σχέσεις διάταξης (αὐτοπαθεῖς, ἀντισυμμετρικές, μεταβατικές) στό Δ (στά κεφάλαια V καί VI τίς ἔχουμε ἀναπτύξει προκειμένου γιά τούς δακτύλιους Z καί Q).

11. Ἀκέραιες περιοχές. Μηδενοδιαιρέτες.

11.1 Ἀνάμεσα στόν ἀντιμεταθετικό δακτύλιο μέ μονάδα $(Z, +, \cdot)$ τῆς παρ. 8.1 καί στόν $(\mathcal{P}(E), \dot{+}, \cap)$ τῆς παρ. 8.5 ὑπάρχει μία διαφορά. Στόν Z ἕνα γινόμενο δύο στοιχείων του γιά νά εἶναι ἴσο μέ μηδέν πρέπει καί εἶναι ἀρκετό ἕνα τουλάχιστο ἀπό τά δύο στοιχεῖα του νά εἶναι μηδέν. Στόν $(\mathcal{P}(E), \dot{+}, \cap)$ εἶναι δυνατόν νά ἰσχύει ἡ $A \cap B = \emptyset$ (A καί B στοιχεῖα τοῦ $\mathcal{P}(E)$ καί $\emptyset$ τό μηδέν τοῦ δακτύλιου αὐτοῦ, δηλαδή τό οὐδέτερο στοιχεῖο του ὡς πρός τήν πράξη $\dot{+}$) χωρίς νά ἰσχύει ἡ $A = \emptyset$. Ἐπίσης ἡ $B = \emptyset$ π.χ ἄν $E = \{1,2,3,4,5\}$ καί $A = \{1,2\}$ $B = \{3,5\}$ εἶναι $\{1,2\} \cap \{3,5\} = \emptyset$ καί $\{1,2\} \neq \emptyset$, $\{3,5\} \neq \emptyset$. Στήν πρώτη περίπτωση λέμε ὅτι ὁ <u>ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μονάδα (Z, +,·) δέν ἔχει "μηδενοδιαιρέ -</u>

τες" ἤ ὅτι εἶναι ἀκέραια περιοχή. Ἔχουμε λοιπόν τούς ἑπόμενους ὁρισμούς.

"Ἕνα στοιχεῖο α τοῦ ἀντιμεταθετικοῦ δακτύλιου μέ μονάδα $(\Delta, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας μηδενοδιαιρέτης ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση $\alpha\neq 0 \wedge (\exists\beta \in \Delta, \alpha\beta=\beta\alpha=0) \wedge \beta\neq 0$. Ἀπό τόν ὁρισμό αὐτό ἀμέσως φαίνεται ὅτι καί ὁ β εἶναι μηδενοδιαιρέτης.

Ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μονάδα εἶναι μία ἀκέραια περιοχή ἄν καί μόνο ἄν δέν ἔχει μηδενοδιαιρέτες, δηλαδή ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση $\alpha\beta=0 \Rightarrow \alpha=0 \vee \beta=0$.

11.2 Ὑπάρχει καί ἕνας ἄλλος, ἰσοδύναμος βέβαια, ὁρισμός τῆς ἀκέραιας περιοχῆς.

"Ὁ ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μονάδα $(\Delta,+,\cdot)$ εἶναι ἀκέραια περιοχή ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει στό Δ ἡ πρόταση $\gamma\neq 0 \wedge \gamma\lambda=\gamma\mu \Rightarrow \lambda=\mu$. Πρόκειται γιά τό νόμο τῆς διαγραφῆς ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (Ἰσχύει καί ἡ $\gamma\neq 0 \wedge \lambda\gamma=\mu\gamma \Rightarrow \lambda=\mu$)

11.3 Θά δείξουμε ὅτι οἱ ὁρισμοί τῆς ἀκέραιας περιοχῆς στίς παρ. 11.1 καί 11.2 εἶναι ἰσοδύναμοι. Πραγματικά, θά δείξουμε ὅτι ἄν σέ ἕνα ἀντιμεταθετικό δακτύλιο μέ μονάδα ἰσχύει ἡ $\alpha\beta=0 \Rightarrow \alpha=0 \vee \beta=0$ (παρ.11.1) τότε ἰσχύει καί ἡ $\gamma\neq 0 \wedge \gamma\lambda=\gamma\mu \Rightarrow \lambda=\mu$. Ἔχουμε: $\gamma\neq 0 \wedge \gamma\lambda=\gamma\mu \Rightarrow \gamma\neq 0 \wedge \gamma(\lambda-\mu)=0 \Rightarrow$ (ἄν γ εἶναι τό α καί λ-μ εἶναι τό β τῆς $\alpha\beta=0 \Rightarrow \alpha=0 \vee \beta=0$) $\lambda-\mu=0$ (περιττό νά γράψουμε $\gamma=0 \vee \lambda-\mu=0$ ἀφοῦ τήν περίπτωση $\gamma=0$ τήν ἔχουμε ἀποκλείσει ὑποθέτοντας $\gamma\neq 0$) $\Rightarrow \lambda=\mu$. Θά δείξουμε τώρα τό ἀντίστροφο δηλαδή ἄν σέ ἕνα ἀντιμεταθετικό δακτύλιο μέ μονάδα ἰσχύει ἡ $\gamma\neq 0 \wedge \gamma\lambda=\gamma\mu \Rightarrow \lambda=\mu$ τότε ἰσχύει καί ἡ $\alpha\beta=0 \Rightarrow \alpha=0 \vee \beta=0$. Ἔχουμε $(\gamma\neq 0 \wedge \gamma\lambda=\gamma\mu \Rightarrow \lambda=\mu) \Rightarrow (\gamma\neq 0 \wedge \gamma\lambda-\gamma\mu=0 \Rightarrow \lambda-\mu=0) \Rightarrow [\gamma\neq 0 \wedge \gamma(\lambda-\mu)=0 \Rightarrow \lambda-\mu=0] \Rightarrow$ (ἄν στή θέση τοῦ γ βάλουμε τό α καί στή θέση τοῦ λ-μ τό β) $\alpha\neq 0$

$\wedge \alpha\beta=0 \Rightarrow \beta=0$. Ἂν $\alpha=0$ τότε ἰσχύει ἡ $\alpha\beta=0 \Rightarrow \alpha=0$ (παρ. 9.3) καί ἄν λάβουμε ὑπόψη καί τήν προηγούμενη τότε ἰσχύει ἡ $\alpha\beta=0 \Rightarrow \alpha=0 \vee \beta=0$. Εἶναι δυνατόν ὅταν ἰσχύει ἡ $\alpha\beta=0$ νά ἰσχύουν καί ἡ $\alpha=0$ καί ἡ $\beta=0$ (παρ. 9.3)γι' αὐτό δέν μποροῦμε νά ἀντικαταστήσουμε γενικά τό $\vee$ ἀπό τό $\underline{\vee}$.

12 Διατεταγμένες ἀκέραιες περιοχές.

Μία ἀκέραια περιοχή εἶναι διατεταγμένη ἄν καί μόνο ἄν ὡς δακτύλιος θεωρούμενη εἶναι διατεταγμένος" π.χ ὁ δακτύλιος Z εἶναι διατεταγμένη ἀκέραια περιοχή. Ἡ ἀκέραια περιοχή $\{\alpha\}$ μέ $\alpha+\alpha=\alpha$ καί $\alpha\alpha=\alpha$ (παρ. 8.2) δέν εἶναι διατεταγμένη γιατί μηδενικό στοιχεῖο εἶναι τό α καί δέν ἔχει π.χ θετικά στοιχεῖα.

13. Σώματα.

13.1 Ἕνα σῶμα εἶναι ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μονάδα μέ δύο τουλάχιστο στοιχεῖα καί πού κάθε στοιχεῖο του ἐκτός ἀπό τό μηδενικό ἔχει ἀντίστροφο στοιχεῖο (συμμετρικό ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ).

13.2 Ἰσχύει ἡ πρόταση "Κάθε σῶμα (Σ, +, ·) εἶναι μιά ἀκέραια περιοχή".

Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι στό σῶμα (Σ, +, ·) ἰσχύει ὁ νόμος τῆς διαγραφῆς ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (παρ.11.2), δηλαδή ἡ πρόταση $\gamma\neq 0 \wedge \gamma\lambda=\gamma\mu \Rightarrow \lambda=\mu$. Πραγματικά, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ σώματος τό γ πού εἶναι διαφορετικό ἀπό τό μηδενικό στοιχεῖο τοῦ σώματος ἔχει ἀντίστροφο στοιχεῖο (συμμετρικό ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό) τό $\frac{1}{\gamma}$. Ἀπό τήν προφανή $\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\gamma}$ καί τήν ὑπόθεση $\gamma\lambda=\gamma\mu$ προκύπτει (παρ.7.1η') ἡ $\frac{1}{\gamma}(\gamma\lambda)=\frac{1}{\gamma}(\gamma\mu) \Rightarrow$ (στή συνέχεια) $(\frac{1}{\gamma}\cdot\gamma)\lambda=(\frac{1}{\gamma}\cdot\gamma)\mu$ (προσεταιριστικός νόμος) $\Rightarrow 1\cdot\lambda=1\cdot\mu \Rightarrow \lambda=\mu$. Ἰσχύει λοιπόν ὁ νόμος τῆς διαγραφῆς καί τό σῶμα Σ εἶναι μιά ἀκέραια περιοχή. Μέ ἄλλα λόγια, "Κάθε σῶμα $(\Sigma,+,\cdot)$ δέν ἔχει μηδενοδιαιρέτες".

13.3 Στά σώματα ὁρίζονται καί οἱ πράξεις τῆς ἀφαίρεσης καί τῆς διαίρεσης. Σχετικά μέ τήν ἀφαίρεση ἔχουμε:

$\alpha-\beta \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} \alpha+(-\beta)$ ὅπου $-\beta$ εἶναι τό ἀντίθετο πρός τό β στοιχεῖο. Ὁ ὁρισμός αὐτός ἰσχύει σέ κάθε προσθετική ὁμάδα καί φυσικά καί στό σῶμα ἀφοῦ αὐτό σάν ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μονάδα εἶναι ὁμάδα καί μάλιστα ἀβελιανή ὡς πρός τήν πρόσθεση. Σχετικά μέ τή διαίρεση στό σῶμα $(\Sigma, +,\cdot)$ διά στοιχείου διαφορετικοῦ ἀπό τό μηδέν ὁρίζουμε:

$\alpha:\beta$ (γράφουμε καί $\frac{\alpha}{\beta}$) $\underset{\text{ορσ}}{=}$ $\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$ ὅπου $\frac{1}{\beta}$ εἶναι τό ἀντίστροφο τοῦ στοιχείου $\beta\neq0$.

13.4 Ἕνα σῶμα $(\Sigma, +, \cdot)$ εἶναι διατεταγμένο ἄν καί μόνο ἄν σάν δακτύλιος θεωρούμενο εἶναι διατεταγμένος

13.5 Τά σύνολα Q τῶν ρητῶν, R τῶν πραγματικῶν καί C τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι σώματα ὡς πρός τίς γνωστές ἀπό τήν Ἄλγεβρα πράξεις τῆς πρόσθεσης καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Τό σύνολο $\{0,1\}$ εἶναι σῶμα ἄν οἱ πράξεις ὁριστοῦν ὡσεξῆς:

$0+0 = 1+1 = 0\cdot0 = 0\cdot1 = 1\cdot0 = 0$ καί

$0+1 = 1+0 = 1\cdot1 = 1$

Σῶμα εἶναι καί τό σύνολο $\{\alpha+\beta\sqrt{2}: \alpha\in Q$ καί $\beta\in Q\}$ ὡς πρός τίς γνωστές ἀπό τήν Ἄλγεβρα πράξεις τῆς πρόσθεσης καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

. Ἀσκήσεις

1. Τό σύνολο τῶν ρητῶν $\frac{\alpha}{\beta}$ μέ α καί β ἀκέραιους περιττούς εἶναι ὁμάδα ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς Ἀριθμητικῆς.

2. Ὁρίζουμε στό Z τήν πράξη ∘ ὡσεξῆς: $\alpha\circ\beta=\max(\alpha,\beta)$ ὅπου τό $\max(\alpha,\beta)$ εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀπό τούς ἀκεραίους α καί β ἤ ἕνας ἀπό αὐτούς ἄν $\alpha=\beta$. Εἶναι ὁμάδα ἡ $(Z,\circ)$ ἤ ὄχι; Εἶναι ἡμιομάδα ἤ ὄχι;

3. Στό σύνολο $R-\{1\}$ ὁρίζουμε τήν πράξη π μέ τήν $\alpha\,\pi\,\beta = \alpha+\beta-\alpha\cdot\beta$ ὅπου + καί · εἶναι οἱ γνωστές ἀπό τήν Ἀριθμητική πράξεις. Νά δειχτεῖ ὅτι ἡ $(R-\{1\},\pi)$ εἶναι ὁμάδα (R εἶναι τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν).

4. Νά δειχτεῖ ὅτι τό σύνολο $K=\{1,-1,i,-i\}$ ὑποσύνολο τοῦ C εἶναι ὁμάδα ἀβελιανή ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μιγαδικῶν (C εἶναι τό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί τά στοιχεῖα τοῦ K εἶναι οἱ 4 τέταρτες ρίζες τοῦ 1).

5. Ἄν τό ἀξίωμα δ΄ τῆς παρ.1.1 ἀντικατασταθεῖ ἀπό τό $\exists\tau\in H$, $\forall x\in H$, $x\,\pi\,\tau=x$ καί τά ἀξιώματα α΄-γ΄ καί ε΄ μείνουν ὅπως εἶναι ἔχουμε πάλι ὁρισμό τῆς ὁμάδας ἤ ὄχι;

6. Ἄν τό ἀξίωμα ε΄ τῆς παρ.1.1 ἀντικατασταθεῖ ἀπό τό $\forall x\in H$, $\exists x'\in H$, $x\,\pi\,x'=\tau$ καί τά α΄-δ΄ μείνουν ἀμετάβλητα ἔχουμε πάλι ὁρισμό τῆς ὁμάδας ἤ ὄχι;

7. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ ὁρισμός τῆς ἀβελιανῆς ὁμάδας στήν παράγραφο 1.1 (ἰδιότητες α΄-στ΄) εἶναι ἰσοδύναμος μέ αὐτόν πού προκύπτει ἄν οἱ ἰδιότητες γ΄ καί στ΄ ἀντικατασταθοῦν ἀπό τήν ἰσχύ τῆς $\forall x\in H$, $\forall\psi\in H$, $\forall\omega\in H$, $(x\,\pi\,\psi)\,\pi\,\omega=x\,\pi\,(\omega\,\pi\,\psi)$.

8. Νά δειχτεῖ ὅτι σέ μία ὁμάδα μέ ἄρτιο ἀριθμό στοιχείων ὑπάρχει ἐκτός ἀπό τό οὐδέτερο ἀκόμη ἕνα στοιχεῖο πού ἔχει γιά συμμετρικό στοιχεῖο τόν ἑαυτό του.

9. Ἀποδεῖξτε ὅτι μία ὁμάδα μέ 4 τό πολύ στοιχεῖα εἶναι ἀναγκαστικά ἀβελιανή. Ἰσχύει τό ἀντίστροφο ἤ ὄχι; Ἀπαντῆστε μέ ἕνα παράδειγμα.

10. Νά δειχτεῖ ὅτι ἄν γιά κάποιο στοιχεῖο τῆς ὁμάδας(H, π) ἰσχύει ἡ $x\pi x = x$ τότε εἶναι $x=\tau$.

11. Οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί μέ μέτρο 1 συνιστοῦν ὁμάδα ἤ ὄχι ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν μιγαδικῶν;

12. Οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί μέ μέτρο 1 καί τήν πράξη π ὁριζόμενη ἀπό τήν: $\alpha\pi\beta = |\alpha|\cdot\beta$ ($\cdot$ εἶναι ὁ γνωστός μας πολλαπλασιασμός στό C) συνιστοῦν ὁμάδα ἤ ὄχι;

13. Οἱ ἀκέραιοι συνιστοῦν ὁμάδα ὡς πρός τήν πράξη τῆς ἀφαίρεσης ἤ ὄχι;

14. Νά δειχτεῖ ὅτι στόν ὁρισμό τῆς ὁμάδας τῆς παρ. 1.1 (α΄-ε΄) ἄν ἀντικατασταθοῦν οἱ ἰδιότητες δ΄καί ε΄ἀπό τήν ἀπαίτηση νά ἔχουν λύση οἱ ἐξισώσεις $\alpha\pi x = \beta$ καί $\psi\pi\alpha = \beta$ στό H γιά ὁποιαδήποτε στοιχεῖα α καί β τοῦ H, προκύπτει ἕνας ἰσοδύναμος ὁρισμός τῆς ὁμάδας.

15. Σέ μία ὁμάδα ὁρίζουμε $(\alpha_1\pi\alpha_2\pi\ldots\pi\alpha_{n-1})\pi\alpha_n = \alpha_1\pi\alpha_2\pi\ldots\pi\alpha_{n-1}\pi\alpha_n$ γιά $n \geqq 3$. Νά δειχτεῖ λοιπόν ὅτι σέ μία ὁμάδα ἰσχύουν οἱ:

(1) $(\alpha_1\pi\alpha_2\pi\ldots\pi\alpha_{n-1}\pi\alpha_n)' = \alpha_n'\pi\alpha_{n-1}'\pi\ldots\pi\alpha_2'\pi\alpha_1'$

(2) $\alpha^m\pi\alpha^n = \alpha^{m+n}$ ὅπου $m, n, m+n$ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί καί ὄχι στοιχεῖα τῆς ὁμάδας καί + ἡ πρόσθεση φυσικῶν ἀριθμῶν.

(3) $(\alpha^m)^n = \alpha^{mn}$ μέ mn τό γινόμενο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν m καί n.

(4) $(\alpha\pi\beta)^n = \alpha^n\pi\beta^n$ μέ α καί β στοιχεῖα ἀβελιανῆς ὁμάδας.

ὁρίζουμε ἐπίσης ὅτι $\underbrace{\alpha\pi\alpha\pi\alpha\pi\ldots\pi\alpha}_{n \text{ φορές}} = \alpha^n$

16. Νά δειχτεῖ ὅτι τό σύνολο τῶν ἄρτιων ἀκεραίων μέ πράξεις τήν πρόσθεση καί τόν πολλαπλασιασμό πού γνωρίζουμε ἀπό τήν Ἀριθμητική εἶναι ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος χωρίς μονάδα.

17. Νά δειχτεῖ ὅτι τό σύνολο τῶν ρητῶν τῆς μορφῆς $\frac{\alpha}{7}$ μέ

$\alpha \in Z$ καί πράξεις τή γνωστή άπό τήν Ἀριθμητική πρόσθεση καί τόν πολλαπλασιασμό ο ὀριζόμενο ἀπό τήν

$\frac{\alpha}{7} \circ \frac{\beta}{7} = \frac{\alpha\beta}{7}$ εἶναι ἀκέραια περιοχή.

18. Οἱ πράξεις + καί x ἐκτελοῦνται στό σύνολο $A=\{0,1,2,3\}$ ὅπως φαίνεται στούς δύο ἐπόμενους πίνακες.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

x	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ (A, +, x) εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μονάδα ἀλλά ὄχι ἀκέραια περιοχή. (ὁ πρῶτος ὅρος τῆς πράξης + ἤ x λαμβάνεται ἀπό τήν πρώτη ἀριστερά στήλη καί ὁ δεύτερος ἀπό τήν πρώτη πάνω γραμμή. Τό ἀποτέλεσμα εἶναι στή διασταύρωση).

19. Νά δειχτεῖ ὅτι ἕνας δακτύλιος μέ ἕνα μόνο στοιχεῖο εἶναι μία ἀκέραια περιοχή.

20 Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μονάδα τῆς παρ. 8.4 δέν εἶναι ἀκέραια περιοχή. Νά ἀναφέρετε δύο μηδενοδιαιρέτες.

21. Στόν ἀντιμεταθετικό δακτύλιο μέ μονάδα $(\Delta, +, \cdot)$ νά δειχτεῖ ἡ $(n\alpha)\beta = \alpha(n\beta) = n(\alpha\beta)$ ὅπου $\alpha \in \Delta$, $\beta \in \Delta$ καί $n \in N$ π.χ $n\alpha = \alpha+\alpha+\alpha+...+\alpha$ (n φορές). Ἐπίσης ἡ $(n\alpha)(m\beta) = (mn)\alpha\beta$ (ἐπίσης $m \in N$).

22. Νά δειχτοῦν οἱ παρακάτω προτάσεις στόν ἀντιμεταθετικό δακτύλιο μέ μονάδα $(\Delta,+,\cdot)$

(1) $\alpha-\beta=\gamma-\delta \Leftrightarrow \alpha+\delta=\beta+\gamma$

(2) $(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)$

(3) $(\alpha-\beta)-(\gamma-\delta)=(\alpha+\delta)-(\beta+\gamma)$

(4) $(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)=(\alpha\gamma+\beta\delta)-(\alpha\delta+\beta\gamma)$

γιά ὁποιαδήποτε στοιχεῖα $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ τοῦ Δ.

23. Νά δειχτεῖ ὅτι σέ μία διατεταγμένη περιοχή ἰσχύουν οἱ ἑπόμενες προτάσεις.

(1) $\alpha<\beta \Longleftrightarrow \alpha+\gamma<\beta+\gamma$

(2) $x>\psi \Longleftrightarrow \alpha-x<\alpha-\psi$

(3) $\alpha<0 \wedge x<\psi \Longleftrightarrow \alpha x>\alpha\psi \wedge \alpha<0$

(4) $x+x+x+x=0 \Rightarrow x=0$

24. Νά δειχτεῖ ὅτι μία ἀκέραια περιοχή δέν εἶναι ὑποχρεωτικά σῶμα.

25. Ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μονάδα καί μηδενοδιαιρέτες μπορεῖ νά εἶναι σῶμα ἤ ὄχι;

26. Νά δειχτεῖ ὅτι ἄν ὁ δακτύλιος $(\Delta,+,\cdot)$ ἔχει πεπερασμένο πλῆθος στοιχείων ὅμως ὄχι λιγότερα ἀπό δύο ἤ ἄν δέν ἔχει μηδενοδιαιρέτες τότε εἶναι ἕνα σῶμα.

27. Νά δειχτοῦν στό σῶμα $(\Sigma,+,\cdot)$ οἱ ἰσότητες:

$$\frac{\alpha}{\beta} \pm \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta\pm\beta\gamma}{\beta\delta}, \quad \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}, \quad \frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

(στίς δύο πρῶτες $\beta\neq0$, $\delta\neq0$ καί στήν τρίτη ἐπί πλέον $\gamma\neq0$).

28. Ἄν τό $(\Sigma,+,\cdot)$ εἶναι σῶμα, νά δειχτεῖ ὅτι τό $(\Sigma-\{0\},\cdot)$ εἶναι ἀβελιανή ὁμάδα ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

29. Δίνουμε τόν ἑπόμενο ὁρισμό τοῦ σώματος καί βάζουμε τό ἐρώτημα <u>ἄν εἶναι ἐπαρκής ἤ ὄχι</u> "Τό σύνολο Σ εἶναι ἕνα σῶμα ἄν καί μόνο ἄν εἶναι ἀβελιανή ὁμάδα ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης καί τό $\Sigma-\{0\}$ εἶναι ἐπίσης ἀβελιανή ὁμάδα ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ".

30. Γιατί ὁ ὁρισμός τῆς ὑποομάδας στήν παρ.4 συνεπάγεται τήν $H_1\subseteqq H$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΜΕ ΟΡΟΥΣ ΡΗΤΟΥΣ

1. Ἄρρητοι ἢ ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

Ὁ λόγος τῆς διαγωνίου τετραγώνου πρός τήν πλευρά του δέν εἶναι ἀριθμός ρητός. Πραγματικά, ἄν x εἶναι τό μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου, σύμφωνα μέ τό πυθαγόρειο θεώρημα θά εἶναι $x^2+x^2=2x^2$ τό τετράγωνο τοῦ μήκους τῆς διαγωνίου καί συνεπῶς τό τετράγωνο τοῦ λόγου θά εἶναι $\frac{2x^2}{x^2}=2$. Ἄν λοιπόν ὑπῆρχε ρητός $\frac{\mu}{\nu}$ $(\mu\in Z, \nu\in Z-\{0\})$ τέτοιος ὥστε νά ἰσχύει ἡ $\frac{\mu^2}{\nu^2}=2$ θά ἴσχυε τότε καί ἡ ἰσοδύναμη $\mu^2=2\nu^2$. Τά μ^2 καί $2\nu^2$ ἀναλυόμενα σέ γινόμενα πρώτων παραγόντων δέν περιέχουν τόν παράγοντα 2 μέ τόν ἴδιο ἐκθέτη. Πραγματικά ὁ μ^2 ἤ δέν τόν περιέχει καθόλου (ἄν τό μ δέν τόν περιέχει) ἤ τόν περιέχει σέ ἄρτια δύναμη (σέ ὁποιαδήποτε δύναμη καί ἄν τόν περιέχει τό μ), ὅμως ὁ $2\nu^2$ τόν περιέχει πάντοτε καί σέ περιττή δύναμη (σέ ὁποιαδήποτε δύναμη καί ἄν περιέχει τόν 2 ὁ ν). Κατά τό θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Ἀριθμητικῆς λοιπόν δέν μπορεῖ νά ἰσχύει ἡ $\mu^2=2\nu^2$ καί συνεπῶς δέν ὑπάρχει ρητός $\frac{\mu}{\nu}$ τοῦ ὁποίου τό τετράγωνο νά εἶναι δύο. Ὅμοια ἀποδείχνεται ὅτι καί ἡ ἐξίσωση $\psi^2=3$ δέν ἔχει ρητές λύσεις. Ἡ λύση της εἶναι ἕνας ἄρρητος ἤ ἀσύμμετρος ἀριθμός πού θά τόν συμβολίζουμε μέ $\sqrt{3}$. Ἐπίσης καί ὁ ἀντίθετός του $-\sqrt{3}$. Εὔκολα φαίνεται ὅτι ὁ λόγος τῆς διαγωνίου κύβου πρός μίαν ἀκμή του εἶναι ἴσος μέ $\sqrt{3}$. Οἱ ἀσύμμετροι $\pm\sqrt{2}$ καί $\pm\sqrt{3}$ εἴδαμε ὅτι εἶναι λύσεις ἀντίστοιχα τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων $x^2-2=0$, καί $x^2-3=0$ ὅμως ἀποδείχνεται ὅτι ὑπάρχουν καί ἀσύμμετροι ἀριθμοί πού δέν εἶναι λύσεις ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων ὅπως οἱ παραπάνω μέ ρητούς συντελεστές. Οἱ ἄρρητοι τῆς κατηγορίας αὐτῆς ὀνομάζονται ὑπερβατικοί ἀριθμοί. Οἱ μή ὑπερβατικοί ἀριθμοί ὀνομάζονται ἀλγεβρικοί ἀριθμοί. Οἱ ἀναφερθέντες συνεπῶς ἄρρητοι $\pm\sqrt{2}$ καί $\pm\sqrt{3}$ εἶναι ἀλγεβρικοί ἄρρητοι ἀριθμοί. Οἱ ρητοί ἀριθμοί εἶναι ἐπίσης ἀλγεβρικοί.

Ἀπό τά παραπάνω προκύπτει ὅτι εἶναι ἀνάγκη νά ἐπεκτείνουμε τό σύνολο τῶν ρητῶν. Τό νέο σύνολο εἶναι τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν στό ὁποῖο ἐνσωματώνεται ἰσομορφικά ὅπως θά δοῦμε τό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

Θά χρειαστοῦμε τή θεωρία τῶν ἀκολουθιῶν μέ ρητούς ὅρους πού ἀναφέρουμε στήν ἑπόμενη παράγραφο.

2. Ἀκολουθίες μέ ὅρους ρητούς ἀριθμούς.

2.1 Στά ἑπόμενα θά θεωροῦμε ὅτι οἱ ἀκολουθίες ἔχουν ὅρους πού εἶναι ρητοί ἀριθμοί. Θά τίς παριστάνουμε μέ τά σύμβολα (α_n), (β_n) κ.λπ. καί ὄχι μέ τά $(\alpha_n)_{n\in N}$, $(\beta_n)_{n\in N}$. Θά ἔχουμε ἀκόμη ὑπόψη μας καί τά ἀνεφερθέντα στό κεφ. ΙΙ παρ.16.

2.2 Μία ἀκολουθία (α_n) μέ ὅρους ρητούς ἀριθμούς θά λέμε ὅτι εἶναι μηδενική ἤ ὅτι ἔχει ὅριο τό μηδέν ἤ ὅτι τείνει στό μηδέν ἤ ὅτι συγκλίνει πρός τό μηδέν, ἄν καί μόνο ἄν ὅταν δοθεῖ ἕνας ὁποιοσδήποτε θετικός ρητός ε ὑπάρχει πάντοτε ἕνας θετικός ρητός Μ (Τόν γράφουμε καί Μ(ε) ἐπειδή ἐξαρτᾶται ἀπό τήν τιμή τοῦ ε) τέτοιος ὥστε γιά δεῖκτες (φυσικούς ἀριθμούς) $n > M(\varepsilon)$ νά ἰσχύει ἡ $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Μέ τό συμβολισμό $\alpha_n \to 0$ ἤ $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ ἤ $\underset{n\to\infty}{\text{Ορ.}}\,\alpha_n = 0$ δηλώνουμε ὅτι ἡ ἀκολουθία (α_n) εἶναι μηδενική.

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω ὁ ὁρισμός τῆς μηδενικῆς ἀκολουθίας συμβολικά εἶναι ὁ ἑπόμενος.

$\alpha_n \to 0 \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon \in Q^+,\ \exists M(\varepsilon) \in Q^+,\ \forall n \in \{n \in N : n > M(\varepsilon)\},\ |\alpha_n| < \varepsilon$

(Ἰσοδύναμα ἡ: $-\varepsilon < \alpha_n < \varepsilon$)

2.3 Θά λέμε ὅτι οἱ ὅροι μιᾶς ἀκολουθίας ἱκανοποιοῦν τελικά κάποια σχέση Α ἄν καί μόνο ἄν ὑπάρχει θετικός ρητός Μ τέτοιας ὥστε γιά δεῖκτες (φυσικούς ἀριθμούς) $n > M$ νά ἰσχύει ἡ σχέση Α. π.χ στήν περίπτωση τῆς μηδενικῆς ἀκολουθίας ἰσχύει τελικά ἡ σχέση $|\alpha_n| < \varepsilon$.

2.4 Ἡ ἀκολουθία (α_n) μέ τύπο $\alpha_n = 0$ γιά κάθε $n \in N$, εἶναι μηδενική γιατί ἡ $|\alpha_n| < \varepsilon$ δηλαδή ἡ $|0| < \varepsilon$ ἰσχύει γιά ὅλους τούς δεῖκτες n καί γιά κάθε $\varepsilon \in Q^+$. Ἡ ἀκολουθία (β_n) μέ τύπο :

$$\beta_n = \begin{cases} 852 & \text{ἄν } n \leq 500 \\ 0 & \text{ἄν } n > 500 \end{cases}$$

εἶναι μηδενική γιατί ἰσχύει τελικά ἡ $|\beta_n| < \varepsilon$ (π.χ γιά $n > 500$ καί γιά ὁποιοδήποτε ε)

Ἡ ἀκολουθία (γ_n) μέ τύπο $\gamma_n = \frac{1}{n}$ $(n \in N)$ δηλαδή ἡ ἀκολουθία μέ ὅρους τούς $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ εἶναι μηδενική. Πραγματικά, γιά τό θετικό ρητό ε θέτουμε $M(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ καί γιά $n > \frac{1}{\varepsilon}$ εἶναι $|\gamma_n| < \varepsilon$ π.χ γιά $\varepsilon = \frac{1}{100}$ εἶναι $M(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} = 100$ καί εἶναι γιά $n > 100$ $|\gamma_n| < \frac{1}{100}$ δηλαδή $\left|\frac{1}{101}\right| < \frac{1}{100}$, $\left|\frac{1}{102}\right| < \frac{1}{100}$ κ.λπ. Ἄν $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ εἶναι

$M(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} = 1000$ καί γιά $n > 1000$ εἶναι $|\gamma_n| < \frac{1}{1000}$ δηλαδή $\left|\frac{1}{1001}\right| < \frac{1}{1000}$, $\left|\frac{1}{1002}\right| < \frac{1}{1000}$ κ.λπ.

Τό ἴδιο μηδενική εἶναι προφανῶς καί ἡ ἀκολουθία (δ_n) μέ τύπο τόν $\delta_n = -\frac{1}{n}$ δηλαδή μέ ὅρους ἀρνητικούς ρητούς.

Ἡ ἀκολουθία (λ_n) μέ τύπο τόν $\lambda_n = \omega^n$ καί ω ὁποιοδήποτε ρητό μέ $|\omega| < 1$, εἶναι μηδενική. Πραγματικά ἄν $\omega = 0$ εἶναι καί $|\omega^n| = 0 < \varepsilon$ καί ἡ ἀκολουθία εἶναι μηδενική γιατί εἴμαστε στήν περίπτωση τῆς (α_n) πού ἀναφέραμε στήν ἀρχή αὐτῆς τῆς παραγράφου. Ἐξετάζουμε τήν περίπτωση λοιπόν $0 < |\omega| < 1$ μέ $\omega \in Q$. Αὐτή συνεπάγεται τήν $\frac{1}{|\omega|} > 1$ καί ἔτσι ὑπάρχει θετικός ρητός Θ τέτοιος ὥστε νά ἰσχύει ἡ $\frac{1}{|\omega|} = 1+\Theta \Rightarrow \frac{1}{|\omega|}^n = (1+\Theta)^n \Rightarrow \frac{1}{|\omega^n|} = (1+\Theta)^n \Rightarrow |\omega^n| = \frac{1}{(1+\Theta)^n} \Rightarrow |\omega^n| \leq \frac{1}{1+n\Theta}$ (γιατί $(1+\Theta)^n \geqq 1+n\Theta) \Rightarrow |\omega^n| < \frac{1}{n\Theta}$. Ἄν δοθεῖ λοιπόν ἕνας ὁποιοσδήποτε θετικός ρητός ε μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τό n ὥστε νά ἰσχύει ἡ $\frac{1}{n\Theta} < \varepsilon$. Ἔχουμε $n > \frac{1}{\varepsilon\Theta}$. Ἔτσι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό n μεγαλύτερο ἀπό τόν θετικό ρητό $M(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon\Theta}$ θά ἰσχύει ἡ $\frac{1}{n\Theta} < \varepsilon$ καί συνεπῶς καί ἡ $|\omega^n| < \varepsilon$. Ἡ (λ_n) λοιπόν εἶναι μηδενική.

Ἡ ἀκολουθία (μ_n) μέ τύπο τόν $\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{ἄν n περιττός} \\ 1 & \text{ἄν n ἄρτιος} \end{cases}$

δέν εἶναι μηδενική. Βέβαια, ἄν $\varepsilon = 2$ τότε ἰσχύει ἡ $|\mu_n| < 2$ γιά ὅλα τά n ἀπό τό N, γιατί ἰσχύουν οἱ $|0| < 2$ καί $|1| < 2$. Ὅμως ὑπάρχει τιμή τοῦ ε π.χ ἡ $\varepsilon = \frac{1}{2}$ τέτοια πού δέν ἰσχύει τελικά ἡ $|\mu_n| < \frac{1}{2}$ ἀφοῦ π.χ ἡ $|1| < \frac{1}{2}$ εἶναι ψευδής καί οἱ ὅροι οἱ ἴσοι μέ 1 δέν τελειώνουν κάπου ἀλλά ἐπαναλαμβάνονται.

2.5 Ἡ ἀκολουθία (α_n) μέ γενικό ὅρο τόν $\alpha_n = \alpha \in Q$ εἶναι μιά <u>σταθερή ἀκολουθία</u> πού οἱ ὅροι της εἶναι ἴσοι μέ τόν ρητό ἀριθμό α. Ἐπίσης ἡ ἀκολουθία (β_n) μέ γενικό ὅρο τόν $\beta_n = \begin{cases} n \text{ γιά } n \leqq 4 \\ K \in Q \text{ γιά } n > 4 \end{cases}$

δηλαδή ἡ ἀκολουθία μέ ὅρους τούς 1,2,3,4,K,K,K,K,.. εἶναι μιά <u>τελικά σταθερή ἀκολουθία.</u> Ἔχουμε δηλαδή τελικά $\beta_n = K$.

2.6 <u>Μία ἀκολουθία (α_n) μέ ὅρους ρητούς εἶναι φραγμένη στό Q ἄν καί μόνο ἄν τό σύνολο α(N) τῶν τιμῶν της εἶναι φραγμένο στό Q. Μέ ἄλλα λόγια, ἄν καί μόνο ἄν ὑπάρχουν ρητοί φ' καί φ'' τέτοιοι ὥστε νά ἰσχύει ἡ: $\varphi' \leqq \alpha_n \leqq \varphi''$ γιά κάθε n στοιχεῖο τοῦ N.</u> Εὔκολα φαίνεται ὅτι ὅταν ἰσχύει ἡ $\varphi' \leqq \alpha_n \leqq \varphi''$ ἰσχύει καί ἡ $-\varphi \leqq \alpha_n \leqq \varphi$ ἄν μέ φ παραστήσουμε τόν μεγαλύτερο ἀπό τούς ρητούς $|\varphi'|$ καί $|\varphi''|$. Ἀντίστροφα ὅταν ἰσχύει ἡ $-\varphi \leqq \alpha_n \leqq \varphi$ ἰσχύει καί μία σχέση $\varphi' \leqq \alpha_n \leqq \varphi''$ ἄν θέσουμε $-\varphi = \varphi'$ καί $\varphi = \varphi''$. Θά δείξουμε τήν ἰσοδυναμία:

$\forall n \in N, -\varphi \leqq \alpha_n \leqq \varphi \Leftrightarrow |\alpha_n| \leqq \varphi$. Ἄν $\alpha_n \geqq 0$ γιά κάποιο n ἀπό τό N καί ἰσχύει γιά τόν ὅρο αὐτό ἡ $-\varphi \leqq \alpha_n \leqq \varphi$ τότε ἐπειδή $|\alpha_n| = \alpha_n$ εἶναι καί $|\alpha_n| \leqq \varphi$. Ἀντίστροφα ἄν ἰσχύει ἡ $|\alpha_n| \leqq \varphi$ καί εἶναι $\alpha_n \geqq 0$ ἰσχύει ἕνεκα τῆς $|\alpha_n| = \alpha_n$ καί ἡ $\alpha_n \leqq \varphi$. Ἐπειδή $\varphi \geqq 0$ εἶναι $-\varphi \leqq 0$. Αὐτή καί ἡ $\alpha_n \geqq 0$ συνεπάγονται τήν $-\varphi \leqq \alpha_n$. Ἰσχύει λοιπόν καί ἡ $-\varphi \leqq \alpha_n \leqq \varphi$ ὅταν ἰσχύει ἡ $|\alpha_n| \leqq \varphi$ στήν περίπτωση πού $\alpha_n \geqq 0$. Θεωροῦμε τώρα τήν περίπτωση πού γιά κάποιο ὅρο α_n ἰσχύει ἡ $\alpha_n < 0$ δηλαδή ἡ $|\alpha_n| = -\alpha_n > 0$. Θεωροῦμε ἀκόμη ὅτι ἰσχύει ἡ $-\varphi \leqq \alpha_n \leqq \varphi$. Ἀπό τήν $-\varphi \leqq \alpha_n$ προκύπτει ἡ $-\alpha_n \leqq \varphi$ συνεπῶς καί ἡ $|\alpha_n| \leqq \varphi$. Ἀντίστροφα ὅταν ἰσχύει ἡ $|\alpha_n| \leqq \varphi$ ἰσχύει καί $-\varphi \leqq -|\alpha_n|$ δηλαδή ἡ $-\varphi \leqq \alpha_n$ (γιατί $|\alpha_n| = -\alpha_n > 0$) Ἀκόμη ἐπειδή $\alpha_n < 0$ καί $\varphi > 0$ (γιατί τό φ ὑποτέθηκε μεγαλύτερο ἤ ἴσο μέ τήν ἀπόλυτη τιμή τοῦ ἀρνητικοῦ ὅρου α_n) εἶναι καί $\alpha_n < \varphi$. Αὐτή καί ἡ $-\varphi \leqq \alpha_n$ συνεπάγονται τήν $-\varphi \leqq \alpha_n < \varphi$ πού ἰσχύει ὅταν ἰσχύει ἡ $|\alpha_n| \leqq \varphi$ καί α_n εἶναι ἀρνητικός ρητός. Γενικά λοιπόν ἤ $\alpha_n \geqq 0$ ἤ $\alpha_n < 0$ ἰσχύει ἡ $-\varphi \leqq \alpha_n \leqq \varphi$ ὅταν ἰσχύει ἡ $|\alpha_n| \leqq \varphi$. Ἔχουμε συνεπῶς τόν ὁρισμό: Ἡ ἀκολουθία μέ ρητούς ὅρους (α_n) εἶναι φραγμένη στό Q ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση $\exists\varphi\in Q, \forall n\in N, |\alpha_n|\leqq\varphi$.

Ἡ ἀκολουθία (β_n) μέ τύπο τόν $\beta_n=\frac{1}{n}$ εἶναι φραγμένη γιατί γιά $\varphi=1\in Q$ ἰσχύει ἡ $|\frac{1}{n}|\leqq 1$ γιά κάθε n στοιχεῖο τοῦ N. Ἀντίθετα, ἡ ἀκολουθία (γ_n) μέ γενικό ὅρο τόν $\gamma_n=n^2+1$ δηλαδή ἡ ἀκολουθία μέ ὅρους 2, 5,10,17,26,37,... δέν εἶναι φραγμένη. Βέβαια εἶναι κάτω φραγμένη ἀπό τόν ρητό 2 ὅμως δέν εἶναι ἄνω φραγμένη καί κατά συνέπεια δέν εἶναι φραγμένη.

2.7 Μία ἀκολουθία (α_n) μέ ὅρους ρητούς εἶναι βασική, ἄν καί μόνο ἄν ὅταν μᾶς δοθεῖ ἕνας ὁποιοσδήποτε θετικός ρητός ε μποροῦμε νά βροῦμε ἕνα θετικό ρητό $M(\varepsilon)$ τέτοιο ὥστε νά ἰσχύει ἡ $|\alpha_\lambda-\alpha_\mu|<\varepsilon$ γιά δεῖκτες (φυσικούς ἀριθμούς) $\lambda,\mu>M(\varepsilon)$. Μέ ἄλλα λόγια, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση, $\forall\varepsilon\in Q^+, \exists M(\varepsilon)\in Q^+, \forall\lambda,\mu\in\{n\in N: n>M(\varepsilon)\}, |\alpha_\lambda-\alpha_\mu|<\varepsilon$ (Ἰσοδύναμα: $-\varepsilon<\alpha_\lambda-\alpha_\mu<\varepsilon$).

Ἡ ἀκολουθία (β_n) μέ τύπο τόν $\beta_n=\frac{1}{10^n}$ δηλαδή ἡ ἀκολουθία μέ ὅρους τούς $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000},\ldots$ εἶναι βασική. Πραγματικά, ἄν $\varepsilon=\frac{1}{10^{20}}$ καί θέσουμε $M(\varepsilon)=19$ ἰσχύει ἡ $|\beta_\lambda-\beta_\mu|<\frac{1}{10^{20}}$ γιά $\lambda,\mu>19$ π.χ γιά $\lambda=20$ καί $\mu=23$ εἶναι $|\frac{1}{10^{20}}-\frac{1}{10^{23}}|<\frac{1}{10^{20}}$. Ἐπίσης οἱ σταθερές ἀκολουθίες εἶναι βασικές γιατί ἡ διαφορά δύο ὁποιωνδήποτε ὅρων εἶναι ὁ ἀριθμός μηδέν πού εἶναι μικρότερος ἀπό κάθε $\varepsilon\in Q^+$. Ἀκόμη βασικές εἶναι καί οἱ τελικά σταθερές ἀκολουθίες γιατί ἀπό ἕνα δείκτη καί πέρα οἱ διαφορές τῶν ὅρων εἶναι $0<\varepsilon\in Q^+$. Οἱ μηδενικές ἀκολουθίες εἶναι βασικές. Τό εἴδαμε παραπάνω στήν περίπτωση τῆς ἀκολουθίας (β_n). Γενικά, ἄν ἡ (X_n) εἶναι μηδενική τότε γιά ἕνα ὁποιοδήποτε $\frac{\varepsilon}{2}\in Q^+$

θά ὑπάρχει ὁ $M(\varepsilon)$ ὥστε νά εἶναι $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ γιά $n>M$. Εἶναι λοιπόν γιά $\lambda,\mu>M$, $|x_\lambda|<\frac{\varepsilon}{2}$ καί $|x_\mu|<\frac{\varepsilon}{2}$. Ἰσχύει στούς ρητούς ἡ $|x_\lambda-x_\mu|\leqq|x_\lambda|+|x_\mu|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Ἡ ἰσχύς τῆς $|x_\lambda-x_\mu|<\varepsilon$ γιά $\lambda,\mu>M$ μᾶς ἀποδείχνει ὅτι (x_n) εἶναι βασική

2.8 Μία ἀκολουθία (α_n) μέ ὅρους ρητούς ἀριθμούς ἔχει ὅριο τόν ρητό ἀριθμό α (τείνει στό α ἤ συγκλίνει στό α) ἄν καί μόνο ἄν ἡ ἀκολουθία $(\alpha_n-\alpha)$ εἶναι μηδενική. Μέ ἄλλα λόγια, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall\varepsilon\in Q^+$, $\exists M(\varepsilon)\in Q^+$, $\forall n\in\{n\in N:\ n>M(\varepsilon)\}$, $|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$ (Ἰσοδύναμα: $-\varepsilon<\alpha_n-\alpha<\varepsilon$. Ἐπίσης $\alpha-\varepsilon<\alpha_n<\alpha+\varepsilon$).

Γράφουμε συμβολικά: $\alpha_n \to \alpha$ ἤ $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n=\alpha$ ἤ $\text{ορ}\cdot\alpha_n=\alpha$.
$n\to\infty$

Οἱ σταθερές ἀκολουθίες μέ ὅρους ρητούς συγκλίνουν πρός τόν ρητό πού εἶναι ἴσος μέ τούς ὅρους της. Ἐπίσης οἱ τελικά σταθερές ἀκολουθίες μέ ὅρους ρητούς συγκλίνουν πρός τόν ρητό πού εἶναι ἴσος πρός τούς ἴσους ὅρους τῆς ἀκολουθίας πού παρουσιάζονται τελικά, δηλαδή ἀπό κάποιο δείκτη καί πέρα. Οἱ μηδενικές ἀκολουθίες μέ ὅρους ρητούς ἔχουν ὅριο τόν ρητό μηδέν.

Μία ἀκολουθία μέ ὅρους ρητούς δέν ἔχει πάντοτε ὅριο ἕνα ρητό ἀριθμό. Στό σημεῖο αὐτό ἐπανερχόμαστε στήν παρ.3.

2.9 Οἱ ἀκολουθίες (α_n), $(-\alpha_n)$, $(|\alpha_n|)$ εἶναι μηδενικές ἄν καί μόνο ἄν μία ἀπ' αὐτές εἶναι μηδενική. Πραγματικά ἐπειδή $|\alpha_n|=|-\alpha_n|=\big||\alpha_n|\big|$, ἰσχύουν ταυτόχρονα ἤ ὄχι τελικά οἱ $|\alpha_n|<\varepsilon$, $|-\alpha_n|<\varepsilon$, $\big||\alpha_n|\big|<\varepsilon$ ἐπομένως καί οἱ τρεῖς παραπάνω ἀκολουθίες εἶναι μηδενικές ἤ ὄχι.

2.10 Ἄν πεπερασμένος ἀριθμός ὅρων τῆς μηδενικῆς ἀκολουθίας (α_n) μέ ὅρους ρητούς, ἀντικατασταθεῖ ἀπό ἄλλους ρητούς ἀριθμούς διαφορετικούς, τότε ἡ ἀκολουθία (γ_n) πού προκύπτει εἶναι μηδενική. Πραγματικά, ἄν δοθεῖ ὁ $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ ἐπειδή ἡ (α_n) εἶναι μηδενική ὑπάρχει δείκτης τέτοιος ὥστε νά ἰσχύει ἡ $|\alpha_n| < \varepsilon$ γιά ὅλους τούς δεῖκτες μετά ἀπό αὐτόν. Τόν δείκτη αὐτόν ἄν δέν εἶναι μποροῦμε νά τόν πάρουμε μεγαλύτερο ἀπό τούς δεῖκτες τῶν ὅρων πού ἀντικαταστάθηκαν, ἔτσι θά ἰσχύει καί ἡ $|\gamma_n| < \varepsilon$ ἀφοῦ μετά τούς ὅρους πού ἀντικαταστάθηκαν ἰσχύει ἡ $\alpha_n = \gamma_n$. Ἡ (γ_n) λοιπόν θά εἶναι ἐπίσης μηδενική.

2.11 <u>Μιά μηδενική ἀκολουθία (α_n) μέ ὅρους ρητούς εἶναι φραγμένη ἀκολουθία.</u> Πραγματικά, ἐπειδή ἡ (α_n) εἶναι μηδενική, ἄν πάρουμε $\varepsilon=1$ ὑπάρχει θετικός ρητός M τέτοιος ὥστε γιά $n > M$ $(n \in N)$ νά ἰσχύει ἡ $|\alpha_n| < 1$. Ἄν n_0 εἶναι ὁ μικρότερος δείκτης πού εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν θετικό ρητό M καί πάρουμε τόν μεγαλύτερο ἀπό τούς ρητούς $|\alpha_1|, |\alpha_1|, \ldots, |\alpha_{n_0-1}|$ καί τόν παραστήσουμε μέ φ τότε θά ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall n \in N, |\alpha_n| < 1+\varphi$ καί ἡ (α_n) εἶναι φραγμένη.

Ἐπίσης φραγμένη εἶναι καί κάθε ἀκολουθία μέ ὅρους ρητούς πού συγκλίνει σέ ἕνα ρητό ἀριθμό α. π.χ. ἡ (β_n) μέ $\beta_n \to \alpha$. Ἐπειδή ἡ $(\beta_n - \alpha)$ εἶναι μηδενική εἶναι καί φραγμένη ὅπως εἴδαμε προηγούμενα, ἰσχύει λοιπόν ἡ $\forall n \in N$, $|\alpha_n - \alpha| \leqq \varphi$ πού ἰσοδυναμεῖ μέ τήν $\forall n \in N$, $-\varphi \leqq \alpha_n - \alpha \leqq \varphi$ καί μέ τήν $\forall n \in N$, $\alpha - \varphi \leqq \alpha_n \leqq \alpha + \varphi$. Ἡ τελευταία δείχνει ὅτι ἡ (α_n) εἶναι φραγμένη ($\alpha-\varphi$ ἕνα κάτω φράγμα καί $\alpha+\varphi$ ἕνα ἄνω φράγμα τῆς (α_n) στό $\mathbb{Q}$). Ἄν φ' εἶναι ἴσος μέ τό μεγαλύτερο ἀπό τούς $|\alpha-\varphi|$, $|\alpha+\varphi|$ τότε ἰσχύει ἡ $\forall n \in N$, $|\alpha_n| \leqq \varphi'$.

2.12 <u>Ἡ πρόσθεση ἀκολουθιῶν μέ ρητούς ὅρους ὁρίζεται ὠ-</u>

σεξῆς: $(\alpha_n)+(\beta_n)=(\alpha_n+\beta_n)$. Ἡ ἀκολουθία $(\alpha_n+\beta_n)$ ὀνομάζεται ἄθροισμα τῶν (α_n) καί (β_n). Θά δείξουμε ὅτι τό ἄθροισμα δύο μηδενικῶν ἀκολουθιῶν εἶναι μηδενική ἀκολουθία. Πραγματικά, θά δειχτεῖ ὅτι ἄν δοθεῖ ἕνας ὁποιοσδήποτε θετικός ρητός ε ὑπάρχει ἕνας θετικός ρητός $M(\varepsilon)$ τέτοιος ὥστε νά ἰσχύει ἡ $|\alpha_n+\beta_n|<\varepsilon$ γιά κάθε δείκτη $n>M(\varepsilon)$. Ἐπειδή ἡ (α_n) εἶναι μηδενική, ἰσχύει ἡ $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ γιά $n>M'(\varepsilon)$. Ἐπίσης ἐπειδή ἡ (β_n) εἶναι μηδενική ἰσχύει καί ἡ $|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ γιά $n>M''(\frac{\varepsilon}{2})$. Ἄν μέ $M(\varepsilon)$ παραστήσουμε τόν μεγαλύτερο ἀπό τούς $M'(\frac{\varepsilon}{2})$, $M''(\frac{\varepsilon}{2})$ τότε προφανῶς ἰσχύει ἡ $|\alpha_n+\beta_n|\leq|\alpha_n|+|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ ἐπομένως καί ἡ $|\alpha_n+\beta_n|<\varepsilon$ γιά $n>M(\varepsilon)$. Ἡ $(\alpha_n+\beta_n)$ λοιπόν εἶναι μηδενική, ὅταν εἶναι μηδενικές οἱ (α_n), (β_n) (Ἡ $|\alpha_n+\beta_n|\leq|\alpha_n|+|\beta_n|$ ἰσχύει στούς ρητούς).

2.13 Γιά τήν ἀφαίρεση ὁρίζουμε: $(\alpha_n)-(\beta_n)=(\alpha_n-\beta_n)$. Θά δείξουμε ὅτι ἄν οἱ (α_n) καί (β_n) μέ ρητούς ὅρους εἶναι μηδενικές τότε εἶναι μηδενική καί ἡ $(\alpha_n-\beta_n)$. Πραγματικά, ἐπειδή ἡ (β_n) εἶναι μηδενική, εἶναι ἡ $(-\beta_n)$ μηδενική (παρ. 2.9) καί ἐπειδή εἶναι μηδενικές ἡ (α_n) καί ἡ $(-\beta_n)$ εἶναι μηδενική (παρ. 2.12) καί ἡ $(\alpha_n+[-\beta_n])$ δηλαδή ἡ $(\alpha_n-\beta_n)$.

2.14 Ἡ πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μεταξύ ἀκολουθιῶν ὁρίζεται ὡσεξῆς. $(\alpha_n)\cdot(\beta_n)=(\alpha_n\cdot\beta_n)$. Ἡ ἀκολουθία $(\alpha_n\cdot\beta_n)$ ὀνομάζεται γινόμενο τῶν ἀκολουθιῶν (α_n) καί (β_n). Τά γινόμενα $\alpha_n\cdot\beta_n$ (γιά κάθε $n\in N$) προσδιορίζονται εὔκολα ἀφοῦ εἶναι γνωστός ὁ πολλαπλασιασμός μεταξύ ρητῶν ἀριθμῶν.

2.15 Θά δείξουμε ὅτι τό γινόμενο φραγμένης ἀκολουθίας καί μηδενικῆς ἀκολουθίας εἶναι μηδενική ἀκολουθία. Πραγματικά, ὑποθέτουμε ὅτι ἡ (α_n) εἶναι φραγμένη ἀκολουθία δηλαδή ὅτι ἰσχύει ἡ $\forall n \in N, |\alpha_n| < \varphi \in Q^+$(Καί ἄν ἀκόμη ἰσχύει ἡ $\forall n \in N, |\alpha_n| = 0$ ἐμεῖς παίρνουμε $0 < \varphi$ γιατί μᾶς χρειάζεται ἀμέσως παρακάτων ἡ $\varphi \neq 0$) Ἐπίσης ὑποθέτουμε ὅτι ἡ (β_n) εἶναι μηδενική ὁπότε γιά $\frac{\varepsilon}{\varphi} \in Q^+$ $(\varphi \neq 0)$ ὑπάρχει θετικός ρητός $M(\varepsilon)$ τέτοιος ὥστε γιά δεῖκτες $n > M$ νά εἶναι $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{\varphi}$. Σύμφωνα μέ τά παραπάνω ἰσχύει ἡ $|\alpha_n| |\beta_n| < \varphi \cdot \frac{\varepsilon}{\varphi}$ δηλαδή ἡ $|\alpha_n \beta_n| < \varepsilon$ γιά $n > M$. Ἡ $(\alpha_n \cdot \beta_n)$ λοιπόν εἶναι μηδενική (Ἡ $|\alpha_n| \cdot |\beta_n| = |\alpha_n \cdot \beta_n|$ εἶναι γνωστή ἀπό τούς ρητούς).

2.16 Τό γινόμενο δύο μηδενικῶν ἀκολουθιῶν μέ ρητούς ὅρους εἶναι μηδενική ἀκολουθία μέ ὅρους ρητούς. Πραγματικά, ἄν οἱ (α_n) καί (β_n) εἶναι μηδενικές τότε εἶναι καί φραγμένες (παρ. 2.11). Τώρα τό γινόμενο $(\alpha_n \beta_n)$ τῆς μηδενικῆς ἀκολουθίας (α_n) καί τῆς φραγμένης (β_n) εἶναι μηδενική ἀκολουθία (παρ. 2.15).

2.17 Γινόμενο ρητοῦ ἀριθμοῦ ἐπί ἀκολουθία (α_n) μέ ρητούς ὅρους ὀνομάζουμε τήν ἀκολουθία $(\lambda\alpha_n)$. Θά δείξουμε ὅτι ἄν ἡ (α_n) εἶναι μηδενική, τότε εἶναι μηδενική καί ἡ $(\lambda\alpha_n)$. Πραγματικά, θεωροῦμε τήν ἀκολουθία (λ_n) μέ τύπο τόν $\lambda_n = \lambda$ γιά κάθε $n \in N$ πού εἶναι φραγμένη ($\forall n \in N, |\lambda_n| \leqq \lambda$) καί τήν (α_n) πού ὑποτέθηκε μηδενική. Ἔχουμε $(\lambda\alpha_n) = (\lambda_n \alpha_n)$ γιά κάθε n N. Ἡ $(\lambda_n \alpha_n)$ ὅμως (παρ.2.15) εἶναι μηδενική καί ἡ ἴση της $(\lambda\alpha_n)$ μέ τούς ἴδιους ἀκριβῶς ὅρους εἶναι συνεπῶς μηδενική.

2.18 Θά δείξουμε ὅτι κάθε βασική ἀκολουθία (α_n) μέ ὅρους ρητούς εἶναι φραγμένη. Πραγματικά, ἐπειδή ἡ (α_n) εἶναι βασική, γιά $\varepsilon = 1$ ὑπάρχει ὁ θετικός ρητός $M(1)$ καί γιά $\lambda, \mu > M$ ἰσχύει ἡ $|\alpha_\lambda - \alpha_\mu| < 1$ ἤ ἰσοδύναμα ἡ (παρ. 2.6) $-1 < \alpha_\lambda - \alpha_\mu < 1$ καί ἡ $\alpha_\mu - 1 < \alpha_\lambda < \alpha_\mu + 1$. Μέ μ θεωροῦμε τώρα ἕνα συγκεκριμένο σταθερό δείκτη μεγαλύτερο ἀπό τόν M καί ὄχι ἕνα ὁποιοδήποτε δείκτη μεγαλύτερο ἀπό τόν Μ. Ἔτσι ὁ α_μ θά εἶναι ἕνας συγκεκριμένος ρητός ἀριθμός. Ἄν φ' εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀπό τούς $|\alpha_\mu - 1|, |\alpha_\mu + 1|$ τότε ἰσχύει καί (παρ.2.6) ἡ $-\varphi' < \alpha_\lambda < \varphi'$ καί συνεπῶς (παρ.2.6) καί ἡ $|\alpha_n| < \varphi'$ γιά $n > M$. Παίρνουμε τώρα τόν μεγαλύτερο ἀπό τούς $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_\sigma|, \varphi'$ (σ εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀπό τούς δεῖκτες πού εἶναι ἴσοι ἤ μικρότεροι ἀπό τόν Μ) καί τόν παριστάνουμε μέ φ ὁπότε ἰσχύει ἡ $\forall n \in N, |\alpha_n| < \varphi$ καί ἡ (α_n) εἶναι φραγμένη (παρ.2.6)

2.19 Θά δείξουμε ὅτι κάθε ἀκολουθία μέ ὅρους ρητούς πού ἔχει ὅριο ρητό ἀριθμό, εἶναι βασική. Πραγματικά, ὑποθέτουμε ὅτι τό ὅριο τῆς (α_n) εἶναι ὁ ρητός α. Τότε ἡ $(\alpha_n - \alpha)$ εἶναι μηδενική ἀκολουθία καί σάν μηδενική (παρ.2.7) εἶναι βασική. Αὐτό σημαίνει ὅτι γιά ὁποιοδήποτε δοσμένο $\varepsilon \in Q^+$ ὑπάρχει θετικός ρητός $M(\varepsilon)$ τέτοιος πού γιά $\lambda, \mu > M(\varepsilon)$ ἰσχύει ἡ $|[\alpha_\lambda - \alpha] - [\alpha_\mu - \alpha]| < \varepsilon$ Ἐπειδή ἡ $|[\alpha_\lambda - \alpha] - [\alpha_\mu - \alpha]| < \varepsilon$ γράφεται καί $|\alpha_\lambda - \alpha_\mu| < \varepsilon$ ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall \varepsilon \in Q^+, \exists M(\varepsilon) \in Q^+, \forall \lambda, \mu \in \{n \in N : n > M(\varepsilon)\}, |\alpha_\lambda - \alpha_\mu| < \varepsilon$ πού δείχνει ἡ (α_n) εἶναι βασική.

3. Εισαγωγή τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Μέ ἐφαρμογή τοῦ γνωστοῦ ἀλγόριθμου γιά τόν ὑπολογισμό τῆς τετραγωνικῆς ρίζας τοῦ 2 βρσίσκουμε ὅτι $\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$ μέ ἄπειρα δεκαδικά ψηφία χωρίς ἀπό μία θέση καί πέρα νά ἐπαναλαμβάνονται περιοδικά γιατί ~~τότε~~ θά ἐπρόκειτο γιά ρητό ἀριθμό. Τόν ἄρρητο αὐτό ἀριθμό τόν πλησιάζουμε ὅσο θέλουμε μέ τούς ὅρους τῆς ἀκολουθίας:

1,4-1,41-1,414-1,4142-1,41421-1,414213-1,4142135-1,41421356- κ.λπ. Ἐπίσης μέ τούς ὅρους τῆς ἀκολουθίας 1,5-1,42 -1,415-1,4143-1,41422-1,414214 - 1, 4142136-1,41421357- κ.λπ. π.χ ἄν θέλουμε ὁ $\sqrt{2}$ νά διαφέρει (ἀπόλυτη τιμή τῆς διαφορᾶς) ἀπό τούς ὅρους τῆς πρώτης ἀκολουθίας κατά ἀριθμό μικρότερο ἀπό τόν $\varepsilon=\frac{1}{1000}$ μποροῦμε νά πάρουμε τούς ὅρους τῆς ἀκολουθίας μέ δείκτη μεγαλύτερο ἀπό τό θετικό ρητό $M(\varepsilon)=2$, πού ἐξαρτᾶται ἀπό τήν τιμή τοῦ ε. Τέτοιοι ὅροι εἶναι στήν περίπτωση αὐτή ὁ τρίτος 1,414 καί κάθε ἑπόμενός του. Θά ἔχουμε τότε γιά τόν 1,414 τήν $|\sqrt{2}-1{,}414|=|1{,}41421356\ldots-1{,}414|=|0{,}00021356\ldots|<\frac{1}{1000}$. Ἐπίσης ἀπό τήν δεύτερη ἀκολουθία ἄν $\varepsilon=\frac{1}{10000}$ θά πρέπει νά πάρουμε τόν 1,4143 ἤ ὁποιοδήποτε ἑπόμενό του (ὁ 1,4143 εἶναι τέταρτος) καί $M(\varepsilon)=3$) ὁπότε $|\sqrt{2}-1{,}4143|=|1{,}41421356\ldots-1{,}4143|<\frac{1}{10000}$. Γενικά ἄν $\varepsilon=\frac{1}{10^n}(n\in N)$ θά πρέπει νά πάρουμε τούς ὅρους τῶν παραπάνω ἀκολουθιῶν πού ἔχουν τουλάχιστο n δεκαδικά ψηφία γιά νά διαφέρουν ἀπόλυτα ἀπό τόν $\sqrt{2}$ κατά ἀριθμό μικρότερο ἀπό τόν $\frac{1}{10^n}$. Ἐπειδή τό n μποροῦμε νά τό πάρουμε ὁσοδήποτε μεγάλο τό $\frac{1}{10^n}$ γίνεται ὁσοδήποτε μικρό ἑπομένως καί ἡ ἀπόλυτη τιμή τῆς διαφορᾶς τοῦ $\sqrt{2}$ ἀπό τούς ὅρους τῆς ἀκολουθίας γίνεται ὅσο θέλουμε μικρή. Μέ ἄλλα λόγια ὁ ἄρρητος $\sqrt{2}$ εἶναι ὅριο τῆς πρώτης ἀκολουθίας. Ἐπίσης τῆς δεύτερης ἀκολουθίας. Καί οἱ δύο αὐτές ἀκολουθίες ἔχουν ὅρους ρητούς ἀριθμούς. Οἱ δύο αὐτές ἀκολουθίες ρητῶν ἔχουν τήν ἑπόμενη ἰδιότητα. ἄν μᾶς δοθεῖ ἕνας ὁποιοσδήποτε θετικός ρητός π.χ ὁ $\varepsilon=\frac{1}{10000}$ μποροῦμε νά βροῦμε ἕνα ρητό θετικό π.χ τόν $M(\varepsilon)=3$ τέτοιο ὥστε ἡ ἀπόλυτη τιμή τῆς διαφορᾶς δύο ὁποιωνδήποτε ὅρων τῆς ἴδιας ἀκολουθίας μέ δεῖκτες μεγαλύτερους τοῦ 3 νά εἶναι μικρότερη τοῦ $\frac{1}{10000}$. π.χ σχετικά μέ τήν πρώτη ἀκολουθία:

$|1{,}4142-1{,}41421|<\frac{1}{10000}$, $|1{,}414213-1{,}41421356|<\frac{1}{10000}$

κ.λπ. Ἐπίσης σχετικά μέ τή δεύτερη ἀκολουθία γιά $\varepsilon=\frac{1}{10^6}$. Ἔχουμε $M(\varepsilon)=5$ καί $|1{,}414214-1{,}4142136|<\frac{1}{10^6}$. Ἐπίσης $|1{,}414214|-|1{,}41421357|<\frac{1}{10^6}$ κ.λ.π.

Τέτοιες ἀκολουθίες ὅπως εἴδαμε (παρ.2.7) εἶναι βασικές. Θεωροῦμε τούς πραγματικούς ἀριθμούς σάν ὅρια βασικῶν ἀκολουθιῶν μέ ὅρους ρητούς. Ὁ λογισμός λοιπόν μεταξύ πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀνάγεται στό λογισμό μεταξύ τῶν ὅρων βασικῶν ἀκολουθιῶν μέ ὅρους ρητούς. Γιά τόν παραπάνω λόγο στήν προηγούμενη παράγραφο ἀναφερθήκαμε σέ θέματα σχετικά μέ τίς ἀκολουθίες μέ ὅρους ρητούς ἀριθμούς.

Ὑπενθυμίζουμε ὅτι οἱ ὅροι ἀκολουθίας ρητῶν μπορεῖ νά πλησιάζουν ρητό καί ὄχι ἄρρητο ἀριθμό ὅπως στήν περίπτωση τοῦ $\sqrt{2}$ πού ἀναφέραμε, π.χ ἡ (α_n) μέ $\alpha_n = \frac{1}{n}$ πλησιάζει τόν ρητό μηδέν.

Στήν περίπτωση τοῦ ἄρρητου $\sqrt{2}$ ἀναφέραμε παραπάνω δύο δεκαδικές ἀκολουθίες ρητῶν πού τόν πλησιάζουν ὅμως καί ἡ ἀκολουθία ρητῶν π.χ ἡ $(1,4+\frac{1}{1})$, $(1,41+\frac{1}{2})$, $(1,414+\frac{1}{3})$, $(1,4142+\frac{1}{4})$,...πλησιάζει τό ἴδιο ἄρρητο ἀριθμό.

4. Τό σύνολο τῶν βασικῶν ἀκολουθιῶν μέ ὅρους ρητούς ἀριθμούς. Οἱ σχέσεις = καί ≡ σ' αὐτό.

4.1 Θεωροῦμε τό σύνολο B στό ὁποῖο ἀνήκει κάθε βασική ἀκολουθία πού ἔχει ὅρους ρητούς ἀριθμούς. Τίς βασικές ἀκολουθίες στοιχεῖα τοῦ B θά τίς παριστάνουμε μέ τά σύμβολα (α_n), (β_n), (γ_n) κ.λπ. Ἡ ἰσότητα στό B ὁρίζεται ὡσεξῆς: $(\alpha_n)=(\beta_n) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \forall n \in N,\ \alpha_n=\beta_n$. Ἡ ἰσότητα στό B εἶναι αὐτοπαθής συμμετρική καί μεταβατική, δηλαδή εἶναι μία σχέση ἰσοδυναμίας στό B. Ὁρίζουμε στό B καί τή σχέση ≡ ὡσεξῆς: $(\alpha_n) \equiv (\gamma_n) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\, \varepsilon \in Q^+, \exists\, M(\varepsilon) \in Q^+, \forall n \in \{n \in N:\ n > M(\varepsilon)\} |\alpha_n-\gamma_n| < \varepsilon$(Ἰσοδύναμα: $\alpha_n-\gamma_n \longrightarrow 0$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία $(\alpha_n-\gamma_n)$ εἶναι μηδενική). Τόν θετικό ρητό M τόν γράψαμε M(ε) γιά νά δηλώσουμε ὅτι ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἐκλεγόμενη τιμή τοῦ ε. Εὔκολα φαίνεται ὅτι ἡ σχέση $\equiv$ στό B εἶναι μία σχέση ἰσοδυναμίας. Πραγματικά, εἶναι αὐτοπαθής δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall(\alpha_n) \in B,\ (\alpha_n) \equiv (\alpha_n)$. Ἰσχύει προφανῶς ἡ $|\alpha_n - \alpha_n| = 0 < \varepsilon$ γιά ὁποιαδήποτε n καί ε. Εἶναι συμμετρική, δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση

$$(\alpha_n) \equiv (\gamma_n) \Rightarrow (\gamma_n) \equiv (\alpha_n).$$

Πραγματικά, $(\alpha_n) \equiv (\gamma_n) \Rightarrow (\alpha_n - \gamma_n)$ μηδενική $\Rightarrow (\gamma_n - \alpha_n)$ μηδενική $\Rightarrow$ (παρ.2.9) $(\gamma_n) \equiv (\alpha_n)$. Τέλος, ἡ $\equiv$ εἶναι μεταβατική, δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση

$$(\alpha_n) \equiv (\beta_n) \wedge (\beta_n) \equiv (\gamma_n) \Rightarrow (\alpha_n) \equiv (\gamma_n).$$

Πραγματικά, $(\alpha_n) \equiv (\beta_n) \wedge (\beta_n) \equiv (\gamma_n) \Rightarrow (\alpha_n - \beta_n)$ μηδενική $\wedge\ (\beta_n - \gamma_n)$ μηδενική $\Rightarrow (\alpha_n - \beta_n) + (\beta_n - \gamma_n)$ μηδενική $\Rightarrow$ (παρ.2.12) $(\alpha_n - \gamma_n)$ μηδενική $\Rightarrow (\alpha_n) \equiv (\gamma_n)$.

4.2 Ἡ ἀκολουθία (λ_n) μέ $\lambda_n = \frac{1}{n}$ καί ἡ (μ_n) μέ $\mu_n = \frac{1}{3+n^2}$ εἶναι ἰσοδύναμες. Ἰσχύει δηλαδή ἡ $(\lambda_n) \equiv (\mu_n)$. Πραγματικά εὔκολα φαίνεται ὅτι ἡ (λ_n) καί ἡ (μ_n) εἶναι μηδενικές ἀκολουθίες συνεπῶς καί ἡ $(\lambda_n - \mu_n)$ εἶναι μηδενική ἀκολουθία, ἐπομένως $(\lambda_n) \equiv (\mu_n)$. Ἡ ἀκολουθία (p_n) μέ $p_n = 2 - \frac{3}{n}$ δέν εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν (λ_n). Ἰσχύει δηλαδή ἡ $(p_n) \not\equiv (\lambda_n)$. Πραγματικά, ἡ ἀκολουθία $(p_n - \lambda_n)$ μέ γενικό ὅρο τόν $p_n - \lambda_n = 2 - \frac{3}{n} - \frac{1}{n}$ δηλαδή τόν $p_n - \lambda_n = 2 - \frac{4}{n}$ δέν εἶναι μηδενική ἀφοῦ π.χ ἄν πάρουμε ε=1 δέν ἰσχύει τελικά ἡ $\left|2 - \frac{4}{n}\right| < 1$

5. Τό σύνολο πηλίκον $B/_{\equiv}$ ἤ σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἡ ἰσότητα καί οἱ πράξεις τῆς πρόσθεσης καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

5.1 Ἡ σχέση ἰσοδυναμίας $\equiv$ ὅπως ὁρίστηκε στήν προηγούμενη παράγραφο στό σύνολο B διαμερίζει τό B σέ κλάσεις ἰσοδύναμων μεταξύ τους βασικῶν ἀκολουθιῶν μέ ὅρους ρητούς. Ἔχουμε λοιπόν τό σύνολο $B/\equiv$ πού εἶναι πηλίκον τοῦ συνόλου B τῶν βασικῶν ἀκολουθιῶν μέ ρητούς ὅρους διά τῆς σχέσης $\equiv$ δηλαδή τό σύνολο τῶν κλάσεων ἰσοδυναμίας στό B ἤ μέ ἄλλα λόγια τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἤ τό σύνολο R. Μέ τό σύμβολο $(\alpha_n)_\varkappa$ θά παριστάνουμε τό ὑποσύνολο τοῦ B στό ὁποῖο ἀνήκουν οἱ βασικές ἀκολουθίες μέ ὅρους ρητούς πού εἶναι ἰσοδύναμες μέ τήν ἀκολουθία (α_n). Πρόκειται γιά τήν κλάση ἰσοδυναμίας μέ ἀντιπρόσωπο τήν βασική ἀκολουθία μέ ὅρους ρητούς (α_n). Ἰσχύουν λοιπόν οἱ $(\alpha_n) \in (\alpha_n)_\varkappa$, $(\alpha_n)_\varkappa \subseteqq B$, $(\alpha_n)_\varkappa \in B/\equiv$ δηλαδή $(\alpha_n)_\varkappa \in R$ ἀφοῦ μέ R παριστάνουμε τό $B/\equiv$. Ὁ $(\alpha_n)_\varkappa$ λοιπόν εἶναι ἕνας πραγματικός ἀριθμός.

Σύμφωνα μέ αὐτά πού ἔχουμε ἀναφέρει ἡ ἰσότητα στό R ὁρίζεται ὡσεξῆς: $(\alpha_n)_\varkappa=(\beta_n)_\varkappa$ στό R $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $(\alpha_n)\equiv(\beta_n)$ στό B. δηλαδή $(\alpha_n)_\varkappa=(\beta_n)_\varkappa$ στό R $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $(\alpha_n-\beta_n)$ μηδενική στό B.

5.2 Ἡ πράξη τῆς πρόσθεσης στό R ὁρίζεται ὡσεξῆς: $(\alpha_n)_\varkappa+(\beta_n)_\varkappa = (\alpha_n+\beta_n)_\varkappa$. Χρειάζεται βέβαια νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ νέα ἀκολουθία $(\alpha_n+\beta_n)$ εἶναι βασική δηλαδή στοιχεῖο τοῦ συνόλου B γιά νά εἶναι ὁ $(\alpha_n+\beta_n)_\varkappa$ πραγματικός ἀριθμός, δηλαδή στοιχεῖο τοῦ R.
Πραγματικά, ἐπειδή οἱ (α_n) καί (β_n) εἶναι στοιχεῖα τοῦ B γιά ὁποιοδήποτε θετικό ρητό $\frac{\varepsilon}{2}$ ὑπάρχει θετικός

ρητός $M(\varepsilon)$ τέτοιος ὥστε γιά φυσικούς $\lambda,\mu > M(\varepsilon)$ νά ἰσχύει ἡ $|\alpha_\lambda-\alpha_\mu| < \frac{\varepsilon}{2}$ καί ἡ $|\beta_\lambda-\beta_\mu| < \frac{\varepsilon}{2}$ (γιά τήν πρώτη ἔχουμε $\lambda',\mu' > M'(\varepsilon)$ καί γιά τή δεύτερη $\lambda'',\mu'' > M''(\varepsilon)$ καί στή συνέχεια $\lambda,\mu > M(\varepsilon)$ καί γιά τίς δύο. $M(\varepsilon)$ εἶναι τό μεγαλύτερο ἀπό τά $M'(\varepsilon)$, $M''(\varepsilon)$). Ὅμως τότε ἰσχύει καί ἡ $|\alpha_\lambda-\alpha_\mu| + |\beta_\lambda-\beta_\mu| < \varepsilon$.

Ἕνεκα τῆς $|(\alpha_\lambda-\alpha_\mu)+(\beta_\lambda-\beta_\mu)| \leqq |\alpha_\lambda-\alpha_\mu| + |\beta_\lambda-\beta_\mu|$ πού μᾶς εἶναι γνωστή ἀπό τούς ρητούς ἰσχύει καί ἡ $|(\alpha_\lambda-\alpha_\mu)+(\beta_\lambda-\beta_\mu)| < \varepsilon$ γιά $\lambda,\mu > M(\varepsilon)$. Ἡ τελευταία γράφεται καί $|(\alpha_\lambda+\beta_\lambda)-(\alpha_\mu+\beta_\mu)| < \varepsilon$ γιά $\lambda,\mu > M(\varepsilon)$ γιατί ἰσχύει ὁ ἀντιμεταθετικός καί ὁ προσεταιριστικός νόμος στούς ρητούς. Ἀπό τήν τελευταία φαίνεται ὅτι ἡ $(\alpha_n+\beta_n)$ εἶναι βασική ἀκολουθία μέ ὅρους ρητούς, δηλαδή στοιχεῖο τοῦ B ἐπομένως ἡ κλάση $(\alpha_n+\beta_n)_\kappa$ εἶναι ἕνας πραγματικός ἀριθμός στοιχεῖο τοῦ R ὅπως εἶναι οἱ προσθετέοι $(\alpha_n)_\kappa$ καί $(\beta_n)_\kappa$.

5.3 <u>Ἡ πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό R ὁρίζεται ὡσεξῆς:</u> $(\alpha_n)_\kappa \cdot (\beta_n)_\kappa = (\alpha_n\beta_n)_\kappa$. Θά ἀποδειχτεῖ ὅμως ὅτι ἡ ἀκολουθία $(\alpha_n\beta_n)$ μέ ὅρους ρητούς εἶναι βασική δηλαδή στοιχεῖο τοῦ συνόλου B. Ἔτσι ὁ $(\alpha_n\beta_n)_\kappa$ θά εἶναι ἕνας πραγματικός ἀριθμός στοιχεῖο τοῦ R.

Πραγματικά, ἐπειδή οἱ (α_n) καί (β_n) εἶναι βασικές ἀκολουθίες μέ ὅρους ρητούς θά εἶναι καί φραγμένες (παρ.2.18). Θά ἰσχύουν λοιπόν οἱ $|\alpha_n| < \varphi'$ καί $|\beta_n| < \varphi''$ ὅπου φ' καί φ'' εἶναι θετικοί ρητοί. Παίρνουμε τόν μεγαλύτερο ἀπό τούς φ',φ'' καί τόν παριστάνουμε μέ φ, ὁπότε $|\alpha_n| < \varphi$ καί $|\beta_n| < \varphi$ γιά κάθε $n \in N$. Ἐπειδή οἱ (α_n) καί (β_n) εἶναι βασικές ἰσχύουν οἱ $|\alpha_\lambda-\alpha_\mu| < \frac{\varepsilon}{2\varphi}$ καί $|\beta_\lambda-\beta_\mu| < \frac{\varepsilon}{2\varphi}$ $(\varphi \neq 0)$ γιά $\lambda,\mu > M(\varepsilon)$. Ἰσχύουν ἀκόμη οἱ $|\alpha_\lambda\beta_\lambda-\alpha_\mu\beta_\mu| = |\beta_\lambda(\alpha_\lambda-\alpha_\mu) +$

$\alpha_\mu|(\beta_\lambda-\beta_\mu)| \leqq |(\beta_\lambda||\alpha_\lambda-\alpha_\mu|+|\alpha_\mu||\beta_\lambda-\beta_\mu| \leqq \varphi\cdot|\alpha_\lambda-\alpha_\mu| +$ $\varphi\cdot|\beta_\lambda-\beta_\mu| < \varphi\cdot\frac{\varepsilon}{2\varphi}+\varphi\cdot\frac{\varepsilon}{2\varphi}=\varepsilon$ Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῶν $=, \leqq$ καί $<$ ἰσχύει τελικά ἡ $|\alpha_\lambda\beta_\lambda-\alpha_\mu\beta_\mu|<\varepsilon$ γιά φυσικούς λ,μ μεγαλύτερους ἀπό τό θετικό ρητό Μ. Ἡ ἀκολουθία λοιπόν $(\alpha_n\beta_n)$ εἶναι βασική μέ ρητούς ὅρους καί συνεπῶς ὁ $(\alpha_n\beta_n)_\varkappa$ εἶναι πραγματικός ἀριθμός στοιχεῖο τοῦ R.

6. Βασικές ἰδιότητες τῆς πρόσθεσης στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

6.1 Τό σύνολο R εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση

$\forall(\alpha_n)_\varkappa \in R,\ \forall(\beta_n)_\varkappa \in R,\ (\alpha_n)_\varkappa + (\beta_n)_\varkappa \in R$. Ἔχουμε δείξει στήν παρ. 5.2 ὅτι ἄν οἱ (α_n) καί (β_n) εἶναι στοιχεῖα τοῦ Β τότε εἶναι καί ἡ $(\alpha_n+\beta_n)$ στοιχεῖο τοῦ Β ἐπομένως ἡ $(\alpha_n+\beta_n)_\varkappa$ εἶναι στοιχεῖο τοῦ R. Ὅμως σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς πρόσθεσης στό R εἶναι: $(\alpha_n+\beta_n)_\varkappa=(\alpha_n)_\varkappa+(\beta_n)_\varkappa$. Ἰσχύει λοιπόν ἡ $(\alpha_n)_\varkappa+(\beta_n)_\varkappa \in R$

6.2 Θά δείξουμε τώρα τήν πρόταση $(\alpha_n)_\varkappa=(\alpha'_n)_\varkappa \wedge (\beta_n)_\varkappa = (\beta'_n)_\varkappa \Rightarrow (\alpha_n)_\varkappa+(\beta_n)_\varkappa=(\alpha'_n)_\varkappa+(\beta'_n)_\varkappa$ δηλαδή ὅτι ἡ πρόσθεση στό R εἶναι πράξη μονότονη. Πραγματικά, $(\alpha_n)_\varkappa= (\alpha'_n)_\varkappa \wedge (\beta_n)_\varkappa=(\beta'_n)_\varkappa$ στό $R \Rightarrow (\alpha_n) \equiv (\alpha'_n) \wedge (\beta_n) \equiv (\beta'_n)$ στό $B \Rightarrow (\alpha_n-\alpha'_n)$ μηδενική$\wedge(\beta_n-\beta'_n)$ μηδενική (παρ. 2.12) $\Rightarrow \left([\alpha_n-\alpha'_n]+[\beta_n-\beta'_n]\right)$ μηδενική (νόμοι στούς ρητούς) $\Rightarrow \left([\alpha_n+\beta_n]-[\alpha'_n+\beta'_n]\right)$ μηδενική $\Rightarrow (\alpha_n+\beta_n)\equiv (\alpha'_n+\beta'_n)$ στό $B \Rightarrow (\alpha_n+\beta_n)_\varkappa=(\alpha'_n+\beta'_n)_\varkappa$ στό $R \Rightarrow$ (ἀπό τόν ὁρισμό τῆς πρόσθεσης) $(\alpha_n)_\varkappa+(\beta_n)_\varkappa=(\alpha'_n)_\varkappa+(\beta'_n)_\varkappa$ στό R. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς $\Rightarrow$ ἰσχύει τελικά ἡ παραπάνω πρόταση.

6.3 Θά δείξουμε τήν ἰσχύ τῆς πρότασης

$\forall (\alpha_n)_\varkappa \in R, \forall (\beta_n)_\varkappa \in R, (\alpha_n)_\varkappa + (\beta_n)_\varkappa = (\beta_n)_\varkappa + (\alpha_n)_\varkappa$ δηλαδή τόν ἀντιμεταθετικό νόμο γιά τήν πρόσθεση στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Πραγματικά,

$(\alpha_n)_\varkappa + (\beta_n)_\varkappa =$ (ὁρισμός τῆς πρόσθεσης στό R) $(\alpha_n + \beta_n)_\varkappa =$ (ἀντιμεταθετικός νόμος στό σύνολο τῶν ρητῶν)$(\beta_n + \alpha_n)_\varkappa =$ $(\beta_n)_\varkappa + (\alpha_n)_\varkappa$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς ἰσότητας ἰσχύει ἡ παραπάνω πρόταση.

6.4 Θά δείξουμε τήν ἰσχύ τοῦ προσεταιριστικοῦ νόμου στήν πρόσθεση, δηλαδή τήν πρόταση:

$\forall (\alpha_n)_\varkappa, (\beta_n)_\varkappa, (\gamma_n)_\varkappa \in R, [(\alpha_n)_\varkappa + (\beta_n)_\varkappa] + (\gamma_n)_\varkappa =$ $= (\alpha_n)_\varkappa + [(\beta_n)_\varkappa + (\gamma_n)_\varkappa]$. Πραγματικά,

$[(\alpha_n)_\varkappa + (\beta_n)_\varkappa] + (\gamma_n)_\varkappa =$ (ὁρισμός τῆς πρόσθεσης) $(\alpha_n + \beta_n)_\varkappa + (\gamma_n)_\varkappa = \left([\alpha_n + \beta_n] + \gamma_n\right)_\varkappa =$ (ἰσχύς τοῦ προσεταιριστικοῦ νόμου στούς ρητούς) $\left(\alpha_n + [\beta_n + \gamma_n]\right)_\varkappa = (\alpha_n)_\varkappa +$ $(\beta_n + \gamma_n)_\varkappa = (\alpha_n)_\varkappa + [(\beta_n)_\varkappa + (\gamma_n)_\varkappa]$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς ἰσότητας ἰσχύει τελικά ἡ παραπάνω πρόταση.

6.5 Θά δείξουμε ὅτι ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Πρόκειται γιά τήν κλάση τῶν μηδενικῶν ἀκολουθιῶν μέ ὅρους ρητούς ἀριθμούς πού θά τήν παριστάνουμε μέ $(0_n)_\varkappa$ ὅπου (0_n) εἶναι μία μηδενική ἀκολουθία ἀντιπρόσωπος. Ἰσχύει ἡ πρόταση,

$\forall (\alpha_n)_\varkappa \in R, (0_n)_\varkappa + (\alpha_n)_\varkappa = (\alpha_n)_\varkappa$. Πραγματικά, (0_n) μηδενική $\Rightarrow ([0_n + \alpha_n] - \alpha_n)$ μηδενική $\Rightarrow (0_n + \alpha_n) \equiv (\alpha_n)$ στό B $\Rightarrow (0_n + \alpha_n)_\varkappa = (\alpha_n)_\varkappa$ στό R $\Rightarrow$ (ὁρισμός τῆς πρόσθεσης) $(0_n)_\varkappa + (\alpha_n)_\varkappa = (\alpha_n)_\varkappa$ στό R. Πρέπει ἀκόμη νά δείξουμε ὅτι ὁ $(0_n)_\varkappa$ εἶναι πραγματικός ἀριθμός. Πραγματικά, οἱ μηδενικές ἀκολουθίες εἶναι (παρ.2.7) βασικές ἀκολουθίες ἐπομένως $(0_n)\in B$ καί $(0_n)_\varkappa \in R$

6.6 Θά δείξουμε ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἔχει ἀντίθετο στοιχεῖο στό ἴδιο σύνολο, δηλαδή τήν πρόταση $\forall(\alpha_n)_\varkappa \in R$, $(-\alpha_n)_\varkappa+(\alpha_n)_\varkappa = (0_n)_\varkappa$. Πραγματικά, $(-\alpha_n)_\varkappa+(\alpha_n)_\varkappa=$ (ὁρισμός τῆς πρόσθεσης) $(-\alpha_n+\alpha_n)_\varkappa$ = (τό ἄθροισμα τῶν ρητῶν $-\alpha_n$ καί α_n εἶναι ὁ ρητός μηδέν) $(0)_\varkappa$ = (ἀκολουθίες μέ μηδενικούς ὅρους εἶναι προφανῶς μηδενικές) $(0_n)_\varkappa$. Χρειάζεται ἀκόμη νά δειχτεῖ ὅτι $(-\alpha_n)_\varkappa \in R$. Πραγματικά, ἐπειδή $(\alpha_n)_\varkappa \in R$ εἶναι $(\alpha_n)\in B$ καί $|\alpha_\lambda-\alpha_\mu|<\varepsilon$ γιά $\lambda,\mu>M(\varepsilon)$. Στό Ω ἰσχύει καί ἡ $|\alpha_\lambda-\alpha_\mu| = |[-\alpha_\lambda]-[-\alpha_\mu]|$ ἐπομένως καί ἡ $|[-\alpha_\lambda]-[-\alpha_\mu]| < \varepsilon$ γιά $\lambda,\mu>M(\varepsilon)$. Ἀπό αὐτά προκύπτει ἡ $(-\alpha_n)\in B$ καί τελικά ἡ $(-\alpha_n)_\varkappa \in R$.

6.7 Ἀπό τά ἀναφερθέντα στίς παρ.6.1-6.6 προκύπτει ὅτι τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μία ἀβελιανή ὁμάδα ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης ὅπως ὁρίστηκε αὐτή στήν παρ. 5.2

7. Βασικές ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν..

7.1 Τό σύνολο R εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ σ'αὐτό. Μέ ἄλλα λόγια ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall(\alpha_n)_\varkappa \in R$, $\forall(\beta_n)_\varkappa \in R$, $(\alpha_n)_\varkappa\cdot(\beta_n)_\varkappa \in R$. Πραγματικά, ἀποδείχτηκε στήν παρ. 5.3 ὅτι ὅταν οἱ (α_n) καί (β_n) εἶναι βασικές τότε εἶναι βασική καί ἡ $(\alpha_n\beta_n)$. Αὐτό σημαίνει ὅτι ὁ $(\alpha_n\beta_n)_\varkappa$ εἶναι πραγματικός στοιχεῖο τοῦ R δηλαδή $(\alpha_n\beta_n)_\varkappa \in R$ καί ἐπειδή ἔχουμε ὁρίσει $(\alpha_n)_\varkappa\cdot(\beta_n)_\varkappa=(\alpha_n\beta_n)_\varkappa$ εἶναι καί $(\alpha_n)_\varkappa\cdot(\beta_n)_\varkappa\in R$.

7.2 <u>Ὁ πολλαπλασιασμός στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι πράξη μονότονη</u>, δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση: $(\alpha_n)_\varkappa=(\alpha'_n)_\varkappa \wedge (\beta_n)_\varkappa=(\beta'_n)_\varkappa \Rightarrow (\alpha_n)_\varkappa\cdot(\beta_n)_\varkappa=(\alpha'_n)_\varkappa\cdot(\beta'_n)_\varkappa$.

Πραγματικά, $(\alpha_n)_\varkappa=(\alpha'_n)_\varkappa \wedge (\beta_n)_\varkappa=(\beta'_n)_\varkappa$ στό R $\Rightarrow (\alpha_n)\equiv(\alpha'_n) \wedge (\beta_n)\equiv(\beta'_n)$ στό B $\Rightarrow (\alpha_n-\alpha'_n)$ μηδενική $\wedge\,(\beta_n-\beta'_n)$ μηδενική $\Rightarrow$ (ἐπειδή ἡ (β_n) καί ἡ (α'_n) σάν βασικές εἶναι φραγμένες καί τό γινόμενο φραγμένης καί μηδενικῆς εἶναι μηδενική) $(\beta_n)\cdot(\alpha_n-\alpha'_n)$ μηδενική $\wedge\,(\alpha'_n)\cdot(\beta_n-\beta'_n)$ μηδενική $\Rightarrow (\beta_n)\cdot(\alpha_n-\alpha'_n)+(\alpha'_n)(\beta_n-\beta'_n)$ μηδενική (παρ.2.12 καί 2.14) $\Rightarrow (\alpha_n\beta_n-\alpha'_n\beta_n+\alpha'_n\beta_n-\alpha'_n\beta'_n)$ μηδενική $\Rightarrow (\alpha_n\beta_n-\alpha'_n\beta'_n)$ μηδενική $\Rightarrow (\alpha_n\beta_n)\equiv(\alpha'_n\beta'_n)$ στό B $\Rightarrow (\alpha_n\beta)_\varkappa=(\alpha'_n\beta'_n)_\varkappa$ στό R $\Rightarrow (\alpha_n)_\varkappa\cdot(\beta_n)_\varkappa=(\alpha'_n)_\varkappa\cdot(\beta'_n)_\varkappa$ στό R.

7.3 Θά δείξουμε τήν ἰσχύ τοῦ <u>ἀντιμεταθετικοῦ νόμου</u>: $\forall(\alpha_n)_\varkappa\in R,\ \forall(\beta_n)_\varkappa\in R,\ (\alpha_n)_\varkappa\cdot(\beta_n)_\varkappa=(\beta_n)_\varkappa\cdot(\alpha_n)_\varkappa$.

Πραγματικά, $\alpha_n\beta_n=\beta_n\alpha_n$ στό Q $\Rightarrow (\alpha_n\beta_n-\beta_n\alpha_n)$ μηδενική $\Rightarrow (\alpha_n\beta_n)\equiv(\beta_n\alpha_n)$ στό B $\Rightarrow (\alpha_n\beta_n)_\varkappa=(\beta_n\alpha_n)_\varkappa$ στό R $\Rightarrow$ (ὁρισμός τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό R) $(\alpha_n)_\varkappa\cdot(\beta_n)_\varkappa=(\beta_n)_\varkappa\cdot(\alpha_n)_\varkappa$.

7.4 Θά δείξουμε τήν ἰσχύ τοῦ <u>προσεταιριστικοῦ νόμου</u>: $\forall(\alpha_n)_\varkappa,(\beta_n)_\varkappa,(\gamma_n)_\varkappa\in R\ \ (\alpha_n)_\varkappa\cdot[(\beta_n)_\varkappa\cdot(\gamma_n)_\varkappa]=[(\alpha_n)_\varkappa\cdot(\beta_n)_\varkappa]\cdot(\gamma_n)_\varkappa$. Πραγματικά, $\alpha_n[\beta_n\gamma_n]=[\alpha_n\beta_n]\gamma_n$ στό Q $\Rightarrow (\alpha_n[\beta_n\gamma_n]-[\alpha_n\beta_n]\gamma_n)$ μηδενική $\Rightarrow (\alpha_n[\beta_n\gamma_n])\equiv([\alpha_n\beta_n]\gamma_n)$ στό B $\Rightarrow (\alpha_n[\beta_n\gamma_n])_\varkappa=([\alpha_n\beta_n]\gamma_n)_\varkappa$ στό R $\Rightarrow$ (ὁρισμός τοῦ πολλαπλασιασμοῦ) $(\alpha_n)_\varkappa\cdot(\beta_n\gamma_n)_\varkappa=(\alpha_n\beta_n)_\varkappa\cdot(\gamma_n)_\varkappa$ στό R $\Rightarrow (\alpha_n)_\varkappa\cdot[(\beta_n)_\varkappa\cdot(\gamma_n)_\varkappa]=[(\alpha_n)_\varkappa\cdot(\beta_n)_\varkappa]\cdot(\gamma_n)_\varkappa$ στό R.

7.5 Θά δείξουμε στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τόν ἐπιμεριστικό νόμο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεση, δηλαδή τήν πρόταση $\forall (\alpha_n)_\varkappa, (\beta_n)_\varkappa, (\gamma_n)_\varkappa \in R$, $(\alpha_n)_\varkappa \cdot [(\beta_n)_\varkappa + (\gamma_n)_\varkappa] = (\alpha_n)_\varkappa \cdot (\beta_n)_\varkappa + (\alpha_n)_\varkappa \cdot (\gamma_n)_\varkappa$. Πραγματικά, (ὁρισμός τῆς πρόσθεσης) $(\alpha_n\beta_n + \alpha_n\gamma_n)_\varkappa =$ $(\alpha_n\beta_n)_\varkappa + (\alpha_n\gamma_n)_\varkappa \Rightarrow$ (στούς ρητούς ἰσχύει ὁ ἐπιμεριστικός) $(\alpha_n \cdot [\beta_n + \gamma_n])_\varkappa = (\alpha_n\beta_n)_\varkappa + (\alpha_n\gamma_n)_\varkappa \Rightarrow$ (ὁρισμός τοῦ πολλαπλασιασμοῦ) $(\alpha_n)_\varkappa \cdot (\beta_n + \gamma_n)_\varkappa = (\alpha_n\beta_n)_\varkappa + (\alpha_n\gamma_n)_\varkappa \Rightarrow$ $(\alpha_n)_\varkappa \cdot [(\beta_n)_\varkappa + (\gamma_n)_\varkappa] = (\alpha_n)_\varkappa \cdot (\beta_n)_\varkappa + (\alpha_n)_\varkappa \cdot (\gamma_n)_\varkappa$.

7.6 Μία ἀκολουθία μέ ὅρους ρητούς ἀριθμούς θά ὀνομάζεται μοναδιαία ἄν καί μόνο ἄν ἔχει ὅριο τόν ρητό 1.

π.χ ἡ ἀκολουθία (α_n) μέ τύπο τόν $\alpha_n = 1$ εἶναι μία μοναδιαία ἀκολουθία γιατί γιά ὁποιοδήποτε $\varepsilon \in Q^+$ καί ὁποιοδήποτε $n \in N$ ἰσχύει ἡ $|\alpha_n - 1| < \varepsilon$. Πραγματικά, $|\alpha_n - 1| = |1-1| = 0 < \varepsilon$. Ἐπίσης ἡ ἀκολουθία

(β_n) μέ τύπο τόν $\beta_n = \begin{cases} 4 \text{ ἄν } n \leqq 20 \\ 1 \text{ ἄν } n > 20 \end{cases}$ εἶναι μοναδιαία γιατί

π.χ γιά $\varepsilon = 5$ γιά ὅλους τούς δεῖκτες $n \in N$ ἰσχύει ἡ $|\beta_n - 1| < 5$. Πραγματικά, ἄν $\beta_n = 4$ εἶναι $|4-1| < 5$ καί ἄν $\beta_n = 1$ εἶναι $|1-1| < 5$. Ἄν εἶναι $\varepsilon = \frac{1}{100}$ τότε δέν ἰσχύει βέβαια ἡ $|4-1| < \frac{1}{100}$ ὅμως ὑπάρχει ὁ ἀριθμός $M(\frac{1}{100}) = 20$ ὥστε γιά $n > 20$ νά εἶναι $|\beta_n - 1| < \frac{1}{100}$. Πραγματικά, ἐπειδή γιά $n > 20$ εἶναι $\beta = 1$ ἔχουμε $|1-1| < \frac{1}{100}$. Εὔκολα φαίνεται ἀκόμη ὅτι καί ἡ ἀκολουθία (γ_n) μέ τύπο τόν $\gamma_n = 1 + \frac{1}{n}$ εἶναι μοναδιαία. Ἐπισης ἡ $\delta_n = 1 - \frac{1}{n}$

Οἱ μοναδιαῖες ἀκολουθίες ὁρίζουν μία κλάση βασικῶν ἀκολουθιῶν πού θά τήν συμβολίζουμε μέ $(1_n)_\varkappa$ ὅπου (1_n) εἶναι μία μοναδιαία ἀκολουθία-ἀντιπρόσωπος Εἶναι (παρ.2.19) $(1_n) \in B$ συνεπῶς καί $(1_n)_\varkappa \subseteqq B$, Ἐπίσης $(1_n)_\varkappa \in B/\equiv$ δηλαδή $(1_n)_\varkappa \in R$.

Θά δείξουμε τώρα ὅτι ἡ $(1_n)_\varkappa$ εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο τοῦ R ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall (x_n)_\varkappa \in R, (1_n)_\varkappa \cdot (x_n)_\varkappa = (x_n)_\varkappa$.

Πραγματικά, μέ (1) θά παραστήσουμε μία μοναδιαία ἀκολουθία πού ὅλοι οἱ ὅροι της εἶναι ἴσοι μέ τόν ρητό 1. Ἔχουμε στούς ρητούς $1 \cdot x_n = x_n$. Μέ (1_n) ἐπίσης παριστάνουμε τήν ὁποιαδήποτε μοναδιαία ἀκολουθία. Ἐπειδή $\lim\limits_{n\to\infty} 1_n = 1$ ἡ $(1_n - 1)$ εἶναι μηδενική (παρ.2.8). Ἐπίσης ἡ (x_n) σάν βασική εἶναι φραγμένη. Αὐτά συνεπάγονται ὅτι ἡ $(1_n - 1)(x_n)$ δηλαδή ἡ $(1_n \cdot x_n - 1 \cdot x_n)$ εἶναι μηδενική (παρ.2.15). Οἱ ὅροι της εἶναι οἱ ρητοί $1_n \cdot x_n - 1 \cdot x_n$ δηλαδή οἱ $1_n \cdot x_n - x_n$ (Ἰσχύει στό Q ἡ $1 \cdot x_n = x_n$). Εἶναι μηδενική λοιπόν ἡ ἀκολουθία $(1_n \cdot x_n - x_n)$ πού σημαίνει ὅτι ἰσχύει ἡ $(1_n \cdot x_n) \equiv (x_n)$ στό B. Ἡ τελευταία συνεπάγεται τήν $(1_n \cdot x_n)_\varkappa = (x_n)_\varkappa$ στό R δηλαδή τήν (ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό R) $(1_n)_\varkappa \cdot (x_n)_\varkappa = (x_n)_\varkappa$.

7.7 Οἱ ἰδιότητες 7.1-7.6 καθώς καί ἡ διαπίστωση τῆς παρ. 6.7 ἀποδείχνουν ὅτι τό σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μονάδα.

8 Ἡ διαίρεση στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ὕπαρξη ἀντίστροφου στοιχείου. Τό R εἶναι ἕνα σῶμα.

8.1 Ἡ πράξη τῆς διαίρεσης στό R ὁρίζεται ὡσεξῆς: $(\alpha_n)_\varkappa : (\beta_n)_\varkappa = \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)_\varkappa$. Ὑποθέτουμε βέβαια ὅτι ἡ ἀκολουθία (β_n) δέν εἶναι μηδενική καί ὄχι μόνο αὐτό ἀλλά καί ὅτι ἰσχύει ἡ πρόταση. $\forall n \in N$, $\beta_n \neq 0$. Ἄν ὑπάρ-

χουν ὅροι τῆς (β_n) πού νά εἶναι ἴσοι μέ μηδέν τότε θά εἶναι πεπερασμένου πλήθους γιατί ἄν ἦσαν ἄπειροι θά ἴσχυε ἡ πρόταση $\forall M \in Q^+, \exists \mu \in \{n \in N: n > M\}, \beta_\mu = 0$, χωρίς νά ἰσχύει ἡ πρόταση αὐτή γιά κάθε μ γιατί τότε θά ἴσχυε ἡ $\forall n \in N, |\beta_n| = |0| < \varepsilon$ γιά κάθε $\varepsilon \in Q^+$ καί ἡ (β_n) θά ἦταν μηδενική, ἐνῶ ἔχει ὑποτεθεῖ ὅτι δέν εἶναι. Θά ἴσχυε λοιπόν ἡ πρόταση
$\forall M \in Q^+ [\exists \mu \in \{n \in N: n > M\}, \beta_\mu = 0 \wedge \exists \lambda \in \{n \in N: n > M\}, \beta_\lambda \neq 0]$. Ἀλλά ἡ (β_n) ἔχει ὑποτεθεῖ ὅτι εἶναι καί βασική, αὐτό σημαίνει ὅτι ἰσχύει ἡ πρόταση
$\forall \varepsilon \in Q^+, \exists M(\varepsilon) \in Q^+, \forall \lambda, \mu \in \{n \in N: n > M(\varepsilon)\}, |\beta_\lambda - \beta_\mu| < \varepsilon$.
Σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη πρόταση (ὄχι τήν τελευταία) ὑπάρχει δείκτης μ μέ $\beta_\mu = 0$. Μέ β_λ παριστάνουμε ὁποιοδήποτε ὅρο τῆς (β_n) μέ $\lambda > M(\varepsilon)$. ὅμως τότε ἡ $|\beta_\lambda - \beta_\mu| < \varepsilon$ συνεπάγεται τήν $|\beta_\lambda| < \varepsilon$ (ἀφοῦ $\beta_\mu = 0$) γιά κάθε $\lambda > M(\varepsilon)$ καί ἡ (β_n) εἶναι μηδενική σέ ἀντίφαση μέ τή μία ἀπό τίς ὑποθέσεις. Ἡ ὑπόθεση λοιπόν ὅτι τό πλῆθος τῶν μηδενικῶν ὅρων τῆς (β_n) εἶναι ἄπειρο ἀπορρίπτεται. Ἕνεκα συνεπῶς τοῦ πεπερασμένου πλήθους τῶν μηδενικῶν ὅρων μποροῦμε νά τούς ἀντικαταστήσουμε μέ ρητούς διαφορετικούς ἀπό τό μηδέν καί ἡ νέα ἀκολουθία (β'_n) θά εἶναι ἰσοδύναμη στό B μέ τήν (β_n) ἀφοῦ <u>τελικά</u> θά ἰσχύει ἡ $|\beta_n - \beta'_n| < \varepsilon$ γιατί τελικά θά ἰσχύει ἡ $\beta_n = \beta'_n$. Γιά νά εἶναι τό $\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)_\kappa$ στοιχεῖο τοῦ R πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ ἀκολουθία ρητῶν $\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$ νά ἀποδειχτεῖ ὅτι εἶναι βασική (Ἐδῶ ὑποθέτουμε ὅτι ἡ (β_n) δέν ἔχει μηδενικούς ὅρους).

Θά δείξουμε λοιπόν ὅτι γιά $\varepsilon \in Q^+$ (ε εἶναι ὁποιοσδήποτε θετικός ρητός) ὑπάρχει θετικός ρητός ἀριθμός $M(\varepsilon)$ τέτοιος ὥστε γιά φυσικούς ἀριθμούς λ καί μ μεγαλύτερους τοῦ $M(\varepsilon)$ νά ἰσχύει ἡ $\left|\frac{\alpha_\lambda}{\beta_\lambda} - \frac{\alpha_\mu}{\beta_\mu}\right| < \varepsilon$.

Πρίν προχωρήσουμε στήν ἀπόδειξη ἀναφέρουμε ὅτι ἰσχύουν οἱ: $0<\underline{\varphi}\leqq|\beta_n|\leqq\bar{\varphi}$ καί $|\alpha_n|\leqq\varphi$. Πραγματικά, οἱ (α_n) καί (β_n) σάν βασικές εἶναι φραγμένες, ἰσχύουν ἐπομένως ἡ $|\beta_n|\leqq\bar{\varphi}$ καί ἡ $|\alpha_n|\leqq\varphi$. Ἀκόμη ἡ (β_n) δέν ἔχει μηδενικούς ὅρους ἐπομένως $0<|\beta_n|$ Ἀκόμη μέ φ' παριστάνουμε τόν μεγαλύτερο ἀπό τούς μή ἀρνητικούς ρητούς $\bar{\varphi}$ καί φ. Γιά τήν ὕπαρξη θετικοῦ ρητοῦ $\underline{\varphi}$ τέτοιου ὥστε νά ἰσχύει ἡ $0<\underline{\varphi}\leqq|\beta_n|$ γιά κάθε $n\in N$ παρατηροῦμε ὅτι ἡ (β_n) σάν βασική ἔχει τήν ἰδιότητα

$\forall\varepsilon\in Q^+,\ \exists M(\varepsilon)\in Q^+, \forall\lambda,\mu\in\{n\in N:\ n>M(\varepsilon)\},|\beta_\lambda-\beta_\mu|<\varepsilon.$

Ἔχουμε ἀκόμη $|\beta_\lambda-\beta_\mu|<\varepsilon\Rightarrow$(ἰδιότητες ἀπολύτων τιμῶν ρητῶν) $\big||\beta_\lambda|-|\beta_\mu|\big|<\varepsilon\Rightarrow-\varepsilon<|\beta_\lambda|-|\beta_\mu|<\varepsilon\Rightarrow$ $|\beta_\mu|-\varepsilon<|\beta_\lambda|<|\beta_\mu|+\varepsilon$. Ὑπάρχει ἕνα $\varepsilon\in Q^+$ καί ἕνα $\mu>M(\varepsilon)$ τέτοια ὥστε νά ἰσχύει ἡ $\varepsilon<|\beta_\mu|$ Διαφορετικά θά ἴσχυε ἡ $|\beta_\mu|<\varepsilon$ (Ἡ $|\beta_\mu|=0$ ἀποκλείεται γιατί $\beta_\mu\neq0$) γιά ὅλα τά $\varepsilon\in Q^+$ καί ὅλα τά $\mu>M(\varepsilon)$ καί ἡ (β_n) θά ἦταν μηδενική, περίπτωση πού ἔχει ἀποκλεισθεῖ. Ὑπάρχει λοιπόν ἕνας θετικός ρητός $|\beta_\mu|-\varepsilon=\varepsilon_1$ ὥστε γιά κάθε $\lambda>M(\varepsilon)$ νά εἶναι $\varepsilon_1<|\beta_\lambda|$ (βλέπετε παραπάνω). Θεωροῦμε ἀκόμη τούς θετικούς ὅρους $|\beta_1|,|\beta_2|,\ldots,|\beta_\sigma|$ ὅπου σ εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀπό τούς φυσικούς πού εἶναι ἴσοι ἤ μικρότεροι ἀπό τόν θετικό ρητό M(ε). Μεταξύ τῶν πεπερασμένων πλήθους θετικῶν ρητῶν $|\beta_1|$, $|\beta_2|,\ldots,|\beta_\sigma|$, ε_1 ὑπάρχει μικρότερος. Τόν παριστάνουμε μέ $\underline{\varphi}$ $(0<\underline{\varphi})$. Ὁ $\underline{\varphi}$ προφανῶς εἶναι ἴσος ἤ μικρότερος ἀπό κάθε ὅρο τῆς ἀκολουθίας $(|\beta_n|)$. Ἰσχύει λοιπόν ἡ $\forall n\in N,\ 0<\underline{\varphi}\leqq|\beta_n|$.

Τώρα ἡ ἀπόδειξη ὅτι ἡ ἀκολουθία $(\frac{\alpha_n}{\beta_n})$ εἶναι βασική ἔχει ὡσεξῆς: Ἐπειδή ἡ (α_n) καί ἡ (β_n) εἶναι βασικές, γιά ὁποιοδήποτε ρητό $\frac{\varepsilon\underline{\varphi}^2}{2\varphi'}>0$ ὑπάρχει ρητός M τέτοιος ὥστε γιά δεῖκτες (φυσικούς ἀριθμούς) $\lambda,\mu>M$

ἰσχύουν οἱ $|\alpha_\mu-\alpha_\lambda|<\frac{\varepsilon\varphi^2}{2\varphi'}$, $|\beta_\mu-\beta_\lambda|<\frac{\varepsilon\varphi^2}{2\varphi'}$. Αὐτές συνεπάγονται τήν $|\alpha_\mu-\alpha_\lambda|+|\beta_\mu-\beta_\lambda|<\frac{\varepsilon\varphi^2}{2\varphi'}+\frac{\varepsilon\varphi^2}{2\varphi'}=\frac{\varepsilon\varphi^2}{\varphi'}$ καί αὐτή μέ τή σειρά της τήν $\varphi'|\alpha_\mu-\alpha_\lambda|+\varphi'|\beta_\mu-\beta_\lambda|<\varepsilon\underline{\varphi}^2$. Αὐτή συνεπάγεται τήν ($\varphi'$ ὑποτέθηκε τό μεγαλύτερο ἀπό τούς $\bar{\varphi}$ καί φ) $\bar{\varphi}|\alpha_\mu-\alpha_\lambda|+\varphi|\beta_\mu-\beta_\lambda|<\varepsilon\underline{\varphi}^2$ καί στή συνέχεια τήν $\frac{1}{\underline{\varphi}^2}[\bar{\varphi}|\alpha_\mu-\alpha_\lambda|+\varphi|\beta_\mu-\beta_\lambda|]<\varepsilon$. Ἡ τελευταία ἐπειδή $\left|\frac{1}{\beta_\lambda}\right|\cdot\left|\frac{1}{\beta_\mu}\right|\cdot[|\alpha_\lambda|\cdot|\beta_\mu-\beta_\lambda|+|\beta_\lambda|\cdot|\alpha_\mu-\alpha_\lambda|]\leqq \frac{1}{\underline{\varphi}^2}[\bar{\varphi}\,|\alpha_\mu-\alpha_\lambda|+\varphi\cdot|\beta_\mu-\beta_\lambda|]$ συνεπάγεται τήν $\left|\frac{1}{\beta_\lambda}\right|\cdot\left|\frac{1}{\beta_\mu}\right|\cdot[|\alpha_\lambda|\cdot|\beta_\mu-\beta_\lambda|+|\beta_\lambda|\cdot|\alpha_\mu-\alpha_\lambda|]<\varepsilon$. Αὐτή συνεπάγεται τήν $\left|\frac{\alpha_\lambda(\beta_\mu-\beta_\lambda)-\beta_\lambda(\alpha_\mu-\alpha_\lambda)}{\beta_\lambda\beta_\mu}\right|<\varepsilon$ γιατί τό πρῶτο μέλος της εἶναι ἴσο ἤ μικρότερο ἀπό τό πρῶτο μέλος τῆς προηγούμενης (Ἀπό τίς σχέχεις $|x-\psi|\leqq|x|+|\psi|$ καί $|x\psi|=|x|\cdot|\psi|$ στούς ρητούς). Ἡ τελευταία γράφεται καί $\left|\frac{\alpha_\lambda\beta_\mu-\beta_\lambda\alpha_\mu+\beta_\lambda\alpha_\lambda-\beta_\lambda\alpha_\lambda}{\beta_\lambda\beta_\mu}\right|<\varepsilon$ πού γράφεται καί $\left|\frac{\alpha_\lambda\beta_\mu-\beta_\lambda\alpha_\mu}{\beta_\lambda\beta_\mu}\right|<\varepsilon$ καί τελικά $\left|\frac{\alpha_\lambda}{\beta_\lambda}-\frac{\alpha_\mu}{\beta_\mu}\right|<\varepsilon$ γιά $\lambda,\mu>M(\varepsilon)$. Ἡ $\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$ λοιπόν εἶναι βασική.

8.2 <u>Κάθε πραγματικός ἀριθμός διαφορετικός ἀπό τόν μηδέν ἔχει ἀντίστροφο στοιχεῖο στό R.</u> Πραγματικά, ὁ πραγματικός $(\beta_n)_\kappa \neq (0_n)_\kappa$ ἔχει ἀντίστροφο στοιχεῖο τόν πραγματικό $\left(\frac{1_n}{\beta_n}\right)_\kappa$ γιατί $\left(\frac{1_n}{\beta_n}\right)_\kappa\cdot(\beta_n)_\kappa=\left(\frac{1_n\cdot\beta_n}{\beta_n}\right)_\kappa=(1_n)_\kappa$ (Ἁπλοποίηση στό Ω). Βέβαια γιά νά εἶναι ὁ $\left(\frac{1_n}{\beta_n}\right)_\kappa$ πραγματικός πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ ἀκολουθία $\left(\frac{1_n}{\beta_n}\right)$ νά εἶναι βασική. Αὐτό ὅμως συμβαίνει (παρ.8.1) ἀφοῦ ἡ (1_n) καί (β_n) εἶναι βασικές καί ἡ (β_n) δέν εἶναι μηδενική. Θεωροῦμε ἀκόμη ὅτι ἡ (β_n) δέν ἔχει μηδενικούς ὅρους, διαφορετικά χρησιμοποιοῦμαι μία ἰσοδύναμή της στό B π.χ τήν (β'_n) (παρ.8.1).

8.3 Ἡ διαπίστωση τῆς παρ.7.7 καί ἡ ἰδιότητα τῆς παρ. 8.2 ἀποδείχνουν ὅτι τό σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνα σῶμα. Σάν σῶμα εἶναι καί ἀκέραια περιοχή ἐπομένως δέν ἔχει μηδενοδιαιρέτες καί ἰσχύει ὁ νόμος διαγραφῆς γιά τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (κεφ.VII). Γενικά ἰσχύουν ὅλες οἱ ἰδιότητες πού ἰσχύουν στά σώματα ἐπομένως καί στίς ἀκέραιες περιοχές καί τούς ἀντιμεταθετικούς δακτύλιους μέ μονάδα.

9. Σχέσεις ὁλικῆς γνήσιας διάταξης στό σύνολο τῶν πραγματικῶν. Τό σύνολο R εἶναι ἕνα γραμμικά διατεταγμένο σῶμα.

9.1 Ἡ σχέση $<$ τοῦ μικρότερου στό R ὁρίζεται ὡσεξῆς: $(\alpha_n)_\varkappa < (\beta_n)_\varkappa$ στό R $\underset{\text{ορσ}}{\iff} \exists \varepsilon \in Q^+, \exists M(\varepsilon) \in Q^+, \forall n \in \{n \in N: n > M\}, \beta_n - \alpha_n > \varepsilon$. Ὑπενθυμίζουμε ὅτι οἱ ὅροι τῶν βασικῶν ἀκολουθιῶν (α_n) καί (β_n) εἶναι ρητοί ἀριθμοί

Θά δείξουμε ὅτι ἡ σχέση $<$ εἶναι μεταβατική στό R, δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση

$(\alpha_n)_\varkappa < (\beta_n)_\varkappa \wedge (\beta_n)_\varkappa < (\gamma_n)_\varkappa \Rightarrow (\alpha_n)_\varkappa < (\gamma_n)_\varkappa$. Πραγματικά,

$(\alpha_n)_\varkappa < (\beta_n)_\varkappa \wedge (\beta_n)_\varkappa < (\gamma_n)_\varkappa \Rightarrow \exists \varepsilon' \in Q^+, \exists M'(\varepsilon') \in Q^+, \forall n' > M'(\varepsilon'), \beta_{n'} - \alpha_{n'} > \varepsilon' \wedge \exists \varepsilon'' \in Q^+, \exists M''(\varepsilon'') \in Q^+, \forall n'' > M''(\varepsilon''), \gamma_{n''} - \beta_{n''} > \varepsilon'' \Rightarrow$ (Ἄν τόν μικρότερο ἀπό τούς ε' καί ε'' τόν παραστήσουμε μέ ε καί τόν μεγαλύτερο ἀπό τούς Μ'(ε') καί Μ''(ε'') μέ Μ(ε)) $\exists \varepsilon \in Q^+, \exists M(\varepsilon) \in Q^+, \forall n > M(\varepsilon), \beta_n - \alpha_n > \varepsilon \wedge \gamma_n - \beta_n > \varepsilon \Rightarrow$

$\exists \varepsilon \in Q^+, \exists M(\varepsilon) \in Q^+, \forall n > M(\varepsilon), (\beta_n - \alpha_n) + (\gamma_n - \beta_n) > \varepsilon \Rightarrow$

$\exists \varepsilon \in Q^+, \exists M(\varepsilon) \in Q^+, \forall n > M(\varepsilon), \gamma_n - \alpha_n > \varepsilon \Rightarrow$

$(\alpha_n)_\varkappa < (\gamma_n)_\varkappa$.

Ἡ σχέση $<$ στό R εἶναι ἀκόμη ἀναυτοπαθής δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall (\alpha_n)_\varkappa \in R, (\alpha_n)_\varkappa \not< (\alpha_n)_\varkappa$.

Πραγματικά, ἄν ἴσχυε ἡ $(\alpha_n)_\varkappa < (\alpha_n)_\varkappa$ τότε θά ἔπρεπε νά ὑπάρχει θετικός ρητός ε καί ἐπίσης θετικός ρητός M(ε) ὥστε γιά $n > M(\varepsilon)$ νά εἶναι $\alpha_n - \alpha_n > \varepsilon$ ὅμως $\alpha_n - \alpha_n$ εἶναι πάντοτε μηδέν καί δέν ἰσχύει ἡ $0 > \varepsilon$. Ἡ $<$ λοιπόν στό R εἶναι ἀναυτοπαθής.

Ἡ σχέση $<$ τοῦ μικρότερου εἴδαμε παραπάνω ὅτι εἶναι ἀναυτοπαθής καί μεταβατική, ἑπομένως εἶναι μία σχέση γνήσιας διάταξης στό R. Ἐπειδή ὅπως εὔκολα μπορεῖ νά δειχτεῖ ἰσχύει καί ἡ πρόταση

$\forall (\alpha_n)_\varkappa \in R, \forall (\beta_n)_\varkappa \in R, (\alpha_n)_\varkappa < (\beta_n)_\varkappa \veebar (\beta_n)_\varkappa < (\alpha_n)_\varkappa \veebar (\alpha_n)_\varkappa = (\beta_n)_\varkappa$. Ἡ $<$ εἶναι σχέση ὁλικῆς γνήσιας διάταξης στό R.

9.2 Μέ τή βοήθεια τῆς $<$ ὁρίζεται καί ἡ σχέση $>$ τοῦ μεγαλύτερου στό R.

$(\lambda_n)_\varkappa > (\mu_n)_\varkappa \overset{}{\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}} (\mu_n)_\varkappa < (\lambda_n)_\varkappa$ Ἐπίσης ἀπ᾽εὐθείας.

$(\lambda_n)_\varkappa > (\mu_n)_\varkappa \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \exists \varepsilon \in Q^+, \exists M(\varepsilon) \in Q^+, \forall n \in \{n \in N : n > M(\varepsilon)\}$ $\lambda_n - \mu_n > \varepsilon$.

9.3 Ἔχουμε ἀκόμη στό R τίς σχέσεις $\leqq$ καί $\geqq$ πού ὁρίζονται ὡσεξῆς:

$$(\alpha_n)_\varkappa \leqq (\beta_n)_\varkappa \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (\alpha_n)_\varkappa < (\beta_n)_\varkappa \vee (\alpha_n)_\varkappa = (\beta_n)_\varkappa$$

$$(\beta_n)_\varkappa \geqq (\alpha_n)_\varkappa \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (\beta_n)_\varkappa > (\alpha_n)_\varkappa \vee (\beta_n)_\varkappa = (\alpha_n)_\varkappa .$$

Εὔκολα φαίνεται ὅτι οἱ σχέσεις αὐτές εἶναι σχέσεις ὁλικῆς διάταξης στό R.

9.4 Ὁ πραγματικός ἀριθμός $(\alpha_n)_\varkappa$ εἶναι θετικός ἄν καί μόνο ἄν εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν πραγματικό $(0_n)_\varkappa$ (μηδέν). Μέ ἄλλα λόγια, ἄν καί μόνο ἄν $\exists \varepsilon \in Q^+, \exists M(\varepsilon) \in Q^+, \forall n \in \{n \in N : n > M\}, \alpha_n - 0_n > \varepsilon$ π.χ ὁ πραγματικός $(x_n)_\varkappa$ μέ ἀντιπρόσωπο τήν βασική ἀκολουθία ρητῶν (x_n) καί τύπο τόν $x_n = 3 + \frac{2}{n}$ εἶναι θετικός γιατί π.χ ἄν θεωρήσουμε τήν μηδενική ἀκολουθία (0_n) ἀντιπρόσωπο τοῦ πραγματικοῦ μηδέν $(0_n)_\kappa$ μέ τύπο τόν $0_n=\frac{1}{n}$ ὑπάρχει θετικός ρητός ἀριθμός π.χ ὁ $\varepsilon=3$ καί ὁ ρητός $M(\varepsilon)=M(3)=\frac{1}{10}$ ὥστε γιά $n>M(\varepsilon)$ δηλαδή γιά κάθε $n>\frac{1}{10}$ $(n\in N)$ νά εἶναι $x_n-0_n=3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n}=3+\frac{1}{n}>3$.

Ὁ πραγματικός ἀριθμός $(\beta_n)_\kappa$ εἶναι ἀρνητικός ἄν καί μόνο ἄν εἶναι μικρότερος ἀπό τόν πραγματικό μηδέν. Μέ ἄλλα λόγια ἄν καί μόνο ἄν ὁ ἀντίθετός του $(-\beta_n)_\kappa$ εἶναι θετικός. Ἐπίσης ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ πρόταση $\exists\varepsilon\in Q^+,\ \exists M(\varepsilon)\in Q^+,\ \forall n\in\{n\in N\colon n>M\}$, $0_n-\beta_n>\varepsilon$ $(\beta_n-0_n<-\varepsilon)$.

Σύμφωνα καί μέ τά ἀναφερθέντα στήν παρ.9.1 ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall(\psi_n)_\kappa\in R,(\psi_n)_\kappa>(0_n)_\kappa\ \underline{\vee}\ (\psi_n)_\kappa<(0_n)_\kappa\ \underline{\vee}\ (\psi_n)_\kappa=(0_n)_\kappa$ δηλαδή κάθε πραγματικός ἀριθμός εἶναι μόνο θετικός ἤ μόνο ἀρνητικός ἤ μόνο μηδέν (Νόμος τῆς τριχοτομίας). Γράφεται καί $\forall(\psi_n)_\kappa\in R,\ (\psi_n)_\kappa\in R^+\ \underline{\vee}\ (-\psi_n)_\kappa\in R^+\ \underline{\vee}\ (\psi_n)_\kappa=(0_n)_\kappa$.

9.5 Τό ἄθροισμα δύο θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι θετικός πραγματικός ἀριθμός. Συμβολικά:

$\forall(\alpha_n)_\kappa\in R^+,\ \forall(\beta_n)_\kappa\in R^+,\ (\alpha_n)_\kappa+(\beta_n)_\kappa\in R^+$ Πραγματικά, $(\alpha_n)_\kappa\in R^+\wedge(\beta_n)_\kappa\in R^+\Rightarrow\exists\varepsilon'\in Q^+,\ \exists M'(\varepsilon')\in Q^+,\forall n'>M'(\varepsilon')$, $\alpha_{n'}-0'_{n'}>\varepsilon'\wedge\ \exists\varepsilon''\in Q^+,\ \exists M''(\varepsilon'')\in Q^+,\ \forall n''>M''(\varepsilon'')$, $\beta_{n''}-0'_{n''}>\varepsilon''\Rightarrow\exists\frac{\varepsilon}{2}\in Q^+,\ \exists M(\varepsilon)\in Q^+,\ \forall n>M(\varepsilon),\ \alpha_n-0'_n>\frac{\varepsilon}{2}\wedge$ $\beta_n-0'_n>\frac{\varepsilon}{2}$ ($\frac{\varepsilon}{2}$ εἶναι τό μικρότερο ἀπό τά ε' καί ε'' καί $M(\varepsilon)$ τό μεγαλύτερο ἀπό τά $M'(\varepsilon')$ καί $M''(\varepsilon'')$).

$\Rightarrow[\alpha_n+\beta_n]-0_n>\varepsilon$ (οἱ 0_n εἶναι ὅροι μηδενικῆς ἀκολουθίες ἀφοῦ $0_n=2\cdot0'_n$ καί ἡ $(0'_n)$ εἶναι μηδενική) $\Rightarrow$ $(\alpha_n+\beta_n)_\kappa>(0_n)_\kappa\Rightarrow(\alpha_n)_\kappa+(\beta_n)_\kappa>(0_n)_\kappa$

9.6 <u>Τό γινόμενο δύο θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι θετικός πραγματικός ἀριθμός.</u> Συμβολικά:

$\forall (\alpha_n)_\varkappa \in R^+,\ \forall (\beta_n)_\varkappa \in R^+,\ (\alpha_n)_\varkappa \cdot (\beta_n)_\varkappa \in R^+$. Πραγματικά,

$(\alpha_n)_\varkappa \in R^+ \wedge (\beta_n)_\varkappa \in R^+ \Rightarrow \exists \varepsilon' \in Q^+, \exists M(\varepsilon') \in Q^+,$

$\forall n > M(\varepsilon'),\ \alpha_n - 0'_n > \varepsilon' \wedge \beta_n - 0'_n > \varepsilon' \Rightarrow \exists \varepsilon' \in Q^+,$

$\exists M(\varepsilon') \in Q^+, \forall n > M(\varepsilon'),\ [\alpha_n\beta_n + 0'^2_n - 0'_n\beta_n - 0'_n\alpha_n] > \varepsilon'^2 \Rightarrow$

(Οἱ ὅροι $0'^2_n$ εἶναι ὅροι μηδενικῆς ἀκολουθίας σύμφωνα μέ τήν παρ. 2.16. Ἐπίσης καί οἱ $0'_n \cdot \beta_n, 0'_n\alpha_n$ ἀφοῦ ἡ $(0'_n)$ εἶναι μηδενική καί (α_n), (β_n) ὡς βασικές εἶναι φραγμένες σύμφωνα μέ τίς παρ. 2.18 καί 2.15)

$\exists \varepsilon \in Q^+, \exists M(\varepsilon) \in Q^+, \forall n > M(\varepsilon),\ \alpha_n\beta_n - 0_n > \varepsilon$ (θέτουμε $\varepsilon'^2 \geqq \varepsilon$ καί $0'^2_n - 0'\beta_n - 0'_n\alpha_n = 0_n$ ὅπου 0_n εἶναι οἱ ὅροι τῆς νέας μηδενικῆς ἀκολουθίας (0_n) σύμφωνα μέ τήν παρ. 2.13) $\Rightarrow (\alpha_n\beta_n)_\varkappa > (0_n)_\varkappa \Rightarrow (\alpha_n\beta_n)_\varkappa \in R^+ \Rightarrow (\alpha_n)_\varkappa \cdot (\beta_n)_\varkappa \in R^+$

9.7 Εἴδαμε στήν παρ.8.3 ὅτι τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν R εἶναι ἕνα σῶμα. Μέ τίς ἰδιότητες τῶν παρ. 9.5 καί 9.6 καί τό νόμο τῆς τριχοτομίας τῆς παρ.9.4 προκύπτει ὅτι <u>τό R εἶναι ἕνα ὁλικά διατεταγμένο σῶμα</u> (βλέπετε γιά διατεταγμένους δακτύλιους καί σώματα στό προηγούμενο κεφάλαιο).

10. Ἕνας ἰσομορφισμός τοῦ συνόλου Q τῶν ρητῶν στό σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

10.1 <u>Ὁρίζουμε τήν ἑπόμενη ἀπεικόνιση:</u>

$\varphi:\ Q \ni \alpha \longleftrightarrow \varphi(\alpha) = (\alpha_n)_\varkappa \in R$ μέ $\lim \alpha_n = \alpha$ δηλαδή μέ τήν $(\alpha_n - \alpha)$ μηδενική. <u>Ἡ φ εἶναι μονοσήμαντη</u> γιατί ἄν π.χ εἶναι καί $\varphi(\alpha) = (\beta_n)_\varkappa$ μέ τήν $(\beta_n - \alpha)$ μηδενική θά εἶναι (παρ.2.13) καί ἡ $(\alpha_n - \alpha) - (\beta_n - \alpha)$ μηδενική $\Rightarrow$ (παρ.2.13) $(\alpha_n - \alpha - \beta_n + \alpha)$ μηδενική $\Rightarrow (\alpha_n - \beta_n)$ μηδενική (παρ.4.1) $\Rightarrow$

$(\alpha_n) \equiv (\beta_n) \Rightarrow$ (παρ.5.1) $(\alpha_n)_\varkappa=(\beta_n)_\varkappa$ στό R .

Ἡ φ εἶναι καί ἀμφιμονοσήμαντη. Πραγματικά, ἡ φ εἶναι μονοσήμαντη. Ἐπί πλέον ἄν $\alpha\neq\gamma$ ἐπειδή εἶναι $(\alpha_n-\alpha)$ μηδενική καί $(\gamma_n-\gamma)$ μηδενική εἶναι καί ἡ (παρ. 2.13) $(\alpha_n-\gamma_n+\gamma-\alpha)$ μηδενική δηλαδή $\lim \alpha_n-\gamma_n=\alpha-\gamma\neq0$ (ἕνεκα τῆς $\alpha\neq\gamma$). Ἡ τελευταία συνεπάγεται τήν $(\alpha_n) \not\equiv (\gamma_n)$ καί αὐτή τήν $(\alpha_n)_\varkappa\neq(\gamma_n)_\varkappa$. Ἡ φ λοιπόν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη.

Ἰσχύει λοιπόν ἡ: $\lambda=\mu$ στό $\Omega \Leftrightarrow (\lambda_n)_\varkappa=(\mu_n)_\varkappa$ στό R μέ $(\lambda_n-\lambda)$ καί $(\mu_n-\mu)$ μηδενικές.

10.2 Σχετικά μέ τήν ἀνισότητα στό Ω καί στό R παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει ἡ: $\alpha<\beta$ στό $\Omega \Leftrightarrow (\alpha_n)_\varkappa<(\beta_n)_\varkappa$ στό R μέ μηδενικές τίς ἀκολουθίες $(\alpha_n-\alpha)$ καί $(\beta_n-\beta)$. Πραγματικά, ὑποθέτουμε ὅτι ἰσχύει ἡ $\alpha<\beta$ στό Ω. Ἡ ἀκολουθία (παρ.2.13) $([\beta_n-\alpha_n]-[\beta-\alpha])$ εἶναι μηδενική καί ἄν θέσουμε $\beta-\alpha=2\varepsilon\in\Omega^+$ (ἕνεκα τῆς $\alpha<\beta$) ἡ ἀκολουθία $([\beta_n-\alpha_n]-2\varepsilon)$ εἶναι μηδενική. Αὐτό συνεπάγεται (παρ.2.2) τήν $-\varepsilon<[\beta_n-\alpha_n]-2\varepsilon<\varepsilon$ γιά $n>M(\varepsilon)$ $(\varepsilon=\frac{\beta-\alpha}{2}>0)$ καί αὐτή τήν $-\varepsilon+2\varepsilon<\beta_n-\alpha_n$ δηλαδή τήν $\varepsilon<\beta_n-\alpha_n$ γιά $n>M(\varepsilon)$. Ἡ τελευταία (παρ.9.1) συνεπάγεται τήν $(\alpha_n)_\varkappa<(\beta_n)_\varkappa$ στό R. Ἀντίστροφα ἀπό τήν τελευταία θά ἀποδείξουμε τήν $\alpha<\beta$ στό Ω . Πραγματικά, ἄν ἴσχυε ἡ $\alpha=\beta$ θά ἦταν (παρ.10.1) $(\alpha_n)_\varkappa=(\beta_n)_\varkappa$ σέ ἀντίφαση μέ τήν ὑπόθεση $(\alpha_n)_\varkappa<(\beta_n)_\varkappa$. Ἐπίσης ἄν ἴσχυε ἡ $\beta<\alpha$ τότε θά ἴσχυε ὅπως μόλις ἀποδείξαμε ἡ $(\beta_n)_\varkappa<(\alpha_n)_\varkappa$ σέ ἀντίφαση πάλι μέ τήν ὑπόθεση. Ἀπομένει λοιπόν ἡ $\alpha<\beta$.

10.3 <u>Θά δείξουμε τώρα στό R τήν πρόταση $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$</u> ὅπου $\alpha\in Q$, $\beta\in Q$, $\alpha+\beta$ ἄθροισμα στό Q, $\varphi(\alpha)+(\varphi(\beta)$ ἄθροισμα στό R καί $\varphi(\alpha)=(\alpha_n)_\varkappa$, $\varphi(\beta)=(\beta_n)_\varkappa$, $\varphi(\alpha+\beta)=([\alpha+\beta]_n)_\varkappa$ μέ μηδενικές τίς ἀκολουθίες $(\alpha_n-\alpha)$, $(\beta_n-\beta)$, $([\alpha+\beta]_n-[\alpha+\beta])$. Ἀντί λοιπόν τῆς $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$ <u>θά ἀποδειχτεῖ ἡ $([\alpha+\beta]_n)_\varkappa=(\alpha_n)_\varkappa+(\beta_n)_\varkappa$</u>. Ἀπό τήν πρόσθεση στό R γνωρίζουμε ὅτι $(\alpha_n)_\varkappa+(\beta_n)_\varkappa=(\alpha_n+\beta_n)_\varkappa$ ἐπομένως ἀντί τῆς παραπάνω θά ἀποδειχτεῖ ἡ $([\alpha+\beta]_n)_\varkappa=(\alpha_n+\beta_n)_\varkappa$. Μέ ἄλλα λόγια πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἀποδειχτεῖ ἡ $([\alpha+\beta]_n)\equiv(\alpha_n+\beta_n)$ ἤ ἰσοδύναμα, ὅτι <u>ἡ $([\alpha+\beta]_n-[\alpha_n+\beta_n])$ εἶναι μηδενική</u>. Πραγματικά, ἡ ἀκολουθία αὐτή εἶναι μηδενική γιατί (βλέπετε παραπάνω) ἀπό τίς μηδενικές ἀκολουθίες $(\alpha_n-\alpha)$ καί $(\beta_n-\beta)$ προκύπτει ἡ $([\alpha_n+\beta_n]-[\alpha+\beta])$ πού εἶναι μηδενική (παρ.2.12). Μέ ἀφαίρεση αὐτῆς καί τῆς μηδενικῆς (βλέπετε παραπάνω) $([\alpha+\beta]_n-[\alpha+\beta])$ προκύπτει ἡ $([\alpha+\beta]_n-[\alpha_n+\beta_n])$ πού εἶναι μηδενική (παρ.2.13) καί ἡ πρόταση ἀποδείχτηκε.

10.4 Θά δείξουμε ἐπίσης στό R <u>τήν πρόταση: $\varphi(\alpha\beta)=\varphi(\alpha)(\varphi(\beta)$</u> ὅπου $\alpha,\beta\in Q$, $\alpha\beta$ γινόμενο στό Q, $\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)$ γινόμενο στό R καί $\varphi(\alpha)=(\alpha_n)_\varkappa$, $\varphi(\beta)=(\beta_n)_\varkappa$, $\varphi(\alpha\beta)=([\alpha\beta]_n)_\varkappa$ μέ μηδενικές τίς ἀκολουθίες $(\alpha_n-\alpha)$, $(\beta_n-\beta)$, $([\alpha\beta]_n-\alpha\beta)$. Ἀντί λοιπόν τῆς $\varphi(\alpha\beta)=\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)$ θά ἀποδειχτεῖ ἡ $([\alpha\beta]_n)_\varkappa=(\alpha_n)_\varkappa\cdot(\beta_n)_\varkappa$ στό R. Ὅμως ἐπειδή (παρ. 5.3) $(\alpha_n)_\varkappa\cdot(\beta_n)_\varkappa=(\alpha_n\beta_n)_\varkappa$ μπορεῖ ἰσοδύναμα νά ἀποδειχτεῖ ἡ $([\alpha\beta]_n)_\varkappa=(\alpha_n\beta_n)_\varkappa$. Μέ ἄλλα λόγια πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἀποδειχτεῖ ἡ $([\alpha\beta]_n)\equiv(\alpha_n\beta_n)$ ἤ ἰσοδύναμα, ὅτι <u>ἡ ἀκολουθία $([\alpha\beta]_n-\alpha_n\beta_n)$ εἶναι μηδενική</u>. Πραγματικά, ἐπειδή ἡ $(\alpha_n-\alpha)$ εἶναι μηδενική (βλέπετε παραπάνω) καί ἡ (β_n) σάν βασική εἶναι φραγμένη (παρ.2.18) ἡ $(\alpha_n-\alpha)\cdot(\beta_n)$ δηλαδή (παρ.2.15) ἡ $(\alpha_n\beta_n-\alpha\beta_n)$ εἶναι μηδενική. Ἐπίσης ἐπειδή ἡ $(\beta_n-\beta)$ εἶναι μηδενική καί ὁ α εἶναι ρητός σταθερός (παρ.2.17) ἡ $(\beta_n-\beta)\alpha$ δηλαδή ἡ $(\alpha\beta_n-\alpha\beta)$ εἶναι μηδενική. Μέ πρόσθεση (παρ.2.12) τῶν μηδενικῶν ἀκολουθιῶν $(\alpha_n\beta_n-\alpha\beta_n)$ καί $(\alpha\beta_n-\alpha\beta)$ προκύπτει (παρ.2.12) ἡ μηδενική ἀκολουθία $(\alpha_n\beta_n-\alpha\beta)$. Ἀπό τήν τελευταία ἀκολουθία καί τήν $([\alpha\beta]_n-\alpha\beta)$ (βλέπετε παραπάνω) πού εἶναι μηδενική, μέ ἀφαίρεση προκύπτει (παρ.2.13) ἡ μηδενική ἀκολουθία $([\alpha\beta]_n-\alpha_n\beta_n)$. Ἡ πρόταση λοιπόν ἀποδείχτηκε.

10.5 Ὅμοια μποροῦμε νά ἐργαστοῦμε καί γιά τίς σχέσεις $>, \leqq$ καί $\geqq$ στό Q καί στό R καθώς καί γιά τίς πράξεις τῆς ἀφαίρεσης καί τῆς διαίρεσης.

10.6 Ἀπό ὅσα ἀναφέραμε στίς παρ. 10.1-10.5 προκύπτει ὅτι ἡ ἀπεικόνιση φ εἶναι ἕνας ἰσομορφισμός τοῦ Q στό R ὡς πρός τίς σχέσεις καί πράξεις πού ἀναφέραμε. Τό σύνολο λοιπόν Q εἶναι ἰσόμορφο μέ ἕνα ὑποσύνολο R_q τοῦ R πού γιά τό λόγο αὐτό θά τό θεωροῦμε ταυτιζόμενο μέ τό Q. Θά θεωροῦμε συνεπῶς τό Q σάν ἕνα γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ R.

11. Θεώρημα τοῦ Ἀρχιμήδη

Πρόκειται γιά τήν πρόταση:

$\forall \alpha \in R^+,\ \forall \beta \in R,\ \exists \nu \in N,\ \nu\alpha > \beta.$

12. Τό γραμμικά διατεταγμένο σῶμα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι κορεσμένο. Τό σῶμα τῶν ρητῶν δέν εἶναι κορεσμένο.

12.1 Δίνουμε χωρίς ἀπόδειξη τήν ἑπόμενη σπουδαία πρόταση: "Κάθε μή κενό ὑποσύνολο τοῦ R, φραγμένο ἄνω στό R, ἔχει ἀνώτερο πέρας στό R". Ἰσχύει καί ἡ πρόταση: "Κάθε μή κενό ὑποσύνολο τοῦ R φραγμένο κάτω στό R ἔχει κατώτερο πέρας στό R". Ἔτσι λέμε ὅτι τό R εἶναι κορεσμένο. Γενικά, ἕνα σύνολο A εἶναι κορεσμένο ἄν καί μόνο ἄν κάθε μή κενό ὑποσύνολό του φραγμένο στό A ἔχει ἄνω καί κάτω πέρας στό A.

Τό σύνολο Q τῶν ρητῶν δέν εἶναι κορεσμένο π.χ τό ὑποσύνολό του $K=\{x \in Q^+ : x^2<2\}$ εἶναι ἄνω φραγμένο στό Q (π.χ τό $10 \in Q$ εἶναι ἕνα ἄνω φράγμα) ὅμως δέν ἔχει ἀνώτερο πέρας στό Q. Πραγματικά, δέν ὑπάρχει ρητός τέτοιος ὥστε νά ἰσχύει ἡ $x^2=2$ (παρ.1). Ὑποθέτουμε τώρα ὅτι ὑπάρχει θετικός ρητός x_1 μέ $x_1^2>2$ πού εἶναι ἄνω πέρας τοῦ K στό Q. Θεωροῦμε τόν ρητό $x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{2}{x_1}\right)$ Προφανῶς εἶναι $x_2>0$ ὅταν $x_1>0$. Ἐπίσης $x_2^2=\frac{1}{4}\cdot\left(x_1+\frac{2}{x_1}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\left(x_1-\frac{2}{x_1}\right)^2+2$. Ἀπό αὐτή προκύπτει ἡ $x_2^2>2$ ἀφοῦ ἡ $x_1-\frac{2}{x_1}$ δέν μπορεῖ νά εἶναι μηδέν γιατί ἡ $x_1-\frac{2}{x_1}=0$ δέν ἔχει ρητή λύση καί ὁ x_1 ὑποτέθηκε ρητός. Τέλος, $x_1-x_2=x_1-\frac{1}{2}\cdot\left(x_1+\frac{2}{x_1}\right)=x_1-\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1}{2}-\frac{1}{x_1}=$ $=\frac{x_1^2-2}{2x_1}$. Ὅμως ἐπειδή $2x_1>0$ καί $x_1^2-2>0$ (ὑποθέτουμε $x_1^2>2$) εἶναι καί $\frac{x_1^2-2}{2x_1}>0$ δηλαδή $x_1-x_2>0$ καί $x_1>x_2$ στό Q. Βρέθηκε λοιπόν ἕνα ἄλλο ἄνω φράγμα x_2 τοῦ K ($x_2 \in Q^+$ καί $x_2^2>2$) πού εἶναι μικρότερο ἀπό τό x_1 ($x_1>x_2$). Γιά τό x_1 εἴχαμε ὑποθέσει ὅτι ἦταν ἄνω πέρας τοῦ K στό Q καί ὁδηγήθηκαμε σέ ἄτοπο. Βέβαια τό K σάν ὑποσύνολο τοῦ R ἔχει ἄνω πέρας στό R (ὄχι στό Q ὅπως εἴδαμε). Εἶναι ὁ ἄρρητος θετικός πραγματικός ἀριθμός πού ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωση $x^2=2$. Τό σῶμα λοιπόν Q δέν εἶναι κορεσμένο.

12.2 Ἡ πρόταση "Τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνα ὁλικά διατετεγμένο καί κορεσμένο σῶμα" εἶναι ἀναγκαία καί ἀρκετή γιά νά ἀποδειχτεῖ κάθε ἄλλη πρόταση πάνω στό σῶμα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Πολλές φορές τήν πρόταση αὐτή τήν παίρνουμε σάν ἀξίωμα καί στή συνέχεια ἀποδείχνουμε ἄλλες προτάσεις στό σύνολο R.

Ἀπό τό σημεῖο αὐτό καί πέρα μποροῦμε κατά τίς ἀποδείξεις προτάσεων νά παριστάνουμε τούς πραγματικούς ἀριθμούς μέ ἕνα μόνο γράμμα καί ὄχι π.χ μέ τά σύμβολα $(\alpha_n)_\kappa$ κ.λ.π Ἐπίσης δέν χρειάζεται νά ἔχουμε στό νοῦ μας ἀκολουθίες π.χ ἡ πρόταση
$\forall\alpha\in R, \forall\beta\in R, (-\alpha)\cdot(-\beta)=\alpha\beta$ μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ὅπως στό κεφ.V παρ.5 γιά τούς ἀκέραιους ἤ ἐφόσον τό R σάν σῶμα εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μονάδα ὅπως στό κεφ.VII παρ. 9.4. Διαφορετικά θά ἔπρεπε νά δείξουμε μέ τή βοήθεια βασικῶν ἀκολουθιῶν μέ ρητούς ὅρους τήν πρόταση $\forall(\alpha_n)_\kappa\in R, \forall(\beta_n)_\kappa\in R, (-\alpha_n)_\kappa\cdot(-\beta_n)_\kappa = (\alpha_n)_\kappa\cdot(\beta_n)_\kappa$ Πραγματικά $(-\alpha_n)_\kappa\cdot(-\beta_n)_\kappa =$ (ὁρισμός τοῦ πολλαπλασιαμοῦ) $([-\alpha_n]\cdot[-\beta_n])_\kappa =$ (ἕνεκα ἀντίστοιχης ἰδιότητας στούς ρητούς) $(\alpha_n\beta_n)_\kappa =$ (ὁρισμός τοῦ πολλαπλασιασμοῦ) $(\alpha_n)_\kappa\cdot(\beta_n)_\kappa$.

13. Δεκαδική παράσταση πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἕνας δεκαδικός ἀριθμός παριστάνει πάντοτε ἕνα πραγματικό ἀριθμό.

π.χ ὁ δεκαδικός ἀριθμός 2,3564 εἶναι ὅριο τῆς βασικῆς δεκαδικῆς ἀκολουθίας (οἱ ὅροι της εἶναι ρητοί) (α_n): 2-2,3-2,35-2,356-2,3564-2,3564 κ.λπ. μέ σταθερούς ὅρους γιά δεῖκτες $n>4$. Πραγματικά, γιά ὁποιοδήποτε $\varepsilon\in Q^+$ ἰσχύει ἡ $|\alpha_n-2,3564|<\varepsilon$ γιά $n>4$. Ἡ ἀκολουθία (α_n) εἶναι βασική γιατί π.χ γιά $\varepsilon\in Q^+$

ὁποιοδήποτε καί δεῖκτες $\lambda,\mu>4$ ἰσχύει ἡ $|\alpha_\lambda-\alpha_\mu|<\varepsilon$ ($|2,3564-2,3564| = |0| = 0 < \varepsilon$). Ἡ (α_n) σάν βασική μέ ρητούς ὅρους παριστάνει ὅπως ἔχουμε δεχτεῖ ἕνα πραγματικό ἀριθμό.

Ὁ δεκαδικός ἀριθμός 4,253127126... μέ ἄπειρα δεκαδικά ψηφία παριστάνει ἕνα πραγματικό ἀριθμό, Πραγματικά, ἡ ἀκολουθία (β_n): 4-4,2-4,25-4,253-4,2531-4,25312-4,253127-4,2531271-4,25312712-4,253127126-κ.λπ. εἶναι βασική γιατί π.χ ἄν δοθεῖ $\varepsilon=\frac{1}{10^6}$ τότε γιά δεῖκτες $\lambda,\mu>6$ ἰσχύει ἡ $|\beta_\lambda-\beta_\mu|<\frac{1}{10^6}$ π.χ γιά $\lambda=7$ καί $\mu=9$ εἶναι $\beta_7=4,253127$ καί $\beta_9=4,25312712$ καί $|4,253127-4,25312712|<\frac{1}{10^6}$

Ἰσχύει καί ἡ ἀντίστροφη πρός τήν πρόταση πού ἀναφέραμε ἀρχικά, δηλαδή: "Κάθε πραγματικός ἀριθμός μπορεῖ νά παρασταθεῖ σάν δεκαδικός ἀριθμός".

Γενικά μποροῦμε νά θεωρήσουμε τούς πραγματικούς ἀριθμούς σάν ἀπειροψήφιους δεκαδικούς μέ χρήση τῶν δέκα συμβόλων 0,1,2,3,...,9 π.χ ὁ 4,12 (ρητός πραγματικός) γράφεται 4,120000... ἤ 4,119999 ....Οἱ ἄρρητοι πραγματικοί πάλι εἶναι ἀπειροψήφιοι δεκαδικοί χωρίς ἐπαναλαμβανόμενα μέ τήν ἴδια τάξη ψηφία ἀπό κάποια θέση καί πέρα.

Ἀσκήσεις

1. Νά ἀναφερθοῦν μερικοί ἄρρητοι πραγματικοί ἀριθμοί.
2. Νά ἀναφερθεῖ μία μηδενική καί μία μή μηδενική ἀκολουθία. Εἶναι φραγμένες ἤ ὄχι: Εἶναι βασικές ἤ ὄχι;
3. Νά ἀναφερθεῖ μία μή βασική ἀκολουθία. Εἶναι φραγμένη ἤ ὄχι;
4. Νά ἀναφερθεῖ μία ἀκολουθία ρητῶν μέ ὅριο τόν ρητό $-\frac{3}{5}$. Ἐπίσης μία ἀκολουθία ρητῶν μέ ὅριο τόν ρητό

3,27289

5. Νά δειχτεῖ ὅτι ἕνα πεπερασμένο σύνολο μέ στοιχεῖα ρητούς πραγματικούς ἀριθμούς ἔχει μικρότερο καί μεγαλύτερο στοιχεῖο.

6. Νά συμπληρωθοῦν οἱ ἰσότητες $(\alpha_n)+(\beta_n)-(\gamma_n)=;$
$(\alpha_n)\cdot(\beta_n)\cdot(-\gamma_n)=;$

7. Νά ἀναφερθοῦν δύο βασικές ἀκολουθίες μέ ὅρους ρητούς πού νά ἀνήκουν στήν ἴδια κλάση ἰσοδυναμίας, νά παριστάνουν δηλαδή τόν ἴδιο πραγματικό ἀριθμό.

8. Ἀπό τούς ρητούς εἶναι γνωστή ἡ σχέση $3<5$. Νά ἀναφερθοῦν δύο βασικές ἀκολουθίες ρητῶν (α_n) καί (β_n) τέτοιες ὥστε νά εἶναι $(\alpha_n)_\varkappa=5$ καί $(\beta_n)_\varkappa=3$. Νά δειχτεῖ ὅτι σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς παρ.9.1 ἰσχύει ἡ $(\beta_n)_\varkappa<(\alpha_n)_\varkappa$.

9. Νά δειχτεῖ στό R ἡ πρόταση (παρ.9.1) $\forall(\alpha_n)_\varkappa\in R$, $\forall(\beta_n)_\varkappa\in R$, $(\alpha_n)_\varkappa<(\beta_n)_\varkappa \underline{\vee} (\beta_n)_\varkappa<(\alpha_n)_\varkappa \underline{\vee} (\alpha_n)_\varkappa=(\beta_n)_\varkappa$

10. Ἀπό τό σύνολο Q γνωρίζουμε ὅτι ὁ $5>0$ καί $-4<0$. Νά ἀναφερθοῦν δύο βασικές ἀκολουθίες ρητῶν (α_n) καί (β_n) τέτοιες ὥστε νά εἶναι $(\alpha_n)_\varkappa=5$ καί $(\beta_n)_\varkappa=-4$. Νά ἐπαληθευτοῦν στίς περιπτώσεις αὐτές οἱ ὁρισμοί τῆς παρ, 9.4.

11. Νά δειχτεῖ μέ τή βοήθεια τῶν ἀκολουθιῶν ἡ πρόταση $\forall(\alpha_n)_\varkappa\in R$, $\forall(\beta_n)_\varkappa\in R$, $(\alpha_n)_\varkappa\cdot(-\beta_n)_\varkappa=(-\alpha_n\beta_n)_\varkappa$ ἤ χωρίς τή βοήθεια ἀκολουθιῶν ἡ $\forall x\in R$, $\forall \psi\in R$, $x\cdot(-\psi)=-(x\psi)$.

12. Νά δειχτεῖ ὅτι τό R εἶναι ἀκέραια περιοχή προτοῦ δειχτεῖ ὅτι εἶναι σῶμα (ἐπομένως καί ἀκέραια περιοχή) δείχνοντας τήν πρόταση $(x_n)_\varkappa\cdot(\psi_n)_\varkappa=(0_n)_\varkappa \Rightarrow (x_n)_\varkappa=(0_n)_\varkappa \vee (\psi_n)_\varkappa=(0_n)_\varkappa$ ἤ τήν πρόταση $(\alpha_n)_\varkappa\cdot(\beta_n)_\varkappa=$

$(\alpha_n)_\varkappa\cdot(\gamma_n)_\varkappa \wedge (\alpha_n)_\varkappa \neq (0_n)_\varkappa \Rightarrow (\beta_n)_\varkappa = (\gamma_n)_\varkappa$. (Νά δειχτοῦν καί οἱ δύο προτάσεις).

13. Νά δειχτεῖ στό R ἡ πρόταση $(\alpha_n)_\varkappa < (\beta_n)_\varkappa \Rightarrow (\alpha_n)_\varkappa + (\gamma_n)_\varkappa < (\beta_n)_\varkappa + (\gamma_n)_\varkappa$. Ἐπίσης νά παραστήσουμε τούς πραγματικούς μέ ἕνα μόνο γράμμα, νά λάβουμε ὑπόψη ὅτι τό R εἶναι ἕνα ὁλικά διατεταγμένο σῶμα καί νά δείξουμε τήν ἴδια πρόταση.

14. Νά δειχτεῖ στό R ἡ πρόταση:

$$(\alpha_n)_\varkappa < (\beta_n)_\varkappa \wedge (\gamma_n)_\varkappa < (0_n)_\varkappa \Rightarrow (\alpha_n)_\varkappa\cdot(\gamma_n)_\varkappa > (\beta_n)_\varkappa\cdot(\gamma_n)_\varkappa$$

μέ τή βοήθεια τῶν ἀκολουθιῶν. Ἐπίσης ἔχοντας ὑπόψη ὅτι τό R εἶναι ὁλικά διατεταγμένο σῶμα νά δειχτεῖ ἡ πρόταση $x < \psi \wedge \omega < 0 \Rightarrow x\omega > \psi\omega$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IX

ΟΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Εισαγωγή.

Ἡ ἐξίσωση $x^2+1=0$ δέν ἔχει λύση στό σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν γιατί γράφεται $x^2=-1$ καί δέν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός πού τό τετράγωνό του νά εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός. Ἄν θέλουμε νά ἔχει λύση ἡ παραπάνω ἐξίσωση τότε πρέπει νά ἐπεκτείνουμε τό σύνολο R σέ ἕνα νέο σύνολο C πού νά περιέχει τό R ἰσομορφικά καί πού στό νέο σύνολο νά διατηροῦνται οἱ βασικές ἰδιότητες τῶν πράξεων πού γνωρίσαμε στό R. Ἕνα στοιχεῖο λοιπόν τοῦ C θά εἶναι τό i πού συνδέεται μέ τούς πραγματικούς διά τῆς $i^2=-1$ καί πού θά τό ὀνομάζουμε φανταστική μονάδα. Θά πρέπει τώρα νά ὁρίσουμε τήν ἰσότητα στό C καί τίς ρητές πράξεις στό C ἀνάμεσα στούς πραγματικούς ἀριθμούς καί τόν i (πρόσθεση, ἀφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση)

2. Ἰσότητα καί πράξεις στό C.

Μέ τό σύμβολο 3i θά παριστάνουμε τό ἀποτέλεσμα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πραγματικοῦ 3 ἐπί τήν φανταστική μονάδα i. Ἐπίσης μέ $-\frac{2}{5}i$ τό γινόμενο τοῦ $-\frac{2}{5}$

καί τῆς i. Μέ τό σύμβολο $-i$ έννοοῦμε τό γινόμενο τοῦ -1 ἐπί τήν i. Ἀκόμη μέ $5+6i$ παριστάνουμε τό ἄθροισμα τοῦ πραγματικοῦ 5 καί τοῦ φανταστικοῦ $6i$. Τό ἴδιο μέ $3-i$ τό ἄθροισμα τοῦ 3 καί τοῦ $-i$ δηλαδή τήν διαφορά τοῦ i ἀπό τό 3.

Ἡ ἰσότητα στό C ὁρίζεται ὡσεξῆς:

$\alpha+\beta i=\gamma+\delta i$ στό $C \underset{o\rho\sigma}{\Longleftrightarrow} \alpha=\gamma \wedge \beta=\delta$ στό R.

Γιά τίς ρητές πράξεις ὁρίζουμε:

(α΄) Πρόσθεση: $(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$

(β΄) Ἀφαίρεση: $(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$

(γ΄) Πολλαπλασιασμό: $(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$

(δ΄) Διαίρεση: $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i \quad (\gamma+\delta i\neq 0+0i)$

Οἱ παραπάνω ὁρισμοί δέν ὀφείλονται σέ "ἔμπνευση" ἀλλά σέ προσπάθεια διατήρησης τῶν βασικῶν ἰδιοτήτων καί στό C π.χ γιά τόν ὁρισμό τῆς ἰσότητας στό C, ἔχουμε: $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i \Rightarrow \alpha-\gamma=(\delta-\beta)i \Rightarrow (\alpha-\gamma)^2=-(\delta-\beta)^2 \Rightarrow (\alpha-\gamma)^2+(\delta-\beta)^2=0 \Rightarrow (\alpha-\gamma)^2=0 \wedge (\delta-\beta)^2=0 \Rightarrow \alpha-\gamma=0 \wedge \delta-\beta=0 \Rightarrow \alpha=\gamma \wedge \beta=\delta$.

Ἐπίσης γιά τή διαίρεση:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)\cdot(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)\cdot(\gamma-\delta i)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$$

Γενικά, τά στοιχεῖα τοῦ C θά τά ὀνομάζουμε μιγαδικούς ἀριθμούς π.χ ὁ $\alpha+\beta i$ εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός. Ὁ α ὀνομάζεται πραγματικό μέρος τοῦ $\alpha+\beta i$ καί ὁ βi ὀνομάζεται φανταστικό μέρος τοῦ $\alpha+\beta i$.

3. Οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί ὡς διατεταγμένα ζεύγη πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ὁ τρόπος γραφῆς τοῦ μιγάδα $\alpha+\beta i$ μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό τόν (α,β) καί ὁ μιγάς νά θεωρεῖται ὡς ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν. Μέ αὐτή τή νέα γραφή οἱ ὁρισμοί τῆς παρ. 2 γράφονται ὡσεξῆς:

Ἰσότητα: $(\alpha,\beta)=(\gamma,\delta)$ στό $C \Rightarrow \alpha=\gamma \wedge \beta=\delta$ στό R

Πρόσθεση: $(\alpha,\beta)+(\gamma,\delta)=(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$

Ἀφαίρεση: $(\alpha,\beta)-(\gamma,\delta)=(\alpha-\gamma,\beta-\delta)$

Πολλαπλασιασμός: $(\alpha,\beta)\cdot(\gamma,\delta)=(\alpha\gamma-\beta\delta,\alpha\delta+\beta\gamma)$

Διαίρεση: $(\alpha,\beta):(\gamma,\delta)=\left(\dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2},\ \dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}\right)$

Ἡ ἰσότητα ἔτσι ὅπως ὁρίστηκε παραπάνω εἶναι αὐτοπαθής, συμμετρική, μεταβατική, ἰδιότητες πού ζητοῦμε νά ἔχει κάθε σχέση ἰσότητας.

4. Βασικές ἰδιότητες τῆς πρόσθεσης στό C.

4.1 Ἰσχύει ἡ πρόταση $\forall(\alpha,\beta)\in C$, $\forall(\gamma,\delta)\in C$, $(\alpha+\gamma,\beta+\delta)\in C$. δηλαδή τό C εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης. Πραγματικά, οἱ $\alpha+\gamma$ καί $\beta+\delta$ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί (τό R εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πρόσθεση) καί τό $(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$ σάν διατεταγμένο ζεύγος πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι στοιχεῖο τοῦ C.

4.2 Ἡ πρόσθεση στό C εἶναι πράξη μονότονη ὡς πρός τήν ἰσότητα. Ἰσχύει δηλαδή ἡ πρόταση: $(\alpha,\beta)=(\gamma,\delta) \wedge (\alpha',\beta')=(\gamma',\delta') \Rightarrow (\alpha,\beta)+(\alpha',\beta') = (\gamma,\delta)+(\gamma',\delta')$. Ἡ ἀπόδειξη εἶναι εὔκολη.

4.3 Ἰσχύει ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος $\forall(\alpha,\beta)\in C$, $\forall(\gamma,\delta)\in C$, $(\alpha,\beta)+(\gamma,\delta)=(\gamma,\delta)+(\alpha,\beta)$. Ἐπίσης ἡ ἀπόδειξη εἶναι εὔκολη.

4.4 Ἰσχύει ὁ προσεταιριστικός νόμος $\forall(\alpha,\beta)\in C$, $\forall(\gamma,\delta)\in C$, $\forall(\lambda,\mu)\in C$, $[(\alpha,\beta)+(\gamma+\delta)]+(\lambda,\mu) = (\alpha,\beta)+[(\gamma,\delta)+(\lambda,\mu)]$ Πραγματικά, $[(\alpha,\beta)+(\gamma,\delta)]+(\lambda,\mu)= (\alpha+\gamma,\beta+\delta)+(\lambda,\mu)=\big([\alpha+\gamma]+\lambda,[\beta+\delta]+\mu\big)=$ (προσεταιριστικός νόμος στό R). $\big(\alpha+[\gamma+\lambda],\beta+[\delta+\mu]\big)=(\alpha,\beta)+(\gamma+\lambda,\delta+\mu)= (\alpha,\beta)+[(\gamma,\delta)+(\lambda,\mu)]$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς ἰσότητας ἰσχύει τελικά ἡ παραπάνω πρόταση.

4.5 Ἰσχύει ἡ πρόταση, $\forall(\alpha,\beta)\in C$, $(0,0)+(\alpha,\beta)=(\alpha,\beta)$. Μέ ἄλλα λόγια τό $(0,0)$ πού γράφεται καί $0+0i$ εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο τοῦ C ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης. Πραγματικά, $(0,0)+(\alpha,\beta)=(0+\alpha,0+\beta)=(\alpha,\beta)$.

4.6 Κάθε στοιχεῖο (α,β) τοῦ C ἔχει ἀντίθετο στοιχεῖο. Ἔχουμε τήν πρόταση $\forall(\alpha,\beta)\in C,\ (-\alpha,-\beta)+(\alpha,\beta)=(0,0)$. Πραγματικά, $(-\alpha,-\beta)+(\alpha,\beta)=(-\alpha+\alpha,-\beta+\beta)=(0,0)$

5. Βασικές ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό C.

5.1 Τό C εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δηλαδή ἰσχύει ἡ πρόταση, $\forall(\alpha,\beta)\in C,\ \forall(\gamma,\delta)\in C,\ (\alpha,\beta)\cdot(\gamma,\delta)\in C$. Πραγματικά, $(\alpha,\beta)\cdot(\gamma,\delta)=(\alpha\gamma-\beta\delta,\alpha\delta+\beta\gamma)$ Ὅμως οἱ ἀριθμοί $\alpha\gamma-\beta\delta$, $\alpha\delta+\beta\gamma$ εἶναι πραγματικοί ἐπομένως $(\alpha\gamma-\beta\delta,\ \alpha\delta+\beta\gamma)\in C$ δηλαδή $(\alpha,\beta)\cdot(\gamma,\delta)\in C$.

5.2 Ἡ Πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι μονότονη ὡς πρός τήν ἰσότητα στό C. Ἰσχύει δηλαδή ἡ πρόταση $(\alpha,\beta)=(\gamma,\delta)\wedge(\alpha',\beta')=(\gamma',\delta')\Rightarrow(\alpha,\beta)\cdot(\alpha',\beta')=(\gamma,\delta)\cdot(\gamma',\delta')$. Ἡ ἀπόδειξη εἶναι εὔκολη.

5.3 Ἰσχύει ἡ πρόταση (ἀντιμεταθετικός νόμος) $\forall(\alpha,\beta)\in C,\ \forall(\gamma,\delta)\in C,\ (\alpha,\beta)\cdot(\gamma,\delta)=(\gamma,\delta)\cdot(\alpha,\beta)$

5.4 Ἰσχύει ὁ προσεταιριστικός νόμος $\forall(\alpha,\beta)\in C, \forall(\gamma,\delta)\in C$ $\forall(\lambda,\mu)\in C,\ [(\alpha,\beta)\cdot(\gamma,\delta)]\cdot(\lambda,\mu)=(\alpha,\beta)\cdot[(\gamma,\delta)\cdot(\lambda,\mu)]$. Ἡ ἀπόδειξη εἶναι εὔκολη.

5.5 Τό στοιχεῖο $1+0\cdot i$ τοῦ C δηλαδή τό $(1,0)$ εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ Μέ ἄλλα λόγια ἰσχύει ἡ πρόταση, $\forall(\alpha,\beta)\in C,(1,0)\cdot(\alpha,\beta)=(\alpha,\beta)$. Πραγματικά, $(1,0)\cdot(\alpha,\beta)=(1\cdot\alpha-0\cdot\beta,1\cdot\beta+0\cdot\alpha)=(\alpha,\beta)$.

5.6 Ἰσχύει ὁ ἐπιμεριστικός νόμος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεση στό C δηλαδή ἡ πρόταση $\forall(\alpha,\beta)\in C,\ \forall(\gamma,\delta)\in C,\ \forall(\lambda,\mu)\in C,(\alpha,\beta)\cdot[(\gamma,\delta)+(\lambda,\mu)]=(\alpha,\beta)\cdot(\gamma,\delta)+(\alpha,\beta)\cdot(\lambda,\mu)$. Πραγματικά,
$(\alpha,\beta)\cdot[(\gamma,\delta)+(\lambda,\mu)]=(\alpha,\beta)\cdot(\gamma+\lambda,\delta+\mu)=\big(\alpha[\gamma+\lambda]-\beta\,[\delta+\mu],$

$\alpha[\delta+\mu]+\beta[\gamma+\lambda]\Big) = \Big([\alpha\gamma-\beta\delta]+[\alpha\lambda-\beta\mu],[\alpha\delta+\beta\gamma]+[\alpha\mu+\beta\lambda]\Big)$
$=(\alpha\gamma-\beta\delta,\alpha\delta+\beta\gamma)+(\alpha\lambda-\beta\mu,\alpha\mu+\beta\lambda)=(\alpha,\beta).(\gamma,\delta)+(\alpha,\beta).(\lambda,\mu)$

Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς ἰσότητας ἰσχύει τελικά ὁ ἐπιμεριστικός νόμος.

5.7 Κάθε στοιχεῖο τοῦ C διαφορετικό ἀπό τό (0,0) ἔχει ἕνα ἀντίστροφο στοιχεῖο. π.χ τό στοιχεῖο $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ δηλαδή μέ ἕνα τουλάχιστο ἀπό τά α,β διαφορετικό ἀπό τό μηδέν ἔχει ὡς ἀντίστροφο στοιχεῖο τό $\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2},-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)$

Πραγματικά $\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2},-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right).(\alpha,\beta)=\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\alpha+\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\beta,\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\beta-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\alpha\right)=\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2},0\right)=(1,0)$

Εὔκολα φαίνεται ὅτι τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πρόσθεση, δηλαδή τό 0+0.i ἤ (0,0), δέν ἔχει ἀντίστροφο στοιχεῖο στό C. Πραγματικά, ἄν εἶχε τό (χ,ψ) θά ἴσχυε ἡ $(\chi,\psi).(0,0)=(1,0)$ δηλαδή ἡ $(\chi.0-\psi.0,\chi.0+\psi.0)=(1,0)$ πού γράφεται καί $(0,0)=(1,0)$. Ἡ τελευταία συνεπάγεται τήν $0=1\wedge 0=0$ πού εἶναι ψευδής. Δέν ἔχει λοιπόν τό (0,0) ἀντίστροφο στοιχεῖο στό C.

6. Τό σύνολο C εἶναι ἕνα σῶμα.

Ἀπό τίς ἰδιότητες πού ἀναφέρθηκαν στίς παρ.4.1-4.6 προκύπτει ὅτι τό C εἶναι μία ἀβελιανή ὁμάδα ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης. Αὐτό καί οἱ ἰδιότητες τῶν παρ.5.1-5.6 μᾶς ἀποδείχνουν ὅτι τό C εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μονάδα. Τέλος ἡ ἰδιότητα 5.7 μαζί μέ τά ἀναφερθέντα δείχνουν ὅτι τό C εἶναι ἕνα σῶμα. Σάν σῶμα εἶναι φυσικά καί ἀκέραια περιοχή.

7. Ἕνας ἰσομορφισμός τοῦ R στό C.

7.1 Ἔχουμε τήν ἑπόμενη μονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ R στό C.

$$\varphi:\ R\ni\alpha \longleftrightarrow (\alpha,0)\in C$$

Μέ (α,0) ἐννοοῦμε τό στοιχεῖο α+0i τοῦ C.

Ἡ ἀπεικόνιση εἶναι ἀμφιμοσήμαντη γιατί εἶναι μονοσήμαντη καί ἰσχύει ἡ $\alpha \neq \beta \Rightarrow (\alpha, 0) \neq (\beta, 0)$. Πραγματικά, ἄν ἦταν $(\alpha,0)=(\beta,0)$ θά ἴσχυε ἡ $\alpha=\beta \wedge 0=0$ ἐπομένως καί ἡ $\alpha=\beta$ ἀντίθετα μέ τήν ὑπόθεση $\alpha\neq\beta$.

Ἰσχύει ἡ $\alpha=\beta$ στό $R \Leftrightarrow (\alpha,0)=(\beta,0)$ στό C ἔχουμε δηλαδή ἕνα ἰσομορφισμό τοῦ R στό C ὡς πρός τή σχέση τῆς ἰσότητας στό R καί τό C.

7.2 Θά δείξουμε τήν πρόταση $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$ στό C. Τά α,β καί $\alpha+\beta$ εἶναι στοιχεῖα τοῦ R. Πραγματικά, $\varphi(\alpha)=(\alpha,0)$, $\varphi(\beta)=(\beta,0)$ καί $\varphi(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta,0)$. Ἰσχύουν οἱ $\varphi(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta,0)=(\alpha,0)+(\beta,0)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$ δηλαδή $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$. Ἔχουμε λοιπόν ἕνα ἰσομορφισμό τοῦ R στό C ὡς πρός τήν πράξη τῆς πρόσθεσης στό R καί τό C.

7.3 Θά δείξουμε τήν πρόταση $\varphi(\alpha\beta)=\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)$. Εἶναι $\varphi(\alpha)=(\alpha,0)$, $\varphi(\beta)=(\beta,0)$ καί $\varphi(\alpha\beta)=(\alpha\beta,0)$. Ἰσχύουν οἱ $\varphi(\alpha\beta)=(\alpha\beta,0)=(\alpha\beta-0\cdot 0,\alpha\cdot 0+0\cdot\beta)=(\alpha,0)\cdot(\beta,0)=\varphi(\alpha)\cdot(\varphi(\beta)$. Ἕνεκα καί τῆς μεταβατικότητας τῆς ἰσότητας ἰσχύει τελικά ἡ $\varphi(\alpha\beta)=\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)$. Ἔχουμε συνεπῶς ἕνα ἰσομορφισμό τοῦ R στό C ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό R καί τό C.

7.4 Ἰσχύουν ἀκόμη καί ἀποδείχνονται εὔκολα καί οἱ:

$$\varphi(\alpha-\beta)=\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)$$

$$\varphi(\alpha:\beta)=\varphi(\alpha):\varphi(\beta)$$

Ἰσχύει δηλαδή ὁ ἰσομορφισμός καί ὡς πρός τίς πράξεις τῆς ἀφαίρεσης καί τῆς διαίρεσης στό R καί στό C.

7.5 Ὁ ἰσομορφισμός φ τοῦ R στό C ὁρίζει στό C ἕνα γνήσιο ὑποσύνολο τό C_R ($C_R \subset C$) τό ὁποῖο εἶναι ἰσόμορφο μέ τό R ὅπως εἴδαμε στίς παρ. 7.1-7.4. Ἔτσι τά R καί C_R ταυτίζονται καί τό R θεωρεῖται σάν ἕνα γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ C.

Ἀσκήσεις.

1. Νά ἀποδειχτοῦν οἱ ἰδιότητες τῶν παρ. 4.2,4.3,5.2, 5.3, 5.4.

2. Νά ἀποδειχτοῦν οἱ ἰδιότητες τῆς παρ. 7.4

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

Διμελεῖς σχέσεις καί πράξεις.

Σχέσεις ἰσοδυναμίας καί διάταξης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

Οἱ ρητοί ἀριθμοί

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IX

Οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί