ΚΑ

ΙΟΣ

στή-
καὶ
ιῶν.
ατα.
ειγ-

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Γ. ΔΑΣΚΑΛΟΠΟΥΛΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΗΤΟΥ ΤΟΥ Ε. Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Μερικαὶ παράγωγοι. Ὁλικὰ διαφορικά. Πλεγμέναι συναρτήσεις. Ἀναπτύγματα κατὰ Taylor καὶ Maclaurin. Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα. Διαφορικὴ γεωμετρία καμπύλων καὶ ἐπιφανειῶν. Ἐπικαμπύλια διπλᾶ τριπλᾶ καὶ ἐπιφανειακὰ ὁλοκληρώματα. Θεωρία πεδίων καὶ φυσικαὶ ἐφαρμογαί. Μετὰ 325 παραδειγμάτων καὶ 1400 ἀσκήσεων.

Πρὸς χρῆσιν
τῶν σπουδαστῶν τῶν Πολυτεχνείων τῶν φοιτητῶν
τῶν Πανεπιστημίων καὶ λοιπῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν.

ΔΕΥΤΕΡΑ ΕΚΔΟΣΙΣ

ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΗ

ΑΘΗΝΑΙ

1957

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Γ. ΔΑΣΚΑΛΟΠΟΥΛΟΥ
ΕΠΙΜΕΛΗΤΟΥ ΤΟΥ Ε. Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Μερικαὶ παράγωγοι. Ὁλικὰ διαφορικά. Πλεγμέναι συναρτήσεις. Ἀναπτύγματα κατὰ Taylor καὶ Maclaurin. Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα. Διαφορικὴ γεωμετρία καμπύλων καὶ ἐπιφανειῶν. Ἐπικαμπύλια διπλᾶ τριπλᾶ καὶ ἐπιφανειακὰ ὁλοκληρώματα. Θεωρία πεδίων καὶ φυσικαὶ ἐφαρμογαί. Μετὰ 325 παραδειγμάτων καὶ 1400 ἀσκήσεων.

Πρὸς χρῆσιν
τῶν σπουδαστῶν τῶν Πολυτεχνείων τῶν φοιτητῶν
τῶν Πανεπιστημίων καὶ λοιπῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν.

ΔΕΥΤΕΡΑ ΕΚΔΟΣΙΣ
ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΗ

ΑΘΗΝΑΙ
1957

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Παρουσιάζομεν εἰς δευτέραν βελτιωμένην ἔκδοσιν τὸν δεύτερον τόμον τοῦ βιβλίου Ἀνώτερα Μαθηματικά.
Περιλαμβάνει τὸν διαφορικὸν καὶ ὁλοκληρωτικὸν λογισμὸν συναρτήσεων δύο καὶ περισσοτέρων μεταβλητῶν καθὼς καὶ στοιχεῖα διαφορικῆς γεωμετρίας.
Τὸν παραδίδομεν εἰς τὸν ἀναγνώστην μὲ τὴν ἐλπίδα ὅτι θὰ ἀποτελέσῃ δι' αὐτὸν ἕνα πολύτιμον βοήθημα.

Ἀθῆναι 3 Σεπτεμβρίου 1956

Δ. Δασκαλόπουλος

Διά τόν ἔλεγχον τῶν ἀντιτύπων ὑπογράφεται ὑπό τοῦ συγγραφέως.

’Εξετυπώθη εἰς τό λιθογραφεῖον « ΕΥΡΩΠΗ », ὁδός Κομνηνῶν 23 – Τηλ. 662579

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Εἰς τὸ Κεφάλαιον αὐτὸ πραγματευόμεθα τὸν διαφορικὸν λογισμὸν συναρτήσεων δύο καὶ περισσοτέρων μεταβλητῶν. Ἀρχίζομεν μὲ σύντομον εἰσαγωγὴν ἐπὶ τῶν σημειοσυνόλων, συνεχίζομεν μὲ τὴν μερικὴν παραγώγισιν, τὸ ὁλικὸν διαφορικόν, τὰ ἀναπτύγματα κατὰ Taylor - Maclaurin, τὴν θεωρίαν τῶν πλεγμένων συναρτήσεων καὶ τελειώνομεν μὲ τὴν θεωρία τῶν σχετικῶν ἀκροτάτων.

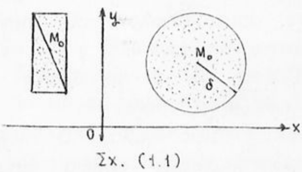
Γενικὴ Εἰσαγωγὴ

1. **Σημειοσύνολα**. — Τὸ σύνολον τῶν σημείων $M(x,y)$ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y τῶν ὁποίων οἱ συντεταγμένες ἐπαληθεύουν μίαν ἀνισότητα τῆς μορφῆς:

$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2 < \delta^2 \qquad (1.1)$$

ὅπου δ κάποιος θετικὸς ἀριθμός, λέγεται δ- κυκλικὴ γειτονιὰ ἢ ἁπλῶς γειτονιὰ τοῦ σημείου $M_o(x_o, y_o)$ καὶ ἀποτελεῖται προφανῶς ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν σημείων τῶν περικλειομένων ὑπὸ τοῦ κύκλου μὲ ἐξίσωσιν:

$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=\delta^2$$



Σχ. (1.1)

Τὸ σύνολον τῶν σημείων $M(x,y)$ τῶν ὁποίων οἱ συντεταγμένες ἐπαληθεύουν ἕνα σύστημα ἀνισοτήτων τῆς μορφῆς:

$$|x-x_o|<\delta_1 \quad , \quad |y-y_o|<\delta_2 \qquad (1.2)$$

ὅπου δ_1, δ_2 κάποιοι θετικοὶ ἀριθμοί, λέγεται ὀρθογωνιακὴ γειτονιὰ ἢ διδιάστατον διάστημα ἢ ἁπλῶς γειτονιὰ τοῦ σημείου $M_o(x_o\,;y_o)$ καὶ ἀποτελεῖται προφανῶς ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν σημείων τὰ ὁποῖα περικλείονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων πρὸς τοὺς ἄξονες εὐθειῶν μὲ ἐξισώσεις:

$$x=x_o\pm\delta_1 \quad , \quad y=y_o\pm\delta_2$$

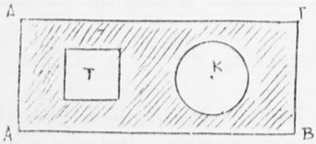
Γενικῶς μία ἀνισότης τῆς μορφῆς:

$$(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_\nu-a_\nu)^2<\delta^2 \qquad (1.3)$$

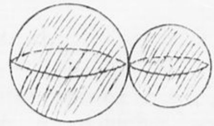
ὁρίζει μίαν ν-διάστατον γειτονιάν τοῦ σημείου $(a_1,\dots,a_\nu)$ τοῦ ν-διαστάτου ἀναλυτικοῦ χώρου R_ν καί ἕνα σύστημα ἀνισοτήτων τῆς μορφῆς:

$$|x_1-a_1|<\delta_1,\dots,|x_\nu-a_\nu|<\delta_\nu \qquad (1.4)$$

ἕνα ν-διάστατον διάστημα αὐτοῦ μέ κέντρον τό σημεῖον $(a_1,\dots,a_\nu)$.
Ἕνα σημεῖον Μ λέγεται ἐσωτερικόν σημεῖον ἑνός σημειοσυνόλου D, ὅταν ὑπάρχει κάποια γειτονιά τοῦ σημείου τῆς ὁποίας ὅλα τά σημεῖα ἀνήκουν εἰς τό D, λέγεται ἐξωτερικόν σημεῖον ὅταν ὑπάρχῃ κάποια γειτονιά τοῦ σημείου τῆς ὁποίας οὐδέν σημεῖον ἀνήκει εἰς τό D καί τέλος λέγεται συνοριακόν σημεῖον ὅταν σέ κάθε γειτονιά τοῦ σημείου ὑπάρχουν σημεῖα τοῦ D καί σημεῖα μή ἀνήκοντα εἰς αὐτό. Τό σύνολον τῶν συνοριακῶν σημείων ἑνός σημειοσυνόλου D λέγεται σύνορον αὐτοῦ. Ὅταν τό σύνορον ἀνήκῃ εἰς τό D τό σημειοσύνολον λέγεται κλειστόν, ὅταν δέν ἀνήκῃ λέγεται ἀνοικτόν· συμφώνως πρός αὐτά οἱ γειτονιές εἶναι ἀνοικτά σημειοσύνολα.
Ἕνα σημειοσύνολον λέγεται πεπερατωμένον ἤ περιορισμένον ὅταν οἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων του ἀπό ἕνα σταθερόν σημεῖον τοῦ χώρου δέν ὑπερβαίνουν κάποιον θετικόν ἀριθμόν· ἐάν αὐτό δέν συμβαίνει τό σημειοσύνολον λέγεται ἀπεριόριστον. Π.Χ. τό σημειοσύνολον τό ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπό τά ἐσωτερικά σημεῖα μιᾶς σφαίρας εἶναι πεπερατωμένον, ἐνῶ τό σημειοσύνολον τῶν ἐξωτερικῶν σημείων αὐτῆς εἶναι ἀπεριόριστον· ἐπίσης τό σημειοσύνολον τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y τό ὁποῖον ὁρίζεται ὑπό τῶν ἀνισοτήτων $x>0$, $y>0$ εἶναι ἀπεριόριστον, ἐνῶ τό σημειοσύνολον τοῦ ἄξονος τῶν x τό ὁποῖον ὁρίζεται ὑπό τῆς διπλῆς ἀνισότητος $1<x\leq 3$ εἶναι πεπερατωμένον.
Ἕνα σημειοσύνολον D λέγεται συνεκτικόν ὅταν δυνάμεθα νά συνδέσωμεν δύο οἱαδήποτε σημεῖα αὐτοῦ διά μιᾶς τεθλασμένης γραμμῆς τῆς ὁποίας



Σχ. (1.2)



Σχ. (1.3)

ὅλα τά σημεῖα νά εἶναι σημεῖα τοῦ D. Π.χ. τό σύνολον τῶν σημείων ἑνός κύκλου, μιᾶς ἐλλείψεως, ἑνός παραλληλογράμμου, μιᾶς σφαίρας, ἑνός παραλληλεπιπέδου, ἀποτελοῦν συνεκτικά σημειοσύνολα. Ἐπίσης συνεκτικόν εἶναι τό σημειοσύνολον τοῦ σχ. (1.2) τό ὁποῖον προκύπτει ἐάν ἐξαιρέσωμεν ἀπό τά σημεῖα τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ τά σημεῖα τοῦ τετρατραγώνου Τ καί τοῦ κύκλου Κ. Τό σημειοσύνολον τοῦ σχ. (1.3) τό ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπό δύο ἐφαπτόμενες σφαῖρες ἐξωτερικῶς εἶναι συνεκτικόν μόνον ὅταν τό σημεῖον ἐπαφῆς ἀνήκη εἰς τό σημειοσύνολον.

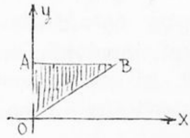
Ἕνα σημεῖον Α λέγεται ὁριακόν σημεῖον ἑνός σημειοσυνόλου ὅταν σέ κάθε γειτονιά αὐτοῦ ὑπάρχουν ἄπειρα σημεῖα τοῦ σημειοσυνόλου. Ἀπό τόν ὁρισμόν αὐτόν ἕπεται ὅτι τό ὁριακόν σημεῖον μπορεῖ καί νά μήν εἶναι σημεῖον τοῦ σημειοσυνόλου.

Ἕνα σημεῖον ἑνός σημειοσυνόλου λέγεται μεμονωμένον ὅταν ὑπάρχη μία γειτονιά αὐτοῦ μή περιέχουσα ἄλλο σημεῖον τοῦ σημειοσυνόλου.

Διαμέτρημα ἑνός σημειοσυνόλου λέγεται τό ἀνώτερον πέρας τῶν ἀποστάσεων δύο οἱουδήποτε σημείων αὐτοῦ.

Διά νά σημειώνωμεν ὅτι ἕνα σημεῖον Μ ἀνήκει εἰς τό σημειοσύνολον D θά χρησιμοποιοῦμεν τόν συμβολισμόν $M \subset D$.

Παράδειγμα (1.1).— Νά σχεδιασθῆ τό σημειοσύνολον τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y διά τό ὁποῖον εἶναι: $0 \leq x \leq y \leq 1$ · εἶναι κλειστόν σημειοσύνολον;



Λύσις. Τό σημειοσύνολον ἀποτελεῖται προφανῶς ἀπό τά σημεῖα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ ὅπου Α(0, 1) καί Β(1, 1) εἶναι δέ κλειστόν σημειοσύνολον διότι ἀνήκουν εἰς αὐτό καί τά συνοριακά του σημεῖα, δηλαδή τά σημεῖα τῶν ΟΑ, ΟΒ, ΑΒ.

Παράδειγμα (1.2).— Νά ἐξετασθῆ ἐάν τό σημειοσύνολον τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y τό ὁποῖον ὁρίζεται ὑπό τῆς ἀνισότητος $|x| > 0$ εἶναι συνεκτικόν.

Λύσις. Τό σημειοσύνολον ἀποτελεῖται προφανῶς ἀπ' ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y ἐκτός τῶν σημείων τοῦ ἄξονος τῶν y διά τά ὁποῖα ἔχομεν $|x| = 0$. Κάθε τεθλασμένη γραμμή συνδέουσα δύο σημεῖα τά ὁποῖα κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος τῶν y θά τέμνη τόν ἄξονα τῶν y σέ κάποιο σημεῖον τό ὁποῖον δέν ἀνήκει εἰς τό σημειοσύνολον, ἐπομένως δέν εἶναι συνεκτικόν.

2. Ὁρισμός τῆς συναρτήσεως. Εἰς τά μαθηματικά ἕνα σύμβολον u λέγεται συνάρτησις τῶν μεταβλητῶν: $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ὅταν σέ κάθε σύστημα τιμῶν $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ τῶν μεταβλητῶν αὐτῶν ἀντιστοιχῆ μέ ἕναν οἱονδήποτε νόμον μία ἤ καί περισσότερες τιμές διά τό σύμβολον u. Διά νά ὑποδηλώσωμεν τήν ἐξάρτησιν τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως u ἀπό τίς τιμές τῶν μεταβλητῶν $x_1, \ldots, x_\nu$ γράφομεν:

$$u = u(x_1, \ldots, x_\nu)$$
$$u = \Phi(x_1, \ldots, x_\nu)$$
$$u = \sigma(M)$$

ὅπου εἰς τόν τελευταῖον ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμβολισμῶν γράφομεν χάριν συντομίας ἀντί τῶν $x_1, \dots, x_\nu$ τό γράμμα M τό ὁποῖον συμβολίζει τό σημεῖον τοῦ ν-διαστάτου ἀναλυτικοῦ χώρου R_ν μέ συντεταγμένες x_1, $x_2, \dots, x_\nu$. Ὅταν σέ κάθε σημεῖον M ἑνός σημειοσυνόλου D ἀντιστοιχῇ μία ἤ καί περισσότερες τιμές τῆς συναρτήσεως, τότε λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι ὡρισμένη εἰς τό σημειοσύνολον D, τό ὁποῖον λέγεται πεδίον ὁρισμοῦ αὐτῆς. Ὅταν σέ κάθε σημεῖον M ἀπό τό πεδίον ὁρισμοῦ ἀντιστοιχῇ μία μόνον τιμή τῆς συναρτήσεως, τότε ἡ συνάρτησις λέγεται μονοσήμαντος ἤ μονότιμος· ἐάν ἀντιστοιχοῦν περισσότερες ἀπό μίαν ἡ συνάρτησις λέγεται πολυσήμαντος. Μία συνάρτησις σ(M) λέγεται περατωμένη ἐπί ἑνός σημείοσυνόλου D ὅταν τό σύνολον τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως τό ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τά σημεῖα τοῦ D εἶναι περατωμένον.

Ἐμεῖς θά ἀσχοληθῶμεν κυρίως μέ συναρτήσεις δύο ἤ τριῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, τίς ὁποῖες χάριν ἁπλότητος θά παριστάνωμεν μέ τά γράμματα x, y, z τό δέ πεδίον ὁρισμοῦ αὐτῶν θά εἶναι συνήθως ἕνα χωρίον δηλαδή ἕνα σημειοσύνολον συνεκτικόν ἀνοικτόν ἤ κλειστόν. Τίς ἐκφράσεις σημεῖον $(x_1, \dots, x_\nu)$, θέσις $(x_1, \dots, x_\nu)$, σύστημα τιμῶν $(x_1, \dots, x_\nu)$ θά τίς θεωροῦμεν ταυτόσημες.

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τίς συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} u &= x^2 + y^2 \ln z \\ \upsilon &= \text{τοξημ}\,(x+y) \\ w &= \pm \frac{1}{y} \sqrt{1-x^2-y^2} \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Ἐξ αὐτῶν ἡ πρώτη εἶναι μονοσήμαντος συνάρτησις μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό ἀπεριόριστον χωρίον τοῦ τριδιαστάτου χώρου τῶν x, y, z τό ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπό τά σημεῖα τά ὁποῖα ἔχουν $z > 0$ δηλαδή ἀπό τά σημεῖα τά ὁποῖα κεῖνται ἄνω τοῦ ἐπιπέδου $z = 0$. Ἡ δευτέρα τῶν (2.1) εἶναι πολυσήμαντος καί μάλιστα ἀπειροσήμαντος μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό χωρίον τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y τό ὁποῖον ὁρίζεται ἀπό τήν διπλῆν ἀνισότητα: $-1 \leq x + y \leq 1$. Τέλος ἡ τρίτη τῶν συναρτήσεων (2.1) εἶναι ἐπίσης πολυσήμαντος καί συγκεκριμένως δισήμαντος μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό σημειοσύνολον τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y διά τό ὁποῖον εἶναι $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \neq 0$ καί τό ὁποῖον προφανῶς ἀποτελεῖται ἀπό τά σημεῖα τοῦ μοναδιαίου κύκλου μέ κέντρον τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων τά ὁποῖα δέν κεῖνται ἐπί τοῦ ἄξονος τῶν x· προφανῶς τό πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως αὐτῆς δέν εἶναι συνεκτικόν.

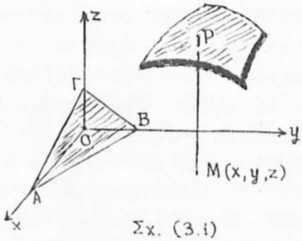
Παράδειγμα (2.1).— Νά εὑρεθῇ τό πεδίον ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων:

$$z = e^{x-y} \quad , \quad u = xy : z$$

Λύσις. Τῆς πρώτης τό πεδίον ὁρισμοῦ εἶναι ὁλόκληρον τό ἐπίπεδον τῶν

x, y καὶ τῆς δευτέρας ὁλόκληρος ὁ χῶρος τῶν x, y, z ἐκτὸς τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου $z=0$.

3. Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία. — Ἔστω $z=\sigma(x, y)$ μονοσήμαντος συνάρτησις τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x, y· ἂν ἑρμηνεύσωμεν τὴν διατεταγμένην τριάδα (x, y, z) ὡς συντεταγμένες ἑνὸς σημείου $P(x, y, z)$ τοῦ τριδιαστάτου χώρου τῶν x, y, z τότε τὸ σύνολον τῶν σημείων P τὰ ὁποῖα προκύπτουν δίδοντες στὶς μεταβλητὲς x, y ὅλα τὰ ζεύγη τιμῶν ἀπὸ τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως $\sigma(x, y)$, ἀποτελεῖ τὴν γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν ἢ παράστασιν τῆς συναρτήσεως $\sigma(x, y)$ εἰς τὸ σύστημα τῶν συντεταγμένων $Oxyz$ σχ (3.1) καὶ εἶναι ἐν γένει μία ἐπιφάνεια μὲ ἐξίσωσιν $z=\sigma(x, y)$.



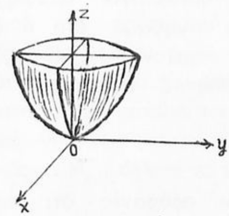
Σχ. (3.1)

Μία ἀντίστοιχος γεωμετρικὴ παράστασις διὰ συνάρτησιν $u=\sigma(x, y, z)$ τριῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν δὲν εἶναι δυνατή, διότι ἡ γεωμετρική μας ἐποπτεία εἶναι τριδιάστατος. Δυνάμεθα ὅμως νὰ ἑρμηνεύσωμεν τὶς τιμὲς u τῆς συναρτήσεως οἱ ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν στὶς τριάδες (x, y, z), ὡς τιμὲς ἑνὸς φυσικοῦ μεγέθους, π.χ. τῆς θερμοκρασίας τοῦ σημείου $M(x, y, z)$.

Παράδειγμα (3.1). — Νὰ εὑρεθῆ ἡ γεωμετρικὴ παράστασις τῶν συναρτήσεων :

$$z=1-x:2-y \quad \text{καὶ} \quad z=x^2+2y^2$$

Λύσις. Ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ γεωμετρικὴ παράστασις τῆς πρώτης εἶναι ἕνα ἐπίπεδον ΑΒΓ σχ. (3.1) μὲ συντεταγμένες ἐπὶ τὴν ἀρχὴν $2, 1, 1$ καὶ τῆς δευτέρας εἶναι ἕνα ἐλλειπτικὸν παραβολοειδὲς σχ. (3.2).



Σχ. (3.2)

4. Ὅριον καὶ συνέχεια συναρτήσεως. — Οἱ ὁρισμοὶ τοῦ ὁρίου καὶ τῆς συνεχείας διὰ συναρτήσεις πολλῶν μεταβλητῶν εἶναι μία ἁπλῆ γενίκευσις τῶν ἀντιστοίχων ὁρισμῶν διὰ συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς.

Ἕνα μεταβλητὸν σημεῖον $M(x_1, \ldots, x_\nu)$ λέγομεν ὅτι ἔχει ὅριον ἢ τείνει εἰς τὸ σταθερὸν σημεῖον $A(a_1, \ldots, a_\nu)$ καὶ τὸ συμβολίζομεν $M \to A$, ὅταν οἱ συντεταγμένες του τείνουν ἀντιστοίχως εἰς τὶς συντεταγμένες τοῦ A, δηλαδὴ ὅταν $x_i \to a_i$ $(i=1, 2, \ldots, \nu)$. Λέγομεν ἐπίσης ὅτι τὸ σημεῖον M ἔχει ὅριον ἢ τείνει εἰς τὸ ἄπειρον καὶ τὸ συμβολίζομεν $M \to \infty$, ὅταν τοὐλάχιστον μία ἐκ τῶν συντεταγμένων του τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον.

Ἂς θεωρήσωμεν τώρα συνάρτησιν $\Phi(M)$ μονοσήμαντα ὡρισμένην ἐπὶ ἑνὸς σημειοσυνόλου καὶ ἔστω M_0 ἕνα ὁριακὸν σημεῖον αὐτοῦ.

Ὁρισμός (4.1). — Λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi(M)$ διά $M \to M_0$ ἔχει ὅριον ἤ τείνει εἰς τόν ἀριθμόν K καί τό συμβολίζομεν : $\underset{M \to M_0}{\text{ορ}} \Phi(M) = K$ ἤ $\Phi(M) \to K$ διά $M \to M_0$ ὅταν διά κάθε ἀριθμόν $\varepsilon > 0$, δυνάμεθα νά εὕρωμεν θετικόν ἀριθμόν $\delta = \delta(\varepsilon)$ ἐξαρτώμενον ἐν γένει ἐκ τοῦ ε, τέτοιον ὥστε δι' ὅλα τά σημεῖα M διά τά ὁποῖα εἶναι : $0 < |MM_0| < \delta$, ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης : $|\Phi(M) - K| < \varepsilon$.

Λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi(M)$ διά $M \to M_0$ ἔχει ὅριον τό $+\infty$ ἤ $-\infty$ καί τό συμβολίζομεν ἀντιστοίχως $\underset{M \to M_0}{\text{ορ}} \Phi(M) = \pm\infty$ ὅταν δι' οἱονδήποτε δοθέντα θετικόν ἀριθμόν θ, δυνάμεθα νά εὕρωμεν ἀριθμόν $\delta = \delta(\theta)$ ἐξαρτώμενον ἐν γένει ἐκ τοῦ θ, τέτοιον ὥστε δι' ὅλα τά σημεῖα M διά τά ὁποῖα εἶναι : $0 < |MM_0| < \delta$ ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης : $\Phi(M) > \theta$ ἤ ἀντιστοίχως $\Phi(M) < -\theta$.

Λέγομεν ὅτι διά $M \to \infty$ ἡ συνάρτησις $\Phi(M)$ ἔχει ὅριον τόν ἀριθμόν K, ὅταν δια κάθε ἀριθμόν ε δυνάμεθα νά εὕρωμεν θετικόν ἀριθμόν $\delta = \delta(\varepsilon)$ τέτοιον ὥστε δι' ὅλα τά σημεῖα M διά τά ὁποῖα $|MO| > \delta$, ὅπου O ἡ ἀρχή τῶν ἀξόνων, εἶναι $|\Phi(M) - K| < \varepsilon$.

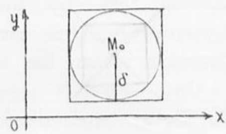
Λέγομεν τέλος ὅτι διά $M \to \infty$ ἡ συνάρτησις ἔχει ὅριον τό $+\infty$ ἤ $-\infty$ ὅταν δι' οἱονδήποτε δοθέντα θετικόν ἀριθμόν θ δυνάμεθα νά εὕρωμεν θετικόν ἀριθμόν $\delta(\theta)$ τέτοιον ὥστε δι' ὅλα τά σημεῖα M διά τά ὁποῖα $|MO| > \delta$, εἶναι $\Phi(M) > \theta$ ἤ ἀντιστοίχως $\Phi(M) < -\theta$.

Διά συνάρτησιν $\Phi(x, y)$ δύο μεταβλητῶν ἡ ἀνισότης $|MM_0| < \delta$, ἡ ὁποία ἐκφράζει ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων $M(x, y)$ ἀπό τό σταθερόν σημεῖον $M_0(x_0, y_0)$ εἶναι μικροτέρα τοῦ δ, παριστάνει τά σημεῖα τῆς δ- κυκλικῆς γειτονιᾶς τοῦ σημείου M_0 καί δύναται νά γραφῆ :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2 \qquad (4.1)$$

Εἶναι προφανές ὅτι ἐάν προσδιορίσωμεν ἕνα διδιάστατον διάστημα :

$$|x - x_0| < \delta \quad , \quad |y - y_0| < \delta \qquad (4.2)$$



Σχ. (4.1)

διά τά σημεῖα τοῦ ὁποίου νά ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης : $|\Phi(x, y) - K| < \varepsilon$, τότε ἡ ἀνισότης αὐτή θά ἰσχύῃ κατά μείζονα λόγον καί διά τά σημεῖα τῆς δ- κυκλικῆς γειτονιᾶς σχ. (4.1).

Γενικῶς διά συνάρτησιν ν- μεταβλητῶν $\Phi(x_1, \ldots, x_\nu)$ ἡ ἀνισότης $|MM_0| < \delta$ γράφεται :

$$(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_\nu - x_\nu^0)^2 < \delta^2 \qquad (4.3)$$

καί διά τόν προσδιορισμόν αὐτῆς ἀρκεῖ νά εὕρωμεν ἕνα ν- διάστατον διάστημα :

$$|x_1 - x_1^\circ| < \delta, \ldots, |x_\nu - x_\nu^\circ| < \delta \qquad (4.4)$$

διά τά σημεῖα τοῦ ὁποίου νά ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης $|\Phi(x_1, \ldots, x_\nu) - K| < \varepsilon$.
Ἀποδεικνύεται ὅπως καί διά τίς συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς ὅτι ἕνας ἰσοδύναμος ὁρισμός πρός τόν δοθέντα ἀνωτέρω εἶναι ὁ ἑξῆς:

Ὁρισμός (4.2). — *Λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi(M)$ διά M τεῖνον εἰς τό M_0 ἤ τό ἄπειρον ἔχει ὅριον K, ὅταν διά κάθε ἀκολουθίαν σημείων (M_p) τείνουσα εἰς τό M_0 ἤ τό ∞, ἡ ἀντίστοιχος ἀκολουθία τιμῶν $\Phi(M_p)$ τῆς συναρτήσεως τείνῃ εἰς τό K.*

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα μίαν συνάρτησιν $\Phi(M)$ ὡρισμένην ἐπί ἑνός σημειοσυνόλου D καί ἔστω M_0 ἕνα σημεῖον αὐτοῦ.

Ὁρισμος (4.3). — *Ἡ συνάρτησις $\Phi(M)$ λέγεται συνεχής εἰς τό σημεῖον M_0, ὅταν εἶναι μονοσήμαντα ὡρισμένη σέ μία γειτονιά τοῦ σημείου αὐτοῦ καί ὅταν διά κάθε ἀριθμόν $\varepsilon > 0$ δυνάμεθα νά εὕρωμεν θετικόν ἀριθμόν δ ἐξαρτώμενον ἐν γένει ἐκ τοῦ ε τέτοιον ὥστε δι' ὅλα τά σημεῖα M διά τά ὁποῖα εἶναι $|MM_0| < \delta$, νά ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης $|\Phi(M) - \Phi(M_0)| < \varepsilon$. Ἡ συνάρτησις λέγεται συνεχής ἐπί ἑνός σημειοσυνόλου D ὅταν εἶναι συνεχής διά κάθε σημεῖον αὐτοῦ. Ὅταν ἡ συνάρτησις δέν εἶναι συνεχής εἰς ἕνα σημεῖον ἤ σημειοσύνολον λέγεται ἀσυνεχής εἰς τό σημεῖον αὐτό ἤ τό σημειοσύνολον.*

Ἀπό τόν ὁρισμόν ἕπεται ὅτι διά νά εἶναι μία συνάρτησις συνεχής εἰς ἕνα μεμονωμένον σημεῖον M_0 τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχῃ ἡ συνάρτησις εἰς τό σημεῖον M_0 μίαν καί μόνον μίαν ὡρισμένην τιμήν $\Phi(M_0)$. Ἐνῶ διά νά εἶναι συνεχής εἰς ἕνα ὁριακόν σημεῖον M_0 πρέπει νά εἶναι μονοσήμαντα ὡρισμένη στήν γειτονιά τοῦ M_0 καί διά $M \to M_0$ τό ὅριον τῆς συναρτήσεως νά ὑπάρχῃ καί νά ἰσοῦται μέ τήν τιμήν τῆς συναρτήσεως εἰς τό σημεῖον M_0, δηλαδή νά εἶναι.

$$\boxed{\operatorname*{ορ}_{M \to M_0} \Phi(M) = \Phi(M_0) = \Phi(\text{ορ} M)} \qquad (4.5)$$

Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι ἡ συνάρτησις θά εἶναι ἀσυνεχής εἰς τό σημεῖον M_0 εἴτε ὅταν δέν εἶναι μονοσήμαντα ὡρισμένη σέ μιά γειτονιά αὐτοῦ εἴτε ὅταν δέν ὑπάρχει τό ὅριον τῆς $\Phi(M)$ διά $M \to M_0$ εἴτε ὅταν αὐτό ὑπάρχει ἀλλά δέν ἰσοῦται μέ τήν $\Phi(M_0)$.

Στηριζόμενοι ἐπί τῶν ὁρισμῶν τοῦ ὁρίου καί συνεχείας ἀποδεικνύονται ὅπως καί διά τίς συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς μία σειρά βασικῶν προτάσεων ἐκ τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν τίς σπουδαιότερες.

Πρότασις (4.1). — « *Τό ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τοῦ γινομένου καί τοῦ πηλίκου συναρτήσεων ἰσοῦται ἀντιστοίχως μέ τό ἄθροισμα τό γινόμενον καί τό πηλίκον τῶν ὁρίων τῶν συναρτήσεων · διά τό πηλίκον ὑποτίθεται τό ὅριον τοῦ διαιρέτου διάφορον τοῦ μηδενός.*

Πρότασις (4.2). — « *Τό ἄθροισμα, τό γινόμενον καί τό πηλῖκον συνε-*

χῶν συναρτήσεων εἶναι συνάρτησις συνεχής · διά τό πηλῖκον ἐξαιροῦνται αἱ θέσεις ~~μηχανισμοῦ~~ μηδενισμοῦ τοῦ διαιρέτου. Γενικῶς ἐάν ἡ συνάρτησις $F(u_1, \ldots, u_\mu)$ εἶναι συνεχής ὡς πρός τίς μεταβλητές $u_1, \ldots, u_\mu$ καί αὐτές εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις $u_i = u_i(x_1, \ldots, x_\nu)$ τῶν μεταβλητῶν $x_1, \ldots, x_\nu$ τότε ἡ συνάρτησις $F[u_1(x_1, \ldots, x_\nu), \ldots u_\mu(x_1, \ldots, x_\nu)]$ εἶναι συνεχής συνάρτησις ὡς πρός τίς μεταβλητές $x_1, \ldots, x_\nu$ · αὐτό τό ἐκφράζομεν συντόμως λέγοντες ὅτι συνεχής συνάρτησις συνεχῶν συναρτήσεων εἶναι συνάρτησις συνεχής».

Πρότασις (4.3).— *Κάθε συνάρτησις συνεχής ἐπί ἑνός κλειστοῦ χωρίου ἔχει εἰς αὐτό μίαν μεγίστην καί μίαν ἐλαχίστην τιμήν (Weierstass).*

Πρότασις (4.4).— *Κάθε συνάρτησις $\Phi(M)$ συνεχής ἐπί ἑνός κλειστοῦ χωρίου εἶναι καί ὁμοιομόρφως συνεχής ἐπ' αὐτοῦ, δηλαδή διά κάθε ἀριθμόν $\varepsilon > 0$, δυνάμεθα νά εὕρωμεν ἀριθμόν $\delta > 0$ ἐξαρτώμενον μόνον ἀπό τόν ε, τέτοιον ὥστε διά κάθε ζεῦγος σημείων M, M' τοῦ χωρίου διά τό ὁποῖον $|MM'| < \delta$, εἶναι $|\Phi(M) - \Phi(M')| < \varepsilon$.*

Παράδειγμα (4.1).— Νά ἐξετασθῆ ἐάν ἡ συνάρτησις:

$$\Phi(0,0) = 0 \quad , \quad \Phi(x,y) = xy \cdot (x^2 - y^2) : (x^2 + y^2)$$

εἶναι συνεχής εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων.

Λύσις. Ἡ συνάρτησις ὁρίζεται μονοσήμαντα διά κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y καί ἔχομεν: $|\Phi(x,y) - \Phi(0,0)| = |xy \cdot (x^2 - y^2) : (x^2 + y^2) - 0| = |xy| \cdot |x^2 - y^2| : (x^2 + y^2) \leqslant |xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Ἐάν λοιπόν θεωρήσωμεν τά σημεῖα τῆς $\sqrt{2\varepsilon}$ – κυκλικῆς γειτονιᾶς δηλαδή τά σημεῖα τά ὁποῖα ἐπαληθεύουν τήν ἀνισότητα $x^2 + y^2 < 2\varepsilon$ τότε δι' αὐτά θά ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης $|\Phi(x,y) - \Phi(0,0)| < \varepsilon$, ἑπομένως ἡ συνάρτησις εἶναι συνεχής εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων· εἰς τό παράδειγμα αὐτό εἶναι $\delta(\varepsilon) = 2\varepsilon$.

Παράδειγμα (4.2).— Ὁμοίως διά τήν συνάρτησιν:

$$\Phi(0,0) = 0, \quad \Phi(x,y) = x\eta\mu\frac{1}{y} \quad , \quad y \neq 0$$

Λύσις. Ἡ συνάρτησις ὁρίζεται μονοσήμαντα εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων καί εἰς κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y τό ὁποῖον δέν κεῖται ἐπί τοῦ ἄξονος τῶν x. Ἔχομεν $|\Phi(x,y) - \Phi(0,0)| = |x\eta\mu\frac{1}{y} - 0| = |x||\eta\mu\frac{1}{y}| \leqslant |x|$ · ἐάν λοιπόν θεωρήσωμεν τά σημεῖα διά τά ὁποῖα εἶναι $|x| < \varepsilon$ καί y οἱονδήποτε θά εἶναι $|\Phi(x,y) - \Phi(0,0)| < \varepsilon$, ἑπομένως ἡ συνάρτησις εἶναι συνεχής εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων· εἰς τό παράδειγμα αὐτό εἶναι $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Παράδειγμα (4.3).— Ὁμοίως διά τήν συνάρτησιν:

$$\Phi(0,0) = 0 \quad , \quad \Phi(x,y) = xy : (x^2 + y^2)$$

Λύσις. Θεωροῦμεν ἀκολουθίαν σημείων (x_ρ, y_ρ) τείνουσα εἰς τό $(0,0)$ καί τά ὁποῖα νά κεῖνται ἐπί τῆς εὐθείας $y = \lambda x$, ὁπότε θά ἔχωμεν:

$y_\rho = \lambda x_\rho$, $\Phi(x_\rho , y_\rho) = x_\rho y_\rho : (x_\rho^2 + y_\rho^2) = \lambda x_\rho^2 : (x_\rho^2 + \lambda^2 x_\rho^2) = \lambda : (1+\lambda^2)$
Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι διά $(x_\rho , y_\rho) \to (0,0)$ θά εἶναι ορ$\Phi(x_\rho , y_\rho) =$ $= \lambda : (1+\lambda^2)$, ἐπομένως ἡ συνάρτησις εἶναι ἀσυνεχής εἰς τήν ἀρχήν διότι τό ὅριον τῆς συναρτήσεως δέν ἰσοῦται πάντοτε μέ μηδέν, δηλαδή μέ τήν τιμήν τῆς συναρτήσεως εἰς τό σημεῖον (0,0) ἀλλά ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἑκάστοτε τιμήν τοῦ λ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἐνῶ ἡ συνάρτησις εἶναι συνεχής χωριστά ὡς πρός x καί ὡς πρός y εἰς τήν θέσιν (0,0), ὡς πρός x, y δέν εἶναι συνεχής.

Παράδειγμα (4.4).— Νά ἀποδειχθῆ ὅτι κάθε ρητή συνάρτησις εἶναι συνεχής εἰς ὅλα τά σημεῖα τά ὁποῖα δέν μηδενίζουν τόν παρονομαστήν αὐτῆς.

Λύσις. Ἄς θεωρήσωμεν π.χ. μίαν ρητήν συνάρτησιν $R(x, y, z)$ τριῶν μεταβλητῶν · οἱ συναρτήσεις $u_1 = c =$ σταθερά , $u_2 = x$, $u_3 = y$, $u_4 = z$ εἶναι συνεχεῖς, ἐπομένως κατά τήν πρότασιν (4.2) καί κάθε πολυώνυμον τῶν x, y, z θά εἶναι συνεχής συνάρτησις. Ἐπειδή ἡ R ὡς ρητή συνάρτησις εἶναι πηλίκον δύο πολυωνύμων θά εἶναι κατά τήν ἰδίαν πρότασιν ἐπίσης συνεχής ἐκτός τῶν σημείων τά ὁποῖα μηδενίζουν τόν παρονομαστήν.

Παράδειγμα (4.5).— Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi = e^{\eta\mu xyz}$ εἶναι συνεχής διά κάθε σημεῖον τοῦ χώρου.

Λύσις. Ἐπειδή ἡ συνάρτησις Φ εἶναι σύνθεσις συνεχῶν συναρτήσεων, κατά τήν πρότασιν (4.2) εἶναι καί αὐτή συνεχής καί μάλιστα διά κάθε σημεῖον τοῦ χώρου διότι αὐτό συμβαίνει διά τίς συναρτήσεις ἐκ τῶν ὁποίων συντίθεται.

Ἀσκήσεις

1) Δώσατε μερικά παραδείγματα συναρτήσεων πολλῶν μεταβλητῶν γνωστῶν ἐκ τῆς γεωμετρίας καί τῆς φυσικῆς.

2) Παραστήσατε γεωμετρικῶς τίς συναρτήσεις :

$$z = 6 - x + 3y , \quad z = -(x^2 + 3y^2) , \quad z = 1 \pm \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Σχεδιάσατε ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y τά σημειοσύνολα τά ὁποῖα ὁρίζονται ὑπό τῶν σχέσεων :

3) $|x| + |y| < 1$ 4) $|x - y| \leq 1$

5) $|x + y| \leq 1$ 6) $0 < x < y < 1$

Νά εὑρεθῆ τό πεδίον ὁρισμοῦ τῶν ἑξῆς συναρτήσεων :

7) e^{x-y} 8) $xy : z$ 9) $\ln(x^2 + y^2 - 1)$

10) $\varepsilon\varphi\,(x + y - z)$ 11) $(x+z)^y$ 12) $\frac{1}{z}\sqrt{y^2 - 2x}$

Νά εὑρεθοῦν διά $(x, y) \to (0,0)$ τά ὅρια τῶν ἑξῆς συναρτήσεων :

13) $(x^3+y^3):(x^2+y^2)$

14) $(x^2-y^2+2x^3+3y^3):(x^2+y^2)$

15) $(x^2-y^2):(1+x^2+y^2)$

16) $\frac{1}{x}\cdot(1+y^2)\cdot \text{ημ}x$

17) $x:(x^2+y^2)$

18) $(1+x-y):(x^2+y^2)$

Ἐξετάσατε ἀπὸ ἀπόψεως συνεχείας τὶς ἑξῆς συναρτήσεις:

19) $x:(x-y)$ 20) $\ln(x^2+y^2)$ 21) $\text{ημ}(x^2+y)$ 22) $(x^3+y^3):(x^2+y^2)$

23) $\text{ημ}xy:\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ 24) $x^2\ln(x^2+y^2)$ 25) $\text{ημ}\,y/x$ 26) $(x^3+y^2):(x^3+y^3)$.

27) $(x^3+y^2):(x^2+y^2-1)$ 28) $(x^3+y^2):(x^2+y)$ 29) $(xy)^{\text{ημ}xyz}$ 30) $\frac{1}{x}\ln(xz+y)$

Μερικαὶ παράγωγοι καὶ διαφορικά.

5. Μερικαὶ παράγωγοι πρώτης τάξεως. — Ἐὰν εἰς τὴν συνάρτησιν $\Phi(x,y)$ ἡ μεταβλητὴ y λάβῃ μίαν σταθερὴν τιμὴν $y=y_0$ καὶ μεταβάλλεται μόνον ἡ x, προκύπτει ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y_0)$ μιᾶς μόνον μεταβλητῆς x. Ἐὰν ἡ συνάρτησις αὐτὴ ἔχῃ παράγωγον εἰς τὴν θέσιν $x=x_0$, τότε αὐτὴ θὰ ἰσοῦται, διὰ $h\to 0$, μὲ τὸ ὅριον:

$$\text{όρ}\cdot[\Phi(x_0+h,y_0)-\Phi(x_0,y_0)]:h$$

Ἡ παράγωγος αὐτὴ ὅταν ὑπάρχῃ λέγεται μερικὴ παράγωγος ὡς πρὸς x τῆς συναρτήσεως $\Phi(x,y)$ εἰς τὴν θέσιν (x_0,y_0) καὶ σημειώνεται μὲ ἕνα ἐκ τῶν συμβόλων:

$$\Phi_x(x_0,y_0)\ ,\quad D_x\Phi(x_0,y_0)\ ,\quad \frac{\partial\Phi(x_0,y_0)}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x_0,y_0)$$

Χρησιμοποιοῦντες λοιπὸν τὸν πρῶτον συμβολισμὸν θὰ ἔχωμεν:

$$\Phi_x(x_0,y_0)=\underset{h\to 0}{\text{όρ}}\cdot[\Phi(x_0+h,y_0)-\Phi(x_0,y_0)]:h \tag{5.1}$$

$k \to 0$

Ἀντιστοίχως διὰ τὴν μερικὴν παράγωγον ὡς πρὸς y εἰς τὴν θέσιν (x_0,y_0) θὰ ἔχωμεν ἐξ ὁρισμοῦ τὸν τύπον:

$$\Phi_y(x_0,y_0)=\underset{k\to 0}{\text{όρ}}[\Phi(x_0,y_0+k)-\Phi(x_0,y_0)]:k \tag{5.2}$$

Γενικῶς ἡ μερικὴ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\Phi(x_1,\dots,x_\nu)$ εἰς τὴν θέσιν $(a_1,\dots,a_\nu)$ ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x_λ ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

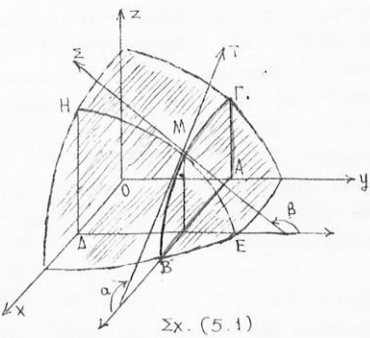
$$\boxed{\Phi_{x_\lambda}(a_1,\dots,a_\nu)=\underset{h_\lambda\to 0}{\text{όρ}}\cdot[\Phi(a_1,\dots,a_\lambda+h_\lambda,\dots,a_\nu)-\Phi(a_1,\dots,a_\nu)]:h_\lambda} \tag{5.3}$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (5.1) ἀντικαταστήσωμεν τὴν θέσιν (x_0,y_0) μὲ τὴν γενικὴν θέσιν (x,y) προκύπτει ὁ τύπος:

$$\Phi_x(x,y)=\underset{h\to 0}{\text{όρ}}\cdot[\Phi(x+h,y)-\Phi(x,y)]:h \tag{5.4}$$

Ὑποθέτοντες ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y)$ ἔχει παράγωγον ὡς πρὸς x διὰ κάθε θέσιν (x, y) ἀπό τό πεδίον ὁρισμοῦ της, τότε τό δεύτερον μέλος τῆς (5.4) θά εἶναι ἐν γένει μία συνάρτησις τῶν μεταβλητῶν x, y καί λέγεται μερική παράγωγος ὡς πρός x εἰς τήν γενικήν θέσιν x, y. Ἐντελῶς ἀντιστοίχους ὁρισμούς ἔχομεν διά τήν μερικήν παράγωγον ὡς πρός y, καθώς καί διά τήν μερικήν παράγωγον εἰς τήν γενικήν θέσιν συναρτήσεως περισσοτέρων τῶν δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. Αἱ μερικαί παράγωγοι εἰς τήν γενικήν θέσιν ὑπολογίζονται βάσει τῶν γνωστῶν κανόνων παραγωγίσεως συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς. Διά τήν εὕρεσιν τῶν μερικῶν παραγώγων εἰς μίαν ὡρισμένην θέσιν (x_0, y_0) ἀντικαθιστῶμεν εἰς τόν ἀντίστοιχον τύπον τῆς μερικῆς παραγώγου εἰς τήν γενικήν θέσιν, τά x, y ἀντιστοίχως ὑπό τῶν x_0, y_0.

Αἱ μερικαί παράγωγοι τῆς συναρτήσεως $\Phi(x, y)$ εἰς τήν θέσιν (x_0, y_0), ἐπιδέχονται τήν ἑξῆς γεωμετρικήν ἑρμηνείαν: Ἄς εἶναι ΒΜΓ, ΑΒ, ΑΓ ἀντιστοίχως αἱ τομαί τῆς ἐπιφανείας $z = \Phi(x, y)$ καί τῶν ἐπιπέδων $z = 0$, $x = 0$ ὑπό τοῦ ἐπιπέδου $y = y_0$ (σχ. 5.1). Οἱ ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς ΒΜΓ θά εἶναι $z = \Phi(x, y_0)$, $y = y_0$ καί συμφώνως πρός τήν γεωμετρικήν ἑρμηνείαν τῆς παραγώγου συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς θά εἶναι: $\Phi_x(x_0, y_0) = \varepsilon\varphi\alpha$ ὅπου α ὅπως σημειώνεται καί εἰς τό σχ. (5.1) εἶναι ἡ γωνία τήν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη ΜΤ τῆς τομῆς ΒΜΓ εἰς τό $M(x_0, y_0)$ μετά τοῦ ἄξονος τῶν x. Ἀντιστοίχως διά τήν μερικήν παράγωγον ὡς πρός y θά ἔχωμεν: $\Phi_y(x_0, y_0) = \varepsilon\varphi\beta$, ὅπου β εἶναι ἡ γωνία τήν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη ΜΣ τῆς τομῆς ΕΜΖ τῆς ἐπιφανείας ὑπό τοῦ ἐπιπέδου $x = x_0$ μετά τοῦ ἄξονος τῶν y.



Σχ. (5.1)

Παράδειγμα (5.1).— Νά ὑπολογισθοῦν αἱ μερικαί παράγωγοι τῆς συναρτήσεως: $\Phi = x^2 + 3xy + 5y^2$ εἰς τήν θέσιν $(1, 1)$.

Λύσις. Αἱ μερικαί παράγωγοι εἰς τήν γενικήν θέσιν εἶναι: $\Phi_x = 2x + 3y$, $\Phi_y = 3x + 10y$, ὁπότε θέτοντες εἰς αὐτάς $x = 1$, $y = 1$ προκύπτει: $\Phi_x(1, 1) = 5$ καί $\Phi_y(1, 1) = 13$.

Παράδειγμα (5.2).— Ὁμοίως διά τήν συνάρτησιν $\Phi = \eta\mu xyz$ εἰς τήν θέσιν $(1, \pi, -1)$.

Λύσις. Αἱ μερικαί παράγωγοι εἰς τήν γενικήν θέσιν εἶναι: $\Phi_x = yz\sigma\upsilon\nu xyz$, $\Phi_y = zx\sigma\upsilon\nu xyz$, $\Phi_z = xy\sigma\upsilon\nu xyz$, ὁπότε θέτοντες εἰς αὐτάς $x = 1$, $y = \pi$, $z = -1$ προκύπτει: $\Phi_x(1, \pi, -1) = \pi$, $\Phi_y(1, \pi, -1) = 1$, $\Phi_z(1, \pi, -1) = -\pi$.

Παράδειγμα (5.3). — Νά ὑπολογισθοῦν αἱ μερικαί παράγωγοι τῶν συναρτήσεων : $z = x\ln(x^2+y^2)$, $u = e^{xy-z}$, $v = (x+y^2)\eta\mu zx$, $w = z\varepsilon\varphi xy$.

Λύσις. Διά τήν πρώτην ἔχομεν : $z_x = \ln(x^2+y^2)+2x^2:(x^2+y^2)$, $z_y = 2xy:(x^2+y^2)$ διά τήν δευτέραν : $u_x = ye^{xy-z}$, $u_y = xe^{xy-z}$, $u_z = -e^{xy-z}$ διά τήν τρίτην : $v_x = \eta\mu zx + z(x+y^2)\sigma\upsilon\nu zx$, $v_y = 2y\,\eta\mu zx$, $v_z = x(x+y^2)\sigma\upsilon\nu zx$ καί τέλος διά τήν τετάρτην : $w_x = yz.(1+\varepsilon\varphi^2 xy)$, $w_y = xz\cdot(1+\varepsilon\varphi^2 xy)$, $w_z = \varepsilon\varphi xy$.

6. Μερικαί παράγωγοι ἀνωτέρας τάξεως. — Εἰς τό προηγούμενον ἐδάφιον εἴδαμε ὅτι αἱ μερικαί παράγωγοι τῆς συναρτήσεως $\Phi(x, y)$ εἰς τήν γενικήν θέσιν (x, y) εἶναι ἐν γένει συναρτήσεις τῶν μεταβλητῶν x, y, ἑπομένως ἐάν ἐπαναλάβωμεν τήν πρᾶξιν τῆς μερικῆς παραγωγίσεως πολλές φορές προκύπτουν μερικαί παράγωγοι ἀνωτέρας τάξεως. Π.χ. ἐάν παραγωγίσωμεν τήν Φ_x μερικῶς ὡς πρός x, προκύπτει ἡ δευτέρα μερική παράγωγος ὡς πρός x τήν ὁποίαν παριστάνομεν μέ ἕνα ἐκ τῶν συμβόλων :

$$\Phi_{xx}\ ,\ \Phi_{x^2}\ ,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\ ,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi$$

Ἐάν παραγωγίσωμεν τήν Φ_x μερικῶς ὡς πρός y, προκύπτει ἡ δευτέρα μικτή παράγωγος ὡς πρός x καί y, τήν ὁποίαν παριστάνομεν ἀναλόγως :

$$\Phi_{xy}\ ,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\ ,\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Phi$$

Γενικῶς ἐάν τῆς συναρτήσεως $\Phi(x, y)$ λάβωμεν τήν μ-στήν παράγωγον ὡς πρός x, προκύπτει ἡ μερική παράγωγος Φ_{x^μ} τάξεως μ- ὡς πρός x. Ἐάν τήν Φ_{x^μ} παραγωγίσωμεν ν-φορές ὡς πρός y, προκύπτει ἡ μικτή μερική παράγωγος $\Phi_{x^\mu y^\nu}$ τάξεως $(\mu+\nu)$- ὡς πρός x καί y.

Τά ἀνωτέρω γενικεύονται κατά τρόπον προφανῆ καί διά συναρτήσεις μέ περισσότερες μεταβλητές · π.χ. μέ τά σύμβολα :

$$\Phi_{x^\mu y^\nu z^\rho}\ ,\ \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu\partial y^\nu\partial z^\rho}\ ,\ \frac{\partial}{\partial x^\mu\partial y^\nu\partial z^\rho}\Phi$$

παριστάνομεν τήν μικτήν μερικήν παράγωγον τάξεως $(\mu+\nu+\rho)$ τῆς συναρτήσεως $\Phi(x, y, z)$, ἡ ὁποία προκύπτει ὅταν παραγωγίσωμεν τήν συνάρτησιν διαδοχικῶς μ-φορές ὡς πρός x, ν-φορές ὡς πρός y καί ρ-φορές ὡς πρός z.

Διά τάς μικτάς μερικάς παραγώγους ἰσχύει ἡ ἑξῆς πρότασις τοῦ Schwarz:

Πρότασις (6.1). — *Ἐάν ἡ συνάρτησις $\Phi(x, y)$ καί αἱ μερικαί αὐτῆς παράγωγοι Φ_x, Φ_y, Φ_{xy} εἶναι συνεχεῖς στήν γειτονιά τῆς θέσεως (x, y), τότε ὑπάρχει ἡ Φ_{yx} καί εἶναι $\Phi_{yx} = \Phi_{xy}$.*

Ἀπόδειξις. Ἀπό τόν ὁρισμόν τῆς μερικῆς παραγώγου ἔχομεν :

$$\Phi_y(x, y) = \underset{\kappa\to 0}{\text{ορ}}\cdot[\Phi(x, y+\kappa)-\Phi(x, y)]:\kappa = \underset{\kappa\to 0}{\text{ορ}}\,[\sigma(x, \kappa):\kappa]$$

ὅπου διά συντομίαν παραστήσαμε τόν ἀριθμητήν μέ $\sigma(x,\kappa)$· ἐπίσης ἔχομεν·

$$\Phi_{yx}(x,y) = \underset{h\to 0}{\text{ορ}} \cdot \underset{\kappa\to 0}{\text{ορ}} \left[\sigma(x+h,\kappa)-\sigma(x,\kappa)\right] : h\kappa = \underset{h\to 0}{\text{ορ}} \cdot \underset{\kappa\to 0}{\text{ορ}} \cdot \left[A(h,\kappa) : h\kappa\right] \qquad (1)$$

ὅπου πάλιν διά συντομίαν παραστήσαμε τόν ἀριθμητήν μέ $A(h,\kappa)$. Πρέπει λοιπόν νά δείξωμεν ὅτι τό ἀνωτέρω ὅριον ὑπάρχει καί ἰσοῦται μέ $\Phi_{xy}(x,y)$. Πρός τοῦτο, χρησιμοποιοῦντες τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς διά συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς, μετασχηματίζομεν τήν $A(h,k)$ ὡς ἑξῆς:

$$A(h,\kappa) = \sigma(x+h,\kappa)-\sigma(x,\kappa) = h\sigma_x(x+\partial_1 h,\kappa) \qquad 0<\partial_1<1$$

$$\sigma_x(x+\partial_1 h,\kappa) = \Phi_x(x+\partial_1 h, y+\kappa)-\Phi_x(x+\partial_1 h, y) = \kappa\Phi_{xy}(x+\partial_1 h, y+\partial_2\kappa) \qquad 0<\partial_2<1$$

$$A(h,\kappa) = h\kappa\cdot\Phi_{xy}\cdot(x+\partial_1 h, y+\partial_2\kappa)$$

Ἀντικαθιστῶντες τήν τελευταία ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἰς τήν (1) προκύπτει τό ζητούμενον:

$$\Phi_{yx}(x,y) = \underset{h\to 0}{\text{ορ}} \cdot \underset{\kappa\to 0}{\text{ορ}} \, \Phi_{xy}(x+\partial_1 h, y+\partial_2\kappa) = \Phi_{yx}(x,y)$$

Ἐμεῖς θά ἀσχοληθῶμεν κυρίως μέ συναρτήσεις διά τάς ὁποίας ἰσχύουν οἱ προϋποθέσεις τῆς ἀνωτέρω προτάσεως καί ἑπομένως αἱ μικταί παράγωγοι θά εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς σειρᾶς παραγωγίσεως.

Ἀναφέρομεν τέλος ὅτι ἡ ἀποδειχθεῖσα πρότασις δύναται νά γενικευθῆ διά συναρτήσεις ν- μεταβλητῶν καί μικτάς μερικάς παραγώγους οἱασδήποτε τάξεως καί νά λάβη τήν ἑξῆς διατύπωσιν:

Πρότασις (6.2).— *Ἐάν ἡ συνάρτησις $\Phi(x_1,\ldots,x_\nu)$ εἶναι συνεχής καί ἔχη συνεχεῖς μερικάς παραγώγους μέχρι καί μ-τάξεως, αἱ μικταί αὐτῆς παράγωγοι μέχρι καί μ-τάξεως εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς σειρᾶς παραγωγίσεως.*

Παράδειγμα (6.1).— Διά τήν συνάρτησιν $\Phi = x^5y^4$ ἔχομεν:

$$\Phi_x = 5x^4y^4, \quad \Phi_{xx} = 20x^3y^4, \quad \Phi_{xxx} = 60x^2y^4$$
$$\Phi_y = 4x^5y^3, \quad \Phi_{yy} = 12x^5y^2, \quad \Phi_{yyy} = 24x^5y$$
$$\Phi_{xxy} = 80x^3y^3, \quad \Phi_{xxyy} = 240x^3y^2, \quad \Phi_{xxxy} = 240x^2y^3$$
$$\Phi_{yyyx} = 120x^4y, \quad \Phi_{y^3x^2} = 480x^3y, \quad \Phi_{y^3x^3} = 1440x^2y, \ \ldots$$

Παράδειγμα (6.2).— Τῆς συναρτήσεως: $\Phi = x^3y - xy^2z^2 + 1$ νά ὑπολογισθοῦν αἱ μερικαί παράγωγοι:

$$\Phi_{yz}(1,-1,1), \quad \Phi_{xyz}(1,1,1), \quad \Phi_{xxyz}(-2,1,0)$$

Λύσις. Διά μερικῆς παραγωγίσεως προκύπτει:

$$\Phi_y = x^3 - 2xyz^2, \quad \Phi_{yz} = -4xyz, \quad \Phi_{yz}(1,-1,1) = 4$$
$$\Phi_{yzx} = -4yz, \quad \Phi_{xyz}(1,1,1) = -4$$
$$\Phi_{yzxx} = 0, \quad \Phi_{yzx}(-2,1,0) = 0$$

Παράδειγμα (6.3).— Νά ἐπαληθευθῆ διά τήν συνάρτησιν $\Phi = \text{ημ}(xy-z)$ ὅτι εἶναι: $\Phi_{xyz} = \Phi_{yzx} = \Phi_{zxy}$

Λύσις. Διά μερικῆς παραγωγίσεως προκύπτει:

$$\Phi_x = y\sigma\upsilon\nu(xy-z) \qquad \Phi_y = x\sigma\upsilon\nu(xy-z), \qquad \Phi_z = -\sigma\upsilon\nu(xy-z)$$
$$\Phi_{xy} = \sigma\upsilon\nu(xy-z) - xy\,\eta\mu(xy-z), \quad \Phi_{xyz} = \eta\mu(xy-z) + xy\sigma\upsilon\nu(xy-z)$$
$$\Phi_{yz} = x\eta\mu(xy-z), \qquad \Phi_{yzx} = \eta\mu(xy-z) + xy\sigma\upsilon\nu(xy-z)$$
$$\Phi_{zx} = y\eta\mu(xy-z), \qquad \Phi_{zxy} = \eta\mu(xy-z) + xy\sigma\upsilon\nu(xy-z)$$

Παράδειγμα (6.4). — Ἐάν εἶναι $\Phi = \ell n(x^2+y^2+z^2)$ νά δειχθῇ ὅτι:

$$x\Phi_{yz} = y\Phi_{zx} = z\Phi_{xy}$$

Λύσις. Διά μερικῆς παραγωγίσεως προκύπτει:

$$\Phi_y = 2y : (x^2+y^2+z^2), \quad \Phi_{yz} = -4yz : (x^2+y^2+z^2), \quad x\Phi_{yz} = -4xyz : (x^2+y^2+z^2).$$

Ἕνεκα τῆς συμμετρίας διά κυκλικῆς ἀλλαγῆς τῶν x, y, z προκύπτει τό ζητούμενον.

Παράδειγμα (6.5). — Ἐάν εἶναι: $\alpha^2x^2+\beta^2y^2-\gamma^2z^2=0$ νά δειχθῇ ὅτι:

$$z_{xx} \cdot z_{yy} = (z_{xy})^2$$

Λύσις. Ἐκ τῆς δοθείσης σχέσεως ἔχομεν: $\gamma z = (\alpha^2x^2+\beta^2y^2)^{1/2}$ καί διά παραγωγίσεως:

$$\gamma z_x = \alpha^2 x(\alpha^2x^2+\beta^2y^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \gamma z_{xy} = -\alpha^2\beta^2xy(\alpha^2x^2+\beta^2y^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad \gamma z_{xx} = \alpha^2\beta^2y^2(\alpha^2x^2+\beta^2y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Ἕνεκα τῆς συμμετρίας τῆς z ὡς πρός αx, βy προκύπτει: $\gamma z_{yy} = \alpha^2\beta^2x^2(\alpha^2x^2+\beta^2y^2)^{-3/2}$ ἑπομένως: $\gamma^2 z_{xx}\cdot z_{yy} = \alpha^4\beta^4x^2y^2(\alpha^2x^2+\beta^2y^2)^{-3} = \gamma^2 z^2_{xy}$.

Παράδειγμα (6.6). — Νά συγκριθοῦν εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων αἱ μικταί μερικαί παράγωγοι δευτέρας τάξεως τῆς συναρτήσεως:

$$\Phi(x,y) = xy(x^2-y^2) : (x^2+y^2), \quad \Phi(0,0) = 0.$$

Λύσις. Ἀπό τόν ὁρισμόν τῶν μερικῶν παραγώγων ἔχομεν διά $h, k \to 0$:

$$\Phi_x(0,y) = \text{ὁρ}[\Phi(h,y) - \Phi(0,y)] : h = \text{ὁρ}.\ y(h^2-y^2) : (h^2+y^2) = -y$$
$$\Phi_y(x,0) = \text{ὁρ}[\Phi(x,k) - \Phi(x,0)] : k = \text{ὁρ}.\ x(x^2-k^2) : (x^2+k^2) = x$$

Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι: $\Phi_{xy}(0,0) = -1$, $\Phi_{yx}(0,0) = 1$, ἑπομένως αἱ μικταί παράγωγοι δευτέρας τάξεως εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων εἶναι ἄνισοι.

7. Παράγωγοι πρώτης τάξεως συνθέτου συναρτήσεως.

— Ἐάν εἰς τήν συνάρτησιν $\Phi(x,y)$ οἱ μεταβλητές x, y δέν εἶναι ἀνεξάρτητες ἀλλά συναρτήσεις: $x = x(t)$, $y = y(t)$ μιᾶς μεταβλητῆς t, τότε ἡ $\Phi(x,y)$ λέγεται σύνθετος συνάρτησις τῆς t διά μέσου τῶν μεταβλητῶν x, y. Διά τήν παράγωγον αὐτῆς ὡς πρός t τήν ὁποίαν θά παριστάνωμεν συντόμως καί μέ τό σύμβολον $\dot{\Phi}$ ἰσχύει ἡ ἑξῆς βασική πρότασις.

Πρότασις (7.1). — *Ἐάν ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y)$ ἔχῃ ἐπί ἑνός χωρίου T μερικάς παραγώγους πρώτης τάξεως Φ_x, Φ_y συνεχεῖς καί οἱ συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ εἶναι παραγωγίσιμες σέ κάποιο διάστημα $\alpha \leq t \leq \beta$, τότε ἡ συνάρτησις Φ ἔχει παράγωγον εἰς τό διάστημα αὐτό καί δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:*

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \tag{7.1}$$

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι εἰς τὴν αὔξησιν Δt ἀντιστοιχοῦν διὰ τὰς x, y αἱ αὐξήσεις: $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$, $\Delta y = y(t+\Delta t) - y(t)$ καὶ εἰς αὐτὰς ἀντιστοιχεῖ διὰ τὴν συνάρτησιν $\Phi(x, y)$ αὔξησις: $\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \Phi(x, y)$. Τὴν ἀρχικὴν τιμὴν t καὶ τὴν αὔξησιν Δt λαμβάνομεν ἔτσι ὥστε αἱ τιμαί: t, $t+\Delta t$ νὰ ἀνήκουν εἰς τὸ διάστημα $\alpha \leq t \leq \beta$ καὶ τὰ σημεῖα: (x, y), $(x, y+\Delta y)$, $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ νὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ χωρίου T. Ἐφαρμόζοντες τὸ γνωστὸν ἐκ τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς θὰ ἔχωμεν:

$$\Phi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \Phi(x, y+\Delta y) = \Phi_x(x+\vartheta_1 \Delta x, y+\Delta y) \cdot \Delta x \qquad 0<\vartheta_1<1$$
$$\Phi(x, y+\Delta y) - \Phi(x, y) = \Phi_y(x, y+\vartheta_2 \Delta y) \cdot \Delta y \qquad 0<\vartheta_2<1$$

Ἐξ αὐτῶν διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη καὶ διαιρέσεως διὰ Δt προκύπτει:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \Phi_x(x+\vartheta_1\Delta x, y+\Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \Phi_y(x, y+\vartheta_2 \Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t}. \tag{1}$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι $\Delta t \to 0$ τότε $\Delta x : \Delta t \to dx : dt$, $\Delta y : \Delta t \to dy : dt$ καὶ ἕνεκα τῆς συνεχείας τῶν μερικῶν παραγώγων Φ_x, Φ_y αἱ $\Phi_x(x+\vartheta_1\Delta x, y+\Delta y)$, $\Phi_y(x, y+\vartheta_2 \Delta y)$ τείνουν ἀντιστοίχως εἰς τὰς μερικὰς παραγώγους $\Phi_x(x, y)$, $\Phi_y(x, y)$, ἑπομένως ἐκ τῆς ἰσότητος (1) διὰ $\Delta t \to 0$ προκύπτει ὁ τύπος (7.1).

Ἡ ἀποδειχθεῖσα πρότασις μὲ τὶς ἀντίστοιχες προϋποθέσεις γενικεύεται εὐκόλως διὰ κάθε σύνθετον συνάρτησιν ν-μεταβλητῶν: $\Phi(x_1, \ldots, x_\nu)$ ὅπου $x_i = x_i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ καὶ ἔχομεν τὸν τύπον:

$$\boxed{\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu} \cdot \frac{dx_\nu}{dt}} \tag{7.2}$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι εἰς τὴν συνάρτησιν $\Phi(x_1, \ldots, x_\nu)$ οἱ μεταβληταὶ x_i, $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ εἶναι συναρτήσεις $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_\mu)$ τῶν μεταβλητῶν t_j, $(j = 1, 2, \ldots, \mu)$, τότε ἡ $\Phi(x_1, \ldots, x_\nu)$ θὰ εἶναι σύνθετος συνάρτησις αὐτῶν διὰ μέσου τῶν x_i. Ἐὰν ἐκ τῶν μεταβλητῶν t_j μία μόνον π.χ. ἡ t_1 μεταβάλλεται ἐνῶ οἱ ὑπόλοιπες παραμένουν σταθερές, τότε ἡ $\Phi(x_1, \ldots, x_\nu)$ γίνεται σύνθετος συνάρτησις τῆς t_1 διὰ μέσου τῶν x_i καὶ ἡ μερικὴ παράγωγος αὐτῆς ὡς πρὸς t_1 δύναται νὰ προκύψη ἐκ τοῦ τύπου (7.2) ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν t μὲ τὴν t_1 καὶ τὸ σύμβολον τῆς συνήθους παραγώγου μὲ τὸ σύμβολον τῆς μερικῆς παραγώγου, δηλαδὴ θὰ εἶναι:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t_1} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial t_1}$$

Ὅ,τι εἴπαμε διὰ τὴν μεταβλητὴν t_1 ἰσχύει καὶ διὰ τὶς ὑπόλοιπες μεταβλητές, επομένως θά έχωμεν τόν εξής γενικόν τύπον:

$$\boxed{\frac{\partial\Phi}{\partial t_j}=\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_j}+\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_j}+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial x_\nu}{\partial t_j}} \qquad (7.3)$$

Π.χ. όταν είναι: $\Phi=\Phi(x,y)$, $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ θά έχωμεν τούς τύπους:

$$\begin{aligned}\Phi_u&=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot x_u+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot y_u\\ \Phi_v&=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot x_v+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot y_v\end{aligned} \qquad (7.4)$$

καί όταν είναι: $\Phi=\Phi(x,y,z)$, $x=x(u,v,w,t)$, $y=y(u,v,w,t)$, $z=z(u,v,w,t)$ θά έχωμεν:

$$\begin{aligned}\Phi_u&=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot x_u+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot y_u+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot z_u\\ \Phi_v&=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot x_v+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot y_v+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot z_v\\ \Phi_w&=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot x_w+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot y_w+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot z_w\\ \Phi_t&=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot x_t+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot y_t+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot z_t\end{aligned} \qquad (7.5)$$

Παράδειγμα (7.1). — Νά ευρεθή ή παράγωγος τής συνθέτου συναρτήσεως $\Phi=x^2+y$ όταν είναι $x=t\eta\mu t$, $y=\sigma\upsilon\nu t$.

Λύσις. Παριστάνοντες διά συντομίαν μέ $\dot{\Phi}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ τάς παραγώγους ώς πρός t θά έχωμεν: $\Phi_x=2x=2t\eta\mu t$, $\Phi_y=1$, $\dot{x}=\eta\mu t+t\sigma\upsilon\nu t$, $\dot{y}=-\eta\mu t$, οπότε άντικαθιστώντες είς τόν τύπον (7.1) προκύπτει:

$$\dot{\Phi}=2t\eta\mu t\cdot(\eta\mu t+t\sigma\upsilon\nu t)-\eta\mu t=2t\eta\mu^2 t+2t^2\eta\mu t\sigma\upsilon\nu t-\eta\mu t$$

Ὁ ἀναγνώστης δύναται νά φθάση είς τό αὐτό ἐξαγόμενον ὅταν ἀντικαταστήση εἰς τήν $\Phi(x,y)$ τά x, y συναρτήσει τής t καί παραγωγίση τήν προκύπτουσα συνάρτησιν ὡς πρός t.

Παράδειγμα (7.2). — Νά ευρεθή ή παράγωγος τής συνθέτου συναρτήσεως $\Phi(x,y)$ όταν είναι $y=y(x)$.

Λύσις. Παριστάνοντες διά συντομίαν μέ Φ', y' τάς παραγώγους ώς πρός x θά έχωμεν: $\Phi'=\Phi_x+\Phi_y\cdot y'$.

Παράδειγμα (7.3). — Νά ευρεθή ή παράγωγος τής συνθέτου συναρτήσεως $\Phi=\eta\mu(xz-y^2)$ όταν είναι: $x=t^2$, $y=\sigma\upsilon\nu t$, $z=\eta\mu t^2$.

Λύσις. Διά παραγωγίσεως προκύπτει: $\Phi_x=z\sigma\upsilon\nu(xz-y^2)$, $\Phi_y=-2y\sigma\upsilon\nu(xz-y^2)$,

$\Phi_z = x\sigma\upsilon\nu(xz-y^2)$, $\dot{x} = 2t$, $\dot{y} = -\eta\mu t$, $\dot{z} = 2t\sigma\upsilon\nu t^2$ καί δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (7.2) μέ $\nu = 3$ θά ἔχωμεν:
$\dot{\Phi} = \Phi_x \cdot \dot{x} + \Phi_y \cdot \dot{y} + \Phi_z \cdot \dot{z} = z\sigma\upsilon\nu(xz-y^2)\cdot 2t + 2y\sigma\upsilon\nu(xz-y^2)\eta\mu t + x\sigma\upsilon\nu(xz-y^2)2t\sigma\upsilon\nu t^2$.

Παράδειγμα (7.4). — Νά εὑρεθοῦν αἱ μερικαί παράγωγοι ὡς πρός u, υ τῆς συνθέτου συναρτήσεως $\Phi = \eta\mu(x-y)$ ὅταν εἶναι: $x = u\upsilon$, $y = u - \upsilon$.
Λύσις. Διά παραγωγίσεως προκύπτει: $\Phi_x = \sigma\upsilon\nu(x-y)$, $\Phi_y = -\sigma\upsilon\nu(x-y)$, $x_u = \upsilon$, $x_\upsilon = u$, $y_u = 1$, $y_\upsilon = -1$, ὁπότε ἐκ τῶν τύπων (7.4) θά ἔχωμεν:
$$\Phi_u = \upsilon\sigma\upsilon\nu(x-y) - \sigma\upsilon\nu(x-y), \quad \Phi_\upsilon = u\sigma\upsilon\nu(x-y) + \sigma\upsilon\nu(x-y).$$

Παράδειγμα (7.5). — Ἐάν εἶναι $\Phi = \Phi(x,y)$ καί $x = \rho\sigma\upsilon\nu\vartheta$, $y = \rho\eta\mu\vartheta$ δείξατε ὅτι: $\Phi_\rho^2 + \rho^{-2}\cdot\Phi_\vartheta^2 = \Phi_x^2 + \Phi_y^2$.
Λύσις. Ἡ Φ εἶναι σύνθετος συνάρτησις τῶν ρ, ϑ διά μέσου τῶν x, y ἑπομένως θά ἔχωμεν: $\Phi_\rho = \Phi_x\cdot x_\rho + \Phi_y\cdot y_\rho = \Phi_x\sigma\upsilon\nu\vartheta + \Phi_y\eta\mu\vartheta$, $\Phi_\vartheta = \Phi_x\cdot x_\vartheta + \Phi_y\cdot y_\vartheta = -\Phi_x\cdot\rho\eta\mu\vartheta + \Phi_y\cdot\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τό πρῶτον μέλος τῆς ἀποδεικτέας σχέσεως τάς Φ_ρ, Φ_ϑ προκύπτει τό ζητούμενον:
$$\Phi_\rho^2 + \rho^{-2}\cdot\Phi_\vartheta^2 = (\Phi_x\sigma\upsilon\nu\vartheta + \Phi_y\cdot\eta\mu\vartheta)^2 + \rho^{-2}(-\Phi_x\rho\eta\mu\vartheta + \Phi_y\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta)^2 = \cdots = \Phi_x^2 + \Phi_y^2.$$

Παράδειγμα (7.6). — Νά εὑρεθοῦν αἱ μερικαί παράγωγοι πρώτης τάξεως τῆς συναρτήσεως: $\Phi = (x^2-y)e^{x+y}\cdot\eta\mu(x-y^2)$.
Λύσις. Θέτομεν χάριν ἁπλότητος: $x^2 - y = u$, $x+y = \upsilon$, $x - y^2 = w$, ὁπότε ἡ συνάρτησις γράφεται: $\Phi = ue^\upsilon\eta\mu w\cdot$ παραγωγίζομεν: $\Phi_u = e^\upsilon\eta\mu w$, $\Phi_\upsilon = ue^\upsilon\eta\mu w$, $\Phi_w = ue^\upsilon\sigma\upsilon\nu w$, $u_x = 2x$, $u_y = -1$, $\upsilon_x = \upsilon_y = 1$, $w_x = 1$, $w_y = -2y$ καί δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (7.3) προκύπτει: $\Phi_x = \Phi_u\cdot u_x + \Phi_\upsilon\cdot\upsilon_x + \Phi_w\cdot w_x = e^\upsilon\eta\mu w.2x + ue^\upsilon\eta\mu w + ue^\upsilon\sigma\upsilon\nu w = e^{x+y}[2x\eta\mu(x-y^2) + (x^2-y).\eta\mu(x-y^2) + (x^2-y)\sigma\upsilon\nu(x-y^2)]$, $\Phi_y = \Phi_u\cdot u_y + \Phi_\upsilon\cdot\upsilon_y + \Phi_w\cdot w_y = -e^\upsilon\eta\mu w + ue^\upsilon\eta\mu w - ue^\upsilon\sigma\upsilon\nu w.\,2y = e^{x+y}[-\eta\mu(x-y^2) + (x^2-y)\eta\mu(x-y^2) - (x^2-y)2y.\sigma\upsilon\nu(x-y^2)]$.

Παράδειγμα (7.7). — Νά ὑπολογισθῆ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως: $\Phi = x^{x^x}$.
Λύσις. Ἐάν γράψωμεν τήν συνάρτησιν ὑπό τήν μορφήν $\Phi = u^{\upsilon^w}$, τότε δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν αὐτήν ὡς σύνθετον συνάρτησιν τῆς x διά μέσου τῶν $u = x$, $\upsilon = x$, $w = x$ ὁπότε κατά τόν τύπον (7.2) θά ἔχωμεν: $d\Phi : dx = \Phi_u\cdot du : dx + \Phi_\upsilon d\upsilon : dx + \Phi_w dw : dx = \upsilon^w . u^{\upsilon^w - 1} + u^{\upsilon^w}.w\upsilon^{w-1}\ell n u + u^{\upsilon^w}.\upsilon^w\ell n u\cdot\ell n\upsilon = x^x x^{x^x - 1} + x^{x^x}x.x^{x-1}\ell n x + x^{x^x}.x^x\ell n x.\ell n x = x^{x^x + x}.(x^{-1} + \ell n x + \ell n^2 x)$. Εἰς τό αὐτό ἐξαγόμενον θά φθάσωμεν ἐάν κατά τά γνωστά ἐκ τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ διά συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς λογαριθμίσωμεν: $\ell n\Phi = x^x\ell n x$ καί παραγωγίσωμεν αὐτήν ὡς πρός x.

8. Παράγωγοι ἀνωτέρας τάξεως συνθέτου συναρτήσεως. — Ἄς ἐπανέλθωμεν εἰς τήν σύνθετον συνάρτησιν $\Phi(x,y)$ ὅπου $x = x(t)$, $y = y(t)$

καὶ ἄς ζητήσωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν δευτέραν παράγωγον αὐτῆς ὡς πρὸς t. Εἰς τὸ ἐδάφιον αὐτὸ ὑποθέτομεν ὅτι οἱ χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις εἶναι συνεχεῖς καὶ ἔχουν παραγώγους συνεχεῖς μέχρι τῆς τάξεως ποὺ ἀπαιτεῖται. Ἐκ τοῦ τύπου (7.1) διὰ παραγωγίσεως ὡς πρὸς t προκύπτει:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \frac{d\Phi_x}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + \Phi_x\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d\Phi_y}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \Phi_y\frac{d^2y}{dt^2}$$

Αἱ μερικαὶ παράγωγοι Φ_x, Φ_y εἶναι προφανῶς ὅπως καὶ ἡ Φ σύνθετοι συναρτήσεις τῆς t διὰ μέσου τῶν x, y ἑπομένως κατὰ τὸν τύπον (7.1) θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{d\Phi_x}{dt} = \Phi_{xx}\cdot\frac{dx}{dt} + \Phi_{xy}\cdot\frac{dy}{dt} \quad , \quad \frac{d\Phi_y}{dt} = \Phi_{yx}\cdot\frac{dx}{dt} + \Phi_{yy}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Ἀντικαθιστῶντες αὐτὰς εἰς τὴν προηγουμένην προκύπτει ὁ τύπος:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \Phi_{xx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\Phi_{xy}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \Phi_{yy}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \Phi_x\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \Phi_y\frac{d^2y}{dt^2} \qquad (8.1)$$

Ἐπειδὴ οἱ τρεῖς πρῶτοι ὅροι τοῦ δευτέρου μέλους ἐνθυμίζουν τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τετραγώνου ἑνὸς διωνύμου, ὁ ἀνωτέρω τύπος δύναται νὰ γραφῆ συντομώτερον ὑπὸ τὴν συμβολικὴν μορφήν:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \left(\Phi_x\cdot\frac{dx}{dt} + \Phi_y\cdot\frac{dy}{dt}\right)^2 + \Phi_x\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \Phi_y\cdot\frac{d^2y}{dt^2} \qquad (8.2)$$

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς τρίτης παραγώγου παραγωγίζομεν ὡς πρὸς t ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ τύπου (8.1), λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι αἱ Φ_x, Φ_y, Φ_{xx}, ... εἶναι σύνθετοι συναρτήσεις τῆς t διὰ μέσου τῶν x, y καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκομεν τὴν παράγωγον οἱασδήποτε τάξεως.
Ὁ τύπος (8.2) γενικεύεται εὐκόλως καὶ διὰ συνθέτους συναρτήσεις ν - μεταβλητῶν: $\Phi(x_1, \dots, x_\nu)$· χρησιμοποιοῦντες ἀνάλογον συμβολισμὸν προκύπτει ὁ γενικὸς τύπος:

$$\boxed{\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu}\cdot\frac{dx_\nu}{dt}\right)^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\cdot\frac{d^2x_1}{dt^2} + \dots + \frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu}\cdot\frac{d^2x_\nu}{dt^2}} \qquad (8.3)$$

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς τρίτης παραγώγου παραγωγίζομεν ὡς πρὸς t ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ ἀνωτέρου τύπου κ.ο.κ. διὰ τὰς ἑπομένας παραγώγους.
Ἄν ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι εἰς τὴν συνάρτησιν $\Phi(x, y)$ οἱ μεταβλητὲς x, y εἶναι συναρτήσεις: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ τῶν μεταβλητῶν u, v, τότε ἡ Φ εἶναι μία σύνθετος συνάρτησις τῶν u, v διὰ μέσου τῶν x, y καὶ ἡ μερικὴ παράγωγος δευτέρας τάξεως ὡς πρὸς u δύναται προφανῶς

νά προκύψη ἀπό τόν τύπον (8.1) ὅταν ἀντικαταστήσωμεν τήν t μέ τήν u καί τό σύμβολον τῆς συνήθους παραγώγου μέ τό σύμβολον τῆς μερικῆς παραγώγου, δηλαδή θά εἶναι:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} = \Phi_{xx}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2\Phi_{xy}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \Phi_{yy}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \Phi_x\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \Phi_y\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \qquad (8.4)$$

Ἐάν εἰς τόν τύπον αὐτόν θέσωμεν ὅπου u τήν υ θά προκύψη προφανῶς ἡ δευτέρα μερική παράγωγος τῆς Φ ὡς πρός υ:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \upsilon^2} = \Phi_{xx}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial \upsilon}\right)^2 + 2\Phi_{xy}\frac{\partial x}{\partial \upsilon}\cdot\frac{\partial y}{\partial \upsilon} + \Phi_{yy}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial \upsilon}\right)^2 + \Phi_x\frac{\partial^2 x}{\partial \upsilon^2} + \Phi_y\frac{\partial^2 y}{\partial \upsilon^2} \qquad (8.5)$$

Διά τόν ὑπολογισμόν τῆς μικτῆς παραγώγου ὡς πρός u καί υ παραγωγίζομεν τήν πρώτην τῶν ἐξισώσεων (7.4) μερικῶς ὡς πρός υ, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι αἱ Φ_x, Φ_y εἶναι ὅπως καί ἡ Φ σύνθετοι συναρτήσεις τῶν u, υ διά μέσου τῶν x, y καί αἱ x_u, y_u συναρτήσεις τῶν u, υ ὁπότε προκύπτει:

$$\Phi_{u\upsilon} = \frac{\partial \Phi_x}{\partial \upsilon}\cdot x_u + \Phi_x\cdot x_{u\upsilon} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial \upsilon}\cdot y_u + \Phi_y\cdot y_{u\upsilon} = (\Phi_{xx}\cdot x_\upsilon + \Phi_{xy}\cdot y_\upsilon)x_u + \Phi_x\cdot x_{u\upsilon} +$$
$$+ (\Phi_{xy}\cdot x_\upsilon + \Phi_{yy}\cdot y_\upsilon)y_u + \Phi_y\cdot y_{u\upsilon}.$$

καί μετά τίς πράξεις θά ἔχωμεν τόν ἑξῆς τύπον:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \upsilon} = \Phi_{xx}\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial \upsilon} + \Phi_{xy}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial \upsilon} + \frac{\partial x}{\partial \upsilon}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right) + \Phi_{yy}\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial \upsilon} + \Phi_x\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial \upsilon} + \Phi_y\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial \upsilon} \qquad (8.6)$$

Μέ ἀνάλογον τρόπον ἐπεκτείνεται ἡ διαδικασία αὐτή εἰς τήν εὕρεσιν μερικῶν παραγώγων συνθέτων συναρτήσεων $\Phi(x_1, \ldots, x_\nu)$ ὅπου οἱ μεταβληταί x_i εἶναι συναρτήσεις μ-μεταβλητῶν $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_\mu)$. Π.χ. ἡ μερική παράγωγος ὡς πρός t_j θά προκύψη ἀπό τόν (8.3) ὅταν ἀντικαταστήσωμεν τήν t μέ τήν t_j καί τό σύμβολον τῆς συνήθους παραγώγου μέ τό σύμβολον τῆς μερικῆς παραγώγου, ὁπότε θά ἔχωμεν τόν ἑξῆς γενικόν τύπον:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t_j} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial t_j}\right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_j^2} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial t_j^2}} \qquad (8.7)$$

Παράδειγμα (8.1).— Νά ὑπολογισθῆ ἡ δευτέρα παράγωγος ὡς πρός t τῆς συνθέτου συναρτήσεως: $\Phi = x^2 - y^2$, ὅταν εἶναι $x = e^t \text{συν} t$, $y = e^t \text{ημ} t$. **Λύσις.** Διά παραγωγίσεως προκύπτει: $\Phi_x = 2x$, $\Phi_{xx} = 2$, $\Phi_y = -2y$, $\Phi_{yy} = -2$, $\Phi_{xy} = 0$, $\dot{x} = e^t(\text{συν} t - \text{ημ} t)$, $\ddot{x} = -2e^t \text{ημ} t$, $\dot{y} = e^t(\text{ημ} t + \text{συν} t)$, $\ddot{y} = 2e^t \text{συν} t$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τόν τύπον (8.1) προκύπτει: $\ddot{\Phi} = 2e^t(\text{συν} t - \text{ημ} t)^2 - 2e^{2t}(\text{ημ} t + \text{συν} t)^2 + 4xe^t \text{ημ} t - 4ye^t \text{συν} t = \ldots = -8e^{2t}\,\text{ημ} 2t$.

Παράδειγμα (8.2). — Ὁμοίως διὰ τὴν σύνθετον συνάρτησιν $\Phi = x^2 + yz$ ὅταν εἶναι: $x = \eta\mu t$, $y = \sigma\upsilon\nu t$, $z = t^3$.
Λύσις. Διὰ παραγωγίσεως προκύπτει: $\Phi_x = 2x$, $\Phi_y = z$, $\Phi_z = y$, $\Phi_{xx} = 2$, $\Phi_{yy} = \Phi_{zz} = \Phi_{xy} = 0$, $\Phi_{yz} = 1$, $\Phi_{zx} = 0$, $\dot{x} = \sigma\upsilon\nu t$, $\ddot{x} = -\eta\mu t$, $\ddot{y} = -\eta\mu t$, $\ddot{y} = -\sigma\upsilon\nu t$, $\dot{z} = 3t^2$, $\ddot{z} = 6t$, ὁπότε ἀπὸ τὸν τύπον (8.3) θὰ ἔχωμεν: $\ddot{\Phi} = \Phi_{xx}\cdot\dot{x}^2 + \Phi_{yy}\cdot\dot{y}^2 + \Phi_{zz}\cdot\dot{z}^2 + 2\Phi_{xy}\cdot\dot{x}\dot{y} + 2\Phi_{yz}\dot{x}\dot{y} + 2\Phi_{zx}\cdot\dot{z}\dot{x} + \Phi_x\ddot{x} + \Phi_y\ddot{y} + \Phi_z\ddot{z} = 2\sigma\upsilon\nu^2 t - 6t^2\eta\mu t - 2x\eta\mu t - z\sigma\upsilon\nu t + 6yt = \ldots = 2\sigma\upsilon\nu 2t + (6t - t^3)\sigma\upsilon\nu t - 6t^2\eta\mu t$.

Παράδειγμα (8.3). — Νὰ εὑρεθῇ ἡ δευτέρα παράγωγος ὡς πρὸς x τῆς συνθέτου συναρτήσεως $\Phi(x, y)$ ὅταν εἶναι $y = y(x)$.
Λύσις. Ἡ ζητουμένη παράγωγος προκύπτει ἀμέσως ἀπὸ τὸν τύπον (8.1) ἐὰν θέσωμεν εἰς αὐτὸν $x = t$, $\dot{x} = 1$, $\ddot{x} = 0$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν:

$$\Phi'' = \Phi_{xx} + 2\Phi_{xy}\cdot y' + \Phi_{yy}\cdot y'^2 + \Phi_y\cdot y''.$$

Παράδειγμα (8.4). — Ἐὰν εἶναι: $\Phi = \Phi(x, y)$, $x = ue^{\upsilon}$, $y = ue^{-\upsilon}$ νὰ δειχθῇ ὅτι: $u^2\Phi_{uu} - u\Phi_u + \Phi_{\upsilon\upsilon} = 2(x^2\Phi_{xx} + y^2\Phi_{yy})$.
Λύσις. Διὰ παραγωγίσεως προκύπτει: $x_u = e^{\upsilon}$, $x_{\upsilon} = ue^{\upsilon} = x$, $x_{uu} = 0$, $x_{\upsilon\upsilon} = ue^{\upsilon} = x$, $y_u = e^{-\upsilon}$, $y_{\upsilon} = -ue^{-\upsilon} = -y$, $y_{uu} = 0$, $y_{\upsilon\upsilon} = ue^{-\upsilon} = y$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς τύπους (7.4), (8.4), (8.5) θὰ ἔχωμεν: $\Phi_u = e^{\upsilon}\cdot\Phi_x + e^{-\upsilon}\cdot\Phi_y = (x\Phi_x + y\Phi_y) : u$, $\Phi_{uu} = e^{2\upsilon}\cdot\Phi_{xx} + 2\Phi_{xy} + e^{-2\upsilon}\cdot\Phi_{yy} = (x^2\Phi_{xx} + 2xy\Phi_{xy} + y^2\Phi_{yy}) : u^2$, $\Phi_{\upsilon\upsilon} = x^2\Phi_{xx} - 2xy\Phi_{xy} + y^2\Phi_{yy} + x\Phi_x + y\Phi_y$ ἀντικαθιστῶντες αὐτὰς εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀποδεικτέας σχέσεως προκύπτει μετὰ ἀπὸ πράξεις τὸ δεύτερον.

Παράδειγμα (8.5). — Ἐὰν εἶναι $\Phi = \Phi(x, y)$, $x = u^2 : \upsilon$, $y = \upsilon^2 : u$ νὰ δειχθῇ ὅτι: $u^2\Phi_{uu} - \upsilon^2\Phi_{\upsilon\upsilon} = 3(x^2\Phi_{xx} - y^2\Phi_{yy})$.
Λύσις. Ἐργαζόμενοι ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα θὰ ἔχωμεν: $x_u = 2u : \upsilon$, $x_{uu} = 2 : \upsilon$, $x_{\upsilon} = -u^2 : \upsilon^2$, $x_{\upsilon\upsilon} = 2u^2 : \upsilon^3$ $y_u = -\upsilon^2 : u^2$, $y_{uu} = 2\upsilon^2 : u^3$, $y_{\upsilon} = 2\upsilon : u$, $y_{\upsilon\upsilon} = 2 : u$, $\Phi_{uu} = 4u^2\cdot\upsilon^{-2}\cdot\Phi_{xx} - 4u^{-1}\upsilon\Phi_{xy} + u^{-4}\cdot\upsilon^4\Phi_{yy} + 2\upsilon^{-1}\cdot\Phi_x + 2u^{-3}\cdot\upsilon^2\Phi_y$, $\Phi_{\upsilon\upsilon} = u^4\cdot\upsilon^{-4}\cdot\Phi_{xx} - 4u\upsilon^{-1}\Phi_{xy} + 4u^{-2}\upsilon^2\Phi_{yy} + 2u^2\upsilon^{-3}\Phi_x + 2u^{-1}\cdot\Phi_y$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες αὐτὰς εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀποδεικτέας σχέσεως προκύπτει μετὰ ἀπὸ πράξεις τὸ δεύτερον.

Παράδειγμα (8.6). — Ἐὰν $\Phi = \Phi(x, y)$, $x = \mathrm{ch}u\,\sigma\upsilon\nu\upsilon$, $y = \mathrm{sh}u\,\eta\mu\upsilon$ καὶ ἡ Φ ἐπαληθεύῃ τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν: $\Phi_{xx} + x^{-1}\cdot\Phi_x + \Phi_{yy} = 0$, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ Φ ἐπαληθεύει καὶ τὴν ἐξίσωσιν: $\Phi_{uu} + \Phi_{\upsilon\upsilon} + \mathrm{th}u\Phi_u - \varepsilon\varphi\upsilon.\Phi_{\upsilon} = 0$.
Λύσις. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ὡς ἄνω θὰ ἔχωμεν: $x_u = \mathrm{sh}u\,\sigma\upsilon\nu\upsilon$, $x_{uu} = \mathrm{ch}u\,\sigma\upsilon\nu\upsilon = x$, $y_u = \mathrm{ch}u\,\eta\mu\upsilon$, $y_{uu} = \mathrm{sh}u\,\eta\mu\upsilon = y$, $x_{\upsilon} = -\mathrm{ch}u\,\eta\mu\upsilon$, $x_{\upsilon\upsilon} = -\mathrm{ch}u\,\sigma\upsilon\nu\upsilon = -x$, $y_{\upsilon} = \mathrm{sh}u\,\sigma\upsilon\nu\upsilon$, $y_{\upsilon\upsilon} = -\mathrm{sh}u\,\eta\mu\upsilon = -y$, $\Phi_u = \mathrm{sh}u\,\sigma\upsilon\nu\upsilon.\Phi_x + \mathrm{ch}u\,\eta\mu\upsilon\Phi_y$, $\Phi_{\upsilon} = -\mathrm{ch}u\,\eta\mu\upsilon\Phi_x + \mathrm{sh}u\,\sigma\upsilon\nu\upsilon\Phi_y$, $\Phi_{uu} = \mathrm{sh}^2u\,\sigma\upsilon\nu^2\upsilon\Phi_{xx} + 2\mathrm{sh}u\,\sigma\upsilon\nu\upsilon\,\mathrm{ch}u\cdot$

$\eta\mu\upsilon\,\Phi_{xy} + ch^2u\,\eta\mu^2\upsilon\,\Phi_{yy} + x\Phi_x + y\Phi_y$, $\Phi_{\upsilon\upsilon} = ch^2u\,\eta\mu^2\upsilon\,\Phi_{xx} - 2chu\,\eta\mu\upsilon\, shu\,\sigma\upsilon\nu\upsilon\,\Phi_{xy} + sh^2u\,\sigma\upsilon\nu^2\upsilon \cdot \Phi_{yy} - x\Phi_y - y\Phi_y$. 'Εξ αὐτῶν ἔπεται: $\Phi_{uu} + \Phi_{\upsilon\upsilon} + thu\,\Phi_u - \varepsilon\varphi\upsilon\,\Phi_\upsilon = \ldots = (sh^2u\,\sigma\upsilon\nu^2\upsilon + ch^2u \cdot \eta\mu^2\upsilon)\cdot(\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) + (chu\,\sigma\upsilon\nu\upsilon)^{-1}\cdot(sh^2u\,\sigma\upsilon\nu^2\upsilon + ch^2u\,\eta\mu^2\upsilon)\cdot\Phi_x = (sh^2u\,\sigma\upsilon\nu^2\upsilon + ch^2u\,\eta\mu^2\upsilon)\cdot(\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + x^{-1}\cdot\Phi_x)$ καὶ ἐπειδὴ ὁ δεύτερος παράγων τοῦ τελευταίου μέλους εἶναι ἐξ ὑποθέσεως μηδέν, προκύπτει τὸ ζητούμενον.

9. Ὁλικὸν διαφορικόν. — Ἔστω συνάρτησις $\Phi(x, y)$ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x, y καὶ $\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \Phi(x, y)$ ἡ αὔξησις αὐτῆς ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰς αὐξήσεις Δx, Δy· ἡ ἔννοια τοῦ διαφορισίμου ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

Ὁρισμὸς (9.1). — *Ἡ συνάρτησις $\Phi(x, y)$ λέγεται διαφορίσιμος εἰς τὴν θέσιν (x, y) ὅταν ἡ αὔξησις αὐτῆς $\Delta\Phi$ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν:*

$$\Delta\Phi = \alpha.\Delta x + \beta.\Delta y + \varepsilon\Delta x + \eta\Delta y \tag{9.1}$$

ὅπου α, β ἀριθμοὶ ἀνεξάρτητοι τῶν Δx, Δy καὶ οἱ ποσότητες ε, η τείνουν εἰς τὸ μηδὲν ὅταν τὰ Δx, Δy τείνουν εἰς τὸ μηδέν.

Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα τὶς ἑξῆς δύο βασικὰς προτάσεις.

Πρότασις (9.1). — *Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\Phi(x, y)$ εἶναι διαφορίσιμος ὑπάρχουν αἱ μερικαὶ παράγωγοι Φ_x, Φ_y καὶ εἶναι $\Phi_x = \alpha$, $\Phi_y = \beta$.*

Ἀπόδειξις. Ἀφοῦ ἡ συνάρτησις $\Phi(x, y)$ εἶναι διαφορίσιμος θὰ ἰσχύῃ ὁ τύπος (9.1) εἰς τὸν ὁποῖον ἐὰν θέσωμεν $\Delta y = 0$ καὶ διαιρέσωμεν διὰ Δx, προκύπτει:

$$[\Phi(x+\Delta x, y) - \Phi(x, y)] : \Delta x = \alpha + \varepsilon$$

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι $\Delta x \to 0$ ἐπειδὴ καὶ $\varepsilon \to 0$, προκύπτει $\Phi_x = \alpha$· ὁμοίως ἐὰν θέσωμεν $\Delta x = 0$ καὶ διαιρέσωμεν διὰ Δy προκύπτει $\Phi_y = \beta$.

Πρότασις (9.2). — *Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\Phi(x, y)$ ἔχει συνεχεῖς μερικὰς παραγώγους, τότε εἶναι καὶ διαφορίσιμος.*

Ἀπόδειξις. Ἡ αὔξησις $\Delta\Phi$ γράφεται:

$$\Delta\Phi = [\Phi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \Phi(x, y+\Delta y)] + [\Phi(x, y+\Delta y) - \Phi(x, y)]$$

καὶ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς προκύπτει:

$$\Delta\Phi = \Phi_x(x+\vartheta_1\Delta x, y+\Delta y).\Delta x + \Phi_y(x, y+\vartheta_2\Delta y).\Delta y$$

Ἐπειδὴ ὅμως αἱ μερικαὶ παράγωγοι εἶναι συνεχεῖς θὰ ἔχωμεν:

$$\Phi_x(x+\vartheta_1\Delta x, y+\Delta y) = \Phi_x(x, y) + \varepsilon \quad , \quad \Phi_y(x, y+\vartheta_2\Delta y) = \Phi_y(x, y) + \eta$$

ὅπου οἱ ποσότητες ε, η θὰ τείνουν εἰς τὸ μηδὲν ὅταν $\Delta x, \Delta y \to 0$· ἑπομένως:

$$\Delta\Phi = \Phi_x(x, y).\Delta x + \Phi_y(x, y)\Delta y + \varepsilon.\Delta x + \eta\Delta y$$

δηλαδὴ ἡ αὔξησις $\Delta\Phi$ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (9.1) καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ συνάρτησις εἶναι διαφορίσιμος.

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἔπεται ὅτι διὰ κάθε διαφορίσιμον συνάρτησιν ἰσχύει ὁ τύπος :

$$\Delta\Phi = \Phi_x \cdot \Delta x + \Phi_y \cdot \Delta y + \varepsilon \Delta x + \eta \Delta y \qquad (9.2)$$

Ὁρισμὸς (9.2).— *Ἐάν ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y)$ εἶναι διαφορίσιμος τότε ἡ παράστασις $\Phi_x(x,y).\Delta x + \Phi_y(x,y)\Delta y$ λέγεται ὁλικόν διαφορικόν τῆς συναρτήσεως εἰς τήν θέσιν (x,y) καί συμβολίζεται μέ $d\Phi$.*

Ἐπειδή αἱ x, y εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταβληταί θά εἶναι $\Delta x = dx$ καί $\Delta y = dy$, ἐπομένως τό διαφορικόν γράφεται :

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy \qquad (9.3)$$

Ἀπό τόν τύπον αὐτόν ἕπεται ὅτι τό διαφορικόν εἶναι γενικῶς συνάρτησις τῶν τεσσάρων μεταβλητῶν x, y, dx, dy.

Στίς πρακτικές ἐφαρμογές οἱ αὐξήσεις dx, dy λαμβάνονται ἀπολύτως μικρότερες καταλλήλων θετικῶν ἀριθμῶν δηλαδή εἶναι $|dx| < \delta_1$, $|dy| < \delta_2$, ἔτσι ὥστε νά εἶναι μέ ἐπαρκῆ προσέγγισιν $\Delta\Phi \approx d\Phi$, δηλαδή ἡ αὔξησις τῆς συναρτήσεως νά ἰσοῦται κατά προσέγγισιν μέ τό διαφορικόν αὐτῆς.

Μερικόν διαφορικόν τῆς $\Phi(x,y)$ ὡς πρός x λέγεται ἡ παράστασις $\Phi_x dx$ καί μερικόν διαφορικόν ὡς πρός y ἡ παράστασις $\Phi_y dy$, παριστάνονται δέ ἀντιστοίχως ὑπό τῶν συμβόλων $\partial_x \Phi$, $\partial_y \Phi$ δηλαδή εἶναι:

$$\partial_x \Phi = \Phi_x dx \quad , \quad \partial_y \Phi = \Phi_y dy$$

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y)$ ἔχει συνεχεῖς μερικάς παραγώγους δευτέρας τάξεως καί ὅτι οἱ αὐξήσεις dx, dy εἶναι δύο σταθεροί ἀριθμοί. Τό διαφορικόν $d\Phi$ θά εἶναι τότε μία διαφορίσιμος συνάρτησις τῶν μεταβλητῶν x, y τῆς ὁποίας τό διαφορικόν $d(d\Phi)$ λέγεται ὁλικόν διαφορικόν δευτέρας τάξεως καί παριστάνεται μέ τό σύμβολον $d^2\Phi$. Ἀπό τόν τύπον (9.3) προκύπτει :

$$d^2\Phi = \frac{\partial}{\partial x}(d\Phi).dx + \frac{\partial}{\partial y}(d\Phi).dy = \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}dy\right)dy$$

καί ἐπειδή ἕνεκα τῆς συνεχείας τῶν μερικῶν παραγώγων δευτέρας τάξεως εἶναι $\Phi_{xy} = \Phi_{yx}$ θά ἔχωμεν τόν τύπον :

$$d^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y}dx dy + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}dy^2 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy\right)^2 \qquad (9.4)$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσα θεωρία γενικεύεται χωρίς δυσκολίες καί εἰς διαφορικά ἀνωτέρας τάξεως συναρτήσεων περισσοτέρων τῶν δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. Ἐάν λοιπόν ὁρίσωμεν τό διαφορικόν μ – τάξεως ἀπό τήν ἀναδρομικήν σχέσιν $d^\mu\Phi = d(d^{\mu-1}\Phi)$, δηλαδή ὡς διαφορικόν τοῦ διαφορικοῦ

$(\mu-1)$ — τάξεως καί ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις: $\Phi(x_1, \dots, x_\nu)$ ἔχει συνεχεῖς μερικάς παραγώγους μ - τάξεως, τότε διά τῆς ἀποδεικτικῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς δεικνύεται εὐκόλως ὅτι ἰσχύει ὁ ἑξῆς γενικός τύπος:

$$\boxed{d^\mu \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} dx_\nu\right)^\mu} \tag{9.5}$$

Ἐάν ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι εἰς τήν συνάρτησιν $\Phi(x, y)$ οἱ μεταβλητές x, y δέν εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀλλά συναρτήσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$ τῆς μεταβλητῆς t, τότε διά τήν παράγωγον τῆς συναρτήσεως ὡς πρός t θά ἰσχύη ὁ τύπος (7.1). Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τά μέλη αὐτοῦ ἐπί dt προκύπτει ὁ τύπος:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$$

ὁ ὁποῖος δίδει τό διαφορικόν τῆς συναρτήσεως καί ὁ ὁποῖος δέν διαφέρει μορφολογικῶς ἀπό τόν τύπον (9.3).

Ὁμοίως ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ μεταβλητές x, y εἶναι συναρτήσεις $x = x(u, \upsilon)$, $y = y(u, \upsilon)$ τῶν δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν u, υ, θά ἔχωμεν κατά τόν τύπον (9.3): $d\Phi = \Phi_u du + \Phi_\upsilon d\upsilon$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς αὐτόν τάς Φ_u, Φ_υ ἐκ τῶν τύπων (7.4) θά ἔχωμεν:

$$d\Phi = (\Phi_x x_u + \Phi_y \cdot y_u) du + (\Phi_x x_\upsilon + \Phi_y \cdot y_\upsilon) d\upsilon = \Phi_x (x_u du + x_\upsilon d\upsilon) + \Phi_y (y_u du + y_\upsilon d\upsilon)$$

καί ἐπειδή εἰς τό τελευταῖον μέλος οἱ δύο παρενθέσεις ἰσοῦνται ἀντιστοίχως μέ τά διαφορικά dx, dy συμπεραίνομεν ὅτι καί εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν διά τό διαφορικόν τῆς συναρτήσεως ἰσχύει ὁ τύπος (9.3). Ἐπειδή ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι τά ἀνωτέρω ἰσχύουν καί διά συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητῶν θά ἔχωμεν τό ἑξῆς γενικόν συμπέρασμα:

Τό διαφορικόν πρώτης τάξεως τῆς συναρτήσεως $\Phi(x_1, \dots, x_\nu)$ δίδεται πάντοτε ὑπό τοῦ γενικοῦ τύπου:

$$\boxed{d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} dx_\nu} \tag{9.6}$$

εἴτε αἱ $x_1, \dots, x_\nu$ εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταβληταί εἴτε ὄχι.

Αὐτή ἡ σημαντική ἰδιότης τῶν διαφορικῶν πρώτης τάξεως παύει νά ἰσχύη διά τά διαφορικά ἀνωτέρας τάξεως. Ἄς θεωρήσωμεν τήν συνάρτησιν $\Phi(x, y)$ ὅπου αἱ x, y εἶναι συναρτήσεις $x = x(u, \upsilon)$, $y = y(u, \upsilon)$ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν u, υ. Ἐάν θέσωμεν δι' εὐκολίαν γραφῆς $dx = h$, $dy = k$ ἐκ τοῦ τύπου (9.3) θά ἔχωμεν:

$$d\Phi = \Phi_x \cdot h + \Phi_y \cdot k = \sigma(x, y, h, k) \tag{1}$$

ἐκ τῆς ὁποίας φαίνεται ὅτι τὸ διαφορικὸν εἶναι συνάρτησις τῶν τεσσάρων μεταβλητῶν x, y, h, k τῆς ὁποίας τὸ διαφορικὸν εἶναι:

$$d^2\Phi = d(d\Phi) = d\sigma = \sigma_x dx + \sigma_y dy + \sigma_h dh + \sigma_k dk \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς (1) διὰ μερικῆς παραγωγίσεως θὰ ἔχωμεν:

$$\sigma_x = \Phi_{xx} h + \Phi_{yx} k = \Phi_{xx} dx + \Phi_{yx} dy$$
$$\sigma_y = \Phi_{xy} h + \Phi_{yy} k = \Phi_{xy} dx + \Phi_{yy} dy$$
$$\sigma_h = \Phi_x \qquad \sigma_k = \Phi_y$$
$$dh = d(dx) = d^2x, \quad dk = d(dy) = d^2y$$

ὁπότε δι' ἀντικαταστάσεως αὐτῶν εἰς τὴν (2) προκύπτει ὁ τύπος:

$$d^2\Phi = \Phi_{xx} dx^2 + 2\Phi_{xy} dx\, dy + \Phi_{yy} dy^2 + \Phi_x d^2x + \Phi_y d^2y$$

ὁ ὁποῖος, χρησιμοποιοῦντες διὰ συντομίαν τὸν γνωστὸν συμβολισμόν, γράφεται:

$$d^2\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy\right)^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial x} d^2x + \frac{\partial\Phi}{\partial y} d^2y \qquad (9.7)$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος γενικεύεται εὐκόλως καὶ διὰ συναρτήσεις ν-μεταβλητῶν: $\Phi(x_1, \ldots, x_\nu)$ ὅπου οἱ μεταβλητὲς x_i εἶναι συναρτήσεις μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, ὁπότε ἔχομεν τὸν γενικὸν τύπον:

$$\boxed{d^2\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu} dx_\nu\right)^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} d^2x_1 + \cdots + \frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu} d^2x_\nu} \qquad (9.8)$$

Διαφορίζοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον προκύπτει τὸ διαφορικὸν τρίτης τάξεως κ.ο.κ. προκύπτουν τὰ διαφορικὰ πάσης τάξεως.

Παράδειγμα (9.1). — Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως $\Phi = \eta\mu(x + yz)$ εἰς τὴν θέσιν $(1, 1, -1)$ δι' αὐξήσεις $dx = dy = 0{,}1$, $dz = -0{,}01$.

Λύσις. Διὰ μερικῆς παραγωγίσεως προκύπτει $\Phi_x = \sigma\upsilon\nu(x + yz)$, $\Phi_y = z\sigma\upsilon\nu(x + yz)$, $\Phi_z = y\sigma\upsilon\nu(x + yz)$, ὁπότε κατὰ τὸν τύπον (9.6) τὸ διαφορικὸν εἶναι: $d\Phi = \sigma\upsilon\nu(x+yz)dx + z\sigma\upsilon\nu(x+yz)dy + y\sigma\upsilon\nu(x+yz)dz$ καὶ εἰς τὴν δοθεῖσαν θέσιν: $d\Phi = 0{,}1 - 0{,}1 - 0{,}01 = -0{,}01$.

Παράδειγμα (9.2). — Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διαφορικὸν τῆς συνθέτου συναρτήσεως $\Phi = \eta\mu xy$ ὅταν $x = t^2$, $y = \sigma\upsilon\nu t$.

Λύσις. Ἔχομεν: $\Phi_x = y\sigma\upsilon\nu xy$, $\Phi_y = x\sigma\upsilon\nu xy$, $dx = 2t\,dt$, $dy = -\eta\mu t\, dt$, ὁπότε τὸ διαφορικὸν εἶναι: $d\Phi = y\sigma\upsilon\nu xy \cdot 2t\,dt - x\sigma\upsilon\nu xy\, \eta\mu t\, dt = (2yt - x\eta\mu t) \cdot \sigma\upsilon\nu xy \cdot dt$. Ὁ ἀναγνώστης δύναται νὰ ἐπαληθεύσῃ τὸ ἐξαγόμενον καὶ ἀπ' εὐθείας ἀντικαθιστῶντας εἰς τὴν συνάρτησιν τὰ x, y καὶ διαφορίζοντας τὴν προκύπτουσα συνάρτησιν τοῦ t.

Παράδειγμα (9.3).— Νά ύπολογισθῆ τό διαφορικόν τῆς συνθέτου συναρτήσεως $\Phi = x^2yz$ ὅταν $x = u+\upsilon$, $y = u-\upsilon$, $z = u\upsilon$ είς τήν θέσιν $u=\upsilon=1$ καί δι' αὐξήσεις $du=0,1$, $d\upsilon=-0,2$.
Λύσις. Ἔχομεν: $\Phi_x = 2xyz$, $\Phi_y = x^2z$, $\Phi_z = x^2y$, $dx = du + d\upsilon$, $dy = du - d\upsilon$, $dz = \upsilon du + u d\upsilon$, ὁπότε τό διαφορικόν εἶναι $d\Phi = 2xyz(du+d\upsilon) + x^2z(du-d\upsilon) + x^2y(\upsilon du + u d\upsilon) = \dots = 1,2$.

Παράδειγμα (9.4).— Νά ύπολογισθῆ τό ὁλικόν διαφορικόν δευτέρας τάξεως τῆς συνθέτου συναρτήσεως $\Phi = x^2y^2$, ὅταν $x = u^2$, $y = u+\upsilon^2$, είς τήν θέσιν $u=\upsilon=1$ καί δι' αὐξήσεις $du = d\upsilon = 0,1$.
Λύσις. Ἔχομεν: $\Phi_x = 2xy^2$, $\Phi_y = 2x^2y$, $\Phi_{xy} = 4xy$, $\Phi_{xx} = 2y^2$, $\Phi_{yy} = 2x^2$, $dx = 2udu$, $d^2x = 2du^2$, $dy = du + 2\upsilon d\upsilon$, $d^2y = 2d\upsilon^2$ καί αἱ ἀριθμητικές τιμές αὐτῶν είς τήν δοθεῖσαν θέσιν καί διά τίς δοθεῖσες αὐξήσεις εἶναι: $\Phi_x = 8$, $\Phi_y = 4$, $\Phi_{xy} = 8$, $\Phi_{xx} = 8$, $\Phi_{yy} = 2$, $dx = 0.2$, $dy = 0.3$, $d^2x = 0.02$, $d^2y = 0.02$. Δι' ἀντικαταστάσεως αὐτῶν είς τόν τύπον (9.7) προκύπτει: $d^2\Phi = 8.0,04 + 16.0,06 + 2.0,09 + 8.0,02 + 4.0,02 = 1,7$.

Παράδειγμα (9.5).— Ἐάν τό διαφορικόν τῆς συναρτήσεως $\Phi(x_1, \dots, x_\nu)$ εἶναι $d\Phi = A_1dx_1 + \dots + A_\nu dx_\nu$ ὅπου $A_i = A_i(x_1, \dots, x_\nu)$, νά ἀποδειχθῆ ὅτι θά εἶναι $A_i = \partial\Phi : \partial x_i$ $(i = 1, 2, \dots, \nu)$.
Λύσις. Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τόν τύπον (9.6) θά ἔχωμεν τήν ταυτότητα:

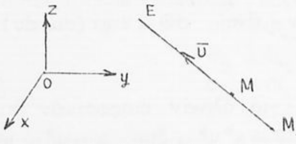
$$A_1dx_1 + \dots + A_\nu dx_\nu = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu}dx_\nu .$$

Ἐπειδή αὐτή ἰσχύει γιά κάθε σύστημα τιμῶν τῶν dx_i, ἐάν λάβωμεν $dx_1 \neq 0$, $dx_2 = dx_3 = \dots = dx_\nu = 0$, προκύπτει $A_1dx_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}dx_1$, δηλαδή $A_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}$ καί ὁμοίως ἐργαζόμενοι προκύπτει: $A_2 = \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}, \dots, A_\nu = \frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu}$.

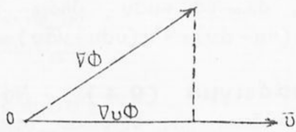
Παράδειγμα (9.6).— Ἐάν εἶναι $\Phi = \Phi(x_1, \dots, x_\nu)$ ὅπου x_i ἀνεξάρτητες μεταβλητές καί $d\Phi = 0$, νά δειχθῆ ὅτι ἡ Φ εἶναι σταθερά.
Λύσις. Θά εἶναι $d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu}dx_\nu = 0$ γιά κάθε σύστημα τιμῶν τῶν dx_i, ἐπομένως ἐάν λάβωμεν $dx_1 \neq 0$, $dx_2 = dx_3 = \dots = dx_\nu = 0$ προκύπτει $\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} = 0$ δηλαδή ἡ Φ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς μεταβλητῆς x_1. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως προκύπτει ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι ἀνεξάρτητος καί τῶν ἄλλων μεταβλητῶν, ἐπομένως εἶναι σταθερά.

10. Παράγωγος κατά κατεύθυνσιν.— Ἔστω συνάρτησις $\Phi(x, y, z)$ μέ συνεχεῖς μερικάς παραγώγους πρώτης τάξεως στήν γειτονιά τοῦ σημείου $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Ἐάν $M(x, y, z)$ εἶναι κάποιο σημεῖον τῆς ἡμιευθείας $\overrightarrow{M_0E}$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπό τό μοναδιαῖον διάνυσμα $\bar{\upsilon} = (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ καί $M_0M = \Delta S$ σχ. (10.1) θά εἶναι: $\overrightarrow{M_0M} = \bar{\upsilon}\Delta S = (\upsilon_1\Delta S, \upsilon_2\Delta S, \upsilon_3\Delta S)$, ἑπομένως διά τίς συντεταγμένες τοῦ σημείου Μ θά ἔχωμεν: $x = x_0 + \upsilon_1 \Delta S$, $y = y_0 + \upsilon_2 \Delta S$, $z = z_0 + \upsilon_3 \Delta S$ καί ἐξ αὐτῶν ἕπεται:

$$\Phi(M) - \Phi(M_0) = \Phi(x_0 + \upsilon_1 \Delta S,\ y_0 + \upsilon_2 \Delta S,\ z_0 + \upsilon_3 \Delta S) - \Phi(x_0, y_0, z_0) \qquad (1)$$



Σχ. (10.1)



Σχ. (10.2)

Ἐπειδή ἡ συνάρτησις ἔχει συνεχεῖς μερικάς παραγώγους θά εἶναι διαφορίσιμος ἐπομένως ἡ (1) γράφεται:

$$\Phi(M) - \Phi(M_0) = [\Phi_x(M_0) + \varepsilon_1]\upsilon_1 \Delta S + [\Phi_y(M_0) + \varepsilon_2]\upsilon_2 \Delta S + [\Phi_z(M_0) + \varepsilon_3]\upsilon_3 \Delta S \qquad (2)$$

ὅπου οἱ ποσότητες $\varepsilon_i \to 0$ ὅταν $\Delta S \to 0$ δηλαδή ὅταν $M \to M_0$. Διαιροῦντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς (2) μέ ΔS καί ὑποθέτοντες $M \to M_0$ προκύπτει ὁ τύπος:

$$\underset{M \to M_0}{\text{όρ}} [\Phi(M) - \Phi(M_0)] : MM_0 = \Phi_x(M_0) \cdot \upsilon_1 + \Phi_y(M_0) \cdot \upsilon_2 + \Phi_z(M_0) \cdot \upsilon_3 \qquad (10.1)$$

Τό ἀνωτέρω ὅριον τοῦ πηλίκου τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως πρός τήν ἀπόστασιν τῶν σημείων λέγεται παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\Phi(M)$ εἰς τό σημεῖον M_0 κατά τήν κατεύθυνσιν τοῦ διανύσματος $\bar{\upsilon}$, παριστάνεται μέ τό σύμβολον $\frac{\partial \Phi}{\partial \upsilon}$ ἤ μέ τό $\nabla_\upsilon \Phi$ καί δίδει ἕνα μέτρον διά τήν μεταβολήν τῆς συναρτήσεως κατά τήν κατεύθυνσιν τοῦ διανύσματος $\bar{\upsilon}$. Τό διάνυσμα (Φ_x, Φ_y, Φ_z) λέγεται κλίσις (gradien) τῆς συναρτήσεως $\Phi(x, y, z)$ καί παριστάνεται μέ τό σύμβολον gradΦ ἤ μέ τό $\nabla\Phi$, δηλαδή ἔχομεν:

$$\text{grad}\,\Phi = \nabla\Phi = (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z) \qquad (10.2)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι διά τήν παράγωγον τῆς Φ κατά τήν κατεύθυνσιν τοῦ $\bar{\upsilon}$ θά ἔχωμεν τόν τύπον:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \upsilon} = \bar{\upsilon} \cdot \text{grad}\,\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\upsilon_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\upsilon_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\upsilon_3 \qquad (10.3)$$

Ἀπό τόν τύπον αὐτόν ἕπεται ὅτι ἡ παράγωγος κατά κατεύθυνσιν ἰσοῦται μέ τό σχετικόν μέτρον τῆς προβολῆς τοῦ διανύσματος $\nabla\Phi$ ἐπί τό μοναδιαῖον διάνυσμα $\bar{\upsilon}$ σχ. (10.2) καί ὅτι αἱ παράγωγοι τῆς $\Phi(x, y, z)$ κατά τίς κατευθύνσεις τῶν βασικῶν διανυσμάτων $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ εἶναι αἱ μερικαί παράγωγοι τῆς συναρτήσεως ἀντιστοίχως ὡς πρός x, y, z.

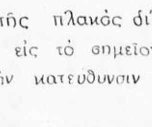
Τὰ ἀνωτέρω γενικεύονται εὐκόλως καὶ διὰ συναρτήσεις ν-μεταβλητῶν $\Phi(x_1,\dots,x_\nu)$, χρησιμοποιοῦντες δὲ ἀντίστοιχον συμβολισμὸν ἔχομεν τοὺς γενικοὺς τύπους :

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{grad}\Phi &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu}\right) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial \upsilon} &= \bar{\upsilon}\operatorname{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\cdot\upsilon_1+\dots+\frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu}\upsilon_\nu \end{aligned}} \tag{10.4}$$

Διὰ τὴν περίπτωσιν συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν $\Phi(x,y)$, οἱ ἀνωτέρω τύποι δίδουν :

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}\Phi &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial \upsilon} &= \bar{\upsilon}\operatorname{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\upsilon_1+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\upsilon_2 \end{aligned} \tag{10.5}$$

Παράδειγμα (10.1).— Ἡ θερμοκρασία T σὲ κάθε σημεῖον μιᾶς ὀρθογωνίου πλακὸς κειμένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y δίδεται ἀπὸ τὴν συνάρτησιν $T=x^2+y^2$. Νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ σημεῖον $M_0(1,5)$ ἡ κλίσις καὶ ἡ παράγωγος τῆς T κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ἡ ὁποία σχηματίζει μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x γωνίαν 30°.



Λύσις. Ἔχομεν $T_x=2x$, $T_y=2y$, $\bar{\upsilon}=(\text{συν}\,30^\circ,\ \text{ημ}\,30^\circ)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ καὶ εἰς τὸ σημεῖον M_0 εἶναι $T_x=2$, $T_y=10$, ἑπομένως κατὰ τοὺς τύπους (10.5) ἡ κλίσις εἶναι $\operatorname{grad}T=(2,10)$ καὶ ἡ παράγωγος $\frac{\partial T}{\partial \upsilon}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+10\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{3}+10$.

Παράδειγμα (10.2).— Ἡ πυκνότης δ μιᾶς λεπτῆς πλακὸς δίδεται ἀπὸ τὴν συνάρτησιν $\delta=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$. Νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ σημεῖον $M_0(1,1,1)$ ἡ κλίσις καὶ ἡ παράγωγος τῆς δ κατὰ τὴν κατευθυνσιν τοῦ διανύσματος $\overline{OM}_0$.

Λύσις. Ἔχομεν $\delta_x=-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$, $\delta_y=-y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$, $\delta_z=-z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$, $\bar{\upsilon}=\overline{OM}_0:OM_0=(1,1,1):\sqrt{3}$ καὶ εἰς τὸ σημεῖον M_0 εἶναι $\delta_x=\delta_y=\delta_z=-1:3\sqrt{3}$, ἑπομένως κατὰ τὸν τύπον (10.2) ἡ κλίσις εἶναι $\nabla\delta=-(1,1,1):3\sqrt{3}$ καὶ κατὰ τὸν τύπον (10.3) ἡ παράγωγος εἶναι $\frac{\partial\delta}{\partial\upsilon}=-(1:\sqrt{3})(1:3\sqrt{3})-(1:\sqrt{3})\cdot(1:3\sqrt{3})-(1:\sqrt{3})(1:3\sqrt{3})=-1:3$.

Παράδειγμα (10.3).— Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς παραγώγου κατὰ κατεύθυνσιν τῆς συναρτήσεως $\Phi(x,y,z)$ εἰς τὸ σημεῖον $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Λύσις. Κατὰ τὸν τύπον (10.3) ἡ μεγίστη τιμὴ προκύπτει ὅταν τὸ διάνυσμα $\bar{\upsilon}$ εἶναι ὁμόρροπον πρὸς τὴν κλίσιν $\operatorname{grad}\Phi$, δηλαδὴ ὅταν εἶναι :

$\upsilon_1 : \Phi_x = \upsilon_2 : \Phi_y = \upsilon_3 : \Phi_z$. Ἐξ αὐτῶν χρησιμοποιοῦντες γνωστὲς ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν θὰ ἔχωμεν: $\upsilon_1^2 : \Phi_x^2 = \upsilon_2^2 : \Phi_y^2 = \upsilon_3^2 : \Phi_y^2 = (\upsilon_1^2+\upsilon_2^2+\upsilon_3^2) : (\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) = (\mathrm{grad}\,\Phi)^{-2}$ καὶ $\upsilon_1\Phi_x : \Phi_x^2 = \upsilon_2\Phi_y : \Phi_y^2 = \upsilon_3\Phi_z : \Phi_z^2 = (\upsilon_1\Phi_x + \upsilon_2\Phi_y + \upsilon_3\Phi_z) : (\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) = \frac{\partial\Phi}{\partial\upsilon}\cdot(\mathrm{grad}\,\Phi)^{-2}$. Διὰ συγκρίσεως αὐτῶν προκύπτει: $(\mathrm{grad}\,\Phi)^{-2} = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial\upsilon}\cdot(\mathrm{grad}\,\Phi)^{-2}\right]^2$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\upsilon}\right) = (\mathrm{grad}\,\Phi)^2$ καὶ $\frac{\partial\Phi}{\partial\upsilon} = |\mathrm{grad}\,\Phi| = \sqrt{\Phi_x^2+\Phi_y^2+\Phi_z^2}$. Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ εἶναι ἀντίθετος τῆς μεγίστης.

Ἀσκήσεις.

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ μερικαὶ παράγωγοι πρώτης τάξεως τῶν συναρτήσεων:

31) $\Phi = x : (x^2 + y^2)$ 32) $\Phi = x\,\eta\mu\,xy$

33) $\Phi = (e^{x+2y} - y^2)^{1/2}$ 34) $\Phi = (x^2+y^2+2xy\,\sigma\upsilon\nu z)^{-\frac{1}{2}}$

35) $\Phi = \tau o\xi\eta\mu\,[x\cdot(z+y^2)^{-1}]$ 36) $\Phi = \tau o\xi\epsilon\varphi\,\sqrt{x+yz}$

37) $\Phi = x^2 + y\ln(1+x^2+y^2+z^2)$ 38) $\Phi = e^{x-y}\ln(x-y)$

39) $\Phi = \tau o\xi\epsilon\varphi\,(\ln xy)$ 40) $\Phi = \eta\mu^2(\ln xy^2)$

41) Ἐὰν εἶναι $\Phi = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + y^2z - yz^2 + z^3$ δείξατε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις: $x\Phi_x + y\Phi_y + z\Phi_z = 3\Phi$.

42) Ἐὰν εἶναι $\Phi = zx^{-1}\cdot\ln yx^{-1}$ δείξατε ὅτι $x\Phi_x + y\Phi_y + z\Phi_z = 0$.

43) » » $\Phi = e^{y:x}$ » » $x\Phi_x + y\Phi_y = 0$

44) » » $\Phi = (x+y) : xy$ » » $x\Phi_x + y\Phi_y = -\Phi$

45) » » $\Phi = z\cdot(x^2+y^2)^{-1/3}$ » » $3(x\Phi_x + y\Phi_y + z\Phi_z) = \Phi$

46) Νὰ εὑρεθῇ ἡ Φ_{xx} τῆς συναρτήσεως: $\Phi = \tau o\xi\eta\mu\,yx^{-1}$

47) » » » Φ_{yy} » » $\Phi = (x^2+y^2)\,\tau o\xi\epsilon\varphi\,yx^{-1}$

48) Ἐὰν εἶναι $\Phi = \eta\mu(x-y) + \ln(x+y)$ δείξατε ὅτι: $\Phi_{xx} = \Phi_{yy}$

49) » » $\Phi = \tau o\xi\epsilon\varphi\,(x+2y) + e^{x-2y}$ » » $\Phi_{yy} = 4\Phi_{xx}$

50) » » $\Phi = \sqrt{y+3x} - (y-3x)^2$ » » $\Phi_{xx} = 9\Phi_{yy}$

51) » » $\Phi = y\,\eta\mu x + x\,\sigma\upsilon\nu y$ ἐπαληθεύσατε ὅτι: $\Phi_{xxy} = \Phi_{xyx} = \Phi_{yxx}$.

52) » » $\Phi = \ln(x^2+y^2)$ δείξατε ὅτι: $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$

53) » » $\Phi = \tau o\xi\epsilon\varphi(xy : \sqrt{1+x^2+y^2})$ δείξατε ὅτι: $\Phi_{xxyy} = 15xy : (1+x^2+y^2)^{7/2}$

54) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι δευτέρας τάξεως τῆς συναρτήσεως: $\Phi = x^3y^2 + y^5$

55) Ὁμοίως διὰ τὴν συνάρτησιν: $\Phi = x\,\eta\mu y$

56) Ἐὰν εἶναι: $\Phi = x\,\tau o\xi\epsilon\varphi\,yx^{-1} + xe^{yx^{-1}}$ δείξατε ὅτι: $x^2\Phi_{xx} + 2xy\Phi_{xy} + y^2\Phi_{yy} = 0$

57) Ἐὰν εἶναι: $\Phi = 13x^2 - 10xy + 2y^2$ » » $\Phi_{xx} - 5\Phi_{xy} + 6\Phi_{yy} = 0$

58) » » $\Phi = x\,\tau o\xi\epsilon\varphi\,yx^{-1}$ » » $x^2\Phi_{xx} + 2xy\Phi_{xy} + y^2\Phi_{yy} = 0$

59) » » $\Phi = e^{a\vartheta}\sigma\upsilon\nu\,(a\ln\rho)$ » » $\Phi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\Phi_\rho + \frac{1}{\rho^2}\Phi_{\vartheta\vartheta} = 0$

60) » » $\Phi = y^2x^{-2} + y + \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ » » $x^2\Phi_{xx} + 2xy\Phi_{xy} + y^2\Phi_{yy} = x^2 + y^2$

61) » » $\Phi = x^4 + \eta\mu(x+y) - y\ln x$ » » $\Phi_{yxx} - 2\Phi_{yyx} + \Phi_{yyy} = x^{-2}$

62) » » $\Phi = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2)^{1-\frac{\nu}{2}}$ δείξατε ὅτι: $\Phi_{x_1^2} + \Phi_{x_2^2} + \cdots + \Phi_{x_\nu^2} = 0$.

63) Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό πλῆθος τῶν μερικῶν παραγώγων ν-τάξεως τῆς συναρτήσεως $\Phi(x, y, z)$ εἶναι $(\nu+1)(\nu+2):2$.

64) Ὑπολογίσατε κατά δύο τρόπους τήν παράγωγον ὡς πρός t τῆς συνθέτου συναρτήσεως $\Phi = e^x \eta\mu yz$ ὅταν εἶναι: $x = t^2$, $y = t-1$, $z = e^t$.

65) Ὁμοίως διά τήν $\Phi = xyz$ ὅταν εἶναι: $x = \alpha\sigma\upsilon\nu t$, $y = \alpha\eta\mu t$, $z = kt$

66) » » » $\Phi = e^x \sigma\upsilon\nu \frac{y}{2}$ » » $x = \sqrt{t:\pi}$, $y = 3t$ διά $t = \pi$.

67) » » » $\Phi = \ell n(y^2 - x^2)$ » » $x = \eta\mu t$, $y = \sigma\upsilon\nu t$ » $t = \frac{\pi}{8}$

68) Ὁμοίως διά τήν $\Phi = \tau o\xi\eta\mu\,(x^2 - y^2)$ ὅταν εἶναι $x = \sigma\upsilon\nu t^{-1}$, $y = \eta\mu t^{-1}$ διά $t = 1$.

69) Ὑπολογίσατε κατά δύο τρόπους τήν παράγωγον ὡς πρός x τῆς συναρτήσεως $\Phi = \tau o\xi\epsilon\varphi\, yx^{-1}$ ὅταν εἶναι $y = \sqrt{1-x^2}$.

70) Ὁμοίως διά τήν συνάρτησιν $\Phi = x^2 + y^2$ ὅταν εἶναι $y = \epsilon\varphi$.

71) » » » » $\Phi = xy^{-1} - yx^{-1}$, » » $y = \sqrt{4-x^2}$

72) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ μερικαί παράγωγοι πρώτης τάξεως ὡς πρός ρ, ϑ τῆς συνθέτου συναρτήσεως $\Phi = x^2 - 4y^2$ ὅταν $x = \rho\tau\epsilon\mu\vartheta$, $y = \rho\epsilon\varphi\vartheta$.

73) Ὁμοίως αἱ Φ_u, Φ_υ τῆς $\Phi = e^{xy}$ ὅταν $x = \ell n\sqrt{u^2+\upsilon^2}$, $y = \tau o\xi\epsilon\varphi u\upsilon^{-1}$.

74) Ὁμοίως αἱ μερικαί παράγωγοι Φ_x, Φ_y τῆς συναρτήσεως $\Phi = e^{u+\upsilon}$ ὅταν εἶναι: $u = x\epsilon\varphi y$, $\upsilon = y\sigma\upsilon\nu x$.

75) Ἐάν εἶναι $\Phi = \rho^2\sigma\upsilon\nu\vartheta$ καί $x = \rho\sigma\upsilon\nu\vartheta$, $y = \rho\eta\mu\vartheta$ ὑπολογίσατε τάς μερικάς παραγώγους Φ_x, Φ_y διά $\vartheta = \pi/4$, $\rho = 2$ καί ἐκφράσατε τάς μερικάς παραγώγους Φ_ρ, Φ_ϑ συναρτήσει τῶν Φ_x, Φ_ϑ.

76) Ὑπολογίσατε κατά δύο τρόπους τάς μερικάς παραγώγους Φ_ρ, Φ_ϑ τῆς συναρτήσεως: $\Phi = x^2 + xy$ ὅταν εἶναι: $x = \rho\sigma\upsilon\nu\vartheta$, $y = \rho\eta\mu\vartheta$.

77) Ὁμοίως τάς μερικάς παραγώγους Φ_x, Φ_y τῆς συναρτήσεως $\Phi = u\ell n\upsilon + \upsilon^2 w$ ὅταν εἶναι: $u = xy^{-1}$, $\upsilon = x^2 - y$, $w = y\epsilon\varphi x$.

78) Ὁμοίως τάς μερικάς παραγώγους Φ_x, Φ_y τῆς συναρτήσεως $\Phi = \eta\mu u + \upsilon e^u$ ὅταν εἶναι: $u = x^2 + 3y^2$, $\upsilon = x\ell ny$.

79) Ἐάν εἶναι $\Phi = \Psi(u, \upsilon, w)$ καί $u = y\zeta - z\eta$, $\upsilon = z\xi - x\zeta$, $w = x\eta - y\xi$ δείξατε ὅτι: $x\Phi_\xi + y\Phi_\eta + z\Phi_\zeta = 0$, $\xi\Phi_x + \eta\Phi_y + \zeta\Phi_z = 0$.

80) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ μερικαί παράγωγοι Φ_x, Φ_y τῆς συνθέτου συναρτήσεως $\Phi = e^{u+\upsilon+w}$ ὅταν εἶναι: $u = x^2\eta\mu^2 y$, $\upsilon = 2xy\,\eta\mu x\eta\mu y$, $w = y^2$.

81) Νά ὑπολογισθῆ ἡ δευτέρα παράγωγος ὡς πρός t τῆς συνθέτου συναρτήσεως $\Phi = xyz^2$ ὅταν εἶναι $x = \eta\mu t$, $y = \sigma\upsilon\nu t$, $z = t^2 + 1$.

82) Ὁμοίως διά τήν σύνθετον συνάρτησιν $\Phi = u + \upsilon\sigma\upsilon\nu w$ ὅταν εἶναι: $u = t^2$, $\upsilon = e^t$, $w = \eta\mu t$.

83) Νά ὑπολογισθῆ κατά δύο τρόπους ἡ δευτέρα παράγωγος ὡς πρός x τῆς συνθέτου συναρτήσεως $\Phi = \eta\mu xy$ ὅταν εἶναι $y = \sigma\upsilon\nu x$.

84) Ὁμοίως διά τήν σύνθετον συνάρτησιν $\Phi = \eta\mu(x + y^2 + z^3)$ ὅταν εἶναι $y = e^x$, $z = \ell nx$.

85) Νά εὑρεθοῦν αἱ μερικαί παράγωγοι πρώτης καί δευτέρας τάξεως τῆς συναρτήσεως $\Phi = \eta\mu(1 + x^2 + y^2)$.

86) Ἐάν εἶναι: $\Phi = \Phi(x, y)$ καί $x = \ln\sqrt{u^2+v^2}$, $\varepsilon\varphi y = vu^{-1}$ νά δειχθῇ ὅτι: $\Phi_x^2 + \Phi_y^2 = (u^2+v^2)(\Phi_u^2 + \Phi_v^2)$, $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = (u^2+v^2)(\Phi_{uu} + \Phi_{vv})$.

87) Ἐάν εἶναι: $\Phi = \Phi(x, y)$ καί $u = \alpha + \gamma x + \delta y$, $v = \beta - \delta x + \gamma y$ νά δειχθῇ ὅτι: $\Phi_{uu}\Phi_{vv} - \Phi_{uv}^2 = \Phi_{xx}\cdot\Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2$

88) Ἐάν εἶναι: $\Phi = \varepsilon\varphi(y+\kappa x) + (y-\kappa x)^{3/2}$ νά δειχθῇ ὅτι: $\Phi_{xx} = \kappa^2\Phi_{yy}$.

89) » » $\Phi = \sigma_1(x+iy) + \sigma_2(x-iy)$ » » » $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$

90) » » $\Phi = \Phi(x, y)$ καί $x = \rho\sigma\upsilon\nu\vartheta$, $y = \rho\eta\mu\vartheta$ νά δειχθῇ ὅτι: $\Phi_x^2 + \Phi_y^2 = \Phi_\rho^2 + \rho^{-2}\cdot\Phi_\vartheta^2$, $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = \Phi_{\rho\rho} + \rho^{-1}\cdot\Phi_\rho + \rho^{-2}\cdot\Phi_{\vartheta\vartheta}$.

91) Ἐάν εἶναι: $\Phi = \Phi(x, y, z)$ καί $x = \rho\sigma\upsilon\nu\vartheta\sigma\upsilon\nu\omega$, $y = \rho\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\omega$, $z = \rho\eta\mu\omega$ νά δειχθῇ ὅτι: $\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2 = \Phi_\rho^2 + \rho^{-2}\cdot\Phi_\omega^2 + \rho^{-2}\cdot\sigma\upsilon\nu^{-2}\omega\cdot\Phi_\vartheta^2$, $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = \Phi_{\rho\rho} + \rho^{-2}\cdot\Phi_{\omega\omega} + \rho^{-2}\sigma\upsilon\nu^{-2}\omega\cdot\Phi_{\vartheta\vartheta} + 2\rho^{-1}\Phi_\rho + \rho^{-2}\varepsilon\varphi\omega\cdot\Phi_\omega$

92) Ἐάν εἶναι: $\Phi = \Phi(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ καί $x_u = y_v$, $x_v = -y_u$ νά δειχθῇ ὅτι: $\Phi_{uu} + \Phi_{vv} = (\Phi_{xx} + \Phi_{yy})(x_u^2 + x_v^2)$.

93) Ἐάν ἡ συνάρτησις $\Phi(x, y)$ ἐπαληθεύῃ τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$ νά δειχθῇ ὅτι τό αὐτό θά συμβαίνῃ καί διά τήν συνάρτησιν $\Phi(u, v)$ ὅταν $u = x:(x^2+y^2)$, $v = y:(x^2+y^2)$.

94) Ἐάν ἡ συνάρτησις $\Phi(x, y, z)$ ἐπαληθεύῃ τήν ἐξίσωσιν: $x\Phi_x + y\Phi_y + z\Phi_z = \nu\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὐτή διά τοῦ μετασχηματισμοῦ: $\xi = xz^{-1}$, $\eta = yz^{-1}$, $\zeta = z$ γίνεται $\zeta\cdot\Phi_\zeta = \nu\Phi$ καί ἐξ αὐτῆς συμπεράνατε ὅτι $\Phi = z^\nu\sigma(xz^{-1}, yz^{-1})$.

95) Ἐάν εἶναι $\Phi = \Phi(\rho)$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ καί $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0$ δείξατε ὅτι: $\Phi = \alpha\rho^{-1} + \beta$ ὅπου α, β σταθερές.

Νά εὑρεθῇ διά τάς σημειουμένας ἀντιστοίχως τιμάς τό διαφορικόν τῶν συναρτήσεων:

96) $\Phi = x^3 - xy + y^2$ διά $x = 1$, $y = -1$, $dx = -1$, $dy = 2$

97) $\Phi = \varepsilon\varphi(x+y)$ » $x = \pi/6$, $y = \pi/12$, $dx = \pi/24$, $dy = \pi/24$

98) $\Phi = \eta\mu^2(x-y)$ » $x = \pi/3$, $y = \pi/12$, $dx = \pi/6$, $dy = \pi/4$

99) $\Phi = \tau o\xi\varepsilon\varphi(y^2x^{-1})$ » $x = 2$, $y = 2$, $dx = 7$, $dy = 1$

100) $\Phi = \sqrt{x+y+z}$ » $x = 1$, $y = 2$, $z = 6$, $dx = 4$, $dy = 5$, $dz = -2$.

101) $\Phi = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ » $x = 0$, $y = 3$, $z = 4$, $dx = -6$, $dy = 0$, $dz = 2$.

Νά εὑρεθῇ τό διαφορικόν τῶν κάτωθι συναρτήσεων καί νά συγκριθῇ μέ τήν ἀντίστοιχον αὔξησιν αὐτῆς:

102) $\Phi = x^3 - x^2y + 2xy^2 + y^3$ διά $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta y = -0.001$

103) $\Phi = \ln(xy^{-1} - yx^{-1})$ » $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = 0.02$, $\Delta y = 0.01$.

104) $\Phi = e^{xy}\cdot\tau o\xi\eta\mu x$ » $x = 0$, $y = 1$, $\Delta x = 0.02$, $\Delta y = 0.1$.

105) $\Phi = xy\ln xy$ » $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0.02$, $\Delta y = 0.01$

106) $\Phi = (x+y)^{-1}\cdot\eta\mu[\pi\cdot(y-x)^{-1}]$ » $x = 1$, $y = 3$, $\Delta x = 0.02$, $\Delta y = 0.02$

Νά εὑρεθῇ τό διαφορικόν τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

107) $\Phi = xye^{x+2y}$

108) $\Phi = (x^2+y^2)^{-2}$

109) $\Phi = (x+a)^\nu\cdot(y+\beta)^\mu$

110) $\Phi = \tau o\xi\tau\varepsilon\mu\, xyz^{-1}$

111) $\Phi = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + \tau o\xi\varepsilon\varphi\, xz^{-1} + z^2:2$

112) $\Phi = \ln[(y+\sqrt{x^2-z^2}):(y-\sqrt{x^2-z^2})]$

Νά εὑρεθῇ τό διαφορικόν τῶν ἑπομένων συναρτήσεων ὅταν $x = dx$, $y = dy$, $z = dz$, $t = dt$:

113) $\Phi = (x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$

114) $\Phi = (\sqrt{x}+\sqrt{y}):(x+y)$

115) $\Phi = x^2 y : (a^2 - z^2)$ 116) $\Phi = xyz\omega : (x+y+z+\omega)$

117) Ἡ πυκνότης λεπτῆς πλακός κειμένης ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y εἰς ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς δίδεται ὑπό τῆς συναρτήσεως: $\delta = (x^2+y^2+1)^{-\frac{1}{2}}$. Νά εὑρεθῇ ἡ παράγωγος αὐτῆς εἰς τό σημεῖον $(2, 1)$ κατά κατεύθυνσιν σχηματίζουσα γωνίαν 60° μετά τοῦ ἄξονος τῶν x καθώς καί ἡ κατεύθυνσις κατά τήν ὁποίαν ἡ παράγωγος εἰς τό σημεῖον αὐτό λαμβάνει μεγίστην τιμήν.

118) Ὁμοίως διά τό ἠλεκτρικόν δυναμικόν $V = \sqrt{x^2+y^2}$ εἰς τό σημεῖον $(3,4)$ κατά κατεύθυνσιν σχηματίζουσα γωνίαν 30°.

119) Διά τήν συνάρτησιν: $y = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ νά εὑρεθῇ ἡ παράγωγος εἰς τό σημεῖον $M_0(x_0, y_0)$ κατά τήν κατεύθυνσιν τοῦ διανύσματος $\overline{M_0 O}$, καθώς καί διά κατεύθυνσιν κάθετον ἐπί αὐτήν.

120) Ἡ θερμοκρασία σέ κάθε σημεῖον τοῦ χώρου δίδεται ἀπό τήν συνάρτησιν $T = xy + yz + zx$. Νά εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς T εἰς τό σημεῖον $(1, 1, 1)$ κατά τήν κατεύθυνσιν τοῦ διανύσματος $(3, 0, -4)$, καθώς καί ἡ κατεύθυνσις κατά τήν ὁποίαν ἡ παράγωγος εἰς τό σημεῖον αὐτό λαμβάνει μεγίστην τιμήν.

121) Νά εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως: $\Phi = x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}$ εἰς τό σημεῖον $(1, -1, 1)$ κατά τήν κατεύθυνσιν τῆς κλίσεως τῆς συναρτήσεως $\sigma = xy - z^2$ εἰς τό σημεῖον $(-1, 0, 2)$.

122) Ἐάν $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ εἶναι δύο ἴσα μοναδιαῖα διανύσματα ἐφηρμοσμένα ἀντιστοίχως εἰς τά σημεῖα A, B νά δειχθῇ ὅτι: $\partial|AB| : \partial a + \partial|AB| : \partial\beta = 0$.

Ἀνάπτυγμα συναρτήσεως κατά Taylor.

11. Τύπος Taylor καί Maclaurin. — Ἔστω συνάρτησις $\Phi(x, y)$ μέ συνεχεῖς μερικάς παραγώγους μέχρι καί τῆς $(\nu+1)$-τάξεως εἰς τήν γειτονιά τοῦ σημείου (α, β). Ἐάν θέσωμεν:

$$\sigma(t) = \Phi(\alpha+th, \beta+tk) = \Phi(x, y)$$

καί ἀναπτύξωμεν τήν συνάρτησιν $\sigma(t)$ κατά Maclaurin θά ἔχωμεν:

$$\sigma(t) = \sigma(0) + \frac{t}{1!}\sigma'(0) + \frac{t^2}{2!}\sigma''(0) + \cdots + \frac{t^\nu}{\nu!}\sigma^{(\nu)}(0) + \frac{t^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\sigma^{(\nu+1)}(\vartheta t), \qquad 0<\vartheta<1$$

$$\sigma(1) = \sigma(0) + \frac{1}{1!}\sigma'(0) + \frac{1}{2!}\sigma''(0) + \cdots + \frac{1}{\nu!}\sigma^{(\nu)}(0) + \frac{1}{(\nu+1)!}\sigma^{(\nu+1)}(\vartheta) \qquad (1)$$

Ἡ συνάρτησις $\Phi(x, y)$ δύναται νά θεωρηθῇ ὡς σύνθετος συνάρτησις τῆς t διά μέσου τῶν μεταβλητῶν: $x = \alpha + th$, $y = \beta + tk$, ἑπομένως ἐάν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι αἱ παράγωγοι δευτέρας τάξεως καί ἄνω τῶν x, y ὡς πρός t εἶναι μηδέν, τότε αἱ παράγωγοι τῆς $\sigma(t)$ θά εἶναι:

$$\sigma'(t) = \dot{x}\Phi_x + \dot{y}\Phi_y = h\Phi_x + k\Phi_y = d\Phi(x, y)$$

$$\sigma''(t) = (\dot{x}\Phi_x + \dot{y}\Phi_y)^2 = (h\Phi_x + k\Phi_y)^2 = d^2\Phi(x, y)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma^{(\nu+1)}(t) = (\dot{x}\Phi_x + \dot{y}\Phi_y)^{\nu+1} = (h\Phi_x + k\Phi_y)^{\nu+1} = d^{\nu+1}\Phi(x, y)$$

Θέτοντες εἰς αὐτάς $t=0$ ἐκτός τῆς τελευταίας εἰς τὴν ὁποίαν θέτομεν $t=\vartheta$ προκύπτουν οἱ σχέσεις :

$$\begin{aligned} \sigma'(0) &= h\Phi_x(a,\beta)+k\Phi_y(a,\beta)=d\Phi(a,\beta) \\ \sigma''(0) &= \left[h\Phi_x(a,\beta)+k\Phi_y(a,\beta)\right]^2=h^2\Phi_{xx}+2hk\Phi_{xy}+k^2\Phi_{yy}=d^2\Phi(a,\beta) \qquad (11.1) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \sigma^{(\nu+1)}(\vartheta) &= \left[h\Phi_x(a+\vartheta h,\beta+\vartheta k)+k\Phi_y(a+\vartheta h,\beta+\vartheta k)\right]^{\nu+1}=d^{\nu+1}\Phi(a+\vartheta h,\beta+\vartheta k) \end{aligned}$$

Ἐάν τώρα τὶς ἀνωτέρω τιμὲς τῶν παραγώγων ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸ ἀνάπτυγμα (1) προκύπτει ὁ τύπος :

$$\Phi(a+h,\beta+k)=\Phi(a,\beta)+\frac{1}{1!}d\Phi(a,\beta)+\frac{1}{2!}d^2\Phi(a,\beta)+\cdots+\frac{1}{\nu!}d^\nu\Phi(a,\beta)+\frac{1}{\nu+1}d^{\nu+1}\Phi(a+\vartheta h,\beta+\vartheta k) \quad (11.2)$$

ὁ ὁποῖος δύναται νά γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\Phi(a+h,\beta+k)=\Phi(a,\beta)+\sum_{\lambda=1}^{\nu}\frac{1}{\lambda!}\left[h\Phi_x(a,\beta)+k\Phi_y(a,\beta)\right]^\lambda+\frac{1}{(\nu+1)!}\left[h\Phi_x(a+\vartheta h,\beta+\vartheta k)+k\Phi_y(a+\vartheta h,\beta+\vartheta k)\right]^{\nu+1} \quad (11.3)$$

Ὁ τύπος αὐτός λέγεται τύπος τοῦ Taylor ἢ ἀνάπτυγμα κατά Taylor τῆς συναρτήσεως $\Phi(x,y)$ στὴν γειτονιά τοῦ σημείου (a,β). Ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος λέγεται συμπληρωματικός ὅρος ἢ ὑπόλοιπον καὶ θά τόν παριστάνωμεν μέ τό σύμβολον $R_{\nu+1}$, παρατηροῦμεν δέ ὅτι ὁ ὅρος αὐτός ἰσοῦται μέ τό σφάλμα τό ὁποῖον γίνεται ὅταν λάβωμεν ὡς τιμὴν τῆς συναρτήσεως εἰς τό σημεῖον $(a+h,\beta+k)$ τό ἄθροισμα τῶν $\nu+1$ - πρώτων ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος.
Συνήθως τό γειτονικόν σημεῖον $(a+h,\beta+k)$ παριστάνομεν μέ (x,y) καὶ τό σημεῖον $(a+\vartheta h,\beta+\vartheta k)$ διά συντομίαν μέ (ξ,η), ὁπότε εἶναι $h=x-a$, $k=y-\beta$ καὶ τό ἀνάπτυγμα (11.3) λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\Phi(x,y)=\Phi(a,\beta)+\sum_{\lambda=1}^{\nu}\frac{1}{\lambda!}\left[(x-a)\Phi_x(a,\beta)+(y-\beta)\Phi_y(a,\beta)\right]^\lambda+\frac{1}{(\nu+1)!}\left[(x-a)\Phi_x(\xi,\eta)+(y-\beta)\Phi_y(\xi,\eta)\right]^{\nu+1} \quad (11.4)$$

Ἀπό τόν τύπον αὐτόν ἕπεται ὅτι ἐάν παραλείψωμεν τόν συμπληρωματικόν ὅρον, ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y)$ ἰσοῦται κατά προσέγγισιν μέ ἕνα πολυώνυμον ἐν γένει ν - βαθμοῦ ὡς πρός τὶς αὐξήσεις $x-a$, $y-\beta$.
Ἐάν εἰς τό ἀνάπτυγμα (11.4) θέσωμεν $a=\beta=0$ προκύπτει ὁ τύπος :

$$\Phi(x,y)=\Phi(0,0)+\sum_{\lambda=1}^{\nu}\frac{1}{\lambda!}\left[x\Phi_x(0,0)+y\Phi_y(0,0)\right]^\lambda+\frac{1}{(\nu+1)!}\left[x\Phi_x(\vartheta x,\vartheta y)+y\Phi_y(\vartheta x,\vartheta y)\right]^{\nu+1} \quad (11.5)$$

ὁ ὁποῖος λέγεται τύπος τοῦ Maclaurin ἢ ἀνάπτυγμα κατά Maclaurin τῆς $\Phi(x,$
Ἐάν χρησιμοποιήσωμεν τό ἀνάπτυγμα (11.3) μέ $\nu=0$ προκύπτει ὁ τύπος :

$$\Phi(a+h,\beta+k)=\Phi(a,\beta)+h\Phi_x(a+\vartheta h,\beta+\vartheta k)+k\Phi_y(a+\vartheta h,\beta+\vartheta k) \quad (11.6)$$

ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς διὰ συνάρτησιν δύο μεταβλητῶν.

Τὰ ἀνωτέρω ἀναπτύγματα γενικεύονται κατὰ τρόπον προφανῆ διὰ συναρτήσεις ὁσωνδήποτε μεταβλητῶν. Π.χ. τὸ ἀνάπτυγμα κατὰ Maclaurin διὰ συνάρτησιν τριῶν μεταβλητῶν $\Phi(x,y,z)$ ἔχει τὴν μορφήν:

$$\Phi(x,y,z)=\Phi(0,0,0)+\sum_{\lambda=1}^{\nu}\frac{1}{\lambda!}\left[x\Phi_x(0,0,0)+y\Phi_y(0,0,0)+z\Phi_z(0,0,0)\right]^{\lambda}+R_{\nu+1} \qquad (11.7)$$

Ἐὰν λοιπὸν γενικῶς $\Phi(M)$ εἶναι μία συνάρτησις ὁσωνδήποτε μεταβλητῶν θὰ ἔχωμεν τὸ ἑξῆς γενικὸν ἀνάπτυγμα εἰς τὴν γειτονιὰν τοῦ σημείου M_0:

$$\boxed{\Phi(M)=\Phi(M_0)+\frac{1}{1!}d\Phi(M_0)+\frac{1}{2!}d^2\Phi(M_0)+\dots+\frac{1}{\nu!}d^{\nu}\Phi(M_0)+\frac{1}{(\nu+1)!}d^{\nu+1}\Phi(P)} \qquad (11.8)$$

Τὰ διαφορικὰ εἰς τὸ δεύτερον μέλος λαμβάνονται δι' αὐξήσεις ἀντιστοίχως ἴσας μὲ τὰς διαφορὰς τῶν ὁμονύμων συντεταγμένων τῶν σημείων M, M_0 εἶναι δὲ P κάποιο σημεῖον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος MM_0.

Παράδειγμα (11.1). — Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\eta\mu\frac{x-\pi}{y+4}=-1:\sqrt{2}+x:\sqrt{2}+\pi y:16\sqrt{2}-x^2:2\sqrt{2}+\pi xy:16\sqrt{2}-y^2\cdot(\pi:64\sqrt{2}-\pi^2:512\sqrt{2})+\cdots$$

Λύσις. Ἐπειδὴ εἰς τὸ δεύτερον μέλος ἐμφανίζονται δυνάμεις τῶν x, y θὰ ἀναπτύξωμεν τὴν συνάρτησιν $\Phi=\eta\mu\frac{x-\pi}{y+4}$ κατὰ Maclaurin. Θέτομεν διὰ συντομίαν $\omega=(x-\pi):(y+4)$ καὶ παραγωγίζομεν: $\Phi_x=\sigma\upsilon\nu\omega$, $\Phi_y=-(x-\pi)(y+4)^{2}\sigma\upsilon\nu\omega$, $\Phi_{xx}=-\eta\mu\omega$, $\Phi_{xy}=(x-\pi)(y+4)^{-2}\eta\mu\omega$, $\Phi_{yy}=2(x-\pi)(y+4)^{-3}\sigma\upsilon\nu\omega-(x-\pi)^2(y+4)^{-4}\eta\mu\omega$.
Αἱ τιμαὶ τῶν παραγώγων αὐτῶν εἰς τὸ σημεῖον $(0,0)$ εἶναι: $\Phi_x=1:\sqrt{2}$, $\Phi_y=\pi:16\sqrt{2}$, $\Phi_{xx}=-1:\sqrt{2}$, $\Phi_{xy}=\pi:16\sqrt{2}$, $\Phi_{yy}=-\pi:32\sqrt{2}-\pi^2:256\sqrt{2}$. Ἐὰν τώρα χρησιμοποιήσωμεν τὸν τύπον (11.5) μὲ $\nu=2$ παραλείποντες τὸν συμπληρωματικὸν ὅρον θὰ ἔχωμεν τὸ ζητούμενον.

Παράδειγμα (11.2). — Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς συναρτήσεως $\Phi=x^2+y^2+z^2$ στὴν γειτονιὰ τῆς θέσεως $(1,1,1)$ κατὰ τὶς δυνάμεις τῶν αὐξήσεων h, k, ℓ.

Λύσις. Διὰ παραγωγίσεως τῆς δοθείσης συναρτήσεως προκύπτει:

$$\Phi_x=2x,\ \Phi_y=2y,\ \Phi_z=2z,\ \Phi_{xx}=\Phi_{yy}=\Phi_{zz}=2,\ \Phi_{xy}=\Phi_{yz}=\Phi_{zx}=0$$

καὶ αἱ παράγωγοι τρίτης καὶ ἀνωτέρας τάξεως εἶναι μηδέν, ἑπομένως θὰ ἔχωμεν.

$$\Phi(1+h,1+k,1+\ell)=\Phi(1,1,1)+d\Phi+\frac{1}{2}d^2\Phi=3+2(h+k+\ell)+h^2+k^2+\ell^2.$$

Παράδειγμα (11.3). — Νὰ ἀναπτυχθῇ κατὰ Taylor ἡ συνάρτησις $\Phi=\tau o\xi\varepsilon\varphi\, yx^{-1}$ στὴν γειτονιὰ τοῦ σημείου $(1,1)$ κατὰ τὶς δυνάμεις τῶν διαφορῶν $x-1$, $y-1$ δίδοντες τοὺς ὅρους μέχρι καὶ $\nu=2$.

Λύσις. Διὰ παραγωγίσεως τῆς δοθείσης συναρτήσεως προκύπτει: $\Phi_x=-y:(x^2+y^2)$, $\Phi_{xx}=2xy:(x^2+y^2)^2$, $\Phi_y=x:(x^2+y^2)$, $\Phi_{yy}=-2xy:(x^2+y^2)$. $\Phi_{xy}=$

$= (y^2-x^2):(x^2+y^2)^2$ καὶ αἱ τιμαὶ αὐτῶν εἰς τὸ σημεῖον (1,1) εἶναι $\Phi_x =$
$= -0.5$, $\Phi_{xx} = 0.5$, $\Phi_y = 0.5$, $\Phi_{yy} = -0.5$, $\Phi_{xy} = 0$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (11.4) θὰ ἔχωμεν:

$$\text{τοξεφ}\, y x^{-1} = 0.25\pi - 0.5(x-1) + 0.5(y-1) + 0.25(x-1)^2 - 0.25(y-1)^2$$

Παράδειγμα (11.4).— Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι:

$$e^x \text{ημ} y = y + xy + \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{6}y^3 + \dots$$

Λύσις. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $\Phi = e^x \text{ημ} y$ τὴν ὁποίαν παραγωγίζομεν $\Phi_x = e^x \text{ημ} y$, $\Phi_y = e^x \text{συν} y$, $\Phi_{xx} = e^x \text{ημ} y$, $\Phi_{yy} = -e^x \text{ημ} y$, $\Phi_{xy} = e^x \text{συν} y$, $\Phi_{xxx} =$
$= e^x \text{ημ} y$, $\Phi_{xxy} = e^x \text{συν} y$, $\Phi_{xyy} = -e^x \text{ημ} y$, $\Phi_{yyy} = -e^x \text{συν} y$. Αἱ τιμαὶ αὐτῶν εἰς τὴν ἀρχὴν (0,0) εἶναι: $\Phi_x = \Phi_{xx} = \Phi_{yy} = \Phi_{xxx} = \Phi_{xyy} = 0$, $\Phi_y = \Phi_{xy} = \Phi_{xxy} =$
$= -\Phi_{yyy} = 1$, ἑπομένως ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (11.5) προκύπτει
$e^x \text{ημ} y = 0 + (x.0 + y.1) + \frac{1}{2}(x^2.0 + 2xy.1 + y^2.0) + \frac{1}{6}(x^3.0 + 3x^2y.1 + 3xy^2.0 - y^3) + \dots =$
$= y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3 + \dots$

Παράδειγμα (11.5).— Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἂν αἱ μερικαὶ παράγωγοι πρώτης τάξεως τῆς συναρτήσεως $\Phi(M)$ εἶναι μηδὲν ἐπὶ ἑνὸς χωρίου, ἡ συνάρτησις ἔχει σταθερὴν τιμὴν ἐπ' αὐτοῦ.

Λύσις. Ἐὰν $M_1 M_0$ εἶναι δύο οἱαδήποτε σημεῖα τοῦ χωρίου, ἀπὸ τὸν τύπον (11.8) διὰ $\nu = 0$ θὰ ἔχωμεν: $\Phi(M) = \Phi(M_0) + d\Phi(P)$ καὶ ἐπειδὴ αἱ μερικαὶ παράγωγοι εἶναι μηδὲν θὰ εἶναι $d\Phi(P) = 0$, ἑπομένως $\Phi(M) = \Phi(M_0)$ δηλαδὴ ἡ συνάρτησις ἔχει σταθερὴν τιμήν.

Παράδειγμα (11.6).— Τὸ εἰδικὸν βάρος s ἑνὸς κυλινδρικοῦ δοχείου βάρους B μὲ διάμετρον βάσεως d καὶ ὕψος ℓ δίδεται ὡς γνωστὸν ἀπὸ τὸν τύπον: $s = B : \frac{1}{4}\pi d^2 \ell$. Ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν μερικοὶ ἐκ τῶν πρώτων ὅρων τῆς μεταβολῆς Δs, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ διὰ μεταβολὰς τῶν B, d, ℓ ἀντιστοίχως κατὰ β, δ, λ.

Λύσις. Ἀναπτύσσομεν τὴν συνάρτησιν $s = s(B, d, \ell)$ κατὰ Taylor ὁπότε θὰ ἔχωμεν περιοριζόμενοι εἰς τοὺς δύο πρώτους ὅρους:

$$s(B+\beta, d+\delta, \ell+\lambda) = s(B, d, \ell) + \beta s_B + \delta s_d + \lambda s_\ell + \dots$$

Διὰ παραγωγίσεως τῆς s προκύπτει: $s_B = 1 : \frac{1}{4}\pi d^2 \ell$, $s_d = -B : \frac{1}{2}\pi d^3 \ell$, $s_\ell = -B : \frac{1}{4}\pi d^2 \ell^2$. Ἀντικαθιστῶντες αὐτὰς εἰς τὸ ἀνάπτυγμα προκύπτει:

$$\Delta s = (\beta : B - 2\delta : d - \lambda : \ell + \dots) s$$

Παράδειγμα (11.7).— Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κλάσμα $(a+h):(\beta+\kappa)$ δύναται ν' ἀντικατασταθῇ προσεγγιστικῶς ὑπὸ τῆς παραστάσεως: $(1 + h : a -$
$- \kappa : \beta - h\kappa : a\beta + \kappa^2 : \beta^2)\, a : \beta$ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ h, κ εἶναι ἀρκετὰ μικροὶ ἐν σχέσει μὲ τοὺς a, β.

Λύσις. Θὰ ἀναπτύξωμεν κατὰ Taylor τὴν συνάρτησιν $\Phi = x : y$ εἰς τὴν γειτονιὰ τοῦ σημείου (a, β) περιοριζόμενοι στοὺς ὅρους μέχρι καὶ $\nu = 2$ χωρὶς τὸ ὑπόλοιπον. Διὰ παραγωγίσεως προκύπτει: $\Phi_x = 1 : y$, $\Phi_y = -x : y^2$,

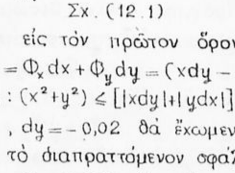
$\Phi_{xx}=0$, $\Phi_{xy}=-1:y^2$, $\Phi_{yy}=2x:y^3$ καὶ αἱ τιμαὶ αὐτῶν εἰς τὸ σημεῖον (α,β) εἶναι : $\Phi_x=1:\beta$, $\Phi_y=-\alpha:\beta^2$, $\Phi_{xx}=0$, $\Phi_{xy}=-1:\beta^2$, $\Phi_{yy}=2\alpha:\beta^3$. Ἀντικαθιστῶντες αὐτὰς εἰς τὸν τύπον (11.3) προκύπτει: $(\alpha+h):(\beta+\kappa)=\alpha:\beta+h:\beta-\kappa\alpha:\beta^2+\frac{1}{2}(h^2\cdot 0-2h\kappa:\beta^2+\kappa^2\cdot 2\alpha:\beta^3)+\cdots\approx(1+h:\alpha-\kappa:\beta-h\kappa:\alpha\beta+\kappa^2:\beta^2)\cdot\alpha:\beta$

12. Ἐκτίμησις σφαλμάτων.— Μία συνήθης ἐφαρμογὴ τῶν ἀναπτυγμάτων κατὰ Taylor γίνεται εἰς τὸν προσεγγιστικὸν ὑπολογισμὸν τῶν σφαλμάτων. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἕνα μέγεθος Φ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὶς τιμὲς ν- ἄλλων μεγεθῶν $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ δηλαδὴ ἔστω $\Phi=\Phi(x_1,\ldots,x_\nu)$. Ἐὰν κατὰ τὴν ἐκτίμησιν τῆς τιμῆς x_i γίνεται σφᾶλμα dx_i $(i=1,2,\ldots,\nu)$, τότε κατὰ τὴν ἐκτίμησιν τῆς Φ γίνεται σφᾶλμα : $\Delta\Phi=\Phi(x_1+dx_1,\ldots,x_\nu+dx_\nu)-\Phi(x_1,\ldots,x_\nu)$ τὸ ὁποῖον κατὰ τὸν τύπον (11.8) δύναται νὰ γραφῆ :

$$\Delta\Phi=\frac{1}{1!}d\Phi+\frac{1}{2!}d^2\Phi+\cdots+\frac{1}{\nu!}d^\nu\Phi+R_{\nu+1} \qquad (12.1)$$

Δυνάμεθα λοιπὸν ἀπὸ τὸν τύπον αὐτὸν νὰ προσδιορίσωμεν προσεγγιστικῶς τὸ σφᾶλμα αὐτὸ ἐὰν περιορισθῶμεν εἰς τοὺς πρώτους ὅρους τοῦ ἀνωτέρω ἀναπτύγματος. Εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογὰς συνήθως γνωρίζομεν ἕνα ἄνω φράγμα $\delta_i \geqslant |dx_i|$ δι' ἑκάστην τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν dx_i , ὁπότε λαμβάνοντες, ἀναλόγως τῆς ἐπιζητουμένης ἀκριβείας, ἕνα κατάλληλον ν, προσδιορίζομεν ἀπὸ τὸν τύπον (12.1) ἕνα ἄνω φράγμα τοῦ $|\Delta\Phi|$.

Παράδειγμα (12.1).— Κατὰ τὴν ἐκτίμησιν τῶν συντεταγμένων σημείου $M(x,y)$ γίνονται σφάλματα ἀντιστοίχως dx, dy καὶ ζητεῖται ἡ ἐπίδρασις αὐτῶν ἐπὶ τῆς γωνίας Φ τὴν ὁποίαν σχηματίζει μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x ἡ ἀκτὶς $\overline{OM}$.



Σχ. (12.1)

Λύσις: Ἐὰν $M(x,y)$ εἶναι ἡ ἐσφαλμένη θέσις τοῦ σημείου καὶ $M'(x+dx,\ y+dy)$ ἡ πραγματικὴ θέσις αὐτοῦ ἡ ὁποία προκύπτει ὅταν διορθώσωμεν τὶς συντεταγμένες ἀντιστοίχως κατὰ τὰ σφάλματα dx, dy θὰ ἔχωμεν : $\varepsilon\varphi\Phi=y:x$, $\Phi=\tau o\xi\varepsilon\varphi\, y:x$ ἐπομένως τὸ διαπραττόμενον σφάλμα θὰ εἶναι : $\Delta\Phi=\tau o\xi\varepsilon\varphi(y+dy):(x+dx)-\tau o\xi\varepsilon\varphi\, y:x$. Περιοριζόμενοι εἰς τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ἀναπτύγματος (12.1) θὰ ἔχωμεν : $\Delta\Phi\approx d\Phi=\Phi_x dx+\Phi_y dy=(xdy-ydx):(x^2+y^2)$, ἐπομένως $|\Delta\Phi|\approx|d\Phi|=|xdy-ydx|:(x^2+y^2)\leqslant[|xdy|+|ydx|]:(x^2+y^2)$. Ἐὰν εἶναι π.χ. $x=1$, $y=2$, $dx=0{,}01$, $dy=-0{,}02$ θὰ ἔχωμεν: $|\Delta\Phi|\approx|d\Phi|\leqslant(0{,}02+0{,}02):(1+4)=0{,}008$, δηλαδὴ τὸ διαπραττόμενον σφάλμα εἶναι (προσεγγιστικῶς) ἀπολύτως μικρότερον τῶν 0,008 ἀκτινίων.

Παράδειγμα (12.2).— Μετρήσαντες τὶς δύο πλευρὲς ἑνὸς τριγώνου καὶ τὴν περιεχομένην γωνία βρήκαμε $x = 22$ m, $y = 15$ m, $\vartheta = 30'$. Ἐὰν κατὰ τὴν μέτρησιν αὐτὴν ἔγιναν σφάλματα ἀπολύτως μικρότερα τῶν $1/12$ m καὶ $10'$, νὰ εὑρεθῇ ἕνα ἀνώτερον φράγμα **τοῦ** σφάλματος τὸ ὁποῖον γίνεται κατὰ τὴν ἐκτίμησιν τοῦ ἐμβαδοῦ E τοῦ τριγώνου.

Λύσις. Ἔχομεν $E = \frac{1}{2} xy\, \eta\mu\vartheta$, $|dx| = |dy| \leq 1/12$ m, $|d\vartheta| \leq 10\pi : 60 \cdot 180$ $\Delta E \approx dE = E_x \cdot dx + E_y \cdot dy + E_\vartheta \cdot d\vartheta = \frac{1}{2} y\eta\mu\vartheta \cdot dx + \frac{1}{2} x\eta\mu\vartheta \cdot dy + \frac{1}{2} xy\sigma\upsilon\nu\vartheta \cdot d\vartheta$, ἑπομένως $|\Delta E| \approx |dE| \leq |E_x dx| + |E_y dy| + |E_\vartheta d\vartheta| = 1/2 \cdot 15 \cdot 1/2 \cdot 1/12 + 1/2 \cdot 22 \cdot 1/2 \cdot 1/2 + 1/2\ 22 \cdot 15 \cdot \sqrt{3}/2 \cdot \pi/1080 = 1.2$ m^2, δηλαδὴ τὸ διαπραττόμενον σφάλμα εἶναι (προσεγγιστικῶς) ἀπολύτως μικρότερον τῶν 1.2 τετραγωνικῶν μέτρων.

Παράδειγμα (12.3).— Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπὶ τοῖς ἑκατὸ αὔξησις τοῦ ὄγκου Ω ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐξήσεις τῶν διαστάσεων αὐτοῦ x, y, z κατὰ dx, dy, dz.

Λύσις. Ἔχομεν $\Omega = xyz$, $\Delta\Omega \approx d\Omega = yzdx + zxdy + xydz$, ἑπομένως ἡ ἐπὶ τοῖς ἑκατὸ αὔξησις τοῦ ὄγκου εἶναι: $(100 : \Omega) d\Omega = 100 (x^{-1}dx + y^{-1}dy + z^{-1}dz)$. Ἐὰν εἶναι π.χ. $x = 5$ m, $y = 4$ m, $z = 3$ m, $dx = dy = dz = 1/48$ m θὰ ἔχωμεν $\Delta\Omega \approx (100 : \Omega) d\Omega = 100 (1/5 \cdot 1/48 + 1/4 \cdot 1/48 + 1/3 \cdot 1/48) = 1{,}6\%$.

13. Ὁμογενεῖς συναρτήσεις.— Μία συνάρτησις $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ λέγεται ὁμογενὴς βαθμοῦ μ ὡς πρὸς τὶς μεταβλητὲς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ὅταν ἰσχύει ἡ ταυτότης:

$$\Phi(tx_1, tx_2, \ldots, tx_\nu) \equiv t^\mu \cdot \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \qquad (13.1)$$

Π.χ. οἱ κάτωθι συναρτήσεις:

$$x^2 + 3y^2, \quad (x^2 - y^2) : (x^3 + z^3), \quad yx^{-1} \tau o\xi \varepsilon\varphi (x+y) : (y+z)$$

εἶναι ὁμογενεῖς μὲ βαθμοὺς ἀντιστοίχως $\mu = 2, -1, 0$ ὡς πρὸς τὶς μεταβλητὲς ἐκ τῶν ὁποίων ἐξαρτῶνται.

Θὰ δείξωμεν ὅτι ἐὰν ἡ συνάρτησις $\Phi(x, y, z)$ εἶναι ὁμογενὴς βαθμοῦ μ, ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$x\Phi_x + y\Phi_y + z\Phi_z = \mu \cdot \Phi \qquad (13.2)$$

Πράγματι ἐὰν θέσωμεν: $x = at$, $y = \beta t$, $z = \gamma t$ καὶ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν συνάρτησιν θὰ ἔχωμεν:

$$\Phi(x, y, z) = \Phi(at, \beta t, \gamma t) = t^\mu \Phi(a, \beta, \gamma)$$

Παραγωγίζοντες τὴν ἀνωτέρω σχέσιν ὡς πρὸς t προκύπτει:

$$\dot{x}\Phi_x + \dot{y}\Phi_y + \dot{z}\Phi_z = a\Phi_x + \beta\Phi_y + \gamma\Phi_z = \mu t^{\mu-1} \Phi(a, \beta, \gamma)$$

καὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δύο τελευταίων μελῶν ἐπὶ t θὰ ἔχωμεν

$$at\Phi_x + \beta t\Phi_y + \gamma t\Phi_z = \mu t^\mu \Phi(a, \beta, \gamma) = \mu\Phi(at, \beta t, \gamma t)$$

$$x\Phi_x + y\Phi_y + zd_z = \mu\Phi(x, y, z)$$

δηλαδὴ ἡ σχέσις (13.2) ἀληθεύει.

Θά δείξωμεν τώρα ὅτι ἀληθεύει καί τό ἀντίστροφον · δηλαδή ἐάν ἀληθεύη ἡ σχέσις (13.2) τότε ἡ συνάρτησις Φ εἶναι ὁμογενής βαθμοῦ μ ὡς πρός τίς x, y, z. Πράγματι θέτοντες πάλι $x = at$, $y = \beta t$, $z = \gamma t$ θά εἶναι:

$$\dot{\Phi} = \dot{x}\Phi_x + \dot{y}\Phi_y + \dot{z}\Phi_z = a\Phi_x + \beta\Phi_y + \gamma\Phi_z$$
$$t\dot{\Phi} = at\Phi_x + \beta t\Phi_y + \gamma t\Phi_z = x\Phi_x + y\Phi_y + z\Phi_z = \mu\Phi.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως ἕπεται $\Phi^{-1}d\Phi = \mu t^{-1}dt$ καί ἐξ αὐτῆς δι' ὁλοκληρώσεως:

$$\Phi(at, \beta t, \gamma t) = t^{\mu}\cdot c$$

ὅπου c μία αὐθαίρετος σταθερά ὡς πρός t. Θέτοντες εἰς τήν τελευταίαν σχέσιν $t = 1$ προκύπτει $\Phi(a, \beta, \gamma) = c$ ὁπότε ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν:

$$\Phi(x, y, z) = t^{\mu}\Phi(a, \beta, \gamma)$$

δηλαδή ἡ Φ εἶναι ὁμογενής συνάρτησις βαθμοῦ μ ὡς πρός x, y, z.

Ἐπειδή τά ἀνωτέρω γενικεύονται εὐκόλως διά συναρτήσεις δσωνδήποτε μεταβλητῶν θά ἔχωμεν τήν ἑξῆς γενικήν πρότασιν τοῦ Euler:

Πρότασις (13.1). — *Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι ἡ $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ ὁμογενής συνάρτησις βαθμοῦ μ ὡς πρός τίς μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, εἶναι νά ἰσχύη ἡ σχέσις:*

$$\boxed{x_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + \ldots + x_\nu\frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu} = \mu\Phi} \qquad (13.3)$$

Παράδειγμα (13.1). — Ἐάν εἶναι $\Phi = \Phi(x, y)$ καί οἱ συναρτήσεις $x = x(u, \upsilon)$, $y = y(u, \upsilon)$ εἶναι ὁμογενεῖς βαθμοῦ μ — ὡς πρός u, υ νά δειχθῆ ὅτι:

$$u\Phi_u + \upsilon\Phi_\upsilon = \mu(x\Phi_x + y\Phi_y)$$

Λύσις. Ἔχομεν $\Phi_u = \Phi_x x_u + \Phi_y \cdot y_u$, $\Phi_\upsilon = \Phi_x \cdot x_\upsilon + \Phi_y \cdot y_\upsilon$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τό πρῶτον μέλος προκύπτει: $u\Phi_u + \upsilon\Phi_\upsilon = u(\Phi_x \cdot x_u + \Phi_y \cdot y_u) + \upsilon(\Phi_x x_\upsilon + \Phi_y \cdot y_\upsilon) = (ux_u + \upsilon x_\upsilon)\Phi_x + (uy_u + \upsilon y_\upsilon)\Phi_y$. Ἐπειδή ὅμως οἱ συναρτήσεις x, y εἶναι ὁμογενεῖς οἱ συντελεσταί τῶν Φ_x, Φ_y εἰς τό δεξιόν μέλος εἶναι ἀντιστοίχως μx, μy καί ἔτσι ἡ ζητουμένη σχέσις ἀπεδείχθη.

Παράδειγμα (13.2). — Ἐάν ἡ συνάρτησις $\Phi(x, y, z)$ εἶναι ὁμογενής μ-βαθμοῦ, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ καί $u = \rho^\nu\Phi$ νά δειχθῆ ὅτι:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \nu(\nu + 2\mu + 1)\rho^{\nu-2}\cdot\Phi + \rho^\nu\cdot(\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz})$$

Λύσις. Διά παραγωγίσεως θά ἔχωμεν: $u_x = \nu\rho^{\nu-1}\cdot\rho_x\Phi + \rho^\nu\Phi_x$, $u_{xx} = \nu(\nu-1)\rho^{\nu-2}\cdot\rho_x^2\Phi + \nu\rho^{\nu-1}\cdot\rho_{xx}\Phi + 2\nu\rho^{\nu-1}\rho_x\cdot\Phi_x + \rho^\nu\Phi_{xx}$. Ἐπειδή ὅμως $\rho_x = x : \rho$, $\rho_{xx} = 1 : \rho - x^2 : \rho^3$ θά εἶναι:

$$u_{xx} = \nu(\nu-1)\rho^{\nu-2}\cdot\Phi\cdot x^2 : \rho^2 + \nu\rho^{\nu-2}\cdot\Phi(1 - x^2 : \rho^2) + 2\nu\rho^{\nu-2}x\Phi_x + \rho^\nu\Phi_{xx}.$$

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι προκύπτουν οἱ σχέσεις:

$$u_{yy} = \nu(\nu-1)\rho^{\nu-2}\Phi y^2 : \rho^2 + \nu\rho^{\nu-2}\Phi(1-y^2:\rho^2) + 2\nu\rho^{\nu-2} y\Phi_y + \rho^\nu \Phi_{yy}$$

$$u_{zz} = \nu(\nu-1)\rho^{\nu-2}\Phi z^2 : \rho^2 + \nu\rho^{\nu-2}\Phi(1-z^2:\rho^2) + 2\nu\rho^{\nu-2} zdz + \rho^\nu \Phi_{zz}$$

Προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη προκύπτει:

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} = \nu(\nu-1)\rho^{\nu-2}\Phi + 2\nu\rho^{\nu-2}\Phi + 2\nu\rho^{\nu-2}\cdot(x\Phi_x + y\Phi_y + z\Phi_z) + \rho^\nu(\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\Phi_{zz})$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ Φ εἶναι ὁμογενὴς θὰ εἶναι: $x\Phi_x + y\Phi_y + zd_z = \mu\Phi$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες αὐτὴν εἰς τὸν τρίτον ὅρον τοῦ δευτέρου μέλους προκύπτει τὸ ζητούμενον:

$$\begin{aligned} u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} &= \nu(\nu-1)\rho^{\nu-2}\Phi + 2\nu\rho^{\nu-2}\Phi + 2\nu\rho^{\nu-2}\cdot\mu\Phi + \rho^\nu(\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\Phi_{zz}) \\ &= \nu(\nu-1+2+2\mu)\rho^{\nu-2}\Phi + \rho^\nu(\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\Phi_{zz}) \\ &= \nu(\nu+2\mu+1)\rho^{\nu-2}\Phi + \rho^\nu(\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\Phi_{zz}) \end{aligned}$$

Ἀσκήσεις.

123) Ἀναπτύξατε κατὰ Taylor τὴν συνάρτησιν $\Phi = x^3y + x^2y + 1$ στὴν γειτονιὰ τοῦ σημείου $(0,1)$.

124) Ὁμοίως διὰ τὴν συνάρτησιν $\Phi = e^{xy}$ στὴν γειτονιὰ τοῦ σημείου $(1,1)$ περιοριζόμενοι εἰς τοὺς ὅρους μέχρι καὶ $\nu = 2$.

125) Ὁμοίως διὰ τὴν $\Phi = xy^2 + \text{συν}xy$ στὴν γειτονιὰ τοῦ σημείου $(1, \frac{\pi}{2})$.

126) Ἀναπτύξατε κατὰ Maclaurin τὴν συνάρτησιν $\Phi = \sqrt{1-x^2-y^2}$ περιοριζόμενοι εἰς τοὺς ὅρους μέχρι καὶ $\nu = 4$.

127) Ὁμοίως διὰ τὴν $\Phi = (x-y)\text{εφ}y$ περιοριζόμενοι στοὺς ὅρους μέχρι καὶ $\nu = 6$

128) » » » $\Phi = e^x\text{συν}y$ » » » » $\nu = 4$

Ἀναπτύξατε κατὰ Maclaurin τὶς ἑξῆς συναρτήσεις:

129) $\Phi = e^{x^2-y^2}$ 130) $\Phi = \text{ημ}xy$

131) $\Phi = 1:(1-x-y)$ 131*) $\Phi = 1:(1-x-y-z)$

√ 132) Οἱ πλευρὲς ἑνὸς ὀρθογωνίου ἐμετρήθησαν καὶ εὑρέθησαν ὅτι εἶναι ἡ μία 0,84 m καὶ ἡ ἄλλη 1,44 m. Ἐὰν δι' ἑκάστην ἐξ αὐτῶν τὸ διαπραττόμενον σφάλμα εἶναι ἀπολύτως μικρότερον τοῦ 1 cm νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ προσέγγισιν τὸ μέγιστον σφάλμα τὸ ὁποῖον γίνεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου.

133) Νὰ εὑρεθῇ προσεγγιστικῶς τὸ ἐπὶ τοῖς ἑκατὸ σφάλμα τὸ ὁποῖον γίνεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς ὀρθογωνίου, ὅταν κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὕψους καὶ τῆς βάσεως αὐτοῦ γίνονται σφάλματα ἀντιστοίχως 1% καὶ 3%.

134) Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου Α ἀπὸ ἕνα ἀπρόσιτον σημεῖον Β εὑρίσκεται διὰ τῆς κατασκευῆς ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ μὲ ὀρθὴν γωνίαν εἰς τὸ Α. Ἡ ΑΓ ἐμετρήθη καὶ εὑρέθη 1000 πόδια καὶ ἡ γωνία Γ ἴση μὲ 59° 37′. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ προσεγγιστικῶς τὸ μέγιστον σφάλμα τὸ ὁποῖον γίνεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἀποστάσεως ΑΒ ὅταν κατὰ τὴν μέτρησιν τῆς ΑΓ γίνεται σφάλμα ἀπολύτως μικρότερον τῶν 0.5 ποδῶν καὶ κατὰ τὴν μέτρησιν τῆς Γ ἀπολύτως μικρότερον τοῦ 1′.

135) Τριγώνου οἱ δύο πλευρὲς καὶ ἡ περιεχομένη ὑπ' αὐτῶν γωνία ἐμετρήθησαν καὶ

εὑρέθησαν ὅτι εἶναι 53 πόδια, 41 πόδια καί 37°. Ἂν κατά τήν μέτρησιν αὐτῶν γίνονται σφάλματα ἀπολύτως μικρότερα τῶν 6 ἰντσῶν καί 30΄, νά εὑρεθῆ προσεγγιστικῶς τό σφάλμα τό ὁποῖον γίνεται ὅταν ὑπολογίσωμεν τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου.

136) Πρόκειται νά προσδιορίσωμεν τήν ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος g πειραματικῶς δι' ἑνός μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς μήκους ℓ καί μέ περίοδον $T \approx 2\,\mathrm{sec}$, χρησιμοποιοῦντες τόν γνωστόν ἐκ τῆς φυσικῆς τύπον $T = 2\pi\sqrt{\ell : g}$. Ἐάν τό σφάλμα τό ὁποῖον γίνεται κατά τήν μέτρησιν τοῦ ℓ εἶναι ἀπολύτως μικρότερον τῶν $3/_{10}$ ἐπί τοῖς ἑκατό καί τό ἐπιτρεπόμενον σφάλμα διά τόν προσδιορισμόν τοῦ g εἶναι ἀπολύτως μικρότερον τοῦ $1/_{10}$ ἐπί τοῖς ἑκατό, ζητεῖται νά εὑρεθῆ προσεγγιστικῶς ἡ μεγίστη τιμή τοῦ ἐπιτρεπομένου σφάλματος κατά τήν μέτρησιν τῆς T καθώς καί τό μέγιστον ἐπί τοῖς ἑκατό σφάλμα αὐτῆς.

137) Κατά τήν ἐκτίμησιν τῶν πλευρῶν α, β καί τῆς γωνίας Γ τριγώνου ΑΒΓ γίνονται σφάλματα ἀντιστοίχως $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\Gamma$. Νά ὑπολογισθῆ κατά προσέγγισιν τό σφάλμα τό ὁποῖον γίνεται ὅταν ὑπολογίσωμεν ἐκ τῶν α, β, Γ τήν πλευράν γ.

138) Ἐάν μεταβλητόν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς σταθερόν κύκλον νά δειχθῆ ὅτι: $d\alpha/_{\text{συν}A} + d\beta/_{\text{συν}B} + d\gamma/_{\text{συν}\Gamma} = 0$.

139) Ὑπό τίς προϋποθέσεις τοῦ παραδείγματος (13.1) νά δειχθῆ ὅτι:

$$u^2\Phi_{uu} + 2uv\Phi_{uv} + v^2\Phi_{vv} + u\Phi_u + v\Phi_v = \mu^2(x^2\Phi_{xx} + 2xy\Phi_{xy} + y^2\Phi_{yy} + x\Phi_x + y\Phi_y)$$

140) Ἐάν ἡ συνάρτησις $\sigma(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \equiv \Phi(u, v, w)$ τῆς ἀσκ. 79 εἶναι ὁμογενής ὡς πρός x, y, z βαθμοῦ μ, τότε ἡ συνάρτησις Φ εἶναι ὁμογενής τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρός u, v, w καί ἡ σ ὁμογενής τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρός ξ, η, ζ.

141) Ἐάν $v = \sigma(u)$ ὅπου u συνάρτησις ὁμογενής βαθμοῦ μ ὡς πρός x, y δείξατε ὅτι: $x^2v_{xx} + 2xyv_{xy} + y^2v_{yy} = \mu(\mu-1)u\sigma'(u) + \mu^2u^2\sigma''(u)$.

142) Ἐάν $v = \text{τοξεφ}\,[(x+y):(x^2+y^2)]$ δείξατε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις: $x^2v_{xx} + 2xyv_{xy} + y^2v_{yy} = -2\eta\mu v\,\text{συν}^3 v$.

143) Δείξατε ὅτι ἡ $v = \text{τοξεφ}\,[x^{-1}\cdot\varphi(yx^{-1})]$ ἐπαληθεύει τήν ἀνωτέρω σχέσιν διά κάθε συνάρτησιν φ.

144) Οἱ ἐξισώσεις $p = \partial\varphi : \partial u$, $q = \partial\varphi : \partial v$ ὅπου $\varphi(x, y, u, v)$ συνάρτησις ὁμογενής βαθμοῦ μ ὡς πρός u, v ὁρίζουν τίς u, v ὡς συναρτήσεις τῶν x, y, p, q. Ἐάν $\sigma(x, y, p, q)$ εἶναι ἡ συνάρτησις ἡ ὁποία προκύπτει ὅταν ἀντικαταστήσωμεν αὐτάς εἰς τήν $\varphi(x, y, u, v)$ νά δειχθῆ ὅτι: $(\mu-1)\partial\sigma : \partial p = u$, $(\mu-1)\partial\sigma : \partial q = v$, $(\mu-1)\partial\sigma : \partial x = -\partial\varphi : \partial x$, $(\mu-1)\partial\sigma : \partial y = -\partial\varphi : \partial y$.

Πλεγμέναι συναρτήσεις.

14. Ἐπίλυσις μιᾶς ἐξισώσεως. — Λέγομεν ὅτι ἡ μεταβλητή y εἶναι μία πλεγμένη συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς x, ὅταν συνδέονται ὑπό μιᾶς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς:

$$F(x, y) = 0 \tag{14.1}$$

Ἐπιλύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὡς πρὸς y προκύπτει ἡ συνάρτησις y ὑπὸ τὴν συνήθη μορφήν: $y = y(x)$ ἡ ὁποία θὰ ἐπαληθεύῃ προφανῶς τὴν ἐξίσωσιν ἐκ τῆς ὁποίας προέκυψεν, δηλαδὴ γιὰ ὅλα τὰ x ἀπὸ τὸ πεδίον ὁρισμοῦ της θὰ ἰσχύῃ ἡ ταυτότης: $F[x, y(x)] \equiv 0$.

Μία ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (14.1) ὁρίζει ἐπίσης τὴν μεταβλητὴν x ὡς πλεγμένην συνάρτησιν τῆς y, ὁπότε ἐπιλύοντες τὴν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς x, προκύπτει ἡ συνάρτησις ὑπὸ τὴν συνήθη μορφήν: $x = x(y)$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς $y = y(x)$, ἰσχύει δὲ ἡ ταυτότης: $F[x(y), y] \equiv 0$.

Π.χ. ἐκ τῆς ἐξισώσεως $y^2 - x + 3 = 0$ ὁρίζονται ὑπὸ πλεγμένην μορφὴν οἱ συναρτήσεις μὲ συνήθεις ἐξισώσεις: $y = \pm\sqrt{x-3}$, $x = y^2 + 3$, ἰσχύουν δὲ οἱ ταυτότητες: $(\pm\sqrt{x-3})^2 - x + 3 \equiv 0$, $y^2 - (y^2+3) + 3 \equiv 0$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἐπιδέχεται δισήμαντον ἐπίλυσιν ὡς πρὸς y καὶ μονοσήμαντον ὡς πρὸς x.

Κάθε ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (14.1) δὲν εἶναι πάντοτε ἐπιλύσιμος ὡς πρὸς y ἢ ὡς πρὸς x, δηλαδὴ δὲν ὑπάρχει πάντοτε πραγματικὴ συνάρτησις ἡ ὁποία νὰ ταυτοποιῇ αὐτήν. Π.χ. ἐὰν θεωρήσωμεν τὶς ἐξισώσεις:

i) $x^2 + y^2 + 4 = 0$ iii) $(x^2+y^2)[(x-2)^2+(y-1)^2] = 0$

ii) $x^2 + y^2 = 0$ iv) $(x^2+y^2-1)(y^2-2x) = 0$

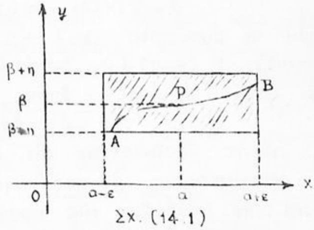
παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πρώτη ἐξ αὐτῶν δὲν ἐπιδέχεται οὐδεμίαν πραγματικὴν λύσιν ὡς πρὸς x ἢ y, ἡ δευτέρα ἐπαληθεύεται μόνον ἀπὸ τὸ σημεῖον $(0, 0)$, ἡ τρίτη μόνον ἀπὸ τὰ σημεῖα $(0, 0)$ καὶ $(2, 1)$ καὶ ἡ τελευταία ἐπαληθεύεται ἀπὸ τὰ σημεῖα τοῦ κύκλου $x^2+y^2=1$ καὶ τῆς παραβολῆς $y^2 = 2x$ δηλαδὴ ἐπιδέχεται ὡς πρὸς y τὰς λύσεις: $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, $y = \pm\sqrt{2x}$ καὶ ὡς πρὸς x τάς: $x = \pm\sqrt{1-y^2}$, $x = y^2 : 2$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως (14.1), μία ποικιλία περιπτώσεων εἶναι δυνατὸν νὰ παρουσιασθῇ. Ἡ κατωτέρω πρότασις δίδει ἕνα σύστημα ἱκανῶν συνθηκῶν τὸ ὁποῖον μᾶς ἐξασφαλίζει τὴν μονοσήμαντον ἐπίλυσιν αὐτῆς.

Πρότασις (14.1). — *Ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον $P(\alpha, \beta)$ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y εἶναι $F(\alpha, \beta) = 0$, $F_y(\alpha, \beta) \neq 0$ καὶ διὰ μίαν γειτονιὰν αὐτοῦ ἡ συνάρτησις $F(x, y)$ εἶναι διαφορίσιμος καὶ ἡ μερικὴ παράγωγος $F_y(x,y)$ συνεχής, τότε ὑπάρχει μία **κατάλληλος** γειτονιὰ τοῦ σημείου P εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἐξίσωσις (14.1) ἐπιλύεται μονοσήμαντα, ἡ ἐπιλύουσα συνάρτησις $y = y(x)$ εἶναι διαφορίσιμος εἰς αὐτήν, διὰ $x = \alpha$ λαμβάνει τὴν τιμὴν $y = \beta$ καὶ ἡ παράγωγός της δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως:*

$$y' = dy : dx = -F_x : F_y \qquad (14.2)$$

Ἀπόδειξις. Θὰ δείξωμεν κατ' ἀρχὰς ὅτι ὑπάρχει συνάρτησις $y = y(x)$ ἐπαληθεύουσα τὴν ἐξίσωσιν (14.1) καὶ ἡ ὁποία διὰ $x = \alpha$ λαμβάνει τὴν τιμὴν $y = \beta$. Ἐπειδὴ ἡ παράγωγος F_y δὲν εἶναι μηδὲν εἰς τὸ σημεῖον (α, β), ἡ συνάρτησις $F(\alpha, y)$, ἡ ὁποία ἕνεκα τῶν ὑποθέσεων μας εἶναι συνεχής, θά εἶναι αὔξουσα ἤ φθίνουσα σέ μιά γειτονιά τοῦ σημείου $y=\beta$, ἑπομένως ὑπάρχει ἕνας θετικός ἀριθμός η τέτοιος ὥστε οἱ ἀριθμοί: $F(\alpha, \beta-\eta)$, $F(\alpha, \beta+\eta)$ νά εἶναι ἑτερόσημοι. Ἐπειδή ὅμως ἡ συνάρτησις F εἶναι διαφορίσιμος στήν γειτονιά τοῦ σημείου P, εἶναι καί συνεχής εἰς αὐτήν, ἑπομένως δυνάμεθα νά εὕρωμεν θετικόν ἀριθμόν ε τέτοιον ὥστε διά $|x-\alpha|<\varepsilon$ νά εἶναι ἐπίσης οἱ ἀριθμοί: $F(x, \beta-\eta)$, $F(x, \beta+\eta)$ ἑτερόσημοι. Ἀφοῦ λοιπόν ὅταν x εἶναι ἕνας οἱοσδήποτε σταθερός ἀριθμός τοῦ διαστήματος: $\alpha-\varepsilon<x<\alpha+\varepsilon$ ἡ συνάρτησις $F(x, y)$ θεωρουμένη ὡς πρός τήν μεταβλητήν y εἶναι συνεχής εἰς τό διάστημα: $\beta-\eta<y<\beta+\eta$ καί λαμβάνει ἑτεροσήμους τιμάς εἰς τά ἄκρα αὐτοῦ, ἕπεται ὅτι ὑπάρχει τοὐλάχιστον μία τιμή $y=y.(x)$ ἐξαρτωμένη φυσικά ἀπό τό ἑκάστοτε x διά τήν ὁποίαν μηδενίζεται. Θά δείξωμεν ὅτι διά καταλλήλου ἐκλογῆς τῶν ἀριθμῶν ε, η ἡ τιμή αὐτή $y=y.(x)$ εἶναι μοναδική, δηλαδή ἡ ἐπιλύουσα συνάρτησις εἶναι μονοσήμαντος. Πράγματι ἀφοῦ ἡ $F_y(x, y)$ εἶναι συνεχής στην γειτονιά τοῦ σημείου (α, β) καί $F_y(\alpha, \beta)\neq 0$ δυνάμεθα νά ἐκλέξωμεν τούς ἀριθμούς ε, η ἔτσι ὥστε ἐντός τῆς ὀρθογωνιακῆς γειτονιᾶς $\mathcal{P}$: $\alpha-\varepsilon<x<\alpha+\varepsilon$, $\beta-\eta<x<\beta+\eta$ ἡ $F_y(x, y)$ νά εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Ἐάν λοιπόν ἡ συνάρτησις $F(x, y)$ μηδενιζότανε γιά δυό τιμές $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$ ὅπου (x, y_1) καί (x, y_2) σημεῖα τῆς γειτονιᾶς $\mathcal{P}$ θά εἴχαμε



Σχ. (14.1)

$$0=F(x, y_1)-F(x, y_2)=(y_1-y_2)F_y(x, y_3)$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι ἡ $F_y(x, y)$ θά μηδενιζότανε σέ κάποιο σημεῖον (x, y_3) τῆς γειτονιᾶς $\mathcal{P}$, τό ὁποῖον εἶναι ἄτοπον. Δείξαμε λοιπόν ὅτι σέ κάθε x τοῦ διαστήματος: $\alpha-\varepsilon<x<\alpha+\varepsilon$ ἀντιστοιχεῖ ἕνα μόνον y ἀπό τό διάστημα: $\beta-\eta<y<\beta+\eta$ διά τά ὁποῖα $F(x, y)=0$, ἑπομένως διά $x=\alpha$ θά ἔχωμεν μόνον $y=\beta$.

Μᾶς μένει νά δείξωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $y(x)$ εἶναι διαφορίσιμος μέ παράγωγον διδομένην ὑπό τοῦ τύπου (14.2). Πρός τοῦτο δεικνύομεν πρῶτον ὅτι ἡ $y(x)$ εἶναι συνεχής. Ἐάν x_1 εἶναι κάποια τιμή τοῦ διαστήματος $\alpha-\varepsilon<x<\alpha+\varepsilon$ καί $y_1=y(x_1)$, τό σημεῖον (x_1, y_1) θά εἶναι κάποιο σημεῖον τῆς γειτονιᾶς $\mathcal{P}$, ἑπομένως δυνάμεθα δι' αὐτό νά κάνωμεν ὅ,τι καί διά τό σημεῖον (α, β) δηλαδή νά εὕρωμεν γειτονιάν $\mathcal{P}_1$: $x_1-\varepsilon_1<x<x_1+\varepsilon_1$, $y_1-\eta_1<y<y_1+\eta_1$ ἐντός τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις (14.1) νά ἐπιλύεται μονοσήμαντα. Ἐάν καλέσωμεν $y=\varphi(x)$ τήν ἐπιλύουσα συνάρτησιν εἰς τήν γειτονιάν αὐτήν θά ἔχωμεν: $y_1-\eta_1<\varphi(x)<y_1+\eta_1$ ἤ ἐπειδή $y_1=y(x_1)$ θά εἶναι $|\varphi(x)-y(x_1)|<\eta_1$. Ἐπειδή ὅμως ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ δέν εἶναι δυνατον νά εἶναι διάφορος τῆς $y(x)$ ἡ προηγουμένη ἀνισότης γράφεται: $|y(x)-y(x_1)|<\eta_1$ τό ὁποῖον ἀποδεικνυει τήν συνέχεια τῆς $y(x)$ εἰς τό διάστημα $\alpha-\varepsilon<x<\alpha+\varepsilon$. Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τά σημεία (x, y), $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ τῆς γειτονιᾶς $\mathcal{P}$ ὅπου εἶναι $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$. Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ F εἶναι διαφορίσιμος καὶ μηδὲν θὰ ἔχωμεν:

$$0 = F(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - F(x,y) = (F_x + \kappa)\Delta x + (F_y + \lambda)\Delta y$$

ὅπου οἱ ποσότητες $\kappa, \lambda \to 0$ ὅταν $\Delta x, \Delta y \to 0$ δηλαδὴ ὅταν $\Delta x \to 0$. Ἐπειδὴ $F_y(x,y) \neq 0$ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ Δx τόσο μικρὸ ὥστε νὰ εἶναι $|\lambda| < |F_y|$ ὁπότε διαιροῦντες διὰ $F_y + \lambda \neq 0$ προκύπτει:

$$\Delta y : \Delta x = -(F_x + \kappa) : (F_y + \lambda)$$

Ἐξ αὐτῆς ὑποθέτοντες ὅτι $\Delta x \to 0$ προκύπτει ὅτι ἡ συνάρτησις $y(x)$ εἶναι διαφορίσιμος μὲ παράγωγον διδομένην ὑπὸ τοῦ τύπου (14.2).

Μετὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως θεωροῦμεν σκόπιμον διὰ τὴν καλλιτέραν κατανόησιν αὐτῆς νὰ δώσωμεν τὶς ἑξῆς διασαφήσεις καὶ συμπληρώσεις:

(i). Ὁ τύπος (14.2) δύναται νὰ γραφῆ καὶ ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$F_x\,dx + F_y\,dy = 0 \qquad (14.3)$$

δύναται δὲ νὰ προκύψη διὰ διαφορίσεως ἢ παραγωγίσεως τῆς $F(x,y)$ θεωροῦντες αὐτὴν ὡς σύνθετον συνάρτησιν τῆς x διὰ μέσου τῶν x, y.

(ii). Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς παραγώγου τῆς ἐπιλυούσης συναρτήσεως δὲν ἀπαιτεῖται ἡ γνῶσις αὐτῆς, ἀλλὰ μόνον ἡ θεωρητικὴ ὕπαρξις αὐτῆς, ὁπότε ἐκ τοῦ τύπου (14.2) ἔχομεν τὴν πρώτην παράγωγον. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν παραγώγων ἀνωτέρας τάξεως γράφομεν τὴν (14.2) ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$F_x + y' \cdot F_y = 0$$

ὁπότε δι' ἐπανειλλημένης παραγωγίσεως αὐτῆς ὡς πρὸς x προκύπτει:

$$\begin{aligned} &F_{xx} + 2y'F_{xy} + y'^2 F_{yy} + y'' F_y = 0 \\ &F_{xxx} + 3y'F_{xxy} + 3y'^2 F_{xyy} + y'^3 F_{yyy} + 3y'' F_{xy} + 3y'y'' F_{yy} + y''' F_y = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (14.4)$$

Ἐξ αὐτῶν δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς $y'', y''', \ldots$ προσδιορίζομεν τὰς παραγώγους κάθε τάξεως τῆς ἐπιλυούσης συναρτήσεως.

(iii) Ὅταν λέμε ἡ ἐξίσωσις ἐπιλύεται ὡς πρὸς y δὲν ἐννοοῦμεν ὅτι δυνάμεθα πάντοτε νὰ ἔχωμεν τὴν y ὑπὸ μίαν «κλειστὴν» μορφήν, δηλαδὴ ὑπὸ μίαν μορφὴν ἡ ὁποία νὰ εἶναι κατασκευασμένη ἀπὸ στοιχειώδη συναρτησιακὰ σύμβολα πεπερασμένου πλήθους. Λέγοντες ἐπιλύεται ὡς πρὸς y ἡ ἐξίσωσις, ἐννοοῦμεν ὅτι ὑπάρχει ἡ ἐπιλύουσα συνάρτησις ἀλλὰ τὸ πῶς θὰ εὑρεθῆ αὐτὴ καὶ ποίαν μορφὴν θὰ ἔχη αὐτὸ εἶναι ἄλλο ζήτημα. Συνήθως ἐκτὸς τῶν περιπτώσεων ὅπου ἡ ἐπίλυσις ὡς πρὸς y ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν μιᾶς ἐξισώσεως γνωστῆς μορφῆς, ἡ ἐπιλύουσα συνάρτησις $y(x)$, δύναται νὰ δοθῆ ὡς ἄθροισμα μιᾶς συγκλινούσης σειρᾶς. Εἰς τὶς πρακτικὲς ἐφαρμογὲς περιοριζόμεθα, ἀναλόγως τῆς ἐπιζητουμένης ἀκριβείας, εἰς μερικούς ἐκ τῶν πρώτων ὅρων αὐτῆς.

(iv). Ἡ ἀποδειχθεῖσα πρότασις ἑρμηνευομένη γεωμετρικῶς σημαίνει ὅτι ὑπό τάς προϋποθέσεις πού ἀναφέρονται εἰς αὐτήν, ὑπάρχει ἕνα ὀρθογώνιον μέ κέντρον τό σημεῖον $P(a, \beta)$ τό ὁποῖον ἐντός αὐτοῦ περιέχει καί ἄλλα ἄπειρα σημεῖα $M(x, y)$ τῶν ὁποίων οἱ συντεταγμένες ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωσιν (14.1) καί τά ὁποῖα ὅλα μαζύ ἀποτελοῦν ἕνα τόξον γραμμῆς APB μέ ἐξίσωσιν $y = y(x)$ τό ὁποῖον τέμνεται εἰς ἕνα μόνον σημεῖον ὑπό τῶν παραλλήλων πρός τόν ἄξονα τῶν y εὐθειῶν καί μέ ἐφαπτομένην σέ κάθε σημεῖον ὄχι παράλληλον πρός τόν ἄξονα των y σχ. (14.1).

(v). Ἐάν εἰς τήν ἐκφώνησιν τῆς προτάσεως ἀντικαταστήσωμεν τίς προϋποθέσεις διά τήν μερικήν παράγωγον ὡς πρός y μέ τίς ἀντίστοιχες διά τήν μερικήν παράγωγον ὡς πρός x, ἔχομεν τήν ἀντίστοιχον πρότασιν διά τήν ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως (14.1) ὡς πρός x. Ἡ παράγωγος τῆς ἐπιλυούσης συναρτήσεως $x = x(y)$ δίδεται ἀπό τόν ἴδιον τύπον (14.2) ὅταν γραφῇ ὑπό τήν μορφήν

$$x' = dx : dy = -F_y : F_x \qquad (14.5)$$

Ἡ ἀποδειχθεῖσα πρότασις γενικεύεται εὐκόλως εἰς τήν ἐπίλυσιν ἐξισώσεως:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_\nu ; y) = 0 \qquad (14.6)$$

μέ πρῶτον μέλος συνάρτησιν $(\nu+1)$- μεταβλητῶν. Ἡ ἀπόδειξις παραμένει ἡ ἴδια δι' αὐτό ἀρκούμεθα εἰς τήν διατύπωσιν μόνον.

Πρότασις (14.2).— *Ἐάν εἰς τό σημεῖον $P(a_1, \ldots, a_\nu, \beta)$ τοῦ $R_{\nu+1}$ χώρου τῶν $x_1, \ldots x_\nu, y$ εἶναι $F(a_1, \ldots, a_\nu, \beta) = 0$, $F_y(a_1, \ldots, a_\nu, \beta) \neq 0$ καί διά μίαν γειτονιάν αὐτοῦ ἡ συνάρτησις $F(x_1, \ldots x_\nu ; y)$ εἶναι διαφορίσιμος καί ἡ μερική παράγωγος $F_y(x_1, \ldots, x_\nu ; y)$ συνεχής, τότε ὑπάρχει μία κατάλληλος γειτονιά τοῦ σημείου P εἰς τήν ὁποίαν ἡ ἐξίσωσις (14.5) ἐπιλύεται μονοσήμαντα, ἡ ἐπιλύουσα συνάρτησις $y = y(x_1, \ldots, x_\nu)$ εἶναι διαφορίσιμος εἰς αὐτήν, διά $x_1 = a_1, \ldots, x_\nu = a_\nu$ λαμβάνει τήν τιμήν $y = \beta$ καί ἡ μερική παράγωγος αὐτῆς ὡς πρός x_i δίδεται ὑπό τῆς σχέσεως:*

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} : \frac{\partial F}{\partial y}} \qquad (14.7)$$

Διά τήν εὕρεσιν τῶν μερικῶν παραγώγων ἀνωτέρας τάξεως τῆς ἐπιλυούσης συναρτήσεως γράφομεν τήν (14.7) ὑπό τήν μορφήν:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} = 0 \qquad (14.8)$$

ὁπότε διὰ μερικῆς παραγωγίσεως ὡς πρὸς x_j προκύπτει ἡ σχέσις:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}+\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_i}+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x_j}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\frac{\partial y}{\partial x_i}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}=0 \qquad (14.9)$$
$$(i, j=1, 2, \ldots, \nu)$$

ἐκ τῆς ὁποίας προσδιορίζομεν τὴν δευτέραν μερικὴν παράγωγον $y_{x_i x_j}$ κ.ο.κ. προσδιορίζομεν τὰς παραγώγους πάσης τάξεως.
Ἐὰν π.χ. θεωρήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$F(x, y, z)=0 \qquad (14.10)$$

αἱ μερικαὶ παράγωγοι πρώτης τάξεως τῆς συναρτήσεως $z=z(x, y)$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπ' αὐτῆς ὑπὸ πλεγμένην μορφὴν δίδονται, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (14.8), ὑπὸ τῶν σχέσεων:

$$\begin{aligned} F_x+F_z . Z_x&=0\\ F_y+F_z . Z_y&=0\end{aligned} \qquad (14.11)$$

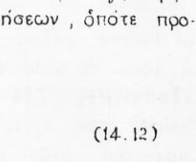
Διὰ νὰ λάβωμεν τὰς μερικὰς παραγώγους δευτέρας τάξεως παραγωγίζομεν τὴν πρώτην ὡς πρὸς x, y καὶ τὴν δευτέραν ὡς πρὸς y, συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα παραγωγίσεως συνθέτων συναρτήσεων, ὁπότε προκύπτουν οἱ σχέσεις:

$$\begin{aligned} F_{xx}+2F_{xz}\cdot Z_x+F_{zz}Z_x^2+F_z\cdot Z_{xx}&=0\\ F_{xy}+F_{xz}Z_y+F_{yz}\cdot Z_x+F_{zz}\cdot Z_x\cdot Z_y+F_z\cdot Z_{xy}&=0\\ F_{yy}+2F_{yz}\cdot Z_y+F_{zz}\cdot Z_y^2+F_z\cdot Z_{yy}&=0\end{aligned} \qquad (14.12)$$

ἐκ τῶν ὁποίων προσδιορίζομεν τὰς z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}. Ὁμοίως διὰ παραγωγίσεως αὐτῶν προκύπτουν αἱ παράγωγοι τρίτης τάξεως κ.ο.κ. αἱ παράγωγοι πάσης τάξεως.

Παράδειγμα (14.1).— Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ κύκλου $x^2+y^2-1=0$ ἐπιλύεται μονοσήμαντα ὡς πρὸς y εἰς τὴν γειτονιὰ τοῦ σημείου $B(0,1)$ καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως τῆς ἐπιλυούσης συναρτήσεως $y(x)$ εἰς τὸ σημεῖον αὐτό.

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $F=x^2+y^2-1$ εἶναι διαφορίσιμος, ἡ $F_y=2y$ συνεχὴς καὶ $F(0,1)=0$, $F_y(0,1)=2\neq 0$, ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις ἐπιλύεται μονοσήμαντα ὡς πρὸς y στὴν γειτονιὰ τοῦ B τὸ ὁποῖον μάλιστα συνάγεται καὶ ἀπὸ τὸ σχ (14.2). Ἡ ἐπιλύουσα συνάρτησις εἶνα ἡ $y=\sqrt{1-x^2}$ τῆς ὁποίας γραφικὴ παράστασις εἶναι τὸ



Σχ (14.2)

τόξον ΑΒΑ'. Ἡ πρώτη παράγωγός αὐτῆς κατὰ τὸν τύπον (14.2) εἶναι $y' = -2x : 2y = -x : y$, $y'(0) = 0$ καὶ ἡ δευτέρα προκύπτει διὰ παραγωγίσεως τῆς πρώτης: $y'' = -(y - xy') : y^2 = -(x^2+y^2) : y^3 = -1 : y^3$, $y''(0) = -1$. Ὁ ἀναγνώστης δύναται μὲ ὅμοιον τρόπον νὰ ἀποδείξῃ ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἐπιλύεται μονοσήμαντα ὡς πρὸς y δι' ὅλα τὰ σημεῖα ἐκτὸς τῶν Α, Α' καὶ ὡς πρὸς x δι' ὅλα ἐκτὸς τῶν Β, Β'.

Παράδειγμα (14.2). — Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ ἐξίσωσις $e^{x+y}+y = x$, ἐπιλύεται μονοσήμαντα ὡς πρὸς y ἢ x εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου $P(1/2, -1/2)$.

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $F = e^{x+y}+y-x$ εἶναι διαφορίσιμος, αἱ $F_x = e^{x+y}-1$, $F_y = e^{x+y}+1$ εἶναι συνεχεῖς καὶ $F_x(1/2, -1/2) = 0$, $F_y(1/2, -1/2) = 2$, ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις ἐπιλύεται μονοσήμαντα ὡς πρὸς y χωρὶς νὰ εἴμεθα βέβαιοι ἂν τὸ ἴδιο συμβαίνῃ καὶ ὡς πρὸς x.

Παράδειγμα (14.3). — Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σχετικὰ ἀκρότατα τῆς ἐπιλυούσης συναρτήσεως τῆς ἐξισώσεως τοῦ προηγουμένου παραδείγματος.

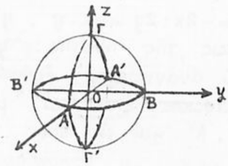
Λύσις. Ἡ πρώτη παράγωγος $y' = -(e^{x+y}-1) : (e^{x+y}+1)$ μηδενίζεται ὅταν εἶναι $e^{x+y}-1 = 0$ δηλαδὴ ὅταν $x+y = 0$ ἢ $y = -x$ ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν προκύπτει $1-2x = 0$, $x = 1/2$ καὶ $y = -1/2$. Παραγωγίζοντες τὴν πρώτην παράγωγον εὑρίσκομεν ὅτι $y''(1/2) < 0$, ἐπομένως διὰ $x = 1/2$ ἡ ἐπιλύουσα συνάρτησις λαμβάνει τὴν μεγίστην τιμὴν $y = -1/2$.

Παράδειγμα (14.4). — Νὰ ἐξετασθῇ ἐὰν ἐπιλύονται εἰς τὴν γειτονιὰ τῆς ἀρχῆς (0,0) οἱ ἐξισώσεις: $x^3+y^3 = 0$, $x^2+y^2 = 0$, $x^2-y^2 = 0$.

Λύσις. Τὸ διαφορίσιμον καὶ ἡ συνέχεια ὑπάρχουν καὶ διὰ τὶς τρεῖς εἶναι ὅμως δι' ὅλες $F(0,0) = F_x(0,0) = F_y(0,0) = 0$ καὶ κατὰ συνέπειαν δὲν εἴμεθα βέβαιοι ἐκ τῶν προτέρων διὰ τὴν μονοσήμαντον ἐπίλυσιν αὐτῶν. Ἐξετάζοντες ἀπ' εὐθείας τὶς ἐξισώσεις βλέπομεν ὅτι ἡ πρώτη ἐξ αὐτῶν ἐπιδέχεται τὴν μονοσήμαντον ἐπίλυσιν $y = -x$, ἡ δευτέρα ἔχει μόνον τὴν λύσιν $x = 0$, $y = 0$ καὶ ἡ τρίτη ἐπιδέχεται τὴν δισήμαντον ἐπίλυσιν $y = \pm x$. Ἀντίφασις μὲ τὴν θεωρία δὲν ὑπάρχει διότι ὅπως τονίσαμε οἱ προϋποθέσεις τῆς προτάσεως (14.1) εἶναι ἱκανὲς ἀλλὰ ὄχι καὶ ἀναγκαῖες.

Παράδειγμα (14.5). — Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ ἐξίσωσις τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2-1 = 0$ δύναται νὰ ἐπιλυθῇ ὡς πρὸς z.

Λύσις. Ἡ συνάρτησις $F = x^2+y^2+z^2-1$ εἶναι διαφορίσιμος καὶ ἡ $F_z = 2z$ συνεχής, ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις ἐπιλύεται μονοσήμαντα ὡς πρὸς z στὴν γειτονιὰ ὅλων τῶν σημείων διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $F_z \neq 0$ δηλαδὴ ὅταν εἶναι $z \neq 0$. Τά σημεῖα πού ἔχουν $z=0$ κεῖνται ἐπί τοῦ μεγίστου κύκλου $ABA'B'$ καί ὅπως φαίνεται εἰς τό σχ. (14.3) ἡ ἐξίσωσις εἰς τήν γειτονιά αὐτῶν ἐπιδέχεται δισήμαντον ἐπίλυσιν. Αἱ μερικαί παράγωγοι τῆς ἐπιλυούσης συναρτήσεως κατά τόν τύπον (14.11) εἶναι: $z_x = -F_x : F_z = -2x : 2z = -x : z$, $z_y = -F_y : F_z = -2y : 2z = -y : z$. Τό ἐξαγόμενον αὐτό τό ἐπαληθεύομεν ἐάν λύσωμεν τήν ἐξίσωσιν ὡς πρός z καί τήν προκύπτουσα ἐξίσωσιν $z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$ παραγωγίσωμεν μερικῶς ὡς πρός x, y. Τό πρόσημον $+$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τά σημεῖα τοῦ ἄνω ἡμισφαιρίου καί τό $-$ εἰς τά σημεῖα τοῦ κάτω.



Σχ. (14.3)

Παράδειγμα (14.6).— Νά δειχθῆ ὅτι ἡ συνάρτησις $z = z(x, y)$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπό πλεγμένην μορφήν ἀπό τήν ἐξίσωσιν $\varphi(z) = x\sigma(y)$, ἐπαληθεύει τήν σχέσιν: $z_x z_y = x(z_x \cdot z_{xy} - z_y \cdot z_{xx})$.

Λύσις. Παραγωγίζομεν τήν δοθεῖσα ἐξίσωσιν μερικῶς μία φορά ὡς πρός x, μία ὡς πρός y, δύο ὡς πρός x καί δύο ὡς πρός x, y ὁπότε προκύπτουν ἀντιστοίχως οἱ σχέσεις: $\varphi' \cdot z_x = \sigma$, $\varphi' z_y = x\sigma'$, $\varphi'' z_x^2 + \varphi' z_{xx} = 0$, $\varphi'' z_x \cdot z_y + \varphi' z_{xy} = \sigma'$. Ἐκ τῶν δύο τελευταίων διά διαιρέσεως καί ἀντικαταστάσεως τῆς σ' ἐκ τῆς δευτέρας προκύπτει: $z_x^2 : z_x z_y = -\varphi' z_{xx} : (\sigma' - \varphi' z_{xy}) = -\varphi' z_{xx} : (\frac{1}{x}\varphi' z_y - \varphi' z_{xy}) = -x z_{xx} : (z_y - x z_{xy})$· ἀπαλείφομεν τούς παρονομαστάς: $z_x^2 \cdot (z_y - x z_{xy}) = -x z_x z_y \cdot z_{xx}$, ἁπλοποιοῦμεν μέ z_x καί προκύπτει: $z_x z_y - x z_x \cdot z_{xy} = -x z_y \cdot z_{xx}$ ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται τό ζητούμενον.

Παράδειγμα (14.7).— Νά εὑρεθοῦν αἱ μερικαί παράγωγοι πρώτης καί δευτέρας τάξεως τῆς συναρτήσεως $u = u(x, y, z)$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπό πλεγμένην μορφήν ἀπό τήν ἐξίσωσιν: $e^{x+u} + uy + z = 0$.

Λύσις. Τό διαφορικόν καί ἡ συνέχεια ὑπάρχουν ἐπομένως ἔχομεν: $F_x = e^{x+u}$, $F_y = u$, $F_z = 1$, $F_u = e^{x+u} + y$ καί ἐξ αὐτῶν κατά τόν γενικόν τύπον (14.7) προκύπτουν αἱ μερικαί παράγωγοι πρώτης τάξεως: $u_x = -e^{x+u} : (e^{x+u} + y)$, $u_y = -u : (e^{x+u} + y)$, $u_z = -1 : (e^{x+u} + y)$. Διά τόν ὑπολογισμόν τῆς u_{xx} δυνάμεθα νά χρησιμοποιήσωμεν καταλλήλως τόν τύπον (14.9) ἢ καί ἀπ' εὐθείας ἄν παραγωγίσωμεν ὡς πρός x τήν u_x ὁπότε προκύπτει: $u_{xx} = -[e^{x+u} \cdot (e^{x+u} + y) - e^{x+u} e^{x+u}] : (e^{x+u} + y)^2 - u_x [e^{x+u} \cdot (e^{x+u} + y) - e^{x+u} \cdot e^{x+u}] : (e^{x+u} + y)^2 = \ldots = -(1 + u_x) y e^{x+u} : (e^{x+u} + y)^2$ καί ἀντικαθιστῶντες τήν u_x προκύπτει τελικῶς: $u_{xx} = -y^2 \cdot e^{x+u} : (e^{x+u} + y)^2$. Ὁμοίως ὑπολογίζονται καί αἱ λοιπαί παράγωγοι δευτέρας τάξεως.

Παράδειγμα (14.8).— Νά εὑρεθοῦν αἱ μερικαί παράγωγοι μέχρι καί δευτέρας τάξεως τῆς συναρτήσεως $Z(x, y)$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπό πλεγμένην μορφήν ἀπό τήν ἐξίσωσιν: $z^2 = xe^y + e^z$.

Λύσις. Γράφομεν $F = xe^y + e^z - z^2$ ὁπότε παραγωγίζοντες προκύπτει: $F_x = e^y$, $F_y = xe^y$, $F_z = e^z - 2z$, $F_{xx} = 0$, $F_{yy} = xe^y$, $F_{zz} = e^z - 2$, $F_{xy} = e^y$, $F_{yz} = 0$, $F_{zx} = 0$. Ἀντικαθιστῶντες αὐτὲς εἰς τοὺς τύπους (14.10), (14.11) καὶ ἐπιλύοντες ὡς πρὸς τὰς $z_x, \ldots, z_{yy}$ προκύπτει:

$$z_x = e^y : (2z - e^z) \qquad z_y = xe^y : (2z - e^z)$$

$$z_{xx} = e^{2y} \cdot (e^z - 2) : (2z - e^z)^3 \qquad z_{yy} = xe^y\left[(2z-e^z)^2 + xe^y(e^z-2)\right] : (2z-e^z)^3$$

$$z_{xy} = 2e^y\left[xe^y(e^z-2) + (2z-e^z)^2\right] : (2z-e^z)^3$$

Παράδειγμα (14.9). — Ἀναπτύξατε κατὰ Maclaurin τὴν συνάρτησιν $y(x)$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπὸ πλεγμένην μορφὴν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $y^3 - y + x = 0$, περιοριζόμενοι εἰς μερικοὺς ἐκ τῶν πρώτων ὅρων.

Λύσις. Διὰ διαδοχικῶν παραγωγίσεων τῆς ἐξισώσεως προκύπτει:

$$(3y^2-1)y' + 1 = 0$$

$$6yy'^2 + (3y^2-1)y'' = 0$$

$$6y'^3 + 18yy'y'' + (3y^2-1)y''' = 0$$

$$36y'^2y'' + 18yy''^2 + 24yy'y''' + (3y^2-1)y^{(4)} = 0.$$

$$90y'y''^2 + 60y'^2y''' + 60yy''y''' + 30yy'y^{(4)} + (3y^2-1)y^{(5)} = 0$$

$$90y''^3 + 360y'y''y''' + 90y'^2y^{(4)} + 60yy'''^2 + 90yy''y^{(4)} + 36yy'y^{(5)} + (3y^2-1)y^{(6)} = 0$$

$$630y''^2y''' + 420y'y'''^3 + 630y'y''y^{(4)} + 126y'^2y^{(5)} + 210yy'''y^{(4)} + 126yy''y^{(5)} + 42yy'y^{(6)} + (3y^2-1)y^{(7)} = 0$$

. . . .

Ἐὰν θέσωμεν εἰς τὴν δοθεῖσα ἐξίσωσιν $x = 0$ εὑρίσκομεν $y^3 - y = 0$ ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει $y = 0$, $y = 1$, $y = -1$. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τρία ἀναπτύγματα ἀντίστοιχα εἰς τὰ ζεύγη $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$.

Διὰ τὸ πρῶτον ζεῦγος ἐκ τῶν προηγουμένων ἐξισώσεων προκύπτει:

$$y'(0) = 1 \qquad y''(0) = 0 \qquad y'''(0) = 6 \qquad y^{(4)}(0) = 0$$

$$y^{(5)}(0) = 360 \qquad y^{(6)}(0) = 0 \qquad y^{(7)}(0) = 60480$$

Ἑπομένως τὸ ἀντίστοιχον ἀνάπτυγμα κατὰ Maclaurin θὰ εἶναι:

$$y = x + x^3 + 3x^5 + 12x^7 + \ldots$$

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν διὰ τὸ δεύτερον καὶ τρίτον ζεῦγος ἀντιστοίχως:

$$y = 1 - \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{8} - \frac{8x^3}{16} - \ldots$$

$$y = -1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{8x^3}{16} + \ldots$$

15. Ἐπίλυσις συστήματος ἐξισώσεων. — Ἡ ἐκτεθεῖσα θεωρία διὰ μίαν ἐξίσωσιν γενικεύεται ἐπίσης εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἑνὸς συστήματος ν-ἐξισώσεων τῆς μορφῆς:

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, \ldots, x_\mu;\ y_1, \ldots, y_\nu) = 0 \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &F_\nu(x_1, \ldots, x_\mu;\ y_1, \ldots, y_\nu) = 0 \end{aligned} \qquad (15 \cdot 1)$$

ὡς πρὸς ν– ἐκ τῶν μεταβλητῶν τὶς ὁποῖες περιέχει π.χ. ὡς πρὸς $y_1, \ldots, y_\nu$. Διὰ συντομίαν τὴν μερικὴν παράγωγον $\partial F_i/\partial y_j$ θὰ τὴν παριστάνωμεν μὲ τὸ σύμβολον F_{ij} καὶ τὴν συναρτησιακὴν ὁρίζουσαν ν–τάξεως $\|F_{ij}\|$ θὰ τὴν παριστάνομεν συντόμως μὲ τὸ σύμβολον J ἢ μὲ τὸ $\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_\nu)}{\partial(y_1,\ldots,y_\nu)}$, δηλαδὴ θὰ εἶναι:

$$J = J(x_1,\ldots,x_\mu\,;\,y_1,\ldots,y_\nu) = \frac{\partial(F_1,\ldots,F_\nu)}{\partial(y_1,\ldots,y_\nu)} = \begin{vmatrix} F_{11} & \cdots & F_{1\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{\nu 1} & \cdots & F_{\nu\nu} \end{vmatrix}, \qquad (15.2)$$

Ἡ ὁρίζουσα αὐτὴ λέγεται Jacobien τῶν ν–συναρτήσεων $F_1,\ldots,F_\nu$ ὡς πρὸς τὶς μεταβλητὲς $y_1,\ldots,y_\nu$.

Ἀποδεικνύεται λοιπὸν ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ὡς πρὸς τὸν δείκτην ν ἡ ἑξῆς γενικὴ πρότασις:

Πρότασις (15.1).— *Ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον $P(a_1,\ldots,a_\mu\,;\,\beta_1,\ldots,\beta_\nu)$ τοῦ $R_{\mu+\nu}$ ἀναλυτικοῦ χώρου τῶν $x_1,\ldots,x_\mu\,;\,y_1,\ldots,y_\nu$ εἶναι $F_i(a_1,\ldots a_\mu\,;\,\beta_1,\ldots,\beta_\nu)=0$, $J(a_1,\ldots,a_\mu\,;\,\beta_1,\ldots,\beta_\nu)\neq 0$ καὶ διὰ μίαν γειτονιὰν αὐτοῦ οἱ συναρτήσεις $F_i(x_1,\ldots,x_\mu\,;\,y_1,\ldots,y_\nu)$ εἶναι διαφορίσιμες καὶ αἱ μερικαὶ αὐτῶν παράγωγοι $F_{ij}(x_1,\ldots,x_\mu\,;\,y_1,\ldots,y_\nu)$ συνεχεῖς, τότε ὑπάρχει μία κατάλληλος γειτονιὰ τοῦ σημείου P εἰς τὴν ὁποίαν τὸ σύστημα (15.1) ἐπιλύεται μονοσήμαντα, οἱ ἐπιλύουσες συναρτήσεις $y_i = y_i(x_1,\ldots,x_\mu)$ εἶναι διαφορίσιμες εἰς αὐτήν, διὰ $x_1=a_1,\ldots,x_\mu=a_\mu$ λαμβάνουν τὶς τιμὲς $y_1=\beta_1,\ldots,y_\nu=\beta_\nu$ καὶ αἱ μερικαὶ αὐτῶν παράγωγοι $\partial y_i/\partial x_j$ προκύπτουν ὅταν παραγωγίσωμεν τὸ (15.1) μερικῶς ὡς πρὸς x_j*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial x_j} + F_{11}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + F_{12}\frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \ldots + F_{1\nu}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_j} = 0 \\ &\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &\frac{\partial F_\nu}{\partial x_j} + F_{\nu 1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + F_{\nu 2}\frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \ldots + F_{\nu\nu}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_j} = 0 \end{aligned} \qquad (15.3)$$

καὶ τὸ προκύπτον σύστημα ἐπιλύσωμεν ὡς πρὸς $\partial y_i/\partial x_j$

Ἂς θεωρήσωμεν π.χ. τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων:

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= 0 \\ \Phi(x,y,z) &= 0 \end{aligned} \qquad (15.4)$$

Ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον $P(a,\beta,\gamma)$ εἶναι $F(P)=\Phi(P)=0$, $J(P)=F_y\Phi_z - F_z\Phi_y \neq 0$ καὶ διὰ μίαν γειτονιὰν αὐτοῦ οἱ F,Φ διαφορίσιμες καὶ οἱ F_y, F_z,

Φ_y, Φ_z συνεχεῖς, τότε τὸ σύστημα ἐπιδέχεται εἰς κατάλληλον γειτονιάν τοῦ P τὴν μονοσήμαντον ἐπίλυσιν $y = y(x)$, $z = z(x)$ διὰ τὶς ὁποῖες εἶναι $\beta = y(a)$, $\gamma = z(a)$ καὶ τῶν ὁποίων αἱ παράγωγοι ὡς πρὸς x προκύπτουν ὡς ἑξῆς: Παραγωγίζομεν τὸ σύστημα (15.4) ὡς πρὸς x θεωροῦντες τὰ πρῶτα μέλη αὐτῶν ὡς συνθέτους συναρτήσεις τῆς x, ὁπότε προκύπτει:

$$F_x + y'F_y + z'F_z = 0$$
$$\Phi_x + y'\Phi_y + z'\Phi_z = 0$$

Μεταφέροντες τὰς F_x, Φ_x εἰς τὰ δεύτερα μέλη καὶ ἐπιλύοντες ὡς πρὸς y', z' κατὰ Grammer προκύπτει:

$$y' = \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \Phi_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & F_z \end{vmatrix} \qquad z' = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}$$

Οἱ τύποι αὐτοὶ δύνανται νὰ γραφοῦν ὑπὸ τὴν συμμετρικὴν μορφήν:

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}} = \frac{dy}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \Phi_x \end{vmatrix}} = \frac{dz}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix}} \tag{15.5}$$

Μὲ ὅμοιον τρόπον πραγματευόμεθα τὴν ἐπίλυσιν τοῦ συστήματος (15.4) ὡς πρὸς z, x καὶ x, y. Αἱ παράγωγοι τῶν ἐπιλυουσῶν συναρτήσεων δίδονται πάλι ἀπὸ τοὺς τύπους (15.5).

Ἂς θεωρήσωμεν ἐπίσης καὶ τὸ σύστημα:

$$F(x, y; u, v) = 0$$
$$\Phi(x, y; u, v) = 0 \tag{15.6}$$

Ἐὰν πληροῦνται αἱ ἀντίστοιχοι προϋποθέσεις τὸ σύστημα αὐτὸ δύναται νὰ ἐπιλυθῇ ὡς πρὸς u, v καὶ αἱ μερικαὶ παράγωγοι τῶν ἐπιλυουσῶν συναρτήσεων: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ προκύπτουν ὡς ἑξῆς: Παραγωγίζομεν τὸ σύστημα μερικῶς ὡς πρὸς x καὶ ὡς πρὸς y, θεωροῦντες τὰ πρῶτα μέλη ὡς συνθέτους συναρτήσεις τῶν x, y ὁπότε προκύπτει:

$$F_x + F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = 0 \qquad F_y + F_u u_y + F_v v_y = 0$$
$$\Phi_x + \Phi_u \cdot u_x + \Phi_v \cdot v_x = 0 \qquad \Phi_y + \Phi_u u_y + \Phi_v v_y = 0$$

Μεταφέροντες τὰς F_x, Φ_x καὶ F_y, Φ_y εἰς τὰ δεύτερα μέλη καὶ ἐπιλύοντες τὰ δύο συστήματα κατὰ Grammer ὡς πρὸς u_x, v_x καὶ u_y, v_y προκύπτει:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(v,x)} : \frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(u,v)} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(v,y)} : \frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(u,v)}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(x,u)} : \frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(u,v)} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(y,u)} : \frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(u,v)} \tag{15.7}$$

Μία ἐνδιαφέρουσα ἐφαρμογὴ τῆς προτάσεως (15·1) γίνεται εἰς τὴν ἀντιστροφὴν ἑνὸς συστήματος συναρτήσεων μετὰ ἰσαρίθμων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. Δηλαδὴ ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sigma_1(x_1, \ldots, x_\nu) \\ &\cdots\cdots \\ y_\nu &= \sigma_\nu(x_1, \ldots, x_\nu) \end{aligned} \qquad (15.8)$$

ὅπου $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$ μονοσήμαντες συναρτήσεις τῶν $x_1, \ldots, x_\nu$ καὶ ἂς ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν ἕνα σύστημα ἱκανῶν συνθηκῶν αἱ ὁποῖες νὰ μᾶς ἐξασφαλίζουν τὴν ὕπαρξιν ν-μονοσημάντων συναρτήσεων $\varphi_1(y_1, \ldots, y_\nu)$, $\ldots \varphi_\nu(y_1, \ldots, y_\nu)$ μὲ τὴν ἰδιότητα οἱ συναρτήσεις αὐτὲς ὅταν τεθοῦν στὶς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (15·8) ἀντιστοίχως εἰς τὴν θέσιν τῶν $x_1, \ldots, x_\nu$ νὰ τὶς ταυτοποιοῦν τοὐλάχιστον σὲ μιὰ γειτονιὰ ἑνὸς σημείου τοῦ χώρου τῶν $y_1, \ldots, y_\nu$. Πρὸς τοῦτο γράφομεν τὸ σύστημα (15·8) ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \sigma_1(x_1, \ldots, x_\nu) - y_1 = 0 \\ &\cdots\cdots \\ F_\nu &\equiv \sigma_\nu(x_1, \ldots, x_\nu) - y_\nu = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

καὶ ἐφαρμόζομεν εἰς αὐτὸ τὴν πρότασιν (15·1) διὰ νὰ ἐπιλύεται μονοσήμαντα εἰς τὴν γειτονιὰ τοῦ σημείου $P(a_1, \ldots, a_\nu; \beta_1, \ldots, \beta_\nu)$ τοῦ $R_{2\nu}$ ἀναλυτικοῦ χώρου τῶν $x_1, \ldots, x_\nu; y_1, \ldots, y_\nu$, ὅπου εἶναι:

$$\beta_i = \sigma_i(a_1, \ldots, a_\nu) \qquad (2)$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ σύστημα ἐπιλύσιμον πρέπει νὰ εἶναι:

$$F_i(a_1, \ldots, a_\nu; \beta_1, \ldots, \beta_\nu) = 0$$

τὸ ὁποῖον συμβαίνει ἕνεκα τῶν (2) καὶ εἰς τὸ σημεῖον P ἡ συναρτησιακὴ ὁρίζουσα τῶν F_i ὡς πρὸς x_i νὰ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενὸς δηλαδὴ νὰ εἶναι:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial F_\nu}{\partial x_\nu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial F_\nu}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial F_\nu}{\partial x_\nu} \end{vmatrix} \neq 0$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἕνεκα τῶν ἐξισώσεων (1) εἶναι: $\partial F_i/\partial x_i = \partial \sigma_i/\partial x_i$, ἡ προηγουμένη συνθήκη γράφεται:

$$J(a_1, \ldots, a_\nu) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial x_\nu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial \sigma_\nu}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial \sigma_\nu}{\partial x_\nu} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (15.9)$$

ὅπου αἱ μερικαὶ παράγωγοι λαβάνονται εἰς τὸ σημεῖον $A(a_1, \ldots, a_\nu)$. Ἐπίσης κατὰ τὴν πρότασιν (15.1) θὰ πρέπῃ οἱ συναρτήσεις F_i νὰ εἶναι διαφορίσιμες τὸ ὁποῖον σημαίνει ἕνεκα τῶν (1) ὅτι θὰ πρέπῃ οἱ συναρτήσεις σ_i νὰ εἶναι διαφορίσιμες καὶ τέλος θὰ πρέπῃ αἱ μερικαὶ παράγωγοι $\partial F_i/\partial x_j$ νὰ εἶναι συνεχεῖς τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι θὰ πρέπῃ αἱ μερικαὶ παράγωγοι $\partial \sigma_i/\partial x_j$ νὰ εἶναι συνεχεῖς. Ἐπειδὴ ὅμως ὅταν αἱ μερικαὶ παράγωγοι συναρτήσεως εἶναι συνεχεῖς, αὐτὴ εἶναι διαφορίσιμος ἀρκεῖ ἡ συνέχεια καὶ ἔτσι προκύπτει ἡ ἑξῆς γενικὴ πρότασις:

Πρότασις (15.2). — *Ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον $A(a_1, \ldots, a_\nu)$ τοῦ ν-διαστάτου ἀναλυτικοῦ χώρου τῶν $x_1, \ldots, x_\nu$ εἶναι $\beta_i = \sigma_i(a_1, \ldots, a_\nu)$, $J(a_1, \ldots, a_\nu) \neq 0$ καὶ διὰ μίαν γειτονιὰν αὐτοῦ οἱ συναρτήσεις $\sigma_i(x_1, \ldots, x_\nu)$ ἔχουν συνεχεῖς μερικὰς παραγώγους, τότε ὑπάρχει ἕνα σύστημα ν-μονοσημάντων συναρτήσεων $x_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_\nu)$ οἱ ὁποῖες τοὐλάχιστον σὲ μιὰ γειτονιὰ τοῦ σημείου $B(\beta_1, \ldots, \beta_\nu)$ ταυτοποιοῦν τὸ σύστημα (15.8), ἔχουν συνεχεῖς μερικὰς παραγώγους εἰς αὐτήν, εἶναι $a_i = \varphi_i(\beta_1, \ldots, \beta_\nu)$ καὶ λέγονται ἀντίστροφες τῶν συναρτήσεων $\sigma_i(x_1, \ldots, x_\nu)$.*

Ἐπειδὴ οἱ συναρτήσεις σ_i ὑπετέθησαν μονοσήμαντες, τὸ σύστημα (15.8) ἀντιστοιχίζει σὲ ἕνα σημεῖον $M(x_1, \ldots, x_\nu)$ τοῦ χώρου τῶν $x_1, \ldots, x_\nu$ ἕνα μόνον σημεῖον $N(y_1, \ldots, y_\nu)$ τοῦ χώρου τῶν $y_1, \ldots, y_\nu$. Ἡ ἀντιστοιχία αὐτὴ λέγεται μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ ν-διαστάτου ἀναλυτικοῦ χώρου τῶν $x_1, \ldots, x_\nu$ εἰς τὸν ν-διάστατον ἀναλυτικὸν χῶρον τῶν $y_1, \ldots, y_\nu$, τὸ σημεῖον N λέγεται εἰκόνα τοῦ M καὶ αὐτὸ ἀρχέτυπον τοῦ N. Ὑπὸ τὶς προϋποθέσεις τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἡ ἀντιστοιχία τῶν δύο χώρων στὶς γειτονιὲς δύο ἀντιστοίχων σημείων αὐτῶν A, B λέγεται ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία ἢ ἀπεικόνισις διότι ὄχι μόνον σὲ κάθε σημεῖον M τῆς γειτονιᾶς τοῦ A ἀντιστοιχεῖ ἕνα σημεῖον N τῆς γειτονιᾶς τοῦ B, ἀλλὰ διότι καὶ σὲ κάθε σημεῖον N ἀντιστοιχεῖ ἕνα μόνον σημεῖον M. Ἕνα σύστημα ἐξισώσεων τῆς μορφῆς (15.8) λέγομεν ἐπίσης ὅτι ὁρίζει ἕναν σημειακὸν μετασχηματισμόν.

Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸν μετασχηματισμὸν εἰς πολικὲς συντεταγμένες

$$x = \rho\,\text{συν}\,\theta, \quad y = \rho\,\text{ημ}\,\theta \qquad (0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi) \tag{15.10}$$

Οἱ προϋποθέσεις συνεχείας πληροῦνται καὶ ἡ Jacobien αὐτοῦ:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \text{συν}\,\theta & -\rho\,\text{ημ}\,\theta \\ \text{ημ}\,\theta & \rho\,\text{συν}\,\theta \end{vmatrix} = \rho \tag{15.11}$$

εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός διά κάθε σημεῖον $(x_0, y_0, \rho_0, \theta_0)$ διά τό ὁποῖον $\rho_0 \neq 0$, ἑπομένως τό σύστημα (15.10) εἶναι ἀντιστρέψιμον καί ἔχομεν στήν γειτονιά κάθε τέτοιου σημείου μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τῶν ἐπιπέδων τῶν x, y καί ρ, θ. Ἀπό τό σύστημα (15.10) προκύπτουν εὐκόλως οἱ ἀντίστροφες συναρτήσεις :

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \text{τοξεφ}\,\frac{y}{x} \qquad (x^2+y^2 \neq 0) \tag{15.12}$$

Ἐπίσης ἄς θεωρήσωμεν τόν μετασχηματισμόν εἰς σφαιρικές συντεταγμένες :

$$x = \rho\,\text{συν}\,\theta\,\text{συν}\varphi, \quad y = \rho\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\varphi, \quad z = \rho\,\text{ημ}\varphi \qquad (0 \leq \rho < \infty, \; 0 \leq \vartheta < 2\pi, \; -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2) \tag{15.13}$$

Οἱ προϋποθέσεις συνεχείας πληροῦνται καί ἡ Jacobien αὐτοῦ :

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\vartheta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \text{συν}\theta\,\text{συν}\varphi & -\rho\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\varphi & -\rho\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\varphi \\ \text{ημ}\theta\,\text{συν}\varphi & \rho\,\text{συν}\theta\,\text{συν}\varphi & -\rho\,\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\varphi \\ \text{ημ}\varphi & 0 & \rho\,\text{συν}\varphi \end{vmatrix} = \ldots = \rho^2\text{συν}\varphi \tag{15.14}$$

εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός διά κάθε σημεῖον $(x_0, y_0, z_0, \rho_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ διά τό ὁποῖον εἶναι $\rho_0 \neq 0$, $\varphi_0 \neq \frac{\pi}{2}$, ἑπομένως τό σύστημα (15.13) εἶναι ἀντιστρέψιμον καί ἔχομεν στήν γειτονιά κάθε τέτοιου σημείου μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ χώρου τῶν x, y, z καί ρ, ϑ, φ. Ἀπό τό σύστημα (15.13) προκύπτουν εὐκόλως οἱ ἀντίστροφες συναρτήσεις

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \vartheta = \text{τοξεφ}\,\frac{y}{x} \;\; (x^2+y^2 \neq 0), \quad \varphi = \text{τοξημ}\,\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{15.15}$$

Παράδειγμα (15.1).— Νά ἐξετασθῆ ἐάν ἐπιλύεται ὡς πρός u, v τό σύστημα : $x+y^3+u^3+v^3-2=0$, $x^3+y-u^4+v^4=0$ στήν γειτονιά τοῦ σημείου $P(x=0,\; y=0,\; u=1,\; v=1)$ καί εἰς καταφατικήν ἀπάντησιν νά ὑπολογισθοῦν εἰς αὐτό αἱ μερικαί παράγωγοι u_x, v_x, u_y, v_y.

Λύσις. Οἱ συναρτήσεις $F = x+y^3+u^3+v^3-2$, $\Phi = x^3+y-u^4+v^4$ εἶναι προφανῶς διαφορίσιμες καί αἱ μερικαί παράγωγοι $F_u = 3u^2$, $F_v = 3v^2$, $\Phi_u = -4u^3$, $\Phi_v = 4v^3$ εἶναι συνεχεῖς. Ἐπειδή δέ εἶναι $F(0,0,1,1)=0$, $\Phi(0,0,1,1)=0$ καί ἡ Ἰακωβιανή $J = F_u\Phi_v - F_v\Phi_u = 12u^2v^3+12u^3v^2$ εἰς τό P ἔχει τήν τιμήν $J(0,0,1,1) = 24 \neq 0$, τό σύστημα ἐπιλύεται μονοσήμαντα ὡς πρός u, v στήν γειτονιά τοῦ P καί αἱ μερικαί παράγωγοι αὐτῶν κατά τούς τύπους (15.7) εἶναι :

$$u_x = (9x^2v^2 - 4v^3) : 12u^2v^2(u+v) \qquad u_y = (v^2 - 4y^2v^3) : 4u^2v^2(u+v)$$
$$v_x = -(9x^2u^2 + 4u^3) : 12u^2v^2(u+v) \qquad v_y = -(u^2 + 4y^2u^3) : 4u^2v^2(u+v)$$

Αἱ τιμαὶ αὐτῶν εἰς τὸ σημεῖον P εἶναι $u_x = v_x = -1/6$, $u_y = -v_y = 1/8$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι τὸ δοθὲν σύστημα ἐπιλύεται μονοσήμαντα εἰς τὴν γειτονιὰ κάθε σημείου $P(x_o, y_o, u_o, v_o)$ διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $u_o^2 v_o^2 (u_o + v_o) \neq 0$.

Παράδειγμα (15.2). — Νὰ ἐφαρμοσθῆ ἡ θεωρία τῆς ἀντιστροφῆς εἰς τὸ σύστημα ἐξισώσεων: $x = u + \frac{1}{2}\text{συν}v$, $y = v + \frac{1}{2}\text{συν}u$.

Λύσις. Οἱ προϋποθέσεις συνεχείας πληροῦνται προφανῶς ἕνεκα τῆς φύσεως τῶν συναρτήσεων ἡ δὲ Ἰακωβιανὴ τοῦ συστήματος εἶναι:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\text{ημ}v \\ -\frac{1}{2}\text{ημ}u & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{4}\text{ημ}u\,\text{ημ}v$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω ὁρίζουσα δὲν μηδενίζεται διὰ κανένα πραγματικὸν σημεῖον (u_o, v_o), ἑπομένως τὸ σύστημα εἶναι ἀντιστρέψιμον στὴν γειτονιὰ κάθε σημείου (x_o, y_o, u_o, v_o) ὅπου $x_o = u_o + \frac{1}{2}\text{συν}v_o$, $y_o = v_o + \frac{1}{2}\text{συν}u_o$, δηλαδὴ αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὑπάρχουν δύο μονοσήμαντες συναρτήσεις: $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ οἱ ὁποῖες ταυτοποιοῦν τὸ σύστημα στὴν γειτονιὰ κάθε σημείου (x_o, y_o), δηλαδὴ

$$x \equiv u(x,y) + \tfrac{1}{2}\text{συν}\,v(x,y) \quad , \quad y \equiv v(x,y) + \tfrac{1}{2}\text{συν}\,u(x,y)$$

Παράδειγμα (15.3). — Ὁμοίως διὰ τὸ σύστημα:

$$u = x^2 - 2y, \quad v = x + y$$

Λύσις. Οἱ προϋποθέσεις συνεχείας πληροῦνται πάλι ἕνεκα τῆς φύσεως τῶν συναρτήσεων ἡ δὲ Ἰακωβιανὴ τοῦ συστήματος εἶναι:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x+1)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω ὁρίζουσα μηδενίζεται μόνον ὅταν $x = -1$, ἑπομένως εἰς τὴν γειτονιὰ κάθε σημείου μὲ $x \neq -1$, τὸ σύστημα εἶναι ἀντιστρέψιμον. Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ εἶναι εὔκολον νὰ εὕρωμεν καὶ τὶς ἀντίστροφες συναρτήσεις. Πράγματι ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν δευτέρα τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ 2 καὶ προσθέσωμεν κατὰ μέλη προκύπτει $u + 2v = x^2 + 2x$ ἐκ τῆς ὁποίας ἐπιλύοντες ὡς πρὸς x προκύπτει $x = -1 \pm \sqrt{1+u+2v}$ καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν δευτέραν θὰ ἔχωμεν $y = v + 1 \mp \sqrt{1+u+2v}$. Προφανῶς τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῶν ἀντιστρόφων συναρτήσεων ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ σημειοσύνολον τοῦ ἐπιπέδου τῶν u, v διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $1 + u + 2v \geqslant 0$.

Παράδειγμα (15.4). — Ἐὰν εἶναι $z = u \cdot v$ καὶ $u^2 + v^2 - x - y = 0$, $u^2 - v^2 + 3x + y = 0$ νὰ εὑρεθῆ ἡ μερικὴ παράγωγος z_x.

Λύσις. Ἔχομεν $z_x = uv_x + vu_x$ καὶ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν u_x, v_x χρησιμοποιοῦμεν τοὺς τύπους (15.7) ἢ ἐὰν δὲν τοὺς ἐνθυμούμεθα παραγωγίζομεν τὶς δύο ἐξισώσεις ὡς πρὸς x:

$$2uu_x + 2\upsilon\upsilon_x - 1 = 0 \quad , \quad 2uu_x - 2\upsilon\upsilon_x + 3 = 0$$

καὶ ἐπιλύομεν τὸ προκύπτον σύστημα ὡς πρὸς u_x, υ_x ὁπότε ἔχομεν: $u_x = -1:2u$, $\upsilon_x = 1:\upsilon$ καὶ ἀντικαθιστῶντες αὐτὰς προκύπτει $z_x = u:\upsilon - \upsilon:2u$. Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν ἐὰν λύσωμεν τὶς δύο ἐξισώσεις ὡς πρὸς u, υ ἀντικαταστήσωμεν αὐτὲς εἰς τὴν $z = u\upsilon$ καὶ παραγωγίσωμεν ὡς πρὸς x.

Παράδειγμα (15.5).— Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως τῶν συναρτήσεων $y(x)$, $z(x)$ οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ὑπὸ πλεγμένην μορφὴν ἀπὸ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων:

$$\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y + \sigma\upsilon\nu z - \alpha = 0 \quad , \quad x^3 + y^3 + z^3 - \beta = 0 .$$

Λύσις. Παριστάνοντες τὰ πρῶτα μέλη αὐτῶν ἀντιστοίχως μὲ F, Φ θὰ ἔχωμεν: $F_x = -\eta\mu x$, $F_y = -\eta\mu y$, $F_z = -\eta\mu z$, $\Phi_x = 3x^2$, $\Phi_y = 3y^2$, $\Phi_z = 3z^2$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (15.5) προκύπτει:

$$y' = dy : dx = (x^2\eta\mu z - z^2\eta\mu x):(z^2\eta\mu y - y^2\eta\mu z)$$

$$z' = dz : dx = (y^2\eta\mu x - x^2\eta\mu y):(z^2\eta\mu y - y^2\eta\mu z)$$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν παραγώγων δευτέρας τάξεως παραγωγίζομεν αὐτὲς ὡς πρὸς x λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι οἱ y, z εἶναι συναρτήσεις τῆς x. Παριστάνοντες μὲ A τὸν κοινὸν παρονομαστὴν τῶν y', z' καὶ μὲ B, Γ ἀντιστοίχως τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν προκύπτει τελικῶς:

$$y'' = [A^2(2x\eta\mu z - z^2\sigma\upsilon\nu x) + B^2(2y\eta\mu z - z^2\sigma\upsilon\nu y) + \Gamma^2(2z\eta\mu z - z^2\sigma\upsilon\nu z)] : A^3$$

$$z'' = [A^2(y^2\sigma\upsilon\nu x - 2x\eta\mu y) + B^2(y^2\sigma\upsilon\nu y - 2y\eta\mu y) + \Gamma^2(y^2\sigma\upsilon\nu z - 2z\eta\mu y)] : A^3$$

Παράδειγμα (15.6).— Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ μερικαὶ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων z, u, υ οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ὑπὸ πλεγμένην μορφὴν ἀπὸ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων:

$$x + y + z = \ln(u + \upsilon) \,,\quad x + y + u = \ln(\upsilon + z) \,,\quad x + y + \upsilon = \ln(z + u)$$

ἐπαληθεύουν τὶς σχέσεις: $z_x = z_y$, $u_x = u_y$, $\upsilon_x = \upsilon_y$.

Λύσις. Παραγωγίζομεν τὶς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος μερικῶς ὡς πρὸς x, y λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι οἱ z, u, υ εἶναι συναρτήσεις τῶν x, y ὁπότε προκύπτει:

$$1 + z_x = (u_x + \upsilon_x) : (u + \upsilon) \,,\quad 1 + u_x = (\upsilon_x + z_x):(\upsilon + z) \,,\quad 1 + \upsilon_x = (z_x + u_x):(z + u)$$

$$1 + z_y = (u_y + \upsilon_y) : (u + \upsilon) \,,\quad 1 + u_y = (\upsilon_y + z_y):(\upsilon + z) \,,\quad 1 + \upsilon_y = (z_y + u_y):(z + u)$$

Αἱ μερικαὶ παράγωγοι ὡς πρὸς x θὰ εὑρεθοῦν δι' ἐπιλύσεως τοῦ πρώτου συστήματος καὶ αἱ παράγωγοι ὡς πρὸς y δι' ἐπιλύσεως τοῦ δευτέρου. Παρατηροῦντες ὅτι τὸ δεύτερον σύστημα προκύπτει ἀπὸ τὸ πρῶτον ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸν δείκτην παραγωγίσεως x μὲ τὸν y, προκύπτει ἡ ἀλήθεια τῶν πρὸς ἀπόδειξιν σχέσεων.

16. Συναρτησιακαὶ ὁρίζουσαι.— Ἂν οἱ μεταβλητὲς u, υ εἶναι συναρτήσεις τῶν x, y καὶ αὐτὲς συναρτήσεις τῶν ξ, η θὰ δείξωμεν ὅτι:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} \qquad (16.1)$$

Διά νά τό ἀποδείξωμεν σχηματίζομεν τό γινόμενον τῶν ὁριζουσῶν

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}=\begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{vmatrix}$$

ὁπότε δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κανόνος πολλαπλασιασμοῦ ὁριζουσῶν προκύπτει:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}=\begin{vmatrix} u_x x_\xi+u_y y_\xi & u_x x_\eta+u_y y_\eta \\ v_x x_\xi+v_y y_\xi & v_x x_\eta+v_y y_\eta \end{vmatrix}$$

Ἐπειδή ὅμως οἱ u, v εἶναι σύνθετες συναρτήσεις τῶν ξ, η διά μέσου τῶν x, y θά ἔχωμεν κατά τόν τύπον (7.3) τίς σχέσεις:

$$u_\xi=u_x x_\xi+u_y y_\xi, \ldots, v_\eta=v_x x_\eta+v_y y_\eta$$

ὁπότε ἀντικαθιστῶντες αὐτές εἰς τήν ὁρίζουσα προκύπτει ἡ ἀλήθεια τοῦ τύπου (16.1).

Ὁ τύπος (16.1) ἰσχύει καί ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὅταν ν-μεταβλητές: $u_1, \ldots, u_\nu$ εἶναι συναρτήσεις τῶν $y_1, \ldots, y_\nu$ καί αὐτές συναρτήσεις τῶν $x_1, \ldots, x_\nu$ ὁπότε ἔχομεν τόν γενικόν τύπον:

$$\boxed{\frac{\partial(u_1,\ldots,u_\nu)}{\partial(x_1,\ldots,x_\nu)}=\frac{\partial(u_1,\ldots,u_\nu)}{\partial(y_1,\ldots,y_\nu)}\cdot\frac{\partial(y_1,\ldots,y_\nu)}{\partial(x_1,\ldots,x_\nu)}} \qquad (16.2)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ τύπος αὐτός δύναται νά θεωρηθῆ ὡς γενίκευσις τοῦ τύπου παραγωγίσεως συνθέτων συναρτήσεων:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$$

Ἐάν τώρα θεωρήσωμεν τήν μερικήν περίπτωσιν κατά τήν ὁποίαν $u_1=x_1, \ldots, u_\nu=x_\nu$, τό ἀριστερόν μέλος τῆς (16.2) εἶναι μία ὁρίζουσα μέ τά στοιχεῖα τῆς πρωτευούσης διαγωνίου ἴσα μέ 1 καί τά ὑπόλοιπα μέ μηδέν, ἑπομένως ἰσοῦται μέ 1 καί ἔχομεν τήν σχέσιν:

$$\frac{\partial(x_1,\ldots,x_\nu)}{\partial(y_1,\ldots,y_\nu)}\cdot\frac{\partial(y_1,\ldots,y_\nu)}{\partial(x_1,\ldots,x_\nu)}=1 \qquad (16.3)$$

Ἡ σχέσις αὐτή λέγει ὅτι τό γινόμενον τῶν Jacobien δύο ἀντιστρόφων συστημάτων συναρτήσεων ἰσοῦται μέ 1.

Θά κλείσωμεν τό θεωρητικόν μέρος διά μιᾶς προτάσεως ἡ ὁποία εἶναι χρήσιμη εἰς πολλά ζητήματα.

Πρότασις (16.1).— *Ἐάν οἱ συναρτήσεις $u_1=u_1(x_1,\ldots,x_\nu), \ldots, u_\nu=u_\nu(x_1,\ldots,x_\nu)$ ἔχουν συνεχεῖς μερικάς παραγώγους ἐπί ἑνός χωρίου Ω τοῦ χώρου τῶν $x_1,\ldots,x_\nu$, τότε ἵνα μεταξύ αὐτῶν ὑπάρχῃ σχέσις τῆς μορφῆς $\sigma(u_1,\ldots,u_\nu)=0$, πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ Jacobien αὐτῶν νά εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν ἐπί τοῦ Ω, δηλαδή:*

$$\frac{\partial(u_1, \ldots, u_\nu)}{\partial(x_1, \ldots, x_\nu)} = 0 \qquad (16.4)$$

Εἰδικώτερον ἐάν οἱ ἐλλάσσονες ὁρίζουσες τῆς Jacobien τάξεων $\nu-1, \ldots, \nu-\mu+1$ εἶναι μηδέν καί μία τούλάχιστον τάξεως $\nu-\mu$ διάφορος τοῦ μηδενός, τότε μεταξύ τῶν συναρτήσεων ὑπάρχουν μ-σχέσεις τῆς μορφῆς $\sigma(u_1, \ldots, u_\nu) = 0$.

Ὅτι ἡ συνθήκη (16.4) εἶναι ἀναγκαία φαίνεται ἀμέσως ὡς ἑξῆς: Παραγωγίζομεν τήν σχέσιν $\sigma(u_1, \ldots, u_\nu) = 0$ μερικῶς ὡς πρός $x_1, \ldots, x_\nu$ ὁπότε προκύπτει :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial\sigma}{\partial u_\nu} \cdot \frac{\partial u_\nu}{\partial x_1} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_\nu} + \cdots + \frac{\partial\sigma}{\partial u_\nu} \cdot \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\nu} = 0$$

Ἐπειδή ἡ $\sigma = 0$ περιέχει τούλάχιστον μίαν ἐκ τῶν μεταβλητῶν $u_1, \ldots, u_\nu$ θά εἶναι τουλάχιστον μία ἐκ τῶν μερικῶν παραγώγων $\partial\sigma/\partial u_i$ διάφορος τοῦ μηδενός, ἑπομένως τό ἀνωτέρω ὁμογενές σύστημα μέ ἀγνώστους τάς ἐν λόγω παραγώγους θά ἔχη λύσιν μή μηδενικήν, ὁπότε κατά τήν θεωρίαν τῶν γραμμικῶν συστημάτων πρέπει ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν αὐτοῦ δηλαδή ἡ Ἰακωβιανή $\partial(u_1, \ldots, u_\nu) : \partial(x_1, \ldots, x_\nu)$ νά εἶναι μηδέν. Τό ὑπόλοιπον μέρος τῆς ἀποδείξεως τῆς προτάσεως διά λόγους οἰκονομίας κειμένου θά τό παραλείψωμεν, παραπέμποντες τόν ἀναγνώστην εἰς ἕνα ἐκτεταμένον βιβλίον μαθηματικῆς ἀναλύσεως.
Ἐάν οἱ συναρτήσεις ἐπαληθεύουν μίαν ἤ περισσότερες σχέσεις λέγονται συναρτησιακῶς ἐξηρτημένες ἤ ἁπλῶς ἐξηρτημένες, ἐάν ὄχι λέγονται ἀνεξάρτητες.

Παράδειγμα (16.1). — Νά δειχθῆ ὅτι οἱ συναρτήσεις $u = e^{3xy^{-1}}$, $\upsilon = \ln y - \ln x$ εἶναι ἐξηρτημένες καί νά εὑρεθῆ ἡ σχέσις τήν ὁποίαν ἐπαληθεύουν.
Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι $\partial(u, \upsilon) : \partial(x, y) = 3y^{-2}e^{3xy^{-1}} - 3y^{-2}e^{3xy^{-1}} \equiv 0$, ἑπομένως οἱ συναρτήσεις εἶναι πράγματι ἐξηρτημένες. Πρός εὕρεσιν τῆς σχέσεως πού ἐπαληθεύουν λογαριθμίζομεν δύο φορές τήν u ὁπότε
$\ln(\ln u) = \ln(3xy^{-1}) = \ln 3 + \ln x - \ln y = \ln 3 - \upsilon$ καί ἡ ζητουμένη σχέσις μεταξύ τῶν u, υ εἶναι ἡ $\ln(\ln u) + \upsilon - \ln 3 = 0$.

Παράδειγμα (16.2). — Νά ἐξετασθῆ ἐάν εἶναι ἐξηρτημένες οἱ συναρτήσεις :

$$x = 3u + 4\upsilon - w, \quad y = 2u - \upsilon + 3w, \quad z = 6u + 8\upsilon - 2w - 1$$

Λύσις. Σχηματίζομεν τήν Jacobien τοῦ συστήματος καί ἔχομεν :

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 6 & 8 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

ἐπομένως οἱ συναρτήσεις εἶναι ἐξηρτημένες.

Παράδειγμα (16.8).— Ἐάν εἶναι $\sigma'(x) = 1/x$ καί $\sigma(1) = 0$ νά δειχθῇ ὅτι: $\sigma(x) + \sigma(y) = \sigma(xy)$.

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ συναρτήσεις $u = \sigma(x) + \sigma(y)$, $v = xy$ εἶναι ἐξηρτημένες διότι: $\partial(u,v) : \partial(x,y) = \frac{1}{x}\cdot x - \frac{1}{y}\cdot y = 0$, ἐπομένως θά εἶναι $\sigma(x) + \sigma(y) = \varphi(xy)$. Θέτοντες εἰς αὐτήν $y = 1$ προκύπτει $\sigma(x) = \varphi(x)$ ὁπότε $\sigma(x) + \sigma(y) = \sigma(xy)$.

Ἡ $\sigma(x)$ δέν εἶναι ἄλλη ἀπό τήν $\ell n x$ καί παρατηροῦμεν ὅτι μέ τόν τρόπον αὐτόν βρήκαμε τήν βασικήν ἰδιότητα λογαριθμίσεως γινομένου.

Ἀσκήσεις.

Νά εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y(x)$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπό πλεγμένην μορφήν ἀπό τήν ἐξίσωσιν

145) $x^3 + 4xy^2 + 3y^4 = 25$ 146) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

147) $x^4y^2 - 3x^5y + x^6 = -8$ 148) $e^x \eta\mu y + e^y \sigma\upsilon\nu x = 0$

149) $x^2 \ell n y - y^2 \ell n x = 0$ 150) $\varepsilon\varphi(x^2+y^2) = x^2 - y^2$.

Νά εὑρεθοῦν αἱ μερικαί παράγωγοι τῆς συναρτήσεως $z(x,y)$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπό πλεγμένην μορφήν ἀπό τήν ἐξίσωσιν

151) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$ 152) $x^4 - 3xyz^2 + 5x^2yz + y^3z + z^4 = 1$

153) $xyz + x^2y + xy^2 + zx^2 + z^3 = 100$ 154) $x^y y^z z^x = 1$

155) $e^z \eta\mu xy = e^{xy} \eta\mu z$ 156) $e^{xy} + e^{xz} + e^{yz} = c$

Νά εὑρεθοῦν αἱ μερικαί παράγωγοι τῆς συναρτήσεως $u(x,y,z)$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπό πλεγμένην μορφήν ἀπό τήν ἐξίσωσιν

157) $x^2 + 4y^2 + 9u^2 + 16z^2 = 144$ 158) $x:y + y^2 : xu + u^2 : yz + z^4 : x^4 = 0$

Νά εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων $y(x)$, $z(x)$ οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ὑπό πλεγμένην μορφήν ἀπό τό σύστημα.

159) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$ 160) $x + y = e^z$, $xyz = 4$

161) $\eta\mu(x+y) + z = \alpha$, $\eta\mu(x-y) + z = \beta$ 162) $\alpha x^\mu + \beta y^\nu + \gamma z^\rho = K$, $\alpha_1 x^{\mu_1} + \beta_1 y^{\nu_1} + \gamma_1 z^{\rho_1} = K_1$

163) Νά εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων $y(x)$, $z(x)$, $u(x)$ οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ὑπό πλεγμένην μορφήν ἀπό τό σύστημα:

$$x + y + z + u = \alpha, \quad x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = \beta, \quad x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = \gamma$$

$$xy + zu = \alpha \ , \quad (x+y):(z+u) = \beta \, ,$$

θεύουν τὶς σχέσεις : $z_{xx} + u_{xx} = 0 \ , \ z_{xy} + u_{xy} = 0 \ , \ z_{yy} + u_{yy} = 0 .$

Νὰ δειχθῇ τὸ ἴδιο διὰ τὸ σύστημα :

$$x+y+z+u = \alpha \ , \quad \ln xyzu = \beta$$

Δείξατε ὅτι ἑκάστη τῶν ἑπομένων ἐξισώσεων ἐπιλύεται μονοσήμαντα ὡς πρὸς y γειτονιὰ τοῦ σημειουμένου σημείου.

$x^2 + xy + y^2 = 7$ 167) $x\,\text{συν}\,xy = 0$

$P(2,1)$ $P(1, \pi/2)$

$xy + \ln xy = 1$ 169) $x^5 + y^5 + xy = 3$

$P(1,1)$ $P(1,1)$

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τιμὲς τῶν παραγώγων πρώτης καὶ δευτέρας τάξεων τῶν ἀνωτέρω υσῶν συναρτήσεων εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον P.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σχετικὰ ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως $y(x)$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπὸ ένην μορφὴν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $x^2 + xy + y^2 = 27$

Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x + y + z = \text{ημ}\,xyz$ ἐπιλύεται ὡς πρὸς z στὴν γειτονιὰ σημείου $(0,0,0)$ καὶ νὰ εὑρεθοῦν οἱ τιμὲς τῶν μερικῶν παραγώγων τῆς ἐπι- ης συναρτήσεως εἰς αὐτό.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ ἔχῃ συνεχῆ παράγωγον νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ σύστημα $u = \sigma(x)$, $y + x\sigma(x)$ εἶναι μονοσήμαντα ἀντιστρέψιμον στὴν γειτονιὰ κάθε σημείου τοῦ ἐπιπέδου x, y διὰ τὸ ὁποῖον $\sigma'(x) \neq 0$ καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ γενικὴ μορφὴ τῶν ἀντιστρόφων τήσεων.

Ἡ ἀπεικόνισις τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν u, υ διὰ τοῦ συστή- : $u = x:(x^2+y^2)$, $\upsilon = y:(x^2+y^2)$ εἶναι μονοσήμαντα ὁρισμένη γιὰ ὅλα τὰ ση- (x,y) ἐκτὸς τῆς ἀρχῆς $(0,0)$. Δείξατε ὅτι ἡ ἀπεικόνισις αὐτὴ εἶναι ἀμφιμονο- τος , εὕρετε τὸ σύστημα τῶν ἀντιστρόφων συναρτήσεων , ὑπολογίσατε τὶς Ἰακωβια- καὶ ἐπαληθεύσατε ὅτι ἔχουν γινόμενον 1. Ποίαν γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν δυνάμεθα ώσωμεν εἰς τὴν ἀπεικόνισιν αὐτήν;

Γενικεύσατε τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εἰς τὸν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις $y(x)$ ὁρίζεται ὑπὸ πλεγμένην μορφὴν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $y^4 + 3a^2y^2 - xy + 2a^2x^2 = 0$, δείξατε ὅτι διὰ $x \to 0$ εἶναι : $\text{ορ}\,y'(x) = 1$ ἢ $2/3$

Ἐὰν ἡ συνάρτησις $z(x,y)$ ὁρίζεται ὑπὸ πλεγμένην μορφὴν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $x =$ $) + \sigma(y)$ δείξατε ὅτι $z_x z_{xy} = z_y z_{xx}$.

Ἐὰν $F(x,y,u,\upsilon) = 0$, $\Phi(x,y,u,\upsilon) = 0$ δείξατε ὅτι $u_x\, y_u + \upsilon_x\, y_\upsilon = 0$.

Ἐὰν οἱ συναρτήσεις $u(x,y)$, $\upsilon(x,y)$ ὁρίζονται ὑπὸ πλεγμένην μορφὴν ἀπὸ τὸ συστή- $\sigma(x,y,u) = 0$, $\varphi(u,\upsilon,x) = 0$, ἀποδείξατε τὶς σχέσεις : $\upsilon_x = (\sigma_x \varphi_u - \sigma_u \varphi_x) : \sigma_u \varphi_\upsilon$, $\sigma_y \varphi_u : \sigma_u \varphi_\upsilon$.

Ἐὰν εἶναι $u = x^2 - y^2$, $\upsilon = 2xy$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 4(x^2+y^2)(\Phi_{uu} + \Phi_{\upsilon\upsilon})$.

Ἐὰν $u = e^x(x\,\text{συν}\,y - y\,\text{ημ}\,y)$, $\upsilon = e^x(x\,\text{ημ}\,y + y\,\text{συν}\,y)$ δείξατε ὅτι : $\partial x : \partial u = e^{-x}[(x+1)\text{συν}\,y - y\,\text{ημ}\,y]$:

άν είναι $u=x^2+y^2$, $v=x^3+y^3$ δείξατε ότι $\partial(x,y):\partial(u,v)=-1:6xy(x-y)$

άν ή συνάρτησις $u(x,y,z)$ ορίζεται υπό πλεγμένην μορφήν από τήν εξίσωσιν $F(u^2-x^2,$ $u^2-z^2)=0$ δείξατε ότι $x^{-1}u_x+y^{-1}u_y+z^{-1}u_z=u^{-1}$.

άν ή συνάρτησις $x(y,z)$ ορίζεται υπό πλεγμένην μορφήν από τήν εξίσωσιν $z=\sigma(x,y)$ ότι: $x_{zz}=-z_{xx}:z^3_x$, $x_{yz}=(z_y\cdot z_{xx}-z_x z_{xy}):z_x^3$, $x_{yy}=(2z_x z_y z_{xy}-z_x^2 z_{yy}-z_y^2 z_{xx}):$

άν ή συνάρτησις $z(x,y)$ ορίζεται υπό πλεγμένην μορφήν από τό σύστημα $z=\sigma(x,u)$, $,u)$, νά εκφρασθούν αί z_x , z_y συναρτήσει τών μερικών παραγώγων τών σ,φ.

άν είς τήν προηγουμένην άσκησιν είναι $x=\varphi(t)$ όπου $t=y+u$, δείξατε ότι: $z_{yy}=\sigma_{uu}$, $_x+2\sigma_{xu}:\varphi'+\sigma_{uu}:\varphi'^2-\sigma_u\varphi'':\varphi'^3$, $z_{xy}=-\sigma_{xu}-\sigma_{uu}:\varphi'$ όπου φ', φ'' αί παράγωγοι τής φ ώς πρός αβλητήν t.

ίν οί μεταβλητές x,y,z ορίζονται ώς συναρτήσεις τών u,v,w υπό τού συστήματος σώσεων $u=\sigma_x$, $v=\sigma_y$, $w=\sigma_z$ όπου $\sigma(x,y,z)$ μία δεδομένη συνάρτησις τών $x,$ καί $\varphi(u,v,w)=xu+yv+zw-\sigma(x,y,z)$, δείξατε ότι $x=\varphi_u$, $y=\varphi_v$, $z=\varphi_w$.

ίν ή συνάρτησις $z(x,y)$ ορίζεται από τό σύστημα: $z\varphi(a)=(x-a)(y-a)$, $z\varphi'(a)+x+y=2a$, (a) αυθαίρετος συνάρτησις τού a, δείξατε ότι $z(z_x-z_y)=z_x\cdot z_y(y-x)$.

ίν είναι $x=e^u\sigma\upsilon\nu v$, $y=e^u\eta\mu v$ νά δειχθή ότι $\partial(x,y):\partial(u,v)=e^{2u}$.

ίν $u=x^2+y^2+z^2$, $v=(x+y+z)^2$, $w=yz+zx+xy$ δείξατε ότι $\partial(x,y,z):\partial(u,v,w)=0$. αίνετε διά τίς συναρτήσεις u,v,w;

τε εάν οί κάτωθι συναρτήσεις είναι συναρτησιακώς εξηρτημένες:

$=\rho ch\theta$

$=\rho sh\theta$

193) $x=\eta\mu^2u+\sigma\upsilon\nu^2v$

$y=\sigma\upsilon\nu^2u+\eta\mu^2v$

$u=e^t\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\omega$

$v=e^t\eta\mu\theta\eta\mu\omega$

$w=e^t\sigma\upsilon\nu\omega$

195) $u=x^3+y^3+z^3$

$v=xyz$

$w=x+y+z$

$u=x^3+y^3+z^3-3xyz$

$v=x+y+z$

$w=x^2+y^2+z^2$

197) $u=x^2+y^2+z^2$

$v=xy+yz+zx$

$w=x+y+z$

προσδιορισθή ή σταθερά a ίνα οί συναρτήσεις $u=x^3+y^3+z^3+axyz$, $v=x+y+z$, $w=$ $+z^2-yz-zx-xy$ είναι συναρτησιακώς εξηρτημένες.

δειχθή ότι οί συναρτήσεις : $y_\nu=(\eta\mu x_\nu)^{a_\nu}:(1-\eta\mu x_1-\eta\mu^2x_2-\eta\mu^3x_3)^{a_\nu}$, $(\nu=1,2,3)$ εί- άρτητες όταν $a_1a_2a_3\neq 0$.

άν είναι $x^2:(a+\lambda)+y^2:(\beta+\lambda)=1$, $x^2:(a+\mu)+y^2:(\beta+\mu)=1$ νά υπολογισθή ή $\partial(x,y)$ συναρτήσει τών λ,μ.

ίν είναι $z=x^3+y^3$, $x=a\xi+\beta\eta$, $y=c\xi+\delta\eta$ όπου a,β,γ,δ σταθερές τέτοιες ώ- $\beta\gamma\neq 0$, νά δειχθή ότι:

$$\begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_{\xi\xi} & z_{\xi\eta} \\ z_{\eta\xi} & z_{\eta\eta} \end{vmatrix} \left[\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right]^2$$

άν $J=\partial(u,v):\partial(x,y)$ νά δειχθή ότι $\partial(J,v):\partial(x,y)=J.(\partial J:\partial u)$ καί $\partial(J^{-1}u_x):$ $^{-1}v_x):\partial v=0$.

164) Νά δειχθῆ ὅτι αἱ μερικαί παράγωγοι δευτέρας τάξεως τῶν συναρτήσεων $z(x,y)$, $u(x,y)$ οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ὑπό πλεγμένην μορφήν ἀπό τό σύστημα :

$$xy+zu=\alpha\ ,\quad (x+y):(z+u)=\beta\ ,$$

ἐπαληθεύουν τίς σχέσεις : $z_{xx}+u_{xx}=0$, $z_{xy}+u_{xy}=0$, $z_{yy}+u_{yy}=0$.

165) Νά δειχθῆ τό ἴδιο διά τό σύστημα :

$$x+y+z+u=\alpha\ ,\quad \ln xyzu=\beta$$

'Αποδείξατε ὅτι ἑκάστη τῶν ἑπομένων ἐξισώσεων ἐπιλύεται μονοσήμαντα ὡς πρός y στήν γειτονιά τοῦ σημειουμένου σημείου.

166) $x^2+xy+y^2=7$
$P(2,1)$

167) $x\,\text{συν}\,xy=0$
$P(1,\pi/2)$

168) $xy+\ln xy=1$
$P(1,1)$

169) $x^5+y^5+xy=3$
$P(1,1)$

170) Νά εὑρεθοῦν οἱ τιμές τῶν παραγώγων πρώτης καί δευτέρας τάξεων τῶν ἀνωτέρω ἐπιλυουσῶν συναρτήσεων εἰς τό ἀντίστοιχον σημεῖον P.

171) Νά εὑρεθοῦν τά σχετικά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως $y(x)$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπό πλεγμένην μορφήν ἀπό τήν ἐξίσωσιν $x^2+xy+y^2=27$

172) Νά δειχθῆ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x+y+z=\text{ημ}\,xyz$ ἐπιλύεται ὡς πρός z στήν γειτονιά τοῦ σημείου $(0,0,0)$ καί νά εὑρεθοῦν οἱ τιμές τῶν μερικῶν παραγώγων τῆς ἐπιλυούσης συναρτήσεως εἰς αὐτό.

173) 'Εάν ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ ἔχῃ συνεχῆ παράγωγον νά δειχθῆ ὅτι τό σύστημα $u=\sigma(x)$, $v=-y+x\sigma(x)$ εἶναι μονοσήμαντα ἀντιστρέψιμον στήν γειτονιά κάθε σημείου τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y διά τό ὁποῖον $\sigma'(x)\neq 0$ καί νά εὑρεθῆ ἡ γενική μορφή τῶν ἀντιστρόφων συναρτήσεων.

174) Ἡ ἀπεικόνισις τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y εἰς τό ἐπίπεδον τῶν u,v διά τοῦ συστήματος : $u=x:(x^2+y^2)$, $v=y:(x^2+y^2)$ εἶναι μονοσήμαντα ὁρισμένη γιά ὅλα τά σημεῖα (x,y) ἐκτός τῆς ἀρχῆς $(0,0)$. Δείξατε ὅτι ἡ ἀπεικόνισις αὐτή εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος , εὕρετε τό σύστημα τῶν ἀντιστρόφων συναρτήσεων , ὑπολογίσατε τίς 'Ιακωβιανές καί ἐπαληθεύσατε ὅτι ἔχουν γινόμενον 1. Ποίαν γεωμετρικήν ἑρμηνείαν δυνάμεθα νά δώσωμεν εἰς τήν ἀπεικόνισιν αὐτήν;

175) Γενικεύσατε την προηγουμένην ἄσκησιν εἰς τόν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων.

176) 'Εάν ἡ συνάρτησις $y(x)$ ὁρίζεται ὑπό πλεγμένην μορφήν ἀπό τήν ἐξίσωσιν $y^4+3a^2y^2-5a^2xy+2a^2x^2=0$, δείξατε ὅτι διά $x\to 0$ εἶναι : $\text{ορ}\,y'(x)=1$ ἤ $2/3$

177) 'Εάν ἡ συνάρτησις $z(x,y)$ ὁρίζεται ὑπό πλεγμένην μορφήν ἀπό τήν ἐξίσωσιν $x=\varphi(z)+\sigma(y)$ δείξατε ὅτι $z_x z_{xy}=z_y z_{xx}$.

178) 'Εάν $F(x,y,u,v)=0$, $\Phi(x,y,u,v)=0$ δείξατε ὅτι $u_x\cdot y_u+v_x y_v=0$.

179) 'Εάν οἱ συναρτήσεις $u(x,y)$, $v(x,y)$ ὁρίζονται ὑπό πλεγμένην μορφήν ἀπό τό σύστημα $\sigma(x,y,u)=0$, $\varphi(u,v,x)=0$, ἀποδείξατε τίς σχέσεις : $v_x=(\sigma_x\varphi_u-\sigma_u\varphi_x):\sigma_u\varphi_v$, $v_y=\sigma_y\varphi_u:\sigma_u\varphi_v$.

180) 'Εάν εἶναι $u=x^2-y^2$, $v=2xy$ νά δειχθῆ ὅτι $\Phi_{xx}+\Phi_{yy}=4(x^2+y^2)(\Phi_{uu}+\Phi_{vv})$.

181) 'Εάν $u=e^x(x\,\text{συν}\,y-y\,\text{ημ}\,y)$, $v=e^x(x\,\text{ημ}\,y+y\,\text{συν}\,y)$ δείξατε ὅτι : $\partial x:\partial u=e^{-x}[(x+1)\text{συν}\,y-y\,\text{ημ}\,y]:$

$:[(x+1)^2+y^2]$.

182) Ἐάν εἶναι $u=x^2+y^2$, $v=x^3+y^3$ δείξατε ὅτι $\partial(x,y):\partial(u,v)=-1:6xy(x-y)$

183) Ἐάν ἡ συνάρτησις $u(x,y,z)$ ὁρίζεται ὑπό πλεγμένην μορφήν ἀπό τήν ἐξίσωσιν $F(u^2-x^2, u^2-y^2, u^2-z^2)=0$ δείξατε ὅτι $x^{-1}u_x+y^{-1}u_y+z^{-1}u_z=u^{-1}$.

184) Ἐάν ἡ συνάρτησις $x(y,z)$ ὁρίζεται ὑπό πλεγμένην μορφήν ἀπό τήν ἐξίσωσιν $z=\sigma(x,y)$ δείξατε ὅτι: $x_{zz}=-z_{xx}:z^3_x$, $x_{yz}=(z_y\cdot z_{xx}-z_x z_{xy}):z_x^3$, $x_{yy}=(2z_x z_y z_{xy}-z_x^2 z_{yy}-z_y^2 z_{xx}):$ $:z_x^3$.

185) Ἐάν ἡ συνάρτησις $z(x,y)$ ὁρίζεται ὑπό πλεγμένην μορφήν ἀπό τό σύστημα $z=\sigma(x,u)$, $x=\varphi(y,u)$, νά ἐκφρασθοῦν αἱ z_x, z_y συναρτήσει τῶν μερικῶν παραγώγων τῶν σ,φ.

186) Ἐάν εἰς τήν προηγουμένην ἄσκησιν εἶναι $x=\varphi(t)$ ὅπου $t=y+u$, δείξατε ὅτι: $z_{yy}=\sigma_{uu}$, $z_{xx}=\sigma_{xx}+2\sigma_{xu}:\varphi'+\sigma_{uu}:\varphi'^2-\sigma_u\varphi'':\varphi'^3$, $z_{xy}=-\sigma_{xu}-\sigma_{uu}:\varphi'$ ὅπου φ', φ'' αἱ παράγωγοι τῆς φ ὡς πρός τήν μεταβλητήν t.

187) Ἐάν οἱ μεταβλητές x,y,z ὁρίζονται ὡς συναρτήσεις τῶν u,v,w ὑπό τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων $u=\sigma_x$, $v=\sigma_y$, $w=\sigma_z$ ὅπου $\sigma(x,y,z)$ μία δεδομένη συνάρτησις τῶν x,y,z καί $\varphi(u,v,w)=xu+yv+zw-\sigma(x,y,z)$, δείξατε ὅτι $x=\varphi_u$, $y=\varphi_v$, $z=\varphi_w$.

189) Ἐάν ἡ συνάρτησις $z(x,y)$ ὁρίζεται ἀπό τό σύστημα: $z\varphi(a)=(x-a)(y-a)$, $z\varphi'(a)+x+y=2a$, ὅπου $\varphi(a)$ αὐθαίρετος συνάρτησις τοῦ a, δείξατε ὅτι $z(z_x-z_y)=z_x\cdot z_y(y-x)$.

190) Ἐάν εἶναι $x=e^u\sigma\upsilon\nu v$, $y=e^u\eta\mu v$ νά δειχθῆ ὅτι $\partial(x,y):\partial(u,v)=e^{2u}$.

191) Ἐάν $u=x^2+y^2+z^2$, $v=(x+y+z)^2$, $w=yz+zx+xy$ δείξατε ὅτι $\partial(x,y,z):\partial(u,v,w)=0$. Τί συμπεραίνετε διά τίς συναρτήσεις u,v,w;

Ἐξετάσατε ἐάν οἱ κάτωθι συναρτήσεις εἶναι συναρτησιακῶς ἐξηρτημένες:

192) $x=\rho\, ch\theta$
$y=\rho\, sh\theta$

193) $x=\eta\mu^2 u+\sigma\upsilon\nu^2 v$
$y=\sigma\upsilon\nu^2 u+\eta\mu^2 v$

194) $u=e^t\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\omega$
$v=e^t\eta\mu\theta\eta\mu\omega$
$w=e^t\sigma\upsilon\nu\omega$

195) $u=x^3+y^3+z^3$
$v=xyz$
$w=x+y+z$

196) $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$
$v=x+y+z$
$w=x^2+y^2+z^2$

197) $u=x^2+y^2+z^2$
$v=xy+yz+zx$
$w=x+y+z$

198) Νά προσδιορισθῆ ἡ σταθερά a ἵνα οἱ συναρτήσεις $u=x^3+y^3+z^3+axyz$, $v=x+y+z$, $w=$ $=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$ εἶναι συναρτησιακῶς ἐξηρτημένες.

199) Νά δειχθῆ ὅτι οἱ συναρτήσεις: $y_\nu=(\eta\mu x_\nu)^{a_\nu}:(1-\eta\mu x_1-\eta\mu^2 x_2-\eta\mu^3 x_3)^{a_\nu}$, $(\nu=1,2,3)$ εἶναι ἀνεξάρτητες ὅταν $a_1a_2a_3\neq 0$.

200) Ἐάν εἶναι $x^2:(\alpha+\lambda)+y^2:(\beta+\lambda)=1$, $x^2:(\alpha+\mu)+y^2:(\beta+\mu)=1$ νά ὑπολογισθῆ ἡ $\partial(\lambda,\mu):\partial(x,y)$ συναρτήσει τῶν λ,μ.

201) Ἐάν εἶναι $z=x^3+y^3$, $x=a\xi+\beta\eta$, $y=c\xi+\delta\eta$ ὅπου a,β,γ,δ σταθερές τέτοιες ὥστε $a\delta-\beta\gamma\neq 0$, νά δειχθῆ ὅτι:

$$\begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_{\xi\xi} & z_{\xi\eta} \\ z_{\eta\xi} & z_{\eta\eta} \end{vmatrix} \left[\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right]^2$$

202) Ἐάν $J=\partial(u,v):\partial(x,y)$ νά δειχθῆ ὅτι $\partial(J,v):\partial(x,y)=J.(\partial J:\partial u)$ καί $\partial(J^{-1}u_x):$ $:\partial u+\partial(J^{-1}v_x):\partial v=0$.

203) Ἐὰν ἡ συνάρτησις $z = z(x, y)$ ὁρίζεται ὑπὸ πλεγμένην μορφὴν ἀπὸ τὸ σύστημα $y = \sigma(x, \upsilon)$, $z = \varphi(x, \upsilon)$ δι' ἀπαλείφῆς τῆς παραμέτρου υ νὰ δειχθῆ ὅτι: $z_x \sigma_\upsilon = \sigma_\upsilon \varphi_x - \sigma_x \varphi_\upsilon$. Ἐπαληθεύσατε τὸ ἐξαγόμενον ὅταν $y = x\text{συν}\upsilon - a\text{ημ}\upsilon$, $z = x\text{ημ}\upsilon + a\text{συν}\upsilon$, a = σταθερά.

Σχετικὰ ἀκρότατα συναρτήσεως.

17. Ἐλεύθερα ἀκρότατα. — Ἔστω συνάρτησις $\Phi(x, y)$ συνεχὴς καὶ μὲ συνεχεῖς μερικὰς παραγώγους μέχρι καὶ δευτέρας τάξεως στὴν γειτονιὰ ἑνὸς ἐσωτερικοῦ σημείου (a, β) τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της.

Ὁρισμὸς (17.1). *Τὸ σημεῖον (a, β) λέγεται θέσις σχετικοῦ ἢ τοπικοῦ μεγίστου τῆς συναρτήσεως $\Phi(x, y)$ ὅταν ὑπάρχῃ γειτονιὰ τοῦ σημείου (a, β) τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα (x, y), τὰ διάφορα τοῦ (a, β), ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα:*

$$\Phi(x, y) - \Phi(a, \beta) < 0 \tag{17.1}$$

Ἡ τιμὴ $\Phi(a, \beta)$ λέγεται τότε σχετικὸν ἢ τοπικὸν μέγιστον. Ἀντιστοίχως διὰ τὸ σχετικὸν ἢ τοπικὸν ἐλάχιστον θὰ πρέπῃ νὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα

$$\Phi(x, y) - \Phi(a, \beta) > 0 \tag{17.2}$$

Μὲ τὸν κοινὸν ὅρον σχετικὰ ἢ τοπικὰ ἀκρότατα ὁμιλοῦμεν καὶ διὰ τὰ δύο. Ἐὰν τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος $<$ ἀντικατασταθῆ ὑπὸ τοῦ $\leqslant$ καὶ τὸ $>$ ὑπὸ τοῦ $\geqslant$ τότε ἔχομεν ἀντιστοίχους ὁρισμοὺς διὰ σχετικὰ ἢ τοπικὰ ἀκρότατα ὑπὸ εὐρεῖαν ἔννοιαν. Διὰ συντομίαν ἐκφράσεως θὰ παραλείπωμεν συνήθως τὴν λέξιν σχετικὸν ἢ τοπικόν.

Πρότασις (17.1). — *Ἀναγκαῖαι συνθῆκαι διὰ νὰ εἶναι τὸ σημεῖον (a, β) θέσις σχετικοῦ ἀκροτάτου εἶναι νὰ ἐπαληθεύωνται οἱ ἐξισώσεις:*

$$\begin{aligned} \Phi_x(a, \beta) &= 0 \\ \Phi_y(a, \beta) &= 0 \end{aligned} \tag{17.3}$$

Ἀπόδειξις. Ἀφοῦ ἡ $\Phi(x, y)$ ἔχει ἀκρότατον εἰς τὸ σημεῖον (a, β) τότε ἡ συνάρτησις $\Phi(x, \beta)$ τῆς μεταβλητῆς x θὰ ἔχῃ ἀκρότατον διὰ $x = a$, ἑπομένως ὅπως εἶναι γνωστὸν ἀπὸ τὰ ἀκρότατα συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς, θὰ πρέπῃ ἡ παράγωγος αὐτῆς $\Phi_x(x, \beta)$ νὰ μηδενίζεται διὰ $x = a$, δηλαδὴ θὰ πρέπῃ $\Phi_x(a, \beta) = 0$. Ὁμοίως ἐπειδὴ ἡ $\Phi(a, y)$ θὰ ἔχῃ ἀκρότατον διὰ $y = \beta$ θὰ πρέπῃ $\Phi_y(a, \beta) = 0$.

Τὸ ὅτι αἱ ἀνωτέρω συνθῆκες δὲν εἶναι καὶ ἱκανὲς φαίνεται ἀπὸ τὸ ἑξῆς παράδειγμα: Ἔστω $\Phi(x, y) = x^2 - y^2$ · διὰ παραγωγίσεως ἔχομεν: $\Phi_x = 2x$, $\Phi_y = -2y$ ἑπομένως διὰ τὸ σημεῖον $(0, 0)$ ἔχομεν: $\Phi_x(0, 0) = \Phi_y(0, 0) = 0$, δηλαδὴ πληροῦνται οἱ ἀναγκαῖες συνθῆκες, δὲν ἔχει ὅμως ἡ συνάρτησις εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον, διότι εἶναι:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) - \Phi(0, 0) &= x^2 - y^2 > 0 \quad \text{ὅταν } |x| > |y| \\ \Phi(x, y) - \Phi(0, 0) &= x^2 - y^2 < 0 \quad \text{»} \quad |x| < |y| \end{aligned}$$

ἑπομένως ἡ τιμὴ $\Phi(0, 0) = 0$ δὲν εἶναι οὔτε ἡ μεγίστη οὔτε ἡ ἐλαχίστη.

Πρότασις (17.2).— Ἱκαναί συνθῆκαι διά νά εἶναι τό σημεῖον (α,β) θέσις σχετικοῦ ἀκροτάτου εἶναι αἱ ἑξῆς:

$$\Phi_x(\alpha,\beta)=\Phi_y(\alpha,\beta)=0$$
$$\Delta=\Phi_{xx}(\alpha,\beta)\cdot\Phi_{yy}(\alpha,\beta)-\Phi_{xy}^2(\alpha,\beta)>0 \tag{17.4}$$

καί ἄν μέν εἶναι $\Phi_{xx}(\alpha,\beta)>0$ τότε θά εἶναι καί $\Phi_{yy}(\alpha,\beta)>0$ καί τό σημεῖον (α,β) θά εἶναι θέσις σχετικοῦ ἐλαχίστου, ἄν δέ εἶναι $\Phi_{xx}(\alpha,\beta)<0$ τότε θά εἶναι καί $\Phi_{yy}(\alpha,\beta)<0$ καί τό σημεῖον (α,β) θά εἶναι θέσις σχετικοῦ μεγίστου. Ἐάν εἶναι:

$$\Phi_x(\alpha,\beta)=\Phi_y(\alpha,\beta)=0$$
$$\Delta=\Phi_{xx}(\alpha,\beta)\cdot\Phi_{yy}(\alpha,\beta)-\Phi_{xy}^2(\alpha,\beta)<0 \tag{17.5}$$

τό σημεῖον (α,β) δέν δύναται νά εἶναι θέσις σχετικοῦ ἀκροτάτου. Ἐάν τέλος εἶναι:

$$\Phi_x(\alpha,\beta)=\Phi_y(\alpha,\beta)=0$$
$$\Delta=\Phi_{xx}(\alpha,\beta)\cdot\Phi_{yy}(\alpha,\beta)-\Phi_{xy}^2(\alpha,\beta)=0 \tag{17.6}$$

τό σημεῖον (α,β) ἐνδέχεται νά εἶναι ἤ νά μήν εἶναι θέσις σχετικοῦ ἀκροτάτου.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι (α,β) εἶναι μία λύσις τοῦ συστήματος $\Phi_x(x,y)=\Phi_y(x,y)=0$ δηλαδή: $\Phi_x(\alpha,\beta)=\Phi_y(\alpha,\beta)=0$. Ἀπό τόν τύπον (11.2) διά $\nu=1$ ἔχομεν:

$$\Delta\Phi=\Phi(\alpha+h,\beta+k)-\Phi(\alpha,\beta)=0.h+0\cdot k+\frac{1}{2!}\left[h^2\cdot\Phi_{xx}(\xi,\eta)+2hk\Phi_{xy}(\xi,\eta)+k^2\Phi_{yy}(\xi,\eta)\right]$$

ὅπου μέ (ξ,η) παραστήσαμε τήν ἐνδιάμεσον θέσιν $(\alpha+\theta h,\ \beta+\theta k)$. Ἕνεκα τῆς συνεχείας τῶν δευτέρων μερικῶν παραγώγων θά ἔχωμεν:

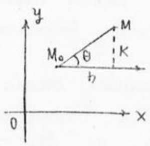
$$\Phi_{xx}(\xi,\eta)=\Phi_{xx}(\alpha,\beta)+\varepsilon_1,\quad \Phi_{xy}(\xi,\eta)=\Phi_{xy}(\alpha,\beta)+\varepsilon_2,\quad \Phi_{yy}(\xi,\eta)=\Phi_{yy}(\alpha,\beta)+\varepsilon_3$$

ὅπου οἱ ποσότητες $\varepsilon_i\to 0$ ὅταν ἡ ποσότης $\rho=\sqrt{h^2+k^2}\to 0$.

Ἐάν διά συντομίαν παραστήσωμεν τάς μερικάς παραγώγους δευτέρας τάξεως εἰς τήν θέσιν (α,β) ἀντιστοίχως μέ r,s,t θά ἔχωμεν:

$$\Delta\Phi=\frac{1}{2}(rh^2+2shk+tk^2)+\frac{1}{2}(\varepsilon_1h^2+2\varepsilon_2hk+\varepsilon_3k^2)$$

Μεταβαίνοντες εἰς πολικές συντεταγμένες (ρ,θ) μέ πόλον τό σημεῖον $M_o(\alpha,\beta)$ καί πολικόν ἄξονα M_ox_1 παράλληλον καί ὁμόρροπον πρός τόν Ox, θά ἔχωμεν σχ. (17.1): $h=\rho\sigma\upsilon\nu\theta$, $k=\rho\eta\mu\theta$ ὁπότε ἡ $\Delta\Phi$ γράφεται:



Σχ. (17.1)

$$\Delta\Phi=\frac{1}{2}\rho^2(r\sigma\upsilon\nu^2\theta+2s\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta+t\eta\mu^2\theta)+\frac{1}{2}\rho^2(\varepsilon_1\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\varepsilon_2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta+\varepsilon_3\eta\mu^2\theta)$$

Ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι: $rt-s^2>0$, $r>0$, τότε ἡ συνεχής συνάρτησις

$$f(\theta)=r\sigma\upsilon\nu^2\theta+2s\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta+t\eta\mu^2\theta=\sigma\upsilon\nu^2\theta\,(t\varepsilon\varphi^2\theta+2s\varepsilon\varphi\theta+r),\quad 0\leq\theta\leq 2\pi$$

δέν μηδενίζεται γιά κανένα θ καί ἡ τιμή της εἶναι ὁμόσημος μέ τό r δηλαδή θετική, ἑπομένως κατά γνωστόν θεώρημα τῶν συνεχῶν συναρτήσεων ἡ $f(\theta)$ λαμβάνει μίαν ἐλαχίστην τιμήν $E>0$ ὅταν τό θ διατρέχει τό κλειστόν διάστημα: $0\leq\theta\leq 2\pi$. Διά $\rho=+\sqrt{h^2+k^2}$ ἀρκετά μικρό ἐπειδή $\varepsilon_i\to 0$ θά εἶναι: $|\varepsilon_i|<E:8$ καί γιά κάθε θ ἔχομεν:

$$|\varepsilon_1\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\varepsilon_2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta+\varepsilon_3\eta\mu^2\theta|<|\varepsilon_1|+2|\varepsilon_2|+|\varepsilon_3|<E/2$$

ἐπομένως διὰ ρ ἀρκετὰ μικρὸ καὶ γιὰ κάθε τιμὴ τῆς θ θὰ εἶναι:

$$\Delta\Phi \geqslant \frac{1}{2}\rho^2|r\sigma\upsilon\nu^2\theta+2s\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta+t\eta\mu^2\theta|-\frac{1}{2}\rho^2|\varepsilon_1\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\varepsilon_2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta+\varepsilon_3\eta\mu^2\theta|>\frac{1}{2}\rho^2E-\frac{1}{2}\rho^2\frac{E}{2}=\frac{1}{4}\rho^2E>0$$

δηλαδὴ τὸ σημεῖον (α,β) εἶναι θέσις ἐλαχίστου διὰ τὴν συνάρτησιν $\Phi(x,y)$.

Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι $rt-s^2>0$, $r<0$ καὶ ἐφαρμόσωμεν τὴν προηγουμένην ἀπόδειξιν εἰς τὴν συνάρτησιν $-\Phi(x,y)$ προκύπτει ὅτι ἡ $-\Phi(x,y)$ ἔχει ἐλάχιστον εἰς τὸ σημεῖον (α,β) ἄρα ἡ ἀντίθετος αὐτῆς συνάρτησις $\Phi(x,y)$ ἔχει μέγιστον εἰς τὸ σημεῖον αὐτό.

Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι: $rt-s^2<0$, τότε ἡ συνάρτησις:

$$f(\theta)=r\sigma\upsilon\nu^2\theta+2s\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta+t\eta\mu^2\theta=\sigma\upsilon\nu^2\theta\,(t\varepsilon\varphi^2\theta+2s\,\varepsilon\varphi\,\theta+r)$$

μηδενίζεται, ἀλλάζοντας κάθε φορὰ πρόσημον, διὰ τέσσερεις τιμὲς τοῦ θ ἀπὸ τὸ διάστημα: $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. Ἑπομένως θὰ ὑπάρχη κάποιο θ_1 διὰ τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι: $f(\theta_1)=A_1<0$ καὶ κάποιο θ_2 διὰ τὸ ὁποῖον $f(\theta_2)=A_2>0$.

Λαμβάνοντες τὰ h, K ἔτσι ὥστε: $h=\rho\sigma\upsilon\nu\theta_1$, $K=\rho\eta\mu\theta_1$ καὶ τὸ ρ ἀρκετὰ μικρὸ ὥστε $|\varepsilon_i|<|A_1|:8$, θὰ ἔχωμεν:

$$\Delta\Phi=\frac{1}{2}\rho^2A_1+\frac{1}{2}\rho^2(\varepsilon_1\sigma\upsilon\nu^2\theta_1+2\varepsilon_2\sigma\upsilon\nu\theta_1\eta\mu\theta_1+\varepsilon_3\eta\mu^2\theta_1)\leqslant\frac{1}{2}\rho^2(A_1+|\varepsilon_1|+2|\varepsilon_2|+|\varepsilon_3|)<\frac{1}{2}\rho^2(A_1+\frac{|A_1|}{2})=\frac{1}{4}\rho^2A_1<0.$$

Λαμβάνοντες τὰ h, K ἔτσι ὥστε: $h=\rho\sigma\upsilon\nu\theta_2$, $K=\rho\eta\mu\theta_2$ καὶ τὸ ρ ἀρκετὰ μικρὸ ὥστε $|\varepsilon_i|<A_2:8$, θὰ ἔχωμεν:

$$\Delta\Phi=\frac{1}{2}\rho^2A_2+\frac{1}{2}\rho^2(\varepsilon_1\sigma\upsilon\nu^2\theta_2+2\varepsilon_2\sigma\upsilon\nu\theta_2\eta\mu\theta_2+\varepsilon_3\eta\mu^2\theta_2)\geqslant\frac{1}{2}\rho^2(A_2-|\varepsilon_1|-2|\varepsilon_2|-|\varepsilon_3|)>\frac{1}{2}\rho^2(A_2-\frac{A_2}{2})=\frac{1}{4}\rho^2A_2>0.$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι δὲν πραγματοποιεῖται οὔτε ἡ συνθήκη (17.1) τοῦ μεγίστου, οὔτε ἡ συνθήκη (17.2) τοῦ ἐλαχίστου, ἐπομένως ἡ $\Phi(x,y)$ στὴν περίπτωση $rt-s^2<0$ δὲν ἔχει ἀκρότατον.

Ἂν ὑποθέσωμεν τέλος ὅτι $rt-s^2=0$ τότε ἔχομεν νὰ διακρίνωμεν πολλὲς διαφορετικὲς ὑποπεριπτώσεις καὶ γιὰ μερικὲς τιμὲς τῆς γωνίας θ ἀπατεῖται τὸ πρόσημον παραγώγων μεγαλυτέρας τάξεως διὰ νὰ ἀποφανθῶμεν διὰ τὸ πρόσημον τῆς διαφορᾶς $\Delta\Phi$. Γι' αὐτὸ θὰ ἀρκεσθῶμεν διὰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἰς μερικὰ παραδείγματα ἐκ τῶν ὁποίων θὰ φανῆ ὅτι στὴν περίπτωση $rt-s^2=0$ ἐνδέχεται νὰ ὑπάρχουν σχετικὰ ἀκρότατα ἢ καὶ νὰ μὴν ὑπάρχουν.

Ἡ προηγουμένη θεωρία γενικεύεται καὶ διὰ συναρτήσεις ν– μεταβλητῶν $\Phi(x_1,\ldots,x_\nu)$. Παριστάνοντες διὰ συντομίαν τὴν $\partial\Phi/\partial x_i$ μὲ Φ_i καὶ τὴν $\partial^2\Phi/\partial x_i\partial x_j$ μὲ Φ_{ij}, ἡ πρότασις (17.1) γενικεύεται ὡς ἑξῆς:

Πρότασις (17.3).— *Ἀναγκαῖαι συνθῆκαι διὰ νὰ εἶναι τὸ σημεῖον $(a_1,\ldots,a_\nu)$ θέσις σχετικοῦ ἀκροτάτου εἶναι νὰ ἐπαληθεύωνται οἱ ἐξισώσεις:*

$$\begin{array}{c}\Phi_1(a_1,\ldots,a_\nu)=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ \Phi_\nu(a_1,\ldots,a_\nu)=0\end{array}\qquad(17.7)$$

Τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως παραλείπομεν διότι εἶναι ὁμοία μὲ τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως (17.1).

Διὰ τὴν εὕρεσιν ἱκανῶν συνθηκῶν, ὅπως καὶ διὰ τὶς συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν ἀναπτύσσομεν κατὰ Taylor τὴν διαφορὰν $\Delta\Phi=\Phi(a_1+h_1,\ldots,a_\nu+h_\nu)-$

$-\Phi(a_1,\cdots,a_\nu)$ ὁπότε θά ἔχωμεν :

$$\Delta\Phi = h_1\Phi_1+\cdots+h_\nu\Phi_\nu+\frac{1}{2!}(h_1\Phi_1+\cdots+h_\nu\Phi_\nu)^2+\cdots$$

Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι πληροῦνται οἱ ἀναγκαῖες συνθῆκες (17.7), τότε ἡ $\Delta\Phi$ γράφεται:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2!}(h_1\Phi_1+\cdots+h_\nu\Phi_\nu)^2+\cdots$$

Ἐπειδή οἱ μή σημειούμενοι ὅροι εἶναι βαθμοῦ μεγαλυτέρου τοῦ 2 ὡς πρός h_i ἀποδεικνύεται ὅτι τό πρόσημον τῆς $\Delta\Phi$ ἐξαρτᾶται ἀπό τό πρόσημον τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ ἀνωτέρω ἀναπτύγματος δηλαδή ἀπό τό πρόσημον τῆς τετραγωνικῆς μορφῆς :

$$\sum_{i,j=1}^{\nu} h_i h_j \Phi_{ij} \equiv (h_1\Phi_1+\cdots+h_\nu\Phi_\nu)^2 \equiv d^2\Phi$$

Ἀπό τήν μελέτην τοῦ προσήμου τῆς ἀνωτέρω τετραγωνικῆς μορφῆς προκύπτουν οἱ ζητούμενες ἱκανές συνθῆκες διά νά ἔχῃ ἀκρότατα ἡ συνάρτησις $\Phi(x_1,\cdots,x_\nu)$.

Ἐάν διά συντομίαν θέσωμεν :

$$D_1=\Phi_{11},\ D_2=\begin{vmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{vmatrix}\quad D_3=\begin{vmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23}\\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33}\end{vmatrix},\cdots,D_\nu=\begin{vmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12} & \cdots & \Phi_{1\nu}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \cdots & \Phi_{2\nu}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \Phi_{\nu1} & \Phi_{\nu2} & \cdots & \Phi_{\nu\nu}\end{vmatrix} \tag{17.8}$$

τότε οἱ ἱκανές συνθῆκες διά τά σχετικά ἀκρότατα ἐκφράζονται ἀπό τήν ἑξῆς πρότασιν :

Πρότασις (17.4). — *Ἱκανές συνθῆκες διά νά εἶναι τό σημεῖον $(a_1,\cdots,a_\nu)$. θέσις σχετικοῦ ἐλαχίστου τῆς συναρτήσεως $\Phi(x_1,\cdots,x_\nu)$ εἶναι οἱ ἑξῆς :*

$$+\quad \begin{aligned}&\Phi_i(a_1,\cdots,a_\nu)=0\\ &D_i(a_1,\cdots,a_\nu)>0\end{aligned}\qquad (i=1,2,\cdots,\nu) \tag{17.9}$$

καί διά νά εἶναι θέσις σχετικοῦ μεγίστου οἱ ἑξῆς

$$+\quad \begin{aligned}&\Phi_i(a_1,\cdots,a_\nu)=0\quad (i=1,2,\cdots,\nu)\\ &D_1(a_1,\cdots,a_\nu)<0,\ D_2(a_1,\cdots,a_\nu)>0,\cdots,(-1)^\nu D_\nu(a_1,\cdots,a_\nu)>0\end{aligned} \tag{17.10}$$

Ἀπό τήν προηγηθεῖσα θεωρία συνάγεται ὁ ἑξῆς πρακτικός κανών διά τήν εὕρεσιν τῶν σχετικῶν ἀκροτάτων μιᾶς συναρτήσεως Φ. :

Εὑρίσκομεν τίς λύσεις τοῦ συστήματος $\Phi_i=0$ τῶν μερικῶν παραγώγων πρώτης τάξεως καί διά τίς λύσεις αὐτές προσδιορίζομεν τά πρόσημα τῶν ὁριζουσῶν D_i. Ἐάν ἰσχύουν οἱ συνθῆκες (17.9) ἡ συνάρτησις ἔχει ἐλάχιστον καί ἄν ἰσχύουν οἱ συνθῆκες (17.10) μέγιστον. Εἰδικῶς διά συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν ἐάν ἰσχύουν οἱ (17.5) ἡ συνάρτησις δέν ἔχει ἀκρότατα καί ἐάν οἱ (17.6) ἐνδέχεται νά ἔχῃ ἤ νά μήν ἔχῃ.

Παράδειγμα (17.1).— Νά εὑρεθοῦν τά σχετικά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως:

$$\phi(x,y) = 3axy - x^3 - y^3$$

Λύσις. Ἔχομεν $\phi_x = 3ay - 3x^2$ $\phi_{xx} = -6x$ $\phi_{xy} = 3a$

$\phi_y = 3ax - 3y^2$ $\phi_{yy} = -6y$

Τό σύστημα τῶν πρώτων μερικῶν παραγώγων μηδενίζεται στίς θέσεις (0,0) καί (a,a). Ἡ τιμή τῆς παραστάσεως $\Delta = \phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2 = 36xy - 9a^2$ διά τήν πρώτην ἐξ αὐτῶν εἶναι $\Delta(0,0) = -9a^2 < 0$ καί διά τήν δευτέραν: $\Delta(a,a) = 27a^2 > 0$. Ἐπομένως εἰς τήν θέσιν (0,0) ἡ συνάρτησις δέν ἔχει σχετικά ἀκρότατα, ἐνῶ εἰς τήν θέσιν (a,a) ἔχει διά $a > 0$ μέγιστον διότι $\phi_{xx}(a,a) = -6a < 0$ καί διά $a < 0$ ἐλάχιστον διότι θά εἶναι $\phi_{xx}(a,a) = -6a > 0$. Ἡ μεγίστη ἤ ἐλαχίστη τιμή τῆς συναρτήσεως εἶναι: $\phi(a,a) = a^3$.

Παράδειγμα (17.2).— Νά εὑρεθοῦν τά σχετικά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως:

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - 4xy + 9y^2 + 3x - 14y + \frac{1}{2}$$

Λύσις. Ἔχομεν: $\phi_x = x - 4y + 3$ $\phi_{xx} = 1$ $\phi_{xy} = -4$

$\phi_y = -4x + 18y - 14$ $\phi_{yy} = 18$ $\Delta = \phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2 = 18 - 16 = 2 > 0$.

Τό σύστημα τῶν πρώτων μερικῶν παραγώγων μηδενίζεται εἰς τήν θέσιν (1,1) καί εἶναι $\phi_{xx} = 1 > 0$, ἐπομένως ἡ συνάρτησις ἔχει εἰς αὐτήν σχετικόν ἐλάχιστον. Ἡ ἐλαχίστη τιμή τῆς συναρτήσεως εἶναι: $\phi(1,1) = -5$.

Παράδειγμα (17.3).— Νά εὑρεθοῦν τά σχετικά ἀκρότατα τῶν συναρτήσεων:

$$\phi = x^4 + y^4, \quad f = x^3 + y^3, \quad u = (x-y)^2$$

Λύσις. Καί διά τίς τρεῖς εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι εἰς τήν θέσιν (0,0) πληροῦνται οἱ συνθῆκες (17.6). Ἐξ αὐτῶν ἡ πρώτη ἔχει ἐλάχιστον εἰς τήν θέσιν (0,0) διότι εἶναι $\phi(x,y) \geqslant 0$ γιά κάθε (x,y). Ἡ δευτέρα δέν ἔχει ἀκρότατον εἰς τήν θέσιν (0,0) διότι ἡ διαφορά $\Delta f = f(0+h, 0+k) - f(0,0) = h^3 + k^3$ εἶναι θετική ὅταν $h + k > 0$ καί ἀρνητική ὅταν $h + k < 0$. Τέλος ἡ τρίτη συνάρτησις u ἔχει εἰς τήν θέσιν (0,0) ἕνα ἐλάχιστον μέ εὐρεῖαν ἔννοιαν διότι ἡ διαφορά $\Delta u = u(0+h, 0+k) - u(0,0) = (h-k)^2$ εἶναι μηδέν ὅταν $h = k$ καί θετική ὅταν $h \neq k$. Ἀπό τό παράδειγμα αὐτό φαίνεται ἡ ποικιλία τῶν περιπτώσεων πού παρουσιάζεται ὅταν ἡ παράστασις $\Delta = \phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2$ ἰσοῦται μέ μηδέν.

Παράδειγμα (17.4).— Νά εὑρεθοῦν τά σχετικά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως:

$$\phi(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3yz + 3zx + 3xy.$$

Λύσις. Ἔχομεν: $\phi_x = 3x^2 + 3y + 3z = 0$, $\phi_y = 3y^2 + 3z + 3x = 0$, $\phi_z = 3z^2 + 3x + 3y = 0$.

Ἕνεκα τῆς συμμετρίας τῶν τριῶν ἐξισώσεων ὡς πρός x, y, z ἕπεται ὅτι $x = y = z$ καί δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τήν πρώτην προκύπτει $3x^2 + 3x + 3x = 0$ ἤ $x(x+2) = 0$ δηλ. $x = 0$ καί $x = -2$. Ἐπομένως τό σύστημα τῶν μερικῶν παραγώγων ἐπαληθεύεται ὑπό τῶν θέσεων (0,0,0) καί (-2,-2,-2). Αἱ παράγωγοι δευτέρας τάξεως εἶναι:

$$\phi_{xx} = 6x, \ \phi_{yy} = 6y, \ \phi_{zz} = 6z, \ \phi_{xy} = \phi_{yz} = \phi_{zx} = 3.$$

Αἱ τιμαὶ αὐτῶν εἰς τὶς θέσεις $(0,0,0)$ καὶ $(-2,-2,-2)$ εἶναι ἀντιστοίχως:

$$\Phi_{xx}=\Phi_{yy}=\Phi_{zz}=0 \qquad \Phi_{xx}=\Phi_{yy}=\Phi_{zz}=-12$$
$$\Phi_{xy}=\Phi_{yz}=\Phi_{zx}=3 \quad \text{καὶ} \quad \Phi_{xy}=\Phi_{yz}=\Phi_{zx}=3$$

Ἐξ αὐτῶν δὶ ἀντικαταστάσεως εἰς τὶς ὁρίζουσες (17.8) προκύπτει:

Διὰ τὴν θέσιν $(0,0,0)$

$$D_1=0$$
$$D_2=\begin{vmatrix}0&3\\3&0\end{vmatrix}=-9<0$$
$$D_3=\begin{vmatrix}0&3&3\\3&0&3\\3&3&0\end{vmatrix}=54>0$$

Διὰ τὴν θέσιν $(-2,-2,-2)$

$$D_1=-12<0$$
$$D_2=\begin{vmatrix}-12&3\\3&-12\end{vmatrix}=135>0$$
$$D_3=\begin{vmatrix}-12&3&3\\3&-12&3\\3&3&-12\end{vmatrix}=-1350<0$$

Διὰ τὴν $(-2,-2,-2)$ πληροῦνται οἱ συνθῆκες (17.10), ἑπομένως ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον εἰς αὐτὴν τὴν θέσιν. Ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι $\Phi(-2,-2,-2)=12$.

Διὰ τὴν $(0,0,0)$ δὲν πληροῦνται οὔτε οἱ (17.9) οὔτε οἱ (17.10).

Παράδειγμα (17.5). — Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y,z)=x^4+y^4+z^4-4xyz$ ἔχει εἰς τὴν θέσιν $(1,1,1)$ ἐλάχιστον.

Λύσις. Ἔχομεν:

$$\Phi_x=4x^3-4yz,\quad \Phi_y=4y^3-4zx,\quad \Phi_z=4z^3-4xy$$
$$\Phi_{xx}=12x^2,\quad \Phi_{yy}=12y^2,\quad \Phi_{zz}=12z^2$$
$$\Phi_{xy}=-4z,\quad \Phi_{yz}=-4x,\quad \Phi_{zx}=-4y$$

Εἰς τὴν θέσιν $(1,1,1)$ ἔχομεν:

$$D_1=12>0,\quad D_2=\begin{vmatrix}12&-4\\-4&12\end{vmatrix}=128>0,\quad D_3=\begin{vmatrix}12&-4&-4\\-4&12&-4\\-4&-4&12\end{vmatrix}=4^5>0$$

δηλαδὴ πληροῦνται οἱ συνθῆκες (17.9) καὶ ἡ συνάρτησις ἔχει ἐλάχιστον εἰς τὴν θέσιν $(1,1,1)$. Ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι $\Phi(1,1,1)=-1$.

18. Δεσμευμένα ἀκρότατα. — Τὰ ἀκρότατα τὰ ὁποῖα πραγματευθήκαμε μέχρι τώρα λέγονται ἐλεύθερα ἀκρότατα διότι οἱ μεταβλητὲς ἐκ τῶν ὁποίων ἐξηρτᾶτο ἡ συνάρτησις ἦσαν ἀνεξάρτητοι. Ἐὰν ὅμως οἱ μεταβλητὲς δὲν εἶναι ἀνεξάρτητες ἀλλὰ ὑπόκεινται σὲ μία ἢ περισσότερες δεσμεύσεις τότε τὰ ἀκρότατα λέγονται δεσμευμένα. Ἰδοὺ πῶς τίθεται τὸ πρόβλημα ὑπὸ τὴν γενικωτάτην μορφήν:

Δίδεται ἡ συνάρτησις $f(x_1,\cdots,x_\nu)$ ὅπου οἱ μεταβλητὲς $x_1,\cdots,x_\nu$ ἐπαληθεύουν τὶς ἐξισώσεις: $g^j(x_1,\cdots,x_\nu)=0 \quad (j=1,\cdots,\mu) \quad \mu<\nu$. Ζητοῦνται οἱ θέσεις $(a_1,\cdots,a_\nu)$ σχετικῶν ἀκροτάτων τῆς συναρτήσεως $f(x_1,\cdots,x_\nu)$.

Κατωτέρω θὰ δώσωμεν χωρὶς ἀπόδειξιν ἕνα σύστημα ἱκανῶν συνθηκῶν οἱ ὁποῖες μᾶς δίδουν τὴν ἀπάντησιν εἰς τὸ τεθὲν πρόβλημα.

Θέτομεν διὰ συντομίαν $\Phi=\Phi(x_1,\cdots,x_\nu;\lambda_1,\cdots,\lambda_\mu)=f+\lambda_1 g^1+\cdots+\lambda_\mu\cdot g^\mu$ καὶ παριστάνομεν πάλι τὴν $\partial^2\Phi:\partial x_i\partial x_\kappa$ μὲ $\Phi_{i\kappa}$ καὶ τὴν $\partial g^j:\partial x_i$ μὲ g^j_i. Θέτομεν ἐπίσης :

$$\Delta_1=\Delta_1(x_1,\cdots,x_\nu;\lambda_1,\cdots,\lambda_\mu) = \begin{vmatrix} \Phi_{11}\cdots\Phi_{1\nu}\, g_1^1\cdots g_1^\mu \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_{\nu 1}\cdots\Phi_{\nu\nu}\, g_\nu^1\cdots g_\nu^\mu \\ g_1^1\cdots g_\nu^1\; 0\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_1^\mu\cdots g_\nu^\mu\; 0\cdots 0 \end{vmatrix} \qquad (18.1)$$

Ἐξ αὐτῆς δι ἀφαιρέσεως τῆς πρώτης γραμμῆς καὶ πρώτης στήλης προκύπτει μία ὀρίζουσα τὴν ὁποίαν παριστάνομεν μὲ Δ_2. Ἐκ τῆς Δ_2 δι ὁμοίας ἀφαιρέσεως προκύπτει μία ὀρίζουσα τὴν ὁποίαν παριστάνομεν μὲ Δ_3 κ.ο.κ. μέχρι μορφώσεως τῆς ὀριζούσης $\Delta_{\nu-\mu}$, δηλαδὴ εἶναι:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \Phi_{22}\cdots g_2^\mu \\ \cdots\cdots\cdots \\ g_2^\mu\cdots 0 \end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix} \Phi_{33}\cdots g_3^\mu \\ \\ g_3^\mu\cdots 0 \end{vmatrix},\cdots,\ \Delta_{\nu-\mu}=\begin{vmatrix} \Phi_{\nu-\mu,\nu-\mu}\cdots g_{\nu-\mu}^\mu \\ \\ g_{\nu-\mu}^\mu\cdots 0 \end{vmatrix} \qquad (18.2)$$

Μὲ τοὺς συμβολισμοὺς αὐτοὺς αἱ ἱκανὲς συνθῆκες διὰ τὰ σχετικὰ ἀκρότατα τῆς $f(x_1,\cdots,x_\nu)$ ἐκφράζονται ὑπὸ τῆς προτάσεως

Πρότασις (18.1).— *Ἱκανὲς συνθῆκες διὰ νὰ εἶναι τὸ σημεῖον $(a_1,\cdots,a_\nu)$ θέσις σχετικοῦ ἐλαχίστου τῆς συναρτήσεως $f(x_1,\cdots,x_\nu)$ εἶναι οἱ ἑξῆς :*

(i) $\mu=$ ἄρτιος

$$\begin{gathered}\Phi_1=\Phi_2=\cdots=\Phi_\nu=0\\ g^1=g^2=\cdots=g^\mu=0\\ \Delta_1>0,\ \Delta_2>0,\cdots,\Delta_{\nu-\mu}>0\end{gathered} \qquad (18.3)$$

(ii) $\mu=$ περιττός

$$\begin{gathered}\Phi_1=\Phi_2=\cdots=\Phi_\nu=0\\ g^1=g^2=\cdots=g^\mu=0\\ \Delta_1<0,\ \Delta_2<0,\cdots,\Delta_{\nu-\mu}<0\end{gathered} \qquad (18.4)$$

καὶ διὰ νὰ εἶναι θέσις σχετικοῦ μεγίστου οἱ ἑξῆς :

(i) $\nu=$ ἄρτιος

$$\begin{gathered}\Phi_1=\Phi_2=\cdots=\Phi_\nu=0\\ g^1=g^2=\cdots=g^\mu=0\\ \Delta_1>0,\ \Delta_2<0,\cdots,(-1)^{\nu-\mu}\Delta_{\nu-\mu}<0\end{gathered} \qquad (18.5)$$

(ii) $\nu=$ περιττός

$$\begin{gathered}\Phi_1=\Phi_2=\cdots=\Phi_\nu=0\\ g^1=g^2=\cdots=g^\mu=0\\ \Delta_1<0,\ \Delta_2>0,\cdots,(-1)^{\nu-\mu}\Delta_{\nu-\mu}>0\end{gathered} \qquad (18.6)$$

Οἱ ὁρίζουσες $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_{\nu-\mu}$ εἰς ὅλες τίς ἀνωτέρω περιπτώσεις λαμβάνονται διά τίς τιμές $x_i = a_i$ καί $\lambda_j = \beta_j$ οἱ ὁποῖες προκύπτουν δι ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος τῶν $(\nu+\mu)$ ἐξισώσεων $\phi_i = 0$, $g^j = 0$ ὡς πρός ἀγνώστους x_i καί λ_j ὅπου $i = 1, \cdots, \nu$ καί $j = 1, \cdots, \mu$.

Ἕνας τρόπος πραγματεύσεως τοῦ προβλήματος τῶν δεσμευμένων ἀκροτάτων εἶναι καί ὁ ἑξῆς:

Λύομεν τό σύστημα τῶν δεσμεύσεων $g^j = 0$ ὡς πρός μ ἐκ τῶν μεταβλητῶν π.χ. τίς $x_1, \cdots, x_\mu$ καί ἔστω ἡ λύσις αὐτοῦ: $x_j = x_j(x_{\mu+1}, \cdots, x_\nu)$. Δι ἀντικαταστάσεως αὐτῶν εἰς τήν $f(x_1, \cdots, x_\nu)$ προκύπτει συνάρτησις:

$$\sigma(x_{\mu+1}, \cdots, x_\nu) = f\left[x_1(x_{\mu+1}, \cdots, x_\nu), \cdots, x_\nu\right]$$

ν-μ ἐλευθέρων μεταβλητῶν τήν ὁποίαν πραγματευόμεθα κατά τά γνωστά περί ἐλευθέρων ἀκροτάτων.

Παράδειγμα (18.1). — Ὁ ἀριθμός 12 νά χωρισθῆ σέ τρία μέρη, ὥστε τό γινόμενον αὐτῶν νά εἶναι μέγιστον.

Λύσις. Ἐάν παραστήσωμεν μέ x, y, z τά τρία μέρη ἀρκεῖ νά ζητήσωμεν τό μέγιστον τῆς συναρτήσεως $f(x,y,z) = xyz$ ὑπό τήν δέσμευσιν $g(x,y,z) = x+y+z-12 = 0$. Ἔχομεν: $\Phi = xyz + \lambda(x+y+z-12)$ καί ὑπολογίζομεν τίς λύσεις τοῦ συστήματος τῶν μερικῶν παραγώγων τῆς Φ ὡς πρός x, y, z, λ.

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda = g = x+y+z-12 &= 0 \\ \Phi_x = yz + \lambda &= 0 \\ \Phi_y = zx + \lambda &= 0 \\ \Phi_z = xy + \lambda &= 0 \end{aligned}$$

Ἕνεκα τῆς συμμετρίας ὡς πρός x, y, z θά εἶναι $x = y = z$ ὁπότε δι ἀντικαταστάσεως εἰς τήν ἐξίσωσιν τῆς δεσμεύσεως προκύπτει:

$$x + x + x - 12 = 0 \quad \text{ἤ} \quad x = 4 = y = z \quad \text{καί} \quad \lambda = -16$$

Ἐπίσης ἔχομεν: $\Phi_{xx} = \Phi_{yy} = \Phi_{zz} = 0$, $\Phi_{xy} = z$, $\Phi_{yz} = x$, $\Phi_{zx} = y$

$$g_x = g_y = g_z = 1$$

Καί οἱ τιμές αὐτῶν εἰς τήν θέσιν $(4,4,4;-16)$ εἶναι:

$$\Phi_{xx} = \Phi_{yy} = \Phi_{zz} = 0, \ \Phi_{xy} = \Phi_{yz} = \Phi_{zx} = 4, \ g_x = g_y = g_z = 1.$$

Στό παράδειγμα αὐτό εἶναι $\nu = 3$ καί $\mu = 1$ ἑπομένως $\nu - \mu = 2$ ἄρα θά σχηματίσωμεν τίς ὁρίζουσες Δ_1 καί Δ_2. Ἐκ τῶν (18.1) καί (18.2) ἔχομεν:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} & \Phi_{xz} & g_x \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} & \Phi_{yz} & g_y \\ \Phi_{zx} & \Phi_{zy} & \Phi_{zz} & g_z \\ g_x & g_y & g_z & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -48 < 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \Phi_{yy} & \Phi_{yz} & g_y \\ \Phi_{zy} & \Phi_{zz} & g_z \\ g_y & g_z & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

Πληροῦνται ἐπομένως οἱ συνθῆκες μεγίστου (18.6) καὶ ὁ ζητούμενος χωρισμὸς τοῦ 12 εἶναι σὲ τρία ἴσα μέρη.
Τὸ παράδειγμα αὐτὸ δυνάμεθα νὰ τὸ πραγματευθῶμεν καὶ ὡς ἐλεύθερον ἀκρότατον κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς δεσμεύσεως ὡς πρὸς z καὶ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν $f(x,y,z)$, ὁπότε προκύπτει ἡ συνάρτησις: $\sigma(x,y) = xy\,(12-x-y)$ τὴν ὁποίαν πραγματευόμεθα κατὰ τὰ γνωστὰ περὶ ἐλευθέρων ἀκροτάτων. Ἔχομεν $\sigma_x = y(12-x-y) - xy$ καὶ $\sigma_y = x(12-x-y) - xy$. Ἕνεκα τῆς συμμετρίας ὡς πρὸς x, y τὸ σύστημα $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$ θὰ δέχεται λύσεις τέτοιες ὥστε $x = y$, ὁπότε δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν πρώτην προκύπτει: $x(12-x-x)-x^2=0$ ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται $x=0$ καὶ $x=4$ δηλαδὴ τὸ σύστημα τῶν πρώτων μερικῶν παραγώγων δέχεται τὶς λύσεις $(0,0)$ καὶ $(4,4)$.
Ἐπίσης ἔχομεν: $\sigma_{xx} = -y-y = -2y$, $\sigma_{xy} = 12-x-y-y-x = 12-2x-2y$, $\sigma_{yy} = -x-x = -2x$ καὶ οἱ τιμὲς αὐτῶν εἰς τὶς θέσεις $(0,0)$ καὶ $(4,4)$ εἶναι ἀντιστοίχως: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{xy} = 12$ καὶ $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -8$, $\sigma_{xy} = -4$. Διὰ τὴν πρώτην θέσιν εἶναι $\Delta = -144 < 0$ καὶ διὰ τὴν δευτέραν $\Delta = 64-16 = 48 > 0$ ἐπομένως διὰ τὴν δευτέραν θέσιν $(4,4)$ ἡ $\sigma(x,y)$ ἔχει μέγιστον. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς δεσμεύσεως τῶν τιμῶν $x=y=4$ προκύπτει $z=4$ δηλαδὴ ἡ θέσις μεγίστου τῆς $f(x,y,z)$ εἶναι ἡ $(4,4,4)$.

Παράδειγμα (18.2).— Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σχετικὰ ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως: $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}$ ὅταν οἱ μεταβλητὲς x, y, z εἶναι θετικὲς καὶ δεσμεύονται ὑπὸ τῆς σχέσεως $x+y+z = 12$.
Λ ύ σ ι ς. Ἔχομεν $g = x+y+z-12 = 0$ καὶ $\Phi = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} + \lambda(x+y+z-12)$
Λύομεν τὸ σύστημα τῶν μερικῶν παραγώγων τῆς Φ ὡς πρὸς x, y, z, λ.

$$\Phi_x = -1 : x^2 + \lambda = 0,\quad \Phi_y = -4 : y^2 + \lambda = 0,\quad \Phi_z = -9 : z^2 + \lambda = 0,\quad \Phi_\lambda = g = x+y+z-12 = 0$$

Ἐξ αὐτῶν ἕπεται: $\lambda = 1 : x^2 = 4 : y^2 = 9 : z^2$, $y = 2x$, $z = 3x$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν δέσμευσιν προκύπτει $x+2x+3x = 12$, $x=2$, $y=4$, $z=6$, $\lambda = 1/4$.
Ἐπίσης ἔχομεν:

$$\Phi_{xx} = 2 : x^3,\quad \Phi_{yy} = 8 : y^3,\quad \Phi_{zz} = 18 : z^3$$

$$\Phi_{xy} = \Phi_{yz} = \Phi_{zx} = 0,\quad g_x = g_y = g_z = 1$$

Καὶ οἱ τιμὲς αὐτῶν εἰς τὴν θέσιν $(2,4,6;\ 1/4)$ εἶναι:

$$\Phi_{xx} = 1/4,\quad \Phi_{yy} = 1/8,\quad \Phi_{zz} = 1/12,\quad \Phi_{xy} = \Phi_{yz} = \Phi_{zx} = 0,\quad g_x = g_y = g_z = 1$$

Ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα σχηματίζομεν τὶς ὁρίζουσες Δ_1, Δ_2 καὶ ἔχομεν:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/12 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{16} < 0,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1/8 & 0 & 1 \\ 0 & 1/12 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{5}{24} < 0$$

Οἱ συνθῆκες (18.4) πληροῦνται, ἐπομένως ἡ συνάρτησις $f(x,y,z)$ ἔχει ἐλάχιστον εἰς τὴν θέσιν $(2,4,6)$ καὶ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι:

$$f(2,4,6) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{6} = 3$$

Παράδειγμα (18.3).— Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα $M_1(1,1,-1)$ καὶ $M_2(-1,-1,1)$ εἶναι θέσεις σχετικῶν ἀκροτάτων τῆς συναρτήσεως $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ ὑπὸ τὰς δεσμεύσεις $z(x+y)=-2$ καὶ $xy=1$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τῶν ἀκροτάτων.

Λ ύ σ ι ς. Ἔχομεν $\Phi = x^2+y^2+z^2+\lambda(zx+zy+2)+\mu(xy-1)$ διότι οἱ ἐξισώσεις τῶν δεσμεύσεων γράφονται $g^1=zx+zy+2=0$, $g^2=xy-1=0$.
Παραγωγίζομεν: $\Phi_x=2x+\lambda z+\mu y$, $\Phi_y=2y+\lambda z+\mu x$, $\Phi_z=2z+\lambda(x+y)$, $\Phi_\lambda=g^1=zx+zy+2$, $\Phi_\mu=g^2=xy-1$. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύστημα τῶν πρώτων μερικῶν παραγώγων τῆς Φ ὡς πρὸς x,y,z,λ,μ ἐπαληθεύεται διὰ $x=y=1$, $z=-1$, $\lambda=1$, $\mu=-1$ καὶ διὰ $x=y=-1$, $z=1$, $\lambda=1$, $\mu=-1$. Ἐπίσης ἔχομεν:
$\Phi_{xx}=\Phi_{yy}=\Phi_{zz}=2$, $\Phi_{xy}=\mu$, $\Phi_{yz}=\Phi_{zx}=\lambda$, $g^1_x=g^1_y=z$, $g^1_z=x+y$, $g^2_x=y$, $g^2_y=x$, $g^2_z=0$. Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ εἶναι $v=3$, $\mu=2$ ἐπομένως ἀπαιτεῖται μόνον $v-\mu=3-2=1$ ὁρίζουσα. Ἐκ τοῦ (18.1) ἔχομεν διὰ τὴν πρώτην θέσιν

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}\Phi_{xx} & \Phi_{xy} & \Phi_{xz} & g^1_x & g^2_x\\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} & \Phi_{yz} & g^1_y & g^2_y\\ \Phi_{zx} & \Phi_{zy} & \Phi_{zz} & g^1_z & g^2_z\\ g^1_x & g^1_y & g^1_z & 0 & 0\\ g^2_x & g^2_y & g^2_z & 0 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & -1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix} > 0$$

ἐπομένως τὸ πρῶτον σημεῖον $M_1(1,1,-1)$ εἶναι θέσις ἐλαχίστου διότι πληροῦνται οἱ συνθῆκες (18.3). Ὁμοίως ὁ ἀναγνώστης ὑπολογίζοντας τὴν ὁρίζουσα Δ_1 διὰ τὴν δευτέραν θέσιν δύναται εὐκόλως νὰ ἐπαληθεύσῃ ὅτι εἶναι πάλιν $\Delta_1>0$ δηλαδὴ καὶ τὸ δεύτερον σημεῖον $M_2(-1,-1,1)$ εἶναι θέσις ἐλαχίστου. Οἱ ἐλάχιστες τιμὲς τῆς συναρτήσεως εἶναι $f(1,1,-1)=$ $=f(-1,-1,1)=3$.

Παράδειγμα (18.4).— Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου $M_0(x_0,y_0)$ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν $Ax+By+\Gamma=0$, ὅπου οἱ ἄξονες ὑποτίθενται ὀρθογώνιοι.

Λ ύ σ ι ς. Ἐὰν $M(x,y)$ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ἀρκεῖ νὰ ζητήσωμεν ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως $\delta^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$ ἡ ὁποία ἐκφράζει τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως δ τῶν σημείων M_0 καὶ M, ὑπὸ τὴν δέσμευσιν $g=Ax+By+\Gamma=0$. Θέτομεν $\Phi=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\lambda(Ax+By+\Gamma)$ ὁπότε διὰ παραγωγίσεως προκύπτει:

$$\Phi_x=2(x-x_0)+\lambda A,\quad \Phi_\lambda=g=Ax+By+\Gamma,\quad g_y=B$$
$$\Phi_y=2(y-y_0)+\lambda B,\quad g_x=A\qquad \Phi_{xx}=\Phi_{yy}=2,\ \Phi_{xy}=0$$

Δι' ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος $\Phi_x=\Phi_y=g=0$ ὡς πρὸς x,y,λ προκύπτουν οἱ τιμές: $x_1=-A(Ax_0+By_0+\Gamma):(A^2+B^2)+x_0$, $y_1=-B(Ax_0+By_0+\Gamma):(A^2+B^2)+y_0$, $\lambda=2(Ax_0+By_0+\Gamma):(A^2+B^2)$.
Εἴμεθα εἰς τὴν περίπτωσιν δεσμευμένων ἀκροτάτων μὲ $v=2$ καὶ $\mu=1$ ἐπομένως θὰ ἐξετάσωμεν τὸ πρόσημον μόνον τῆς ὁριζούσης:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}\Phi_{xx} & \Phi_{xy} & g_x\\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} & g_y\\ g_x & g_y & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 0 & A\\ 0 & 2 & B\\ A & B & 0\end{vmatrix} = -2(A^2+B^2)<0$$

ἐπομένως ἔχομεν ἐλάχιστον. Ἡ ἐλαχίστη τιμὴ εἶναι $\delta^2=(Ax_0+By_0+\Gamma)^2:(A^2+B^2)$ καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου $M_0(x_0,y_0)$ εἶναι: $\delta=|Ax_0+By_0+\Gamma|:(A^2+B^2)$

δηλαδή ὁ γνωστός ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας τύπος τῆς ἀποστάσεως σημείου ἀπό εὐθεῖαν.

Ἀσκήσεις

Νά εὑρεθοῦν τά σχετικά ἀκρότατα τῶν ἑξῆς συναρτήσεων

204) $x^2+4y^2-2x+8y-1$

205) $x^2+4xy+y^2-6y+1$

206) $xy+(x-y)^3$

207) $x^4-3x^2y+y^3$

208) $(x-y)^3+x^4+y^4$

209) $x(x^2+y^2-a^2)$

210) $3x^2-6xy+2y^3$

211) $3x^2-12y^2+2x^3+3x^2y^2$

212) $x^3+y^3-3(x+y)+1$

213) $xy^2(x+2y-1)$

214) $x^4-2x^2y-6x^2+4y^2$

215) $2x^3-2y^3+xy-1$

216) $(x+y)(x^2+y^2-6)$

217) $x^3-x^2y-x^2+y^2$

218) Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi=(x^2+y^2):(x+y-1)$ ἔχει ἐλάχιστον εἰς τό σημεῖον $(1,1)$.

219) Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi=(1+x)(1+y)(x+y):x^2y^2$ ἔχει ἐλάχιστον εἰς τό σημεῖον $(-3,-3)$.

220) Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi=e^{x+y+z}:(e^a+e^x)(e^x+e^y)(e^y+e^z)(e^z+e^\beta)$ ἔχει μέγιστον εἰς τό σημεῖον $\left(\frac{3a+\beta}{4}, \frac{a+\beta}{2}, \frac{a+3\beta}{4}\right)$.

221) Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi=xyz(1-x-y-z)$ ἔχει ἐλάχιστον εἰς τό σημεῖον $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

222) Ἐξετάσατε ἀπό ἀπόψεως ἀκροτάτων τήν συνάρτησιν:

$\Phi=\text{συν}a(\text{συν}x+\text{συν}y)-\text{συν}x\,\text{συν}y$ ὅταν $|x|\leqslant\frac{\pi}{2}$, $|y|\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0<|a|\leqslant\frac{\pi}{2}$.

223) Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi=xyz\omega$ ὑπό τήν δέσμευσιν $x+y+z+\omega=1$ ἔχει μεγίστην τιμήν $1/256$.

224) Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου δεδομένου ὄγκου γίνεται ἐλαχίστη ὅταν τό παραλληλεπίπεδον εἶναι κύβος.

225) Ἐάν εἶναι $\Phi=x^3+y^3+z^3+3axyz$ καί $x+y+z=3$, νά εὑρεθῆ διά ποίας τιμάς τοῦ a ἡ συνάρτησις Φ ἔχει ἀκρότατον εἰς τό σημεῖον $(1,1,1)$.

226) Νά εὑρεθοῦν τά σχετικά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως $\Phi=(x+y)z$ ὅταν εἶναι $1:x^2+1:y^2+2:z^2=4$ καί $x,y,z>0$.

227) Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό ἄθροισμα τεσσάρων ἀριθμῶν μέ σταθερόν γινόμενον a^4, γίνεται ἐλάχιστον ὅταν οἱ ἀριθμοί εἶναι ἴσοι.

228) Δείξατε ὅτι τά μήκη τῶν ἡμιαξόνων τῆς τομῆς τῆς ἐπιφανείας $x^2+2y^2+z^2+2yz=1$ ἀπό τό ἐπίπεδον $y+z=0$, εἶναι 1 καί $\sqrt{2}$.

229) Ἕνα μεταβλητόν τρίγωνον εἶναι περιγεγραμμένον περί σταθερόν κύκλον ἀκτῖνος a καί ζητεῖται νά εὑρεθῆ ἡ ἀκτίς τοῦ μικροτέρου κύκλου ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ἀπό τίς τρεῖς κορυφές τοῦ τριγώνου.

230) Νά προσδιορισθοῦν οἱ ἀκμές x,y,z ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἐγγεγραμμένου εἰς σφαῖραν διαμέτρου δ, ἔτσι ὥστε ἡ συνάρτησις $\Phi=xy^2z^3$ νά γίνε-

ται μεγίστη.

231) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως $\phi = x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$ ὅταν εἶναι $x^2+y^2-z^2=2$.

232) Νὰ εὑρεθῆ ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως $\phi = x^{\mu}y^{\nu}z^{\rho}$ ὅταν $x,y,z,\mu,\nu,\rho > 0$, $x+y+z=\alpha$ καὶ ἐν συνεχείᾳ νὰ δειχθῆ ἡ ἀνισότης: $x:2+y:3+z:6 \geqslant x^{1/2}\cdot y^{1/3}\cdot z^{1/6}$.

233) Ἐκ τῶν τριγώνων ποὺ ἔχουν σταθερὴν περίμετρον 2τ, νὰ εὑρεθῆ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδόν.

234) Νὰ εὑρεθῆ ἐπὶ τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$ ἕνα σημεῖον μὲ τὴν μεγίστην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ σημεῖον $(1, 2, 3)$.

235) Νὰ εὑρεθῆ σημεῖον τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὶς κορυφὲς ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου $M_1M_2M_3M_4$, νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

236) Νὰ εὑρεθῆ ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς $x^2:\alpha^2+y^2:\beta^2+z^2:\gamma^2=1$ ἕνα σημεῖον Μ μὲ θετικὲς συντεταγμένες, τέτοιο ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν συντεταγμένων ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς εἰς τὸ Μ νὰ γίνεται ἐλάχιστον. Ὁμοίως νὰ εὑρεθῆ σημεῖον διὰ τὸ ὁποῖον ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν συντεταγμένων ἐπὶ τὴν ἀρχὴν νὰ γίνεται ἐλάχιστον.

237) Νὰ εὑρεθῆ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μεγίστου ὄγκου τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ἐλλειψοειδές: $x^2:\alpha^2+y^2:\beta^2+z^2:\gamma^2=1$.

238) Δείξατε ὅτι τὸ μῆκος λ τοῦ μεγίστου ἄξονος τοῦ ἐλλειψοειδοῦς μὲ ἐξίσωσιν: $Ax^2+By^2+\Gamma z^2+2\Delta xy+2Exz+2Hyz=1$, δίδεται ἀπὸ τὴν μεγαλειτέρα ρίζα τῆς ἐξισώσεως:

$$\begin{vmatrix} A-\lambda^{-2} & \Delta & E \\ \Delta & B-\lambda^{-2} & H \\ E & H & \Gamma-\lambda^{-2} \end{vmatrix} = 0$$

19. Γενικὴ περίληψις τοῦ πρώτου κεφαλαίου.— Οἱ ὁρισμοὶ τοῦ ὁρίου καὶ τῆς συνεχείας συναρτήσεως περισσοτέρων τῆς μιᾶς μεταβλητῶν, ἀποτελοῦν γενίκευσιν τῶν ἀντιστοίχων ὁρισμῶν διὰ συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς.

Ἡ μερικὴ παράγωγος συναρτήσεως ὡς πρὸς μίαν ὡρισμένην ἐκ τῶν μεταβλητῶν προκύπτει ἐὰν παραγωγίσωμεν τὴν συνάρτησιν ὡς πρὸς αὐτήν, θεωροῦντες κατὰ τὴν παραγώγισιν τὰς ὑπολοίπους μεταβλητὰς ὡς σταθεράς.

Αἱ παράγωγοι πρώτης τάξεως συνθέτου συναρτήσεως ὁσωνδήποτε μεταβλητῶν προκύπτουν ἀπὸ τὸν γενικὸν τύπον (7.3), αἱ παράγωγοι δευτέρας τάξεως ἀπὸ τὸν τύπον (8.7) καὶ ἐξ αὐτῶν δι' ἐπανειλημμένης παραγωγίσεως προκύπτουν αἱ παράγωγοι ἀνωτέρας τάξεως.

Τὸ διαφορικὸν πρώτης τάξεως εἶναι τὸ πρωτεῦον μέρος τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως καὶ δίδεται ἀπὸ τὸν ἀναλλοίωτον γενικὸν τύπον (9.6) εἴτε αἱ $x_1, \dots, x_\nu$ εἶναι ἀνεξάρτητες μεταβλητὲς εἴτε συναρτήσεις ἄλλων μεταβλητῶν.

Ἡ κατὰ κατεύθυνσιν παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως δύναται νὰ θε-

ωρηθῆ ὡς γενίκευσις τῆς ἐννοίας τῆς μερικῆς παραγωγίσεως.
Τὸ ἀνάπτυγμα κατὰ Taylor συναρτήσεως ὁσωνδήποτε μεταβλητῶν δίδεται ἀπὸ τον γενικὸν τύπον (11.8).
Διὰ τὸν προσεγγιστικὸν ὑπολογισμὸν τῆς διαφορᾶς $\Delta\Phi$ χρησιμοποιοῦμεν τὸν τύπον (12.1) μὲ κατάλληλον ν - δι ἑκάστην περίπτωσιν.
Οἱ ὁμογενεῖς συναρτήσεις χαρακτηρίζονται ἀπὸ τὴν σχέσιν (13.3).
Διὰ νὰ εὕρωμεν ἐὰν μία ἐξίσωσις ἢ ἕνα σύστημα ἐξισώσεων ἐπιδέχεται μονοσήμαντον ἐπίλυσιν, χρησιμοποιοῦμεν τὶς ἱκανὲς συνθῆκες ὅπως δίδονται ἀπὸ τὶς προτάσεις τοῦ ἐδαφίου 14. Αἱ παράγωγοι πλεγμένων συναρτήσεων διὰ τὶς συνήθεις περιπτώσεις δίδονται ἀπὸ τὸν πίνακα (I).
Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἐλευθέρων ἀκροτάτων μιᾶς συναρτήσεως χρησιμοποιοῦμεν τὸν πίνακα (II) καὶ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν δεσμευμένων τὸν πίνακα (III).
Διὰ νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι μία συνάρτησις ἔχει ἀκρότατον δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ τὴν πρότασιν (4.3) τοῦ Weierstass.

20. Γενικά παραδείγματα ἐπί τοῦ πρώτου κεφαλαίου

Παράδειγμα (20.1). – Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y,z) = (x+y-z):(x+y+z)$ ὅταν $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, $\Phi(0,0,0) = 0$ εἶναι ἀσυνεχὴς διὰ κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου $x+y+z=0$.
Λ ύ σ ι ς. Διὰ κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ $(0,0,0)$ ἡ συνάρτησις δὲν εἶναι ὡρισμένη διότι μηδενίζεται ὁ παρονομαστής, ἐπομένως ἡ συνάρτησις εἶναι ἀσυνεχής. Ἀλλὰ καὶ διὰ τὸ σημεῖον $(0,0,0)$ ὅπου ἡ συνάρτησις ὁρίζεται καὶ ἔχει τὴν τιμὴν 0 ἡ συνάρτησις εἶναι ἐπίσης ἀσυνεχής. Διότι ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον (x,y,z) τείνει εἰς τὸ $(0,0,0)$ κινούμενον συνεχῶς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y θὰ εἶναι $z=0$ ἐπομένως $\Phi(x,y,0) = 1$ καὶ διὰ $(x,y,0) \to (0,0,0)$ θὰ εἶναι ἐπίσης $\text{ορ}\,\Phi(x,y,0) = 1 \neq 0 = \Phi(0,0,0)$, δηλαδὴ ἡ ὁριακὴ τιμὴ διαφέρει τῆς τιμῆς τῆς συναρτήσεως εἰς τὴν θέσιν $(0,0,0)$ ἐπομένως ἡ συνάρτησις εἶναι ἀσυνεχὴς εἰς αὐτήν.

Παράδειγμα (20.2). – Τῆς συναρτήσεως $\Phi = \eta\mu(\alpha x+\beta y+\gamma)$ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μερικὴ παράγωγος $\Phi_{x^\mu y^\nu}$.
Λ ύ σ ι ς. Διὰ παραγωγίσεως θὰ ἔχωμεν:

$$\Phi_x = \alpha\,\eta\mu(\alpha x+\beta y+\gamma+\tfrac{\pi}{2}) \qquad \Phi_{x^\mu y} = \alpha^\mu\beta\,\eta\mu\left[\alpha x+\beta y+\gamma+(\mu+1)\tfrac{\pi}{2}\right]$$
$$\Phi_{x^2} = \alpha^2\eta\mu(\alpha x+\beta y+\gamma+2\tfrac{\pi}{2}) \qquad \Phi_{x^\mu y^2} = \alpha^\mu\beta^2\eta\mu\left[\alpha x+\beta y+\gamma+(\mu+2)\tfrac{\pi}{2}\right]$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$
$$\Phi_{x^\mu} = \alpha^\mu\eta\mu(\alpha x+\beta y+\gamma+\mu\tfrac{\pi}{2}) \qquad \Phi_{x^\mu y^\nu} = \alpha^\mu\beta^\nu\eta\mu\left[\alpha x+\beta y+\gamma+(\mu+\nu)\tfrac{\pi}{2}\right]$$

Παράδειγμα (20.3). – Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y) = \ell n\,|\sigma\upsilon\nu\, y| - \ell n\,|\sigma\upsilon\nu\, x|$ ἐπαληθεύει τὴν σχέσιν $(1+\Phi_y^2)\,\Phi_{xx} - 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + (1+\Phi_x^2)\,\Phi_{yy} = 0$.

Λύσις. Διά παραγωγίσεως ἔχομεν :

$$\Phi_x = \varepsilon\varphi\, x, \quad \Phi_{xx} = 1 + \varepsilon\varphi^2 x$$
$$\Phi_y = -\varepsilon\varphi\, y, \quad \Phi_{yy} = -(1+\varepsilon\varphi^2 y), \quad \Phi_{xy} = 0$$

Δι' ἀντικαταστάσεως αὐτῶν εἰς τό πρῶτον μέλος προκύπτει τό ζητούμενον.

Παράδειγμα (20.4).– Νά ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι μέχρι καί δευτέρας τάξεως τῆς συναρτήσεως : $\Phi(x,y,z) = xyz + \ell n xy$.

Λύσις. Διά παραγωγίσεως ἔχομεν :

$$\Phi_x = yz + 1 : x, \quad \Phi_{xx} = -1 : x^2, \quad \Phi_{xy} = z$$
$$\Phi_y = zx + 1 : y, \quad \Phi_{yy} = -1 : y^2, \quad \Phi_{yz} = x$$
$$\Phi_z = xy, \quad \Phi_{zz} = 0, \quad \Phi_{zx} = y$$

Παράδειγμα (20.5).– Νά ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι $\dot{\Phi}$ καί $\ddot{\Phi}$ τῆς συνθέτου συναρτήσεως $\Phi = xy + yz + zx$ ὅταν $x = t$, $y = e^{-t}$, $z = \text{συν}\, t$.

Λύσις. Διά παραγωγίσεως ἔχομεν :

$$\Phi_x = y+z, \quad \Phi_{xx} = 0, \quad \Phi_{xy} = 1, \quad \dot{x} = 1, \quad \ddot{x} = 0$$
$$\Phi_y = z+x, \quad \Phi_{yy} = 0, \quad \Phi_{yz} = 1, \quad \dot{y} = -e^{-t}, \quad \ddot{y} = e^{-t}$$
$$\Phi_z = x+y, \quad \Phi_{zz} = 0, \quad \Phi_{zx} = 1, \quad \dot{z} = -\eta\mu t, \quad \ddot{z} = -\text{συν}\, t$$

Ἀπό τόν τύπον (7.2) προκύπτει :

$$\dot{\Phi} = (y+z) - (z+x)\, e^{-t} - (x+y)\, \eta\mu t$$

Ἀπό τόν τύπον (8.3) προκύπτει :

$$\ddot{\Phi} = -2e^{-t} + 2e^{t}\eta\mu t - 2\eta\mu t + (z+x)e^{-t} - (x+y)\, \text{συν}\, t$$

Παράδειγμα (20.6).– Νά ὑπολογισθῆ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\Phi = (y-z)\, e^{ax}$ ὡς πρός x, ὅταν $y = a\eta\mu x$, $z = \text{συν}\, x$.

Λύσις. Διά παραγωγίσεως τῆς Φ μερικῶς ὡς πρός x, y, z καί τῶν x, y, z ὡς πρός x ἔχομεν :

$$\Phi_x = a(y-z)\, e^{ax} \qquad x' = 1$$
$$\Phi_y = e^{ax} \qquad y' = a\,\text{συν}\, x$$
$$\Phi_z = -e^{ax} \qquad z' = -\eta\mu x$$

Ἀπό τόν τύπον (7.2) προκύπτει :

$$\frac{d\Phi}{dx} = a(y-z)e^{ax} + ae^{ax}\text{συν}\, x + e^{ax}\eta\mu x = (a^2+1)\, e^{ax}\eta\mu x$$

Παράδειγμα (20.7).– Νά ὑπολογισθοῦν αἱ μερικαί παράγωγοι ὡς πρός u, υ πρώτης καί δευτέρας τάξεως τῆς συναρτήσεως : $\Phi = e^{xy}$ ὅταν $x = \ell n(u+\upsilon)$, $y = \text{τοξεφ}\, u\upsilon$.

Λύσις. Διά παραγωγίσεως ἔχομεν :

$$\Phi_x = ye^{xy}, \quad \Phi_y = xe^{xy}, \quad \Phi_{xx} = y^2e^{xy}, \quad \Phi_{yy} = x^2e^{xy}, \quad \Phi_{xy} = (1+xy)\, e^{xy}$$
$$x_u = x_\upsilon = 1 : (u+\upsilon), \quad x_{uu} = x_{\upsilon\upsilon} = x_{u\upsilon} = -1 : (u+\upsilon)^2$$
$$y_u = \upsilon : (1+u^2\upsilon^2),\ y_\upsilon = u : (1+u^2\upsilon^2),\ y_{uu} = -2u\upsilon^3 : (1+u^2\upsilon^2)^2,\ y_{\upsilon\upsilon} = -2u^3\upsilon\, (1+u^2\upsilon^2)^2,\ y_{u\upsilon} = (1-u^2\upsilon^2) : (1+u^2\upsilon^2)^2$$

Ἀπό τόν τύπον (7.4) προκύπτει :

$$\Phi_u = ye^{xy} : (u+\upsilon) + \upsilon xe^{xy} : (1+u^2\upsilon^2), \quad \Phi_\upsilon = ye^{xy} : (u+\upsilon) + uxe^{xy} : (1+u^2\upsilon^2)$$

Ἀπὸ τὸν τύπον (8.4) προκύπτει:

$$\Phi_{uu}=y^2e^{xy}:(u+\upsilon)^2+2\upsilon(1+xy)e^{xy}:(u+\upsilon)(1+u^2\upsilon^2)+x^2\upsilon^2e^{xy}:(1+u^2\upsilon^2)-ye^{xy}:(u+\upsilon)-2xu\upsilon^3e^{xy}:(1+u^2\upsilon^2)^2.$$

Ὁμοίως ἀπὸ τοὺς τύπους (8.5) καὶ (8.6) ὑπολογίζομεν τὰς $\Phi_{y\upsilon}$ καὶ $\Phi_{u\upsilon}$.

Παράδειγμα (20.8). — Ἐὰν εἶναι $\Phi=\Phi(x+u,\ y+\upsilon)$ δείξατε ὅτι:

$$\Phi_x=\Phi_u\,,\qquad \Phi_y=\Phi_\upsilon$$

Λύσις. Ἐὰν θέσωμεν $x+u=t$, $y+\upsilon=w$ καὶ παραγωγίσωμεν προκύπτει:

$$\Phi_x=\Phi_t\cdot\frac{\partial t}{\partial x}+\Phi_w\cdot\frac{\partial w}{\partial x}=\Phi_t \quad \text{διότι} \quad \frac{\partial t}{\partial x}=1,\ \frac{\partial w}{\partial x}=0$$

$$\Phi_u=\Phi_t\,\frac{\partial t}{\partial u}+\Phi_w\cdot\frac{\partial w}{\partial u}=\Phi_t \quad \text{διότι} \quad \frac{\partial t}{\partial u}=1,\ \frac{\partial w}{\partial u}=0$$

ὁπότε διὰ συγκρίσεως αὐτῶν προκύπτει ἡ πρώτη σχέσις. Παραγωγίζοντες τὴν Φ μερικῶς ὡς πρὸς y,υ προκύπτει καὶ ἡ δευτέρα.

Παράδειγμα (20.9). — Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις $z=x\Phi\left(\frac{y}{x}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)$ ἐπαληθεύει τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν: $x^2z_{xx}+2xyz_{xy}+y^2z_{yy}=0$ ὅπου Φ, f αὐθαίρετες συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς δύο φορὲς παραγωγίσιμες.

Λύσις. Διὰ παραγωγίσεως τῆς z ἔχομεν:

$$z_x=\Phi-y(\Phi'+f':x):x,\quad z_y=\Phi'+f':x,\quad z_{xx}=y^2(\Phi''+f'':x):x^3+2yf':x^3$$

$$z_{xy}=-f':x^2-y(\Phi''+f'':x):x^2,\quad z_{yy}=(\Phi''+f'':x):x$$

Δι' ἀντικαταστάσεως αὐτῶν εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως προκύπτει μηδέν.

Παράδειγμα (20.10). — Ποία σχέσις ὑφίσταται μεταξὺ τῆς συναρτήσεως $z=e^y\,\text{τοξ ημ}(x-y)$ καὶ τῶν μερικῶν παραγώγων αὐτῆς πρώτης τάξεως;

Λύσις. Διὰ παραγωγίσεως τῆς z ἔχομεν:

$$z_x=e^y:\sqrt{1-(x-y)^2},\ z_y=e^y\text{τοξ ημ}(x-y)-e^y:\sqrt{1-(x-y)^2}$$

Διὰ προσθέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη προκύπτει: $z_x+z_y=z$ ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη σχέσις.

Παράδειγμα (20.11). — Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ δευτέρα παράγωγος y'' τῆς συναρτήσεως $y(x)$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $F(x,y)=0$, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$y''(x)=\frac{1}{F_y^3}\begin{vmatrix} 0 & F_x & F_y \\ F_x & F_{xx} & F_{xy} \\ F_y & F_{yx} & F_{yy}\end{vmatrix}$$

Λύσις. Ὅπως εἶναι γνωστὸν ἔχομεν: $y'=-F_x:F_y$. Διὰ παραγωγίσεως αὐτῆς ὡς πρὸς x προκύπτει: $y''=\left[-F_y(F_{xx}+F_{xy}\cdot y')-F_x(F_{yx}+F_{yy}\cdot y')\right]:F_y^2$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς αὐτὴν τὴν y' καὶ προκύπτει:

$$y''=-\left(F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2\right):F_y^3$$

Γράφοντες τὸν ἀριθμητὴν ὑπὸ μορφὴν ὁριζούσης προκύπτει ὁ ζητούμενος τύπος.

Παράδειγμα (20.12). — Νά μετασχηματισθῆ ἡ δευτέρα παράγωγος y'' τῆς συναρτήσεως $y=y(x)$ εἰς πολικές συντεταγμένες ρ,θ μέ ἀνεξάρτητον μεταβλητήν τήν θ.

Λύσις. Γνωρίζομεν ὅτι $x=\rho\,\text{συν}\theta$ καί $y=\rho\,\text{ημ}\theta$. Διαφορίζοντες προκύπτει: $dx=\text{συν}\theta d\rho-\rho\,\text{ημ}\theta d\theta$, $dy=\text{ημ}\theta d\rho+\rho\,\text{συν}\theta d\theta$, ἐπομένως :

$$y'=dy/dx=(\rho'\text{ημ}\theta+\rho\,\text{συν}\theta):(\rho'\text{συν}\theta-\rho\,\text{ημ}\theta)$$

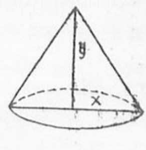
ὅπου μέ ρ' παραστήσαμε τήν παράγωγον τῆς ρ ὡς πρός θ. Διά παραγωγίσεως ὡς πρός x προκύπτει:

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{d\theta}:\frac{dx}{d\theta}=\cdots=(\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''):(\rho'\text{συν}\theta-\rho\,\text{ημ}\theta)^3$$

Παράδειγμα (20.13). — Τό ὕψος καί ἡ ἀκτίς βάσεως ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου εἶναι ἀντιστοίχως 100 καί 50 μέτρα. Ἀπό κάποια στιγμή καί ἔπειτα τό μέν ὕψος ἀρχίζει νά ἐλαττοῦται μέ ταχύτητα 10 m/sec, ἡ δέ ἀκτίς αὐξάνει μέ ταχύτητα 5 m/sec. Ζητεῖται ἡ ταχύτης μεταβολῆς τοῦ ὄγκου τοῦ κώνου εἰς αὐτήν τήν χρονικήν στιγμήν.

Λύσις. Ἔστω x ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως καί y τό ὕψος· ὁ ὄγκος u τοῦ κώνου δίδεται ὑπό τοῦ τύπου : $u=\frac{1}{3}\pi x^2 y$ καί ἡ ταχύτης μεταβολῆς αὐτοῦ θά εἶναι :

$$\frac{du}{dt}=u_x\cdot\frac{dx}{dt}+u_y\frac{dy}{dt}$$



Σχ. (20.1)

Διά παραγωγίσεως τῆς u ἔχομεν : $u_x=\frac{2}{3}\pi xy$, $u_y=\frac{1}{3}\pi x^2$ καί ἐξ ὑποθέσεως $x=50$, $y=100$, $\frac{dx}{dt}=5$, $\frac{dy}{dt}=-10$. Δι' ἀντικαταστάσεως αὐτῶν προκύπτει :

$$\frac{du}{dt}=\frac{2}{3}\pi\cdot 50\cdot 100\cdot 5-\frac{1}{3}\pi\cdot 2500\cdot 10=27012,5\ m^3/sec$$

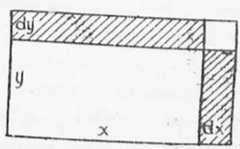
Ἐπομένως κατά τήν χρονικήν αὐτήν στιγμήν ὁ ὄγκος τοῦ κώνου αὐξάνει κατά 27012,5 κυβικά μέτρα κατά δευτερόλεπτον.

Παράδειγμα (20.14). — Ἡ βάσις καί τό ὕψος ἑνός ὀρθογωνίου εἶναι ἀντιστοίχως 5 καί 4 μέτρα. Ἀπό κάποια χρονική στιγμή καί ὕστερα ἀρχίζουν νά αὐξάνουν μέ ταχύτητα 2 μέτρα καί 1 μέτρο ἀντιστοίχως κατά δευτερόλεπτον. Ζητεῖται ἡ ταχύτης αὐξήσεως τῆς ἐπιφανείας κατά τήν χρονικήν αὐτήν στιγμήν.

Λύσις. Ἔστω x ἡ βάσις καί y τό ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου· ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου θά εἶναι : $E=xy$. Ἡ ταχύτης αὐξήσεως αὐτῆς δίδεται ὑπό τοῦ τύπου :

$$\frac{dE}{dt}=E_x\frac{dx}{dt}+E_y\frac{dy}{dt}$$

Ἔχομεν : $E_x=y$, $E_y=x$, $x=5$, $y=4$, $\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=1$ ὁπότε δι' ἀντικαταστάσεως προκύπτει: $\frac{dE}{dt}=8+5=13\ m^2/sec$.



Σχ. (20.2)

Παράδειγμα (20.15). — Εἰς ἀγωγὸν διαρρεόμενον ὑπὸ ρεύματος μετρήσαμε διαφορὰν δυναμικοῦ $E = 110\ V$ μὲ μέγιστον δυνατὸν σφάλμα $\Delta E = \pm 2V$ καὶ ἔντασιν $I = 20\ A$ μὲ μέγιστον δυνατὸν σφάλμα $\Delta I = \pm 0{,}5\ A$. Ζητεῖται τὸ μέγιστον δυνατὸν σφάλμα τὸ ὁποῖον θὰ προκύψῃ κατὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἀντιστάσεως R.

Λύσις. Ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm ἔχομεν $R = E : I = R(E,I)$ ὁπότε ἐὰν καλέσωμεν ΔR τὸ σφάλμα θὰ ἔχωμεν : $\Delta R = R(E+\Delta E, I+\Delta I) - R(E,I) \approx dR = (I\Delta E - E\Delta I) : I^2$. Ἐξ αὐτῆς ἕπεται $|\Delta R| \leqslant \{ I|\Delta E| + E|\Delta I| \} : I^2$. Μὲ τὰ ἀνωτέρω ἀριθμητικὰ δεδομένα ἔχομεν : $|\Delta R| \leqslant (20\cdot 2 + 110\cdot 0{,}5) : 400 \approx 0{,}24$. Ἑπομένως θὰ εἶναι : $R = 110 : 20 = 5{,}5\ (\Omega)$ μὲ μέγιστον σφάλμα $\pm 0{,}24\ (\Omega)$ δηλ. $\pm 4{,}4\ \%$.

Παράδειγμα (20.16). — Ἕνας ὑπολογισμὸς ἔδωσεν ὡς ἐξαγόμενον τὸ κλάσμα $732 : 647$. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν σφάλμα ὅταν γνωρίζομεν ὅτι κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ ἔγιναν ἀντιστοίχως σφάλματα $\frac{1}{2}\ \%$ καὶ $\frac{1}{3}\ \%$.

Λύσις. Ἐὰν κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $z = x : y$ γίνονται ἀντιστοίχως σφάλματα $\alpha\ \%$ καὶ $\beta\ \%$ θὰ εἶναι $\Delta x = \alpha x : 100$ καὶ $\Delta y = \beta y : 100$ ἑπομένως $\Delta z = (x+\Delta x) : (y+\Delta y) - x : y \approx dz = z_x \Delta x + z_y \Delta y = (y\Delta x - x\Delta y) : y^2$.

$$|\Delta z| \leqslant |y\Delta x - x\Delta y| : y^2 \leqslant \{ |y|\,\Delta x + |x|\cdot|\Delta y| \} : y^2 = \left|\frac{x}{y}\right| (\alpha+\beta) : 100.$$

Ἑπομένως τὸ μέγιστον δυνατὸν σφάλμα θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως : $\left|\frac{x}{y}\right| \cdot \frac{\alpha+\beta}{100}$.

Στὴν περίπτωσή μας εἶναι $\alpha+\beta = 5 : 6$ ἑπομένως τὸ μέγιστον σφάλμα θὰ εἶναι: $732\cdot 5 : 647\cdot 600 = 0{,}00943$ καὶ τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον: $732 : 647 \pm 0{,}00943 = 1{,}131 \pm 0{,}00943$.

Παράδειγμα (20.17). — Νὰ μετασχηματισθῇ ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις $a^2\Phi_{xx} - \Phi_{tt} = 0$ μιᾶς παλλομένης χορδῆς διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν νέων μεταβλητῶν :

$$u = x + at, \quad v = x - at$$

Λύσις. Διὰ παραγωγίσεως ἔχομεν :

$$\Phi_{xx} = \Phi_{uu} u_x^2 + 2\Phi_{uv} u_x v_x + \Phi_{vv} v_x^2 + \Phi_u u_{xx} + \Phi_v v_{xx}, \quad u_x = v_x = 1, \quad u_t = a, \quad v_t = -a$$

$$\Phi_{tt} = \Phi_{uu} u_t^2 + 2\Phi_{uv} u_t v_t + \Phi_{vv} v_t^2 + \Phi_u u_{tt} + \Phi_v v_{tt}, \quad u_{xx} = v_{xx} = u_{tt} = v_{tt} = 0.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω μετὰ τὶς ἀντικαταστάσεις προκύπτει :

$$\Phi_{xx} = \Phi_{uu} + 2\Phi_{uv} + \Phi_{vv}, \qquad \Phi_{tt} = a^2\Phi_{uu} - 2a^2\Phi_{uv} + a^2\Phi_{vv}$$

καὶ δι' ἀντικαταστάσεως αὐτῶν εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης ἐξισώσεως προκύπτει :

$$a^2\Phi_{xx} - \Phi_{tt} = a^2(\Phi_{uu} + 2\Phi_{uv} + \Phi_{vv}) - a^2(\Phi_{uu} - 2\Phi_{uv} + \Phi_{vv}) = 4a^2\Phi_{uv}$$

ἑπομένως τελικῶς ἡ ἐξίσωσις γίνεται : $\Phi_{uv} = 0$. Ἐξ αὐτῆς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὴν μορφὴν τῆς Φ. Πράγματι ἐκ τῆς ἐξισώσεως ἕπεται ὅτι $\Phi_u = f_1(u)$ ὅπου $f_1(u)$ αὐθαίρετος συνάρτησις τῆς u. Ἐὰν ὁλοκληρώσωμεν ὡς πρὸς u προκύπτει : $\Phi = \int f_1(u)\,du + \sigma(v) = f(u) + \sigma(v)$. Ἀντικαθιστῶντες τὰ u, v προκύπτει τελικῶς : $\Phi = f(x+at) + \sigma(x-at)$.

Αὐτὸ καὶ πολλὰ ἄλλα παραδείγματα δεικνύουν τὴν κεφαλαιώδη σημασία τῶν μετασχηματισμῶν εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν διαφόρων μαθηματικῶν προβλημάτων.

Παράδειγμα (20.18). — Νά εὑρεθοῦν τά σχετικά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως $y=y(x)$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπό τῆς ἐξισώσεως: $F(x,y)\equiv x^2+xy+y^2-27=0$.

Λ ύ σ ι ς. Διά παραγωγίσεως προκύπτει: $F_x=2x+y$, $F_y=x+2y$, $F_{xx}=F_{yy}=2$, $F_{xy}=1$ ὁπότε κατά τόν τύπον (14.2) καί κατά τό παράδειγμα (20.11) θά ἔχωμεν:

$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y} \quad \text{καί} \quad y''=\frac{1}{(x+2y)^3}\begin{vmatrix} 0 & 2x+y & x+2y \\ 2x+y & 2 & 1 \\ x+2y & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Ἡ πρώτη παράγωγος μηδενίζεται ὅταν $2x+y=0$ ἤ $y=-2x$ ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν $F=0$ προκύπτει $x^2-2x^2+4x^2-27=0$ ὁπότε $x=\pm 3$ καί $y=\mp 6$. Οἱ θέσεις διά τίς ὁποῖες ἡ συνάρτησις $y(x)$ ἐνδέχεται νά ἔχῃ ἀκρότατα εἶναι οἱ ἑξῆς δύο: $(3,-6)$ καί $(-3,6)$.

Διά τήν πρώτην ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν $y''>0$ καί διά τήν δευτέραν $y''<0$. Ἐπομένως διά $x=3$ ἡ συνάρτησις $y(x)$ λαμβάνει τήν ἐλαχίστην τιμήν $y(3)=-6$ καί διά $x=-3$ τήν μεγίστην $y(-3)=6$.

Παράδειγμα (20.19). — Νά ὑπολογισθοῦν αἱ μερικαί παράγωγοι z_x, z_y τῆς συναρτήσεως $z=z(x,y)$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπό τῆς ἐξισώσεως:

$$F=x^2+2y^2-3xz=0$$

Λ ύ σ ι ς. Διά παραγωγίσεως ἔχομεν: $F_x=2x-3z$, $F_y=4y$, $F_z=-3x$ καί δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τούς τύπους (14.11): $z_x=(2x-3z):3x$ καί $z_y=4y:3x$.

Παράδειγμα (20.20). — Νά ὑπολογισθοῦν οἱ παράγωγοι $y'(x)$ καί $z'(x)$ τῶν συναρτήσεων οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ὑπό τοῦ συστήματος:

$$F=x^2-y^2-z^2-\alpha^2=0, \qquad \Phi=x^2y-y^2z+xz^2-\alpha^3=0$$

Λ ύ σ ι ς. Διά παραγωγίσεως ἔχομεν:

$$F_x=2x \qquad F_y=-2y \qquad F_z=-2z$$
$$\Phi_x=2xy+z^2 \qquad \Phi_y=x^2-2yz \qquad \Phi_z=-y^2+2xz$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τούς τύπους (15.5) προκύπτει:

$$y'(x)=\begin{vmatrix} -2z & 2x \\ -y^2+2xz & 2xy+z^2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} -2y & -2z \\ x^2-2yz & -y^2+2xz \end{vmatrix}=(xy^2-2x^2z-2xy-z^3):(y^3-2xy^2+x^2z-2yz^2)$$

$$z'(x)=\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2xy+z^2 & x^2-2yz \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} -2y & -2z \\ x^2-2yz & -y^2+2xz \end{vmatrix}=(2xy^2+yz^2+x^3-2xyz):(y^3-2xy^2+x^2z-2yz^2)$$

Παράδειγμα (20.21). — Νά ὑπολογισθοῦν αἱ μερικαί παράγωγοι u_x, υ_y τῶν συναρτήσεων $u(x,y)$, $\upsilon(x,y)$ αἱ ὁποῖες ὁρίζονται ὑπό τοῦ συστήματος:

$$F\equiv ue^{\upsilon}-xy+\upsilon=0, \qquad \Phi\equiv \upsilon e^{y}-x\upsilon+u=0$$

Λ ύ σ ι ς. Διά παραγωγίσεως ἔχομεν:

$$F_u=e^{\upsilon} \qquad F_\upsilon=ue^{\upsilon}+1, \qquad F_x=-y, \qquad F_y=-x$$
$$\Phi_u=1, \qquad \Phi_\upsilon=e^{y}-x, \qquad \Phi_x=-\upsilon, \qquad \Phi_y=\upsilon e^{y}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς τύπους (15.7) προκύπτει:

$$u_x = \begin{vmatrix} y & ue^{v}+1 \\ v & e^{y}-x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} e^{v} & ue^{v}+1 \\ 1 & e^{y}-x \end{vmatrix} = (ye^{x} - xy - uve^{v} - v) : (e^{y+v} - xe^{v} - ue^{v} - 1)$$

$$v_y = \begin{vmatrix} e^{v} & x \\ 1 & -ve^{y} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} e^{v} & ue^{v}+1 \\ 1 & e^{y}-x \end{vmatrix} = -(ve^{y+v} + x) : (e^{y+v} - xe^{v} - ue^{v} - 1)$$

Παράδειγμα (20.22). — Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ μερικαὶ παράγωγοι u_x, v_z τῶν συναρτήσεων $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τοῦ συστήματος:

$$F \equiv xy - z\,\eta\mu u + yv + 1 = 0, \qquad \Phi \equiv 2x + \sigma\upsilon\nu(u+v) + yz = 0$$

Λ ύ σ ι ς. Ἐπειδὴ δὲν ἔχομεν τύπους ἑτοίμους παραγωγίζομεν τὶς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος ὡς πρὸς x καὶ z ὁπότε προκύπτει:

$$\left\{\begin{array}{l} y - z\,\sigma\upsilon\nu u \cdot u_x + yv_x = 0 \\ 2 - \eta\mu(u+v)\cdot u_x - \eta\mu(u+v)\cdot v_x = 0 \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{l} -\eta\mu u - z\,\sigma\upsilon\nu u \cdot u_z + yv_z = 0 \\ y - \eta\mu(u+v)v_z - \eta\mu(u+v)v_z = 0 \end{array}\right\}$$

Ἐπιλύοντες τὸ πρῶτον σύστημα ὡς πρὸς u_x καὶ τὸ δεύτερον ὡς πρὸς u_z προκύπτει τὸ ζητούμενον.

Παράδειγμα (20.23). — Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y)$ εἶναι ὁμογενὴς ὡς πρὸς x,y βαθμοῦ ὁμογενείας ν, ἰσχύουν οἱ σχέσεις (Euler):

$$x\Phi_x + y\Phi_y = \nu\Phi$$

$$x^2\Phi_{x^2} + 2xy\cdot\Phi_{xy} + y^2\Phi_{y^2} = \nu(\nu-1)\Phi$$

$$x^3\Phi_{x^3} + 3x^2y\,\Phi_{x^2y} + 3xy^2\Phi_{xy^2} + y^3\Phi_{y^3} = \nu(\nu-1)(\nu-2)\Phi$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(x\Phi_x + y\Phi_y)^{\mu} = \nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\mu+1)\Phi$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Λ ύ σ ι ς. Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y)$ εἶναι ὁμογενὴς θὰ ἰσχύῃ ἡ ταυτότης ὡς πρὸς t: $\Phi(x+xt, y+yt) \equiv (1+t)^{\nu}\Phi(x,y)$

Ἡ ἀνωτέρω ταυτότης δι' ἀναπτύξεως τοῦ πρώτου μέλους κατὰ Taylor μὲ ἀρχικὴν θέσιν (x,y) καὶ αὐξήσεως $h = xt$, $k = yt$ καὶ τοῦ δευτέρου δι' ἀναπτύξεως τοῦ $(1+t)^{\nu}$ σύμφωνα μὲ τὸ διωνυμικὸν θεώρημα, γράφεται:

$$\Phi(x,y) + t(x\Phi_x + y\Phi_y) + \frac{t^2}{2!}(x\Phi_x + y\Phi_y)^2 + \frac{t^3}{3!}(x\Phi_x + y\Phi_y)^3 + \cdots \equiv \left[1 + \nu t + \frac{\nu(\nu-1)}{2!}t^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{3!}t^3 + \cdots\right]\Phi(x,y)$$

Ἐξ αὐτῆς δι' ἐξισώσεως τῶν συντελεστῶν τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ t προκύπτουν οἱ ζητούμενες σχέσεις.

Παράδειγμα (20.24). — Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον $M_0(x_0,y_0)$ τέτοιο ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τὰ σημεῖα $M_1(x_1,y_1), \cdots, M_\nu(x_\nu,y_\nu)$ νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

Λύσις. Θὰ ζητήσωμεν τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως:

$$\Phi(x,y) = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + \cdots + (x-x_\nu)^2 + (y-y_\nu)^2$$

Διὰ παραγωγίσεως ἔχομεν: $\Phi_x = 2\nu x - 2(x_1 + \cdots + x_\nu)$, $\Phi_y = 2\nu y - 2(y_1 + \cdots + y_\nu)$. Αἱ πρῶται μερικαὶ παράγωγοι μηδενίζονται εἰς τὴν θέσιν (x_0, y_0) ὅπου

$$x_0 = (x_1 + \cdots + x_\nu) : \nu \quad \text{καὶ} \quad y_0 = (y_1 + \cdots + y_\nu) : \nu$$

Αἱ μερικαὶ παράγωγοι δευτέρας τάξεως εἶναι: $\Phi_{xx}=2\nu$, $\Phi_{xy}=0$, $\Phi_{yy}=2\nu$ καὶ $\Delta=\Phi_{xx}\Phi_{yy}-\Phi_{xy}^2=4\nu^2>0$ ἐπομένως τὸ σημεῖον $M_0(x_0,y_0)$ εἶναι τὸ ζητούμενον. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σημεῖον αὐτὸ συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον βάρους ἑνὸς συστήματος, ν ὑλικῶν σημείων ἴσης μάζης τοποθετημένα εἰς τὰ σημεῖα: $M_1(x_1,y_1),\cdots,M_\nu(x_\nu,y_\nu)$.

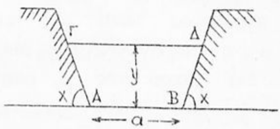
Παράδειγμα (20.25).— Δίδεται τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς διατομῆς, σχήματος τραπεζίου, μιᾶς ἀνοικτῆς πρὸς τὰ ἄνω διώρυγος. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία κλίσεως x τῶν παρειῶν καὶ τὸ ὕψος y τῆς διώρυγος, ὥστε ἡ βρεχομένη ἐσωτερικὴ περίμετρος u τῆς διατομῆς νὰ εἶναι ἐλαχίστη;

Λύσις. Ἀπὸ τὸ σχ. (20.3) ἕπεται:

$u=AB+A\Gamma+B\Delta$, $E=y(AB+\Gamma\Delta):2$.

$A\Gamma=B\Delta=y:\eta\mu x$, $\Gamma\Delta=a+2y\,\sigma\varphi x$ ἐπομένως

$u=a+2y:\eta\mu x$, $E=y(a+\sigma\varphi x)$



Σχ.(20.3)

Ἐξ αὐτῶν διὰ ἀπαλοιφῆς τοῦ a προκύπτει:

$u=E:y+2y:\eta\mu x-y\,\sigma\varphi x$, $u_x=y(1-2\sigma\upsilon\nu x):\eta\mu^2 x$, $u_{xx}=2y(2-\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu x):\eta\mu^3 x$, $u_y=-E:y^2+2:\eta\mu x-\sigma\varphi x$, $u_{yy}=2E:y^3$, $u_{xy}=(1-2\sigma\upsilon\nu x):\eta\mu^2 a$.

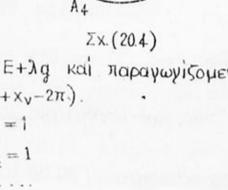
Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι διὰ $x=\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\,1/2=\pi/3$ καὶ $y=\sqrt{E:\sqrt{3}}=0,76\sqrt{E}$ πληροῦνται οἱ συνθῆκες ἐλαχίστου καὶ εἶναι διὰ τὶς τιμὲς αὐτές:

$$u=2\sqrt[4]{3}\sqrt{E}=2{,}632\sqrt{E}.$$

Ὁ ἀναγνώστης διὰ ἄσκησιν δύναται νὰ πραγματευθῆ τὸ παράδειγμα ὡς δεσμευμένον ἀκρότατον.

Παράδειγμα (20.26).— Μεταξὺ τῶν πολυγώνων μὲ ν πλευρὲς τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς κύκλον νὰ εὑρεθῆ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν.

Λύσις. Ἔστω τὸ πολύγωνον $A_1A_2\cdots A_\nu$, ν πλευρῶν ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος a καὶ $x_1,\cdots,x_\nu$ οἱ ἐπίκεντρες γωνίες οἱ ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν εἰς τὶς πλευρές $A_1A_2,\cdots,A_\nu A_1$. Ἐκ τοῦ σχ. (20.4) ἕπεται ὅτι ἀρκεῖ νὰ ζητήσωμεν μέγιστον τῆς συναρτήσεως $E=a^2(\eta\mu x_1+\cdots+\eta\mu x_\nu)$ ἡ ὁποία δίδει τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου, ὑπὸ τὴν δέσμευσιν:



Σχ.(20.4)

$y=x_1+\cdots+x_\nu-2\pi=0$. Σχηματίζομεν τὴν συνάρτησιν $\Phi=E+\lambda g$ καὶ παραγωγίζομεν:

$$\Phi=a^2(\eta\mu x_1+\cdots+\eta\mu x_\nu)+\lambda(x_1+\cdots+x_\nu-2\pi).$$

$$\begin{array}{lll}
\Phi_1=a^2\sigma\upsilon\nu x_1+\lambda & \Phi_{11}=-a^2\eta\mu x_1 & g_1=1\\
\Phi_2=a^2\sigma\upsilon\nu x_2+\lambda & \Phi_{22}=-a^2\eta\mu x_2 & g_2=1\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\\
\Phi_\nu=a^2\sigma\upsilon\nu x_\nu+\lambda & \Phi_{\nu\nu}=-a^2\eta\mu x_\nu & g_\nu=1\\
g=x_1+\cdots+x_\nu-2\pi & \multicolumn{2}{l}{\Phi_{12}=\Phi_{13}=\cdots=\Phi_{1\nu}=\Phi_{21}=\Phi_{23}=\cdots=\Phi_{\nu-1,\nu}=0}
\end{array}$$

Διὰ ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος $\Phi_i=0$, $g=0$ προκύπτει $x_1=x_2=\cdots=x_\nu=\dfrac{2\pi}{\nu}$.

Δι αὐτές τίς τιμές σχηματίζομεν τίς ὁρίζουσες $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_{\nu-1}$ καί ἔχομεν :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\alpha^2 \eta\mu \frac{2\pi}{\nu} & 0 & \cdots 0 & 1 \\ 0 & -\alpha^2 \eta\mu \frac{2\pi}{\nu} & \cdots 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & -\alpha^2 \eta\mu \frac{2\pi}{\nu} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\nu} \alpha^{2\nu-2} \eta\mu^{\nu-1} \frac{2\pi}{\nu}$$

$\Delta_2 = (-1)^{\nu-1} \alpha^{2\nu-4} \eta\mu^{\nu-2} \frac{2\pi}{\nu}$, $\Delta_3 = (-1)^{\nu-2} \alpha^{2\nu-6} \eta\mu^{\nu-3} \frac{2\pi}{\nu}, \cdots, \Delta_{\nu-1} = (-1)^2 \alpha^4 \eta\mu \frac{2\pi}{\nu}$.

Ἐπειδή $\nu \geqslant 3$ θά εἶναι $\eta\mu \frac{2\pi}{\nu} > 0$ ἐπομένως ὅταν $\nu =$ ἄρτιος πληροῦνται οἱ συνθῆκες μεγίστου (18.5) καί ὅταν $\nu =$ περιττός οἱ (18.6), ἄρα γιά κάθε ν τό κανονικόν πολύγωνον εἶναι ἐκεῖνο τό ὁποῖον ἔχει τό μέγιστον ἐμβαδόν.

Παράδειγμα (20.27).— Νά μετασχηματισθῆ ἡ ἐξίσωσις $z_{xx} + z_{yy} = 0$ εἰς ἄλλη περιέχουσα ἀντί τῶν x, y τήν μεταβλητήν ρ ὅταν εἶναι $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Λ ύ σ ι ς. Παραγωγίζομεν τήν z θεωροῦντες αὐτήν ὡς σύνθετον συνάρτησιν τῶν x, y διά μέσου τῆς ρ, ὁπότε θά ἔχωμεν :

$$z_x = z' \rho_x \qquad z_y = z' \rho_y$$
$$z_{xx} = z'' \rho_x^2 + z' \rho_{xx} \qquad z_{yy} = z'' \rho_y^2 + z' \rho_{yy}$$

Ἀντικαθιστῶντες τίς δύο τελευταῖες εἰς τήν δοθεῖσα ἐξίσωσιν προκύπτει :

$$z''(\rho_x^2 + \rho_y^2) + z'(\rho_{xx} + \rho_{yy}) = 0 \qquad (1)$$

Παραγωγίζοντες τήν δοθεῖσα σχέσιν ὡς πρός x, y προκύπτει :

$$x = \rho\rho_x \qquad y = \rho\rho_y$$
$$1 = \rho_x^2 + \rho\rho_{xx} \qquad 1 = \rho_y^2 + \rho\rho_{yy}$$

Ἐάν τίς δύο πρῶτες ὑψώσωμεν εἰς τό τετράγωνον, προσθέσωμεν κατά μέλη καί λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τήν δοθεῖσα σχέσιν προκύπτει :

$$\rho_x^2 + \rho_y^2 = 1 \qquad (2)$$

Κατόπιν αὐτῆς διά προσθέσεως κατά μέλη τῶν δύο τελευταίων προκύπτει :

$$\rho_{xx} + \rho_{yy} = \rho^{-1} \qquad (3)$$

Τέλος τίς (2) καί (3) ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (1) προκύπτει τό ζητούμενον

$$z'' + \rho^{-1} \cdot z' = 0$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις συναντᾶται εἰς τήν σπουδήν τῆς κινήσεως τῶν ρευστῶν.

Παράδειγμα (20.28).— Νά μετασχηματισθῆ ἡ παράστασις $xz_y - yz_x$ εἰς ἄλλην περιέχουσα ἀντί τῶν x, y τίς μεταβλητές ρ, t ὅταν εἶναι

$$x = \rho\sigma\upsilon\nu t, \qquad y = \rho\eta\mu t$$

Λ ύ σ ι ς. Παραγωγίζομεν τήν z θεωροῦντες αὐτήν ὡς σύνθετον συνάρτησιν τῶν ρ, t διὰ μέσου τῶν x,y ὁπότε προκύπτει :

$$z_\rho = z_x x_\rho + z_y \cdot y_\rho\,, \quad z_t = z_x x_t + z_y y_t \qquad (1)$$

Παραγωγίζοντες τὴν δοθεῖσα σχέσιν ὡς πρὸς ρ,t προκύπτει:

$$x_\rho = \text{συν}\,t, \quad x_t = -\rho\,\text{ημ}\,t, \quad y_\rho = \text{ημ}\,t, \quad y_t = \rho\,\text{συν}\,t$$

Ἀντικαθιστῶντες τὶς ἀνωτέρω εἰς τὴν (1) θὰ ἔχωμεν :

$$z_\rho = z_x \cdot \text{συν}\,t + z_y\,\text{ημ}\,t\,, \qquad z_t = -z_x \rho\,\text{ημ}\,t + z_y \rho\,\text{συν}\,t$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων ἐπιλύοντες ὡς πρὸς z_x, z_y προκύπτει :

$$z_x = z_\rho\,\text{συν}\,t - z_t\,\rho^{-1}\cdot\text{ημ}\,t \qquad z_y = z_\rho \cdot \text{ημ}\,t + z_t\,\rho^{-1}\,\text{συν}\,t$$

Ἀντικαθιστῶντες τὶς ἀνωτέρω εἰς τὴν δοθεῖσα παράστασιν προκύπτει τελικῶς :

$$x z_y - y z_x = \cdots = z_t$$

Ὁ ἀνωτέρω μετασχηματισμὸς συναντᾶται εἰς τὴν θεωρία τῶν πλανητῶν.

Παράδειγμα (20. 29). – Νὰ μετασχηματισθῆ ἡ ἐξίσωσις :

$$x^{-2} z_x^2 + y^{-2} z_y^2 - e^z = 0$$

εἰς ἄλλην περιέχουσα ἀντὶ τῶν z, y,x ἀντιστοίχως τὶς μεταβλητὲς u, υ, t ὅταν μεταξὺ αὐτῶν ὑφίστανται οἱ σχέσεις :

$$u = x^2 + y^2, \quad \upsilon = x^2 - y^2, \quad \ell n \frac{t}{2} = z$$

Λ ύ σ ι ς. Θεωροῦντες τὴν u ὡς σύνθετον συνάρτησιν τῶν x, y διὰ μέσου τῶν υ, t καὶ παραγωγίζοντες προκύπτει :

$$u_x = u_\upsilon \upsilon_x + u_t t_x\,, \qquad u_y = u_\upsilon \upsilon_y + u_t t_y$$

Παραγωγίζοντες τὶς δοθεῖσες σχέσεις ὡς πρὸς x, y θὰ ἔχωμεν :

$$u_x = 2x, \quad \upsilon_x = 2x, \quad t_x = 2e^z z_x \qquad u_y = 2y, \quad \upsilon_y = -2y, \quad t_y = -2e^z z_y$$

Ἀντικαθιστῶντες αὐτὲς εἰς τὶς προηγούμενες ἐξισώσεις προκύπτει :

$$x = x u_\upsilon + e^z z_x u_t \qquad , \qquad y = -y u_\upsilon + e^z z_y u_t$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν ἐπιλύοντες ὡς πρὸς z_x, z_y θὰ ἔχωμεν :

$$z_x = x\,(1 - u_\upsilon) : e^z u_t \qquad z_y = y\,(1 + u_\upsilon) : e^x u_t$$

Ἀντικαθιστῶντες τὶς ἀνωτέρω εἰς τὴν δοθεῖσα ἐξίσωσιν προκύπτει τελικῶς :

$$16\,u_\upsilon^2 - t^3 u_t^2 + 16 = 0$$

Γενικαὶ ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ πρώτου κεφαλαίου

239) Ἀποδείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y) = -y$ διὰ $x \leqslant 0$, $\Phi(x,y) = +y$ διὰ $x > 0$, εἶναι ἀσυνεχὴς δι' ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἄξονος τῶν y ἐκτὸς τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων, σχεδιάσατε δὲ τὴν συνάρτησιν $z = \Phi(x,y)$ ὡς πρὸς σύστημα ἀξόνων oxyz.

240) Ἐξετάσατε ἐὰν ἡ συνάρτησις : $\Phi(x,y) = (x^2+y^2)\,\ell n(x^2+y^2) - (x^2+y^2)$, $\Phi(0,0) = 0$. ἔχῃ μερικὰς παραγώγους πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ ἂν εἶναι συνεχεῖς εἰς αὐτήν.

241) Ἐὰν εἶναι $z = z(u,\upsilon)$ καὶ $u = xy$, $\upsilon = x+y$ δείξατε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις $z_{xx} = y^2 z_{uu} + 2y\,z_{u\upsilon} + z_{\upsilon\upsilon}$.

242) Ἐάν εἶναι $z=z(x,y)$ καί $x+y=\ln(u+v)$, $x-y=\ln(u-v)$ δείξατε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις $z_{xx}-z_{yy}=(u^2-v^2)(z_{uu}-z_{vv})$.

243) Ἀποδείξατε ὅτι ἐν γένει δέν ἰσχύει ἡ ταυτότης:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x,y) \equiv (x^2-y^2)\Phi_{xy}+xy(\Phi_{yy}-\Phi_{xx}).$$

244) Ἐάν εἶναι $\Phi=\Phi(u)$ καί $u=(x^2+y^2)$ τοξ εφ $\frac{y}{x}$, δείξατε ὅτι ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$x\Phi_y-y\Phi_x=(x^2+y^2)\frac{d\Phi}{du},\quad \left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(x\frac{\partial\Phi}{\partial y}-y\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)=2(x^2+y^2)\left(\frac{d\Phi}{du}+u\frac{d^2\Phi}{du^2}\right).$$

245) Ἐάν εἶναι $z=z(x,y)$, $z_{xy}=0$ καί $x=uv$, $y=u+v$, δείξατε ὅτι ἰσχύουν οἱ σχέσεις: $x_v v_x=u\cdot(u-v)=y_u u_y$, $(u-v)(uz_{uu}+vz_{vv})-(u^2-v^2)z_{uv}-(u+v)(z_u-z_v)=0$.

246) Ἐάν εἶναι $x=a\,\mathrm{ch}u\,\text{συν}v$, $y=a\,\mathrm{sh}u\,\text{ημ}v$ δείξατε ὅτι:

$$\frac{\partial}{\partial u}(x+y)^2+\frac{\partial}{\partial v}(x+y)^2=4a(x+y)\,\mathrm{sh}u\,\text{συν}v,\ \frac{\partial^2}{\partial u^2}(x+y)^2+\frac{\partial^2}{\partial v^2}(x+y)^2=4a^2(\mathrm{ch}^2u-\text{συν}^2v)$$

247) Ἐάν εἶναι $\Phi=\Phi(x,y)$ καί $x=u:(u^2+v^2)$, $y=v:(u^2+v^2)$ δείξατε ὅτι:

$$(x^2+y^2)(\Phi_{xx}+\Phi_{yy})=(u^2+v^2)(\Phi_{uu}+\Phi_{vv}).$$

248) Ἐάν εἶναι $\Phi=\Phi(x,y)$ καί $x:\text{ημ}\theta=y:\mathrm{sh}\varphi=1:(\text{συν}\theta+\mathrm{ch}\varphi)$ δείξατε ὅτι:

$$\Phi_x^2+\Phi_y^2=(\Phi_\theta^2+\Phi_\varphi^2):(\text{συν}\theta+\mathrm{ch}\varphi)^2$$

249) Ἐάν εἶναι $x=x(\xi,\eta)$, $y=y(\xi,\eta)$ καί $A=x_\xi^2+y_\xi^2$, $Z=x_\xi\cdot x_\eta+y_\xi\cdot y_\xi$, $B=x_\eta^2+y_\eta^2$, $H=x_\xi y_\eta-x_\eta y_\xi$, δείξατε ὅτι διά κάθε διαφορίσιμον συνάρτησιν $\Phi=\Phi(x,y)$ ἰσχύουν οἱ σχέσεις: $H\Phi_x=\Phi_\xi\cdot y_\eta-\Phi_\eta\cdot y_\xi$, $H\Phi_y=-\Phi_\xi x_\eta+\Phi_\eta x_\xi$, $\Phi_{xx}+\Phi_{yy}=$
$=\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{B\Phi_\xi-Z\Phi_\eta}{H}\right)-\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{Z\Phi_\xi-A\Phi_\eta}{H}\right)$.

250) Ἐάν εἶναι: $\Phi=\Phi(x,y)$ καί $x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y^2=uv$ δείξατε ὅτι:

$$4\cdot\Phi_{uv}=\Phi_{xx}+2xy^{-1}\Phi_{xy}+\Phi_{yy}+y^{-1}\cdot\Phi_y.$$

251) Ἐάν εἶναι $x=f(u,v)$, $y=\sigma(u,v)$, $z=\varphi(u,v)$ δείξατε ὅτι:

$$(f_u\sigma_v-f_v\sigma_u)z_x=\varphi_u\sigma_v-\varphi_v\sigma_u$$

$$(f_u\sigma_v-f_v\sigma_u)^3 z_{xx}=\begin{vmatrix} f_u & f_v & f_{uu}\sigma_v^2-2f_{uv}\sigma_u\sigma_v+f_{vv}\sigma_u^2\\ \sigma_u & \sigma_v & \sigma_{uu}\sigma_v^2-2\sigma_{uv}\sigma_u\sigma_v+\sigma_{vv}\sigma_u^2\\ \varphi_u & \varphi_v & \varphi_{uu}\sigma_v^2-2\varphi_{uv}\sigma_u\sigma_v+\varphi_{vv}\sigma_u^2\end{vmatrix}$$

252) Ἐάν εἶναι $y=z+x\sigma(y)$, $u=u(y)$, $\Phi=\Phi(u)$ δείξατε ὅτι:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\Phi u_x)=\frac{\partial}{\partial x}(\Phi u_z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sigma\cdot u_z,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial z}(\sigma^2\cdot u_z),\ \dots,\ \frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu}=\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial z^{\nu-1}}(\sigma^\nu\cdot u_z)$$

253) Ἐάν εἶναι $x=\rho\,\text{συν}\theta$, $y=\rho\,\text{ημ}\theta$ καί $\Phi=\Phi(\rho,\theta)$ δείξατε ὅτι:

$\Phi_x=\Phi_\rho\cdot\text{συν}\theta-\Phi_\theta\cdot\rho^{-1}\text{ημ}\theta$, ἐάν δέ εἶναι $\Phi=\rho^{-\nu}\text{ημ}\nu\theta$ θά εἶναι $\Phi_{xx}+\Phi_{yy}=0$.

254) Ἐάν εἶναι $\Phi=\Phi(u)$ καί $u=x:y$, $\Phi_\nu=\rho^\nu\Phi$, $\rho^2=x^2+y^2$ δείξατε ὅτι

$$x\Phi_x+y\Phi_y=0,\ \frac{\partial^2\Phi_\nu}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi_\nu}{\partial y^2}=\rho^\nu(\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\nu^2\rho^{-2}\Phi)$$

255) Ἐκ τῶν τεσσάρων μεταβλητῶν u_1,u_2,u_3,u_4 κάθε τρεῖς εἶναι ἀνεξάρτητες, ἑκάστη δέ ἐξ αὐτῶν δύναται νά ἐκφρασθῇ ὡς συνάρτησις τῶν ὑπολοίπων τριῶν. Ἐάν μέ u_{ij} $(i\neq j)$ παραστήσωμεν τήν μερικήν παράγωγον τῆς u_i ὡς πρός τήν μεταβλητήν u_j νά δειχθῇ ὅτι: $u_{23}u_{31}u_{12}=-1$, $u_{12}u_{34}=u_{14}u_{32}$.

256) Ἐάν εἶναι $F(x,y,z)=0$, $\Phi(x,y,z)=0$ νά δειχθῇ ὅτι:

$$dy:dx=-(F_x\Phi_z-F_z\Phi_x):(F_y\Phi_z-F_z\Phi_y).$$

257) Ἐάν εἶναι $x^2+y^2-25uv=0$, $ux+vy-1=0$ δείξατε ὅτι διά $u=v=1$ εἶναι $x_u=\pm 1:14$.

258) Ἐάν εἶναι $\Phi=\Phi(x,y)$ καί $u(x,t)=0$, $v(y,t)=0$ δείξατε ὅτι:

$$d\Phi : dt = -(\Phi_x v_y u_t + \Phi_y u_x v_t) : u_x \cdot v_y$$

259) Ἐὰν εἶναι $\Phi = xyz$ καὶ $yz+zx+xy=\alpha$, $x+y+z=\beta$ ὅπου α, β σταθερές, δείξατε ὅτι: $d\Phi : dx = (x-y)(x-z)$.

260) Ἐὰν εἶναι: $u = e^x \sigma \upsilon \nu y$, $v = e^x \eta \mu y$ καὶ $x = e^\rho \sigma\upsilon\nu\vartheta$, $y = e^\rho \eta\mu\vartheta$ ὅπου $\rho = \rho(\vartheta)$, δείξατε ὅτι: $du : dv = [d\rho : d\vartheta - \varepsilon\varphi(y+\vartheta)] : [1 + \varepsilon\varphi(y+\vartheta)\, d\rho : d\vartheta]$.

261) Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις $z = F(x,y)$ προκύπτῃ δι' ἀπαλειφῆς τῆς u μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων $y = f(u,x)$, $z = \sigma(u,x)$ δείξατε ὅτι: $f_u F_x = f_u \sigma_x - f_x \sigma_u$, $f_u F_y = \sigma_u$.

262) Ἐὰν εἶναι $\Phi = \Phi(x,y)$ καὶ $x = \sqrt{\rho}\, \sigma\upsilon\nu \vartheta/2$, $y = \sqrt{\rho}\, \eta\mu \vartheta/2$ δείξατε ὅτι:

$$2\rho\Phi_\rho = x\Phi_x + y\Phi_y,\ 2\Phi_\vartheta = x\Phi_y - y\Phi_x,\ 4(\rho\Phi_{\rho\rho} + \Phi_\rho + \rho^{-1}\cdot\Phi_{\vartheta\vartheta}) = \Phi_{xx} + \Phi_{yy}.$$

263) Ἐὰν εἶναι $x = \rho\, \sigma\upsilon\nu\omega$, $y = \rho\, \eta\mu\omega$ δείξατε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\frac{\partial^{2\nu}\omega}{\partial x^\nu \partial y^\nu} = \frac{(2\nu-1)!}{\rho^{2\nu}}\, \eta\mu\left(2\nu\omega - \frac{1}{2}\nu\pi\right).$$

264) Ἐὰν εἶναι $x\,\sigma\upsilon\nu\omega - y\,\eta\mu\omega = x\,\eta\mu\omega + y\,\sigma\upsilon\nu\omega = \rho$ καὶ $\Phi = \Phi(x,y)$ δείξατε ὅτι:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = (\Phi_{\rho\rho} + \rho^{-1}\Phi_\rho + \rho^{-2}\Phi_{\omega\omega}) : 2$$

265) Ἐὰν εἶναι $x = \rho\, \tau\varepsilon\mu\vartheta$, $y = \rho\, \varepsilon\varphi\vartheta$ καὶ $\Phi = \Phi(x,y)$ δείξατε ὅτι:

$$\Phi_{xx} - \Phi_{yy} = \Phi_{\rho\rho} + \rho^{-1}\Phi_\rho - \rho^{-2}\sigma\upsilon\nu^2\vartheta\, \Phi_{\vartheta\vartheta} + \rho^{-2}\eta\mu\vartheta\, \sigma\upsilon\nu\vartheta\, \Phi_\vartheta.$$

266) Ἐὰν εἶναι $u = f(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)$, $v = \sigma(\alpha x^2 + 2\beta xy + \beta y^2)$ δείξατε ὅτι:

$$\partial(uv_x) : \partial y = \partial(uv_y) : \partial x.$$

267) Ἐὰν εἶναι $\Phi = \Phi(\rho, \vartheta)$ καὶ $\rho\, \sigma\upsilon\nu\vartheta = u^{-1}$, $\varepsilon\varphi\vartheta = s$ δείξατε ὅτι:

$$\rho\Phi_\rho = -u\Phi_u, \quad \Phi_\vartheta = us\Phi_u + (1+s^2)\Phi_s.$$

268) Δείξατε ὑπὸ τὶς προϋποθέσεις τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ὅτι ἐὰν ἡ Φ ἐπαληθεύῃ τὴν ἐξίσωσιν $\sigma\upsilon\nu\vartheta\, \Phi_{\rho\vartheta} + \rho\,\eta\mu\vartheta\,\Phi_{\rho\rho} = 0$ τότε θὰ εἶναι $\Phi_u = (1+s^2)^{1/2}\cdot\sigma(u)$ ὅπου $\sigma(u)$ κάποια συνάρτησις τῆς u.

269) Ἐὰν εἶναι $x^2+y^2+z^2-3xyz = 0$, $\Phi = x^3y^2z$ νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς Φ_x εἰς τὸ σημεῖον $(1,1,1)$ ὅταν ἀνεξάρτητες μεταβλητὲς εἶναι οἱ x,y καὶ ὅταν εἶναι οἱ x,z.

270) Ἐὰν εἶναι $\Phi = \Phi(x,y)$ καὶ $x = \eta\mu u : (\sigma\upsilon\nu u + ch v)$, $y = \sigma(v) : (\sigma\upsilon\nu u + ch v)$ δείξατε ὅτι διὰ κάποια μορφὴ τῆς συναρτήσεως $\sigma(v)$ ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$x\Phi_x + y\Phi_y = \eta\mu x\, ch v\cdot\Phi_u + \sigma\upsilon\nu u\, sh v\, \Phi_v$$

καὶ εὕρετε δι' αὐτὴν τὴν περίπτωσιν τὴν μορφὴν τῆς $\sigma(v)$.

271) Τὸ ἐμβαδὸν E ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εὑρέθη διὰ μετρήσεως τῆς πλευρᾶς α καὶ τῶν γωνιῶν Β, Γ. Δείξατε ὅτι τὸ σφάλμα ΔE τὸ ὀφειλόμενον εἰς τὰ σφάλματα $\Delta\alpha$, ΔB, $\Delta\Gamma$ δίδεται προσεγγιστικῶς ἀπὸ τὸν τύπον:

$$\frac{1}{E}\Delta E = 2\frac{1}{\alpha}\Delta\alpha + \frac{\gamma}{\alpha}\,\frac{\Delta B}{\alpha\,\eta\mu B} + \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\Delta\Gamma}{\eta\mu\Gamma}.$$

272) Νὰ μετασχηματισθῇ ἡ παράστασις $z_x^2 + z_y^2$ εἰς ἄλλην περιέχουσα ἀντὶ τῶν x,y τὴν μεταβλητὴν t, ὅταν εἶναι $\sqrt{x^2+y^2} = \ell n t$.

273) Ὁμοίως διὰ τὴν παράστασιν $z_{xx} - z_{yy}$ ὅταν εἶναι $x^2 - y^2 = e^{2t}$.

274) Ὁμοίως διὰ τὴν ἐξίσωσιν $xy^3 z_{xx} + 2x^2y^2 z_{xy} + x^3y\, z_{yy} - y^3 z_x - x^3 z_y = 0$ ὅταν εἶναι $\sqrt{x^2+y^2} = t$.

275) Νὰ μετασχηματισθῇ ἡ παράστασις $xz_x + yz_y$ εἰς ἄλλην περιέχουσα ἀντὶ τῶν x,y τὶς μεταβλητὲς t, ρ ὅταν εἶναι: $x = \rho\,\sigma\upsilon\nu t$, $y = \rho\,\eta\mu t$.

276) Ὁμοίως διὰ τὴν ἐξίσωσιν $z_{xx} + z_{yy} = 0$.

277) Νὰ μετασχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{y}\,(z_y^2 - z_x z_y) - \sqrt{x}\,(z_x^2 - z_y z_x) = 0$ εἰς ἄλλην πε-

ριέχουσα ἀντὶ τῶν x, y τὶς μεταβλητὲς u, v ὅταν εἶναι:

$$x = (u^2+v^2)^2, \quad y = (u^2-v^2)^2$$

278) Ὁμοίως διὰ τὴν παράστασιν: $(x^3 z_{xxx} + 3x^2 z_{xx} + x z_x)^2 - (y^3 z_{yyy} + 3y^2 z_{yy} + y z_y)^2$ ὅταν εἶναι: $x = e^{v+u}$, $y = e^{v-u}$.

279) Νὰ μετασχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$ εἰς ἄλλην περιέχουσα ἀντὶ τῶν x, y, z τὴν μεταβλητὴν ρ, ὅταν εἶναι $x^2+y^2+z^2=\rho^2$.

280) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σχετικὰ ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως $y = y(x)$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπὸ πλεγμένην μορφὴν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν: $y^3 - 3x^2 y + x^3 - 3 = 0$.

281) Ὁμοίως διὰ τὴν ἐξίσωσιν $y^2 - x^2 y + x - x^3 = 0$.

282) " " " " $y^2 + 2x^2 y + 4x - 3 = 0$.

283) " " " " $y^4 - 4a^2 xy + x^4 = 0$.

284) " " " " $\text{συν}(y-x) - 2\,\text{ημ}\,y - \text{συν}\,x = 0$.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σχετικὰ ἀκρότατα τῶν συναρτήσεων:

285) $x^3+y^3-9xy+27$

286) $xy^2z^3(a-x-y-z)$

287) x^2-xy+y^2-3y

288) $x^4+y^4+2x^2y^2-8x+8y$

289) $y^4-8y^3+18y^2-8y+x^3-3x^2-3x$

290) $x^2y(x^4+2y^3-a)^2$

291) $x^3y^3:(x-a)(y-\beta)$

292) $xy\sqrt{a^2\beta^2-a^2x^2-\beta^2y^2}$

293) $\text{ημ}x+\text{ημ}y+\text{ημ}(x+y)$

294) $xyz(a^2-x^2-y^2-z^2)$

295) $ax^2-\beta xy+xz+yz$

296) $16a\beta xyz:(a+x)(x+y)(y+z)(z+\gamma)$

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σχετικὰ ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως z ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπὸ πλεγμένην μορφὴν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

297) $z^2+xyz-xy^2-x^3=0$

298) $a(x^3+y^3+z^3) = x^2yz+y^2xz+z^2xy$

299) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις $(a:x)^\kappa+(x:y)^\kappa+(y:\beta)^\kappa$, ὅπου a, β, κ σταθερές, διὰ νὰ ἔχῃ σχετικὰ ἀκρότατα εἰς τὸ σημεῖον (x,y) πρέπει οἱ ἀριθμοὶ a, x, y, β νὰ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον.

300) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις $\phi = z^2+2xy$ ὑπὸ τὴν δέσμευσιν: $x^3+y^3+z^3-6xyz+3=0$, ἔχει ἐλάχιστον εἰς τὸ σημεῖον $(1,1,1)$.

301) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σχετικὰ ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως $\phi = x^3+y^3+z^3$ ὅταν εἶναι: $x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=a^2$.

302) Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $\phi = x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}$ ὑπὸ τὴν δέσμευσιν $ax+\beta y+\gamma z=1$ ὅπου $a,\beta,\gamma>0$ ἔχει ἀκρότατον ὅταν $ax^2=\beta y^2=\gamma z^2$ καὶ $xyz>0$.

303) Δείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον μεγίστου ἐμβαδοῦ τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κύκλον, εἶναι ἰσόπλευρον.

304) Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγίστη καὶ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια $(x:a)^\lambda+(y:\beta)^\lambda+(z:\gamma)^\lambda=1$ ὅπου a,β,γ σταθεροὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ λ ἄρτιος μεγαλείτερος τοῦ 2.

305) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐὰν $a,\beta,\gamma>0$ καὶ A, B, Γ οἱ τρεῖς γωνίες τριγώνου ΑΒΓ, ἡ συνάρτησις $\phi = \text{ημ}^a A\,\text{ημ}^\beta B\,\text{ημ}^\gamma \Gamma$ γίνεται μεγίστη ὅταν εἶναι: $\text{εφ}^2 A = a(a+\beta+\gamma):\beta\gamma$, $\text{εφ}^2 B = \beta(a+\beta+\gamma):\gamma a$, $\text{εφ}^2\Gamma = \gamma(a+\beta+\gamma):a\beta$.

306) Δείξατε ὅτι ἐὰν τὰ x,y,z συνδέωνται διὰ τῶν σχέσεων: $x^2+y^2+z^2=1$, $\lambda x+\mu y+\nu z=0$ καὶ τὰ a,β,γ δὲν εἶναι ὅλα ἴσα, τότε οἱ ἀκρότατες τιμὲς τῆς συναρτήσεως $\Phi = ax^2+\beta y^2+\gamma z^2$ εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως ὡς πρὸς u: $\lambda^2:(u-a)+\mu^2:(u-\beta)+\nu^2:(u-\gamma)=0$.

307) Νά εὑρεθοῦν τά σημεία τῆς ἐπιφανείας $x^2+y^2+z^2-2x+2y+6z+9=0$ διά τά ὁποῖα ἡ συνάρτησις $\Phi = x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$ λαμβάνει ἀκροτάτην τιμήν.

308) Δείξατε ὅτι ὑπάρχουν τρία σημεία τῆς γραμμῆς : $x+y+z=1$, $xyz=-1$ τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ἀπό τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων λαμβάνει ἐλαχίστην τιμήν.

309) Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi = x^3-3xy^2+18y$ ὅταν εἶναι $3x^2y-y^3-6x=0$ γίνεται μεγίστη ἤ ἐλαχίστη ὅταν εἶναι $x=y=\pm\sqrt{3}$.

310) Ἐξετάσατε ἀπό ἀπόψεως ἀκροτάτων τόν χαρακτῆρα τῶν σημείων $(-5,4,4)$, $(1,1,1)$ διά τήν συνάρτησιν $\Phi = x^2+y^2+z^2$ ὅταν εἶναι $x+y+z=3$, $x^3+y^3+z^3=3$.

311) Νά εὑρεθῆ ἡ ἐλαχίστη τιμή τῆς συναρτήσεως $\Phi = \alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2$ ὅταν $\alpha,\beta,\gamma>0$ καί $x+y+z=1$ καί ἀπό τό ἐξαγόμενον συμπεράνατε τήν ἐλαχίστην τιμήν τῆς συναρτήσεως $F=\kappa x^2+\lambda y^2+\mu z^2+2yz+2zx+2xy$ ὅταν εἶναι πάλι $x+y+z=1$ καί $\kappa,\lambda,\mu>1$.

312) Δείξατε ὅτι ἡ θέσις ἐλαχίστου τῆς συναρτήσεως $\Phi=(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2):x^2y^2z^2$ ὅταν $\alpha,\beta,\gamma>0$ καί $\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=1$, ὁρίζεται ὑπό τῶν σχέσεων : $x^2=u:2\alpha(u+\alpha)$, $y^2=u:2\beta(u+\beta)$, $z^2=u:2\gamma(u+\gamma)$, ὅπου u ἡ θετική ρίζα τῆς ἐξισώσεως : $u^3-(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)u-2\alpha\beta\gamma=0$.

313) Ἐάν ρ παριστάνη τήν ἀπόστασιν τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων ἀπό ἕνα σημεῖον τῆς γραμμῆς : $\lambda x+\mu y+\nu z=0$, $(x^2+y^2+z^2)^2=\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2$, δείξατε ὅτι ἡ μεγίστη καί ἐλαχίστη τιμή τοῦ ρ^2, εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\lambda^2:(\alpha^2-\rho^2)+\mu^2:(\beta^2-\rho^2)+\nu^2:(\gamma^2-\rho^2)=0$.

314) Δείξατε ὅτι ἐάν $\alpha_1\gamma_1-\beta_1^2>0$, ἡ μεγίστη τιμή τῆς συναρτήσεως : $\Phi=(\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2):(\alpha_1x^2+2\beta_1xy+\gamma_1y^2)$ ἰσοῦται μέ τήν μεγαλειτέρα ρίζα τῆς ἐξισώσεως ὡς πρός λ : $(\alpha\gamma-\beta^2)-\lambda(\alpha\gamma_1-2\beta\beta_1+\alpha_1\gamma)+\lambda^2(\alpha_1\gamma_1-\beta_1^2)=0$.

315) Νά εὑρεθῆ εἰς τό ἐσωτερικόν τριγώνου ἕνα σημεῖον τέτοιο ὥστε τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών του ἀπό τίς τρεῖς κορυφές νά γίνεται ἐλάχιστον.

316) Ἐξ ὅλων τῶν τριγώνων τά ὁποῖα δυνάμεθα νά ἐγγράψωμεν εἰς τρίγωνον δεδομένον νά εὑρεθῆ ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι ἐλαχίστη.

317) Νά εὑρεθῆ εἰς τό ἐσωτερικόν τριγώνου ἕνα σημεῖον τέτοιο ὥστε τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπό τίς τρεῖς κορυφές νά εἶναι ἐλάχιστον.

318) Νά εὑρεθοῦν τά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως $\Phi = \alpha\eta\mu^2x+\beta\eta\mu^2y$ ὅταν εἶναι $y-x=\frac{\pi}{4}$.

319) Διά δεδομένου σημείου $M(\alpha,\beta,\gamma)$ νά ἀχθῆ ἕνα ἐπίπεδον τό ὁποῖον νά σχηματίζη μετά τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων ἕνα τετράεδρον ἐλαχίστου ὄγκου.

320) Νά ἀναλυθῆ ὁ ἀριθμός K εἰς τρία μέρη ἔτσι ὥστε τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των νά εἶναι μέγιστον καί τά γινόμενα αὐτῶν ἀντιστοίχως ἐπί τούς ἀριθμούς α,β,γ νά ἔχουν ἄθροισμα μηδέν.

321) Νά ἀναλυθῆ ὁ ἀριθμός α εἰς ν-μέρη ἔτσι ὥστε τό γινόμενό τους νά εἶναι μέγιστον.

322) Νά εὑρεθοῦν τά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως $\Phi=(x+\alpha)(y+\beta)(z+\gamma)$ ὅταν $\alpha^x\beta^y\gamma^z=K$.

323) Ὁμοίως διά τήν συνάρτησιν $\Phi=xy^2z^3$ ὅταν εἶναι $x+\mu y+\nu z^3=\alpha$.

324) » » » » $\Phi=\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y\,\sigma\upsilon\nu z$ ὅταν $x+y+z=\pi$.

325) » » » » $\Phi=(\alpha^x-1)(\beta^y-1)(\gamma^z-1)$ ὅταν $\alpha^x\beta^y\gamma^z=K$.

326) Νά εὑρεθῆ τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς τοῦ ὑπερβολοειδοῦς $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ ὑπό τοῦ ἐπιπέδου $Ax+By+\Gamma z=0$.

327) Δείξατε ὅτι οἱ τιμές τῆς συναρτήσεως $\Phi=x^4:\alpha^4+y^4:\beta^4+z^4:\gamma^4$ διά τά σημεία τῆς

γραμμῆς: $x^2 : \alpha^2 + y^2 : \beta^2 + z^2 : \gamma^2 = 1$, $x : \alpha + y : \beta + z : \gamma = 1$, κεῖνται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ $\frac{11}{27}$ καὶ ὅτι ἑκάστην ἐξ αὐτῶν τῶν ἀκροτάτων τιμῶν ἡ συνάρτησις τὴν λαμβάνει τρεῖς φορές.

328) Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ ἀκρότατες τιμές τῆς συναρτήσεως $\Phi = x^2 + y^2 + z^2$, ὅταν εἶναι: $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, $Ax^2 + By^2 + \Gamma z^2 + 2\Delta yz + 2Ezx + 2Hxy = 1$, δίδονται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\begin{vmatrix} A - \Phi^{-1} & H & E & \alpha \\ H & B - \Phi^{-1} & \Delta & \beta \\ E & \Delta & \Gamma - \Phi^{-1} & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix}$$

329) Ἐπαληθεύσατε τὸν τύπον (16.1) διὰ τὶς συναρτησιακὲς σχέσεις:

$$u = x^2 + y^2, \quad v = 2xy \quad \text{καὶ} \quad x = \rho\,\text{συν}\vartheta, \; y = \rho\,\eta\mu\vartheta$$

330) Ἐξετάσατε ἐὰν εἶναι ἐξηρτημένες οἱ τρεῖς συναρτήσεις:

$$\Phi_1 = x + y + z, \quad \Phi_2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \Phi_3 = x^3 + y^3 + z^3$$

331) Ἐὰν οἱ μεταβλητές x, y, z εἶναι συναρτήσεις τῶν u, v μὲ συνεχεῖς πρώτης τάξεως μερικὰς παραγώγους, δείξατε ὅτι: $\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}dx + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}dy + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dz = 0.$

332) Ἐὰν εἶναι: $x = u^3 + v$, $y = u + v^3$, $z = e^{u^2 + v^2}$ νὰ ἐκφρασθῇ ἡ z_x συναρτήσει τῶν u, v.

333) Ἐὰν οἱ μεταβλητές u, v, w εἶναι συναρτήσεις τῶν x, y νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\frac{\partial(uv^{-1}, w)}{\partial(x,y)} = v^{-2}\left[v\frac{\partial(u,w)}{\partial(x,y)} - u\frac{\partial(v,w)}{\partial(x,y)}\right]$$

334) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις $F(x_1, \cdots, x_\nu; y_1, \cdots, y_\nu)$ ἐπαληθεύῃ ἐκ ταυτότητος τὴν σχέσιν: $\partial(F_{x_1}, \cdots, F_{x_\nu}) : \partial(y_1, \cdots, y_\nu) = \partial(F_{y_1}, \cdots, F_{y_\nu}) : \partial(x_1, \cdots, x_\nu)$.

335) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ συναρτησιακὴ ὀρίζουσα τῶν συναρτήσεων: $\sigma(x,y)$, $\sigma(y,z)$, $\sigma(z,x)$, ὡς πρὸς x, y, z εἶναι: $\sigma_x(x,y) \cdot \sigma_y(y,z)\,\sigma_z(z,x) + \sigma_x(z,x)\,\sigma_y(x,y)\,\sigma_z(y,z)$.

336) Τῆς συναρτήσεως $\sigma(x,y,z)$ παριστάνομεν μὲ σ_1 τὴν μερικὴν παράγωγον ὡς πρὸς τὴν πρώτην ἐκ τῶν μεταβλητῶν ἐκ τῶν ὁποίων ἐξαρτᾶται, μὲ σ_2 τὴν μερικὴν παράγωγον ὡς πρὸς τὴν δευτέραν καὶ μὲ σ_3 ὡς πρὸς τὴν τρίτην. Ἐὰν θέσωμεν $\sigma_i(a,a,a) = \varphi_i(a)$ $(i = 1,2,3)$ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ συναρτησιακὴ ὀρίζουσα τῶν συναρτήσεων $\sigma(x,y,z)$, $\sigma(y,z,x)$, $\sigma(z,x,y)$ ὡς πρὸς x, y, z διὰ $x = y = z = a$ ἔχει τὴν τιμήν: $\varphi_1^3 + \varphi_2^3 + \varphi_3^3 - 3\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3$.

337) Ἐὰν εἶναι $y_i = x_i : (1 - x_1 - x_2 - x_3)$ $(i = 1, 2, 3)$ νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\partial(y_1, y_2, y_3) : \partial(x_1, x_2, x_3) = (1 - x_1 - x_2 - x_3)^{-4}$$

338) Ἐὰν εἶναι: $F_i = F_i(x_1, \cdots, x_\nu)$, $\sigma_i = \sigma_i(x)$, $\Phi_i(x_1, \cdots, x_\nu) = F_i(\sigma_1, \cdots, \sigma_\nu)$, ὅπου $(i = 1, \cdots \nu)$ καὶ $\Delta(x_1, \cdots, x_\nu) = \partial(F_1, \cdots, F_\nu) : \partial(x_1, \cdots, x_\nu)$, νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\partial(\Phi_1, \cdots, \Phi_\nu) : \partial(x_1, \cdots, x_\nu) = \Delta(\sigma_1, \cdots, \sigma_\nu)\,\sigma_1'(x_1)\,\sigma_2'(x_2) \cdots \sigma_\nu'(x_\nu).$$

339) Μὲ τοὺς συμβολισμοὺς τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\partial[\sigma_1(F_1), \cdots, \sigma_\nu(F_\nu)] : \partial(x_1, \cdots, x_\nu) = \Delta(x_1, \cdots, x_\nu)\,\sigma_1'(F_1)\,\sigma_2'(F_2) \cdots \sigma_\nu'(F_\nu)$$

340) Ἐὰν εἶναι: $y_i = x_i^2 : (1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$ $(i = 1, 2, 3)$ νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\partial(y_1, y_2, y_3) : \partial(x_1, x_2, x_3) = 8x_1x_2x_3(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^{-4}.$$

341) Ἐὰν εἶναι: $y_i = x_i(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^{-\frac{1}{2}}$ $(i = 1, 2, 3)$ νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\partial(y_1, y_2, y_3) : \partial(x_1, x_2, x_3) = (1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

342) Ἐὰν εἶναι: $y_i = x_i^{a_i} : (1 - x_1 - x_2 - x_3)$ $(i = 1, 2, 3)$ νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\partial(y_1, y_2, y_3) : \partial(x_1, x_2, x_3) = y_1y_2y_3\left[a_1a_2a_3 + (a_1a_2x_3 + a_2a_3x_1 + a_3a_1x_2) : (1 - x_1 - x_2 - x_3)\right] : x_1x_2x_3$$

καὶ αὐτὴ μηδενίζεται ἐκ ταυτότητος ὡς πρὸς x_1, x_2, x_3 ὅταν δύο ἐκ τῶν a_i εἶναι μηδέν.

343) Νά δειχθῆ ὅτι τό σύστημα $x^2+y^2+z^2=\xi$, $x+y+z=\eta$ εἶναι ἐπιλύσιμον στήν γειτονιά κάθε σημείου (x_0, y_0, z_0) διά τό ὁποῖον δέν εἶναι $x_0=y_0=z_0$, ὅταν τά ξ, η παραμένουν είς τήν ἀντίστοιχον πρός αὐτήν γειτονιάν τοῦ (ξ_0, η_0).

344) Ἐάν εἶναι $aa_1 > 0$, $\beta\beta_1 > 0$, $B\Gamma_1 - B_1\Gamma \neq 0$ νά δειχθῆ ὅτι δι' ἑκάστου σημείου τῆς γραμμῆς $y=a_1+ax^2$, $z=\beta_1+\beta x^4$ διέρχεται ἕνα τόξον τῆς γραμμῆς ἡ ὁποία εἶναι τομή μιᾶς ἐπιφανείας τῆς δέσμης $Ax^2+By^2+\Gamma z^2=c$ μέ μίαν ἐπιφάνειαν τῆς δέσμης $A_1x^2+B_1y^2+\Gamma_1 z^2=c_1$.

345) Νά δειχθῆ ὅτι δι' ἑκάστου σημείου τοῦ χώρου τῶν x, y, z τό ὁποῖον δέν κεῖται ἐπί τοῦ ἄξονος τῶν z, διέρχεται ἕνα τόξον τῆς γραμμῆς : $z^2+xy=c_1$, $z^2:\gamma^2+x^2:a^2-y^2:\beta^2=c_2$, διά κατάλληλα c_1, c_2.

346) Νά δειχθῆ ὅτι δι' ἑκάστου σημείου τῆς ἐπιφανείας $xy=a$, ὅπου $a\neq 0$, διέρχεται ἕνα τόξον τῆς γραμμῆς $x^2+y^2+z^2=R^2$, $Ax^2+By^2+\Gamma z^2=C$, $(A\neq B)$ διά κατάλληλα R, C.

347) Νά δειχθῆ ὅτι δι' ἑκάστου κοινοῦ σημείου τῶν ἐπιφανειῶν $x^2+y^2+z^2=1$, $xy+yz+zx=0$, διέρχεται μία γραμμή τομῆς αὐτῶν.

348) Ἐάν οἱ συναρτήσεις : $\sigma(x,y,z,u)$, $f(x,y,z,u)$ δέν εἶναι σταθερές ὡς πρός οὐδεμίαν ἐκ τῶν μεταβλητῶν x, y, z, u καί ἐπαληθεύουν τίς σχέσεις :

$$F(\sigma, f, y, z)=0, \quad \Phi(\sigma, f, z, x)=0, \quad H(\sigma, f, z, x)=0$$

νά δειχθῆ ὅτι ἡ συναρτησιακή ὀρίζουσα τῶν σ, f ὡς πρός ἕκαστον ζεῦγος ἐκ τῶν μεταβλητῶν x, y, z, u εἶναι μηδέν.

349) Ἐάν οἱ συναρτήσεις $\sigma(x,y)$, $\sigma(y,z)$, $\sigma(z,x)$ εἶναι ἐξηρτημένες, νά δειχθῆ ὅτι ἡ $\sigma(x,x)$ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς x.

350) Ἐάν οἱ συναρτήσεις $\sigma(x,y)\cdot\sigma(y,z)$, $\sigma(y,z)\cdot\sigma(z,x)$, $\sigma(z,x)\cdot\sigma(x,y)$ εἶναι ἐξηρτημένες νά δειχθῆ ὅτι ἡ $\sigma(x,x)$ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς x.

351) Ἐάν οἱ μεταβλητές u, v συνδέωνται διά τῆς σχέσεως $f(u,v)=0$ καί εἶναι $x=\varphi(u,v)$ ὅπου οἱ f, φ ἀνεξάρτητες καί $f'_v\neq 0$, νά δειχθῆ ὅτι $dx=\frac{du}{f_v}\frac{\partial(\varphi,f)}{\partial(u,v)}$.

352) Ἐάν εἶναι $u=u(t)$, $v=v(t)$, $f(u,v)=0$, $x=\varphi(u,v)$ καί θέσωμεν $u_t=\mu f_v$, $\partial(\varphi,f):\partial(u,v)=\Delta$ νά δειχθῆ ὅτι εἶναι $\ddot{x}=\mu\left[\Delta\partial(\mu,f):\partial(u,v)+\mu\partial(\Delta,f):\partial(u,v)\right]$ ὅπου $\ddot{x}$ ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς x ὡς πρός t καί $f_v\neq 0$.

353) Νά εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι ὡς πρός z τῶν συναρτήσεων $x(z)$, $y(z)$ οἱ ὁποῖες προκύπτουν δι' ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος : $\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi_1(z)$, $\sigma(x)+\sigma(y)=\sigma_1(z)$ καί νά δειχθῆ ὅτι ἡ ἐπίλυσις αὐτή εἶναι ἐν γένει δυνατή, ὅταν μεταξύ τῶν φ, σ οὐδεμία γραμμική σχέσις τῆς μορφῆς : $a\varphi(x)+\beta\sigma(x)=\gamma$ ἰσχύει ἐκ ταυτότητος, ὅπου ἐκ τῶν σταθερῶν a, β, γ τό πολύ μία εἶναι μηδέν.

354) Νά εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι ὡς πρός u τῶν συναρτήσεων $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$ οἱ ὁποῖες προκύπτουν δι' ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος : $\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z)=\varphi_1(u)$, $\sigma(x)+\sigma(y)+\sigma(z)=\sigma_1(u)$, $f(x)+f(y)+f(z)=f_1(u)$ καί νά δειχθῆ ὅτι ἡ ἐπίλυσις αὐτή εἶναι ἐν γένει δυνατή, ὅταν μεταξύ τῶν f, σ, f οὐδεμία γραμμική σχέσις τῆς μορφῆς $a\varphi(x)+\beta\sigma(x)+\gamma f(x)=\delta$ ἰσχύει ἐκ ταυτότητος, ὅπου ἐκ τῶν σταθερῶν a, β, γ, δ τό πολύ δύο εἶναι μηδέν.

355) Νά προσδιορισθῆ ὁ ἀριθμός λ ἔτσι ὥστε οἱ τρεῖς συναρτήσεις $u=x+y-z$, $v=x^2+y^2+z^2$, $w=x^3+y^3-z^3+\lambda xyz$ νά εἶναι ἐξηρτημένες καί νά εὑρεθῆ μετά τόν προσδιορισμόν τοῦ λ ἡ συνδέουσα αὐτές σχέσις.

356) Νά ἀποδειχθῆ ὅτι οἱ τέσσερεις συναρτήσεις : $u=xz+yt$, $v=yz-xt$, $w=x^2+y^2$, $s=z^2+t^2$ εἶναι ἐξηρτημένες καί νά εὑρεθῆ ἡ συνδέουσα αὐτές σχέσις.

357) Νά δειχθῆ ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y) = x^{\mu} y^{\nu} : (x^2 - xy + y^2)$, $\Phi(0,0) = 0$ ὅπου $\mu, \nu > 0$, εἶναι συνεχής ὡς πρός x καί ὡς πρός y εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων καί εὕρετε συνθήκην διά νά εἶναι συνεχής καί ὡς πρός x, y.

358) Ἐξετάσατε ἐάν ἡ συνάρτησις $\phi(x,y) = x^4 y^4 : (x^2 + y^4)^3$, $\Phi(0,0) = 0$ εἶναι συνεχής εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων.

359) Ὁμοίως διά τήν συνάρτησιν : $\Phi(x,y) = x^2 : (x^2 + y^2 - x)$, $\Phi(0.0) = 0$.

360) Νά ἀποδειχθῆ ὅτι :

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \begin{vmatrix} \sigma_1(x) & \sigma_2(x) & \sigma_3(x) \\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) \\ f_1(z) & f_2(z) & f_3(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1'(x) & \sigma_2'(x) & \sigma_3'(x) \\ \varphi_1'(y) & \varphi_2'(y) & \varphi_3'(y) \\ f_1'(z) & f_2'(z) & f_3'(z) \end{vmatrix}$$

361) Νά εὑρεθῆ τό πολυώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ τό ὁποῖον προσεγγίζει κατά τόν καλλίτερον τρόπον τήν συνάρτησιν ημχημψ εἰς τήν γειτονιά τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων.

362) Ἐάν $\phi(x,y)$ εἶναι μία συνεχής συνάρτησις μέ συνεχεῖς μερικάς παραγώγους πρώτης καί δευτέρας τάξεως, νά δειχθῆ ὅτι :

$$\Phi_{xx}(0,0) = \underset{h \to 0}{\text{ορ}} \left[\Phi(2h, e^{-1:2h}) - 2\Phi(h, e^{-1:h}) + \Phi(0,0) \right] : h^2$$

363) Ἀποδείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $\phi = (y - x^2)(x - 2y^2)$ δέν ἔχει ἀκρότατον εἰς τήν ἀρχήν $(0,0)$, κατά μῆκος ὅμως κάθε εὐθείας διερχομένης διά τῆς ἀρχῆς ἔχει ἐλάχιστον εἰς αὐτήν.

364) Ἐπιλύσατε τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν : $x^2 z_{xx} + 2xy z_{xy} + y^2 z_{yy} = 0$ διά τῆς ἀλλαγῆς τῶν μεταβλητῶν $x = u$, $y = uv$.

365) Ἀποδείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις : $y^3 + 2y + e^{y-x} = \text{συν}(x+y)$ ἐπιλύεται μονοσήμαντα ὡς πρός y στήν γειτονιά τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων καί ὅτι εἶναι : $y = \frac{x}{3} - \frac{10}{3} x^2 + \cdots$.

366) Ἀποδείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις : $z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} = \text{συν}(x - y + z)$ ἐπιλύεται μονοσήμαντα ὡς πρός z στήν γειτονιά τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων καί ὅτι εἶναι : $z = \frac{1}{3}x - \frac{10}{27}x^2 + \frac{4}{9}xy + \frac{1}{2}y^2 + \cdots$.

367) Ἐάν εἶναι : $uv(x+y) + xy(u+v) = \alpha$, $uvxy = \beta$ δείξατε ὅτι :

$$\partial(u,v) : \partial(x,y) = (x-y)u^2v^2 : (u-v)x^2y^2.$$

368) Ἐάν εἶναι $x = e^u \text{συν} v$, $v = e^y \eta\mu x$, δείξατε ὅτι : $\partial(u,v) : \partial(x,y) = v : x$.

369) Ἐάν u εἶναι μία συνάρτησις τῶν x, y, z τέτοια ὥστε : $u_z = u_x + u_y$, δείξατε ὅτι περιέχει τίς x, y, z ὑπό τούς συνδυασμούς $y + z$ καί $z + x$.

370) Μετασχηματίσατε τήν ἐξίσωσιν $\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + 1\right)\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$, ἔτσι ὥστε οἱ x, v, w νά εἶναι οἱ νέες ἀνεξάρτητες μεταβλητές ὅπου $y = vx$, $z = wx$. Κατόπιν δείξατε ὅτι ἡ Φ εἶναι ἄθροισμα δύο συναρτήσεων ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μέν μία δέν περιέχει τό y ἡ δέ ἄλλη εἶναι ὁμογενής ὡς πρός x, y, z βαθμοῦ ὁμογενείας μηδέν.

371) Ἐάν ἡ συνάρτησις y ὁρίζεται ὑπό πλεγμένην μορφήν ἀπό τήν ἐξίσωσιν $y^3 - 6xy - 8 = 0$ νά δειχθῆ ὅτι $y = 2 + x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$.

372) Ὁμοίως διά τήν ὁριζομένην ἀπό τήν ἐξίσωσιν : $\eta\mu y = x\,\eta\mu(\alpha + x)$ νά δειχθῆ ὅτι :

$$y = k\pi + \frac{x}{1}\eta\mu\alpha + \frac{x^2}{2!}\eta\mu 2\alpha + \frac{x^3}{3!} 2\eta\mu\alpha(3 - 4\eta\mu^2\alpha) + \cdots.$$

373) Ὁμοίως διά τήν ὁριζομένην ἀπό τήν ἐξίσωσιν $y^{\nu}\ell n y = \alpha x$ νά δειχθῆ ὅτι :

$$y = 1 + \alpha x - (2\nu - 1)\frac{\alpha^2 x^2}{2!} + (3\nu - 1)^2\frac{\alpha^3 x^3}{3!} - (4\nu - 1)^3\frac{\alpha^4 x^4}{4!} + \cdots$$

374) Δείξατε ὅτι ἐάν ϕ εἶναι μία ὁμογενής συνάρτησις τῶν x, y, z ἡ ἐξίσωσις $\frac{\partial}{\partial x}(\Phi u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\Phi u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\Phi u_z) = 0$ ἔχει μίαν λύσιν ὡς πρός u ἡ ὁποία εἶναι μία δύναμις τοῦ $(x^2 + y^2 + z^2)$.

Νά ἐξετασθῇ ἐάν οἱ κάτωθι συναρτήσεις εἶναι συνεχεῖς εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων:

375) $\Phi(x,y) = x\,|y|^{1+\vartheta} : (x^2+y^2)$, $\quad \Phi(0,0)=0$.

376) $\Phi(x,y) = y\,|x|^{1+\vartheta} : \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{\eta\mu^2 x + \eta\mu^2 y}$, $\quad \Phi(0,0)=0$.

377) $\Phi(x,y) = y\,|x|^{1+\vartheta} : \sqrt{\eta\mu^2 x + \eta\mu^2 y}\ \sqrt{\varepsilon\varphi^2 x + \varepsilon\varphi^2 y}$, $\Phi(0,0)=0$

378) $\Phi(x,y) = |x|^{1:|y|}$, $\Phi(0,0) \neq 0$.

379) $\Phi(x,y) = -|x-y| : (x^2-2xy+y^2)$, $\Phi(0,0)=0$.

380) $\Phi(x,y) = |y|^{|x|}\sqrt{x^2+y^2} : (\sqrt{x^2+y^2} + |y| : |x|)$, $\quad \Phi(0,0)=0$.

381) $\Phi(x,y) = e^{-|x-y| : (x^2-2xy+y^2)}$, $\Phi(0,0)=0$.

382) Νά ἐξετασθῇ ἀπό ἀπόψεως συνεχείας ἡ συνάρτησις πού ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\Phi(x,y) = \frac{\eta\mu x - \eta\mu y}{\varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi y} \quad (\varepsilon\varphi x \neq \varepsilon\varphi y), \quad \Phi(x,y) = \sigma\upsilon\nu^3 x \quad (\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi y).$$

383) Ἐάν ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y)$ ἔχῃ συνεχεῖς μερικάς παραγώγους στήν γειτονιά τοῦ σημείου (x,y) νά δειχθῇ ὅτι διά h, k ἀπολύτως ἀρκετά μικρά ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\Phi(x+h,\, y+k) - \Phi(x,y) = h\Phi_x(x+\vartheta h,\, y+k) + k\Phi_y(z,\, y+\vartheta k), \quad 0<\vartheta<1.$$

384) Μέ τίς ἀντίστοιχες προϋποθέσεις διά τήν συνάρτησιν $\Phi(x,y,z)$ δείξατε ὅτι:

$\Phi(x+h,\, y+k,\, z+\ell) - \Phi(x,y,z) = h\Phi_x(x+\vartheta h,\, y+k,\, z+\ell) + k\Phi_y(x,\, y+\vartheta k,\, z+\vartheta\ell) + \ell\Phi_z(x,\, y+\vartheta k,\, z+\vartheta\ell)$.

385) Νά δειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις $z=z(x,y)$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπό τίς σχέσεις:

$z = [y-\sigma(a)]^2 : \sigma'(a)$, $\quad x = [y-\sigma(a)] : \sigma'(a) - a$, ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωσιν $z_x \cdot z_y = z$.

386) Νά δειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις: $z=z(x,y)$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπό τίς σχέσεις:

$[z-\sigma(a)]^2 = x^2(y^2-a^2)$, $\quad [z-\sigma(a)]\,\sigma'(a) = ax^2$, ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωσιν: $z_x \cdot z_y = xy$.

387) Νά δειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις: $z=z(x,y)$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπό τήν ἐξίσωσιν $x-az = \sigma(y-\beta z)$, ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωσιν: $az_x + \beta z_y = 1$.

388) Νά δειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις $z = x^\nu \sigma\left(\frac{y}{x}\right) + x^{-\nu}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωσιν:

$$x^2 z_{xx} + 2xy\, z_{xy} + y^2 z_{yy} + x z_x + y z_y = \nu^2 z.$$

389) Νά δειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις $z = \sigma[x+\varphi(y)]$ ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωσιν: $z_x z_{xy} = z_y z_{xx}$.

390) Νά δειχθῇ ὅτι: $\sum_{\kappa=1}^{\nu} x_\kappa d \frac{x_\kappa}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_\nu^2}} = 0$.

391) Ἐάν ἡ συνάρτησις $\Phi(x_1,\cdots,x_\nu)$ εἶναι ὁμογενής βαθμοῦ ὁμογενείας μ, νά δειχθῇ ὅτι:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} x_\kappa d\frac{\partial\Phi}{\partial x_\kappa} = (\mu-1)\, d\Phi.$$

392) Νά δειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις: $\Phi = ax : \sqrt{1+\sqrt[3]{xy^2}} - \beta y : \sqrt{1-\sqrt[3]{x^2 y}}$ εἶναι διαφορίσιμος εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων.

393) Ὁμοίως διά τήν συνάρτησιν $\Phi = a\eta\mu(x+y : \ell n|x|) - \beta\eta\mu(y-x : \ell n|y|)$.

394) Νά δειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις $z(x,y)$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπό πλεγμένην μορφήν ἀπό τήν ἐξίσωσιν $xy - x\sigma(z) - y\varphi(z) + f(z) = 0$ δέν μπορεῖ, εἰς οὐδεμίαν θέσιν ὅπου εἶναι δύο φορές συνεχῶς παραγωγίσιμος, νά ἔχῃ ἀκρότατον.

395) Ἐάν οἱ $\Phi(x,y)$, $\Phi_x(x,y)$, $\Phi_{xx}(x,y)$ εἶναι συνεχεῖς εἰς τήν γειτονιά τοῦ σημείου (a,β) καί $\Phi_x(a,\beta)=0$, $\Phi_{xx}(a,\beta)<0$ νά δειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y)$ δέν δύναται νά ἔχῃ σχετικόν ἐλάχιστον εἰς τό σημεῖον (a,β).

396) Ἐάν ἡ συνάρτησις $z=z(x,y)$ ἱκανοποιῇ δι' ὅλα τά σημεῖα ἑνός ἀνοικτοῦ σημειοσυνόλου D τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν $a(x,y)\,z_{xx} + 2\beta(x,y)\,z_{xy} + \gamma(x,y)\,z_{yy} = 0$ καί εἶναι ἐπί τοῦ σημειοσυνόλου αὐτοῦ $\beta^2 - a\gamma < 0$, νά δειχθῇ ὅτι ἡ $z(x,y)$ δέν δύναται νά ἔχῃ ἐπ' αὐτοῦ σχετικόν ἀκρότατον.

397) Νά δειχθῇ ὅτι ἡ ἐλαχίστη τιμή τῆς συναρτήσεως $\Phi = x_1^2+\cdots+x_\nu^2$, ὅταν $\sum_{\kappa=1}^{\nu} a_\kappa x_\kappa = 1$, $\sum_{\kappa=1}^{\nu} a_\kappa^2 \neq 0$, εἶναι $1 : \sum_{\kappa=1}^{\nu} a_\kappa^2$.

398) Νά δειχθῇ ὅτι ἡ ἐλαχίστη τιμή τῆς συναρτήσεως $\Phi = x_1^2 + \cdots + x_\nu^2$, ὅταν $\sum_{\alpha=1}^{\nu} \alpha_\kappa x_\kappa = 0$, $\sum_{\kappa=1}^{\nu} \beta_\kappa x_\kappa = 1$, εἶναι $\sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_\kappa^2 : \sum_{\kappa<\lambda} (\alpha_\kappa \beta_\lambda - \alpha_\lambda \beta_\kappa)^2$, $\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_\kappa^2 + \sum_{\kappa=1}^{\nu} \beta_\kappa^2 > 0 \right)$.

399) Νά δειχθῇ ὅτι τό μέγιστον τῆς συναρτήσεως : $\Phi = \left| \sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_\kappa x_\kappa \right|$, ὅταν $\sum_{\kappa=1}^{\nu} x_\kappa^2 = 1$, εἶναι $\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_\kappa^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

400) Νά δειχθῇ ὅτι τό μέγιστον τῆς συναρτήσεως : $\Phi = \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \beta_\kappa x_\kappa \right)^2$, ὅταν $\sum_{\kappa=1}^{\nu} x_\kappa^2 = 1$, $\sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_\kappa \beta_\kappa = 0$, εἶναι $\left[\sum_{\kappa<\lambda} (\alpha_\kappa \beta_\lambda - \alpha_\lambda \beta_\kappa)^2 \right] : \sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_\kappa^2$, $\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_\kappa^2 > 0 \right)$.

401) Ἐάν $\alpha, \beta > 0$ καί $x^2 + y^2 > 0$ νά δειχθῇ ὅτι $\text{Ελαχ}(\alpha, \beta) \leqslant \dfrac{\alpha|x| + \beta|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

402) Νά δειχθῇ ὅτι διά $x^2 + y^2 + z^2 > 0$ ἰσχύει ἡ ἀνισότης :

$$2 \leqslant \frac{\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+z^2} + \sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leqslant \sqrt{6}$$

ὅπου τό σημεῖον τῆς ἰσότητος εἰς τό δεξιόν μέλος ἰσχύει διά $x = y = z$ καί εἰς τό ἀριστερόν ὅταν ἕνας μόνον ἐκ τῶν ἀριθμῶν x, y, z εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

403) Ἐάν αἱ συναρτήσεις $\Phi(x_1, \cdots, x_\nu)$, $\sigma(x_1, \cdots, x_\nu)$ εἶναι ὁμογενεῖς μέ βαθμούς ἀντιστοίχως κ, λ καί $\sigma_i = \sigma_i(x_1, \cdots, x_\nu)$ $(i = 1, \cdots, \mu)$, $\mu + 1 < \nu$ νά δειχθῇ ὅτι οἱ ἀκρότατες τιμές τῆς συναρτήσεως Φ ὑπό τίς δεσμεύσεις $\sigma = 0$, $\sigma_i = 0$ εἶναι οἱ ἴδιες μέ τίς ἀκρότατες τιμές τῆς συναρτήσεως $\Phi \sigma^{-\frac{\kappa}{\lambda}}$ ὑπό τίς δεσμεύσεις $\sigma_i = 0$.

404) Ἐάν οἱ συναρτήσεις $\sigma(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$ εἶναι συμμετρικές ὡς πρός x, y, z καί εἰς ἕνα σημεῖον $P(\alpha, \alpha, \alpha)$ πληροῦνται οἱ συνθῆκες : $\varphi(P) = 0$, $|\sigma_{xx} - \varphi_{xx} \sigma_x : \varphi_\lambda| > 2 |\sigma_{xy} - \varphi_{xy} \sigma_x : \varphi_x|$ νά δειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις σ ὑπό τήν δέσμευσιν $\varphi = 1$ ἔχει εἰς τό σημεῖον P ἕνα σχετικόν ἀκρότατον, τό ὁποῖον εἶναι μέγιστον ἤ ἐλάχιστον ὅταν ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως $\sigma_{xx} - \varphi_{xx} \sigma_x : \varphi_x$ εἰς τό σημεῖον P εἶναι ἀντιστοίχως ἀρνητική ἤ θετική.

405) Ἐφαρμόσατε τήν προηγουμένην ἄσκησιν εἰς τό ζεῦγος τῶν συναρτήσεων :

$$\sigma = (x+y+z)^3, \quad \varphi = xyz$$

406) Ὁμοίως διά τό ζεῦγος τῶν συναρτήσεων : $\sigma = x^\nu + y^\nu + z^\nu$, $\varphi = x + y + z$.

. · .

407) Νά εὑρεθῇ μία γραμμή ἡ ὁποία νά καταλήγῃ εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων καί κατά μῆκος τῆς ὁποίας ὅταν $x, y \to 0$ ἡ συνάρτησις $\Phi = x : (x^2 + y^2)$ νά ἔχῃ ὅριον ἕναν ἀριθμόν $\alpha > 0$.

408) Ὁμοίως διά τήν συνάρτησιν $\Phi = (\eta\mu^2 x + \eta\mu^2 y)^{-1} \cdot \varepsilon\varphi x$.

409) Ἐξετάσατε ἐάν ἡ συνάρτησις $x\eta\mu\frac{1}{y}$ εἶναι δυνατόν νά ὁρισθῇ εἰς τά σημεῖα μέ $y = 0$ ἔτσι ὥστε νά εἶναι συνεχής καί εἰς αὐτά. Εἰς καταφατικήν ἀπάντησιν ἐξετάσατε ἐάν ὑπάρχουν εἰς τά σημεῖα αὐτά αἱ μερικαί παράγωγοι πρώτης τάξεως.

410) Ὁμοίως διά τήν συνάρτησιν $\frac{1}{y}\eta\mu^2 xy$.

411) » » » » $(1 - \sigma\upsilon\nu\sqrt{xy}) : \sqrt{y}$.

412) Νά ὑπολογισθῇ ἡ κλίσις τῆς συναρτήσεως : $\Phi = \ln\left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\right]$.

413) Ὁμοίως διά τήν συνάρτησιν $\Phi = \ln \varepsilon\varphi\, xy^{-1}$

414) » » » » $\Phi = (\alpha x + \beta) : \sqrt{x^2+y^2}$.

415) » » » » $\Phi = x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}$.

416) Νά εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων $y(x)$, $z(x)$ οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ὑπό πλεγμένην μορφήν ἀπό τό σύστημα : $x^3 + y^2 - 3z + \alpha = 0$, $z^2 - 2y^2 - x + \beta = 0$.

417) Νά εὑρεθῇ ἡ παράγωγος $z_{x\mu y^\nu}$ τῆς συναρτήσεως $z(x,y)$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπό τήν ἐξί-

σωσιν : $xy+yz+zx=1$.

Νά εὑρεθοῦν τά σχετικά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως $z=z(x,y)$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπό πλεγμένην μορφήν ἀπό τήν ἐξίσωσιν.

418) $2x^2-2y^2+z^2+8xz-z+8=0$.

419) $x^3y-3xy^2+6x+y^2+7y+z^2-3z-14=0$.

420) $x^3-y^2-3x+4y+z^2+z-8=0$.

421) $x^3+z^3-3axz=0 \quad (a>0)$.

422) Ἐπί τῆς ἐλλείψεως $\beta^2x^2+a^2y^2=a^2\beta^2$ δίνονται δύο σημεῖα καί ζητεῖται νά εὑρεθῆ ἀκόμη ἕνα ἔτσι ὥστε τό τρίγωνον μέ κορυφές τά σημεῖα αὐτά νά ἔχη μέγιστον ἐμβαδόν.

423) Νά εὑρεθῆ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις μεταξύ τῶν εὐθειῶν :

$$\frac{x-x_1}{\text{συν}a_1}=\frac{y-y_1}{\text{συν}\beta_1}=\frac{z-z_1}{\text{συν}\gamma_1}\,,\qquad \frac{x-x_2}{\text{συν}a_2}=\frac{y-y_2}{\text{συν}\beta_2}=\frac{z-z_2}{\text{συν}\gamma_2}$$

424) Νά ἐξετασθῆ ἐάν ἡ συνάρτησις $\Phi=(y^2-x^2)(y^2-2x^2)$ ἔχη εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων ἐλάχιστον.

425) Νά μελετηθῆ ὁ μετασχηματισμός : $u=x^2-y$, $v=(y-2):(x-1)$

426) » » » » : $x=(u-v):2$, $y=\sqrt{uv}$.

427) Νά εὑρεθῆ ἐάν εἶναι ἐξηρτημένες οἱ συναρτήσεις $u=\text{ημ}(x-y)$, $u=\sqrt{\text{συν}(x-y)}$.

428) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ κατόπιν μετρήσεως εὑρέθη : $A=30^\circ$, $B=45^\circ$, $a=250$ καί ζητεῖται τό σφάλμα εἰς τόν ὑπολογισμόν τῆς πλευρᾶς β ὅταν κατά τήν μέτρησιν ἔγιναν τά σφάλματα : $\Delta A=0.002$, $\Delta B=-0.003$, $\Delta a=-0.005$.

429) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ κατόπιν μετρήσεως εὑρέθη $\beta=12$, $\gamma=15$, $A=30^\circ$ καί ζητεῖται νά εὑρεθῆ : i) τό σφάλμα κατά τόν ὑπολογισμόν τῆς a ὅταν κατά τήν μέτρησιν ἔγιναν σφάλματα $\Delta\beta=0.1$, $\Delta\gamma=-0.2$, $\Delta A=0.04$. ii) ἡ μεγίστη τιμή τοῦ σφάλματος κατά τόν ὑπολογισμόν τῆς a ὅταν $|\Delta\beta|\leqslant 0.1$, $|\Delta\gamma|\leqslant 0.2$, $|\Delta A|\leqslant 0.04$. iii) ἡ μεγίστη τιμή τοῦ ΔA ὅταν $|\Delta a|\leqslant 0.01$ καί $\Delta\beta=\Delta\gamma=0.001$.

430) Διά τρίγωνον ΑΒΓ ἔχομεν $a=20$, $\beta=12+0.002T^2$, $\gamma=15-0.05T$ ὅπου T παριστάνει θερμοκρασίαν καί ζητεῖται νά εὑρεθῆ ἡ μεταβολή ΔA ὅταν ἡ θερμοκρασία ἀπό $T=0$ γίνη $T+\Delta T=10$.

431) Ἐάν εἶναι $u_i=x_i(1-x_1^2-\cdots-x_\nu^2)^{-\frac{1}{2}}$ $(i=1,\cdots,\nu)$ νά δειχθῆ ὅτι:

$$\partial(u_1,\cdots,u_\nu):\partial(x_1,\cdots,x_\nu)=(1-x_1^2-\cdots-x_\nu^2)^{-1-\frac{\nu}{2}}$$

432) Ἐάν εἶναι : $x_1=\text{συν}\omega_1$, $x_2=\text{ημ}\omega_1\text{συν}\omega_2$, $x_3=\text{ημ}\omega_1\text{ημ}\omega_2\text{συν}\omega_3$, $\cdots$, $x_\nu=\text{ημ}\omega_1\text{ημ}\omega_2\cdots\text{ημ}\omega_{\nu-1}\text{συν}\omega_\nu$, νά δειχθῆ ὅτι :

$$\partial(x_1,\cdots,x_\nu):\partial(\omega_1,\cdots,\omega_\nu)=(-1)^\nu\,\text{ημ}^\nu\omega_1\,\text{ημ}^{\nu-1}\omega_2\,\text{ημ}^{\nu-2}\omega_3\cdots\text{ημ}^2\omega_{\nu-1}\,\text{ημ}\omega_\nu.$$

433) Ἐάν ἡ συνάρτησις $\sigma(x,y,z)$ ἐπαληθεύη τήν ἐξίσωσιν $\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}=0$ νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό αὐτό θά συμβαίνη καί διά τήν συνάρτησιν $\rho^{-1}\sigma(u,v,w)$ ὅπου $\rho^2=x^2+y^2+z^2$, $u=\kappa^2x\rho^{-2}$, $v=\kappa^2y\rho^{-2}$, $w=\kappa^2z\rho^{-2}$ καί κ μία σταθερά.

434) Ἐάν οἱ συναρτήσεις $\Phi_1(x,y,z)$, $\Phi_2(x,y,z)$ εἶναι δύο λύσεις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως: $\Delta\Phi\equiv\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\Phi_{zz}=0$, νά δειχθῆ ὅτι ἡ συνάρτησις : $\Phi_3=\Phi_1+(x^2+y^2+z^2)\Phi_2$ εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως : $\Delta(\Delta\Phi)=0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Εἰς τὸ Κεφάλαιον αὐτὸ πραγματευόμεθα τὰ κυριώτερα μέρη τῆς στοιχειώδους διαφορικῆς γεωμετρίας. Ἀρχίζομεν μὲ μίαν γενικὴν εἰσαγωγὴν καὶ ἐν συνεχείᾳ ἐξετάζομεν τὶς γραμμὲς εἰς τὸν διδιάστατον καὶ τρισδιάστατον χῶρον καὶ τελειώνομεν μὲ τὴν θεωρίαν τῶν ἐπιφανειῶν.

Γενικὴ Εἰσαγωγή

21. Ὁρισμὸς τῆς καμπύλης γραμμῆς.— Ἐὰν οἱ τρεῖς συναρτήσεις :

$$\sigma_1(t), \quad \sigma_2(t), \quad \sigma_3(t) \qquad (21.1)$$

εἶναι συνεχεῖς ἐπὶ ἑνὸς διαστήματος Δ τῆς μεταβλητῆς t, τότε τὸ σύνολον τῶν σημείων (x,y,z) τῶν ὁποίων οἱ συντεταγμένες ὁρίζονται ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις :

$$x=\sigma_1(t), \quad y=\sigma_2(t), \quad z=\sigma_3(t) \qquad (21.2)$$

λέγεται συνεχὴς καμπύλη ἢ συνεχὴς γραμμὴ καὶ οἱ ἐξισώσεις (21.2) λέγονται παραμετρικὲς ἐξισώσεις αὐτῆς.

Ἐὰν τὸ Δ εἶναι ἕνα πεπερασμένον κλειστὸν διάστημα, τότε τὸ σύνολον τῶν σημείων (x,y,z) λέγεται ἀκριβέστερον συνεχὲς τμῆμα ἢ συνεχὲς τόξον γραμμῆς καὶ οἱ (21.2) λέγονται πάλιν παραμετρικὲς ἐξισώσεις αὐτοῦ. Τὸ σημεῖον (x,y,z) τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν t, λέγεται εἰκὼν τοῦ σημείου t τοῦ διαστήματος Δ. Κατόπιν αὐτῶν λέγομεν συντόμως ὅτι μία συνεχὴς γραμμὴ εἶναι ἡ συνεχὴς εἰκὼν ἑνὸς γραμμικοῦ διαστήματος.

Ἐὰν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ διαστήματος Δ ἀντιστοιχεῖ τὸ ἴδιο σημεῖον (x,y,z), ἡ γραμμὴ λέγεται κλειστή.

Ἐὰν οἱ συναρτήσεις (21.1) ἔχουν συνεχεῖς παραγώγους μέχρι καὶ Κ-τάξεως, ἡ γραμμὴ λέγεται Κ-φορὲς συνεχῶς παραγωγίσιμη. Κατωτέρω χωρὶς νὰ τὸ ἀναφέρωμεν εἰδικῶς κάθε φορά, θὰ ὑποθέτωμεν ὅτι ἡ γραμμὴ εἶναι συνεχῶς παραγωγίσιμη μέχρι τῆς τάξεως πού ἀπαιτεῖται διά τό ἐξεταζόμενον ζήτημα.

Μία συνεχής καμπύλη λέγεται καμπύλη - Jordan ὅταν σέ δύο διάφορες τιμές τῆς παραμέτρου t ἀπό τό διάστημα Δ, ἀντιστοιχοῦν πάντοτε δύο διάφορα σημεῖα (x,y,z) αὐτῆς, δηλαδή ὅταν μεταξύ τῶν σημείων τῆς γραμμῆς καί τῶν σημείων τοῦ διαστήματος Δ ὑπάρχει μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία.

Μία καμπύλη - Jordan λέγεται λεία ὅταν εἶναι μία φορά συνεχῶς παραγωγίσιμη καί αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων (21.1) δέν μηδενίζονται συγχρόνως δἰ οὐδεμίαν τιμήν τοῦ διαστήματος Δ.

Μία καμπύλη - Jordan λέγεται ἀναλυτική ὅταν οἱ (21.1) εἶναι ἀναλυτικές συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς t.

Ἐάν ἡ γραμμή εἶναι ἐπίπεδος καί λάβωμεν τό ἐπίπεδον αὐτῆς ὡς ἐπίπεδον τῶν x,y θά εἶναι δἰ ὅλα τά σημεῖα της $z=0$, ἑπομένως οἱ παραμετρικές ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς εἰς τό ἐπίπεδόν της θά εἶναι:

$$x=\sigma_1(t), \quad y=\sigma_2(t) \qquad (21.3)$$

22. Ὁρισμός τῆς ἐπιφανείας. - Ἐάν οἱ τρεῖς συναρτήσεις:

$$\sigma_1(u,v), \quad \sigma_2(u,v), \quad \sigma_3(u,v) \qquad (22.1)$$

εἶναι συνεχεῖς ἐπί ἑνός χωρίου T τοῦ ἐπιπέδου τῶν u,v τότε τό σύνολον τῶν σημείων (x,y,z) τῶν ὁποίων οἱ συντεταγμένες ὁρίζονται ὑπό τῶν ἐξισώσεων:

$$x=\sigma_1(u,v), \quad y=\sigma_2(u,v), \quad z=\sigma_3(u,v) \qquad (22.2)$$

λέγεται συνεχής ἐπιφάνεια καί οἱ (22.2) λέγονται παραμετρικές ἐξισώσεις αὐτῆς.

Ἐάν τό T εἶναι ἕνα περατωμένον κλειστόν χωρίον, τότε τό σύνολον τῶν σημείων (x,y,z) λέγεται ἀκριβέστερον συνεχές τμῆμα ἐπιφανείας καί οἱ (22.2) λέγονται πάλι παραμετρικές ἐξισώσεις αὐτοῦ.

Τό σημεῖον (x,y,z) τό ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τό ζεῦγος τιμῶν u,v λέγεται εἰκών τοῦ σημείου (u,v) τοῦ χωρίου T. Κατόπιν αὐτῶν λέγομεν συντόμως ὅτι μία συνεχής ἐπιφάνεια εἶναι ἡ συνεχής εἰκών ἑνός διδιαστάτου χωρίου. Μία συνεχής ἐπιφάνεια λέγεται ἐπιφάνεια - Jordan ὅταν σέ δύο διάφορα σημεῖα τοῦ T, ἀντιστοιχοῦν πάντοτε δύο διάφορα σημεῖα (x,y,z) αὐτῆς, δηλαδή ὅταν μεταξύ τῶν σημείων τῆς γραμμῆς καί τῶν σημείων τοῦ χωρίου T ὑπάρχη μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία.

Μία ἐπιφάνεια - Jordan λέγεται λεία, ὅταν οἱ τρεῖς συναρτήσεις (22.1) ἔχουν ἐπί τοῦ T συνεχεῖς μερικάς παραγώγους πρώτης τάξεως καί ὅταν

$$\beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \end{pmatrix} = 2$$

Ἐάν μεταξύ τῶν ἐξισώσεων (22.2) ἀπαλείψωμεν τίς παραμέτρους u, v προκύπτει ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας ὑπό τήν συνήθη μορφήν :

$$F(x,y,z) = 0 \qquad (22.4)$$

Θεωρία τῶν γραμμῶν τοῦ διδιαστάτου χώρου

23. Διάφοραι τρόποι παραστάσεως μιᾶς γραμμῆς. – Ἔστω (γ) μία γραμμή τοῦ διδιαστάτου χώρου τῶν x, y μέ παραμετρικές ἐξισώσεις :

$$x = \sigma_1(t), \qquad y = \sigma_2(t) \qquad (23.1)$$

Ἐάν μεταξύ αὐτῶν ἀπαλείψωμεν τήν μεταβλητήν t, προκύπτει μία ἐξίσωσις

$$F(x,y) = 0 \qquad (23.2)$$

ἡ ὁποία ἐφ' ὅσον εἶναι ἰσοδύναμος πρός τίς δύο παραμετρικές, λέγεται ἐξίσωσις ὑπό πλεγμένην μορφήν τῆς γραμμῆς (γ).
Ἐάν ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις δύναται, κατά τά γνωστά ἐκ τῆς θεωρίας τῶν πλεγμένων συναρτήσεων, νά ἐπιλυθῆ ὡς πρός y, προκύπτει μία ἐξίσωσις:

$$y = y(x) \qquad (23.3)$$

ἡ ὁποία λέγεται συνήθης ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς (γ). Ὁμοίως ἐάν δύναται νά ἐπιλυθῆ ὡς πρός x, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις τῆς (γ) ὑπό τήν μορφήν :

$$x = x(y) \qquad (23.4)$$

Μεταξύ τῶν καρτεσιανῶν καί τῶν πολικῶν συντεταγμένων σημείου ὑφίστανται ὡς γνωστόν οἱ σχέσεις :

$$x = \rho\,\sigma\upsilon\nu\vartheta, \quad y = \rho\,\eta\mu\vartheta$$

Ἐάν λοιπόν ἡ ἐξίσωσις μιᾶς γραμμῆς εἶναι τῆς μορφῆς (23.1) καί ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτήν τά x, y προκύπτει μία ἐξίσωσις :

$$\Phi(\rho, \vartheta) = 0 \qquad (23.5)$$

ἡ ὁποία λέγεται ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς εἰς πολικές συντεταγμένες.
Ἐάν ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις δύναται νά ἐπιλυθῆ ὡς πρός ρ, τότε ἡ ἐξίσωσις τῆ

γραμμῆς θά εἶναι τῆς μορφῆς :

$$\rho = \rho(\vartheta) \qquad (23.6)$$

Καί ὁμοίως ἐάν ἐπιλύεται ὡς πρός ϑ θά εἶναι τῆς μορφῆς :

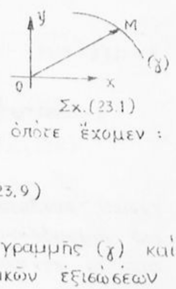
$$\vartheta = \vartheta(\rho) \qquad (23.7)$$

Γενικῶς ἕνα σύστημα ν-ἐξισώσεων μετά (ν-1) παραμέτρων τῆς μορφῆς:

$$\begin{array}{lcl} F_1(x,y,a_1,\cdots,a_{\nu-1})=0 & & \Phi_1(\rho,\vartheta,a_1,\cdots,a_{\nu-1})=0 \\ F_2(x,y,a_1,\cdots,a_{\nu-1})=0 & \text{ἤ} & \Phi_2(\rho,\vartheta,a_1,\cdots,a_{\nu-1})=0 \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\ F_\nu(x,y,a_1,\cdots,a_{\nu-1})=0 & & \Phi_\nu(\rho,\vartheta,a_1,\cdots,a_{\nu-1})=0 \end{array} \qquad (23.8)$$

παριστάνει πάλι μίαν ἐπίπεδον γραμμήν ἀντιστοίχως ὡς πρός ἕνα σύστημα καρτεσιανῶν ἤ πολικῶν συντεταγμένων. Αὐτό φαίνεται ἀμέσως ὅταν ἀπαλείψωμεν τίς παραμέτρους μεταξύ τῶν ἐξισώσεων ὁπότε προκύπτει ἐκ τῶν πρώτων ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (23.2) καί ἐκ τῶν ἄλλων ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (23.5).

Ἐάν θεωρήσωμεν τέλος μίαν γραμμήν (γ) μέ παραμετρικές ἐξισώσεις τίς (23.1) καί παραστήσωμεν μέ $\bar{r}$ τήν διανυσματικήν ἀκτῖνα $\overline{OM}$ τῆς ὁποίας τό πέρας εἶναι τυχόν σημεῖον $M(x,y)$ τῆς γραμμῆς, οἱ συντεταγμένες τῆς $\bar{r}$ ἰσοῦνται προφανῶς μέ τίς συντεταγμένες τοῦ M, ὁπότε ἔχομεν :



Σχ.(23.1)

$$\bar{r} = (\sigma_1, \sigma_2) \equiv \bar{r}(t) \qquad (23.9)$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις λέγεται διανυσματική ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς (γ) καί εἶναι προφανῶς μία περιληπτική γραφή τῶν παραμετρικῶν ἐξισώσεων αὐτῆς. Δίδομεν κατωτέρω τίς ἐξισώσεις μερικῶν γνωστῶν γραμμῶν τῶν ὁποίων ἡ λεπτομεριακή πραγμάτευσις ἔχει γίνει είς τήν ἀναλ. γεωμετρίαν.

Κύκλος μέ κέντρον τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων καί ἀκτῖνα a :

$$x = a\,\text{συν}\,t, \quad y = a\,\text{ημ}\,t$$
$$x^2 + y^2 = a^2$$
$$y = \pm(a^2 - x^2)^{1/2}$$
$$\rho = a$$

Ἔλλειψις μέ κέντρον τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων καί μήκη ἡμιαξόνων a, β :

$$x = \alpha\,\text{συν}\,t\,,\quad y = \alpha\,\text{ημ}\,t$$
$$\beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$$
$$y = \pm\beta\,(1 - x^2 : \alpha^2)^{1/2}$$
$$\rho^2(\beta^2\,\text{συν}^2\vartheta + \alpha^2\,\text{ημ}^2\vartheta) = \alpha^2\beta^2$$

Ὑπερβολή μέ κέντρον τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων καί μήκη ἡμιαξόνων α, β :

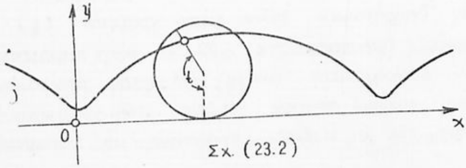
$$x = \pm\,\alpha\,\text{ch}\,t,\quad y = \pm\,\beta\,\text{sh}\,t$$
$$x = \alpha : \text{συν}\,\omega,\; y = \beta\,\text{εφ}\,\omega$$
$$\beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2 = \alpha^2\beta^2$$
$$y = \pm\beta\,(x^2 : \alpha^2 - 1)^{1/2}$$
$$\rho^2(\beta^2\,\text{συν}^2\vartheta - \alpha^2\,\text{ημ}^2\vartheta) = \alpha^2\beta^2$$

Παραβολή μέ ἡμιπαράμετρον α καί μέ ἄξονα τόν ἄξονα τῶν x :

$$y^2 - 2\alpha x = 0$$
$$y = t,\quad x = t^2 : 2\alpha$$
$$y = \pm\sqrt{2\alpha x}$$
$$\rho\,\text{ημ}^2\vartheta = 2\alpha\,\text{συν}\,\vartheta$$

Κυκλοειδής μέ κυλιομένην περιφέρειαν ἀκτῖνος α :

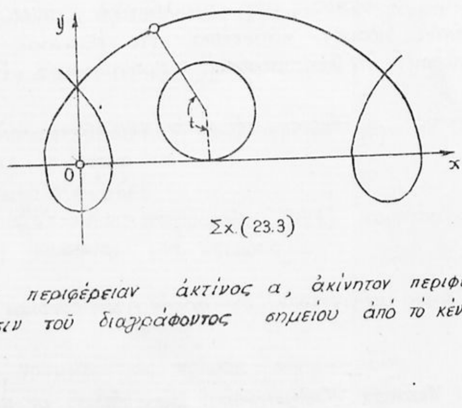
$$x = \alpha(t - \text{ημ}\,t) \quad y = \alpha(1 - \text{συν}\,t)$$
$$x = \alpha\,\text{τοξημ}\frac{y}{\alpha} - \sqrt{2\alpha y - y^2}$$



Σχ. (23.2)

Γενική κυκλοειδής μέ κυλιομένην περιφέρειαν ἀκτῖνος α καί ἀπόστασιν τοῦ διαγράφοντος σημείου ἀπό τό κέντρον αὐτῆς ἴσην μέ κ :

$$x = \alpha t - \kappa\,\text{ημ}\,t$$
$$y = \alpha - \kappa\,\text{συν}\,t$$

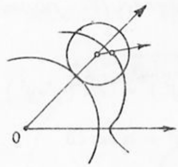


Σχ. (23.3)

Ἐπικυκλοειδής μέ κυλιομένην περιφέρειαν ἀκτῖνος α, ἀκίνητον περιφέρειαν ἀκτῖνος β καί ἀπόστασιν τοῦ διαγράφοντος σημείου ἀπό τό κέντρον τῆς κυλιομένης ἴση μέ κ :

$$x = (\beta + \alpha)\,\sigma\upsilon\nu t - \kappa\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta+\alpha}{\alpha} t\right)$$

$$y = (\beta + \alpha)\ \eta\mu t - \kappa\,\eta\mu\ \left(\frac{\beta+\alpha}{\alpha} t\right)$$

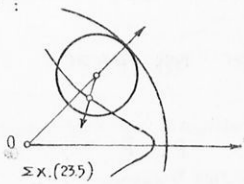


Σx.(23.4)

Ὑποκυκλοειδής μέ τά αὐτά ὡς ἄνω στοιχεῖα :

$$x = (\beta - \alpha)\ \sigma\upsilon\nu t + \kappa\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha} t\right)$$

$$y = (\beta - \alpha)\ \eta\mu t - \kappa\ \eta\mu\ \left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha} t\right)$$



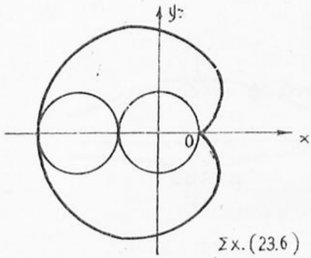
Σx.(23.5)

Καρδιοειδής προκύπτουσα ἐκ τῆς ἐπικυκλοειδοῦς μέ $\alpha = \beta = \kappa$:

$$x = \alpha\,(2\sigma\upsilon\nu t - \sigma\upsilon\nu 2t)$$
$$y = \alpha\,(2\eta\mu t - \eta\mu 2t)$$

$$(x^2+y^2)^2 - 6\alpha^2(x^2+y^2) + 8\alpha^3 x - 11\alpha^4 = 0$$

$$\rho^4 - 6\alpha^2\rho^2 + 8\alpha^3\rho\,\sigma\upsilon\nu\vartheta - 11\alpha^4$$

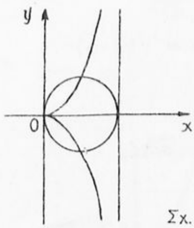


Σx.(23.6)

Κισσοειδής ἤ γραμμή τοῦ Διοκλέους μέ περιφέρειαν ἀκτῖνος α :

$$(x^2+y^2)\,x = 2\alpha y^2$$

$$\rho\,\sigma\upsilon\nu\vartheta = 2\alpha\,\eta\mu^2\vartheta$$



Σx. (23.7)

Γενικός λημνίσκος ἤ γραμμαί τοῦ Cassini μέ ἑστιακήν ἀπόστασιν 2α καί σταθερόν γινόμενον β^2 :

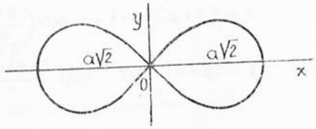
$$(x^2+y^2)^2 - 2\alpha^2(x^2-y^2) = \gamma^4 - \alpha^4$$

$$\rho^2(\rho^2 - 2\alpha^2\sigma\upsilon\nu 2\vartheta) = \gamma^4 - \alpha^4$$

Λημνίσκος τοῦ Bernoulli προκύπτων ἐκ τοῦ γενικοῦ μέ $\gamma = a$:

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$$

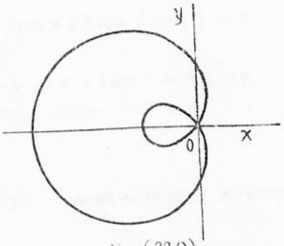
$$\rho^2 = a^2 \sigma \upsilon \nu 2\vartheta$$



Σx. (23.8)

Κοχλίας τοῦ Pascal :

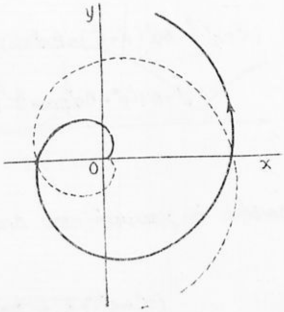
$$\rho = \beta - a \sigma \upsilon \nu \vartheta$$



Σx. (23.9)

Ἕλιξ τοῦ Ἀρχιμήδους :

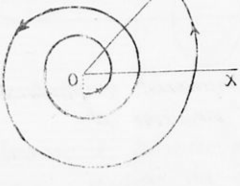
$$\rho = a\vartheta$$



Σx.(23.10)

Λογαριθμική ἕλιξ :

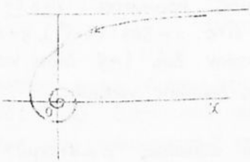
$$\rho = e^{a\vartheta}$$



Σx. (23.11)

Ὑπερβολικὴ ἕλιξ :

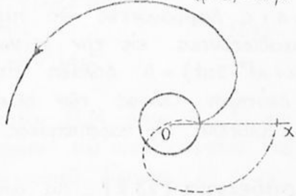
$$\rho\vartheta=\alpha$$



Σχ. (23.12)

Παραβολικὴ ἕλιξ :

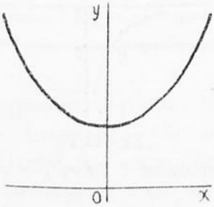
$$(\rho-\alpha)^2=4\alpha\gamma\vartheta$$



Σχ. (23.13)

Ἀλυσσοειδής :

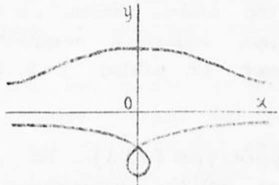
$$y=\frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x}{\alpha}}+e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)$$



Σχ. (23.14)

Κογχοειδὴς τοῦ Νικομήδη :

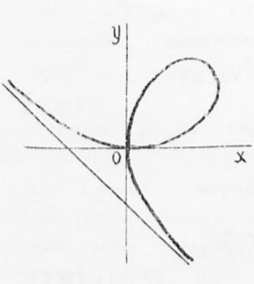
$$x^2y^2=(y+\alpha)^2\,(\beta^2-y^2)$$
$$\rho=\alpha\,\sigma\tau\epsilon\mu\vartheta+\beta$$



Σχ. (23.15)

Φύλλον τοῦ Καρτεσίου :

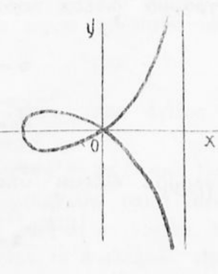
$$x^3+y^3-3\alpha xy=0$$
$$\rho(\sigma\upsilon\nu^3\vartheta+\eta\mu^3\vartheta)=3\alpha\,\sigma\upsilon\nu\vartheta\,\eta\mu\vartheta$$



Σχ. (23.16)

Στροφοειδής :

$$(\alpha-x)\,y^2=x^2(\alpha+x)$$



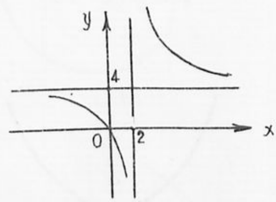
Σχ. (23.17)

Παράδειγμα (23.1). — Νά εὑρεθοῦν οἱ παραμετρικές ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς μέ ἐξίσωσιν $x^3+y^3-3axy=0$.

Λ ύ σ ι ς. Λαμβάνοντες ὡς παράμετρον τόν λόγον $y:x=t$ ὁπότε $y=xt$ καί ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν ἐξίσωσιν τῆς γραμμῆς προκύπτει : $x^3+x^3t^3-3ax^2t=0$, $x^2(x+xt^3-3at)=0$ δηλαδή εἴτε $x=0$, $y=0$ εἴτε $x=3at:(1+t^3)$, $y=3at^2:(1+t^3)$. Τό δεύτερον ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων, τό ὁποῖον διά $t=0$ δίδει καί τό πρῶτον, ἀποτελεῖ τίς παραμετρικές ἐξισώσεις τῆς δοθείσης γραμμῆς.

Παράδειγμα (23.2). — Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\rho=4\sigma\tau\epsilon\mu\vartheta+2\tau\epsilon\mu\vartheta$ παριστάνει μίαν ὑπερβολήν.

Λ ύ σ ι ς. Μετασχηματίζοντες τήν ἐξίσωσιν εἰς καρτεσιανές συντεταγμένες θά ἔχωμεν : $\rho=4:\eta\mu\vartheta+2:\sigma\upsilon\nu\vartheta=4\rho:y+2\rho:x$, $\rho xy=4\rho x+2\rho y$, $\rho(xy-4x-2y)=0$ δηλαδή εἴτε $\rho=0$ εἴτε $xy-4x-2y=0$. Ἡ τελευταία ἐξίσωσις δίδει διά $x=y=0$ τήν $\rho=0$, ἐπομένως εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς εἰς καρτεσιανές συντεταγμένες. Μετατρέποντες εἰς γινόμενον τό πρῶτον μέλος γράφεται $(x-2)(y-4)=8$, ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι ἡ δοθεῖσα γραμμή παριστάνει ὑπερβολήν μέ ἀσυμπτώτους τίς εὐθεῖες $x=2$, $y=4$ σχ. (23.2).



Σχ. (23.2)

Παράδειγμα (23.3). — Νά μετασχηματισθῆ ἡ ἐξίσωσις : $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ εἰς σύστημα πολικῶν συντεταγμένων.

Λ ύ σ ι ς. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν ἐξίσωσιν τά x, y συναρτήσει τῶν ρ, ϑ προκύπτει $\rho^4=\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta-\rho^2\eta\mu^2\vartheta$, ὁπότε ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι $\rho^2=\sigma\upsilon\nu 2\vartheta$.

24. Μῆκος τόξου. — Ὑπενθυμίζομεν ἀπό τόν ὁλοκληρωτικόν λογισμόν τούς τύπους οἱ ὁποῖοι δίδουν τό μῆκος τόξου καί τό διαφορικόν αὐτοῦ διά τί διάφορες μορφές ὑπό τίς ὁποῖες δίδεται ἀναλυτικῶς μία γραμμή εἰς τό ἐπίπεδον τῶν x, y.

(i). Ἡ γραμμή δίδεται παραμετρικῶς :

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\;dt=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\dot{\bar{r}}^2}\,dt \qquad (24.1)$$

$$ds^2=(\dot{x}^2+\dot{y}^2)\,dt^2=\dot{\bar{r}}^2dt^2$$

(ii). Ἡ γραμμή δίδεται ὑπό τήν συνήθη μορφήν :

$$s=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{y_0}^{y}\sqrt{1+x'^2}\,dy \qquad (24.2)$$

$$ds^2=(1+y'^2)\,dx^2=(1+x'^2)\,dy^2$$

(iii). Ἡ γραμμὴ δίδεται ὑπὸ τὴν πολικὴν μορφήν :

$$s=\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\sqrt{\dot\rho^2+\rho^2}\,d\vartheta=\int_{\rho_0}^{\rho}\sqrt{1+\rho^2\dot\vartheta^2}\,d\rho \qquad (24.3)$$

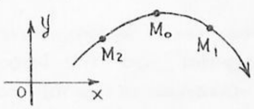
$$ds^2=(\dot\rho^2+\rho^2)\,d\vartheta^2=(1+\rho^2\dot\vartheta^2)\,d\rho^2$$

Οἱ ἀνωτέρω τύποι δίδουν τὸ μῆκος τοῦ τόξου M_0M ὅπου M_0 τὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ κάτω ὅριον τοῦ ὁλοκληρώματος καὶ M τὸ σημεῖον ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἄνω ὅριον αὐτοῦ. Δύνανται δὲ οἱ τύποι αὐτοὶ νὰ προκύψουν, λαμβάνοντες κάθε φορὰν τὴν κατάλληλον μεταβλητὴν ὁλοκληρώσεως, ἀπὸ τοὺς ἑξῆς γενικοὺς τύπους :

$$\boxed{\begin{aligned} s&=\int_{M_0}^{M}\sqrt{dx^2+dy^2}=\int_{M_0}^{M}\sqrt{d\rho^2+\rho^2d\vartheta^2}\\ ds^2&=dx^2+dy^2=d\rho^2+\rho^2d\vartheta^2\end{aligned}} \qquad (24.4)$$

Ὁ ἀριθμὸς s λέγεται καμπυλόγραμμος τετμημένη τοῦ σημείου M ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν M_0 καὶ εἶναι $s>0$ ἢ $s<0$ ἀντιστοίχως ὅταν τὸ ἄνω ὅριον τοῦ ὁλοκληρώματος εἶναι μεγαλείτερον ἢ μικρότερον τοῦ κάτω ὁρίου.

Μία γραμμὴ λέγεται προσανατολισμένη ὅταν ἔχῃ ὁρισθεῖ ἐπ' αὐτῆς μία φορὰ διαγραφῆς τὴν ὁποίαν συνήθως καλοῦμεν θετικὴν καὶ τὴν ἀντίθετόν της ἀρνητικήν. Ὡς θετικὴν φορὰν λαμβάνομεν συνήθως ἐκείνη ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐξανόμενες τιμὲς τῆς μεταβλητῆς ἑπομένως κατὰ τοὺς προηγουμένους τύπους καὶ εἰς αὐξανόμενα s. Τὰ σημεῖα μὲ θετικὴν καμπυλόγραμμον τετμημένην ἀποτελοῦν τὸ θετικὸν μέρος τῆς γραμμῆς ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν τόξων M_0 καὶ τὰ σημεῖα μὲ ἀρνητικὴν καμπυλόγραμμον τετμημένην ἀποτελοῦν τὸ ἀρνητικὸν μέρος. Ἐὰν π.χ. ἡ γραμμὴ (γ) τοῦ σχ. (24.1) ἔχει τὸν σημειούμενον προσανατολισμόν, τότε τὸ μὲν σημεῖον M_1 κεῖται εἰς τὸ θετικὸν μέρος τῆς γραμμῆς καὶ ἔχει θετικὴν καμπυλόγραμμον τετμημένην, τὸ δὲ M_2 κεῖται εἰς τὸ ἀρνητικὸν μέρος καὶ ἔχει ἀρνητικὴν καμπυλόγραμμον τετμημένην.



Σχ. (24.1)

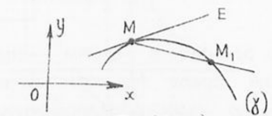
Παράδειγμα (24.1)._ Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τόξου μιᾶς ἁψῖδος τῆς κυκλοειδοῦς γραμμῆς : $x=a(t-\eta\mu t)$, $y=a(1-\sigma\upsilon\nu t)$.

Λύσις. Ἔχομεν $\dot x=a(1-\sigma\upsilon\nu t)$, $\dot y=a\,\eta\mu t$, $\dot x^2+\dot y^2=2a^2(1-\sigma\upsilon\nu t)=4a^2\eta\mu^2\frac{t}{2}$ καὶ ἐπειδὴ τὸ μῆκος μιᾶς ἁψῖδος ἀντιστοιχεῖ διὰ μεταβολὴν τοῦ t ἀπὸ 0 μέχρι 2π, θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὸν τύπον (24.1) $s=2a\int_0^{2\pi}\eta\mu\frac{t}{2}\,dt=\cdots=8a$. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μῆκος μιᾶς ἁψῖδος ἰσοῦται μὲ τὸ 8-πλάσιον τῆς ἀκτῖνος τῆς περιφερείας ἡ ὁποία παράγει διὰ κυλίσεως τὴν γραμμήν.

Παράδειγμα (24.2). — Νά εὑρεθῆ τό μῆκος τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM_1}$ τῆς ἁλυσσοειδοῦς γραμμῆς $y = a\,ch\frac{x}{a}$ ὅπου $A(0,a)$ καί M_1 σημεῖον τῆς γραμμῆς μέ τετμημένην ἴσην πρός x_1.
Λύσις. Ἔχομεν $y' = sh\frac{x}{a}$, $1+y'^2 = 1+sh^2\frac{x}{a} = ch^2\frac{x}{a}$, ὁπότε ἐκ τοῦ τύπου (24.2) θά ἔχωμεν: $s = \int_0^{x_1} ch\frac{x}{a}\,dx = \cdots = a\,sh\frac{x_1}{a}$.

Παράδειγμα (24.3). — Νά εὑρεθῆ τό μῆκος τοῦ τόξου $\overset{\frown}{OM_1}$ τῆς ἕλικος τοῦ Ἀρχιμήδους $\rho = a\theta$ ὅπου M_1 σημεῖον αὐτῆς μέ πολικήν γωνίαν θ_1.
Λύσις. Ἔχομεν $\dot\rho = a$, ἐπομένως ἐκ τοῦ τύπου (24.3) θά ἔχωμεν:
$s = \int_0^{\theta_1}\sqrt{a^2+a^2\theta^2}\,d\theta = a\int_0^{\theta_1}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta = \cdots = \frac{a}{2}\left[\theta_1\sqrt{1+\theta_1^2} + \frac{a}{2}\ln\left(\theta_1+\sqrt{\theta_1^2+1}\right)\right]$.

25. Ἐφαπτομένη καί κάθετος. — Ἔστω γραμμή (γ) μέ διανυσματικήν ἐξίσωσιν $\bar r = \bar r(t)$. Ὅπως εἶναι γνωστόν ἡ ἐφαπτομένη ME τῆς γραμμῆς εἰς τό σημεῖον $M(t)$ ὁρίζεται ὡς ὁριακή θέσις μιᾶς τεμνούσης MM_1 ὅταν τό δεύτερον σημεῖον τομῆς $M_1(t+\Delta t)$ τείνει νά πέσῃ εἰς τό πρῶτον M, δηλαδή ὅταν $\Delta t \to 0$. Ἡ διανυσματική ἐξίσωσις τῆς τεμνούσης MM_1 κατά τά γνωστά ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας δύναται νά γραφῆ:



Σχ. (25.1)

$$\bar x = \bar r(t) + \lambda\left[\bar r(t+\Delta t) - \bar r(t)\right] : \Delta t$$

ὅπου μέ $\bar x$ παριστάνομεν τήν διανυσματικήν ἀκτῖνα μέ πέρας τυχόν σημεῖον τῆς τεμνούσης MM_1. Ἐάν ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι $\Delta t \to 0$ ἐκ τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως προκύπτει ἀμέσως ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης:

$$\bar x = \bar r(t) + \lambda\dot{\bar r}(t) \qquad (25.1)$$

ὅπου τώρα $\bar x$ παριστάνει τήν διανυσματικήν ἀκτῖνα τῆς ὁποίας τό πέρας διαγράφει διά τίς διάφορες τιμές τῆς παραμέτρου λ τήν ἐφαπτομένη ME. Τό διάνυσμα $\dot{\bar r}(t)$ τό ὁποῖον εἶναι ὅριον τοῦ διανύσματος $\overline{MM_1} : \Delta t$ λέγεται παράγωγον ἤ ἐφαπτομενικόν διάνυσμα τῆς γραμμῆς (γ) εἰς τό σημεῖον $M(t)$, εἶναι δέ πάντοτε παράλληλον πρός τήν ἐφαπτομένην ME. Ἐάν ὡς πρός ἕνα σύστημα ἀξόνων παραστήσωμεν μέ x, y τίς συντεταγμένες τῶν σημείων τῆς γραμμῆς καί μέ ἀντίστοιχα κεφαλαῖα X, Y τίς συντεταγμένες τῶν σημείων τῆς ἐφαπτομένης, τότε ἡ (25.1) εἶναι ἰσοδύναμος μέ τίς ἑξῆς δύο παραμετρικές ἐξισώσεις:

$$X = x + \lambda\dot x, \quad Y = y + \lambda\dot y \qquad (25.2)$$

Ἐξ αὐτῶν δι' ἀπαλειφῆς τῆς παραμέτρου λ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις:

$$(X - x)\dot y = (Y - y)\dot x \qquad (25.3)$$

ἡ ὁποία εἶναι ἡ συνήθης ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς γραμμῆς καὶ τῆς ὁποίας πολλαπλασιάζοντες τοὺς παρονομαστὲς ἐπὶ dt, γράφεται ἐπίσης :

$$(X-x)\,dy = (Y-y)\,dx \qquad (25.4)$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως ἕπεται ἀμέσως ἡ γνωστὴ ἐκ τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης :

$$Y-y = y'(X-x) \qquad (25.5)$$

Ὅταν ἡ γραμμὴ δίδεται ὑπὸ πλεγμένην μορφὴν εἶναι $dy:dx=-F_x:F_y$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν προκύπτει :

$$(X-x)\,F_x + (Y-y)\,F_y = 0 \qquad (25.6)$$

Κάθετος μιᾶς γραμμῆς εἰς ἕνα σημεῖον αὐτῆς M λέγεται ἡ κάθετος εὐθεία ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς γραμμῆς εἰς τὸ M. Ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ κάθετος θὰ ἔχουν γινόμενον κλίσεων ἴσον μὲ -1 ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου, ὅταν ἡ γραμμὴ δίδεται παραμετρικῶς, προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῆς (25.3) καὶ εἶναι

$$(X-x)\,\dot{x} + (Y-y)\,\dot{y} = 0 \qquad (25.7)$$

Ὅταν ἡ γραμμὴ δίδεται ὑπὸ πλεγμένην μορφὴν ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου θὰ εἶναι προφανῶς τῆς μορφῆς :

$$(X-x)\,F_y = (Y-y)\,F_x \qquad (25.8)$$

Ὅταν ἡ γραμμὴ δίδεται εἰς πολικὲς συντεταγμένες ρ, ϑ καὶ παραστήσωμεν μὲ ἀντίστοιχα κεφαλαῖα R, θ τὶς συντεταγμένες τυχόντος σημείου τῆς ἐφαπτομένης τῆς γραμμῆς εἰς τὸ σημεῖον (ρ, ϑ) θὰ ἔχωμεν, παραγωγίζοντες ὡς πρὸς ϑ, τὶς σχέσεις :

$$X = R\,\text{συν}\theta, \qquad x = \rho\,\text{συν}\,\vartheta, \qquad \dot{x} = \dot{\rho}\,\text{συν}\,\vartheta - \rho\,\text{ημ}\vartheta$$
$$Y = R\,\text{ημ}\theta, \qquad y = \rho\,\text{ημ}\,\vartheta, \qquad \dot{y} = \dot{\rho}\,\text{ημ}\,\vartheta + \rho\,\text{συν}\,\vartheta$$

Ἀντικαθιστῶντες τὶς ἀνωτέρω σχέσεις εἰς τὶς ἐξισώσεις (25.3) καὶ (25.7) τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς καθέτου, προκύπτουν οἱ ἀντίστοιχες ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς εἰς πολικὲς συντεταγμένες, οἱ ὁποίες μετὰ ἀπὸ μερικὲς πράξεις λαμβάνουν τὴν μορφὴν :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho}\,\text{συν}\,(\theta-\vartheta) - \frac{\dot{\rho}}{\rho^2}\,\text{ημ}\,(\theta-\vartheta) \qquad (25.9)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho}\,\text{συν}\,(\theta-\vartheta) + \frac{1}{\dot{\rho}}\,\text{ημ}\,(\theta-\vartheta) \qquad (25.10)$$

Όταν μία γραμμή δίδεται ὑπό τήν μορφήν (23.1) ἡ ἐφαπτομένη της προσανατολίζεται ὁμορρόπως πρός τό διάνυσμα $(\dot{x}, \dot{y})$, ὅταν δίδεται ὑπό τήν μορφήν (23.2) ὁμορρόπως πρός τό διάνυσμα $(F_y, -F_x)$, ὅταν δίδεται ὑπό τήν μορφήν (23.3) ὁμορρόπως πρός τό διάνυσμα $(1, y')$, ὅταν δίδεται ὑπό τήν μορφήν (23.4) ὁμορρόπως πρός τό διάνυσμα (23.4) καί ὅταν δίδεται ὑπό τήν μορφήν (23.6) ἔτσι ὥστε σημεῖον κινούμενον ἐπ' αὐτῆς κατά τήν θετικήν φοράν τό ὄρισμά του νά αὐξάνη.

Ἡ κάθετος γραμμῆς προσανατολίζεται ἔτσι ὥστε ἡ θετική της φορά νά λαμβάνεται ἀπό τήν θετικήν φοράν τῆς ἐφαπτομένης μέ στροφήν αὐτῆς περί τό σημεῖον ἐπαφῆς κατά γωνίαν $+\pi/2$.

Παράδειγμα (25.1). – Νά εὑρεθῆ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης καί τῆς καθέτου τῆς γραμμῆς : $x = t-2$, $y = t^2-1$ εἰς τό σημεῖον της $M(-1,0)$.

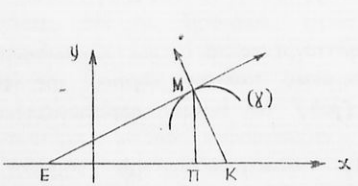
Λύσις. Ἔχομεν $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = 2t$ τό δέ σημεῖον Μ προκύπτει διά $t = 1$, ἐπομένως κατά τόν τύπον (25.3) ἡ μέν ἐφαπτομένη ἔχει ἐξίσωσιν $2X+2 = Y$ ἡ δέ κάθετος κατά τόν (25.7) : $X+1+2Y = 0$

Παράδειγμα (25.2). – Νά εὑρεθῆ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης καί τῆς καθέτου τῆς γραμμῆς $y^2+2x^2+y = 0$ εἰς τό σημεῖον της $M(0,0)$.

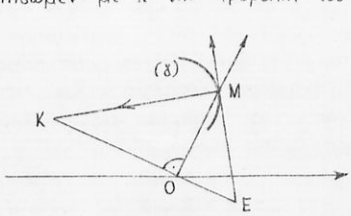
Λύσις. Ἔχομεν $dy : dx = -4x : (2y+1)$ καί εἰς τό σημεῖον Μ εἶναι $dy : dx = 0$, ἐπομένως κατά τόν (25.5) ἡ μέν ἐφαπτομένη ἔχει ἐξίσωσιν $Y = 0$ ἡ δέ κάθετος $X = 0$.

26. Ὑφαπτομένη καί ὑποκάθετος γραμμῆς.

– Ἔστω γραμμή (γ) τῆς ὁποίας ἡ ἐφαπτομένη καί ἡ κάθετος εἰς τό σημεῖον $M(x,y)$, προσανατολισμέναι κατά τόν γνωστόν τρόπον, τέμνουν τόν ἄξονα τῶν x ἀντιστοίχως εἰς τά σημεῖα Ε καί Κ σχ. (26.1). Ἐάν παραστήσωμεν μέ Π τήν προβολήν τοῦ Μ



Σχ. (26.1)



Σχ. (26.2)

ἐπί τοῦ ἄξονος τῶν x, τότε ὁ ἀριθμός (ΠΕ) λέγεται ὑφαπτομένη τῆς γραμμῆς εἰς τό σημεῖον Μ, ὁ ἀριθμός (ΠΚ) λέγεται ὑποκάθετος, ὁ ἀριθμός (ΜΕ) μῆκος τμήματος ἐφαπτομένης ἤ ἐπεφαπτομένη καί ὁ ἀριθμός (ΜΚ) μῆκος τμήματος καθέτου ἤ ἐπικάθετος. Ἀπό τόν διαφορικόν λογισμόν γνωρίζομεν ὅτι οἱ ἀριθμοί αὐτοί δίδονται ἀπό τούς ἑξῆς τύπους :

$$(\Pi E) = -y : y' \qquad (\Pi K) = yy'$$
$$(ME) = -y\sqrt{1+y'^2} : y' \qquad (MK) = -y\sqrt{1+y'^2} \qquad (26.1)$$

Ἐὰν ἡ γραμμὴ δίδεται εἰς πολικὲς συντεταγμένες προσανατολίζομεν τὴν ἐφαπτομένη καὶ τὴν κάθετον κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον τὴν πολικὴν ἀκτῖνα OM ἐκ τοῦ 0 πρὸς τὸ M καὶ τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν πολικὴν ἀκτῖνα εἰς τὸ O ἔτσι ὥστε ἡ θετικὴ φορὰ αὐτῆς νὰ προκύπτη ἐκ τῆς θετικῆς φορᾶς τῆς OM διὰ στροφῆς κατὰ γωνίαν $+\pi/2$. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ E καὶ K τὰ σημεῖα τομῆς τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς καθέτου τῆς γραμμῆς μετὰ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν πολικὴν ἀκτῖνα σχ. (26.2), τότε ὁ ἀριθμὸς (OE) λέγεται ὑφαπτομένη τῆς γραμμῆς εἰς τὸ σημεῖον $M \neq 0$, ὁ ἀριθμὸς (ME) λέγεται μῆκος τμήματος ἐφαπτομένης ἢ ἐπεφαπτομένη καὶ ὁ ἀριθμὸς (MK) μῆκος τμήματος καθέτου ἢ ἐπικάθετος. Ἀπὸ τὸν διαφορικὸν λογισμὸν γνωρίζομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ δίδονται ἀπὸ τοὺς ἑξῆς τύπους :

$$(OE) = -\rho^2 : \dot\rho \qquad (OK) = \dot\rho$$
$$(ME) = -\rho\sqrt{\rho^2+\dot\rho^2} : \dot\rho \quad (MK) = \sqrt{\rho^2+\dot\rho^2} \qquad (26.2)$$

Παράδειγμα (26.1).— Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ὑφαπτομένη, ἡ ὑποκάθετος, ἡ ἐπεφαπτομένη καὶ ἐπικάθετος τῆς ἐλλείψεως : $\beta^2x^2+\alpha^2y^2-\alpha^2\beta^2=0$.

Λ ύ σ ι ς. Διὰ τὴν ἔλλειψιν εἶναι $y'=-\beta^2x:\alpha^2y$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς τύπους (26.1) προκύπτει : $(\Pi E) = \alpha^2y^2 : \beta^2x = (\alpha^2\beta^2-\beta^2x^2):\beta^2x = (\alpha^2-x^2):x$, $(\Pi K) = -\beta^2x : \alpha^2$, $(ME) = \alpha^2y\sqrt{x^2:\alpha^4+y^2:\beta^4} : x$, $(MK) = -\beta^2\sqrt{x^2:\alpha^4+y^2:\beta^4}$.

Παράδειγμα (26.2).— Νὰ γίνη τὸ αὐτὸ διὰ τὴν λογαριθμικὴν ἕλικα μὲ ἐξίσωσιν εἰς πολικὲς συντεταγμένες : $\rho = \alpha e^{\mu t}$.

Λ ύ σ ι ς. Ἔχομεν $\dot\rho = \alpha\mu e^{\mu t} = \mu\rho$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς τύπους (26.2) προκύπτει : $(OE) = -1:\mu^2$, $(OK) = \mu\rho$, $(ME) = -\rho\sqrt{1+\mu^{-2}}$, $(MK) = \rho\sqrt{1+\mu^2}$.

27. Καμπυλότης.— Ἔστω γραμμὴ (γ) μὲ παραμετρικὲς ἐξισώσεις

$$x = \sigma_1(s), \quad y = \sigma_2(s) \qquad (27.1)$$

Τὸ ἐφαπτομενικὸν διάνυσμα τῆς γραμμῆς, τώρα ποὺ παράμετρος εἶναι τὸ μῆκος τόξου, θὰ τὸ παριστάνωμεν μὲ τὸ σύμβολον $\bar\varepsilon$, ὁπότε θὰ εἶναι :

$$\bar\varepsilon = d\bar r : ds = \bar r' = (x', y').$$

θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ διάνυσμα αὐτὸ εἶναι μοναδιαῖον· πράγματι ἔχομεν :

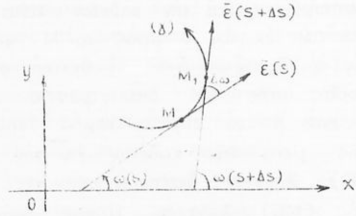
$$\bar\varepsilon = d\bar r : ds = (d\bar r : dt)\cdot(dt : ds) = \dot{\bar r} : (ds : dt) = \dot{\bar r} : \dot s$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸν τύπον (25.1) ἕπεται ὅτι $\dot s = \sqrt{\dot{\bar r}^2} = |\dot{\bar r}|$, ἐπομένως

$$\bar\varepsilon = \dot{\bar r} : |\dot{\bar r}| \qquad (27.2)$$

δηλαδή τό διάνυσμα $\bar{\varepsilon}$ ἰσοῦται μέ τό μοναδιαῖον τοῦ $\ddot{\bar{r}}$.

Ἐάν καλέσωμεν ω τήν γωνία τῶν διανυσμάτων $\bar{\imath}, \bar{\varepsilon}$ δηλαδή τήν γωνία κατά τήν ὁποίαν πρέπει νά στραφῆ τό $\bar{\imath}$ περί τό σημεῖον Μ διά νά συμπέσῃ μέ τό $\bar{\varepsilon}$, ἔχομεν τόν ἑξῆς ὁρισμόν τῆς καμπυλότητος μιᾶς γραμμῆς τοῦ διδιαστάτου χώρου.



Σχ. (27.1)

Ὁρισμός (27.1). – *καλεῖται μέση καμπυλότης τῆς γραμμῆς (γ) ἀπό τό σημεῖον Μ μέχρι τό M_1 τό πηλίκον :*

$$\Delta\omega : \Delta s = \left[\omega(s+\Delta s) - \omega(s) \right] : \Delta s \qquad (27.3)$$

καλεῖται δέ καμπυλότης τῆς γραμμῆς εἰς τό σημεῖον Μ καί θά τήν παριστάνωμεν μέ u, τό ὅριον τῆς μέσης καμπυλότητος διά $\Delta s \to 0$, δηλαδή

$$u(s) = d\omega : ds \qquad (27.4)$$

Διά τόν ὑπολογισμόν τῆς καμπυλότητος μιᾶς γραμμῆς τοῦ διδιαστάτου χώρου θά ἀποδείξωμεν τήν ἑξῆς πρότασιν.

Πρότασις (27.1). – *Ἐάν ἡ γραμμή δίδεται ὑπό τήν μορφήν (27.1), ἡ καμπυλότης αὐτῆς δίδεται ὑπό τοῦ τύπου :*

$$u = x'y'' - x''y' \qquad (27.5)$$

Ἐάν δίδεται ὑπό τήν μορφήν (23.1), ἡ καμπυλότης δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$u = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}} \qquad (27.6)$$

Ἐάν δίδεται ὑπό τήν μορφήν (23.3), ἡ καμπυλότης δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$u = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \qquad (27.7)$$

Ἐάν δίδεται ὑπό τήν μορφήν (23.2), ἡ καμπυλότης δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$u = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{(F_x^2+F_y^2)^{3/2}} \qquad (27.8)$$

Ἐάν δίδεται ὑπό τήν μορφήν (23.6), ἡ καμπυλότης δίδεται ὑπό τοῦ τύπου :

$$u = \frac{\rho^2+2\dot{\rho}^2-\rho\ddot{\rho}}{(\dot{\rho}^2+\rho^2)^{3/2}} \qquad (27.9)$$

Ἀπόδειξις. Ἀφοῦ τὸ ἐφαπτομενικὸν διάνυσμα $\bar{\varepsilon}$ σχηματίζει γωνίαν ω μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x, θὰ ἔχωμεν τὶς σχέσεις:

$$x' = \text{συν}\,\omega,\quad y' = \text{ημ}\,\omega,\quad x'' = -\dot{\omega}\,\text{ημ}\,\omega,\quad y'' = \dot{\omega}\,\text{συν}\,\omega \qquad (27.10)$$

Ἐὰν ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων ἀντικαταστήσωμεν τὰ x', y', x'', y'' εἰς τὸ δεύτερον μέλος τοῦ (27.5) προκύπτει $\dot{\omega}$ τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ u καὶ ἔτσι ἀπεδείχθη ὁ πρῶτος τύπος.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου τύπου ἔχομεν:

$$x' = dx : ds = (dx : dt)(dt : ds) = \dot{x} : \dot{s}$$

$$x'' = dx' : ds = d(\dot{x} : \dot{s}) : ds = [d(\dot{x} : \dot{s}) : dt]\cdot(dt : ds) = (\ddot{x}\dot{s} - \dot{x}\ddot{s}) : \dot{s}^3$$

$$y' = \dot{y} : \dot{s},\qquad y'' = (\ddot{y}\dot{s} - \dot{y}\ddot{s}) : \dot{s}^3$$

Ἀντικαθιστῶντες ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων τὰ x', y', x'', y'' εἰς τὸ δεύτερον μέλος τοῦ (27.5) καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ προκύπτει ὁ δεύτερος τύπος.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ τρίτου τύπου θέτομεν $x = t$ ὁπότε θὰ ἔχωμεν

$$\dot{x} = 1,\quad \ddot{x} = 0,\quad \dot{y} = y',\quad \ddot{y} = y''$$

Ἀντικαθιστῶντες ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων τὰ $\dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}$ εἰς τὸ δεύτερον μέλος τοῦ (27.6) προκύπτει ὁ τρίτος τύπος.

Ὁ τέταρτος τύπος προκύπτει ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸ δεύτερον μέλος τοῦ (27.7) τὰς y', y'' συναρτήσει τῶν μερικῶν παραγώγων τῆς F ἐκ τῶν τύπων (14.2) καὶ (14.4).

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ τελευταίου τύπου παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἐξισώσεις:

$$x = \rho\,\text{συν}\,\vartheta,\qquad y = \rho\,\text{ημ}\,\vartheta$$

ἕνεκα τῆς (23.6) δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς παραμετρικὲς ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς μὲ παράμετρον τὴν ϑ. Παραγωγίζοντες αὐτάς:

$$\dot{x} = \dot{\rho}\,\text{συν}\,\vartheta - \rho\,\text{ημ}\,\vartheta,\qquad \dot{y} = \dot{\rho}\,\text{ημ}\vartheta + \rho\,\text{συν}\,\vartheta$$

$$\ddot{x} = \ddot{\rho}\,\text{συν}\vartheta - 2\dot{\rho}\,\text{ημ}\vartheta - \rho\,\text{συν}\vartheta,\qquad \ddot{y} = \ddot{\rho}\,\text{ημ}\vartheta + 2\dot{\rho}\,\text{συν}\vartheta - \rho\,\text{ημ}\vartheta$$

Καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸ δεύτερον μέλος τοῦ (27.6) προκύπτει ὁ τελευταῖος τύπος.

Παράδειγμα (27.1).— Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ καμπυλότης τῆς εὐθείας:

$$x = x_0 + ta_1,\qquad y = y_0 + ta_2$$

Λύσις. Παραγωγίζομεν $\dot{x} = a_1$, $\ddot{x} = 0$, $\dot{y} = a_2$, $\ddot{y} = 0$ καὶ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸν τύπον (27.6) ὁπότε προκύπτει: $u = 0$.

Παράδειγμα (27.2).— Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ καμπυλότης τοῦ κύκλου:

$$x = x_0 + a\,\text{συν}t,\quad y = y_0 + a\,\text{ημ}t$$

Λύσις. Παραγωγίζομεν $\dot{x} = -a\,\text{ημ}t$, $\ddot{x} = -a\,\text{συν}t$, $\dot{y} = a\,\text{συν}t$, $\ddot{y} = -a\,\text{ημ}t$ καὶ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸν τύπον (27.6) ὁπότε προκύπτει $u = a^{-1}$.

Παράδειγμα (27.3).— Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ καμπυλότης τῆς ἐλλείψεως:

$$x = \alpha\,\text{συν}\,t, \qquad y = \beta\,\text{ημ}\,t$$

Λύσις. Παραγωγίζομεν $\dot{x} = -\alpha\,\text{ημ}\,t$, $\ddot{x} = -\alpha\,\text{συν}\,t$, $\dot{y} = \beta\,\text{συν}\,t$, $\ddot{y} = -\beta\,\text{ημ}\,t$ καὶ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸν τύπον (27.6) ὁπότε προκύπτει $u = \alpha\beta : (\alpha^2\text{ημ}^2 t + \beta^2\text{συν}^2 t)^{3/2}$.

Παράδειγμα (27.4). — Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ καμπυλότης τῆς ἁλυσσοειδοῦς :

$$y = a\,\text{ch}\frac{x}{a}$$

Λύσις. Παραγωγίζομεν $y' = \text{sh}\frac{x}{a}$, $y'' = a^{-1}\text{ch}\frac{x}{a}$ καὶ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸν τύπον (27.7) ὁπότε προκύπτει $u = 1 : a\,\text{ch}^2\frac{x}{a} = a y^{-2}$.

Παράδειγμα (27.5). — Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ καμπυλότης τῆς γραμμῆς $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ εἰς τὰ σημεῖα σχ. ἀκροτάτων καὶ σημείων καμπῆς.

Λύσις. Ἔχομεν $y' = 3x^2 - 12x + 9$, $y'' = 6x - 12$ ὁπότε διὰ $x = 1$ ἔχομεν μέγιστον διὰ $x = 3$ ἐλάχιστον καὶ διὰ $x = 2$ σημεῖον καμπῆς. Ἀπὸ τὸν τύπον (27.7) δι' αὐτὰς τὰς τιμὰς προκύπτει : $u = -6$, $u = 6$, $u = 0$.

Παράδειγμα (27.6). — Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ καμπυλότης τῆς ὑπερβολῆς :

$$2x^2 - y^2 - 1 = 0$$

Λύσις. Ἔχομεν $F = 2x^2 - y^2 - 1$, $F_x = 4x$, $F_{xx} = 4$, $F_y = -2y$, $F_{yy} = -2$, $F_{xy} = 0$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (27.8) προκύπτει $u = (4x - 2y^2) : (4x^2 + y^2)^{3/2}$.

Παράδειγμα (27.7). — Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ καμπυλότης τῆς λογαριθμικῆς ἕλικος $\rho = e^{a\theta}$.

Λύσις. Παραγωγίζομεν $\dot{\rho} = a e^{a\theta} = a\rho$, $\ddot{\rho} = a\dot{\rho} = a^2\rho$ καὶ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸν τύπον (27.9) ὁπότε προκύπτει : $u = 1 : \rho\sqrt{1 + a^2}$.

28. Τύποι τοῦ Frenet.

— Ἔστω γραμμὴ (γ) μὲ ἐξισώσεις :

$$x = \sigma_1(s), \qquad y = \sigma_2(s) \qquad (28.1)$$

Ἐπειδὴ τὸ ἐφαπτομενικὸν διάνυσμα $\bar{r}'$ εἶναι μοναδιαῖον θὰ εἶναι $\bar{r}'^2 = 1$ ὁπότε παραγωγίζοντες ὡς πρὸς s προκύπτει $2\bar{r}'\bar{r}'' = 0$. Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς ὑποθέτοντες ὅτι $\bar{r}', \bar{r}'' \neq \bar{0}$ ἕπεται ὅτι τὸ διάνυσμα $\bar{r}''$ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐφαπτομενικὸν διάνυσμα $\bar{r}'$. Ἐκ τῶν σχέσεων (27.10) ἕπεται :

$$\bar{r}'' = (-\text{ημ}\,\omega, \text{συν}\,\omega)\,\omega'$$

$$|\bar{r}''| = |\omega'| = |u|$$

ὁπότε παριστάνοντες μὲ $\bar{\kappa}$ τὸ διάνυσμα $\bar{r}'' : u$ θὰ ἔχωμεν :

$$\bar{\kappa} = \bar{r}'' : u = (-\text{ημ}\,\omega, \text{συν}\,\omega) \qquad (28.2)$$

Τὸ $\bar{\kappa}$ λέγεται μοναδιαῖον κάθετον διάνυσμα τῆς γραμμῆς εἰς τὸ $M(s)$ εἶναι δὲ ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον πρὸς τὸ $\bar{r}''$ ἀντιστοίχως ἐὰν εἶναι $u > 0$ ἢ $u < 0$.

Πρότασις (28.1). — *Αἱ παράγωγοι ὡς πρὸς τὸ μῆκος τόξου τοῦ ἐφαπτομενικοῦ διανύσματος $\bar{\varepsilon}(s)$ καὶ τοῦ καθέτου $\bar{\kappa}(s)$, δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων*

$$\boxed{\bar{\varepsilon}' = u\bar{\kappa}\ ,\quad \bar{\kappa}' = -u\bar{\varepsilon}} \qquad (28.3)$$

Ἀπόδειξις. Ὁ πρῶτος ἐκ τῶν ἀνωτέρω τύπων προκύπτει ἀμέσως ἀπὸ τὸν τύπον (28.2) ἐὰν θέσωμεν εἰς αὐτὸν ἀντὶ $\bar{r}''$ τὸ $\bar{\varepsilon}'$. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου τύπου γράφομεν :

$$\bar{\kappa}' = \lambda\bar{\varepsilon} + \mu\bar{\kappa}$$

ὅπου λ, μ προσδιοριστέοι ἀριθμητικοὶ συντελεσταί. Πολλαπλασιάζοντες αὐτὴν ἐσωτερικῶς ἐπὶ $\bar{\kappa}$ προκύπτει :

$$\bar{\kappa}\bar{\kappa}' = \lambda\bar{\varepsilon}\bar{\kappa} + \mu\bar{\kappa}^2$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $\bar{\varepsilon}\bar{\kappa} = 0$, $\bar{\kappa}^2 = 1$, $2\bar{\kappa}\bar{\kappa}' = 0$ ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως ἕπεται $\mu = 0$, ὁπότε γράφεται :

$$\bar{\kappa}' = \lambda\bar{\varepsilon} \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντες αὐτὴν ἐσωτερικῶς ἐπὶ τὸ $\bar{\varepsilon}$ προκύπτει :

$$\bar{\varepsilon}\bar{\kappa}' = \lambda\bar{\varepsilon}^2 = \lambda \qquad (3)$$

Παραγωγίζομεν τὴν σχέσιν $\bar{\varepsilon}\bar{\kappa} = 0$ ὡς πρὸς s καὶ ἔχομεν :

$$\bar{\varepsilon}\bar{\kappa}' + \bar{\varepsilon}'\bar{\kappa} = 0$$

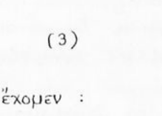
Ἐξ αὐτῆς καὶ τῶν σχέσεων (1) καὶ (3) προκύπτει :

$$\lambda = \bar{\varepsilon}\bar{\kappa}' = -\bar{\varepsilon}'\bar{\kappa} = -u\bar{\kappa}^2 = -u$$

ὁπότε ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ λ εἰς τὴν (2) προκύπτει ὁ δεύτερος ἐκ τῶν τύπων (28.3). Οἱ ἀποδειχθέντες τύποι λέγονται τύποι τοῦ Frenet διὰ γραμμὰς τοῦ διδιαστάτου χώρου, καὶ τὰ διανύσματα $\bar{\varepsilon}, \bar{\kappa}$ λέγονται πρωτεύοντα διανύσματα τῆς γραμμῆς.

Πρότασις (28.2). — *Τὸ διατεταγμένον ζεῦγος τῶν διανυσμάτων $(\bar{\varepsilon}, \bar{\kappa})$ ἔχει τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν μὲ τὸ ζεῦγος τῶν διανυσμάτων $(\bar{i}, \bar{j})$ τῶν ἀξόνων ὡς πρὸς τοὺς ὁποίους ἀναφερόμεθα.*

Ἀπόδειξις. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ τρίγωνον OM_1M_2 ὅπου $\overline{OM_1} = \bar{\varepsilon} = (x', y')$ καὶ $\overline{OM_2} = \bar{\kappa} = (x'' : u,\ y'' : u)$ τότε τὸ προσημασμένον ἐμβαδὸν αὐτοῦ κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας θὰ εἶναι :



Σχ.(28.1)

$$(OM_1M_2) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x' & y' & 1 \\ \frac{x''}{u} & \frac{y''}{u} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x'y'' - x''y'}{u} = \frac{1}{2} > 0$$

δηλαδὴ εἶναι θετικόν, ἐπομένως τὸ διάνυσμα $\overline{OM_2}$ προκύπτει ἐκ τοῦ $\overline{OM_1}$ διὰ στροφῆς περὶ τὸ 0 κατὰ γωνίαν $+\frac{\pi}{2}$ καὶ ἔτσι ἡ πρότασις ἀπεδείχθη.

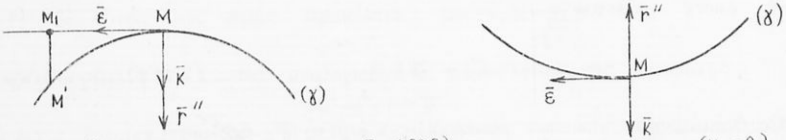
Τὰ διανύσματα $\bar{\varepsilon}, \bar{\kappa}$ ἐφηρμοσμένα εἰς τὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς ποὺ ἀντιστοι-
χοῦν, σχηματίζουν τὸ λεγόμενον συνοδεῦον δίσκελον τῆς γραμμῆς.

Πρότασις (28.3). — *Ὅταν εἰς τὸ σημεῖον Μ γραμμῆς (γ) ἡ καμπυλότης εἶναι θετικὴ ἡ γραμμὴ μένει σὲ κάποια γειτονιὰ τοῦ Μ πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, ὡς πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Μ, πρὸς τὸ ὁποῖον δείχνει τὸ διάνυσμα $\bar{K}$. Ὅταν ἡ καμπυλότης εἶναι ἀρνητικὴ ἡ γραμμὴ κεῖται πρὸς τὸ ἄλλο μέρος σχ. (28.2).*

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἔστω $\bar{r} = \bar{r}(s)$ ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς (γ) καὶ $M(s)$ ἕνα σημεῖον αὐτῆς. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς γραμμῆς εἰς τὸ σημεῖον Μ κατὰ τὸν τύπον (25.1) εἶναι :

$$\bar{x} = \bar{r}(s) + \lambda \bar{r}'(s)$$

θεωροῦμεν τὸ σημεῖον $M'(s+\Delta s)$ τῆς (γ) καὶ τὸ σημεῖον M_1 τῆς ἐφαπτο-
μένης τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ διὰ $\lambda = \Delta s$. Ἐὰν $\bar{x}_1$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος διανυσμα-



$(u > 0)$ Σχ. (28.2) $(u < 0)$

τικὴ ἀκτὶς θὰ εἶναι $\bar{x}_1 = \bar{r}(s) + \Delta s \cdot \bar{r}'(s)$. Κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor γιὰ δια-
νυσματικὲς συναρτήσεις θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν :

$$\bar{r}(s+\Delta s) = \bar{r}(s) + \bar{r}'(s)\cdot \Delta s + \frac{1}{2}\bar{r}''(s)\cdot \Delta s^2 + \bar{v}(s,\Delta s)\cdot \Delta s^2$$

ὅπου τὸ διάνυσμα $\bar{v}$ τείνει εἰς τὸ $\bar{0}$ ὅταν $\Delta s \to 0$· ἐξ αὐτῆς ἕπεται :

$$\overline{M_1M'} = \bar{r}(s+\Delta s) - \bar{x}_1 = \bar{r}(s+\Delta s) - \bar{r}(s) - \Delta s\, \bar{r}'(s) = \frac{1}{2}\bar{r}''\Delta s^2 + \bar{v}\,\Delta s^2$$

$$2\,\overline{M_1M'} : \Delta s^2 = \bar{r}'' + 2\bar{v}$$

Ἐκ τῆς τελευταίας σχέσεως, ὑποθέτοντες ὅτι ὑπάρχει ἡ δευτέρα παράγωγος $\bar{r}$
προκύπτει διὰ $\Delta s \to 0$ ἡ σχέσις :

$$\text{ορ. } 2\,\overline{M_1M'} : \Delta s^2 = \bar{r}''$$

Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι τὸ διάνυσμα $\overline{M_1M'}$ δείχνει, γιὰ $|\Delta s|$ ἀρκετὰ μικρό, πρὸς τὸ μέρος πρὸς τὸ ὁποῖον δείχνει τὸ διάνυσμα $\bar{r}''$. Ἐπειδὴ δὲ ὅταν ἡ κα-
μπυλότης εἶναι θετικὴ τὸ $\bar{r}''$ εἶναι ὁμόρροπον πρὸς τὸ $\bar{K}$ καὶ ὅταν εἶ-
ναι ἀρνητικὴ ἀντίρροπον πρὸς τὸ $\bar{K}$, ἕπεται ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως.

Πρότασις (28.4). — *Μία ἐπίπεδος καμπύλη ὁρίζεται τελείως ἀπὸ ἀπόψε(ως) σχήματος, ὅταν δοθῇ ἡ καμπυλότης αὐτῆς ὡς συνάρτησις συνεχὴς τοῦ τό-
ξου της s εἰς ἕνα διάστημα. Μόνον ἡ θέσις τῆς καμπύλης αὐτῆς παρα-
μένει ἀκαθόριστος εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν x, y.*

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐν λόγῳ συνάρτησις εἶναι ἡ $u(s)$
τότε ἐκ τῆς ἐξισώσεως (27.4) δι' ὁλοκληρώσεως προκύπτει :

$$\omega = \int u(s)\,ds = \sigma(s) + c \qquad (28.4)$$

Ἐὰν τώρα ἀντικαταστήσωμεν τὴν ω εἰς τοὺς δύο πρώτους τῶν τύπων (27.

προκύπτει :

$$dx = \text{συν}\,[\sigma(s)+c]\,ds = [\,\text{συν}\,c\cdot\text{συν}\,\sigma(s) - \text{ημ}\,c\,\text{ημ}\,\sigma(s)]\,ds$$
$$dy = \text{ημ}\,[\sigma(s)+c]\,ds = [\,\text{συν}\,c\cdot\text{ημ}\,\sigma(s) + \text{ημ}\,c\,\text{συν}\,\sigma(s)]\,ds$$

Ἐξ αὐτῶν δι' ὁλοκληρώσεως ὡς πρὸς s θὰ ἔχωμεν :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + \text{συν}\,c\int \text{συν}\,\sigma(s)\,ds - \text{ημ}\,c\int \text{ημ}\,\sigma(s)\,ds \\ y &= y_0 + \text{ημ}\,c\int \text{συν}\,\sigma(s)\,ds + \text{συν}\,c\int \text{ημ}\,\sigma(s)\,ds \end{aligned}} \qquad (28.5)$$

Οἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις ὁρίζουν μίαν οἰκογένειαν ἐπιπέδων γραμμῶν ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὶς τρεῖς παραμέτρους c, x_0, y_0, ἑκάστη δὲ ἐκ τῶν γραμμῶν τῆς οἰκογενείας ἔχει καμπυλότητα ἴση μὲ τὴν δοθεῖσα συνάρτησιν $u(s)$. Ἐὰν τώρα λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τοὺς τύπους ἀλλαγῆς συντεταγμένων ὀρθογωνίων συστημάτων, βλέπομεν ἀμέσως ὅτι γραμμὴ μὲ παραμετρικὲς ἐξισώσεις τὶς (28.5) διὰ τυχὸν σύστημα παραμέτρων c, x_0, y_0, εἶναι ἡ ἴδια μὲ τὴν γραμμήν :

$$x = \int \text{συν}\,\sigma(s)\,ds \qquad y = \int \text{ημ}\,\sigma(s)\,ds \qquad (28.6)$$

ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων μὲ ἀρχὴν τὸ σημεῖον (x_0, y_0) καὶ τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων τῶν x σχηματίζει γωνίαν c μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος. Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι ὅλες οἱ γραμμὲς τῆς οἰκογενείας (28.5) εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμόσουν ἐπ' ἀλλήλων δι' ἐπιθέσεως μετακινούμεναι εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν x, y ὡς στερεὰ συστήματα καὶ ἡ πρότασις ἀπεδείχθη.

Διὰ τοὺς ἀνωτέρω λόγους μία ἐξίσωσις :

$$\varphi\,(u, s) = 0 \qquad (28.7)$$

ἡ ὁποία ὁρίζει τὴν καμπυλότητα μιᾶς γραμμῆς ὡς συνεχῆ συνάρτησιν τοῦ τόξου αὐτῆς λέγεται φυσικὴ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς.

Παράδειγμα (28.1). — Νὰ ἀποδειχθῆ διὰ γραμμὴν ἐπίπεδον ἡ σχέσις :

$$\bar{r}''' = u'\bar{\kappa} - u^2\cdot\bar{\varepsilon}$$

Λ ύ σ ι ς. Ἔχομεν $\bar{r}'' = u\bar{\kappa}$, $\bar{r}''' = u'\bar{\kappa} + u\bar{\kappa}'$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν τελευταίαν τὸ $\bar{\kappa}'$ μὲ τὸ ἴσον του ἀπὸ τὸν δεύτερον τῶν τύπων Frenet προκύπτει τὸ ζητούμενον.

Παράδειγμα (28.2). — Νὰ ἀποδειχθοῦν διὰ γραμμὴν ἐπίπεδον οἱ σχέσεις :

$$\bar{r}'\cdot\bar{r}''' = -u^2, \qquad \bar{r}''\cdot\bar{r}''' = uu'.$$

Λ ύ σ ι ς. Ἐὰν τὴν ἀποδειχθεῖσα προηγουμένως σχέσιν πολλαπλασιάσωμεν ἐσωτερικῶς ἐπὶ τὸ διάνυσμα $\bar{r}' = \bar{\varepsilon}$ προκύπτει :

$$\bar{r}'\bar{r}''' = \bar{\varepsilon}\,(u'\bar{\kappa} - u^2\bar{\varepsilon}) = u'(\bar{\varepsilon}\bar{\kappa}) - u^2\bar{\varepsilon}^2 = -u^2$$

Ὁμοίως ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἰδίαν σχέσιν ἐπὶ τὸ διάνυσμα $\bar{r}''=u\bar{k}$ προκύπτει :

$$\bar{r}''\cdot\bar{r}'''=u\bar{k}\,(u'\bar{k}-u^2\bar{\varepsilon})=uu'\bar{k}^2-u^3(\bar{\varepsilon}\bar{k})=uu'.$$

Παράδειγμα (28.3).— Νὰ εὑρεθῇ ἡ γραμμὴ σταθερῆς καμπυλότητος $u=1/a$.
Λύσις. Διὰ τὶς γραμμὲς αὐτὲς θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὸν (28.4)

$$\omega=\int\frac{1}{a}\,ds=\frac{s}{a}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς τύπους (28.6) προκύπτουν οἱ ἐξισώσεις :

$$x=\int \text{συν}\frac{s}{a}\,ds=a\,\text{ημ}\frac{s}{a},\qquad y=\int\text{ημ}\frac{s}{a}\,ds=-a\,\text{συν}\frac{s}{a}$$

οἱ ὁποῖες παριστάνουν κύκλον ἀκτῖνος a.

Παράδειγμα (28.4).— Νὰ εὑρεθῇ ἡ γραμμὴ μὲ φυσικὴν ἐξίσωσιν

$$1+u^2s^2=16u^2a^2$$

Λύσις. Ἐπιλύοντες ὡς πρὸς u καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (28.4) θὰ ἔχωμεν :

$$\omega=\int(16a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}}ds=\text{τοξ ημ}(s:4a),\quad s=4a\,\text{ημ}\,\omega$$

Ἀντικαθιστῶντες τώρα εἰς τοὺς τύπους (28.6) προκύπτουν οἱ ἐξισώσεις:

$$x=\int\text{συν}\left[\text{τοξ ημ}(s:4a)\right]ds=4a\int\text{συν}^2\omega\,d\omega=a(2\omega+\text{ημ}2\omega)$$

$$y=\int\text{ημ}\left[\text{τοξ ημ}(s:4a)\right]ds=\frac{1}{4a}\int s\,ds=s^2:8a=2a\,\text{ημ}^2\omega$$

θέτοντες $2\omega=\pi+t$ ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει :

$$x=a(\pi+t-\text{ημ}\,t),\quad y=a(1+\text{συν}\,t)$$

Τέλος διὰ τῆς ἀλλαγῆς τῶν ἀξόνων :

$$x-a\pi=x_1,\quad y-2a=y_1$$

προκύπτουν οἱ ἐξισώσεις :

$$x_1=a(t-\text{ημ}\,t),\quad y_1=a(1-\text{συν}\,t)$$

οἱ ὁποῖες ταυτίζονται μετὰ τῶν (23.14) καὶ ἐπομένως ἡ ζητουμένη γραμμὴ εἶναι μία κυκλοειδής.

29. Κέντρον καὶ κύκλος καμπυλότητος.— Διὰ μίαν γραμμὴν τοῦ διδιαστάτου χώρου ὁρίζομεν ὡς ἑξῆς τὴν ἀκτῖνα, τὸ κέντρον καὶ τὸν κύκλον καμπυλότητος.

Ὁρισμὸς (29.1).— *Ὅταν εἰς ἕνα σημεῖον M μιᾶς γραμμῆς εἶναι $u\neq 0$ ὁ ἀριθμὸς $R=1:u$ λέγεται ἀκτὶς καμπυλότητος, τὸ σημεῖον P τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὸ πέρας τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος :*

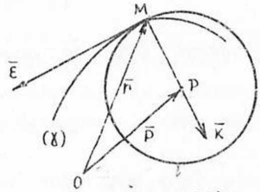
$$\bar{p}=\bar{r}+R\bar{k}\qquad(29.1)$$

λέγεται κέντρον καμπυλότητος καὶ ὁ κύκλος μὲ ἐξίσωσιν :

$$(\bar{x}-\bar{p})^2=R^2\qquad(29.2)$$

λέγεται κύκλος καμπυλότητος ή ἐγγύτατος κύκλος τῆς γραμμῆς εἰς τό Μ. Ὅταν εἶναι $u=0$ λέγομεν ὅτι ἡ γραμμή εἰς τό σημεῖον αὐτό ἔχει ἄπειρον ἀκτῖνα καμπυλότητος.

Προφανῶς ἀπό τήν ἐξίσωσιν τοῦ κύκλου καμπυλότητος ἕπεται ὅτι αὐτός ἐφάπτεται τῆς γραμμῆς εἰς τό σημεῖον Μ καί ἔχει κέντρον καί ἀκτῖνα τό κέντρον καί τήν ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς γραμμῆς εἰς τό σημεῖον αὐτό.



Σχ. (29.1)

Ἐάν παραστήσωμεν μέ (ξ, η) τίς συντεταγμένες τοῦ κέντρου καμπυλότητος, τότε ἡ ἐξίσωσις τοῦ κέντρου καμπυλότητος εἶναι :

$$(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2=R^2 \qquad (29.3)$$

Διά τόν κύκλον καί τό κέντρον καμπυλότητος δίδομεν συμπληρωματικῶς μερικές ἰδιότητες τῶν ὁποίων τίς ἀποδείξεις διά λόγους οἰκονομίας κειμένου παραλείπομεν, προτείνοντες αὐτές εἰς τόν ἀναγνώστην ὡς ἀσκήσεις.

Τό κέντρον καμπυλότητος γραμμῆς εἰς σημεῖον αὐτῆς Μ, εἶναι ἡ ὁριακή θέσις τοῦ σημείου τομῆς τῆς καθέτου εἰς τό Μ καί τῆς καθέτου εἰς γειτονικόν σημεῖον Μ', ὅταν τό σημεῖον αὐτό τείνει εἰς τό Μ.

Ὁ κύκλος καμπυλότητος γραμμῆς εἰς σημεῖον αὐτῆς Μ, εἶναι ἡ ὁριακή θέσις ἑνός κύκλου ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ἀπό τό σημεῖον Μ καί δύο γειτονικά πρός αὐτό σημεῖα Μ', Μ" ὅταν τά σημεῖα αὐτά τείνουν εἰς τό Μ.

Ὁ κύκλος καμπυλότητος γραμμῆς εἰς σημεῖον αὐτῆς Μ, εἶναι ἡ ὁριακή θέσις ἑνός κύκλου ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῆς γραμμῆς εἰς τό Μ καί διέρχεται ἀπό τό γειτονικόν πρός αὐτό σημεῖον Μ', ὅταν τό σημεῖον αὐτό τείνει εἰς τό Μ.

Ὁ κύκλος καμπυλότητος χωρίζει ὅλους τούς κύκλους οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται τῆς γραμμῆς εἰς τό Μ, δηλαδή ὅλοι οἱ κύκλοι μέ μεγαλείτερη ἀκτῖνα κεῖνται, σέ κάποια κατάλληλη γειτονιά τοῦ Μ, πρός τό ἕνα μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρός αὐτόν καί ὅλοι οἱ ἄλλοι πού ἔχουν ἀκτῖνα μικρότερη κεῖνται πρός τό ἄλλο.

Ὁ ἐγγύτατος κύκλος διά γραμμές τρεῖς φορές συνεχῶς παραγωγίσιμες διαπερᾷ τήν γραμμήν σέ κάθε σημεῖον διά τό ὁποῖον εἶναι $u' \neq 0$.

Διά τίς συντεταγμένες τοῦ κέντρου καμπυλότητος γραμμῆς τοῦ διδιαστάτου χώρου, θά δείξωμεν τήν ἑξῆς πρότασιν.

Πρότασις (29.1). – *Ἐάν ἡ γραμμή δίδεται ὑπό τήν μορφήν (27.1), οἱ συντεταγμένες τοῦ κέντρου καμπυλότητος αὐτῆς δίδονται ὑπό τῶν τύπων :*

$$\begin{aligned} \xi &= x - R\eta\mu\omega = x - y' : (x'y'' - x''y') \\ \eta &= y + R\sigma\upsilon\nu\omega = y + x' : (x'y'' - x''y') \end{aligned} \qquad (29.4)$$

Ἐάν δίδεται ὑπό τήν μορφήν (22.3), δίδονται ὑπό τῶν τύπων :

$$\xi = x - \dot{y}(\dot{x}^2+\dot{y}^2):(\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}) \qquad\qquad (29.5)$$
$$\eta = y + \dot{x}(\dot{x}^2+\dot{y}^2):(\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y})$$

Ἐάν δίδεται ὑπό τήν μορφήν (23.3), δίδονται ὑπό τῶν τύπων :

$$\xi = x - y'(1+y'^2):y'' \qquad\qquad (29.6)$$
$$\eta = y + (1+y'^2):y''$$

Ἐάν δίδεται ὑπό τήν μορφήν (23.2), δίδονται ὑπό τῶν τύπων :

$$\xi = x - F_x\,(F_x^2+F_y^2):(F_{xx}F_y^2 - 2F_xF_yF_{xy}+F_{yy}F_x^2) \qquad (29.7)$$
$$\eta = y - F_y\,(F_x^2+F_y^2):(F_{xx}F_y^2 - 2F_xF_yF_{xy}+F_{yy}F_x^2)$$

Ἐάν δίδεται ὑπό τήν μορφήν (23.6), δίδονται ὑπό τῶν τύπων :

$$r\,\text{συν}(\varphi-\vartheta) = \rho(\dot{\rho}^2-\rho\ddot{\rho}):(\rho^2+2\dot{\rho}^2-\rho\ddot{\rho}) \qquad (29.8)$$
$$r\,\text{ημ}(\varphi-\vartheta) = \dot{\rho}(\rho^2+\dot{\rho}^2):(\rho^2+2\dot{\rho}^2-\rho\ddot{\rho})$$

ὅπου μέ r, φ παραστήσαμε τίς πολικές συντεταγμένες αὐτοῦ.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐάν ἡ γραμμή δίδεται ὑπό τήν μορφήν (27.1) καί ἀντικαταστήσωμεν εἰς τήν σχέσιν (29.1) τό $\bar{r}$ μέ τό ἴσον του (x,y) καί τό $\bar{\kappa}$ ἐκ τῆς (28.2) προκύπτει :

$$(\xi,\eta) = (x,y) + R\,(-\text{ημ}\,\omega, \text{συν}\,\omega)$$
$$\xi = x - R\,\text{ημ}\,\omega, \qquad \eta = y + R\,\text{συν}\,\omega$$

Ἐκ τῶν δύο τελευταίων σχέσεων λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι :

$$R = 1:u = 1:(x'y''-x''y'), \qquad \text{συν}\,\omega = x', \ \text{ημ}\,\omega = y'$$

προκύπτει ἡ ἀλήθεια τῶν τύπων (29.4). Ἡ ἀπόδειξις τῶν ὑπολοίπων τύπων τῆς προτάσεως γίνεται ὅπως εἰς τήν πρότασιν (27.1).

Ὁρισμός (29.2). — *Ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν κέντρων καμπυλότητος δοθείσης γραμμῆς λέγεται ἐνειλιγμένη αὐτῆς καί ἡ δοθεῖσα ὡς πρός τήν ἐνειλιγμένη της λέγεται ἐξειλιγμένη αὐτῆς.*

Ἀπό τόν ἀνωτέρω ὁρισμόν προκύπτει ὅτι ἡ διανυσματική ἐξίσωσις τῆς ἐνειλιγμένης μιᾶς γραμμῆς μέ διανυσματικήν ἐξίσωσιν $\bar{r}=\bar{r}(s)$ εἶναι :

$$\bar{P} = \bar{r} + R\bar{\kappa} \qquad\qquad (29.9)$$

Ἐπίσης οἱ ἐξισώσεις (29.4) - (29.8) δίδουν τίς παραμετρικές ἐξισώσεις τῆς ἐνειλιγμένης ἀντιστοίχως διά τίς διάφορες μορφές ὑπό τίς ὁποῖες δίδεται ἡ γραμμή. Διά τήν ἐξειλιγμένην παραπέμπομεν εἰς τό ἐδάφ. 39.

Πρότασις (29.2). — *Ἡ κάθετος εἰς σημεῖον Μ δοθείσης γραμμῆς (γ)* *εἶναι ἐφαπτομένη τῆς ἐνειλιγμένης τῆς (c) εἰς τὸ κέντρον καμπυλότητος P.*

Ἀπόδειξις. Παραγωγίζοντες τὴν (29.9) ὡς πρὸς s προκύπτει :

$$\dot{\bar{P}} = \bar{r}' + R' \cdot \bar{\kappa} + R\bar{\kappa}' = \bar{\varepsilon} + R'\bar{\kappa} - Ru\bar{\varepsilon} = R'\bar{\kappa}$$

ἐκ τῆς ὁποίας ὅταν $R' \neq 0$ ἕπεται τὸ ἀποδεικτέον.

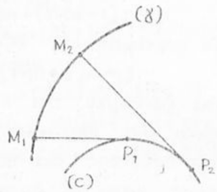
Πρότασις (29.3). — *Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων καμπυλότητος εἰς δύο σημεῖα M_1, M_2 τῆς (γ) ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ τόξου τῆς ἐνειλιγμένης (c) τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων σημείων αὐτῆς P_1, P_2 σχ. (29.2).*

Ἀπόδειξις. Παριστάνοντες μὲ σ τὸ μῆκος τόξου τῆς ἐνειλιγμένης θὰ ἔχωμεν :

$$d\sigma^2 = d\bar{P}^2 = (\dot{\bar{P}}ds)^2 = \dot{\bar{P}}^2 ds^2 = (R'\bar{\kappa})^2 ds^2 = \bar{R}'^2 ds^2 = dR^2$$

Ἐξ αὐτῆς ἕπεται $d\sigma = \pm dR$ καὶ δι' ὁλοκληρώσεως ἀπὸ τὸ σημεῖον M_1 μέχρι τὸ M_2 θὰ ἔχωμεν τὸ ζητούμενον :

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \pm(R_2 - R_1), \quad |\sigma_2 - \sigma_1| = |R_2 - R_1|.$$



Σχ. (29.2)

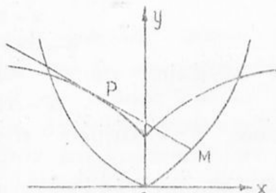
Ἀπὸ τὴν ἀποδειχθεῖσα πρότασιν ἕπεται ὅτι ἡ γραμμὴ (γ) δύναται νὰ προκύψῃ δι' ἐκτυλίξεως νήματος εὑρισκομένου ἐπὶ τῆς (c) ἔτσι ὥστε τοῦτο νὰ ἐφάπτεται διαρκῶς τῆς (c). Ἀπὸ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν ἀπορρέει καὶ ἡ σχετικὴ ὁρολογία.

Παράδειγμα (29.1). — Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνειλιγμένη τῆς παραβολῆς $y = x^2$.

Λύσις. Ἔχομεν $y' = 2x$, $y'' = 2$ ὁπότε δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (29.6) προκύπτει :

$$\xi = x - 2x(1+4x^2) : 2 = -4x^3, \quad \eta = x^2 + (1+4x^2) : 2 = 0{,}5 + 3x^2$$

Οἱ ἐξισώσεις: $\xi = -4x^3$, $\eta = 0{,}5 + 3x^2$ εἶναι ὑπὸ παραμετρικὴν μορφὴν καὶ μὲ παράμετρον x οἱ παραμετρικὲς ἐξισώσεις τῆς ἐνειλιγμένης. Ἐξ αὐτῶν δι' ἀπαλειφῆς τῆς παραμέτρου x προκύπτει ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐνειλιγμένης ὑπὸ τὴν μορφὴν : $27\xi^2 - 16(\eta - 0{,}5)^3 = 0$ ἡ ὁποία εἶναι μία ἡμικυβικὴ παραβολὴ μὲ ἄξονα τὸν ἄξονα oy καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον $(0, 1/2)$.



Σx. (29.3)

Παράδειγμα (29.2). — Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνειλιγμένη τῆς ἐλλείψεως $\beta^2x^2 + \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$.

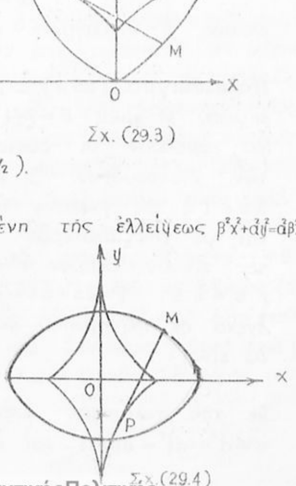
Λύσις. Θέτομεν $F(x,y) = \beta^2x^2 + \alpha^2y^2 - \alpha^2\beta^2$ ὁπότε διὰ παραγωγίσεως θὰ ἔχωμεν :

$$F_x = 2\beta^2 x, \quad F_{xx} = 2\beta^2, \quad F_y = 2\alpha^2 y, \quad F_{yy} = 2\alpha^2, \quad F_{xy} = 0.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (29.7) προκύπτει :

$$\xi = x - 2\beta^2 x(4\beta^4x^2 + 4\alpha^4y^2) : (2\beta^2 4\alpha^4 y^2 + 2\alpha^2 4\beta^4 x^2) = \cdots = \gamma^2 x^3 : \alpha^4$$

$$\eta = y - 2\alpha^2 y(4\beta^4x^2 + 4\alpha^4y^2) : (2\beta^2 \cdot 4\alpha^4 y^2 + 2\alpha^2 \cdot 4\beta^4 x^2) = \cdots = -\gamma^2 y^3 : \beta^4$$



Σx. (29.4)

ὅπου $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2$. Μεταξὺ αὐτῶν καὶ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἀπαλείφοντες τά x, y προκύπτει ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐνειλιγμένης ὑπό τὴν μορφήν

$$(\alpha\xi)^{2/3}+(\beta\eta)^{2/3}=(\alpha^2-\beta^2)^{2/3}$$

Παράδειγμα (29.3). – Νὰ εὑρεθῆ ἡ ἐνειλιγμένη τῆς κυκλοειδοῦς:

$$x=\alpha(t-\eta\mu t),\ y=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu t).$$

Λύσις. Ἔχομεν: $\dot{x}=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu t)$, $\ddot{x}=\alpha\eta\mu t$, $\dot{y}=\alpha\eta\mu t$, $\ddot{y}=\alpha\sigma\upsilon\nu t$, $\dot{x}^2+\dot{y}^2=2\alpha^2(1-\sigma\upsilon\nu t)=$ $=4\alpha^2\eta\mu^2\frac{t}{2}$, $\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}=\alpha^2(\sigma\upsilon\nu t-1)$. Δί ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (29.5) προκύπτει:

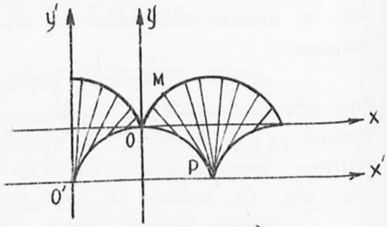
$$\xi=\alpha(t-\eta\mu t)-\alpha\eta\mu t\cdot 2\alpha^2(1-\sigma\upsilon\nu t):\alpha^2(\sigma\upsilon\nu t-1)=\alpha t-\alpha\eta\mu t+2\alpha\eta\mu t=\alpha(t+\eta\mu t).$$

$$\eta=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu t)+\alpha(1-\sigma\upsilon\nu t)\,2\alpha^2(1-\sigma\upsilon\nu t):\alpha^2(\sigma\upsilon\nu t-1)=\alpha-\alpha\sigma\upsilon\nu t-2\alpha+2\alpha\sigma\upsilon\nu t=-\alpha(1-\sigma\upsilon\nu t)$$

Οἱ παραμετρικές ἐξισώσεις τῆς ἐνειλιγμένης ἑπομένως εἶναι:

$$\xi=\alpha(t+\eta\mu t),\quad \eta=-\alpha(1-\sigma\upsilon\nu t).$$

Θά δείξωμεν ὅτι καὶ ἡ ἐνειλιγμένη εἶναι μία ἐπικυκλοειδής προκύπτουσα ἐκ τῆς δοθείσης διά παραλλήλου μεταθέσεως κατά τό διάνυσμα $\bar{\upsilon}=-(\alpha\pi, 2\alpha)$ σχ.(29.5). Πράγματι ἄς θεωρήσωμεν σύστημα ἀξόνων $o'x'y'$ παράλληλον πρός τό ἀρχικόν μέ ἀρχήν $O'(-\alpha\pi,-2\alpha)$.



Σχ.(29.5)

Ἐάν καλέσωμεν (x', y') τίς συντεταγμένες τῶν σημείων τῆς ἐνειλιγμένης ὡς πρός τό νέον σύστημα θά ἔχωμεν:

$$\xi=x'-\alpha\pi,\qquad \eta=y'-2\alpha$$

$$x'=\xi+\alpha\pi=\alpha(t+\pi+\eta\mu t)=\alpha[t+\pi-\eta\mu(t+\pi)]$$

$$y'=\eta+2\alpha=-\alpha+\alpha\sigma\upsilon\nu t+2\alpha=\alpha(1+\sigma\upsilon\nu t)=\alpha[1-\sigma\upsilon\nu(t+\pi)]$$

Ἐάν ἀλλάξωμεν καὶ τὴν παράμετρον καὶ θέσωμεν $t+\pi=t'$ θα εἶναι:

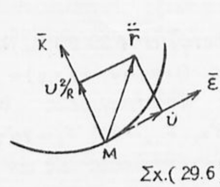
$$x'=\alpha(t'-\eta\mu t'),\quad y'=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu t')$$

δηλαδή ἡ ἐνειλιγμένη εἶναι μία ἐπικυκλοειδής γραμμή.

Παράδειγμα (29.4). – Ἡ διανυσματική ἐξίσωσις τῆς κινήσεως ἑνός ὑλικοῦ σημείου Μ εἶναι $\bar{r}=\bar{r}(t)$ ὅπου ἡ παράμετρος t παριστάνει τόν χρόνον. Νά εὑρεθοῦν οἱ συνιστῶσες τῆς ἐπιταχύνσεως κατά τίς διευθύνσεις τῶν διανυσμάτων $\bar{\varepsilon}$ καὶ $\bar{\kappa}$.

Λύσις. Ὡς γνωστόν ἡ ἐπιτάχυνσις ἰσοῦται μέ τήν δευτέραν παράγωγον $\ddot{\bar{r}}$ ὡς πρός τόν χρόνον: Ἔχομεν $\dot{\bar{r}}=d\bar{r}/dt=(d\bar{r}/ds)(ds/dt)=$ $\bar{r}'\cdot\dot{s}=\bar{\varepsilon}\cdot\dot{s}$ $\quad\ddot{\bar{r}}=\dot{\bar{\varepsilon}}\dot{s}+\bar{\varepsilon}\ddot{s}=\bar{\varepsilon}'\dot{s}^2+\bar{\varepsilon}\ddot{s}$

ἕνεκα δέ τοῦ πρώτου ἐκ τῶν τύπων Frenet θά εἶναι:



Σχ.(29.6)

$$\ddot{\bar{r}}=\bar{\varepsilon}\cdot\ddot{s}+\bar{\kappa}\cdot(u\cdot\dot{s}^2)$$

Ἐκ τῆς τελευταίας σχέσεως προκύπτει ὅτι ἡ ἐφαπτομενική συνιστῶσα εἶναι: $\ddot{s}=d^2s/dt^2=d\upsilon/dt$ καὶ ἡ κάθετος $u\dot{s}^2=\upsilon^2/R$ ὅπου μέ $\upsilon=\dot{s}=|\dot{\bar{r}}|$ παραστήσα με τό μέτρον τῆς ταχύτητος.

Παράδειγμα (29.5). – Νά εὑρεθῆ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐνειλιγμένης τῆς ἕλικος τοῦ ἀρχιμήδους $\rho = a\vartheta$.

Λύσις. Ὁ τύπος (29.8) μᾶς δίδει τίς πολικές συντεταγμένες (r, φ) τοῦ κέντρου καμπυλότητος διά μίαν ὡρισμένην τιμήν τῆς πολικῆς γωνίας ϑ. Ἐάν θεωρήσωμεν τό ϑ συνεχῶς μεταβαλλόμενον τότε οἱ ἐξισώσεις (29.8) μᾶς δίδουν εἰς πολικές συντεταγμένες συναρτήσει τῆς παραμέτρου ϑ τίς ἐξισώσεις τῆς ἐνειλιγμένης, ὁπότε δί ἀπαλειφῆς τῆς ϑ προκύπτει ἡ πολική ἐξίσωσις. Ἔχομεν λοιπόν διά τό παράδειγμα : $\dot\rho = a$, $\ddot\rho = 0$ ὁπότε δί ἀντικαταστάσεως εἰς τήν (29.8) προκύπτει :

$$r\,\text{συν}(\Phi-\vartheta) = a\vartheta\cdot a^2 : a^2(\vartheta^2+2) = a\vartheta : (\vartheta^2+2)$$
$$r\,\text{ημ}(\Phi-\vartheta) = a\cdot a^2(\vartheta^2+1) : a^2(\vartheta^2+2) = a(\vartheta^2+1) : (\vartheta^2+2)$$

Ἡ ἐνειλιγμένη δίδεται ἑπομένως ἀπό τίς ἐξισώσεις :

$$r\,\text{συν}(\Phi-\vartheta) = a\vartheta : (\vartheta^2+2),\quad r\,\text{ημ}(\Phi-\vartheta) = a(\vartheta^2+1) : (\vartheta^2+2)$$

Ἐξ αὐτῶν διά διαιρέσεως κατά μέλη προκύπτει : $\text{εφ}(\Phi-\vartheta) = (\vartheta^2+1) : \vartheta$.
Δί ὑψώσεως εἰς τό τετράγωνον καί προσθέσεως κατά μέλη θά ἔχωμεν:

$$r^2 = a^2(\vartheta^4+3\vartheta^2+1) : (\vartheta^2+1)^2$$

Ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων προκύπτει τελικῶς :

$$\Phi = \vartheta + \text{τοξ εφ}\left[(\vartheta^2+1) : \vartheta\right],\quad r = a\sqrt{\vartheta^4+3\vartheta^2+1} : (\vartheta^2+1)$$

30. Ἀνώμαλα σημεῖα γραμμῆς.

– Ἔστω γραμμή μέ ἐξίσωσιν :

$$F(x,y) = 0 \tag{30.1}$$

Ὁρισμός (30.1). – *Ἕνα σημεῖον M τῆς ἀνωτέρω γραμμῆς λέγεται ὁμαλόν σημεῖον αὐτῆς, ὅταν μία τουλάχιστον τῶν μερικῶν παραγώγων τῆς συναρτήσεως $F(x,y)$ εἰς τό M εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Ἐάν καί οἱ δύο εἶναι μηδέν τό σημεῖον λέγεται ἀνώμαλον ἤ ἰδιάζον σημεῖον τῆς γραμμῆς. Ἕνα ἀνώμαλον σημεῖον λέγεται διπλόν, ὅταν μία τουλάχιστον τῶν μερικῶν παραγώγων δευτέρας τάξεως τῆς $F(x,y)$ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, λέγεται τριπλόν, ὅταν αἱ μερικαί παράγωγοι μέχρι καί δευτέρας τάξεως εἶναι μηδέν καί μία τουλάχιστον τῶν παραγώγων τρίτης τάξεως εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός καί γενικῶς ἕνα σημεῖον λέγεται πολλαπλόν τάξεως $\nu(\geq 2)$ ὅταν αἱ μερικαί παράγωγοι τῆς $F(x,y)$ μέχρι καί $(\nu-1)$ τάξεως εἶναι μηδέν καί μία τουλάχιστον τῶν παραγώγων ν-τάξεως εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.*

Π.χ. τό σημεῖον (1.1) εἶναι ὁμαλόν σημεῖον τῆς γραμμῆς $x^2-xy+y^2-1=0$ διότι ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωσίν της καί εἶναι $F_x(1,1)=1$, ἐνῶ τό σημεῖον (0,0) εἶναι τριπλόν ἀνώμαλον σημεῖον τῆς γραμμῆς $x^3+y^3-3xy^2=0$ διότι ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωσίν της καί αἱ παράγωγοι μέχρι καί δευτέρας τάξεως εἶναι μηδέν, μία δέ τουλάχιστον τρίτης τάξεως π.χ. ἡ $F_{xxx}=6$ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

Ἂς ὑποθέσωμεν λοιπόν ὅτι τό σημεῖον $M(x,y)$ εἶναι ἕνα διπλόν σημεῖον τῆς γραμμῆς (30.1). Ἐάν $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ εἶναι ἕνα ὁμαλόν σημεῖον αὐτῆς γειτονικόν πρός τό Μ, ἀπό τόν τύπον τοῦ Taylor θά ἔχωμεν :

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) = F(x,y) + F_x\Delta x + F_y \Delta y + \frac{1}{2}(F_{xx}\Delta x^2 + 2F_{xy}\Delta x\Delta y + F_{yy}\Delta y^2) + R_3.$$

Τό πρῶτον μέλος εἶναι μηδέν διότι τό Μ΄ εἶναι σημεῖον τῆς γραμμῆς, ὅπως ἐπίσης καί οἱ τρεῖς πρῶτοι ὅροι τοῦ δευτέρου μέλους διότι τό Μ εἶναι διπλόν ἀνώμαλον σημεῖον τῆς γραμμῆς, ἐπομένως ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις γράφεται :

$$F_{xx} + 2F_{xy}(\Delta y : \Delta x) + F_{yy}(\Delta y : \Delta x)^2 + R_3 : \Delta x^2 = 0$$

Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι τό σημεῖον Μ΄ τείνει εἰς τό Μ δηλαδή ὅτι $\Delta x, \Delta y \to 0$ τότε ἐπειδή τό ὑπόλοιπον R_3 περιέχει ὅρους τουλάχιστον τρίτης τάξεως ὡς πρός $\Delta x, \Delta y$ θά εἶναι $\text{ορ}\, R_3 : \Delta x^2 = 0$, ὁπότε προκύπτει :

$$F_{xx} + 2F_{xy}\cdot y' + F_{yy}\cdot y'^2 = 0 \qquad (30.2)$$

Υποθέτομεν $F_{yy} \neq 0$ καί θεωροῦμεν τίς ἑξῆς περιπτώσεις :

(i). $F^2_{xy} - F_{xx}F_{yy} > 0$. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν τό σημεῖον λέγεται διπλόν πραγματικόν σημεῖον. Δἰ αὐτοῦ διέρχονται δύο κλάδοι τῆς γραμμῆς τῶν ὁποίων οἱ ἐφαπτόμενες ἔχουν κλίσεις ἀντιστοίχως τίς δύο πραγματικές καί ἄνισες ρίζες τῆς δευτεροβαθμίου ὡς πρός y' ἐξισώσεως (30.2). Ἐάν ἀπό τήν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης (25.5) λάβωμεν τήν y' καί τήν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τήν (30.2) προκύπτει ἡ ἐξίσωσις :

$$(X-x)^2F_{xx} + 2(X-x)(Y-y)F_{xy} + (Y-y)^2F_{yy} = 0 \qquad (30.3)$$

ἡ ὁποία δίδει τό ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων τῶν ἐφαπτομένων τῶν δύο κλάδων τῆς γραμμῆς.

(ii). $F^2_{xy} - F_{xx}F_{yy} = 0$. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἡ ἐξίσωσις (30.2) ἔχει ὡς πρός y' δύο ρίζες ἴσες ἡ δέ γραμμή ἔχει ἐν γένει δύο πραγματικούς κλάδους οἱ ὁποίοι καταλήγουν εἰς τό ἀνώμαλον σημεῖον ἤ διέρχονται δἰ αὐτοῦ καί τῶν ὁποίων οἱ ἐφαπτόμενες συμπίπτουν. Ἡ ἐξίσωσις τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης δίδεται πάλιν ἀπό τήν (30.3). Ἐνδέχεται ὅμως εἰς μερικάς περιπτώσεις ἡ γραμμή νά μήν ἔχῃ στήν γειτονιά τοῦ ἀνωμάλου σημείου ἄλλα πραγματικά σημεῖα ἐκτός αὐτοῦ, ὁπότε τό σημεῖον λέγεται μεμονωμένον.

(iii). $F^2_{xy} - F_{xx}F_{yy} < 0$. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἡ ἐξίσωσις (30.2) ἔχει φανταστικές ρίζες ἡ δέ γραμμή δέν ἔχει στήν γειτονιά τοῦ ἀνωμάλου σημείου ἄλλα πραγματικά σημεῖα ἐκτός αὐτοῦ, δηλαδή πρόκειται διά μεμονωμένον σημεῖον.

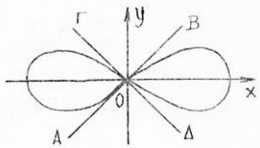
Ἐάν εἶναι $F_{yy} = 0$ τότε ἡ μία τιμή εἶναι $y' = \infty$ καί ἡ ἄλλη $y' = -\frac{1}{2}F_{xx} : F_{xy}$ ὁπότε πρόκειται ἐν γένει γιά διπλόν πραγματικόν σημεῖον εἰς τό ὁποῖον ἡ μία ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος πρός τόν ἄξονα τῶν y.

Τέλος ἐάν θεωρήσωμεν ἕνα πολλαπλόν σημεῖον ν-τάξεως ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὅτι αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων τῶν κλάδων τῆς γραμμῆς δίδονται ἀπό τήν ἐξίσωσιν :

$$\left[(X-x)\frac{\partial}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial}{\partial y} \right]^{\nu} F(x,y) = 0 \qquad (30.4)$$

Παράδειγμα (30.1). — Νά εὑρεθῇ τό εἶδος τῶν ἀνωμάλων σημείων τῆς γραμμῆς $y^2 - x^2 + x^4 = 0$.

Λύσις. Αἱ μερικαί παράγωγοι $F_x = -2x + 4x^3$, $F_y = 2y$ μηδενίζονται διά $x = y = 0$ ἑπομένως ἡ ἀρχή $O(0,0)$ εἶναι ἀνώμαλον σημεῖον τῆς γραμμῆς διότι ἐπαληθεύει καί τήν ἐξίσωσίν της. Εἰς αὐτό ἔχομεν : $F_{xx} = -2$, $F_{xy} = 0$, $F_{yy} = 2$, $F^2_{xy} - F_{xx} F_{yy} = 4 > 0$ ἑπομένως πρόκειται γιά διπλόν πραγματικόν σημεῖον μέ δύο κλάδους τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων προκύπτουν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (30.3) καί εἶναι :

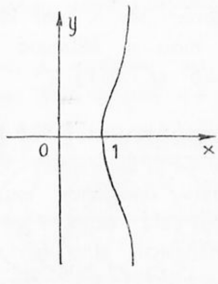


Σχ.(30.3)

$(x-0)^2(-2) + (y-0)^2 \cdot 2 = 0$ ἤ $x^2 - y^2 = 0$, $x \pm y = 0$ δηλαδή αἱ διχοτόμοι AB καί ΓΔ τῶν γωνιῶν τῶν ἀξόνων σχ. (30.3).

Παράδειγμα (30.2). — Ὁμοίως διά τήν γραμμήν $y^2 + x^2 - x^3 = 0$.

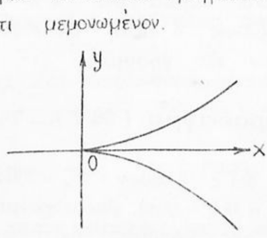
Λύσις. Ἔχομεν $F_x = 2x - 3x^2$, $F_y = 2y$, $F_{xx} = 2 - 6x$, $F_{xy} = 0$, $F_{yy} = 2$. Αἱ μερικαί παράγωγοι πρώτης τάξεως μηδενίζονται διά $x = y = 0$ ὅπως ἐπίσης καί ἡ συνάρτησις $F(x,y)$, ἑπομένως ἡ ἀρχή $O(0,0)$ εἶναι ἀνώμαλον σημεῖον τῆς γραμμῆς. Διά τό σημεῖον αὐτό ἔχομεν $F^2_{xy} - F_{xx} \cdot F_{yy} = -2 \cdot 2 = -4 < 0$ ὁπότε ἡ ἀρχή εἶναι ἕνα μεμονωμένον σημεῖον σχ.(30.4). Αὐτό φαίνεται ἀμέσως ἐπιλύοντες τήν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ὡς πρός y, ὁπότε : $y = \pm x\sqrt{x-1}$. Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι τά πραγματικά σημεῖα τῆς γραμμῆς προκύπτουν διά $x = 0$ καί $x \geq 1$, ἐνῶ δι' οὐδεμίαν τιμήν τοῦ x ἀπό τό διάστημα $0 < x < 1$ ὑπάρχη ἀντίστοιχος πραγματική τιμή τοῦ y. Ἑπομένως τό σημεῖον (0,0) εἶναι πράγματι μεμονωμένον.



Σχ. (30.4)

Παράδειγμα (30.3). — Ὁμοίως διά τήν ἡμικυβικήν παραβολήν $y^2 - x^3 = 0$.

Λύσις. Ἔχομεν $F_x = -3x^2$, $F_y = 2y$, $F_{xx} = -6x$, $F_{xy} = 0$, $F_{yy} = 2$. Ἡ ἀρχή $O(0,0)$ εἶναι ἀνώμαλον σημεῖον καί εἶναι εἰς αὐτό $F^2_{xy} - F_{xx}F_{yy} = 0$. Ἡ γραμμή ἀποτελεῖται ἀπό δύο πραγματικούς κλάδους $y = \pm\sqrt{x^3}$ διά $x \geq 0$ οἱ ὁποῖοι καταλήγουν εἰς τό 0 κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος τῶν x καί ἐφάπτονται αὐ-

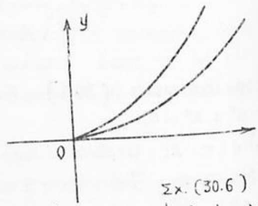


Σχ. (30.5)

τοῦ εἰς τὸ 0 διότι ἡ ἐξίσωσις (30.3) γίνεται: $x^2\cdot 0+2xy\cdot 0+y^2\cdot 2=0$ ἢ $y=0$.
Τὸ ἀνώμαλον αὐτὸ σημεῖον λέγεται σημεῖον ἀνακάμψεως πρώτου εἴδους σχ.(30.5)

Παράδειγμα (30.4).— Ὁμοίως διὰ τὴν γραμμὴν : $(y-x^2)^2-x^5=0$.

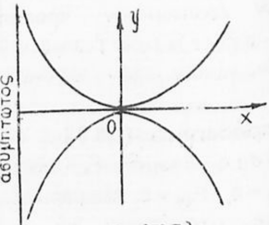
Λύσις. Εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀρχὴ $O(0,0)$ εἶναι ἀνώμαλον σημεῖον τῆς γραμμῆς καὶ ὅτι εἶναι εἰς αὐτὸ $F^2_{xy}-F_{xx}\cdot F_{yy}=0$. Ἡ γραμμὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο πραγματικοὺς κλάδους $y=x^2\pm\sqrt{x^5}$ διὰ $x\geqslant 0$ οἱ ὁποῖοι καταλήγουν εἰς τὸ 0 κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος (ἄνω) τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ ἐφάπτονται αὐτοῦ εἰς τὸ 0 διότι ἡ ἐξίσωσις (30.3) γίνεται : $x^2 0+2xy\cdot 0+y^2\cdot 2=0$ ἢ $y=0$. Τὸ ἀνώμαλον αὐτὸ σημεῖον λέγεται σημεῖον ἀνακάμψεως δευτέρου εἴδους σχ. (30.6).



Σχ. (30.6)

Παράδειγμα (30.5).— Ὁμοίως διὰ τὴν γραμμὴν $y^2(1+x)-x^4=0$.

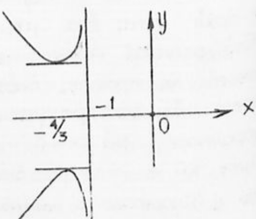
Λύσις. Εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀρχὴ $O(0,0)$ εἶναι πάλιν ἀνώμαλον σημεῖον τῆς γραμμῆς καὶ εἶναι εἰς αὐτὸ $F^2_{xy}-F_{xx}\cdot F_{yy}=0$. Ἡ γραμμὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο πραγματικοὺς κλάδους $y=\pm x^2:(1+x)^{1/2}$. διὰ $1+x>0$ οἱ ὁποῖοι διέρχονται ἀπὸ τὸ 0 κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ ἐφάπτονται αὐτοῦ εἰς τὸ 0 διότι ἡ ἐξίσωσις (30.3) γίνεται πάλιν $y=0$ σχ. (30.7).



Σχ. (30.7)

Παράδειγμα (30.6).— Ὁμοίως διὰ τὴν γραμμὴν $y^2(1+x)+x^4=0$.

Λύσις. Εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀρχὴ $O(0,0)$ εἶναι πάλιν ἀνώμαλον σημεῖον τῆς γραμμῆς καὶ εἶναι εἰς αὐτό· $F^2_{xy}-F_{xx}F_{yy}=0$. Ἡ γραμμὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο πραγματικοὺς κλάδους $y=\pm x^2:(-1-x)^{1/2}$ διὰ $1+x<0$ οἱ ὁποῖοι ὅπως φαίνεται καὶ ἀπὸ τὸ σχ. (30.8) δὲν ἔχουν πραγματικὰ σημεῖα διὰ $x>-1$ ἐκτὸς τοῦ (0,0). Ἑπομένως ἡ ἀρχὴ εἶναι ἕνα μεμονωμένον σημεῖον τῆς γραμμῆς.



Σχ. (30.8)

Παράδειγμα (30.7).— Ὁμοίως διὰ τὴν γραμμὴν :

$$x^4+y^4-2ay^3+2\beta x^2y=0, \qquad a\beta>0$$

Λύσις. Ἔχομεν : $F_x=4x^3+4\beta xy$, $F_y=4y^3-6ay^2+2\beta x^2$, $F_{xx}=12x^2+4\beta y$, $F_{xy}=4\beta x$, $F_{yy}=12y^2-12ay$. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σημεῖον (0,0) εἶναι ἕνα τριπλὸν σημεῖον τῆς γραμμῆς διότι ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν τῆς γραμμῆς, μηδενίζει τὰς μερικὰς παραγώγους τῆς F μέχρι καὶ δευτέρας τάξεως καὶ εἶναι μία ἐκ τῶν παραγώγων τρίτης τάξεως π.χ. ἡ $F_{yyy} = 24y - 12a$ εἰς τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον διάφορος τοῦ μηδενὸς ὅταν $a \neq 0$. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ἐξισώσεων τῶν ἐφαπτομένων τῆς γραμμῆς εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ εὑρίσκομεν τὶς τιμὲς τῶν παραγώγων τρίτης τάξεως εἰς αὐτό : $F_{xxx} = 24x = 0$, $F_{xxy} = 4\beta$, $F_{xyy} = 0$, $F_{yyy} = 24y - 12a = -12a$ καὶ τὶς ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν :

$$(X-x)^3 F_{xxx} + 3(X-x)^3 (Y-y) F_{xxy} + 3(X-x)(Y-y)^2 F_{xyy} + (Y-y)^3 F_{yyy} = 0$$

ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς (30.4) μὲ $\nu = 3$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν χρησιμοποιοῦντες ἀντὶ τῶν κεφαλαίων X, Y ἀντίστοιχα μικρά, τὴν ἐξίσωσιν

$$3x^2 y \cdot 4\beta - y^3 \cdot 12a = 0$$

Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι πρόκειται διὰ τριπλὸν πραγματικὸν σημεῖον καὶ οἱ ἐξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων τῶν τριῶν κλάδων τῆς γραμμῆς εἶναι :

$$y = 0, \quad y = x\sqrt{\beta : a}, \quad y = -x\sqrt{\beta : a}$$

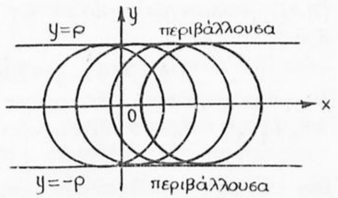
31. Περιβάλλουσα οἰκογενείας γραμμῶν. — Ἄς θεωρήσωμεν μία μονοπαραμετρικὴν οἰκογένεια γραμμῶν μὲ ἐξίσωσιν :

$$F(x, y, a) = 0 \qquad (31.1)$$

καὶ πεδίον μεταβολῆς παραμέτρου a κάποιο διάστημα $a_1 < a < a_2$.

Ὁρισμός (31.1). — *Μία γραμμὴ (γ) λέγεται περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας (31.1), ὅταν κάθε σημεῖον της εἶναι σημεῖον ἐπαφῆς αὐτῆς μὲ κάποια γραμμὴ τῆς οἰκογενείας.*

Π.χ. ἡ οἰκογένεια τῶν κύκλων : $(x-a)^2 + y^2 = \rho^2$ ὅπου ρ σταθερὸν καὶ a μεταβλητὴ παράμετρος, ἔχει περιβάλλουσα τὸ ζεῦγος τῶν εὐθειῶν $y = \pm\rho$ διότι σὲ κάθε σημεῖον αὐτῶν ἐφάπτεται ἕνας κύκλος τῆς οἰκογενείας σχ. (31.1). Ὁμοίως κάθε γραμμὴ δύναται νὰ θεωρηθῆ ὡς περιβάλλουσα τῶν ἐφαπτομένων της ὅπως ἐπίσης καὶ ὡς περιβάλλουσα τῶν κύκλων καμπυλότητος αὐτῆς. Ἐπίσης ἡ ἐνειλιγμένη μιᾶς γραμμῆς δύναται νὰ θεωρηθῆ ὡς περιβάλλουσα τῶν καθέτων τῆς γραμμῆς διότι ὅπως ἀποδείξαμε, αἱ κάθετοι τῆς γραμμῆς εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς ἐνειλιγμένης.



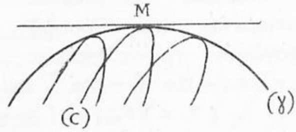
Σχ.(31.1)

Πρότασις (31.1). — *Ἐάν ἡ οἰκογένεια (31.1) ἔχη περιβάλλουσα, τότε τὰ σημεῖα της (x, y) ἐπαληθεύουν τὸ σύστημα :*

$$F(x, y, a) = 0, \quad F_a(x, y, a) = 0 \qquad (31.2)$$

Δύναται ὅμως τὸ σύνολον τῶν σημείων τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὸ σύστημα (31.2) νὰ περιέχη καὶ σημεῖα μὴ ἀνήκοντα εἰς τὴν περιβάλλουσα ὅπως π.χ. ἀνώμαλα σημεῖα τῶν γραμμῶν τῆς οἰκογενείας (31.1).

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἔστω $x = x(t)$, $y = y(t)$ μία παραμετρική παράστασις τῆς περιβαλλούσης (γ), ὑποθέτοντες φυσικὰ ὅτι ὑπάρχει. Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τῆς περιβαλλούσης τὸ τυχὸν σημεῖον της $M(x,y)$ θὰ εἶναι σημεῖον ἐπαφῆς τῆς(γ) μὲ μία γραμμὴ (c) τῆς οἰκογενείας ἀντιστοιχοῦσα ἔστω στὴν τιμὴ $a = a(t)$ τῆς



Σχ. (31.2)

παραμέτρου. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ σημεῖον M κεῖται ἐπὶ τῆς γραμμῆς (c) θὰ ἐπαληθεύη διὰ τῶν συντεταγμένων του $x(t)$, $y(t)$ τὴν ἐξίσωσιν τῆς (c) δηλ. θὰ ἰσχύη ὡς πρὸς t ἡ ταυτότης :

$$F\left[x(t), y(t), a(t)\right] \equiv 0 \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ἡ (γ) καὶ ἡ (c) ἔχουν κοινὴν ἐφαπτομένην θὰ ἔχωμεν :

$$\dot{x} F_x(x,y,a) + \dot{y} F_y(x,y,a) = 0 \qquad (2)$$

Παραγωγίζοντες τὴν ταυτότητα (1) ὡς πρὸς t προκύπτει :

$$\dot{x} F_x(x,y,a) + \dot{y} F_y(x,y,a) + \dot{a} F_a(x,y,a) = 0$$

Διὰ συγκρίσεως μετὰ τῆς (2) προκύπτει $\dot{a} F_a(x,y,a) = 0$ καὶ ἐπειδὴ ἐν γένει $\dot{a} \neq 0$ θὰ εἶναι : $F_a(x,y,a) = 0$ δηλ. τὰ σημεῖα (x,y) τῆς περιβαλλούσης ἱκανοποιοῦν τὸ σύστημα (31.2). Ἐὰν τὸ σύστημα αὐτὸ λύσωμεν ὡς πρὸς x, y θὰ ἔχωμεν :

$$x = x(a), \qquad y = y(a) \qquad (3)$$

δηλαδὴ τὶς παραμετρικὲς ἐξισώσεις τῆς περιβαλλούσης. Ἐὰν ἀπαλείψωμεν τὴν παράμετρον a θὰ προκύψη ἡ ἐξίσωσις τῆς περιβαλλούσης ὑπὸ τὴν μορφὴν $\Phi(x,y) = 0$.

Ἀντιστρόφως ἔστω ὅτι οἱ ἐξισώσεις (3) προκύπτουν ἀπὸ τὸ σύστημα (31.2) ἐπιλύοντες αὐτὸ ὡς πρὸς x, y. Θὰ εἶναι τότε ἐκ ταυτότητος ὡς πρὸς a :

$$F\left[x(a), y(a), a\right] = 0 \quad \text{καὶ} \quad F_a\left[x(a), y(a), a\right] = 0 \qquad (4)$$

Διὰ παραγωγίσεως τῆς πρώτης ἐξ αὐτῶν ὡς πρὸς a προκύπτει : $\dot{x} F_x + \dot{y} F_y + 1 \cdot F_a = 0$ ἐπομένως ἕνεκα τῆς δευτέρας τῶν (4) θὰ ἔχωμεν :

$$\dot{x} F_x + \dot{y} F_y = 0$$

Ἐὰν λοιπὸν ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι : $|F_x| + |F_y| \neq 0$ καὶ $|\dot{x}| + |\dot{y}| \neq 0$ δηλ. ὅτι τὸ σημεῖον (x,y) δὲν εἶναι ἀνώμαλον σημεῖον οὔτε τῆς γραμμῆς(3) οὔτε τῶν ἀντιστοίχων γραμμῶν τῆς οἰκογενείας, τότε ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως προκύπτει ὅτι εἰς τὸ σημεῖον $\left[x(a), y(a)\right]$, τὸ ὁποῖον εἶναι λόγῳ τῆς πρώτης τῶν (4) καὶ σημεῖον τῆς γραμμῆς $F(x,y,a) = 0$ τῆς οἰκογενείας (31.1), ἡ ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς (3) συμπίπτει μετὰ τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἀντιστοίχου γραμμῆς τῆς οἰκογενείας, ἄρα ἡ γραμμὴ (3) εἶναι περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας.

Παράδειγμα (31.1). – Νὰ εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν κύκλων : $(x-a)^2 + y^2 = \rho^2$ ὅταν a ἡ παράμετρος τῆς οἰκογενείας.

Λ ύ σ ι ς. Θέτομεν $F(x,y,a) = (x-a)^2 + y^2 - \rho^2$ ὁπότε : $F_a = -2(x-a)$· ἀπαλείφοντες τὴν α μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων $F=0$, $F_\alpha=0$ προκύπτει $y^2-\rho^2=0$ ἢ $y=\pm\rho$. Ἐπειδὴ οὔτε οἱ κύκλοι τῆς οἰκογενείας οὔτε τὸ ζεῦγος τῶν εὐθειῶν $y=\pm\rho$ ἔχουν ἀνώμαλα σημεῖα ἕπεται ὅτι τὸ ζεῦγος αὐτὸ εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῆς δοθείσης οἰκογενείας. Τὸ ἐξαγόμενον αὐτὸ ἔχομεν ἤδη εὕρη μὲ ἁπλὲς γεωμετρικὲς παρατηρήσεις προηγουμένως σχ. (31.1).

Παράδειγμα (31.2). — Νὰ ἐπαληθευθῇ ὅτι ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐφαπτομένων μιᾶς γραμμῆς $y=\Phi(x)$ εἶναι αὐτὴ ἡ ἴδια ἡ γραμμή.

Λ ύ σ ι ς. Ἡ ἐξίσωσις τῆς οἰκογενείας τῶν ἐφαπτομένων τῆς γραμμῆς εἶναι: $F(x,y,x_0) = y-\Phi(x_0)-(x-x_0)\Phi'(x_0)=0$ ὅπου παράμετρος τῆς οἰκογενείας εἶναι ἡ τετμημένη x_0 τοῦ σημείου ἐπαφῆς $M_0(x_0,y_0)$. Ἔχομεν:

$$F_{x_0}=-\Phi'(x_0)+\Phi'(x_0)-(x-x_0)\Phi''(x_0)=0 \quad \text{ἢ} \quad (x-x_0)\Phi''(x_0)=0.$$

Ἐξ αὐτῆς ἐπειδὴ ἐν γένει $\Phi''(x_0)\neq 0$, ἕπεται $x=x_0$ τὴν ὁποίαν ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν $F=0$ λαμβάνομεν $y-\Phi(x)=0$ δηλ. τὴν ἐξίσωσιν τῆς δοθείσης γραμμῆς.

Παράδειγμα (31.3). — Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν εὐθειῶν $x\,\text{συν}\alpha+y\,\text{ημ}\alpha-\rho=0$ (1).

Λ ύ σ ι ς: Ἔχομεν $F_\alpha=-x\,\text{ημ}\alpha+y\,\text{συν}\alpha=0$ πολλαπλασιάζομεν αὐτὴν ἐπὶ $-\text{ημ}\alpha$ καὶ τὴν (1) ἐπὶ $\text{συν}\alpha$ καὶ προσθέτομεν κατὰ μέλη ὁπότε προκύπτει $x=\rho\,\text{συν}\alpha$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν $y=\rho\,\text{ημ}\alpha$, ἐπομένως οἱ παραμετρικὲς ἐξισώσεις τῆς περιβαλλούσης εἶναι $x=\rho\,\text{συν}\alpha$, $y=\rho\,\text{ημ}\alpha$ δηλαδὴ κύκλος μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ ἀκτῖνα ρ. Ἐξ αὐτῶν δί ἀπαλοιφῆς τῆς α προκύπτει $x^2+y^2=\rho^2$, εἶναι δὲ ὁλόκληρος ὁ κύκλος ἡ περιβάλλουσα διότι οὔτε ἡ εὐθεῖα οὔτε ὁ κύκλος ἔχουν ἀνώμαλα σημεῖα.

Παράδειγμα (31.4). — Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν εὐθειῶν: $y-\alpha x-\beta:\alpha=0$ (1).

Λ ύ σ ι ς. Ἔχομεν $F_\alpha=-x+\beta:\alpha^2=0$ ἢ $x=\beta:\alpha^2$· ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) προκύπτει $y=2\beta:\alpha$. Ἐπομένως οἱ παραμετρικὲς ἐξισώσεις τῆς περιβαλλούσης εἶναι $x=\beta:\alpha^2$, $y=2\beta:\alpha$ καὶ ἐξ αὐτῶν δί ἀπαλοιφῆς τῆς παραμέτρου α προκύπτει ἡ παραβολὴ $y^2=4\beta x$.

Ὅτι ἡ παραβολὴ αὐτὴ εἶναι ἡ περιβάλλουσα προκύπτει πάλι ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι οὔτε οἱ εὐθεῖες οὔτε ἡ παραβολὴ ἔχουν ἀνώμαλα σημεῖα. Γεωμετρικῶς τὰ ἀνωτέρω προκύπτουν ἀμέσως ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ (1) εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς παραβολῆς $y^2=4\beta x$ μὲ παράμετρον τὴν κλίσιν α.

Παράδειγμα (31.5). — Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνειλιγμένη τῆς παραβολῆς $y^2=4\beta x$ θεωρουμένη ὡς περιβάλλουσα τῶν καθέτων της.

Λ ύ σ ι ς. Ἡ ἐξίσωσις τῶν καθέτων τῆς παραβολῆς εἰς σημεῖον (x_1,y_1) αὐτῆς εἶναι: $y-y_1=-(x-x_1)\cdot y_1:2\beta$ ὅπου $y_1^2=4\beta x_1$. Ἀπαλοίφοντες μεταξὺ αὐτῶν τό x_1 προκύπτει ἡ οἰκογένεια τῶν καθέτων ὑπό τήν μορφήν :

$$F(x, y, y_1) = y - y_1 - y_1^3 : 8\beta^2 + xy_1 : 2\beta = 0 \qquad (1)$$

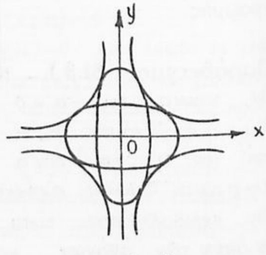
ὅπου παράμετρος τῆς οἰκογενείας εἶναι ἡ y_1. Διά παραγωγίσεως τῆς (1) ὡς πρός y_1 ἔχομεν : $F_{y_1} = -1 - 3y_1^2 : 8\beta^2 + x : 2\beta = 0$ ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει : $x = (3y_1^2 + 8\beta^2) : 4\beta$ (2), καί δι ἀντικαταστάσεως εἰς τήν (1) θά ἔχωμεν : $y = -y_1^3 : 4\beta$ (3). Οἱ ἐξισώσεις (2) καί (3) δύναται νά θεωρηθοῦν ὡς παραμετρικές ἐξισώσεις τῆς ἐνειλιγμένης. Ἐξ αὐτῶν δι ἀπαλοιφῆς τῆς παραμέτρου y_1 προκύπτει ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς ὑπό τήν μορφήν $27\beta y^2 = 4(x-2\beta)^3$.

Παράδειγμα (31.6).— Νά εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐλλείψεων :

$$F(x, y, \alpha, \beta) \equiv x^2\beta^2 + y^2\alpha^2 - \alpha^2\beta^2 = 0 \qquad (1)$$

οἱ ὁποῖες ἔχουν σταθερόν ἐμβαδόν K.

Λ ύ σ ι ς. Αἱ παράμετροι α, β συνδέονται διά τῆς σχέσεως $\pi\alpha\beta = K$ (2) διότι ὅπως γνωρίζομεν ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας τό ἐμβαδόν ἐλλείψεως μέ μήκη ἡμιαξόνων α, β ἰσοῦται μέ $\pi\alpha\beta$. Ἑπομένως λαμβάνοντες τήν τιμήν τῆς β ἐκ τῆς (2) καί ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (1) προκύπτει ἡ μονοπαραμετρική οἰκογένεια $F(x, y, \alpha, K : \pi\alpha) = 0$ τήν ὁποίαν πραγματευόμεθα κατά τά γνωστά. Δυνάμεθα ὅμως νά ἐργασθῶμεν καί ὡς ἑξῆς. Παραγωγίζομεν τίς (1) καί (2) ὡς πρός α :



Σχ. (31.3)

$$F_\alpha + F_\beta \cdot \dot\beta = 2\alpha y^2 - 2\alpha\beta^2 + (2\beta x^2 - 2\alpha^2\beta)\,\dot\beta = 0, \quad \pi(\beta + \alpha\dot\beta) = 0.$$

Μεταξύ αὐτῶν ἀπαλείφοντες τήν παράγωγον $\dot\beta$ προκύπτει : $-\beta^2x^2 + \alpha^2y^2 = 0$. Μεταξύ αὐτῆς καί τῶν (1) καί (2) ἀπαλείφοντες τάς παραμέτρους α, β προκύπτει ἡ ἐξίσωσις τῆς περιβαλλούσης $xy = \pm K : 2\pi$ ἡ ὁποία εἶναι ζεῦγος συζυγῶν ἰσοσκελῶν ὑπερβολῶν σχ. (31.3).

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

Δί ἀπαλειφῆς τῆς παραμέτρου t νά εὑρεθῆ ἡ μή παραμετρική ἐξίσωσις τῶν ἑξῆς γραμμῶν :

435) $x = 6t - 12t^3, \quad y = 2t$

436) $x = 4\,\eta\mu t, \quad y = 4\,\sigma\upsilon\nu t$

437) $x = \sigma\upsilon\nu 2t, \quad y = \eta\mu t$

438) $x = 3\,\eta\mu t, \quad y = 5\,\sigma\upsilon\nu t$

439) $x = \eta\mu t, \quad y = \eta\mu 2t$

440) $x = 5 - 4\,\eta\mu\,\omega t, \quad y = -1 + 4\,\sigma\upsilon\nu\,\omega t$

Διά τῆς σημειουμένης βοηθητικῆς σχέσεως νά εὑρεθοῦν οἱ παραμετρικές ἐξισώσεις τῶν ἑξῆς γραμμῶν :

441) $x^2 + y^2 = 2x, \quad t = y : x$

442) $\beta^2x^2 + \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2, \quad x = \alpha\,\sigma\upsilon\nu t$

443) $\beta^2x^2 - \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2, \quad x = \alpha\,\tau\epsilon\mu t$

444) $x^2 - y^2 = 2y, \quad t = y : x.$

Δι' ἑκάστην τῶν κατωτέρω γραμμῶν ἀφοῦ ἐπαληθεύσετε ὅτι τὸ σημειούμενον σημεῖον κεῖται ἐπ' αὐτῆς, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ σημεῖον αὐτό.

445) $xy+6=0 \quad (2,-3)$ 446) $x^3-x^2y=2 \quad (1,-1)$

447) $xy+2x-4y=5 \quad (3,1)$ 448) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3 \quad (1,4)$

449) $x^2+y^2=20 \quad (4,2)$ 450) $x^{2/3}-y^{2/3}=3 \quad (8,1)$

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς καθέτου ἑκάστης γραμμῆς διὰ τὴν σημειουμένην τιμὴν τῆς παραμέτρου t.

451) $x=t^2,\ y=t^3,\ (t=2)$ 452) $x=e^{-t}\,\text{συν}\,5t,\quad y=e^{-2t}\,\text{ημ}\,3t,\ (t=0)$

453) $x=t+1,\ y=\text{συν}\,t,\ (t=0)$ 454) $x=3t:(1+t^3),\ y=3t^2:(1+t^3),\ (t=1)$

Νὰ μετασχηματισθῇ εἰς πολικὲς συντεταγμένες ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων :

455) $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 456) $(x^2+y^2)^2=2xy$

457) $y^2=4x$ 458) $x^2+y^2=4x$

459) $x^2-y^2=4$ 460) $xy=4$

Νὰ μετασχηματισθῇ εἰς καρτεσιανὲς συντεταγμένες ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων :

461) $\rho=\text{εφ}\,\vartheta$ 462) $\rho^2\,\text{ημ}\,2\vartheta=4$

463) $\rho^2-2\rho\,\text{ημ}\,\vartheta=3$ 464) $\rho^2=\text{ημ}\,\vartheta$

465) $\rho(1+\text{συν}\,\vartheta)=1$ 466) $\rho=\alpha\,\text{ημ}\,\vartheta+\beta$

Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῶν κάτωθι τόξων :

467) $y=3\ln x \quad (1\leqslant x\leqslant 4)$ 468) $y=\ln \text{συν}\,x \quad (0\leqslant x\leqslant \pi/3)$

469) $8y=x^4+6x^2 \quad (0\leqslant x\leqslant 2)$ 470) $3y=2(1+x^2)^{3/2} \quad (0\leqslant x\leqslant 3)$

471) $18y^2=x(x-6)^2 \quad (0\leqslant x\leqslant 6)$ 472) $3y^2=(2x+8)^3 \quad (0\leqslant x\leqslant 4)$

473) $3x^2=y^3 \quad (0\leqslant x\leqslant 15\sqrt{5})$ 474) $(y-1)^2=4x^3 \quad (1\leqslant y\leqslant 3)$

475) $4x=9t^2,\ 4y=9t^3 \quad (0\leqslant t\leqslant 2:\sqrt{3})$ 476) $x=3(t^2-1)^2,\ y=8t^3 \quad (0\leqslant t\leqslant t_1)$

477) $x=2-3\,\text{συν}\,t+\text{συν}\,3t,\quad y=3\sqrt{2}\,(2t-\text{ημ}\,2t) \quad (0\leqslant t\leqslant \pi)$

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὁλικὸν μῆκος τῶν γραμμῶν :

478) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 479) $x^{2/5}+y^{2/5}=a^{2/5}$

480) $\rho=\text{ημ}^4\frac{\vartheta}{4}$ 481) $\rho=\text{συν}^2\frac{\vartheta}{2}$

482) $\rho=\text{ημ}^3\frac{\vartheta}{3}$ 483) $\rho=\alpha(1+\text{συν}\,\vartheta)$

Νὰ εὑρεθῇ δι' ἑκάστην τῶν κατωτέρω γραμμῶν ἡ μὴ παραμετρικὴ ἐξίσωσις καθὼς καὶ τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος πρὸς τοὺς ἄξονες.

484) $x=t^3-12t,\ y=2t$ 485) $x=\text{συν}\,2t,\quad y=\text{συν}\,t$

486) $x=\text{συν}^3 t,\quad y=\text{ημ}^3 t$ 487) $x=t-1,\quad y=t^2-2t$

488) $x=2\,\text{συν}\,3t,\ y=4\,\text{ημ}\,3t$ 489) $x=\text{συν}\,2t,\ y=4t$

490) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν συντεταγμένων ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐφαπτομένης τῆς γραμμῆς . $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ α.

491) Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα τῶν συντεταγμένων ἐπί τήν ἀρχήν τῆς ἐφαπτομένης τῆς γραμμῆς $x = \alpha\sigma\upsilon\nu^{\nu}t$, $y = \alpha\eta\mu^{\nu}t$.

492) Νά εὑρεθῇ τό μῆκος τῆς ἐφαπτομένης τῆς γραμμῆς $x^{2/3}+y^{2/3}=\alpha^{2/3}$, τό περιλαμβανόμενον μεταξύ τῶν ἀξόνων.

493) Νά εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς: $Ax^2+Bxy+\Gamma y^2+\Delta x+Ey+Z=0$ εἰς τό σημεῖον (x_1, y_1).

Νά εὑρεθῇ ἡ γωνία ὑπό τήν ὁποίαν τέμνονται τά ζεύγη τῶν γραμμῶν:

494) $x^2+y^2=4x$, $y=x$

495) $3x^2-4y^2=12$, $x^2+8y^2=8$

496) $y=x^2$, $y=2x$

497) $x^2+y^2=8x$, $x^2+y^2=16$

498) Νά εὑρεθῇ εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς γραμμῆς μέ ἐξίσωσιν: $x^2(x+y)=\alpha^2(x-y)$.

Νά προσδιορισθῇ ἡ ταχύτης καί ἡ ἐπιτάχυνσις τῶν ἑπομένων κινήσεων διά τήν σημειουμένην χρονικήν στιγμήν.

499) $\bar{r}=(t^3-t^2, 2t)$ $(t=3)$

500) $\bar{r}=(2t, t^4)$ $(t=2)$

501) $\bar{r}=(\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu 3t)$ $(t=\pi)$

502) $\bar{r}=(t, e^{-t})$ $(t=0)$

Νά εὑρεθῇ ἡ καμπυλότης τῶν κάτωθι γραμμῶν εἰς τά σημειούμενα σημεῖα:

503) $y=chx$, $x=0$

504) $y=x^3-4x^2+2x-1$, $x=2$

505) $y=\eta\mu x$, $x=\pi/6$

506) $y=\lambda o\gamma x$, $x=1$

507) $y=\varepsilon\varphi x$, $x=0$

508) $y=10^x$, $x=0$

Νά εὑρεθῇ ἡ ἀκτίς καμπυλότητος τῶν γραμμῶν:

509) $y=\eta\mu x$

510) $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$

511) $y=e^x$

512) $x^{2/3}+y^{2/3}=\alpha^{2/3}$

513) $y=\tau o\xi\eta\mu x$

514) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{\alpha}$

515) $x^2=4\alpha y$

516) $x^3+y^3=\alpha^3$

Νά εὑρεθοῦν τά σημεῖα τῶν κάτωθι γραμμῶν εἰς τά ὁποῖα ἡ καμπυλότης λαμβάνει ἀκροτάτην τιμήν.

517) $y=x^3$

518) $y=e^x$

519) $y=\ell nx$

520) $y=shx$

Νά εὑρεθῇ ἡ ἀκτίς καμπυλότητος τῶν κάτωθι γραμμῶν εἰς τά σημειούμενα σημεῖα:

521) $x=t-2$, $y=3t^2$ $(t=1)$

522) $x=\ell nt$, $y=t^{-1}$ $(t=1)$

523) $x=t^2+2t$, $y=t^{-1}$ $(t=2)$

524) $x=e^t$, $y=e^{-t}$ $(t=0)$

525) $x=2\eta\mu t$, $y=\eta\mu 2t$ $(t=\pi/6)$

526) $x=e^t$, $y=\tau o\xi\eta\mu t$ $(t=0)$

Νά εὑρεθῇ ἡ καμπυλότης τῶν γραμμῶν:

527) $x=\alpha\sigma\upsilon\nu^3t$, $y=\alpha\eta\mu^3t$

528) $x=\alpha cht$, $y=\beta sht$

Νά εὑρεθοῦν τά σημεῖα εἰς τά ὁποῖα ἡ καμπυλότης λαμβάνει ἀκροτάτην τιμήν:

529) $x=\alpha\sigma\upsilon\nu t$, $y=\alpha\eta\mu t$

530) $x=\alpha(t-\eta\mu t)$, $y=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu t)$

Νά εὑρεθῇ τό κέντρον καμπυλότητος τῶν κάτωθι γραμμῶν εἰς τά σημειούμενα σημεῖα καί νά σχεδιασθῇ δι' ἑκάστην περίπτωσιν ἡ γραμμή καί ὁ κύκλος καμπυλότητος.

531) $x^2=8y$, $x=0$

532) $xy=16$, $x=4$

533) $y=x^3$, $x=2$

534) $y=\sigma\upsilon\nu x$, $x=0$

535) $x^2-xy+9=0, \quad x=3$

536) $e^y \sigma\upsilon\nu\, x=1, \quad x=0$

Νὰ εὑρεθῇ ἡ καμπυλότης τῶν κάτωθι γραμμῶν εἰς τὸ σημειούμενον σημεῖον:

537) $\rho=4\sigma\upsilon\nu 2\vartheta \quad (\vartheta=\pi/4)$

538) $\rho=2\sigma\upsilon\nu 3\vartheta \quad (\vartheta=2\pi/3)$

539) $\rho=a:(1-\sigma\upsilon\nu\vartheta) \quad (\vartheta=\pi/3)$

540) $\rho^2=2a^2\sigma\upsilon\nu 2\vartheta \quad (\vartheta=\pi/6)$

541) $\rho=a(1-\eta\mu\vartheta) \quad (\vartheta=3\pi/2)$

542) $\rho=a\varepsilon\varphi\vartheta \quad (\vartheta=\pi/4)$

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῶν γραμμῶν:

543) $\rho=2a\sigma\upsilon\nu\vartheta$

544) $\rho\vartheta=a$

545) $\rho=a\varepsilon:(1-\varepsilon\sigma\upsilon\nu\vartheta)$

546) $\rho=a\vartheta$

547) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς $\rho=a(1+\sigma\upsilon\nu\vartheta)$ εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος γίνεται μεγίστη.

548) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς $\rho^2=a^2\tau\varepsilon\mu 2\vartheta$ εἰς τὰ ὁποῖα ἡ καμπυλότης γίνεται μεγίστη.

549) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον καμπυλότητος τῆς γραμμῆς $\rho=a\eta\mu^2\vartheta$ εἰς τὸ σημεῖον μὲ $\vartheta=\pi/2$ καὶ νὰ σχεδιασθῇ ἡ γραμμὴ καὶ ὁ κύκλος καμπυλότητος.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνειλιγμένη τῶν κάτωθι γραμμῶν:

550) $y^2=4x$

551) $4x^2-9y^2=36$

552) $xy=4$

553) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

554) $4x^2+9y^2=36$

555) $2y=e^x+e^{-x}$

556) $x=t, \; y=t^3$

557) $x=t^2, \; y=t^3$

558) $x=a(t-\eta\mu t), \; y=a(1-\sigma\upsilon\nu t)$

559) $x=t, \; y=\sigma\upsilon\nu t$

Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τῶν ἀνωμάλων σημείων ἑκάστης τῶν ἑπομένων γραμμῶν καὶ εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν, ἐξαιρέσει τῶν μεμονωμένων, νὰ εὑρεθοῦν οἱ κλίσεις τῶν ἀντιστοίχων ἐφαπτομένων τῆς γραμμῆς.

560) $y^2=x^3-4x^2$

561) $x^3+y^3+9x^2-18xy+9y^2=0$

562) $(x+y)^3-(x-y)^2=0$

563) $(x+1)^2(x+2)(x+3)^2-y^2=0$

564) $y^2=x^4(9-x^2)$

565) $x^3+x^2+y^3=0$

566) $x^2+6x+9+y^2+y^3=0$

567) $x^7-(x^2-y)^2=0$

568) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

569) $(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$

570) $x^2y^2-(y-2)^2(5-y^2)=0$

571) $(x^2+y^2-2x)^2-4(x^2+y^2)=0$

572) $y^2-2x^2y-x^6=0$

573) $(x^2+y^2)^2-y(3x^2-y^2)=0$

574) $x^4+y^4+y^3-xy^2=0$

575) $x^4+y^4-2x^2y+xy^2+y^3=0$

Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας μὲ παράμετρον τὴν a.

576) $y=ax+\kappa:2a$

577) $y=ax-\frac{1}{4\kappa}(1+a^2)x^2$

578) $x^2:a^2+y^2:(\kappa-a)^2=1$

579) $(x-a)^2+y^2=\beta^2, \quad \beta^2=4\kappa a$

580) $x:a+y:\beta=1, \quad a:\kappa+\beta:\lambda=1$

581) $x^2:a^2+y^2:\beta^2=1, \quad a^2:\kappa^2+\beta^2:\lambda^2=1$

582) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περιβάλλουσα εὐθυγράμμου τμήματος σταθεροῦ μήκους τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα κινοῦνται ἐπὶ δύο καθέτων εὐθειῶν, εἶναι μία ἐπικυκλοειδής.

583) Τριγώνου ΑΒΓ ἡ κορυφὴ Α εἶναι σταθερὴ καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ σταθεροῦ μήκους ὀλισθαίνει ἐπὶ σταθερῆς εὐθείας· νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν ὑψῶν ΒΕ καὶ τῶν ΓΖ.

584) Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς χορδῆς ἡ ὁποία συνδέει τὰ ἄκρα δύο συζυγῶν διαμέτρων δοθείσης ἐλλείψεως.

585) Νά εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῶν κύκλων πού ἔχουν διαμέτρους τάς ἡμιδιαμέτρους δοθείσης ἐλλείψεως.

586) Νά εὑρεθῆ ἡ ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς : $x+\sqrt{a^2-y^2}=a\ln(ay^{-1}+\sqrt{a^2y^{-2}-1})$.

587) Νά δειχθῆ ὅτι τό ἄθροισμα τῆς ἐφαπτομένης καί τῆς ὑφαπτομένης τῆς γραμμῆς $e^{y/a}=x^2-a^2$ εἶναι ἀνάλογος πρός τό γινόμενον τῶν συντεταγμένων τοῦ σημείου ἐπαφῆς.

588) Νά εὑρεθῆ ὁ τόπος τοῦ σημείου Ε εἰς τό ὁποῖον ἡ ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς $\rho\vartheta=a$ εἰς τό σημεῖον Μ τέμνει τήν κάθετον ΟΕ ἐπί τήν πολικήν ἀκτίνα ΟΜ.

Δί ἑκάστην τῶν ἑπομένων γραμμῶν νά εὑρεθοῦν ἡ ὑφαπτομένη, ἡ ὑποκάθετος, ἡ ἐπεφαπτομένη καί ἡ ἐπικάθετος.

589) $y=ce^{x/a}$

590) $y^2(a-x)=x^3$

591) $y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})$

592) $\rho=a\sigma\upsilon\nu\vartheta$

593) $\rho^2=a^2\sigma\upsilon\nu 2\vartheta$

594) $\sqrt{a^2-\beta^2}=\rho\,\sigma\upsilon\nu\frac{\vartheta}{a}\sqrt{a^2-\beta^2}$

595) Νά εὑρεθῆ ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου ἐπιπέδου γραμμῆς εἰς πλαγιογώνιον σύστημα ἀξόνων μέ γωνίαν ω.

596) Δίδεται ἡ γραμμή $4y^3=27ax^2$ καί ζητεῖται νά εὑρεθῆ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς ἡ ὁποία ἔχει κλίσιν λ. Νά δειχθῆ ὅτι δί ἑκάστου σημείου τοῦ ἐπιπέδου διέρχονται τρεῖς ἐφαπτόμενες τῆς γραμμῆς καί νά εὑρεθῆ τέλος ὁ τόπος τῶν σημείων τομῆς δύο ἐφαπτομένων τεμνομένων καθέτως.

597) Νά εὑρεθῆ ἡ γραμμή τήν ὁποίαν διαγράφει τό σημεῖον τομῆς τῶν ὑψῶν τοῦ μεταβλητοῦ τριγώνου ΑΟΜ ὅταν Μ εἶναι μεταβλητόν σημεῖον τοῦ κύκλου $x^2+y^2=a^2$ καί Α τό σημεῖον αὐτοῦ μέ $x=a$.

598) Νά εὑρεθῆ ὁ τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἀπό σταθερόν σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου τῆς γραμμῆς : $x=\sigma_1(t)$, $y=\sigma_2(t)$ ἐπί τίς ἐφαπτόμενες αὐτῆς. Ὁ τόπος αὐτός λέγεται ποδική γραμμή τῆς δοθείσης ὡς πρός τό σημεῖον Α.

599) Νά δειχθῆ ὅτι ἡ κισσοειδής γραμμή $(x^2+y^2)x=2ay^2$ εἶναι ἡ ποδική τῆς παραβολῆς $y^2+8ax=0$ ὡς πρός τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων.

600) Νά δειχθῆ ὅτι ὁ κοινός λημνίσκος $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ εἶναι ἡ ποδική τῆς ὑπερβολῆς $x^2-y^2=2a^2$ ὡς πρός τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων.

601) Νά εὑρεθοῦν αἱ παραμετρικές ἐξισώσεις τῆς καρδιοειδοῦς : $x=2a\sigma\upsilon\nu t\cdot(1-\sigma\upsilon\nu t)+a$, $y=2a\eta\mu t(1-\sigma\upsilon\nu t)$, ὅταν ληφθῆ ὡς παράμετρος τό μῆκος τόξου αὐτῆς.

602) Νά ὑπολογισθῆ τό μῆκος τοῦ τόξου : $\rho=a(\vartheta^2-1)$, $(\vartheta_0\leqslant\vartheta\leqslant\vartheta_1)$.

603) Νά σχεδιασθῆ ἡ γραμμή : $x=\int_0^t a^{-\frac{1}{2}}\sigma\upsilon\nu a\,da$, $y=\int_0^t a^{-\frac{1}{2}}\eta\mu a\,da$ καί νά ὑπολογισθῆ ἡ ἀκτίνα καμπυλότητος αὐτῆς.

604) Νά δειχθῆ ὅτι ἡ ἔκφρασις τῆς καμπυλότητος τῆς γραμμῆς $x=\sigma_1(t)$, $y=\sigma_2(t)$ παραμένει ἀναλλοίωτος κατά τήν περιστροφήν τῶν ἀξόνων καθώς ἐπίσης καί κατά τήν ἀλλαγήν παραμέτρου $t=\varphi(\tau)$ ὅπου $\dot\varphi(t)>0$.

605) Νά σχεδιασθῆ ἡ γραμμή $x=\int_0^t \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi a^2}{2}\right)da$, $y=\int_0^t \eta\mu\left(\frac{\pi a^2}{2}\right)da$, $-\infty<t<\infty$ καί νά εὑρεθῆ ἡ καμπυλότης αὐτῆς ὡς συνάρτησις τοῦ μήκους τόξου.

606) Νά δειχθῆ ὅτι δί ἑνός σημείου Μ τῆς γραμμῆς : $x=2at^2:(1+t^2)$, $y=at(t^2-1):(1+t^2)$ διέρχονται δύο ἐφαπτόμεναι αὐτῆς. Ἐάν Α, Β εἶναι τά σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν νά δειχθῆ ὅτι οἱ ΟΑ, ΟΒ εἶναι συμμετρικές ὡς πρός τόν ἄξονα

τῶν x καὶ ὅτι τὰ σημεῖα O, A, B, M κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς κύκλου.
Νὰ εὑρεθῆ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος, τὸ κέντρον καμπυλότητος καὶ ἡ ἐνειλιγμένη τῶν γραμμῶν.

607) $y^2(\alpha-x)=x^3$ 608) $3\alpha y^2=x^3$

609) $\rho=e^{\alpha\theta}$ 610) $\rho=2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2}$

611) Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος μιᾶς κωνικῆς τομῆς εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὴν τρίτην δύναμιν τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου της ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένη εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον.

612) Ἐὰν ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον M μιᾶς ἐλλείψεως τέμνη τοὺς ἄξονες ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα A, B καὶ ἡ κάθετος εἰς τὰ A′, B′ εἶναι δὲ P τὸ κέντρον καμπυλότητος αὐτῆς εἰς τὸ M, νὰ δειχθῆ ὅτι: $MA:MB=PA':PB'$.

613) Νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ γραμμὴ $(y-x^2)^2=x^\nu$ εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων ἔχει σημεῖον ἀνακάμψεως τοῦ πρώτου εἴδους ὅταν $\nu<4$ καὶ τοῦ δευτέρου ὅταν $\nu>4$.

614) Νὰ δειχθῆ ὅτι τὸ σημεῖον $(-\alpha,0)$ τῆς γραμμῆς $y^2=x(\alpha+x)^2$, εἶναι ἕνα μεμονωμένον σημεῖον αὐτῆς.

615) Νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων εἶναι ἕνα σημεῖον ἀνακάμψεως δευτέρου εἴδους τῆς γραμμῆς: $x^4-2\alpha x^2y-\alpha xy^2=0$.

616) Νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων εἶναι μεμονωμένον σημεῖον τῆς γραμμῆς $\alpha y^2-x^3+\beta x^2=0$ ὅταν $\alpha\beta>0$, ἐνῶ ὅταν $\alpha\beta<0$ εἶναι ἕνα διπλὸ πραγματικό.

617) Θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν $x\,\sigma\upsilon\nu t+y\,\eta\mu t=\lambda(t)$ ὅπου t μεταβλητὴ παράμετρος, ἔστω M τὸ σημεῖον ἐπαφῆς αὐτῆς μὲ τὴν περιβάλλουσά της καὶ P ἡ προβολὴ τῆς ἀρχῆς O ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ συντεταγμένες τῶν σημείων M καὶ P, τὰ μήκη OM, OP, MP καὶ νὰ δειχθῆ ὅτι ἐὰν MP εἶναι σταθερὸν τότε ἡ λ εἶναι μία γραμμικὴ συνάρτηση τοῦ t. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν νὰ μελετηθῆ ἡ περιβάλλουσα τῆς εὐθείας καὶ νὰ εὑρεθοῦν τὸ μῆκος τόξου αὐτῆς, ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος, τὸ κέντρον καμπυλότητος καὶ τέλος ἡ ἐνειλιγμένη αὐτῆς.

618) Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ γωνία ω τῆς πολικῆς ἀκτῖνος OM καὶ τῆς ἐφαπτομένης τῆς γραμμῆς $\rho=\rho(\theta)$ εἰς τὸ M, δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $\varepsilon\varphi\omega=\rho d\theta:d\rho$.

619) Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι διὰ τὴν καρδιοειδῆ γραμμὴν $\rho=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\theta)$ ἡ γωνία τῆς πολικῆς ἀκτῖνος μετὰ τῆς ἐφαπτομένης ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πολικῆς γωνίας θ καὶ ὅτι οἱ χορδὲς οἱ διερχόμενες ἀπὸ τὸν πόλον ἔχουν σταθερὸν μῆκος.

620) Νὰ δειχθῆ ὅτι δύο ἐφαπτόμενες τῆς γραμμῆς $\rho^\nu=\alpha^\nu\eta\mu\nu\theta$ εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς χορδῆς διερχομένης διὰ τοῦ πόλου, σχηματίζουν σταθερὴ γωνία.

620*) Νὰ εὑρεθῆ ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου γραμμῆς εἰς πλαγιογώνιον σύστημα ἀξόνων μὲ γωνίαν ω.

Θεωρία τῶν γραμμῶν τοῦ τριδιαστάτου χώρου

32. Διάφοροι τρόποι παραστάσεως μιᾶς γραμμῆς.— Ἔστω (γ) μία γραμμὴ τοῦ τριδιαστάτου χώρου τῶν x, y, z μὲ παραμετρικὲς ἐξισώσεις:

$$x = \sigma_1(t), \quad y = \sigma_2(t), \quad z = \sigma_3(t) \qquad (32.1)$$

Ἐὰν μεταξὺ αὐτῶν ἀπαλείψωμεν τὴν μεταβλητὴν t, προκύπτουν δύο ἐξισώσεις:

$$F(x,y,z) = 0, \quad \Phi(x,y,z) = 0 \qquad (32.2)$$

οἱ ὁποῖες ἐφ' ὅσον εἶναι ἰσοδύναμες μὲ τὶς τρεῖς παραμετρικές, λέγονται ἐξισώσεις ὑπὸ πλεγμένην μορφὴν τῆς γραμμῆς (γ).
Ἐὰν οἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις δύνανται, κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς θεωρίας τῶν πλεγμένων συναρτήσεων, νὰ ἐπιλυθοῦν ὡς πρὸς δύο ἀπὸ τὶς μεταβλητές π.χ. τὶς y, z προκύπτουν δύο ἐξισώσεις:

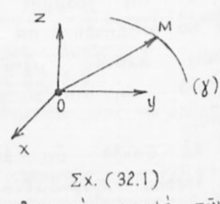
$$y = y(x), \quad z = z(x) \qquad (32.3)$$

οἱ ὁποῖες λέγονται συνήθεις ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς (γ). Ὁμοίως ἐὰν δύνανται νὰ ἐπιλυθοῦν ὡς πρὸς τὶς μεταβλητὲς z, x ἢ τὶς x, y ἡ γραμμὴ παριστάνεται ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰ ζεύγη τῶν ἐξισώσεων:

$$x = x(y), \quad z = z(y) \qquad (32.4)$$
$$x = x(z), \quad y = y(z) \qquad (32.5)$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν τέλος μίαν γραμμὴν (γ) μὲ παραμετρικὲς ἐξισώσεις τὶς (32.1) καὶ παραστήσωμεν μὲ $\bar{r}$ τὴν διανυσματικὴν ἀκτῖνα $\overline{OM}$ τῆς ὁποίας τὸ πέρας εἶναι τυχὸν σημεῖον $M(x,y,z)$ τῆς γραμμῆς, οἱ συντεταγμένες τῆς $\bar{r}$ ἰσοῦνται προφανῶς μὲ τὶς συντεταγμένες τοῦ M, ὁπότε ἔχομεν:

$$\bar{r} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \equiv \bar{r}(t) \qquad (32.6)$$



Σχ. (32.1)

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις λέγεται διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς (γ) καὶ εἶναι προφανῶς μία περιληπτικὴ γραφὴ τῶν παραμετρικῶν ἐξισώσεων αὐτῆς.
Ἕνα σημεῖον $M(t)$ τῆς γραμμῆς (γ) λέγεται ὁμαλὸν ὅταν:

$$\dot{\bar{r}} = (\dot{\sigma}_1, \dot{\sigma}_2, \dot{\sigma}_3) \neq 0 \qquad (32.7)$$

δηλαδὴ ὅταν τὸ παράγωγον διάνυσμα $\dot{\bar{r}}$ εἰς τὸ σημεῖον M εἶναι μὴ μηδενικόν, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τουλάχιστον μία ἐκ τῶν συντεταγμένων τοῦ $\dot{\sigma}_i$ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Ἕνα σημεῖον μὴ ὁμαλὸν λέγεται ἀνώμαλον σημεῖον τῆς γραμμῆς καὶ αὐτὸ θὰ συμβαίνει ὅταν εἰς αὐτὸ εἶναι $\dot{\bar{r}} = \bar{0}$ δηλαδὴ ὅταν καὶ οἱ τρεῖς συντεταγμένες $\dot{\sigma}_i$ τοῦ παραγώγου διανύσματος εἶναι μηδέν.

Παράδειγμα (32.1). — Νὰ γραφῇ ὑπὸ διαφόρους μορφὰς ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς κυκλικῆς στερεᾶς ἕλικος : $\bar{r} = (\alpha\,\text{συν}t,\ \alpha\,\text{ημ}t,\ \beta t)$.

Λύσις. Οἱ παραμετρικὲς ἐξισώσεις εἶναι : $x = \alpha\,\text{συν}t$, $y = \alpha\,\text{ημ}t$, $z = \beta t$· ἐὰν τὴν τελευταία ἐπιλύσωμεν ὡς πρὸς t καὶ ἀντικαταστήσωμεν στὶς δύο ἄλλες προκύπτουν οἱ ἐξισώσεις : $x = \alpha\,\text{συν}(z:\beta)$, $y = \alpha\,\text{ημ}(z:\beta)$, οἱ ὁποῖες εἶναι τῆς μορφῆς (32.5). Μίαν παράστασιν ὑπὸ πλεγμένην μορφὴν λαμβάνομεν ὡς ἑξῆς : Ὑψώνομεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προσθέτομεν κατὰ μέλη τὶς δύο πρῶτες ἐκ τῶν παραμετρικῶν ἐξισώσεων ὁπότε προκύπτει : $x^2 + y^2 = \alpha^2$ (1). Διαιροῦντες κατὰ μέλη πάλι τὶς δύο πρῶτες θὰ ἔχωμεν : $y : x = \text{εφ}\,t$, $t = \text{τοξ εφ}(y:x)$ ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν τρίτη προκύπτει : $z = \beta\,\text{τοξ εφ}(y:x)$ (2). Οἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι τῆς μορφῆς (32.2) καὶ παριστάνουν ὑπὸ πλεγμένην μορφὴν τὴν δοθεῖσα γραμμήν. Μάλιστα ἐκ τῆς (1) προκύπτει ὅτι ἡ δοθεῖσα γραμμὴ κεῖται ἐπὶ τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου $x^2 + y^2 = \alpha^2$.

Παράδειγμα (32.2). — Νὰ εὑρεθῇ ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ τὴν πλεγμένην μορφὴν : $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $z = 1$.

Λύσις. Ἡ δοθεῖσα γραμμὴ εἶναι προφανῶς ἕνας κύκλος ὁ ὁποῖος προκύπτει ὅταν κόψωμεν μὲ τὸ ἐπίπεδον $z = 1$ τὴν σφαῖραν ἡ ὁποία ἔχει ἀκτίνα $\sqrt{5}$ καὶ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων. Ἐκ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ z προκύπτει $x^2 + y^2 = 4$, ἑπομένως δυνάμεθα νὰ γράψωμεν : $x = 2\,\text{συν}t$, $y = 2\,\text{ημ}t$ καὶ ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς δοθείσης γραμμῆς εἶναι : $\bar{r} = (2\,\text{συν}t,\ 2\,\text{ημ}t,\ 1)$, $(0 \leqslant t < 2\pi)$. Μία ἄλλη παράστασις προκύπτει ὅταν λάβωμεν ὡς παράμετρον τὴν x ὁπότε θὰ εἶναι $y = \pm\sqrt{4-x^2}$ καὶ θὰ ἔχωμεν : $\bar{r} = (x,\ \pm\sqrt{4-x^2},\ 1)$, $(-2 \leqslant x \leqslant 2)$ ὅπου τὸ θετικὸν πρόσημον θὰ λαμβάνεται διὰ τὸ ἡμικύκλιον τὸ κείμενον δεξιὰ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,z καὶ τὸ ἀρνητικὸν διὰ τὸ κείμενον ἀριστερά.

33. Μῆκος τόξου γραμμῆς.

— Ἀπὸ τὸν ὁλοκληρωτικὸν λογισμὸν γνωρίζομεν ὅτι τὸ μῆκος τοῦ τόξου M_0M μιᾶς γραμμῆς μὲ παραμετρικὲς ἐξισώσεις τὶς (32.1) δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον :

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\; dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{\bar{r}}^2}\, dt \qquad (33.1)$$

ὅπου t_0, t οἱ τιμὲς τῆς παραμέτρου εἰς τὶς ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν τὰ ἄκρα

M_o, M τοῦ τόξου. Τὸ ριζικὸν θὰ λαμβάνωμεν πάντοτε μὲ τὸ θετικὸν πρόσημον, τὸ ὁποῖον ἔχει διὰ συνέπειαν τὸ μῆκος τόξου νὰ εἶναι μία αὔξουσα συνάρτησις τοῦ t. Ἐὰν λοιπὸν προσανατολίσωμεν τὴν γραμμὴν ἔτσι ὥστε ἡ θετικὴ φορὰ ἐπ' αὐτῆς νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν φορὰν τῶν αὐξανομένων t, τότε τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνῃ καὶ διὰ τὸ s καὶ ἀντιστρόφως. Ὁ ἀριθμὸς s, ὅπως καὶ διὰ τὶς ἐπίπεδες γραμμές, λέγεται καμπυλόγραμμος τετμημένη τοῦ σημείου $M(s)$.

Ὁ τύπος (33.1) καὶ ὁ προκύπτων ἐξ αὐτοῦ διὰ τὸ διαφορικὸν ds, δύνανται νὰ γραφοῦν ὑπὸ τὴν γενικὴν μορφήν :

$$\boxed{\begin{aligned} s &= \int_{M_o}^{M}\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \int_{M_o}^{M}\sqrt{d\bar{r}^{\,2}} \\ ds^2 &= dx^2+dy^2+dz^2 = d\bar{r}^{\,2} \end{aligned}} \tag{33.2}$$

Ἐξ αὐτῶν προκύπτουν εὐκόλως τὸ μῆκος τόξου καὶ τὸ διαφορικὸν αὐτοῦ δι' οἱανδήποτε μορφὴν ὑπὸ τὴν ὁποίαν εἶναι δυνατὸν νὰ δοθῆ μία γραμμή. Π.χ. ἐὰν ἡ γραμμὴ δίδεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (32.2) καὶ ἐκλέξωμεν ὡς μεταβλητὴν ὁλοκληρώσεως τὴν x, τότε ἀπὸ τοὺς τύπους (15.5) λαμβάνομεν τοὺς λόγους $dy : dx$, $dz : dx$ τοὺς ἀντικαθιστῶμεν εἰς τοὺς τύπους (33.2) καὶ ἔτσι εὑρίσκομεν τὰ s, ds. Ἐπίσης ἐὰν ἡ γραμμὴ δίδεται εἰς σφαιρικὲς συντεταγμένες, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας τὶς σχέσεις :

$$x = \rho\,\text{συν}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi,\ y = \rho\,\text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi,\ z = \rho\,\text{ημ}\,\varphi$$

ὅπου μεταξὺ τῶν ρ, θ, φ θὰ ὑφίστανται δύο ἀνεξάρτητες σχέσεις. Ἐὰν διαφορίσωμεν τὶς ἀνωτέρω σχέσεις καὶ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν (33.2) προκύπτει :

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\text{συν}^2\varphi\, d\theta^2 + \rho^2 d\varphi^2 \tag{33.3}$$

Παράδειγμα (33.1).— Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ μῆκος τοῦ τόξου :

$$x = \alpha\,\text{συν}\,t,\ y = \alpha\,\text{ημ}\,t,\ z = \beta t.\quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

Λ ύ σ ι ς. Ἔχομεν $\dot{x} = -\alpha\,\text{ημ}\,t$, $\dot{y} = \alpha\,\text{συν}\,t$, $\dot{z} = \beta$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (33.1) προκύπτει : $s = \int_0^{2\pi}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,dt = 2\pi(\alpha^2+\beta^2)$.

Παράδειγμα (33.2).— Νὰ εὑρεθῆ τὸ μῆκος τόξου τῆς γραμμῆς :

$$\bar{r} = (2\alpha^2 t,\ 3\alpha\beta t^2,\ 3\beta^2 t^3)$$

λαμβάνοντες ὡς ἀρχὴν τῶν τόξων τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων.

Λ ύ σ ι ς. Ἔχομεν :

$$\dot{\bar{r}} = (2\alpha^2,\ 6\alpha\beta t,\ 9\beta^2 t^2)$$
$$\dot{\bar{r}}^2 = 4\alpha^4 + 36\,\alpha^2\beta^2 t^2 + 81\,\beta^4 t^4 = (2\alpha^2 + 9\beta^2 t^2)^2$$

ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (33.1) προκύπτει :

$$s=\int_0^t (2a^2+9\beta^2t^2)\,dt = 2a^2t+3\beta^2t^3$$

Παράδειγμα (33.3). — Νά εὑρεθῆ τό μῆκος τόξου τῆς γραμμῆς: $2x^3=3a^2y$, $x^2=az$, λαμβάνοντες ὡς ἀρχήν τῶν τόξων τό σημεῖον μέ $x=a$.

Λ ύ σ ι ς. Διαφορίζομεν τίς ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς : $6x^2dx=3a^2dy$, $2xdx=adz$, ὁπότε λαμβάνοντες τήν x ὡς μεταβλητήν ὁλοκληρώσεως καί ἀντικαθιστῶντες ἐξ αὐτῶν τούς λόγους $dy:dx$, $dz:dx$ εἰς τόν τύπον (33.2) προκύπτει :

$$s=\int_a^x \sqrt{1+4a^{-4}x^4+4a^{-2}x^2}\;dx = \int_a^x (1+2a^{-2}x^2)\,dx = 2x^3:3a^2+x-5a:3 .$$

Παράδειγμα (33.4). — Νά εὑρεθῆ τό μῆκος τοῦ τόξου τῆς λοξοδρομίας:

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\quad \sqrt{x^2+y^2}\cdot ch\left(\beta\ \text{τοξεφ}\,\frac{y}{x}\right)=1$$

τό περιλαμβανόμενον μεταξύ τοῦ βορείου καί τοῦ νοτίου πόλου τῆς σφαίρας.

Λ ύ σ ι ς. Μετασχηματίζοντες τίς ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς εἰς σφαιρικές συντεταγμένες διά τῶν γνωστῶν σχέσεων προκύπτει : $\rho=a$, $\text{συν}\varphi\, ch\beta\theta=1$. Ἐξ αὐτῶν διαφορίζοντες θά ἔχωμεν $d\rho=0$, $\beta\,\text{συν}\varphi\, d\theta=\pm\, d\varphi$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τόν τύπον (34.4) προκύπτει : $ds^2=(a^2+a^2\beta^{-2})\,d\varphi^2$, $ds=a\sqrt{1+\beta^{-2}}\,d\varphi$. Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι οἱ πόλοι ἀντιστοιχοῦν διά $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$, δι' ὁλοκληρώσεως προκύπτει : $s=a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1+\beta^{-2}}\,d\varphi = \pi a\sqrt{1+\beta^2}:\beta$.

34. **Πρωτεύουσες εὐθεῖες καί πρωτεύοντα ἐπίπεδα.** — Ἐάν θεωρήσωμεν μίαν γραμμήν μέ διανυσματικήν ἐξίσωσιν τήν (32.6), ἀποδεικνύεται ὅπως διά τίς ἐπίπεδες γραμμές ὅτι τό παράγωγον διάνυσμα $\bar r'$, εἶναι τό μοναδιαῖον τοῦ $\dot{\bar r}$ καί θά τό παριστάνωμεν πάλι μέ $\bar\varepsilon$.

Ἀφοῦ λοιπόν τό $\bar r'$ εἶναι μοναδιαῖον θά εἶναι $\bar r'^2=1$ ἐκ τῆς ὁποίας παραγωγίζοντες ὡς πρός s προκύπτει $2\bar r'\bar r''=0$ δηλαδή τό διάνυσμα $\bar r''$ εἶναι κάθετον ἐπί τό $\bar r'$. Τό μοναδιαῖον διάνυσμα τοῦ $\bar r''$ θά τό παριστάνωμεν μέ τό σύμβολον $\bar\varpi$ καί θά τό λέμε πρωτοκάθετον διάνυσμα τῆς γραμμῆς εἰς τό ἀντίστοιχον σημεῖον αὐτῆς καί θά ἔχωμεν :

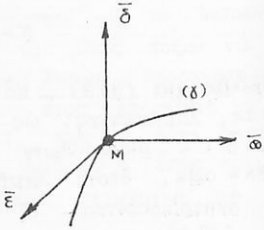
$$\bar\varpi = \bar r'' : |\bar r''| \qquad (34.1)$$

Τό ἐξωτερικόν γινόμενον τῶν διανυσμάτων $\bar\varepsilon, \bar\varpi$ λέγεται δικάθετον διάνυσμα τῆς γραμμῆς εἰς τό θεωρούμενον σημεῖον αὐτῆς, θά τό παριστάνωμεν μέ τό σύμβολον $\bar\delta$ καί θά ἔχωμεν :

$$\bar\delta = [\,\bar\varepsilon\,\bar\varpi\,] \qquad (34.2)$$

Τά τρία μοναδιαῖα διανύσματα $\bar\varepsilon, \bar\varpi, \bar\delta$ λέγονται πρωτεύοντα διανύσματα τῆς γραμμῆς καί σχηματίζουν ἐξ ὁρισμοῦ σέ κάθε σημεῖον τῆς γραμμῆς ἕνα δεξιόστροφον τρισορθογώνιον σύστημα τό ὁποῖον λέγεται

συνοδεῦον τρίεδρον αὐτῆς ἢ τρίεδρον τοῦ Frenet.
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι τὰ πρωτεύοντα διανύσματα, ὅταν ἡ γραμμὴ δίδεται διανυσματικῶς μὲ παράμετρον τὸ μῆκος τόξου αὐτῆς, δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων:



Σχ. (34.1)

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \bar{r}' \\ \bar{\omega} &= \bar{r}'' : |\bar{r}''| \\ \bar{\delta} &= [\bar{r}'\bar{r}''] : |\bar{r}''| \end{aligned}} \qquad (34.3)$$

Πράγματι οἱ μὲν δύο πρῶτοι τύποι εἶναι γνωστοὶ ὁ δὲ τρίτος προκύπτει ἀμέσως ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν (34.2) τὰ $\bar{\varepsilon}, \bar{\omega}$ ἐκ τῶν δύο πρώτων.
Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι τὰ πρωτεύοντα διανύσματα, ὅταν ἡ γραμμὴ δίδεται διανυσματικῶς μὲ παράμετρον τυχοῦσα, δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \dot{\bar{r}} : |\dot{\bar{r}}| \\ \bar{\omega} &= \Big[[\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}]\dot{\bar{r}}\Big] : |\dot{\bar{r}}|\,|[\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}]| \\ \bar{\delta} &= \Big[\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}\Big] : \Big|[\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}]\Big| \end{aligned}} \qquad (34.4)$$

Ὁ πρῶτος τύπος εἶναι ἤδη γνωστὸς διότι τὸ $\bar{\varepsilon}$ ἔχει ὁρισθῆ ὡς τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα τοῦ $\dot{\bar{r}}$. Ὁ δεύτερος τύπος προκύπτει ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν $\bar{\omega} = [\bar{\delta}\,\bar{\varepsilon}]$ ἡ ὁποία προφανῶς ἰσχύει ἕνεκα τοῦ (34.2), ἀντικαταστήσωμεν τὰ $\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}$ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου τῶν ἀνωτέρω τύπων.
Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τέλος τοῦ τρίτου τύπου θὰ ἔχωμεν:

$$\dot{\bar{r}} = d\bar{r} : dt = (d\bar{r} : ds)(ds : dt) = \bar{r}'\dot{s}$$
$$\ddot{\bar{r}} = (d\bar{r}' : dt)\dot{s} + \bar{r}'\ddot{s} = \bar{r}''\dot{s}^2 + \bar{r}'\ddot{s}$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐξωτερικῶς τὶς ἀνωτέρω σχέσεις θὰ ἔχωμεν:

$$[\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}] = [\bar{r}'\bar{r}'']\dot{s}^3$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ὅτι τὸ διάνυσμα τοῦ πρώτου μέλους εἶναι ὁμόρροπον πρὸς τὸ διάνυσμα τὸ ὁποῖον ἐμφανίζεται εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ δευτέρου μέλους τοῦ τρίτου ἐκ τῶν τύπων (34.3), διότι ὡς γνωστὸν εἶναι $\dot{s} > 0$. Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι τὸ $\bar{\delta}$ εἶναι τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος καὶ ἔτσι ἀπεδείχθη καὶ ὁ τρίτος τύπος.
Οἱ εὐθεῖες οἱ ὁποῖες διέρχονται ἀπὸ ἕνα σημεῖον τῆς γραμμῆς καὶ τῶν ὁποίων οἱ διευθύνσεις συμπίπτουν ἀντιστοίχως μὲ τὶς διευθύνσεις τῶν πρωτευόντων διανυσμάτων εἰς αὐτό, λέγονται πρωτεύουσες εὐθεῖες τῆς γραμμῆς καὶ εἰδικώτερον ἡ ἔχουσα τὴν διεύθυνσιν τοῦ $\bar{\varepsilon}$ λέγεται

ἐφαπτομένη, ἡ ἔχουσα τὴν διεύθυνσιν τοῦ $\bar{\varpi}$ λέγεται πρώτη κάθετος καὶ τέλος ἡ ἔχουσα τὴν διεύθυνσιν τοῦ $\bar{\delta}$ λέγεται δευτέρα κάθετος. Παριστάνοντες μὲ $\bar{x}$ τὴν διανυσματικὴν ἀκτῖνα τῆς ὁποίας τὸ πέρας γράφει τὶς πρωτεύουσες εὐθεῖες καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς τύπους (34.3) καὶ (34.4), οἱ διανυσματικὲς ἐξισώσεις τῶν πρωτευουσῶν εὐθειῶν κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας θὰ εἶναι :

$$\begin{array}{lll} \bar{x} = \bar{r} + \lambda\bar{\varepsilon}, & \bar{x} = \bar{r} + \lambda\bar{\varpi} & \bar{x} = \bar{r} + \lambda\bar{\delta} \\ \bar{x} = \bar{r} + \lambda\bar{r}', & \bar{x} = \bar{r} + \lambda\bar{r}'' & \bar{x} = \bar{r} + \lambda[\bar{r}'\bar{r}''] \\ \bar{x} = \bar{r} + \lambda\dot{\bar{r}}, & \bar{x} = \bar{r} + \lambda\left[[\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}]\dot{\bar{r}}\right] & \bar{x} = \bar{r} + \lambda[\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}] \end{array} \qquad (34.5)$$

Ἡ πρώτη σειρὰ τῶν ἐξισώσεων χρησιμοποιεῖται συνήθως ὅταν πραγματευόμεθα θεωρητικὰ ζητήματα, ἡ δευτέρα ὅταν ἡ παράμετρος εἶναι τὸ μῆκος τόξου καὶ ἡ τρίτη ὅταν ἡ παράμετρος εἶναι τυχοῦσα.
Τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς πρώτης καθέτου λέγεται ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς γραμμῆς, τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας καθέτου λέγεται κάθετον καὶ τέλος τὸ ἐπίπεδον τῆς δευτέρας καθέτου καὶ τῆς ἐφαπτομένης λέγεται εὐθειοποιοῦν ἐπίπεδον. Οἱ διανυσματικὲς ἐξισώσεις αὐτῶν κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας θὰ εἶναι ἀντιστοίχως :

$$\begin{array}{lll} (\bar{x}-\bar{r})\bar{\delta} = 0, & (\bar{x}-\bar{r})\bar{\varepsilon} = 0, & (\bar{x}-\bar{r})\bar{\varpi} = 0 \\ (\bar{x}-\bar{r}, \bar{r}'\bar{r}'') = 0, & (\bar{x}-\bar{r})\bar{r}' = 0, & (\bar{x}-\bar{r})\bar{r}'' = 0 \\ (\bar{x}-\bar{r}, \dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}) = 0, & (\bar{x}-\bar{r})\dot{\bar{r}} = 0, & (\bar{x}-\bar{r}, [\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}], \dot{\bar{r}}) = 0 \end{array} \qquad (34.6)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω διανυσματικῶν ἐξισώσεων τῶν πρωτευουσῶν εὐθειῶν καὶ τῶν πρωτευόντων ἐπιπέδων προκύπτουν κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον οἱ συνήθεις ἐξισώσεις αὐτῶν. Π.χ. ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x, y, z τὶς συντεταγμένες τῶν σημείων τῆς γραμμῆς καὶ μὲ ἀντίστοιχα κεφαλαῖα X, Y, Z τὶς συντεταγμένες τῶν σημείων τῆς ἐφαπτομένης, τότε οἱ συνήθεις ἐξισώσεις αὐτῆς ὅταν ἡ γραμμὴ δίδεται ὡς πρὸς τυχοῦσα παράμετρον t θὰ εἶναι:

$$\frac{X-x}{\dot{x}} = \frac{Y-y}{\dot{y}} = \frac{Z-z}{\dot{z}} \qquad (34.7)$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ συνήθης ἐξίσωσις π.χ. τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου εἶναι:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} = 0 \qquad (34.8)$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς παρονομαστὰς τῶν ἐξισώσεων (34.7) ἐπὶ dt, προκύπτουν οἱ ἰσοδύναμες ἐξισώσεις :

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz} \qquad (34.9)$$

ὁμοίως πολλαπλασιάζοντες τὴν δευτέρα σειρὰ τῆς ὁριζούσης (34.8) ἐπὶ dt καὶ τὴν τρίτη ἐπὶ dt^2, προκύπτει ἡ ἰσοδύναμος ἐξίσωσις :

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0 \qquad (34.10)$$

Οἱ ἐξισώσεις τῶν πρωτευουσῶν εὐθειῶν καὶ τῶν πρωτευόντων ἐπιπέδων γραμμένες ὑπὸ αὐτὴν τὴν μορφὴν δηλαδὴ μὲ διαφορικὰ ἀντὶ παραγώγων, εἶναι χρήσιμες διότι ἐξ αὐτῶν δύνανται νὰ προκύψουν οἱ ἀντίστοιχες ἐξισώσεις ὅταν ἡ γραμμὴ δίδεται ὄχι μόνον παραμετρικῶς ἀλλὰ καὶ ὑπὸ μίαν οἱανδήποτε ἄλλην μορφήν. Π.χ. ἐὰν ἡ γραμμὴ δίδεται ὑπὸ τὴν πλεγμένην μορφὴν (32.2), τότε οἱ συνήθεις ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης ἕνεκα τῶν σχέσεων ἀναλογίας (15.5) εἶναι :

$$(X-x):\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(y,z)}=(Y-y):\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(z,x)}=(Z-z):\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(x,y)} \qquad (34.11)$$

Ἐπίσης ἡ ἐξίσωσις τοῦ καθέτου ἐπιπέδου τῆς γραμμῆς θὰ εἶναι :

$$(X-x)\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(y,z)}+(Y-y)\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(z,x)}+(Z-z)\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(x,y)}=0 \qquad (34.12$$

Παράδειγμα (34.1).— Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις τῶν πρωτευουσῶν εὐθειῶν, τῶν πρωτευόντων ἐπιπέδων καθὼς καὶ τὰ πρωτεύοντα διανύσματα τῆς κυκλικῆς ἕλικος $\bar r=(\text{συν}t, \text{ημ}t, t)$ εἰς τὸ σημεῖον τῆς $t=\pi:2$.

Λ ύ σ ι ς. Ἔχομεν $\dot{\bar r}=(-\text{ημ}t, \text{συν}t, 1)$, $\ddot{\bar r}=(-\text{συν}t, -\text{ημ}t, 0)$ καὶ διὰ $t=\pi:2$ θὰ εἶναι $\bar r=(0,1,\pi:2)$, $\dot{\bar r}=(-1,0,1)$, $\ddot{\bar r}=(0,-1,0)$, $[\dot{\bar r}\ddot{\bar r}]=(1,0,1)$, $[[\dot{\bar r}\ddot{\bar r}]\dot{\bar r}]=(0,-2,0)$. Ἀντικαθιστῶντες τὰ διανύσματα αὐτὰ εἰς τὴν τρίτη σειρὰ τῶν τύπων (34.5), προκύπτουν οἱ διανυσματικὲς ἐξισώσεις τῶν πρωτευουσῶν εὐθειῶν καὶ ἐξ αὐτῶν δι ἀπαλειφῆς τῆς παραμέτρου λ οἱ συνήθεις ἐξισώσεις :

$\bar x=(0,1,\pi:2)+\lambda(-1,0,1)$, $\quad \bar x=(0,1,\pi:2)+\lambda(0,-2,0)$, $\quad \bar x=(0,1,\pi:2)+\lambda(1,0,1)$

$2(x+z)=\pi,\ y=1 \qquad x=0,\ 2z=\pi \qquad 2z=\pi+2x,\ y=1$

Ὁμοίως ἀντικαθιστῶντες τὰ διανύσματα εἰς τὴν τρίτη σειρὰ τῶν τύπων (34.6) προκύπτουν οἱ ἐξισώσεις τῶν πρωτευόντων ἐπιπέδων :

$[\bar x-(0,1,\pi:2)](1,0,1)=0$, $\quad [\bar x-(0,1,\pi:2)](-1,0,1)=0$, $\quad [\bar x-(0,1,\pi:2)](0,-2,0)=0$

$2x+2z-\pi=0 \qquad -2x+Z-\pi=0 \qquad -y+1=0$

Τέλος ἀπὸ τοὺς τύπους (34.4) προκύπτουν τὰ πρωτεύοντα διανύσματα :

$$\bar\varepsilon=(-1,0,1):\sqrt2, \quad \bar\varpi=(1,0,1):\sqrt2, \quad \bar\delta=(0,-1,0)$$

Παράδειγμα (34.2).— Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου τῆς γραμμῆς : $x^2+2y^2-z=0$, $x-y=0$ εἰς τὸ σημεῖον $(1,1,3)$.

Λύσις. Παριστάνοντες τὰ πρῶτα μέλη τῶν δύο ἐξισώσεων ἀντιστοίχως μὲ F,Φ θὰ ἔχωμεν : $F_x=2x=2$, $F_y=4y=4$, $F_z=-1$, $\Phi_x=1$, $\Phi_y=-1$, $\Phi_z=0$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες στὶς ἐξισώσεις (34.11) καὶ (34.12) προκύπτει διὰ μὲν τὴν ἐφαπτομένην ἡ ἐξίσωσις : $(x-1):2=(y-1):4=(z-3):(-1)$ καὶ διὰ τὸ κάθετον ἐπίπεδον ἡ ἐξίσωσις : $2(x-1)+4(y-1)-(z-3)=0$.

Παράδειγμα (34.3).— Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις τῶν πρωτευουσῶν εὐθειῶν, τῶν πρωτευόντων ἐπιπέδων καθὼς καὶ τὰ πρωτεύοντα διανύσματα τῆς γραμμῆς μὲ ἐξισώσεις : $y=x^2$, $z=x^4$.

Λύσις. Θέτοντες $x=t$ προκύπτει ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις $\bar r=(t,t^2,t^4)$ ἐκ τῆς ὁποίας διὰ παραγωγίσεως θὰ ἔχωμεν : $\dot{\bar r}=(1,2t,4t^3)$, $\ddot{\bar r}=(0,2,12t^2)$, $[\dot{\bar r}\ddot{\bar r}]=2(8t^3,-6t^2,1)$, $[[\dot{\bar r}\ddot{\bar r}]\dot{\bar r}]=2(-2t-24t^5,1-32t^6,6t^2+16t^4)$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν τρίτη σειρὰ τῶν ἐξισώσεων (34.5) καὶ θέτοντες x ἀντὶ t, προκύπτουν οἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης : $X-x=(Y-y):2x=(Z-z):4x^3$, τῆς πρώτης καθέτου : $-(X-x):(-2x-24x^5)=(Y-y):(1-32x^6)=(Z-z):(6x^2+16x^4)$ καὶ τῆς δευτέρας καθέτου : $(X-x):8x^3=-(Y-y):6x^2=Z-z$. Ἐπίσης ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν τρίτη σειρὰ τῶν τύπων (34.6), προκύπτουν ἀντιστοίχως οἱ ἐξισώσεις τοῦ ἐγγυτάτου τοῦ καθέτου καὶ τοῦ εὐθειοποιοῦντος ἐπιπέδου.

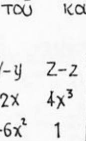
$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ 1 & 2x & 4x^3 \\ 0 & 2 & 12x^2 \end{vmatrix}=0,\quad X-x+(Y-y)2x+(Z-z)4x^3=0,\quad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ 1 & 2x & 4x^3 \\ 8x^3 & -6x^2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Τέλος ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς τύπους (34.4) προκύπτουν τὰ πρωτεύοντα διανύσματα : $\bar\varepsilon=(1,2x,4x^3):\sqrt{1+4x^2+16x^6}$,

$$\bar\varpi=(-2x-24x^5,\ 1-32x^6,\ 6x^2+16x^4):\sqrt{(2x+24x^5)^2+(1-32x^6)^2+(6x^2+16x^4)^2},$$

$$\bar\delta=(8x^3,-6x^2,1):\sqrt{64x^6+36x^4+1}$$

Παράδειγμα (34.4).— Δίδεται ἡ γραμμὴ $y=\operatorname{ch}x$, $z=\operatorname{sh}x$ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς τὴν ὁποίαν γράφει τὸ σημεῖον P τῆς ἐφαπτομένης τῆς δοθείσης γραμμῆς εἰς τὸ M διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $(MP)=-s$, ὅπου s ἡ καμπυλόγραμμος τετμημένη τοῦ M ὡς πρὸς ἀρχὴν τὸ σημεῖον μὲ $x=0$.



Λύσις. Θὰ ἔχωμεν $\overline{OM}=(x,\operatorname{ch}x,\operatorname{sh}x)$, $\overline{MP}=-s\bar\varepsilon$ καὶ $\overline{OP}=\overline{OM}+\overline{MP}$, ἐπομένως ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς τὴν ὁποίαν γράφει τὸ σημεῖον P θὰ εἶναι : $\overline{OP}=(x,\operatorname{ch}x,\operatorname{sh}x)-s\bar\varepsilon$ (1). Εἶναι ὅμως

$s=\int_0^x\sqrt{1+\operatorname{sh}^2x+\operatorname{ch}^2x}\,dx=\sqrt2\int_0^x\operatorname{ch}x\,dx=\sqrt2\operatorname{sh}x$, $ds=\sqrt2\operatorname{ch}x\,dx$,

$\bar\varepsilon=(dx:ds,\ dy:ds,\ dz:ds)=(1:\sqrt2\operatorname{ch}x,\ \operatorname{th}x:\sqrt2,\ 1:\sqrt2)$. Ἀντικαθιστῶντες αὐτὰ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) προκύπτει : $\overline{OP}=(x,\operatorname{ch}x,\operatorname{sh}x)-(\operatorname{th}x,\operatorname{sh}^2x:\operatorname{ch}x,\operatorname{sh}x)$, παριστάνοντες δὲ μὲ κεφαλαῖα X,Y,Z τὶς συντεταγμένες τοῦ P θὰ ἔχωμεν τὶς ζητούμενες ἐξισώσεις : $X = x - \text{th}x$, $Y = 1 : \text{ch}x$, $Z = 0$ ἐκ τῶν ὁποίων φαίνεται ὅτι τὸ P γράφει μίαν γραμμὴν τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y.

35. Καμπυλότης στρέψις καὶ τύποι τοῦ Frenet. — Ἔστω (γ) μία γραμμὴ τοῦ τριδιαστάτου χώρου μὲ ἐξίσωσιν $\bar{r} = \bar{r}(s)$, $M(s)$, $M_1(s+\Delta s)$ δύο γειτονικὰ σημεῖα αὐτῆς καὶ $\Delta\omega$ ἡ γωνία εἰς ἀκτίνια τὴν ὁποίαν σχηματίζουν τὰ ἐφαπτομενικὰ διανύσματα $\bar{\varepsilon}(s)$, $\bar{\varepsilon}(s+\Delta s)$ ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτά. Ἐπιζητῶντες ἕνα μέτρον διὰ τὴν ἀπόκλισιν μιᾶς γραμμῆς ἀπὸ τὴν εὐθύγραμμη πορεία, ὁρίζομεν τὴν καμπυλότητα u ὡς ἑξῆς :

Ὁρισμὸς (35.1). — *Τὸ πηλίκον $\Delta\omega : |\Delta s|$ λέγεται μέση καμπυλότης τῆς γραμμῆς ἀπὸ τὸ σημεῖον M μέχρι τὸ M_1 καὶ τὸ ὅριον αὐτῆς γιὰ $\Delta s \to 0$ λέγεται καμπυλότης τῆς γραμμῆς εἰς τὸ σημεῖον M, δηλαδὴ εἶναι :*

$$u(s) = \underset{\Delta s \to 0}{\text{ορ}}\ \Delta\omega : |\Delta s| \qquad (35.1)$$

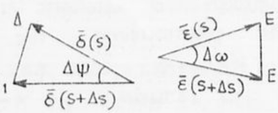
Ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν καὶ τὸ σχ.(35.1) θὰ ἔχωμεν διὰ $\Delta s \to 0$:

$$\text{ορ}\,\Delta\omega : |\Delta s| = \text{ορ}\,(\Delta\omega : EE_1)\cdot(EE_1 : |\Delta s|) = 1 \cdot \text{ορ}\,|\bar{\varepsilon}(s+\Delta s) - \bar{\varepsilon}(s)| : |\Delta s| = |\bar{\varepsilon}'|$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\bar{\varepsilon} = \bar{r}'$, $\bar{\varepsilon}' = \bar{r}''$ θὰ ἔχωμεν τὶς σχέσεις :

$$u(s) = |\bar{r}''|, \quad \bar{\varepsilon}' = u\bar{\varpi} \qquad (1)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ καμπυλότης τῶν γραμμῶν τοῦ τριδιαστάτου χώρου ἰσοῦται μὲ τὸ μέτρον τοῦ διανύσματος $\bar{r}''$, ἑπομένως εἶναι πάντοτε $u \geqslant 0$, ἐνῶ διὰ τὶς γραμμὲς τοῦ διδιαστάτου χώρου εἶναι $u \geqslant 0$ ἢ $u < 0$. Αὐτὸ θὰ συνέβαινε καὶ διὰ τὶς γραμμὲς αὐτὲς ἂν ὁρίζαμε τὸ $\bar{k}$ ὡς τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα τοῦ $\bar{r}''$. Δὲν τὸ κάναμε διότι θέλαμε ἐκεῖ τὸ κάθετον διάνυσμα $\bar{k}$ νὰ τὸ ὁρίσωμεν ἔτσι ὥστε τὸ σύστημα $(\bar{\varepsilon}, \bar{k})$ νὰ ἔχη τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν μὲ τὸ ζεῦγος τῶν βασικῶν διανυσμάτων $(\bar{i}, \bar{j})$. Αὐτὸ ὅμως δὲν θὰ εἶχε καμία σκοπιμότητα νὰ γίνη διὰ τὶς γραμμὲς τοῦ τριδιαστάτου χώρου διότι ὁ προσανατολισμὸς τοῦ ζεύγους $(\bar{\varepsilon}, \bar{\varpi})$ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ παρατηρητοῦ ὡς πρὸς τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον. Πράγματι ἐὰν καθήμενοι ἐπὶ τῆς μιᾶς ὄψεως τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου βλέπομεν τὸ ζεῦγος $(\bar{\varepsilon}, \bar{\varpi})$ ὡς δεξιόν, τότε καθήμενοι ἐπὶ τῆς ἄλλης ὄψεως θὰ τὸ βλέπομεν ὡς ἀριστερόν.



Σx.(35.1)

Ἐπιζητῶντες ἐπίσης ἕνα μέτρον διὰ τὴν ἀπόκλισιν μιᾶς γραμμῆς ἀπὸ τὴν ἐπίπεδη πορεία, ὁρίζομεν τὴν δευτέραν καμπυλότητα ἢ στρέψιν ὡς ἑξῆς :

Παραγωγίζοντες τὴν $\bar{\delta} = [\bar{\varepsilon}\bar{\varpi}]$ ὡς πρὸς s καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (1) θὰ ἔχωμεν $\bar{\delta}' = [\bar{\varepsilon}'\bar{\varpi}] + [\bar{\varepsilon}\bar{\varpi}'] = [u\bar{\varpi}, \bar{\varpi}] + [\bar{\varepsilon}\bar{\varpi}'] = [\bar{\varepsilon}\bar{\varpi}']$, ἐκ τῆς ὁποίας φαίνεται ὅτι τὸ $\bar{\delta}'$ εἶναι κάθετον ἐπὶ $\bar{\varepsilon}$. Ἐκ τῆς $\bar{\delta}^2 = 1$ διὰ παραγωγίσεως ἔχομεν $2\bar{\delta}\bar{\delta}' = 0$ δηλαδὴ τὸ $\bar{\delta}'$ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ $\bar{\delta}$, ἄρα θὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν γινόμενον $[\bar{\delta}\bar{\varepsilon}] = \bar{\varpi}$, ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν :

$$\bar{\delta}' = -\sigma\bar{\omega} \qquad (2)$$

ὅπου σ θά εἶναι κάποιος ὡρισμένος πραγματικός ἀριθμός, ὁ ὁποῖος θά ἐξαρτᾶται ἐν γένει ἀπό τό θεωρούμενον σημεῖον Μ τῆς γραμμῆς. Ἀπό τήν ἀνωτέρω σχέσιν λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν καί τό σχ. (35.1) θά ἔχωμεν διά $\Delta s \to 0$:

$$|\sigma| = |\bar{\delta}'| = \text{ορ}\,|\bar{\delta}(s+\Delta s) - \bar{\delta}(s)| : |\Delta s| = \text{ορ}\,(\Delta\psi : ZZ_1)\,\text{ορ}(ZZ_1 : |\Delta s|) = \text{ορ}\,\Delta\psi : |\Delta s|$$

δηλαδή ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ συντελεστοῦ σ ἰσοῦται μέ τό ὅριον τοῦ πηλίκου $\Delta\psi : |\Delta s|$ ὅπου $\Delta\psi$ παριστάνει τήν γωνίαν εἰς ἀκτίνια τήν ὁποίαν σχηματίζουν τά δικάθετα διανύσματα σέ δύο γειτονικά σημεῖα M, M_1 καί ἡ ὁποία ἰσοῦται μέ τήν γωνία τῶν ἐγγυτάτων ἐπιπέδων τῆς γραμμῆς εἰς αὐτά.

Ὁρισμός (35.2). — *Ὁ συντελεστής σ ὅπως ὁρίζεται ἀπό τήν σχέσιν $\bar{\delta}' = -\sigma\bar{\omega}$ λέγεται στρέψις ἤ δευτέρα καμπυλότης τῆς γραμμῆς εἰς τό σημεῖον $M(s)$.*

Οἱ ἐπίπεδες γραμμές ἔχουν στρέψιν μηδέν, διότι τό ἐγγύτατον ἐπίπεδον αὐτῶν ταυτιζόμενον μέ τό ἐπίπεδόν τους παραμένει σταθερόν ἑπομένως θά εἶναι : $\bar{\delta}$ = σταθερόν, $\bar{\delta}' = 0$ ὁπότε ἐκ τῆς (2) ἕπεται $\sigma = 0$.

Ἡ ἀκτίς καμπυλότητος R μιᾶς γραμμῆς τοῦ τριδιαστάτου χώρου ὁρίζεται πάλι ὡς ἀντίστροφος τῆς καμπυλότητος καί ἡ ἀκτίς στρέψεως τ ὡς ἀντίστροφος τῆς στρέψεως δηλαδή εἶναι : $R = 1/u$ καί $\tau = 1/\sigma$.

Πρότασις (35.1). — *Ὅταν ἡ ἐξίσωσις μιᾶς γραμμῆς τοῦ τριδιαστάτου χώρου δίδεται ὑπό τήν μορφήν $\bar{r} = \bar{r}(s)$ ὅπου s τό μῆκος τόξου αὐτῆς, τότε ἡ καμπυλότης καί ἡ στρέψις αὐτῆς δίδονται ἀπό τούς τύπους :*

$$u = |\bar{r}''|, \quad \sigma = (\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''') : \bar{r}''^2 \qquad (35.2)$$

καί ὅταν δίδεται ὑπό τήν μορφήν $\bar{r} = \bar{r}(t)$ ὅπου t τυχοῦσα παράμετρος, τότε ἡ καμπυλότης καί ἡ στρέψις δίδονται ἀπό τούς τύπους :

$$u = |[\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}]| : |\dot{\bar{r}}|^3, \quad \sigma = (\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}\dddot{\bar{r}}) : [\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}]^2 \qquad (35.3)$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ὁ πρῶτος τῶν τύπων (35.2) εἶναι ὁ πρῶτος τῶν τύπων (1) καί ἔχει ἤδη ἀποδειχθεῖ. Διά τήν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου πολλαπλασιάζομεν τήν σχέσιν $\bar{\delta}' = [\bar{\varepsilon}\bar{\omega}'] = -\sigma\bar{\omega}$ ἐσωτερικῶς ἐπί $\bar{\omega}$, ὁπότε προκύπτει $\sigma = -[\bar{\varepsilon}\bar{\omega}']\bar{\omega} = (\bar{\varepsilon}\bar{\omega}\bar{\omega}')$. Εἶναι ὅμως $\bar{\varepsilon} = \bar{r}'$, $\bar{\omega} = \bar{r}'' : u$, $\bar{\omega}' = \bar{r}''' : u - \bar{r}''u' : u^2$ ἄρα θά ἔχωμεν $\sigma = (\bar{r}', \bar{r}'' : u, \bar{r}''' : u - \bar{r}''u' : u^2) = (\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''') : u^2 - u'(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}'') : u^3$. Ἐπειδή ὅμως $u^2 = \bar{r}''^2$ καί τό δεύτερον μικτογινόμενον τοῦ τελευταίου μέλους εἶναι μηδέν, ἕπεται ἡ ἀλήθεια τοῦ δευτέρου τῶν τύπων (35.2).

Διά τήν ἀπόδειξιν τοῦ πρώτου ἐκ τῶν τύπων (35.3) θά ἔχωμεν : $u = |\bar{r}''| = |\bar{\varepsilon}'| = |d\bar{\varepsilon} : ds| = |d\bar{\varepsilon} : dt|\,|dt : ds|$ δηλαδή $u = |\dot{\bar{\varepsilon}}| : |\dot{s}|$ (3). Εἶναι ὅμως $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{r}} : \dot{s}$, $\dot{\bar{\varepsilon}} = (\ddot{\bar{r}}\dot{s} - \dot{\bar{r}}\ddot{s}) : \dot{s}^2 = [\ddot{\bar{r}}\dot{s}^2 - \dot{\bar{r}}(\dot{s}\ddot{s})] : \dot{s}^3$ καί ἐπειδή $\dot{s}^2 = \dot{\bar{r}}^2$, $2\dot{s}\ddot{s} = 2\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}$ θά ἔχωμεν $\dot{\bar{\varepsilon}} = [\ddot{\bar{r}}\dot{\bar{r}}^2 - \dot{\bar{r}}(\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}})] : \dot{s}^3 = [\dot{\bar{r}}[\ddot{\bar{r}}\dot{\bar{r}}]] : \dot{s}^3$. Ἀντικαθι-

στῶντες ἐκ τῆς τελευταίας τὸ $\dot{\bar\varepsilon}$ εἰς τὴν (3) προκύπτει $u=|[\dot{\bar r}[\ddot{\bar r}\dot{\bar r}]]|:\dot s^4=$ $=|\dot{\bar r}||[\ddot{\bar r}\dot{\bar r}]|:|\dot{\bar r}|^4=|[\dot{\bar r}\ddot{\bar r}]|:|\dot{\bar r}|^3$ δηλαδὴ ὁ ζητούμενος τύπος.
Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τέλος τοῦ δευτέρου ἐκ τῶν (35.3) ἔχομεν $\bar r'=\dot{\bar r}:\dot s$, $\bar r''=(\ddot{\bar r}\dot s-\dot{\bar r}\ddot s):\dot s^3$, $\bar r'''=[\dddot{\bar r}\dot s^2-3\ddot{\bar r}\dot s\ddot s+\dot{\bar r}(3\ddot s^2-\dot s\dddot s)]:\dot s^5$, ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει $(\bar r'\bar r''\bar r''')=(\dot{\bar r}\ddot{\bar r}\dddot{\bar r}):\dot s^6$ καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν δεύτερον ἐκ τῶν τύπων (35.2) θὰ ἔχωμεν: $\sigma=(\dot{\bar r}\ddot{\bar r}\dddot{\bar r}):\bar r''^2\dot s^6=(\dot{\bar r}\ddot{\bar r}\dddot{\bar r}):u^2|\dot{\bar r}|^6$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν τελευταία τὴν καμπυλότητα ἀπὸ τὸν πρῶτο τύπο προκύπτει: $\sigma=(\dot{\bar r}\ddot{\bar r}\dddot{\bar r})|\dot{\bar r}|^6:|[\dot{\bar r}\ddot{\bar r}]|^2|\dot{\bar r}|^6=(\dot{\bar r}\ddot{\bar r}\dddot{\bar r}):|[\dot{\bar r}\ddot{\bar r}]|^2$ δηλαδὴ ὁ ζητούμενος τύπος.

Πρότασις (35.2). — *Αἱ παράγωγοι ὡς πρὸς s τῶν πρωτευόντων διανυσμάτων δίδονται ἀπὸ τοὺς τύπους:*

$$\boxed{\begin{aligned}\bar\varepsilon' &= u\bar\varpi\\ \bar\varpi' &= -u\bar\varepsilon+\sigma\bar\delta\\ \bar\delta' &= -\sigma\bar\varpi\end{aligned}} \qquad (35.4)$$

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τύπων ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος ἔχουν ἤδη ἀποδειχθῆ διότι δὲν εἶναι ἄλλοι ἀπὸ τὸν δεύτερον ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ τὸν (2). Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου παραγωγίζομεν τὴν $\bar\varpi=[\bar\delta\bar\varepsilon]$ ὁπότε θὰ ἔχωμεν $\bar\varpi'=[\bar\delta'\bar\varepsilon]+[\bar\delta\bar\varepsilon']=[-\sigma\bar\varpi\bar\varepsilon]+[\bar\delta u\bar\varpi]=\sigma[\bar\varepsilon\bar\varpi]-u[\bar\varpi\bar\delta]=\sigma\bar\delta-u\bar\varepsilon$, δηλαδὴ ὁ ζητούμενος τύπος. Οἱ (35.4) λέγονται τύποι τοῦ Frenet καὶ εἶναι ἀπὸ τοὺς βασικότερους τύπου τῆς διαφορικῆς γεωμετρίας τῶν καμπύλων.
Οἱ τύποι τοῦ Frenet λαμβάνουν μίαν ἀξιοσημείωτον συμμετρικὴν μορφήν, εἰσάγοντες τὸ λεγόμενον διάνυσμα τοῦ Darboux:

$$\bar d=\sigma\bar\varepsilon+u\bar\delta \qquad (35.5)$$

Πράγματι ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἀνωτέρω διάνυσμα ἐξωτερικῶς ἐπὶ τὰ πρωτεύοντα διανύσματα θὰ ἔχωμεν:

$$\begin{aligned}[\bar d\bar\varepsilon] &= \sigma[\bar\varepsilon\bar\varepsilon]+u[\bar\delta\bar\varepsilon]=u\bar\varpi\\ [\bar d\bar\varpi] &= \sigma[\bar\varepsilon\bar\varpi]+u[\bar\delta\bar\varpi]=\sigma\bar\delta-u\bar\varepsilon\\ [\bar d\bar\delta] &= \sigma[\bar\varepsilon\bar\delta]+u[\bar\delta\bar\delta]=-\sigma\bar\varpi\end{aligned}$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἀνωτέρω σχέσεων ἰσοῦνται ἀντιστοίχως μὲ τὰ δεύτερα μέλη τῶν τύπων τοῦ Frenet, ἐπομένως δυνάμεθα νὰ τοὺς γράψωμεν ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\boxed{\bar\varepsilon'=[\bar d\bar\varepsilon],\ \bar\varpi'=[\bar d\bar\varpi],\ \bar\delta'=[\bar d\bar\delta]} \qquad (35.6)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι ἐὰν κινητὸν σημεῖον Μ διαγράφει μίαν γραμμὴν μὲ ταχύτητα τῆς ὁποίας τὸ μέτρον νὰ εἶναι $ds:dt=1$, τότε τὸ ἀντίστοιχον τρίεδρον Frenet κινεῖται ἐπὶ τῆς καμπύλης περιστρεφόμενον μὲ γωνιακὴν ταχύτητα ἴσην πρὸς τὸ διάνυσμα Darboux.

Ἀπὸ τὸν (35.5) ἕπεται ὅτι ὁ στιγμιαῖος ἄξων περιστροφῆς κεῖται ἐπὶ τοῦ εὐθειοποιοῦντος ἐπιπέδου διὰ δὲ τὶς ἐπίπεδες γραμμές, ἐπειδὴ ἔχουν $\sigma\equiv 0$, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδό τους.

Παράδειγμα (35.1). — Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ καμπυλότης καὶ ἡ στρέψις τῆς κυκλικῆς ἕλικος $\bar r=(\alpha\,\sigma\upsilon\nu t, \alpha\,\eta\mu t, \beta t)$.

Λύσις. Ἔχομεν $\dot{\bar r}=(-\alpha\,\eta\mu t, \alpha\,\sigma\upsilon\nu t, \beta)$, $\ddot{\bar r}=(-\alpha\,\sigma\upsilon\nu t, -\alpha\,\eta\mu t, 0)$, $\dddot{\bar r}=(\alpha\,\eta\mu t, -\alpha\,\sigma\upsilon\nu t, 0)$, $[\dot{\bar r}\ddot{\bar r}]^2=\dot{\bar r}^2\ddot{\bar r}^2-(\dot{\bar r}\ddot{\bar r})^2=\alpha^2(\alpha^2+\beta^2)$, $(\dot{\bar r}\ddot{\bar r}\dddot{\bar r})=\alpha^2\beta$ ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς τύπους (35.3) προκύπτει $u=\alpha:(\alpha^2+\beta^2)$, $\sigma=\beta:(\alpha^2+\beta^2)$, παρατηροῦμεν δὲ ὅτι καὶ ἡ καμπυλότης καὶ ἡ στρέψις εἶναι σταθερές.

Παράδειγμα (35.2). — Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ καμπυλότης καὶ ἡ στρέψις τῆς γραμμῆς $x=y^2$, $z=2y$ εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων.

Λύσις. Θέτοντες $y=t$ ἡ γραμμὴ γράφεται $\bar r=(t^2, t, 2t)$ ἡ δὲ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων ἀντιστοιχεῖ διὰ $t=0$. Ἔχομεν $\dot{\bar r}=(2t,1,2)=(0,1,2)$, $\ddot{\bar r}=(2,0,0)$, $\dddot{\bar r}=(0,0,0)$, $[\dot{\bar r}\ddot{\bar r}]^2=\dot{\bar r}^2\ddot{\bar r}^2-(\dot{\bar r}\ddot{\bar r})^2=20$, $(\dot{\bar r}\ddot{\bar r}\dddot{\bar r})=0$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς τύπους (35.3) προκύπτει $u=2/5$, $\sigma=0$. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ $\dddot{\bar r}$ εἶναι μηδὲν σὲ κάθε σημεῖον τῆς γραμμῆς ἑπομένως ἡ γραμμὴ ἔχει στρέψιν μηδὲν σὲ κάθε σημεῖον της. Αὐτὸ ἔπρεπε νὰ τὸ περιμένωμεν διότι ἀπὸ τὴν δευτέρα τῶν ἐξισώσεων τῆς γραμμῆς ἕπεται ὅτι εἶναι μία ἐπίπεδος γραμμὴ ἡ ὁποία κεῖται εἰς τὸ ἐπίπεδον $z=2y$.

Παράδειγμα (35.3). — Ἐὰν $\bar r=\bar r(s)$ εἶναι ἡ ἐξίσωσις μιᾶς γραμμῆς νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι: $\bar r'''=-u^2\bar\varepsilon+u'\bar\omega+u\sigma\bar\delta$.

Λύσις. Ἔχομεν $\bar r''=u\bar\omega$, $\bar r'''=u'\bar\omega+u\bar\omega'=u'\bar\omega+u(-u\bar\varepsilon+\sigma\bar\delta)=u'\bar\omega-u^2\bar\varepsilon+u\sigma\bar\delta$, δηλαδὴ ὁ ζητούμενος τύπος.

Παράδειγμα (35.4). — Ὁμοίως νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι διὰ κάθε γραμμὴν $\bar r=\bar r(s)$ ἰσχύει ἡ σχέσις: $\bar r''''=-3uu'\cdot\bar\varepsilon+(u''-u^3-u\sigma^2)\bar\omega+(2u'\sigma+u\sigma')\bar\delta$.

Λύσις. Παραγωγίζοντες τὴν εὑρεθεῖσα εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα σχέσιν ὡς πρὸς s θὰ ἔχωμεν: $\bar r''''=-2uu'\bar\varepsilon-u^2\cdot u\bar\omega+u''\bar\omega+u'(-u\bar\varepsilon+\sigma\bar\delta)+u'\sigma\bar\delta+u\sigma'\bar\delta+u\sigma(-\sigma\bar\omega)$, ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται τὸ ζητούμενον.

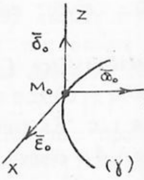
36. Κανονικές ἐξισώσεις γραμμῆς. — Ἔστω M_0 ὁμαλὸν σημεῖον μιᾶς ἀναλυτικῆς γραμμῆς μὲ διανυσματικὴν ἐξίσωσιν $\bar r=\bar r(s)$ ὡς πρὸς ἕνα σύστημα ἀξόνων M_0xyz τοῦ ὁποίου τὰ βασικὰ διανύσματα ταυτίζονται ἀντιστοίχως μὲ τὰ πρωτεύοντα διανύσματα $\bar\varepsilon_0, \bar\omega_0, \bar\delta_0$ τῆς γραμμῆς εἰς τὸ M_0 σχ(36.1). Ἐὰν λάβωμεν ὡς ἀρχὴν τῶν τόξων τὸ σημεῖον M_0 καὶ παραστήσωμεν μὲ u_0, σ_0 τὴν καμπυλότητα καὶ τὴν στρέψη εἰς αὐτό, τότε ἀναπτύσσοντες τὴν $\bar r(s)$ κατὰ Maclaurin θὰ ἔχωμεν:

$$\bar{r}(s) = \bar{r}(0) + \frac{s}{1!}\,\bar{r}'(0) + \frac{s^2}{2!}\,\bar{r}''(0) + \frac{s^3}{3!}\,\bar{r}'''(0)\,\frac{s^4}{4!}\,\bar{r}''''(0) + \cdots \qquad (1)$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸν πρῶτον ἐκ τῶν τύπων τοῦ Frenet καὶ τὶς σχέσεις ποὺ ἀποδείξαμε εἰς τὰ δύο τελευταῖα παραδείγματα καθὼς καὶ τὶς γενόμενες παραδοχὲς διὰ τὴν γραμμήν, θὰ ἔχωμεν τὶς σχέσεις:

$$\bar{r}(0)=0,\quad \bar{r}'(0)=\bar{\varepsilon}_0=\bar{i},\quad \bar{r}''(0)=u_0\bar{\omega}_0=u_0\bar{j}$$

$$\bar{r}'''(0) = -u_0^2\bar{\varepsilon}_0 + u_0'\bar{\omega}_0 + u_0\sigma_0\bar{\delta}_0 = -u_0\bar{i} + u_0'\bar{j} + u_0\sigma_0\bar{k},\quad \bar{r}''''(0)=\cdots$$

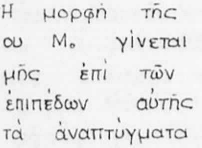


Σx. (36.1)

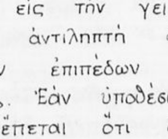
Ἀντικαθιστῶντες τὶς ἀνωτέρω σχέσεις εἰς τὴν (1) καὶ παριστάνοντες μὲ x, y, z τὶς συντεταγμένες τῆς $\bar{r}$ εἰς τὸ σύστημα M_0xyz προκύπτει :

$$\begin{aligned} x &= s - \frac{u_0^2}{6}\,s^3 - \frac{u_0u_0'}{8}\,s^4 + \cdots \\ y &= \frac{u_0}{2}\,s^2 + \frac{u_0'}{6}\,s^3 + \frac{1}{24}\left(u_0'' + u_0^3 - u_0\tau_0^2\right)s^4 + \cdots \qquad (36.1) \\ z &= \frac{u_0\tau_0}{6}\,s^3 + \frac{1}{24}\left(2u_0'\tau_0 + u_0\tau_0'\right)s^4 + \cdots \end{aligned}$$

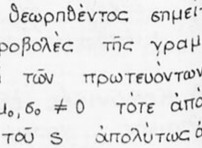
Ἀπὸ τὴν πρώτη ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων προκύπτει ὅτι διὰ s ἀπολύτως ἀρκετὰ μικρὸν τὸ x εἶναι ὁμόσημον πρὸς τὸ s. Ἀπὸ τὴν δεύτερη προκύπτει ὅτι διὰ $u_0 \neq 0$ καὶ s ἀπολύτως ἀρκετὰ μικρὸν τὸ y εἶναι θετικόν, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὸ εὐθειοποιοῦν ἐπίπεδον εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον M_0, δὲν διαπερνάει τὴν γραμμὴν ἀλλὰ τὴν ἀφίνει στὴν γειτονιὰ τοῦ M_0 εἰς τὸ ἴδιο μέρος τοῦ χώρου ὡς πρὸς αὐτό, πρὸς τὸ ὁποῖον δείχνει τὸ πρωτοκάθετον διάνυσμα. Τέλος ἀπὸ τὴν τρίτη ἐξίσωσιν ἔπεται ὅτι διὰ $u_0\sigma_0 \neq 0$ τὸ z ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ πρόσημον τοῦ s, ἐπομένως τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς γραμμῆς διαπερνάει τὴν γραμμὴν εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον.



Σx. (36.2)



Σx. (36.3)



Σx. (36.4)

Ἡ μορφὴ τῆς γραμμῆς εἰς τὴν γειτονιὰ τοῦ θεωρηθέντος σημείου M_0 γίνεται καλλίτερα ἀντιληπτὴ ἀπὸ τὶς προβολὲς τῆς γραμμῆς ἐπὶ τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων δηλαδὴ ἐπὶ τῶν πρωτευόντων ἐπιπέδων αὐτῆς εἰς τὸ M_0. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι $u_0, \sigma_0 \neq 0$ τότε ἀπὸ τὰ ἀναπτύγματα (36.1) ἔπεται ὅτι διὰ τιμὲς τοῦ s ἀπολύτως ἀρκετὰ μικρὲς οἱ προβολὲς αὐτὲς ὁρίζονται κατὰ προσέγγισιν ἀντιστοίχως ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις :

$$\begin{cases} x = s \\ y = \dfrac{u_0}{2}\,s^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{u_0}{2}\,s^2 \\ z = \dfrac{u_0\sigma_0}{6}\,s^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = \dfrac{u_0\sigma_0}{6}\,s^3 \\ x = s \end{cases} \qquad (36.2)$$

Ἐξ αὐτῶν προκύπτει ἀμέσως ὅτι ἡ προβολὴ τῆς γραμμῆς ἐπὶ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου εἶναι κατὰ προσέγγισιν μία παραβολὴ μὲ ἄξονα τὴν πρώτη κάθετο τῆς γραμμῆς σχ. (36.2), ἡ προβολὴ ἐπὶ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου εἶναι κατὰ προσέγγισιν μία ἡμικυβικὴ παραβολὴ συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὴν πρώτη κάθετο σχ (36.3) καὶ τέλος ἡ προβολὴ τῆς γραμμῆς ἐπὶ τοῦ εὐθειοποιοῦντος ἐπιπέδου εἶναι κατὰ προσέγγισιν μία κυβικὴ παραβολὴ σχ. (36.4).

Παράδειγμα (36.1).— Ἐὰν εἰς ἕνα σημεῖον μιᾶς γραμμῆς μηδενίζεται ἡ καμπυλότης ὄχι ὅμως καὶ ἡ παράγωγος αὐτῆς, τότε τὸ εὐθειοποιοῦν ἐπίπεδον εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ διαπερνάει τὴν γραμμήν.

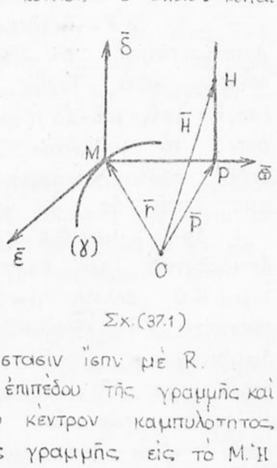
Λ ύ σ ι ς. Ἐὰν M_0 εἶναι τὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς διὰ τὸ ὁποῖον $u_0=0$, $u'_0\neq 0$, τότε ἀπὸ τὸ δεύτερο ἐκ τῶν ἀναπτυγμάτων (36.1) προκύπτει ὅτι διὰ s ἀπολύτως ἀρκετὰ μικρὸν τὸ y θὰ ἔχῃ τὸ πρόσημον τοῦ s, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται τὸ ζητούμενον.

37. Κέντρον καί κύκλος καμπυλότητος.— Καλοῦμεν κέντρον καμπυλότητος μιᾶς γραμμῆς $\bar{r}=\bar{r}(s)$ εἰς ἕνα σημεῖον αὐτῆς $M(s)$, τὸ σημεῖον P τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὸ πέρας τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος:

$$\bar{p} = \bar{r} + R\,\bar{\omega} \qquad (37.1)$$

Κύκλος καμπυλότητος εἰς τὸ M, λέγεται ὁ κύκλος ὁ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου τῆς γραμμῆς, ἔχει κέντρον τὸ κέντρον καμπυλότητος P καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς γραμμῆς εἰς τὸ σημεῖον M. Οἱ ἐξισώσεις τοῦ κύκλου καμπυλότητος θὰ εἶναι προφανῶς:

$$(\bar{x}-\bar{r})\cdot\bar{\delta} = 0,\quad (\bar{x}-\bar{p})^2 = R^2 \qquad (37.2)$$



Σχ. (37.1)

διότι ἡ μὲν πρώτη ἐκφράζει ὅτι ἡ ἀνωτέρω καμπύλη κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου τῆς γραμμῆς ἡ δὲ ἄλλη ὅτι τὰ σημεῖα τῆς x ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον καμπυλότητος P ἀπόστασιν ἴσην μὲ R.

Ἡ εὐθεῖα HP ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου τῆς γραμμῆς καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν πρώτην κάθετον εἰς τὸ κέντρον καμπυλότητος λέγεται πολικὸς ἄξων ἢ πολικὴ εὐθεῖα τῆς γραμμῆς εἰς τὸ M. Ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις αὐτοῦ θὰ εἶναι προφανῶς:

$$\bar{x} = \bar{r} + R\bar{\omega} + \lambda\bar{\delta} \qquad (37.3)$$

ὅπου λ παράμετρος εἰς τὶς τιμὲς τῆς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν τὰ σημεῖα τοῦ ἄξονος. Τέλος καλοῦμεν ἐγγυτάτη σφαῖρα τῆς γραμμῆς εἰς τὸ Μ, τὴν σφαῖρα ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ τῆς γραμμῆς καὶ ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον Η τοῦ πολικοῦ ἄξονος τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὸ πέρας τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος :

$$\bar{H} = \bar{r} + R\bar{\varpi} + R'\tau\bar{\delta} \qquad (37.4)$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας θὰ εἶναι λοιπὸν ἐξ ὁρισμοῦ :

$$(\bar{x} - \bar{H})^2 = R^2 + R'^2\tau^2 \qquad (37.5)$$

Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν ἐγγυτάτων σφαιρῶν μιᾶς γραμμῆς εἶναι μία καμπύλη μὲ διανυσματικὴν ἐξίσωσιν προφανῶς τὴν (37.4) καὶ λέγεται σφαιροκεντρικὴ ἢ πολικὴ καμπύλη τῆς δοθείσης γραμμῆς.

Παράδειγμα (37.1).— Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ πολικὸς ἄξων μιᾶς γραμμῆς εἰς τὸ σημεῖον $M(s)$ εἶναι ἡ ὁριακὴ θέσις τῆς τομῆς τῶν καθέτων ἐπιπέδων τῆς γραμμῆς εἰς τὰ σημεῖα $M(s)$ καὶ $M_1(s+\Delta s)$, ὅταν $\Delta s \to 0$.

Λύσις. Οἱ ἐξισώσεις τῶν καθέτων ἐπιπέδων εἰς τὰ Μ καὶ M_1 γράφονται ἀντιστοίχως :

$$\bar{x} = \bar{r}(s) + \mu\bar{\varpi}(s) + \lambda\bar{\delta}(s), \quad [\bar{x} - \bar{r}(s+\Delta s)]\,\bar{\varepsilon}(s+\Delta s) = 0 \qquad (1)$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν πρώτη ἐξ αὐτῶν εἰς τὴν δεύτερη καὶ ἀναπτύσσοντες κατὰ Taylor θὰ ἔχωμεν : $[\bar{r}(s+\Delta s) - \bar{r}(s) - \mu\bar{\varpi}(s) - \lambda\bar{\delta}(s)]\,\bar{\varepsilon}(s+\Delta s) = 0$, $(\Delta s.\bar{r}' + \Delta s\bar{\upsilon}_1 - \mu\bar{\varpi} - \lambda\bar{\delta})(\bar{\varepsilon} + \Delta s\bar{\varepsilon}' + \Delta s\cdot\bar{\upsilon}_2) = 0$, ὅπου $\bar{\upsilon}_1, \bar{\upsilon}_2$ διανύσματα ἔχοντα ὅριον τὸ μηδενικὸν διάνυσμα ὅταν $\Delta s \to 0$. Ἐκτελοῦντες τὸν ἐσωτερικὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ διατάσσοντες κατὰ τὶς ἀνιούσες δυνάμεις τοῦ Δs θὰ ἔχωμεν :

$$\Delta s\,[1 - \mu u + \bar{\upsilon}_1\bar{\varepsilon} - (\mu\bar{\varpi} + \lambda\bar{\delta})\,\bar{\upsilon}_2] + \Delta s^2(\bar{\varepsilon} + \bar{\upsilon}_1)(u\bar{\varpi} + \bar{\upsilon}_2) = 0$$

Διαιροῦντες μὲ Δs καὶ μετὰ ὑποθέτοντες ὅτι $\Delta s \to 0$ προκύπτει $1 - \mu u = 0$ δηλαδὴ $\mu = R$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν πρώτη τῶν (1) προκύπτει ἡ ἐξίσωσις (37.3) τοῦ πολικοῦ ἄξονος.

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ πολικὸς ἄξων τέμνει τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον εἰς τὸ κέντρον καμπυλότητος καὶ ὅτι δί ἐπίπεδον γραμμὴν οἱ τομὲς τῶν δύο γειτονικῶν καθέτων ἐπιπέδων μετὰ τοῦ ἐγγυτάτου εἶναι ἀντιστοίχως δύο γειτονικὲς κάθετες τῆς γραμμῆς, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ κέντρον καμπυλότητος ἐπιπέδου γραμμῆς εἶναι ἡ ὁριακὴ θέσις τοῦ σημείου τομῆς τῶν καθέτων τῆς γραμμῆς εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ M_1 ὅταν $\Delta s \to 0$.

Παράδειγμα (37.2).— Νά εὑρεθῆ ἡ καμπυλότης καί ἡ στρέψις τῆς πολικῆς καμπύλης μιᾶς δοθείσης γραμμῆς.

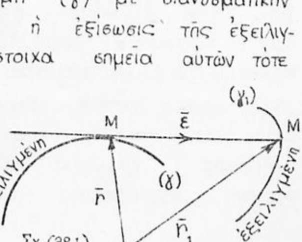
Λύσις. Ἐάν ἡ δοθεῖσα γραμμή (γ) ἔχῃ διανυσματικήν ἐξίσωσιν $\bar{r}=\bar{r}(s)$, τότε ἡ διανυσματική ἐξίσωσις τῆς πολικῆς καμπύλης (γ_1) εἶναι ἡ (37.4). Πρός διάκρισιν θά σημειώνωμεν τά διάφορα μεγέθη πού ἀντιστοιχοῦν εἰς τήν (γ_1), θέτοντες τόν δείκτην 1. Παραγωγίζομεν λοιπόν τήν ἐξίσωσιν (37.4) ὡς πρός s_1 καί ἔχομεν : $\bar{\varepsilon}_1 = d\bar{r}_1 : ds_1 = (d\bar{r}_1 : ds)\cdot(ds : ds_1) = (\bar{r}' + R'\bar{\omega} + R\bar{\omega}' + R''\tau\bar{\delta} + R'\tau'\bar{\delta} + R'\tau\bar{\delta}')\cdot ds : ds_1 = [\bar{\varepsilon} + R'\bar{\omega} + R(-u\bar{\varepsilon} + \sigma\bar{\delta}) + R''\tau\bar{\delta} + R'\tau'\bar{\delta} + R'\tau(-\sigma\bar{\omega})]\, ds : ds_1 = \bar{\delta}(R : \tau + R'\tau' + R''\tau)\, ds : ds_1$. Ἀπό τήν σχέσιν αὐτήν ἔπεται ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῆς πολικῆς καμπύλης εἶναι παράλληλος πρός τήν δευτέρα κάθετον τῆς γραμμῆς, ἐπομένως ἐάν προσανατολίσωμεν τήν (γ_1) ἔτσι ὥστε νά εἶναι : $\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\delta}$ (1) θά ἔχωμεν μεταξύ τῶν διαφορικῶν τῶν τόξων τήν σχέσιν : $ds_1 : ds = R:\tau + R'\tau' + R''\tau = R:\tau + (\tau R')'$ (2). Παραγωγίζοντες τήν (1) ὡς πρός s_1 θά ἔχωμεν: $u_1\bar{\omega}_1 = (d\bar{\delta} : ds)(ds : ds_1) = -\sigma\bar{\omega}\, ds : ds_1$, δηλαδή τά πρωτοκάθετα διανύσματα εἶναι παράλληλα. Ἐάν λάβωμεν $\bar{\omega}_1 = -\bar{\omega}$ (3), τότε ἀπό τήν προηγουμένη σχέση καί τήν (2) προκύπτει : $R_1 = R + \tau(\tau R')'$ (4). Πολλαπλασιάζοντες ἐξωτερικῶς τίς (1) καί (3) θά ἔχωμεν : $\bar{\delta}_1 = [\bar{\varepsilon}_1 \bar{\omega}_1] = [\bar{\delta}, -\bar{\omega}] = [\bar{\omega}\bar{\delta}]$ δηλαδή $\bar{\delta}_1 = \bar{\varepsilon}$. Παραγωγίζοντες τέλος αὐτήν ὡς πρός s_1 θά ἔχωμεν : $-\sigma_1\bar{\omega}_1 = (d\bar{\varepsilon} : ds)\cdot(ds : ds_1) = u\bar{\omega}\cdot(ds : ds_1)$ καί ἕνεκα τῶν (2) καί (3) θά εἶναι : $\tau_1 = [R + \tau(\tau R')'] \; R : \tau$. (5). Ἐκ τῶν (4) καί (5) πολλαπλασιάζοντες κατά μέλη προκύπτει ἡ σχέσις : $RR_1 = \tau\tau_1$.

Ἐάν ἡ δοθεῖσα γραμμή ἔχῃ σταθερήν καμπυλότητα θά εἶναι $R'=0$, ἐπομένως ἡ πολική καμπύλη ταυτίζεται μέ τήν καμπύλην τήν ὁποίαν γράφει τό κέντρον καμπυλότητος τῆς γραμμῆς καί ἔχομεν δι' αὐτήν ἐκ τῶν (4) καί (5), $R_1 = R$, $\tau_1 = R^2 : \tau$ (6).

38. Ἐνειλιγμένη καί ἐξειλιγμένη γραμμῆς.

— Ἐάν δύο γραμμές συσχετίζονται ἔτσι ὥστε οἱ ἐφαπτόμενες τῆς πρώτης νά εἶναι οἱ πρωτοκάθετες εὐθεῖες τῆς δευτέρας εἰς τά ἀντίστοιχα σημεῖα, τότε ἡ μέν πρώτη λέγεται ἐνειλιγμένη τῆς δευτέρας αὐτή δέ ἐξειλιγμένη τῆς πρώτης.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς δίδεται ἡ γραμμή (γ) μέ διανυσματικήν ἐξίσωσιν $\bar{r} = \bar{r}(s)$ καί ζητεῖται νά εὑρεθῆ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐξειλιγμένης (γ_1). Ἐάν M, M_1 εἶναι δύο ἀντίστοιχα σημεῖα αὐτῶν τότε ἀπό τόν δοθέντα ὁρισμόν καί ἀπό τό σχ. (38.1) ἔπεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐξειλιγμένης θά εἶναι τῆς μορφῆς $\bar{r}_1 = \bar{r} + \lambda\bar{\varepsilon}$ ὅπου λ προσδιοριστέα συνάρτησις. Παραγωγίζοντες ὡς πρός s τήν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν προκύπτει : $\dot{\bar{r}}_1 = \bar{\varepsilon} + \lambda'\bar{\varepsilon} + \lambda\bar{\varepsilon}'$, ὁπότε λαμβάνοντες ὑπ'



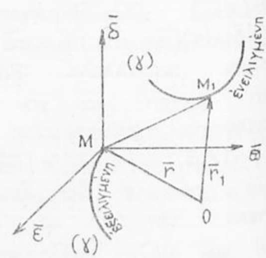
Σχ. (38.1)

ὄψιν ὅτι τὸ $\bar{\varepsilon}$ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ $\dot{\bar{r}}$ δηλαδὴ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς γραμμῆς (γ_1) θὰ ἔχωμεν: $0=\dot{\bar{r}}_1\bar{\varepsilon}=(1+\lambda')\bar{\varepsilon}^2+\lambda\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}'=1+\lambda'$ δηλαδὴ $d\lambda=-ds$ καὶ δι' ὁλοκληρώσεως προκύπτει $\lambda=-(s+c)$ ὅπου c αὐθαίρετος σταθερά· ἀντικαθιστῶντες τὴν λ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐξειλιγμένης:

$$\bar{r}_1=\bar{r}-(s+c)\,\bar{\varepsilon} \qquad (38.1)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν φαίνεται ὅτι μία δοσμένη γραμμὴ ἔχει ἄπειρες ἐξειλιγμένες, οἱ ὁποῖες προκύπτουν γιὰ τὶς διάφορες τιμὲς τῆς αὐθαιρέτου σταθερᾶς c.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι μᾶς δίδεται ἡ γραμμὴ (γ) μὲ διανυσματικὴν ἐξίσωσιν τὴν $\bar{r}=\bar{r}(s)$ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐνειλιγμένης (γ_1). Ἐὰν M καὶ M_1 εἶναι δύο ἀντίστοιχα σημεῖα, ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ $\overline{MM_1}$ θὰ κεῖται εἰς τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς (γ) σχ. (38.2), ἑπομένως ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐνειλιγμένης θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\bar{r}_1=\bar{r}+\lambda\bar{\varpi}+\mu\bar{\delta}$, ὅπου λ,μ προσδιοριστέες συναρτήσεις. Παραγωγίζοντες τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὡς πρὸς s προκύπτει: $\dot{\bar{r}}_1=\bar{\varepsilon}+\lambda'\bar{\varpi}+\lambda(-u\bar{\varepsilon}+\sigma\bar{\delta})+\mu'\bar{\delta}-\mu(-\sigma\bar{\varpi})=(1-u\lambda)\bar{\varepsilon}+(\lambda'-\mu\sigma)\bar{\varpi}+(\lambda\sigma+\mu')\bar{\delta}$. Τὸ διάνυσμα αὐτὸ ἐπειδὴ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ $\overline{MM_1}=\lambda\bar{\varpi}+\mu\bar{\delta}$, θὰ ἔχωμεν $1-u\lambda=0$ δηλαδὴ $\lambda=R$ (1)



Σχ. (38.2)

καὶ $(\lambda'-\mu\sigma):\lambda=(\lambda\sigma+\mu'):\mu$ ἐκ τῆς ὁποίας ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸ λ καὶ λύσωμεν ὡς πρὸς σ προκύπτει: $\sigma=(\mu R'-\mu' R):(\mu^2+R^2)$ καὶ ἐξ αὐτῆς δι' ὁλοκληρώσεως: $\int_0^s \sigma ds+c=$ τοξ εφ$(-\mu:R)$. Ἐξ αὐτῆς προκύπτει $\mu=-R\,$εφ$\left(\int_0^s \sigma ds+c\right)$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τῶν λ,μ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐνειλιγμένης:

$$\bar{r}_1=\bar{r}+R\bar{\varpi}+-R\,\text{εφ}\left(\int_0^s \sigma ds+c\right)\bar{\delta} \qquad (38.2)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν προκύπτει πάλι ὅτι μία δοσμένη γραμμὴ ἔχει ἄπειρες ἐνειλιγμένες, οἱ ὁποῖες προκύπτουν γιὰ τὶς διάφορες τιμὲς τῆς αὐθαιρέτου σταθερᾶς c.

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (38.2) φαίνεται ἀμέσως ὅτι γιὰ νὰ εἶναι ὁ τόπος τῶν κέντρων καμπυλότητος μιᾶς γραμμῆς μία ἐνειλιγμένη αὐτῆς, πρέπει ὁ συντελεστὴς τοῦ $\bar{\delta}$ νὰ εἶναι μηδὲν καὶ αὐτὸ θὰ γίνεται μόνον ὅταν $\sigma=0$, δηλαδὴ ὅταν ἡ γραμμὴ εἶναι ἐπίπεδος.

Ἐξ ὅλων αὐτῶν συμπεραίνομεν ὅτι τὰ περὶ ἐνειλιγμένης καὶ ἐξειλιγμένης γραμμῆς τοῦ διδιαστάτου χώρου δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς μερικαὶ περιπτώσεις τῶν ὅσων ἀναπτύξαμε εἰς τὸ ἐδάφιον αὐτό.

Παράδειγμα (38.1).— Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ καμπυλότης τῆς ἐξειλιγμένης μιᾶς γραμμῆς δίδεται ἀπό τήν σχέσιν : $u_1^2=(u^2+\sigma^2):u^2(s+c)^2$.

Λ ύ σ ι ς. Ἀπό τήν ἐξίσωση (38.1) διά παραγωγίσεως ἔχομεν : $\dot{\bar{r}}_1=\bar{\varepsilon}-\bar{\varepsilon}-(s+c)\bar{\varepsilon}'=-(s+c)u\bar{\varpi}$, $\ddot{\bar{r}}_1=-u\bar{\varpi}-(s+c)u'\bar{\varpi}-(s+c)u\bar{\varpi}'=-[u+(s+c)u']\bar{\varpi}-(s+c)u(-u\bar{\varepsilon}+\sigma\bar{\delta})$, $[\dot{\bar{r}}_1\ddot{\bar{r}}_1]=-(s+c)^2u^3[\bar{\varpi}\bar{\varepsilon}]+(s+c)^2u^2\sigma[\bar{\varpi}\bar{\delta}]=(s+c)^2u^3\delta+(s+c)^2u^2\sigma\bar{\varepsilon}$, $[\dot{\bar{r}}_1\ddot{\bar{r}}_2]^2=(s+c)^4u^4(u^2+\sigma^2)$, $\dot{\bar{r}}_1^2=(s+c)^2u^2$. Ἀντικαθιστῶντες τίς δύο τελευταῖες εἰς τόν πρῶτον ἐκ τῶν τύπων (35.3) προκύπτει τό ζητούμενον.

Παράδειγμα (38.2).— Νά εὑρεθῆ ἡ ἐξειλιγμένη τῆς κυκλικῆς ἕλικος μέ ἐξίσωσιν : $\bar{r}=(\alpha\,\text{συν}t,\ \alpha\,\text{ημ}t,\ \beta t)$.

Λ ύ σ ι ς. Ἔχομεν $\dot{\bar{r}}=(-\alpha\,\text{ημ}t,\ \alpha\,\text{συν}t,\ \beta)$, $\bar{\varepsilon}=(-\alpha\,\text{ημ}t,\ \alpha\,\text{συν}t,\ \beta):\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $s=\int_0^t\sqrt{\dot{\bar{r}}^2}\,dt=\int_0^t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,dt=t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, ἐπομένως ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν ἐξίσωσιν (38.1) προκύπτει ἡ ἐξίσωσις : $\bar{r}_1=(\alpha\,\text{συν}t,\ \alpha\,\text{ημ}t,\ \beta t)-(t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+c)\cdot(-\alpha\,\text{ημ}t,\ \alpha\,\text{συν}t,\ \beta):\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, ἐκ τῆς ὁποίας θέτοντες $c=c_1\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ προκύπτει τελικῶς ἡ ἐξίσωσις :

$$\bar{r}_1=[\alpha\,\text{συν}t+\alpha(t+c_1)\,\text{ημ}t,\ \alpha\,\text{ημ}t-\alpha(t+c_1)\,\text{συν}t,\ -\beta c_1]$$

Ἀπό τήν ἐξίσωσιν αὐτήν προκύπτει ὅτι οἱ ἐξειλιγμένες εἶναι ἐπίπεδες γραμμές τῶν ὁποίων τά ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπί τόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου ἐπί τοῦ ὁποίου κεῖται ἡ κυκλική ἕλιξ.

Παράδειγμα (38.3).— Νά εὑρεθῆ ἡ ἐνειλιγμένη τῆς κυκλικῆς ἕλικος μέ ἐξίσωσιν $\bar{r}=(\alpha\,\text{συν}t,\ \alpha\,\text{ημ}t,\ \beta t)$.

Λ ύ σ ι ς. Ἐργαζόμενοι κατά τόν γνωστόν τρόπον εὑρίσκομεν: $\bar{\varepsilon}=(-\alpha\,\text{ημ}t,\ \alpha\,\text{συν}t,\ \beta):\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\bar{\varpi}=(-\text{συν}t,\ -\text{ημ}t,\ 0)$, $\bar{\delta}=(\beta\,\text{ημ}t,\ \beta\,\text{συν}t,\ \alpha):\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $s=t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $R=(\alpha^2+\beta^2):\alpha$, $\sigma=\beta:(\alpha^2+\beta^2)$, $\int_0^s\sigma ds=\beta s:(\alpha^2+\beta^2)=\beta t:\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Ἀντικαθιστῶντες αὐτά εἰς τήν ἐξίσωση (38.2), προκύπτει ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐνειλιγμένης : $\bar{r}_1=(\alpha\,\text{συν}t,\ \alpha\,\text{ημ}t,\ \beta t)+(\alpha^2+\beta^2)(-\text{συν}t,\ -\text{ημ}t,\ 0):\alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\text{εφ}(\beta t:\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+c)(\beta\,\text{ημ}t,\ \beta\,\text{συν}t,\ \alpha)$.

39. Περί ἐπαφῆς σχημάτων.

— Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι δίδονται δύο γραμμές τοῦ τριδιαστάτου χώρου μέ ἐξισώσεις ἀντιστοίχως :

$$x=\sigma_1(t),\quad y=\sigma_2(t),\quad z=\sigma_3(t) \qquad (39.1)$$
$$F(x,y,z)=0,\quad \Phi(x,y,z)=0$$

οἱ ὁποῖες ἔχουν ἕνα κοινόν ὁμαλόν σημεῖον $M_0(t_0)$. Ἀντικαθιστῶμεν τά x, y, z ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῆς πρώτης γραμμῆς εἰς τά πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων τῆς δευτέρας καί θέτομεν :

$$f(t)\equiv F(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3),\quad \varphi(t)=\Phi(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) \qquad (39.2)$$

Ὁρισμός (39.1).— *Δύο γραμμές τοῦ τριδιαστάτου χώρου, οἱ ὁποῖες δίδονται ὑπό τήν μορφήν (39.1), λέγομεν ὅτι ἔχουν ἐπαφήν ν-τάξεως εἰς τό κοινό τους ὁμαλόν σημεῖον $M_0(t_0)$, ὅταν ὑφίστανται οἱ σχέσεις :*

$$
\begin{aligned}
&f(t_0) = \dot{f}(t_0) = \ddot{f}(t_0) = \cdots = \overset{(\nu)}{f}(t_0) = 0 \\
&\varphi(t_0) = \dot{\varphi}(t_0) = \ddot{\varphi}(t_0) = \cdots = \overset{(\nu)}{\varphi}(t_0) = 0 \qquad (39.3) \\
&|\overset{(\nu+1)}{f}(t_0)| + |\overset{(\nu+1)}{\varphi}(t_0)| \neq 0
\end{aligned}
$$

Ἐάν οἱ γραμμές εἶναι τοῦ διδιαστάτου χώρου μέ ἐξισώσεις ἀντιστοίχως:

$$
\begin{aligned}
x = \sigma_1(t), \ \ y = \sigma_2(t) \\
F(x,y) = 0
\end{aligned}
\qquad (39.4)
$$

τότε ἔχομεν τόν ἑξῆς ὁρισμόν διά τήν ἐπαφήν ν-τάξεως.

Ὁρισμός (39.2).— *Δύο γραμμές τοῦ διδιαστάτου χώρου, οἱ ὁποῖες δίδονται ὑπό τήν μορφήν (39.4), λέγομεν ὅτι ἔχουν ἐπαφήν ν-τάξεως εἰς τό κοινό τους ὁμαλόν σημεῖον $M_0(t_0)$, ὅταν ὑφίστανται οἱ σχέσεις:*

$$
f(t_0) = \dot{f}(t_0) = \ddot{f}(t_0) = \cdots = \overset{(\nu)}{f}(t_0) = 0, \ \overset{(\nu+1)}{f}(t_0) \neq 0 \qquad (39.5)
$$

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι δίδεται μία γραμμή καί μία ἐπιφάνεια μέ ἐξισώσεις ἀντιστοίχως :

$$
\begin{aligned}
x = \sigma_1(t), \ \ y = \sigma_2(t), \ \ z = \sigma_3(t) \\
F(x,y,z) = 0
\end{aligned}
\qquad (39.6)
$$

οἱ ὁποῖες ἔχουν ἕνα κοινόν ὁμαλόν σημεῖον $M_0(t_0)$.

Ὁρισμός (39.3).— *Μία γραμμή καί μία ἐπιφάνεια, οἱ ὁποῖες δίδονται ὑπό τήν μορφήν (39.6), λέγομεν ὅτι ἔχουν ἐπαφήν ν-τάξεως εἰς τό κοινό τους ὁμαλόν σημεῖον $M_0(t_0)$, ὅταν ὑφίστανται οἱ σχέσεις :*

$$
f(t_0) = \dot{f}(t_0) = \ddot{f}(t_0) = \cdots = \overset{(\nu)}{f}(t_0) = 0, \ \overset{(\nu+1)}{f}(t_0) \neq 0 \qquad (39.7)
$$

Ἄς ὑποθέσωμεν τέλος ὅτι δίδονται δύο ἐπιφάνειες μέ ἐξισώσεις ἀντιστοίχως :

$$
\begin{aligned}
x = \sigma_1(u,v), \ \ y = \sigma_2(u,v), \ \ z = \sigma_3(u,v) \\
F(x,y,z) = 0
\end{aligned}
\qquad (39.8)
$$

οἱ ὁποῖες ἔχουν ἕνα κοινόν ὁμαλόν σημεῖον $M_0(u_0,v_0)$. Ἀντικαθιστῶμεν τά x, y, z ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῆς πρώτης ἐπιφανείας εἰς τό πρῶτον μέλος τῆς δευτέρας καί θέτομεν :

$$f(u,v) \equiv F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \qquad (39.9)$$

Ὁρισμός (39.4). — *Δύο ἐπιφάνειες αἱ ὁποῖες δίδονται ὑπό τήν μορφήν (39.8), λέγομεν ὅτι ἔχουν ἐπαφήν ν-τάξεως εἰς τό κοινό τους ὁμαλόν σημεῖον $M_0(u_0,v_0)$, ὅταν ἡ συνάρτησις $f(u,v)$ καί αἱ μερικαί παράγωγοι αὐτῆς ὡς πρός u, v μέχρι καί ν-τάξεως εἰς τό M_0 εἶναι μηδέν, μία δέ τουλάχιστον ἀπό τάς παραγώγους $(\nu+1)$ τάξεως εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός.*

Παράδειγμα (39.1). — Νά εὑρεθῆ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης μιᾶς γραμμῆς ὑποθέτοντες ὅτι ἔχει ἐπαφήν πρώτης τάξεως μετ' αὐτῆς.

Λύσις. Ἔστω $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ἕνα σημεῖον τῆς γραμμῆς $x=\sigma_1(t)$, $y=\sigma_2(t)$, $z=\sigma_3(t)$ τό ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ διά $t=t_0$ δηλαδή εἶναι: $x_0=\sigma_1(t_0)$, $y_0=\sigma_2(t_0)$, $z_0=\sigma_3(t_0)$. Μία εὐθεῖα ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τό σημεῖον αὐτό θά ἔχη ἐξισώσεις τῆς μορφῆς: $(x-x_0):\alpha=(y-y_0):\beta=(z-z_0):\gamma$. Θέτομεν $F\equiv(x-x_0):\alpha-(y-y_0):\beta$, $F\equiv(y-y_0):\beta-(z-z_0):\gamma$, $f(t)\equiv(\sigma_1-x_0):\alpha-(\sigma_2-y_0):\beta$, $\varphi(t)=(\sigma_2-y_0):\beta-(\sigma_3-z_0):\gamma$, ὁπότε διά νά ἔχη ἡ εὐθεῖα μέ τήν γραμμήν εἰς τό M_0 ἐπαφήν πρώτης τάξεως θά πρέπη $f(t_0)=0$, $\varphi(t_0)=0$ καί $\dot f(t_0)=0$, $\dot\varphi(t_0)=0$. Ἐξ αὐτῶν οἱ δύο πρῶτες ἰσχύουν διότι $f(t_0)=[\sigma_1(t_0)-x_0]:\alpha-[\sigma_2(t_0)-y_0]:\beta=(x_0-x_0):\alpha-(y_0-y_0):\beta=0$ καί $\varphi(t_0)=[\sigma_2(t_0)-y_0]:\beta-[\sigma_3(t_0)-z_0]:\gamma=(y_0-y_0):\beta-(z_0-z_0):\gamma=0$, ἀπό τίς δύο ἄλλες δέ προκύπτει: $\dot f(t_0)\equiv\dot\sigma_1(t_0):\alpha-\dot\sigma_2(t_0):\beta=0$, $\dot\varphi(t_0)\equiv\dot\sigma_2(t_0):\beta-\dot\sigma_3(t_0):\gamma=0$ δηλαδή εἶναι $\dot\sigma_1(t_0):\alpha=\dot\sigma_2(t_0):\beta=\dot\sigma_3(t_0):\gamma$ καί οἱ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας γράφονται: $(x-x_0):\dot\sigma_1(t_0)=(y-y_0):\dot\sigma_2(t_0)=(z-z_0):\dot\sigma_3(t_0)$, δηλαδή εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς εἰς τό σημεῖον $M_0(t_0)$.

Παράδειγμα (39.2). — Νά εὑρεθῆ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου γραμμῆς ὑποθέτοντες ὅτι ἔχει ἐπαφήν δευτέρας τάξεως μετ' αὐτῆς.

Λύσις. Διά νά ἁπλουστεύσωμεν τήν γραφήν θά χρησιμοποιήσωμεν διανυσματικές ἐξισώσεις. Ἔστω $M_0(\bar r_0)$ ἕνα σημεῖον τῆς γραμμῆς $\bar r=\bar r(t)$ τό ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ διά $t=t_0$ δηλαδή εἶναι $\bar r_0=\bar r(t_0)$. Ἕνα ἐπίπεδον τό ὁποῖον διέρχεται ἀπό τό σημεῖον αὐτό θά ἔχη ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς: $(\bar x-\bar r_0)\bar\alpha=0$. Θέτομεν $F\equiv(\bar x-\bar r_0)\bar\alpha$, $f(t)\equiv(\bar r-\bar r_0)\bar\alpha$, ὁπότε διά νά ἔχη τό ἐπίπεδον μέ τήν γραμμήν εἰς τό M_0 ἐπαφήν δευτέρας τάξεως θά πρέπη $f(t_0)=0$ καί $\dot f(t_0)=0$, $\ddot f(t_0)=0$. Ἐξ αὐτῶν ἡ πρώτη ἰσχύει διότι $f(t_0)=[\bar r(t_0)-\bar r_0]\cdot\bar\alpha=(\bar r_0-\bar r_0)\cdot\bar\alpha=0$, ἀπό τίς δύο ἄλλες δέ προκύπτει: $\dot f(t_0)\equiv\dot{\bar r}_0\cdot\bar\alpha=0$, $\ddot f(t_0)\equiv\ddot{\bar r}_0\cdot\bar\alpha=0$ δηλαδή τό διάνυσμα $\bar\alpha$ εἶναι κάθετον ἐπί τά $\dot{\bar r}_0$, $\ddot{\bar r}_0$ ἄρα εἶναι παράλληλον πρός τό ἐξωτερικόν γινόμενον αὐτῶν $[\dot{\bar r}_0, \ddot{\bar r}_0]$ ὁπότε ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου γράφεται $(\bar x-\bar r_0, \dot{\bar r}_0, \ddot{\bar r}_0)=0$, δηλαδή εἶναι τό ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς γραμμῆς εἰς τό σημεῖον $M_0(t_0)$.

Παράδειγμα (39.3). — Νά εὑρεθῆ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐγγυτάτου κύκλου μιᾶς γραμμῆς τοῦ διδιαστάτου χώρου, ὑποθέτοντες ὅτι ἔχει ἐπαφήν δευτέρας τάξεως μετ' αὐτῆς.

Λ ύ σ ι ς. Ἔστω $M_o(\bar{r}_o)$ ἕνα σημεῖον τῆς γραμμῆς $\bar{r}=\bar{r}(s)$ τό ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ διά $s=s_o$ δηλαδή εἶναι $\bar{r}_o=\bar{r}(s_o)$. Ἕνας κύκλος ὁ ὁποῖος ἔχει κέντρον ἕνα σημεῖον $A(\bar{a})$ καί ἀκτῖνα β ἔχει ἐξίσωσιν $(\bar{x}-\bar{a})^2=\beta^2$. Θέτομεν $F\equiv(\bar{x}-\bar{a})^2-\beta^2$, $f(s)\equiv(\bar{r}-\bar{a})^2-\beta^2$, ὁπότε διά νά ἔχῃ ὁ κύκλος μέ τήν γραμμήν ἐπαφήν δευτέρας τάξεως θά πρέπῃ νά εἶναι $f(s_o)\equiv$ $\equiv(\bar{r}_o-\bar{a})^2-\beta^2=0$, $f'(s_o)\equiv 2(\bar{r}_o-\bar{a})\bar{r}_o'=0$, $f''(s_o)\equiv 2\bar{r}_o'^2+2(\bar{r}_o-\bar{a})\bar{r}_o''=0$. Ἀπό τήν δεύτερη ἐξίσωση ἕπεται ὅτι τό διάνυσμα $\bar{r}_o-\bar{a}$ εἶναι κάθετον ἐπί τό $\bar{r}_o'$ ἑπομένως θά εἶναι παράλληλον πρός τό $\bar{\kappa}_o$ καί θά ἔχωμεν: $\bar{r}_o-\bar{a}=\lambda\bar{\kappa}_o$. Ἀντικαθιστῶντες αὐτήν εἰς τήν τρίτη ἐξίσωση προκύπτει $1+$ $+\lambda\bar{\kappa}_o\cdot u_o\bar{\kappa}_o=0$, $1+\lambda u_o=0$ ὁπότε $\lambda=-R_o$ καί $\bar{a}=\bar{r}_o+R_o\bar{\kappa}_o$ δηλαδή τό κέντρον τοῦ κύκλου εἶναι τό κέντρον καμπυλότητος τῆς γραμμῆς εἰς τό M_o. Ἀντικαθιστῶντες τώρα ἐκ τῆς τελευταίας τό $\bar{a}$ εἰς τήν $f(s_o)=0$ προκύπτει $R_o^2-\beta^2=0$, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις τοῦ κύκλου γράφεται: $(\bar{x}-\bar{P}_o)^2=R_o^2$ ὅπου $\bar{P}_o=\bar{r}_o+R_o\bar{\kappa}_o$, δηλαδή εἶναι ὁ ἐγγύτατος κύκλος τῆς γραμμῆς εἰς τό σημεῖον $M_o(s_o)$.

Παράδειγμα (39.4). — Νά εὑρεθῆ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας μιᾶς γραμμῆς ὑποθέτοντες ὅτι ἔχει ἐπαφήν τρίτης τάξεως μετ' αὐτῆς.

Λ ύ σ ι ς. Ἔστω $M_o(\bar{r}_o)$ ἕνα σημεῖον τῆς γραμμῆς $\bar{r}=\bar{r}(s)$ τό ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ διά $s=s_o$ δηλαδή εἶναι $\bar{r}_o=\bar{r}(s_o)$. Μία σφαῖρα ἡ ὁποία ἔχει κέντρον ἕνα σημεῖον $A(\bar{a})$ καί ἀκτῖνα β ἔχει ἐξίσωσιν $(\bar{x}-\bar{a})^2=$ $=\beta^2$. Θέτομεν $F\equiv(\bar{x}-\bar{a})^2-\beta^2$, $f(s)=(\bar{r}-\bar{a})^2-\beta^2$, ὁπότε διά νά ἔχῃ ἡ σφαῖρα αὐτή μέ τήν γραμμήν εἰς τό M_o ἐπαφήν τρίτης τάξεως θά πρέπῃ νά εἶναι: $f(s_o)\equiv(\bar{r}_o-\bar{a})^2-\beta^2=0$, $f'(s_o)\equiv 2(\bar{r}_o-\bar{a})\bar{r}_o'=0$, $f''(s_o)\equiv 2\bar{r}_o'^2+2(\bar{r}_o-a)\bar{r}_o''=0$, $f'''(s_o)\equiv 4\bar{r}_o'\bar{r}_o''+2(\bar{r}_o-\bar{a})\bar{r}_o'''=0$. Οἱ σχέσεις αὐτές χρησιμοποιοῦντες τούς τύπους Frenet γράφονται:

$$(\bar{r}_o-a)^2-\beta^2=0,\ (\bar{r}_o-a)\bar{\varepsilon}_o=0,\ 1+(\bar{r}_o-\bar{a})u_o\bar{\omega}_o=0,\ (\bar{r}_o-\bar{a})(-u_o\bar{\varepsilon}+u_o'\bar{\omega}+\sigma_o\bar{\delta}_o)=0 \quad (1)$$

Ἀπό τήν δευτέρα ἐξ αὐτῶν ἕπεται: $\bar{r}_o-\bar{a}=\lambda\bar{\omega}_o+\mu\bar{\delta}_o$ ὅπου λ,μ προσδιοριστέες συναρτήσεις. Ἀντικαθιστῶντες αὐτήν εἰς τήν τρίτη προκύπτει: $1+u_o\lambda=0$ δηλαδή $\lambda=-R_o$ ὁπότε $\bar{r}_o-\bar{a}=-R_o\bar{\omega}_o+\mu\bar{\delta}_o$. Ἀντικαθιστῶντες αὐτήν εἰς τήν τετάρτη τῶν σχέσεων (1) προκύπτει $(-R_o\bar{\omega}_o+\mu\bar{\delta}_o)(-u_o\bar{\varepsilon}_o+u_o'\bar{\omega}_o+$ $+u_o\sigma_o\bar{\delta})=0$ ἐκ τῆς ὁποίας ἐκτελοῦντες τόν πολλαπλασιασμόν θά ἔχωμεν $-R_o\cdot u_o'+\mu u_o\sigma_o=0$ δηλαδή $\mu=-R_o'\tau_o$. Θά εἶναι λοιπόν $\bar{r}_o-\bar{a}=-R_o\bar{\omega}_o-$ $-R_o'\tau_o\bar{\delta}_o$ ἤ $\bar{a}=\bar{r}_o+R_o\bar{\omega}_o+R_o'\tau_o\bar{\delta}_o$ δηλαδή τό κέντρον τῆς σφαίρας ταυτίζεται μέ τό κέντρον $\bar{H}_o$ τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας ὅπως ὁρίσεται ἀπό τήν (37.4). Ἐπειδή δέ ἕνεκα τῆς πρώτης τῶν (1) ἡ σφαῖρα αὐτή διἔρχεται καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον M_0 τῆς γραμμῆς ἕπεται ὅτι εἶναι ἡ ἐγγυτάτη σφαῖρα αὐτῆς.

40. Φυσικὲς ἐξισώσεις γραμμῆς.— Ἐὰν μιᾶς γραμμῆς $\bar{r}=\bar{r}(s)$ παραστήσωμεν μὲ $\varepsilon_i, \omega_i, \delta_i$ $(i=1,2,3)$ τὶς συντεταγμένες τῶν πρωτευόντων διανυσμάτων αὐτῆς, τότε οἱ τύποι Frenet γράφονται :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1' &= u\omega_1 , \quad \omega_1' = -u\varepsilon_1 + \sigma\delta_1 , \quad \delta_1' = -\sigma\omega_1 \\ \varepsilon_2' &= u\omega_2 , \quad \omega_2' = -u\varepsilon_2 + \sigma\delta_2 , \quad \delta_2' = -\sigma\omega_2 \qquad (40.1) \\ \varepsilon_3' &= u\omega_3 , \quad \omega_3' = -u\varepsilon_3 + \sigma\delta_3 , \quad \delta_3' = -\sigma\omega_3 \end{aligned}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν ἡ καμπυλότης καὶ ἡ στρέψις εἶναι γνωστὲς συναρτήσεις τοῦ s, τότε οἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις ἀποτελοῦν ἕνα γραμμικὸν σύστημα ἐννέα διαφορικῶν ἐξισώσεων μετὰ ἰσαρίθμων ἀγνώστων συναρτήσεων $\varepsilon_i, \omega_i, \delta_i$. Γνωρίζομεν δὲ ἀπὸ τὴν θεωρία τῶν διαφορικῶν συστημάτων ὅτι ἐὰν οἱ συναρτήσεις u, σ εἶναι συνεχεῖς σὲ κάποιο διάστημα τοῦ s, τότε ὑπάρχουν ἐννέα συναρτήσεις τοῦ s οἱ ὁποῖες εἶναι ὡρισμένες καὶ παραγωγίσιμες στὸ διάστημα αὐτό, ἐπαληθεύουν τὸ διαφορικὸν σύστημα καὶ λαμβάνουν διὰ μίαν τιμὴν s_0 αὐτοῦ ἀντιστοίχως τὶς ἐννέα ἐκ τῶν προτέρων δοθεῖσες τιμὲς $\varepsilon_i^0, \omega_i^0, \delta_i^0$. Σημειωτέον δὲ ὅτι ἡ ὁλοκλήρωσις τοῦ ἀνωτέρω διαφορικοῦ συστήματος ἀνάγεται οὐσιαστικῶς εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν τοῦ συστήματος τῶν τριῶν πρώτων ἐξισώσεων, διότι οἱ ἄλλες δύο τριάδες ἐξισώσεων εἶναι τῆς αὐτῆς μορφῆς μὲ τὶς τρεῖς πρῶτες.

Ἀποδεικνύεται ὅτι μία γραμμὴ ὁρίζεται τελείως ἀπὸ ἀπόψεως σχήματος, ὅταν δοθοῦν ἡ καμπυλότης καὶ ἡ στρέψις αὐτῆς ὡς συνεχεῖς συναρτήσεις :

$$u = u(s), \ \sigma = \sigma(s) \qquad (40.2)$$

εἰς ἕνα ὡρισμένον διάστημα τοῦ s. Μόνον ἡ θέσις αὐτῆς εἰς τὸν χῶρον παραμένει ἀκαθόριστος.

Οἱ ἐξισώσεις (40.2), οἱ ὁποῖες συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ὁρίζουν τὸ σχῆμα τῆς γραμμῆς, λέγονται φυσικὲς ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς.

Ἐὰν ἀπὸ τὴν ὁλοκλήρωσιν τοῦ συστήματος (40.1) βρήκαμε $\varepsilon_i = \varepsilon_i(s)$, τότε οἱ ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς θὰ εἶναι τῆς μορφῆς :

$$x = x_0 + \int_{s_0}^{s} \varepsilon_1(s)\,ds, \quad y = y_0 + \int_{s_0}^{s} \varepsilon_2(s)\,ds, \quad z = z_0 + \int_{s_0}^{s} \varepsilon_3(s)\,ds \qquad (40.3)$$

ἢ γραμμένες ὑπὸ διανυσματικὴν μορφήν :

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \int_{s_0}^{s} \bar{\varepsilon}(s)\,ds. \qquad (40.4)$$

Παρατηροῦμεν τέλος ὅτι ἐὰν ἀπαλείψωμεν μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (40.2) τὴν s, προκύπτει μία ἐξίσωσις τῆς μορφῆς :

$$\varphi(u,\sigma) = 0 \qquad (40.5)$$

δηλαδή μεταξύ τῆς καμπυλότητος καί τῆς στρέψεως μιᾶς γραμμῆς ὑπάρχει πάντοτε μία σχέσις τῆς μορφῆς (40.5).

Παράδειγμα (40.1).– Νά εὑρεθοῦν οἱ γραμμές πού ἔχουν μηδενικήν καμπυλότητα εἰς κάθε σημεῖον.
Λ ύ σ ι ς. Ἀπό τόν πρῶτον τύπον τοῦ Frenet προκύπτει $\bar{r}'' = u\bar{\omega} = 0$, ὁπότε δι ὁλοκληρώσεως θά ἔχωμεν : $\bar{r}' = \bar{r}_0$ καί ἐξ αὐτῆς ἀκόμη $\bar{r} = \bar{r}_0 s + \bar{r}_1$ δηλαδή οἱ ζητούμενες γραμμές εἶναι εὐθεῖες. Ἐπειδή καί τό ἀντίστροφον ἀληθεύει δηλαδή ἡ εὐθεία ἔχει μηδενικήν καμπυλότητα, συμπεραίνομεν ὅτι ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι μία γραμμή εὐθεία, εἶναι : $u = 0$.

Παράδειγμα (40.2).– Νά εὑρεθοῦν οἱ γραμμές πού ἔχουν μηδενικήν στρέψιν εἰς κάθε σημεῖον.
Λύσις. Ἀπό τόν τρίτον τύπον τοῦ Frenet προκύπτει $\bar{\delta}' = -\sigma\bar{\omega} = 0$, ὁπότε δι ὁλοκληρώσεως θά ἔχωμεν $\bar{\delta} = \bar{c}_0$ καί ἐξ αὐτῆς ἐπειδή $\bar{\varepsilon}\bar{\delta} = 0$ προκύπτει $\bar{r}'\bar{c}_0 = 0$ καί δι ὁλοκληρώσεως $\bar{r}\bar{c}_0 = \bar{c}_1$ ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι οἱ ζητούμενες γραμμές εἶναι ἐπίπεδες. Ἐπειδή καί τό ἀντίστροφον ἔχομεν δείξει ὅτι ἀληθεύει, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι μία γραμμή ἐπίπεδος, εἶναι : $\sigma = 0$.

Παράδειγμα (40.3).– Νά εὑρεθῆ ἡ γραμμή $\bar{r} = \bar{r}(s)$ ἡ ὁποία ἔχει φυσικές ἐξισώσεις $u = 1:s\sqrt{2}$, $\sigma = -1:s\sqrt{2}$ καί διά τήν ὁποίαν εἶναι : $\bar{r}(0) = 0$, $\bar{\varepsilon}(1) = (1:\sqrt{2}, 0, 1:\sqrt{2})$, $\bar{\omega}(1) = (0,-1,0)$, $\delta = (1:\sqrt{2}, 0, -1:\sqrt{2})$.
Λ ύ σ ι ς. Ἀντικαθιστῶντες τίς u,σ εἰς τούς τύπους τοῦ Frenet προκύπτει :

$$\bar{\varepsilon}' = \bar{\omega} : s\sqrt{2}, \quad \bar{\omega}' = -(\bar{\varepsilon}+\bar{\delta}) : s\sqrt{2}, \quad \bar{\delta}' = \bar{\omega} : s\sqrt{2} \qquad (1)$$

Ἀφαιροῦντες κατά μέλη τήν πρώτη καί τρίτη προκύπτει $\bar{\varepsilon}' - \bar{\delta}' = 0$ ἐκ τῆς ὁποίας δι ὁλοκληρώσεως $\bar{\varepsilon} - \bar{\delta} = \bar{c}$. Θέτοντες εἰς αὐτήν $s = 1$ καί λαμβάνοντες ὑπ ὄψιν τίς ὑπάρχουσες σχέσεις προκύπτει $\bar{c} = (0, 0, \sqrt{2})$ ὁπότε $\bar{\varepsilon} - \bar{\delta} = (0, 0, \sqrt{2})$ (2).
Παραγωγίζομεν τήν πρώτη τῶν (1) : $\bar{\varepsilon}'' = \bar{\omega}' : s\sqrt{2} - \bar{\omega} : s^2\sqrt{2}$, ἀντικαθιστῶμεν τό $\bar{\omega}'$ ἀπό τήν δεύτερη : $\bar{\varepsilon}'' = (\bar{\delta} - \bar{\varepsilon}) : 2s^2 - \bar{\omega} : s^2\sqrt{2}$ καί τέλος ἀντικαθιστῶντες εἰς αὐτήν τό $\bar{\omega}$ ἐκ τῆς πρώτης τῶν (1) καί τό $\bar{\delta}$ ἐκ τῆς (2) προκύπτει ἡ γραμμική διανυσματική διαφορική ἐξίσωσις : $s^2\bar{\varepsilon}'' + s\bar{\varepsilon}' + \bar{\varepsilon} = (0, 0, 1:\sqrt{2})$ (3). Ἡ ἐξίσωσις αὐτή ἔχει τήν μερικήν λύσιν $\bar{\varepsilon}_0 = (0, 0, 1:\sqrt{2})$ καί ἡ ἀντίστοιχος ὁμογενής ἐξίσωσις $s^2\bar{\varepsilon}'' + s\bar{\varepsilon}' + \bar{\varepsilon} = 0$ εἶναι Euler ἡ ὁποία διά τῆς γνωστῆς ἀντικαταστάσεως $s = e^t$ μετασχηματίζεται εἰς τήν ἐξίσωσιν μετά σταθερῶν συντελεστῶν $\ddot{\bar{\varepsilon}} + \bar{\varepsilon} = 0$ μέ γενικήν λύσιν τήν συνάρτησιν $\bar{c}_1 \text{συν}t + \bar{c}_2 \text{ημ}t$. Κατόπιν αὐ-

τῶν ἡ γενικὴ λύσις τῆς ἐξισώσεως (3) θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\bar{\varepsilon} = \bar{c}_1 \text{συν} t + \bar{c}_2 \text{ημ} t + (0, 0, 1:\sqrt{2})$ (4), ἐκ τῆς ὁποίας διὰ $s=1$ δηλαδὴ $t=0$ προκύπτει $(1:\sqrt{2}, 0, 1:\sqrt{2}) = \bar{c}_1 + (0, 0, 1:\sqrt{2})$ ἢ $\bar{c}_1 = (1:\sqrt{2}, 0, 0)$. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ $\bar{c}_2$ παραγωγίζομεν τὴν $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}' = \bar{\varpi} : s\sqrt{2} = -\bar{c}_1 \text{ημ} t + \bar{c}_2 \text{συν} t$, ἐκ τῆς ὁποίας διὰ $t=0$ προκύπτει: $(0, -1, 0) : \sqrt{2} = \bar{c}_2$. Ἀντικαθιστῶντες τὰ εὑρεθέντα $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ εἰς τὴν (4) προκύπτει: $\bar{\varepsilon} = (\text{συν} t, -\text{ημ} t, 1) : \sqrt{2}$ ἐκ τῆς ὁποίας θὰ ἔχωμεν: $d\bar{r} = (\text{συν} t, -\text{ημ} t, 1)\, ds : \sqrt{2} = (e^t \text{συν} t, -e^t \text{ημ} t, e^t)\, dt : \sqrt{2}$ καὶ δι' ὁλοκληρώσεως προκύπτει τελικῶς ἡ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς:

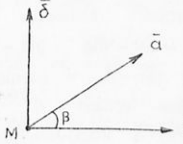
$$\bar{r} = s\,[\,\text{συν}(\ln s) + \text{ημ}(\ln s),\ \text{συν}(\ln s) - \text{ημ}(\ln s),\ 2\,] : 2\sqrt{2}$$

ὅπου διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς σταθερᾶς ὁλοκληρώσεως λάβαμε ὑπ' ὄψιν ὅτι διὰ $s=0$ δηλαδὴ διὰ $t=-\infty$ εἶναι $\bar{r}=0$, διότι ἡ γραμμὴ διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς.

41. Γραμμὲς κλίσεως.— Μία γραμμὴ τῆς ὁποίας ἡ ἐφαπτομένη σὲ κάθε σημεῖον σχηματίζει σταθερὴ γωνία μὲ μίαν σταθερὴν εὐθεῖαν, λέγεται γενικὴ ἕλιξ ἢ γραμμὴ κλίσεως. Ἐὰν $\bar{\varepsilon}$ εἶναι τὸ ἐφαπτομενικὸν διάνυσμα τῆς γραμμῆς καὶ $\bar{\alpha}$ σταθερὸν μοναδιαῖον διάνυσμα παράλληλον πρὸς τὴν σταθερὴν εὐθεῖαν, θὰ ἔχωμεν διὰ κάθε σημεῖον τῆς γραμμῆς τὴν σχέσιν:

$$\bar{\varepsilon}\bar{\alpha} = \text{συν}\,\beta = \text{σταθερόν} \qquad (41.1)$$

ὅπου β ἡ σταθερὴ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζουν τὰ διανύσματα $\bar{\varepsilon}$ καὶ $\bar{\alpha}$. Παραγωγίζοντες τὴν (41.1) ὡς πρὸς s προκύπτει: $\bar{\varepsilon}'\bar{\alpha} = 0$, $u\bar{\varpi}\bar{\alpha} = 0$ ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται εἴτε $u=0$, ὁπότε ἡ γραμμὴ εἶναι εὐθεῖα, εἴτε $\bar{\varpi}\bar{\alpha}=0$. Ἐξ αὐτῆς παραγωγίζοντες προκύπτει: $\bar{\varpi}'\bar{\alpha} = 0$, $(-u\bar{\varepsilon} + \sigma\bar{\delta})\bar{\alpha} = 0$, $-u\bar{\varepsilon}\bar{\alpha} + \sigma\bar{\delta}\bar{\alpha} = 0$ καὶ ἐπειδὴ $\bar{\varepsilon}\bar{\alpha} = \text{συν}\,\beta$, $\bar{\delta}\bar{\alpha} = \text{ημ}\,\beta$ σχ. (41.1) θὰ ἔχωμεν τελικῶς τὴν σχέσιν $-u\,\text{συν}\beta + \sigma\,\text{ημ}\beta = 0$. Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ u μὲ A καὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ σ μὲ B, τότε ἡ εὑρεθεῖσα σχέσις γράφεται:



Σχ. (41.1)

$$Au + B\sigma = 0 \qquad (41.2)$$

δηλαδὴ ἡ καμπυλότης καὶ ἡ στρέψις μιᾶς γραμμῆς κλίσεως ἐπαληθεύουν μίαν γραμμικὴν ὁμογενὴ σχέσιν τῆς μορφῆς (41.2), ὅπου οἱ σταθεροὶ συντελεσταὶ δὲν εἶναι συγχρόνως μηδέν.

Ἀντιστρόφως ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ u, σ μιᾶς γραμμῆς ἐπαληθεύουν μίαν σχέσιν τῆς μορφῆς (41.2), θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς: $Au\bar{\varpi} + B\sigma\bar{\varpi} = 0$, $A\bar{\varepsilon}' - B\bar{\delta}' = 0$ καὶ δι' ὁλοκληρώσεως $A\bar{\varepsilon} - B\bar{\delta} = \bar{c}$, ὅπου $\bar{c}$ σταθερὸν διάνυσμα. Πολλαπλασιάζοντες τέλος αὐτὴν ἐσωτερικῶς ἐπὶ τὸ $\bar{\varepsilon}$ προκύπτει $A = \bar{\varepsilon}\bar{c}$ δηλαδὴ πρόκειται διὰ γραμμὴν κλίσεως καὶ ἔτσι ἀπεδείχθη ὅτι:

Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ νὰ εἶναι μία καμπύλη γραμμὴ κλίσεως εἶναι ἡ καμπυλότης καὶ ἡ στρέψις αὐτῆς νὰ ἐπαληθεύουν μίαν σχέσιν τῆς μορφῆς (41.2).

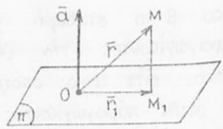
Ἀπὸ τὴν σχέσιν (41.2) διὰ $B=0$ προκύπτει $u=0$ καὶ διὰ $A=0$ προκύπτει $\sigma=0$, δηλαδή οἱ εὐθεῖες καὶ οἱ ἐπίπεδες γραμμὲς εἶναι γραμμὲς κλίσεως. Οἱ γραμμὲς κλίσεως λέγονται ἐπίσης καὶ κυλινδρικὲς ἕλικες διότι καθὼς προκύπτει ἀπὸ τὸν ὁρισμόν τους, κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς κυλίνδρου τοῦ ὁποίου οἱ γενέτειρες (παράλληλες πρὸς τὴν σταθερὴν εὐθεῖαν) τέμνονται ὑπ' αὐτῆς ὑπὸ σταθερὴν γωνίαν.

Παράδειγμα (41.1).— Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἐνειλιγμένες μιᾶς ἐπιπέδου γραμμῆς τοῦ τριδιαστάτου χώρου, εἶναι γραμμὲς κλίσεως.

Λ ύ σ ι ς. Ὅταν ἡ γραμμὴ εἶναι ἐπίπεδος εἶναι $\sigma=0$, ἑπομένως οἱ ἐνειλιγμένες κατὰ τὸν τύπον (38.2) θὰ ἔχουν ἐξίσωσιν : $\bar{r}_1=\bar{r}+R\bar{\varpi}-R\bar{\delta}\,\varepsilon\varphi c$. Παραγωγίζοντες αὐτὴν ὡς πρὸς s προκύπτει : $\dot{\bar{r}}_1=\bar{\varepsilon}+R'\bar{\varpi}+R(-u\bar{\varepsilon})-R'\bar{\delta}\,\varepsilon\varphi c=R'(\bar{\varpi}-\bar{\delta}\,\varepsilon\varphi c)$ καὶ ἐξ αὐτῆς $\bar{\varepsilon}_1=\dot{\bar{r}}_1:|\dot{\bar{r}}_1|=R'(\bar{\varpi}-\bar{\delta}\,\varepsilon\varphi c):|R'|\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 c}$, δηλαδὴ εἶναι ἀναλόγως τοῦ προσανατολισμοῦ τῆς γραμμῆς : $\bar{\varepsilon}_1=\pm(\bar{\varpi}-\bar{\delta}\,\varepsilon\varphi c):\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 c}$. Πολλαπλασιάζοντες αὐτὴν ἐσωτερικῶς ἐπὶ τὸ σταθερὸν διάνυσμα $\bar{\delta}$ προκύπτει $\bar{\varepsilon}_1\bar{\delta}=\mp\,\eta\mu c$ ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει τὸ ζητούμενον.

Παράδειγμα (41.2). — Νὰ εὑρεθῇ ἡ καμπυλότης τῆς προβολῆς μιᾶς γραμμῆς κλίσεως ἐπὶ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ σταθερὸν διάνυσμα $\bar{a}$.

Λ ύ σ ι ς. Ἔστω $\bar{r}=\bar{r}(s)$ μία γραμμὴ κλίσεως διὰ τὴν ὁποίαν $\bar{\varepsilon}\bar{a}=\sigma\upsilon\nu\beta$ καὶ M_1 ἡ προβολὴ ἑνὸς σημείου αὐτῆς M ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου (Π) τὸ ὁποῖον χάριν ἁπλότητος διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν O καὶ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ σταθερὸν μοναδιαῖον διάνυσμα $\bar{a}$. Ἀπὸ τὸ σχ.(41.2) θὰ ἔχωμεν $\overline{OM}_1=\overline{OM}+\overline{MM}_1$, $\overline{OM}=\bar{r}(s)$, $\overline{MM}_1=\lambda(s)\cdot\bar{a}$ ὁπότε θέτοντες $\overline{OM}_1=\bar{r}_1$, ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς τὴν ὁποίαν γράφει ἡ προβολὴ M_1 θὰ εἶναι : $\bar{r}_1=\bar{r}(s)+\lambda(s)\cdot\bar{a}$. Παραγωγίζομεν ὡς πρὸς s καὶ ἔχομεν $\dot{\bar{r}}_1=\bar{\varepsilon}+\lambda'\bar{a}$ καὶ ἐπειδὴ τὸ $\dot{\bar{r}}_1$ ὡς κείμενον ἐπὶ τοῦ (Π) εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ $\bar{a}$ θὰ εἶναι $\dot{\bar{r}}_1\bar{a}=\bar{\varepsilon}\bar{a}+\lambda'\bar{a}^2=0$ δηλαδὴ $\lambda'=-\sigma\upsilon\nu\beta$, ὁπότε $\dot{\bar{r}}_1=\bar{\varepsilon}-\bar{a}\sigma\upsilon\nu\beta$, $\ddot{\bar{r}}_1=\bar{\varepsilon}'=u\bar{\varpi}$, $[\dot{\bar{r}}_1\ddot{\bar{r}}_1]^2=\dot{\bar{r}}_1^2\ddot{\bar{r}}_1^2-(\dot{\bar{r}}_1\ddot{\bar{r}}_1)^2=(\bar{\varepsilon}-\bar{a}\sigma\upsilon\nu\beta)^2\cdot(u\bar{\varpi})^2-(\bar{a}\bar{\varpi})^2u^2\sigma\upsilon\nu^2\beta=[1+\sigma\upsilon\nu^2\beta-2(\bar{\varepsilon}\bar{a})\sigma\upsilon\nu\beta]u^2-(\bar{a}\bar{\varpi})^2u^2\sigma\upsilon\nu^2\beta$. Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $\bar{\varepsilon}\bar{a}=\sigma\upsilon\nu\beta$ καὶ $\bar{\varepsilon}'\bar{a}=0$, $u(\bar{\varpi}\bar{a})=0$, ἐκ τῶν προηγουμένων θὰ ἔχωμεν : $|\dot{\bar{r}}_1|=\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu^2\beta-2\sigma\upsilon\nu^2\beta}=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\beta}=|\eta\mu\beta|$ καὶ $[\dot{\bar{r}}_1\ddot{\bar{r}}_1]^2=(1+\sigma\upsilon\nu^2\beta-2\sigma\upsilon\nu^2\beta)u^2=(1-\sigma\upsilon\nu^2\beta)u^2=u^2\eta\mu^2\beta$ ὁπότε παριστάνοντες μὲ u_1 τὴν καμπυλότητα τῆς προβολῆς θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸν τύπον (35.3) : $u_1=u|\eta\mu\beta|:|\eta\mu\beta|^3=u^2:\eta\mu^2\beta$.



Σχ.(41.2)

Ἀσκήσεις

Νὰ παρασταθῇ παραμετρικῶς ἑκάστη τῶν ἑπομένων γραμμῶν :

621) $x=y^2$, $x+z=1$ 622) $z^2+4y^2=4$, $y=x$

623) $z=1-x^2$, $y=x$ 624) $3+2x^2-y^2=z$, $x=z$

Νὰ παρασταθῇ ὑπὸ πλεγμένην μορφὴν ἑκάστη τῶν ἑπομένων γραμμῶν :

625) $x=t^2-1$, $y=1+t$, $z=t^3$ 626) $\bar{r}=(t, 1-t^2, e^t)$.

627) $x = 2\eta\mu t,\ y = 3\sigma\upsilon\nu t,\ z = t+1$ 628) $\bar{r} = (t^3, t^2, t^3-2t^2)$

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη τὸ κάθετον ἐπίπεδον καὶ τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῶν ἑπομένων γραμμῶν εἰς τὸ σημειούμενον σημεῖον:

629) $\bar{r} = (2t, t^2, 4t^4)$, $(t=1)$ 630) $\bar{r} = (t^2-1, t+1, t^3)$ $(t=2)$

631) $\bar{r} = (t^3-1, t+t^2, 4t^2-3t+1)$, $(t=1)$ 632) $\bar{r} = (t, \eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t)$ $(t=\frac{\pi}{4})$

Νὰ γίνῃ τὸ ἴδιο δι' ἑκάστην τῶν ἑπομένων γραμμῶν:

633) $x^2+y^2+z^2=25,\quad x+z=5,\quad (2, 2\sqrt{3}, 3)$

634) $2x^2+3y^2+z^2=9,\quad z^2=3x^2+y^2,\quad (1,-1,2)$

635) $xyz=1,\quad y^2=x,\quad (1,1,1)$.

636) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη καὶ τὸ κάθετον ἐπίπεδον τῆς γραμμῆς: $x^2+y^2+z^2=4a^2$, $x^2+y^2=4ax$ εἰς τὸ σημεῖον $(a, a, a\sqrt{2})$.

637) Ὁμοίως διὰ τὴν γραμμήν: $\beta^2\gamma^2x^2+\gamma^2a^2y^2-a^2\beta^2y^2=0$, $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ εἰς τὸ σημεῖον (x_1, y_1, z_1).

638) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη τὸ κάθετον ἐπίπεδον καὶ τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς γραμμῆς $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=\beta^2$ εἰς τὸ σημεῖον (x_1, y_1, z_1).

639) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη, τὸ κάθετον ἐπίπεδον, τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον, ἡ ἀκτὶς καὶ τὸ κέντρον καμπυλότητος τῆς γραμμῆς: $x^2=2az$, $y^2=2\beta z$ εἰς τὸ σημεῖον (x_1, y_1, z_1).

640) Νὰ εὑρεθῇ ἡ καμπυλότης καὶ ἡ στρέψις τῆς γραμμῆς μὲ παραμετρικὲς ἐξισώσεις: $x=a(3t-t^3)$, $y=3at^2$, $z=a(3t+t^3)$.

641) Διὰ μίαν γραμμὴν μὲ διανυσματικὴν ἐξίσωσιν $\bar{r}=\bar{r}(s)$ νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐσωτερικὰ γινόμενα: $\bar{r}^{(2)}\bar{r}^{(4)}$ καὶ $\bar{r}^{(3)}\bar{r}^{(4)}$ ὅπου μὲ $\bar{r}^{(\nu)}$ παριστάνομεν τὴν ν-στὴν παράγωγον τῆς $\bar{r}$ ὡς πρὸς s.

642) Ἐὰν μὲ τὸν προηγούμενον συμβολισμὸν εἶναι $\bar{r}^{(\nu)} = a_\nu\bar{\varepsilon}+\beta_\nu\bar{\omega}+\gamma_\nu\bar{\delta}$, νὰ ἀποδειχθοῦν οἱ ἀναγωγικοὶ τύποι: $a_{\nu+1}=a'_\nu-u\beta_\nu$, $\beta_{\nu+1}=\beta'_\nu+ua_\nu-\sigma\gamma_\nu$, $\gamma_{\nu+1}=\gamma'_\nu+\sigma\beta_\nu$.

643) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πρωτοκάθετον διάνυσμα καὶ ἡ καμπυλότης τῆς γραμμῆς μὲ ἐξίσωσιν: $\bar{r}=(4a\,\sigma\upsilon\nu^3 t,\ 4a\,\eta\mu^3 t,\ 3\beta\,\sigma\upsilon\nu 2t)$.

644) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ κάθε γραμμὴν $\bar{r}=\bar{r}(s)$, ἰσχύει ἡ διαφορικὴ σχέσις: $\frac{d}{ds}\left[\tau\frac{d}{ds}(R\bar{r}'')\right]+\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{R}\bar{r}'\right)+\frac{R}{\tau}\bar{r}''=0$.

645) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ κάθε γραμμὴν ἰσχύουν οἱ σχέσεις: $(\bar{\varepsilon}'\bar{\varepsilon}''\bar{\varepsilon}''')=u^3(u\sigma'-u'\sigma)=u^5(\sigma:u)'$, $(\bar{\delta}'\bar{\delta}''\bar{\delta}''')=\sigma^3(u'\sigma-u\sigma')(u:\sigma)'$.

Νὰ εὑρεθοῦν δι' ἑκάστην τῶν ἑπομένων γραμμῶν τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τὸ κέντρον καμπυλότητος καὶ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος.

646) $\bar{r}=(e^t\sigma\upsilon\nu t,\ e^t\eta\mu t,\ e^t)$ 647) $\bar{r}=(3t, 3t^2, 2t^3)$

648) $x=1:y=e^{az}$ 649) $x=y^2,\ y=z$

650) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ ἐγγύτατα ἐπίπεδα σὲ τρία σημεῖα Α, Β, Γ τῆς γραμμῆς $\bar{r}=(at, \beta t^2, \gamma t^3)$, τέμνουν τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ κατὰ τρεῖς εὐθεῖες οἱ ὁποῖες διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

651) Δίδεται ἡ γραμμή: $\bar{r}: \left[(\sigma\upsilon\nu t+\eta\mu t)e^t:2\sqrt{2},\ (\sigma\upsilon\nu t-\eta\mu t)e^t:2\sqrt{2},\ e^t:\sqrt{2}\right]$ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν τὰ πρωτεύοντα διανύσματα αὐτῆς καὶ τὸ κέντρον τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας, νὰ δειχθῇ δὲ ὅτι ἡ γραμμὴ εἶναι μία γενικὴ ἕλιξ ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ ἑνὸς κώνου ἐκ περιστροφῆς, μὲ κορυφὴν τὴν ἀρχὴν καὶ ἄξονα τὸν Oz, τοῦ ὁποίου τέμνει τὶς γενέτειρες ὑπὸ γωνίαν 30°.

652) Δίδεται ἡ γραμμή : $\bar{r} = (\eta\mu t, \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2 t, \sigma\upsilon\nu t)$ καί ζητεῖται νά εὑρεθοῦν τά πρωτεύοντα διανύσματα, τό ἐγγύτατον ἐπίπεδον καί οἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος καί στρέψεως.

653) Δίδεται ἡ γραμμή $\bar{r} = (\sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t, \sigma\upsilon\nu 2t)$ καί ζητεῖται νά εὑρεθοῦν τά πρωτεύοντα διανύσματα, ἡ καμπυλότης, ἡ στρέψις, τό κέντρον καμπυλότητος καί τέλος τά σημεῖα $M(t)$ τῆς γραμμῆς εἰς τά ὁποῖα, τό ἐγγύτατον ἐπίπεδον εἰς τό $M_1(t_1)$, ξανατέμνει αὐτήν.

654) Δίδεται ἡ γραμμή $\bar{r} = (\frac{1}{3}t^3 + t^2 - t, \frac{1}{3}t^3 - t^2 - t, \frac{1}{3}t^3 + t)$ καί ζητεῖται νά εὑρεθῇ τό μῆκος τόξου αὐτῆς λαμβάνοντες ὡς ἀρχήν τῶν τόξων τήν ἀρχήν τῶν συντεταγμένων. Ἐπίσης νά εὑρεθοῦν τά πρωτεύοντα διανύσματα, οἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος καί στρέψεως καθώς καί οἱ συντεταγμένες τοῦ κέντρου καμπυλότητος καί νά δειχθῇ ὅτι ἡ δοθεῖσα γραμμή εἶναι μία γενική ἕλιξ.

655) Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικός τόπος τοῦ κέντρου καμπυλότητος τῆς γραμμῆς μέ ἐξισώσεις: $y = x^2$, $z = \varphi(x)$ εἰς τό σημεῖον της $x = 0$, γιά ὅλες τίς συναρτήσεις $\varphi(x)$ διά τίς ὁποῖες εἶναι $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \varepsilon\varphi a$ ὅπου a σταθερόν τόξον.

656) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη διά νά κεῖται μία γραμμή μέ $\sigma \neq 0$ ἐπί σταθερῆς σφαίρας εἶναι : $R \cdot \tau + (R'\tau)' = 0$.

657) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ στρέψις τῆς ἐξειλιγμένης μιᾶς γραμμῆς δίδεται ἀπό τόν τύπον: $(u'\sigma - u\sigma') : u\,(u^2 + \sigma^2)(c + s)$.

658) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ πρωτεύουσα κάθετος μιᾶς γραμμῆς εἶναι κάθετος ἐπί τήν γραμμήν ἡ ὁποία εἶναι τόπος τῶν κέντρων καμπυλότητος αὐτῆς εἰς τά σημεῖα διά τά ὁποῖα εἶναι $u' = 0$.

659) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ δικάθετος εὐθεῖα μιᾶς γραμμῆς εἰς τό σημεῖον M, εἶναι ἡ ὁριακή θέσις τῆς κοινῆς καθέτου τῶν ἐφαπτομένων τῆς γραμμῆς εἰς τά σημεῖα M καί M_1 ὅταν $M_1 \to M$.

660) Ἐάν μία γραμμή κεῖται ἐπί μιᾶς σφαίρας νά δειχθῇ ὅτι τό κέντρον καμπυλότητος αὐτῆς εἶναι ἡ προβολή τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπί τό ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς γραμμῆς.

661) Νά δειχθῇ ὅτι διά νά εἶναι ἡ πρωτεύουσα κάθετος μιᾶς γραμμῆς, δικάθετος μιᾶς ἄλλης, πρέπει νά ἰσχύῃ ἡ σχέσις $u(u^2 + \sigma^2) = u$, ὅταν a σταθερόν.

662) Ἐάν ἀντιστοιχίσωμεν δύο γραμμές ἔτσι ὥστε εἰς τά ἀντίστοιχα σημεῖα τους οἱ ἐφαπτόμενες νά εἶναι παράλληλες, νά δειχθῇ ὅτι καί οἱ πρωτοκάθετες εὐθεῖες εἶναι παράλληλες, ἐπομένως καί οἱ δικάθετες, εἶναι δέ $u_1 : u = ds : ds_1 = \tau_1 : \tau$.

663) Ἐπί τῆς δικαθέτου εἰς τό σημεῖον M μιᾶς γραμμῆς σταθερῆς στρέψεως, λαμβάνομεν τό σημεῖον A τέτοιο ὥστε νά εἶναι $(\overline{MA}) = a =$ σταθερόν. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ δικάθετος τῆς γραμμῆς τήν ὁποίαν γράφει τό A σχηματίζει μέ τήν δικάθετον τῆς ἀρχικῆς γραμμῆς γωνίαν ἴσην μέ τοξ εφ $[a\sigma^2 \cdot u\sqrt{1 + a^2\sigma^2}]$.

664) Ἐπί τῆς ἐφαπτομένης εἰς τό σημεῖον M μιᾶς γραμμῆς, λαμβάνομεν σημεῖον A τέτοιο ὥστε νά εἶναι $(\overline{MA}) = a =$ σταθερόν. Νά εὑρεθοῦν τό μῆκος τόξου, τό ἐφαπτομενικόν διάνυσμα καί ἡ καμπυλότης τῆς γραμμῆς τήν ὁποίαν γράφει τό A καί νά δειχθῇ ὅτι ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς εἶναι παράλληλος πρός τό ἀντίστοιχον ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς ἀρχικῆς γραμμῆς.

665) Ἐάν τά ἐγγύτατα ἐπίπεδα γραμμῆς διέρχονται ἀπό ἕνα σταθερόν σημεῖον, νά δειχθῇ ὅτι ἡ γραμμή εἶναι ἐπίπεδος.

666) Οἱ δικάθετες μιᾶς γραμμῆς εἶναι καὶ δικάθετες μιᾶς ἄλλης ὅταν καὶ μόνον ὅταν ἡ ἀρχικὴ γραμμὴ εἶναι ἐπίπεδος.

667) Νὰ εὑρεθῆ ἡ καμπυλότης καὶ ἡ στρέψις τῆς γραμμῆς μὲ παραμετρικὲς ἐξισώσεις: $x = \int f(t)\,\eta\mu t\,dt,\ y = \int f(t)\,\sigma\upsilon\nu t\,dt,\ z = \int f(t)\varphi(t)\,dt.$

668) Ἐὰν ἡ γραμμὴ $\bar r = \bar r(s)$ ἔχη σταθερὴν στρέψιν, νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ γραμμὴ μὲ ἐξίσωσιν $\bar r_1 = \tau\bar\omega + \int \bar\delta\, ds$, ἔχει σταθερὴν καμπυλότητα.

669) Ἐὰν τὰ διανύσματα $\bar\varepsilon, \bar\delta$ σχηματίζουν ἀντιστοίχως τὶς γωνίες α, β μὲ ἕνα σταθερὸν διάνυσμα, νὰ δειχθῆ ὅτι: $\sigma\eta\mu\alpha\, d\alpha + u\,\eta\mu\beta\, d\beta = 0$.

670) Νὰ δειχθῆ ὅτι οἱ γραμμὲς μὲ σταθερὴν καμπυλότητα καὶ στρέψιν εἶναι κυκλικὲς ἕλικες.

671) Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς γραμμῆς $\bar r = [\,\sigma\upsilon\nu\vartheta,\ \eta\mu\vartheta,\ \varphi(\vartheta)\,]$ καὶ νὰ δειχθῆ ὅτι διὰ $\varphi(\vartheta) \equiv \frac{1}{a}\, ch a\vartheta$ τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον σὲ κάθε σημεῖον τῆς γραμμῆς ἐφάπτεται μιᾶς σφαίρας τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶναι ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων καὶ ἡ ἀκτὶς $\sqrt{1+a^{-2}}$.

672) Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι τρεῖς συναρτήσεις τῆς μορφῆς $F_i(x,y,z,t) = 0 \quad (i = 1,2,3)$ παριστάνουν μίαν γραμμὴν τοῦ τριδιαστάτου χώρου καὶ νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον (x, y, z).

Θεωρία τῶν ἐπιφανειῶν

42. Διάφοροι τρόποι παραστάσεως μιᾶς ἐπιφανείας. — Ἔστω μία ἐπιφάνεια μὲ παραμετρικὲς ἐξισώσεις:

$$x = \sigma_1(u,v), \quad y = \sigma_2(u,v), \quad z = \sigma_3(u,v) \qquad (42.1)$$

Ἐὰν μεταξὺ αὐτῶν ἀπαλείψωμεν τὶς μεταβλητὲς u, v προκύπτει μία ἐξίσωσις:

$$F(x,y,z) = 0 \qquad (42.2)$$

ἡ ὁποία ἐφ' ὅσον εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὶς τρεῖς παραμετρικές, λέγεται ἐξίσωσις ὑπὸ πλεγμένην μορφὴν τῆς ἐπιφανείας.

Ἐὰν ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις δύναται, κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς θεωρίας τῶν πλεγμένων συναρτήσεων, νὰ ἐπιλυθῆ ὡς πρὸς z, προκύπτει μία ἐξίσωσις

$$z = z(x,y) \qquad (42.3)$$

ἡ ὁποία λέγεται συνήθης ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας. Ὁμοίως ἐὰν δύναται νὰ ἐπιλυθῆ ὡς πρὸς x ἢ y, προκύπτουν οἱ ἐξισώσεις τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$x = x(y,z) \quad \text{ἢ} \quad y = y(z,x) \qquad (42.4)$$

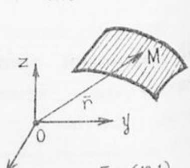
Ἐάν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (42.2) ἀντικαταστήσωμεν τὰ x, y, z συναρτήσει τῶν σφαιρικῶν συντεταγμένων ρ, ϑ, φ ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς τύπους, θὰ προκύψη μία ἐξίσωσις τῆς μορφῆς :

$$\Phi\,(\rho, \vartheta, \varphi) = 0 \qquad (42.5)$$

ἡ ὁποία λέγεται ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας εἰς σφαιρικὲς συντεταγμένες.
Γενικῶς ἕνα σύστημα ν-ἐξισώσεων μὲ ν-1 παραμέτρους τῆς μορφῆς :

$$\begin{array}{lcl} F_1\,(x,y,z,a_1,\cdots,a_{\nu-1}) = 0 & & \Phi_1\,(\rho,\vartheta,\varphi,a_1,\cdots,a_{\nu-1}) = 0 \\ F_2\,(x,y,z,a_1,\cdots,a_{\nu-1}) = 0 & & \Phi_2\,(\rho,\vartheta,\varphi,a_1,\cdots,a_{\nu-1}) = 0 \\ \cdots\cdots & \text{ἤ} & \cdots\cdots \\ F_\nu\,(x,y,z,a_1,\cdots,a_{\nu-1}) = 0 & & \Phi_\nu\,(\rho,\vartheta,\varphi,a_1,\cdots,a_{\nu-1}) = 0 \end{array} \qquad (42.6)$$

παριστάνει ἐπίσης μίαν ἐπιφάνειαν ἀντιστοίχως ὡς πρὸς ἕνα σύστημα καρτεσιανῶν ἢ σφαιρικῶν συντεταγμένων. Αὐτὸ φαίνεται ἀμέσως ὅταν ἀπαλείψωμεν τὶς παραμέτρους μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων ὁπότε προκύπτει ἐκ τῶν πρώτων ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (42.2) καὶ ἐκ τῶν ἄλλων ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (42.5).
Ἐάν θεωρήσωμεν τέλος μίαν ἐπιφάνειαν (Σ) μὲ παραμετρικὲς ἐξισώσεις τὶς (42.2) καὶ παραστήσωμεν μὲ $\bar{r}$ τὴν διανυσματικὴν ἀκτῖνα $\overline{OM}$ τῆς ὁποίας τὸ πέρας εἶναι τυχὸν σημεῖον $M\,(x,y,z)$ τῆς ἐπιφανείας, οἱ συντεταγμένες τῆς $\bar{r}$ ἰσοῦνται προφανῶς μὲ τὶς συντεταγμένες τοῦ M, ὁπότε ἔχομεν :



$$\bar{r} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \bar{r}\,(u,v) \qquad (42.7)$$

Σχ. (42.1)

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις λέγεται διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας (Σ) καὶ εἶναι προφανῶς μία περιληπτικὴ γραφὴ τῶν παραμετρικῶν ἐξισώσεων αὐτῆς. Κατωτέρω, χωρὶς νὰ τὸ ἀναφέρωμεν εἰδικῶς κάθε φορά, θὰ ὑποθέτωμεν ὅτι οἱ ἐξισώσεις, ποὺ παριστάνουν τὴν ἐπιφάνεια, ἔχουν συνεχεῖς μερικὰς παραγώγους μέχρι τῆς τάξεως ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ τὸ ἐξεταζόμενον ζήτημα.
Δίδομεν τώρα τὶς ἐξισώσεις μερικῶν γνωστῶν ἐπιφανειῶν τῶν ὁποίων ἡ λεπτομερειακὴ πραγμάτευσις ἔχει γίνει εἰς τὴν ἀναλυτικὴν γεωμετρίαν.

Σφαῖρα μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ ἀκτῖνα α.—

$$\begin{gathered} \bar{r} = (\alpha\,\text{συν}\,u\,\text{συν}\,v,\ \alpha\,\text{ημ}\,u\,\text{συν}\,v,\ \alpha\,\text{ημ}\,v) \\ x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 \\ z = \pm\sqrt{\alpha^2 - x^2 - y^2} \end{gathered} \qquad (42.8)$$

Ἐλλειψοειδὲς μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ ἡμιάξονες α, β, γ.—

$$\begin{gathered} \bar{r} = (\alpha\,\text{συν}\,u\,\text{συν}\,v,\ \beta\,\text{ημ}\,u\,\text{συν}\,v,\ \gamma\,\text{ημ}\,v) \\ x^2 : \alpha^2 + y^2 : \beta^2 + z^2 : \gamma^2 = 1 \\ z = \pm\gamma\,(1 - x^2 : \alpha^2 - y^2 : \beta^2)^{\frac{1}{2}} \end{gathered} \qquad (42.9)$$

Μονόχωνον ὑπερβολοειδές μέ κέντρον τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων καί ἡμιάξονες α,β,γ.—

$$\bar{r} = \left[\alpha(\upsilon-u):(u+\upsilon),\ \beta(u\upsilon+1):(u+\upsilon),\ \gamma(u\upsilon-1):(u+\upsilon) \right]$$

$$x^2:\alpha^2+y^2:\beta^2-z^2:\gamma^2=1 \qquad (42.10)$$

$$z = \pm\gamma\,(x^2:\alpha^2+y^2:\beta^2-1)^{\frac{1}{2}}$$

Δίχωνον ὑπερβολοειδές μέ κέντρον τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων καί ἡμιάξονες α,β,γ.—

$$\bar{r} = (\alpha\,\varepsilon\varphi u\ \sigma\upsilon\nu\,\upsilon,\ \beta\,\varepsilon\varphi u\ \eta\mu\upsilon,\ \gamma:\sigma\upsilon\nu u)$$

$$x^2:\alpha^2+y^2:\beta^2-z^2:\gamma^2=-1 \qquad (42.11)$$

$$z = \pm\gamma\,(x^2:\alpha^2+y^2:\beta^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

Ἐλλειπτικόν παραβολοειδές μέ ἄξονα τόν Oz.—

$$\bar{r} = (\sqrt{\alpha}\,\sigma\upsilon\nu u\ \sigma\upsilon\nu\upsilon,\ \sqrt{\beta}\,\sigma\upsilon\nu u\ \eta\mu\upsilon,\ \sigma\upsilon\nu^2 u) \qquad (42.12)$$

$$z = x^2:\alpha + y^2:\beta$$

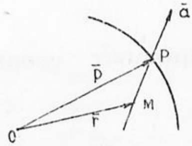
Ὑπερβολικόν παραβολοειδές.—

$$\bar{r} = \left[\sqrt{\alpha}\,(u+\upsilon):2u\upsilon,\ \sqrt{\beta}\,(u-\upsilon):2u\upsilon,\ 1:u\upsilon \right] \qquad (42.13)$$

$$z = x^2:\alpha - y^2:\beta$$

Εὐθειογενής ἐπιφάνεια μέ ὁδηγόν τήν γραμμήν $\bar{p}=\bar{p}(u)$ καί γενέτειρες παράλληλες πρός τό διάνυσμα $\bar{\alpha}(u)$.—

$$\bar{r} = \bar{p}(u)+\upsilon\bar{\alpha}(u) \qquad (42.14)$$

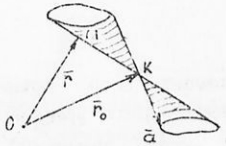


Σχ. (42.2)

Κωνική ἐπιφάνεια μέ κορυφήν τό σημεῖον $K(\bar{r}_0)$ τό ὁποῖον εἶναι τομή τῶν τριῶν ἐπιπέδων $\varepsilon_i \equiv A_i x + B_i y + \Gamma_i z + \Delta_i = 0$ $(i=1,2,3)$ καί γενέτειρες παράλληλες πρός τό διάνυσμα $\bar{\alpha}(u)$.—

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \upsilon\bar{\alpha}(u) \qquad (42.15)$$

$$F\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right) = 0$$

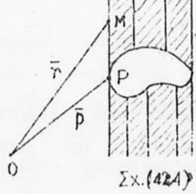


Σχ. (42.3)

Κυλινδρική ἐπιφάνεια μέ ὁδηγόν τήν γραμμήν $\bar{p}=\bar{p}(u)$ καί γενέτειρες παράλληλες πρός τό σταθερόν διάνυσμα $\bar{\alpha}$, τό ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρός τήν τομήν τῶν δύο ἐπιπέδων $\varepsilon_i \equiv A_i x + B_i y + \Gamma_i z = 0$ $(i=1,2)$.—

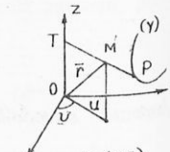
$$\bar{r} = \bar{p}(u)+\upsilon\bar{\alpha} \qquad (42.16)$$

$$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$$



Σχ. (42.4)

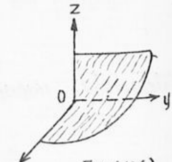
Κωνοειδής ἐπιφάνεια μέ πρώτην ὁδηγόν τόν ἄξονα τῶν z καί ὁδηγόν ἐπίπεδον τό $z=0$. —



Σx.(42.5)

$$\bar{r} = [\,u\,\text{συν}\,\upsilon,\ u\,\text{ημ}\,\upsilon,\ \varphi(\upsilon)\,] \qquad (42.17)$$
$$F\left(\frac{y}{x},\, z\right) = 0$$

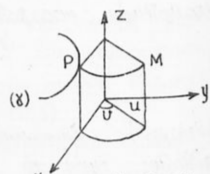
Ὀρθόν ἑλικοειδές. —



Σx.(42.6)

$$\bar{r} = (\,u\,\text{συν}\,\upsilon,\ u\,\text{ημ}\,\upsilon,\ \beta\upsilon\,) \qquad (42.18)$$
$$z = \beta\ \text{τοξ εφ}\,\frac{y}{x}$$

Ἐπιφάνειες ἐκ περιστροφῆς περί τόν ἄξονα τῶν z. —



Σx. (42.7)

$$\bar{r} = [\,u\,\text{συν}\,\upsilon,\ u\,\text{ημ}\,\upsilon,\ \varphi(u)\,] \qquad (42.19)$$
$$z = \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

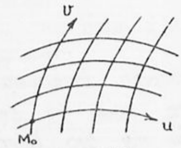
43. Παραμετρικές γραμμές. — Ἔστω ἐπιφάνεια μέ διανυσματικήν ἐξίσωσιν:

$$\bar{r} = \bar{r}\,(u,\upsilon) \qquad (43.1)$$

Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ παράμετρος υ δέν μεταβάλλεται, ἀλλά ἔχει μίαν σταθερήν τιμήν υ_0, τοτε ἀντικαθιστῶντες αὐτήν εἰς την ἐξίσωσιν προκύπτει:

$$\bar{r} = \bar{r}\,(u,\upsilon_0) \qquad (43.2)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτή ἐπειδή τώρα ἐξαρτάται μόνον ἀπό τήν παράμετρον u, παριστάνει μίαν γραμμήν τοῦ τριδιαστάτου χώρου ἡ ὁποία κεῖται προφανῶς ἐπί τῆς ἐπιφανείας καί λέγεται παραμετρική γραμμή u ἤ συντόμως γραμμή $\upsilon=\upsilon_0$. Ἐάν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μεταβλητή u δέν μεταβάλλεται καί ἔχει μίαν σταθερήν τιμήν u_0, τότε ἀντικαθιστῶντες αὐτήν εἰς τήν ἐξίσωσιν (43.1) προκύπτει:

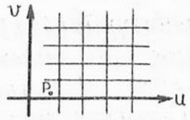


Σx. (43.1)

$$\bar{r} = \bar{r}\,(u_0,\upsilon) \qquad (43.3)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτή ἐξαρτωμένη μόνον ἀπό τήν παράμετρον υ, παριστάνει μίαν γραμμήν τοῦ τριδιαστάτου χώρου, ἡ ὁποία κεῖται ἐπί τῆς ἐπιφανείας

καὶ λέγεται παραμετρικὴ γραμμὴ υ ἢ συντόμως γραμμὴ $u=u_0$.
Ἂν αἱ u, υ λάβουν ὅλες τὶς δυνατὲς τιμές, προκύπτουν ἀντιστοίχως μία ἁπλῆ ἀπειρία γραμμῶν υ καὶ μία ἁπλῆ ἀπειρία γραμμῶν u, οἱ ὁποῖες καλύπτουν ὁλόκληρη τὴν ἐπιφάνεια σχ. (43.1) καὶ λέγονται παραμετρικὲς γραμμὲς τῆς ἐπιφανείας. Δι' ἑκάστου σημείου $M_0(u_0,\upsilon_0)$ τῆς ἐπιφανείας διέρχεται μόνον μία γραμμὴ $u=u_0$ καὶ μόνον μία γραμμὴ $\upsilon=\upsilon_0$, εἶναι δὲ τὸ σημεῖον M_0 καὶ οἱ δι' αὐτοῦ διερχόμενες παραμετρικὲς γραμμές, εἰκόνες τοῦ σημείου $P_0(u_0,\upsilon_0)$ καὶ τῶν δι' αὐτοῦ διερχομένων παραλλήλων εὐθειῶν πρὸς τοὺς ἄξονες τοῦ ἐπιπέδου τῶν u, υ καὶ γενικῶς τὸ παραμετρικὸν δίκτυον τῆς ἐπιφανείας εἶναι ἡ εἰκόνα τῶν παραλλήλων πρὸς τοὺς ἄξονες εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου τῶν u,υ σχ. (43.2).



Σχ. (43.2)

Ἂν ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι οἱ μεταβλητὲς u,υ εἶναι συναρτήσεις:

$$u=u(t), \quad \upsilon=\upsilon(t) \tag{43.4}$$

μιᾶς μεταβλητῆς t, τότε ἀπὸ τὴν (43.1) προκύπτει ἡ ἐξίσωσις:

$$\bar{r}=\bar{r}\left[u(t),\upsilon(t)\right] \tag{43.5}$$

ἡ ὁποία παριστάνει προφανῶς μίαν γραμμὴν τῆς ἐπιφανείας καὶ μάλιστα ἐκείνη ποὺ εἶναι εἰκόνα τῆς γραμμῆς (43.4) τοῦ ἐπιπέδου τῶν u,υ. Διὰ συντομίαν θὰ λέγωμεν ἡ γραμμὴ τῆς ἐπιφανείας μὲ ἐξισώσεις τὶς (43.4) καὶ θὰ ἐννοοῦμεν τὴν γραμμὴν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἡ ὁποία εἶναι εἰκόνα αὐτῆς καὶ τῆς ὁποίας ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις εἶναι ἡ (43.5). Μία ἐπιφανειακὴ γραμμὴ μπορεῖ νὰ δοθῇ καὶ μὲ τὶς ἑξῆς μορφές:

$$u=u(\upsilon), \quad \upsilon=\upsilon(u), \quad \varphi(u,\upsilon)=0 \tag{43.6}$$

Τὸ ἐφαπτομενικὸν διάνυσμα μιᾶς ἐπιφανειακῆς γραμμῆς ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (43.4), προκύπτει ἀπὸ τὴν (43.5) παραγωγίζοντες ὡς πρὸς t, ὁπότε λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι πρόκειται διὰ σύνθετον συνάρτησιν τῆς t διὰ μέσου τῶν u,υ θὰ εἶναι:

$$\dot{\bar{r}}=\bar{r}_u\dot{u}+\bar{r}_\upsilon\dot{\upsilon} \tag{43.7}$$

Τὰ διανύσματα $\bar{r}_u, \bar{r}_\upsilon$ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ μερικαὶ παράγωγοι ὡς πρὸς u,υ τῆς συναρτήσεως $\bar{r}(u,\upsilon)$ εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον ἐπαφῆς καὶ οἱ $\dot{u}$, $\dot{\upsilon}$ αἱ παράγωγοι ὡς πρὸς t τῶν u,υ διὰ τὴν τιμὴν τοῦ t ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον αὐτό. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δὲ προκύπτει ὅτι τὰ $\bar{r}_u, \bar{r}_\upsilon$ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ἐφαπτομενικὰ διανύσματα τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν u, υ.

Παράδειγμα (43.1). — Νά εὑρεθῆ τό εἶδος τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν τοῦ ἐπιπέδου μέ ἐξίσωσιν : $\bar{r} = \bar{r}_0 + u\bar{\alpha} + \upsilon\bar{\beta}$.

Λ ύ σ ι ς. Οἱ παραμετρικές γραμμές $u = u_0$ ἔχουν διανυσματικήν ἐξίσωσιν $\bar{r} = \bar{r}_0 + u_0\bar{\alpha} + \upsilon\bar{\beta}$, δηλαδή εἶναι εὐθεῖες παράλληλες πρός τό διάνυσμα $\bar{\beta}$ καί οἱ παραμετρικές γραμμές $\upsilon = \upsilon_0$ ἔχουν ἐξίσωσιν $\bar{r} = \bar{r}_0 + u\bar{\alpha} + \upsilon_0\bar{\beta}$, δηλαδή εἶναι εὐθεῖες παράλληλες πρός τό $\bar{\alpha}$.

Παράδειγμα (43.2). — Νά εὑρεθῆ τό εἶδος τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν τῆς σφαίρας μέ ἐξίσωσιν : $\bar{r} = (\alpha\sigma\upsilon\nu u\sigma\upsilon\nu\upsilon, \alpha\eta\mu u\sigma\upsilon\nu\upsilon, \alpha\eta\mu\upsilon)$.

Λ ύ σ ι ς. Οἱ παραμετρικές γραμμές $u = u_0$ ἔχουν διανυσματικήν ἐξίσωσιν: $\bar{r} = (\alpha\sigma\upsilon\nu u_0\sigma\upsilon\nu\upsilon, \alpha\eta\mu u_0\sigma\upsilon\nu\upsilon, \alpha\eta\mu\upsilon)$ δηλαδή εἶναι οἱ μέγιστοι κύκλοι τῆς σφαίρας οἱ διερχόμενοι διά τοῦ ἄξονος τῶν z. Αὐτό φαίνεται ἀμέσως ὅταν γράψωμεν τίς παραμετρικές ἐξισώσεις : $x = \alpha\sigma\upsilon\nu u_0\sigma\upsilon\nu\upsilon$, $y = \alpha\eta\mu u_0\sigma\upsilon\nu\upsilon$, $z = \alpha\eta\mu\upsilon$ ὁπότε ἐξ αὐτῶν θά ἔχωμεν $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$ καί $y = x\,\varepsilon\varphi u_0$ δηλαδή οἱ γραμμές $u = u_0$ προκύπτουν ἐκ τῆς τομῆς τῆς σφαίρας ὑπό ἐπιπέδων διερχομένων διά τοῦ ἄξονος τῶν z. Οἱ παραμετρικές γραμμές $\upsilon = \upsilon_0$ ἔχουν διανυσματικήν ἐξίσωσιν $\bar{r} = (\alpha\sigma\upsilon\nu u\sigma\upsilon\nu\upsilon_0, \alpha\eta\mu u\sigma\upsilon\nu\upsilon_0, \alpha\eta\mu\upsilon_0)$ δηλαδή εἶναι οἱ παράλληλοι πρός τό ἐπίπεδον τῶν x,y κύκλοι τῆς σφαίρας. Αὐτό φαίνεται πάλι ἀμέσως ὅταν γράψωμεν τίς παραμετρικές ἐξισώσεις : $x = \alpha\sigma\upsilon\nu u\sigma\upsilon\nu\upsilon_0$, $y = \alpha\eta\mu u\sigma\upsilon\nu\upsilon_0$, $z = \alpha\eta\mu\upsilon_0$ ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει : $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$ καί $z = \alpha\eta\mu\upsilon_0$ δηλαδή οἱ γραμμές $\upsilon = \upsilon_0$ προκύπτουν ἐκ τῆς τομῆς τῆς σφαίρας ὑπό ἐπιπέδων παραλλήλων πρός τό οxy.

Παράδειγμα (43.3). — Νά εὑρεθῆ τό εἶδος τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν τοῦ ὀρθοῦ ἑλικοειδοῦς $\bar{r} = (u\sigma\upsilon\nu\upsilon, u\eta\mu\upsilon, \beta\upsilon)$.

Λ ύ σ ι ς. Παραμετρικές γραμμές u οἱ κάθετες πρός τόν ἄξονα οz εὐθεῖες μέ ἐξίσωσιν : $\bar{r} = (u\sigma\upsilon\nu\upsilon_0, u\eta\mu\upsilon_0, \beta\upsilon_0)$ καί παραμετρικές γραμμές υ οἱ ἕλικες μέ ἐξίσωσιν $\bar{r} = (u_0\sigma\upsilon\nu\upsilon, u_0\eta\mu\upsilon, \beta\upsilon)$.

Παράδειγμα (43.4). — Νά εὑρεθῆ τό εἶδος τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας : $\bar{r} = [u\sigma\upsilon\nu\upsilon, u\eta\mu\upsilon, \varphi(u)]$.

Λ ύ σ ι ς. Παραμετρικές γραμμές u οἱ μεσημβρινοί τῆς ἐπιφανείας δηλαδή οἱ τομές αὐτῆς ἀπό τά ἐπίπεδα τά διερχόμενα διά τοῦ ἄξονος τῶν z καί γραμμές υ οἱ παράλληλοι πρός τό ἐπίπεδον τῶν x, y κύκλοι τῆς ἐπιφανείας.

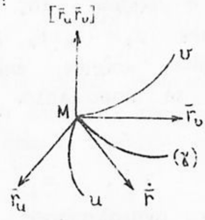
44. Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον. — Ἔστω ἐπιφάνεια μέ διανυσματικήν ἐξίσωσιν:

$$\bar{r} = \bar{r}(u, \upsilon) \qquad (44.1)$$

καί $\bar{r}_u, \bar{r}_\upsilon$ τά ἐφαπτομενικά διανύσματα τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν εἰς τό σημεῖον Μ. Ἐάν σχηματίσωμεν τό ἐξωτερικόν γινόμενον αὐτῶν :

$$[\bar{r}_u \bar{r}_v] = (y_u z_v - y_v z_u, z_u x_v - z_v x_u, x_u y_v - x_v y_u) \qquad (44.2)$$

παρατηροῦμεν ὅτι οἱ συντεταγμένες του ἰσοῦνται μὲ τὶς τρεῖς ὁρίζουσες τοῦ πίνακος (22.3), ἑπομένως ἐὰν τὸ Μ εἶναι ἕνα ὁμαλὸν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας, τότε τὸ $[\bar{r}_u \bar{r}_v]$ εἶναι πάντοτε ἕνα μὴ μηδενικὸν διάνυσμα καὶ ἀντιστρόφως. Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν καὶ μίαν γραμμὴν (γ) τῆς ἐπιφανείας μὲ ἐξισώσεις τὶς (43.4) ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ Μ καὶ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (43.7) ἐσωτερικῶς ἐπὶ τὸ διάνυσμα $[\bar{r}_u \bar{r}_v]$ προκύπτει:



Σχ. (44.1)

$\dot{\bar{r}}\,[\bar{r}_u \bar{r}_v] = (\bar{r}_u \bar{r}_u \bar{r}_v)\dot{u} + (\bar{r}_v \bar{r}_u \bar{r}_v)\dot{v} = 0$, δηλαδὴ τὸ $[\bar{r}_u \bar{r}_v]$ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐφαπτομενικὸν διάνυσμα $\dot{\bar{r}}$ τῆς (γ) εἰς τὸ Μ. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ (γ) εἶναι μία οἱαδήποτε ἐπιφανειακὴ γραμμή, συμπεραίνομεν ὅτι οἱ ἐφαπτόμενες ὅλων τῶν ἐπιφανειακῶν γραμμῶν τῶν διερχομένων διὰ τοῦ ὁμαλοῦ σημείου Μ, κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ Μ καὶ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ $[\bar{r}_u \bar{r}_v]$. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν τὸ μὲν ἐπίπεδον λέγεται ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τὸ δὲ $[\bar{r}_u \bar{r}_v]$ κάθετον διάνυσμα τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ Μ. Ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου θὰ εἶναι λοιπὸν ἐξ ὁρισμοῦ:

$$(\bar{x} - \bar{r}, \bar{r}_u \bar{r}_v) = 0 \qquad (44.3)$$

ἡ ὁποία δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὑπὸ τὴν παραμετρικὴν μορφήν:

$$\bar{x} = \bar{r} + \lambda \bar{r}_u + \mu \bar{r}_v \qquad (44.4)$$

ὅπου $\bar{x}$ ἡ διανυσματικὴ ἀκτίνα τῆς ὁποίας τὸ πέρας εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου, $\bar{r}$ ἡ διανυσματικὴ ἀκτίνα τῆς ὁποίας τὸ πέρας ὁρίζει τὸ σημεῖον ἐπαφῆς καὶ λ, μ ἀνεξάρτητοι παράμετροι. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x, y, z τὶς συντεταγμένες τῆς $\bar{r}$ δηλαδὴ τοῦ σημείου ἐπαφῆς, μὲ ἀντίστοιχα κεφαλαῖα X, Y, Z τὶς συντεταγμένες τῆς $\bar{x}$ καὶ μὲ Α, Β, Γ τὶς συντεταγμένες τοῦ $[\bar{r}_u \bar{r}_v]$, ἡ ἐξίσωσις (44.3) γράφεται:

$$A(X - x) + B(Y - y) + \Gamma(Z - z) = 0 \qquad (44.5)$$

Ἡ ἐξίσωσις μιᾶς ἐπιφανείας ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (42.3), δύναται προφανῶς νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν διανυσματικὴν μορφήν:

$$\bar{r} = [x, y, z(x, y)] \qquad (44.6)$$

ὅπου τώρα οἱ x, y παίζουν τὸν ρόλον τῶν παραμέτρων u, υ. Τὸ κάθετον διάνυσμα κατὰ τὸν τύπον (44.2) θὰ εἶναι τώρα:

$$[\bar{r}_x \bar{r}_y] = (-z_x, -z_y, 1) \qquad (44.7)$$

ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (44.5) τὰ Α, Β, Γ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$Z-z = (X-x)\,z_x + (Y-y)\,z_y \qquad (44.8)$$

Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας δίδεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (42.2) θὰ εἶναι ὡς γνωστὸν $z_x = -F_x : F_z$, $Z_y = -F_y : F_z$, ἐπομένως τὸ διάνυσμα $(-F_x : F_z, -F_y : F_z, -1)$ θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν. Ἀντὶ αὐτοῦ ὅμως δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ παράλληλον πρὸς αὐτό:

$$[\bar{r}_x \bar{r}_y] = (F_x, F_y, F_z) \qquad (44.9)$$

ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (44.5) τὰ Α, Β, Γ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$(X-x)\,F_x + (Y-y)\,F_y + (Z-z)\,F_z = 0 \qquad (44.10)$$

Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Μ, λέγεται κάθετος τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον Μ καὶ τὴν προσανατολίζομεν συνήθως κατὰ τὴν φορὰν τῶν παραλλήλων πρὸς αὐτὴν διανυσμάτων (44.2), (44.7) ἢ (44.9) ἀντιστοίχως ὅταν ἡ ἐπιφάνεια δίδεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (42.7), (42.3) ἢ (42.2).

Παράδειγμα (44.1). — Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τοῦ ὀρθοῦ ἑλικοειδοῦς $\bar{r} = (u\,\text{συν}\,v,\ u\,\text{ημ}\,v,\ \beta v)$ εἰς τὸ σημεῖον $M(1, \pi/2)$.
Λύσις. Ἔχομεν $\bar{r}_u = (\text{συν}\,v, \text{ημ}\,v, \beta)$, $\bar{r}_v = (-u\,\text{ημ}\,v, u\,\text{συν}\,v, \beta)$ καὶ εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον εἶναι $\bar{r} = (0, 1, \beta\pi : 2)$, $\bar{r}_u = (0, 1, \beta)$, $\bar{r}_v = (-1, 0, \beta)$, $[\bar{r}_u \bar{r}_v] = (\beta, 0, 1)$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (44.5) προκύπτει ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου: $\beta x + z - \beta = 0$.

Παράδειγμα (44.2). — Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς $z = x^2 : \alpha + y^2 : \beta$ εἰς τὸ σημεῖον $M(x, y, z)$.
Λύσις. Ἔχομεν $z_x = 2x : \alpha$, $z_y = 2y : \beta$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (44.8) προκύπτει: $Z - z = (X-x)\,2x : \alpha + (Y-y)\,2y : \beta$; $Z - z = 2Xx : \alpha + 2Yy : \alpha - 2(x^2 : \alpha + y^2 : \beta)$, $Z - z = 2Xx : \alpha + 2Yy : \alpha - 2z$ ἢ τέλος $Z + z = (2x : \alpha)X + (2y : \beta)Y$.

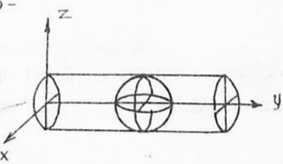
Παράδειγμα (44.3). — Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς $x^2 : \alpha^2 + y^2 : \beta^2 + z^2 : \gamma^2 = 1$ εἰς τὸ σημεῖον $M(x, y, z)$.
Λύσις. Ἔχομεν $F_x = 2x : \alpha^2$, $F_y = 2y : \beta^2$, $F_z = 2z : \gamma^2$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (44.10) προκύπτει: $(X-x)\,2x : \alpha^2 + (Y-y)\,2y : \beta^2 + (Z-z)\,2z : \gamma^2 = 0$,

$2Xx:\alpha^2+2Yy:\beta^2+2Zz:\gamma^2-2(x^2:\alpha^2+y^2:\beta^2-z^2:\gamma^2)=0$ ἢ τέλος ἀπλοποιοῦντες διὰ τοῦ 2 καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ παρένθεσις ἰσοῦται μὲ 1 θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν: $(x:\alpha^2)X+(y:\beta^2)Y+(z:\gamma^2)Z=1$.

45. Περιβάλλουσα οἰκογενείας ἐπιφανειῶν.— Ἄς θεωρήσωμεν μίαν μονοπαραμετρικὴν οἰκογένεια ἐπιφανειῶν :

$$F(x,y,z,\alpha)=0 \qquad (45.1)$$

Μία ἐπιφάνεια λέγεται περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας αὐτῆς ὅταν κάθε σημεῖον της εἶναι σημεῖον ἐπαφῆς αὐτῆς μὲ κάποια ἐπιφάνεια τῆς οἰκογενείας. Π.χ. ἡ οἰκογένεια τῶν σφαιρῶν : $x^2+(y-\alpha)^2+z^2=\rho^2$, ὅπου ρ σταθερὸν καὶ α μεταβλητὴ παράμετρος, ἔχει προφανῶς καθὼς προκύπτει καὶ ἀπὸ τὸ σχ. (45.1), ὡς περιβάλλουσα τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν $x^2+z^2=\rho^2$. Μὲ σκέψεις ἀνάλογες πρὸς αὐτὲς ποὺ κάναμε διὰ τὴν περιβάλλουσα μιᾶς μονοπαραμετρικῆς οἰκογενείας ἐπιπέδων γραμμῶν ἀποδεικνύονται τὰ ἑξῆς :



Σχ. (45.1)

Ἐὰν ἡ οἰκογένεια ἔχη περιβάλλουσα, τότε τὰ σημεῖα της (x,y,z) ἐπαληθεύουν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων :

$$\begin{aligned} F(x,y,z,\alpha) &= 0 \\ F_\alpha(x,y,z,\alpha) &= 0 \end{aligned} \qquad (45.2)$$

Δύναται ὅμως τὸ σύνολον τῶν σημείων τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὸ σύστημα αὐτό, νὰ περιέχη καὶ σημεῖα μὴ ἀνήκοντα εἰς τὴν περιβάλλουσα ὅπως π.χ. ἀνώμαλα σημεῖα τῶν ἐπιφανειῶν τῆς οἰκογενείας. Ἡ συνήθης ἐξίσωσις τῆς περιβαλλούσης θὰ προκύψη δι' ἀπαλειφῆς τῆς παραμέτρου α μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (45.2).

Οἱ ἐξισώσεις (45.2) ὅταν τὸ α ἔχη μίαν ὡρισμένην τιμήν, ὁρίζουν μίαν γραμμὴν ἡ ὁποία λέγεται χαρακτηριστικὴ γραμμὴ καὶ τὰ σημεῖα της χαρακτηριστικὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τῆς οἰκογενείας εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκουν.

Ἡ περιβάλλουσα ἐφάπτεται ἑκάστης τῶν ἐπιφανειῶν τῆς οἰκογενείας κατὰ μῆκος τῆς ἀντιστοίχου πρὸς τὴν ἐπιφάνεια χαρακτηριστικῆς.

Ἡ περιβάλλουσα δύναται νὰ θεωρηθῆ ὡς ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν χαρακτηριστικῶν γραμμῶν ὅλων τῶν ἐπιφανειῶν τῆς οἰκογενείας, καθὼς ἐπίσης δύναται νὰ θεωρηθῆ καὶ ὡς τὸ σύνολον τῶν ὁριακῶν θέσεων τῶν σημείων τομῆς, ἐὰν φυσικὰ ὑπάρχουν, δύο γειτονικῶν ἐπιφανειῶν τῆς οἰκογενείας.

Τὸ σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων :

$$F(x,y,z,\alpha)=0$$
$$F_\alpha(x,y,z,\alpha)=0 \qquad (45.3)$$
$$F_{\alpha\alpha}(x,y,z,\alpha)=0$$

γιά ὅλες τίς τιμές τοῦ α, ὁρίζει μίαν γραμμήν ἡ ὁποία κεῖται ἐπί τῆς περιβαλλούσης καί λέγεται γραμμή ἀνακάμψεως αὐτῆς.
Ἡ γραμμή ἀνακάμψεως ἔχει σέ κάθε ὁμαλόν σημεῖον αὐτῆς, ἐπαφήν τουλάχιστον πρώτης τάξεως μέ τήν χαρακτηριστικήν τῆς ἐπιφανείας εἰς τήν ὁποίαν ἀνήκει τό σημεῖον αὐτό καί ἐπαφήν τουλάχιστον δευτέρας τάξεως μέ τήν ἐπιφάνεια τῆς οἰκογενείας εἰς τήν ὁποίαν ἀνήκει ἡ χαρακτηριστική αὐτή.
Ἡ περιβάλλουσα μιᾶς διπαραμετρικῆς οἰκογενείας ἐπιφανειῶν :

$$F(x,y,z,\alpha,\beta)=0 \qquad (45.4)$$

ὁρίζεται ὁμοίως ὅπως ἡ περιβάλλουσα μιᾶς μονοπαραμετρικῆς οἰκογενείας καί ἀποδεικνύεται ὅτι τά σημεῖα της (x,y,z) ἐπαληθεύουν τό σύστημα:

$$F(x,y,z,\alpha,\beta)=0$$
$$F_\alpha(x,y,z,\alpha,\beta)=0 \qquad (45.5)$$
$$F_\beta(x,y,z,\alpha,\beta)=0$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις αὐτές ὁρίζεται ἡ ἐπιφάνεια εἴτε παραμετρικῶς

$$x=x(\alpha,\beta),\quad y=y(\alpha,\beta),\quad z=z(\alpha,\beta) \qquad (45.6)$$

εἴτε δί ἀπαλειφῆς τῶν παραμέτρων α,β προκύπτει ἡ συνήθης ἐξίσωσις :

$$\Phi(x,y,z)=0 \qquad (45.7)$$

οἱ ἐξισώσεις (45.6) ὁρίζουν δί ἕνα ὡρισμένον ζεῦγος τιμῶν τῶν α,β ἕνα πλῆθος μεμονωμένων σημείων ἐπί τῆς ἀντιστοίχου ἐπιφανείας τῆς οἰκογενείας, τά ὁποῖα λέγονται χαρακτηριστικά σημεῖα αὐτῆς καί εἰς τά ὁποῖα ἡ περιβάλλουσα ἐφάπτεται τῆς ἐν λόγῳ ἐπιφανείας. Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι ἡ περιβάλλουσα εἶναι ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν χαρακτηριστικῶν σημείων τῶν ἐπιφανειῶν τῆς οἰκογενείας.
Ἀναφέρομεν τέλος ὅτι ἡ περιβάλλουσα μιᾶς μονοπαραμετρικῆς οἰκογενείας γραμμῶν τοῦ τριδιαστάτου χώρου μέ ἐξισώσεις :

$$F(x,y,z,\alpha)=0,\quad \Phi(x,y,z,\alpha)=0 \qquad (45.8)$$

ὁρίζεται ὡς ἡ γραμμή τῆς ὁποίας κάθε σημεῖον εἶναι σημεῖον ἐπαφῆς αὐτῆς μὲ κάποια γραμμὴ τῆς οἰκογενείας. Μία μονοπαραμετρικὴ οἰκογένεια γραμμῶν δὲν ἔχει πάντοτε περιβάλλουσα διότι ἀποδεικνύεται ὅτι τὰ σημεῖα της (x,y,z) πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων :

$$\begin{aligned} &F(x,y,z,\alpha)=0, \quad \Phi(x,y,z,\alpha)=0 \\ &F_\alpha(x,y,z,\alpha)=0, \quad \Phi_\alpha(x,y,z,\alpha)=0 \end{aligned} \qquad (45.9)$$

τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ἐν γένει συμβιβαστόν. Ἐὰν ὅμως τὸ σύστημα αὐτὸ εἶναι συμβιβαστόν, τότε οἱ ἐξισώσεις τῆς περιβαλλούσης θὰ προκύψουν ἀπὸ τὸ σύστημα (45.9), εἴτε ὑπὸ τὴν παραμετρικὴν μορφὴν :

$$x=x(\alpha), \quad y=y(\alpha), \quad z=z(\alpha) \qquad (45.10)$$

εἴτε δι' ἀπαλειφῆς τῆς παραμέτρου α ὑπὸ πλεγμένην μορφήν :

$$f(x,y,z)=0, \quad \varphi(x,y,z)=0 \qquad (45.11)$$

Οἱ ἐξισώσεις (45.10) ὁρίζουν διὰ μίαν ὡρισμένην τιμὴν τοῦ α, ἕνα πλῆθος μεμονωμένων σημείων ἐπὶ τῆς ἀντιστοίχου γραμμῆς τῆς οἰκογενείας, τὰ ὁποῖα λέγονται χαρακτηριστικὰ σημεῖα αὐτῆς καὶ εἰς τὰ ὁποῖα ἡ περιβάλλουσα ἐφάπτεται τῆς ἐν λόγῳ γραμμῆς.

Παράδειγμα (45.1).— Νὰ εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῆς μονοπαραμετρικῆς οἰκογενείας τῶν σφαιρῶν : $x^2+(y-\alpha)^2+z^2=\rho^2$ μὲ παράμετρον τὴν α.

Λύσις. Ἔχομεν $F\equiv x^2+(y-\alpha)^2+z^2-\rho^2=0$, $F_\alpha\equiv -2(y-\alpha)=0$, ὁπότε ἀπαλείφοντες μεταξὺ αὐτῶν τὴν παράμετρον α προκύπτει ὡς περιβάλλουσα ἡ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια $x^2+z^2=\rho^2$, ὅπως ἤδη ἔχομεν ἰσχυρισθεῖ προηγουμένως σχ. (45.1), ὁδηγούμενοι ἀπὸ τὴν γεωμετρικὴν ἐποπτείαν.

Παράδειγμα (45.2).— Νὰ εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῆς μονοπαραμετρικῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιφανειῶν : $x^2+y^2=4\alpha(z-\alpha)$.

Λύσις. Ἔχομεν $F\equiv x^2+y^2-4\alpha(z-\alpha)=0$, $F_\alpha\equiv -4z+8\alpha=0$, ὁπότε ἀπαλείφοντες μεταξὺ αὐτῶν τὴν παράμετρον α προκύπτει : $x^2+y^2=z^2$ ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς περιβαλλούσης.

Παράδειγμα (45.3).— Νὰ εὑρεθῆ ἡ ἐξίσωσις ἐπιφανείας ὡς περιβάλλουσα τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων της.

Λύσις. Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας $z=\varphi(x,y)$ εἰς ἕνα οἱονδήποτε σημεῖον αὐτῆς $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\varphi(\alpha,\beta)$ εἶναι : $z-\varphi(\alpha,\beta)=(x-\alpha)\varphi_\alpha(\alpha,\beta)+(y-\beta)\varphi_\beta(\alpha,\beta)$. (1) ἡ ὁποία γράφεται : $F\equiv(x-\alpha)\varphi_\alpha+(y-\beta)\varphi_\beta+\varphi-z=0$. Παραγωγίζοντες αὐτὴν μερικῶς ὡς πρὸς α,β προκύπτει : $F_\alpha\equiv-\varphi_\alpha+(x-\alpha)\varphi_{\alpha\alpha}+(y-\beta)\varphi_{\beta\alpha}+$

$+\varphi_\alpha=0$, $F_\beta \equiv (x-\alpha)\varphi_{\alpha\beta}-\varphi_\beta+(y-\beta)\varphi_{\beta\beta}+\varphi_\beta=0$, οἱ ὁποῖες μετὰ τὶς ἀναγωγὲς γράφονται $(x-\alpha)\varphi_{\alpha\alpha}+(y-\beta)\varphi_{\beta\alpha}=0$, $(x-\alpha)\varphi_{\alpha\beta}+(y-\beta)\varphi_{\beta\beta}=0$. Ἐξ αὐτῶν θὰ ἔχωμεν $x=\alpha$, $y=\beta$ τὶς ὁποῖες ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) προκύπτει $z=\varphi(x,y)$, δηλαδὴ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας.

Παράδειγμα (45.4).— Νὰ εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιφανειῶν $F(x,y,z,\alpha,\beta)=0$, ὅταν αἱ παράμετροι α,β συνδέονται διὰ μιᾶς σχέσεως $\varphi(\alpha,\beta)=0$.

Λύσις. Ἡ δοθεῖσα οἰκογένεια μπορεῖ νὰ θεωρηθῆ ὡς μονοπαραμετρικὴ μὲ παράμετρον τὴν α, ὅταν θεωρήσωμεν τὴν β ὡς πλεγμένη συνάρτησιν τῆς α ὁριζομένη ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $\varphi=0$. Ἑπομένως κατὰ τὰ γνωστὰ ἡ περιβάλλουσα θὰ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $F=0$ καὶ ἀπὸ τὴν $F_\alpha+\dot\beta F_\beta=0$ (1), ἡ ὁποία προκύπτει διὰ παραγωγίσεως ὡς πρὸς α καὶ ὅπου αἱ παράμετροι α,β καὶ ἡ παράγωγος $\dot\beta=d\beta:d\alpha$ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $\varphi=0$ καὶ τὴν $\varphi_\alpha+\dot\beta\varphi_\beta=0$ (2), προκύπτουσα ἐξ αὐτῆς διὰ παραγωγίσεως ὡς πρὸς α. Ἀπαλείφοντες τώρα μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2) τὴν $\dot\beta$ προκύπτει $F_\alpha-(\varphi_\alpha:\varphi_\beta)F_\beta=0$ ἢ $F_\alpha\cdot\varphi_\beta-F_\beta\cdot\varphi_\alpha=0$, ἑπομένως ἡ περιβάλλουσα ὁρίζεται ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις : $F=0$, $\varphi=0$, $\partial(F,\varphi):\partial(\alpha,\beta)=0$.

Παράδειγμα (45.5).— Νὰ εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιπέδων : $x\,\eta\mu\alpha-y\,\sigma\upsilon\nu\alpha+z=\alpha$ καὶ ἡ γραμμὴ ἀνακάμψεως τῆς περιβαλλούσης.

Λύσις. Ἔχομεν $F\equiv x\,\eta\mu\alpha-y\,\sigma\upsilon\nu\alpha+z-\alpha=0$, $F_\alpha\equiv x\,\sigma\upsilon\nu\alpha+y\,\eta\mu\alpha-1=0$, $F_{\alpha\alpha}\equiv -x\,\eta\mu\alpha+y\,\sigma\upsilon\nu\alpha=0$. Ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐπιλύοντες ὡς πρὸς x,y προκύπτει : $x=\sigma\upsilon\nu\alpha+(\alpha-z)\eta\mu\alpha$, $y=\eta\mu\alpha-(\alpha-z)\sigma\upsilon\nu\alpha$ οἱ ὁποῖες ἐὰν θέσωμεν $\alpha=u$, $z=v$ γράφονται $x=\sigma\upsilon\nu u+(u-v)\eta\mu u$, $y=\eta\mu u-(u-v)\sigma\upsilon\nu u$, $z=v$ καὶ μποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὡς παραμετρικὲς ἐξισώσεις τῆς περιβαλλούσης. Οἱ παραμετρικὲς ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς ἀνακάμψεως προκύπτουν ἀμέσως ἐὰν ἐπιλύσωμεν τὶς τρεῖς ἐξισώσεις $F=0$, $F_\alpha=0$, $F_{\alpha\alpha}=0$ ὡς πρὸς x,y,z ὁπότε εὑρίσκομεν : $x=\sigma\upsilon\nu\alpha$, $y=\eta\mu\alpha$, $z=\alpha$ παρατηροῦμεν δὲ ὅτι εἶναι μία κυκλικὴ ἕλιξ.

Παράδειγμα (45.6).— Νὰ εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῆς διπαραμετρικῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιπέδων $x\alpha^{-1}\sigma\upsilon\nu\vartheta\,\eta\mu\varphi+y\beta^{-1}\eta\mu\vartheta\,\eta\mu\varphi+z\gamma^{-1}\sigma\upsilon\nu\varphi=1$, μὲ παραμέτρους τὶς ϑ,φ.

Λύσις. Ἔχομεν $F\equiv x\alpha^{-1}\sigma\upsilon\nu\vartheta\,\eta\mu\varphi+y\beta^{-1}\eta\mu\vartheta\,\eta\mu\varphi+z\gamma^{-1}\sigma\upsilon\nu\varphi-1=0$, $F_\vartheta\equiv -x\alpha^{-1}\eta\mu\vartheta\,\eta\mu\varphi+y\beta^{-1}\sigma\upsilon\nu\vartheta\,\eta\mu\varphi=0$, $F_\varphi\equiv x\alpha^{-1}\sigma\upsilon\nu\vartheta\,\sigma\upsilon\nu\varphi+y\beta^{-1}\eta\mu\vartheta\,\sigma\upsilon\nu\varphi-z\gamma^{-1}\eta\mu\varphi=0$. Ἐπιλύοντες τὶς τρεῖς αὐτὲς ἐξισώσεις ὡς πρὸς $x\alpha^{-1}$, $y\beta^{-1}$, $z\gamma^{-1}$ ὑψώνοντες εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $x^2\alpha^{-2}+y^2\beta^{-2}+z^2\gamma^{-2}=1$, δηλαδὴ ἡ ζητουμένη περιβάλουσα εἶναι ἕνα ἐλλειψοειδές.

Παράδειγμα (45.7).— Νὰ εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐγγυτάτων ἐπιπέδων τῆς γραμμῆς μὲ διανυσματικὴν ἐξίσωσιν $\bar r=\bar r(s)$.

Λύσις. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου τῆς γραμμῆς εἰς τὸ σημεῖον

$M(\bar{r})$ εἶναι κατά τά γνωστά : $(\bar{x}-\bar{r})\cdot\bar{\delta}=0$. Ἡ ἐξίσωσις αὐτή εἶναι ἐπίσης καί ἡ ἐξίσωσις τῆς οἰκογενείας τῶν ἐγγυτάτων ἐπιπέδων μέ παράμετρον τήν καμπυλόγραμμον τετμημένην s τοῦ σημείου M. Θέτομεν λοιπόν $F\equiv(\bar{x}-\bar{r})\bar{\delta}$, καί παραγωγίζομεν ὡς πρός s, $F_s \equiv -\bar{\varepsilon}\,\bar{\delta}+(\bar{x}-\bar{r})(-\sigma\bar{\omega})$. Ἐάν τώρα λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι $\bar{\varepsilon}\bar{\delta}=0$ καί ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γραμμή δέν εἶναι ἐπίπεδος δηλ. $\sigma\neq 0$, ἀπό τίς δύο τελευταῖες σχέσεις προκύπτει ὅτι ἡ περιβάλλουσα ὁρίζεται ἀπό τό ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων :

$$(\bar{x}-\bar{r})\bar{\delta}=0,\ (\bar{x}-\bar{r})\bar{\omega}=0 \qquad (1)$$

Οἱ ἐξισώσεις αὐτές δί ἑκάστην τιμήν τοῦ s ὁρίζουν τήν χαρακτηριστικήν γραμμήν πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν ἐν λόγῳ τιμήν τῆς παραμέτρου, παρατηροῦμεν δέ ὅτι εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς εἰς τό ἀντίστοιχον σημεῖον διότι εἶναι τομή τοῦ ἐγγυτάτου καί τοῦ εὐθειοποιοῦντος ἐπιπέδου τῆς γραμμῆς. Ἐπειδή ὅμως, ὅπως ἔχομεν ἀναφέρει ἡ περιβάλλουσα εἶναι ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν χαρακτηριστικῶν γραμμῶν, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ζητουμένη περιβάλλουσα εἶναι ἡ εὐθειογενής ἐπιφάνεια τήν ὁποίαν σχηματίζουν οἱ ἐφαπτόμενες τῆς δοθείσης γραμμῆς. Αὐτό προκύπτει ἀμέσως καί ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) ὡς ἑξῆς : Τό διάνυσμα $\bar{x}-\bar{r}$ ἕνεκα τῶν (1) εἶναι κάθετον ἐπί τά διανύσματα $\bar{\omega},\bar{\delta}$ ἐπομένως θά εἶναι παράλληλον πρός τό ἐξωτερικόν γινόμενον αὐτῶν τό ὁποῖον ἰσοῦται μέ $\bar{\varepsilon}$, δηλαδή $\bar{x}-\bar{r}=t\bar{\varepsilon}$ καί ἐξ αὐτῆς :

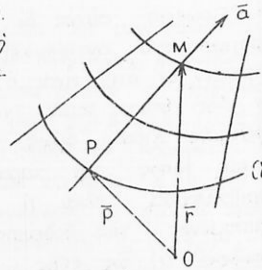
$$\bar{x}=\bar{r}(s)+t\,\bar{\varepsilon}(s) \qquad (2)$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις παριστάνει τήν ζητουμένη περιβάλλουσα καί δέν εἶναι ἄλλη ἀπό τήν εὐθειογενή ἐπιφάνεια τῶν ἐφαπτομένων τῆς δοθείσης γραμμῆς μέ παραμέτρους τά s, t. Ἡ γραμμή ἀνακάμψεως τῆς περιβαλλούσης θά ὁρισθῆ ἀπό τίς ἐξισώσεις $F=0,\ F_s=0,\ F_{ss}=0$ ἤ ἀπό τίς ἰσοδύναμες πρός αὐτές : $(\bar{x}-\bar{r})\bar{\delta}=0,\ (\bar{x}-\bar{r})\bar{\omega}=0,\ -\bar{\varepsilon}\bar{\omega}+(\bar{x}-\bar{r})(-u\bar{\varepsilon}+\sigma\bar{\delta})=0$, οἱ ὁποῖες πάλι, ὑποθέτοντες $u\neq 0$, εἶναι ἰσοδύναμες μέ τίς ἐξισώσεις : $(\bar{x}-\bar{r})\bar{\delta}=0,\ (\bar{x}-\bar{r})\bar{\omega}=0,\ (\bar{x}-\bar{r})\bar{\varepsilon}=0$. Ἐξ αὐτῶν προκύπτει ἤ ὅτι τό διάνυσμα $\bar{x}-\bar{r}(s)$ εἶναι μή μηδενικόν ἀλλά κάθετον ἐπί τά $\bar{\varepsilon},\bar{\omega},\bar{\delta}$ τό ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον διότι τά $\bar{\varepsilon},\bar{\omega},\bar{\delta}$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, ἤ ὅτι $\bar{x}-\bar{r}(s)=0$ ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι ἡ γραμμή ἀνακάμψεως εἶναι ἡ δοθεῖσα γραμμή. Εἰς τό αὐτό ἐξαγόμενον φθάνομεν ἀμέσως ἐάν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι οἱ χαρακτηριστικές ἐφάπτονται τῆς γραμμῆς ἀνακάμψεως εἰς κάθε ὁμαλόν σημεῖον αὐτῆς.

46. Ἀναπτυκτές ἐπιφάνειες. – Ἀπό τήν ἀναλυτικήν γεωμετρία γνωρίζομεν ὅτι μία ἐπιφάνεια ἡ ὁποία παράγεται ἀπό τήν κίνησιν μιᾶς εὐθείας, λέγεται εὐθειογενής ἐπιφάνεια. Ἐάν $\bar{a}(u)$ εἶναι ἕνα διάνυσμα παράλληλον πρός τήν εὐθεῖαν καί $\bar{p}=\bar{p}(u)$ ἡ διανυσματική ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς (γ) τήν ὁποίαν γράφει ἕνα ὡρισμένον σημεῖον P τῆς εὐθείας, τότε ἡ κίνησις τῆς εὐθείας πού παράγει τήν εὐθειογενή ἐπιφάνεια εἶναι τελείως ὡρισμένη καί ἡ διανυσματική ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, ὅπως ἤδη ἔχομεν ἀναφέρει καὶ εἰς τὸ ἐδάφιον 42, εἶναι :

$$\bar{r} = \bar{p}(u) + \upsilon\,\bar{a}(u) \qquad (46.1)$$

Ἡ γραμμὴ (γ) λέγεται ὁδηγὸς καὶ ἡ παράγουσα τὴν ἐπιφάνεια εὐθεῖα λέγεται γενέτειρα αὐτῆς. Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωση προκύπτει ἀμέσως ὅτι οἱ παραμετρικὲς γραμμὲς υ εἶναι οἱ γενέτειρες τῆς ἐπιφανείας καὶ οἱ γραμμὲς u ἐκεῖνες τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἀπὸ τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τῆς ὁδηγοῦ σταθερῶς ἴσον μὲ υα σχ. (46.1).



Σχ. (46.1)

Ὁρισμός (46.1). — *Ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια λέγεται ἡ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια τῆς ὁποίας τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον κατὰ μῆκος ἑκάστης γενετείρας παραμένει σταθερόν.*

Ἐπειδὴ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον περιέχει τὴν γενέτειρα ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς, μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι ἀναπτυκτὴ εἶναι ἡ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια τῆς ὁποίας ἡ κάθετος κατὰ μῆκος ἑκάστης γενετείρας ἔχει σταθερὴν διεύθυνσιν.

Ἂς θεωρήσωμεν τώρα τὴν εὐθειογενῆ ἐπιφάνεια (46.1) καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ γενέτειρες δὲν εἶναι ἐφαπτόμενες τῆς ὁδηγοῦ, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὸ διάνυσμα $[\dot{\bar{p}}\bar{a}]$ δὲν εἶναι μηδέν. Παραγωγίζοντες τὴν (46.1) μερικῶς ὡς πρὸς u, υ θὰ ἔχωμεν : $\bar{r}_u = \dot{\bar{p}} + \upsilon\dot{\bar{a}}$, $\bar{r}_\upsilon = \bar{a}$, ὁπότε τὸ κάθετον διάνυσμα τῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας θὰ εἶναι :

$$[\bar{r}_u \bar{r}_\upsilon] = [\dot{\bar{p}}\bar{a}] + \upsilon[\dot{\bar{a}}\bar{a}] \qquad (1)$$

Τὸ διάνυσμα αὐτὸ ἕνεκα τῆς συνεχείας θὰ εἶναι ἐπίσης διάφορον τοῦ μηδενὸς τουλάχιστον εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τὰ γειτονικὰ τοῦ σημείου P τῆς ὁδηγοῦ, ἐπομένως διὰ νὰ εἶναι ἡ (46.1) ἀναπτυκτή, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ $[\dot{\bar{p}}\bar{a}]$ νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ (1), δηλαδὴ νὰ εἶναι:

$$0 = \upsilon\,[[\dot{\bar{a}}\bar{a}][\dot{\bar{p}}\bar{a}]] = \upsilon\,[\bar{a}(\dot{\bar{p}}\bar{a}\dot{\bar{a}}) - \dot{\bar{a}}(\dot{\bar{p}}\bar{a}\bar{a})] = \upsilon\bar{a}(\dot{\bar{p}}\bar{a}\dot{\bar{a}})$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι τὸ μικτογινόμενον $(\dot{\bar{p}}\bar{a}\dot{\bar{a}})$ θὰ εἶναι μηδέν.

Ἐὰν τὸ $[\dot{\bar{p}}\bar{a}]$ εἶναι μηδὲν δηλαδὴ ἐὰν ἡ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια (46.1) εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῶν ἐφαπτομένων τῆς γραμμῆς $\bar{p} = \bar{p}(u)$, τότε τὸ κάθετον διάνυσμα τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶναι ἕνεκα τῆς (1) γιὰ κάθε υ παράλληλον πρὸς τὸ $[\dot{\bar{a}}\bar{a}]$ δηλαδὴ ἡ ἐπιφάνεια θὰ εἶναι ἀναπτυκτὴ καὶ θὰ εἶναι τὸ μικτογινόμενον $(\dot{\bar{p}}\bar{a}\dot{\bar{a}}) = [\dot{\bar{p}}\bar{a}]\dot{\bar{a}}$ πάλι μηδὲν διότι ὁ πρῶτος παράγων αὐτοῦ εἶναι μηδέν. Ἐξ αὐτῶν ἕπεται λοιπὸν τὸ ἑξῆς γενικὸν συμπέρασμα :

Διὰ νὰ εἶναι ἡ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια (46.1) ἀναπτυκτὴ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἰσχύῃ γιὰ κάθε u ἡ σχέσις :

$$(\dot{\bar{p}}\bar{a}\dot{\bar{a}}) = 0 \qquad (46.2)$$

Πρότασις (46.1). – *Ἐάν μία ἐπιφάνεια εἶναι ἀναπτυκτή θά εἶναι ἤ ἕνας κύλινδρος ἤ ἕνας κῶνος ἤ ἕνα ἐπίπεδον ἤ τέλος ἡ ἐπιφάνεια τῶν ἐφαπτομένων μιᾶς γραμμῆς.*

Ἀπόδειξις. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ εὐθειογενής ἐπιφάνεια (46.1) εἶναι ἀναπτυκτή καί ὅτι χάριν ἁπλότητος τό $\bar{a}$ εἶναι μοναδιαῖον. Ἐπειδή ἰσχύει ἡ (46.2) τά τρία διανύσματα $\dot{\bar{P}}, \bar{a}, \dot{\bar{a}}$ εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα, ἐπομένως ὑπάρχουν τρεῖς συναρτήσεις $\lambda_i(u)$ $(i=1,2,3)$ οἱ ὁποῖες δέν μηδενίζονται συγχρόνως καί διά τίς ὁποῖες ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$\lambda_1 \dot{\bar{P}} + \lambda_2 \bar{a} + \lambda_3 \dot{\bar{a}} = \bar{0} \qquad (2)$$

Ἐάν $\lambda_1 = 0$ θά εἶναι $\lambda_2 \bar{a} + \lambda_3 \dot{\bar{a}} = \bar{0}$ τήν ὁποίαν πολλαπλασιάζοντες ἐσωτερικῶς ἐπί $\bar{a}$ προκύπτει $\lambda_2 \bar{a}^2 + \lambda_3 \bar{a}\dot{\bar{a}} = \bar{0}$ καί ἐπειδή $\bar{a}^2 = 1$, $2\bar{a}\dot{\bar{a}} = 0$ θά εἶναι $\lambda_2 = 0$, ὁπότε $\lambda_3 \dot{\bar{a}} = \bar{0}$ καί ἐπειδή δέν μπορεῖ νά εἶναι καί $\lambda_3 = 0$ θά εἶναι $\dot{\bar{a}} = 0$ δηλαδή τό $\bar{a}$ εἶναι σταθερόν, οἱ γενέτειρες εἶναι παράλληλες, ἑπομένως ἡ ἀναπτυκτή ἐπιφάνεια εἶναι ἕνας κύλινδρος ἤ ἕνα ἐπίπεδον.

Ἐάν $\lambda_1 \neq 0$ τότε ἐκ τῆς (2) διαιροῦντες διά λ_1 καί θέτοντες $\kappa_1 = -\lambda_2 : \lambda_1$, $\kappa_2 = -\lambda_3 : \lambda_1$, προκύπτει ἡ σχέσις $\dot{\bar{P}} = \kappa_1 \bar{a} + \kappa_2 \dot{\bar{a}}$ (3). Ἡ ἐξίσωσις (46.1) δύναται νά γραφῆ $\bar{r} = \bar{P} + \lambda \bar{a} + (\upsilon - \lambda)\bar{a}$ ὅπου $\lambda = \lambda(u)$ μία οἱαδήποτε συνάρτησις. Θέτοντες $\bar{P}_1 = \bar{P} + \lambda \bar{a}$, $\upsilon_1 = \upsilon - \lambda$ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας γράφεται $\bar{r} = \bar{P}_1 + \upsilon_1 \bar{a}$ (4) καί ἐπειδή $\dot{\bar{P}}_1 = \dot{\bar{P}} + \dot{\lambda}\bar{a} + \lambda \dot{\bar{a}}$, ἐάν λάβωμεν $\lambda = -\kappa_2$ θά εἶναι $\dot{\bar{P}}_1 = \dot{\bar{P}} - \dot{\kappa}_2 \bar{a} - \kappa_2 \dot{\bar{a}}$, ἡ ὁποία ἕνεκα τῆς (3) γίνεται $\dot{\bar{P}}_1 = (\kappa_1 - \dot{\kappa}_2)\bar{a}$. Ἐάν τώρα εἶναι $\kappa_1 = \dot{\kappa}_2$ θά εἶναι $\dot{\bar{P}}_1 = 0$ δηλαδή τό $\bar{P}_1$ εἶναι σταθερόν καί ἐκ τῆς (4) προκύπτει ὅτι ἡ ἀναπτυκτή ἐπιφάνεια εἶναι ἕνας κῶνος ἤ ἕνα ἐπίπεδον.

Ἐάν τέλος εἶναι $\kappa_1 - \dot{\kappa}_2 \neq 0$, τότε ἡ $\bar{P}_1 = \bar{P}_1(u)$ εἶναι μία γραμμή τῆς ὁποίας τό ἐφαπτομενικόν διάνυσμα εἶναι παράλληλον πρός τό $\bar{a}$ δηλαδή πρός τήν ἀντίστοιχον γενέτειρα τῆς ἐπιφανείας, ἐπομένως ἡ (4) παριστάνει τήν ἐπιφάνεια τῶν ἐφαπτομένων τῆς (4) καί ἡ πρότασις ἀπεδείχθη.

Θά δείξωμεν τώρα ὅτι ἕνας ἰσοδύναμος ὁρισμός τῶν ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν πρός τόν δοθέντα (46.1) εἶναι καί ὁ ἑξῆς :

Ὁρισμός (46.2). – *Ἀναπτυκτή ἐπιφάνεια λέγεται ἐκείνη ἡ ὁποία εἶναι περιβάλλουσα μιᾶς μονοπαραμετρικῆς οἰκογενείας ἐπιπέδων.*

Πρός τοῦτο πρέπει νά δείξωμεν ὅτι ἡ περιβάλλουσα κάθε μονοπαραμετρικῆς οἰκογενείας ἐπιπέδων εἶναι ἐπιφάνεια ἀναπτυκτή καί ἀντιστρόφως ὅτι κάθε ἀναπτυκτή ἐπιφάνεια δύναται νά θεωρηθῆ ὡς περιβάλλουσα μιᾶς μονοπαραμετρικῆς ἐπιπέδων.

Διά τήν ἀπόδειξιν τοῦ πρώτου μέρους θεωροῦμεν τήν μονοπαραμετρικήν οἰκογένεια :

$$A(t)x + B(t)y + \Gamma(t)z + \Delta(t) = 0 \qquad (5)$$

ὅπου μία τουλάχιστον ἐκ τῶν συναρτήσεων A, B, Γ δέν εἶναι πάντοτε μηδέν. Ἐάν ὑποθέσωμεν λοιπόν ὅτι $\Gamma \neq 0$ καί θέσωμεν $-A : \Gamma = \alpha$, $-B : \Gamma = \varphi(\alpha)$, $-\Delta : \Gamma = \sigma(\alpha)$, τότε ἡ ἐξίσωσις τῆς οἰκογενείας γράφεται :

$$z = \alpha x + \varphi(\alpha) y + \sigma(\alpha) \qquad (46.3)$$

Ἀπὸ τὴν θεωρία τῶν περιβαλλουσῶν προκύπτει ὅτι οἱ χαρακτηριστικὲς γραμμὲς θὰ ὁρίζωνται ἀπὸ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων :

$$\begin{aligned} z &= \alpha x+\varphi(\alpha)y+\sigma(\alpha) \\ 0 &= x+\dot{\varphi}(\alpha)y+\dot{\sigma}(\alpha) \end{aligned} \qquad (46.4)$$

θὰ εἶναι δὲ εὐθεῖες γραμμὲς ἀφοῦ εἶναι τομὴ δύο ἐπιπέδων. Ἡ περιβάλλουσα ὡς τόπος τῶν χαρακτηριστικῶν θὰ εἶναι λοιπὸν μία εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια τῆς ὁποίας οἱ γενέτειρες θὰ ἐφάπτωνται τῆς γραμμῆς ἀνακάμψεως :

$$\begin{aligned} z &= \alpha x+\varphi(\alpha)\cdot y+\sigma(\alpha) \\ 0 &= x+\dot{\varphi}(\alpha)\cdot y+\dot{\sigma}(\alpha) \\ 0 &= \ddot{\varphi}(\alpha)y+\ddot{\sigma}(\alpha) \end{aligned} \qquad (46.5)$$

τῆς περιβαλλούσης, ἑπομένως θὰ εἶναι ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια. Εἰς τὴν μερικὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν οἱ χαρακτηριστικὲς εὐθεῖες δηλαδὴ οἱ γενέτειρες διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου τότε ἡ περιβάλλουσα εἶναι ἕνας κῶνος ἢ ἕνα ἐπίπεδον δηλαδὴ πάλι ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια. Τέλος ὅταν οἱ γενέτειρες εἶναι παράλληλες, ἡ περιβάλλουσα εἶναι ἢ ἕνας κύλινδρος ἢ ἕνα ἐπίπεδον δηλαδὴ ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια καὶ τὸ πρῶτον μέρος ἀπεδείχθη.
Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀντιστρόφου θεωροῦμεν τὴν ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνεια (46.1) ἐὰν οἱ γενέτειρες ἐφάπτωνται τῆς ὁδηγοῦ δηλαδὴ ἐὰν εἶναι $[\dot{\bar{P}}\,\bar{\alpha}]=0$, τότε τὸ κάθετον διάνυσμα τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ διάνυσμα $[\dot{\bar{\alpha}}\,\bar{\alpha}]$, ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου θὰ εἶναι: $(\bar{x}-\bar{P}-v\bar{\alpha})[\dot{\bar{\alpha}}\bar{\alpha}]=0$ καὶ ἐπειδὴ $(\bar{\alpha}\dot{\bar{\alpha}}\bar{\alpha})=0$ γράφεται $(\bar{x}-\bar{P},\ \dot{\bar{\alpha}},\ \bar{\alpha})=0$. Ὅταν οἱ γενέτειρες δὲν ἐφάπτονται τῆς ὁδηγοῦ τὸ διάνυσμα $[\dot{\bar{P}}\bar{\alpha}]$ εἶναι τὸ κάθετον διάνυσμα τῆς ἐπιφανείας, ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας εἶναι $(\bar{x}-\bar{P},\ \dot{\bar{P}},\ \bar{\alpha})=0$. Σὲ κάθε περίπτωση λοιπὸν τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα εἰς τὰ ὁμαλὰ σημεῖα μιᾶς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας ἀποτελοῦν μίαν μονοπαραμετρικὴν οἰκογένειαν καὶ ἐπειδὴ ἡ περιβάλλουσα αὐτῶν εἶναι ἡ ἐπιφάνεια εἰς τὴν ὁποίαν ἐφάπτονται, ἕπεται τὸ ζητούμενον.
Ἡ γραμμὴ ἀνακάμψεως μιᾶς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας λέγεται λαιμὸς αὐτῆς καὶ εἶναι μία καμπύλη ἡ ὁποία εἰς τὴν περίπτωσιν μιᾶς κωνικῆς ἢ κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐκφυλίζεται ἀντιστοίχως εἰς ἕνα σημεῖον εἰς πεπερασμένην ἢ ἄπειρον ἀπόστασιν.
Τελειώνομεν ἀποδεικνύοντες ὅτι μία ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια ἐπαληθεύει τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν μετὰ μερικῶν παραγώγων :

$$z_{xx}\,z_{yy}-z_{xy}^2=0 \qquad (46.6)$$

Πράγματι ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (46.4) ὅπου α μεταβλητὴ παράμετρος. Παραγωγίζοντες τὴν πρώτη ἐκ τῶν ἐξισώσεων ὡς πρὸς x, y καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν δευτέρα θὰ ἔχωμεν :

$$z_x = \alpha + (x+\dot{\varphi}y+\dot{\sigma})\,\alpha_x = \alpha,\quad z_y = \varphi + (x+\dot{\varphi}y+\dot{\sigma})\,\alpha_y = \varphi(\alpha)$$

Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι μεταξὺ τῶν συναρτήσεων z_x, z_y ὑπάρχει ἡ σχέσις $z_y=\varphi(z_x)$, ἑπομένως κατὰ τὴν πρότασιν (16.1) οἱ συναρτήσεις αὐτὲς ἐπειδὴ εἶναι ἐξηρτημένες θὰ ἔχουν συναρτησιακὴν ὁρίζουσαν ὡς πρὸς x, y ἴση μὲ μηδὲν δηλαδὴ θὰ εἶναι :

$$\frac{\partial(z_x, z_y)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0$$

καὶ ἔτσι ἀπεδείχθη τὸ ζητούμενον. Εἰς τὸ παράδειγμα (86.22) τοῦ τρίτου τόμου ἀποδεικνύομεν καὶ τὸ ἀντίστροφον ὅτι δηλαδὴ ἡ ὁλοκλήρωσις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (46.6) δίδει ὡς γενικὴν λύσιν μίαν ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν. Κατόπιν αὐτῶν ἡ συνθήκη (46.6) εἶναι μία συνθήκη ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ γιὰ νὰ εἶναι μία ἐπιφάνεια $F(x,y,z)=0$ ἀναπτυκτή.

Παράδειγμα (46.1). — Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια $x=u^3z:3+u$, $y=u^4z:4+u^2:2$ εἶναι ἀναπτυκτή.

Λ ύ σ ι ς. Ἐὰν θέσωμεν $z=\upsilon$, ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶναι:

$$\bar{r} = (u^3\upsilon:3+u,\ u^4\upsilon:4+u^2:2,\ \upsilon) = (u,\ u^2:2,\ 0)+\upsilon\,(u^3:3,\ u^4:4,\ 1)$$

Ἐξ αὐτῆς ἕπεται $\bar{p}=(u,\ u^2:2,\ 0)$, $\bar{a}=(u^3:3,\ u^4:4,\ 1)$, $\dot{\bar{p}}=(1,u,0)$, $\dot{\bar{a}}=(u^2,u^3,0)$ καὶ βλέπομεν ἀμέσως ὅτι πληροῦται ἡ συνθήκη (46.2) διότι τὰ διανύσματα $\dot{\bar{p}}, \dot{\bar{a}}$ εἶναι παράλληλα.—

Παράδειγμα (46.2). — Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐπιφάνεια : $(z-\beta)^2=xy$ εἶναι ἀναπτυκτή.

Λ ύ σ ι ς. Θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν συνθήκη (46.6)· πρὸς τοῦτο γράφομεν τὴν ἐξίσωση τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τὴν μορφὴν $z=\beta\pm\sqrt{xy}$ καὶ τὴν παραγωγίζομεν μερικῶς ὡς πρὸς x, y ὁπότε προκύπτει :

$$z_{xx} = \mp\frac{1}{4}\,y^2(xy)^{-\frac{3}{2}},\quad z_{yy} = \mp\frac{1}{4}\,x^2(xy)^{-\frac{3}{2}},\quad z_{xy} = \pm\frac{1}{4}(xy)^{-\frac{1}{2}}$$

Ἀντικαθιστῶντες αὐτὲς εἰς τὴν (46.6) βλέπομεν ὅτι τὴν ἐπαληθεύουν. Δυνάμεθα ὅμως νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς : Θέτομεν $x=(z-\beta)u$, $y=(z-\beta)u^{-1}$ καὶ $z=\upsilon$, ὁπότε ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶναι:

$$\bar{r} = (u\upsilon-\beta u,\ u^{-1}\upsilon-\beta u^{-1},\ \upsilon) = (-\beta u,\ -\beta u^{-1},\ 0)+\upsilon\,(u,u^{-1},1)$$

Ἐξ αὐτῆς ἕπεται $\bar{p}=-\beta(u,u^{-1},0)$, $\bar{a}=(u,u,1)$, $\dot{\bar{p}}=-\beta(1,-u^{-2},0)$, $\dot{\bar{a}}=(1,-u^{-2},0)$ καὶ βλέπομεν ἀμέσως ὅτι πληροῦται ἡ συνθήκη τῆς ἀναπτυκτότητος $(\dot{\bar{p}}\bar{a}\dot{\bar{a}})=0$ διότι τὰ διανύσματα $\dot{\bar{p}}, \dot{\bar{a}}$ εἶναι παράλληλα.

Παράδειγμα (46.3). — Νὰ ἐξετασθῇ ἐὰν οἱ πρωτοκάθετες εὐθεῖες μιᾶς γραμμῆς σχηματίζουν ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνεια.

Λ ύ σ ι ς. Ἐὰν $\bar{p}=\bar{p}(s)$ εἶναι ἡ ἐξίσωσις μιᾶς γραμμῆς, ἡ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια τῶν πρωτοκαθέτων εὐθειῶν αὐτῆς θὰ ἔχῃ διανυσματικὴν ἐξίσωσιν:

$\bar{r} = \bar{P}(s) + u\bar{\omega}(s)$ καὶ θὰ εἶναι $\bar{P}' = \bar{\varepsilon}$, $\bar{\omega}' = -u\bar{\varepsilon} + \sigma\bar{\delta}$, $(\bar{P}'\bar{\omega}\bar{\omega}') = (\bar{\varepsilon}, \bar{\omega}, -u\bar{\varepsilon} + \sigma\bar{\delta}) = -u(\bar{\varepsilon}\bar{\omega}\bar{\varepsilon}) + \sigma(\bar{\varepsilon}\bar{\omega}\bar{\delta}) = \sigma$. Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῶν πρωτοκαθέτων μιᾶς γραμμῆς θὰ εἶναι ἀναπτυκτὴ μόνον ὅταν $\sigma = 0$, δηλαδὴ μόνον ὅταν ἡ γραμμὴ εἶναι ἐπίπεδος.

Παράδειγμα (46.4). – Νὰ ἐξετασθῆ ἐὰν αἱ δικάθετες εὐθεῖες μιᾶς γραμμῆς σχηματίζουν ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνεια.

Λύσις. Ἡ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια τῶν δικαθέτων θὰ ἔχη διανυσματικὴν ἐξίσωσιν : $\bar{r} = \bar{P}(s) + u\bar{\delta}(s)$ καὶ θὰ εἶναι $\bar{P}' = \bar{\varepsilon}$, $\bar{\delta}' = -\sigma\bar{\omega}$, $(\bar{P}'\bar{\delta}\bar{\delta}') = -\sigma(\bar{\varepsilon}\bar{\delta}\bar{\omega}) = \sigma$ ἐπομένως καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ θὰ εἶναι ἀναπτυκτὴ μόνον ὅταν $\sigma = 0$, δηλαδὴ μόνον ὅταν ἡ γραμμὴ εἶναι ἐπίπεδος.

47. Μετρικὴ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

–Ἔστω ἐπιφάνεια μὲ ἐξίσωσιν :

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v)$$

καὶ ἐπ' αὐτῆς μία γραμμὴ ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (43.4). Ὅπως ἔχομεν ἀναφέρει εἰς τὸ ἐδάφιον 43, ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς εἶναι ἡ (43.5) καὶ τὸ ἐφαπτομενικό της διάνυσμα δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον (43.7), ἐκ τοῦ ὁποίου διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ dt προκύπτει :

$$d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv \qquad (47.1)$$

Ἐὰν τὴν ἀνωτέρω σχέσιν ὑψώσωμεν ἐσωτερικῶς εἰς τὸ τετράγωνον :

$$d\bar{r}^2 = \bar{r}_u^2 du^2 + 2\bar{r}_u\bar{r}_v du dv + \bar{r}_v^2 dv^2$$

καὶ θέσωμεν διὰ συντομίαν :

$$E = \bar{r}_u^2, \quad F = \bar{r}_u\bar{r}_v, \quad G = \bar{r}_v^2 \qquad (47.2)$$

λάβωμεν δὲ ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ $d\bar{r}^2$ ἰσοῦται μὲ τὸ ds^2, προκύπτει ὁ τύπος :

$$\boxed{ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \qquad (47.3)$$

Ἡ ἀνωτέρω διαφορικὴ μορφὴ λέγεται πρώτη θεμελιώδης τετραγωνικὴ μορφὴ ἢ γραμμικὸν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας καὶ τὰ ποσὰ E,F,G ὅπως δίδονται ἀπὸ τοὺς τύπους (47.2), λέγονται θεμελιώδη ποσὰ πρώτης τάξεως. Ἀπὸ τὴν γνωστὴν διανυσματικὴν σχέσιν :

$$[\bar{r}_u\bar{r}_v]^2 = \bar{r}_u^2\bar{r}_v^2 - (\bar{r}_u\bar{r}_v)^2 = EG - F^2$$

προκύπτει ὅτι ἡ διακρίνουσα τῆς πρώτης τετραγωνικῆς μορφῆς, εἶναι πάντοτε θετική, δηλαδὴ ἡ τετραγωνικὴ μορφὴ εἶναι ὅπως λέμε θετικῶς ὡρισμένη (positiv definit). Παριστάνοντες μὲ W τὴν θετικὴ τετραγωνικὴ ρίζα τῆς διακρίνουσης θὰ ἔχωμεν :

$$W = \sqrt{EG - F^2} = \left|[\bar{r}_u\bar{r}_v]\right| \qquad (47.4)$$

Ἐάν τώρα θέλωμεν νά ὑπολογίσωμεν τό μῆκος τόξου τῆς γραμμῆς ἀπό τό σημεῖον t_0 μέχρι τό σημεῖον t_1, θά ἔχωμεν κατά τόν τύπον (33.1):

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2}\;dt \tag{47.5}$$

καί διά τά μήκη τόξων τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν u, v θά ἔχωμεν:

$$\begin{aligned} ds&=\sqrt{E}\,du \qquad & s&=\int_{u_0}^{u}\sqrt{E}\,du\\ ds&=\sqrt{G}\,dv \qquad & s&=\int_{v_0}^{v}\sqrt{G}\,dv \end{aligned} \tag{47.6}$$

Ἄς θεωρήσωμεν ἐπί τῆς ἐπιφανείας δύο γραμμές, οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ἀντιστοίχως ἀπό τά δύο ζεύγη τῶν ἐξισώσεων:

$$\begin{cases} u=u_1(t_1)\\ v=v_1(t_1)\end{cases} \qquad \begin{cases} u=u_2(t_2)\\ v=v_2(t_2)\end{cases}$$

καί οἱ ὁποῖες τέμνονται κατά γωνίαν ψ εἰς ἕνα σημεῖον $M(u,v)$ τῆς ἐπιφανείας. Οἱ διανυσματικές ἐξισώσεις τῶν γραμμῶν αὐτῶν καί τά ἐφαπτομενικά τους διανύσματα εἰς τό σημεῖον $M(u,v)$ θά εἶναι ἀντιστοίχως:

$$\begin{cases} \bar{r}_1=\bar{r}\,[u_1(t_1),v_1(t_1)]\\ \dot{\bar{r}}_1=\bar{r}_u\dot{u}_1+\bar{r}_v\dot{v}_1\end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{r}_2=\bar{r}\,[u_2(t_2),v_2(t_2)]\\ \dot{\bar{r}}_2=\bar{r}_u\dot{u}_2+\bar{r}_v\dot{v}_2\end{cases} \tag{1}$$

Ἀπό τίς δύο τελευταῖες σχέσεις θά ἔχωμεν:

$$\dot{\bar{r}}_1\dot{\bar{r}}_2=(\bar{r}_u\dot{u}_1+\bar{r}_v\dot{v}_1)(\bar{r}_u\dot{u}_2+\bar{r}_v\dot{v}_2)=E\dot{u}_1\dot{u}_2+F(\dot{u}_1\dot{v}_2+\dot{u}_2\dot{v}_1)+G\dot{v}_1\dot{v}_2 \tag{2}$$

$$\dot{\bar{r}}_1^{\,2}=E\dot{u}_1^2+2F\dot{u}_1\dot{v}_1+G\dot{v}_1^2\,, \qquad \dot{\bar{r}}_2^{\,2}=E\dot{u}_2^2+2F\dot{u}_2\dot{v}_2+G\dot{v}_2^2 \tag{3}$$

$$\left|[\dot{\bar{r}}_1\dot{\bar{r}}_2]\right|=\left|[\bar{r}_u\dot{u}_1+\bar{r}_v\dot{v}_1,\ \bar{r}_u\dot{u}_2+\bar{r}_v\dot{v}_2]\right|=\left|[\bar{r}_u\bar{r}_v]\right|\left|\dot{u}_1\dot{v}_2-\dot{u}_2\dot{v}_1\right|=\left|\dot{u}_1\dot{v}_2-\dot{u}_2\dot{v}_1\right|\sqrt{EG-F^2} \tag{4}$$

Ἀντικαθιστῶντες τίς (2) καί (3) εἰς τόν γνωστόν τύπον:

$$\text{συν}\,\psi=(\dot{\bar{r}}_1\dot{\bar{r}}_2):|\dot{\bar{r}}_1||\dot{\bar{r}}_2|$$

προκύπτει ὁ ἑξῆς γενικός τύπος διά τό συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν γραμμῶν

$$\text{συν}\,\psi=\frac{E\dot{u}_1\dot{u}_2+F(\dot{u}_1\dot{v}_2+\dot{u}_2\dot{v}_1)+G\dot{v}_1\dot{v}_2}{\sqrt{E\dot{u}_1^2+2F\dot{u}_1\dot{v}_1+G\dot{v}_1^2}\,\sqrt{E\dot{u}_2^2+2F\dot{u}_2\dot{v}_2+G\dot{v}_2^2}} \tag{47.7}$$

Ὁμοίως ἀντικαθιστῶντες τίς σχέσεις (3) καί (4) εἰς τόν γνωστόν τύπον:

$$\text{ημ}\,\psi=\left|[\dot{\bar{r}}_1\dot{\bar{r}}_2]\right|:|\dot{\bar{r}}_1||\dot{\bar{r}}_2|$$

προκύπτει ἕνας ἀντίστοιχος τύπος διά τό ἡμίτονον τῆς γωνίας τῶν γραμμῶν:

$$\text{ημ}\,\psi=\frac{|\dot{u}_1\dot{v}_2-\dot{u}_2\dot{v}_1|\ \sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E\dot{u}_1^2+2F\dot{u}_1\dot{v}_1+G\dot{v}_1^2}\ \sqrt{E\dot{u}_2^2+2F\dot{u}_2\dot{v}_2+G\dot{v}_2^2}} \tag{47.8}$$

Διά νά ἀποφύγωμεν τούς δεῖκτες καί νά ἁπλουστεύσωμεν τήν γραφήν τῶν προηγουμένων τύπων θέτομεν:

$$\begin{aligned} d\bar{r}&=\dot{\bar{r}}_1dt_1, & du&=\dot{u}_1dt_1, & dv&=\dot{v}_1dt_1, & ds&=\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}\\ \delta\bar{r}&=\dot{\bar{r}}_2dt_2, & \delta u&=\dot{u}_2dt_2, & \delta v&=\dot{v}_2dt_2, & \delta s&=\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2} \end{aligned} \tag{47.9}$$

Κατόπιν αὐτῶν οἱ τύποι (1) τῶν ἐφαπτομενικῶν διανυσμάτων γράφονται :

$$d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv, \qquad \delta\bar{r} = \bar{r}_u \delta u + \bar{r}_v \delta v \qquad (47.10)$$

οἱ δὲ τύποι ἐκ τῶν ὁποίων ὁρίζεται ἡ γωνία ψ λαμβάνουν τὴν μορφήν :

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\psi &= \left[\, E du\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + G dv\delta v \right] : ds\delta s \\ \eta\mu\psi &= \left|\, du\delta v - \delta u dv \,\right| \sqrt{EG-F^2} : ds\delta s \end{aligned} \qquad (47.11)$$

Τὰ ἐφαπτομενικὰ διανύσματα τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν u,v εἶναι ἀντιστοίχως $\bar{r}_u, \bar{r}_v$ ἑπομένως παριστάνοντες μὲ ω τὴν γωνίαν αὐτῶν θὰ εἶναι :

$$\sigma\upsilon\nu\, \omega = (\bar{r}_u \bar{r}_v) : |\bar{r}_u||\bar{r}_v|, \quad \eta\mu\omega = |[\bar{r}_u \bar{r}_v]| : |\bar{r}_u||\bar{r}_v|$$

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὶς (47.2) καὶ (47.4) προκύπτουν οἱ τύποι :

$$\sigma\upsilon\nu\, \omega = F : \sqrt{EG}, \quad \eta\mu\omega = \sqrt{EG-F^2} : \sqrt{EG} \qquad (47.12)$$

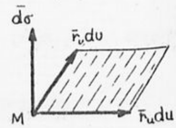
Ἀπὸ τὸν πρῶτο ἐκ τῶν τύπων (47.11) ἕπεται ὅτι διὰ νὰ τέμνωνται καθέτως δύο γραμμὲς πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$E du\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + G dv\delta v = 0 \qquad (47.13)$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὸν πρῶτο ἐκ τῶν τύπων (47.11) ἕπεται ὅτι διὰ νὰ τέμνωνται καθέτως οἱ παραμετρικὲς γραμμὲς τῆς ἐπιφανείας πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $F=0$. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον M(u,v) θεωρήσωμεν τὰ διανύσματα $\bar{r}_u du$, $\bar{r}_v dv$ καὶ λάβωμεν τὸ ἐξωτερικὸν γινόμενον αὐτῶν θὰ ἔχωμεν :

$$[\bar{r}_u du, \bar{r}_v dv] = [\bar{r}_u, \bar{r}_v]\, du dv = \bar{n}\, |[\bar{r}_u \bar{r}_v]|\, du dv$$

Ἐὰν τὸ διάνυσμα αὐτὸ τὸ παραστήσωμεν μὲ τὸ σύμβολον $d\bar{\sigma}$ καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν τύπο (47.4) θὰ ἔχωμεν :



Σx.(47.1)

$$d\bar{\sigma} = [\bar{r}_u, \bar{r}_v]\, du dv = \bar{n}\sqrt{EG-F^2}\, du dv \qquad (47.14)$$

Τὸ μέτρον dσ τοῦ διανύσματος αὐτοῦ λέγεται ἐμβαδικὸν ἢ ἐπιφανειακὸν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας, καὶ εἶναι :

$$d\sigma = \sqrt{EG-F^2}\, du dv \qquad (47.15)$$

δηλαδὴ ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου τὸ ὁποῖον ἔχει διαδοχικὲς πλευρὲς τὰ διανύσματα $\bar{r}_u du$, $\bar{r}_v dv$ σχ.(47.1).
Ἄς θεωρήσωμεν τώρα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἕνα τμῆμα αὐτῆς Σ τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα χωρίον T τοῦ ἐπιπέδου τῶν u,v. Τὸ μέτρον ἢ τὸ ἐμβαδὸν

αὐτοῦ θὰ τὸ παριστάνωμεν μὲ τὸ σύμβολον $|\Sigma|$ καὶ τὸ ὁρίζομεν ἴσον μὲ τὸ διπλὸν ὁλοκλήρωμα :

$$|\Sigma| = \iint_T \sqrt{EG-F^2}\, du dv \qquad (47.16)$$

Εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον ποὺ ἀναπτύσσομεν τὴν θεωρία τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων, ὁ ἀναγνώστης θὰ βρῇ τὸν τρόπο ὑπολογισμοῦ τοῦ ὁλοκληρώματος αὐτοῦ καθὼς καὶ μίαν δικαιολόγηση τῶν ὁρισμῶν τοῦ ἐμβαδικοῦ στοιχείου καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τμήματος ἐπιφανείας ἀπὸ τὸν (47.16). Ἀπὸ τὰ προηγούμενα συμπεραίνομεν ὅτι δυνάμεθα ἐπὶ μιᾶς ἐπιφανείας νὰ ὑπολογίζωμεν μήκη, γωνίες καὶ ἐμβαδά, ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ πρώτη θεμελιώδης τετραγωνικὴ μορφὴ αὐτῆς. Αὐτὸ τὸ ἐκφράζομεν συντόμως λέγοντες ὅτι ἡ μετρικὴ ἐπὶ μιᾶς ἐπιφανείας καθορίζεται πλήρως ἀπὸ τὴν πρώτη θεμελιώδη τετραγωνικὴ μορφὴ αὐτῆς δηλαδὴ ἀπὸ τὶς τρεῖς συναρτήσεις :

$$E(u,v), \quad F(u,v), \quad G(u,v)$$

Ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια δίδεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $z = z(x,y)$, δυνάμεθα λαμβάνοντες ὡς παραμέτρους τὰ x, y νὰ τὴν γράψωμεν ὑπὸ τὴν διανυσματικὴν μορφήν :

$$\bar{r} = [\, x,\, y,\, z(x,y)\,] \qquad (47.17)$$

ὁπότε θὰ ἔχωμεν : $\bar{r}_x = (1, 0, z_x)$, $\bar{r}_y = (0, 1, z_y)$, $[\bar{r}_x \bar{r}_y] = (-z_x, -z_y, 1)$, $E = \bar{r}_x^2 = 1+z_x^2$, $F = \bar{r}_x \bar{r}_y = z_x z_y$, $G = \bar{r}_y^2 = 1+z_y^2$, $W = \sqrt{EG-F^2} = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$, $\bar{n} = (-z_x, -z_y, 1) : W$. Χρησιμοποιοῦντες λοιπὸν τὸν γνωστὸ συμβολισμὸ $p = z_x$, $q = z_y$ θὰ ἔχωμεν τοὺς ἑξῆς τύπους :

$$\begin{aligned} E &= 1+p^2,\ F = pq,\ G = 1+q^2,\ W = \sqrt{1+p^2+q^2} \\ ds^2 &= (1+p^2)dx^2 + 2pq\,dxdy + (1+q^2)\,dy^2 \qquad (47.18) \\ d\sigma &= \sqrt{1+p^2+q^2}\, dxdy \end{aligned}$$

Ἐὰν τέλος ἡ ἐπιφάνεια δίδεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $F(x,y,z) = 0$ θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχους τύπους διὰ τὰ διάφορα μεγέθη ὅταν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι $p = -F_x : F_z$, $q = -F_y : F_z$.

Παράδειγμα (47.1).— Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρώτη θεμελιώδης τετραγωνικὴ μορφὴ τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας : $\bar{r} = [u\sigma u\nu v,\ u\eta\mu v,\ \varphi(u)]$.
Λύσις. Ἔχομεν $\bar{r}_u = (\sigma u\nu v, \eta\mu v, \dot{\varphi})$, $\bar{r}_v = (-u\eta\mu v, u\sigma u\nu v, 0)$, ἑπομένως κατὰ τὸν τύπον (47.2) θὰ εἶναι : $E = 1+\dot{\varphi}^2$, $F = 0$, $G = u^2$ καὶ κατὰ τὸν τύπον (47.3) θὰ ἔχωμεν : $ds^2 = (1+\dot{\varphi}^2)\,du^2 + u^2 dv^2$, παρατηροῦμεν δὲ ὅτι τὸ παραμετρικὸν δίκτυον τῆς ἐπιφανείας, μεσημβρινοὶ καὶ παράλληλοι κύκλοι, ἀποτελοῦν ἕνα ὀρθογώνιον δίκτυον.

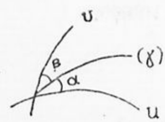
Παράδειγμα (47.2).— Νά εὑρεθῆ ἡ πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή καί τό ἐμβαδικόν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας : $\bar{r} = (u+v,\ u-v,\ uv)$.

Λύσις. Ἔχομεν $\bar{r}_u = (1, 1, v)$, $\bar{r}_v = (1, -1, u)$, $E = 2+v^2$, $F = uv$, $G = 2+u^2$ ἐπομένως $ds^2 = (2+v^2)\,du^2 + 2uv\,du\,dv + (2+u^2)\,dv^2$, $d\sigma = \sqrt{4+2u^2+2v^2}\,du\,dv$.

Παράδειγμα (47.3).— Νά εὑρεθῆ ἡ γωνία κατά τήν ὁποίαν τέμνονται οἱ γραμμές $u_1 = t_1$, $v_1 = t_1^2$ καί $u_2 = 1-t_2^2$, $v_2 = 1+t_2$ εἰς τό σημεῖον $M(0,0)$ τῆς ἐπιφανείας : $\bar{r} = (u^2+v,\ u+v,\ 2uv)$.

Λύσις. Ἔχομεν $\bar{r}_u = (2u, 1, 2v)$, $\bar{r}_v = (1, 1, 2u)$, $\dot{u}_1 = 1$, $\dot{v}_1 = 2t_1$, $\dot{u}_2 = -2t_2$, $\dot{v}_2 = 1$ καί ἐπειδή εἰς τό σημεῖον τομῆς τῶν γραμμῶν εἶναι $u = 0$, $v = 0$, $t_1 = 0$, $t_2 = -1$ θά ἔχωμεν $\bar{r}_u = (0, 1, 0)$, $\bar{r}_v = (1, 1, 0)$, $E = 1$, $F = 1$, $G = 2$, $\dot{u}_1 = 1$, $\dot{v}_1 = 0$, $\dot{u}_2 = 2$, $\dot{v}_2 = 1$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τούς τύπους (47.7) καί (47.8) καί διαιροῦντες κατά μέλη προκύπτει : $\varepsilon\varphi\psi = \frac{1}{3}$. δηλαδή $\psi \approx 18^\circ\ 30'$.

Παράδειγμα (47.4).— Νά εὑρεθοῦν οἱ γωνίες α, β τίς ὁποῖες σχηματίζει μία ἐπιφανειακή γραμμή (γ), μέ τίς παραμετρικές γραμμές τῆς ἐπιφανείας ἐπί τῆς ὁποίας κεῖται σχ. (47.2).



Σχ. (47.2)

Λύσις. Ἐπί τῆς γραμμῆς u εἶναι $\delta v = 0$, $\delta s = \sqrt{E}\,\delta u$, ἐπομένως ἀπό τούς τύπους (47.11) θά ἔχωμεν :

$\sigma\upsilon\nu\alpha = (E\,du + F\,dv) : \sqrt{E}\,ds$, $\eta\mu\alpha = |dv|\sqrt{EG-F^2} : \sqrt{E}\,ds$

Ἐπί τῆς γραμμῆς v εἶναι $\delta u = 0$, $\delta s = \sqrt{G}\,\delta v$, ἐπομένως πάλι ἀπό τούς ἴδιους τύπους θά ἔχωμεν :

$$\sigma\upsilon\nu\beta = (F\,du + G\,dv) : \sqrt{G}\,ds,\quad \eta\mu\beta = |du|\sqrt{EG-F^2} : \sqrt{G}\,ds.$$

Παράδειγμα (47.5).— Νά εὑρεθῆ ἡ γωνία κατά τήν ὁποίαν τέμνονται οἱ ἐπιφανειακές γραμμές οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ἀπό τίς ἐξισώσεις : $\varphi(u,v) = 0$, $f(u,v) = 0$.

Λύσις. Διά τίς γραμμές αὐτές θά ἔχωμεν ἀντιστοίχως : $\varphi_u du + \varphi_v dv = 0$ καί $f_u \delta u + f_v \delta v = 0$ ἐκ τῶν ὁποίων ἕπεται : $du = \lambda\varphi_v$, $dv = -\lambda\varphi_u$, $\delta u = \mu f_v$, $\delta v = -\mu f_u$. Ἀντικαθιστῶντες τίς σχέσεις αὐτές εἰς τούς τύπους (47.11) προκύπτει:

$$\sigma\upsilon\nu\psi = \left[E\varphi_v f_v - F(\varphi_u f_v + \varphi_v f_u) + G\varphi_u f_u\right] : \sqrt{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2}\,\sqrt{Ef_v^2 - 2Ff_uf_v + Gf_u^2}$$

$$\eta\mu\psi = |\varphi_u f_v - \varphi_v f_u|\sqrt{EG-F^2} : \sqrt{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2}\,\sqrt{Ef_v^2 - 2Ff_uf_v + Gf_u^2}$$

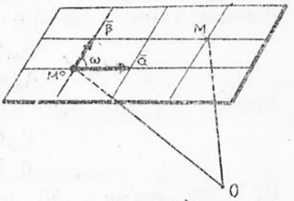
Παράδειγμα (47.6).— Νά εὑρεθῆ ἡ διαφορική ἐξίσωσις τῶν ὀρθογωνίων τροχιῶν μιᾶς δοθείσης οἰκογενείας ἐπιφανειακῶν γραμμῶν πού ἔχει διαφορική ἐξίσωσιν : $P(u,v)\,\delta u + Q(u,v)\,\delta v = 0$.

Λύσις. Θά ἔχωμεν $\delta u = \lambda Q$, $\delta v = -\lambda P$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν συνθήκη καθετότητος (47.13), προκύπτει ἡ διαφορική ἐξίσωσις τῶν ζητουμένων γραμμῶν : $(EQ - FP)\,du + (FQ - GP)\,dv = 0$.

Παράδειγμα (47.7).— Νά εὑρεθῆ ἡ πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική τῆς ἐπιφανείας : $\bar{r} = \bar{r}_0 + u\bar{\alpha} + v\bar{\beta}$ ὅπου $\bar{r}_0 =$ σταθερόν καί $|\bar{\alpha}| = |\bar{\beta}| = 1$.

Λύσις. Προφανῶς πρόκειται γιά ἐπίπεδον διερχόμενον διά τοῦ σημείου

$M_0(\bar r_0)$, παράλληλον πρός τά διανύσματα $\bar\alpha, \bar\beta$ καί τοῦ ὁποίου οἱ παραμετρικές γραμμές εἶναι εὐθεῖες ἀντιστοίχως παράλληλες πρός αὐτά σχ.(47.3).



Σχ.(47.3)

Ἔχομεν λοιπόν $\bar r_u = \bar\alpha$, $\bar r_v = \bar\beta$, $E = \bar\alpha^2 = 1$, $F = \bar\alpha\bar\beta = \text{συν}\omega$, $G = \bar\beta^2 = 1$, ὁπότε ἡ θεμελιώδης τετραγωνική μορφή θά εἶναι : $ds^2 = du^2 + 2\,\text{συν}\omega\, du\,dv + dv^2$. Ἐάν εἶναι $\omega = 90°$ καί θέσωμεν $u = x$, $v = y$ γίνεται $ds^2 = dx^2 + dy^2$, δηλαδή ἡ γνωστή ἔκφρασις τοῦ διαφορικοῦ τοῦ τόξου εἰς καρτεσιανόν σύστημα συντεταγμένων.

Παράδειγμα (47.8).— Νά εὑρεθῆ ἡ πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή καί τό ἐμβαδικόν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας : $2z = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$.

Λύσις. Ἔχομεν $2z_x = 2\alpha x + 2\beta y$, $2z_y = 2\beta x + 2\gamma y$ δηλαδή $p = \alpha x + \beta y$, $q = \beta x + \gamma y$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τούς (47.18) προκύπτει : $E = 1 + (\alpha x + \beta y)^2$, $F = (\alpha x + \beta y)(\beta x + \gamma y)$, $G = 1 + (\beta x + \gamma y)^2$, $ds^2 = [1 + (\alpha x + \beta y)^2]\,dx^2 + 2(\alpha x + \beta y)(\beta x + \gamma y)\,dx\,dy + [1 + (\beta x + \gamma y)^2]\,dy^2$, $d\sigma = \sqrt{1 + (\alpha x + \beta y)^2 + (\beta x + \gamma y)^2}\,dx\,dy$.

48. Δευτέρα θεμελιώδης τετραγωνική μορφή.

— Ἐπί τῆς ἐπιφανείας :

$$\bar r = \bar r(u, v)$$

θεωροῦμεν σημεῖον $M(u,v)$ καί τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς αὐτό

$$(\bar x - \bar r)\,\bar n = 0$$

Ἡ προσημασμένη ἀπόστασις ἑνός ἄλλου σημείου τῆς ἐπιφανείας $M'(u+du, v+dv)$, ἀπό τό ἐπίπεδον αὐτό θά εἶναι ὡς γνωστόν :

$$\delta = [\bar r(u+du, v+dv) - \bar r(u,v)]\,\bar n$$

Ἀναπτύσσοντες τόν πρῶτο παράγοντα κατά Taylor καί ἐκτελοῦντες τόν ἐσωτερικό πολλαπλασιασμό θά ἔχωμεν :

$$\delta = [(\bar r_u du + \bar r_v dv) + \tfrac{1}{2}(\bar r_{uu} du^2 + 2\bar r_{uv} du\,dv + \bar r_{vv} dv^2) + \cdots]\,\bar n$$

$$\delta = (\bar r_u \bar n)\,du + (\bar r_v \bar n)\,dv + \tfrac{1}{2}[(\bar r_{uu}\bar n)\,du^2 + 2(\bar r_{uv}\bar n)\,du\,dv + (\bar r_{vv}\bar n)\,dv^2] + \cdots$$

Οἱ δύο πρῶτοι ὅροι τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι μηδέν· ἐάν λοιπόν θέσωμεν :

$$L = \bar r_{uu}\bar n, \quad M = \bar r_{uv}\bar n, \quad N = \bar r_{vv}\bar n \qquad (48.1)$$

ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου M' ἀπό τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον θά εἶναι :

$$\delta = \tfrac{1}{2}(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2) + \cdots \qquad (48.2)$$

Τά ποσά L, M, N ὅπως ὁρίζωνται ἀπό τίς (48.1) λέγονται θεμελιώδη ποσά δευτέρας τάξεως καί ἡ παράστασις :

$$\boxed{\mathrm{II} \equiv L\,du^2 + 2M\,du\,dv + G\,dv^2} \qquad (48.3)$$

λέγεται δευτέρα θεμελιώδης τετραγωνική μορφή τῆς ἐπιφανείας.
Παραγωγίζοντες τὴν $\bar{r}_u \bar{n} = 0$ μερικῶς ὡς πρὸς u, v προκύπτει :

$$\bar{r}_{uu}\bar{n} + \bar{r}_u \bar{n}_u = 0, \quad L = \bar{r}_{uu}\bar{n} = -\bar{r}_u \bar{n}_u$$
$$\bar{r}_{uv}\bar{n} + \bar{r}_u \bar{n}_v = 0, \quad M = \bar{r}_{uv}\bar{n} = -\bar{r}_u \bar{n}_v$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὴν $\bar{r}_v \bar{n} = 0$ παραγωγίζοντες ὡς πρὸς u, v προκύπτει :

$$\bar{r}_{uv}\bar{n} + \bar{r}_v \bar{n}_u = 0, \quad M = \bar{r}_{uv}\bar{n} = -\bar{r}_v \bar{n}_u$$
$$\bar{r}_{vv}\bar{n} + \bar{r}_v \bar{n}_v = 0, \quad N = \bar{r}_{vv}\bar{n} = -\bar{r}_v \bar{n}_v$$

Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι τὰ θεμελιώδη ποσὰ δευτέρας τάξεως μιᾶς ἐπιφανείας δίδονται ἀπὸ τοὺς ἑξῆς τύπους :

$$\begin{aligned} L &= \bar{r}_{uu}\bar{n} = -\bar{r}_u \bar{n}_u = (\bar{r}_{uu}\bar{r}_u\bar{r}_v) : W \\ M &= \bar{r}_{uv}\bar{n} = -\bar{r}_u \bar{n}_v = -\bar{r}_v \bar{n}_u = (\bar{r}_{uv}\bar{r}_u\bar{r}_v) : W \qquad (48.4) \\ N &= \bar{r}_{vv}\bar{n} = -\bar{r}_v \bar{n}_v = (\bar{r}_{vv}\bar{r}_u\bar{r}_v) : W \end{aligned}$$

Ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια δίδεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $z = z(x,y)$ θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὴν (47.17) τὶς σχέσεις : $\bar{r}_x = (1, 0, z_x)$, $\bar{r}_y = (0, 1, z_y)$, $\bar{r}_{xx} = (0, 0, z_{xx})$, $\bar{r}_{yy} = (0, 0, z_{yy})$, $\bar{r}_{xy} = (0, 0, z_{xy})$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς τύπους (48.4) καὶ χρησιμοποιοῦντες τὸν γνωστὸν συμβολισμὸν $r = z_{xx}$, $s = z_{xy}$, $t = z_{yy}$ θὰ ἔχωμεν τοὺς τύπους :

$$\begin{aligned} &L = r : w, \quad M = s : w, \quad N = t : w \\ &\mathrm{II} = (r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2) : w \end{aligned} \qquad (48.5)$$

Θὰ δείξωμεν τώρα τοὺς ἑξῆς τύπους :

$$\begin{aligned} w^2 \cdot \bar{n}_u &= (FM - GL)\bar{r}_u + (FL - EM)\bar{r}_v \\ w^2 \cdot \bar{n}_v &= (FN - GM)\bar{r}_u + (FM - EN)\bar{r}_v \end{aligned} \qquad (48.6)$$

Ἐπειδὴ ἔχομεν $\bar{n}^2 = 1$ θὰ εἶναι $2\bar{n}\bar{n}_u = 0$, $2\bar{n}\bar{n}_v = 0$ δηλαδὴ τὰ διανύσματα $\bar{n}_u$, $\bar{n}_v$ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ $\bar{n}$, ἐπομένως θὰ κεῖνται εἰς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας καὶ θὰ ἔχωμεν :

$$\bar{n}_u = a\bar{r}_u + \beta\bar{r}_v, \qquad \bar{n}_v = \gamma\bar{r}_u + \delta\bar{r}_v \qquad (1)$$

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν a, β, γ, δ πολλαπλασιάζομεν τὶς σχέσεις αὐτὲς ἐσωτερικῶς ἐπὶ τὰ $\bar{r}_v, \bar{r}_v$ ὁπότε θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{aligned} -L &= aE + \beta F & \qquad -M &= \gamma E + \delta F \\ -M &= aF + \beta G & \qquad -N &= \gamma F + \delta G \end{aligned}$$

Ἐπιλύοντες τὰ δύο συστήματα ὡς πρὸς a, β καὶ γ, δ προκύπτουν οἱ σχέσεις :

$$a = (FM - GL) : w^2, \quad \beta = (FL - EM) : w^2, \quad \gamma = (FN - GM) : w^2, \quad \delta = (FM - EN) : w^2 \qquad (2)$$

τὶς ὁποῖες ἀντικαθιστῶντες εἰς τὶς (1) προκύπτουν οἱ ζητούμενοι τύποι οἱ ὁποῖοι μάλιστα λέγονται τύποι τοῦ Weingarten.

Παράδειγμα (48.1). – Νὰ εὑρεθοῦν τὰ θεμελιώδη ποσὰ πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως τοῦ ὀρθοῦ ἑλικοειδοῦς : $\bar{r} = (u\,\text{συν}v,\ u\,\text{ημ}v,\ \beta v)$.
Λύσις. Ἔχομεν $\bar{r}_u = (\text{συν}v, \text{ημ}v, 0)$, $\bar{r}_v = (-u\,\text{ημ}v, u\,\text{συν}v, \beta)$, $\bar{r}_{uu} = (0, 0, 0)$, $\bar{r}_{uv} = (-\text{ημ}v, \text{συν}v, 0)$, $\bar{r}_{vv} = (-u\,\text{συν}v, -u\,\text{ημ}v, 0)$, $E = 1$, $F = 0$, $G = u^2 + \beta^2$, $W = \sqrt{u^2 + \beta^2}$, $\bar{n} = (\beta\,\text{ημ}v, -\beta\,\text{συν}\,v, u) : W$, $L = 0$, $M = -\beta : W$, $N = 0$, $\mathrm{I} \equiv du^2 + (u^2 + \beta^2)\,dv^2$, $\mathrm{II} \equiv -$

$\cdot(\beta{:}w)$ dudu, ὅπου μὲ τὸ σύμβολον I παραστήσαμε τὴν πρώτη θεμελιώδη τετραγωνικὴ μορφή.

Παράδειγμα (48.2). – Νὰ ὑπολογισθῆ κατὰ προσέγγισιν ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου $M'(0.1, 0.99, 1)$ ἀπὸ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας $z = x^2 + y$ εἰς τὸ σημεῖον $M(0, 1, 1)$.

Λύσις. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ δ τὴν ζητουμένη ἀπόσταση, τότε ἀπὸ τοὺς τύπους (48.2) καὶ (48.5) θὰ ἔχωμεν : $2\delta \approx (rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2) : w$. Ἔχομεν ὅμως : $x = 0$, $y = 1$, $dx = 0.1$, $dy = -0.01$, $z_x = 2x = 0$, $z_y = 1$, $w = \sqrt{2}$, $z_{xx} = 2$, $z_{xy} = 0$, $z_{yy} = 0$, ἐπομένως θὰ εἶναι $\delta \approx \sqrt{2} : 100$.

49. Καμπυλότης ἐπιφανειακῶν γραμμῶν. – Ἀπὸ τὸν τύπο (48.2) ἕπεται ὅτι τὸ διπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τῶν γειτονικῶν πρὸς τὸ Μ σημείων τῆς ἐπιφανείας ἀπὸ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον αὐτῆς εἰς τὸ Μ, ἰσοῦται κατὰ προσέγγισιν μὲ τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τῆς δευτέρας θεμελιώδους τετραγωνικῆς μορφῆς. Ἐξ αὐτοῦ προκύπτει μία πρώτη δυνατότης νὰ μελετήσωμεν τὴν ἀπόκλιση τῆς ἐπιφανείας ἀπὸ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον στὴν γειτονιὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς. Ἡ εἰκόνα ὅμως τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εἶναι πολὺ χονδροειδὴς γι' αὐτὸ γιὰ μιὰ βαθύτερη μελέτη τῆς ἐπιφανείας στὴν γειτονιὰ ἑνὸς σημείου αὐτῆς, μελετῶμεν τὴν καμπυλότητα τῶν ἐπιφανειακῶν γραμμῶν οἱ ὁποῖες διέρχονται ἀπὸ τὸ θεωρούμενον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας.

Ἂς θεωρήσωμεν λοιπὸν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ μία γραμμὴν (γ) ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον $M(u,v)$ καὶ ὁρίζεται ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις $u = u(s)$, $v = v(s)$. Ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς θὰ εἶναι $\bar{r} = \bar{r}[u(s), v(s)]$ ἐξ' αὐτῆς παραγωγίζοντες δύο φορὲς ὡς πρὸς τὸ μῆκος τόξου s τῆς γραμμῆς προκύπτει :

$$\bar{r}'' = (\bar{r}_{uu}du^2 + 2\bar{r}_{uv}dudv + \bar{r}_{vv}dv^2 + \bar{r}_u d^2u + \bar{r}_v d^2v) : ds^2.$$

Πολλαπλασιάζοντες αὐτὴν ἐσωτερικῶς ἐπὶ τὸ κάθετον διάνυσμα $\bar{n}$ τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ Μ καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς τύπους (47.3) καὶ (48.4) καὶ ὅτι $\bar{r}'' = \kappa\bar{\omega}$, ὅπου κ ἡ καμπυλότης τῆς γραμμῆς, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον :

$$\kappa(\bar{\omega}\bar{n}) = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \tag{49.1}$$

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸ δεύτερον μέλος τοῦ τύπου αὐτοῦ μὲ κ_n καὶ τὴν γωνία τῶν διανυσμάτων $\bar{\omega}, \bar{n}$ μὲ θ, ὁ προηγούμενος τύπος γράφεται :

$$\kappa\,\text{συν}\,\vartheta = \kappa_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \tag{49.2}$$

Τὸ μέγεθος κ_n, διὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ, ἐξαρτᾶται μόνο ἀπὸ τὸν λόγον τῶν du, dv δηλαδὴ ἀπὸ τὴν διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης (ε) τῆς ἐπιφανείακῆς γραμμῆς, λέγεται δὲ κάθετος καμπυλότης τῆς ἐν λόγῳ γραμμῆς εἰς τὸ σημεῖον Μ.

Ἐπειδὴ εἶναι $\kappa \geqslant 0$ τὸ συνθ θὰ εἶναι ὁμόσημον πρὸς τὴν κ_n, ἐπομένως γιὰ ὅλες τὶς ἐπιφανειακὲς γραμμὲς μὲ $\kappa > 0$ ποὺ ἔχουν τὴν ἴδια ἐφαπτομένη εἰς τὸ Μ, ἡ γωνία θ θὰ εἶναι ὀξεία ὅταν $\kappa_n > 0$ δηλαδὴ ὅταν $\mathrm{II} > 0$ καὶ θὰ εἶναι ἀμβλεία ὅταν $\kappa_n < 0$ δηλαδὴ ὅταν $\mathrm{II} < 0$.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τώρα μίαν οἱανδήποτε ἄλλην ἐπιφανειακὴν γραμμὴν (γ_1) ἡ ὁποία νὰ ἔχη τὴν ἴδια ἐφαπτομένη μὲ τὴν (γ) εἰς τὸ Μ, τότε αὐτὴ θὰ ἔχη τὴν ἴδια κάθετον καμπυλότητα. Ἐὰν ἐπὶ πλέον ἡ γραμμὴ (γ_1) ἔχη καὶ τὸ ἴδιο $\bar{\omega}$ δηλαδὴ τὴν ἴδια θ καὶ δὲν εἶναι συνθ $= 0$, τότε ἀπὸ τὸν τύπο (49.2) ἕπεται ὅτι οἱ γραμμὲς θὰ ἔχουν καὶ τὴν ἴδια καμπυλότητα. Ἀπὸ αὐτὰ προκύπτει ὅτι διὰ τὴν μελέτη τῆς καμπυλότητος τῶν ἐπιφανειακῶν γραμμῶν, οἱ ὁποῖες διέρχονται ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ τῆς ἐπιφανείας, ἀρκεῖ ἡ μελέτη τῆς καμπυλότητος τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων ἐπιφανειακῶν γραμμῶν ποὺ ἔχουν μὲ αὐτὲς τὸ ἴδιο ἐγγύτατον ἐπίπεδον, διότι τότε θὰ ἔχουν τὴν ἴδια ἐφαπτομένη καὶ τὸ ἴδιο $\bar{\omega}$.

Μία γραμμὴ λέγεται πλαγία τομὴ τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον Μ, ὅταν εἶναι τομὴ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ Μ καὶ δὲν περιέχει τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ Μ, λέγεται δὲ κάθετος τομὴ ὅταν περιέχη τὴν κάθετον.

Σχ. (49.1)

Σχ. (49.2)

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $\kappa^*, \bar{\omega}^*$ τὴν καμπυλότητα καὶ τὸ πρωτοκάθετον διάνυσμα μιᾶς καθέτου τομῆς (γ^*), τότε ἀπὸ τὸν τύπον (49.2) ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι $\kappa^* = \kappa_n$ ὅταν $\theta = 0$ δηλαδὴ ὅταν ἔχωμεν τὴν περίπτωσιν τοῦ σχ. (49.1), θὰ εἶναι δὲ $-\kappa^* = \kappa_n$ ὅταν $\theta = \pi$ δηλαδὴ ὅταν ἔχωμεν τὴν περίπτωσιν τοῦ σχ. (49.2). ἐξ αὐτῶν προκύπτει τὸ ἑξῆς γενικὸν συμπέρασμα:

Ἡ καμπυλότης μιᾶς καθέτου τομῆς ἰσοῦται μὲ τὴν κάθετον καμπυλότητα αὐτῆς ὅταν τὰ $\bar{\omega}, \bar{\eta}$ εἶναι ἴσα καὶ εἶναι ἀντίθετος πρὸς αὐτὴν ὅταν τὰ $\bar{\omega}$, $\bar{\eta}$ εἶναι ἀντίθετα. Μεταξὺ τῆς καμπυλότητος τῆς καθέτου τομῆς καὶ τῆς καμπυλότητος μιᾶς πλαγίας τομῆς ἢ γενικῶς μιᾶς οἱασδήποτε ἐπιφανειακῆς γραμμῆς, ποὺ ἔχει τὴν ἴδια ἐφαπτομένη μὲ αὐτήν, ὑφίσταται ἡ σχέσις :

$$\boxed{\kappa\,\text{συν}\,\theta = \pm\,\kappa^*} \qquad (49.3)$$

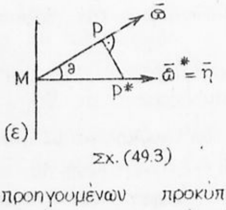
Ἡ κάθετος τομὴ εἶναι μία γραμμὴ τοῦ τριδιαστάτου χώρου, ἐπομένως ἔχει καμπυλότητα μὴ ἀρνητικὴν δηλαδὴ εἶναι $\kappa^* \geqslant 0$. Ἐὰν κατὰ παράβα σιν αὐτοῦ προσανατολίσωμεν τὸ $\bar{\omega}^*$ ἔτσι ὥστε νὰ εἶναι πάντοτε $\bar{\omega}^* = \bar{\eta}$, τότε ἡ καμπυλότης τῆς καθέτου τομῆς θὰ ἰσοῦται πάντοτε μὲ τὴν κάθετον καμπυλότητα αὐτῆς εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας δηλαδὴ θὰ εἶναι $\kappa^* = \kappa_\eta$ καὶ τὴν λέμε τότε πρὸς διάκρισιν προσημασμένη καμπυλότητα τῆς καθέτου τομῆς. Ὁ τύπος (49.3) λέγεται τύπος τοῦ Meusnier ἑρμηνεύοντες γεωμετρικῶς τὸν τύπον αὐτὸν προκύπτει ἡ ἑπομένη πρότασις ἡ ὁποία λέγεται θεώρημα τοῦ Meusnier.

Πρότασις (49.1).– *Τὸ κέντρον καμπυλότητος μιᾶς ἐπιφανειακῆς γραμμῆς εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς M εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ κέντρου καμπυλότητος τῆς καθέτου τομῆς τῆς ἐπιφανείας ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἐφαπτομένην τῆς γραμμῆς εἰς τὸ M, ἐπὶ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου τῆς γραμμῆς.*

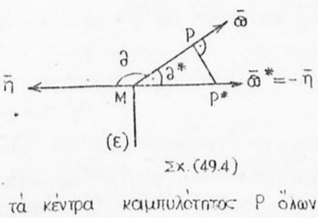
Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἂς θεωρήσωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μίαν γραμμὴν (γ) ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον $M(u,v)$ καὶ ἔχει ἐκεῖ καμπυλότητα $\kappa > 0$. Ἐὰν ϑ εἶναι ἡ γωνία τῶν $\bar{\omega}, \bar{\eta}$ μεταξὺ τῆς κ καὶ τῆς καμπυλότητος τῆς καθέτου τομῆς (γ^*) ποὺ ἔχει τὴν ἴδιαν μὲ αὐτὴν ἐφαπτομένη (ε) εἰς τὸ M, ὑφίσταται ἡ σχέσις (49.3) ἡ ὁποία, εἰσάγοντες τὶς ἀκτῖνες καμπυλότητος, γράφεται:

$$R = R^* \,|\text{συν}\,\vartheta| \qquad (49.4)$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ κάθετον διάνυσμα τῆς ἐπιφανείας $\bar{\eta}$ ἰσοῦται μὲ τὸ πρωτοκάθετον $\bar{\omega}^*$ τῆς καθέτου τομῆς, τότε ἡ γωνία ϑ εἶναι ὀξεῖα, ἡ σχέσις (49.4) γράφεται $R = R^*\text{συν}\,\vartheta$ καὶ καθὼς φαίνεται καὶ εἰς τὸ σχ. (49.3) τὸ κέντρον καμπυλότητος P τῆς (γ) εἶναι ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ κέντρου καμπυλότητος P^* τῆς καθέτου τομῆς (γ^*) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν (ε) καὶ $\bar{\omega}$, δηλαδὴ ἐπὶ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου τῆς (γ). Ἐὰν τὸ $\bar{\eta}$ εἶναι ἀντίθετον τοῦ $\bar{\omega}^*$, ἡ γωνία ϑ εἶναι ἀμβλεῖα, ἡ σχέσις (49.4) γράφεται $R = R^*\text{συν}\,\vartheta^*$, ὅπου ϑ^* ἡ παραπληρωματικὴ τῆς ϑ, ὁπότε καθὼς φαίνεται καὶ εἰς τὸ σχ. (49.4) τὸ P εἶναι πάλι προβολὴ τοῦ R^* καὶ ἡ πρότασις ἀπεδείχθη



Σχ. (49.3)



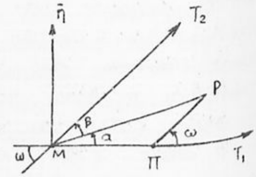
Σχ. (49.4)

Ἐκ τῶν προηγουμένων προκύπτει ἀκόμη ὅτι τὰ κέντρα καμπυλότητος P ὅλων τῶν ἐπιφανειακῶν γραμμῶν ποὺ ἔχουν εἰς ἕνα σημεῖον M τῆς ἐπιφανείας τὴν ἴδια ἐφαπτομένη (ε), κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς κύκλου ποὺ ἔχει διάμετρον τὴν MP^* καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν (ε) εἰς τὸ M, οἱ δὲ κύκλοι καμπυλότητος τῶν γραμμῶν αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ τῆς σφαίρας ποὺ ἔχει κέντρον τὸ P^* καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ R^*. Ἀπὸ τὸν τύπο (49.4) προκύπτει ἀκόμη ὅτι ἐξ ὅλων τῶν ἐπιφανειακῶν γραμμῶν ποὺ ἔχουν κοινὴν ἐφαπτομένην, ἡ κάθε-

τος τομή ἔχει τὴν μεγίστη ἀκτίνα καμπυλότητος.
Ὅλα τὰ προηγούμενα φαίνονται ἀμέσως ὅταν ὡς ἐπιφάνεια λάβωμεν μίαν σφαῖραν, ὁπότε ἡ κάθετος τομὴ εἶναι ἕνας μέγιστος κύκλος καὶ ἡ πλαγία τομὴ εἶναι κύκλος τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εἶναι πράγματι ἡ προβολὴ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, δηλαδὴ τοῦ κέντρου καμπυλότητος τῆς καθέτου τομῆς, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ ποὺ εἶναι συγχρόνως καὶ τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον.
Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ μελέτη τῆς καμπυλότητος μιᾶς γραμμῆς ἀνάγεται εἰς τὴν μελέτη τῆς μεταβολῆς τῆς καμπυλότητος τῶν καθέτων τομῶν, ἂς θεωρήσωμεν μίαν κάθετον τομὴν τῆς ἐπιφανείας τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον στρέφεται περὶ τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ $M(u,v)$ καὶ ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὸ μὴ μηδενικὸν ἐφαπτομενικὸν διάνυσμα σχ. (49.5) :

$$\overline{MP} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$$

Ἂς θεωρήσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου δύο ἄξονες συντεταγμένων MT_1, MT_2 μὲ βασικὰ διανύσματα ἀντιστοίχως τὰ μοναδιαῖα τῶν $\bar{r}_u, \bar{r}_v$ τὰ ὁποῖα εἶναι :



Σχ. (49.5)

$$\bar{\varepsilon}_1 = \bar{r}_u : \sqrt{E}, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \bar{r}_v : \sqrt{G} \qquad (49.5)$$

Ἐὰν τὸ $\overline{MP}$ σχηματίσει μὲ τοὺς ἄξονες ἀντιστοίχως τὶς γωνίες α, β καὶ εἶναι Π ἡ προβολὴ τοῦ P εἰς τὸν ἄξονα MT_1 παραλλήλως πρὸς τὸν MT_2, θὰ ἔχωμεν:

$$|\overline{MP}| = |\bar{r}_u du + \bar{r}_v dv| = \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} = ds,$$

$$(\overline{M\Pi}) = |\bar{r}_u| du = \sqrt{E} du, \quad (\overline{\Pi P}) = |\bar{r}_v| dv = \sqrt{G}\, dv$$

$$(\sqrt{E} du) : ds = (\overline{M\Pi}) : ds = \eta\mu\beta : \eta\mu\omega, \quad (\sqrt{G} dv) : ds = (\overline{\Pi P}) : ds = \eta\mu\alpha : \eta\mu\omega$$

Ἐκ τῶν δύο τελευταίων σχέσεων ἐπιλύοντες ὡς πρὸς du, dv προκύπτει :

$$du = (\eta\mu\beta\, ds) : \sqrt{E}\,\eta\mu\omega, \quad dv = (\eta\mu\alpha\, ds) : \sqrt{G}\,\eta\mu\omega \qquad (49.6)$$

καὶ ἀπὸ τὸν (49.1)* θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν καμπυλότητα τῆς καθέτου τομῆς :

$$(\bar{\omega}^* \bar{\eta})\, \kappa^* = (L du^2 + 2M du dv + N dv^2) : ds^2$$
$$\kappa^* = |L du^2 + 2M du dv + N dv^2| : ds^2 \qquad (49.7)$$

ὅπου τὸ γινόμενον $(\bar{\omega}^* \bar{\eta})$ ὅπως ἔχωμε πεῖ θὰ ἰσοῦται μὲ 1 ὅταν ἔχωμεν τὴν περίπτωσιν τοῦ σχ. (49.1), δηλαδὴ ὅταν τὸ $\bar{\eta}$ δείχνει πρὸς τὰ κοῖλα τῆς καθέτου τομῆς καὶ θὰ ἰσοῦται μὲ -1 ὅταν ἔχωμεν τὴν περίπτωσιν τοῦ σχ. (49.2), δηλαδὴ ὅταν τὸ $\bar{\eta}$ δείχνει πρὸς τὰ κυρτὰ τῆς καθέτου τομῆς. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν (49.7) τὰ du, dv ἐκ τῶν τύπων (49.6) προκύπτει τελικῶς ὁ τύπος :

$$(\bar{\omega}^* \bar{\eta})\, \kappa^* = \frac{L}{E} \frac{\eta\mu^2\beta}{\eta\mu^2\omega} + 2\frac{M}{\sqrt{EG}} \frac{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}{\eta\mu^2\omega} + \frac{N}{G} \frac{\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu^2\omega}$$
$$\kappa^* = \left| \frac{L}{E} \frac{\eta\mu^2\beta}{\eta\mu^2\omega} + 2\frac{M}{\sqrt{EG}} \frac{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}{\eta\mu^2\omega} + \frac{N}{G} \frac{\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu^2\omega} \right| \qquad (49.8)$$

Δεδομένου ὅτι μεταξὺ τῶν γωνιῶν α, β ὑφίσταται ἡ σχέσις $\alpha+\beta=\omega+2\lambda\pi$, ὁ ἀνωτέρω τύπος ὁρίζει τὴν καμπυλότητα τῆς καθέτου τομῆς ὡς συνάρτησιν τῆς γωνίας α τὴν ὁποίαν σχηματίζει μὲ τὸ διάνυσμα $\bar{r}_u$, τὸ ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου τῆς καθέτου τομῆς εἰς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας. Προφανῶς ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν $0 \leqslant \alpha < \pi$ διὰ νὰ ἔχωμεν τὶς καμπυλότητες ὅλων τῶν καθέτων τομῶν διὰ τοῦ σημείου M τῆς ἐπιφανείας.
Ἐὰν εἶναι $\alpha=0$ ἢ $\alpha=\omega$ προκύπτουν οἱ καμπυλότητες :

$$\kappa_1^* = |L| : E, \qquad \kappa_2^* = |N| : G \tag{49.10}$$

τῶν καθέτων τομῶν ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ ἐφαπτομενικὰ διανύσματα $\bar{r}_u, \bar{r}_v$.

Παράδειγμα (49.1). — Νὰ εὑρεθῇ ἡ καμπυλότης τῆς καθέτου τομῆς τῆς ἑλικοειδοῦς ἐπιφανείας: $\bar{r}=[u\sigma\upsilon\nu v, u\eta\mu v, \sigma(u)+\beta v]$ εἰς τὸ σημεῖον μὲ καμπυλόγραμμες συντεταγμένες $u=1$, $v=\pi:2$ καὶ ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν διεύθυνσιν μὲ λόγον $dv:du=3$ ὅταν εἶναι $\sigma(u)\equiv u^2$.
Λύσις. Παραγωγίζοντες μερικῶς τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας ἔχομεν: $\bar{r}_u=(\sigma\upsilon\nu v, \eta\mu v, \dot{\sigma})$, $\bar{r}_v=(-u\eta\mu v, u\sigma\upsilon\nu v, \beta)$, $\bar{r}_{uu}=(0,0,\ddot{\sigma})$, $\bar{r}_{uv}=(-\eta\mu v, \sigma\upsilon\nu v, 0)$, $\bar{r}_{vv}=(-u\sigma\upsilon\nu v, -u\eta\mu v, 0)$, καὶ ἐξ αὐτῶν χρησιμοποιοῦντες γνωστοὺς τύπους προκύπτει : $E=1+\dot{\sigma}^2$, $F=\beta\dot{\sigma}$, $G=u^2+\beta^2$, $W=\sqrt{\beta^2+u^2(1+\dot{\sigma}^2)}$, $WL=u\ddot{\sigma}$, $WM=-\beta$, $WN=u^2\dot{\sigma}$, $\bar{n}=(\beta\eta\mu v-u\dot{\sigma}\sigma\upsilon\nu v, -\beta\sigma\upsilon\nu v-u\dot{\sigma}\eta\mu v, u):W$. Τὰ ποσὰ αὐτὰ εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον καὶ διὰ $\sigma=u^2$, $\dot{\sigma}=2u$, $\ddot{\sigma}=2$ γίνονται : $E=5$, $F=2\beta$, $G=1+\beta^2$, $W=\sqrt{\beta^2+5}$, $L=2:\sqrt{\beta^2+5}$, $M=-\beta:\sqrt{\beta^2+5}$, $N=4:\sqrt{\beta^2+5}$, $\bar{n}=(\beta,-2,1):\sqrt{\beta^2+5}$. Ἀντικαθιστῶντες τὰ ποσὰ αὐτὰ εἰς τὸν τύπον (49.7) καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $dv:du=3$, προκύπτει ἡ ζητουμένη καμπυλότης.

$$\kappa^*=|2-2\beta\cdot 3+4\cdot 9|:[5+4\beta\cdot 3+(1+\beta^2)9]:\sqrt{\beta^2+5}=|38-6\beta|:(9\beta^2+12\beta+14)\sqrt{\beta^2+5}.$$

Παράδειγμα (49.2). — Νὰ εὑρεθῇ ἡ καμπυλότης τῆς καθέτου τομῆς τῆς ἐπιφανείας $\bar{r}=(u+v;\, u-v,\, uv)$ εἰς τὸ σημεῖον μὲ καμπυλόγραμμες συντεταγμένες $u=1$, $v=1$ καὶ ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν διεύθυνσιν μὲ λόγον $dv:du=1$, ἐν συνεχείᾳ δὲ νὰ εὑρεθῇ ἡ καμπυλότης τῆς πλαγίας τομῆς ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν καὶ τῆς ὁποίας τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον σχηματίζει γωνίαν $30°$ μὲ τὸ ἐπίπεδον τῆς καθέτου τομῆς.
Λύσις. Παραγωγίζοντες μερικῶς τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας ἔχομεν : $\bar{r}_u=(1,1,v)$, $\bar{r}_v=(1,-1,u)$, $\bar{r}_{uu}=(0,0,0)$, $\bar{r}_{uv}=(0,0,1)$, $\bar{r}_{vv}=(0,0,0)$ καὶ ἐξ αὐτῶν διὰ τὸ δοθὲν σημεῖον προκύπτει : $E=3$, $F=1$, $G=3$, $W=8$, $L=0$, $M=-1:4$, $N=0$. Ἀντικαθιστῶντες τὰ ποσὰ αὐτὰ εἰς τὸν τύπον (49.7) καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $dv:du=1$, προκύπτει ὅτι ἡ καμπυλότης τῆς καθέτου τομῆς εἶναι: $\kappa^*=|-\frac{1}{2}|:(3+2+3)=1:16$. Ἡ καμπυλότης τῆς πλαγίας τομῆς θὰ προκύψῃ ἀπὸ τὸν τύπο (49.3) καὶ θὰ εἶναι $\kappa\,\sigma\upsilon\nu\, 30°=1:16$, δηλαδὴ $\kappa=1:8\sqrt{3}$.

50. Γραμμὲς καμπυλότητος. — Μία ἐπιφανειακὴ γραμμὴ λέγεται γραμμὴ καμ-

πυλότητος, όταν αἱ κάθετοι τῆς ἐπιφανείας εἰς τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς σχηματίζουν ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν.
Ἐὰν ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς εἶναι :

$$\bar{r} = \bar{r}\,[u(t), v(t)]$$

τότε γιὰ νὰ εἶναι ἡ γραμμὴ αὐτὴ γραμμὴ καμπυλότητος πρέπει καὶ ἀρκεῖ κατὰ τὸν τύπον (46.2), νὰ ὑφίσταται ἡ σχέσις :

$$(\dot{\bar{r}}\,\bar{n}\,\dot{\bar{n}}) = 0 \qquad (50.1)$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ W^3 καὶ ἀλλάζοντες τὴν τάξιν τῶν δύο τελευταίων παραγόντων ἡ ἀνωτέρω σχέσις λαμβάνει διαδοχικῶς τὶς ἑξῆς μορφές :

$$W^3\,[\dot{\bar{r}}\,\dot{\bar{n}}]\,\bar{n} = 0$$

$$W^3[\bar{r}_u\dot{u}+\bar{r}_v\dot{v},\ \bar{n}_u\dot{u}+\bar{n}_v\dot{v}]\,\bar{n} = 0$$

$$[\bar{r}_u\dot{u}+\bar{r}_v\dot{v},\ W^2\bar{n}_u\dot{u}+W^2\bar{n}_v\dot{v}]\cdot[\bar{r}_u\bar{r}_v] = 0$$

Ἀντικαθιστῶντες τώρα εἰς αὐτὴν τὰ $W^2\bar{n}_u$, $W^2\bar{n}_v$ ἀπὸ τοὺς τύπους (48.6) τοῦ Weingarten θὰ ἔχωμεν :

$$[\bar{r}_u\dot{u}+\bar{r}_v\dot{v},\ a\bar{r}_u\dot{u}+\beta\bar{r}_v\dot{u}+a_1\bar{r}_u\dot{v}+\beta_1\bar{r}_v\dot{v}][\bar{r}_u\bar{r}_v]=0$$

$$[\bar{r}_u\dot{u}+\bar{r}_v\dot{v},\ \bar{r}_u(a\dot{u}+a_1\dot{v})+\bar{r}_v(\beta\dot{u}+\beta_1\dot{v})][\bar{r}_u\bar{r}_v]=0$$

Ἐκτελοῦντες εἰς τὸ ἐξωτερικὸν γινόμενον τοὺς πολλαπλασιασμοὺς ἐπιμεριστικῶς ἡ τελευταία σχέσις γράφεται :

$$[\bar{r}_u\bar{r}_v](\beta\dot{u}^2+\beta_1\dot{u}\dot{v}-a\dot{u}\dot{v}-a_1\dot{v}^2)\cdot[\bar{r}_u\bar{r}_v] = 0$$

$$[\bar{r}_u\bar{r}_v]^2\,[\beta\dot{u}^2+(\beta_1-a)\,\dot{u}\dot{v}-a_1\dot{v}^2] = 0$$

Λαμβάνοντες τώρα ὑπ' ὄψιν τὶς σχέσεις (2) τοῦ παραδείγματος (48.2) ἡ τελευταία ἐξίσωσις λαμβάνει τελικῶς τὴν ἰσοδύναμον μορφήν :

$$(EM-FL)\,\dot{u}^2+(EN-GL)\,\dot{u}\dot{v}+(FN-GM)\dot{v}^2=0 \qquad (50.2)$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις εἶναι ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν γραμμῶν καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας, ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ dt^2 γράφεται καὶ ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$(EM-FL)\,du^2+(EN-GL)\,du dv+(FN-GM)dv^2=0 \qquad (50.3)$$

Ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν γραμμῶν καμπυλότητος γράφεται ἀκόμη καὶ ὑπὸ τὴν ἑξῆς εὐμνημόνευτον μορφήν :

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \qquad (50.4)$$

Ἐὰν καὶ οἱ τρεῖς συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως (50.3) δὲν εἶναι μηδὲν συγχρόνως, ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ θεωρουμένη ὡς ἀλγεβρικὴ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸν λόγον du:du, ἔχει δύο ρίζες πραγματικὲς καὶ ἄνισες, ἐπομένως δι' ἑκάστου σημείου τῆς ἐπιφανείας διέρχονται δύο γραμμὲς καμπυλότητος, οἱ ὁποῖες μάλιστα τέμνονται καθέτως διότι προκύπτει εὐκόλως ὅτι οἱ δύο τιμὲς τοῦ λόγου du:du ἐπαληθεύουν τὴν συνθήκη καθετότητος (47.13). Οἱ ἐφαπτόμενες τῶν γραμμῶν καμπυλότητος σὲ κάθε σημεῖον τῆς ἐπιφανείας ὁρίζουν δύο διευθύνσεις οἱ ὁποῖες λέγονται πρωτεύουσες διευθύνσεις τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον αὐτῆς. Ἐκ τῶν προηγουμένων συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (50.3) θεωρουμένη ὡς διαφορικὴ ὁρίζει τὶς γραμμὲς καμπυλότητος καὶ ὡς ἀλγεβρικὴ τὶς πρωτεύουσες διευθύνσεις οἱ ὁποῖες τέμνονται καθέτως.

Ἡ προσημασμένη καμπυλότης τῆς καθέτου τομῆς ὅπως ἀναφέραμε προηγουμένως ἰσοῦται μὲ τὴν κάθετον καμπυλότητα κ_n, ἐπομένως κατὰ τὸν (49.2) θὰ εἶναι:

$$\kappa_n = \frac{L+2M\lambda+N\lambda^2}{E+2F\lambda+G\lambda^2} \equiv \kappa_n(\lambda) \qquad (50.5)$$

ὅπου θέσαμε $\lambda = du:du$. Οἱ τιμὲς τοῦ λ διὰ τὶς ὁποῖες ἡ κ_n λαμβάνει ἀκροτάτην τιμὴν πρέπει ὡς γνωστὸν νὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{\partial \kappa_n}{\partial \lambda} \equiv \frac{(2M+2N\lambda)(E+2F\lambda+G\lambda^2)-(L+2M\lambda+N\lambda^2)(2F+2G\lambda)}{(E+2F\lambda+G\lambda^2)^2} = 0 \qquad (50.6)$$

ἡ ὁποία μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εἰς τὸν ἀριθμητὴν φαίνεται ἀμέσως ὅτι εἶναι ἰσοδύναμη πρὸς τὴν (50.3). Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νὰ διαπιστώσῃ ἀπὸ τὸ πρόσημον τῆς $\partial^2\kappa_n:\partial\lambda^2$ ὅτι ἐκ τῶν δύο τιμῶν τοῦ λ ἡ μία καθιστᾶ τὴν κ_n μεγίστην καὶ ἡ ἄλλη ἐλαχίστην. Ἐξ αὐτῶν προκύπτει ὅτι οἱ πρωτεύουσες διευθύνσεις μιᾶς ἐπιφανείας εἶναι ἐκεῖνες διὰ τὶς ὁποῖες ἡ προσημασμένη καμπυλότης τῶν καθέτων τομῶν ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτές, λαμβάνει μίαν μεγίστην καὶ μίαν ἐλαχίστην τιμήν.

Οἱ κάθετες αὐτὲς τομὲς λέγονται πρωτεύουσες τομὲς τῆς ἐπιφανείας καὶ οἱ ἀντίστοιχες πρὸς αὐτὲς προσημασμένες καμπυλότητες καὶ ἀκτῖνες καμπυλότητος λέγονται ἐπίσης πρωτεύουσες καὶ θὰ τὶς παριστάνωμεν ἀντιστοίχως μὲ κ_1, κ_2 καὶ R_1, R_2.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν πρωτευουσῶν καμπυλοτήτων κ_i, παρατηροῦμεν ὅτι θὰ πρέπῃ αὐτὲς νὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (50.5) δηλαδὴ θὰ εἶναι:

$$\kappa_i = (L+2M\lambda+N\lambda^2):(E+2F\lambda+G\lambda^2)$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ἡ ἐξίσωσις:

$$(E\kappa_i - L)+2(F\kappa_i - M)\lambda+(G\kappa_i - N)\lambda^2 = 0.$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἑκάστη τῶν πρωτευουσῶν καμπυλοτήτων ἀντιστοιχεῖ σὲ μία διεύθυνση ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δηλαδὴ σὲ μία τιμὴ τοῦ λ, θὰ πρέπῃ ἡ διακρίνουσα τῆς ἀνωτέρω δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως ὡς πρὸς λ νὰ εἶναι μηδέν, δηλαδὴ θὰ εἶναι:

$$\begin{vmatrix} E\kappa_i - L & F\kappa_i - M \\ F\kappa_i - M & G\kappa_i - N \end{vmatrix} = 0 \qquad (50.7)$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ὅτι οἱ πρωτεύουσες καμπυλότητες μιᾶς ἐπιφανείας εἶναι οἱ δύο ρίζες τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως ὡς πρὸς κ.

$$(EG-F^2)\kappa^2 - (EN-2FM+GL)\kappa + (LN-M^2) = 0 \qquad (50.8)$$

Τὸ γινόμενον τῶν πρωτευουσῶν καμπυλοτήτων μιᾶς ἐπιφανείας λέγεται πρώτη, ὁλικὴ ἢ καμπυλότης τοῦ Gauss καὶ τὴν παριστάνουν μὲ τὸ κεφαλαῖον γράμμα K, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν λέγεται δευτέρα καμπυλότης καὶ τὴν παριστάνουν μὲ H. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (50.8) θὰ ἔχωμεν λοιπόν:

$$\begin{aligned} K &= \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} \\ H &= \frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2) = \frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)} \end{aligned} \qquad (50.9)$$

καὶ κατόπιν αὐτῶν ἡ ἐξίσωσις (50.8) γράφεται:

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0 \qquad (50.10)$$

θὰ δείξωμεν τώρα τὴν ἑξῆς πρότασιν ἡ ὁποία εἶναι γνωστὴ εἰς τὴν μαθηματικὴν βιβλιογραφίαν ὡς Theorema egregium τοῦ Gauss.

Πρότασις (50.1).— *Ἡ ὁλικὴ καμπυλότης μιᾶς ἐπιφανείας δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς συνάρτησις μόνον τῶν θεμελιωδῶν ποσῶν πρώτης τάξεως καὶ τῶν μερικῶν παραγώγων αὐτῶν.*

Ἀπόδειξις. Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς τύπους (48.4) ἡ ὁλικὴ καμπυλότης γράφεται:

$$K = (LN-M^2):(EG-F^2) = \left[(\bar r_u \bar r_v \bar r_{uu})(\bar r_u \bar r_v \bar r_{vv}) - (\bar r_u \bar r_v \bar r_{uv})^2\right] : (EG-F^2)^2 \qquad (1)$$

Κατὰ τὰ γνωστὰ ἀπὸ τὸν διανυσματικὸν λογισμὸν θὰ ἔχωμεν:

$$(\bar r_u \bar r_v \bar r_{uu})(\bar r_u \bar r_v \bar r_{vv}) = \begin{vmatrix} \bar r_u^2 & \bar r_u \bar r_v & \bar r_u \bar r_{vv} \\ \bar r_v \bar r_u & \bar r_u^2 & \bar r_v \bar r_{vv} \\ \bar r_{uu}\bar r_u & \bar r_{uu}\bar r_v & \bar r_{uu}\bar r_{vv} \end{vmatrix}$$

$$(\bar r_u \bar r_v \bar r_{uv})(\bar r_u \bar r_v \bar r_{uv}) = \begin{vmatrix} \bar r_u^2 & \bar r_u \bar r_v & \bar r_u \bar r_{uv} \\ \bar r_v \bar r_u & \bar r_v^2 & \bar r_v \bar r_{uv} \\ \bar r_{uv}\bar r_u & \bar r_{uv}\bar r_v & \bar r_{uv}^2 \end{vmatrix}$$

Διὰ μερικῆς παραγωγίσεως τῶν E, F, G προκύπτουν οἱ σχέσεις:

$$\begin{aligned} &E = \bar r_u^2, && \tfrac{1}{2}E_u = \bar r_u \bar r_{uu}, && \tfrac{1}{2}E_v = \bar r_u \bar r_{uv} \\ &G = \bar r_v^2, && \tfrac{1}{2}G_u = \bar r_v \bar r_{uv}, && \tfrac{1}{2}G_v = \bar r_v \bar r_{vv} \\ &F = \bar r_u \bar r_v, && \tfrac{1}{2}F_u = \bar r_{uu}\bar r_v + \tfrac{1}{2}E_v, && F_v = \bar r_u \bar r_{vv} + \tfrac{1}{2}G_u \end{aligned} \qquad (50.11)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι διά τῶν ἀνωτέρω σχέσεων ἔχομεν ἐκφράσει ὅλα τά στοιχεῖα τῶν ὁριζουσῶν συναρτήσει τῶν E, F, G καί τῶν παραγώγων των, ἐκτός ἀπό τά στοιχεῖα $\bar{r}_{uu}\bar{r}_{vv}$ καί $\bar{r}^2_{uv}$. Ἐάν ἀναπτύξωμεν τίς ὁρίζουσες αὐτές ὡς πρός τά στοιχεῖα τῆς τελευταίας στήλης παρατηροῦμεν ὅτι οἱ προσημασμένες ἐλάσσονες πού ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτά ἰσοῦνται μέ $EG-F^2$, ἐπομένως εἰς τήν ἀγκύλην τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (1) οἱ ὅροι αὐτοί δίδουν τήν παράστασιν :

$$(EG-F^2)(\bar{r}_{uu}\bar{r}_{vv}-\bar{r}^2_{uv}) \tag{2}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (50.11) διά μερικῆς παραγωγίσεως προκύπτει :

$$(F_u-\frac{1}{2}E_v)_v = \bar{r}_{uu}\bar{r}_{vv}+\bar{r}_{uuv}\bar{r}_v\ , \quad \frac{1}{2}G_{uu} = \bar{r}^2_{uv}+\bar{r}_{uuv}\bar{r}_v$$

Δι' ἀφαιρέσεως αὐτῶν λαμβάνομεν :

$$\bar{r}_{uu}\bar{r}_{vv}-\bar{r}^2_{uv} = F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu} \tag{3}$$

δηλαδή καί ἡ παράστασις (2) ἐκφράζεται διά τῶν E, F, G καί τῶν παραγώγων αὐτῶν καί ἔτσι ἡ πρότασις ἀπεδείχθη. Ἐάν τώρα ἀντικαταστήσωμεν τήν (3) εἰς τήν (2) καί αὐτήν εἰς τήν (1) προκύπτει τελικῶς ὁ τύπος :

$$(EG-F^2)K = \begin{vmatrix} E & F & F_v-\frac{1}{2}G_u \\ F & G & \frac{1}{2}G_v \\ \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v & F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E & F & \frac{1}{2}E_v \\ F & G & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u & 0 \end{vmatrix} \tag{50.12}$$

Ἐάν ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι οἱ συντελεσταί τῆς ἐξισώσεως (50.3) εἶναι σέ κάποιο σημεῖον τῆς ἐπιφανείας καί οἱ τρεῖς μηδέν, τά θεμελιώδη ποσά τῆς ἐπιφανείας θά ἐπαληθεύουν τίς σχέσεις :

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} \tag{50.13}$$

καί ἀπό τόν τύπο (50.5) προκύπτει, ὅτι ἡ κ_v εἰς τό σημεῖον αὐτό εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τό λ καί ἰσοῦται διά κάθε διεύθυνσιν μέ τήν κοινήν τιμήν τῶν ἀνωτέρω λόγων, ἰσχύει δέ καί τό ἀντίστροφον δηλαδή ὅταν ἡ κ_v ἔχη σταθερήν τιμήν γιά κάθε διεύθυνσιν, τά θεμελιώδη ποσά πρώτης καί δευτέρας τάξεως ἐπαληθεύουν τίς σχέσεις (50.13). Ἕνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας διά τό ὁποῖον συμβαίνει αὐτό λέγεται σφαιρικόν ἤ ὀμφαλικόν σημεῖον αὐτῆς.

Θά δείξωμεν τώρα ὅτι διά νά εἶναι οἱ παραμετρικές γραμμές τῆς ἐπιφανείας γραμμές καμπυλότητος πρέπει καί ἀρκεῖ γιά κάθε σημεῖον τῆς ἐπιφανείας νά ἰσχύουν οἱ σχέσεις :

$$F=0, \qquad M=0 \tag{50.14}$$

Πράγματι ἐάν οἱ παραμετρικές γραμμές εἶναι καί γραμμές καμπυλότητος θά πρέπη ἡ ἐξίσωσις (50.3) νά ἐπαληθεύεται διά $dv=0, du\neq 0$ καί διά $du=0$, $dv\neq 0$, ὁπότε προκύπτουν ἀντιστοίχως οἱ σχέσεις :

$$EM-FL=0, \quad FN-GM=0.$$

Ἐπειδὴ ὅμως οἱ γραμμὲς καμπυλότητος τέμνονται καθέτως θὰ εἶναι $F=0$ καὶ αἱ προηγούμενες σχέσεις δίδουν $EM=0$, $GM=0$· ἀλλὰ τὰ ποσὰ E, G δὲν εἶναι μηδέν, ἐπομένως $M=0$ δηλαδὴ ἰσχύουν οἱ (50.14). Ἀντιστρόφως ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἰσχύουν οἱ σχέσεις (50.14), τότε ἡ ἐξίσωσις (50.3) τῶν γραμμῶν καμπυλότητος γίνεται:

$$(EN-GL)\,du\,dv=0.$$

Ἐὰν $EN-GL\neq 0$, ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται γιὰ $du=0$ καὶ $dv=0$, ὁπότε οἱ παραμετρικὲς γραμμὲς εἶναι πράγματι γραμμὲς καμπυλότητος. Ἐὰν $EN-GL=0$, τότε ἡ ἐξίσωσις (50.3) ἐπαληθεύεται ἀπὸ κάθε γραμμὴν τῆς ἐπιφανείας διότι καὶ οἱ τρεῖς συντελεσταὶ αὐτῆς εἶναι μηδέν. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὅλες οἱ γραμμὲς τῆς ἐπιφανείας εἶναι γραμμὲς καμπυλότητος αὐτῆς, ἐπομένως τὸ παραμετρικὸν δίκτυον τῆς ἐπιφανείας, ἐπειδὴ ἕνεκα τῆς $F=0$ εἶναι ὀρθογώνιον, ἀποτελεῖ ἕνα δίκτυον γραμμῶν καμπυλότητος αὐτῆς.

Ἐὰν οἱ παραμετρικὲς γραμμὲς μιᾶς ἐπιφανείας εἶναι γραμμὲς καμπυλότητος αὐτῆς, οἱ προσημασμένες καμπυλότητες τῶν καθέτων τομῶν ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς ἐφαπτόμενες τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν θὰ εἶναι προφανῶς ἴσες μὲ τὶς πρωτεύουσες καμπυλότητες τῆς ἐπιφανείας. Θέτοντες λοιπὸν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (50.8) ποὺ δίδει τὶς πρωτεύουσες καμπυλότητες, $F=M=0$ καὶ ἐπιλύοντες ὡς πρὸς κ προκύπτουν οἱ πρωτεύουσες καμπυλότητες τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς:

$$\kappa_1=\frac{L}{E}\,,\qquad \kappa_2=\frac{N}{G} \qquad (50.15)$$

Οἱ ἀνωτέρω προκύπτουν ἐπίσης καὶ ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (50.5), ὅταν θέσωμεν εἰς αὐτὴν $\lambda=0$ καὶ $1:\lambda=0$.

Θέτοντες $F=0$ καὶ $M=0$ εἰς τοὺς τύπους (48.6) τοῦ Weingarten καὶ λαμβάνοντες ὑπ᾽ ὄψιν τοὺς τύπους (50.15) προκύπτουν οἱ τύποι:

$$\bar{n}_u=-\kappa_1\bar{r}_u\,,\quad \bar{n}_v=-\kappa_2\bar{r}_v \qquad (50.16)$$

οἱ ὁποῖοι λέγονται τύποι τοῦ Rodrigues καὶ ἐκφράζουν τὰς παραγώγους τοῦ μοναδιαίου καθέτου διανύσματος τῆς ἐπιφανείας ὡς πρὸς τὰς παραμέτρους u, v ὅταν οἱ παραμετρικὲς γραμμὲς τῆς ἐπιφανείας εἶναι συγχρόνως καὶ γραμμὲς καμπυλότητος αὐτῆς.

Οἱ γραμμὲς μιᾶς σφαίρας εἶναι ὅλες γραμμὲς καμπυλότητος διότι αἱ κάθετοι τῆς ἐπιφανείας διερχόμεναι ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας σχηματίζουν ἕναν κῶνο δηλαδὴ μίαν ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν. Ἐπίσης οἱ γραμμὲς ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι ὅλες γραμμὲς καμπυλότητος διότι αἱ κάθετοι σχηματίζουν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν ἡ ὁποία ὡς γνωστὸν εἶναι ἀναπτυκτή.

Τὰ σημεῖα μιᾶς σφαίρας εἶναι ὅλα ὀμφαλικὰ διότι οἱ κάθετες τομὲς εἶναι κύκλοι μὲ τὴν ἴδια σταθερὴ καμπυλότητα, ὅπως ἐπίσης καὶ τὰ σημεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου, διότι οἱ κάθετες τομὲς εἶναι εὐθεῖες ποὺ ἔχουν τὴν ἴδια μηδενικὴν καμπυλότητα.
Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι ἡ σφαίρα καὶ τὸ ἐπίπεδον εἶναι οἱ μόνες ἐπιφάνειες ποὺ ἔχουν ὅλα τους τὰ σημεῖα ὀμφαλικά. Πράγματι ἂς θεωρήσωμεν μίαν ἐπιφάνεια τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα νὰ εἶναι ὀμφαλικὰ ὅπως ἀναφέραμε παραπάνω ὅλες οἱ γραμμὲς τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶναι γραμμὲς καμπυλότητος αὐτῆς, ἐπομένως λαμβάνοντες ἐπ' αὐτῆς τὸ παραμετρικὸν δίκτυον ὀρθογώνιον, θὰ εἶναι αὐτὸ συγχρόνως δίκτυον γραμμῶν καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας διὰ τὸ ὁποῖον θὰ ἰσχύουν οἱ τύποι (50.16) τοῦ Rodrigues. Ἐξ' ἄλλου θὰ εἶναι $\kappa_1=\kappa_2\equiv\kappa$ ἀφοῦ ὅλα τὰ σημεῖα εἶναι ὀμφαλικὰ καὶ οἱ τύποι (50.16) γράφονται:

$$\bar{n}_u=-\kappa\bar{r}_u,\ \bar{n}_v=-\kappa\bar{r}_v \qquad (1)$$

Ἐὰν ἐν πρώτοις ὑποθέσωμεν ὅτι $\kappa\neq 0$ καὶ παραγωγίσωμεν τὶς ἐξισώσεις αὐτὲς ἀντιστοίχως ὡς πρὸς v,u προκύπτει:

$$\bar{n}_{uv}=-\kappa_v\bar{r}_u-\kappa\bar{r}_{uv}\ ,\ \bar{n}_{vu}=-\kappa_u\bar{r}_v-\kappa\bar{r}_{vu}$$

Διὰ συγκρίσεως αὐτῶν προκύπτει:

$$\kappa_v\bar{r}_u=\kappa_u\bar{r}_v$$

Ἐπειδὴ ὅμως τὰ διανύσματα $\bar{r}_u,\bar{r}_v$, σὲ κάθε ὁμαλὸν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας, εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην $\kappa_v=\kappa_u=0$ δηλαδὴ ἡ καμπυλότης κ εἶναι σταθερὴ καὶ οἱ σχέσεις (1) γράφονται:

$$\frac{\partial}{\partial u}(\bar{n}+\kappa\bar{r})=0,\ \frac{\partial}{\partial v}(\bar{n}+\kappa\bar{r})=0$$

ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει:

$$\bar{n}+\kappa\bar{r}=\bar{a}$$

ὅπου $\bar{a}$ σταθερὸν διάνυσμα. Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴ ἔπεται τώρα

$$\left(\bar{r}-\frac{\bar{a}}{\kappa}\right)^2=\frac{1}{\kappa^2}$$

ἐκ τῆς ὁποίας συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια εἶναι σφαίρα μὲ κέντρον τὸ πέρας τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος $\bar{r}_\kappa=\bar{a}:\kappa$ καὶ ἀκτίνα $1:|\kappa|$.
Ἐὰν ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι $\kappa=0$ ἀπὸ τὶς (1) προκύπτει ὅτι τὸ $\bar{n}$ εἶναι σταθερὸν καὶ ἐπειδὴ $\bar{n}\bar{r}_u=0,\ \bar{n}\bar{r}_v=0$ θὰ εἶναι $\partial(\bar{n}\bar{r}):\partial u=0$ καὶ $\partial(\bar{n}\bar{r}):\partial v=0$ δηλαδὴ $\bar{n}\bar{r}=\bar{c}$, ἐπομένως ἡ θεωρουμένη ἐπιφάνεια εἶναι ἐπίπεδος.

Παράδειγμα (50.1).— Νὰ εὑρεθοῦν οἱ πρωτεύουσες καμπυλότητες ἡ ὁλικὴ καμπυλότης, ἡ μέση καμπυλότης καὶ ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν γραμμῶν καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας: $\bar{r}=[u\,\text{συν}v,\ u\,\text{ημ}v,\ a\ln(u+\sqrt{u^2-a^2})]$.

Λύσις. Ἔχομεν $\bar{r}_u=[\text{συν}v,\text{ημ}v,a(u^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}]$, $\bar{r}_v=(-u\,\text{ημ}v,u\,\text{συν}v,0)$, $\bar{r}_{uu}=[0,0,-au(u^2-a^2)^{-\frac{3}{2}}]$, $\bar{r}_{uv}=(-\text{ημ}v,\text{συν}v,0)$, $\bar{r}_{vv}=(-u\,\text{συν}v,-u\,\text{ημ}v,0)$, $E=u^2(u^2-a^2)^{-1}$, $F=0$, $G=u^2$, $L=-a(u^2-a^2)^{-1}$, $M=0$, $N=a$. Ἀντικαθιστῶντες τὰ ποσὰ αὐτὰ εἰς τοὺς ἀντιστοίχους τύπους εὑρίσκομεν ὅτι οἱ πρωτεύουσες καμπυλότητες εἶναι οἱ ῥίζες τῆς δευτεροβαθμίου ὡς πρὸς κ ἐξισώσεως: $u^4\kappa^2-a^2=0$, ὁπότε $\kappa_{1,2}=\pm au^{-2}$, $K=a^2u^{-4}$, $H=0$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $F=M=0$ οἱ παραμετρικές γραμμές εἶναι οἱ γραμμές καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας.

Παράδειγμα (50.2). — Νά εὑρεθοῦν οἱ πρωτεύουσες καμπυλότητες, ἡ ὁλική καμπυλότης, ἡ μέση καμπυλότης καί ἡ διαφορική ἐξίσωσις τῶν γραμμῶν καμπυλότητος τῆς κωνοειδοῦς ἐπιφανείας : $\bar{r} = [u\,\sigma\upsilon\nu v, u\,\eta\mu v, \varphi(v)]$.

Λύσις. Ἔχομεν $\bar{r}_u = (\sigma\upsilon\nu v, \eta\mu v, 0)$, $\bar{r}_v = (-u\eta\mu v, u\sigma\upsilon\nu v, \dot\varphi)$, $\bar{r}_{uu} = (0,0,0)$, $\bar{r}_{uv} = (-\eta\mu v, \sigma\upsilon\nu v, 0)$, $\bar{r}_{vv} = (-u\sigma\upsilon\nu v, -u\eta\mu v, \ddot\varphi)$, $E = 1$, $F = 0$, $G = u^2+\dot\varphi^2$, $W^2 = u^2+\dot\varphi^2$, $L = 0$, $M = -\dot\varphi : W$, $N = u\ddot\varphi : W$, $LN - M^2 = -\dot\varphi^2 : W^2$. Ἀντικαθιστῶντες τά ποσά αὐτά εἰς τούς ἀντιστοίχους τύπους εὑρίσκομεν ὅτι οἱ πρωτεύουσες καμπυλότητες εἶναι ρίζες τῆς δευτεροβαθμίου ὡς πρός κ ἐξισώσεως : $(u^2+\dot\varphi^2)^2\kappa^2 - u\ddot\varphi\sqrt{u^2+\dot\varphi^2}\,\kappa - \dot\varphi^2 = 0$, ἡ ὁλική καί ἡ μέση καμπυλότης εἶναι ἀντιστοίχως : $K = -\dot\varphi^2(u^2+\dot\varphi^2)^{-2}$, $H = \frac{1}{2}u\ddot\varphi(u^2+\dot\varphi^2)^{-\frac{3}{2}}$ καί ἡ διαφορική ἐξίσωσις τῶν γραμμῶν καμπυλότητος εἶναι : $-\dot\varphi du^2 + u\ddot\varphi du dv + (u^2+\dot\varphi^2)\dot\varphi dv^2 = 0$.

Παράδειγμα (50.3). — Νά γίνουν τά ἴδια ὅπως εἰς τό προηγούμενον παράδειγμα διά τό ὑπερβολικόν παραβολοειδές $z = xy$.

Λύσις. Ἔχομεν $z_x = y$, $z_y = x$, $z_{xx} = 0$, $z_{xy} = 1$, $z_{yy} = 0$, $E = 1+y^2$, $F = xy$, $G = 1+x^2$, $W^2 = 1+x^2+y^2$, $L = 0$, $M = 1 : W$, $N = 0$, $LN - M^2 = -1 : (1+x^2+y^2)$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τούς καταλλήλους τύπους εὑρίσκομεν ὅτι οἱ πρωτεύουσες καμπυλότητες εἶναι ρίζες τῆς δευτεροβαθμίου ὡς πρός κ ἐξισώσεως : $(1+x^2+y^2)^2\kappa^2 + 2xy\sqrt{1+x^2+y^2}\,\kappa - 1 = 0$, ἡ ὁλική καί ἡ μέση καμπυλότης εἶναι ἀντιστοίχως : $K = -(1+x^2+y^2)^{-2}$, $H = xy(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$ καί ἡ διαφορική ἐξίσωσις τῶν γραμμῶν καμπυλότητος εἶναι : $(1+x^2)dy^2 - (1+y^2)dx^2 = 0$ ἐκ τῆς ὁποίας δι' ὁλοκληρώσεως προκύπτει τελικῶς : $x^2+y^2-2cxy = c^2-1$. Οἱ προβολές τῶν γραμμῶν καμπυλότητος ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y εἶναι ὑπερβολές τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες συμπίπτουν μέ τίς εὐθεῖες $y = \pm x$.

Παράδειγμα (50.4). — Νά γίνουν τά ἴδια διά τήν εὐθειογενῆ ἐπιφάνεια τῶν πρωτοκαθέτων τῆς γραμμῆς $\bar{P} = \bar{P}(s)$.

Λύσις. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας θά εἶναι : $\bar{r} = \bar{P}(s) + v\bar{\omega}(s) \equiv \bar{r}(s,v)$, ἐκ τῆς ὁποίας παραγωγίζοντες μερικῶς ὡς πρός τάς παραμέτρους s, v θά ἔχωμεν : $\bar{r}_s = \bar{P}' + v\bar{\omega}' = \bar{\varepsilon} + v(-u\bar{\varepsilon} + \sigma\bar{\delta}) = (1-vu)\bar{\varepsilon} + v\sigma\bar{\delta}$, $\bar{r}_u = \bar{\omega}$, $\bar{r}_{ss} = -vu'\bar{\varepsilon} + (1-vu)\bar{\varepsilon}' + v\sigma'\bar{\delta} + v\sigma\bar{\delta}' = -vu'\bar{\varepsilon} + (1-vu)u\bar{\omega} + v\sigma'\bar{\delta} - v\sigma^2\bar{\omega} = -vu'\bar{\varepsilon} + (u - vu^2 - v\sigma^2)\bar{\omega} + v\sigma'\bar{\delta}$, $\bar{r}_{sv} = -u\bar{\varepsilon} + \sigma\bar{\delta}$, $\bar{r}_{vv} = 0$, $E = (1-vu)^2 + v^2\sigma^2$, $F = 0$, $G = 1$, $W^2 = (1-vu)^2 + v^2\sigma^2$, $L = [v\sigma' + v^2(u'\sigma - u\sigma')] : W$, $M = \sigma \cdot W$, $N = 0$, $LN - M^2 = -\sigma^2 : W^2$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τούς καταλλήλους τύπους εὑρίσκομεν ὅτι οἱ πρωτεύουσες καμπυλότητες προκύπτουν ἀπό τήν ἐξίσωσιν :

$$[(1-vu)^2 + v^2\sigma^2]^2\kappa^2 - [v\sigma' + v^2(u'\sigma - u\sigma')]\sqrt{(1-v\kappa)^2 + v^2\sigma^2}\cdot\kappa - \sigma^2 = 0$$

ἡ ὁλική καί ἡ μέση καμπυλότης εἶναι ἀντιστοίχως

$$K = -\sigma^2[(1-vu)^2 + v^2\sigma^2]^{-2}, \qquad H = \frac{1}{2}[v\sigma' + v^2(u'\sigma - u\sigma')][(1-vu)^2 + v^2\sigma^2]^{-\frac{3}{2}}$$

καί ἡ διαφορική ἐξίσωσις τῶν γραμμῶν καμπυλότητος εἶναι :

$$[(1-vu)^2 + v^2\sigma^2]\sigma ds^2 - [v\sigma' + v^2(u'\sigma - u\sigma')]ds dv - \sigma dv^2 = 0.$$

51. Ἀσυμπτωτικὲς γραμμές.— Μία ἐπιφανειακὴ γραμμὴ λέγεται ἀσυμπτωτική, ὅταν σὲ κάθε σημεῖον της, ἡ κάθετος τῆς ἐπιφανείας ταυτίζεται μὲ τὴν δευτέραν κάθετον τῆς γραμμῆς.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν ἕπεται ὅτι κατὰ μῆκος τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον εἶναι συγχρόνως ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας ἑπομένως θὰ εἶναι: $\bar{\delta}=\pm\bar{\eta}$. Συνήθως, χωρὶς αὐτὸ νὰ ἀποτελῇ περιορισμόν, προσανατολίζομεν τὴν γραμμὴν ἔτσι ὥστε νὰ εἶναι $\bar{\delta}=\bar{\eta}$.

Οἱ ἐφαπτόμενες τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν λέγονται ἀσυμπτωτικὲς ἐφαπτόμενες καὶ οἱ διευθύνσεις αὐτῶν λέγονται ἀσυμπτωτικὲς διευθύνσεις τῆς ἐπιφανείας.

Ἐπειδὴ κατὰ μῆκος τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν εἶναι $\sigma\upsilon\nu\vartheta=0$, ἀπὸ τὸν τύπον (49.1) προκύπτει ὅτι οἱ γραμμὲς αὐτὲς θὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν:

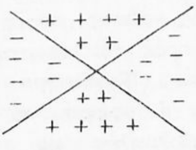
$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0 \qquad (51.1)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ θεωρουμένη ὡς διαφορικὴ ὁρίζει δι' ὁλοκληρώσεως τὶς ἀσυμπτωτικὲς γραμμὲς τῆς ἐπιφανείας. θεωρουμένη δὲ ὡς ἀλγεβρικὴ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸν λόγον $du:dv$, ὁρίζει τὶς ἀσυμπτωτικὲς διευθύνσεις εἰς κάθε σημεῖον τῆς ἐπιφανείας.

Ἐὰν εἰς ἕνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$LN - M^2 < 0 \qquad (51.2)$$

ἡ ἐξίσωσις (51.1) ἔχει δύο ρίζες πραγματικὲς καὶ ἄνισες εἰς τὶς ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν δύο διακεκριμένες ἀσυμπτωτικὲς διευθύνσεις τῆς ἐπιφανείας. Ἕνα τέτοιο σημεῖον λέγεται ὑπερβολικὸν ἡ δὲ ἐπιφάνεια λέγεται ὑπερβολικὰ καμπυλωμένη εἰς τὸ σημεῖον αὐτό. Δι' ἑκάστου ὑπερβολικοῦ σημείου διέρχονται δύο διακεκριμένες μὴ ἐφαπτόμενες ἀσυμπτωτικὲς γραμμές. Ἐπειδὴ ἕνεκα τῆς (51.2) ἡ μορφὴ II δὲν ἔχει σταθερὸν πρόσημον, ἀπὸ τὸν τύπον (50.5) προκύπτει ὅτι ἡ προσημασμένη καμπυλότης τῶν καθέτων τομῶν θὰ εἶναι δι' ἄλλες θετικὴ καὶ δι' ἄλλες ἀρνητική, οἱ δὲ ἀντίστοιχες πρὸς αὐτὲς διευθύνσεις χωρίζονται ἀπὸ τὶς ἀσυμπτωτικὲς διευθύνσεις πρὸς τὶς ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν κάθετες τομὲς μὲ καμπυλότητα μηδὲν σχ. (51.1). Παραδείγματα ἐπιφανειῶν τῶν ὁποίων ὅλα τὰ σημεῖα εἶναι ὑπερβολικά, εἶναι τὸ ὑπερβολικὸν παραβολοειδές, τὸ μονόχωνον ὑπερβολοειδὲς καὶ ἀπ' αὐτὸ δικαιολογεῖται καὶ ἡ ὀνομασία *ὑπερβολικὸν σημεῖον*.



Σχ. (51.1)

Ἐὰν εἰς ἕνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$LN - M^2 = 0 \qquad (51.3)$$

ἡ ἐξίσωσις (51.1) ἔχει μία διπλῆ πραγματική ρίζα εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ μίαν μόνον διπλῆ πραγματική ἀσυμπτωτική διεύθυνσις τῆς ἐπιφανείας. Ἕνα τέτοιον σημεῖον λέγεται παραβολικόν ἡ δέ ἐπιφάνεια λέγεται παραβολικά καμπυλωμένη εἰς τό σημεῖον αὐτό. Δι' ἑκάστου παραβολικοῦ σημείου διέρχεται μία μόνον ἀσυμπτωτική γραμμή. Ἐπειδή ἕνεκα τῆς (51.3) ἡ μορφή II, ὅταν δέν εἶναι μηδέν, ἔχει σταθερόν πρόσημον γιά κάθε τιμήν τοῦ λόγου $du : du$, ἀπό τόν τύπον (50.5) προκύπτει ὅτι ἡ καμπυλότης τῶν καθέτων τομῶν ἔχει σταθερόν πρόσημον τό ὁποῖον σημαίνει ὅτι οἱ κάθετες τομές στρέφουν τά κοῖλα πρός τό αὐτό μέρος τοῦ χώρου ὡς πρός τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τό θεωρούμενον ἐπίπεδον, ἐνῷ εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ ὑπερβολικοῦ σημείου ἔστρεφαν τά κοῖλα ἄλλες πρός τήν μία μεριά καί ἄλλες πρός τήν ἄλλη. Μεταξύ τῶν καθέτων τομῶν ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τήν διπλῆν ἀσυμπτωτικήν διεύθυνσιν ἔχει καμπυλότητα μηδέν. Παραδείγματα ἐπιφανειῶν τῶν ὁποίων ὅλα τά σημεῖα εἶναι παραβολικά, εἶναι οἱ κύλινδροι οἱ κῶνοι καί γενικῶς οἱ ἀναπτυκτές ἐπιφάνειες καί μόνον αὐτές διότι ἡ ἐξίσωσις (51.3), ὅταν θεωρήσωμεν τήν ἐπιφάνειαν ὑπό τήν μορφήν $z = z(x,y)$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν χαρακτηριστικήν ἐξίσωσιν (46.6) τῶν ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν.

Ἐάν εἰς ἕνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$LN - M^2 > 0 \qquad (51.4)$$

ἡ ἐξίσωσις (51.1) ἔχει ρίζες μιγαδικές, ἐπομένως εἰς τό σημεῖον αὐτό ἡ ἐπιφάνεια δέν ἔχει πραγματικές ἀσυμπτωτικές διευθύνσεις οὔτε διέρχονται δι' αὐτοῦ πραγματικές ἀσυμπτωτικές γραμμές. Ἕνα τέτοιο σημεῖον λέγεται ἐλλειπτικόν ἡ δέ ἐπιφάνεια λέγεται ἐλλειπτικά καμπυλωμένη εἰς τό σημεῖον αὐτό. Ἡ μορφή II ἕνεκα τῆς (51.4) ἔχει σταθερόν πρόσημον γιά κάθε τιμήν τοῦ λόγου $du : du$, ἐπομένως καθώς προκύπτει ἀπό τόν τύπον (50.5) ἡ καμπυλότης τῶν καθέτων τομῶν ἔχει σταθερόν πρόσημον, τό ὁποῖον σημαίνει ὅτι οἱ κάθετες τομές στρέφουν τά κοῖλα πρός τό αὐτό μέρος τοῦ χώρου ὡς πρός τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τό θεωρούμενον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας. Παράδειγμα ἐπιφανειῶν τῶν ὁποίων ὅλα τά σημεῖα εἶναι ἐλλειπτικά εἶναι ἡ σφαῖρα τό ἐλλειψοειδές τό ἐλλειπτικόν παραβολοειδές, τό δίχωνον ὑπερβολοειδές καί ἀπ' αὐτό δικαιολογεῖται καί ἡ ὀνομασία *ἐλλειπτικόν σημεῖον*.

Ἐάν ἐπί μιᾶς ἐπιφανείας ὑπάρχουν εὐθεῖες γραμμές, αὐτές θά εἶναι καί ἀσυμπτωτικές γραμμές τῆς ἐπιφανείας, διότι μποροῦμε νά ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ πρώτη κάθετος αὐτῶν, ἐπειδή εἶναι ἀόριστος, εἶναι κάθετος ἐπί τήν κάθετον τῆς ἐπιφανείας. Ἐάν λοιπόν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι εὐθειογενής, ἡ οἰκογένεια τῶν εὐθυγράμμων γεννετειρῶν αὐτῆς εἶναι ἡ μία τῶν οἰκογενειῶν τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν αὐτῆς.

Θά δείξωμεν τώρα ὅτι οἱ συνθῆκες :

$$L=0 \quad , \quad N=0 \qquad (51.5)$$

εἶναι ἀναγκαῖες καὶ ἱκανὲς γιὰ νὰ εἶναι οἱ παραμετρικὲς γραμμές, ἀσυμπτωτικὲς γραμμὲς μιᾶς ἐπιφανείας ὑπερβολικὰ καμπυλωμένης.
Πράγματι ἐὰν ἰσχύουν οἱ σχέσεις αὐτὲς ἡ ἐξίσωσις (51.1) γίνεται:

$$2M du dv = 0$$

καὶ ἐπειδὴ ἕνεκα τῆς (51.2) δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι καὶ $M=0$, ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἐπαληθεύεται εἴτε ὅταν $dv=0$ δηλαδὴ ἀπὸ τὴν γραμμὴν u, εἴτε ὅταν $du=0$ δηλαδὴ ἀπὸ τὴν γραμμὴν v. Ἀντιστρόφως ἐὰν οἱ παραμετρικὲς γραμμὲς εἶναι συγχρόνως καὶ ἀσυμπτωτικὲς ἡ ἐξίσωσις (51.1) θὰ ἐπαληθεύεται γιὰ $du\neq 0$, $dv=0$ καὶ $du=0$, $dv\neq 0$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες προκύπτουν ἀντιστοίχως οἱ σχέσεις (51.5) καὶ ἔτσι ἀπεδείχθη τὸ ζητούμενον.

Παράδειγμα (51.1).— Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀσυμπτωτικὲς γραμμὲς τῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας τῶν δικαθέτων μιᾶς γραμμῆς $\bar{P}=\bar{P}(s)$.
Λύσις. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶναι $\bar{r}=\bar{P}(s)+v\bar{\delta}(s)\equiv\bar{r}(s,v)$, ἐκ τῆς ὁποίας παραγωγίζοντες ὡς πρὸς τὰς παραμέτρους s,v θὰ ἔχωμεν: $\bar{r}_s=\bar{\varepsilon}-v\sigma\bar{\omega}$, $\bar{r}_v=\bar{\delta}$, $\bar{r}_{ss}=u\sigma v\bar{\varepsilon}+(u-v\sigma')\bar{\omega}-v\sigma^2\bar{\delta}$, $\bar{r}_{sv}=-\sigma\bar{\omega}$, $\bar{r}_{vv}=0$, $L=(u+u\sigma^2v^2-\sigma v)\colon w$, $M=-\sigma\colon w$, $N=0$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (51.1) προκύπτει ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν: $(u+u\sigma^2v^2-\sigma v)\,ds^2-2\sigma ds dv=0$ ἐκ τῆς ὁποίας φαίνεται ὅτι οἱ παραμετρικὲς γραμμὲς $s=$ σταθερὸν δηλαδὴ οἱ γεννέτειρες τῆς ἐπιφανείας ἀποτελοῦν τὴν μία οἰκογένεια τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν, τὸ ὁποῖον κατὰ τὴν θεωρία ἔπρεπε νὰ περιμένωμεν.

Παράδειγμα (51.2).— Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀσυμπτωτικὲς γραμμὲς τῆς ἐπιφανείας $z=y\,\eta\mu x$.
Λύσις. Παραγωγίζοντες τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας μερικῶς ὡς πρὸς x,y θὰ ἔχωμεν: $p=y\,\sigma\upsilon\nu x$, $q=\eta\mu x$, $r=-y\,\eta\mu x$, $s=\sigma\upsilon\nu x$, $t=0$, ὁπότε λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς τύπους (48.5) θὰ ἔχωμεν $WL=-y\,\eta\mu x$, $WM=\sigma\upsilon\nu x$, $N=0$ καὶ ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν θὰ εἶναι: $-y\,\eta\mu x\,dx^2+2\,\sigma\upsilon\nu x\,dx dy=0$, ἡ ὁποία γράφεται: $(-y\,\eta\mu x\,dx+2\,\sigma\upsilon\nu x\,dy)\,dx=0$.
Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι ἡ μία οἰκογένεια τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν εἶναι οἱ παραμετρικὲς γραμμὲς $x=$ σταθερὸν καὶ ἡ ἄλλη προκύπτει δι' ὁλοκληρώσεως τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως $-y\,\eta\mu x\,dx+2\,\sigma\upsilon\nu x\,dy=0$ ἐκ τῆς ὁποίας θὰ ἔχωμεν τελικῶς μετὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν $y^2\sigma\upsilon\nu x=c$ (1). Οἱ ἀσυμπτωτικὲς γραμμὲς προκύπτουν λοιπὸν ἐκ τῆς τομῆς τῆς ἐπιφανείας ἀφ' ἑνὸς μὲ τὶς ἐπιφάνειες (1) καὶ ἀφ' ἑτέρου μὲ τὰ ἐπίπεδα τὰ παράλληλα πρὸς τὸ ἐπίπεδον Oyz.

Παράδειγμα (51.3).— Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ καμπυλότης καὶ ἡ στρέψις μιᾶς ἀσυμπτωτικῆς γραμμῆς $u=u(s)$, $v=v(s)$ τῆς ἐπιφανείας $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$.
Λύσις. Ἐπειδὴ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν εἶναι

$\bar\delta=\bar n$ παραγωγίζοντες ὡς πρὸς s θὰ ἔχωμεν $-\sigma\bar\omega=\bar n'$, $-\sigma\bar\omega^2=\bar n'\bar\omega=\bar n'[\bar\delta\bar\varepsilon]=$ $=(\bar n'\bar n\bar\varepsilon)$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει :

$$\sigma=(\bar r'\bar n\bar n') \qquad (1)$$

Τὸ δεξιὸν μέλος τὸ ἔχομεν ὑπολογίσει εἰς τὸ ἐδάφιον 50, ὁπότε προκύπτει ὁ ἑξῆς τύπος διὰ τὴν στρέψιν :

$$\sigma=[(EM-FL)u'^2+(EN-GL)u'v'+(FN-GM)v'^2]:w \qquad (2)$$

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς καμπυλότητος πολλαπλασιάζομεν τὴν σχέσιν $\kappa\bar\omega=\bar r''$ ἐσωτερικῶς ἐπὶ τὸ διάνυσμα $\bar\omega=[\bar\delta\bar\varepsilon]=[\bar n\bar r']$, ὁπότε προκύπτει ὁ τύπος:

$$\kappa=(\bar n\bar r'\bar r'') \qquad (3)$$

52. Γεωδαισιακὲς γραμμές.— Μία ἐπιφανειακὴ γραμμὴ λέγεται γεωδαισιακὴ ὅταν σὲ κάθε σημεῖον της, ἡ κάθετος τῆς ἐπιφανείας ταυτίζεται μὲ τὴν πρώτην κάθετον τῆς γραμμῆς.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν ἕπεται ὅτι κατὰ μῆκος τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας, ἐπομένως θὰ εἶναι $\bar\omega=\pm\bar n$. Συνήθως, χωρὶς αὐτὸ νὰ ἀποτελῇ περιορισμόν, προσανατολίζομεν τὴν γραμμὴν ἔτσι ὥστε νὰ εἶναι $\bar\omega=\bar n$.

Διὰ νὰ εἶναι μία ἐπιφανειακὴ γραμμὴ $u=u(t)$, $v=v(t)$ γεωδαισιακὴ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$(\dot{\bar r}\ddot{\bar r}\bar n)=0 \qquad (52.1)$$

Πράγματι ἐπειδὴ τὸ διάνυσμα $[\dot{\bar r}\ddot{\bar r}]$ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς γραμμῆς, τότε ἡ σχέσις αὐτὴ ἐκφράζει τὴν ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ νὰ κεῖται τὸ διάνυσμα $\bar n$ ἐπὶ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου δηλαδὴ διὰ νὰ εἶναι τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν εὑρίσκομεν τὰς παραγώγους τῆς $\bar r$:

$$\dot{\bar r}=\bar r_u\dot u+\bar r_v\dot v$$

$$\ddot{\bar r}=\bar r_{uu}\dot u^2+2\bar r_{uv}\dot u\dot v+\bar r_{vv}\dot v^2+\bar r_u\ddot u+\bar r_v\ddot v$$

καὶ τὶς ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (52.1), ὁπότε ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπιμεριστικῶς προκύπτει :

$$(\dot u\ddot v-\ddot u\dot v)(\bar r_u\bar r_v\bar n)+\dot v^3(\bar r_v\bar r_{vv}\bar n)+\dot u\dot v^2[2(\bar r_u\bar r_{vv}\bar n)-(\bar r_{uv}\bar r_v\bar n)]+\dot u^2\dot v[2(\bar r_u\bar r_{uv}\bar n)-(\bar r_{uu}\bar r_v\bar n)]+\dot u^3(\bar r_u\bar r_{uu}\bar n)=0$$

Τὰ μικτὰ γινόμενα τὰ ὁποῖα ἐμφανίζονται θὰ ὑπολογισθοῦν χρησιμοποιοῦντες τὶς σχέσεις (50.11) καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $[\bar\alpha\bar\beta]\cdot[\bar\gamma\bar\delta]=(\bar\alpha\bar\gamma)(\bar\beta\bar\delta)-(\bar\alpha\bar\delta)(\bar\beta\bar\gamma)$. Π.χ. θὰ ἔχωμεν :

$$[\bar r_u\bar r_u\bar n]=[\bar r_u\bar r_v]^2:w=\sqrt{EG-F^2}$$

$$(\bar r_v\bar r_{vv}\bar n)=[\bar r_v\bar r_{vv}][\bar r_u\bar r_v]:w=[(\bar r_v\bar r_u)(\bar r_v\bar r_{vv})-\bar r_v^2(\bar r_u\bar r_{vv})]:w=[F\cdot\tfrac{1}{2}G_v-G(F_v-\tfrac{1}{2}G_u)]:w=(FG_v-2GF_v+GG_u):2w$$

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὑπολογίζοντες ὅλα τὰ μικτογινόμενα, προκύπτει γιὰ τὶς γεωδαισιακὲς γραμμὲς ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις :

$$\dot{u}\ddot{v}-\ddot{u}\dot{v} = a_3\dot{v}^3 + (2a_2-\beta_3)\dot{u}\dot{v}^2 + (a_1-2\beta_2)\dot{u}^2\dot{v} - \beta_1\dot{u}^3 \qquad (52.2)$$

ὅπου οἱ συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς δίδονται ἀπὸ τοὺς τύπους :

$$\begin{aligned} a_1 &= (GE_u - 2FF_u + FE_v) : 2w^2 & \beta_1 &= (2EF_u - EE_v - FE_u) : 2w^2 \\ a_2 &= (GE_v - FG_u) : 2w^2 & \beta_2 &= (EG_u - FE_v) : 2w^2 \qquad (52.3) \\ a_3 &= (2GF_v - GG_u - FG_v) : 2w^2 & \beta_3 &= (EG_v - 2FF_v + FG_u) : 2w^2 \end{aligned}$$

Ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν ὑποθέσαμε τυχοῦσαν t· ἐὰν θέσωμεν $u \equiv t$ θὰ εἶναι $\dot{u}=1$, $\ddot{u}=0$, $v=v(u)$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (52.2) γίνεται :

$$\frac{d^2v}{du^2} = a_3\left(\frac{dv}{du}\right)^3 + (2a_2-\beta_3)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (a_1-2\beta_2)\frac{dv}{du} - \beta_1 \qquad (52.4)$$

Ὁμοίως ἐὰν θέσωμεν $v \equiv t$ θὰ εἶναι $\dot{v}=1$, $\ddot{v}=0$, $u=u(v)$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (52.2) γίνεται :

$$\frac{d^2u}{dv^2} = \beta_1\left(\frac{du}{dv}\right)^3 + (2\beta_2-a_1)\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + (\beta_3-2a_2)\frac{du}{dv} - a_3 \qquad (52.5)$$

Ὅταν οἱ παραμετρικὲς γραμμὲς u εἶναι γεωδαισιακὲς τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶναι $dv = d^2v = 0$, $du \neq 0$ καὶ ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (52.4) προκύπτει $\beta_1 = 0$. Ἀντιστρόφως ἐὰν εἶναι $\beta_1 = 0$ ἀπὸ τὴν ἴδια ἐξίσωσιν ἕπεται ὅτι ἐπαληθεύεται γιὰ $dv = 0$ δηλαδὴ οἱ παραμετρικὲς γραμμὲς u εἶναι γεωδαισιακὲς τῆς ἐπιφανείας. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (52.5) ὅτι ἐὰν οἱ παραμετρικὲς γραμμὲς v εἶναι γεωδαισιακὲς θὰ εἶναι $a_3 = 0$ καὶ ἀντιστρόφως ἐὰν ἰσχύη ἡ σχέσις αὐτὴ οἱ γραμμὲς v εἶναι γεωδαισιακές. Ἐξ αὐτῶν προκύπτει ὅτι ἡ συνθήκη :

$$2EF_u - EE_v - FE_u = 0 \qquad (52.6)$$

εἶναι ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ γιὰ νὰ εἶναι οἱ παραμετρικὲς γραμμὲς u γεωδαισιακὲς τῆς ἐπιφανείας καὶ ἡ συνθήκη :

$$2GF_v - GG_u - FG_v = 0 \qquad (52.7)$$

ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ διὰ νὰ εἶναι οἱ παραμετρικὲς γραμμὲς v γεωδαισιακὲς τῆς ἐπιφανείας.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν εἶναι δευτέρας τάξεως, ἐπομένως τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα θὰ εἶναι τῆς μορφῆς

$$f(u, v, c_1, c_2) = 0$$

δηλαδὴ θὰ περιέχη δύο αὐθαίρετες σταθερές. Ἐνῷ λοιπὸν οἱ γραμμὲς καμπυλότητος καὶ οἱ ἀσυμπτωτικὲς ἀποτελοῦν μονοπαραμετρικὰ ζεύγη γραμμῶν, οἱ γεωδαισιακὲς ἀποτελοῦν μίαν διπαραμετρικὴν οἰκογένεια γραμμῶν, δηλαδὴ δι' ἑκάστου σημείου τῆς ἐπιφανείας διέρχονται ∞^1 γεωδαισιακὲς γραμ-

μές, μία δί ἑκάστην διεύθυνσιν.
Θά δείξωμεν τώρα ὅτι οἱ γεωδαισιακές γραμμές μιᾶς ἐπιφανείας δύνανται νά προκύψουν δί ὁλοκληρώσεως τοῦ διαφορικοῦ συστήματος:

$$
\begin{aligned}
u''+a_1u'^2+2a_2u'v'+a_3v'^2&=0\\
v''+\beta_1u'^2+2\beta_2u'v'+\beta_3v'^2&=0
\end{aligned}
\qquad (52.8)
$$

ὅπου οἱ τόνοι σημειώνουν ὡς συνήθως παραγώγισιν ὡς πρός τό μῆκος τόξου s τῶν ζητουμένων γεωδαισιακῶν γραμμῶν $u=u(s)$, $v=v(s)$.
Πράγματι ὁ πρῶτος τύπος τοῦ Frenet $\bar{r}''=\kappa\bar{\omega}$, ἐπειδή κατά μῆκος τῶν γεωδαισιακῶν εἶναι $\bar{\omega}=\bar{n}$, γράφεται:

$$\bar{r}_{uu}u'^2+2\bar{r}_{uv}u'v'+\bar{r}_{vv}v'^2+\bar{r}_uu''+\bar{r}_vv''=\kappa\bar{\omega}$$

Πολλαπλασιάζοντες τήν ἐξίσωσιν αὐτήν ἐσωτερικῶς ἐπί $\bar{r}_u$ καί $\bar{r}_v$ καί λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τίς σχέσεις (50.11) θά ἔχωμεν:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}E_uu'^2+E_vu'v'+(F_v-\tfrac{1}{2}G_u)v'^2+Eu''+Fv''&=0\\
(F_u-\tfrac{1}{2}E_v)u'^2+G_uu'v'+\tfrac{1}{2}G_vv'^2+Fu''+Gv''&=0
\end{aligned}
$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἐπιλύοντες ὡς πρός u'', v'' προκύπτουν οἱ ἐξισώσεις (52.8).
Οἱ γεωδαισιακές γραμμές ἔχουν τήν χαρακτηριστικήν ἰδιότητα νά εἶναι ὁ συντομώτερος δρόμος ἀπό σημεῖον εἰς σημεῖον ἐπί τῆς ἐπιφανείας. Ἡ ἰδιότης αὐτή, ἡ ὁποία ἀποδεικνύεται λεπτομερῶς εἰς τόν λογισμόν τῶν μεταβολῶν, δικαιολογεῖται καί ἀπό τόν ἑξῆς σύντομον συλλογισμόν: ἡ συντομωτέρα ὁδός μεταξύ δύο σημείων τῆς ἐπιφανείας θά εἶναι ὅσον τό δυνατόν εὐθυτέρα, θά ἔχη δηλαδή εἰς ἕκαστον σημεῖον τήν ἐλαχίστην δυνατήν καμπυλότητα. Ἀλλά ἀπό ὅλες τίς γραμμές τῆς ἐπιφανείας που διέρχονται δί ἑνός σημείου M καί ἔχουν ὡρισμένην ἐφαπτομένην, ἐλαχίστην καμπυλότητα δηλαδή μεγίστην ἀκτίνα καμπυλότητος ἔχουν, κατά τό θεώρημα τοῦ Meusnier, οἱ γραμμές τῶν ὁποίων ἡ πρώτη κάθετος εἰς τό M συμπίπτει μέ τήν κάθετον τῆς ἐπιφανείας. Τῆς συντομωτέρας λοιπόν ὁδοῦ ἡ πρώτη κάθετος συμπίπτει εἰς ἕκαστον σημεῖον μέ τήν ἀντίστοιχον κάθετον τῆς ἐπιφανείας δηλαδή ἡ γεωδαισιακή γραμμή εἶναι ἡ συντομωτέρα ὁδός.
Παρατηροῦμεν ὅτι ἐάν ἐπί ἐπιφανείας ὑπάρχουν εὐθεῖες γραμμές, αὐτές θά εἶναι καί γεωδαισιακές γραμμές αὐτῆς, διότι μποροῦμε νά ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ πρώτη κάθετος αὐτῶν, ἐπειδή εἶναι ἀόριστος, εἶναι καί κάθετος τῆς ἐπιφανείας.
Καλοῦμεν γεωδαισιακήν καμπυλότητα μιᾶς ἐπιφανειακῆς γραμμῆς $u=u(s)$, $v=v(s)$ καί τήν παριστάνομεν μέ K_g, τήν τιμήν τοῦ μικτογινομένου:

$$K_g=(\bar{r}'\bar{r}''\bar{n}) \qquad (52.9)$$

Ἐάν παράμετρος τῆς γραμμῆς εἶναι μία οἱαδήποτε μεταβλητή t θά ἔχωμεν $\bar{r}'=\dot{\bar{r}}(dt:ds)=\dot{\bar{r}}:|\dot{\bar{r}}|$, $\bar{r}''=\ddot{\bar{r}}(dt:ds)^2+\dot{\bar{r}}(d^2t:ds^2)=\ddot{\bar{r}}:|\dot{\bar{r}}|^2+\dot{\bar{r}}(d^2t:ds^2)$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (52.9) προκύπτει :

$$K_g = (\dot{\bar r}\ddot{\bar r}\bar n) : |\dot{\bar r}|^3 \qquad (52.10)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (52.1) προκύπτει ὅτι ἡ γεωδαισιακὴ καμπυλότης τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν μιᾶς ἐπιφανείας εἶναι μηδέν. Ἐὰν θεωρήσωμεν ὡς ἐπιφάνειαν τὸ ἐπίπεδον τῶν x,y καὶ ἐπ' αὐτοῦ μίαν ἐπίπεδον γραμμήν, ἡ καμπυλότης αὐτῆς κ κατὰ τὸν τύπον (27.5) θὰ εἶναι:

$$\kappa = x'y'' - x''y' = \begin{vmatrix} x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\bar r'\bar r''\bar n)$$

ὅπου μὲ $\bar n$ παραστήσαμε τὸ ἐξωτερικὸν γινόμενον $[\bar i\bar j]$ τῶν βασικῶν διανυσμάτων τῶν ἀξόνων. Θεωροῦντες λοιπὸν τὸ $\bar n$ ὡς τὸ κάθετον μοναδιαῖον διάνυσμα τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας οxy, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ καμπυλότης τῶν ἐπιπέδων γραμμῶν ὅπως τὴν ὁρίσαμε εἰς τὸ ἐδάφιον 27, εἶναι ἡ γεωδαισιακὴ καμπυλότης αὐτῆς εἰς τὸ ἐπίπεδόν της.

Παράδειγμα (52.1).— Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωδαισιακὲς γραμμὲς τοῦ ὀρθοῦ ἑλικοειδοῦς : $\bar r = (u\,\sigma\upsilon\nu\,v,\ u\,\eta\mu\,v,\ \beta v)$.

Λύσις. Διὰ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτὴ εἶναι $E=1$, $F=0$, $G=u^2+\beta^2$, $w^2=u^2+\beta^2$ ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὶς ἐξισώσεις (52.8) προκύπτει :

$$u'' - uv'^2 = 0\ ,\quad (u^2+\beta^2)v'' + 2uu'v' = 0$$

Ἀπὸ τὴν δευτέρα ἐξ αὐτῶν δι' ὁλοκληρώσεως προκύπτει :

$$(u^2+\beta^2)\frac{dv}{ds} = c_1$$

Ὑψώνοντες αὐτὴν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι : $ds^2 = du^2 + (u^2+\beta^2)dv^2$ προκύπτει :

$$(u^2+\beta^2)dv^2 = c_1^2 ds^2 = c_1^2\,[\,du^2 + (u^2+\beta^2)\,dv^2\,]$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἐπιλύοντες ὡς πρὸς $du:dv$ θὰ ἔχωμεν :

$$du:dv = \pm\frac{1}{c_1}\sqrt{(u^2+\beta^2)(u^2+\beta^2-c_1^2)}$$

Αὐτὴ εἶναι ἕνα πρῶτον ὁλοκλήρωμα τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τῶν γεωδαισιακῶν· ἡ γενικὴ λύσις θὰ εὑρεθῆ διὰ μιᾶς ἀκόμη ὁλοκληρώσεως τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς, θὰ ἐκφρασθῆ δὲ ὅπως φαίνεται δι' ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων.

Παράδειγμα (52.2).— Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωδαισιακὲς γραμμὲς τῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς : $\bar r = [u\,\sigma\upsilon\nu\,v,\ u\,\eta\mu\,v,\ \varphi(u)]$.

Λύσις. Διὰ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτὴ εἶναι $E = 1+\dot\varphi^2$, $F=0$, $G=u^2$, $W^2 = u^2(1+\dot\varphi^2)$ ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν δευτέρα τῶν ἐξισώσεων (52.8) προκύπτει :

$$v'' + 2u^{-1}u'v' = 0$$

Πολλαπλασιάζοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ἐπὶ u^2 γίνεται τελεία, ὁπότε δι' ὁλοκληρώσεως θὰ ἔχωμεν :

$$u^2\frac{dv}{ds} = c_1$$

Ὑψώνοντες αὐτὴν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $ds^2 = (1+$

$+\dot{\varphi}^2)\,du^2+u^2dv^2$, προκύπτει :

$$u^4dv^2 = c_1^2ds^2 = c_1^2(1+\dot{\varphi}^2)\,du^2+c_1^2u^2dv^2$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἐπιλύοντες ὡς πρὸς dv θὰ ἔχωμεν :

$$dv = \pm\frac{c_1}{u}\sqrt{\frac{1+\dot{\varphi}^2}{u^2-c_1^2}}\,du$$

Τέλος διὰ μιᾶς ἀκόμη ὁλοκληρώσεως προκύπτει ἡ γενικὴ λύσις ἐκ τῆς ὁποίας προσδιορίζονται οἱ γεωδαισιακὲς γραμμές :

$$v = c_2 \pm c_1\int\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1+\dot{\varphi}^2}{u^2-c_1^2}}\,du$$

Παράδειγμα (52.3).— Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν ὅταν ἡ ἐπιφάνεια δίδεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $z = z(x,y)$.

Λ ύ σ ι ς. Λαμβάνοντες $u=x$, $v=y$ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰ E, F, G ἀπὸ τὸν τύπον (47.18) εἰς τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν (52.4) προκύπτει :

$$(1+p^2+q^2)\;y'' = (py'-q)(ty'^2+2sy'+r)$$

ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις.

53. Δείκτρια τοῦ Dupin.

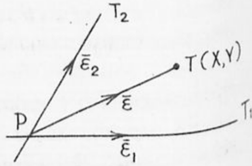
— Ἂς θεωρήσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον $P(u,v)$ τὸ μοναδιαῖον ἐφαπτομενικὸν διάνυσμα :

$$\bar{\varepsilon} = \bar{r}_u\frac{du}{ds} + \bar{r}_v\,\frac{dv}{ds} \qquad (53.1)$$

καὶ ἂς λάβωμεν ἐπ' αὐτοῦ τὸ σημεῖον T ἔτσι ὥστε νὰ εἶναι :

$$\overline{PT} = \sqrt{R^*}\cdot\bar{\varepsilon} \qquad (53.2)$$

ὅπου R^* ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς καθέτου τομῆς ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν διεύθυνσιν τοῦ διανύσματος $\bar{\varepsilon}$. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων T τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου λέγεται δείκτρια τοῦ Dupin εἰς τὸ σημεῖον P. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ὡς πρὸς τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων PT_1, PT_2, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (53.1) τὰ $\bar{r}_u, \bar{r}_v$ ἀπὸ τὶς σχέσεις (49.5) καὶ τὴν προκύπτουσαν ἔκφρασιν τοῦ $\bar{\varepsilon}$ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (53.2) ὁπότε προκύπτει :



Σχ. (53.1)

$$\overline{PT} = \sqrt{R^*}\sqrt{E}\,\frac{du}{ds}\,\bar{\varepsilon}_1 + \sqrt{R^*}\sqrt{G}\,\frac{dv}{ds}\,\bar{\varepsilon}_2$$

Ἐὰν καλέσωμεν X, Y τὶς συντεταγμένες τοῦ T ὡς πρὸς τὸ σύστημα εἰς τὸ ὁποῖον ἐργαζόμεθα θὰ εἶναι : $\overline{MT} = X\bar{\varepsilon}_1 + Y\bar{\varepsilon}_2$, ὁπότε διὰ συγκρίσεως μὲ τὴν προηγουμένην σχέσιν προκύπτει :

$$X = \sqrt{R^*}\sqrt{E}\,\frac{du}{ds}\,, \qquad Y = \sqrt{R^*}\sqrt{G}\,\frac{dv}{ds} \qquad (1)$$

Τὶς ἐξισώσεις αὐτὲς ἐπιλύοντες ὡς πρὸς du, dv καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (49.7) προκύπτει ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις :

$$\frac{L}{E}X^2+\frac{2M}{\sqrt{EG}}XY+\frac{N}{G}Y^2=\pm 1 \qquad (53.3)$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν προκύπτει ὅτι ἡ δείκτρια τοῦ Dupin εἶναι μία γραμμὴ δευτέρου βαθμοῦ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον P, εἶναι δὲ αὐτὴ ἔλλειψις, ζεῦγος παραλλήλων εὐθειῶν ἢ ζεῦγος συζυγῶν ὑπερβολῶν, καθ' ὅσον εἶναι ἀντιστοίχως :

$$\frac{LN-M^2}{EG}>0 \qquad \frac{LN-M^2}{EG}=0 \qquad \frac{LN-M^2}{EG}<0$$

δηλαδὴ καθ' ὅσον τὸ P εἶναι ἐλλειπτικόν, παραβολικὸν ἢ ὑπερβολικὸν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας. Ὅταν τὸ P εἶναι ἐλλειπτικὸν ἢ παραβολικὸν σημεῖον, εἰς τὴν ἐξίσωσιν (53.3) θὰ λαμβάνωμεν τὸ θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν πρόσημον ὅταν τὰ L,N τὰ ὁποῖα εἶναι ὁμόσημα, εἶναι ἀντιστοίχως θετικὰ ἢ ἀρνητικά. Ὅταν τὸ P εἶναι ὑπερβολικὸν σημεῖον θὰ λαμβάνωμεν τὸ θετικὸν πρόσημον ὅταν $\mathrm{II}>0$ ὁπότε θὰ ἔχωμεν τὴν μίαν ὑπερβολὴν καὶ τὸ ἀρνητικὸν ὅταν $\mathrm{II}<0$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν τὴν ἄλλην ὑπερβολὴν ἡ ὁποία θὰ εἶναι συζυγὴς τῆς πρώτης. Ἐὰν αἱ ἀσύμπτωτοι τῆς δείκτριας ἔχουν συντελεστὰς διευθύνσεως λ_1,λ_2 ἀπὸ τὴν θεωρία τῶν γραμμῶν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ γνωρίζομεν ὅτι θὰ εἶναι ρίζες τῆς δευτεροβαθμίου ὡς πρὸς λ ἐξισώσεως :

$$\frac{L}{E}+\frac{2M}{\sqrt{EG}}\lambda+\frac{N}{G}\lambda^2=0$$

Ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις (1) προκύπτει ὅμως ὅτι ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως λ τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἐπιφανείας ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν λόγον $dv:du$ εἶναι:

$$\lambda=\frac{Y}{X}=\frac{dv}{du}\sqrt{\frac{G}{E}} \qquad (2)$$

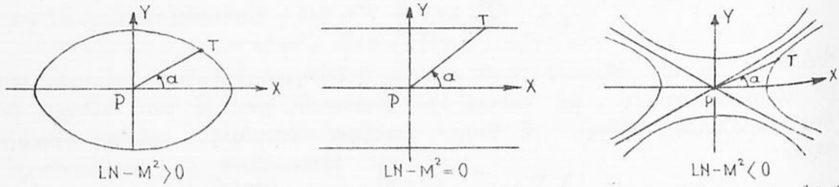
Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ λ εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν προκύπτει ἡ ἐξίσωσις (51.1) δηλαδὴ οἱ ἀσυμπτωτικὲς διευθύνσεις τῆς ἐπιφανείας εἰς ἕνα σημεῖον P ταυτίζονται μὲ τὶς διευθύνσεις τῶν ἀσυμπτώτων τῆς δείκτριας τοῦ Dupin εἰς τὸ σημεῖον αὐτό.

Οἱ διευθύνσεις τῶν ἀξόνων τῆς δείκτριας τοῦ Dupin ἀντιστοιχοῦν ὡς γνωστὸν εἰς τὰ σημεῖα T τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις $|\overline{PT}|$ ἀπὸ τὸ P λαμβάνει ἀκροτάτην τιμήν, δηλαδὴ καθὼς προκύπτει ἀπὸ τὸν (53.2) ἀντιστοιχοῦν εἰς τὶς διευθύνσεις ποὺ ἡ P^* λαμβάνει ἀκροτάτην τιμήν. Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι οἱ πρωτεύουσες διευθύνσεις τῆς ἐπιφανείας εἰς ἕνα σημεῖον P ταυτίζονται μὲ τὶς διευθύνσεις τῶν ἀξόνων τῆς δείκτριας τοῦ Dupin εἰς τὸ σημεῖον αὐτό.

Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς δείκτριας Dupin εἰς τὸ P εἰς τὸ σύστημα PXY τῶν ἀξόνων αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ P, θὰ εἶναι προφανῶς :

$$\kappa_1X^2+\kappa_2Y^2=\pm 1 \qquad (53.4)$$

ὅπου κ_1,κ_2 οἱ πρωτεύουσες καμπυλότητες εἰς τὸ P καὶ ὅπου τὸ πρόσημον εἰς τὸ δεύτερον μέλος θὰ λαμβάνεται ὅπως εἰς τὴν (53.3).



Ἐάν a εἶναι ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ διάνυσμα $\overline{PT}$ μὲ τὸν ἄξονα PX, οἱ συντεταγμένες X, Y τοῦ σημείου T θὰ δίδωνται ἀπὸ τὶς σχέσεις:

$$X=\sqrt{R^*}\,\text{συν}a,\quad Y=\sqrt{R^*}\,\text{ημ}a$$

ὅπου R^* ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς καθέτου τομῆς ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν διεύθυνσιν τοῦ $\overline{PT}$. Ἐπειδὴ τὸ T εἶναι σημεῖον τῆς δείκτριας οἱ συντεταγμένες του θὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (53.4), ἀντικαθιστῶντες λοιπὸν εἰς αὐτὴν τὰ X, Y προκύπτει:

$$\kappa_1\,\text{συν}^2a+\kappa_2\,\text{ημ}^2a=\pm 1:R^*$$

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ δεύτερον μέλος παριστάνει τὴν προσημασμένη καμπυλότητα κ_n τῆς καθέτου τομῆς ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν διεύθυνσιν $\overline{PT}$, προκύπτει:

$$\kappa_n=\kappa_1\,\text{συν}^2a+\kappa_2\,\text{ημ}^2a \qquad (53.5)$$

Ὁ τύπος αὐτός, ὀφειλόμενος εἰς τὸν Euler, δίδει τὴν προσημασμένη καμπυλότητα κ_n μιᾶς καθέτου τομῆς εἰς ἕνα σημεῖον P τῆς ἐπιφανείας, συναρτήσει τῶν πρωτευουσῶν καμπυλοτήτων κ_1,κ_2 αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ καὶ τῆς γωνίας a ποὺ σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη τῆς καθέτου τομῆς μὲ μίαν τῶν πρωτευουσῶν διευθύνσεων τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ P. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ P εἶναι ὀμφαλικὸν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶναι $\kappa_n=\kappa_1=\kappa_2$ καὶ ἡ δείκτρια εἶναι ἕνας κύκλος.

Οἱ διευθύνσεις δύο συζυγῶν διαμέτρων τῆς δείκτριας τοῦ Dupin εἰς ἕνα σημεῖον P τῆς ἐπιφανείας, λέγονται συζυγεῖς διευθύνσεις τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον αὐτό. Ἐάν λ_1,λ_2 εἶναι οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως δύο συζυγῶν διαμέτρων τῆς δείκτριας (53.3) εἰς τὸ σύστημα PT_1T_2, ἀπὸ τὴν θεωρία τῶν γραμμῶν δευτέρου βαθμοῦ γνωρίζομεν ὅτι θὰ συνδέωνται ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$\frac{L}{E}+\frac{M}{\sqrt{EG}}(\lambda_1+\lambda_2)+\frac{N}{G}\lambda_1\lambda_2=0$$

Ἐάν οἱ ἐν λόγῳ ἐφαπτομενικὲς διευθύνσεις τῆς ἐπιφανείας ἀντιστοιχοῦν εἰς τὶς τιμὲς $dv:du$ καὶ $\delta v:\delta u$, ἀπὸ τὴν (2) προκύπτει:

$$\lambda_1=\frac{dv}{du}\sqrt{\frac{G}{E}},\qquad \lambda_2=\frac{\delta v}{\delta u}\sqrt{\frac{G}{E}}$$

ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν προκύπτει:

$$L\,du\,\delta u+M(du\,\delta v+\delta u\,dv)+N\,dv\,\delta v=0 \qquad (53.6)$$

Οἱ πρωτεύουσες διευθύνσεις εἶναι προφανῶς ἕνα ζεῦγος συζυγῶν διευθύνσεων καθέτως τεμνομένων καὶ μάλιστα, ὅταν τὸ σημεῖον δὲν εἶναι ὀμφαλικόν, ὁπότε ἡ δείκτρια δὲν εἶναι κύκλος, τὸ μοναδικὸν ζεῦγος.

Ένα ζεύγος ἐπιφανειακῶν γραμμῶν τῶν ὁποίων οἱ ἐφαπτόμενες εἰς κάθε κοινὸν σημεῖον αὐτῶν, εἶναι συζυγεῖς διευθύνσεις τῆς ἐπιφανείας, λέγονται συζυγεῖς γραμμὲς τῆς ἐπιφανείας. Ἐὰν εἶναι:

$$P(u,v)\,\delta u + Q(u,v)\,\delta v = 0 \qquad (53.7)$$

ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις μιᾶς μονοπαραμετρικῆς οἰκογενείας ἐπιφανειακῶν γραμμῶν, θὰ εἶναι $\delta u = \lambda Q$, $\delta v = -\lambda P$ ὁπότε ἀντικαθιστῶντες αὐτὲς εἰς τὴν ἐξίσωσιν (53.6) προκύπτει:

$$(LQ - MP)\,du + (MQ - NP)\,dv = 0 \qquad (53.8)$$

ἡ ὁποία εἶναι ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῆς οἰκογενείας τῶν γραμμῶν ποὺ εἶναι συζυγεῖς πρὸς τὶς γραμμὲς τῆς οἰκογενείας ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν (53.7).

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (53.6) προκύπτει τέλος ὅτι διὰ νὰ εἶναι οἱ παραμετρικὲς γραμμὲς ἕνα δίκτυον συζυγῶν γραμμῶν πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἰσχύη ἡ σχέσις:

$$M = 0 \qquad (53.9)$$

Παράδειγμα (53.1). — Νὰ εὑρεθῆ ἡ δείκτρια Dupin τῆς ἐπιφανείας μὲ ἐξίσωσιν: $\bar{r} = (u+v,\ u-v,\ uv)$.

Λύσις. Ἔχομεν $E = 2+v^2$, $F = uv$, $G = 2+u^2$, $W^2 = 4+2u^2+2v^2$, $L=0$, $M = -2:W$, $N=0$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (53.3) προκύπτει τὸ ζεῦγος τῶν συζυγῶν ὑπερβολῶν:

$$4XY = \pm\sqrt{(2+u^2)(2+v^2)(4+2u^2+2v^2)}$$

Παράδειγμα (53.2). — Νὰ εὑρεθῆ ἡ ἐξίσωσις τῆς δείκτριας Dupin ὅταν ἡ ἐπιφάνεια δίδεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $z = z(x,y)$.

Λύσις. Ἀντικαθιστῶντες τὰ θεμελιώδη ποσὰ ἐκ τῶν (47.18), (48.5) εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς δείκτριας (53.3) προκύπτει:

$$r(1+q^2)X^2 + 2s\sqrt{(1+p^2)(1+q^2)}\,XY + t(1+p^2)Y^2 = \pm\sqrt{1+p^2+q^2}$$

Παράδειγμα (53.3). — Νὰ δειχθῆ ὅτι οἱ παραμετρικὲς γραμμὲς τῆς ἐπιφανείας $\bar{r} = [\sigma(u),\ \varphi(v),\ \sigma_1(u)+\varphi_1(v)]$, ἀποτελοῦν σύστημα συζυγῶν γραμμῶν.

Λύσις. Ἔχομεν $\bar{r}_u = (\dot{\sigma},\ 0,\ \dot{\sigma}_1)$, $\bar{r}_{uv} = (0,0,0)$, ἐπομένως εἶναι $M=0$ καὶ κατὰ τὴν (53.9) ὁ ἰσχυρισμός μας ἀπεδείχθη.

Παράδειγμα (53.4). — Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γραμμὲς τῆς ἐπιφανείας

$$\bar{r} = (2u+v,\ u-v,\ uv)$$

οἱ ὁποῖες εἶναι συζυγεῖς τῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιφανειακῶν γραμμῶν οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $u^2+v^2 = c^2$.

Λύσις. Ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν δοθεισῶν γραμμῶν εἶναι $u\,du + v\,dv = 0$ καὶ τὰ θεμελιώδη ποσὰ δευτέρας τάξεως τῆς ἐπιφανείας εἶναι $L=0$, $M \neq 0$, $N=0$.

Ἀντικαθιστῶντες λοιπὸν τὰ ποσὰ αὐτὰ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (53.8) καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $P=u$, $Q=v$ προκύπτει, κατόπιν διαιρέσεως διὰ M, ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις : $-udu+vdv=0$ ἐκ τῆς ὁποίας δι' ὁλοκληρώσεως προκύπτουν οἱ ζητούμενες γραμμές $-u^2+v^2=c_1^2$.

54. Κανονικὴ μορφὴ τῆς ἐξισώσεως ἐπιφανείας.— Ἔστω P ἕνα ὁμαλὸν σημεῖον μιᾶς ἐπιφανείας τῆς ὁποίας, ὡς παραμετρικές γραμμές, ἔχομεν λάβει τὶς γραμμές καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας. Θεωροῦμεν τὴν ἐπιφάνεια ἀναφερομένη εἰς τὸ τρισορθογώνιον σύστημα ἀξόνων $Pxyz$ τοῦ ὁποίου οἱ κατευθύνσεις τῶν ἀξόνων συμπίπτουν ἀντιστοίχως μὲ τὶς κατευθύνσεις τῶν διανυσμάτων $\bar{r}_u, \bar{r}_v, [\bar{r}_u\bar{r}_v]$. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας ὡς πρὸς τὸ σύστημα αὐτὸ εἶναι $z=z(x,y)$ θὰ ἔχωμεν :

$$z(0,0)=0, \quad z_x(0,0)=0, \quad z_y(0,0)=0 \qquad (1)$$

διότι ἡ μὲν πρώτη ἐκφράζει ὅτι ἡ ἐπιφάνεια διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων P οἱ δὲ δύο ἄλλες ὅτι τὸ κάθετον διάνυσμα τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ P εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν z. Ἀπὸ τοὺς τύπους (47.18), (48.5) καὶ (50.14), (50.15) προκύπτει ὅτι τὰ θεμελιώδη ποσὰ πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως τῆς ἐπιφανείας εἰς τὴν ἀρχὴν P, θὰ εἶναι :

$$\begin{gathered} E=1, \ F=0, \ G=1 \\ L=z_{xx}=\kappa_1, \ M=0, \ N=z_{yy}=\kappa_2 \end{gathered} \qquad (2)$$

ὅπου κ_1, κ_2 οἱ πρωτεύουσες καμπυλότητες τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ P. Ἐὰν τώρα ἀναπτύξωμεν τὴν συνάρτησιν $z(x,y)$ κατὰ Mucfaurin καὶ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τὶς (1) καὶ (2) προκύπτει :

$$z=\frac{1}{2!}\left(\kappa_1x^2+\kappa_2y^2\right)+\frac{1}{3!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 z(0,0)+\cdots \qquad (54.1)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ λέγεται κανονικὴ μορφὴ τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐπιφανείας εἰς τὴν γειτονιά τοῦ ὁμαλοῦ σημείου αὐτῆς P· ἡ ἐξίσωσις

$$z=\frac{1}{2}\left(\kappa_1x^2+\kappa_2y^2\right) \qquad (54.2)$$

παριστάνει προφανῶς ὡς πρὸς τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων ποὺ ἐργαζόμεθα ἕνα παραβολοειδές, τὸ ὁποῖον λέγεται ἐγγύτατον παραβολοειδὲς τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ P καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι ἔχει μὲ τὴν ἐπιφάνειαν ἐπαφὴν δευτέρας τάξεως εἰς τὸ P. Οἱ τομὲς αὐτοῦ μὲ ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὸ Pxy δηλαδὴ πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ P, προβάλλονται εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ εἰς γραμμές ὁμοιόθετες πρὸς τὴν δείκτρια τοῦ Dupin ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ P, ἡ δὲ δείκτρια εἶναι προφανῶς ἡ προβολὴ τῆς τομῆς τοῦ παραβολοειδοῦς ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον $z=\pm\frac{1}{2}$ μὲ τὴν γνωστὴν σύμβασιν διὰ τὸ πρόσημον ἀναλόγως τῆς φύσεως τοῦ σημείου P.

Παράδειγμα (54.1).— Νά εὑρεθῇ τό ἐγγύτατον παραβολοειδές τῆς ἐπιφανείας $\bar{r} = (u^2 v,\ u-v,\ u+v^2)$ εἰς τό σημεῖον $M(1,1)$.

Λύσις. Ἔχομεν $\bar{r}_u = (2uv, 1, 1) = (2,1,1)$, $\bar{r}_v = (u^2, -1, 2v) = (1,-1,2)$, $\bar{r}_{uu} = (2v, 0, 0) = (2,0,0)$, $\bar{r}_{uv} = (2u, 0, 0) = (2,0,0)$, $\bar{r}_{vv} = (0,0,2)$, $E=6$, $F=3$, $G=6$, $w^2=27$, $L = 6:\sqrt{27}$, $M = 6:\sqrt{27}$, $N = -6:\sqrt{27}$. Ἀντικαθιστῶντες τίς εὑρεθείσες τιμές τῶν θεμελιωδῶν ποσῶν εἰς τήν ἐξίσωσιν (50.8) προκύπτει $81\kappa^2 + 4\sqrt{27}\,\kappa - 8 = 0$ ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτουν οἱ πρωτεύουσες καμπυλότητες $\kappa_1 = (-2\sqrt{27} + \sqrt{756}):81$, $\kappa_2 = (-2\sqrt{27} - \sqrt{756}):81$. Ἀντικαθιστῶντες αὐτές εἰς τήν (54.2) προκύπτει ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τοῦ ἐγγυτάτου παραβολοειδοῦς :

$$81z = (-\sqrt{27} + \sqrt{189})x^2 - (\sqrt{27} + \sqrt{189})y^2$$

Παράδειγμα (54.2).— Νά εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐγγυτάτου παραβολοειδοῦς τῆς ἐπιφανείας $z = x^2(1+y^2)$ εἰς τό σημεῖον $x=1,\ y=0$.

Λύσις. Ἔχομεν $p = 2x(1+y^2) = 2$, $q = 2x^2y = 0$, $r = 2(1+y^2) = 2$, $s = 4xy = 0$, $t = 2x^2 = 2$, $E=5$, $F=0$, $G=1$, $L = 2:\sqrt{5}$, $M=0$, $N = 2:\sqrt{5}$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (50.8) προκύπτει $25\kappa^2 - 12\sqrt{5}\,\kappa + 4 = 0$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\kappa_1 = 2:\sqrt{5}$, $\kappa_2 = 2:5\sqrt{5}$ καί ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (54.2) προκύπτει ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τοῦ ἐγγυτάτου παραβολοειδοῦς :

$$z = \frac{x^2}{\sqrt{5}} + \frac{y^2}{5\sqrt{5}}.$$

55. Ἀπεικόνισις ἐπιφανειῶν.— Ἄς θεωρήσωμεν δύο ἐπιφάνειες Σ, Σ_1 μέ διανυσματικές ἐξισώσεις ἀντιστοίχως :

$$\bar{r} = \bar{r}(u,v), \qquad \bar{r} = \bar{r}'(u',v') \qquad (55.1)$$

Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ παράμετροι τῆς Σ_1 εἶναι μονοσήμαντες συναρτήσεις :

$$u' = u'(u,v), \qquad v' = v'(u,v) \qquad (55.2)$$

τῶν παραμέτρων τῆς Σ, τότε σέ κάθε σημεῖον P τῆς Σ ἀντιστοιχεῖ ἕνα μόνον σημεῖον P_1 τῆς Σ_1. Ἐάν ὑποθέσωμεν ἐπί πλέον ὅτι τό σύστημα (55.2) εἶναι μονοσήμαντα ἐπιλύσιμο ὡς πρός u,v :

$$u = u(u',v'), \qquad v = v(u',v') \qquad (55.3)$$

τότε καί σέ κάθε σημεῖον P_1 τῆς Σ_1 θά ἀντιστοιχῇ ἕνα μόνον σημεῖον P τῆς Σ. Μία τέτοια ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν σημείων τῶν δύο ἐπιφανειῶν, λέγεται ἀπεικόνισις τῆς μιᾶς ἐπιφανείας ἐπί τῆς ἄλλης.

Ἐάν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τήν $\bar{r}'$ τά u',v' μέ τά ἴσα τους ἐκ τῶν (55.2) καί παραστήσωμεν μέ $\bar{r}_1$ τήν προκύπτουσα συνάρτησιν, θά ἔχωμεν ἀντί τῶν ἐξισώσεων (55.1) τίς ἑξῆς :

$$\bar r = \bar r\,(u,v)\,, \quad \bar r = \bar r_1\,(u,v) \qquad (55.4)$$

Ἐξ αὐτῶν προκύπτει ὅτι δύο ἐπιφάνειες, οἱ ὁποῖες ἔχουν ἀπεικονισθεῖ ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, δύνανται νὰ παρασταθοῦν παραμετρικῶς ἀπὸ δύο ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (55.4) μὲ τὰς αὐτὰς παραμέτρους. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ E', F', G' τὰ θεμελιώδη ποσὰ πρώτης τάξεως τῆς Σ_1, ὅταν ἀναφέρεται ὡς πρὸς τὸ σύστημα τῶν παραμέτρων u', v' καὶ μὲ E_1, F_1, G_1 ὅταν ἀναφέρεται ὡς πρὸς τὸ σύστημα τῶν παραμέτρων u, v, θὰ δείξωμεν ὅτι μεταξὺ αὐτῶν ὑφίστανται οἱ σχέσεις:

$$\begin{aligned}
E_1 &= E'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + 2F'\frac{\partial u'}{\partial u}\,\frac{\partial v'}{\partial u} + G'\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2 \\
F_1 &= E'\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + F'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\cdot\frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial u'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v'}{\partial u}\right) + G'\frac{\partial v'}{\partial u}\cdot\frac{\partial v'}{\partial v} \qquad (55.5)\\
G_1 &= E'\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + 2F'\frac{\partial u'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v'}{\partial v} + G'\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2
\end{aligned}$$

Πράγματι ἐὰν παραγωγίσωμεν τὴν ταυτότητα

$$\bar r_1(u,v) \equiv \bar r'\,[u'(u,v),\, v'(u,v)]$$

μερικῶς ὡς πρὸς u καὶ v θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\partial \bar r_1}{\partial u} = \frac{\partial \bar r'}{\partial u'}\,\frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial \bar r'}{\partial v'}\,\frac{\partial v'}{\partial u}\,, \qquad \frac{\partial \bar r_1}{\partial v} = \frac{\partial \bar r'}{\partial u'}\,\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial \bar r'}{\partial v'}\,\frac{\partial v'}{\partial v} \qquad (1)$$

Ἐὰν ὑψώσωμεν τὴν πρώτη ἐξ αὐτῶν ἐσωτερικῶς εἰς τὸ τετράγωνον προκύπτει:

$$\left(\frac{\partial \bar r_1}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial \bar r'}{\partial u'}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \bar r'}{\partial u'}\right)\left(\frac{\partial \bar r'}{\partial v'}\right)\frac{\partial u'}{\partial u}\,\frac{\partial v'}{\partial u} + \left(\frac{\partial \bar r'}{\partial v'}\right)^2\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2 \qquad (2)$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς συμβολισμοὺς ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω διὰ τὰ θεμελιώδη ποσὰ πρώτης τάξεως τῆς Σ_1 θὰ ἔχωμεν:

$$\left(\frac{\partial \bar r_1}{\partial u}\right)^2 = E_1\,, \quad \left(\frac{\partial \bar r'}{\partial u'}\right)^2 = E'\,, \quad \left(\frac{\partial \bar r'}{\partial u'}\right)\left(\frac{\partial \bar r'}{\partial v'}\right) = F'\,, \quad \left(\frac{\partial \bar r'}{\partial v'}\right)^2 = G'$$

Ἀντικαθιστῶντες αὐτὲς εἰς τὴν (2) προκύπτει ἡ ἀλήθεια τῆς πρώτης τῶν σχέσεων (55.5)· ὑψώνωντες τὴν δευτέρα τῶν (1) εἰς τὸ τετράγωνον ἐσωτερικῶς καὶ ἐργαζόμενοι ὁμοίως προκύπτει ἡ ἀλήθεια τῆς τρίτης τῶν σχέσεων (55.5), τέλος δὲ πολλαπλασιάζοντες ἐσωτερικῶς τὶς (1) προκύπτει καὶ ἡ ἀλήθεια τῆς δευτέρας τῶν (55.5).
Μὲ ὅμοιον ἀκριβῶς τρόπον ἐκ τῶν σχέσεων (1) προκύπτει καὶ ὁ τύπος:

$$\sqrt{E_1G_1 - F_1^2} = \sqrt{E'G' - F'^2}\,\frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)} \qquad (55.6)$$

τοῦ ὁποίου τὴν ἀπόδειξιν ἀφίνομεν εἰς τὸν ἀναγνώστην δι' ἄσκησιν.
Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ds καὶ ds_1 τὰ διαφορικὰ τῶν τόξων τῶν γραμμῶν τῶν δύο ἀπεικονιζομένων ἐπιφανειῶν, τότε ὁ λόγος

$$\frac{ds_1}{ds} \equiv \sigma \qquad (55.7)$$

λέγεται συντελεστής διαστολῆς τῆς ἀπεικονίσεως καὶ εἶναι ἐν γένει μία συνάρτησις τῶν u, v καὶ du, dv.

Ὁρισμός (55.1). — *Μία ἀπεικόνισις λέγεται ἰσογώνιος ἢ σύμμορφος ὅταν ἡ γωνία δύο οἱωνδήποτε ἐφαπτομένων εἰς ἕνα σημεῖον P_1 τῆς μιᾶς ἰσοῦται μὲ τὴν γωνία τῶν ἀντιστοίχων ἐφαπτομένων εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον P τῆς ἄλλης.*

Θὰ δείξωμεν ὅτι διὰ νὰ εἶναι οἱ ἐπιφάνειες (55.4) ἰσογωνίως ἀπεικονίσιμες πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ὑφίστανται οἱ σχέσεις :

$$\frac{E_1}{E} = \frac{F_1}{F} = \frac{G_1}{G} \left(= \sigma^2 \right) \qquad (55.8)$$

δηλαδὴ τὰ θεμελιώδη ποσὰ πρώτης τάξεως τῶν δύο ἐπιφανειῶν, ἀναφερομένων εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα παραμέτρων, νὰ εἶναι ἀνάλογα.

Πράγματι ἐὰν ψ εἶναι ἡ γωνία δύο ἐφαπτομένων τῆς Σ ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς τιμὲς μ_1, μ_2 τοῦ λόγου $dv : du$ καὶ ψ_1 ἡ γωνία τῶν ἀντιστοίχων ἐφαπτομένων τῆς Σ_1, κατὰ τὸν τύπον (47.7) θὰ ἔχωμεν :

$$\left.\begin{aligned} \text{συν}\,\psi &= \left[E + F(\mu_1+\mu_2) + G\mu_1\mu_2\right] : \sqrt{(E+2F\mu_1+G\mu_1^2)(E+2F\mu_2+G\mu_2^2)} \\ \text{συν}\,\psi_1 &= \left[E_1 + F_1(\mu_1+\mu_2) + G_1\mu_1\mu_2\right] : \sqrt{(E_1+2F_1\mu_1+G_1\mu_1^2)(E_1+2F_1\mu_2+G_1\mu_2^2)} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Ἐὰν λοιπὸν ὑφίστανται οἱ σχέσεις (55.8) καὶ παραστήσωμεν μὲ $\sigma^2(u,v)$ τὴν κοινὴν τιμὴν τῶν ἴσων λόγων, ἡ ὁποία μάλιστα θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον, τοῦ συντελεστοῦ διαστολῆς, θὰ ἔχωμεν τὶς σχέσεις :

$$E_1 = E\sigma^2, \quad F_1 = F\sigma^2, \quad G_1 = G\sigma^2$$

ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν δευτέραν τῶν (3) τὰ E_1, F_1, G_1 μὲ τὰ ἴσα τους, προκύπτει $\text{συν}\varphi = \text{συν}\varphi_1$, δηλαδὴ ἡ ἀπεικόνισις εἶναι ἰσογώνιος. Ἀντιστρόφως ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀπεικόνισις εἶναι ἰσογώνιος, τότε εἰς ἕνα ζεῦγος ἐφαπτομένων τῆς Σ τεμνομένων καθέτως εἰς τὸ P, θὰ ἀντιστοιχῇ ἕνα ζεῦγος ἐφαπτομένων εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον P_1 τεμνομένων ἐπίσης καθέτως, ἑπομένως λαμβάνοντες ὑπ᾽ ὄψιν τὴν συνθήκην καθετότητος (47.13) θὰ ἔχωμεν :

$$E + F(\mu_1+\mu_2) + G\mu_1\mu_2 = 0, \qquad E_1 + F_1(\mu_1+\mu_2) + G_1\mu_1\mu_2 = 0 \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ ὅμως οἱ σχέσεις αὐτὲς θὰ ἰσχύουν γιὰ κάθε ζεῦγος ἐφαπτομένων ποὺ τέμνονται καθέτως θὰ ἰσχύουν καὶ ὅταν $\mu_1 = 0$ ὁπότε οἱ δύο προηγούμενες σχέσεις δίδουν : $E + F\mu_2 = 0$, $E_1 + F_1\mu_2 = 0$ καὶ ἐξ αὐτῶν ἕπεται :

$$E_1 : E = F_1 : F = F_1(\mu_1+\mu_2) : F(\mu_1+\mu_2) = \left[E_1 + F_1(\mu_1+\mu_2)\right] : \left[E + F(\mu_1+\mu_2)\right] \qquad (5)$$

Ἐὰν τώρα μεταφέρωμεν τοὺς τελευταίους ὅρους τῶν (4) εἰς τὰ δεύτερα μέλη καὶ διαιρέσωμεν κατὰ μέλη προκύπτει ὅτι τὸ δεξιὸν μέλος τῆς (5) ἰσοῦται μὲ $G_1 : G$ καὶ ἔτσι ἀπεδείχθη ὅτι οἱ (55.8) εἶναι συνθῆκες ἀναγκαῖες καὶ ἱκανὲς διὰ νὰ εἶναι ἡ ἀπεικόνισις ἰσογώνιος.

Ὁρισμός (55.2). — *Μία ἀπεικόνισις λέγεται ἰσεμβαδικὴ ὅταν ἕνα οἱονδήποτε τμῆμα τῆς μιᾶς ἐπιφανείας ἀπεικονίζεται εἰς τμῆμα ἴσου ἐμβαδοῦ ἐπὶ*

τῆς ἄλλης.
Ἀπό τήν θεωρία τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων, πού ἀναπτύσσομεν εἰς τό ἑπόμενον κεφάλαιον, προκύπτει εὐκόλως ὅτι γιά νά εἶναι ἡ ἀπεικόνισις ἰσεμβαδική πρέπει καί ἀρκεῖ τά ἐμβαδικά στοιχεῖα:

$$d\sigma = \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv, \qquad d\sigma_1 = \sqrt{E_1G_1-F_1^2}\,du\,dv$$

νά εἶναι ἴσα, δηλαδή πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι:

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{E_1G_1-F_1^2} \qquad (55.9)$$

Ὁρισμός (55.3). – *Μία ἀπεικόνισις λέγεται ἰσομετρική ὅταν εἶναι συγχρόνως ἰσογώνιος καί ἰσεμβαδική.*
Κατά τόν ὁρισμόν αὐτόν διά νά εἶναι ἡ ἀπεικόνισις ἰσομετρική πρέπει καί ἀρκεῖ τά θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξεως νά ἐπαληθεύουν συγχρόνως τίς σχέσεις (55.8) καί (55.9), ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει:

$$E = E_1, \; F = F_1, \; G = G_1 \qquad (55.10)$$

δηλαδή τά θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξεως τῶν δύο ἐπιφανειῶν νά εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα. Ἀπό τίς σχέσεις αὐτές προκύπτει ἀμέσως ὅτι τά μήκη s, s_1 δύο ἀντιστοίχων τόξων δύο ἐπιφανειῶν, πού εἶναι ἰσομετρικῶς ἀπεικονίσιμες, εἶναι ἴσα διότι ἔχομεν:

$$s = \int_{t_0}^{t}\sqrt{E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2}\,dt = \int_{t_0}^{t}\sqrt{E_1\dot{u}^2+2F_1\dot{u}\dot{v}+G_1\dot{v}^2}\,dt = s_1$$

Ἀντιστρόφως ἐάν κατά μίαν ἀπεικόνισιν τά μήκη δύο ἀντιστοίχων τόξων εἶναι ἴσα δηλαδή ἐάν ὑφίστανται οἱ ἀνωτέρω σχέσεις, τότε διά διαφορίσεως αὐτῶν προκύπτει ἡ σχέσις:

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2$$

ἡ ὁποία θά ἰσχύη γιά κάθε τιμή τοῦ λόγου $du : dv$, ἐπομένως θά ἀληθεύουν οἱ σχέσεις (55.10) καί ἡ ἀπεικόνισις θά εἶναι ἰσομετρική. Ἐξ αὐτῶν προκύπτει ὅτι ἡ διατήρησις τοῦ μήκους τῶν γραμμῶν εἶναι μία χαρακτηριστική ἰδιότης τῆς ἰσομετρικῆς ἀπεικονίσεως, γι' αὐτό καί δυνάμεθα νά ὁρίσωμεν τήν ἰσομετρικήν ἀπεικόνισιν, ὡς τήν ἀπεικόνισιν κατά τήν ὁποίαν τό μῆκος μιᾶς οἱασδήποτε γραμμῆς τῆς μιᾶς ἐπιφανείας, εἶναι ἴσον πρός τό μῆκος τῆς εἰκόνος αὐτῆς ἐπί τῆς ἄλλης.
Κατά τήν ἰσομετρικήν λοιπόν ἀπεικόνισιν δέν διατηροῦνται μόνον οἱ γωνίες καί τά ἐμβαδά ἀλλά καί τά μήκη τῶν γραμμῶν, ἐπομένως εἶναι δυνατόν ἡ μία ἐπιφάνεια παραμορφουμένη συνεχῶς χωρίς νά σχισθῆ νά συμπτυχθῆ ἤ νά διασταλῆ, νά ἐφαρμόση ἐπί τῆς ἄλλης. Διά τόν λόγον αὐτόν δύο ἐπιφάνειες, οἱ ὁποῖες ἀπεικονίζονται μεταξύ τους ἰσομετρικῶς, λέγονται καί ἐφαρμόσιμες, ἡ δέ ἰσομετρική ἀπεικόνισις λέγεται καί ἀνάπτυξις ἤ κάμψις τῆς μιᾶς ἐπιφανείας ἐπί τῆς ἄλλης.
Εἰς τήν πρότασιν (50.1) δείξαμε ὅτι ἡ πρώτη καμπυλότης μιᾶς ἐπιφανείας

εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκφρασθῆ ὡς συνάρτησις μόνον τῶν θεμελιωδῶν ποσῶν πρώτης τάξεως καὶ τῶν παραγώγων αὐτῶν. Ἐξ αὐτοῦ προκύπτει ἀμέσως ὅτι κατὰ τὴν ἰσομετρικὴν ἀπεικόνισιν δύο ἐπιφανειῶν, ἐπειδὴ τὰ ποσὰ αὐτὰ εἶναι ἴσα, οἱ πρῶτες καμπυλότητες αὐτῶν εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα εἶναι ἴσες. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ἰσότης τῶν πρώτων καμπυλοτήτων εἶναι ἀναγκαία συνθήκη διὰ τὴν ἰσομετρικὴν ἀπεικόνισιν, συμπεραίνομεν ὅτι μία ἐπιφάνεια δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀπεικονισθῆ ἰσομετρικῶς ἐπὶ οἱασδήποτε ἄλλης ἐπιφανείας. Π.χ. μία σφαίρα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀπεικονισθῆ ἰσομετρικῶς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, διότι ἡ μὲν σφαίρα ἔχει πρώτη καμπυλότητα διάφορον τοῦ μηδενός, ἐνῶ τὸ ἐπίπεδον ἔχει πρώτη καμπυλότητα μηδενικήν. Διὰ τὸν ἴδιο λόγο ἕνα ἐλλειψοειδὲς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀπεικονισθῆ ἰσομετρικῶς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Γενικῶς εἰς τὸ ἐπίπεδον μόνον οἱ ἀναπτυκτὲς ἐπιφάνειες, ποὺ ἔχουν ὡς γνωστὸν πρώτη καμπυλότητα μηδέν, ἐνδέχεται νὰ ἀπεικονίζωνται ἰσομετρικῶς· ὅτι πράγματι αὐτὸ συμβαίνη θὰ τὸ δείξωμεν εἰς τὸ παράδειγμα (55.8).

Ἀναφέρομεν τέλος ὅτι κατὰ μίαν ἰσομετρικὴν ἀπεικόνισιν οἱ γεωδαισιακὲς γραμμὲς τῆς μιᾶς ἐπιφανείας, ἀπεικονίζονται εἰς γεωδαισιακὲς γραμμὲς ἐπὶ τῆς ἄλλης. Αὐτὸ προκύπτει ἀμέσως ἀπὸ τὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα ποὺ ἔχουν οἱ γεωδαισιακὲς γραμμὲς νὰ εἶναι ὁ συντομώτερος δρόμος μεταξὺ δύο σημείων τῆς ἐπιφανείας καὶ ἀπὸ τὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα τῆς ἰσομετρικῆς ἀπεικονίσεως νὰ διατηρῆ τὰ μήκη τῶν γραμμῶν.

Παράδειγμα (55.1).– Νὰ δειχθῆ ὅτι δύο ἐπιφάνειες εἶναι πάντοτε δυνατὸν νὰ ἀπεικονισθοῦν ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης ἰσογωνίως καὶ μάλιστα κατὰ περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς τρόπους.

Λύσις. Πράγματι οἱ ἀναγκαῖες καὶ ἱκανὲς συνθῆκες (55.8), ὅταν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὶς τιμὲς τῶν E_1, F_1, G_1 ἐκ τῶν (55.5), ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα δύο διαφορικῶν ἐξισώσεων μετὰ μερικῶν παραγώγων πρώτης τάξεως ἐκ τοῦ ὁποίου εἶναι δυνατὸν καὶ μάλιστα κατὰ περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς τρόπους, δι' ὁλοκληρώσεως νὰ προσδιορίσωμεν τὶς δύο ἄγνωστες συναρτήσεις (55.2), οἱ ὁποῖες θὰ καθορίσουν τὴν ἰσογώνιον ἀπεικόνισιν τῶν δύο ἐπιφανειῶν.

Παράδειγμα (55.2).– Νὰ δειχθῆ ὅτι δύο ἐπιφάνειες εἶναι πάντοτε δυνατὸν νὰ ἀπεικονισθοῦν ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης ἰσεμβαδικῶς καὶ μάλιστα κατὰ περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς τρόπους.

Λύσις. Πράγματι ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη (55.9), ὅταν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὶς τιμὲς τῶν E_1, F_1, G_1 ἐκ τῶν (55.5), εἶναι μία διαφορικὴ ἐξίσωσις πρώτης τάξεως μὲ δύο ἄγνωστες συναρτήσεις u', v'. Ἐὰν λοιπὸν ὁρίσωμεν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν αὐθαιρέτως π.χ. τὴν u', τότε προκύπτει μία διαφορικὴ ἐξίσωσις μὲ μίαν ἄγνωστον συνάρτησιν τὴν v'_1 τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν δι' ὁλοκληρώσεως.

Παράδειγμα (55.3).– Νὰ δειχθῆ ὅτι μία ἐπιφάνεια δὲν εἶναι πάντοτε δυνατὸν νὰ ἀπεικονισθῆ ἰσομετρικῶς ἐπὶ μιᾶς οἱασδήποτε ἄλλης ἐπιφανείας.

Λ ύ σ ι ς. Αὐτὸ ἤδη τὸ ἔχομεν δείξει μὲ τὴν παρατήρηση ποὺ κάναμε διὰ τὴν πρώτη καμπυλότητα· προκύπτει ὅμως ἀμέσως παρατηροῦντες ὅτι οἱ ἀναγκαῖες καὶ ἱκανὲς συνθῆκες (55.10) λαμβάνοντες πάλι ὑπ' ὄψιν τὶς (55.5), ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα τριῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων μὲ δύο ἄγνωστες συναρτήσεις u', υ' τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι πάντοτε συμβιβαστόν.

Παράδειγμα (55.4). – Νὰ ἀπεικονισθῆ ἰσογωνίως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y ἡ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια $\bar{r} = [u\sigma\upsilon\nu\upsilon,\ u\eta\mu\upsilon,\ \varphi(u)]$

Λ ύ σ ι ς. Διὰ τὴν ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς ἔχομεν :

$$E = 1+\dot{\varphi}^2,\quad F=0,\quad G=u^2 \qquad (1)$$

Ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y εἶναι $\bar{r}\,' = (u', \upsilon', 0)$ ἐπομένως

$$E'=1,\quad F'=0,\quad G'=1$$

ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὶς ἐξισώσεις (55.5) προκύπτει :

$$E_1 = \left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon'}{\partial u}\right)^2,\quad F_1 = \frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial \upsilon} + \frac{\partial \upsilon'}{\partial u}\frac{\partial \upsilon'}{\partial \upsilon},\quad G_1 = \left(\frac{\partial u'}{\partial \upsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon'}{\partial \upsilon}\right)^2 \qquad (2)$$

Ἀντικαθιστῶντες τέλος τὶς (1) καὶ (2) εἰς τὶς (55.8) προκύπτει τὸ σύστημα :

$$\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon'}{\partial u}\right)^2\right] : (1+\dot{\varphi}^2) = \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial \upsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon'}{\partial \upsilon}\right)^2\right] : u^2,\qquad \frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial \upsilon} + \frac{\partial \upsilon'}{\partial u}\frac{\partial \upsilon'}{\partial \upsilon} = 0 \qquad (3)$$

τοῦ ὁποίου ἀρκεῖ μία μερικὴ λύσις διὰ νὰ ἔχωμεν μίαν ἀπεικόνισιν.
Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν διὰ νὰ ἁπλουστεύσωμεν τὴν ὁλοκλήρωσιν

$$u' = u'(u)\ ,\quad \upsilon' = \upsilon$$

ὁπότε ἡ δευτέρα τῶν ἐξισώσεων (3) ἐπαληθεύεται, ἡ δὲ πρώτη γίνεται :

$$\left(\frac{du'}{du}\right)^2 = (1+\dot{\varphi}^2) : u^2$$

ἐκ τῆς ὁποίας δι' ὁλοκληρώσεως ἔχομεν $u' = \int \frac{1}{u}\sqrt{1+\dot{\varphi}^2}\,du$· μία λοιπὸν ἰσογώνιος ἀπεικόνισις τῶν δοθεισῶν ἐπιφανειῶν καθορίζεται ἀπὸ τὸ σύστημα :

$$u' = \int \frac{1}{u}\sqrt{1+\dot{\varphi}^2}\,du,\quad \upsilon' = \upsilon \qquad (4)$$

Εἰς τὸ ἴδιο ἐξαγόμενον φθάνομεν ἁπλούστερα ἐργαζόμενοι ὡς ἑξῆς ἐπὶ τῶν γραμμικῶν στοιχείων τῶν δύο ἐπιφανειῶν :

$$ds^2 = (1+\dot{\varphi}^2)du^2 + u^2 d\upsilon^2,\qquad ds_1^2 = (du')^2 + (d\upsilon')^2$$

Γράφομεν τὸ πρῶτον γραμμικὸν στοιχεῖον ὑπὸ τὴν μορφὴν :

$$ds^2 = u^2\left[(1+\dot{\varphi}^2)u^{-2}du^2 + d\upsilon^2\right]$$

ὁπότε ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορίσωμεν τὶς u', υ' ἔτσι ὥστε :

$$(1+\dot{\varphi}^2)u^{-2}du^2 = (du')^2,\quad d\upsilon^2 = (d\upsilon')^2$$

θὰ ἔχωμεν τὸ ζητούμενον· ἐξ αὐτῶν βλέπομεν πράγματι ὅτι προκύπτουν οἱ ἐξισώσεις (4).

Διὰ τῆς ἀνωτέρω ἀπεικονίσεως οἱ γραμμὲς υ = σταθερὸν τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας, δηλαδὴ οἱ μεσημβρινοὶ αὐτῆς, ἀπεικονίζονται εἰς τὶς γραμμὲς υ' = σταθερὸν τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y δηλαδὴ στὶς παράλληλες πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x εὐθεῖες αὐτοῦ. Ἐὰν θεωρήσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y μίαν εὐθεῖαν $Ax+By+\Gamma=0$ αὐτὴ γράφεται $Au'+B\upsilon'+\Gamma=0$, ἐπομένως ἡ εἰκόνα αὐτῆς ἐπὶ τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας θὰ ἔχη ἐξίσωσιν :

$$A\int u^{-1}\sqrt{1+\dot{\varphi}^2}\,du + B\upsilon + \Gamma = 0$$

καὶ θὰ τέμνη τοὺς μεσημβρινοὺς ὑπὸ σταθερὴν γωνίαν διότι ἡ ἀπεικόνισις εἶναι ἰσογώνιος καὶ ἡ εἰκόνα αὐτῆς στὸ ἐπίπεδον τῶν x,y, δηλαδὴ ἡ εὐ θεῖα $Ax+By+\Gamma=0$, τέμνει ὑπό σταθερήν γωνίαν τίς εἰκόνες τῶν μεσημβρινῶν πού εἶναι οἱ εὐθεῖες $\upsilon^1 \equiv y =$ σταθερόν δηλαδή οἱ παράλληλες πρός τόν ἄξονα τῶν x εὐθεῖες. Μία τέτοια γραμμή ἐπί μιᾶς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας λέγεται λοξοδρομία.

Παράδειγμα (55.5). — Νά ἀπεικονισθῆ ἰσογωνίως ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y ἡ σφαίρα μέ ἐξίσωσιν : $\bar{r} = (\alpha\,\sigma\upsilon\nu u\,\sigma\upsilon\nu\upsilon,\ \alpha\eta\mu u\,\sigma\upsilon\nu\upsilon,\ \alpha\eta\mu\upsilon)$.

Λ ύ σ ι ς. Τά γραμμικά στοιχεῖα τῶν δύο ἐπιφανειῶν εἶναι :

$$ds^2 = \alpha^2 \sigma\upsilon\nu^2\upsilon\, du^2 + \alpha^2 d\upsilon^2, \qquad ds_1^2 = (du')^2 + (d\upsilon')^2$$

Γράφομεν τό γραμμικόν στοιχεῖον τῆς σφαίρας ὑπό τήν μορφήν

$$ds^2 = \alpha^2 \sigma\upsilon\nu^2\upsilon\,(du^2 + \tau\varepsilon\mu^2\upsilon\, d\upsilon^2)$$

ὁπότε ἐάν εἶναι δυνατόν νά προσδιορίσωμεν τίς u', υ' ἔτσι ὥστε :

$$(du')^2 = du^2, \quad (d\upsilon')^2 = \tau\varepsilon\mu^2\upsilon\, d\upsilon^2$$

θά ἔχωμεν τό ζητούμενον· ἐξ αὐτῶν ἔχομεν πράγματι :

$$u' = u, \quad \upsilon' = \ell n\, \varepsilon\varphi\left(\frac{\upsilon}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \qquad (1)$$

Ἀπό τήν ἐξίσωσιν τῆς σφαίρας προκύπτει ὅτι αἱ παράμετροι u, υ εἶναι οἱ γεωγραφικές συντεταγμένες αὐτῆς, u τό γεωγραφικόν μῆκος καί υ τό γεωγραφικόν πλάτος. Οἱ παράλληλοι κύκλοι $\upsilon =$ σταθερόν ἀπεικονίζονται εἰς τίς γραμμές $\upsilon' \equiv y =$ σταθερόν, δηλαδή εἰς τίς παράλληλες πρός τόν ἄξονα τῶν x εὐθεῖες καί οἱ μεσημβρινοί $u =$ σταθερόν εἰς τίς γραμμές $u' \equiv x =$ σταθερόν δηλαδή εἰς τίς παράλληλες πρός τόν ἄξονα τῶν y εὐθεῖες.

Ἡ ἀπεικόνισις τῆς σφαίρας ἐπί τοῦ ἐπιπέδου ὅπως ὁρίζεται ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) λέγεται προβολή τοῦ Mercator, ἔχει δέ καί ἱστορικήν ἀξίαν διότι βάσει αὐτῆς κατεσκευάσθησαν οἱ πρῶτοι γεωγραφικοί χάρται.

Μέ τήν βοήθειαν ἑνός τέτοιου χάρτου ἡ μετάβασις ἑνός πλοίου ἀπό ἕναν τόπον T εἰς ἕναν ἄλλον P γίνεται ὡς ἑξῆς : θεωροῦμεν ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y τίς εἰκόνες T_1, P_1 τῶν τόπων αὐτῶν, ἔστω δέ ὅτι ἡ εὐθεῖα T_1P_1 ἔχει ἐξίσωσιν $Ax+By+\Gamma=0$· ἡ εἰκόνα αὐτῆς ἐπί τῆς σφαίρας, ὅπως ἀναφέραμε καί εἰς τό προηγούμενον παράδειγμα, θά εἶναι ἡ λοξοδρομία : $Au + B\,\ell n\,\varepsilon\varphi\left(\frac{\upsilon}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \Gamma = 0$. Ἐάν ἡ εὐθεῖα σχηματίζη μέ τόν ἄξονα τῶν y τήν σταθερήν γωνίαν α τότε καί ἡ λοξοδρομία θά σχηματίζη μέ τούς μεσημβρινούς τῆς σφαίρας τήν ἰδίαν γωνίαν α, ἐπομένως διά τήν μετάβασιν ἀπό τόν τόπον T εἰς τόν τόπον P ἀρκεῖ κατά τήν κίνησιν τοῦ πλοίου ὁ κατά μῆκος ἄξων αὐτοῦ νά σχηματίζη μέ τήν διεύθυνσιν τῆς μαγνητικῆς βελόνης γωνίαν α, τήν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπό τόν γεωγραφικόν χάρτην.

Παράδειγμα (55.6). — Νά ἀπεικονισθῆ ἰσεμβαδικῶς ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y ἡ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια $\bar{r} = [u\,\sigma\upsilon\nu\upsilon,\ u\,\eta\mu\upsilon,\ \varphi(u)]$.

Λ ύ σ ι ς. Τά ἐπιφανειακά στοιχεῖα τῶν δύο ἐπιφανειῶν εἶναι :

$$d\sigma = |u|\sqrt{1+\dot{\varphi}^2}\, du\, d\upsilon, \qquad d\sigma_1 = du'\, d\upsilon'$$

ἐπομένως λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τίς (55.6) καί (55.9) θά ἔχωμεν

$$|u|\sqrt{1+\dot{\varphi}^2} = \frac{\partial(u', \upsilon')}{\partial(u, \upsilon)} \equiv \frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial \upsilon'}{\partial \upsilon} - \frac{\partial u'}{\partial \upsilon}\frac{\partial \upsilon'}{\partial u}$$

Ἐάν λάβωμεν $v'=v$ ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις γίνεται

$$\frac{\partial u'}{\partial u}=|u|\sqrt{1+\dot\varphi^2}$$

ἐκ τῆς ὁποίας δι' ὁλοκληρώσεως προκύπτει :

$$u'=\int |u|\sqrt{1+\dot\varphi^2}\,du+f(v)$$

ὅπου $f(v)$ αὐθαίρετος συνάρτησις τῆς v. Ἐξ αὐτῶν προκύπτει ὅτι ἡ ζητουμένη ἀπεικόνισις ὁρίζεται ἀπό τίς ἐξισώσεις :

$$u'=\int |u|\sqrt{1+\dot\varphi^2}\,du+f(v),\quad v'=v$$

Παράδειγμα (55.7).— Νά ἀποδειχθῆ ὅτι οἱ ἐπιφάνειες :

$$\bar r=(u,\,\eta\mu v,\ 1-\sigma\upsilon\nu v),\quad \bar r=(u,v,0)$$

ἀπεικονίζονται ἰσομετρικῶς ἡ μία ἐπί τῆς ἄλλης.

Λ ύ σ ι ς. Ἐπειδή οἱ ἐπιφάνειες ἀναφέρονται εἰς τό αὐτό σύστημα παραμέτρων ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι τά γραμμικά τους στοιχεῖα ταυτίζονται· διά τήν πρώτην ἐξ αὐτῶν ἔχομεν $\bar r_u=(1,0,0)$, $\bar r_v=(0,-\sigma\upsilon\nu v,\eta\mu v)$, $E=1$, $F=0$, $G=1$, ἐπομένως $ds^2=du^2+dv^2$· διά τήν δευτέρα ἔχομεν $\bar r_u=(1,0,0)$, $\bar r_v=(0,1,0)$, $E=1$, $F=0$, $G=1$, ἐπομένως $ds_1^2=du^2+dv^2$ δηλαδή $ds^2\equiv ds_1^2$ καί τό ζητούμενον ἀπεδείχθη. Ἡ πρώτη ἐκ τῶν ἐπιφανειῶν ἔχει μή παραμετρικήν ἐξίσωσιν : $y^2+(z-1)^2=1$ δηλαδή πρόκειται περί ἑνός κυλίνδρου, ἡ δέ ἄλλη ἐπί τῆς ὁποίας ἀπεικονίζεται ἰσομετρικῶς δέν εἶναι ἄλλη ἀπό τό ἐπίπεδον τῶν x,y.

Παράδειγμα (55.8).— Νά ἀποδειχθῆ ὅτι οἱ ἀναπτυκτές ἐπιφάνειες ἀπεικονίζονται ἰσομετρικῶς ἐπί τοῦ ἐπιπέδου.

Λ ύ σ ι ς. Θεωροῦμεν τήν ἀναπτυκτήν ἐπιφάνειαν :

$$\bar r=\bar p(\lambda)+t\,\bar e(\lambda)\equiv\bar r(\lambda,t)$$

ἡ ὁποία παράγεται ἀπό τίς ἐφαπτόμενες τῆς γραμμῆς $\bar p=\bar p(\lambda)$, ὅπου λ τό μῆκος τόξου αὐτῆς καί τό ἐπίπεδον τῶν x,y· τά γραμμικά στοιχεῖα τῶν δύο αὐτῶν ἐπιφανειῶν εἶναι ἀντιστοίχως :

$$ds^2=(1+t^2\kappa^2)\,d\lambda^2+2d\lambda dt+dt^2,\ ds_1^2=dx^2+dy^2$$

ὅπου μέ κ παραστήσαμε τήν καμπυλότητα τῆς γραμμῆς $\bar p=\bar p(\lambda)$. Διά νά δείξωμεν τό ζητούμενον ἀρκεῖ νά εὕρωμεν δύο σχέσεις τῆς μορφῆς :

$$x=x(\lambda,t),\qquad y=y(\lambda,t)\qquad (1)$$

τέτοιες ὥστε τό γραμμικόν στοιχεῖον τοῦ ἐπιπέδου νά ταυτίζεται μέ τό γραμμικόν στοιχεῖον τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας, δηλαδή νά εἶναι ἐκ ταυτότητος :

$$dx^2+dy^2=(1+t^2\kappa^2)\,d\lambda^2+2d\lambda dt+dt^2$$

Ἡ ταυτότης αὐτή, θέτοντες $\lambda+t=u$ γράφεται διαδοχικῶς ὡς ἑξῆς :

$$dx^2+dy^2=(d\lambda+dt)^2+t^2\kappa^2d\lambda^2$$

$$dx^2+dy^2=du^2+(u-\lambda)^2\kappa^2d\lambda^2$$

Ἡ καμπυλότης κ εἶναι συνάρτησις τοῦ μήκους τόξου λ, ἐπομένως θέτοντες:

$$\int\kappa(\lambda)\,d\lambda=v$$

ἡ τελευταία ταυτότης γίνεται :

$$dx^2+dy^2 = du^2+(u-\lambda)^2 dv^2$$

Ἀπὸ τὴν (2) τὸ λ προσδιορίζεται ὡς συνάρτησις τοῦ υ, ἐπομένως παριστάνοντες αὐτὴν μὲ φ(υ) θὰ ἔχωμεν τελικῶς:

$$dx^2+dy^2 = du^2+(u-\varphi)^2 dv^2.$$

Διὰ νὰ ἰσχύῃ αὐτὴ ἀρκεῖ προφανῶς νὰ ἔχωμεν:

$$dx+idy = [du+i(u-\varphi)dv]e^{iv}$$
$$dx-idy = [du-i(u-\varphi)dv]e^{-iv}$$

ἐκ τῶν ὁποίων δι' ὁλοκληρώσεως προκύπτει:

$$x+iy = ue^{iv}-i\int\varphi e^{iv}dv$$
$$x-iy = ue^{-iv}+i\int\varphi e^{-iv}dv$$

Ἐὰν τώρα εἰς αὐτὲς ἀντικαταστήσωμεν τὴν συνάρτησιν $e^{\pm iv}$ μὲ τὴν ἴση πρὸς αὐτὴν συνυ ± iημυ καὶ ἐξισώσωμεν τὰ πραγματικὰ καὶ φανταστικὰ μέρη προκύπτουν οἱ σχέσεις:

$$x = u\,\text{συν}v + \int\varphi\,\text{ημ}v\,dv$$
$$y = u\,\text{ημ}v - \int\varphi\,\text{συν}v\,dv$$

οἱ ὁποῖες εἶναι οἱ ζητούμενες σχέσεις (1) διότι τὰ u,υ εἶναι συναρτήσεις τῶν λ,t καὶ ἔτσι ἀπεδείχθη τὸ ζητούμενον.

56. Ἐξισώσεις τῶν Mainardi-Codazzi. — Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ παράγωγοι δευτέρας τάξεως τῆς ἀκτίνος $\bar r$ μιᾶς ἐπιφανείας, δίδονται ἀπὸ τοὺς τύπους:

$$\begin{aligned}\bar r_{uu} &= \alpha_1\bar r_u+\beta_1\bar r_v+L\bar n\\ \bar r_{uv} &= \alpha_2\bar r_u+\beta_2\bar r_v+M\bar n\\ \bar r_{vv} &= \alpha_3\bar r_u+\beta_3\bar r_v+N\bar n\end{aligned} \qquad (56.1)$$

ὅπου οἱ συντελεσταὶ α_i, β_i δίδονται ἀπὸ τοὺς τύπους (52.3). Πράγματι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀνάλυσις τοῦ διανύσματος $\bar r_{uu}$ κατὰ τὶς διευθύνσεις τῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων $\bar r_u, \bar r_v, \bar n$ εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$\bar r_{uu} = A_1\bar r_u+B_1\bar r_v+\Gamma_1\bar n$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὴν ἐσωτερικῶς ἐπὶ $\bar n$ προκύπτει $\bar r_{uu}\bar n=\Gamma_1$ δηλαδὴ εἶναι πράγματι $L=\Gamma_1$· ἐὰν τώρα πολλαπλασιάσωμεν αὐτὴν ἐσωτερικῶς ἐπὶ $\bar r_u$ καὶ $\bar r_v$ προκύπτουν οἱ σχέσεις:

$$\bar r_{uu}\bar r_u = A_1E+B_1F \quad , \qquad \bar r_{uu}\bar r_v = A_1F+B_1G$$

οἱ ὁποῖες λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς τύπους (50.11) γίνονται:

$$\tfrac{1}{2}E_u = A_1E+B_1F \quad , \qquad F_u-\tfrac{1}{2}E_v = A_1F+B_1G$$

Ἐξ αὐτῶν ἐπιλύοντες ὡς πρὸς A_1, B_1 προκύπτει:

$$A_1 = (GE_u-2FF_u+FE_v):2w^2=\alpha_1\,,\quad B_1=(2EF_u-EE_v-FE_u):2w^2=\beta_1$$

καὶ ἔτσι ἀπεδείχθη ὁ πρῶτος τῶν τύπων (56.1), ἐργαζόμενοι δὲ ὁμοίως ἀποδεικνύομεν καὶ τοὺς δύο ἄλλους· οἱ ἀποδειχθέντες τύποι λέγονται τύποι τοῦ Gauss διὰ τὰς παραγώγους δευτέρας τάξεως τῆς $\bar r$.

Ἂς θεωρήσωμεν τώρα τὶς διανυσματικὲς σχέσεις:

$$\frac{\partial}{\partial v}\cdot\bar r_{uu} = \frac{\partial}{\partial u}\bar r_{uv}\,,\quad \frac{\partial}{\partial v}\bar r_{uv} = \frac{\partial}{\partial u}\bar r_{vv} \qquad (56.2)$$

καὶ ἄς ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν πρώτη ἐξ' αὐτῶν τὰς $\bar{r}_{uu}, \bar{r}_{uv}$ ἐκ τῶν (56.1)· μετὰ τὴν παραγώγισιν προκύπτει :

$$\frac{\partial a_1}{\partial v}\bar{r}_u+\frac{\partial \beta_1}{\partial v}\bar{r}_v+\frac{\partial L}{\partial v}\bar{n}+a_1\bar{r}_{uv}+\beta_1\bar{r}_{vv}+L\bar{n}_v=\frac{\partial a_2}{\partial u}\bar{r}_u+\frac{\partial \beta_2}{\partial u}\bar{r}_v+\frac{\partial M}{\partial u}\bar{n}+a_2\bar{r}_{uu}+\beta_2\bar{r}_{uv}+M\bar{n}_u$$

Ἐὰν εἰς αὐτὴν ἀντικαταστήσωμεν τὰς παραγώγους δευτέρας τάξεως τῆς $\bar{r}$ ἀπὸ τοὺς τύπους (56.1) καὶ τὰς παραγώγους τοῦ $\bar{n}$ ἀπὸ τοὺς τύπους (48.6) τοῦ Weingarten, θὰ προκύψουν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὰ μὴ συγγραμικὰ διανύσματα $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{n}$ ὁπότε ἐξισώνοντες τοὺς ἀντιστοίχους συντελεστὰς θὰ ἔχωμεν τρεῖς βαθμωτὲς ἐξισώσεις· π.χ. ἐξισώνοντες τοὺς συντελεστὰς τοῦ $\bar{n}$ προκύπτει :

$$L_v+a_1M+\beta_1N=M_u+a_2L+\beta_2M \qquad (1)$$

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι ἐπὶ τῆς δευτέρας τῶν (56.2) καὶ ἐξισώνοντες πάλι τοὺς συντελεστὰς τοῦ $\bar{n}$, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις :

$$M_v+a_2M+\beta_2N=N_u+a_3L+\beta_3M \qquad (2)$$

Τέλος ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) προκύπτει :

$$\begin{aligned} L_v-M_u&=a_2L-(a_1-\beta_2)M-\beta_1N \\ M_v-N_u&=a_3L-(a_2-\beta_3)M-\beta_2N \end{aligned} \qquad (56.3)$$

Οἱ ἐξισώσεις αὐτὲς λέγονται ἐξισώσεις τοῦ Codazzi, ἐπειδὴ ὅμως καὶ ὁ Mainardi δώδεκα χρόνια ἐνωρίτερον εἶχε δώσει ὁμοίας πρὸς αὐτὰς ἐξισώσεις, λέγονται ἐξισώσεις τῶν Mainardi - Codazzi. Οἱ ἐξισώσεις αὐτὲς μαζὺ μὲ τὴν χαρακτηριστικὴν ἐξίσωσιν (50.12) τοῦ Gauss, συνδέουν τὰ ἕξη θεμελιώδη ποσὰ πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως καὶ ἀποτελοῦν τὶς τρεῖς θεμελιώδεις ἐξισώσεις τῆς θεωρίας τῶν ἐπιφανειῶν. Ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ ἐξισώσεις αὐτὲς εἶναι ἀνεξάρτητες μεταξύ τους, οὐδεμία δὲ ἄλλη ἀνεξάρτητος αὐτῶν ὑπάρχει. Τέλος ἀναφέρομεν τὸ ἑξῆς θεμελιῶδες θεώρημα τῆς θεωρίας τῶν ἐπιφανειῶν :

Πρότασις (56.1).– *Μία ἐπιφάνεια καθορίζεται τελείως ἀπὸ ἀπόψεως μορφῆς, ὅταν δοθοῦν τὰ θεμελιώδη ποσὰ πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως ὡς συναρτήσεις τῶν ἐπ' αὐτῆς λαμβανομένων παραμέτρων, οἱ ὁποῖες πληροῦν τὴν χαρακτηριστικὴν ἐξίσωσιν τοῦ Gauss καὶ τὶς ἐξισώσεις Mainardi - Codazzi· ἡ θέσις μόνον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς παραμένει ἀκαθόριστος.*

Ἡ πρώτη ἀπόδειξις τῆς θεμελιώδους αὐτῆς προτάσεως ἐδόθη ὑπὸ τοῦ μαθηματικοῦ O. Bonnet.

Παράδειγμα (56.1).– Νὰ εὑρεθῆ ἡ μορφὴ τῶν θεμελιωδῶν ἐξισώσεων μιᾶς ἐπιφανείας τῆς ὁποίας τὸ παραμετρικὸν δίκτυον εἶναι ὀρθογώνιον καὶ οἱ γραμμὲς u εἶναι γεωδαισιακὲς αὐτῆς.

Λ ύ σ ι ς. Θὰ ἔχωμεν $F=0$ διότι τὸ δίκτυον εἶναι ὀρθογώνιον, ἐπειδὴ δὲ οἱ γραμμὲς u εἶναι γεωδαισιακὲς θὰ ἰσχύη ἡ σχέσις (52.6) ὁπότε θὰ εἶναι: $-EE_v=0$ δηλαδὴ $E_v=0$, $E=E(u)$ καὶ τὸ γραμμικὸν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας γράφεται $ds^2=E(u)du^2+Gdv^2$. Ἐὰν θέσωμεν $u_1=\int E du$ καὶ παραστήσωμεν τὴν νέαν παράμετρον πάλι μὲ u, τὸ γραμμικὸν στοιχεῖον γράφεται $ds^2 = du^2 + G du^2$ δηλαδὴ εἶναι τώρα εἰς τὸ νέον σύστημα : $E = 1$, $F = 0$, $G = G(u,v)$ ὁπότε οἱ τρεῖς θεμελιώδεις ἐξισώσεις γράφονται :

$$K = (LN - M^2) : G = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

$$L_v = M_u = M \frac{\partial}{\partial u} \ln \sqrt{G}$$

$$M_v - N_u = M \frac{\partial}{\partial v} \ln \sqrt{G} - (L+N) \frac{\partial}{\partial u} \ln \sqrt{G}.$$

Προφανῶς ἡ νέα παράμετρος u_1 δηλαδὴ ἡ u ὅπως τὴν ἔχομεν πάλι σημειώσει δὲν εἶναι ἄλλη ἀπὸ τὸ μῆκος τόξου τῆς γεωδαισιακῆς γραμμῆς u.

Ἀσκήσεις

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις τῆς καθέτου καὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου ἑκάστης τῶν ἑπομένων ἐπιφανειῶν εἰς τὸ σημειούμενον σημεῖον.

673) $z = 2x^2 + 3y^2$ $(2, 1, 11)$ 674) $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 12$ $(2, 1, 1)$

675) $z = 3xy$ $(1, 2, 6)$ 676) $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 14$ $(1, 8, -27)$

677) $x^2y^2 + z^2 = 20$ $(-1, 2, 4)$ 678) $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 15$ $(-1, 5, 3)$

Σχεδιάσατε προχείρως ἑκάστην τῶν ἑπομένων ἐπιφανειῶν.

679) $(x-z)^2 = 9$ 681) $4z^2 + 9x^2 = 36$ 682) $x^2 = 2z - 4$

682) $y^2 + z^2 = 2(z-1)$ 683) $z^2 = y + z$ 684) $4y^2 - 9x^2 = 36$

685) $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$ 686) $(x-z)^2 + y^2 = z$ 687) $4x^2 - y^2 = 4(z-1)$

688) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 689) $z^2 + (y-3)^2 = x$ 690) $(x-1)^2 + y^2 + 2z^2 = 3$

691) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον $(4, 2, 1)$ τῆς ἐπιφανείας $x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 3x - 2y + 10z - 42 = 0$.

692) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ σφαῖρα $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ καὶ ὁ κύλινδρος $yz = a^2$ ἐφάπτονται, δηλ. ἔχουν τὸ ἴδιο ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τὸ σημεῖον $(0, a, a)$.

693) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας $az = \text{τοξ}^2\text{ημ}\,\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ εἰς τὸ σημεῖον (x_0, y_0, z_0).

694) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς ἐπιφανείας $z = x\sigma\left(\frac{y}{x}\right)$ διέρχονται διὰ σταθεροῦ σημείου.

695) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ κατηγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας : $x^{\mu}\left(z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \sigma\left(\frac{y}{x}\right)$ εἰς τὸ σημεῖον (x_0, y_0, z_0), εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου ἐπαφῆς ἀπὸ τὴν ἀρχήν.

696) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ γραμμὴ $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $xy + xz = 2$ ἐφάπτεται τῆς ἐπιφανείας $xyz - x^2 - 6y = -6$ εἰς τὸ σημεῖον $(1, 1, 1)$.

697) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις τῶν ἐπιφανειῶν ποὺ παράγονται διὰ περιστροφῆς τῆς παραβολῆς $y^2 = 4z$, $x = 0$ i) περὶ τὸν ἄξονα τῶν z καὶ ii) περὶ τὴν εὐθεῖαν $x = 0$, $z = -1$.

698) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἡ ὁποία ἔχει κορυφὴν τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ τῆς ὁποίας οἱ γενέτειρες σχηματίζουν γωνίαν a μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν z.

699) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας $x^k + y^k + z^k = a^k$ εἰς τὸ σημεῖον

(x_0, y_0, z_0) καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ $\kappa = \frac{1}{2}$ οἱ συντεταγμένες ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν.

700) Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ ἐπιφάνειες $x^2+y^2+z^2=\alpha x$ καὶ $x^2+y^2+z^2=\beta y$ τέμνονται ὑπὸ σταθερὴν γωνίαν.

. . .

701) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀνώμαλα σημεῖα τῆς ἐπιφανείας $\bar{r} = (\sigma\upsilon\nu u\,\sigma\upsilon\nu \upsilon,\ \sigma\upsilon\nu u\,\eta\mu \upsilon,\ \eta\mu u)$ καὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τὸ σημεῖον $u = \upsilon = \pi/4$.

702) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας $\bar{r} = (u\,\sigma\upsilon\nu \upsilon,\ u\,\eta\mu \upsilon,\ \sigma(u)+\alpha\upsilon)$ ὅπου $\alpha \neq 0$, εἶναι ὅλα ὁμαλὰ καὶ νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου καὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ σημεῖον $u=0,\ \upsilon=0$.

703) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρώτη θεμελιώδης τετραγωνικὴ μορφὴ καὶ τὸ ἐμβαδικὸν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας ποὺ προκύπτει ὅταν περιστρέψωμεν τὴν γραμμὴν $y = ch x$ περὶ τὸν ἄξονα τῶν x.

704) Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας $\bar{r} = [\alpha(1-\upsilon) sh u,\ \alpha(1-\upsilon) ch u,\ \upsilon\beta]$ ἕνα σημεῖον τέτοιο ὥστε ἡ κάθετος τῆς ἐπιφανείας εἰς αὐτὸ νὰ διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων.

705) Ἡ κάθετος τῆς ἐπιφανείας $\bar{r} = (u\,\sigma\upsilon\nu \upsilon,\ u\,\eta\mu \upsilon,\ \beta\upsilon)$ εἰς τὸ σημεῖον $u = 2\beta,\ \upsilon = 0$, τέμνει τὴν ἐπιφάνεια εἰς ἄπειρα ἄλλα σημεῖα· νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀμέσως ἑπόμενον πρὸς τὸ δοθὲν σημεῖον τομῆς.

706) Δίδεται ἡ ἐπιφάνεια $\bar{r} = (\varphi\,\sigma\upsilon\nu \upsilon,\ \varphi\,\eta\mu \upsilon,\ \beta\upsilon)$ ὅπου $\varphi = \varphi(u,\upsilon)$ καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἡ συνάρτησις φ ἔτσι ὥστε οἱ παραμετρικὲς γραμμὲς νὰ τέμνωνται ὑπὸ σταθερὴν γωνίαν α.

707) Νὰ εὑρεθοῦν ἡ πρώτη θεμελιώδης μορφὴ καὶ τὸ ἐμβαδικὸν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας ποὺ σχηματίζουν οἱ ἐφαπτόμενες τῆς ἕλικος $\bar{r} = (\alpha\,\sigma\upsilon\nu u,\ \alpha\,\eta\mu u,\ \beta u)$.

708) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\bar{r} = [\alpha(u+\upsilon),\ \beta(1-u\upsilon),\ \gamma(u-\upsilon)] : (1+u\upsilon)$ παριστάνει ἕνα μονόχωνον ὑπερβολοειδὲς καὶ ἐν συνεχείᾳ νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν καὶ τῶν γραμμῶν $u = \upsilon$ καὶ $u\upsilon =$ σταθερόν.

. . .

709) Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιπέδων τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν συντεταγμένων ἐπὶ τὴν ἀρχὴν εἶναι σταθερόν.

710) Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς διπαραμετρικῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιπέδων: $(u-\upsilon)\beta\gamma x + (1+u\upsilon)\gamma\alpha y + (1-u\upsilon)\alpha\beta z = \alpha\beta\gamma(u+\upsilon)$, ὅπου u, υ αἱ παράμετροι τῆς οἰκογενείας.

711) Δείξατε ὅτι ἡ περιβάλλουσα τῆς ἐπιφανείας $F(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma) = 0$, ὅπου αἱ παράμετροι α, β, γ συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως $f(\alpha,\beta,\gamma) = 0$, προκύπτει δι' ἀπαλειφῆς τῶν α, β, γ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων : $F = 0,\ f = 0,\ F_\alpha : f_\alpha = F_\beta : f_\beta = F_\gamma : f_\gamma$.

712) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐπιπέδων $\lambda x + \mu y + \nu z = \kappa$ ὅπου $\kappa^2 = \alpha^2\lambda^2 + \beta^2\mu^2 + \gamma^2\nu^2$ εἶναι ἕνα ἐλλειψοειδές.

713) Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς $\beta^2 x^2 + \alpha^2(y^2+z^2) = \alpha^2\beta^2$ ὅταν αἱ παράμετροι α, β συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως $\alpha^2 + \beta^2 = \kappa^2$.

714) Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν σφαιρῶν $(x-\alpha)^2 + y^2 + z^2 = \kappa^2(\lambda^2 - \alpha^2) : \mu^2$, ὅταν παράμετρος τῆς οἰκογενείας εἶναι ἡ α.

715) Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα διέρχονται διὰ σταθεροῦ σημείου A καὶ ἰσαπέχουν ἀπὸ ἕνα ἄλλο ἐπίσης σταθερὸν σημεῖον B.

716) Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν σφαιρῶν σταθερῆς ἀκτῖνος κ τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κινοῦνται ἐπὶ δοσμένης περιφερείας ἀκτῖνος λ.

717) Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐπιπέδων $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$ ὅταν αἱ παράμετροι α, β, γ συνδέονται διὰ τῶν σχέσεων : $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, $\alpha^2:(\delta^2-\kappa^2)+\beta^2:(\delta^2-\lambda^2)+\gamma^2:(\delta^2-\mu^2)=0$, ὅπου $\kappa,\lambda,\mu,\delta$ σταθερές.

718) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια ἡ ὁποία εἶναι περιβάλλουσα τῶν καθέτων ἐπιπέδων μιᾶς γραμμῆς $\bar{r}=\bar{r}(s)$ καθὼς καὶ ὁ λαιμὸς αὐτῆς.

719) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα ἡ εὐθεία : $x=az+\beta$, $y=a_1z+\beta_1$ ὅπου a,β,a_1,β_1 συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς t, παράγει ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν.

720) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια $x=u^2z+u$, $y=uz+u$ δὲν εἶναι ἀναπτυκτή· εὕρητε ὅμως μίαν γενέτειραν κατὰ μῆκος τῆς ὁποίας τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον νὰ παραμένῃ τὸ αὐτό.

721) Νὰ εὑρεθῇ ἡ καμπυλότης καὶ ἡ στρέψις τοῦ λαιμοῦ τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας ἡ ὁποία εἶναι περιβάλλουσα τῆς μονοπαραμετρικῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιπέδων $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ ὅπου A,B,Γ,Δ συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς t.

. . .

722) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ νὰ τέμνωνται καθέτως οἱ ἐπιφανειακὲς γραμμὲς ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $Pdu^2+Qdudv+Rdv^2=0$, ὅπου P,Q,R συναρτήσεις τῶν u,v.

723) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας κατὰ τὴν ὁποίαν τέμνονται οἱ ἐπιφανειακὲς γραμμὲς τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

724) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν γραμμῶν οἱ ὁποῖες τέμνουν ὑπὸ σταθερὴν γωνίαν β τὶς παραμετρικὲς γραμμὲς $u=$ σταθερόν, ὅταν τὸ δίκτυον τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας εἶναι ὀρθογώνιον.

725) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ διαφορικὲς ἐξισώσεις τῶν γραμμῶν ποὺ διχοτομοῦν τὶς γωνίες τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας.

726) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ θεμελιώδη ποσὰ πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως τῆς κωνοειδοῦς ἐπιφανείας $\bar{r}=[u\sigma\upsilon\nu v,\ u\eta\mu v,\ \varphi(v)]$.

727) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ θεμελιώδη ποσὰ πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως τῆς ἐπιφανείας τῶν δικαθέτων τῆς γραμμῆς $\bar{r}=\bar{r}(s)$.

728) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δι᾽ ἑκάστην ἐπιφάνειαν ἰσχύουν οἱ σχέσεις :

$$(LN-M^2)[\bar{n}_u\bar{n}]=W(f\bar{n}_u-e\bar{n}_v),\qquad (LN-M^2)[\bar{n}_v\bar{n}]=W(g\bar{n}_u-f\bar{n}_v)$$

ὅπου τὰ ποσὰ e,f,g ὁρίζονται ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις :

$$w^2e=EM^2-2FLM+GL^2,\quad w^2f=EMN-F(LN+M^2)+GLM,\quad w^2g=EN^2-2FMN+GM^2$$

729) Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ γραμμὲς ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν : $du^2-(u^2+\beta^2)dv^2=0$, σχηματίζουν ἕνα ὀρθογώνιον σύστημα γραμμῶν τοῦ ὀρθοῦ ἑλικοειδοῦς $\bar{r}=(u\sigma\upsilon\nu v,\ u\eta\mu v,\ \beta v)$.

730) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ πρωτεύουσες καμπυλότητες ἡ ὁλικὴ καὶ ἡ μέση καμπυλότης καθὼς καὶ αἱ γραμμὲς καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας τῶν δικαθέτων τῆς γραμμῆς $\bar{r}=\bar{r}(s)$.

731) Ὁμοίως διὰ τὸ ὀρθὸν ἑλικοειδές : $\bar{r}=(u\sigma\upsilon\nu v,\ u\eta\mu v,\ \beta v)$.

732) Ὁμοίως διὰ τὴν ἐπιφάνεια : $\bar{r} = [\alpha(u+v),\ \beta(u-v),\ uv]$.

733) 〃 〃 〃 〃 : $\bar{r} = [u\sigma\upsilon\nu v,\ u\eta\mu v,\ \varphi(u)]$.

734) Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνθήκη διὰ νὰ εἶναι ἡ δείκτρια Dupin εἰς ἕνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας $z = z(x,y)$, ζεῦγος ὀρθογωνίων ὑπερβολῶν.

735) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ πρωτεύουσες ἀκτῖνες καμπυλότητος τοῦ παραβολοειδοῦς $xy = \alpha z$ εἰς ἕνα σημεῖον τομῆς αὐτοῦ μὲ τὸ ὑπερβολοειδὲς $x^2+y^2-z^2+\alpha^2 = 0$.

736) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ δείκτρια Dupin σὲ κάθε σημεῖον τοῦ ἑλικοειδοῦς $z = \alpha\,\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{y}{x}$ εἶναι ζεῦγος ὀρθογωνίων ὑπερβολῶν.

737) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐπιφάνεια $4\alpha^2 z^2 = (x^2-2\alpha^2)(y^2-2\alpha^2)$ ἔχει μίαν ὀμφαλικὴν γραμμήν, δηλ. τὰ ὀμφαλικὰ της σημεῖα σχηματίζουν μίαν γραμμήν, ἐπὶ τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=4\alpha^2$.

738) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ μέση καμπυλότης τῆς ἑλικοειδοῦς ἐπιφανείας $\bar{r} = [u\sigma\upsilon\nu v,\ u\eta\mu v,\ \varphi(u)+\beta v]$ κατὰ μῆκος τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν v, εἶναι σταθερή.

Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ παραμετρικὲς γραμμὲς ἑκάστης τῶν ἑπομένων ἐπιφανειῶν εἶναι συζυγεῖς γραμμὲς αὐτῆς.

739) $\bar{r} = [u\sigma\upsilon\nu v,\ u\eta\mu v,\ \varphi(u)]$ 740) $\bar{r}_1 = \bar{r}(s)+t\bar{\varepsilon} \equiv \bar{r}_1(s,t)$

741) $\bar{r} = [A(u-\alpha)^\lambda(v-\alpha)^\mu,\ B(u-\beta)^\lambda(v-\beta)^\mu,\ \Gamma(u-\gamma)^\lambda(v-\gamma)^\mu]$.

Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ παραμετρικὲς γραμμὲς ἑκάστης τῶν ἑπομένων ἐπιφανειῶν εἶναι ἀσυμπτωτικὲς γραμμὲς αὐτῆς.

742) $\bar{r} = [u\sigma\upsilon\nu v,\ u\eta\mu v,\ \beta v]$ 743) $\bar{r} = [\alpha(u+v),\ \beta(u-v),\ uv]$

744) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας $z = z(x,y)$ καὶ ἡ στρέψις αὐτῶν.

745) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας $\bar{r} = [u\sigma\upsilon\nu v,\ u\eta\mu v,\ \varphi(u)]$.

746) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀσυμπτωτικὲς γραμμὲς τῆς ἐπιφανείας : $\bar{r} = [3u(1+v^2)-u^3,\ 3v(1+u^2)-v^3,\ 3(u^2-v^2)]$.

747) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα τοῦ ἐλλειψοειδοῦς $x^2:\alpha^2+y^2:\beta^2+z^2:\gamma^2=1$ $(\alpha>\beta>\gamma)$ διὰ τὰ ὁποῖα $y=0$, $x^2=\alpha^2(\alpha^2-\beta^2):(\alpha^2-\gamma^2)$, $z^2=\gamma^2(\beta^2-\gamma^2):(\alpha^2-\gamma^2)$, εἶναι ὀμφαλικά.

748) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁλικὴ καμπυλότης καὶ ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν γραμμῶν καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας $\bar{r} = (u\sigma\upsilon\nu v,\ u\eta\mu v,\ v^2)$.

749) Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ στρέψεις τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν μιᾶς ἐπιφανείας δίδονται ἀπὸ τὸν τύπον $\sigma = \pm\sqrt{-K}$.

750) Δείξατε ὅτι τὰ ὀμφαλικὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας $(x:\alpha)^{\frac{2}{3}}+(y:\beta)^{\frac{2}{3}}+(z:\gamma)^{\frac{2}{3}}=1$ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς σφαίρας.

751) Νὰ δειχθῇ ὅτι μία ἐπίπεδος γραμμὴ ἐπιφανείας εἶναι γεωδαισιακὴ ὅταν καὶ μόνον ὅταν τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας κατὰ μῆκος τῆς γραμμῆς αὐτῆς εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς γραμμῆς.

752) Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ μέγιστοι κύκλοι μιᾶς σφαίρας εἶναι γεωδαισιακὲς γραμμὲς αὐτῆς.

753) Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ γεωδαισιακὲς γραμμὲς ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι ἕλικες.

754) Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ παράλληλοι κύκλοι μιᾶς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς ἔχουν σταθερὴν γεωδαισιακὴν καμπυλότητα.

755) Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τομῆς μιᾶς οἰκογενείας λοξοδρομιῶν ἐπὶ μιᾶς

ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας μὲ ἕναν παράλληλον κύκλον αὐτῆς, ἡ γεωδαισιακὴ καμπυλότης αὐτῶν ἔχει τὴν αὐτὴν τιμήν.

756) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωδαισιακὲς γραμμὲς ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου τοῦ ὁποίου οἱ γενέτειρες σχηματίζουν μὲ τὸν ἄξονα αὐτοῦ γωνίαν α.

757) Νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένη μιᾶς δοσμένης γεωδαισιακῆς αὐτοῦ, εἶναι σταθερή.

758) Νὰ εὑρεθῆ ἡ στρέψις τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν μιᾶς ἐπιφανείας.

759) Νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ στρέψις μιᾶς γεωδαισιακῆς γραμμῆς ἡ ὁποία ἐφάπτεται μιᾶς γραμμῆς καμπυλότητος, εἶναι μηδέν.

760) Νὰ δειχθῆ ὅτι μία ἐπίπεδος γεωδαισιακὴ γραμμὴ εἶναι συγχρόνως καὶ γραμμὴ καμπυλότητος· ἀντιστρόφως νὰ δειχθῆ ὅτι μία γραμμὴ ποὺ εἶναι συγχρόνως γεωδαισιακὴ καὶ γραμμὴ καμπυλότητος, εἶναι γραμμὴ ἐπίπεδος.

761) Νὰ εὑρεθῆ ἡ ἔκφρασις τῆς στρέψεως μιᾶς γεωδαισιακῆς γραμμῆς ἡ ὁποία σχηματίζει γωνίαν α μετὰ τῆς γραμμῆς u, ὅταν οἱ παραμετρικὲς γραμμὲς τῆς ἐπιφανείας εἶναι γραμμὲς καμπυλότητος αὐτῆς.

762) Νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ καμπυλότης καὶ ἡ στρέψις μιᾶς γεωδαισιακῆς γραμμῆς ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $\sigma^2=(K-K_1)(K_2-K)$.

763) Νὰ δειχθῆ ὅτι οἱ εὐθεῖες γραμμὲς μιᾶς ἐπιφανείας εἶναι οἱ μοναδικὲς ἀσυμπτωτικὲς γραμμὲς ποὺ εἶναι συγχρόνως καὶ γεωδαισιακές.

764) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἐκφράσεις τῶν μερικῶν παραγώγων πρώτης τάξεως ὡς πρὸς u, v τῶν μοναδιαίων ἐφαπτομενικῶν διανυσμάτων $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2$ τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν, ὑποθέτοντες ὅτι $\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2=0$.

765) Λαμβάνοντες τὶς ἀσυμπτωτικὲς γραμμὲς ἐπιφανείας ὡς παραμετρικὲς γραμμές, νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ καμπυλότης τῶν γραμμῶν u εἶναι $K=\beta_1 w : E^{\frac{3}{2}}$ καὶ τῶν γραμμῶν v εἶναι $K=-a_3 w : G^{\frac{3}{2}}$ μὲ τὴν γνωστὴν σημασία τῶν β_1, a_3.

766) Νὰ δειχθῆ ὅτι οἱ ἐξισώσεις $u=x,\ v=y$ ὁρίζουν μίαν σύμμορφον ἀπεικόνισιν τῆς σφαίρας $\bar{r}=\left[2u(u^2+v^2+1)^{-1},\ 2v(u^2+v^2+1)^{-1},\ (u^2+v^2-1)(u^2+v^2+1)^{-1}\right]$ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y· ἡ ἀπεικόνισις αὐτὴ λέγεται στερεογραφικὴ προβολὴ τῆς σφαίρας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἐπιτυγχάνεται γεωμετρικῶς διὰ τῆς προβολῆς τῶν σημείων τῆς σφαίρας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y μὲ κέντρον προβολῆς τὸν βόρειον πόλον τῆς σφαίρας.

767) Νὰ δειχθῆ ὅτι οἱ ἐπιφάνειες $\bar{r}=(u\sigma\upsilon\nu v,\ u\eta\mu v,\ \beta v)$, $\bar{r}_1=(u\sigma\upsilon\nu v, u\eta\mu v, \beta\,\mathrm{arch}\frac{u}{\beta})$ ἀπεικονίζονται ἰσομετρικῶς ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης.

768) Νὰ δειχθῆ ὅτι κατὰ τὴν ἀπεικόνισιν δύο ἐπιφανειῶν ὁ διπλὸς λόγος τεσσάρων ἐφαπτομένων εἰς ἕνα σημεῖον τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν, ἰσοῦται μὲ τὸν διπλὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων ἐφαπτομένων τῆς ἄλλης ἐπιφανείας.

769) Νὰ εὑρεθῆ ἡ μορφὴ τὴν ὁποίαν λαμβάνουν ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις τοῦ Gauss καὶ οἱ ἐξισώσεις Mainardi – Coduzzi, ὅταν τὸ γραμμικὸν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας ἔχη τὴν μορφήν : $ds^2=(du^2+dv^2)\cdot\varphi(u,v)$.

770) Ἐὰν οἱ παραμετρικὲς γραμμὲς μιᾶς ἐπιφανείας εἶναι συγχρόνως καὶ οἱ γραμμὲς καμπυλότητος αὐτῆς νὰ δειχθῆ ὅτι :

$$L_v=a_2L-\beta_1N=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right)E_v,\quad N_u=\beta_2N-a_3L=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right)G_u.$$

771) Νά δειχθῆ ὅτι αἱ μερικαί παράγωγοι τῆς γωνίας ω τοῦ παραμετρικοῦ δικτύου ἐπιφανείας, δίδονται ἀπό τούς τύπους :

$$\omega_u = -W\left(\frac{\beta_1}{E}+\frac{a_2}{G}\right), \qquad \omega_v = -W\left(\frac{\beta_2}{E}+\frac{a_3}{G}\right)$$

772) Νά δειχθῆ ὅτι οἱ τέσσαρεις ἄλλες ἐξισώσεις πού προκύπτουν ὅταν ἐξισώσωμεν τούς συντελεστάς τῶν $\bar{r}_u, \bar{r}_v$ εἰς τίς ἐξισώσεις (56.2), εἶναι ἰσοδύναμες μέ τίς :

$$FK = \frac{\partial a_2}{\partial u} - \frac{\partial a_1}{\partial v} + a_2\beta_2 - a_3\beta_1 \qquad EK = \frac{\partial \beta_1}{\partial v} - \frac{\partial \beta_2}{\partial u} + a_1\beta_2 - a_2\beta_1 + \beta_1\beta_3 - \beta_2^2$$

$$FK = \frac{\partial \beta_2}{\partial v} - \frac{\partial \beta_3}{\partial u} + a_2\beta_2 - a_3\beta_1 \qquad GK = \frac{\partial a_3}{\partial u} - \frac{\partial a_2}{\partial v} + a_1a_3 - a_2^2 + a_2\beta_3 - a_3\beta_2$$

773) Δείξατε ὅτι οἱ σχέσεις αὐτές δέν εἶναι ἀνεξάρτητες ἀλλά δύνανται νά προκύψουν ἀπό τίς τρεῖς θεμελιώδεις ἐξισώσεις.

774) Νά εὑρεθῆ ἡ πρώτη καμπυλότης μιᾶς ἐπιφανείας ὅταν οἱ παραμετρικές γραμμές εἶναι ὀρθογώνιες.

775) Νά δειχθῆ ὅτι ἡ ἑλικοειδής ἐπιφάνεια : $\bar{r} = [u\,\sigma\upsilon\nu v,\ u\,\eta\mu v,\ av + f(u)]$ καί ἡ ἐκ περιστροφῆς : $\bar{r} = [u\,\sigma\upsilon\nu v,\ u\,\eta\mu v,\ \varphi(u)]$ ἀπεικονίζονται ἰσομετρικῶς ἡ μία ἐπί τῆς ἄλλης.

57. Γενική περίληψις τοῦ δευτέρου κεφαλαίου. – Μία γραμμή εἶναι ἕνα μονοπαραμετρικόν σύνολον σημείων ἐνῶ μία ἐπιφάνεια εἶναι ἕνα διπαραμετρικόν σύνολον. Τά ὁμαλά σημεῖα μιᾶς γραμμῆς χαρακτηρίζονται ἀπό τήν ὕπαρξιν μή μηδενικοῦ ἐφαπτομενικοῦ διανύσματος καί τά ὁμαλά σημεῖα μιᾶς ἐπιφανείας ἀπό τήν ὕπαρξιν μή μηδενικοῦ καθέτου διανύσματος. Ὁ προσανατολισμός τῆς ἐφαπτομένης μιᾶς γραμμῆς καί τῆς καθέτου μιᾶς ἐπιφανείας, γίνεται συμφώνως πρός τούς πίνακας IV–VI. Μέ ἁπλοῦν λογισμόν ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι τό μῆκος τόξου, ἡ καμπυλότης καί ἡ στρέψις μιᾶς γραμμῆς εἶναι ἀνεξάρτητα τῆς παραμετρικῆς παραστάσεως τῆς γραμμῆς καθώς καί τοῦ καρτεσιανοῦ συστήματος συντεταγμένων εἰς τό ὁποῖον ἀναφέρεται ἡ γραμμή. Οἱ θετικές φορές τῶν πρωτευουσῶν εὐθειῶν εἶναι ἐπίσης ἀνεξάρτητες τοῦ καρτεσιανοῦ συστήματος συντεταγμένων εἰς τό ὁποῖον ἀναφέρεται ἡ γραμμή, ἡ θετική δέ φορά τῆς πρώτης καθέτου μιᾶς γραμμῆς τοῦ τριδιαστάτου χώρου εἶναι καί ἀνεξάρτητος τῆς παραμετρικῆς παραστάσεως τῆς γραμμῆς. Ἡ καμπυλότης μιᾶς γραμμῆς τοῦ διδιαστάτου χώρου εἶναι προσημασμένη ἐνῶ μιᾶς γραμμῆς τοῦ τριδιαστάτου χώρου εἶναι πάντοτε θετική ἤ μηδέν. Μία γραμμή ὁρίζεται τελείως ἀπό ἀπόψεως σχήματος, ὅταν δοθοῦν οἱ φυσικές ἐξισώσεις αὐτῆς. Ἡ πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή ὁρίζει τελείως τήν μετρικήν ἐπί τῆς ἐπιφανείας. Τά θεμελιώδη ποσά πρώτης καί δευτέρας τάξεως μιᾶς ἐπιφανείας εἶναι ἀνεξάρτητα τοῦ καρτεσιανοῦ συστήματος συντεταγμένων εἰς τό ὁποῖον ἀναφέρεται ἡ ἐπιφάνεια. Οἱ τρεῖς βασικές κατηγορίες ἐπιφανειακῶν γραμμῶν εἶναι οἱ γραμμές καμπυλότητος, οἱ ἀσυμπτωτικές καί οἱ γεωδαισιακές γραμμές. Αἱ μερικαί παράγωγοι πρώτης τάξεως τοῦ καθέτου διανύσματος ἤ δίδονται ἀπό τούς τύπους τοῦ Weingarten καί αἱ μερικαί παράγωγοι δευτέρας τάξεως τῆς $\bar{r}(u,v)$ ἀπό τούς τύπους τοῦ Gauss. Τά θεμελιώδη ποσά πρώτης καί δευτέρας τάξεως συνδέονται μέ τίς τρεῖς θεμελιώδεις ἐξισώσεις. Μία ἐπιφάνεια εἶναι τελείως καθορισμένη ἀπό ἀπόψεως σχήματος ὅταν δοθοῦν τά θεμελιώδη ποσά αὐτῆς ὡς συναρτήσεις δύο παραμέτρων, ἐπαληθεύουσες τίς θεμελιώδεις ἐξισώσεις.

58. Γενικά παραδείγματα ἐπί τοῦ δευτέρου κεφαλαίου

Παράδειγμα (58.1).— Νά εὑρεθῆ ἡ γραμμή τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y ἡ ὁποία ἔχει φυσικήν ἐξίσωσιν : $aR = a^2+s^2$.

Λ ύ σ ι ς. Ἀπό τόν τύπον (27.4) θά ἔχωμεν $ads = (a^2+s^2)d\omega$ ἐκ τῆς ὁποίας δί ὁλοκληρώσεως προκύπτει : $s = a\varepsilon\varphi(\omega+\omega_o)$, ὅπου ω_o αὐθαίρετος σταθερά τήν ὁποίαν λαμβάνοντες μηδέν θά ἔχωμεν $s = a\varepsilon\varphi\omega$, $ds = a\sigma\upsilon\nu^{-2}\omega d\omega$ καί ἐπειδή $dx:ds = \sigma\upsilon\nu\,\omega$, $dy:ds = \eta\mu\omega$ θά εἶναι : $dx = a\sigma\upsilon\nu^{-1}\omega d\omega$, $dy = a\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu^{-2}\omega d\omega$ ἐκ τῶν ὁποίων δί ὁλοκληρώσεως προκύπτει : $x = a\ell n\left|\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right)\right|$, $y = a\sigma\upsilon\nu^{-1}\omega$ ὅπου ἐλάβαμε πάλι χάριν ἁπλότητος τίς σταθερές ὁλοκληρώσεως ἴσες μέ μηδέν. Θέτοντες τώρα $\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2} = e^t$ προκύπτουν τελικῶς οἱ παραμετρικές ἐξισώσεις τῆς ζητουμένης γραμμῆς : $x = at$, $y = acht$ οἱ ὁποίες παριστάνουν τήν ἁλυσοειδῆ $y = ach\frac{x}{a}$.

Παράδειγμα (58.2).— Ἐάν M_1 εἶναι σημεῖον τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς $xy = a^2$ καί ἡ κάθετος αὐτῆς εἰς τό M_1 τέμνη ἐκ νέου τήν ὑπερβολήν εἰς τό M_2, λάβωμεν δέ ἐπί αὐτῆς σημεῖον Γ τέτοιο ὥστε νά εἶναι $\Gamma\hat{O}M_1 = \frac{\pi}{2}$ νά δειχθῆ ὅτι θά ἰσχύουν οἱ σχέσεις $\overline{M_1P} = -\overline{M_1\Gamma} = -\frac{1}{2}\overline{M_1M_2}$ ὅπου P τό κ. καμπυλότητος τῆς ὑπερβολῆς εἰς τό M_1.

Λ ύ σ ι ς. Ἔχομεν $y = a^2x^{-1}$, $y' = -a^2x^{-2}$, $y'' = 2a^2x^{-3}$ ἐπομένως κατά τούς τύπους (29.6) οἱ συντεταγμένες τοῦ κ. καμπυλότητος θά εἶναι :

$$\xi = x_1 + a^2x_1^{-2}(1+a^4x_1^{-4}) : 2a^2x_1^{-3} = \cdots = (3x_1^4+a^4) : 2x_1^3$$
$$\eta = a^2x_1^{-1} + (1+a^4x_1^{-4}) : 2a^2x_1^{-3} = \cdots = (x_1^4+3a^4) : 2a^2x_1$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου εἰς τό M_1 εἶναι $y - a^2x_1^{-1} = a^{-2}x_1^{-2}(x-x_1)$ εἰς τήν ὁποίαν θέτοντες $y = a^2x^{-1}$ καί ἐπιλύοντες ὡς πρός x προκύπτει ἡ τετμημένη $x_2 = -a^4x_1^{-3}$ τοῦ σημείου M_2, ὁπότε θά εἶναι $\xi - x_1 = -\frac{1}{2}(x_2-x_1)$ δηλ $\overline{M_1P} = -\frac{1}{2}\overline{M_1M_2}$. Ἡ εὐθεία ΟΓ ὡς κάθετος ἐπί τήν OM_1 ἔχει ἐξίσωσιν $xx_1+yy_1 = 0$, ὁπότε τό σημεῖον Γ ὡς κείμενον ἐπί αὐτῆς καί τῆς M_1M_2, εὑρίσκομεν ὅτι ἔχει τετμημένην $\gamma = (x_1^4-a^4) : 2x_1^3 = 2x_1 - \xi$ δηλαδή $\gamma = 2x_1 - \xi$, $\xi - x_1 = -(\gamma - x_1)$ ἤ $\overline{M_1P} = -\overline{M_1\Gamma}$ καί ἀπεδείχθη τό ζητούμενον.

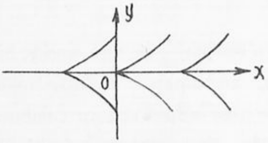
Παράδειγμα (58.3).— Νά εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα ἑκάστης τῶν οἰκογενειῶν :

(i) $(x-a)^3 - y^2 = 0$ (ii) $(x-a)^2 - y^3 = 0$ (iii) $[x^2+(y-a)^2](x-2) + x = 0$.

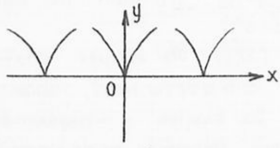
Λ ύ σ ι ς. Διά τήν πρώτην ἐξ αὐτῶν ἔχομεν $F \equiv (x-a)^3 - y^2 = 0$, $F_a \equiv -3(x-a)^2 = 0$, ὁπότε ἀπαλείφοντες μεταξύ αὐτῶν τήν παράμετρον a προκύπτει ἡ περιβάλλουσα $y = 0$ ἡ ὁποία εἶναι συγχρόνως καί ὁ τόπος τῶν ἀνωμάλων σημείων τῶν γραμμῶν τῆς οἰκογενείας σχ. (58.1).

Διά τήν δευτέρα ἐξ αὐτῶν ἔχομεν $F \equiv (x-a)^2 - y^3 = 0$, $F_a \equiv -2(x-a) = 0$, ὁπότε ἀπαλείφοντες μεταξύ αὐτῶν τήν παράμετρον a προκύπτει ἡ $y = 0$ ἡ ὁποία

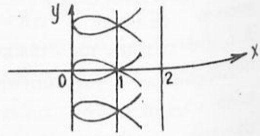
ὅμως δὲν εἶναι περιβάλλουσα ἀλλὰ ὁ τόπος τῶν ἀνωμάλων σημείων τῶν γραμμῶν τῆς οἰκογενείας σχ. (58.2).
Διὰ τὴν τρίτη ἐξ αὐτῶν ἔχομεν $F \equiv [x^2+(y-a)^2](x-2)+x=0$, $F_a \equiv -2(y-a)(x-2)=0$ ὁπότε ἀπαλείφοντες μεταξὺ αὐτῶν τὴν παράμετρον a προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $x(x-1)^2=0$, ἡ ὁποία παριστάνει τὴν περιβάλλουσα $x=0$ καὶ τὸν τόπον $x=1$ τῶν ἀνωμάλων σημείων τῶν γραμμῶν τῆς οἰκογενείας σχ. (58.3).



Σχ. (58.1)



Σχ. (58.2)



Σχ. (58.3)

Παράδειγμα (58.4). — Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ καμπυλότης, ἡ στρέψις καὶ τὰ πρωτεύοντα διανύσματα τῆς γραμμῆς $\bar{r}=(3t, 3t^2, 2t^3)$ νὰ δειχθῇ δὲ ὅτι ἡ γραμμὴ αὐτὴ εἶναι γενικὴ ἕλιξ.
Λ ύ σ ι ς. Ἔχομεν $\dot{\bar{r}}=(3, 6t, 6t^2)$, $\ddot{\bar{r}}=(0, 6, 12t)$, $\dddot{\bar{r}}=(0, 0, 12)$ ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς τύπους (35.3) καὶ (34.4) προκύπτει: $u=-\sigma=2:3(1+2t^2)^2$, $\bar{\varepsilon}=(1, 2t, 2t^2):(1+2t^2)$, $\bar{\varpi}=(2t^2, -2t, 1):(1+2t^2)$, $\bar{\delta}=(-2t, 1-2t^2, 2t):(1+2t^2)$.
Διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ γραμμὴ εἶναι γενικὴ ἕλιξ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν σταθερὸν διάνυσμα $\bar{a}=(a_1, a_2, a_3)$ τέτοιο ὥστε νὰ εἶναι $\bar{a}\bar{\varepsilon}=(a_1+2ta_2+2t^2a_3):(1+2t^2)=$ σταθερὸν τὸ ὁποῖον συμβαίνει ὅταν εἶναι $a_1=a_3$, $a_2=0$ ὁπότε θὰ εἶναι $\bar{a}\bar{\varepsilon}=a_1=$ σταθερόν.

Παράδειγμα (58.5). — Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ στρέψις καὶ ἡ γωνία ϑ τὴν ὁποίαν σχηματίζει μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν z ἡ δικάθετος τῆς γραμμῆς $\bar{r}=(\frac{3}{4}t^2, t, \frac{1}{4}t^3+\lambda t)$ συνδέονται μὲ τὴν σχέσιν $(1+\varepsilon\varphi^2\vartheta)\sigma+1=0$.
Λ ύ σ ι ς. Ἔχομεν $\dot{\bar{r}}=(\frac{3t}{2}, 1, \frac{3}{4}t^2+\lambda)$, $\ddot{\bar{r}}=(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}t)$, $\dddot{\bar{r}}=(0, 0, \frac{3}{2})$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν δεύτερον τῶν τύπων (35.3) προκύπτει $\sigma=-\frac{9}{4}:[\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}]^2$ καὶ ἀπὸ τὸν τρίτον τῶν τύπων (34.4) ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu\vartheta=\bar{\delta}\bar{k}=(\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}\bar{k}):|[\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}]|=-\frac{3}{2}:|[\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}]|$, $\sigma\upsilon\nu^2\vartheta=\frac{9}{4}:[\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}]^2=-\sigma$ ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται τὸ ζητούμενον.

Παράδειγμα (58.6). — Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς ἐπιφανείας $\bar{r}=(u\,\sigma\upsilon\nu v, u\,\eta\mu v, a\sqrt{\varepsilon\varphi v})$ κατὰ μῆκος τῶν γραμμῶν u, τέμνουν τὸ ἐπίπεδον $z=0$ κατὰ εὐθείες παράλληλες.
Λ ύ σ ι ς. Ἔχομεν $\bar{r}_u=(\sigma\upsilon\nu v, \eta\mu v, 0)$, $\bar{r}_v=(-u\,\eta\mu v, u\,\sigma\upsilon\nu v, a:\sqrt{2\eta\mu 2v}\;\sigma\upsilon\nu v)$, $[\bar{r}_u\bar{r}_v]=(a\varepsilon\varphi v:\sqrt{2\eta\mu 2v}, a:\sqrt{2\eta\mu 2v}, u)$, ἑπομένως τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας ἔχει ἐξίσωσιν:

$$(x-u\,\sigma\upsilon\nu v)a\varepsilon\varphi v:\sqrt{2\eta\mu 2v}+(y-u\,\eta\mu v)a:\sqrt{2\eta\mu 2v}+(z-a\sqrt{\varepsilon\varphi v})u=0$$

θέτοντες εἰς αὐτὴν $z=0$ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις:

$$xa\varepsilon\varphi v:\sqrt{2\eta\mu 2v}+ya:\sqrt{2\eta\mu 2v}-2u\,\eta\mu v:\sqrt{2\eta\mu 2v}-au\sqrt{\varepsilon\varphi v}=0$$

ἡ ὁποία παριστάνει εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν x, y τὴν τομὴν αὐτοῦ μὲ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον. Ἡ κλίσις τῆς εὐθείας αὐτῆς εἶναι $(-\alpha\varepsilon\varphi\upsilon : \sqrt{2\eta\mu 2\upsilon}) : (\alpha : \sqrt{2\eta\mu 2\upsilon}) = -\varepsilon\varphi\upsilon$ δηλαδὴ ἀνεξάρτητος τῆς u καὶ ἔτσι ἀπεδείχθη τὸ ζητούμενον.

Παράδειγμα (58.7). — Νὰ δειχθῆ ὅτι κάθε γραμμή, εἶναι γεωδαισιακὴ τῆς περιβαλλούσης τῶν εὐθειοποιούντων ἐπιπέδων αὐτῆς.

Λύσις. Ἐὰν $\bar{r} = \bar{r}(s)$ εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς, τότε ἡ ἐξίσωσις τοῦ εὐθειοποιοῦντος ἐπιπέδου αὐτῆς θὰ εἶναι $(\bar{x}-\bar{r})\bar{\varpi} = 0$ (1)· παραγωγίζοντες αὐτὴν ὡς πρὸς s προκύπτει: $-\bar{\varepsilon}\bar{\varpi} + (\bar{x}-\bar{r})(-u\bar{\varepsilon}+\sigma\bar{\delta}) = 0$, $(\bar{x}-\bar{r})(-u\bar{\varepsilon}+\sigma\bar{\delta}) = 0$ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) φαίνεται ὅτι τὸ διάνυσμα $\bar{x}-\bar{r}$ θὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν γινόμενον $[\bar{\varpi}, -u\bar{\varepsilon}+\sigma\bar{\delta}] = u\bar{\delta}+\sigma\bar{\varepsilon}$, ἐπομένως ἡ παραμετρικὴ ἐξίσωσις τῆς περιβαλλούσης θὰ εἶναι: $\bar{x} = \bar{r} + t(\sigma\bar{\varepsilon}+u\bar{\delta}) \equiv \bar{x}(s,t)$ (3)

Ἐξ αὐτῆς παραγωγίζοντες μερικῶς ὡς πρὸς s,t προκύπτει $\bar{x}_s = \bar{\varepsilon} + t(\sigma'\bar{\varepsilon}+u'\bar{\delta})$, $\bar{x}_t = \sigma\bar{\varepsilon}+u\bar{\delta}$, ἐπομένως τὸ κάθετον διάνυσμα τῆς ἐπιφανείας κατὰ μῆκος τῆς γραμμῆς $(t=0)$ θὰ εἶναι $[\bar{x}_s\bar{x}_t] = -u\bar{\varpi}$ δηλαδὴ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ πρωτοκάθετον διάνυσμα τῆς γραμμῆς, ἐπομένως ἡ γραμμὴ αὐτὴ εἶναι μία γεωδαισιακὴ τῆς ἐπιφανείας. Ἡ γραμμὴ αὐτή, ὅταν ἀναπτυχθῆ ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου ἡ περιβάλλουσα, θὰ μετασχηματισθῆ εἰς γεωδαισιακὴν τοῦ ἐπιπέδου δηλαδὴ εἰς μίαν εὐθεῖαν γραμμήν· διὰ τὸν λόγον αὐτὸν τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριέδρου τοῦ Frenet τὸ κάθετον ἐπὶ τὸ $\bar{\varpi}$ λέγεται εὐθειοποιοῦν ἐπίπεδον καὶ ἡ περιβάλλουσα αὐτῶν εὐθειοποιοῦσα ἐπιφάνεια τῆς γραμμῆς.

Παράδειγμα (58.8). — Νὰ μελετηθῆ ἡ ἐπιφάνεια: $(0 < \beta < \alpha)$

$$\bar{r} = [(\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta)\sigma\upsilon\nu\varphi,\ (\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta)\eta\mu\varphi,\ \beta\eta\mu\vartheta]$$

Λύσις. Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ φαίνεται ἀμέσως ὅτι προκύπτει διὰ περιστροφῆς τοῦ κύκλου $(x-\alpha)^2+z^2=\beta^2$, $y=0$ περὶ τὸν ἄξονα τῶν z· ἐργαζόμενοι κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον καὶ ἐφαρμόζοντες γνωστοὺς τύπους προκύπτει:

$E = (\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta)^2$ $\quad L = -(\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta)\sigma\upsilon\nu\vartheta$ $\quad ds^2 = (\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta)^2 d\varphi^2+\beta^2 d\vartheta^2$

$F = 0$ $\quad M = 0$ $\quad d\sigma = \beta(\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta)\,d\varphi\, d\vartheta$

$G = \beta^2$ $\quad N = -\beta$ $\quad K = \beta\sigma\upsilon\nu\vartheta : (\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta)$

$W = \beta(\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta)$ $\quad LN-M^2 = \beta(\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta)\sigma\upsilon\nu\vartheta$ $\quad H = -(\alpha+2\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta) : 2\beta(\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta)$

Πρωτεύουσες καμπυλότητες: $\kappa_1 = -\sigma\upsilon\nu\vartheta : (\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta)$, $\kappa_2 = -\frac{1}{\beta}$

Δείκτρια τοῦ Dupin : $-x^2\sigma\upsilon\nu\vartheta : (\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta) - y^2 : \beta = \pm 1$

Κάθετος καμπυλότης : $\kappa_n = -\sigma\upsilon\nu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\vartheta : (\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta) - \eta\mu^2\alpha : \beta$

Γραμμὲς καμπυλότητος : $\varphi =$ σταθερόν, $\vartheta =$ σταθερόν

Παράδειγμα (58.9). — Νὰ εὑρεθῆ ἡ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια ἡ ὁποία ἔχει μέσην καμπυλότητα μηδέν.

Λύσις. Ἡ ἐξίσωσις μιᾶς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας περὶ τὸν OZ εἶναι:

$$\bar{r} = [u\sigma\upsilon\nu\upsilon,\ u\eta\mu\upsilon,\ \varphi(u)]$$

πρέπει λοιπὸν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν συνάρτησιν φ ἔτσι ὥστε νὰ εἶναι $H=0$. Ἐργαζόμενοι κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον εὑρίσκομεν:

$$E=1+\dot{\varphi}^2,\quad F=0,\quad G=u^2 \qquad L=\ddot{\varphi}(1+\dot{\varphi}^2)^{-\frac{1}{2}},\quad M=0,\quad N=u\dot{\varphi}(1+\dot{\varphi}^2)^{-\frac{1}{2}}$$

ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (50.9) προκύπτει ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις:

$$2H\equiv\ddot{\varphi}(1+\dot{\varphi}^2)^{-3/2}+\dot{\varphi}u^{-1}(1+\dot{\varphi}^2)^{-1/2}=0$$

ἐκ τῆς ὁποίας δι' ὁλοκληρώσεως ἔχομεν: $\varphi+c_2=c_1\operatorname{arch}\frac{u}{c_1}$.

Ἀπὸ τὴν μορφὴν τῆς συναρτήσεως αὐτῆς προκύπτει ὅτι οἱ μεσημβρινοὶ τῶν ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανειῶν ποὺ ἔχουν μέσην καμπυλότητα μηδενικήν, εἶναι ἁλυσοειδεῖς γραμμές. Ἀναφέρομεν ἐδῶ ὅτι μία ἐπιφάνεια ποὺ ἔχει εἰς ὅλα της τὰ σημεῖα μέσην καμπυλότητα μηδὲν λέγεται ἐλαχιστικὴ ἐπιφάνεια.

Γενικαὶ ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ δευτέρου κεφαλαίου

776) Ἐὰν ἡ κάθετος τῆς κωνικῆς τομῆς $y^2=2ax+\beta x^2$ $(a>0)$ εἰς τὸ σημεῖον M, τέμνῃ τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὸ N καὶ εἶναι P τὸ κ. καμπυλότητος τῆς γραμμῆς ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ M, νὰ δειχθῇ ὅτι $|\overline{MP}|a^2=|\overline{MN}|^3$.

777) Ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ σημεῖον M μιᾶς γραμμῆς $\rho=\rho(\vartheta)$ λαμβάνομεν σημεῖον N, ἔτσι ὥστε νὰ εἶναι $M\hat{O}N=\frac{\pi}{2}$. ἐὰν P εἶναι τὸ κ. καμπυλότητος ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ M νὰ δειχθῇ ὅτι: $|\overline{MP}|:|\overline{MN}|=(\rho^2+\dot{\rho}^2)(\rho^2+2\dot{\rho}^2-\rho\ddot{\rho})^{-1}$

778) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ παραβολὲς: $y^2=2ax+a^2$, $y^2=-2\beta x+\beta^2$ $(a\beta>0)$ τέμνονται καθέτως.

779) Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ κάθετοι τῆς γραμμῆς $x=2at:(1+t^2)$, $y=a(1-t^2):(1+t^2)$ $(a>0)$, διέρχονται διὰ σταθεροῦ σημείου.

780) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ κορυφὲς τῆς γραμμῆς $y=\ell nx\,(0<x<+\infty)$, δηλαδὴ τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ καμπυλότης ἔχει ἀκρότατον, νὰ εὑρεθοῦν δὲ καὶ τὰ ἀντίστοιχα κέντρα καμπυλότητος.

781) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς γραμμῆς $\rho=a\eta\mu^3\frac{\vartheta}{3}$.

782) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς γραμμῆς $x=2\sigma\upsilon\nu t-\sigma\upsilon\nu 2t$, $y=2\eta\mu t-\eta\mu 2t$ $(0\leq t<2\pi)$ καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ σημεῖον $t=\pi$ εἶναι κορυφή.

783) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων εἶναι σημεῖον ἀνακάμψεως δευτέρου εἴδους τῆς γραμμῆς $x=t^2+t^3$, $y=t^6$ καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ καμπυλότης εἰς αὐτήν.

784) Ὁμοίως διὰ τὴν γραμμὴν: $x=t^4+t^5$, $y=t^6$.

785) Ἐὰν A, B εἶναι οἱ προβολὲς τῆς ἀρχῆς O ἀντιστοίχως ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν κάθετον μιᾶς ἐπιπέδου γραμμῆς $\bar{r}=\bar{r}(s)$ εἰς τὸ σημεῖον M καὶ εἶναι $\overline{MA}=a\bar{\varepsilon}$, $\overline{MB}=\beta\bar{\kappa}$, νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι a', β' συναρτήσει τῆς καμπυλότητος τῆς γραμμῆς καὶ τῶν a, β.

786) Ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ σημεῖον M(t) μιᾶς ἐπιπέδου γραμμῆς $\bar{r}=\bar{r}(t)$ λαμβάνομεν σημεῖον A ἔτσι ὥστε $\overline{MA}=f(t)\bar{\kappa}$. ὅπου $\bar{\kappa}$ τὸ κάθετον διάνυσμα τῆς γραμμῆς καὶ f(t) μία δοσμένη συνάρτησις τοῦ t. θεωροῦμεν ἐπίσης καὶ τὸ σημεῖον B ἔτσι ὥστε $\overline{OB}=\overline{MA}$. Ὅταν τὸ t μεταβάλλεται τὰ σημεῖα A καὶ B γράφουν δύο γραμμὲς τῶν ὁποίων ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ ἐφαπτόμενες σχηματίζουν τὶς γωνίες a καὶ β μὲ τὸ $\bar{\kappa}$ εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα, νὰ δειχθῇ ὅτι: $\varepsilon\varphi a=\frac{1}{f}(R+f)\varepsilon\varphi\beta$.

787) Ἐὰν P εἶναι τὸ κέντρον καμπυλότητος μιᾶς ἐπιπέδου γραμμῆς εἰς τὸ σημεῖον M,

νά δειχθῆ ὅτι τό μέσον Ν τοῦ διανύσματος $\overline{MP}$ γράφει μίαν γραμμήν τῆς ὁποίας ἡ ἐφαπτομένη εἶναι κάθετος ἐπί τήν εὐθεῖαν ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τό Μ καί τό ἀντίστοιχον κέντρον καμπυλότητος τῆς ἐνειλιγμένης τῆς ἀρχικῆς γραμμῆς.

788) Ἐάν Α εἶναι ἕνα σημεῖον τῆς ἐφαπτομένης μιᾶς ἐπιπέδου γραμμῆς εἰς τό σημεῖον Μ καί Ρ τό κέντρον καμπυλότητος, νά δειχθῆ ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς τήν ὁποίαν γράφει τό μέσον τοῦ διανύσματος $\overline{PA}$ εἶναι κάθετος ἐπί τήν ΜΑ.

789) Μία γραμμή Γ ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος τῶν x εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων ὁ δέ ἄξων τῶν y ταυτίζεται μέ τήν κάθετον τῆς γραμμῆς εἰς τό 0· ἐπί τοῦ ἄξονον τῶν x λαμβάνομεν σημεῖον $A(\alpha,0)$ καί ἐπί τῆς γραμμῆς σημεῖον Μ τέτοιο ὥστε νά εἶναι $\alpha=$ τοξ $\overset{\frown}{OM}$ καί νά κεῖται πρός τό αὐτό μέρος ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν y πού κεῖται καί τό Α. Νά εὑρεθῆ ἡ ὁριακή θέσις Λ τοῦ σημείου τομῆς τῆς εὐθείας ΑΜ μετά τῆς καθέτου τῆς γραμμῆς εἰς τό 0.

790) Νά εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν γραμμῶν : $(x-\beta)\alpha^3+3\alpha x-2y=0$, ὅπου β σταθερά καί α ἡ παράμετρος τῆς οἰκογενείας.

791) Νά εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν κύκλων $(1+\alpha^2)(x^2+y^2)-2\beta x-2\alpha\beta y-3\beta^2=0$, ὅπου β σταθερά καί α ἡ παράμετρος τῆς οἰκογενείας, νά δειχθῆ δέ ὅτι οἱ κύκλοι τῆς οἰκογενείας εἶναι ὀρθογώνιοι εἰς ἕναν σταθερόν κύκλον.

792) Δείξατε ὅτι ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν κύκλων $x^2+y^2-2\beta x\,\text{συν}\alpha-2\beta y\,\text{ημ}\alpha+\beta^2\text{συν}^2\alpha=0$, ὅπου β σταθερά καί α ἡ παράμετρος τῆς οἰκογενείας, ἀποτελεῖται ἀπό τόν ἄξονα τῶν x καί μίαν ἐπικυκλοειδῆ.

793) Νά εὑρεθῆ ἡ γραμμή πού ἔχει φυσικήν ἐξίσωσιν $R=\alpha\,\text{ch}\frac{s}{\alpha}$.

794) » » » » » » » » $R=\alpha s$.

. . .

795) Νά δειχθῆ ὅτι ἡ γραμμή $\bar{r}=(\alpha\,\text{συν}^3t,\ \alpha\,\text{ημ}^3t,\ \beta\,\text{συν}\,2t)$ εἶναι μία ἕλιξ ἡ ὁποία κεῖται ἐπί μιᾶς ἐκ περιστροφῆς περί τόν ἄξονα 0Ζ ἐπιφανείας δευτέρου βαθμοῦ.

796) Ἐάν ἡ καμπυλότης καί ἡ στρέψις μιᾶς γραμμῆς ἔχουν ἄθροισμα μηδέν νά δειχθῆ ὅτι θά ἰσχύουν οἱ σχέσεις $\bar{\varepsilon}-\bar{\delta}=\bar{\alpha}$, $\bar{\varepsilon}\bar{\alpha}=1$, $\bar{\delta}\bar{\alpha}=-1$, ὅπου α σταθερόν διάνυσμα μέ μέτρον $\sqrt{2}$.

797) Ἐάν ἡ ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς $\bar{r}=\left(1+\frac{3}{2}\,\text{εφ}^2t,\ -\text{εφ}^3t,\ \frac{1}{\text{συν}^3t}\right)$ εἰς τό σημεῖον Μ τέμνη τό ἐπίπεδον τῶν x,y εἰς τό σημεῖον Ρ, νά δειχθῆ ὅτι τό Ρ γράφει μίαν παραβολήν πρός τήν ὁποίαν ἡ ΜΡ εἶναι κάθετος.

798) Νά δειχθῆ ὅτι ἡ προβολή μιᾶς γραμμῆς, ἡ ὁποία κεῖται ἐπί ἑνός ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου καί τέμνει τίς γενέτειρες αὐτοῦ ὑπό σταθερήν γωνίαν, ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως τοῦ κώνου εἶναι μία λογαριθμική ἕλιξ.

799) Ἐάν μία γραμμή κεῖται ἐπί ἑνός κυκλικοῦ κώνου καί σχηματίζει σταθερήν γωνίαν α μέ τόν ἄξονα αὐτοῦ, νά δειχθῆ ὅτι $u=\sigma\,\text{εφ}\,\alpha$.

800) Νά εὑρεθοῦν οἱ γραμμές Γ_1 τῶν ὁποίων ἡ πολική γραμμή εἶναι μία δεδομένη γραμμή $\bar{r}=\bar{r}(s)$.

801) Νά εὑρεθῆ ἡ καμπυλότης τῆς γραμμῆς τήν ὁποίαν γράφει σημεῖον M_1 τῆς δικαθέτου μιᾶς γραμμῆς $\bar{r}=\bar{r}(s)$, διά τό ὁποῖον εἶναι $\overline{MM}_1=\alpha\bar{\delta}$ ὅπου α σταθερόν.

802) Νά δειχθῆ ὅτι ἡ ἀκτίς τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας μιᾶς κυκλικῆς ἕλικος ἰσοῦται μέ τήν ἀκτῖνα καμπυλότητος αὐτῆς.

803) Νά εὑρεθῇ ἡ καμπυλότης τῆς γραμμῆς τήν ὁποίαν γράφει τό κέντρον καμπυλότητος τῆς γραμμῆς $\bar{r}=\bar{r}(s)$.

804) Ἕνα ζεῦγος γραμμῶν πού ἔχουν κοινήν τήν πρώτην κάθετον λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ἕνα ζεῦγος καμπύλων Bertrand· ἐάν ἡ μία ἐξ αὐτῶν ἔχῃ ἐξίσωσιν $\bar{r}=\bar{r}(s)$ δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἄλλης θά εἶναι $\bar{r}_1=\bar{r}+\lambda\bar{\omega}$, ὅπου λ σταθερόν.

805) Δι' ἕνα ζεῦγος καμπύλων Bertrand νά δειχθῇ ὅτι : $\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}_1=\text{συν}\,\alpha=$ σταθερόν, $(1-\lambda\kappa)\text{ημ}\,\alpha t+\lambda\sigma\,\text{συν}\,\alpha=0$, $\sigma\sigma_1=\frac{1}{\lambda^2}\text{ημ}^2\alpha$, $(1-\lambda\kappa)(1+\lambda\kappa_1)=\text{συν}^2\alpha$.

806) Ἐάν M, M_1 εἶναι δύο ἀντίστοιχα σημεῖα ἑνός ζεύγους καμπύλων Bertrad καί P, P_1 τά ἀντίστοιχα πρός αὐτά κέντρα καμπυλότητος, νά δειχθῇ ὅτι : $(MM_1PP_1)=\text{τεμ}^2\alpha$ (Mannheim).

807) Ἐάν μία γραμμή ἔχει σταθερήν καμπυλότητα, νά δειχθῇ ὅτι ἀποτελεῖ ζεῦγος καμπύλων Bertrand μέ τήν γραμμήν πού γράφει τό κέντρον καμπυλότητος αὐτῆς.

. . .

808) Νά εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα ἑνός ἐπιπέδου τό ὁποῖον σχηματίζει μέ τά συντεταγμένα ἐπίπεδα τετράεδρον σταθεροῦ ὄγκου.

809) Μία σφαίρα σταθερῆς ἀκτίνος α κινεῖται ἔτσι ὥστε τό κέντρον της νά γράφῃ τήν γραμμήν $\bar{r}=\bar{r}(s)$ διά τήν ὁποίαν εἶναι $R<\alpha$· νά εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν σφαιρῶν αὐτῶν, ἡ γραμμή ἀνακάμψεως καί νά δειχθῇ ὅτι οἱ χαρακτηριστικές εἶναι μέγιστοι κύκλοι κείμενοι ἐπί τοῦ καθέτου ἐπιπέδου τῆς γραμμῆς.

810) Νά εὑρεθοῦν οἱ ἀκτίνες καμπυλότητος καί στρέψεως τοῦ λαιμοῦ τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας πού εἶναι περιβάλλουσα τῶν εὐθειοποιούντων ἐπιπέδων τῆς γραμμῆς $\bar{r}=\bar{r}(s)$.

811) Νά δειχθῇ ὅτι ἡ καμπυλότης εἰς τό σημεῖον P τῆς τομῆς δύο ἐπιφανειῶν Σ, Σ^* δίδεται ἀπό τόν τύπον : $\kappa^2\text{ημ}^2\vartheta=\kappa_n^2+\kappa_n^{*2}-2\kappa_n\kappa_n^*\,\text{συν}\,\vartheta$, ὅπου κ_n, κ_n^* οἱ κάθετες καμπυλότητες τῶν ἐπιφανειῶν κατά τήν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς τομῆς εἰς τό P καί θ ἡ γωνία τῶν καθέτων τῶν ἐπιφανειῶν εἰς τό σημεῖον αὐτό.

812) Νά ἀποδειχθοῦν οἱ σχέσεις :

$$w^*(\bar{n}\,\bar{n}_u\bar{r}_u)=EM-FL \qquad w(\bar{n}\,\bar{n}_v\bar{r}_u)=EN-FM$$
$$w(\bar{n}\,\bar{n}_u\bar{r}_v)=FM-GL \qquad w(\bar{n}\,\bar{n}_v\bar{r}_v)=FN-GM$$
$$w[\bar{n}\,\bar{n}_u]=M\bar{r}_u-L\bar{r}_v \qquad w[\bar{n}\,\bar{n}_v]=N\bar{r}_u-M\bar{r}_v$$

813) Νά δειχθῇ ὅτι ὁ γ. τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν μιᾶς κυκλικῆς ἕλικος εἶναι ἕνα ὀρθόν ἑλικοειδές.

814) Ἐάν ἡ τομή δύο ἐπιφανειῶν εἶναι γραμμή καμπυλότητος καί τῶν δύο ἐπιφανειῶν, νά δειχθῇ ὅτι οἱ ἐπιφάνειες τέμνονται ὑπό σταθερήν γωνίαν· ἀντιστρόφως ἐάν δύο ἐπιφάνειες τέμνονται ὑπό σταθερήν γωνίαν καί ἡ τομή εἶναι γραμμή καμπυλότητος τῆς μιᾶς, νά δειχθῇ ὅτι θά εἶναι καί γραμμή καμπυλότητος τῆς ἄλλης (Joachimsthal).

815) Νά δειχθῇ ὅτι μία σφαίρα καί ἕνα ἐπίπεδον τέμνονται πάντοτε ὑπό σταθερήν γωνίαν.

816) Νά εὑρεθῇ ἡ συνθήκη ἵνα οἱ μεσημβρινοί τοῦ ἑλικοειδοῦς $\bar{r}=[u\,\text{συν}\,v, u\,\text{ημ}\,v, \varphi(u)+\alpha v]$ εἶναι γραμμές καμπυλότητος αὐτοῦ.

817) Ἐάν P, P_1 εἶναι δύο γειτονικά σημεῖα μιᾶς ἐπιφανειακῆς γραμμῆς, νά δειχθῇ ὅτι ἡ ὁριακή θέσις τῆς τομῆς τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων τῆς ἐπιφανείας εἰς τά P, P_1 ὅταν $P_1\to P$,

ὁρίζει μίαν διεύθυνσιν ἡ ὁποία εἶναι συζυγὴς τῆς διευθύνσεως πού ὁρίζει ἡ ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς εἰς τό P.

818) Νά ἀποδειχθῆ ὅτι οἱ παραμετρικές γραμμές τῆς ἐπιφανείας $z=\varphi(x)+f(y)$, ὅπου x, y αἱ παράμετροι, εἶναι συζυγεῖς γραμμές αὐτῆς.

819) Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν καθέτων καμπυλοτήτων, πού ἀντιστοιχοῦν εἰς τά ζεύγη συζυγῶν διευθύνσεων ἑνός σημείου ἐπιφανείας, εἶναι σταθερόν.

820) Ὅταν τό γραμμικόν στοιχεῖον μιᾶς ἐπιφανείας εἶναι τῆς μορφῆς $ds^2=\lambda\left(du^2+dv^2\right)$ ὅπου λ ἐν γένει κάποια συνάρτησις τῶν u, v τότε αἱ παραμετρικαί γραμμαί τῆς ἐπιφανείας λέγονται ἰσομετρικαί ἤ ἰσοθερμικαί καί αἱ παράμετροι u, v ἰσομετρικαί ἤ ἰσοθερμικαί παράμετροι· δείξατε ὅτι διά νά εἶναι αἱ παραμετρικαί γραμμαί ἐπιφανείας ἰσομετρικαί πρέπει καί ἀρκεῖ $F=0$ καί $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\ln\frac{E}{G}=0$.

821) Δείξατε ὅτι οἱ μεσημβρινοί καί οἱ παράλληλοι κύκλοι μιᾶς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς εἶναι ἰσομετρικαί γραμμαί αὐτῆς.

822) Δείξατε ὅτι ἕνα σύστημα ὁμοεστίων ἐλλείψεων καί ὑπερβολῶν ἀποτελοῦν σύστημα ἰσομετρικῶν γραμμῶν τοῦ ἐπιπέδου.

823) Ἐάν ἐπίπεδον τέμνη ἐπιφάνειαν ὑπό σταθερήν γωνίαν, νά δειχθῆ ὅτι ἡ τομή εἶναι γραμμή καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας.

824) Νά εὑρεθοῦν οἱ ἀσυμπτωτικές γραμμές τῆς ἐπιφανείας $2z=\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}$.

825) Νά δειχθῆ ὅτι οἱ μόνες ἀναπτυκτές ἐπιφάνειες πού ἔχουν ἰσομετρικές γραμμές καμπυλότητος εἶναι οἱ κωνικές καί οἱ κυλινδρικές ἐπιφάνειες.

826) Δείξατε ὅτι τό γινόμενον τῶν ἀκτίνων τῶν καθέτων καμπυλοτήτων πού ἀντιστοιχοῦν εἰς ζεύγη συζυγῶν διευθύνσεων ἑνός σημείου, γίνεται ἐλάχιστον διά τό ζεῦγος τῶν πρωτευουσῶν διευθύνσεων τοῦ σημείου αὐτοῦ.

827) Νά δειχθῆ ὅτι μία ἐπιφανειακή γραμμή ἡ ὁποία ἐφάπτεται μιᾶς ἀσυμπτωτικῆς γραμμῆς εἰς τό σημεῖον P καί τῆς ὁποίας τό ἐγγύτατον ἐπίπεδον δέν εἶναι ἐφαπτόμενον τῆς ἐπιφανείας εἰς τό P, ἔχει τό P ὡς σημεῖον καμπῆς.

828) Νά δειχθῆ ὅτι ἡ κάθετος καμπυλότης πού ἀντιστοιχεῖ εἰς διεύθυνσιν κάθετον ἐπί μίαν ἀσυμπτωτικήν διεύθυνσιν, ἰσοῦται μέ τό διπλάσιον τῆς δευτέρας καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας.

829) Δείξατε ὅτι: $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{w\beta_1}{E}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{w\beta_2}{E}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{wa_3}{G}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{wa_2}{G}\right)=wK$.

830) Διά τήν γωνία ω τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν ἀποδείξατε ὅτι:

$$-\frac{\partial^2\omega}{\partial u \partial v}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{w\beta_2}{E}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{Wa_2}{G}\right)+wK=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Wa_3}{G}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{w\beta_1}{E}\right)-wK$$

831) Ἐάν οἱ παραμετρικές γραμμές μιᾶς ἐπιφανείας εἶναι συγχρόνως καί ἀσυμπτωτικές γραμμές αὐτῆς νά δειχθῆ ὅτι: $M_u=(a_1-\beta_2)M$, $M_v=(\beta_3-a_2)M$.

832) Ἀποδείξατε διά κάθε ἐπιφανειακήν γραμμήν $u=u(s)$, $v=v(s)$ τήν σχέσιν $\bar{r}''=k_n\bar{n}+A\bar{r}_u+B\bar{r}_v$ ὅπου $A=a_1u'^2+2a_2u'v'+a_3v'^2+u''$, $B=\beta_1u'^2+2\beta_2u'v'+\beta_3v'^2+v''$.

833) Μία ἐπιφάνεια λέγεται ἐλαχιστική, ὅταν ἡ δευτέρα καμπυλότης αὐτῆς εἶναι μηδέν σέ κάθε σημεῖον τῆς ἐπιφανείας· νά δειχθῆ ὅτι τό ἑλικοειδές $\bar{r}=\left(u\,\text{συν}v,\ u\,\text{ημ}v,\ av+a\int\sqrt{\frac{u^2+a^2}{u^2-a^2}}\,\frac{du}{u}\right)$ εἶναι ἐπιφάνεια ἐλαχιστική.

834) Δείξατε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια : $\bar{r}=(u\,\text{συν}a+\text{ημ}u\,\text{ch}v,\ v+\text{συν}a\,\text{συν}u\,\text{sh}v,\ \text{ημ}a\,\text{συν}u\,\text{ch}v)$ εἶναι ἐλα-

χιστική καί οἱ παραμετρικές γραμμές εἶναι ἐπίπεδες γραμμές καμπυλότητος νά εὑρεθῆ δέ ἡ πρώτη καμπυλότης αὐτῆς.

835) Ἐάν ἡ γεωδαισιακή καμπυλότης ἑνός ὀρθογωνίου συστήματος ἐπιφανειακῶν γραμμῶν εἶναι σταθερή, νά δειχθῆ ὅτι τό σύστημα αὐτό εἶναι ἰσομετρικόν.

836) Ἐάν οἱ γραμμές τῆς μιᾶς οἰκογενείας ἑνός ἰσομετρικοῦ συστήματος ἔχουν σταθερήν γεωδαισιακήν καμπυλότητα νά δειχθῆ ὅτι τό αὐτό συμβαίνει καί διά τίς γραμμές τῆς ἄλλης οἰκογενείας.

837) Ἐάν δύο οἰκογένειες γεωδαισιακῶν γραμμῶν τέμνονται ὑπό σταθερήν γωνίαν, δείξατε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἀναπτυκτή.

. . .

838) Νά εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐπιπέδων τά ὁποῖα εἶναι κάθετα εἰς τό μέσον τοῦ διανύσματος M_1M_2 ὅπου $M_1(4u, 0, 2u^2-1)$, $M_2(0, 4\upsilon, -2\upsilon^2+1)$ καί u, υ μεταβληταί παράμετροι ἀνεξάρτητες μεταξύ τους· νά εὑρεθοῦν ἐν συνεχείᾳ οἱ γραμμές καμπυλότητος καί οἱ ἀσυμπτωτικές γραμμές αὐτῆς.

839) Νά εὑρεθῆ ἡ συνθήκη τήν ὁποίαν πρέπει νά πληροῦν οἱ συναρτήσεις $\varphi(\alpha), f(\alpha)$ γιά νά εἶναι ἡ εὐθειογενής ἐπιφάνεια : $x = \alpha z + 2\alpha\varphi(\alpha) - f(\alpha)$, $y = zf(\alpha) + \alpha\varphi^2(\alpha)$ ἀναπτυκτή καί νά δειχθῆ ὅτι ὑπάρχουν δύο διάφορες οἰκογένειες αὐτοῦ τοῦ εἴδους· ἐν συνεχείᾳ δείξατε ὅτι οἱ λαιμοί τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν τῶν δύο οἰκογενειῶν κεῖνται ἐπί μιᾶς ἐπιφανείας δευτέρου βαθμοῦ, τέλος δέ νά εὑρεθοῦν οἱ ἀναπτυκτές ἐπιφάνειες τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δύο οἰκογενειῶν οἱ ὁποῖες διέρχονται ἀπό τήν παραβολήν $z=0$, $x+y^2=0$.

840) Δίδεται ἡ μονοπαραμετρική οἰκογένεια τῶν σφαιρῶν : $x^2+y^2+z^2-2x\,\text{συν}u-2y\,\text{ημ}u=\upsilon^2$, ὅπου $\upsilon = f(u)$ καί ζητεῖται νά προσδιορισθῆ ἡ $f(u)$ ἔτσι ὥστε οἱ χαρακτηριστικές γραμμές τῶν σφαιρῶν αὐτῶν νά εἶναι κύκλοι σταθερῆς ἀκτῖνος α.

841) Νά εὑρεθοῦν οἱ ὀρθογώνιες τροχιές τῶν χαρακτηριστικῶν γραμμῶν τῆς προηγουμένης οἰκογενείας τῶν σφαιρῶν ὅταν εἶναι $\upsilon = u$.

842) Νά εὑρεθοῦν οἱ ἀσυμπτωτικές γραμμές τῆς ἐπιφανείας $z = \ln|1-xy|$.

843) Δίδεται ἡ ἐπιφάνεια $\bar{r} = [\,u\,\text{συν}\upsilon, u\,\text{ημ}\upsilon,\; f(u)+\varphi(\upsilon)\,]$, ὅπου ἡ συνάρτησις $\varphi(\upsilon)$ δέν εἶναι σταθερή καί ζητεῖται νά προσδιορισθῆ ἡ συνάρτησις $f(u)$ ἔτσι ὥστε οἱ τομές τῆς ἐπιφανείας ἀπό τά ἐπίπεδα τά διερχόμενα διά τοῦ ἄξονος τῶν z νά εἶναι γραμμές καμπυλότητος αὐτῆς.

. . .

844) Νά εὑρεθῆ μία ρητή παραμετρική παράστασις τῆς γραμμῆς : $y = 3x^{\frac{7}{5}}$.

845) Νά εὑρεθῆ ἡ μή παραμετρική ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς : $x = \alpha t(t^2+1)^{-1}$, $y = \beta(t^2-1)(t^2+1)^{-1}$.

846) Νά γίνῃ τό ἴδιον διά τήν γραμμήν : $x = t^2-t+1$, $y = t^2+t+1$.

847) Νά εὑρεθῆ ἡ ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς : $x = t^3+1$, $y = t^2+t+1$ εἰς τό σημεῖον $(1,1)$.

848) Νά δειχθῆ ὅτι τό μέρος τῆς καθέτου τῆς γραμμῆς : $x = \text{ημ}t + \frac{1}{2}\,\text{ημ}t\,\text{συν}^2t$, $y = -\frac{1}{2}\,\text{συν}^3t$ τό κείμενον εἰς τό πρῶτον τέταρτον τῶν ἀξόνων, ἔχει σταθερόν μῆκος 1.

849) Νά δειχθῆ ὅτι οἱ παραβολές $y^2 = 2\alpha x + \alpha^2$, $y^2 = -2\beta x + \beta^2$ $(\alpha\beta > 0)$, τέμνονται καθέτως.

Νά εὑρεθῆ ἡ ἐφαπτομένη ἑκάστης τῶν ἑπομένων γραμμῶν :

850) $x = (\alpha - t) : (\alpha + t)$, $y = t : (\alpha + t)$. 851) $e^x\,\text{ημ}y + e^y\,\text{ημ}x = \text{συν}\,xy$.

852) $x=3at:(1+t^3)$, $y=3at^2:(1+t^3)$ 853) $x^\nu:\alpha^\nu+y^\nu:\beta^\nu=1$

854) $x=\text{τοξημ}(t:\sqrt{1+t^2})$, $y=\text{τοξσυν}(1:\sqrt{1+t^2})$

855) $x^2+xye^y-\eta\mu xy=0$.

856) Νά δειχθῇ ὅτι οἱ ἄξονες τῶν συντεταγμένων ἀποκόπτουν ἀπό τήν ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς $x^{2/3}+y^{2/3}=\alpha^{2/3}$ διάνυσμα σταθεροῦ μήκους.

857) Ἐάν ἡ ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς $y=x^\mu$ εἰς τό σημεῖον $(1,1)$ τέμνῃ τόν ἄξονα τῶν x εἰς τό σημεῖον $(\xi,0)$, νά δειχθῇ ὅτι: $y(\xi)\to 1/e$ ὅταν $\mu\to 0$.

858) Νά δειχθῇ ὅτι αἱ κάθετοι τῆς γραμμῆς $x=2at:(1+t^2)$, $y=\alpha(1-t^2):(1+t^2)$, $(\alpha>0)$ διέρχονται διά σταθεροῦ σημείου.

859) Νά δειχθῇ ὅτι οἱ ἐφαπτόμενες τῆς οἰκογενείας τῶν γραμμῶν $y=\alpha\sigma(x)$ οἱ ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν εἰς τά σημεῖα πού ἔχουν τό ἴδιο x, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

860) Νά εὑρεθῇ ἡ ἡμιεφαπτομένη τῆς γραμμῆς $y=\text{συν}\sqrt{x}$ εἰς τό σημεῖον $x=0$.

861) Νά δειχθῇ ὅτι ἡ γραμμή: $x=t^{2/3}$, $y=t^2(1-t)^2(1+t)^2$ ἔχει τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων ὡς σημεῖον ἀνακάμψεως δευτέρου εἴδους μέ κοινήν ἐφαπτομένην τόν ἄξονα ox.

862) Νά δειχθῇ ὅτι ἡ γραμμή: $x=t^{2/3}$, $y=t$ ἔχει τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων ὡς σημεῖον ἀνακάμψεως πρώτου εἴδους μέ κοινήν ἐφαπτομένην τόν ἄξονα ox.

863) Νά δειχθῇ ὅτι ὁ λημνίσκος $(x^2+y^2)^2=\alpha^2(x^2-y^2)$ ἔχει τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων ὡς διπλόν πραγματικόν σημεῖον.

Νά εὑρεθῇ τό μῆκος τόξου τῶν ἑξῆς γραμμῶν:

864) $y^2(2a-x)=x^3$ 865) $y=\alpha\ln[\alpha^2:(\alpha^2-x^2)]$

866) $y=2\alpha\ln\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-4\sqrt{ax}$ $(0\leqslant x<\alpha)$ 867) $y=\frac{1}{2}\alpha\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{a^2-x^2}$.

868) $x=\alpha\eta\mu t-\frac{1}{3}(\alpha-\beta)\,\eta\mu^3 t$, $y=\beta\text{συν}\,t+\frac{1}{3}(\alpha-\beta)\,\text{συν}^3 t$ $(\alpha,\beta>0)$.

869) Νά εὑρεθῇ ἡ γωνία ὑπό τήν ὁποίαν τέμνονται οἱ γραμμές: $\rho^2=\alpha^2:\text{συν}(2\vartheta+\vartheta_0)$, $\rho^2=\beta^2:\text{συν}\,2\vartheta$.

870) Ἐάν s εἶναι τό μῆκος τοῦ τόξου τῆς γραμμῆς $y=f(x)$ τό ὁποῖον συνδέει τά σημεῖα $x=0$, $x=\alpha$ τοῦ ἄξονος τῶν x, νά δειχθῇ ὅτι: $\int_0^\alpha y'^2dx\geqslant 2(s-\alpha)\geqslant\int_0^\alpha y'^2(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}dx$.

871) Ὑπό τίς προϋποθέσεις τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ἐάν κατά μῆκος τοῦ τόξου εἶναι $|y''|\leqslant M$, νά δειχθῇ ὅτι: $s-\alpha\leqslant M^2\alpha^3:6$.

872) Ὑπό τίς προϋποθέσεις τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ἐάν κατά μῆκος τοῦ τόξου εἶναι $|y''|\geqslant\mu>0$, νά δειχθῇ ὅτι: $s-\alpha>\mu^2\alpha^3:24\sqrt{1+\mu^2\alpha^2}$.

Νά ὑπολογισθῇ ἡ καμπυλότης τῶν ἑξῆς γραμμῶν:

873) $x=t^2$, $y=t-\frac{1}{3}t^2$ 874) $\rho=\alpha\sqrt[\nu]{(\text{συν}\,\nu\vartheta)}$ 875) $3y^2=2x^3$

876) $x=\text{συν}^3 t$, $y=\eta\mu^3 t$ 877) $\rho=2\alpha(1-\text{συν}\vartheta)$ 878) $x^\mu:\alpha^\mu+y^\mu:\beta^\mu=1$.

879) Νά εὑρεθῇ τό κέντρον καμπυλότητος τῆς ὑπερβολῆς: $xy=1$ εἰς τό σημεῖον $(1,1)$ καί τῆς παραβολῆς $y=x^2$ εἰς τήν γενικήν θέσιν.

880) Νά δειχθῇ ὅτι ἡ γραμμή $y=x\eta\mu x$ ἔχει τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων ὡς κορυφήν.

881) Δίδεται ἡ ἡμιπεριφέρεια $x^2+y^2=1$, $y\geqslant 0$ καί ζητεῖται νά συνδέσωμεν τά σημεῖα $(1,0)$ καί $(-2,0)$ δι' ἑνός καταλλήλου παραβολικοῦ τόξου ἔτσι ὥστε μαζύ μέ τήν ἡμιπεριφέρεια νά ἀποτελοῦν ἕνα τόξον μέ συνεχῆ ἐφαπτομένην καί καμπυλότητα.

882) Ἐάν u εἶναι ἡ καμπυλότης μιᾶς ἐπιπέδου γραμμῆς καί ω ἡ γωνία τῆς ἐφαπτομένης μέ τόν ἄξονα τῶν x, νά δειχθῇ ὅτι: $u=y''\text{συν}^3\omega$.

883) Ἐὰν δύο τόξα Γ καὶ Γ_1 ἐφάπτονται εἰς ἕνα σημεῖον P, κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης καὶ μάλιστα ἔτσι ὥστε εἰς τὴν γειτονιὰ τοῦ P τὸ Γ_1 νὰ κεῖται μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ Γ, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ καμπυλότης τοῦ Γ_1 εἶναι ἀπολύτως τὸ πολὺ ἴση μὲ τὴν καμπυλότητα τοῦ Γ.

Ἐὰν παριστάνωμεν μὲ $\Delta\sigma$ τὴν διαφορὰν $\sigma(s+h)-\sigma(s)$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ μίαν γραμμὴν $x=x(s)$, $y=y(s)$ ἰσχύουν οἱ σχέσεις :

884) $y''x'(s+h)-x''y'(s+h)=\kappa(s)+0(h)$ 885) $(\Delta Rx')^2+(\Delta Ry')^2-(\Delta R)^2=h^2+0(h^2)$

886) $x'\Delta y'-y'\Delta x'=h\kappa(s+\theta h)+0(h^2)$ $(0<\theta<1)$ 887) $\Delta y\Delta Rx'-\Delta x\Delta Ry'=-h^2+0(h^2)$.

888) $x'\Delta x+y'\Delta y=h+0(h^2)$ 889) $(\Delta x)^2+(\Delta y)^2=h^2-\frac{\kappa^2}{12}h^4+0(h^4)$

890) Ἐὰν ἡ γωνία ω τῆς ἐφαπτομένης μιᾶς γραμμῆς τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y μὲ τὸν ἄξονα τῶν x μεταβάλλεται μονότονα εἰς τὸ διάστημα $\omega_0\leq\omega\leq\omega_0+2\pi$, νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ νὰ εἶναι ἡ γραμμὴ κλειστή, πρέπει καὶ ἀρκεῖ γιὰ κάθε τιμὴ τῶν a_1,a_2 νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις $\int_{\omega_0}^{\omega_0+2\pi}R(a_1\sigma\upsilon\nu\omega+a_2\eta\mu\omega)\,d\omega=0$.

891) Ὑπὸ τὶς προϋποθέσεις τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως νὰ δειχθῇ ὅτι γιὰ κάθε a_1,a_2 ἰσχύει ἡ σχέσις: $\int_0^{s_0}\kappa(a_1\sigma\upsilon\nu\omega+a_2\eta\mu\omega)\,ds=0$, ὅπου s_0 τὸ ὁλικὸν μῆκος τῆς θεωρουμένης γραμμῆς ἡ ὁποία μπορεῖ νὰ εἶναι κλειστὴ ἢ ἀνοικτή.

892) Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας $x^2:\lambda^2+y^2:\mu^2=1$, ὅπου αἱ παράμετροι λ, μ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $\lambda^2:\alpha^2+\mu^2:\beta^2=1$ $(\alpha,\beta>0)$.

893) Ἐὰν μία γραμμὴ Γ εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν εὐθειῶν: $x\,\sigma\upsilon\nu t+y\,\eta\mu t=\varphi(t)$, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐνειλιγμένη τῆς Γ εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν εὐθειῶν $-x\,\eta\mu t+y\,\sigma\upsilon\nu t=\dot\varphi(t)$ (Dingeldey).

894) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας $F(x-a,y)=0$, ἀποτελεῖται ἀπὸ τὶς παράλληλες πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x ἐφαπτόμενες τῆς γραμμῆς $F(x,y)=0$.

. . .

895) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς $\bar r=\left(\frac{t^4}{4},\frac{t^3}{3},\frac{t^2}{2}\right)$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον $x+y+z=0$.

896) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ γραμμὴ $\bar r=(\alpha t^2+\beta t+\gamma,\ \alpha_1t^2+\beta_1t+\gamma_1,\ \alpha_2t^2+\beta_2t+\gamma_2)$ εἶναι ἐπίπεδος.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τόξου τῶν ἑξῆς γραμμῶν :

897) $y=\alpha\,\tau o\xi\eta\mu\frac{x}{\alpha}$, $z=\frac{1}{4}\alpha\ln\frac{\alpha+x}{\alpha-x}$ 898) $(z-y)^2=3\alpha(z+y)$, $z^2=\frac{9}{8}x^2+y^2$

899) $y=x^2$, $z=\frac{4}{3}x^{3/2}$ 900) $y=\frac{2}{3}x^{3/2}+2\sqrt{x}$, $z=\sqrt{5x}$

901) $y=2\sqrt{2x}$, $z=\beta\ln x$ 902) $y=\sqrt{1-x^2}$, $z=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{x}{2}$

903) $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $x=\frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{z}{\alpha}}+e^{-\frac{z}{\alpha}}\right)$ 904) $\sqrt{x^2+y^2}=\alpha\,\tau o\xi\,\varepsilon\varphi\frac{y}{x}$, $x^2+y^2=z^2$

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πρωτεύοντα ἐπίπεδα καὶ οἱ πρωτεύουσες εὐθεῖες τῶν ἑξῆς γραμμῶν:

905) $y=x^2$, $z=x^4$ 906) $y^2-x^2=\alpha^2$, $z^2-x^2=\beta^2$

907) $\bar r=(\sigma\upsilon\nu t,\ \eta\mu t,\ e^t)$ 908) $\bar r=(\alpha t,\ \beta t^\mu,\ \gamma t^p)$ $(p>\mu>1,\ \alpha\beta\gamma t\neq0)$

909) $\bar r=\left(\frac{t^4}{4},\frac{t^3}{3},\frac{t^2}{2}\right)$ 910) $x=\alpha\sqrt{z}$, $y=\beta\sqrt{z}$.

911) $\bar r=\left(t-\eta\mu t,\ 1-\sigma\upsilon\nu t,\ 4\eta\mu\frac{t}{2}\right)$ 912) $\bar r=(e^t\eta\mu t,\ e^t\sigma\upsilon\nu t,\ e^t)$

913) $2y^2=x^2$, $6z^2=x^3$ 914) $x=\alpha y^2$, $xz=\beta$.

915) $x^2+y^2+z^2=1$, $y^2=x(1-x)$ 916) $x=\alpha z^2$, $\alpha^2y^2-\beta^2x^2=\alpha^2\beta^2$.

917) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἐνειλιγμένες τῆς γραμμῆς ἡ ὁποία τέμνει ὑπὸ σταθερὴν γωνίαν τὶς εὐθύγραμμες γενέτειρες ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου.

918) Νὰ ἐξετασθῇ ἐὰν ὑπάρχουν γραμμὲς τῶν ὁποίων οἱ πρωτεύουσες εὐθεῖες νὰ τέ-

μνουν σταθερὸν ἐπίπεδον εἰς τρία σημεῖα τὰ ὁποῖα νὰ εἶναι κορυφὲς ἰσοπλεύρου τριγώνου.

919) Νὰ δειχθῆ ὅτι διὰ νὰ εἶναι αἱ πρωτεύουσαι κάθετοι μιᾶς γραμμῆς Γ, δικάθετοι μιᾶς ἄλλης γραμμῆς, πρέπει ἡ καμπυλότης καὶ ἡ στρέψις τῆς Γ νὰ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $\alpha(\kappa^2+\sigma^2)=\beta\kappa$. ὅπου α,β σταθερές.

920) Ἐὰν τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον μιᾶς γραμμῆς Γ ἐφάπτεται μιᾶς σταθερῆς σφαίρας κέντρου 0 νὰ δειχθῆ ὅτι τὸ εὐθειοποιοῦν ἐπίπεδον τῆς Γ διέρχεται ἀπὸ τὸ 0 καὶ τὸ πηλίκον $u:\sigma$ εἶναι μία γραμμικὴ συνάρτησις τοῦ μήκους s τῆς Γ· ἐξετάσατε τὰ ἀντίστροφα.

921) Νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ προβολὴ μιᾶς γραμμῆς Γ ἐπὶ σταθερὸν ἐπίπεδον Ε, παραλλήλως πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς γραμμῆς εἰς ἕνα σημεῖον Μ, ἔχει ὡς σημεῖον ἀνακάμψεως τὴν προβολὴν P_1 τοῦ Μ εἰς τὸ Ε, ἡ δὲ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Ρ εἶναι τὸ ἴχνος ἐπὶ τοῦ Ε τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου τῆς Γ εἰς τὸ Μ.

922) Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον καὶ ἡ κάθετος τῆς ἐπιφανείας ἡ ὁποία ἔχει ἐξίσωσιν $\bar{r}=(u+v,\ u^2+v^2,\ u^3+v^3)$.

923) Νὰ εὑρεθῆ ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας $xy=\alpha z$ μὲ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον αὐτῆς εἰς τὴν γενικὴν θέσιν.

924) Νὰ γίνη τὸ ἴδιο διὰ τὴν ἐπιφάνεια $xyz=\alpha^3$.

925) Νὰ δειχθῆ ὅτι τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς ἐπιφανείας $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ διέρχονται διὰ σταθεροῦ σημείου.

926) Ἐὰν ἡ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια $\bar{r}=\bar{P}(u)+v\bar{\alpha}(u)$ εἶναι ἀναπτυκτὴ καὶ $\bar{\alpha}^2=1$, $\dot{\bar{\alpha}}\neq\bar{0}$ νὰ δειχθῆ ὅτι : $\dot{\bar{P}}=(\dot{\bar{P}}\bar{\alpha})\bar{\alpha}+[(\dot{\bar{P}}\dot{\bar{\alpha}}):\dot{\bar{\alpha}}^2]\dot{\bar{\alpha}}$.

927) Νὰ εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιπέδων ποὺ ἔχουν συντεταγμένες ἐπὶ τὴν ἀρχὴν $t^2:(\alpha+t)$, $t^2:(\beta+t)$, $t^2:(\gamma+t)$, ὅπου t ἡ παράμετρος καὶ α,β,γ σταθερές.

928) Νὰ εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων ἑνὸς ἐλλειψοειδοῦς κατὰ μῆκος μιᾶς ἐπιπέδου τομῆς αὐτοῦ.

929) Ἀπὸ τὰ σημεῖα ἑνὸς σταθεροῦ ἐπιπέδου φέρομεν καθέτους ἐπὶ τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων· νὰ εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τοὺς τρεῖς πόδες τῶν καθέτων.

930) Νὰ γίνη τὸ ἴδιο λαμβάνοντες ἀντὶ ἐπιπέδου ἕνα σταθερὸν ἐλλειψοειδές.

931) Νὰ εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν σφαιρῶν $(x-\alpha t)^2+(y-\beta t)^2+(z-\gamma t)^2=\rho^2$ ὅπου α,β,γ,ρ σταθερές καὶ t ἡ παράμετρος τῆς οἰκογενείας.

932) Νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰκογενείας $f(xt,yt,zt)=0$, μὲ παράμετρον τὴν t εἶναι ἕνας κῶνος μὲ κορυφὴν τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων.

933) Νὰ δειχθῆ ὅτι διὰ νὰ ἔχῃ ἡ οἰκογένεια τῶν σφαιρῶν $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\rho^2$ ὅπου α,β,γ,ρ συναρτήσεις τῆς παραμέτρου t, περιβάλλουσα πρέπει $\dot{\rho}^2<\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}^2+\dot{\gamma}^2$.

934) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γραμμὲς καμπυλότητος τῆς περιβαλλούσης τῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιπέδων : $z=\alpha x+\varphi(\alpha)y+\beta\sqrt{1+\alpha^2+\varphi^2(\alpha)}$, ὅπου β σταθερὰ καὶ $\varphi(\alpha)$ δοσμένη συνάρτησις τῆς παραμέτρου α.

935) Ἐὰν οἱ $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ εἶναι συναρτήσεις μιᾶς παραμέτρου t, νὰ εὑρεθοῦν οἱ συνθῆκες ἵνα ἡ εὐθεῖα $x=\alpha_1 z+\alpha_2$, $y=\beta_1 z+\beta_2$ παράγει ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν τῆς ὁποίας αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς γενετείρας γραμμαὶ καμπυλότητος νὰ κεῖνται ἐπὶ ὁμοκέντρων σφαιρῶν.

936) Νά εὑρεθοῦν οἱ γραμμές καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας $e^z = συνx συνy$.

937) Νά εὑρεθῆ ὁ τόπος τῶν κέντρων καμπυλότητος τῶν πρωτευουσῶν τομῶν τοῦ παραβολοειδοῦς $xy = az$, εἰς τά διάφορα σημεῖα τοῦ ἄξονος τῶν x.

938) Νά εὑρεθῆ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας ἡ ὁποία εἶναι ὁ τόπος τῶν κέντρων καμπυλότητος τῶν ἐπιπέδων τομῶν μιᾶς δοσμένης ἐπιφανείας Σ, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπό ἕνα δοσμένο σημεῖο αὐτῆς.

939) Νά εὑρεθοῦν οἱ ἀσυμπτωτικές γραμμές μιᾶς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας Σ ἡ ὁποία ἐφάπτεται μιᾶς δοσμένης εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας $Σ_1$ εἰς ὅλα τά σημεῖα μιᾶς γενετείρας Γ τῆς $Σ_1$, ὑποθέτοντες ὅτι ὅλες οἱ γενέτειρες τῆς Σ τέμνουν τήν εὐθείαν $Γ_1$.

940) Νά δειχθῆ ὅτι μία ἐπίπεδος ἐπιφανειακή γραμμή εἶναι γεωδαισιακή, ὅταν καί μόνον ὅταν τά ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς ἐπιφανείας κατά μῆκος τῆς γραμμῆς εἶναι κάθετα εἰς τό ἐπίπεδον αὐτῆς.

Νά εὑρεθοῦν οἱ πρωτεύουσες εὐθεῖες, τά πρωτεύοντα ἐπίπεδα, ἡ καμπυλότης καί ἡ στρέψις ἑκάστης τῶν γραμμῶν :

941) $3y = x^3, \; xz = a$

942) $3a^2y = x^2, \; 2xz = a^2$

943) Νά δειχθῆ ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου $M(s)$ τῆς γραμμῆς $\bar{r} = \bar{r}(s)$, ἀπό τό ἐγγύτατον ἐπίπεδον αὐτῆς εἰς τό $M_0(0)$, εἶναι διά $s \to 0$ ἀπειροστόν ἰσοδύναμον πρός τό $\left|\frac{1}{6} u_0 \sigma_0 s^3\right|$.

944) Νά δειχθῆ ὅτι ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις μεταξύ τῶν ἐφαπτομένων εἰς τά σημεῖα $M_0(0)$, $M(s)$ μιᾶς γραμμῆς $\bar{r} = \bar{r}(s)$, εἶναι διά $s \to 0$ ἀπειροστόν ἰσοδύναμον πρός τό $\frac{1}{12} u \sigma s^3$.

945) Ἐάν ἡ πρωτοκάθετος εἰς ὅλα τά σημεῖα μιᾶς γραμμῆς εἶναι κάθετος ἐπί τόν ἄξονα τῶν z, νά δειχθῆ ὅτι ἡ γραμμή εἶναι γενική ἕλιξ.

946) Ἐάν ἡ δικάθετος εἰς ὅλα τά σημεῖα μιᾶς γραμμῆς σχηματίζει σταθερήν γωνίαν μέ τόν ἄξονα τῶν z, νά δειχθῆ ὅτι ἡ γραμμή εἶναι γενική ἕλιξ.

947) Ἐάν ἡ ἐπιφάνεια $z = f(x, y)$ εἶναι περιβάλλουσα μιᾶς ἀκογενείας σφαιρῶν ἀκτίνος 1 τῶν ὁποίων τά κέντρα γράφουν μίαν γραμμήν τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y νά δειχθῆ ὅτι : $f^2(f_x^2 + f_y^2 + 1) = 1$.

948) Δίδεται ἡ ἐπιφάνεια : $\bar{r} = \left[a(συνu + uημu) + \frac{\beta}{2} εφ^2 υ \, ημu, \; a(ημu - uσυνu) - \frac{\beta}{2}\right.$ [illegible], $\left. \beta εφυ \right]$ καί ζητεῖται νά δειχθῆ ὅτι : οἱ παραμετρικές γραμμές $u = u_0$ εἶναι παρα[illegible]κείμενες ἐπί τοῦ ἐπιπέδου $xσυνu_0 + yημu_0 - a = 0$, τό παραμετρικόν δίκτυον εἶναι ὀρθογώνιον καί τέλος ὅτι αἱ κάθετοι τῆς ἐπιφανείας εἶναι αἱ κάθετοι τῶν γραμμῶν υ αἱ κείμεναι εἰς τό ἐπίπεδόν τους.

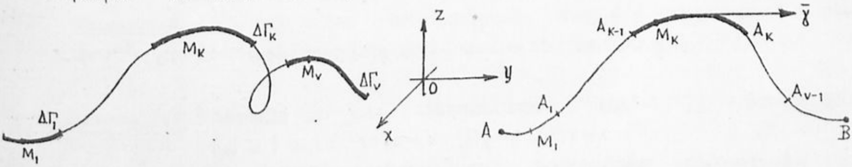
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Εἰς τὸ κεφάλαιον αὐτὸ πραγματευόμεθα τὸν ὁλοκληρωτικὸν λογισμὸν συναρτήσεων δύο καὶ περισσοτέρων μεταβλητῶν· ἀρχίζομεν μὲ τὴν θεωρία τῶν ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων, συνεχίζομεν μὲ τὴν θεωρία τῶν διπλῶν καὶ τριπλῶν ὁλοκληρωμάτων καὶ τελειώνομεν μὲ τὴν θεωρία τῶν πεδίων.

Ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα

59. Ὁρισμὸς καὶ ἰδιότητες τῶν ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων.— Ἔστω συνάρτησις $\Phi(M)$ μονοσήμαντα ὡρισμένη καὶ περατωμένη ἐπὶ ἑνὸς τόξου Γ, τὸ ὁποῖον δὲν ἀποκλείεται νὰ εἶναι καὶ κλειστὸν σχ. (59.1).
Ὑποδιαιροῦμεν τὸ τόξον αὐτὸ μὲ ἕναν οἱονδήποτε τρόπον σὲ ν- μικρότερα τό-



Σχ. (59.1)   Σχ. (59.2)

ξα $\Delta\Gamma_1, \cdots, \Delta\Gamma_\nu$ ἔτσι ὥστε παριστάνοντες μὲ $|\Gamma|$ τὸ μῆκος τοῦ Γ καὶ μὲ ΔS_κ τὸ μῆκος τοῦ $\Delta\Gamma_\kappa$, νὰ εἶναι :

$$|\Gamma| = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \cdots + \Delta S_\nu \qquad (59.1)$$

Λαμβάνομεν τώρα ἐπὶ ἑκάστου τόξου $\Delta\Gamma_\kappa$ ἕνα σημεῖον M_κ καὶ σχηματίζομεν μὲ τὰ δεδομένα αὐτὰ τὸ ἄθροισμα :

$$\Phi(M_1)\cdot\Delta S_1 + \cdots + \Phi(M_\nu)\,\Delta S_\nu \equiv \sum_{\kappa=1}^{\nu} \Phi(M_\kappa)\,\Delta S_\kappa \qquad (59.2)$$

Τὸ ἄθροισμα αὐτὸ ἐξαρτᾶται ἐν γένει καὶ ἀπὸ τὴν ὑποδιαίρεσιν τοῦ Γ, τὴν ὁποίαν θὰ παριστάνωμεν συντόμως μὲ $\mathfrak{D}$ καὶ ἀπὸ τὴν ἐκλογὴν τοῦ σημείου M_κ ἐπὶ ἑκάστου τόξου $\Delta\Gamma_\kappa$.

Ὁρισμὸς (59.1).— *Ἡ συνάρτησις $\Phi(M)$ λέγεται ὁλοκληρώσιμος ὡς πρὸς s ἐπὶ τοῦ τόξου Γ, ὅταν ὑπάρχῃ ἀριθμὸς J τέτοιος ὥστε ὅταν ὅλα τὰ $\Delta S_\kappa \to 0$ νὰ εἶναι·*

$$\text{ορ}\sum_{K=1}^{\nu}\Phi(M_K)\Delta S_K = J$$

μιά κάθε ὑποδιαίρεσιν $\mathcal{D}$ καί μιά κάθε ἐκλογήν τῶν σημείων M_K· δηλαδή ἀκριβέστερον ὅταν μιά κάθε θετικόν ἀριθμόν ε, εὑρίσκεται ἀριθμός η ἐπίσης θετικός, τέτοιος ὥστε ὅταν ὅλα τά $\Delta S_K < \eta$, νά εἶναι :

$$\left| J - \sum_{K=1}^{\nu}\Phi(M_K)\Delta S_K \right| < \varepsilon$$

Ὁ ἀριθμός J λέγεται ἐπικαμπύλιον ἤ γραμμικόν ὁλοκλήρωμα ὡς πρός s τῆς συναρτήσεως $\Phi(M)$ ἐπί τοῦ τόξου Γ καί τόν παριστάνομεν :

$$\int_\Gamma \Phi(M)\,ds$$

τό δέ Γ λέγεται τόξον ἤ δρόμος ὁλοκληρώσεως· θά ἔχωμεν λοιπόν μιά $\Delta S_K \to 0$.

$$\boxed{\int_\Gamma \Phi(M)\,ds = \text{ορ.}\sum_{K=1}^{\nu}\Phi(M_K)\Delta S_K} \qquad (59.3)$$

Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι κατά μῆκος τοῦ τόξου εἶναι $\Phi(M)\equiv 1$, τό ἄθροισμα (59.2) θά ἰσοῦται γιά κάθε ν μέ τό μῆκος $|\Gamma|$ τοῦ τόξου, ἐπομένως τό μῆκος ἑνός τόξου δίδεται ἀπό τό ἐπικαμπύλιον ὡς πρός s ὁλοκλήρωμα

$$|\Gamma| = \int_\Gamma ds \qquad (59.4)$$

Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι τό Γ εἶναι ἕνα λεῖον τόξον μέ παραμετρικές ἐξισώσεις :

$$x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s)\ \ (s_1 \leq s \leq s_2)$$

καί ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y,z)$ εἶναι συνεχής ἐπ' αὐτοῦ, τό ὁλοκλήρωμα :

$$\int_{s_1}^{s_2}\Phi\,[x(s),y(s),z(s)]\,ds$$

κατά τά γνωστά ἀπό τόν ὁλοκληρωτικόν λογισμόν, ὑπάρχει καί ἰσοῦται μέ τό δεύτερον μέλος τοῦ τύπου (59.3), ἐπομένως διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ἐπικαμπυλίου ὡς πρός s ὁλοκληρώματος θά ἔχωμεν τόν τύπον :

$$\int_\Gamma \Phi(x,y,z)\,ds = \int_{s_1}^{s_2}\Phi\,[x(s),y(s),z(s)]\,ds \qquad (59.5)$$

Ἐάν τό τόξον Γ δίδεται παραμετρικῶς ἀπό τίς ἐξισώσεις :

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\ \ (t_1 \leq t \leq t_2)$$

ὅπου t τυχοῦσα παράμετρος, τότε μετασχηματίζοντες τό δεύτερον μέλος τῆς (59.5) κατά τόν γνωστόν τρόπον, προκύπτει ἐπίσης καί ὁ τύπος :

$$\int_\Gamma \Phi(x,y,z)\,ds = \int_{t_1}^{t_2}\Phi\,[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt \qquad (59.6)$$

τόν ὁποῖον συνήθως χρησιμοποιοῦμεν διά τόν ὑπολογισμόν τῶν ἐπικαμπυλίων ὡς πρός s ὁλοκληρωμάτων καί τοῦ ὁποίου μερική περίπτωσις εἶναι ὁ (59.5). Ἐρχόμεθα τώρα νά ὁρίσωμεν ἕνα ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα διαφορετικῆς φύσεως ἀπό τό προηγούμενον· θεωροῦμεν ἕνα τόξον Γ μέ ἄκρα τά σημεῖα A, B καί μοναδιαῖον ἐφαπτομενικόν διάνυσμα $\bar{\varepsilon}$, ἐπί τοῦ ὁποίου ἡ συνάρτησις $\Phi(M)$ εἶναι μονοσήμαντα ὡρισμένη καί περατωμένη καί ἕνα διάνυσμα $\bar{\gamma}$ τό ὁποῖον ὁρίζεται ὡς ἑξῆς (σχ. 59.2):

$$\bar{\gamma} = \begin{cases} +\bar{\varepsilon} & \text{ὅταν τό τόξον AB εἶναι θετικόν} \\ -\bar{\varepsilon} & \text{» » » AB » ἀρνητικόν} \end{cases} \qquad (59.7)$$

Ὁρισμός (59.2).— *Καλοῦμεν ἐπικαμπύλιον ἤ γραμμικόν ὁλοκλήρωμα ὡς πρός x τῆς συναρτήσεως $\Phi(M)$ ἐπί τοῦ τόξου AB καί τό παριστάνομεν :*

$$\int_{AB}\Phi(M)\,dx \quad \text{ἤ} \quad \int_A^B\Phi(M)\,dx$$

τό ἐπικαμπύλιον ὡς πρός s ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi(M)(\bar{\imath}\bar{\gamma})$ ἐπί τοῦ τόξου Γ, δηλαδή :

$$\int_{AB}\Phi(M)\,dx \equiv \int_\Gamma \Phi(M)(\bar{\imath}\bar{\gamma})\,ds \qquad (59.8)$$

καί ἀντιστοίχως διά τά ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα ὡς πρός y καί z ἔχομεν ἐξ' ὁρισμοῦ :

$$\int_{AB}\Phi(M)\,dy \equiv \int_\Gamma \Phi(M)(\bar{\jmath}\bar{\gamma})\,ds, \qquad \int_{AB}\Phi(M)\,dz \equiv \int_\Gamma \Phi(M)(\bar{k}\bar{\gamma})\,ds \qquad (59.9)$$

τό δέ AB λέγεται τόξον ἤ δρόμος ὁλοκληρώσεως.

Ἀπό τήν (59.7) προκύπτει :

$$\bar{\imath}\bar{\gamma} = \pm\frac{dx}{ds}, \quad \bar{\jmath}\bar{\gamma} = \pm\frac{dy}{ds}, \quad \bar{k}\bar{\gamma} = \pm\frac{dz}{ds} \qquad (59.10)$$

ὅπου τό θετικόν ἤ ἀρνητικόν πρόσημον λαμβάνεται ἀντιστοίχως ὅταν τό τόξον AB εἶναι θετικόν ἤ ἀρνητικόν· ἀντικαθιστῶντες λοιπόν τήν πρώτη ἐξ' αὐτῶν εἰς τόν (59.8) προκύπτει :

$$\int_{AB}\Phi(x,y,z)\,dx = \pm\int_{s_1}^{s_2}\Phi[x(s),y(s),z(s)]\,x'(s)\,ds$$

Ἐάν καλέσωμεν s_A, s_B ἀντιστοίχως τίς καμπυλόγραμμες τετμημένες τῆς ἀρχῆς A καί τοῦ πέρατος B τοῦ τόξου AB, ὅταν αὐτό εἶναι θετικόν θά εἶναι προφανῶς $s_1 = s_A$, $s_2 = s_B$, ὅταν δέ εἶναι ἀρνητικόν θά εἶναι $s_1 = s_B$, $s_2 = s_A$, ἀντικαθιστῶντες λοιπόν τά s_1, s_2 θά ἔχωμεν γιά κάθε περίπτωσιν :

$$\int_{AB}\Phi(x,y,z)\,dx = \int_{s_A}^{s_B}\Phi[x(s),y(s),z(s)]\,x'(s)\,ds \qquad (59.11)$$

Ὅταν παράμετρος ἐπί τοῦ τόξου ὁλοκληρώσεως εἶναι ἡ t, μετασχηματίζοντες τό ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους τοῦ ἀνωτέρω τύπου προκύπτει ὁ τύπος :

$$\int_{AB}\Phi(x,y,z)\,dx = \int_{t_A}^{t_B}\Phi[x(t),y(t),z(t)]\,\dot{x}(t)\,dt \qquad (59.12)$$

τό ὁποῖον συνήθως χρησιμοποιοῦμεν διά τόν ὑπολογισμόν ἑνός ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος ὡς πρός x. καί τοῦ ὁποίου μερική περίπτωσις εἶναι ὁ τύπος (59.11). Ὁμοίως ἐργαζόμενοι διά τά ὁλοκληρώματα ὡς πρός y καί z εὑρίσκομεν ἀντιστοίχους τύπους :

$$\begin{aligned}\int_{AB}\Phi(x,y,z)\,dy &= \int_{t_A}^{t_B}\Phi[x(t),y(t),z(t)]\,\dot{y}(t)\,dt\\ \int_{AB}\Phi(x,y,z)\,dz &= \int_{t_A}^{t_B}\Phi[x(t),y(t),z(t)]\,\dot{z}(t)\,dt\end{aligned} \qquad (59.13)$$

Ἐάν ὑποδιαιρέσωμεν τό τόξον AB διά τῶν σημείων $A_1, A_2, \cdots, A_{\nu-1}$ σέ ν-μικρότερα διαδοχικά τόξα $AA_1, \cdots, A_{\nu-1}B$, λάβωμεν ἐπί ἑκάστου ἐξ' αὐτῶν ἀντιστοίχως τά σημεῖα $M_1, \cdots, M_\nu$, θέσωμεν δι' ὁμοιομορφίαν $A_0 \equiv A$, $A_\nu \equiv B$ καί παραστήσωμεν μέ $x_\kappa, y_\kappa, z_\kappa$ τίς συντεταγμένες τοῦ A_κ ($\kappa = 0, 1, \cdots, \nu$), ἀποδεικνύεται ὅτι :

$$\int_{AB} \Phi(M)dx = op\sum_{K=1}^{\nu} \Phi(M_K)\,\Delta x_K \qquad (59.14)$$

γιά κάθε ὑποδιαίρεσιν $\mathfrak{D}$ τοῦ τόξου AB καί γιά κάθε ἐκλογήν τῶν σημείων M_K μέ μόνον τόν περιορισμόν ὅλα τά $\Delta x_K = x_K - x_{K-1}$ νά τείνουν εἰς τό μηδέν· δύο ἀντιστοίχους τύπους θά ἔχωμεν διά τά ὁλοκληρώματα ὡς πρός y καί z.

$$\int_{AB} \Phi(M)\,dy = op\sum_{K=1}^{\nu} \Phi(M_K)\,\Delta y_K\,,\ \int_{AB} \Phi(M)dz = op\sum_{K=1}^{\nu} \Phi(M_K)\,\Delta z_K \qquad (59.15)$$

Ἄς θεωρήσωμεν τέλος τήν διανυσματικήν συνάρτησιν :

$$\bar{a} = [\,P\,(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R\,(x,y,z)\,]$$

καί ἄς σχηματίσωμεν ἐκ τῶν συντεταγμένων αὐτῆς τό ἄθροισμα :

$$\int_{AB} P\,dx + \int_{AB} Q\,dy + \int_{AB} R\,dz$$

τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος τῆς τετμημένης ὡς πρός x τῆς τεταγμένης ὡς πρός y καί τῆς κατηγμένης ὡς πρός z· τό ἄθροισμα αὐτό λέγεται ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα ἤ κυκλοφορία τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a}$ ἐπί τοῦ τόξου AB καί τό παριστάνομεν διά συντομίαν ὡς ἑξῆς :

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Ἐάν τό τόξον AB παριστάνεται διανυσματικῶς ἀπό τήν ἐξίσωσιν :

$$\bar{r} = (x, y, z)$$

θά εἶναι $\qquad d\bar{r} = (dx, dy, dz)$

ἑπομένως τό ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα γράφεται :

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{AB} \bar{a}\,d\bar{r}$$

Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ὁλοκληρώματος αὐτοῦ θά ἔχωμεν, κατά τούς (59.12) καί (59.13), τόν τύπον :

$$\int_{AB} \bar{a}\,d\bar{r} = \int_{t_A}^{t_B} (P\dot{x} + Q\dot{y} + R\dot{z})\,dt \qquad (59.16)$$

Τέλος ἀπό τούς τύπους (59.14) καί (59.15) προκύπτει γιά $\Delta\bar{r}_K \to$, ὁ τύπος:

$$\int_{AB} \bar{a}\,d\bar{r} = op\sum_{K=1}^{\nu} \bar{a}\,(M_K)\,\Delta\bar{r}_K \qquad (59.17)$$

Ἐάν τό τόξον ὁλοκληρώσεως Γ ἑνός ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος εἶναι κλειστόν θά χρησιμοποιοῦμεν μερικές φορές τό σύμβολον $\oint_\Gamma$.

Ἀπό τούς ἀνωτέρω ὁρισμούς προκύπτει ὅτι μεταξύ τῶν ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρώματος ὡς πρός s καί τῶν ὁλοκληρωμάτων ὡς πρός x, y, z ὑπάρχει μία σημαντική διαφορά. Εἰς τό πρῶτον *ἡ φορά ὁλοκληρώσεως* ἐπί τοῦ τόξου Γ συμπίπτει πάντοτε μέ τήν θετικήν φοράν αὐτοῦ δηλαδή μέ τήν φοράν τῶν αὐξανομένων s ἤ t ἐνῶ εἰς τά ἄλλα ἡ φορά ὁλοκληρώσεως καθορίζεται ἀπό τήν ἀρχήν A καί τό πέρας B τοῦ τόξου ὁλοκληρώσεως AB. Αὐτός εἶναι ὁ λόγος διά τόν ὁποῖον τά τόξα ὁλοκληρώσεως τῶν ὡς πρός s ὁλοκληρωμάτων τά παριστάνομεν μέ ἕνα μόνον γράμμα Γ, ἐνῶ τά τόξα ὁλοκληρώσεως τῶν ὡς πρός x, y, z ὁλοκληρωμάτων τά παριστάνομεν μέ δύο γράμματα τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ πέρας αὐτοῦ.

Ἐὰν ἔχωμεν συνάρτησιν $\Phi(x,y)$ δύο μεταβλητῶν καὶ ἕνα τόξον Γ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y ὁρίζομεν μὲ ὅμοιον τρόπον ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα ὡς πρὸς s καὶ x, y διὰ τὰ ὁποῖα θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως τύπους· π.χ. θὰ εἶναι :

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Gamma}\Phi(x,y)\,ds = \int_{t_1}^{t_2}\Phi\left[x(t),y(t)\right]\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt\\
&\int_{AB}\Phi(x,y)\,dx = \int_{t_A}^{t_B}\Phi\left[x(t),y(t)\right]\dot{x}\,dt\\
&\int_{AB}\Phi(x,y)\,dy = \int_{t_A}^{t_B}\Phi\left[x(t),y(t)\right]\dot{y}\,dt\\
&\int_{AB}\bar{a}\,d\bar{r} = \int_{t_A}^{t_B}(P\dot{x}+Q\dot{y})\,dt
\end{aligned}
\qquad (59.18)
$$

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων καὶ τὴν ἀναγωγὴν τοῦ ὑπολογισμοῦ αὐτῶν εἰς ἁπλᾶ ὡρισμένα ὁλοκληρώματα, προκύπτουν οἱ ἑπόμενες ἰδιότητες τῶν ὁποίων τὴν ἀπόδειξιν ἀφίνομεν δι᾽ ἄσκησιν εἰς τὸν ἀναγνώστην.

Ἐὰν c παριστάνει μίαν σταθερὰν εἶναι :

$$\int_{\Gamma}c\Phi(M)\,ds = c\int_{\Gamma}\Phi(M)\,ds,\quad \int_{AB}c\Phi(M)\,dx = c\int_{AB}\Phi(M)\,dx \qquad (59.19)$$

Ἐὰν $\Phi(M)=\Phi_1(M)+\cdots+\Phi_\nu(M)$, εἶναι :

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Gamma}\Phi(M)\,ds = \int_{\Gamma}\Phi_1(M)\,ds+\cdots+\int_{\Gamma}\Phi_\nu(M)\,ds\\
&\int_{AB}\Phi(M)\,dx = \int_{AB}\Phi_1(M)\,dx+\cdots+\int_{AB}\Phi_\nu(M)\,dx
\end{aligned}
\qquad (59.20)
$$

Γιὰ κάθε τόξον AB, εἶναι :

$$\int_{AB}\Phi(M)\,ds = \int_{BA}\Phi(M)\,ds,\qquad \int_{AB}\Phi(M)\,dx = -\int_{BA}\Phi(M)\,dx \qquad (59.21)$$

Ἐὰν $\Gamma=\Gamma_1+\cdots+\Gamma_\nu$ εἶναι :

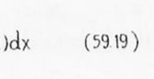
$$\int_{\Gamma}\Phi(M)\,ds = \int_{\Gamma_1}\Phi(M)\,ds+\cdots+\int_{\Gamma_\nu}\Phi(M)\,ds \qquad (59.22)$$

Διὰ ν-σημεῖα $A_1, A_2, \cdots, A_\nu$ μιᾶς γραμμῆς, ἰσχύει :

$$\int_{A_1A_2}\Phi(M)\,dx+\int_{A_2A_3}\Phi(M)\,dx+\cdots+\int_{A_{\nu-1}A_\nu}\Phi(M)\,dx = \int_{A_1A_\nu}\Phi(M)\,dx \qquad (59.23)$$

Ἐὰν κ εἶναι τὸ ἀνώτερον πέρας τοῦ μέτρου $|\bar{a}|$ τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a}$ ἐπὶ τοῦ τόξου AB, εἶναι :

$$\int_{AB}\bar{a}\,d\bar{r} \leqslant \kappa\,|AB| \qquad (59.24)$$



Ἐὰν τὸ τόξον ὁλοκληρώσεως Γ εἶναι κλειστόν, τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἀφετηρίας ὑπολογισμοῦ, δηλαδή :

$$
\begin{aligned}
&\oint_{\Gamma}\Phi(M)\,ds = \int_{AB\Gamma A}\Phi(M)\,ds = \int_{B\Gamma AB}\Phi(M)\,ds = \cdots\\
&\oint_{\Gamma}\Phi(M)\,dx = \int_{AB\Gamma A}\Phi(M)\,dx = \int_{B\Gamma AB}\Phi(M)\,dx = \cdots
\end{aligned}
\qquad (59.25)
$$

Προσεγγιστικὸς ὑπολογισμὸς τῶν ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων :

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Gamma}\Phi(M)\,ds \approx \sum_{\kappa=1}^{\nu}\Phi(M_\kappa)\Delta s_\kappa\\
&\int_{\Gamma}\Phi(M)\,dx \approx \sum_{\kappa=1}^{\nu}\Phi(M_\kappa)\Delta x_\kappa
\end{aligned}
\qquad (59.26)
$$

Παράδειγμα (59.1). — Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα ὡς πρὸς s καὶ x, y, z τῆς συναρτήσεως $\Phi = x - z$ ἐπὶ τοῦ τόξου AB τῆς κυκλικῆς ἕλικος : $x = \sigma\upsilon\nu t$, $y = \eta\mu t$, $z = t$ ὅπου $A(1,0,0)$ καὶ $B(0,1,\frac{\pi}{2})$.

Λύσις. Τὰ ἄκρα A, B ἀντιστοιχοῦν εἰς τὶς τιμὲς $t_A = 0$ καὶ $t_B = \frac{\pi}{2}$, ἐπομένως κατὰ τὸν τύπον (59.6) ἐπειδὴ $t_1 = t_A$, $t_2 = t_B$ θὰ ἔχωμεν :

$$\int_{\Gamma}(x-z)ds = \int_0^{\pi/2}(\sigma\upsilon\nu t - t)\sqrt{\eta\mu^2 t + \sigma\upsilon\nu^2 t + 1} = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}(\sigma\upsilon\nu t - t)dt = \cdots = \sqrt{2}\left(1 - \frac{\pi^2}{8}\right)$$

Διὰ τὰ ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα ὡς πρὸς x, y, z ἀπὸ τοὺς τύπους (59.12) καὶ (59.13) θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως :

$$\int_{AB}(x-z)dx = \int_0^{\pi/2}(\sigma\upsilon\nu t - t)(-\eta\mu t)dt = \int_0^{\pi/2}(t\eta\mu t + \eta\mu t\sigma\upsilon\nu t)dt = \cdots = \frac{1}{2}$$

$$\int_{AB}(x-z)dy = \int_0^{\pi/2}(\sigma\upsilon\nu t - t)\sigma\upsilon\nu t\, dt = \int_0^{\pi/2}(\sigma\upsilon\nu^2 t - t\sigma\upsilon\nu t)dt = \cdots = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{AB}(x-z)dz = \int_0^{\pi/2}(\sigma\upsilon\nu t - t)dt = \cdots = 1 - \frac{\pi^2}{8}.$$

Παράδειγμα (59.2). — Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα ὡς πρὸς s καὶ x, y, z τῆς συναρτήσεως $\Phi = xy + z$, ἐπὶ τοῦ πρώτου τετάρτου AB τοῦ κύκλου $y^2 + z^2 = \alpha^2$, $x = 0$ ὅπου $A(0,0,\alpha)$ καὶ $B(0,\alpha,0)$.

Λύσις. Μία παραμετρικὴ παράστασις τοῦ τόξου AB εἶναι : $x = 0$, $y = \alpha\sigma\upsilon\nu t$, $z = \alpha\eta\mu t$ μὲ $t_A = t_2 = \frac{\pi}{2}$ καὶ $t_B = t_1 = 0$, ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$\int_{\Gamma}(xy+z)ds = \int_0^{\pi/2}\alpha\eta\mu t\sqrt{\alpha^2\eta\mu^2 t + \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 t}\,dt = \cdots = \alpha^2$$

$$\int_{AB}(xy+z)dx = \int_{\pi/2}^{0}\alpha\eta\mu t\cdot 0\cdot dt = 0$$

$$\int_{AB}(xy+z)dy = \int_{\pi/2}^{0}\alpha\eta\mu t(-\alpha\eta\mu t)dt = -\alpha^2\int_{\pi/2}^{0}\eta\mu^2 t\, dt = \cdots = \frac{\pi\alpha^2}{4}$$

$$\int_{AB}(xy+z)dz = \int_{\pi/2}^{0}\alpha\eta\mu t\cdot\alpha\sigma\upsilon\nu t\, dt = \alpha^2\int_{\pi/2}^{0}\eta\mu t\sigma\upsilon\nu t\, dt = \cdots = -\frac{\alpha^2}{2}$$

Παράδειγμα (59.3). — Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα $\int_{0A} xy\,dy$ ἐπὶ τῆς παραβολῆς $y = x^2$, ὅπου $0(0,0)$ καὶ $A(1,1)$.

Λύσις. Μία παραμετρικὴ παράστασις τοῦ παραβολικοῦ τόξου 0A εἶναι : $x = t$, $y = t^2$ μὲ $t_0 = 0$ καὶ $t_A = 1$, ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$\int_{0A} xy\,dy = \int_0^1 t^3 . 2t\,dt = 2\int_0^1 t^4 dt = \frac{2}{5}$$

Παράδειγμα (59.4). — Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ κυκλοφορία τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{\alpha} = (y, -z, x)$ ἐπὶ τοῦ ἐλλειπτικοῦ τόξου AB : $x^2 + 4z^2 = 4$, $y = 1$ ὅπου $A(0,1,1)$ καὶ $B(2,1,0)$.

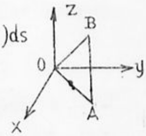
Λύσις. Μία παραμετρικὴ παράστασις τοῦ τόξου AB εἶναι : $x = 2\sigma\upsilon\nu t$, $y = 1$, $z = \eta\mu t$ μὲ $t_A = \frac{\pi}{2}$ καὶ $t_B = 0$, ἐπομένως ἀπὸ τὸν τύπον (59.16) θὰ ἔχωμεν :

$$\int_{AB}\bar{\alpha}d\bar{r} = \int_{AB} y\,dx - z\,dy + x\,dz = \int_{\pi/2}^{0}(-2\eta\mu t + 2\sigma\upsilon\nu t\cdot\sigma\upsilon\nu t)dt = \cdots = 2 - \frac{\pi}{2}$$

Παράδειγμα (59.5). — Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου $x^2 + y^2 = 4$.

Λύσις. Μία παραμετρική παράστασις τοῦ κύκλου αὐτοῦ εἶναι $x=2\text{συν}t,\ y=2\text{ημ}t$, ἐπομένως θά ἔχωμεν : $|\Gamma| = \oint_\Gamma ds = \int_0^{2\pi}\sqrt{4\text{ημ}^2 t+4\text{συν}^2 t}\,dt = 2\int_0^{2\pi} dt = 4\pi.$

Παράδειγμα (59.6).— Νά ὑπολογισθοῦν τά ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα ὡς πρός s καί ὡς πρός x τῆς συναρτήσεως $\Phi = xy+z^2$ ἐπί τῆς κλειστῆς τεθλασμένης γραμμῆς $\Gamma \equiv OABO$ μέ κορυφές τά σημεῖα : $O(0,0,0)$, $A(1,1,0)$, $B(1,1,1)$.



Λύσις. Ἔχομεν :

$$\oint_\Gamma (xy+z^2)\,ds = \int_{OA}(xy+z^2)\,ds+\int_{AB}(xy+z^2)\,ds+\int_{BO}(xy+z^2)\,ds$$

$$\oint_\Gamma (xy+z^2)\,dx = \int_{OA}(xy+z^2)\,dx+\int_{AB}(xy+z^2)\,dx+\int_{BO}(xy+z^2)\,dx$$

Μία παραμετρική παράστασις τῆς OA εἶναι : $x=t,\ y=t,\ z=0\ (0\leq t\leq 1)$

» » » » AB » : $x=1,\ y=1,\ z=t\ (0\leq t\leq 1)$

» » » » BO » : $x=t,\ y=t,\ z=t\ (1\geq t\geq 0)$

Θά ἔχωμεν λοιπόν κατά τούς τύπους (59.6) καί (59.12)

$$\oint_\Gamma (xy+z^2)\,ds = \int_0^1 t^2\sqrt{2}\,dt+\int_0^1(1+t^2)\,dt+\int_0^1 2t^2\sqrt{3}\,dt = \cdots = \frac{4+\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3}$$

$$\oint_\Gamma (xy+z^2)\,dx = \int_0^1 t^2 dt+\int_0^1(1+t^2)\,dt+\int_1^0 2t^2 dt = \cdots = 1.$$

60. Ἔργον κέντρου μάζης ροπαί ἀδρανείας.— Ἐάν ὑλικόν σημεῖον M διαγράφη, ὑπό τήν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως $\bar{F}=(P,Q,R)$, ἕνα τόξον AB μέ διανυσματικήν ἐξίσωσιν $\bar{r}=\bar{r}(t)$, τό παραγόμενον ὑπό τῆς δυνάμεως ἔργου E, ὁρίζεται ἀπό τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα :

$$E = \int_{AB}\bar{F}\,d\bar{r} \tag{60.1}$$

Ὁ ὁρισμός αὐτός δικαιολογεῖται ὡς ἑξῆς : ἐάν χωρίσωμεν τό τόξον AB σέ ν μικρότερα τόξα σχ.(60.1), τό παραγόμενον ἔργον κατά τήν μετακίνησιν ἐπί ἑκάστου ἐξ αὐτῶν $A_{\kappa-1}A_\kappa$, εἶναι φυσικόν νά τό θεωρήσωμεν κατά προσέγγισιν ἴσον μέ τό ἐσωτερικόν γινόμενον :

$$\bar{F}(M_\kappa)\,\Delta\bar{r}_\kappa$$

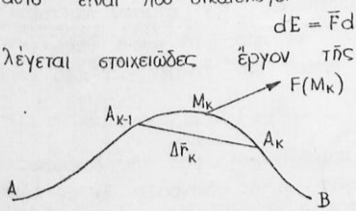
δηλαδή μέ τό ἔργον τό ὁποῖον παράγεται ὑπό τῆς σταθερῆς δυνάμεως $\bar{F}(M_\kappa)$ κατά τήν μετακίνησιν ἐπί τῆς ἀντιστοίχου χορδῆς $\overline{A_{\kappa-1}A_\kappa} = \Delta\bar{r}_\kappa$ τό ὅριον τοῦ ἀθροίσματος

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}\bar{F}(M_\kappa)\bar{r}_\kappa$$

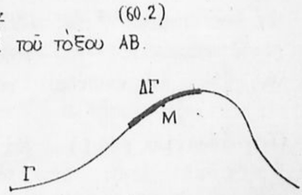
ἰσοῦται κατά τόν τύπον (59.17) μέ τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα (60.1) καί αὐτό εἶναι πού δικαιολογεῖ τόν ὁρισμόν μας. Ἡ παράστασις :

$$dE = \bar{F}d\bar{r} \equiv P\,dx+Q\,dy+R\,dz \tag{60.2}$$

λέγεται στοιχειῶδες ἔργον τῆς δυνάμεως $\bar{F}$ ἐπί τοῦ τόξου AB.



Σχ.(60.1)



Σχ.(60.2)

Ἔστω Γ ἕνα λεῖον ὑλικὸν τόξον καὶ Μ ἕνα σημεῖον αὐτοῦ, κείμενον πάντοτε εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς μεταβλητοῦ τόξου ΔΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος Δs καὶ μᾶζαν Δm σχ.(60.2). Τὸ πηλίκον $\Delta m/\Delta s$ λέγεται μέση πυκνότης τοῦ ΔΓ καὶ τὸ ὅριον αὐτοῦ γιὰ $\Delta s \to 0$, ἐὰν φυσικὰ ὑπάρχῃ, λέγεται πυκνότης τοῦ τόξου Γ εἰς τὸ σημεῖον Μ· παριστάνοντες λοιπὸν τὴν πυκνότητα μὲ δ(Μ) θὰ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ :

$$\delta(M) = \text{ορ}\,\frac{\Delta m}{\Delta s} \qquad (60.3)$$

Ἐὰν ἡ συνάρτησις δ(Μ) ὑπάρχῃ καὶ εἶναι συνεχὴς κατὰ μῆκος τοῦ τόξου Γ, ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐπικαμπυλίου ὡς πρὸς s ὁλοκληρώματος ἕπεται ὅτι ἡ μᾶζα m τοῦ Γ θὰ δίδεται ἀπὸ τὸ ὁλοκλήρωμα :

$$m = \int_\Gamma \delta(M)\,ds \qquad (60.4)$$

Ἡ πυκνότης εἶναι προφανῶς μία συνάρτησις τοῦ σημείου Μ· ὅταν εἶναι σταθερὴ κατὰ μῆκος τοῦ Γ, τότε τὸ τόξον λέγεται ὁμογενές· ἡ παράστασις

$$dm = \delta(M)\,ds$$

ἰσοῦται κατὰ προσέγγισιν μὲ τὴν μᾶζαν Δm τοῦ ΔΓ καὶ λέγεται στοιχεῖον μάζης.

Ὁρίζομεν τώρα μὲ τὴν βοήθεια τῆς πυκνότητος δ(Μ) ἑνὸς τόξου Γ, τὸ κέντρον μάζης $(x_\kappa, y_\kappa, z_\kappa)$, τὶς ροπὲς ἀδρανείας I_x, I_y, I_z ἀντιστοίχως ὡς πρὸς τοὺς ἄξονες τῶν x, y, z τὶς ροπὲς ἀδρανείας I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} ἀντιστοίχως ὡς πρὸς τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα xy, yz, zx καὶ γενικῶς τὴν ροπὴν ἀδρανείας I ὡς πρὸς οἱονδήποτε σημεῖον, εὐθεῖαν ἢ ἐπίπεδον, ἀπὸ τὰ ἑξῆς ὡς πρὸς s ὁλοκληρώματα :

$$\begin{aligned}
x_\kappa &= \frac{1}{m}\int_\Gamma x\delta\,ds, & y_\kappa &= \frac{1}{m}\int_\Gamma y\delta\,ds, & z_\kappa &= \frac{1}{m}\int_\Gamma z\delta\,ds\\
I_x &= \int_\Gamma (y^2+z^2)\delta\,ds, & I_y &= \int_\Gamma (z^2+x^2)\delta\,ds, & I_z &= \int_\Gamma (x^2+y^2)\delta\,ds\\
I_{xy} &= \int_\Gamma z^2\delta\,ds, & I_{yz} &= \int_\Gamma x^2\delta\,ds, & I_{zx} &= \int_\Gamma y^2\delta\,ds \qquad (60.5)\\
& & I &= \int_\Gamma \alpha^2\delta\,ds & &
\end{aligned}$$

ὅπου α^2 παριστάνει τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τῶν σημείων τοῦ τόξου Γ ἀπὸ τὸ σημεῖον τὴν εὐθεῖαν ἢ τὸ ἐπίπεδον ὡς πρὸς τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν τὴν ροπὴν ἀδρανείας τοῦ τόξου· ἀντιστοίχους τύπους θὰ ἔχωμεν διὰ τόξα κείμενα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y.

Παράδειγμα (60.1). – Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῆς δυνάμεως $\bar{F} = (y, -x)$ ἔργον, ὅταν τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς αὐτῆς διαγράφει ἐκ τοῦ $A(\alpha,0)$ πρὸς τὸ $B(0,\alpha)$ ὁλόκληρον τὸν κύκλο $\Gamma:\ x^2+y^2=\alpha^2$.

Λύσις. Μία παραμετρικὴ παράστασις τοῦ κύκλου εἶναι $x = \alpha\,\text{συν}\,t$, $y = \alpha\,\text{ημ}\,t$, ὅπου τὸ t μεταβάλλεται ἀπὸ 0 μέχρι 2π ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$E=\oint_\Gamma \bar{F}d\bar{r}=\oint_\Gamma y\,dx-x\,dy=\int_0^{2\pi}\left[\alpha\eta\mu t(-\alpha\eta\mu t)-\alpha\sigma\upsilon\nu t\,\alpha\sigma\upsilon\nu t\right]dt=-\alpha^2\int_0^{2\pi}dt=-2\pi\alpha^2$$

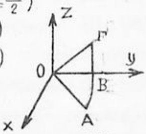
Παράδειγμα (60.2). — Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῆς δυνάμεως $\bar{F}=(z,-x,y)$ ἔργον, κατὰ τὴν μετακίνησιν ἐπὶ τοῦ κλειστοῦ τόξου $\Gamma=OA+AB+B\Gamma+\Gamma O$ ὅπου $OA, O\Gamma$ εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν xoy καὶ yoz, τὸ AB εἶναι τόξον μοναδιαίου κύκλου τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ ἡ $B\Gamma$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν z σχ. (60.3).

Λύσις. Παραμ. ἐξισώσεις τῆς OA: $x=t,\ y=t,\ z=0\ (0\leq t\leq 1)$

» » τοῦ AB: $x=\sigma\upsilon\nu t,\ y=\eta\mu t,\ z=0\ (\frac{\pi}{4}\leq t\leq\frac{\pi}{2})$

» » τῆς $B\Gamma$: $x=0,\ y=1,\ z=t\ \ (0\leq t\leq 1)$

» » » ΓO: $x=0,\ y=t,\ z=t\ \ (1\geq t\geq 0)$



Σχ.(60.3)

$$E=\oint_\Gamma \bar{F}dr=\oint_\Gamma z\,dx-x\,dy+y\,dz=\int_{OA}\cdots+\int_{AB}\cdots+\int_{B\Gamma}\cdots+\int_{\Gamma O}\cdots=\int_0^1-t\,dt+\int_{\pi/4}^{\pi/2}-\sigma\upsilon\nu^2t\,dt+$$

$$\int_0^1 dt+\int_1^0 t\,dt=\cdots=-\frac{1}{8}(\pi-2).$$

Παράδειγμα (60.3). — Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ροπὴ ἀδρανείας τοῦ τόξου Γ: $x=t,\ y=t^2,\ z=1\ \ (0\leq t\leq 1)$ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν x,y τὸ ὁποῖον ἔχει πυκνότητα $\delta=x(1+4y)^{-\frac{1}{2}}$.

Λύσις. Ἀπὸ τοὺς τύπους (60.5) θὰ ἔχωμεν :

$$I_{xy}=\int_\Gamma z^2x(1+4y)^{-\frac{1}{2}}ds=\int_0^1 t(1+4t^2)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1+4t^2}\,dt=\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}$$

Παράδειγμα (60.4). — Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ροπὴ ἀδρανείας τοῦ τόξου Γ: $y=x^3$ $(0\leq x\leq 1)$, ὡς πρὸς τὴν πρώτη διχοτόμον τῶν ἀξόνων, τὸ ὁποῖον ἔχει πυκνότητα $\delta=2xy^{-1}(1+9x^4)^{-\frac{1}{2}}$.

Λύσις. Τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου $M(x,y)$ ἀπὸ τὴν πρώτη διχοτόμο εἶναι $\alpha^2=\frac{1}{2}(x-y)^2$, ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$I=\int_\Gamma\frac{1}{2}(x-y)^2\cdot 2xy^{-1}(1+9x^4)^{-\frac{1}{2}}ds=\int_0^1(x-x^3)^2x^{-2}(1+9x^4)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1+9x^4}\,dx$$

$$=\int_0^1(1-x^2)^2dx=\int_0^1(1+x^4-2x^2)dx=\cdots=\frac{8}{15}.$$

Παράδειγμα (60.5). — Νὰ εὑρεθῆ τὸ κέντρον μάζης τοῦ κυκλικοῦ τόξου Γ: $x=\alpha\sigma\upsilon\nu t,\ y=0,\ z=\alpha\eta\mu t\ \ (0\leq t\leq\frac{\pi}{2})$, τὸ ὁποῖον ἔχει πυκνότητα $\delta=xz^2$.

Λύσις. Ἔχομεν : $m=\int_\Gamma xz^2ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\alpha\sigma\upsilon\nu t\cdot\alpha^2\eta\mu^2t\cdot\alpha\,dt=\alpha^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^2t\,d\eta\mu t=\frac{\alpha^4}{3}$,

$$x_\kappa=\frac{1}{m}\int_\Gamma x^2z^2ds=3\alpha^{-4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\alpha^4\sigma\upsilon\nu^2t\,\eta\mu^2t\cdot\alpha\,dt=\cdots=\frac{3\pi\alpha}{16}$$

$$y_\kappa=0$$

$$z_\kappa=\frac{1}{m}\int_\Gamma xz^3ds=3\alpha^{-4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\alpha\sigma\upsilon\nu t\cdot\alpha^3\eta\mu^3t\cdot\alpha\,dt=\cdots=\frac{3\alpha}{4}$$

Ἀσκήσεις

949) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα : $\int_\Gamma x ds$, ὅπου Γ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ ἄκρα τὰ σημεῖα (0,0) καὶ (1,1).

950) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα : $\int_\Gamma ds$, ὅπου Γ τὸ τόξον τῆς παραβολῆς $y=x^2$ ποὺ ἔχει ἄκρα τὰ σημεῖα (0,0) καὶ (1,1).

951) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα : $\oint_\Gamma (x^2-y^2)\,ds$, ὅπου Γ ὁ κύκλος $x^2+y^2=4$.

952) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα : $\int_\Gamma (x+yz^2)\,ds$, ὅπου Γ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ποὺ ἔχει ἄκρα τὰ σημεῖα $(2,1,-2)$ καὶ $(10,5,-10)$.

953) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα : $\int_\Gamma (1+x^2)^{-1} yz\,ds$, ὅπου Γ τὸ τόξον τῆς γραμμῆς $y=(1+x^2)$, $z=\frac{2}{3}x^3$ ποὺ ἔχει ἄκρα τὰ σημεῖα $(0,1,0)$ καὶ $(3,10,18)$.

954) Νὰ εὑρεθῇ ἡ μᾶζα τοῦ τόξου : $x=t+3$, $y=\frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}$, $z=\frac{1}{2}t^2+1$ $(0\leqslant t\leqslant 4)$, τὸ ὁποῖον ἔχει γραμμικὴν πυκνότητα $\delta=(x+y):z$.

955) Νὰ εὑρεθῇ ἡ μᾶζα τοῦ τόξου : $x=\text{συν}t$, $y=\text{ημ}t$, $z=t$ $(0\leqslant t\leqslant \pi)$, ὅταν ἡ πυκνότης αὐτοῦ εἶναι $\delta=\ell n(x^2+y^2+z^2)$.

956) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_{OA} y^2 dx$, ὅπου OA εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ποὺ ἔχει ἄκρα τὰ σημεῖα $O(0,0)$ καὶ $A(2,2)$.

957) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα : $\int_{AB} y\,dx$, ὅπου AB εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ποὺ ἔχει ἄκρα τὰ σημεῖα $A(2,1)$ καὶ $B(1,2)$.

958) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα : $\int_{AB} x\,dy$, ὅπου AB εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ποὺ ἔχει ἄκρα τὰ σημεῖα $A(1,1)$ καὶ $B(2,1)$.

959) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον ποὺ παράγει ἡ δύναμις : $\bar{F}=(y^2,x^2)$, ἐπὶ τοῦ τόξου AB τοῦ κύκλου $x^2+y^2=1$ $(x\geqslant 0)$, ὅταν $A(0,-1)$ καὶ $B(0,1)$.

960) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον ποὺ παράγει ἡ δύναμις : $\bar{F}=(y,x)$, ἐπὶ τοῦ τόξου OA τῆς παραβολῆς $y=x^2$, ὅταν $O(0,0)$ καὶ $A(2,4)$.

961) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον ποὺ παράγει ἡ δύναμις $\bar{F}=(y,-x):(x^2+y^2)$, ἐπὶ τοῦ τόξου AB τῆς γραμμῆς $x=\text{συν}^3 t$, $y=\text{ημ}^3 t$ ὅπου $A(1,0)$ καὶ $B(0,1)$.

962) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον ποὺ παράγει ἡ δύναμις $\bar{F}=(y^2,xy)$, ἐπὶ τῆς περιμέτρου $M_1M_2M_3M_4$ τοῦ τετραγώνου μὲ κορυφὲς τὰ σημεῖα : $M_1(1,1)$, $M_2(-1,1)$, $M_3(-1,-1)$, $M_4(1,-1)$.

963) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\oint_\Gamma x^2y^2dx-xy^3dy$, ὅπου Γ ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου μὲ κορυφὲς $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ κατὰ τὴν φορὰν ἐκ τοῦ O πρὸς τὸ A.

964) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κυκλοφορία τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a}=(x^2+y^2,\,2xy)$ ἐπὶ τῆς παραβολῆς $y=x^2$ ἀπὸ τὸ σημεῖον $O(0,0)$ μέχρι τὸ $A(1,1)$.

965) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\oint_\Gamma (x^2+y^2)^2(x^2y\,dx-x^3dy)$ ἐπὶ τῆς περιμέτρου Γ τοῦ τετραγώνου μὲ κορυφὲς τὰ σημεῖα $(\pm 1,\pm 1)$, κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν δηλαδὴ τὴν ἀντίθετον τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου.

966) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_{AB} \text{grad}(x^2-y^2)\cdot d\bar{r}$, ὅπου AB τὸ τόξον τῆς γραμμῆς $y=x^3$ ποὺ ἔχει ἄκρα τὰ σημεῖα $A(0,0)$ καὶ $B(2,8)$.

967) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\oint_\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial n}\,ds$ ὅπου $\phi=x^2-y^2$, Γ ὁ κύκλος $x^2+y^2=1$ καὶ $\bar{n}$ τὸ πρὸς τὰ ἔξω κάθετον μοναδιαῖον διάνυσμα αὐτοῦ.

968) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον ποὺ παράγει ἡ δύναμις $\bar{F}=(x^2,-xz,y^2)$ ἐπὶ τοῦ εὐ-

θύγραμμον τμήματος AB, ὅταν $A(2,3,2)$ καί $B(1,0,1)$.

970) Νά δειχθῆ ὅτι ἡ κυκλοφορία τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a} = (2xy^2z,\ 2x^2yz,\ x^2y^2)$ ἐπί τοῦ κύκλου $x^2+y^2=1$, $z=2$ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς φορᾶς ὁλοκληρώσεως.

971) Νά εὑρεθῆ ἡ μᾶζα τοῦ τόξου Γ: $x=\text{συν}t$, $y=\text{συν}t$, $z=\sqrt{2}\,\text{ημ}t$ $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$, ὅταν ἡ πυκνότης αὐτοῦ εἶναι $\delta = x^2yz$.

972) Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα $\int_\Gamma ydx + zdy + xdz$, ὅπου Γ ἡ τομή τῶν ἐπιφανειῶν $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+z=a$ κατά τήν φοράν πού αὐξάνει τό y ὅταν ἀναχωροῦμεν ἀπό τό σημεῖον $(a,0,0)$.

973) Νά εὑρεθοῦν οἱ δύο τιμές τοῦ ὁλοκληρώματος $\oint_\Gamma (y^2+z^2)dx + (z^2+x^2)dy + (x^2+y^2)dz$ ὅπου Γ ἡ τομή τῶν ἐπιφανειῶν $x^2+y^2+z^2 = 2ax$, $x^2+y^2 = 2\beta x$ $(a > \beta > 0,\ z > 0)$.

974) Νά ὑπολογισθῆ τό ἔργον πού παράγει δύναμις $\bar{F}$ τῆς ὁποίας τό σημεῖον ἐφαρμογῆς M γράφει ἐκ τοῦ A πρός τό B ἡμικύκλιον διαμέτρου AB, ἡ ὁποία εἶναι ὁμόρροπος πρός τό διάνυσμα $\overline{MA}$ καί ἔχει μέτρον $|\overline{MB}|$.

975) Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα $\int_\Gamma |\bar{r}|ds$, ὅταν Γ παριστάνει τό τόξον τῆς κωνικῆς ἕλικος $\bar{r} = (at\,\text{συν}t,\ at\,\text{ημ}t,\ \beta t)$ πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τό διάστημα $0 \leq t \leq 2\pi$.

976) Νά γίνῃ τό ἴδιο ὅταν Γ παριστάνῃ τό τμῆμα τῆς εὐθείας $\bar{r} = (at, 0, \beta t)$ πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τό ἴδιο διάστημα $0 \leq t \leq 2\pi$.

977) Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα: $\int_{AB} \bar{a}d\bar{r}$, ἐπί τοῦ τόξου AB τῆς κυκλικῆς ἕλικος $A(1,0,0)$ καί $B(1,0,2\pi\gamma)$ ὅταν $\bar{r} = (\text{συν}t,\ \text{ημ}t,\ \gamma t)$ πού ἔχει ἄκρα τά σημεῖα $\bar{a} = [x^2+5\lambda y+3yz,\ 5x+3\lambda xz-2,\ (\lambda+2)xy-4z]$ καί νά εὑρεθῆ ἡ ὁριακή τιμή τοῦ ὁλοκληρώματος διά $2\pi\gamma = h \to 0$.

978) Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα: $\int_{AB\Gamma} x^2dy + y^2dx$, ὅπου ὁ δρόμος ὁλοκληρώσεως ἀποτελεῖται ἀπό τό τόξον AB τοῦ κύκλου $x^2+y^2=2$ μέ ἄκρα τά σημεῖα $A(\sqrt{2},0)$, $B(1,1)$ καί ἀπό τό τόξον $B\Gamma$ τῆς παραβολῆς $2y^2 = x+1$ μέ ἄκρα τά σημεῖα $B(1,1)$, $\Gamma(-1,0)$.

979) Νά εὑρεθῆ ἡ ροπή ἀδρανείας I_x ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος AB τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y μήκους λ τό ὁποῖον σχηματίζει μετά τοῦ ἄξονος τῶν x γωνίαν θ καί ἀπό τόν ὁποῖον τό A ἔχει ἀπόστασιν ἴσην μέ a.

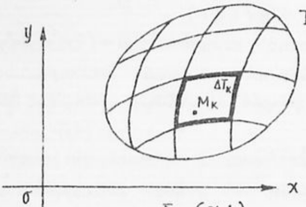
980) Νά εὑρεθῆ ἡ ροπή ἀδρανείας I_{xy} τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος Γ πού ἔχει ἄκρα τά σημεῖα $O(0,0,0)$, $A(3,3,3)$ καί πυκνότητα $\delta = \frac{x+y}{z+1}$.

981) Νά εὑρεθῆ τό κ. μάζης τοῦ παραβολικοῦ τόξου $x^2 = 1-z$, $y=0$ $(0 \leq z \leq 1)$ τό ὁποῖον ἔχει πυκνότητα $\delta = (5-4z)^{-\frac{1}{2}}$.

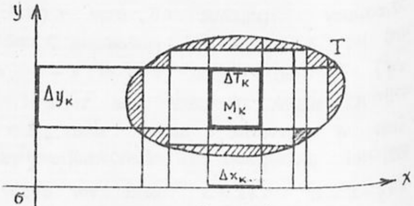
982) Νά εὑρεθῆ τό κ. μάζης τοῦ τόξου $x=t$, $y=1-t$, $z=t^3$ $(0 \leq t \leq 1)$, τό ὁποῖον ἔχει πυκνότητα $\delta = (2+9x^4)^{-\frac{1}{2}}$.

Διπλᾶ ὁλοκληρώματα

61. Ὁρισμός καί ἰδιότητες τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων. — Ἔστω συνάρτησις $\Phi(M)$ μονοσήμαντα ὡρισμένη καί περατωμένη ἐπί ἑνός χωρίου T τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y τοῦ ὁποίου τό σύνορον ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα πεπερασμένον πλῆθος λείων τόξων σχ. (61.1).



Σx. (61.1)



Σx.(61.2)

Ὑποδιαιροῦμεν τὸ χωρίον αὐτὸ μὲ ἕναν οἱονδήποτε τρόπον σὲ ν-μικρότερα ὑποχωρία $\Delta T_1, \cdots, \Delta T_\nu$ ἔτσι ὥστε παριστάνοντες μὲ $|T|$ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ T καὶ μὲ $\Delta\tau_\kappa$ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΔT_κ νὰ εἶναι :

$$|T| = \Delta\tau_1 + \Delta\tau_2 + \cdots + \Delta\tau_\nu \qquad (61.1)$$

Λαμβάνομεν τώρα ἐπὶ ἑκάστου ὑποχωρίου ΔT_κ ἕνα σημεῖον M_κ καὶ σχηματίζομεν μὲ τὰ δεδομένα αὐτὰ τὸ ἄθροισμα :

$$\Phi(M_1)\Delta\tau_1 + \cdots + \Phi(M_\nu)\Delta\tau_\nu \equiv \sum_{\kappa=1}^{\nu}\Phi(M_\kappa)\Delta\tau_\kappa \qquad (61.2)$$

Τὸ ἄθροισμα αὐτὸ ἐξαρτᾶται ἐν γένει καὶ ἀπὸ τὴν ὑποδιαίρεσιν τοῦ T εἰς ὑποχωρία, τὴν ὁποίαν θὰ παριστάνωμεν συντόμως μὲ $\mathfrak{D}$ καὶ ἀπὸ τὴν ἐκλογὴν τοῦ σημείου M_κ ἐπὶ ἑκάστου τῶν ΔT_κ.

Ὁρισμός (61.1).— *Ἡ συνάρτησις $\Phi(M)$ λέγεται ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ τοῦ χωρίου T, ὅταν ὑπάρχη ἀριθμὸς J τέτοιος ὥστε ὅταν ὅλα τὰ $\delta_\kappa \to 0$, ὅπου δ_κ τὸ διαμέτρημα τοῦ ΔT_κ, νὰ εἶναι :*

$$\text{op}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\Phi(M_\kappa)\Delta\tau_\kappa = J$$

μιὰ κάθε ὑποδιαίρεσιν $\mathfrak{D}$ καὶ μιὰ κάθε ἐκλογὴν τῶν σημείων M_κ· δηλαδὴ ἀκριβέστερον ὅταν μιὰ κάθε θετικὸν ἀριθμὸν ε, εὑρίσκεται ἀριθμὸς η ἐπίσης θετικός, τέτοιος ὥστε ὅταν ὅλα τὰ $\delta_\kappa < \eta$, νὰ εἶναι :

$$\left| J - \sum_{\kappa=1}^{\nu}\Phi(M_\kappa)\Delta\tau_\kappa \right| < \varepsilon$$

ὁ ἀριθμὸς J λέγεται διπλὸν ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi(M)$ ἐπὶ τοῦ χωρίου T καὶ τὸν παριστάνομεν :

$$\iint_T \Phi(M)\,d\tau$$

τὸ δὲ T λέγεται χωρίον ἢ τόπος ὁλοκληρώσεως· θὰ ἔχωμεν λοιπὸν μιὰ $\delta_\kappa \to 0$,

$$\boxed{\iint_T \Phi(M)\,d\tau = \text{op}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\Phi(M_\kappa)\Delta\tau_\kappa} \qquad (61.3)$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπὶ τοῦ χωρίου T εἶναι $\Phi(M) \equiv 1$, τὸ ἄθροισμα (61.2) θὰ ἰσοῦται γιὰ κάθε ν μὲ τὸ ἐμβαδὸν $|T|$, ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου T δίδεται ἀπὸ τὸ διπλὸν ὁλοκλήρωμα :

$$|T| = \iint_T d\tau \qquad (61.4)$$

Τίθεται τώρα τὸ ἐρώτημα πότε μία συνάρτησις εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ ἑνὸς χωρίου T· ἀποδεικνύεται ὅτι κάθε συνάρτησις $\Phi(M)$ συνεχὴς ἐπὶ ἑνὸς

κλειστοῦ χωρίου T, εἶναι καὶ ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ αὐτοῦ· ὑπάρχουν ὅμως καὶ μὴ συνεχεῖς συναρτήσεις οἱ ὁποῖες εἶναι ὁλοκληρώσιμες.
Ἕνας ἁπλὸς τρόπος ὑποδιαιρέσεως τοῦ T σὲ ὑποχωρία εἶναι δι' εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τοὺς ἄξονες, ὁπότε τὰ προκύπτοντα ὑποχωρία εἶναι σχήματος ὀρθογωνιακοῦ, ἐκτὸς ἐκείνων τὰ ὁποῖα τέμνονται ἀπὸ τὸ σύνορον τοῦ χωρίου σχ. (61.2). Ἐπειδὴ ὅμως διὰ τὰ χωρία τὰ ὁποῖα ἐμεῖς ἐδῶ θεωροῦμεν, ἀποδεικνύεται ὅτι ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ ἀθροίσματος (61.2), ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτά, ἔχουν ἄθροισμα τεῖνον εἰς τὸ μηδέν, ὅταν ὅλα τὰ $\delta_\kappa \to 0$, γι' αὐτὸ δυνάμεθα νὰ μὴν τὰ λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψιν κατὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ ἀθροίσματος (61.2). Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ Δx_κ, Δy_λ τὶς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνιακοῦ ὑποχωρίου $\Delta T_{\kappa\lambda}$ καὶ μὲ (x_κ, y_λ) τὶς συντεταγμένες ἑνὸς σημείου αὐτοῦ $M_{\kappa\lambda}$ θὰ εἶναι $\Delta\tau_{\kappa\lambda} = \Delta x_\kappa \Delta y_\lambda$, ὁπότε ἀντὶ τοῦ ἀθροίσματος (61.2) θὰ ἔχωμεν τὸ ἄθροισμα:

$$\sum_{\kappa,\lambda} \Phi(x_\kappa, y_\lambda)\,\Delta x_\kappa \Delta y_\lambda \qquad (61.5)$$

καὶ ἀπὸ τὴν μορφὴν αὐτὴν προκύπτει καὶ ὁ ἐπίσης ἐν χρήσει συμβολισμὸς τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος:

$$\iint_T \Phi(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος προκύπτουν, ὅπως διὰ τὰ ἁπλᾶ καὶ διὰ τὰ ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα οἱ ἑξῆς βασικὲς ἰδιότητες:

Ἐὰν c παριστάνει μίαν σταθερὰν εἶναι:

$$\iint_T c\Phi(M)\,d\tau = c\iint_T \Phi(M)\,d\tau \qquad (61.6)$$

Ἐὰν $\Phi(M) = \Phi_1(M) + \cdots + \Phi_\nu(M)$ εἶναι:

$$\iint_T \Phi(M)\,d\tau = \iint_T \Phi_1(M)\,d\tau + \cdots + \iint_T \Phi_\nu(M)\,d\tau \qquad (61.7)$$

Ἐὰν $T = T_1 + \cdots + T_\nu$ εἶναι:

$$\iint_T \Phi(M)\,d\tau = \iint_{T_1} \Phi(M)\,d\tau + \cdots + \iint_{T_\nu} \Phi(M)\,d\tau \qquad (61.8)$$

Ἐὰν ἐπὶ τοῦ χωρίου T $\Phi(M) \leq f(M)$, εἶναι:

$$\iint_T \Phi(M)\,d\tau \leq \iint_T f(M)\,d\tau \qquad (61.9)$$

Εἶναι πάντοτε.

$$\left|\iint_T \Phi(M)\,d\tau\right| \leq \iint_T |\Phi(M)|\,d\tau \qquad (61.10)$$

Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\Phi(M)$ εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ T, ὑπάρχει ἕνα ἐσωτερικὸν σημεῖον αὐτοῦ P τέτοιο ὥστε:

$$\Phi(P) = \frac{1}{|T|}\iint_T \Phi(M)\,d\tau \qquad (61.11)$$

ἡ δὲ $\Phi(P)$ λέγεται μέση τιμὴ τῆς συναρτήσεως $\Phi(M)$ ἐπὶ τοῦ T.
Ἐὰν ἐπὶ πλέον τῶν προηγουμένων ἡ συνάρτησις $f(M)$ εἶναι συνεχὴς καὶ ἔχει σταθερὸν πρόσημον ἐπὶ τοῦ T, εἶναι:

$$\iint_T \Phi(M) f(M)\,d\tau = \Phi(P)\iint_T f(M)\,d\tau \qquad (61.12)$$

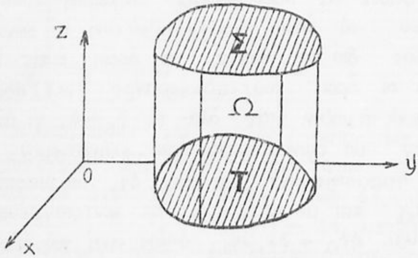
Διὰ τὸν προσεγγιστικὸν ὑπολογισμὸν τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος ἔχομεν:

$$\iint_T \Phi(M)\,d\tau \approx \sum_{\kappa=1}^{\nu} \Phi(M_\kappa)\,\Delta\tau_\kappa \qquad (61.13)$$

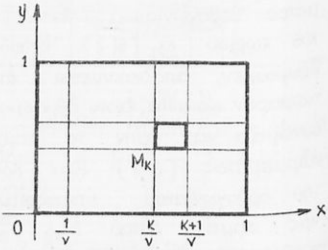
Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸν τύπον (61.11) καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ χωρίον T τείνει νὰ ἐκμηδενισθῇ ἐκφυλιζόμενον εἰς σημεῖον αὐτοῦ P_0 τότε $\text{op}\,|T| = 0$, $\text{op}\,P = P_0$, $\text{op}\,\Phi(P) = \Phi(P_0)$ καὶ ἔχομεν τὸν τύπον:

$$\text{ορ}\, \frac{1}{|T|} \iint_T \Phi(M)\, d\tau = \Phi(P_0) \qquad (61.14)$$

ὁ ὁποῖος ἐκφράζει κάτι ἀντίστοιχον μὲ τὴν γνωστὴν ἐκ τῆς θεωρίας τῶν ἁπλῶν ὁλοκληρωμάτων, σχέσιν μεταξὺ ὁλοκληρώσεως καὶ παραγωγίσεως.



Σχ. (61.3)



Σχ. (61.4)

Ἔστω Σ τμῆμα ἐπιφανείας μὲ ἐξίσωσιν $z = \Phi(x,y)$ καὶ T τὸ χωρίον εἰς τὸ ὁποῖον προβάλλεται αὐτὴ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y. Ἐὰν ἡ $\Phi(x,y)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὰ σημεῖα τοῦ T καὶ οὐδέποτε ἀρνητική, τότε τὸ Σ ἐκ τῶν ἄνω, τὸ χωρίον T ἐκ τῶν κάτω καὶ ἡ προβάλλουσα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια τὸ σύνορον τοῦ Σ ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ T πλευρικῶς, περιορίζουν ἕνα κλειστὸν κυλινδρικὸν τριδιάστατον χωρίο Ω. καλοῦμεν ὄγκον τοῦ χωρίου αὐτοῦ καὶ τὸν παριστάνομεν μὲ $|\Omega|$, τὸ διπλὸν ὁλοκλήρωμα :

$$|\Omega| = \iint_T \Phi(x,y)\, dx dy \qquad (61.15)$$

Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς δικαιολογεῖται ἀπὸ τὰ δεδομένα τῆς ἐποπτείας κατὰ τρόπον ἀνάλογον μὲ ἐκεῖνον ποὺ δικαιολογοῦμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς χωρίου τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y ἀπὸ ἕνα ἁπλὸν ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα.

Παράδειγμα (61.1).— Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διπλὸν ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi \equiv x$ ἐπὶ τοῦ τετραγώνου T: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις εἶναι συνεχὴς τὸ ὁλοκλήρωμα ὑπάρχει καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος (61.2) δι' οἱανδήποτε ὑποδιαίρεσιν τοῦ T σὲ ὑποχωρία. Ὑποδιαιροῦμεν λοιπὸν τὸ T χάριν ἁπλότητος διὰ παραλλήλων εὐθειῶν πρὸς τοὺς ἄξονες, σὲ ν^2 τετράγωνα πλευρᾶς $\frac{1}{\nu}$ καὶ λαμβάνομεν ὡς σημεῖον M_κ τὴν κάτω καὶ ἀριστερὴν κορυφὴν ἑκάστου τετραγώνου σχ. (61.4). Ἂν θεωρήσωμεν τὰ τετράγωνα τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται εἰς τὴν στήλην ποὺ σχηματίζουν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι $x=\frac{\kappa}{\nu}$ καὶ $x = \frac{\kappa+1}{\nu}$ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ συμβολὴ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν εἰς τὸ ἄθροισμα (61.2) θὰ εἶναι :

$$\Phi(M_\kappa) \cdot \Delta\tau_\kappa = \frac{\kappa}{\nu} \cdot \frac{1}{\nu^2} = \frac{\kappa}{\nu^3}$$

ἐπομένως ὅλων μαζὺ τῶν τετραγώνων τῆς στήλης θὰ εἶναι $\nu \cdot \frac{\kappa}{\nu^3} = \frac{\kappa}{\nu^2}$. Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ συμβολὴ μιᾶς στήλης εἶναι $\frac{\kappa}{\nu^2}$ ὅλων τῶν στηλῶν θὰ εἶναι :

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \frac{\kappa}{\nu^2} = \frac{1}{\nu^2}\left[1+2+\cdots+(\nu-1)\right] = \frac{\nu(\nu-1)}{2\nu^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\nu}$$

ἑπομένως κατὰ τὸν τύπον (61.3) θὰ εἶναι :

$$\iint_T x\,dx\,dy = \text{ορ}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\nu}\right) = \frac{1}{2}$$

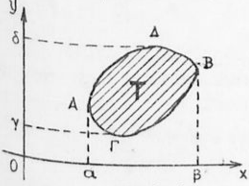
62. Ὑπολογισμὸς τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων. — Ἄς θεωρήσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα :

$$\iint_T \Phi(x,y)\,dx\,dy \qquad (62.1)$$

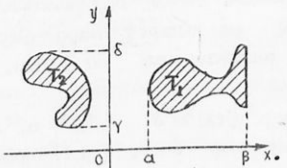
καὶ ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ χωρίον ὁλοκληρώσεως αὐτοῦ κεῖται μεταξὺ τῶν εὐθειῶν

$$x=\alpha,\quad x=\beta,\quad y=\gamma,\quad y=\delta \qquad (1)$$

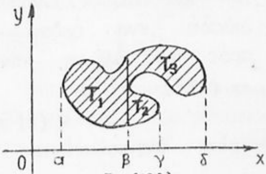
τὸ δὲ σύνορον αὐτοῦ τέμνεται σὲ δύο τὸ πολὺ σημεῖα ἀπὸ τὶς παράλληλες πρὸς τοὺς ἄξονες τῶν συντεταγμένων εὐθεῖες σχ. (62.1).



Σχ. (62.1)



Σχ. (62.2)



Σχ. (62.3)

Διὰ τῶν εὐθειῶν (1) τὸ σύνορον τοῦ T χωρίζεται εἰς ἕνα κάτω μέρος ΑΓΒ καὶ εἰς ἕνα ἄνω ΑΔΒ, εἰς ἕνα ἀριστερὸν ΓΑΔ καὶ εἰς ἕνα δεξιὸν ΓΒΔ, τῶν ὁποίων ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ ἐξισώσεις εἶναι :

$$\text{ΑΓΒ} : \quad y = y_1(x) \qquad \text{ΓΑΔ} : \quad x = x_1(y)$$

$$\text{ΑΔΒ} : \quad y = y_2(x) \qquad \text{ΓΒΔ} : \quad x = x_2(y)$$

Ὑποδιαιροῦντες τὸ T δι' εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τοὺς ἄξονες εἰς ὑποχωρία ὀρθογωνιακοῦ σχήματος καὶ σχηματίζοντες τὸ ἄθροισμα (61.2), ἀποδεικνύεται ὅτι :

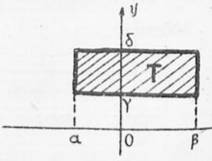
Πρότασις (62.1). — *Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y)$ εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ κλειστοῦ χωρίου T, τὸ διπλὸν ὁλοκλήρωμα αὐτῆς ἐπὶ τοῦ T ὑπολογίζεται ἀπὸ τοὺς τύπους:*

$$\iint_T \Phi(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta dx \int_{y_1}^{y_2} \Phi(x,y)\,\partial y = \int_\gamma^\delta dy \int_{x_1}^{x_2} \Phi(x,y)\,\partial x \qquad (62.2)$$

Συμπληρώνομεν τὴν πρότασιν αὐτὴν μὲ μερικὲς παρατηρήσεις: Ὁ πρῶτος ἐκ τῶν ἀνωτέρω τύπων σημαίνει ὅτι διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ διπλὸν ὁλοκλήρωμα, εὑρίσκομεν πρῶτα τὸ μερικὸν ἀόριστον ὁλοκλήρωμα τῆς Φ ὡς πρὸς y γι' αὐτὸ καὶ θέσαμε ὑπὸ τὸ σύμβολον ὁλοκληρώσεως ∂y· ἐν συνεχείᾳ ὑπολογίζοντες τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα μεταξὺ τῶν ὁρίων $y_1(x)$ καὶ $y_2(x)$, προκύπτει μία συνάρτησις τοῦ x τῆς ὁποίας ὑπολογίζοντες τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα μεταξὺ τῶν ὁρίων α καὶ β προκύπτει τὸ ζητούμενον, ἀντιστοίχως δὲ ἐργαζόμεθα διὰ τὸν δεύτερον τύπον.

Ἐάν τό χωρίον ὁλοκληρώσεως ἔχῃ τήν μορφήν τοῦ χωρίου T_1 τοῦ σχ.(62.2), δηλαδή μόνον ἀπό τίς παράλληλες πρός τόν ἄξονα τῶν y τέμνεται σέ δύο τό πολύ σημεῖα, τότε διά τόν ὑπολογισμόν αὐτοῦ χρησιμοποιοῦμεν τόν πρῶτον ἐκ τῶν τύπων (62.2)· ὅταν ἔχῃ τήν μορφήν τοῦ χωρίου T_2 τοῦ σχ.(62.2) δηλαδή μόνον ἀπό τίς παράλληλες πρός τόν ἄξονα τῶν x τέμνεται σέ δύο τό πολύ σημεῖα, τότε χρησιμοποιοῦμεν τόν δεύτερον ἐκ τῶν τύπων (62.2).

Διά τήν περίπτωσιν χωρίου σχ.(62.3) τό ὁποῖον τέμνεται σέ περισσότερα τῶν δύο σημεῖα ἀπό τίς παράλληλες πρός τούς ἄξονες εὐθεῖες, τό χωρίζομεν σέ ὑποχωρία τῆς προηγουμένης μορφῆς, ὁπότε χρησιμοποιοῦντες καί τήν ἰδιότητα (61.8), ὑπολογίζομεν πάλι μέ τούς τύπους (62.2) τό ζητούμενον ὁλοκλήρωμα.



Σχ. (62.4)

Ἐάν τό χωρίον ὁλοκληρώσεως εἶναι ὀρθογωνιακόν δηλαδή ἕνα ὀρθογώνιον μέ πλευρές παράλληλες πρός τούς ἄξονες τῶν συντεταγμένων θά εἶναι, ὅπως φαίνεται καί εἰς τό σχ. (62.4).

$$y_1(x) \equiv \gamma, \quad y_2(x) \equiv \delta, \quad x_1(y) \equiv \alpha, \quad x_2(y) \equiv \beta$$

ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τούς τύπους (62.2) προκύπτει:

$$\iint_T \Phi(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta dx \int_\gamma^\delta \Phi(x,y)\,\vartheta y = \int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^\beta \Phi(x,y)\,\vartheta x \qquad (62.3)$$

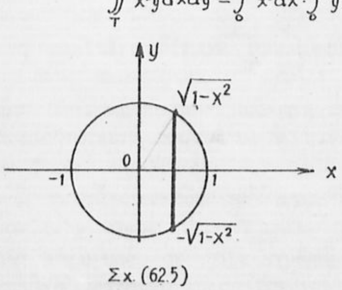
Τέλος ἐάν ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y)$ εἶναι τῆς μορφῆς $\Phi(x,y) \equiv \sigma(x)\cdot f(y)$ ἀπό τόν προηγούμενον τύπον προκύπτει:

$$\iint_T \Phi(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \sigma(x)\,dx \cdot \int_\gamma^\delta f(y)\,dy \qquad (62.4)$$

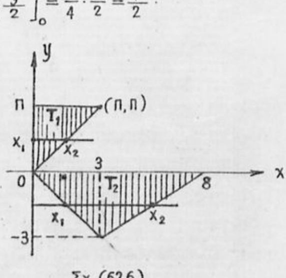
Παράδειγμα (62.1). – Νά ὑπολογισθῇ τό διπλόν ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi \equiv x^3 y$, ἐπί τοῦ ὀρθογωνίου T: ($x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$).

Λ ύ σ ι ς. Ἀπό τόν τύπον (62.4) προκύπτει:

$$\iint_T x^3 y\,dx\,dy = \int_0^1 x^3 dx \cdot \int_0^2 y\,dy = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{2} = \frac{1}{2}$$



Σχ. (62.5)



Σχ. (62.6)

Παράδειγμα (62.2). – Νά ὑπολογισθῇ διά διπλῆς ὁλοκληρώσεως, τό ἐμβαδόν τοῦ κύκλου $T: x^2+y^2=1$.

Λύσις. Ἀπό τόν τύπον (61.4) καί τό σχ.(62.5) προκύπτει:

$$|T| = \iint_T dxdy = \int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx = \boxed{\begin{matrix} x=\eta\mu t \\ dx=\sigma\upsilon\nu t\,dt\end{matrix}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sigma\upsilon\nu^2 t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sigma\upsilon\nu 2t+1)\,dt = \pi$$

Παράδειγμα (62.3).— Νά ὑπολογισθῆ τό διπλόν ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\phi \equiv \eta\mu(x+2y)$ ἐπί τοῦ τριγωνικοῦ χωρίου $T_1: (x=0,\ y=x,\ y=\pi)$.

Λύσις. Ἀπό τόν δεύτερον ἐκ τῶν τύπων (62.2) καί τό σχ.(62.6) προκύπτει:

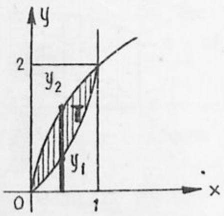
$$\iint_{T_1} \eta\mu(x+2y)\,dxdy = \int_0^\pi dy \int_0^y \eta\mu(x+2y)\,dx = \int_0^\pi \Big[-\sigma\upsilon\nu(x+2y)\Big]_0^y dy = \int_0^\pi (\sigma\upsilon\nu 2y - \sigma\upsilon\nu 3y)\,dy = \Big[\tfrac{1}{2}\eta\mu 2y - \tfrac{1}{3}\eta\mu 3y\Big]_0^\pi = 0$$

Παράδειγμα (62.4).— Νά ὑπολογισθῆ τό διπλοῦν ~~ἁπλοῦν~~ ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\phi \equiv y$ ἐπί τοῦ τριγωνικοῦ χωρίου $T_2: (y=0,\ y=-x,\ 3x-5y-24=0)$.

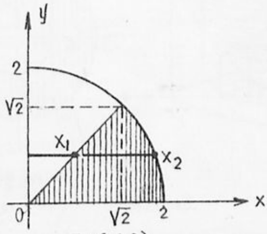
Λύσις. Ἀπό τόν δεύτερον τῶν τύπων (62.2) καί τό σχ.(62.6) προκύπτει:

$$\iint_{T_2} y\,dxdy = \int_{-3}^{0} dy \int_{-y}^{(5y+24):3} y\,dx = \int_{-3}^{0} \big[xy\big]_{-y}^{(5y+24):3} dy = \int_{-3}^{0} \Big(y\,\frac{5y+24}{3} + y^2\Big)\,dy = \cdots = -12$$

Ἀποφύγαμε τήν ὁλοκλήρωση κατά τόν πρῶτον τύπον διότι θά ἔπρεπε νά χωρίσωμεν τό χωρίον διά τῆς εὐθείας $x=3$ σέ δύο ἄλλα ὑποχωρία. Προτείνομεν εἰς τόν ἀναγνώστην νά ἐργασθῆ κατ' αὐτόν τόν τρόπον καί νά συγκρίνῃ τά ἐξαγόμενα.



Σχ.(62.7)



Σχ.(62.8)

Παράδειγμα (62.5).— Νά ὑπολογισθῆ διά διπλῆς ὁλοκληρώσεως τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου $T: (y^2=4x,\ y=2x^2)$.

Λύσις. Ἀπό τόν τύπον (61.4) καί τό σχ.(62.7) προκύπτει:

$$|T| = \iint_T dxdy = \int_0^1 dx \int_{2x^2}^{2\sqrt{x}} dy = \int_0^1 (2\sqrt{x} - 2x^2)\,dx = \cdots = \frac{2}{3}.$$

Παράδειγμα (62.6).— Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\phi \equiv x$ ἐπί τοῦ χωρίου $T: (y=0,\ y=x,\ x^2+y^2=4,\ x,y \geqslant 0)$.

Λύσις. Ἀπό τόν δεύτερον ἐκ τῶν τύπων (62.2) καί τό σχ.(62.8) προκύπτει:

$$\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx = \int_0^{\sqrt{2}} \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_y^{\sqrt{4-y^2}} dy = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}} (4-2y^2)\,dy = \cdots = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Παράδειγμα (62.7).— Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ τριδιάστατου χωρίου:
$\Omega: (z=0,\ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ z=x^2+2y^2)$.

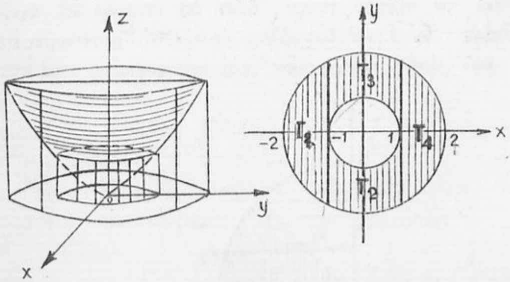
Λύσις.· Τὸ χωρίον Ω ὅπως φαίνεται καὶ εἰς τὸ σχ. (62.9) εἶναι ἕνα κυλινδρικὸν χωρίον τὸ ὁποῖον κλίνεται ἄνω ἀπὸ τὸ παραβολοειδὲς $z=x^2+2y^2$ καὶ κάτω ἀπὸ τὸ χωρίον Τ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα κυκλικοῦ δακτυλίου. Ὁ ὑπολογισμὸς δύναται νὰ γίνῃ κατὰ δύο τρόπους. Ὑποδιαιροῦμεν τὸ χωρίον Τ ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα σὲ τέσσαρα χωρία T_1, T_2, T_3, T_4 ὁπότε σύμφωνα μὲ τὴν ἰδιότητα (61.8) θὰ ἔχωμεν :

$$|\Omega| = \iint_T (x^2+2y^2)\,dxdy = \iint_{T_1}(x^2+2y^2)\,dxdy + \iint_{T_2}(x^2+2y^2)\,dxdy + \iint_{T_3}(x^2+2y^2)\,dxdy + \iint_{T_4}(x^2+2y^2)\,dxdy$$

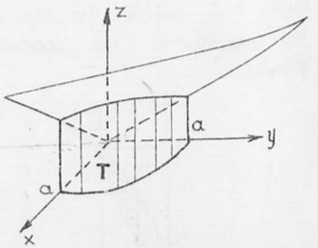
$$= \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} (x^2+2y^2)\,\partial y + \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} (x^2+2y^2)\,\partial y + \int_{-1}^{1} dx \int_{+\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} (x^2+2y^2)\,\partial y + \int_{1}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} (x^2+2y^2)\,\partial y = \cdots$$

Ἕνας ἄλλος τρόπος ὑπολογισμοῦ εἶναι νὰ θεωρήσωμεν τὸ χωρίον Τ ὡς διαφορὰ τῶν χωρίων K_1 καὶ K_2 τὰ ὁποῖα ὁρίζουν οἱ δύο κύκλοι, ὁπότε θὰ ἔχωμεν :

$$|\Omega| = \iint_T (x^2+2y^2)\,dxdy = \iint_{K_2}(x^2+2y^2)\,dxdy - \iint_{K_1}(x^2+2y^2)\,dxdy = \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+2y^2)\,\partial y - \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+2y^2)\,\partial y = \cdots$$



Σχ. (62.9)



Σχ. (62.10)

Παράδειγμα (62.8). – Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τριδιαστάτου χωρίου : $\Omega : (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ z=x+y,\ x^2+y^2=\alpha^2\ )$.

Λύσις. Τὸ χωρίον ὅπως φαίνεται καὶ εἰς τὸ σχ. (62.10) κλίνεται ἄνω ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον $z=x+y$ καὶ κάτω ἀπὸ τὸ χωρίον Τ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ πρῶτον τέταρτον τοῦ κύκλου $x^2+y^2=\alpha^2$, $z=0$, ἑπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$|\Omega| = \int_0^{\alpha} dx \int_0^{\sqrt{\alpha^2-x^2}} (x+y)\,\partial y = \int_0^{\alpha} \Big[xy+\frac{y^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{\alpha^2-x^2}} dx = \int_0^{\alpha} \Big(x\sqrt{\alpha^2-x^2} + \frac{\alpha^2-x^2}{2} \Big)\,dx = \cdots = \frac{2\alpha^3}{3}.$$

Παράδειγμα (62.9). – Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διπλὸν ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi \equiv ye^{xy}$ ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνιακοῦ ὑποχωρίου $T : (x=0,\ y=0,\ x=1,\ y=2\ )$.

Λύσις. Χρησιμοποιοῦντες τὸν δεύτερον ἐκ τῶν τύπων (62.3) προκύπτει :

$$\iint_T ye^{xy}\,dxdy = \int_0^2 dy \int_0^1 ye^{xy}\,\partial x = \int_0^2 [e^{xy}]_0^1\,dy = \int_0^2 (e^y-1)\,dy = e^2-3$$

παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἡ μορφὴ τῆς ὁλοκληρωτέας συναρτήσεως ὑπαγορεύει τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ δευτέρου τύπου διότι ἐνῶ ἔχομεν ἀμέσως ἕνα μερικὸν ἀόριστον ὁλοκλήρωμα ὡς πρὸς x τῆς ye^{xy}, δὲν γνωρίζομεν μερικὸν ὁλοκλήρωμα ὡς πρὸς y, ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν πρῶτον ἐκ τῶν τύπων.

63. Μετασχηματισμὸς τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων. – Ὅπως εἰς τὰ ἁπλᾶ ὁλοκληρώματα, ἔτσι καὶ εἰς τὰ διπλᾶ διὰ μιᾶς καταλλήλου ἀλλαγῆς μεταβλητῶν εἶναι δυνατὸν νὰ ἁπλουστευθῇ ὁ λογισμὸς αὐτῶν· ὑπενθυμίζομεν τὸν τύπον :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Phi(x)\,dx = \int_{\gamma}^{\delta} \Phi\,[\sigma(u)]\,\dot{\sigma}(u)\,du \qquad (63.1)$$

διὰ τοῦ ὁποίου τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ πρώτου μέλους διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ

$$x = \sigma(u)$$

ἀνάγεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὁλοκληρώματος τοῦ δευτέρου μέλους, τοῦ ὁποίου τὰ ὅρια ὁλοκληρώσεως, προκύπτουν ὡς γνωστὸν ἀπὸ τὶς σχέσεις :

$$\alpha = \sigma(\gamma)\,, \quad \beta = \sigma(\delta).$$

Ὁ τύπος (63.1) γράφεται προφανῶς καὶ ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$\int_{\min(\alpha,\beta)}^{\max(\alpha,\beta)} \Phi(x)\,dx = \int_{\min(\gamma,\delta)}^{\max(\gamma,\delta)} \Phi\,[\sigma(u)]\,\left|\dot{\sigma}(u)\right|du \qquad (63.2)$$

ἀντίστοιχον δὲ αὐτοῦ θὰ διατυπώσωμεν διὰ τὰ διπλᾶ ὁλοκληρώματα.

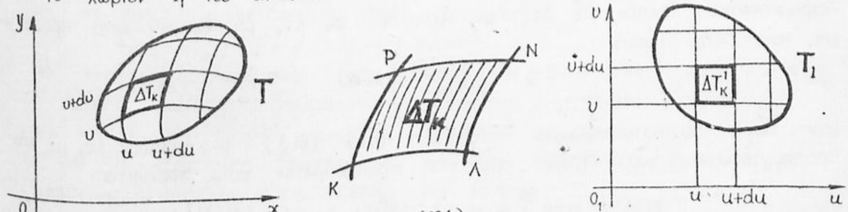
Ἄς θεωρήσωμεν τὸ διπλὸν ὁλοκλήρωμα :

$$\int_T \Phi(M)\,d\tau \qquad (63.3)$$

καὶ ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ χωρίον ὁλοκληρώσεως T τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y ἀπεικονίζεται ἀμφιμονοσήμαντα διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ :

$$x = \sigma(u,\upsilon)\,, \quad y = f(u,\upsilon) \qquad (63.4)$$

εἰς τὸ χωρίον T_1 τοῦ ἐπιπέδου τῶν u,υ σχ. (63.1).



Σχ.(63.1)

Ὅταν διὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ ἀθροίσματος (61.2) ὑποδιαιρέσωμεν τὸ χωρίον ὁλοκληρώσεως T εἰς ὀρθογώνια ὑποχωρία σχ.(61.2) τότε, ὅπως ἔχωμεν πεῖ, τὸ ὁλοκλήρωμα (63.3) ὑπολογίζεται ἀπὸ τοὺς τύπους (62.2). Ἄς ὑποδιαιρέσωμεν τώρα τὸ T εἰς καμπυλόγραμμα τετράπλευρα διὰ τῶν γραμμῶν u = σταθερὸν καὶ υ = σταθερόν, δηλαδὴ διὰ τῶν γραμμῶν ποὺ ἔχουν παραμετρικὲς ἐξισώσεις τὶς (63.4) ὅταν ὑποθέσωμεν εἰς αὐτὲς ἀντιστοίχως τὸ u σταθερὸν καὶ τὸ υ μεταβλητὸν ἢ τὸ υ σταθερὸν καὶ τὸ u μεταβλητόν. Οἱ εἰκόνες τῶν γραμμῶν αὐτῶν εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν u,υ εἶναι οἱ παράλληλες πρὸς τοὺς ἄξονες εὐθεῖες u= σταθερὸν καὶ υ= σταθερόν. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὸ μὲν χωρίον T ὑποδιαιρεῖται εἰς καμπυλόγραμμα ὑποχωρία τὸ δὲ χωρίον T_1 εἰς ὀρθογωνιακά· ἐὰν λοιπὸν ἐκ τῶν ὑποχωρίων τοῦ T_1 θεωρήσωμεν τὸ ΔT_κ^1 τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὲς τὰ σημεῖα

$$K_1(u,\upsilon),\ \Lambda_1(u+\Delta u,\upsilon),\ N_1\ (u+\Delta u,\upsilon+\Delta\upsilon),\ P_1\ (u,\upsilon+\Delta\upsilon)$$

τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν x,y εἶναι ἕνα καμπυλόγραμμον τετράπλευρον ΔT_κ μὲ ἀντίστοιχες κορυφὲς τὰ σημεῖα :

$$K\,[\,\sigma(u,\upsilon),\ f(u,\upsilon)\,],\qquad N\,[\,\sigma(u+\Delta u,\ \upsilon+\Delta\upsilon),\ f(u+du,\ \upsilon+\Delta\upsilon)\,]$$

$$\Lambda\,[\,\sigma(u+\Delta u,\upsilon),\ f(u+\Delta u,\upsilon)\,],\quad P\,[\,\sigma(u,\upsilon+\Delta\upsilon),\quad f(u,\upsilon+\Delta\upsilon)\,]$$

Κατὰ τὸν τύπον Taylor θὰ ἔχωμεν :

$$\sigma(u+\Delta u)=\sigma(u,\upsilon)+\sigma_u\Delta u+\cdots = x+\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u+\cdots$$

$$f(u+\Delta u)=f(u,\upsilon)+f_u\Delta u+\cdots = y+\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u+\cdots$$

$$\sigma(u+\Delta u,\ \upsilon+\Delta\upsilon)=\sigma(u,\upsilon)+\sigma_u\Delta u+\sigma_\upsilon\Delta\upsilon+\cdots = x+\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial x}{\partial \upsilon}\Delta\upsilon+\cdots$$

$$\cdots \qquad \kappa.\lambda.\pi. \qquad \cdots$$

Ἐὰν λοιπὸν τὰ $\Delta u, \Delta\upsilon$ εἶναι πολὺ μικρὰ θὰ εἶναι κατὰ προσέγγισιν :

$$K\,(x,y)\quad,\quad N\left(x+\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial x}{\partial \upsilon}\Delta u,\ y+\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial y}{\partial \upsilon}\Delta\upsilon\right)$$

$$\Lambda\left(x+\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u,\ y+\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\right),\quad P\left(x+\frac{\partial x}{\partial \upsilon}\Delta\upsilon,\ y+\frac{\partial y}{\partial \upsilon}\Delta\upsilon\right)$$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΔT_κ θὰ ἰσοῦται λοιπὸν κατὰ προσέγγισιν μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὲς τὰ παραπάνω τέσσερα σημεῖα, δηλαδὴ μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΚΛΡ τὸ ὁποῖον κατὰ γνωστὸν τύπον τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας δίδεται μὲ πρόσημον ἀπὸ τὴν ὁρίζουσα :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x+\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u & y+\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u & 1 \\ x+\frac{\partial x}{\partial \upsilon}\Delta\upsilon & y+\frac{\partial y}{\partial \upsilon}\Delta\upsilon & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \upsilon} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \upsilon} \end{vmatrix}\Delta u\Delta\upsilon = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)}\Delta u\Delta\upsilon$$

Παριστάνοντες λοιπὸν μὲ $\Delta\tau_\kappa$ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΔT_κ θὰ ἔχωμεν κατὰ προσέγγισιν τὸν ἑξῆς τύπον :

$$\Delta\tau_\kappa \approx \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)}\right|\Delta u\Delta\upsilon \qquad (63.5)$$

Ἐὰν τώρα ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν τύπον (61.3) τὸ ἐμβαδὸν $\Delta\tau_\kappa$ μὲ τὴν προσεγγιστικὴν του τιμὴν ἀπὸ τὸν προηγούμενο τύπο, προκύπτει :

$$\iint_T \Phi(M)d\tau = op\sum_{\kappa=1}^{\nu}\Phi(M_\kappa)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)}\right|\Delta u\Delta\upsilon = \iint_{T_1}\Phi\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)}\right|dud\upsilon$$

δηλαδὴ τὸ διπλὸν ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως Φ ἐπὶ τοῦ χωρίου T τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y ἰσοῦται μὲ τὸ διπλὸν ὁλοκλήρωμα τοῦ γινομένου τῆς Φ ἐπὶ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς Jacobien τοῦ μετασχηματισμοῦ, εἰς τὸ χωρίον T_1 τοῦ ἐπιπέδου τῶν u,υ. Ἡ ἀπόδειξις δὲν εἶναι πλήρης, διότι δεχθήκαμε χωρὶς νὰ τὸ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἡ ἀντικατάστασις τοῦ $\Delta\tau_\kappa$ μὲ τὴν προσεγγιστικὴν του τιμὴν (63.5), δημιουργεῖ εἰς τὸ ἄθροισμα (61.2) ἕνα σφάλμα τὸ ὁποῖον μηδενίζεται ὅταν μεταβῶμεν εἰς τὸ ὅριον. Δίδομεν κατωτέρω μίαν πρότασιν ἡ ὁποία ἐκφράζει τὶς συνθῆκες ὑπὸ τὶς ὁποῖες εἶναι πάντοτε δυνατὸς ὁ μετασχηματισμὸς ἑνὸς διπλοῦ ὁλοκληρώματος καὶ τῆς ὁποίας τὴν ἀπόδειξιν μὲ μερικὲς συμπληρωματικὲς προϋποθέσεις θὰ δώσωμεν κατὰ τρόπον σχετικῶς ἁπλὸν εἰς ἑπόμενον ἐδάφιον ὡς ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος τοῦ Gauss.

Πρότασις (63.1). – *Ἐὰν διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ :*

$$x = \sigma(u,v), \quad y = f(u,v) \qquad (63.4)$$

ἀπεικονίζεται ἀμφιμονοσήμαντα τὸ κλειστὸν χωρίον T τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y εἰς ἕνα χωρίον T_1 τοῦ ἐπιπέδου τῶν u,v καὶ οἱ συναρτήσεις (63.4) εἶναι συνεχεῖς καὶ ἔχουν συνεχεῖς μερικὰς παραγώγους εἰς τὸ T_1, ἡ δὲ Jacobien :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv \begin{vmatrix} \sigma_u & \sigma_v \\ f_u & f_v \end{vmatrix}$$

εἶναι διάφορος τοῦ μηδενὸς σὲ κάθε σημεῖον τοῦ T_1, ἐκτὸς ἴσως εἰς ἕνα πεπερασμένο πλῆθος σημείων αὐτοῦ, τότε ἰσχύει ὁ ἑξῆς τύπος μετασχηματισμοῦ

$$\iint_T \Phi(x,y)\,dxdy = \iint_{T_1} \Phi(\sigma,f)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv \qquad (63.6)$$

Ἕνας συνήθης μετασχηματισμός, ἰδίως ὅταν τὸ χωρίον ὁλοκληρώσεως εἶναι κυκλικόν, εἶναι ὁ μετασχηματισμὸς σὲ πολικὲς συντεταγμένες

$$x = \rho\,\sigma\upsilon\nu\vartheta, \quad y = \rho\,\eta\mu\vartheta \qquad (63.7)$$

Ἡ Jacobien τοῦ μετασχηματισμοῦ αὐτοῦ εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι εἶναι :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\vartheta)} = \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\vartheta & -\rho\,\eta\mu\vartheta \\ \eta\mu\vartheta & \rho\,\sigma\upsilon\nu\vartheta \end{vmatrix} = \rho$$

ἑπομένως ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (63.6) θὰ ἔχωμεν :

$$\iint_T \Phi(x,y)\,dxdy = \iint_{T_1} \Phi(\rho\,\sigma\upsilon\nu\vartheta, \rho\,\eta\mu\vartheta)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta \qquad (63.8)$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον αὐτὸν θέσωμεν $\Phi \equiv 1$ προκύπτει :

$$|T| = \iint_T dxdy = \iint_{T_1} \rho\,d\rho\,d\vartheta \qquad (63.9)$$

Ὅταν τὸ χωρίον ὁλοκληρώσεως εἶναι μία ἔλλειψις μὲ μήκη ἡμιαξόνων α, β ἢ ἕνα μέρος αὐτῆς, χρησιμοποιοῦμεν συνήθως τὸν μετασχηματισμὸν

$$x = \alpha\rho\,\sigma\upsilon\nu\vartheta, \quad y = \beta\rho\,\eta\mu\vartheta$$

τοῦ ὁποίου ἡ Jacobien εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι εἶναι $\alpha\beta\rho$, ἑπομένως ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (63.6) θὰ ἔχωμεν :

$$\iint_T \Phi(x,y)\,dxdy = \alpha\beta\iint_T \Phi(\alpha\rho\,\sigma\upsilon\nu\vartheta, \beta\rho\,\eta\mu\vartheta)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta \qquad (63.10)$$

Ἐκ τῶν προηγουμένων συμπεραίνομεν ὅτι ὁ μετασχηματισμὸς ἑνὸς διπλοῦ ὁλοκληρώματος σημαίνει κατὰ βάθος τὴν ἀντικατάστασιν τῆς ὀρθογωνιακῆς ὑποδιαιρέσεως τοῦ χωρίου ὁλοκληρώσεως T μὲ μίαν ἄλλην καμπυλόγραμμον, ὁπότε ἀνάγεται ὁ ὑπολογισμός, εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ὁλοκληρώματος τοῦ γινομένου τῆς Φ ἐπὶ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς Jacobien εἰς τὸ χωρίον T_1 εἰς τὸ ὁποῖον μετασχηματίζεται τὸ ἀρχικὸν χωρίον T.

Σχ.(63.2)

Π.χ. εἰς τὸν μετασχηματισμὸν (63.7) σὲ πολικὲς συντεταγμένες ὑποδιαιροῦμεν, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχ.(63.2), τὸ χωρίον Τ εἰς καμπυλόγραμμα ὑποχωρία δι' ὁμοκέντρων περιφερειῶν μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων (γραμμὲς ρ= σταθερόν) καὶ δι' εὐθειῶν διερχομένων δι' αὐτῆς (γραμμὲς ϑ = σταθερόν), σύμφωνα δὲ μὲ αὐτὰ ποὺ ἔχομεν ἀναφέρει παραπάνω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὑποχωρίου ΔT_K, τὸ ὁποῖον κεῖται μεταξὺ τῶν κύκλων μὲ ἀκτῖνες ρ καὶ ρ+Δρ καὶ τῶν εὐθειῶν μὲ πολικὲς γωνίες ϑ καὶ ϑ+Δϑ, θὰ εἶναι :

$$\Delta\tau_K \approx \rho\Delta\rho\Delta\vartheta$$

Εἰς τὸ ἐξαγόμενον αὐτὸ δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ ΔT_K ὡς διαφορὰν δύο κυκλικῶν τομέων μὲ ἀκτῖνες ρ, ρ+Δρ καὶ γωνίαν Δϑ ὁπότε θὰ ἔχωμεν :

$$\Delta\tau_K = \frac{1}{2}(\rho+\Delta\rho)^2\Delta\vartheta - \frac{1}{2}\rho^2\Delta\vartheta = \rho\Delta\rho\Delta\vartheta + \frac{1}{2}\Delta\rho^2\Delta\vartheta \approx \rho\Delta\rho\Delta\vartheta.$$

Παράδειγμα (63.1).– Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διπλὸν ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi \equiv xy$ ἐπὶ τοῦ κυκλικοῦ δακτυλίου $T: (x^2+y^2 \geqslant 1,\ x^2+y^2 \leqslant 2,\ x,y \geqslant 0)$.

Λύσις. Μετασχηματίζοντες σὲ πολικὲς συντεταγμένες καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἐπὶ τοῦ Τ τὸ μὲν ρ μεταβάλλεται ἀπὸ 1 μέχρι 2, ἡ δὲ ϑ ἀπὸ 0 μέχρι π/2, θὰ ἔχωμεν :

$$\iint_T xy\,dxdy = \iint_{T_1} \rho^3 \eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta\, d\rho d\vartheta = \int_1^2 \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2} \eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta\, d\vartheta = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 \cdot \left[\frac{\eta\mu^2\vartheta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{15}{8}.$$

Παράδειγμα (63.2).– Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διπλὸν ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi \equiv xy$ ἐπὶ τοῦ χωρίου $T: (y^2=x,\ y^2=2x,\ x^2=y,\ x^2=2y)$, χρησιμοποιοῦντες τὸν μετασχηματισμὸν $u=y^2:x,\ \upsilon=x^2:y$ σχ. 63.3

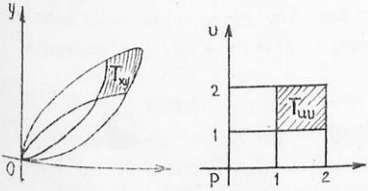
Λύσις. Ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις τοῦ μετασχηματισμοῦ προκύπτει ἀμέσως $u\upsilon = xy$ καὶ $\partial(u,\upsilon):\partial(x,y) = -3$, ἐπομένως $\partial(x,y):\partial(u,\upsilon) = -\frac{1}{3}$. ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις ποὺ ὁρίζουν τὸ σύνορον τοῦ Τ προκύπτει ὅτι ἡ εἰκόνα αὐτοῦ εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν u,υ θὰ εἶναι τὸ τετραγωνικὸν χωρίον T_1: $(u=1,\ u=2,\ \upsilon=1,\ \upsilon=2)$ μὲ πλευρὲς παράλληλες πρὸς τοὺς ἄξονες σχ.(63.3), ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$\iint_T xy\,dxdy = \iint_{T_{u\upsilon}} u\upsilon\,\frac{1}{3}\,du d\upsilon = \frac{1}{3}\int_1^2 u du \cdot \int_1^2 \upsilon d\upsilon = \frac{3}{4}$$

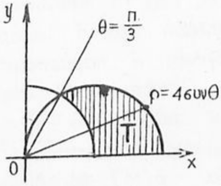
Παράδειγμα (63.3).– Νὰ ὑπολογισθῇ διὰ μετασχηματισμοῦ σὲ πολικὲς συντεταγμένες τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου $T: (x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=4x,\ y=0,\ x,y>0)$.

Λ ύ σ ι ς. Μετασχηματίζοντες σὲ πολικὲς συντεταγμένες, οἱ ἐξισώσεις τῶν κύκλων γίνονται $\rho=2$ καὶ $\rho=4\sigma\upsilon\nu\vartheta$, ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτουν διὰ τὰ σημεῖα τομῆς $\sigma\upsilon\nu\vartheta=\frac{1}{2}$, $\vartheta=\frac{\pi}{3}$. Ὅπως φαίνεται καὶ εἰς τὸ σχ.(63.4) τὸ μὲν ϑ μεταβάλλεται ἀπὸ 0 μέχρι $\frac{\pi}{3}$ τὸ δὲ ρ ἀπὸ 2 μέχρι $4\sigma\upsilon\nu\vartheta$, ἐπομένως θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὸν (63.4).

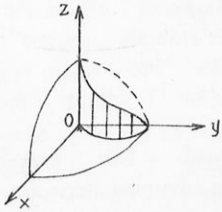
$$\left|T\right| = \iint_{T_{\rho\vartheta}} \rho d\rho d\vartheta = \int_0^{\pi/3} d\vartheta \int_2^{4\sigma\upsilon\nu\vartheta} \rho d\rho = \int_0^{\pi/3} (8\sigma\upsilon\nu^2\vartheta-2)d\vartheta = \cdots = \frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}.$$



Σχ.(63.3)



Σχ.(63.4)



Σχ.(63.5)

Παράδειγμα (63.4).— Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τριδιαστάτου χωρίου $\Omega: (x^2+y^2+z^2=\alpha^2,\ x^2+y^2=\alpha y,\ |x|\leq\frac{\alpha}{2})$.

Λ ύ σ ι ς. Ὁ ζητούμενος ὄγκος ἕνεκα τῆς συμμετρίας τοῦ Ω ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα yz καὶ xy, δίδεται ἀπὸ τὸ ὁλοκλήρωμα:

$$|\Omega| = 4\iint_T \sqrt{\alpha^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

ὅπου χωρίον ὁλοκληρώσεως ὅπως φαίνεται καὶ εἰς τὸ σχ(63.5) εἶναι τὸ ἡμικυκλικὸν χωρίον: $T: (x^2+y^2=\alpha y,\ 0\leq x\leq\frac{\alpha}{2})$

Μετασχηματίζοντες τὸ ὁλοκλήρωμα σὲ πολικὲς συντεταγμένες καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἐπὶ τοῦ T τὸ ϑ μεταβάλλεται ἀπὸ 0 μέχρι $\pi/2$ καὶ τὸ ρ ἀπὸ 0 μέχρι $\alpha\eta\mu\vartheta$, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸν τύπον (63.):

$$|\Omega| = 4\int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\alpha\eta\mu\vartheta} \sqrt{\alpha-\rho^2}\cdot\rho\vartheta\rho = \int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}(\alpha^2-\rho^2)^{3/2}\right]_0^{\alpha\eta\mu\vartheta} d\vartheta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}(\alpha^3-\alpha^3\sigma\upsilon\nu^3\vartheta)d\vartheta = \frac{2\alpha^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

Παράδειγμα (63.5).— Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διπλὸν ὁλοκλήρωμα:

$$\iint_T e^{-x^2-y^2}dxdy$$

ἐπὶ τοῦ κύκλου ὁ ὁποῖος ἔχει κέντρον τὴν ἀρχὴν καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ α.

Λ ύ σ ι ς. Τὸ ὁλοκλήρωμα αὐτὸ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθῇ μὲ τοὺς τύπους (62.2) διότι εἶναι:

$$\iint_T e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-x^2}dx \int_{-\sqrt{\alpha^2-x^2}}^{\sqrt{\alpha^2-x^2}} e^{-y^2}dy = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-y^2}dy \int_{-\sqrt{\alpha^2-y^2}}^{\sqrt{\alpha^2-y^2}} e^{-x^2}dx$$

ὁπότε διὰ τὸν ὑπολογισμὸν ἀπαιτεῖται τὸ ἀόριστον ὁλοκλήρωμα τῆς e^{-x^2} τὸ ὁποῖον δὲν γνωρίζομεν. Μετασχηματίζοντες ὅμως σὲ πολικὲς συντεταγμένες καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἐπὶ τοῦ T τὸ ρ μεταβάλλεται ἀπὸ 0 μέχρι α καὶ τὸ ϑ ἀπὸ 0 μέχρι 2π, εὑρίσκομεν:

$$\iint_T e^{-x^2-y^2}dxdy = \iint_{T_1} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\vartheta = \int_0^{\alpha} e^{-\rho^2}\rho d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta = \left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^{\alpha}\cdot\left[\vartheta\right]_0^{2\pi} = \pi(1-e^{-\alpha^2}).$$

64. Κέντρον μάζης ροπαί ἀδρανείας.— Μὲ ὅμοιον τρόπον ὅπως διὰ τὰ ὑλικὰ τόξα, ἔτσι καὶ διὰ τὰ ὑλικὰ διδιάστατα χωρία Τ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y ὁρίζομεν τὴν μέσην πυκνότητα $\Delta m/\Delta\tau$ καὶ ἐξ' αὐτῆς τὴν πυκνότητα $\delta(M)$ εἰς τὸ σημεῖον Μ, ἀπὸ τὴν ὁριακὴν σχέσιν γιὰ $\Delta\tau \to 0$:

$$\delta(M) = \text{ορ}\,\frac{\Delta m}{\Delta\tau} \qquad (64.1)$$

ὅπου Δm καὶ $\Delta\tau$ παριστάνουν ἀντιστοίχως τὴν μάζαν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεταβλητοῦ ὑποχωρίου ΔΤ, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται πάντοτε τὸ σταθερὸν σημεῖον Μ. Ἐὰν ἡ πυκνότης ἔχη τὴν αὐτὴν τιμὴν σὲ κάθε σημεῖον τοῦ χωρίου δηλαδὴ ἐὰν ἡ συνάρτησις $\delta(M)$ εἶναι μία σταθερά, τὸ χωρίον Τ λέγεται ὁμογενές· ἡ παράστασις:

$$dm = \delta(M)\,dx\,dy \qquad (64.2)$$

λέγεται πάλι στοιχεῖον μάζης. Ἀπὸ τὸν ὁρισμοῦ τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος καὶ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τῆς πυκνότητος, προκύπτει ὅτι ἡ μάζα m τοῦ χωρίου Τ ποὺ ἔχει πυκνότητα $\delta(M)$, θὰ δίδεται ἀπὸ τὸ διπλὸν ὁλοκλήρωμα:

$$m = \iint_T \delta(M)\,dx\,dy \qquad (64.3)$$

Μὲ τὴν βοήθεια τῆς πυκνότητος ὁρίζομεν τὸ κέντρον μάζης (x_κ, y_κ), τὶς ροπὲς ἀδρανείας I_x, I_y ἀντιστοίχως ὡς πρὸς τοὺς ἄξονες τῶν x,y καὶ γενικῶς τὴν ροπὴν ἀδρανείας I ὡς πρὸς οἱανδήποτε εὐθεῖαν ἢ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y, ἀπὸ τὰ ἑξῆς διπλᾶ ὁλοκληρώματα:

$$x_\kappa = \frac{1}{m}\iint_T x\delta\,dx\,dy, \qquad y_\kappa = \frac{1}{m}\iint_T y\delta\,dx\,dy$$

$$I_x = \iint_T y^2\delta\,dx\,dy, \qquad I_y = \iint_T x^2\delta\,dx\,dy \qquad (64.4)$$

$$I = \iint_T \alpha^2\delta\,dx\,dy$$

ὅπου α^2 τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τῶν σημείων τοῦ χωρίου Τ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ἢ τὸ σημεῖον ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν τὴν ροπὴν ἀδρανείας.

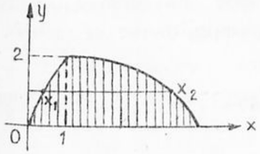
Παράδειγμα (64.1).— Νὰ εὑρεθῆ τὸ κέντρον βάρους λεπτῆς πλακὸς σταθερῆς πυκνότητος $\delta = 1$, καλύπτουσα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y τὸ χωρίον:
$T: (y^2 = 4x,\ y^2 = 5 - x,\ y \geqslant 0)$.

Λ ύ σ ι ς. Τὸ χωρίον Τ ἔχει σχεδιασθεῖ εἰς τὸ σχ. (64.1)· οἱ παραβολὲς τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον (1,2), διὰ νὰ ἀποφύγωμεν δὲ τὸν χωρισμὸν τοῦ Τ σὲ δύο ἄλλα χωρία, ὁλοκληρώνομεν σύμφωνα μὲ τὸν δεύτερον ἐκ τῶν τύπων (62.2) καὶ ἐπειδὴ $x_1 = \frac{y^2}{4}$, $x_2 = 5 - y^2$, θὰ ἔχωμεν:

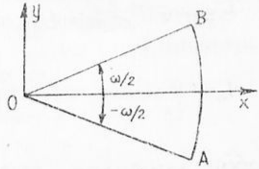
$$m = \int_0^2 dy \int_{y^2/4}^{5-y^2} \partial x = \int_0^2 \left(5 - \frac{5}{4}y^2\right) dy = \cdots = \frac{20}{3}, \quad x_\kappa = \frac{3}{20}\int_0^2 dy \int_{y^2/4}^{5-y^2} x\,\partial x =$$

$$=\frac{3}{40}\int_0^2\left(25-10y^2+\frac{15}{16}y^4\right)dy=\cdots=\frac{11}{5},\quad y_K=\frac{3}{20}\int_0^2 dy\int_{y^2/4}^{5-y^2} y\,dx=\frac{3}{20}\int_0^2\left(5y-\frac{5}{4}y^3\right)dy=\cdots=\frac{3}{4}$$

ἑπομένως τὸ κ.β. τῆς πλακὸς εἶναι τὸ σημεῖον $K\left(\frac{11}{5},\frac{3}{4}\right)$.



Σχ.(64.1)



Σχ.(64.2)

Παράδειγμα (64.2).— Νὰ εὑρεθῇ τὸ κ.β. κυκλικοῦ τομέως ἀκτῖνος α καὶ γωνίας ω· διὰ τὸν ὁποῖον εἶναι $\delta\equiv 1$.

Λύσις. Λαμβάνομεν ὡς ἄξονα τῶν x τὴν διχοτόμον τῆς ἐπικέντρου γωνίας ὁπότε ἕνεκα συμμετρίας θὰ εἶναι

$$m=\iint_T dxdy,\quad x_K=\frac{1}{m}\iint_T x\,dxdy,\quad y_K=0$$

Μετασχηματίζοντες σὲ πολικὲς συντεταγμένες προκύπτει:

$$m=\iint_{T_{\rho\theta}}\rho\,d\rho\,d\theta=\int_{-\omega/2}^{\omega/2}d\theta\int_0^{\alpha}\rho\,d\rho=\omega\cdot\frac{\alpha^2}{2},$$

$$x_K=\frac{2}{\omega\alpha^2}\iint_{T_{\rho\theta}}\rho\,\text{συν}\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta=\frac{2}{\omega\alpha^2}\int_{-\omega/2}^{\omega/2}\text{συν}\theta\,d\theta\int_0^{\alpha}\rho^2d\rho=$$

$$=\frac{2}{\omega\alpha^2}\cdot 2\,\text{ημ}\frac{\omega}{2}\cdot\frac{\alpha^3}{3}=\frac{4\alpha}{3\omega}\,\text{ημ}\,\frac{\omega}{2}$$

Παράδειγμα (64.3).— Νὰ εὑρεθῇ ἡ ροπὴ ἀδρανείας ὡς πρὸς τὸν ἄξονα 0y τοῦ χωρίου T: $(y=x^2,\ y=x)$ τὸ ὁποῖον ἔχει πυκνότητα $\delta\equiv 1$.

Λύσις. Ἀπὸ τὸ σχ.(64.3) ἕπεται ὅτι τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ 0 μέχρι 1 καὶ εἶναι $y_1\equiv x^2$, $y_2\equiv x$, ἐπομένως θὰ ἔχωμεν:

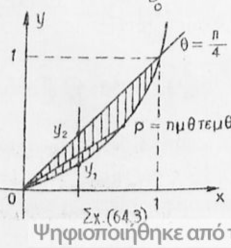
$$I_y=\iint_T x^2dxdy=\int_0^1 x^2dx\int_{x^2}^{x}dy=\int_0^1 x^2(x-x^2)\,dx=\cdots=\frac{1}{20}$$

Ἂς ὑπολογίσωμεν τὴν I_y μετασχηματίζοντες σὲ πολικὲς συντεταγμένες· οἱ ἐξισώσεις τῆς παραβολῆς καὶ τῆς εὐθείας σὲ πολικὲς συντεταγμένες εἶναι:

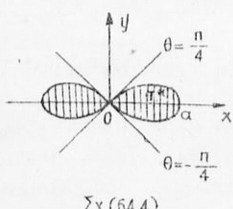
$$\rho\,\text{ημ}\theta=\rho^2\text{συν}^2\theta\ \text{ἢ}\ \rho=\text{εφ}\theta\ \text{τεμ}\theta\quad\text{καὶ}\quad\rho\,\text{ημ}\theta=\rho\,\text{συν}\theta\ \text{ἢ}\ \theta=\pi/4.$$

Μετασχηματίζοντες λοιπὸν κατὰ τὸν τύπον (63.8) θὰ ἔχωμεν:

$$I_y=\iint_{T_1}\rho^2\text{συν}^2\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta=\int_0^{\pi/4}\text{συν}^2\theta\,d\theta\int_0^{\text{εφ}\theta\cdot\text{τεμ}\theta}\rho^3d\rho=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/4}\text{συν}^2\theta\cdot\text{εφ}^4\theta\cdot\text{τεμ}^4\theta\,d\theta=\cdots=\frac{1}{20}$$



Σχ.(64.3)



Σχ.(64.4)

Παράδειγμα (64.4).— Νὰ εὑρεθῇ ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας I_o ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων τοῦ χωρίου T τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τὸν λημνίσκον $\rho^2=\alpha^2 \text{συν} 2\theta$ καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει πυκνότητα $\delta \equiv 1$ σχ.(64.4).

Λύσις. Ἕνεκα τῆς συμμετρίας τοῦ T ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴ O καὶ τοὺς ἄξονες θὰ ἔχωμεν : $I_o = 4\iint_{T^*}(x^2+y^2)dxdy$ μετασχηματίζοντες σὲ πολικὲς συντεταγμένες προκύπτει :

$$I_o=4\iint_{T_1^*}\rho^3 d\rho d\theta = 4\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\alpha\sqrt{\text{συν}2\theta}} \rho^3 d\rho = \int_0^{\pi/4} \alpha^4 \text{συν}^2 2\theta d\theta = \cdots = \alpha^4\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\text{ημ}4\theta}{8}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi\alpha^4}{8}.$$

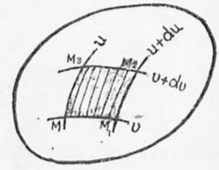
65. Ἐμβαδὸν καμπύλης ἐπιφανείας.— Εἰς τὸ ἐδάφιον 47 ἔχομεν ὁρίσει τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τμήματος Σ τῆς ἐπιφανείας :

$$\bar r = \bar r(u,v)$$

ἀπὸ τὸ διπλὸν ὁλοκλήρωμα :

$$|\Sigma| = \iint_T \sqrt{EG-F^2}\, du dv \qquad (65.1)$$

ὅπου T εἶναι τὸ χωρίον τοῦ ἐπιπέδου τῶν u, v εἰς τὰ σημεῖα τοῦ ὁποίου ἀντιστοιχοῦν ἀμφιμονοσήμαντα τὰ σημεῖα τοῦ Σ. Ἡ δικαιολόγησις τοῦ ὁρισμοῦ αὐτοῦ προκύπτει, ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα (65.1) εἶναι ἐξ' ὁρισμοῦ τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραλληλογράμμων τὰ ὁποῖα, ὅπως φαίνεται καὶ εἰς τὸ σχῆμα (47.1), κεῖνται εἰς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ M καὶ διαφέρουν, ὅταν τὰ du, dv εἶναι ἀρκετὰ μικρά, πολὺ λίγο ἀπὸ τὰ ἀντίστοιχα καμπυλόγραμμα τετράπλευρα $MM_1M_2M_3$ εἰς τὰ ὁποῖα ὑποδιαιρεῖται τὸ τμῆμα Σ ἀπὸ τὶς παραμετρικὲς γραμμὲς τῆς ἐπιφανείας σχ. (65.1).



Σχ. (65.1)

Ὅταν ἡ ἐπιφάνεια δίδεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (42.3), λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸν τελευταῖον ἐκ τῶν τύπων (47.18) προκύπτει :

$$|\Sigma| = \iint_T \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dxdy \qquad (65.2)$$

ὅπου T εἶναι τώρα τὸ χωρίον τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y εἰς τὰ σημεῖα τοῦ ὁποίου ἀντιστοιχοῦν ἀμφιμονοσήμαντα τὰ σημεῖα τοῦ Σ. Ἀπὸ τὸν τύπον αὐτὸν διὰ κυκλικῆς ἀλλαγῆς τῶν x, y, z προκύπτουν δύο ἀκόμη τύποι :

$$|\Sigma| = \iint_T \sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\, dydz, \qquad |\Sigma| = \iint_T \sqrt{1+y_z^2+y_x^2}\, dzdx \quad (65.3)$$

οἱ ὁποῖοι δίδουν τὸ ἐμβαδὸν ἐπιφανείας ὅταν αὐτὴ δίδεται ἀντιστοίχως ὑπὸ τὶς μορφὲς (42.4). Τέλος ὅταν ἡ ἐπιφάνεια δίδεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (42.2) θεωροῦμεν, ἀναλόγως τοῦ σχήματος τῆς ἐπιφανείας, τὴν μία ἐκ τῶν μεταβλητῶν x, y, z ὡς πλεγμένην συνάρτησιν τῶν δύο ἄλλων, εὑρίσκομεν τὰς μερικὰς παραγώγους αὐτῆς σύμφωνα μὲ τὸν τύπον (14.7) καὶ χρησιμοποιοῦμεν τότε τὸ κατάλληλον ἐκ τῶν τριῶν προηγουμένων τύπων.

Παράδειγμα (65.1). – Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας:

$$\bar{r} = (\alpha\,\text{συν}u\,\text{συν}\upsilon,\ \alpha\,\text{ημ}u\,\text{συν}\upsilon,\ \alpha\,\text{ημ}\upsilon).$$

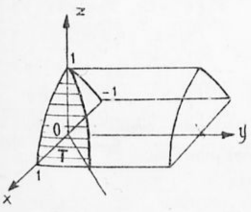
Λ ύ σ ι ς. Εὑρίσκομεν κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον : $\sqrt{EG-F^2} = \alpha^2\text{συν}\upsilon$ · τὸ χωρίον ὁλοκληρώσεως T εἶναι προφανῶς τὸ ὀρθογώνιον $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$, $-\pi/2 \leqslant \upsilon \leqslant \pi/2$, ἑπομένως κατὰ τὸν τύπον (62.4) θὰ ἔχωμεν :

$$|\Sigma| = \iint_T \alpha^2\text{συν}\upsilon\, du\, d\upsilon = \alpha^2 \int_0^{2\pi} du \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{συν}\upsilon\, d\upsilon = \alpha^2 \cdot 2\pi \cdot 2 = 4\pi\alpha^2.$$

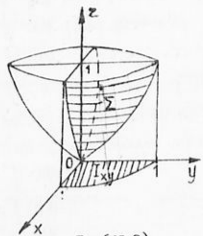
Παράδειγμα (65.2). – Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος Σ τῆς ἐπιφανείας $z = 1 - x^2$ τοῦ ὁποίου ἡ προβολὴ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y εἶναι τὸ τριγωνικὸν χωρίον T: $(x=1,\ y=x,\ y=0)$.

Λ ύ σ ι ς. Ἔχομεν $z_x = -2x$, $z_y = 0$, $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+4x^2}$ ὁπότε ἀπὸ τὸν τύπον (65.2) καὶ τὸ σχ. (65.2) προκύπτει :

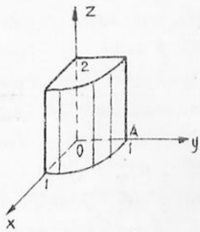
$$|\Sigma| = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{1+4x^2}\, dy = \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\, dx = \frac{1}{12}\left[(1+4x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1).$$



Σχ. (65.2)



Σχ. (65.3)



Σχ. (65.4)

Παράδειγμα (65.3). – Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος Σ τῆς ἐπιφανείας τοῦ παραβολοειδοῦς $z = x^2+y^2$ διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $x, y \geqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Λ ύ σ ι ς. Ἔχομεν $z_x = 2x$, $z_y = 2y$ ὁπότε ἀπὸ τὸ σχ. (65.3) καὶ τὸν τύπον (65.2) ἔχομεν : $|\Sigma| = \iint_T \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\, dy$, ὅπου χωρίον ὁλοκληρώσεως εἶναι τὸ πρῶτον τέταρτον τοῦ κύκλου $x^2+y^2=1$.

Μετασχηματίζοντες σὲ πολικὲς συντεταγμένες θὰ ἔχωμεν τελικῶς :

$$|\Sigma| = \iint_{T_1} \sqrt{1+4\rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot \int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\, \rho\, d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{12}\left[(1+4\rho^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{24}(5\sqrt{5}-1).$$

Παράδειγμα (65.4). – Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου $x^2+y^2=1$ καὶ διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $x, y \geqslant 0$ καὶ $0 \leqslant z \leqslant 2$.

Λ ύ σ ι ς. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας διὰ μερικῆς παραγωγίσεως ὡς πρὸς y, z προκύπτει : $x_y = -\frac{y}{x}$, $x_z = 0$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν πρῶτον τῶν τύπων (65.3) θά ἔχωμεν: $|\Sigma| = \iint\limits_{T_{yz}} \frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2}\,dydz = \iint\limits_{T_{yz}} \frac{1}{x}\,dydz$ ὅπου τό χωρίον ὁλοκληρώσεως T_{yz} ὅπως φαίνεται καί εἰς τό σχ. (65.4) εἶναι τό ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῶν y,z ὀρθογώνιον: $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 2$ εἰς τό ὁποῖον προβάλλεται τό Σ· θά ἔχωμεν λοιπόν:

$$\left|\Sigma\right| = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \int_0^2 dz = \left[\text{τοξ ημ} y\right]_0^1 \left[z\right]_0^2 = 2\,\text{τοξ ημ} 1 = \pi.$$

Ἀσκήσεις

Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι διπλᾶ ὁλοκληρώματα καί νά δοθῇ μία γεωμετρική ἑρμηνεία δι' ἕκαστον ἐξ αὐτῶν· οἱ ἐξισώσεις ἐντός παρενθέσεως παριστάνουν πάντοτε τίς γραμμές ἀπό τίς ὁποῖες περικλείεται τό χωρίον ὁλοκληρώσεως.

983) $\iint\limits_T (1+x)\,dxdy \quad (x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=4)$ 984) $\iint\limits_T (x+y)\,dxdy \quad (x=1,\ x=-1,\ y=0,\ y=2)$.

985) $\iint\limits_T xy\,dxdy \quad (x=0,\ x=y,\ y=1,\ y=2)$ 986) $\iint\limits_T x^2y^{-2}\,dxdy \quad (y=1,\ x=2,\ y=x)$

987) $\iint\limits_T x\,\text{συν}y\,dxdy \quad (x=\sqrt{\tfrac{\pi}{2}},\ y=0,\ y=x^2)$ 988) $\iint\limits_T x^2\,dxdy \quad (x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=4)$

989) $\iint\limits_T y\,dxdy \quad (x=3,\ y=0,\ y=2x)$ 990) $\iint\limits_T xy\,dxdy \quad (x=6,\ y=0,\ 3y=2x)$

991) $\iint\limits_T x^2\,dxdy \quad (x=0,\ y=0,\ 4x+3y=12)$ 992) $\iint\limits_T 2e^{x+y}\,dxdy \quad (x=0,\ x=y,\ y=1)$

993) $\iint\limits_T dxdy \quad (3x^2=4y,\ 2y^2=9x)$ 994) $\iint\limits_T dxdy \quad (y=4-x^2,\ y=x+2)$

995) $\iint\limits_T dxdy \quad (y^2=4-4x,\ x^2+y^2=4,\ x\geqslant 0)$ 996) $\iint\limits_T dxdy \quad (y^2=2x,\ x^2+y^2=4x,\ xy>0)$

997) $\iint\limits_T dxdy \quad (x^2+y^2=2y,\ yx^2=4-3y,\ y\leqslant\tfrac{4}{3})$ 998) $\iint\limits_T dxdy \quad (xy=2,\ y=8-x^2,\ x=1,\ x=2)$

999) $\iint\limits_T dxdy \quad (x=4:\sqrt{4-y^2},\ x^2+y^2=4,\ y=1)$ 1000) $\iint\limits_T dxdy \quad (x^2+y^2=16,\ 16x^2+25y^2=400)$

1001) $\iint\limits_T \rho\,d\rho d\theta \quad (\rho=2\,\text{συν}\theta,\ \rho=4\,\text{συν}\theta)$ 1002) $\iint\limits_T \rho\,d\rho d\theta \quad (\rho\geqslant\alpha,\ \rho=2\alpha\,\text{ημ}\theta)$

Νά σχεδιασθῇ τό πεδίον ὁλοκληρώσεως ἑκάστου τῶν ἑπομένων ὁλοκληρωμάτων καί νά ὑπολογισθοῦν, ὅπου εἶναι δυνατόν, ἀλλάζοντες τήν τάξιν ὁλοκληρώσεως.

1003) $\int_0^3 dx \int_0^{\frac{4}{3}(3-x)} x^2\,dy$ 1004) $\int_0^4 dy \int_{\frac{3}{2}y}^6 xy\,dx$

1005) $\int_0^{\pi} dx \int_0^{\text{ημ}x} [1+(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}]\,dy$ 1006) $\int_0^3 dx \int_1^{e^x} xy^{-1}\,dy$

1007) $\int_0^1 dy \int_1^{e^y} x^{-1}e^{2y}\,dx$ 1008) $\int_1^2 dy \int_0^y (x^2+y^2)^{-1}\,dx$

1009) $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} 3y\,dy$ 1010) $\int_0^{\alpha} dx \int_0^{\sqrt{\alpha^2-x^2}} 3x\,dy$

1011) $\int_0^{\pi/3} d\theta \int_0^{\alpha\,\text{ημ}3\theta} \rho^2\,d\rho$ 1012) $\int_0^{\pi/2} d\theta \int_{-1}^{\text{συν}2\theta} (2+2\rho)^{-\frac{1}{2}}\,d\rho$

1013) $\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\text{εφ}\theta} \rho\,d\rho$ 1014) $\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\text{εφ}\theta} (\rho^2+2\rho-1)(\rho^2+2\rho+1)^{-1}\,d\rho$

1015) $\int_1^2 d\rho \int_0^{\ln\rho} (1-\theta)e^{-\theta}\,d\theta$ 1016) $\int_0^2 dx \int_0^{x/2} \text{sh}\frac{x}{2}\,\text{sh}y\,dy$

1017) $\int_0^1 dx \int_0^{x/2} \text{ch}\frac{x}{2}\,\text{ch}y\,dy$ 1018) $\int_1^2 dx \int_0^{x^{-2}} x^{-1}\text{ch}^{-2}xy\,dy$

1019) $\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\text{εφ}\theta} \rho^2\,d\rho$ 1020) $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\alpha(1+\text{συν}\theta)} \rho^2\,\text{ημ}\theta\,d\rho$

1021) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\alpha\,\text{συν}\theta} \rho^2\,\text{ημ}^2\theta\,d\rho$ 1022) $\int_0^{a\sqrt{3}} dy \int_0^{\sqrt{y^2+a^2}} y\,(x^2+y^2+a^2)^{-1}\,dx$.

Νά ὑπολογισθῇ διά διπλῆς ὁλοκληρώσεως ὁ ὄγκος τῶν ἑπομένων τριδιαστάτων χωρίων

1023) $\Omega:\ (x^2+y^2=z,\ z=4)$ 1024) $\Omega:\ (y^2\leqslant 4x,\ 2x+y=4,\ z=y)$

1025) $\Omega:\ (x^2+y^2=\alpha^2,\ z=x+y,\ x,y,z\geqslant 0)$ 1026) $\Omega:\ (4x^2+y^2=4z,\ z=2)$

1027) $\Omega:\ (y^2=\alpha x,\ x^2=\alpha y,\ x+y=z,\ x,y,z\geqslant 0)$ 1028) $\Omega:\ (\alpha y=\alpha^2-x^2,\ x+y=z,\ x,y,z\geqslant 0)$

1029) $\Omega:\ (x^2+y^2=z,\ z=y)$ 1030) $\Omega:\ (\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{\alpha},\ y+z=\alpha,\ x=0,\ y=0,\ z=0)$

1031) $\Omega:\ (x^2+y^2=9,\ y^2+z^2=9,\ x,y,z>0)$ 1032) $\Omega:\ (z=x^2+y^2,\ x=1-y^2,\ x=0,\ z=0)$

1033) $\Omega:\ (z=x+y^2,\ x+y^2=4,\ x,y,z>0)$ 1034) $\Omega:\ (z=x^2+y^2,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0)$

1035) $\Omega: (z \leqslant x^2+y^2,\ \ x^2+y^2 \leqslant \alpha^2)$ 1036) $\Omega: (x^2+y^2-2x=0,\ \ z=0,\ z=x)$

1037) $\Omega: (x^2+y^2=25,\ \ x^2+y^2-z^2=16)$ 1038) $\Omega: (z=4-4x^2-y^2,\ z=0)$

1039) Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2+6z=16$, τό ὁποῖον κεῖται ἄνω τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y.

1040) Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τό ὁποῖον περιορίζεται ἄνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια $z=e^{x^2+y^2}$, ἡ δέ προβολή του εἰς τό ἐπίπεδον τῶν x,y εἶναι ὁ κύκλος $x^2+y^2=\alpha^2$.

1041) Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τό ὁποῖον κεῖται εἰς τό ἐσωτερικόν τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ καί τοῦ κυλίνδρου $x^2+y^2=\beta^2$.

1042) Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τό ὁποῖον κεῖται εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ παραβολοειδοῦς $z=x^2+y^2$ καί τοῦ ὁποίου ἡ προβολή εἰς τό ἐπίπεδον τῶν x,y εἶναι ὁ κύκλος $x^2+y^2-2y=0$.

1043) Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τό ὁποῖον κεῖται ἐκτός τοῦ κώνου $z=\sqrt{x^2+y^2}$, ἐντός τοῦ κυλίνδρου $\rho=\alpha\eta\mu 2\vartheta$ καί εὑρίσκεται εἰς τό πρῶτον ὄγδοον τῶν ἀξόνων.

1044) Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος τοῦ κοινοῦ μέρους τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ καί τοῦ κυλίνδρου $\rho^2=\alpha^2\sigma\upsilon\nu 2\vartheta$.

1045) Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τό ὁποῖον κεῖται εἰς τό πρῶτον ὄγδοον τῶν ἀξόνων καί τό ὁποῖον ἀποκόπτει ἀπό τόν κύλινδρον $\rho^2=\alpha^2\eta\mu 2\vartheta$, τό τμῆμα τῆς ἐπιφανείας $z=\alpha\tau o\xi\epsilon\varphi\frac{y}{x}$ διά τό ὁποῖον εἶναι $0\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{2}$.

1046) Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τό ὁποῖον εἶναι κοινόν μέρος τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ καί τοῦ κυλίνδρου $\rho=\alpha\eta\mu\vartheta$.

1047) Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τό ὁποῖον κεῖται εἰς τό πρῶτον ὄγδοον τῶν ἀξόνων καί τό ὁποῖον περιορίζεται ἀπό τήν ἐπιφάνεια $z=\sqrt{x^2+y^2+\alpha^2}$, τόν κύλινδρον $\rho=\alpha\epsilon\varphi\vartheta$ καί τό ἐπίπεδον $\vartheta=\frac{\pi}{4}$.

Νά εὑρεθῆ τό κέντρον μάζης τῶν ἑπομένων χωρίων τῶν ὁποίων ἡ πυκνότης εἶναι $\delta\equiv 1$.

1048) $T_1: (y^2=2x,\ y^2=4x-x^2,\ x,y>0)$ 1049) $T_2: (y=x^3,\ \ y=4x,\ x,y>0)$

1050) $T_3: (y^2=5x^2-x^4,\ y=x)$ 1051) $T_4: (4y=xy+8,\ y=x^2-x+2)$

1052) $T_5: (\rho=\alpha\epsilon\varphi\vartheta,\ \rho=\alpha,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{4})$ 1053) $T_6: (\rho+\alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta=\alpha)$

1054) $T_7: (\rho=\alpha\eta\mu 2\vartheta,\ \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{2})$ 1055) $T_8: (\alpha\leqslant\rho\leqslant 2\alpha\eta\mu\vartheta)$.

1056) Νά εὑρεθῆ ἡ ῥοπή ἀδρανείας I_x τοῦ χωρίου T_1 τῆς ἀσκ. 1048.

1057) » » » » » I_o » » T_2 ὡς πρός τήν ἀρχήν O.

1058) » » » » » I_y » » T_3

1059) » » » » » I_y » » T_4

1060) » » » » » I_o » » T_5 ὡς πρός τήν ἀρχήν O

1061) » » » » » I_o » » T_6 » » » » O

1062) » » » » » I_y ἑνός λακίσκου τῆς γραμμῆς $\rho^2=\alpha^2\eta\mu 2\vartheta$ τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης $\delta\equiv 1$.

1063) » » » » » I_x τοῦ λακίσκου τῆς γραμμῆς $\rho=\alpha\eta\mu 2\vartheta$ διά τόν ὁποῖον εἶναι $0\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{2}$ καί $\delta\equiv 1$.

1064) » » » » » I_y τοῦ χωρίου τό ὁποῖον ἔχει πυκνότητα $\delta=yx^{-1}$ καί περικλείεται ἀπό τίς γραμμές $y=x^{-\frac{1}{2}}$, $y=0$, $x=4$, $x=9$.

1065) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ροπὴ ἀδρανείας I_x τοῦ χωρίου τὸ ὁποῖον ἔχει πυκνότητα $\delta = xy^{-1}$ καὶ περικλείεται ἀπὸ τὶς γραμμὲς $xy=4$, $x+y=5$.

1066) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ροπὴ ἀδρανείας I_y τοῦ ὀρθογωνιακοῦ χωρίου τὸ ὁποῖον ἔχει πυκνότητα $\delta = y^3$ καὶ περικλείεται ἀπὸ τὶς εὐθεῖες $x=0$, $x=3$, $y=0$, $y=2$.

1067) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ροπὴ ἀδρανείας I_x τοῦ ἡμικυκλικοῦ χωρίου $x^2+y^2 \leq \alpha^2$, $x \geq 0$ τὸ ὁποῖον ἔχει πυκνότητα $\delta = x$.

1068) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ροπὴ ἀδρανείας I_y τοῦ χωρίου τὸ ὁποῖον ἔχει πυκνότητα $\delta \equiv y$ καὶ περικλείεται ἀπὸ τὶς γραμμὲς $y = \eta\mu x$, $y=0$, $(0 \leq x \leq \pi)$.

1069) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ροπὴ ἀδρανείας ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων τοῦ κυκλικοῦ χωρίου $\rho = 2\alpha\eta\mu\vartheta$ τὸ ὁποῖον ἔχει πυκνότητα $\delta \equiv 1$.

1070) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ροπὴ ἀδρανείας ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων τοῦ χωρίου τὸ ὁποῖον ὁρίζουν οἱ ἀνισότητες $\alpha \leq \rho \leq \alpha(1+\sigma\upsilon\nu\vartheta)$ καὶ ἔχει πυκνότητα $\delta \equiv \rho^{-1}$.

1071) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου $T: \ (x^2 = 4\alpha y,\ yx^2 = 8\alpha^3 - 4y\alpha^2)$

1072) " " " " " $T: \ (x^2-y^2=\alpha^2,\ x=2\alpha)$

1073) " " " " " $T: \ (\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{\alpha},\ x+y=\alpha)$.

1074) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τὸ ὁποῖον περικλείεται κάτω ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον $z=0$, ἄνω ἀπὸ τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ καὶ πλευρικῶς ἀπὸ τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν τῆς ὁποίας ἡ τομὴ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y εἶναι ἕνας λακίσκος τῆς γραμμῆς $\rho = \alpha\sigma\upsilon\nu 2\vartheta$.

1075) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου $\Omega: (x+z=\alpha,\ x^2+y^2=\alpha^2,\ z=0)$.

1076) " " " " " τὸ ὁποῖον κεῖται κάτω τοῦ παραβολοειδοῦς $x^2+y^2=4\alpha(\alpha-z)$, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κυλίνδρου $x^2+y^2=\alpha\sqrt{x^2+y^2}+\alpha x$ καὶ ἄνω τοῦ ἐπιπέδου $z=0$.

1077) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κ. μάζης ἑνὸς ἡμικυκλικοῦ χωρίου διαμέτρου 2α τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης σὲ κάθε σημεῖον Μ εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἀπὸ τὴν διάμετρον.

1078) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τὸ ὁποῖον ἀποκόπτει ὁ κύλινδρος $x^2+y^2=\alpha^2$ ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον $z=\beta x$.

1079) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τὸ ὁποῖον ἀποκόπτει ὁ κύλινδρος $x^2+y^2-2\alpha x=0$ ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια τοῦ κώνου $x^2+y^2=z^2$ $(z \geq 0)$.

1080) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τὸ ὁποῖον ἀποκόπτει ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια τοῦ κώνου $x^2+y^2=z^2$ $(z \geq 0)$, ὁ κύλινδρος ὁ ὁποῖος ἔχει ὁδηγὸν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y ἕνα λακίσκον τῆς γραμμῆς $\rho = \alpha\sigma\upsilon\nu 2\vartheta$.

1081) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τὸ ὁποῖον ἀποκόπτει ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ $(z \geq 0)$ ὁ κύλινδρος ὁ ὁποῖος ἔχει ὁδηγὸν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y ἕνα λακίσκον τῆς γραμμῆς $\rho = \alpha\sigma\upsilon\nu k\vartheta$.

1082) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τὸ ὁποῖον ἀποκόπτουν τὰ ἐπίπεδα $2x=\alpha$, $y=x$, $y=0$ ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου $y^2+z^2=\alpha^2$ $(z \geq 0)$.

1083) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τὸ ὁποῖον ἀποκόπτει ὁ κύλινδρος $x^2+\alpha z=\alpha^2$ ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου $x^2+y^2=\alpha^2$ $(z \geq 0)$.

1084) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας $y^2+z^2=\alpha^2$, τὸ ὁποῖον κεῖται μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων $x=0$ καὶ $x=\beta$.

1085) Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας $y^2+z^2=\alpha^2$ τὸ ὁποῖον ἀποκόπτει ἐξ αὐτῆς ὁ κύλινδρος $x^2+y^2=\alpha^2$.

1086) Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας $y^2+z^2-\alpha z=0$ τὸ ὁποῖον ἀποκόπτει ἐξ αὐτῆς ἡ σφαῖρα $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$.

1087) Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=25$ διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $z\geqslant 0$ καὶ τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ παραβολοειδοῦς $z=19-x^2-y^2$.

1088) Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τῆς ἐπιφανείας τοῦ παραβολοειδοῦς $8z=x^2+y^2$ τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=20$.

1089) Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τῆς ἐπιφανείας $z=xy$ διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $x,y,z\geqslant 0$ καὶ τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κυλίνδρου $x^2+y^2=\alpha^2$.

1090) Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2-2\alpha z=0$, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κώνου $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

1091) Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τοῦ κυλίνδρου $y^{2/3}+z^{2/3}=\alpha^{2/3}$ διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $x,y,z\geqslant 0$ καὶ τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κυλίνδρου $x^{2/3}+y^{2/3}=\alpha^{2/3}$.

1092) Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τοῦ κώνου $z=\sqrt{x^2+y^2}$ τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κυλίνδρου $x^2+y^2-2x=0$.

1093) Νὰ εὑρεθῆ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τὸ ὁποῖον ἀποκόπτει ὁ κύλινδρος $z^2=2\alpha x$, ἀπὸ τὸν κύλινδρον $x^2+y^2-2\alpha x=0$.

1094) Νὰ εὑρεθῆ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τὸ παραβολοειδὲς $x^2:\alpha^2+y^2:\beta^2=2z$ καὶ τὸ ἐπίπεδον $x+y+z=1$.

1095) Νὰ εὑρεθῆ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου $\Omega:(z^2=y,\ z^2=2y,\ x^2=z,\ x^2=2z,\ y^2=x,\ y^2=2x)$.

1096) " " " " " " $\Omega:(x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=xy-x-y+1)$.

1097) " " " " " " $\Omega:(y^2=x,\ x+y-z=2,\ y=0,\ z=0)$.

1098) Νὰ εὑρεθῆ τὸ κ. μάζης τοῦ ὁμογενοῦς χωρίου $T:(y^2=8x,\ x+y=6)$.

1099) Ὁμοίως διὰ τὸ χωρίον $T:(y^2=4-x,\ y^2=4-4x)$.

1100) " " " " $T:(x^2=2y^3,\ x^2=8y)$.

1101) Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τῆς ἐπιφανείας $3z=(x+y^{3/2})\sqrt{2}$ τὸ ὁποῖον προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y εἰς τὸ χωρίον τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὴν γραμμὴν $(x^2+y^2)^2-2xy=0$ καὶ τὰ θετικὰ μέρη τῶν ἀξόνων.

Τριπλᾶ ὁλοκληρώματα

66. Ὁρισμός ἰδιότητες καὶ ὑπολογισμός. — Ἔστω συνάρτησις $\phi(M)$ μονοσήμαντα ὡρισμένη καὶ περατωμένη ἐπὶ ἑνὸς κλειστοῦ τριδιαστάτου χωρίου Ω τοῦ χώρου τῶν x,y,z τοῦ ὁποίου τὸ σύνορον ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα πεπερασμένον πλῆθος λείων ἐπιφανειακῶν τμημάτων σχ.(66.1).

Ὑποδιαιροῦμεν τὸ χωρίον αὐτὸ μὲ ἕναν οἱονδήποτε τρόπον εἰς ν-μικρότερα ὑποχωρία $\Delta\Omega_1,\cdots,\Delta\Omega_\nu$ ἔτσι ὥστε παριστάνοντες μὲ $|\Omega|$ τὸν ὄγκον τοῦ

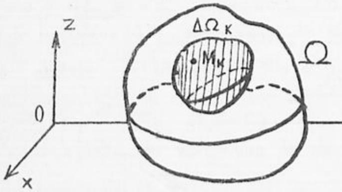
Ω καὶ μὲ $\Delta\omega_\kappa$ τὸν ὄγκον τοῦ $\Delta\Omega_\kappa$, νὰ εἶναι :

$$|\Omega| = \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 + \cdots + \Delta\omega_\nu \qquad (66.1)$$

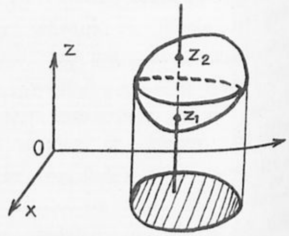
Λαμβάνομεν τώρα ἐπὶ ἑκάστου ὑποχωρίου $\Delta\Omega_\kappa$ ἕνα σημεῖον M_κ καὶ σχηματίζομεν μὲ τὰ δεδομένα αὐτὰ τὸ ἄθροισμα :

$$\Phi(M_1)\Delta\omega_1 + \cdots + \Phi(M_\kappa)\Delta\omega_\kappa \equiv \sum_{\kappa=1}^{\nu} \Phi(M_\kappa)\Delta\omega_\kappa \qquad (66.2)$$

Τὸ ἄθροισμα αὐτὸ ἐξαρτᾶται ἐν γένει καὶ ἀπὸ τὴν ὑποδιαίρεσιν τοῦ Ω εἰς ὑποχωρία, τὴν ὁποίαν θὰ παριστάνωμεν συντόμως μὲ $\mathfrak{D}$ καὶ ἀπὸ τὴν ἐκλογὴν τοῦ σημείου M_κ ἐπὶ ἑκάστου τῶν $\Delta\Omega_\kappa$.



Σχ. (66.1)



Σχ.(66.2)

Ὁρισμός (66.1).– *Ἡ συνάρτησις $\Phi(M)$ λέγεται ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ τοῦ χωρίου Ω, ὅταν ὑπάρχῃ ἀριθμὸς J τέτοιος ὥστε ὅταν ὅλα τὰ $\delta_\kappa \to 0$, ὅπου δ_κ τὸ διαμέτρημα τοῦ $\Delta\Omega_\kappa$, νὰ εἶναι :*

$$\text{op}\sum_{\kappa=1}^{\nu} \Phi(M_\kappa)\Delta\omega_\kappa = J$$

μιὰ κάθε ὑποδιαίρεσιν $\mathfrak{D}$ καὶ μιὰ κάθε ἐκλογὴν τῶν σημείων M_κ· δηλαδὴ ἀκριβέστερον ὅταν μιὰ κάθε θετικὸν ἀριθμὸν ε, εὑρίσκεται ἀριθμὸς η ἐπίσης θετικός, τέτοιος ὥστε ὅταν ὅλα τὰ $\delta_\kappa < \eta$, νὰ εἶναι :

$$\left| J - \sum_{\kappa=1}^{\nu} \Phi(M_\kappa)\Delta\omega_\kappa \right| < \varepsilon$$

Ὁ ἀριθμὸς J λέγεται τριπλὸν ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi(M)$ ἐπὶ τοῦ χωρίου Ω καὶ τὸν παριστάνομεν

$$\iiint_\Omega \Phi(M)\,d\omega$$

τὸ δὲ Ω λέγεται χωρίον ἢ τόπος ὁλοκληρώσεως· θὰ ἔχωμεν λοιπὸν γιὰ $\delta_\kappa \to 0$.

$$\boxed{\iiint_\Omega \Phi(M)\,d\omega = \text{op}\sum_{\kappa=1}^{\nu} \Phi(M_\kappa)\Delta\omega_\kappa} \qquad (66.3)$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπὶ τοῦ Ω εἶναι $\Phi(M) \equiv 1$, τὸ ἄθροισμα (66.2) θὰ ἰσοῦται γιὰ κάθε ν μὲ τὸν ὄγκον $|\Omega|$, ἐπομένως ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου Ω δίδεται ἀπὸ τὸ τριπλὸν ὁλοκλήρωμα :

$$|\Omega| = \iiint_\Omega d\omega \qquad (66.4)$$

Τίθεται καί έδῶ τό έρώτημα πότε μία συνάρτησις εἶναι όλοκληρώσιμος ἐπί ἑνός χωρίου Ω· ἀποδεικνύεται ὅτι κάθε συνάρτησις $\Phi(M)$ συνεχής ἐπί ἑνός κλειστοῦ χωρίου Ω, εἶναι καί όλοκληρώσιμος ἐπ' αὐτοῦ· ὑπάρχουν ὅμως καί μή συνεχεῖς συναρτήσεις οἱ ὁποῖες εἶναι όλοκληρώσιμες.
Ἕνας ἄλλος συνήθης τρόπος συμβολισμοῦ τοῦ τριπλοῦ όλοκληρώματος εἶναι

$$\iiint_{\Omega} \Phi(x,y,z)\,dxdydz$$

δικαιολογεῖται δέ ἀπό τήν δυνατότητα τήν ὁποίαν ἔχομεν νά ὑποδιαιρέσωμεν τό χωρίον Ω, δι' ἐπιπέδων παραλλήλων πρός τά συντεταγμένα ἐπίπεδα, εἰς ὀρθογωνιακά ὑποχωρία, ὁπότε ἐάν καλέσωμεν dx, dy, dz τίς διαστάσεις ἑνός ἐξ' αὐτῶν ὁ ὄγκος τοῦ dw θά εἶναι $dxdydz$.
Διά τό τριπλόν όλοκλήρωμα ἰσχύουν ἀκριβῶς ἀντίστοιχες ἰδιότητες μέ ἐκεῖνες πού ἔχομεν διατυπώσει διά τό διπλόν όλοκλήρωμα· δηλαδή ἐάν εἰς τούς τύπους (61.6) – (61.14) ἀντικαταστήσωμεν τό T μέ τό Ω, τό $d\tau$ μέ τό dw καί ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ $\Phi(M)$ εἶναι τώρα συνάρτησις τριῶν μεταβλητῶν θά ἔχωμεν τίς ἀντίστοιχες ἰδιότητες διά τά τριπλᾶ όλοκληρώματα.
Ἐάν ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y,z)$ εἶναι όλοκληρώσιμος ἐπί ἑνός χωρίου Ω τοῦ ὁποίου τό σύνορον τέμνεται σέ δύο τό πολύ σημεῖα ἀπό τίς παράλληλες πρός τόν ἄξονα τῶν z εὐθεῖες σχ. (66.2), ὑποδιαιρέσωμεν δέ τό χωρίον όλοκληρώσεως Ω δι' ἐπιπέδων παραλλήλων πρός τά συντεταγμένα ἐπίπεδα, εἰς ὑποχωρία σχήματος ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, ἀποδεικνύεται ὁ τύπος:

$$\iiint_{\Omega} \Phi(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{T_{xy}} dxdy \int_{z_1}^{z_2} \Phi(x,y,z)\,\partial z \qquad (66.4)$$

ὅπου T_{xy} τό χωρίον τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y εἰς τό ὁποῖον προβάλλεται τό χωρίον Ω καί $z=z_1(x,y)$, $z=z_2(x,y)$ ἀντιστοίχως οἱ ἐξισώσεις τοῦ κάτω καί ἄνω μέρους τοῦ συνόρου τοῦ χωρίου Ω. Δηλαδή κατά τόν τύπον (66.4) διά νά ὑπολογίσωμεν τό τριπλόν όλοκλήρωμα, εὑρίσκομεν πρῶτον τό μερικόν ἀόριστον όλοκλήρωμα τῆς Φ ὡς πρός z, όλοκληρώνομεν μεταξύ τῶν ὁρίων $z_1(x,y)$ καί $z_2(x,y)$ καί τήν προκύπτουσα συνάρτησιν, ἡ ὁποία δέν θά περιέχη πλέον z, όλοκληρώνομεν ἐπί τοῦ χωρίου T_{xy}. Ἀπό τόν (66.4) λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τόν (62.2) προκύπτει ὁ τύπος

$$\iiint_{\Omega} \Phi(x,y,z)\,dxdydz = \int_{a}^{\beta} dx \int_{y_1}^{y_2} \partial y \int_{z_1}^{z_2} \Phi(x,y,z)\,\partial z \quad (66.5)$$

δηλαδή ὁ ὑπολογισμός ἑνός τριπλοῦ όλοκληρώματος ἀνάγεται σέ τρεῖς ἐπάλληλες ἁπλές όλοκληρώσεις, ἐνῶ ὁ ὑπολογισμός ἑνός διπλοῦ ἀνάγεται σέ δύο.
Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ τριπλοῦ όλοκληρώματος δυνάμεθα νά χρησιμοποιήσωμεν ἐπίσης καί τούς τύπους:

$$\iiint_{\Omega} \Phi(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{T_{yz}} dy\,dz \int_{x_1}^{x_2} \Phi(x,y,z)\,\partial x = \iint_{T_{zx}} dz\,dx \int_{y_1}^{y_2} \Phi(x,y,z)\,\partial y \qquad (66.6)$$

ἀρκεῖ τὸ σύνορον τοῦ Ω νὰ τέμνεται, ἀπὸ τὶς εὐθεῖες τὶς παράλληλες πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x διὰ τὸν πρῶτον καὶ τῶν y διὰ τὸν δεύτερον, σὲ δύο τὸ πολὺ σημεῖα. Ἐὰν τὸ χωρίον Ω τέμνεται σὲ περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα ἀπὸ τὶς παράλληλες πρὸς τοὺς ἄξονες εὐθεῖες τότε, ὅπως κάναμε καὶ εἰς τὰ διπλᾶ ὁλοκληρώματα, ὑποδιαιροῦμεν τὸ Ω διὰ καταλλήλων διαχωριστικῶν ἐπιπέδων εἰς χωρία τῆς προηγουμένης μορφῆς.

Ἐὰν τὸ χωρίον ὁλοκληρώσεως εἶναι ὀρθογωνιακὸν δηλαδὴ εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ ἕδρες παράλληλες πρὸς τὰ ἐπίπεδα τῶν συντεταγμένων, τότε ἀπὸ τὸν (66.4) καὶ (62.3), προκύπτει ὁ τύπος:

$$\iiint_{\Omega} \Phi(x,y,z)\,dxdxdz = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dx \int_{\beta_1}^{\beta_2} \partial y \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \Phi(x,y,z)\,\partial z \qquad (66.7)$$

ὅπου $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ οἱ ἐλάχιστες καὶ $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ οἱ μέγιστες τιμὲς τῶν συντεταγμένων x, y, z τῶν σημείων τοῦ χωρίου ὁλοκληρώσεως. Ἐὰν ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις εἶναι τῆς μορφῆς $\Phi = \sigma(x) f(y) g(z)$, ἀπὸ τὸν προηγούμενον τύπον προκύπτει:

$$\iiint_{\Omega} \Phi(x,y,z)\,dxdydz = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sigma(x)\,dx \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(y)\,dy \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} g(z)\,dz \qquad (66.8)$$

Διὰ τὸν μετασχηματισμὸν ἑνὸς τριπλοῦ ὁλοκληρώματος μὲ τρεῖς ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$x = \sigma(u,v,w), \quad y = f(u,v,w), \quad z = g(u,v,w) \qquad (66.9)$$

ἰσχύει μία ἀκριβῶς ἀντίστοιχος πρότασις μὲ ἐκείνην ποὺ ἔχομεν διατυπώσει διὰ τὰ διπλᾶ ὁλοκληρώματα, ὁ δὲ ἀντίστοιχος τύπος μετασχηματισμοῦ εἶναι:

$$\iiint_{\Omega} \Phi(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega_1} \Phi(\sigma, f, g) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw \qquad (66.10)$$

Ὁ μετασχηματισμὸς ἑνὸς τριπλοῦ ὁλοκληρώματος κατὰ βάθος σημαίνει, ὅπως καὶ διὰ τὰ διπλᾶ ὁλοκληρώματα, νὰ μὴν χρησιμοποιήσωμεν διὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ ἀθροίσματος (66.2) ὑποχωρία ὀρθογωνιακὰ ἀλλὰ ὑποχωρία τὰ ὁποῖα προκύπτουν ὅταν ὑποδιαιρέσωμεν τὸ Ω μὲ τὶς τρεῖς μονοπαραμετρικὲς οἰκογένειες τῶν ἐπιφανειῶν ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις τοῦ μετασχηματισμοῦ (66.9), ὅταν εἰς αὐτὲς θεωρήσωμεν διαδοχικῶς τὴν μίαν ἐκ τῶν μεταβλητῶν u, v, w ὡς μεταβλητὴν παράμετρον τῆς οἰκογενείας. Τελικῶς ὁ ὑπολογισμὸς ἀνάγεται εἰς τὸ τριπλὸν ὁλοκλήρωμα τῆς Φ ἐπὶ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς Jacobien τοῦ μετασχηματισμοῦ, εἰς τὸ χωρίον Ω_1 τοῦ χώρου τῶν u, v, w εἰς τὸ ὁποῖον ἀπεικονίζεται ἀμφιμονοσήμαντα διὰ τῶν (66.9) τὸ Ω.

Ἐὰν τὸ χωρίον ὁλοκληρώσεως εἶναι μία σφαίρα ἢ ἕνα μέρος αὐτῆς καθώς καί είς ἄλλες περιπτώσεις, χρησιμοποιοῦμεν τόν μετασχηματισμόν σέ σφαιρικές συντεταγμένες :

$$x = \rho \sigma \upsilon \nu \vartheta \sigma \upsilon \nu \varphi, \quad y = \rho \eta \mu \vartheta \sigma \upsilon \nu \varphi, \quad z = \rho \eta \mu \varphi \qquad (66.11)$$

τοῦ ὁποίου ἡ Jacobien εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι εἶναι :

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\vartheta\sigma\upsilon\nu\varphi & -\rho\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\varphi & -\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta\eta\mu\varphi \\ \eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\varphi & \rho\sigma\upsilon\nu\vartheta\sigma\upsilon\nu\varphi & -\rho\eta\mu\vartheta\eta\mu\varphi \\ \eta\mu\varphi & 0 & \rho\sigma\upsilon\nu\varphi \end{vmatrix} = \cdots = \rho^2\sigma\upsilon\nu\varphi$$

ἑπομένως ἀντικαθιστῶντες είς τόν γενικόν τύπον (66.10) προκύπτει :

$$\iiint_{\Omega} \Phi(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega_1} \Phi(\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta\sigma\upsilon\nu\varphi, \rho\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\varphi, \rho\eta\mu\varphi)\rho^2\sigma\upsilon\nu\varphi\, d\rho d\vartheta d\varphi \qquad (66.12)$$

Ἐάν είς τόν τύπον αὐτόν θέσωμεν $\Phi \equiv 1$ προκύπτει :

$$|\Omega| = \iiint_{\Omega} dxdydz = \iiint_{\Omega_1} \rho^2\sigma\upsilon\nu\varphi\, d\rho d\vartheta d\varphi \qquad (66.13)$$

Ἐπίσης ἐάν τό χωρίον ὁλοκληρώσεως εἶναι ἕνα ἐλλειψοειδές μέ μήκη ἡμιαξόνων α, β, γ ἤ ἕνα μέρος αὐτοῦ, χρησιμοποιοῦμεν συνήθως τόν μετασχηματισμόν :

$$x = \alpha\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad y = \beta\rho\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad z = \gamma\rho\eta\mu\varphi \qquad (66.14)$$

τοῦ ὁποίου ἡ Jacobien εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι εἶναι $\alpha\beta\gamma\rho^2\sigma\upsilon\nu\varphi$, ἑπομένως ἀντικαθιστῶντες είς τόν γενικόν τύπον (66.10) προκύπτει :

$$\iiint_{\Omega} \Phi(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega_1} \Phi(\alpha\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta\sigma\upsilon\nu\varphi, \beta\rho\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\varphi, \gamma\rho\eta\mu\varphi)\,\alpha\beta\gamma\rho^2\sigma\upsilon\nu\varphi\, d\rho d\vartheta d\varphi \qquad (66.15)$$

Τήν πυκνότητα $\delta(M)$ είς ἕνα σημεῖον M ἑνός τριδιαστάτου ὑλικοῦ χωρίου Ω ὁρίζομεν πάλιν ὡς ὅριον τῆς μέσης πυκνότητος $\Delta m/\Delta\omega$ γιά $\Delta\omega \to 0$, δηλαδή :

$$\delta(M) = \text{ορ}\,\frac{\Delta m}{\Delta\omega} \qquad (66.16)$$

ἡ δέ μᾶζα m τοῦ χωρίου Ω, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμόν τοῦ τριπλοῦ ὁλοκληρώματος, θά δίδεται ἀπό τό ὁλοκλήρωμα :

$$m = \iiint_{\Omega} \delta(M)\, d\omega \qquad (66.17)$$

Ὁρίζομεν τώρα τό κέντρον βάρους καί τίς ροπές ἀδρανείας ἑνός ὑλικοῦ χωρίου Ω κατά τρόπον ἀντίστοιχον μέ αὐτόν πού ἔχομεν ὁρίσει τά ἀντίστοιχα μεγέθη διά τά ὑλικά τόξα καί τά διδιάστατα χωρία, δηλαδή ἔχομεν ἐξ ὁρισμοῦ :

$$\begin{aligned} & x_\kappa = \frac{1}{m}\iiint_{\Omega} x\delta\, dxdydz, \quad y_\kappa = \frac{1}{m}\iiint_{\Omega} y\delta\, dxdydz, \quad z_\kappa = \frac{1}{m}\iiint_{\Omega} z\delta\, dxdydz \\ & I_x = \iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\delta\, dxdydz, \quad I_y = \iiint_{\Omega}(z^2+x^2)\delta\, dxdydz, \quad I_z = \iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\delta\, dxdydz \\ & I_{xy} = \iiint_{\Omega} z^2\delta\, dxdydz, \quad I_{yz} = \iiint_{\Omega} x^2\delta\, dxdydz, \quad I_{zx} = \iiint_{\Omega} y^2\delta\, dxdydz \\ & I = \iiint_{\Omega} a^2\delta\, dxdydz \end{aligned} \qquad (66.18)$$

ὅπου α παριστάνει τὴν ἀπόστασιν τῶν σημείων τοῦ Ω ἀπὸ τὸ σημεῖον τὴν εὐθεῖαν ἢ τὸ ἐπίπεδον ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν τὴν ῥοπὴν ἀδρανείας.

Παράδειγμα (66.1).— Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ τριπλὸν ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi = xy^2z$ ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου:

$$0 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 3,\ 1 \leq z \leq 2$$

Λύσις. Ἀπὸ τὸν τύπον (66.8) θὰ ἔχωμεν:

$$\int_\Omega xy^2z\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 x\,dx \cdot \int_1^3 y^2 dy \cdot \int_1^2 z\,dz = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_1^3 \cdot \left[\frac{z^2}{2}\right]_1^2 = \dots = 26$$

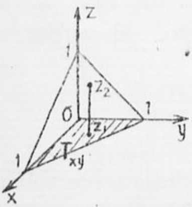
Παράδειγμα (66.2).— Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ τριπλὸν ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi = x+y+2z$ ἐπὶ τοῦ χωρίου $\Omega: (x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1)$.

Λύσις. Τὸ χωρίον ὁλοκληρώσεως εἶναι τὸ τετράεδρον τὸ ὁποῖον ἔχομεν σχεδιάσει εἰς τὸ σχ. (66.3), εἶναι δὲ $z_1=0$, $z_2=1-x-y$ καὶ T_{xy} τὸ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐπὶ τοῦ ὁποίου τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ 0 μέχρι 1 τὸ δὲ y ἀπὸ 0 μέχρι $1-x$, ἐπομένως ἀπὸ τὸν τύπον (66.4) προκύπτει:

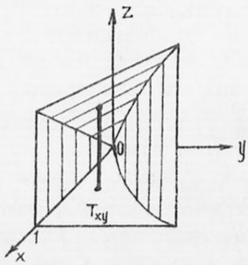
$$\int_\Omega (x+y+2z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{T_{xy}} dx\,dy \int_0^{1-x-y} (x+y+2z)\,\partial z = \iint_{T_{xy}} \left[(x+y)z+z^2\right]_0^{1-x-y} dx\,dy = \iint_{T_{xy}} \left[(x+y)(1-x-y) + \right.$$

$$\left. + (1-x-y)^2\right] dx\,dy = \iint_{T_{xy}} (1-x-y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)\,\partial y = \int_0^1 \left[y-xy-y^2{:}2\right]_0^{1-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-2x+x^2)\,dx =$$

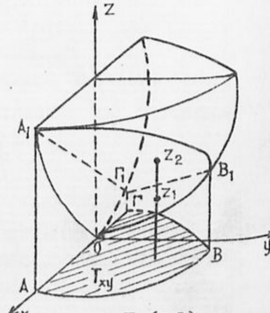
$$= \frac{1}{2}\left[x - x^2 + x^3/3\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$



Σχ. (66.3)



Σχ. (66.4)



Σχ. (66.5)

Παράδειγμα (66.3).— Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ τριπλὸν ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi = 2x-y-z$ ἐπὶ τοῦ χωρίου $\Omega: (x=1,\ y=0,\ z=0,\ y=x^2,\ z=x+y,\ x,y,z \geq 0)$.

Λύσις. Τὸ χωρίον Ω ἔχει σχεδιασθεῖ εἰς τὸ σχ. (66.4)· κάτω κλίνεται ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον $z=0$, ἄνω ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον $z=x+y$, ἀριστερὰ ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον $y=0$, δεξιὰ ἀπὸ τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν $y=x^2$, καὶ ἔμπροσθεν ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον $x=1$· θὰ ἔχωμεν λοιπόν:

$$\int_\Omega (2x-y-z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{T_{xy}} dx\,dy \int_0^{x+y} (2x-y-z)\,\partial z = \frac{3}{2}\int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x^2-y^2)\,\partial y = \frac{3}{2}\int_0^1 \left(x^4 - \frac{x^6}{3}\right) dx = \frac{8}{35}.$$

Παράδειγμα (66.4).— Νά ὑπολογισθῇ διά τριπλῆς ὁλοκληρώσεως ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου Ω: $(x^2+y^2=2z,\ z=x+1)$.

Λ ύ σ ι ς. Εἰς τό σχ.(66.5) ἔχει σχεδιασθεῖ τό ἥμισυ τοῦ στερεοῦ τό ὁποῖον κεῖται δεξιά τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, z. Ἡ ἐξίσωσις τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἡ ὁποία προβάλλει ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y τήν τομήν $A_1B_1\Gamma_1$ τοῦ παραβολοειδοῦς μετά τοῦ ἐπιπέδου $z=x+1$, προκύπτει δι' ἀπαλοιφῆς τῆς z μεταξύ τῶν ἐξισώσεων: $x^2+y^2=2z$, $z=x+1$ δηλαδή εἶναι: $x^2+y^2=2x+2$. Ἡ ἐξίσωσις αὐτή μετά τῆς $z=0$ ἀποτελοῦν τίς ἐξισώσεις τῆς προβολῆς ΑΒΓ ἡ ὁποία παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι ἕνας κύκλος. Ἡ κατηγμένη τοῦ κάτω μέρους τοῦ χωρίου εἶναι $z_1=(x^2+y^2):2$ καί τοῦ ἄνω $z_2=x+1$, ἑπομένως ἀπό τόν τύπον (66.4) θά ἔχωμεν:

$$|\Omega| = 2\iint_{T_{xy}} dxdy \int_{(x^2+y^2):2}^{x+1} \partial z = 2\iint_{T_{xy}} \left(x+1-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dxdy = \int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{2+2x-x^2}} (2x+2-x^2-y^2)\,\partial y = \cdots = \frac{9\pi}{4}$$

Παράδειγμα (66.5).— Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας: $x^2+y^2+z^2=a^2$ διά μετασχηματισμοῦ εἰς σφαιρικές συντεταγμένες.

Λ ύ σ ι ς. Ἐπί τῆς δοθείσης σφαίρας τό ρ μεταβάλλεται ἀπό 0 μέχρι a τό θ ἀπό 0 μέχρι 2π καί τό φ ἀπό $-\frac{\pi}{2}$ μέχρι $+\frac{\pi}{2}$, ἑπομένως κατά τόν τύπον (66.13) θά εἶναι:

$$|\Omega| = \int_0^a \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}\varphi\, d\varphi = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^a \left[\theta\right]^{2\pi} \cdot \left[\text{ημ}\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{3}\cdot 2\pi\cdot 2 = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

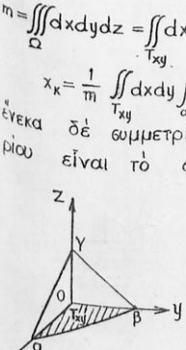
Παράδειγμα (66.6).— Νά εὑρεθῇ τό κ. μάζης τοῦ χωρίου $\Omega:(x=0, y=0, z=0,\ x/a+y/\beta+z/\gamma=1,\ a,\beta,\gamma>0)$ τό ὁποῖον ἔχει πυκνότητα $\delta\equiv 1$.

Λ ύ σ ι ς. Ἀπό τούς τύπους (66.17),(66.18) καί τό σχ.(66.6) προκύπτει:

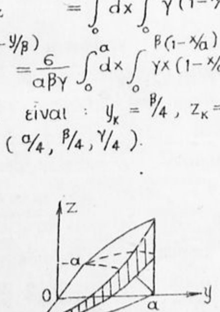
$$m = \iiint_\Omega dxdydz = \iint_{T_{xy}} dxdy \int_0^{\gamma(1-x/a-y/\beta)} \partial z = \int_0^a dx \int_0^{\beta(1-x/a)} \gamma(1-x/a-y/\beta)\,\partial y = \cdots = \frac{a\beta\gamma}{6}$$

$$x_\kappa = \frac{1}{m}\iint_{T_{xy}} dxdy \int_0^{\gamma(1-x/a-y/\beta)} x\,\partial z = \frac{6}{a\beta\gamma}\int_0^a dx \int_0^{\beta(1-x/a)} \gamma x(1-x/a-y/\beta)\,\partial y = \cdots = a/4$$

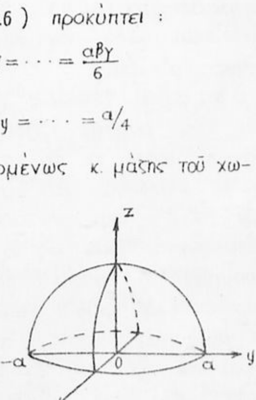
ἕνεκα δέ συμμετρίας θά εἶναι: $y_\kappa=\beta/4$, $z_\kappa=\gamma/4$, ἑπομένως κ. μάζης τοῦ χωρίου εἶναι τό σημεῖον $(a/4, \beta/4, \gamma/4)$.



Σχ.(66.6)



Σχ.(66.7)



Σχ.(66.8)

Παράδειγμα (66.7).— Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ῥοπές ἀδρανείας I_x, I_y, I_z τοῦ χωρίου $\Omega:(x^2+y^2=a^2,\ z=y,\ z=2y,\ y>0)$ τό ὁποῖον ἔχει πυκνότητα $\delta\equiv 1$.

Λ ύ σ ι ς. Τό χωρίον Ω ὅπως φαίνεται καί εἰς τό σχ.(66.7), περιορίζεται πλευρικῶς ἀπὸ τὸν κύλινδρον, $x^2+y^2=\alpha^2$ κάτω ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον $z=y$ καὶ ἄνω ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον $z=2y$, προβάλλεται δὲ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν xy εἰς τὸ χωρίον T_{xy} : $(x^2+y^2=\alpha^2,\ y\geqslant 0)$ ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dxdydz=\iint\limits_{T_{xy}}dxdy\int_{y}^{2y}(x^2+y^2)\,\partial z=\iint\limits_{T_{xy}}(x^2+y^2)\,y\,dxdy.$$

Μετασχηματίζοντες τὸ διπλὸν ὁλοκλήρωμα σὲ πολικὲς συντεταγμένες προκύπτει :

$$I_z=\iint\limits_{T_1}\rho^3\eta\mu\vartheta\cdot\rho d\rho d\vartheta=\int_0^{\alpha}\rho^4d\rho\int_0^{\pi}\eta\mu\vartheta d\vartheta=\Big[\frac{\rho^5}{5}\Big]_0^{\alpha}\cdot\Big[-\sigma\upsilon\nu\vartheta\Big]_0^{\pi}=\frac{2\alpha^5}{5}$$

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν : $I_x=\frac{34}{45}\alpha^5$ καὶ $I_y=\frac{8}{9}\alpha^5$.

Παράδειγμα (66.8).– Νὰ εὑρεθῆ τὸ κ. μάζης τοῦ ἡμισφαιρικοῦ χωρίου $\Omega:(z=\sqrt{\alpha^2-x^2-y^2},\ z=0)$ τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τὸ κέντρον.

Λύσις. Θέτοντες $\delta=\lambda\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\lambda\rho$ καὶ μετασχηματίζοντες σὲ σφαιρικὲς συντεταγμένες θὰ ἔχωμεν σχ. (66.8):

$$m=\iiint\limits_{\Omega}\lambda\rho\,dxdydz=\lambda\iiint\limits_{\Omega_1}\rho\cdot\rho^2\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot d\rho d\vartheta d\varphi=\lambda\int_0^{\alpha}\rho^3d\rho\int_0^{2\pi}d\vartheta\cdot\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu\varphi d\varphi=\lambda\Big[\frac{\rho^4}{4}\Big]_0^{\alpha}\cdot\Big[\vartheta\Big]_0^{2\pi}\cdot\Big[\eta\mu\varphi\Big]_0^{\pi/2}=\lambda\cdot\frac{\alpha^4}{4}\cdot 2\pi\cdot 1=$$

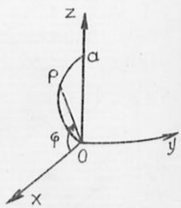
$$=\frac{1}{2}\pi\lambda\alpha^4,$$

$$z_\kappa=\frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega}\lambda\rho\cdot z\,dxdydz=\frac{2}{\pi\alpha^4}\iiint\limits_{\Omega_1}\rho\cdot\rho\eta\mu\varphi\cdot\rho^2\sigma\upsilon\nu\varphi d\rho d\vartheta d\varphi=\frac{2}{\pi\alpha^4}\int_0^{\alpha}\rho^4d\rho\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^{\pi/2}\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi d\varphi=\frac{2}{\pi\alpha^4}\cdot\frac{\alpha^5}{5}\,2\pi\Big[\frac{\eta\mu^2\varphi}{2}\Big]_0^{\pi/2}=\frac{2\alpha}{5}$$

ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν $x_\kappa=y_\kappa=0$ τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀμέσως ἀπὸ τὴν συμμετρία.

Παράδειγμα (66.9).– Νὰ ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου Ω τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια ἡ ὁποία ἔχει ἐξίσωσιν σὲ σφαιρικὲς συντεταγμένες $\rho^3=\alpha^3\eta\mu\varphi$.

Λύσις. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας γράφεται $(x^2+y^2+z^2)^2=\alpha^3 z$, δηλαδὴ εἶναι τῆς μορφῆς (42.19), ὁπότε ἡ περικλείουσα ἐπιφάνεια εἶναι ἐκ περιστροφῆς περὶ τὸν ἄξονα τῶν z. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ μεσημβρινοῦ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, z ἔχει τὴν ἰδίαν ἐξίσωσιν $\rho^3=\alpha^3\eta\mu\varphi$, ὅπως δὲ φαίνεται καὶ εἰς τὸ σχ. (66.9) εἶναι μία συνεχὴς γραμμὴ ἡ ὁποία γιὰ $\varphi=0$ ἔχει $\rho=0$ καὶ γιὰ $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ἔχει $\rho=\alpha$. Ἐπὶ τοῦ χωρίου ὁλοκληρώσεως τὸ ρ μεταβάλλεται ἀπὸ 0 μέχρι $\alpha\eta\mu^{\frac{1}{3}}\varphi$ τὸ φ ἀπὸ 0 μέχρι $\frac{\pi}{2}$ καὶ τὸ ϑ ἀπὸ 0 μέχρι 2π, ἐπομένως κατὰ τὸν τύπον (66.13) θὰ ἔχωμεν



Σχ. (66.9)

$$|\Omega|=\iiint\limits_{\Omega_1}\rho^2\sigma\upsilon\nu\varphi d\rho d\vartheta d\varphi=\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu\varphi d\varphi\int_0^{\alpha\sqrt[3]{\eta\mu\varphi}}\rho^2d\rho=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/2}\alpha^3\eta\mu\varphi\,d\eta\mu\varphi=\frac{\pi\alpha^3}{3}.$$

Ἀσκήσεις

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἑπόμενα ὁλοκληρώματα καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πεδίον ὁλοκληρώσεως ἑκάστου ἐξ αὐτῶν.

1102) $\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_{x-y}^{x+y} z\,dz$ 1103) $\int_1^2 dy \int_0^{2y} dx \int_0^{1/\sqrt{xy}} xyz\,dz$

1104) $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{x+y} (2x+y-1)\,dz$ 1105) $\int_1^2 dx \int_x^{2x} dy \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{2xy}} z(x^2+y^2+z^2)^{-1} dz$

1106) $\int_1^4 dy \int_{1/y}^{e^y} dz \int_{1/z^2}^{y/z} z\,dx$ 1107) $\int_1^3 dy \int_y^{2y} dx \int_{\sqrt{x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz\,e^{-(x^2+y^2+z^2)} dz$

1108) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} dx \int_1^{\pi/2x} dy \int_0^{y\sqrt{x}} xzy^{-1} \text{συν}(z^2y^{-1})\,dz$ 1109) $\int_0^{\pi/2} dx \int_0^{9\,\text{συν}x} dy \int_1^{y+9} z^{-3/2} dz$

1110) $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} (x^2+y^2)^{3/2} (x^2+y^2+z^2)^{-1} dz$ 1111) $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} dx \int_0^{x+y} x\,dz$

Νὰ ὑπολογισθοῦν διὰ τριπλῆς ὁλοκληρώσεως οἱ ὄγκοι τῶν ἑπομένων τριδιαστάτων χωρίων.

1112) $\Omega: (z = x^2+y^2,\ y \geqslant 0,\ z=0,\ x=1,\ x=y,\ x>0)$. 1113) $\Omega: (z = \frac{8}{x^2+4},\ y \geqslant 0,\ z=0,\ x=2,\ x=y,\ x>0)$.

1114) $\Omega: (x^2z=1,\ x=1,\ x=2,\ y \geqslant 0,\ z=0,\ x=y,\ x>0)$ 1115) $\Omega: (y=4-x^2,\ z=0,\ y=z)$.

1116) $\Omega: (z=(x+1)^{-2},\ y=2x-x^2,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x>0)$. 1117) $\Omega: (x+y+z=4,\ x+y-z=0,\ y=0,\ x=0)$.

1118) $\Omega: (z=4-x^2,\ z=4-y^2,\ x,y,z \geqslant 0)$. 1119) $\Omega: (x^2+y^2+z^2=23,\ \ z^2-x^2-y^2=9,\ z>0)$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἑπόμενα τριπλᾶ ὁλοκληρώματα :

1120) $\iiint_\Omega xyz\,dx\,dy\,dz$ $\Omega: (x^2:\alpha^2+y^2:\beta^2+z^2:\gamma^2=1,\ \ x,y,z \geqslant 0)$.

1121) $\iiint_\Omega z^{-3}\sqrt{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}}\,dx\,dy\,dz$ $\Omega: (x^2:\alpha^2+y^2:\beta^2+z^2:\gamma^2=1,\ \ \kappa^2x^2+\lambda^2y^2=z^2,\ z>0)$

1122) $\iiint_\Omega (\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)\,dx\,dy\,dz$ $\Omega: (x^2+y^2+z^2=1)$

1123) $\iiint_\Omega \left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right) dx\,dy\,dz$ $\Omega: (x^2:\alpha^2+y^2:\beta^2+z^2:\gamma^2=1)$

1124) $\iiint_\Omega (x+y+z+1)^{-3}\,dx\,dy\,dz$ $\Omega: (x=0,\ y=0,\ z=0,\ \ x+y+z=1)$

1125) $\iiint_\Omega (x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz$ $\Omega: (x^2+y^2 \leqslant 2\alpha z,\ x^2+y^2+z^2 < 3\alpha^2)$.

1126) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κ. μάζης τοῦ ὁμογενοῦς χωρίου τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα καὶ τὸ $2x+3y+4z=12$.

1127) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κ. μάζης τοῦ προηγουμένου χωρίου ὅταν ἡ πυκνότης αὐτοῦ εἰς κάθε σημεῖον εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον $x=0$.

1128) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ῥοπὲς ἀδρανείας I_{xy}, I_{xz}, I_x τοῦ προηγουμένου μὴ ὁμογενοῦς χωρίου.

1129) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ῥοπὲς ἀδρανείας ὡς πρὸς τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα τοῦ χωρίου τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ πρῶτον ὄγδοον τῶν ἀξόνων, περικλείεται ἀπὸ τὶς ἐπιφανείες $z=xy,\ z=0,\ x=2,\ y=2$ καὶ ἔχει πυκνότητα $\delta \equiv 1$.

1130) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κ. μάζης τοῦ προηγουμένου χωρίου ὅταν ἡ πυκνότης αὐτοῦ σὲ κάθε σημεῖον εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον $z=0$.

1131) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κ. μάζης τοῦ ὁμογενοῦς χωρίου τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τὴν σφαῖρα $x^2+y^2+z^2=4$, τὸ παραβολοειδὲς $4z=8-x^2-y^2$ καὶ τὸ ἐπίπεδον $z=0$.

1132) Νά εὑρεθῆ τό κ. μάζης τοῦ προηγουμένου χωρίου, ὅταν ἡ πυκνότης αὐτοῦ εἰς κάθε σημεῖον εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου ἀπό τόν ἄξονα τῶν z.

1133) Νά εὑρεθῆ ἡ ροπή ἀδρανείας I_z τοῦ προηγουμένου μή ὁμογενοῦς χωρίου.

1134) Νά εὑρεθῆ ἡ κατηγμένη τοῦ κ. μάζης καί ἡ ροπή ἀδρανείας I_z τοῦ ὁμογενοῦς χωρίου τό ὁποῖον περιορίζεται ἀπό τίς ἐπιφάνειες $\rho = z(1-\text{συν}\vartheta)$, $\rho = 4(1-\text{συν}\vartheta)$ καί διά τό ὁποῖον εἶναι $z \geqslant 0$ (ρ, ϑ, z κυλινδρικές συντεταγμένες).

1135) Νά εὑρεθῆ τό κ. μάζης ἑνός ἡμισφαιρίου ἀκτῖνος α τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης σέ κάθε σημεῖον εἶναι ἀνάλογος πρός τό τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου ἀπό τόν ἄξονα συμμετρίας αὐτοῦ.

1136) Νά εὑρεθῆ ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ προηγουμένου ἡμισφαιρίου, ὡς πρός τόν ἄξονα συμμετρίας αὐτοῦ

1137) Νά εὑρεθῆ ἡ μάζα ἑνός κύβου ἀκμῆς α τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης σέ κάθε σημεῖον εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως ἀπό μίαν κορυφήν αὐτοῦ.

1138) Νά εὑρεθῆ ἡ μάζα ἑνός ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ὕψους h καί ἀκτῖνος βάσεως α, ὅταν ἡ πυκνότης σέ κάθε σημεῖον εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἀπό τήν κορυφήν.

1139) Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τό ὁποῖον περιορίζεται ἀπό τήν ἐπιφάνεια $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{\alpha}$, τά συντεταγμένα ἐπίπεδα καί κεῖται εἰς τό πρῶτον ὄγδοον τῶν ἀξόνων.

1140) Νά εὑρεθῆ ἡ μάζα τοῦ χωρίου τό ὁποῖον κεῖται μεταξύ δύο ὁμοκέντρων σφαιρῶν ἀκτίνων α, β $(\alpha > \beta)$ καί τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης σέ κάθε σημεῖον εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως ἀπό τό κέντρον αὐτῶν.

1141) Νά εὑρεθῆ ἡ μάζα τοῦ χωρίου τό ὁποῖον κεῖται ἐντός σφαίρας ἀκτῖνος 2α καί ἐκτός τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου μέ ἄξονα μίαν διάμετρον τῆς σφαίρας καί ἀκτῖνα βάσεως α καί τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης σέ κάθε σημεῖον εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως ἀπό τό κέντρον τῆς σφαίρας.

1142) Νά ὑπολογισθῆ ἡ ροπή ἀδρανείας ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν z τοῦ χωρίου τό ὁποῖον περικλείεται ἀπό τά ἐπίπεδα $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ καί τό ὁποῖον ἔχει πυκνότητα $\delta \equiv 1$.

1143) Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τό ὁποῖον περικλείεται ὑπό τοῦ κώνου $z^2 : \gamma^2 = x^2 : \alpha^2 + y^2 : \beta^2$ καί τοῦ ἐπιπέδου $z = \gamma > 0$.

Ἐπιφανειακά ὁλοκληρώματα

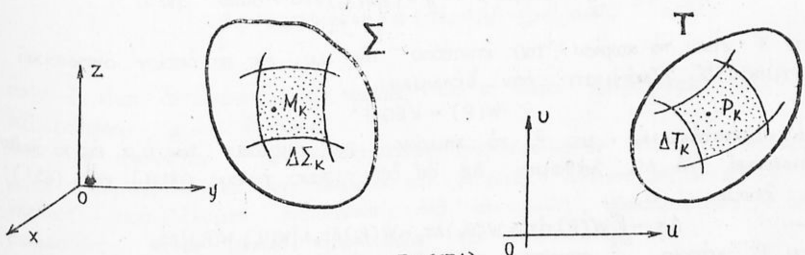
67. Ὁρισμοί καί τύποι ὑπολογισμοῦ. – Ἔστω συνάρτησις Φ(Μ) μονοσήμαντα ὡρισμένη καί περατωμένη ἐπί ἑνός τμήματος Σ μιᾶς ἐπιφανείας, τό ὁποῖον δέν ἀποκλείεται νά εἶναι καί κλειστόν. Ὑποδιαιροῦμεν τό τμῆμα αὐτό μέ ἕναν οἱονδήποτε τρόπον σέ ν-μικρότερα τμήματα $\Delta\Sigma_1, \dots, \Delta\Sigma_\nu$

ἔτσι ὥστε παριστάνοντες μὲ $|\Sigma|$ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Σ καὶ μὲ $\Delta\sigma_\kappa$ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ $\Delta\Sigma_\kappa$ νὰ εἶναι :

$$|\Sigma| = \Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \cdots + \Delta\sigma_\nu . \qquad (67.1)$$

Λαμβάνομεν τώρα ἐπὶ ἑκάστου τμήματος $\Delta\Sigma_\kappa$ ἕνα σημεῖον M_κ σχ.(67.1) καὶ σχηματίζομεν μὲ τὰ δεδομένα αὐτὰ τὸ ἄθροισμα :

$$\Phi(M_1)\Delta\sigma_1 + \cdots + \Phi(M_\nu)\Delta\sigma_\nu \equiv \sum_{\kappa=1}^{\nu} \Phi(M_\kappa)\Delta\sigma_\kappa \qquad (67.2)$$



Σχ.(67.1)

Τὸ ἄθροισμα αὐτὸ ἐξαρτᾶται ἐν γένει καὶ ἀπὸ τὴν ὑποδιαίρεσιν τοῦ Σ, τὴν ὁποίαν θὰ παριστάνωμεν συντόμως μὲ $\mathfrak{D}$ καὶ ἀπὸ τὴν ἐκλογὴν τοῦ σημείου M_κ ἐπὶ ἑκάστου τμήματος $\Delta\Sigma_\kappa$.

Ὁρισμός (67.1). — *Ἡ συνάρτησις $\Phi(M)$ λέγεται ὁλοκληρώσιμος ὡς πρὸς σ ἐπὶ τοῦ τμήματος Σ, ὅταν ὑπάρχῃ ἀριθμὸς J τέτοιος ὥστε ὅταν ὅλα τὰ $\delta_\kappa \to 0$, ὅπου δ_κ τὸ διαμέτρημα τοῦ $\Delta\Sigma_\kappa$, νὰ εἶναι :*

$$\text{op}\sum_{\kappa=1}^{\nu} \Phi(M_\kappa)\Delta\sigma_\kappa = J$$

γιὰ κάθε ὑποδιαίρεσιν $\mathfrak{D}$ καὶ γιὰ κάθε ἐκλογὴν τῶν σημείων M_κ· δηλαδὴ ὅταν γιὰ κάθε θετικὸν ἀριθμὸν ϵ, εὑρίσκεται ἀριθμὸς η ἐπίσης θετικός, τέτοιος ὥστε ὅταν ὅλα τὰ $\delta_\kappa < \eta$, νὰ εἶναι :

$$\left| J - \sum_{\kappa=1}^{\nu} \Phi(M_\kappa)\Delta\sigma_\kappa \right| < \varepsilon$$

Ὁ ἀριθμὸς J λέγεται ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα ὡς πρὸς σ τῆς συναρτήσεως $\Phi(M)$ ἐπὶ τοῦ τμήματος Σ καὶ τὸ παριστάνομεν :

$$\iint_\Sigma \Phi(M)\,d\sigma$$

τὸ δὲ Σ λέγεται τόπος ἢ ἐπιφάνεια ὁλοκληρώσεως· θὰ ἔχωμεν λοιπὸν γιὰ $\delta_\kappa \to 0$.

$$\boxed{\iint_\Sigma \Phi(M)\,d\sigma = \text{op}\sum_{\nu=1}^{\nu} \Phi(M_\kappa)\Delta\sigma_\kappa} \qquad (67.3)$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπὶ τοῦ Σ εἶναι $\Phi(M) \equiv 1$, τὸ ἄθροισμα (67.2) θὰ ἰσοῦται γιά κάθε ν μέ τό ἐμβαδόν $|\Sigma|$, ἐπομένως θά εἶναι:

$$|\Sigma| = \iint_{\Sigma} d\sigma \qquad (67.4)$$

Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι τό Σ εἶναι ἕνα λεῖον τμῆμα μέ παραμετρικές ἐξισώσεις:

$$x = f_1(u,\upsilon)\,,\ y = f_2(u,\upsilon)\,,\ z = f_3(u,\upsilon) \qquad (67.5)$$

Καί ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y,z)$ εἶναι συνεχής ἐπ' αὐτοῦ, θά δείξωμεν ὅτι:

$$\iint_{\Sigma} \Phi(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{T} \Phi(f_1,f_2,f_3)\sqrt{EG-F^2}\,du\,d\upsilon \qquad (67.5)$$

ὅπου T εἶναι τό χωρίον τοῦ ἐπιπέδου τῶν u,υ εἰς τό ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ τό τμῆμα Σ. Πράγματι ἐάν θέσωμεν:

$$W(P) = \sqrt{EG-F^2}$$

καί παραστήσωμεν μέ P_κ τό σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῶν u,υ εἰς τό ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ τό M_κ, λάβωμεν δέ ὑπ' ὄψιν τούς τύπους (61.11) καί (65.1), θά ἔχωμεν:

$$\Delta\sigma_\kappa = \iint_{\Delta T_\kappa} W(P)\,d\tau = W(P_\kappa')\Delta\tau_\kappa = W(P_\kappa)\Delta\tau_\kappa + \left[W(P_\kappa') - W(P_\kappa)\right]\Delta\tau_\kappa$$

ὅπου P_κ' κάποιο σημεῖον τοῦ ὑποχωρίου ΔT_κ τοῦ ἐπιπέδου τῶν u,υ εἰς τό ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ τό $\Delta\Sigma_\kappa$. Κατόπιν αὐτῶν τό ἄθροισμα (67.2) γράφεται:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \Phi(M_\kappa)\Delta\sigma_\kappa = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \Phi(M_\kappa)W(P_\kappa)\Delta\tau_\kappa + \sum_{\kappa=1}^{\nu} \Phi(M_\kappa)\left[W(P_\kappa') - W(P_\kappa)\right]\Delta\tau_\kappa \qquad (1)$$

Ἕνεκα τῶν γενομένων ὑποθέσεων συνεχείας τό ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους τοῦ (67.5) ὑπάρχει καί ἰσοῦται ὡς γνωστόν γιά $\delta_\kappa \to 0$ μέ τό ὅριον τοῦ πρώτου ἀθροίσματος τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (1)· διά νά δείξωμεν λοιπόν τό ζητούμενον ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι γιά $\delta_\kappa \to 0$ τό ὅριον τοῦ δευτέρου ἀθροίσματος τείνει εἰς τό μηδέν. Αὐτό ὅμως φαίνεται ἀμέσως ἐάν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τήν πρότασιν (4.4) περί ὁμοιομόρφου συνεχείας ὁπότε θά ἔχωμεν γιά $\delta_\kappa <$ καταλλήλου η:

$$\left|\sum_{\kappa=1}^{\nu} \Phi(M_\kappa)\left[W(P_\kappa') - W(P_\kappa)\right]\Delta\tau_\kappa\right| \leq \sum_{\kappa=1}^{\nu} \left|\Phi(M_\kappa)\right|\left|W(P_\kappa') - W(P_\kappa)\right|\Delta\tau_\kappa < \sum_{\kappa=1}^{\nu} \left|\Phi(M_\kappa)\right|\varepsilon\cdot\Delta\tau_\kappa$$

$$\leq \sum_{\kappa=1}^{\nu} A\varepsilon\Delta\tau_\kappa = A\varepsilon|T|$$

ὅπου μέ A παραστήσαμε ἕνα ἄνω φράγμα τῆς $\Phi(M)$ καί μέ ε ἕναν οἱονδήποτε θετικόν ἀριθμόν. Ἐκ τῆς τελευταίας ἀνισότητος ἕπεται λοιπόν ὅτι τό δεύτερον ἄθροισμα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (1) τείνει εἰς τό μηδέν γιά $\delta_\kappa \to 0$ καί ἔτσι ἀπεδείχθη ὅτι διά τόν ὑπολογισμόν ἑνός ἐπιφανειακοῦ ὁλοκληρώματος ὡς πρός σ, ὅταν ἡ ἐπιφάνεια ὁλοκληρώσεως δίδεται ὑπό τήν παραμετρικήν μορφήν (67.5), ἰσχύει ὁ τύπος (67.5). Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι τό τμῆμα Σ δίδεται ὑπό τήν συνήθη μορφήν:

$$z = f_3(x,y) \qquad (67.6)$$

τότε ἀπὸ τὸν (67.5) προκύπτει ἀμέσως ὁ τύπος:

$$\iint_{\Sigma} \Phi(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{T} \Phi(x,y,f_3)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy \qquad (67.7)$$

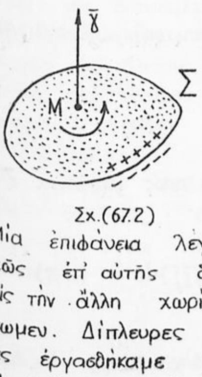
ὅπου T τὸ χωρίον τοῦ ἐπιπέδου $z=0$ εἰς τὸ ὁποῖον προβάλλεται τὸ Σ. Τέλος ἐὰν τὸ τμῆμα Σ δίδεται ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$x=f_1(y,z) \quad \text{ἤ} \quad y=f_2(z,x) \qquad (67.8)$$

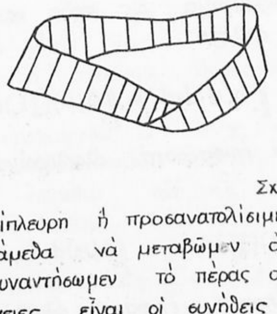
ἔχομεν ἀντιστοίχως τοὺς ἑξῆς δύο τύπους:

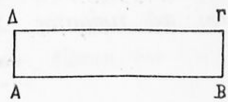
$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} \Phi(x,y,z)\,d\sigma &= \iint_{T} \Phi(f_1,y,z)\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,dydz\\ \iint_{\Sigma} \Phi(x,y,z)\,d\sigma &= \iint_{T} \Phi(x,f_2,z)\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz\end{aligned} \qquad (67.9)$$

ὅταν T εἶναι ἀντιστοίχως τὸ χωρίον εἰς τὸ ὁποῖον προβάλλεται τὸ Σ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $x=0$ ἤ $y=0$.
Ἀπὸ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ἐπιφανειακῶν ὁλοκληρωμάτων εἰς διπλᾶ ὁλοκληρώματα συμπεραίνομεν ὅτι ἰσχύουν καὶ δι' αὐτὰ ἀντίστοιχες ἰδιότητες μὲ ἐκεῖνες ποὺ ἔχομεν διατυπώσει διὰ τὰ διπλᾶ ὁλοκληρώματα, τὰ ὁποῖα προφανῶς εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῶν ἐπιφανειακῶν.



Σχ.(67.2)





Σχ.(67.3)

Μία ἐπιφάνεια λέγεται δίπλευρη ἢ προσανατολίσιμη, ὅταν κινούμενοι συνεχῶς ἐπ' αὐτῆς δὲν δυνάμεθα νὰ μεταβῶμεν ἀπὸ τὴν μία ὄψη αὐτῆς εἰς τὴν ἄλλη χωρὶς νὰ συναντήσωμεν τὸ πέρας αὐτῆς ἢ νὰ τὴν διατρυπήσωμεν. Δίπλευρες ἐπιφάνειες εἶναι οἱ συνήθεις ἐπιφάνειες μὲ τὶς ὁποῖες ἐργασθήκαμε μέχρι τώρα καὶ μὲ τὶς ὁποῖες καὶ εἰς τὸ ἑξῆς θὰ ἀσχοληθῶμεν. Ἐπὶ μιᾶς διπλεύρου ἐπιφανείας σχ.(67.2) ἐκλέγομεν τὴν μία ἐκ τῶν δύο ὄψεων, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν θετικὴν καὶ τὴν ἄλλην ἀρνητικήν. Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν σὲ κάθε σημεῖον M τῆς ἐπιφανείας τὸ κάθετον μοναδιαῖον διάνυσμα $\bar{\gamma}(M)$ μὲ φορὰν τοιαύτην ὥστε παρατηρητὴς καθήμενος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μὲ τὰ πόδια εἰς τὸ M καὶ τὴν κεφαλὴν πρὸς τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ $\bar{\gamma}$ νὰ βλέπῃ τὴν θετικὴν ὄψιν τῆς ἐπιφανείας, τότε δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν καὶ μίαν θετικὴν φορὰν περιστροφῆς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, π.χ. ἐκείνη ἡ ὁποία μαζὺ μὲ τὸ $\bar{\gamma}$ δίδει τὸν θετικὸν προσανατολισμὸν τοῦ χώρου. Μία τέτοια ἐπιφάνεια ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχομεν ὁρίσει τὰ ἀνωτέρω λέγεται προσανατολισμένη, τὸ δὲ διάνυσμα $\bar{\gamma}$ λέγεται διάνυσμα προσανατολισμοῦ καὶ εἶναι:

$$\bar{\gamma} = \epsilon \bar{\eta} \qquad (67.10)$$

ὅπου $\bar{\eta}$ τὸ κάθετον μοναδιαῖον διάνυσμα τῆς ἐπιφανείας ὅπως τὸ ἔχομεν ὁρίσει εἰς τὸ ἐδάφιον 44 ἀναλόγως τῆς ἐξισώσεως μὲ τὴν ὁποίαν δίδεται ἡ ἐπιφάνεια καὶ ϵ συντελεστὴς ὁ ὁποῖος ἰσοῦται μὲ ± 1 ἀντιστοίχως ὅταν τὸ $\bar{\gamma}$ εἶναι ἴσον ἢ ἀντίθετον μὲ τὸ $\bar{\eta}$.

Ἐκτὸς τῶν διπλεύρων ἐπιφανειῶν ὑπάρχουν καὶ οἱ μονόπλευρες ἐπιφάνειες ἐπὶ τῶν ὁποίων δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ διακρίνωμεν δύο ὄψεις μὲ τὴν ἀνωτέρω ἔννοιαν. Κλασικὸ παράδειγμα μονοπλεύρου ἐπιφανείας εἶναι ἡ λεγομένη ταινία του Möbius σχ.(67.3), ἡ ὁποία πραγματοποιεῖται ὑλικῶς ὅταν μὲ κατάλληλον στροφὴν καὶ κάμψιν φέρωμεν εἰς σύμπτωσιν τὶς πλευρὲς ΒΓ καὶ ΔΑ τῆς ἐκ χάρτου ὀρθογωνιακῆς λωρίδος ΑΒΓΔ.

Ἐρχόμεθα τώρα νὰ ὁρίσωμεν ἕνα ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα διαφορετικῆς φύσεως ἀπὸ τὸ προηγούμενον· θεωροῦμεν ἕνα λεῖον τμῆμα Σ μιᾶς προσανατολισμένης ἐπιφανείας ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἡ συνάρτησις Φ(Μ) εἶναι μονοσήμαντα ὡρισμένη καὶ συνεχής.

Ὁρισμὸς (67.2).— *Καλοῦμεν ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα ὡς πρὸς xy τῆς συναρτήσεως Φ(Μ) ἐπὶ τοῦ τμήματος Σ καὶ τὸ παριστάνομεν*

$$\iint_{\Sigma} \Phi(M)\,dx\,dy$$

τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα ὡς πρὸς σ τῆς συναρτήσεως $\Phi(M)(\bar{\gamma}\bar{k})$ *ἐπὶ τοῦ τμήματος Σ, δηλαδή:*

$$\iint_{\Sigma} \Phi(M)\,dx\,dy = \iint_{\Sigma} \Phi(M)(\bar{\gamma}\bar{k})\,d\sigma \qquad (67.11)$$

καὶ ἀντιστοίχως διὰ τὰ ἐπιφανειακὰ ὁλοκληρώματα ὡς πρὸς yz, zx ἔχομεν ἐξ ὁρισμοῦ:

$$\iint_{\Sigma} \Phi(M)\,dy\,dz = \iint_{\Sigma} \Phi(M)(\bar{\gamma}\bar{i})\,d\sigma, \qquad \iint_{\Sigma} \Phi(M)\,dz\,dx = \iint_{\Sigma} \Phi(M)(\bar{\gamma}\bar{j})\,d\sigma \qquad (67.12)$$

τὸ δὲ Σ λέγεται τόπος ἢ ἐπιφάνεια ὁλοκληρώσεως.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ Σ δίδεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (67.5), τότε ἀπὸ τὴν σχέσιν (67.10) προκύπτει:

$$\bar{\gamma} = \epsilon \frac{[\bar{r}_u \bar{r}_v]}{|[\bar{r}_u \bar{r}_v]|} = \epsilon \left(\frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(f_3, f_1)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u,v)} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ $\bar{\gamma}$ εἰς τοὺς τύπους (67.11), (67.12) καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸν γενικὸν τύπον (67.5) προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} \Phi(x,y,z)\,dx\,dy &= \epsilon \iint_{T} \Phi(\bar{k}\bar{r}_u\bar{r}_v)\,du\,dv = \epsilon \iint_{T} \Phi(f_1,f_2,f_3)\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\,du\,dv \\
\iint_{\Sigma} \Phi(x,y,z)\,dy\,dz &= \epsilon \iint_{T} \Phi(\bar{i}\bar{r}_u\bar{r}_v)\,du\,dv = \epsilon \iint_{T} \Phi(f_1,f_2,f_3)\frac{\partial(f_2,f_3)}{\partial(u,v)}\,du\,dv \qquad (67.13) \\
\iint_{\Sigma} \Phi(x,y,z)\,dz\,dx &= \epsilon \iint_{T} \Phi(\bar{j}\bar{r}_u\bar{r}_v)\,du\,dv = \epsilon \iint_{T} \Phi(f_1,f_2,f_3)\frac{\partial(f_3,f_1)}{\partial(u,v)}\,du\,dv
\end{aligned}$$

Όταν ή έπιφάνεια δίδεται ύπό τήν μορφήν (67.6) άπό τον πρώτον έκ τών άνωτέρω τύπων, έπειδή $x=f_1=u$, $y=f_2=v$, $z=f_3$, προκύπτει:

$$\iint_{\Sigma}\Phi(x,y,z)\,dxdy=\epsilon\iint_{T}\Phi(x,y,f_3)\,dxdy \qquad (67.14)$$

όπου T τό χωρίον τοῦ έπιπέδου τῶν x,y εἰς τό ὁποῖον προβάλλεται τό Σ· τέλος ὅταν ἡ ἐπιφάνεια δίδεται ὑπό τήν μορφήν (67.8), ἀπό τούς δύο τελευταίους ἐκ τῶν τύπων (67.13) προκύπτει ἀντιστοίχως:

$$\iint_{\Sigma}\Phi(x,y,z)\,dydz=\epsilon\iint_{T}\Phi(f_1,y,z)\,dydz \qquad (67.15)$$
$$\iint_{\Sigma}\Phi(x,y,z)\,dzdx=\epsilon\iint_{T}\Phi(x,f_2,z)\,dzdx$$

Ὁ συντελεστής ϵ εἰς τούς προηγουμένους τύπους ὑποθέτομεν ὅτι δέν ἀλλάζει ἐπί τοῦ Σ· ἐάν αὐτό δέν συμβαίνει χωρίζομεν τό Σ εἰς μικρότερα μέρη εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων νά συμβαίνη αὐτό. Ὅταν ἡ ἐπιφάνεια δίδεται ὑπό τήν μορφήν (67.6) τό κάθετον διάνυσμα $\bar{n}$, ὅπως φαίνεται ἀμέσως ἀπό τόν τύπον (44,7) σχηματίζει πάντοτε ὀξεῖαν γωνίαν μέ τόν ἄξονα τῶν z, ἐπομένως ἔχομεν τόν ἑξῆς πρακτικόν κανόνα διά τόν καθορισμόν τοῦ ϵ εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν: Ὅταν τό διάνυσμα προσανατολισμοῦ $\bar{\gamma}$ σχηματίζει ὀξεῖαν γωνίαν μέ τόν ἄξονα τῶν z δηλαδή ὅταν $\bar{\gamma}\bar{k}>0$, εἶναι $\epsilon=+1$ καί ὅταν σχηματίζει ἀμβλεῖαν δηλαδή ὅταν $\bar{\gamma}\bar{k}<0$, εἶναι $\epsilon=-1$· ἀντιστοίχους κανόνας θά ἔχωμεν ὅταν ἡ ἐπιφάνεια ὁλοκληρώσεως δίδεται ὑπό τήν μορφήν (67.8).

Ἐάν θεωρήσωμεν μίαν ὑποδιαίρεσιν $\mathcal{D}$ τοῦ Σ, τό ὁποῖον δίδεται ὑπό τήν μορφήν (67.6), καί παραστήσωμεν μέ $\Delta\tau_K$ τό ἐμβαδόν τῆς προβολῆς τοῦ $\Delta\Sigma_K$ ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y, ἀποδεικνύεται κατά τρόπον ἀνάλογον μέ αὐτόν πού δείξαμε τόν τύπον (67.5), ὅτι γιά $\delta_K\to 0$ εἶναι:

$$\iint_{\Sigma}\Phi(M)\,dxdy=\epsilon\,\mathrm{op}\sum_{K=1}^{\nu}\Phi(M_K)\,\Delta\tau_K \qquad (67.16)$$

Ὅταν ἡ ἐπιφάνεια δίδεται ὑπό τήν μορφήν (67.8) θά ἔχωμεν ἀκόμη δύο ἀντιστοίχους τύπους διά τά ὁλοκληρώματα ὡς πρός yz καί zx:

$$\iint_{\Sigma}\Phi(M)\,dydz=\epsilon\,\mathrm{op}\sum_{K=1}^{\nu}\Phi(M_K)\Delta\tau_K,\quad \iint_{\Sigma}\Phi(M)\,dzdx=\epsilon\,\mathrm{op}\sum_{K=1}^{\nu}\Phi(M_K)\Delta\tau_K \qquad (67.17)$$

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τήν διανυσματικήν συνάρτησιν:

$$\bar{a}=\left[P(x,y,z),\,Q(x,y,z),\,R(x,y,z)\right]$$

καί ἄς σχηματίσωμεν ἐκ τῶν συντεταγμένων αὐτῆς τό ἄθροισμα:

$$\iint_{\Sigma}P\,dydz+\iint_{\Sigma}Q\,dzdx+\iint_{\Sigma}R\,dxdy$$

τῶν ἐπιφανειακῶν ὁλοκληρωμάτων τῶν συντεταγμένων αὐτῆς ἀντιστοίχως ὡς πρὸς yz, zx καὶ xy· τὸ ἄθροισμα αὐτὸ λέγεται ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a}$ ἐπὶ τοῦ τμήματος Σ καὶ τὸ παριστάνομεν συντόμως ὡς ἑξῆς:

$$\iint_\Sigma P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν προηγουμένους τύπους τὸ ὁλοκλήρωμα γράφεται διαδοχικῶς:

$$\iint_\Sigma P(\bar{\gamma}\bar{i})d\sigma + Q(\bar{\gamma}\bar{j})d\sigma + R(\bar{\gamma}\bar{k})d\sigma$$

$$\iint_\Sigma (P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k})\,\bar{\gamma}\,d\sigma = \iint_\Sigma (\bar{a}\bar{\gamma})d\sigma$$

Ἐκ τῆς τελευταίας μορφῆς παριστάνοντες μὲ $d\bar{\sigma}$ τὸ διάνυσμα $\bar{\gamma}d\sigma$ προκύπτει:

$$\iint_\Sigma \bar{a}\,d\bar{\sigma} = \iint_\Sigma P dydz + Q dzdx + R dxdy \qquad (67.18)$$

Ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια ὁλοκληρώσεως δίδεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (67.5), θέτοντες εἰς τοὺς τύπους (67.13) εἰς τὴν θέσιν τῆς Φ ἀντιστοίχως τὶς R, P, Q προκύπτει ὁ γενικὸς τύπος:

$$\iint_\Sigma \bar{a}\,d\bar{\sigma} = \epsilon\iint_T (\bar{a}\,\bar{r}_u\bar{r}_v)dudv = \epsilon\iint_T \left[P\,\frac{\partial(f_2,f_3)}{\partial(u,v)} + Q\,\frac{\partial(f_3,f_1)}{\partial(u,v)} + R\,\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\right]dudv \qquad (67.19)$$

ἐκ τοῦ ὁποίου πάλι ὅταν ἡ ἐπιφάνεια ὁλοκληρώσεως δίδεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (67.6) ἢ (67.8) προκύπτουν ἀντιστοίχως οἱ τύποι:

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma \bar{a}\,d\bar{\sigma} &= \epsilon\iint_T (-Pz_x - Qz_y + R)dxdy \\
\iint_\Sigma \bar{a}\,d\bar{\sigma} &= \epsilon\iint_T (-Qx_y - Rx_z + P)dydz \qquad (67.20) \\
\iint_\Sigma \bar{a}\,d\bar{\sigma} &= \epsilon\iint_T (-Ry_z - Py_x + Q)dzdx
\end{aligned}$$

τοὺς ὁποίους συνήθως χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐπιφανειακοῦ ὁλοκληρώματος διανυσματικῆς συναρτήσεως· τέλος ἀπὸ τοὺς τύπους (67.16) καὶ (67.17) προκύπτει γιὰ $\delta_\kappa \to 0$ καὶ ὁ ἑξῆς τύπος:

$$\iint_\Sigma \bar{a}\,d\bar{\sigma} = \text{op}\sum_{\kappa=1}^{\nu} \bar{a}(M_\kappa)\,\Delta\bar{\sigma}_\kappa \qquad (67.21)$$

Ἀπὸ τὴν προηγηθεῖσα θεωρία τῶν ἐπιφανειακῶν ὁλοκληρωμάτων προκύπτει ὅτι μεταξὺ τῶν ὁλοκληρωμάτων ὡς πρὸς σ καὶ ὡς πρὸς xy, yz, zx ὑπάρχει μία σημαντικὴ διαφορά, δηλαδὴ ἐνῶ διὰ τὸν πρῶτον δὲν ἀπαιτεῖται προσανατολισμὸς τῆς ἐπιφανείας διὰ τὰ ἄλλα ἀπαιτεῖται· αὐτὸ ὑπενθυμίζει τὴν ἀντίστοιχον διαφορὰν μεταξὺ ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων ὡς πρὸς s καὶ ὡς πρὸς x, y, z. Παράδειγμα ἐπιφανειακοῦ ὁλοκληρώματος διανυσματικῆς συναρτήσεως εἶναι ἡ ροὴ διὰ μέσου ἐπιφανείας τὴν ὁποίαν θὰ ὁρίσωμεν εἰς τὸ ἑπόμενον ἐδάφιον. Δι' ἐπιφανειακῶν ὁλοκληρωμάτων ὡς πρὸς σ ὁρίζομεν, κατὰ τρόπον ἀνάλογον μὲ ἐκεῖνον ποὺ ἔχομεν ἀκολουθήσει μέχρι τώρα, τὸ κέντρον μάζης καὶ τὴν ροπὴν ἀδρανείας ἑνὸς τμήματος Σ ὑλικῆς ἐπιφανείας· δηλαδή ὁρίζομεν τήν πυκνότητα εἰς τό σημεῖον Μ ὡς ὅριον τῆς μέσης πυκνότητος $\Delta m/\Delta\sigma$ γιά $\Delta\sigma \to 0$:

$$\delta(M) = \text{ορ}\,\frac{\Delta m}{\Delta\sigma} \qquad (67.22)$$

ὅπου Δm, $\Delta\sigma$ ἡ μάζα καί τό ἐμβαδόν ἑνός μεταβλητοῦ μέρους $\Delta\Sigma$ τοῦ Σ εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται πάντοτε τό σημεῖον Μ. Ἡ μάζα m ὁλοκλήρου τοῦ τμήματος Σ, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμόν τοῦ ἐπιφανειακοῦ ὁλοκληρώματος ὡς πρός σ, θά δίδεται ἀπό τόν τύπον:

$$m = \iint_{\Sigma} \delta(M)\,d\sigma \qquad (67.23)$$

τό δέ κέντρον μάζης καί τήν ροπήν ἀδρανείας ὁρίζομεν ἀπό τούς τύπους:

$$\begin{aligned}
&x_K = \frac{1}{m}\iint_{\Sigma} x\delta d\sigma, \quad y_K = \frac{1}{m}\iint_{\Sigma} y\delta d\sigma, \quad z_K = \frac{1}{m}\iint_{\Sigma} z\delta d\sigma \\
&I_x = \iint_{\Sigma}(y^2+z^2)\delta d\sigma, \quad I_y = \iint_{\Sigma}(z^2+x^2)\delta d\sigma, \quad I_z = \iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\delta d\sigma \\
&I_{xy} = \iint_{\Sigma} z^2\delta d\sigma, \quad I_{yz} = \iint_{\Sigma} x^2\delta d\sigma, \quad I_{zx} = \iint_{\Sigma} y^2\delta d\sigma \\
&I = \iint_{\Sigma} a^2\delta d\sigma
\end{aligned} \qquad (67.24)$$

Θεωροῦμεν σκόπιμον νά τονίσωμεν ὅτι εἰς τόν ὁρισμόν τῆς πυκνότητος εἰς τό σημεῖον Μ διά τῆς ὁριακῆς σχέσεως (67.22), τό ἐμβαδόν $\Delta\sigma \to 0$ μέ μόνον τόν περιορισμόν τό διαμέτρημα τοῦ $\Delta\Sigma$ νά τείνῃ εἰς τό μηδέν, ἀνάλογος δέ παρατήρησις ἰσχύει καί διά τίς ὁριακές σχέσεις (64.1) καί (66.16) διά τῶν ὁποίων ὁρίζεται ἡ πυκνότης χωρίων τοῦ διδιαστάτου καί τριδιαστάτου χώρου.

Παράδειγμα (67.1).— Νά ὑπολογισθῇ ἡ ροπή ἀδρανείας I_x τοῦ τριγώνου Σ τό ὁποῖον ὁρίζουν ἐπί τοῦ ἐπιπέδου: $x:\alpha + y:\beta + z:\gamma = 1$ $(\alpha,\beta,\gamma > 0)$ τά συντεταγμένα ἐπίπεδα, ὅταν ἡ πυκνότης αὐτοῦ εἶναι $\delta = x(y^2+z^2)^{-1}$.

Λύσις: Ἀπό τήν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας ὁλοκληρώσεως ἔχομεν:

$$z = \gamma - \gamma x:\alpha - \gamma y:\beta \equiv f_3, \quad z_x = -\gamma:\alpha, \quad z_y = -\gamma:\beta$$

ὁπότε ἀπό τούς τύπους (67.24), (67.7) καί τό σχ.(67.4) προκύπτει:

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint_{\Sigma}(y^2+z^2)x(y^2+z^2)^{-1}d\sigma = \iint_{\Sigma} x\,d\sigma = \iint_{T} x\,\frac{1}{\alpha\beta}\sqrt{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{\alpha\beta}\sqrt{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}\int_0^{\alpha} x\,dx \int_0^{\beta-\beta\alpha^{-1}x} dy = \cdots = \frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}
\end{aligned}$$

Παράδειγμα (67.2).— Νά ὑπολογισθῇ ἡ ροπή ἀδρανείας I_{xz} τοῦ τμήματος Σ τοῦ παραβολικοῦ κυλίνδρου $y = x^2$ τό ὁποῖον περιορίζεται ἀπό τά ἐπίπεδα $z = 0$ καί $y+z = 1$, ὅταν ἡ πυκνότης αὐτοῦ εἶναι $\delta = \sqrt{1+4x^2}$.

Λύσις. Ἀπό τήν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας ὁλοκληρώσεως ἔχομεν:

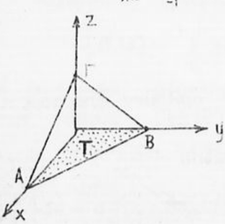
$$y = x^2 = f_2, \quad y_x = 2x, \quad y_z = 0$$

ὁπότε ἀπό τούς τύπους (67.24), (67.9) καί τό σχ. (67.5) προκύπτει:

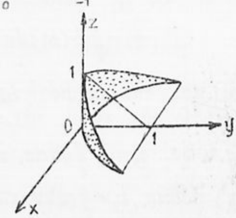
$$I_{xz} = \iint_\Sigma y^2\sqrt{1+4x^2}\,d\sigma = \iint_T x^4\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+4x^2}\,dxdz = \iint_T (x^4+4x^6)\,dxdz$$

Τό χωρίον ὁλοκληρώσεως T ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,z περικλείεται ἀπό τόν ἄξονα τῶν x καί ἀπό τήν παραβολήν $x^2+z=1$ ἡ ὁποία προκύπτει ὅταν ἀπαλείψωμεν μεταξύ τῆς $y=x^2$ καί τῆς $y+z=1$ τό y, ὁπότε θά ἔχωμεν τελικῶς:

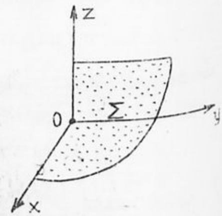
$$I_{xz} = \int_{-1}^{1}(x^4+4x^6)\,dx\int_0^{1-x^2}dz = \int_{-1}^{1}(x^4+4x^6)(1-x^2)\,dx = \cdots = {}^{116}/_{315}$$



Σχ. (67.4)



Σχ. (67.5)



Σχ. (67.6)

Παράδειγμα (67.3).— Νά εὑρεθῇ τό κ. μάζης τοῦ τμήματος Σ τοῦ ἑλικοειδοῦς

$$\bar r = (u\,συνυ,\ u\,ημυ,\ υ)$$

τό ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τό ὀρθογωνιακόν χωρίον $T: (0\le u\le 1,\ 0\le υ\le \frac{\pi}{2})$ τοῦ ἐπιπέδου τῶν u, υ ὅταν ἡ πυκνότης αὐτοῦ εἶναι $\delta = (1+u^2)^{-1/2}$ σχ.(67.6).

Λ ύ σ ι ς. Ἀπό τήν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας εὑρίσκομεν κατά τόν γνωστόν τρόπον:

$$W = \sqrt{EG-F^2} = (1+u^2)^{1/2}$$

ὁπότε ἀπό τούς τύπους (67.24) καί (67.5) προκύπτει:

$$m = \iint_\Sigma (1+u^2)^{-1/2}d\sigma = \iint_T (1+u^2)^{-1/2}(1+u^2)^{1/2}dudυ = \iint_T dudυ = \int_0^1 du\int_0^{\pi/2}dυ = \frac{\pi}{2}$$

$$x_\kappa = \frac{2}{\pi}\iint_T u\,συνυ\,dudυ = \frac{1}{\pi}, \quad y_\kappa = \frac{2}{\pi}\iint_T u\,ημυ\,dudυ = \frac{1}{\pi}, \quad z_\kappa = \frac{2}{\pi}\iint_T υ\,dudυ = \frac{\pi}{4}$$

Παράδειγμα (67.4).— Νά ὑπολογισθῇ τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα ὡς πρός xy τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar a = (x, z, -y)$ ἐπί τῆς σφαίρας μέ κέντρον τήν ἀρχήν, ἀκτῖνα 1 καί θετικήν ὄψιν τήν ἐξωτερικήν ὄψιν αὐτῆς.

Λ ύ σ ι ς. Μία παραμετρική παράστασις τῆς σφαίρας αὐτῆς εἶναι ὡς γνωστόν ἡ ἑξῆς:

$$\bar r = (συνu\,συνυ,\ ημu\,συνυ,\ ημυ), \quad T: (0\le u\le 2\pi,\ -\pi/2\le υ\le \pi/2)$$

τό δέ κάθετον διάνυσμα ὅπως ὁρίζεται ἀπό τήν (44.2) εἶναι:

$$[\bar r_u \bar r_υ] = συνυ\,(συνu\,συνυ,\ ημu\,συνυ,\ ημυ)\,συνυ = (x,y,z)\,συνυ$$

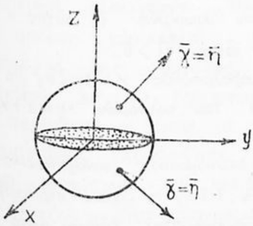
Ἀπό τήν κατηγμένη τοῦ διανύσματος αὐτοῦ βλέπομεν ὅτι σχηματίζει ὀξεῖαν γωνίαν μέ τόν ἄξονα τῶν z διά τά σημεῖα τοῦ ἄνω ἡμισφαιρίου καί ἀμβλεῖαν διά τά κάτω, δηλαδή ἔχει φοράν ἐκ τῶν ἔσω πρός τά ἔξω

τῆς σφαίρας, ἐπομένως τὸ μοναδιαῖον αὐτοῦ $\bar{\eta}$ ταυτίζεται μὲ τὸ διάνυσμα προσανατολισμοῦ $\bar{\gamma}$.
Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $\epsilon=1$ καί :

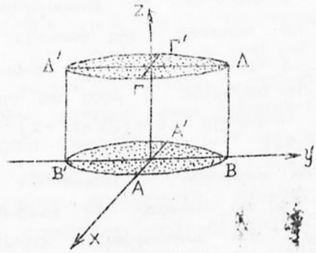
$$(\bar{a}\bar{r}_u\bar{r}_v)=(x,z,-y)\cdot(x,y,z)\,\text{συν}\,v=(x^2+yz-yz)\,\text{συν}\,v=\text{συν}^2u\,\text{συν}^3v$$

ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (67.19) θὰ ἔχωμεν :

$$\iint_\Sigma \bar{a}\,d\bar{\sigma}=\iint_\Gamma \text{συν}^2u\,\text{συν}^3v\,du\,dv=\int_0^{2\pi}\text{συν}^2u\,du\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\text{συν}^3v\,dv=4\pi/3$$



Σχ.(67.7)



Σχ.(67.8)

Παράδειγμα (67.5). – Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα ὡς πρὸς σ καὶ ὡς πρὸς yz τῆς συναρτήσεως $\Phi=xz$ ἐπὶ τοῦ τμήματος Σ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας $x^2+y^2=1$ $(0\leq z\leq 1)$ τῆς ὁποίας θετικὴ ὄψις εἶναι ἡ ἐσωτερική.

Λύσις. Ὅπως φαίνεται καὶ εἰς τὸ σχ. (67.8) τὸ τμῆμα Σ εἶναι ἄθροισμα τῶν τμημάτων $\Sigma_1\equiv B'AB\Delta\Gamma\Delta'B'$ καὶ $\Sigma_2=B'A'B\Delta\Gamma'\Delta'B'$ εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ Σ ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον $x=0$ καὶ τῶν ὁποίων οἱ ἐξισώσεις εἶναι ἀντιστοίχως: $x=\sqrt{1-y^2}$ καὶ $x=-\sqrt{1-y^2}$, θὰ ἔχωμεν λοιπόν :

$$\iint_\Sigma x^2z\,d\sigma=\iint_{\Sigma_1}xz\,d\sigma+\iint_{\Sigma_2}xz\,d\sigma=\iint_T\sqrt{1-y^2}\,z\,d\sigma-\iint_T\sqrt{1-y^2}\,z\,d\sigma=0$$

Διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα ὡς πρὸς yz λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἐπὶ τοῦ Σ_1 τὸ διάνυσμα προσανατολισμοῦ σχηματίζει ἀμβλεῖαν γωνίαν μὲ τὸν ἄξονα τῶν x καὶ ἐπὶ τοῦ Σ_2 ὀξεῖαν καὶ ὅτι ἡ προβολὴ αὐτῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $x=0$, εἶναι τὸ ὀρθογωνιακὸν χωρίον $T:(-1\leq y\leq 1,\ 0\leq z\leq 1)$, ἀπὸ τὸν (67.15) θὰ ἔχωμεν :

$$\iint_\Sigma xz\,dy\,dz=\iint_{\Sigma_1}xz\,dy\,dz+\iint_{\Sigma_2}xz\,dy\,dz=-\iint_T\sqrt{1-y^2}\,z\,dy\,dz+\iint_T-\sqrt{1-y^2}\,z\,dy\,dz=-2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy\int_0^1 z\,dz=\cdots-\frac{\pi}{2}$$

Ἀσκήσεις

1144) Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα ὡς πρὸς σ τῆς συναρτήσεως $\Phi=\text{ημ}(x^2+z^2+y-4)$ ἐπὶ τοῦ κύκλου τὸν ὁποῖον ἀποκόπτει ὁ κύλινδρος $x^2+z^2=1$ ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον $y=4$.

1145) Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα ὡς πρὸς xy τῆς συναρτήσεως $\Phi=x^2y^2\sqrt[3]{1-z}$, ἐπὶ τοῦ τμήματος τῆς ἐπιφανείας $z=x^3+y^3$ τὸ ὁποῖον περικλείεται μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων $x=0$, $y=0$, τοῦ κυλίνδρου $x^3+y^3=1$ καὶ μὲ προσανατολισμὸν τέτοιον ὥστε $\bar{\gamma}\bar{k}>0$.

1146) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a}=(x,-y,z)$ ἐπὶ τοῦ τμήματος τῆς ἐπιφανείας $z=x^2y^2$, τὸ ὁποῖον ἔχει προβολὴν εἰς τὸ $z=0$ τὸν κύκλο $x^2+y^2=1$ καὶ μὲ προσανατολισμὸν τέτοιον ὥστε $\bar{\gamma}\bar{k}<0$.

1147) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα τοῦ τριγώνου τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $z=x+y$, ἔχει πυκνότητα $\delta=\sqrt{x^2+y^2}$ καὶ περικλείεται ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων $y=0, x=0, 4x+3y=12$.

1148) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα ὡς πρὸς yz τῆς συναρτήσεως $\Phi=x$, ἐπὶ τοῦ τμήματος τῆς ἐπιφανείας $x=yz$ τὸ ὁποῖον ἀποτέμνει ἐξ αὐτῆς ἡ ἐπιφάνεια $y^2+z^2-4y+3=0$ καὶ μὲ προσανατολισμὸν τέτοιον ὥστε $\bar{\gamma}\bar{i}>0$.

1149) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα τοῦ τμήματος τοῦ παραβολοειδοῦς $z=1+x^2+y^2$ τὸ ὁποῖον ἔχει πυκνότητα $\delta=(3x^2+3y^2+z)^{-\frac{1}{2}}$ καὶ κεῖται μεταξὺ τῶν κυλίνδρων $y=x^2+x$, $y^2=12(1+x)$.

1150) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a}=(x,y,z)$ ἐπὶ τοῦ τμήματος τῆς ἐπιφανείας : $\bar{r}=(u+v,u-v,1-2u)$ τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων καὶ μὲ προσανατολισμὸν τέτοιον ὥστε $\bar{\gamma}\bar{k}>0$.

1151) Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ροπὲς ἀδρανείας ὡς πρὸς τοὺς ἄξονες τῶν συντεταγμένων τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὲς τὰ σημεῖα $(0,0,1),(0,1,0),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ καὶ πυκνότητα $\delta=1$.

1152) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα ὡς πρὸς σ τῆς συναρτήσεως $\Phi=(x^2+y^2-3z^2-1)z^{-1}$ ἐπὶ τοῦ τμήματος τῆς ἐπιφανείας $\bar{r}=[(1+v)\,\text{συν}u,(1-v)\,\text{ημ}u,v]$, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ὀρθογωνιακὸν χωρίον $T:(0\leqslant u\leqslant \pi/4,\ -1\leqslant v\leqslant 1)$ τοῦ ἐπιπέδου τῶν u,v.

1153) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ κέντρον τῆς μάζης τοῦ τμήματος τῆς ἐπιφανείας $4z+4x^2+y^2=4$ τὸ ὁποῖον ἔχει πυκνότητα $\delta=(4+16x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ καὶ κεῖται ἄνω τοῦ ἐπιπέδου $z=0$.

1154) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a}=(x,z^2,y)$ ἐπὶ τοῦ περιβλήματος τοῦ κλειστοῦ χωρίου $\Omega:(z=0,\ 4x^2+y^2=1,\ z=x^2+8y^2)$ καὶ μὲ θετικὴν ὄψιν τὴν ἐσωτερικήν.

1155) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα τοῦ τριγώνου τὸ ὁποῖον ἀποκόπτουν τὰ ἐπίπεδα $x=1$, $z=1$, $x+z=3$ ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον $x+z=4(1-y)$ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης εἶναι $\delta=(x+z)^{-3}$.

1156) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a}=(x^2,y^2,z^2)$ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$ καὶ μὲ θετικὴν ὄψιν τὴν ἐξωτερικήν.

1157) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα ὡς πρὸς σ τῆς συναρτήσεως $\Phi=y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2$ ἐπὶ τοῦ τμήματος τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἄνω μέρους τοῦ κώνου $z^2=\kappa^2(x^2+y^2)$ τὸ ὁποῖον ἀποκόπτει ἐξ αὐτῆς ὁ κύλινδρος $x^2+y^2-2ax=0$.

1158) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα ὡς πρὸς σ τῆς συναρτήσεως $\Phi=(\alpha x+\beta y+\gamma z)^{2\nu}$ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$.

1159) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα τῆς ἐπιφανείας $4x^2+4y^2+z^2=4a^2$, ὅταν ἡ πυκνότης αὐτῆς σὲ κάθε σημεῖον Μ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων ἀπὸ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ Μ.

1160) Νά ὑπολογισθῆ ἡ μᾶζα τοῦ τμήματος τῆς ἐπιφανείας $z=2x^2$ τό ὁποῖον ἀποκόπτουν ἐξ' αὐτῆς τά ἐπίπεδα $y=0$, $z=0$, $y+2z=2$ καί τό ὁποῖον κεῖται εἰς τό πρῶτον ὄγδοον τῶν ἀξόνων.

Θεωρία τῶν πεδίων

68. Γενική εἰσαγωγή.— Καλεῖται γενικῶς πεδίον μία περιοχή τοῦ χώρου εἰς τήν ὁποίαν εὑρίσκεται κατανεμημένον ἕνα μέγεθος ἔτσι ὥστε σέ κάθε σημεῖον Μ τῆς περιοχῆς, νά ἀντιστοιχῆ κάποια τιμή τοῦ μεγέθους αὐτοῦ. Τό πεδίον λέγεται βαθμωτόν ὅταν τό ὑπ' ὄψιν μέγεθος εἶναι βαθμωτόν· εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἡ ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν σημείων καί τῶν τιμῶν τοῦ μεγέθους καθορίζεται ἀπό μίαν βαθμωτήν συνάρτησιν $\Phi(M)$, ἡ ὁποία λέγεται συνάρτησις τοῦ πεδίου. Τό πεδίον λέγεται διανυσματικόν ὅταν τό ὑπ' ὄψιν μέγεθος εἶναι διανυσματικόν, ὁπότε ἡ ἀντιστοιχία καθορίζεται ἀπό μίαν διανυσματικήν συνάρτησιν $\bar{a}(M)$, ἡ ὁποία λέγεται πάλι συνάρτησις τοῦ πεδίου. Τέλος ἐάν τό ὑπ' ὄψιν μέγεθος ἐκφράζεται δι' ἑνός τανυστοῦ τό πεδίον λέγεται πεδίον τανυστῶν. Παράδειγμα βαθμωτοῦ πεδίου εἶναι τό πεδίον τῶν θερμοκρασιῶν εἰς τά διάφορα σημεῖα ἑνός σώματος, διανυσματικοῦ τό πεδίον ταχυτήτων τῶν μορίων ἑνός κινουμένου ρευστοῦ ἤ τό πεδίον τῆς ἠλεκτρικῆς ἐντάσεως, τέλος δέ πεδίον τανυστῶν ἡ ἐλαστική παραμόρφωσις.

Ἔστω βαθμωτόν πεδίον μέ συνάρτησιν $\Phi(x,y,z)$ τήν ὁποίαν θά ὑποθέτωμεν μονοσήμαντον συνεχῆ καί διαφορίσιμον· ἡ ἐξίσωσις:

$$\Phi(x,y,z)=C \tag{68.1}$$

ὅπου c μία παράμετρος, παριστάνει μίαν μονοπαραμετρικήν οἰκογένεια ἐπιφανειῶν, οἱ ὁποίες λέγονται ἰσοσταθμικές ἤ ἁπλῶς σταθμικές ἐπιφάνειες τοῦ πεδίου. Ἐάν τό βαθμωτόν πεδίον εἶναι διδιάστατον μέ συνάρτησιν $\Phi(x,y)$, τότε οἱ γραμμές τῆς οἰκογενείας:

$$\Phi(x,y)=C \tag{68.2}$$

λέγονται ἰσοσταθμικές ἤ ἁπλῶς σταθμικές γραμμές τοῦ πεδίου. Ἐπειδή ἡ συνάρτησις $\Phi(M)$ ὑποτίθεται μονοσήμαντος, δι' ἑκάστου σημείου διέρχεται μία μόνον σταθμική ἐπιφάνεια ἤ γραμμή.

Εἰς τό ἐδάφιον 10 ἔχομεν ὁρίσει τήν κλίσιν μιᾶς βαθμωτῆς συναρτήσεως $\Phi(x,y,z)$ ἀπό τόν τύπον:

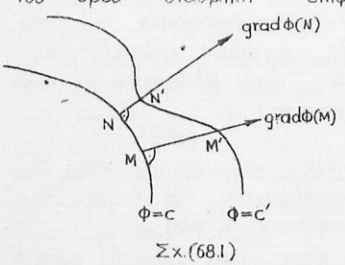
$$\operatorname{grad}\Phi=(\Phi_x,\Phi_y,\Phi_z) \tag{68.3}$$

ὁπότε λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν καί τόν τύπον (44.9), συμπεραίνομεν ὅτι ἡ κλίσις εἰς τό σημεῖον Μ, ἰσοῦται μέ τό κάθετον εἰς τό Μ διάνυσμα τῆς σταθμικῆς ἐπιφανείας ἡ ὁποία διέρχεται φυσικά διά τοῦ σημείου Μ. Ἐάν λοιπόν παραστήσωμεν μέ $\bar{n}(M)$ τό μοναδιαῖον διάνυσμα τοῦ $\operatorname{grad}\Phi(M)$, ἀπό τόν (10.3) θά ἔχωμεν:

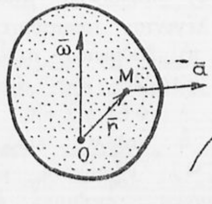
$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=\bar{n}\operatorname{grad}\Phi=|\operatorname{grad}\Phi|\approx\frac{\Delta\Phi}{\Delta n}>0 \tag{68.4}$$

θεωροῦμεν τὴν σταθμικὴν ἐπιφάνειαν $\Phi = c$ ἡ ὁποία διέρχεται διά τοῦ M καὶ ἐπὶ τοῦ φορέως τοῦ διανύσματος $\operatorname{grad}\Phi(M)$ καὶ κατά τὴν φοράν αὐτοῦ λαμβάνομεν σημεῖον M' ἀπέχον τοῦ M ἀπόστασιν $\Delta n = |\overline{MM'}|$. ἐάν $\Phi = c'$ εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς σταθμικῆς ἐπιφανείας ἡ ὁποία διέρχεται διά τοῦ M' σχ. (68.1) καὶ θέσωμεν $\Delta\Phi = c' - c$, τότε ἀπό τὸν (68.4) ἕπεται ὅτι θά εἶναι $\Delta\Phi > 0$ δηλαδὴ $c' - c > 0$. Ἐξ αὐτῶν συμπεραίνομεν ὅτι ἡ κλίσις εἰς ἕνα σημεῖον μιᾶς σταθμικῆς ἐπιφανείας, ἔχει πάντοτε τὴν φοράν ἀπό τὴν ἐπιφάνεια αὐτὴ πρός τὶς σταθμικές ἐπιφάνειες μεγαλυτέρας ἀλγεβρικῆς στάθμης. Ἄς θεωρήσωμεν ἐπὶ τῶν δύο σταθμικῶν ἐπιφανειῶν ἀντιστοίχως ἕνα ζεῦγος σημείων N, N' ὅπως τὸ ζεῦγος M, M' τῶν ὁποίων ὅμως ἡ ἀπόστασις $\Delta n = |\overline{NN'}|$ νά εἶναι μικροτέρα τῆς ἀποστάσεως $|\overline{MM'}|$· ἐπειδὴ ἡ διαφορά $\Delta\Phi$ ἔχει τὴν ἴδια τιμὴν καὶ διά τά δύο ζεύγη σημείων, ἀπό τὸν (68.4) ἕπεται ὅτι τὸ μέτρον τῆς κλίσεως εἰς τὸ σημεῖον N θά εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μέτρου τῆς κλίσεως εἰς τὸ M, δηλαδὴ ἐκεῖ ὅπου οἱ σταθμικές ἐπιφάνειες προσεγγίζουν περισσότερου τὸ μέτρον τῆς κλίσεως αὐξάνει. Αὐτὸ ὑπενθυμίζει τὶς χωροσταθμικές γραμμές τῶν τοπογραφικῶν χαρτῶν, εἰς τούς ὁποίους ὅπου αὐτές προσεγγίζουν περισσότερον ἡ κλίσις τοῦ ἐδάφους καθίσταται περισσότερον ἀπότομος. Ἐκ τῆς ἀναλογίας αὐτῆς μεταξύ χωροσταθμικῶν γραμμῶν καὶ σταθμικῶν ἐπιφανειῶν αἰτιολογεῖται ἡ ὀνομασία τοῦ διανύσματος $\operatorname{grad}\Phi$ ὡς ἡ κλίσις τῆς Φ.

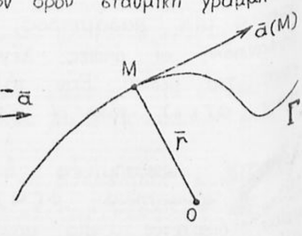
Ἐάν τὸ πεδίον εἶναι διδιάστατον ὅλα τά προηγούμενα ἐξακολουθοῦν νά ἰσχύουν καὶ προκύπτουν ἀμέσως μέ μόνην τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ ὅρου σταθμική ἐπιφάνεια ἀπό τὸν ὅρον σταθμική γραμμή.



Σχ. (68.1)



Σχ. (68.2)



Σχ. (68.3)

Ἀπό τὸν τύπον (10.3) προκύπτει ὅτι: ἡ παράγωγος τῆς Φ κατά τὴν κατεύθυνσιν ἑνός διανύσματος $\bar{\upsilon}$, γίνεται μεγίστη ὅταν τό $\bar{\upsilon}$ εἶναι ὁμόρροπον τῆς κλίσεως, ἐλαχίστη ὅταν εἶναι ἀντίρροπον καὶ μηδέν ὅταν ἐφάπτεται τῆς σταθμικῆς ἐπιφανείας ἢ ἀντιστοίχως τῆς σταθμικῆς γραμμῆς.

Ἀπό τὸν ὁρισμόν τῆς κλίσεως μέ ἁπλές παραγωγίσεις προκύπτουν οἱ σχέσεις

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\Phi_1 + \Phi_2) &= \operatorname{grad}\Phi_1 + \operatorname{grad}\Phi_2 \\ \operatorname{grad}(c\Phi) &= c\operatorname{grad}\Phi \qquad (68.5) \\ \operatorname{grad}(\Phi_1\Phi_2) &= \Phi_1\operatorname{grad}\Phi_2 + \Phi_2\operatorname{grad}\Phi_1 \end{aligned}$$

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα ἕνα διανυσματικόν πεδίον μέ συνάρτησιν:

$$\bar{a}(x,y,z) = [P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)]$$

τῆς ὁποίας οἱ συντεταγμένες εἶναι συναρτήσεις μονοσήμαντες συνεχεῖς καί διαφορίσιμες· καλοῦμεν ἀπόκλισιν (divergenc) τῆς διανυσματικῆς αὐτῆς συναρτήσεως καί τήν παριστάνομεν μέ τό σύμβολον $\operatorname{div}\bar{a}$, τήν βαθμωτήν συνάρτησιν:

$$\operatorname{div}\bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{68.6}$$

Καλοῦμεν δέ περιστροφήν (rotation) τῆς ἐν λόγῳ διανυσματικῆς συναρτήσεως καί τήν παριστάνομεν μέ τό σύμβολον $\operatorname{rot}\bar{a}$, τήν διανυσματικήν συνάρτησιν:

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \tag{68.7}$$

Διά τήν ἀπόκτησιν μηχανικῆς παραστάσεως τοῦ $\operatorname{rot}\bar{a}$ καί αἰτιολόγησιν τοῦ ὅρου περιστροφή, θεωροῦμεν τό πεδίον ταχυτήτων $\bar{u}$ τῶν σημείων ἑνός κινουμένου στερεοῦ σώματος· ἐκ τῆς μηχανικῆς γνωρίζομεν ὅτι ἡ ταχύτης ἑνός σημείου M δίδεται ἀπό τόν τύπον:

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + [\bar{\omega}\bar{r}]$$

ὅπου $\bar{u}_0$ ἡ ταχύτης τοῦ σημείου ἀναφορᾶς O, $\bar{\omega}$ ἡ γωνιακή ταχύτης καί $\bar{r}$ ἡ ἀκτίς $\overline{OM}$ σχ. (68.2). Ἐάν ὡς πρός ἕνα σύστημα ἀξόνων διερχομένων διά τοῦ O εἶναι: $\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ καί $\bar{r} = (x,y,z)$ θά ἔχωμεν:

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + (z\omega_2 - y\omega_3, x\omega_3 - z\omega_1, y\omega_1 - x\omega_2)$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ $\bar{u}_0$ δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τό M, προκύπτει:

$$\operatorname{rot}\bar{u} = (2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3) = 2\bar{\omega}$$

δηλαδή ἡ περιστροφή τῆς ταχύτητος $\bar{u}$ ἰσοῦται μέ τό διπλάσιον τῆς γωνιακῆς ταχύτητος τοῦ στερεοῦ, ἐκ τοῦ ὁποίου δικαιολογεῖται ὁ ὅρος περιστροφή.
Ἡ ἀπόκλισις καί ἡ περιστροφή ἑνός διανυσματικοῦ πεδίου τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y μέ συνάρτησιν $\bar{a} = (P,Q)$, παριστάνονται μέ τά ἴδια σύμβολα καί ὁρίζονται ἀπό τίς ἐξισώσεις:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\bar{a} &= P_x + Q_y \\ \operatorname{rot}\bar{a} &= Q_x - P_y \end{aligned} \tag{68.8}$$

δηλαδή εἶναι ἀντιστοίχως ἡ ἀπόκλισις καί ἡ κατηγμένη τῆς περιστροφῆς τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως (P, Q, 0) τοῦ τριδιαστάτου χώρου ὅπως ὁρίζονται ἀπό τίς (68.6) καί (68.7).
Διά μεταβάσεως εἰς ἕνα καρτεσιανόν σύστημα συντεταγμένων, ἀποδεικνύονται εὔκολα οἱ ἑξῆς πολύ χρήσιμες σχέσεις:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\bar{a}+\bar{\beta}) &= \operatorname{div}\bar{a} + \operatorname{div}\bar{\beta} \\ \operatorname{rot}(\bar{a}+\bar{\beta}) &= \operatorname{rot}\bar{a} + \operatorname{rot}\bar{\beta} \\ \operatorname{div}(\Phi\bar{a}) &= \bar{a}\operatorname{grad}\Phi + \Phi\operatorname{div}\bar{a} \end{aligned} \tag{68.9}$$

$$\operatorname{rot}(\Phi\bar{a}) = [\operatorname{grad}\Phi, \bar{a}] + \Phi \operatorname{rot}\bar{a} \qquad (68.9)$$
$$\operatorname{div}[\bar{a}\bar{\beta}] = \bar{\beta}\operatorname{rot}\bar{a} - \bar{a}\operatorname{rot}\bar{\beta}$$
$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\Phi) = \operatorname{div}(\operatorname{rot}\bar{a}) = 0$$

Π.χ. ἡ ἀπόδειξις τῆς τρίτης ἐκ τῶν σχέσεων αὐτῶν γίνεται ὡς ἑξῆς· ἀπὸ τὸν τύπον (68.7) θὰ ἔχωμεν:

$$\operatorname{div}(\Phi\bar{a}) = \operatorname{div}(\Phi P, \Phi Q, \Phi R) = (\Phi P)_x + (\Phi Q)_y + (\Phi R)_z = \Phi_x P + \Phi P_x + \Phi_y Q + \Phi Q_y + \Phi_z R + \Phi R_z$$
$$= (\Phi_x P + \Phi_y Q + \Phi_z R) + \Phi(P_x + Q_y + R_z) = \bar{a}\operatorname{grad}\Phi + \Phi\operatorname{div}\bar{a}$$

ὁμοίως δὲ ἀποδεικνύονται καὶ οἱ ἄλλες σχέσεις.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ συμβολικὸν διάνυσμα

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad (68.10)$$

ἡ κλίσις μιᾶς βαθμωτῆς συναρτήσεως $\Phi(x,y,z)$, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἕνα συμβατικὸν γινόμενον τοῦ συμβολικοῦ αὐτοῦ διανύσματος ∇ ἐπὶ τὴν συνάρτησιν Φ σύμφωνα μὲ τὸν τύπον:

$$\operatorname{grad}\Phi = \nabla\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) \qquad (68.11)$$

Ἐπίσης ἡ ἀπόκλισις μιᾶς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a}$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἕνα συμβατικὸν ἐσωτερικὸν γινόμενον τοῦ ∇ ἐπὶ τὸ $\bar{a}$, σύμφωνα μὲ τὸν τύπον:

$$\operatorname{div}\bar{a} = \nabla\bar{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \qquad (68.12)$$

Τέλος ἡ περιστροφὴ μιᾶς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a}$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἕνα συμβατικὸν ἐξωτερικὸν γινόμενον τοῦ ∇ ἐπὶ τὸ $\bar{a}$, σύμφωνα μὲ τὸν τύπον:

$$\operatorname{rot}\bar{a} = [\nabla\bar{a}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \qquad (68.13)$$

Τὸ συμβολικὸν διάνυσμα ∇ λέγεται ἀνάδελτα (nabla) ἢ διαφορικὸς ἐκτελεστὴς τοῦ Hamilton· λέγομεν συντόμως ὅτι ἡ ἀπόκλισις τῆς $\bar{a}$ προκύπτει δι' ἐσωτερικῆς ἀναδελτίσεως καὶ ἡ περιστροφὴ δι' ἐξωτερικῆς.
Μὲ τὸ ἀνάδελτα ἐκτὸς τῆς ὁμοιομορφίας δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν κατὰ τρόπον σχετικῶς εὐμνημόνευτον τοὺς διαφόρους τύπους τῆς διανυσματικῆς ἀναλύσεως· π.χ. οἱ τύποι (68.9) γράφονται:

$$\nabla(\bar{a} + \bar{\beta}) = \nabla\bar{a} + \nabla\bar{\beta}$$
$$[\nabla, \bar{a} + \bar{\beta}] = [\nabla\bar{a}] + [\nabla\bar{\beta}]$$
$$\nabla(\Phi\bar{a}) = \bar{a}\nabla\Phi + \Phi\nabla\bar{a} \qquad (68.14)$$
$$[\nabla, \Phi\bar{a}] = [\nabla\Phi, \bar{a}] + \Phi[\nabla\bar{a}]$$
$$\nabla[\bar{a}\bar{\beta}] = \bar{\beta}[\nabla\bar{a}] - \bar{a}[\nabla\bar{\beta}]$$
$$[\nabla, \nabla\Phi] = \nabla[\nabla\bar{a}] = 0$$

Οἱ σχέσεις αὐτές παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι περισσότερον εὐμνημόνευτες ἀπό τίς (68.9) διότι ὁ λογισμός μέ τόν ἐκτελεστήν ∇ παρουσιάζει ἀναλογίες μέ τόν συνήθη λογισμόν παραγωγίσεως διανυσματικῶν γινομένων.

Ἡ παράγωγος διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a}$ εἰς σημεῖον M_0 κατά τήν κατεύθυνσιν τοῦ μοναδιαίου διανύσματος $\bar{\upsilon}$, ὁρίζεται καί συμβολίζεται ὁμοίως ὅπως ἡ παράγωγος βαθμωτῆς συναρτήσεως, δηλαδή ἔχομεν ἐξ ὁρισμοῦ διά $M \to M_0$:

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial \upsilon} = \text{ορ.}\ \frac{\bar{a}(M)-\bar{a}(M_0)}{MM_0} \tag{68.15}$$

Ἐπειδή ὅμως εἶναι:

$$\frac{\bar{a}(M)-\bar{a}(M_0)}{MM_0} = \left(\frac{P(M)-P(M_0)}{MM_0},\ \frac{Q(M)-Q(M_0)}{MM_0},\ \frac{R(M)-R(M_0)}{MM_0} \right)$$

διά μεταβάσεως εἰς τό ὅριον προκύπτει ὁ τύπος:

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial \upsilon} = \left(\frac{\partial P}{\partial \upsilon},\ \frac{\partial Q}{\partial \upsilon},\ \frac{\partial R}{\partial \upsilon} \right) \tag{68.16}$$

Ἐάν χρησιμοποιήσωμεν τό ἀνάδελτα, ὁ ἀριθμητικός διαφορικός ἐκτελεστής

$$\frac{\partial}{\partial \upsilon} = \upsilon_1 \frac{\partial}{\partial x} + \upsilon_2 \frac{\partial}{\partial y} + \upsilon_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

δύναται νά γραφῆ ὡς ἐσωτερικόν γινόμενον τοῦ μοναδιαίου διανύσματος $\bar{\upsilon}$ καί τοῦ ἀνάδελτα ∇, δηλαδή εἶναι:

$$\frac{\partial}{\partial \upsilon} = \upsilon_1 \frac{\partial}{\partial x} + \upsilon_2 \frac{\partial}{\partial y} + \upsilon_3 \frac{\partial}{\partial z} = \bar{\upsilon}\nabla \tag{68.17}$$

θέτοντες τόν ἐκτελεστήν αὐτόν πρός τά ἀριστερά (πολλαπλασιασμός ἀριστερά) μιᾶς βαθμωτῆς ἤ διανυσματικῆς συναρτήσεως προκύπτει ἡ παράγωγος αὐτῶν κατά τήν κατεύθυνσιν τοῦ διανύσματος υ· πράγματι ἔχομεν:

$$(\bar{\upsilon}\nabla)\Phi = \left(\upsilon_1 \frac{\partial}{\partial x} + \upsilon_2 \frac{\partial}{\partial y} + \upsilon_3 \frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi = \upsilon_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \upsilon_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \upsilon_3 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial \upsilon}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\upsilon}\nabla)\bar{a} &= \left(\upsilon_1 \frac{\partial}{\partial x} + \upsilon_2 \frac{\partial}{\partial y} + \upsilon_3 \frac{\partial}{\partial z}\right)\bar{a} = \upsilon_1 \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} + \upsilon_2 \frac{\partial \bar{a}}{\partial y} + \upsilon_3 \frac{\partial \bar{a}}{\partial z} \\
&= \upsilon_1 (P_x, Q_x, R_x) + \upsilon_2 (P_y, Q_y, R_y) + \upsilon_3 (P_z, Q_z, R_z) \\
&= (\upsilon_1 P_x + \upsilon_2 P_y + \upsilon_3 P_z,\ \upsilon_1 Q_x + \upsilon_2 Q_y + \upsilon_3 Q_z,\ \upsilon_1 R_x + \upsilon_2 R_y + \upsilon_3 R_z) \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial \upsilon},\ \frac{\partial Q}{\partial \upsilon},\ \frac{\partial R}{\partial \upsilon} \right) = \frac{\partial \bar{a}}{\partial \upsilon}
\end{aligned}$$

Συμπληρώνομεν τίς (68.14) μέ τίς ἑξῆς δύο πολύ χρήσιμες σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\nabla(\bar{a}\bar{\beta}) &= (\bar{a}\nabla)\bar{\beta} + (\bar{\beta}\nabla)\bar{a} + [\bar{a}[\nabla\bar{\beta}]] + [\bar{\beta}[\nabla\bar{a}]] \\
[\nabla[\bar{a}\bar{\beta}]] &= (\bar{\beta}\nabla)\bar{a} - (\bar{a}\nabla)\bar{\beta} + \bar{a}(\nabla\bar{\beta}) - \bar{\beta}(\nabla\bar{a})
\end{aligned} \tag{68.18}$$

Θά ἀποδείξωμεν τήν πρώτην ἐξ αὐτῶν ἀφίνοντες τήν ἀπόδειξιν τῆς ἄλλης ὡς ἄσκησιν διά τόν ἀναγνώστην· ἔχομεν:

$$\nabla(\bar{\alpha}\bar{\beta}) = \bar{\imath}(\bar{\alpha}\bar{\beta})_x + \bar{\jmath}(\bar{\alpha}\bar{\beta})_y + \bar{\kappa}(\bar{\alpha}\bar{\beta})_z$$

$$= \bar{\imath}(\bar{\alpha}\bar{\beta}_x) + \bar{\imath}(\bar{\alpha}_x\bar{\beta}) + \bar{\jmath}(\bar{\alpha}\bar{\beta}_y) + \bar{\jmath}(\bar{\alpha}_y\bar{\beta}) + \bar{\kappa}(\bar{\alpha}\bar{\beta}_z) + \bar{\kappa}(\bar{\alpha}_z\bar{\beta}) \quad (1)$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸν τύπον τοῦ διπλοῦ ἐξωτερικοῦ γινομένου ἔχομεν:

$$\bar{\imath}(\bar{\alpha}\bar{\beta}_x) = \bar{\beta}_x(\bar{\imath}\bar{\alpha}) + [\bar{\alpha}[\bar{\imath}\bar{\beta}_x]]$$

$$\bar{\jmath}(\bar{\alpha}\bar{\beta}_y) = \bar{\beta}_y(\bar{\jmath}\bar{\alpha}) + [\bar{\alpha}[\bar{\jmath}\bar{\beta}_y]]$$

$$\bar{\kappa}(\bar{\alpha}\bar{\beta}_z) = \bar{\beta}_z(\bar{\kappa}\bar{\alpha}) + [\bar{\alpha}[\bar{\kappa}\bar{\beta}_z]]$$

Ἐξ αὐτῶν διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη προκύπτει:

$$\bar{\imath}(\bar{\alpha}\bar{\beta}_x) + \bar{\jmath}(\bar{\alpha}\bar{\beta}_y) + \bar{\kappa}(\bar{\alpha}\bar{\beta}_z) = (\bar{\alpha}\nabla)\bar{\beta} + [\bar{\alpha}[\nabla\bar{\beta}]]$$

καὶ ἐξ αὐτῆς δὶ ἐναλλαγῆς τῶν $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ προκύπτει ἐπίσης:

$$\bar{\imath}(\bar{\beta}\bar{\alpha}_x) + \bar{\jmath}(\bar{\beta}\bar{\alpha}_y) + \bar{\kappa}(\bar{\beta}\bar{\alpha}_z) = (\bar{\beta}\nabla)\bar{\alpha} + [\bar{\beta}[\nabla\bar{\alpha}]]$$

ὁπότε ἀντικαθιστῶντες τὶς δύο αὐτὲς σχέσεις εἰς τὴν (1) προκύπτει τὸ ζητούμενον.

Ἕνας ἄλλος διαφορικὸς ἐκτελεστὴς ὁ ὁποῖος παρουσιάζεται πολὺ συχνὰ εἰς τὴν θεωρία τῶν πεδίων εἶναι ὁ διαφορικὸς ἐκτελεστὴς τοῦ Laplace ἢ συντόμως Laplacien, ὁ ὁποῖος συμβολίζεται μὲ Δ καὶ εἶναι:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (68.19)$$

δηλαδὴ ἐὰν Φ εἶναι μία βαθμωτὴ καὶ $\bar{\alpha}$ μία διανυσματικὴ συνάρτησις, εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}, \quad \Delta\bar{\alpha} = \frac{\partial^2\bar{\alpha}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{\alpha}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\bar{\alpha}}{\partial z^2} \qquad (68.20)$$

καὶ διὰ συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν ὁ ἐκτελεστὴς τοῦ Laplace εἶναι:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad (68.21)$$

Ὅπως εἴπαμε καὶ στὴν ἀρχὴ παράδειγμα διανυσματικοῦ πεδίου εἶναι τὸ πεδίον τῶν ταχυτήτων $\bar{\upsilon}$ τῶν μορίων ἑνὸς κινουμένου ρευστοῦ. εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν ἡ συνάρτησις τοῦ πεδίου αὐτοῦ ἐξαρτᾶται ἀφ' ἑνὸς ἀπὸ τὴν θέσιν (x, y, z) τοῦ κινουμένου μορίου καὶ ἀφ' ἑτέρου ἀπὸ τὸν χρόνον t, δηλαδὴ εἶναι μία συνάρτησις τῆς μορφῆς:

$$\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}(x, y, z, t)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ πεδίον ταχυτήτων δὲν μεταβάλλεται μὲ τὸν χρόνον t, ἡ κίνησις τοῦ ρευστοῦ λέγεται μόνιμος καὶ ἡ συνάρτησις τοῦ πεδίου δὲν θὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν μεταβλητὴν t. Ἐπίσης παραδείγματα διανυσματικῶν πεδίων εἶναι τὰ πεδία τῆς ἠλεκτρικῆς καὶ μαγνητικῆς ἐντάσεως

$$\bar{E} = \bar{E}(x, y, z, t), \quad \bar{H} = \bar{H}(x, y, z, t)$$

τὰ ὁποῖα ἐξαρτῶνται ἐν γένει ἀπὸ τὸν χρόνον t· εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ πεδία αὐτὰ εἶναι ἀνεξάρτητα τοῦ χρόνου λέγονται

τό μέν πρῶτον ἠλεκτροστατικόν τό δέ δεύτερον μαγνητοστατικόν πεδίον.
Ἄς θεωρήσωμεν τώρα ἕνα διανυσματικόν πεδίον τοῦ ὁποίου ἡ συνάρτησις $\bar{a}$ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπό τίς συντεταγμένες τοῦ σημείου Μ εἰς τό ὁποῖον ἑκάστοτε ἀντιστοιχεῖ. Καλοῦμεν πεδιακές γραμμές ἤ γραμμές διευθύνσεως τίς γραμμές τῶν ὁποίων ἡ ἐφαπτομένη εἰς ἕκαστον σημεῖον αὐτῶν Μ εἶναι παράλληλος πρός τήν συνάρτησιν τοῦ πεδίου σχ.(68.3).
Ἐάν $\bar{r}=\bar{r}(t)$ εἶναι ἡ διανυσματική ἐξίσωσις αὐτῶν, θά ἐπαληθεύουν προφανῶς τήν σχέσιν:

$$[\,\bar{a}\,d\bar{r}\,]=0$$

δηλαδή θά ἐπαληθεύουν τό διαφορικόν σύστημα

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \qquad (68.22)$$

Ὅταν τό διανυσματικόν πεδίον εἶναι ἕνα πεδίον δυνάμεων λέγεται ἐπίσης καί δυναμικόν πεδίον, οἱ δέ πεδιακές γραμμές λέγονται τότε δυναμικές γραμμές· εἶναι γνωστόν ἐκ τῆς φυσικῆς ὅτι εἰς τήν περίπτωσιν ἑνός μαγνητοστατικοῦ πεδίου οἱ δυναμικές γραμμές ὑλοποιοῦνται μέ ρινίσματα σιδήρου. Ὅταν τό διανυσματικόν πεδίον εἶναι τό πεδίον τῶν ταχυτήτων μιᾶς μονίμου ροῆς ρευστοῦ, οἱ πεδιακές γραμμές λέγονται ρευματικές γραμμές ἤ γραμμές ροῆς.
Ἐάν ἡ συνάρτησις $\bar{a}$ ἑνός διανυσματικοῦ πεδίου εἶναι ἡ κλίσις μιᾶς βαθμωτῆς συναρτήσεως Φ, δηλαδή ἐάν εἶναι:

$$\bar{a}(M)=\operatorname{grad}\Phi(M) \qquad (68.23)$$

λέγομεν ὅτι τό πεδίον προέρχεται ἐκ δυναμικοῦ, ἡ Φ λέγεται δυναμική συνάρτησις καί ἡ ἀντίθετος αὐτῆς $-\Phi(M)$, τήν ὁποίαν παριστάνομεν συνήθως μέ $U(M)$, λέγεται δυναμικόν. Ἐάν ἡ συνάρτησις $\bar{a}$ εἶναι ἡ περιστροφή μιᾶς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{\beta}$, δηλαδή ἐάν εἶναι:

$$\bar{a}=\operatorname{rot}\bar{\beta}$$

ἡ συνάρτησις $\bar{\beta}$ λέγεται διανυσματικόν δυναμικόν τῆς $\bar{a}$.
Ἕνα διανυσματικόν πεδίον λέγεται μηδενικῆς ἀποκλίσεως ὅταν σέ κάθε σημεῖον αὐτοῦ ἡ ἀπόκλισις τῆς $\bar{a}$ εἶναι μηδέν, δηλαδή ὅταν:

$$\operatorname{div}\bar{a}\equiv 0 \qquad (68.24)$$

Ἕνα διανυσματικόν πεδίον λέγεται ἀστρόβιλον ὅταν σέ κάθε σημεῖον αὐτοῦ ἡ περιστροφή εἶναι μηδέν, δηλαδή ὅταν:

$$\operatorname{rot}\bar{a}\equiv 0 \qquad (68.25)$$

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα ἕνα διανυσματικόν πεδίον μέ συνάρτησιν τήν $\bar{a}(M)$ καί ἐντός αὐτοῦ ἕνα προσανατολισμένον ἐπιφανειακόν τμῆμα Σ· καλεῖται ροή τῆς $\bar{a}$ διά τοῦ τμήματος Σ καί θά τήν παριστάνωμεν μέ τό σύμβολον $\mathcal{F}$, τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα:

$$\mathcal{F}=\iint_{\Sigma}\bar{a}\,d\bar{\sigma} \qquad (68.26)$$

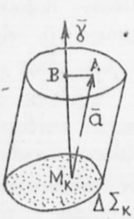
Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς τῆς ροῆς δικαιολογεῖται ὡς ἑξῆς: ἔστω ὅτι τὸ θεωρούμενον πεδίον εἶναι τὸ πεδίον τῶν ταχυτήτων ἑνὸς μονίμου ρεύματος καὶ ζητοῦμε τὴν ποσότητα τοῦ ρευστοῦ ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ Σ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου. Θεωροῦμεν μίαν ὑποδιαίρεσιν $\mathfrak{D}$ τοῦ Σ σὲ μικρότερα τμήματα καὶ ἔστω ἕνα ἐξ αὐτῶν τὸ $\Delta\Sigma_\kappa$· ἐὰν τὸ τμῆμα αὐτὸ ὑποτεθῆ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ διάνυσμα προσανατολισμοῦ $\bar{\gamma}(M_\kappa)$ καὶ ἡ $\bar{a}(M_\kappa)$ σταθερὴ ἐπ' αὐτοῦ, τότε ὁ ὄγκος τοῦ ρευστοῦ τὸ ὁποῖον θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ $\Delta\Sigma_\kappa$ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου, θὰ ἰσοῦται προφανῶς μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς παραστάσεως σχ (68.4):

$$\bar{a}(M_\kappa)\,\bar{\gamma}(M_\kappa)\,\Delta\sigma_\kappa = \bar{a}(M_\kappa)\,\bar{\Delta\sigma}_\kappa \qquad (68.27)$$

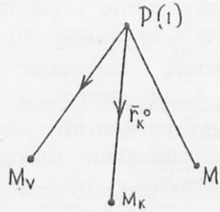
δηλαδὴ μὲ τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου ὁ ὁποῖος ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως $\Delta\sigma_\kappa = |\Delta\Sigma_\kappa|$ καὶ ὕψος $BM_\kappa = |\bar{a}\bar{\gamma}|$. Ἡ παράστασις αὐτὴ εἶναι θετικὴ ὅταν $\bar{a}\bar{\gamma}$ δηλαδὴ ὅταν τὰ μόρια τοῦ ρευστοῦ διαπερνοῦν τὸ $\Delta\Sigma_\kappa$ κατὰ τὴν φορὰν τοῦ $\bar{\gamma}$ καὶ ἀρνητικὴ ὅταν $\bar{a}\bar{\gamma} < 0$ δηλαδὴ ὅταν τὸ διαπερνοῦν κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὴν ὑποδιαίρεσιν $\mathfrak{D}$ τὸ διάμετρομα δ_κ εἶναι ἀρκετὰ μικρόν, οἱ ἀνωτέρω ἰδανικὲς προϋποθέσεις δηλαδὴ $\bar{a}$ σταθερὸν καὶ $\Delta\Sigma_\kappa$ ἐπίπεδον, πραγματοποιοῦνται προσεγγιστικά ἑπομένως εἶναι φυσικὸν νὰ ὁρίσωμεν τὴν στοιχειώδη ροὴν διὰ τοῦ καμπύλου τμήματος $\Delta\Sigma_\kappa$ ἴση μὲ τὴν παράστασιν (68.27) καὶ τὴν ροὴν διὰ τοῦ Σ ἴσην μὲ τὸ ὅριον:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \bar{a}(M_\kappa)\,\Delta\sigma_\kappa$$

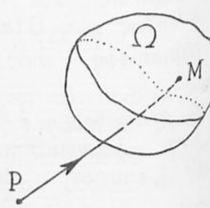
δηλαδὴ μὲ τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα (68.26).



Σχ.(68.4)



Σχ.(68.5)



Σχ.(68.6)

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα ἕνα σύστημα ν-ὑλικῶν σημείων $M_1, \dots, M_\nu$ μὲ μάζες ἀντιστοίχως $m_1, \dots, m_\nu$ καὶ P ὑλικὸν σημεῖον μοναδιαίας μάζης σχ. (68.5). Ἐπὶ τοῦ ὑλικοῦ σημείου P ἀσκεῖται ἀπὸ κάθε σημεῖον M_κ κατὰ τὸν νόμον τοῦ Newton, ἑλκτικὴ δύναμις:

$$\bar{F}_\kappa = \frac{f \cdot m_\kappa}{\bar{r}_\kappa^2}\,\bar{r}_\kappa^{\circ}$$

ὅπου $\bar{r}_\kappa^{\circ}$ καὶ r_κ παριστάνουν ἀντιστοίχως τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα καὶ τὸ μέτρον τοῦ $\bar{r}_\kappa = \overline{PM}_\kappa$· ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x, y, z τὶς συντεταγμένες τοῦ P καὶ μὲ $x_\kappa, y_\kappa, z_\kappa$ τὶς συντεταγμένες τοῦ M_κ θὰ εἶναι:

$$r_\kappa = \sqrt{(x_\kappa - x)^2 + (y_\kappa - y)^2 + (z_\kappa - z)^2}$$

$$\text{grad}\, \frac{1}{r_\kappa} = (x_\kappa - x, y_\kappa - y, z_\kappa - z)\, \frac{1}{r_\kappa} = -\frac{\bar{r}^{\circ}_\kappa}{\bar{r}^{\circ}_\kappa}$$

$$\bar{F}_\kappa = -f\, \text{grad}\, \frac{m_\kappa}{r_\kappa}$$

Ἐὰν λοιπὸν ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων F_κ αἱ ὁποῖες ἐνεργοῦν ἐκ τῶν ἑλκτικῶν κέντρων M_κ ἐπὶ τοῦ P εἶναι $\bar{F}$, θὰ ἔχωμεν :

$$\bar{F} = -f\, \text{grad}\left(\frac{m_1}{r_1} + \cdots + \frac{m_\nu}{r_\nu} \right) \qquad (68.28)$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ὅτι τὸ δυναμικὸν πεδίον τὸ ὁποῖον δημιουργεῖται ἐκ τῶν ἑλκτικῶν κέντρων $M_1, \cdots, M_\nu$ προέρχεται ἐκ δυναμικοῦ, ἡ δὲ συνάρτησις :

$$f\left(\frac{m_1}{r_1} + \cdots + \frac{m_\kappa}{r_\kappa} \right)$$

λέγεται νευτώνιον δυναμικόν· συνήθως ὅμως ὁ συντελεστὴς f παραλείπεται καὶ φέρεται ὡς νευτώνιον δυναμικὸν ἡ συνάρτησις :

$$U = \frac{m_1}{r_1} + \cdots + \frac{m_\nu}{r_\nu} \equiv \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{m_\kappa}{r_\kappa} \qquad (68.29)$$

Κατ' ἐπέκτασιν τῶν ἀνωτέρω ὁρίζομεν τὸ νευτώνιον δυναμικὸν εἰς τὸ σημεῖον $P(\xi, \eta, \zeta)$ τὸ ὀφειλόμενον εἰς μᾶζαν συνεχῶς κατανεμημένην μὲ πυκνότητα $\delta(M)$ ἐπὶ ἑνὸς τόξου Γ ἢ ἑνὸς ἐπιφανειακοῦ τμήματος Σ ἢ ἑνὸς τριδιαστάτου χωρίου Ω, ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰ ὁλοκληρώματα :

$$U = \int_\Gamma \frac{\delta}{r}\, ds, \quad U = \iint_\Sigma \frac{\delta}{r}\, d\sigma, \quad U = \iiint_\Omega \frac{\delta}{r}\, d\omega \qquad (68.30)$$

ὅπου r παριστάνει τὴν ἀπόστασιν ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου $M(x,y,z)$ τοῦ τόξου Γ, τοῦ τμήματος Σ ἢ τοῦ χωρίου Ω ἀπὸ τὸ σταθερὸν σημεῖον $P(\xi, \eta, \zeta)$, δηλαδή :

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

Ἀντιστοίχους ὁρισμοὺς καὶ τύπους ἔχομεν διὰ τὸ δυναμικὸν ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι αἱ ὑλικαὶ μᾶζαι θὰ ἀντικατασταθοῦν ἀπὸ προσημασμένα ἠλεκτρικὰ φορτία q_κ ἢ διὰ συνεχῆ κατανομὴν ὑπὸ τῆς πυκνότητος αὐτῶν.

Ἂς θεωρήσωμεν τώρα ἕνα δυναμικὸν πεδίον τοῦ ὁποίου ἡ δύναμις $\bar{F}$ ἐνεργεῖ ἐπὶ ὑλικοῦ σημείου μάζης m. Διὰ μετακίνησιν ἐπὶ τοῦ τόξου AB τῆς γραμμῆς $\bar{r} = \bar{r}(t)$, παράγεται ἔργον :

$$E = \int_{AB} \bar{F}\, d\bar{r}$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $\bar{\upsilon}, \bar{\gamma}, L$ ἀντιστοίχως τὴν ταχύτητα τὴν ἐπιτάχυνσιν καὶ τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν τοῦ ὑλικοῦ σημείου θὰ ἔχωμεν :

$$\int_{AB} \bar{F}\, d\bar{r} = \int_{AB} m\bar{\gamma}\, d\bar{r} = \int_{AB} m\dot{\bar{\upsilon}}\bar{\upsilon}\, dt = \int_{AB} m\bar{\upsilon}\, d\bar{\upsilon} = \int_{AB} d\, \frac{1}{2} m\bar{\upsilon}^2 = \int_{AB} dL$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἔπεται ὅτι μεταξὺ ἔργου καὶ κινητικῆς ἐνεργείας ὑφίσταται ἡ σχέσις :

$$E=\int_{AB}\bar{F}d\bar{r}=L_B-L_A \qquad (68.31)$$

ἡ ὁποία ἐκφράζει τὴν γνωστὴν ἐκ τῆς φυσικῆς πρότασιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ παραγόμενον κατὰ μίαν μετακίνησιν ἔργον, ἰσοῦται μὲ τὴν καταναλισκομένην κινητικὴν ἐνέργειαν. Ἐὰν τὸ πεδίον προέρχεται ἐκ δυναμικοῦ καὶ εἶναι Φ, U ἡ δυναμικὴ συνάρτησις καὶ τὸ δυναμικὸν τοῦ πεδίου, θὰ εἶναι :

$$E=\int_{AB}\bar{F}d\bar{r}=\int_{AB}\mathrm{grad}\,\Phi d\bar{r}=\int_{AB}(\Phi_x dx+\Phi_y dy+\Phi_z dz)=\int_{AB}d\Phi=\Phi_B-\Phi_A=-U_A+U_B$$

ἐκ τῆς ὁποίας διὰ συγκρίσεως μετὰ τῆς (68.31) προκύπτει ἡ σχέσις :

$$L_A+U_A=L_B+U_B \qquad (68.32)$$

ἡ ὁποία ἐκφράζει τὴν γνωστὴν ἐκ τῆς φυσικῆς πρότασιν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποίαν ἡ κινητικὴ ἐνέργεια L καὶ ἡ *δυναμικὴ* U ἔχουν σταθερὸν ἄθροισμα σὲ κάθε σημεῖον τοῦ πεδίου. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν τὰ πεδία τὰ προερχόμενα ἐκ δυναμικοῦ λέγονται συντηρητικὰ πεδία καὶ οἱ παράγουσες αὐτὰ δυνάμεις συντηρητικαί.

Παράδειγμα (68.1).— Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διανυσματικὴ συνάρτησις $\bar{a}=[\bar{\beta}\bar{r}]:2c$, ὅπου $\bar{r}=(x,y,z)$ καὶ $\bar{\beta}$, c σταθερά, ἐπαληθεύει τὴν σχέσιν :

$$c[\nabla\bar{a}]=\bar{\beta}$$

Λ ύ σ ι ς. Ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ ἐξωτερικοῦ γινομένου καὶ τὸν (68.13) προκύπτει:

$$\bar{a}=\frac{1}{2c}(z\beta_2-y\beta_3,\ x\beta_3-z\beta_1,\ y\beta_1-x\beta_2)$$

$$[\nabla\bar{a}]=\frac{1}{2c}[(y\beta_1-x\beta_2)_y-(x\beta_3-z\beta_1)_z,(z\beta_2-y\beta_3)_z-(y\beta_1-x\beta_2)_x,(x\beta_3-z\beta_1)_x-(z\beta_2-y\beta_3)_y]$$

$$=\frac{1}{2c}(2\beta_1,2\beta_2,2\beta_3)=\frac{1}{c}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\frac{1}{c}\bar{\beta}$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται τὸ ζητούμενον. Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν τὸ ζητούμενον χρησιμοποιοῦντες τὸν δεύτερον ἐκ τῶν τύπων (68.18), ὡς ἑξῆς :

$$[\nabla\bar{a}]=\frac{1}{2c}[\nabla[\bar{\beta}\bar{r}]]=\frac{1}{2c}[(\bar{r}\nabla)\bar{\beta}-(\bar{\beta}\nabla)\bar{r}+\bar{\beta}(\nabla\bar{r})-\bar{r}(\nabla\bar{\beta})]$$

$$=\frac{1}{2c}(x\bar{\beta}_x+y\bar{\beta}_y+z\bar{\beta}_z-\beta_1\bar{r}_x-\beta_2\bar{r}_y-\beta_3\bar{r}_z+\bar{\beta}\cdot 3-\bar{r}\cdot 0)=\frac{1}{2c}(-\beta_1\bar{i}-\beta_2\bar{j}-\beta_3\bar{k}+3\bar{\beta})=\frac{1}{c}\bar{\beta}$$

Παράδειγμα (68.2).— Νὰ ἀποδειχθοῦν οἱ σχέσεις :

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\Phi)=0,\quad \mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\bar{a})=0$$

Λ ύ σ ι ς. Χρησιμοποιοῦντες τοὺς ἀντιστοίχους τύπους προκύπτει :

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\Phi)=\mathrm{rot}(\Phi_x,\Phi_y,\Phi_z)=(\Phi_{zy}-\Phi_{yz},\Phi_{xz}-\Phi_{zx},\Phi_{yx}-\Phi_{xy})=0$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\bar{a})=\mathrm{div}(R_y-Q_z,P_z-R_x,Q_x-P_y)=R_{yx}-Q_{zx}+P_{zy}-R_{xy}+Q_{xy}-P_{yz}=0$$

Παράδειγμα (68.3).— Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ Laplacien τῆς συναρτήσεως :

$$r^{\mu}=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\mu}{2}}.$$

Λ ύ σ ι ς. Παραγωγίζοντες τὴν δοθεῖσα συνάρτησιν μερικῶς ὡς πρὸς x προκύπτει :

$$(r^{\mu})_x = \mu r^{\mu-1} r_x = \mu r^{\mu-1} x : r = \mu x r^{\mu-2}$$
$$(r^{\mu})_{xx} = \mu r^{\mu-2} + \mu x(\mu-2) r^{\mu-3} r_x = \mu r^{\mu-2} + \mu(\mu-2) x^2 r^{\mu-4}$$

ἕνεκα δὲ συμμετρίας τῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς x, y, z θὰ ἔχωμεν ἐπίσης τὶς σχέσεις :

$$(r^{\mu})_{yy} = \mu r^{\mu-2} + \mu(\mu-2) y^2 r^{\mu-4}, \qquad (r^{\mu})_{zz} = \mu r^{\mu-2} + \mu(\mu-2) x^2 r^{\mu-4}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὶς τρεῖς τελευταῖες σχέσεις εἰς τὸν τύπον (68.20) προκύπτει:

$$\Delta r^{\mu} = 3\mu r^{\mu-2} + \mu(\mu-2) r^{\mu-4}(x^2+y^2+z^2) = 3\mu r^{\mu-2} + \mu(\mu-2) r^{\mu-2} = \mu(\mu+1) r^{\mu-2}.$$

Παράδειγμα (68.4). — Ἐὰν τὰ τρία μοναδιαῖα διανύσματα $\bar{a}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ σχηματίζουν ἕνα δεξιόστροφον τρισορθογώνιον σύστημα μὲ ἀρχὴν τὸ σημεῖον Μ, νὰ δειχθῇ ὅτι ἰσχύουν οἱ σχέσεις :

$$(\bar{\upsilon} =) \ \operatorname{grad} \Phi(M) = \frac{\partial \Phi}{\partial a}\bar{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\bar{\beta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}\bar{\gamma}$$

$$\left[\bar{a}, \frac{\partial \bar{\upsilon}}{\partial a}\right] + \left[\bar{\beta}, \frac{\partial \bar{\upsilon}}{\partial \beta}\right] + \left[\bar{\gamma}, \frac{\partial \bar{\upsilon}}{\partial \gamma}\right] = 0$$

Λ ύ σ ι ς. Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸν τύπον (10.3) θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a}\bar{a} = (a_1\Phi_x + a_2\Phi_y + a_3\Phi_z)\bar{a} = (a_1\bar{a})\Phi_x + (a_2\bar{a})\Phi_y + (a_3\bar{a})\Phi_z$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\bar{\beta} = (\beta_1\Phi_x + \beta_2\Phi_y + \beta_3\Phi_z)\bar{\beta} = (\beta_1\bar{\beta})\Phi_x + (\beta_2\bar{\beta})\Phi_y + (\beta_3\bar{\beta})\Phi_z$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}\bar{\gamma} = (\gamma_1\Phi_x + \gamma_2\Phi_y + \gamma_3\Phi_z)\bar{\gamma} = (\gamma_1\bar{\gamma})\Phi_x + (\gamma_2\bar{\gamma})\Phi_y + (\gamma^3\bar{\gamma})\Phi_z .$$

Τὶς σχέσεις αὐτὲς προσθέτοντες κατὰ μέλη προκύπτει :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a}\bar{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\bar{\beta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}\bar{\gamma} = (a_1\bar{a} + \beta_1\bar{\beta} + \gamma_1\bar{\gamma})\Phi_x + (a_2\bar{a} + \beta_2\bar{\beta} + \gamma_2\bar{\gamma})\Phi_y + (a_3\bar{a} + \beta_3\bar{\beta} + \gamma_3\bar{\gamma})\Phi_z \qquad (1)$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι τὰ $\bar{a}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ σχηματίζουν τρισορθογώνιον σύστημα θὰ ἔχωμεν :

$$a_1\bar{a} + \beta_1\bar{\beta} + \gamma_1\bar{\gamma} = a_1(a_1, a_2, a_3) + \beta_1(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + \gamma_1(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$
$$= (a_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2,\ a_1a_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2,\ a_1a_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3) = (1,0,0) = \bar{\imath}$$

καὶ ὁμοίως ἐργαζόμενοι διὰ τοὺς δύο ἄλλους συντελεστὰς εὑρίσκομεν :

$$a_2\bar{a} + \beta_2\bar{\beta} + \gamma_2\bar{\gamma} = \bar{j}, \qquad a_3\bar{a} + \beta_3\bar{\beta} + \gamma_3\bar{\gamma} = \bar{k}$$

ὁπότε δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) προκύπτει ἡ ἀλήθεια τῆς πρώτης σχέσεως.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς δευτέρας σχέσεως λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸν τύπον (68.16) καὶ τὴν ἀποδειχθεῖσα σχέσιν, θὰ ἔχωμεν :

$$\left[\bar{a}, \frac{\partial \bar{\upsilon}}{\partial a}\right] = \left[\bar{a}, \bar{\imath}\frac{\partial \Phi_x}{\partial a} + \bar{j}\frac{\partial \Phi_y}{\partial a} + \bar{k}\frac{\partial \Phi_z}{\partial a}\right] = [\bar{a}\bar{\imath}]\frac{\partial \Phi_x}{\partial a} + [\bar{a}\bar{j}]\frac{\partial \Phi_y}{\partial a} + [\bar{a}\bar{k}]\frac{\partial \Phi_z}{\partial a}$$

$$\left[\bar{\beta}, \frac{\partial \bar{\upsilon}}{\partial \beta}\right] = \left[\bar{\beta}, \bar{\imath}\frac{\partial \Phi_x}{\partial \beta} + \bar{j}\frac{\partial \Phi_y}{\partial \beta} + \bar{k}\frac{\partial \Phi_z}{\partial \beta}\right] = [\bar{\beta}\bar{\imath}]\frac{\partial \Phi_x}{\partial \beta} + [\bar{\beta}\bar{j}]\frac{\partial \Phi_y}{\partial \beta} + [\bar{\beta}\bar{k}]\frac{\partial \Phi_z}{\partial \beta}$$

$$\left[\bar{\gamma}, \frac{\partial \bar{\upsilon}}{\partial \gamma}\right] = \left[\bar{\gamma}, \bar{\imath}\frac{\partial \Phi_x}{\partial \gamma} + \bar{j}\frac{\partial \Phi_y}{\partial \gamma} + \bar{k}\frac{\partial \Phi_z}{\partial \gamma}\right] = [\bar{\gamma}\bar{\imath}]\frac{\partial \Phi_x}{\partial \gamma} + [\bar{\gamma}\bar{j}]\frac{\partial \Phi_y}{\partial \gamma} + [\bar{\gamma}\bar{k}]\frac{\partial \Phi_z}{\partial \gamma}$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὶς σχέσεις αὐτὲς καὶ παριστάνοντες διὰ συντομίαν μὲ Α τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀποδεικτέας σχέσεως, προκύπτει :

$$A = \left[\bar{a}\frac{\partial \Phi_x}{\partial a} + \bar{\beta}\frac{\partial \Phi_x}{\partial \beta} + \bar{\gamma}\frac{\partial \Phi_x}{\partial \gamma}, \bar{\imath}\right] + \left[\bar{a}\frac{\partial \Phi_y}{\partial a} + \bar{\beta}\frac{\partial \Phi_y}{\partial \beta} + \bar{\gamma}\frac{\partial \Phi_y}{\partial \gamma}, \bar{j}\right] + \left[\bar{a}\frac{\partial \Phi_z}{\partial a} + \bar{\beta}\frac{\partial \Phi_z}{\partial \beta} + \bar{\gamma}\frac{\partial \Phi_z}{\partial \gamma}, \bar{k}\right]$$

$= [\mathrm{grad}\,\Phi_x, \bar{i}\,] + [\mathrm{grad}\,\Phi_y, \bar{j}\,] + [\mathrm{grad}\,\Phi_z, \bar{k}\,] = [\,\bar{i}\Phi_{xx} + \bar{j}\Phi_{xy} + \bar{k}\Phi_{xz}, \bar{i}\,] + [\,\bar{i}\Phi_{yx} +$
$+ \bar{j}\Phi_{yy} + \bar{k}\Phi_{yz}, \bar{j}\,] + [\,\bar{i}\Phi_{zx} + \bar{j}\Phi_{zy} + \bar{k}\Phi_{zz}, \bar{k}\,] = -\bar{k}\Phi_{xy} + \bar{j}\Phi_{xz} + \bar{k}\Phi_{yx} - \bar{i}\Phi_{yz} - \bar{j}\Phi_{zx} +$
$+ \bar{i}\Phi_{zy} = 0$ καὶ ἔτσι ἀπεδείχθη καὶ ἡ δευτέρα σχέσις.

Παράδειγμα (68.5). — Νὰ εὑρεθοῦν οἱ πεδιακὲς γραμμὲς τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου : $\bar{a} = \mathrm{grad}\,(xyz)$.

Λ ύ σ ι ς. Ἔχομεν $\bar{a} = (yz, zx, xy)$ ἐπομένως κατὰ τὸν (68.22) οἱ πεδιακὲς γραμμὲς θὰ προκύψουν δι' ὁλοκληρώσεως τοῦ διαφορικοῦ συστήματος:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{zx} = \frac{dz}{xy}$$

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν εὐκόλως δύο πρῶτες λύσεις :

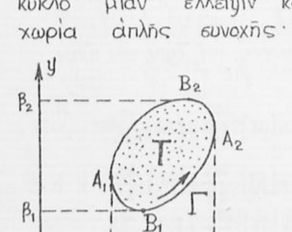
$$xdx - ydy = 0 \;, \quad ydy - zdz = 0$$
$$x^2 - y^2 = C_1 \;, \quad y^2 - z^2 = C_2$$

δηλαδὴ οἱ πεδιακὲς γραμμὲς εἶναι τομὲς τῶν δύο αὐτῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν.

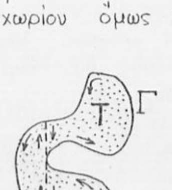
69. Θεμελιώδη θεωρήματα τῆς θεωρίας τῶν πεδίων. — Καλοῦμεν θετικὴν φορὰν διαγραφῆς ἢ περιοδεύσεως μιᾶς κλειστῆς καμπύλης Jordan Γ ἡ ὁποία εἶναι τὸ σύνορον ἢ μέρος τοῦ συνόρου ἑνὸς χωρίου Τ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y τὴν φορὰν κατὰ τὴν ὁποίαν κινούμενοι ἐπ' αὐτῆς, ἔχομεν πάντοτε πρὸς τὰ ἀριστερά μας τὸ χωρίον Τ. Π.χ. διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ σχ (69.1) ἡ θετικὴ φορὰ περιοδεύσεως εἶναι ἡ $A_1B_1A_2\cdots$. Διὰ νὰ σημειώσωμεν τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα ἐπὶ μιᾶς κλειστῆς γραμμῆς Γ κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν περιοδεύσεως, χρησιμοποιοῦμεν ἕνα ἐκ τῶν συμβόλων.

$$\oint_{\Gamma+} \;,\quad \oint_{\Gamma} \qquad (69.1)$$

Ἕνα ἀνοικτὸν χωρίον τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y λέγεται ἁπλῆς συνοχῆς, ὅταν τὸ ἐσωτερικὸν κάθε κλειστῆς καμπύλης Jordan ποῦ κεῖται ἐντὸς αὐτοῦ, ἀνήκῃ εἰς τὸ χωρίον · ὅταν ἕνα χωρίον δὲν εἶναι ἁπλῆς συνοχῆς, λέγεται χωρίον πολλαπλῆς συνοχῆς. Τὰ χωρία τὰ περικλειόμενα ἀπὸ ἕναν κύκλο μίαν ἔλλειψιν καὶ γενικῶς ἀπὸ μίαν καμπύλην Jordan, εἶναι χωρία ἁπλῆς συνοχῆς · τὸ χωρίον ὅμως τοῦ σχ (69.3) τὸ ὁποῖον προκύπτει



Σχ (69.1)



Σχ (69.2)

Σχ (69.3)

ὅταν ἀπὸ τὸ χωρίον ἁπλῆς συνοχῆς ποὺ περικλείεται ἀπὸ τὴν Γ, ἐξαιρέσωμεν τὰ χωρία ἁπλῆς συνοχῆς ποὺ περικλείονται ἀπὸ τὶς γραμμὲς $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_2$ εἶναι πολλαπλῆς συνοχῆς καὶ εἰδικῶς ἐπειδὴ τὸ σύνορον αὐποῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ τέσσερεις διακεκριμένες γραμμές, λέγεται χωρίον ...-πλῆς συνοχῆς. Ἡ θετικὴ φορὰ διαγραφῆς διὰ τὴν ἐξωτερικὴν γραμμὴν Γ εἶναι ἡ ἀντίθετος τῆς φορᾶς τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, ἐνῶ διὰ τὶς ἐσωτερικὲς γραμμὲς $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ ταυτίζεται μὲ αὐτήν.

Ἔστω διδιάστατον διανυσματικὸν πεδίον μὲ συνάρτησιν :

$$\bar{\alpha} = [\, P(x,y),\ Q(x,y) \,] \qquad (69.2)$$

Μεταξὺ τῶν ἐπικαμπυλίων καὶ τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων ὑφίσταται μία σχέσις ἡ ὁποία ἐκφράζεται ἀπὸ τὸ ἑξῆς θεώρημα τοῦ Gauss :

Πρότασις (69.1). _ *Ἐὰν οἱ συντεταγμένες τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{\alpha}$ καὶ αἱ μερικαὶ αὐτῶν παράγωγοι εἶναι συνεχεῖς ἐπὶ ἑνὸς χωρίου T τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ μίαν λείαν γραμμὴν Γ, τότε ἰσχύει ὁ τύπος :*

Gauss ἢ Riemann

$$\oint_{\Gamma^+} P dx + Q dy = \iint_T (Q_x - P_y)\, dx dy \qquad (69.3)$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἔστω ὅτι τὸ χωρίον T εἶναι κανονικόν, δηλαδὴ τὸ σύνορον αὐτοῦ Γ τέμνεται σὲ δύο τὸ πολὺ σημεῖα ἀπὸ τὶς παράλληλες πρὸς τοὺς ἄξονες εὐθεῖες· ἀπὸ τὸ σχ (69.1) προκύπτει :

$$\iint_T (Q_x - P_y)\, dx dy = \int_{\beta_1}^{\beta_2} dy \int_{x_1}^{x_2} Q_x \partial x - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dx \int_{y_1}^{y_2} P_y \partial y = \int_{\beta_1}^{\beta_2} [Q(x_2,y) - Q(x_1,y)]\, dy - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [P(x,y_2) - P(x,y_1)]\, dx$$

$$= \int_{\beta_1}^{\beta_2} Q(x_2,y)\, dy + \int_{\beta_2}^{\beta_1} Q(x_1,y)\, dy + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} P(x,y_1)\, dx + \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} P(x,y_2)\, dx$$

$$= \int_{B_1A_2B_2} Q(x,y)\, dy + \int_{B_2A_1B_1} Q(x,y)\, dy + \int_{A_1B_1A_2} P(x,y)\, dx + \int_{A_2B_2A_1} P(x,y)\, dx$$

$$= \oint_{\Gamma^+} Q dy + \oint_{\Gamma^+} P dx = \oint_{\Gamma^+} P dx + Q dy$$

Ἐὰν τὸ χωρίον T δὲν εἶναι κανονικόν, δηλαδὴ εἶναι π.χ. τῆς μορφῆς τοῦ σχ (69.2) ὑποδιαιροῦμεν αὐτὸ διὰ καταλλήλων διαχωριστικῶν γραμμῶν εἰς χωρία κανονικῆς μορφῆς, ὁπότε ἐφαρμόζοντες δι' ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τὸν ἀποδειχθέντα τύπον καὶ ἀθροίζοντες, βλέπομεν ὅτι τὸ θεώρημα ἰσχύει καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν αὐτήν. Ἐὰν τὸ χωρίον ὁλοκληρώσεως εἶναι πολλαπλῆς συνοχῆς ὅπως π.χ. τὸ χωρίον τοῦ σχ (69.3) καὶ τὸ σύνορον αὐτοῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν κλειστὴν γραμμὴν Γ καὶ ν ἄλλες $\Gamma_1, \dots, \Gamma_\nu$ περικλειόμενες ὑπὸ τῆς Γ, δυνάμεθα διὰ καταλλήλων πάλι διαχωριστικῶν γραμμῶν νὰ τὸ χωρίσωμεν εἰς χωρία ἁπλῆς συνοχῆς, ὁπότε ἐφαρμόζοντες τὸν (69.3) προκύπτει ὁ ἑξῆς γενικευμένος τύπος :

$$\oint_{\Gamma + \Gamma_1 + \dots + \Gamma_\nu} P dx + Q dy = \iint_T (Q_x - P_y)\, dx dy \qquad (69.4)$$

ὅπου ἡ θετικὴ φορὰ διαγραφῆς τῶν Γ_i εἶναι πάντοτε ἐκείνη κατὰ τὴν ὁποίαν κινούμενοι ἔχομεν πρὸς τὰ ἀριστερά μας τὸ χωρίον T. Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν ὁρισμὸν τῆς περιστροφῆς διανυσματικῶν συναρτήσεων τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y, ὁ τύπος (69.3) γράφεται:

$$\oint_{\Gamma^+} \bar{a}\, d\bar{r} = \iint_T \operatorname{rot} \bar{a}\, d\tau \qquad (69.5)$$

ὁ ὁποῖος μὲ λόγια ἐκφράζει τὸ ἑξῆς: *ἡ κυκλοφορία μιᾶς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a}$ ἐπὶ κλειστῆς γραμμῆς κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν περιοδεύσεως, ἰσοῦται μὲ τὸ διπλὸν ὁλοκλήρωμα τῆς περιστροφῆς τῆς $\bar{a}$ ἐπὶ τοῦ χωρίου τοῦ περικλειομένου ὑπὸ τῆς γραμμῆς.*

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (69.3) θέσωμεν εἰς τὴν θέσιν τοῦ P τὸ $-Q$ καὶ εἰς τὴν θέσιν τοῦ Q τὸ P προκύπτει:

$$\oint_{\Gamma^+} P dy - Q dx = \iint_T (P_x + Q_y)\, dx dy \qquad (1)$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ κάθετον διάνυσμα $\bar{k}$ τῆς γραμμῆς Γ ἔχει συντεταγμένες $-y', x'$ θὰ ἔχωμεν:

$$P dy - Q dx = (P y' - Q x')\, ds = -(\bar{a}\bar{k})\, ds$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $\bar{n}$ τὸ κάθετον μοναδιαῖον διάνυσμα τῆς γραμμῆς μὲ φορὰν πάντοτε πρὸς τὰ ἔξω τοῦ χωρίου, τότε καθὼς φαίνεται καὶ εἰς τὸ σχ. (69.4) ὅταν ἡ θετικὴ φορὰ περιοδεύσεως τῆς γραμμῆς Γ εἶναι συγχρόνως καὶ ἡ θετικὴ φορὰ αὐτῆς, τὸ $\bar{k}$ εἶναι ἀντίθετον τοῦ $\bar{n}$, ἐνῷ ὅταν ἡ θετικὴ φορὰ περιοδεύσεως εἶναι ἡ ἀρνητική, τὸ $\bar{k}$ ταυτίζεται μὲ τὸ $\bar{n}$, ἑπομένως θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως

$$P dy - Q dx = \pm (\bar{a}\bar{n})\, ds$$

Κατόπιν αὐτῶν ὁ τύπος (1) γιὰ κάθε περίπτωση δύναται νὰ γραφῇ:

$$\oint_{\Gamma} (\bar{a}\bar{n})\, ds = \iint_T \operatorname{div} \bar{a}\, d\tau \qquad (69.6)$$

ὁ ὁποῖος μὲ λόγια ἐκφράζει τὸ ἑξῆς: *τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα ὡς πρὸς s τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου $\bar{a}\bar{n}$ ἐπὶ μιᾶς κλειστῆς γραμμῆς, ἰσοῦται μὲ τὸ διπλὸν ὁλοκλήρωμα τῆς ἀποκλίσεως τῆς $\bar{a}$ ἐπὶ τοῦ χωρίου τοῦ περικλειομένου ὑπὸ τῆς γραμμῆς.* Ὁ τύπος (69.3) λέγεται τύπος τοῦ Gauss ἢ τοῦ Riemann μία δὲ ἀξιοσημείωτος ἐφαρμογὴ αὐτοῦ γίνεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐμβαδῶν ἐπιπέδων χωρίων. Πράγματι ἐὰν θέσωμεν εἰς αὐτὸν $P=-y$, $Q=0$ ἢ $P=0$, $Q=x$ καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν τύπον (63.9) προκύπτει:

$$|T| = \oint_{\Gamma^+} x dy = -\oint_{\Gamma^+} y dx = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma^+} x dy - y dx \qquad (69.7)$$

Ἰδοὺ τώρα ὡς ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος τοῦ Gauss τὴν ἀπόδειξιν τοῦ τύπου (63.6) τὴν ὁποίαν ἔχομεν ὑποσχεθεῖ ὅταν μιλούσαμε διὰ τὸν μετασχηματισμὸν τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ (63.4) τὸ ἐσωτερικὸν καὶ τὸ σύνορον Γ τοῦ χωρίου Τ ἀπεικονίζονται ἀντιστοίχως εἰς τὸ ἐσωτερικὸν καὶ εἰς τὸ σύνορον Γ_1 τοῦ T_1· ἐὰν λάβωμεν τὴν συνάρτησιν $Q(x,y)$ ἔτσι ὥστε νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν σχέσιν $Q_x=\Phi$, ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ Riemann θὰ ἔχωμεν :

$$\iint_T \Phi(x,y)\,dxdy = \oint_{\Gamma^+} Q(x,y)\,dy$$

Μετασχηματίζομεν τώρα διὰ τῶν σχέσεων (63.4) τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους εἰς ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα ἐπὶ τοῦ Γ_1, ὁπότε προκύπτει :

$$\iint_T \Phi(x,y)\,dxdy = \epsilon\oint_{\Gamma_1^+} Q(\sigma,f)(y_u du + y_v dv) = \epsilon\oint_{\Gamma_1^+} Q y_u du + Q y_v dv$$

ὅπου ὁ συντελεστὴς ϵ ἰσοῦται μὲ $+1$ ὅταν κατὰ τὴν ἀπεικόνισιν τοῦ Γ ἐπὶ τοῦ Γ_1 διατηρεῖται ἡ θετικὴ φορὰ διαγραφῆς καὶ μὲ -1 ὅταν ἀντιστρέφεται. Μετασχηματίζοντες τώρα τὸ δεξιὸν μέλος κατὰ τὸν τύπον τοῦ Riemann προκύπτει :

$$\iint_T \Phi(x,y)\,dxdy = \epsilon\iint_{T_1}\left[(Qy_v)_u - (Qy_u)_v\right]dudv = \epsilon\iint_{T_1}(Q_u y_v - Q_v y_u)\,dudv$$

Κατὰ τὸν κανόνα παραγωγίσεως συνθέτων συναρτήσεων θὰ ἔχωμεν :

$$Q_u = Q_x x_u + Q_y y_u = \Phi x_u + Q_y y_u\,, \quad Q_v = Q_x x_v + Q_y y_v = \Phi x_v + Q_y y_v$$

ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸ δεξιὸν μέλος μετὰ τὴν ἀναγωγὴν προκύπτει :

$$\iint_T \Phi(x,y)\,dxdy = \iint_{T_1}\Phi(\sigma,f)\,\epsilon\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,dudv \qquad (1)$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι $\Phi\equiv 1$ ἀπὸ τὸν τύπον αὐτὸν θὰ ἔχωμεν :

$$|T| = \iint_T dxdy = \iint_{T_1}\epsilon\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,dudv$$

Ἐπειδὴ ἡ Jacobien ἐξ ὑποθέσεως εἶναι συνεχὴς καὶ διάφορος τοῦ μηδενὸς ἐπὶ τοῦ T_1 θὰ ἔχῃ ἐπ' αὐτοῦ σταθερὸν πρόσημον, διότι ἐὰν σὲ δύο σημεῖα Α, Β ἐλάμβανε ἑτερόσημες τιμὲς θὰ ἔπρεπε νὰ μηδενίζεται τοὐλάχιστον μία φορὰ ἐπὶ μιᾶς τεθλασμένης γραμμῆς μὲ ἄκρα τὰ Α, Β τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον· ἐπειδὴ ὅμως τὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς τελευταίας σχέσεως εἶναι θετικόν, τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνῃ καὶ διὰ τὸ δεξιὸν καὶ ἐπειδὴ ἡ Jacobien ἔχει σταθερὸν πρόσημον θὰ εἶναι :

$$\epsilon\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$

ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) προκύπτει τὸ ζητούμενον.

Ἂς θεωρήσωμεν τώρα ἕνα τριδιάστατον διανυσματικὸν πεδίον μὲ συνάρτησιν :

$$\bar{a} = [\,P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\,] \qquad (69.8)$$

Μεταξὺ τῶν ἐπιφανειακῶν καὶ τῶν τριπλῶν ὁλοκληρωμάτων ὑφίσταται πάλι μία σχέσις ἡ ὁποία δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γενίκευσις τῆς (69.6) καὶ ἐκφράζεται ἀπό τό ἑξῆς θεώρημα τοῦ Gauss (διά τόν χῶρον).

Πρότασις (69.2).— *Ἐάν οἱ συντεταγμένες τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a}$ καί αἱ μερικαί αὐτῶν παράγωγοι εἶναι συνεχεῖς ἐπί ἑνός χωρίου Ω τοῦ χώρου τῶν x,y,z τό ὁποῖον περικλείεται ἀπό μίαν λείαν προσανατολισμένην ἐπιφάνεια Σ μέ θετικήν ὄψιν τήν ἐξωτερικήν, τότε ἰσχύει ὁ τύπος:*

Gauss

$$\iint_{\Sigma} \bar{a}d\bar{\sigma} = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\,\bar{a}\,d\omega \qquad (69.9)$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἔστω ὅτι τό χωρίον Ω εἶναι κανονικόν, δηλαδή τό σύνορον αὐτοῦ Σ τέμνεται σέ δύο τό πολύ σημεῖα ἀπό τίς παράλληλες πρός τούς ἄξονες εὐθεῖες· ἐάν εἶναι T ἡ προβολή τοῦ χωρίου εἰς τό ἐπίπεδον τῶν x,y καί Σ_1, Σ_2 τό κάτω καί τό ἄνω τμῆμα τῆς Σ μέ ἐξισώσεις ἀντιστοίχως $z=z_1(x,y)$ καί $z=z_2(x,y)$ θά ἔχωμεν ὅπως προκύπτει καί ἀπό τό σχ. (69.5):

$$\iiint_{\Omega} R_z dxdydz = \iint_T dxdy\int_{z_1}^{z_2} R_z \partial z = \iint_T \left[R(x,y,z_2)-R(x,y,z_1)\right]dxdy = \iint_T R(x,y,z_2)dxdy - \iint_T R(x,y,z_1)dxdy =$$

$$= \iint_{\Sigma_2} R(x,y,z)\,dxdy + \iint_{\Sigma_1} R(x,y,z)\,dxdy = \iint_{\Sigma_1+\Sigma_2} R\,dxdy$$

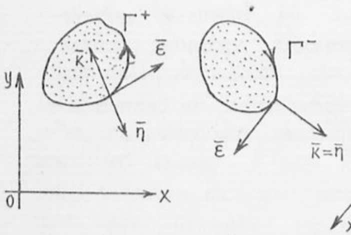
δηλαδή ἔχομεν τελικῶς τήν σχέσιν:

$$\iiint_{\Omega} R_z dxdydz = \iint_{\Sigma} R\,dxdy$$

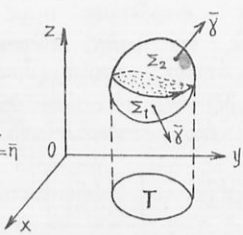
Ἀντιστοίχως ἐργαζόμενοι ἐπί τῶν συναρτήσεων P, Q εὑρίσκομεν:

$$\iiint_{\Omega} P_x dxdydz = \iint_{\Sigma} P\,dydz, \qquad \iiint_{\Omega} Q_y dxdydz = \iint_{\Sigma} Q\,dzdx$$

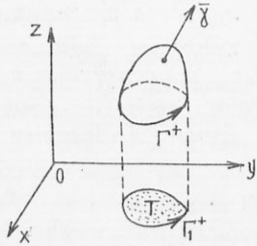
Προσθέτοντες κατά μέλη τίς τρεῖς τελευταῖες σχέσεις καί λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τούς τύπους (67.18) καί (68.6) προκύπτει τό ζητούμενον· ὁ τύπος (69.9) λέγεται τύπος τοῦ Gauss ἤ τύπος τοῦ Ostrogradski.



Σχ. (69.4)



Σχ. (69.5)



Σχ. (69.6)

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα μίαν προσανατολισμένην ἐπιφάνειαν Σ ἡ ὁποία περατοῦται σέ μία ἤ καί περισσότερες κλειστές καμπύλες Jordan· θετική φορά διαγραφῆς ἤ περιοδεύσεως τῶν γραμμῶν αὐτῶν λέγεται ἐκείνη ἡ ὁποία σχηματίζει δεξιόστροφον σύστημα μέ τό διάνυσμα προσανατολισμοῦ $\bar{\gamma}$ εἰς τά γειτονικά πρός αὐτές σημεῖα τῆς ἐπιφανείας· διά νά σημειώσωμεν τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα κατά τήν φοράν αὐτήν, χρησι-

μοποιοῦμεν πάλι τοὺς συμβολισμοὺς (69.1).
Ἕνα ἀνοικτὸν τριδιάστατον χωρίον λέγεται ἁπλῆς συνοχῆς, ὅταν κάθε κλειστὴ καμπύλη Jordan ποὺ ἀνήκει εἰς αὐτὸ δύναται διὰ συνεχοῦς μεταβολῆς τῆς θέσεως καὶ τοῦ σχήματος αὐτῆς νὰ συμπτυχθῇ εἰς ἕνα σημεῖον τοῦ χωρίου, χωρὶς νὰ ἐξέλθῃ ἐξ' αὐτοῦ· ὅταν ἕνα χωρίον δὲν εἶναι ἁπλῆς συνοχῆς, λέγεται χωρίον πολλαπλῆς συνοχῆς. Τὰ χωρία τὰ περικλειόμενα ἀπὸ μίαν σφαίραν, ἕνα ἐλλειψοειδὲς καὶ γενικῶς ἀπὸ μίαν ἐπιφάνειαν Jordan, εἶναι χωρία ἁπλῆς συνοχῆς· τὸ χωρίον ὅμως τὸ ὁποῖον π.χ. ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ σημεῖα τὰ κείμενα εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς σφαίρας καὶ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου ποὺ ἔχει ἀκτῖνα βάσεως μικροτέρα ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας καὶ ἄξονα μίαν διάμετρον αὐτῆς, εἶναι χωρίον πολλαπλῆς συνοχῆς.
Μεταξὺ τῶν ἐπικαμπυλίων καὶ τῶν ἐπιφανειακῶν ὁλοκληρωμάτων ὑφίσταται μία σχέσις ἡ ὁποία ἐκφράζεται ἀπὸ τὸ ἑξῆς θεώρημα τοῦ Stokes:

Πρότασις (69.3).— *Ἐὰν οἱ συντεταγμένες τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a}$ εἶναι συνεχεῖς καὶ ἔχουν συνεχεῖς μερικὰς παραγώγους ἐπὶ μιᾶς λείας προσανατολισμένης ἐπιφανείας Σ, ἡ ὁποία περατοῦται εἰς μίαν λείαν γραμμὴν Γ, τότε ἰσχύει ὁ τύπος :*

$$\oint_{\Gamma^+} \bar{a}\,d\bar{r} = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot}\bar{a}\,\overline{d\sigma} \qquad (69.10)$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἔστω $z=f_3(x,y)$ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας Σ ἡ ὁποία ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι προβάλλεται ἀμφιμονοσήμαντα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $z=0$ εἰς τὸ χωρίον T τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τὴν γραμμὴν Γ_1 ἡ ὁποία εἶναι προβολὴ τῆς Γ σχ.(69.6)· ὅταν τὸ σημεῖον (x,y,z) διαγράφῃ τὴν Γ κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν περιοδεύσεως, ἡ προβολὴ αὐτοῦ $(x,y,0)$ θὰ διαγράφῃ τὴν Γ_1 κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν περιοδεύσεως ὅταν $\bar{\gamma}\bar{k}>0$ καὶ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν ὅταν $\bar{\gamma}\bar{k}<0$, ἐπομένως ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ Riemann (69.3) θὰ ἔχωμεν :

$$\int_{\Gamma^+} P(x,y,z)dx = \epsilon\int_{\Gamma_1^+} P(x,y,f_3)dx = -\epsilon\iint_T \left(P_y + P_z\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy \qquad (1)$$

μὲ τὴν γνωστὴν σημασίαν τοῦ συμβόλου ε, δηλαδὴ $\epsilon=+1$ ὅταν $\bar{\gamma}\bar{k}>0$ καὶ $\epsilon=-1$ ὅταν $\bar{\gamma}\bar{k}<0$. Ἐὰν λάβωμεν τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $(0, P_z, -P_y)$ ἐπὶ τῆς Σ, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸν πρῶτον ἐκ τῶν τύπων (67.20) :

$$\iint_{\Sigma} P_z dzdx - P_y dxdy = \epsilon\iint_T \left(-P_y - P_z\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy = -\epsilon\iint_T \left(P_y + P_z\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy$$

ἐκ τῆς ὁποίας διὰ συγκρίσεως μετὰ τῆς (1) προκύπτει

$$\int_{\Gamma^+} Pdx = \iint_{\Sigma} P_z dxdz - P_y dxdy \qquad (2)$$

Ἐὰν ἡ Σ δὲν προβάλλεται ὁλόκληρη ἀμφιμονοσήμαντα εἰς τὸ ἐπίπεδον $z=0$, χωρίζομεν αὐτὴν εἰς μικρότερα τμήματα διὰ καταλλήλων διαχωριστικῶν γραμμῶν εἰς τὰ ὁποῖα νὰ συμβαίνῃ αὐτό, ὁπότε εὑρίσκομεν πάλι τὸν τύπον (2)· ἐργαζόμενοι ἀντιστοίχως εὑρίσκομεν

$$\int_{\Gamma^+} Qdy = \iint_{\Sigma} Q_x dxdy - P_z dydz \ , \ \int_{\Gamma^+} Rdz = \iint_{\Sigma} R_z dydz - Q_x dzdx \qquad (3)$$

ὁπότε προσθέτοντες κατὰ μέλη τοὺς τύπους (2) καὶ (3) προκύπτει τὸ ζητούμενον.

Ὁ τύπος τοῦ Stokes ἐπιδέχεται γενίκευσιν ὁμοίαν μὲ ἐκείνην τοῦ τύπου τοῦ Riemann· δηλαδὴ ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια Σ περατοῦται ὄχι εἰς μίαν ἀλλὰ εἰς $\nu+1$ κλειστὲς γραμμὲς $\Gamma, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_\nu$ θὰ ἔχωμεν τὸν ἑξῆς γενικευμένον τύπον:

Stokes $$\oint_{\Gamma+\Gamma_1+\cdots+\Gamma_\nu} \bar{a}d\bar{r} = \iint_{\Sigma} \mathrm{rot}\bar{a}d\bar{\sigma} \qquad (69.11)$$ +

Προφανῶς ὁ τύπος τοῦ Riemann γραμμένος ὑπὸ τὴν μορφὴν (69.5) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μερικὴ περίπτωσις τοῦ τύπου τοῦ Stokes.

Θὰ δείξωμεν τώρα χρησιμοποιοῦντες τὸν τύπον τοῦ Gauss τὸν ἑξῆς τύπον:

$$\iint_{\Sigma} (\varphi \mathrm{grad}\sigma - \sigma \mathrm{grad}\varphi)\, d\bar{\sigma} = \iiint_{\Omega} (\varphi\Delta\sigma - \sigma\Delta\varphi) d\omega \qquad (69.12)$$ + Green

ὅπου Ω κλειστὸν τριδιάστατον χωρίον περικλειόμενον ὑπὸ τῆς προσανατολισμένης ἐπιφανείας Σ μὲ θετικὴν ὄψιν τὴν ἐξωτερικὴν καὶ φ, σ σημειοσυναρτήσεις μὲ συνεχεῖς μερικὰς παραγώγους· πράγματι ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $\bar{a}$ τὴν διανυσματικὴν συνάρτησιν ὑπὸ τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ πρώτου μέλους θὰ ἔχωμεν :

$$\bar{a} = \varphi \mathrm{grad}\sigma - \sigma \mathrm{grad}\varphi = \varphi\cdot(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) - \sigma(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$$

$$\mathrm{div}\,\bar{a} = \varphi(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) - \sigma(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = \varphi\Delta\sigma - \sigma\Delta\varphi$$

ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον τοῦ Gauss (69.9) προκύπτει τὸ ζητούμενον. Ὁ τύπος (69.12) εἶναι πολὺ χρήσιμος εἰς τὴν μαθηματικὴν φυσικὴν καὶ λέγεται τύπος τοῦ Green, λαμβάνοντες δὲ ὑπ' ὄψιν τὸν τύπον (10.3) τῆς κατὰ κατεύθυνσιν παραγώγου, γράφεται καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν :

όχι νομίζω
Green $$\iint_{\Sigma} \left(\varphi \frac{\partial\sigma}{\partial\gamma} - \sigma \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\right) d\sigma = \iiint_{\Omega} (\varphi\Delta\sigma - \sigma\Delta\varphi) d\omega \qquad (69.13)$$

Ἕνα ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα ἐπὶ ἑνὸς ἀνοικτοῦ τόξου λέγομεν ὅτι εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς γραμμῆς ὁλοκληρώσεως, ὅταν ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τόξου καὶ ὄχι ἀπὸ τὴν μορφὴν τοῦ τόξου ὁλοκληρώσεως.

Πρότασις (69.4).– *Ἐὰν οἱ συντεταγμένες μιᾶς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a}$ καὶ αἱ μερικαὶ παράγωγοι αὐτῶν, εἶναι συνεχεῖς ἐπὶ ἑνὸς τριδιαστάτου χωρίου Ω καὶ τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα αὐτῆς εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς γραμμῆς ὁλοκληρώσεως, ἡ συνάρτησις $\bar{a}$ εἶναι ἡ κλίσις κάποιας βαθμωτῆς συναρτήσεως $\Phi(M)$, δηλαδὴ εἶναι :*

$$\bar{a} = \mathrm{grad}\, \Phi(M) \qquad (69.14)$$

Ἀντιστρόφως ἐάν ἰσχύῃ ἡ σχέσις αὐτή, τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα τῆς $\bar{a}$ ἐπί τοῦ χωρίου Ω εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς γραμμῆς ὁλοκληρώσεως· ἀντιστοίχως πρότασις ἰσχύει μιά συναρτήσεις $\bar{a}$ τοῦ διδιαστάτου χώρου τῶν x,y.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἔστω ὅτι τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς γραμμῆς ὁλοκληρώσεως· ἐάν A,B εἶναι τά ἄκρα τοῦ τόξου ὁλοκληρώσεως καί ὑποθέσωμεν τό πρῶτον ἐξ αὐτῶν σταθερόν, τότε τό ὁλοκλήρωμα:

$$\int_{AB} \bar{a}\,d\bar{r}$$

γιά κάθε τόξον πού συνδέει τά σημεῖα αὐτά θά εἶναι μία συνάρτησις τῶν συντεταγμένων τοῦ σημείου $B(x,y,z)$, δηλαδή θά εἶναι:

$$\int_{AB} \bar{a}\,d\bar{r} = \Phi(x,y,z)$$

Ἐάν θεωρήσωμεν τά σημεῖα $B_1(x+h,y,z)$, $B_2(x,y+k,z)$, $B_3(x,y,z+\ell)$ θά ἔχωμεν σχ(69.7):

$$\Phi(x+h,y,z) = \int_{ABB_1} \bar{a}\,d\bar{r} = \int_{AB} \bar{a}\,d\bar{r} + \int_{BB_1} \bar{a}\,d\bar{r} = \Phi(x,y,z) + \int_{BB_1} \bar{a}\,d\bar{r}$$

$$\Phi(x+h,y,z) - \Phi(x,y,z) = \int_{BB_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Ἐπί τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος BB_1 τά y,z εἶναι σταθερά, ἑπομένως θά εἶναι:

$$\Phi(x+h,y,z) - \Phi(x,y,z) = \int_x^{x+h} P(t,y,z)\,dt = hP(x+h\theta_1,y,z)$$

καί ὁμοίως ἐργαζόμενοι προκύπτουν δύο ἀκόμη ἀντίστοιχες σχέσεις:

$$\Phi(x,y+k,z) - \Phi(x,y,z) = \int_y^{y+k} Q(x,t,z)\,dt = kQ(x,y+k\theta_2,z)$$

$$\Phi(x,y,z+\ell) - \Phi(x,y,z) = \int_z^{z+\ell} R(x,y,t)\,dt = \ell R(x,y,z+\ell\theta_2)$$

Ἐάν τώρα διαιρέσωμεν ἀμφότερα τά μέλη τῶν τριῶν τελευταίων ἀντιστοίχως μέ h,k,ℓ καί λάβωμεν τά ὅρια ὅταν $h,k,\ell \to 0$ προκύπτει:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = R$$

δηλαδή ἡ σχέσις (69.14). Ἀντιστρόφως ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις αὐτή· ἐάν εἶναι $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ μία παραμετρική παράστασις ἑνός τόξου AB τό ὁποῖον συνδέει δύο ἐσωτερικά σημεῖα A,B τοῦ χωρίου Ω, θά ἔχωμεν:

$$\int_{AB} \bar{a}\,d\bar{r} = \int_{AB} \operatorname{grad}\Phi\,d\bar{r} = \int_{AB} \Phi_x dx + \Phi_y dy + \Phi_z dz = \int_{t_A}^{t_B} d\Phi[x(t),y(t),z(t)]\,dt$$
$$= \Phi[x(t_B),y(t_B),z(t_B)] - \Phi[x(t_A),y(t_A),z(t_A)]$$

δηλαδή θά ἔχωμεν χρησιμοποιοῦντες σύντομον συμβολισμόν:

$$\int_A^B \bar{a}\,d\bar{r} = \Phi(B) - \Phi(A) \qquad (69.15)$$

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι τό ὁλοκλήρωμα ἰσοῦται μέ τήν διαφοράν τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\Phi(M)$ εἰς τά ἄκρα τοῦ τόξου ὁλοκληρώσεως καί ὄχι ἀπό τήν μορφήν τοῦ τόξου αὐτοῦ, ἑπομένως τό ζητούμενον ἀπεδείχθη· ἡ ἀπόδειξις παραμένει ἡ ἴδια ὅταν ἡ $\bar{a}$ εἶναι συνάρτησις τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y μέ μόνη διαφορά ὅτι ἡ Φ εἶναι τώρα συνάρτησις μόνον τῶν x,y.

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ τύπος (69.15) μᾶς ἐνθυμίζει τὸν τύπον ὑπολογισμοῦ ἑνὸς ὡρισμένου ὁλοκληρώματος ὅταν γνωρίζωμεν μία παράγουσα τῆς ὁλοκληρωτέας συναρτήσεως. Ἐὰν λοιπὸν τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς γραμμῆς ὁλοκλήρωμα, τότε διὰ τὸν ὑπολογισμὸν αὐτοῦ ἀρκεῖ, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸν τύπον (69.15), νὰ γνωρίζομεν τὴν συνάρτησιν $\Phi(M)$· τὴν συνάρτησιν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὑπολογίζοντες κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα τῆς $\bar{a}$ ἀπὸ ἕνα σταθερὸν σημεῖον $A(x_0,y_0,z_0)$ μέχρι ἑνὸς ἄλλου $B(x,y,z)$ λαμβάνοντες ὡς τόξον ὁλοκληρώσεως ἕνα οἱονδήποτε ἐξ' αὐτῶν ποὺ συνδέουν τὰ σημεῖα αὐτά. Ἕνας εὔχρηστος τύπος προκύπτει ὅταν λάβωμεν ὡς γραμμὴν ὁλοκληρώσεως τὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΑΓΔΒ μὲ ἐνδιάμεσες κορυφὲς τὰ σημεῖα $\Gamma(x_0,y_0,z)$, $\Delta(x_0,y,z)$ σχ. (69.8)· πράγματι λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλα πρὸς τοὺς ἄξονες τῶν z,y,x ἐπὶ τοῦ πρώτου ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι $dx=dy=0$, ἐπὶ τοῦ δευτέρου $dx=dz=0$ καὶ ἐπὶ τοῦ τρίτου $dy=dz=0$, ἐπομένως θὰ ἔχωμεν:

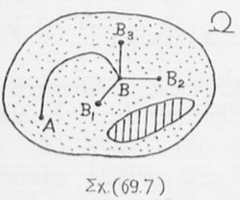
$$\Phi=\int_{A\Gamma\Delta B}\bar{a}d\bar{r}=\int_{A\Gamma}\bar{a}d\bar{r}+\int_{\Gamma\Delta}\bar{a}d\bar{r}+\int_{\Delta B}\bar{a}d\bar{r}=\int_{z}^{z_0}R(x_0,y_0,t)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t,z)dz+\int_{x_0}^{x}P(t,y,z)dt$$

δηλαδὴ ἡ συνάρτησις Φ ὁρίζεται μονοσήμαντα κατὰ προσέγγισιν προσθετικῆς σταθερᾶς ἀπὸ τὸν γενικὸν τύπον:

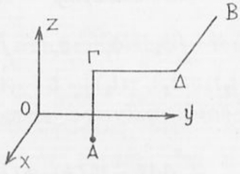
$$\Phi(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(t,y,z)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t,z)dt+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,t)dt \qquad (69.16)$$

Ἡ ἀπόδειξις παραμένει ἡ ἴδια ὅταν ἡ $\bar{a}$ εἶναι συνάρτησις τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y μὲ μόνη διαφορὰ ὅτι ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ὁλοκληρώσεως θὰ ἔχῃ δύο μόνον πλευρὲς ἀντιστοίχως παράλληλες πρὸς τοὺς ἄξονες, ἡ δὲ Φ θὰ εἶναι συνάρτησις μόνο τῶν μεταβλητῶν x,y καὶ προσδιορίζεται ἀπὸ τὸν τύπον:

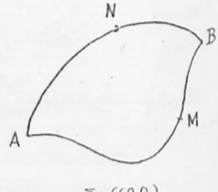
$$\Phi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)dt \qquad (69.17)$$



Σχ.(69.7)



Σχ.(69.8)



Σχ.(69.9)

Πρότασις (69.5).– *Ἐὰν τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a}$ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς γραμμῆς ὁλοκληρώσεως, εἶναι μηδὲν ἐπὶ κάθε κλειστῆς λείας γραμμῆς καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἔστω ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς γραμμῆς ὁλοκληρώσεως· ἐὰν Γ εἶναι μία λεία κλειστὴ γραμμή, τότε ὑποδιαιροῦντες αὐτὴν διὰ τῶν σημείων A,B σὲ δύο τόξα AMB, ANB θὰ ἔχωμεν σχ (69.9):

$$\int_{\Gamma} \bar{a}d\bar{r} = \int_{AMB} \bar{a}d\bar{r} + \int_{BNA} \bar{a}d\bar{r} = \int_{AMB} \bar{a}d\bar{r} - \int_{ANB} \bar{a}d\bar{r} = \int_{A}^{B} \bar{a}d\bar{r} - \int_{A}^{B} \bar{a}d\bar{r} = 0$$

Ἀντιστρόφως ἐὰν τὸ ὁλοκλήρωμα εἶναι μηδὲν ἐπὶ κάθε κλειστῆς γραμμῆς, τότε ἐὰν AMB, ANB εἶναι δύο διαφορετικοὶ δρόμοι οἱ ὁποῖοι συνδέουν τὰ σημεῖα A,B καὶ παραστήσωμεν μὲ Γ τὴν κλειστὴν γραμμὴν AMBNA, θὰ ἔχωμεν :

$$0 = \int_{\Gamma} \bar{a}d\bar{r} = \int_{AMB} \bar{a}d\bar{r} + \int_{BNA} \bar{a}d\bar{r} = \int_{AMB} \bar{a}d\bar{r} - \int_{ANB} \bar{a}d\bar{r}$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται ὅτι τὰ ὁλοκληρώματα ἐπὶ τῶν δύο δρόμων AMB, ANB εἶναι ἴσα καὶ ἔτσι ἀπεδείχθη ἡ πρότασις.

Πρότασις (69.6). — *Ἐὰν οἱ συντεταγμένες τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a}$ καὶ αἱ μερικαὶ παράγωγοι αὐτῶν εἶναι συνεχεῖς ἐπὶ ἑνὸς χωρίου Ω καὶ τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα αὐτῆς εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς γραμμῆς ὁλοκληρώσεως, εἶναι :*

$$rot\bar{a} = 0 \qquad (69.18)$$

Ἀντιστρόφως ἐὰν σὲ κάθε σημεῖον ἑνὸς χωρίου Ω ἁπλῆς συνοχῆς ἡ περιστροφὴ τῆς $\bar{a}$ εἶναι μηδέν, τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα αὐτῆς εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς γραμμῆς ὁλοκληρώσεως· ἀντίστοιχος πρότασις ἰσχύει καὶ διὰ συναρτήσεις $\bar{a}$ τοῦ διδιαστάτου χώρου τῶν x,y.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἔστω ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς γραμμῆς ὁλοκληρώσεως· κατὰ τὴν πρότασιν (69.4) ἡ $\bar{a}$ θὰ εἶναι ἡ κλίσις κάποιας βαθμωτῆς συναρτήσεως Φ, δηλαδὴ θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις (69.14), ὁπότε λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸν τελευταῖον ἐκ τῶν τύπων (68.9) προκύπτει ἡ (69.18). Ἀντιστρόφως ἔστω ὅτι πληροῦται ἡ σχέσις αὐτή· ἐπειδὴ τὸ χωρίον εἶναι ἁπλῆς συνοχῆς, γιὰ κάθε κλειστὴ γραμμὴ Γ τοῦ χωρίου ὑπάρχει ἐπιφάνεια προσανατολίσιμη Σ ἡ ὁποία περατοῦται εἰς αὐτήν, ὁπότε ἀπὸ τὸν τύπον (69.10) ἔπεται ὅτι τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα τῆς $\bar{a}$ ἐπὶ τῆς γραμμῆς Γ εἶναι μηδέν, καὶ ἀπὸ τὴν πρότασιν (69.5) ἔπεται ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς γραμμῆς ὁλοκληρώσεως καὶ ἡ πρότασις ἀπεδείχθη. Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ὅταν ἡ $\bar{a}$ εἶναι συνάρτησις τοῦ διδιαστάτου χώρου παραμένει ἡ ἴδια μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἀντὶ τῆς σχέσεως (69.10) θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν (69.5). Ἡ συνθήκη (69.18) γιὰ συναρτήσεις $\bar{a}$ τοῦ τριδιαστάτου χώρου εἶναι προφανῶς ἰσοδύναμος μὲ τὶς τρεῖς σχέσεις :

$$R_y - Q_z = 0, \quad P_z - R_x = 0, \quad Q_x - P_y = 0 \qquad (69.19)$$

γιὰ συναρτήσεις δὲ τοῦ διδιαστάτου χώρου τῶν x,y εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν σχέσιν :

$$Q_x - P_y = 0 \qquad (69.20)$$

Μπορούμε ἐπίσης νά ποῦμε ὅτι οἱ σχέσεις (69.19) ἐκφράζουν τίς ἀναγκαίες καί ἱκανές συνθῆκες γιά νά εἶναι ἡ τριώνυμος διαφορική παράστασις:

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

τέλειον διαφορικόν, ἀντιστοίχως δέ ἡ σχέσις (69.18) ἐκφράζει τήν ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι ἡ διώνυμος διαφορική παράστασις:

$$Pdx+Qdy$$

τέλειον διαφορικόν. Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τήν πρότασιν (69.4) δυνάμεθα συντόμως νά διατυπώσωμεν καί ὡς ἑξῆς τήν ἀποδειχθεῖσα πρότασιν: *Ἕνα ἀστρόβιλον πεδίον προέρχεται ἐκ δυναμικοῦ καί ἀντιστρόφως πεδίον προερχόμενον ἐκ δυναμικοῦ εἶναι ἀστρόβιλον.*

Πρότασις (69.7). – *Ἐάν οἱ συντεταγμένες τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a}$ καί αἱ μερικαί παράγωγοι αὐτῶν εἶναι συνεχεῖς ἐπί ἑνός χωρίου Ω καί σέ κάθε σημεῖον αὐτοῦ εἶναι:*

$$\operatorname{div}\bar{a} = 0 \qquad (69.21)$$

τότε ἡ $\bar{a}$ εἶναι ἡ περιστροφή μιᾶς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{\beta}$, δηλαδή:

$$\bar{a} = \operatorname{rot}\bar{\beta} \qquad (69.22)$$

Ἀντιστρόφως ἐάν ἡ συνάρτησις $\bar{a}$ εἶναι ἡ περιστροφή μιᾶς διανυσματικῆς συναρτήσεως, τότε ἡ ἀπόκλισις αὐτῆς εἶναι μηδέν σέ κάθε σημεῖον τοῦ χωρίου.

Λ ύ σ ι ς. Ἔστω ὅτι ἡ ἀπόκλισις τῆς $\bar{a}$ εἶναι μηδέν δηλαδή:

$$P_x + Q_y + R_z = 0 \qquad (1)$$

Διά νά δείξωμεν ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις (69.22), ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι εἶναι δυνατόν νά προσδιορίσωμεν τρεῖς συναρτήσεις Α, Β, Γ τῶν μεταβλητῶν x, y, z τέτοιες ὥστε νά ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$\Gamma_y - B_z = P,\ \ A_z - \Gamma_x = Q,\ \ B_x - A_y = R \qquad (2)$$

Πρός τοῦτο λαμβάνομεν $\Gamma = 0$, ὁπότε ἀπό τίς δύο πρῶτες προκύπτει:

$$B = -\int_{z_0}^{z} P(x,y,z)dz + \sigma(x,y), \qquad A = \int_{z_0}^{z} Q(x,y,z)dz + \varphi(x,y)$$

ὅπου σ, φ αὐθαίρετες συναρτήσεις τῶν x, y· ἀντικαθιστῶντες τίς ἐκφράσεις αὐτές τῶν Α, Β εἰς τήν τρίτη τῶν σχέσεων (2) καί λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τήν (1) προκύπτει:

$$\int_{z_0}^{z} -(P_x + Q_y)dz + \sigma_x - \varphi_y = R$$

$$\int_{z_0}^{z} R_z dz + \sigma_x - \varphi_y = R$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ὁλοκληρώνοντες μερικῶς ὡς πρός z προκύπτει τελικῶς:

$$R(x,y,z) - R(x,y,z_0) + \sigma_x - \varphi_y = R$$

$$\sigma_x - \varphi_y = R(x,y,z_0)$$

Ἐάν λοιπόν προσδιορίσωμεν τίς συναρτήσεις σ, φ ἔτσι ὥστε νά ἐπαληθεύουν τήν τελευταία σχέσιν θά ἔχωμεν τό ζητούμενον· ἀλλά αὐτό εἶναι πάντοτε δυνατόν καί μάλιστα κατ' ἀπείρους τρόπους διότι ἐάν π.χ. λάβωμεν $\varphi = 0$ θά εἶναι:

$$\sigma(x,y) = \int_{x_0}^{x} R(x,y,z_0)dx$$

ὁπότε ἕνα ἀπό τά διανύσματα $\bar{\beta}$ πού ἐπαληθεύουν τήν (69.22), ἔχει συντεταγμένες:

$$A=\int_{z_0}^{z} Q(x,y,z)\,dz, \qquad B=-\int_{z_0}^{z} P(x,y,z)\,dz+\int_{x_0}^{x} R(x,y,z_0)\,dx, \quad \Gamma=0 \qquad (69.23)$$

καί ἔτσι τό πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως ἀπεδείχθη. Ἀντιστρόφως ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις (69.22), ἀπό τόν τελευταῖον ἐκ τῶν τύπων (68.9) προκύπτει ὅτι ἡ ἀπόκλισις τῆς $\bar{\alpha}$ εἶναι μηδέν καί ἡ πρότασις ἀπεδείχθη. Ἐάν $\bar{\beta}_1$ εἶναι μία ἄλλη συνάρτησις ἡ ὁποία ἐπαληθεύει τήν σχέσιν (69.22) θά εἶναι:

$$\operatorname{rot}\bar{\beta}_1 \equiv \operatorname{rot}\bar{\beta} \qquad \text{ἤ} \qquad \operatorname{rot}(\bar{\beta}_1-\bar{\beta}) \equiv 0$$

ἐπομένως κατά τήν προηγουμένην πρότασιν θά εἶναι:

$$\bar{\beta}_1-\bar{\beta} = \operatorname{grad}\Phi$$

Ἐάν λοιπόν ἡ συνάρτησις $\bar{\beta}$ ἐπαληθεύη τήν σχέσιν (69.20), ἡ πιό γενική συνάρτησις ἡ ὁποία ἐπαληθεύει τήν σχέσιν αὐτήν δίδεται ἀπό τόν τύπον:

$$\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}+\operatorname{grad}\Phi \qquad (69.24)$$

ὅπου $\Phi(x,y,z)$ συνάρτησις συνεχής καί μέ συνεχεῖς μερικάς παραγώγους.

Πρότασις (69.8). – *Ἐάν ἐπί τριδιαστάτου χωρίου Ω τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{\alpha}$ δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἐπιφάνεια ὁλοκληρώσεως ἀλλά μόνον ἀπό τήν γραμμήν εἰς τήν ὁποίαν περατοῦται αὐτή, ἡ ἀπόκλισις τῆς $\bar{\alpha}$ εἶναι μηδέν σέ κάθε σημεῖον τοῦ χωρίου Ω· ἀντιστρόφως ἐάν ἡ ἀπόκλισις τῆς συναρτήσεως $\bar{\alpha}$ εἶναι μηδέν σέ κάθε σημεῖον τοῦ Ω, τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα αὐτῆς εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἐπιφανείας ὁλοκληρώσεως.*

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Θεωροῦμεν ἕνα ὑποχωρίον Ω_1 τοῦ χωρίου Ω περικλειόμενον ὑπό ἐπιφανείας Σ, τήν ὁποίαν διά μιᾶς κλειστῆς γραμμῆς Γ ὑποδιαιροῦμεν σέ δύο τμήματα Σ_1, Σ_2 σχ (69.5)· ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα τῆς $\bar{\alpha}$ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἐπιφανείας ὁλοκληρώσεως, τότε προσανατολίζοντες τίς Σ, Σ_2 μέ θετικήν ὄψιν τήν ἐξωτερικήν καί τήν Σ_1 μέ θετικήν ὄψιν τήν ἐσωτερικήν, θά ἔχωμεν:

$$\iiint_{\Omega_1} \operatorname{div}\bar{\alpha}\,d\omega = \iint_{\Sigma} \bar{\alpha}\,d\bar{\sigma} = \iint_{\Sigma_2} \bar{\alpha}\,d\bar{\sigma} - \iint_{\Sigma_1} \bar{\alpha}\,d\bar{\sigma} = 0 \qquad (1)$$

καί ἐπειδή αὐτό συμβαίνει γιά κάθε ὑποχωρίον Ω_1 θά εἶναι τό $\operatorname{div}\bar{\alpha}$ μηδέν σέ κάθε σημεῖον τοῦ Ω. Ἀντιστρόφως ἐάν ἡ ἀπόκλισις τῆς $\bar{\alpha}$ εἶναι μηδέν, κατά τήν προηγουμένην πρότασιν θά εἶναι $\bar{\alpha}=\operatorname{rot}\bar{\beta}$, ἐπομένως γιά κάθε ἀνοικτή ἐπιφάνεια. Σ ἡ ὁποία περατοῦται σέ μία κλειστή γραμμή Γ θά ἔχωμεν:

$$\iint_{\Sigma} \bar{\alpha}\,d\bar{\sigma} = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot}\bar{\beta}\,d\bar{\sigma} = \oint_{\Gamma^+} \bar{\beta}\,d\bar{r}$$

δηλαδή τό ἐπιφανειακόν ὁλόκληρωμα τῆς $\bar{\alpha}$ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς Σ καί ἐξαρτᾶται μόνον ἀπό τήν γραμμήν Γ εἰς τήν ὁποίαν περατοῦται.

Ἀπό τήν ἀποδειχθεῖσα πρότασιν καί τήν σχέσιν (1) ἕπεται ὅτι ἡ συνθήκη

$$\operatorname{div}\bar{\alpha} = 0 \qquad (69.25)$$

εἶναι ἀναγκαία καί ἱκανή γιά νά εἶναι τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα τῆς $\bar{\alpha}$ ἐπί κάθε κλειστῆς ἐπιφανείας ἴσον μέ μηδέν. Ἑρμηνεύοντες τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα ὡς ροὴν μποροῦμε νὰ ποῦμε ἀκόμη ὅτι γιὰ νὰ εἶναι ἡ ροὴ διὰ κάθε κλειστῆς ἐπιφανείας ἴση μὲ μηδὲν πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ πεδίον νὰ εἶναι μηδενικῆς ἀποκλίσεως. Τὰ ἀνωτέρω διὰ τὴν περίπτωσιν πεδίου ταχυτήτων ἑνὸς μονίμου ρεύματος, σημαίνουν ὅτι ὅσος ὄγκος ρευστοῦ εἰσρέει διὰ μέσου μιᾶς κλειστῆς ἐπιφανείας ἀπὸ τὸ ἐξωτερικὸν πρὸς τὸ ἐσωτερικόν, τόσος ὄγκος ρευστοῦ ἐκρέει ἀπὸ τὸ ἐσωτερικὸν πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν αὐτῆς. Αὐτὸ τὸ ἐκφράζομεν συντόμως λέγοντες ὅτι τὸ πεδίον εἶναι ἀπηλλαγμένον πηγῶν καὶ θέσεων ἀναρροφήσεως (ἀρνητικῶν πηγῶν). Ἐὰν εἰς ὅλα τὰ σημεῖα ἑνὸς πεδίου ἢ ἑνὸς μέρους αὐτοῦ ἔχωμεν div$\bar{a}>0$, τὸ δεύτερον μέλος τοῦ τύπου (69.9) θὰ εἶναι θετικόν, ἑπομένως καὶ τὸ πρῶτον ὁπότε ἡ ροὴ διὰ μέσου μιᾶς κλειστῆς ἐπιφανείας Σ ἀπὸ τὸ ἐσωτερικὸν πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν αὐτῆς θὰ εἶναι θετική, δηλαδὴ ἐντὸς τοῦ πεδίου ὑπάρχουν πηγές οἱ ὁποῖες μάλιστα εἶναι τόσο πιὸ ἀποδοτικές, ὅσο δεύτερον μέλος τῆς (69.9) εἶναι μεγαλείτερον. Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι ἡ ἀπόκλισις div$\bar{a}$(M) τῆς συναρτήσεως τοῦ πεδίου παρέχει ἕνα *μέτρον* διὰ τὴν παροχὴν τῆς πηγῆς ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὸ σημεῖον Μ.

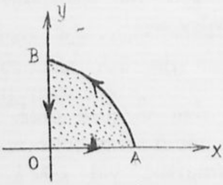
Παράδειγμα (69.1). — Νὰ ἐπαληθευθῇ ὁ τύπος τοῦ Riemann ἐπὶ τοῦ χωρίου τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τὴν παραβολὴν $y=1-x^2$ καὶ τὰ θετικὰ μέρη τῶν ἀξόνων, λαμβάνοντες ὡς διανυσματικὴν συνάρτησιν τὴν $\bar{a}=(y,-x)$.

Λ ύ σ ι ς. Ἀπὸ τὸν τύπον (69.3) καὶ τὸ σχ (69.10) θὰ ἔχωμεν:

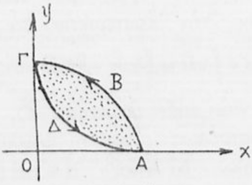
$$\int_{\Gamma^+} ydx-xdy=\int_{OA} ydx-xdy+\int_{AB} ydx-xdy+\int_{BO} ydx-xdy = 0+\int_1^0(1-x^2+2x^2)dx+0=-4/3$$

$$\iint_T -2dxdy = -2\int_0^1(1-x^2)dx = -2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = -2\left(1-\frac{1}{3}\right)=-4/3$$

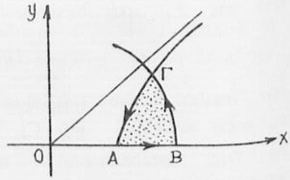
καὶ διὰ συγκρίσεως τῶν δύο ἐξαγομένων προκύπτει τὸ ζητούμενον.



Σx(69.10)



Σx.(69.11)



Σx(69.12)

Παράδειγμα (69.2). — Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διπλὸν ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\varphi=2x$, ἐπὶ τοῦ χωρίου τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τὸν κύκλο $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ καὶ τὴν παραβολὴν $y=1-x^2$, ἀνάγοντες αὐτὸ εἰς τὸν ὑπολογισμὸν ἑνὸς ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος.

Λ ύ σ ι ς. Ἀπὸ τὸν τύπον (69.3) καὶ τὸ σχ.(69.11) θὰ ἔχωμεν:

$$\iint_T 2xdxdy = \oint_{\Gamma^+} odx+x^2dy = \int_{AB\Gamma} x^2dy+\int_{\Gamma\Delta A} x^2dy$$

Οἱ παραμετρικὲς ἐξισώσεις τῶν δύο τόξων ὁλοκληρώσεως εἶναι :

ΑΒΓ : $x=t,\ y=1-t^2\quad (1\geqslant t\geqslant 0)$, ΓΔΑ : $x=1+\text{συν}t,\ y=1+\text{ημ}t\quad (\pi\leqslant t\leqslant 3\pi/2)$

ἐπομένως ἀπό τόν πρῶτον ἐκ τῶν τύπων (59.13) θά ἔχωμεν :

$$\iint_T 2x\,dx\,dy=\int_1^0 t^2(-2t)dt+\int_\pi^{3\pi/2}(1+\text{συν}t)^2\text{συν}t\,dt=\int_1^0 -2t^3dt+\int_\pi^{3\pi/2}(1+\text{συν}^2t+2\text{συν}t)\text{συν}t\,dt=-\left[\frac{t^4}{2}\right]_1^0+$$

$$+\int_0^{3\pi/2}(2-\text{ημ}^2t)\,d\text{ημ}t+\int_0^{3\pi/2}2\text{συν}^2t\,dt=\frac{1}{2}+\left[2\text{ημ}t-\frac{1}{3}\text{ημ}^3t\right]_0^{3\pi/2}+\int_0^{3\pi/2}(1+\text{συν}2t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}+\left[t+\frac{1}{2}\text{ημ}2t\right]_0^{3\pi/2}=\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}+\frac{3\pi}{2}=-\frac{7}{6}+\frac{3\pi}{2}$$

Παράδειγμα (69.3).— Νά ὑπολογισθῆ δι' ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου τό ὁποῖον κεῖται εἰς τό πρῶτον τέταρτον τῶν ἀξόνων καί περικλείεται ἀπό τήν ὑπερβολήν $x^2-y^2=1$, τόν κύκλο $x^2+y^2=4$ καί τόν ἄξονα τῶν x.

Λ ύ σ ι ς. Ἀπό τόν τύπον (69.7) καί τό σχ (69.12) θά ἔχωμεν :

$$|T|=-\oint_{\Gamma+}y\,dx=-\int_{AB}y\,dx-\int_{B\Gamma}y\,dx-\int_{\Gamma A}y\,dx=-\int_{B\Gamma}y\,dx-\int_{\Gamma A}y\,dx$$

Οἱ παραμετρικές ἐξισώσεις τῶν δύο τόξων ὁλοκληρώσεως εἶναι :

ΒΓ : $x=t,\ y=\sqrt{4-t^2}\quad (2\geqslant t\geqslant\sqrt{2,5})$, ΓΑ : $x=t,\ y=\sqrt{t^2-1}\quad (\sqrt{2,5}\geqslant t\geqslant 1)$

ἐπομένως ἀπό τόν πρῶτον ἐκ τῶν τύπων (59.13) θά ἔχωμεν :

$$|T|=-\int_2^{\sqrt{2,5}}\sqrt{4-t^2}\,dt-\int_{\sqrt{2,5}}^1\sqrt{t^2-1}\,dt=-\left[\frac{t}{2}\sqrt{4-t^2}+2\,\text{τοξημ}\frac{t}{2}\right]_2^{\sqrt{2,5}}-\left[\frac{t}{2}\sqrt{t^2-1}+\frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{t^2-1})\right]_{\sqrt{2,5}}^1=\pi-2\,\text{τοξημ}\frac{\sqrt{10}}{4}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}\right)$$

Παράδειγμα (69.4).— Νά ἐπαληθευθῆ ὁ τύπος τοῦ Gauss ἐπί τοῦ χωρίου τό ὁποῖον περικλείεται ἀπό τά ἐπίπεδα $x=0,\ y=0,\ z=0,\ 3x-6y-2z+6=0$, λαμβάνοντες ὡς διανυσματικήν συνάρτησιν τήν $\bar{a}=(x^2,0,0)$.

Λ ύ σ ι ς. Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τό σχ (69.13) θά ἔχωμεν :

$$\iint_\Sigma \bar{a}\,d\bar{\sigma}=\iint_{OAB}\bar{a}\,d\bar{\sigma}+\iint_{OB\Gamma}\bar{a}\,d\bar{\sigma}+\iint_{O\Gamma A}\bar{a}\,d\bar{\sigma}+\iint_{AB\Gamma}\bar{a}\,d\bar{\sigma}$$

Τό τριγωνικόν τμῆμα ΟΑΒ κείμενον ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y ἔχει ἐξίσωσιν z=0, τό δέ διάνυσμα προσανατολισμοῦ κατευθυνόμενον πάντοτε πρός τά ἔξω τοῦ χωρίου, σχηματίζει γωνίαν π μέ τόν ἄξονα τῶν z, ἐπομένως ἀπό τόν πρῶτον ἐκ τῶν τύπων (67.20) θά ἔχωμεν :

$$\iint_{OAB}\bar{a}\,d\bar{\sigma}=-\iint_{T_{xy}}0.dx\,dy=0$$

Ἀντιστοίχως ἐργαζόμενοι διά τά τμήματα ΟΒΓ καί ΟΓΑ θά ἔχωμεν :

$$\iint_{OB\Gamma}\bar{a}\,d\bar{\sigma}=+\iint_{T_{yz}}x^2dy\,dz=\iint_{T_{yz}}0\cdot dy\,dz=0,\quad \iint_{O\Gamma A}\bar{a}\,d\bar{\sigma}=\iint_{T_{zx}}0\cdot dx\,dz=0$$

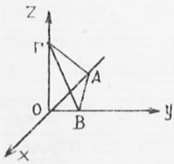
Τέλος ἐπί τοῦ τμήματος ΑΒΓ τό ὁποῖον ἔχει ἐξίσωσιν $z=(3x-6y+6):2$, τό διάνυσμα προσανατολισμοῦ σχηματίζει ὀξεῖαν γωνίαν μέ τόν ἄξονα τῶν z, ἐπομένως :

$$\iint_{AB\Gamma}\bar{a}\,d\bar{\sigma}=+\iint_{T_{xy}}-x^2\frac{3}{2}dx\,dy=-\frac{3}{2}\int_{-2}^0 x^2dx\int_0^{1+\frac{x}{2}}dy=\cdots=-1$$

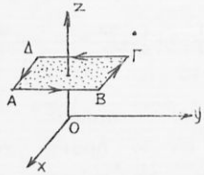
Ἀθροίζοντες τά τέσσερα ὁλοκληρώματα εὑρίσκομεν: $\iint\limits_{\Sigma} \bar{a}d\bar{\sigma} = -1$. Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ δευτέρου μέλους τοῦ τύπου (69.9) ἔχομεν $\mathrm{div}\bar{a} = 2x$, ἑπομένως:

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div}\bar{a}d\omega = \iiint\limits_{\Omega} 2x\,dx\,dy\,dz = 2\int_{-2}^{0} x\,dx \int_{0}^{1+\frac{x}{2}} dy \int_{0}^{\frac{3x}{2}-3y+3} dz = \cdots = -1$$

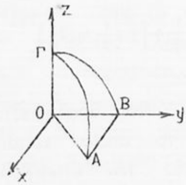
καί ἔτσι ἀπεδείχθη τό ζητούμενον.



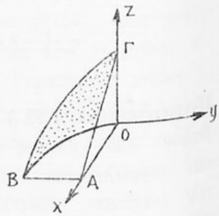
Σχ (69.13)



Σχ (69.14)



Σχ (69.15)



Σχ (69.16)

Παράδειγμα (69.5).— Νά ἐπαληθευθῆ ὁ τύπος τοῦ Stokes ἐπί τοῦ τετραγώνου τό ὁποῖον ἔχει κέντρον τό σημεῖον (0,0,1) καί πλευρές μήκους 2 ἀντιστοίχως παράλληλες πρός τούς ἄξονες τῶν x, y λαμβάνοντες ὡς διανυσματικήν συνάρτησιν τήν $\bar{a} = (z, xz, y)$.

Λ ύ σ ι ς. Ἐάν λάβωμεν ὡς διάνυσμα προσανατολισμοῦ τοῦ τετραγώνου τό $\bar{k}$, τότε ὡς Γ^+ πρέπει νά λάβωμεν τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ μέ φοράν διαγραφῆς της σημειουμένην είς τό σχ (69.14), ἑπομένως θά ἔχωμεν:

$$\oint\limits_{\Gamma^+} \bar{a}d\bar{r} = \int\limits_{AB} \bar{a}d\bar{r} + \int\limits_{B\Gamma} \bar{a}d\bar{r} + \int\limits_{\Gamma\Delta} \bar{a}d\bar{r} + \int\limits_{\Delta A} \bar{a}d\bar{r}$$

Παραμετρικές ἐξισώσεις τοῦ ΑΒ: $x=1,\ y=t,\ z=1\ \ (-1 \leqslant t \leqslant 1)$

" " " ΒΓ: $x=t,\ y=1,\ z=1\ \ (1 \geqslant t \geqslant -1)$

" " " ΓΔ: $x=-1,\ y=t,\ z=1\ \ (1 \geqslant t \geqslant -1)$

" " " ΔΑ: $x=t,\ y=-1,\ z=1\ \ (-1 \leqslant t \leqslant 1)$

Ἐπειδή εἶναι $\bar{a}d\bar{r} = z\,dx + xz\,dy + y\,dz$ θά ἔχωμεν:

$$\int\limits_{\Gamma^+} \bar{a}d\bar{r} = \int_{-1}^{1} dt + \int_{1}^{-1} dt + \int_{1}^{-1} -dt + \int_{-1}^{1} dt = 2-2+2+2 = 4.$$

Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ δευτέρου μέλους τοῦ τύπου (69.10) ἔχομεν $\mathrm{rot}\bar{a} = (1-x, 1, z)$ ἡ δέ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας ὁλοκληρώσεως εἶναι $z=1$, ἑπομένως ἀπό τόν πρῶτον ἐκ τῶν τύπων (67.20) προκύπτει:

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{rot}\bar{a}d\bar{\sigma} = +\iint\limits_{T_{xy}} dx\,dy = 4$$

καί ἔτσι ἀπεδείχθη τό ζητούμενον.

Παράδειγμα (69.6).— Νά ἐπαληθευθῆ ὁ τύπος τοῦ Gauss ἐπί τοῦ χωρίου τό ὁποῖον κεῖται είς τό πρῶτον ὄγδοον τῶν ἀξόνων καί περικλείεται ἀπό τίς ἐπιφάνειες $z^2+4y^2=4$, $y=x$, $x=0$, $z=0$, λαμβάνοντες ὡς διανυσματικήν συνάρτησιν τήν $\bar{a} = (y, 2x, z)$.

Λ ύ σ ι ς. Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τό σχ (69.15) θά ἔχωμεν:

$$\iint\limits_{\Sigma}\bar{a}d\bar{\sigma}=\iint\limits_{OAB}\bar{a}d\bar{\sigma}+\iint\limits_{OB\Gamma}\bar{a}d\bar{\sigma}+\iint\limits_{O\Gamma A}\bar{a}d\bar{\sigma}+\iint\limits_{AB\Gamma}\bar{a}d\bar{\sigma}$$

Τό τμῆμα OAB ἔχει ἐξίσωσιν $z=0$ καί τό διάνυσμα προσανατολισμοῦ σχηματίζει γωνίαν π μέ τόν ἄξονα τῶν z, ἐπομένως ἀπό τόν πρῶτον ἐκ τῶν τύπων (67.20) προκύπτει :

$$\iint\limits_{OAB}\bar{a}d\bar{\sigma}=-\iint\limits_{T_{xy}}0\cdot dxdy=0$$

Τό τμῆμα ΟΒΓ ἔχει ἐξίσωσιν $x=0$ καί τό διάνυσμα προσανατολισμοῦ σχηματίζει γωνίαν π μέ τόν ἄξονα τῶν z, ἐπομένως ἀπό τόν δεύτερον ἐκ τῶν τύπων (67.20) προκύπτει :

$$\iint\limits_{OB\Gamma}\bar{a}d\bar{\sigma}=-\iint\limits_{T_{yz}}ydydz$$

Τό τμῆμα ΟΓΑ ἔχει ἐξίσωσιν $x=y$ καί τό διάνυσμα προσανατολισμοῦ σχηματίζει ὀξεῖαν γωνίαν μέ τόν ἄξονα τῶν x, ἐπομένως ἀπό τόν δεύτερον ἐκ τῶν τύπων (67.20) προκύπτει :

$$\iint\limits_{O\Gamma A}\bar{a}d\bar{\sigma}=+\iint\limits_{T_{yz}}(y-2x)dydz=\iint\limits_{T_{yz}}(y-2y)dydz=-\iint\limits_{T_{yz}}ydydz$$

Τέλος τό τμῆμα ΑΒΓ ἔχει ἐξίσωσιν $z=2(1-y^2)^{1/2}$ καί τό διάνυσμα προσανατολισμοῦ σχηματίζει ὀξεῖαν γωνίαν μέ τόν ἄξονα τῶν z, ἐπομένως ἀπό τόν πρῶτον ἐκ τῶν τύπων (67.20) προκύπτει :

$$\iint\limits_{AB\Gamma}\bar{a}d\bar{\sigma}=+\iint\limits_{T_{xy}}\left[z+4xy(1-y^2)^{-1/2}\right]dxdy=\iint\limits_{T_{xy}}\left[2(1-y^2)^{1/2}+4xy(1-y^2)^{-1/2}\right]dxdy$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι τά χωρία ὁλοκληρώσεως εἶναι :

$T_{xy}:(x=0,\ x=y,\ y=1)$, $T_{yz}:(y=0,\ z=0,\ z^2+4y^2=4)$

Καί ἀθροίζοντες τά τέσσερα ὁλοκληρώματα προκύπτει :

$$\iint\limits_{\Sigma}\bar{a}d\bar{\sigma}=0-\iint\limits_{T_{yz}}ydydz-\iint\limits_{T_{yz}}ydydz+\iint\limits_{T_{xy}}\left[2(1-y^2)^{1/2}+4xy(1-y^2)^{-1/2}\right]dxdy$$

$$=-2\iint\limits_{T_{yz}}ydydz+\iint\limits_{T_{xy}}2(1-y^2)^{1/2}dxdy+\iint\limits_{T_{xy}}4xy(1-y^2)^{-1/2}dxdy$$

$$=-\int_0^2 dz\int_0^{(1-\frac{z^2}{4})^{1/2}}2ydy+\int_0^1 2\sqrt{1-y^2}\,dy\int_0^y dx+\int_0^1 4xdx\int_x^1 y(1-y^2)^{-1/2}dy=\cdots$$

$$=-\int_0^2\left(1-\frac{z^2}{4}\right)dz+\int_0^1 2y\sqrt{1-y^2}\,dy+\int_0^1 4x\sqrt{1-x^2}\,dx=-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{2}{3}.$$

Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ δευτέρου μέλους τοῦ τύπου (69.9) ἔχομεν $\mathrm{div}\bar{a}=1$, ἐπομένως :

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{div}\bar{a}d\omega=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\iint\limits_{T_{xy}}2\sqrt{1-y^2}\,dxdy=\int_0^1 2\sqrt{1-y^2}\,dy\int_0^y dx=\frac{2}{3}$$

καί ἔτσι ἀπεδείχθη τό ζητούμενον.

Παράδειγμα (69.7).— Νά ἐπαληθευθῆ ὁ τύπος τοῦ Gauss ἐπί τοῦ χωρίου τό ὁποῖον κεῖται εἰς τό τέταρτον ὄγδοον τῶν ἀξόνων καί τό ὁποῖον περικλείεται ἀπό τίς ἐπιφάνειες : $x=y^2$, $x+z=1$, $z=0$, $y=0$ καθώς καί ὁ τύπος τοῦ Stokes ἐπὶ τῆς μὴ ἐπιπέδου ἐπιφανείας τοῦ συνόρου τοῦ χωρίου αὐτοῦ, λαμβάνοντες ὡς διανυσματικὴν συνάρτησιν τὴν $\bar{a}=(x,-z,y)$.

Λ ύ σ ι ς. Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸ σχ (69.16) θὰ ἔχωμεν:

$$\iint_{\Sigma}\bar{a}d\bar{\sigma}=\iint_{OAB}\bar{a}d\bar{\sigma}+\iint_{O\Gamma B}\bar{a}d\bar{\sigma}+\iint_{O\Gamma A}\bar{a}d\bar{\sigma}+\iint_{AB\Gamma}\bar{a}d\bar{\sigma}=-\iint_{T_{xy}}y\,dx\,dy-\iint_{T_{xz}}\left(-z+x\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx\,dz+$$

$$+\iint_{T_{xz}}-z\,dx\,dz+\iint_{T_{xy}}(y+x)\,dx\,dy=\iint_{T_{xy}}x\,dx\,dy-\frac{1}{2}\iint_{T_{xz}}dx\,dz$$

$$=\int_{-1}^{0}dy\int_{y^2}^{1}x\,dx-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\sqrt{x}\,dx\int_{0}^{1-x}dz=\frac{2}{5}-\frac{2}{15}=\frac{4}{15}$$

$$\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\bar{a}\,d\omega=\iiint_{\Omega}dx\,dy\,dz=\iint_{T_{xy}}(1-x)\,dx\,dy=\int_{0}^{1}(1-x)\,dx\int_{-\sqrt{x}}^{0}dy=\cdots=\frac{4}{15}$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἕπεται ἡ ἐπαλήθευσις τοῦ τύπου Gauss. Διὰ τὴν ἐπαλήθευσιν τοῦ τύπου Stokes θεωροῦμεν ὡς θετικὴν ὄψιν τῆς ΒΟΓ τὴν πρὸς τὸ θετικὸν μέρος τοῦ ἄξονος τῶν y, ὁπότε θὰ ἔχωμεν:

$$\oint_{\Gamma^+}\bar{a}d\bar{r}=\int_{BO}\bar{a}d\bar{r}+\int_{O\Gamma}\bar{a}d\bar{r}+\int_{\Gamma B}\bar{a}d\bar{r}$$

Παραμετρικὲς ἐξισώσεις τοῦ ΒΟ : $x=t^2, y=t, z=0 \quad (-1\leq t\leq 0)$

» » » ΟΓ : $x=0, y=0, z=t \quad (0\leq t\leq 1)$

» » » ΓΒ : $x=t^2 \; y=t, z=1-t^2 \; (0\geq t\geq -1)$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\bar{a}d\bar{r}=x\,dx-z\,dy+y\,dz$, $\operatorname{rot}\bar{a}=(2,0,0)$

$$\oint_{\Gamma^+}\bar{a}d\bar{r}=\int_{-1}^{0}t^2\cdot 2t\,dt+0+\int_{0}^{-1}\left[t^2\cdot 2t-1+t^2+t(-2t)\right]dt=\cdots=\frac{4}{3}$$

$$\iint_{BO\Gamma}\operatorname{rot}\bar{a}\,d\bar{\sigma}=+\iint_{T_{xz}}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\,dz=\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}\int_{0}^{1-x}dz=\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)dx=\cdots=\frac{4}{3}$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἕπεται καὶ ἡ ἐπαλήθευσις τοῦ τύπου Stokes.

Παράδειγμα (69.8).— Νὰ ἐπαληθευθῆ ὁ τύπος τοῦ Gauss ἐπὶ τοῦ κυβικοῦ χωρίου τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὶς ἀνισότητες $0\leq x,y,z\leq 1$, λαμβάνοντες ὡς διανυσματικὴν συνάρτησιν τὴν $\bar{a}=(x^2,y^2,z^2)$.

Λ ύ σ ι ς. Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸ σχ (69.17) καὶ τὸν πρῶτον ἐκ τῶν τύπων (67.20) θὰ ἔχωμεν:

$$\iint_{OAB\Gamma}\bar{a}d\bar{\sigma}+\iint_{\Delta EZH}\bar{a}d\bar{\sigma}=\iint_{T}0\,dx\,dy+\iint_{T}dx\,dy=1$$

ἕνεκα δὲ συμμετρίας τὰ ἐπιφανειακὰ ὁλοκληρώματα ἐπὶ ἑκάστου ἐκ τῶν δύο ἄλλων ζευγῶν ἀντικειμένων ἑδρῶν ἰσοῦνται πάλι μὲ 1 ἑπομένως τὸ ὁλοκλήρωμα ἐπὶ ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶναι $\iint_{\Sigma}\bar{a}d\bar{\sigma}=3$. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ δευτέρου μέλους τοῦ τύπου τοῦ Gauss ἔχωμεν:

$$\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\bar{a}\,d\omega=\iiint_{\Omega}(2x+2y+2z)\,dx\,dy\,dz=\iint_{T_{xy}}2x\,dx\,dy\int_{0}^{1}dz+\iint_{T}2y\,dx\,dy\int_{0}^{1}dz+\iint_{T}dx\,dy\int_{0}^{1}2z\,dz$$

$$=\int_{0}^{1}2x\,dx\int_{0}^{1}dy+\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{1}2y\,dy+\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{1}dy=1+1+1=3$$

καὶ ἔτσι ἀπεδείχθη τὸ ζητούμενον.

Παράδειγμα (69.9). — Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a} = (x^2, 2xy, 2xz)$ ἐπὶ τοῦ περιβλήματος Σ ἑνὸς κλειστοῦ τριδιαστάτου χωρίου Ω πυκνότητος $\delta = 1$, ἰσοῦται μὲ τὸ ἑξαπλάσιον γινόμενον τοῦ ὄγκου τοῦ χωρίου ἐπὶ τὴν τετμημένην τοῦ κ. μάζης αὐτοῦ.

Λ ύ σ ι ς. Ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ Gauss ἔχομεν :

$$\iint_{\Sigma} \bar{a} d\bar{\sigma} = \iiint_{\Omega} div\bar{a} d\omega = \iiint_{\Omega} (2x+2x+2x) dxdydz = 6 \iiint_{\Omega} x dxdydz = 6x_{\kappa} |\Omega|$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἕπεται τὸ ζητούμενον.

Παράδειγμα (69.10). — Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ροὴ διὰ κάθε κλειστῆς ἐπιφανείας ἡ ὁποία κεῖται ἐντὸς διανυσματικοῦ πεδίου τὸ ὁποῖον προέρχεται ἀπὸ διανυσματικὸν δυναμικόν, εἶναι μηδέν.

Λ ύ σ ι ς. Ἀφοῦ τὸ πεδίον προέρχεται ἀπὸ διανυσματικὸν δυναμικὸν θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\bar{a} = rot\bar{\beta}$, ἐπομένως ἀπὸ τὸν (68.26) καὶ τὸν τύπον τοῦ Gauss θὰ ἔχωμεν :

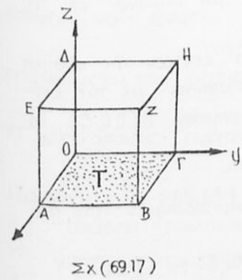
$$F = \iint_{\Sigma} \bar{a} d\bar{\sigma} = \iint_{\Sigma} rot\bar{\beta} d\bar{\sigma} = \iiint div(rot\bar{\beta}) d\omega$$

ὁπότε λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸν τελευταῖον ἐκ τῶν τύπων (68.9) προκύπτει τὸ ζητούμενον.

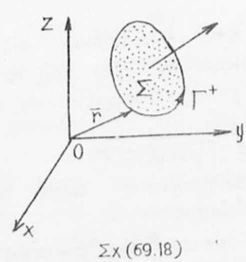
Παράδειγμα (69.11). — Ἐὰν Σ εἶναι ἕνα ἐπίπεδον τμῆμα ἐπιφανείας προσανατολισμένου μὲ τὸ διάνυσμα $\bar{\gamma}$ καὶ περικλειόμενον ὑπὸ τῆς γραμμῆς Γ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\oint_{\Gamma+} [\bar{\gamma}\bar{r}] d\bar{r} = 2|\Sigma|$.

Λ ύ σ ι ς. Ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ Stokes ἔχομεν σχ (69.18) :

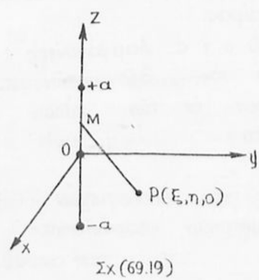
$$\oint_{\Gamma+} [\bar{\gamma}\bar{r}] d\bar{r} = \iint_{\Sigma} rot [\bar{\gamma}\bar{r}] d\bar{\sigma} = \iint_{\Sigma} 2\bar{\gamma}\cdot\bar{\gamma} d\sigma = 2\iint_{\Sigma} \bar{\gamma}^2 d\sigma = 2\iint_{\Sigma} d\sigma = 2|\Sigma|$$



Σx (69.17)



Σx (69.18)



Σx (69.19)

Παράδειγμα (69.12). — Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ δυναμικὸν πεδίον μὲ συνάρτησιν $\bar{F} = (yz, zx, xy)$ εἶναι ἀστρόβιλον καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ δυναμικὴ συνάρτησις καὶ τὸ ἔργον ποὺ παράγεται διὰ μετακίνησιν ἀπὸ τὸ σημεῖον Α (1,1,2) μέχρι τό $B(3,5,0)$.

Λ ύ σ ι ς. Ἔχομεν $\operatorname{rot}\bar{F}=(x-x,\ y-y,\ z-z)=\bar{0}$ δηλαδή πράγματι τό πεδίον εἶναι ἀστρόβιλον· ἡ δυναμική συνάρτησις θά προσδιορισθῆ ἀπό τόν τύπον (69.16) λαμβάνοντες π.χ. $x_0=y_0=0$ ὁπότε θά εἶναι : $\Phi=\int_0^x yz\,dt+\int_0^y 0\,dt+\int_0^z 0\cdot dt=xyz$. Τέλος ἀπό τόν τύπον (69.15) εὑρίσκομεν τό ἔργον : $\mathcal{E}=0-2=-2$.

Παράδειγμα (69.13).— Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό δυναμικόν πεδίον μέ συνάρτησιν $\bar{F}=(2\alpha x+\beta y,\ \beta x,\ 2\gamma z)$ προέρχεται ἐκ δυναμικοῦ καί νά εὑρεθῆ ἡ οἰκογένεια τῶν ἰσοδυναμικῶν ἐπιφανειῶν.

Λ ύ σ ι ς. Ἔχομεν $\operatorname{rot}\bar{F}=(0,0,0)$ δηλαδή τό πεδίον εἶναι ἀστρόβιλον ὁπότε θά προέρχεται ἐκ δυναμικοῦ· ἀπό τόν τύπον (69.16) προσδιορίζομεν τήν δυναμικήν συνάρτησιν $\Phi=\int_0^x(2\alpha t+\beta y)\,dt+\int_0^y 0\cdot dt+\int_0^z 2\gamma t\,dt=\alpha x^2+\beta xy+\gamma z^2$ ὁπότε ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta xy+\gamma z^2=C$ παριστάνει τήν οἰκογένεια τῶν ἰσοδυναμικῶν ἐπιφανειῶν τοῦ πεδίου.

Παράδειγμα (69.14).— Ἐπί εὐθυγράμμου τμήματος Γ μήκους 2α εἶναι κατανεμημένα ἠλεκτρικά φορτία μέ σταθερήν πυκνότητα δ καί ζητεῖται νά ὑπολογισθῆ τό δυναμικόν εἰς ἕνα σημεῖον P τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου.

Λ ύ σ ι ς. Λαμβάνοντες ὅπως φαίνεται εἰς τό σχ.(69.19) τόν ἄξονα τῶν z ἐπί τοῦ Γ καί τό μεσοκάθετον ἐπίπεδον ὡς ἐπίπεδον τῶν x,y, σύμφωνα μέ τόν πρῶτον ἐκ τῶν τύπων (68.30) τό δυναμικόν εἰς τό σημεῖον $P(\xi,\eta,0)$ θά εἶναι :

$$U=\int_\Gamma\frac{\delta\,ds}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+z^2}}=\delta\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\cdots=2\delta\ln\frac{\alpha+\sqrt{\xi^2+\eta^2+\alpha^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}.$$

Παράδειγμα (69.15*).— Ἐπί τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ἀκτῖνος α εἶναι κατανεμημένα ἠλεκτρικά φορτία μέ σταθερήν πυκνότητα $\delta=1$ καί ζητεῖται νά ὑπολογισθῆ τό δυναμικόν εἰς ἕνα σημεῖον P μή κείμενον ἐπί τῆς σφαίρας.

Λ ύ σ ι ς. Λαμβάνοντες τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων εἰς τό κέντρον τῆς σφαίρας καί τόν ἄξονα τῶν z διερχόμενον διά τοῦ P, σύμφωνα μέ τόν δεύτερον ἐκ τῶν τύπων (68.30) τό δυναμικόν εἰς τό σημεῖον $P(0,0,\zeta)$ θά εἶναι :

$$U=\iint_\Sigma\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\zeta)^2}}$$

Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ὁλοκληρώματος αὐτοῦ χρησιμοποιοῦμεν τήν παραμετρικήν παράστασιν τῆς σφαίρας :

$$x=\alpha\,\text{συν}\vartheta\,\text{συν}\varphi,\quad y=\alpha\,\text{ημ}\vartheta\,\text{συν}\varphi,\quad z=\alpha\,\text{ημ}\varphi\quad\left(0\leqslant\vartheta<2\pi,\ -\tfrac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\tfrac{\pi}{2}\right)$$

ὁπότε ἀπό τόν τύπον (67.5) θά ἔχωμεν :

$$U=\iint_T\frac{\alpha^2\text{συν}\varphi\,d\vartheta\,d\varphi}{\sqrt{\alpha^2\text{συν}^2\varphi+(\zeta-\alpha\,\text{ημ}\varphi)^2}}=\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\alpha^2\text{συν}\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\zeta^2+\alpha^2-2\alpha\zeta\,\text{ημ}\varphi}}=2\pi\alpha^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\text{συν}\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\zeta^2+\alpha^2-2\alpha\zeta\,\text{ημ}\varphi}}$$

Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ὁλοκληρώματος αὐτοῦ θέτομεν μέ ω τήν ρίζαν ὁπότε παραγωγίζοντες καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα προκύπτει:

$$U = 2\pi a^2 \int_{|\zeta+a|}^{|\zeta-a|} \frac{-\omega d\omega}{a\zeta\omega} = -\frac{2\pi a}{\zeta}\left[\,|\zeta-a|+|\zeta+a|\,\right]$$

Ἐξ' αὐτοῦ ἕπεται ὅτι διὰ $|\zeta|>a$ θὰ εἶναι $U = 4\pi a^2 : |\zeta|$

καὶ » $|\zeta|<a$ » » $U = 4\pi a$

δηλαδὴ τὸ δυναμικὸν εἰς ἕνα ἐξωτερικὸν σημεῖον P εἶναι τὸ ἴδιο ὡς νὰ ἦτο ὅλο τὸ φορτίον $4\pi a^2$ συγκεντρωμένον εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἐνῶ διὰ τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα τῆς σφαίρας τὸ δυναμικὸν εἶναι σταθερόν.

Παράδειγμα (69.16).— Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως:

$$\bar{F} = \left[\ \frac{z^2-y^2}{(x+z)^2},\ \ \frac{2y}{x+z},\ \ \frac{x^2-y^2}{(x+z)^2}\ \right]$$

ἀπὸ τὸ σημεῖον A (1, 0, 2) μέχρι τὸ B (0, 1, 2) ἀφοῦ δείξετε πρῶτα ὅτι εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς διαδρομῆς.

Λύσις. Εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι $\mathrm{rot}\,\bar{F} = \bar{0}$, ἐπομένως τὸ ἔργον εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς διαδρομῆς· ἀπὸ τὸν τύπον (69.16) εὑρίσκομεν τὴν δυναμικὴν συνάρτησιν:

$$\Phi = \int_0^x \frac{z^2-y^2}{(t+z)^2}\,dt + \int_0^y \frac{2t}{z}\,dt + \int_1^z 0\,dt = \cdots = \frac{xz+y^2}{x+z}$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸν τύπον (69.15) προκύπτει τὸ ζητούμενον ἔργον $E = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$.

Παράδειγμα (69.17).— Νὰ προσδιορισθῇ ὁ σταθερὸς ἀριθμὸς μ ἔτσι ὥστε τὸ διδιάστατον διανυσματικὸν πεδίον μὲ συνάρτησιν:

$$\bar{a} = \left[\ xy^{-1}(x^2+y^2)^{\mu/2},\ -x^2y^{-2}(x^2+y^2)^{\mu/2}\ \right]$$

νὰ προέρχεται ἐκ δυναμικοῦ.

Λύσις. Πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὡς γνωστὸν τὸ πεδίον νὰ εἶναι ἀστρόβιλον δηλαδὴ νὰ εἶναι:

$$\mathrm{rot}\,\bar{a} = -\left[x^2y^{-2}(x^2+y^2)^{\mu/2}\right]_x - \left[xy^{-1}(x^2+y^2)^{\mu/2}\right]_y = 0$$

ὁπότε μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σημειουμένων παραγωγίσεων προκύπτει:

$$xy^{-2}(x^2+y^2)^{\mu/2}\cdot(\mu+1) = 0$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\mu = -1$.

Παράδειγμα (69.18).— Νὰ δειχθῇ ὅτι σὲ κάθε σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα ζεῦγος ἀντιθέτων κατευθύνσεων ὡς πρὸς τὶς ὁποῖες αἱ παράγωγοι τῶν $\Phi(x,y)$, $f(x,y)$ εἶναι ἴσες.

Λύσις. Πράγματι ἐὰν $\bar{u}$ εἶναι ἕνα μοναδιαῖον διάνυσμα θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} = \bar{u}\,\mathrm{grad}\,\Phi\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial u} = \bar{u}\,\mathrm{grad}\,f$$

ἐπομένως ἐὰν ἰσοῦνται αἱ παράγωγοι κατὰ τὴν κατεύθυνσιν αὐτοῦ θὰ εἶναι

$$\bar{u}\,\mathrm{grad}\,\Phi = \bar{u}\,\mathrm{grad}\,f\ ,\quad \bar{u}(\mathrm{grad}\,\Phi - \mathrm{grad}\,f) = 0$$

δηλαδὴ πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ $\bar{\upsilon}$ νὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν κλίσεων τῶν δύο συναρτήσεων, ἐκτὸς ἐὰν ἡ διαφορὰ αὐτὴ εἶναι μηδενικὸν διάνυσμα, ὁπότε αἱ παράγωγοι γιὰ κάθε $\bar{\upsilon}$ θὰ εἶναι ἴσες.

Παράδειγμα (69.20).— Νὰ ἐξετασθῇ ἐὰν τὰ ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα τῶν διανυσματικῶν συναρτήσεων :

$$\bar{\alpha} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \qquad \bar{\beta} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

εἶναι ἀνεξάρτητα τῆς γραμμῆς ὁλοκληρώσεως.

Λ ύ σ ι ς. Διαπιστώνομεν εὐκόλως ὅτι οἱ συναρτήσεις $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ πληροῦν τὴν συνθήκην (69.20), ἐπομένως σὲ κάθε χωρίον ἁπλῆς συνοχῆς μὴ περιέχον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων εἰς τὴν ὁποίαν οἱ συντεταγμένες τῶν $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ εἶναι ἀσυνεχεῖς, τὰ ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα εἶναι ἀνεξάρτητα τῆς γραμμῆς ὁλοκληρώσεως.

Εἰσάγοντες πολικὲς συντεταγμένες θὰ ἔχωμεν :

$$\bar{\alpha} d\bar{r} = (-y dx + x dy) : (x^2+y^2) = d\left(\text{τοξεφ}\frac{y}{x}\right) = d\vartheta$$

$$\bar{\beta} d\bar{r} = (x dx + y dy) : (x^2+y^2) = d\ell n\sqrt{x^2+y^2} = d\ell n\rho$$

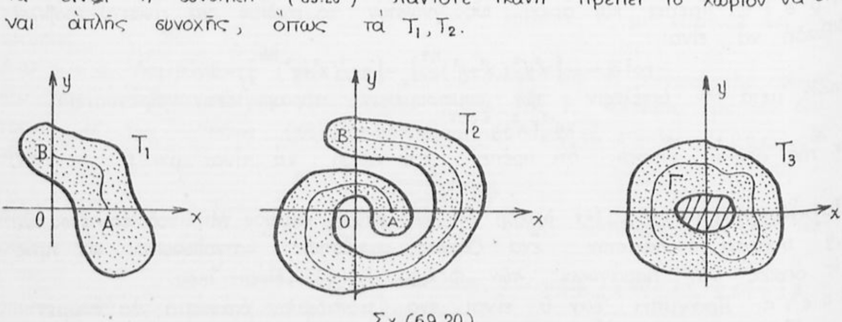
ἐπομένως λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν καὶ τὸ σχ(69.20) θὰ εἶναι :

$$\int_{A\Gamma B} \bar{\alpha} d\bar{r} = [\vartheta]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{A\Delta B} \bar{\alpha} d\bar{r} = [\vartheta]_0^{5\pi/2} = \frac{5\pi}{2}, \quad \oint_{\Gamma+} \bar{\alpha} d\bar{r} = [\vartheta]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$\int_{AB} \bar{\beta} d\bar{r} = \int_{AB} d\ell n\rho = \ell n\rho_B - \ell n\rho_A = \ell n\frac{\rho_B}{\rho_A}$$

δηλαδὴ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα τῆς $\bar{\beta}$ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς γραμμῆς ὁλοκληρώσεως καὶ ἐπομένως μηδὲν ἐπὶ κάθε κλειστῆς γραμμῆς Γ ἡ ὁποία ἀνήκει εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς οἱουδήποτε χωρίου ἁπλῆς ἢ ἀκόμη καὶ πολλαπλῆς συνοχῆς ὅπως εἶναι τὸ T_3, μὴ περιέχον τὴν ἀρχήν.

Αὐτὸ δὲν συμβαίνει διὰ τὴν $\bar{\alpha}$ ὅπως ἐν γένει δὲν συμβαίνει, διότι ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως (69.6) διὰ νὰ εἶναι ἡ συνθήκη (69.20) πάντοτε ἱκανὴ πρέπει τὸ χωρίον νὰ εἶναι ἁπλῆς συνοχῆς, ὅπως τὰ T_1, T_2.



Σχ (69.20)

Παράδειγμα (69.21).— Νὰ προσδιορισθῇ ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ ἔτσι ὥστε ἡ ροὴ τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως :

$$\bar{a} = [(x-2)\sigma(x),\ y,\ -2z\sigma(x)]$$

διά κάθε ἐπιφανείας Σ νά ἐξαρτᾶται μόνον ἀπό τήν γραμμήν εἰς τήν ὁποίαν περατοῦται αὐτή.

Λ ύ σ ι ς. Πρέπει καί ἀρκεῖ ὡς γνωστόν νά ἰσχύη ἡ ἐξίσωσις:

$$\operatorname{div}\bar{a} = \sigma(x)+(x-2)\,\sigma'(x)+1-2\sigma(x)=0$$

δηλαδή ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ εἶναι λύσις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως:

$$(x-2)\,d\sigma+(1-\sigma)\,dx=0$$

ἡ ὁποία εἶναι χωριζομένων μεταβλητῶν καί εὑρίσκομεν εὐκόλως δι ὁλοκληρώσεως:

$$\sigma(x)=1+c\,(x-2).$$

Παράδειγμα (69.21).— Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ κλίσις ἡ ἀπόκλισις καί ἡ περιστροφή εἰς ἕνα σημεῖον P, δίδονται ἀπό τίς ὁριακές σχέσεις:

$$\operatorname{grad}\Phi(P) = \operatorname{op}\frac{1}{|\Omega|}\iint_\Sigma \Phi\, d\bar{\sigma}$$
$$\operatorname{div}\bar{a}(P) = \operatorname{op}\frac{1}{|\Omega|}\iint_\Sigma \bar{a}\, d\bar{\sigma}$$
$$\operatorname{rot}\bar{a}(P) = \operatorname{op}\frac{1}{|\Omega|}\iint_\Sigma [\bar{a}\, d\bar{\sigma}]$$

ὅταν τό ἁπλῆς συνοχῆς χωρίον Ω τό ὁποῖον περικλείεται ὑπό τῆς ἐπιφανείας Σ, τείνει νά συμπτυχθῆ εἰς τό σημεῖον P τό ὁποῖον κεῖται πάντοτε εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ Ω.

Λ ύ σ ι ς. Διά τήν ἀπόδειξιν τῆς πρώτης σχέσεως θέτομεν εἰς τόν τύπον τοῦ Gauss ἀντί $\bar{a}$ τό $\Phi\bar{c}$ ὅπου $\bar{c}$ σταθερόν αὐθαίρετον διάνυσμα, ὁπότε προκύπτει:

$$\iint_\Sigma \Phi\bar{c}\,d\bar{\sigma} = \iiint_\Omega \operatorname{div}\Phi\bar{c}\,d\omega = \iiint_\Omega \bar{c}\operatorname{grad}\Phi\,d\omega$$

$$\bar{c}\cdot\Big[\iint_\Sigma \Phi\,d\bar{\sigma} - \iiint_\Omega \operatorname{grad}\Phi\cdot d\omega\Big]=0$$

καί ἐπειδή τό διάνυσμα $\bar{c}$ εἶναι αὐθαίρετον θά εἶναι:

$$\iint_\Sigma \Phi\,d\bar{\sigma} = \iiint_\Omega \operatorname{grad}\Phi\,d\omega$$

Εἰς τό δεξιόν ὁλοκλήρωμα ἐφαρμόζοντες τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς θά ἔχωμεν:

$$\iint_\Sigma \Phi\,d\bar{\sigma} = |\Omega|\operatorname{grad}\Phi(P_1)$$

ὅπου P_1 κάποιο ἐσωτερικόν σημεῖον τοῦ χωρίου Ω· διαιροῦντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς τελευταίας σχέσεως διά $|\Omega|$ καί ὑποθέτοντες ὅτι τό Ω τείνει νά συμπτυχθῆ εἰς τό P, τότε τό $P_1 \to P$ καί προκύπτει τό ζητούμενον. Διά τήν ἀπόδειξιν τῆς δευτέρας σχέσεως ἐφαρμόζομεν πάλιν εἰς τό δεύτερον μέλος τοῦ τύπου τοῦ Gauss τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς ὁπότε ἔχομεν:

$$\iint_\Sigma \bar{a}\,d\bar{\sigma} = \iiint_\Omega \operatorname{div}\bar{a}\,d\omega = |\Omega|\operatorname{div}\bar{a}(P_1)$$

Διαιροῦντες διά $|\Omega|$ καί ὑποθέτοντες πάλι ὅτι τό χωρίον Ω τείνει νά συμπτυχθῆ εἰς τό P προκύπτει ἡ δευτέρα σχέσις. Τέλος διά τήν ἀπόδειξιν τῆς τρίτης σχέσεως θέτομεν εἰς τόν τύπον τοῦ Gauss ἀντί $\bar{a}$ τό $[\bar{c}\bar{a}]$

ὅπου $\bar{c}$ σταθερὸν αὐθαίρετον διάνυσμα, ὁπότε προκύπτει :

$$\iint_{\Sigma}[\bar{c}\bar{a}]\bar{d\sigma}=\iiint_{\Omega}\operatorname{div}[\bar{c}\bar{a}]d\omega=\iiint_{\Omega}\bar{c}\operatorname{rot}\bar{a}d\omega$$

$$\bar{c}\cdot\left[\iint_{\Sigma}[\bar{a}\bar{d\sigma}]-\iiint_{\Omega}\operatorname{rot}\bar{a}d\omega\right]=0$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ διάνυσμα $\bar{c}$ εἶναι αὐθαίρετον θὰ εἶναι :

$$\iint_{\Sigma}[\bar{a}\bar{d\sigma}]=\iiint_{\Omega}\operatorname{rot}\bar{a}d\omega=\iiint_{\Omega}[(R_y-Q_z),(P_z-R_x),(Q_x-P_y)]d\omega$$

Ἐφαρμόζοντες πάλι τὸ θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς εἰς τὸ δεύτερον μέλος θὰ ἔχωμεν :

$$\iint_{\Sigma}[\bar{a}\bar{d\sigma}]=|\Omega|\left[(R_y-Q_z)',(P_z-R_x)'',(Q_x-P_y)'''\right]$$

ὅπου οἱ τόνοι σημειώνουν τὶς τιμὲς τῶν συντεταγμένων τοῦ $\operatorname{rot}\bar{a}$ σὲ κάποια σημεῖα P_1', P_1'', P_1''' τοῦ χωρίου Ω. Διαιροῦντες διὰ $|\Omega|$ καὶ ὑποθέτοντες ὅτι τὸ Ω τείνει νὰ συμπτυχθῆ εἰς τὸ P, τὰ $P_1', P_1'', P_1'''\to P$ καὶ προκύπτει τὸ ζητούμενον.

Παράδειγμα (69.22).— Ἐπὶ τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου μὲ συνάρτησιν τὴν $\bar{a}=(x^2-3x+1,\ y,\ 2z-2xz)$ νὰ ὑπολογισθῆ δι' ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος ἡ ροὴ δι' ἐπιφανείας Σ ἡ ὁποία περατοῦται εἰς τὴν γραμμὴν Γ μὲ διανυσματικὴν ἐξίσωσιν $\bar{r}=(\text{συν}t,\text{ημ}t,1)$ καὶ τῆς ὁποίας ἡ θετικὴ φορὰ περιοδεύσεως ταυτίζεται μὲ τὴν φορὰν τῶν αὐξανομένων t.

Λ ύ σ ι ς. Ἐπειδὴ $\operatorname{div}\bar{a}=2x-3+1+2-2x\equiv 0$, τὸ πεδίον προέρχεται ἀπὸ διανυσματικὸν δυναμικὸν $\bar{\beta}$ δηλαδὴ εἶναι $\bar{a}=\operatorname{rot}\bar{\beta}$, ὁπότε :

$$F=\iint_{\Sigma}\bar{a}\bar{d\sigma}=\iint_{\Sigma}\operatorname{rot}\bar{\beta}\bar{d\sigma}=\oint_{\Gamma^+}\bar{\beta}d\bar{r}$$

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ προσδιορίσωμεν ἕνα ἀπὸ τὰ ἄπειρα διανύσματα $\bar{\beta}$· πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν $\bar{\beta}=(P,Q,0)$ ὁπότε ἡ σχέσις $\bar{a}=\operatorname{rot}\bar{\beta}$ γράφεται :

$$(x^2-3x+1,\ y,\ 2z-2xz)=(-Q_z,\ P_z,Q_x-P_y)$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτουν οἱ ἐξισώσεις :

$$-Q_z=x^2-3x+1,\quad P_z=y,\quad Q_x-P_y=2z-2xz$$

Ἐκ τῶν δύο πρώτων δι' ὁλοκληρώσεως προκύπτει :

$$Q=-(x^2-3x+1)z+\sigma(x,y),\ P=yz+\varphi(x,y)$$

οἱ ὁποῖες, ὅταν λάβωμεν τὶς αὐθαίρετες συναρτήσεις σ; φ ἐκ ταυτότητος μηδέν, ἐπαληθεύουν τὴν τρίτη ἐξίσωση ἐπομένως

$$\bar{\beta}=(yz,-x^2z+3xz-z,0\ )$$

καὶ ἡ ροὴ διὰ τῆς Σ εἶναι :

$$F=\int_{\Gamma^+}\bar{\beta}d\bar{r}=\int_{\Gamma^+}yzdx+(-x^2z+3xz-z)dy=\int_0^{2\pi}(-\text{ημ}^2t-\text{συν}^3t+3\text{συν}^2t-\text{συν}t)dt=\cdots=2\pi.$$

70. Γενικευμένα πολλαπλᾶ ὁλοκληρώματα.— Μία ἀκολουθία (T_ν) κλειστῶν ὑποχωρίων ἑνὸς ἀνοικτοῦ χωρίου T τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y λέγομεν ὅτι συγκλίνει ἢ ἔχει ὅριον τὸ T καὶ τὸ συμβολίζομεν $T_\nu\to T$, ὅταν κάθε κλειστὸν ὑποσύνολον A τοῦ T περιέχεται εἰς ὅλα τὰ T_ν ἀπὸ κάποιο ν καὶ ἔπειτα. Ἐὰν ἐπὶ πλέον κάθε T_ν περιέχεται εἰς τὸ ἑπόμενόν του $T_{\nu+1}$, λέγομεν ὅτι ἡ ἀκολουθία (T_ν) συγκλίνει μονότονα εἰς τὸ T καὶ τὸ συμβολίζομεν $T_\nu \uparrow T$.

Μέχρι τώρα εἰς τοὺς ὁρισμοὺς τῶν πολλαπλῶν ὁλοκληρωμάτων ὑποθέσαμε τὴν ὁλοκληρωτέα συνάρτησιν μονοσήμαντα ὡρισμένη καὶ περατουμένη ἐπὶ τοῦ χωρίου ὁλοκληρώσεως. Ἄς ὑποθέσωμεν λοιπὸν τώρα ὅτι εἰς ἕνα σημεῖον P τοῦ χωρίου ὁλοκληρώσεως T ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις $\Phi(M)$ ἀπειρίζεται ἤ γενικῶς δὲν εἶναι ὡρισμένη· ἐὰν παραστήσωμεν μὲ γ_ν μιὰ γειτονιὰ τοῦ σημείου P, ἡ συνάρτησις εἶναι μονοσήμαντα ὡρισμένη καὶ περατουμένη ἐπὶ τοῦ χωρίου $T_\nu = T - \gamma_\nu$ τὸ ὁποῖον προκύπτει ὅταν ἀπὸ τὰ σημεῖα τοῦ T ἐξαιρέσωμεν τὰ σημεῖα τῆς γ_ν. Ὅταν θεωρήσωμεν μίαν ἀκολουθίαν (γ_ν) ἀπὸ γειτονιὲς τῶν ὁποίων τὸ διαμέτρημα νὰ τείνη εἰς τὸ μηδὲν ὅταν τὸ $\nu \to \infty$, προκύπτει μία ἀκολουθία (T_ν) ἡ ὁποία προφανῶς συγκλίνει μονότονα εἰς τὸ T. Ἐὰν ἡ ἀκολουθία τῶν ὁλοκληρωμάτων:

$$\iint_{T_\nu} \Phi(M)\,d\tau \qquad (70.1)$$

διὰ $\nu \to +\infty$ ἔχη ὅριον κάποιον ἀριθμὸν J καὶ τὸ ὅριον αὐτὸ δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν (T_ν), δηλαδὴ ἀπὸ τὴν ἐκλογὴν τῆς (γ_ν), ὁ ἀριθμός:

$$J = \underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \iint_{T_\nu} \Phi(M)\,d\tau \qquad (70.2)$$

λέγεται γενικευμένον διπλὸν ὁλοκλήρωμα ἤ συντόμως ὁλοκλήρωμα τῆς $\Phi(M)$ ἐπὶ τοῦ T τὸ συμβολίζομεν πάλι:

$$\iint_T \Phi(M)\,d\tau = \underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \iint_{T_\nu} \Phi(M)\,d\tau \qquad (70.3)$$

καὶ λέγομεν ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα ἔχει ἔννοιαν, ὑπάρχει ἤ συγκλίνει· ὅταν ἡ ἀκολουθία τῶν ὁλοκληρωμάτων (70.1) δὲν ἔχη ὅριον ἤ ἔχει τὸ ἄπειρον λέγομεν ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα δὲν ἔχει ἔννοιαν, δὲν ὑπάρχει ἤ ἀποκλίνει.

Ἐπίσης μέχρι τώρα ὑποθέταμε τὰ χωρία ὁλοκληρώσεως περατωμένα· διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς $\Phi(M)$ ἐπὶ ἑνὸς ἀπεριορίστου χωρίου T θεωροῦμεν μίαν ἀκολουθίαν $T_\nu \to T$, ὁπότε ἐὰν ὑπάρχη τὸ ὅριον (70.2) καὶ εἶναι κάποιος ἀριθμὸς J ὁ ὁποῖος δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἐκλογὴ τῆς (T_ν), λέγομεν ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα ἔχει ἔννοιαν ὑπάρχει ἤ συγκλίνει, τὸ συμβολίζομεν ὅπως προηγουμένως καὶ ὁ ἀριθμὸς J λέγεται πάλι γενικευμένον διπλὸν ὁλοκλήρωμα ἤ συντόμως ὁλοκλήρωμα τῆς $\Phi(M)$ ἐπὶ τοῦ T.

Ὅταν ἡ ἀκολουθία τῶν ὁλοκληρωμάτων (70.1) δὲν ἔχη ὅριον ἤ ἔχει τὸ ἄπειρον λέγομεν πάλι ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα δὲν ἔχει ἔννοιαν δὲν ὑπάρχει ἤ ἀποκλίνει.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\Phi(M)$ δὲν εἶναι ἀρνητικὴ ἐπὶ τοῦ T καὶ διὰ μίαν μερικὴν ἀκολουθίαν $T_\nu \uparrow T$ τὸ ὅριον (70.2) εἶναι κάποιος ἀριθμὸς J, εἶναι εὔκολον νά δείξωμεν ὅτι τό ὁλοκλήρωμα τῆς $\Phi(M)$ συγκλίνει· πράγματι ἐάν θεωρήσωμεν καί μίαν ἄλλην οἱανδήποτε ἀκολουθίαν $T'_\nu \to T$, τό κλειστόν χωρίον T_κ ἐπειδή εἶναι ὑποσύνολον τοῦ T θά περιέχεται σέ κάθε χωρίον T'_ν ἀπό κάποιο $\nu = \nu(\kappa)$ καί ἔπειτα, διά τόν ἴδιο δέ λόγο κάθε χωρίον T'_ν θά περιέχεται σέ κάποιο T_μ, ὁπότε θά ἔχωμεν :

$$\iint_{T_\kappa} \Phi(M)d\tau \leqslant \iint_{T'_\nu} \Phi(M)d\tau \leqslant \iint_{T_\mu} \Phi(M)d\tau$$

Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι τό $\nu \to \infty$, τά δύο ἀκραῖα ὁλοκληρώματα τείνουν εἰς τόν ἀριθμόν J, ἐπομένως καί τό μεταξύ αὐτῶν κείμενον ὁλοκλήρωμα. Μέ τίς προηγούμενες προϋποθέσεις διά τήν $\Phi(M)$ καί τήν (T_ν), ἡ ἀκολουθία τῶν ὁλοκληρωμάτων (70.1) εἶναι αὔξουσα ἐπομένως διά νά συγκλίνη τό ὁλοκλήρωμα πρέπει καί ἀρκεῖ ὡς γνωστόν ἡ ἀκολουθία αὐτή νά εἶναι περατωμένη. Ἐάν ἡ $\Phi(M)$ ἀλλάζῃ πρόσημον ἐπί τοῦ T ἐφαρμόζομεν τά προηγούμενα ἐπί τῆς συναρτήσεως $|\Phi(M)|$, ὁπότε ἐάν τό ὁλοκλήρωμα αὐτῆς συγκλίνη θά συγκλίνη καί τό ὁλοκλήρωμα τῆς $\Phi(M)$· διότι ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι $T_\nu \uparrow T$ καί $\mu > \nu$ θά ἔχωμεν·

$$\left| \iint_{T_\mu} \Phi d\tau - \iint_{T_\nu} \Phi d\tau \right| = \left| \iint_{T_\mu - T_\nu} \Phi d\tau \right| \leqslant \iint_{T_\mu - T_\nu} |\Phi| d\tau = \iint_{T_\mu} |\Phi| d\tau - \iint_{T_\nu} |\Phi| d\tau$$

καί ἐπειδή ἡ διαφορά εἰς τό δεξιόν μέλος γιά $\nu \geqslant \nu_0(\varepsilon)$ γίνεται μικρότερη τοῦ αὐθαιρέτου θετικοῦ ἀριθμοῦ ε τό αὐτό θά συμβαίνη κατά μείζονα λόγον καί διά τό ἀριστερόν μέλος ὁπότε καί τό ὁλοκλήρωμα τῆς $\Phi(M)$ συγκλίνει. Παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι ἐάν ἐπί τοῦ T εἶναι $|\Phi(M)| \leqslant \sigma(M)$ καί συγκλίνει τό ὁλοκλήρωμα $\iint_T \sigma(M)d\tau$ θά συγκλίνη καί τό $\iint_T \Phi(M)d\tau$· διότι θά εἶναι πάλι γιά $T_\nu \uparrow T$, $\mu > \nu$ καί $\nu \geqslant \nu_0(\varepsilon)$:

$$\left| \iint_{T_\mu} \Phi d\tau - \iint_{T_\nu} \Phi d\tau \right| = \left| \iint_{T_\mu - T_\nu} \Phi d\tau \right| \leqslant \iint_{T_\mu - T_\nu} |\Phi| d\tau \leqslant \iint_{T_\mu - T_\nu} \sigma d\tau = \iint_{T_\mu} \sigma d\tau - \iint_{T_\nu} \sigma d\tau < \varepsilon$$

Ἀναφέρομεν χωρίς ἀπόδειξιν ὅτι καί ἀντιστρόφως ἡ σύγκλισις τοῦ ὁλοκληρώματος τῆς Φ ἐπί τοῦ T ἔχει ὡς συνέπειαν τήν σύγκλισιν τοῦ ὁλοκληρώματος τῆς $|\Phi|$, τό ὁποῖον δέν συμβαίνει εἰς τά ἁπλᾶ ὁλοκληρώματα. Τέλος ἡ θεωρία αὐτή τῶν γενικευμένων ὁλοκληρωμάτων τήν ὁποίαν ἀναπτύξαμε διά διπλᾶ ὁλοκληρώματα μεταφέρεται χωρίς καμία μεταβολή καί εἰς τά τριπλᾶ ὁλοκληρώματα.

Παράδειγμα (70.1). — Νά εὑρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ κ διά τίς ὁποῖες συγκλίνει τό ὁλοκλήρωμα :

$$\iint_T \frac{dxdy}{(\sqrt{x^2+y^2})^\kappa}$$

ὅπου T τό κυκλικόν χωρίον πού ἔχει κέντρον τήν ἀρχήν καί ἀκτίνα ἴση μέ α.

Λ ύ σ ι ς. Ἐάν εἶναι $T_\nu = T - \gamma_\nu$ ὅπου γ_ν μία κυκλική γειτονιά τῆς ἀρχῆς μέ ἀκτίνα δ_ν καί μετασχηματίσωμεν σέ πολικές συντεταγμένες, θά ἔχωμεν :

$$\iint_{T_\nu} \frac{dxdy}{(\sqrt{x^2+y^2})^\kappa} = \iint_{T_\nu} \frac{\rho d\rho d\theta}{\rho^\kappa} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\delta_\nu}^{\alpha} \frac{1}{\rho^{\kappa-1}} d\rho = 2\pi \int_{\delta_\nu}^{\alpha} \frac{1}{\rho^{\kappa-1}} d\rho.$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα εἰς τὸ δεξιὸν μέλος γιὰ $\kappa \neq 2$ ἔχει τὴν τιμὴν

$$\int_{\delta_\nu}^{\alpha} \frac{1}{\rho^{\kappa-1}} d\rho = \left[\frac{\rho^{-\kappa+2}}{-\kappa+2} \right]_{\delta_\nu}^{\alpha} = \frac{\alpha^{-\kappa+2} - \delta_\nu^{-\kappa+2}}{-\kappa+2}$$

ἡ ὁποία γιὰ $\delta_\nu \to 0$ καὶ $\kappa < 2$ ἔχει ὅριον τὸ $\frac{\alpha^{-\kappa+2}}{-\kappa+2}$ καὶ διὰ $\kappa > 2$ ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον· γιὰ $\kappa = 2$ τὸ ὁλοκλήρωμα ἔχει τὴν τιμὴν

$$\int_{\delta_\nu}^{\alpha} \frac{1}{\rho} d\rho = \left[\ln\rho \right]_{\delta_\nu}^{\alpha} = \ln\alpha - \ln\delta_\nu$$

ἡ ὁποία τείνει εἰς τὸ ἄπειρον γιὰ $\delta_\nu \to 0$. Ἐξ αὐτῶν λοιπὸν ἕπεται ὅτι τὸ δοθὲν ὁλοκλήρωμα συγκλίνει διὰ $\kappa < 2$ συγκλίνει καὶ διὰ $\kappa \geqslant 2$ ἀποκλίνει.

Παράδειγμα (70.2). – Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τιμὲς τοῦ κ διὰ τὶς ὁποῖες συγκλίνει τὸ ὁλοκλήρωμα:

$$\iiint_{\Omega} \frac{dxdydz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^\kappa}$$

ὅπου Ω τὸ σφαιρικὸν χωρίον ποὺ ἔχει κέντρον τὴν ἀρχὴν καὶ ἀκτῖνα ἴση μὲ α.

Λ ύ σ ι ς. Ἐὰν εἶναι $\Omega_\nu = \Omega - \gamma_\nu$ ὅπου γ_ν μία δ_ν-σφαιρικὴ γειτονιὰ τῆς ἀρχῆς καὶ μετασχηματίσωμεν σὲ σφαιρικὲς συντεταγμένες θὰ ἔχωμεν:

$$\iiint_{\Omega_\nu} \frac{dxdydz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^\kappa} = \iiint_{\Omega'_\nu} \frac{1}{\rho^{\kappa-2}} \text{συν}\varphi \, d\rho d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{συν}\varphi \, d\varphi \int_{\delta_\nu}^{\alpha} \frac{1}{\rho^{\kappa-2}} d\rho = 4\pi \int_{\delta_\nu}^{\alpha} \frac{1}{\rho^{\kappa-2}} d\rho$$

καὶ ἐργαζόμενοι ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα συγκλίνει διὰ $\kappa < 3$ καὶ ἀποκλίνει διὰ $\kappa \geqslant 3$.

Παράδειγμα (70.3). – Νὰ ἐξετασθῇ ἐὰν συγκλίνῃ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\iint_T e^{-x^2-y^2} dxdy$$

ὅπου T ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον τῶν x, y.

Λ ύ σ ι ς. Ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις εἶναι θετική, ἑπομένως ἐὰν ἀποδείξωμεν τὴν σύγκλισιν τοῦ ὁλοκληρώματος διὰ μίαν μερικὴν ἀκολουθίαν $T_\nu \uparrow T$ τὸ ὁλοκλήρωμα θὰ συγκλίνῃ. Λαμβάνομεν ὡς T_ν τὸ κυκλικὸν χωρίον ποὺ ἔχει κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ ἀκτῖνα ν καὶ μετασχηματίζομεν σὲ πολικὲς συντεταγμένες ὁπότε λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸ παράδειγμα (63.5) θὰ ἔχωμεν:

$$\iint_{T_\nu} e^{-x^2-y^2} dxdy = \pi \left(1 - e^{-\nu^2}\right)$$

καὶ ἐπειδὴ διὰ $\nu \to \infty$ τὸ δεξιὸν μέλος τείνει εἰς τὸ π, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν π δηλαδὴ εἶναι:

$$\iint_T e^{-x^2-y^2} dxdy = \pi$$

Ἕνα ἐνδιαφέρον συμπέρασμα προκύπτει ἐὰν λάβωμεν ὡς T_ν τὸ τετραγωνικὸν χωρίον $|x|, |y| \leqslant \nu$ ὁπότε θὰ ἔχωμεν:

$$\iint_{T_\nu} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_{-\nu}^{\nu} e^{-x^2} dx \int_{-\nu}^{\nu} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-\nu}^{\nu} e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(2 \int_0^{\nu} e^{-x^2} dx \right)^2$$

ὁπότε ὑποθέτοντες ὅτι $T_\nu \uparrow T$ δηλαδὴ ὅτι $\nu \to \infty$ τὸ ἀριστερὸν μέλος, ἐπειδὴ τὸ ὁλοκλήρωμα συγκλίνει, θὰ τείνῃ πάλι πρὸς τὸν ἀριθμὸν π, ἐπομένως:

$$\left(2\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi$$

ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται τὸ γνωστὸν ὁλοκλήρωμα:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Παράδειγμα (70.4). – Νὰ ἐξετασθῇ ἐὰν συγκλίνῃ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\iint_T \eta\mu(x^2+y^2)\,dxdy$$

ὅπου T τὸ πρῶτον τέταρτον τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y.

Λ ύ σ ι ς. Παριστάνομεν μὲ T_ν τὸ πρῶτον τέταρτον τοῦ κυκλικοῦ χωρίου ποὺ ἔχει κέντρον τὴν ἀρχὴν καὶ ἀκτῖνα ἴσῃ μὲ ν· μετασχηματίζοντες σὲ πολικὲς συντεταγμένες θὰ ἔχωμεν:

$$\iint_{T_\nu} \eta\mu(x^2+y^2)dxdy = \iint_{T_\nu'} \eta\mu\rho^2\rho d\rho d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\nu \frac{1}{2}\eta\mu\rho^2 d\rho^2 = \frac{\pi}{4}(1-\sigma\upsilon\nu\nu^2)$$

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ $\nu\to\infty$, προφανῶς $T_\nu \uparrow T$ καὶ τὸ δεξιὸν μέλος δὲν ἔχει ὅριον, ἐπομένως τὸ ὁλοκλήρωμα ἀποκλίνει. Ἐὰν λάβωμεν ὡς T_ν τὸ τετραγωνικὸν χωρίον $0 \leqslant x, y \leqslant \nu$ θὰ ἔχωμεν:

$$\iint_{T_\nu} \eta\mu(x^2+y^2)dxdy = \iint_{T_\nu}(\eta\mu x^2 \sigma\upsilon\nu y^2 + \sigma\upsilon\nu x^2 \eta\mu y^2)dxdy = \int_0^\nu \eta\mu x^2 dx \int_0^\nu \sigma\upsilon\nu y^2 dy + \int_0^\nu \sigma\upsilon\nu x^2 dx \int_0^\nu \eta\mu y^2 dy =$$

$$= 2\int_0^\nu \eta\mu x^2 dx \int_0^\nu \sigma\upsilon\nu\, x^2 dx$$

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ $\nu\to\infty$, προφανῶς $T_\nu \uparrow T$ καὶ τὸ δεξιὸν μέλος γίνεται γινόμενον τῶν ὁλοκληρωμάτων τοῦ Fresnel:

$$\int_0^\infty \eta\mu x^2 dx = \int_0^\infty \sigma\upsilon\nu x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ἐπομένως διὰ τὴν εἰδικὴν αὐτὴν ἀκολουθίαν (T_ν) τὸ ὁλοκλήρωμα ἔχει ὅριον τὸν ἀριθμὸν $2\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$.

Ἀσκήσεις

Ἐὰν εἶναι $\bar r = (x,y,z)$, $\bar r_0 = \bar r : |\bar r|$, $r = |\bar r|$ νὰ δειχθῇ ὅτι:

1161) $div(\bar r r^\nu) = (\nu+3)r^\nu$ 1162) $rot\,\bar r = 0$

1163) $rot(\bar r r^\nu) = 0$ 1164) $grad\,\sigma(r) = \sigma'(r)\bar r_0$

Ἐὰν $\bar c$ εἶναι σταθερὸν διάνυσμα νὰ δειχθῇ ὅτι:

1165) $grad(\bar c\bar a) = (\bar c\nabla)\bar a + [\bar c, rot\,\bar a]$ 1166) $grad(\bar c\bar r) = \bar c$

1167) $div[\bar c\bar a] = -\bar c\, rot\, a$ 1168) $div[\bar c\bar r] = 0$.

1169) $rot[\bar c\bar a] = \bar c\, div\,\bar a - (\bar c\nabla)\bar a$ 1170) $rot[\bar c\bar r] = 2\bar c$

1171) Δείξατε ὅτι: $(\bar a\cdot\nabla)\bar r = \bar a$.

1172) Δείξατε ὅτι : $(\bar{a}\nabla)\bar{a} = \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,\bar{a}^2 - [\bar{a}, \mathrm{rot}\,\bar{a}]$.

Ἐὰν οἱ $\delta, \phi, u, v, \bar{F}$ εἶναι συναρτήσεις τῶν x, y, z καὶ $\delta\bar{F} = \mathrm{grad}\,\phi$ νὰ δειχθῆ ὅτι ἀληθεύουν οἱ σχέσεις :

1173) $\bar{F}\,\mathrm{rot}\,\bar{F} = 0$

1174) $\mathrm{grad}\,\sigma(u) = \sigma'(u)\,\mathrm{grad}\,u$

1175) $\Delta\sigma(u) = \sigma''(u)(\mathrm{grad}\,u)^2 + \sigma'(u)\Delta u$

1176) $\mathrm{grad}\, f(u,v) = f_u \mathrm{grad}\,u + f_v \mathrm{grad}\,v$

1177) Ἐὰν $\bar{c}$ εἶναι σταθερὸν μοναδιαῖον διάνυσμα νὰ δειχθῆ :

$$\bar{c}\left\{\mathrm{grad}(\bar{a}\bar{c}) - \mathrm{rot}\,[\bar{a}\bar{c}]\right\} = \mathrm{div}\,\bar{a}$$

Ἐὰν εἶναι $\bar{a} = (P, Q, R)$ νὰ δειχθῆ ὅτι :

1178) $\nabla\bar{a} = \nabla P\,\bar{i} + \nabla Q\,\bar{j} + \nabla R\cdot\bar{k}$

1179) $[\nabla\bar{a}] = [\nabla P, \bar{i}] + [\nabla Q, \bar{j}] + [\nabla R, \bar{k}]$

Ἐὰν τὰ διανύσματα $\bar{a}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ εἶναι σταθερὰ νὰ δειχθῆ ὅτι :

1180) $\mathrm{grad}\left\{(\bar{a}\bar{r})(\bar{\beta}\bar{r})(\bar{\gamma}\bar{r})\right\} = (\bar{\beta}\bar{r})(\bar{\gamma}\bar{r})\,\bar{a} + (\bar{\gamma}\bar{r})(\bar{a}\bar{r})\,\bar{\beta} + (\bar{a}\bar{r})(\bar{\beta}\bar{r})\,\bar{\gamma}$

1181) $(\bar{a}\nabla)\{(\bar{\beta}\nabla)r^{-1}\} = 3(\bar{a}\bar{r})(\bar{\beta}\bar{r})r^{-5} - (\bar{a}\bar{\beta})r^{-3}$.

1182) Ἐὰν τὸ πεδίον $\bar{a}$ εἶναι μηδενικῆς ἀποκλίσεως νὰ δειχθῆ ὅτι:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\bar{a} = \Delta(\Delta\bar{a}) = \frac{\partial^4\bar{a}}{\partial x^4} + \frac{\partial^4\bar{a}}{\partial y^4} + \frac{\partial^4\bar{a}}{\partial z^4}$$

Ἐὰν $\bar{c}$ εἶναι σταθερὸν διάνυσμα νὰ δειχθῆ ὅτι:

1183) $\mathrm{grad}\left(\frac{\bar{c}\bar{r}}{r^{\mu}}\right) = \frac{\bar{c}}{r^{\mu}} - \mu\frac{(\bar{c}\bar{r})\bar{r}}{r^{\mu-2}}$

1184) $\mathrm{grad}\,[\bar{c}\bar{r}]^2 = 2\,[[\bar{c}\bar{r}]\bar{c}]$

1185) $\mathrm{grad}\ln|[\bar{c}\bar{r}]| = [[\bar{c}\bar{r}]\bar{c}]\,[\bar{c}\bar{r}]^{-2}$

1186) $\mathrm{rot}\,(r\bar{c}) = [\bar{r}\bar{c}] : r$

1187) $\mathrm{rot}\,\frac{[\bar{c}\bar{r}]}{r^{\nu}} = \frac{(2-\nu)\bar{c}}{r^{\nu}} + \nu\,\frac{\bar{r}(\bar{c}\bar{r})}{r^{\nu+2}}$

1188) $\bar{c}_0\left\{\mathrm{grad}\,(\bar{c}_0\bar{a}) + \mathrm{rot}\,[\bar{c}_0\bar{a}]\right\} = \mathrm{div}\,\bar{a}$

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ πεδιακές γραμμές τῶν ἑξῆς διανυσματικῶν πεδίων :

1189) $\bar{a} = \mu\,[\bar{k}\bar{r}]$

1190) $\bar{a} = (-4yz, -x, 4xy)$.

1191) Νὰ δειχθῆ ὅτι τὸ διανυσματικὸν πεδίον $\bar{a} = \lambda\bar{\rho}_0\,\text{συν}\,|\bar{\rho}| + \mu\bar{k}$, ὅπου $\bar{\rho}_0$ τὸ μοναδιαῖον τοῦ $\bar{\rho} = (x, y, 0)$, προέρχεται ἐκ δυναμικοῦ καὶ νὰ εὑρεθῆ ἡ οἰκογένεια τῶν σταθμικῶν ἐπιφανειῶν.

1192) Ὁμοίως διὰ τὸ πεδίον $\bar{a} = 4\bar{\rho}e^{\rho^{-2}} - \bar{i}$, ὅπου $\bar{\rho} = (0, y, z)$.

1193) Νὰ προσδιορισθῆ ἡ συνάρτησις $f(z)$ ἔτσι ὥστε τὸ διανυσματικὸν πεδίον $\bar{a} = [4xf, -yf, f(y^2-4x^2):(2z-4)]$ νὰ εἶναι ἀστρόβιλον.

1194) Δείξατε ὅτι τὸ διανυσματικὸν πεδίον $\bar{a} = (x^2-yz, y^2-zx, z^2-xy)$ προέρχεται ἐκ δυναμικοῦ καὶ ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῶν σταθμικῶν ἐπιφανειῶν αὐτοῦ δύναται νὰ γραφῆ $\delta d^2 = c$, ὅπου δ καὶ d παριστάνουν ἀντιστοίχως τὶς ἀποστάσεις τοῦ σημείου $M(x,y,z)$ ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον $x+y+z=0$ καὶ τὴν εὐθεῖαν $x=y=z$.

. . .

Ἐπαληθεύσατε τὸν τύπον τοῦ Riemann στὶς ἑξῆς περιπτώσεις :

1195) $\bar{a} = (e^x\,\text{ημ}\,y,\ e^x\,\text{συν}\,y)$ καὶ Γ ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

1196) $\bar{a} = (2x^3-y^3,\ x^3+y^3)$ » Γ ὁ κύκλος $x^2+y^2=1$.

1197) $\bar{a} = (2yx^2,\ x^3)$ » Γ ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου $0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 4$

1198) $\bar{a} = (y, 2x)$ » Γ » » » χωρίου $(y+x^2=4,\ y=x+2)$.

1199) $\mathrm{rot}\,\bar{a} = x\,\text{συν}\,y$ » T τὸ χωρίον $\left(y=x^2,\ y=0,\ x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right.$

1200) $\mathrm{rot}\,\bar{a} = 2e^{x+y}$ » T » » $(x=0,\ y=1,\ x=y)$

1201) $\mathrm{rot}\,\bar{a} = 2$ » T » » $(xy=4,\ x+y=5)$

1202) $\mathrm{rot}\,\bar{a} = x^2+y^4$ » T » » $(x=1,\ x=-1,\ y=1,\ y=-1)$

1203) Δείξατε ὅτι: $\oint_{\Gamma+} ay\,dx + \beta x\,dy = (\beta-a)\,|T|$, ὅπου T τὸ χωρίον τὸ ὁποῖον περικλείεται ὑπὸ τῆς Γ.

1204) Δείξατε ὅτι $\oint_\Gamma (\bar{a}\bar{n})ds = 0$, ὅπου $\bar{a} = (x^2+y^2, -2xy)$, Γ ὁ κύκλος $x^2+y^2=1$ καί $\bar{n}$ τό πρός τά ἔξω κάθετον μοναδιαῖον διάνυσμα τῆς Γ.

1205) Δείξατε ὅτι: $\oint_{\Gamma+} f(x)dx+\varphi(y)dy = 0$ γιά κάθε κλειστή γραμμή Γ.

1206) » » : $\oint_\Gamma (\bar{r}\bar{n})ds = 2|T|$ ὅπου Τ τό χωρίον τό ὁποῖον περικλείεται ὑπό τῆς Γ μέ ἐξίσωσιν $\bar{r} = \bar{r}(s)$ καί $\bar{n}$ τό πρός τά ἔξω κάθετον μοναδιαῖον διάνυσμα αὐτῆς.

1207) Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό δυναμικόν πεδίον $\bar{F} = (2xy, x^2)$ εἶναι ἀστρόβιλον, νά εὑρεθῆ τό δυναμικόν καί τό παραγόμενον ἔργον ἀπό τό σημεῖον Α(0,0) μέχρι τό Β(1,1)· ἐπαληθεύσατε τό ἐξαγόμενον τοῦ ἔργου λαμβάνοντες ὡς γραμμήν ὁλοκληρώσεως τήν $y = x^{3/2}$.

1208) Νά γίνουν τά ἴδια διά τό πεδίον $\bar{F} = (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}(x,y)$, ὅπου Α(1,0), $B(e^{2\pi},0)$ καί ἐπαλήθευσις μέ τήν γραμμήν $x = e^t \text{συν}t$, $y = e^t \text{ημ}t$.

1209) ὁμοίως διά τό πεδίον $\bar{F} = (yx^{-2}, -x^{-1})$, ὅπου Α(1,-2), Β(3,4) καί ἐπαλήθευσις μέ τήν εὐθεῖαν $y = 3x-5$.

1210) Ὁμοίως διά τό πεδίον $\bar{F} = (3x^2y^{-1}, -x^3y^{-2})$, ὅπου Α(0,2), Β(1,3) καί ἐπαλήθευσις μέ τήν γραμμήν $y = 2+x^2$.

1211) Ὁμοίως διά τό πεδίον $\bar{F} = (ye^{xy}, xe^{xy})$, ὅπου Α(0,0), Β(π,0) καί ἐπαλήθευσις μέ τήν γραμμήν $y = \text{ημ}^3 x$.

Νά ὑπολογισθῆ τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a}$ κατά τήν θετικήν φοράν διαγραφῆς ἐπί τῆς κλειστῆς γραμμῆς Γ στίς ἑξῆς περιπτώσεις:

√1212) $\bar{a} = (\text{ημ}xy + xy\,\text{συν}xy, x^2\text{συν}xy)$, Γ ὁ κύκλος $x^2+y^2=1$.

1213) $\bar{a} = [(x-1)^2+y^2]^{-1}\cdot(y, 1-x)$, Γ ὁ κύκλος $x^2+y^2=4$.

1214) $\bar{a} = (y^3, -x^3)$, Γ τό τετράγωνον $|x|+|y| = 1$

1215) $\bar{a} = (xy^6, 3x^2y^5+6x)$, Γ ἡ ἔλλειψις $x^2+4y^2=4$

1216) Νά δειχθῆ ὅτι διά κάθε τόξον τό ὁποῖον δέν διέρχεται διά τῆς ἀρχῆς καί ἔχει ἄκρα τά σημεῖα Α(α,0), Β(β,β) εἶναι:

$$\int_{AB} (-y\,dx + x\,dy) : (x^2+y^2) = \frac{\pi}{4} + 2\kappa\pi \quad (\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

1217) Νά δειχθῆ ὅτι τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα τῆς $\bar{a} = (2xy, x^2-y^2)$ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς γραμμῆς ὁλοκληρώσεως καί νά εὑρεθῆ ἡ δυναμική συνάρτησις.

1218) Νά δειχθῆ ὅτι τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα τῆς $\bar{a} = (\text{ημ}y, x\text{συν}y)$ εἶναι μηδέν ἐπί κάθε κλειστῆς γραμμῆς καί νά εὑρεθῆ ἡ δυναμική συνάρτησις

1219) Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα $\oint_{\Gamma+} xy^2dy - yx^2dx$ ἐπί τοῦ κύκλου $x^2+y^2-2y = 0$ καί νά ἐπαληθεύσετε τό ἐξαγόμενον, χρησιμοποιοῦντες τόν τύπον τοῦ Riemann.

1220) Δίδεται τό διανυσματικόν πεδίον $\bar{a} = [(1+x^2)\lambda(x), 2xy\lambda(x), -3z\lambda(x)]$ καί ζητεῖται νά προσδιορισθῆ ἡ συνάρτησις $\lambda(x)$ ἔτσι ὥστε νά μηδενίζεται διά $x=0$ καί ἡ ροή τῆς $\bar{a}$ δι' ἐπιφανείας νά ἐξαρτᾶται μόνον ἀπό τήν γραμμήν εἰς τήν ὁποίαν περατοῦται αὐτή· κατόπιν αὐτῶν ὑπολογίσατε διά καταλλήλου ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος τήν ροήν δι' ἐπιφανείας ἡ ὁποία περατοῦται εἰς τήν γραμμήν $x = \text{συν}t$, $y = \text{ημ}t$, $z = 1$.

1221) Ἐπαληθεύσατε τὸν τύπον τοῦ Riemann ἐπὶ τοῦ ἡμικυκλικοῦ χωρίου $T:(x^2+y^2=2ay,\ 0\leqslant y\leqslant a)$ ὅταν $Q_x-P_y\equiv(2ay-x^2-y^2):y$.

1222) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα τοῦ χωρίου τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τὶς γραμμὲς $\rho(2+\text{συν}\theta)=a$, $\rho=a$ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης εἰς κάθε σημεῖον M εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως τοῦ M ἀπὸ τὴν ἀρχήν.

1223) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα τοῦ λακίσκου τὸν ὁποῖον σχηματίζει ἡ γραμμὴ $x^3+y^3-3xy=0$, ὅταν ἡ πυκνότης αὐτοῦ εἶναι $\delta=xy$· χρησιμοποιήσατε πρὸς τοῦτο τὸν τύπον τοῦ Riemann, ἀφοῦ προηγουμένως προσδιορίσετε διανυσματικὴν συνάρτησιν $\bar{a}$ μὲ συντεταγμένες μονώνυμα τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς xy καὶ μὲ ἀντιθέτους συντελεστάς.

Νὰ ἐπαληθεύσετε τὸν τύπον τοῦ Gauss στὶς ἑξῆς περιπτώσεις:

1224) $\bar{a}=(x,z,y-1)$ $\quad\Omega:(z=1-x^2,\ y=x,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

1225) $\bar{a}=(x,y,z^2)$ $\quad\Omega:(x=\pm1,\ y=\pm1,\ z=\pm1)$

1226) $\bar{a}=(-z,y,x)$ $\quad\Omega:(z=3+2x^2-y^2,\ z=x,\ x=1,\ y=1,\ x=0,\ y=0)$.

1227) $\bar{a}=(2x,y,x-z)$ $\quad\Omega:(-2x+3y+6z-6=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0)$.

1228) $\bar{a}=(x,y,z)$ $\quad\Omega:(y^2+z^2=4,\ y^2=4-2x)$.

Νὰ ἐπαληθεύσετε τὸν τύπον τοῦ Stokes στὶς ἑξῆς περιπτώσεις:

1229) $\bar{a}=(-3y,3x,1)$ $\quad\Sigma:(z=2,\ x^2+y^2\leqslant 1)$.

1230) $\bar{a}=(2xy^2z,\ 2x^2yz,\ x^2y^2-2z)$ $\quad\Sigma:(y=z,\ x^2+y^2\leqslant 1)$

1231) $\bar{a}=(x,y,1)$ $\quad\Sigma:(z=x^2+4y^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\leqslant 4)$.

1232) $\bar{a}=(-z,y,x)$ $\quad\Sigma:(z=3+2x^2-y^2,\ 0\leqslant x,y\leqslant 1)$

1233) $\bar{a}=(x,-z,-y)$ $\quad\Sigma:(x=yz-y-z+1,\ 0\leqslant x,y,z\leqslant 1)$

1234) Δίδεται τὸ πεδίον $\bar{a}=[-y:(x^2+y^2),\ x:(x^2+y^2),\ z]$ καὶ τὸ χωρίον Ω τὸ ὁποῖον προκύπτει διὰ περιστροφῆς τοῦ κύκλου $(x-2)^2+z^2=1,\ y=0$ περὶ τὸν ἄξονα τῶν z. Ἐξηγήσατε διατὶ ἐνῶ τὸ πεδίον εἶναι ἀστρόβιλον ἐντὸς τοῦ Ω, ἡ κυκλοφορία τῆς $\bar{a}$ ἐπὶ τοῦ κύκλου $x^2+y^2=4,\ z=0$ δὲν εἶναι μηδὲν καὶ ὁρίσατε τὶς δυνατὲς τιμὲς τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος τῆς $\bar{a}$ ἐπὶ τῶν γραμμῶν τοῦ Ω ποὺ ἔχουν ἄκρα τὰ σημεῖα $A(2,0,0)$ καὶ $B(0,2,0)$.

1235) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πεδίον $\bar{a}=(2xyz^2+xy^3,\ x^2y^2-y^2z^2,\ -y^3z-2x^2yz)$ προέρχεται ἀπὸ διανυσματικὸν δυναμικὸν καὶ νὰ εὑρεθῇ αὐτό.

1236) Νὰ ἐπαληθεύσετε τὸν τύπον τοῦ Gauss ἐπὶ τοῦ σφαιρικοῦ χωρίου ποὺ ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον $K(x_0,y_0,z_0)$ καὶ ἀκτῖνα β, λαμβάνοντες ὡς διανυσματικὴν συνάρτησιν τὴν $\bar{a}=(x^2,y^2,z^2)$.

1237) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\bar{a}=(\text{ημ}yz,\ xz\,\text{συν}yz,\ xy\,\text{συν}yz)$ ἐπὶ τοῦ τόξου τῆς κυκλικῆς ἕλικος $x=\text{συν}t,\ y=\text{ημ}t,\ z=t$ $(0\leq t\leqslant\frac{\pi}{4})$.

1238) Δείξατε ὅτι τὸ διανυσματικὸν πεδίον ποὺ ἔχει δυναμικὴν συνάρτησιν $\Phi=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$, εἶναι μηδενικῆς ἀποκλίσεως καὶ ἐξηγήσατε διατὶ ἡ ροὴ διὰ κλειστῆς ἐπιφανείας ἡ ὁποία περικλείει τὴν ἀρχὴν εἶναι πάντοτε $F=-4\pi$ καὶ δι' ἐπιφανείας ἡ ὁποία δὲν τὴν περικλείει εἶναι μηδέν.

1239) Ἐὰν τὸ τριδιάστατον χωρίον Ω περικλείεται ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας Σ δείξατε ὅτι: $\iiint_{\Omega}\bar{a}\,\text{rot}\,\bar{\beta}\,d\omega=\iiint_{\Omega}\bar{\beta}\,\text{rot}\,\bar{a}\,d\omega-\iint_{\Sigma}[\bar{a}\bar{\beta}]\,\overline{d\sigma}$.

1240) Νά δειχθῆ ὅτι τό πεδίον $\bar{a}=\left(y-\frac{1}{x},\ x-\frac{1}{y}\right)$ εἶναι συντηρητικόν καί νά προσδιορισθῆ ἡ δυναμική συνάρτησις καί οἱ σταθμικές γραμμές.

1241) Νά δειχθῆ ὅτι τό πεδίον $\bar{a}(M)=\omega^2(\overline{MO}+\overline{MP})$, ὅπου P ἡ προβολή τοῦ M ἐπί τῆς εὐθείας $x=2a,\ y=0\ (a>0)$ καί ω σταθερόν, εἶναι ἀστρόβιλον καί νά εὑρεθοῦν οἱ πεδιακές γραμμές, ἡ δυναμική συνάρτησις καί οἱ σταθμικές ἐπιφάνειες.

1242) Νά ἐξετασθῆ ἐάν τό πεδίον $\bar{a}=\left(\frac{-x^2+y^2+z^2+a^2}{x},\ -2y,\ -2z\right)$ εἶναι ἀστρόβιλον καί νά εὑρεθοῦν οἱ πεδιακές γραμμές αὐτοῦ.

1243) Νά εὑρεθοῦν οἱ δυναμικές γραμμές τοῦ πεδίου πού ἔχει δυναμικήν συνάρτησιν $\phi=z:(x^2+y^2+z^2)$.

1244) Νά δειχθῆ ὅτι ὑπό τίς προϋποθέσεις τοῦ τύπου τοῦ Gauss ἰσχύει ὁ τύπος

$$\iiint_\Omega \operatorname{grad}\varphi\operatorname{grad}f\,d\omega=\iint_\Sigma \varphi\operatorname{grad}f\,\bar{d\sigma}-\iiint_\Omega \varphi\,\Delta f\,d\omega$$

1245) Νά δειχθῆ ὅτι ἡ ροή τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως:

$$\bar{a}=(a-x,\ \beta-y,\ \gamma-z):\left[(a-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2\right]$$

διά κλειστῆς ἐπιφανείας Σ μέ θετικήν ὄψιν τήν ἐσωτερικήν, ἰσοῦται μέ 4π ὅταν τό σημεῖον (a,β,γ) περικλείεται ὑπό τῆς Σ καί μέ 0 ὅταν κεῖται εἰς τό ἐξωτερικόν τοῦ ὑπ' αὐτῆς περικλειομένου χωρίου.

1246) Νά δειχθῆ ὅτι ὑπό τίς προϋποθέσεις τοῦ τύπου τοῦ Gauss ἰσχύει ὁ τύπος:

$$\iint_\Sigma \frac{\bar{r}}{r^2}\,\bar{d\sigma}=\iiint_\Omega \frac{1}{r^2}\,d\omega$$

1247) Ὁμοίως νά ἀποδειχθοῦν οἱ σχέσεις:

$$|\Omega|=\iint_\Sigma x\bar{i}\,\bar{d\sigma}=\iint_\Sigma y\bar{j}\,\bar{d\sigma}=\iint_\Sigma z\bar{k}\,\bar{d\sigma}=\frac{1}{3}\iint_\Sigma \bar{r}\,\bar{d\sigma}$$

1248) Νά ὁρισθοῦν τά διανυσματικά πεδία μηδενικῆς ἀποκλίσεως τῶν ὁποίων ἡ συνάρτησις εἶναι τῆς γενικῆς μορφῆς $\bar{a}=\bar{r}\,\lambda(r)$.

1249) Νά ὁρισθοῦν τά ἀστρόβιλα διανυσματικά πεδία τῶν ὁποίων ἡ συνάρτησις εἶναι τῆς μορφῆς $\bar{a}=\bar{r}\lambda(M)$.

1250) Νά ὑπολογισθῆ τό γενικευμένον ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\phi=(1+x^2+y^2)^{-2}$ ἐπί ὁλοκλήρου τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y.

1251) Νά ὑπολογισθῆ τό γενικευμένον ὁλοκλήρωμα τῆς προηγουμένης συναρτήσεως εἰς τό ἐσωτερικόν τῆς παραβολῆς $y^2=2x$.

1252) Νά εὑρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ κ διά τίς ὁποῖες συγκλίνει τό γενικευμένον ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi=(2x^2+3y^2)^{-K}$ ἐπί τοῦ κυκλικοῦ χωρίου $x^2+y^2\leq 1$.

1253) Ὁμοίως διά τήν συνάρτησιν

$$\Phi=\left[\frac{(2-x)y^2}{2+x}+\frac{(2+y)x^2}{2-y}\right]^{-K}$$

1254) Νά ὑπολογισθῆ τό γενικευμένον ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi=xye^{-(x^2+y^2+2xy\,\text{συν}\,a)}$ $(0<a<\pi)$ ἐπί τοῦ πρώτου τεταρτου τῶν ἀξόνων.

71. Γενική περίληψις τοῦ τρίτου κεφαλαίου.— Τά ὁλοκληρώματα τά ὁποῖα ὁρίσαμε εἰς τό κεφάλαιον αὐτό, δύνανται νά θεωρηθοῦν ὡς γενικεύσεις πρός διάφορες κατευθύνσεις τῶν ἁπλῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων. Δυνάμεθα ἐπίσης γενικεύοντες ἀκόμη περισσότερον τήν διαδικασία αὐτή νά ὁρίσωμεν ὁλοκληρώματα εἰς χώρους περισσοτέρων διαστάσεων καί νά διατυπώσωμεν ἀντιστοίχους τύπους· εἰς τὸ ἑπόμενον ἐδάφιον δίδομεν ὡς παράδειγμα τῆς γενικεύσεως αὐτῆς, τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὄγκου μιᾶς τετραδιαστάτου σφαίρας. Οἱ τύποι μετασχηματισμοῦ τῶν διπλῶν καὶ τριπλῶν ὁλοκληρωμάτων εἶναι γενίκευσις τοῦ τύπου (63.2) μετασχηματισμοῦ τῶν ἁπλῶν ὁλοκληρωμάτων. Διὰ χωρία ὁλοκληρώσεως κυκλικῆς μορφῆς χρησιμοποιοῦμεν συνήθως τὸν μετασχηματισμὸν εἰς πολικὲς συντεταγμένες καὶ διὰ χωρία ἐλλειπτικῆς μορφῆς τὸν μετασχηματισμὸν (63.10)· ὁμοίως διὰ χωρία ὁλοκληρώσεως σφαιρικῆς μορφῆς χρησιμοποιοῦμεν συνήθως τὸν μετασχηματισμὸν εἰς σφαιρικὲς συντεταγμένες καὶ διὰ χωρία ἐλλειψοειδοῦς μορφῆς τὸν μετασχηματισμὸν (66.15). Εἰς τὰ ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα ὡς πρὸς s δὲν διακρίνομεν φορὰν ὁλοκληρώσεως, ἐνῶ εἰς τὰ ὁλοκληρώματα ὡς πρὸς x, y, z διακρίνομεν. Ἀντιστοίχως εἰς τὰ ἐπιφανειακὰ ὁλοκληρώματα ὡς πρὸς σ δὲν διακρίνομεν θετικὴν καὶ ἀρνητικὴν ὄψιν τῆς ἐπιφανείας ὁλοκληρώσεως, ἐνῶ εἰς τὰ ὁλοκληρώματα ὡς πρὸς xy, yz, zx διακρίνομεν. Οἱ τύποι ὑπολογισμοῦ τῶν ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων ἔχουν συγκεντρωθεῖ εἰς τὸν πίνακα VII καὶ τῶν ἐπιφανειακῶν εἰς τὸν πίνακα IX. Ἡ πυκνότης, ἡ μᾶζα, τὸ κέντρον βάρους, ἡ ροπὴ ἀδρανείας καὶ τὸ δυναμικόν, διὰ σῶμα ὑλικὸν τὸ ὁποῖον καταλαμβάνει ἕνα τόπον B, δίδονται ἀπὸ τοὺς τύπους:

$$\delta = \text{op}\,\frac{\Delta m}{\Delta\beta}\,, \quad m = \int_B \delta\, d\beta$$
$$\bar r_\kappa = \frac{1}{m}\int_B \bar r\,\delta\, d\beta\,, \quad I = \int_B a^2\delta\, d\beta\,, \quad U = \int_B \frac{\delta}{r}\, d\beta \qquad (71.1)$$

Τὰ ὁλοκληρώματα αὐτὰ θὰ εἶναι ἐπικαμπύλια ὡς πρὸς s, ἐπιφανειακὰ ὡς πρὸς σ ἢ τριπλᾶ, ἀντιστοίχως ὅταν ἡ μᾶζα m εἶναι κατανεμημένη ἐπὶ ἑνὸς τόξου, μιᾶς ἐπιφανείας ἢ ἑνὸς τριδιαστάτου χωρίου. Τὸ ἔργον μιᾶς δυνάμεως $\bar F$ ὁρίζεται ἀπὸ τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα (60.1) καὶ ἡ ροὴ τῆς $\bar a$ ἀπὸ τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα (68.26). Τὰ ἐπικαμπύλια καὶ διπλᾶ ὁλοκληρώματα συνδέονται μὲ τὸν τύπον τοῦ Riemann, τὰ ἐπιφανειακὰ καὶ τριπλᾶ μὲ τὸν τύπον τοῦ Gauss τὰ δὲ ἐπικαμπύλια καὶ ἐπιφανειακὰ μὲ τὸν τύπον τοῦ Stokes. Ἐὰν τὸ διανυσματικὸν πεδίον εἶναι ἀστρόβιλον, προέρχεται ἀπὸ δυναμικὸν καὶ ἀντιστρόφως ἐὰν προέρχεται ἀπὸ δυναμικὸν εἶναι ἀστρόβιλον. Ἐὰν τὸ διανυσματικὸν πεδίον εἶναι μηδενικῆς ἀποκλίσεως, προέρχεται ἀπὸ διανυσματικὸν δυναμικὸν καὶ ἀντιστρόφως ἐὰν προέρχεται ἀπὸ διανυσματικὸν δυναμικὸν εἶναι μηδενικῆς ἀποκλίσεως. Ἐὰν ἡ κυκλοφορία τῆς συναρτήσεως ἑνὸς διανυσματικοῦ πεδίου ἐξαρτᾶται μόνο ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς γραμμῆς ὁλοκληρώσεως, εἴτε εἶναι μηδὲν ἐπὶ κάθε κλειστῆς γραμμῆς, τὸ πεδίον εἶναι ἀστρόβιλον καὶ ἀντιστρόφως. Τὰ γενικευμένα πολλαπλᾶ ὁλοκληρώματα ἀποτελοῦν καὶ αὐτὰ γενίκευσιν τῶν ἁπλῶν γενικευμένων ὁλοκληρωμάτων· ἐὰν ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις δὲν εἶναι ἀρνητικὴ ἐπὶ τοῦ τόπου ὁλοκληρώσεως T καὶ διὰ μίαν μερικὴν ἀκολουθίαν $T_\nu \uparrow T$ ἡ ἀντίστοιχος ἀκολουθία τῶν ὁλοκληρωμάτων συγκλίνη, τότε τὸ ὁλοκλήρωμα συγκλίνει. Μία σημαντικὴ διαφορὰ ὑπάρχει μὲ τὰ ἁπλᾶ γενικευμένα ὁλοκληρώματα· δηλαδὴ εἰς τὰ πολλαπλᾶ γενικευμένα ὁλοκληρώματα ἡ σύγκλισις τοῦ ὁλοκληρώματος τῆς Φ συνεπάγεται καὶ τὴν σύγκλισιν τοῦ ὁλοκληρώματος τῆς $|\Phi|$, τὸ ὁποῖον δὲν συμβαίνει εἰς τὰ ἁπλᾶ γενικευμένα ὁλοκληρώματα.

72. Γενικὰ παραδείγματα ἐπὶ τοῦ τρίτου κεφαλαίου.

Παράδειγμα (72.1).— Ἐὰν ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου $a \leqslant x \leqslant A$, $\beta \leqslant y \leqslant B$ καὶ ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y)$ εἶναι λύσις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως $\Phi_{xy}=f$, νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ τὰ (x,y) τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ ἰσχύει ὁ τύπος:

$$\int_a^x dx \int_\beta^y f(x,y)\,\partial y = \Phi(x,y)-\Phi(x,\beta)-\Phi(a,y)+\Phi(a,\beta)$$

Λ ύ σ ι ς: Διὰ μερικῆς ὁλοκληρώσεως ὡς πρὸς y τῆς ἐξισώσεως $\Phi_{xy}=f$ θὰ ἔχωμεν:

$$\Phi_x=\int_\beta^y f\,\partial y+\sigma_1(x)$$

καὶ ἐξ αὐτῆς δι᾽ ὁλοκληρώσεως ὡς πρὸς x προκύπτει:

$$\Phi(x,y)=\int_a^x dx\int_\beta^y f(x,y)\,\partial y+\sigma_1(x)+\sigma_2(y) \qquad (1)$$

ὅπου σ_1, σ_2 αὐθαίρετες συναρτήσεις ἀντιστοίχως ὡς πρὸς x, y· ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνοντες ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ δευτέρου μέλους μηδενίζεται διὰ $x=a$ καὶ $y=\beta$, προκύπτουν οἱ σχέσεις:

$$\Phi(x,\beta)=\sigma_1(x)+\sigma_2(\beta),\quad \Phi(a,y)=\sigma_1(a)+\sigma_2(y),\quad \Phi(a,\beta)=\sigma_1(a)+\sigma_2(\beta)$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὶς δύο πρῶτες καὶ ἀφαιροῦντες τὴν τρίτη κατὰ μέλη προκύπτει: $\Phi(x,\beta)+\Phi(a,y)-\Phi(a,\beta)=\sigma_1(x)+\sigma_2(y)$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) καὶ ἐπιλύοντες ὡς πρὸς τὸ ὁλοκλήρωμα προκύπτει τὸ ζητούμενον. Ὁ ἀποδειχθεὶς τύπος δύναται νὰ χρησιμεύσῃ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων ἐπὶ ὀρθογωνιακῶν χωρίων ὁλοκληρώσεως, παρατηροῦμεν δὲ ὅτι παρουσιάζει μίαν ὁμοιότητα μὲ τὸν γνωστὸν τύπον

$$\int_a^x f(x)\,dx = \Phi(x)-\Phi(a)$$

ὅπου $\Phi(x)$ εἶναι μία παράγουσα τῆς $f(x)$ δηλαδὴ μία λύσις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως $\Phi'=f$.

Παράδειγμα (72.2).— Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου Ω τὸ ὁποῖον διαγράφεται ἀπὸ τὸ τρίγωνον OMP ὅταν τὸ σημεῖον M διαγράφει τὸ τόξον Γ: $x=2\sigma\upsilon\nu^2 t$, $y=2\eta\mu t\,\sigma\upsilon\nu t$, $z=2\eta\mu t\,\sigma\upsilon\nu^2 t$ $\left(0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ καὶ P εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ σημείου M ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $z=0$.

Λ ύ σ ι ς: Ἀπὸ τὶς δύο πρῶτες ἐξισώσεις τοῦ Γ προκύπτει $x^2+y^2=4\sigma\upsilon\nu^2 t=2x$, ἐπομένως ὅταν τὸ M διαγράφῃ τὸ τόξον Γ, τὸ P διαγράφει τὸ δεξιὸν ἥμισυ τοῦ κύκλου K: $(x-1)^2+y^2=1$, ἐπομένως τὸ χωρίον Ω περικλείεται κάτω ἀπὸ τὸ δεξιὸν ἡμικύκλιον T τὸ ὁποῖον διαγράφῃ ἡ OP, ἀριστερὰ ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον $y=0$, πλευρικῶς ἀπὸ τὴν κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ἡ ὁποία προβάλλει τὸ Γ ἐπὶ τοῦ $z=0$ καὶ ἄνω ἀπὸ τὴν κωνικὴ ἐπιφάνεια τὴν ὁποίαν διαγράφει ἡ ΟΜ. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς θὰ εὑρεθῇ ἐὰν ἀπαλείψωμεν τὴν t μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τῆς γενετείρας ΟΜ:

$$\frac{x}{\sigma\upsilon\nu t}=\frac{y}{\eta\mu t}=\frac{z}{\eta\mu t\,\sigma\upsilon\nu t}$$

Ἔχομεν $z=x\eta\mu t$, $z=y\sigma\upsilon\nu t$ καὶ ἐξ αὐτῶν δι' ἀπαλείφῆς τοῦ t θὰ ἔχωμεν $z^2:x^2+z^2:y^2=1$ ἐκ τῆς ὁποίας ἐπιλύοντες ὡς πρὸς z προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$z=\pm\, xy:\sqrt{x^2+y^2}$$

ὅπου ἐμεῖς θὰ λάβωμεν τὸ θετικὸν πρόσημον διότι θεωροῦμεν τὸ τμῆμα τὸ κείμενον ἄνω τοῦ ἐπιπέδου $z=0$· κατόπιν αὐτῶν θὰ ἔχωμεν λοιπὸν

$$|\Omega|=\iint_T \frac{xy\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Μετασχηματίζοντες τὸ ὁλοκλήρωμα αὐτὸ σὲ πολικὲς συντεταγμένες καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ κύκλου Κ γίνεται $\rho=2\sigma\upsilon\nu\theta$ καὶ ὅτι ἐπὶ τοῦ Τ τὸ θ μεταβάλλεται εἰς τὸ διάστημα $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$, θὰ ἔχωμεν:

$$|\Omega|=\iint_{T_1}\rho^2\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta\,d\rho\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta\int_0^{2\sigma\upsilon\nu\theta}\rho^2d\rho=\frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^4\theta\,\eta\mu\theta\,d\theta=\frac{8}{15}$$

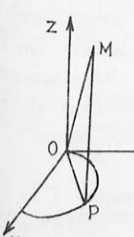
Παράδειγμα (72.3).— Ἐὰν u,υ εἶναι συναρτήσεις τῶν x,y νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπὸ τὶς προϋποθέσεις τοῦ τύπου Riemann, ἰσχύει ὁ τύπος:

$$\iint_T \upsilon u_x\,dx\,dy=\oint_{\Gamma^+}u\upsilon\,dy-\iint_T u\upsilon_x\,dx\,dy$$

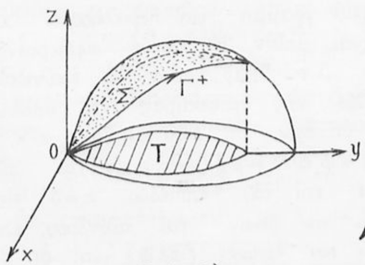
Λ ύ σ ι ς. Χρησιμοποιοῦντες τὸν τύπον Riemann μὲ $P=0$, $Q=u\upsilon$ θὰ ἔχωμεν:

$$\oint_{\Gamma^+}u\upsilon\,dy=\iint_T(u\upsilon)_x\,dx\,dy=\iint_T\upsilon u_x\,dx\,dy+\iint_T u\upsilon_x\,dx\,dy$$

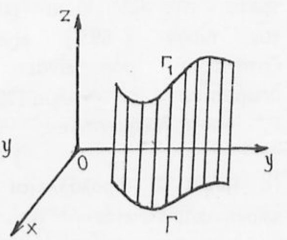
ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ἀμέσως τὸ ζητούμενον· ὁ τύπος αὐτὸς παρουσιάζει μίαν ὁμοιότητα μὲ τὸν τύπον τῆς παραγοντικῆς ὁλοκληρώσεως τῶν ἁπλῶν ὁλοκληρωμάτων.



Σx (72.1)



Σx (72.2)



Σx (72.3)

Παράδειγμα (72.4).— Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κυκλοφορία τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{\alpha}=(y^2+z^2,\ z^2+x^2,\ x^2+y^2)$ ἐπὶ τῆς κλειστῆς γραμμῆς Γ^+· ἡ ὁποία εἶναι τομὴ τῶν ἐπιφανειῶν $x^2+y^2+z^2=2\alpha y$, $x^2+y^2=2\beta y$ $(z\geqslant 0,\ 0<\beta<\alpha)$ καὶ τῆς ὁποίας ἡ θετικὴ φορὰ περιοδεύσεως εἶναι ἐκείνη κατὰ τὴν ὁποίαν ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων αὐξάνουν τὰ x· ἐν συνεχείᾳ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κυκλοφορία αὐτὴ δι' ἑνὸς ἐπιφανειακοῦ ὁλοκληρώματος ἐπὶ τῆς πρώτης ἐκ τῶν δύο ἀνωτέρω ἐπιφανειῶν.

Λύσις. Ἡ γραμμὴ Γ ὅπως φαίνεται καὶ εἰς τὸ σχ (72.2) εἶναι τομὴ τῆς σφαίρας ποὺ ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον $(0,a,0)$ καὶ ἀκτῖνα a καὶ τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $z=0$ τὸν κύκλον μὲ κέντρον τὸ σημεῖον $(0,\beta,0)$ καὶ ἀκτῖνα β· μία παραμετρικὴ παράστασις τῆς Γ εἶναι προφανῶς :

$$x=\beta\,\text{συν}t,\; y=\beta(1+\eta\mu t),\; z=\sqrt{2\beta(a-\beta)(1+\eta\mu t)}\quad (-\pi\leqslant t\leqslant\pi)$$

Ἡ κυκλοφορία θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα

$$J=\oint_{\Gamma^+}(y^2+z^2)\,dx+(z^2+x^2)\,dy+(x^2+y^2)\,dz$$

τοῦ ὁποίου ὁ ὑπολογισμὸς ἁπλουστεύεται πολὺ ὅταν ἀντὶ αὐτοῦ ὑπολογίσωμεν τὸ

$$J=\oint_{\Gamma^+}(x^2+y^2+z^2)\,dx+(x^2+y^2+z^2)\,dy+(x^2+y^2+z^2)\,dz$$

τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ τὸ προηγούμενον προσθέτοντες τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\oint_{\Gamma^+}x^2dx+y^2dy+z^2dz$$

τὸ ὁποῖον εἶναι μηδὲν ἐπὶ κάθε κλειστῆς γραμμῆς διότι εἶναι ὁλοκλήρωμα ἑνὸς τελείου διαφορικοῦ· κατόπιν αὐτῶν θὰ ἔχωμεν :

$$J=2a\oint_{\Gamma^+}y\,dx+2a\oint_{\Gamma^+}y\,dy+2a\oint_{\Gamma^+}y\,dz$$

Τὰ ὁλοκληρώματα αὐτὰ τὰ ὑπολογίζομεν κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον χρησιμοποιοῦντες τὶς παραμετρικὲς ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς Γ, ἀλλὰ δυνάμεθα ἀκόμη ἁπλούστερα καὶ ὡς ἑξῆς: Τὸ πρῶτον ἐξ αὐτῶν ἐπειδὴ δὲν περιέχει τὸ z ἰσοῦται προφανῶς μὲ τὸ ἐπικαμπύλιον ἐπὶ τῆς προβολῆς Γ_1^+ τῆς Γ^+ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $z=0$ καὶ τὸ ὁποῖον κατὰ τὸν τύπον (69.7) ἰσοῦται μὲ $-\pi\beta^2$, ἐπομένως ὁ πρῶτος ὅρος ἰσοῦται μὲ $-2\pi a\beta^2$. Τὸ δεύτερον ὁλοκλήρωμα εἶναι μηδὲν διότι τὸ ydy εἶναι διαφορικὸν τοῦ $\frac{1}{2}y^2$, τέλος τὸ τρίτον ὁλοκλήρωμα εἶναι καὶ αὐτὸ μηδὲν διότι ἰσοῦται μὲ τὸ ἐπικαμπύλιον ἐπὶ τῆς προβολῆς τῆς Γ^+ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $x=0$, καὶ ἡ ὁποία ἕνεκα τῆς συμμετρίας τῆς Γ^+ εἶναι μία γραμμὴ μὴ περικλείουσα χωρίον, ὁπότε κατὰ τὸν τύπον (69.7) εἶναι μηδέν. Ἐξ αὐτῶν συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι ἡ ζητουμένη ροὴ εἶναι : $J=-2\pi a\beta^2$. Διὰ νὰ ἐπαληθεύσωμεν τὸ ἐξαγόμενον θεωροῦμεν τὸ τμῆμα Σ τῆς ἡμισφαίρας τὸ ὁποῖον περατοῦται εἰς τὴν Γ_1^+ ὁπότε λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $\text{rot}\bar{a}=2(y-z,\,z-x,\,x-y)$ θὰ ἔχωμεν :

$$J=\oint_{\Gamma^+}\bar{a}\,d\bar{r}=2\iint_{\Sigma}(y-z,\,z-x,\,x-y)\,\bar{d\sigma}$$

Τὸ τμῆμα Σ προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $z=0$ εἰς τὸ χωρίον Τ τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου, ἐπομένως λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸν πρῶτον ἐκ τῶν τύπων (67.20) καὶ ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ τμήματος Σ εἶναι $z=\sqrt{2ay-x^2-y^2}$ θὰ ἔχωμεν :

$$J=2a\iint_T\frac{x\,dx\,dy}{\sqrt{2ay-x^2-y^2}}-2a\iint_T dx\,dy$$

Τὸ πρῶτον ὁλοκλήρωμα εἶναι μηδὲν ἕνεκα τῆς συμμετρίας τοῦ **χωρίου Τ** καὶ διότι ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις λαμβάνει ἀντίθετες τιμὲς σὲ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y σημεῖα· τὸ δεύτερον ὁλοκλήρωμα ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ T δηλαδὴ μὲ $\pi\beta^2$ καὶ ἔτσι ἐπαληθεύσαμε τὸ ἐξαγόμενον.

Παράδειγμα (72.5). — Νὰ προσδιορισθῇ ἡ συνάρτησις $\varphi(z)$ ἔτσι ὥστε γιὰ κάθε κλειστὴ προσανατολισμένη ἐπιφάνεια Σ μὲ θετικὴν ὄψιν τὴν ἐξωτερικήν, νὰ εἶναι :

$$\iint_{\Sigma} \varphi \bar{r}\, d\bar{\sigma} = 3|\Omega|$$

ὅπου $\bar{r}$ ἡ διανυσματικὴ ἀκτὶς ποὺ γράφει τὴν Σ καὶ Ω τὸ τριδιάστατον χωρίον τὸ περικλειόμενον ὑπ' αὐτῆς.

Λ ύ σ ι ς. Μετασχηματίζοντες τὸ πρῶτον μέλος κατὰ τὸν τύπον τοῦ Gauss καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸν τύπον (66.13) θὰ ἔχωμεν :

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi\bar{r})\, d\omega = 3\iiint_{\Omega} d\omega$$

ὁπότε μεταφέροντες εἰς τὸ πρῶτον μέλος προκύπτει :

$$\iiint_{\Omega} [\operatorname{div}(\varphi\bar{r})-3]d\omega=0$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ σχέσις αὐτὴ ἰσχύει γιὰ κάθε Ω θὰ εἶναι :

$$\operatorname{div}(\varphi\bar{r})-3=0.$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸν τύπον (68.6) θὰ ἔχωμεν :

$$\operatorname{div}(\varphi\bar{r})=\operatorname{div}(\varphi x, \varphi y, \varphi z)=3\varphi+z\varphi'$$

ὁπότε ἡ τελευταία ἐξίσωσις γράφεται :

$$3\varphi+z\frac{d\varphi}{dz}-3=0.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ εἶναι χωριζομένων ὁπότε δι' ὁλοκληρώσεως εὑρίσκομεν

$$\varphi=\frac{c}{z^3}+1.$$

Παράδειγμα (72.6). — Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα τῆς ἐλλειψοειδοῦς ἐπιφανείας $x^2:\alpha^2+y^2:\beta^2+z^2:\gamma^2=1$ τῆς ὁποίας ἡ πυκνότης σὲ κάθε σημεῖον Μ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῆς ἀποστάσεως τῆς ἀρχῆς ἀπὸ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ Μ καὶ νὰ ἐπαληθευθῇ τὸ ἐξαγόμενον διὰ καταλλήλου τριπλοῦ ὁλοκληρώματος.

Λ ύ σ ι ς. Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τὸ σημεῖον $M(x,y,z)$ ἔχει ἐξίσωσιν :

$$\frac{xX}{\alpha^2}+\frac{yY}{\beta^2}+\frac{zZ}{\gamma^2}=1$$

καὶ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς ἀποστάσεως τῆς ἀρχῆς ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον αὐτό, κατὰ γνωστὸν τύπον τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας, θὰ εἶναι :

$$d=1:\sqrt{\frac{x^2}{\alpha^4}+\frac{y^2}{\beta^4}+\frac{z^2}{\gamma^4}}$$

καὶ ἡ πυκνότης, ἐὰν παραστήσωμεν μὲ λ τὸν συντελεστὴν ἀναλογίας θὰ εἶναι :

$$\delta=\lambda\sqrt{\frac{x^2}{\alpha^4}+\frac{y^2}{\beta^4}+\frac{z^2}{\gamma^4}}.$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν συμμετρία τῆς συναρτήσεως αὐτῆς καὶ τῆς ἐπιφανείας καὶ παριστάνοντες μὲ Σ_1 τὸ ἄνω ἥμισυ τῆς ἐλλειψοειδοῦς ἐπιφανείας, θὰ ἔχωμεν

$$m=2\lambda\cdot\iint_{\Sigma_1}\sqrt{\frac{x^2}{\alpha^4}+\frac{y^2}{\beta^4}+\frac{z^2}{\gamma^4}}\,d\sigma$$

ἐκ τοῦ ὁποίου λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸν τύπον (67.7) προκύπτει :

$$m = 2\lambda\gamma^2 \iint_T \frac{1}{z}\left(\frac{x^2}{\alpha^4}+\frac{y^2}{\beta^4}+\frac{z^2}{\gamma^4}\right)dxdy \qquad (z \geqslant 0)$$

ὅπου T τὸ ἐλλειπτικὸν χωρίον τοῦ ἐπιπέδου $z=0$ εἰς τὸ ὁποῖον προβάλλεται τὸ ἐλλειψοειδές· τὸ ὁλοκλήρωμα αὐτὸ γράφεται διαδοχικῶς ὡς ἑξῆς:

$$m = 2\lambda\gamma^2 \iint_T \frac{1}{z}\left(\frac{x^2}{\alpha^4}+\frac{y^2}{\beta^4}\right)dxdy + \frac{2\lambda}{\gamma^2}\iint_T z\,dxdy$$

$$m = 2\lambda\gamma^2 \iint_T \left(\frac{x^2}{\alpha^4}+\frac{y^2}{\beta^4}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}\right)^{-\frac{1}{2}}dxdy + \frac{2\lambda}{\gamma^2}\iint_T z\,dxdy$$

Ἐὰν τώρα μετασχηματίσωμεν τὸ πρῶτον ὁλοκλήρωμα κατὰ τὸν τύπον (63.10) καὶ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ δεύτερον ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς :

$$m = 2\lambda\alpha\beta\gamma \iint_{T_1}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}{\alpha^2}+\frac{\eta\mu^2\vartheta}{\beta^2}\right)(1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}\rho d\rho d\vartheta + \frac{4\pi\lambda\alpha\beta}{3\gamma}$$

$$m = 2\lambda\alpha\beta\gamma \int_0^1 \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^{2\pi}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}{\alpha^2}+\frac{\eta\mu^2\vartheta}{\beta^2}\right)d\vartheta + \frac{4\pi\lambda\alpha\beta}{3\gamma}$$

$$m = 2\lambda\alpha\beta\gamma\left[\frac{1}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}-(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 \int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\vartheta}{2\alpha^2}+\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\vartheta}{2\beta^2}\right)d\vartheta + \frac{4\pi\lambda\alpha\beta}{3\gamma}$$

$$m = 2\lambda\alpha\beta\gamma\,\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{\alpha^2}+\frac{\pi}{\beta^2}\right) + \frac{4\pi\lambda\alpha\beta}{3\gamma} = \frac{4\pi\lambda}{3}\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma\alpha}{\beta}+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)$$

Διὰ νὰ ἐπαληθεύσωμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ τριπλοῦ ὁλοκληρώματος ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμεν διανυσματικὴν συνάρτησιν $\bar{\alpha}$ τέτοια ὥστε :

$$(\bar{\alpha}\bar{n}) = \sqrt{\frac{x^2}{\alpha^4}+\frac{y^2}{\beta^4}+\frac{z^2}{\gamma^4}}$$

ὅπου $\bar{n}$ τὸ κάθετον μοναδιαῖον διάνυσμα τοῦ ἐλλειψοειδοῦς· ἐπειδὴ ὅμως τὸ διάνυσμα αὐτὸ κατὰ τὸν τύπον (44.9) εἶναι :

$$\bar{n} = \left(\frac{x}{\alpha^2}, \frac{y}{\beta^2}, \frac{z}{\gamma^2}\right) : \sqrt{\frac{x^2}{\alpha^4}+\frac{y^2}{\beta^4}+\frac{z^2}{\gamma^4}}$$

τὸ ζητούμενον διάνυσμα $\bar{\alpha}$ θὰ εἶναι :

$$\bar{\alpha} = \left(\frac{x}{\alpha^2}, \frac{y}{\beta^2}, \frac{z}{\gamma^2}\right)$$

ὁπότε μετασχηματίζοντες κατὰ τὸν τύπον τοῦ Gauss θὰ ἔχωμεν :

$$m = \lambda \iint_\Sigma \sqrt{\frac{x^2}{\alpha^4}+\frac{y^2}{\beta^4}+\frac{z^2}{\gamma^4}}\,d\sigma = \lambda\iint_\Sigma(\bar{\alpha}\bar{n})d\sigma = \lambda\iiint_\Omega \operatorname{div}\bar{\alpha}\,d\omega$$

$$= \lambda\iiint_\Omega\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)d\omega = \lambda\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)|\Omega|$$

$$= \lambda\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma = \frac{4\pi\lambda}{3}\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma\alpha}{\beta}+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right).$$

καὶ ἔτσι ἐπαληθεύσαμε τὸ ἐξαγόμενον.

Παράδειγμα (72.7).— Κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια μὲ γενέτειρες παράλληλες πρὸς τὸν ἄξονα τῶν z περιορίζεται ἄνω ἀπὸ τὴν γραμμὴν Γ_1 καὶ κάτω ἀπὸ τὴν γραμμὴν Γ ἡ ὁποία εἶναι προβολὴ τῆς Γ_1 ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $z=0$· νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἀνάγεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν ἑνὸς ἐπικαμπυλίου ὡς πρὸς s ὁλοκληρώματος ἐπὶ τῆς γραμμῆς Γ.

Λ ύ σ ι ς. Ἐὰν οἱ παραμετρικὲς ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς Γ_1 εἶναι:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$$

τότε οἱ ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς Γ θὰ εἶναι προφανῶς:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = 0 \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$$

ὁπότε ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶναι σχ (72.3)

$$\bar{r} = [\, x(t), y(t), \upsilon \,]$$

Ἐξ αὐτῆς διὰ μερικῆς παραγωγίσεως ἔχομεν:

$$\bar{r}_t = (\dot{x}, \dot{y}, 0),\quad \bar{r}_\upsilon = (0,0,1)$$

$$E = \bar{r}_t^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2,\quad F = \bar{r}_t \bar{r}_\upsilon = 0,\ G = 1$$

ὁπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (65.1) εὑρίσκομεν

$$|\Sigma| = \iint_T \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt\, d\upsilon$$

Ἐπὶ τοῦ χωρίου ὁλοκληρώσεως τὸ t μεταβάλλεται ἀπὸ t_1 μέχρι t_2 καὶ τὸ υ ἀπὸ 0 μέχρι τὴν ἑκάστοτε κατηγμένη z τῶν σημείων τῆς γραμμῆς Γ_1, ἐπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$|\Sigma| = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt \int_0^z d\upsilon = \int_{t_1}^{t_2} z(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα εἰς τὸ δεξιὸν μέλος, ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν πρῶτον ἐκ τῶν τύπων (59.18), εἶναι τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα ὡς πρὸς s τῆς συναρτήσεως z ἐπὶ τῆς γραμμῆς Γ, ἐπομένως θὰ ἔχωμεν τελικῶς:

$$|\Sigma| = \int_\Gamma z\, ds$$

Παράδειγμα (72.8).— Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου B τὸ ὁποῖον περικλείεται ὑπὸ τῆς τετραδιαστάτου σφαίρας: $x^2+y^2+z^2+t^2 = a^2$.

Λ ύ σ ι ς. Γενικεύοντες τὸν τύπον (66.4) θὰ ἔχωμεν:

$$|B| = \int_B d\beta = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{a^2+x^2-y^2-z^2}} dt = 2 \iiint_\Omega \sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}\, dx\,dy\,dz$$

δηλαδὴ ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ζητουμένου ὄγκου ἀνάγεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν ἑνὸς τριπλοῦ ὁλοκληρώματος ἐπὶ τοῦ τριδιαστάτου χωρίου Ω τὸ ὁποῖον περικλείεται ὑπὸ τῆς τριδιαστάτου σφαίρας $x^2+y^2+z^2 = a^2$, ἀκριβῶς ὅπως ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ὄγκου μιᾶς τριδιαστάτου σφαίρας ἀνάγεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν ἑνὸς διπλοῦ ὁλοκληρώματος ἐπὶ ἑνὸς διδιαστάτου χωρίου T τὸ ὁποῖον περικλείεται ὑπὸ μιᾶς διδιαστάτου σφαίρας δηλαδὴ ἑνὸς κύκλου. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὁλοκληρώματος αὐτοῦ χρησιμοποιοῦμεν τὸν μετασχηματισμὸν σὲ σφαιρικὲς συντεταγμένες ὁπότε προκύπτει:

$$|B| = 2 \iiint_{\Omega_1} \sqrt{a^2-\rho^2}\, \rho^2 \sigma\upsilon\nu\varphi\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \sqrt{a^2-\rho^2}\, \rho^2 d\rho$$

$$= 8\pi \int_0^a \sqrt{a^2-\rho^2}\, \rho^2 d\rho = \cdots = \frac{1}{2}\pi^2 a^4.$$

Παράδειγμα (72.9). — Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δεδομένον διανυσματικὸν πεδίον $\bar{a}$ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν:

$$\bar{a} = \text{grad}\,\Phi + \text{rot}\,\bar{\upsilon}$$

δηλαδὴ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα ἑνὸς ἀστροβίλου καὶ ἑνὸς πεδίου μηδενικῆς ἀποκλίσεως.

Λ ύ σ ι ς. Θεωροῦμεν τὸ ἀστρόβιλον διανυσματικὸν πεδίον $\bar{\beta} = \mathrm{grad}\,\Phi$ καὶ ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν συνάρτησιν Φ ἔτσι ὥστε τὸ πεδίον $\bar{\gamma} = \bar{\alpha} - \bar{\beta}$ νὰ εἶναι μηδενικῆς ἀποκλίσεως, δηλαδὴ νὰ εἶναι $\mathrm{div}\,\bar{\gamma} = \mathrm{div}(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) = 0$· ἐξ αὐτῆς ἕπεται $\mathrm{div}\,\bar{\alpha} = \mathrm{div}\,\bar{\beta} = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\Phi = \Delta\Phi$ ἑπομένως ἡ συνάρτησις Φ θὰ προσδιορισθῆ ἐκ τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως $\mathrm{div}\,\bar{\alpha} = \Delta\Phi$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $\bar{\alpha} = \bar{\beta} + \bar{\gamma} = \mathrm{grad}\,\Phi + \bar{\gamma}$. Ἀλλὰ ἐπειδὴ εἶναι $\mathrm{div}\,\bar{\gamma} = 0$ κατὰ τὴν πρότασιν (69.7) ὑπάρχει διάνυσμα $\bar{\upsilon}$ τέτοιο ὥστε $\bar{\gamma} = \mathrm{rot}\,\bar{\upsilon}$, ἑπομένως $\bar{\alpha} = \mathrm{grad}\,\Phi + \mathrm{rot}\,\bar{\upsilon}$ καὶ ἀπεδείχθη τὸ ζητούμενον.

Παράδειγμα (72.10).— Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ γενικευμένον ὁλοκλήρωμα:

$$J = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2+a^2)^2}$$

Λ ύ σ ι ς. Τὸ χωρίον ὁλοκληρώσεως εἶναι τὸ πρῶτον ὄγδοον τῶν ἀξόνων τὸ ὁποῖον ἂς παραστήσωμεν μὲ Ω καὶ ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις θετική, ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα:

$$J_\nu = \iiint_{\Omega_\nu} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2+a^2)^2}$$

διὰ μίαν μερικὴν ἀκολουθίαν $\Omega_\nu \to \Omega$, συγκλίνει ὁπότε ἡ τιμὴ τοῦ δοθέντος ὁλοκληρώματος θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ὅριον διὰ $\nu \to \infty$ τοῦ ὁλοκληρώματος J_ν. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ὡς Ω_ν τὸ πρῶτον ὄγδοον τῆς σφαίρας ποὺ ἔχει κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ ἀκτῖνα ν, ὁπότε μετασχηματίζοντες σὲ σφαιρικὲς συντεταγμένες θὰ ἔχωμεν:

$$J_\nu = \iiint_{\Omega_\nu} (x^2+y^2+z^2+a^2)^{-2}\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega'_\nu} (\rho^2+a^2)^{-2}\rho^2 \,\text{συν}\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \text{συν}\varphi\, d\varphi \int_0^\nu (\rho^2+a^2)^{-2}\rho^2 d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^\nu (\rho^2+a^2)^{-2}\rho^2 d\rho = \frac{\pi}{4}\left(-\frac{\nu}{\nu^2+a^2} + \frac{1}{a}\,\text{τοξεφ}\,\frac{\nu}{a}\right).$$

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι $\nu \to \infty$ τὸ J_ν, ὅπως προκύπτει ἀμέσως ἀπὸ τὸ δεξιὸν μέλος, ἔχει ὅριον τὸ $\frac{\pi^2}{8a}$ ἑπομένως τὸ δοθὲν γενικευμένον ὁλοκλήρωμα συγκλίνει καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ὅριον αὐτό.

Γενικαὶ ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ τρίτου κεφαλαίου

1255) Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ κυκλοφορία τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{\alpha} = (-y^2, x^2)$ κατὰ μῆκος τοῦ ἐλλειπτικοῦ τόξου $(x-a)^2 : a^2 + y^2 : \beta^2 = 1$ $(y \geqslant 0)$ καὶ μὲ ἀφετηρία τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων.

1256) Ἐὰν εἶναι $AB - H^2 > 0$ νὰ δειχθῆ ὅτι: $\oint_{\Gamma+} (x\,dy - y\,dx) : (Ax^2 + 2Hxy + By^2) = 2|T|$ ὅπου Γ ὁ κύκλος $x^2+y^2=a^2$ καὶ T τὸ ὑπὸ τῆς ἐλλείψεως $Ax^2+2Hxy+By^2=1$ περικλειόμενον χωρίον.

1257) Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ὁλοκλήρωμα: $\oint_{\Gamma+} [(x\,\text{συν}y + y\,\text{ημ}y)\,dy + (x\,\text{ημ}y - y\,\text{συν}y)]\,(x^2+y^2)^{-1} e^x$, ὅπου Γ κλειστὴ γραμμὴ χωρὶς πολλαπλᾶ σημεῖα καὶ περικλείουσα τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων.

1258) Νὰ σχεδιασθῇ ἡ γραμμὴ $x=(1-\lambda^2):(1+\lambda^2)$, $y=(\lambda-\lambda^3):(1+\lambda^2)$, $-1\leqslant\lambda\leqslant 1$ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὑπ' αὐτῆς περικλειόμενον ἐμβαδόν.

1259) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα : $\int_\Gamma 2x\ln(1+y)dx+\frac{x^2}{1+y}dy$ ὅπου Γ γραμμὴ συνδέουσα τὴν ἀρχὴ μὲ τὸ σημεῖον $(1,2)$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα :

1260) $\iint_T x^2y^2\sqrt[3]{1-x^3-y^3}\,dxdy$ $\quad T:(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^3+y^3\leqslant 1)$

1261) $\int_T (x+y)^{-3}dxdy$ $\quad T:(x\geqslant 1,\ y\geqslant 1,\ x+y\leqslant 3)$

1262) $\iint_T x^2y^2dxdy$ $\quad T:(x^2+y^2\leqslant 1)$

1263) $\iint_T (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dxdy$ $\quad T:(|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1)$

1264) $\iint_T [x^3+y^3-3xy(x^2+y^2)](x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}dxdy$ $\quad T:(x^2+y^2\leqslant 1)$

1265) $\iiint_\Omega z\,dxdydz$ $\quad \Omega:(x^2+y^2+z^2\leqslant 1,\ x^2+y^2\leqslant z^2,\ z>0)$

1266) $\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)xyz\,dxdydz$ $\quad \Omega:(x^2+y^2+z^2\leqslant a^2)$

1267) $\iiint_\Omega (x+y+z)x^2y^2z^2dxdydz$ $\quad \Omega:(x+y+z\leqslant 1,\ x,y,z\geqslant 0)$

1268) $\iiint_\Omega [x^2+y^2+(z-2)^2]^{-1}dxdydz$ $\quad \Omega:(x^2+y^2+z^2\leqslant 1)$

1269) $\iiint_\Omega dxdydz$ $\quad \Omega:[a^{-2}(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2+\beta^{-2}z^2\leqslant 1,\ \beta<1]$

1270) $\iiint_\Omega dxdydz$ $\quad \Omega:(x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,\ x^2+y^2-ax\geqslant 0,\ x^2+y^2+ax\geqslant 0)$

1271) $\iiint_\Omega \text{συν}(ax+\beta y+\gamma z)\,dxdydz$ $\quad \Omega:(x^2+y^2+z^2\leqslant 1)$

1272) $\iiint_\Omega e^{\sqrt{\varphi}}dxdydz$, $\varphi=x^2a^{-2}+y^2\beta^{-2}+z^2\gamma^{-2}$ $\quad \Omega:(x^2a^{-2}+y^2\beta^{-2}+z^2\gamma^{-2}\leqslant 1)$

1273) $\iiint_\Omega dxdydz$ $\quad \Omega:(x^2+y^2+z^2=a^2,\ 2x^2\eta\mu^2\lambda+2y^2\text{συν}^2\lambda+z^2=a^2,\ 0<\lambda<\frac{\pi}{4})$

1274) $\iiint_\Omega xyz\,dxdydz$ $\quad \Omega:(x^2a^{-2}+y^2\beta^{-2}+z^2\gamma^{-2}\leqslant 1)$

. . .

1275) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi=(1+x^2+y^2)^{-2}$ ἐπὶ τοῦ τριγώνου μὲ κορυφὲς τὰ σημεῖα $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,\sqrt{3})$.

1276) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς προηγουμένης συναρτήσεως ἐπὶ ἑνὸς λακίσκου τοῦ λημνίσκου $(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)=0$.

1277) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi=e^{(y-x):(y+x)}$ ἐπὶ τοῦ τριγώνου μὲ κορυφὲς τὰ σημεῖα $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$.

1278) Χρησιμοποιοῦντες τὸν μετασχηματισμὸν $x^2+y^2=u^2+a^2$, $y=ux$ δείξατε ὅτι :

$$\iint_T e^{-(x^2+y^2)}dxdy=ae^{-a^2}\int_0^\infty e^{-u^2}(a^2+u^2)^{-1}du$$

ὅπου τὸ χωρίον ὁλοκληρώσεως Τ εἶναι τὸ ἡμιεπίπεδον $0<a\leqslant x$.

1279) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi=\frac{1}{xy}$ ἐπὶ τοῦ χωρίου τὸ ὁποῖον περικλείουν οἱ τέσσερεις κύκλοι $x^2+y^2=ax,\ a'x,\ \beta y,\ \beta' y$ ὅπου $a,a',\beta,\beta'>0$.

1280) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi=\frac{1}{xyz}$ ἐπὶ τοῦ χωρίου τὸ ὁποῖον περικλείουν οἱ ἕξη σφαῖρες : $x^2+y^2+z^2=ax,\ a'x,\ \beta y,\ \beta' y,\ \gamma z,\ \gamma' z$ ὅπου $a,a',\beta,\beta',\gamma,\gamma'>0$.

1281) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi=y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2$ ἐπὶ τοῦ χωρίου τὸ ὁποῖον περικλείουν ὁ κύλινδρος $x^2+y^2-2ax=0$ καὶ ὁ κῶνος $z^2=k^2(x^2+y^2)$.

1282) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μέση τιμὴ τῆς συναρτήσεως $\Phi=x^2$ ἐπὶ τοῦ τριδιαστάτου χωρίου τὸ ὁποῖον περικλείουν ἡ ἐπιφάνεια $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}$ καὶ τὰ θετικὰ μέρη τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων.

1283) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα τοῦ σφαιρικοῦ χωρίου $x^2+y^2+z^2-2a(x+y+z)+2a^2\leqslant 0$, ὅταν ἡ πυκνότης αὐτοῦ εἶναι $\delta=x^3+y^3+z^3$.

1284) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ ποὺ περικλείουν τὸ παραβολοειδὲς $x^2-y^2=2az$, ὁ κύλινδρος $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ καὶ τὸ ἐπίπεδον $z=0$.

1285) Ἐὰν εἶναι $f(-x)=f(x)$, $T:(x^2+y^2 \leqslant \gamma^2)$, $\kappa^2 = a^2+\beta^2$ δείξατε ὅτι:

$$\iint_T f(ax+\beta y)\sqrt{\gamma^2-x^2-y^2}\,dxdy = \pi\int_0^\gamma f(\kappa x)(\gamma^2-x^2)\,dx.$$

1286) Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τοῦ κώνου $z^2=x^2+y^2$, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κυλίνδρου $x^2+y^2=2x$.

1287) Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τῆς ἐπιφανείας $z^2=2xy$, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=a^2$.

1288) Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τοῦ παραβολοειδοῦς $x^2+y^2=2z$, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κυλίνδρου $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$.

1289) Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τοῦ κώνου $x^2+y^2-xz=0$ τὸ ὁποῖον περιορίζεται ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα $z=0$, $z=\gamma$ εἶναι $|\Sigma| = \gamma^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu^4\vartheta}\,d\vartheta$.

1290) Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τῆς ἐπιφανείας: $x=a\sigma\upsilon\nu\vartheta$, $y=a\eta\mu\vartheta$, $z=\beta\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta$, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κυλίνδρου $x^2+y^2=\gamma^2$, δύναται νὰ ἐκφρασθῆ ὑπὸ τὴν μορφὴν $|\Sigma| = 4\int_0^\gamma\sqrt{a^2+\beta^2}\,E(\kappa,\frac{\pi}{2})\,da$, ὅπου $E(\kappa,\frac{\pi}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\kappa^2\eta\mu^2\varphi}\,d\varphi$, $\kappa=\beta:\sqrt{a^2+\beta^2}$.

1291) Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τοῦ παραβολοειδοῦς $x^2-y^2=2az$, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κυλίνδρου $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

1292) Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi = x^\mu y^{\nu-1}(1-x-y)^{-\nu}$ ἐπὶ τοῦ χωρίου $T:(x=0,\ y=0,\ x+y=1)$ ὅταν εἶναι $\mu>0$, $0<\nu<1$.

1293) Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας $x^2+y^2+z^2=a^2$ διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $x^2+y^2-ax \geqslant 0$, $x^2+y^2+ax \geqslant 0$.

1294) Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τῆς ἐπιφανείας $y-x\varepsilon\varphi\frac{z}{\kappa}=0$, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant \beta^2$, $|z| \leqslant \frac{\pi\kappa}{2}$

1295) Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας $(x^2+y^2+z^2)^2=x^2-y^2$.

1296) Νὰ δειχθῆ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ποὺ παράγεται ἀπὸ μία μονοπαραμετρικὴ οἰκογένεια σφαιρῶν τῶν ὁποίων τὰ κέντρα γράφουν μία κλειστὴ γραμμὴ Γ τοῦ ἐπιπέδου $z=0$, ἰσοῦται μὲ $2\pi|\Gamma|$.

1297) Νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ κατηγμένη τοῦ κ. μάζης ἑνὸς ὁμογενοῦς τμήματος Σ τῆς προηγουμένης ἐπιφανείας, τὸ ὁποῖον ἔχει $z \geqslant 0$ καὶ προβάλλεται ἐπὶ τοῦ $z=0$ εἰς τὸ χωρίον T, ἰσοῦται μὲ $|T|:|\Sigma|$.

1298) Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ροπὲς ἀδρανείας I_z, I_x τοῦ ὁμογενοῦς στερεοῦ μὲ $\delta=1$, τὸ ὁποῖον περικλείουν οἱ κύλινδροι $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=\beta^2$ $(a>\beta)$ καὶ τὰ ἐπίπεδα $z=\pm\gamma$.

1299) Νὰ δειχθῆ ὅτι οἱ ροπὲς ἀδρανείας ὡς πρὸς τοὺς τρεῖς ἄξονες τῶν συντεταγμένων ἑνὸς οἱουδήποτε στερεοῦ θετικῆς πυκνότητος, ἐπαληθεύουν τὶς σχέσεις:

$$I_x+I_y > I_z,\quad I_y+I_z > I_x,\quad I_z+I_x > I_y$$

1300) Νὰ εὑρεθῆ ἡ ροπὴ ἀδρανείας τοῦ ἐλλειψοειδοῦς χωρίου $\Omega:(x^2a^{-2}+y^2\beta^{-2}+z^2\gamma^{-2} \leqslant 1)$ μὲ πυκνότητα $\delta=1$, ὡς πρὸς εὐθεῖαν διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς μὲ διευθύνοντα συνημίτονα λ,μ,ν.

1301) Νὰ εὑρεθῆ ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐπιπέδων ὡς πρὸς τὰ ὁποῖα τὸ ἐλλειψοειδὲς χωρίον $\Omega:(x^2a^{-2}+y^2\beta^{-2}+z^2\gamma^{-2} \leqslant 1)$ ἔχει τὴν ἴδια ροπὴν ἀδρανείας κ.

1302) Ἔστω P ἕνα ὡρισμένον σημεῖον καὶ M ἕνα οἱονδήποτε σημεῖον ἑνὸς τριδιαστάτου στερεοῦ Ω· ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας PM λαμβάνομεν σημεῖον N, ἔτσι ὥστε νὰ εἶναι

$PN = 1 : \sqrt{I}$, ὅπου I ἡ ροπὴ ἀδρανείας τοῦ Ω ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖα PM. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ τόπος τῶν σημείων N εἶναι ἕνα ἐλλειψοειδὲς τὸ ὁποῖον λέγεται ἐλλειψοειδὲς ἀδρανείας τοῦ Ω ὡς πρὸς τὸ P.

1303) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλλειψοειδὲς ἀδρανείας τοῦ $\Omega : (x^2\alpha^{-2}+y^2\beta^{-2}+z^2\gamma^{-2} \leqslant 1)$ μὲ πυκνότητα $\delta=1$, ὡς πρὸς τὸ σημεῖον $P(\xi, \eta, \zeta)$.

1304) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κ. μάζης τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας $x^2+y^2+z^2=1$, τῆς ὁποίας ἡ πυκνότης εἶναι $\delta = [(x-1)^2+y^2+z^2]^{-1}$.

1305) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετμημένη τοῦ κ. μάζης τοῦ $\Omega : (x^2\alpha^{-2}+y^2\beta^{-2}+z^2\gamma^{-2} \leqslant 1,\ x,y,z \geqslant 0)$ ὅταν ἡ πυκνότης αὐτοῦ εἶναι $\delta=1$.

1306) Τὸ ὑλικὸν σῶμα Ω ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη Ω_1 καὶ Ω_2· ἐὰν I, I_1', I_2'' παριστάνουν ἀντιστοίχως τὶς ροπὲς ἀδρανείας τῶν σωμάτων αὐτῶν ὡς πρὸς ἄξονες παραλλήλους καὶ διερχομένους ἀπὸ τὰ ἀντίστοιχα κέντρα μάζης, νὰ δειχθῇ ὅτι: $I = I_1 + I_2 + \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} d^2$, ὅπου m_1, m_2 οἱ μάζες τῶν Ω_1, Ω_2 καὶ d ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων ἀξόνων ποὺ διέρχονται διὰ τῶν κέντρων μάζης αὐτῶν.

1307) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ νευτώνιον δυναμικὸν εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων, τὸ ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τὸ ἐλλειψοειδὲς ἐκ περιστροφῆς $\beta^2(x^2+y^2)+\alpha^2 z^2 \leqslant \alpha^2\beta^2$ $(\beta > \alpha)$, μὲ πυκνότητα $\delta=1$.

1308) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ νευτώνιον δυναμικὸν εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων, τὸ ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τὸ ἐκ περιστροφῆς στερεὸν $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant f(z)$ $(\alpha \leqslant z \leqslant \beta)$, μὲ $\delta=1$.

. . .

1309) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ διανυσματικὸν πεδίον $\bar{a} = (3y-x,\ y-3x) : (x+y)^3$, εἶναι ἀστρόβιλον καὶ νὰ προσδιορισθῇ ἡ δυναμικὴ συνάρτησις.

1310) Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ σταθερὲς α, β ἔτσι ὥστε τὸ διανυσματικὸν πεδίον $\bar{a} = (y^2+2xy+\alpha x^2,\ -x^2-2xy-\beta y^2) : (x^2+y^2)^2$ νὰ εἶναι ἀστρόβιλον καὶ νὰ προσδιορισθῇ κατόπιν αὐτοῦ ἡ δυναμικὴ συνάρτησις.

1311) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ σχέσεις μεταξὺ τῶν σταθερῶν $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ γιὰ νὰ εἶναι τὸ πεδίον $\bar{a} = (\alpha\,\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu y + \beta\,\sigma\upsilon\nu x\,\eta\mu y,\ \alpha'\sigma\upsilon\nu x\,\eta\mu y + \beta'\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu y)$ ἀστρόβιλον καὶ νὰ προσδιορισθῇ κατόπιν αὐτοῦ ἡ δυναμικὴ συνάρτησις.

1312) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $2x(1-e^y)(1+x^2)^{-2}dx + e^y(1+x^2)^{-1}dy$ εἶναι τέλειον διαφορικὸν καὶ νὰ προσδιορισθῇ τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\bar{a}$ ποὺ ἔχει συντεταγμένες τοὺς συντελεστὰς τῶν dx, dy κατὰ μῆκος ἑνὸς τόξου μὲ ἀρχὴν τὸ σημεῖον $(0,0)$ καὶ πέρας τὸ $(2,4)$.

1313) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως $\bar{F} = (e^x \eta\mu y,\ e^x \sigma\upsilon\nu y)$ κατὰ μῆκος ἑνὸς τόξου ποὺ ἔχει ἀρχὴν τὸ σημεῖον $(0,0)$ καὶ πέρας τὸ (ξ, η).

1314) Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρίσωμεν τοὺς συντελεστὰς $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ ἔτσι ὥστε τὸ πεδίον $\bar{a} = (x+y+2z,\ \alpha x+\beta y+\gamma z,\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z) : (x+y+z)^3$ νὰ εἶναι ἀστρόβιλον καὶ νὰ προσδιορισθῇ κατόπιν αὐτοῦ ἡ δυναμικὴ συνάρτησις.

1315) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πεδίον : $\bar{a} = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2)^{-2}(y^2+z^2-xy-xz,\ z^2+x^2-yz-yx,\ x^2+y^2-zx-zy)$ εἶναι ἀστρόβιλον καὶ νὰ προσδιορισθῇ ἡ δυναμικὴ συνάρτησις.

1316) Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ h, ν ἔτσι ὥστε τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα :

$$\iint_\Sigma (x+y+z+h)^{-\nu}\,[(x+\alpha)dydz + (y+\beta)dzdx + (z+\gamma)dxdy]$$

νὰ δύναται ν' ἀντικατασταθῇ δι' ἑνὸς ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος· κατόπιν αὐτοῦ νά ὑπολογισθῆ τό ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα λαμβάνοντες ὡς Σ τό τμῆμα τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=\kappa^2$, τό ὁποῖον κεῖται πρός τά θετικά μέρη τῶν ἀξόνων καί περιορίζεται ἀπό τό ἐπίπεδον $x+y+z=0$.

1317) Νά ὑπολογισθῆ τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a}=(x^3\bar{a}^{-2}, y^3\bar{\beta}^{-2}, z^3\gamma^{-2})$ ἐπί τῆς ἐξωτερικῆς ὄψεως τοῦ ἐλλειψοειδοῦς $x^2\bar{a}^{-2}+y^2\beta^{-2}+z^2\gamma^{-2}=1$.

1318) Νά ὑπολογισθῆ τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα $\iint_\Sigma z\kappa^{-1}d\sigma$ ἐπί τοῦ τμήματος Σ: $(x^2\bar{a}^{-2}+y^2\bar{\beta}^{-2}+z^2\gamma^{-2}=1,\ z\geqslant 0)$, ὅταν $\kappa^{-1}=\lambda\bar{a}^2x+\mu\bar{\beta}^2y+\nu\gamma^{-2}z$ καί λ,μ,ν τά διευθύνοντα συνημίτονα τῆς πρός τά ἔξω καθέτου τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.

1319) Νά ὑπολογισθῆ ἡ μάζα τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$, ὅταν ἡ ἐπιφανειακή πυκνότης αὐτῆς εἶναι $\delta=a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+3a_4x^2y^2+3a_5y^2z^2+3a_6x^2z^2$.

1320) Νά ὑπολογισθῆ τό γενικευμένον ὁλοκλήρωμα: $\int_0^\infty\int_0^\infty(x^2+y^2+a^2)^{-2}dxdy$.

1321) Νά εὑρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ μ διά τίς ὁποῖες συγκλίνει τό γενικευμένον ὁλοκλήρωμα $\iint_T (y^2+x^2)^{-\nu}(y^2-x^2)dxdy$, $T: (x^2+y^2\leqslant 1)$ καί νά εὑρεθῆ ἡ τιμή του.

1322) Πῶς πρέπει νά ἐκλεγοῦν τά a,β,γ γιά νά εἶναι ἴσον μέ 1 τό γενικευμένον ὁλοκλήρωμα τῆς $\Phi=e^{-(ax^2+2\beta xy+\gamma y^2)}$ ἐπί ὁλοκλήρου τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y;

1323) Νά ὑπολογισθοῦν τά γενικευμένα ὁλοκληρώματα $(a>0,\ a\gamma-\beta^2>0)$:

$$J_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\varphi}(Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2)dxdy,\quad J_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\varphi}\varphi\, dxdy,\ \varphi=ax^2+2\beta xy+\gamma y^2$$

. . .

1324) Νά δειχθῆ ὅτι τό τριπλόν ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi=(xyz)^{-\frac{4}{3}}$ ἐπί τοῦ τριδιαστάτου χωρίου Ω, ἰσοῦται μέ τό τετραπλάσιον τοῦ ὄγκου τοῦ χωρίου Ω_1 τοῦ χώρου τῶν u,υ,w εἰς τό ὁποῖον ἀπεικονίζεται τό Ω διά τοῦ μετασχηματισμοῦ $x=u^2\upsilon w$, $y=u\upsilon^2w$, $z=u\upsilon w^2$.

1325) Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi=(x+y)^2$ ἐπί τοῦ χωρίου τό ὁποῖον περικλείουν οἱ γραμμές $xy=1$, $x^2y=1$, $x=2$.

1326) Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi=\sqrt[4]{x^2+y^2}$, ἐπί τοῦ χωρίου τό ὁποῖον περικλείεται ὑπό τῆς γραμμῆς $\rho=2a(1+\text{συν}\theta)$.

1327) Νά δειχθῆ ὅτι $\iint_T x^3y\,\Phi(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{8}\int_0^1u^2\Phi(u)du$, ὅπου T τό χωρίον τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y διά τό ὁποῖον εἶναι: $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1$.

1328) Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi=xy(\beta^2x^2+a^2y^2)^{\frac{3}{2}}$ ἐπί τοῦ χωρίου $T: (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ \beta^2x^2+a^2y^2\leqslant a^2\beta^2)$.

1329) Νά εὑρεθῆ ἡ μέση τιμή τοῦ γινομένου τῶν ἀποστάσεων τῶν σημείων ἑνός ἰσοπλεύρου τριγωνικοῦ χωρίου πλευρᾶς $2a$ ἀπό τίς πλευρές αὐτοῦ.

1330) Νά δειχθῆ ὅτι ὁ ὄγκος ἑνός κωνικοῦ χωρίου τό ὁποῖον ἔχει κορυφήν τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων καί βάσιν τό τμῆμα τῆς ἐπιφανείας $\bar{r}=\bar{r}(u,\upsilon)$ πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τό χωρίον T τοῦ ἐπιπέδου τῶν u,υ, δίδεται ἀπό τό διπλόν ὁλοκλήρωμα: $\iint_T(\bar{r}\,\bar{r}_u\bar{r}_\upsilon)dud\upsilon$.

1331) Νά μετασχηματισθῆ τό διπλόν ὁλοκλήρωμα: $\int_0^{4a}dy\int_{y^2/4a}^{y}f(x,y)dx$ σέ πολικές συντεταγμένες καί νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα ὅταν εἶναι: $f=(x^2-y^2):(x^2+y^2)$.

1332) Ἐάν r_1,r_2 εἶναι οἱ ἀποστάσεις ἑνός σημείου τοῦ διδιαστάτου χωρίου $T: (\beta^2x^2+a^2y^2\leqslant a^2\beta^2)$, ἀντιστοίχως ἀπό τίς ἑστίες $(\pm\gamma,0)$ τοῦ συνόρου τοῦ T, νά δειχθῆ ὅτι: $\iint_T\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)dxdy=4\pi\beta$.

1333) Τό εὐθύγραμμον τμῆμα AB κινεῖται ἔτσι ὥστε τό A νά γράφη τήν εὐθεία $z=0, x=1$ καί τό B τόν ἡμιάξονα OZ· νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τό ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα $x=y$, $y=0$, $z=0$ καὶ τὴν εὐθειογενῆ ἐπιφάνεια τὴν ὁποίαν γράφει τὸ AB.

1334) Δίδεται τὸ δυναμικὸν πεδίον $\bar{F}=(2xz, yz, u)$ καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἡ συνάρτησις $u=u(x,y)$ ἔτσι ὥστε τὸ πεδίον νὰ εἶναι ἀστρόβιλον· μετὰ τὸν προσδιορισμὸν αὐτὸν νὰ εὑρεθῇ ἡ δυναμικὴ συνάρτησις, οἱ δυναμικὲς γραμμὲς καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τὸ ὁποῖον περιορίζεται ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον $z=0$, ἀπὸ τοὺς κυλίνδρους $x^2+y^2=\alpha^2$, $x^2+y^2=\beta^2$ $(0<\alpha<\beta)$ καὶ ἀπὸ τὴν σταθμικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πεδίου ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ καὶ ἡ ὁποία προκύπτει ὅταν κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς u ἀπαιτήσωμεν ἐπὶ πλέον οἱ πεδιακὲς γραμμὲς νὰ εἶναι ἀλγεβρικὲς καμπύλες.

1335) Νὰ εὑρεθῇ ἡ μᾶζα καὶ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τμήματος τῆς ἐπιφανείας $az=x^2-y^2$, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κυλίνδρου $x^2+y^2=a^2$ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης εἶναι $\delta=1$.

1336) Νὰ εὑρεθῇ ἡ μᾶζα τῆς ἐλλειψοειδοῦς ἐπιφανείας $x^2:\alpha^2+y^2:\beta^2+z^2:\gamma^2=1$ τῆς ὁποίας ἡ πυκνότης σὲ κάθε σημεῖον M εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως τῆς ἀρχῆς ἀπὸ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ M.

1337) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κ. μάζης τοῦ ὁμογενοῦς τόξου τῆς κυκλοειδοῦς: $x=\alpha(t-\eta\mu t)$, $y=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu t)$, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

1338) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κ. μάζης τοῦ ὁμογενοῦς τμήματος τοῦ κοινοῦ ἑλικοειδοῦς $x=\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta$, $y=\rho\eta\mu\vartheta$, $z=\kappa\vartheta$, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $0\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\rho\leqslant\alpha$.

1339) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κ. μάζης τοῦ συνόρου τοῦ ἡμικυκλικοῦ χωρίου $T: (x^2+y^2=\alpha^2,$ $x\geqslant 0)$ ὅταν ἡ πυκνότης τῆς διαμέτρου εἶναι $\delta_1=2$ καὶ τῆς ἡμιπεριφερείας $\delta_2=3$.

1340) Νὰ δειχθῇ ὅτι $\iint_T \sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta y)\,dxdy = 2A^{-1}J_1(A)$, ὅπου $A=\sqrt{x^2+y^2}$ $T:(x^2+y^2\leqslant 1)$ καὶ $J_1(x)=\frac{x}{\pi}\int_{-1}^{1}\sigma\upsilon\nu\, xt\,(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\,dt$.

1341) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\Phi=(x^2+y^2)^2:x^2y^2$ ἐπὶ τοῦ χωρίου $T: (x^2+y^2\leqslant\alpha x,\ x^2+y^2\leqslant\beta y,\ \alpha>0,\ \beta>0)$.

1342) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ροπὴ ἀδρανείας I_y τοῦ χωρίου τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὶς ἀνισότητες $\beta^2x^2+\alpha^2y^2\leqslant\alpha^2\beta^2$, $2\alpha y^2\leqslant 2\beta^2 x$ καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει πυκνότητα σταθερὴ δ.

1343) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τὸ ὁποῖον εἶναι κοινὸν μέρος τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$ καὶ τοῦ κώνου ποὺ ἔχει κορυφὴν τὴν ἀρχὴν καὶ ὁδηγὸν τὴν γραμμήν: $x^2+y^2+z^2=1$, $1+z=\alpha^2x^2+\beta^2y^2$ $(\alpha, \beta>1)$.

1344) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ροπὴ ἀδρανείας τοῦ ὁμογενοῦς χωρίου T τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τὴν γραμμὴν $\rho=\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta$ $(\alpha>\beta)$ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν z, εἶναι $I=m(8\alpha^4+24\alpha^2\beta^2+3\beta^4):8(2\alpha^2+\beta^2)$, ὅπου m ἡ μᾶζα τοῦ T.

1345) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα τοῦ ἐλλειψοειδοῦς $x^2\alpha^{-2}+y^2\beta^{-2}+z^2\gamma^{-2}=1$, τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης σὲ κάθε σημεῖον M ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς ἀποστάσεως τῆς ἀρχῆς ἀπὸ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τὸ M.

1346) Ἔστω προσανατολισμένη ἐπιφάνεια Σ ἡ ὁποία περατοῦται εἰς τὴν κλειστὴν γραμμὴν Γ καὶ A σημεῖον ἐκτὸς αὐτῶν κείμενον· ὁρίζομεν τὸ προσημασμένον μέτρον τῆς στερεᾶς γωνίας ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἐκ τοῦ A ἡ ἐπιφάνεια Σ, ἴσον μὲ τὴν τιμὴν τοῦ ἐπιφανειακοῦ ὁλοκληρώματος:

$$\iint_\Sigma \frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta\, d\sigma}{r^2} \equiv \iint_\Sigma \frac{\bar{r}\, d\bar{\sigma}}{r^3}$$

όπου ϑ ή γωνία τήν όποίαν σχηματίζει τό διάνυσμα προσανατολισμού τής Σ είς τό σημείον τής Μ μέ τό διάνυσμα $\bar{r}=\overline{MA}$. Δείξατε ότι τό έμβαδόν τού τμήματος τό όποίον άποκόπτει ό κώνος μέ κορυφήν τό Α καί όδηγόν τήν Γ, άπό τήν μοναδιαία σφαίραν πού έχει κέντρον τό Α, μέ κατάλληλον πρόσημον ίσούται μέ τό προσημασμένον μέτρον τής στερεάς γωνίας ύπό τήν όποίαν φαίνεται έκ τού Α ή Σ.

1347) Δείξατε ότι: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x^2+y^2+1)^{-\frac{3}{2}}dxdy=2\pi$ καί έπαληθεύσατε τό έξαγόμενον έρμηνεύοντες τό όλοκλήρωμα αύτό ώς προσημασμένον μέτρον μιάς καταλλήλου στερεάς γωνίας.

1348) Δείξατε ότι τό μέτρον τής στερεάς γωνίας ύπό τήν όποίαν φαίνεται έκ τής άρχής τών άξόνων ή μία χοάνη τού ύπερβολοειδούς $x^2\alpha^{-2}+y^2\beta^{-2}-z^2\gamma^{-2}=1$, ίσούται μέ τό όλοκλήρωμα:

$$8\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\alpha^2\eta\mu^2\varphi)(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\alpha^2\gamma^2\eta\mu^2\varphi)}\,d\varphi.$$

1349) Δείξατε ότι τά μέτρα τών στερεών γωνιών ύπό τίς όποίες φαίνονται έξ ένός σημείου δύο έπιφάνειες Σ_1, Σ_2 οί όποίες περατούνται είς τήν ίδια γραμμή Γ, είναι ίσα.

1350) Δείξατε ότι τό προσημασμένον μέτρον $\omega=\omega(A)$ τής στερεάς γωνίας όπως τό όρίσαμε είς τήν άσκησιν 1346, θεωρούμενον ώς συνάρτησις τών συντεταγμένων τού Α, έπαληθεύει τήν έξίσωσιν: $\mathrm{grad}\,\omega=-\oint_{\Gamma+}\frac{1}{r^3}[\bar{r}d\bar{r}]$.

1351) Έάν Γ είναι μία κλειστή προσανατολισμένη γραμμή τού τριδιαστάτου χώρου, δείξατε ότι ύπάρχει ένα διάνυσμα $\bar{a}$ μέ τήν έξής χαρακτηριστική ίδιότητα: γιά κάθε μοναδιαίον διάνυσμα $\bar{n}$, τό έσωτερικόν γινόμενον $\bar{a}\bar{n}$ ίσούται μέ τό προσημασμένον έμβαδόν τού χωρίου τό όποίον περικλείεται άπό τήν όρθήν προβολήν τής Γ έπί τού έπιπέδου πού είναι κάθετον πρός τό $\bar{n}$.

1352) Δείξατε ότι ή κλίσις, ή άπόκλισις, ή περιστροφή καί ή Laplacien είς τό σύστημα τών σφαιρικών συντεταγμένων (66.11), έχουν τήν μορφήν

$$\mathrm{grad}\,f=\bar{\upsilon}_1\frac{\partial f}{\partial\rho}-\frac{\bar{\upsilon}_2}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}+\frac{\bar{\upsilon}_3}{\rho\sigma\upsilon\nu\varphi}\frac{\partial f}{\partial\theta}$$

$$\mathrm{div}\,\bar{a}=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2a_1)+\frac{1}{\rho\sigma\upsilon\nu\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(a_2\sigma\upsilon\nu\varphi)+\frac{1}{\rho\sigma\upsilon\nu\varphi}\frac{\partial a_3}{\partial\theta}$$

$$\mathrm{rot}\,\bar{a}=\frac{1}{\rho^2\sigma\upsilon\nu\varphi}\begin{vmatrix}\bar{\upsilon}_1 & \rho\bar{\upsilon}_2 & \rho\sigma\upsilon\nu\varphi\,\bar{\upsilon}_3\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial\theta}\\ a_1 & \rho a_2 & \rho\sigma\upsilon\nu\varphi\, a_3\end{vmatrix}$$

$$\Delta f=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\sigma\upsilon\nu\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sigma\upsilon\nu\varphi\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$$

όπου είναι:

$$\bar{\upsilon}_1=\bar{i}\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\sigma\upsilon\nu\varphi+\bar{j}\,\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\varphi+\bar{k}\,\eta\mu\varphi$$
$$\bar{\upsilon}_2=\bar{i}\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\varphi+\bar{j}\,\eta\mu\theta\,\eta\mu\varphi-\bar{k}\,\sigma\upsilon\nu\varphi$$
$$\bar{\upsilon}_3=-\bar{i}\,\eta\mu\theta+\bar{j}\,\sigma\upsilon\nu\theta$$
$$\bar{a}=a_1\bar{\upsilon}_1+a_2\bar{\upsilon}_2+a_3\bar{\upsilon}_3$$

. . .

1353) Ἐάν ἐπί χωρίου T ἁπλῆς συνοχῆς ἡ περιστροφή τοῦ πεδίου $\bar{a}$ εἶναι σταθερή, νά δειχθῆ ὅτι τό πεδίον εἶναι τῆς μορφῆς : $\bar{a} = (cy + f_x, f_y)$, ὅπου c σταθερόν.

1354) Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου T τό ὁποῖον περικλείεται ἀπό τό χωρίς πολλαπλᾶ σημεῖα τόξον Γ μέ ἐξίσωσιν $\bar{r} = \bar{r}(s)$ $(s_1 \leqslant s \leqslant s_2)$ ἀπό τίς ἐφαπτόμενες εἰς τά ἄκρα αὐτοῦ καί ἀπό τό τόξον Γ_1 πού ἔχει ἐξίσωσιν : $\bar{r}_1 = \bar{r} + f(s)\bar{\varepsilon}$ $(s_1 \leqslant s \leqslant s_2,\ \bar{\varepsilon} = \bar{r}',\ f \geqslant 0)$, δίδεται ἀπό τόν τύπον : $|T| = \frac{1}{2}\left|\int_\Gamma \frac{f^2}{R} ds\right|$, ὅπου R ἡ ἀκτίς καμπυλότητος τοῦ Γ.

1355) Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου T_1 τό ὁποῖον περικλείεται ἀπό τήν κλειστήν γραμμήν $\bar{r}_1 = \bar{r} + \bar{\kappa}\sigma(s)$, ὅπου $\bar{\kappa}$ τό κάθετον διάνυσμα τῆς χωρίς πολλαπλᾶ σημεῖα κλειστῆς γραμμῆς Γ μέ ἐξίσωσιν $\bar{r} = \bar{r}(s)$, ἐπί τῆς ὁποίας εἶναι ὡρισμένη ἡ συνάρτησις $f(s)$, δίδεται ἀπό τόν τύπον $|T_1| = |T| - \oint_{\Gamma+} f ds + \frac{1}{2}\oint_{\Gamma+} \frac{f^2}{R} ds$ ὅπου R ἡ ἀκτίς καμπυλότητος τῆς Γ καί $|T|$ τό ὑπ' αὐτῆς περικλειόμενον ἐμβαδόν.

1356) Νά δειχθῆ ὅτι τό ἐμβαδόν $\tau(a)$ τό ὁποῖον περικλείεται ὑπό τῆς κλειστῆς καί χωρίς πολλαπλᾶ σημεῖα σταθμικῆς γραμμῆς Γ_a τοῦ βαθμωτοῦ πεδίου $\phi(M)$, τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις εἶναι : $\phi(M) = a$ $(a_1 < a < a_2)$, ἐπαληθεύει τήν σχέσιν :

$$\frac{d\tau}{da} = \int_{\Gamma_a} \frac{ds}{|\mathrm{grad}\,\phi|} \quad (\mathrm{grad}\,\phi \neq \bar{0})$$

1357) Νά ὑπολογισθῆ ἡ ροή τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{a} = \mathrm{grad}\, f + \mathrm{rot}\,\bar{v}$ διά τῆς σφαίρας $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = K^2$, ὅταν εἶναι f πολυώνυμον δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρός x, y, z, $\bar{v}$ δοσμένη διανυσματική συνάρτησις καί ἡ θετική ὄψις τῆς σφαίρας εἶναι ἡ ἐξωτερική.

1358) Ἐάν Σ εἶναι τό σύνορον τοῦ τριδιαστάτου χωρίου Ω νά δειχθῆ ἡ σχέσις:
$\iiint_\Omega \Phi_x \Delta\Phi\, d\omega = \frac{1}{2}\iint_\Sigma (\Phi_x^2 - \Phi_y^2 - \Phi_z^2,\ 2\Phi_x\Phi_y,\ 2\Phi_x\Phi_z)\, d\bar{\sigma}$ (Maxwell).

. . .

1359) Ἔστω T χωρίον τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y τό ὁποῖον κεῖται ὁλόκληρον πρός τό αὐτό μέρος μιᾶς εὐθείας ἡ ὁποία διέρχεται διά τῆς ἀρχῆς· διά τοῦ μετασχηματισμοῦ $u = x^2 - y^2$, $v = xy$ ἀπεικονίζεται τό T ἀμφιμονοσήμαντα ἐπί ἑνός χωρίου T_1 τοῦ ἐπιπέδου τῶν u, v. Δείξατε ὅτι ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ T $(\delta=1)$ ὡς πρός τήν ἀρχήν ἰσοῦται μέ $\frac{1}{2}|T_1|$.

1360) Ἐάν τό χωρίον T τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y διά τοῦ μετασχηματισμοῦ $u = x^3$, $v = y$ ἀπεικονίζεται ἀμφιμονοσήμαντα ἐπί τοῦ χωρίου T_1 τοῦ ἐπιπέδου τῶν u, v, νά δειχθῆ ὅτι ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ T $(\delta = 1)$ ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν y ἰσοῦται μέ $|T_1|$.

1361) Ἐάν T εἶναι ἕνα χωρίον τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y συμμετρικόν ὡς πρός τήν εὐθεῖαν $y = x$ καί ἡ συνάρτησις $\sigma(x,y)$ εἶναι συνεχής καί θετική ἐπ' αὐτοῦ, νά δειχθῆ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου Ω τό ὁποῖον περικλείεται ἀπό τήν ἐπιφάνεια $z = [a\sigma(x,y) + \beta\sigma(y,x)] : [\sigma(x,y) + \sigma(y,x)]$ $(a, \beta > 0)$ καί τό ἐπίπεδον $z = 0$, ἐπαληθεύει τήν σχέσιν : $|\Omega| = (a+\beta)\,|T|$.

1362) Ἐάν ἐπί τοῦ χωρίου T τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y εἶναι $f(x,y) \geqslant 0$, $\varphi(x,y) \geqslant 0$ καί οἱ θετικοί ἀριθμοί a, β ἐπαληθεύουν τήν σχέσιν $a + \beta = 1$, νά δειχθῆ ἡ ἀνισότης

$$\iint_T f^a \varphi^\beta dx dy \leqslant \left(\iint_T f dx dy\right)^a \left(\iint_T \varphi dx dy\right)^\beta \quad \text{(Hölder)}.$$

1363) Ἐὰν τὸ χωρίον T εἶναι συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν $y=x$ καὶ ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ εἶναι θετικὴ ἐπ' αὐτοῦ νὰ δειχθῇ ὅτι $\iint_T \frac{f(x,y)}{f(x,y)+f(y,x)}dxdy = \frac{1}{2}|T|$.

1364) Ἐὰν Γ εἶναι μία κλειστὴ γραμμὴ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y καὶ Γ', Γ'' αἱ γραμμὲς αἱ ὁποῖες εἶναι ὁ τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἀπὸ ἕνα σταθερὸν σημεῖον A ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων καὶ καθέτων τῆς γραμμῆς Γ, νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ τὰ περικλειόμενα ὑπὸ τῶν γραμμῶν $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ χωρία ἰσχύει ἡ σχέσις $|T|=|T'|-|T''|$.

1365) Ἐὰν Γ εἶναι μία κλειστὴ γραμμὴ χωρὶς διπλᾶ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας $z^2=ky^2+2\varphi(x)$ καὶ Γ_1 ἡ προβολὴ τῆς Γ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y, νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ γραμμὲς αὐτὲς περιστρεφόμενες περὶ τὸν ἄξονα τῶν x διαγράφουν ἐπιφάνειες τῶν ὁποίων οἱ περικλειόμενοι ὄγκοι ἔχουν λόγον σταθερόν.

1366) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ προσημασμένον μέτρον τῆς στερεᾶς γωνίας ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων μία ἐπιφάνεια Σ ἡ ὁποία περατοῦται εἰς τὴν γραμμὴν Γ, ἰσοῦται μὲ τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα $\frac{1}{3}\oint_{\Gamma+}\frac{1}{r}[\bar r\bar a]\,d\bar r$ ὅπου $\bar a=[x:(y^2+z^2),\ y:(z^2+x^2),\ z:(x^2+y^2)]$.

. . .

Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῶν ἐπιφανειῶν :

1367) $(x\,\text{συν}\,a+y\,\text{ημ}\,a)^2+z^2=a^2,\quad x,y,z>0,\quad 0<a<\frac{\pi}{2}$.

1368) $az=xy,\qquad (x^2+y^2)^2\leqslant 2a^2xy$.

1369) $x^2+y^2+z^2=2az\qquad Ax^2+By^2\leqslant z^2\ (A,B>0)$.

1370) $3z=2(\sqrt{x^3a^{-1}}+\sqrt{y^3\beta^{-1}}\qquad x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ \beta x+ay\leqslant a\beta\lambda\quad (a,\beta,\lambda>0)$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐπιφανειακὰ ὁλοκληρώματα τῶν συναρτήσεων :

1371) $\bar a=(x^3, y^3, -z^3)\qquad \Sigma: (x^2+y^2+z^2=a^2)$

1372) $\bar a=(z^\nu-y^\nu, x^\nu-z^\nu, y^\nu-x^\nu)\quad \Sigma: (x^2+y^2+z^2=a^2,\ z\geqslant 0)$

Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῶν χωρίων :

1373) $(a_1x+\beta_1y+\gamma_1z)^2+(a_2x+\beta_2y+\gamma_2z)^2+(a_3x+\beta_3y+\gamma_3z)^2\leqslant 1$.

1374) $|a_1x+\beta_1y+\gamma_1z|+|a_2x+\beta_2y+\gamma_2z|+|a_3x+\beta_3y+\gamma_3z|\leqslant 1$.

1375) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{\beta}\right)^2+\frac{z^2}{\gamma^2}\leqslant 1\qquad (x,y,z>0)$.

1376) $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{\beta}\right)^{2/3}\right]^3+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2\leqslant 1$.

Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ὁ περικλειόμενος ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν :

1377) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$ 1378) $(x^2+y^2+z^2)^2=axyz$

1379) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)^2=\frac{x}{k}$ 1380) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)^2=\frac{xyz}{k^3}$.

1381) $z=\text{συν}x\,\text{συν}y\quad \left(|x+y|<\frac{\pi}{2},\ |x-y|<\frac{\pi}{2}\right)$.

1382) $z=\text{ημ}(x^2+y^2),\quad z=0,\quad (0<x^2+y^2<\pi)$.

1383) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ κ. μάζης τοῦ ὁμογενοῦς χωρίου τὸ ὁποῖον περικλείουν ἡ ἐπιφάνεια : $z^2=xy$ καὶ τὰ ἐπίπεδα $x=a,\ y=\beta,\ z=0$.

1384) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ κ. μάζης τοῦ ὁμογενοῦς τμήματος τῆς ἐπιφανείας $z=x^{3/2}+y^{3/2}$ διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $x,y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 1$.

1385) Νὰ μετασχηματισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα : $\int_0^\gamma dx\int_{ax}^{\beta x}f(x,y)\,dy$ διὰ τῶν σχέσεων $u=x+y$, $uv=y$.

1386) Νὰ μετασχηματισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα : $\int_0^\beta dx\int_0^a f(x,y)\,dy$ διὰ τῶν σχέσεων $u=y+\gamma x$, $uv=y\quad (\gamma\neq 0)$.

1387) Νά μετασχηματισθῇ τό ὁλοκλήρωμα $\iint_T f(x,y)\,dxdy$ διά τῶν σχέσεων $x=\rho\,\sigma\upsilon\nu^3\varphi$, $y=\rho\,\eta\mu^3\varphi$, ὅπου $T:\ (x^{2/3}+y^{2/3}\leq a^{2/3})$.

1388) Ἐάν ἡ συνάρτησις $f(t)$ εἶναι συνεχής διά $t\geqslant 0$ νά δειχθῇ ὅτι $\iint_T f(x)\,dxdy = \iint_T f(y)\,dxdy$ ὅπου $T:\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^a+y^a\leqslant \rho^a,\ a>0)$.

1389) Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου τό ὁποῖον ὁρίζεται ἀπό τήν σχέσιν: $|ax+\beta y+\gamma|+|a_1x+\beta_1y+\gamma_1|\leqslant K$ $(a\beta_1-a_1\beta\neq 0,\ K>0)$.

1390) Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ἐλλείψεως:

$$(ax+\beta y+\gamma)^2+(a_1x+\beta_1y+\gamma_1)^2\leqslant K \quad (a\beta_1-a_1\beta\neq 0,\ K>0)$$

1391) Νά δειχθῇ ὅτι:

$$\int_0^{a\eta\mu\beta}dy\int_{y\sigma\varphi\beta}^{\sqrt{a^2-y^2}}\ln(x^2+y^2)\,dx=a^2\beta\left(\ln a-\frac{1}{2}\right) \quad \left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right).$$

1392) Νά δειχθῇ ὅτι:

$$\iint_\Sigma (z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2)(1+z_x^2+z_y^2)^{-\frac{3}{2}}d\sigma=-\tau o\xi\varepsilon\varphi\,\xi^2\eta^2(\eta^2\zeta^2+\zeta^2\xi^2+\xi^2\eta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

ὅπου Σ τό τμῆμα τοῦ παραβολοειδοῦς $z=xy$ τό περιοριζόμενον ὑπό τῶν γεννετειρῶν πού διέρχονται ἀπό τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων καί τό σημεῖον (ξ,η,ζ).

1393) Νά δειχθῇ ὅτι ἡ ροή τῆς δυνάμεως $\bar F=\bar r : r^3$ διά κλειστῆς ἐπιφανείας Σ ἰσοῦται μέ μηδέν ὅταν ἡ ἀρχή τῶν ἀξόνων κεῖται εἰς τό ἐξωτερικόν ὡς πρός τήν Σ, μέ 2π ὅταν κεῖται ἐπ' αὐτῆς καί μέ 4π ὅταν κεῖται εἰς τό ἐσωτερικόν αὐτῆς.

1394) Νά ὑπολογισθῇ τό ἔργον τῆς δυνάμεως $\bar F=(y+z,\ z+x,\ x+y)$ κατά μῆκος τοῦ τόξου $y=x^2,\ z=x^3$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$.

1395) Νά δειχθῇ ὅτι: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\!\!\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{x^2+y^2+1}\right)^{\kappa}dxdy=\frac{\pi}{2^{\kappa}(\kappa-2)}$ $(\kappa>2)$.

1396) Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα: $\displaystyle\iint_T\frac{dxdy}{1+(ax+\beta y)^2}$, ὅπου τό χωρίον ὁλοκληρώσεως εἶναι $T:\ \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\leqslant 1\right)$.

1397) Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου : $x^2+y^2+z^2+2zx\leqslant a^2,\ x,y,z\geqslant 0$ καί τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας $x^2+y^2+z^2+2zx=a^2,\ x,y,z\geqslant 0$.

1398) Νά ὑπολογισθῇ τό κ. μάζης τοῦ ὁμογενοῦς τόξου τῆς γραμμῆς $x(x^2+y^2)-ay^2=0$ τό ὁποῖον ἔχει ἄκρα τά σημεῖα : $(0,0)$ καί $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$.

1399) Ἔστω ΑΒΓΔ ὀρθογώνιον μέ πλευρές $AB=\Gamma\Delta=a$, $B\Gamma=A\Delta=2\beta$, ὅπου $a>\beta$· ἀφαιροῦμεν ἐξ αὐτοῦ τό μέρος πού κεῖται εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ κύκλου μέ διάμετρον τήν ΓΒ καί περιστρέφομεν τό ὑπόλοιπον μέρος περί τήν ΑΔ. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ροπή ἀδρανείας ὡς πρός τήν ΑΔ τοῦ παραγομένου ἐκ περιστροφῆς χωρίου, ὑποθέτοντες αὐτό ὁμογενές.

ΠΙΝΑΚΕΣ

I. Παράγωγοι πλεγμένων συναρτήσεων

$F(x,y)=0$	$F_x dx + F_y dy = 0,\quad y' = -F_x : F_y,\quad x' = -F_y : F_x$ $y'' = \frac{1}{F_y^3}\begin{vmatrix} 0 & F_x & F_y \\ F_x & F_{xx} & F_{xy} \\ F_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix}$
$F(x,y,z)=0$	$z_x = -F_x : F_z,\quad z_y = -F_y : F_z$
$F(x,y,z)=0$ $\Phi(x,y,z)=0$	$dx : dy : dz = \frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(y,z)} : \frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(z,x)} : \frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(x,y)}$

II. Ἐλεύθερα ἀκρότατα συναρτήσεως

Ἐλάχιστον	$\Phi_1 = 0$ $\cdots$ $\Phi_\nu = 0$	$\Phi_{11} > 0,\quad \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots, \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \cdots & \Phi_{1\nu} \\ & \cdots & \\ \Phi_{\nu 1} & \cdots & \Phi_{\nu\nu} \end{vmatrix} > 0$
Μέγιστον	$\Phi_1 = 0$ $\cdots$ $\Phi_\nu = 0$	$\Phi_{11} < 0,\quad \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{vmatrix} < 0, \cdots, (-1)^\nu \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \cdots & \Phi_{1\nu} \\ & \cdots & \\ \Phi_{\nu 1} & \cdots & \Phi_{\nu\nu} \end{vmatrix} > 0$

III. Δεσμευμένα ἀκρότατα συναρτήσεως

Ἐλάχιστον	$\mu =$ ἄρτιος	$\Phi_1 = \Phi_2 = \cdots = \Phi_\nu = 0$ $g^1 = g^2 = \cdots = g^\mu = 0$	$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \cdots, \Delta_{\nu-\mu} > 0$
	$\mu =$ περιττός	$\Phi_1 = \Phi_2 = \cdots = \Phi_\nu = 0$ $g^1 = g^2 = \cdots = g^\nu = 0$	$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 < 0, \cdots, \Delta_{\nu-\mu} < 0$
Μέγιστον	$\nu =$ ἄρτιος	$\Phi_1 = \Phi_2 = \cdots = \Phi_\nu = 0$ $g^1 = g^2 = \cdots = g^\mu = 0$	$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 < 0, \cdots, (-1)^{\nu-\mu}\Delta_{\nu-\mu} < 0$
	$\nu =$ περιττός	$\Phi_1 = \Phi_2 = \cdots = \Phi_\nu = 0$ $g^1 = g^2 = \cdots = g^\mu = 0$	$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0, \cdots (-1)^{\nu-\mu}\Delta_{\nu-\mu} > 0$

IV Προσανατολισμός ἐφαπτομένης γραμμῆς τοῦ R_2

Ἐξίσωσις γραμμῆς	$\bar{r}=\bar{r}(t)$	$y=f(x)$	$x=f(y)$	$F(x,y)=0$
Διάνυσμα προσανατολισμοῦ	$\dot{\bar{r}}$	$(1,f')$	$(f',1)$	$(F_y,-F_x)$

V. Προσανατολισμός ἐφαπτομένης γραμμῆς τοῦ R_3

Ἐξίσωσις γραμμῆς	$\bar{r}=\bar{r}(t)$	$y=f(x)$, $z=\varphi(x)$	$z=f(y)$, $x=\varphi(y)$	$x=f(z)$, $y=\varphi(z)$	$F(x,y,z)=0$, $\Phi(x,y,z)=0$
Διάνυσμα προσανατολισμοῦ	$\dot{\bar{r}}$	$(1,f',\varphi')$	$(\varphi',1,f')$	$(f',\varphi',1)$	$\left[\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(x,y)}\right]$

VI. Προσανατολισμός καθέτου ἐπιφανείας

Ἐξίσωσις γραμμῆς	$\bar{r}=\bar{r}(u,v)$	$F(x,y,z)=0$	$z=f(x,y)$	$x=f(y,z)$	$y=f(z,x)$
Διάνυσμα προσανατολισμοῦ	$[\bar{r}_u\bar{r}_v]$	(F_x,F_y,F_z)	$(-f_x,-f_y,1)$	$(1,-f_y,-f_z)$	$(-f_x,1,-f_z)$

VII. Ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα

Ὁλοκλήρωμα	Τύπος ὑπολογισμοῦ		Ὁρισμός
$\int_\Gamma \Phi(M)ds$	$\int_{t_1}^{t_2}\Phi(M)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$		$\text{op}\sum\Phi(M_\kappa)\Delta s_\kappa$
$\int_{AB}\Phi(M)\,dx$	$\int_\Gamma\Phi(M)(\bar{i}\bar{\gamma})ds$	$\int_{t_A}^{t_B}\Phi(M)\dot{x}dt$	$\text{op}\sum\Phi(M_\kappa)\Delta x_\kappa$.
$\int_{AB}\Phi(M)\,dy$	$\int_\Gamma\Phi(M)(\bar{j}\bar{\gamma})ds$	$\int_{t_A}^{t_B}\Phi(M)\dot{y}dt$	$\text{op}\sum\Phi(M_\kappa)\Delta y_\kappa$
$\int_{AB}\Phi(M)\,dz$	$\int_\Gamma\Phi(M)(\bar{k}\bar{\gamma})ds$	$\int_{t_A}^{t_B}\Phi(M)\dot{z}dt$	$\text{op}\sum\Phi(M_\kappa)\Delta z_\kappa$
$\int_{AB}\bar{a}(M)\,d\bar{r}$	$\int_{t_A}^{t_B}(P\dot{x}+Q\dot{y}+R\dot{z})dt$		$\text{op}\sum\bar{a}(M_\kappa)\Delta\bar{r}_\kappa$

IIX. Ἐπιφανειακὰ ὁλοκληρώματα

Ὁλοκλήρωμα	Διάφορες μορφὲς τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐπιφανείας ὁλοκληρώσεως				Ὁρισμός
	$\bar r = \bar r(u,v)$	$z = f_3(x,y)$	$x = f_1(y,z)$	$y = f_2(z,x)$	
$\iint_\Sigma \Phi(M)\,d\sigma$	$\iint_T \Phi(M)\,\lvert[\bar r_u \bar r_v]\rvert\,du\,dv$	$\iint_T \Phi(x,y,f_3)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy$	$\iint_T \Phi(f_1,y,z)\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,dy\,dz$	$\iint_T \Phi(x,f_2,z)\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dz\,dx$	$\text{ορ}\sum \Phi(M_\kappa)\,\Delta\sigma_\kappa$
$\iint_\Sigma \Phi(M)\,dx\,dy$	$\epsilon\iint_T \Phi(M)(\bar r_u \bar r_v \bar k)\,du\,dv$	$\epsilon\iint_T \Phi(x,y,f_3)\,dx\,dy$	——	——	$\epsilon\,\text{ορ}\sum \Phi(M_\kappa)\,\Delta\tau_\kappa^z$
$\iint_\Sigma \Phi(M)\,dy\,dz$	$\epsilon\iint_T \Phi(M)(\bar r_u \bar r_v \bar i)\,du\,dv$	——	$\epsilon\iint_T \Phi(f_1,y,z)\,dy\,dz$	——	$\epsilon\,\text{ορ}\sum \Phi(M_\kappa)\,\Delta\tau_\kappa^x$
$\iint_\Sigma \Phi(M)\,dz\,dx$	$\epsilon\iint_T \Phi(M)(\bar r_u \bar r_v \bar j)\,du\,dv$	——	——	$\epsilon\iint_T \Phi(x,f_2,z)\,dz\,dx$	$\epsilon\,\text{ορ}\sum \Phi(M_\kappa)\,\Delta\tau_\kappa^y$
$\iint_\Sigma \bar a(M).d\bar\sigma$	$\epsilon\iint_T (\bar a \bar r_u \bar r_v)\,du\,dv$	$\epsilon\iint_T (-Pz_x-Qz_y+R)\,dx\,dy$	$\epsilon\iint_T (-Qx_y-Rx_z+P)\,dy\,dz$	$\epsilon\iint_T (-Ry_z-Py_x+Q)\,dz\,dx$	$\epsilon\,\text{ορ}\sum \bar a\,\bar\Delta\sigma_\kappa$
πρόσημον	$\epsilon=+1$ ὅταν $(\bar r_u \bar r_v \bar\gamma)>0$ $\epsilon=-1$ » $(\bar r_u \bar r_v \bar\gamma)<0$	$\epsilon=+1$ ὅταν $\bar k\bar\gamma>0$ $\epsilon=-1$ » $\bar k\bar\gamma<0$	$\epsilon=+1$ ὅταν $\bar i\bar\gamma>0$ $\epsilon=-1$ » $\bar i\bar\gamma<0$	$\epsilon=+1$ ὅταν $\bar j\bar\gamma>0$ $\epsilon=-1$ » $\bar j\bar\gamma<0$	

Ἀπαντήσεις τῶν ἀσκήσεων

Κεφάλαιον I

1) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου θεωρουμένου ὡς συνάρτησις τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, τὸ ἔργον θεωρουμένον ὡς συνάρτησις τῆς ἐντάσεως τῆς δυνάμεως, τῆς μεταθέσεως καὶ τῆς γωνίας τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ δύναμις καὶ ἡ κατεύθυνσις μεταθέσεως...

2) Ἡ πρώτη παριστάνει ἐπίπεδον, ἡ δευτέρα ἕνα ἐλλειπτικὸν παραβολοειδὲς καὶ ἡ τρίτη μίαν σφαῖραν ἀκτῖνος 2 μὲ κέντρον τὸ σημεῖον $(0,0,1)$.

3) Τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τετραγώνου μὲ κορυφὲς τὰ σημεῖα $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$.

4) Τὰ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν $x-y=\pm 1$ καὶ τὰ μεταξὺ αὐτῶν κείμενα σημεῖα.

5) » » » » $x+y=\pm 1$ » » » » » .

6) Τὸ τρίγωνον μὲ πλευρὲς τὶς εὐθεῖες $x=y$, $y=0$, $x=1$ μὴ συμπεριλαμβανόμενες.

7) Ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον τῶν x,y.

8) Τὰ σημεῖα τοῦ χώρου τῶν x,y,z τὰ κείμενα ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου $z=0$.

9) Τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y τὰ κείμενα ἐκτὸς τοῦ κύκλου $x^2+y^2=1$.

10) » » » χώρου τῶν x,y,z διὰ τὰ ὁποῖα $\text{συν}(x+y-z)\neq 0$.

11) » » » » » x,y,z » » » $x+z>0$, $y=$ οἱονδήποτε καὶ $x+z\leq 0$ ἀλλὰ $y=$ κατάλληλον.

12) Τὰ σημεῖα τοῦ χώρου τῶν x,y,z διὰ τὰ ὁποῖα $y^2-2x\geq 0$.

13) μηδέν. 14) δὲν ἔχει ὅριον. 15) μηδέν. 16) 1.

17) δὲν ἔχει ὅριον. 18) ∞.

19) ἀσυνεχὴς ἐπὶ τῆς εὐθείας $x-y=0$. 20) ἀσυνεχὴς εἰς τὴν ἀρχήν.

21) συνεχής 22) » » » »

23) ἀσυνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον $(1,0)$ 24) » » » »

25) » ἐπὶ τῆς εὐθείας $x=0$. 26) » ἐπὶ τῆς εὐθείας $x+y=0$.

27) » ἐπὶ τοῦ κύκλου $x^2+y^2=1$. 28) » » » παραβολῆς $x^2+y=0$.

29) ὅταν $xy>0$ εἶναι συνεχής. 30) συνεχὴς ὅταν $x\neq 0$, $xz+y>0$.

31) $\Phi_x=(y^2-x^2):(x^2+y^2)^2$, $\Phi_y=-2xy:(x^2+y^2)^2$.

32) $\Phi_x=\text{ημ}\,xy+xy\,\text{συν}\,xy$, $\Phi_y=x^2\,\text{συν}\,xy$

33) $\Phi_x=e^{x+2y}:2(e^{x+2y}-y^2)^{1/2}$, $\Phi_y=(e^{x+2y}-y):(e^{x+2y}-y^2)^{1/2}$

34) $\Phi_x=-(x+y\,\text{συν}\,z)\cdot(x^2+y^2+2xy\,\text{συν}\,z)^{-3/2}$, $\Phi_y=-(y+x\,\text{συν}\,z)\cdot(x^2+y^2+2xy\,\text{συν}\,z)^{-3/2}$,
$\Phi_z=xy(x^2+y^2+2xy\,\text{συν}\,z)^{-3/2}\,\text{ημ}\,z$.

35) $\Phi_x=(z^2+2zy^2+y^4-x^2)^{-1/2}$, $\Phi_y=-2xy(z+y^2)^{-1}\cdot(z^2+2zy^2+y^4-x^2)^{-\frac{1}{2}}$;
$\Phi_z=-x(z+y^2)^{-1}(z^2+2zy^2+y^4-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

36) $\Phi_x=1:2(1+x+yz)\sqrt{x+yz}$, $\Phi_y=z:2(1+x+yz)\sqrt{x+yz}$,
$\Phi_z=y:2(1+x+yz)\sqrt{x+yz}$.

37) $\Phi_x=2x[1+y:(1+x^2+y^2+z^2)]$, $\Phi_y=\ln(1+x^2+y^2+z^2)+2y^2:(1+x^2+y^2+z^2)$,

$\Phi_z = 2yz : (1+x^2+y^2+z^2)$.

38) $\Phi_x = e^{x-y}[1+(x-y)\ln(x-y)] : (x-y)$, $\Phi_y = e^{x-y}[1-(y-x)\ln(x-y)] : (y-x)$.

39) $\Phi_x = 1 : x(1+\ln^2 xy)$, $\Phi_y = 1 : y(1+\ln^2 xy)$.

40) $\Phi_x = x^{-1}\cdot \text{ημ}(\ln x^2y^4)$, $\Phi_y = 2y^{-1}\cdot \text{ημ}(\ln x^2y^4)$.

46) $\Phi_{xx} = y(2x^2-y^2) : x^2(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}$.

47) $\Phi_{yy} = 2xy : (x^2+y^2) + 2\,\text{τοξεφ}\, yx^{-1}$.

54) $\Phi_{xx} = 6xy^2$, $\Phi_{xy} = 6x^2y$, $\Phi_{yy} = 2x^3+20y^3$.

55) $\Phi_{xx} = 0$, $\Phi_{xy} = \text{συν}\, y$, $\Phi_{yy} = -x\,\text{ημ}\, y$.

64) $\dot\Phi = e^x(2t\,\text{ημ}\, yz + z\,\text{συν}\, yz + e^t y\,\text{συν}\, yz)$.

65) $\dot\Phi = -\alpha yz\,\text{ημ}\, t + \alpha xz\,\text{συν}\, t + \kappa xy$.

66) $\dot\Phi = e^x(\text{συν}\frac{y}{2} - 3\sqrt{\pi t}\,\text{ημ}\frac{y}{2}) : 2\sqrt{\pi t}$, $\dot\Phi(\pi) = 3e : 2$.

67) $\dot\Phi = -2\,\text{εφ}\, 2t$, $\dot\Phi(\frac{\pi}{8}) = -2$ 68) $\dot\Phi = -6\,\text{τεμ}\, t$, $\dot\Phi(1) = -1$.

69) $\Phi' = -1 : y$ 70) $\Phi' = 2x+2y : \text{συν}^2 x$.

71) $\Phi' = 8(2-x^2) : x^2y^3$.

72) $\Phi_\rho = 2x\,\text{τεμ}\,\vartheta - 8y\,\text{εφ}\,\vartheta$, $\Phi_\vartheta = 2x\rho\,\text{ημ}\,\vartheta : \text{συν}^2\vartheta - 8y\rho : \text{συν}^2\vartheta$

73) $\Phi_u = e^{xy}(yu+xv) : (u^2+v^2)$, $\Phi_v = e^{xy}(yv-xu) : (u^2+v^2)$.

74) $\Phi_x = (\text{εφ}\, y - y\,\text{ημ}\, x)\cdot e^{u+v}$, $\Phi_y = (x\,\text{τεμ}^2 y + \text{συν}\, x)\, e^{u+v}$.

75) $\Phi_x = 3$, $\Phi_y = 1$, $\Phi_\rho = \Phi_x \text{συν}\,\vartheta + \Phi_y \text{ημ}\,\vartheta$, $\Phi_\vartheta = -\Phi_x \rho\,\text{ημ}\,\vartheta + \Phi_y \rho\,\text{συν}\,\vartheta$.

76) $\Phi_\rho = (2x+y)\,\text{συν}\,\vartheta + x\,\text{ημ}\,\vartheta$, $\Phi_\vartheta = x\rho\,\text{συν}\,\vartheta - (2x+y)\rho\,\text{ημ}\,\vartheta$.

77) $\Phi_x = y^{-1}\cdot\ln v + 2x(uv^{-1}+2vw) + yv^2\,\text{τεμ}^2 x$, $\Phi_y = -xy^{-2}\ln v - (uv^{-1}+2vw) + v^2\,\text{εφ}\, x$.

78) $\Phi_x = (\text{συν}\, u + ve^u)2x + e^u \ln y$, $\Phi_y = (\text{συν}\, u + ve^u)\cdot 6y + e^u xy^{-1}$.

80) $\Phi_x = 2\Phi(x\,\text{ημ}^2 y + y\,\text{ημ}\, x\,\text{ημ}\, y + xy\,\text{συν}\, x\,\text{ημ}\, y)$, $\Phi_y = 2\Phi(x^2\text{ημ}\, y\,\text{συν}\, y + x\,\text{ημ}\, x\,\text{ημ}\, y + xy\,\text{ημ}\, x\,\text{συν}\, y + y)$.

81) $\ddot\Phi = 8xyt^2 - 2z^2\,\text{ημ}\, t\,\text{συν}\, t - 8xzt\,\text{ημ}\, t + 8yz\,\text{συν}\, t - yz^2\,\text{ημ}\, t - xz^2\,\text{συν}\, t + 4xyz$.

82) $\ddot\Phi = -v\,\text{συν}\, w\,\text{συν}^2 t - 2e^t\,\text{ημ}\, w\,\text{συν}\, t + 2 + e^t\,\text{συν}\, w + v\,\text{ημ}\, t\,\text{ημ}\, w$.

83) $\Phi'' = -y^2\,\text{ημ}\, xy - x^2\,\text{ημ}\, xy\cdot\text{ημ}^2 x - 2(1-xy)\,\text{συν}\, xy\cdot\text{ημ}\, x - xy\,\text{συν}\, xy$

84) $\Phi'' = -\Phi + [2\,\text{συν}(x+y^2+z^3) - 4y^2\Phi]\, e^{2x} + 3[2z\,\text{συν}(x+y^2+z^3) - 3z^4\Phi]\cdot x^{-2} - 4ye^x\Phi -$
$- 12x^{-1}yz^2e^x\Phi - 6x^{-1}z^2\Phi + 2ye^x\text{συν}(x+y^2+z^3) - 3x^{-2}z^2\text{συν}(x+y^2+z^3)$.

85) $\Phi_x = 2x\,\text{συν}(1+x^2+y^2)$, $\Phi_y = 2y\,\text{συν}(1+x^2+y^2)$, $\Phi_{xx} = -4x^2\Phi + 2\,\text{συν}(x^2+y^2)$,
$\Phi_{xy} = -4xy\cdot\Phi$, $\Phi_{yy} = -4y^2\Phi + 2\,\text{συν}(x^2+y^2)$.

96) $d\Phi = -10$ 97) $d\Phi = \frac{\pi}{6}$ 98) $d\Phi = -\frac{\pi}{12}$.

99) $d\Phi = -1$ 100) $d\Phi = \frac{7}{6}$ 101) $d\Phi = \frac{8}{5}$.

102) $\Delta\Phi = 0.024186119$, $d\Phi = 0{,}024$ 103) $\Delta\Phi = d\Phi = 0$

104) $\Delta\Phi = 0.02044\ldots$, $d\Phi = 0{,}02$ 105) $\Delta\Phi = 0.03065\ldots$ $d\Phi = 0{,}03$.

106) $\Delta\Phi = -0.00248\ldots$, $d\Phi = -0.0025$ 107) $d\Phi = e^{x+2y}[y(1+x)dx + x(1+2y)dy]$

108) $d\Phi = -4(xdx+ydy)\cdot(x^2+y^2)^{-3}$ 109) $d\Phi = (x+\alpha)^{\nu-1}[\nu(y+\beta)dx - \mu(x+\alpha)dy] : (y+\beta)^{\mu+1}$

110) $d\Phi = [yzdx + zxdy - xydz] : xy\sqrt{x^2y^2-z^2}$.

111) $d\Phi = (xdx+ydy+zdz) : \sqrt{x^2+y^2+z^2} + (zdx - xdz) : (x^2+z^2) + zdz$.

112) $d\Phi = 2[x(ydx-xdy) - z(ydz-zdy)] : (y^2-x^2+z^2)\sqrt{x^2-z^2}$.

113) $d\Phi = 2xy(ydx-xdy) : (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2-y^2} = 0$.

114) $d\Phi = [(y-x-2\sqrt{xy})\sqrt{y}dx + (x-y-2\sqrt{xy})\sqrt{x}dy] : 2\sqrt{xy}\cdot(x+y)^2 = -\Phi : 2$.

115) $d\Phi = 2xy\cdot(a^2-z^2)^{-1}dx + x^2(a^2-z^2)^{-1}dy + 2x^2yz\cdot(a^2-z^2)^{-1}dz = x^2y(3a^2-z^2) : (a^2-z^2)^2$.

116) $d\Phi = [(y+z+\omega)yz\omega dx + \cdots + (x+y+z)xyzd\omega] : (x+y+z+\omega)^2 = 3\Phi$.

117) παράγωγος $= -(2+\sqrt{3}) : 12\sqrt{6}$, μεγίστη τιμή $= 0.152$ διά κατεύθυνσιν σχηματίζουσα μετά τοῦ ἄξονος τῶν x γωνίαν $\alpha = \text{τοξεφ}\,\frac{1}{2}$.

118) παράγωγος $= (3\sqrt{3}+8) : 10$, μεγίστη τιμή $=1$, διά κατεύθυνσιν ... $\alpha = \text{τοξεφ}\,\frac{4}{3}$.

119) διά τήν πρώτην : $-(x_0^2+y_0^2)^{-\frac{1}{2}}$ καί διά τήν δευτέραν 0.

120) παράγωγος $-\frac{2}{5}$, μεγίστη τιμή $2\sqrt{3}$ κατά τήν κατεύθυνσιν τοῦ $\vec{v} = (1,1,1) : \sqrt{3}$.

121) $5 : \sqrt{17}$.

123) $\phi = 1 + x^2 + x^3 + x^2(y-1) + x^3(y-1)$.

124) $\phi = e\left[1 + (x-1) + (y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(y-1)^2 + \cdots\right]$.

125) $\phi = \frac{\pi^2}{4} + (x-1)(\pi^2 - 2\pi) : 4 + \left(y - \frac{\pi}{2}\right)(\pi - 1) + (x-1)\left(y-\frac{\pi}{2}\right)(\pi-1) + \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \cdots$

126) $\phi = 1 + \frac{1}{2}(x^2+y^2) - \frac{1}{8}(x^4+y^4+2x^2y^2) + - \cdots$

127) $\phi = xy - y^2 + \frac{1}{3}xy^3 - \frac{1}{3}y^4 + \frac{2}{15}xy^5 - \frac{2}{15}y^6$.

128) $\phi = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2-y^2) + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{24}(x^4+y^4) - \frac{1}{4}x^2y^2 + \cdots$

129) $\phi = 1 + x^2 - y^2 + \frac{1}{2!}(x^4 - 2x^2y^2 + y^4) + \cdots + \frac{1}{\nu!}(x^2-y^2)^\nu + R_{\nu+1}$.

130) $\phi = xy - \frac{1}{3!}x^3y^3 + \cdots + (-1)^\nu \frac{(xy)^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} + R_{2\nu}$.

131) $\phi = 1 + (x+y) + (x+y)^2 + \cdots + (x+y)^\nu + R_{\nu+1}$.

131*) $\phi = 1 + (x+y+z) + (x+y+z)^2 + \cdots + (x+y+z)^\nu + R_{\nu+1}$.

132) $0{,}0228\ m^2$ 133) 4% 134) 2 πόδια 135) 21,7 τ. πόδια

136) 1/250 sec, 0.2 %

137) $\Delta\gamma \approx d\gamma = \text{συν}B \cdot \Delta\alpha + \text{συν}A \cdot \Delta\beta + \alpha\,\text{ημ}B \cdot \Delta\Gamma$.

145) $y' = -(3x^2+4y^2) : (8xy + 12y^3)$.

146) $y' = -\sqrt{y:x}$

147) $y' = -(4x^3y^2 - 15x^4y + 6x^5) : (2x^4y - 3x^5)$.

148) $y' = -(e^x\,\text{ημ}y - e^y\,\text{ημ}x) : (e^x\,\text{συν}y + e^y\,\text{συν}x)$.

149) $y' = y(y^2 - 2x^2\,\ell ny) : x(x^2-2y^2)\,\ell nx$

150) $y' = x\left[\text{συν}^2(x^2+y^2) - 1\right] : y\left[\text{συν}^2(x^2+y^2) + 1\right]$.

151) $z_x = -x : 9z$, $z_y = -4y : 9z$

152) $z_x = -(4x^3 - 3yz^2 + 10xyz) : (-6xyz + 5x^2y + y^3 + 4z^3)$

$z_y = -(-3xz^2 + 5x^2z + 3y^2z) : (-6xyz + 5x^2y + y^3 + 4z^3)$.

153) $z_x = -(yz + 2xy + y^2 + 2zx) : (xy + x^2 + 3z^2)$.

$z_y = -(xz + x^2 + 2xy) : (xy + x^2 + 3z^2)$.

154) $z_x = -z(x\,\ell n z + y) : x(z\,\ell ny + x)$, $z_y = -z(y\,\ell nx + z) : y(z\,\ell ny + x)$.

155) $z_x = ye^z(\text{ημ}xy - \text{συν}xy) : e^{xy}(\text{ημ}z - \text{συν}z)$ $z_y = xe^z(\text{ημ}xy - \text{συν}xy) : e^{xy}(\text{ημ}z - \text{συν}z)$

156) $z_x = -(ye^{xy} + ze^{xz}) : (xe^{xz} + ye^{yz})$, $z_y = -(xe^{xy} + ze^{yz}) : (xe^{xz} + ye^{yz})$

157) $u_x = -x : 9u$, $u_y = 4y : 9u$, $u_z = 16z : 9u$.

158) $u_x = (1:y - y^2 : x^2u - 4z^4 : x^5) : (-y^2 : xu^2 + 2u : yz)$

$u_y = (-x : y^2 + 2y : xu - u^2 : y^2z) : (-y^2 : xu^2 + 2u : yz)$

$u_z = (-u^2 : yz^2 + 4z^3 : x^4) : (-y^2 : xu^2 + 2u : yz)$.

159) $y' = (z-x) : (y-z)$, $z' = (x-y) : (y-z)$

160) $z' = z(x-y) : x(y+ze^z)$, $y' = -y(x+ze^z) : x(y+ze^z)$.

161) $y' = \text{εφ}x\,\text{εφ}y$, $z' = \text{εφ}x\,\text{εφ}y\,\text{ημ}x\,\text{ημ}y - \text{συν}x\,\text{συν}y$.

162) $y' = -(\mu\alpha\rho_1\gamma_1 x^{\mu-1}z^{\rho_1-1} - \mu_1\alpha_1\rho\gamma x^{\mu_1-1}z^{\rho-1}) : (\nu\beta\rho_1\gamma_1 y^{\nu-1}z^{\rho_1-1} - \nu_1\beta_1\rho\gamma y^{\nu_1-1}z^{\rho-1})$,

$z' = -(\mu\alpha\nu_1\beta_1 x^{\mu-1}z^{\nu_1-1} - \mu_1\alpha_1\nu\beta x^{\mu_1-1}y^{\nu-1}) : (\rho\gamma\nu_1\beta_1 y^{\nu_1-1}z^{\rho-1} - \rho_1\gamma_1\nu\beta y^{\nu-1}z^{\rho_1-1})$

163) $y' = -(u-x)(z-x) : (u-y)(z-y)$, $y'' = [A(u+z) - B] : (u-y)(z-y)$

$z' = -(u-x)(y-x) : (u-z)(y-z)$, $z'' = [A(u+y) - B] : (u-z)(y-z)$

$u' = -(z-x)(y-x) : (z-u)(y-u)$, $u'' = [A(z+y) - B] : (z-u)(y-u)$

$A = 1 + y'^2 + z'^2 + u'^2$, $B = 2x + 2yy'^2 + 2zz'^2 + 2uu'^2$.

170) $y'(2) = -5/4$, $y'(1) = -\pi/2$, $y'(1) = -1$, $y'(1) = -1$
$y''(2) = -21/32$, $y''(1) = \pi$, $y''(1) = 2$, $y''(1) = -19/3$

171) Μεγ + 6, Ἐλάχ − 6 172) $z_x = -1$, $z_y = -1$

173) $x = \varphi(u)$, $y = -\upsilon + u\varphi(u)$.

174) $x = u : (u^2 + \upsilon^2)$, $y = \upsilon : (u^2 + \upsilon^2)$, $(x^2 + y^2)(u^2 + \upsilon^2) = 1$ ἀντιστροφὴ μὲ πόλον τὸ 0.

185) $z_x = (\sigma_x \varphi_u + \sigma_u) : \varphi_u$, $z_y = -\sigma_u \varphi_y : \varphi_u$.

192) δὲν εἶναι ἐξηρτημένες 193) ἐξηρτημένες, $x + y = 2$

194) δὲν εἶναι ἐξηρτημένες 195) δὲν εἶναι ἐξηρτημένες

196) ἐξηρτημένες 197) ἐξηρτημένες 198) $\alpha = -3$

200) $\partial(\lambda,\mu) : \partial(x,y) = (\lambda - \mu) : 4\sqrt{-(\alpha+\lambda)(\alpha+\mu)(\beta+\lambda)(\beta+\mu)}$

204) Μεγίστη τιμὴ −6 205) Δὲν ἔχει ἀκρότατα.

206) Ἐλάχιστον εἰς τὸ σημεῖον $\left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{12}\right)$.

207) » » τὰ σημεῖα $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

208) » » τὸ σημεῖον $(-3, 3)$

209) » » » » $\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}, 0\right)$ καὶ μέγιστον εἰς τὸ σημεῖον $\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{3}}, 0\right)$

210) » » » » $(1,1)$

211) Μέγιστον » » » $(-1, 0)$.

212) » » » » $(-1,-1)$ καὶ ἐλάχιστον εἰς τὸ σημεῖον $(1,1)$

213) Ἐλάχιστον » » » $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

214) » » τὰ σημεῖα $(2,1), (-2,1)$

215) » » τὸ σημεῖον $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$

216) » » » » $(1,1)$ καὶ μέγιστον εἰς τὸ σημεῖον $(-1,-1)$.

217) » » » » $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

222) » » » » $(0, 0)$

225) Μέγιστον ὅταν $\alpha > 2$, ἐλάχιστον ὅταν $\alpha < 2$

226) Ἐλάχιστον εἰς τὸ σημεῖον $(1,1,1)$. 229) Εἶναι 2α.

230) Μεγίστη τιμὴ $\Phi = \delta^6 : 12\sqrt{3}$ διὰ $x = \delta : \sqrt{6}$, $y = \delta : \sqrt{3}$, $z = \delta : \sqrt{2}$.

231) Ἐλάχιστον εἰς τὰ σημεῖα $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ καὶ $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

232) Μεγίστη τιμὴ $\Phi = \mu^\mu \nu^\nu \rho^\rho \alpha^{\mu+\nu+\rho} : (\mu+\nu+\rho)^{\mu+\nu+\rho}$ διὰ $x : \mu = y : \nu = z : \rho = \alpha(\mu+\nu+\rho)$.

233) Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον. 234) $(-1 : \sqrt{14}, -2 : \sqrt{14}, -3 : \sqrt{14})$.

235) Σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων, ἑκάστη τῶν κορυφῶν.

236) Διὰ τὸ πρῶτο: τὸ σημεῖον : $(\alpha^{4/3} : \kappa, \beta^{4/3} : \kappa, \gamma^{4/3} : \kappa)$ ὅπου $\kappa = \sqrt{\alpha^{2/3} + \beta^{2/3} + \gamma^{2/3}}$.
» » δεύτερον » » : $(\alpha^{3/2} : \lambda, \beta^{3/2} : \lambda, \gamma^{3/2} : \lambda)$ » $\lambda = \sqrt{\alpha + \beta + \gamma}$.

237) Οἱ κορυφὲς του δίδονται ὑπὸ τῶν $x = \pm\alpha : \sqrt{3}$, $y = \pm\beta : \sqrt{3}$, $z = \pm\gamma : \sqrt{3}$.

240) Αἱ Φ_x, Φ_y ὑπάρχουν καὶ εἶναι συνεχεῖς, αἱ Φ_{xx}, Φ_{yy} ἀπειρίζονται, αἱ Φ_{xy}, Φ_{yx} ὑπάρχουν καὶ εἶναι ἴσαι ἀλλὰ δὲν εἶναι συνεχεῖς, εἶναι ὅμως συνεχεῖς ὡς πρὸς ἑκάστην ἐκ τῶν μεταβλητῶν x, y χωριστά.

269) $\Phi_x = 2$ καὶ $\Phi_x = 1$. 272) $z_x^2 + z_y^2 = t^2 (dz : dt)^2$.

273) $z_{xx} - z_{yy} = e^{-2t}(d^2z : dt^2)$. 274) $d^2z : dt^2 - t^{-1} \, dz : dt = 0$

275) $xz_x + yz_y = \rho dz : d\rho$ 276) $z_{\rho\rho} + \rho^{-2} z_{\theta\theta} + \rho^{-1} z_\rho = 0$

277) $\upsilon^3 z_u - u^3 z_\upsilon = 0$. 278) $z_{uuu} \cdot z_{\upsilon\upsilon\upsilon}$.

279) $d^2u : d\rho^2 + 2\rho^{-1} \cdot du : d\rho = 0$. 280) Διὰ $x = 0$, $y = \sqrt[3]{3}$ ἐλάχιστον, διὰ $x = -2, y = -1$ μέγιστον.

281) Διά $x=-1$, $y=1$ μέγιστον. 282) Διά $x=-\frac{1}{2}$, $y=2$ μέγιστον.

283) Διά $x=a\sqrt[8]{3}$, $y=a\sqrt[8]{27}$ μέγιστον, διά $x=-a\sqrt[8]{3}$, $y=-\sqrt[8]{27}$ ἐλάχιστον.

284) Διά $x=\frac{\pi}{6}$, $y=\frac{4\pi}{3}$ μέγιστον. 285) Εἰς τό σημεῖον $(3,3)$ ἐλάχιστον 0.

286) Εἰς τό σημεῖον $\left(\frac{a}{7}, \frac{2a}{7}, \frac{3a}{7}\right)$ μέγιστον : $108\left(\frac{a}{7}\right)^7$.

287) » » » $(1,2)$ ἐλάχιστον : -3.

288) » » » $(1,-1)$ » : -12

289) » » » $(1-\sqrt{2}, 2)$ μέγιστον : $3+4\sqrt{2}$.

εἰς τά σημεῖα $(1+\sqrt{2}, 2\pm\sqrt{3})$, ἐλάχιστον : $-6-4\sqrt{2}$.

290) Εἰς τό σημεῖον $(\sqrt[4]{3a:17}, \sqrt[3]{a:17})$ ἔχομεν μέγιστον.

291) » » » $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3\beta}{2}\right)$ ἐλάχιστον : $\left(\frac{27a\beta}{4}\right)^2$.

292) Εἰς τά σημεῖα $\left(\frac{\beta}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{\beta}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ μέγιστον $\frac{a^2\beta^2}{3\sqrt{3}}$.

293) Εἰς τό σημεῖον $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ μέγιστον $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

294) » » » $\left(\frac{a}{\sqrt{5}}, \frac{a}{\sqrt{5}}, \frac{a}{\sqrt{5}}\right)$ μέγιστον $\frac{2a^5}{25\sqrt{5}}$.

» » » $\left(-\frac{a}{\sqrt{5}}, -\frac{a}{\sqrt{5}}, -\frac{a}{\sqrt{5}}\right)$ ἐλάχιστον $-\frac{2a^5}{25\sqrt{5}}$.

295) » » » $(0,0,0)$ ὄχι ἀκρότατα.

296) » » » (ak, ak^2, ak^3) ὅπου $k=(\gamma:a)^{\frac{1}{4}}$ ἔχομεν μέγιστον: $16a\beta:(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{\gamma})^4$.

297) » » » $(-6, 6\sqrt{3})$ ἐλάχιστον : $12\sqrt{3}$.

» » » $(-6, -6\sqrt{3})$ μέγιστον : $-12\sqrt{3}$.

298) » » » $(a\cdot 1{,}6\cdots, a\cdot 1{,}6\cdots)$ ἐλάχιστον : $a\cdot 0{,}85\cdots$

301) » » » $\left(-\frac{a}{3}, \frac{2a}{3}, \frac{2a}{3}\right)$ ἐλάχιστον : $\frac{5a^3}{9}$.

304) Μεγίστη $\left[a^{2\lambda:(\lambda-2)}+\beta^{2\lambda:(\lambda-2)}+\gamma^{2\lambda:(\lambda-2)}\right]^{(\lambda-2):\lambda}$, ἐλαχίστη ἴση πρός τόν μικρότερον ἐκ τῶν ἀριθμῶν a, β, γ.

307) Εἰς τό σημεῖον $(2,-1,-4)$ μέγιστον 27 καί εἰς τό $(0,-1,-2)$ ἐλάχιστον 3.

310) Ὄχι σχετικά ἀκρότατα διά τό $(-5,4,4)$ καί ἐλάχιστον εἰς τό σημεῖον $(1,1,1)$.

311) Διά τήν Φ $a\beta\gamma:(\beta\gamma+\gamma a+a\beta)$.

» » F $1+(\kappa-1)(\lambda-1)(\mu-1):[(\kappa-1)(\lambda-1)+(\lambda-1)(\mu-1)+(\mu-1)(\kappa-1)]$.

315) Τό κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου.

316) Τό ζητούμενον τρίγωνον ἔχει κορυφές τούς πόδες τῶν ὑψῶν.

317) Τό ζητούμενον σημεῖον εἶναι τέτοιο ὥστε ἐξ αὐτοῦ νά φαίνωνται οἱ πλευρές τοῦ τριγώνου ὑπό γωνίαν 120°.

318) Μεγίστη τιμή $\Phi=\frac{1}{2}\left[a+\beta+(a^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\right]$, ἐλαχίστη τιμή $\Phi=\frac{1}{2}\left[a+\beta-(a^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\right]$. 319) Ἐλαχίστη τιμή $\frac{9}{2}a\beta\gamma$.

320) Ἐάν θέσωμεν $a+\beta+\gamma=\sigma_1$, $a^2+\beta^2+\gamma^2=\sigma_2$ τά τρία μέρη τοῦ ἀριθμοῦ κ εἶναι $x=\kappa(\sigma_2-a\sigma_1):(3\sigma_2-\sigma_1^2)$, $y=\kappa(\sigma_1-\beta\sigma_2):(3\sigma_2-\sigma_1^2)$, $z=\kappa(\sigma_2-\gamma\sigma_1):(3\sigma_2-\sigma_1^2)$.

321) Τά μέρη εἶναι $x_1=x_2=\cdots=x_\nu=a:\nu$.

322) Μεγίστη τιμή $\Phi=(\ln\kappa a^a\beta^\beta\gamma^\gamma)^3 : 27\ln a\ln\beta\ln\gamma$.

323) » » $\Phi=a^3:27\mu\nu$.

324) Διά $x=y=z=\frac{\pi}{3}$ μεγίστη τιμή $\Phi=1/8$.

325) Μεγίστη τιμή $\Phi=(\sqrt[3]{\kappa}-1)^3$.

326) $\pi a\beta\gamma : \sqrt{a^2A^2+\beta^2B^2-\gamma^2\Gamma^2}$.

330) Δέν εἶναι. 332) $z_x=2\upsilon(1+3u\upsilon)^{-1}e^{u^2+\upsilon^2}$.

355) $\lambda = 3$, $2w = u(v+u^2)$.
356) $u^2+v^2 = ws$
357) $\mu+\nu > 2$
358) ἀσυνεχής.
359) ἀσυνεχής.
361) xy
364) $x^2 z_{uu} = 0$, $z = \sigma_1\left(\frac{y}{x}\right) + x\sigma_2\left(\frac{y}{x}\right)$ ὅπου σ_1, σ_2 αὐθαίρετες συναρτήσεις.
369) $du = u_x dx + u_y dy + u_z dz = u_x(dx+dz) + u_y(dy+dz), \ldots$
375) Συνεχής ὅταν $\vartheta > 0$.
376) Συνεχής ὅταν $\vartheta > 0$.
377) » » $\vartheta > 0$.
378) Συνεχής
379) Ἀσυνεχής.
380) Ἀσυνεχής
381) Συνεχής
382) Συνεχής.
383) Χρησιμοποιήσατε τὴν βοηθητικὴν συνάρτησιν $\sigma(t) = \phi(x+ht, y+\kappa) + \phi(x, y+kt)$.

Κεφάλαιον ΙΙ

435) $2x = 3y(2-y^2)$.
436) $x^2+y^2 = 16$.
437) $x = 1-2y^2$
438) $25x^2+9y^2 = 225$
439) $y^2 = 4x^2(1-x^2)$
440) $(x-5)^2+(y+1)^2 = 16$
441) $x = 2:(1+t^2)$, $y = 2t:(1+t^2)$.
442) $x = \alpha\,\sigma\upsilon\nu t$, $y = \beta\,\eta\mu t$.
443) $x = \alpha\,\tau\epsilon\mu t$, $y = \beta\,\epsilon\varphi t$
444) $x = 2t:(1-t^2)$, $y = 2t^2:(1-t^2)$.
445) $-3x+2y+12 = 0$, $2x+3y+5 = 0$
446) $5x-y-6 = 0$, $x+5y+4 = 0$
447) $3x-y-8 = 0$, $x+3y-6 = 0$.
448) $2x+y-6 = 0$, $x-2y+7 = 0$
449) $2x+y-10 = 0$, $x-2y = 0$.
450) $x-2y-6 = 0$, $2x+y-17 = 0$.
451) $3x-y-4 = 0$, $x+3y-28 = 0$.
452) $3x-y-3 = 0$, $x+3y-1 = 0$
453) $y-1 = 0$, $x-1 = 0$.
454) $x+y-3 = 0$, $x-y = 0$
455) $\rho^2 = \sigma\upsilon\nu\, 2\vartheta$
456) $\rho^2 = \eta\mu\, 2\vartheta$.
457) $\rho\,\eta\mu^2\vartheta = 4\,\sigma\upsilon\nu\vartheta$
458) $\rho = 4\,\sigma\upsilon\nu\vartheta$
459) $\rho^2\,\sigma\upsilon\nu\, 2\vartheta = 4$
460) $\rho^2\eta\mu\, 2\vartheta = 8$.
461) $y = x\sqrt{x^2+y^2}$
462) $xy = 2$.
463) $x^2+y^2-2y = 3$
464) $(x^2+y^2)^{3/2} = y$.
465) $\sqrt{x^2+y^2} = 1-x$
466) $x^2+y^2 = \alpha y + \beta\sqrt{x^2+y^2}$.
467) $5-\sqrt{10}+3\ln\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{10}\right)$.
468) $\ln(2+\sqrt{3})$
469) $4\sqrt{2}$
470) 21.
471) $4\sqrt{3}$
472) $436:9$
473) $335:9$
474) $2(10\sqrt{10}-1):27$
475) $14:3$
476) $6t_1^2\left(\frac{1}{2}t_1^2+1\right)$
477) 28
478) $6a$
479) $5a\left[2\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})\right]$
480) $16:3$
481) 4
482) $3\pi:2$
483) $8a$
484) $8x = y^3-48y$, ἐφαπτομένη $\parallel oy$ εἰς τὰ σημεῖα μὲ $t = \pm 2$.
485) $x = 2y^2-1$, $0 \leq t < 2\pi$ ἐφαπτομένη $\parallel oy$ εἰς τὰ σημεῖα μὲ $t = \frac{\pi}{2}$ καὶ $t = \frac{3\pi}{2}$.
486) $x^{2/3}+y^{2/3} = 9$, $0 \leq t < 2\pi$ ἐφαπτομένη $\parallel ox$ » » » » $t = 0$ » $t = \pi$,
» $\parallel oy$ » » » » $t = \frac{\pi}{2}$ » $t = \frac{3\pi}{2}$.

487) $y=x^2-1$, ἐφαπτομένη ∥ ox εἰς τὸ σημεῖον μὲ $t=1$.

488) $4x^2+y^2=16$, $0\leqslant t<\frac{2\pi}{3}$ ἐφαπτομένη ∥ ox εἰς τὰ σημεῖα μὲ $t=\pi/6$, $t=\pi/2$.
» ∥ oy » » » » $t=0$, $t=\pi/3$.

489) $y=2\,\text{τοξσυν}\,x$, $0\leqslant t<\pi$ » ∥ oy » » » » $t=0$, $t=\pi/2$.

491) $\alpha(\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}t+\eta\mu^{\nu-2}t)$

492) α.

493) $2Ax_1x+B(xy_1+x_1y)+2\Gamma y_1x+\Delta(x+x_1)+E(y+y_1)+2z=0$.

494) Ὑπὸ γωνίαν 45°.

495) Καθέτως.

496) Εἰς τὴν ἀρχὴν ὑπὸ γωνίαν = τοξεφ2 καὶ εἰς τὸ σημεῖον (2, 4) ὑπὸ γωνίαν = τοξεφ$\frac{2}{9}$

497) Ὑπὸ γωνίαν 30°.

498) $y=x$.

499) $\bar{\upsilon}=(21,2)$, $\bar{\gamma}=(16,0)$.

500) $\bar{\upsilon}=(2,32)$, $\bar{\gamma}=(0,48)$.

501) $\bar{\upsilon}=(-1,0)$, $\bar{\gamma}=(0,9)$.

502) $\bar{\upsilon}=(2,-1)$, $\bar{\gamma}=(0,1)$

503) $1/R=1$.

504) $1/R=4:5\sqrt{5}$.

505) $1/R=-4:7\sqrt{7}$.

506) $1/R=-a:(1+a^2)^{3/2}$, $a=\ln 10$.

507) $1/R=0$

508) $1/R=a:(1+a^2)^{3/2}$, $a=\ln 10$

509) $R=(1+\sigma\upsilon\nu^2 x)^{3/2}:\eta\mu x$.

510) $R=(\alpha^4y^2+\beta^4x^2)^{3/2}:\alpha^4\beta^4$

511) $R=e^{-x}(1+e^{2x})^{3/2}$

512) $R=3(axy)^{1/3}$

513) $R=(2-x^2)^{3/2}:x$.

514) $R=4\sqrt{xy}\,(x+y):\sqrt{a}$.

515) $R=(4a^2+x^2)^{3/2}:4a^2$

516) $R=(x^4+y^4)^{3/2}:2a^3xy$.

517) Μέγιστον διὰ $x=\pm(45)^{-\frac{1}{4}}$, ἐλάχιστον διὰ $x=0$.

518) Μέγιστον διὰ $x=-\frac{1}{2}\ln 2$, ἐλάχιστον ὄχι.

519) » » $x=1:\sqrt{2}$, ἐλάχιστον ὄχι.

520) » » $x=\pm\,\text{atsh}\,1$, ἐλάχιστον διὰ $x=0$.

521) $R=37\sqrt{37}:6$.

522) $R=2\sqrt{2}$.

523) $R=577\sqrt{577}:128$.

524) $R=\sqrt{2}$

525) $R=-8/5$

526) $R=-2\sqrt{2}$.

527) $1/R=2:3a\eta\mu 2t$

528) $1/R=\alpha\beta:(a^2sh^2t+\beta^2ch^2t)^{3/2}$.

529) Μέγιστον εἰς τὰ ἄκρα τοῦ μεγάλου ἄξονος, ἐλάχιστον εἰς τὰ ἄκρα τοῦ μικροῦ.

530) Μέγιστον ὄχι, ἐλάχιστον διὰ $t=\pi$.

531) $(0,4)$.

532) $(8,8)$.

533) $(-143,\ 241:12)$.

534) $(0,0)$.

535) $(3,\ 15/2)$

536) $(0,1)$

537) $1/R=1/4$.

538) $1/R=5$

539) $1/R=1/8a$

540) $1/R=3:2a$

541) $1/R=3:4a$

542) $1/R=1:a\sqrt{5}$

543) $R=1/a$

544) $R=a(1+\vartheta^2)^{3/2}:\vartheta^4$

545) $R=a\varepsilon(1+\varepsilon^2-2\varepsilon\sigma\upsilon\nu\vartheta)^{3/2}:(1-\varepsilon\sigma\upsilon\nu\vartheta)^3$.

546) $1/R=(\vartheta^2+2):a(1+\vartheta^2)^{3/2}$

547) $\vartheta=0$, $\vartheta=\pi$.

548) $\vartheta=0$

549) $\left(\frac{2a}{3},\frac{\pi}{2}\right)$.

550) $y^2=4(x-2)^3:27$.

551) $(3x)^{2/3}-(2y)^{2/3}=13^{2/3}$.

552) $(x+y)^{2/3}-(x-y)^{2/3}=4$.

553) $(x+y)^{2/3}+(x-y)^{2/3}=2a^{2/3}$

554) $(3x)^{2/3}+(2y)^{2/3}=5^{2/3}$

555) $x=\ln\frac{1}{2}(y\pm\sqrt{y^2-4})-\frac{1}{4}y\sqrt{y^2-4}$.

556) $x=t(1-9t^4):2$, $y=(1+15t^4):6t$.

557) $x=-t^2(2+9t^2):2$, $y=4t(1+3t^2):3$.

558) $x=\alpha(t+\eta\mu t)$, $y=-\alpha(1-\sigma\upsilon\nu t)$. 559) $x=t-(1+\eta\mu^2 t)\epsilon\varphi t$, $y=-2\eta\mu t\epsilon\varphi t$

560) (0,0) μεμονωμένον σημεῖον. 561) (0,0) σημεῖον ἀνακάμψεως, κλίσις ἐφαπτομένης 1.

562) (0,0) σημεῖον ἀνακάμψεως, κλίσις ἐφαπτομένης 1.

563) (-3,0) σημεῖον μεμονωμένον, (-1,0) διπλό πραγματικό μὲ κλίσεις ἐφαπτομένων ± 2.

564) (0,0) δύο κλάδοι μὲ κοινὴν ἐφαπτομένην κλίσεως 0.

565) (0,0) σημεῖον ἀνακάμψεως, κλίσις ἐφαπτομένης ∞.

566) (-3,0) σημεῖον μεμονωμένον.

567) (0,0) σημεῖον ἀνακάμψεως, κλίσις ἐφαπτομένης 0.

568) $(\pm\alpha,0)$ σημεῖα ἀνακάμψεως, κλίσις ἐφαπτομένης 0, $(0,\pm\alpha)$ σημεῖα ἀνακάμψεως, κλίσις ἐφαπτομένης ∞.

569) (0,0) διπλὸ πραγματικὸ μὲ κλίσεις ἐφαπτομένων ± 1.

570) (0,2) » » » » ± 2.

571) (0,0) σημεῖον ἀνακαμψεως, κλίσις 0.

572) (0,0) δύο κλάδοι μὲ κοινὴν ἐφαπτομένην κλίσεως 0.

573) (0,0) τριπλὸ πραγματικό, κλίσεις ἐφαπτομένων $0, \pm\sqrt{3}$.

574) (0,0) » » » » 0, 0, 1.

575) (0,0) » » » » -2, 0, 1.

576) $y^2=2\kappa x$. 577) $x^2=4\kappa(\kappa-y)$.

578) $x^{2/3}+y^{2/3}=\kappa^{2/3}$. 579) $y^2=4\kappa(x+\kappa)$.

580) $\sqrt{x:\kappa}+\sqrt{y:\lambda}=1$. 581) $\pm x:\kappa\pm y:\lambda=1$, τέσσερεις εὐθεῖες.

582) $x^{2/3}+y^{2/3}=\alpha^{2/3}$, $\alpha=$ μῆκος εὐθυγράμμου τμήματος.

583) Λαμβάνοντες τὴν ΒΓ ὡς ἄξονα τῶν y καὶ τὴν ἐκ τοῦ Α κάθετον ὡς ἄξονα τῶν x, οἱ περιβάλλουσες ἔχουν ἐξισώσεις $(y\pm\lambda)^2=4\alpha x$ ὅπου λ τὸ σταθερὸν μῆκος τοῦ ΒΓ καὶ α ἡ τετμημένη τοῦ Α.

584) Ἐὰν ἡ δοθεῖσα εἶναι $x^2:\alpha^2+y^2:\beta^2=1$, ἡ ζητουμένη περιβάλλουσα εἶναι ὁμοία πρὸς αὐτὴν μὲ μήκη ἡμιαξόνων $\alpha:\sqrt{2}$, $\beta:\sqrt{2}$.

585) Ἐὰν ἡ δοθεῖσα εἶναι $x^2:\alpha^2+y^2:\beta^2=1$, ἡ περιβάλλουσα εἶναι $(x^2+y^2)^2=\alpha^2x^2+\beta^2y^2$.

586) $(ME)=-\alpha$. 588) $\rho=\alpha$ δηλαδὴ κύκλος.

589) $(\Pi E)=-\alpha$, $(\Pi K)=+y^2:\alpha$, $(ME)=-\sqrt{\alpha^2+y^2}$, $(MK)=-y\sqrt{\alpha^2+y^2}:\alpha$.

590) $(\Pi E)=2x(x-\alpha):(3\alpha-2x)$, $(\Pi K)=x^2(3\alpha-2x):2(\alpha-x)^2$, $(ME)=[\alpha x:(2x-3\alpha)]\sqrt{(4\alpha-3x):(\alpha-x)}$, $(MK)=[-\alpha x:2(\alpha-x)^2]\sqrt{x(4\alpha-3x)}$.

591) $(\Pi E)=-\alpha y:\sqrt{y^2-\alpha^2}$, $(\Pi K)=\alpha(e^{2x/\alpha}-e^{-2x/\alpha}):4$, $(ME)=-y^2:\sqrt{y^2-\alpha^2}$, $(MK)=-y^2:\alpha$.

592) $(OE)=-\rho^2:\sqrt{\alpha^2-\rho^2}$, $(OK)=-\sqrt{\alpha^2-\rho^2}$, $(ME)=-\alpha\rho:\sqrt{\alpha^2-\rho^2}$, $(MK)=\alpha$.

593) $(OE)=\rho^3:\sqrt{\alpha^4-\rho^4}$, $(OK)=-\sqrt{\alpha^4-\rho^4}:\rho$, $(ME)=-\alpha^2\rho:\sqrt{\alpha^4-\rho^4}$, $(MK)=\alpha^2:\rho$.

594) $(OE)=-\alpha\rho:A$, $(OK)=\rho A:\alpha$, $(ME)=-\rho\sqrt{\beta^2+\rho^2}:A$, $(MK)=\rho\sqrt{\beta^2+\rho^2}:\alpha$, ὅπου $A=\sqrt{\rho^2-\alpha^2+\beta^2}$.

595) $(dx+\sigma\upsilon\nu\omega\, dy)(X-x)+(dy+\sigma\upsilon\nu\vartheta\, dx)(Y-y)=0$.

596) $(Y-\lambda X)\lambda^2=\alpha$, $x^2-\alpha y+\alpha^2=0$. 597) $(\alpha+x)y^2=(\alpha-x)x^2$.

598) Ἐὰν εἶναι $A(x_0,y_0)$ αἱ παραμετρικὲς ἐξισώσεις τῆς ποδικῆς εἶναι

$$x=[\dot\sigma_1(y_0\dot\sigma_2+x_0\dot\sigma_1)-\dot\sigma_2(\dot\sigma_1\sigma_2-\sigma_1\dot\sigma_2)]:(\dot\sigma_1^2+\dot\sigma_2^2),\quad y=[\dot\sigma_2(y_0\dot\sigma_2+x_0\dot\sigma_1)+\dot\sigma_1(\dot\sigma_1\sigma_2-\sigma_1\dot\sigma_2)]:(\dot\sigma_1^2+\dot\sigma_2^2).$$

601) $x = a + s(1 - s:2a + s^2:32a^2)(1 - s:16a)$, $\quad y = a(s:a - s^2:16a^2)^{3/2}(1 - s:8a)$, $0 \leqslant s \leqslant 16a$.

602) $s = a\left[\frac{1}{3}(\vartheta_1^3 - \vartheta_0^3) + \vartheta_1 - \vartheta_0\right]$. $\qquad$ 603) $R = t^{-\frac{1}{2}}$.

605) $u = \pi s$.

607) $R = a(4a - 3x)\sqrt{x(4a-3x)} : 6(a-x)^2$; $X = ax(5x - 6a) : 6(a-x)^2$, $Y = \frac{4a}{3}\sqrt{x:(a-x)}$;
$X = \frac{27Y^2}{512a^3}\left(Y^2 + \frac{32a^2}{3}\right)$.

608) $R = \frac{1}{2a}(4a+3x)^{3/2}\sqrt{\frac{x}{3}}$; $X = -\frac{x}{2a}(2a+3x)$, $Y = 4(x+a)\sqrt{\frac{x}{3a}}$.

609) $R = \rho\sqrt{1+a^2}$; $X = -a\rho\,\eta\mu\vartheta$, $Y = a\rho\,\sigma\upsilon\nu\vartheta$.

610) $R = \frac{4a}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{\vartheta}{2}$; $X = \frac{a}{3}(2 + \sigma\upsilon\nu\vartheta - \sigma\upsilon\nu^2\vartheta)$, $Y = \frac{a}{3}(1 - \sigma\upsilon\nu\vartheta)\eta\mu\vartheta$.

617) $P(\lambda\sigma\upsilon\nu t, \lambda\eta\mu t)$, $M(\lambda\sigma\upsilon\nu t - \dot\lambda\eta\mu t, \lambda\eta\mu t + \dot\lambda\sigma\upsilon\nu t)$, $OM = \lambda$, $PM = \dot\lambda$, $OP = \sqrt{\lambda^2 + \dot\lambda^2}$
$\lambda = at + \beta$, περιβάλλουσα : $x = (at+\beta)\sigma\upsilon\nu t - a\eta\mu t$, $y = (at+\beta)\eta\mu t + a\sigma\upsilon\nu t$,
$ds = (at+\beta)\,dt$, $s = a\frac{t^2}{2} + \beta t + \gamma$; κέντρον καμπυλότητος $X = -a\eta\mu t$,
$Y = a\sigma\upsilon\nu t$, $R = at + \beta$, ἐνειλιγμένη : $X^2 + Y^2 = a^2$.

620*) $(dx + \sigma\upsilon\nu\omega\, dy)(X - x) + (dy + \sigma\upsilon\nu\omega\, dx)(Y - y) = 0$.

621) $x = t^2$, $y = t$, $z = 1 - t^2$. $\qquad$ 622) $x = \sigma\upsilon\nu t$, $y = \sigma\upsilon\nu t$, $z = 2\eta\mu t$.

623) $x = t$, $y = t$, $z = 1 - t^2$. $\qquad$ 624) $x = t$, $y = \pm\sqrt{2t^2 - t + 3}$, $z = t$.

625) $x - y(y-2) = 0$, $z - (y-1)^3 = 0$. $\qquad$ 626) $x^2 + y = 1$, $ze^x = 1$.

627) $9x^2 + 4y^2 = 36$, $z = 1 + \tau o\xi\varepsilon\varphi(3x:2y)$. $\qquad$ 628) $x - 2y - z = 0$, $x^2 - y^3 = 0$.

629) $x - 2 = y - 1 = (z-4):8$, $x + y + 8z - 35 = 0$, $16x - 24y + z - 12 = 0$.

630) $(x-3):4 = y - 3 = (z-8):12$, $4x + y + 12z - 111 = 0$, $6x - 12y - z + 26 = 0$.

631) $x = y - 2 = (z-2):9$, $x + y + 3z - 8 = 0$, $9x - 3y - 2z + 10 = 0$.

632) $(4x - \pi):4 = y\sqrt{2} - 1 = 1 - z\sqrt{2}$, $16x + y\sqrt{2} - z\sqrt{2} - 4\pi = 0$, $-x\sqrt{2} + y - z + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 0$.

633) ἐφαπτομένη : $2x + 2y\sqrt{3} + 3z = 25$, $x + z = 5$, κάθετον : $(-x+z)2\sqrt{3} - y = 0$, ἐγγύτατον $x + z = 5$.

634) ἐφαπτομένη : $(x-1):8 = (y+1):10 = (z-2):7$, κάθετον : $8x + 10y + 7y - 12 = 0$, ἐγγύτατον $-105x + 28y - 160z + 243 = 0$.

635) ἐφαπτομένη : $(x-1):2 = y - 1 = (1-z):3$, κάθετον : $2x + y - 3z = 0$, ἐγγύτατον $6x - 15y - z + 10 = 0$.

636) $y = a$, $x + z\sqrt{2} = 3a$ καί $x\sqrt{2} - z = 0$.

637) $\left.\begin{aligned} \gamma^2(a^2-\beta^2)(x-x_1)x_1 + a^2(\beta^2+\gamma^2)(z-z_1)z_1 &= 0 \\ \gamma^2(a^2-\beta^2)(y-y_1)y_1 - \beta^2(\gamma^2+a^2)(z-z_1)z_1 &= 0 \end{aligned}\right\} a^2(\beta^2+\gamma^2)y_1z_1x - \beta^2(\gamma^2+a^2)z_1x_1y - \gamma^2(a^2-\beta^2)x_1y_1z = 0$

638) ἐφαπτομένη : $xx_1 + yy_1 = a^2$, $yy_1 + zz_1 = \beta^2$, κάθετον : $x:x_1 + y:y_1 - z:z_1 = 1$
ἐγγύτατον : $\beta^2x_1^3x - a^2y_1^3y + (a^2-\beta^2)z_1^3z = a^2\beta^2(a^2-\beta^2)$.

639) ἐφαπτομένη : $(x-x_1)x_1:a = (y-y_1)y_1:\beta = z - z_1$, κάθετον : $ax:x_1 + \beta y:y_1 + z - z_1 = a + \beta$,
ἐγγύτατον : $ay_1y = \beta x_1x$, ἀκτίς $R = (a+\beta+2z_1)^2 : |a+\beta|^{1/2}$, κέντρον καμπυλότητος : $P[-2x_1z_1:(a+\beta), -2y_1z_1:(a+\beta), a+\beta+3z_1]$.

640) $u = \sigma = 1:3a(1+t^2)^2$.

641) $\bar r'''\bar r'''' = u'u'' + 2u^3u' + u^2\sigma\sigma' + uu'\sigma^2$, $\bar r''\bar r'''' = u(u'' - u^3 - u\sigma^2)$.

643) $\bar\omega = (\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t, 0)$, $u = a:6(a^2+\beta^2)\eta\mu 2t$.

646) ἐγγύτατον : $x(\eta\mu t - \sigma\upsilon\nu t) - y(\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t) + 2z = e^t$
κέντρον : $P[-e^t(3\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t):2, e^t(3\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t):2, e^t]$, ἀκτίς : $R = 3e^t:\sqrt{2}$.

647) ἐγγύτατον : $t^2x - ty + z:2 = t^3$, κέντρον : $P(-6t^3, \frac{3}{2} + 3t^2 - 6t^4, 3t + 8t^3)$
ἀκτίς : $R = 3(1+2t^2)^2:2$.

648) Ἐγγύτατον : $Xe^{-az}-Ye^{az}-2a(Z-z)=0$, ἀκτὶς $R=[1+a^2(e^{2az}+e^{-2az})]^{3/2}:a^2(4a^2+e^{2az}+$ $+e^{-2az})^{1/2}$, κέντρον : $P[\,e^{az}+(e^{az}+2a^2e^{-az})A,\ e^{-az}+(e^{-az}+2a^2e^{az})A,\ z+a(e^{-2az}-e^{2az})A\,]$ ὅπου ἔχομεν θέσει διὰ συντομίαν $A=[1+a^2(e^{2az}+e^{-2az})]:a^2(4a^2+e^{2az}+e^{-2az})$.

649) $y=z$, $\bar{P}=(t^2,t,t)+(1+2t^2)^{3/2}(1,-t,-t)$, $R=(1+2t^2)^{3/2}$.

651) $\bar{\varepsilon}=(\text{συν}t,-\text{ημ}t,1):\sqrt{2}$, $\bar{\varpi}=(-\text{ημ}t,-\text{συν}t,0)$, $\bar{\delta}=(\text{συν}t,-\text{ημ}t,-1):\sqrt{2}$
$\bar{H}=[-(\text{συν}t+\text{ημ}t),\ -(\text{συν}t-\text{ημ}t),\ 2]\,3e^t:2\sqrt{2}$.

652) Θέτοντες $A=\sqrt{1+\text{ημ}^2t\,\text{συν}^2t}$, $B=\sqrt{2-3\,\text{ημ}^2t\,\text{συν}^2t}$, ἔχομεν $\bar{\varepsilon}=(\text{συν}t,-\text{ημ}t\,\text{συν}t,-\text{ημ}t):A$
$\bar{\varpi}=(-A\,\text{ημ}t+\dot{A}\,\text{συν}t,\ \dot{A}\,\text{ημ}t\,\text{συν}t-A\,\text{συν}2t,\ \dot{A}\,\text{ημ}t-A\,\text{συν}t):B$,
$\bar{\delta}=(\text{ημ}^3t,1,-\text{συν}^3t):B$, ἐγγύτατον ἐπίπεδον : $x\,\text{ημ}^3t+y-z\,\text{συν}^3t+\frac{1}{2}\text{συν}^2t-\text{ημ}^2t=0$,
$R=A^3:B$, $\tau=B^2:3\,\text{ημ}t\,\text{συν}t$.

653) $\bar{\varepsilon}=(-\text{ημ}t,\ \text{συν}t,\ -2\,\text{ημ}2t):\sqrt{1+4\,\text{ημ}^2 2t}$, $\bar{\delta}=(-4\,\text{συν}^3t,\ 4\,\text{ημ}^3t,\ 1):\sqrt{1+16(\text{συν}^6t+\text{ημ}^6t)}$
$\bar{\varpi}=-[(16\,\text{ημ}^4t+1)\,\text{συν}t,\ (16\,\text{συν}^4t+1)\,\text{ημ}t,\ 4\,\text{συν}2t]:\sqrt{17+224\,\text{ημ}^2t\,\text{συν}^2t-768\,\text{ημ}^4t\,\text{συν}^4t}$
$R=(1+4\,\text{ημ}^2 2t)^{3/2}:\sqrt{1+16(\text{συν}^6t+\text{ημ}^6t)}$, $\tau=[1+16(\text{συν}^6t+\text{ημ}^6t)]:6\,\text{ημ}2t$
Κέντρον καμπυλότητος: $P_1=\text{συν}t-(1+16\,\text{ημ}^4t)(1+4\,\text{ημ}^2 2t)\,\text{συν}t:(5+12\,\text{συν}^2 2t)$
$P_2=\text{ημ}t-(1+16\,\text{συν}^4t)(1+4\,\text{ημ}^2 2t)\,\text{ημ}t:(5+12\,\text{συν}^2 2t)$
$P_3=\text{συν}2t-4(1+4\,\text{ημ}^2 2t)\,\text{συν}2t:(5+12\,\text{συν}^2 2t)$

Τὰ σημεῖα $M(t)$ ὁρίζονται ἀπὸ τὴν σχέσιν $3t_1+t=2\lambda\pi$.

654) $s=\sqrt{3}\left(\frac{t^3}{3}+t\right)=\sqrt{3}\,z$, $\bar{\varepsilon}=[(t^2+2t-1):(t^2+1)\sqrt{3},\ (t^2-2t-1):(t^2+1)\sqrt{3},\ 1:\sqrt{3}]$
$\bar{\varpi}=[(1+2t-t^2):(1+t^2)\sqrt{2},\ (t^2+2t-1):(1+t^2)\sqrt{2},\ 0]$, $\bar{\delta}=[(1-2t-t^2):(1+t^2)\sqrt{6},\ (1+$ $+2t-t^2):(1+t^2)\sqrt{6},\ \sqrt{2:3}\,]$, $R=3(1+t^2)^2:2\sqrt{2}$, $\tau=3(1+t^2)^2:2$
Κέντρον καμπυλότητος: $P_1=-\frac{3}{4}t^4+\frac{11}{6}t^3+t^2+\frac{t}{2}+\frac{3}{4}$, $P_2=\frac{3}{4}t^4+\frac{11}{6}t^3-t^2+\frac{t}{2}-\frac{3}{4}$
$P_3=\frac{t^3}{3}+t$.

655) Κύκλος προκύπτων ὡς τομὴ τοῦ ἐπιπέδου $X+Z\,\text{εφ}a=0$ καὶ τῆς σφαίρας $X^2+Y^2+Z^2-Y:2\,\text{συν}^2a=0$.

664) $s_1=\int_0^s\sqrt{1+a^2u^2}\,ds$, $\bar{\varepsilon}_1=(\bar{\varepsilon}+au\bar{\varpi}):\sqrt{1+a^2u^2}$, $u_1^2(1+a^2u^2)^3=a^2u^2\sigma^2(1+a^2u^2)+(u+au'+a^2u^3)^2$

667) $u=f^{-1}\cdot\sqrt{(1+\varphi^2+\dot{\varphi}^2):(1+\varphi^2)^3}$, $\sigma=-(\ddot{\varphi}+\varphi):f(1+\varphi^2+\dot{\varphi}^2)$.

672) $(X-x):\dfrac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(t,y,z)}=(Y-y):\dfrac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(x,t,z)}=(Z-z):\dfrac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(x,y,t)}$

673) $(x-2):8=(y-1):6=11-z$, $8x+6y-z=11$

674) $(x-2):4=(y-1):3=z-1$, $4x+3y+z=12$

675) $(x-1):6=(y-2):3=6-z$, $6x+3y-z=6$

676) $(x-1):6=(y-8):3=-(z+27):2$, $6x+3y-2z=84$

677) $(x+1):2=2-y=(4-z):2$, $2x-y-2z+12=0$.

678) $x+1=(5-y):10=(z-3):12$, $x-10y+12z+15=0$

691) $11x+10y+2z-66=0$.

693) $2\sqrt{z_0}(xy_0-x_0y)+(z-z_0)(x_0^2+y_0^2)\sqrt{a}=0$.

694) διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων.

695) καπηγμένη $=(\mu+1)\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

697) i) $x^2+y^2=4z$ ii) $(y^2+4)^2=16x^2+16(z+1)^2$

698) $x^2+y^2=z^2\,\text{εφ}^2a$

699) $x_0^{\kappa-1}x+y_0^{\kappa-1}y+z_0^{\kappa-1}z=a^\kappa$, σταθερὸν ἄθροισμα $=a$.

701) Ἀνώμαλα σημεῖα τὰ ἔχοντα $u=(\kappa+\frac{1}{2})\pi$ $(\kappa=0,\pm1,\cdots)$, ἐφαπτ. ἐπιπ. $x+y+z\sqrt{2}=2$.

702) Ἐφαπτ. ἐπιπ. $y=0$, κάθετος $x=0$, $az+y\sigma(0)=0$.

703) $\bar{r}=(u,\ \text{ch}u\,\text{συν}v,\ \text{ch}u\,\text{ημ}v)$, $ds^2=(du^2+dv^2)\,\text{ch}^2u$, $d\sigma=\text{ch}^2u\,du\,dv$.

704) $(0,\ \alpha\beta^2,\ \alpha^2\beta) : (\alpha^2+\beta^2)$ 705) $(2\beta,\ \mp 1{,}285\beta,\ \pm 2{,}570\beta)$

706) $\varphi = \beta\, sh(u\,\varepsilon\varphi\alpha + f)$ ὅπου $f=f(u)$ αὐθαίρετος συνάρτησις.

707) $\bar{r} = [\alpha(\sigma\upsilon\nu u - \upsilon\,\eta\mu u),\ \alpha(\eta\mu u + \upsilon\,\sigma\upsilon\nu u),\ \beta(u+\upsilon)]$

$ds^2 = [\alpha^2(1+\upsilon^2)+\beta^2]du^2 + 2(\alpha^2+\beta^2)du\,d\upsilon + (\alpha^2+\beta^2)d\upsilon^2$, $d\sigma = \alpha\upsilon\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,du\,d\upsilon$.

708) Παραμετρικὲς γραμμὲς οἱ εὐθύγραμμες γενέτειρες τῆς ἐπιφανείας, ἡ γραμμὴ $u=\upsilon$ εἶναι ἡ ἔλλειψις πού προκύπτει διὰ τομῆς τῆς ἐπιφανείας μὲ τὸ $z=0$, καὶ οἱ γραμμὲς $u\upsilon =$ σταθερὸν εἶναι ὑπερβολὲς τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα πρὸς τὸ $y=0$.

709) $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3} =$ σταθερόν 710) $x^2:\alpha^2 + y^2:\beta^2 - z^2:\gamma^2 = 1$.

713) $\pm x \pm \sqrt{y^2+z^2} = \kappa$ 714) $\kappa^2x^2 + (\kappa^2+\lambda^2)(y^2+z^2) = \kappa^2(\kappa^2+\lambda^2)$.

715) Λαμβάνοντες $B \equiv 0\,(0,0,0)$ καὶ τὴν AB ὡς ἄξονα τῶν z ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου γράφεται $\alpha x+\beta y+z=\kappa$, ὁπότε καλοῦντες δ τὴν σταθερὴν ἀπόστασιν ἡ περιβάλλουσα εἶναι $(\kappa^2-\delta^2)(x^2+y^2) - \delta^2(\kappa-z)^2 = 0$.

716) $(\lambda \pm \sqrt{x^2+y^2})^2 = \kappa^2 - z^2$.

717) $\kappa^2x^2:(\omega^2-\kappa^2) + \lambda^2y^2:(\omega^2-\lambda^2) + \mu^2z^2:(\omega^2-\mu^2) = 1$ ὅπου $\omega^2 \equiv x^2+y^2+z^2$.

718) Περιβάλλουσα ἡ πολικὴ ἐπιφάνεια $\bar{x} = \bar{r} + R\bar{\omega} + t\bar{\delta} \equiv \bar{x}(s,t)$, λαιμὸς ἡ πολικὴ καμπύλη $\bar{H} = \bar{r} + R\bar{\omega} + R'\tau\bar{\delta}$.

719) $\dot{\alpha}_1\beta - \dot{\alpha}\beta_1 = 0$. 720) $4x-2 = 2y-1 = z$.

721) $$\kappa = \frac{D^3}{D_1(\dot{A}^2+\dot{B}^2+\dot{\Gamma}^2)},\quad \sigma = \frac{D^2}{D_1} \text{ ὅπου } D = \begin{vmatrix} A & B & \Gamma \\ \dot{A} & \dot{B} & \dot{\Gamma} \\ \ddot{A} & \ddot{B} & \ddot{\Gamma} \end{vmatrix},\quad D_1 = \begin{vmatrix} A & B & \Gamma & \Delta \\ \dot{A} & \dot{B} & \dot{\Gamma} & \dot{\Delta} \\ \ddot{A} & \ddot{B} & \ddot{\Gamma} & \ddot{\Delta} \\ \dddot{A} & \dddot{B} & \dddot{\Gamma} & \dddot{\Delta} \end{vmatrix}$$

722) $ER - FQ + GP = 0$. 723) $\varepsilon\varphi\psi = W\sqrt{Q^2-4PR} : (ER - FQ + GP)$.

724) $du = \varepsilon\varphi\beta\sqrt{\frac{G}{E}}\,d\upsilon$. 725) $\sqrt{E}\,du - \sqrt{G}\,d\upsilon = 0,\ \sqrt{E}\,du + \sqrt{G}\,d\upsilon = 0$.

726) $E=1,\ F=0,\ G=u^2+\dot{\varphi}^2,\ L=0,\ M=-\dot{\varphi},\ N=u\ddot{\varphi}$.

727) $\bar{r}_1 = \bar{r} + t\bar{\delta} = \bar{r}_1(t,s)$, $E=1,\ F=0,\ G=1+\sigma^2t^2,\ W^2=1+\sigma^2t^2,\ \bar{n} = (\bar{\omega}+\sigma t\bar{\varepsilon}):W$, $L=0,\ M=-\sigma:W,\ N=(\kappa+\kappa\sigma^2t^2-\sigma't):W$.

730) Ἐὰν $\bar{r}_1 = \bar{r} + t\bar{\delta} \equiv \bar{r}_1(t,s)$ εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας οἱ πρωτεύουσες καμπυλότητες ὁρίζονται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν: $(1+\sigma^2t^2)^2\kappa^2 - \sqrt{1+\sigma^2t^2}\,(u+u\sigma^2t^2 - \sigma't)\kappa - \sigma^2 = 0$, ὅπου u,σ ἡ καμπυλότης καὶ ἡ στρέψις τῆς δοθείσης γραμμῆς, $K = -\sigma^2:(1+\sigma^2t^2)^2$, $2H = (u+u\sigma^2t^2-\sigma't):(1+\sigma^2t^2)^{3/2}$ καὶ οἱ γραμμὲς καμπυλότητος ὁρίζονται ἀπὸ τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν: $\sigma dt^2 - (u+u\sigma^2t - \sigma't)\,dt\,ds - (1+\sigma^2t^2)\sigma\,ds^2 = 0$.

731) $\kappa_{1,2} = \pm\beta:(u^2+\beta^2)$, $K = -\beta^2:(u^2+\beta^2)^2$, $H=0$, $\upsilon \pm \alpha\tau sh\frac{u}{\beta} = c$

732) Πρωτεύουσες καμπυλότητες: $w^4\kappa^2 - 4\alpha\beta w(\alpha^2-\beta^2+u\upsilon)\kappa - 4\alpha^2\beta^2 = 0$, $w^2 = 4\alpha^2\beta^2 + \alpha^2(u-\upsilon)^2 + \beta^2(u+\upsilon)^2$, $K = -4\alpha^2\beta^2:w^4$, $H = 2\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2+u\upsilon):w^3$ καὶ οἱ γραμμὲς καμπυλότητος ὁρίζονται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν: $\alpha\tau sh\frac{u}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \pm \alpha\tau sh\frac{\upsilon}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = c$.

733) $\kappa_1 = \ddot{\varphi}(1+\dot{\varphi}^2)^{-\frac{3}{2}}$, $\kappa_2 = \dot{\varphi}u^{-1}(1+\dot{\varphi}^2)^{-\frac{1}{2}}$, $K = \dot{\varphi}\ddot{\varphi}u^{-1}(1+\dot{\varphi}^2)^{-2}$,

$2H = [u\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}(1+\dot{\varphi}^2)]u^{-1}(1+\dot{\varphi}^2)^{-\frac{3}{2}}$ καὶ γραμμὲς καμπυλότητος εἶναι οἱ παραμετρικὲς γραμμές.

735) $\kappa_{1,2} = z^2(1\pm\sqrt{2}):\alpha$.

744) $r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0$, $\sigma = \pm\sqrt{s^2-rt} : (1+p^2+q^2)$.

745) $\ddot{\varphi}\,du^2 + u\dot{\varphi}\,d\upsilon^2 = 0$ 746) $u \pm \upsilon =$ σταθερόν.

749) $\sigma = \pm\sqrt{-K}$. 756) $u = c_1 \,\text{τεμ}\,(\upsilon\,\text{ημ}\,\alpha + c_2)$

758) $\sigma = (\bar{r}'\bar{n}\bar{n}') = [(EM-FL)u'^2 + (EN-GL)u'\upsilon' + (FN-GM)u'^2]\,w$

761) $\sigma = \text{συν}\,\alpha\,\text{ημ}\,\alpha\,(\kappa_2 - \kappa_1)$.

764) $\frac{\partial \bar{\varepsilon}_1}{\partial u} = \frac{L}{\sqrt{E}}\bar{n} - \frac{E_\upsilon}{2W}\bar{\varepsilon}_2,\ \frac{\partial \bar{\varepsilon}_1}{\partial \upsilon} = \frac{M}{\sqrt{G}}\bar{n} + \frac{G_u}{2W}\bar{\varepsilon}_2,\ \frac{\partial \bar{\varepsilon}_2}{\partial u} = \frac{M}{\sqrt{G}}\bar{n} + \frac{E_\upsilon}{2W}\bar{\varepsilon}_1,\ \frac{\partial \bar{\varepsilon}_2}{\partial \upsilon} = \frac{N}{\sqrt{G}}\bar{n} - \frac{G_u}{2W}\bar{\varepsilon}_1$.

769) $LN - M^2 = \frac{1}{2\varphi}(\varphi_u^2 + \varphi_\upsilon^2) - \frac{1}{2}(\varphi_{uu} + \varphi_{\upsilon\upsilon}),\ L_\upsilon - M_u = \frac{\varphi_\upsilon}{2\varphi}(L+N),\ N_u - M_\upsilon = \frac{\varphi_u}{2\varphi}(L+N)$.

774) $K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial \upsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial \upsilon}\right)\right]$

775) Γράφομεν τὸ γραμμικὸν στοιχεῖον τῆς ἑλικοειδοῦς ὑπὸ τὴν μορφὴν $ds^2 = [1 + u^2\dot{f}^2\cdot(\alpha^2+u^2)^{-1}]\,du^2 + (\alpha^2+u^2)\,[d\upsilon + a\dot{f}(\alpha^2+u^2)^{-1}du]^2$ καὶ θέτομεν $\mu\, d\upsilon' = d\upsilon + a\dot{f}(\alpha^2+u^2)^{-1}du,\ u' = u$ κ.λ.π.

780) Κορυφὴ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\ln 2\right)$ κ. καμπυλότητος $\left(2\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\right)$.

781) $R = \frac{3}{4}\,\text{ημ}^2\frac{\vartheta}{3}$. 782) $R = \frac{8}{3}\,\text{ημ}\frac{t}{2}$.

783) $K = 0$ 784) $R = 0$.

785) $\alpha' = \beta u - 1,\ \beta' = -\alpha u$.

789) $\Lambda(0, 3R_0)$ ὅπου R_0 ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς γραμμῆς εἰς τὸ 0.

790) $x(x^2+y^2) = \beta y^2$

791) Περιβάλλουσα: $\rho = \beta(2 + \text{συν}\,\vartheta)$, σταθερὸς κύκλος $x^2+y^2+3\beta x = 0$.

793) $y = a\ln\left|\text{συν}\frac{x}{a}\right|$ 794) $\rho = e^{a\vartheta}$

800) $\bar{r}_1 = \bar{r} + \lambda\bar{\varepsilon} + \mu\bar{\varpi}$ ὅπου $\frac{d\lambda}{ds} = \kappa\mu - 1,\ \frac{d\mu}{ds} = -\kappa\lambda$.

801) $\kappa_1^2 = [\alpha^2\sigma^4(1+\alpha^2\sigma^2) + (\kappa - a\sigma' + a^2\kappa\sigma^2)^2] : (1+\alpha^2\sigma^2)^3$.

803) $\kappa_1^2 = \left[\frac{R^2\tau}{\rho^3}\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau R'}{R}\right) - \frac{1}{\rho}\right]^2 + \frac{R'^2\tau^4}{R^2\rho^4}$ (ρ = ἀκτὶς ἐγγυτάτης σφαίρας)

808) xyz = σταθερόν.

809) Περιβάλλουσα: $\bar{r}_1 = \bar{r} + \lambda\bar{\varpi} \pm \sqrt{\alpha^2-\lambda^2}\,\bar{\delta} \equiv \bar{r}_1(s,\lambda)$

γ. ἀνακάμψεως: $\bar{r}_2 = \bar{r} + R\bar{\varpi} \pm \sqrt{\alpha^2-R^2}\,\bar{\delta} \equiv \bar{r}_2(s)$

810) $R = \text{στεμ}\,a\frac{d}{da}\left(\text{ημ}^2 a\frac{ds}{da}\right),\ \tau = -R\frac{d}{ds}\left(\text{ημ}^2 a\frac{ds}{da}\right)$, ὅπου $\text{εφ}\,a = \frac{\kappa}{\sigma}$.

816) $1 + \dot{\varphi}^2 + u\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = 0$. 824) $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{\beta}$ = σταθερόν.

834) $K = -\text{ημ}^2 a\cdot(\text{ch}\,\upsilon + \text{συν}\,a\,\text{συν}\,u)^{-4}$

838) Ἐπίπεδον: $2ux - 2\upsilon y + (u^2+\upsilon^2-1)z - u^4 - 3u^2 + \upsilon^4 + 3\upsilon^2 = 0$.

περιβάλλουσα: $\bar{r} = (3u + 3u\upsilon^2 - u^3,\ 3\upsilon + 3u^2\upsilon - \upsilon^3,\ 3u^2 - 3\upsilon^2)$.

γ. καμπυλότητος οἱ παραμετρικές, ἀσυμπτωτικές οἱ $u \pm \upsilon$ = σταθερόν.

839) Συνθήκη: $(2a\dot{\varphi} + \varphi - \dot{f})(\varphi - \dot{f}) = 0$

Ἡ μία οἰκογένεια $x = az + 2a\dot{f} - f,\ y = zf + a\dot{f}^2$

Ἡ ἄλλη » $x = az + \sigma(a),\ y = (2a\dot{\sigma} - \sigma)z + a\dot{\sigma}^2;\ \dot{\sigma} = \varphi(a)$

Λαιμὸς τῆς πρώτης οἰκογενείας: $\bar{r} = (-2a^2\ddot{f} + a\dot{f} - f,\ -2a\dot{f}\ddot{f} + a\dot{f}^2 - f\dot{f},\ -\dot{f} - 2a\ddot{f})$

» » δευτέρας » : $\bar{r} = [\sigma - a\dot{\sigma},\ \dot{\sigma}(\sigma - a\dot{\sigma}),\ -\dot{\sigma}]$ κεῖνται δὲ αὐτοὶ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας $y + zx = 0$.

Οἱ ἐπιφάνειες τῆς πρώτης οἰκογενείας ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὴν παραβολὴ εἶναι οἱ κῶνοι $x = az + 2a\dot{f} - f,\ y = zf + a\dot{f}^2$ ὅπου $f = a\sqrt{a} + \frac{a^4}{16}$ καὶ ἡ ἐπιφάνεια $x = 4\beta^3 z - \beta^2,\ y = -3\beta^2 z + \beta$ ὅπου $a = 4\beta^3$.

Τέλος διὰ τὴν δευτέρα οἰκογένεια εὑρίσκομεν τὴν ἐπιφάνεια

$$x = \frac{(3a - 2t^3)^2}{9}z - t^4 \qquad y = \frac{6at - t^4}{3}z + t^2.$$

840) $\upsilon^2 = (u+c)^2 + \alpha^2 - 1.$

841) $e^{-\frac{z^2}{2}} \varepsilon\varphi \frac{\omega}{2} = c$ όπου θέσαμε $z = \eta\mu\omega$.

842) $2u\left(\frac{dx}{x}\right)^2 - 2du\,\frac{dx}{x} - \frac{du^2}{1-u} = 0$, $xy = u = \sigma\upsilon\nu 2\vartheta$, $x = \alpha e^{-\vartheta}(\eta\mu\vartheta - \sigma\upsilon\nu\vartheta)$,
$y = -\frac{1}{\alpha} e^{\vartheta}(\eta\mu\vartheta + \sigma\upsilon\nu\vartheta)$

843) $f = c_1\left(\ln \varepsilon\varphi \frac{\vartheta}{2} + \sigma\upsilon\nu\vartheta\right) + c_2$ όπου $u = c_1 \eta\mu\vartheta$.

Κεφάλαιον ΙΙΙ

949) $1/\sqrt{2}$

950) $\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$

951) 0

952) 1944

953) $51/2$

954) $m = \int_0^4 \frac{t+3+\frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}}{\frac{1}{2}t^2+1}(1+t)\,dt = \cdots$

955) $\int_0^{\pi} \ln(1+t^2)\sqrt{2}\,dt = \cdots$

956) $\frac{8}{3}$

957) $-\frac{3}{2}$

958) 0

959) $E = \frac{4}{3}$

960) $E = 8$

961) $E = -\frac{\pi}{2}$

962) $E = 0$

963) $-\frac{1}{4}$

964) $4/3$

965) $-\pi$

966) -60

967) 0

968) -3π

970) 0

971) $m = \frac{1}{2}$

972) $\frac{-\pi\alpha^2}{\sqrt{2}}$

973) $\pm 2\pi\alpha\beta^2$

974) $E = -\pi\alpha^2$

975) $\frac{\gamma}{3\alpha^2}\left[(\gamma^2 + 4\alpha^2\pi^2)^{\frac{3}{2}} - \gamma^3\right]$, $\gamma = \alpha^2 + \beta^2$

976) $2\pi^2(\alpha^2+\beta^2)$

977) $J = \pi(1-\lambda)(5 - \frac{3}{2}h) - 2h^2$, $J \to 5\pi(1-\lambda)$

978) $J = \frac{28-20\sqrt{2}}{15}$

979) $I_x = \alpha\lambda(\alpha + \lambda\eta\mu\vartheta) + \frac{1}{3}\lambda^3\eta\mu^2\alpha.$

980) $I_{xy} = \sqrt{3}\,(15 - 4\sqrt{3}\ln 2)$

981) $(0, 0, \frac{2}{3})$

982) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

983) 16

984) 4

985) $15/8$

986) $5/6$

987) $1/2$

988) $\frac{32}{3}$

989) 18

990) 72

991) 9

992) $(e-1)^2$

993) 2

994) $\frac{9}{2}$

995) $\frac{6\pi-8}{3}$

996) $\frac{3\pi-8}{3}$

997) $\frac{\pi}{18}(9+8\sqrt{3}) - 2$

998) $\frac{17-6\ln 2}{3}$

999) $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{6}$

1000) 4π

1001) 3π

1002) $\frac{\alpha^2}{6}(2\pi + 3\sqrt{3})$

1003) 9

1004) 72

1005) $\frac{1}{2}(4+\pi^2)$

1006) 9

1007) $\frac{1}{4}(e^2+1)$

1008) $\frac{\pi}{4}\ln 2$

1009) α^3

1010) α^3

1011) $\frac{4\alpha^3}{27}$

1012) 2

1013) $\frac{4-\pi}{8}$

1014) $\frac{1}{4}(\ln 16 - \pi)$

1015) $\frac{1}{2}(\ln 2)^2$

1016) $(\mathrm{ch}1 - 1)^2$

1017) $\frac{1}{2}(\mathrm{ch}1 - 1)$

1018) $\ln \frac{\mathrm{ch}1}{\mathrm{ch}\frac{1}{2}}$

1019) $\frac{1}{6}(1-\ln 2)$

1020) $\frac{4\alpha^3}{3}$

1021) $\frac{32}{45}\alpha^3$

1022) $\frac{\pi\alpha}{4}$

1023) 8π

1024) $\frac{5}{3}$

1025) $\frac{2\alpha^3}{3}$

1026) 4π

1027) $\frac{3\alpha^3}{10}$

1028) $\frac{31}{60}\alpha^3$

1029) $\frac{\pi}{32}$

1030) $\frac{2\alpha^3}{15}$

1031) 18

1032) $\frac{4}{7}$

1033) $\frac{64}{5}$

1034) $\frac{1}{6}$

1035) $\frac{\pi\alpha^4}{2}$

1036) π

1037) 20π

1038) 4π

1039) $\frac{52\pi}{3}$

1040) $\pi(e^{\alpha^2} - 1)$

1041) $\frac{4\pi}{3}\left[\alpha^3 - (\alpha^2-\beta^2)^{\frac{3}{2}}\right]$

1042) $\frac{3\pi}{2}$

1043) $\frac{2\alpha^3}{9}$

1044) $\frac{2\alpha^2}{9}(3\pi + 20 - 16\sqrt{2})$

1045) $\frac{\pi\alpha^3}{8}$

1046) $\frac{2\alpha^3}{9}(3\pi - 4)$

1047) $\frac{\alpha^3}{12}\left[2\sqrt{2} + 2\ln(1+\sqrt{2}) - \pi\right]$

1048) $\left[\frac{30\pi-88}{5(3\pi-8)}, \frac{2}{3\pi-8}\right]$

1049) $\left(\frac{16}{15}, \frac{64}{21}\right)$ 1050) $\left[\frac{75\,\text{τοξημ}\frac{2}{\sqrt{5}}-46}{8(5\sqrt{5}-7)}, \frac{32}{5(5\sqrt{5}-7)}\right]$

1051) $\left(\frac{19}{14}, \frac{229}{70}\right)$ 1052) $\left(\frac{4a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{3(\pi-2)}, \frac{2a[3\ln(\sqrt{2}+1)+2-3\sqrt{2}]}{3(\pi-2)}\right)$

1053) $\left(-\frac{5a}{6}, 0\right)$ 1054) $\left(\frac{243a}{160\pi}, \frac{81a\sqrt{3}}{160\pi}\right)$ 1055) $\left(0, \frac{a(8\pi+3\sqrt{3})}{2(2\pi+3\sqrt{3})}\right)$

1056) $\frac{15\pi-32}{15}$ 1057) $\frac{848}{15}$ 1058) $\frac{50\sqrt{5}-82}{15}$

1059) $\frac{173}{60}$ 1060) $\frac{a^4}{6}$ 1061) $\frac{35\pi a^4}{16}$

1062) $\frac{\pi a^4}{32}$ 1063) $\frac{3\pi a^4}{128}$ 1064) $\frac{5}{2}$

1065) $\frac{165-64\ln 4}{8}$ 1066) 36 1067) $\frac{2}{15}a^5$

1068) $\frac{1}{24}\pi(2\pi^2-3)$ 1069) $\frac{3}{2}\pi a^4$ 1070) $\frac{1}{18}a^3(9\pi+44)$

1071) $2a^2(\pi-\frac{2}{3})$ 1072) $a^2[2\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})]$ 1073) $\frac{1}{3}a^2$

1074) $\frac{1}{18}a^3(3\pi-4)$ 1075) πa^3 1076) $\frac{61}{64}\pi a^3$

1077) $x_\kappa = 0,\ y_\kappa = \frac{3\pi a}{16}$ 1078) $\pi a^2\sqrt{1+\beta^2}$ 1079) $\pi a^2\sqrt{2}$

1080) $\frac{1}{8}\pi a^2\sqrt{2}$ 1081) $\frac{a^2}{\kappa}(\pi-2)$ 1082) $a^2\left(\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\sqrt{3}-1\right)$

1083) πa^2 1084) $2\pi a\beta$ 1085) $8a^2$

1086) $4a^2$ 1087) 20π 1088) $\frac{32\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$

1089) $\frac{\pi}{6}\left[(1+a^2)^{3/2}-1\right]$ 1090) $2\pi a^2$ 1091) $\frac{3}{5}a^2$

1092) $\pi\sqrt{2}$ 1093) $\frac{128}{15}a^3$ 1094) $\frac{\pi a\beta(2+a^2+\beta^2)^2}{4}$

1095) $\frac{1}{7}$ 1096) $\frac{1}{4}$ 1097) $\frac{17}{20}$

1098) $\left(\frac{34}{5}, -4\right)$ 1099) $(2, 0)$ 1100) $\left(\frac{15}{8}, \frac{6}{7}\right)$

1101) $\frac{1}{4}[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$ 1102) $\frac{81}{4}$ 1103) $\frac{3}{2}$

1104) $\frac{11}{24}$ 1105) $\ln\frac{81\sqrt{3}}{2}-\frac{9}{4}$ 1106) $3e^4-4\ln 4-\frac{15}{2}$

1107) $\frac{1}{640}(20e^{-2}-10e^{-4}-5e^{-8}+4e^{-10}-20e^{-18}+10e^{-36}+5e^{-72}-4e^{-90})$ 1108) $\frac{1}{4}$

1109) $6(\pi-1)$ 1110) $\frac{\pi}{12}$ 1111) $\frac{11}{84}$

1112) $\frac{1}{3}$ 1113) $\ln 2$ 1114) $4\ln 2$

1115) $\frac{256}{15}$ 1116) $4(\ln 3-1)$ 1117) $\frac{8}{3}$

1118) 8 1119) $\frac{2\pi}{3}(23\sqrt{23}-101)$ 1120) $\frac{a^2\beta^2\gamma^2}{48}$

1121) $\frac{\pi}{\kappa\lambda}$ 1122) $\frac{4\pi}{15}(a+\beta+\gamma)$ 1123) $\frac{4\pi}{5}a\beta\gamma$

1124) $-\frac{5}{16}+\frac{1}{2}\ln 2$ 1125) $\left(18\sqrt{3}+\frac{5}{6}-17\right)\frac{\pi a^5}{5}$ 1126) $\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}\right)$

1127) $\left(\frac{12}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ 1128) $I_{xy} = \frac{54}{5}\kappa,\ I_{xz} = \frac{96}{5}\kappa,\ I_x = 30\kappa$

1129) $I_{xy} = \frac{16}{3},\ I_{yz} = 8,\ I_{zx} = 8$ 1130) $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 1131) $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$

1132) $\left(0, 0, \frac{5}{12}\right)$ 1133) $I_z = \frac{2304\pi\kappa}{35}$ 1134) $z_\kappa = \frac{3}{2},\ I_z = 1792\pi$

1135) $\left(0, 0, \frac{5a}{16}\right)$ 1136) $\frac{16\pi a^7\kappa}{105}$ 1137) κa^5

1138) $\frac{\pi}{10}\kappa h a^2(a^2+2h^2)$ 1139) $\frac{1}{90}a^3$ 1140) $2\pi(\beta^2-a^2)\kappa$

1141) $\frac{56\pi}{5}\sqrt{3}\,a^5\kappa$ 1142) $\frac{1}{30}$ 1143) $\frac{1}{3}\pi a\beta\gamma$

1144) $\pi(1-\text{συν}\,1)$ 1145) $1/28$ 1146) $-\pi/24$

1147) $\left(\frac{144}{125}\ln 36+\frac{182}{25}\right)\sqrt{3}$ 1148) $4/3$ 1149) $15/2$

1150) $1/2$ 1151) $I_x = \frac{\pi+1}{6},\ I_y = \frac{\pi}{6},\ I_z = \frac{\pi-1}{6}$ 1152) $\frac{2(3\pi+10)}{9}$

1153) $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ 1154) $-\frac{33\pi}{32}$ 1155) $\frac{1}{24\sqrt{2}}$

1156) $\frac{8}{3}\pi(a+\beta+\gamma)R^3$ 1157) $\frac{1}{24}\pi a^6(80\kappa^2+7)\sqrt{\kappa^2+1}$ 1158) $\frac{4\pi}{3(2\nu+1)}(a^2+\beta^2+\gamma^2)^\nu$

1159) $6\pi a$ 1160) $\frac{16}{105\sqrt{2}}$ 1189) $x^2+y^2 = c_1^2,\ z = c_2$

1190) $x^2+z^2 = c_1^2,\ 2y^2+z = c_2$ 1191) $\lambda n\mu|\bar{\rho}|+\mu z = c$ 1192) $2e^{\beta^2}-x = c$

1193) $f = \frac{c}{z-2}$

1195) 0

1196) $\frac{3\pi}{2}$

1197) ἀπ. ἀσκ. 988

1198) ἀπ. ἀσκ. 994

1199) ἀπ. ἀσκ. 987

1200) » » 992

1201) $15 - 8\ln 4$

1202) $\frac{32}{15}$

1207) $U = -x^2y, \ E = 1$

1208) $U = -(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}, \ E = 1 - e^{-2\pi}$

1209) $U = -\frac{y}{x}, \ E = -\frac{10}{3}$

1210) $U = -\frac{x^3}{y}, \ E = 0$

1211) $U = -e^{xy}, \ E = 0$

1212) 0

1213) -2π

1214) -2

1215) 12π

1217) $\Phi = x^2y - \frac{1}{3}y^3$

1218) $\Phi = x\eta\mu y$

1219) $\frac{3\pi}{2}$

1220) $F = \int_{\Gamma+} \frac{2x^2(x^2+3)yz}{(1+x^2)^2}dx - \frac{x(x^2+3)z}{1+x^2}dy = \cdots$

1221) $\frac{4\alpha^3}{3}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\right)$

1222) $m = 2\pi\alpha\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

1223) $\bar{\alpha} = \frac{1}{4}(-xy^2, x^2y), \ m = \frac{9}{8}$

1226) $\frac{17}{6}$

1224) $\frac{1}{4}$

1225) 16

1229) $\pm 6\pi$

1227) 2

1228) 18π

1232) ± 2

1230) 0

1231) 0

1233) $\pm\frac{2}{3}$

1234) $\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi \ (\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

1236) $\frac{8\pi\beta^3}{3}(x_0+y_0+z_0)$

1235) $\bar{\beta} = \left(x^2y^2z - \frac{1}{3}y^2z^3, \ -\frac{2}{3}xyz^3 - xy^3z, \ 0\right) + \text{grad}\,\Phi$

1237) $\bar{\alpha} = \text{grad}\,\Phi, \ \Phi = x\eta\mu yz, \ \frac{1}{\sqrt{2}}\eta\mu\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

1238) Ἡ ἀρχὴ εἶναι σημεῖον ἀσυνεχείας τῆς Φ.

1240) $\Phi = xy - \ln|xy|, \ xy = c$

1241) $y = c_1(x-\alpha), \ y = c_2z^2, \ \Phi = -\omega^2\left[(x-\alpha)^2 + y^2 + \frac{z^2}{2}\right], \ (x-\alpha)^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} = c^2$

1242) $\text{rot}\,\bar{\alpha} \neq 0, \ y = c_1z, \ x^2+y^2+z^2 - 2c_2\sqrt{y^2+z^2} - \alpha^2 = 0$

1243) $y = c_1x, \ x^2+y^2+z^2 - 2c_2\sqrt{x^2+y^2} = 0$

1248) $\lambda = \frac{c}{r^3}$

1249) $\lambda = f(r)$ ὅπου f αὐθαίρετος

1250) π

1251) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

1252) $\kappa < 1$

1253) $\kappa < 1$

1254) $[\eta\mu\alpha - \alpha\sigma\upsilon\nu\alpha] : 4\eta\mu^3\alpha$

1255) $\pi\alpha^2\beta - \frac{4}{3}\alpha\beta^2$

1257) 2π

1258) $2 - \frac{\pi}{2}$

1259) $\Phi = x^2\ln(1+y), \ \ln 3$

1260) $\frac{1}{28}$

1261) $\frac{1}{36}$

1262) $\frac{\pi}{24}$

1263) $4\ln(1+\sqrt{2})$

1264) 0

1265) $\frac{\pi}{8}$

1266) 0

1267) $1/50400$

1268) $\pi\left(2 - \frac{3}{2}\ln 3\right)$

1269) $2\pi^2\alpha\beta$

1270) $\frac{16\alpha^3}{9}$

1271) $\frac{4\pi}{A^2}\left(\frac{\eta\mu A}{A} - \sigma\upsilon\nu A\right), \ A = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$

1272) $4\pi\alpha\beta\gamma(e-2)$

1273) $\frac{4}{3}\alpha^3\left(\frac{\pi}{2} + 2\lambda\,\sigma\tau\epsilon\mu\,2\lambda\right)$

1274) $\frac{1}{6}\alpha^2\beta^2\gamma^2$

1275) $\frac{\sqrt{3}}{2}\tau o\xi\epsilon\varphi\frac{1}{2}$

1276) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

1277) $x+y = u, \ x-y = v, \ \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)$

1279) $\left|\ln\frac{\alpha'}{\alpha}\ln\frac{\beta'}{\beta}\right|$

1280) $\left|\ln\frac{\alpha'}{\alpha}\ln\frac{\beta'}{\beta}\ln\frac{\gamma'}{\gamma}\right|$

1281) $\frac{8192}{735}\alpha^7\kappa\left(\kappa^2 + \frac{8}{33}\right)$

1282) $\frac{7\alpha^2}{143}$

1283) $\frac{32}{5}\pi\alpha^6$

1284) $\frac{\alpha^3}{6}$

1286) $2\sqrt{2\pi}$

1287) $\alpha^2\sqrt{2\pi}$

1288) $\frac{20}{9}$

1291) $\frac{\alpha^2}{9}(20 - 3\pi)$

1292) $\frac{\pi}{\mu\,\eta\mu\,\pi\nu}$

1293) $8\alpha^2$

1294) $\frac{\pi}{2}\left[\beta\sqrt{\beta^2+\kappa^2} - \alpha\sqrt{\alpha^2+\kappa^2} + \kappa^2\ln\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+\kappa^2}}{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\kappa^2}}\right]$

1295) Σφαιρικὲς συντεταγμένες, $\frac{\pi^2}{2}$

1298) $I_z = \pi\gamma(\alpha^4-\beta^4), \ I_x = 2\pi\gamma(\alpha^2-\beta^2)\left[\frac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2) + \frac{1}{3}\gamma^2\right]$

1300) $\frac{4}{15}\pi\alpha\beta\gamma\left[(1-\lambda^2)\alpha^2 + (1-\mu^2)\beta^2 + (1-\nu^2)\gamma^2\right]$

1301) $\frac{x^2}{\kappa-A} + \frac{y^2}{\kappa-B} + \frac{z^2}{\kappa-\Gamma} = \frac{1}{\Delta}, \ A = 4\alpha^3\beta\gamma : 15, \ B = 4\alpha\beta^3\gamma : 15, \ \Gamma = 4\alpha\beta\gamma^3 : 15, \ \Delta = 4\alpha\beta\gamma : 3$

1303) $\alpha^2(x-\xi)^2 + \beta^2(y-\eta)^2 + \gamma^2(z-\zeta)^2 = \left[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+5(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\right]\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]$

1304) $\left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)$

1305) $x = 5\alpha(2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) : 16(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

1307) $U = \frac{2\pi\alpha^2\beta}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\ln\left[\frac{\beta}{\alpha} + \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 1}\right]$

1308) $U = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{z^2+f^2}\, dz - \pi(\beta^2 \mp \alpha^2)$, ὅπου τὸ ἄνω πρόσημον λαμβάνεται ὅταν ἡ ἀρχὴ εἶναι ἐντὸς τοῦ σώματος καὶ τὸ κάτω ὅταν δὲν εἶναι.

1309) $\Phi = \frac{x-y}{(x+y)^2}$ 1310) $\alpha=\beta=-1$, $\Phi = \frac{x-y}{x^2+y^2}$

1311) $\alpha'=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\Phi = \beta\, \text{ημ}x\,\text{ημ}y - \alpha\,\text{συν}\,x\,\text{συν}y$ 1312) $\Phi = (e^y-1):(1+x^2)$, $\frac{1}{5}(e^4-1)$

1313) $e^{\xi}\,\text{ημ}\eta$ 1314) $\alpha=\beta=1, \gamma=2, \alpha'=\beta'=\frac{1}{2}, \gamma'=\frac{3}{2}, \Phi = -(2x+2y+3z):2(x+y+z)^2$

1315) $\Phi = \frac{1}{2}(x+y+z)^2:(x^2+y^2+z^2)$ 1316) $\nu=3, h=\alpha+\beta+\gamma, \pi\kappa^2:(\alpha+\beta+\gamma)^2\sqrt{3}$

1317) $\frac{12}{5}\pi\alpha\beta\gamma$ 1318) $\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{2}{\gamma^2}\right)\alpha\beta\gamma^2$ 1319) $\frac{4\pi}{5}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6)$

1320) $\frac{M}{4\alpha^2}$ 1321) διὰ $\nu<2$ συγκλίνει καὶ ἰσοῦται μὲ μηδέν.

1322) Μετασχηματισμὸς $u=\lambda x+\mu y$, $\upsilon=\lambda' x+\mu' y, \cdots, \alpha\gamma-\beta^2=\pi^2$.

1323) $J_1 = \pi(\alpha\Gamma+\gamma A-2\beta B):(\alpha\gamma-\beta^2)^{3/2}$, $J_2 = 2\pi:(\alpha\gamma-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$

1325) $\ln 2+\frac{89}{480}$ 1326) $\frac{2048}{75}\alpha^{\frac{5}{2}}$ 1328) $\frac{2}{5}\pi\alpha^5\beta^5$

1329) $\frac{1}{20}\alpha^3\sqrt{3}$ 1331) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{4\alpha\,\text{στεμ}\theta\,\text{εφ}\theta} f(\rho\,\text{συν}\theta, \rho\,\text{ημ}\theta)\rho\, d\rho$, $\frac{4}{3}(3\pi-10)\alpha^2$

1333) $\frac{1}{12}[\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}]$

1334) $u=x^2+\frac{y^2}{2}+c$, $\Phi=z(x^2+\frac{y^2}{2}+c)$, πεδ. γραμ. $y^2=2c_1x$, $z^2=\frac{x^2}{2}+c_1x+c\ln|x|+c_2$ $c=0$, $|\Omega|=\pi\sqrt{2}\ln\frac{\gamma}{\alpha}$

1335) $(0,0)$, $m=\frac{\pi\alpha^2}{6}(5\sqrt{5}-1)$. 1336) $m=4\pi\alpha\beta\gamma\lambda$ 1337) $(\pi\alpha, \frac{4\alpha}{3})$.

1338) $x_\kappa=y_\kappa=\frac{1}{3}[(\alpha^2+\kappa^2)^{3/2}-\kappa^3]:\frac{4}{\pi}[\alpha\sqrt{\alpha^2+\kappa^2}+\kappa^2\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\kappa^2}}{\kappa}]$, $z_\kappa=\frac{\kappa\pi}{4}$

1339) $(\frac{6\alpha}{4+3\pi}, 0)$ 1341) $\alpha\beta$ 1342) $\frac{1}{12}\alpha^3\beta\delta(\pi+\frac{45\sqrt{3}}{56})$

1343) $\frac{2\pi}{3\alpha\beta}$ 1345) $m=4\pi\alpha\beta\gamma$

1357) Ἐὰν $f=Ax^2+By^2+\Gamma z^2+\Delta xy+\cdots$ εἶναι $\mathcal{F}=\frac{8}{3}\pi R^3(A+B+\Gamma)$.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιον I

Διαφορικός λογισμός συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Γενική εἰσαγωγή

Μερικαί παράγωγοι καί διαφορικά

Ἀνάπτυγμα συναρτήσεως κατά Taylor

Πλεγμέναι συναρτήσεις

Σχετικά ἀκρότατα

Κεφάλαιον ΙΙ
Στοιχεία διαφορικής γεωμετρίας

Γενική εισαγωγή

Κεφάλαιον III
Ὁλοκληρωτικός λογισμός συναρτήσεων πολλῶν μεταβλητῶν

Ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα

Διπλᾶ ὁλοκληρώματα

Τριπλᾶ ὁλοκληρώματα

Ἐπιφανειακά ὁλοκληρώματα

Θεωρία τῶν πεδίων