

Κ. Δ. ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΥ

Γ. Δ. ΜΠΙΛΛΗ

Ε 2 Φ 21

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ - ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ - ΘΕΡΜΟΤΗΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ
ΔΙΑ ΤΑΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΡΙΤΗ



ΑΘΗΝΑΙ • 1962

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κ. Δ. ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

Γ. Δ. ΜΠΙΛΛΗ
ΦΥΣΙΚΟΥ

E 2 φ 51

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Χρυσόσημο (Κ.Β.) Μετάλλευ (Γ.Δ.)

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ - ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ - ΘΕΡΜΟΤΗΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ
ΔΙΑ ΤΑΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΡΙΤΗ
ΜΕΤΑ 434 ΣΧΗΜΑΤΩΝ



355 3
10

ΑΘΗΝΑΙ
1962

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὰς ὑπογραφὰς τῶν συγγραφέων.

Κ. Α. Σπυροπούλου

Σπυροπούλου

ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ

Συνεπείς πρὸς ὅσα εἶχομεν ἐκθέσει εἰς τὸν πρόλογον τῶν προηγουμένων ἐκδόσεων τοῦ ἀνὰ χεῖρας βιβλίου, διειρηρήσαμεν καὶ εἰς τὴν παρούσαν ἐκδοσιν τὴν αὐτὴν ὕλην, προσθέσαντες ὀλίγας, μόνον, παραγράφους, αἱ ὁποῖαι ἐκρίθησαν ἀπαραίτητοι διὰ τὴν καλλιτέραν κατανόησιν ὁρισμένων θεμάτων.

Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν γνώμην μας ὅτι ἐν βιβλίῳ Φυσικῆς, προωρισμένον διὰ τὰ Σχολεῖα Μέσης Ἐκπαιδεύσεως, δὲν πρέπει νὰ εἶναι ὀγκώδες, λόγῳ προσθήκης ἐπουσιῶδων θεμάτων ἢ θεμάτων, ἀνηκόντων σαφῶς εἰς τὸν κύκλον ἀνωτάτων σπουδῶν, καθόσον, οὕτω, καθίσταται ἀδύνατος ἡ διδασκαλία ὅλων τῶν κεφαλαίων, χωρὶς, ἀντιστοίχως, ἡ πρόσθετος αὕτη ὕλη νὰ προσφέρῃ τι εἰς τὴν καλλιτέραν κατανόησιν τῶν γενικῶν ἀρχῶν τῆς Φυσικῆς. Ὑπὸ τὸ πνεῦμα τοῦτο, ἡ περιγραφή τῆς μεταπτώσεως τοῦ στρόβου, τῆς μηχανῆς τοῦ Carnot, τῆς ἀντλίας διαχύσεως κ.λ. οὐδεμίαν ἀπολύτως θέσιν ἔχουν εἰς βιβλίον, ἀπευθυνόμενον πρὸς τοὺς μαθητὰς τῶν Σχολείων Μέσης Ἐκπαιδεύσεως, καθόσον ἡ προσθήκη τῶν θεμάτων αὐτῶν αὐξάνει σημαντικῶς τὴν ἡδὴ λίαν ἐξωγκωμένην ὕλην, χωρὶς, ἀντιστοίχως, νὰ συντελῇ εἰς τὴν ἐξύψωσιν τοῦ ἐπιπέδου τῆς διδασκαλίας τῆς Φυσικῆς. Κατὰ τὴν γνώμην μας (τὴν ὁποίαν ἐνισχύουν καὶ πληροφορίαι τῶν συναδέλφων καθηγητῶν τῶν Γυμνασίων) ἡ ἡδὴ ἐπισήμως θεωρουμένη ὡς διδακτέα ὕλη πρέπει νὰ περιοχθῇ, δι' ἀφαιρέσεως τῶν ἀχρήστων καὶ ἐπουσιῶδων θεμάτων, καθὼς καὶ ἐκείνων, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν σαφῶς εἰς τὴν στάθμην τῶν ἀνωτάτων σπουδῶν. Ἐὰν κατορθωθῇ νὰ διδάσκεται καὶ νὰ κατανοητῇ ὑπὸ τῶν μαθητῶν ὁλόκληρος ἡ καθαρῶς γυμνασιακὴ ὕλη, τοῦτο ἀκριβῶς θὰ εἶναι τὸ μέγα ὄφελος διὰ τὴν ἐξύψωσιν τῆς διδασκαλίας τῆς Φυσικῆς καὶ ὅχι ἡ προσθήκη θεμάτων, σαφῶς πανεπιστημιακῆς στάθμης.

Καί, τώρα, εἰδικαί τινες παρατηρήσεις :

Ὁ ὅρος «κινεῖσα δύναμις» πρέπει νὰ παύσῃ χρησιμοποιούμενος, καθόσον ἀφ' ἑνὸς μὲν εἶναι παραπλανητικός, ἀφ' ἑτέρου δὲ περιττός. Καὶ παραπλανητικὸς μὲν εἶναι, διότι ὁ ἀκούων τὴν φράσιν «κινεῖσα δύναμις» νομίζει ὅτι αὕτη εἶναι ἡ δύναμις, ἡ προκαλοῦσα τὴν κίνησιν, ἐνῶ, ὡς γνωστόν, ὑπάρχει καὶ κίνησις (ὁμαλὴ εὐθύγραμμος), χωρὶς νὰ ὑπάρχῃ «κινεῖσα δύναμις». Ἀφ' ἑτέρου, ὁ ὅρος οὗτος εἶναι καὶ περιττός, καθόσον ὑπάρχει ὁ ὅρος «συνισταμένη δύναμις» - καὶ αὕτην, προφανῶς, ἐννοοῦν οἱ χρησιμοποιούντες τὸν ὅρον «κινεῖσα δύναμις».

Ἡ λειτουργία τοῦ σίφωνος πρέπει νὰ παύσῃ περιγραφομένη ἐσφαλμένως - δηλ., «ὡς ὀφειλομένη ἐξ διαφορᾶν πιέσεως εἰς νοητὴν ἐγκαρσίαν διατομὴν κ.λ.». .

Ὁμοίως, πρέπει νὰ παύσῃ γραφόμενον ὅτι «ἡ τριβὴ κυλίσεως εἶναι μικρότερα τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως», καθὼς καὶ τὸ ἀμίμητον «διαστολὴ ἐνὸς αερίου ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον». Οὐδεμία, ἐπίσης μνεία πρέπει νὰ γίνεταί τῶν «κινουμένων συστημάτων ἀναφορᾶς» καὶ τῶν «δυνάμεων ἀδρανείας», καθόσον τὰ θέματα αὗτα μόνον σύγχυσιν πρόκειται νὰ προκαλέσουν εἰς τοὺς μαθητὰς τῶν σχολείων Μέσης Ἐκπαιδεύσεως.

Τοῦ κυρίως βιβλίου προτάσσεται ἡ «Εἰσαγωγή», εἰς τὴν ὁποίαν ἔχουν συγκεντρωθῇ διάφοροι γενικαὶ ἔννοιαι, χρησιμοποιοῦμεναι εἰς τὰ λοιπὰ Κεφάλαια. Ἐνταῦθα ἐπιθυμοῦμεν νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ διδασκαλία τῆς Μηχανικῆς δὲν πρέπει νὰ ἀρχίζῃ ἐκ τῆς «Εἰσαγωγῆς», ἀλλ' ἐκ τῆς κυρίως Μηχανικῆς, αἱ δὲ ἔννοιαι τῆς «Εἰσαγωγῆς» νὰ παρεμβάλλωνται ἐκάστοτε εἰς τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα χρειάζονται - π.χ., ἡ μονὰς δυνάμειος δύνη θὰ διδαχθῇ ὅχι εἰς τὰ πρῶτα μαθήματα, ἀλλὰ μετὰ τὴν διδασκαλίαν τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς.

Λίαν ὠφέλιμον θεωροῦμεν τὴν συγχὴν χρήσιν ὑπὸ τῶν μαθητῶν τῆς γραφικῆς παραστάσεως, ἡ ὁποία ἀπλουστεύει τοὺς συλλογισμοὺς καὶ δίδει σαφεῖς εἰκόνα τῆς πορείας τῶν φαινομένων.

"Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰς ἀσκήσεις, ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἑξῆς: Διὰ τὴν ἀσφαλῆ λύσιν τῶν ἀσκήσεων Φυσικῆς πρέπει νὰ ἀκολουθῇται ὠρισμένη μέθοδος, ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν πρῶτον τοῦ τελικοῦ τύπου καὶ τὴν ἐν συνεχείᾳ ἀντικατάστασιν τῶν δεδομένων. Ἡ χρῆσις μεικτῶν τύπων, δηλ., τύπων, περιεχόντων καὶ σύμβολα καὶ ἀριθμούς, δὲν ἐνδείκνυται. Ἐνεκα τούτου, θὰ ἠθέλαμεν νὰ συστήσωμεν, ὅπως οἱ μαθηταὶ μελετήσουν καλῶς τὸν ὑποδειγματικὸν τρόπον λύσεως τῶν ἀσκήσεων, τὸν περιγραφόμενον εἰς τὸ Παράρτημα, τὸ εὐρισκόμενον εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου.

Αἱ ἀσκήσεις, αἱ ὁποῖαι δίδονται πρὸς λύσιν εἰς τοὺς μαθητὰς κατὰ τὴν διδασκαλίαν, πρέπει νὰ εἶναι ἀπλὰι, νὰ λύωνται δὲ τῇ βοηθείᾳ τῶν γνώσεων καὶ τῶν τύπων τοῦ Κεφαλαίου, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρονται. Αἱ δυσκολώτεραι ἀφορῶν εἰς ἐκεῖνους, οἱ ὁποῖοι πρόκειται νὰ ἀκολουθήσουν ἀνωτέρας σπουδᾶς. Τὰς διὰ τὴν λύσιν τῶν ἀσκήσεων ἀπαιτούμενας σταθεράς (π.χ., εἰδικὸν βάρος κ.λ.) πρέπει ὁ μαθητὴς νὰ ἀναζητῇ καὶ νὰ ἀνευρίσκῃ εἰς τοὺς ἀντιστοιχοῦς πίνακας τοῦ βιβλίου.

Κατὰ τὴν ἐκτύπωσιν τοῦ βιβλίου ἐκρησιμοποιήθησαν στοιχεῖα δύο μεγεθῶν. Ἡ διὰ μικροτέρων στοιχείων τυπωμένη ὕλη δύναται νὰ παραλειπεται κατὰ τὴν διδασκαλίαν, ἐφ' ὅσον δὲν ἐπαρκεῖ ὁ χρόνος. Τὰ ἐπουσιώδη ἐπεσημάνθησαν δι' ἐνὸς ἀστερίσκου, διὰ περισσοτέρων δὲ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἔπρεπεν ὁ πωσδὴρ ποτε νὰ εἶχον παραλειφθῇ ἐκ τοῦ ἐπισήμου βιβλίου τοῦ Κράτους. Ἐχομεν τὴν γνώμην ὅτι εἰς προσεχῇ ἔκδοσιν τοῦ ἐν λόγῳ βιβλίου τὰ θέματα ταῦτα πρέπει νὰ ἀφαιρεθοῦν ἀδιστακτικῶς.

Εἰς ἀστερίσκος χρησιμοποιεῖται καὶ εἰς μερικάς παραγράφους τῆς ὕλης, τῆς τυπωμένης διὰ μεγαλυτέρων τυπογραφικῶν στοιχείων. Οὗτος δηλοῖ ὅτι αἱ παράγραφοι αὗται δύναται νὰ παραλειφθοῦν, χωρὶς διακοπὴν τῆς συνεχείας, ὅταν ὁ διδάσκων κρίνῃ ὅτι δὲν θὰ δυνηθῇ νὰ διδάξῃ ὁλόκληρον τὴν ὕλην.

Τοὺς συναδέλφους Φυσικοὺς κ.κ. **Κ. Μεταλλινόν, Δ. Μαγῆρον, Χ. Κουμέλην** καὶ **Δ. Μηλιώτην**, οἱ ὁποῖοι προέβησαν εἰς πολλὰς εὐστόχους παρατηρήσεις, εὐχαριστοῦμεν θερμῶς καὶ ἀπὸ τῆς θέσεως ταύτης.

Ἐπίσης, θερμῶς εὐχαριστοῦμεν καὶ τὸν Φυσικὸν - Χημικὸν κ. **Δ. Τσακιορσιάνον**, ὁ ὁποῖος ἔλυσεν ὅλας τὰς ἀσκήσεις τοῦ ἀνά χειρὸς βιβλίου.

Ἀθῆναι, Σεπτέμβριος 1962

Κ. Δ. ΑΔΕΞΟΠΟΥΛΟΣ - Γ. Δ. ΜΠΙΛΛΗΣ

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Φυσικά φαινόμενα - Φυσικοί νόμοι σ. 1.—Μέτρησις φυσικῶν μεγεθῶν σ. 2.—Θεμελιώδεις καὶ παράγωγοι μονάδες σ. 3.—Υπόθεσις καὶ θεωρία σ. 4.—Μονάδες διαφόρων φυσικῶν μεγεθῶν σ. 4.—Μονάδες μήκους, ἐμβαδοῦ κ.λ.π., χρησιμοποιούμεναι εἰς τὰς ἀγγλοσαξωνικάς χώρας σ. 8.—Μέτρησις μήκους σ. 9.—Μέτρησις χρόνου σ. 9.—Μέτρησις ἐμβαδοῦ καὶ ὄγκου σ. 9.—Μέτρησις γωνίας σ. 10.—Γραφικὴ παράστασις φαινομένου σ. 10.—Διαστάσεις τῶν φυσικῶν μεγεθῶν σ. 13.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Περιεχόμενον τῆς Μηχανικῆς σ. 15.

Α' Στατική.

Δυνάμεις σ. 16.—Μέτρησις δυνάμεων σ. 17.—Γραφικὴ παράστασις δυνάμεως.—Ἀνυσματικά μεγέθη σ. 18.—Μονόμετρα μεγέθη σ. 19.—Σύνθεσις δυνάμεων, κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας σ. 19.—Σύνθεσις δύο δυνάμεων μὴ παραλλήλων σ. 20.—Ἀναλυτικὸς προσδιορισμὸς τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων σ. 20.—Σύνθεσις πολλῶν δυνάμεων, ἐξασκουμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου σ. 21.—Πρόσθεσις ἀνυσματικῶν μεγεθῶν σ. 22.—Ἀνάλυσις δυνάμεων σ. 23.—Ἰσορροπία δυνάμεων σ. 24.—Πειραματικὴ ἀπόδειξις τοῦ νόμου τοῦ παραλλήλογράμμου τῶν δυνάμεων σ. 26.—Ροπή δυνάμεως σ. 27.—Ροπή δυνάμεως ὡς πρὸς σημείον σ. 28.—Ροπή δυνάμεως ὡς πρὸς ἄξονα σ. 29.—Ἰσορροπία ροπῶν σ. 30.—Θεώρημα τῶν ροπῶν σ. 31.—Σύνθεσις δυνάμεων, ἐφηρμοσμένων ἐπὶ στερεοῦ σώματος σ. 32.—Ἀνάλυσις δυνάμεως, ἐξασκουμένης ἐπὶ στερεοῦ σώματος εἰς δύο συνιστώσας, παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς σ. 36.—Ζεύγος δυνάμεων σ. 37.—Σύνθεσις δύο δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν ζεύγος σ. 39.—Ἡ ροπή τοῦ ζεύγους ὡς ἀνυσματικὸν μέγεθος σ. 39.—Ἰσορροπία δυνάμεων, ἐξασκουμένων ἐπὶ στερεοῦ σώματος σ. 39.—Ἀξίωμα τῆς δρασσεως καὶ ἀντιδράσεως σ. 40.

Β' Κινηματική.

Καθορισμὸς τῆς θέσεως ἑνὸς κινητοῦ ἐπὶ γραμμῆς - Κίνησις σ. 45.—Ομοαὐτὴ εὐθύγραμμος κίνησις σ. 45.—Ἡ ταχύτης ὡς ἀνυσματικὸν μέγεθος σ. 49.—Ἀνισοταχύς εὐθύγραμμος κίνησις σ. 50.—Ἐπιτάχυνσις σ. 52.—Εὐθύγραμμος κίνησις μὲν σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν σ. 54.—Εὐθύγραμμος κίνησις μὲ μεταβλητὴν ἐπιτάχυνσιν σ. 58.—Ομοαὐτὴ κυκλικὴ κίνησις σ. 58.—Σύνθεσις κινήσεων σ. 63.

Γ' Δυναμική.

Θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς σ. 67.—Διερευνήσις τῆς θεμελιώδους ἔξισωσ[†] $F=ma$ σ. 68.—Ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας σ. 70.—Μονάδες μάζης καὶ δυνάμεως σ. 72.—Πειραματικὴ ἀπόδειξις τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς διὰ τῆς μηχανῆς τοῦ Atwood σ. 73.—Κεντρομόλος δύναμις σ. 75.—Νόμοι τῆς κεντρομόλου δυνάμεως σ. 77.—Ἐφαρμογαὶ τῆς κεντρομόλου δυνάμεως σ. 79.—Περιστροφή τῶν σωμάτων σ. 81.—Νόμος τῆς περιστροφῆς τῶν σωμάτων σ. 85.—Τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας εἰς τὴν περιστροφὴν σ. 85.—Ὁρμή σ. 85.—Ὡθησις δυνάμεως σ. 86.—Μεταβολὴ τῆς μάζης μετὰ τῆς ταχύτητος σ. 86.

Δ' Βαρύτης.

† Νόμος τοῦ Νεύτωνος σ. 89.—Βάρος σ. 89.—Μεταβολὴ τοῦ g μετὰ τοῦ γεωγραφικοῦ πλάτους σ. 91.—Ἀκριβὲς ὅρισμός τοῦ βάρους ἑνὸς σώματος σ. 92.—Κέντρον βάρους σ. 93.—Εἰδικὸν βάρος—Μικρότης σ. 94.—Ἰσορροπία σωμάτων ὡς τὴν ἐπὶ

δρασιν τοῦ βάρους των σ. 96. $\pm$ Ἐλευθέρα πτώσις σ. 98. $\pm$ Κίνησις σώματος ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου σ. 99.—Πειραματικὴ ἀπόδειξις τῶν νόμων τῆς πτώσεως σ. 100.—Κατακόρυφος βολὴ πρὸς τὰ ἄνω σ. 102.—Ὁριζοντία βολὴ σ. 104.—Πλαγία βολὴ σ. 105.

Ε' Ἔργον, ἐνέργεια, ἰσχύς, ἀπλᾷ μηχαναί.

$\pm$ Ἔργον, σ. 112. $\sqrt$ Ἔργον, παραγόμενον κατὰ τὴν πῶσιν ἢ ἀνύψωσιν σωμάτων σ. 113. $\pm$ Ἰσχύς, σ. 114. $\pm$ Ἐνέργεια σ. 117.—Θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας σ. 119.—Ἀπλᾷ μηχαναί σ. 120.—Κεκλιμένον ἐπίπεδον σ. 121.—Τραχαλῖαι σ. 122. $\pm$ Μοχλὸς σ. 124.—Βαροῦλλον σ. 125.—Ἰμάντες καὶ ὀδοντωτοὶ τροχοὶ σ. 126.—Σφὴν σ. 127.—Διατήρησις τῆς ἐνεργείας εἰς τὰς ἀπλᾶς μηχανὰς σ. 128.—Κοχλίας σ. 129.—Συντελεστὴς ἀποδόσεως μιᾶς μηχανῆς σ. 129.—Ζυγὸς σ. 130. $\pm$ Κινητικὴ ἐνέργεια σώματος, στρεφομένου περὶ ἀξονα $\pm$ Ροπή ἀδρανείας σ. 134.—Σύστημα σωμάτων $\pm$ Ἀρχὴ διατηρήσεως τῆς ὀρμῆς σ. 135.—Κρούσις σ. 139.

Σ' Ταλαντώσεις.

$\sqrt$ Ἡμιτονοειδὴς (ἢ ἁρμονικὴ) ταλάντωσις σ. 142. $\sqrt$ Αναλυτικὴ διατύπωσις τῆς ἁρμονικῆς ταλάντωσεως σ. 145.—Ἀπαραίτητος συνθήκη διὰ τὴν παραγωγὴν ἁρμονικῆς ταλάντωσεως σ. 148.—Υπολογισμοὶ ἐπὶ τῆς ἁρμονικῆς ταλάντωσεως σ. 148.—Μαθηματικὸν ἔκκρεμὸς σ. 150.—Διατήρησις τῆς ἐνεργείας κατὰ τὴν ταλάντωσιν τοῦ ἔκκρεμους σ. 152. $\pm$ Ἀπόδειξις τοῦ τύπου τοῦ μαθηματικοῦ ἔκκρεμους σ. 152.—Ἐκκρεμὸς τοῦ Foucault σ. 153.—Ἀμείωτος καὶ φθίνουσα ταλάντωσις σ. 154.—Στροφικαὶ ταλάντωσις σ. 155. $\pm$ Φυσικὸν ἔκκρεμὸς σ. 156.—Ἐφαρμογαὶ τοῦ ἔκκρεμους σ. 157.—Ἐξηραγκασμένη ταλάντωσις σ. 158.—Συνεξευγμέναι ταλάντωσις σ. 159.

Ζ' Ἐλαστικότης καὶ ἀντοχὴ τῶν στερεῶν.

$\sqrt$ Ἐλαστικαὶ παραμορφώσεις σ. 160. $\pm$ Νόμος τοῦ Hooke σ. 161.—Ἀντοχὴ τῶν ὀλίων σ. 163. $\sqrt$ Σκληρότης σ. 164.—Κατεργασίαι τῶν μετάλλων σ. 164.

Η' Τριβή.

$\sqrt$ Τριβὴ ὀλισθήσεως σ. 166. $\pm$ Κύλισις σ. 168.—Τριβὴ κυλίσεως σ. 169.

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Θ' Ὑδροστατικὴ.

Εἰσαγωγή σ. 171. $\pm$ Πίεσις σ. 171.—Μονάδες πίεσεως σ. 173. $\pm$ Ὑδροστατικὴ πίεσις σ. 174.—Θεμελιώδης νόμος τῆς ὑδροστατικῆς σ. 175.—Γενικωτέρα διατύπωσις τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Ὑδροστατικῆς σ. 176. $\pm$ Ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ἰσορροποῦντων ὑγρῶν $\pm$ Ἀρχὴ τῶν συζυγισμένων δοχείων σ. 178. $\pm$ Δυνάμεις, λόγῳ πίεσεως, ἐξασκοῦμεναι ἐπὶ ἐπιφανείῳ, εὐρισκομένων ἐντὸς ὑγροῦ σ. 180. $\pm$ Δύναμις, ἐξασκοῦμένη ἐπὶ τοῦ πυθμένος δοχείου, περιέχοντος ὑγρὸν σ. 181. $\pm$ Δύναμις ἐπὶ τῶν πλευρικῶν τοιχωμάτων σ. 182. $\sqrt$ Υπολογισμὸς τῆς δυνάμεως, τῆς ἐξασκοῦμένης ἐπὶ τῶν πλευρικῶν τοιχωμάτων σ. 184. $\pm$ Ἔδρσις τῆς συνολικῆς δυνάμεως, τῆς ἐξασκοῦμένης ἐπὶ τοῦ δοχείου σ. 185. $\pm$ Ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους σ. 186. $\pm$ Πειραματικὴ ἀπόδειξις τῆς ἀρχῆς τοῦ Ἀρχιμήδους σ. 188.—Πίεσις σ. 188.—Μετάκεντρον σ. 190.—Προέλευσις τῆς πίεσεως τῶν ὑγρῶν σ. 190. $\pm$ Ἀρχὴ τοῦ Pascal σ. 191.—Μέτρησις τῆς πυκνότητος τῶν στερεῶν σ. 193.—Μέτρησις τῆς πυκνότητος τῶν ὑγρῶν σ. 194.—Μέτρησις τοῦ εἰδικοῦ βάρους σ. 197.—Μέθοδοι μετρήσεως τοῦ σχετικοῦ εἰδικοῦ βάρους σ. 197.

Ι' Ἀεροστατικὴ.

$\sqrt$ Γενικά σ. 200.—Βάρος τῶν ἀερίων σ. 200.—Πίεσις ἐντὸς τῶν ἀερίων σ. 201.—Μεταβολὴ τῆς πίεσεως ἐνὸς ἀερίου μετὰ τοῦ ὀγκοῦ $\pm$ Νόμος Boyle-Mariotte σ. 202.—Μεταβολὴ τῆς πυκνότητος ἐνὸς ἀερίου μετὰ τῆς πίεσεως σ. 203.—Σχετικὴ πυκνότης ἀερίων σ. 204. $\pm$ Ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους σ. 204.—Ἀερόστατα σ. 205. $\pm$ Ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις σ. 206. $\pm$ Πείραμα Torricelli σ. 207.—Ἐφαρμογαὶ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως σ. 209. $\pm$ Ἐλάττωσις τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως μετὰ τοῦ ὕψους σ. 210. $\pm$ Βαρόμετρα σ. 210. $\pm$ Αὐτογραφικὰ βαρόμετρα σ. 212. $\pm$ Μέτρησις τοῦ ὕψους ἐκ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως σ. 222. $\pm$ Μανόμετρα σ. 213.

ΙΑ' Ὑδροδυναμική - Ἀεροδυναμική.

Γενικά περί ροῆς σ. 216.—Νόμοι τῆς ροῆς σ. 217.—Ἐφαρμογαὶ τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli σ. 218.—Ἐκροή ὑγροῦ δι' ὀπλῆς σ. 220.—Ἀντίστασις σωμάτων, εὐρισκομένων ἐντὸς ρεύματος σ. 220.—Τύπος τῆς ἀντίστασεως σ. 221.—Πτώσις σωμάτων ἐντὸς τοῦ αἵρος σ. 221.—Σιρόβιοι σ. 222.—Δυναμικὴ ἀώσις σ. 222.—Ἀεροπλάνα σ. 224.—Σύστημα προωθήσεως τῶν ἀεροπλάνων σ. 224.—Δυνάμεις ἐπὶ ἀεροπλάνου, ἱπταμένου ὀριζοντίως σ. 225.—Ἐλικόπτερα σ. 225.—Πύραυλοι σ. 226.

ΙΒ' Μηχαναί.

† Ὑδραντλία σ. 226.—Ἀντλία κενοῦ σ. 228.—Συμπιεσταὶ καὶ ἀνεμιστήρες σ. 229.—Ὑδραυλικοὶ τροχοὶ καὶ ὑδροτροβίλοι σ. 229.—Ὑδροηλεκτρικαὶ ἐγκαταστάσεις σ. 231.

ΙΓ' Μοριακὰ φαινόμενα.

† Ἄτομα καὶ μόρια σ. 234.—Μοριακαὶ δυνάμεις σ. 235.—Συνοχὴ σ. 236.—Ἐπιφανειακὴ τάσις σ. 237.—Συνάφεια—Τριχοειδῆ φαινόμενα σ. 238.—Μεταβολὴ τοῦ ὕψους τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἐντὸς τριχοειδῶν σωλήνων σ. 239.—Διαλύματα σ. 240.—Κολλοειδὴ διαλύματα καὶ γαλακτώματα σ. 240.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ**ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ****ΙΔ' Κυματική.**

† Κύματα σ. 242.—Εγκάρσια καὶ διαμήκη κύματα σ. 243.—Μηχανισμὸς διαδόσεως τῶν κυμάτων σ. 244.—Μήκος κύματος σ. 246.—Συμβολὴ κυμάτων σ. 247.—Διάδοσις κύματος εἰς τὸν ὥρον—Σφαιρικὰ κύματα σ. 251.

ΙΕ' Ἀκουστική.

† Γενικά περί ἤχων σ. 252.—Πειραματικὴ ἀπόδειξις τῶν ἡχητικῶν κυμάτων σ. 254.—Διάδοσις τοῦ ἤχου σ. 255.—Μέτρησις τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου σ. 255.—Ἐπίδρασις τῆς θερμοκρασίας ἐπὶ τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου σ. 256.—Ὑπερηχητικὰ ταχύτητες σ. 256.—Πηγὴ ἤχων γνωστῆς συχνότητος σ. 257.—Μέθοδοι μετρήσεως τῆς συχνότητος σ. 258.—Ἐντάσις τοῦ ἤχου σ. 259.—Ἀνάκλασις τῶν ἤχων σ. 259.—Ἡχώ καὶ μετήχησις σ. 260.—Συμβολὴ τῶν ἤχων σ. 260.—Διακροτήματα σ. 261.—Φαινόμενον Doppler—Fizeau σ. 261.—Σύνθετοι ἤχοι σ. 262.—Χορδαί σ. 263.—Ἡχητικοὶ σωλήνες σ. 265.—Ράβδοι σ. 267.—Συντονισμὸς σ. 268.—Γραμμοφῶνον σ. 269.—Ὑποκειμενικὰ καὶ ἀντικειμενικὰ γνωρίσματα τῶν ἤχων σ. 269.—Ὅρια τῶν ἀκουστικῶν ἤχων σ. 270.—Ὑπερηχοί σ. 271.—Τὸ οὖς σ. 271.—Ἀνθρωπινὴ φωνὴ σ. 273.—Φυσικὴ θεωρία τῆς Μουσικῆς—Μουσικὰ διαστήματα σ. 274.

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ**ΘΕΡΜΟΤΗΣ****ΙΓ' Θερμότης - Θερμοκρασία.**

† Γενικά περί θερμότητος σ. 276.—Θερμόμετρα σ. 277.—Θερμομετρικαὶ κλίμακες σ. 277.—Ἄλλοι τύποι θερμομέτρων σ. 279.

ΙΖ' Θερμικὴ διαστολή.

† Γενικά περί θερμικῆς διαστολῆς σ. 280.—Γραμμικὴ διαστολὴ τῶν στερεῶν σ. 281.—Σχέσις μήκους καὶ θερμοκρασίας σ. 282.—Διμεταλλικὰ ἐλάσματα σ. 283.—Δύναμις, ἀναπτυσσομένη ἐκ τῆς διαστολῆς σ. 284.—Κυβικὴ διαστολὴ τῶν στερεῶν σ. 284.—Ἀποτελέσματα τῆς διαστολῆς τῶν στερεῶν σ. 285.—Διαστολὴ τῶν ὑγρῶν σ. 286.—Ἀνωμαλία διαστολῆς τοῦ ὕδατος σ. 287.—Διαστολὴ τῶν ἀερίων ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν—Πρῶτος νόμος τοῦ Gay—Lussac σ. 288.—Δεύτερος νόμος τοῦ Gay—Lussac σ. 289.—Ἀπόλυτος θερμοκρασία—Ἀπόλυτον μηδέν σ. 291.—Νέα μορφή τῶν νόμων

Gay-Lussac σ. 292. — Νόμος Boyle-Mariotte-Gay-Lussac σ. 293. — Μεταβολή της πυκνότητας των αερίων μετά της θερμοκρασίας σ. 294. — Καταστατική εξίσωση των αερίων σ. 295. — ~~Σταθερά~~ Loschmidt σ. 298. — Μεταβολή της θερμοκρασίας ενός αερίου κατά την μεταβολήν του όγκου του σ. 299. — Εύρεσις της σχετικής πυκνότητος ενός αερίου ἐκ του μοριακού βάρους σ. 299.

ΙΗ' Θερμιδομετρία.

✓ Μονάδες θερμότητος σ. 301. — Θερμιδικός νόμος της θερμιδομετρίας σ. 301. — Μονάς ειδικής θερμότητος σ. 302. — ~~Θερμοχωρητικότης~~ σ. 303. — ~~Θερμιδόμετρα~~ σ. 303. — Μέθοδος των μειγμάτων σ. 304. — Ειδικαί θερμότητες των αερίων σ. 306. — Πηγαι θερμότητος σ. 307. — Θερμότης καύσεως σ. 307. — Θερμότης διαλύσεως σ. 308.

ΙΘ' Μεταβολαί της καταστάσεως τῶν σωμάτων.

✓ Αἱ τρεῖς καταστάσεις της ὕλης σ. 309. — Τήξις σ. 309. — ~~Θερμιδόμετρον~~ των Lavoisier-Laplace σ. 311. — Πήξις σ. 312. — ~~Υατέρσις~~ πήξεως σ. 313. — Μέτρησις της θερμότητος τήξεως σ. 313. — Μεταβολή του όγκου κατά την πήξιν σ. 314. — Γραφική παράστασις του όγκου συναρτήσει της θερμοκρασίας σ. 315. — Επίδρασις της πίεσεως ἐπὶ της θερμοκρασίας τήξεως σ. 316. — Επίδρασις διαλυμένων οὐσιῶν ἐπὶ του σημείου τήξεως σ. 316. — Σημεῖον τήξεως τῶν κραμάτων σ. 316. — ~~Εξαέρωσις~~ σ. 317. — ~~Εξαέρωσις~~ εἰς τὸ κενόν σ. 317. — Μεταβολή της τάσεως κεκορεσμένων ἀτμῶν μετά της θερμοκρασίας σ. 318. — ~~Ακόρεστοι~~ ἀτμοὶ σ. 319. — ~~Εξάτμισις~~ σ. 320. — Βρασμός σ. 321. — Μεταβολή του σημείου ζέσεως μετά της ἐξωτερικῆς πίεσεως σ. 323. — ~~Χύμα~~ του Papin σ. 324. — Θερμότης εξαερώσεως σ. 325. — Ψύξις, λόγῳ εξαερώσεως σ. 326. — ~~Εξαχνωσις~~ σ. 326. — ~~Αποσταξις~~ σ. 327. — ~~Επιμετάλλωσις~~ ἐν τῷ κενῷ σ. 328. — ~~Υγροποιήσις~~ των αερίων σ. 328. — ~~Αέρια~~, φερόμενα ἐν τῷ ἔμπορῳ σ. 329. — Μέθοδοι παραγωγῆς χαμηλῶν θερμοκρασιῶν σ. 329. — ~~Υγροποιήσις~~ του αέρος διὰ της μηχανῆς Linde σ. 330. — ~~Μοριακὴ ἢ θερμοκίνησις~~ σ. 330. — ~~Διήχυσις~~, ~~διαπύκνωσις~~ σ. 331. — ~~Κινητικὴ~~ θεωρία σ. 333. — ~~Θωρακισμός~~ σ. 333. — ~~Θωρακικὴ~~ πίεσις σ. 335.

Κ' Διάδοσις της θερμότητος.

✓ Ἀγωγή της θερμότητος σ. 336. — Νόμος της ἀγωγῆς της θερμότητος σ. 338. — ~~Διάδοσις~~ της θερμότητος διὰ μεταφοράς σ. 339. — ~~Διάδοσις~~ της θερμότητος δι' ἀκτινοβολίας σ. 340. — ~~Απορρόφησις~~ της ἀκτινοβολίας σ. 342.

ΚΑ' Στοιχεῖα ἐκ της Θερμοδυναμικῆς.

✓ Εσωτερικὴ ἐνέργεια σ. 343. — ~~Μετατροπὴ~~ του μηχανικοῦ ἔργου εἰς θερμότητα — ~~Πρώτον~~ ~~θερμοδυναμικὸν ἀξίωμα~~ σ. 343. — Ἔργον, παραγόμενον κατὰ την ἐκτόνωσιν ενός αερίου σ. 345. — ~~Μετατροπὴ~~ της θερμότητος εἰς ἔργον — ~~Δεύτερον~~ ~~θερμοδυναμικὸν ἀξίωμα~~ σ. 345. — ~~Θερμοδυναμικὸς~~ συντελεστής ἀποδόσεως σ. 346. — Ἡ θερμότης ὡς μορφή ἐνεργείας κατωτέρως ποιότητος σ. 348.

ΚΒ' Θερμικαὶ μηχαναί.

✓ Ἀτμομηχανή σ. 349. — ~~Μηχαναί~~ ἐσωτερικῆς καύσεως δ. 351. — ~~Αεριοστρόβιλοι~~ σ. 354. — ~~Μηχαναί~~ σ. 354. — ~~Αὐτοκίνητον~~ σ. 356.

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΜΕΤΕΩΡΟΛΟΓΙΑΣ

✓ Γενικά ἐκ της Μετεωρολογίας σ. 358. — Ἀτμόσφαιρα σ. 358. — Θερμοκρασία σ. 358. — Ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις σ. 359. — Ἄνεμος σ. 359. — Πρόγνωσις του καιροῦ σ. 361. — Ὑγρομετρία σ. 361. — Δρόσος, πάχνη, νέφη, ὁμίχλη σ. 362. — Βροχή, χιών, χάλαζα σ. 363. — Κλιματισμός σ. 363.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

✓ Στοιχειώδεις γνώσεις ἐκ της Τριγωνομετρίας σ. 364. — Ὅδηγία διὰ την λύσιν τῶν ἀσκήσεων σ. 366. — Παραδείγματα λύσεως ἀσκήσεων σ. 368.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§ 1. **Φυσικά φαινόμενα - Φυσικοί νόμοι.** Ἐκ τῆς καθημερινῆς πείρας εἶναι γνωστὸν ὅτι, ἔὰν ἀφήσωμεν ἐλεύθερον ἓνα λίθον, οὗτος πίπτει. Ἐπίσης, εἶναι γνωστὸν ὅτι, ἔὰν προσφέρωμεν συνεχῶς θερμότητα εἰς ποσότητά τινα ὕδατος, αὕτη, μετ' ὀλίγον, θ' ἀρχίσῃ νὰ βράζῃ, Ὅμοίως, γνωρίζομεν ὅτι ἄνθρακες, καίόμενοι, δίδουν θερμὰ ἀέρια καὶ τέφραν.

Ἡ πτώσις τοῦ λίθου, ὁ βρασμὸς τοῦ ὕδατος, ἡ καύσις τῶν ἀνθράκων καί, γενικῶς, αἱ διαφοροὶ μεταβολαί, αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν χώραν εἰς τὴν Φύσιν, καλοῦνται **φαινόμενα**.

Τὰ διάφορα φαινόμενα δυνάμεθα νὰ κατατάξωμεν εἰς δύο κατηγορίας: α) εἰς τὰ **φυσικά φαινόμενα**, τὰ ὁποῖα ἐξετάζει ἡ Φυσικὴ καὶ β) εἰς τὰ **χημικά φαινόμενα**, τὰ ὁποῖα ἐξετάζει ἡ Χημεία.

Φυσικά φαινόμενα θὰ καλέσωμεν ὅλα ἐκεῖνα τὰ φαινόμενα, εἰς τὰ ὁποῖα δὲν μεταβάλλεται ἡ σύστασις τῶν διαφόρων σωμάτων. Οὕτω, π.χ., κατὰ τὴν πτώσιν τοῦ λίθου οὐδεμία μεταβολὴ ἐπέρχεται εἰς τὴν σύστασιν αὐτοῦ. Ἐπίσης, ἔὰν θερμάνωμεν τεμάχιον λευκοχρόσου εἰς τὴν φλόγα λύχνου, οὐδεμία μεταβολὴ θὰ προκληθῇ εἰς τὴν σύστασιν τοῦ λευκοχρόσου. Ὅμοίως, ἔὰν ρίψωμεν ἐντὸς ὕδατος τεμάχιον κηροῦ, τοῦτο ἐπιπλέει, οὐδεμία, ὅμως, μεταβολὴ ἐπέρχεται εἰς τὴν σύστασιν τοῦ κηροῦ.

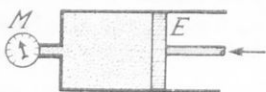
Ὑπάρχουν, ὅμως, καὶ φαινόμενα, κατὰ τὰ ὁποῖα ἐπέρχονται ριζικαὶ μεταβολαὶ εἰς τὴν σύστασιν τῶν σωμάτων. Οὕτω, κατὰ τὴν καύσιν τῶν ἀνθράκων, ὁ ἄνθραξ ἀντιδρᾷ μετὰ τοῦ ὀξυγόνου τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος καὶ μετατρέπεται εἰς ἀέριον, καλούμενον διοξειδίου τοῦ ἀνθράκος, ἐνῶ ἀπομένει καὶ τέφρα. Ὅμοίως, τεμάχιον ἀνθρακασβεστίου, ριπτόμενον ἐντὸς ὕδατος, ἀντιδρᾷ μετ' αὐτοῦ καὶ σχηματίζει ἀέριον, τὸ ὁποῖον καλεῖται ἀκετυλένιον (χ. ἀσετυλίνη). Τὰ φαινόμενα ταῦτα θὰ καλέσωμεν **χημικά φαινόμενα**. Ὁ διαχωρισμὸς, ὅμως, αὐτὸς μεταξὺ φυσικῶν καὶ χημικῶν φαινομένων δὲν εἶναι πάντοτε τὸσον σαφὴς καὶ ὑπάρχουν φαινόμενα, τὰ ὁποῖα δύναται νὰ ἐξετάσῃ τὸσον ἡ Φυσικὴ, ὅσον καὶ ἡ Χημεία.

Διὰ τὴν περιγραφὴν τῶν φυσικῶν φαινομένων χρησιμοποιοῦνται διάφορα μεγέθη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται **φυσικά μεγέθη**. Τοιαῦτα μεγέθη εἶναι, π.χ., ἡ θερμοκρασία τῆς φλογός, τὸ βάρος τοῦ λευκοχρόσου, ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος κ.λ.

Διὰ τὴν μελέτην τῶν φυσικῶν φαινομένων ἀπαιτεῖται ἡ προσεκτικὴ των παρακολούθησις καί, εἰ δυνατόν, ἡ ἀναπαραγωγή των εἰς τὸ ἐργαστήριον (**πείραμα**), ὑπὸ συνθήκας, μάλιστα, καταλληλοτέρας ἀπὸ τὰς συνθήκας

ἐπικρατούσας. Οὕτω, τὸ φαινόμενον τῆς ἐλευθέρως πτώσεως ἐνὸς σώματος γίνεται τόσον ταχέως, ὥστε δὲν προφθάνομεν νὰ τὸ μελετήσωμεν. Ἐάν, ὅμως, ἐκτελέσωμεν ἓν πείραμα, εἰς τὸ ὁποῖον νὰ ἐπιβραδύνωμεν τὴν πτώσιν (διὰ τῆς χρησιμοποιούσης, π.χ., τοῦ *κεκλιμένου ἐπιπέδου*), δυνάμεθα νὰ παρακολουθήσωμεν ἀνέτως τὸ ἐν λόγῳ φαινόμενον. Ἡ κυρία, ὅμως, σημασία τοῦ πειράματος συνίσταται εἰς τὸ ὅτι δι' αὐτοῦ δυνάμεθα ν' ἀνεύρωμεν καὶ τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ διάφορα φυσικὰ μεγέθη, τὰ ὁποῖα παρουσιάζονται εἰς ἓν φαινόμενον. Αἱ σχέσεις, ἀκριβῶς, αὗται ἀποτελοῦν τοὺς καλουμένους **νόμους** τῶν φαινομένων.

Ὡς παράδειγμα ὡς μελετήσωμεν τὸ ἐξῆς φαινόμενον: Ἐντὸς κυλινδρικοῦ δοχείου, φρασσομένου διὰ τοῦ κινητοῦ ἐμβόλου E (σχ. 1), ἐγκλείομεν



Σχ. 1. Συσκευή διὰ τὴν εὐρέσιν τοῦ νόμου, ὁ ὁποῖος συνδέει τὸν ὄγκον ἐνὸς αἰρίου μετὰ τῆς πίεσεως αὐτοῦ.

ἓν αἶριον. Ἐάν, διὰ μετακινήσεως τοῦ ἐμβόλου, ἐλαττώσωμεν τὸν ὄγκον τοῦ αἰρίου — λαμβάνοντες πρόνοιαν ὥστε ἡ θερμοκρασία τοῦ αἰρίου νὰ διατηρῇται σταθερά — θὰ παρατηρήσωμεν, τῇ βοηθείᾳ τοῦ *μανομέτρου* M (*), ὅτι ἡ *πίεσις* τοῦ αἰρίου ἠϋξήθη.

Διὰ νὰ εὐρώμεν τὸν νόμον, τὸν ὁποῖον ἀκολουθεῖ τὸ φαινόμενον τοῦτο, ἐλαττώνομεν τὸν ὄγκον τοῦ αἰρίου, π.χ., εἰς τὸ ἡμισιν, τὸ τρίτον κ.λ. τοῦ ἀρχικοῦ καὶ εὐρίσκομεν ὅτι, ἐὰν ὁ ὄγκος τοῦ αἰρίου ἐλαττωθῇ εἰς τὸ ἡμισιν τοῦ ἀρχικοῦ, ἡ πίεσις του θὰ διπλασιασθῇ, ἐὰν εἰς τὸ τρίτον, θὰ τριπλασιασθῇ κ.ο.κ. Τοῦτο ἐκφράζεται ὑπὸ τῆς κάτωθι προτάσεως, ἡ ὁποία φέρεται ὑπὸ τὸ ὄνομα «*νόμος Boyle - Mariotte (Μπόυλ - Μαριότ)*»:

«*Ἐφ' ὅσον ἡ θερμοκρασία ἐνὸς αἰρίου διατηρεῖται σταθερά, ἡ πίεσις αὐτοῦ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ ὄγκου του.*»

§ 2. Μέτρησις φυσικῶν μεγεθῶν. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι διὰ τὴν εὐρέσιν τοῦ νόμου ἐνὸς φαινομένου ἀπαιτεῖται μέτρησις τῶν διαφόρων φυσικῶν μεγεθῶν, τὰ ὁποῖα ὑπείσρχονται εἰς τὸ φαινόμενον — π.χ., τῆς πίεσεως καὶ τοῦ ὄγκου ἐνὸς αἰρίου εἰς τὸν νόμον Boyle - Mariotte.

Ἡ *μέτρησις* ἐνὸς φυσικοῦ μεγέθους συνίσταται εἰς τὴν σύγκρισιν αὐτοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς μέγεθος, τὸ ὁποῖον, κατόπιν συμφωνίας, λαμβάνομεν ὡς *μονάδα μετρήσεως*. Οὕτω, διὰ νὰ μετρήσωμεν τὸ μήκος, π.χ., μιᾶς σανίδος, συγκρίνομεν αὐτὸ πρὸς ἄλλο μήκος — π.χ., τὸ μήκος ἐνὸς μέτρου — τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως μηκῶν. Ἐκ τῆς μετρήσεως θὰ προκύψῃ τὸ μήκος τῆς σανίδος ἴσον, π.χ., πρὸς 2,5 μέτρα. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος (2,5), ὁ ὁποῖος προέκυψεν ἐκ τῆς μετρήσεως, καλεῖται *ἀριθμητικὴ τιμὴ* τοῦ μετρηθέντος μεγέθους.

(*) Μανόμετρα καλοῦνται ὄργανα μετρήσεως τῆς πίεσεως.

• § 3. **Θεμελιώδεις και παράγωγοι μονάδες.** Κατά τ' ἀνωτέρω, διὰ τὴν μέτρησιν οἰουδήποτε φυσικοῦ μεγέθους ἀπαιτεῖται καὶ ἡ ἀντίστοιχος μονάς. Ἐάν, ὅμως, δι' ἕκαστον φυσικὸν μέγεθος ἐξελέγето αὐθαίρετως ἡ ἀντίστοιχος μονάς, θὰ προέκυπτε μέγας ἀριθμὸς μονάδων, αἱ ὁποῖαι θὰ ἦσαν ἀνεξάρτητοι μεταξύ των. Ἐν τούτοις, εὐρέθη ὅτι εἶναι δυνατόν νὰ ἐκλέξωμεν ὀλίγας μόνον ἀνεξαρτήτους μονάδας, τὰς ὁποίας καλοῦμεν **θεμελιώδεις μονάδας** καὶ ἐξ αὐτῶν νὰ λάβωμεν ὅλας τὰς ὑπολοίπους, τὰς ὁποίας καλοῦμεν **παράγωγους μονάδας**.

Οὕτω, ἐὰν ὡς θεμελιώδη μονάδα μήκους ἐκλέξωμεν τὸ μῆκος ἑνὸς μέτρου, λαμβάνομεν ὡς παραγωγὸν μονάδας τὸ *τετραγωνικὸν μέτρον* διὰ τὸ ἔμβαδον καὶ τὸ *κυβικὸν μέτρον* διὰ τὸν ὄγκον.

Ἀναλόγως τῆς ἐκλογῆς τῶν θεμελιωδῶν μονάδων, δημιουργοῦνται τὰ διάφορα **συστήματα μονάδων**, ἐκ τῶν ὁποίων περιγράφομεν τρία - τὸ σύστημα C.G.S., τὸ σύστημα M.K.S. καὶ τὸ Τεχνικὸν Σύστημα.

1) **Σύστημα μονάδων C.G.S. (centimètre, gramme, seconde).** Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ὡς θεμελιώδη μεγέθη ἐξελέγησαν τὸ **μῆκος**, ἡ **μᾶζα** καὶ ὁ **χρόνος**, με ἀντιστοίχους μονάδας τὸ *ἐκατοστόμειτρον* (1 cm) διὰ τὸ μῆκος, τὸ *γραμμάριον* (1 gr) διὰ τὴν μᾶζαν καὶ τὸ *δευτερόλεπτον* (1 sec) διὰ τὸν χρόνον.

Ἐκ τῶν θεμελιωδῶν αὐτῶν μονάδων προκύπτουν αἱ διάφοροι παράγωγοι μονάδες, ὅπως ἡ μονάς τοῦ ἔμβαδου (1 cm^2), ἡ μονάς ταχύτητος (1 cm/sec) κ.λ.

2) **Σύστημα μονάδων M.K.S. (mètre, kilogramme, seconde).** Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ὡς θεμελιώδη μεγέθη ἐξελέγησαν τὸ **μῆκος**, ἡ **μᾶζα** καὶ ὁ **χρόνος**, με ἀντιστοίχους μονάδας τὸ *μέτρον* (1 m) διὰ τὸ μῆκος, τὸ *χιλιόγραμμα* (1 kg) διὰ τὴν μᾶζαν καὶ τὸ *δευτερόλεπτον* (1 sec) διὰ τὸν χρόνον.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύστημα τοῦτο ἔχει αὐτὰ θεμελιώδη μεγέθη, ὅπως τὸ σύστημα C.G.S., αἱ μονάδες, ὅμως, μήκους καὶ μᾶζης ἐξελέγησαν μεγαλύτεραι - ἡ μονάς μήκους 100 φορές μεγαλύτερα, ἡ δὲ μονάς μᾶζης 1000 φορές μεγαλύτερα.

Εἶναι προφανὲς ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐξ αὐτῶν προερχομένων παραγῶγων μονάδων πρὸς τὰς ἀντιστοίχους μονάδας τοῦ συστήματος C.G.S. θὰ εἶναι ἴσος πρὸς ἀκεραίας δυνάμεις τοῦ 10 .

3) **Τεχνικὸν Σύστημα (T.S.).** Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο θεμελιώδη μεγέθη εἶναι τὸ **μῆκος**, ἡ **δύναμις** καὶ ὁ **χρόνος**, με ἀντιστοίχους μονάδας τὸ *μέτρον* (1 m) διὰ τὸ μῆκος, τὸ *χιλιόγραμμα βάρους* (1 kg^*) διὰ τὴν δύναμιν καὶ τὸ *δευτερόλεπτον* (1 sec) διὰ τὸν χρόνον. *kp (kilopond)

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐνῶ εἰς τὸ σύστημα C.G.S., ἡ μᾶζα εἶναι θεμελιώδης μέγεθος (ὁπότε ἡ δύναμις θὰ προκύπῃ παράγωγον μέγεθος), εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα ἡ δύναμις εἶναι θεμελιώδης μέγεθος καὶ ἡ μᾶζα παράγωγον.

ΠΙΝΑΞ ΘΕΜΕΛΙΩΔΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ

ΣΥΣΤΗΜΑ	ΜΗΚΟΣ	ΜΑΖΑ	ΧΡΟΝΟΣ	ΔΥΝΑΜΙΣ
C.G.S.	cm	gr	sec	—
M.K.S.	m	kgr	sec	—
T.Σ.	m	—	sec	kgr*

Τόσον εις τὸ σύστημα μονάδων C.G.S., ὥσον εις τὸ M.K.S. καὶ τὸ Τεχνικὸν Σύστημα (ἢ οἰοδήποτε ἄλλο) αἱ θεμελιώδεις μονάδες ἐξελέγησαν ἐντελῶς αὐθαιρέτως. Θὰ ἡδύνατο, δηλ., τὸ μέτρον (1 m) νὰ εἶχεν ἐκλεγῇ μεγαλύτερον ἢ μικρότερον τοῦ ἤδη χρησιμοποιουμένου. Τὸ περιεχόμενον τῶν φυσικῶν νόμων οὐδόλως θὰ μετεβάλλετο ἐκ τούτου.

§ 4. Ὑπόθεσις καὶ θεωρία. Ἡ εὐρεσις τοῦ νόμου, τοῦ διέποντος ἐν φαινόμενον, δὲν ἀρκεῖ διὰ νὰ ἱκανοποιήσῃ τὸν ἄνθρωπον. Ἀμέσως τίθεται καὶ τὸ ἐρώτημα πῶς ἐξηγείται τόσον τὸ παρατηρηθὲν φαινόμενον, ὥσον καὶ ὁ νόμος, τὸν ὁποῖον τοῦτο ἀκολουθεῖ. Εἰς τὴν ἀπάντησιν βοηθεῖ πολὺ ἡ **ὑπόθεσις**. Διὰ νὰ ἐξηγήσωμεν, π.χ., τὰ φωτεινὰ φαινόμενα, καταφεύγομεν εἰς τὴν ὑπόθεσιν τῆς *ἐκπομπῆς κυμάτων* καὶ ἐπιζητοῦμεν νὰ εὐρωμεν ἐάν, βάσει τῆς ὑποθέσεως ταύτης, ἐξηγοῦνται τὰ διάφορα φωτεινὰ φαινόμενα, ὅπως, π.χ., ἡ ἀνάκλασις, ἡ διάθλασις κ.λ. Ἐὰν τοῦτο συμβαίῃ, ἡ ὑπόθεσις ἀποκτῇ, πλέον, γενικὴν ἰσχύν καὶ καλεῖται **θεωρία**. Ἐάν, ὅμως, παρατηρηθῇ φαινόμενον ἢ φαινόμενα, τὰ ὁποῖα ἡ θεωρία δὲν δύναται νὰ ἐξηγήσῃ, τότε αὕτη ἡ ἐγκαταλείπεται ἢ τροποποιεῖται, κατὰ τρόπον ὥστε νὰ ἐρχεται πάντοτε εἰς συμφωνίαν μὲ τὸ πείραμα.

• **§ 5. Μονάδες διαφόρων φυσικῶν μεγεθῶν.** Α) *Μονάδες μήκους.* Ὅπως εἶδομεν, ὡς μονὰς μήκους εἰς τὸ σύστημα C.G.S. λαμβάνεται τὸ

1 ἑκατοστόμετρον (1 cm).

Τοῦτο ὀρίζεται ὡς τὸ $1/100$ τοῦ *προτύπου μέτρον* (σχ. 2), δηλ., ὡς τὸ $1/100$ τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ δύο χαραγῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν χαραχθῇ ἐν ἑνὸς κανόνος ἐξ ἱριδιοῦχου λευκοχρύσου, φυλασσομένου εἰς τὸ Διεθνὲς Γραφεῖον Μέτρων καὶ Σταθμῶν.

Εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα καὶ τὸ σύστημα M.K.S. μονὰς μήκους εἶναι τὸ

1 μέτρον (1 m) = 100 cm.

Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω μονάδων μήκους χρησιμοποιοῦνται καὶ τὰ πολλὰ-πλάσια ἢ ὑποπολλαπλάσια αὐτῶν (*):

$$1 \text{ km (χιλιόμετρον)} = 1000 \text{ m.}$$

$$1 \text{ dm (δεκατόμετρον ἢ παλάμη)} = 10^{-1} \text{ m.}$$

$$1 \text{ mm (χιλιοστόμετρον)} = 10^{-3} \text{ m (**).}$$

Εἰς τὴν Ὀπτικήν, προκειμένου νὰ μετρηθοῦν πολὺ μικρὰ μήκη (π.χ., τὸ μήκος κύματος τοῦ φωτός), χρησιμοποιοῦνται συνήθως μονάδες μήκους, πολὺ μικρότεραι τῶν προηγουμένων - τὸ **1 μικρὸν (1 μ)** καὶ τὸ **1 Ångström (Ἀνγκστρεμ, 1 Å)**. Εἶναι δὲ

$$1 \mu = 10^{-6} \text{ m} = 10^{-4} \text{ cm} \text{ καὶ } 1 \text{ Å} = 10^{-8} \text{ cm.}$$

Διὰ νὰ λάβῃ τις μίαν ἰδεάν τῆς μονάδος **1 μικρὸν**, ἀναφέρομεν ὅτι τὸ πάχος **1 φύλλου σιγαρογράφου** εἶναι, περίπου, ἴσον πρὸς **10 μ**.

Ἡ μονὰς **Ångström** χρησιμοποιεῖται ἐπίσης καὶ εἰς τὴν Ἀτομικὴν Φυσικὴν. Οὕτω, ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο ἀτόμων ἐνὸς στερεοῦ σώματος εἶναι, περίπου, ἴση πρὸς **3 Å**.

Εἰς τὴν ναυτιλίαν ὡς μονὰς μήκους χρησιμοποιεῖται τὸ

$$1 \text{ ναυτικὸν μίλιον} = 1853 \text{ m.}$$

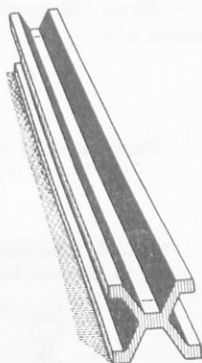
Τὸ μήκος τοῦτο ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἀπόστασιν δύο σημείων ἐνὸς μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς, τὰ ὁποῖα ὑποτείνουν τὸς ἐνὸς πρώτου λεπτοῦ τῆς μοίρας.

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸ **μέτρον (1 m)**, τοῦτο ἀρχικῶς εἶχεν ὁρισθῇ ὡς τὸ **1/40.000.000** τοῦ μήκους τῆς περιφερείας ἐνὸς μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς. Τὸ οὕτω ὁρισθὲν μέτρον εὐρέθη, μὲ τὴν πρόοδον τῶν μετρήσεων, ὅτι εἶναι κατὰ τι μικρότερον τοῦ σημερινοῦ προτύπου μέτρου.

Β) Μονάδες μάζης. Ὡς μονὰς μάζης εἰς τὸ σύστημα C.G.S. χρησιμοποιεῖται τὸ **γραμμάριον (μάξης)**, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ **1/1000** τῆς μάζης τοῦ **προτύπου χιλιογράμμου**, δηλ., ἐνὸς κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος εἶναι κατεσκευασμένος ἐξ ἱριδιούχου λευκοχρόσου καὶ φυλάσσεται εἰς τὸ Διεθνὲς Γραφεῖον Μέτρων καὶ Σταθμῶν.

(*) Διὰ τὰ πολλαπλάσια καὶ ὑποπολλαπλάσια τῶν διαφόρων μονάδων χρησιμοποιοῦνται ὠρισμένα προθέματα. Οὕτω, τὸ σύμβολον **M (mega)**, τιθέμενον πρὸ μονάδος τινος, δηλοῖ νέαν μονάδα, ἐν ἑκατομύριον φορὰς μεγαλύτεραν. Παράδειγμα: **1 Mt (μεγατόνος)** = 10^6 t . Τὸ σύμβολον **k (kilo)** δηλοῖ μονάδα, χιλίας φορὰς μεγαλύτεραν. Παράδειγμα: **1 km (χιλιόμετρον)** = 10^3 m . Τὸ σύμβολον **m (milli)**, τιθέμενον πρὸ τινος μονάδος, δηλοῖ τὸ χιλιοστὸν αὐτῆς. Παράδειγμα: **1 mm (millimètre, χιλιοστόμετρον)** = $1/1000 \text{ m} = 10^{-3} \text{ m}$. Τὸ σύμβολον **μ (μικρὸν)** δηλοῖ τὸ ἑκατομμυριοστὸν. Παράδειγμα: **1 μsec (μικροδευτερόλεπτον)** = 10^{-6} sec .

(**) Αἱ ὀνομασίαι **δάκτυλος, γραμμὴ**, ὡς οὐδαμοῦ χρησιμοποιούμεναι, πρέπει νὰ ἐγκαταλειφθοῦν καὶ νὰ μὴ διδάσκωνται οὔτε καὶ εἰς τὰ Δημοτικὰ Σχολεῖον.



Σχ. 2. Πρότυπον μέτρον. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο χαραγῶν καθορίζει τὸ μήκος **1 m**.

Τὸ γραμμάριον, κατὰ τὸν ἀρχικόν του ὀρισμόν, εἶναι ἡ μᾶζα ἐνὸς κυβικοῦ ἑκατοστομέτρου ἀπεσταγμένου ὕδατος, θερμοκρασίας $+4^{\circ} \text{C}$.

Ἐκτὸς τῆς μονάδος 1 gr χρησιμοποιοῦνται, συνήθως, καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ :

$$1 \text{ χιλιόγραμμον (1 kgr)} = 1000 \text{ gr,}$$

$$1 \text{ τόννος (1 t)} = 1000 \text{ kgr.}$$

Ὑποπολλαπλάσια τοῦ γραμμαρίου χρησιμοποιοῦνται τὰ ἑξῆς :

$$1 \text{ mgr (χιλιοστόγραμμον)} = 10^{-3} \text{ gr,}$$

$$1 \text{ } \mu\text{gr (microgramme)} = 10^{-6} \text{ gr.}$$

Ἡ μονὰς αὕτη φέρεται καὶ ὑπὸ τὸ ὄνομα 1 γ (1 γάμμα) .

Εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα ὡς μονὰς μάζης χρησιμοποιεῖται ἡ

1 τεχνικὴ μονὰς μάζης (1 T.M.).

Εἶναι δὲ

$$1 \text{ T. M.} = 9,81 \text{ kgr.}$$

Εἰς τὴν Χημείαν χρησιμοποιοῦνται καὶ δύο ἄλλαι μονάδες μάζης - τὸ *γραμμοάτομον* καὶ τὸ *γραμμομόριον* - τὰς ὁποίας θὰ γνωρίσωμεν εἰς ἄλλο Κεφάλαιον.

Γ) Μονάδες δυνάμεως. 1) *T. Σ.*
Εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα ὡς μονὰς δυνάμεως χρησιμοποιεῖται τὸ

1 χιλιόγραμμον βάρους (1 kgr*).

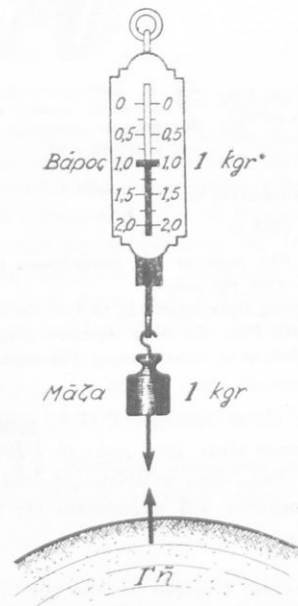
Τὸ χιλιόγραμμον βάρους ὀρίζεται ὡς ἡ δύναμις ἐκείνη, διὰ τῆς ὁποίας ἔλκει ἡ $\Gamma\tilde{\eta}$ τὸ «πρότυπον χιλιόγραμμον» εἰς τόπον γεωγραφικοῦ πλάτους 45° καὶ εἰς τὸ ὕψος τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης (σχ. 3).

Ἐκτὸς τῆς μονάδος ταύτης χρησιμοποιεῖται καὶ τὸ χιλιοστόν αὐτῆς - τὸ

1 γραμμάριον βάρους (1 gr*).

Διὰ τὴν μέτρησιν μεγάλων δυνάμεων χρησιμοποιεῖται ἡ μονὰς

$$1 \text{ τόννος βάρους (1 t*)} = 1000 \text{ kgr*}.$$



Σχ. 3. Ἡ μᾶζα 1 kgr ἔλκεται ὑπὸ τῆς $\Gamma\tilde{\eta}$ ς διὰ δυνάμεως 1 kgr* .

2) *Σύστημα C.G.S.* Ἡ μονὰς δυνάμεως εἰς τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἡ **1 δύνη (1 dyn).**

Αὕτη ὀρίζεται κατωτέρω καὶ εἶναι, περίπου, ἴση πρὸς τὸ $1/1000$ τοῦ γραμμαρίου βάρους. Ἀκριβέστερον εἶναι

$$1 \text{ dyn} = \frac{1}{981} \text{ gr}^*.$$

3) **Σύστημα Μ.Κ.Σ.** Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο μονὰς δυνάμεως εἶναι τὸ **1 Newton** (**1 Nt**) (*Νιούτον*).

Εἶναι δὲ

$$1 \text{ Nt} = \frac{1}{9,81} \text{ kg}^*.$$

Δ) **Μονάδες χρόνου.** Ὡς μονὰς χρόνου, τόσον εἰς τὸ σύστημα C.G.S., ὅσον εἰς τὸ Μ.Κ.Σ. καὶ τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, χρησιμοποιεῖται τὸ

$$1 \text{ δευτερόλεπτον (1 sec.)}$$

Τὸ **1 sec** εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $1/24 \cdot 60 \cdot 60$ τῆς μέσης ἡλιακῆς ἡμέρας (*).

*Ἦτοι εἶναι

$$1 \text{ sec} = \frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60} \text{ μέσης ἡλιακῆς ἡμέρας.}$$

Ἐκτὸς τῆς μονάδος **1 sec** χρησιμοποιοῦνται, συνήθως, καὶ αἱ ἐξῆς :

$$1 \text{ λεπτόν (1 min)} = 60 \text{ sec.}$$

$$1 \text{ ὥρα (1 h)} = 60 \text{ min} = 60 \cdot 60 \text{ sec.}$$

Ε) **Μονάδες ἐμβαδοῦ καὶ ὄγκου.** α) **Μονάδες ἐμβαδοῦ.** Ἐφ' ὅσον εἰς τὸ σύστημα C.G.S. ὡς μονὰς μήκους ἐξελέγη τὸ **1 cm**, ἡ μονὰς ἐμβαδοῦ (ἢ ὁποῖα, ὡς εἶδομεν, εἶναι παράγωγος μονὰς) θὰ εἶναι τὸ

$$1 \text{ τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον (1 cm}^2\text{)}.$$

Εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα καὶ τὸ σύστημα Μ.Κ.Σ., ἐφ' ὅσον ὡς μονὰς μήκους ἐξελέγη τὸ **1 m**, μονὰς ἐμβαδοῦ θὰ εἶναι τὸ

$$1 \text{ τετραγωνικὸν μέτρον (1 m}^2\text{)}.$$

Εἰς τὸν καθημερινὸν βίον χρησιμοποιοῦμεν ὡς μονάδα ἐμβαδοῦ καὶ τὸ

$$1 \text{ στρέμμα} = 1000 \text{ m}^2.$$

β) **Μονάδες ὄγκου.** Εἰς τὸ σύστημα C.G.S. ὡς μονὰς ὄγκου χρησιμοποιεῖται τὸ

$$1 \text{ κυβικὸν ἑκατοστόμετρον (1 cm}^3\text{)}.$$

Εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα καὶ τὸ σύστημα Μ.Κ.Σ. ὡς μονὰς ὄγκου χρησιμοποιεῖται τὸ

$$1 \text{ κυβικὸν μέτρον (1 m}^3\text{)}.$$

Συνήθης μονὰς μετρήσεως ὄγκου εἶναι καὶ τὸ

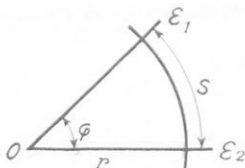
$$1 \text{ λίτρον (1 lt)} = 1000 \text{ cm}^3.$$

*Ἄρα εἶναι

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ lt.}$$

(*) *Μέση ἡλιακὴ ἡμέρα* καλεῖται ὁ κατὰ μέσον ὄρον χρόνος, ὁ παρεχόμενος μεταξὺ δύο διαδοχικῶν μεσουρανήσεων τοῦ Ἡλίου.

γ) **Γωνία και μονάδες αυτής.** Διά νά ὁρίσωμεν τήν γωνίαν, τήν ὁποίαν σχηματίζουν δύο μὴ παράλληλοι εὐθεῖαι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, τεμνόμεναι εἰς τὸ σημείον O (σχ. 4), γράφομεν, μὲ κέντρον τὸ σημείον τομῆς των O καὶ ἀκτίνα r οἰκονομῶντες, τόξον κύκλου, ἔστω δὲ s τὸ μήκος αὐτοῦ. Καλοῦμεν **γωνίαν** φ τὸ πηλίκον τοῦ μήκους s τοῦ ὑποτεινομένου τόξου διὰ τοῦ μήκους r τῆς ἀκτίνος. Ἦτοι



Σχ. 4.

$$\varphi = \frac{s}{r} \quad (1)$$

Ὡς μονὸς μετρήσεως τῆς γωνίας χρησιμοποιεῖται εἰς ὅλα τὰ συστήματα τὸ **1 ἀκτίνιον (1 rad)**.

Τὸ **ἀκτίνιον** ἰσοῦται μὲ τήν ἐπικέντρον ἔκείνην γωνίαν, ἥ ὁποία, ἐπὶ κύκλου, ἀκτίνος r , ὑποτείνει τόξον μήκους, ἀκριβῶς, ἴσον πρὸς r .

Ἐάν θέλωμεν νά εὗρωμεν πόση εἶναι ἡ γωνία, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς πλήρη κύκλον, θέτομεν εἰς τὸν τύπον (1), ἀντὶ τοῦ s , τὸ μήκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου — τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $2\pi r$ — ὁπότε προκύπτει ὅτι εἰς πλήρη κύκλον ἀντιστοιχεῖ γωνία 2π ἀκτινίων (δηλ., $2\pi = 2 \cdot 3,14 = =$ περίπου 6 ἀκτινίων).

Ἄλλη μονὰς γωνίας εἶναι ἡ **μοίρα (1°)**, ἡ ὁποία προκύπτει ἐξ ὑποδιαιρέσεως τοῦ κύκλου εἰς 360 ἴσα μέρη.

Ἡ σχέσις μεταξὺ ἀκτινίου καὶ μοίρας προκύπτει εὐκόλως ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ ὅτι

$$\frac{2\pi \text{ ἀκτίνια}}{1 \text{ ἀκτίνιον}} \text{ ἀντιστοιχοῦν εἰς } \frac{360^\circ}{x};$$

$$x = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,296^\circ$$

$$1 \text{ rad} = 57,296^\circ.$$

• § 6. Μονάδες μήκους, ἐμβαδοῦ κ. λ., χρησιμοποιούμεναι εἰς τὰς ἀγγλοσαξωνικάς χώρας.

α) **Μονάδες μήκους:** 1 Ἴντσα (in) = 2,54 cm.

1 ποῦς (ft = foot) = 12 in = 30,5 cm.

1 ἄρδα (yd) = 3 πόδες = 0,914 m.

1 ἀγγλικὸν μίλιον (mile) = 1609 m.

β) **Μονάδες ἐμβαδοῦ.** Ὡς μονάδες ἐμβαδοῦ λαμβάνονται ἡ τετραγωνικὴ Ἴντσα, ὁ τετραγωνικὸς ποῦς κ.λ.

γ) **Μονάδες ὄγκου.** Ἐκτὸς τῶν μονάδων yd^3 , ft^3 καὶ in^3 χρησιμοποιεῖται καὶ τὸ γαλόνιον (1 gal).

Προκειμένου περὶ ὄγκου ὑγρῶν, τὸ γαλόνιον ὁρίζεται ἴσον πρὸς

1 British gallon = 4,546 λίτρα εἰς Μ. Βρετανίαν καὶ

1 gallon (U.S.) = 3,785 λίτρα εἰς τὰς Ἡν. Πολιτείας.

Τὸ γαλόνιον ὑποδιαιρεῖται εἰς 4 κονάρτ (qt) καὶ ἕκαστον κονάρτ εἰς 2 πίντας (pt).

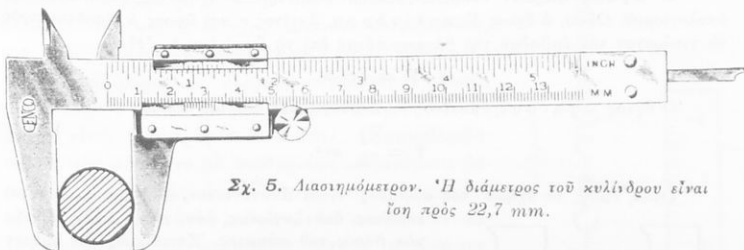
Ἐν Ἑλλάδι ἡ βενζίνη πωλεῖται εἰς (βρετανικά) γαλόνια.

δ) **Μονάδες μάζης.** Είς τὸ ἐμπόριον χρησιμοποιοῦνται αἱ μονάδες:

1 οὐγγία (oz) = 28,35 gr,

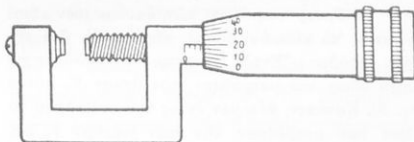
1 λίμπρα (lb = round) = 16 oz = 453,6 gr.

• **§ 7. Μέτρησης μήκους.** Τὰ μήκη μετροῦμεν κατὰ πολλοὺς τρόπους. Ὁ ἀπλούστερος συνίσταται εἰς τὴν ἐπίθεσιν ἐνὸς διηρημένου κανόνος ἐπὶ τοῦ πρὸς μέτρησιν



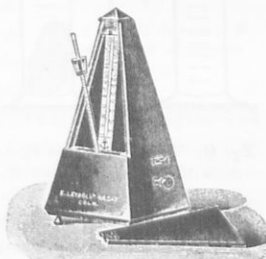
Σχ. 5. Διασημόμετρον. Ἡ διάμετρος τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴση πρὸς 22,7 mm.

ἀντικειμένου. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦνται ξύλινα ἢ μεταλλίνα **μέτρα, μετρηταί- νια** (ὅταν τὸ πρὸς μέτρησιν μήκος εἶναι πολλῶν μέτρων), **διασημόμετρα** (σχ. 5)



Σχ. 6. Μικρόμετρον.

δι' ἀκριβεῖς μετρήσεις, **μικρόμετρα** (σχ. 6) διὰ μετρήσεις μεγαλυτέρας ἀκριβείας ἢ διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ πάχους πολὺ λεπτῶν φύλλων κ.λ.



Σχ. 7. Μετρονόμος.

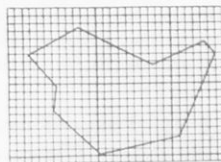
• **§ 8. Μέτρησις χρόνου.** Διὰ τὴν μέτρησιν χρόνου χρησιμοποιοῦμεν τὰ συνήθη **ὥρολόγια** (ἢ **χρο- νόμετρα**) καὶ τὸν **μετρονόμον** (σχ. 7). Κατὰ τὴν λειτουργίαν τοῦ μετρονόμου προκαλεῖται χαρακτηριστικὸν κύττημα εἰς τὸ τέλος ἐκάστης ταλαντώσεως τοῦ παλλομένου στελέχους. Μετακινούντες τὴν μικρὰν μᾶζαν κατὰ μήκος τοῦ στελέχους, ἐπιτυγχάνομεν ταχύτεραν ἢ βραδυτέραν ταλάντωσιν.

• **§ 9. Μέτρησις ἐμβαδὸν καὶ ὄγκου.** Τὸ ἐμβαδὸν ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν, ἀπλοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος, εὐρίσκεται δι' ὑπολογισμοῦ. Οὕτω, π.χ., τὸ ἐμβαδὸν S τοῦ κύκλου ὑπολογίζεται, ἐκ τῆς ἀκτίνος r , διὰ τοῦ τύπου

$$S = \pi \cdot r^2.$$

Ὅταν, ὅμως, τὸ σχῆμα τῆς ἐπιφανείας εἶναι ἀκανόνιστον καὶ δὲν ἐπιτρέπει τοιοῦτον ὑπολογισμόν, δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν αἱ ἐξῆς μέθοδοι:

α) Χαράσσεται ἐπὶ χιλιοστομετρικοῦ χάρτου τὸ σχῆμα τῆς ἐπιφανείας (σχ. 8) καὶ μετρεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν περιεχομένων τετραγωνιδίων.



Σχ. 8.

β) Ἐκ φύλλου ἰσοπαχοῦς χάρτου ἀποκόπτεται ἓν τμήμα, τὸ ὁποῖον ἔχει, ἀκριβῶς, τὸ σχῆμα τῆς ἀκανόνιστου ἐπιφανείας καὶ ζυγίζεται. Ἐκ συγκρίσεως τοῦ προκύπτοντος βάρους πρὸς τὸ βάρος ἄλλου τεμαχίου ἐκ τοῦ αὐτοῦ χάρτου, ἔχοντος ἄπλουν γεωμετρικὸν σχῆμα καὶ, συνεπῶς, γνωστὸν ἐμβαδόν, εὐρίσκεται τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν.

Ὁ ὄγκος στερεῶν σωμάτων, ἁπλοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος, εὐρίσκεται δι' ὑπολογισμοῦ. Οὕτω, ὁ ὄγκος V κυλίνδρου, ἀκτίνος r καὶ ὕψους h , ἴσούται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος του h . Ἦτοι

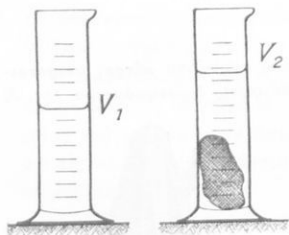
$$V = \pi r^2 \cdot h.$$

Ὁ ὄγκος σφαίρας, ἀκτίνος r , ὑπολογίζεται διὰ τοῦ τύπου

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Ὅταν, ὁμως, τὸ σχῆμα τοῦ σώματος εἶναι ἀκανόνιστον, ὁ ὄγκος εὐρίσκεται εὐκόλως διὰ ζυγίσεως, εἰάν γνωρίζωμεν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σώματος. Ἐπειδὴ, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, εἰδικὸν βάρος ε εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ βάρους B τοῦ σώματος διὰ τοῦ ὄγκου V αὐτοῦ ($\varepsilon = B/V$), εὐρίσκομεν τὸν ὄγκον, ἴσον πρὸς $V = B/\varepsilon$.

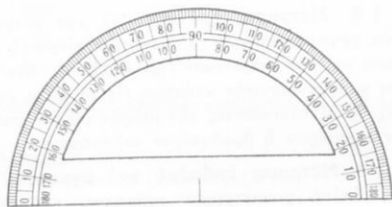
Ὁ ὄγκος σωμάτων, τῶν ὁποίων δὲν εἶναι γνωστὸν τὸ εἰδικὸν βάρος, εὐρίσκεται διὰ τῆς ἑξῆς μεθόδου: Ἐντὸς ὀγκομετρικοῦ κυλίνδρου χύνομεν ὕδωρ καὶ μετροῦμεν τὸν ὄγκον V_1 αὐτοῦ (σχ. 9). Κατόπιν, θέτομεν ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου τὸ σῶμα καὶ μετροῦμεν τὴν νέαν ἔνδειξιν V_2 ἐπὶ τῆς κλίμακος. Προφανῶς, ὁ ζητούμενος ὄγκος V θὰ εἶναι ἴσος πρὸς $V = V_2 - V_1$.



Σχ. 9. Ἡ διαφορά $V_2 - V_1$ παρέχει τὸν ὄγκον τοῦ σώματος.

§ 10. Μέτρησης γωνίας. Διὰ τὴν μέτρησιν γωνιῶν χρησιμοποιοῦμεν ὄργανα, τὰ ὁποῖα καλοῦνται **γωνιόμετρα**. Ἀπλοῦν τύπον γωνιομέτρου παριστᾷ τὸ **μοιρογνομόνιον** (σχ. 10). Τοῦτο ἔχει σχῆμα ἡμικυκλίου καὶ φέρει ἐπὶ τοῦ τόξου ὑποδιαιρέσεις εἰς μοίρας ἀπὸ 0 ἕως 180, ἐπὶ δὲ τῆς διαμέτρου σημειοῦται τὸ κέντρον.

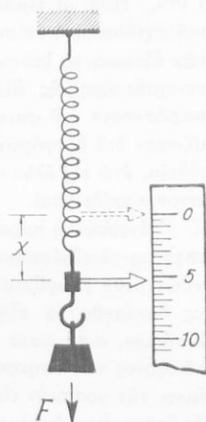
Διὰ τὴν μέτρησιν μιᾶς γωνίας, φέρομεν τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας εἰς τὸ κέντρον καὶ καθιστῶμεν τὴν μίαν πλευρὰν παράλληλον πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ μοιρογνομονίου. Τότε ἡ ἄλλη πλευρὰ μᾶς παρέχει, ἐπὶ τοῦ βαθμολογημένου τόξου, τὴν τιμὴν τῆς ζητούμενης γωνίας.



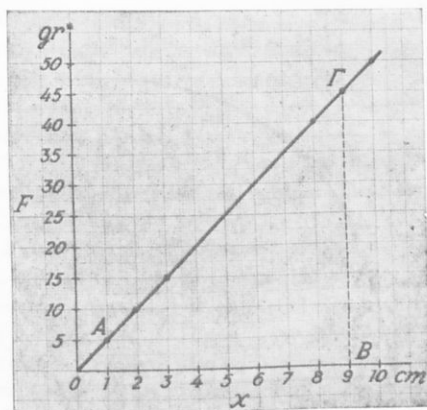
Σχ. 10. Μοιρογνομόνιον.

§ 11. Γραφικὴ παράστασις φαινομένου. Εἶδομεν ἄνωτέρω ὅτι διὰ τὴν μελέτην ἑνὸς φαινομένου ἐκτελοῦμεν σειρὰν μετρήσεων. Ὡς παράδειγμα ἂς θεωρήσωμεν ἑλικοειδῆς ἐλατήριο (σχ. 11), τὸ ὁποῖον στήριζομεν εἰς τὸ ἓν ἄκρον του, ἐνῶ τὸ ἄλλο φέρει ἄγκιστρον, ἐκ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ ἐξαρθῶμεν διάφορα βάρη F καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι ἐφωδιασμένον μὲ

δείκτην, κινούμενον ἐνὸπτιον κλίμακος. Τοποθετοῦμεν τὴν κλίμακα οὕτως, ὥστε, ὅταν τὸ ἐλατήριο ἐῖναι ἀφόρτιστον ($F=0$), ὁ δείκτης νὰ δεικνύῃ τὸ «μηδὲν» τῆς κλίμακος ($x=0$). Ἀκολουθῶντες, ἐξαορτῶμεν ἐκ τοῦ ἀγκίστρου γνωστὸν βάρος (π.χ., $F=5\text{ gr}^*$), ὁπότε τὸ ἐλατήριο ἐπιμηκύνεται καὶ ὁ δείκτης δεικνύει ἐπιμήκυνσιν, π.χ., ἐνὸς ἐκατοστομέτρου ($x=1\text{ cm}$). Ἀντικαθιστῶμεν τὸ βάρος δι' ἑτέρου, μεγαλυτέρου (π.χ., $F=10\text{ gr}^*$) καὶ μετροῦμεν τὴν νέαν ἐπιμήκυνσιν (ἢ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς $x=2\text{ cm}$). Ἐπαναλαμβάνοντες τὴν μέτρησιν μετὰ διαδοχικῶς αὐξανόμενα βάρη, εὐρίσκομεν τὰς ἀντιστοιχοῦς ἐπιμήκυνσεις, τὰ δὲ ἀποτελέσματα ὅλων αὐτῶν τῶν μετρήσεων καταχωροῦμεν εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα μετρήσεων. Ἐκ τοῦ συνόλου τῶν μετρήσεων δὲν προκύπτει σαφῶς ἡ πορεία τοῦ φαινομένου· δὲν εὐρίσκομεν, δηλ., εὐχερῶς τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς τεινύσεως δυνάμεως F καὶ τῆς ἐπιμήκυνσεως x τοῦ ἐλατηρίου. Τοῦτο, ὅμως, δύναται νὰ προκύψῃ εὐκόλως, ἐὰν παραστήσωμεν **γραφικῶς** τὸ φαινόμενον. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν δύο **ἄξονας** — χαράσσομεν, δηλ., ἐπὶ φύλλου χάρτου δύο εὐθείας, τεμνομένας καθέτως (σχ. 12) — ἐκ τῶν ὁποίων τὸν ἓνα ὀνομάζο-



Σχ. 11. Ἡ δυνάμεις F ἐπιμηκύνει τὸ ἐλατήριο κατὰ x .



Σχ. 12. Γραφικὴ παράστασις τῶν μετρήσεων.

μεν **ἄξονα** τῶν δυνάμεων F , τὸν δὲ ἄλλον **ἄξονα** τῶν ἐπιμηκύν-

F gr^*	x cm
0	0
5	1
10	2
15	3
40	8
50	10

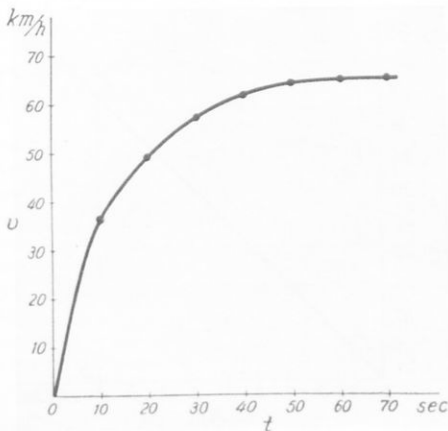
σεων x . Κατόπιν, χαράσσομεν ἐφ' ἑκάστου ἄξονος ἴσας ὑποδιαίρε-

1 cm ἐπὶ τῆς κλίμακος τῶν ἐπιμηκύνσεων ν' ἀντιστοιχῇ εἰς ἐπιμήκυνσιν 1 cm. Ἡδη, αἱ τιμαὶ τοῦ πίνακος, ἀνὰ ζεύγη λαμβανόμεναι, δίδουν ἐπὶ τοῦ σχεδίου ἀνὰ ἓν σημεῖον (π.χ., τὸ ζεύγος 0-0 δίδει τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἀξόνων, τὸ ζεύγος 5-1 τὸ σημεῖον Α κ.λ.). Ἐάν, τώρα, ἐνώσωμεν διὰ συνεχοῦς γραμμῆς ὅλα τὰ προκύψαντα σημεῖα, θὰ λάβωμεν τὴν **γραφικὴν παράστασιν** τοῦ φαινομένου τῆς ἐπιμηκύνσεως τοῦ ἐλατηρίου, ὅταν τὸ φορεῖται διὰ διαφόρων δυνάμεων. Ἐν προκειμένῳ, ἡ γραμμὴ αὕτη θὰ εἶναι εὐθεῖα, ἐνῶ εἰς ἄλλα φαινόμενα δύναται νὰ ἔχῃ καὶ ἄλλας μορφάς (βλ. ἐπόμενον παράδειγμα).

Ἡ γραφικὴ παράστασις ἔχει, μεταξὺ ἄλλων, καὶ τὸ πλεονέκτημα νὰ μᾶς ἐπιτρέπῃ νὰ εὐρίσκωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν δύο μεταβαλλομένων μεγεθῶν, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἄλλου. Οὕτω, ἐκ τοῦ ἄνω διαγράμματος δύναμεθα νὰ εὐρωμεν ποία δύναμις ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἐπιμηκύνῃ τὸ ἐλατήριο, π.χ., κατὰ 9 cm. Πρὸς τοῦτο, ἐκ τοῦ ἀντιστοίχου σημείου Β τοῦ ἀξονος τῶν ἐπιμηκύνσεων φέρομεν κατακόρυφον εὐθεῖαν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν γραμμὴν εἰς τὸ σημεῖον Γ. Τὸ μήκος ΒΓ μᾶς παρέχει τὴν τιμὴν τῆς ζητουμένης δυνάμεως ($F = 45 \text{ gr}^*$).

Διὰ τὴν καλλιτέραν κατανόησιν τῆς γραφικῆς παραστάσεως φέρομεν καὶ δεύτερον παράδειγμα: Λεωφορεῖον ἐκκινεῖ ἐκ τῆς ἡρεμίας καὶ βαθμὴδὸν ἀναπτύσσει ταχύτητα, μέχρις ὅτου λάβῃ τὴν τελικὴν του ταχύτητα πορείας. Κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ χρόνου τούτου μετροῦμεν ἐπὶ τοῦ ταχυμέτρου τοῦ ὀχήματος τὴν ταχύτητα v τοῦ αὐτοκινήτου ἀνὰ 10 sec, τὰ δὲ ἀποτελέσματα ἀναγράφομεν εἰς τὸν κατωθι πίνακα:

t (sec)	v (km/h)
0	0
10	37
20	49
30	58
40	62
50	64
60	65
70	65



Σχ. 12α.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐνῶ ἀρχικῶς ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου αὐξάνεται ταχέως, περὶ τὸ τέλος τοῦ πειράματος αὐξάνεται βραδέως, τελικῶς δὲ παρα-

μένει σταθερά. Εἰς τὸ σχῆμα 12α ἀποδίδεται ἡ γραφικὴ παράστασις τοῦ μελετηθέντος φαινομένου.

• ★ § 11α. Διαστάσεις τῶν φυσικῶν μεγεθῶν. Πᾶν φυσικὸν μέγεθος εὐρίσκεται εἰς ὠρισμένην σχέσιν πρὸς τὰ θεμελιώδη καὶ δύναται νὰ παρασταθῇ κατὰ τρόπον ὥστε νὰ ἐξαρτᾶται ἐξ αὐτῶν. Οὕτω, π.χ., εἶναι

$$\text{ἐμβαδὸν } S = \text{μῆκος} \times \text{μῆκος}$$

$$\text{ταχύτης } v = \frac{\text{μῆκος}}{\text{χρόνος}}.$$

Ἄν παραστήσωμεν διὰ τῶν συμβόλων L (*Longitudo*), M (*Massa*), T (*Tempus*) τὸ μῆκος, τὴν μᾶζαν καὶ τὸν χρόνον, αἱ ἄνωτέρω σχέσεις γράφονται ὡς ἑξῆς:

$$[S] = [L] \cdot [L] = [L^2]$$

$$[v] = \frac{[L]}{[T]} = [L \cdot T^{-1}].$$

Ἄν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι

$$M^0 = 1, \quad T^0 = 1$$

αἱ ἄνω σχέσεις γράφονται ὡς ἑξῆς:

$$[S] = [L^2 \cdot M^0 \cdot T^0]$$

$$[v] = [L^1 \cdot T^{-1} \cdot M^0].$$

Οἱ ἐκθέται τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν καλοῦνται **διαστάσεις**. Οὕτω, αἱ διαστάσεις τοῦ ἐμβαδοῦ εἶναι 2, 0, 0, τῆς ταχύτητος 1, —1, 0 κ.λ. Καταχρηστικῶς, ὅμως, λέγοντες διαστάσεις τοῦ ἐμβαδοῦ S , ἐννοοῦμεν ὁλόκληρον τὸ δεξιὸν μέλος τῆς ἄνω ἐξίσωσως, δηλ., τὸ $[L^2]$. Ὁμοίως, αἱ διαστάσεις τῆς ταχύτητος θὰ εἶναι $[L \cdot T^{-1}]$ κ.λ.

Ὅταν αἱ διαστάσεις ἑνὸς μεγέθους εἶναι 0, 0, 0, τὸ μέγεθος καλεῖται **καθαρὸς ἀριθμὸς**. Καθαροὶ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἀφηρημένοι ἀριθμοὶ 1, 2, 3, ..., ὁ ἀριθμὸς $\pi = 3,14$ κ.λ.

Σημασία τῶν διαστάσεων. Ὡς γνωστόν, πᾶσα ἐξίσωσις τῆς Φυσικῆς δηλοῖ τὴν ἰσότητα μεταξὺ τῶν φυσικῶν μεγεθῶν τοῦ ἑνὸς μέλους τῆς ἐξίσωσως καὶ τῶν φυσικῶν μεγεθῶν τοῦ ἄλλου μέλους τῆς ἐξίσωσως. Ἐπειδὴ δὲ τὰ διάφορα φυσικὰ μεγέθη ἔχουν διαστάσεις, ἔπεται ὅτι πρέπει αἱ διαστάσεις τοῦ ἀριστεροῦ μέλους τῆς ἐξίσωσως νὰ εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ τὰς διαστάσεις τοῦ δεξιοῦ μέλους. Ἄν τοῦτο δὲν συμβαίνει, ἡ ἐξίσωσις δὲν εἶναι ὀρθή.

Ἄρα, διὰ τῶν διαστάσεων δυνάμεθα νὰ ἐλέγχωμεν, ἂν μία ἐξίσωσις τῆς Φυσικῆς εἶναι ἐσφαλμένη.

Ερώτημα: Ἡ ἐξίσωσις $v = \gamma \cdot l^2$ εἶναι ἐσφαλμένη; (v = ταχύτης, γ = ἐπιτάχυνσις, l = χρόνος).

Αί διαστάσεις της ταχύτητας είναι $[L \cdot T^{-1}]$, της επιταχύνσεως $[L \cdot T^{-2}]$, του δε χρόνου $[T]$.

*Αντικαθιστώντες εις την άνω εξίσωσιν, λαμβάνομεν

$$[L \cdot T^{-1}] = [L \cdot T^{-2}] \cdot [T^2]$$

ή

$$[L \cdot T^{-1}] = [L].$$

Παρατηρούμεν ότι αι διαστάσεις του άριστερου μέλους είναι διάφοροι των διαστάσεων του δεξιού μέλους. Συνεπώς, ο τύπος $v = \gamma \cdot l^2$ δέν είναι όρθός.

• ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(Αί άσκήσεις του άνά χείρας βιβλίου έχουν καταμεμηθή εις δύο κατηγορίας: 'Η κατηγορία Α' περιλαμβάνει τó ελάχιστον των άσκήσεων, τás όποιás πρέπει νά λύση ό μελετών τó αντίστοιχον κεφάλαιον. 'Η κατηγορία Β' περιλαμβάνει άσκήσεις, τás όποιás δύναται νά λύση ό διαθέτων περισσότερον χρόνον ή ό μελετών την ύλην, την τυπωμένην μέ μικρότερα τυπογραφικά στοιχεία.

Πρίν ή λύσετε μίαν άσκησιν συμβουλευθήτε τó εις τó τέλος του βιβλίου εύρισκόμενον Παράρτημα περί του τρόπου λύσεως των άσκήσεων.

*Άσκήσεις, αί όποται φέρουν τó σύμβολον $\odot$, έχουν λυθη ύποδειγματικώς εις τó Παράρτημα του βιβλίου).

Κατηγορία Α'.

- 1) Νά μετατραπούν εις m : α) 5 dm, β) 4 cm, γ) 8 mm.
(ΑΠ: 0,5 m, 0,04 m, $8 \cdot 10^{-3}$ m)
- 2) Όμοίως εις dm^3 : α) 2 m^3 , β) 25 cm^3 , γ) 155 mm^3 .
(ΑΠ: $2 \cdot 10^3$ dm^3 , $25 \cdot 10^{-2}$ dm^3 , $155 \cdot 10^{-4}$ dm^3)
- 3) Όμοίως εις λίτρα: α) 3 m^3 , β) 25 cm^3 .
(ΑΠ: $3 \cdot 10^3$ lt, $25 \cdot 10^{-3}$ lt)
- 4) Τό πάχος κυλινδρικού σύρματος, μετρούμενον διά μικρομέτρου, εύρίσκεται ίσον πρós 1,22 mm. Νά εύρεθῇ τó έμβαδόν της διατομής του εις mm^2 καί cm^2 .
(ΑΠ: 1,17 mm^2 , $1,17 \cdot 10^{-2}$ cm^2)
- 5) Η διάμετρος μιās σφαίρας είναι ίση πρós 15,5 cm. Νά ύπολογισθῇ ό όγκος της σφαίρας εις cm^3 , m^3 , mm^3 .
(ΑΠ: 1950 cm^3 , $1,95 \cdot 10^{-3}$ m^3 , $1,95 \cdot 10^6$ mm^3)
- 6) Κυλινδρικών δοχείον έχει διάμετρον 10,5 cm καί ύψος 6,3 cm. Ποίος ό όγκος του εις cm^3 καί λίτρα;
(ΑΠ: 545 cm^3 , 0,545 lt)

Κατηγορία Β'.

$\odot$ 7) Ποίον τó έμβαδόν της μιās επιφανείας μεταλλίνου φύλλον, σχήματος όρθογωνίου παραλληλογράμμου, του όποιου τó μόν μήκος είναι 29,93 cm, τó δε πλάτος 30,18 cm εις m^2 , cm^2 , mm^2 καί πόσον τοίς % διαφέρει τούτο του έμβαδου των 900 cm^2 ;
(ΑΠ: 0,990 m^2 , 903,3 cm^2 , 90330 mm^2 , 0,36 %)

$\odot$ 8) Άγοράζομεν φύλλον λαμαρίνας, διαστάσεων $2 m \times 1 m$ καί βάρους 10 kg^* . Έξ αυτού άποκόπτομεν τεμάχιον άκανονίστου σχήματος, του όποιου τó βάρος εύρίσκειται, διά ζυγίσεως, ίσον πρós 0,8 kg^* . Ποίον τó έμβαδόν του τεμαχίου τούτου;
(ΑΠ: 0,16 m^2)

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

§ 12. Περιεχόμενον τῆς Μηχανικῆς. Ἡ *Μηχανικὴ* εἶναι τὸ μέρος ἐκεῖνο τῆς Φυσικῆς, τὸ ὁποῖον ἐξετάζει τὰς *κινήσεις* τῶν σωμάτων τοῦ περιβάλλοντος ἡμᾶς κόσμου καὶ τὰς *δυνάμεις*, αἱ ὁποῖαι τὰς προκαλοῦν.

Ὅλα τὰ σώματα ἔχουν ἔκτασιν, καταλαμβάνουν, δηλ., *χῶρον*. Ἡ Μηχανικὴ, ὅμως, εἰς ὥρισμένας περιπτώσεις, διὰ ν' ἀπλουστεύσῃ τὰ διάφορα ζητήματα, θεωρεῖ τὰς διαστάσεις τῶν σωμάτων τόσο μικράς, ὥστε ἐν σῶμα νὰ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς *ὕλικὸν σημεῖον*. Ἀντιθέτως, εἰς ἄλλας περιπτώσεις λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ διαστάσεις τοῦ σώματος, ὅποτε τοῦτο θεωρεῖται ὡς ἀποτελούμενον ἐκ πολλῶν ὑλικῶν σημείων, τόσο στερεῶς συνδεδεμένων μεταξύ των, ὥστε αἱ μεταξύ αὐτῶν ἀποστάσεις νὰ παραμένουν ἀμετάβλητοι (*στερεὰ σώματα*). Εἰς τὴν πραγματικότητα, τὸ τελευταῖον τοῦτο συμβαίνει μόνον κατὰ προσέγγισιν, καθόσον τὰ σώματα δύνανται, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεων, νὰ παραμορφωθοῦν καί, ἐπομένως, αἱ ἀποστάσεις μεταξύ τῶν ὑλικῶν σημείων δὲν παραμένουν ἀμετάβλητοι.

Εἰς τὰ *ὑγρά* καὶ τὰ *ἀέρια* αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται μεταξύ τῶν ὑλικῶν σημείων, εἶναι τόσο μικραί, ὥστε ταῦτα νὰ μὴ συγκρατῶνται εἰς τὰς θέσεις των καὶ τὸ σχῆμα τοῦ σώματος νὰ μὴ εἶναι καθωρισμένον, ἀλλὰ νὰ ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ἐκάστοτε ἐπικρατούντων ἐξωτερικῶν ὕδρων (σχῆμα περιέχοντος δοχείου κ.λ.).

Ἡ Μηχανικὴ διαιρεῖται, συνήθως, εἰς τὰ ἑξῆς μέρη:

1) τὴν *Στατικὴν*, ἡ ὁποία ἐξετάζει τὰς δυνάμεις καὶ τὰς συνθήκας ὑπὸ τὰς ὁποίας αὗται ἰσορροποῦν·

2) τὴν *Κινηματικὴν*, ἡ ὁποία ἐξετάζει μόνον τὰς κινήσεις, ἀνεξαρτήτως τῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι τὰς προκαλοῦν καὶ

3) τὴν *Δυναμικὴν*, ἡ ὁποία ἐξετάζει τὰς δυνάμεις, ἐν σχέσει πρὸς τὰς ὑπ' αὐτῶν παραγομένας κινήσεις.

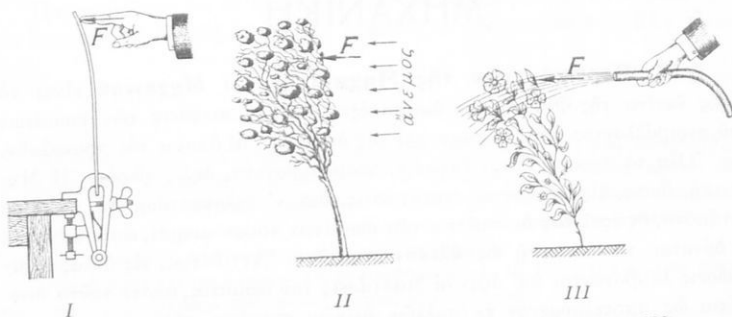
Εἰς τὰ πρῶτα κεφάλαια τῆς Μηχανικῆς ἐξετάζονται τ' ἀνωτέρω θέματα σχετικῶς μὲ τὰ στερεὰ σώματα. Εἰς ἰδιαίτερα κεφάλαια (Ὑδροστατικὴ, Ἀεροστατικὴ, Ὑδροδυναμικὴ καὶ Ἀεροδυναμικὴ) ἐπεκτείνεται ἡ μελέτη εἰς τὰ ὑγρά καὶ τὰ ἀέρια.

Εἰς τὴν Μηχανικὴν ὑάγονται, ὁμοίως, καὶ τὰ κεφάλαια, τὰ ὁποῖα ἐξετάζουν τὰς παραμορφώσεις τῶν σωμάτων, αἱ ὁποῖαι προκαλοῦνται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεων (Ἐλαστικότης, Ἀντοχὴ ὑλικῶν, Τριβή).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

ΣΤΑΤΙΚΗ

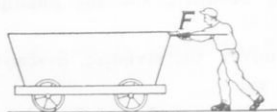
§ 13. Δυνάμεις. Ὅταν κάμπτωμεν μετάλλινον ἔλασμα, πιέζοντες αὐτό, π.χ., διὰ τοῦ δακτύλου μας (σχ. 13, I), λέγομεν ὅτι ἐξασκοῦμεν ἐπὶ τοῦ



Σχ. 13. Ὁ δάκτυλος (I), ὁ ἀνεμος (II) καὶ ἡ φλὲς τοῦ ὕδατος (III) ἐξασκοῦν δυνάμεις.

ἐλάσματος μίαν δύναμιν F , ἡ ὁποία καὶ προκαλεῖ τὴν κάμψιν αὐτοῦ. Ὅμοιως, ὅταν δένδρον κάμπτεται ὑπὸ τοῦ πνέοντος ἀνέμου (II), λέγομεν ὅτι ὁ ἀνεμος ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ δένδρου μίαν δύναμιν F . Ἐπίσης, ὅταν τὸ ὕδωρ, τὸ ὁποῖον ἐκτοξεύεται ἐκ τοῦ σωλήνος τοῦ σχήματος 13, III, προσπέσῃ ἐπὶ τινος φυτοῦ, παρατηροῦμεν ὅτι προκαλεῖ κάμψιν αὐτοῦ. Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι ἡ φλὲς τοῦ ὕδατος ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ φυτοῦ μίαν δύναμιν F , ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ὁποίας τοῦτο κάμπτεται.

Ἐπίσης, ἐκ πείρας γνωρίζομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ θέσωμεν εἰς κίνησιν ἐν ἀντικείμενον — π.χ., ἐλαφρὰν ἄμαξαν, σχ. 14 — ἐὰν ὠθήσωμεν αὐτὴν διὰ τῶν χειρῶν μας. Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι ἡ ἄμαξα ἐτέθη εἰς κίνησιν, διότι διὰ τῶν χειρῶν μας ἐξήσκησαμεν ἐπ' αὐτῆς μίαν δύναμιν F . Ὅμοιως, διὰ ν' ἀλλάξωμεν τὴν πορείαν κινουμένης σφαίρας ποδοσφαίρου, ἐξασκοῦμεν ἐπ' αὐτῆς, διὰ λακτίσματος, μίαν δύναμιν.



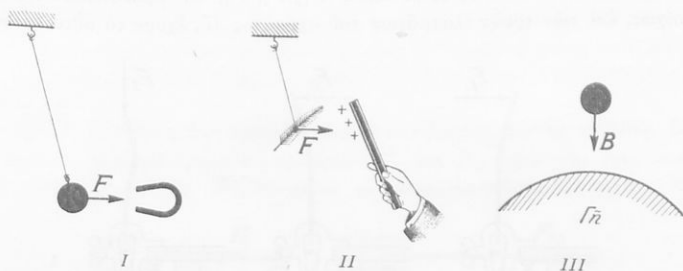
Σχ. 14. Ὁ ἄνθρωπος ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς ἄμαξης μίαν δύναμιν F .

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθὼς καὶ ἄλλων παραδειγμάτων, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὸν ἐξῆς ὁρισμὸν τῆς δυνάμεως:

Δύναμις καλεῖται τὸ αἷτιον, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ προκαλέσῃ παραμόρφωσιν τῶν σωμάτων ἢ νὰ τροποποιήσῃ τὴν κίνησιν αὐτῶν.

Εἰς τ' ἀναφερθέντα παραδείγματα ἐν σῶμα (δάκτυλος, ἀνεμος, ὕδωρ)

ἐξασκεῖ ἐπὶ ἄλλου σώματος μίαν δύναμιν, ὅταν εὐρίσκεται εἰς ἄμεσον ἐπαφήν πρὸς αὐτό. Ὑπάρχουν, ὁμως, καὶ περιπτώσεις, εἰς τὰς ὁποίας ἔν σῶμα ἐξασκεῖ δύναμιν ἐπὶ ἄλλου σώματος ἔκ τοῦ μακροῦ ἐν - χωρίς, δηλαδή, τὰ δύο σώματα νὰ εὐρίσκονται εἰς ἐπαφήν. Τοιαύτας περιπτώσεις παριστᾷ τὸ σχῆμα 15: Ὁ μαγνήτης ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς σιδηρᾶς σφαίρας (I) μίαν ἐλκτι-



Σχ. 15. Ὁ μαγνήτης (I), ἡ ἠλεκτρισμένη ράβδος (II), ἡ Γῆ (III) ἐξασκοῦν δύναμιν ἐπὶ τῆς σιδηρᾶς σφαίρας, τοῦ πύλου, τοῦ λίθου χωρὶς νὰ ἐφάπτονται αὐτῶν.

κὴν δύναμιν F , χωρὶς νὰ ἐφάπτεται αὐτῆς. Ὁμοίως, ἡ ἠλεκτρισμένη ὑαλίνη ράβδος ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ πύλου (II) μίαν ἐλκτικὴν δύναμιν F , χωρὶς νὰ ἐφάπτεται αὐτοῦ. Ἐπίσης, ἡ Γῆ ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ λίθου (III) μίαν ἐλκτικὴν δύναμιν (δηλ., τὸ βάρος B), χωρὶς νὰ εὐρίσκεται εἰς ἐπαφήν μετ' αὐτοῦ.

§ 14. Μέτρησις δυνάμεων. Γενικῶς, αἱ δυνάμεις μετροῦνται ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων, τὰ ὁποία αὐταὶ προκαλοῦν. Συνήθως χρησιμοποιοῦνται τὰ **δυναμόμετρα**, διὰ τῶν ὁποίων μετροῦμεν τὰς δυνάμεις ἐκ τῆς ἐπιμηκύνσεως ἐνὸς ἐλατηρίου. Εἰς τὴν § 11 εἶδομεν ὅτι ἡ ἐπιμηκύνσις ἐνὸς ἐλατηρίου εἶναι ἀνάλογος τῆς δυνάμεως, ἡ ὁποία προκαλεῖ ταύτην· ἐπομένως, ἐκ τῆς ἐπιμηκύνσεως δυνάμεθα νὰ εὐρωμεν τὴν δύναμιν. Ἐπὶ τῆς ἀρχῆς ταύτης στηρίζεται ἡ λειτουργία τῶν **δυναμομέτρων δι' ἐλατηρίου** (κ. κανταράκια· σχ. 16). Τὰ δυναμόμετρα ταῦτα ἀποτελοῦνται ἐκ χαλυβδίνου ἐλατηρίου, ἐφωδιασμένου μὲ δείκτην, κινούμενον ἐνώπιον κλίμακος (*).

Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν ἄγνωστον δύναμιν, ἐφαρμόζομεν αὐτὴν ἐπὶ τοῦ δυναμομέτρου, ὅποτε ἡ ἐνδείξις αὐτοῦ μᾶς παρέχει τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ τὴν μονάδα (π.χ. 0,5 kgr*).

Ἐκτὸς τῶν δυναμομέτρων δι' ἐλατηρίου, ὑπάρχουν καὶ δυναμόμετρα ἄλλων τύπων.

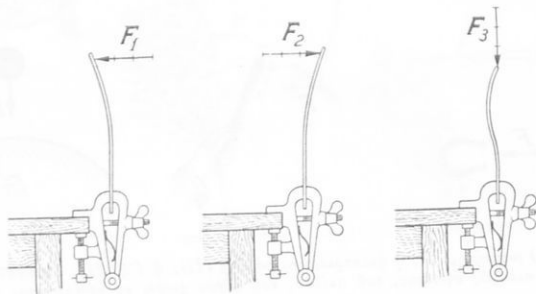


Σχ. 16. Δυναμόμετρον.

(*) Ἡ κλίμαξ αὕτη ἔχει βαθμολογηθῆ προηγουμένως δι' ἐξαρτήσεως ἐκ τοῦ ἀγκίστρου γνωστῶν βαρῶν.

• § 15. Γραφική παράσταση δυνάμεως - Άνυσματικά μεγέθη.

Διά νά χαρακτηρίσωμεν τήν δύναμιν, τήν ὁποίαν ἐξασκεῖ ὁ δάκτυλός μας ἐπὶ τοῦ ἐλάσματος τοῦ σχήματος 13, I δὲν ἀρκεῖ νά γνωρίζωμεν μόνον τὸ μέτρον αὐτῆς (δηλ., τήν ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ μονάδα· π.χ., $1,5 \text{ kgp}^*$), ἀλλὰ πρέπει νά γνωρίζωμεν καὶ τὴν διεύθυνσιν καὶ τὴν φορὰν αὐτῆς. Πράγματι, μολονότι αἱ τρεῖς δυνάμεις F_1 , F_2 , F_3 , αἱ ἐξασκούμεναι, ἀντιστοιχῶς, ἐπὶ τῶν τριῶν ἐλασμάτων τοῦ σχήματος 17, ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον



Σχ. 17.

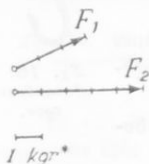
— π.χ., $1,5 \text{ kgp}^*$ — ἐν τούτοις εἶναι δυνάμεις διάφοροι: Ἡ δύναμις F_1 ἔχει μὲν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν μὲ τὴν δύναμιν F_2 (ὁριζοντίαν), διαφέρει, ὅμως, αὐτῆς κατὰ τὴν φορὰν. Ἡ δύναμις F_3 ἔχει διεύθυνσιν (κατακόρυφον), διάφορον τῆς διευσθύνσεως τῶν δύο προηγουμένων δυνάμεων.

Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι διά νά καθορίσωμεν τελείως μίαν δύναμιν, πρέπει νά γνωρίζωμεν α) τὸ μέτρον, β) τὴν διεύθυνσιν καὶ γ) τὴν φορὰν αὐτῆς.

Τοιαῦτα μεγέθη, διὰ τὸν καθορισμὸν τῶν ὁποίων ἀπαιτοῦνται, ἐκτὸς τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς καὶ τῆς μονάδος (μέτρον), δύο ἐπὶ πλέον στοιχεῖα — ἡ διεύθυνσις καὶ ἡ φορὰ — καλοῦνται **ἀνυσματικά μεγέθη**.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου προκύπτει ὅτι ἡ δύναμις εἶναι ἀνυσματικὸν μέγεθος.

Πλὴν τῆς δυνάμεως, ἀνυσματικά μεγέθη εἶναι καὶ πολλὰ ἄλλα φυσικὰ μεγέθη (π.χ., ἡ ταχύτης), τινὰ τῶν ὁποίων θὰ γνωρίσωμεν κατωτέρω.



Σχ. 18.

Τὰ ἀνυσματικά μεγέθη παριστῶμεν γραφικῶς δι' ἐνὸς βέλους, καταλλήλου διευσθύνσεως καὶ φορᾶς (**ἄνυσμα**), τοῦ ὁποίου τὸ μήκος παρέχει τὸ μέτρον τοῦ θεωρουμένου ἀνυσματικοῦ μεγέθους. Πρὸς τοῦτο πρέπει νά ἐκλέξωμεν κατάλληλον κλίμακα: Ἐάν, π.χ., δεχθῶμεν ὅτι εἰς μῆκος 1 cm ἀντιστοιχεῖ δύναμις 1 kgp^* , τότε δύναμις $2,5$

kgp^* θὰ παρίσταται ὑπὸ ἄνυσματος, μήκους $2,5 \text{ cm}$.

Το σχήμα 18 παριστᾷ δύο διαφόρους δυνάμεις $F_1 = 3 \text{ kgp}^*$ καὶ $F_2 = 5 \text{ kgp}^*$, τῶν ὁποίων τὸ μέτρον, ἡ διεύθυνσις καὶ ἡ φορά προκύπτουν ἀμέσως ἐκ τοῦ ἀνυσματικοῦ τρόπου σχεδιάσεως.

• § 16. Μονόμετρα μεγέθη. Ἐκτὸς τῶν ἀνυσματικῶν μεγεθῶν, ὑπάρχουν καὶ μεγέθη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται *μονόμετρα*.

Μονόμετρον καλεῖται πᾶν φυσικὸν μέγεθος, τὸ ὁποῖον καθορίζεται τελείως, ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ ἀριθμητικὴ του τιμὴ καὶ ἡ μονὰς μετρήσεως.

Μονόμετρα μεγέθη εἶναι, π.χ., ἡ μᾶζα (5 gr), ἡ ἐνέργεια (100 ἔργια) κ.λ.

• § 17. Σύνθεσις δυνάμεων, κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Δύο ἄνθρωποι, ἔλκοντες ὄχημα διὰ δυνάμεις F_1 καὶ F_2 , κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεώς του (σχ. 19), δύνανται νὰ ἀντικατασταθοῦν διὰ τρίτου. Διὰ

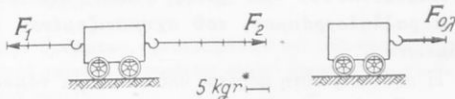


Σχ. 19. Αἱ δύο δυνάμεις $F_1 = 10 \text{ kgp}^*$ καὶ $F_2 = 15 \text{ kgp}^*$ δύνανται νὰ ἀντικατασταθοῦν ὑπὸ τῆς δυνάμεως $F_{ολ} = 10 \text{ kgp}^* + 15 \text{ kgp}^* = 25 \text{ kgp}^*$.

νὰ ἔχωμεν τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, πρέπει ὁ ἄνθρωπος οὗτος νὰ ἐξασκῇ δύναμιν $F_{ολικόν}$, ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων. Ὅτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$F_{ολ} = F_1 + F_2.$$

Ὅμοιως, ἂν τὸ ὄχημα ἔλκεται πρὸς τὰ δεξιὰ ὑπὸ ἀνδρὸς διὰ δυνάμεως F_2 (σχ. 20) καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ ὑπὸ παιδίου διὰ δυνάμεως F_1 , τὸ ἀποτέλεσμα θὰ εἶναι τὸ αὐτό, ὥς ἐάν ἐπὶ τοῦ ὀχήματος ἐξησκήτο ἡ δύναμις $F_{ολ}$, ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύο δυνάμεων F_2 καὶ F_1 . Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, δηλ., εἶναι



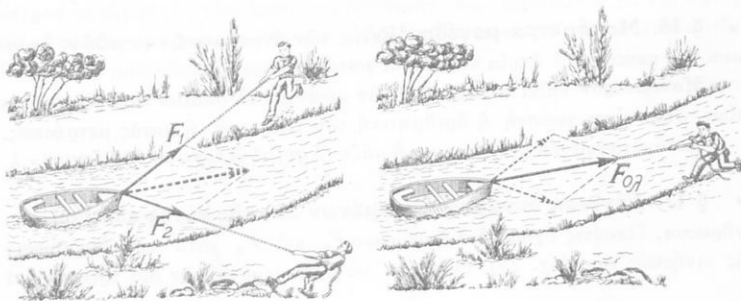
Σχ. 20. Αἱ δύο δυνάμεις $F_1 = 15 \text{ kgp}^*$ καὶ $F_2 = 25 \text{ kgp}^*$ δύνανται νὰ ἀντικατασταθοῦν ὑπὸ τῆς δυνάμεως $F_{ολ} = 25 \text{ kgp}^* - 15 \text{ kgp}^* = 10 \text{ kgp}^*$.

$$F_{ολ} = F_2 - F_1.$$

Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι δύο δυνάμεις δύνανται νὰ ἀντικατασταθοῦν ὑπὸ τρίτης, προκαλούσης τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα (*σύνθεσις δυνάμεων*). Αἱ δυνάμεις F_1 καὶ F_2 λέγονται *συνιστώσαι*, ἡ δὲ $F_{ολ}$ *συνισταμένη*.

Ἄρα, *συνισταμένη* δύο δυνάμεων καλεῖται ἡ δύναμις ἐκείνη, ἡ ὁποία προκαλεῖ τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα ὥς αἱ συνιστώσαι.

• § 18. **Σύνθεσις δύο δυνάμεων, μὴ παραλλήλων.** Λέμβος σύρεται ὑπὸ δύο ἀνθρώπων, εὐρισκομένων εἰς τὰς ὄχθας ποταμοῦ, διὰ δύο δυνάμεων F_1 καὶ F_2 (σχ. 21, I), αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν γωνίαν μεταξύ των.



I

II

Σχ. 21. Ἡ δύναμις F_{01} προκαλεῖ τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα ὥς αἱ δύο δυνάμεις F_1 καὶ F_2 καί, συνεπῶς, δύναται ν' ἀντικαταστήσῃ ταύτας.

Πειραματικῶς ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν οἱ δύο ἄνθρωποι ἀντικατασταθοῦν ὑπὸ τρίτου, ἔλκοντος διὰ τῆς δυνάμεως F_{01} (σχ. 21, II), ἡ λέμβος θὰ ἐξακολουθήσῃ κινουμένη ὅπως καὶ πρότερον, ἀρκεῖ ἡ δύναμις F_{01} ν' ἀποτελῇ τὴν διαγώνιον τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ καθοριζομένου ὑπὸ τῶν δύο δυνάμεων F_1 καὶ F_2 .

Συμφώνως, λοιπόν, πρὸς τ' ἀνωτέρω, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἑξῆς πρότασιν:

«**Δύο δυνάμεις, ἐξασκούμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, δύνανται ν' ἀντικατασταθοῦν ὑπὸ τρίτης, ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ τῆς διαγωνίου τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν δύο αὐτῶν δυνάμεων.**»

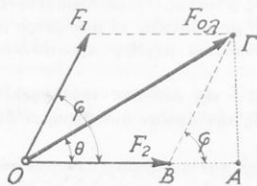
Ἡ πρότασις αὕτη φέρεται ὑπὸ τὸ ὄνομα **νόμος τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων**. Ἡ πειραματικὴ ἀπόδειξις τοῦ νόμου τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων περιγράφεται εἰς τὴν § 24.

Ἐφαρμογαί. 1) Νὰ εὐρεθῇ γραφικῶς ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων $F_1 = 3 \text{ kgr}^*$, καὶ $F_2 = 4 \text{ kgr}^*$, καθέτων μεταξύ των καὶ ἐξασκουμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

2) Νὰ εὐρεθῇ γραφικῶς ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων $F_1 = 300 \text{ kgr}^*$ καὶ $F_2 = 1500 \text{ kgr}^*$, ἐξασκουμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ σχηματίζουσιν γωνίαν 30° μεταξύ των. (Ἡ γωνία τῶν 30° νὰ σχεδιασθῇ τῇ βοηθείᾳ μοιρογγωμονίου. Ἡ κλίμαξ νὰ ἐκλεγῇ καταλλήλως, ὥστε τὸ σχῆμα νὰ δύναται νὰ σχεδιασθῇ ἐντὸς τετραδίου).

• § 19. **Ἀναλυτικὸς προσδιορισμὸς τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων.** Ὅπως εἶδομεν ἀνωτέρω, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν συνισταμένην δύο δυνάμεων, σχεδιά-

ζομεν αὐτὰς ὡς ἀνύσματα καὶ εὐρίσκομεν τὴν διαγώνιον τοῦ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένου παραλληλογράμμου. Ἐκ τοῦ προκύπτοντος σχεδίου δυνάμεθα νὰ εὐρωμεν



Σχ. 22.

τόσον τὸ μέτρον, ὅσον καὶ τὴν διεύθυνσιν αὐτῆς. Ἐκτός, ὁμως, τῆς γραφικῆς ταύτης λύσεως τοῦ προβλήματος, δυνάμεθα νὰ εὐρωμεν τὴν συνισταμένην καὶ δι' ὑπολογισμοῦ: Ἐστω ὅτι δίδονται αἱ δυνάμεις F_1, F_2 (σχ. 22) καὶ ἡ μεταξὺ αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία φ , ζητεῖται δὲ νὰ εὐρεθῇ τὸ μέτρον τῆς συνισταμένης F_{01} αὐτῶν, καθὼς καὶ ἡ γωνία θ , τὴν ὁποίαν σχηματίζει αὕτη μετὰ μιᾶς τῶν δυνάμεων (τῆς F_2). Ἐφαρμόζοντες τὸν γνωστὸν «νόμον τοῦ συνημιτόνου» τῆς Τριγωνομετρίας εἰς

τὸ τρίγωνον OBF , λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$F_{01}^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 \cdot F_2 \cdot \sin(180^\circ - \varphi) = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \sin \varphi.$$

Ἐκ τῆς ἐξίσωσews ταύτης λαμβάνομεν τὸ μέτρον τῆς συνισταμένης F_{01} . Ἡ διεύθυνσις τῆς F_{01} καθορίζεται ὑπὸ τῆς γωνίας θ , τὴν ὁποίαν εὐρίσκομεν ὡς ἑξῆς: Προβάλλομεν τὴν F_{01} κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς F_2 , ὁπότε ἔχομεν

$$\sin \theta = \frac{F_1}{F_{01}} \cdot \sin \varphi. \quad (1)$$

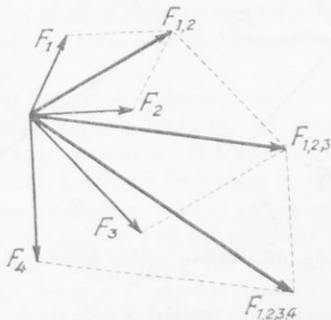
Ἀφ' ἐτέρου, ὁμως, εἶναι $GA = F_1 \cdot \sin \varphi$ καὶ $OA = OB + BA = F_2 + F_1 \cdot \sin \varphi$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (1) λαμβάνομεν τὴν ζητούμενην ἐφαπτομένην τῆς γωνίας θ καὶ ἐκ ταύτης τὴν γωνίαν θ .

Ἐφαρμογαί. 1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων $F_1 = 3 \text{ kg}^*$ καὶ $F_2 = 4 \text{ kg}^*$, καθεύον μεταξὺ τῶν καὶ ἐξασκουμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων $F_1 = 300 \text{ kg}^*$ καὶ $F_2 = 1500 \text{ kg}^*$, ἐξασκουμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ σχηματίζουσιν μεταξὺ τῶν γωνίαν 30° . (Τὸ ἀποτέλεσμα νὰ συγκριθῇ πρὸς τὸ ἀποτέλεσμα τῆς γραφικῆς λύσεως τοῦ προβλήματος - βλ. προηγουμένην παράγραφον).

§ 20. Σύνθεσις πολλῶν δυνάμεων, ἐξασκουμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Θεωρήσομεν ὅτι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐξασκοῦνται πολλαὶ δυνάμεις $F_1, F_2, F_3, F_4, \dots$

(σχ. 23). Διὰ νὰ εὐρωμεν τὴν συνισταμένην ὅλων αὐτῶν τῶν δυνάμεων, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Συνθέτομεν τὰς δύο δυνάμεις F_1 καὶ F_2 διὰ τῆς μεθόδου τοῦ παραλληλογράμμου καὶ εὐρίσκομεν τὴν συνισταμένην $F_{1,2}$ αὐτῶν. Ἀκολούθως, συνθέτομεν τὴν δύναμιν ταύτην $F_{1,2}$ μετὰ τὴν δύναμιν F_3 , ὁπότε λαμβάνομεν τὴν δύναμιν $F_{1,2,3}$. Κατόπιν συνθέτομεν τὴν δύναμιν ταύτην μετὰ τὴν δύναμιν F_4 , ὁπότε προκύπτει ἡ δύναμις $F_{1,2,3,4}$. Ἐὰν αἱ πρὸς σύνθεσιν δυνάμεις εἶναι περισσότεραι, συνεχίζομεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὴν σύνθεσιν μέχρις ἐξαντλήσεως ὅλων τῶν δοθεισῶν δυνάμεων, ὁπότε, τελικῶς, θὰ λάβωμεν τὴν ζητούμενην συνισταμένην.

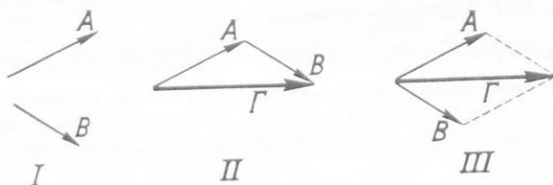


Σχ. 23.

► § 21. Πρόσθεσις άνυσματικῶν μεγεθῶν. Ὡς γνωστόν, διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο μονόμετρα μεγέθη, προσθέτομεν τὸς ἀριθμητικὰς των τιμὰς, ἀρκεῖ, βεβαίως, τὰ δύο μεγέθη νὰ ἐκφράζωνται εἰς τὰς αὐτὰς μονάδας. Οὕτω, προσθέτοντες δύο μάζας 5 gr καὶ 3 gr, εὐρίσκομεν ὡς ἄθροισμα 8 gr - δηλαδὴ τὰ μονόμετρα μεγέθη προστίθενται ἀλγεβρικῶς. Ἀντιθέτως, τὰ άνυσματικά μεγέθη προστίθενται «άνυσματικῶς».

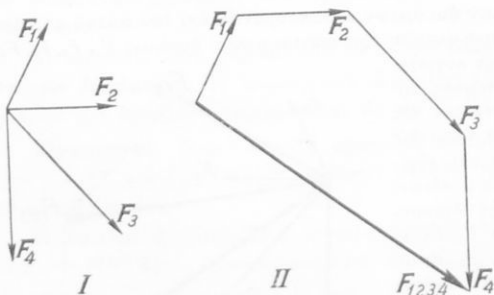
Μίαν πρώτην μέθοδον άνυσματικῆς προσθέσεως - τὴν μέθοδον τοῦ παραλλήλογράμμου - ἐγνωρίσαμεν ἀνωτέρω εἰς τὴν § 18, εἰς τὴν ὁποίαν συνθεθέσαμεν δύο δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἐσχημάτιζον γωνίαν μεταξύ των.

Ἐκτὸς τῆς μεθόδου ταύτης, χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν πρόσθεσιν άνυσματικῶν μεγεθῶν καὶ ἡ μέθοδος τοῦ πολυγώνου. Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀποτέλεσμα τῆς προσθέσεως δύο άνυσμάτων A καὶ B (σχ. 24, I) ἐργαζόμεθα



Σχ. 24. Ἡ συνισταμένη Γ τῶν δύο άνυσμάτων A καὶ B εὐρίσκεται διὰ δύο μεθόδων.

ὡς ἑξῆς: Ἐκ τοῦ πέρατος τοῦ ἑνὸς άνύσματος - π.χ. τοῦ A (σχ. 24, II) - φέρομεν δευτέρον άνυσμα, παράλληλον καὶ ἴσον πρὸς τὸ B . Ἐνώνοντες, ἀκολουθῶντες, τὴν ἀρχὴν τοῦ άνύσματος A μετὰ τοῦ πέρατος τοῦ άνύσματος B , εὐρίσκομεν τὸ άνυσμα Γ , τὸ ὁποῖον καλεῖται *γεωμετρικὸν* (ἢ άνυσματικὸν) *ἄθροισμα* ἢ *συνισταμένη* τῶν δύο άνυσμάτων. Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος (III) ἐσχεδιάσθη ἡ συνισταμένη Γ , ἡ προκύπτουσα διὰ τῆς μεθόδου τοῦ παραλλήλογράμμου. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν σχηματιζομένων τριγώνων συνάγομεν ὅτι καὶ διὰ τῶν δύο μεθόδων προκύπτει ἡ αὐτὴ συνισταμένη Γ .



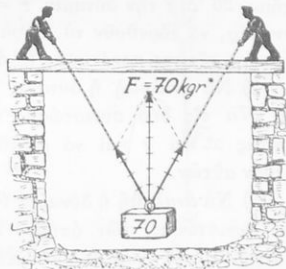
Σχ. 25. Σύνθεσις πολλῶν δυνάμεων διὰ τῆς μεθόδου τοῦ πολυγώνου.

Ἡ μέθοδος τοῦ πολυγώνου εἶναι ἰδιαίτερος ταχεῖα, προκειμένου νὰ γίνῃ σύνθεσις πολλῶν άνυσμάτων. Οὕτω, π.χ., διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν συνισταμένην τῶν δυνάμεων F_1, F_2, F_3, F_4 (σχ. 25, I) διὰ τῆς μεθόδου τοῦ πολυγώνου, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐκλέγομεν ἐπὶ τοῦ χαρτοῦ τοῦ σχεδίου σημείον τι καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρομεν μίαν δύ-

ναμιν, ἴσην καὶ παράλληλον πρὸς τὴν F_1 (σχ. 25, II). Ἀκολουθῶντες, ἐκ τοῦ πέρατος τῆς δυνάμεως ταύτης φέρομεν άνυσμα, παράλληλον καὶ ἴσον πρὸς τὴν δευτέραν δύναμιν F_2 .

Ἐν συνεχείᾳ, ἐκ τοῦ πέρατος τῆς F_3 φέρομεν ἄνυσμα, παράλληλον καὶ ἶσον πρὸς τὴν τρίτην δύναμιν F_3 καὶ ἐκ τοῦ πέρατος ταύτης ἄνυσμα, παράλληλον καὶ ἶσον πρὸς τὴν δύναμιν F_4 . Ἐνώνοντες τὴν ἀρχὴν τῆς πρώτης δυνάμεως F_1 μετὰ τοῦ πέρατος τῆς τετάρτης δυνάμεως F_4 , λαμβάνομεν τὴν δύναμιν $F_{1+2+3+4}$, ἡ ὁποία εἶναι ἀκριβῶς ἡ συνισταμένη τῶν τεσσάρων δυνάμεων F_1, F_2, F_3, F_4 . Συγκρίνοντας τὴν συνισταμένην ταύτην πρὸς τὴν συνισταμένην, τὴν προκύπτουσαν διὰ τῆς μεθόδου τοῦ παραλληλογράμμου (σχ. 23), παρατηροῦμεν ὅτι, καὶ διὰ τῶν δύο μεθόδων, προκύπτει τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα - ἀπόδειξις ὅτι αἱ δύο μέθοδοι εἶναι ἰσοδύναμοι.

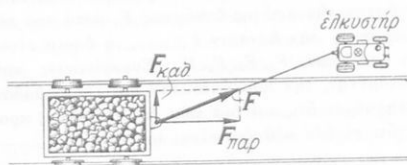
§ 22. Ἀνάλυσις δυνάμεων. Ὅπως δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν δύο δυνάμεις διὰ μιᾶς — τῆς συνισταμένης τῶν — οὕτω δυνάμεθα καὶ μίαν δύναμιν νὰ τὴν ἀντικαταστήσωμεν διὰ δύο ἄλλων δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι νὰ φέρουν τὸ αὐτὸ ἀκριβὺς ἀποτέλεσμα (*ἀνάλυσις*). Ἡ ἀνάγκη τῆς ἀναλύσεως μιᾶς δυνάμεως εἰς δύο συνιστώσας καταφαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος: Ἄνθρωπος ἀνυψώνει κατακορύφως ἓν σῶμα, βάρους, π.χ., 70 kg^* , ἔλκων αὐτὸ διὰ σχοινίου. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ δύναμις F , τὴν ὁποίαν οὗτος πρέπει νὰ ἐξασκήσῃ, εἶναι ἴση πρὸς 70 kg^* . Ἐάν, ἀντὶ ἑνὸς ἀνθρώπου, χρησιμοποιηθοῦν δύο, οἱ ὁποῖοι ἔλκουν τὸ σῶμα διὰ σχοινίων, σχηματίζόντων γωνίαν μεταξύ τῶν (σχ. 26), τίθεται τὸ ἐρώτημα ποῖαν δύναμιν πρέπει νὰ ἐξασκῇ ἕκαστος ἐξ αὐτῶν. Διὰ νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τὸ ἐρώτημα, ἀναλύομεν τὴν δύναμιν F εἰς δύο συνιστώσας κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν δύο σχοινίων. Πρὸς τοῦτο ἐκ τοῦ πέρατος τῆς δυνάμεως F φέρομεν δύο εὐθείας, παραλλήλους πρὸς τὰς διευθύνσεις τῶν σχοινίων, ὁπότε σχηματίζεται ἓν παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου διαγώνιος εἶναι ἡ δύναμις F . Εἶναι προφανὲς ὅτι αἱ οὕτω προκύψασαι συνιστώσαι δύνανται ν' ἀντικαταστήσουν τὴν δύναμιν F , διότι αὕτη εἶναι, ἀκριβῶς, ἡ συνισταμένη τῶν δύο τούτων δυνάμεων.



Σχ. 26.

Ἄλλη περίπτωσης, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀπαιτεῖται ἡ ἀνάλυσις μιᾶς δυνάμεως εἰς δύο συνιστώσας, εἶναι ἡ ἑξῆς: Ὅχημα, δυνάμενον νὰ κινηθῇ ἐπὶ σιδηροτροχιῶν, ἔλκεται ὑπὸ ἑλκυστήρος, κινουμένου ἔξω τῶν τροχιῶν (σχ. 27). Ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος, ἡ ὑπὸ τοῦ ἑλκυστήρος ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ ὀχήματος δύναμις F ἔχει διεύθυνσιν, πλάγιαν ὥς πρὸς τὴν διεύθυνσιν κινήσεως τοῦ ὀχήματος. Ἐν τούτοις, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως ταύτης τὸ ὄχημα θὰ κινηθῇ. Διὰ τὴν ἐξήγησιν τοῦ φαινομένου τούτου, πρέπει ν' ἀναλύσωμεν τὴν δύναμιν F εἰς δύο συνιστώσας, δηλ., πρέπει ν' ἀναζητήσωμεν δύο δυνάμεις, τῶν ὁποίων ἡ F νὰ εἶναι ἡ συνισταμένη. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ διευθύνσεις τῶν συνιστωσῶν θὰ

ἐκλεγοῦν ἡ μία παραλλήλως πρὸς τὴν διευθύνειν τῆς κινήσεως καὶ ἡ ἄλλη κα-
θέτως πρὸς αὐτήν. Πρὸς τοῦ-



Σχ. 27. Αἱ δύο δυνάμεις $F_{\text{παρ}}$ καὶ $F_{\text{καθ}}$ προκα-
λοῦν τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, ὡς ἡ δύναμις F .

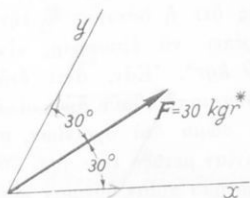
των θὰ λάβωμεν, ἐκ νέου, ὡς συνισταμένην τὴν δύναμιν F . Ἐκ τῶν δύο
τούτων συνιστώσων ἡ $F_{\text{παρ}}$ προκαλεῖ τὴν κίνησιν τοῦ ὀχήματος, ἡ δὲ $F_{\text{καθ}}$
πιέζει τὸ ὄχημα πλαγίως ἐπὶ τῶν τροχιῶν.

Ἐφαρμογαί. 1) Νὰ εὐρεθῇ ἡ κλίμαξ, ἡ χρησιμοποιηθεῖσα εἰς τὸ
σχῆμα 26 διὰ τὴν δύναμιν $F = 70 \text{ kgr}^*$. Ἐν
συνεχείᾳ, νὰ εὐρεθοῦν τὰ μέτρα τῶν δύο συνι-
στώσων, αἵτινες προέκυψαν ἐξ ἀναλύσεως.

2) Νὰ ἀναλυθῇ ἡ δύναμις F τοῦ σχήμα-
τος 27α εἰς δύο συνιστώσας κατὰ τὰς διευ-
θύνσεις x καὶ y καὶ νὰ εὐρεθῇ γραφικῶς τὸ
μέτρον αὐτῶν.

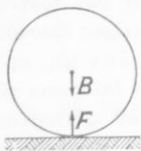
3) Νὰ ἀναλυθῇ ἡ δύναμις $F = 12 \text{ kgr}^*$ εἰς
δύο συνιστώσας, τῶν ὁποίων αἱ διευθύνσεις
νὰ σχηματίζουν γωνίαν 60° μετὰ τῆς διευθύνσεως τῆς δοθείσης δυνάμεως
καὶ νὰ εὐρεθῇ γραφικῶς τὸ μέτρον αὐτῶν.

4) Νὰ ἀναλυθῇ ἡ δύναμις $F = 30 \text{ kgr}^*$ εἰς δύο συνιστώσας, ἐκ τῶν
ὁποίων ἡ μία νὰ ἔχῃ μέτρον, ἴσον πρὸς 50 kgr^* καὶ νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς
δυνάμεως F γωνίαν 30° . (Γραφικὴ λύσις).



Σχ. 27α.

§ 23. Ἰσορροπία δυνάμεων. Αἱ δύο δυνάμεις F_1 καὶ F_2 , αἱ
ὁποῖαι ἐξασκοῦνται ἐπὶ τῆς ἀμάξης τοῦ σχήματος 20, ἔχουν ἀντίθετον φο-
ρᾶν. Ἐάν, ἐπὶ πλεόν, αἱ δυνάμεις αὗται ἔχουν καὶ ἴσα μέτρα, παρατηροῦ-
μεν ὅτι ἡ ἀμάξα ἀκίνηται. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ συνισταμένη τῶν
δύο αὐτῶν δυνάμεων εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, λέγομεν δὲ ὅτι αἱ δυνάμεις αὗται
ἰσορροποῦν.



Σχ. 28.

Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι **δύο δυνάμεις, ἐξασκου-
μεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἰσορροποῦν, όταν εἶναι
ἴσαι καὶ ἀντίθετοι.**

Ἄτερον παράδειγμα ἰσορροπίας δύο δυνάμεων ἔχο-
μεν εἰς τὴν περίπτωσιν σφαίρας, ἡρεμούσης ἐπὶ τοῦ δα-
πέδου (σχ. 28): Ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐξασκοῦνται δύο δυ-
νάμεις, τὸ βάρος B , προερχόμενον ἐκ τῆς ἑλξεως τῆς Γῆς καὶ ἡ δύναμις F ,

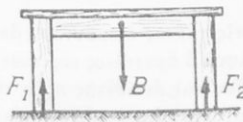
τὴν ὁποῖαν ἐξασκεῖ τὸ ἐν ἐπαφῇ πρὸς τὴν σφαῖραν δάπεδον. Ἐφ' ὅσον ἡ σφαῖρα ἰσορροπεῖ, πρέπει αἱ δύο ἐπ' αὐτῆς ἐξασκούμεναι δυνάμεις B καὶ F νὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι.

Εἰς τ' ἀνωτέρω ἐμελετήσαμεν τὴν περίπτωσιν ἰσορροπίας δύο δυνάμεων, ἐξασκουμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Εἰς τὰ ἐπόμενα, θὰ μελετήσωμεν τὴν ἰσορροπίαν τριῶν ἢ περισσοτέρων δυνάμεων, ἐξασκουμένων, ὁμοίως, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

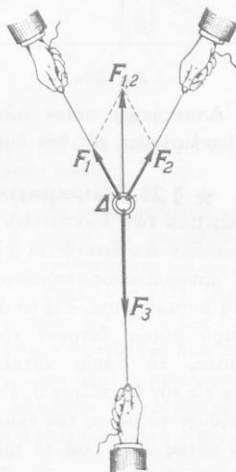
Διὰ νὰ εὕρωμεν πότε ἰσορροποῦν τρεῖς δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἐξασκούνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (*ὁμοεπίπεδοι*), θεωροῦμεν τὴν ἐξῆς περίπτωσιν: Ἐπὶ τοῦ δακτυλίου Δ τοῦ σχήματος 29 ἐξασκούνται τρεῖς ὁμοεπίπεδοι δυνάμεις F_1, F_2, F_3 , ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν ὁποίων οὗτος ἰσορροπεῖ. Αἱ δύο δυνάμεις F_1, F_2 , δύνανται ν' ἀντικατασταθοῦν ὑπὸ τῆς συνισταμένης των $F_{1,2}$, ὁπότε πλέον, ἐπὶ τοῦ δακτυλίου ἐξασκούνται δύο μόνον δυνάμεις - ἡ $F_{1,2}$ καὶ ἡ F_3 . Ἡδη, διὰ νὰ ἔχωμεν ἰσορροπίαν, πρέπει αἱ δύο αὗται δυνάμεις νὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι. Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι διὰ τὴν ἰσορροπίαν τριῶν ὁμοεπίπεδων δυνάμεων δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἐξῆς πρότασιν: *Διὰ νὰ ἰσορροποῦν τρεῖς ὁμοεπίπεδοι δυνάμεις, ἐξασκούμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, πρέπει ἡ συνισταμένη δύο ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν τρίτην.* Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι ἡ συνισταμένη καὶ τῶν τριῶν ὁμοῦ δυνάμεων θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν.

Εἰς τὰς ἄνω δύο περιπτώσεις εἶδομεν ὅτι ἰσορροπίαν ἔχομεν, ὅταν ἡ συνισταμένη τῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐξασκουμένων δυνάμεων εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Τοῦτο ἰσχύει ὄχι μόνον διὰ δύο ἢ τρεῖς δυνάμεις, ἀλλὰ καὶ διὰ περισσοτέρας. Δυνάμεθα, ἐπομένως, νὰ ἐκφράσωμεν τὴν γενικὴν συνθήκην ἰσορροπίας ὡς ἐξῆς:

«Ἰσορροπία πολλῶν δυνάμεων ἔχομεν, ὅταν ἡ συνισταμένη αὐτῶν εἶναι ἴση πρὸς μηδέν».



Σχ. 30. Αἱ ἐπὶ τῆς τραπέζης ἐξασκούμεναι πέντε δυνάμεις B, F_1, F_2, F_3, F_4 , ἰσορροποῦν.



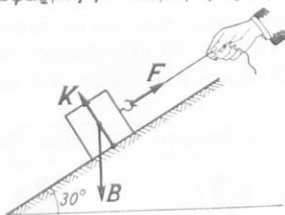
Σχ. 29.

Παράδειγμα ἰσορροπίας πολλῶν δυνάμεων ἔχομεν εἰς τὴν περίπτωσιν τραπέζης, ἡρεμούσης ἐπὶ τοῦ δαπέδου (σχ. 30): Ἐπὶ τῆς τραπέζης ἐξασκούνται, ἐν τῷ συνόλῳ, πέντε δυνάμεις - τὸ βάρος της B , τὸ ὁποῖον ἐξασκεῖ ἡ Γῆ καὶ τέσσαρες δυνάμεις F_1, F_2, F_3, F_4 , τὰς ὁποίας ἐξασκεῖ τὸ δάπεδον. (Αἱ δυνάμεις F_3

καὶ F_4 δὲν φαίνονται ἐπὶ τοῦ σχήματος). Ἐφ' ὅσον ἡ τράπεζα ἰσορροπεῖ,

πρέπει ή συνισταμένη τών ἐπ' αὐτῆς ἐξασκουμένων πέντε δυνάμεων νά εἶναι ἴση πρὸς μηδέν.

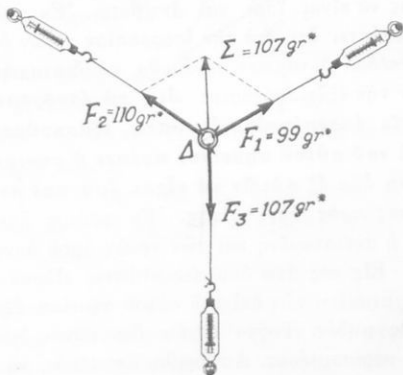
Ἐφαρμογή. Σῶμα, βάρους $B = 2 \text{ kg}$, εὐρισκόμενον ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, γωνίας κλίσεως 30° , συγκρατεῖται ἐπ' αὐτοῦ διὰ τεταμένου νήματος, τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. Εἰς τὸ σχῆμα 30α ἐξασκούμεναι δυνάμεις. (Ἡ δύναμις K εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον, καθόσον ἡ τριβὴ θεωρεῖται ἀμελητέα - βλ. Κεφάλαιον Η').



Σχ. 30α.

- α) Ἀπαντήσατε ποῖον σῶμα ἐξασκεῖ ἐκάστην τῶν δυνάμεων αὐτῶν καὶ β) ὑπολογίσατε τὰς δύο δυνάμεις K καὶ F .

★ § 24. Πειραματική ἀπόδειξις τοῦ νόμου τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων. Ἡ ἰσχὺς τοῦ νόμου τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων ἀποδεικνύεται εὐκόλως διὰ τριῶν δυναμομέτρων ὡς ἐξῆς: Ἐπὶ τοῦ μαυροπίνακος στερεώνομεν τρία καρφία (σχ. 31) καὶ ἐξ αὐτῶν ἐξαρτῶμεν

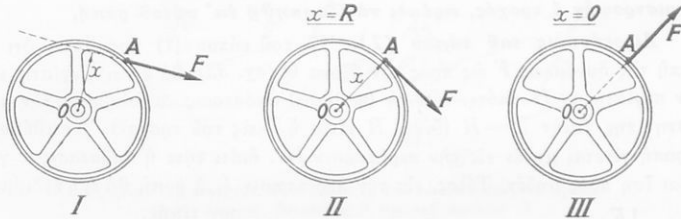


Σχ. 31. Πείραμα διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ νόμου τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων.

σημεῖον τῆς τομῆς τῶν, σχεδιάζομεν πρὸς τὰς τρεῖς ταύτας διευθύνσεις ἀνύσματα, ἀνάλογα πρὸς τὰ μέτρα τῶν δυνάμεων. Ἀφοῦ ὁ δακτύλιος εὐρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, θὰ πρέπει ἡ δύναμις F_3 νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν συνισταμένην Σ τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_2 . Τοῦτο μᾶς ἐπιτρέπει νὰ σχεδιάσωμεν τὴν συνισταμένην Σ ὡς ἄνυσμα, ἴσον καὶ ἀντίθετον πρὸς τὴν F_3 . Ἐκ τοῦ σχεδίου εὐρίσκομεν ὅτι αὕτη συμπίπτει μὲ τὴν διαγώνιον τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δύο δυνάμεων F_1 καὶ F_2 . Ἄρα, ἡ διαγώνιος τοῦ πα-

ραλληλογράμμου παρέχει, άκριβώς, την ζητουμένην συνισταμένην τών δυνάμεων F_1 καὶ F_2 .

• § 25. Ροπή δυνάμεως. Ἐστω τροχός, στρεπτός περὶ τὸν ἄξονα O (σχ. 32, I), εἰς σημεῖον A τῆς περιφερείας τοῦ ὁποίου ἔχομεν προσδέσει ἓν



Σχ. 32. (II). Ἡ ροπή τῆς δυνάμεως F εἶναι μέγιστη. — (III). Ἡ ροπή εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. — (I). Ἡ ροπή ἔχει ἐνδιάμεσον τιμήν.

νῆμα. Ἐὰν ἔλξωμεν τὸ νῆμα διὰ τῆς δυνάμεως F , θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ τροχός θ' ἀρχίσῃ νὰ περιστρέφεται. Ὁμοίως, ὁ τροχός θὰ περιστραφῇ, καὶ ὅταν ἡ δύναμις F ἔξῃ διεύθυνσιν, διάφορον τῆς προηγούμενης · π.χ., ἐὰν ἔξασκῇται κατὰ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ τροχοῦ εἰς τὸ σημεῖον A (II). Ἀντιθέτως, ὁ τροχός δὲν θὰ περιστραφῇ, ὅταν ἡ διεύθυνσις τῆς δυνάμεως διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ τροχοῦ (III). Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὰς δύο πρώτας περιπτώσεις ἡ διεύθυνσις τῆς δυνάμεως ἀπέχει τοῦ ἄξονος περιστροφῆς κατὰ μίαν (κάθετον) ἀπόστασιν x , τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **μοχλοβραχίονα** τῆς δυνάμεως, ἐνῶ εἰς τὴν τρίτην περίπτωσιν ἡ ἀπόστασις αὕτη εἶναι ἴση πρὸς μηδέν.

Διὰ νὰ περιστραφῇ, λοιπόν, ὁ τροχός, δὲν ἀρκεῖ νὰ ἔξασκῇται ἐπ' αὐτοῦ μία δύναμις, ἀλλὰ πρέπει, ἀπαραιτήτως, ἡ δύναμις αὕτη νὰ ἔχῃ μοχλοβραχίονα, διάφορον τοῦ μηδενός, δηλ., προεκτεινομένη νὰ μὴ διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος. Ἐπομένως, ἡ περιστροφή θὰ ἔξαρτᾶται ὀχι μόνον ἐκ τῆς δυνάμεως, ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ μοχλοβραχίονος αὐτῆς. Ὡς ἐκ τούτου, εἰς τὰ προβλήματα τῆς περιστροφῆς εἰσάγομεν ἓν νέον φυσικὸν μέγεθος, τὸ ὁποῖον καλεῖται **ροπή** καὶ τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ὡς ἑξῆς: **Ροπή** M τῆς δυνάμεως F ὡς πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς ὀρίζεται τὸ γινόμενον τῆς δυνάμεως F ἐπὶ τὸν μοχλοβραχίονα x αὐτῆς. Ἦτοι εἶναι

$$M = F \cdot x \quad (1)$$

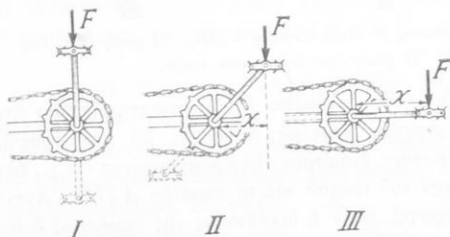
Ἐὰν ἡ δύναμις F τοῦ σχήματος 32, I, II ἀλλάξῃ φορὰν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ τροχός θὰ περιστραφῇ ἀντιθέτως. Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι, ἐὰν τὴν πρώτην ροπήν λάβωμεν μὲ θετικὸν σημεῖον, τὴν δευτέραν πρέπει νὰ λάβωμεν μὲ ἀρνητικὸν σημεῖον. Κατὰ συνθήκην, θετικὴ λαμβάνεται ἡ ροπή ἐκείνη, ἡ ὁποία τείνει νὰ περιστρέψῃ ἐν σῶμα κατὰ τὴν φορὰν τῆς κί-

νήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὥρολογίου, ἀρνητικὴ δὲ ἔκκεντρος, ἥ ὁποία τείνει νὰ τὸ περιστρέψῃ ἀντιθέτως.

Συμφώνως πρὸς τ' ἀνωτέρω, αἱ ροπαὶ εἰς τὸ σχῆμα 32, I, II λαμβάνονται μὲ θετικὸν σημεῖον.

Ἐκ τῶν περιγραφέντων πειραμάτων συνάγεται ὅτι *διὰ νὰ τεθῇ εἰς περιστροφὴν ὁ τροχός, πρέπει νὰ ἐξασκηθῇ ἐπ' αὐτοῦ ροπή.*

Διερευνῆσαι τοῦ τύπου (1). Ἐκ τοῦ τύπου (1) προκύπτει ὅτι ἡ ροπή τῆς δυνάμεως F ὡς πρὸς τὸν ἄξονα O (σχ. 32) θὰ εἶναι μεγίστη εἰς τὴν περίπτωσιν II, διότι, τότε, ἡ (κάθετος) ἀπόστασις x λαμβάνει τὴν μεγίστην τῆς τιμὴν $x = R$ (ἐνθα R εἶναι ἡ ἀκτίς τοῦ τροχοῦ). Ἀντιθέτως, ἡ ροπή γίνεται μηδὲν εἰς τὴν περίπτωσιν III, διότι τότε ἡ ἀπόστασις x γίνεται ἴση πρὸς μηδέν. Τέλος, εἰς τὴν περίπτωσιν I, ἡ ροπή θὰ ἔχῃ ἐνδιάμεσον τιμὴν.



Σχ. 33. (I). Ἡ ροπή τῆς δυνάμεως F εἶναι ἴση πρὸς μηδέν.—(III). Ἡ ροπή εἶναι μεγίστη.—(II). Ἡ ροπή ἔχει ἐνδιάμεσον τιμὴν.

ναί, μεγίστη (διότι $x = \text{μέγιστον}$) καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν II ἔχει ἐνδιάμεσον τιμὴν (διότι $x = \text{ἐνδιάμεσον}$).

Μονάδες ροπῆς. 1) C.G.S. Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο μονὰς δυνάμεως εἶναι ἡ 1 dyn καὶ μονὰς μήκους τὸ 1 cm. Θέτοντες, λοιπόν, εἰς τὸν τύπον (1) $F = 1 \text{ dyn}$ καὶ $x = 1 \text{ cm}$, λαμβάνομεν τὴν μονάδα ροπῆς εἰς τὸ σύστημα C.G.S., ἥ ὁποία εἶναι ἡ

$$1 \text{ dyn} \cdot \text{cm}.$$

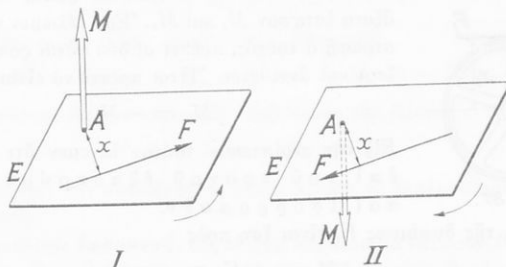
2) T.S. Ἐπειδὴ εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονὰς δυνάμεως εἶναι τὸ 1 kgr* καὶ μονὰς μήκους τὸ 1 m, ἔπεται ὅτι ἡ μονὰς ροπῆς θὰ εἶναι τὸ

$$1 \text{ kgr} \cdot \text{m} (= 1 \text{ χιλιογραμμαμόμετρον}).$$

★ ★ ★ § 26. Ροπή δυνάμεως ὡς πρὸς σημεῖον. Θεωρήσωμεν τὴν δύναμιν F (σχ. 34, I) καὶ τὸ σημεῖον A . Καλοῦμεν *ροπήν τῆς δυνάμεως F ὡς πρὸς τὸ σημεῖον A* ἐν ἀνυσματικὸν μέγεθος M , τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον, ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς δυνάμεως F ἐπὶ τὴν (κάθετον) ἀπόστασιν x αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἐν λόγῳ σημείου. Ἦτοι

$$M = F \cdot x$$

Ἡ διεύθυνσις τῆς ροπῆς λαμβάνεται καί θετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον E , τὸ ὀριζόμενον ὑπὸ τῆς δυνάμεως F καὶ τοῦ σημείου A . Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν φοράν



Σχ. 34. Ἡ ροπή M εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὀριζόμενον ὑπὸ τῆς δυνάμεως F καὶ τοῦ σημείου A .

τῆς ροπῆς (δηλ., διὰ νὰ εὗρωμεν, ἐάν αὕτη κατευθύνεται πρὸς τὰ ἄνω ἢ πρὸς τὰ κάτω εἰς τὸ σχῆμα 34), καταφεύγομεν εἰς τὸν κανόνα τοῦ δεξιόστροφου κοχλίου: Ἐάν, διὰ κοχλιοστροφίου (κ. κατσαβίδι), στρέψωμεν δεξιόστροφον κοχλίου(*) ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα 35, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ κοχλίας προχωρεῖ κατὰ τὴν φοράν τοῦ βέλους, ἐνῶ, ἐάν τὸν περιστρέψωμεν ἀντιθέτως, ὁπισθοχωρεῖ. Ἡδη, δυνάμεθα νὰ καθορίσωμεν τὴν φοράν τῆς ροπῆς ὡς ἑξῆς: Ἡ φορά τῆς ροπῆς M τοῦ σχήματος 34 συμπίπτει μὲ τὴν φοράν, κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ προχωρήσῃ ὁ δεξιόστροφος κοχλίας, ἐάν στραφῇ κατὰ τὴν φοράν περιστροφῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν τείνει νὰ περιστραφῇ τὸ ἐπίπεδον E ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F .

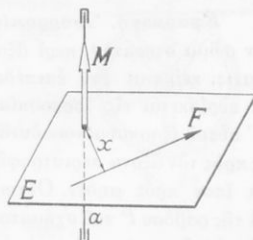
Κατὰ ταῦτα, ἡ φορά τῆς ροπῆς M εἰς τὸ σχῆμα 34, I πρέπει νὰ εἶναι πρὸς τὰ ἄνω. Ἐάν ἀλλάξῃ ἡ φορά τῆς δυνάμεως (II), τὸ ἐπίπεδον E τείνει νὰ περιστραφῇ ἀντιθέτως καί, συνεπῶς θ' ἀλλάξῃ καὶ ἡ φορά τῆς ροπῆς—δηλ., τώρα ἡ ροπή θὰ ἔχῃ φοράν πρὸς τὰ κάτω.



Σχ. 35.

• ★ § 27. Ροπή δυνάμεως ως πρὸς άξονα. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὀρίζεται καὶ ἡ ροπή μιᾶς δυνάμεως ὡς πρὸς άξονα: Θεωρήσωμεν τὸν άξονα a (σχ. 36) καὶ τὴν δύναμιν F , εὐρισκομένην ἐπὶ ἐπιπέδου E , κάθετου πρὸς αὐτόν. Ὀρίζομεν ὡς ροπήν τῆς δυνάμεως F ὡς πρὸς τὸν άξονα a ἓν ἀνυσματικὸν μέγεθος M , τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον, ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς δυνάμεως F ἐπὶ τὴν (κάθετον) ἀπόστασιν x αὐτῆς ἀπὸ τοῦ άξονος. Ἡτοι

$$M = F \cdot x$$

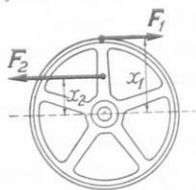


Σχ. 36.

Ἡ διεύθυνσις τῆς ροπῆς εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν άξονα, ἡ δὲ φορά τῆς εὐρίσκεται—ὅπως καὶ προηγουμένως—διὰ τοῦ κανόνος τοῦ δεξιόστροφου κοχλίου. (Εἰς τὸ σχῆμα 36 ἡ φορά τῆς ροπῆς εἶναι πρὸς τὰ ἄνω)

(*) Κατὰ κανόνα, ὅλοι οἱ ἐν τῇ ἐμπορίῳ φερόμενοι κοχλίοι εἶναι δεξιόστροφοι.

• § 28. **Ίσορροπία ροπών.** Ἐπὶ τροχοῦ, στρεπτοῦ περὶ ἄξονα (σχ. 37), ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις F_1 καὶ F_2 , τῶν ὁποίων αἱ ροπαὶ ὡς πρὸς τὸν



σχ. 37.

ἄξονα ἔστασαν M_1 καὶ M_2 . Ἐάν θέλωμεν νὰ μὴ περιστραφῇ ὁ τροχός, πρέπει αἱ δύο αὐταὶ ροπαὶ νὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι. Ἦτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$M_1 = -M_2. \quad (1)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι αἱ δύο ἐπὶ τοῦ τροχοῦ ἐξασκούμεναι ροπαὶ ἰσορροποῦν.

Ἡ ροπή M_1 τῆς δυνάμεως F_1 εἶναι ἴση πρὸς

$$M_1 = +F_1 \cdot x_1.$$

(Διὰ τῆς προσθήκης τοῦ θετικοῦ σημείου δηλοῦμεν ὅτι ἡ ροπή M_1 τείνει νὰ περιστρέψῃ τὸν τροχὸν κατὰ τὴν φοράν τῶν δεικτῶν τοῦ ὥρολογίου).

Ἀφ' ἑτέρου, ἡ ροπή M_2 τῆς δυνάμεως F_2 εἶναι ἴση πρὸς

$$M_2 = -F_2 \cdot x_2.$$

(Διὰ τῆς προσθήκης τοῦ ἀρνητικοῦ σημείου δηλοῦμεν ὅτι ἡ ροπή M_2 τείνει νὰ περιστρέψῃ τὸν τροχὸν κατὰ φοράν, ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὥρολογίου).

Ἦδη, ἀντικαθιστώντες εἰς τὸν τύπον (1), λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

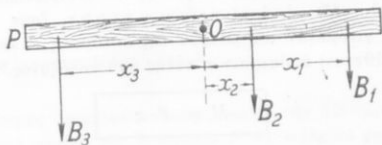
$$F_1 \cdot x_1 = F_2 \cdot x_2.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἐξῆς:

$$F_1 \cdot x_1 - F_2 \cdot x_2 = 0.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύπτει ὅτι ἰσορροπία ροπῶν ἔχομεν, ὅταν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν (λαμβάνομένων ὑπ' ὄψιν τῶν σημείων τῶν) εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν.

Ἐφαρμογή. Ἱσορροπία σώματος, στρεπτοῦ περὶ ἄξονα. Θεωρήσωμεν σῶμα στρεπτὸν περὶ ἄξονα, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐξασκοῦνται διάφοροι δυνάμεις, κείμεναι ἐπὶ ἐπιπέδον, καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα. Τὸ σῶμα τοῦτο θὰ εὐρίσκηται εἰς ἰσορροπίαν, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν, ὅλων τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένων δυνάμεων ὡς πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς, εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν. Οὕτω, ἐάν ἐπὶ τῆς ράβδου P τοῦ σχήματος 38, ἡ ὁποία εἶναι στρεπτή περὶ τὸν ὀριζόντιον ἄξονα O , ἐξαριθμοῦν τρία βάρη B_1, B_2, B_3 , αὕτη θὰ ἰσορροπῇ, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν M_1, M_2, M_3 τῶν τριῶν αὐτῶν δυνάμεων (*) ὡς



σχ. 38.

(*) Ἐκτὸς τῶν δυνάμεων B_1, B_2, B_3 , ἐπὶ τοῦ σώματος ἐξασκεῖται καὶ μία δύναμη.

πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν, ἥτοι ὅταν ἰσχύῃ ἡ σχέσις

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0. \quad (2)$$

Αἱ τρεῖς αὗται ροπαὶ εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσαι πρὸς

$$M_1 = B_1 \cdot x_1, \quad M_2 = B_2 \cdot x_2, \quad M_3 = -B_3 \cdot x_3.$$

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὸν τύπον (2) λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$B_1 \cdot x_1 + B_2 \cdot x_2 - B_3 \cdot x_3 = 0,$$

ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὴν συνθήκην, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἐκπληροῦται, ἵνα ἡ ράβδος ἰσορροπῇ.

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή. Εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα ἔστωσαν $B_1 = 2 \text{ kgr}^*$, $x_1 = 0,5 \text{ m}$, $B_2 = 2,5 \text{ kgr}^*$, $x_2 = 40 \text{ cm}$. Ἡ δύναμις B_3 εἶναι ἀγνώστος καὶ διέρχεται εἰς ἀπόστασιν $x_3 = 50 \text{ cm}$ ἀπὸ τοῦ ἄξονος. Νὰ εὕρεθῃ α) ἡ ροπή τῆς δυνάμεως B_1 , β) ἡ ροπή τῆς δυνάμεως B_2 , γ) ἡ ροπή τῆς ἀγνώστου δυνάμεως B_3 , δ) ἡ ἀναγκαία ἵνα ἡ ράβδος ἰσορροπῇ ὀρίζοντως καὶ δ) ἡ ἀγνώστος δύναμις B_3 .

Λύσις. α) $M_1 = B_1 \cdot x_1 = 2 \text{ kgr}^* \cdot 0,5 \text{ m} = 1 \text{ kgr}^* \cdot \text{m}$.

β) $M_2 = B_2 \cdot x_2 = 2,5 \text{ kgr}^* \cdot 0,4 \text{ m} = 1 \text{ kgr}^* \cdot \text{m}$.

γ) Ἐφ' ὅσον ἡ ράβδος ἰσορροπεῖ, ἡ ροπή M_3 τῆς ἀγνώστου δυνάμεως B_3 θὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ροπῶν M_1 καὶ M_2 . Ἐκ τούτου προκύπτει $M_3 = -2 \text{ kgr}^* \cdot \text{m}$.

δ) Ἐκ τῆς ἐξίσωσως $M_3 = -B_3 \cdot x_3$ λαμβάνομεν

$$B_3 = -\frac{M_3}{x_3} = -\frac{-2 \text{ kgr}^* \cdot \text{m}}{0,50 \text{ m}} = 4 \text{ kgr}^*.$$

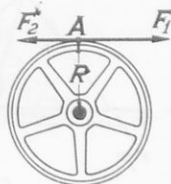
• **§ 29. Θεώρημα τῶν ροπῶν.** Θεωρήσωμεν τροχόν, στρεπτόν περὶ ἄξονα (σχ. 39), εἰς ἓν σημεῖον A τῆς περιφερείας τοῦ ὁποίου ἐξασκοῦνται αἱ δύο ἀντιπαράλληλοι δυνάμεις F_1 καὶ F_2 , ἔστω δὲ ἡ F_1 μεγαλυτέρα τῆς F_2 . Αἱ ὑπὸ τῶν δύο αὐτῶν δυνάμεων προκαλοῦμεναι ροπαὶ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς:

$$M_1 = F_1 \cdot R \quad \text{καὶ} \quad M_2 = -F_2 \cdot R,$$

ἐνθα R εἶναι ἡ ἀκτίς τοῦ τροχοῦ (*). Ἡ συνισταμένη ροπή $M_{ολ}$ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ροπῶν. Ἡτοι

$$M_{ολ} = M_1 + M_2 = F_1 \cdot R - F_2 \cdot R.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:



Σχ. 39.

μὴς ὑπὸ τοῦ ἄξονος O (μὴ σχεδιασθεῖσα εἰς τὸ σχῆμα 39), τῆς ὁποίας, ὅμως, ἡ ροπή ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τούτου εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, καθόσον ἡ δύναμις αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος.

(*) Ἐπειδὴ εἶναι $F_1 > F_2$ ἔπεται ὅτι αἱ δύο ροπαὶ εἶναι ἄνισοι καί, συνεπῶς, ὁ τροχὸς δὲν εὕρεσκειται ἐν ἰσορροπῇ.

$$M_{ολ} = (F_1 - F_2) \cdot R.$$

Ἡ ἔκφρασις, ὅμως, $F_1 - F_2$ εἶναι, ἀκριβῶς, ἡ συνισταμένη $F_{ολ}$ τῶν δύο δυνάμεων, ὅποτε προκύπτει :

$$M_{ολ} = F_{ολ} \cdot R.$$

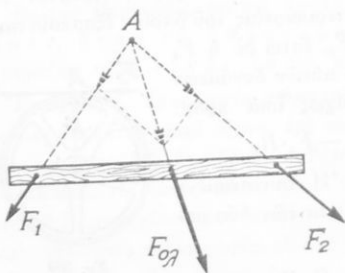
Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνισταμένη ροπὴ τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_2 εἶναι ἴση πρὸς τὴν ροπὴν, τὴν ὁποίαν προκαλεῖ ἡ συνισταμένη $F_{ολ}$ τῶν δυνάμεων αὐτῶν.

Ἐάν, τώρα, θεωρήσωμεν, ἀντὶ δύο δυνάμεων, περισσοτέρας δυνάμεις $F_1, F_2, F_3, \dots$, καὶ ἕνα οἰονδήποτε ἄξονα, ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ εἰς τὴν περίπτωσηί ταύτην ἡ συνισταμένη $M_{ολ}$ τῶν ροπῶν $M_1, M_2, M_3, \dots$, ὅλων τῶν δυνάμεων $F_1, F_2, F_3, \dots$, εἶναι ἴση πρὸς τὴν ροπὴν, τὴν ὁποίαν προκαλεῖ ἡ συνισταμένη $F_{ολ}$ τῶν πολλῶν αὐτῶν δυνάμεων. (Θεώρημα τῶν ροπῶν).

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ εὐρίσκωμεν τὴν συνισταμένην ροπὴν πολλῶν δυνάμεων ὡς πρὸς ἕνα ἄξονα κατὰ δύο τρόπους : α) Εὐρίσκομεν τὴν ροπὴν μιᾶς ἐκάστης δυνάμεως ὡς πρὸς τὸν ἐν λόγῳ ἄξονα καί, ἀκολουθῶς, συνθέτομεν τὰς ροπὰς ταύτας. β) Βάσει τοῦ θεωρήματος τῶν ροπῶν, εὐρίσκομεν τὴν συνισταμένην $F_{ολ}$ ὅλων τῶν δυνάμεων καί, ἀκολουθῶς, ὑπολογίζομεν τὴν ροπὴν τῆς συνισταμένης ταύτης δυνάμεως ὡς πρὸς τὸν ἐν λόγῳ ἄξονα.

Ἐφαρμογὴν τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν εἰς τὴν § 30.

§ 30. Σύνθεσις δυνάμεων, ἐφηρμοσμένων ἐπὶ στερεοῦ σώματος. Εἰς τὰ προηγούμενα ἠσχολήθημεν μὲ τὴν σύνθεσιν δυνάμεων, ἐφηρμοσμένων εἰς ὑλικοὺς σημεῖον. Ἐνταῦθα θ' ἀσχοληθῶμεν μὲ τὴν εὕρεσιν τῆς συνισταμένης δυνάμεων, ἑξασκουμένων ἐπὶ στερεοῦ σώματος.



Σχ. 40.

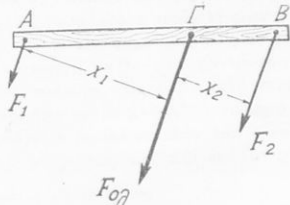
α) Ὅμοεπίπεδοι, ἀλλὰ μὴ παράλληλοι δυνάμεις. Ἐπὶ τινος σώματος (σχ. 40) ἐπιδροῦν αἱ δύο μὴ παράλληλοι δυνάμεις F_1 καὶ F_2 . Τὴν συνισταμένην αὐτῶν εὐρίσκομεν ὡς ἑξῆς : Μεταφέρομεν τὰς δύο δυνάμεις F_1 καὶ F_2 κατὰ τὴν διεύθυνσίν των μέχρις οὗ τοι τμηθοῦν

(σημεῖον Α) καί, ἀκολουθῶς, τὰς συνθέτομεν κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ παραλληλογράμμου. Μεταφέροντες, ἐν συνεχείᾳ, τὴν προκύψασαν συνισταμένην κατὰ τὴν διεύθυνσίν της, εὐρίσκομεν τὴν ἐπὶ τοῦ σώματος ἑξασκουμένην δύναμιν $F_{ολ}$.

Εἶναι προφανές ὅτι ἡ σύνθεσις εἶναι δυνατή, μόνον ὅταν αἱ δύο δυνά-

μεις κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (*ὁμοεπιπέδοι*), διότι, ἄλλως, αὗται, προεκτεινόμεναι, δὲν τέμνονται.

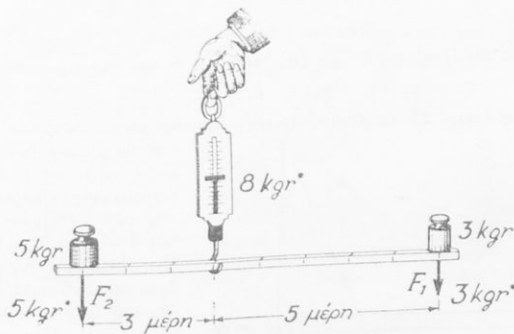
β) *Δυνάμεις παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι*. Ἡ συνισταμένη τῶν δύο παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων F_1 καὶ F_2 (σχ. 41) δὲν εἶναι δυνατόν νὰ εὑρεθῇ διὰ τῆς εἰς τὰ προηγούμενα ἀναπτυχθείσης μεθόδου, διότι αὗται, προεκτεινόμεναι, τέμνονται εἰς τὸ ἄπειρον. Ὅπως, ὁμως, ἀποδεικνύεται κατωτέρω, ἡ συνισταμένη $F_{ολ}$ αὐτῶν ἔχει τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ φοράν, ὥς αἱ F_1 καὶ F_2 , εὐρίσκεται μεταξὺ αὐτῶν, ἔχει μέτρον, ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα $F_1 + F_2$, τῶν μέτρων τῶν δύο συνιστωσῶν, χωρίζει δὲ τὴν μεταξὺ αὐτῶν ἀπόστασιν εἰς μέρη, ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰ μέτρα τῶν δύο συνιστωσῶν. Ἦτοι εἶναι



Σχ. 41.

$$F_{ολ} = F_1 + F_2 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{F_2}{F_1} \quad (2)$$

Τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἀποδεικνύομεν πειραματικῶς ὡς ἑξῆς: Εἰς τὰ ἄκρα ἐλαφρῶς σανίδος (σχ. 42) ἐξασκοῦμεν δύο παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους



Σχ. 42.

δυνάμεις $F_1 = 3 \text{ kg}^*$ καὶ $F_2 = 5 \text{ kg}^*$, ἐπιθέτοντες τὰ ἀντίστοιχα σταθμά. Ζητοῦμεν νὰ εὐρωμεν τὸ σημεῖον, ἐκ τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ ἐξαρτήσωμεν τὴν σανίδα, ἵνα αὕτη ἰσορροπῇ ὀριζοντίως, διότι, τότε, ἡ ὑπὸ τοῦ ἀγκίστρου ἐξασκουμένη δύναμις θὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν συνισταμένην τῶν δύο δυνάμεων F_1 καὶ F_2 . Ἐὰν μετακινήσωμεν τὸ ἀγκίστρον τοῦ δυναμομέτρου εἰς διαφόρους θέσεις, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, ὅταν ἡ σανὶς ἰσορροπῇ, τὸ σημεῖον ἐξαρτήσεως εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὸ μεγαλύτερον βάρος καί, συγκεκριμένως, εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε τὸ μῆκος τῆς σανίδος νὰ διαιρῇται

εἰς μέρη, τῶν ὁποίων ὁ λόγος νὰ εἶναι $3:5$, δηλ., τὸ ἀντίστροφον τοῦ λόγου $5:3$ τῶν δύο δυνάμεων. Τὸ δυναμόμετρον δεικνύει ἔνδειξιν $8 \text{ kg}r^*$, ἥ ὁποία εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δυνάμεων $5 \text{ kg}r^*$ καὶ $3 \text{ kg}r^*$.

Ἀπόδειξις τῶν τύπων (1) καὶ (2). Ἐφ' ὅσον αἱ δύο συνισταῖσαι F_1, F_2 τοῦ σχήματος 41 εἶναι παράλληλοι, εἶναι φανερόν ὅτι καὶ ἡ συνισταμένη των F_{ol} θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτάς. Ἐνῶ, ὁμως, οὕτω γνωρίζομεν τὴν διεύθυνσιν τῆς συνισταμένης, μᾶς εἶναι ἄγνωστον πόσον τὸ μέτρον, ὅσον καὶ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον αὕτη τέμνει τὴν εὐθεΐαν AB . Ὡς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ σημεῖον I . Ἄν ὡς ἄξονα λάβωμεν εὐθεΐαν, διερχομένην διὰ τοῦ ζητουμένου σημείου I καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_2 , τότε, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:

$$\begin{aligned} \rhoοπή \text{ τῆς } F_1 + \rhoοπή \text{ τῆς } F_2 &= \rhoοπή \text{ τῆς } F_{ol} \\ -F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 &= F_{ol} \cdot 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Ἐκ τῆς ἐξίσωσως ταύτης λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{F_2}{F_1},$$

ἥ ὁποία, εἶναι, ἀκριβῶς, ἡ ἐξίσωσις (2).

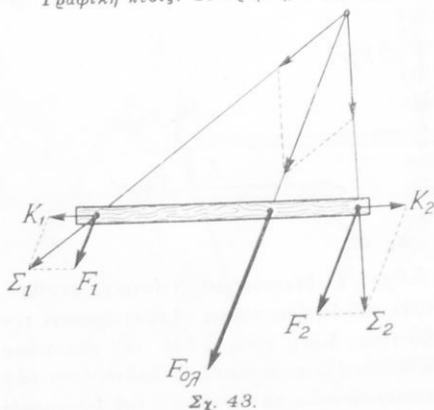
Προκειμένου νὰ εὑρωμεν τὸ μέτρον τῆς συνισταμένης F_{ol} , θεωροῦμεν ὅτι ὁ ἄξων διερχεται διὰ τοῦ σημείου B καὶ ἐφαρμόζομεν, ἐκ νέου, τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν (*), ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\begin{aligned} -F_1 \cdot (x_1 + x_2) + F_2 \cdot 0 &= -F_{ol} \cdot x_2. \\ \eta \quad F_1 \cdot (x_1 + x_2) &= F_{ol} \cdot x_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Προσθέτοντες τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4) κατὰ μέλη, ἔχομεν τὴν ζητουμένην σχέσιν (1)

$$F_{ol} = F_1 + F_2.$$

Γραφικὴ λύσις. Τὸ πρόβλημα τῆς εὐρέσεως τῆς συνισταμένης δύο παραλλήλων καὶ ὁμορροπῶν δυνάμεων δυνάμεθα νὰ λύσωμεν διὰ τοῦ ἐξῆς τεχνάσματος: Θεωροῦμεν ὅτι ἐπὶ τῆς ράβδου ἐξασκοῦνται, ἐκτὸς τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_2 (σχ. 43), δύο, ἐπὶ πλεόν, δυνάμεις K_1, K_2 , ἴσαι καὶ ἀντίθετοι μεταξύ των.



Σχ. 43.

Ἐπειδὴ αἱ δύο αὗται δυνάμεις ἀλλήλοαναιρούονται, ἡ προσθήκη αὐτῶν οὐδὲως μεταβάλλει τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος. Ἀναζητοῦμεν, τώρα, τὴν συνισταμένην τῶν τεσσάρων δυνάμεων F_1, F_2, K_1, K_2 . Πρὸς τοῦτο εὐρίσκομεν, διὰ τῆς μεθόδου τοῦ παραλληλογράμμου, ἀφ' ἐνὸς μὲν τὴν συνισταμένην Σ_1 , τῶν δύο

δυνάμεων F_1 καὶ K_1 , ἀφ' ἑτέρου δὲ τὴν συνισταμένην Σ_2 τῶν δύο ἄλλων δυνάμεων F_2 καὶ K_2 . Τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν ἰσχύει δι' οἰονδήποτε ἄξονα καὶ ἂν ὑπολογίσωμεν τὰς ροπὰς.

F_2 καὶ K_2 . Τὰς δύο, οὕτω, εὐρεθείσας δυνάμεις Σ_1 καὶ Σ_2 συνθέτομεν κατὰ τὰ γινωστά καὶ εὐρίσκομεν τὴν ζητούμενὴν συνισταμένην $F_{ολ}$.

γ) **Δυνάμεις παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι.** Θεωρήσωμεν ὅτι ἐπὶ τῆς ράβδου τοῦ σχήματος 44 ἐξασκοῦνται αἱ δύο παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι δυνάμεις F_1 καὶ F_2 καὶ ὅτι ἡ F_2 εἶναι μεγαλυτέρα τῆς F_1 . Ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω, ἡ συνισταμένη $F_{ολ}$ τῶν δύο αὐτῶν δυνάμεων ἔχει τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν ὥς αἱ συνιστώσαι, φορᾷ, τὴν φορᾷ τῆς μεγαλυτέρας, κεῖται ἐκεῖθεν αὐτῆς καὶ τέμνει τὴν εὐθείαν AB εἰς τοιαύτην θέσιν Γ , ὥστε αἱ ἀποστάσεις x_1, x_2 νὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν μέτρων τῶν δύο συνιστωσῶν. Ἦτοι

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{F_2}{F_1} \quad (5)$$

Σχ. 44.

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸ μέτρον τῆς συνισταμένης, τοῦτο εἶναι ἴσον πρὸς τὴν διαφορὰν $F_2 - F_1$ τῶν μέτρων τῶν δύο συνιστωσῶν. Ἦτοι

$$F_{ολ} = F_2 - F_1. \quad (6)$$

Ἀπόδειξις. Διὰ τὴν εὐρομένην τὸ μέτρον τῆς συνισταμένης $F_{ολ}$, δεχόμεθα ὅτι αὕτη διέρχεται διὰ τινος σημείου Γ . Ἦδη, ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν δι' ἄξονα, διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου τούτου καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο δυνάμεων F_1, F_2 , λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$-F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 = F_{ολ} \cdot 0$$

$$\eta \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{F_2}{F_1},$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἐξίσωσις (5). Ἐπειδὴ ἐδέχθημεν ὅτι ἡ δύναμις F_2 εἶναι μεγαλυτέρα τῆς δυνάμεως F_1 , θὰ πρέπει, κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (5), ἡ ἀπόστασις x_1 νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀποστάσεως x_2 . Ἀρα ἡ συνισταμένη κεῖται ἐκεῖθεν τῆς μεγαλυτέρας δυνάμεως F_2 . Ἦδη, ἐφαρμόζοντες τὸ αὐτὸ θεώρημα δι' ἄξονα, διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου A , λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$F_1 \cdot 0 - F_2 \cdot (x_1 - x_2) = -F_{ολ} \cdot x_1$$

$$\eta \quad F_{ολ} = F_2 \cdot \frac{(x_1 - x_2)}{x_1} = F_2 \cdot \left(1 - \frac{x_2}{x_1}\right) \quad (7)$$

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην τὸ x_2/x_1 διὰ τοῦ ἴσου του, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἐκ τοῦ τύπου (5), ἔχομεν διὰ τὸ μέτρον τῆς συνισταμένης τὴν ἐξίσωσιν

$$F_{ολ} = F_2 \cdot \left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right)$$

$$\eta \quad F_{ολ} = F_2 - F_1$$

ἡ ὁποία εἶναι, ἀκριβῶς, ἡ ἐξίσωσις (6).

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν διεύθυνσιν τῆς $F_{ολ}$, εἶναι φανερόν ὅτι αὕτη θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ μετὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν δύο παραλλήλων συνιστωσῶν.

Ἡ φορὰ τῆς $F_{ολ}$ θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν φορὰν τῆς δυνάμεως F_2 , δεδομένου ὅτι αὕτη εἶναι ἡ μεγαλύτερα ἐκ τῶν δύο δυνάμεων F_1 καὶ F_2 (βλ. καὶ σχ. 20).

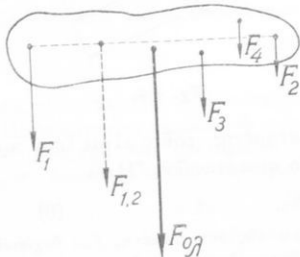
Τέλος, διὰ νὰ εὐρίσκωμεν τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ συνισταμένη τέμνει τὴν εὐθεΐαν AB , ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (7) ἀντὶ τοῦ $F_{ολ}$ τὸ ἴσον του, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἐκ τοῦ τύπου (6), ὁπότε ἔχομεν

$$x_1 = \frac{F_2 \cdot (x_1 - x_2)}{F_2 - F_1}$$

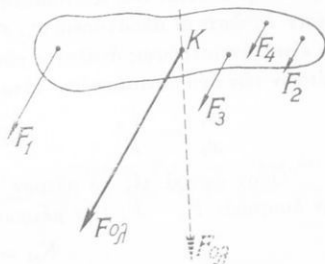
$$\eta \quad x_1 = \frac{F_2 \cdot l}{F_2 - F_1} \quad (8)$$

(ἀφοῦ $x_1 - x_2 = l$).

§ 31. Σύνθεσις πολλῶν παραλλήλων δυνάμεων τῆς αὐτῆς φορᾶς. Ἐστωσαν αἱ δυνάμεις $F_1, F_2, F_3, F_4 \dots$ (σχ. 45), αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς καὶ ἐξασκοῦνται εἰς διάφορα σημεῖα ἐνὸς σώματος. Διὰ νὰ εὐρίσκωμεν τὴν



Σχ. 45.



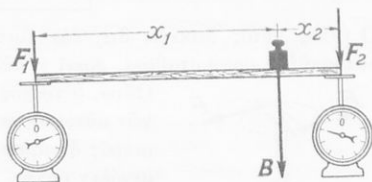
Σχ. 46. Αἱ διάφοροι διευθύνσεις τῆς συνισταμένης $F_{ολ}$ τέμνονται εἰς τὸ κέντρον παραλλήλων δυνάμεων K .

συνισταμένην αὐτῶν συνθέτομεν, κατὰ τὰ γνωστά, δύο ἐξ αὐτῶν, π.χ., τὰς F_1 καὶ F_2 καὶ εὐρίσκομεν τὴν συνισταμένην τῶν $F_{1,2}$. Ἀκολουθῶς, συνθέτομεν τὴν συνισταμένην ταύτην $F_{1,2}$ μὲ τὴν δύναμιν F_3 , τὴν δὲ προκύπτουσαν νέαν συνισταμένην $F_{1,2,3}$ συνθέτομεν μὲ τὴν δύναμιν F_4 κ.ο.κ. μέχρις ἐξαντλήσεως ὅλων τῶν δυνάμεων. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ προκύψῃ ἡ τελικὴ συνισταμένη $F_{ολ}$, ἡ ὁποία θὰ εἶναι παράλληλος καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς πρὸς τὰς συνιστώσας, θὰ ἔχῃ δὲ μέτρον, ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν συνιστωσῶν.

★ ★ Θεώρημα τοῦ κέντρου παραλλήλων δυνάμεων. Ἐάν αἱ δυνάμεις $F_1, F_2, F_3, F_4 \dots$ τοῦ σχήματος 45 ἀλλάξουν διεύθυνσιν, ἐξακολουθοῦν, ὅμως, νὰ εἶναι παράλληλοι (καὶ νὰ διατηροῦν τὸ αὐτὸ μέτρον - σχ. 46), τότε καὶ ἡ συνισταμένη των θ' ἀλλάξῃ διεύθυνσιν, ἀλλὰ τὸ μέτρον αὐτῆς δέν θὰ μεταβληθῇ. Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ διεύθυνσις τῆς συνισταμένης $F_{ολ}$ τέμνει τὴν προηγούμενην τῆς διεύθυνσιν (ἐστὶ γμῆνη) εἰς ἓν σημεῖον K , τὸ ὁποῖον καλεῖται **κέντρον παραλλήλων δυνάμεων** καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ προσανατολισμοῦ αὐτῶν. (Θεώρημα τοῦ κέντρου παραλλήλων δυνάμεων).

★ § 32. Ἀνάλυσις δυνάμεως, ἐξασκουμένης ἐπὶ στερεοῦ σώματος, εἰς δύο συνιστώσας, παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς. Θεωρήσωμεν σανίδα, στηριζομένην ἐπὶ τῶν δίσκων δύο δυναμομέτρων (σχ. 47). Ἐπὶ τῆς σανίδος τοποθετοῦμεν σῶμα, βάρους, π.χ., 10 kgr^* . Τὰ δύο δυναμόμετρα παρέχουν τὰς δύο συνιστώσας F_1, F_2 , εἰς τὰ ὁποῖα ἀνάλυ-

ται τὸ βάρος B τοῦ σώματος. Ἐὰν μετακινήσωμεν τὸ σῶμα εἰς διαφόρους θέσεις ἐπὶ τῆς σανίδος, θὰ εὔρωμεν ὅτι, εἰς οἰανδήποτε θέσιν καὶ ἀνεύρισκεται τοῦτο, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τῶν δύο δυναμομέτρων εἶναι πάντοτε ἶσον πρὸς 10 kgp^* . Ἐπίσης, εὐρίσκομεν ὅτι τὸ πηλίκον $F_1 : F_2$ τῶν δύο ἐνδείξεων ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον $x_2 : x_1$ τῶν ἀποστάσεων.



Σχ. 47. Αἱ ἐνδείξεις τῶν δύο δυναμομέτρων εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ἀποστάσεων x_1 καὶ x_2 .

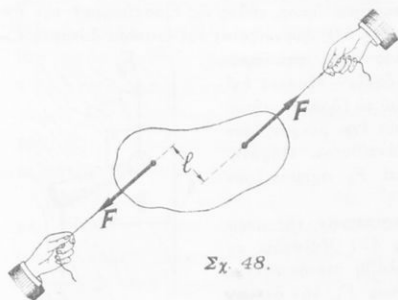
Τῷ ἀνωτέρω εὐρεθέντι ἀποδίδονται διὰ τῶν ἐξισώσεων

$$F_1 + F_2 = B \quad \text{καὶ} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{x_2}{x_1},$$

αἱ ὁποῖαι συμπιπτουν, ἐντελῶς, μετὰ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) τῆς παραγράφου 30 περὶ συνθέσεως δύο παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων. Τοῦτο εἶναι προφανές, καθόσον, διὰ συνθέσεως τῶν δύο δυνάμεων F_1 καὶ F_2 , πρέπει νὰ προκύπτῃ ὡς συνισταμένη τὸ βάρος B .

Ἐφαρμογή. Δύο ἄνθρωποι μεταφέρουν σῶμα, βάρους 50 kgp^* , ἐξηρητημένον διὰ ράβδον, ἥ ὁποία στηρίζεται, διὰ τῶν ἁκρῶν της, ἐπὶ τοῦ ὤμου ἐκάστου ἐξ αὐτῶν. Ἐὰν τὸ μήκος τῆς ράβδου εἶναι 2 m , εἰς ποῖον σημεῖον πρέπει νὰ ἐξαξηθη τὸ σῶμα, ὥστε ὁ εἷς τῶν ἀνθρώπων νὰ ὑποβαστάξῃ βάρος 20 kgp^* ;

§ 33. Ζεύγος δυνάμεων. Καλοῦμεν *ζεύγος δυνάμεων* σύστημα δύο παραλλήλων δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον, ἀλλ' ἀντιθέτους φορᾶς (σχ. 48). Ἐν ζεύγος δυνάμεων, ἐξασκούμενον ἐπὶ σώματος, δυναμένου νὰ περιστραφῇ περὶ ἄξονα, προκαλεῖ περιστροφὴν αὐτοῦ. Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ ἐπιδρωῶτος ζεύγους ἐξαρτᾶται τόσον ἐκ τοῦ μέτρου τῶν δυνάμεων, ὅσον καὶ ἐκ τῆς (καθέτου) ἀποστάσεως l αὐτῶν, ἥ ὁποία καλεῖται *μοχλοβραχίον τοῦ ζεύγους*. Ἐνεκα τούτου, ἓν ζεύ-



Σχ. 48.

γος χαρακτηρίζεται ἐκ τῆς ροπῆς του. **Ροπή** M ἐνὸς ζεύγους δυνάμεων καλεῖται τὸ γινόμενον τῆς μιᾶς τῶν ἴσων δυνάμεων ἐπὶ τὸν μοχλοβραχίονα l .
*Ητοι

$$M = F \cdot l$$

(1)

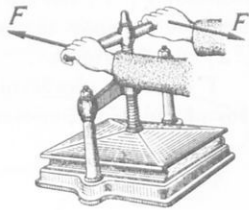
Ο τύπος ούτος δεικνύει ότι, εάν ελαττωθῇ ἡ δύναμις, εἶναι δυνατόν νὰ διατηρηθῇ ἡ ροπή σταθερά, ἀρκεῖ ν' αὐξηθῇ, ἀντιστοίχως, ὁ μοχλοβραχίον.



Σχ. 49. Τὸ ζεύγος τῶν δυνάμεων F , F προκαλεῖ περιστροφήν τοῦ ἐκπωματιστήρος.

Οὕτω, ὁ τροχὸς τοῦ πηδαλίου τῶν μεγάλων φορητῶν αὐτοκινήτων ἔχει μεγάλην διάμετρον, ἵνα, διὰ μικρᾶς δυνάμεως τῶν χειρῶν μας, ἐπιτυγχάνωμεν μεγάλην ροπήν.

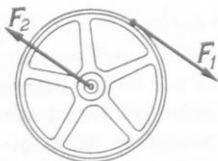
Ζεύγη δυνάμεων παρουσιάζονται εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις τῆς καθημερινῆς ζωῆς εἰς τὰς ὁποίας θέλομεν νὰ ἐπιτύχωμεν περιστροφήν. Οὕτω, διὰ νὰ στρέψωμεν τὸν ἐκπωματιστήρα (σχ. 49)



Σχ. 50. Αἱ δυνάμεις F , F ἀποτελοῦν ζεύγος.

πρέπει, διὰ τῆς χειρὸς μας, νὰ ἐξασκήσωμεν ἐπ' αὐτοῦ δύο δυνάμεις F , F , αἱ ὁποῖαι ν' ἀποτελοῦν ζεύγος. Ὅμοιως, διὰ νὰ περιστρέψωμεν τὸν κοχλῖαν τοῦ πιεστηρίου τοῦ σχήματος 50, πρέπει νὰ ἐξασκήσωμεν ἐπὶ τῆς λαβῆς τοῦ ζεύγος δυνάμεων.

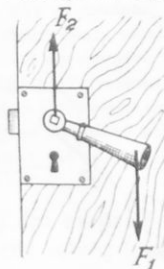
Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν περιστροφήν εἰς τὰ ἄνω παραδείγματα ἐφημέροισαν δύο δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἐσχημάτιζον ζεύγος. Ὑπάρχουν, ὁμως, καὶ περιπτώσεις εἰς τὰς



Σχ. 51.

ὁποίας, ἐκ πρώτης ὕψεως, φαίνεται ὅτι τὴν περιστροφήν προκαλεῖ μία μόνον δύναμις. Οὕτω, κατὰ τὸ πείρασμα τοῦ σχήματος 32 φαίνεται ὅτι ὁ τροχὸς τίθεται εἰς περιστροφήν ὑπὸ μιᾶς μόνον δυνάμεως. Εἰς τὴν πραγματικότητα, ὁμως, εὐθὺς ὥς ἐξασκήσωμεν τὴν δύναμιν F_1 (σχ. 51), ἐμφανίζεται καὶ δευτέρα δύναμις F_2 , παρόμοια πρὸς τὴν πρώτην, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ τροχοῦ τὸ ἔδρανόν αὐτοῦ καὶ ἡ ὁποία ἔχει μέτρον, ἴσον πρὸς τὸ μέτρον τῆς F_1 , ἀλλὰ φορὰν ἀντίθετον. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ δύο δυνάμεις F_1 καὶ F_2 σχηματίζουν ζεύγος.

Τὰ αὐτὰ ἰσχύουν καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς περιστροφῆς τῆς χειρολαβῆς τοῦ σχήματος 52: Μολονότι, ἐκ πρώτης ὕψεως, φαίνεται ὅτι ἡ χειρολαβὴ περιστρέφεται μόνον ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F_1 , τὴν ὁποίαν ἐξασκοῦμεν διὰ τῆς χειρὸς, ἐν τούτοις εἰς τὴν πραγματικότητα ἐπὶ τῆς χειρολαβῆς ἐξασκεῖται καὶ δευτέρα δύναμις (F_2) εἰς τὸ σημεῖον στερεώσεως αὐτῆς μετὰ τῆς F_1 πύραυλος, ἀποτελοῦσα ζεύγος



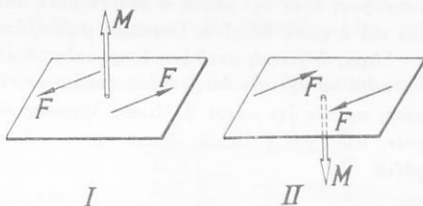
Σχ. 52.

★ § 34. **Σύνθεσις δύο δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν ζεύγος.** Δεδομένου ὅτι αἱ δύο δυνάμεις, αἱ ἀποτελοῦσαι ἐν ζεύγος, εἶναι δυνάμεις ἀντιπαράλληλοι, δυνάμεθα, κατὰ τὰ προηγουμένα, νὰ εὕρωμεν τὴν συνισταμένην αὐτῶν. Πρὸς τοῦτο εἰς τὴν ἐξίσωσιν (6) τῆς παραγράφου 30, γ' θέτομεν $F_1 = F_2$, ὁπότε λαμβάνομεν διὰ τὴν συνισταμένην $F_{ολ}$ τὴν τιμὴν

$$F_{ολ} = 0.$$

Ἀφ' ἐτέρου, θέτοντες εἰς τὸν τύπον (8) τῆς αὐτῆς παραγράφου $F_1 = F_2$, εὕρισκομεν διὰ τὴν ἀπόστασιν x_1 τῆς συνισταμένης ἀπὸ τῆς δυνάμεως F_1 τιμὴν, ἴσην πρὸς ἄπειρον. Ἐκ τούτων προκύπτει ὅτι ἐν ζεύγος δυνάμεων δύναται ν' ἀντικατασταθῇ ὑπὸ μιᾶς δυνάμεως, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς μηδέν καὶ εὕρισκεται εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, πρακτικῶς, ἐν ζεύγος δὲν δύναται ν' ἀντικατασταθῇ ὑπὸ μιᾶς μόνον δυνάμεως, ἡ ὁποία ν' ἀποτελῇ τὴν συνισταμένην τῶν δύο δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι συνιστοῦν τὸ ζεύγος.

★ ★ § 35. **Ἡ ροπή τοῦ ζεύγους ὡς ἀνυσματικὸν μέγεθος.** Ἡ ροπή τοῦ ζεύγους δύο δυνάμεων εἶναι ἀνυσματικὸν μέγεθος, τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον, ὑπολογιζόμενον ἐκ τοῦ τύπου (1) τῆς § 33, διεύθυνσιν, καθέτον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν δύο δυνάμεων καὶ φορὰν, καθοριζομένην ὑπὸ τοῦ κανόνος τοῦ δεξιοστροφικοῦ κοχλίου. Οὕτω, ἡ φορὰ τῆς ροπῆς M τοῦ ζεύγους τῶν δυνάμεων F, F τοῦ σχήματος 53, I εἶναι πρὸς τὰ ἄνω, ἐνῶ εἰς τὸ σχῆμα 53, II ἡ φορὰ τῆς ροπῆς M εἶναι πρὸς τὰ κάτω.



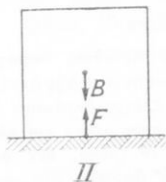
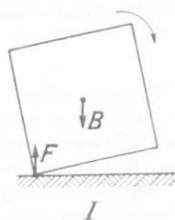
Σχ. 53. Ἡ ροπή M τοῦ ζεύγους τῶν δυνάμεων F, F εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν.

★ § 36. **Ἰσορροπία δυνάμεων, ἐξασκουμένων ἐπὶ στερεοῦ σώματος.** Εἰς προηγουμένην παράγραφον εἶδομεν ὅτι δυνάμεις, ἐξασκούμεναι ἐπὶ ὑλικοῦ σημείου, ἰσορροποῦν, ὅταν ἡ συνισταμένη αὐτῶν εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Προκειμένου, ὅμως, περὶ δυνάμεων, ἐξασκουμένων ἐπὶ στερεοῦ σώματος, ἡ ἄνω συνθήκη δὲν εἶναι ἐπαρκής, καθόσον αἱ δυνάμεις δὲν διέρχονται, ἀναγκαστικῶς, διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καί, ὥς ἐκ τούτου, εἶναι δυνατόν νὰ δημιουργηθοῦν ροαί, αἱ ὁποῖαι θὰ προκαλέσουν περιστροφήν τοῦ σώματος.

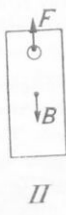
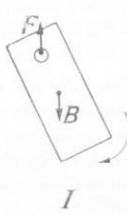
Οὕτω, εἰς τὸ σχῆμα 54, I δὲν ἔχομεν ἰσορροπίαν, διότι αἱ δύο δυνάμεις B καὶ F (δηλ., τὸ βάρος τοῦ σώματος καὶ ἡ ἐκ τοῦ διαπέδου ἐξασκουμένη δύναμις) δημιουργοῦν ροπήν, ἡ ὁποία θὰ περιστρέψῃ τὸ σῶμα κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους. Ἰσορροπία θὰ ἐπέλθῃ, ὅταν τὸ σῶμα λάβῃ τὴν θέσιν τοῦ σχήματος 54, II, ὁπότε ὅχι μόνον ἡ συνισταμένη τῶν δύο δυνάμεων B καὶ F θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ἀλλὰ καὶ ἡ ροπή θὰ ἔχῃ γίνῃ μηδέν.

Ὅμοιως, δὲν ἔχομεν ἰσορροπίαν εἰς τὸ σχῆμα 55, I, καθόσον αἱ δύο δυνάμεις B καὶ F (δηλ., τὸ βάρος τοῦ σώματος καὶ ἡ δύναμις F , ἡ ἐξα-

σκουμένη ἐπὶ τοῦ σώματος ὑπὸ τοῦ ἄξονος) σχηματίζουν ροπὴν, ἡ ὁποία θὰ περιστρέψῃ τὸ σῶμα κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους. Ὅταν τὸ σῶμα ἔλθῃ



Σχ. 54.



Σχ. 55.

εἰς τοιαύτην θέσιν (II), ὥστε αἱ δύο δυνάμεις νὰ κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου, τότε ὅχι μόνον ἡ συνισταμένη αὐτῶν θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ἀλλὰ καὶ ἡ ροπὴ θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ὁπότε, πλέον, ἔχομεν ἰσορροπίαν.

Ἄρα, ἡ γενικὴ συνθήκη ἰσορροπίας διατυπῶνται ὡς ἑξῆς:

«Διὰ νὰ ἔχωμεν ἰσορροπίαν δυνάμεων, ἐξασκουμένων ἐπὶ στερεοῦ σώματος, πρέπει ὅχι μόνον ἡ ὁλικῶς ἐξασκουμένη δύναμις νὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ἀλλὰ καὶ ἡ ὁλικῶς ἐξασκουμένη ροπὴ νὰ εἶναι καὶ αὕτῃ ἴση πρὸς μηδέν».

§ 37. Ἀξίωμα τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως. Εἰς τὸ πείραμα τοῦ σχήματος 13, I ὁ δακτύλός μας ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ ἐλάσματος μίαν δύναμιν, ἡ ὁποία ἔχει φορὰν πρὸς τ' ἀριστερά. Ταυτοχρόνως, ὅμως, καὶ τὸ ἐλάσμα ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ δακτύλου μίαν δύναμιν ἀντιθέτου φορᾶς (δηλ., πρὸς τὰ δεξιὰ), ἡ ὁποία συμπίπτει τὸ ἄκρον τοῦ δακτύλου καὶ οὕτω γίνεται σαφῶς αἰσθητή. Ὅμοίως, εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ σχήματος 14 ἐνῶ ὁ ἄνθρωπος ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς ἀμάξης τὴν δύναμιν F, ταυτοχρόνως καὶ ἡ ἀμάξα ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου μίαν δύναμιν ἀντιθέτου φορᾶς. Ἀνάλογα συμβαίνουν καὶ εἰς τὰ πειράματα τοῦ σχήματος 15.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι **μία μόνη δύναμις δὲν ὑπάρχει εἰς τὴν φύσιν· αἱ δυνάμεις ἐμφανίζονται πάντοτε ἀνὰ δύο.**

Ἡ ἐμφάνισις τῶν δυνάμεων ἀνὰ ζεύγη εἶναι φαινόμενον γενικόν, διευτυπώθη δὲ ὑπὸ τοῦ Νεύτωνος εἰς ἀξίωμα· τὸ **ἀξίωμα τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως**:

«actio = reactio»

«δράσις = ἀντίδρασις».

Ὅταν, δηλ., ἐν σῶμα A ἐξασκῇ ἐπὶ ἄλλου σώματος B μίαν δύναμιν, ταυτοχρόνως καὶ τὸ σῶμα B ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ σώματος A μίαν ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν.

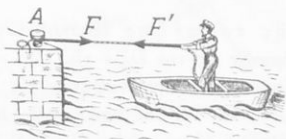
Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο πρέπει νὰ ἐπιστήσωμεν τὴν προσοχήν μας ἐπὶ

τοῦ ὕδατος, ἐκ τῶν δύο αὐτῶν ἴσων καὶ ἀντιθέτων δυνάμεων, ἡ μία ἐξασκεῖται ἐφ' *ΕΝΟΣ* σώματος, ἡ δὲ ἄλλη ἐπὶ *ΑΛΛΟΥ* σώματος.

Οὕτω, ἐκ τῶν δύο ἴσων δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται κατὰ τὸ πείραμα τοῦ σχήματος 13, I, ἡ μία (*F*) ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ ἐλάσματος, ἡ δὲ ἄλλη (ἀντίδρασις) ἐπὶ τοῦ δακτύλου μας, ὁ ὁποῖος οὕτω συμπίπτει. Ἐπίσης, εἰς τὸ σχῆμα 13, II ἡ μία δύναμις *F* ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ δένδρου, ἡ δὲ ἄλλη (ἀντίδρασις) ἐπὶ τοῦ ἀέρος. Ὀμοίως, εἰς τὸ σχῆμα 13, III ἡ μία δύναμις *F* ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ φυτοῦ, ἡ δὲ ἄλλη (ἀντίδρασις) ἐπὶ τῆς φλεβῶς τοῦ ὕδατος (*).

Τὰ αὐτὰ δυνάμεθα νὰ εἰπωμεν καὶ διὰ τὰς δυνάμεις, τὰς ἐμφανιζομένας κατὰ τὰ πειράματα τοῦ σχήματος 15: (I). Ἡ μία δύναμις ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς σιδηρᾶς σφαίρας, ἡ δὲ ἄλλη ἐπὶ τοῦ μαγνήτου.—(II). Ἡ μία δύναμις ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ πτίλου, ἡ δὲ ἄλλη ἐπὶ τῆς ἡλεκτροσμένης ράβδου.—(III). Ἡ μία δύναμις (*B*) ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ λίθου, ἡ δὲ ἄλλη ἐπὶ τῆς Γῆς.

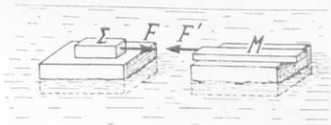
Ὀμοίως, εἰς τὸ πείραμα τοῦ σχήματος 56 ὁ ἐπὶ τῆς λέμβου εὐρισκόμενος ἄνθρωπος ἔλκει διὰ τοῦ σχοινίου τὴν δέστραν *A* διὰ τῆς δυνάμεως *F*. Ταυτοχρόνως ἐμφανίζεται καὶ δευτέρα δύναμις *F'*, ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν *F*, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἡ δέστρα ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου, ἔλκουσα αὐτὸν πρὸς αὐτήν. Καὶ ἡ μὲν δέστρα, ἐπειδὴ εἶναι στερεωμένη ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, παραμένει ἀκίνητος, ἐνῶ ὁ ἄνθρωπος μετὰ τῆς λέμβου κινεῖται, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως *F'*,



Σχ. 56 Ἐκ τῶν δύο ἴσων καὶ ἀντιθέτων δυνάμεων ἡ *F* ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου καὶ ἡ *F'* ἐπὶ τῆς δέστρας.

φερόμενος πρὸς τὴν προκυμαίαν. Καὶ εἰς τὸ πείραμα τοῦτο ἐκ τῶν δύο ἴσων καὶ ἀντιθέτων δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται ταυτοχρόνως, ἡ μία (*F*) ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς δέστρας, ἡ δὲ ἄλλη (*F'*) ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου.

Ἄλλο παράδειγμα, διὰ τὴν κατανόησιν τοῦ αξιώματος «δράσις = ἀντίδρασις», εἶναι τὸ ἑξῆς: Ἐπὶ πλωτῆρων στηρίζονται ὁ μαγνήτης *M* καὶ τὸ σιδηροῦν σῶμα *Σ* (σχ. 57). Ὁ μαγνήτης ἔλκει τὸ σιδηροῦν σῶμα διὰ τῆς δυνάμεως *F*, τὸ δὲ σῶμα ἔλκει τὸν μαγνήτην διὰ τῆς ἴσης καὶ ἀντιθέτου

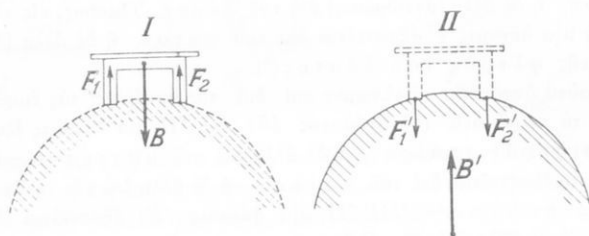


Σχ. 57. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν δυνάμεων *F* καὶ *F'* οἱ δύο πλωτῆρες τίθενται εἰς κίνησιν καὶ πλησιάζουν.

(*) Ἡ δύναμις, ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ ἀέρος καὶ τοῦ ὕδατος, προκαλεῖ ἀλλαγὴν τῆς κινήσεως αὐτῶν. Ἐάν δὲν ὑπῆρχε τοιαύτη δύναμις, οὐδεμία ἀλλαγὴ τῆς κινήσεως θὰ ἐγένετο.

δυνάμειος F' . Ἡ δύναμις F , ἡ ἐξασκούμενη ἐπὶ τοῦ σώματος, θέτει αὐτὸ (μετὰ τοῦ πλωτήρος) εἰς κίνησιν πρὸς τὰ δεξιὰ. Ταυτοχρόνως, ὁ μαγνήτης, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμειος F' , τίθεται καὶ αὐτὸς (μετὰ τοῦ πλωτήρος του) εἰς κίνησιν πρὸς τ' ἀριστερά.

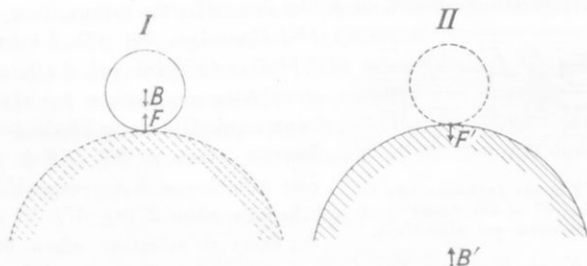
Δύο, ἀκόμη, παραδείγματα θὰ βοηθήσουν διὰ τὴν τελείαν κατανόησιν τοῦ ἀξιώματος «δραῖσις = ἀντίδρασις»: α) Θεωρήσωμεν τράπεζαν, στηριζομένην διὰ τῶν τεσσάρων ποδῶν της ἐπὶ τοῦ ἐδάφους (σχ. 58, I). Ἐπὶ



Σχ. 58.

τῆς τράπεζης ἐξασκοῦνται πέντε δυνάμεις: Τὸ βάρος B αὐτῆς, ὀφειλόμενον εἰς τὴν ἔλξιν τῆς $\Gamma\eta$ ς καὶ τέσσαρες δυνάμεις F_1, F_2, F_3, F_4 , ὀφειλόμεναι εἰς τὴν ἐπαφὴν αὐτῆς μετὰ τοῦ ἐδάφους. (Αἱ δυνάμεις F_3, F_4 δὲν φαίνονται ἐπὶ τοῦ σχήματος). Κατὰ τὸ ἀξίωμα «δραῖσις = ἀντίδρασις», ἡ τράπεζα ἔλκει τὴν $\Gamma\eta$ ν διὰ τῆς δυνάμειος B' (σχ. 58, II), ἐνῶ, ταυτοχρόνως, ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τὰς δυνάμεις F'_1, F'_2, F'_3, F'_4 . Αἱ πέντε αὗται δυνάμεις εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι καὶ ἀντίθετοι πρὸς τὰς δυνάμεις B, F_1, F_2, F_3, F_4 .

β) Θεωρήσωμεν σφαῖραν, ἡρεμοῦσαν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους (σχ. 59, I). Ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις, τὸ βάρος της B , ὀφειλόμενον



Σχ. 59.

εἰς τὴν ἔλξιν τῆς $\Gamma\eta$ ς καὶ ἡ δύναμις F , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ εἰς ἐπαφὴν πρὸς αὐτὴν εὐρισκόμενον ἔδαφος. Κατὰ τὸ ἀξίωμα «δραῖσις = ἀντίδρασις»,

ἐφ' ὅσον ἡ Γῆ ἔλκει τὴν σφαῖραν διὰ τῆς δυνάμεως B , πρέπει καὶ ἡ σφαῖρα νὰ ἔλκη τὴν Γῆ ν διὰ τῆς ἴσης καὶ ἀντιθέτου δυνάμεως B' (σχ. 59, II), τὴν ὁποῖαν ἐσχεδιάσαμεν ὡς ἐφαρμοζομένην εἰς τὸ κέντρον τῆς Γῆς. Ἀφ' ἐτέρου, ἐπειδὴ τὸ ἔδαφος ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς σφαίρας τὴν δύναμιν F' , πρέπει καὶ ἡ σφαῖρα νὰ ἐξασκῇ ἐπὶ τοῦ ἔδαφους τὴν ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν F'' .

Ἐρώτημα: Εἰς τὸ σχῆμα 14 ὁ ἄνθρωπος ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς ἄμαξας μίαν δύναμιν, ἡ δὲ ἄμαξα ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου μίαν ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν. Ἀφοῦ αἱ δύο δυνάμεις εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι, διατὶ κινεῖται ἡ ἄμαξα;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

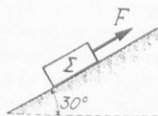
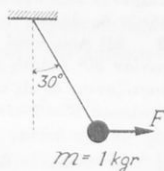
Κατηγορία Α'.

- 9) Σφαῖρα, μάζης 1 kg , ἰσορροπεῖ εἰς τὴν θέσιν, τὴν ὑποδεικνυομένην ὑπὸ τοῦ σχήματος. Ζητεῖται α) νὰ σχεδιασθοῦν ὅλαι αἱ ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐξασκούμεναι δυνάμεις. β) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μέτρα αὐτῶν γραφικῶς. γ) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μέτρα αὐτῶν δι' ὕπολογισμοῦ.

(ΑΠ: $F = 0,58 \text{ kg}^*$, ἡ δὲ ὑπὸ τοῦ νήματος $1,155 \text{ kg}^*$)

- 10) Δύο δυνάμεις 5 kg^* καὶ 2 kg^* ἐξασκούνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς συνισταμένης των α) γραφικῶς καὶ β) δι' ὕπολογισμοῦ.

(ΑΠ: $5,4 \text{ kg}^*$)

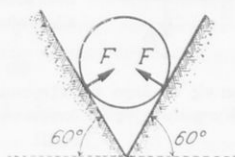


- 11) Νὰ σχεδιασθοῦν ὅλαι αἱ ἐπὶ τοῦ σώματος Σ ἐξασκούμεναι δυνάμεις καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις F , ἡ ἀναγκαία νὰ κρατῇ τὸ σῶμα Σ ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου επιπέδου. Βάρος τοῦ σώματος 2 kg^* . (Τριβὴ = 0).

(ΑΠ: $F = 1 \text{ kg}^*$)

- 12) Σφαῖρα, βάρους 3 kg^* , ἰσορροπεῖ μεταξύ των δύο κεκλιμένων επιπέδων τοῦ ἑναντι σχήματος. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐπὶ τῆς σφαίρας ὑπὸ των δύο επιπέδων ἐξασκούμεναι κάθετοι δυνάμεις F, F α) γραφικῶς, β) δι' ὕπολογισμοῦ.

(ΑΠ: 3 kg^*)



- 13) Ἐπὶ σημείου ἐξασκούνται δύο δυνάμεις 5 kg^* καὶ 7 kg^* , σχηματίζουσαι μεταξύ των γωνίαν 60° . Νὰ εὑρεθῇ γραφικῶς ποία δύναμις πρέπει νὰ ἐξασκηθῇ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὥστε νὰ ἰσορροπῇ τὰς δύο πρώτας.

(ΑΠ: $10,4 \text{ kg}^*$)

- 14) Εἰς τὸ σχῆμα 27 ἡ δύναμις F εἶναι ἴση πρὸς 20 kg^* , ἡ δὲ γωνία, τὴν ὁποῖαν αὕτη σχηματίζει μὲ τὴν διεϋθύνειν των τροχιῶν ἴση πρὸς 30° . Νὰ εὑρεθοῦν γραφικῶς αἱ δύο συνιστώσαι $F_{\mu\theta}$ καὶ $F_{\pi\alpha\rho}$.

(ΑΠ: 10 kg^* , $17,3 \text{ kg}^*$)

- 15) Εἰς τὰ ἄκρα ἀβριροῦς ῥάβδου, μήκους 1 m , ἐξαρτῶνται δύο βάρη $0,5 \text{ kg}^*$ καὶ 2 kg^* . α) Εἰς ποῖον σημεῖον πρέπει νὰ στηριχθῇ ἡ ῥάβδος, ἵνα ἰσορροπῇ ὀριζοντίως; β) Ποία ἡ δύναμις, ἡ ἐξασκούμενη ὑπὸ τοῦ ὑποστηρίγματος;

(ΑΠ: α) Εἰς ἀπόστασιν $0,2 \text{ m}$ ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας δυνάμεως. β) $2,5 \text{ kg}^*$)

- 16) Ἐπὶ τῆς περιφερείας τροχοῦ, ἀκτίνος $0,5 \text{ m}$ καὶ κατὰ τὴν διεϋθύνειν τῆς ἐφαπτομένης, ἐξασκεῖται δύναμις 3 kg^* . Ποία πρόσθετος ροπή πρέπει νὰ ἐξασκηθῇ

ἐπὶ τοῦ τροχοῦ, ἵνα οὗτος ἰσορροπῇ; (ΑΠ: $1,5 \text{ kgr} \cdot \text{m}$ ἀντίθετος πρὸς τὴν πρῶτην)

17) Ἐπὶ τροχοῦ, ἀκτίνος 2 m , ἐξασκούνται οἱ ἀπεικονιζόμεναι δυνάμεις F_1 καὶ F_2 . Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ δύναμις F_2 , ἐὰν ἡ δύναμις F_1 εἶναι ἰση πρὸς 20 kgr^* , ἵνα ὁ τροχὸς ἰσορροπῇ; (ΑΠ: $28,4 \text{ kgr}^*$)

18) Σφαῖρα, βάρους 1 kgr^* , στηρίζεται ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου. Νὰ σχεδιασθοῦν αἱ ἐπ' αὐτῆς ἐξασκούμεναι δυνάμεις.

19) Τράπεζα ὁμογενῆς, βάρους 8 kgr^* , στηρίζεται διὰ τεσσάρων ποδῶν ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου. α) Νὰ σχεδιασθοῦν ὅλαι αἱ ἐπ' αὐτῆς ἐξασκούμεναι δυνάμεις. β) Νὰ ὑπολογισθοῦν αὗται καὶ γ) νὰ σχεδιασθοῦν αἱ δυνάμεις, τὰς ὁποίας ἐξασκεῖ ἡ τράπεζα ἐπὶ τοῦ ὑποστηρίζοντος αὐτὴν ἐπιπέδου.

(ΑΠ: 2 kgr^* ἑκάστη)

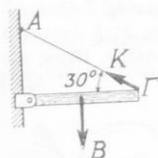
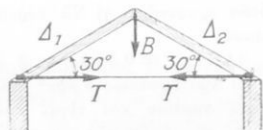
Κατηγορία Β'.

20) Δίδονται τρεῖς δυνάμεις $F_1 = 20 \text{ kgr}^*$, $F_2 = 25 \text{ kgr}^*$ καὶ $F_3 = 40 \text{ kgr}^*$. Ἐξ αὐτῶν αἱ δύο πρῶται εἶναι κάθετοι μεταξύ των, ἡ δὲ τρίτη κάθετος ἐπὶ τὴν συνισταμένην τῶν δύο πρῶτων. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ γραφικῶς ἡ συνισταμένη τῶν τριῶν αὐτῶν δυνάμεων.

(ΑΠ: 51 kgr^*)

21) Δύο δοκοὶ A_1 , A_2 μιᾶς στέγης σχηματίζουν γωνίαν 30° ἑκάστη ὡς πρὸς τὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον, φορτίζονται δὲ εἰς τὸ σημεῖον συναντήσεώς των δὲ αὐτὰ δυνάμει $B = 1 \text{ τόννου βάρους}$. Ζητεῖται α) ἡ δύναμις, μὲ τὴν ὁποίαν συμπιέζεται ἑκάστη δοκὸς καὶ β) ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἡ διάτνος χαλυβδίνη ράβδος ἐφ' ἑκάστης τῶν δοκῶν.

(ΑΠ: α) 1 τόννος βάρους β) 866 kgr^*)



22) Ὅριζοντία δοκός, μήκους 100 cm , ἑρρωμένως στρεφωμένη εἰς τὸ ἐν ἄκρον αὐτῆς, φέρει εἰς τὸ μέσον φορτίον $B = 10 \text{ kgr}^*$. Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ δύναμις K , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ σχοινίον AI ἐπὶ τῆς δοκοῦ, β) ἡ ὀριζοντία καὶ ἡ κατακόρυφος συνιστώσα τῆς δυνάμεως, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἡ ἀρθρωσίς ἐπὶ τῆς δοκοῦ καὶ γ) νὰ εὑρεθοῦν τὰ αὐτὰ γραφικῶς. (ΑΠ: α) $K = 10 \text{ kgr}^*$, β) ὀριζοντία συνιστώσα $= 8,66 \text{ kgr}^*$, κατακόρυφος συνιστώσα $= 5 \text{ kgr}^*$)

23) Ὅμογενῆς ράβδος, μήκους 1 m καὶ βάρους 50 gr^* , φέρεται εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἐξηρηγμένα δύο βάρη 10 gr^* καὶ 50 gr^* . Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ στηριχθῇ ἡ ράβδος, ἵνα ἰσορροπῇ ὀριζοντίως: (ΑΠ: Εἰς ἀπόστασιν $0,318 \text{ m}$ ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας δυνάμεως)

24) Ράβδος ὁμογενῆς, μήκους 1 m , φέρει εἰς τὸ ἐν ἄκρον αὐτῆς βάρος 1 kgr^* καὶ εἰς τὸ ἕτερον βάρος $0,5 \text{ kgr}^*$. Ἐὰν εἰς τὸ μέσον αὐτῆς τοποθετηθῇ ὀριζόντιος ἄξων περιστροφῆς, εἰς ποῖαν ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ βάρος 1 kgr^* , ἵνα ἡ ράβδος ἰσορροπῇ ὀριζοντίως;

(ΑΠ: Εἰς ἀπόστασιν $0,25 \text{ m}$ ἀπὸ τῆς δυνάμεως $0,5 \text{ kgr}^*$)

25) Ράβδος ὁμογενῆς, βάρους 100 gr^* , στηρίζεται εἰς τὸ μέσον της, δύο δὲ βάρη 30 gr^* καὶ 50 gr^* ἐξαρτῶνται ἀπὸ δύο σημεῖα, ἀπέχοντα τοῦ ἄξονος στηρίξεως κατὰ ἀποστάσεις 25 cm καὶ 40 cm ἀντιστοίχως. Εἰς ποῖον σημεῖον πρέπει νὰ ἐξαρτηθῇ τρίτον βάρος 25 gr^* , ὥστε ἡ ράβδος νὰ ἰσορροπῇ ὀριζοντίως;

(ΑΠ: Εἰς ἀπόστασιν 50 cm πρὸς τὸ μέρος τῆς δυνάμεως 30 gr^*)

26) Εἶναι δυνατόν νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος φορητοῦ αυτοκινήτου διὰ ξυρίσματος ἐπὶ γεφυροπλάστιγγος, ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζονται ἑκάστοτε μόνον οἱ δύο τροχοὶ τοῦ αυτοκινήτου;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

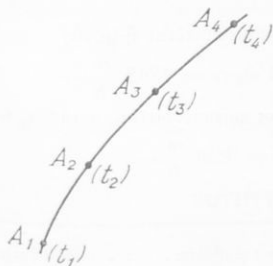
ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

• § 38. Καθορισμός της θέσεως ενός κινητού επί γραμμής. - Κίνησης. Θεωρήσωμεν άνθρωπον, βαδίζοντα επί της ευθείας οδού AB (σχ. 60) και εύρισκόμενον, κατά τινα χρονικήν στιγμήν, εις τὸ σημεῖον Σ . Διὰ νὰ καθορίσωμεν τὴν θέσιν τοῦ ἀνθρώπου, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὴν ἀπόστασιν x αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τῆς οδοῦ · π.χ., ἐκ τοῦ ἄκρου A . Ἐάν, παρερχομένου τοῦ χρόνου, ἡ ἀπόστασις x μεταβάλλεται (αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται), λέγομεν ὅτι ὁ ἄνθρωπος κινεῖται.



Σχ. 60

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐν κινήτῳ, κινούμενῳ, εὐρίσκεται κατὰ τὰς χρονικὰς στιγμὰς $t_1, t_2, t_3, t_4 \dots$ (*) διαδοχικῶς εἰς τὰς θέσεις A_1, A_2, A_3, A_4 (σχ. 61). Ἐάν ἐνώσωμεν τὰς θέσεις ταύτας διὰ συνεχοῦς γραμμῆς, θὰ λάβωμεν τὴν **τροχιάν** τοῦ κινήτου.



Σχ. 61.

Ἡ τροχιά ἑνὸς κινήτου δύναται νὰ εἶναι εἴτε εὐθύγραμμος — ὅπως εἰς τὸ σχῆμα 60 — εἴτε καμπυλόγραμμος · ὅπως εἰς τὸ σχῆμα 61.

• § 39. Ὁμαλὴ εὐθύγραμμος κίνησης. Ἐάν ἐν κινήτῳ κινήται ἐπὶ εὐθύγραμμῳ τροχίᾳ καὶ διανύῃ ἴσα διαστήματα εἰς ἴσους χρόνους, τότε λέγομεν

ὅτι ἐκτελεῖ **ὀμαλὴν εὐθύγραμμον κίνησιν**. Τοιαύτην κίνησιν ἐκτελεῖ, π.χ., πλοῖον, ὅταν ἐξῇ ἀνοιχθῇ πλέον εἰς τὸ πέρατος.

Ταχύτης. Ἐστω κινήτῳ, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ ὀμαλὴν εὐθύγραμμον κίνησιν καὶ διανύει ἐντὸς χρόνου, π.χ., 2 sec διάστημα 10 cm. Εἶναι προφανές ὅτι, ἐντὸς χρόνου 4 sec, θὰ διανύσῃ διάστημα 20 cm κ.ο.κ. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν ὀμαλὴν εὐθύγραμμον κίνησιν τὸ πηλίκον τοῦ ἐκάστοτε διανυομένου διαστήματος s διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου t εἶναι σταθερόν. Τὸ σταθερὸν τοῦτο πηλίκον

$$v = \frac{s}{t} \quad (1)$$

καλεῖται **ταχύτης** τοῦ κινήτου.

(*) Πρέπει νὰ ἐπιστήσωμεν τὴν προσοχὴν μας εἰς τὴν ὀρθὴν χρῆσιν τῶν ὀρων «χρονικὴ στιγμή» καὶ «χρόνος = χρονικὸν διάστημα».

• **Μονάδες ταχύτητας.** 1) Σύστημα C.G.S. 'Ως γνωστόν, εις τὸ σύστημα τοῦτο μονὰς διαστήματος (μήκους) εἶναι τὸ 1 cm , μονὰς δὲ χρόνου τὸ 1 sec . 'Επομένως, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1), λαμβάνομεν τὴν μονάδα ταχύτητας εἰς τὸ σύστημα C.G.S., ἡ ὁποία εἶναι τὸ

$$1 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \quad (\text{ἢ } 1 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}).$$

2) T. S. Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο μονὰς διαστήματος εἶναι τὸ 1 m , μονὰς δὲ χρόνου τὸ 1 sec . 'Επομένως, θέτοντες εἰς τὸν τύπον (1) $s = 1\text{ m}$ καὶ $t = 1\text{ sec}$, λαμβάνομεν τὴν μονάδα ταχύτητας εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, ἡ ὁποία εἶναι τὸ

$$1 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad (\text{ἢ } 1 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}).$$

'Εκτὸς τῶν ἄνω μονάδων χρησιμοποιοῦμεν, συνήθως, διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ταχύτητος αὐτοκινήτων, ἀεροπλάνων κ.λ., τὴν μονάδα

$$1 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (= 1 \text{ χιλιόμετρον ἀνὰ ὥραν}).$$

Διὰ τὴν μέτρησιν ταχυτήτων πλοίων χρησιμοποιεῖται ἡ μονὰς

$$1 \text{ κόμβος} = 1 \text{ ναυτικὸν μίλιον ἀνὰ ὥραν} = 1853 \frac{\text{m}}{\text{h}}.$$

Εἰς τὰς ἀγγλοσαξωνικὰς χώρας ὡς μονὰς ταχύτητας χρησιμοποιεῖται, συνήθως, τὸ

$$1 (\text{ἀγγλικὸν}) \text{ μίλιον ἀνὰ ὥραν} = 1609 \frac{\text{m}}{\text{h}}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ

"Ανθρωπος βαδίζων	5 km/h	Βλῆμα τηλεβόλου	1800 km/h
Πίπτων ἀλεξιπτωτιστῆς	14,5 km/h	Βλῆμα τυφεκίου	3240 km/h
"Υπερωκεάνειον «ΟΛΥΜΠΙΑ»	23 κόμβοι = 42,6 km/h	"Υπερηχητικὸν ἀεροπλάνον	3 Mach (*) = 3672 km/h
Καλπάζων ἵππος εἰς ἀγῶνας	80 km/h	Τεχνητὸς δορυφόρος	28800 km/h
"Ανεμὸς ἐν ὥρᾳ θυέλλης	100 km/h	Γῆ, κινουμένη περὶ τὸν "Ηλιον	108000 km/h
Χελιδὼν	220 km/h	Φῶς	300000 km/sec
"Ηχος (ἐντὸς ἀέρος)	1224 km/h		

• **Ἐφαρμογαί.** 1) Σιδηροδρόμος, κινούμενος ἰσοταχῶς, διανύει τὴν ἀπόστασιν "Αθηνῶν - Θηβῶν ἐντὸς 3 ὥρῶν. "Αν ἡ ἀπόστασις αὕτη εἶναι ἴση πρὸς 93 km, ποία ἦτο ἡ ταχύτης τοῦ σιδηροδρόμου;

Λύσις. α) "Εὰν θέλωμεν ἡ ταχύτης τοῦ σιδηροδρόμου νὰ ἐκφράζεται εἰς μονάδας km/h, πρέπει, κατὰ τὸν τύπον

$$v = \frac{s}{t},$$

(*) Διὰ τὰ ὑπερηχητικὰ ἀεροπλάνα χρησιμοποιεῖται ὡς μονὰς ταχύτητας ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα, ἡ ὁποία καλεῖται 1 Mach (Mach).

νά διαιρέσωμεν τὸ διάστημα s (εἰς km) διὰ τοῦ χρόνου t εἰς ὥρας. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν, ἔχομεν $s = 93 km$ καὶ $t = 3$ ὥραι. Ἐπομένως, ἡ ταχύτης τοῦ σιδηροδρόμου ἦτο ἴση πρὸς

$$v = \frac{93}{3} \frac{km}{h} = 31 \frac{km}{h}.$$

β) Ἐάν θέλωμεν ἡ ταχύτης τοῦ σιδηροδρόμου νὰ ἐκφράζεται εἰς m/sec , πρέπει νὰ μετατρέψωμεν τὸ διάστημα $93 km$ εἰς μέτρα καὶ τὸν χρόνον 3 ὥραι εἰς sec . Εἶναι $s = 93 km = 93000 m$, $t = 3$ ὥραι $= 3 \cdot 60 \cdot 60 sec = 10800 sec$. Ἀντικαθιστώντες εἰς τὸν ἄνω τύπον, λαμβάνομεν

$$v = \frac{93000}{10800} \frac{m}{sec} = \frac{930}{108} \frac{m}{sec} = 8,61 \frac{m}{sec}.$$

2) Νὰ ἐκφρασθῇ εἰς m/sec ἡ ταχύτης $5 km/h$ τοῦ βαδίζοντος ἀνθρώπου.

3) Τὸ ταχύμετρον ἐνὸς αὐτοκινήτου δεικνύει 40 *μίλια/ἡ*. Ποία εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου εἰς km/h ;

Νόμοι τῆς ὁμαλῆς ευθύγραμμου κινήσεως. Ἐκ τοῦ τύπου (1) λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$s = v \cdot t \quad (2)$$

*Ἦτοι, εἰς τὴν ὁμαλὴν ευθύγραμμον κίνησιν τὸ ἐπὶ τοῦ κινητοῦ διανόμενον διάστημα εἶναι ἀνάλογον τοῦ χρόνου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου τοῦτο διανύεται. Ἐάν, δηλ., τὸν κινητὸν διανύῃ, ἐντὸς ὁρισμένου χρόνου, ὁρισμένον διάστημα, εἰς διπλάσιον χρόνον θὰ διανύσῃ διπλάσιον διάστημα κ.ο.κ.

*Ἀς παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν ἐξίσωσιν (2) διὰ τὴν περίπτωσιν κινητοῦ, κινουμένου μὲ σταθερὰν ταχύτητα $3 m/sec$.

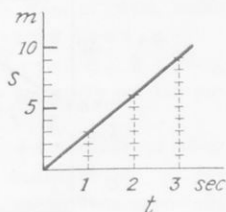
Πρὸς τοῦτο ὑπολογίζομεν, τῇ βοήθειᾳ τοῦ τύπου (2), τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ διατρέξει τὸ κινητὸν κατὰ τὰς χρονικὰς στιγμὰς $0 sec$, $1 sec$, $2 sec$, $3 sec$. Ὁ ὑπολογισμὸς

t <i>sec</i>	s <i>m</i>
0	0
1	3
2	6
3	9

δίδει τὰς τιμὰς $s = 0 m$, $3 m$, $6 m$, $9 m$. Τ' ἀποτελέσματα ταῦτα τοῦ ὑπολογισμοῦ ἀναγράφομεν εἰς τὸν ἑναντι πίνακα.

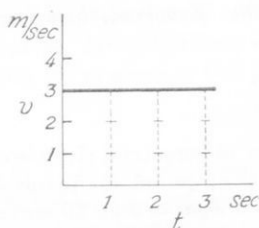
*Ἦδη, χαράσσομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου δύο ὀρθογωνίους ἄξονας (σχ. 62) — ἕνα τῶν διαστημάτων s καὶ ἕνα τῶν χρόνων t — καὶ ἐπ'

αὐτῶν καθορίζομεν κλίμακα διαστημάτων καὶ κλίμακα χρόνων. Αἱ τιμαὶ τοῦ ἄνω πίνακος, ἀνὰ ζεύγη λαμβανόμεναι, δίδουν ἐπὶ τοῦ σχεδίου ἀνὰ ἓν σημεῖον. Ἐνώνοντες ὅλα τὰ προκύψαντα σημεῖα διὰ συνεχοῦς γραμμῆς, λαμβάνομεν μίαν εὐθεῖαν



Σχ. 62. Γραφικὴ παράστασις τοῦ διαστήματος συναρτήσει τοῦ χρόνου εἰς τὴν ὁμαλὴν ευθύγραμμον κίνησιν. Κλίμαξ διαστημάτων: $1 cm$ παρίστανται $5 m$. Κλίμαξ χρόνων: $7,5 mm$ παρίστανται $1 sec$.

γραμμής, διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων, ἡ ὁποία παριστᾷ γραφικῶς τὴν ἐξίσωσιν (2).



Σχ. 63. Γραφικὴ παράστασις τῆς ταχύτητος συναρτήσει τοῦ χρόνου εἰς τὴν ὁμαλὴν εὐθύγραμμον κίνησιν. Κλίμαξ ταχυτήτων: 5 mm παριστοῦν 1 m/sec. Κλίμαξ χρόνου: 7,5 mm παριστοῦν 1 sec.

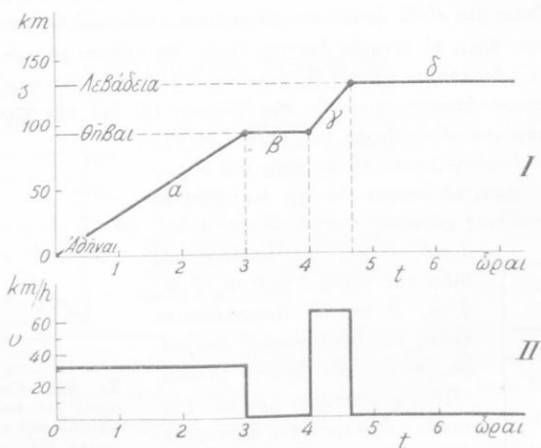
Ἐάν, ἀφ' ἑτέρου, παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν σχέσιν μεταξύ ταχύτητος καὶ χρόνου, θὰ λόβωμεν μίαν εὐθείαν γραμμὴν, παράλληλον πρὸς τὸν ἀξονα τῶν χρόνων (σχ. 63). Καὶ τοῦτο διότι εἰς οἰανδήποτε τιμὴν τῶν τετμημένων (χρόνος t) ἀντιστοιχεῖ ἡ αὐτὴ τιμὴ (3 m/sec) τῆς τεταγμένης v .

Συμπέρασμα. Εἰς τὴν ὁμαλὴν εὐθύγραμμον κίνησιν

α) ἡ ταχύτης εἶναι σταθερά,

β) τὰ διανυόμενα διαστήματα εἶναι ἀνάλογα τοῦ χρόνου.

Ἐφαρμογή. Ἐμπορικὴ ἀμαξοστοιχία, ἐκκινουῖσα ἐξ Ἀθηνῶν, κινεῖται πρὸς Θήβας μὲ σταθερὰν ταχύτητα, ὅπου φθάνει μετὰ πάροdon 3 ὥρων. Ἡ ἀπόστασις Ἀθηνῶν—Θηβῶν εἶναι ἴση πρὸς 93 km. Μετὰ στάθμευσιν 1 ὥρας, ἡ ἀμαξοστοιχία συνεχίζει ἱσοταχῶς τὴν διαδρομὴν της μέχρι Λεβαδείας, ἔνθα καὶ σταθμεύει ὀριστικῶς. Ἡ ἀπόστασις Θηβῶν—Λεβαδείας εἶναι 42 km καὶ διανύεται ἐντὸς 40 min. Ἡ ταχύτης κατὰ τὸ τμήμα τοῦτο



Σχ. 64. (I). Γραφικὴ παράστασις δρομολογίου ἀμαξοστοιχίας. (II). Σχέσις ταχύτητος καὶ χρόνου εἰς τὴν ἄνω κίνησιν.

τῆς διαδρομῆς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς προηγουμένης, λόγω τῆς φυσικῆς διαπλάσεως τοῦ ἐδάφους.

Εἰς τὸ σχῆμα 64, I ἀποδίδεται γραφικῶς ἡ σχέσις μεταξύ τοῦ διανυ-

θέντος διαστήματος s καὶ τοῦ χρόνου t , ἐνῶ τὸ σχῆμα 64, II παριστᾷ τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς ταχύτητος v καὶ τοῦ χρόνου t .

Παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ τὰ χρονικὰ διαστήματα, κατὰ τὰ ὁποῖα ἡ ἀμαξοστοιχία κινεῖται, τὸ διάστημα αὐξάνεται μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου (τιμήματα α καὶ γ τῆς καμπύλης), ἐνῶ κατὰ τὰ χρονικὰ διαστήματα, κατὰ τὰ ὁποῖα ἡ ἀμαξοστοιχία ἀκίνηται ($v=0$), τὸ διάστημα παραμένει σταθερὸν (τιμήματα β καὶ δ τῆς καμπύλης).

• § 40. Ἡ ταχύτης ὡς ἀνυσματικὸν μέγεθος. Εἰς τὸν πίνακα τῆς προηγουμένης παραγράφου (σ. 46) ἀναφέρεται ὅτι ἡ ταχύτης, π.χ., τοῦ βαδίζοντος ἀνθρώπου εἶναι 5 km/h . Τὰ δεδομένα, ὅμως, αὐτὰ δὲν εἶναι ἐπαρκῆ διὰ νὰ ὀρισθῇ ἐντελῶς ἡ ταχύτης ὁρισμένου βαδίζοντος ἀνθρώπου, διότι δὲν μᾶς πληροφοροῦν οὔτε περὶ τῆς διευθύνσεως, κατὰ τὴν ὁποίαν οὗτος βαδίζει, οὔτε περὶ τῆς φορᾶς τῆς κινήσεώς του. Ἐπομένως, διὰ νὰ καθορισωμεν ἐντελῶς τὴν ταχύτητα τοῦ ἐν λόγῳ ἀνθρώπου, πρέπει, ἐπὶ πλέον, νὰ εἰπωμεν ποία εἶναι ἡ $\delta \iota \epsilon \upsilon \theta \upsilon \nu \sigma \iota \varsigma$ τῆς κινήσεώς του καὶ ποία ἡ $\phi \omicron \rho \alpha$ αὐτῆς.

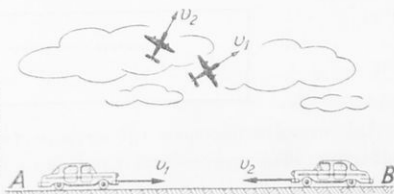
Ἐπίσης, μολονότι ἕκαστον τῶν δύο αὐτοκινήτων τοῦ σχήματος 65 κινεῖται μὲ ταχύτητα, π.χ., 30 km/h καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν (τὴν διεύθυνσιν AB), ἐν τούτοις αἱ ταχύτητες αὐτῶν v_1 καὶ v_2 διαφέρουν κατὰ τὴν $\phi \omicron \rho \alpha$. Ὁμοίως, μολονότι ἕκαστον τῶν δύο ἀεροπλάνων τοῦ αὐτοῦ σχήματος κινεῖται μὲ ταχύτητα, π.χ., 300 km/h , ἐν τούτοις αἱ ταχύτητες v_1 , v_2 αὐτῶν δὲν εἶναι αἱ αὐταί, καθόσον τὰ δύο ἀεροπλάνα κινῶνται κατὰ διαφόρους $\delta \iota \epsilon \upsilon \theta \upsilon \nu \sigma \epsilon \iota \varsigma$.

Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι διὰ νὰ καθορισθῇ ἐντελῶς ἡ ταχύτης ἐνὸς κινητοῦ, πρέπει νὰ εἰπωμεν α) τὴν ἀριθμητικὴν τῆς τιμὴν καὶ τὴν μονάδα (μέτρον), β) τὴν διεύθυνσιν καὶ γ) τὴν φορὰν.

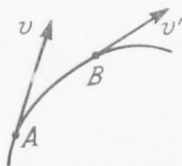
Συμφώνως πρὸς τ' ἀνωτέρω, ἡ ταχύτης εἶναι ἀνυσματικὸν μέγεθος, τὸ ὁποῖον ἔχει διεύθυνσιν, συμπίπτουσαν μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως καὶ φορὰν, τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ.

Ἡ ταχύτης παρίσταται γραφικῶς δι' ἀνύσματος, τοῦ ὁποίου τὸ μήκος λαμβάνεται ἀνάλογον πρὸς τὸ μέτρον αὐτῆς.

Ἡ $\delta \iota \epsilon \upsilon \theta \upsilon \nu \sigma \iota \varsigma$ τῆς ταχύτητος εἶναι πάντοτε ἐφαπτομένη τῆς τροχιάς εἰς πᾶν σημεῖον αὐτῆς (σχ. 66) καὶ τοῦτο διότι, ὡς εἶδομεν, ἡ διεύθυνσις τῆς ταχύτητος συμπίπτει μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως.



Σχ. 65. Αἱ ταχύτητες παρίστανται δι' ἀνυσμάτων.



Σχ. 66.

• § 41. **Ἀνισοταχῆς εὐθύγραμμος κίνησις.** Μία εὐθύγραμμος κίνησις, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ταχύτης δὲν διατηρεῖται σταθερά, ὀνομάζεται **ἀνισοταχῆς εὐθύγραμμος κίνησις**. Τοιαύτη εἶναι, π.χ., ἡ κίνησις αὐτοκινήτου, ἐκκινουῦντος ἐκ τῆς ἡρεμίας: Κατὰ τὴν στιγμήν τῆς ἐκκινήσεως, ἡ ταχύτης του εἶναι μηδέν, ἐν συνεχείᾳ δὲ αὐξάνεται, μέχρις ὅτου λάβῃ τὴν τιμὴν, τὴν ὁποίαν ἐπιθυμεῖ ὁ ὀδηγός. Καὺ ὅλον τὸ χρονικὸν τοῦτο διάστημα λέγομεν ὅτι τὸ αὐτοκίνητον **ἐπιταχύνεται**. Ἐὰν δὲν παρεμβληθοῦν ἄλλοι παράγοντες (ἐμπόδια, στροφαί, ἀνήφορος κ.λ.), ὁ ὀδηγός διατηρεῖ, πλέον, τὴν ταχύτητα τοῦ αὐτοκινήτου σταθεράν, ἡ κίνησις, δηλ., μετετρέπη εἰς ὁμαλήν.

Ἄλλο παράδειγμα, εἰς τὸ ὁποῖον τὸ κινητὸν ἐπιταχύνεται, ἔχομεν εἰς τὴν *ἐλευθέραν πτώσιν* τῶν σωμάτων: Ἐὰν ἀφήσωμεν ἐλεύθερον ἓνα λίθον ἀπὸ σχετικῶς μεγάλου ὕψους, οὗτος, ἐκκινῶν ἐκ τῆς ἡρεμίας, κινεῖται μὲ διαρκῶς αὐξανομένην ταχύτητα, μέχρις ὅτου προσκρούσῃ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.

Μέση ταχύτης. Αὐτοκίνητον, διερχόμενον διὰ πολυσυχνάστου δρόμου, ἀναγκάζεται νὰ μεταβάλλῃ διαρκῶς τὴν ταχύτητά του. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ὀρίζομεν ἓν νέον μέγεθος, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν **μέσην ταχύτητα** $\bar{v}$ καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πηλίκον

$$\bar{v} = \frac{\text{ἀπόστασις ἀφαιρεθείας} - \text{τέροματος}}{\text{χρόνος}}$$

Διὰ νὰ κατανοήσωμεν τὴν ἔννοιαν «μέση ταχύτης» φέρομεν τὸ ἑξῆς παράδειγμα: Φορτηγὸν αὐτοκίνητον, διὰ νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν Ἀθηνῶν - Πειραιῶς ἄνευ στάσεων, χρειάζεται ἡμίσειαν ὥραν. Ἡ ἀπόστασις Ἀθηνῶν - Πειραιῶς εἶναι ἴση πρὸς 9,5 km. Ἐπομένως, ἡ μέση ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου θὰ εἶναι ἴση πρὸς

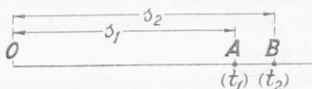
$$\bar{v} = \frac{9,5 \text{ km}}{0,5 \text{ h}} = 19 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν εὑρεθεῖσαν μέσην ταχύτητα 19 km/h ἐπὶ τὸν χρόνον τῆς διαδρομῆς 0,5 h, θὰ λάβωμεν τὴν διανυθεῖσαν ἀπόστασιν 9,5 km. Ἐπομένως, ἡ μέση ταχύτης ἐνὸς κινητοῦ ἰσοῦται πρὸς τὴν ταχύτητα, τὴν ὁποίαν θὰ ἔπρεπε νὰ ἔχῃ τὸ κινητὸν, ἵνα, κινούμενον ἰσοταχῶς, διανύσῃ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον τὸ αὐτὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον διανύει μὲ μεταβαλλομένην ταχύτητα.

Συγμιαία ταχύτης. Εἰς τὴν ὁμαλὴν κίνησιν εἶδομεν ὅτι τὸ κινητὸν εἰς ἴσους χρόνους διανύει ἴσα διαστήματα ὥς ἐκ τούτου, ὅπουδήποτε τῆς τροχιάς καὶ ἂν μετρήσωμεν τὸ πηλίκον τοῦ διανυθέντος διαστήματος s διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου t , θὰ εὑρωμεν αὐτὸ σταθερόν. Δὲν συμβαίνει, ὁμως, τὸ αὐτὸ εἰς τὴν ἀνισοταχῇ κίνησιν: Εἶναι προφανὲς ὅτι, διὰ νὰ ὀρίσωμεν τὴν ταχύτητα, π.χ., ἐνὸς σιδηροδρόμου εἰς ὠρισμένον σημεῖον τῆς διαδρο-

μῆς του, δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸ μέχρι τοῦ σημείου τούτου διανυθὲν* διάστημα s διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου t , καθόσον, ἐντὸς τοῦ χρονικοῦ τούτου διαστήματος, ὁ σιδηρόδρομος ἐκινεῖτο ἄλλοτε βραδέως καὶ ἄλλοτε ταχέως καί, συνεπῶς, τὸ πηλίκον s/t θὰ μᾶς δώσῃ τὴν μέσση ταχύτητα τοῦ σιδηροδρόμου.

Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὴν ταχύτητα εἰς ὁρισμένην χρονικὴν στιγμήν t θεωροῦμεν κινητὸν, τὸ ὁποῖον, κινούμενον ἀνισοταχῶς ἐπὶ τῆς τροχιάς του, εὐρίσκεται κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν t_1 εἰς τὸ σημεῖον A (σχ. 67), τὸ ὁποῖον ἀπέχει τῆς ἀφετηρίας O κατὰ τὴν ἀπόστασιν s_1 . Μετὰ τινα χρόνον, δηλ., κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν t_2 , τὸ κινητὸν θὰ εὐρίσκεται εἰς ἄλλο σημεῖον B , τὸ ὁποῖον ἀπέχει τῆς ἀφετηρίας κατὰ τὴν ἀπόστασιν s_2 . Ἄρα, ἐντὸς τοῦ χρονικοῦ διαστήματος $t_2 - t_1$ τὸ κινητὸν διήνυσε τὸ διάστημα $s_2 - s_1$. Ἐὰν ἐκλέξωμεν τὸ χρονικὸν διάστημα $t_2 - t_1$ πολὺ μικρόν, εἶναι προφανές ὅτι καὶ τὸ ἐντὸς αὐτοῦ διανυθὲν διάστημα $s_2 - s_1$ θὰ εἶναι, ὁμοίως, πολὺ μικρόν. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ πηλίκον



σχ. 67.

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

καλοῦμεν **στιγμιαίαν ταχύτητα** ἢ, ἀπλούστερον, **ταχύτητα** τοῦ κινητοῦ.

Διὰ τὴν ἀπλούστευσιν τῆς γραφῆς, τὸ πολὺ μικρὸν χρονικὸν διάστημα $t_2 - t_1$ συμβολίζεται διὰ τοῦ Δt , τὸ δὲ ἐντὸς αὐτοῦ διανυθὲν πολὺ μικρὸν διάστημα $s_2 - s_1$ διὰ τοῦ Δs (*), ὁπότε ὁ ἄνω τύπος γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

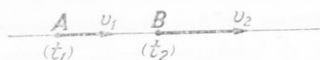
*Ἡτοι, εἰς τὴν ἀνισοταχῇ κίνησιν, ταχύτης καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ πολὺ μικροῦ διαστήματος Δs διὰ τοῦ ἀντιστοίχου πολὺ μικροῦ χρόνου Δt .

Εἶναι προφανές ὅτι ὁ ἄνω τύπος παρέχει τὴν στιγμιαίαν ταχύτητα κινητοῦ, ἐκτελοῦντος ἀνισοταχῇ κίνησιν, μόνον ὅταν τὸ χρονικὸν διάστημα Δt ἐκλεγῇ πολὺ μικρόν. Πράγματι, ἐὰν εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα μετρήσωμεν τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον διανύει ὁ σιδηρόδρομος ἐντὸς μεγάλου σχετικῶς χρονικοῦ διαστήματος — π.χ., ἐντὸς 10 λεπτῶν — εἶναι πιθανὸν ἐντὸς τοῦ μεγάλου τούτου χρόνου ἡ ταχύτης αὐτοῦ νὰ ἔχῃ μεταβληθῇ. Ἐάν, ὁμως, μετρήσωμεν τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον διανύει ὁ σιδηρόδρομος ἐντὸς πολὺ μικροῦ χρονικοῦ διαστήματος (π.χ., 0,1 sec) καὶ διαιρέσωμεν τὸ διάστημα τοῦτο (π.χ., 2 m) διὰ τοῦ ἀπαιτηθέντος χρόνου (0,1 sec) θὰ λάβωμεν τὴν ταχύτητα (20 m/sec) κατὰ τὴν χρονικὴν ταύτην στιγμήν.

(*) Τὸ σύμβολον Δ παριστᾷ διαφορὰν. Οὕτω, τὸ Δs παριστᾷ διαφορὰν δύο διαστημάτων, τὸ Δt διαφορὰν δύο χρόνων κ.ο.κ.

• § 42. **Επιτάχυνσις.** Ἐὰν συγκρίνωμεν τὴν κίνησιν δύο αὐτοκινήτων — ἑνὸς ἐπιβατικοῦ καὶ ἑνὸς βαρέος φορτηγοῦ —, ἐκκινούντων ἐκ τῆς ἡρεμίας, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ ρυθμὸς, μὲ τὸν ὁποῖον αὐξάνεται ἡ ταχύτης των, εἶναι διάφορος. Οὕτω, τὸ ἐπιβατικὸν αὐτοκίνητον ἀποκτᾷ μεγάλην ταχύτητα εἰς σχετικῶς μικρὸν χρόνον, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ φορτηγόν, τὸ ὁποῖον χρειάζεται ἄρκετον πρὸς τοῦτο χρόνον. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι εἰς τὰς ἀνισοταχεῖς κινήσεις ἐμφανίζεται ἡ ἀνάγκη τοῦ καθορισμοῦ ἑνὸς νέου φυσικοῦ μεγέθους, τὸ ὁποῖον νὰ καθορίξῃ τὸν ρυθμὸν τῆς μεταβολῆς τῆς ταχύτητος.

Θεωρήσωμεν κινητόν, τὸ ὁποῖον, κινούμενον ἐπὶ τῆς τροχιάς του, εὐρίσκεται, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_1 , εἰς τὸ σημεῖον A (σχ. 68) καὶ ἔχει ταχύτητα, ἴσην πρὸς v_1 . Μετά τινα χρόνον — δηλ., κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_2 — τὸ κινητὸν θὰ εὐρίσκεται εἰς ἄλλο σημεῖον B καὶ ἔστω ὅτι θὰ ἔχῃ ταχύτητα v_2 , με γ α λ υ τ ε ρ α ν τῆς ταχύτητος



Σχ. 68.

v_1 . Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐντὸς τοῦ χρονικοῦ διαστήματος $t_2 - t_1$, ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ μετεβλήθη (ἡξήθη) κατὰ $v_2 - v_1$. Ἐὰν συμβολίσωμεν τὴν μεταβολὴν ταύτην τῆς ταχύτητος (αὔξησιν) διὰ τοῦ Δv καὶ τὸ ἀντίστοιχον χρονικὸν διάστημα διὰ τοῦ Δt , τὸ πηλίκον

$$\gamma = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1)$$

καλοῦμεν **ἐπιτάχυνσιν** τοῦ κινητοῦ.

Ἄρα, **ἐπιτάχυνσις** καλεῖται τὸ πηλίκον τῆς μεταβολῆς τῆς ταχύτητος διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου.

Κατὰ ταῦτα, **ἐπιτάχυνσις ὑπάρχει πάντοτε, ὅταν μεταβάλλεται ἡ ταχύτης.**

Εἰς τὴν ὁ μ α λ ῆ ν εὐθύγραμμον κίνησιν ἡ μεταβολὴ τῆς ταχύτητος εἶναι μηδὲν ($\Delta v = 0$) — ἀφοῦ ἡ ταχύτης διατηρεῖται σταθερά. Ἐπομένως, ἐκ τοῦ τύπου (1) προκύπτει ὅτι εἰς τὴν ὁμαλὴν εὐθύγραμμον κίνησιν ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἴση πρὸς μηδέν.

Μονάδες ἐπιταχύνσεως. 1) *C.G.S.* Διὰ νὰ δρίσωμεν τὴν μονάδα ἐπιταχύνσεως, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὴν μονάδα μεταβολῆς τῆς ταχύτητος (ἡ ὁποία εἶναι, προφανῶς, ἡ αὐτὴ μὲ τὴν μονάδα ταχύτητος (*)) καὶ τὴν μονάδα χρόνου. Ἐπειδὴ εἰς τὸ σύστημα *C.G.S.* μονὰς μεταβολῆς τῆς ταχύτητος

(*) Οὕτω, ἐὰν ἡ ταχύτης ἑνὸς κινητοῦ κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_1 εἶναι, π.χ., ἴση πρὸς 30 cm/sec καὶ κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_2 εἶναι ἴση πρὸς 32 cm/sec, ἡ μεταβολὴ Δv τῆς ταχύτητος θὰ εἶναι 2 cm/sec — ἐκφράζεται, δηλ., μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα, ὡς ἡ ταχύτης.

εἶναι τὸ 1 cm/sec , μονὰς δὲ χρόνου τὸ 1 sec , ἔπεται, κατὰ τὸν τύπον (1), ὅτι μονὰς ἐπιταχύνσεως θὰ εἶναι τὸ

$$1 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

Κατὰ ταῦτα, ὅταν λέγωμεν ὅτι ἓν κινητὸν ἔχει ἐπιτάχυνσιν, π.χ., 10 cm/sec^2 ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ αὐξάνεται κατὰ 10 cm/sec εἰς ἕκαστον sec .

2) Τ. Σ. Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο μονὰς μεταβολῆς τῆς ταχύτητος εἶναι τὸ 1 m/sec , μονὰς δὲ χρόνου τὸ 1 sec · ἐπομένως, μονὰς ἐπιταχύνσεως θὰ εἶναι τὸ

$$1 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}.$$

Ἐπιβραδύνσις. Ἐὰν ἡ ταχύτης ἑνὸς κινητοῦ, ἀντὶ νὰ αὐξάνεται, ἔλαττωται μετὰ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου, τότε ὀμιλοῦμεν περὶ **ἐπιβραδύνσεως** (ἢ **ἀρνητικῆς ἐπιταχύνσεως**). Οὕτω, ἐπιβραδυνομένην κίνησιν ἔκτελεῖ ἓν αὐτοκίνητον ἀπὸ τῆς στιγμῆς, καθ' ἣν ἀρχίζει νὰ λειτουργοῦν αἱ τροχοπέδαι (κ. φρένα). Καὶ ἂν μὲν αἱ τροχοπέδαι ἐφαρμοσθοῦν ἰσχυρῶς, ἡ ἐπιτάχυνσις θὰ ἔχῃ μεγάλην (ἀρνητικὴν) τιμὴν, ἐὰν δὲ ἐφαρμοσθοῦν ἀσθενῶς, ἡ ἐπιτάχυνσις θὰ ἔχῃ μικράν (ἀρνητικὴν) τιμὴν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΕΩΝ

(εἰς $\text{m} \cdot \text{sec}^{-2}$)

Ἀμαξοστοιχία κατὰ τὴν ἐκκίνησιν	0,20
Αὐτοκίνητον κατὰ τὴν ἐκκίνησιν	1,60
Ἐπιβραδύνσις αὐτοκινήτου μετὰ πέδησιν τῶν 4 τροχῶν	— 5
Σῶμα, πίπτει ἐλευθέρως ἐν τῷ κενῷ	9,81
Σφαῖρα ὀπλοῦ ἐντὸς τῆς κάνης	75 000
Ἀεροπλάνον καθέτου ἐφορμήσεως κατὰ τὴν ἀνάδυσιν	5 g

Σημειώσεις. Εἰς τὴν ἀεροπορίαν διὰ τὴν μέτρησιν ἐπιταχύνσεων χρησιμοποιεῖται ἡ μονὰς $1 g$ (ἐκ τοῦ συμβόλου g , τοῦ χρησιμοποιουμένου διὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦτο ἔκτελεῖ τὸς ἀναγκαίους χειρισμοὺς. Ἐὰν ὁ δείκτης τοῦ ταχυμέτρου τοῦ αὐτοκινήτου μετακινήθῃ ἐκ τῆς ἑνδείξεως 40 km/h εἰς τὴν ἑνδείξιν 50 km/h ἐντὸς 10 sec , πόση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ αὐτοκινήτου;

Δύσις. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐπιταχύνσεως ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\gamma = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Τὸ πρόβλημα ἄς λυθῇ εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα: Ἐχομεν $\Delta v = v_2 - v_1 = 50 \frac{km}{h} - 40 \frac{km}{h} = 10 \frac{km}{h} = 10000 \frac{m}{h} = \frac{10000}{3600} \frac{m}{sec}$ ἢ $\Delta v = \frac{100}{36} \frac{m}{sec}$.

Ἀφ' ἐτέρου $\Delta t = 10 sec$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν ἄνω τύπον, λαμβάνομεν

$$\gamma = \frac{\frac{100}{36} \frac{m}{sec}}{10 \frac{sec}{sec}} = \frac{100}{36 \cdot 10} \frac{m}{sec^2} = \frac{10}{36} \frac{m}{sec^2}$$

$$\eta \quad \gamma = 0,277 \frac{m}{sec^2}.$$

§ 43. **Εὐθύγραμμος κίνησις με σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν** (ἢ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη εὐθύγραμμος κίνησις). Εἶδομεν ἄνωτέρω ὅτι ἐπιτάχυνσις παρουσιάζεται εἰς τὰς ἀνισοταγεῖς κινήσεις, δηλ., εἰς τὰς κινήσεις ἐκείνας, εἰς τὰς ὁποίας μεταβάλλεται ἡ ταχύτης. Κατὰ γενικὸν κανόνα, ἡ ἐπιτάχυνσις εἰς τὰς ἀνισοταγεῖς κινήσεις δὲν διατηρεῖται σταθερά. Ὡς παράδειγμα ἄς θεωρήσωμεν τὸ ἑξῆς: Ὅταν ὁ ὁδηγὸς ἐνὸς αὐτοκινήτου πλησιάζῃ εἰς μίαν διασταύρωσιν, ἐφαρμόζει τὰς τροχοπέδας καὶ οὕτω προκαλεῖ ἐπιβράδυνσιν (δηλ., ἀρνητικὴν ἐπιτάχυνσιν) τοῦ αὐτοκινήτου. Ἐν τῷ μεταξὺ ἀντιλαμβάνεται ἕτερον ὄχημα, ἐρχόμενον ἐκ τῆς ἄλλης ὁδοῦ, ὁπότε ἀναγκάζεται νὰ ἐφαρμόσῃ ἰσχυρότερον τὰς τροχοπέδας, με ἀποτέλεσμα ἡ προκαλουμένη ἐπιβράδυνσις τοῦ αὐτοκινήτου νὰ εἶναι, τώρα, μεγαλυτέρα. Παρατηροῦμεν ὅτι, κατὰ τὴν ἀνισοταγὴν κίνησιν τοῦ ἄνω αὐτοκινήτου, ἡ ἐπιβράδυνσις δὲν ἦτο συνεχῶς ἡ αὐτὴ - ἀρχικῶς ἦτο μικρὰ καὶ ἀργότερον μεγαλυτέρα. Ἐντελῶς ἀνάλογον φαινόμενον δύναται νὰ παρουσιασθῇ καὶ κατὰ τὴν ἐκκίνησιν ἐνὸς αὐτοκινήτου, ὁπότε ἡ ἐπιτάχυνσις αὐτοῦ εἰς ἄλλας χρονικὰς στιγμὰς δύναται νὰ εἶναι μικρὰ, καὶ εἰς ἄλλας μεγάλη, ἀναλόγως τῆς τροφοδοτήσεως τοῦ κινητήρος.

Ἐκ τῶν διαφορῶν εἰδῶν ἀνισοταγῶν κινήσεων θὰ μελετήσωμεν κατωτέρω τὴν ἀπλουστεράν ἐξ αὐτῶν - τὴν κίνησιν ἐπὶ εὐθύγραμμου τροχιᾶς, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι σταθερά, δηλ., εἰς τὴν ὁποίαν εἰς ἴσους χρόνους ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ αὐξάνεται κατὰ τὸ αὐτὸ ποσόν. Ἐπομένως, εἰς τὴν κίνησιν ταύτην — ἡ ὁποία καλεῖται **ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη εὐθύγραμμος κίνησις** — ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\gamma = \text{σταθ.} \quad (1)$$

Ὅπως εἰς πᾶσαν κίνησιν, οὕτω καὶ εἰς τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην εὐθύγραμμον κίνησιν ἐνδιαφέρει νὰ εὑρωμεν σχέσεις, ἐκ τῶν ὁποίων νὰ προκύπτῃ α) πῶς μεταβάλλεται ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ συναρτήσει τοῦ χρό-

νου καὶ β) πῶς μεταβάλλεται τὸ ὑπὸ τοῦ κινητοῦ διανυόμενον διάστημα συναρτῆσαι τοῦ χρόνου.

α) **Σχέσις μεταξὺ ταχύτητος καὶ χρόνου.** Ἡ σχέσηις μεταξὺ ταχύτητος καὶ χρόνου εὐρίσκεται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐπιτάχυνσεως

$$\gamma = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν ὅτι, εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ χρόνου ($t_1 = 0$), ἡ ταχύτης εἶναι ἴση πρὸς τὸ μηδέν ($v_1 = 0$), ἐκ τῆς ἄνω ἐξισώσεως λαμβάνομεν

$$v_2 = \gamma \cdot t_2$$

καὶ γενικῶς :

$v = \gamma \cdot t$	"Ανεξ ἀρχικῆς ταχύτητος"
----------------------	-----------------------------

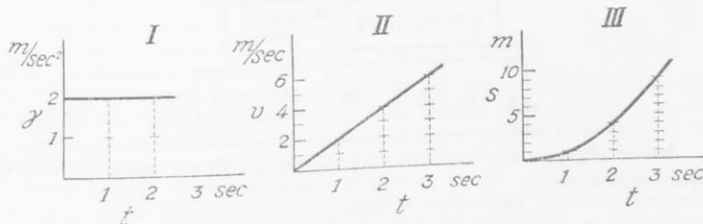
(2)

β) **Σχέσις μεταξὺ διαστήματος καὶ χρόνου.** Ἡ σχέσηις μεταξὺ τοῦ διαστήματος s καὶ τοῦ χρόνου t , ὡς ἀποδεικνύεται κατωτέρω, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2$	"Ανεξ ἀρχικῆς ταχύτητος"
------------------------------------	-----------------------------

(3)

Γραφικὴ παράστασις τῶν τύπων (1), (2) καὶ (3). Ἐὰν παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν σχέσηιν μεταξὺ ἐπιτάχυνσεως καὶ χρόνου (τύπος (1)) εἰς τὴν περίπτωσιν κινητοῦ, κινουμένου με σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν (π.χ., 2 m/sec^2), θὰ λάβωμεν τὸ διάγραμμα I τοῦ σχήματος 69, εἰς τὸ ὁποῖον



Σχ. 69.

προκύπτει μία εὐθεῖα γραμμὴ, παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χρόνων. Τοῦτο δηλοῖ ἀκριβῶς ὅτι εἰς τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην εὐθύγραμμον κίνησιν ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ χρόνου· δηλ., εἶναι σταθερά. Ἀφ' ἑτέρου, ἡ σχέσηις (2)

$$v = \gamma \cdot t$$

δεικνύει ὅτι εἰς τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην εὐθύγραμμον κίνησιν ἡ ταχύτης εἶναι ἀνάλογος τοῦ χρόνου. Τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 69, II ἀπο-

δίδει, ακριβώς, την ἄνω σχέσιν. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ 1ου δευτερολέπτου ἡ ταχύτης εἶναι ἴση πρὸς 2 m/sec , ἐνῶ εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου δευτερολέπτου εἶναι ἴση πρὸς 6 m/sec . Ἀρα, ἐντὸς 2 sec ἡ ταχύτης ηὑξήθη κατὰ $6 \text{ m/sec} - 2 \text{ m/sec} = 4 \text{ m/sec}$. Ἐπομένως, ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἴση πρὸς

$$a = \frac{4 \text{ m/sec}}{2 \text{ sec}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

- ακριβῶς ὅση ἀρχικῶς ἐλήφθη εἰς τὸ παράδειγμά μας.

Τέλος, ἐκ τῆς ἐξισώσεως (3) προκύπτει ὅτι, ἐφ' ὅσον ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι σταθερά, τὸ διανυόμενον διάστημα εἶναι ἀνάλογον τοῦ τετραγώνου τοῦ χρόνου. Τοῦτο παρίσταται γραφικῶς ὑπὸ τοῦ διαγράμματος III τοῦ σχήματος 69, εἰς τὸ ὁποῖον παρατηροῦμεν ὅτι, εἰς τὸ τέλος τοῦ 1ου, 2ου, 3ου ... sec, τὰ διανυθέντα διαστήματα εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσα πρὸς 1 m , 4 m , 9 m ... ὅπως, ἄλλωστε, ὑπολογίζεται καὶ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (3).

Ἐκ τῶν λεχθέντων προκύπτει ὅτι εἰς τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην εὐθύγραμμον κίνησιν

α) ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι σταθερά,

β) ἡ ταχύτης εἶναι ἀνάλογος τοῦ χρόνου τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ καὶ

γ) τὸ διανυόμενον διάστημα εἶναι ἀνάλογον τοῦ τετραγώνου τοῦ χρόνου τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ.

Κίνησις με ἀρχικὴν ταχύτητα. Οἱ τύποι (2) καὶ (3) ἰσχύουν εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ σῶμα ἀρχικῶς ἡρεμεῖ, δηλαδὴ ὅταν, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t = 0$, ἡ ταχύτης του εἶναι $v = 0$. Ἄν, ὅμως, τὸ σῶμα ἔχῃ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 , οἱ τύποι οὗτοι μετατρέπονται εἰς τοὺς ἑξῆς :

$v = v_0 + a \cdot t$	$M \text{ ἐ ἀρχικὴν ταχύτητα}$	
-----------------------	--------------------------------	--

(4)

καὶ

$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$	$M \text{ ἐ ἀρχικὴν ταχύτητα}$	
---	--------------------------------	--

(5)

Διὰ νὰ εὐρωμεν τὴν σημασίαν τοῦ v_0 θέτομεν εἰς τὸν τύπον (4) $t = 0$, ὅποτε λαμβάνομεν

$$v = v_0.$$

Ἀρα, v_0 εἶναι, ὄντως, ἡ ἀρχικὴ ταχύτης.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένης κινήσεως οἱ τύποι (4) καὶ (5) γράφονται ὡς ἑξῆς :

$v = v_0 - a \cdot t$	
-----------------------	--

(6)

καὶ

$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2$	
---	--

(7)

Ἐάν θέσωμεν εἰς τὸν τύπον (6) $v = 0$, θὰ λάβωμεν

$$0 = v_0 - \gamma \cdot t, \quad \text{ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει} \quad t = \frac{v_0}{\gamma}.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη παρέχει τὸν χρόνον, ὁ ὁποῖος θὰ παρέλθῃ, μέχρις ὅτου τὸ κινητὸν ἀκινήτησῃ· δηλαδὴ ὁ χρόνος οὗτος εἶναι ἡ *διάρκεια τῆς κινήσεως* τοῦ κινητοῦ.

Ἀφ' ἐτέρου, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν τύπον (7), ἀντὶ τοῦ t , τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν τιμὴν v_0/γ , θὰ λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$s = \frac{v_0^2}{2\gamma}.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη παρέχει τὸ ὅλικὸν διάστημα, τὸ ὁποῖον θὰ διανύσῃ τὸ κινητὸν, μέχρις ὅτου ἀκινήτησῃ.

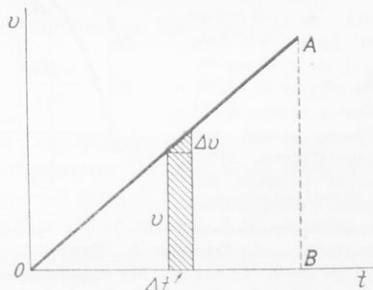
Ἀπόδειξις τοῦ τύπου (3). Ὅπως εἶδομεν, ἡ ταχύτης εἰς τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχνομένην εὐθύγραμμον κίνησιν εἶναι ἀνάλογος τοῦ χρόνου, παρίσταται δὲ γραφικῶς ὑπὸ τοῦ σχήματος 69a. Ἐάν, κατὰ τινα χρονικὴν στιγμήν, ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ εἶναι ἴση πρὸς v , μετὰ πάροδον τοῦ πολὺ μικροῦ χρονικοῦ διαστήματος Δt , θὰ εἶναι ἴση πρὸς $v + \Delta v$. Ἐάν θεωρήσωμεν ὅτι τὸ χρονικὸν τοῦτο διάστημα τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἡ ταχύτης $v + \Delta v$ τείνει πρὸς τὴν ταχύτητα v . Πρακτικῶς, λοιπόν, ἡ κίνησις ἐντὸς τοῦ χρόνου Δt δύναται νὰ θεωρηθῇ ἰσοταχῆς, ὁπότε τὸ ἐντὸς τοῦ χρόνου τούτου διανυόμενον πολὺ μικρὸν διάστημα Δs θὰ εἶναι, κατὰ τὸν τύπον, τὸν παρέχοντα τὸ διάστημα εἰς τὴν ἰσοταχῇ κίνησιν, ἴσον πρὸς $\Delta s = v \cdot \Delta t$ καὶ θὰ ἰσοῦται ἀριθμητικῶς πρὸς τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Ἐπειδὴ ἐδέχθημεν ὅτι ὁ χρόνος Δt τείνει πρὸς τὸ μηδέν, τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο θὰ εἶναι πρακτικῶς ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ γραμμοσκιασμένου τραπέζιου. Διὰ νὰ εὐρώμεν, λοιπόν, τὸ διάστημα s , τὸ ὁποῖον διανύει τὸ κινητὸν ἐντὸς τοῦ χρόνου $t = OB$, πρέπει νὰ θεωρήσωμεν τὸν χρόνον τοῦτον ὡς ἀποτελούμενον ἐκ πολλῶν στοιχειωδῶν χρονικῶν διαστημάτων Δt , νὰ σχηματίζωμεν τὰ ἀντίστοιχα τραπέζια καὶ ἀκολουθῶς νὰ ἀθροίσωμεν τὰ ἐμβαδὰ των, ὁπότε, κατὰ τ' ἀνωτέρω, τὸ ὅλικόν ἐμβαδόν, τὸ ὁποῖον θὰ προκύψῃ, θὰ ἰσοῦται ἀριθμητικῶς πρὸς τὸ ἐντὸς τοῦ χρόνου t διανυθὲν διάστημα s . Τὸ ὅλικόν τοῦτο ἐμβαδὸν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου OAB . Ἐπειδὴ ἡ βάσις OB τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι ἴση πρὸς t , τὸ δὲ ὕψος AB εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου t — δηλ., ἴσον πρὸς $\gamma \cdot t$ — ἔπεται ὅτι θὰ ἔχωμεν

$$s = \frac{1}{2} (OB) \cdot (AB) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot \gamma \cdot t$$

ἢ

$$s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2.$$

ὁ.ε.δ.



Σχ. 69a.

§ 44. Εὐθύγραμμος κίνησης με μεταβλητὴν ἐπιτάχυνσιν. Εἰς τ' ἀνωτέρω ἐξητάσαμεν δύο εἴδη εὐθύγραμμου κινήσεως α) τὴν ὁμαλὴν εὐθύγραμμον κίνησην, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἴση πρὸς μηδέν καὶ β) τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην εὐθύγραμμον κίνησην, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι σταθερά.

Ἡδὴ θὰ ἐξετάσωμεν τὴν γενικωτέραν περίπτωσιν εὐθύγραμμου ἐπιταχυνομένης κινήσεως, δηλ., τὴν εὐθύγραμμον κίνησην με μεταβλητὴν ἐπιτάχυνσιν: Θεωρήσωμεν κινητὸν, τοῦ ὁποίου ἡ ταχύτης μεταβάλλεται χρονικῶς, ὅπως δεικνύει τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 70. Ἐάν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χρόνων θεωρήσωμεν μίαν

χρονικὴν στιγμὴν t_A , ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ, κατὰ τὴν χρονικὴν ταύτην στιγμὴν, εὐρίσκεται ἐκ τοῦ διαγράμματος ἴση πρὸς $v_A = 30$ cm/sec. Μετὰ ἐν μικρὸν χρονικὸν διάστημα $\Delta t = 1$ sec, ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ ἡῤῥήθη κατὰ $\Delta v = 6$ cm/sec καὶ ἔγινεν ἴση πρὸς $v_A + \Delta v = 36$ cm/sec. Τὴν αὐξησην Δv τῆς ταχύτητος παρέχει ἡ μία κάθετος πλευρὰ τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ παρέχει τὸ ἀντίστοιχον χρονικὸν διάστημα Δt . Ἐπειδὴ, ὡς γνωστόν, ἡ ἐπιτάχυνσις ὀρίζεται ὡς τὸ πηλίκον $\Delta v / \Delta t$, ἔπεται ὅτι, ἐάν σχηματίσωμεν τὸ πηλίκον τῶν δύο καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, θὰ εὐρωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 6$ cm/sec².

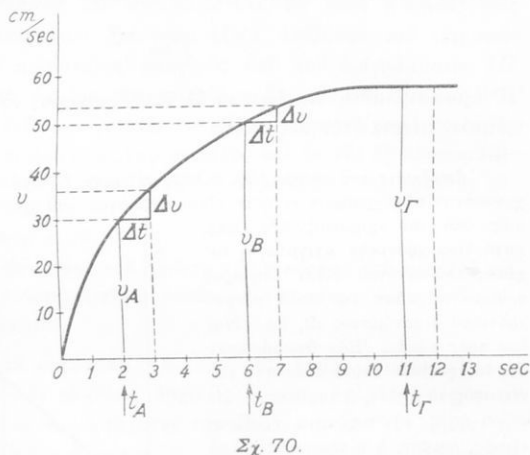
Ἐάν ἐπαναλάβωμεν τὸ αὐτὸ διὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_B , θὰ εὐρωμεν ὅτι, ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χρονικοῦ διαστήματος $\Delta t = 1$ sec, ἡ αὐξησης Δv τῆς ταχύτητος εἶναι μικρότερα ($\Delta v = 3,6$ cm/sec). Σχηματίζοντες τὸ πηλίκον $\Delta v / \Delta t$, εὐρίσκομεν ὅτι, τώρα, ἡ ἐπιτάχυνσις θὰ εἶναι μικρότερα ($\gamma = 3,6$ cm/sec²).

Τέλος, ἐάν ἐπαναλάβωμεν τὸ αὐτὸ διὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_C , θὰ εὐρωμεν ὅτι, ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χρονικοῦ διαστήματος $\Delta t = 1$ sec, ἡ μεταβολὴ τῆς ταχύτητος εἶναι ἴση πρὸς μηδέν ($\Delta v = 0$), δεδομένου ὅτι ἡ ταχύτης v_C εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ χρονικοῦ διαστήματος Δt εἶναι ἡ αὐτή. Ἐπομένως, τὸ πηλίκον $\Delta v / \Delta t$ εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν· ἄρα καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἴση πρὸς μηδέν.

Εἰς τὴν περιγραφείσαν κίνησην παρατηροῦμεν ὅτι, κατ' ἀρχάς, τὸ κινητὸν κινεῖται μετὰ μεγάλην ἐπιτάχυνσιν, ἡ ὁποία, ἐλαττωμένη συνεχῶς, γίνεται μετὰ τινα χρόνον ἴση πρὸς μηδέν. Ἡ κίνησις, δηλ., τοῦ κινητοῦ εἶναι κίνησις μετὰ μεταβλητὴν ἐπιτάχυνσιν.

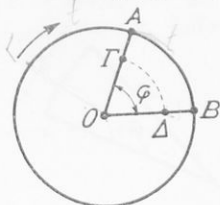
Τοιαύτη κίνησις εἶναι, π.χ., ἡ κίνησις αὐτοκινήτου, ἐκκινουντος ἐκ τῆς ἡρεμίας, ἡ κίνησις πλοίου, ἐκκινουντος ὁμοίως ἐκ τῆς ἡρεμίας κ.λ.

§ 45. Ὑμαλὴ κυκλικὴ κίνησις. Θεωρήσωμεν κινητὸν A, κινούμε-



νον ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς (σχ. 71). Ἐάν τὸ κινητὸν τοῦτο διανύῃ εἰς ἴσους χρόνους ἴσα τόξα, λέγομεν ὅτι ἐκτελεῖ **ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν**. Ἐάν θεωρήσωμεν τὴν ἀκτῖνα OA , αὕτη θὰ διαγράφῃ, ἐντὸς χρόνου τινὸς t , τὴν γωνίαν φ . **Γωνιακὴν ταχύτητα** ω καλοῦμεν τὸ πηλίκον τῆς γωνίας φ διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου t . Ἦτοι

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$



Σχ. 71.

Μονάδες γωνιακῆς ταχύτητος. Ἐπειδὴ ἡ γωνία μετρεῖται εἰς ἀκτίνια (βλ. § 5, Γ') καὶ ὁ χρόνος εἰς *sec*, ἡ μονὰς γωνιακῆς ταχύτητος θὰ εἶναι τὸ

$$1 \frac{\text{ἀκτίνιον}}{\text{sec}} \left(= 1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right).$$

Ἐκτὸς τῆς μονάδος ταύτης, χρησιμοποιεῖται καὶ ἡ μονὰς

$$1 \frac{\text{μοῖρα}}{\text{sec}}.$$

Ἐάν τὸ σημεῖον A ἀνήκῃ εἰς περιστρεφόμενον τροχόν, θεωρήσωμεν δὲ καὶ ἄλλο σημεῖον Γ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀκτίνος OA , τότε, ἐντὸς τοῦ χρόνου t , τὸ σημεῖον τοῦτο μετακινεῖται μέχρι τοῦ σημείου Δ , συνεπῶς διαγράφει τὴν αὐτὴν γωνίαν φ , τὴν ὁποίαν διαγράφει καὶ τὸ σημεῖον A . Κατὰ ταῦτα, ὅλα τὰ σημεία τοῦ περιστρεφόμενου τροχοῦ θὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν γωνιακὴν ταχύτητα.

Ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ σημείου A δὲν πρέπει νὰ συγγέται μὲ τὴν συνήθη (γραμμικὴν) ταχύτητα v , ἡ ὁποία, κατὰ τὰ γνωστά, εἶναι ἴση πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ διανυθέντος διαστήματος διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου, δηλ.,

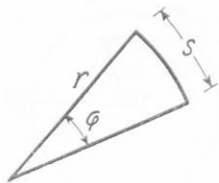
$$v = \frac{\text{μῆκος τοῦ τόξου } AB}{\text{χρόνος } t}.$$

Ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χρόνου t , τὸ σημεῖον Γ διατρέχει τὸ διάστημα $\Gamma\Delta$, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τοῦ AB , ὁπότε καὶ ἡ ταχύτης του θὰ εἶναι μικρότερα τῆς ταχύτητος τοῦ σημείου A .

Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι σημεία, εὐρισκόμενα εἰς διαφόρους ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἔχουν διάφορον ταχύτητα.

Σχέσις μεταξὺ γωνιακῆς ταχύτητος καὶ ταχύτητος. Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν γωνιακὴν ταχύτητα ω ἐνὸς περιστρεφόμενου σώματος, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ταχύτητα v ἐνὸς σημείου αὐτοῦ, εὐρισκόμενου εἰς ἀπόστασιν r ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς, ὡς ἑξῆς: Ἐκ τῆς Γεωμετρίας

γνωρίζομεν, ὅτι τὸ μῆκος s ἐνὸς τόξου (σχ. 72) ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἀκτίνης r ἐπὶ τὴν ἀντίστοιχον γωνίαν φ (μετρομένην εἰς ἀκτίνια!). Ἕτοι εἶναι



Σχ. 72.

$$s = r \cdot \varphi.$$

Ἐξ ὁρισμοῦ ἔχομεν $v = s/t$, ὁπότε, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν ἄνω τύπον ἀντὶ τοῦ s τὴν τιμὴν του, λαμβάνομεν $v = r \cdot \varphi'/t$. Ἐπειδὴ δὲ $\varphi'/t = \omega$, ἔχομεν τελικῶς

$$v = \omega \cdot r$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύπτει ὅτι, μολοντί ὅλα τὰ σημεῖα ἐνὸς περιστρεφομένου τροχοῦ ἔχουν τὴν ἰδίαν γωνιακὴν ταχύτητα ω , ἡ ταχύτης v αὐτῶν εἶναι διάφορος καί, μάλιστα, εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως r αὐτῶν ἀπὸ τοῦ ἀξονος περιστροφῆς.

Περίοδος καὶ συχνότης. Εἰς τὴν ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν καλεῖται **περίοδος** T ὁ χρόνος, ὁ ἀπαιτούμενος διὰ μίαν πλήρη περιστροφὴν τοῦ κινητοῦ.

Συχνότης ν καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στροφῶν, τὰς ὁποίας ἐκτελεῖ τὸ κινητὸν ἐντὸς χρόνου τινός, διὰ τοῦ χρόνου τούτου.

Μεταξὺ τῆς περιόδου T καὶ τῆς συχνότητος ν ἰσχύει ἡ σχέσις

$$T = \frac{1}{\nu} \quad (1)$$

Οὕτω, ἂν ἡ συχνότης εἶναι 3 στροφαὶ/sec , ὁ χρόνος, ὁ ἀπαιτούμενος διὰ μίαν περιστροφὴν (δηλ. ἡ περίοδος), θὰ εἶναι ἴσος πρὸς $1/3 \text{ sec}$.

Μονάδες συχνότητος. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) προκύπτει ὁ τύπος

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Θέτοντες εἰς τὸν ἄνω τύπον $T = 1 \text{ sec}$, λαμβάνομεν τὴν μονάδα συχνότητος 1 sec^{-1} ,

ἡ ὁποία, συνήθως, καλεῖται 1 στροφή ἀνὰ sec .

Ἐκτὸς τῆς μονάδος ταύτης χρησιμοποιεῖται καὶ ἡ μονὰς $1 \text{ στροφή ἀνὰ λεπτόν}$.

Ἡ μονὰς 1 sec^{-1} καλεῖται καὶ $1 \text{ κύκλος ἀνὰ δευτερόλεπτον}$ (1 c/sec). Χρησιμοποιοῦνται ἐπίσης καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτῆς:

$$1 \text{ kc/sec} = 10^3 \text{ c/sec} \quad \text{καὶ} \quad 1 \text{ Mc/sec} = 10^6 \text{ c/sec} (*).$$

(*) Αἱ μονάδες αὗται προφέρονται $1 \text{ χιλιοκύκλος ἀνὰ δευτερόλεπτον}$ καὶ $1 \text{ μεγακύκλος ἀνὰ δευτερόλεπτον}$.

Ἡ μονὰς 1 c/sec συναντᾶται, ἐνίοτε, καὶ ὡς 1 Hertz ($1 \text{ ἥρτς} = 1 \text{ Hz}$), τὰ δὲ

Σχέσεις γωνιακής ταχύτητας και συχνότητας. Έξ' ορισμού, γωνιακή ταχύτης είναι τὸ πηλίκον τῆς διαγραφομένης γωνίας διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου. Ἄν ὡς χρόνον λάβωμεν μίαν περίοδον T , ἡ ἐντὸς τοῦ χρόνου τούτου διαγραφομένη γωνία θὰ εἶναι ἴση πρὸς 360° , δηλ., 2π ἀκτίνια, ὁπότε ἡ γωνιακή ταχύτης θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Ἀντικαθιστώντες τὸ T διὰ τοῦ ἴσου του $1/\nu$, λαμβάνομεν τὸν τύπον

$$\boxed{\omega = 2\pi\nu}$$

Ὁ ἄνω τύπος προέκυψε δι' ἐκφράσεως τῆς γωνίας εἰς ἀκτίνια. Ὡς ἐκ τούτου, εἰς τὰς ἀριθμητικὰς ἐφαρμογὰς τοῦ τύπου τούτου πρέπει ἡ γωνία νὰ λαμβάνεται πάντοτε εἰς ἀκτίνια καὶ ὄχι εἰς μοίρας.

Ἐφαρμογή. Τροχὸς περιστρέφεται μὲ γωνιακὴν ταχύτητα, ἴσην πρὸς 90 μοίρας/sec. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συχνότης τοῦ τροχοῦ εἰς στροφὰς/min.

Λύσις. Διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος πρέπει, πρῶτον, νὰ ἐκφράσωμεν τὴν γωνίαν 90° εἰς ἀκτίνια. Κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, ἔχομεν

$$\frac{360^\circ}{90^\circ} \text{ εἶναι ἴσαι πρὸς } \frac{2\pi \text{ ἀκτίνια}}{x};$$

$$x = \frac{2\pi \cdot 90}{360} \text{ ἀκτίνια} = \frac{\pi}{2} \text{ ἀκτίνια}.$$

Ἄρα, ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ τροχοῦ εἶναι ἴση πρὸς $\omega = \frac{\pi}{2} \frac{\text{ἀκτίνια}}{\text{sec}}.$

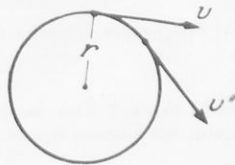
Ἡδη, ἐκ τοῦ τύπου $\omega = 2\pi\nu$ λαμβάνομεν

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} \frac{\text{στροφὰι}}{\text{sec}} = \frac{\pi}{2 \cdot 2\pi} \frac{\text{στροφὰι}}{\text{sec}} = \frac{1}{4} \frac{\text{στροφὰι}}{\text{sec}}.$$

Ἐπειδὴ εἶναι $1 \text{ λεπτόν (1 min)} = 60 \text{ sec}$ ἔχομεν

$$\nu = \frac{60}{4} \frac{\text{στροφὰι}}{\text{min}} = \frac{15 \text{ στροφὰι}}{\text{min}}.$$

Ἐπιτάχυνσις κινητοῦ, ἐκτελοῦντος ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν. Θεωροῦμεν σημεῖον, κινούμενον ὁμαλῶς ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς, ἀκτίνας r , μὲ ταχύτητα v (σχ. 73). Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν καὶ τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος διατηρεῖται σταθερόν, ἐν τούτοις, μεταβάλλεται ἡ διεύθυνσις αὐτῆς. Ἄρα, κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην, ἡ ταχύτης, ὡς ἀνυσματικὸν μέγεθος ἐξεταζομένη, μεταβάλλεται καὶ, συνεπῶς, τὸ κινητὸν ἔχει ἐπιτάχυνσιν. Ἡ



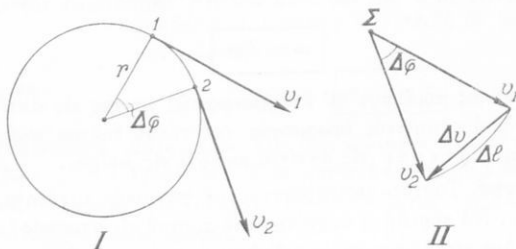
Σχ. 73.

πολλαπλάσια αὐτῆς ὡς $1 \text{ kHz (χιλοῦρτς)} = 10^3 \text{ Hz}$ καὶ $1 \text{ MHz (μεγαῦρτς)} = 10^6 \text{ Hz}$ (ἐκ τοῦ ὀνόματος τοῦ διασήμεου φυσικοῦ Hertz).

ἐπιτάχυνσις αὕτη καλεῖται **κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις** γ_κ καὶ (ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω) ἔχει μέτρον, ἴσον πρὸς

$$\gamma_\kappa = \frac{v^2}{r}$$

★ ★ **Ἀπόδειξις τοῦ τύπου $\gamma_\kappa = v^2/r$.** Θεωρήσωμεν κινητόν, τὸ ὁποῖον κινεῖται ὁμαλῶς ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς, ἀκτίνος r (σχ. 73α, I), ἔστω δὲ ὅτι κατὰ τὴν χρο-



Σχ. 73α.

νικὴν στιγμήν t , τὸ κινητόν τοῦτο εὐρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον I τῆς τροχιάς του καὶ ἔχει ταχύτητα v_1 . Μετὰ πάροδον μικροῦ τινος χρόνου Δt , τὸ κινητόν θὰ εὐρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον 2 καὶ θὰ ἔχῃ διανύσει ἐν τῷ χρόνῳ, τὸ ὁποῖον ἂς καλέσωμεν Δs , ἐνῶ ἡ ἀκτίς r θὰ ἔχῃ διαγράψῃ τὴν μικρὰν γωνίαν $\Delta\varphi$. Ἐστω v_2 ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ εἰς τὸ σημεῖον 2 . Ἡδη, συνερίζομεν ὡς ἐξῆς: Λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου τυχὸν σημεῖον Σ (σχ. 73α, II) καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρομεν ἐν ἄνυσμα, παράλληλον καὶ ἴσον πρὸς τὴν ταχύτητα v_1 . Ἀκολουθῶν, ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου φέρομεν δεύτερον ἄνυσμα, παράλληλον καὶ ἴσον πρὸς τὴν ταχύτητα v_2 . Ἐάν, τώρα, ἐκ τοῦ πέρας τοῦ ἀνύσματος v_1 φέρωμεν ἐν ἄνυσμα, τὸ ὁποῖον νὰ καταλήγῃ εἰς τὸ πέρας τοῦ δευτέρου ἀνύσματος v_2 , τότε τὸ ἄνυσμα τοῦτο θὰ παριστᾷ τὴν ἐντὸς τοῦ χρόνου Δt ἐπελθούσαν μεταβολὴν Δv τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ. Ἐπειδὴ ἡ θεωρουμένη κίνησις εἶναι ὁμαλὴ, τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος v_1 θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος v_2 . Ἀννάμεθα, λοιπόν, νὰ γράψωμεν $v_1 = v_2 = v$.

Ἐκ τοῦ σχήματος 73α, II λαμβάνομεν διὰ τὸ τόξον Δl (*) τὴν σχέσιν

$$\Delta l = v \cdot \Delta\varphi. \quad (2)$$

Ἐπειδὴ ἡ γωνία $\Delta\varphi$ εἶναι πολὺ μικρά, τὸ τόξον Δl εἶναι, περίπου, ἴσον πρὸς τὴν χορδὴν Δv — ἥτοι εἶναι $\Delta l = \Delta v$ — ὁπότε ὁ τύπος (2) γράφεται

$$\Delta v = v \cdot \Delta\varphi$$

Ἐάν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἄνω ἐξισώσεως διὰ τοῦ Δt , θὰ λάβωμεν

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = v \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Ἐπειδὴ τὸ $\Delta v/\Delta t$ εἶναι ἀκριβῶς ἡ ζητούμενη ἐπιτάχυνσις γ_κ , τὸ δὲ $\Delta\varphi/\Delta t$ ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ κινητοῦ, ἔχομεν

$$\gamma_\kappa = v \cdot \omega \quad \eta \quad \gamma_\kappa = \frac{v^2}{r} \quad (\text{δεδομένου ὅτι } v = \omega \cdot r)$$

(*) Συμφώνως πρὸς τὰ ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωστά: *μῆκος τόξου = ἀκτίς ἐπὶ ἀντίστοιχον ἐπίκεντρον γωνίαν.*

★ § 46. Σύνθεσις κινήσεων. 1) Σύνθεσις διαστημάτων. Εἰς τὰ

κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν κινήτου, ἐκτελοῦντος δύο εὐθύγραμμους κινήσεις ταυτοχρόνως. Ὡς παράδειγμα θεωρήσωμεν ἄνθρωπον, εὗρισκόμενον ἐπὶ κινουμένης λέμβου, ὁ ὁποῖος ἐκτελεῖ βήματά τινα, παρὰ ἄλ-

λῆλως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως τῆς λέμβου (σχ. 74, δεξιά). Ἐστὼ ὅτι, ἐντὸς χρόνου τινός, ἡ λέμβος μετακινεῖται κατὰ διάστημα $s_1 = 10 \text{ m}$, ὁ δὲ ἄνθρωπος διατρέχει ἐπ' αὐτῆς διάστημα $s_2 = 3 \text{ m}$. Εἶναι προφανές ὅτι τὸ ὑπὸ τοῦ ἀνθρώπου ἐντὸς τοῦ χρόνου τούτου ὀλίκως διανυθὲν διάστημα $s_{ολ}$ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς $s_{ολ} = s_1 + s_2 = 13 \text{ m}$.

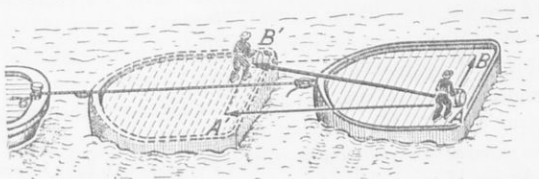


Σχ. 74. Ἀνθρώπος, βηματίζων ἐπὶ κινουμένης λέμβου, ἐκτελεῖ ταυτοχρόνως δύο κινήσεις.

Τὸ διάστημα $s_{ολ}$ εἶναι δυνατόν νὰ θεωρηθῇ ὡς διανυθὲν καὶ κατ' ἄλλους τρόπους: α) Ὁ ἄνθρωπος μεταβαίνει ἐκ τοῦ σημείου A εἰς τὸ σημεῖον B , χωρὶς ἡ λέμβος νὰ κινῆται, διανύων διάστημα 3 m καί, ἀκολούθως, ἀκινητοῦντος τοῦ ἀνθρώπου, ἡ λέμβος κινεῖται, διανύουσα διάστημα 10 m . Συνεπῶς, ὁ ἄνθρωπος μετεκινήθη συνολικῶς κατὰ 13 m . β) Μόνον ἡ λέμβος κινεῖται ἐκ τῆς ἀρχικῆς τῆς θέσεως εἰς τὴν τελικὴν κατὰ 10 m καί, ἀφοῦ φθάσῃ ἐκεῖ, τότε ὁ ἄνθρωπος ἀρχίζει νὰ βηματίζῃ καὶ διανύει 3 m . Συνεπῶς, οὗτος διανύει συνολικῶς διάστημα 13 m .

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἄνθρωπος, ἐκτελὼν ταυτοχρόνως δύο κινήσεις, φθάνει εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὥς ἐὰν αἱ δύο κινήσεις εἶχον ἐκτελεσθῇ διαδοχικῶς καὶ καθ' ὁρισμένην σειράν. Τοῦτο ἀποτελεῖ τὴν ἀρχὴν τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν κινήσεων.

Ἡ ἄνω ἀρχὴ ἰσχύει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ ἄνθρωπος κινεῖται κατ' ἄλλην διεύθυνσιν, μὴ συμπίπτουσιν πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως τῆς λέμβου. Οὕτω, εἰς τὸ σχῆμα 75, ὁ ἄνθρωπος ἐκινήθη ἐκ

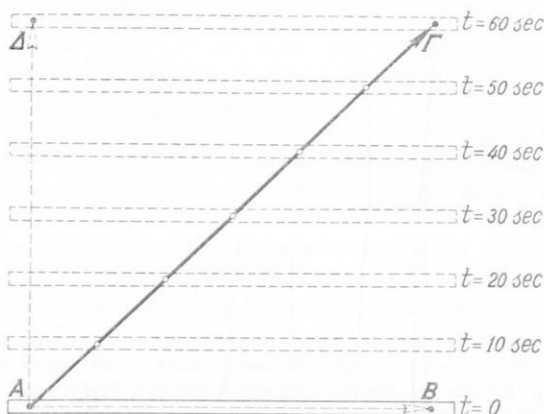


Σχ. 75. Τὸ ὑπὸ τοῦ ἀνθρώπου ὀλίκως διανυθὲν διάστημα εὗρίσκεται διὰ τῆς μεθόδου τοῦ παραλληλογράμμου.

τοῦ σημείου A εἰς τὸ σημεῖον B , ἐνῶ τὸ σημεῖον A τῆς λέμβου μετεκινήθη εἰς τὸ σημεῖον A' . Ἐκ τοῦ σχήματος προκύπτει ὅτι τὸ εἰς τὴν πραγματικὴν

τητα ὑπὸ τοῦ ἀνθρώπου διανυθὲν διάστημα AB' , εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δύο ἐπὶ μέρους διαστημάτων AB καὶ AA' , εὐρίσκεται δὲ διὰ τῆς γνωστῆς μεθόδου τοῦ παραλληλογράμμου.

*Ἄλλο παράδειγμα συνθέσεως δύο εὐθυγράμμων κινήσεων εἶναι τὸ ἑξῆς: Θεωρήσωμεν κινητόν, τὸ ὁποῖον κινεῖται κατὰ μῆκος κανόνος AB (χάρακος) (σχ. 76), ἐνῶ, ταυτοχρόνως, καὶ ὁ κανὼν κινεῖται κατὰ διεύθυν-



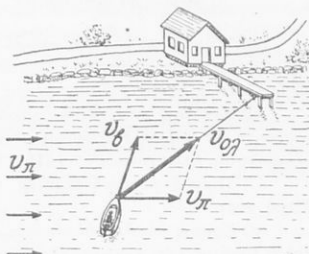
Σχ. 76.

σιν, καὶ αὐτὸν ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν κινήσεως τοῦ κινητοῦ. Ἐὰν ὁ κανὼν ἦτο ἀκίνητος, τὸ κινητόν, ἐκκινουῖν ἐκ τοῦ σημείου A , θὰ ἔφθανε, μετὰ τινα χρόνον (π.χ. 60 sec), εἰς τὸ σημεῖον B · θὰ διήνυε, συνεπῶς, τὸ διάστημα AB . Ἀφ' ἐτέρου, ἐὰν τὸ κινητόν παρέμενεν ἀκίνητον καὶ ἐκινεῖτο μόνον ὁ κανὼν, τότε, ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χρόνου (60 sec) τὸ κινητόν θὰ ἔφθανεν εἰς τὸ σημεῖον A' · θὰ διήνυε, συνεπῶς, τὸ διάστημα AA' . Ἡδη, ὅμως, ἐφ' ὅσον γίνονται καὶ αἱ δύο κινήσεις ταυτοχρόνως, τὸ κινητόν θὰ εὐρίσκεται, κατὰ τὰς χρονικὰς στιγμὰς $t = 10 \text{ sec}, 20 \text{ sec}, 30 \text{ sec} \dots 60 \text{ sec}$, εἰς θέσεις, σημειουμένας ἐπὶ τοῦ σχήματος διὰ μικρῶν κύκλων, διὰ νὰ καταλήξῃ, τελικῶς, εἰς τὸ σημεῖον G . Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὑπὸ τοῦ κινητοῦ πραγματικῶς διανυθὲν διάστημα AG δίδεται ὑπὸ τῆς διαγωνίου τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν διαστημάτων AB καὶ AA' .

Ἐκ τῶν ἀναφερθέντων παραδειγμάτων συνάγεται τὸ ἑξῆς συμπέρασμα: Ὅταν κινητόν ἐκτελῇ συγχρόνως δύο εὐθυγράμμους κινήσεις, τὸ ὑπ' αὐτοῦ πραγματικῶς διανυόμενον διάστημα εὐρίσκεται ὡς τὸ ἀνυσματικὸν ἄθροισμα τῶν ἐπὶ μέρους διαστημάτων.

Εἰς τὸ σχῆμα 76 ἡ προκύπτουσα τροχιά ἦτο ἀκριβῶς ἡ εὐθεῖα γραμμὴ AG . Ἐάν, ὅμως, ἡ μία τουλάχιστον ἐκ τῶν δύο κινήσεων δὲν ἦτο ἰσοταχὴς, εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ τροχιά δὲν θὰ ἦτο πλέον εὐθεῖα γραμμὴ.

2) **Σύνθεσις ταχυτήτων.** Ἡ αὐτή, ἀκριβῶς, ἄρχῃ χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς (πραγματικῆς) ταχύτητος ἑνὸς σώματος, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ ταυτοχρόνως δύο εὐθυγράμμους κινήσεις: Ὡς παράδειγμα ἂς θεωρήσωμεν βενζινακάτον, ἡ ὁποία διασχίζει ποταμόν, ρέοντα μὲ ταχύτητα v_{π} (σχ. 77). Ἐὰν τὸ ὕδωρ τοῦ ποταμοῦ ἦτο ἀκίνητον, ἡ βενζινακάτος θὰ ἐκινεῖτο μὲ τὴν ταχύτητα v_{β} . Ἐπειδὴ, ὅμως, τὸ ὕδωρ κινεῖται μὲ τὴν ταχύτητα v_{π} , ἡ βενζινακάτος θὰ κινηθῇ, εἰς τὴν πραγματικότητα, μὲ τὴν ταχύτητα v_{α} , ἡ ὁποία, δίδεται ἐκ τῆς διαγωνίου τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν ἀντισμάτων v_{β} καὶ v_{π} . Ἐκ τοῦτου προκύπτει ὅτι, εἰς ἐκάστην χρονικὴν στιγμήν, ἡ ταχύτης τῆς συνθέσεως εἶναι ἴση πρὸς τὴν συνισταμένην τῶν ταχυτήτων τῶν δύο κινήσεων.



Σχ. 77. Ἡ πραγματικὴ πορεία τῆς βενζινακάτου καθορίζεται ὑπὸ τῆς ταχύτητος v_{α} .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κατηγορία Α'

- 27) Κινητόν, κινούμενον ἰσοταχῶς, διανύει διάστημα 150 m ἐντὸς χρόνου 30 sec. Ποία ἡ ταχύτης του εἰς km/h ; (ΑΠ: 18 km/h)
- 28) Ποία ἡ ταχύτης τῆς Γῆς, κινουμένης ἰσοταχῶς περὶ τὸν ἥλιον, ἂν ἡ ἀκτίς τῆς κυκλικῆς τροχιάς, τὴν ὁποίαν αὐτὴ διαγράφει εἰς 365 ἡμέρας, εἶναι ἴση πρὸς 151 000 000 km ; (ΑΠ: 30 km/sec)
- 29) Δύο χρονομετρηταί, εὐρισκόμενοι εἰς τὸ 50^{ον} καὶ τὸ 100^{ον} μέτρον ἀπὸ τῆς ἀφετηρίας, χρονομετροῦν ἕνα δρομέα καὶ εὐρίσκουν ἀντιστοίχως χρόνους 7 sec καὶ 13 sec. Ποία ἡ μέση ταχύτης τοῦ δρομέως α) εἰς τὰ πρῶτα 50 μέτρα, β) εἰς τὰ δευτέρα 50 μέτρα καὶ γ) εἰς τὴν ὅλην διαδρομὴν ; (ΑΠ: α) 7,14 m/sec, β) 8,33 m/sec, γ) 7,7 m/sec)
- ✓30) Κινητόν ἐκκινεῖ ἐκ τῆς ἡρεμίας καί, κινούμενον μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν 30 m/sec², διανύει ἐντὸς χρόνου t διάστημα 500 m. Ποῖος ὁ χρόνος t ; (ΑΠ: 5,8 sec)
- ✓31) Κινητόν, κινούμενον μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν, διανύει διάστημα 80 m ἐντὸς 4 sec. Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις ; (ΑΠ: 10 m/sec²)
- ✓32) Ἡ ταχύτης ἑνὸς αὐτοκινήτου αὐξάνεται ὁμαλῶς ἀπὸ 30 km/h εἰς 90 km/h ἐντὸς 10 sec. Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ αὐτοκινήτου εἰς μονάδας C.G.S. ; (ΑΠ: 167 cm·sec⁻²)
- 33) Μετεωρόλιθος, ἐμφανιζόμενος εἰς τὸν οὐρανὸν ἐπὶ χρόνον 2 sec, διαγράφει τόξον, ἀντιστοιχοῦν εἰς γωνίαν 8°. Ποίαν ταχύτητα εἶχεν οὗτος, διὰν ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ ἑνα παρατηρητὴν ἦτο ἴση πρὸς 57 km ; (ΑΠ: 4 km/sec)
- 34) Κινητόν ἔχει ταχύτητα 120 cm/sec εἰς δεδομένην στιγμήν καί, μετὰ 12 sec, ἡ ταχύτης του γίνεται 45 cm/sec. α) Ποία ἡ ἐπιβράδυνσις (θεωρουμένη σταθερά). β) Νὰ ἀποδοθῇ γραφικῶς ἡ σχέσις μεταξὺ ταχύτητος καὶ χρόνου. γ) Ἐκ τοῦ δια-

γραμματος να εύρεθῇ ποῖαν χρονικὴν στιγμὴν τὸ κινητὸν θὰ σταματήσῃ. δ) Νὰ ἐλεγχθῇ τὸ ἀποτέλεσμα δι' ὑπολογισμοῦ.

(ΑΠ: α) $6,25 \text{ cm/sec}^2$, γ) $19,2 \text{ sec}$ ἀπὸ τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποῖαν ἤρχισεν ἡ ἐπιβράδυνσις)

35) Ἐὰν αἱ τροχοπέδαι σιδηροδρόμου, κινουμένου μετὰ ταχύτητα 30 km/h , προκαλοῦν εἰς αὐτὸν σταθερὰν ἐπιβράδυνσιν 120 cm/sec^2 , νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον θὰ διανύσῃ οὗτος μέχρις ὅτου σταματήσῃ. (ΑΠ: 29 m)

36) Κινητὸν, κινούμενον ὁμαλῶς ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς, ἔχει περίοδον 5 sec καὶ ταχύτητα 25 cm/sec . Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ συχνότης, β) ἡ γωνιακὴ ταχύτης καὶ γ) ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις. (ΑΠ: α) $0,2 \text{ c/sec}$, β) $1,26 \text{ rad/sec}$, γ) $31,4 \text{ cm/sec}^2$)

37) Ποία ἡ γωνιακὴ ταχύτης τῆς Γῆς κατὰ τὴν περιστροφήν αὐτῆς περὶ τὸν ἄξονά της; (ΑΠ: $7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/sec}$)

38) Τροχὸς ἐκτελεῖ 50 στροφὰς ἀνὰ λεπτόν. Νὰ εύρεθῇ ἡ γωνιακὴ τοῦ ταχύτης καὶ ἡ ταχύτης τῶν σημείων τῆς περιφερείας του, ἂν ἡ διάμετρος του εἶναι 80 cm . (ΑΠ: $5,24 \text{ rad/sec}$, $210 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$)

Κατηγορία Β'

39) Ἀεροπλάνον, κινούμενον μετὰ σταθερὰν ταχύτητα $180 \text{ ναυτικά μίλια/h}$, διανύει τὴν ἀπόστασιν Ἀθηνῶν—Ρώμης ἐντὸς 3 ὥρων καὶ 15 min . Ποία ἡ διανυθείσα ἀπόστασις εἰς km ; (ΑΠ: 1084 km)

40) Αὐτοκίνητον κινεῖται μετὰ ταχύτητα 60 km/h . Ἐὰν ὁ ὁδηγὸς ἐφαρμόσῃ τὰς τροχοπέδας (φρενάρι), ἡ ταχύτης του ἐλαττωθῇ εἰς τὰ 15 km/h ἐντὸς 4 sec . Ποία ἡ ἐπιβράδυνσις εἰς μονάδας $G.G.S.$ (θεωρουμένη σταθερά, καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῶν 4 sec); (ΑΠ: $312,5 \text{ cm/sec}^2$)

41) Ὁ χρόνος ἀντιδράσεως ὁδηγοῦ αὐτοκινήτου εἶναι $0,7 \text{ sec}$. (Χρόνος ἀντιδράσεως εἶναι ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος παρέρχεται μεταξὺ τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποῖαν ἀντιλαμβάνεται ὁ ὁδηγὸς τὸν κίνδυνον καὶ τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποῖαν ἐφαρμόζει τὰς τροχοπέδας). Ἐὰν ἡ ἐπιβράδυνσις εἶναι 5 m/sec^2 , νὰ ὑπολογισθῇ τὸ συνολικῶς διανυόμενον διάστημα ὑπὸ τοῦ αὐτοκινήτου ἀπὸ τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποῖαν ὁ ὁδηγὸς ἀντελήφθῃ τὸν κίνδυνον, μέχρις ὅτου σταματήσῃ α) ὅταν ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου εἶναι 40 km/h καὶ β) ὅταν εἶναι 80 km/h ; (ΑΠ: α) 14 m , β) $40,2 \text{ m}$)

42) Σιδηρόδρομος ἐκκινῶν ἐκ τῆς ἡρεμίας, κινεῖται μετὰ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν 100 cm/sec^2 ἐπὶ χρόνον 10 sec . Ἀκολουθῶς, κινεῖται ὁμαλῶς ἐπὶ 30 sec μετὰ τὴν ἀποκτηθεῖσαν ταχύτητα καί, τέλος, μετὰ σταθερὰν ἐπιβράδυνσιν 2 m/sec^2 μέχρις ὅτου σταματήσῃ. Νὰ εύρεθῇ α) τὸ ὁλικὸν διάστημα, τὸ ὁποῖον διέτρεξεν ὁ σιδηρόδρομος καὶ β) νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ σχέσις μεταξὺ ταχύτητος καὶ χρόνου. (ΑΠ: 375 m)

43) Δύο κινητὰ A, B , κινούμενα μετὰ τὴν αὐτὴν ταχύτητα 60 km/h , ἀπέχον μετὰ τῶν 150 m κατὰ 150 m . Τὸ κινητὸν A , ἀποκτὸν σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν, καταφθάνει τὸ B μετὰ 20 sec . Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ κινήτου A , β) ἡ ταχύτης του μετὰ τὰ 20 sec καὶ γ) τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον διήνυσε τοῦτο ἐντὸς τῶν 20 sec . (ΑΠ: α) $0,75 \text{ m/sec}^2$, β) $31,7 \text{ m/sec}$, γ) 484 m)

44) Κινητὸν, ἐκκινοῦν ἐκ τῆς ἡρεμίας, κινεῖται ἐπὶ 9 sec μετὰ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν 10 cm/sec^2 . Ἀκολουθῶς, κατὰ τὰ ἐπόμενα 30 sec , κινεῖται ἰσοταχῶς μετὰ τὴν ταχύτητα, τὴν ὁποῖαν ἤδη ἀπέκτησε καί, τέλος, κινεῖται μετὰ σταθερὰν ἐπιβράδυνσιν 30 cm/sec^2 μέχρις ὅτου σταματήσῃ. Νὰ ὑπολογισθῇ α) τὸ ὁλικὸν διάστημα, τὸ ὁποῖον διήνυσε τὸ κινητὸν. β) Ὁ ἀπαιτηθεὶς πρὸς τοῦτο χρόνος. γ) Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς 1) ἡ σχέσις μεταξὺ ἐπιτάχυνσεως καὶ χρόνου, 2) ἡ σχέσις μεταξὺ ταχύτητος καὶ χρόνου. (ΑΠ: α) $32,4 \text{ m}$, β) 42 sec)

45) Ποία ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ λεπτοδείκτου ἐνὸς ὥρολογίου καὶ ποία ἡ τοῦ δείκτου τῶν δευτερολέπτων; (ΑΠ: $1,74 \cdot 10^{-3} \text{ rad/sec}$, $10,4 \cdot 10^{-3} \text{ rad/sec}$)

46) Ποία ἡ ταχύτης τῶν ἐξωτάτων σημείων δίσκου γραμμοφώνου, διαμέτρου 20 cm, στρεφομένου μὲ 78 (33) στροφάς ἀνά λεπτόν;

(ΑΠ: $81,6 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$, $34,5 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$)

47) Πλοῖον ταξιδεύει μὲ ταχύτητα $1,8 \text{ m/sec}$ καθέτως πρὸς τὸ ρεῦμα ποταμοῦ, πλάτους 54 m, μέχρι τῆς ἀντίπεραν ὄχθης, παρασύρεται, ὅμως, κατὰ διάστημα 15 m ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς του διευθύνσεως. Νά εὐρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ποταμοῦ α) γραφικῶς, β) δι' ὑπολογισμόν.

(ΑΠ: $0,5 \text{ m/sec}$)

48) Πλοῖον, κινούμενον μὲ σχετικὴν ταχύτητα 6 m/sec , ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ ποταμοῦ, ρέοντος μὲ ταχύτητα 300 cm/sec , πρόκειται νὰ τὸν διασχίσῃ καθέτως. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ διεύθυνσις τῆς πορείας του; (Τὸ πρόβλημα νὰ λυθῇ γραφικῶς).

(ΑΠ: $\varphi = 30^\circ$)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

• § 47. Θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής. Ὅπως εἶδομεν εἰς τὰ προηγούμενα Κεφάλαια, ἡ Κινηματικὴ ἐξετάζει τὰς ταχύτητας καὶ ἐπιταχύνσεις, ἀνεξαρτήτως τῶν προκαλουσῶν αὐτὰς δυνάμεων, ἐνῶ ἡ Στατικὴ ἐξετάζει μόνον τὰς δυνάμεις, ἀδιαφοροῦσα διὰ τὰ ἀποτελέσματα, τὰ ὁποῖα αὐταὶ προκαλοῦν. Ἡ **Δυναμικὴ**, τέλος, ἐξετάζει τὴν σχέσιν μεταξὺ τοῦ αἰτίου — τῆς δυνάμεως — καὶ τοῦ ἀποτελέσματος — τῆς ἐπιταχύνσεως.

Ἄς μελετήσωμεν τὴν κίνησιν φορτηγοῦ αὐτοκινήτου, τὸ ὅποῖον ἐκκινεῖ α) ἄνευ φορτίου καὶ β) μετὰ πλήρους φορτίου. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ αὐτοκίνητον θ' ἀποκτήσῃ, εἰς σχετικῶς μικρὸν χρόνον, μεγάλην ταχύτητα (θὰ κινῆται, δηλ., μὲ μεγάλην ἐπιτάχυνσιν), ἐνῶ εἰς τὴν δευτέραν θ' ἀπαιτηθῇ πρὸς τοῦτο μέγας χρόνος (ἡ ἐπιτάχυνσις, δηλ., θὰ εἶναι μικρά), ἂν καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ἡ κίνησις δίδεται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ κινητήρος.

Ἄλλο παράδειγμα: Ἄν ὠθήσωμεν μετὰ τῆς αὐτῆς δυνάμεως καὶ ἐπὶ τὸν αὐτὸν χρόνον δύο ἀκίνητους λέμβους, π ο λ ὺ δ ι α φ ὅ ρ ω ν δ ι α σ τ ἰ σ ε ω ν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ μικροτέρα ἐξ αὐτῶν ἀποκτᾷ πολὺ μεγαλυτέραν ταχύτητα ἀπὸ τὴν ἄλλην — δηλ., ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς πρώτης λέμβου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς δευτέρας λέμβου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πειραμάτων, καθὼς καὶ ἄλλων ὁμοίων, συνάγεται ὅτι ἡ αὐτὴ δύναμις, ἐξασκουμένη ἐπὶ διαφόρων σωμάτων, προσδίδει εἰς αὐτὰ διαφόρους ἐπιταχύνσεις. Ἀφ' ἑτέρου, εὐρίσκομεν ὅτι, ἐὰν διπλασιάσωμεν τὴν δύναμιν, τὴν ἐξασκουμένην ἐπὶ τινος σώματος, ἡ ἐπιτάχυνσις γίνεταί διπλασία (*). Τὸ τελευταῖον τοῦτο διατυπώται ὡς ἑξῆς:

(*) Ἡ, ἄλλως, τὸ πηλίκον τῆς δυνάμεως διὰ τῆς ἀντιστοίχου ἐπιταχύνσεως εἶναι σταθερόν. Ἦτοι

$$\frac{F}{\gamma} = \frac{2F}{2\gamma} = \dots = \text{σταθ.}$$

Ἡ ἐπιτάχυνσις, τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ ἐν σῶμα ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μιᾶς δυνάμεως, εἶναι ἀνάλογος τῆς δυνάμεως.

Ὅλα τ' ἀνωτέρω διευκρινήθησαν ὑπὸ τοῦ Νεύτωνος (Newton· Νιοῦτον) (*) διὰ τῆς ἐξισώσεως

$F = m \cdot \gamma$	Θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς	(1)
----------------------	-----------------------------------	-----

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην τὸ m εἶναι μία σταθερά, ἡ ὁποία καλεῖται **μᾶζα** τοῦ σώματος. Ἡ μᾶζα, λοιπόν, δύναται νὰ ὀρισθῇ, κατὰ τὸν τύπον (1), ὡς τὸ σταθερὸν πηλίκον τῆς δυνάμεως, τῆς ἐξασκουμένης ἐπὶ τινος σώματος, διὰ τῆς ἐπιταχύνσεως, τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ τὸ σῶμα τοῦτο.

Ἡ ἐξίσωσις (1) συνδέει τὸ αἷτιον (δύναμις) μὲ τὸ ἀποτέλεσμα (ἐπιτάχυνσις) καὶ ἀποτελεῖ τὸν **θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς**. Ὁ νόμος οὗτος καλεῖται θεμελιώδης, διότι, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, ἀποτελεῖ τὸν μόνον νόμον τῆς Μηχανικῆς, ἐκ τοῦ ὁποίου ἐξάγονται ὅλοι οἱ ἄλλοι νόμοι αὐτῆς.

§ 48. Διερευνήσις τῆς θεμελιώδους ἐξισώσεως $F = m \cdot \gamma$.

1) **Σταθερὰ δύναμις προκαλεῖ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν.** Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $F = m \cdot \gamma$ θέσωμεν $F = \text{σταθ.}$, θὰ λάβωμεν $m \cdot \gamma = \text{σταθ.}$ Δεδομένου ὅτι ἡ μᾶζα m εἶναι σταθερά, ἔπεται ὅτι $\gamma = \text{σταθ.}$ Τοῦτο διατυπώνεται ὡς ἑξῆς: "Ὅταν ἐφ' ἑνὸς σώματος, εὐρισκομένου ἀρχικῶς εἰς ἠρεμίαν, ἐξασκηθῇ μία **σταθερὰ** δύναμις (σταθερὰ κατὰ μέτρον, διευθύνσιν καὶ φοράν), τὸ σῶμα τοῦτο θ' ἀποκτήσῃ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν, δηλαδὴ θὰ ἐκτελέσῃ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην εὐθύγραμμον κίνησιν.

Τοιαύτην κίνησιν ἐκτελεῖ, π.χ., ἐν σῶμα, πίπτον ἐλευθέρως εἰς τὸ κενὸν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους του, τὸ ὁποῖον εἶναι μία σταθερὰ δύναμις.

2) **Διὰ δεδομένην δύναμιν, ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς μάζης.** Ἐὰν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $F = m \cdot \gamma$ ὡς πρὸς γ , λαμβάνομεν

$$\gamma = \frac{F}{m}.$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου προκύπτει ὅτι, ἐὰν ἡ δύναμις F διατηρῇται σταθερά, ἡ ἐπιτάχυνσις γ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς μάζης. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἐὰν ἐξασκηθῇ ἡ αὐτὴ δύναμις ἐπὶ δύο σωμάτων, διαφύ-

(*) *Isaac Newton (Νεύτων)* (1642—1727). Διάσημος Ἀγγλὸς ἀστρονόμος, μαθηματικὸς, φυσικὸς καὶ φιλόσοφος. Διετέλεσε καθηγητῆς τῶν μαθηματικῶν ἐν *Cambridge*. Θεμελιωτὴς τῆς οὐρανίου Μηχανικῆς καὶ τῆς Μηχανικῆς ἐν γένει. Διετύπωσε τὸν νόμον τῆς παγκοσμίου ἑλξεως πρὸς ἐξήγησιν τῆς κινήσεως τῶν πλανητῶν, ἡσυχολήθη δὲ ἰδιαιτέρως μὲ τὴν Ὀπτικὴν (ἐφευρε τὸ κατοπτρικὸν τηλεσκόπιον, τὸ φέρον τὸ ὄνομά του, ἐξετέλεσε πειράματα ἀναλύσεως καὶ συνθέσεως τοῦ φωτὸς κ.λ.).

ο ο υ μάζης, τὸ σῶμα τῆς μικροτέρας μάζης θ' ἀποκτήσῃ ἐπιτάχυνσιν, μεγαλύτεραν τῆς ἐπιτάχυνσεως τοῦ ἄλλου σώματος. Τοῦτο, ἀκριβῶς, ἐξηγεῖ τὰ εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς § 47 ἀναφερόμενα παραδείγματα αὐτοκινήτου καὶ λέμβου.

3) **Ἡ ἐπιτάχυνσις δεδομένου σώματος εἶναι ἀνάλογος τῆς προκαλούσης αὐτὴν δυνάμεως.** Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $F = m \cdot \gamma$ προκύπτει ὅτι, ἐάν θέλωμεν νὰ δώσωμεν εἰς ἓν σῶμα μεγάλην ἐπιτάχυνσιν, πρέπει νὰ ἐξασκήσωμεν ἐπ' αὐτοῦ μεγάλην δύναμιν. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ δείξωμεν, χαρακτηριστικῶς, διὰ τοῦ ἐξῆς πειράματος: Εἰς σῶμα μεγάλης μάζης προσδένομεν τὸ ἐν ἄκρον νήματος, ἐνῶ τὸ ἄλλο κρατοῦμεν διὰ τῆς χειρὸς μας (σχ. 78). Τὸ σῶμα τοῦτο δυνάμεθα νὰ ὑψώσωμεν β ρ α δ έ ω ς, καί, βαθμιαίως, νὰ τοῦ δώσωμεν μεγάλην ταχύτητα. Ἐάν, ὅμως, δοκιμάσωμεν ν' αὐξήσωμεν τὴν ταχύτητα τοῦ ἀποτόμω ς, ἔλκοντες αὐτὸ βιαίως, τὸ νῆμα κόπτεται. Τοῦτο ἐξηγεῖται ὡς ἐξῆς: Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν δίδομεν τὴν ταχύτητα εἰς τὸ σῶμα ἐντὸς μεγάλου χρόνου - ἡ ἐπιτάχυνσις, δηλ., εἶναι μικρά, ὅποτε καὶ ἡ ἀντίστοιχος δύναμις εἶναι μικρά καὶ τὸ νῆμα ἀντέχει. Εἰς τὴν δευτέραν, ὅμως, περίπτωσιν ἀπαιτοῦμεν νὰ προσδώσωμεν εἰς τὸ σῶμα τὴν ταχύτητά του εἰς μικρὸν χρόνον - δηλ., θέλομεν νὰ τοῦ προσδώσωμεν μεγάλην ἐπιτάχυνσιν. Διὰ νὰ προσδώσωμεν, ὅμως, μεγάλην ἐπιτάχυνσιν εἰς τὸ σῶμα, πρέπει — κατὰ τὴν ἐξίσωσιν $F = m \cdot \gamma$ — νὰ ἐξασκήσωμεν ἐπ' αὐτοῦ μεγάλην δύναμιν, ἡ ὁποία ὑπερβαίνει τὸ ὄριον ἀντοχῆς τοῦ νήματος, τὸ ὁποῖον, ὡς ἐκ τούτου, κόπτεται.



Σχ. 78.

Ἐφαρμογή. Τῇ βοήθειᾳ τοῦ θεμελιώδους νόμου $F = m \cdot \gamma$ δυνάμεθα νὰ εὐρίσκωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν γ , ὅταν δίδεται ἡ δύναμις F , ἢ, ἀντιστρόφως, ὅταν δίδεται ἡ ἐπιτάχυνσις γ , νὰ εὐρίσκωμεν τὴν προκαλοῦσαν αὐτὴν δύναμιν F .

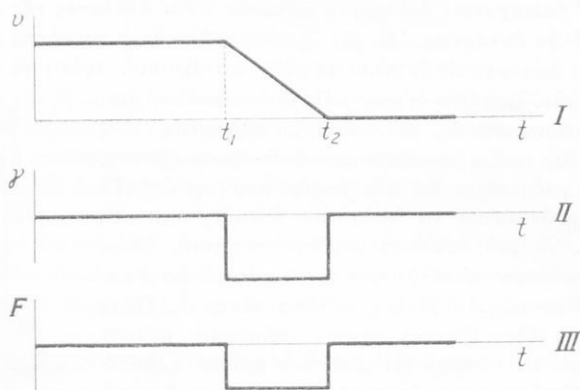
Κατωτέρω λύομεν γραφικῶς ἓν πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον δίδεται ἡ ταχύτης ἐνὸς κινητοῦ συναρτήσει τοῦ χρόνου (ἄρα, κατ' ἀρχὴν, καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις) καὶ ζητεῖται ἡ δύναμις συναρτήσει τοῦ χρόνου. Τὸ πρόβλημα εἶναι τὸ ἐξῆς:

Σῶμα, μάζης m , κινεῖται ἐπὶ ὠρισμένον χρόνον εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς, ἐν συνεχείᾳ ἐκτελεῖ ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην κίνησιν, μέχρις ὅτου ἡ ταχύτης του μηδενισθῇ καί, ἀκολούθως, μένει πλέον ἀκίνητον. Ζητεῖται νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ ἐπὶ τοῦ σώματος ἐξασκουμένη δύναμις συναρτήσει τοῦ χρόνου.

Λύσις. Διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος κατασκευάζομεν τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 79, I. Ἐκ τοῦ διαγράμματος τούτου δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ διάγραμμα τῆς ἐπιταχύνσεως συναρτήσει τοῦ χρόνου (II) διὰ τῶν ἐξῆς συλλογισμῶν: Μέχρι τῆς χρονικῆς στιγμῆς t_1 καὶ μετὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν t_2 ἡ ταχύτης v τοῦ κινητοῦ διετηρεῖτο σταθερά καί, συνεπῶς, ἡ ἐπι-

τάχυνσις ἦτο ἴση πρὸς μηδέν, ἐνῶ κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα t_1 ἕως t_2 ἡ ἐπιτάχυνσις ἦτο σταθερὰ καὶ ἀρνητικὴ (ἐπιβράδυνσις).

Κατὰ τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς, ἡ δύναμις εἶναι ἀνάλογος



Σχ. 79.

τῆς ἐπιταχύνσεως, ἐπομένως τὸ διάγραμμα *III* θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν ἀκριβῶς μορφήν, ὅπως τὸ διάγραμμα *II*.

§ 49. Ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας. Ἐὰν εἰς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς

$$F = m \cdot \gamma$$

θέσωμεν $F = 0$, θὰ λάβωμεν $m \cdot \gamma = 0$. Ὡς γνωστόν, ὅταν τὸ γινόμενον δύο παραγόντων εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν, πρέπει ὁ εἷς, τουλάχιστον, ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσος πρὸς μηδέν. Ἐπειδὴ ἡ μᾶζα δὲν εἶναι μηδέν, πρέπει ἡ ἐπιτάχυνσις νὰ εἶναι μηδέν. Ὅταν, ὅμως, ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι μηδέν, ἡ ταχύτης διατηρεῖται σταθερά.

Τὸ συμπέρασμα τοῦτο, τὸ ὁποῖον, ὡς εἶδομεν, εἶναι ἀναγκαῖον ἐπακόλουθον τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς καὶ δὲν ἀποτελεῖ ἰδιαίτερον νόμον, ἐκλήθη ὑπὸ τοῦ Νεύτωνος **ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας**.

Τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας διατυπῶνται ὡς ἑξῆς: «*Πᾶν σῶμα ἐμμένει εἰς τὴν κατὰστασιν ἡρεμίας ἢ εὐθύγραμμου καὶ ἰσοταχοῦς κινήσεως, ἐφ' ὅσον δὲν ἀναγκάζεται ὑπὸ ἐξωτερικῶν δυνάμεων εἰς μεταβολὴν τῆς κινήσεως του κατὰστάσεως*» (*).

(*) Σημειωτέον ὅτι τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας ἔχει διατυπωθῇ τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους ὡς ἑξῆς: «Ἐτι, οὐδεὶς ἂν ἔχοι εἰπεῖν διατί κινήθην στήσεται πού τί γάρ μαλλον ἐνταῦθα ἢ ἐνταῦθα; ὥστε ἡ ἡρεμήσει ἢ εἰς ἀπειρον ἀνάγκη φέρεσθαι, ἐάν μὴ τι ἐμποδίσῃ κρεῖττον». Δηλαδή: «Ἀκόμη, οὐδεὶς θὰ ἦτο δυνατόν νὰ

Πράγματι, ἐκ πείρας γνωρίζομεν ὅτι σῶμα ἡρεμοῦν (δηλ., σῶμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ταχύτητα μηδέν), ἐπὶ τοῦ ὁποίου οὐδεμία δύναμις ἐξασκείται (ἢ ἐὰν ἐξασκοῦνται δυνάμεις, ἡ συνισταμένη αὐτῶν νὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν), ἐξακολουθεῖ νὰ ἡρεμῇ· δηλ., ἐξακολουθεῖ νὰ διατηρῇ τὴν ταχύτητά του ἴσην πρὸς μηδέν.

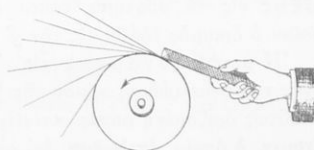
Ὅμοιος, γνωρίζομεν ὅτι πλοῖον, τοῦ ὁποίου ἔπαυσε νὰ περιστρέφεται ἢ ἔλιξ (δηλ., ἔπαυσε νὰ ἐξασκῆται ἐπ' αὐτοῦ ἡ προωθοῦσα δύναμις), ἐξακολουθεῖ κινούμενον μὲ σταθερὰν ταχύτητα. (Ἡ παρατηρουμένη μικρὰ ἐπιβράδυνσις τῆς πορείας του ὀφείλεται εἰς τὴν ἀντίστασιν, τὴν ὁποίαν προκαλεῖ τὸ ὕδωρ. Ἄν δὲν ὑπῆρχεν ἡ ἀντίστασις αὕτη, τὸ πλοῖον θὰ ἐκινεῖτο ἐπ' ἀπειρον εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταῶς).

Ἡ ἰδιότης τῶν σωμάτων νὰ διατηροῦν σταθερὰν τὴν ταχύτητά των καλεῖται **ἀδραναία**.

Συμφώνως πρὸς τὰ λεχθέντα εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς § 48, ὅσον μεγαλύτερα εἶναι ἡ μᾶζα ἐνὸς σώματος, τόσον δυσκολώτερον μεταβάλλεται ἡ ταχύτης του. Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι ὅσον μεγαλύτερα εἶναι ἡ μᾶζα, τόσον περισσότερον αἰσθητὴ γίνεται ἡ ἀδραναία. Δυνάμεθα, ἐπομένως, νὰ εἴπωμεν ὅτι μέτρον τῆς ἀδραναίας ἐνὸς σώματος ἀποτελεῖ ἡ μᾶζα αὐτοῦ.

Τὰ κατωτέρω παραδείγματα θὰ καταστήσουν σαφές τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδραναίας:

1) Οἱ σπινθήρες, οἱ ὁποῖοι ἐκπέμπονται ὑπὸ τοῦ σμυριδοτροχοῦ (σχ. 80), ἀποτελοῦνται ἐκ διαπύρων τεμαχιδίων σιδήρου. Τὰ τεμαχίδια ταῦτα κατ' ἀρχὰς προσκολλῶνται ἐπὶ τοῦ τροχοῦ, ὅταν, ὅμως, τυχὸν ἐκτιναχθοῦν (ὁπότε, πλέον, δὲν ἐξασκείται ἐπ' αὐτῶν δύναμις), κινοῦνται εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταῶς καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ταχύτητος, τὴν ὁποίαν εἶχον εἰς τὸ σημεῖον ἐκτιναξέως. Ἡ διεύθυνσις αὕτη συμπίπτει, ὥς γνωστόν, μὲ τὴν ἐφαπτομένην τῆς τροχίως εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

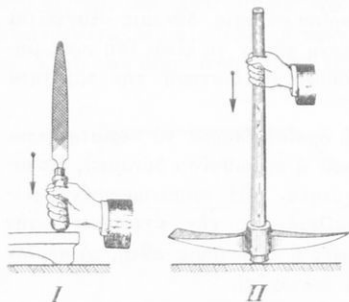


Σχ. 80. Οἱ σπινθήρες κινοῦνται κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον ἐκτιναξέως.

2) Διὰ νὰ ἐνσφηνώσωμεν καλῶς τὴν ρίνην (κ. λίμαν) ἐντὸς τῆς λαβῆς τῆς, κρατοῦμεν αὐτὴν διὰ τῆς λαβῆς καὶ τὴν κτυπῶμεν ἀποτόμως ἐπὶ σταθεροῦ τινος ἀντικειμένου (σχ. 81, 1). Κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην δίδομεν εἰς τὴν λίμαν ἀρχικῶς ταχύτητα, ὅταν δὲ ἡ λαβὴ κτυπήσῃ ἐπὶ τοῦ σταθεροῦ ἀντικειμένου καὶ ἀκίνητησῃ, ἡ λίμα, λόγῳ τῆς μεγάλης τῆς ἀδραναίας, ἐξακολουθεῖ νὰ κινῆται καί, οὕτω ἐνσφηνοῦται εἰς τὴν λαβήν.

ὑποστηρίξῃ διατὶ ἐν σῶμα, τὸ ὁποῖον ἐτέθη εἰς κίνησιν, θὰ σταματήσῃ κάπου· διότι, διατὶ νὰ σταματήσῃ ἐδῶ καὶ ὄχι ἐκεῖ; ὥστε ἡ θὰ ἡρεμήσῃ ἢ εἶναι ἀνάγκη νὰ κινήται ἐπ' ἀπειρον, ἐάν δὲν τὸ ἐμποδίσῃ κάτι ἄλλο, πλέον ἰσχυρόν». Βλ. Ε. Σ. Σταμάτη: Τὰ Ἑλληνικὰ Μαθηματικά, σ. 18, 1956.

Δι' ὁμοίας κινήσεως ἐνσφηνοῦται καὶ ἡ λαβὴ τῆς ἀξίνης (σχ.81, II).



Σχ. 81.

3) Διὰ τὴν ἐκδιώξωμεν τὰς σταγόνας τοῦ ὕδατος ἐκ τῶν βρεγμένων χειρῶν μας, τὰς τινάσσομεν ἀποτόμως. Κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην διδομεν εἰς τὴν χεῖρά μας βαθμυδὸν ταχύτητα καὶ, ἀκολουθῶς τὴν σταματῶμεν ἀποτόμως. Λόγῳ τῆς ἀδρανείας, αἱ σταγόνες ἐξακολουθοῦν τὴν κίνησιν των καὶ ἀπομακρύνονται τῆς χειρὸς μας.

Δι' ὁμοίας κινήσεως «καταβιβάζομεν» τὸν ὑδράργυρον τῶν λατρικῶν

θερμομέτρων, ὅταν πρόκειται νὰ τὰ χρησιμοποιήσωμεν.

4) Ἄνθρωπος, εὐρισκόμενος ἐπὶ ὁχήματος, τὸ ὅποιον, δι' ἀποτόμου πεδησεως (φρεναρίσματος), ἀνακόπτει τὴν ταχύτητά του, φέρεται πρὸς τὰ ἔμπροσ, διότι, λόγῳ τῆς ἀδρανείας, τείνει νὰ διατηρήσῃ τὴν προτέραν του ταχύτητα, ἐνῶ, ἐν τῷ μεταξύ, τὸ ὄχημα ἡλάττωσε τὴν ταχύτητά του. Ἀντιθέτως, κατὰ τὴν ἀπότομον ἐκκίνησιν, τὸ σῶμά του φέρεται πρὸς τὰ ὀπίσω.

§ 50. Μονάδες μάζης καὶ δυνάμεως. 1) Σύστημα C.G.S. Μονὰς μάζης εἰς τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι τὸ γραμμαρίον μάζης (1 gr), τοῦ ὁποίου ὁ ὅρισμός ἐδόθη εἰς τὴν § 5, B.

Ἡ μονὰς δυνάμεως εἰς τὸ σύστημα C.G.S. εὐρίσκεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς ἐκ τῶν μονάδων cm, gr, sec. Ἡ οὕτως ὁριζομένη μονὰς καλεῖται **δύνη** (1 dyn) καὶ ἰσοῦται πρὸς τὴν δύναμιν, ἣ ὁποία, ἐπιδρῶσα ἐπὶ σώματος, μάζης 1 gr, δίδει εἰς τοῦτο ἐπιτάχυνσιν, ἴσην πρὸς $1 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$. Ἦτοι εἶναι

$$1 \text{ dyn} = 1 \text{ gr} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-2}.$$

2) Τεχνικὸν Σύστημα. Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο μονὰς δυνάμεως εἶναι τὸ **χιλιογράμμον βάρους** (1 kgr*), τὸ ὅποιον ἰσοῦται πρὸς τὸ βάρος τοῦ «προτύπου χιλιογράμμου» (δηλ., τὴν δύναμιν, μὲ τὴν ὁποίαν τοῦτο ἔλκεται ὑπὸ τῆς Γῆς· βλ. σχ. 3).

Σημειώσεις: Εἶναι προφανές ὅτι, ἐὰν εἰς τὸ πείραμα τοῦ σχήματος 3, ἀντικαταστήσωμεν τὸ «πρότυπον χιλιόγραμμον» δι' ἄλλου σώματος, μάζης, π.χ., 1,5 kgr, τὸ βάρος αὐτοῦ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς 1,5 kgr*. Κατὰ ταῦτα, ἡ μᾶζα ἐνὸς σώματος, μετρουμένη εἰς kgr, καὶ τὸ βάρος του, μετρούμενον εἰς kgr*, ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν.

Ἡ μονὰς μάζης εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα εὐρίσκεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς ἐκ τῶν μονάδων m, kgr*, sec, δεδομένου ὅτι εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ἡ μᾶζα εἶναι παράγωγον μέγεθος. Ἡ οὕτως ὁριζομένη μονὰς

μάζης ισοῦται πρὸς τὴν μάζαν ἐκείνην, ἡ ὁποία, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως 1 kgr^* , λαμβάνει ἐπιτάχυνσιν, ἴσην πρὸς $1 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$, καλεῖται δὲ *Τεχνικὴ μονὰς μάζης* (1 T.M.). Εἶναι, ἐπομένως,

$$1 \text{ T.M.} = 1 \text{ kgr}^* \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sec}^2.$$

• § 51. Σχέσεις μεταξύ των αντίστοιχων μονάδων. Τὴν σχέσιν μεταξύ τῶν μονάδων δυνάμεως εὐρίσκομεν ὡς ἑξῆς: Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς μονάδος δυνάμεως 1 kgr^* , σῶμα, μάζης 1 kgr , ἔλκεται ὑπὸ τῆς Γῆς μὲ δυνάμιν, ἴσην πρὸς 1 kgr^* . Ἐπειδὴ, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως ταύτης, τὸ σῶμα πίπτει, ὡς γνωστόν, μὲ ἐπιτάχυνσιν, ἴσην πρὸς $981 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$, προκύπτει δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς, ἡ σχέσις

$$1 \text{ kgr}^* = 1000 \text{ gr} \cdot 981 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$$

ἢ

$$1 \text{ kgr}^* = 981\,000 \text{ gr} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-2} = 981\,000 \text{ dyn}.$$

Ἐκ τούτου λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$1 \text{ gr}^* = 981 \text{ dyn}$$

Τὴν σχέσιν μεταξύ τῶν μονάδων μάζης εὐρίσκομεν ὡς ἑξῆς: Συμφώνως πρὸς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς, ἡ μάζα m εἶναι τὸ πηλίκον τῆς δυνάμεως F διὰ τῆς ἀντίστοιχου ἐπιτάχυνσεως γ . Ἦτοι

$$m = \frac{F}{\gamma}$$

Ἀφ' ἐτέρου, γνωρίζομεν ὅτι σῶμα, μάζης 1 kgr , ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως 1 kgr^* , λαμβάνει ἐπιτάχυνσιν, ἴσην πρὸς $9,81 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$. Ἐπομένως, κατὰ τὴν ἄνω ἐξίσωσιν, ἔχομεν

$$1 \text{ kgr} = \frac{1 \text{ kgr}^*}{9,81 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}} = \frac{1}{9,81} \text{ kgr}^* \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sec}^2.$$

Ἀλλὰ $1 \text{ kgr}^* \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sec}^2$ εἶναι $1 \text{ Τεχνικὴ μονὰς μάζης}$ (1 T.M.). Ἀρα ἔχομεν

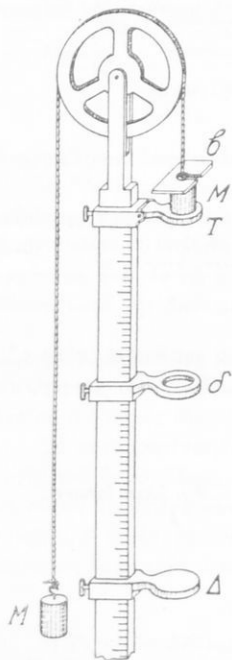
$$1 \text{ kgr} = \frac{1}{9,81} \text{ T.M.}$$

ἢ

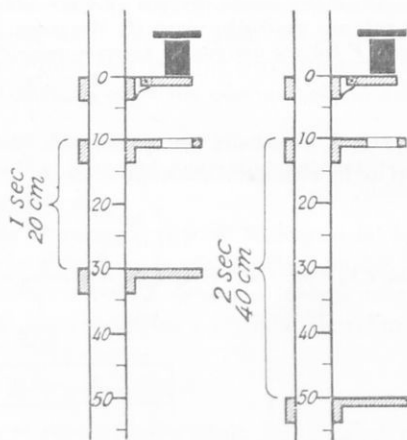
$$1 \text{ T.M.} = 9,81 \text{ kgr}$$

★ ★ § 52. Πειραματικὴ ἀπόδειξις τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς διὰ τῆς μηχανῆς τοῦ Atwood (Ἀτγουοντ) (σχ. 82). Διὰ τῆς αὐλακος ἐλαφρᾶς καὶ εὐκίνητου τροχαλίας διέρχεται λεπτὸν νήμα, φέρον εἰς τὰ ἄκρα του δύο ἴσα κυλινδρικοὶ βάρη, ἐκάστου τῶν ὁποίων ἡ μάζα ἔστω M . Κάτωθεν τῆς τροχαλίας ὑπάρχει κατακόρυφος ὑποδιηρημένος κανὼν, εἰς τὸ ἄνω ἄκρον τοῦ ὁποίου στερεοῦται μικρὰ ἀρθρωτὴ τράπεζα T , χρησιμεύουσα διὰ νὰ ὑποστηρίξῃ τὸν ἓνα τῶν κυλινδρῶν. Ὁ δακτύλιος δ καὶ ὁ δίσκος A στερεοῦνται, ὁμοίως, ἐπὶ τοῦ κανόνος καὶ δύνανται νὰ τοποθετοῦνται εἰς διαφόρους θέσεις. Ἐπειδὴ οἱ δύο κύλινδροι ἔχουν τὸ αὐτὸ βάρος, δύνανται νὰ ἰσορροποῦν εἰς οἰανδήποτε θέσιν. Εἰς τὸν ἓνα τῶν κυλινδρῶν προσθέτομεν μικρὸν βάρος β — τὸν *ἱππέα* — τὸ ὁποῖον θέτει εἰς κίνησιν τὸ σύστημα. Κατὰ τὴν πτώσιν, ὁ κύλινδρος διέρχεται ἐλευθέρως διὰ τοῦ δακτυλίου δ , ἐνῶ τὸ πρόσθετον βάρος συγκρατεῖται ὑπ' αὐτοῦ. Τὸν χρόνον μετροῦμεν διὰ μετρονόμου, τὸν ὁποῖον ρυθμιζομεν οὕτως ὥστε ὁ χρόνος μεταξύ δύο κτυπημάτων ν' ἀντιστοιχῇ, π.χ., εἰς 1 δευτερόλεπτον .

Πείραμα 1ον. «Σταθερά δύναμις προκαλεί σταθεράν επιτάχυνσιν». Θέτομεν ἐπὶ τῆς τραπέζης T τὸν ἕνα κύλινδρον, φορτισμένον μὲ τὸν ἱππέα καὶ ἀραιροῦμεν τὸν δακτύλιον δ . Ἀπ' αὐτοῦ, τώρα, τὴν τράπεζαν, ὅποτε τὸ σύστημα ἀρχίζει νὰ κινῆται. Ἀκολουθῶς, ἀναζητοῦμεν τοιαύτην θέσιν τοῦ δίσκου Δ , ὥστε ὁ κύλινδρος νὰ φθάσῃ εἰς αὐτὸν ἐντὸς ἑνὸς δευτερολέπτου, δηλ., ἐντὸς τοῦ χρόνου δύο κτυπημάτων τοῦ μετρονόμου. Ἔστω ὅτι ἡ ἀπόστασις τραπεζῆς - δίσκου εὐρέθη ἴση πρὸς 10 cm . Ἐπαναλαμβάνομεν τὸ πείραμα διὰ διπλάσιον χρόνον καὶ εὐρίσκομεν ὅτι, τώρα, ἡ ἀπόστασις τραπεζῆς - δίσκου εἶναι ἴση πρὸς 40 cm , δηλ., τετραπλασία τῆς προηγουμένης. Διὰ τριπλάσιον χρόνον εὐρίσκομεν ἀπόστασιν 90 cm κ.ο.κ. Ἐκ τῶν ἄνω πειραμάτων συμπεραίνομεν ὅτι τὰ διαστήματα, τὰ διανυόμενα ὑπὸ τοῦ συστήματος ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν σταθερᾶς δυνάμεως — δηλ., ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους β — εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν χρόνων. Ἐπειδὴ τοῦτο ἰσχύει μόνον εἰς τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν, ἔπεται ὅτι ἡ ἐξεταζομένη κίνησις θὰ εἶναι μία τοιαύτη κίνησις - κίνησις, δηλαδή, μὲ σταθεράν ἐπιτάχυνσιν. Ἀπεδείξαμεν, λοιπόν, ὅτι σταθερά δύναμις προκαλεῖ κίνησιν μὲ σταθεράν ἐπιτάχυνσιν.



Σχ. 82. Μηχανὴ τοῦ Atwood.



Σχ. 83. Πείραμα διὰ τὴν ἐπαλήθευσιν τοῦ ἀξιώματος τῆς ἀδρανείας.

Ἡ ἐπιτάχυνσις γ τῆς κινήσεως ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς: Αἱ ἐπιταχυνόμεναι μάζαι εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν αἱ μάζαι M, M τῶν δύο κυλίνδρων, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἡ μάζα m τοῦ ἱππέως, ἥτοι συνολικῶς $2M + m$, ὅποτε, κατὰ τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς, ἔχομεν:

$$\gamma = \frac{\text{δύναμις}}{\text{μάζα}} = \frac{\beta}{2M + m}.$$

Πείραμα 2ον. Ἐπαλήθευσις τοῦ ἀξιώματος τῆς ἀδρανείας. Τοποθετοῦμεν τὸν δακτύλιον δ εἰς τὴν θέσιν, εἰς τὴν ὁποίαν φθάνει ὁ κύλινδρος μετὰ 1 sec (εἰς τὴν περιπτώσιν μας εἰς 10 cm ἀπὸ τῆς τραπέζης T - σχ. 83). Ἀποσύρομεν τὴν τράπεζαν, ὅποτε τὸ σύστημα ἀρχίζει νὰ κινῆται. Ὁ ἱππεύς, ὅταν φθάσῃ εἰς τὸν δακτύλιον,

συγκρατείται ὑπ' αὐτοῦ καί, οὕτω, τὸ σύστημα ἐξακολουθεῖ κινούμενον χωρὶς ἐπιτάχυνσιν (ἀφοῦ, πλέον, ἐπ' αὐτοῦ οὐδεμία πρόσθετος δύναμις ἐξασκείται), ἡ κίνησις, ἄρα, θὰ εἶναι ἰσοταχής. Ὅντως, παρατηροῦμεν ὅτι ἐντὸς 1 sec διανύεται ἀπόστασις ἴση πρὸς 20 cm, ἐντὸς 2 sec ἡ ἀπόστασις εἶναι ἴση πρὸς 40 cm κ.ο.κ. Ἡ κίνησις εἶναι, λοιπόν, ἰσοταχής, διότι εὐρέθη ὅτι τὰ διανυόμενα διαστήματα εἶναι ἀνάλογα τῶν χρόνων· ἰσχύει, δηλ., ἡ σχέσις

$$s = v \cdot t.$$

Ἐκ τῶν διαστημάτων καὶ τῶν ἀντιστοίχων χρόνων εὐρίσκεται ἡ ταχύτης ἴση πρὸς 20 cm/sec.

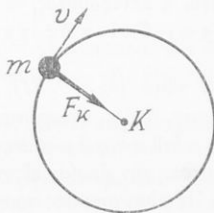
• § 53. Κεντρομόλος δύναμις. Ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς προκύπτει ὅτι, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν ἐνὸς κινητοῦ καὶ τὴν μᾶζαν αὐτοῦ, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν δύναμιν, τὴν προκαλοῦσαν τὴν ἐπιτάχυνσιν. Οὕτω, εἰς τὴν § 45 ἐγνωρίσαμεν ὅτι κινητόν, ἔκτε-
 λον ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν, ἔχει κεντρομόλον ἐπιτάχυνσιν γ_k , ἴσην πρὸς

$$\gamma_k = \frac{v^2}{r}.$$

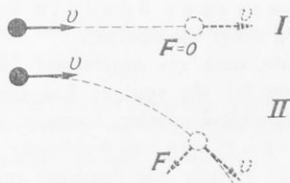
Ἐπομένως, διὰ νὰ ἐκτελῇ τὸ κινητόν τοιαύτην κίνησιν, πρέπει νὰ ἐξασκῆται διαρκῶς ἐπ' αὐτοῦ μία δύναμις, ἴση πρὸς

$$F = m \cdot \gamma = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Ἡ δύναμις αὕτη ἔχει φορὰν πρὸς τὸ κέντρον K τοῦ κύκλου (σχ. 84) καὶ διὰ τοῦτο καλεῖται **κεντρομόλος δύναμις** F_k .



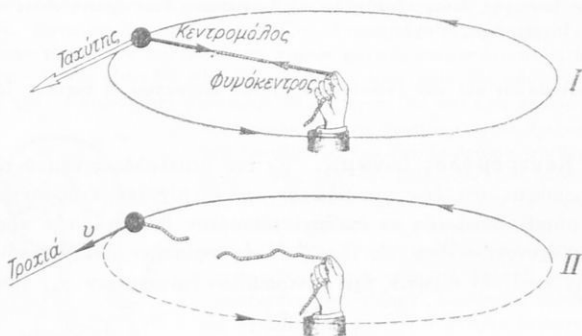
Σχ. 84.



Σχ. 85.

Τὸ γεγονός ὅτι, διὰ νὰ ἐκτελῇ ἓν κινητόν ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν, πρέπει νὰ ἐξασκῆται ἐπ' αὐτοῦ κεντρομόλος δύναμις, δικαιολογεῖται διὰ τῶν ἑξῆς συλλογισμῶν: Ἐὰν ἐπὶ τῆς σφαίρας τοῦ σχήματος 85, I οὐδεμία δύναμις ἐξησκῆτο, αὕτη θὰ ἔπρεπε, κατὰ τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας, νὰ ἐκινήτο ἐπὶ εὐθυγράμμου τροχιάς μὲ σταθερὰν ταχύτητα v . Ἐφ' ὅσον, ὁμως, ἡ τροχία εἶναι καμπυλόγραμμος ὑπάρχει ἐπιτάχυνσις, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ προκαλῇ μία δύναμις F , ἡ ὁποία ἐξασκείται ἐπὶ τῆς σφαίρας. Εἶναι προφανές ὅτι ἡ δύναμις αὕτη θὰ ἔχῃ φορὰν πρὸς τὸ κοῖλον τῆς τροχιάς.

Ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν ἐκτελεῖ σφαῖρα, προσδεδεμένη διὰ νήματος καὶ περιστρεφόμενη διὰ τῆς χειρὸς μὲ σταθερὰν γωνιακὴν ταχύτητα (σχ. 86, I). Συμφώνως πρὸς τ' ἀνωτέρω, ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐξασκεῖται ἡ κεντρο-



Σχ. 86.

μόλος δύναμις (F_{κ}). Τὴν δύναμιν ταύτην ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς σφαίρας τὸ τεταμένον νῆμα. Κατὰ τὸ ἀξίωμα, ὅμως, «δραῖσις = ἀντίδρασις», πρέπει καὶ ἡ σφαῖρα νὰ ἐξασκῇ ἐπὶ τοῦ νήματος καί, συνεπῶς, ἐπὶ τῆς χειρὸς τοῦ κρατοῦντος τὸ νῆμα, δύναμιν, ἴσην καὶ ἀντίθετον. Τὴν δύναμιν ταύτην, ὡς ἔχουσιν φοράν, ἀντίθετον πρὸς τὴν φορὰν τῆς κεντρομόλου, καλοῦμεν **φυγόκεντρον δύναμιν** F_{φ} . Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι ἡ μόνη πραγματικῶς δρῶσα ἐπὶ τῆς σφαίρας δύναμις εἶναι ἡ κεντρομόλος, ἐνῶ ἡ φυγόκεντρος δύναμις ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς χειρὸς καὶ **δχι** ἐπὶ τῆς σφαίρας.

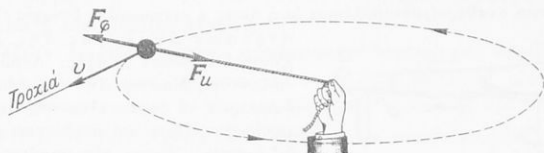
Ἐάν, κατὰ τὴν περιστροφὴν, θραυσθῇ τὸ νῆμα (σχ. 86, II), παύει ἐπιδρῶσα ἐπὶ τῆς σφαίρας ἡ κεντρομόλος δύναμις, ὁπότε, συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδραναίης, ἡ σφαῖρα θὰ κινηθῇ ἐν εὐθυγράμμῳ καὶ ἰσοταχῶς κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ταχύτητος, τὴν ὁποίαν εἶχεν αὕτη κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς θραύσεως τοῦ νήματος. Ἡ εὐθύγραμμος τροχιά θὰ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον ἀκριβῶς ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον εὐρίσκετο ἡ σφαῖρα κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς θραύσεως τοῦ νήματος.

★ Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, συνηθέστατα προκαλεῖται σύγχυσις ἐκ τῆς παραδοχῆς ὅτι ἡ φυγόκεντρος δύναμις ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας. Τοῦτο, ὅμως, εἶναι ἀδύνατον διὰ τοὺς ἐξῆς λόγους:

1) Ἐπὶ τῆς σφαίρας μόνον μία δύναμις ἐξασκεῖται - ἡ ἐκ τοῦ νήματος προερχομένη - αὕτη εἶναι, ἀκριβῶς, ἡ κεντρομόλος. Οὐδεμία ἄλλη δύναμις ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας, δεδομένου ὅτι αὕτη μὲ οὐδὲν ἄλλο σῶμα — πλὴν τοῦ τεταμένου νήματος — ἔρχεται εἰς ἐπαφὴν.

2) Ἐάν δεχθῶμεν ὅτι, ἐκτὸς τῆς κεντρομόλου, ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας καὶ δευτέρα δύναμις (ἄγνωστον πόθεν προερχομένη), ἴση καὶ ἀντίθετος

πρὸς τὴν πρώτην — ἡ φυγόκεντρος F_{φ} (σχ. 87) — τότε ἡ συνισταμένη τῶν



Σχ. 87. Ἡ σφαῖρα, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν δύο ἰσῶν καὶ ἀντιθέτων δυνάμεων F_{κ} καὶ F_{φ} ($F_{\omega} = 0$), δὲν δύναται νὰ ἐκτελῇ ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν, ἀλλὰ πρέπει νὰ κινηθῇ εὐθύγραμμως καὶ ἰσοταχῶς.

δύο αὐτῶν δυνάμεων θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδὲν καί, συνεπῶς, ἡ σφαῖρα πρέπει νὰ κινηθῇ εὐθύγραμμως καὶ ἰσοταχῶς καὶ ὄχι νὰ ἐκτελῇ ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν.

★ **Ἄλλαι μορφαὶ τῆς ἐξισώσεως τῆς κεντρομόλου δυνάμεως.**
Ἐπειδὴ ἔχομεν καὶ τὰς σχέσεις

$$v = \omega \cdot r, \quad \omega = 2\pi n, \quad n = \frac{1}{T},$$

δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς κεντρομόλου δυνάμεως

$$F_{\kappa} = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad (1)$$

καὶ ὑπὸ τὰς μορφὰς

$$F_{\kappa} = m \cdot \omega^2 \cdot r \quad (2) \quad F_{\kappa} = m \cdot 4\pi^2 n^2 \cdot r \quad (3) \quad F_{\kappa} = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \quad (4)$$

τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὴν λύσιν τῶν διαφόρων σχετικῶν προβλημάτων, ἀναλόγως τῶν ἐκάστοτε διδομένων στοιχείων.

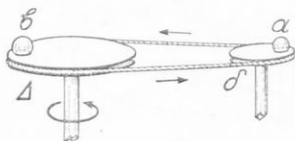
§ 54. Νόμοι τῆς κεντρομόλου δυνάμεως. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3) καὶ (4) τῆς § 53 δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν τοὺς ἐξῆς νόμους τῆς κεντρομόλου δυνάμεως:

α) **Σχέσις κεντρομόλου δυνάμεως καὶ μάζης.** Ἐκ τῶν τύπων (1), (2), (3) καὶ (4) προκύπτει ὅτι ἡ κεντρομόλος δύναμις εἶναι ἀνάλογος τῆς μάζης τοῦ κινητοῦ.

β) **Σχέσις κεντρομόλου δυνάμεως καὶ ταχύτητος, ὅταν ἡ ἀκτίς διατηρηθῇ σταθερά.** Ἐκ τοῦ τύπου (1) τῆς § 53 προκύπτει ὅτι, ἐὰν ἡ μάζα καὶ ἡ ἀκτίς διατηροῦνται σταθεραί, μεταβάλλεται δὲ ἡ ταχύτης, ἡ κεντρομόλος δύναμις εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητος. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ δείξωμεν, ποιοτικῶς, διὰ τῆς σφενδόνης: Ὅταν περιστρέφωμεν τὴν σφενδόνην, ἡ μάζα καὶ ἡ ἀκτίς διατηροῦνται σταθεραί. Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὴν ταχύτητα αὐτῆς, αἰσθανόμεθα ἐπὶ τῆς χειρὸς μας σημαντικωτάτην αὔξησιν τῆς ὑπὸ τοῦ νήματος ἐξασκουμένης δυνάμεως. (Εἰς τὴν πραγματικότητα ἡ δύναμις τετραπλασιάζεται).

Τὸ πείραμα τοῦτο ἀποτελεῖ ταυτοχρόνως καὶ ποιοτικὴν ἐπαλήθευσιν τῶν τύπων (2) καὶ (3) τῆς § 53, διότι, ὅταν διπλασιάζεται ἡ ταχύτης, ὑπὸ σταθερὰ m καὶ r , διπλασιάζεται καὶ ἡ γωνιακὴ ταχύτης καὶ ἡ συχνότης.

γ) Σχέσις κεντρομόλου δυνάμεως και ακτίνας, όταν η ταχύτης διατηρηται σταθερά. Έκ του τύπου (1) της § 53 προκύπτει ότι, όταν η μάζα και η ταχύτης διατηρούνται σταθερά, μεταβάλλεται δὲ ἡ ἀκτίς, ἡ κεντρομόλος δύναμις εἶναι ἀντίστροφως ἀνάλογος τῆς ἀκτίνας.



Σχ. 88. Κατὰ τὴν περιστροφὴν τῶν δίσκων αἱ δύο σφαῖραι ἔχουν τὴν αὐτὴν ταχύτητα.

Τοῦτο δεικνύομεν ὡς ἑξῆς: Λαμβάνομεν δύο ὀριζοντίους δίσκους Δ, δ (σχ. 88), διαφόρων διαμέτρων, οἱ ὅποιοι εἶναι στρεπτοὶ περὶ κατακόρυφον ἄξονα καὶ συνδέονται μεταξύ των δι' ἱμάντος. Ἐνεκα τῆς τοιαύτης συνδέσεως, ὅταν περιστρέψωμεν τὸν δίσκον Δ, περιστρέφεται καὶ ὁ μικρὸς δίσκος δ καὶ τὰ περιφερειακὰ σημεῖα τῶν δύο δίσκων ἔχουν τὴν αὐτὴν ταχύτητα v , δηλ., τὴν ταχύτητα τοῦ ἱμάντος. Ἄν, τώρα, τοποθετήσωμεν ἐντὸς ἐνσκαφῶν, παρὰ τὴν περιφέρειαν τῶν δίσκων, δύο σφαῖρας α, β τῆς αὐτῆς μάζης καὶ ἀρχίσωμεν νὰ περιστρέψωμεν τὸν δίσκον Δ με διαρκῶς αὐξανομένην ταχύτητα, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι πρώτη ἐκτινάσσεται ἡ ἐπὶ τοῦ μικροῦ δίσκου σφαῖρα α καὶ, ἐν συνεχείᾳ, εἰς μεγαλυτέραν ἀκόμη ταχύτητα, ἡ σφαῖρα β. Τοῦτο ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς: Ἐκάστη σφαῖρα διαγράφει κυκλικὴν τροχίαν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν κεντρομόλου δυνάμεως, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπ' αὐτῆς ἡ ἐνσκαφή καὶ, συγκεκριμένως, τὸ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ δίσκου τοίχωμα αὐτῆς. Συνεπῶς, ἡ σφαῖρα θὰ ἐκτιναχθῇ, ὅταν ἡ κεντρομόλος δύναμις, ἡ ἀπαιτουμένη νὰ διατηρῇ τὴν σφαῖραν ἐπὶ τῆς κυκλικῆς τῆς τροχιάς, γίνῃ μεγαλυτέρα τῆς δυνάμεως, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ ἐξασκήσῃ ἐπ' αὐτῆς ἡ ἐνσκαφή. Τὸ ἀνω πείραμα, λοιπόν, δεικνύει ὄντως ὅτι ἐκ τῶν δύο σφαιρῶν μεγαλυτέραν κεντρομόλον δύναμιν ὑφίσταται ἐκεῖνη, ἡ ὁποία διατρέχει τροχίαν μικροτέρας ἀκτίνας, δηλ., ἡ σφαῖρα α.

Τὸ αὐτὸ φαινόμενον παρατηροῦμεν καὶ εἰς τὴν καθημερινὴν ζωὴν, ὅταν αὐτοκίνητον, κινούμενον με σταθεράν ταχύτητα, εἰσέρχεται εἰς ἀπότομον καμπὴν τοῦ δρόμου. Ὅσον μικροτέρα εἶναι ἡ ἀκτίς καμπυλότητος, τόσοον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἀναγκαῖα διὰ τὴν στροφὴν κεντρομόλος δύναμις.

δ) Σχέσις κεντρομόλου δυνάμεως και ακτίνας, όταν η γωνιακή ταχύτης διατηρηται σταθερά. Έκ του τύπου (2) της § 53 προκύπτει ὅτι, ὅταν ἡ μάζα καὶ ἡ γωνιακὴ ταχύτης διατηροῦνται σταθεραί, ἡ κεντρομόλος δύναμις εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀκτίνας (*).

Τοῦτο δεικνύομεν ὡς ἑξῆς: Ἀφαιροῦμεν τὸν ἱμάντα τῆς συσκευῆς, τὴν ὁποίαν ἐχρησιμοποίησαμεν εἰς τὸ προηγούμενον πείραμα καὶ ἐπὶ τοῦ μεγάλου δίσκου θέτομεν, ἐντὸς ἐνσκαφῶν, τὰς δύο σφαῖρας α, β εἰς διαφόρους ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ ἄξονος (σχ. 89). Ἐάν, τώρα, ἀρχίσωμεν νὰ περιστρέψωμεν τὸν δίσκον με διαρκῶς αὐξανομένην γωνιακὴν ταχύτητα, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι πρώτη ἐκτινάσσεται ἡ σφαῖρα α καὶ, εἰς μεγαλυτέραν ἀκόμη ταχύτητα, ἡ σφαῖρα β. Εἰς τὸ πείραμα τοῦτο αἱ δύο σφαῖραι ἔχουν τὴν αὐτὴν γωνιακὴν ταχύτητα, ἐπομένως ἐκεῖνη, ἡ ὁποία εὐρίσκεται εἰς μεγαλυτέραν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἄξονος (δηλ. ἡ σφαῖρα α), θὰ ὑφίσταται μεγαλυτέραν κεντρομόλον δύναμιν, τὴν ὁποίαν δὲν δύναται νὰ ἐξασκήσῃ τὸ τοίχωμα τῆς ἐνσκαφῆς καὶ, ὡς ἐκ τούτου, προκαλεῖται ἐκτίναξις τῆς σφαίρας α.



Σχ. 89. Κατὰ τὴν περιστροφὴν τῶν δίσκων, αἱ δύο σφαῖραι ἔχουν τὴν αὐτὴν γωνιακὴν ταχύτητα.

(*) Ἐνταῦθα ἡ κεντρομόλος δύναμις φέρεται ἀνάλογος τῆς ἀκτίνας, ἐνῶ εἰς τὴν προηγούμενην περίπτωσιν ἐφέρετο ἀντιστρόφως ἀνάλογος αὐτῆς. Τοῦτο, ἐκ πρώτης

• § 55. Ἐφαρμογαὶ τῆς κεντρομόλου δυνάμεως. Εἰς τὰ κατωτέρω περιγραφόμενα μερικά ἐκ τῶν συνηθεστέρων φαινομένων, εἰς τὰ ὁποῖα ἐμφανίζεται ἡ κεντρομόλος δύναμις.

1) Ὅταν ἐν αὐτοκίνητον, κινούμενον εὐθυγραμμως, ἀρχίσῃ νὰ διαγράφῃ καμπυλόγραμμον τροχίαν, εἰς καθήμενος ἐπιβάτης αἰσθάνεται τὸ σῶμά του φερόμενον πρὸς τὰ ἔξω καὶ ἀποδίδει τοῦτο εἰς τὴν ὑπαρξιν μιᾶς «φυγόκεντρον δυνάμεως», ἐνῶ τοῦτο βεβαίως δὲν συμβαίνει, ἀλλ', ἀπλῶς, τὸ σῶμά του, λόγῳ ἀδρανείας, θέλει νὰ ἐξακολουθήσῃ κινούμενον εὐθυγραμμως, ἐνῶ τὸ αὐτοκίνητον ἤρχισε διαγράφον καμπυλόγραμμον τροχίαν. Διὰ νὰ δυνηθῇ ὁ ἐπιβάτης νὰ παραμείνῃ εἰς τὸ κάθισμά του, πρέπει νὰ ἐξασκηθῇ ἐπ' αὐτοῦ μία δύναμις μὲ φοράν πρὸς τὰ ἔσω (κεντρομόλος). Τὴν δύναμιν ταύτην ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ ἐπιβάτου τὸ πλευρικὸν τοίχωμα τοῦ αὐτοκινήτου μὲ τὸ ὁποῖον οὗτος ἔρχεται εἰς ἐπαφὴν. Βεβαίως, λόγῳ τοῦ ἀξιώματος «δρᾶσις = ἀντίδρασις», ὁ ἐπιβάτης θὰ ἐξασκήσῃ ἐπὶ τοῦ τοιχώματος μίαν ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν, ἡ ὁποία εἶναι, ἀκριβῶς, ἡ φυγόκεντρος.

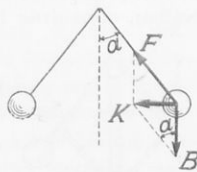
2) *Περιστροφόμενα αἰῶραι.* Ὅταν αἱ αἰῶραι τοῦ σχήματος 90 τεθοῦν εἰς περιστροφὴν, παρατηροῦμεν ὅτι ἀπομακρύνονται τοῦ ἄξονος



Σχ. 90.

περιστροφῆς καί, μάλιστα, τόσον περισσότερον, ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ γωνιακὴ τῶν ταχύτης. Διὰ τὴν ἐξήγησιν τοῦ φαινομένου τούτου παρακολουθοῦμεν τὸ σχῆμα 91, εἰς τὸ ὁποῖον μία αἰώρα ἔχει ἀντικατασταθῇ διὰ μικρᾶς σφαίρας, ἐξηρημένης διὰ νήματος: Ἀφοῦ ἡ σφαῖρα διαγράφει (ὀριζοντίαν) κυκλικὴν τροχίαν, πρέπει νὰ ἐξασκῇται ἐπ' αὐτῆς μία ὀριζοντίαν δύναμις K , ἡ ὁποία θὰ ἔχῃ φοράν πρὸς τὸ κέντρον. Ἡ κεντρομόλος αὕτη δύναμις θὰ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δύο ἐπὶ τῆς σφαίρας πραγματικῶς ἐξασκουμένων δυνάμεων B καὶ F , ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν πρώτη εἶναι τὸ βάρος αὐτῆς, ἡ δὲ δευτέρα ἡ ἐκ τοῦ τεταμένου νήματος προερχομένη. Εἶναι προφανὲς ὅτι, μόνον ἐὰν τὸ νῆμα σχηματίζῃ γωνίαν μετὰ τῆς κατακορύφου, εἶναι δυνατόν νὰ ὑπάρχῃ συνισταμένη, ἔχουσα διεύθυνσιν ὀριζοντίαν.

Συμφώνως πρὸς τ' ἄνωτέρω, κατὰ τὴν περιστροφὴν τῶν αἰωρῶν, πρέ-

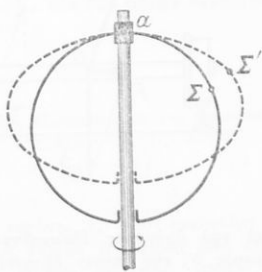


Σχ. 91.

ὑψεως, παρουσιάζεται ὡς ἀντίφασις, ἡ ὁποία, ὅμως εἰς τὴν πραγματικότητα δὲν ὑπάρχει, διότι ὁ μὲν τύπος (1) τῆς § 53 παρέχει τὴν σχέσιν μεταξὺ κεντρομόλου δυνάμεως καὶ ἀκτίως, ὅταν ἡ ταχύτης v διατηρῆται σταθερά, ἐνῶ οἱ τύποι (2), (3) καὶ (4) τῆς αὐτῆς παραγράφου παρέχουν τὴν αὐτὴν σχέσιν, ὅταν ἡ γωνιακὴ ταχύτης εἶναι σταθερά (ὁπότε καὶ ἡ συχνότης καὶ ἡ περίοδος εἶναι σταθεραί).

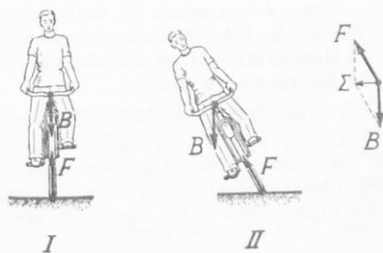
στροφὴν τῆς Γ ἥς περὶ τὸν ἄξονά της καὶ ἔλαβε χώραν, ὅταν αὕτη δὲν εὐρίσκετο εἰς στερεὰν κατάστασιν, ὅπως σήμερον.

Διὰ τὴν ἐξηγήσιν τῆς πλατύνσεως ἔκτελοῦμεν τὸ ἑξῆς πείραμα: Ἐπὶ εὐθυγράμμου στελέχους εἶναι στερεωμένον κυκλικὸν χαλίβδινον ἔλασμα (σχ. 93) κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε εἰς τὸ σημεῖον α νὰ εἶναι στερεῶς συνδεδεμένον μετὰ τοῦ στελέχους, ἐνῶ τὸ ἀπέναντι νὰ δύναται νὰ ὀλισθαίνει κατὰ μῆκος αὐτοῦ. Ἐάν στερεώσωμεν τὸ στέλεχος ἐπὶ καταλήλου μηχανῆς καὶ θέσωμεν αὐτὸ εἰς ταχεῖαν περιστροφὴν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ἔλασμα παραμορφοῦται καὶ λαμβάνει τὸ σχῆμα ἐλλείψεως καί, μάλιστα, ὅτι ἡ παραμόρφωσις εἶναι τόσον ἐντονωτέρα, ὅσον μεγαλύτερα εἶναι ἡ γωνιακὴ ταχύτης. Παρατηροῦμεν, δηλ., ὅτι, κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἐλάσματος, τὸ σημεῖον Σ αὐτοῦ μετεκινήθη εἰς τὴν θέσιν Σ' , φαινόμενον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐντελῶς ἀνάλογον πρὸς τὸ φαινόμενον τῆς ἀπομικρύνσεως τῶν σφαιρῶν τοῦ ρυθμιστοῦ τοῦ Watt, ὅταν οὗτος τεθῇ εἰς περιστροφὴν.



Σχ. 93.

★ 5) Ὅταν ποδηλάτης κινῆται ἐπὶ καμπύλης τροχιάς, εἶναι ὑποχρεωμένος, διὰ νὰ μὴ πέσῃ, νὰ κλίνει πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς τροχιάς (σχ. 94, II).

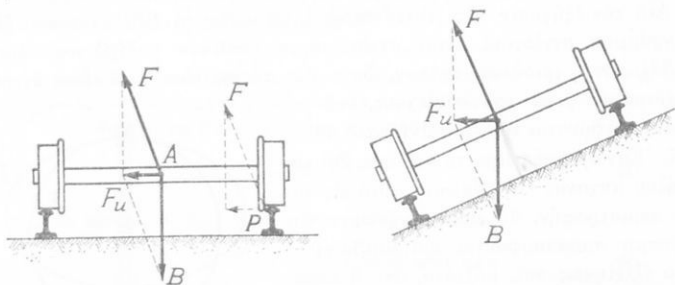


Σχ. 94.

Εἶναι προφανές ὅτι, ἐάν ὁ ποδηλάτης δὲν κλίνει πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν (I), εἶναι ἀδύνατον ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων F καὶ B νὰ εἶναι ὀριζοντία. Ἐάν, ὅμως, κλίνει (II), δημιουργεῖται μία τοιαύτη ὀριζοντία συνισταμένη Σ . Ὁ ποδηλάτης ἐκλέγει, ἀσυναίσθητως, κατάλληλον κλίσιν, οὕτως ὥστε ἡ συνισταμένη αὕτη νὰ ἔχῃ μέτρον, ἴσον πρὸς $m \cdot v^2/r$.

6) Ὑπερίψωσις σιδηροτροχιῶν. Εἰς τὰς καμπὰς αἱ σιδηροτροχиаὶ τῶν σιδηροδρόμων τοποθετοῦνται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ ἐσωτερικὴ νὰ εὐρίσκειται ὑψηλότερον τῆς ἐσωτερικῆς (σχ. 95, δεξιὰ). Διὰ τὴν μελέτην τῶν αἰτίων, τὰ ὁποῖα καθιστοῦν ἀναγκαίαν τὴν ὑπερίψωσιν τῶν σιδηροτροχιῶν εἰς τὰς καμπὰς, ἐξετάζομεν πρῶτον τὴν περιπτώσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ δύο σιδηροτροχιαὶ θὰ εὐρίσκοντο εἰς

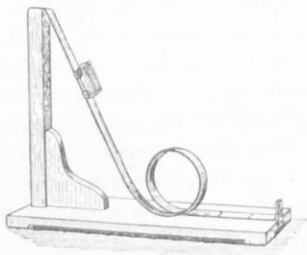
τὸ αὐτὸ ὕψος (σχ. 95, ἀριστερά), τὸ δὲ ὄχημα, κινούμενον με ὀρίσμενὴν ταχύτητα v , πρόκειται νὰ διαγράψῃ καμπύλην τροχίαν, ὀρίσμενης ἀκτίνος καμπυλότητος r :



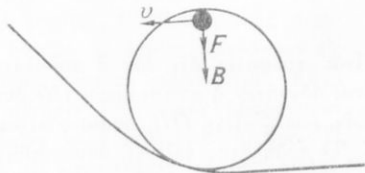
Σχ. 95.

Ἐπὶ τοῦ ὀχήματος ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις: α) τὸ βάρος τοῦ B καὶ β) ἡ δύναμις F , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἡ σιδηροτροχία καὶ ἡ ὁποία, πρὸς τὸ παρόν, μᾶς εἶναι ἄγνωστος. Ἡ δύναμις αὕτη F πρέπει νὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε ἡ συνισταμένη F_{Σ} τῶν δύο δυνάμεων B καὶ F νὰ εἶναι ὀριζοντία, νὰ ἔχῃ φορὰν πρὸς τὸ κέντρον τῆς καμπῆς καὶ νὰ ἔχῃ μέτρον, ἴσον πρὸς $m \cdot v^2/r$ · πρέπει, δηλ., νὰ εἶναι κεντρομόλος. Ἐφ' ὅσον, τώρα, γνωρίζομεν τὴν μίαν πλευρὰν (B) καὶ τὴν διαγώνιον (F_{Σ}) τοῦ παραλληλογράμμου, δυνάμεθα νὰ σχεδιάσωμεν τὴν ζητούμενὴν δύναμιν F (σχ. 95, ἀριστερά). Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ὑπὸ τῶν σιδηροτροχιῶν ἐπὶ τοῦ ὀχήματος ἐξασκουμένη δύναμις F δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν σιδηροτροχιῶν καὶ, ὡς ἐκ τούτου, ἔχει ὀριζοντίαν συνιστῶσαν P , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἡ ἐξωτερικὴ σιδηροτροχία ἐπὶ τῆς στεφάνης τοῦ τροχοῦ με κίνδυνον ἐκτροχιασμοῦ. (Ἡ ἀνάλυσις τῆς δυνάμεως F δεικνύεται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σχεδίου δεξιᾷ). Διὰ νὰ ἐκλείψῃ, ἐπομένως, ἡ τοιαύτη συνιστῶσα, πρέπει ἡ δύναμις F νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν σιδηροτροχιῶν. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται, ἀκριβῶς, διὰ τῆς ὑπερνηψώσεως (*).

7) **Ἀνακύκλωσης.** Εἰς τὸ σχῆμα 96 παρίσταται ἡμάξιον, τὸ ὁποῖον, ἀφιέμενον ἀπὸ καταλήλῳ ὕψους, ἀποκτᾷ ἄρκετὴν ταχύτητα, ὥστε νὰ δυνηθῇ νὰ διαγράψῃ τὴν κατακόρυφον κυκλικὴν τροχίαν, χωρὶς νὰ πέσῃ (**ἀνακύκλωσης**). Εἶναι προφανές ὅτι, ἐὰν ἡ ταχύτης εἶναι μικρά, τοῦτο δὲν εἶναι



Σχ. 96.



Σχ. 97.

(*) Εἰς τὸ σχῆμα 95 αἱ δυνάμεις ἐσχεδιάσθησαν, ὡς ἐὰν ἐφηρμοζόντο εἰς τὸ σημεῖον A τοῦ ἄξονος. Εἰς τὴν πραγματικότητα τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται πολὺ ὑψηλότερον, ὁπότε, ἐκτὸς τοῦ ἐκτροχιασμοῦ, παρουσιάζεται καὶ κίνδυνος ἀνατροπῆς. Καὶ οἱ δύο κίνδυνοι ἐλαττοῦνται διὰ τῆς ὑπερνηψώσεως.

δυνατόν. Εἰς τὰ κατωτέρω θὰ ὑπολογίσωμεν, ἀκριβῶς, τὴν ἐλαχίστην ταχύτητα $v_{ελ}$, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ ἀμάξιον, ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς κυκλικῆς του τροχιάς: Ἐπὶ τοῦ ἀμαξίου (σχ 97) ἐξασκούνται δύο δυνάμεις - τὸ βάρος του B καὶ ἡ δύναμις F , τῆς ὁποίας ἐξασκεῖ ἡ τροχιά. (Ἡ δύναμις F εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τροχιάν, καθόσον θεωροῦμεν τὴν τριβὴν ἀμελητέαν). Αἱ δύο αὐτὰ δυνάμεις εἶναι κατακόρυφοι καὶ ἔχουν φορὰν πρὸς τὰ κάτω. Διὰ νὰ δύναται τὸ ἀμάξιον νὰ διαγράφῃ τὸ ἀνώτατον κυκλικὸν τμήμα τῆς τροχιάς του με ταχύτητα v , πρέπει ἡ συνισταμένη $(B+F)$ τῶν δύο αὐτῶν δυνάμεων νὰ εἶναι κεντρομόλος καὶ νὰ ἔχῃ μέτρον, ἴσον πρὸς

$$B + F = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

ἔνθα r εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς κυκλικῆς τροχιάς. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύπτει

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r} - B \quad \eta \quad F = m \cdot \left(\frac{v^2}{r} - g \right) \quad (1)$$

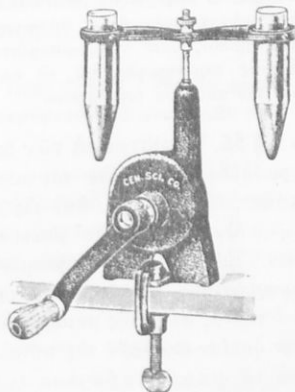
(ἀφοῦ $B = m \cdot g$).

Παρατηροῦμεν ὅτι, ὅσον μικρότερα εἶναι ἡ ταχύτης v , τόσο μικρότερα εἶναι καὶ ἡ δύναμις F , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἡ τροχιά, ἐὰν δὲ ἡ ταχύτης γίνῃ τοιαύτη ὥστε τὸ v^2/r νὰ εἶναι ἴσον πρὸς g , ἡ δύναμις F γίνεται ἴση πρὸς μηδέν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ τροχιά δὲν ἐξασκεῖ, πλέον, ἐπὶ τοῦ ἀμαξίου δύναμιν - τὸ ἀμάξιον, δηλ., παύει νὰ ἐφάπτεται τῆς τροχιάς καί, ὡς ἐκ τούτου, πίπτει πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς τροχιάς, διαγράφον παραβολήν. Ἡ ἐλαχίστη, λοιπόν, ταχύτης τοῦ ἀμαξίου πρέπει νὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$v_{ελ} = \sqrt{r \cdot g}.$$

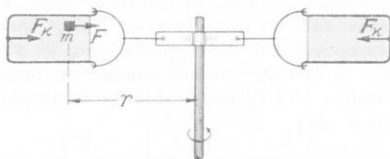
Τὸ αὐτὸ, ἀκριβῶς, πρόβλημα παρουσιάζεται εἰς ἀεροπόρον, εὐρισκόμενον ἐντὸς ἀεροπλάνου, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ ἀνακυκλώσιν: Ἐὰν καλέσωμεν v καὶ m τὴν ταχύτητα καὶ τὴν μᾶζαν τοῦ ἀεροπόρου, δυνάμεθα, διὰ τοῦ τύπου (1), νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν δύναμιν F , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπ' αὐτοῦ τὸ κάθισμα. Ἐφ' ὅσον ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ ἀεροπόρου μία τοιαύτη δύναμις, δύναται οὗτος νὰ ἐκτελέσῃ τὴν ἀνακύκλωσιν, χωρὶς νὰ εἶναι προσδεδεμένος ἐπὶ τοῦ καθίσματος. Ἐάν, ὁμως, τῆς ἀκτίνος διατηρουμένης σταθερᾶς, ἡ ταχύτης ἐλαττωθῇ τόσο, ὥστε ἡ δύναμις F νὰ γίνῃ ἴση πρὸς μηδέν, τὸ κάθισμα παύει νὰ ἐφάπτεται τοῦ ἀεροπόρου, με ἀποτέλεσμα νὰ ἐκφυγῇ οὗτος τοῦ καθίσματος, ἐκτὸς ἐάν εἶναι προσδεδεμένος ἐπ' αὐτοῦ.

8) **Φυγοκέντροις.** Ὅταν, ἐντὸς ὕγρου τίνος, εὐρίσκονται διάφορα σωματίδια, τῶν ὁποίων ἡ πυκνότης εἶναι μεγαλύτερα τῆς πυκνότητος τοῦ ὕγρου (π.χ., ἱλύς ἐντὸς ὕδατος), τὰ σωματίδια ταῦτα, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους τῶν, πίπτουν βραδέως καὶ συγκεντρῶνται εἰς τὸν πυθμένα τοῦ περιέχοντος αὐτὰ δοχείου (καθίζησις). Ἐάν αἱ διαστάσεις τῶν σωματιδίων εἶναι πολὺ μικραὶ, ἡ καθίζησις εἶναι πολὺ βραδεία, δυνάμεν νὰ διαρκέσῃ καὶ ἑβδομάδας. Τὴν καθίζησιν δυνάμεθα νὰ ἐπιταχύνωμεν, ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν μηχανήν, καλουμένην



Σχ. 98.

φυγόκεντρον (σχ. 98). Πρὸς τοῦτο πληροῦμεν τὰ δύο δοχεῖα τῆς συσκευῆς διὰ τοῦ ὕγρου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου εὐρίσκονται τὰ σωματίδια καὶ θέτομεν τὴν μηχανὴν εἰς ταχείαν περιστροφὴν. Τὰ δοχεῖα περιστρέφονται καί, ἀνυψούμενα, κινούνται ἐντὸς ὀριζοντίου ἐπιπέδου (σχ. 99).



Σχ. 99.

Μετ' ὀλίγον ὅλα τὰ σωματίδια συγκεντρώνονται εἰς τὸν πυθμένα τῶν δοχείων, ἐνῶ ἀνωθεν τῶν σχηματισθέντων στρωμάτων ἀπομένει διανυγὲς ὕδωρ.

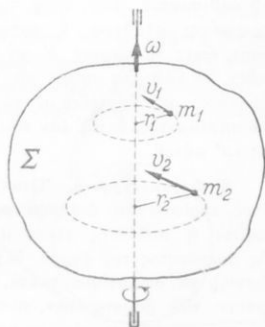
Ἡ μέθοδος αὕτη ταχείας καθιζήσεως χρησιμοποιεῖται εἰς τὴν Χημείαν, τὴν Πατρικὴν κ.λ.

Δι' ἀναλόγων συλλογισμῶν εὐρίσκομεν ὅτι, ἐάν ἡ πυκνότης τῶν σωματιδίων εἶναι μικροτέρα τῆς πυκνότητος τοῦ ὕγρου (π.χ., σταγονίδια λίπους ἐντὸς γάλακτος), τότε, διὰ τῆς φυγόκεντρήσεως, τὰ σωματίδια ταῦτα θὰ συγκεντρωθοῦν εἰς τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕγρου.

Ἡ ἐξήγησις τοῦ περιγραφέντος φαινομένου ἔχει ὡς ἑξῆς: Κατὰ τὴν περιστροφὴν τῆς συσκευῆς, ὁ πυθμὴν ἐκάστου δοχείου ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ περιεχομένου ὕγρου μίαν δύναμιν F_x (σχ. 99) ἀκριβῶς τὴν ἀναγκαίαν διὰ νὰ δύναται τοῦτο νὰ διαγράφῃ τὴν κυκλικὴν τὴν τροχίαν. Ἐάν ἐξ ὅλου τοῦ ὕγρου, τοῦ περιεχομένου εἰς τὸ ἐν τῶν δοχείων, θεωρήσωμεν ἓν στοιχειώδες τμήμα, μάζης m , τότε ἐπὶ τοῦ στοιχειώδους τούτου τμήματος θὰ ἐξασκῇται ὑπὸ τοῦ ὑπολοίπου ὕγρου συνολικῶς μία δύναμις F , ἡ ὁποία ἔχει φορὰν πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς καὶ μέτρον $m \cdot \omega^2 \cdot r$ (*), τοιοῦτο ὥστε τὸ ἐν λόγῳ τμήμα τοῦ ὕγρου νὰ διατηρῇται ἐπὶ τῆς κυκλικῆς του τροχιάς. Ἐάν, τώρα, ἀντικαταστήσωμεν τὸ τμήμα τοῦτο δι' ἄλλου, πυκνοτέρου, τὸ περιβάλλον ὕγρον ἐξακολουθεῖ νὰ ἐξασκῇ ἐπ' αὐτοῦ τὴν ἰδίαν δύναμιν F ὡς καὶ πρότερον[†] ἡ δύναμις, ὅμως, αὕτη εἶναι, πλέον, ἀνεπαρκὴς διὰ νὰ διατηρῇ τὸ πυκνότερον τοῦτο τμήμα τοῦ ὕγρου ἐπὶ τῆς κυκλικῆς του τροχιάς, δεδομένου ὅτι ἡ μάζα του m' εἶναι μεγαλύτερα τῆς μάζης m τοῦ προηγουμένου τμήματος. Ὡς ἐκ τούτου, τὸ πυκνότερον τοῦτο τμήμα δὲν δύναται νὰ διαγράφῃ τὴν προηγουμένην κυκλικὴν τροχίαν, ἀλλὰ θὰ κινήθῃ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ν' ἀπομακρύνεται συνεχῶς τοῦ ἄξονος περιστροφῆς, διὰ νὰ καταλήξῃ, τελικῶς, εἰς τὸν πυθμένα τοῦ δοχείου.

§ 56. Περιστροφή τῶν σωμάτων. Μέ-

χρι τοῦδε ἐξητάσαμεν τὰς κινήσεις τῶν σωμάτων, θεωροῦντες αὐτὰ ὡς ὑλικά σημεῖα, δηλ., δὲν ἐλάβομεν ὑπ' ὄψιν τὰς διαστάσεις τῶν. Ἐάν, ὅμως, μελετήσωμεν τὴν κίνησιν πραγματικῶν σωμάτων, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ταῦτα, πλὴν τῆς μεταφορικῆς κινήσεως, τὴν ὁποίαν ἐκτελοῦν ὡς σύνολον, δύναται καὶ νὰ περιστρέφονται. Οὕτω, ἐάν σφαῖρα ποδοσφαίρου κτυπηθῇ καταλλήλως, δύναται νὰ ἐκτελέσῃ σύνθετον



Σχ. 100.

(*) Τὸ ω παριστᾷ τὴν γωνιακὴν ταχύτητα τῶν δοχείων.

κίνησιν, δηλ., ἐνῶ αὕτη μετατίθεται εἰς τὸν χώρον, ταυτοχρόνως καὶ περιστρέφεται.

Εἰς ἄλλας περιπτώσεις τὰ σώματα ἐκτελοῦν καθαρῶς περιστροφικὴν κίνησιν, χωρὶς νὰ μετατίθενται ὡς σύνολον. Τοιαύτην κίνησιν ἐκτελεῖ, π.χ., τὸ σῶμα Σ' τοῦ σχήματος 100, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ ἄξονα. Κατὰ τὴν περιστροφὴν ταύτην, τὰ διάφορα σημεῖα τοῦ σώματος διαγράφουν κυκλικὰς τροχιάς, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸν ἄξονα περιστροφῆς, ἔχουν τὴν αὐτὴν γωνιακὴν ταχύτητα ω , ἡ ταχύτης των, ὅμως, $v_1, v_2, \dots$ εἶναι διάφορος καί, μάλιστα, εἶναι τόσον μεγαλύτερα, ὅσον μεγαλύτερα εἶναι ἡ ἀπόστασις $r_1, r_2, \dots$ αὐτῶν ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς.

• § 57. Νόμος της περιστροφῆς τῶν σωμάτων. Ὅπως διὰ τὴν μεταφορικὴν κίνησιν τῶν σωμάτων ἰσχύει ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς, ὁ ὁποῖος λέγει ὅτι διὰ νὰ μεταβληθῇ ἡ ταχύτης ἐνὸς σώματος πρέπει νὰ ἐξασκηθῇ ἐπ' αὐτοῦ δύναμις, οὕτω καὶ διὰ τὴν περιστροφὴν ἰσχύει ἀνάλογος νόμος, ὁ ὁποῖος λέγει ὅτι διὰ νὰ μεταβληθῇ ἡ γωνιακὴ ταχύτης ἐνὸς σώματος, στρεπτοῦ περὶ ἄξονα, πρέπει νὰ ἐξασκηθῇ ἐπ' αὐτοῦ ροπή (ζεύγος δυνάμεων). Οὕτω, ὁ τροχὸς τοῦ σχήματος 32, I, II ἐνῶ ἦτο ἀκίνητος ($\omega = 0$), ἤρχισε νὰ περιστρέφεται (μετεβλήθη, δηλ., ἡ γωνιακὴ του ταχύτης), εὐθὺς ὡς ἐξηκολύθη ἐπ' αὐτοῦ ἡ ροπή τῆς δυνάμεως F .

§ 58. Τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας εἰς τὴν περιστροφὴν. Εἰς τὴν § 49 ἐγνωρίσαμεν τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας· εἶδομεν, δηλ., ὅτι, ἐφ' ὅσον ἐπὶ τινος σώματος οὐδεμία δύναμις ἐξασκεῖται, τὸ σῶμα ἢ ἡρεμεῖ ἢ κινεῖται εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς. Τ' ἀνάλογα, ἀκριβῶς, ἰσχύουν καὶ διὰ τὴν περιστροφὴν ἐνὸς σώματος περὶ ἄξονα:

Ἐφ' ὅσον ἐπὶ τινος σώματος, στρεπτοῦ περὶ ἄξονα, οὐδεμία ροπή ἐξασκεῖται, τὸ σῶμα τοῦτο ἢ ἡρεμεῖ ἢ περιστρέφεται μὲ σταθερὰν γωνιακὴν ταχύτητα.

Οὕτω, ἐὰν ἀναστρέψωμεν ἓν ποδήλατον καὶ τὸ στηρίξωμεν εἰς τὸ ἔδαφος, ἀκολουθῶς δέ, περιστρέφοντες διὰ τῆς χειρὸς μας τὸ πέδιλον, ἐξασκοῦμεν ἐπὶ τοῦ ὀπισθίου τροχοῦ ροπήν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι οὗτος θ' ἀρχίσῃ νὰ περιστρέφεται μὲ διαρκῶς αὐξανομένην γωνιακὴν ταχύτητα. Ἄν, τώρα, παύσωμεν νὰ περιστρέφωμεν τὸ πέδιλον (δηλ., ἐὰν παύσῃ ἐπιδρῶσα ἐπὶ τοῦ τροχοῦ ἡ ροπή), θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ τροχὸς ἐξακολουθεῖ νὰ περιστρέφεται ἐπ' ἀρκετὸν χρόνον μὲ σταθερὰν γωνιακὴν ταχύτητα.

Σημειώσεις. Ἡ παρατηρουμένη βραδεία ἐλάττωσις τῆς γωνιακῆς ταχύτητος τοῦ τροχοῦ ὀφείλεται εἰς μικρὰν ροπήν, προερχομένην ἐκ τῆς τριβῆς καὶ ἀντιδρῶσαν εἰς τὴν περιστροφὴν.

• § 59. Ὁρμή. Καλοῦμεν *ὁρμήν* J ἐνὸς σώματος τὸ γινόμενον τῆς μάζης m αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ταχύτητά του v . Ἦτοι

$$J = m \cdot v$$

Θεωρήσωμεν σῶμα, μάζης m , τὸ ὁποῖον, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_1 , ἔχει ταχύτητα v_1 , συνεπῶς καὶ ὄρμην

$$J_1 = m \cdot v_1.$$

Ἐάν ἐπὶ τοῦ σώματος τούτου ἐξασκηθῇ μία σταθερὰ δύναμις F ἐπὶ ὠρισμένον χρόνον, θὰ μεταβάλῃ τὴν ταχύτητά του, ἔστω δὲ v_2 ἡ τιμὴ αὐτῆς κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_2 . Ἡ ὄρμὴ τοῦ σώματος θὰ μεταβληθῇ καὶ θὰ γίνῃ ἴση πρὸς

$$J_2 = m \cdot v_2.$$

Ἀφοῦ, λοιπόν, ἐντὸς τοῦ χρονικοῦ διαστήματος $t_2 - t_1$, ἡ ταχύτης μετεβλήθη κατὰ $v_2 - v_1$, ἡ ἀντίστοιχος ἐπιτάχυνσις γ θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$\gamma = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \quad (1)$$

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς

$$F = m \cdot \gamma.$$

ἀντὶ τοῦ γ τὸ ἴσον του, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξίσωσως (1), εὐρίσκομεν

$$F = m \cdot \left(\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \right) = \frac{m \cdot v_2 - m \cdot v_1}{t_2 - t_1}$$

$$\eta \quad F = \frac{J_2 - J_1}{t_2 - t_1}. \quad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν δύναμιν F , ἡ ὁποία, δρῶσα σταθερῶς ἐπὶ χρονικὸν διάστημα $t_2 - t_1$ ἐπὶ τινος σώματος, προκαλεῖ μεταβολὴν τῆς ὄρμης αὐτοῦ κατὰ $J_2 - J_1$.

★ ★ § 60. Ὡθησις δυνάμεως. Ἡ ἐξίσωσις (2) τῆς προηγουμένης παραγράφου γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$F \cdot (t_2 - t_1) = J_2 - J_1. \quad (1)$$

Ἐάν τὸ γινόμενον $F \cdot (t_2 - t_1)$ καλέσωμεν ὥθησιν τῆς δυνάμεως F , ἐκ τῆς ἐξίσωσως (1) προκύπτει ὅτι ἡ μεταβολὴ $J_2 - J_1$ τῆς ὄρμης, τὴν ὁποίαν προκαλεῖ μία σταθερὰ δύναμις F , ἐξασκουμένη ἐπὶ τινος σώματος ἐπὶ χρόνον $(t_2 - t_1)$, ἰσοῦται πρὸς τὴν ὥθησιν τῆς δυνάμεως.

- ★ ★ § 61. Μεταβολὴ τῆς μάζης μετὰ τῆς ταχύτητος. Εἰς ὅλα τὰ μέχρι τοῦδε ἐξετασθέντα προβλήματα ἡ μᾶζα τῶν σωμάτων θεωρεῖται σταθερά. Ὅπως, ἔδειξεν ὁ Einstein (Ἀϊνστάιν) εἰς τὴν θεωρίαν τῆς Σχετικότητος, ἡ μᾶζα αὐξάνεται, αὐξανομένης τῆς ταχύτητος. Ἄν καλέσωμεν m_0 τὴν μᾶζαν ἡρεμίας (δηλ., τὴν μᾶζαν, τὴν ὁποίαν ἔχει ἓν σῶμα, ὅταν ἡρεμῇ· ὅταν, δηλ., ἔχῃ ταχύτητα μηδέν) καὶ m τὴν μᾶζαν τοῦ σώματος, ὅταν τοῦτο κινῆται μετὰ ταχύτητα v , τότε, ὡς ἀποδεικνύεται, μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν μαζῶν ἰσχύει ἡ σχέσις

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1)$$

ἐνθα c εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτός ($= 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec).

Εάν εις τὸν τύπον (1) θέσωμεν $v = c$, θὰ λάβωμεν

$$m = \infty.$$

Τοῦτο σημαίνει τὰ ἑξῆς: Ἐάν θέλωμεν ν' αὐξήσωμεν τὴν ταχύτητα ἐνὸς σώματος, τὸ ὁποῖον κινεῖται μὲ τὴν ταχύτητα τοῦ φωτός, πρέπει — κατὰ τὸν θεμελιώδη νόμον $F = m \cdot \gamma$ — νὰ ἐξασκήσωμεν ἐπ' αὐτοῦ δύναμιν, ἴσην πρὸς ἄπειρον. Ἡ, ἄλλως: *Εἶναι ἀδύνατον νὰ κινήθῃ ἐν σῶμα μὲ ταχύτητα, μεγαλυτέραν τῆς ταχύτητος τοῦ φωτός.*

Διὰ συνήθεις ταχύτητας ἡ αὐξήσις τῆς μάζης εἶναι, κατὰ τὸν τύπον (1), πολὺ μικρὰ καὶ δὲν ἐλέγχεται πειραματικῶς. Ὅταν, ὅμως, ἔχωμεν πολὺ μεγάλας ταχύτητας (ταχύτητας, δηλ., αἱ ὁποῖαι πλησιάζουν πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ φωτός), τότε εὐρίσκεται ὅτι ἡ μάζα αὐξάνεται σημαντικῶς. Τοιαύτας μεγάλας ταχύτητας ἐπιτυγχάνομεν πειραματικῶς μόνον μὲ ὠρισμένα σωματία (*ἡλεκτρόνια κ.λ.*), τὰ ὁποῖα θὰ γνωρίσωμεν εἰς τὴν Ἀτομικὴν Φυσικὴν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κατηγορίᾳ Α'

- ⊙ 49) Δύναμις 12 kg^* ἐπιδρῶ ἐπὶ ἡρεμοῦντος σώματος ἐπὶ χρόνον 15 sec καὶ τὸ μετακινεῖ κατὰ 600 m . Ποία ἡ μάζα τοῦ σώματος; (Νὰ λυθῇ εἰς τὸ σύστημα C.G.S.).
(ΑΠ: $m = 22072 \text{ gr}$)

50) Ἐπὶ ἡρεμούσης σφαίρας, μάζης $4,65 \text{ kg}$, ἐξασκείται, ἐπὶ χρόνον 4 sec , σταθερὰ δύναμις 2 kg^* καὶ κατὰ διεύθυνσιν μιάς διαμέτρου της. Ζητεῖται α) ἡ ἐπιτάχυνσις, τὴν ὅποιαν θ' ἀποκτήσῃ ἡ σφαῖρα, β) τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον θὰ διатρέξῃ καὶ γ) ἡ ταχύτης, τὴν ὅποιαν θὰ ἔχῃ αὕτη εἰς τὸ τέλος τοῦ τετάρτου δευτερολέπτου. (Νὰ λυθῇ εἰς τὸ σύστημα C.G.S.).

(ΑΠ: α) 422 cm/sec^2 , β) 3376 cm , γ) 1688 cm/sec)

- ⊙ 51) Σῶμα, μάζης 20 gr , κινούμενον ἐπὶ εὐθυγράμμῳ τροχίᾳ, διανύει διάστημα 25 cm , 100 cm 225 cm εἰς τὸ 1^{st} , 2^{nd} καὶ 3^{rd} sec ἀντιστοίχως. Δεῖξτε ὅτι ἐπ' αὐτοῦ ἐπιδρῶ σταθερὰ δύναμις καὶ ὑπολογίσατε αὐτήν.
(ΑΠ: 1000 dyn)

52) Σφαῖρα ὀπλον, μάζης 12 gr , ἐπιταχύνεται ἐντὸς τῆς κάνης, μήκους 70 cm καὶ ἐξέρχεται μὲ ταχύτητα 800 m/sec . Ζητεῖται ἡ ἐπ' αὐτῆς ἐξασκηθεῖσα δύναμις εἰς kg^* (θεωρουμένη σταθερά).
(ΑΠ: 559 kg^*)

53) Ἀπὸ τὰ ἄκρα νήματος, διερχομένου διὰ τροχαλίας, κρέμονται δύο ὅμοια δοχεῖα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει μᾶζαν 1350 gr . Τὰ δύο δοχεῖα εὐρίσκονται, ἐν ἀρχῇ, εἰς τὸ αὐτὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον. Ἄν, τώρα, τεθῇ ἐντὸς τοῦ ἐνὸς δοχείου μία μάζα 56 gr , τοῦτο ἀρχίζει νὰ κατέρχεται, ἐνῶ τὸ ἄλλο ἀνέρχεται. Ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος θ' ἀπαιτηθῇ, ὥστε τὰ δύο δοχεῖα ν' ἀπέχουν μεταξὺ τῶν κατὰ 2 m .
(ΑΠ: $3,17 \text{ sec}$)

54) Σφαῖρα, μάζης 100 gr , εἶναι προσδεμένη διὰ νήματος, μήκους $0,5 \text{ m}$, ἐκτελεῖ δὲ περιστροφικὴν κίνησιν μὲ κέντρον τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ νήματος καὶ μὲ σταθεράν συχνότητα $180 \text{ στροφῶν ἀνὰ λεπτόν}$. Νὰ εὐρεθῇ α) ποία ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις καὶ β) ποία ἡ προκαλοῦσα ταύτην δύναμις.
(ΑΠ: α) $17,75 \cdot 10^8 \text{ cm/sec}^2$, β) $17,75 \cdot 10^8 \text{ dyn}$)

55) Ποδηλάτης, κινούμενος ἐπὶ καμπῆς, ἀκτίως 15 m , μὲ ταχύτητα 20 km/h ,

κλίνει προς το έσωτερικόν διά νά μή πέση. Ζητείται ή γωνία κλίσεως. (ΑΠ: 12°)



● 56) Δοχείον, πλήρες ὕδατος, περιστρέφεται ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς, ἀκτίνος $r = 1 \text{ m}$, τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον εἶναι κατακόρυφον. Ζητοῦνται α) ποῖαι δυνάμεις ἐξασκοῦνται ἐπὶ τοῦ ὕδατος, β) ποῖα σώματα ἐξασκοῦν τὰς δυνάμεις αὐτάς καὶ γ) ποῖα ἢ ἐλάχιστη ταχύτης, τὴν ὁποίαν πρέπει νά ἔχη τὸ δοχεῖον, ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς τροχιάς του, ὥστε τὸ ὕδωρ νά μή χύνεται.

(ΑΠ: γ) 3,13 m/sec)

Κατηγορία Β'

57) Σῶμα, μάζης 50 gr, κινεῖται εὐθυγράμμως καὶ ὁμαλῶς μὲ ταχύτητα 30 cm/sec. Μία δύναμις 2 gr* ἐξασκεῖται ἐπὶ χρόνον 4 sec ἐπὶ τοῦ σώματος καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ταχύτητός του. Νά εὑρεθῇ α) ἡ ἐπιτάχυνσις καὶ β) ἡ τελικὴ ταχύτης τοῦ σώματος.

(ΑΠ: α) 39,24 cm·sec⁻², β) 187 cm/sec)

58) Ἐπὶ σώματος, μάζης 30 gr, κινουμένου ὁμαλῶς πρὸς τὰ δεξιὰ μὲ ταχύτητα v_0 , ἐπιδρᾷ σταθερὰ δύναμις 600 dyn, τῆς ὁποίας ἡ φορά εἶναι πρὸς τ' ἀριστερά. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σῶμα σταματᾷ μετὰ χρόνον 5 sec ἀπὸ τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐπέδρασεν ἡ δύναμις. Νά εὑρεθῶν: α) ποῖα ἦτο ἡ ταχύτης v_0 τοῦ σώματος, β) πότε θ' ἀλλάξῃ φοράν ἡ ταχύτης καὶ γ) εἰς ποῖαν θέσιν θὰ συμβῇ τοῦτο.

(ΑΠ: α) 100 cm/sec, β) μετὰ τὸ τέλος τοῦ 5 sec, γ) εἰς ἀπόστασιν 250 cm ἀπὸ τῆς θέσεως, εἰς τὴν ὁποίαν ἤρχισεν νά ἐπιδρᾷ ἡ δύναμις)

59) Μὲ ποῖαν ταχύτητα πρέπει νά περιστρέφεται ὁμαλῶς ἓν κινητὸν ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς, ἀκτίνος 10 cm, ὥστε ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις νά εἶναι ἴση πρὸς $g = 981 \text{ cm/sec}^2$;

(ΑΠ: 99 cm/sec)

60) Ἡ κεντρομόλος δύναμις, ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ σφαίρας, μάζης 50 gr καὶ κινουμένης ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς, ἀκτίνος 10 cm, εἶναι ἴση πρὸς 1 kgr*. Ποῖα ἡ περιόδος;

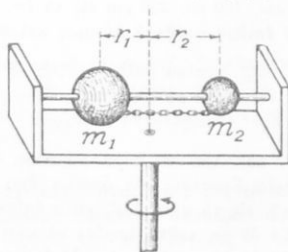
(ΑΠ: 0,142 sec)

61) Νά ὑπολογισθῇ ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις τῆς Σελήνης, περιστρεφομένης περὶ τὴν Γῆν, ἐὰν ἡ μᾶζα τῆς εἶναι ἴση πρὸς $8 \cdot 10^{22}$ τόνους, ἡ ἀκτίς τῆς τροχιάς τῆς 238000 μίλια καὶ ἡ περίοδος $T = 28$ ἡμέραι. Μὲ ποῖαν κεντρομόλον δύναμιν (εἰς τόνους βά-ρους) ἡ Γῆ ἔλκει τὴν Σελήνην;

(ΑΠ: α) 0,26 cm/sec², β) $21,2 \cdot 10^{25} \text{ t}^*$)

62) Ἐπὶ ὁριζοντίου στελέχους, στερεωμένου ὅπως δεικνύει τὸ παρακείμενον σχῆμα, καὶ δυνάμενον νά περιστραφῇ περὶ κατακόρυφον ἄξονα, δύνανται νά ὀλισθαίνουν ἐλευθέρως δύο μεταλλινὲς σφαῖραι, συνδεδεμέναι μεταξὺ των δι' ἀλύσεως, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν μαζῶν εἶναι $m_1 : m_2 = 2 : 1$. Ποῖος πρέπει νά εἶναι ὁ λόγος $r_1 : r_2$ τῶν ἀκτίνων, ὥστε τὸ σύστημα τῶν δύο σφαιρῶν νά μὴ ὀλισθήσῃ, ὅταν τεθῇ εἰς περιστροφὴν;

(ΑΠ: 1 : 2)



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

ΒΑΡΥΤΗΣ

• § 62. Νόμος του Νεύτωνα. Όλα τὰ σώματα, ἀφιέμενα ἐλεύθερα, πίπτουν εἰς τὴν Γῆν, ἐφ' ὅσον ἄλλη αἰτία δὲν ἀνθίσταται εἰς τὴν κίνησιν ταύτην. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὴν ἰδιότητα, τὴν ὁποίαν ἔχουν ὅλα τὰ σώματα, νὰ ἔλκωνται ὑπὸ τῆς Γῆς. Τὸ αἷτιον τῆς παραγωγῆς τῶν ἑλκτικῶν αὐτῶν δυνάμεων καλεῖται *βαρύτης*.

Τὸ φαινόμενον τοῦτο (τῆς ἐμφανίσεως, δηλ., τῶν ἑλκτικῶν δυνάμεων) εἶναι γενικόν, παρατηρούμενον ὅχι μόνον ἐπὶ σωμάτων, εὐρισκομένων πλησίον τῆς Γῆς, ἀλλὰ καὶ μεταξὺ τῶν οὐρανίων σωμάτων· ὁ ἥλιος, π.χ., ἔλκει τὴν Γῆν. Συμφώνως πρὸς τὸ ἄξιωμα «δρᾶσις = ἀντίδρασις» καὶ ἡ Γῆ ἔλκει τὸν ἥλιον μὲ ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν.

Ἑλκτικαὶ δυνάμεις τοιαύτης φύσεως ἐμφανίζονται μεταξὺ δύο οἰωνοδύοτε σωμάτων, ὁποιοῦνται δὲ τῇ βοήθειᾳ τοῦ *νόμου τῆς παγκοσμίου ἑλξεως* τοῦ Νεύτωνα, ὁ ὁποῖος διατυπῶνται ὡς ἑξῆς:

«Ἡ δύναμις F , μὲ τὴν ὁποίαν ἑλκονται δύο σώματα, εἶναι ἀνάλογος τοῦ γινομένου τῶν μαζῶν των m_1 καὶ m_2 , καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως r αὐτῶν». Ἡτοι εἶναι

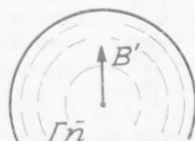
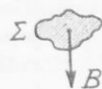
$F = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$	Νόμος τοῦ Νεύτωνα
---	-------------------

ἐνθα k εἶναι μία σταθερά, ἡ ὁποία εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς φύσεως τῶν δύο σωμάτων καὶ καλεῖται *σταθερὰ τῆς παγκοσμίου ἑλξεως*.

§ 63. Βάρος. Εἰδικὴ περίπτωσις τῆς παγκοσμίου ἑλξεως εἶναι τὸ βάρος. Βάρος B ἐνὸς σώματος καλεῖται ἡ δύναμις, μὲ τὴν ὁποίαν ἡ Γῆ ἔλκει τὸ σῶμα τοῦτο.

Κατὰ τὸ ἄξιωμα «δρᾶσις = ἀντίδρασις», ἀφοῦ ἡ Γῆ ἔλκει τὸ σῶμα Σ διὰ τῆς δυνάμεως B (σχ. 101), πρέπει καὶ τὸ σῶμα νὰ ἔλκη τὴν Γῆν μὲ τὴν ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν B' . Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως B τὸ σῶμα κινεῖται, ἐπιταχυνόμενον, πρὸς τὴν Γῆν. Ἐπιτάχυνσιν λαμβάνει, ὁμοίως, καὶ ἡ Γῆ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως B' . Λόγω, ὅμως, τῆς μεγάλης μάζης αὐτῆς, ἡ ἐπιτάχυνσις αὕτη εἶναι, πρακτικῶς, ἴση πρὸς μηδέν.

Τὴν διεύθυνσιν τοῦ βάρους προσδιορίζομεν πειραματικῶς διὰ τοῦ *νήματος τῆς στάθμης*, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐκ βαρέος σώματος, ἐξηρημένου διὰ νήματος. Τὸ βάρος τοῦ σώματος τείνει τὸ νῆμα κατὰ τὴν διεύθυνσίν του, ἡ δὲ οὕτω καθοριζομένη διεύθυνσις κα-



Σχ. 101. Ἡ Γῆ ἔλκει τὸ σῶμα Σ μὲ τὴν δύναμιν B , τὸ δὲ σῶμα ἔλκει τὴν Γῆν μὲ τὴν ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν B' .

λείται **κατακόρυφος** τοῦ τόπου καὶ διευθύνεται πρὸς τὸ κέντρον τῆς Γῆς. Πᾶν ἐπίπεδον, κάθετον ἐπὶ τὴν κατακόρυφον, καλεῖται **ὀριζόντιον**. Τοιοῦτο ὀριζόντιον ἐπίπεδον ἀποτελεῖ ἡ ἐλευθέρᾳ ἐπιφάνεια ἡρεμοῦντος ὕγρου.

Ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος. Ὅταν ἐπὶ τινος σώματος ἡ μόνη δρῶσα δύναμις εἶναι τὸ βάρος (περίπτωσις λίθου, ἀφεθέντος ἐλευθέρου διὰ νὰ πέσῃ ἐν τῷ κενῷ), τὸ σῶμα θὰ ἐκτελέσῃ, συμφώνως πρὸς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς, ἐπιταχυνομένην κίνησιν. Ἐπειδὴ, ὡς εἶδομεν, τὸ βάρος ἐνὸς σώματος εἶναι σταθερόν, ἔπεται ὅτι καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις θὰ εἶναι σταθερά, τὸ σῶμα, δηλ., κατὰ τὴν πτώσιν του, θὰ ἐκτελῇ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν. Ἡ σταθερὰ αὕτη ἐπιτάχυνσις καλεῖται **ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος** καὶ συμβολίζεται διὰ τοῦ γράμματος g .

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν καὶ ἐν προκειμένῳ τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς, ὁ ὁποῖος συνδέει τὴν δύναμιν (αἷτιον) μὲ τὴν ἐπιτάχυνσιν (ἀποτέλεσμα), θὰ λάβωμεν τὴν σχέσιν

$$B = m \cdot g$$

Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εὐρίσκεται, τόσον θεωρητικῶς ὅσον καὶ πειραματικῶς (βλ. κατωτέρω), ὅτι εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλα τὰ σώματα εἰς τὸν αὐτὸν τόπον, μεταβάλλεται δὲ ὀλίγον μετὰ τοῦ γεωγραφικοῦ πλάτους τοῦ τόπου. Διὰ γεωγραφικὸν πλάτος 45° εὐρέθη ὅτι τὸ g ἔχει τιμὴν, περίπου, ἴσην πρὸς $9,81 \text{ m/sec}^2$. Ἦτοι εἶναι

$$g_{45^\circ} = 9,81 \text{ m/sec}^2$$

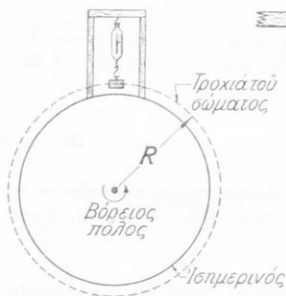
Εἰς πολλὰς περιπτώσεις ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνεται, ὅτι ἄλλα σώματα πίπτουν μὲ μικροτέραν ἐπιτάχυνσιν καὶ ἄλλα μὲ μεγαλυτέραν. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὴν ἐμφάνισιν κατὰ τὴν πτώσιν καὶ ἄλλης δυνάμεως· τῆς **ἀντιστάσεως** τοῦ ἀέρος. Ἄν, ὅμως, δὲν ὑπῆρχεν ἡ ἀντίστασις αὕτη, (ἄν, δηλ., ἡ πτώσις ἐγένετο εἰς τὸ κενόν), ὅλα τὰ σώματα θὰ εἶχον τὴν αὐτὴν ἐπιτάχυνσιν. Τοῦτο ἀποδεικνύεται πειραματικῶς διὰ τοῦ **σωλήνος τοῦ Νεύτωνος** (σχ. 102). Οὗτος εἶναι ὑάλινος σωλήν, μεγάλου σχετικῶς μήκους, ἐκ τοῦ ὁποῖου δυνάμεθα, δι' ἀντλίας, ν' ἀφαιρῶμεν τὸν ἀέρα καὶ ἐντὸς τοῦ ὁποῖου ἔχουν τεθῇ δύο σώματα· π.χ., μικρὸν πτερόν καὶ μικρὰ ξυλίνη σφαῖρα. Ἐὰν ἡ στρόφιγξ εἶναι ἀνοικτὴ (ἐάν, δηλ., ἐντὸς τοῦ σωλήνος ὑπάρχῃ ἀήρ) καὶ ἀναστρέψωμεν τὸν σωλήνα, οὕτως ὥστε τὰ δύο σώματα νὰ εὐρεθοῦν εἰς τὸ ἄνω ἄκρον, παρατηροῦμεν ὅτι πρώτη πίπτει ἡ σφαῖρα καί, πολὺ ἀργότερον, τὸ πτερόν. Ἀφαιρουμένων, ἀκολουθῶς, τὸν ἀέρα ἐκ τοῦ σωλήνος καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὸ πείραμα. Θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, τώρα, καὶ τὰ δύο σώματα πίπτουν συγχρόνως.



Σχ. 102. Ὅταν ἀφαιρεθῇ ὁ ἀήρ, ἡ σφαῖρα καὶ τὸ πτερόν πίπτουν συγχρόνως.

$$B - F = m \cdot \frac{v^2}{R} = m \cdot \omega^2 \cdot R \quad \text{ή} \quad F = B - m \cdot \omega^2 \cdot R, \quad (1)$$

ένθα ω είναι η γωνιακή ταχύτης της $\Gamma\etaς$ και R η ακτίς της κυκλικής τροχιάς, ή όποια είναι η ακτίς της $\Gamma\etaς$ εις τόν 'Ισημερινόν. Έκ του τύπου (1) προκύπτει ότι η δύναμις F , την οποίαν δεικνύει τὸ δυναμόμετρον — και τὴν όποίαν ἐκαλέσαμεν «φαινόμενον βάρος» — δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὴν δύναμιν B , ή όπεία εἶναι τὸ «ἀληθὲς βάρος», δηλ., ή ἐκ τῆς παγκοσμίου ἑλξεως προερχομένη δύναμις, ἀλλὰ μικροτέρα αὐτῆς.



Σχ. 103. Κάτομης τῆς $\Gamma\etaς$, παρατηρουμένης ὑπὸ παρατηρητοῦ, εὗρισκομένου εἰς τὸν βόρειον πόλον. Τὸ ἐπίπεδον τοῦ σχεδίου εἶναι τὸ ἰσημερινόν ἐπίπεδον.

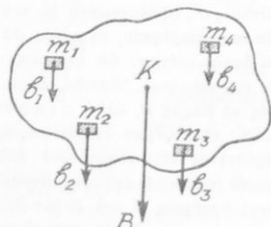
Οἱ ἄνω ὑπολογισμοὶ ἔγιναν διὰ σώμα, εἰς σκόμον εἰς τὸν 'Ισημερινόν. "Όταν τὸ σῶμα εὗρισκεται εἰς σῆμεῖα, κείμενα ἐκατέρωθεν αὐτοῦ, ή ακτίς τῆς διαγραφομένης τροχιάς γίνεται μικροτέρα και, κατὰ τὸν τύπον (1), ή διαφορὰ μεταξὺ «ἀληθοῦς» και «φαινόμενου βάρους» γίνεται μικροτέρα.

Εἰς τοὺς πόλους ($R = 0$) ή διαφορὰ αὕτη μηδενίζεται.

Ἐξ ὅλων τῶν λεχθέντων ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι τὸ ἐκ μετρήσεων προκύπτων g (δηλ. τὸ «φαινόμενον g ») μεταβάλλεται ἀπὸ τόπου εἰς τόπον, ἔχει δὲ τὴν μικροτέραν τιμὴν εἰς τὸν 'Ισημερινόν και τὴν μεγαλυτέραν εἰς τοὺς πόλους. "Όπως, ὁμως, φαίνεται εἰς τὸν παρακείμενον πίνακα αἱ μεταβολαὶ αὐταὶ τοῦ g εἶναι, σχετικῶς, μικραὶ.

Λόγῳ τῆς μεταβολῆς τοῦ «φαινομένου βάρους» ἀπὸ τόπου εἰς τόπον, εἰς τὸν ὅρισμόν τῆς μονάδος δυνάμεως 1 kg^* , προστίθεται και ὁ ὅρος «εἰς τόπον γεωγραφικοῦ πλάτους 45° », εἰς τὸν ὅποιον τὸ g ἔχει τιμὴν, περίπου ἴσην πρὸς 981 cm/sec^2 .

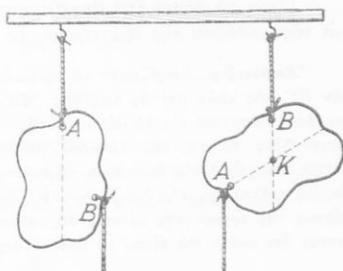
Γεωγραφικὸν πλάτος	Τόπος	g $\text{cm} \cdot \text{sec}^{-2}$
0°	'Ισημερινός	978,0
38°	'Αθήναι	980,0
45°		980,6
90°	Πόλοι	983,2



Σχ. 104.

§ 65. Ἀκριβὲς ὅρισμός τοῦ βάρους ἐνὸς σώματος. Πάν σῶμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἀποτελεῖται ἐκ μεγάλου ἀριθμοῦ ὕλικῶν σημείων. Ἡ ὀλική μᾶζα τοῦ σώματος θὰ εἶναι, λοιπόν, ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μαζῶν $m_1, m_2, m_3, \dots$ ἐνὸς ἐκάστου ὕλικου σημείου. Ἐκαστον ὕλικόν σημείον $m_1, m_2, m_3, \dots$ ἔλκεται ὑπὸ τῆς $\Gamma\etaς$ μὲ μίαν δύναμιν $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ (σχ. 104), ή όποία εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὕλικου τούτου σημείου. Βάρος B τοῦ σῶματος θὰ εἶναι, λοιπόν, ή συνισταμένη ὅλων τῶν μικρῶν αὐτῶν βαρῶν $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ Ἐπειδὴ ὅλαι αὐταὶ αἱ δυνάμεις εἶναι κατακόρυφοι, ἔπεται ὅτι και τὸ βάρος τοῦ σώματος, ὡς συνισταμένη αὐτῶν, θὰ ἔχη και αὐτὸ τὴν διεύθυνσιν τῆς κατακόρυφου.

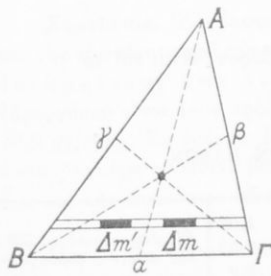
§ 66. Κέντρον βάρους. Ἐξαρτῶμεν ἓν σῶμα διὰ νήματος ἀπὸ τινος σημείου A (σχ. 105) καὶ σημειοῦμεν ἐπ' αὐτοῦ τὴν προέκτασιν τοῦ νήματος, ἢ ὁποία, ὥς γνωστόν, μᾶς δίδει τὴν διεύθυνσιν τοῦ βάρους. Ἐπαναλαμβάνομεν τὸ αὐτὸ καὶ δι' ἄλλο σημεῖον B καὶ σημειοῦμεν, ὡσαύτως, τὴν προέκτασιν τοῦ νήματος, ἢ ὁποία τέμνεται μὲ τὴν προηγουμένην εἰς ἓν σημεῖον. Ἐάν, ἀκολούθως, ἐξαρτήσωμεν τὸ σῶμα καὶ δι' ἄλλων σημείων, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὅλαι αἱ διευθύνσεις τοῦ βάρους διέρχονται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τοῦτης. Τὸ κοινὸν τοῦτο σημεῖον K , διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται ἡ διεύθυνσις τοῦ βάρους, ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου ἐξαρτήσεως, καλοῦμεν **κέντρον βάρους** τοῦ σώματος. Συνήθως, τὸ βάρος σχεδιάζεται ὥς ἄνυσμα μὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ κέντρον βάρους K (βλ. π.χ., σχ. 104).



Σχ. 105.

Τὸ κέντρον βάρους ἐνὸς σώματος δὲν εὐρίσκεται, κατ' ἀνάγκην, ἐντὸς τοῦ σώματος. Οὕτω, π.χ., τὸ κέντρον βάρους μιᾶς κυκλικῆς στεφάνης εὐρίσκεται εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, δηλ., ἐκτὸς τοῦ σώματος.

★ ★ Τὸ κέντρον βάρους ὡς κέντρον *παράλληλων δυνάμεων*. Αἱ δυνάμεις $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ τοῦ σχήματος 104 ἀποτελοῦν σύστημα παράλληλων δυνάμεων (§ 31), τοῦ ὁποίου συνισταμένη εἶναι ἡ δύναμις B . Ἐάν στρέψωμεν ὁποσδήποτε τὸ ἀπεικονιζόμενον σῶμα, αἱ δυνάμεις $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ ἐξακολουθοῦν νὰ εἶναι παράλληλοι καὶ νὰ διατηροῦν σταθερὸν τὸ μέτρον των. Συμφώνως πρὸς τὰ λεχθέντα εἰς τὴν § 31, ἡ νέα συνισταμένη θὰ τέμνῃ τὴν προηγουμένην εἰς σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ προσανατολισμοῦ τοῦ σώματος. Τὸ οὕτω προκύπτον κέντρον *παράλληλων δυνάμεων* (K) εἶναι, ἀκριβῶς, τὸ κέντρον βάρους τοῦ σώματος.



Σχ. 106.

Εὐρεσις τοῦ κέντρου βάρους. Τὸ κέντρον βάρους σωμάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἄπλουν γεωμετρικὸν σχῆμα (π.χ., κύβος, σφαῖρα, τρίγωνον κ.λ.) δύναται νὰ προσδιορισθῇ εὐκόλως (*).

Καὶ εἰς μὲν τὸν κύβον, τὴν σφαῖραν καὶ τὸν κύλινδρον ἡ συμμετρία δεικνύει ἀμέσως τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον εὐρί-

σκεται τὸ κέντρον βάρους, ἐνῶ εἰς τὴν περίπτωσιν ἐπιπέδου τριγωνικῆς πλα-

(*) Τὸ κέντρον βάρους καθορίζεται εὐκόλως ἐκ τῆς συμμετρίας, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ σῶμα εἶναι *ὁμογενές*, δηλ., ὅταν ὅλα τὰ τμήματα αὐτοῦ ἔχουν τὰς αὐτὰς ιδιότητες (π.χ., τὴν αὐτὴν πυκνότητα κ.λ.).

κός (σχ. 106), ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω, τὸ κέντρον βάρους εὐρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν τριῶν διαμέσων $A\alpha$, $B\beta$, $\Gamma\gamma$.

Ὅταν τὸ σῶμα ἔχη ἀκανόνιστον σχῆμα, τὸ κέντρον βάρους εὐρίσκομεν διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἐξαρτήσεως ἐκ διαφόρων σημείων.

Ἀπόδειξις. Χωρίζομεν τὸ τρίγωνον δι' εὐθειῶν, παραλλήλων πρὸς τὴν πλευρὰν $B\Gamma$, εἰς πολὺ στενὰς λωρίδας. Τὸ κέντρον βάρους ἐκάστης στοιχειώδους λωρίδος θὰ εὐρίσκεται εἰς τὸ μέσον αὐτῆς — ἥτοι ἐπὶ τῆς διαμέσου $A\alpha$ — διότι διὰ πᾶν στοιχειῶδες τμήμα τῆς λωρίδος, μάζης Δm , ὑπάρχει ἄλλο τμήμα $\Delta m'$, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῆς διαμέσου. Ἐπομένως τὸ κέντρον βάρους τῆς τριγωνικῆς πλακὸς θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διαμέσου $A\alpha$. Ἐπειδὴ, διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, τὸ κέντρον βάρους τῆς τριγωνικῆς πλακὸς θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς διαμέσου $B\beta$ καὶ ἐπὶ τῆς $\Gamma\gamma$, ἔπεται ὅτι τοῦτο θὰ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τομῆς τῶν τριῶν διαμέσων.

§ 67. Εἰδικὸν βάρος - Πυκνότης. Θεωρήσωμεν ὁμογενὲς σῶμα, τὸ ὁποῖον ἔχει βάρος B καὶ ὄγκον V . **Εἰδικὸν βάρος** ε τοῦ ΥΛΙΚΟΥ, ἐκ τοῦ ὁποῖου ἀποτελεῖται τὸ σῶμα τοῦτο, καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ βάρους B τοῦ σώματος διὰ τοῦ ὄγκου V αὐτοῦ. Ὅτιοι

$$\varepsilon = \frac{B}{V}$$

Μονάδες. 1) *C.G.S.* Ἐκ τῆς μονάδος 1 dyn (διὰ τὸ βάρος) καὶ 1 cm^3 (διὰ τὸν ὄγκον) ὀρίζεται ἡ μονὰς εἰδικοῦ βάρους εἰς τὸ σύστημα *C.G.S.*, ἡ ὁποία εἶναι ἡ

$$1 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^3}.$$

2) *T.S.* Ἐκ τῶν μονάδων 1 kgr^* (διὰ τὸ βάρος) καὶ 1 m^3 (διὰ τὸν ὄγκον) ὀρίζεται ἡ μονὰς εἰδ. βάρους εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, ἡ ὁποία εἶναι τὸ

$$1 \frac{\text{kgr}^*}{\text{m}^3}.$$

Συνήθης μονὰς μετρήσεως τοῦ εἰδικοῦ βάρους εἶναι καὶ τὸ

$$1 \frac{\text{gr}^*}{\text{cm}^3}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΙΔΙΚΩΝ ΒΑΡΩΝ

(εἰς gr^*/cm^3)

*Ὄσμιον 22,5	*Υδωρ 1,00	Εἰς θερμοκρασίαν 20° C καὶ πίεσιν 1 ἀτμοσφαίρας
Λευκόχρυσος . . . 21,5	Πάγος 0,92	
Χρυσὸς 19,3	Πετρέλαιον 0,9	
*Υδράργυρος . . . 13,6	Οἰνόπνευμα 0,79	CO ₂ 0,0020 *Ὄξυγόνον 0,0014 *Ἀήρ 0,0013 Φωταέριον 0,0006 *Υδρογόνον 0,000089
Μόλυβδος 11,3	Ξύλον ἐλάτης	
*Ἀργυρος 10,5	χλωρὸν 0,8-1,2	
Χαλκὸς 8,9	Ξύλον ἐλάτης	
*Ὀρείχαλκος 8,6	Ξηρὸν 0,4-0,7	
Σίδηρος 7,8	Φελλὸς 0,24	
*Αργίλιον 2,7	Ξύλον Balsa 0,12	

★ **Σχετικὸν εἰδικὸν βάρος.** Οὕτω καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ εἰδικοῦ βάρους ε_x ἐνὸς ὑλικοῦ διὰ τοῦ εἰδικοῦ βάρους $\varepsilon_{v,4}$ τοῦ ὕδατος, εὗρισκομένου εἰς θερμοκρασίαν 4°C . Ἦτοι

$$\varepsilon_{ox} = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_{v,4}} \quad (1)$$

Τὸ σχετικὸν εἰδικὸν βάρος ἐκφράζεται δι' ἐνὸς ἀριθμοῦ - χωρὶς, δηλ., ν' ἀπαιτοῦνται μονάδες. Οὕτω, ἐφ' ὅσον τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου εἶναι $13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, τοῦ δὲ ὕδατος $1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, τὸ σχετικὸν εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου θὰ εἶναι $13,6$.

Ἐὰν θεωρήσωμεν ὡρισμὲνον ὄγκον V καὶ διὰ τὰ δύο ὑλικά, πολλαπλασιάσωμεν δὲ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ τύπου (1) ἐπὶ τὸ V , θὰ λάβωμεν

$$\varepsilon_{ox} = \frac{\varepsilon_x \cdot V}{\varepsilon_{v,4} \cdot V} \quad \eta) \quad \varepsilon_{ox} = \frac{B_x}{B_{v,4}}$$

Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι τὸ σχετικὸν εἰδικὸν βάρος ἐνὸς ὑλικοῦ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ βάρους ἐνὸς σώματος ἐκ τοῦ ὑλικοῦ τούτου διὰ τοῦ βάρους ἴσου ὄγκου ὕδατος, εὗρισκομένου εἰς θερμοκρασίαν 4°C .

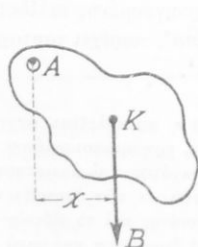
Σχετικὴ πυκνότης. Κατ' ἀνάλογον τρόπον δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν καὶ τὴν **σχετικὴν πυκνότητα** ἐνὸς ὑλικοῦ ὡς τὸ πηλίκον τῆς πυκνότητος αὐτοῦ διὰ τῆς πυκνότητος τοῦ ὕδατος, εὗρισκομένου εἰς θερμοκρασίαν 4°C .

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου προκύπτει ὅτι ἡ σχετικὴ πυκνότης εἶναι ὁ αὐτὸς ἀκριβῶς ἀριθμὸς, ὅπου· καὶ τὸ σχετικὸν εἰδικὸν βάρος.

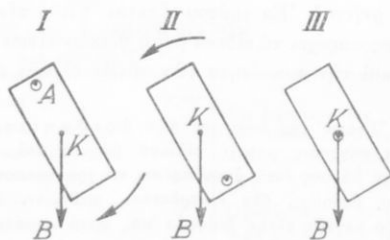
Παρατήρησις: Ἀμφότεραι αἱ ἔννοιαι αὗται εἶναι περιτταί, καθ' ὅσον εἰς οὐδὲν πρόβλημα χρησιμοποιοῦνται, ἢ δὲ χρήσις των δικαιολογεῖται μόνον κατὰ τὴν διδασκαλίαν εἰς τὰ Δημοτικὰ Σχολεῖα, εἰς τὰ ὅποια ἄλλαι ἔννοιαι (εἰδικὸν βάρος, πυκνότης κ.λ.) εἶναι δύσκολον νὰ κατανοηθοῦν ὑπὸ τῶν μικρῶν μαθητῶν.

§ 68. Ἰσορροπία σωμάτων ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους των.

Διὰ νὰ ἰσορροπῇ ἓν σῶμα, ἐξηρημένον ἀπὸ ὀριζόντιον ἄξονα, πρέπει ἡ κατακόρυφος, ἢ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου βάρους, νὰ τέμνῃ τὸν ἄξονα ἐξαρτήσεως. Τοῦτο εἶναι προφανές, διότι εἰς οἰανδήποτε ἄλλην θέσιν (σχ. 107) τὸ βάρος B δημιουργεῖ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ἐξαρτήσεως A μίαν



Σχ. 107.



Σχ. 108.

ροπήν, ἴσην πρὸς $B \cdot x$, ἢ ὁποία στρέφει τὸ σῶμα περὶ τὸν ἄξονα τούτον.

Εἴδη ἰσορροπίας. Διακρίνομεν τρία εἴδη ἰσορροπίας:

1) **Εὐσταθὲς ἰσορροπία** εἶναι ἡ ἰσορροπία ἐκείνη, εἰς τὴν ὁποίαν τὸ σῶμα, ἀπομακρυνόμενον ὀλίγον ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας, ἐπανέρχεται μόνον του εἰς τὴν προτέραν του θέσιν. Εἰς τὴν περιπτώσιν ταύτην τὸ κέντρον βάρους εὐρίσκεται κάτω τοῦ ἄξονος περιστροφῆς (σχ. 107 καὶ σχ. 108, I).

2) **Ἀσταθὲς ἰσορροπία** εἶναι ἡ ἰσορροπία ἐκείνη, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ σῶμα, ἀπομακρυνόμενον ὀλίγον ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας, δὲν ἐπανέρχεται εἰς τὴν προτέραν του θέσιν (σχ. 108, II). Εἰς τὴν ἀσταθὴ ἰσορροπίαν τὸ κέντρον βάρους εὐρίσκεται ἄνωθεν τοῦ ἄξονος περιστροφῆς.

3) **Ἀδιάφορος ἰσορροπία** εἶναι ἡ ἰσορροπία ἐκείνη, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ σῶμα ἰσορροπεῖ εἰς οἵανδήποτε θέσιν καὶ ἂν τεθῇ. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὁ ἄξων διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βάρους (σχ. 108, III).

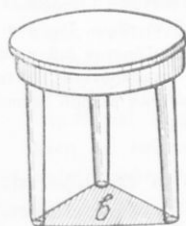
Ἐὰν παρακολουθήσωμεν τὴν κίνησιν τοῦ κέντρου βάρους ἐνὸς σώματος, τὸ ὁποῖον ἀπομακρύνομεν ὀλίγον ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας, θὰ παρα-



Σχ. 109. Ἀδιάφορος, εὐσταθὲς καὶ ἀσταθὲς ἰσορροπία.

τηρήσωμεν ὅτι, ἀναλόγως τοῦ εἶδους τῆς ἰσορροπίας, τὸ κέντρον βάρους εἴτε ἔχει ἀνέλθει (εὐσταθὲς ἰσορροπία), εἴτε ἔχει κατέλθει (ἀσταθὲς ἰσορροπία), εἴτε παρέμεινεν εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος. Βάσει τοῦ κριτηρίου τούτου εὐρίσκομεν ὅτι ἐκ τῶν τριῶν σφαιρῶν τοῦ σχήματος 109 ἡ πρώτη εὐρίσκεται εἰς ἀδιάφορον ἰσορροπίαν, ἡ δευτέρα εἰς εὐσταθὴ καὶ ἡ τρίτη εἰς ἀσταθὴ ἰσορροπίαν.

Ἴσορροπία σώματος, στηριζομένου διὰ βάσεως. Σῶμα, στηριζόμενον διὰ τῆς βάσεώς του, ἰσορροπεῖ, ὅταν ἡ



Σχ. 110. Ἡ γραμμωσκιωμένη ἐπιφάνεια β εἶναι ἡ ἐπιφάνεια στηρίξεως.

κατακόρυφος, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ σώματος, διέρχεται διὰ τῆς ἐπιφανείας στηρίξεως, δηλ., διὰ τῆς ἐπιφανείας, τῆς περιριζομένης ὑπὸ τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἐνώνουν τὰ ἄκρα σημεῖα στηρίξεως (σχ. 110). Ἡ ἰσορροπία εἶναι εὐσταθὲς, διότι, ἐὰν ἀπομακρύνωμεν τὸ σῶμα ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας του, τὸ κέντρον βάρους ἀνέρχεται.

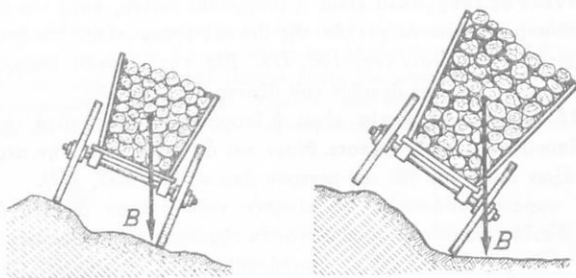


Σχ. 111. Ὁ κεκλιμένος πύργος τῆς Πίζης.

ἰσορροπία, τὸ κέντρον βάρους

Εἰς ἰσορροπίαν εὐρίσκεται, παρὰ τὴν κλίσιν του, καὶ ὁ ὀνομαστὸς πύργος τῆς Πίζης (σχ. 111), διότι ἡ κατακόρυφος, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου βάρους, διέρχεται διὰ τῆς βάσεώς του.

Ὁμοίως, ἐκ τῶν δύο ἁμαξῶν τοῦ σχήματος 112 ἡ πρὸς τ' ἀριστερὰ εὐρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν, ἐνῶ ἡ ἄλλη ἀνατρέπεται, διότι ἡ κατακόρυφος, ἡ



Σχ. 112. Ἡ δεξιὰ ἁμαξα ἀνατρέπεται, διότι ἡ διὰ τοῦ κέντρου βάρους διερχομένη κατακόρυφος πίπτει ἔξω τῆς ἐπιφανείας στηρίξεως.

διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου βάρους, δὲν συναντᾷ τὴν ἐπιφάνειαν στηρίξεως. Τοῦτο συμβαίνει παρὰ τὸ γεγονός ὅτι αἱ δύο ἁμαξαι εὐρίσκονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν κλίσιν καὶ ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι τὸ κέντρον βάρους τῆς δεξιᾶς ἁμάξης εὐρίσκεται ὑψηλότερον τοῦ κέντρου βάρους τῆς ἄλλης.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι ἡ ἰσορροπία ἐνὸς σώματος εἶναι τόσον εὐσταθεστέρα, ὅσον χαμηλότερον κεῖται τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ καὶ ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἐπιφάνεια στηρίξεως.

Ὁ βαθμὸς σταθερότητος ἐνὸς σώματος, εὐρισκομένου εἰς εὐσταθεῇ ἰσορροπίαν μετρεῖται ἐκ τῆς γωνίας, κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ στραφῇ τὸ σῶμα, ἵνα ἀνατραπῇ. Οὕτω, πρῖσμα μικρᾶς βάσεως καὶ μεγάλῃ ὕψους, στηριζόμενον διὰ μιᾶς τῶν βάσεών του ἐπὶ ὀριζοντίῳ ἐπιπέδῳ, ἔχει μικρὸν βαθμὸν σταθερότητος, διότι ἀρκεῖ μικρὰ γωνία κλίσεως, ἵνα ἀνατραπῇ, ἐν ἀντιθέσει πρὸς πρῖσμα μικροῦ ὕψους καὶ μεγάλης βάσεως, τὸ ὁποῖον ἔχει μέγαν βαθμὸν σταθερότητος.

§ 69. Ἐλευθέρα πτώσις. Ὅλα τὰ σώματα, πίπτοντα ἔλευθέρως εἰς τὸ κενὸν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους των (τὸ ὁποῖον, ὅπως εἶδομεν, εἶναι μία σταθερὰ δύναμις), ἐκτελοῦν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην εὐθύγραμμον κίνησιν, μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν, ἴσην πρὸς g . Δυνάμεθα, ἐπομένως, νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὴν ἔλευθέραν πτώσιν τοὺς γνωστοὺς νόμους τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως

$$s = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \text{καὶ} \quad v = g \cdot t,$$

ὁπότε, διὰ σῶμα, πίπτον ἀπὸ τοῦ ὕψους h , θὰ ἔχωμεν τοὺς τύπους

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad v = g \cdot t \quad (2)$$

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν διὰ τὴν ταχύτητα v , τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ σῶμα, ἀφίεμενον ἐλεύθερον ἀπὸ ὕψους h , τὴν ἐξίσωσιν

$$v = \sqrt{2gh}$$

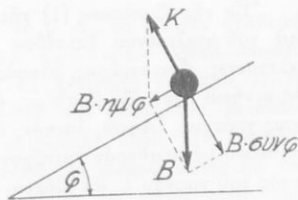
Νόμοι τῆς ἐλευθέρας πτώσεως. Συμφώνως πρὸς τ' ἀνωτέρω, διὰ τὴν ἐλευθέραν πτώσιν, ἡ ὁποία εἶναι εὐθύγραμμος κίνησις ὁμαλῶς ἐπιταχυνόμενη, ἰσχύουν τὰ ἑξῆς :

- 1) Ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς g .
- 2) Ἡ ταχύτης εἶναι ἀνάλογος τοῦ χρόνου πτώσεως.
- 3) Τὸ διάστημα, τὸ διανυόμενον ὑπὸ τοῦ πίπτοντος σώματος, εἶναι ἀνάλογον τοῦ τετραγώνου τοῦ χρόνου πτώσεως.

Εἶναι φανερόν ὅτι τὰ τρία μεγέθη ἐπιτάχυνσις, ταχύτης καὶ διάστημα εἶναι ἀνεξάρτητα τῆς μάζης ἢ ἄλλων ἰδιοτήτων τοῦ σώματος.

Ἐφαρμογή. Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς α) ἡ ἐπιτάχυνσις, β) ἡ ταχύτης καὶ γ) τὸ διάστημα συναρτήσῃ τοῦ χρόνου εἰς τὴν ἐλευθέραν πτώσιν. (Ἡ ἐπιτάχυνσις g νὰ ληφθῇ ἴση πρὸς 10 m/sec^2). Διὰ τὴν χάραξιν τῶν ἀντιστοιχῶν καμπυλῶν, ὑπολογίσατε τὰς τιμὰς τῶν ἄνω τριῶν μεγεθῶν κατὰ τὰς χρονικὰς στιγμὰς 0, 1, 2, 3, 4, 5 sec.

§ 70. Κίνησις σώματος ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου. Θεωρήσωμεν σφαῖραν, κατερχομένην κατὰ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου τοῦ σχήματος 113. Ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν κίνησιν, τὴν ὁποίαν θὰ ἐκτελέσῃ ἡ σφαῖρα αὕτη. Πρὸς τοῦτο πρῶτον εὕρισκομεν τὰς ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐξασκουμένας δυνάμεις: Αἱ δυνάμεις αὗται εἶναι δύο· 1) τὸ βάρος τῆς B καὶ 2) ἡ δύναμις K , ἡ προερχομένη ἐκ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἡ ὁποία, ἐπειδὴ θεωροῦμεν ὅτι δὲν ὑπάρχει τριβή, εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτό. Ἦδη, ἀναλύομεν τὴν δύναμιν B εἰς δύο συνιστώσας, μίαν — τὴν $B \cdot \eta \mu \varphi$ — παράλληλον πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον καὶ τὴν ἄλλην — τὴν $B \cdot \sigma \upsilon \nu \varphi$ — κάθετον ἐπ' αὐτό. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως K ἡ σφαῖρα δὲν ἐπιταχύνεται, πρέπει ἡ συνισταμένη τῶν δύο δυνάμεων K καὶ $B \cdot \sigma \upsilon \nu \varphi$ νὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν — δηλ., ἡ δύναμις K θὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν δύναμιν $B \cdot \sigma \upsilon \nu \varphi$.



Σχ. 113.

Κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας μόνον ἡ δύναμις $B \cdot \eta \mu \varphi$. Ἐπειδὴ τόσον τὸ βάρος B , ὅσον καὶ ἡ γω-

νία φ είναι σταθερά, ἡ δύναμις $B \cdot \eta \mu \varphi$ είναι σταθερά καί, συνεπώς, θὰ προσδίδῃ εἰς τὴν σφαῖραν σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν. Ἄρα, ἡ κίνησις τῆς σφαῖρας κατὰ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου εἶναι κίνησις ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη. Ἡ ἐπιτάχυνσις γ τῆς κινήσεως ταύτης ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς ἴση πρὸς

$$\gamma = \frac{\text{δύναμις}}{\mu\alpha\acute{\sigma}\alpha} = \frac{B \cdot \eta \mu \varphi}{m} = \frac{m \cdot g \cdot \eta \mu \varphi}{m}$$

ἢ $\gamma = g \cdot \eta \mu \varphi.$ (1)

Ἐπειδὴ τὸ $\eta \mu \varphi$ εἶναι πάντοτε μικρότερον τῆς μονάδος, ἡ ἐπιτάχυνσις γ θὰ εἶναι μικρότερα τῆς ἐπιταχύνσεως g , τὴν ὁποίαν θὰ εἶχεν ἡ σφαῖρα, ἐὰν ἐπιπτεν ἔλευθέρως.

***Εφαρμογή.** Ἀπὸ τοῦ ἄνω ἄκρου ἑνὸς κεκλιμένου ἐπιπέδου, μῆκους l m καὶ γωνίας κλίσεως 30° , ἀφήνεται ἔλευθéra μικρὰ σφαῖρα. Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ ἐπιτάχυνσις, μετὰ τὴν ὁποίαν κατέρχεται ἡ σφαῖρα. β) Ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος διὰ νὰ φθάσῃ αὕτη εἰς τὸ κατώτατον σημεῖον τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ γ) ἡ ταχύτης, τὴν ὁποίαν θὰ ἔχῃ ἡ σφαῖρα εἰς τὸ κατώτατον τοῦτο σημεῖον.

§ 71. Πειραματικὴ ἀπόδειξις τῶν νόμων τῆς πτώσεως.

α) **Διὰ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.** Ἐπειδὴ, κατὰ τὴν ἔλευθέραν πτῶσιν, τὰ σώματα πίπτουν μετὰ μεγάλῃν ἐπιτάχυνσιν καί, ὥς ἐκ τούτου, αἱ μετρήσεις χρόνων εἶναι πολὺ δυσχερεῖς, ἐλαττώνομεν τὴν ἐπιτάχυνσιν διὰ χρήσεως τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

Ἐκ τῆς ἑξισώσεως (1) τῆς προηγουμένης παραγράφου προκύπτει ὅτι διὰ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου δυνάμεθα νὰ ἐλαττώσωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν, ἐκλέγοντες, ἀντιστοίχως, μικρὰς τιμὰς τῆς γωνίας φ , ὅποτε, ἐπειδὴ ἡ σφαῖρα θὰ κινῆται σχετικῶς βραδέως, δυνάμεθα νὰ μετρώμεν εὐχερῶς τοὺς διαφόρους χρόνους. Ἀφοῦ, λοιπόν, ἡ σφαῖρα θὰ κατέρχεται ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου μετὰ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν, τὸ διάστημα s , τὸ ὁποῖον διανύει αὕτη ἐντὸς τοῦ χρόνου t , θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

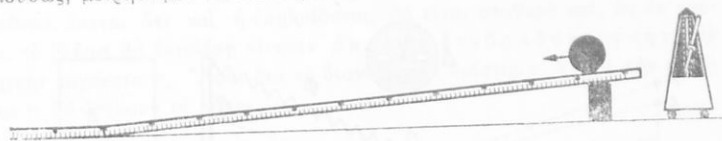
$$s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad \text{ἢ} \quad s = \frac{1}{2} g \cdot \eta \mu \varphi \cdot t^2, \quad (1)$$

ἡ δὲ ταχύτης v ὑπὸ τοῦ τύπου

$$v = \gamma \cdot t \quad \text{ἢ} \quad v = g \cdot \eta \mu \varphi \cdot t. \quad (2)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (1) προκύπτει ὅτι, ἀφοῦ τὸ g καὶ τὸ φ εἶναι σταθερά, τὰ διαστήματα εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν χρόνων. Τοῦτο ἀποδεικνύομεν διὰ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου τοῦ σχήματος 114: Ρυθμίζομεν τὴν κλίσιν τοῦ ἐπιπέδου οὕτως ὥστε τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον διανύει ἡ σφαῖρα

ἐντὸς ἐνὸς δευτερολέπτου (*), νὰ εἶναι ἴσον, π.χ., πρὸς 10 cm. Ἐάν, ἀκολουθῶς, μετρήσωμεν τὰ διαστήματα, τὰ ὁποῖα θὰ διανύσῃ αὕτη ἐντὸς 2, 3,



Σχ. 114. Ἀπόδειξις τῶν νόμων τῆς πτώσεως διὰ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

4 sec, θὰ εὗρωμεν ἀντιστοίχως 40 cm, 90 cm, 160 cm. Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐνῶ οἱ χρόνοι ἔχουν μεταξύ των λόγους 1:2:3:4, τὰ διαστήματα ἔχουν λόγους 1:4:9:16. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὰ διαστήματα εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν χρόνων, ἐντὸς τῶν ὁποίων διηγήθησαν.

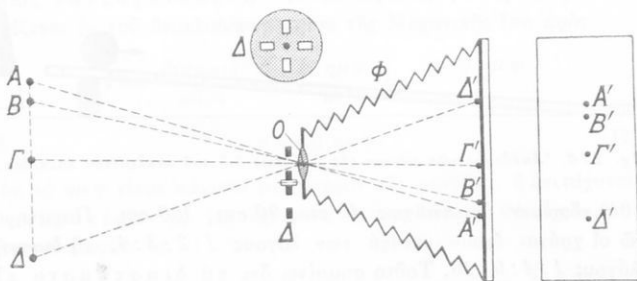
Διὰ νὰ εὗρωμεν τὴν ταχύτητα, τὴν ὁποίαν ἔχει ἡ σφαῖρα εἰς τὸ τέλος τοῦ 4^{ου} δευτερολέπτου, ἀφήνομεν αὐτὴν νὰ ἐκκινήσῃ ἀπὸ σημείου, εὐρισκόμενον ἀκριβῶς εἰς ἀπόστασιν 160 cm ἀπὸ τοῦ κάτω ἄκρου τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ὅποτε ὁ χρόνος τῆς διαδρομῆς τῆς θὰ εἶναι, κατὰ τ' ἀνωτέρω, ἴσος πρὸς 4 sec. Ὅταν ἡ σφαῖρα φθάσῃ εἰς τὸ κάτω ἄκρον τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἀρχίζει νὰ κινῆται ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου ἴσοις ταχὺς μετὰ ταχύτητα, ἴσην πρὸς ἐκείνην, τὴν ὁποίαν εἶχε κατὰ τὸ τέλος τοῦ 4 sec. Ἐάν, τώρα, μετρήσωμεν τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον διανύει ἡ σφαῖρα ἐπὶ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ 5^{ου} δευτερολέπτου, θὰ εὗρωμεν τὴν ζητούμενην ταχύτητα.

Ἐκ τοῦ τύπου (2) προκύπτει ὅτι, ἀφοῦ τὸ g καὶ τὸ φ εἶναι σταθερά, αἱ ταχύτητες εἶναι ἀνάλογοι τῶν χρόνων. Τοῦτο ἀποδεικνύομεν ὡς ἑξῆς: Ἀφήνομεν τὴν σφαῖραν νὰ ἐκκινήσῃ ἐκ σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν διαδοχικῶς ἀπὸ τοῦ κάτω ἄκρου τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου κατὰ 10 cm, 40 cm, 90 cm, 160 cm καὶ μετροῦμεν, κατὰ τὸν περιγραφέντα τρόπον, τὰς ταχύτητας τῆς σφαίρας κατὰ τὴν κίνησιν αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου. Ἐκ τῶν μετρήσεων εὐρίσκομεν ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι πρὸς 20, 40, 60, 80 cm/sec ἢ 20·1, 20·2, 20·3, 20·4 cm/sec. Δεδομένου ὅτι, κατὰ τὴν κίνησιν τῆς σφαίρας ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, οἱ χρόνοι ἔχουν λόγους 1:2:3:4, ἐκ τῶν τιμῶν τῶν ταχυτήτων προκύπτει ὅτι αἱ ταχύτητες εἶναι ἀνάλογοι τῶν χρόνων.

★ β) Διὰ τῆς *χρονοφωτογραφικῆς μεθόδου*. Πρὸ μέλανος πετάσματος ἀφήνομεν νὰ πέσῃ μία μικρὰ μεταλλικὴ σφαῖρα, τὴν ὁποίαν ἔχομεν χρωματίσει λευκὴν καὶ ἡ ὁποία φωτίζεται ἰσχυρῶς διὰ τινος φωτεινῆς πηγῆς (π.χ., δι' ἡλεκτρικοῦ προβο-

(*) Εἰς τὴν πρᾶξιν ρυθμίζομεν τὴν κλίσιν οὕτως ὥστε ἡ σφαῖρα νὰ διανύῃ, ἐντὸς 4 sec, διάστημα 160 cm. Εἰς τὸ πείραμα τοῦτο τοὺς χρόνους μετροῦμεν διὰ 19^{ου} εἰκονιζομένου μετρονόμου (δεξιά).

λέως). Κατά την πτώσιν της σφαίρας, λαμβάνομεν διαδοχικάς φωτογραφίας αὐτῆς, ὅταν εὐρίσκεται εἰς διαφόρους θέσεις $A, B, \Gamma, \Delta, \dots$ (σχ. 115), ὁπότε ἡ θέσις τῶν



Σχ. 115. Χρονοφωτογράφησις ἐλευθέρως πύπτοντος σώματος.

ειδώλων $A', B', \Gamma', \Delta', \dots$ ἐπὶ τῆς φωτογραφικῆς πλακῶς θὰ ἐξαρτᾶται, προφανῶς, ἀπὸ τὴν ἐκάστοτε θέσιν τῆς σφαίρας. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἐξῆς μέθοδον: Πρὸ τοῦ φακοῦ τῆς μηχανῆς τοποθετοῦμεν τὸν δίσκον Δ , ὁ ὁποῖος φέρει ἀριθμόν τινα σχισμῶν καὶ δύναται νὰ περιστρέφεται ἰσοταχῶς. Ἐνεκα τούτου ὁ φακὸς θὰ καλύπτεται καὶ θ' ἀποκαλύπτεται κατ' ἴσα χρονικά διαστήματα, ὁπότε θὰ λαμβάνονται διαδοχικαὶ φωτογραφίαι τῆς σφαίρας κατ' ἴσα χρονικά διαστήματα (*). Συνεπῶς, μετὰ τὴν ἐμφάνισιν τῆς φωτογραφικῆς πλακῶς, θὰ λάβωμεν ἐπ' αὐτῆς σειρὰν εἰδώλων $A', B', \Gamma', \Delta', \dots$ τῆς σφαίρας, ὅταν αὕτη εὐρίσκητο, ἀντιστοίχως, εἰς τὰς θέσεις $A, B, \Gamma, \Delta, \dots$ Λόγω τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων $AOB, A'OB', AOG, A'O\Gamma', \dots$, εἶναι προφανές ὅτι αἱ ἀποστάσεις $A'B', A'\Gamma', A'\Delta'$ τῶν εἰδώλων εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀποστάσεων $AB, A\Gamma, A\Delta, \dots$, τὰς ὁποίας διήνυσσε κατὰ τὴν πτώσιν τῆς σφαίρας. Ἐάν μετρήσωμεν τὰς ἀποστάσεις $A'B', A'\Gamma', A'\Delta', \dots$ θὰ εὐρωμεν ὅτι ἡ ἀπόστασις $A'\Gamma'$ εἶναι τετραπλασία τῆς $A'B'$, ἡ ἀπόστασις $A'\Delta'$ εἶναι ἑννεαπλασία τῆς $A'B'$ κ.ο.κ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὰ διαστήματα, τὰ ὁποῖα διηνύθησαν ὑπὸ τοῦ εἰδώλου τῆς σφαίρας, εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν χρόνων, ἐντὸς τῶν ὁποίων διηνύθησαν. Συνεπῶς καὶ τὰ διαστήματα $AB, A\Gamma, A\Delta, \dots$, τὰ ὁποῖα διήνυσεν ἡ πύπτουσα σφαῖρα, θὰ εἶναι καὶ αὐτὰ ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν χρόνων, ἐντὸς τῶν ὁποίων διηνύθησαν. Ἐπειδὴ, ὁμως, ὁ νόμος οὗτος τῶν διαστημάτων ἰσχύει διὰ τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν, ἔπεται ὅτι ἡ πτώσις τῆς σφαίρας εἶναι κίνησις ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη.

§ 72. Κατακόρυφος βολὴ πρὸς τὰ ἄνω. Θεωρήσωμεν βλήμα, βαλλόμενον ἐν τῷ κενῷ κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω με ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 . Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸ εἶδος τῆς κινήσεως, τὴν ὁποίαν θὰ ἐκτελέσῃ τὸ βλήμα, ἐξετάζομεν τὰς ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένας δυνάμεις: Ἐπὶ τοῦ βλήματος ἐξασκεῖται μίαν μόνον δύναμιν — τὸ βάρος τοῦ B — ἡ ὁποία εἶναι σιτιθερὰ καὶ ἔχει φοράν, ἀντίθετον τῆς φορᾶς τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος. Ἐπομέ-

(*) Π.χ., ἂν ὁ δίσκος φέρῃ 4 σχισμάς καὶ περιστρέφεται με 5 στροφὰς ἀνὰ sec, αἱ διαδοχικαὶ φωτογραφίαι θὰ λαμβάνωνται κατ' ἴσα χρονικά διαστήματα, ἴσα πρὸς $1/20$ sec.

νως, ἡ ἄνοδος τοῦ βλήματος θὰ εἶναι κίνησις ἐπιβραδυνομένη. Κατὰ τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς, ἐπειδὴ ἡ ἐπιβραδύνουσα δύναμις B εἶναι σταθερά, ἔπεται ὅτι καὶ ἡ ἐπιβράδυνσις θὰ εἶναι σταθερά καί, ὡς ἐκ τούτου, τὸ βλήμα θὰ ἐκτελέσῃ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην, μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 . Ἄρα, διὰ τὸ διανυόμενον διάστημα h καὶ τὴν ταχύτητα v θὰ ἰσχύουν οἱ τύποι

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad v = v_0 - g \cdot t. \quad (2)$$

Ὁ χρόνος ἀνόδου τοῦ βλήματος (δηλ., ὁ χρόνος, ὃ ἀπαιτούμενος ἵνα τὸ βλήμα φθάσῃ εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς τροχιάς του) καθὼς καὶ τὸ μέγιστον ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον τοῦτο φθάνει, εὐρίσκονται διὰ τῶν ἐξῆς συλλογισμῶν: Εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς τροχιάς του ἡ ταχύτης τοῦ βλήματος ἔχει γίνῃ ἴση πρὸς μηδέν* θέτοντες, λοιπόν, εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) $v = 0$, λαμβάνομεν διὰ τὸν χρόνον ἀνόδου t_a τὴν τιμὴν

$$t_a = \frac{v_0}{g}. \quad (3)$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ χρόνου τούτου εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), λαμβάνομεν διὰ τὸ μέγιστον ὕψος $h_{\text{μεγ}}$, εἰς τὸ ὁποῖον θ' ἀνέλθῃ τὸ βλήμα, τὴν τιμὴν (*)

$$h_{\text{μεγ}} = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (4)$$

Ὅταν τὸ βλήμα φθάσῃ εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς τροχιάς του, θ' ἀρχίσῃ κατερχόμενον. Ἡ κίνησις αὕτη εἶναι ἐλευθέρη πτώσις. Ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω, ὅταν τὸ βλήμα ἐπανέλθῃ εἰς τὸ σημεῖον ἐκκινήσεως, θὰ ἔχῃ ταχύτητα, ἴσην ἀκριβῶς πρὸς τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα, μὲ τὴν ὁποίαν ἐβλήθη πρὸς τὰ ἄνω, ὁ δὲ χρόνος καθόδου αὐτοῦ θὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν χρόνον ἀνόδου.

Ἀπόδειξις. Ἐφ' ὅσον ἡ πρὸς τὰ κάτω κίνησις τοῦ βλήματος εἶναι ἐλευθέρη πτώσις ἐκ τοῦ ὕψους $h_{\text{μεγ}}$, ἔπεται ὅτι ἡ ταχύτης v' , τὴν ὁποίαν θὰ ἔχῃ τὸ βλήμα, ὅταν ἐπανέλθῃ εἰς τὸ σημεῖον ἐκκινήσεως, θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$v' = \sqrt{2g \cdot h_{\text{μεγ}}}.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ $h_{\text{μεγ}}$ διὰ τοῦ ἴσου του, τὸ ὁποῖον μᾶς δίδει ὁ τύπος (4), εὐρίσκομεν

$$v' = \sqrt{2g \cdot \frac{v_0^2}{2g}} = v_0.$$

Ὁ χρόνος καθόδου t_k τοῦ βλήματος, ὑπολογιζόμενος τῇ βοηθείᾳ τοῦ

(*) Τὸ μέγιστον ὕψος δύναται νὰ ὑπολογισθῇ καὶ διὰ τῆς χρήσεως τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας (βλ. κατωτέρω).

τύπου $h_{\text{μεγ}} = \frac{1}{2} g \cdot t_{\text{κ}}^2$, είναι ίσος προς

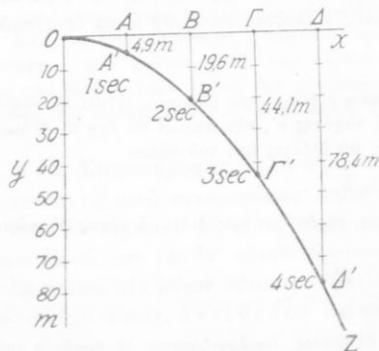
$$t_{\text{κ}} = \sqrt{2 \cdot \frac{h_{\text{μεγ}}}{g}} = \sqrt{2 \cdot \frac{v_0^2}{2g^2}} = \frac{v_0}{g} = t_{\text{α}}.$$

Κατακόρυφος βολή προς τα κάτω. Εάν το βλήμα βληθῇ κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω, οἱ τύποι εἶναι οἱ ἑξῆς:

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \text{καὶ} \quad v = v_0 + g \cdot t.$$

★ § 73. **Ὁριζοντία βολή.** Θεωρήσωμεν πυροβόλον, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται εἰς ὀρισμένον ὕψος ἀπὸ τοῦ ἐδάφους καὶ τὸ ὁποῖον βάλλει ὀριζοντίως βλήμα με ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 . (Ἡ βολή θεωρεῖται ὡς γενομένη ἐν τῷ κενῷ). Διὰ τὰ εὐρωμεν τὴν τροχίαν τοῦ βλήματος, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐπὶ τοῦ βλήματος, κινουμένου ἔξω τῆς κάννης, ἐξασκεῖται μία μόνον δύναμις — τὸ βάρος του — ἡ ὁποία εἶναι κατακόρυφος καὶ ἔχει φορὰν πρὸς τὰ κάτω. Ἀναλύομεν τὴν δύναμιν ταύτην εἰς δύο συνιστώσας — μίαν κατὰ τὸν ὀριζόντιον ἄξονα x καὶ μίαν κατὰ τὸν κατακόρυφον ἄξονα y . Ἐκ τῶν δύο αὐτῶν συνιστωσῶν, ἡ πρώτη εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ἐνῶ ἡ δευτέρα εἶναι, ἀκριβῶς, τὸ βάρος τοῦ βλήματος. Ἐπομένως, κατὰ μὲν τὸν ὀριζόντιον ἄξονα τὸ βλήμα θὰ ἐκτελέσῃ ὁμαλὴν εὐθύγραμμον κίνησιν — δεδομένου, ὡς εἶδομεν, ὅτι κατὰ τὸν ἄξονα τοῦτον οὐδεμία δύναμις ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ βλήματος — κατὰ δὲ τὸν κατακόρυφον ἄξονα θὰ ἐκτελέσῃ, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους του, κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην με σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν, ἴσην πρὸς g . Ἡ πραγματικὴ κίνησις τοῦ βλήματος θὰ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δύο ὡς ἄνω κινήσεων.

(α) **Κίνησις κατὰ τὸν ἄξονα x .** Αὕτη εἶναι ὁμαλὴ εὐθύγραμμος κίνησις



Σχ. 116. Βλήμα, βαλλόμενον ὀριζοντίως, διαγράφει τὴν παραβολικὴν τροχίαν OZ.

g . Τὸ διανυόμενον διάστημα s_x κατὰ τὸν ὀριζόντιον ἄξονα τῶν x (σχ. 116) θὰ εἶναι ἴσον πρὸς $s_x = v_0 \cdot t$, δηλ., θὰ εἶναι ἀνάλογον τοῦ χρόνου. Οὕτω, μετὰ 1 sec, τὸ κινητὸν θὰ εὐρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον A, μετὰ 2 sec εἰς τὸ σημεῖον B, μετὰ 3 sec εἰς τὸ Γ, μετὰ 4 sec εἰς τὸ Δ κ.ο.κ.

β) **Κίνησις κατὰ τὸν ἄξονα y .** Ἡ κίνησις αὕτη εἶναι εὐθύγραμμος κίνησις ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη με σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν

δεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$s_y = \frac{1}{2} g \cdot t^2.$$

θὰ εἶναι, δηλ., ἀνάλογον τοῦ τετραγώνου τοῦ χρόνου. Ἐν παραστήσωμεν διὰ τοῦ AA' τὸ εἰς τὸ πρῶτον δευτερολέπτου διανυθὲν διάστημα (ἀπολεσθὲν ὕψος), τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς

$$s_y = \frac{1}{2} 9,81 \cdot 1^2 \frac{m}{sec^2} \cdot sec^2 = 4,9 \text{ m},$$

εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου δευτερολέπτου τὸ βλῆμα θὰ ἔχη διατρέξει τετραπλάσιον διάστημα (19,6 m), εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου δευτερολέπτου ἑννεαπλάσιον (44,1 m) κ.ο.κ.

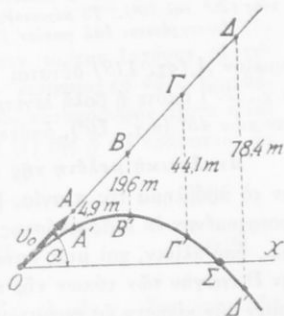
γ) **Συνισταμένη κίνησις.** Ἐν συνθέσωμεν τὰς δύο ἄνω κινήσεις, θὰ εὗρωμεν ὅτι τὸ κινητὸν εἰς τὸ τέλος τῶν χρόνων 1, 2, 3, 4... sec, θὰ εὐρίσκεται, ἀντιστοίχως, εἰς τὰ σημεία A', B', Γ', Δ' ... Συνδέοντες τὰ σημεία ταῦτα διὰ συνεχοῦς γραμμῆς, εὐρίσκομεν τὴν τροχίαν OZ τοῦ βλήματος, ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα παραβολῆς.

Εἶναι φανερόν ὅτι κατὰ τὴν ὀριζοντίαν βολὴν ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται, ἵνα τὸ βλῆμα φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος, εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος καί, ἀκριβῶς, ἴσος πρὸς τὸν χρόνον, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἑλευθέραν πτώσιν.

★ § 74. Πλαγία βολή. Θεωρήσωμεν πυροβόλον, τὸ ὁποῖον βάλλει, ὑπὸ **γωνίαν βολῆς** α (σχ. 117) καὶ ἐν τῷ κενῷ, βλῆμα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 . Ζητοῦμεν νὰ εὗρωμεν τὴν τροχίαν, τὴν ὁποίαν θὰ διαγράψῃ τὸ βλῆμα. Καὶ εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσην ἡ τροχία εὐρίσκεται διὰ συνθέσεως δύο κινήσεων:

Κίνησις α: Ἐν ἐπὶ τοῦ βλήματος δὲν ἐπέδρα τὸ βάρος του, τοῦτο θὰ ἐκινεῖτο εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος v_0 καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ 1^{ου}, 2^{ου}, 3^{ου}, 4^{ου}... δευτερολέπτου θὰ ἔφθανεν, ἀντιστοίχως, εἰς τὰ σημεία A, B, Γ, Δ ...

Κίνησις β: Ἐν τὸ βλῆμα ἐπιπτεν ἑλευθέρως καὶ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, τότε, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους του, θὰ ἐξετέλει κινήσιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην μὲ ἐπιτάχυνσιν g . Ἐν AA' εἶναι τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον διαγύει τὸ βλῆμα κατὰ τὴν πτώσιν του, ἐντὸς 1 sec, τότε ἡ ἀπόστασις BB' ,



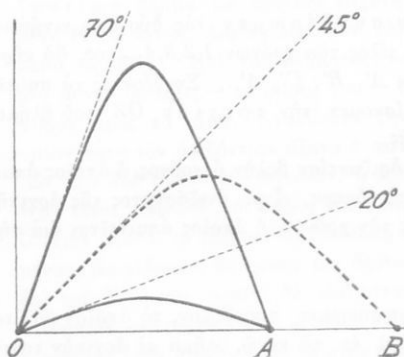
Σχ. 117. Ἡ τροχία τῆς πλαγίας βολῆς εἶναι παραβολή.

τὴν ὁποίαν διανύει τοῦτο ἐντὸς 2 sec, θὰ εἶναι τετραπλασία τῆς AA' , ἡ ἀπόστασις $ΓΓ''$, τὴν ὁποίαν διανύει ἐντὸς 3 sec θὰ εἶναι ἑννεαπλασία τῆς AA' κ.ο.κ.

Ἄν, τώρα, τὸ κινητὸν ἐκτελῇ ταυτοχρόνως καὶ τὰς δύο κινήσεις, ἡ πραγματική του τροχιά θὰ εὐρεθῇ διὰ συνθέσεως τῶν δύο κινήσεων. Οὕτω, τὸ κινητὸν θὰ εὐρεθῇ, ἀντιστοίχως, εἰς τὰ σημεῖα A' , B' , $Γ'$, A'' ..., τὰ ὁποῖα, ἐνούμενα διὰ συνεχοῦς γραμμῆς, μᾶς παρέχουν τὴν ζητουμένην τροχίαν.

Ἡ ἀπόστασις OS , δηλ., ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ σημείου ἐκκινήσεως O τοῦ βλήματος καὶ τοῦ σημείου S , εἰς τὸ ὁποῖον ἡ τροχιά συναντᾷ τὸ διὰ τοῦ σημείου O διερχόμενον ὀριζόντιον ἐπίπεδον, καλεῖται **βεληνεκές**.

Ἐάν, διατηροῦντες σταθεράν τὴν ὀρικήν ταχύτητα v_0 , αὐξάνωμεν τὴν γωνίαν βολῆς, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αὐξάνεται καὶ τὸ βεληνεκές, γίνεται δὲ μέγιστον, ὅταν ἡ γωνία βολῆς γίνῃ ἴση πρὸς 45° (ἀπόστασις OB εἰς τὸ σχῆμα 118). Ἐάν, τώρα, ἑξακολουθήσωμεν νὰ αὐξάνωμεν τὴν γωνίαν βολῆς, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ βεληνεκές ἑλαττοῦται.



Σχ. 118. Τὸ σημεῖον A βάλλεται ὑπὸ δύο γωνίας (20° καὶ 70°). Τὸ μέγιστον βεληνεκές OB ἐπιτυγχάνεται ὑπὸ γωνίαν βολῆς 45° .

σημείον A (σχ. 118) δύναται νὰ βληθῇ α) ὑπὸ γωνίαν, μικροτέραν τῶν 45° (π.χ., 20°) ὁπότε ἡ βολὴ λέγεται **εὐθύφορος** καὶ β) ὑπὸ γωνίαν, μεγαλυτέραν τῶν 45° (π.χ., 70°), ὁπότε ἡ βολὴ λέγεται **ἐπισκοπηπτική** (*).

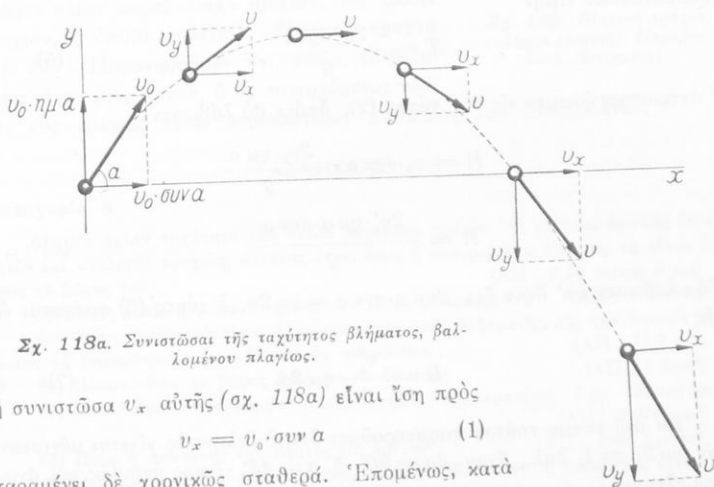
Ἀναλυτικὴ μελέτη τῆς πλαγίας βολῆς. Εἰς τὰ ἀνωτέρω ἐμελετήσαμεν τὸ πρόβλημα τῆς πλαγίας βολῆς γραφικῶς, θεωρήσαντες τὴν κίνησιν ὡς προερχομένην ἐκ μιᾶς κινήσεως κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ὀρικῆς ταχύτητος, δηλ., ὑπὸ κλίσιν, καὶ μιᾶς κατακορύφου κινήσεως. Εἰς τὰ κατωτέρω, διὰ τὴν ἑξαγωγήν τῶν τύπων τῆς πλαγίας βολῆς, εἶναι ἀπλούστερον νὰ θεωρήσωμεν τὴν κίνησιν ὡς συνισταμένην μιᾶς ὀριζοντίας κινήσεως καὶ μιᾶς κατακορύφου κινήσεως. Ἐκ τῶν δύο αὐτῶν κινήσεων, ἡ μὲν

(*) Εἰς τὸ Πυροβολικόν, ἡ εὐθύφορος βολὴ ὀνομάζεται περιέρχως πῶς, ἐπισκοπηπτικὴ βολή.

όριζοντία είναι εὐθύγραμμος κίνησις με σταθερὰν ταχύτητα, ἡ δὲ κατακόρυφος μία εὐθύγραμμος ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη κίνησις.

Διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ γνωρίζωμεν εἰς ἑκάστην χρονικὴν στιγμήν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὴν θέσιν τοῦ κινητοῦ (δηλ., νὰ γνωρίζωμεν τὰς συντεταγμένας του x καὶ y), ἀφ' ἑτέρου δὲ τὰς συνιστώσας τῆς ταχύτητος αὐτοῦ κατὰ τοὺς ἄξονας x καὶ y - δηλ., τὰ v_x καὶ v_y .

α) **Ὁριζοντία κίνησις.** Ἀφοῦ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ κινητοῦ εἶναι v_0 ,



Σχ. 118α. Συνιστώσαι τῆς ταχύτητος βλήματος, βαλλομένου πλαγίως.

ἡ συνιστώσα v_x αὐτῆς (σχ. 118α) εἶναι ἴση πρὸς

$$v_x = v_0 \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

παραμένει δὲ χρονικῶς σταθερά. Ἐπομένως, κατὰ τὸν τύπον τῆς ἰσοταχοῦς κινήσεως, θὰ ἔχωμεν

$$x = \text{ταχύτης} \cdot \text{χρόνος} = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t. \quad (2)$$

β) **Κατακόρυφος κίνησις.** Διὰ τὴν κίνησιν ταύτην ἰσχύουν οἱ τύποι τῆς ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένης εὐθυγράμμου κινήσεως (§ 43). Ἐπειδὴ, ὁμως, ἐν προκειμένῳ, ἡ ἀρχικὴ ταχύτης κατὰ τὸν κατακόρυφον ἄξονα εἶναι ἴση πρὸς $v_0 \cdot \eta \mu \alpha$ (σχ. 118α), οἱ τύποι (6) καὶ (7) τῆς § 43 γράφονται ὡς ἑξῆς :

$$v_y = v_0 \cdot \eta \mu \alpha - g \cdot t \quad (3)$$

$$y = v_0 \cdot \eta \mu \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (4) (*)$$

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (3) συνάγομεν ὅτι τὸ μὲν v_x εἶναι χρονικῶς σταθερόν, ἐνῶ τὸ v_y διαρκῶς μεταβάλλεται. Τοῦτο δεικνύει καὶ τὸ σχῆμα

(*) Οἱ τύποι (3) καὶ (4) εἶναι ἀκριβῶς οἱ αὐτοὶ με τοὺς τύπους (1) καὶ (2) τῆς § 73, με τὴν διαφορὰν ὅτι τὸ h καὶ τὸ v , ἀντεκατεστάθησαν διὰ τοῦ y καὶ v_y , τὸ δὲ v_0 διὰ τοῦ $v_0 \cdot \eta \mu \alpha$.

118α, εις τὸ ὁποῖον παρατηροῦμεν ὅτι τὸ v_y ἔχει ἀρχικῶς φορὰν πρὸς τὰ ἄνω (θετικόν), ἐν συνεχείᾳ ἐλαττωῖται, διὰ τὰ μηδενισθῆ εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς τροχιάς, ἐν συνεχείᾳ δὲ ἀλλάσσει φορὰν (ἀρνητικόν), αὐξανόμενον ἐκ νέου.

Βεληνεκές. Διὰ τὸν ὑπολογισμόν τῆς ἀποστάσεως R , ἡ ὁποία παριστᾷ τὸ βεληνεκές, πρέπει νὰ εὑρωμεν ἐκ τῆς ἐξίσωσως (4) τὴν χρονικὴν στιγμὴν T , κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ y γίνεται ἴσον πρὸς μηδέν καὶ τὴν οὕτω προκύπτουσαν τιμὴν

$$T = \frac{2v_0 \cdot \eta \mu \alpha}{g} \quad (5)$$

ν' ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν τύπον (2), ὁπότε θὰ λάβωμεν

$$R = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{2v_0 \cdot \eta \mu \alpha}{g}$$

$$\eta) \quad R = \frac{2v_0^2 \cdot \eta \mu \alpha \cdot \sin \alpha}{g} \quad (6)$$

*Εάν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι $2\eta \mu \alpha \cdot \sin \alpha = \eta \mu 2\alpha$, ὁ τύπος (6) γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$R = \frac{v_0^2}{g} \cdot \eta \mu 2\alpha. \quad (7)$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου παρατηροῦμεν ὅτι τὸ βεληνεκές γίνεται μέγιστον, ὅταν $\eta \mu 2\alpha = 1$, δηλ., ὅταν $2\alpha = 90^\circ$ ἢ $\alpha = 45^\circ$ - ὅπως ἀκριβῶς καὶ ἀνωτέρω εἴπομεν.

Μέγιστον ὕψος. Τὸ μέγιστον ὕψος $y_{\max}$, εἰς τὸ ὁποῖον (ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν βολῆς) φθάνει τὸ βλήμα, εὐρίσκομεν ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ ὅτι εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο τῆς τροχιάς ἡ ταχύτης ἔχει διεύθυνσιν ὀριζοντίαν καί, συνεπῶς, ἡ κατακόρυφος αὐτῆς συνιστώσα v_y θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἐάν, λοιπόν, θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) $v_y = 0$, θὰ λάβωμεν

$$t = \frac{v_0}{g} \cdot \eta \mu \alpha.$$

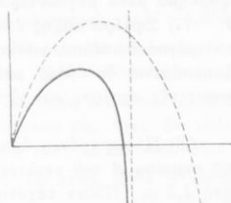
*Αντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ t εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4), λαμβάνομεν

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \eta \mu^2 \alpha.$$

Ἐκ τῆς ἐξίσωσως ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μέγιστον ὕψος ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς γωνίας βολῆς, λαμβάνει δὲ τὴν μεγίστην του τιμὴν, ὅταν $\eta \mu^2 \alpha = 1$, δηλ., ὅταν ἡ βολὴ γίνεται κατακόρυφος.

★ **Βολὴ ἐντὸς τοῦ ἀέρος.** Ὅλα τ' ἀναφερθέντα εἰς τὴν προηγουμένην

παράγραφον ισχύουν, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ βλήμα κινεῖται εἰς τὸ κενόν. Ὅταν, ὅμως, τὸ βλήμα κινῆται ἐντὸς τοῦ ἀέρος, δρᾷ ἐπ' αὐτοῦ, ἐκτὸς τοῦ βάρους του, καὶ μία ἄλλη δύναμις· ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος, ἡ ὁποία, ὡς θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ κεφάλαιον τῆς Ἀεροδυναμικῆς, εἶναι μία δύναμις, ἔχουσα φοράν, ἀντίθετον τῆς φορᾶς τῆς ταχύτητος. Ὡς ἐκ τούτου, τὸ βλήμα δὲν διαγράφει πλέον παραβολικὴν τροχίαν, ἀλλ' ἄλλην τροχίαν, ἡ ὁποία καλεῖται **βλητικὴ τροχιά** (σχ. 119). Παρατηροῦμεν ὅτι, τώρα, τὸ βλητικὸς εἶναι μικρότερον, ὃ δὲ κατερχόμενος κλάδος τῆς τροχιάς εἶναι περισσότερον ἀπτόμος τοῦ ἀνερχομένου.



Σχ. 119. Βλητικὴ τροχιά (πλήρης γραμμή). Παραβολικὴ (ἑτοιμμένη).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κατηγορίᾳ Α'

- 63) Μὲ ποίαν ταχύτητα καὶ ποίαν περίοδον πρέπει νὰ κινῆται ὁμαλῶς ἐν κινήτῳ ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς, ἀκτίνας 1 m , ὥστε ἡ κεντρομόλος δύναμις νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ βάρος του; (ΑΠ: $3,13\text{ m/sec}$, 2 sec)
- 64) Πόση εἶναι ἡ μᾶζα ἐνὸς κυβικοῦ μέτρου ὕδατος; (ΑΠ: 1 τόννος)
- 65) Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ χωρητικότης μιᾶς δεξαμενῆς, εἰς τὴν ὁποίαν πρὸκειται νὰ ἐναποθηκεύσωμεν 10 τόννους πετρελαίου; (ΑΠ: $11,1\text{ m}^3$)
- 66) Πόσον εἶναι τὸ βάρος ἐνὸς λίτρου ὕδατος; (ΑΠ: 1 kg^*)
- 67) Ποῖον ὄγκον καταλαμβάνει, εἰς συνήθη θερμοκρασίαν, 1 gr ὑδραργύρου; (ΑΠ: $0,074\text{ cm}^3$)
- 68) Ποία ἡ πυκνότης τοῦ ὕδατος εἰς kg^*/m^3 ; (ΑΠ: $1000\text{ kg}^*/\text{m}^3$)
- 69) Ἀπὸ φύλλον ἐκ σιδήρου ἐκόπη δίσκος, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶναι ἴση πρὸς 14 cm . Ἐάν 1 m^3 ἐκ τοῦ φύλλου τούτου ἔχῃ βάρος $0,3\text{ kg}^*$, νὰ εὐρεθῇ τὸ βάρος τοῦ σιδηροῦ δίσκου. (ΑΠ: $4,6\text{ gr}^*$)
- 70) Ποία ἡ μᾶζα σύρματος ἐκ χαλκοῦ, μήκους 1 km καὶ πάχους $3,4\text{ mm}$; (ΑΠ: 81 kg^*)
- 71) Πλάξ ἐξ ἀργιλίου ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, μήκους 50 cm καὶ πλάτους 25 cm . Ἄν τὸ βάρος τῆς πλακὸς εἶναι $662,5\text{ gr}^*$, νὰ εὐρεθῇ τὸ πάχος αὐτῆς εἰς cm καὶ mm . (ΑΠ: $0,2\text{ cm}$, 2 mm)
- 72) Δοχεῖον, πλήρες θεϊκοῦ ὀξέος, περιέχει 100 gr ἐξ αὐτοῦ. Ἐάν τὸ αὐτὸ δοχεῖον τὸ γεμίσωμεν διὰ γλυκερίνης, πόση θὰ εἶναι ἡ μᾶζα τῆς; (Πυκνότης θεϊκοῦ ὀξέος $= 1,84\text{ gr/cm}^3$, πυκνότης γλυκερίνης $= 1,26\text{ gr/cm}^3$). (ΑΠ: $68,5\text{ gr}$)
- 73) Ἀπὸ σύρμα ἀργιλίου, διαμέτρου $0,122\text{ cm}$, θέλομεν νὰ κόψωμεν τμήμα, τοῦ ὁποίου ἡ μᾶζα νὰ εἶναι ἴση πρὸς 1 gr . Πόσον μῆκος πρέπει νὰ λάβωμεν; (ΑΠ: $31,7\text{ cm}$)
- 74) Ποίαν ταχύτητα ἀποκτᾷ λίθος, ἀφιέμενος ἐλεύθερος ἀπὸ ὕψους α) 10 m , β) 20 m ; Πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται ἀντιστοίχως; (ΑΠ: α) 14 m/sec , β) $19,8\text{ m/sec}$, α) $1,43\text{ sec}$ β) 2 sec)
- 75) Σφαῖρα, μάζης 2 gr , ἀφίηται ἐλευθέρᾳ ἐντὸς ἀεροκένου σωλήνος ἀπὸ ὕψους 2 m . Μὲ ποίαν ταχύτητα φθάνει εἰς τὸν πυθμένα; (ΑΠ: $6,3\text{ m/sec}$)
- 76) Ἀφήνομεν λίθον νὰ πέσῃ ἐντὸς φρέατος καὶ ἀκούομεν τὸν κρότον μετὰ πάροδον 3 sec . Ποῖον τὸ βάθος τοῦ φρέατος; (Ἐνταῦθα θεωροῦμεν τὴν διάδοσιν

του ήχου άκαριαίαν. Είς το κεφάλαιον της 'Ακουστικής θά ύπολογισθῇ τὸ αὐτὸ πρόβλημα μετὰ μεγαλύτερας άκριβείας). (ΑΠ: 44 m)

77) Σφαίρα μάζης 100 gr, αφήνεται νά κινηθῇ άνω τριβῆς ἐκ τοῦ άνω άκρου κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας κλίσεως 30°. Ζητεῖται α) νά σχεδιασθοῦν αἱ ἐπ' αὐτῆς ἐξασκούμεναι δυνάμεις καθώς καὶ ἡ συνισταμένη αὐτῶν· β) νά εὑρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς σφαίρας καὶ γ) ἡ ἐπιταχύνοσα αὐτὴν δύναμις.

(ΑΠ: β) 490,5 cm/sec², γ) 49050 dyn)

78) Πόσος χρόνος απαιτεῖται, ἵνα ἡ άνω σφαίρα διανύσῃ τὴν απόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου Α τοῦ κεκλιμένου επιπέδου μέχρι τοῦ σημείου Β, απέχοντος τοῦ Α κατὰ 1,5 m; Ποίαν ταχύτητα θά ἔχῃ ἡ σφαίρα, ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον Β;

(ΑΠ: 0,8 sec, 384 cm/sec)

79) Βλήμα βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ άνω μετ' άρχικὴν ταχύτητα 200 m/sec. Εἰς ποῖον ὕψος θ' ἀνέλθῃ τοῦτο καὶ μετὰ πόσον χρόνον θά ἐπανέλθῃ εἰς τὸ σημεῖον ἐκκινήσεως;

(ΑΠ: 2 km, 40,5 sec)

80) Με ποίαν ταχύτητα πρέπει νά βληθῇ βλήμα πρὸς τὰ άνω, ἵνα ἐπιστρέψῃ εἰς τὸ σημεῖον ἐκκινήσεώς του μετὰ χρόνον 30 sec;

(ΑΠ: 148 m/sec)

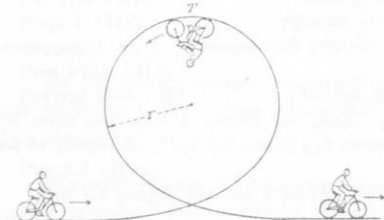
81) Λίθος ρίπεται κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω ἀπὸ ὕψους 100 m καὶ μετ' άρχικὴν ταχύτητα 30 m/sec. Ζητεῖται νά εὑρεθῇ α) ποία ἡ ταχύτης του μετὰ χρόνον 2 sec· β) πόσος χρόνος χρειάζεται διὰ νά κτυπήσῃ ὁ λίθος εἰς τὸ ἔδαφος καὶ γ) με ποίαν ταχύτητα θά φθάσῃ οὗτος εἰς τὸ ἔδαφος.

(ΑΠ: α) 49,6 m/sec, β) 2,4 sec, γ) 53,5 m/sec)

Κατηγορία Β'

82) Ποδηλάτον, κινούμενον ὁριζοντίως, άναγκάζεται νά κινηθῇ ἐπὶ κατακορύφου κυκλικῆς τροχιάς, ακτίνας $r=8$ m. Ποία πρέπει νά εἶναι ἡ ἐλάχιστη ταχύτης τοῦ ποδηλάτου, ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὸ άνώτατον σημεῖον τῆς τροχιάς του, ὥστε νά μὴ πέσῃ;

(ΑΠ: 8,86 m/sec)



83) Νά ύπολογισθῇ α) ἡ ὁρική ταχύτης, μετ' ὅποιαν πρέπει νά περιστρέφεται τὸ δοχεῖον τῆς άσκήσεως 56, ἵνα ἡ χεῖρ μας οὐδεμίαν δύναμιν αἰσθάνεται, ὅταν τὸ δοχεῖον εὑρίσκεται

εἰς τὸ άνώτατον σημεῖον τῆς τροχιάς του. β) Πόσῃν δύναμιν θά αἰσθάνεται ἡ χεῖρ μας εἰς τὴν αὐτὴν περιπτώσιν, ὅταν τὸ δοχεῖον εὑρίσκεται εἰς τὸ κατώτατον σημεῖον τῆς τροχιάς του;

(ΑΠ: α) 3,13 m/sec, β) $F_{\text{κατῶ}} = 2B$)

84) Σῶμα, βάρους 200 gr*, αφήνεται ἐλεύθερον ἐκ τοῦ άνω άκρου ἐνὸς κεκλιμένου επιπέδου. Μετὰ 2 sec τὸ σῶμα τοῦτο ἔχει διανύσει διάστημα 392,4 cm. Ποία εἶναι ἡ γωνία κλίσεως; (Τριβὴ άμελητέα).

(ΑΠ: 12°)

85) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις κινητοῦ, ἐκτελοῦντος ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν, μετ' ὅποιαν ταχύτητα, ἴσῃ πρὸς ἐκείνην, τὴν ὅποιαν ἀποκτῇ κινητόν, πίπτει ἐλευθέρως ἀπὸ ὕψους, ἴσου πρὸς τὸ ἡμισυ τῆς ακτίνας τοῦ κύκλου, εἶναι ἴση πρὸς g.

86) Ράβδος ἐκ μολύβδου ἔχει διάμετρον 10 mm καὶ βάρος 1 kg*. Ποῖον τὸ μήκος τῆς ράβδου;

(ΑΠ: 112,6 cm)

87) Αἱ ακτίνες δύο σφαιρῶν εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσαι πρὸς 2 cm καὶ 3 cm, αἱ δὲ μάζαι αὐτῶν 200 gr καὶ 250 gr. Ποῖος ὁ λόγος τῶν πυκνοτήτων των;

(ΑΠ: 2,7:1)

88) Σύρμα εξ ορειχάλκου έχει περιελιχθῇ ὑπὸ μορφῇν ἑλικοειδοῦς ἑλατηρίου, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐκ 55 στροφῶν, μέσης διαμέτρου 35,4 cm. Ἐάν ἡ διάμετρος τοῦ σύρματος εἶναι ἴση πρὸς 2 mm, ποῖα ἡ μᾶζα τοῦ σύρματος; (ΑΠ: 1,652 kg)

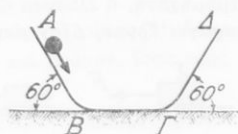
89) Ἡ μέση ἀκτίς τῆς Γῆς εἶναι ἴση πρὸς $6,37 \cdot 10^8$ cm καὶ ἡ μέση αὐτῆς πυκνότης 5,6 gr/cm³. Ποῖα ἡ μᾶζα τῆς Γῆς (εἰς τόνους); (ΑΠ: 6,05 · 10²¹ τόνοι)

90) Ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας ἐξ ἀργύρου εἶναι ἴση πρὸς 5 cm καὶ ἡ μᾶζα τῆς ἴση πρὸς 525 gr. Ὑπάρχει ἡ ὑποψία ὅτι εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς ἔχει ἓν κοίλωμα. Ἐρωτᾶται: Ὑπάρχει κοίλωμα; Ἐάν ναί, ποῖος ὁ ὄγκος του; (ΑΠ: Naί, 15,4 cm³)

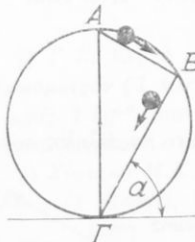
91) Ἀπὸ ποῖον ὕψους πρέπει ν' ἀφεθῇ λίθος ἐν τῷ κενῷ, ὥστε ν' ἀποκτήσῃ ταχύτητα 20 m/sec; (ΑΠ: 20,4 m)

92) Κινητόν, κινούμενον ὁμαλῶς καὶ ἄνευ τριβῆς, μὲ ταχύτητα 3 m/sec ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, συναντᾷ κεκλιμένον ἐπίπεδον, γωνίας κλίσεως 15°, εἰς τὸ ὁποῖον ἀρχίζει νὰ ἀνέρχεται. Νὰ σχεδιασθοῦν αἱ ἐπὶ τοῦ σώματος ἐξασκούμεναι δυνάμεις, ὅταν τοῦτο εὐρίσκεται 1) ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ 2) ἐπὶ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου. Ἐν συνεχείᾳ νὰ εὐρεθῇ α) εἰς ποῖον σημεῖον θὰ σταματήσῃ τὸ κινητόν. β) πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ πρὸς τοῦτο καὶ γ) μὲ ποίαν ταχύτητα θὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὸ ἀρχικὸν ὀριζόντιον ἐπίπεδον. (ΑΠ: α) 176 cm, β) 1,2 sec, γ) 3 m/sec)

93) Ἐντὸς τοῦ δοχείου τοῦ ἑναντι σχήματος κινεῖται μία σφαῖρα. Αὕτη, ἔκκινουσα ἐκ τοῦ σημείου Α, μὲ ταχύτητα μηδέν, διαγράφει, ἄνευ τριβῆς, τὰς διαδρομὰς ΑΒΓΔ, ΔΓΒΑ, ΑΒΓΔ κ.ο.κ. Ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ: α) τί εἶδους κινήσεις ἐκτελεῖ ἡ σφαῖρα καὶ β) νὰ ὑπολογισθῇ ὁ χρόνος ἐπανόδου τῆς σφαίρας εἰς τὸ ἀρχικὸν σημεῖον Α, ἐκ τοῦ ὁποῖου ἐξεκίνησε διὰ νὰ ἐκτελέσῃ τὴν διαδρομὴν ΑΒΓΔΓΒΑ. (Δίδονται $AB = BG = ΓΔ = 2$ m). (ΑΠ: β) 3,45 sec)



94) Σφαῖρα, μᾶζης 10 gr, ἀφήνεται νὰ κινηθῇ κατὰ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ΑΒ. Δευτέρα σφαῖρα, μᾶζης 20 gr, ἀφήνεται νὰ κινηθῇ κατὰ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ΒΓ. Τρίτη σφαῖρα, μᾶζης 30 gr, ἀφήνεται νὰ πέσῃ ἐλευθέρως ἀπὸ τοῦ σημείου Α μέχρι τοῦ σημείου Γ. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ α) ὁ χρόνος τῆς διαδρομῆς ΑΒ, β) ὁ χρόνος τῆς διαδρομῆς ΒΓ καὶ γ) ὁ χρόνος τῆς πτώσεως ΑΓ. Συγκρίνατε τοὺς τρεῖς χρόνους. Δίδονται: ἀκτίς τοῦ κύκλου 1 m, γωνία $\alpha = 60^\circ$. (Τριβὴ δὲν ὑπάρχει). (ΑΠ: 0,64 sec καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις)



95) Βαρὺ ἀντικείμενον ἀφήνεται νὰ πέσῃ ἀπὸ ἀεροπλάνου, εὐρισκομένου εἰς ὕψος 200 m καὶ κινουμένου ὀριζοντίως μὲ ταχύτητα 180 km/h. Εἰς ποῖαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς κατακορύφου θὰ πέσῃ; (Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος παραλείπεται). (ΑΠ: 319 m)

96) Βλήμα βάλλεται ὀριζοντίως ἀπὸ ὕψους 50 m καὶ μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 15 m/sec. Ποῦ καὶ πότε θὰ συναντήσῃ τὸ ἔδαφος; (ΑΠ: Εἰς ἀπόστασιν 47,5 m ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς κατακορύφου, 3,19 sec)

97) Λίθος, ἀφήνεται νὰ πέσῃ ἐκ μεγάλου ὕψους καὶ μετὰ 10 sec βάλλεται πρὸς τὰ κάτω ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου βλήμα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 300 m/sec. Πότε καὶ ποῦ τὸ βλήμα θὰ συναντήσῃ τὸν λίθον; (ΑΠ: α) Μετὰ χρόνον 2,43 sec ἀπὸ τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐβλήθη τὸ βλήμα. β) Εἰς ἀπόστασιν 757,7 m ἀπὸ τοῦ σημείου, εἰς τὸ ὁποῖον ἀφίθη ὁ λίθος).

98) Βλήμα βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω. Τὸ βλήμα ἔχει ταχύτητα

360 m/sec, όταν έχη φθάσει εις τὸ ἥμισυ τοῦ μεγίστου ὕψους, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνέλθῃ. Ζητεῖται α) ποῖον τὸ μέγιστον ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον θ' ἀνέλθῃ τὸ βλήμα καὶ β) ποία θὰ εἶναι ἡ ταχύτης του μετὰ 1 sec ἀπὸ τῆς ρίψεως.

(ΑΠ: α) 13,2 km, β) 498 m/sec)

99) Ποίαν ταχύτητα πρέπει νὰ έχη τεχνητὸς δορυφόρος, μάζης 80 kgr, ἵνα περιφέρεται περὶ τὴν Γῆν ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς καὶ εἰς ὕψος 900 km; Ἀκτίς τῆς Γῆς 6370 km. Δεχόμεθα ὅτι εἰς τὸ ὕψος τοῦτο τὸ g διατηρεῖ τὴν τιμὴν 9,81 m·sec⁻².

(ΑΠ: Περίπου 8000 m/sec)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'

ΕΡΓΟΝ, ΕΝΕΡΓΕΙΑ, ΙΣΧΥΣ, ΑΠΛΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ

§ 75. Έργον. Ὅταν ἵππος σύρῃ ἄμαξαν, λέγομεν ὅτι παράγει *ἔργον*. Ὅμοιος, ἔργον παράγει ὁ ἄνεμος, ὁ κινῶν ἱστιοφόρον πλοῖον, καθὼς καὶ ἡ ἀτμομηχανή, ἡ ἔλκουσα ἄμαξοστοιχίαν. Γενικῶς λέγομεν ὅτι **μία δύναμις παράγει ἔργον, διὰν μετακινή τὸ σῶμα, ἐπὶ τοῦ ὁποῖου ἐξασκείται.**



Σχ. 120.

Θεωρήσωμεν σῶμα Σ (σχ. 120), ἐπὶ τοῦ ὁποῖου ἐξασκείται ἡ δύναμις *F* καὶ μετακινεῖ αὐτό, παρὰ πλάγῳς πρὸς τὴν διεύθυνσίν της, κατὰ τὴν ἀπόστασιν *s*. Κατὰ τὴν μετακίνησιν τοῦ σώματος, ἡ δύναμις *F* παράγει ἔργον *A*,

ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῆς δυνάμεως *F* ἐπὶ τὸν δρόμον *s*. Ἦτοι εἶναι

$$\text{ἔργον} = \text{δύναμις} \cdot \text{δρόμος}$$

$$A = F \cdot s$$

Εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν ἡ δύναμις *F* ἦτο παράλληλος πρὸς τὸν δρόμον. Ὑπάρχουν, ὅμως, καὶ περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας ἡ δύναμις σχηματίζει γωνίαν τινὰ *α* μετὰ τὸν δρόμον (σχ. 121). Εἰς τὴν περίπτωσηί ταύτην, ἔργον παράγει μόνον ἡ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ δρόμου προβολὴ *F·συν α* τῆς δυνάμεως *F*. Ἄρα, ὁ γενικώτερος ὁρισμὸς τοῦ ἔργου θὰ εἶναι ὁ ἐξῆς:



Σχ. 121.

$$A = F \cdot s \cdot \sin \alpha$$

(1)

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ δύναμις εἶναι κάθετὸς ἐπὶ τὸν δρόμον (διὰν, δηλ., εἶναι $\alpha = 90^\circ$), ἔχομεν $\sin 90^\circ = 0$, ὁπότε,

ἐκ τοῦ τύπου (1), προκύπτει

$$A = 0.$$

Οὕτω, κατὰ τὴν μετακίνησιν τοῦ σώματος τοῦ σχήματος 120 ἡ μὲν δύναμις F παράγει ἔργον, ἐνῶ τὸ βάρος B αὐτοῦ (μὴ σχεδιασθέν), ἐπειδὴ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν δρόμον, οὐδὲν ἔργον παράγει.

Ὅταν ἡ γωνία α εἶναι μεγαλύτερα τῶν 90° , τὸ συνημίτονόν της εἶναι ἀρνητικόν, ὁπότε τὸ ἔργον προκύπτει ἀρνητικόν· τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ δύναμις, ἀντὶ νὰ παράγῃ, καταναλίσκει ἔργον.

Γενικῶς δυνάμεθα νὰ εἰπώμεν ὅτι, ὅταν ἓν σῶμα μετακινεῖται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν πολλῶν δυνάμεων, τὸ ὑφ' ἐκάστης δυνάμεως παραγόμενον (ἢ καταναλισκόμενον) ἔργον ὑπολογίζεται πάντοτε ὑπὸ τοῦ τύπου (1). Εἶναι φανερόν ὅτι τὸ κατὰ τὴν μετακίνησιν ταύτην ὁλικῶς παραγόμενον (ἢ καταναλισκόμενον) ἔργον θὰ ὑπολογίζεται, ἐπίσης, τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου (1), εἰς τὸν ὁποῖον, ὅμως, ἀντὶ τοῦ F τίθεται ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων.

Μονάδες ἔργου. Ἡ μονὰς τοῦ ἔργου προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου (1), ὅταν λάβωμεν δύναμιν, ἴσην πρὸς τὴν μονάδα δυνάμεως καὶ δρόμον, ἴσον πρὸς τὴν μονάδα διαστάσεως.

1) *C.G.S.* Ἡ μονὰς ἔργου εἰς τὸ σύστημα *C.G.S.* καλεῖται **ἐργιον** (*1 erg*) καὶ εἶναι τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον παράγει δύναμις, ἴση πρὸς μίαν δύνῃν, ὅταν μεταθέτῃ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της, παραλλήλως πρὸς τὴν διεύθυνσίν της, κατὰ *1 cm*. Ἦτοι εἶναι

$$1 \text{ erg} = 1 \text{ dyn} \cdot \text{cm}.$$

2) *T. S.* Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ἡ μονὰς τοῦ ἔργου καλεῖται **χιλιογραμμόμετρον** (*1 kgr*·m*) καὶ εἶναι τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον παράγει δύναμις, ἴση πρὸς *1 kgr**, ὅταν μεταθέτῃ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της, παραλλήλως πρὸς τὴν διεύθυνσίν της, κατὰ *1 m*.

3) *Σύστημα M.K.S.* Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ἡ μονὰς ἔργου καλεῖται **1 Joule** (*1 Τζάουλ*).

Εἶναι δὲ

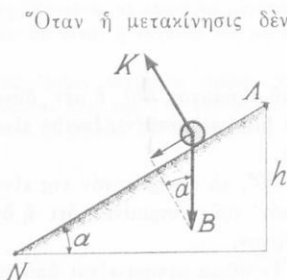
$$1 \text{ Joule} = 10^7 \text{ erg}.$$

***Δοκίμεις.** Νὰ εὐρεθῇ ἡ σχέσις μεταξὺ *1 kgr*·m* καὶ *1 erg*.

§ 76. Έργον, παραγόμενον κατὰ τὴν πτώσιν ἢ ἀνύψωσιν σωμάτων. Ὅταν ἓν σῶμα πίπτῃ κατακορύφως, τὸ βάρος του B παράγει ἔργον A , ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον «δύναμις·δρόμος», ἥτοι ἴσον πρὸς

$$A = B \cdot h \quad (1)$$

ἐνθα h εἶναι τὸ ὕψος τῆς πτώσεως. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ αὐτὸ ἔργον πρὲς περὶ νὰ καταναλώσωμεν διὰ ν' ἀνυψώσωμεν τὸ σῶμα κατὰ τὸ ὕψος h .



Σχ. 122.

δήποτε μορφής, όποτε προκύπτει τó εξής πόρισμα:

«Κατά τήν μετακίνησιν ενός σώματος μεταξὺ δύο σημείων, τὰ όποια απέχουν κατακορύφως κατά τήν απόστασιν h , τó έργον, τó παραγόμενον υπό τού βάρους τού σώματος, είναι ανεξάρτητον τής μορφής τής τροχιάς επί τής οποίας γίνεται ή μετακίνησις, εξαρτάται δέ μόνον εκ τής κατακορύφου απόστάσεως αὐτῶν».

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ τού σώματος, τού εὗρισκομένου ἐπὶ τού κεκλιμένου επιπέδου, έξασκοῦνται δύο δυνάμεις - τó βάρος του B καὶ ή δύναμις K , τήν όποίαν έξασκεῖ τó κεκλιμένον επίπεδον. (Ἡ δύναμις K είναι κάθετος ἐπὶ τó κεκλιμένον επίπεδον, έπειδὴ θεωροῦμεν τήν τριβὴν άμελητέαν). Κατά τήν μετακίνησιν τού σώματος κατά τόν δρόμον $AN = l$, ή μὲν δύναμις K , ως κάθετος ἐπὶ τόν δρόμον, δέν παράγει έργον, ένῳ ή δύναμις B παράγει έργον, τó όποῖον είναι ίσον πρὸς τó γινόμενον τής προβολῆς $B \cdot \eta \mu \alpha$ αὐτῆς κατά τήν διεύθυνσιν τού κεκλιμένου επιπέδου ἐπὶ τόν δρόμον l . Ἦτοι είναι

$$A = B \cdot \eta \mu \alpha \cdot l.$$

Ἐκ τού σχήματος προκύπτει $h = l \cdot \eta \mu \alpha$, όπότε, αντικαθιστώντες, λαμβάνομεν

$$A = B \cdot h. \quad \text{ὁ.έ.δ.}$$

§ 77. Ἴσχύς. Ὑποθέσωμεν ότι πρόκειται νά μεταφερθοῦν κέρατοι, συνολικοῦ βάρους 2000 kg^* , εἰς τόν πρῶτον ὄροφον μιᾶς κατοικίας, ό όποῖος εὗρίζεται εἰς ὕψος 5 m ἀπό τού εδάφους. Διὰ τήν μεταφοράν ταύτην εἰς έργάτης χρειάζεται 2 ὥρας . Ὁ αὐτός έργάτης, καταβάλλων μεγαλυτέραν προσπάθειαν, κατορθώνει νά εκτελέσῃ τήν αὐτήν εργασία έντός 1 ὥρας . Καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ό έργάτης παρήγαγε τó αὐτό έργον ($2000 \text{ kg}^* \cdot 5 \text{ m} = 10\,000 \text{ kg}^* \cdot \text{m}$), μέ διάφορον, όμως, ρυθμόν.

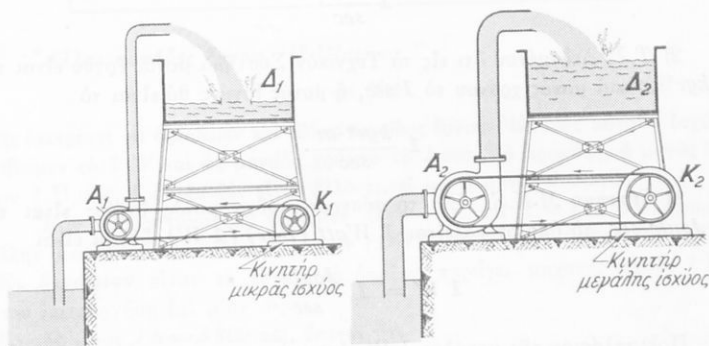
Ἐκ τῶν άνωτέρω συλλογισμῶν καθίσταται άμέσως αἰσθητή ή ανάγκη τού καθορισμοῦ ένός νέου φυσικοῦ μεγέθους, τó όποῖον νά δεικνύῃ τόν ρυθμόν, μέ τόν όποῖον παράγεται τó έργον. Τó μέγεθος τούτο καλεῖται *ισχύς* καὶ ορίζεται ως εξής:

Ἴσχύς N καλεῖται τó πηλίκον τού έργου A , τó όποῖον παράγεται έντός χρόνου τινός t , διὰ τού χρόνου τούτου. Ἦτοι

$$N = \frac{A}{t} \quad (1)$$

Ἐπομένως, διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῶν κεράμων, ἡ ἰσχύς, ἡ ὁποία καταναλίσκεται ὑπὸ τοῦ ἐργάτου εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, εἶναι μικροτέρα τῆς ἰσχύος, ἡ ὁποία καταναλίσκεται εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν.

Διὰ τὴν κατανόησιν τῆς ἐννοίας τῆς ἰσχύος, ἀναφέρομεν καὶ τὸ ἑξῆς παράδειγμα: Θεωρήσωμεν δύο ἀντλητικά συγκροτήματα (σχ. 123), διὰ τῶν



Σχ. 123.

ὁποίων ἀντλοῦμεν ὕδωρ ἐκ τοῦ αὐτοῦ βάθους καὶ τὸ ἀναβιβάζομεν εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἡ ἀντλία τοῦ ἀριστεροῦ συγκροτήματος εἶναι μικρά, ἐνῶ ἡ τοῦ δεξιοῦ εἶναι μεγάλη. Ἐὰν θέσωμεν εἰς λειτουργίαν καὶ τὰς δύο ἀντλίας ταυτοχρόνως, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χρόνου t , ἡ ποσότης τοῦ ὕδατος, ἡ ὁποία ἐστάλη εἰς τὴν δεξαμενὴν Δ_1 ὑπὸ τῆς ἀντλίας A_1 , εἶναι μικροτέρα τῆς ποσότητος, ἡ ὁποία ἐστάλη εἰς τὴν δεξαμενὴν Δ_2 ὑπὸ τῆς μεγάλης ἀντλίας A_2 . Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι, ἐντὸς τοῦ χρόνου t , εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν παρήχθη μικρὸν ἔργον, ἐνῶ εἰς τὴν δευτέραν μεγαλύτερον. Ὁ τύπος $N = A/t$ δεικνύει ὅτι ἡ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν ἀπαιτεῖ ἡ ἀντλία διὰ τὴν κίνησίν της, εἶναι μικρά εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν καὶ μεγάλη εἰς τὴν δευτέραν. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν οἱ δύο ἠλεκτρικοὶ κινητήρες K_1 , K_2 δὲν θὰ εἶναι τῆς αὐτῆς ἰσχύος, ἀλλ' ὁ κινητὴρ K_2 θὰ εἶναι μεγαλύτερας ἰσχύος ἢ ὁ κινητὴρ K_1 (*).

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς A , λαμβάνομεν τὸν τύπον

$$A = N \cdot t$$

(*) Εἶναι προφανές ὅτι οἱ χρησιμοποιοῦντες τὴν ἔκφρασιν «μηχανὴ μεγάλης δυνάμεως» ἐννοοῦν «μηχανὴν μεγάλης ἰσχύος».

Τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου τούτου δυνάμεθα νὰ υπολογίσωμεν τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον θὰ παραγάγῃ μία μηχανή, γνωστῆς ἰσχύος N , ὅταν λειτουργήσῃ ἐπὶ ὥρισμένον χρόνον t .

Μονάδες ἰσχύος. 1) *C.G.S.* Ἐπειδὴ εἰς τὸ σύστημα *C.G.S.* μονὰς ἔργου εἶναι τὸ 1 erg , μονὰς δὲ χρόνου τὸ 1 sec , ἔπεται ὅτι ἡ μονὰς ἰσχύος θὰ προκύψῃ, ἐάν, εἰς τὸν τύπον (1), θέσωμεν $A = 1 \text{ erg}$ καὶ $t = 1 \text{ sec}$. Ἄρα, μονὰς ἰσχύος εἰς τὸ σύστημα *C.G.S.* εἶναι τὸ

$$1 \frac{\text{erg}}{\text{sec}}.$$

2) *T.S.* Δεδομένου ὅτι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονὰς ἔργου εἶναι τὸ $1 \text{ kg}^* \cdot \text{m}$ καὶ μονὰς χρόνου τὸ 1 sec , ἡ μονὰς ἰσχύος θὰ εἶναι τὸ

$$1 \frac{\text{kg}^* \cdot \text{m}}{\text{sec}}.$$

3) *Σύστημα M.K.S.* Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο μονὰς ἰσχύος εἶναι τὸ 1 Joule/sec , τὸ ὁποῖον καλεῖται $1 \text{ Watt (B\grave{a}t) (1 W)}$. Ἦτοι εἶναι

$$1 W = 1 \frac{\text{Joule}}{\text{sec}}.$$

Πολλαπλάσιον τῆς μονάδος $1 W$ εἶναι τὸ

$$1 \text{ κιλοβάτ (1 kW)} = 1000 W.$$

Ἀσκησις. Νὰ εὗρεθῇ ἡ σχέσις μεταξὺ 1 kW καὶ $1 \text{ kg}^* \cdot \text{m/sec}$.

Ἄλλαι μονάδες ἰσχύος. Διὰ τὴν ἰσχὺν μηχανῶν, κυρίως, χρησιμοποιεῖται ἡ μονὰς

$$1 \text{ ἀιμόϊππος ἢ, ἀπλῶς, ἵππος (1 CV ἢ PS) (*)}$$

Εἶναι δὲ

$$1 \text{ ἵππος} = 75 \frac{\text{kg}^* \cdot \text{m}}{\text{sec}} = 736 W.$$

Ἡ εἰς τὰς ἀγγλοσαξωνικὰς χώρας χρησιμοποιουμένη μονὰς

$$1 \text{ βρετανικὸς ἵππος (1 HP) (*)}$$

εἶναι κατὰ τι μεγαλυτέρα τῆς προηγουμένης. Συγκεκριμένως εἶναι

$$1 \text{ HP} = 76 \frac{\text{kg}^* \cdot \text{m}}{\text{sec}} = 746 W.$$

(*) Ἀπὸ τοὺς ὅρους *cheval vapeur*, *Pferdestärke*, *horse power*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΙΣΧΥΩΝ (*)

(εις HP)

Ἀνὴρ	0,15
Κινητὴρ ἠλεκτρικοῦ ἀνεμιστήρος	0,2
Ἴππος συνήθης	0,7
Κινητὴρ μικροῦ αὐτοκινήτου	25
Κινητὴρ μεγάλου φορτηγοῦ αὐτοκινήτου	100
Ἀτμομηχανὴ σιδηροδρόμου	1000
Μηχαναὶ ὑπερωκεανείου «ΟΛΥΜΠΙΑ»	25000
Ἐργοστάσιον ἠλεκτροπαραγωγῆς Ἀλιβερίου	80000

Ἄλλαι μονάδες ἔργου. Ἡ ἑξίσωσις

$$A = N \cdot t \quad (2)$$

μας ἐπιτρέπει νὰ ὀρίσωμεν καὶ ἄλλας μονάδας ἔργου. Ἐὰν ὡς μονάδα ἰσχύος λάβωμεν τὸ $1 W$ καὶ ὡς μονάδα χρόνου τὸ $1 sec$, θὰ προκύψῃ ἡ μονὰς ἔργου $1 W \cdot sec$, ἡ ὁποία δὲν εἶναι ἄλλο τι, εἰ μὴ ἡ μονὰς $1 Joule$.

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (2) θέσωμεν $N = 1 W$ καὶ $t = 1 h$, θὰ λάβωμεν ἄλλην μονάδα ἔργου τὸ 1 βατῶριον ($1 Wh$), τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ὡς ἑξῆς: Ἐν **βατῶριον** εἶναι τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον παράγει μηχανή, ἰσχύος $1 W$, ὅταν λειτουργήσῃ ἐπὶ μίαν ὥραν.

Ἐπειδὴ εἶναι $1 h = 3600 sec$, ἔπεται ὅτι

$$1 Wh = 3600 W \cdot sec \text{ (ἢ Joule)}.$$

Πολλαπλασίον τῆς μονάδος 1 βατῶριον εἶναι τὸ

$$1 \text{ κιλοβατῶριον} \text{ (} 1 kWh \text{)}.$$

Ἐν **κιλοβατῶριον** εἶναι τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον παράγει μηχανή, ἰσχύος $1 kW$, ὅταν λειτουργήσῃ ἐπὶ μίαν ὥραν. Συνεπῶς, θὰ εἶναι

$$1 kWh = 1000 Wh = 1000 \cdot 3600 W \cdot sec \text{ (ἢ Joule)}.$$

§ 78. Ενέργεια. Ἡ Ενέργεια E ἐνὸς σώματος καλεῖται τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον τὸ σῶμα τοῦτο δύναται νὰ παραγάγῃ. Οὕτω, π.χ., ποσότης ὕδατος, εὐρισκομένη εἰς ἓν ὕψος, ἔχει ἐνέργειαν, διότι δύναται, διὰ καταλλήλου μηχανῆς (τοῦ *ὕδροστροβίλου*), νὰ παραγάγῃ ἔργον. Ἀφ' ἑτέρου, κινουμένη σφαῖρα ὅπλου δύναται, ὅταν συναντήσῃ μίαν σάνιδα, νὰ τὴν διαπεράσῃ καὶ νὰ σχηματίσῃ μίαν ὀπὴν, συνθλίβουσα τὰς ἴνας τοῦ ξύλου, ὁπότε παράγει ἔργον.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ ἐνέργεια τοῦ ὕδατος ὀφείλεται εἰς τὴν θέσιν τοῦ καί, συγκεκριμένως, εἶναι ἀνάλογος τοῦ ὕψους, εἰς τὸ ὁποῖον

(*) Ὁ ὅρος «ἰσχύς» πρέπει ν' ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ ὀρθοῦ «ἰσχύς», δεδομένου ὅτι οὗτος δὲν ἀναφέρεται εἰς δύναμιν.

τοῦτο εὐρίσκεται. Ἡ ἐνέργεια αὕτη καλεῖται *δυναμικὴ ἐνέργεια*. Ἐκτὸς τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας, τὴν ὁποίαν ἔχει ἓν σῶμα, λόγῳ τῆς θέσεώς του, δύναται νὰ ἔχῃ καὶ δυναμικὴν ἐνέργειαν, λόγῳ τῆς καταστάσεως, εἰς τὴν ὁποίαν εὐρίσκεται. Οὕτω, ἓν ἐλατήριο, τὸ ὁποῖον ἔχει παραμορφωθῇ — π.χ., ἓν συσπειρωμένον ἐλατήριο ὥρολογίου — ἔχει δυναμικὴν ἐνέργειαν, ὀφειλομένην εἰς τὴν παραμόρφωσιν, τὴν ὁποίαν ἔχει ὑποστῇ. Τὸ ἐλατήριο τοῦτο, κατὰ τὴν ἔκτασίν του, μετατρέπει τὴν δυναμικὴν του ἐνέργειαν εἰς ἔργον, τὸ ὁποῖον καταναλίσκεται διὰ τὴν κίνησιν τοῦ μηχανισμοῦ τοῦ ὥρολογίου. Γενικῶς, λοιπόν, δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν τὴν δυναμικὴν ἐνέργειαν ὥς ἑξῆς:

Δυναμικὴ ἐνέργεια $E_{διν}$ καλεῖται ἡ ἐνέργεια, τὴν ὁποίαν ἔχει ἓν σῶμα, λόγῳ τῆς θέσεως ἢ τῆς καταστάσεως, εἰς τὴν ὁποίαν τοῦτο εὐρίσκεται.

Κατὰ ταῦτα, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἀπητήθη διὰ νὰ ἔλθῃ τὸ σῶμα εἰς τὴν θέσιν ἢ τὴν κατάστασιν εἰς τὴν ὁποίαν, τώρα, εὐρίσκεται.

Διὰ τὴν κατανόησιν τῆς ἐννοίας τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας φέρομεν καὶ τὰ ἑξῆς παραδείγματα: Σῶμα, βάρους B , εὐρισκόμενον εἰς ὕψος h ἀπὸ τοῦ ὀρίζοντιο ἐπιπέδου, ἔχει δυναμικὴν ἐνέργειαν, ἴσην πρὸς

$$E_{διν} = B \cdot h$$

Πράγματι, διὰ νὰ ἀνέλθῃ τὸ σῶμα τοῦτο εἰς τὸ ὕψος h , ἐξησκήθη ἐπ' αὐτοῦ δύναμις, ἴση πρὸς τὸ βάρος του B , ἡ ὁποία, κατὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ σώματος, παρήγαγεν ἔργον, ἴσον πρὸς $B \cdot h$. Τὸ ἔργον, ἀκριβῶς, τοῦτο ἐναποθηκεύθη εἰς τὸ σῶμα ὑπὸ μορφήν δυναμικῆς ἐνεργείας.

Εἰς τὴν περίπτωσιν, ἀφ' ἐτέρου, τοῦ συσπειρωμένου ἐλατηρίου ἡ δυναμικὴ του ἐνέργεια εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον κατηναλώθη διὰ τὴν συσπίρωσιν αὐτοῦ.

Εἰς τὴν Μηχανικὴν, πλὴν τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας, ἐμφανίζεται καὶ μία ἄλλη μορφή ἐνεργείας, ἡ ὁποία καλεῖται *κινητικὴ ἐνέργεια* καὶ ἡ ὁποία ὀρίζεται ὥς ἑξῆς:

Κινητικὴ ἐνέργεια $E_{κιν}$ ἐνὸς σώματος καλεῖται ἡ ἐνέργεια, τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ σῶμα τοῦτο, λόγῳ τῆς ταχύτητός του. Αὕτη ἰσοῦται πρὸς τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον παρήγαγεν ἡ δύναμις, ἡ ὁποία ἐπετάχυνε τὸ σῶμα καὶ τοῦ ἔδωκε τὴν ταχύτητα, τὴν ὁποίαν ἔχει. Οὕτω, κινητικὴν ἐνέργειαν ἔχει ἡ κινουμένη σφαῖρα τοῦ ὄπλου.

Ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω, ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἐνὸς σώματος, μάζης m καὶ ταχύτητος v , εἶναι ἴση πρὸς

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Ἀπόδειξις. Ἡ ἑξίσωσις αὕτη ἀποδεικνύεται εὐκόλως εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ δύναμις, ἡ προσδώσασα τὴν ἐνέργειαν, ἦτο σταθερά.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ κίνησις εἶναι, ὡς γνωστόν, ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, διὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύουν οἱ τύποι

$$s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad v = \gamma \cdot t. \quad (2)$$

Τὸ ἔργον A , τὸ ὁποῖον παρήγαγεν ἡ δύναμις F , ἡ ὁποία δρῶσα ἐπὶ τοῦ σώματος ἐπὶ χρόνον t , μετεκίνησεν αὐτὸ κατὰ τὸ διάστημα s , εἶναι ἴσον πρὸς

$$A = F \cdot s. \quad (3)$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν σχέσιν $F = m \cdot \gamma$ καθὼς καὶ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), γράφομεν τὴν ἐξίσωσιν (3) ὡς ἑξῆς:

$$A = m \cdot \gamma \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot \gamma^2 \cdot t^2 = \frac{1}{2} m \cdot v^2.$$

Τὸ ἔργον τοῦτο, ἀκριβῶς, ἀνευρίσκεται ὡς κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος.

§ 79. Θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας. Εἰς πολλὰς περιπτώσεις ἐνέργεια μιᾶς μορφῆς μετατρέπεται εἰς ἐνέργειαν ἄλλης μορφῆς. Οὕτω, κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτώσιν ἐνὸς σώματος, ἡ δυναμικὴ του ἐνέργεια διαρκῶς ἐλαττοῦται, αὐξανομένης, ἀντιστοίχως, τῆς ταχύτητος καί, συνεπῶς, τῆς κινητικῆς του ἐνέργειας. Θὰ συγκρίνωμεν τὴν δυναμικὴν ἐνέργειαν, τὴν ὁποίαν εἶχε τὸ σῶμα, ὅταν εὐρίσκετο εἰς τὸ ὕψος h , πρὸς τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν, τὴν ὁποίαν θὰ ἔχῃ τοῦτο, ὅταν φθάσῃ εἰς ὕψος $h = 0$: Ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος εἰς ὕψος h εἶναι ἴση πρὸς $E_{\text{dyn}} = B \cdot h$. Ἄν τὸ ἀφήσωμεν νὰ πέσῃ, τότε, ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ ὕψος $h = 0$, ἡ δυναμικὴ του ἐνέργεια θὰ ἔχῃ γίνῃ μηδέν, ἐνῶ ταυτοχρόνως θὰ ἔχῃ ἀποκτήσῃ ταχύτητα v , ἡ ὁποία ὑπολογίζεται, ἐκ τῶν τύπων τῆς ἐλευθέρου πτώσεως

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \text{καὶ} \quad v = g \cdot t,$$

ἴση πρὸς

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Ἐπομένως, ἡ κινητικὴ αὐτοῦ ἐνέργεια θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot 2gh = mg \cdot h = B \cdot h.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος εἰς ὕψος $h = 0$ εἶναι, ἀκριβῶς, ἴση πρὸς τὴν δυναμικὴν ἐνέργειαν, τὴν ὁποίαν εἶχε τὸ σῶμα τοῦτο, ὅταν εὐρίσκετο εἰς τὸ ὕψος h .

Ἐὰν καλέσωμεν **μηχανικὴν ἐνέργειαν** τὸ ἄθροισμα τῆς κινητικῆς καὶ τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας, ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι, κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτώσιν, ἡ μηχανικὴ ἐνέργεια παρέμεινε σταθερά. Τὸ πόρισμα τοῦτο, τὸ ὁποῖον ἰσχύει ὅχι μόνον διὰ τὴν πτώσιν, ἀλλὰ καὶ δι' ὅλα τὰ φαινόμενα τῆς Μηχανικῆς, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχομεν μεταβολὴν τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας εἰς κινητικὴν (ἢ καὶ ἀντιστρόφως), φέρεται ὑπὸ τὸ ὄνομα **θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας** καὶ διατυπῶνται ὡς ἑξῆς:

«Κατά τὰς μετατροπὰς τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας εἰς κινήτην καὶ ἀντιστρόφως, ἡ μηχανικὴ ἐνέργεια (δηλ., τὸ ἄθροισμα τῆς δυναμικῆς καὶ τῆς κινήτικης ἐνεργείας) παραμένει σταθερά, ἐφ' ὅσον δὲν ἔχομεν μετατροπὴν αὐτῆς εἰς ἐνέργειαν ἄλλης μορφῆς (π.χ., θερμότητα)».

Τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις μιᾶς γενικωτάτης ἀρχῆς τῆς Φυσικῆς, ἡ ὁποία εἶναι γνωστὴ ὑπὸ τὸ ὄνομα **ἄξιώμα διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας** καὶ ἡ ὁποία διατυπώται ὡς ἑξῆς :

«*Ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια (δηλ., τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μορφῶν ἐνεργείας) ἐνὸς μονωμένου συστήματος (*) σωμάτων εἶναι σταθερά*».

Ἡ *ισχύς* τοῦ ἄξιωματος τούτου ἐπεκτείνεται εἰς ὅλας τὰς μορφὰς ἐνεργείας, π.χ., θερμότητα, ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν, χημικὴν ἐνέργειαν κ.λ. Ἄμεσος συνέπεια τοῦ ἄξιωματος διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας εἶναι καὶ τὸ ἀδύνατον τῆς κατασκευῆς τοῦ **δεικνήτου**, δηλ., μιᾶς μηχανῆς, ἡ ὁποία θὰ παρήγεν ἐνέργειαν ἐκ τοῦ μηδενός.

Ἐφαρμογαί. 1) **Υδροηλεκτρικὴ ἐγκατάστασις.** Τὸ ὕδωρ μιᾶς λίμνης, εὐρισκομένης εἰς μέγα ὕψος, ῥέον ἐντὸς σωλῆνος, ἀποκτᾷ, κατὰ τὴν ἑξοδὸν τοῦ ἔξ αὐτοῦ, μεγάλην ταχύτητα. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια, τὴν ὁποίαν εἶχε τὸ ὕδωρ ἐντὸς τῆς λίμνης, μετατρέπεται εἰς κινήτην ἐνέργειαν. Τὸ ἔξερχόμενον ὕδωρ ποοσκρούει, ἐν συνεχείᾳ, ἐπὶ τῶν περυγίων ἐνὸς *ὕδροστροβίλου* (βλ. § 171) καὶ θέτει αὐτὸν εἰς κίνησιν. Ὁ ὕδροστροβίλος κινεῖ μίαν *ἠλεκτρικὴν γεννήτριαν*, ἡ ὁποία τροφοδοτεῖ δι' ἠλεκτρικοῦ ρεύματος τὸ ἠλεκτρικὸν δίκτυον μιᾶς πόλεως. Διὰ μιᾶς, λοιπόν, *ὕδροηλεκτρικῆς ἐγκαταστάσεως* μετατρέπεται ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ ὕδατος τῆς λίμνης εἰς ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν.

2) Ἐὰν ἀφήσωμεν τεμάχιον μολύβδου νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ δαπέδου, ἡ δυναμικὴ του ἐνέργεια μετατρέπεται κατὰ τὴν πτώσιν εἰς κινήτην καί, ἐν συνεχείᾳ, κατὰ τὴν κοροῦσιν μετὰ τοῦ δαπέδου, εἰς θερμότητα.

§ 80. Ἄπλαϊ μηχαναί. Μηχαναί, ἐν γένει, καλοῦνται συστήματα σωμάτων, διὰ τῶν ὁποίων μετασχηματίζεται ἐνέργεια μιᾶς μορφῆς εἰς ἐνέργειαν ἄλλης μορφῆς. Μηχαναί, π.χ., εἶναι οἱ *κινήτῃρες* (βενζινοκινήτῃρες, ἠλεκτρικοὶ κινήτῃρες κ.λ.), διὰ τῶν ὁποίων μετατρέπεται ἐνέργεια μιᾶς μορφῆς (θερμότης καύσεως, ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια κ.λ.) εἰς μηχανικὸν ἔργον.

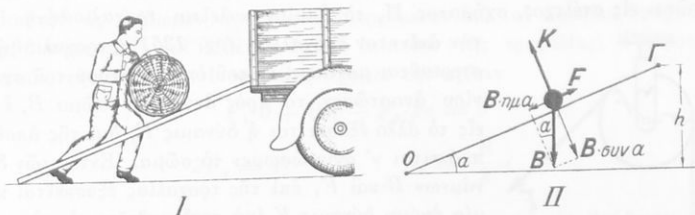
Ἐνταῦθα θὰ ἐξετάσωμεν μερικὰς ἐκ τῶν **ἀπλῶν μηχανῶν**, εἰς τὰς ὁποίας τόσον ἡ προσφερομένη, ὅσον καὶ ἡ ἀποδιδομένη ἐνέργεια εὐρίσκονται ὑπὸ μορφὴν μηχανικοῦ ἔργου.

Αἱ ἀπλούστεραι ἐξ αὐτῶν χρησιμοποιοῦνται ἢ διὰ νὰ μεταβάλλουν τὴν διεύθυνσιν μιᾶς δυνάμεως, ὅπως, π.χ., ἡ ἀκίνητος τροχαλία (βλ. σχ.

(*) Διὰ τοῦ ὅρου «*μονωμένον σύστημα*» ἐννοοῦμεν σύνολον σωμάτων, τὸ ὅποιον νὰ μὴ δύναται ν' ἀνταλλάξῃ ἐνέργειαν μὲ τὸ περιβάλλον, δηλ., νὰ μὴ δύναται ν' ἀνταλλάσῃ οὔτε θερμότητα, οὔτε ἔργον μὲ τὸ περιβάλλον.

125), η διὰ τὰ μεταβάλλουν τὸ μέτρον τῶν δυνάμεων, ὥπως, π.χ., ὁ μοχλὸς (βλ. σχ. 129), τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὁποίου, διὰ μικρᾶς δυνάμεως, ὑπερνικῶμεν ἄλλην, μεγαλύτεραν.

§ 81. Κεκλιμένον επίπεδον. Τὸ *κεκλιμένον επίπεδον* εἶναι μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια (π.χ., μία σανίς), εὐρισκομένη ὑπὸ κλίσιν ὡς πρὸς τὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον, τῇ βοηθείᾳ τῆς ὁποίας δυνάμεθα ν' ἀνυψώσωμεν ἓν σῶμα (σχ. 124, I), καταβάλλοντες δύναμιν, μικροτέραν τοῦ βάρους του.



Σχ. 124.

Τοῦτο προκύπτει διὰ τῶν ἐξῆς συλλογισμῶν: Ἐπὶ τοῦ σώματος (II) ἐξασκοῦνται τρεῖς δυνάμεις: 1) τὸ βάρος του B . 2) Ἡ δύναμις K , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον καὶ ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτό, διότι ἡ τριβὴ θεωρεῖται ἀμελητέα. 3) Ἡ δύναμις F , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ὁ ἄνθρωπος. Ἀναλύομεν τὸ βάρος B εἰς δύο συνιστώσας, μίαν—τὴν $B \cdot \eta \mu \alpha$ —παράλληλον πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον, καὶ τὴν $B \cdot \sigma \upsilon \nu \alpha$, κάθετον ἐπ' αὐτό. Ἐφ' ὅσον τὸ σῶμα ἰσορροπεῖ ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, πρέπει ἡ μὲν δύναμις $B \cdot \sigma \upsilon \nu \alpha$ νὰ ἰσορροπῇται ὑπὸ τῆς K , ἡ δὲ F ὑπὸ τῆς $B \cdot \eta \mu \alpha$. Ἦτοι θὰ εἶναι

$$K = B \cdot \sigma \upsilon \nu \alpha \quad \text{καὶ} \quad F = B \cdot \eta \mu \alpha.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως προκύπτει ὅτι ἡ δύναμις F , ἡ ἀνυψοῦσα τὸ σῶμα, εἶναι μικροτέρα τοῦ βάρους B τοῦ σώματος, καθόσον τὸ $\eta \mu \alpha$ εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος (π.χ., διὰ γωνίαν $\alpha = 30^\circ$ εἶναι $\eta \mu 30^\circ = 0,5$).

Θὰ ὑπολογίσωμεν, τώρα, τὸ ἀπαιτούμενον ἔργον διὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ σώματος: Διὰ ν' ἀνυψώσωμεν τὸ σῶμα κατακορύφως κατὰ τὸ ὕψος h , ἀπαιτεῖται ἔργον A_1 , ἴσον πρὸς

$$A_1 = B \cdot h.$$

Ἄν ἀνυψώσωμεν τὸ σῶμα διὰ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, θ' ἀπαιτηθῇ ἔργον A_2 , ἴσον πρὸς

$$A_2 = F \cdot l,$$

ἐνθα l εἶναι τὸ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου (ἀπόστασις OG). Ἐπειδὴ, ὁμως, εἶναι $F = B \cdot \eta \mu \alpha$ καὶ $h = l \cdot \eta \mu \alpha$, ἔχομεν

$$A_2 = B \cdot \eta \mu \alpha \cdot \frac{h}{\eta \mu \alpha} = B \cdot h = A_1.$$

Παρατηροῦμεν, δηλαδή, ὅτι καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις χρειάζεται τὸ αὐτό, ἀκριβῶς, ἔργον. Συνεπῶς, διὰ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἐπιτυγχάνομεν μὲν ἐλάττωσιν τῆς ἀπαιτουμένης διὰ τὴν ἀνύψωσιν δυνάμεως, ὁ δρόμος, ὅμως, κατὰ τὸν ὅποιον μετακινοῦμεν τὸ σῶμα, γίνεται μεγαλύτερος.

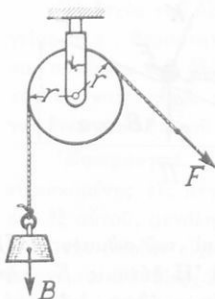
§ 82. Τροχαλῖαι. 1) **Ἀκίνητος** (ἢ παγία) **τροχαλία.** Ἡ τροχαλία, ἐν γένει, εἶναι δίσκος, στρεπτός περὶ ἄξονα, ὁ ὅποιος φέρει κατὰ τὴν περιφέρειαν αὐλάκα, διὰ τῆς ὁποίας διέρχεται σχοινίον (ἢ ἄλυσις). Ὁ ἄξων στερεοῦται εἰς στέλεχος, σχήματος Π, τὸ ὅποιον καλεῖται *τροχαλιοθήκη*. Εἰς τὴν ἀκίνητον τροχαλίαν (σχ. 125) ἡ τροχαλιοθήκη στερεοῦται μονίμως, ἐκ τοῦ ἐνὸς δὲ ἄκρου τοῦ σχοινίου ἀναρτῶμεν τὸ πρὸς ἀνύψωσιν σῶμα *B*, ἐνῶ εἰς τὸ ἄλλο ἑξασκεῖται ἡ δύναμις *F*, διὰ τῆς ὁποίας πρόκειται ν' ἀνυψώσωμεν τὸ σῶμα. Ἐκτὸς τῶν δυνάμεων *B* καὶ *F*, ἐπὶ τῆς τροχαλίας ἑξασκεῖται καὶ μία ἀκόμη δύναμις *K* (μὴ σχεδιασθεῖσα εἰς τὸ σχῆμα 125), προερχομένη ἐκ τῆς τροχαλιοθήκης.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἰσορροπίας, τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν τριῶν δυνάμεων *B*, *F*, καὶ *K* ὡς πρὸς ἓνα οἰονδήποτε ἄξονα εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν. Διὰ τὸν ὑπολογισμόν τῶν ροπῶν, ἃς ἐκλέξωμεν ὡς ἄξονα, τὸν ἄξονα τῆς τροχαλίας. Ὁ μοχλοβραχίων τῆς δυνάμεως *K* εἶναι ἴσος πρὸς μηδέν, καθόσον ἡ δύναμις αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος. Γράφοντες τὴν συνθήκην ἰσορροπίας τῶν ροπῶν, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

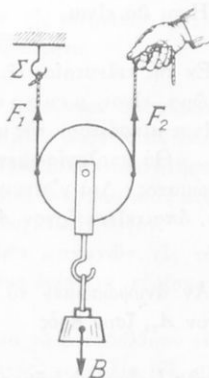
$$F \cdot r - B \cdot r + K \cdot 0 = 0 \quad \text{ἢ} \quad F = B.$$

Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι, διὰ τῆς ἀκινήτου τροχαλίας, δὲν ἐπιτυγχάνομεν ἐλάττωσιν τῆς ἀπαιτήτου διὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ σώματος δυνάμεως, ἀλλ', ἀπλῶς, μόνον μεταβάλλομεν τὴν διεύθυνσιν αὐτῆς. Τοῦτο, ὅμως, εἶναι χρησιμώτατον, διότι ὁ ἄνθρωπος καταπονεῖται ὀλιγώτερον, ὅταν ἔλκη ἓν σχοινίον πρὸς τὰ κάτω, παρὰ ἀντιθέτως.

2) **Κινητὴ τροχαλία.** Τὸ σχοινίον, στερεωθὲν κατὰ τὸ ἓν ἄκρον εἰς τὸ σημεῖον Σ (σχ. 126), διέρχεται διὰ τῆς αὐλάκος τῆς τροχαλίας, εἰς δὲ τὸ ἄγκιστρον τῆς τροχαλιοθήκης ἀναρτᾶται τὸ βάρος *B*. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἰσορροπίας, τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν τριῶν δυνάμεων *F*₁, *F*₂ καὶ *B* ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῆς τροχαλίας θὰ εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν. Ἐάν, λοιπόν, καλέσωμεν *r* τὴν ἀκτίνα τῆς τροχαλίας, θὰ ἔχωμεν τὴν



Σχ. 125. Ἀκίνητος τροχαλία.



Σχ. 126. Κινητὴ τροχαλία.

σχέςιν

$$F_1 \cdot r + B \cdot 0 - F_2 \cdot r = 0,$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει

$$F_1 = F_2.$$

(Ὁ μοχλοβραχίων τῆς δυνάμεως B εἶναι ἴσος πρὸς μηδέν, διότι ἡ διεύθυνσις αὐτῆς διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος τῆς τροχαλίας).

Διὰ νὰ εὗρωμεν τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν δυνάμεων F_2 καὶ B , ἐφαρμόζομεν τὴν συνθήκην ἰσορροπίας τῶν ροπῶν καὶ διὰ δεύτερον ἄξονα. Ὡς τοιοῦτον ἂς λάβωμεν ἕνα ἄξονα, διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως F_1 καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς τροχαλίας. Γράφοντες, λοιπόν, τὴν συνθήκην ἰσορροπίας, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$F_1 \cdot 0 + B \cdot r - F_2 \cdot 2r = 0$$

$$\text{ἢ} \quad 2F_2 = B \quad \text{ἢ} \quad F_2 = \frac{B}{2}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ ν' ἀνυψώσωμεν ἓν σῶμα μὲ τὴν βοήθειαν κινήσεως τῆς τροχαλίας, πρέπει νὰ καταβάλωμεν δύναμιν, ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ βάρους τοῦ σώματος.

Κινητὴ τροχαλία μὲ σχοινία μὴ παράλληλα. Τ' ἀνωτέρω ἰσχύουν, ἐφ' ὅσον τὰ δύο σχοινία εἶναι παράλληλα. Ὄταν, ὅμως, τὰ σχοινία ταῦτα δὲν εἶναι παράλληλα, ἀλλὰ σχηματίζουν γωνίαν α μετὰ τῆς κατακορύφου (σχ. 127), διὰ νὰ εὗρωμεν τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς ἀνυψούσης δυνάμεως F_2 καὶ τοῦ πρὸς ἀνύψωσιν βάρους B , σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐφ' ὅσον ἔχομεν ἰσορροπίαν, πρέπει τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν τριῶν δυνάμεων F_1 , F_2 καὶ B ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῆς τροχαλίας νὰ εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν. Ἥτοι, ἐάν καλέσωμεν r τὴν ἀκτίνα τῆς τροχαλίας, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$F_1 \cdot r + B \cdot 0 - F_2 \cdot r = 0,$$

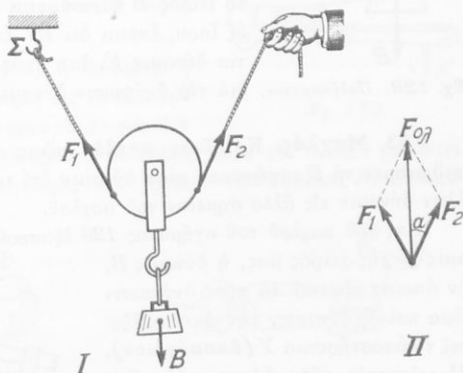
$$\text{ἢ} \quad F_1 = F_2.$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἀφοῦ αἱ τρεῖς

δυνάμεις F_1 , F_2 καὶ B εὐρίσκονται ἐν ἰσορροπία, πρέπει ἡ συνισταμένη $F_{ολ}$ τῶν δύο ἴσων δυνάμεων F_1 καὶ F_2 νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν τρίτην δύναμιν B . Ἥτοι

$$F_{ολ} = B. \quad (1)$$

Διὰ νὰ εὗρωμεν τὴν συνισταμένην $F_{ολ}$ τῶν δύο δυνάμεων F_1 καὶ F_2 προεκτείν-



Σχ. 127.

νομεν αὐτάς, κατὰ τὰ γνωστά, μέχρις ὅτου συναντηθοῦν (II) καὶ σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν εἶναι ῥόμβος· ἀφοῦ $F_1 = F_2$. Ὡς γνωστόν, τὸ ἥμισυ $F_{ολ}/2$ τῆς διαγωνίου $F_{ολ}$ εἶναι ἴσον πρὸς $F_2 \cdot \sigmaυν α$. Ἄρα, εἶναι

$$\frac{F_{ολ}}{2} = F_2 \cdot \sigmaυν α. \quad (2)$$

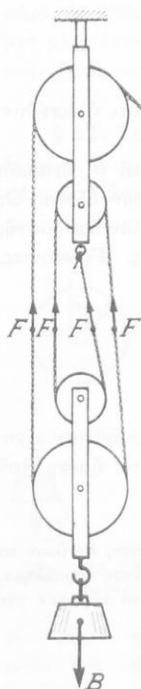
Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν διὰ τὴν ζητούμενην δύναμιν F_2 τὴν σχέσιν

$$F_2 = \frac{B}{2 \sigmaυν α}.$$

Ἐάν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην θέσωμεν $α = 0^\circ$ (σχοινία παράλληλα), λαμβάνομεν $\sigmaυν α = 1$, ὁπότε εἶναι

$$F_2 = \frac{B}{2},$$

ὅπως, ἀκριβῶς, προέκυψεν ἀνωτέρω.



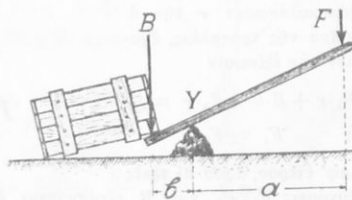
Σχ. 128. Πολύσπαστον.

3) **Πολύσπαστον.** Σύστημα, αποτελούμενον ἐξ ἀκινήτων καὶ κινητῶν τροχαλίων, ἀποτελεῖ τὸ **πολύσπαστον**. Τὸ σχῆμα 128 παριστᾷ πολύσπαστον μὲ 4 τροχαλίας. Εἰς τὸ ἄκρον τοῦ σχοινίου ἐξασκείται ἡ δύναμις F , εἰς δὲ τὸ ἄγκιστρον τῆς κινητῆς τροχαλιοθήκης τὸ πρὸς ἀνύψωσιν βάρος B . Ἐφ' ὅσον τὸ βάρος B κατανέμεται καὶ εἰς τὰ τέσσαρα σχοινία ἐξ ἴσου, ἔπεται ὅτι ἐφ' ἐκάστου σχοινίου θὰ ἐξασκῆται δύναμις F , ἴση πρὸς $B/4$. Συνεπῶς, ἡ ἀναγκαία διὰ τὴν ἀνύψωσιν δύναμις F θὰ εἶναι ἴση πρὸς $B/4$.

§ 83. Μοχλός. Καλοῦμεν **μοχλὸν** σῶμα στερεόν, διὰ τοῦ ὁποῖου κατορθώνομεν νὰ ἐξασκῶμεν μίαν δύναμιν ἐπὶ τινος σώματος, ἐφαρμόζοντες ἄλλην δύναμιν εἰς ἄλλο σημεῖον τοῦ μοχλοῦ.

Ἐπὶ τοῦ μοχλοῦ τοῦ σχήματος 129 ἐξασκοῦνται τρεῖς δυνάμεις: ἡ δύναμις F τῆς χειρὸς μας, ἡ δύναμις B , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ πρὸς ἀνύψωσιν σῶμα καὶ ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ ὑποστήριγμα Y (**ὑπομόχλιον**). (Ἡ τελευταία αὕτη δύναμις δὲν ἔχει σχεδιασθῇ). Ὅταν ὁ μοχλὸς ἰσορροπῇ, τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν τριῶν αὐτῶν δυνάμεων, ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Y , πρέπει νὰ εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν.

Ἐπειδὴ ἡ ροπή τῆς δυνάμεως, τῆς προερχομένης ἐκ τοῦ ὑπομοχλίου εἶναι ἴση πρὸς μηδέν (καθόσον αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Y), ἔχομεν



Σχ. 129.

$$F \cdot \alpha - B \cdot \beta = 0.$$

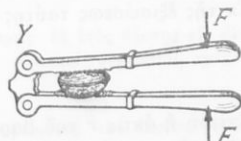
*Εκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν διὰ τὴν δύναμιν F , τὴν ἐξασκουμένην ὑπὸ τῆς χειρὸς,

$$F = B \cdot \frac{\beta}{\alpha}.$$

*Εκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης συνάγεται ὅτι, ἐὰν ἐκλέξωμεν τὴν θέσιν τοῦ ὑπομοχλίου πλησίον τοῦ σώματος, ὁ λόγος β/α θὰ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος καί, συνεπῶς, ἡ δύναμις F , ἡ ἀπαιτούμενη διὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ σώματος, θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ βάρους B αὐτοῦ.

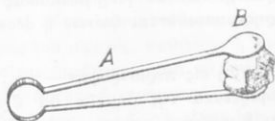
*Ἄν ὁ μοχλὸς τοῦ σχήματος 129 περιστραφῇ, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F , κατὰ τινα γωνίαν, τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς θὰ διατρέξῃ δρόμον, μεγαλύτερον τοῦ δρόμου, τὸν ὁποῖον θὰ διατρέξῃ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως B . Κατὰ τὴν ἀρχήν, ὅμως, τῆς διατηρήσεως τοῦ ἔργου, τὸ ἔργον, τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῆς δυνάμεως F , θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἔργον, τὸ καταναλισκόμενον ὑπὸ τῆς δυνάμεως B . Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι διὰ τοῦ ἄνω μοχλοῦ ὅ, τι κερδίζομεν εἰς δύναμιν τὸ χάνομεν εἰς δρόμον.

Παραδείγματα μοχλῶν. Εἰς τὸν **καρνοθραύστην** (σχ. 130) τὸ ὑπομόχλιον εἶναι τὸ σημεῖον Y . Ἡ δύναμις F , ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τῆς χειρὸς, προκαλεῖ πολὺ μεγαλύτεραν δύναμιν ἐπὶ τοῦ καρύου, ἡ ὁποία καὶ τὸ θραύει.

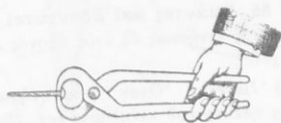


Σχ. 130.

Εἰς τὴν **λαβίδα** (σχ. 131) ἡ δύναμις, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ὑπὸ τῆς χειρὸς εἰς τὸ σημεῖον A , προκαλεῖ μικρότεραν δύναμιν εἰς τὸ σημεῖον B . Κατὰ τὴν σύσφιγξιν τῆς λαβίδος, ὁ δρόμος, κατὰ τὸν ὁποῖον μετακινεῖται τὸ σημεῖον A , εἶναι μικρότερος τοῦ δρόμου τοῦ σημείου B . Συνεπῶς,



Σχ. 131. Λαβίς.



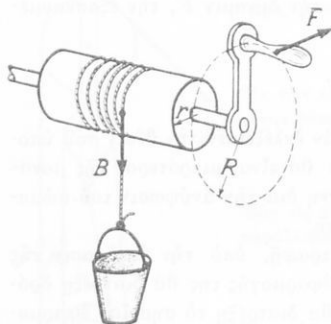
Σχ. 131α Ἡλάγρα. (*Εκ τοῦ ἡλὸς καὶ ἀγρεύω).

εἰς τὴν λαβίδα κερδίζομεν μὲν εἰς δρόμον, χάνομεν, ὅμως, εἰς δύναμιν.

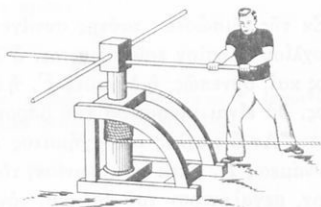
Μοχλοὶ εἶναι καὶ ἡ κώπη, ἡ ψαλλίς, ἡ ἡλάγρα (κ. τανάλια, σχ. 131 α) κ.λ.

§ 84. Βαροῦλκον. Τὸ **βαροῦλκον** (σχ. 132) εἶναι στερεὸς κύλινδρος, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ περιστρέφεται, διὰ στροφάλου, περὶ τὸν ἀξονά του. *Ἐπὶ τοῦ βαροῦλκου στερεοῦνται τὸ ἓν ἄκρον σχοινίου, εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ

ὁποίου ἀναρτᾶται τὸ βάρος B , τὸ ὁποῖον πρόκειται ν' ἀνυψώσωμεν. Αἱ δύο δυνάμεις B καὶ F σχηματίζουν, ὥς πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς, δύο ροπὰς. Διὰ νὰ ὑπάρῃ ἰσορροπία, πρέ-



Σχ. 132. Βαροῦλκον.



Σχ. 133. Έργάτης.

πει ἡ ροπή τῆς δυνάμεως F ν' ἀντισταθμίζῃ τὴν ροπὴν τῆς δυνάμεως B — ἥτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$B \cdot r = F \cdot R.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν διὰ τὴν δύναμιν F τὴν σχέσιν

$$F = B \cdot \frac{r}{R}.$$

Ἐπειδὴ ἡ ἀκτίς r τοῦ βαροῦλκου εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτίνος R τοῦ τροφάλου, ἐπεταὶ ὅτι ἡ δύναμις F εἶναι μικροτέρα τοῦ βάρους B .

Ἀτμοκίνητα ἢ ἠλεκτροκίνητα βαροῦλκα, χρησιμοποιούμενα διὰ τὴν ἀνάσπασιν τῶν ἀγκυρῶν τῶν πλοίων, καλοῦνται **ἐργάται**. Ἐνίοτε ὁ ἄξων τοῦ ἐργάτου εἶναι κατακόρυφος (σχ. 133).

§ 85. Ἱμάντες καὶ ὀδοντωτοὶ τροχοί. Προκειμένου νὰ γίνῃ μετάδοσις περιστροφικῆς κινήσεως ἐξ ἑνὸς ἄξονος εἰς ἄλλον, χρησιμοποιοῦνται *ἱμάντες* ἢ *ὀδοντωτοὶ τροχοί*.

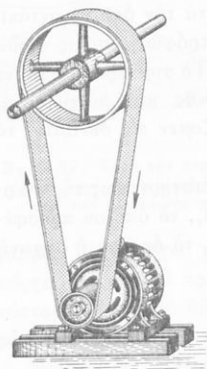
α) **Ἱμάντες.** Ὄταν ἡ κινήτριος τροχαλία τεθῇ εἰς περιστροφὴν — π.χ., τῇ βοηθείᾳ ἠλεκτρικοῦ κινητήρος (σχ. 134) — τὰ περιφερειακὰ τῆς σημεῖα θὰ ἔχουν ταχύτητα v , ἴσην πρὸς $\omega_1 \cdot r_1$, ἐνθα ω_1 καὶ r_1 εἶναι ἡ γωνιακὴ ταχύτης καὶ ἡ ἀκτίς τῆς τροχαλίας. Ἐπειδὴ ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἱμάντος κινοῦνται μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα v , ἐπεταὶ ὅτι τὴν αὐτὴν ταχύτητα θὰ ἔχουν καὶ τὰ περιφερειακὰ σημεῖα τῆς δευτέρας τροχαλίας, ἀνεξαρτήτως τῆς διαμέτρου αὐτῆς. Ἄν, λοιπόν, ω_2 καὶ r_2 εἶναι ἡ γωνιακὴ ταχύτης καὶ ἡ ἀκτίς τῆς δευτέρας τροχαλίας, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2.$$

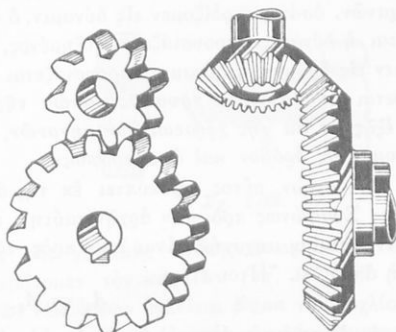
Ἐκ τοῦ τύπου τούτου προκύπτει ὅτι αἱ γωνιακαὶ ταχύτητες τῶν δύο τροχαλιῶν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ἀκτίνων τῶν.

β) **Ὀδοντωτοὶ τροχοί.** Ἡ περιστροφικὴ κίνησις δύναται, ἐπίσης, νὰ μεταδοθῇ, ἀπὸ ἄξονος εἰς ἄξονα, διὰ χρησιμοποίησεως ὀδοντωτῶν τροχῶν. Εἰς τὸ σχῆμα 135, I

ὁ μεγαλύτερος ὀδοντωτὸς τροχὸς φέρει διπλάσιον ἀριθμὸν ὀδόντων ἢ ὁ ἄλλος. Εἰς δύο, λοιπὸν, περιστροφὰς τοῦ μικροῦ τροχοῦ, ἀντιστοιχεῖ μία περιστροφή τοῦ μεγάλου.



Σχ. 134.



I

II

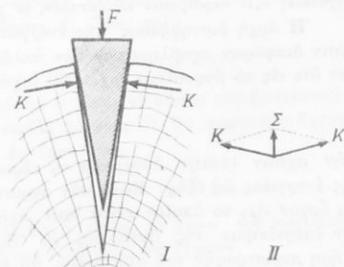
Σχ. 135.

Γενικῶς, αἱ γωνιακαὶ ταχύτητες δύο ὀδοντωτῶν τροχῶν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν τῶν ὀδόντων των. Σημειωτέον ὅτι οἱ δύο ὀδοντωτοὶ τροχοὶ περιστρέφονται κατ' ἀντιθέτους φορὰς.

Ὅταν πρόκειται νὰ μεταδοθῇ ἡ περιστροφικὴ κίνησις ἐξ ἑνὸς ἄξονος εἰς ἄλλον, καὶ θετοῖν ἐπὶ τὸν πρῶτον, χρησιμοποιοῦνται κωνικοὶ ὀδοντωτοὶ τροχοὶ (σχ. 135, II).

§ 86. Σφήν. Εἶναι σῶμα στερεόν, πρισματικόν, τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ διαχωρίσωμεν εἰς δύο ἓν στερεόν, ἐξασκοῦντες ἐπ' αὐτοῦ μικράν, σχετικῶς, δύναμιν. Θὰ ἐξετάσωμεν σφήνα, ὁ ὁποῖος ἔχει τομὴν ἰσοσκελοῦς τριγώνου (σχ. 136, I). Ἐξασκοῦμεν ἐπὶ τοῦ σφήνους τὴν δύναμιν F , ἐνῶ, ταυτοχρόνως, οὗτος ὑφίσταται ἐπὶ τῶν πλευρῶν του τὰς καθέτους δυνάμεις K, K . (Αἱ δυνάμεις αὗται εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ σφήνους, καθόσον ἡ τριβὴ θεωρεῖται ἀμελητέα). Διὰ νὰ ἰσορροπῇ ὁ σφήν, πρέπει ἡ συνισταμένη Σ τῶν δύο δυνάμεων K, K νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν δύναμιν F (II). Παρατηροῦμεν ὅτι, ὅσον ὀξύτερος εἶναι ὁ σφήν, τόσοον περισσότερον ἀμβλεία εἶναι ἡ γωνία μεταξὺ τῶν δυνάμεων K, K καὶ, συνεπῶς, τόσοον μικροτέρα ἡ συνισταμένη των. Εἶναι σαφές ὅτι, διὰ τοῦ σφήνους, δυνάμεθα νὰ ἐξασκήσωμεν μεγάλας πλευρικὰς δυνάμεις K, K , ἐφαρμοζοντας μικράν, σχετικῶς, δύναμιν F .

Ἡ ἐξέτασις τοῦ σφήνους ἐγένετο ἀνωτέρω ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι δὲν ὑπάρχει τριβὴ. Εἰς τὴν πραγματικότητα, ὅμως, ὑπάρχει τριβή, ἡ ὁποία περιπλέκει τὸ πρόβλημα.



Σχ. 136. Σφήν.

§ 87. Διατήρησις τής ένεργείας εις τας άπλως μηχανάς. "Οπως προκύπτει εκ τών προηγουμένων παραγράφων, δια τής χρήσεως τών άπλών μηχανών, δσάκις κερδίζομεν εις δύναμιν, ο δρόμος, κατά τόν όποιον μετακινείται ή δύναμις, παρουσιάζεται ηξημένος, και, αντιστρόφως, δσάκις κερδίζομεν εις δρόμον, ή δύναμις παρουσιάζεται ηξημένη. Το συμπέρασμα τούτο φέρεται υπό τό όνομα *χρυσούς κανών τής Μηχανικής* και διατυπoutai ως εξής: «Διά τής χρήσεως τών μηχανών, *ο,τι κερδίζομεν εις δύναμιν, τό χάνομεν εις δρόμον και αντιστρόφως*».

Ο κανών ούτος προκύπτει εκ τής αρχής τής διατηρήσεως τής ένεργείας: Συμφώνως πρὸς τήν αρχήν ταύτην, τό έργον A_1 , τό όποιον προσφέρομεν εις μίαν μηχανήν, είναι ίσον πρὸς τό έργον A_2 , τό όποιον ή μηχανή αυτη αποδίδει. "Ητοι είναι

$$A_1 = A_2. \quad (1)$$

Εις τήν εξίσωσιν ταύτην τὰ έργα A_1 και A_2 δύνανται νά εκφρασθοῦν ως γινόμενα δυνάμεως επί τόν αντίστοιχον δρόμον. "Ητοι

$$F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2. \quad (2)$$

Έκ τού τύπου τούτου προκύπτει ότι, όταν αυξάνεται ή δύναμις, ελατutται ο δρόμος και αντιστρόφως.

Έάν διαιρέσωμεν άμφοτερα τὰ μέλη τής εξισώσεως (2) διά τού χρόνου t , εντός τού όποιου λειτουργεί ή μηχανή, θά λάβωμεν

$$F_1 \cdot \frac{s_1}{t} = F_2 \cdot \frac{s_2}{t} \quad \eta \quad F_1 \cdot v_1 = F_2 \cdot v_2.$$

Ο χρυσός κανών, λοιπόν, δύναται νά εκφρασθῇ και ως εξής: «Διά τής χρήσεως τών μηχανών, *ο,τι κερδίζομεν εις δύναμιν, τό χάνομεν εις ταχύτητα και αντιστρόφως*».

Η αρχή διατηρήσεως τής ένεργείας δύναται νά χρησιμοποιηθῇ και διά τήν λύσιν διαφόρων προβλημάτων τών άπλών μηχανών. Ουτω, π.χ., εις τήν § 84 ευρομεν ότι εις τό βαρούλκον (σχ. 132) ισχύει ή σχέσις

$$F = B \cdot \frac{r}{R}.$$

Τήν σχέσηιν ταύτην δυνάμεθα νά ευρωμεν και τῇ βοηθεία τής αρχής διατηρήσεως τής ένεργείας ως εξής: Κατά τήν περιστροφήν τού στροφάλου, ή δύναμις F παράγει έργον A_F , τό όποιον είναι ίσον πρὸς τό έργον A_B , τό καταναλισκόμενον διά τήν υπερνίκησιν τής δυνάμεως B . Έάν υπολογίσωμεν τὰ έργα ταυτα διά μίαν πλήρη περιστροφήν τού στροφάλου, θά έχωμεν

$$A_F = \text{δύναμις} \cdot \text{δρόμος} = F \cdot 2\pi R \quad \text{και} \quad A_B = B \cdot 2\pi r.$$

Έπειδή τὰ δύο ταυτα έργα είναι ίσα, θά έχωμεν τήν σχέσηιν

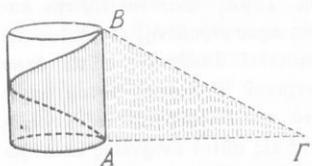
$$F \cdot 2\pi R = B \cdot 2\pi r,$$

εκ τής όποιας λαμβάνομεν

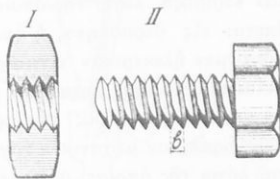
$$F = B \cdot \frac{r}{R}.$$

Παρατηρούμεν ότι, και διά τών δύο μεθόδων, καταλήγομεν (ως ήτο έπόμενον) εις τό αυτό άποτέλεσμα.

§ 88. Κοχλίας. Ἐάν, ἐπὶ κυλίνδρου (σχ. 137), περιελίξωμεν τεμάχιον χάρτου $ABΓ$, σχήματος ὀρθογωνίου τριγώνου, θὰ προκύψῃ μία ἑλικοειδὴς γραμμὴ.



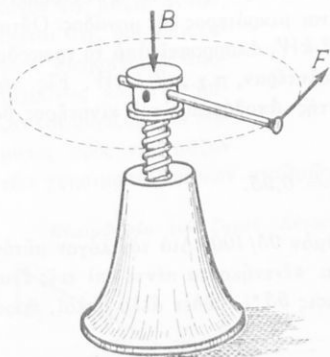
Σχ. 137. Κατὰ τὴν περιέλιξιν τοῦ χάρτου περὶ τὸν κύλινδρον, προκύπτει μία ἑλικοειδὴς γραμμὴ.



Σχ. 138.

γραμμὴ. Ἐάν, τώρα, κατὰ μῆκος τῆς γραμμῆς ταύτης, θεωρήσωμεν ὅτι ὑπάρχει μία στερεὰ προεξοχή, λαμβάνομεν τὸν **κοχλίαν** (σχ. 138, II). Ἡ ἀπόστασις β μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἑλικώσεων καλεῖται **βῆμα** τοῦ κοχλίου. Τὸ **περικόχλιον** (σχ. 138, I) φέρει ἐσωτερικῶς ἑσοχήν, ἀναλόγου μορφῆς καὶ διαστάσεων. Ὅταν ὁ κοχλίας περιστραφῇ ἐντὸς τοῦ περικόχλιου του κατὰ μίαν πλήρη περιστροφὴν, προχωρεῖ κατὰ ἓν βῆμα.

Ὁ κοχλίας εὐρίσκει πλείεστας ἐφαρμογάς. Ἐνταῦθα θὰ περιγράψωμεν τὸν ἀνυψωτὴρα τοῦ αὐτοκινήτου (κ. γρύλλον - σχ. 139). Διὰ τὴν εὐρωμεν τὴν σχέσιν μεταξὺ



Σχ. 139.

τῆς δυνάμεως F , τὴν ὁποίαν ἐξασκοῦμεν ἐπὶ τοῦ βραχίονος καὶ τῆς δυνάμεως B , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ ἀνυψωτήρος τὸ αὐτοκίνητον, χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἀρχὴν τῆς «διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας»: Ἐάν περιστρέψωμεν τὸν βραχίονα κατὰ μίαν πλήρη περιστροφὴν, ἡ δύναμις F θὰ παραγάγῃ ἔργον A_1 , ἴσον πρὸς

$$A_1 = F \cdot 2\pi r,$$

(ἐνθα r εἶναι τὸ μῆκος τοῦ βραχίονος), ἐνῶ ἡ δύναμις B θὰ παραγάγῃ ἔργον A_2 , ἴσον πρὸς

$$A_2 = B \cdot \beta$$

(ἐνθα β εἶναι τὸ βῆμα τοῦ κοχλίου).

Συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, θὰ ἔχωμεν

$$A_1 = A_2, \quad \text{δηλ.,} \quad F \cdot 2\pi r = B \cdot \beta.$$

Ὑπενθυμίζεται ὅτι ἡ ἄνω σχέσηις ἰσχύει ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ἀμελητέας τριβῆς. Ἐπειδὴ, εἰς τὴν πραγματικότητα, ὑπάρχει τριβή, τὸ βάρος B θὰ ὑποβασταῇ καὶ μετὰ τὴν ἄρσιν τῆς δυνάμεως F .

§ 89. Συντελεστής ἀποδόσεως μιᾶς μηχανῆς. Ὅταν λειτουργῇ μία μηχανή, ἔχομεν μετατροπὴν ἐνεργείας μιᾶς μορφῆς εἰς ἄλλην. Ἐάν συγ-

κρίνωμεν τήν ισχύν, τήν όποιαν άποδίδει ή μηχανή, πρὸς τήν ισχύν, ή όποία προσφέρεται εἰς αὐτήν, θά εὖρωμεν ὅτι πάντοτε ή άποδιδομένη ισχύς εἶναι κατά τι μικροτέρα τῆς προσφερομένης. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τήν παρουσίαν «τριβῆς», λόγω τῆς όποιας μέρος τῆς προσφερομένης ένεργείας μετατρέπεται εἰς θερμότητα, ή όποία καί άποτελεῖ άπώλειαν. Οὕτω, ὅταν τροφοδοτῶμεν ἠλεκτρικὸν κινητήρα δι' ἠλεκτρικοῦ ρεύματος, οὗτος περιστρέφεται καί παρέχει μηχανικὸν έργον. Κατὰ τήν λειτουργίαν τοῦ κινητήρος, τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς προσφερομένης εἰς αὐτὸν ένεργείας μετατρέπεται εἰς ὠφέλιμον μηχανικὸν έργον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον μετατρέπεται εἰς θερμότητα, λόγω τῆς όποιας ὁ κινητήρ θερμαίνεται. Ὡς ἐκ τούτου, τὸ ὠφέλιμον μηχανικὸν έργον θά εἶναι μικρότερον τῆς καταναλισκομένης ἠλεκτρικῆς ένεργείας.

Ἐάν N_a εἶναι ή ισχύς, ή άποδιδομένη ὑπὸ τῆς μηχανῆς καί N_{π} ή ισχύς, ή προσφερομένη εἰς αὐτήν, τὸ πηλίκον

$$\eta = \frac{N_a}{N_{\pi}}$$

καλοῦμεν **συντελεστὴν άποδόσεως** τῆς μηχανῆς.

Εἰς τήν πραγματικότητα, έπειδὴ αἱ μηχαναί (ὡς εἵπομεν καί άνωτέρω) ἔχουν άπωλείας, ή άποδιδομένη ισχύς εἶναι μικροτέρα τῆς προσφερομένης καί, συνεπῶς, ὁ συντελεστὴς άποδόσεως εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος. Οὕτω, ἠλεκτρικὸς κινητήρ διὰ νά παρέχῃ ισχύν 2 kW , άπορροφεῖ ἀπὸ τὸ τροφοδοτῶν αὐτὸν ἠλεκτρικὸν δίκτυον ισχύν μεγαλύτεραν, π.χ., $2,1 \text{ kW}$. Εἰς τήν περίπτωσιν, λοιπόν, ταύτην, ὁ συντελεστὴς άποδόσεως τοῦ κινητήρος θά εἶναι ἴσος πρὸς

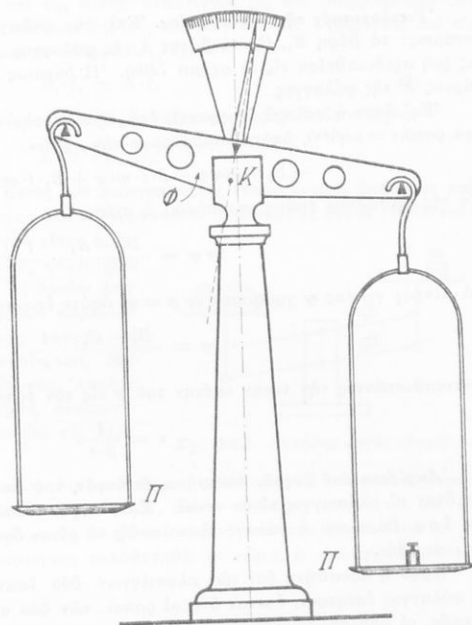
$$\eta = \frac{2 \text{ kW}}{2,1 \text{ kW}} = 0,95.$$

Ὁ ἀριθμὸς $0,95$ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν $95/100$. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν γράφεται, συνήθως, 95% καί ἐκφράζεται «ενενήκοντα πέντε ἐπὶ τοῖς ἑκατόν». Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι ή ἔκφρασις 95% οὐδὲν ἄλλο δηλοῖ, παρὰ μόνον τὸν ἀριθμὸν $0,95$.

§ 90. Ζυγός. Διὰ νά εὐρίσκωμεν τὸ βάρος τῶν διαφόρων σωμάτων, χρησιμοποιοῦμεν τοὺς *ζυγούς*. Ὁ ζυγός, τὸν ὁποῖον παριστᾷ τὸ σχῆμα *140*, άποτελεῖται ἐκ τῆς *φάλαγγος* Φ , στηριζομένης ἐπὶ τῆς ἀκμῆς πρίσματος ἐκ χάλυβος, περὶ τήν ὁποίαν δύναται νά περιστρέφεται ἑλευθέρως. Εἰς ἀποστάσεις, κατὰ τὸ δυνατόν ἴσας ἀπὸ τῆς ἀκμῆς ταύτης, ἔξαρτῶνται δύο *πλάστιγγες* Π , Π , στηριζόμεναι καί αὐταί ἐπὶ τῶν ἀκμῶν δύο ὁμοίων πρισμάτων. Ἐπὶ τῆς φάλαγγος εἶναι στερεωμένος δίσκος, ὁ ὁποῖος, κινούμενος ἐνώπιον κλίμακος, ἐπιτρέπει τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἐκάστοτε θέσεως αὐτῆς. Τὸ πρὸς ζύγισιν σῶμα τοποθετεῖται ἐπὶ τῆς μιᾶς πλάστιγγος, τὰ δὲ σταθμὰ

ἐπὶ τῆς ἄλλης. Ἐφ' ὅσον αἱ ἀποστάσεις τῶν ἀκμῶν ἐξαοτήσεως τῶν πλαστίγων ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς εἶναι ἴσαι, ἔπεται ὅτι ὁ δείκτης θὰ δεικνύη τὸ μηδὲν τῆς κλίμακος, ὅταν τὰ δύο ἐπὶ τῶν πλαστίγων βάρη εἶναι ἴσα. Ὄταν τὰ ἐπὶ τῶν πλαστίγων βάρη δὲν εἶναι ἴσα, ἡ φάλαγξ ἰσορροπεῖ ὑπὸ κλίσιν - ὅπως δεικνύει, ἀκριβῶς, τὸ σχῆμα 140.

Διὰ τῶν ζυγῶν συγκρίνομεν τὸ βάρος τοῦ ζυγιζομένου σώματος πρὸς τὸ βάρος τῶν σταθμῶν. Ἐπειδὴ, ὅμως, ὡς γνωστόν, τὸ βάρος ἑνὸς σώματος εἶναι ἀνάλογον τῆς μάζης αὐτοῦ, ἔπεται ὅτι, διὰ τῶν ζυγῶν, συγκρίνομεν ταυτοχρόνως καὶ τὴν μάζαν τοῦ ζυγιζομένου σώματος πρὸς τὴν μάζαν τῶν χρησιμοποιουμένων σταθμῶν.



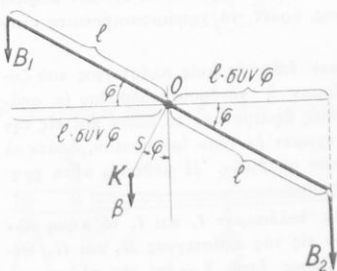
Σχ. 140. Ζυγός.

Εὐαίσθησις τοῦ ζυγοῦ. Λέγομεν ὅτι εἷς ζυγὸς εἶναι εὐαίσθητος, ὅταν μικρὰ διαφορὰ μεταξὺ τῶν βαρῶν, τὰ ὅποια συγκρίνομεν, προκαλῇ μεγάλην ἀπόκλινσιν τοῦ δείκτη. Οὕτω, ἐάν ἐπὶ τῆς μιᾶς πλαστίγῃ ἑνὸς ζυγοῦ τοποθετήσωμεν ἄνισα βάρη B_1, B_2 ($B_2 > B_1$) (σχ. 140α), ὁ ζυγὸς θὰ ἰσορροπῇ ὑπὸ κλίσιν φ . Καλοῦμεν εὐαίσθησιν ε τοῦ ζυγοῦ τὸ μέγεθος

$$\varepsilon = \frac{\varphi}{B_2 - B_1} \quad (1)$$

Πρακτικῶς, ἀντὶ νὰ μετρώμεν τὴν γωνίαν φ , μετροῦμεν τὰς ἀντιστοίχους ὑποδιαίρεσεις τῆς κλίμακος τοῦ ζυγοῦ, ἔνεκα τοῦ ὁποίου ἡ εὐαίσθησις ἐκφράζεται, συνήθως, εἰς ὑποδιαίρεσεις τῆς κλίμακος ἀνὰ χιλιοστό-

γραμμον. Διὰ νὰ εὐρώμεν τὴν εὐαίσθησιν, τοποθετοῦμεν ἐπὶ τῶν πλαστίγων δύο ἴσα



Σχ. 140α.

βάρη. Ό δεικτής θά δεικνύη τὸ μηδέν τῆς κλίμακος. Ἀκολουθῶς, θέτομεν ἐπὶ τῆς μιᾶς πλάστιγγος μικρὸν βάρος, π.χ., 1 mgr* (χιλιοστόγραμμα βάρος) καὶ μετροῦμεν τὴν ἀπόκλισιν, τὴν ὁποίαν τοῦτο προκαλεῖ.

Υπολογισμός τῆς εὐαισθησίας. Ἐπὶ τῆς φάλαγγος τοῦ ζυγοῦ ἐξασκοῦνται 4 δυνάμεις: τὰ βάρη B_1, B_2 , τὸ βάρος β τῆς φάλαγγος καὶ ἡ ἐκ τοῦ ἄξονος O δύναμις (μὴ σχεδιασθεῖσα εἰς τὸ σχῆμα 140a). Ἡ δύναμις β διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βαρὺς K τῆς φάλαγγος.

Ἐφ' ὅσον ἡ φάλαγξ ἰσορροπεῖ, ἐκφράζομεν τὴν συνθήκην ἰσορροπίας (ἄθροισμα ροπῶν = μηδέν), ὁπότε λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$-B_1 \cdot l \cdot \sigma \nu \varphi - \beta \cdot s \cdot \eta \mu \varphi + B_2 \cdot l \cdot \sigma \nu \varphi = 0.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύπτει ἡ σχέση

$$\varepsilon \varphi \varphi = \frac{B_2 - B_1}{\beta} \cdot \frac{l}{s}.$$

Διὰ μικρὰς γωνίας φ γράφομεν $\varepsilon \varphi \varphi = \varphi$, ὁπότε ἔχομεν

$$\varphi = \frac{B_2 - B_1}{\beta} \cdot \frac{l}{s}.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ φ εἰς τὸν τύπον (1), λαμβάνομεν

$$\varepsilon = \frac{l}{\beta \cdot s}.$$

Ἀκρίβεια τοῦ ζυγοῦ. Θεωρήσωμεν ζυγόν, τοῦ ὁποίου ἡ φάλαγξ εἶναι ὀριζόντια, ὅταν αἱ πλάστιγγες εἶναι κεναί. Ἐάν, τώρα, τοποθετήσωμεν ἐπὶ τῶν πλαστιγῶν ἴσα βάρη καὶ ἡ φάλαγξ ἐξακολουθῇ νὰ εἶναι ὀριζόντια, λέγομεν ὅτι ὁ ζυγὸς εἶναι ἀκριβής.

Ἀφού ἡ προσθήκη ἐπὶ τῶν πλαστιγγῶν δύο ἴσων βαρῶν οὐδεμίαν στροφὴν τῆς φάλαγγος ἐπέφερεν, ἔπεται ὅτι αἱ ροπαὶ τῶν δύο αὐτῶν βαρῶν εἶναι ἴσαι καί, συνεπῶς, οἱ μοχλοβραχίονες εἶναι ἴσοι.

Ἄρα, διὰ νὰ εἶναι ἀκριβὴς ὁ ζυγός, πρέπει οἱ δύο βραχίονες τῆς φάλαγγος νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ μήκος.

Ἡ ἔννοια, λοιπόν, τῆς ἀκριβείας τοῦ ζυγοῦ εἶναι ἐντελῶς ἀνεξάρτητος τῆς εὐαισθησίας.

Ἀκριβὴς ζύγισις. Εἶδομεν ἀνωτέρω ὅτι διὰ νὰ εἶναι ἀκριβὴς ὁ ζυγός, πρέπει οἱ βραχίονες τῆς φάλαγγος νὰ εἶναι ἴσοι. Ἐν τούτοις, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἀκριβῆ ζύγισιν καὶ διὰ ζυγοῦ μὲ ἀνίσοις βραχίονας, ἀρκεῖ νὰ χρησιμοποιήσωμεν μίαν τῶν ἐξῆς μεθόδων:

α) **Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως.** Θέτομεν ἐπὶ τῆς μιᾶς πλάστιγγος τοῦ ζυγοῦ τὸ πρὸς ζύγισιν σῶμα, ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης ἄμμον ἢ χόνδρους μολύβδου (κ. σκάγια), μέχρις ὅτου ὁ ζυγὸς ἰσορροπῇ. Ἀκολουθῶς, ἀφαιροῦμεν τὸ σῶμα καὶ εἰς τὴν θέσιν του θέτομεν τόσα σταθμά, ὥστε νὰ ἐπιτύχωμεν ἐκ νέου ἰσορροπίαν, ὁπότε τὸ βάρος τοῦ σώματος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ βάρος τῶν σταθμῶν. Ἡ μέθοδος αὕτη χρησιμεύεται, κυρίως, εἰς ζυγούς μικρᾶς εὐαισθησίας.

★ β) **Μέθοδος τῆς διπλῆς ζυγίσεως.** Ἄς καλέσωμεν l_1 καὶ l_2 τὰ μήκη τῶν βραχιόνων τῆς φάλαγγος, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς πλάστιγγας Π_1 καὶ Π_2 . Θέτομεν τὸ πρὸς ζύγισιν σῶμα — τοῦ ὁποίου τὸ βάρος ἔστω X — ἐπὶ τῆς πλάστιγγος Π_1 καὶ ἰσορροποῦμεν τὸν ζυγὸν μὲ σταθμὰ B_2 , τὰ ὁποῖα θέτομεν ἐπὶ τῆς ἄλλης πλάστιγγος (Π_2). Γράφοντες τὴν ἐξίσωσιν ἰσορροπίας τῶν ροπῶν, ἔχομεν

$$X \cdot l_1 = B_2 \cdot l_2. \quad (2)$$

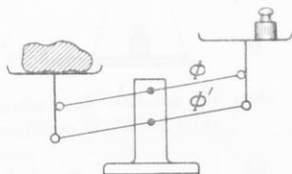
Ἀκολουθῶς, θέτομεν τὸ σῶμα ἐπὶ τῆς ἄλλης πλάστιγγος Π_2 καὶ ἰσορροποῦμεν τὸν ζυγὸν μὲ σταθμὰ B_1 , τὰ ὁποῖα θέτομεν ἐπὶ τῆς πλάστιγγος Π_1 . Γράφοντες καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὴν ἐξίσωσιν ἰσορροπίας, ἔχομεν

$$B_1 \cdot l_1 = X \cdot l_2. \quad (3)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) εὐρίσκομεν τὸ ζητούμενον βάρος X , ἴσον πρὸς

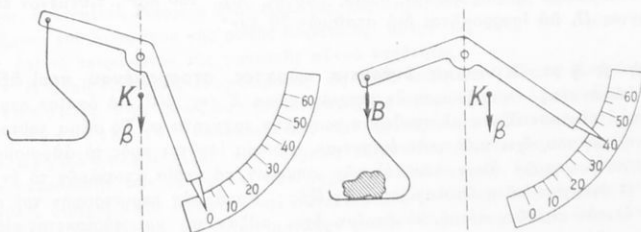
$$X = \sqrt{B_1 \cdot B_2}.$$

Διάφοροι τύποι ζυγῶν. Ἐκτὸς τοῦ περιγραφέντος τύπου ζυγῶν, υπάρχουν καὶ ἄλλοι τύποι, μερικoὺς τῶν ὁποίων καὶ περιγράφομεν. α) **Συνήθης ζυγός (Roberval - Ρομπερβάλ).** Συνήθης τύπος ζυγοῦ εἶναι ὁ ζυγός Roberval (σχ. 141), ὁ ὁποῖος φέρει δύο παραλλήλους φάλαγγας Φ, Φ' , αἱ ὁποῖαι ἀπὸ τελοῦν τὰς δύο πλευρὰς ἄρθρωτοῦ παραλληλογράμμου. Λόγω τῆς διατάξεως ταύτης, αἱ πλάστιγγες, κατὰ τὴν μετακίνησίν των, διατηροῦνται παράλληλοι πρὸς ἑαυτάς. Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ζύγισις εἶναι ὀρθή, ἀνεξαρτήτως τῆς θέσεως τῶν σταθμῶν ἐπὶ τῆς πλάστιγγος.



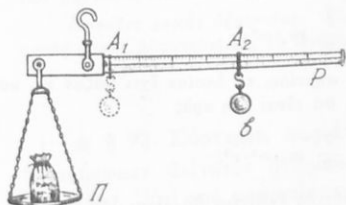
Σχ. 141. Συνήθης ζυγός (ἀρχή).

β) **Αὐτόματοι ζυγοί.** Μεγάλην διάδοσιν ἔχουν τελευταίως οἱ αὐτόματοι ζυγοί, εἰς τοὺς ὁποίους δὲν χρησιμοποιοῦνται σταθμὰ, ἀλλὰ τὸ βάρος παρέχεται ἀπ' εὐθείας ἐπὶ βαθμολογημένης κλίμακος. Ἀπλοῦν τύπον τοιοῦτου ζυγοῦ δεῖκνύει ὁ σχῆμα 142: Ὅταν ἐπὶ τῆς πλάστιγγος τοποθετηθῇ ἓν σῶμα, ἡ φάλαγξ στρέφεται



Σχ. 142. Αὐτόματος ζυγός (ἀρχή).

καὶ τὸ κέντρον βάρους K αὐτῆς μετατοπίζεται, μέχρις ὅτου ἡ δημιουργουμένη ροπή τῆς δυνάμεως β ἀντισταθμισθῇ ὑπὸ τῆς ροπῆς τοῦ πρὸς ζύγισιν βάρους B .

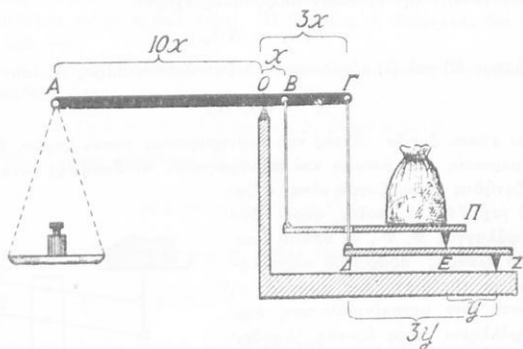


Σχ. 143. Στατήρ.

βαθμολογημένης ράβδου P , τὸ ζητούμενον βάρος τοῦ σώματος.

γ) **Στατήρ.** Ἡ φάλαγξ ἔχει ἀνίσους μοχλοβραχίονας (σχ. 143). Διὰ τὴν ἰσορροπὴν ὁ στατήρ, ὅταν ἡ πλάστιγγις Π εἶναι κενή, πρέπει τὸ κινητὸν βάρος β νὰ τεθῇ εἰς τὴν θέσιν A_1 . Ἄν, ἥδη, θέσωμεν ἐπὶ τῆς πλάστιγγος ἓν σῶμα, διὰ νὰ ἐπανέλθῃ ἡ ἰσορροπία, πρέπει νὰ μεταφέρωμεν τὸ κινητὸν βάρος εἰς ὁρισμένην θέσιν, π.χ., τὴν A_2 . Ἡ θέσις αὕτη παρέχει ἐπὶ τῆς

δ) **Δεκαπλασιαστικός ζυγός.** Διὰ τοιούτου ζυγού (σχ. 144) ζυγίζομεν βαρέα ἀντικείμενα, χρησιμοποιοῦντες μικρά σταθμά. Ἡ κατασκευὴ τοῦ ζυγού εἶναι τοι-



Σχ. 144. Δεκαπλασιαστικός ζυγός.

αυτή, ὥστε μετακινήσείς τις τοῦ σημείου B νὰ προκαλῇ δεκαπλασίαν μετακίνησιν τοῦ σημείου A. Ὁ λόγος τῶν μηκῶν OB καὶ OΓ' ἔχει ἐκλεγῇ ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν μηκῶν ZE καὶ ZA (π.χ., 1:3). Ἡ ἰσότης αὕτη τῶν λόγων ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα νὰ παραμένῃ ἡ πλάστιγξ Π ὀριζόντια κατὰ τὰς μετακινήσεις της καὶ ἡ ἔνδειξις τοῦ ζυγού νὰ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ σώματος ἐπὶ τῆς πλάστιγγος. Διὰ τοῦ δεκαπλασιαστικοῦ ζυγού, λοιπόν, σώμα, βάρους, π.χ., 100 kgr*, τιθέμενον ἐπὶ τῆς πλάστιγγος Π, θὰ ἰσορροπῇ διὰ σταθμῶν 10 kgr*.

★ ★ § 91. **Κινητικὴ ἐνέργεια σώματος, στρεφομένου περὶ ἄξονα - Ροπή ἄδρανεϊας.** Θεωρήσωμεν ἓν στερεὸν σῶμα Σ (σχ. 100), τὸ ὁποῖον περιστρέφεται περὶ μόνιμον ἄξονα μὲ σταθεράν γωνιακὴν ταχύτητα ω. Τὸ σῶμα τοῦτο, λόγῳ τῆς κινήσεώς του, ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν, ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κινητικῶν ἐνεργειῶν ὅλων τῶν ὑλικῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὸ ἓν λόγῳ σῶμα. Ἡ ἐνέργεια αὕτη ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς: Κατὰ τὴν περιστροφήν τοῦ σώματος, ἓν ὑλικὸν σημεῖον αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον ἔχει μᾶζαν m_1 καὶ εὐρίσκεται εἰς ἀπόστασιν r_1 ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς, διαγράφει κυκλικὴν τροχίαν μὲ ταχύτητα v_1 , ἴσην πρὸς

$$v_1 = \omega \cdot r_1.$$

Συνεπῶς, τὸ ὑλικὸν τοῦτο σημεῖον ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν E_1 , ἴσην πρὸς

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1^2.$$

Ὁμοίως, ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἄλλου ὑλικοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἔχει μᾶζαν m_2 καὶ εὐρίσκεται εἰς ἀπόστασιν r_2 ἀπὸ τοῦ ἄξονος, θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$E_2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot \omega^2 \cdot r_2^2.$$

ἐνὸς τρίτου ὑλικοῦ σημείου, μᾶζης m_3 , ἡ κινητικὴ ἐνέργεια θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$E_3 = \frac{1}{2} m_3 \cdot \omega^2 \cdot r_3^2 \text{ κ.ο.κ.}$$

*Επομένως, ή κινητική ενέργεια $E_{κιν}$ του σώματος θά είναι ίση προς

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \omega^2 \cdot r_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot \omega^2 \cdot r_3^2 + \dots$$

*Εξάγοντες έκ του άθροίσματος τούς κοινούς παράγοντας $\frac{1}{2}$ και ω^2 , έχομεν

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot (m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + \dots)$$

Τό έντός παρενθέσεως άθροισμα γράφεται, συντομώτερον, υπό τήν μορφήν $\sum m_i \cdot r_i^2$, ένθα i είναι εις τρέχων αριθμός, ό όποιος λαμβάνει τάς τιμάς 1, 2, 3, ... *Επομένως, ή άνω εξίσωσις γράφεται

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \sum m_i \cdot r_i^2. \quad (1)$$

Τό άθροισμα $\sum m_i \cdot r_i^2$ καλούμεν *ροπήν άδρανείας του σώματος ως προς τόν άξονα περιστροφής* και συμβολίζομεν διά του συμβόλου Θ . *Ητοι είναι

$$\Theta = \sum m_i \cdot r_i^2 \quad (2)$$

*Ηδη, ό τύπος (1) γράφεται ως εξής :

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2$$

*Ητοι, ή κινητική ενέργεια ενός σώματος, περιστρεφόμενου περί άξονα, ίσοται προς τήν ήμισυ του γινομένου της ροπής άδρανείας αυτού ως προς τόν άξονα περιστροφής, επί τό τετράγωνον της γωνιακής αυτού ταχύτητος.

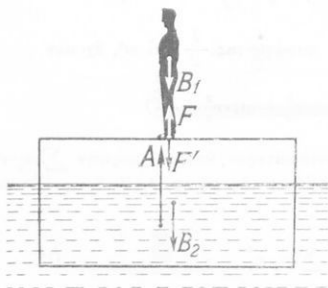
*Η ροπή άδρανείας ενός σώματος ως προς δεδομένον άξονα εξαρτάται έκ της κατανομής της μάζης του σώματος ως προς τόν έν λόγω άξονα: "Όσον εις μεγαλύτεραν άπόστασιν άπό του άξονος είναι καταμενημένη ή μάζα, τόσον μεγαλύτερα είναι και ή ροπή άδρανείας. Τοúτο έκμεταλλεύομεθα κατά τήν κατασκευήν των σπονδύλων των μηχανών, των οποίων ή ροπή άδρανείας είναι μεγάλη, διότι ή μάζα αυτών είναι συγκεντρωμένη κυρίως εις τήν περιφέρειαν. Οί σπόνδυλοι επιβάλλεται νά έχουν μεγάλην ροπήν άδρανείας, διότι, όπως άποδεικνύεται, όσον μεγαλύτερα είναι ή ροπή άδρανείας αυτών, τόσον μεγαλύτεραν αντίστασιν προβάλλουν ούτοι εις πάσαν μεταβολήν (αύξησιν ή έλάττωσιν) της γωνιακής των ταχύτητος και, ως έκ τούτου, διατηροϋν περίπου σταθεράν τήν γωνιακήν ταχύτητα των μηχανών, επί των οποίων έχουν προσαρμοσθή.

Μονάδες ροπής άδρανείας. Σύστημα C.G.S.: *Έκ του τύπου (2) προκύπτει ως μονάς ροπής άδρανείας εις τό σύστημα τούτο τό

$$1 \text{ gr} \cdot \text{cm}^2.$$

• ★ § 92. Σύστημα σωμάτων - Αρχή διατηρήσεως της όρμης. Θεωρήσωμεν άκίνητον άνθρωπον, εύρισκόμενον επί ήρεμοϋντος πλωτήρος (σχ. 145). *Επί του «*συστήματος*» των δύο σωμάτων (άνθρώπου και πλωτήρος) εξασκούνται αι εξής *έξωτερικαι δυνάμεις*, δηλ., δυνάμεις, προερχόμεναι έξ άλλων σωμάτων, τά όποια δέν άνήκουν εις τό σύστημα: 1) Τό βά-

ρος B_1 τοῦ ἀνθρώπου. 2) Τὸ βάρος B_2 τοῦ πλωτήρος καὶ 3) ἡ ἀνωσις A . Ἐκτὸς τῶν δυνάμεων αὐτῶν ὑπάρχουν καὶ ἄλλαι δυνάμεις: Ὁ πλωτὴρ ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου μίαν δύναμιν F . Κατὰ τὸ ἀξίωμα «δράσις = ἀντίδρασις» καὶ ὁ ἀνθρώπος ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ πλωτήρος μίαν ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν F' . Αἱ δύο αὗται δυνάμεις F, F' , καλοῦνται **ἐσωτερικαὶ δυνάμεις** τοῦ συστήματος, διότι ἐξασκοῦνται ἀμοιβαίως μεταξὺ τῶν δύο σωμάτων ἀνθρώπου-πλωτήρ, τὰ ὅποια ἀποτελοῦν τὸ θεωρούμενον σύστημα. Ὅπως παρατηροῦμεν, αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ἐμφανίζονται πάντοτε ἀνὰ δύο καὶ ἔχουν συνισταμένην, ἴσην πρὸς μηδέν, συνεπῶς οὐδὲν



Σχ 145. Ὅλαι αἱ δυνάμεις θεωροῦνται ὡς εὐρισκόμεναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου.

ἐνδιαφέρουν διὰ τὴν κίνησιν τοῦ συστήματος. Ἀντιθέτως, ἡ κίνησις τοῦ συστήματος, ὡς συνόλου, καθορίζεται ἐκ τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων.

Ἐπειδὴ τὸ σύστημα «ἀνθρώπος-πλωτὴρ» εὐρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, ἔπεται ὅτι ἡ συνισταμένη τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων B_1, B_2 , καὶ A θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν.

Ὅταν ἐπὶ τινος συστήματος δὲν ἐξασκοῦνται ἐξωτερικαὶ δυνάμεις, τὸ σύστημα καλεῖται «*μονωμένον σύστημα*». Ὁμοίως, μονωμένον εἶναι ἐν σύστημα, ἐὰν ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκοῦνται μὲν ἐξωτερικαὶ δυνάμεις, ἀλλ' ἡ συνισταμένη τῶν εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Κατὰ ταῦτα, τὸ ἄνω σύστημα «ἀνθρώπος-πλωτὴρ» εἶναι «μονωμένον σύστημα».

Ἐὰν καλέσωμεν **ὁρμὴν τοῦ συστήματος** τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρμῶν τῶν σωμάτων, τῶν ἀποτελούντων τὸ σύστημα, διὰ τὴν ὁρμὴν ταύτην ἰσχύει τὸ ἑξῆς θεώρημα, τὸ ὁποῖον καλεῖται **θεώρημα (ἢ ἀρχὴ) διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς**: «*Ἡ ὁρμὴ ἐνὸς μονωμένου συστήματος διατηρεῖται σταθερά*».

Ἐφαρμογαὶ τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς.

α) **Ἀνάκρουσις.** Ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς εὐρίσκομεν εἰς τὴν *ἀνάκρουσιν* τῶν πυροβόλων ὅπλων: Κατὰ τὴν στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ βλήμα ἐκφεύγει τοῦ ὅπλου, παρατηρεῖται ὅτι τὸ ὅπλον κινεῖται ἀντίθετως πρὸς τὴν φορὰν κινήσεως τοῦ βλήματος. Ἡ κίνησις αὕτη τοῦ ὅπλου, ἡ ὁποία καλεῖται **ἀνάκρουσις** (κ. κλώτσημα), ἐξηγεῖται, βάσει τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς, ὡς ἑξῆς: Τὰ δύο σώματα βλήμα καὶ ὅπλον ἀποτελοῦν μονωμένον σύστημα, καθόσον ἡ συνισταμένη τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, τῶν ἐξασκουμένων ἐπ' αὐτοῦ, εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. (Αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι προέρχονται ἐκ τῶν ἀερίων τῆς καύσεως τῆς ἐκρηκτικῆς οὐσίας καὶ αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται ἐπὶ τοῦ ὅπλου καὶ

τοῦ βλήματος, εἶναι ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τοῦ συστήματος καί, ὥπως εἴπομεν, δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν).

Πρὶν γίνῃ ἡ ἔκρηξις, τόσον ἡ ὁρμὴ τοῦ βλήματος, ὅσον καὶ ἡ ὁρμὴ τοῦ ὅπλου ἦσαν ἴσαι πρὸς μηδέν, διότι ἡ ταχύτης τοῦ βλήματος καὶ ἡ ταχύτης τοῦ ὅπλου ἦσαν ἴσαι πρὸς μηδέν. Μετὰ τὴν ἔκρηξιν, τὸ βλήμα, ἔξερχόμενον τοῦ ὅπλου μὲ ταχύτητα v_β , ἔχει ὁρμὴν $m_\beta \cdot v_\beta$, ἔνθα m_β εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ βλήματος. Ἀντιστοίχως, ἡ ὁρμὴ τοῦ ὀπισθοχωροῦντος ὅπλου θὰ εἶναι ἴση πρὸς $m_o \cdot v_o$, ἔνθα m_o καὶ v_o εἶναι ἡ μᾶζα καὶ ἡ ταχύτης τοῦ ὅπλου. Ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς, ἔχομεν:

ὁρμὴ τοῦ συστήματος πρὸ τῆς ἐκρήξεως = ὁρμὴ τοῦ συστήματος μετὰ τὴν ἔκρηξιν

$$^{\text{Ἡτοι}} \quad 0 + 0 = m_\beta \cdot v_\beta + m_o \cdot v_o$$

$$\eta \quad m_\beta \cdot v_\beta = - m_o \cdot v_o.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν διὰ τὴν ταχύτητα v_o τοῦ ὅπλου

$$v_o = - \frac{m_\beta}{m_o} \cdot v_\beta.$$

Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἐξισώσεως δηλοῖ ἀκριβῶς ὅτι τὸ ὅπλον θὰ κινηθῇ ἀντιθέτως πρὸς τὸ βλήμα.

Ἀνάλογον πρὸς τὴν ἀνάκρουσιν εἶναι καὶ τὸ ἐξῆς φαινόμενον: Θεωρήσωμεν ἀκίνητον ἄνθρωπον ἐπὶ ἡρεμώσεως λέμβου. Ἐὰν ὁ ἄνθρωπος οὗτος πηδήσῃ ἔξω τῆς λέμβου, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ λέμβος κινεῖται ἀντιθέτως. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῶν ἐξῆς συλλογισμῶν: Τὸ σύστημα «ἄνθρωπος - λέμβος» εἶναι μονωμένον σύστημα, διότι ἡ συνισταμένη τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἑξασκουμένων ἐξωτερικῶν δυνάμεων εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Πρὶν κινηθῇ ὁ ἄνθρωπος, ἡ ὁρμὴ αὐτοῦ ἦτο ἴση πρὸς μηδέν. Ὁμοίως καὶ ἡ ὁρμὴ τῆς λέμβου ἦτο ἴση πρὸς μηδέν, ἐπομένως καὶ ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος ἦτο καὶ αὐτὴ ἴση πρὸς μηδέν. Ὄταν ὁ ἄνθρωπος ἐκινήσῃ μὲ ταχύτητα v_a , ἀπέκτινσεν ὁρμὴν $m_a \cdot v_a$, ἔνθα m_a εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ ἀνθρώπου. Ὁμοίως, ἡ λέμβος ἀπέκτινσεν ὁρμὴν $m_\lambda \cdot v_\lambda$, ἔνθα m_λ καὶ v_λ εἶναι ἡ μᾶζα καὶ ἡ ταχύτης τῆς λέμβου. Ἐπειδὴ ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος παραμένει σταθερὰ (δεδομένου ὅτι τὸ ἐν λόγῳ σύστημα εἶναι μονωμένον), πρέπει ἡ ὁρμὴ $m_\lambda \cdot v_\lambda$ τῆς λέμβου νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν ὁρμὴν $m_a \cdot v_a$ τοῦ ἀνθρώπου. Ἡτοι

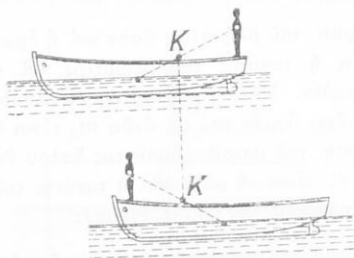
$$m_\lambda \cdot v_\lambda = - m_a \cdot v_a.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν διὰ τὴν ταχύτητα v_λ τῆς λέμβου

$$v_\lambda = - \frac{m_a}{m_\lambda} \cdot v_a.$$

Τὰ αὐτὰ ἰσχύουν καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν, ἄνθρωπος, ἰστάμενος ἐπὶ ἡρεμώσεως λέμβου, ἀρχίζει νὰ κινῆται κατὰ μῆκος τῆς λέμβου, ἐν συνε-

χείρα δὲ παύει κινούμενος. Ἐάν ὁ ἄνθρωπος κινηθῇ, π.χ., πρὸς τ' ἀριστερά (σχ. 146), ἡ λέμβος θὰ κινηθῇ πρὸς τὰ δεξιὰ, με ταχύτητα, ἡ ὁποία ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ προηγούμενου τύπου. Ὄταν ὁ ἄνθρωπος παύσῃ κινούμενος, παύει κινουμένη καὶ ἡ λέμβος. Καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ φαινομένου τὸ κέντρον βάρους K τοῦ συστήματος «λέμβος - ἄνθρωπος» παραμένει ἀκίνητον.



Σχ. 146. Ὄταν ὁ ἄνθρωπος κινηθῇ πρὸς τ' ἀριστερά, ἡ λέμβος κινεῖται πρὸς τὰ δεξιὰ.

κὴν σφαῖραν (κ. μπαλόνι) καί, ἀκολουθῶς, συσφίγγομεν τὸν λαϊμόν της διὰ τῶν δακτύλων. Ἄν, τώρα, ἀφήσωμεν αὐτὴν ἐλευθέραν, ὃ ἐγκλεισμένος ἀὴρ ἐξέρχεται μεθ' ὁρμῆς, ἐνῶ, ταυτοχρόνως, ἡ σφαῖρα κινεῖται κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν.

Κατὰ τὸν αὐτὸν, ἀκριβῶς, τρόπον τίθενται εἰς κίνησιν καὶ οἱ *πύραυλοι* (βλ. κατωτέρω, Κεφάλαιον Ἀεροδυναμική), εἰς τοὺς ὁποίους ἐκτοξεύεται πρὸς τὰ ὀπίσω ἰσχυρὸν ρεῦμα καυσασφαιρίων.

Διὰ νὰ μελετήσωμεν λεπτομερέστερον τὸν μηχανισμόν, κατὰ τὸν ὁποῖον δημιουργεῖται ἡ προωστική δύναμις εἰς τοὺς πυραύλους, περιγράφομεν τὸ ἐξῆς πείραμα: Ἐπὶ ἐλαφρᾷ ἀμάξει, δυναμένης νὰ κινηθῇ κατὰ ἐλαχίστας τριβάς, ὑπάρχει σωρὸς μεταλλίνων σφαιρῶν καὶ ἄνθρωπος (σχ. 147). Ἀρχικῶς, τὸσόν ἡ ἄμαξα καὶ ὁ ἄνθρωπος, ὅσον καὶ αἱ σφαῖραι ἀκίνητοιν, ἐπομένως ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἐάν, τώρα, ὁ ἄνθρωπος ἐκσφενδονίσῃ μίαν σφαῖραν πρὸς τὰ ὀπίσω, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ἄμαξα (μετὰ τοῦ ἀνθρώπου) ἀρχίζει νὰ κινηθῇ πρὸς τὰ ἐμπρός. Τὸ φαινόμενον τοῦτο ἐξηγεῖται ὡς ἐξῆς: Ὄταν ὁ ἄνθρωπος ἐκσφενδονίσῃ πρὸς τὰ ὀπίσω μίαν σφαῖραν με ταχύτητα v_0 , θὰ προσδώσῃ εἰς αὐτὴν ὁρμὴν, ἴσην πρὸς $m_0 \cdot v_0$, ἐνθα m_0 εἶναι ἡ μᾶζα τῆς σφαίρας. Ἐπειδὴ τὸ σύστημα «σφαῖραι - ἄμαξα» εἶναι μονωμένον, πρέπει, κατὰ τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς, ἡ ἄμαξα (μετὰ τοῦ ἀνθρώπου) νὰ ἀποκτήσῃ μίαν ἴσην καὶ ἀντίθετον ὁρμὴν — $m_a \cdot v_a$, ἐνθα m_a καὶ v_a εἶναι ἡ μᾶζα καὶ ἡ ταχύτης τῆς ἀμάξης. Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν



Σχ. 147. Ὄταν ὁ ἄνθρωπος ἐκσφενδονίσῃ μίαν σφαῖραν πρὸς τὰ ὀπίσω, ἡ ἄμαξα θὰ κινήθῃ πρὸς τὰ ἐμπρός.

$$m_0 \cdot v_0 = - m_a \cdot v_a$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν διὰ τὴν ταχύτητα v_a τῆς ἀμάξης:

$$v_a = - \frac{m_0}{m_a} \cdot v_0$$

Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον δηλοῖ ὅτι ἡ ἄμαξα θίετι κινηθῇ ἀντιθέτως πρὸς τὴν σφαῖραν. Ἐάν, ὁ ἀνθρώπος ρίψῃ πρὸς τὰ ὀπίσω καὶ δευτέραν σφαῖραν μετὰ τῆς αὐτῆς ταχύτητος v_a , ἡ ταχύτης τῆς ἀμάξης θ' αὐξηθῇ, πάλιν, κατὰ v_a , ὁπότε ἡ νέα ταχύτης τῆς θὰ εἶναι ἴση πρὸς $2v_a$. Ἐάν ρίψῃ καὶ τρίτην σφαῖραν, ἡ ταχύτης τῆς ἀμάξης θὰ γίνῃ $3v_a$ κ.ο.κ. Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τῆς διαδοχικῆς ἐκσφενδονίσσεως σφαιρῶν πρὸς τὰ ὀπίσω, ἡ ἄμαξα ἐπιταχύνεται. Διὰ τὰ συμβαίνει, ὅμως, τοῦτο, πρέπει ἡ πρὸς τὰ ὀπίσω ἐκσφενδόνισις τῶν σφαιρῶν νὰ ἐξασκῇ ἐπὶ τῆς ἀμάξης μίαν δύναμιν, ἡ ὁποία εἶναι ἀκριβῶς ἡ προωστικὴ δύναμις.

★ § 93. Κρούσις. Ἄλλην ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς ὀρμῆς καὶ τοῦ ἀξιώματος διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἔχουμεν εἰς τὰ προβλήματα τῆς κρούσεως: Ἐπειδὴ, συνήθως, τὸ φαινόμενον τῆς κρούσεως δύο οἰωνδήποτε σωμάτων διαρκεῖ τὸσον ὀλίγον χρόνον, ὥστε νὰ εἶναι δυσχερὲς ἡ παρακολούθησις αὐτοῦ, θὰ περιγραφώμεν ἐνταῦθα ἐιδικὴν περίπτωσιν, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ διάρχεια τῆς κρούσεως εἶναι ἀρκετὰ μεγάλη: Ἐκ δύο ἀμαξίων, ἐφωδιασμένων διὰ συγκροστήρων (σχ. 148), τὸ ἐν ἀκίνητῳ, τὸ δὲ ἄλλο, κινούμενον μὲ ὀρισμένην ταχύτητα, συγκρούε-



Σχ. 148. Διάταξις διὰ τὴν βραδείαν παρακολούθησιν τῆς ἐλαστικῆς κρούσεως.

ται μὲ τὸ πρῶτον. Εὐθὺς ὥς οἱ δύο συγκροστήρες ἔλθουν εἰς ἐσπῆν, τὰ ἐλατήρια τῶν ἀρχίζουσιν συμπιεζόμενα, ἀφοῦ δὲ ἀποκτήσουν μίαν μέγιστην παραμόρφωσιν, ἐπανατοῦν βαθμιαίως τὸ ἀρχικὸν τῶν μήκος. Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς συγκρούσεως ἐξασκοῦνται ἐπὶ τῶν δύο ἀμαξίων δυνάμεις ὑπὸ τῶν παραμορφωμένων ἐλατηρίων. Ἡ ἐνέργεια, ἡ ἀπαιτούμενη διὰ τὴν παραμόρφωσιν τῶν ἐλατηρίων, λαμβάνεται ἐκ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τῶν ἀμαξίων. Μετὰ τὸ πέρας τῆς συγκρούσεως, τὰ δύο ἀμαξία ἀποχωρίζονται καὶ κινοῦνται μὲ νέας ταχύτητας, τὰ δύο ἀμαξία ἐξασκοῦνται ἐπὶ τῶν δύο ἀμαξίων δυνάμεις ὑπὸ τῶν παραμορφωμένων ἐλατηρίων, λαμβάνεται ἐκ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τῶν ἀμαξίων. Μετὰ τὸ πέρας τῆς συγκρούσεως, τὰ δύο ἀμαξία ἀποχωρίζονται καὶ κινοῦνται μὲ νέας ταχύτητας, ἡ δὲ δυναμικὴ ἐνέργεια τῶν ἐλατηρίων ἔχει μετατραπῇ, ἐκ νέου, εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν τῶν ἀμαξίων. Ἐπειδὴ τὰ δύο ἐλατήρια θεωροῦνται τελείως ἐλαστικά, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τῆς παραμορφώσεως μετατρέπεται ἐξ ὁλοκλήρου εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν τῶν ἀμαξίων.

α) Τελείως ἐλαστικὴ κρούσις. Θεωρήσωμεν δύο σφαῖρας, τῆς αὐτῆς μάζης m , κινουμένας ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (κεντρικὴ κρούσις) μὲ διαφόρους ταχύτητας v_1 καὶ v_2 (σχ. 149). Μετὰ τὴν σύγκρουσιν αἱ δύο σφαῖραι ἀποχωρίζονται μὲ νέας ταχύτητας v'_1 καὶ v'_2 . Ζητοῦμεν νὰ εὐρωμεν τὰς δύο ταύτας ταχύτητας. Πρὸς τοῦτο στηριζόμεθα εἰς τοὺς ἑξῆς συλλογισμούς: Ἐὰν ὅσον ἡ κρούσις εἶναι τελείως ἐλαστικὴ, ἔπεται ὅτι ἡ ὁλικὴ κινητικὴ ἐνέργεια τῶν δύο σφαιρῶν πρὸ τῆς κρούσεως θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ὁλικὴν κινητικὴν ἐνέργειαν αὐτῶν μετὰ τὴν κρούσιν. Ἥτοι εἶναι



Σχ. 149. Κεντρικὴ κρούσις δύο σφαιρῶν.

$$\frac{1}{2} m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} m \cdot v_2'^2.$$

$$\eta \quad v_1^2 + v_2^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \quad (1)$$

Ἄφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ ἐπὶ τῶν δύο σφαιρῶν δὲν ἐξασκοῦνται ἑξωτερικαὶ δυνάμεις, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὀρμῆς, κατὰ τὸ ὁποῖον

ὁρμή τῶν δύο σφαιρῶν πρὸ τῆς κρούσεως = ὁρμή αὐτῶν μετὰ τὴν κρούσιν.

*Ητοι

$$m \cdot v_1 + m \cdot v_2 = m \cdot v'_1 + m \cdot v'_2$$

$$\eta \quad v_1 - v'_1 = v'_2 - v_2. \quad (2)$$

*Η ἐξίσωσις (1) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἐξῆς :

$$v_1^2 - v_1'^2 = v_2'^2 - v_2^2$$

$$\eta \quad (v_1 - v'_1) \cdot (v_1 + v'_1) = (v'_2 - v_2) \cdot (v'_2 + v_2). \quad (3)$$

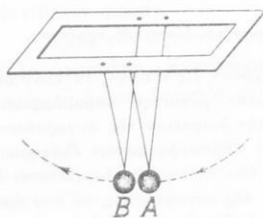
Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (2), λαμβάνομεν

$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2. \quad (4)$$

*Εκ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (4) λαμβάνομεν διὰ τὰς ταχύτητας τῶν δύο σφαιρῶν μετὰ τὴν κρούσιν

$$v'_1 = v_2 \quad \text{καὶ} \quad v'_2 = v_1.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ τὴν κεντρικὴν κρούσιν δύο ἐλαστικῶν σφαιρῶν τῆς αὐτῆς μάζης γίνεται ἀνταλλαγὴ τῶν ταχυτήτων τῶν. *Εκ τούτου προκύπτει



Σχ. 150.

ὅτι, ἐὰν ἐκ τῶν δύο σφαιρῶν ἡ δευτέρα ᾖτο ἀρχικῶς ἀκίνητος ($v_2 = 0$), αὕτη, μετὰ τὴν κρούσιν, θὰ κινηθῇ μετὰ τὴν ταχύτητα, τὴν ὁποίαν εἶχεν ἡ πρώτη, ἡ ὁποία, τώρα, ἔσ' ἡ ἀκίνητησθ. Τοῦτο δεικνύομεν πειραματικῶς διὰ τῆς συσκευῆς, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ σχῆμα 150 : *Εὰν ἀπομακρύνωμεν τὴν μίαν σφαῖραν (A) καὶ τὴν ἀφήσωμεν ἑλευθέραν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, μετὰ τὴν κρούσιν, αὕτη ἀκίνηται, ἐνῶ ἡ ἄλλη σφαῖρα (B) ἀναπηδᾷ.

*Εκ τῶν ἀνωτέρω εὗρεθέντων νόμων τῆς κρούσεως προκύπτει καὶ τὸ ἐξῆς : *Εάν μία ἐλαστικὴ σφαῖρα προσπέσῃ καθεύτως ἐπὶ ἄλλης ὁμοίας, ἀκινήτου καὶ ἀπεῖρου μάζης (εἰς τὴν πραγματικότητι ἐπὶ ἀκινήτου ἐλαστικοῦ τοιχώματος), ἀναπηδᾷ καθεύτως μετὰ τὴν ἴδιαν ταχύτητα (ἀνάκλασις).

β) *Τελείως πλαστικὴ κρούσις.* *Όταν αἱ δύο σφαῖραι εἶναι τελείως πλαστικαὶ καὶ συγκρουσθῶν, ὅλη ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τῆς παραμορφώσεως μετατρέπεται εἰς θερμότητα. Μία τοιαύτη κρούσις καλεῖται *τελείως πλαστικὴ κρούσις*. Εἰς τὴν περιπτώσιν ταύτην, αἱ δύο σφαῖραι παραμορφοῦνται μονίμως καὶ δὲν ἀποχωρίζονται, ἀλλὰ κινοῦνται πλὺν μετὰ τὴν αὐτὴν ταχύτητα. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν κοινὴν ταύτην ταχύτητα, σκεπτόμεθα ὡς ἐξῆς : *Εφ' ὅσον καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην δὲν ἐξασκοῦνται ἐπὶ τῶν σφαιρῶν ἐξωτερικαὶ δυνάμεις, ἰσχύει τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς, ὁπότε ἔχομεν

$$m \cdot v_1 + m \cdot v_2 = m \cdot v'_1 + m \cdot v'_2. \quad (5)$$

*Αφ' ἐτέρου, ἐπειδὴ αἱ δύο ταχύτητες v'_1, v'_2 εἶναι ἴσαι, ἔχομεν καὶ τὴν ἐξίσωσιν

$$v'_1 = v'_2. \quad (6)$$

*Εκ τῶν ἐξισώσεων (5) καὶ (6) προκύπτει ἡ τιμὴ τῆς ζητουμένης κοινῆς ταχύτητος

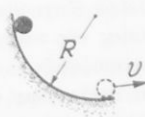
$$v'_1 = v'_2 = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Σημειώσεις. Δι’ ἐντελῶς ἀναλόγων συλλογισμῶν ὑπολογίζονται καὶ τὰ προβλήματα κρούσεως (ἐλαστικῆς καὶ πλαστικῆς) εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ μάζαι τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι ἀνίστοι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κατηγορία Α’

- 100) Πόσον ἔργον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀνύψωσιν σώματος, μάζης 20 gr, εἰς ὕψος 68 m;
(ΑΠ: 1,36 kgr*.m)
- 101) Πόσον ἔργον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀντλησιν 150 λίτρων ὕδατος ἀπὸ τοῦ πυθμένος φρέατος, βάθους 50 m;
(ΑΠ: 7500 kgr*.m)
- 102) Πόσον ἔργον παράγει, ἐντὸς μιᾶς πλήρους περιστροφῆς, ἡ κεντρομόλος δύναμις, ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ σφενδόνης, μάζης 100 gr; Τὸ μήκος τοῦ νήματος εἶναι 1 m καὶ ἡ συχνότης 4 στροφῶν ἀνὰ λεπτόν.
(ΑΠ: Μηδέν. Διαιτί;)
- 103) Πόσον ἔργον παράγεται κατὰ τὴν ἄνευ τριβῆς ὀλισθησὶν ἐνὸς σώματος, βάρους 30 kgr*, εἰς ἀπόστασιν 10 m ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, γωνίας κλίσεως 15°;
(ΑΠ: 7,62·10⁶ erg)
- ✓ 104) Διὰ ν’ ἀνύψωσιν εἰς γερανός, κατὰ 20 cm, τεμάχιον μαρμάρου, ὄγκου 1,5 m³, χρειάζεται 5 min. Ποία ἡ ἰσχύς τοῦ γερανοῦ; (Εἰδικὸν βάρος μαρμάρου = 2,8 gr*/cm³).
(ΑΠ: 2,8 kgr*.m/sec)
- ✓ 105) Κινητήρ, ἰσχύος 1500 HP, ἐργάζεται ὑπὸ τὴν πλήρη του ἰσχύϊ ἐπὶ 2,5 h. Ποία ἡ παραχθεῖσα ἐνέργεια εἰς kWh καὶ kgr*.m;
(ΑΠ: 2797,5 kWh, 10,27·10⁸ kgr*.m)
- 106) Μικρὸς ἠλεκτρικὸς κινητήρ, ἰσχύος 50 W, ἐργάζεται ἐπὶ τριῶν καθήμε-
ρινῶν. Πόσον θὰ κοστίξῃ ἡ λειτουργία του μηνιαίως (30 ἡμέραι), ἐὰν τὸ 1 kWh τι-
μᾶται 1,5 δραχμαί;
(ΑΠ: 6,75 δραχμαί)
- 107) Ἐὰν τὸ 1 kWh πωλεῖται 1,5 δραχμαί, πόσον θὰ κοστίξῃ ἡ λειτουργία
ἐνὸς κινητήρος, ἰσχύος 10 HP, ἐργαζομένου ἐπὶ 8 ὥρας;
(ΑΠ: 89,5 δραχμαί)
- 108) Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς kgr*.m, erg καὶ Joule ἡ κινητικὴ ἐνέργεια, τὴν ὁποίαν
ἀποκτιᾷ σῶμα, βάρους 2 kgr*, πλῖτον ἀπὸ ὕψους 45 m.
(ΑΠ: 90 kgr*.m, 88,3·10⁸ erg, 883 Joule)
- 109) Σῶμα, μάζης 20 kgr, πίπτει ἐλευθέρως. Ποία ἡ κινητικὴ του ἐνέργεια
μετὰ 5 sec ἀπὸ τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀφέθῃ ἐλεύθερον;
(ΑΠ: 2452,5 kgr*.m, 24059 Joule)
- 110) Τὸ ὕδωρ ἐνὸς ποταμοῦ κινεῖται μὲ ταχύτητα 120 cm/sec. Ποία ἡ κινητικὴ
ἐνέργεια ἐνὸς κυβικοῦ ἑκατοστομέτρου ὕδατος;
(ΑΠ: 7200 erg)
- 111) Ποία ἡ κινητικὴ ἐνέργεια (εἰς ἔργα) σώματος, μάζης 1 gr, κινουμένου μὲ
ταχύτητα 2·10⁶ cm/min;
(ΑΠ: 5,55·10¹⁴ erg)
- 112) Σῶμα, μάζης 100 gr, ἀφήνεται νὰ πέσῃ ἀπὸ ὕψους 100 m. Νὰ ὑπολογι-
σθῇ ἡ κινητικὴ καὶ ἡ δυναμικὴ του ἐνέργεια μετὰ χρόνον 0 sec, 1 sec καὶ 2 sec,
ἀπὸ τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀφέθῃ ἐλεύθερον. Ὅμοιος, τὴν στιγμὴν, κατὰ
τὴν ὁποίαν θὰ κτυπήσῃ εἰς τὸ ἔδαφος.
(ΑΠ: 0 (10 kgr*.m), 0,49 kgr*.m (9,51 kgr*.m), 1,96 kgr*.m (8,04 kgr*.m),
10 kgr*.m (0))
- 113) Σφαῖρα, μάζης 10 gr, ὀλισθαίνει, ἄνευ τριβῆς, ἐπὶ τοῦ
τεταρτοκυκλίου τοῦ ἐναντι σχήματος, ἀκτίνος R = 10 cm. Ποία
ἡ ταχύτης της, ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ κάτω ἄκρον; (ΑΠ: 141 cm/sec)
- 114) Νὰ εὐρεθῇ ἡ ταχύτης, τὴν ὁποίαν ἀποκτιᾷ σφαῖρα, μά-
ζης 500 gr, ὅταν ἀφεθῇ ἐλευθέρᾳ ἀπὸ ὕψους 32 m. (Ἡ ἀσκη-
σις νὰ λυθῇ διὰ χρησιμοποίησεως τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως
τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας).
(ΑΠ: 25,05 m/sec)



Κατηγορία Β'

- 115) Νά υπολογισθῇ τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον παράγει τὸ βάρος B τῆς σφαίρας κατὰ τὴν ἀνευ τριβῆς ὁλίσθησιν α) ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου $\Gamma\Delta$ καὶ β) ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ΓE , μέχρις ὅτου ἡ σφαῖρα φθάσῃ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εἰς τὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον ΔE . (Δίδονται $B = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$, $\Gamma E = 10 \text{ m}$). (ΑΠ: $5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$)

116) Ἀτμόσφαιρα, βάρους 1 τόννου βάρους , πίπτουσα ἐξ ὕψους $1,5 \text{ m}$, ἀναγκάζει πᾶσαλον νὰ εἰσχωρήσῃ ἐντὸς τοῦ ἐδάφους κατὰ 8 cm . Ποία ἡ ἐπὶ τοῦ πασσαλοῦ ἐξασκουμένη δύναμις; (Ἡ ἄσκησις νὰ λυθῇ, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ δύναμις εἶναι σταθερά κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς προωθήσεως καὶ ὅτι ἡ ἐνέργεια τῆς ἀτμοσφύρας μετατρέπεται ἐξ ὁλοκλήρου εἰς ἔργον προωθήσεως τοῦ πασσαλοῦ). (ΑΠ: $18,75 \text{ t}^*$)

117) Ὑδροηλεκτρικὴ ἐγκατάστασις, ἐργαζομένη συνεχῶς καὶ ὑπὸ τὴν πλήρη αὐτῆς ἰσχύϊ, παράγει ἐτησίως ἐνέργειαν $43,8 \cdot 10^6 \text{ kWh}$. Ποία ἡ ἰσχύς τῆς ἐγκαταστάσεως εἰς kW , HP καὶ $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$; (Νὰ ληφθῇ $1 \text{ ἔτος} = 365 \text{ ἡμέραι}$). (ΑΠ: 5000 kW , 6702 HP , $509352 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$)

● 118) Ἀτμομηχανή, κινουμένη μετὰ ταχύτητα 61 km/h , ἔλκει συρμὸν μετὰ δύναμιν $4,5 \text{ τόννων βάρους}$. Ποία ἡ ἰσχύς τῆς μηχανῆς εἰς HP ; (ΑΠ: 1000 HP)

119) Σῶμα, μάζης 20 gr , κινεῖται μετὰ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν 2 m/sec^2 . Πόσην κινητικὴν ἐνέργειαν ἀποκτᾷ τὸ σῶμα τοῦτο ἀνά cm ; (ΑΠ: $4 \cdot 10^3 \text{ erg}$)

120) Σῶμα, μάζης 100 gr , ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν $5 \cdot 10^3 \text{ erg}$. Μετὰ 20 sec , ἡ ἐνέργειά του ἔχει αὐξηθῇ εἰς $2 \cdot 10^5 \text{ erg}$. Νὰ εὑρεθοῦν α) ἡ ταχύτης εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, β) ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος, γ) ἡ δύναμις, ἡ ὁποία ἐξησκήθη ἐπ' αὐτοῦ καὶ δ) τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον διήνυσε τὸ σῶμα ἐντὸς τῶν 20 sec . (ΑΠ: α) 10 cm/sec , $63,2 \text{ cm/sec}$, β) $2,66 \text{ cm/sec}^2$, γ) 266 dyn , δ) 732 cm)

121) Κινητήρ, ἰσχύος 10 HP , ἐργάζεται ἐπὶ 8 ὥρας ἡμερησίως . Πόσον κοστίζει ἡμερησίως ἡ λειτουργία του, ἐὰν τὸ 1 kWh τιμᾷται $1,5 \text{ δραχμᾶς}$ καὶ ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κινητήρος εἶναι 87% ; (ΑΠ: $103 \text{ δραχμᾶς ἡμερησίως}$)

122) Νὰ υπολογισθῇ τὸ ἐλάχιστον ὕψος ἀπὸ τοῦ ὀριζόντιον ἐπίπεδον, τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ κατωτέρου σημείου τῆς τροχιάς, ἐκ τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ ἀφεθῇ τὸ ἀμάξιον τοῦ σχήματος 96 , διὰ νὰ δυνηθῇ νὰ ἐκτελέσῃ τὴν ἀνακύκλωσιν. (ΑΠ: $h = 5/2 \text{ r}$)

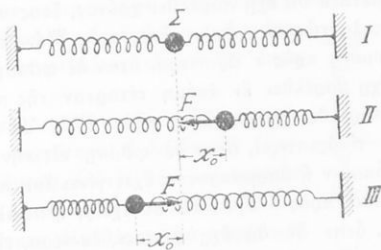
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

§ 94. Ἡμιτονοειδὴς (ἢ ἁρμονικὴ) ταλάντωσις. Θεωρήσωμεν μίαν σφαῖραν Σ (σχ. 151, I), ἡ ὁποία συγκρατεῖται ὀριζοντίως ὑπὸ δύο ὁμοίων ἐλατηρίων. Ἀπομακρύνομεν τὴν σφαῖραν ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας της κατὰ τινα ἀπόστασιν x_0 πρὸς τὰ δεξιὰ (II), ὅποτε τὰ ἐλατήρια παραμορφοῦνται — τὸ δεξιὸν συμπιέζεται, ἐνῶ τὸ ἀριστερὸν ἐκτείνεται — καὶ ἀκολουθῶς ἀφήνομεν αὐτὴν ἐλευθέραν. Ἐπειδὴ τὰ παραμορφωμένα ἐλατήρια τείνουν ν' ἀνακτῇ τὸ ἀρχικόν των μῆκος, ἐξασκοῦν ἐπὶ τῆς σφαίρας μίαν δύναμιν F , ἡ ὁποία τείνει νὰ φέρῃ αὐτὴν πρὸς τ' ἀριστερά.

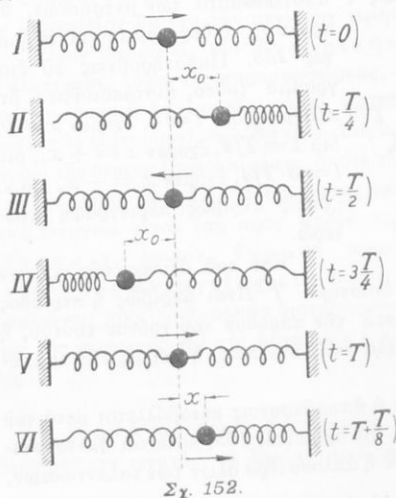
Ούτω, ή σφαίρα αρχίζει νά κινηται πρὸς τ' ἄριστερά, ὅταν δὲ φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας της, δὲν σταματᾷ, ἀλλὰ, λόγῳ ἄδρανείας, ἔξακο-

λουθεῖ κινουμένη, ἐνῶ ταυτοχρόνως τὸ μὲν ἄριστερόν ἐλατήριο συμπιέζεται, τὸ δὲ δεξιὸν ἐκτείνεται. Κατὰ τὴν κίνησιν ταύτης, ή ταχύτης τῆς σφαίρας διαρκῶς ἐλαττοῦται, ὅταν δὲ ή σφαίρα φθάσῃ εἰς ἀπόστασιν x_0 πρὸς τ' ἄριστερά (III), ή ταχύτης της θὰ ἔχῃ γίνῃ μηδέν. Ἀκολούθως, ή σφαίρα ἀρχίζει νά κινηται πρὸς τὰ δεξιὰ, λόγῳ τῆς δυνάμεως F , τὴν ὁποίαν ἔξασκουν πάλιν τὰ παραμορφωμένα ἐλατήρια, κατ' αὐτὸν δὲ τὸν τρόπον ἐκτελεῖ παλινδρομικὴν κίνησιν περὶ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας, ή ὁποία καλεῖται **ταλάντωσις**.



Σχ. 151. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F τῶν παραμορφωμένων ἐλατηρίων ή σφαίρα ἐκτελεῖ ταλάντωσιν περὶ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας της.

Ἡ ταλάντωση εἶναι μία κίνησις, ή ὁποία ἐπαναλαμβάνεται ή αὐτή μετὰ πάροδον ὠρισμένου χρονικοῦ διαστήματος, τὸ ὁποῖον καλεῖται **περίοδος** T τῆς ταλαντώσεως. Τὸ ἀντίστροφον $1/T$ τῆς περιόδου καλεῖται **συχνότης** ν . Ἡ ἐκάστοτε ἀπόστασις x τῆς σφαίρας ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας της καλεῖται **ἀπομάκρυνσις**.



Σχ. 152.

κινουμένη πρὸς τὰ δεξιὰ, διέρχεται διὰ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας της (σχ. 152, I). Τὴν χρονικὴν ταύτην στιγμήν ή ἀπομάκρυνσις τῆς σφαίρας εἶναι

Κατὰ τὴν ταλάντωσιν τῆς σφαίρας, ή ἀπομάκρυνσις x μεταβάλλεται χρονικῶς, λαμβάνει δὲ τιμὰς, κυμαινομένης μεταξὺ τοῦ μηδενὸς (θέσις ἰσορροπίας) καὶ τοῦ x_0 , ἄλλοτε θετικὰς (πρὸς τὰ δεξιὰ) καὶ ἄλλοτε ἀρνητικὰς (πρὸς τ' ἄριστερά). Τὴν μεγίστην τιμὴν x_0 τῆς ἀπομακρύνσεως καλοῦμεν **πλάτος** τῆς ταλαντώσεως.

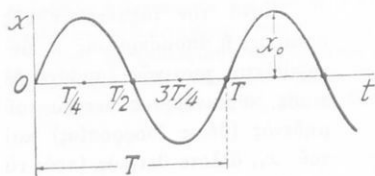
Διὰ τὴν καλλιτέραν κατανόησιν τῆς ταλαντώσεως παρακολουθοῦμεν τὴν σφαῖραν εἰς διαφοροὺς χρονικὰς στιγμὰς: Ἀς λάβωμεν ὡς ἀρχὴν τῶν χρόνων ($t=0$) τὴν χρονικὴν ἐκείνην στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ή σφαίρα,

ιση προς μηδέν ($x=0$). Όταν η σφαίρα φθάση εις τὸ ἄκρον δεξιὰ (II), ἡ ἀπομάκρυνσις αὐτῆς θὰ ἔχῃ λάβει τὴν μεγίστην της τιμὴν $+x_0$, ἐνῶ ἐν τῷ μεταξύ θὰ ἔχῃ παρέλθει χρόνος, ἴσος πρὸς τὸ τέταρτον τῆς περιόδου τῆς ταλαντώσεως, δηλ., ἴσος πρὸς $T/4$. Ἐν συνεχείᾳ, ἡ σφαίρα θ' ἀρχίσῃ κινουμένη πρὸς τ' ἀριστερά, ὅταν δὲ φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας (III), θὰ ἔχῃ παρέλθει ἓν ἀκόμη τέταρτον τῆς περιόδου - δηλ., ἐν τῷ συνόλῳ θὰ ἔχῃ παρέλθει χρόνος, ἴσος πρὸς $T/2$. Ἡ σφαίρα ἐξακολουθεῖ κινουμένη πρὸς τ' ἀριστερά, ὅταν δὲ φθάσῃ εἰς τὴν ἄκραν θέσιν ἀριστερὰ (IV), εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἀπομάκρυνσις ἔχει γίνει ἴση πρὸς $-x_0$, θὰ ἔχῃ παρέλθει χρόνος, ἴσος πρὸς $3 \cdot T/4$. Ἐν συνεχείᾳ, ἡ σφαίρα ἀρχίζει κινουμένη πρὸς τὰ δεξιὰ, ὅταν δὲ θὰ ἔχῃ φθάσῃ, ἐκ νέου, εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας (V), θὰ ἔχῃ παρέλθει ἐν τῷ συνόλῳ χρόνος, ἴσος πρὸς $4 \cdot T/4$ - δηλ., ἴσος πρὸς τὴν περίοδον T .

Τὴν αὐτὴν, ἀκριβῶς, περίοδον θὰ εὗρωμεν, ἐὰν ὑπολογίσωμεν τὸν χρόνον, ὁ ὁποῖος θὰ παρέλθῃ, ἵνα ἡ σφαίρα, ἐκκινουσα, π.χ., ἐκ τῆς ἄκρας θέσεως πρὸς τὰ δεξιὰ, ἐπανέλθῃ εἰς τὴν αὐτὴν ἀκριβῶς θέσιν.

Εἶναι φανερόν ὅτι, παρερχομένου τοῦ χρόνου, ἡ κίνησις τῆς σφαίρας θὰ ἐπαναλαμβάνεται ἐντελῶς ἡ αὐτή, μετὰ πάροδον χρόνου, ἴσου πρὸς τὴν περίοδον T τῆς ταλαντώσεως.

Γραφικὴ παράστασις τῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως. Ἐὰν μετρήσωμεν τὴν ἀπομάκρυνσιν x , τὴν ὁποίαν ἔχει ἡ σφαίρα εἰς διαφόρους χρονικάς στιγμὰς καὶ παραστήσωμεν γραφικῶς τ' ἀποτελέσματα τῶν μετρήσεων, θὰ



Σχ. 153. Γραφικὴ παράστασις τῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως.

προκύψῃ τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 153. Παρατηροῦντες τὸ διάγραμμα τοῦτο, πιστοποιοῦμεν ὅτι πράγματι διὰ $t=0$, ἔχομεν $x=0$, διὰ $t=T/4$, ἔχομεν $x=+x_0$, διὰ $t=3 \cdot T/4$, ἔχομεν $x=-x_0$ κ.ο.κ. ὅπως ἀκριβῶς περιεγράφῃ ἄνωτέρω.

Ἐπὶ τοῦ ἀξονος τῶν χρόνων τοῦ ἄνω διαγράμματος τὸ χρονικὸν διάστημα T εἶναι ἀκριβῶς ἡ περίοδος τῆς ταλαντώσεως, δεδομένου ὅτι, μετὰ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου τούτου, ἡ κίνησις ἐπαναλαμβάνεται ἐντελῶς ὁμοία καί, συνεπῶς, ἡ μορφή τῆς καμπύλης θὰ εἶναι καὶ αὐτὴ ὁμοία.

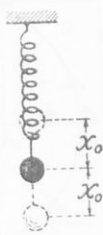
Μία ταλάντωσις, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἀπομάκρυνσις μεταβάλλεται μετὰ τοῦ χρόνου, ὅπως δεικνύει τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 153, καλεῖται **ἡμιτονοειδὴς ἢ ἁρμονικὴ ταλάντωσις**, εἶναι δὲ ἡ ἀπλουστερά ὄλων τῶν ταλαντώσεων.

Ἰδιοσυχνότης - ἰδιοπερίοδος. Ἀπλουστευμένην διάταξιν διὰ τὴν ἐπίδειξιν τῆς ταλαντώσεως παριστᾷ τὸ σχῆμα 154: Ἡ σφαίρα ἐξαρτᾶται ἀπὸ κατακόρυφον ἐλικοειδὲς ἐλατήριον, ἐὰν δὲ τὴν μετατοπίσωμεν διὰ τῆς χει-

ρός μας πρὸς τὰ κάτω καὶ κατόπιν τὴν ἀφήσωμεν ἐλευθέραν, θὰ ἐκτελέσῃ ἀρμονικὴν ταλάντωσιν.

Ἐκτὸς τῶν δύο προηγουμένων περιπτώσεων ταλαντώσεως, ταλάντωσιν δύναται νὰ ἐκτελέσῃ, ἐπίσης, ἓν ἔκκερμὲς, εἷς ἄνθρωπος, ἰστάμενος εἰς τὸ μέσον μεγάλης σανίδος, στηριγμένης εἰς τὰ δύο ἄκρα της, ἢ αἰώρα (κ. κούνια) κ.λ.

Εἰς ὅλας αὐτάς τὰς ταλαντώσεις παρατηροῦμεν ὅτι τὸ παλόμενον σύστημα ταλαντοῦται μὲ συχνότητα, ἡ ὁποία δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ πλάτους τῆς ταλαντώσεως. Οὕτω, ἐὰν μετατοπίσωμεν τὴν σφαῖραν τοῦ σχήματος 154 κατὰ διπλασίαν ἀπόστασιν $2x_0$ καί, ἀκολουθῶς, τὴν ἀφήσωμεν ἐλευθέραν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αὕτη ταλαντοῦται μὲ τὴν ἰδίαν, ὥς καὶ πρότερον, συχνότητα (*).



Σχ. 154.

Τὴν συχνότητα τῆς ταλαντώσεως ἑνὸς συστήματος, ὡς χαρακτηριστικὴν αὐτοῦ, καλοῦμεν *ιδιοσυχνότητα*, τὴν δὲ περίοδον, *ιδιοπερίοδον*.

Διατήρησις τῆς ἐνεργείας κατὰ τὴν ταλάντωσιν. Κατὰ τὴν ταλάντωσιν τῆς σφαίρας τοῦ σχήματος 151, ἡ ταχύτης της μεταβάλλεται περιοδικῶς μετὰ τοῦ χρόνου. Οὕτω, κατὰ τὰς χρονικὰς στιγμὰς, κατὰ τὰς ὁποίας ἡ σφαῖρα εὐρίσκεται εἰς τὰς ἄκρας θέσεις (II, III), ἡ ταχύτης εἶναι μηδέν, ἐνῶ αὕτη λαμβάνει τὴν μεγίστην τιμὴν, ὅταν ἡ σφαῖρα διέρχεται διὰ τῆς θέσεως ἰσορροπίας. Τοῦτο σημαίνει ὅτι καὶ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῆς σφαίρας εἰς μὲν τὰς ἄκρας θέσεις θὰ ἔχῃ τιμὴν μηδέν, ἐνῶ εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας θὰ ἔχῃ τὴν μεγίστην τιμὴν.

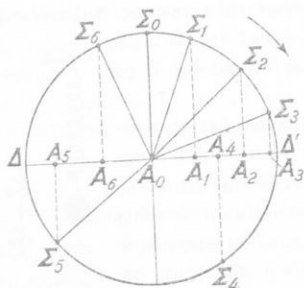
Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν δυναμικὴν ἐνέργειαν, τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ ἐλατήριο, λόγῳ τῆς παραμορφώσεως, εἶναι προφανές ὅτι αὕτη θὰ εἶναι μεγίστη, ὅταν ἡ σφαῖρα εὐρίσκεται εἰς τὰς ἄκρας θέσεις (μεγίστη παραμόρφωσις τῶν ἐλατηρίων), ἐνῶ θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ὅσας ἡ σφαῖρα διέρχεται διὰ τῆς θέσεως ἰσορροπίας της, ὁπότε τὰ ἐλατήρια δὲν ἔχουν παραμορφωθῇ.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὰς θέσεις μεγίστης κινητικῆς ἐνεργείας ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια εἶναι ἴση πρὸς μηδέν καὶ ἀντιστρόφως. Κατὰ τὴν ταλάντωσιν, λοιπόν, ἔχομεν περιοδικὴν μετατροπὴν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας εἰς δυναμικὴν καὶ ἀντιστρόφως. Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας, τὸ ἄθροισμα τῆς κινητικῆς καὶ τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας θὰ διατηρῆται διαρκῶς σταθερόν.

§ 95. Ἀναλυτικὴ διατύπωσις τῆς ἀρμονικῆς ταλάντωσεως. Θεωρήσωμεν κινητόν, τὸ ὁποῖον κινεῖται ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς (σχ. 155),

(*) Ἡ συχνότης μεταβάλλεται, μόνον ἐὰν μεταβληθοῦν τὰ στοιχεῖα τοῦ παλλομένου συστήματος (μᾶζα τῆς σφαίρας - σκληρότης τοῦ ἐλατηρίου, μήκος τοῦ ἔκκερμους, μᾶζα τοῦ ἀνθρώπου - διαστάσεις τῆς σανίδος κ.λ.).

ακτίνος x_0 , με σταθεράν γωνιακὴν ταχύτητα ω . Θὰ μελετήσωμεν τὴν κίνησιν, τὴν ὁποίαν ἐκτελεῖ ἡ προβολὴ τοῦ κινητοῦ τούτου ἐπὶ τῆς διαμέ-



Σχ. 155.

τρου AD' : Ὄταν τὸ κινητὸν εὐρίσκεται εἰς τὴν θέσιν ἐκκινήσεως Σ_0 , ἡ προβολὴ του θὰ εὐρίσκεται εἰς τὴν θέσιν A_0 . Ὄταν τὸ κινητὸν ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν Σ_1 , ἡ προβολὴ του θὰ εὐρίσκεται εἰς τὴν θέσιν A_1 , ὅταν τὸ κινητὸν ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν Σ_2 , ἡ προβολὴ του θὰ εὐρίσκεται εἰς τὴν θέσιν A_2 κ.ο.κ. Παρατηροῦμεν, δηλ., ὅτι ἡ προβολὴ τοῦ κινητοῦ ἐκτελεῖ μίαν ταλάντωσιν ἐπὶ τῆς διαμέτρου AD' , κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἀπομάκρυνσις x θὰ μεταβάλλεται περιοδικῶς μετὰ τοῦ χρόνου,

κυμαινομένη μεταξὺ τῆς τιμῆς $+x_0$ καὶ τῆς τιμῆς $-x_0$.

Ἐστω ὅτι, κατὰ τινα χρονικὴν στιγμήν, τὸ κινητὸν εὐρίσκεται εἰς τοιαύτην θέσιν ἐπὶ τῆς τροχιάς του, ὥστε ἡ ἀκτίς OS (σχ. 156) νὰ σχηματίζῃ τὴν γωνίαν φ μετὰ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν διάμετρον AD' . Κατὰ τὴν στιγμήν ταύτην, ἡ ἀπομάκρυνσις x τοῦ σημείου A , ὅπως προκύπτει ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OAS , θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$x = x_0 \cdot \eta\mu \varphi.$$

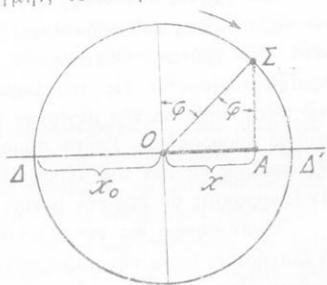
Ἐπειδὴ τὸ κινητὸν κινεῖται ὁμαλῶς, ἡ γωνιακὴ του ταχύτης ω θὰ εἶναι ἴση πρὸς $\omega = \varphi/t$. Ἐάν, λοιπόν, θέσωμεν εἰς τὸν ἄνω τύπον, ἀντὶ τοῦ φ , τὸ ἴσον του $\omega \cdot t$, θὰ λάβωμεν τὴν σχέσιν

$$x = x_0 \cdot \eta\mu \omega \cdot t \quad (1)$$

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) ἡ γωνία $\omega \cdot t$, ἡ ὁποία διαρκῶς αὐξάνεται, καλεῖται **φάσις** τῆς ταλαντώσεως, τὸ δὲ ω **κυκλικὴ συχνότης** αὐτῆς. Δεδομένου ὅτι ἔχομεν τὰς σχέσεις $\omega = 2\pi\nu$ καὶ $\nu = 1/T$, ἡ ἐξίσωσις (1) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$x = x_0 \cdot \eta\mu 2\pi \cdot \frac{t}{T} \quad (2)$$

Γραφικὴ παράστασις τῆς ἐξισώσεως (2). Δίδοντες εἰς τὸν χρόνον t διαφόρους τιμὰς $0, T/4, T/2, \dots$, καὶ ἀντικαθιστώντες αὐτὰς εἰς τὸν τύπον (2), λαμβάνομεν τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τῆς ἀπομακρύνσεως x , τὰς ὁποίας

Σχ. 156. Τὸ σημεῖον A ἐκτελεῖ ἁρμονικὴν ταλάντωσιν ἐπὶ τῆς εὐθείας AD' .

καὶ ἀναγράφωμεν εἰς τὸν παρακείμενον πίνακα. Ἐάν, ἐκτὸς τῶν τιμῶν τοῦ πίνακος, ὑπολογίσωμεν τὰς ἀπομακρύνσεις καὶ δι' ἄλλας χρονικὰς στιγμὰς καὶ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς ἀπομακρύνσεως x καὶ τοῦ χρόνου t , θὰ λάβωμεν ἀκριβῶς τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 153, τὸ ὁποῖον, ὡς γνωστὸν, παριστᾷ γραφικῶς μίαν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν.

Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι ἡ κίνησις, τὴν ὁποίαν ἐκτελεῖ τὸ σημεῖον A ἐπὶ τῆς εὐθείας $\Delta\Delta'$, εἶναι ἁρμονικὴ ταλάντωσις.

Ἐφαρμογή. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) ἔστω ὅτι τὸ πλάτος x_0 δίδεται ἴσον πρὸς 10 cm. Ὑπολογίσατε τὰς ἀπομακρύνσεις x διὰ τὰς χρονικὰς στιγμὰς $t = 0$, $t = 1 \cdot T/8$, $t = 2 \cdot T/8$, ..., $8 \cdot T/8$ καὶ σχεδιάσατε τὸ προκύπτον διάγραμμα.

Λύσις. Διὰ νὰ ἐπιταχύνωμεν τὴν ἐργασίαν, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Κατασκευάζομεν πίνακα, ἀποτελούμενον ἐκ 5 στηλῶν, αἱ ὁποῖαι θὰ περιλάβουν τὰς τιμὰς τοῦ

t	φάσις $\varphi = \frac{2\pi t}{T}$ (rad)	φάσις φ (μοτ. ραι)	$\eta\mu \varphi$	x (cm)
0	0	0	0	0
$1 \cdot \frac{T}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	45°	0,707	7,07
$2 \cdot \frac{T}{8}$	π	90°	1	10
$3 \cdot \frac{T}{8}$				
.....				
$8 \cdot \frac{T}{8}$	2π	360°	0	0

χρόνου t , τὰς τιμὰς τῆς φάσεως φ εἰς rad καὶ εἰς μοίρας, τὰς τιμὰς τοῦ $\eta\mu \varphi$, καὶ τὰς τιμὰς τῆς ἀπομακρύνσεως x . Τὴν ἐκάστοτε τιμὴν τῆς φάσεως $2\pi \cdot t/T$ εὐρίσκομεν, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸ t διὰ τῶν διαδοχικῶν τοῦ τιμῶν 0, $1 \cdot T/8$, ..., $8 \cdot T/8$. Αἱ τιμαί, αἱ ὁποῖαι θὰ προκύψουν, εἶναι ἐκπεφρασμέναι εἰς ἀκτίνια (rad). Ἐπειδὴ, ὁμως, εἰς τοὺς πίνακας τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων (βλ. Παράρτημα εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου) αἱ γωνίαι εἶναι ἐκπεφρασμέναι εἰς μοίρας, μετατρέπομεν τὰς εὐρεθείσας τιμὰς τῆς φάσεως εἰς rad, εἰς τιμὰς εἰς μοίρας, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι 2π ἀκτίνια ἰσοῦνται πρὸς 360° . Κατόπιν, τῇ βοήθειᾳ τῶν πινάκων τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων, εὐρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν ἡμιτόνων τῶν ὑπολογισθεῶν γωνιῶν (*). Τέλος, ἐκ τοῦ τύπου (2), ὑπολογίζομεν τὰς τιμὰς τῆς ἀπομακρύνσεως x , τὰς ὁποίας καὶ ἀναγράφωμεν εἰς τὴν 5ᾴν στήλην τοῦ πίνακος.

(Συμβουλευόμεν ὅπως ἐγγράφουν πρῶτον ὅλοι αἱ αἱ τιμαί τῆς πρώτης στήλης, κατόπιν ὅλοι αἱ τιμαί τῆς δευτέρας στήλης κ.ο.κ., καθόσον οὕτω ἐλαττοῦται σιμμαντικῶς ὁ πρὸς τοῦτο ἀναγκαῖος κόπος).

Λαμβάνοντες, ἀκολούθως, ἀνά ζεύγη τὰς τιμὰς τῆς πρώτης καὶ τῆς τελευταίας στήλης, εὐρίσκομεν ἐπὶ τοῦ σχεδίου 9 σημεῖα. Ἐνώνοντες τὰ σημεῖα ταῦτα διὰ συνεχοῦς γραμμῆς, λαμβάνομεν τὸ ζητούμενον διάγραμμα.

(*) Τὰ ἡμίτονα γωνιῶν, μεγαλυτέρων τῶν 90° , εὐρίσκονται τῇ βοήθειᾳ τῶν γνωστῶν τριγωνομετρικῶν σχέσεων
 $\eta\mu \varphi = \eta\mu (180^\circ - \varphi)$ καὶ $\eta\mu \varphi = -\eta\mu (-\varphi)$.

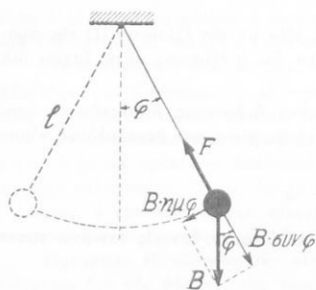
Ἐκ τοῦ τύπου τούτου προκύπτει διὰ τὴν κυκλικὴν συχνότητα ω τῆς ταλαντώσεως ἡ σχέση

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Ἐπειδὴ εἶναι $T=2\pi/\omega$, ἔχομεν διὰ τὴν περιόδον T τῆς ἀρμονικῆς ταλαντώσεως τὸν τύπον

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

§ 98. Μαθηματικὸν (ἢ ἄπλοῦν) ἔκκρεμές. Ταλάντωσις εἶναι καὶ ἡ κίνησις, τὴν ὁποίαν ἐκτελεῖ τὸ **μαθηματικὸν ἔκκρεμές** (σχ. 159). Τὸ μα-



Σχ. 159. Μαθηματικὸν ἔκκρεμές.

θηματικὸν ἔκκρεμές ἀποτελεῖται ἐξ ὑλικοῦ σημείου, μάζης m , τὸ ὁποῖον εἶναι ἐξηρητημένον ἐκ τοῦ ἄκρου νήματος, ἄνευ μάζης καὶ τὸ ὁποῖον κινεῖται ἄνευ τριβῆς (*). Ἐὰν ἀπομακρύνωμεν τὸ ἔκκρεμές ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας του κατὰ τινα γωνίαν φ καὶ ἀκολουθῶς τὸ ἀφήσωμεν ἐλεύθερον, θὰ ἐκτελέσῃ ταλάντωσιν. Τὴν κίνησιν ταύτην δυνάμεθα νὰ ἐξετάσωμεν, στοιχειωδῶς, ὡς ἑξῆς:

Ἐπὶ τοῦ ἔκκρεμοῦς ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις: 1) τὸ βάρος του B καὶ 2) ἡ

δύναμις F , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπ' αὐτοῦ τὸ νῆμα ἐξαρτήσεως. Ἀναλύομεν τὴν δύναμιν B εἰς δύο συνιστώσας, μίαν — τὴν $B \cdot \sin \varphi$ — κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος καὶ τὴν ἄλλην — τὴν $B \cdot \eta \mu \varphi$ — καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν ταύτην. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως $B \cdot \eta \mu \varphi$ τὸ ἔκκρεμές κινεῖται πρὸς τὴν θέσιν ἰσορροπίας, τὴν ὁποίαν, λόγῳ ἀδρανείας, ὑπερβαίνει καὶ ἐξακολουθεῖ κινούμενον πρὸς τ' ἀριστερά. Ἦδη, ἡ φορὰ τῆς δυνάμεως $B \cdot \eta \mu \varphi$ ἠλλάξε καί, ὡς ἐκ τούτου, ἡ κίνησις τοῦ ἔκκρεμοῦς ἐπιβραδύνεται. Ἡ ταχύτης τοῦ ἔκκρεμοῦς θὰ μηδενισθῇ, ὅταν τοῦτο ἔλθῃ εἰς θέσιν, συμμετρικὴν ὡς πρὸς τὴν θέσιν ἐκκινήσεως. Ἐν συνεχείᾳ, τὸ ἔκκρεμές ἀρχίζει κινούμενον πρὸς τὰ δεξιὰ, ἐκτελοῦν, οὕτω, ταλάντωσιν.

Ἐὰν ἡ γωνία φ εἶναι μικρὰ (μικροτέρα τῶν $2^\circ \div 3^\circ$), ἡ κίνησις τοῦ ἔκκρεμοῦς, ἡ ὁποία εἰς τὴν πραγματικότητα γίνεται ἐπὶ τόξου, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι γίνεται ἐπὶ χορδῆς. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀποδεικνύεται θεωρητικῶς (**) ὅτι ἡ ταλάντωσις τοῦ ἔκκρεμοῦς εἶναι ἀρμονικὴ - δηλ., ἡ

(*) Δεδομένου ὅτι ἀφ' ἑνὸς μὲν ὅλα τὰ σώματα ἔχουν διαστάσεις, ἀφ' ἑτέρου δὲ δὲν ὑπάρχουν νήματα ἄνευ μάζης, εἶναι προφανές ὅτι τὸ μαθηματικὸν ἔκκρεμές δὲν εἶναι πραγματοποιήσιμον. Ἐν τούτοις, ἐξετάζομεν τοῦτο, διότι ἡ μελέτη τῆς κινήσεώς του εἶναι εὐχερής.

(**) Βλ. ἀπόδειξιν κατωτέρω.

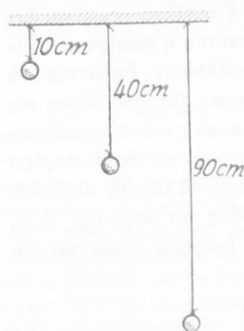
ἀπομάκρυνσις αὐτοῦ μεταβάλλεται μετὰ τοῦ χρόνου, ἀκριβῶς ὅπως καὶ εἰς τὸ σχῆμα 153, ἡ δὲ περίοδος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1)$$

ἐνθα l εἶναι τὸ μήκος τοῦ ἔκκρεμοῦς καὶ g ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος.

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου προκύπτει ὅτι ἡ περίοδος τοῦ μαθηματικοῦ ἔκκρεμοῦς εἶναι ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ μήκους l τοῦ ἔκκρεμοῦς καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος g .

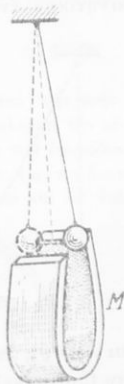
Ἐκ τοῦ τύπου (1) — ὁ ὁποῖος δὲν περιέχει τὴν μάζαν τοῦ ἔκκρεμοῦς — δικαιολογεῖται καὶ ἡ πρώτη παρατήρησις τοῦ Γαλιλαίου (*) ὅτι ἔκκρεμῃ, τοῦ αὐτοῦ μήκους, ἀλλὰ διαφόρου μάζης, ἔχουν ὅλα τὴν αὐτὴν περίοδον. Ὁμοίως, ἐκ τοῦ τύπου (1) προκύπτει ὅτι τὸ ὕλκον, ἐκ τοῦ ὁποῖου εἶναι



Σχ. 160.

κατεσκευασμένον τὸ ἔκκρεμὲς, οὐδεμίαν ἐπίδρασιν ἔχει ἐπὶ τῆς περιόδου. Ἐπίσης, ἡ περίοδος δὲν ἐξαρτᾶται καὶ ἐκ τοῦ πλάτους τῆς ταλαντώσεως. Ἐάν, δηλαδή, ἐκτρέψωμεν τὸ ἔκκρεμὲς ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας του κατὰ μικρὰν γωνίαν, π.χ., 1° , καὶ, ἀκολουθῶς, κατὰ 2° , 3° , θὰ εὗρωμεν τὴν αὐτὴν περίοδον.

Τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς περιόδου καὶ τοῦ μήκους τοῦ ἔκκρεμοῦς δυνάμεθα νὰ δεῖξωμεν πειραματικῶς διὰ τριῶν σφαιρῶν, ἐξηρητημένων διὰ νημάτων, τῶν ὁποίων τὰ μήκη νὰ εἶναι, π.χ., 10 cm, 40 cm καὶ 90 cm (σχ. 160). Ἐάν θέσωμεν εἰς ταλάντωσιν καὶ τὰ τρία ἔκκρεμῃ καὶ μετρήσωμεν τὰς περιόδους αὐτῶν, θὰ εὗρωμεν ὅτι αὐταὶ ἔχουν μεταξὺ τῶν λόγους 1:2:3, δηλ., ἴσους πρὸς τοὺς λόγους τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν μηκῶν $\sqrt{10} : \sqrt{40} : \sqrt{90}$.



Σχ. 161. Διὰ τοῦ μαγνήτου ἐπιτηγχάνομεν φαινόμενην αὐξήσιν τῆς βαρύτητος.

(*) Galileo Galilei (Γαλιλαῖος) (1564—1642). Ἐγεννήθη εἰς τὴν Πίζαν (Ἰταλίας) διετέλεσε δὲ καθηγητὴς αὐτόθι καὶ εἰς τὴν Πάδουαν. Ἐπειραματίσθη ἐπὶ τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων, ρίπτων ἑλαφρά καὶ βαρὴ σώματα ἀπὸ τοῦ κεκλιμένου Πύργου τῆς Πίζης καὶ εὗρε τοὺς νόμους τῆς πτώσεως. Ἐπίσης, ἠσχολήθη καὶ μὲ σπουδαία ἀστρονομικὰ ζητήματα. Κατηγορήθη, διότι ὑποστήριζε τὴν θεωρίαν τοῦ Κοπερνίκου περὶ κινήσεως τῆς Γῆς περὶ τὸν ἥλιον. Μετὰ τὸ πέρας τῆς δίκης, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀπηνήθη τὰς δοξασίας του, ἀναφέρεται ὅτι εἶπε τὴν περίφημον φράσιν «καὶ, ὁμως, κινεῖται» (ἢ) Γῆ).
Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Ἐπειδή, κατὰ τὸν τύπον (1), ἡ περίοδος τοῦ ἔκκρεμοῦς ἐξαρτᾶται καὶ ἐκ τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος g , ἔπεται ὅτι ἡ περίοδος ἑνὸς ἔκκρεμοῦς, μεταφερομένου ἀπὸ τόπου εἰς τόπον, θὰ μεταβάλλεται κατὰ τι. Τοῦτο ἀποδεικνύομεν πειραματικῶς διὰ «φαινομένης αὐξήσεως» τοῦ g . Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν ἔκκρεμους μὲ σφαῖραν ἐκ σιδήρου, κάτωθεν δὲ αὐτῆς στερεοῦμεν τὸν μόνιμον μαγνήτην M (σχ. 161). Ὁ μαγνήτης ἔλκει τὴν σιδηρὰν σφαῖραν πρὸς τὰ κάτω μὲ μίαν δύναμιν, ἡ ὁποία ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα «φαινομένην αὐξήσιν» τοῦ βάρους αὐτῆς. Τοῦτο ἰσοδυναμεῖ πρὸς «φαινομένην αὐξήσιν» τοῦ g . Κατὰ τὸν τύπον (1), αὐξήσις τοῦ g προκαλεῖ ἐλάττωσιν τῆς περιόδου. Πράγματι, ἂν θέσωμεν εἰς ταλάντωσιν τὸ ἔκκρεμους, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τοῦτο ταλαντοῦται μὲ μεγαλύτεραν συχνότητα, δηλαδή, μὲ μικροτέραν περίοδον.

§ 99. Διατήρησις τῆς ἐνεργείας κατὰ τὴν ταλάντωσιν τοῦ ἔκκρεμοῦς. Ὄταν τὸ ἔκκρεμους εὐρίσκεται εἰς τὰ ἄκρα τῆς τροχιάς του, ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν, ἴσην πρὸς μηδέν, διότι ἐκεῖ ἡ ταχύτης του εἶναι ἴση



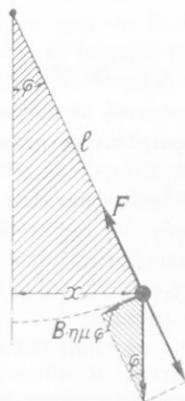
Σχ. 162

πρὸς μηδέν. Εἰς τὰς θέσεις ταύτας ἡ σφαῖρα τοῦ ἔκκρεμοῦς εὐρίσκεται εἰς μεγαλύτερον ὑψόμετρον h (σχ. 162), παρὰ ὅταν εὐρίσκεται εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας της. Ὡς γνωστόν, τὸ γινόμενον τοῦ βάρους B τοῦ ἔκκρεμοῦς ἐπὶ τὴν ἀνύψωσιν h παρέχει τὴν δυναμικὴν ἐνέργειαν αὐτοῦ, ἡ ὁποία, συνεπῶς, εἰς τὰς ἄκρας θέσεις θὰ λαμβάνῃ τὴν μεγίστην αὐτῆς τιμὴν. Ἀφ' ἑτέρου, ὅταν τὸ ἔκκρεμους διέρχεται διὰ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας, ἡ μὲν δυναμικὴ του ἐνέργεια ἔχει μηδενισθῇ (διότι ἐκεῖ εἶναι $h = 0$), ἐνῶ ἡ κινητικὴ του ἐνέργεια εἶναι μεγίστη (διότι ἐκεῖ ἡ ταχύτης εἶναι μεγίστη). Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι καὶ εἰς τὴν ταλάντωσιν τοῦ ἔκκρεμοῦς ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια μετατρέπεται περιοδικῶς εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν καὶ ὀντιστρόφως, τὸ ἄθροισμα, ὅμως, αὐτῶν διατηρεῖται σταθερόν.

★ ★ § 100. Ἀπόδειξις τοῦ τύπου τοῦ μαθηματικοῦ ἔκκρεμοῦς. Ἡ δύναμις $B \cdot \eta \mu \varphi = A$ (σχ. 163), δρῶσα κατὰ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ τόξου, ἐπιταχύνει τὸ ἔκκρεμους. Ἐκ τοῦ γραμμοσχισμένου (μεγάλου) τριγώνου λαμβάνομεν

$$\eta \mu \varphi = \frac{x}{l},$$

ὁπότε ἡ ἐπιταχύνουσα τὸ ἔκκρεμους δύναμις A εἶναι ἴση πρὸς



Σχ. 163.

$$A = \frac{B}{l} \cdot x. \quad (1)$$

Ἐάν περιορισθῶμεν εἰς πολὺ μικρὰς γωνίας, ἡ ὁπόστας x συμπίπτει μετὰ τὴν ἀπομάκρυνσιν τοῦ ἐκκρεμοῦς. Ἄρα, διὰ πολὺ μικρὰς γωνίας, ἡ δύναμις A , ἡ ἐπιταχύνουσα τοῦ ἐκκρεμῆς, εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀπομακρύνσεως x αὐτοῦ, συνεπῶς ἡ κίνησις τοῦ ἐκκρεμοῦς θὰ εἶναι ἀρμονικὴ ταλάντωσις.

Ἡ κατευθύνουσα δύναμις k τοῦ ἐκκρεμοῦς, ὡς πηλίκον τῆς δυνάμεως A διὰ τῆς ἀντιστοίχου ἀπομακρύνσεως x , ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου (1) ἴση πρὸς

$$k = \frac{A}{x} = \frac{B}{l} = \frac{m \cdot g}{l}. \quad (2)$$

Ἦδη, ἐφ' ὅσον εὗρομεν ὅτι τὸ ἐκκρεμές ἐκτελεῖ ἀρμονικὴν ταλάντωσιν, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν περίοδον T αὐτοῦ ἐκ τοῦ γενικοῦ τύπου, τοῦ παρέχοντος τὴν περίοδον τῆς ἀρμονικῆς ταλάντωσεως

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

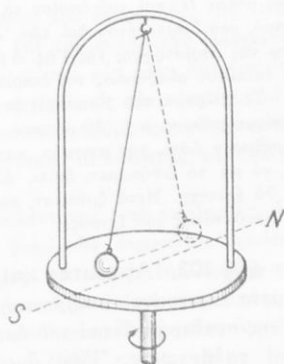
Πρὸς τοῦτο ἀντικαθιστῶμεν τὴν κατευθύνουσαν δύναμιν k διὰ τοῦ ἴσου τῆς, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ ἐξίσωσις (2), ὁπότε λαμβάνομεν διὰ τὴν περίοδον T τοῦ ἐκκρεμοῦς τὸν τύπον

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad \text{ὁ.ἔ.δ.}$$

§ 101. Έκκρεμές τοῦ Foucault (Φουκώ). Ὅπως εἶδομεν κατὰ τὴν περιγραφὴν τῆς κινήσεως τοῦ μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς, ἡ δύναμις, ἡ προκαλοῦσα τὴν κίνησιν αὐτοῦ (ἢ B -ημ φ εἰς τὸ σχῆμα 159), εὐρίσκεται πάντοτε ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς, τὸ ὁποῖον εἶναι κατακόρυφον. Συνεπῶς, τὸ ἐπίπεδον αἰωρήσεως διατηρεῖται συνεχῶς ἀμετάβλητον, ἔστω καὶ ἂν ἐπὶ τοῦ νήματος ἐξαετήσεως ἐπιδρῶν δυνάμεις, τείνουσαι νὰ στρέψουν τὸ νῆμα· διότι αἱ δυνάμεις αὗται ὡς μόνον ἀποτέλεσμα θὰ ἔχουν νὰ περιστρέψουν τὸ νῆμα καί, κατὰ συνέπειαν, τὸ ἐξ αὐτοῦ ἐξηρητημένον ἐκκρεμές περὶ τὸν ἑαυτὸν του.

Τὴν διατήρησιν τοῦ ἐπιπέδου αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς δυνάμεθα νὰ δεῖξωμεν πειραματικῶς διὰ τῆς συσκευῆς, τὴν ὁποίαν παρίσκει τὸ σχῆμα 164: Ἐάν θέσωμεν εἰς τάλαντος τὸ ἐκκρεμές, εἰς τρόπον ὥστε τοῦτο νὰ κινῆται κατὰ τὴν διεύθυνσιν, π.χ., βορρᾶς νότος καί, ἀκολουθῶς, περιστρέψωμεν βραδέως τὴν συσκευὴν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ἐκκρεμές ἐξακολουθεῖ νὰ ταλαντοῦται ἐντὸς τοῦ ἀρχικοῦ ἐπιπέδου αἰωρήσεως.

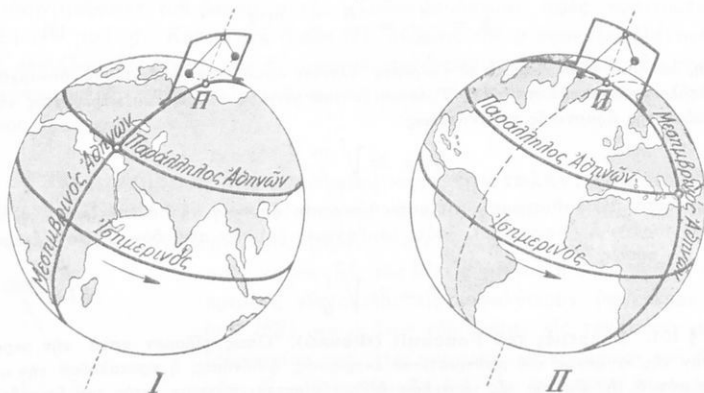
Τὴν ιδιότητα, ἀκριβῶς, τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ ἐκκρεμές νὰ διατηρῇ τὸ ἐπίπεδον αἰωρήσεως αὐτοῦ ἀμετάβλητον, ἐχρησιμοποίησεν ὁ Foucault διὰ ν' ἀποδείξῃ, διὰ γήινου πειράματος, ὅτι ἡ Γῆ στρέφεται περὶ τὸν ἄξονά της. Πρὸς τοῦτο ἐχρησιμοποίησεν ἐκκρεμές, μῆκους 79 m, τὸ ὁποῖον ἐξήρησεν ἀπὸ τῆς ὀροφῆς τοῦ Πανθέου τῶν Παρισίων. Τὸ



Σχ. 164. Παρὰ τὴν περιστροφήν τῆς συσκευῆς, τὸ ἐκκρεμές ἐξακολουθεῖ νὰ ταλαντοῦται ἐντὸς τοῦ ἀρχικοῦ ἐπιπέδου αἰωρήσεως. (N = βορρᾶς, S = νότος).

έκκρεμές τουτο ἔφευρον εἰς τὸ κάτω μέρος ἀκίδα, ἡ ὁποία, κατὰ τὴν ταλάντωσιν τοῦ ἐκκρεμοῦς, ἐχάρασσαν ἐπὶ στρώματος ἄμμου τὸ ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου αἰωρήσεως. Παρατηρήθη ὅτι τὸ ἴχνος τῆς ἀκίδος ἐπὶ τῆς ἄμμου μετεβάλλετο μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου. Ἐφ' ὅσον γνωρίζομεν ὅτι κατὰ τὴν ταλάντωσιν τοῦ ἐκκρεμοῦς τὸ ἐπίπεδον αἰωρήσεως δὲν μεταβάλλεται, ἔπεται ὅτι, διὰ ν' ἀλλάξῃ τὸ ἴχνος ἐπὶ τῆς ἄμμου, πρέπει νὰ ἐστράφη τὸ ἐπίπεδον τῆς ἄμμου, δηλ., ἡ Γῆ.

Τὸ φαινόμενον ἐξηγεῖται εὐχερῶς, ἐάν δεχθῶμεν ὅτι τὸ πείραμα ἐκτελεῖται εἰς τοὺς πόλους: Τὸ σχῆμα 165, I παριστᾷ ἐκκρεμές, τὸ ὅποιον εὐρίσκεται εἰς τὸν βό-



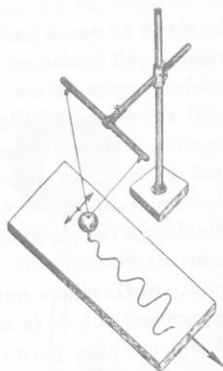
Σχ. 165. Λιὰ τὴν ἐξήγησιν τοῦ πειράματος τοῦ Foucault.

ρειον πόλον II καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον αἰωρήσεως συμπίπτει μετὰ τοῦ μεσημβρινοῦ, τοῦ διερχομένου διὰ τῶν Ἀθηνῶν. Εἶναι φανερόν ὅτι, μετὰ τινα χρόνον, λόγφ τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς, ὁ μεσημβρινὸς τῶν Ἀθηνῶν δὲν θὰ συμπίπτει μετὰ τοῦ ἐπιπέδου αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς (II).

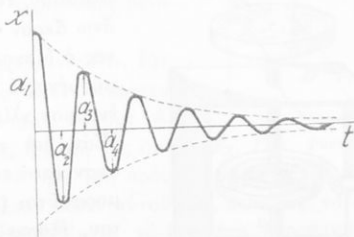
Τὸ πείραμα τοῦ Foucault δυνάμεθα νὰ ἐπαναλάβωμεν δι' ἐκκρεμοῦς, πολὺ μικροτέρου μήκους, π.χ., 10 μέτρων. Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πειράματος πρέπει νὰ προσέξωμεν ὥστε, τὴν στιγμὴν, κατὰ τὴν ὁποίαν θ' ἀφήσωμεν ἐλεύθερον τὸ ἐκκρεμές, νὰ μὴ τὸ ὠθήσωμεν, διότι, ἄλλως, ἡ κίνησίς του ἐπηρεάζεται καὶ τὸ πείραμα δὲν θὰ ἐπιτύχῃ. Μετὰ ἡμίσειαν, περίπου, ὥραν θὰ ἔχῃ παρατηρηθῇ σαφῶς ἡ ἀλλαγὴ τῆς διευθύνσεως τοῦ ἴχνους.

★ § 102. Ἀμείωτος καὶ φθίνουσα ταλάντωσις. Ἡ εἰς τὰ προηγούμενα περιγραφεῖσα ἁρμονικὴ ταλάντωσις θεωρεῖται ὅτι διατηρεῖ τὸ πλάτος τῆς σταθερόν, ἔνεκα τοῦ ὁποίου καὶ καλεῖται **ἀμείωτος** (ἢ **συντηγρομένη**) **ταλάντωσις**. Ἐάν, ὅμως, μελετήσωμεν τὴν ταλάντωσιν, π.χ., ἐνὸς ἐκκρεμοῦς ἐντὸς τοῦ ἀέρος, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ πλάτος τῆς ταλάντωσεως βαθμυδὸν ἐλαττοῦται καὶ μετ' ὀλίγον χρόνον γίνεται ἴσον πρὸς μηδέν. Διὰ νὰ εὗρωμεν τὴν μορφήν, τὴν ὁποίαν θὰ ἔχῃ, τώρα, ἡ ταλάντωσις τοῦ ἐκκρεμοῦς, ἐκτελοῦμεν τὸ ἐξῆς πείραμα (σχ. 166): Ἐφοδιάζομεν ἐν ἐκκρεμές μὲ μικρὸν χωστίηρα (κ. πινέλλο), τὸν ὁποῖον καὶ ἐμβαπτίζομεν ἐντὸς μελάνης. Ἀκολουθῶς, θέτομεν εἰς ταλάντωσιν τὸ ἐκκρεμές καὶ κάτωθεν αὐ-

τοῦ κινουμένου ἰσοταχῶς φύλλον χάρτου, εὐρισκόμενον ἐν ἐπαφῇ πρὸς τὸν χρωστήρα. Θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐπὶ τοῦ χάρτου θὰ γραφῇ μία καμπύλη γραμμὴ, ὁμοιάζουσα πρὸς τὴν ἡμιτονοειδῇ καμπύλῃν τοῦ σχήματος 153, τῆς ὁποίας, ὅμως, τὸ πλάτος βαίνει



Σχ. 166.



Σχ. 167. Γραφικὴ παράστασις τῆς φθίνουσας ταλάντωσης.

συνεχῶς ἐλαττούμενον (*). Τὴν μορφήν τῆς καμπύλης ταύτης ἀποδίδει τὸ σχῆμα 167, εἰς τὸ ὁποῖον παρατηροῦμεν ὅτι τὰ διαδοχικὰ πλάτη $a_1, a_2, a_3, \dots$ βαίνουν συνεχῶς ἐλαττούμενα.

Μία τοιαύτη ταλάντωσις, τῆς ὁποίας τὸ πλάτος ἐλαττοῦται μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου, καλεῖται **φθίνουσα ταλάντωσις** (ἢ ἀποσβεσμένη ταλάντωσις).

Ἡ ἐλάττωσις τοῦ πλάτους τῆς ταλάντωσης τοῦ ἐκκρεμοῦς, τοῦ κινουμένου ἐντὸς τοῦ ἀέρος, ὀφείλεται εἰς τὸ ἐπὶ τοῦ ἐκκρεμοῦς ἐξασκεῖται, πλὴν τῆς ἐπιταχυνούσης αὐτὸ δυνάμεως $B \cdot \eta \mu \varphi$, καὶ μία ἄλλη δύναμις — ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος — ἡ ὁποία ἀντιτίθεται συνεχῶς εἰς τὴν κίνησιν. Λόγῳ τῆς δυνάμεως ταύτης, ἡ ἐνέργεια τῆς ταλάντωσης τοῦ ἐκκρεμοῦς μετατρέπεται βαθμηδὸν εἰς θερμότητα καί, ὥς ἐκ τούτου, τὸ ἐκκρεμὸς μετ' ὀλίγον θὰ παύσῃ ταλαντοῦμενον.

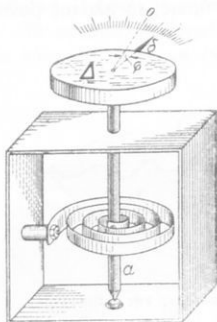
Εἰς τὴν πραγματικότητα, ὅχι μόνον ἡ ταλάντωσις τοῦ ἐκκρεμοῦς, ἀλλ' ὅλαι αἱ ταλάντωσης εἶναι φθίνουσαι, λόγῳ ἀπωλειῶν ἐνεργείας, ὀφειλομένων εἰς τὴν τριβὴν, τὴν ἀντίστασιν τοῦ ἀέρος κ.λ., ἐκτὸς ἐὰν ληφθῇ πρόνοια, ὥστε νὰ προσφέρεται ἐκάστοτε ἡ ἐνέργεια, ἡ ὁποία χάνεται, ὅποτε βεβαίως ἡ ταλάντωσις διατηρεῖ τὸ πλάτος τῆς σταθερόν, ὅπως τοῦτο συμβαίνει, π.χ., εἰς τὰ ἐκκρεμῇ τῶν ὥρολογίων (βλ. § 104).

★ § 103. **Στροφικαὶ ταλάντωσης.** Εἰς τὴν § 94 εἶδομεν ὅτι μία σφαῖρα, στερεωμένη εἰς τὸ ἄκρον ἐλικοειδοῦς ἐλατηρίου, ἔκτελεῖ ἁρμονικὴν

(*) Τὸ πείραμα δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ἐκτελεσθῇ τόσον ἀπλῶς, ὅσον ὑποδεικνύει τὸ σχῆμα 166.

ταλάντωσιν, ὅταν ἀπομακρυνθῇ ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας της καί, ἀκούθως, ἀφεθῇ ἐλευθέρα.

Ἀνάλογον φαινόμενον παρουσιάζεται καὶ εἰς τὴν στροφικὴν κίνησιν: Τὸ σχῆμα 168 παριστᾷ σπειροειδὲς ἑλατήριο, τοῦ ὁποῦν τὸ μὲν



Σχ. 168.

ἐν ἄκρον εἶναι ἀκλονήτως στερεωμένον ἐπὶ πλαισίον, τὸ δὲ ἄλλο ἐπὶ τοῦ ἄξονος α . Εἰς τὸ ἄνω ἄκρον τοῦ ἄξονος τούτου εἶναι στερεωμένος ὁ δίσκος Δ , ἐπὶ τοῦ ὁποῦν εἶναι προσηρμοσμένος ὁ δείκτης δ , δυνάμενος νὰ κινῆται ἐνώπιον κλίμακος, βαθμολογημένης εἰς μοίρας. Ἐάν, διὰ τῆς χειρός, περιστρέψωμεν τὸν δίσκον κατὰ τινα γωνίαν φ , τὸ ἑλατήριο παραμορφοῦται (π.χ., συσπειροῦται) καί, ὡς ἐκ τούτου, ἔξασκεῖ ἐπὶ τοῦ δίσκου μίαν ροπήν, τείνουσαν νὰ ἐπαναφέρῃ αὐτὸν εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας του. Ἐάν, τώρα, ἀφήσωμεν ἐλεύθερον τὸν δίσκον, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι οὗτος θὰ ἐπανεέλθῃ εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορρο-

πίας του, τὴν ὁποίαν, ὅμως, λόγῳ ἀδρανείας, θὰ ὑπερβῇ, μὲ ἀποτέλεσμα νὰ ἐκτελέσῃ **στροφικὴν ταλάντωσιν**, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ γωνία φ μεταβάλλεται περιοδικῶς μετὰ τοῦ χρόνου.

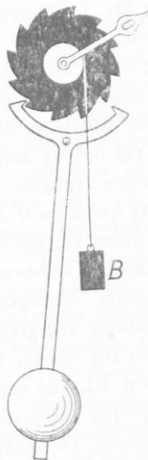
Τοιαύτην, ἀκριβῶς, ταλάντωσιν ἐκτελεῖ ὁ **αἰωρητής** τῶν συνήθων ὥρολογίων (σχ. 169), ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ροπῆς, ἔξασκουμένης ἐπ' αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ ἀπεικονιζομένου σπειροειδοῦς ἑλατηρίου. Ἡ ταλάντωσις τοῦ αἰωρητοῦ εἶναι φθίνουσα, καθόσον, λόγῳ τριβῶν, ἡ ἐνέργεια τῆς ταλαντώσεως μετατρέπεται βαθμὴδὸν εἰς θερμότητα. Διὰ νὰ ἐκτελῇ, λοιπόν, ὁ αἰωρητής ἀμείωτον ταλάντωσιν, ἡ ὁποία εἶναι ἀπαραίτητος διὰ τὴν λειτουργίαν τοῦ ὥρολογίου, πρέπει νὰ προσφέρεται εἰς αὐτὸν ἡ ἐνέργεια, ἡ ὁποία χάνεται. Πρὸς τοῦτο ὑπάρχει ἐντὸς τοῦ ὥρολογίου ἓν ἰσχυρὸν σπειροειδὲς ἑλατήριο, τὸ ὁποῖον συσπειροῦται (κουρδίζεται) διὰ τῆς χειρός. Τὸ συσπειρωμένον τοῦτο ἑλατήριο περιέχει, ὡς γνωστόν, δυναμικὴν ἐνέργειαν, τὴν ὁποίαν, διὰ καταλλήλου μηχανισμοῦ, χορηγεῖ βαθμὴδὸν εἰς τὸν αἰωρητήν, οὕτως ὥστε ἡ ταλάντωσις του νὰ διατηρῇται ἀμείωτος.



Σχ. 169. Ἡ κίνησις τοῦ αἰωρητοῦ εἶναι στροφικὴ ταλάντωσις.

★ § 104. Φυσικὸν ἐκκρεμές. Θεωρήσωμεν σῶμα, δυνάμενον νὰ περιστραφῇ περὶ ὀριζόντιον ἄξονα (σχ. 170). Ἐάν ἀπομακρύνωμεν τὸ σῶμα τοῦτο ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας του κατὰ τινα γωνίαν φ , ἡ δύναμις B (δηλ., τὸ βάρος τοῦ σώματος) παράγει μίαν ροπήν ὡς πρὸς τὸν ἄξονα

περιστροφῆς, ἡ ὁποία τείνει νὰ ἐπαναφέρῃ τὸ σῶμα εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας του. Ἐάν, τώρα, ἀφήσωμεν τὸ σῶμα ἐλευθέρων, θὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν του θέσιν, τὴν ὁποίαν, ὅμως, θὰ ὑπερβῇ, λόγῳ ἀδρανείας, καί, οὕτω, θὰ ἐκτελέσῃ *στροφικὴν ταλάντωσιν*, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ γωνία φ θὰ μεταβάλλεται περιοδικῶς μετὰ τοῦ χρόνου.



Σχ. 171.

Εἶναι προφανές ὅτι, ἐάν ὁ ὀριζόντιος ἄξων διήρχετο διὰ τοῦ κέντρου βάρους K τοῦ σώματος, ἡ ροπή τῆς δυνάμεως B θὰ ἦτο ἴση πρὸς μηδέν εἰς πᾶσαν θέσιν αὐτοῦ καί, συνεπῶς, τὸ σῶμα τοῦτο δὲν θὰ ἠδύνατο νὰ ἐκτελέσῃ *στροφικὴν ταλάντωσιν*.

Πάν στερεὸν σῶμα — ὅπως τὸ ἀνωτέρω — τὸ ὁποῖον δύναται νὰ στραφῇ περὶ ὀριζόντιον ἄξονα, μὴ διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ, καλεῖται *φυσικὸν ἔκκρεμές* (*).

Παράδειγμα φυσικοῦ ἔκκρεμους ἔχομεν εἰς τὸ ἔκκρεμές τῶν ὥρολογίων (σχ. 171). Λόγῳ τριβῶν, ἡ ταλάντωσις αὐτοῦ θὰ ἦτο φθίνουσα, ἐάν δὲν ἐλαμβάνετο πρόνοια νὰ προσφέρεται, ἐκάστοτε, εἰς αὐτὸ

δι' εἰδικοῦ μηχανισμοῦ ἐνέργεια, ἴση πρὸς ἐκείνην, ἡ ὁποία χάνεται. Εἰς τὸ σχῆμα 171 ἡ ἐνέργεια αὕτη προέρχεται ἐκ τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας ἐνὸς καταλλήλως ἐξηρητημένου βαρέος σώματος B .

★ ★ § 105. Ἐφαρμογαὶ τοῦ ἔκκρεμους. Ὁ τύπος $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ παρέχει,

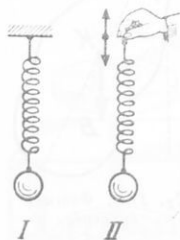
κατ' ἀρχήν, τὴν δυνατότητα χρησιμοποιοῦσως τοῦ μαθηματικοῦ ἔκκρεμους διὰ τὴν μέτρησιν χρόνου. Πράγματι, ἐάν γνωρίζωμεν τὸ g εἰς ἓνα τόπον, κατασκευάσωμεν δὲ μαθηματικὸν ἔκκρεμές, γνωστοῦ μήκους l , τότε, τῇ βοήθειᾳ τοῦ ἀνω τύπου, δύναμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν περίοδον τοῦ ἐν λόγω ἔκκρεμους. Ἐάν, λοιπόν, ἐθέτομεν εἰς ταλάντωσιν τὸ ἔκκρεμές τοῦτο, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ μετρώμεν χρόνον. Δεδομένου, ὅμως, ὅτι ἡ πραγματοποίησις τοῦ μαθηματικοῦ ἔκκρεμους εἶναι ἀδύνατος, διὰ τὰς μετρήσεις χρόνου καταφεύγομεν εἰς *φυσικὰ ἔκκρεμή*, τῶν ὁποίων ἡ περίοδος προσδιορίζεται, συνήθως, πειραματικῶς.

Ὁ αὐτὸς τύπος $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ μᾶς παρέχει, ἀφ' ἑτέρου, τὴν δυνατότητα μετρήσεως τοῦ g , ἀρκεῖ νὰ διαθέτωμεν μαθηματικὸν ἔκκρεμές, γνωστοῦ μήκους l , τοῦ ὁποίου νὰ μετρήσωμεν τὴν περίοδον T . Ἡ μέτρησις, ὅμως, τοῦ g διὰ μαθηματικοῦ

(*) Ὁ τύπος, ὁ ὁποῖος δίδει τὴν περίοδον τοῦ φυσικοῦ ἔκκρεμους, εἶναι πολὺ πλοῦτος.

έκκρεμους δὲν εἶναι δυνατὴ, διὰ τοὺς λόγους, τοὺς ὁποίους ἀνεφέραμεν προηγουμένως. Ὡς ἐκ τούτου, τὸ g μετρεῖται μόνον διὰ φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς, ὠρισμένου τύπου.

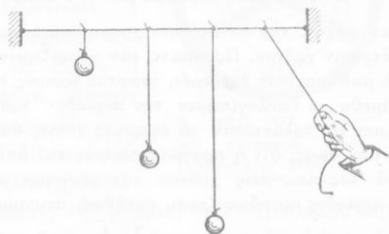
§ 106. Ἐξηναγκασμένη ταλάντωση. Ὡς γνωστόν, ἐὰν ἀπομακρύνωμεν τὴν σφαῖραν τοῦ σχήματος 172, I ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας της καί,



Σχ. 172. Ἡ σφαῖρα ἐκτελεῖ ἐλευθεράν ταλάντωσην (I) καὶ ἐξηναγκασμένην ταλάντωσην (II).

ἀκολούθως, ἀφήσωμεν αὐτὴν ἐλευθέραν, θὰ ἐκτελέσῃ ταλάντωσην. Εἰς τὴν § 94 εἶδομεν ὅτι ἡ ἰδιοσυχνότης τῆς ταλάντωσης ταύτης εἶναι ὠρισμένη καὶ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς μάζης τῆς σφαίρας καὶ ἐκ τῆς «σκληρότητας» τοῦ ἐλατηρίου. Ἐστω, τώρα, ὅτι τὸ ἄνω ἄκρον τοῦ ἐλατηρίου δὲν στερεοῦται μονίμως, ἀλλὰ κρατεῖται διὰ τῆς χειρὸς μας (II), τὴν ὁποίαν κινεῖμεν περιοδικῶς ἐπὶ κατακορύφου τροχιάς με συχνότητα ν . Θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ σφαῖρα θ' ἀρχίσῃ νὰ ταλαντοῦται, ἡ ταλάντωσις, ὅμως, εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην καλεῖται **ἐξηναγκασμένη ταλάντωση**, καθόσον γίνεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῆς περιοδικῆς δυνάμεως· τῆς δυνάμεως τῆς χειρὸς μας (*). Ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὸ πείραμα μὲ ἄλλην συχνότητα τῆς χειρὸς, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ πλάτος τῆς ταλάντωσης θὰ μεταβληθῇ. Εἰς τὴν περίπτωσιν δέ, κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ ἐπιτύχωμεν ὥστε ἡ συχνότης τῆς χειρὸς μας νὰ γίνῃ, ἀκριβῶς, ἴση πρὸς τὴν ἰδιοσυχνότητα τῆς σφαίρας, τὸ πλάτος τῆς ταλάντωσης θὰ λάβῃ μεγίστην τιμὴν. Ἐὰν ἡ συχνότης τῆς χειρὸς μας γίνῃ εἴτε μεγαλυτέρα, εἴτε μικροτέρα τῆς ἰδιοσυχνότητος τῆς σφαίρας, τὸ πλάτος τῆς ἐξηναγκασμένης ταλάντωσης λαμβάνει μικροτέρας τιμὰς. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι ὑπάρχει μία καὶ μόνη συχνότης τῆς χειρὸς μας, ἴση, ἀκριβῶς, πρὸς τὴν ἰδιοσυχνότητα τῆς σφαίρας, ὑπὸ τὴν ὁποίαν τὸ πλάτος τῆς ἐξηναγκασμένης ταλάντωσης γίνεται μέγιστον. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι ἔχομεν **συντονισμόν**.

Τὸν συντονισμόν δυνάμεθα νὰ δεῖξωμεν καὶ διὰ τοῦ ἑξῆς πειράματος: Ἐπὶ νήματος ὀριζοντίου, στερεωμένου εἰς τὰ δύο ἄκρα, ἐξαρτῶμεν μερικὰ ἐκκρεμῆ, τὰ ὁποῖα ἔχουν διάφορον μῆκος (σχ. 173). Ἐπὶ πλέον, συνδεδόμεν καὶ ἓν νήμα, τὸ ὁποῖον ἔλκομεν περιοδικῶς πρὸς ὀριζοντίαν διεύθυνσιν. Ἐὰν



Σχ. 173. Πείραμα διὰ τὴν ἐπίδειξιν τοῦ συντονισμοῦ.

(*) Ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰς ἐξηναγκασμένας ταλάντώσεις, ὅλαι αἱ εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους περιγραφεῖσαι ταλάντώσεις καλοῦνται **ἐλεύθεραι ταλάντώσεις**.

ἐκλέξωμεν τὴν συχνότητα, μὲ τὴν ὁποίαν κινούμεν τὸ νῆμα, τοιαύτην ὥστε νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν ἰδιοσυχνότητα ἑνὸς τῶν ἐκκρεμῶν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ἐκκρεμὲς τοῦτο θ' ἀρχίσῃ νὰ ταλαντοῦται μὲ διαρκῶς αὐξανόμενον πλάτος, ἐνῶ τὰ ἄλλα παραμένουν πρακτικῶς ἀκίνητα. Ἐάν, ἀκολούθως, ἐπαναλάβωμεν τὸ πείραμα, κινώντας τὴν χειρὰ μας μὲ ἄλλην συχνότητα, δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν συντονισμόν μὲ ἄλλο ἐκ τῶν ἐκκρεμῶν κ.ο.κ.

Ἐφαρμογαί. Τὸ φαινόμενον τοῦ συντονισμοῦ δύναται νὰ παρουσιασθῇ εἰς οἰονδήποτε σύστημα, δυνάμενον νὰ ταλαντωθῇ, ἐὰν τοῦτο ὑφίσταται τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῆς περιοδικῆς δυνάμεως, καταλήλου συχνότητος. Οὕτω, ἡ αἰώρα δὲν δύναται ν' ἀποκτήσῃ μέγα πλάτος, ὅταν τὴν ὠθοῦμεν διὰ τῶν χειρῶν μας μὲ οἰαδήποτε συχνότητα, ἀλλὰ μόνον, ὅταν τὴν ὠθοῦμεν μὲ κατάλληλον συχνότητα καί, συγκεκριμένως, μὲ συχνότητα, ἴσην πρὸς τὴν ἰδιοσυχνότητά της, δηλ., πρὸς τὴν συχνότητα, μὲ τὴν ὁποίαν ταλαντοῦται αὕτη ἐλευθέρως.

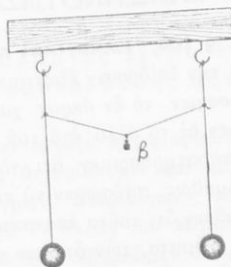
Ὅταν τμῆμα στρατοῦ διέρχεται γέφυραν, διατάσσεται ἐλευθέρως βηματισμός (βάδην). Τοῦτο γίνεται πρὸς ἀποφυγὴν ἐνδεχομένου συντονισμοῦ, ὃ ὁποῖος θὰ ἠδύνατο νὰ γίνῃ ἐπικίνδυνος διὰ τὴν ἀσφάλειαν τῆς γεφύρας. (Ἀναφέρονται τοιαῦτα καταρρεῦσεις γεφυρῶν).

Περιοδικὰς δυνάμεις ἐξασκοῦν καὶ οἱ κινητῆρες τῶν αὐτοκινήτων ἐπὶ τοῦ ἀμαξώματος. Διὰ τοῦτο παρατηροῦμεν συχνά ὅτι, ὅταν ὁ κινητὴρ στρέφεται μὲ ὠρισμένην τινὰ συχνότητα, τμῆμα τοῦ ἀμαξώματος (ὕαλοπίνακες κ.λ.) ἀρχίζει νὰ ταλαντοῦται σφοδρῶς, παραγομένου συγχρόνως ἰσχυροῦ θορύβου.

Τὸ φαινόμενον τοῦ συντονισμοῦ, τὸ ὁποῖον ἐμελετήσαμεν ἀνωτέρω, ἐμφανίζεται ὅχι μόνον εἰς τὰ περιγραφέντα φαινόμενα τῆς Μηχανικῆς, ἀλλὰ καὶ εἰς ἄλλα φυσικὰ φαινόμενα (εἰς τὴν Ἀκουστικὴν, τὸν Ἠλεκτρισμὸν κ.λ.), τὰ ὁποῖα θὰ γνωρίσωμεν ἀργότερον.

★ ★ § 107. Συνεξευγμέναι ταλαντώσεις. (Σύζευξις). Θεωρήσωμεν δύο ἐκκρεμὴ τοῦ αὐτοῦ μήκους, συνδεδεμένα μεταξὺ τῶν διὰ νήματος (σχ. 174), εἰς τὸ ὁποῖον ἔχομεν ἐξαρτήσιν ἐν μικρὸν βάρος β. Λέγομεν ὅτι τὰ δύο ἐκκρεμὴ εὐρίσκονται εἰς *σύζευξιν*. Ἐάν θέσωμεν εἰς ταλάντωσιν τὸ ἐν ἐκκρεμὲς, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως βαθμὴδὸν ἐλαττοῦται, ἐνῶ, ταυτοχρόνως, τὸ δεύτερον ἐκκρεμὲς ἀρχίζει νὰ ταλαντοῦται μὲ πλάτος, διαρκῶς αὐξανόμενον. Ἡ αὐξήσις αὕτη συνεχίζεται, μέχρις ὅτου τὸ πλάτος τοῦ πρώτου ἐκκρεμοῦς γίνῃ ἴσον πρὸς μηδέν. Τὴν χρονικὴν ταύτην στιγμήν ὅλη ἡ ἐνέργεια τοῦ πρώτου ἐκκρεμοῦς ἔχει μεταδοθῇ εἰς τὸ δεύτερον, τοῦ ὁποῖου τὸ πλάτος ἔχει γίνῃ, τώρα, μέγιστον. Τὸ φαινόμενον, ἀκολούθως, συνεχίζεται ἀντιθέτως καὶ μετ' ὀλίγον ὅλη ἡ ἐνέργεια τοῦ δευτέρου ἐκκρεμοῦς θὰ μεταδοθῇ ἐκ νέου εἰς τὸ πρῶτον κ.ο.κ.

Τὸ περιγραφέν φαινόμενον εἶναι γενικὸν καὶ παρουσιάζεται πάντοτε, ὅταν



Σχ. 174.

υπάρχουν δύο συστήματα, τα οποία εκτελούν ταλαντώσεις της αὐτῆς ιδιοσυχνότητος καὶ εὐρίσκονται εἰς σύζευξιν.

Ταλαντώσεις τοιαύτης μορφῆς καλοῦνται *συνεξευγμένα ταλαντώσεις*.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κατηγορία Α'

123) Ποία ἡ περίοδος ἑκκρεμοῦς, τοῦ ὁποίου τὸ μήκος εἶναι 1 m εἰς τόπον, εἰς τὸν ὅποιον τὸ g εἶναι ἴσον πρὸς 981 cm/sec^2 ; (ΑΠ: 2 sec)

124) Ποῖος ὁ λόγος τῶν περιόδων ἑνὸς ἑκκρεμοῦς, λειτουργοῦντος ἀφ' ἑνὸς μὲν εἰς τοὺς πόλους, ἀφ' ἑτέρου δὲ εἰς τὸν ἰσημερινόν; (Δίδεται: $g_{\text{πόλοι}} = 983\text{ cm}\cdot\text{sec}^{-2}$, $g_{\text{ισημ.}} = 978\text{ cm}\cdot\text{sec}^{-2}$) (ΑΠ: $0,99745:1$)

125) Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς τόπον, εἰς τὸν ὅποιον ἑκκρεμῆς, μήκους 25 cm , ἔχει συχνότητα 1 sec^{-1} ; (ΑΠ: 983 cm/sec^2)

126) Μὲ ποίαν συχνότητα πρέπει νὰ διεγείρωμεν ἑκκρεμές, μήκους 1 m , ἵνα τοῦτο ἐκτελέσῃ ἐξηναγασμένην ταλάντωσιν μεγίστου πλάτους; (ΑΠ: $0,5\text{ sec}^{-1}$)

Κατηγορία Β'

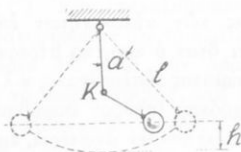
127) Ἐκκρεμές ἔχει περίοδον 2 sec . Ἐὰν ἐλαττωθῇ τὸ μήκος του κατὰ 5 cm , κατὰ πόσον θὰ μεταβληθῇ ἡ περίοδος; (ΑΠ: $\theta\alpha\ \epsilon\lambda\alpha\tau\omega\theta\eta\ \kappa\alpha\tau\alpha\ 0,052\text{ sec}$)

128) Ἡ περίοδος ἑκκρεμοῦς, λειτουργοῦντος εἰς ἕνα τόπον, εἶναι ἴση πρὸς $1,2\text{ sec}$. Τὸ ἑκκρεμές τοῦτο, μεταφερόμενον εἰς ἄλλον τόπον, ἔχει περίοδον $1,22\text{ sec}$.

Ποῖος ὁ λόγος τῶν ἐπιταχύνσεων τῆς βαρύτητος εἰς τοὺς δύο τόπους; (ΑΠ: $0,937515:1$)

129) Ἐκκρεμές, μήκους l , ταλαντοῦται μὲ πλάτος a . Ἐὰν παρεμβάλωμεν εἰς τὴν κίνησιν τοῦ νήματος ἓν κορφίον K , ἡ σφαῖρα τοῦ ἑκκρεμοῦς, λόγω τῆς ἀδρανεΐας τῆς, θὰ ἐξακολουθήσῃ κινουμένη. Μέχρι ποίου ὕψους h θὰ ἀνέλθῃ; (Ἡ ἀσκήσις νὰ λυθῇ διὰ χρησιμοποιοῦσας τοῦ θεωρήματος δια-

τηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας).



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'

ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

• § 108. Ἑλαστικαὶ παραμορφώσεις. Τὰ διάφορα στερεὰ σώματα, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, παραμορφοῦνται. Οὕτω, ἐὰν στερεώσωμεν τὸ ἓν ἄκρον χαλινβδίνου ἑλάσματος, πιέσωμεν δὲ τὸ ἄλλο διὰ τοῦ δακτύλου μας (σχ. 175), θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ἑλάσμα κάμπτεται. Ἄν, ἀκολούθως, παύσωμεν νὰ πιέζωμεν τὸ ἑλάσμα, παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο ἐπανακτᾷ τὸ πρότερον σχῆμά του.

Σώματα, τῶν ὁποίων αἱ παραμορφώσεις αἰρῶνται, ὅταν ἀρθοῦν αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι τὰς προεκάλεσαν, καλοῦνται *ἐλαστικά*. Ὑπάρχουν, ὅμως, καὶ σώματα, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ παραμορφώσεις δὲν αἰρῶνται, ὅταν ἀρθοῦν αἱ δυνάμεις. Τὰ τοιαῦτα σώματα καλοῦνται *πλαστικά*. Οὕτω, ἐὰν κάμψωμεν ἓνα σωλῆνα ἐκ μολύβδου, θὰ



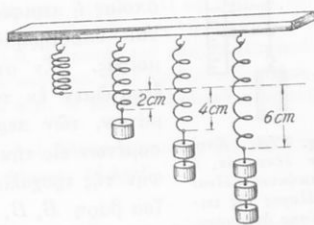
Σχ. 175.

παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ παραμόρφωσις δὲν αἰρεται, μετὰ τὴν ἄρσιν τῆς δυνάμεως, ἀλλὰ παραμένει μονίμως.

Τὸ πείραμα δεικνύει ὅτι αἱ παραμορφώσεις καὶ τῶν ἐλαστικῶν ἀκρόμῃ σωμάτων καθίστανται μόνιμοι, ἐὰν γίνονιν ὑπερβολικῶς μεγάλοι. Τότε λέγομεν ὅτι ὑπερέβημεν τὸ **ὅριον ἐλαστικότητος**. Τὸ φαινόμενον τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅταν κάμπτωμεν, π.χ., σιδηρὰν ράβδον: Ἐφ' ὅσον ἡ παραμόρφωσις εἶναι μικρά, αἰρεται, μόλις παύσῃ ἐξασκουμένη ἡ δύναμις. Ἐάν, ὅμως, ἡ κάμψις γίνῃ μεγάλη, ἡ παραμόρφωσις παραμένει μονίμως.

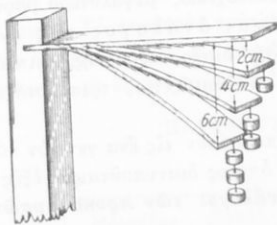
• § 109. Νόμος τοῦ Hooke (Χούκ). Θεωρήσωμεν ἐλικοειδὲς ἐλατήριον, τὸ ὁποῖον εἶναι στερεωμένον κατὰ τὸ ἓν ἄκρον (σχ. 176), ἐνῶ εἰς τὸ

ἄλλο δυνάμεθα νὰ ἐξαρθῶμεν διάφορα βάρη. Ἐάν ἐξαρθήσωμεν ἓκ τοῦ ἐλατηρίου ἓν βάρος — π.χ., 100 gr^* — θὰ εὗρωμεν ὅτι τὸ ἐλατήριο ἐπιμήκνεται — π.χ., κατὰ 2 cm . Ἐάν διπλασιάσωμεν τὸ τεῖνον βάρος — ἐάν, δηλ., ἐξαρθήσωμεν βάρος 200 gr^* — θὰ εὗρωμεν διπλασίαν ἐπιμήκυνσιν — δηλ., 4 cm . Ἐάν τριπλασιάσωμεν τὸ τεῖνον βάρος (300 gr^*), θὰ εὗρωμεν τριπλασίαν ἐπιμήκυνσιν (6 cm) κ.ο.κ. Ἐκ τῶν πειραμάτων τούτων προκύπτει ὅτι ἡ ἐπιμήκυνσις τοῦ ἐλατηρίου εἶναι ἀνάλογος τῆς τεινούσης αὐτὸ δυνάμεως.



Σχ. 176. Ἡ ἐπιμήκυνσις τοῦ ἐλατηρίου εἶναι ἀνάλογος τῆς τεινούσης δυνάμεως.

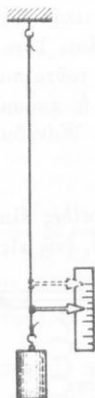
Ἀντίστοιχος εἶναι ἡ συμπεριφορὰ ἑνὸς χαλυβδίνου ἐλάσματος, τὸ ὁποῖον εἶναι στερεωμένον κατὰ τὸ ἓν ἄκρον (σχ. 177), φορτίζεται δὲ εἰς τὸ ἄλλο διὰ διαδοχικῶς μεγαλυτέρων βαρῶν (**κάμψις**). Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εὐρίσκομεν ὅτι ἡ παραμόρφωσις τοῦ ἐλάσματος εἶναι ἀνάλογος τῆς προκαλούσης αὐτὴν δυνάμεως.



Σχ. 177. Ἡ παραμόρφωσις τοῦ ἐλάσματος εἶναι ἀνάλογος τῆς προκαλούσης αὐτὴν δυνάμεως.

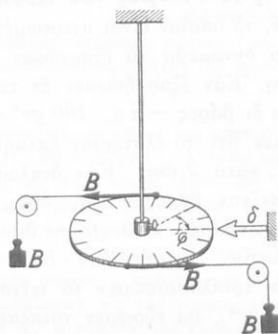
σύρματος αὐξάνεται. Τὸ φαινόμενον τοῦτο καλεῖται **ἐλκυσμός**, ὅπως δὲ εὐρίσκομεν πειραματικῶς, δι' ἐξαρθήσεως διαδοχικῶς μεγαλυτέρων βαρῶν, ἡ ἐπιμήκυνσις τοῦ σύρματος εἶναι ἀνάλογος τῆς προκα-

λούσης αυτήν δυνάμεως. Ἐπειδή, ὅμως, εἰς τὸ πείραμα τοῦτο ἡ ἐπιμήκυνσις εἶναι μικρὰ καὶ δυσκόλως ἐπιδεικνύεται δι' ἀπλῶν μέσων, χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὴν ἐπίδειξιν τοῦ ἑλκυσμοῦ, ἐλαστικὸν σωλῆνα φωταερίου ἢ νήμα ἐκ καουτσούκ (σχ. 178).



Σχ. 178. Κατὰ τὸν ἑλκυσμόν, ἡ ἐπιμήκυνσις εἶναι ἀνάλογος τῆς τεινύσεως δυνάμεως.

Ἀνάλογον φαινόμενον ἐμφανίζεται καὶ κατὰ τὴν **στρέψιν** ἐνὸς σύρματος. Διὰ νὰ μελετήσωμεν τὸ φαινόμενον τῆς στρέψεως, λαμβάνομεν, π.χ., σιδηροῦν σύρμα, τοῦ ὁποίου τὸ ἓν ἄκρον στερεοῦμεν μονίμως (σχ. 179), ἐνῶ εἰς τὸ ἄλλο προσαρμόζομεν τροχαλίαν, τῆς ὁποίας ἡ περιφέρεια εἶναι ὑποδιηρημένη εἰς μοίρας. Ἐν συνεχείᾳ, ἐξαερωμέν ἐκ τῶν νημάτων, τῶν περιτυλισσομένων εἰς τὴν ἑνσκαφήν τῆς τροχαλίας, δύο ἴσα βάρη B, B , ὁπότε, τῇ βοηθείᾳ δύο ἀκινήτων τροχαλιῶν, ἐξασκοῦνται εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς τροχαλίας δύο ἴσαι δυνάμεις B, B , αἱ ὁποιαὶ ἀποτελοῦν ζεύγος. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ροπῆς τοῦ ζεύγους τούτου, ἡ τροχαλία θὰ περιστραφῇ καὶ μετ' αὐτῆς τὸ σύρμα, ὅταν δὲ τὸ σύστημα ἰσορροπήσῃ, τὸ κάτω ἄκρον τοῦ σύρματος θὰ ἔχῃ στραφῇ κατὰ τὴν **γωνίαν στρέψεως** φ . Ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὸ πείραμα, ἐξαερωντες ἐκ τῶν νημάτων διαδοχικῶς μεγαλύτερα βάρη, θὰ εὗρωμεν ὅτι ἡ γωνία στρέψεως εἶναι ἀνάλογος τῆς ροπῆς τοῦ ἐπιδρώντος ζεύγους. Δηλαδή, διπλασιαζομένης, τριπλασιαζομένης κ.λ. τῆς ροπῆς, ἡ γωνία στρέψεως διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κ.λ.



Σχ. 179. Ἡ γωνία στρέψεως φ εἶναι ἀνάλογος τῆς ροπῆς τοῦ ἐπιδρώντος ζεύγους.

Ὅλαι αἱ ἄνω ἐλαστικαὶ παραμορφώσεις ὑπακούουν εἰς ἓνα γενικὸν νόμον, ὁ ὁποῖος καλεῖται **νόμος τοῦ Hooke** καὶ ὁ ὁποῖος διατυπῶνται ὡς ἑξῆς:

«Αἱ ἐλαστικαὶ παραμορφώσεις εἶναι ἀνάλογοι τῶν προκαλουσῶν αὐτὰς δυνάμεων ἢ ροπῶν».

Ὁ νόμος τοῦ Hooke εἰς τὸν ἑλκυσμόν. Ἡ ἐπιμήκυνσις ἐνὸς σύρματος ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μιᾶς δυνάμεως ἐξαρτᾶται ὄχι μόνον ἐκ μόνης τῆς δυνάμεως, ἀλλὰ καὶ ἐκ τῶν γεωμετρικῶν στοιχείων τοῦ σύρματος, ἐπίσης δὲ καὶ ἐκ τοῦ ὕλικου τοῦ σύρματος. Οὕτω, πειραματικῶς εὐρίσκεται ὅτι ἡ ἐπιμήκυνσις Δl ἐνὸς σύρματος, μήκους l , ἡ προκαλουμένη ὑπὸ τῆς δυνάμεως F , δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\Delta l = \frac{F}{E} \cdot \frac{F}{S} \cdot l \quad \begin{array}{l} \text{Νόμος τοῦ } Hooke \\ \text{εἰς τὸν ἔλκυσμόν} \end{array} \quad (1)$$

ἐνθα S εἶναι τὸ ἔμβαδὸν τῆς διατομῆς τοῦ σύρματος καὶ E μία σταθερά, ἡ ὁποία καλεῖται *μέτρον ἐλαστικότητος* ἢ *μέτρον τοῦ Young* (Γιάνγκ) καὶ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὑλικοῦ τοῦ σύρματος.

Ἐκ τοῦ τύπου (1) προκύπτει ὅτι, ἐὰν θεωρήσωμεν σύρμα, διπλασίου μήκους καὶ τῆς αὐτῆς διατομῆς, καὶ τὸ τείνωμεν μὲ τὴν αὐτὴν δύναμιν F , θὰ εὗρωμεν ὅτι ἡ ἐπιμήκυνσις θὰ διπλασιασθῇ. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ τύπου προκύπτει ὅτι, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν ἐν σύρμα δι' ἄλλου σύρματος, τοῦ αὐτοῦ μήκους, ἀλλὰ διατομῆς, διπλασίου ἔμβαδου καὶ τὸ τείνωμεν διὰ τῆς αὐτῆς δυνάμεως F , ἡ ἐπιμήκυνσις θὰ ἐλαττωθῇ εἰς τὸ ἡμῖσις τῆς προηγουμένης.

Μονάδες τοῦ μέτρου ἐλαστικότητος. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς E καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰς μονάδας τῶν ὑπολοίπων μεγεθῶν, θὰ εὗρωμεν τὴν μονάδα τοῦ μέτρου ἐλαστικότητος. Οὕτω, εἰς τὸ σύστημα C.G.S. ὡς μονὰς τοῦ μέτρου ἐλαστικότητος προκύπτει ἡ 1 dyn/cm^2 , εἰς δὲ τὸ Τεχνικὸν σύστημα τὸ $1 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$. Συνήθως, χρησιμοποιεῖται καὶ ἡ μονὰς $1 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$. Οὕτω, π.χ., τὸ μέτρον ἐλαστικότητος τοῦ χάλυβος εἶναι ἴσον πρὸς $2 \cdot 10^8 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$.

Ἐφαρμογή. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιμήκυνσις ἐνὸς χαλυβδίνου σύρματος, μήκους 5 m καὶ διαμέτρου 2 mm , ὅταν ἐξασκῆται ἐπ' αὐτοῦ δύναμις 10 kg^* .

• ★ § 110. Ἀντοχή τῶν ὑλικῶν. Ἐὰν φορτίζωμεν σύρμα, στερεωμένον εἰς τὸ ἄνω αὐτοῦ ἄκρον, μὲ διαρκῶς μεγαλύτερον βάρος, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ σύρμα θὰ θραυσθῇ, ὅταν τὸ βάρος ὑπερβῇ ὥρισμένην τιμήν. Ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὸ πείραμα διὰ σύρματος ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ, ἀλλὰ διατομῆς διπλασίου ἔμβαδου, θὰ χρειασθῇ διὰ τὴν θραῦσιν διπλάσιον βάρος. Καὶ εἰς τὰ δύο πειράματα τὸ πηλίκον τοῦ τείνοντος βάρους διὰ τοῦ ἔμβαδου δὲν μετεβλήθη. Τοῦτο σημαίνει ὅτι θραῦσις ἐνὸς ὑλικοῦ ἐπέρχεται, ὅχι ὅταν ἡ τεινούσα δύναμις ὑπερβῇ ὥρισμένην τιμήν, ἀλλ' ὅταν τὸ πηλίκον τῆς τεινούσης δυνάμεως διὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦ ἔμβαδου ὑπερβῇ ὥρισμένην τιμήν. Τὸ σταθερὸν τοῦτο πηλίκον καλεῖται *ὄριον θραύσεως*, δύναται δὲ νὰ ἐκφρασθῇ, π.χ., εἰς μονάδας kg^*/cm^2 . Εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα ἀναγράφονται τὰ ὅρια θραύσεως διὰ μερικά ὑλικά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΟΡΙΩΝ ΘΡΑΥΣΕΩΣ

(εἰς kg^*/cm^2)

Μόλυβδος	μέχρι	200
Χαλκός	»	3000
Κοινὸς χάλυψ	»	5000
Χάλυψ ἀρίστης ποιότητος	»	25000

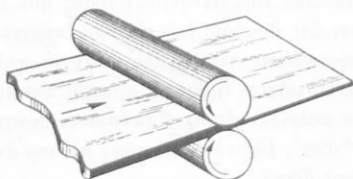
Εἰς τὰ πλεῖστα τῶν ὑλικῶν τὸ ὄριον θραύσεως εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὁρίου ἐλαστικότητος. Οὕτω, διὰ νὰ ὑποστῇ μόνιμον παραμόρφωσιν ἐν χάλκινον σύρμα, ἀρκεῖ δύναμις, μικροτέρα τῆς ἀπαιτούμενης διὰ τὴν θραῦσιν.

Εἰς ὁρισμένα, ὅμως, ὑλικά — ὅπως εἶναι ὁ σκληρὸς χάλυψ, ὁ χυτοσίδηρος, ἡ ὕαλος κ.λ. — παρατηρεῖται θραύσις, χωρὶς νὰ ἔχη προκληθῇ προηγουμένως μόνιμος παραμόρφωσις. Τὰ τοιαῦτα ὑλικά καλοῦνται **εὐθραυστα**. Οὕτω, μία ρίνη (κ. λίμα), ὡς κατεσκευασμένη ἐκ σκληροῦ χάλυβος, θραύεται, ἐὰν ἀποπειραθῶμεν νὰ τὴν κάμψωμεν, ἐνῶ, ἀντιθέτως, μία σιδηρὰ ράβδος κάμπτεται εὐκόλως.

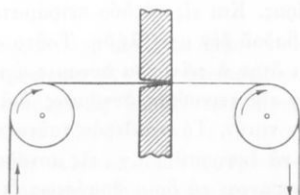
Εἰς τὰς τεχνικὰς κατασκευὰς πρέπει νὰ λαμβάνεται πρόνοια, ὅπως οἱ φορτίζουσαι δυνάμεις εἶναι μικραὶ καὶ τὰ ἐμβαδὰ μεγάλα, εἰς τρόπον ὥστε τὸ πηλίκον αὐτῶν νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ὁρίου θραύσεως. Εἰς τὰς περιπτώσεις ἐκείνας, εἰς τὰς ὁποίας ἡ καταστροφή τοῦ κατασκευάσματος θὰ εἴχε μεγάλας συνεπείας (θραύσις τοῦ συρματοσχοίνου ἀνελκυστήρων, γερανῶν κ.λ.), ἐπιβάλλεται τὸ πηλίκον τοῦτο νὰ εἶναι ἀρκετὰς φορὰς μικρότερον τοῦ ὁρίου θραύσεως.

★ § 111. **Σκληρότης.** Τὰ διάφορα στερεὰ σώματα διαφέρουν μεταξὺ των ὡς πρὸς τὴν **σκληρότητα**, δηλ., τὴν ἀντίστασιν, τὴν ὁποίαν προβάλλουν, ὅταν προσπαθῶμεν νὰ τὰ χαράξωμεν. Οὕτω, ὁ χάλυψ ἔχει μεγαλύτεραν σκληρότητα ἀπὸ τὴν ὕαλον, διότι διὰ ρίνης (κ. λίμας) δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν τὴν ὕαλον, ἐνῶ τὸ ἀντίθετον δὲν εἶναι δυνατόν. Σκληρότερον ὅλων τῶν γνωστῶν ὑλικῶν εἶναι ὁ ἀδάμας.

§ 112. **Κατεργασίαι τῶν μετάλλων.** Ὁρισμένα μέταλλα (σίδηρος, χαλκὸς κ.λ.) χαρακτηρίζονται ὡς **ἐλατά**, δηλ., δύναται νὰ παραμορφωθοῦν μονίμως, ἐὰν διέλθουν δι' **ἐλάστρον**. Τὸ **ἐλάστρον** (σχ. 180) ἀποτελεῖται ἐκ δύο μεταλλίνων κυλίνδρων, οἱ



Σχ. 180. Ἐλάστρον.



Σχ. 181. Συρματομηχανή.

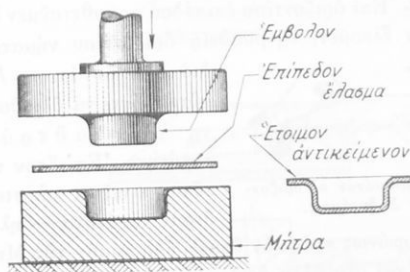
ὅποιοι, περιστρεφόμενοι, παρασύρουν καὶ συμπιέζουν τὸ πρὸς ἑλᾶσιν μέταλλον. Δι' ἐλάστρου κατασκευάζονται ἐλάσματα ὑπὸ μορφὴν φύλλων, δοκοῖ κ.λ.

Λεπτὰ σιδηρὰ φύλλα, ἐπικασσιτερωμένα, φέρονται ὑπὸ τὸ ὄνομα **λευκοσίδηρος** (κ. **τενεχές**), ἐπιψευδαργυρωμένα δὲ ὑπὸ τὸ ὄνομα **γαλβανισμένος σίδηρος** (κ. **τοιγκός**). Τὰ ἐλατά μέταλλα εἶναι συνήθως καὶ **ὀλκιμα**, δύναται, δηλ., ὅταν εὐρίσκωνται ὑπὸ μορφὴν ράβδων καὶ ἔλκωνται καταλλήλως, νὰ διέλθουν, διαδοχικῶς, δι' ὀπῶν, διαμέτρων διαρκῶς μικροτέρων, νὰ λεπτυνθοῦν καὶ νὰ καταλήξουν εἰς σύματα (σχ. 181).

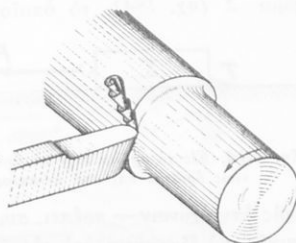
Εἰς πολλὰς βιομηχανίας κατασκευάζονται ἀντικείμενα διαφόρων σχημάτων (π.χ., μαγειρικά σκευῆ ἐξ ἀλουμινίου, μικρὰ κυτία ἐκ λευκοσίδηρου κ.λ.) διὰ **πιεσίης** (κ. **πρέσσης**). Πρὸς τοῦτο ἐπίπεδα ἐλάσματα πιέζονται ἰσχυρῶς ἐντὸς **μητρῶν**

καταλλήλου σχήματος (σχ. 182), όποτε λαμβάνεται άμέσως τό αντίστοιχον αντίκει-
μενον.

Είς άλλας περιπτώσεις τό σχήμα δίδεται διά προσθετικής άφαιρέσεως ύλικού
έκ τής έπιφανείας. Ούτω, κατά τήν τόρνευσιν κυλινδρικού τεμαχίου μετάλλου (σχ.
183), προσαρμόζεται τούτο έπί τοϋ τόρνου καί τίθεται είς περιστροφήν. Βραδέως



Σχ. 182.



Σχ. 183.

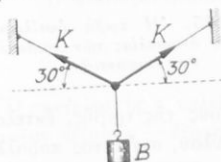
προωθούμενον κοπιτόν έργαλείον άφαιρεί συνεχώς ύλικόν, μέχρις ότου δοθῇ είς τό
τεμάχιον τοϋ μετάλλου τό έπιζητούμενον σχήμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

130) Πόσον φορτίον δύναται νά φέρῃ σύρμα έκ χαλκοϋ, διαμέτρου 1 mm, χω-
ρίς νά κοπῇ; (ΑΠ: μέχρι 23,55 kg^{r*})

131) Σφαίρα, μάζης 100 gr, είναι προσδεμένη είς τό έν άκρον σύρματος έκ
χαλκοϋ, μήκους 1 m καί διαμέτρου 1 mm, περιστρέφεται δέ όμαλώς μέ κέντρον τό
άλλο άκρον τοϋ σύρματος. Ποία πρέπει νά είναι ἡ ταχύτης τής σφαίρας, ώστε νά
κοπῇ τό σύρμα; (ΑΠ: 48 m/sec)

132) Κυλινδρική ράβδος έκ μολύβδου, διαμέτρου 1 cm, στερεοϋται κατά τό άνω
άκρον κατακορύφως. Ποίον δύναται νά είναι τό μήκος τής ράβδου, χωρίς αὐτή νά
κοπῇ; (ΑΠ: 177 m)



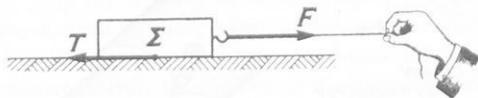
133) Είς τό μέσον χαλυβδίνου σύρματος, στερεω-
μένον είς τά δύο άκρα (όπως φαίνεται είς τό πα-
ρακείμενον σχήμα), κρέμεται βάρος Β, ίσον πρὸς
70 kg^{r*}. Νά εϋρεθοῦν α) αἱ δυνάμεις Κ, Κ, αἱ ό-
ποίαι τείνουν τό σύρμα καί β) ἡ έλαχίστη διάμε-
τρος τοϋ σύρματος, ώστε τούτο νά μή θραυσθῇ.
(ΑΠ: α) 70 kg^{r*}, β) 1,3 mm)

134) Ποία είναι ἡ έλαχίστη δύναμις, μέ τήν όποίαν πρέπει νά έλξωμεν χάλκι-
νον σύρμα, στερεωμένον είς τό έν άκρον του, ίνα θραυσθῇ; Μήκος τοϋ σύρματος
1,5 m, διάμετρος αὐτοϋ 2 mm. (ΑΠ: 94,2 kg^{r*})

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'

ΤΡΙΒΗ

§ 113. Τριβὴ ὀλισθήσεως. Ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου τοποθετοῦμεν ἓν σῶμα Σ (σχ. 184), τὸ ὁποῖον ἔλκομεν, τῇ βοηθειᾷ ὀριζοντίου νήματος



Σχ. 184. Εἰς τὸ σχῆμα ἐσχεδιάσθησαν μόνον αἱ ὀριζοντίως δρῶσαι ἐπὶ τοῦ σώματος Σ δυνάμεις.

διὰ τῆς δυνάμεως F , οὕτως ὥστε νὰ ὀλισθαίνῃ με σταθερὰν ταχύτητα. Ἐφ' ὅσον τὸ σῶμα κινεῖται με σταθερὰν ταχύτητα — δηλ.,

χωρὶς ἐπιτάχυνσιν — πρέπει, συμφώνως πρὸς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς, νὰ ἐξασκῆται ἐπ' αὐτοῦ καὶ μία ἄλλη ὀριζοντία δύναμις T , ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν ἔλκουνσαν δύναμιν F . Τὴν δύναμιν ταύτην T , τὴν ὁποῖαν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ σώματος Σ τὸ ἐν ἐπαφῇ πρὸς αὐτὸ ὀριζόντιον ἐπιπέδον καὶ ἡ ὁποία ἔχει πάντοτε φορὰν, ἀντίθετον τῆς φορᾶς τῆς κινήσεως τοῦ σώματος, καλοῦμεν **τριβὴν ὀλισθήσεως** ἢ, ἀπλούστερον, **τριβήν**.

Τὴν τριβὴν ὀλισθήσεως δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν, ἂν μεταξὺ τῆς χειρὸς μας καὶ τοῦ ἔλκοντος τὸ σῶμα νήματος παρεμβάλωμεν ἓν δυναμόμετρον (σχ. 186, I). Εἶναι προφανὲς ὅτι, ὅταν σύρωμεν τὸ σῶμα με σταθερὰν ταχύτητα, ἡ ἔνδειξις τοῦ δυναμομέτρου θὰ παρέχῃ ἀκριβῶς τὴν ζητουμένην τριβὴν ὀλισθήσεως T .

Ἡ τριβὴ ὀλισθήσεως ὁφείλεται εἰς τὰς ἀνωμαλίας, τὰς ὁποίας παρουσιάζουν αἱ ἐν ἐπαφῇ ἐπιφάνειαι τῶν δύο τριβομένων σωμάτων. Ἀκόμη καὶ ἐπιφάνειαι, αἱ ὁποῖαι θεωροῦνται ἔντελως λεῖται, δεικνύουν, κατὰ τὴν παρατήρησιν διὰ μικροσκοπίου, ἀνωμαλίας - προεξοχὰς καὶ ἐσοχὰς (σχ. 185).

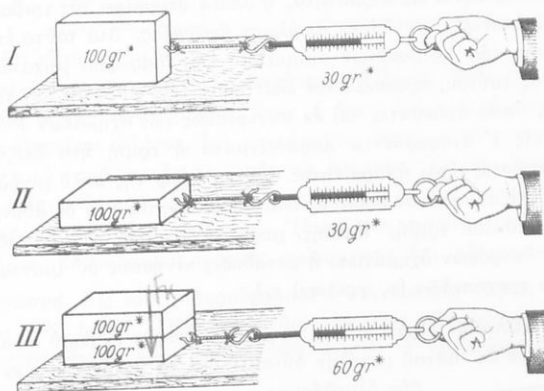


Σχ. 185. Ἡ τριβὴ ὁφείλεται εἰς τὰς ἀνωμαλίας τῶν τριβομένων ἐπιφανειῶν.

Νόμοι τῆς τριβῆς. Διὰ νὰ εὗρωμεν τοὺς νόμους τῆς τριβῆς, ἐκτελοῦμεν τὰ ἑξῆς πειράματα: 1) Λαμβάνομεν τεμάχιον ξύλου, σχήματος παραλλήλεσιπέδου (σχ. 186, I) καὶ βάρους, π.χ., 100 gr^* , καὶ τοποθετοῦμεν αὐτὸ ἐπὶ ὀριζοντίου τραπέζης. Διὰ δυναμομέτρου μετροῦμεν τὴν τριβὴν ὀλισθήσεως. Ἐστὼ ὅτι αὕτη εὗρέθη ἴση πρὸς 30 gr^* . Ἀκολουθῶς, στηρίζομεν τὸ σῶμα ἐπὶ ἑτέρας ἑδρας (II) καὶ εὗρίσκομεν ὅτι ἡ τριβὴ δὲν μετεβλήθη. Συμπέρασμα: Ἡ τριβὴ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ ἐμβαδου τῶν τριβομένων ἐπιφανειῶν.

2) Τοποθετοῦμεν ἐπὶ τοῦ σώματος δεύτερον, ἴσου βάρους (III), ὥστε τὸ ὅλικόν βάρος νὰ διπλασιασθῇ καὶ εὗρίσκομεν ὅτι ἡ τριβὴ ἔγινε διπλασία (60 gr^*). Ἐπειδὴ τὸ ὅλικόν βάρος εἶναι ἡ δύναμις, με τὴν ὁποῖαν συμπί-

ζονται αἱ δύο τριβόμεναι ἐπιφάνειαι (κάθετος δύναμις F_N), διατυπώνομεν τὸ συμπέρασμα τοῦ ἄνω πειράματος ὡς ἑξῆς :



Σχ. 186. Πειράματα διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν νόμων τῆς τριβῆς.

Ἡ τριβὴ εἶναι ἀνάλογος τῆς καθέτου δυνάμεως, ἡ ὁποία συμπίεζει τὰς τριβομένας ἐπιφανείας.

3) Σύροντες τὸ σῶμα μὲ διαφόρους ἐκάστοτε ταχύτητας, εὕρισκομεν ὅτι ἡ τριβὴ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ταχύτητος, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ ἐν σῶμα ὡς πρὸς τὸ ἄλλο.

4) Ἀντικαθιστῶμεν τὸ σῶμα δι' ἄλλον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ αὐτὸ βάρος, ἀλλ' εἶναι κατεσκευασμένον ἐξ ἄλλου ὕλικου καὶ εὕρισκομεν ὅτι ἡ τριβὴ μεταβλήθη. Συμπέρασμα: Ἡ τριβὴ ἐξαρτᾶται καὶ ἐκ τῆς φύσεως τῶν τριβομένων ἐπιφανειῶν.

Τ' ἄνωτέρω ἀποτελέσματα τῶν μετρήσεων περιγράφονται διὰ τοῦ τύπου

$$T = \eta \cdot F_N$$

Ὁ συντελεστὴς η καλεῖται **συντελεστὴς τριβῆς** καὶ — καθὼς ἔδειξε τὸ τελευταῖον πείραμα — ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς φύσεως τῶν τριβομένων ἐπιφανειῶν. Ὁ συντελεστὴς τριβῆς ἐλαττοῦται σημαντικῶς, ἐὰν μεταξὺ τῶν τριβομένων ἐπιφανειῶν παρεμβληθῇ ἓν λιπαντικόν (ὀρυκτέλαιον, λίπος κ.λ.). Τὸ σχῆμα 187 δεικνύει ὅτι, διὰ τῆς παρεμβολῆς τοῦ λιπαντικοῦ, αἱ προεξοχαὶ καὶ αἱ ἐσοχαὶ τῶν δύο τριβομένων ἐπιφανειῶν δὲν ἔρχονται, πλέον, εἰς ἐπαφὴν.



Σχ. 187. Ὁ συντελεστὴς τριβῆς ἐλαττοῦται διὰ παρεμβολῆς λιπαντικοῦ.

Σημασία τῆς τριβῆς. Ἐκ τῶν ἄνωτέρω προκύπτει ὅτι ἡ τριβὴ εἶναι μία δύναμις, ἡ ὁποία πάντοτε ἀντιτίθεται πρὸς τὴν κίνησιν· τείνει,

δηλ., πάντοτε νὰ ἐλαττώσῃ τὴν ταχύτητα ἐνὸς κινητοῦ. Ἀφ' ἐτέρου, τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον παράγει ἡ τριβὴ κατὰ τὴν μετάθεσιν τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς της, μετατρέπεται εἰς θερμότητα, ἡ ὁποία θερμαίνει τὰς τριβομένας ἐπιφανείας καὶ ἀποτελεῖ, συνήθως, ἀπώλειαν ἐνεργείας. Διὰ τοῦτο ἐπιβάλλεται καλὴ λίπανσις τῶν τριβομένων τμημάτων τῶν διαφόρων μηχανῶν. Ἡ λίπανσις, ἐκτὸς τούτου, προκαλεῖ καὶ ἐλάττωσιν τῶν φθορῶν τῶν τριβομένων ἐπιφανειῶν, ὅπως προκύπτει καὶ ἐκ συγκρίσεως τῶν σχημάτων 185 καὶ 187.

Ἐνῶ εἰς τ' ἀναφερθέντα παραδείγματα ἡ τριβὴ ἦτο ἐπιζήμιος, εἰς ἄλλας περιπτώσεις εἶναι ἀπαραίτητος. Οὕτω, λόγῳ τῆς πολὺ μικρᾶς τριβῆς, τὸ βάδισμα ἐπὶ παγωμένου δρόμου εἶναι δύσκολον, θὰ ἦτο δὲ ἀδύνατον, ἐὰν δὲν ὑπῆρχε καθόλου τριβή. Ἐπίσης, χωρὶς τὴν τριβὴν, θὰ ἦτο ἀδύνατος ἡ κίνησις τῶν διαφόρων ὀχημάτων, ἡ μετάδοσις κινήσεως δι' ἱμάντων, ἡ λειτουργία τῶν τροχοπεδῶν (κ. φρένων) κ.λ.

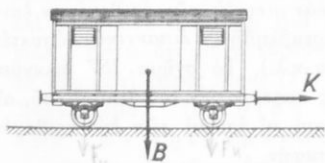
§ 114. Κύλισις. Προκειμένον νὰ μετακινήσωμεν ἐν βαρὺ σῶμα, πρέπει νὰ ἐξασκήσωμεν ἐπ' αὐτοῦ μεγάλην δύναμιν διὰ νὰ ὑπερνικήσωμεν τὴν τρι-



Σχ. 188.

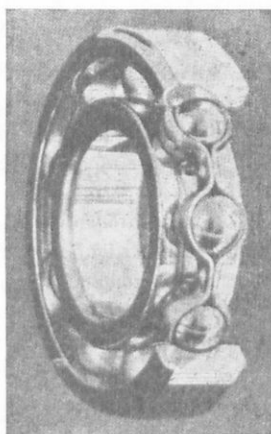
βὴν ὀλισθήσεως. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ τὸ ἀποφύγωμεν, ἐὰν μεταφέρωμεν τὸ σῶμα ἐπὶ κυλιόμενων κυλίνδρων (σχ. 188), ὁπότε ἡ απαιτουμένη δύναμις εἶναι πολὺ μικρότερα. Ὁμοίως, ἡ τριβὴ ὀλισθήσεως ἀξονος, στρεφομένου ἐντὸς τῶν ἐδράνων του (κ. κουζινέτων), ἀποφεύγεται, ἐὰν παρεμβληθοῦν μεταξὺ τῶν ἐδράνων καὶ τοῦ ἀξονος χαλύβδιναι σφαῖραι (ἔνσφαιρος τριβεύς, κ. ρουλεμὰν - σχ. 189).

Τὸ γεγονός, ὅτι, διὰ τὴν μεταφορὰν ἐνὸς σώματος ἐπὶ κυλιόμενων κυλίνδρων, ἡ ἀπαιτουμένη δύναμις εἶναι πολὺ μικροτέρα



Σχ. 190.

τῆς ἀνάλογος τῆς καθέτου δυνάμεως F_v , μετὰ τὴν ὁποίαν συμ-



Σχ. 189. Ἐνσφαιρος τριβεύς.

ἡ ὁποία χρειάζεται διὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ αὐτοῦ σώματος δι' ὀλισθήσεως, ἐξηγεῖ τὴν μεγάλην σημασίαν τῆς χρησιμοποιοῦσεως τῶν τροχῶν εἰς τὰ ὀχήματα.

★ Πειραματικῶς εὐρίσκεται ὅτι ἡ δύναμις K (σχ. 190), ἡ ἀναγκαία διὰ νὰ κινῆται ἐν ὀχημα μετὰ σταθερὰν τα-

πιέζονται οἱ τροχοὶ - δηλ., ἀνάλογος τοῦ βάρους B τοῦ ὀχήματος. Ἡτοι εἶναι

$$K = \varphi \cdot F_{\kappa} \quad \eta \quad K = \varphi \cdot B$$

δεδομένου ὅτι εἶναι $F_{\kappa} = B$.

Ὁ συντελεστὴς φ καλεῖται **συντελεστὴς ἔλξεως**, ὅπως δὲ εὗρίσκεται πειραματικῶς, οὗτος εἶναι μικρὸς, ὅταν ἡ ἀκτίς τοῦ τροχοῦ εἶναι μεγάλη. Ἐκ τούτου ἐξηγεῖται ὁ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον συμφέρει ἡ χρησιμοποίησις τροχῶν μεγάλης διαμέτρου εἰς τὰ ὀχήματα. Ὁ συντελεστὴς ἔλξεως ἐξαρτᾶται, ἐπίσης, ἐκ τοῦ ὕλικου τῶν τροχῶν καὶ ἐκ τοῦ ὕλικου τῆς ἐπιφανείας, ἐπὶ τῆς ὁποίας οὗτοι κυλίσονται. Ἰδιαιτέρως μικρὰν τιμὴν ἔχει ὁ συντελεστὴς ἔλξεως διὰ σιδηροῦς τροχοῦς, κυλιόμενους ἐπὶ σιδηροτροχιῶν.

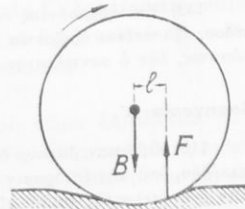
Ἐφαρμογή. Εἰς τοὺς σιδηροδρόμους ὁ συντελεστὴς ἔλξεως εἶναι, περὶπου, ἴσος πρὸς $1 \cdot 10^{-3}$. Ἐπομένως, διὰ τὴν ἔλξιν σιδηροδρομικοῦ ὀχήματος, βάρους 10 τόννων βάρους ($= 10000 \text{ kg}^*$), θ' ἀπαιτῆται δύναμις K , ἴση πρὸς

$$K = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 10\,000 \text{ kg}^* = 10 \text{ kg}^*.$$

Ἐκ τούτου καταφαίνεται ἡ σημασία τῆς χρησιμοποίησεως τῶν σιδηροδρομικῶν γραμμῶν.

Ἐὰν τὸ ὄχημα τοῦτο ἐστερεῖτο τροχῶν καὶ ὁ λίσθαιεν ἐπὶ τῶν σιδηροτροχιῶν (συντελεστὴς τριβῆς $\eta = 0,1$), θ' ἀπῆλθον διὰ τὴν ἔλξιν δύναμις, ἴση πρὸς 1000 kg^* . Ἐκ τούτου καταφαίνεται (ὥς καὶ ἀνωτέρω εἴπομεν) τὸ πλεονέκτημα τῆς χρησιμοποίησεως τῶν τροχῶν.

★ ★ § 115. Τριβὴ κυλίσεως. Θεωρήσωμεν κύλινδρον, κυλιόμενον ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου - π.χ., ἐπὶ ὀριζοντίου ἐδάφους. Ἐὰν τόσον ὁ κύλινδρος, ὅσον καὶ τὸ ἔδαφος ἦσαν ἀπολύτως ἀνένδοτα, οὐδεμία παραμόρφωσις αὐτῶν θὰ παρατηρεῖτο καὶ ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ ἔδαφος ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου, θὰ διήρχετο διὰ τοῦ ἀξονος τοῦ κυλίνδρου καὶ ὁ κύλινδρος θὰ ἐκυλίετο ἐπ' ἀπειρον. Εἰς τὴν πραγματικότητα, ὅμως, τόσον ὁ κύλινδρος, ὅσον καὶ τὸ ἔδαφος παραμορφοῦνται πάντοτε κατὰ τι, καὶ δι' ἀσυμμέτρως (σχ. 191), μὲ ἀποτέλεσμα ἡ δύναμις F , ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τοῦ ἐδάφους, νὰ μὴ διέρχεται, πλὴν, διὰ τοῦ ἀξονος τοῦ κυλίνδρου, ἀλλὰ νὰ εἶναι ὀλίγον μετατοπισμένη. Τὸ βάρος B τοῦ κυλίνδρου καὶ ἡ δύναμις F ἀποτελοῦν ζεύγους δυνάμεων, τὸ ὁποῖον ἀντιτίθεται εἰς τὴν κύλισιν. Ἡ ροπή M_{κ} τοῦ ζεύγους τούτου, ἡ ὁποία καλεῖται **τριβὴ κυλίσεως**, εἶναι, κατὰ τὸ ἀνω σχῆμα, ἴση πρὸς



Σχ. 191. Λόγῳ τῆς παραμορφώσεως, ἡ δύναμις F δὲν διέρχεται διὰ τοῦ ἀξονος τοῦ κυλίνδρου.

$$M_{\kappa} = l \cdot F \quad \eta \quad M_{\kappa} = l \cdot B$$

δεδομένου ὅτι εἶναι $B = F$.

Ἡ σταθερὰ l καλεῖται **συντελεστὴς τριβῆς κυλίσεως** καὶ ἐξαρτᾶται, κυρίως, ἐκ

της πλαστικότητας των υλικών, εκ των οποίων είναι κατασκευασμένος ο κύλινδρος και το επίπεδον.

Υπό την επίδρασιν της ροπής M_k — την οποίαν εκαλέσαμεν τριβήν κυλίσεως και η οποία αντίτιθεται εις την κύλινδρον — ο κύλινδρος, μετ' ολίγον, θά παύση κυλιόμενος. Εάν, λοιπόν, θέλωμεν να κυλίεται ο κύλινδρος ίσως, θά πρέπει να εφαρμόζεται επ' αὐτοῦ ἔξωθεν μία ροπή, ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν ὑπολογισθεῖσαν τριβήν κυλίσεως (*).

Εἰς τὰ αὐτοκίνητα ἡ κινητήριος αὕτη ροπή ἐξασκεῖται ἐπὶ τῶν ὀπισθίων τροχῶν ὑπὸ τῶν ἡμιαξονίων. Εἰς τὰ ὀχήματα τῶν σιδηροδρόμων (σχ. 190) ἡ κινητήριος ροπή δημιουργεῖται ἐκ τῆς ἐλκτικής δυνάμεως K καὶ μιᾶς ἴσης καὶ ἀντιθέτου δυνάμεως T (μὴ σχεδιασθείσης), τὴν οποίαν ἐξασκοῦν ἐπὶ τῶν τροχῶν αἱ σιδηροτροχιαί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κατηγορία Α'.

⊙ 135) Νὰ σχεδιασθῶν ὅλα αἱ ἐπὶ τοῦ σώματος Σ τοῦ σχήματος 184 ἐξασκούμεναι δυνάμεις εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν οποίαν τοῦτο ἀρχίζει νὰ ὀλισθαίνει καὶ νὰ λεχθῇ ποῖα σώματα ἐξασκοῦν ἐκάστην ἐκ τῶν δυνάμεων αὐτῶν.

136) Ποία δύναμις πρέπει νὰ ἐξασκῆται ὀριζοντίως ἐπὶ σώματος, βάρους 10 kg^* , ἵνα τοῦτο κινῆται ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου μὲ σταθεράν ταχύτητα, ὅταν ὁ συντελεστής τριβῆς εἶναι ἴσος πρὸς $0,2$; (ΑΠ: 2 kg^*)

137) Πόσον ἔργον χρειάζεται, διὰ νὰ μετακινήθῃ, κατὰ 20 cm , ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου σῶμα, βάρους 10 kg^* , ἐὰν ὁ συντελεστής τριβῆς εἶναι ἴσος πρὸς $0,4$, ἡ δὲ κίνησις γίνεται βραδέως καὶ χωρὶς ἐπιτάχυνσιν; (ΑΠ: $0,8 \text{ kg}^* \cdot \text{m}$)

⊙ 138) Ἄνθρωπος, βάρους 75 kg^* , εὐρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 122 cm ἀπὸ τοῦ κέντρου τραπέζης, στρεπτικῆς περὶ κατακόρυφον ἄξονα. Εάν ὁ συντελεστής τριβῆς εἶναι $0,2$, νὰ εὐρεθῇ ποία εἶναι ἡ μεγίστη γωνιακὴ ταχύτης, τὴν οποίαν δύναται νὰ λάβῃ ὁ ἄνθρωπος, χωρὶς νὰ ὀλισθήσῃ καὶ ν' ἀπομακρυνθῇ τῆς τραπέζης. (ΑΠ: $1,27 \text{ rad/sec}$)

139) Ἐπὶ ἡρεμοῦντος σώματος, μάζης 5 kg , εὐρισκομένου ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, ἐξασκεῖται ὀριζοντία δύναμις, ἴση πρὸς $6,5 \text{ kg}^*$. Ζητεῖται ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος, ἐὰν ὁ συντελεστής τριβῆς εἶναι ἴσος πρὸς $0,35$. (ΑΠ: $9,3 \text{ m/sec}^2$)

Κατηγορία Β'.

140) Κιβώτιον, βάρους 10 kg^* , κινεῖται μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δὲ τῆς τριβῆς σταματᾷ, ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα 300 cm . Εάν ὁ συντελεστής τριβῆς εἶναι ἴσος πρὸς $0,2$, ζητοῦνται α) ἡ τριβὴ καὶ β) ἡ ἀρχικὴ ταχύτης v_0 . (ΑΠ: α) 2 kg^* , β) 343 cm/sec)

⊙ 141) Ποία ἰσχύς (εἰς W) ἀπαιτεῖται διὰ νὰ κινῆται μὲ σταθεράν ταχύτητα 6 cm/sec σῶμα, βάρους 30 kg^* , ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, ὅταν ὁ συντελεστής τριβῆς εἶναι ἴσος πρὸς $0,5$; (Βλέπε ἄσκησιν 118). (ΑΠ: $8,83 \text{ W}$)

⊙ 142) Σῶμα, μάζης 2 kg , εὐρισκόμενον ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, μεταβλητῆς γω-

(*) Ἐσφαλμένον εἶναι τὸ πολλάκις λεγόμενον ὅτι «ἡ τριβὴ κυλίσεως εἶναι μικροτέρα τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως», καθόσον τὰ δύο μεγέθη δὲν ἐπιδέχονται σύγκρισιν ἀφοῦ ἡ μὲν τριβὴ ὀλισθήσεως εἶναι δύναμις, ἡ δὲ τριβὴ κυλίσεως ῥοπή.

νίας κλίσεως, ἀρχίζει νὰ ὀλισθαίνει μὲ σταθερὰν ταχύτητα, ὅταν ἡ γωνία κλίσεως γίνῃ ἴση πρὸς 22° . Ποῖος ὁ συντελεστὴς τριβῆς; (ΑΠ: 0,4)

143) Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κατέρχεται ἓν σῶμα. Ἄν ὁ δρόμος, τὸν ὁποῖον τοῦτο διατρέχει, μέχρις οὗ φθάσῃ εἰς τὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον, εἶναι 30 m, ἡ ὀριζοντία προβολὴ αὐτοῦ εἶναι ἴση πρὸς 15 m καὶ ὁ συντελεστὴς τριβῆς εἶναι ἴσος πρὸς 0,2, νὰ εὑρεθῇ α) ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος καὶ β) ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ διανύσῃ τὸ σῶμα τὴν ἀπόστασιν τῶν 30 m.
(ΑΠ: α) $7,52 \text{ m/sec}^2$, β) $2,73 \text{ sec}$)

144) Ποία δύναται νὰ εἶναι ἡ μεγίστη ταχύτης ($v_{\max}$) ἐνὸς αὐτοκινήτου, βάρους 2 τόνων βάρους, τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ διαγράψῃ σιμπύλην τροχίαν, ἀκτίνος 30 m, ἐπὶ ὀριζοντίου ἐδάφους, ὅταν ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ τροχῶν καὶ ἐδάφους εἶναι ἴσος πρὸς 0,3; (ΑΠ: 33,83 km/h)

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ'

ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

§ 116. Εἰσαγωγή. Μέχρι τοῦδε ἐξητάσαμεν ὠρισμένην κατηγορίαν σωμάτων — τὰ στερεά. Εἰς τὰ κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν ἄλλην κατηγορίαν σωμάτων, τὰ καλούμενα **ρευστά**, εἰς τὰ ὁποῖα ὑπάγονται τὰ ὑγρὰ καὶ τὰ ἀέρια. Ἐξ αὐτῶν τὰ ὑγρὰ ἔχουν ὠρισμένον ὄγκον καὶ εἶναι πρακτικῶς ἀσυμπίεστα, ἐνῶ, ἀντιθέτως, τὰ ἀέρια τείνουν νὰ καταλάβουν διαρκῶς μεγαλύτερον ὄγκον, εἶναι δὲ ἐξόχως συμπίεστά.

Πρῶτον θὰ ἐξετάσωμεν τὰ ὑγρὰ ἐν ἰσορροπίᾳ (Ὑδροστατικῇ), κατόπιν τὰ ἀέρια ἐν ἰσορροπίᾳ (Ἀεροστατικῇ). τέλος δὲ τὰ ὑγρὰ καὶ τὰ ἀέρια ἐν κινήσει εἰς τὸ κεφάλαιον Ὑδροδυναμικῇ · Ἀεροδυναμικῇ.

§ 117. Πίσεις. Ἐὼν τοποθετήσωμεν βαρὺ σῶμα ἐπὶ ἄμμου, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τοῦτο βυθίζεται κατὰ τι. Ἐάν, ὅμως, τοποθετήσωμεν τὸ αὐτὸ σῶμα ἐπὶ ἐλαφρῆς σανίδος, ὁπότε τὸ βάρος του κατανέμεται ἐπὶ μεγαλύτερας ἐπιφανείας, παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο δὲν βυθίζεται πλέον ἐντὸς τῆς ἄμμου. Καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ἡ δύναμις — τὸ βάρος, δηλ., τοῦ σώματος — ἦτο ἡ αὐτή, εἰς τὴν πρώτην, ὅμως, περιπτώσιν τὸ πηλίκον τοῦ βάρους διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας ἦτο μέγα, ἐνῶ εἰς τὴν δευτέραν μικρόν.

Τὸ πηλίκον τῆς δυνάμεως F , τῆς ἐξασκουμένης ἐπὶ τινος ἐπιφανείας, διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ S τῆς ἐπιφανείας ταύτης καλεῖται **πίσις** p . Ἦτοι εἶναι

$$p = \frac{F}{S}$$

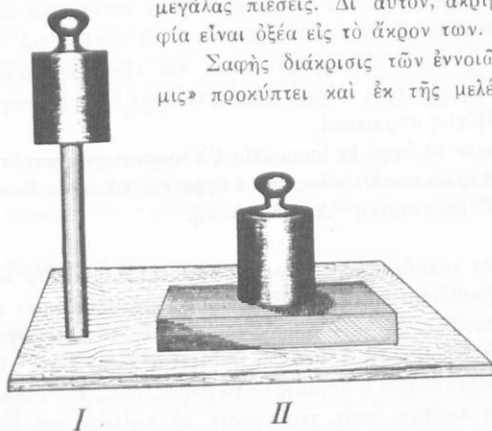
(1)

Δυνάμεθα, λοιπόν, νὰ εἰπώμεν ὅτι ἡ ἄμμος ὑποχωρεῖ, ὅταν ἡ πίεσις εἶναι μεγάλη, ἐνῶ δὲν ὑποχωρεῖ εἰς μικρὰν πίεσιν.

Ἀνάλογον, ἐντελῶς, φαινόμενον παρουσιάζεται καὶ κατὰ τὸ βάδισμα ἐπὶ τῆς χιόνος (σχ. 192): Ὁ ἄνθρωπος, βαδίζων ἐπ' αὐτῆς, βυθίζεται, διότι τὸ βάρος του κατανέμεται ἐπὶ τῆς μικρᾶς, σχετικῶς, ἐπιφανείας τῶν ὑποδημάτων του, ὁπότε, ἀντιστοίχως, ἡ πίεσις εἶναι μεγάλη. Ἐνῶ, ἐὰν ἐφοδιασθῇ μὲ χιονοπέδιλα, δὲν βυθίζεται, διότι, τώρα, λόγῳ τῆς μεγαλυτέρας ἐπιφανείας, ἡ πίεσις εἶναι μικρά.

Ἀντιθέτως, παρουσιάζονται περιπτώσεις, εἰς τὰς ὁποίας ἐπιθυμοῦμεν ἡ πίεσις νὰ εἶναι μεγάλη. Τοῦτο ἐπιτυγχάνομεν, ἐὰν κατανείμωμεν τὴν δύναμιν εἰς ὅσον τὸ δυνατόν μικροτέραν ἐπιφάνειαν. Ἐφαρμογὴν αὐτοῦ ἔχομεν εἰς ὅλα τὰ τέμνοντα ἐργαλεῖα (ψαλλίς, μάχαιρα, ξυραφί) εἰς τὰ ὁποῖα, διὰ μικρᾶς σχετικῶς δυνάμεως, ἐπιτυγχάνομεν μεγάλας πιέσεις. Δι' αὐτόν, ἀκριβῶς, τὸν λόγον τὰ καρφία εἶναι ὀξεία εἰς τὸ ἄκρον των.

Σαφῆς διάκρισις τῶν ἔννοιῶν «πίεσις» καὶ «δύναμις» προκύπτει καὶ ἐκ τῆς μελέτης τοῦ σχήματος 193:



Σχ. 193.

μικρὰ - διότι ἡ αὐτὴ δύναμις κατανέμεται ἐπὶ μεγάλης ἐπιφανείας.

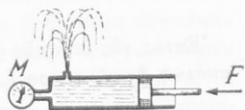
Τὴν ἔννοιαν τῆς πίεσεως συναντῶμεν τόσον εἰς τὰ ὑγρά, ὅσον καὶ εἰς τὰ ἀέρια. Ὅπως δυνάμεθα νὰ ἐξασκήσωμεν πίεσιν ἐπὶ τῶν στερεῶν, ὁμοίως δυνάμεθα νὰ ἐξασκήσωμεν πίεσιν καὶ ἐπὶ τῶν ὑγρῶν. Οὕτω, ἐὰν γεμίσωμεν



Σχ. 192. Ὅσον αὐξάνεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τόσον ἐλαττοῦται ἡ πίεσις ἐπὶ τῆς χιόνος.

Ἐνῶ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ἡ ἐπὶ τῆς τραπέζης ἐξασκουμένη δύναμις (δηλ., τὸ βάρος τοῦ κυλίνδρου) εἶναι ἡ αὐτή, εἰς μὲν τὴν περίπτωσιν I ἡ πίεσις εἶναι μεγάλη (διότι ἡ δύναμις κατανέμεται ἐπὶ μικρᾶς ἐπιφανείας), ἐνῶ εἰς τὴν περίπτωσιν II ἡ πίεσις εἶναι

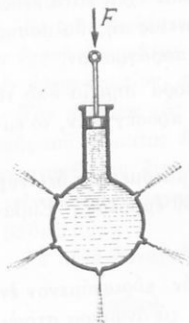
δι' ὕδατος τὸ δοχεῖον, τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὸ σχῆμα 194 καὶ ἑξασκήσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου τὴν δύναμιν F , θὰ παραχθῇ πίσεις, ἴση πρὸς F/S , ἔνθα S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐμβόλου. Ἡ πίσις αὕτη μεταδίδεται εἰς τὸ ὕδωρ, τὸ ὁποῖον ἀναγκάζει ν' ἀναπηδήσῃ ἐκ τῆς ὀπῆς, ἐνῶ, ταυτοχρόνως, εἰς τὸ *μανόμετρον* M (*) παρατηρεῖται ἀπόκλισις τοῦ δείκτου.



Σχ. 194. Ἡ δύναμις F ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου προκαλεῖ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὕγρου πίειν.

Ἐὰν λύσωμεν τὴν ἑξίσωσιν (1) ὥς πρὸς F , θὰ λάβωμεν τὴν σχέσιν

$$F = p \cdot S$$



Σχ. 195.

Τῇ βοηθείᾳ τῆς ἑξίσωσως ταύτης δυνάμεθα νὰ υπολογίσωμεν τὴν δύναμιν F , τὴν ὁποίαν θὰ ὑποστῇ μία ἐπιφάνεια, ἐμβαδοῦ S , ὅταν τεθῇ ἐντὸς ὕγρου τινος, εἰς τὸ ὁποῖον ἐπικρατεῖ πίσις p .

Ἡ δύναμις, λόγῳ τῆς πίσεως, τὴν ὁποίαν ἑξασκεῖ ἐν ὕγρῳ ἐπὶ τινος ἐπιφανείας, εἶναι καὶ ἑτερος ἐπ' αὐτήν. Τοῦτο δεκνόμενον διὰ τῆς συσκευῆς τοῦ σχήματος 195: Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου ἑξασκήσωμεν τὴν δύναμιν F (ὁπότε παράγεται ἐντὸς τοῦ ὕγρου μία πίσις), θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ὕγρον ἐξέρχεται ἐξ ὅλων τῶν ὀπῶν καὶ ἑτέρως πρὸς αὐτάς.

§ 118. Μονάδες πίσεως. 1) *C.G.S.* Ἐκ τῆς ἑξίσωσως (1) τῆς προηγουμένης παραγράφου προκύπτει ἡ μονὰς πίσεως εἰς τὸ σύστημα *C.G.S.*, ἐὰν θέσωμεν $F = 1 \text{ dyn}$ καὶ $S = 1 \text{ cm}^2$, δεδομένου ὅτι εἰς τὸ σύστημα τοῦτο μονὰς δυνάμεως εἶναι ἡ 1 dyn καὶ μονὰς ἐμβαδοῦ τὸ 1 cm^2 . Ἀρα, μονὰς πίσεως εἰς τὸ σύστημα *C.G.S.* εἶναι ἡ

$$1 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}.$$

2) *T.S.* Εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονὰς πίσεως εἶναι τὸ

$$1 \frac{\text{kgf}^*}{\text{m}^2},$$

δεδομένου ὅτι εἰς τὸ σύστημα τοῦτο μονὰς δυνάμεως εἶναι τὸ 1 kgf^* καὶ μονὰς ἐμβαδοῦ τὸ 1 m^2 .

Εἰς τὴν πράξιν χρησιμοποιεῖται, συνήθως, ἡ μονὰς

$$1 \frac{\text{kgf}^*}{\text{cm}^2},$$

ἡ ὁποία καλεῖται *τεχνικὴ ἀτμόσφαιρα* (1 at). Ἡτοι εἶναι

(*) *Μανόμετρα* εἶναι ὄργανα, διὰ τῶν ὁποίων μετρεῖται ἡ πίσις ἐνὸς ρευστοῦ.

$$1 \text{ at} = 1 \frac{\text{kg}^*}{\text{cm}^2}$$

Ἐκτὸς τῆς τεχνικῆς ἀτμοσφαίρας, εἰς τὴν Φυσικὴν χρησιμοποιεῖται καὶ ἡ **φυσικὴ ἀτμόσφαιρα** (1 Atm), ὀλίγον διαφέρουσα τῆς πρώτης. Εἶναι δὲ

$$1 \text{ Atm} = 1,033 \frac{\text{kg}^*}{\text{cm}^2}$$

Ἡ φυσικὴ ἀτμόσφαιρα ἰσοῦται πρὸς τὴν πίεσιν, τὴν ὁποίαν ἔχει, κατὰ μέσον ὕδρον, ὃ ἀτμοσφαιρικὸς ἀὴρ εἰς τὸ ὑψόμετρον τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης.

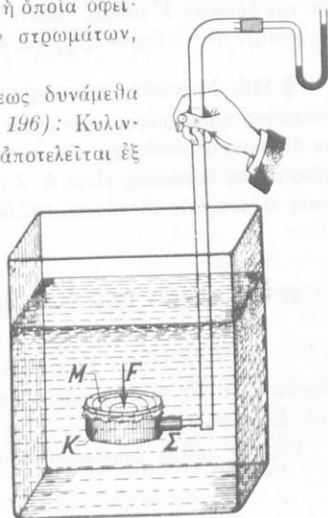
Ἄλλας μονάδας πίεσεως θὰ γνωρίσωμεν εἰς ἄλλην παράγραφον.

Ἐφαρμογαί. 1) Ποία εἶναι ἡ πίεσις εἰς τὰ διάφορα σημεῖα ὑπὸ τὰ πέλματά σας, ὅταν ἴστασθε ὄρθιοι; (Ἐκτιμήσατε, κατὰ προσέγγισιν, τὸ ἔμβαδὸν τῶν πελμάτων σας).

2) Ἐὰν εἰς τὴν συσκευὴν τοῦ σχήματος 194 τὸ μανόμετρον δεικνύῃ πίεσιν 5 at , ποία εἶναι ἡ δύναμις, ἡ ἑξασκουμένη ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου; Ἐμβαδὸν τοῦ ἐμβόλου $= 50 \text{ cm}^2$.

§. 119. Ύδροστατικὴ πίεσις. Θεωρήσωμεν ὑγρὸν, εὐρισκόμενον ἐν ἰσορροσίᾳ ἐντὸς ἀνοικτοῦ δοχείου. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὰ ἀνώτερα στρώματα, λόγῳ τοῦ βάρους των, θὰ πιέζον τὰ κατώτερα, τὰ ὁποῖα, οὕτω, εὐρίσκονται ὑπὸ πίεσιν. Τὴν πίεσιν ταύτην, ἡ ὁποία ὀφείλεται εἰς τὸ βάρος τῶν ὑπερκειμένων στρωμάτων, καλοῦμεν **ὑδροστατικὴν πίεσιν**.

Τὴν ὑπαρξιν τῆς ὑδροστατικῆς πίεσεως δυνάμεθα νὰ δείξωμεν διὰ τῆς ἑξῆς συσκευῆς (σχ. 196): Κυλινδρική κάψα K , τῆς ὁποίας ἡ μία βάσις ἀποτελεῖται ἐξ ἐλαστικῆς μεμβράνης M , συνδέεται διὰ πλευρικοῦ σωληνίσκου Σ μὲ κατακόρυφον σωλῆνα, καταλήγοντα εἰς ὑάλινον σωλῆνα, σχήματος U . Θέτομεν ἐντὸς τοῦ ὑαλίνου σωλῆνος ἐν ὑγρὸν, ὅποτε ἡ ἐλευθερά ἐπιφάνεια εἰς τὰ δύο σκέλη εὐρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον (*). Ἀκολούθως, ἐμβαπτίζομεν τὴν κάψαν ἐντὸς δοχείου, περιέχοντος ὕδωρ, καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὑγρὸν τοῦ μανομέτρου κατέρχεται εἰς τὸ ἓν σκέλος καὶ ἀνέρχεται εἰς τὸ ἄλλο. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι τὸ ὕδωρ, λόγῳ τῆς ὑδροστατικῆς πίεσεως, ἑξασκεῖ ἐπὶ



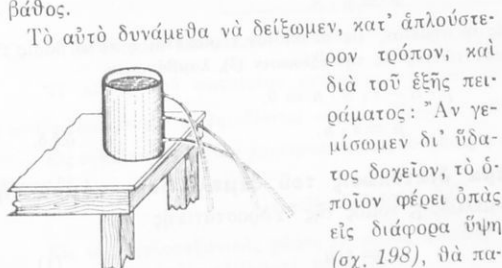
Σχ. 196.

(*) Ὁ σωλὴν οὗτος μετὰ τοῦ ὑγροῦ ἀποτελεῖ ἀνοικτὸν μανόμετρον (βλ. κατωτέρω).

τῆς μεμβράνης μίαν δύναμιν F , ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ὁποίας αὕτη παραμορφοῦται καὶ συμπίεξις τὸν ἐντὸς τῆς κάψης ἀέρα, οὕτω δὲ δημιουργεῖται διαφορὰ στάθμης εἰς τὸ ὑγρὸν τοῦ μανομέτρου. Ἄν, τώρα, βυθίσωμεν τὴν κάψαν εἰς μεγαλύτερον βάθος, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ἔνδειξις τοῦ μανομέτρου αὐξάνεται. Τοῦτο δηλοῖ ὅτι εἰς μεγαλύτερον βάθος ἡ πίεσις εἶναι μεγαλύτερα. Ἐάν ἐπαναλάβωμεν τὸ πείραμα, χρησιμοποιοῦντες δοχεῖον μεγαλυτέρων διαστάσεων, θὰ εὕρωμεν ὅτι, ἐφ' ὅσον ἡ κάψα τοποθετηθῇ εἰς τὸ αὐτό, ὅπως προηγουμένως, βάθος, ἡ ἔνδειξις τοῦ μανομέτρου θὰ εἶναι ἡ αὐτή.

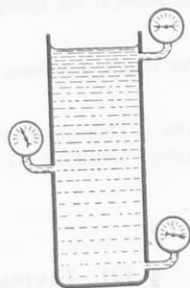
Ἐκ τῶν λεχθέντων προκύπτει ὅτι ἡ ὑδροστατικὴ πίεσις εἰς σημείον τι ἐνὸς ὑγροῦ ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τοῦ βάθους, εἰς τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται τὸ ἐν λόγῳ σημείον, ἀξανομένη μετ' αὐτοῦ.

Τὴν αὐξῆσιν τῆς πίεσεως μετὰ τοῦ βάθους δεικνύομεν καὶ διὰ τῆς συσκευῆς τοῦ σχήματος 197 : Συγκρίνοντας τὰς ἔνδειξεις τῶν μανομέτρων, διαπιστοῦμεν ὅτι ἡ ὑδροστατικὴ πίεσις εἶναι τόσο μεγαλύτερα, ὅσον, μεγαλύτερον εἶναι τὸ βάθος.



Σχ. 198. Εἰς τὴν χαμηλότεραν ὁπὴν τὸ ὕδωρ, λόγῳ τῆς μεγάλης πίεσεως, ἐκτοξεύεται εἰς μεγαλύτεραν ἀπόστασιν.

Τὸ αὐτὸ δυνάμεθα νὰ δείξωμεν, κατ' ἀπλούστερον τρόπον, καὶ διὰ τοῦ ἑξῆς πειράματος: Ἄν γεμίσωμεν δι' ὕδατος δοχεῖον, τὸ ὁποῖον φέρει ὁπὰς εἰς διάφορα ὕψη (σχ. 198), θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, ὅσον χαμηλότερον εὐρίσκεται ἡ ὁπή, τόσο ισχυροτέρα εἶναι ἡ ροὴ καὶ τοῦτο



Σχ. 197. Αὐξανομένην τοῦ βάθους, αὐξάνεται καὶ ἡ ὑδροστατικὴ πίεσις ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ.

διότι εἰς τὰς χαμηλότερον εὐρίσκομένας ὁπὰς ἡ πίεσις εἶναι μεγαλύτερα.

§ 120. Θεμελιώδης νόμος τῆς Ὑδροστατικῆς. Ὅπως εἶδομεν ἄνωτέρω, ἡ ὑδροστατικὴ πίεσις (δηλ., ἡ πίεσις, ἡ ὀφειλομένη εἰς τὴν βαρύτητα) ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τοῦ βάθους τοῦ θεωρουμένου σημείου ἀπὸ τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ. Ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω, ἡ ὑδροστατικὴ πίεσις p εἰς σημείον τι τοῦ ὑγροῦ, εὐρίσκόμενον εἰς βάθος h ἀπὸ τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$p = \varepsilon \cdot h$	Θεμελιώδης νόμος τῆς Ὑδροστατικῆς	(1)
---------------------------	-----------------------------------	-----

ἐνθα ε εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ. Ἐπειδὴ ἔχομεν $\varepsilon = \rho \cdot g$, ὁ τύπος

(1) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$p = \rho \cdot g \cdot h. \quad (2)$$

Ἀποδείξεις τοῦ τύπου (1). Διὰ νὰ εὗρωμεν τὴν πίεσιν εἰς ἓν σημεῖον τοῦ ὑγροῦ, εὐρισκόμενον εἰς βάθος h ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας (σχ. 199), θεωροῦμεν κατακόρυφον κυλινδρικήν στήλην ἐκ τοῦ θεωρουμένου ὑγροῦ, βάσεως S καὶ ὕψους h (δηλ., ἴσου πρὸς τὸ βάθος, εἰς τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται τὸ ἐν λόγω σημεῖον). Ἐπὶ τῆς ὑγρᾶς στήλης ἐξασκοῦνται αἱ ἐξῆς δυνάμεις: 1) τὸ βάρος τῆς B , 2) ἡ δύναμις F , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς κάτω βάσεως τὸ ὑγρὸν καὶ 3) αἱ (ὀριζόντιοι) δυνάμεις, αἱ ἐξασκούμεναι ἐπὶ τῶν παραπλευρῶν ἐπιφανειῶν τῆς στήλης, αἱ ὁποῖαι εἰς κάθε σημεῖον ἀλληλοαναιροῦνται. (Ἡ δύναμις, ἡ ἐξασκουμένη λόγῳ τῆς

σχ. 199.

ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως ἐπὶ τῆς ἄνω βάσεως τῆς στήλης, παραλείπεται). Ἀφοῦ ἡ ὑγρὰ αὕτη στήλη εὐρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, πρέπει ἡ συνισταμένη τῶν ἐπ' αὐτῆς ἐξασκούμενων δυνάμεων νὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἐπομένως, ἔχομεν, κατὰ τὸν κατακόρυφον ἄξονα, τὴν ἐξίσωσιν

$$F - B = 0. \quad (3)$$

Τὸ βάρος B τῆς ὑγρᾶς στήλης εἶναι, ὡς γνωστόν, ἴσον πρὸς

$$B = \text{εἰδικὸν βάρος} \cdot \text{ὄγκος} = \varepsilon \cdot S \cdot h.$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἡ δύναμις F , ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς κάτω βάσεως, εἶναι ἴση πρὸς

$$F = p \cdot S.$$

ἔνθα p εἶναι ἡ πίεσις εἰς τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἡ κάτω βάση τῆς στήλης. Ἐπομένως, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3), λαμβάνομεν

$$p \cdot S - \varepsilon \cdot S \cdot h = 0.$$

ἢ

$$p = \varepsilon \cdot h.$$

δ.ἔ.δ.

§ 121. Γενικωτέρα διατύπωσις τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Ὑδροστατικῆς. Ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Ὑδροστατικῆς

$$p = \varepsilon \cdot h \quad (1)$$

ἰσχύει, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι εἰς τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ἡ πίεσις εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ὅταν, ὅμως, εἰς τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν ἐπικρατῇ ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις $p_{\text{ἀτμ.}}$, ὁ ἄνω τύπος (ὡς ἀποδεικνύεται εὐκόλως) γράφεται ὡς ἐξῆς:

$$\boxed{p = p_{\text{ἀτμ.}} + \varepsilon \cdot h} \quad (2) \quad \text{ἢ} \quad p = p_{\text{ἀτμ.}} + \varrho \cdot g \cdot h$$

δεδομένου ὅτι εἶναι $\varepsilon = \varrho \cdot g$.

Τόσον ἐκ τοῦ τύπου (1), ὅσον καὶ ἐκ τοῦ τύπου (2) προκύπτει ὅτι εἰς ὅλα τὰ σημεῖα οἰουδήποτε ὁ ρ εἰ ζ ο ν τ ῖ ο ν ἐπιπέδου, θεωρουμένου ἐντὸς ὑγροῦ τινος, ἐπικρατεῖ ἡ αὐτὴ ὑδροστατικὴ πίεσις, δεδομένου ὅτι δι' ὅλα τὰ σημεῖα ταῦτα τόσον τὸ h , ὅσον καὶ τὸ ε (καθὼς καὶ τὸ $p_{\text{ἀτμ.}}$) εἶναι σταθερά.

Ἐφαρμογή. Ζητεῖται τὸ βάθος ἐντὸς τῆς θαλάσσης, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ὑπερπίεσις εἶναι ἴση πρὸς μίαν τεχνικὴν ἀτμόσφαιραν.

Λύσις. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς h , λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$h = \frac{p}{\varepsilon}.$$

*Ας λύσωμεν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ σύστημα *C.G.S.* Πρὸς τοῦτο ἐκφράζομεν ὅλα τὰ δεδομένα εἰς μονάδας τοῦ συστήματος τούτου: Ἐχομεν $p = 1 \text{ at} = 1 \text{ kg}^* / \text{cm}^2 = 1000 \text{ gr}^* / \text{cm}^2 = 981000 \text{ dyn} / \text{cm}^2$ (διότι $1 \text{ gr}^* = 981 \text{ dyn}$) καὶ $\varepsilon = (\text{περίπου}) 1 \text{ gr}^* / \text{cm}^3 = 981 \text{ dyn} / \text{cm}^3$. Ἄρα εἶναι

$$h = \frac{981000}{981} \frac{\text{dyn} \cdot \text{cm}^{-2}}{\text{dyn} \cdot \text{cm}^{-3}} = 1000 \text{ cm}.$$

*Ἦτοι, εἰς βάθος 10 m ἐντὸς τῆς θαλάσσης ἡ ὑπερπίεσις εἶναι ὅση πρὸς 1 at .

***Ἄλλαι μονάδες πιέσεως.** Ἐκτὸς τῶν μονάδων πιέσεως, τὰς ὁποίας ἐγνωρίζομεν εἰς προηγουμένην παράγραφον, χρησιμοποιοῦνται καὶ ἄλλαι. Μία ἐξ αὐτῶν εἶναι τὸ 1 Torr^* , τὸ ὁποῖον ἰσοῦται πρὸς τὴν πίεσιν, ἡ ὁποία ἐπικρατεῖ εἰς ὅλα τὰ σημεία τῆς βάσεως μιᾶς στήλης ὑδραργύρου, ὕψους 1 mm , ὡς ἐκ τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς αὕτη καλεῖται καὶ $1 \text{ χιλιοστόμετρον στήλης ὑδραργύρου} (1 \text{ mm Hg})$. Ἦτοι εἶναι

$$1 \text{ Torr} = 1 \text{ mm Hg}$$

*Ὅπως θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, $1 \text{ φυσικὴ ἀτμόσφαιρα}$ ἀντιστοιχεῖ εἰς 760 Torr .

*Ἡ πίεσις τοῦ φωταερίου μετρεῖται, συνήθως, μὲ τὴν μονάδα $1 \text{ mm H}_2\text{O}$ ($= 1 \text{ χιλιοστόμετρον στήλης ὕδατος}$) $= \frac{1}{13,6} \text{ Torr} = 0,0736 \text{ Torr}$.

Εἰς τὴν Μετεωρολογίαν χρησιμοποιεῖται, συνήθως, ἡ μονὰς $1 \text{ μιλίμπάρ} (1 \text{ mBar})$. Εἶναι δὲ

$$1 \text{ mBar} = 1000 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}.$$

Εἰς τὰς ἀγγλοσαξωνικὰς χώρας ὡς μονὰς πιέσεως χρησιμοποιεῖται ἡ $1 \text{ λίμπρα ἀνὰ τετραγωνικὴν Ἴντσαν} (1 \text{ lb/in}^2)$. Εἶναι δὲ

$$1 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} = 51,7 \text{ Torr} = 0,0703 \text{ at}. \text{ Ἄρα, } 1 \text{ at} = 14,22 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΙΕΣΕΩΝ

Πίεσις φωταερίου	80 mm στήλης ὕδατος
Πίεσις ἀρτηριακοῦ αἵματος (ὕγιους ἀνθρώπου)	12 ÷ 14 cm Hg
Ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ Ὀλύμπου (2917 m)	530 Torr (*)
Ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης	760 Torr (*)
Πίεσις εἰς βάθος 10 m ἐντὸς τῆς θαλάσσης	περίπου 1 at
Πίεσις ἀεροθαλάμων αὐτοκινήτου	2 at
Πίεσις εἰς φιάλην ὑγραερίου	5 at
Πίεσις εἰς φιάλην ὕγραερίου	6 at
Πίεσις δικτύου ὑδρεύσεως	12 at
Πίεσις εἰς φιάλην (διαλελυμένης) ἀστυλίνης	14 at
Πίεσις λέβητος ἀτμομηχανῆς σιδηροδρόμου	55 at
Πίεσις εἰς φιάλην διοξειδίου τοῦ ἀνθρακος (CO ₂)	150 at
Πίεσις εἰς (πλήρη) φιάλην ὀξυγόνου	

(*) Ἐκ τοῦ ὀνόματος τοῦ διασήμεου Ἰταλοῦ Φυσικοῦ Torricelli (Τορρισελλι).

Σημειώσεις. Αί τιμαί τοῦ ἄνω πίνακος εἶναι τιμαί ὑπερπίεσεως (δηλ., πίεσεως ὑπὲρ τὴν ἀτμοσφαιρικήν), πλὴν τῶν δι' ἀστερίσκον σημειουμένων, αἱ ὁποῖαι εἶναι τιμαί ἀπολύτου πίεσεως (δηλ., πραγματικά τιμαί).



Σχ. 200. Δύτης, φέρων σκάφανδρον.

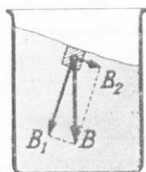
Ἐφαρμογή. Τὸ ὑάλινον παρὰθυρον τοῦ κράνους τοῦ σκαφάνδρου ἐνὸς δύτου (σχ. 200) εἶναι κυκλικὸν καὶ ἔχει διάμετρον 10 cm. Ἄν ὁ δύτες εὐρεθῇ εἰς βάθος 30 m ἐντὸς τῆς θαλάσσης, ποία δύναμις θὰ ἐξασκῆται ἐπὶ τοῦ παραθύρου;

§ 122. Ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ἰσορροποῦντων ὑγρῶν — Ἀρχὴ τῶν συγκοινωνούντων δοχείων. Διὰ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν ἰσορροποῦντος ὑγροῦ ἰσχύει ἡ ἑξῆς πρότασις :

« Ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ὑγροῦ, εὐρισκομένη ἐν ἰσορροπίᾳ, εἶναι ἐπίπεδον ὀριζόντιον ».

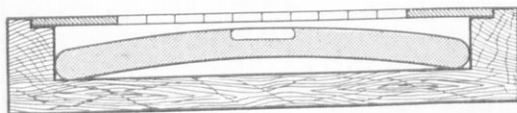
Τοῦτο προκύπτει διὰ τῶν ἑξῆς

συλλογισμῶν : Ἄν ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια δὲν ἦτο ὀριζοντία (σχ. 201), τὸ ἐπὶ στοιχειῶδους τμήματος τοῦ ὑγροῦ ἐπιδρὸν βάρος B θ' ἀνελύετο εἰς δύο συνιστώσας, μίαν (B_1), κάθετον ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν καὶ μίαν (B_2), ἐφαπτομένην αὐτῆς. Ἡ δευτέρα αὕτη συνιστώσα θὰ μετεκίνει τὸ τμήμα τοῦτο τοῦ ὑγροῦ, ὅπου ἄτοπον, διότι τὸ ὑγρὸν εὐρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ.



Σχ. 201.

Ἐφαρμογὴν τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἔχομεν εἰς τὴν

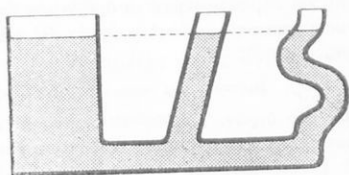


Σχ. 202. Ἀεροστάθμη.

ἀεροστάθμην (σχ. 202), ἡ ὁποία χρησιμεύει διὰ τὴν ὀριζόντισιν διαφόρων ἐπιφανειῶν · π.χ., ἐπιστημονικῶν ὀργάνων (ζυγῶν, κ.λ.), δαπέδων κ.ἄ.

Ἀρχὴ τῶν συγκοινωνούντων δοχείων. Ἡ ἄνω πρότασις ἰσχύει δι' ὑγρὸν, περιεχόμενον εἰς δοχεῖον οἰοῦδήποτε σχήματος. Ἐπομένως,

ἐὰν τὸ ὑγρὸν εὐρίσκεται ἐντὸς δοχείων, τὰ ὁποῖα συγκοινωνοῦν μεταξύ των καὶ τὸ ὑγρὸν τοῦτο ἰσορροπῇ (σχ. 203), ἡ ἐλευθέρᾳ ἐπιφάνεια



Σχ. 203. Καὶ εἰς τὰ τρία δοχεῖα ἡ ἐλευθέρᾳ ἐπιφάνεια εὐρίσκειται εἰς τὸ αὐτὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον.

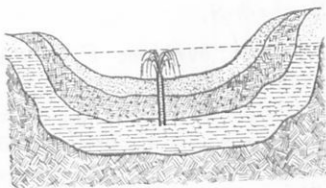


Σχ. 204. Ὑδροδείκτης.

εἰς ὅλα τὰ δοχεῖα θὰ εὐρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον (**ἀρχὴ τῶν συγκοινωνούντων δοχείων**).

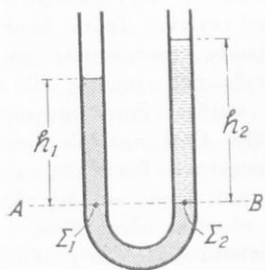
Ἐφαρμογὴν τῆς ἀρχῆς τῶν συγκοινωνούντων δοχείων ἔχομεν εἰς τοὺς ὑδροδείκτας (σχ. 204), οἱ ὅποιοι χρησιμεύουν διὰ νὰ δεικνύουν τὴν στάθμην τοῦ ὕδατος ἐντὸς τῶν λεβήτων τῶν ἀτμομηχανῶν κ.λ.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀρχῆς στηρίζεται καὶ ἡ λειτουργία τῶν **ἀρτεσιανῶν φρεάτων** (σχ. 205): Ὑδροφόρα στρώματα,



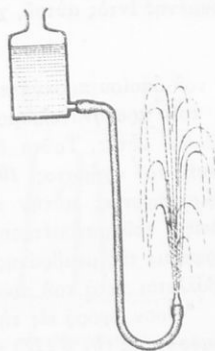
Σχ. 205. Ἀρτεσιανὸν φρεῖαρ (ἀρχή).

περικλειόμενα μεταξύ ἀδιαβρόχων στρωμάτων (ἀργίλου), σχηματίζουν εἶδος δεξαμενῆς.



Σχ. 207.

ἔχουν διάφορα εἰδικὰ βάρη. Οὕτω, ἐὰν εἰς τὸν σωλῆνα τοῦ σχήματος 207



Σχ. 206.

Ἄν, λοιπόν, ἀνορύξωμεν ὅπῃν μὲν τοῦ ὑδροφόρου στρώματος, τὸ ὕδωρ ἀναπηχῇ τοῦ ὑδροφόρου στρώματος, τὸ ὕδωρ θὰ ἔφθανε μέχρι τῆς τοιχώματος κ.λ., τὸ ὕδωρ θὰ ἔφθανε μέχρι τῆς ἐλευθέρᾳ στάθμης τοῦ ὑδροφόρου στρώματος. Πειραματικῶς δεικνύομεν τοῦτο διὰ τῆς συσκευῆς, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ σχῆμα 206.

Ἡ ἀρχὴ τῶν συγκοινωνούντων δοχείων δὲν ἰσχύει εἰς τὴν περίπτωσιν συγκοινωνούντων δοχείων, περιεχόντων μὴ μειγνύμενα ὑγρά, τὰ ὁποῖα

ρίψωμεν ποσότητα ὕδατος καί, ἀκολουθῶς, εἰς τὸ δεξιὸν σκέλος ἔλαιον, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αἱ ἐλευθέραι ἐπιφάνειαι εἰς τὰ δύο σκέλη εὐρίσκονται εἰς διάφορον ὕψος. Διὰ τὸ νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ ὕψη h_1 καὶ h_2 , θεωροῦμεν τὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον AB , τὸ διερχόμενον διὰ τῆς διαχωριστικῆς ἐπιφανείας τῶν δύο ὑγρῶν. Ἡ πίεσις εἰς τὰ σημεῖα Σ_1 καὶ Σ_2 εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴση πρὸς

$$p_1 = \varepsilon_1 \cdot h_1 \quad \text{καὶ} \quad p_2 = \varepsilon_2 \cdot h_2$$

ἐνθα ε_1 καὶ ε_2 εἶναι τὰ εἰδικὰ βάρη τῶν δύο ὑγρῶν. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Σ_1 καὶ Σ_2 εὐρίσκονται ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ ὑγροῦ (ὕδατος) καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, εἶναι

$$p_1 = p_2,$$

ὁπότε ἔχομεν

$$\varepsilon_1 \cdot h_1 = \varepsilon_2 \cdot h_2$$

ἢ

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

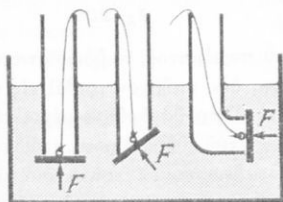
Ἡτοι, τὰ ὕψη τῶν δύο ὑγρῶν στηλῶν, ἄνωθεν τῆς διαχωριστικῆς ἐπιφανείας, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν εἰδικῶν βαρῶν τῶν δύο ὑγρῶν.

§ 123. Δυνάμεις, λόγῳ πίεσεως, ἐξασκούμεναι ἐπὶ ἐπιφανειῶν, εὐρισκομένων ἐντὸς ὑγροῦ. Προκειμένου νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν δύναμιν F , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐν ὑγρὸν ἐπὶ τινος ἐπιφανείας, ἐμβαδοῦ S , θεωρουμένης ἐντὸς αὐτοῦ, χρησιμοποιοῦμεν τὸν γνωστὸν τύπον

$$F = p \cdot S = \varepsilon \cdot h \cdot S,$$

ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ὅτι τὸ μέτρον τῆς δυνάμεως F δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ προσανατολισμοῦ τῆς θεωρουμένης ἐπιφανείας, ἀλλὰ μόνον ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτῆς. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐπιδείξωμεν πειραματικῶς διὰ τῆς συσκευῆς τοῦ σχήματος 196: Κρατοῦντες τὴν κάψαν εἰς τὸ αὐτὸ βάθος καὶ περιστρέφοντες αὐτὴν περὶ τὸν πλευρικὸν σωληνίσκον, διαπιστοῦμεν ὅτι ἡ ἐνδείξις τοῦ μανομέτρου δὲν μεταβάλλεται. Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι ἡ παραμόρφωσις τῆς μεμβράνης καί, συνεπῶς, τὸ μέτρον τῆς δυνάμεως F δὲν μεταβάλλεται μετὰ τοῦ προσανατολισμοῦ τῆς ἐπιφανείας.

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως, αὕτη (ὡς, ἤδη, ἀνεφέρθη εἰς τὴν § 117) εἶναι πάντοτε κάθετος ἐπὶ τὴν θεωρουμένην ἐπιφάνειαν.



Σχ. 208. Ἡ ὑδροστατικὴ πίεσις προκαλεῖ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι πάντοτε κάθετοι ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν.

αὐτὸν ἐντὸς δοχείου, περιέχοντος ὕδωρ. Ἀκολουθῶς, ἀφήνομεν ἐλευθερὸν τὸ νῆμα, ὁπότε παρατηροῦμεν ὅτι ὁ πυθμὴν δὲν ἀποσπᾶται, ἀλλὰ πιέζεται

ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ δείξωμεν πειραματικῶς καὶ διὰ τῆς συσκευῆς τοῦ σχήματος 208: Τρεῖς ὑάλινοι σωληνίσκοι ἔχουν κινητὸν πυθμὲνα, ὁ ὁποῖος εἶναι προσδεδεμένος διὰ νήματος. Λαμβάνομεν ἓνα ἐκ τῶν σωλῶν διὰ τῆς μιᾶς χειρὸς καὶ διὰ τῆς ἄλλης ἔλκομεν τὸ νῆμα, οὕτως ὥστε ὁ πυθμὴν νὰ ἐφάπτεται καλῶς τῶν χειλέων τοῦ σωληνίσκου, ἐν συνεχείᾳ δὲ εἰσάγομεν αὐτὸν ἐντὸς τοῦ δοχείου, περιέχοντος ὕδωρ. Ἀκολουθῶς, ἀφήνομεν ἐλευθερὸν τὸ νῆμα, ὁπότε παρατηροῦμεν ὅτι ὁ πυθμὴν δὲν ἀποσπᾶται, ἀλλὰ πιέζεται

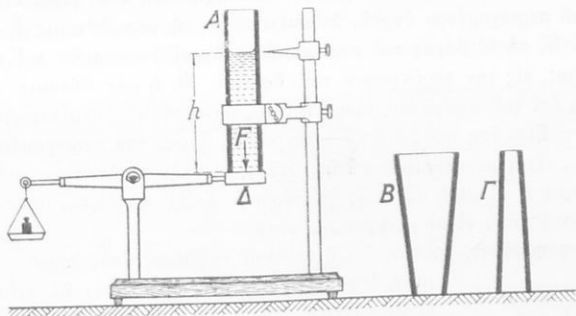
ἰσχυρῶς ἐπὶ τῶν χειλέων. Τὸ πείραμα ἐπαναλαμβάνομεν καὶ διὰ τῶν δύο ἄλλων σωλῆνων καὶ παρατηροῦμεν τὸ αὐτό, ἀκριβῶς, φαινόμενον.

Ἐκ τῶν περιγραφέντων πειραμάτων προκύπτει ὅτι α) ἐπὶ πάσης ἐπιφανείας, εὐρισκομένης ἐντὸς ὕγρου τινος, ἐξασκεῖται δύναμις, ὀφειλομένη εἰς τὴν ὑδροστατικὴν πίεσιν καὶ β) ἡ δύναμις αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν θεωρουμένην ἐπιφάνειαν.

§ 124. Δύναμις, εξασκουμένη ἐπὶ τοῦ πυθμένος δοχείου, περιέχοντος ὕγρον. Κατὰ τὸν τύπον

$$F = \varepsilon \cdot h \cdot S,$$

ἡ δύναμις, ἡ εξασκουμένη ἐπὶ τοῦ πυθμένος δοχείου, πλήρους ὕγρου, δεδομένου εἰδικοῦ βάρους ε , δὲν ἐξαρτᾶται οὔτε ἐκ τῆς ποσότητος τοῦ περιεχομένου ὕγρου, οὔτε ἐκ τοῦ σχήματος τοῦ δοχείου, παρὰ μόνον ἐκ τοῦ ἔμβαδου S τοῦ πυθμένος καὶ ἐκ τῆς κατακορύφου ἀποστάσεως h αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὕγρου (*). Τοῦτο δεικνύομεν, χαρακτηριστικῶς, διὰ τῆς συσκευῆς τοῦ σχήματος 209: Τὸ δοχεῖον A , κυλινδρικοῦ σχήματος, δὲν



Σχ. 209. Συσκευή διὰ τὴν μέτρησιν τῆς δυνάμεως, τῆς εξασκουμένης ἐπὶ τοῦ πυθμένος.

φέρει πυθμένα, ἀλλ' ὡς πυθμὴν αὐτοῦ χρησιμοποιεῖται μετάλλινος δίσκος Δ , ὁ ὁποῖος κλείει ὑδατοστεγῶς τὸ δοχεῖον καὶ εἶναι στηριγμένος ἐπὶ τοῦ ἐνὸς ἄκρου τῆς φάλαγγος ζυγοῦ. Θέτομεν κατάλληλα σταθμὰ ἐπὶ τῆς πλάστιγγος τοῦ ζυγοῦ καὶ ρίπτομεν βραδέως ὕδωρ ἐντὸς τοῦ δοχείου. Θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, ὅταν τὸ ὕδωρ ἀνέλθῃ μέχρις ὕψους τινὸς h , ὁ πυθμὴν ἀποσπᾶ-

(*) Συνθετάτα γίνεται χρῆσις τοῦ ὅρου «πίεσις ἐπὶ τοῦ πυθμένος», ἀντὶ τοῦ ὀρθοῦ «δύναμις, εξασκουμένη ἐπὶ τοῦ πυθμένος».

Ἐὰν ὁ πυθμὴν εὐρίσκειται εἰς βάθος h ὑπὸ τὴν ἐλευθεράν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕγρου, τὸ μέγεθος $\varepsilon \cdot h$ καθορίζει, ὡς γνωστόν, τὴν πίεσιν εἰς οἰονδήποτε σημεῖον, εὐρισκόμενον εἰς βάθος h , δηλ., τὴν πίεσιν, τὴν ἐπικρατοῦσαν εἰς οἰονδήποτε σημεῖον τοῦ πυθμένος.

ται. Εἶναι φανερόν ὅτι τ' ἀντίστοιχα σταθμὰ παρέχουν τὴν ἐπὶ τοῦ πυθμέ-
νος ἐξασκουμένην δύναμιν F . Ἐάν, ἀκολούθως, ἀντικαταστήσωμεν τὸ δο-
χείον A διὰ τῶν δοχείων B ἢ Γ , τὰ ὁποῖα ἔχουν διάφορον σχῆμα, ἀλλ' ἡ
βάσις των ἔχει τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, ὅπως ἡ βάσις τοῦ δοχείου A καὶ ἐπαναλά-
βωμεν τὸ πείραμα, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ πυθμὴν ἀποσπᾶται, ὅταν τὸ
ὑδρὸν φθάσῃ εἰς τὸ αὐτό, ἀκριβῶς, ὅπως h — ἀπόδειξις ὅτι ἡ δύναμις F ἐξαρ-
τᾶται μόνον ἐκ τοῦ ὕψους h , ἐφ' ὅσον τὸ ϵ καὶ τὸ S διατηροῦνται σταθερά.

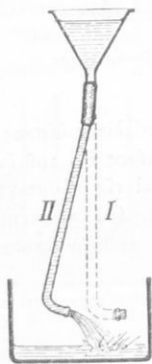
★ **Υδροστατικὴν παράδοξον.** Εἰς τὸν τύπον

$$F = \epsilon \cdot h \cdot S$$

τὸ γινόμενον $h \cdot S$ παριστᾷ τὸν ὄγκον κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν τῆς
βάσεως εἶναι S καὶ τὸ ὕψος h . Συνεπῶς, ἡ δύναμις $\epsilon \cdot h \cdot S$, ἡ ἐξασκουμένη
ἐπὶ τοῦ πυθμένος, ἰσοῦται πρὸς τὸ βάρος ὕγρῳ στήλης, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν
τὸν πυθμένα καὶ ὕψος τὴν κατακόρυφον ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ἐλευθέ-
ρας ἐπιφανείας τοῦ ὕγρου καὶ τοῦτο ἀνεξαρτήτως τοῦ σχήματος τοῦ δοχείου.

Κατὰ ταῦτα, ἡ δύναμις F , ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ πυθμένος εἰς τὴν
περίπτωσιν τοῦ κυλινδρικοῦ δοχείου A τοῦ σχήματος 209, εἶναι ἴση πρὸς τὸ
βάρος τοῦ περιεχομένου ὕγρου, δεδομένου ὅτι ἡ μὲν δύναμις F εἶναι ἴση
πρὸς $\epsilon \cdot h \cdot S$, τὸ δὲ βάρος τοῦ περιεχομένου ὕγρου ἴσον πρὸς $\epsilon \cdot V = \epsilon \cdot h \cdot S$.
Ἀντιθέτως, εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ δοχείου B , ἡ μὲν δύναμις F , ἡ ἐξ-
ασκουμένη ἐπὶ τοῦ πυθμένος, εἶναι ἡ ἰδία, ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ δο-
χείου A — ἦτοι ἴση πρὸς $\epsilon \cdot h \cdot S$ — τὸ βάρος, ὅμως, τοῦ περιεχομένου ὕγρου
προφανῶς εἶναι μεγαλύτερον αὐτῆς. Τέλος, εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ δοχείου
 Γ ἡ δύναμις F εἶναι ἡ αὐτὴ ὡς ἀνωτέρω ($\epsilon \cdot h \cdot S$), τὸ βάρος, ὅμως, τοῦ πε-
ριεχομένου ὕγρου, εἶναι μικρότερον αὐτῆς.

Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι ἡ ἐπὶ τοῦ πυθμένος ἑνὸς δοχείου ἐξασκου-
μένη δύναμις, λόγῳ τῆς ὑδροστατικῆς πίεσεως, δὲν
εἶναι πάντοτε ἴση πρὸς τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου
ὕγρου. Τοῦτο ἀποτελεῖ τὸ καλούμενον **ὑδροστατι-
κὴν παράδοξον**.

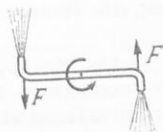
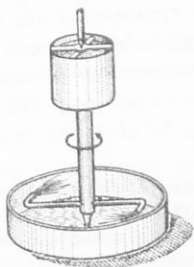


Σχ. 210.

**§ 125. Δύναμις ἐπὶ τῶν πλευρικῶν τοιχω-
μάτων.** Δύναμις, λόγῳ ὑδροστατικῆς πίεσεως, ἐξα-
σκεῖται ὄχι μόνον ἐπὶ τοῦ πυθμένος ἑνὸς δοχείου,
περιέχοντος ὕγρὸν τι, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων
του. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ δεῖξωμεν διὰ τῆς ἐξῆς ἀπλῆς
συσκευῆς (σχ. 210): Κατακόρυφος σωλήν, κεκαμέ-
νος εἰς τὸ κάτω ἄκρον, ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα, εἶναι
συνδεδεμένος μὲ ἐλαστικὸν σωλῆνα, καταλήγοντα εἰς
γωνίον. Ἐάν κλείσωμεν τὸ ἀνοικτὸν στόμιον μὲ φελ-
λὸν καὶ γεμίσωμεν τὸν σωλῆνα μὲ ὑδρῳ, οὗτος ἴσορ-
ροπεῖ κατακορύφως (I), διότι ἡ δύναμις, ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ φελλοῦ, ἀναι-

ρεῖται ἐκ τῆς δυνάμεως, τῆς ἐξασκουμένης ἐπὶ τοῦ ἀπέναντι τοῦ φελλοῦ τοιχωμάτος τοῦ σωλήνος. Ἐάν, τώρα, ἀφαιρέσωμεν τὸν φελλόν, τὸ ὕδωρ ἐκρῆει, ὃ δὲ σωλὴν λαμβάνει τὴν θέσιν *II* τοῦ σχήματος 210. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὰ ἑξῆς: Ἀφοῦ δὲν ὑπάρχει πλέον ὁ φελλός, δὲν ἐξασκεῖται καὶ δύναμις μὲ φορὰν πρὸς τὰ δεξιὰ.

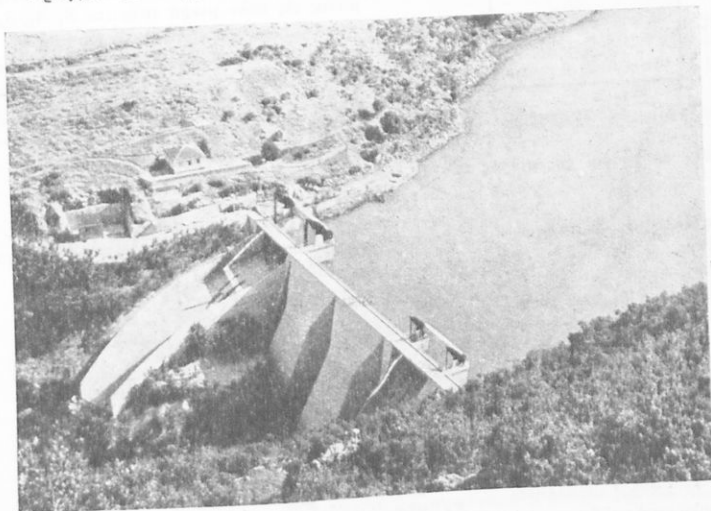
Ἐπὶ τοῦ ἀπέναντι, ὅμως, τοιχωμάτος τοῦ σωλήνος ἐξακολουθεῖ νὰ ἐξασκῇται δύναμις μὲ φορὰν πρὸς τ' ἀριστερά, λόγῳ τῆς ὁποίας ὁ κατακόρυφος σωλὴν ἐκτρέπεται ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας καὶ λαμβάνει τὴν θέσιν *II* τοῦ σχήματος 210.



Ἐπὶ τῆς ἀρχῆς ταύτης στηρίζεται καὶ ἡ λειτουργία τοῦ ὑδροστροφίλου τοῦ σχήματος 211 καθὼς καὶ τῶν πυραύλων (οἱ ὅποιοι περιγράφονται κατωτέρω εἰς τὸ Κεφάλαιον Ἀεροδυναμική).

Σχ. 211. Τὸ ὕδρον, ἐκρέον, δημιουργεῖ τὸ ζεύγος τῶν δυνάμεων F, F , τὸ ὁποῖον περιστρέφει τὸν ὑδροστροφίλον.

Φράγμα. Αἱ λόγῳ ὑδροστατικῆς πίεσεως ἀναπτυσσόμεναι δυνάμεις δύ-



Σχ. 212. Τὸ φράγμα τοῦ ποταμοῦ Λάδωνος.

νανται, ἀναλόγως τοῦ βάθους καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐξασκοῦνται, νὰ λάβουν μεγάλας τιμὰς. Δι' αὐτόν, ἀκριβῶς, τὸν λόγον, κατὰ

τὴν κατασκευὴν διαφόρων τεχνικῶν ἔργων — π.χ., φραγμάτων, μεγάλων δεξαμενῶν κ.λ. — λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ μεγάλαι αὗται δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι καὶ ἀντιμετωπίζονται καταλλήλως εἰς ἑκάστην περίπτωσιν.

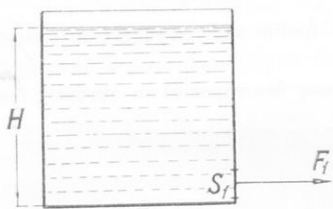
Ἡ εἰκὼν 212 παριστᾷ τὸ φράγμα τοῦ ποταμοῦ Λάδωνος, τὸ ὁποῖον κατεσκευάσθη διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς τεχνητῆς λίμνης, τῆς τροφοδοτούσης τὸ ἐκεῖ ὑδροηλεκτρικὸν ἔργοστάσιον.

Τὰ φράγματα κατασκευάζονται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι πλατύτερα παρὰ τὴν βάσιν καὶ τοῦτο ἵνα μὴ ἀνατραποῦν, λόγῳ τῆς δυνάμεως, τῆς ἐξασκουμένης ἐπ' αὐτῶν ὑπὸ τοῦ ὕδατος.

§ 126. **Υπολογισμὸς τῆς δυνάμεως, τῆς ἐξασκουμένης ἐπὶ τῶν πλευρικῶν τοιχωμάτων.** Εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν εἰς ὅλα τὰ σημεῖα ἑνὸς τοιχώματος ἐπικρατεῖ ἡ αὐτὴ πίεσις p , ἡ ἐκ ταύτης προερχομένη δύναμις F ὑπολογίζεται εὐκόλως ἐκ τοῦ τύπου

$$F = p \cdot S,$$

ἐνθα S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τοιχώματος. Ὅταν, ὁμως, ἡ πίεσις μεταβάλλεται ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον — ὅπως, π.χ.,



Σχ. 213.

εἰς τὸ πλευρικὸν τοίχωμα τοῦ δοχείου τοῦ σχήματος 213 — ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένη δύναμις $F_{ολ}$ θὰ ὑπολογισθῇ ὡς ἑξῆς: Χωρίζομεν τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν S τοῦ τοιχώματος εἰς πολλὰ μικρὰ τμήματα $S_1, S_2, S_3 \dots$, τόσον μικρὰ, ὥστε ἡ πίεσις εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν νὰ δύναται νὰ θεωρηθῇ σταθερά. Π.χ., εἰς τὸ σχῆμα 213 δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τῆς μικρᾶς ἐπιφανείας S_1 ἡ πίεσις εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ ἴση πρὸς p_1 . Ἐπομένως, ἡ δύναμις F_1 , ἡ

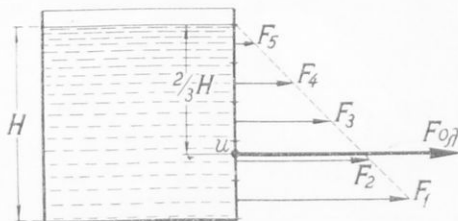
ἐξασκουμένη ἐπὶ τῆς μικρᾶς ταύτης ἐπιφανείας, θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$F_1 = p_1 \cdot S_1.$$

Εἰς ἄλλο μικρὸν τμήμα S_2 τῆς ἐπιφανείας, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται εἰς μικρότερον βάθος, ἡ πίεσις p_2 θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς πίεσεως p_1 , ἡ δὲ δύναμις F_2 , ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπ' αὐτοῦ, θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$F_2 = p_2 \cdot S_2 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Ὅλοι αὗται αἱ δυνάμεις $F_1, F_2, F_3 \dots$ (σχ. 214) εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ τοίχωμα (συνεπῶς παράλληλοι μεταξὺ τῶν) καὶ ἔχουν μίαν συνισταμένην $F_{ολ}$, τῆς ὁποίας ἡ διεύθυνσις συμπίπτει μετὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν συνιστωσῶν F_1, F_2, F_3 , τὸ δὲ μέτρον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν συνιστωσῶν. Ἦτοι εἶναι



Σχ. 214. Ἡ δύναμις $F_{ολ}$ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων $F_1, F_2, F_3 \dots$

Ἦτοι εἶναι

$$F_{ολ} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$$

Ἐάν, καθ' οἷονδήποτε τρόπον, προσδιορίσωμεν τὸ ἄνω ἄθροισμα — δηλ., τὸ $F_{ολ}$ — καὶ διαιρέσωμεν αὐτὸ διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ S τοῦ τοιχώματος, θὰ λάβωμεν ἓν μέγεθος, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν **μέσην πίεσιν** $\bar{p}$. Ὅτιοι εἶναι

$$\bar{p} = \frac{F_{ολ}}{S}.$$

Ὅπως ἀποδεικνύεται, ἡ μέση πίεσις εἶναι ἡ ὁδροστατικὴ ἐκεῖνη πίεσις, ἡ ὁποία ἐπικρατεῖ εἰς τὸ κέντρον βάρους τῆς ἐπιφανείας τοῦ τοιχώματος.

Ἐκ τοῦ ἄνω τύπου προκύπτει ἡ σχέση

$$F_{ολ} = \bar{p} \cdot S. \quad (1)$$

Ὅταν, λοιπόν, πρόκειται νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν δύναμιν, τὴν ἐξασκουμένην ἐπὶ τινος πλευρικοῦ τοιχώματος, πρέπει νὰ εὑρωμεν πρῶτον τὴν μέσην πίεσιν, τὴν ὁποίαν, ἀκολούθως, πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ τοιχώματος.

Ὅταν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τοιχώματος ἀποτελῇ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ εὐρίσκεται εἰς τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ καὶ τοῦ πυθμένος — δηλ., εἰς βάθος $H/2$ — ὅποτε ἡ μέση πίεσις προκύπτει ὡς πρὸς

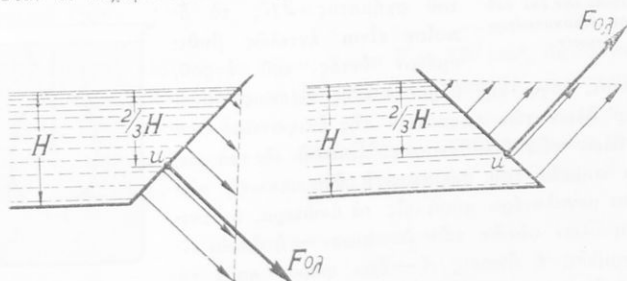
$$\bar{p} = \varepsilon \cdot \frac{H}{2}. \quad (2)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν διὰ τὴν ζητουμένην δύναμιν $F_{ολ}$ τὴν τιμὴν

$$F_{ολ} = \varepsilon \cdot \frac{H}{2} \cdot S.$$

Τὸ σημεῖον κ , διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται ἡ δύναμις $F_{ολ}$, καλεῖται **κέντρον πίεσεως** καὶ εἶναι τὸ κέντρον τῶν παραλλήλων δυνάμεων $F_1, F_2, F_3 \dots$ (βλ. § 31). Ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ κέντρον πίεσεως εὐρίσκεται εἰς τὰ $2/3$ τοῦ ὅλκου τοῦ βάθους.

Ὅταν τὸ τοίχωμα εἶναι πλάγιον (σχ. 215), τὸ σύστημα τῶν παραλλήλων



Σχ. 215.

δυνάμεων δὲν εἶναι ὀριζόντιον καὶ, συνεπῶς, ἡ συνισταμένη αὐτῶν $F_{ολ}$ δὲν εἶναι καὶ αὐτὴ ὀριζόντια.

§ 127. Εὐρεσις τῆς συνολικῆς δυνάμεως, τῆς ἐξασκουμένης ἐπὶ τοῦ δοχείου. Ἐφ' ὅσον, ἤδη, εἶναι γνωστὰ αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται ἐπὶ τοῦ πυθμένος καὶ ἐπὶ τῶν πλευρικῶν τοιχωμάτων τοῦ δοχείου, δυνάμεθα νὰ εὑρωμεν

τὴν συνολικὴν δύναμιν, τὴν ἐξασκουμένην ἐπὶ τοῦ δοχείου, ἡ ὁποία — ὡς εἶναι φανερόν — θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν συνισταμένην $F_{ολ}$ ὅλων αὐτῶν τῶν δυνάμεων.

Ἡ δύναμις αὕτη $F_{ολ}$ εἶναι πάντοτε ἴση πρὸς τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ὑγροῦ. Πράγματι, συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα «δρᾶσις = ἀντίδρασις», ἐφ' ὅσον τὸ ὑγρὸν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ δοχείου τὴν δύναμιν $F_{ολ}$, πρέπει καὶ τὸ δοχεῖον νὰ ἐξασκῇ ἐπὶ τοῦ ὑγροῦ μίαν ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν K . Ἡτοι εἶναι

$$K = F_{ολ}.$$

Ἡδη, σκεπτόμεθα ὡς ἐξῆς: Ἐπὶ τοῦ ὑγροῦ ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις — τὸ βάρος τοῦ B , τὸ ὁποῖον ἐξασκεῖ ἡ $\Gamma\eta$ καὶ ἡ δύναμις K , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ δοχεῖον. Ἐφ' ὅσον τὸ ὑγρὸν ἰσορροπεῖ, πρέπει ἡ δύναμις K — καὶ συνεπῶς, ἡ ἴση πρὸς αὐτὴν $F_{ολ}$ — νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὸ βάρος B τοῦ περιεχομένου ὑγροῦ. Ἡτοι εἶναι

$$F_{ολ} = B.$$

§ 128. Ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐάν, κρατοῦντες διὰ τῆς χειρὸς μας κενὸν δοχεῖον, προσπαθοῦμεν νὰ βυθίσωμεν αὐτὸ ἐντὸς ὕδατος (σχ. 216), θὰ αἰσθανθῶμεν μίαν δύναμιν, ἡ ὁποία τείνει νὰ φέρῃ τὸ δοχεῖον πρὸς τὰ ἄνω.

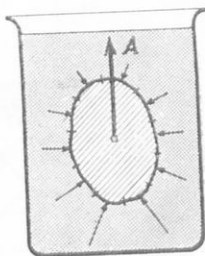


Σχ. 216. Ἐπὶ τῆς χειρὸς μας αἰσθανόμεθα σαφῶς τὴν ἐπὶ τοῦ δοχείου ἐξασκουμένην ἄνωσιν.

Ἡ δύναμις αὕτη εἶναι ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν δυνάμεων, τὰς ὁποίας ἐξασκεῖ τὸ ὑγρὸν, λόγῳ τῆς ὑδροστατικῆς πίεσεως, ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐμβαπτισμένου δοχείου καὶ καλεῖται **ἄνωσις**, διότι ἔχει φορὰν πρὸς τὰ ἄνω.

Ἀνωσιν ἐφίσταται πᾶν σῶμα, τὸ ὁποῖον ἐνδύσκειται ἐντὸς ὑγροῦ τινος, εἴτε εἶναι μερικῶς βυθισμένον ἐντὸς αὐτοῦ, εἴτε ἐντελῶς. Οὕτω, τὸ σῶμα

τοῦ σχήματος 217, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐντελῶς βυθισμένον ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ,



Σχ. 217.

ὑφίσταται, λόγῳ τῆς ὑδροστατικῆς πίεσεως, δυνάμεις ἐφ' ὅλων τῶν τμημάτων τῆς ἐπιφανείας του καὶ ἐξ ὅλων τῶν διευθύνσεων. Ἐπειδὴ εἰς τὰ κατώτερα σημεῖα τοῦ σώματος ἡ ὑδροστατικὴ πίεσις εἶναι μεγαλυτέρα παρὰ εἰς τὰ ἀνώτερα, ἡ συνισταμένη ὅλων αὐτῶν τῶν δυνάμεων — ἡ ὁποία εἶναι, ἀκριβῶς, ἡ ἄνωσις A — ἔχει φορὰν πρὸς τὰ ἄνω.

Ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω, διὰ τὴν ἄνωσιν ἰσχύει ἡ ἐξῆς ἀρχή, ἡ ὁποία καλεῖται **ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους** (*):

(*) Διάσημος σοφός, ζήσας ἐν Συρακούσαις περὶ τὸ 250 π.Χ. Ἐμελέτησε τοὺς μοχλοὺς («ὁδὸς μοι πᾶ στῶ καὶ τὰν γᾶν κινήσω»), ἀνέυρε τὴν ἰσότητά μεταξὺ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας καὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου, τὴν τιμὴν τοῦ ἀριθμοῦ π καὶ λοιπά. Ὁ Τύραννος τῶν Συρακουσῶν Ἰέρων

«Πάν σῶμα, εὐρισκόμενον ἐντὸς ὑγροῦ, ὑφίσταται ἄνωσιν, ἴσην πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ». Ἦτοι εἶναι

$$A = \varepsilon \cdot V \quad \text{Ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους}$$

ἐνθα ε εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ καὶ V ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ.

Ἀπόδειξις. Ἡ ἄνωσις ὑπολογίζεται εὐκόλως εἰς τὴν περίπτωσιν σώματος μετὰ πρίσματιζόν σχῆμα (σχ. 218), τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἔστω S . Ἐπὶ τοῦ πρίσματος ἐξασκοῦνται, λόγφ τῶν ὑδροστατικῶν πιέσεων, αἱ ἐξῆς δυνάμεις: 1) αἱ δυνάμεις ἐπὶ τῶν παραπλευρῶν ἐπιφανειῶν, αἱ ὁποῖαι ἀλληλοαναιροῦνται καὶ 2) αἱ ἐπὶ τῶν δύο βάσεων δυνάμεις F_1 καὶ F_2 , αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς

$$F_1 = p_1 \cdot S = \varepsilon \cdot h_1 \cdot S$$

$$\text{καὶ} \quad F_2 = p_2 \cdot S = \varepsilon \cdot h_2 \cdot S$$

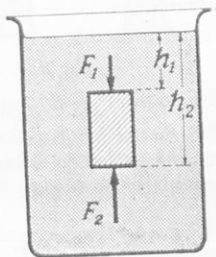
ἐνθα ε εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ. Ἡ συνισταμένη αὐτῶν, δηλαδὴ ἡ ἄνωσις A , εἶναι ἴση πρὸς

$$A = F_2 - F_1 = \varepsilon \cdot (h_2 - h_1) \cdot S.$$

Ἐπειδὴ $(h_2 - h_1) \cdot S$ εἶναι ὁ ὄγκος V τοῦ πρίσματος, ἔχομεν

$$A = \varepsilon \cdot V.$$

Ἐπειδὴ, ἐξ ἄλλων, ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ὄγκον V τοῦ πρίσματος, τὸ γινόμενον $\varepsilon \cdot V$ (δηλ., τὸ γινόμενον τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ ὑγροῦ ἐπὶ τὸν ὄγκον τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ) παριστᾷ τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ.



Σχ. 218.

Ἐφαρμογή. Πρίσμα ἐκ ξύλου, ὄγκου $V = 120 \text{ cm}^3$, ἀφιέμενον ἐντὸς ὕδατος, βυθίζεται, οὕτως ὥστε τὸ $1/3$ τοῦ ὄγκου του νὰ εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Πόση εἶναι ἡ ἄνωσις;

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος καὶ v τὸν ὄγκον τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος, θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν ἄνωσιν A

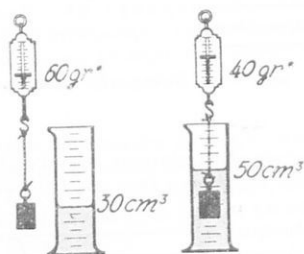
$$A = \varepsilon \cdot v = \varepsilon \cdot \frac{V}{3}.$$

Ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ ε τὸ ἴσον του ($1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$) καὶ ἀντὶ τοῦ V τὸ ἴσον του (120 cm^3), εὐρίσκομεν διὰ τὴν ἄνωσιν

$$A = 40 \text{ gr}^*.$$

ἀνέθεσεν εἰς τὸν Ἀρχιμήδην νὰ εὕρῃ, ἂν εἰς χυσοῦν στέφανον εἶχε γίνει νοθεῖα δι' ἀργύρου. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔλυσε ἐκ τῶν διαφορῶν τοῦ εἰδικοῦ βάρους τῶν δύο μετάλλων. Λέγεται ὅτι, διαπιστώσας τὴν ἰσχὴν τῆς ὁμωνύμου ἀρχῆς, ἐνῶ εὐρίσκετο ἐντὸς τοῦ λουτροῦ, ἐξηλθεν, ἀνὰ τὰς ὁδοὺς, ἀναφωνῶν «Εὕρηκα! Εὕρηκα!».

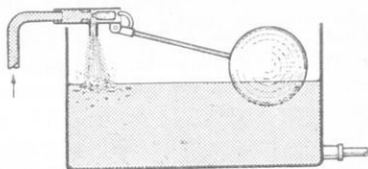
§ 129. Πειραματική απόδειξις τῆς ἀρχῆς τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐκ τοῦ ἀγκίστρου δυναμομέτρου ἐξαρτῶμεν ἓν σῶμα (π.χ., μετάλλινον κύλινδρον - σχ. 219) καὶ εὐρίσκομεν τὸ βάρος αὐτοῦ (π.χ., 60 gr^*). Ἀκολουθῶν, βυθίζομεν τὸ σῶμα ἐντὸς ὕδατος, περιεχομένου ἐντὸς ὀγκομετρικοῦ κυλίνδρου καὶ εὐρίσκομεν ὅτι ἡ ἔνδειξις τοῦ δυναμομέτρου ἐλαττοῦται, π.χ., εἰς τὰ 40 gr^* . Ἀρα, ἡ ἀνωσις εἶναι ἴση πρὸς $60 \text{ gr}^* - 40 \text{ gr}^* = 20 \text{ gr}^*$. Ἀφ' ἑτέρου, ἐκ τῆς ἀνυψώσεως τῆς στάθμης τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ ὀγκομετρικοῦ κυλίνδρου, εὐρίσκομεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος



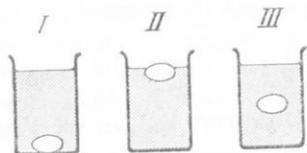
Σχ. 219.

εἶναι $50 \text{ cm}^3 - 30 \text{ cm}^3 = 20 \text{ cm}^3$. Τὸ βάρος, ὁμως, 20 cm^3 ὕδατος εἶναι ἴσον πρὸς 20 gr^* , δεδομένου ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος εἶναι πρὸς $1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. Ἦτοι, εὐρομεν ὅτι ἡ ἀνωσις ἰσοῦται πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ.

§ 130. Πλεῦσις. Τὴν σπουδαιότεραν τῶν ἐφαρμογῶν τῆς ἀνώσεως ἔχομεν εἰς τὴν **πλεῦσιν** τῶν διαφόρων σωμάτων ἐντὸς τοῦ ὕδατος (πλοῖα, πλωτῆρες - σχ. 220) κ.λ. Εἰς τὰ κατωτέρω θὰ μελετήσωμεν τὰς συνθήκας πλεύσεως ἐνὸς σώματος: Κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ Ἀρχιμήδους, ἡ ἀνωσις δεδομένου σώματος εἶναι τόσον μεγαλύτερα, ὅσον μεγαλύτερον εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ. Οὕτω, ἐὰν ἀφήσωμεν ἐντὸς ὕδατος ἓν νωπὸν ὠν, τοῦτο βυθίζεται (σχ. 221, I). Ἐάν, ὁμως, θέσωμεν αὐτὸ ἐντὸς κεκορεσμένου διαλύματος μαγειρικοῦ ἁλατος, ἐπιπλέει (II). Ἐάν, τέλος, διὰ προσθήκης ὕδατος, ἐλαττώσωμεν κατὰ τι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀλατοῦχου διαλύματος, δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν ὥστε τὸ ὠν νὰ αἰωρεῖται ἐντὸς αὐτοῦ (III).



Σχ. 220. Ἀσφαλιστικὸς πλωτὴρ δεξαμενῆς.



Σχ. 221. Τὸ ὠν βυθίζεται (I), ἐπιπλέει (II) ἢ αἰωρεῖται (III), ἀναλόγως τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ διαλύματος.

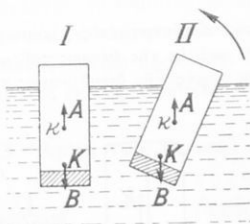
περιπτώσεις: 1) Ἄν τὸ βάρος τοῦ σώματος εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἀνώσεως, τὸ σῶμα βυθίζεται ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ. 2) Ἄν τὸ βάρος εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀνωσιν, τὸ σῶμα αἰωρεῖται ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ, δηλ., παραμένει ἀκί-

νητον ὅπουδήποτε καὶ ἂν τεθῇ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ. 3) Ὅταν τὸ βάρος εἶναι μικρότερον τῆς ἀνώσεως, τὸ σῶμα, ἀνερχόμενον, ἐξέρχεται ἐν μέρει τοῦ ὑγροῦ καὶ ἐπιπλέει. Τὸ σῶμα, τελικῶς, θὰ ἰσορροπῇ εἰς ἐκείνην τὴν θέσιν, εἰς τὴν ὁποίαν αἱ δυνάμεις βάρος καὶ ἄνωσις θὰ ἰσορροπήσουν· ὅταν, δηλ., τὸ σῶμα ἔχῃ ἀναδυθῇ ἐκ τοῦ ὑγροῦ τόσον, ὥστε ἡ ἄνωσις νὰ ἔχῃ γίνῃ ἴση πρὸς τὸ βάρος τοῦ σώματος.

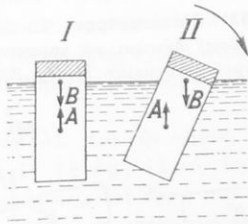
Βάσει τοῦ συλλογισμοῦ τούτου δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος ὑπὸ πλοίου, γνωστοῦ βάρους. Οὔτω, πλοῖον, βάρους 2000 τόνων βάρους, ὅταν ἐπιπλέῃ, ὑφίσταται ἄνωσιν 2000 τόνων βάρους καί, συνεπῶς, θὰ ἐκτοπίζῃ ὕδωρ τοῦ αὐτοῦ ἀκριβῶς βάρους. Ἐπειδὴ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ θαλασσίου ὕδατος εἶναι περίπου 1 τόνος βάρους ἀνὰ κυβικὸν μέτρον, ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος θὰ εἶναι περίπου 2000 m^3 .

Εἶδη πλεύσεως. Ἡ πλεύσις ἐνὸς ἐπιπλέοντος ἀντικειμένου δύναται νὰ εἶναι εἴτε *εὐσταθής*, εἴτε *ἀσταθής*. **Εὐσταθής** θὰ εἶναι ἡ πλεύσις, ἐάν, ἀφοῦ κλίνωμεν τὸ σῶμα κατὰ τινα γωνίαν ἀπὸ τῆς θέσεως ἰσορροπίας καὶ τὸ ἀφήσωμεν ἐλεύθερον, τοῦτο ἐπανέρχεται εἰς τὴν προτέραν του θέσιν. Ἐνῶ, ἐάν ἀνατραπῇ, ἡ πλεύσις εἶναι *ἀσταθής*.

Διὰ τὴν κατανόησιν τῶν διαφόρων εἰδῶν πλεύσεως, θεωροῦμεν ξύλινον κύλινδρον, εἰς τὴν μίαν βάσιν τοῦ ὁποίου ἔχομεν προσσαρμῶσι τεμάχιον μολύβδου (σχ. 222). Τὸ κέντρον βάρους τοῦ σώματος εὐρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον *Κ*. Ἐάν ἀφήσωμεν



Σχ. 222. Εὐσταθής πλεύσις.



Σχ. 223. Ἀσταθής πλεύσις.

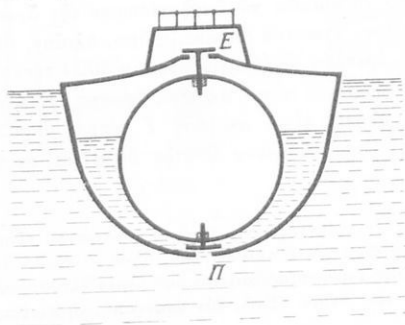
τὸ σῶμα τοῦτο νὰ ἐπιπλέσῃ ἐντὸς ὕδατος, θὰ λάβῃ τὴν θέσιν τοῦ σχήματος 222, *I*, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἄνωσις *A* θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ βάρος *B* τοῦ σώματος. Τὴν ἄνωσιν σχεδιάζομεν ὡς ἐφαρμοζομένην εἰς τὸ σημεῖον *κ*, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ καὶ τὸ ὁποῖον καλεῖται **κέντρον ἀνώσεως**. Ἐάν, τώρα, κλίνωμεν τὸ ἐπιπλέον σῶμα κατὰ τινα γωνίαν (*II*), ἀκολουθῶς δὲ ἀφήσωμεν αὐτὸ ἐλεύθερον, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι θὰ ἐπανεέλθῃ εἰς τὴν προτέραν του θέσιν, ἀπόδειξις ὅτι ἡ πλεύσις εἶναι εὐσταθής. Ἡ ἐπαναφορὰ τοῦ σώματος εἰς τὴν προτέραν του θέσιν ὀφείλεται εἰς τὴν ροπήν, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ δύο δυνάμεις *A* καὶ *B*, ὅταν τὸ σῶμα εὐρίσκεται ὑπὸ κλίσιν.

Ἐάν τὸ σῶμα τοποθετηθῇ ἐντὸς τοῦ ὕδατος μὲ τὸ τεμάχιον τοῦ μολύβδου πρὸς τὰ ἄνω, εἶναι δυνατόν καὶ εἰς τὴν θέσιν ταύτην νὰ ἰσορροπῇ, ἀρκεῖ αἱ δύο δυνάμεις *A* καὶ *B* νὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι καὶ νὰ εὐρίσκωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου (σχ. 223, *I*). Εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅμως, ταύτην ἡ πλεύσις εἶναι

ἀσταθής, καθόσον, ἐάν ἐκτρέψωμεν ὀλίγον τὸ σῶμα ἐκ τῆς θέσεως ταύτης (II), ἡ ροπή, τὴν ὅποιαν σχηματίζουν αἱ δύο δυνάμεις A καὶ B , θὰ τὸ ἀνατρέψῃ.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πλεῖσις εἶναι εὐσταθής, ὅταν τὸ κέντρον βάρους εἴναι χαμηλά. Δι' αὐτόν, ἡ ἀκριβὴς, τὸν λόγον, τὰ διάφορα πλωτὰ μέσα ἐφοδιάζονται δι' ἔρματος (κ. σαβοῦρα).

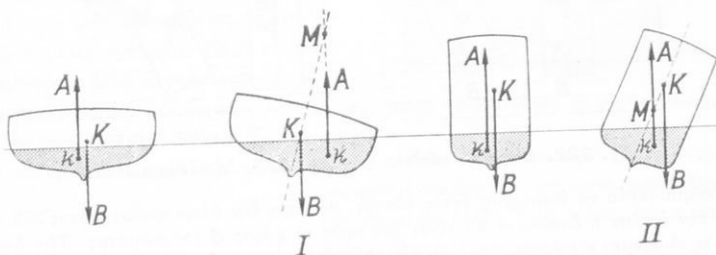
Υποβρύχια. Εἶναι πλοία, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ πλέουν εἴτε ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, εἴτε καὶ ὑπὸ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς. Ἡ κίνησις τῶν υποβρυχίων δίδεται διὰ πετρελαιοκινητήρων μὲν, ὅταν εὐρίσκωνται ἐν ἀναδύσει, δι' ἡλεκτροκινητήρων δέ, τροφοδοτουμένων διὰ συσσωρευτῶν, ὅταν εὐρίσκωνται ἐν καταδύσει. Διὰ νὰ καταδυθῇ τὸ υποβρύχιον ἀφήνεται νὰ εἰσέλθῃ ἐντὸς καταλλήλων δεξαμενῶν θαλάσσιον ὕδωρ. Πρὸς τοῦτο ἀνοίγονται ἀπ' ἐνὸς μὲν οἱ *κρουνοὶ* πληρώσεως Π (σχ. 224), ἀπ' ἑτέρου δὲ οἱ *ἐξαεριστικοὶ κρουνοὶ* E διὰ τὴν ἐξοδὸν τοῦ ἐντὸς τῶν δεξαμενῶν εὐρίσκομένου ἀέρος. Διὰ τὴν ἀνάδυσιν πρέπει νὰ ἐκδιωχθῇ τὸ ὕδωρ. Πρὸς τοῦτο κλείονται οἱ ἐξαεριστικοὶ κρουνοὶ E καί, διὰ πεπιεσμένου ἀέρος, ἐκδιώκεται τὸ ὕδωρ διὰ τῶν κρουνῶν Π .



Σχ. 224. Ἐγκαοσία τομὴ υποβρυχίου.

νοὶ E καί, διὰ πεπιεσμένου ἀέρος, ἐκδιώκεται τὸ ὕδωρ διὰ τῶν κρουνῶν Π .

★ § 131. Μετάκεντρον. Τὸ εἶδος τῆς πλεύσεως ἐνὸς πλοίου (εὐσταθὲς ἢ ἀσταθὲς πλεύσις) δύναται νὰ χαρακτηρισθῇ καὶ ἐκ τῆς θέσεως τοῦ *μετακέντρου*. Οὕτω καλοῦμεν τὸ σημεῖον M (σχ. 225) τῆς τομῆς τῆς διευθύνσεως τῆς ἀνώσεως



Σχ. 225. Τὸ σημεῖον M εἶναι τὸ *μετάκεντρον*.

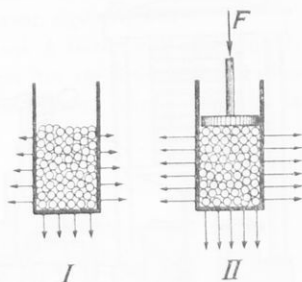
A καὶ τοῦ ἀξονος συμμετρίας τοῦ πλοίου. Ἡ πλεῖσις εἶναι εὐσταθής, ὅταν τὸ κέντρον βάρους K εὐρίσκειται κατωτέρω τοῦ μετακέντρου (I), ἐνῶ εἶναι ἀσταθής, ὅταν τὸ κέντρον βάρους εὐρίσκειται ἀνωτέρω τοῦ μετακέντρου (II).

§ 132. Προέλευσις τῆς πίεσεως τῶν ὑγρῶν. Μέχρι τοῦδε ἡσχολήθημεν μὲ τὴν ὑδροστατικὴν πίεσιν, ἡ ὁποία, ὡς εἶδομεν, ὀφείλεται εἰς τὴν βαρύτητα, καθόσον τὰ ἀνώτερα στρώματα ἐνὸς υγροῦ πιέζουν, λόγῳ τοῦ βάρους των, τὰ κατώτερα. Ἡ οὕτω δημιουργουμένη πίεσις δύναται νὰ πα-

ραβληθῇ πρὸς τὴν πίεσιν εἰς τὰ τοιχώματα ἑνὸς δοχείου, τὸ ὁποῖον εἶναι πλήρες διὰ μικρῶν χαλυβδίνων σφαιρῶν (σχ. 226, I) : Αἱ εἰς τὰ κατώτερα στρώματα εὐρισκόμεναι σφαῖραι πιέζονται ὑπὸ τῶν ὑπερκειμένων, λόγῳ τοῦ βάρους τῶν, καί, ὥς ἐκ τούτου, ἐξασκοῦν δυνάμεις ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων τοῦ δοχείου, δημιουργουμένης οὕτω πίεσεως. Ἐὰν μεταφέρωμεν τὸ ἀνάλογον τοῦτο εἰς τὰ ὑγρά, πρέπει νὰ θεωρήσωμεν, ἀντὶ τῶν σφαιρῶν, τὰ μόρια τῶν ὑγρῶν. Τὸ πηλίκον τῆς δυνάμεως, τὴν ὁποίαν ἐξασκοῦν τὰ μόρια ἑνὸς ὑγροῦ ἐπὶ τινος τμήματος ἐπιφανείας, διὰ τοῦ ἀντιστοίχου ἐμβαδοῦ εἶναι, ἀκριβῶς, ἡ ὑδροστατικὴ πίεσις.

Ἡδη, δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν καὶ τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν δὲν ὑπάρχει βαρύτης, τὸ δὲ δοχεῖον κλείεται δι' ἐμβόλου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐξασκοῦμεν τὴν δύναμιν F (σχ. 226, II). Λόγῳ τῆς δυνάμεως ταύτης, αἱ σφαῖραι συμπιέζονται καὶ προκαλοῦν δυνάμεις ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων τοῦ κυλίνδρου. Μεταφέροντες τὴν περίπτωσιν ταύτην εἰς τὰ ὑγρά, συμπεραίνομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ δημιουργήσωμεν πίεσιν ἐντὸς αὐτῶν, πιέζοντες δι' ἐμβόλου. Τὴν πίεσιν ταύτην καλοῦμεν *πίεσιν, προερχομένην ἐξ ἐμβόλου*.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἡ πίεσις ἐντὸς ὑγροῦ τινος δύναται νὰ προέρχεται εἴτε ἐκ τῆς βαρύτητος, εἴτε ἐξ ἐμβόλου, εἴτε καὶ ἐκ τῶν δύο ὁμοῦ.

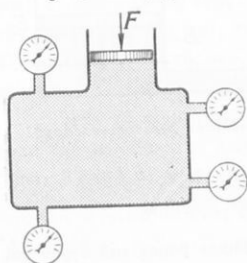


Σχ. 226. (I). Ἡ πίεσις ὀφείλεται εἰς τὸ βάρος τῶν σφαιρῶν. (II). Ἡ πίεσις ὀφείλεται μόνον εἰς τὴν δύναμιν τοῦ ἐμβόλου.

§ 133. Ἀρχὴ τοῦ Pascal (Πασκάλ). Διὰ τὴν πίεσιν, τὴν προερχομένην ἐξ ἐμβόλου, ἰσχύει ἡ ἐξῆς ἀρχή, ἡ ὁποία καλεῖται *ἀρχὴ τοῦ Pascal*:

«Ἡ πίεσις, ἡ προερχομένη ἐξ ἐμβόλου, εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ὑγροῦ».

Τὴν ἀρχὴν τοῦ Pascal δυνάμεθα νὰ δείξωμεν πειραματικῶς διὰ τῆς συσκευῆς, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ σχῆμα 227: Ἐξασκοῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου τὴν δύναμιν F καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ὅλα τὰ μανόμετρα δεικνύουν τὴν αὐτὴν πίεσιν. Ἡ πίεσις αὕτη εὐρίσκεται, ἀκριβῶς, ἴση πρὸς τὸ πηλίκον F/S , ἔνθα S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐμβόλου (*).

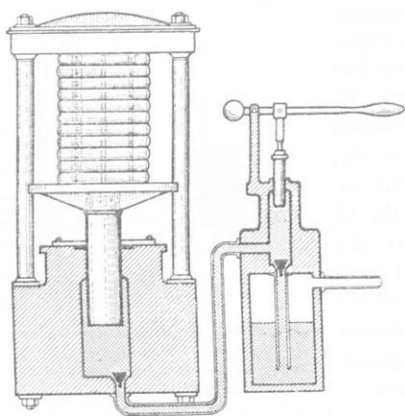


Σχ. 227. Πειραματικὴ ἀπόδειξις τῆς ἀρχῆς τοῦ Pascal.

βῶς, ἴση πρὸς τὸ πηλίκον

(*) Εἰς τὴν πραγματικότητα, ἡ πίεσις εἰς ὅλα τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχουν προσαρμοσθῇ τὰ μανόμετρα, δὲν εἶναι ἡ αὐτή. Καὶ τοῦτο διότι εἰς μὲν τὸ ὑψόμετρον τοῦ ἐμβόλου ἡ πίεσις εἶναι ἴση πρὸς F/S , εἰς ἕκαστον, ὁμως, μανόμετρον ἡ

Υδραυλικὸν πιεστήριον. Ἐφαρμογὴν τῆς ἀρχῆς τοῦ Pascal ἔχομεν εἰς τὸ **ὕδραυλικὸν πιεστήριον** (σχ. 228), τοῦ ὁποίου



σχ. 228. Ὑδραυλικὸν πιεστήριον.

τὴν ἀρχὴν τῆς λειτουργίας παριστᾷ τὸ σχῆμα 229: Ἐὰν ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἐμβόλου E_1 ἐξασκήσωμεν τὴν δύναμιν F_1 , ἡ πίεσις εἰς τὸ σημεῖον A τοῦ ὕγρου, ἢ προερχομένη ἐκ τοῦ ἐμβόλου, θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$p = \frac{F_1}{S_1}$$

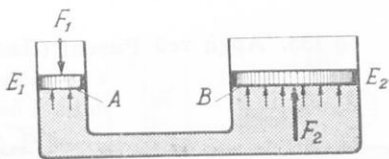
(ἐνθα S_1 εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐμβόλου E_1). Κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ Pascal, ἡ πίεσις εἰς τὸ σημεῖον B θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν πίεσιν p εἰς τὸ ση-

μεῖον A . Λόγῳ τῆς πίεσεως ταύτης ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ μεγάλου ἐμβόλου E_2 , (τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν ἔστω S_2), ἡ δύναμις F_2 , ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς

$$F_2 = p \cdot S_2 = \frac{F_1}{S_1} \cdot S_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1}$$

Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν S_2 τοῦ μεγάλου ἐμβόλου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἐμβαδοῦ S_1 τοῦ μικροῦ ἐμβόλου, ἡ δύναμις F_2 θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς δυνάμεως F_1 .

Ἐφαρμογή. Ἐὰν ἡ δύναμις F_1 εἶναι ἴση πρὸς 10 kg^* καὶ ὁ λόγος $S_2/S_1 = 100$, ἡ δύναμις F_2 θὰ εἶναι ἴση πρὸς $F_2 = 1000 \text{ kg}^* = 1 \text{ τόννος βάρους}$. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι μὲ τὴν μικράν, σχετικῶς, δύναμιν τῶν 10 kg^* ἐπιτυγχάνομεν τὴν πολὺ μεγαλυτέραν δύναμιν τοῦ 1 τόννου βάρους .

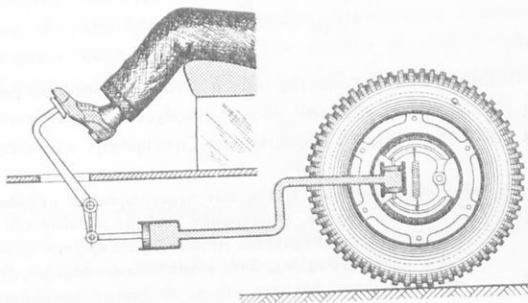


σχ. 229. Ὑδραυλικὸν πιεστήριον (ἀρχή).

πίεσις θὰ εἶναι ἴση πρὸς $F/S + \varepsilon \cdot h$, ἐνθα ε εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕγρου καὶ h ἡ ὑψομετρικὴ διαφορὰ ἐμβόλου καὶ μανομέτρου. Ἐπομένως, τὰ εἰς μεγαλύτερον βάθος τοποθετημένα μανόμετρα θὰ ἐπρεπε νὰ δεικνύουν μεγαλυτέραν πίεσιν. Συνήθως, ὅμως, ἡ ὑπὸ τοῦ ἐμβόλου παραγομένη πίεσις F/S εἶναι πολὺν μεγαλυτέρα τῆς ὑδροστατικῆς πίεσεως $\varepsilon \cdot h$ καί, ὡς ἐκ τούτου, ἡ διαφορὰ εἰς τὰς ἐνδείξεις τῶν μανομέτρων εἶναι ἀνεπαίσθητος-πρακτικῶς, δηλ., ὅλα τὰ μανόμετρα θὰ δεικνύουν τὴν αὐτὴν πίεσιν. Παράδειγμα: Πίεσις ἐκ τοῦ ἐμβόλου 10 at , ὑδροστατικὴ πίεσις, εἰς βάθος 1 m ὕδατος, $0,1 \text{ at}$, ὁπότε τὸ ἐν μανόμετρον θὰ δεικνύῃ $10,0 \text{ at}$, τὸ δὲ ἔτερον $10,1 \text{ at}$.

Τὸ ὑδραυλικὸν πιεστήριον χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν ἐξαγωγήν τοῦ ἐλαιολάδου ἐκ τῶν ἐλαίων (ἢ τὴν ἐξαγωγήν ἄλλων ἐλαίων), διὰ τὴν ἐλάττωσιν τοῦ ὄγκου διαφόρων ὑλικῶν (π.χ., βάμβακος, ἀχύρον) κ.λ.

Ἐπὶ τῆς ἀρχῆς τοῦ Pascal στηρίζεται καὶ ἡ λειτουργία τῶν ὑδραυλικῶν ἀνυψωτήρων, οἱ ὅποιοι χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῶν αὐτοκινήτων, προκειμένου νὰ γίνῃ καθαρισμὸς καὶ λίπανσις αὐτῶν. Ἐπίσης, ἐπὶ



Σχ. 230. Ὑδραυλικὴ τροχοπέδη αὐτοκινήτου (ἀρχή).

τῆς αὐτῆς ἀρχῆς στηρίζεται καὶ ἡ λειτουργία τῶν ὑδραυλικῶν τροχοπεδῶν (κ. ὑδραυλικῶν φρένων - σχ. 230) τῶν διαφόρων ὀχημάτων.

§ 134. Μέτρησης τῆς πυκνότητος τῶν στερεῶν. α) Ἐκ τῆς μάζης καὶ τοῦ ὄγκου. Τὴν πυκνότητα στερεῶν ὁμογενῶν σωμάτων, γνωστοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος (π.χ., παραλληλεπίπεδου, κυλίνδρου, κύβου, σφαίρας), εὐρίσκομεν ὡς ἑξῆς: Ἐκ τῶν διαστάσεων τοῦ σώματος ὑπολογίζομεν τὸν ὄγκον V αὐτοῦ καί, κατόπιν, διὰ ζυγίσσεως εὐρίσκομεν τὴν μάζαν τοῦ m . Τὸ πηλίκον m/V τῆς μάζης διὰ τοῦ ὄγκου μᾶς δίδει τὴν ζητουμένην πυκνότητα.

Ὅταν τὸ σῶμα ἔχῃ ἀκανόνιστον σχῆμα, τὸν μὲν ὄγκον τοῦ εὐρίσκομεν κατὰ τὴν μέθοδον, τὴν περιγραφείσαν εἰς τὴν § 9, τὴν δὲ μάζαν διὰ ζυγίσσεως.

β) **Μέθοδος τῆς ἀνώσεως.** Ἐξαρτῶμεν τὸ σῶμα διὰ λεπτοῦ νήματος ἀπὸ τοῦ ἀγκίστρου ἐνὸς δυναμομέτρου καὶ εὐρίσκομεν τὸ βάρος B αὐτοῦ. Ἀκολουθῶν, ἐμβαπτίζομεν ἐν τῷ ὕδατι τὸ σῶμα ἐντὸς ποτηρίου ὕδατος, ὁπότε, λόγῳ τῆς ἀνώσεως, ἡ ἔνδειξις τοῦ δυναμομέτρου θὰ εἶναι μικροτέρα (B'). Ἡ διαφορὰ $B - B'$ παρέχει ἀκριβῶς τὴν ἄνωσιν A . Ἐπειδὴ, ὡς γνωστόν, ἡ ἄνωσις εἶναι ἴση πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$A = \varepsilon_v \cdot V \quad \eta \quad A = \varrho_v \cdot g \cdot V, \quad (1)$$

ἐνθα ε_v καὶ ϱ_v εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος καὶ ἡ πυκνότης τοῦ ὕδατος καὶ V ὁ

ὄγκος τοῦ σώματος. Ἡ ζητούμενη πυκνότης ϱ_x τοῦ στερεοῦ εἶναι, ἐξ ὁρίσμοῦ, ἴση πρὸς

$$\varrho_x = \frac{m}{V}.$$

Ἀντικαθιστῶντες, ἀντὶ τοῦ m , τὸ ἴσον του B/g καί, ἀντὶ τοῦ V , τὸ ἴσον του, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1), ἔχομεν

$$\varrho_x = \frac{B}{A} \cdot \varrho_v. \quad (2)$$

Ἐφ' ὅσον τὸ βάρος B τοῦ σώματος καὶ ἡ ἄνωσις A προέκυψαν ἐκ τῆς μετρήσεως, ἡ δὲ πυκνότης ϱ_v τοῦ ὕδατος παρέχεται ἐκ πινακῶν, δυνάμεθα, τῇ βοήθειᾳ τοῦ τύπου (2), νὰ εὗρωμεν τὴν ζητούμενην πυκνότητα ϱ_x .

★ γ) *Μέθοδος τῆς ληκύθου.* Ἐκτὸς τῶν περιγραφεισῶν μεθόδων μετρήσεως τῆς πυκνότητος ἐνὸς στερεοῦ ὑλικοῦ, ἀναφέρομεν καὶ τὴν *μέθοδον τῆς ληκύθου*, διὰ τῆς ὁποίας ἐπιτυγχάνεται μεγαλύτερα ἀκρίβεια κατὰ τὴν μέτρησιν: Ἡ *ληκύθος* (σχ. 231) εἶναι ὑάλινον δοχεῖον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου προσσαρφεύεται ὑάλινον πῶμα, τὸ ὁποῖον καταλήγει εἰς λεπτὸν σωλῆνα, φέροντα χαραγμένην ἐπ' αὐτοῦ μίαν χαραγὴν X .



Σχ. 231.

Διὰ νὰ εὗρωμεν τὴν πυκνότητα ἐνὸς στερεοῦ ὑλικοῦ, ζυγίζομεν ἐν σῶμα ἐξ αὐτοῦ καὶ εὐρίσκομεν τὸ βάρος του B_x . Ἀκολούθως, πληροῦμεν τὴν ληκύθον δι' ἀπεσταγμένου ὕδατος μέχρι τῆς χαραγῆς καὶ τὴν ζυγίζομεν, ἔστω δὲ β τὸ εὑρεθὲν βάρος. Κατόπιν, θέτομεν τὸ σῶμα ἐντὸς τῆς ληκύθου, πωματίζομεν αὐτὴν καί, ἀφοῦ ἀφαιρέσωμεν τὸ πλεονάζον ὕδωρ, μέχρις ὅτου ἡ ἐλευθέρᾳ ἐπιφάνεια ἔλθῃ εἰς τὴν χαραγὴν, τὴν ζυγίζομεν ἐκ νέου. Ἐστω β' τὸ εὑρεθὲν βάρος. Ἦδη, τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπισθέντος ὕδατος δύναται νὰ εὑρεθῇ διὰ τῶν ἐξῆς συλλογισμῶν: Τὸ ἄθροισμα $B_x + \beta$ παριστᾷ τὸ βάρος τοῦ σώματος, τῆς ληκύθου καὶ τοῦ ἀρχικοῦ ὕδατος. Ἀφ' ἑτέρου, τὸ β' εἶναι τὸ βάρος τοῦ σώματος, τῆς ληκύθου καὶ τοῦ ἡλαττωμένου ὕδατος. Συνεπῶς, τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπισθέντος ὕδατος εἶναι ἴσον πρὸς $(B_x + \beta) - \beta'$. Ἦδη, σκεπτόμεθα ὡς ἐξῆς: Τὸ βάρος B_x τοῦ σώματος εὐρίσκεται ἐκ τοῦ ὄγκου του V καὶ τοῦ εἰδικοῦ βάρους ε_x τοῦ ὑλικοῦ αὐτοῦ ἴσον πρὸς

$$B_x = \varepsilon_x \cdot V \quad \eta \quad B_x = \varrho_x \cdot g \cdot V, \quad (3)$$

τὸ δὲ βάρος $(B_x + \beta) - \beta'$ τοῦ ἐκτοπισθέντος ὕδατος ἴσον πρὸς

$$(B_x + \beta) - \beta' = \varepsilon_v \cdot V \quad \eta \quad (B_x + \beta) - \beta' = \varrho_v \cdot g \cdot V \quad (4)$$

ἐνθα ϱ_x εἶναι ἡ ζητούμενη πυκνότης καὶ ε_v καὶ ϱ_v τὸ εἰδικὸν βάρος καὶ ἡ πυκνότης τοῦ ὕδατος. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4) λαμβάνομεν τὴν ζητούμενην πυκνότητα ϱ_x τοῦ στερεοῦ

$$\varrho_x = \frac{B_x}{(B_x + \beta) - \beta'} \cdot \varrho_v. \quad (5)$$

§ 135. *Μέτρησις τῆς πυκνότητος τῶν ὑγρῶν.* α) Ἐκ τῆς μάξης καὶ τοῦ ὄγκου. Ζυγίζομεν ἐν καθαρὸν ποτήριον. Ἀκολούθως, ἀφοῦ ὄγκο-μετρήσωμεν (δι' ὄγκομετρικοῦ κυλίνδρου, βλ. § 9) ποσότητά τινα ἐκ τοῦ

ὕγροῦ, χύνομεν αὐτὴν ἐντὸς τοῦ ποτηρίου, τὸ ὁποῖον καὶ ζυγίζομεν ἐκ νέου. Ἐκ τῶν δύο ζυγίσεων προκύπτει ἡ μάζα τοῦ ἐντὸς τοῦ ποτηρίου περιεχομένου ὑγροῦ. Τὸ πηλίκον τῆς μάζης τοῦ ὑγροῦ διὰ τοῦ ὕγκου του μᾶς δίδει τὴν πυκνότητα.

β) **Μέθοδος τῆς ἀνώσεως.** Ἐκ τοῦ ἀγκίστρου ἐνὸς δυναμομέτρου ἐξαερώμεν ἐν στερεὸν σῶμα, τοῦ ὁποῖου ἡ πυκνότης νὰ εἶναι μεγαλύτερα τῆς πυκνότητος τοῦ ὑγροῦ καὶ τὸ ὁποῖον καλοῦμεν *πλωτῆρα*. Βυθίζομεν, ἀκολουθῶς, τὸν πλωτῆρα ἐντὸς δοχείου, περιέχοντος ἀπεσταγμένον ὕδωρ καὶ εὐρίσκομεν, κατὰ τὰ γνωστά, τὴν ἄνωσιν A_v τοῦ πλωτῆρος ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Γράφοντες τὸν τύπον (2) τῆς § 134, β εἰς τὴν περιπτώσιν ταύτην, θὰ ἔχωμεν

$$\varrho_{\pi\lambda} = \frac{B_{\pi\lambda}}{A_v} \cdot \varrho_v. \quad (1)$$

Ἐπαναλαμβάνομεν τὸ πείραμα διὰ τοῦ ὑγροῦ, τοῦ ὁποῖου τὴν πυκνότητα $\varrho_{v\gamma\rho}$ ζητοῦμεν καὶ εὐρίσκομεν τὴν ἄνωσιν $A_{v\gamma\rho}$, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ὁ πλωτῆρ ἐντὸς αὐτοῦ. Ἐφαρμόζοντες τὴν ἐξίσωσιν (2) τῆς § 134, β καὶ εἰς τὴν περιπτώσιν ταύτην, ἔχομεν

$$\varrho_{\pi\lambda} = \frac{B_{\pi\lambda}}{A_{v\gamma\rho}} \cdot \varrho_{v\gamma\rho}. \quad (2)$$

Διὰ διαιρέσεως, κατὰ μέλη, τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν, τελικῶς, διὰ τὴν ζητουμένην πυκνότητα τοῦ ὑγροῦ τὴν σχέσιν

$$\varrho_{v\gamma\rho} = \frac{A_{v\gamma\rho}}{A_v} \cdot \varrho_v.$$

Αἱ ἀνώσεις $A_{v\gamma\rho}$ καὶ A_v προέκυψαν ἐκ τῆς μετρήσεως. Λαμβάνοντες καὶ τὴν πυκνότητα ϱ_v τοῦ ὕδατος ἐκ πινάκων, εὐρίσκομεν, τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἄνω τύπου, τὴν ζητουμένην πυκνότητα τοῦ ὑγροῦ.

γ) **Μέθοδος τῆς λήκυθου.** Πληροῦμεν τὴν λήκυθον μέχρι τῆς χαραγῆς πρῶτον δι' ἀπεσταγμένου ὕδατος καί, κατόπιν, διὰ τοῦ ὑγροῦ, τοῦ ὁποῖου τὴν πυκνότητα ζητοῦμεν. Διὰ ζυγίσεως (ἀφοῦ προηγουμένως εὐρομεν τὸ βάρος τῆς λήκυθου κενῆς) εὐρίσκομεν τὸ βάρος B_v τοῦ ὕδατος καὶ τὸ βάρος B_x τοῦ ὑγροῦ. Ἐπειδὴ ὁ ὄγκος V τῶν δύο ὑγρῶν εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις

$$B_v = \varrho_v \cdot g \cdot V \quad (3) \quad \text{καὶ} \quad B_x = \varrho_x \cdot g \cdot V \quad (4)$$

ἐνθα ϱ_v καὶ ϱ_x εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ ὕδατος καὶ ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4) λαμβάνομεν τὴν ζητουμένην πυκνότητα τοῦ ὑγροῦ, ἴσων πρὸς

$$\varrho_x = \frac{B_x}{B_v} \cdot \varrho_v.$$

Τὰ βάρη B_x καὶ B_v προέκυψαν ἐκ τῆς ζυγίσεως. Λαμβάνοντες καὶ τὴν πυκνότητα ϱ_v τοῦ ὕδατος ἐκ πινάκων, εὐρίσκομεν, τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἄνω τύπου, τὴν ζητουμένην πυκνότητα τοῦ ὑγροῦ.

δ) **Διὰ πυκνόμετρων ἢ ἀραιομέτρων.** Διὰ τὴν ταχέαν εὐρεσιν τῆς πυκνότητος τῶν ὑγρῶν χρησιμοποιοῦνται ὄργανα, τὰ ὁποῖα καλοῦνται **πυκνόμετρα** ἢ **ἀραιόμετρα**, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν πρόκειται νὰ



Σχ. 232.
Αραιόμετρον.

χρησιμοποιηθῶν διὰ μετρήσεις ὑγρῶν, τῶν ὁποίων ἡ πυκνότης εἶναι μεγαλύτερα ἢ μικρότερα τῆς πυκνότητος τοῦ ὕδατος. Τὰ ὄργανα αὐτὰ εἶναι πλωτῆρες καταλλήλου σχήματος (σχ. 232), φέροντες κλίμακα, βαθμολογημένην συνήθως εἰς gr/cm^3 , καὶ εἰς τὸ κάτω ἄκρον ἔξομα. Ἡ λειτουργία των στηρίζεται ἐπὶ τοῦ φαινομένου, κατὰ τὸ ὁποῖον, εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας, τὰ σώματα βυθίζονται ἐντὸς τῶν ὑγρῶν τόσον ὀλιγώτερον, ὅσον πυκνότερον εἶναι τὸ ὑγρὸν.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν πυκνότητα ἐνὸς ὑγροῦ διὰ πυκνόμετρου, ἀφήνομεν αὐτὸ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ, καί, ὅταν ἰσορροπήσῃ, παρατηροῦμεν τὴν ἐνδειξὴν τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἐπὶ τῆς κλίμακος. Ἡ ἐνδειξις αὕτη μᾶς παρέχει ἀμέσως τὴν πυκνότητα εἰς gr/cm^3 .

Πρακτικαὶ κλίμακες. Τὰ περιγραφέντα πυκνόμετρα καὶ ἀραιόμετρα ἔχουν βαθμολογηθῇ, οὕτως ὥστε νὰ παρέχουν ἀπ' εὐθείας τὴν πυκνότητα τῶν ὑγρῶν. Εἰς τὴν πράξιν, ὁμως, χρησιμοποιοῦνται πολλάκις (π.χ., διὰ τὴν μέτρησιν τῆς πυκνότητος τοῦ *ηλεκτρολύτου* τῶν συσσωρευτῶν κ.λ.) πυκνόμετρα καὶ ἀραιόμετρα, παρέχοντα τὴν πυκνότητα εἰς αὐθαίρετους μονάδας. Οὕτω, δι' ὑγρά, πυκνότερα τοῦ ὕδατος, χρησιμοποιοῦνται οἱ **πυκνοὶ βαθμοὶ Baumé (Μπομέ) (^οΒέ)**. Εἰς τὴν κλίμακα ταύτην τὸ μηδέν (^οΒέ) ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πυκνότητα 1 gr/cm^3 , οἱ δὲ ὑπόλοιποι ἄνω τοῦ μηδενὸς βαθμοὶ εἰς πυκνότητας, μεγαλύτερας τοῦ 1 gr/cm^3 .

Δι' ὑγρά, ἀραιότερα τοῦ ὕδατος, χρησιμοποιοῦνται οἱ **ἀραιοὶ βαθμοὶ Baumé**. Εἰς τὴν κλίμακα ταύτην 10° Βέ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πυκνότητα 1 gr/cm^3 , οἱ δὲ μεγαλύτεροι τοῦ 10 βαθμοὶ εἰς πυκνότητας, μικρότερας τοῦ 1 gr/cm^3 .

Τὴν σχέσιν μεταξὺ βαθμῶν Baumé καὶ πυκνότητος παρέχουν οἱ κάτωθι πίνακες.

ΠΙΝΑΚΕΣ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗΣ ΒΑΘΜΩΝ BAUMÉ ΕΙΣ ΜΟΝΑΔΑΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΟΣ

Πυκνοὶ βαθμοὶ Baumé	Πυκνότης (gr/cm^3)
0	1,000
20	1,160
40	1,381
60	1,706
70	1,933

Ἀραιοὶ βαθμοὶ Baumé	Πυκνότης (gr/cm^3)
10	1,000
30	0,875
50	0,778
70	0,700
90	0,636

Πυκνόμετρα, δι' εἰδικὰς μετρήσεις, ἔχουν βαθμολογηθῇ οὕτως ὥστε νὰ παρέχουν ἀπ' εὐθείας τὴν **περιεκτικότητα** ὡς πρὸς τὸ ζητούμενον συστατικὸν (π.χ., οἶνο-πνευματόμετρα κ.λ.).

Οἶνοπνευματόμετρον. Εἶναι ὄργανον, διὰ τοῦ ὁποῖου προσδιορίζομεν, δι' ἀπ' εὐθείας ἀναγνώσεως, τὴν κατ' ὄγκον **περιεκτικότητα** οἶνοπνευματοῦ-

ζων ὑγρῶν. Τὸ ὄργανον τοῦτο — τύπου ἀραιομέτρου — δίδει ἀκριβῆ ἀποτελέσματα εἰς ὑγρά, περιέχοντα μόνον οἰνόπνευμα καὶ ὕδωρ. Οὕτω, διὰ τὰ προσδιορίζωμεν, π.χ., τὸ οἰνόπνευμα, τὸ περιεχόμενον ἐντὸς τοῦ οἴνου, ἀποστάζομεν ποσότητα οἴνου, γνωστοῦ ὄγκου (π.χ., 200 cm^3) καί, κατόπιν, εἰς τὸ ἐκ τῆς ἀποστάξεως ληφθὲν οἰνόπνευμα προσθέτομεν ἀπεσταγμένον ὕδωρ μέχρι συμπληρώσεως τοῦ ἀρχικοῦ ὄγκου (200 cm^3). Ἐάν, τώρα, βυθίσωμεν ἐντὸς τοῦ μείγματος τὸ οἰνοπνευματόμετρον, θὰ λάβωμεν μίαν ἐνδειξιν, π.χ. 16. Τοῦτο δηλοῖ ὅτι 16% τοῦ ὄγκου τοῦ μείγματος ἀποτελεῖται ἐξ οἰνοπνεύματος.

§ 136. Μέτρησις τοῦ εἰδικοῦ βάρους. Ἐπειδὴ, ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ πυκνότης ἐνὸς ὑλικοῦ, εἶναι γνωστὸν καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ, ἐπεται ὅτι ὅλαι αἱ εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους ἀναφερθεῖσαι μέθοδοι μετρήσεως τῆς πυκνότητος εἶναι ἀνagχρόνως καὶ μέθοδοι μετρήσεως τοῦ εἰδικοῦ βάρους.

★ ★ **§ 137. Μέθοδοι μετρήσεως τοῦ σχετικοῦ εἰδικοῦ βάρους.** Εἰς τὴν § 67 εἶδομεν ὅτι τὸ σχετικὸν εἰδικὸν βάρος ϵ_{sx} ἐνὸς ὑλικοῦ ὀρίζεται ὡς τὸ πηλίκον τοῦ εἰδικοῦ βάρους ϵ_x τοῦ ἐν λόγῳ ὑλικοῦ διὰ τοῦ εἰδικοῦ βάρους $\epsilon_{v,4}$ τοῦ ὕδατος, εὐρισκομένου εἰς θερμοκρασίαν $+4^\circ \text{ C}$. Ὡτοι

$$\frac{\epsilon_x}{\epsilon_{v,4}} = \epsilon_{sx}. \quad (1)$$

Ἄφ' ἑτέρου, ἡ ἐξίσωσις (2) τῆς § 134, β

$$\rho_x = \frac{B}{A} \cdot \rho_v,$$

ἡ ἀναφερομένη εἰς τὴν μέθοδον τῆς ἀνώσεως, δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{\rho_x}{\rho_v} = \frac{B}{A} \quad \eta \quad \frac{\epsilon_x}{\epsilon_v} = \frac{B}{A}. \quad (2)$$

Ἐκ συγκρίσεως τῶν τύπων (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι ἡ μέθοδος τῆς ἀνώσεως παρέχει τὸ σχετικὸν εἰδικὸν βάρος, μόνον ἂν ἡ μέτρησις γίνῃ εἰς τὴν θερμοκρασίαν $+4^\circ \text{ C}$. Ἐπειδὴ, ὁμως, τὸ σχετικὸν εἰδικὸν βάρος δὲν μεταβάλλεται σημαντικῶς μετὰ τῆς θερμοκρασίας, δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιοῦμεν τὴν μέθοδον τῆς ἀνώσεως διὰ τὴν εὐρεσιν τοῦ σχετικοῦ εἰδικοῦ βάρους, χωρὶς ἐκ τούτου νὰ προκύπτῃ σημαντικὸν σφάλμα.

Τὰ αὐτὰ, ἀκριβῶς, ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς μετρήσεις διὰ τῆς μεθόδου τῆς ληκνύου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κατηγορίᾳ Α'

145) Ὁρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἐξ ὀρειχάλκου ἔχει διαστάσεις $1 \text{ m} \times 60 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$. Ἐάν τοῦτο στηριχθῇ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μὲ μίαν τῶν βάσεων του, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πίεσις εἰς ἐκάστην ὁλῶν τῶν δυνατῶν περιπτώσεων.

(ΑΠ: $0,26 \text{ at}$, $0,52 \text{ at}$, $0,86 \text{ at}$)

146) Ἡ διάμετρος τοῦ μεγάλου ἐμβόλου ὕδρανλικοῦ πιεστηρίου εἶναι ἴση πρὸς 30 cm , ἡ δὲ διάμετρος τοῦ μικροῦ $2,5 \text{ cm}$. Ἐάν ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἐμβόλου ἐξασκῇ δύναμις $4,5 \text{ kgf}$, πόση θὰ εἶναι ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ ἐξασκῇ τὸ μέγα ἐμβόλον; Ἐάν τὸ μικρὸν ἐμβόλον κατέλθῃ κατὰ 15 cm , κατὰ πόσον θὰ μετακινήθῃ τὸ μέγα ἐμβόλον;

(ΑΠ: 648 kgf , 1 mm)

147) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πίεσις στῆλης ὕδατος, ὕψους 20 m , εἰς dyn/cm^2 , εἰς

kg^*/m^3 και εις gr^*/cm^3 . Μὲ ποίαν ὑδραργυρικὴν στήλην θὰ ἔχωμεν τὴν αὐτὴν πίεσιν ; (ΑΠ : $1,96 \cdot 10^4 \text{ dyn/cm}^2$, $2 \cdot 10^4 \text{ kg}^*/\text{m}^2$, $2000 \text{ gr}^*/\text{cm}^2$, $1,47 \text{ m}$)

148) Δοχεῖον κυλινδρικόν, διαμέτρου 10 cm , πληροῦται μέχρις ὕψους 25 cm δι' ὕδατος. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἐπὶ τοῦ πυθμένος ἐξασκουμένη δύναμις. (ΑΠ : $1,96 \text{ kg}^*$)

149) Ὁρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἐκ ξύλου, ἐιδικοῦ βάρους $0,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, εἶναι βυθισμένον κατὰ 80% τοῦ ὅγκου του ἐντὸς ὕγρου τινος καὶ εἰς τὴν θέσιν ταύτην ἰσορροπεῖ. Ποῖον εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕγρου ; (ΑΠ : $0,75 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$)

150) Εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ πάγος ἐπιπλέει, κατὰ τρόπον ὥστε τὰ 92% τοῦ ὅγκου του νὰ βυθίζονται ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Ποία ἡ πυκνότης τοῦ πάγου ; (ΑΠ : $0,92 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$)

151) Σῶμα, ἐξηρημασμένον διὰ λεπτοῦ νήματος ἀπὸ τὸ ἀγκίστρον δυναμομέτρου, ζυγίζει εἰς μὲν τὸν ἀέρα 96 gr^* , ἐντὸς ὕδατος 81 gr^* καὶ ἐντὸς πετρελαίου 84 gr^* . Νὰ εὐρεθῇ α) ὁ ὅγκος τοῦ σώματος, β) ἡ πυκνότης τοῦ ὕλικοῦ τοῦ σώματος καὶ γ) ἡ πυκνότης τοῦ πετρελαίου. (ΑΠ : α) 15 cm^3 , β) $6,4 \text{ gr}/\text{cm}^3$, γ) $0,8 \text{ gr}/\text{cm}^3$)

152) Στέφανος ἐκ χρυσοῦ ἔχει μᾶζαν 300 gr . Ἐπεὶ δὲ ὑπάρχει ὑποψία ὅτι ὁ χρυσὸς εἶναι ἀναμειγμένους μὲ ἄργυρον, ὁ στέφανος ἀναρτᾷται ἐκ τοῦ ἀγκίστρον δυναμομέτρου καὶ ἐμβαπτίζεται ἐντὸς ὕδατος. Οὕτω εὐρίσκεται ὅτι «χάνει» ἐκ τοῦ βάρους του 20 gr^* . Περιέχει ἄργυρον καὶ πόσον ; (ΑΠ : Περιέχει $102,3 \text{ gr}$ ἄργυρου)

Κατηγορία Β'

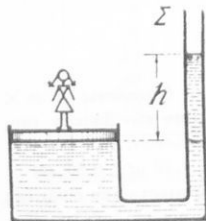
153) Πόση δύναμις ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ ὑαλίνου παραθύρου βαθυσφαίρας, ὅταν αὕτη εὐρίσκεται εἰς βάθος 3000 ποδῶν ; Ἡ διάμετρος τοῦ παραθύρου εἶναι 12 Ἴντς . (Εἰδικὸν βάρος θαλασσίου ὕδατος = $1,026 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$) (ΑΠ : 68 t^*)

154) Εἰς τὸ κύτος πλοίου ἀνοίγεται κυκλικὴ ὀπή, διαμέτρου 20 cm καὶ εἰς βάθος 5 m ὑπὸ τὴν ἀποφάνειαν τῆς θαλάσσης. Ζητεῖται ἡ δύναμις (εἰς kg^*), ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἐξασκηθῇ ἐπὶ πώματος, κλειόντος τὴν ὀπήν, διὰ νὰ μὴ εἰσέρχεται τὸ ὕδωρ. ($\epsilon_{\text{θαλ}} = 1,026 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$). (ΑΠ : 161 kg^*)

155) Δοχεῖον κυλινδρικόν, διαμέτρου 10 cm , περιέχει 1 λίτρον ὑδραργύρου καὶ 1 λίτρον ὕδατος. Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ πίεσις εἰς σημείον τι τοῦ πυθμένος καὶ β) ἡ ἐπὶ τοῦ πυθμένος ἐξασκουμένη δύναμις. (ΑΠ : α) $0,186 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$, β) $14,6 \text{ kg}^*$)

156) Μέχρι ποίου ὕψους h πρέπει νὰ γεμίσωμεν δι' ὕδατος τοὺς σωλῆνας τοῦ σχήματος 209, ἵνα ἀποσπασθῇ ὁ κινητὸς πυθμὴν των ; (Διάμετρος τοῦ πυθμένος = δ , εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος = ϵ καὶ βάρος τῶν σταθμῶν = B). (ΑΠ : $h = 4B/\epsilon \cdot \pi \cdot \delta^2$)

157) Κυλινδρικὸν δοχεῖον συνδέεται διὰ μακροῦ κατακόρυφου σωλῆνος Σ, ὅπως δεῖκνυται τὸ ἔναντι σχῆμα. Τὸ δοχεῖον πληροῦται δι' ὕδατος καὶ κλείεται δι' ἐμβόλον, βάρους $2,5 \text{ kg}^*$ καὶ ἐμβαδοῦ 1000 cm^2 . Ἄν ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου σταθῇ ἄνθρωπος, βάρους 75 kg^* , νὰ εὐρεθῇ τὸ ὕψος h , εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνέλθῃ τὸ ὕδωρ εἰς τὸν κατακόρυφον σωλῆνα Σ. (ΑΠ : $77,5 \text{ cm}$)



158) Δύο κατακόρυφα κυλινδρικά συγκοινωνοῦντα δοχεῖα περιέχουν ὕδωρ. Αἱ διατομαὶ των εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσαι πρὸς 100 cm^2 καὶ 25 cm^2 . Ρίπτομεν εἰς τὸ ἐν 5 λίτρα ὕδατος. Κατὰ πόσον θὰ ἀνέλθῃ ἡ ἐλευθέρᾳ ἐπιφάνεια εἰς ἕκαστον δοχεῖον ; (ΑΠ : Κατὰ 40 cm)

159) Ἐντὸς σωλῆνος, σχήματος U, τίθεται πρῶτον ὑδράργυρος καὶ κατόπιν εἰς τὸ ἐν τῶν σκελῶν ἄλλο τι ὕγρον. Αἱ ἐλευθέραι ἐπιφάνειαι τοῦ ὑδραργύρου καὶ τοῦ ὕγρου εἶναι τοῦ μὲν πρῶτου εἰς $17,5 \text{ cm}$, τοῦ δὲ δευτέρου εἰς 42 cm ἄνωθεν τοῦ

διαχωρίζοντος τὰ ὑγρά ὀριζοντίου ἐπιπέδου. Ζητεῖται ἡ πυκνότης τοῦ δευτέρου ὑγροῦ.
(ΑΠ : $5,66 \text{ gr/cm}^3$)

160) Ἐντὸς κυλινδρικοῦ δοχείου, σχήματος U (τῆς αὐτῆς διαμέτρου), ρίπτεται ὕδωρ τόσον, ὥστε ν’ ἀνέλθῃ μέχρι τοῦ μέσου τῶν σκελῶν του. Κατόπιν, εἰς τὸ δεξιὸν σκέλος ρίπτεται ἔλαιον, εἰδικοῦ βάρους $0,8 \text{ gr/cm}^3$, καὶ τόσον, ὥστε νὰ σχηματισθῇ ἐξ αὐτοῦ στήλη, ὕψους 5 cm . Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ μέχρι ποίου ὕψους θὰ ἀνέλθῃ ἡ ἐλευθερά ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος εἰς τὸ ἀριστερὸν σκέλος. (ΑΠ : 2 cm)

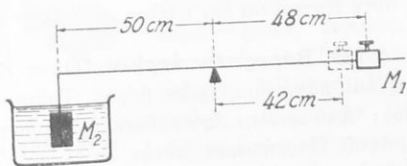
161) Στερεὸν σῶμα ζυγίζει 120 gr^* εἰς τὸν ἀέρα, 90 gr^* ἐντὸς ὕδατος καὶ 78 gr^* ἐντὸς διαλύματος θεικοῦ χαλκοῦ. Νὰ εὑρεθῇ α) τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑλικοῦ τοῦ σώματος καὶ β) τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ διαλύματος.
(ΑΠ : α) 4 gr/cm^3 , β) $1,4 \text{ gr/cm}^3$)

162) Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τεμαχίου ὕαλου ($\epsilon_{\text{υαλ}} = 2,6 \text{ gr/cm}^3$) ὑπάρχει μία κοιλότης. Τὸ τεμάχιον τοῦτο ζυγίζει $23,4 \text{ gr}^*$ εἰς τὸν ἀέρα καὶ $3,9 \text{ gr}^*$, ὅταν βυθισθῇ ὁλόκληρον ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς κοιλότητος. (ΑΠ : $10,5 \text{ cm}^3$)

163) Δοχεῖον περιέχει ὕδωρ καὶ ἓν ἄλλο ὑγρὸν, εἰδικοῦ βάρους $2,5 \text{ gr/cm}^3$. Τὰ δύο ὑγρά δὲν ἀναμειγνύονται. Ἐν σῶμα εἶναι βυθισμένον ἐντὸς τῶν δύο ὑγρῶν κατὰ τρόπον ὥστε τὰ 70% τοῦ ὄγκου του νὰ εἶναι ἐντὸς τοῦ ὕδατος καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἐντὸς τοῦ ἄλλου ὑγροῦ. Ποία ἡ πυκνότης τοῦ ὑλικοῦ τοῦ σώματος;
(ΑΠ : $1,45 \text{ gr/cm}^3$)

164) Ὁρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἐκ ξύλου, διαστάσεων $5 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$ (ῦψος), ἐπιπλέει εἰς ὕδωρ, βυθιζόμενον κατὰ $2,5 \text{ cm}$ ἐντὸς αὐτοῦ. Ποία μάζα ἐξ ἀργιλίου πρέπει νὰ τεθῇ ἐπ’ αὐτοῦ, ὥστε τὸ παραλληλεπίπεδον καὶ τὸ τεμάχιον τοῦ ἀργιλίου νὰ βυθισθῇ ἐντὸς τοῦ ὕδατος;
(ΑΠ : $15,88 \text{ gr}$)

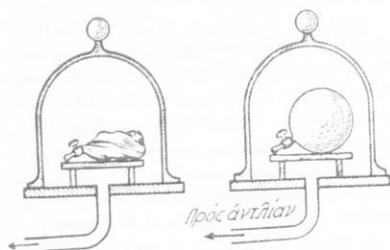
165) Ἐπὶ ράβδῳ, μήκους 100 cm καὶ στρεπτῆς περὶ ὀριζόντιον ἀξονα, διερχόμενον διὰ τοῦ μέσου τῆς, στερεοῦται ἡ κινητὴ μάζα M_1 . Εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον ἐξαρτάται ἡ μάζα M_2 . Τὸ σύστημα ἰσορροπεῖ ὀριζοντίως, ὅταν αἱ ἀποστάσεις τῶν δύο μαζῶν ἀπὸ τοῦ ἀξονος εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσαι πρὸς 50 cm καὶ 48 cm . Ἐάν, τώρα, ἡ μάζα M_2 βυθισθῇ ἐξ ὁλοκλήρου ἐντὸς ὕδατος, ἡ ἰσορροπία καταστρέφεται καί, διὰ νὰ τὴν ἐπαναφέρωμεν, πρέπει νὰ μετακινήσωμεν τὴν μάζαν M_1 εἰς τὰ 42 cm . Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑλικοῦ τοῦ σώματος M_2 .
(ΑΠ : 8 gr/cm^3)



166) Δύο μεταλλιναὶ σφαῖραι, κατεσκευασμέναι ἐξ ὑλικῶν, τῶν ὁποίων αἱ πυκνότητες εἶναι 4 gr/cm^3 καὶ $8,9 \text{ gr/cm}^3$, ἔχουν τὸ αὐτὸ βάρος εἰς τὸ κενόν. Ἐξαερωμέναι τὰς δύο σφαῖρας ἐκ τῶν ἄκρων μοχλοῦ, στρεπτοῦ περὶ ὀριζόντιον ἀξονα καὶ βυθίζομεν αὐτὰς ἐντὸς ὕδατος. Ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ λόγος τῶν μοχλοβραχιόνων, ἵνα τὸ σύστημα ἰσορροπῇ ὀριζοντίως;
(ΑΠ : $1,18 : 1$)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι΄ ΑΕΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

§ 138. Γενικά. Τὰς περισσοτέρας τῶν ἰδιοτήτων τῶν ὑγρῶν ἀνευρίσκομεν καὶ εἰς τὰ ἀέρια. Οὕτω, τὰ ἀέρια ἔχουν βάρος, πιέζουν τὰ τοιχώματα τῶν περιεχόντων αὐτὰ δοχείων, προκαλοῦν ἄνωσιν ἐπὶ σωμάτων, εὐρισκομένων ἐντὸς αὐτῶν κ.λ. Ἐν ἀντιθέσει, ὅμως, πρὸς τὰ ὑγρά, τὰ ἀέρια δὲν ἔχουν ὀρισμένον ὄγκον, ἀλλὰ τείνουν νὰ καταλάβουν διαρκῶς μεγαλύτερον χῶρον. Τοῦτο δεικνύομεν χαρακτηριστικῶς διὰ τοῦ ἑξῆς πειράματος :

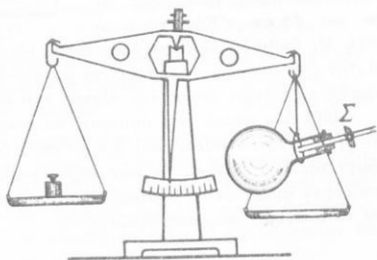


Σχ. 233. Ὅταν ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀέρα ἐκ τοῦ κώδωνος, ἡ κύστις ἐξογκοῦται.

233, ἀριστερὰ) καὶ ἀρχίσωμεν νὰ ἀφαιρῶμεν τὸν ἀέρα, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αὕτη ἐξογκοῦται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον (σχ. 233, δεξιὰ).

§ 139. Βάρος τῶν ἀερίων. Ὅπως εἵπομεν καὶ ἄνωτέρω, τὰ ἀέρια, ὅπως καὶ πᾶν σῶμα, ἔχουν βάρος. Τοῦτο δεικνύομεν διὰ τοῦ ἑξῆς πειράματος : Ἀπὸ φιάλην ἀφαιροῦμεν, δι' ἀεραντλίας, τὸν ἀτμοσφαιρικὸν ἀέρα, καί, ἀφοῦ ἐξαρθήσωμεν αὐτήν ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς φάλαγγος ζυγοῦ, τὴν ἰσορροποῦμεν διὰ σταθμῶν (σχ. 234). Ἀκολούθως, ἀνοίγομεν τὴν στρόφιγγα Σ διὰ νὰ εἰσέλθῃ ὁ ἀτμοσφαιρικὸς ἀήρ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ζυγὸς κλίνει πρὸς τὸ μέρος τῆς φιάλης, ἀπόδειξις ὅτι ὁ ἀτμοσφαιρικὸς ἀήρ ἔχει βάρος.

Ὅλα τὰ ἀέρια, ὑπὸ συνθήκεις συνθήκας (δηλ., ὑπὸ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν καὶ τὴν θερμοκρασίαν τοῦ περιβάλλοντος), ἔχουν μικρὸν εἰδικὸν βάρος, ἐν σχέσει πρὸς τὰ στερεὰ καὶ τὰ ὑγρά (*).



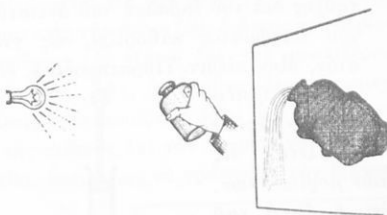
Σχ. 234. Ὁ ζυγὸς κλίνει πρὸς τὸ μέρος τῆς φιάλης, ὅταν ἐντὸς αὐτῆς εἰσέλθῃ ἀήρ.

(*) Οὕτω, ἐνῶ ἐν κυβικόν μέτρον ὕδατος ζυγίζει 1000 kgr* (δηλ., ἓνα τόνον βάρους), ἐν κυβικόν μέτρον ἀέρος ζυγίζει περίπου χιλίας φορές ὀλιγώτερον (1,3 kgr*).

Ὡς γνωστόν, δύο ὑγρά, διαφόρου πυκνότητος, τιθέμενα εἰς δοχεῖον, διατίθενται κατὰ στρώματα· τὸ πυκνότερον κάτω καὶ τὸ ἀραιότερον ἄνω. Κατὰ τὸν αὐτόν, ἀκριβῶς, τρόπον συμπεριφέρονται καὶ δύο ἀέρια διαφόρου πυκνότητος, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι μεταξὺ αὐτῶν δὲν ὑπάρχει σαφὴς διαχωριστικὴ ἐπιφάνεια. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ δείξωμεν ὡς ἑξῆς: Ἐντὸς ποτηρίου θέτομεν ἀνημμένον κηρίον (σχ. 235) καὶ, ἀκολούθως, ἀπὸ φιάλην πίεσεως διοχετεύομεν ἡρέμως διοξειδίου τοῦ ἀνθρακός. Τοῦτο, ὡς εἰδικῶς βαρύτερον τοῦ αέρος, συσσωρεύεται εἰς τὸν πυθμένα καὶ ἀρχίζει νὰ ἀνέρχεται ἐντὸς τοῦ ποτηρίου, ὅταν δὲ φθάσῃ εἰς τὸ ὕψος τῆς φλογός, αὕτη σβέννυται.



Σχ. 235. Τὸ διοξείδιον τοῦ ἀνθρακός, ὡς εἰδικῶς βαρύτερον τοῦ αέρος, παραμένει ἐντὸς τοῦ ποτηρίου.



Σχ. 236. Οἱ ἀτμοὶ τοῦ αἰθέρος ῥέουν ὅπως ἐν ὑγρόν.

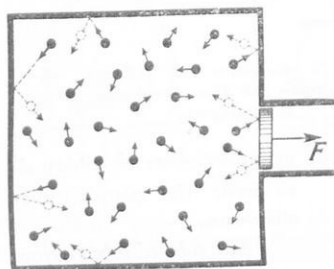
θέρου. Ἡ ροὴ παρακολουθεῖται εὐκρινῶς ἐκ τῆς σκιᾶς, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν οἱ ἀτμοὶ ἐπὶ τινος πετάσματος, φωτιζόμενοι πλαγίως (σχ. 236).

§ 140. Πίσεις ἐντὸς τῶν ἀερίων. 1) *Πίσεις, προερχομένη ἐκ τῆς βαρύτητος.* Ὅπως εἶδομεν ἀνωτέρω, τὰ ἀέρια ἔχουν βάρος, συνεπῶς τὰ ἀνώτερα στρώματα ἐνὸς αερίου πιέζουν, λόγῳ τοῦ βάρους των, τὰ κατώτερα, μὲ ἀποτέλεσμα τὰ στρώματα ταῦτα νὰ εὐρίσκωνται ὑπὸ πίεσιν. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ πίσις αὕτη θὰ μεταβάλλεται μετὰ τοῦ ὕψους, ὅπως συμβαίνει καὶ εἰς τὰ ὑγρά, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ὁ τύπος, ὁ ὁποῖος παρέχει, τώρα, τὴν σχέσιν μεταξὺ πίεσεως καὶ ὕψους εἶναι ἀρκετὰ πολὺπλοκος (*).

(*) Ἡ διαφορὰ τῶν δύο τύπων ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ πυκνότης τῶν ὑγρῶν εἶναι σταθερά, δηλ., ἀνεξάρτητος τῆς πίεσεως, ἐνῶ ἡ πυκνότης τῶν ἀερίων ἀυξάνεται μετὰ τῆς πίεσεως, λόγῳ τοῦ ὅτι τὰ ἀέρια εἶναι ἐξῶχος συμπιεστά καί, ὡς ἐκ τούτου, εἰς τὰ κατώτερα στρώματα ἡ πυκνότης θὰ εἶναι μεγαλυτέρα παρὰ εἰς τὰ ἀνώτερα.

Αἱ διαφοραὶ πιέσεως, αἱ ὀφειλόμεναι εἰς τὴν βαρὺτητα, καθίστανται σημαντικαί, μόνον ὅταν αἱ διαφοραὶ ὕψους ἐντὸς τῆς ἀερίου στήλης εἶναι ἀρκετὰ μεγάλαι. Πρακτικῶς, λοιπόν, αἱ τοιαῦται διαφοραὶ πιέσεως θὰ λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν μόνον κατὰ τὴν μελέτην τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως, ἢ ὅποια, ὥς θὰ ἴδωμεν ἀργότερον, ἐλαττωταί, αὐξανομένου τοῦ ὕψους. Δι' ὅλας τὰς ἄλλας περιπτώσεις αἱ διαφοραὶ αὗται τῆς πιέσεως εἶναι ἀσήμαντοι καί, ὥς ἐκ τούτου, τοῦ λοιποῦ δὲν θὰ λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν.

2) *Πίσεις, ὀφειλόμενη εἰς τὴν ἄτακτον κίνησιν τῶν μορίων τῶν ἀερίων.* Ὅπως θὰ γνωρίσωμεν εἰς ἄλλο Κεφάλαιον, τὰ ἀέρια ἀποτελοῦνται ἀπὸ μόρια, τὰ ὅποια εὐρίσκονται εἰς διαρκῆ ἄτακτον κίνησιν (θερμικὴ κίνησις). Τὰ μόρια ταῦτα, κινούμενα πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις, συναντοῦν τὰ τοιχώματα καὶ συγκρούονται μετ' αὐτῶν, ἐξασκοῦντα, οὕτω, μίαν δύναμιν (σχ. 237). Τὸ πηλίκον τῆς δυνάμεως ταύτης διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἀντιστοίχου τοιχώματος καθορίζει, ὥς γνωστόν, μίαν πίεσιν. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι ἡ πίεσις τῶν ἀερίων ὀφείλεται εἰς

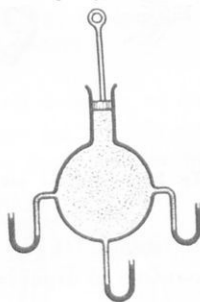


Σχ. 237. Ἡ δύναμις F ὀφείλεται εἰς τὰς κρούσεις τῶν μορίων.

τὴν ἄτακτον θερμικὴν κίνησιν τῶν μορίων τῶν.

Διὰ τὴν πίεσιν ταύτην ἰσχύει ἡ ἀρχὴ τοῦ *Pascal*, ἡ ὁποία διατυπώται ὥς ἑξῆς: «Ἡ πίεσις εἰς ὅλα τὰ σημεῖα ἐνὸς ἀερίου εἶναι ἡ αὐτή» (*).

Τὴν ἀρχὴν τοῦ *Pascal* δεικνύομεν πειραματικῶς διὰ τῆς συσκευῆς τοῦ σχήματος 238: Ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὸν ὄγκον τοῦ περιεχομένου ἀέρος, διὰ μετακινήσεως τοῦ ἐμβόλου πρὸς τὰ ἔσω, ἡ πίεσις αὐξάνεται ὑπὲρ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν, ὅλα δὲ τὰ μανόμετρα δεικνύουν τὴν αὐτὴν ἐνδειξιν.

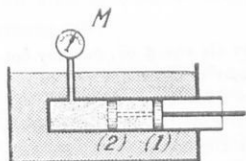


Σχ. 238.

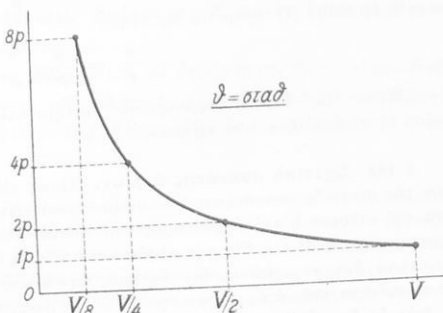
§ 141. *Μεταβολὴ τῆς πιέσεως ἐνὸς ἀερίου μετὰ τοῦ ὄγκου.* — **Νόμος Boyle - Mariotte (Μπόϋλ - Μαριότ).** Πληροῦμεν διὰ τινος ἀερίου μεταλλινὸν κυλινδρικὸν δοχεῖον καὶ κλείομεν αὐτὸ δι' ἐμβόλου (σχ. 239).

(*) Ἡ ἀρχὴ τοῦ *Pascal* ἰσχύει μόνον, ὅταν τὰ ἀέρια εὐρίσκονται ἐν ἡρεμίᾳ. Ὡς θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ ἐπόμενον Κεφάλαιον, κατὰ τὴν κίνησιν τῶν ἀερίων παρουσιάζονται διαφοραὶ πιέσεως ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον.

Ἐν συνεχείᾳ τοποθετοῦμεν τὸ δοχεῖον τοῦτο ἐντὸς λουτροῦ σταθερᾶς θερμοκρασίας. Ἡ ἐλάχιστε θέρμειος τοῦ ἐμβόλου μᾶς παρέχει τὸν ὄγκον τοῦ αερίου, ἐνῶ τὸ μανόμετρον M μετρεῖ τὴν πίε-



Σχ. 239. Διάταξις διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ νόμου Boyle-Mariotte (ἀρχή).



Σχ. 240. Γραφικὴ παράστασις τοῦ νόμου Boyle-Mariotte.

σιν αὐτοῦ. Ἐστω V καὶ p ὁ ὄγκος καὶ ἡ πίεσις τοῦ αερίου, ὅταν τὸ ἐμβόλον εὐρίσκεται εἰς τὴν θέσιν (1). Ἄν μετακινήσωμεν τὸ ἐμβόλον καὶ τὸ φέρωμεν εἰς τὴν θέσιν (2), ὁ ὄγκος τοῦ αερίου ἐλαττωταί εἰς τὸ ἥμισον ($V/2$). Μετροῦντες τὴν πίεσιν διὰ τοῦ μανομέτρου, εὐρίσκομεν ὅτι αὕτη ἔγινε διπλασία ($2p$). Ἄν, ἀκολούθως, ἐλαττώσωμεν τὸν ὄγκον εἰς τὸ τρίτον ($V/3$), ἡ πίεσις τριπλασιάζεται ($3p$) κ.ο.κ. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι τὸ γινόμενον τῆς πίεσεως ἐπὶ τὸν ὄγκον εἶναι τὸ αὐτὸ εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις. Δυνάμεθα, ἐπομένως, νὰ γράψωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$p \cdot V = \text{σταθ.} \quad \text{Νόμος Boyle-Mariotte} \quad (1)$$

Ἐκ τῆς ἐξίσωσεως ταύτης λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$p = \text{σταθ.} \cdot \frac{1}{V}.$$

Ἡ, μὲ λέξεις:

«Υπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν, ἡ πίεσις δεδομένης ποσότητος ἐνὸς αερίου εἶναι ἀνιστρόφως ἀνάλογος τοῦ ὀγκου αὐτῆς».

Ἡ ἐξίσωσις (1) παρίσταται γραφικῶς ὑπὸ τοῦ διαγράμματος τοῦ σχήματος 240.

§ 142. Μεταβολή της πυκνότητας ενός αερίου μετά της πίεσεως. Ἐάν m εἶναι ἡ μᾶζα δεδομένης ποσότητος αερίου, τὸ ὅποιον ὑπὸ πίεσιν p ἔχει ὄγκον V , ἡ πυκνότης αὐτοῦ θὰ εἶναι $\rho = m/V$. Ἐάν ὁ ὄγκος του μεταβληθῇ εἰς V' , ἡ πίεσις του μεταβάλλεται εἰς p' , ὅποτε ἡ πυκνότης τοῦ αερίου θὰ εἶναι, τώρα, $\rho' = m/V'$. Ἐπειδὴ ἡ μᾶζα m παρέμεινε σταθερὰ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{V'}{V}. \quad (1)$$

Ἀφ' ἐτέρου, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον Boyle-Mariotte, ἔχομεν τὸν τύπον

$$p \cdot V = p' \cdot V' \quad \eta \quad \frac{p}{p'} = \frac{V'}{V}$$

όποτε ή εξίσωσις (1) γράφεται ως εξής :

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{p}{p'}$$

*Ητοι: 'Εφ' ὅσον ή θερμοκρασία διατηρεῖται σταθερά, αἱ πυκνότητες ἑνὸς αερίου εἶναι ἀνάλογοι τῶν πιέσεων.

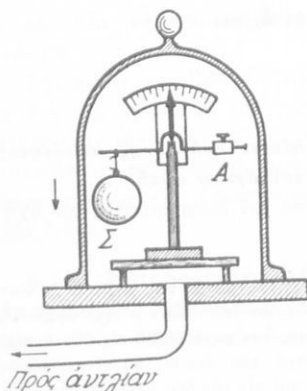
§ 143. Σχετική πυκνότης αερίων. Ὅπως εἶδομεν εἰς τὴν § 67, διὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς σχετικῆς πυκνότητος τῶν στερεῶν καὶ τῶν ὑγρῶν συγκρίνομεν τὴν πυκνότητα τοῦ στερεοῦ ἢ τοῦ ὑγροῦ πρὸς τὴν πυκνότητα τοῦ ὕδατος, εὐρισκομένου εἰς θερμοκρασίαν $+4^{\circ} \text{C}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν αερίων ὀρίζομεν τὴν σχετικὴν πυκνότητα διὰ συγκρίσεως, ὅχι ὡς πρὸς τὴν πυκνότητα τοῦ ὕδατος, ἀλλ' ὡς πρὸς τὴν πυκνότητα τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ αέρος. Οὕτω, ὡς **σχετικὴν πυκνότητα** $\rho_{\sigma\chi}$ **ἐνὸς αερίου** ὀρίζομεν τὸ πηλίκον τῆς πυκνότητος $\rho_{\alpha\epsilon\rho\iota\omicron\nu}$ τοῦ αερίου, διὰ τῆς πυκνότητος $\rho_{\alpha\tau\mu. \acute{\alpha}\eta\rho}$ τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ αέρος, εὐρισκομένου ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν καὶ πίεσιν, ὅπως τὸ αέριον. *Ητοι εἶναι

$$\rho_{\sigma\chi} = \frac{\rho_{\alpha\epsilon\rho\iota\omicron\nu}}{\rho_{\alpha\tau\mu. \acute{\alpha}\eta\rho}}$$

Ὅπως ἀπεδείχθη διὰ τὰ στερεὰ καὶ τὰ ὑγρά, οὕτω καὶ διὰ τὰ αέρια ἰσχύει τὸ ἐξῆς: Ἡ σχετικὴ πυκνότης ἑνὸς αερίου εἶναι τὸ πηλίκον τῆς μάζης δεδομένης ποσότητος ἐκ τοῦ αερίου διὰ τῆς μάζης ἴσου ὅγκου ἀτμοσφαιρικοῦ αέρος, εὐρισκομένου εἰς τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν καὶ πίεσιν, ὅπως τὸ αέριον.

Σημείωσις. Τὴν σχετικὴν πυκνότητα ἑνὸς αερίου δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν καὶ ὅταν γνωρίζωμεν τὸ μοριακὸν τοῦ βάρους. Περί τῆς μεθόδου, ὅμως, ταύτης βλ. κατωτέρω § 234.

§ 144. Ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους. Ὅπως πᾶν σῶμα, εὐρισκόμενον



Σχ. 241. Ὅταν ἀφαιρέσωμεν τὸν αέρα, ἡ ἄνωσις μηδενίζεται.

ἐντὸς ἑνὸς ὑγροῦ, ὑφίσταται ἄνωσιν, οὕτω ἄνωσιν ὑφίσταται καὶ πᾶν σῶμα, εὐρισκόμενον ἐντὸς ἑνὸς αερίου. Τοῦτο δεικνύομεν διὰ τῆς συσκευῆς, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ σχῆμα 241: Ἡ σφαῖρα Σ εἶναι κοίλη, ἰσορροπεῖται δὲ εἰς τὸν ἀέρα ὑπὸ τοῦ ἀντιβάρου Α, τὸ ὅποῖον ἔχει μικρὸν ὅγκον. Ἐὰν θέσωμεν τὴν συσκευὴν ὑπὸ τὸν κώδωνα ἀεραντλίας καὶ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀέρα, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ἰσορροπία καταστρέφεται καὶ ἡ φάλαγξ κλίνει πρὸς τὸ μέρος τῆς σφαίρας. Τοῦτο δηλοῖ ὅτι ἡ σφαῖρα εἶναι πραγματικῶς βαρύτερα τοῦ ἀντιβάρου, λόγῳ, ὅμως, τοῦ μεγαλύτερου ὅγκου αὐτῆς, ὑφίσταται καὶ μεγαλύτεραν ἄνωσιν ἐντὸς τοῦ αέρος, οὕτω δὲ ἐπέρχεται ἰσορροπία. Ὅταν, ὅμως, ἀφαιρεθῇ ὁ αἶρ, δὲν ὑπάρχει πλέον ἄνωσις καί, ὡς ἐκ τούτου, ὁ ζυγὸς κλίνει πρὸς τὴν σφαῖραν.

Διὰ τὴν ἄνωσιν ταύτην (ὅπως καὶ διὰ τὴν ἄνωσιν ἐντὸς ὑγροῦ) ἰσχύει, ὁμοίως, ἡ *ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους*, ἡ ὁποία διατυπώται ὡς ἑξῆς: «*Πάν σῶμα, εὐρισκόμενον ἐντὸς ἀερίου, ὑφίσταται ἄνωσιν, ἴσην πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ἀερίου*».

Λόγω τῆς ἀνώσεως ταύτης ἀνέρχονται τὰ αερόστατα, ὅταν πληρωθῶν δι' ἀερίου, εἰδικῶς ἐλαφροτέρου τοῦ ἀέρος (π.χ., διὰ φωταερίου, ὑδρογόνου κ.λ.) ἢ ὅταν ὁ ἐντὸς αὐτῶν ἀὴρ θερμυνθῇ, ὁπότε ἐλαττοῦται ἡ πυκνότης του.

§ 145. Ἀερόστατα. Τὸ *αερόστατον* ἀποτελεῖται ἐκ σάκκου ἐξ ὑφάσματος αεροστεγοῦς ἢ ἐξ ἐλαστικοῦ, ὁ ὁποῖος εἶναι πλήρης ἀερίου, εἰδικῶς ἐλαφροτέρου τοῦ ἀέρος (π.χ., διὰ φωταερίου, ὑδρογόνου, ἡλίου) καὶ ἀπὸ τοῦ ὁποίου κρεμάται καταλλήλως ἡ λέμβος, ἡ περιλαμβάνουσα τοὺς αερόναυτας. Λόγω τῆς ἀνώσεως, ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ βάρους τοῦ αεροστάτου, εὐθὺς ὡς ἀφεθῇ τοῦτο ἐλευθερον, ἀρχίζει ν' ἀνέρχεται ἐντὸς τῆς ἀτμοσφαίρας. Ἐφ' ὅσον, ὁμως, τὸ αερόστατον ἀνυψοῦται, ἔρχεται διαδοχικῶς εἰς σημεῖα μικροτέρας ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως, ὁπότε τὸ ἐντὸς αὐτοῦ εὐρισκόμενον αἶμα διαστέλλεται καὶ δύναται νὰ προκαλέσῃ διάρρηξιν τοῦ περιβλήματος.

Τὰ αερόστατα τοῦ τύπου τούτου χρησιμοποιοῦνται διὰ διαφόρους μετεωρολογικὰς παρατηρήσεις. Πρὸς τοῦτο τοποθετοῦνται ἐντὸς τῆς λέμβου διάφορα *αὐτογραφικὰ ὄργανα*, ὅταν δὲ τὸ αερόστατον ἀνέλθῃ εἰς μέγα ὕψος (20 ἕως 25 km), τὸ περιβλήμα του διαρρηγνύεται, ὁπότε ἡ λέμβος πίπτει μετὰ τὴν βοήθειαν ἀλεξιπτωτοῦ.

Ὅταν τὸ περιβλήμα δὲν εἶναι ἐλαστικόν, τὸ αερόστατον θὰ διαρραγῇ εἰς μικρὸν ὕψος. Διὰ ν' ἀποφευχθῇ τοῦτο, ὁ σὺλὴν πληρώσεως, ὁ ὁποῖος εὐρίσκεται εἰς τὸ κάτω σημεῖον τοῦ αεροστάτου, δὲν κλείεται, ἀλλὰ παραμένει ἀνοικτός, ἵνα διαφεύγῃ τὸ αἶμα κατὰ τὴν διαστολήν.

Ἀνυψωτικὴ δύναμις αεροστάτου. Οὕτω καλεῖται τὸ φορτίον F , τὸ ὁποῖον δύναται νὰ φέρῃ τὸ αερόστατον, εὐρισκόμενον ἐν ἰσορροπίᾳ.

Ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς: Ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις F ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῆς ἀνώσεως A καὶ τοῦ ὀλικοῦ βάρους $B_{ολ}$ τοῦ αεροστάτου. Ἦτοι

$$F = A - B_{ολ}. \quad (1)$$

Ἡ ἄνωσις A εἶναι, ὡς γνωστόν, ἴση πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ἀέρος. Ἦτοι

$$A = \varepsilon_{\alpha\eta\rho} \cdot V, \quad (2)$$

ἐνθα $\varepsilon_{\alpha\eta\rho}$ εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος καὶ V ὁ ὄγκος τοῦ αεροστάτου.

Ἀφ' ἑτέρου, τὸ ὀλικὸν βάρος $B_{ολ}$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ βάρος $B_{περίβλ.}$ τοῦ περιβλήματος (καὶ τῆς λέμβου) καὶ τοῦ βάρους $B_{\alpha\epsilon\rho\iota\omicron\nu}$ τοῦ ἀερίου. Ἦτοι

$$B_{ολ} = B_{περίβλ.} + \varepsilon_{\alpha\epsilon\rho\iota\omicron\nu} \cdot V \quad (3)$$

ἐνθα $\varepsilon_{\alpha\epsilon\rho\iota\omicron\nu}$ εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀερίου. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν

$$F = (\varepsilon_{\alpha\eta\rho} - \varepsilon_{\alpha\epsilon\rho\iota\omicron\nu}) \cdot V - B_{περίβλ.}$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου προκύπτει ὅτι ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις τοῦ αεροστάτου εἶναι τόσο μεγαλύτερα, ὅσον μεγαλύτερα εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν εἰδικῶν βαρῶν τῶν δύο ἀερίων.

Ἀερόπλοια. Τὰ αερόστατα δὲν δύναται νὰ κυβερνηθῶν, ἀλλὰ παρασύρονται

ὑπὸ τοῦ ἀνέμου. Διὰ τοῦτο κατασκευάσθησαν εἰς τὸ παρελθὸν πηδαλιουχοῦμενα ἀερόστατα (ἀερόπλοια), τὰ ὁποῖα εἶχον ἐφοδιασθῇ διὰ κινητηρίου συστήματος (ἑλιξ), καταλλήλων πτερυγίων καὶ πηδαλίων διὰ νὰ δύνανται νὰ κυβερνῶνται. Ἐφ' ἐτέρου, διὰ τὴν ἐλάττωσιν τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος κατὰ τὴν κίνησιν, τὸ σχῆμα των ἦτο ἰχθυοειδές (βλ. § 158). Τὰ ἀερόπλοια δὲν χρησιμοποιοῦνται σήμερον, ἀντικατασταθέντα ὑπὸ τῶν ἀεροπλάνων.

§ 146. Ἀτμοσφαιρική πίεσις. Ὁ ἀήρ, ὁ περιβάλλων τὴν Γῆν, ἔχει βάρος. Ὡς ἐκ τούτου, τὰ ἀνώτερα στρώματα, πιέζοντα τὰ κατώτερα, προκαλοῦν πίεσιν, ἣ ὁποῖα καλεῖται **ἀτμοσφαιρική πίεσις**.



Σχ. 242.

Τὴν ἀτμοσφαιρικήν πίεσιν δεικνύομεν διὰ τοῦ ἐξῆς ἀπλοῦ πειράματος: Γεμίζομεν ἐντελῶς δι' ὕδατος ἓν ποτήριον καὶ καλύπτομεν αὐτὸ διὰ φύλλον χάριτον, προσέχοντες νὰ μὴ μείνῃ ἐντὸς καμμία φυσαλλίς ἀέρος. Ἄν, ἀκολούθως, ἀναστρέψωμεν μετὰ προσοχῆς τὸ ποτήριον (σχ. 242), θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ὕδωρ δὲν χύνεται, διότι τὸ φύλλον τοῦ χάριτου, πιεζόμενον ὑπὸ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως, δὲν ἀποσπᾶται ἐκ τοῦ ποτηρίου.

Τὴν ὑπαρξιν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως δυνάμεθα νὰ πιστοποιήσωμεν καὶ ἐκ τῆς παραμορφώσεως, τὴν ὁποῖαν ὑφίσταται ἓν λευκοσιδηροῦν δοχεῖον, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἐξ αὐτοῦ τὸν ἀτμοσφαιρικὸν ἀέρα. Διὰ τὸ πείραμα τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν μικρὸν λευκοσιδηροῦν δοχεῖον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἔχομεν συγκολληθεῖν ἓνα ὀρειχάλκινον σωλῆνα. Συνδέομεν δι' ἐλαστικοῦ σωλῆνος τὸ δοχεῖον μὲ μίαν ἀεραντλίαν καί, ἀκολούθως, θέτομεν εἰς λειτουργίαν τὴν ἀντλίαν. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ δοχεῖον ὑφίσταται ἔντονον παραμόρφωσιν (σχ. 243). Τοῦτο ἐξηγεῖται ὡς ἐξῆς: Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ δοχείου ἡ πίεσις εἶναι, περίπου, ἴση πρὸς μὴδὲν (ἐφ' ὅσον ἀφηρέθη ὁ ἀτμοσφαιρικός ἀήρ), καί, ὡς ἐκ τούτου, οὐδεμία δύναμις ἐκ τῶν ἔσω ἐξασκεῖται ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων τοῦ δοχείου.



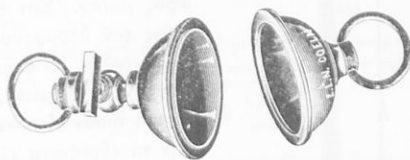
Σχ. 243. Ἐάν ἀφαιρέσωμεν τὸν ἐντὸς τοῦ δοχείου ἀέρα, τὸ τοῦτο συνθλίβεται.

Ἐξω, ὅμως, τοῦ δοχείου ἡ πίεσις εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικήν καί, συνεπῶς, ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ τοιχώματος θὰ ἐξασκῆται μεγάλη δύναμις μὲ φορὰν πρὸς τὰ ἔσω (*). Εἶναι προφανές ὅτι, ὑπὸ τὴν ἐπί-

(*) Ἡ δύναμις εἶναι ἴση πρὸς $p \cdot S$. Ἐπειδὴ εἶναι $p = 1 \text{ Atm} = 1,033 \text{ kg/cm}^2$, τὸ δὲ ἐμβαδὸν S τοῦ πυθμένος εἶναι, π.χ., ἴσον πρὸς 500 cm^2 , ἡ δύναμις ἐπ' αὐτοῦ θὰ εἶναι, περίπου, ἴση πρὸς $0,5 \text{ τόννοι βάρους!}$

δρασιν τῆς μεγάλης ταύτης δυνάμεως, τὰ λεπτὰ τοιχώματα ὑποχωροῦν καὶ τὸ δοχεῖον συνθλίβεται.

★ Ἐνταῦθα ἀναφέρομεν καὶ τὸ πείραμα τῶν ἡμισφαιρίων τοῦ Μαγδεμβούργου: Ἡ συσκευή αὐτὴ ἀποτελεῖται ἐκ δύο κοίλων μεταλλίνων ἡμισφαιρίων (σχ. 244), ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν φέρει σωληνίσκον μετὰ στρόφιγγος, διὰ τὸ ἀφαιρῆται, τῇ βοήθειᾳ ἀντλίας, ὁ ἀτμοσφαιρικός ἀήρ. Ἐάν, ἀφοῦ φέρωμεν εἰς ἐπαφὴν τὰ δύο ἡμισφαίρια, ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀέρα καὶ προσπαθήσωμεν νὰ τὰ ἀποχωρήσωμεν (σχ. 245), θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τοῦτο



Σχ. 244.



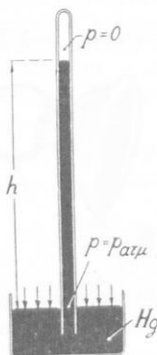
Σχ. 245. Δέκα ἑξ ἑλπίοι δὲν ἠδυνήθησαν νὰ ἀποχωρήσουν τὰ ἡμισφαίρια κατὰ τὸ πείραμα τοῦ Guericke (Γκέρικε), ἐκτελεσθὲν εἰς τὴν πόλιν Magdeburg (Μαγδεμβούργον). (Ἐάν τὸ ἓν τῶν ἡμισφαιρίων προσεδέετο εἰς ἀκλόνητον στήριγμα, θὰ ἦσαν ἀρκετοὶ μόνον οἱ 8 ἑλπίοι).

εἶναι ἀδύνατον, διότι, λόγῳ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως, ἔξασκεῖται ἐπ' αὐτῶν μεγάλη δύναμις.

§ 147. Πείραμα Torricelli (Τορρισελλι). Λαμβάνομεν σωλῆνα ὑάλινον, μήκους 90 cm περίπου καὶ κλειστὸν εἰς τὸ ἓν ἄκρον τοῦ καί, ἀφοῦ τὸν γεμίσωμεν δι' ὕδραργύρου, ἀναστρέφομεν αὐτὸν ἐντὸς λεκάνης, περιεχομένης, ὁμοίως, ὕδαργγυρον (σχ. 246). Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ὕδαργγυρος τοῦ σωλῆνος κατέρχεται καὶ σταματᾷ εἰς ἓν ὕψος h ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὕδαργγυρου τῆς λεκάνης. Τὸ ὕψος τοῦτο εἶναι, περίπου, ἴσον πρὸς 76 cm, ἐάν τὸ πείραμα γίνῃ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης καὶ ὑπὸ συνήθεις μετεωρολογικᾶς συνθήκας.

Τὸ πείραμα τοῦτο (καθὼς καὶ τὰ περιγραφέντα προηγουμένως) ἀποδει-

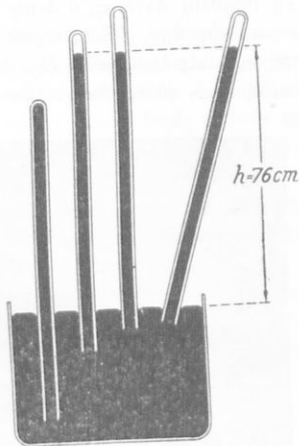
κνύει την ύπαρξιν της ατμοσφαιρικής πίεσεως: Ὁ χώρος ὑπεράνω τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης δὲν περιέχει ἀέρα, ἐπομένως εἰς τὸν χώρον αὐτὸν ἡ πίεσις εἶναι, πρακτικῶς, ἴση πρὸς μηδέν. Ἐὰν ἡ πίεσις ἐπὶ τῆς ἐλευθέρᾳ ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου τῆς λεκάνης ᾗτο, ἐπίσης, ἴση πρὸς μηδέν, θὰ ἔπρεπε, κατὰ τὴν ἀρχὴν τῶν συγκοινωνούντων δοχείων, ἡ ἐλευθέρᾳ ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου τόσον εἰς τὸν σωλῆνα, ὅσον καὶ εἰς τὴν λεκάνην νὰ εὐρίσκετο εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἐπειδὴ, ὁμως, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου τῆς λεκάνης ἡ πίεσις εἶναι ἴση πρὸς 1 Atm, δημιουργεῖται μεταξὺ τῶν ἡ διαφορὰ ὕψους



Σχ. 246. Πείραμα Torricelli.

τῶν 76 cm. Ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὸ πείραμα διὰ σωλῆνος ἄλλης διαμέτρου, θὰ εὕρωμεν ὅτι τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης παραμένει ἀμετάβλητον (76 cm).

Εἰς τὸ σχῆμα 247 παρακολουθοῦμεν ἓνα σωλῆνα Torricelli, τὸν ὁποῖον ἀνυψοῦμεν, οὕτως ὥστε νὰ εὐρίσκεται διαδοχικῶς ὀλιγώτερον βυθισμένος ἐντὸς τῆς λεκάνης τοῦ ὑδραργύρου. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὴν τιμὴν τῶν 76 cm, ἡ τιμὴ δὲ αὕτη διατηρεῖται σταθερά, ἀκόμη καὶ ἂν ὁ σωλῆν εὐρίσκεται ὑπὸ κλίσιν.



Σχ. 247.

Τὸ πείραμα τοῦ Torricelli μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν καὶ τὴν τιμὴν τῆς ατμοσφαιρικῆς πίεσεως. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐπὶ τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις, τὸ βάρος τῆς B καὶ ἡ δύναμις F , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς κάτω βάσεως τῆς στήλης ὁ ὑπόλοιπος ὑδράργυρος. Ἐκ τῶν δυνάμεων αὐτῶν τὸ βάρος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης εἶναι ἴσον πρὸς

$$B = s \cdot S \cdot h,$$

ἐνθα S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς διατομῆς τοῦ σωλῆνος καὶ s τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου. Ἀφ' ἑτέρου, ἡ δύναμις F εἶναι ἴση πρὸς

$$F = p_{atm} \cdot S,$$

διότι ἡ πίεσις εἰς τὴν κάτω βάσιν εἶναι, κατὰ τὴν ἀρχὴν τῶν συγκοινωνούντων δοχείων, ἴση πρὸς τὴν ατμοσφαιρικὴν πίεσιν p_{atm} . (Ἐπὶ τῆς ἄνω βάσεως τῆς στήλης οὐδεμίαν δύναμις ἐξασκεῖται, ἀφοῦ ἐκεῖ, ὡς εἶδομεν, ἡ πίεσις εἶναι ἴση πρὸς μηδέν).

Ἐφ' ὅσον ἡ ὑδραργυρική στήλη ἰσορροπεῖ, ἔπεται ὅτι ἡ συνισταμένη τῶν ἐπ' αὐτῆς ἐξασκουμένων δύο δυνάμεων B καὶ F θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἦτοι

$$p_{\text{ατμ}} \cdot S - \varepsilon \cdot S \cdot h = 0$$

ἢ

$$p_{\text{ατμ}} = \varepsilon \cdot h. \quad (1)$$

Ἐπειδὴ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου εἶναι ἶσον πρὸς $13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, εὐρίσκομεν, δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (1), ὅτι ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις εἶναι ἴση πρὸς

$$p_{\text{ατμ}} = 13,6 \cdot 76 \frac{\text{gr}^*}{\text{cm}^3} \cdot \text{cm} = 1033 \frac{\text{gr}^*}{\text{cm}^2} = 1,033 \frac{\text{kg}^*}{\text{cm}^2}.$$

Τὴν πίεσιν ταύτην, ὡς εἶδομεν καὶ εἰς προηγουμένην παράγραφον, χρησιμοποιοῦμεν ὡς μονάδα πίεσεως εἰς τὰς μετρήσεις τῆς Φυσικῆς ὑπὸ τὸ ὄνομα **φυσικῆ ἀτμόσφαιρα** (1 Atm).

Ἦτοι εἶναι

$$1 \text{ Atm} = 1,033 \frac{\text{kg}^*}{\text{cm}^2} (*)$$

Ἐπειδὴ ἡ πίεσις 1 mm gH ἐκλήθη 1 Torr , ἔπεται ὅτι μία φυσικὴ ἀτμόσφαιρα ἰσοῦται πρὸς 760 Torr . Ἦτοι εἶναι

$$1 \text{ Atm} = 760 \text{ Torr}.$$

§ 148. Ἐφαρμογαὶ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως. Διὰ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως λειτουργοῦν διάφορα ὄργανα, μερικά τῶν ὁποίων καὶ περιγράφομεν.

Τὸ **σιφώνιον** (σχ. 248) εἶναι ὄργανον, διὰ τοῦ ὁποίου μεταφέρομεν μικρὰν ποσότητα ὑγροῦ ἀπὸ ἓν δοχεῖον εἰς ἄλλο. Πρὸς τοῦτο ἐμβαπτιζομεν τὸ ἓν ἄκρον τοῦ σιφωνίου ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ καὶ διὰ τοῦ στόματος, τὸ ὁποῖον φέρομεν εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον, ἀναρροφῶμεν τὸν ἐντὸς τοῦ σιφωνίου ἀέρα. Οὕτω, ἡ πίεσις ἐντὸς τοῦ σιφωνίου ἐλαττοῦται καὶ τὸ ὑγρὸν, λόγῳ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως, ἀνέρχεται ἐντὸς τοῦ σιφωνίου. Ἀκολουθῶς, κλείομεν διὰ τοῦ δακτύλου τὸ ἄνω ἄκρον καὶ ἀνασύρομεν τὸ σιφώνιον ἐκ τοῦ ὑγροῦ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἐκρέει ὀλίγον ὑγρὸν καὶ κατόπιν ἡ ἐκροὴ παύει. Τώρα, ἡ πίεσις p_1 εἰς τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ εἶναι μικροτέρα τῆς πίεσεως p_2 εἰς τὸ ἀνοικτὸν ἄκρον (ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικήν).

Ἀνάλογος εἶναι καὶ ἡ λειτουργία τοῦ σταγονομέτρου.

Σχ. 248.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς, ἀκριβῶς, ἀρχῆς στηρίζεται καὶ ἡ λειτουργία τῆς **σιφώνιον**.

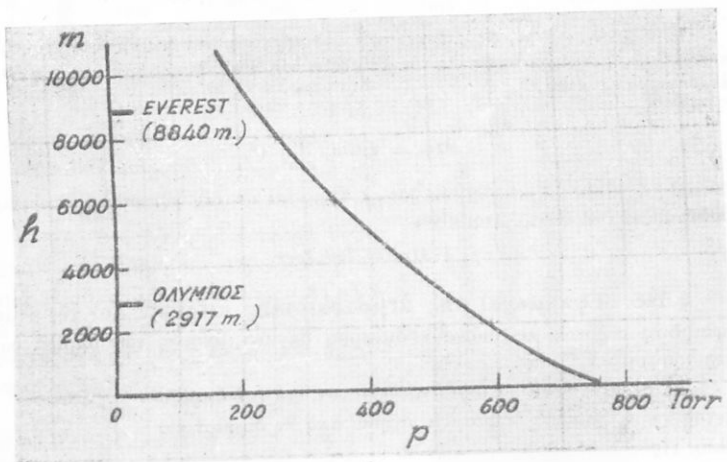
γιατρίκῃς σύριγγος, τῶν ἀναρροφητικῶν ὑδραντλιῶν (βλ. κατωτέρω) κ.λ.



(*) Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ φυσικὴ ἀτμόσφαιρα διαφέρει τῆς συνήθως χρησιμοποιουμένης τεχνικῆς ἀτμόσφαιρας ($1 \text{ at} = 1 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$) κατὰ $3,3\%$.

§ 149. Ἐλάττωσις τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως μετὰ τοῦ ὕψους.

Ἐάν μετρήσωμεν τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν εἰς διάφορα ὕψη ἐντὸς τῆς ἀτμοσφαίρας, θὰ εὕρωμεν ὅτι, αὐξανομένου τοῦ ὕψους, ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις ἐλαττοῦται. Ὁ νόμος, ὅμως, τῆς ἐλαττώσεως τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως μετὰ τοῦ ὕψους δὲν εἶναι τόσον ἀπλοῦς, ὅσον εἰς τὰ ὑγρά, ἀλλὰ πολυπλοκώτερος, διότι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ αἵρος δὲν εἶναι σταθερόν, ἀλλ' ἐλαττοῦται, ὅσον ἀνερχόμεθα ἐντὸς τῆς



Σχ. 249. Γραφικὴ παράστασις τῆς σχέσεως μετὰ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως καὶ τοῦ ὕψους ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης.

ἀτμοσφαίρας (καὶ τοῦτο λόγῳ τῆς μεγάλης συμπιεστότητος τῶν αἰρίων). Δυνάμεθα, ὅμως, νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν σχέσιν μετὰ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως καὶ τοῦ ὕψους ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης διὰ τοῦ διαγράμματος τοῦ σχήματος 249 (*).

§ 150. Βαρόμετρα. Ὀργανα, διὰ τῶν ὁποίων μετροῦμεν τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν, καλοῦνται **βαρόμετρα**. Τούτων ὑπάρχουν δύο τύποι, τὰ **ὕδραργυρικά** καὶ τὰ **μεταλλικά**.

1) **Ὑδραργυρικὸν βαρόμετρον.** Τοῦτο ἀποτελεῖται, κατ' ἀρχήν, ἐκ σωλῆρος Torricelli, καταλήγοντος εἰς εὐρὺ δοχεῖον (σχ. 250) καὶ ἐκ κλίμακος, τῇ βοηθείᾳ τῆς ὁποίας μετρεῖται ἡ διαφορὰ στάθμης μετὰ τῶν

(*) Αὐξανομένου τοῦ ὕψους κατὰ 10 m, περίπου, ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις ἐλαττοῦται κατὰ 1 Torr.

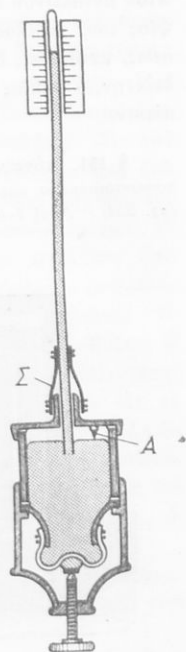
ἐλευθέρων ἐπιφανειῶν τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὸν σωλῆνα καὶ εἰς τὸ δοχεῖον (*).



Σχ. 250.
Υδραργυρικὸν
βαρόμετρον (ἀρχή).

Ἐπειδὴ αἱ διακυμάνσεις τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως, λόγῳ μετεωρολογικῶν συνθηκῶν, δὲν εἶναι πολὺ μεγάλα εἰς ἓνα τόπον, ἀρκεῖ ἡ χρησις μέρους τῆς ὅλης κλίμακος (περιοχὴ περὶ τὰ 760 mm).

Βαρόμετρον Fortin (Φορτέν). Τύπος ὑδραργυρικοῦ βαρομέτρου, δυνάμενον νὰ μεταφερθῇ, χωρὶς ὁ ὑδραργυρος νὰ χυθῇ καὶ χωρὶς τὸ βαρόμετρον νὰ κινδυνεύσῃ νὰ θραυσθῇ ἐκ τῶν ἀποτόμων κτυπημάτων τοῦ ὑδραργύρου, εἶναι τὸ **βαρόμετρον Fortin** (σχ. 251). Ἡ λεκάνη τοῦ βαρομέτρου αὐτοῦ ἔχει πυθμένα δερμάτινον, δυνάμενον νὰ μετακινήθῃ διὰ κοιλίου, εἰς τρόπον ὥστε νὰ μεταβάλλεται ἡ χωρητικότης τῆς λεκάνης. Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις μεταδίδεται ἐπὶ τοῦ ὑδραργύρου τῆς λεκάνης διὰ μέσου τῶν πόρων τοῦ δερματίνου συνδέσμου Σ, οἱ ὁποῖοι, ὅμως, δὲν ἀφήνουν τὸν ὑδραργυρον νὰ ἐξέλθῃ. Προκειμένου νὰ μεταφερθῇ τὸ βαρόμετρον, ἀναβιβάζεται ὁ πυθμὴν, ἕως ὅτου ὅλος ὁ χῶρος πληρωθῇ δι' ὑδραργύρου. Διὰ νὰ θέσωμεν ἐκ νέου εἰς λειτουργίαν τὸ βαρόμετρον, καταβιβάζομεν τὸν πυθμὴν, μέχρις ὅτου ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου τῆς λεκάνης φθάσῃ ἀκριβῶς εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκίδος Α. Ἀκολουθῶς, ἐπὶ τῆς κλίμακος, ἀναγινώσκομεν τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν εἰς χιλιοστὰ στήλης ὑδραργύρου (Torr).

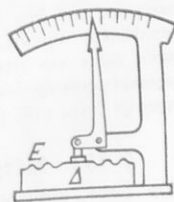


Σχ. 251.
Βαρόμετρον Fortin.



Σχ. 252. Συνήθης τύπος
μεταλλικοῦ βαρομέτρου.

2) **Μεταλλικὰ βαρόμετρα.** Διὰ μετρήσεις ὅχι μεγάλης ἀκρίβειας χρησιμοποιοῦνται τὰ **μεταλλικὰ βαρόμετρα** (σχ. 252 καὶ σχ. 253), τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦνται, κατ' ἀρχήν, ἐξ ἀε-



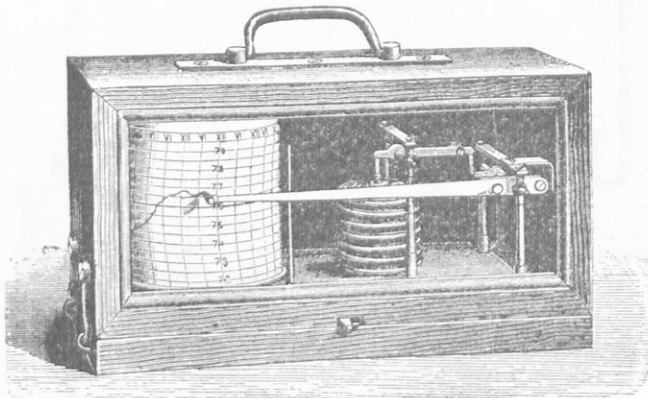
Σχ. 253. Μεταλλικὸν
βαρόμετρον (ἀρχή).

αἰσθητῶν μεταβολῶν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως. Ὁ τύπος οὗτος βαρομέτρου καλεῖται **σιφωνοειδὲς βαρόμετρον**.

(*) Εἰς τὴν πραγματικότητα, διὰ λόγους οἰκονομίας ὑδραργύρου, ὁ σωλὴν εἰς τὸ ἐνδιάμεσον αὐτοῦ τμήμα ἔχει μικρὰν διάμετρον. Εἰς τὸ ἄνω ἄκρον ἡ διάμετρος τοῦ σωλῆνος εἶναι κατὰ τι μεγαλυτέρα, ἵνα ἀποφεύγονται σφάλματα λόγῳ τριχοειδῶν φαινομένων. Ὁ τύπος οὗτος βαρομέτρου καλεῖται **σιφωνοειδὲς βαρόμετρον**.

ροχένον κυλινδρικοῦ δοχείου A , τοῦ ὁποίου ἡ ἄνω βᾶσις ἀποτελεῖται ἐκ λεπτοῦ μεταλλίνου ἐλάσματος E , φέροντος πτυχώσεις πρὸς αὐξήσιν τῆς εὐκαμψίας του. Τὸ ἔλασμα τοῦτο, παραμορφούμενον ὑπὸ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως, μεταδίδει, διὰ καταλλήλου συστήματος μοχλῶν, τὴν μετακίνησιν εἰς δείκτην, ὁ ὁποῖος παρέχει ἐνώπιον κλίμακος τὴν ζητούμενην ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν.

§ 151. **Αὐτογραφικὰ βαρόμετρα ἢ βαρογράφοι.** Τὰ μεταλλικὰ βαρόμετρα, τροποποιούμενα καταλλήλως, δύναται νὰ μετατραποῦν εἰς **αὐτογραφικὰ βαρόμετρα** (σχ. 254) : Ἀντὶ ἐνὸς ἀεροχένου τυμπάνου, ὑπάρχουν περισσότερα, συνδεδεμένα με-



Σχ. 254. Αὐτογραφικὸν βαρόμετρον.

ταξὺ των, ὁπότε, οὕτω, διὰ δεδομένην μεταβολὴν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως, ἡ μετακίνησις τοῦ ἄνω ἄκρου εἶναι πολὺ μεγαλυτέρα. Τὰ ὄργανα ταῦτα παρέχουν ἐπὶ καταλλήλου ταινίας, περιτυλιγμένης περὶ κύλινδρον, μίαν καμπύλην γραμμὴν, ἡ ὁποία δίδει τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν εἰς πᾶσαν χρονικὴν στιγμὴν. Ὁ κύλινδρος περιστρέφεται ὁμαλῶς δι' ὀρολογιακοῦ μηχανισμοῦ καὶ ἔχτελεῖ ὁλόκληρον περιστροφὴν ἐντὸς μιᾶς ἡμέρας ἢ μιᾶς ἐβδομάδος κ.λ.

§ 152. **Μέτρησις τοῦ ὕψους ἐκ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως.** Ἐφ' ὅσον, αὐξανόμενον τοῦ ὕψους, ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις ἐλαττοῦται κατὰ γωστὸν νόμον, ἔπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ ὑψώμεν τὸ ὑψόμετρον ἐνὸς τόπου, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν, τὴν ἐπικρατοῦσαν εἰς τὸν τόπον τοῦτον. Πρὸς τοῦτο μετροῦμεν, διὰ βαρομέτρον, τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν, ὁπότε ἐκ τοῦ διαγράμματος τοῦ σχήματος 249 εὐρίσκωμεν τὸ ὕψος, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μετρηθεῖσαν πίεσιν.

Εἰς τὴν πράξιν τὰ διὰ τοιαύτας μετρήσεις χρησιμοποιούμενα μεταλλικὰ βαρόμετρα εἶναι βαθμολογημένα, οὕτως ὥστε νὰ παρέχουν ἀπ' εὐθείας τὸ μετρούμενον ὑψόμετρον.

§ 153. Μανόμετρα. Ὅργανα, διὰ τῶν ὁποίων μετροῦμεν τὴν πίεσιν ἀερίων (ἢ ὑγρῶν), καλοῦνται **μανόμετρα**. Τούτων ὑπάρχουν διάφοροι τύποι :

1) **Μεταλλικὰ μανόμετρα.** Συνήθης τύπος τοιούτου μανομέτρου εἶναι τὸ μανόμετρον, τὸ ἀπεικονιζόμενον εἰς τὸ σχῆμα 255, I. Τοῦτο ἀποτελεῖται



I



II

Σχ. 255. (I). Μεταλλικὸν μανόμετρον. (II) Μορφή τῆς διατομῆς τοῦ σωλῆνος Σ.

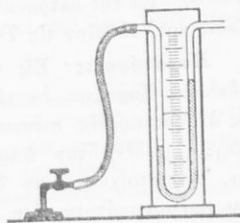
ἐκ καμπύλου μεταλλίνου σωλῆνος Σ, τοῦ ὁποίου τὸ ἐν ἄκρον εἶναι στερεωμένον, ἐνῶ τὸ ἄλλο καταλήγει εἰς σύστημα μοχλῶν καὶ ὀδοντωτῶν τροχῶν, τὸ ὁποῖον κινεῖ τὸν δείκτην ἐνώπιον βαθμολογημένης κλίμακος. Ἡ διατομὴ τοῦ σωλῆνος Σ ἔχει σχῆμα ἐλλείψεως, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 255, II, ἡ ὁποία τείνει νὰ γίνῃ κυκλική, ὅταν ἡ πίεσις ἐντὸς τοῦ σωλῆνος αὐξάνεται, ὅ-

ποτε, ἀντιστοίχως, ὁ καμπύλος σωλὴν τείνει νὰ γίνῃ εὐθύς.

Τὰ μεταλλικὰ μανόμετρα χρησιμοποιοῦνται εὐρύτατα εἰς τὴν βιομηχανίαν διὰ τὴν μέτρησιν τῆς πίεσεως ὑγρῶν ἢ ἀερίων, εἴτε μεγαλύτερας, εἴτε μικρότερης τῆς ἀτμοσφαιρικῆς.

2) **Μανόμετρα δι' ὑγροῦ.** Τούτων ὑπάρχουν δύο τύποι, τὰ ἀνοικτὰ μανόμετρα καὶ τὰ κλειστὰ μανόμετρα.

α) **Ἀνοικτὰ μανόμετρα.** Ταῦτα ἀποτελοῦνται ἐξ ὑαλίνου σωλῆνος, κεκαμμένου εἰς σχῆμα U (σχ. 256) καὶ περιέχοντος ὑγρόν, γνωστῆς πυκνότητος (ὕδραργυρον ἢ ὕδωρ). Τὸ ἐν σκέλος συνδέεται μετὰ τοῦ χώρου, τοῦ ὁποίου ἡ πίεσις πρόκειται νὰ μετρηθῇ, ἐνῶ τὸ ἄλλο εἶναι ἀνοικτόν. Ἡ πίεσις μετρεῖται ἐκ τῆς διαφορᾶς τοῦ ὕψους τῶν ἐλευθέρων ἐπιφανειῶν ἀπ' εὐθείας εἰς χιλιοστὰ στήλης ὑδραργύρου ἢ χιλιοστὰ στήλης ὕδατος κ.λ.



Σχ. 256. Ἀνοικτὸν μανόμετρον.

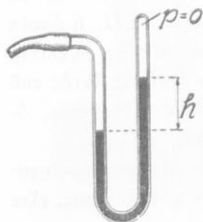
Τὸ μανόμετρον τοῦ σχήματος 256 περιέχει ὕδωρ καὶ εἶναι συνδεδεμένον πρὸς τὸ δίκτυον φωταερίου διὰ τὴν μέτρησιν τῆς πίεσεως αὐτοῦ. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὕδωρ ἔχει κατέλθει εἰς τὸ ἀριστερὸν σκέλος καὶ ἔχει ἀνέλθει εἰς τὸ δεξιόν, οὕτω δὲ ἔχει δημιουργηθῇ διαφορὰ στάθμης 80 mm. Τοῦτο δηλοῖ ὅτι ἡ πίεσις τοῦ φωταερίου εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς κατὰ 80 mm στήλης ὕδατος (δεδομένον, ὥς εἴπομεν, ὅτι τὸ μανόμετρον περιέχει ὕδωρ).

*Επειδή τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου εἶναι 13,6 φορές μεγαλύτερον τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ ὕδατος, ἔπεται ὅτι ἡ πίεσις τοῦ φωταερίου θὰ εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς κατὰ $80/13,6 \text{ Torr} = 5,9 \text{ Torr}$. Ἡ (ἀπόλυτος), λοιπόν, πίεσις τοῦ φωταερίου εἶναι ἴση πρὸς $760 \text{ Torr} + 5,9 \text{ Torr} = 765,9 \text{ Torr}$.

Ἡ διαφορὰ τῆς (ἀπολύτου) πίεσεως ἔναντι τῆς ἀτμοσφαιρικῆς καλεῖται **ὑπερπίεσις**.

Εἶναι φανερόν ὅτι διὰ τῶν ἀνοικτῶν μανομέτρων δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν καὶ πίεσεις, μικροτέρας τῆς ἀτμοσφαιρικῆς, ὅποτε, κατὰ τὴν σύνδεσιν τοῦ μανομέτρου, τὸ ὑγρὸν εἰς τὸ ἀριστερὸν σκέλος ἀνέρχεται, ἐνῶ εἰς τὸ δεξιὸν κατέρχεται.

β) **Κλειστὰ μανόμετρα**. Διὰ τὴν μέτρησιν πίεσεων, μικροτέρων τῆς ἀτμοσφαιρικῆς, χρησιμοποιοῦμεν τὰ **κλειστὰ μανόμετρα** (σχ. 257), τὰ ὅποια λειτουργοῦν, ὅπως ὁ σωλὴν τοῦ πειράματος Torricelli. Ἐὰν θίσωμεν ὑδραργύρον εἰς τὸν σωλῆνα, ὁ ἀήρ εἰς τὸ κλειστὸν σκέλος παγιδεύεται. Διὰ νὰ τὸν ἀφαιρέσωμεν, κλίνομεν καταλλήλως τὸ μανόμετρον, μέχρις ὅτου ἐκδιωχθῇ ὅλος ὁ ἀήρ. Καθιστῶντες, ἀκολούθως, τὸ μανόμετρον ἐκ νέου κατακόρυφον, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ δεξιὸν σκέλος παραμένει πλήρες ὑδραργύρου (ἐφ' ὅσον τὸ μήκος τοῦ εἶναι μικρότερον τῶν 76 cm), διότι εἰς τὸ ἀριστερὸν ἀνοικτὸν σκέλος ἐπικρατεῖ ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις. Διὰ νὰ μετρήσωμεν, τώρα, τὴν πίεσιν εἰς ἕνα



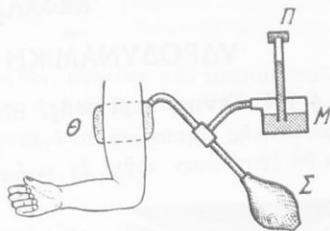
Σχ. 257. Κλειστὸν μανόμετρον.

χώρον, συνδέομεν τὸ μανόμετρον μὲ αὐτόν, ὅποτε ὁ ὑδραργύρος κατέρχεται εἰς τὸ δεξιὸν σκέλος, δημιουργουμένου, οὕτω, κενοῦ ἄνωθεν αὐτοῦ ($p=0$). Ἐκ τῆς μετρουμένης διαφορᾶς στάθμης h εὐρίσκεται ἡ ζητουμένη πίεσις κατ' εὐθείαν εἰς Torr .

Παρατήρησις: Εἰς τὰ μεταλλικὰ καὶ τὰ ἀνοικτὰ μανόμετρα ἡ ἔνδειξις ἐξαργατᾶται ἐκ τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῆς μετρουμένης πίεσεως καὶ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως. Ἐπομένως, τὰ μανόμετρα ταῦτα θὰ δεικνύουν ἔνδειξιν μηδέν, ὅταν ἡ μετρουμένη πίεσις εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν. Ἀντιστοίχως, ὅταν δεικνύουν 1 Atm , ἡ μετρουμένη πίεσις εἶναι, εἰς τὴν πραγματικότητα, ἴση πρὸς 2 Atm . Ἄρα, αἱ ἔνδειξεις τῶν ἀνωτέρω μανομέτρων δὲν δίδουν τὴν πραγματικὴν πίεσιν (ἀπόλυτος πίεσις), ἀλλὰ τὴν ὑπερπίεσιν ἢ ὑποπίεσιν, δηλ., τὴν διαφορὰν τῆς μετρουμένης πίεσεως ἀπὸ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν. Ἀντιθέτως, εἰς τὰ κλειστὰ μανόμετρα ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις οὐδένα ρόλον παίζει καί, ὡς ἐκ τούτου, ταῦτα παρέχουν τὴν ἀπόλυτον πίεσιν.

Σφυγμομανόμετρον. Τοῦτο χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἀρτηριακῆς πίεσεως τοῦ αἵματος. Ἀποτελεῖται ἐξ ἐλαστικοῦ ἀεροθαλάμου Θ (σχ. 258), ὁ ὁποῖος

προσαρμόζεται εις τὸν βραχίονα. Διὰ μικροῦ σιμπίστοῦ Σ εἰσάγεται ἐντὸς τοῦ λεροθαλάμου ἀήρ, ὁπότε ὁ βραχίων συμπιέζεται καὶ ἡ ἀρτηρία κλείεται. Τοῦτο διαπιστώνεται ὑπὸ τοῦ ἱατροῦ, ὅταν οὗτος ἀκροᾷται τὸν ἐξεταζόμενον, διότι τότε παύει νὰ ἀκούεται ὁ σφυγμός. Ἀκολούθως, ἡ πίεσις τοῦ ἀεροθαλάμου ἐλαττοῦται, δι' ἀφαιρέσεως ὀλίγου ἀέρος, μέχρις ὅτου ἀκουσθῇ ἐκ νέου ὁ σφυγμός καί, ἐν συνεχείᾳ, ἀναγινώσκεται ἐπὶ τοῦ (ἀνοικτοῦ) μανομέτρου M ἡ πίεσις τοῦ αἵματος, κατὰ τὴν συστολὴν τῆς καρδίας, εἰς ἑκατοστόμετρα στήλης ὕδατος.



Σχ. 258. Σφυγμομανόμετρον.

Τὸ πορῶδες κάλυμμα Π χρειάζεται, διὰ νὰ συγκοινωνῇ τὸ μανόμετρον μετὰ τὴν ἀτμοσφαῖραν, χωρὶς, ὅμως, νὰ γίνεταί ὁ ὕδραργυρος κατὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ ὄργανου.

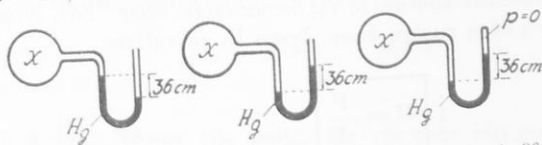
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κατηγορία Α'.

167) Ἀερόστατον, ὅγκου 250 m^3 , πληροῦται διὰ φωταερίου. Τὸ βάρος τοῦ ἀεροστάτου καὶ τῆς λέμβου του εἶναι 100 kgr^* . Ποῖον φορτίον δύναται νὰ ἀνυψώσῃ; (ΑΠ: 75 kgr^*)

168) Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις 760 Torr εἰς μονάδας dyn/cm^2 , kgr^*/m^2 , kgr^*/cm^2 . (ΑΠ: $1,014 \cdot 10^6 \text{ dyn/cm}^2$, $1,033 \cdot 10^4 \text{ kgr}^*/\text{m}^2$, $1,033 \text{ kgr}^*/\text{cm}^2$)

169) Ἐάν ἐπαναλάβωμεν τὸ πείραμα Torricelli δι' ὕδατος, τί θὰ παρατηρήσωμεν καὶ διατί;



170) Ποία ἡ πίεσις εἰς τὸν χώρον x (εἰς Torr καὶ εἰς Atm) εἰς ἑκάστην περίπτωσιν;

(ΑΠ: $400 \text{ Torr}^*(0,526 \text{ Atm})$, $1120 \text{ Torr} (1,473 \text{ Atm})$, $360 \text{ Torr} (0,474 \text{ Atm})$)

Κατηγορία Β'.

171) Ποία δύναμις ἀπαιτεῖται διὰ ν' ἀποχωρισθοῦν τὰ ἡμισφαίρια τοῦ πειράματος τοῦ Μαγδεβούργου; Ἀκτὶς αὐτῶν 21 cm . (ΑΠ: 1430 kgr^*)

172) Ἐάν ἐκτελέσωμεν τὸ πείραμα Torricelli, χρησιμοποιοῦντες γλυκερίνην ($\rho_{\text{γλυκ}} = 1,25 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$), ποῖον τὸ ὕψος τῆς στήλης ἐντὸς τοῦ σωλῆνος; (ΑΠ: $8,2 \text{ m}$)

173) Ἐάν ἐπαναλάβωμεν τὸ ἄνω πείραμα, χρησιμοποιοῦντες σωλῆνα διπλασίας διαμέτρου, ποῖον θὰ εἶναι τὸ ὕψος τῆς στήλης; (ΑΠ: Τὸ αὐτό. Διὰτί;)

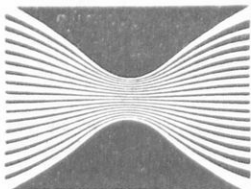
174) Πόση ποσότης ὕδατος περιέχεται εἰς βαρομετρικὸν σωλῆνα, διαμέτρου 1 cm , ὅταν ἡ στήλη τοῦ ὕδατος ἔχη ὕψος 76 cm ; (ΑΠ: $59,7 \text{ cm}^3$ ἢ 812 gr^*)

175) Ποία ἡ πίεσις p_1 ἐντὸς τοῦ σιφωνίου τοῦ σχήματος 248, εἰς τὸ ὁποῖον ἔχει ἀνέλθει ὕδωρ εἰς ὕψος $h = 15 \text{ cm}$ ἀπὸ τοῦ κάτω ἄκρου του; (ΑΠ: $1,018 \text{ kgr}^*/\text{cm}^2$)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ'

ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ - ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

§ 154. Γενικά περί ροῆς. Εἰς τὰ κεφάλαια τῆς 'Υδροστατικῆς καὶ 'Αεροστατικῆς ἐξετάσαμεν τὰ ὑγρά καὶ ἀέρια ἐν ἰσορροπίᾳ· εἰς τὰ κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν ταῦτα ἐν κινήσει (ροῇ).



Σχ. 259. Μορφή τῶν ρευματικῶν γραμμῶν εἰς στένωσιν σωλήνος.

Διὰ τὴν σπουδὴν τῶν φαινομένων τῆς ροῆς ἀπαιτοῦνται ὁρισμένοι νέαι ἔννοιαι, ὅπως, π.χ., ἡ ἔννοια τῆς *ρευματικῆς γραμμῆς*.

Διὰ τοῦ ὅρου *ρευματικῆ γραμμῆς* χαρακτηρίζομεν τὴν τροχίαν, τὴν ὁποίαν διαγράφει, κατὰ τὴν ροήν, ὁρισμένον μόνιον τοῦ ὑγροῦ. Τοιαύτας τροχιάς δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν, ἐὰν ῥίψωμεν ἐντὸς ρέοντος ὕδατος ρινίσματα ξύλου.

Τὸ σχῆμα 259 παριστᾷ τὴν μορφήν τῶν ρευματικῶν γραμμῶν εἰς τὴν στένωσιν ἑνὸς σωλήνος. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὅλον ρεῦμα δυνάμεθα νὰ τὸ θεωρήσωμεν ὡς ἀποτελούμενον ἐκ πολλῶν *φλεβῶν*.

Εἰς τὴν κατὰ φλέβας ροήν, τὸ ὑγρὸν ἐκάστης φλεβῆς δὲν ἀναμειγνύεται μὲ τὸ ὑγρὸν τῶν γειτονικῶν τῆς φλεβῶν.

Παροχή. Θεωρήσωμεν κρήνην, ἐκ τῆς ὁποίας ἐκρέει ὕδωρ. Ἐάν, ἐντὸς τοῦ χρόνου t , ἡ κρήνη αὕτη παρέχῃ ὕδωρ, ὀγκοῦ V , τὸ πηλίκον

$$\dot{Q} = \Pi = \frac{V}{t} \quad (1)$$

καλεῖται *παροχή* τῆς κρήνης.

Μονάδες παροχῆς. 1) *C.G.S.* Ἐπειδὴ εἰς τὸ σύστημα *C.G.S.* μονὰς ὀγκοῦ εἶναι τὸ 1 cm^3 καὶ μονὰς χρόνου τὸ 1 sec , ἡ μονὰς παροχῆς θὰ εἶναι τὸ

$$1 \frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}.$$

2) *T. S.* Ἐπειδὴ εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονὰς ὀγκοῦ εἶναι τὸ 1 m^3 καὶ μονὰς χρόνου τὸ 1 sec , ἡ μονὰς παροχῆς θὰ εἶναι τὸ

$$1 \frac{\text{m}^3}{\text{sec}}.$$

Τὴν παροχὴν δυνάμεθα, ἐπίσης, νὰ ἐκφράσωμεν καὶ εἰς *λίτρα ἀνὰ sec* (1 lt/sec). Εἶναι δὲ

$$1 \frac{lt}{sec} = 1000 \frac{cm^3}{sec}$$

Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς παροχῆς πηγῶν, φρεατίων κ.λ. χρησιμοποιεῖται, συνήθως, ἡ μονὰς **1 κυβικὸν μέτρον ἀνὰ ὥραν** ($1 m^3/h$) καὶ ἡ μονὰς **1 κυβικὸν μέτρον ἀνὰ εἰκοσιτετράωρον**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΑΡΟΧΩΝ

Μικρὰ κρήνη	0,2 m ³ /h
Φωταερίου εἰς λύχνον Bunsen	0,2 m ³ /h
Ἀρτεσιανὸν φρέαρ	10 m ³ /h
Ἀλιάζμων ποταμὸς	60 m ³ /sec
Καταρράκτης τοῦ Νιαγάρα	8000 m ³ /sec

Ὑπολογισμὸς τῆς παροχῆς. Τὴν παροχὴν δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν καὶ ὡς γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ S τῆς διατομῆς τοῦ σωλῆνος ἐπὶ τὴν ταχύτητα ροῆς v τοῦ ὕγροῦ. Ὡς οὖν

$$P = S \cdot v \quad (2)$$

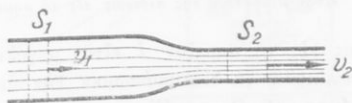
Ἀπόδειξις: Ὁ ὄγκος V τοῦ ὕγροῦ, τοῦ ἐκρέοντος ἐντὸς τοῦ χρόνου t , εἶναι ἴσος πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ S τῆς διατομῆς τοῦ σωλῆνος ἐπὶ τὸ διάστημα s , τὸ ὅποιον διανύει τὸ ὕγρον ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χρόνου· ἥτοι $V = S \cdot s$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τὸ V διὰ τοῦ ἴσου του, λαμβάνομεν

$$P = \frac{S \cdot s}{t} = S \cdot v.$$

(ἀφοῦ $s/t =$ ταχύτης v).

§ 155. Νόμοι τῆς ροῆς. Εἰς τὴν ροὴν τῶν ρευστῶν ἰσχύουν δύο νόμοι· ὁ **νόμος τῆς συνεχείας** καὶ ὁ **νόμος τοῦ Bernoulli** (Μπερνούλι).

1) **Νόμος τῆς συνεχείας.** Θεωρήσωμεν σωλῆνα, μεταβλητῆς διατομῆς (σχ. 260), διὰ τοῦ ὁποῖου ρεῖ ἓν ὕγρον. Ἐάν, ἐντὸς χρόνου τινὸς t , διέρχεται διὰ τῆς διατομῆς S_1 μία ποσότης ὕγρου, ἡ αὐτὴ ποσότης θὰ διέρχεται ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χρόνου καὶ δι' οἰαδήποτε ἄλλης διατομῆς, π.χ., τῆς S_2 . Ἀρα καὶ αἱ δύο διατομαὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν παροχὴν.



Σχ. 260 Εἰς τὴν στένωσιν τοῦ σωλῆνος ἡ ταχύτης τοῦ ὕγρου εἶναι μεγάλη.

Τὴν σταθερότητα τῆς παροχῆς κατὰ μῆκος ἑνὸς σωλῆνος δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν εἰς νόμον, ὃ ὁποῖος καλεῖται **νόμος τῆς συνεχείας**:

«Ἡ παροχὴ ἑνὸς σωλῆνος εἶναι σταθερὰ εἰς πᾶσαν διατομὴν αὐτοῦ».

Ἐάν καλέσωμεν v_1 καὶ v_2 τὰς ταχύτητας τοῦ ὕγρου εἰς τὰς διατομὰς

S_1 καὶ S_2 , τότε, τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξισώσεως (2) τῆς προηγουμένης παραγράφου, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸν νόμον τῆς συνεχείας ὡς ἑξῆς:

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$$

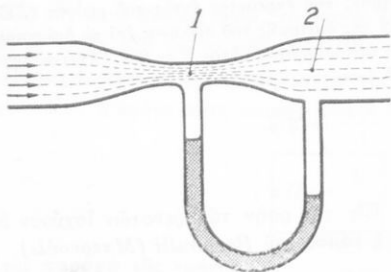
Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου προκύπτει ὅτι αἱ ταχύτητες ροῆς εἰς δύο διατομὰς ἑνὸς σωλῆνος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ἐμβαδῶν τῶν διατομῶν.

Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι εἰς τὴν διατομὴν τοῦ μικροτέρου ἐμβαδοῦ (στένωσις) ἡ ταχύτης θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ταχύτητος, τὴν ὅποιαν ἔχει τὸ ὑγρὸν εἰς τὴν διατομὴν τοῦ μεγαλυτέρου ἐμβαδοῦ (διευρύνσις). Τοῦτο παρατηρεῖται χαρακτηριστικῶς εἰς τοὺς ποταμούς, οἱ ὅποιοι καθίστανται ὀρμητικοὶ εἰς τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ κοίτη των στενεύει.

2) **Νόμος τοῦ Bernoulli.** Ἐὰν διὰ τοῦ σωλῆνος τοῦ σχήματος 261, ὁ ὁποῖος φέρει στένωσιν εἰς τὸ σημεῖον 1, διαβιβάσωμεν ρεῖμα ἀέρος, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ὑγρὸν εἰς τὰ δύο σκέλη τοῦ μανομέτρου δὲν διατηρεῖται εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος, ἀλλ' εἰς μὲν τὸ ἀριστερὸν ἀνέρχεται, ἔνω εἰς τὸ δεξιὸν κατέρχεται. Τοῦτο σημαίνει ὅτι εἰς τὴν στένωσιν (σημεῖον 1) ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος εἶναι μικροτέρα τῆς πίεσεως εἰς τὸ σημεῖον 2. Ἐπειδὴ (κατὰ τὸν νόμον τῆς



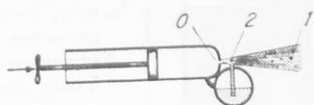
Σχ. 261. Ἡ πίεσις εἰς τὸ σημεῖον 1 (στένωσις) εἶναι μικροτέρα τῆς πίεσεως εἰς τὸ σημεῖον 2.

ροῆς εἰς τὸ σημεῖον 1 εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ταχύτητος εἰς τὸ σημεῖον 2, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν, ἡ ὁποία καλεῖται **νόμος τοῦ Bernoulli**:

«Κατὰ τὴν ροὴν ἑνὸς ρευστοῦ, ἡ πίεσις εἶναι μικρὰ εἰς σημεῖα μεγάλων ταχυτήτων καὶ μεγάλη εἰς σημεῖα μικρῶν ταχυτήτων».

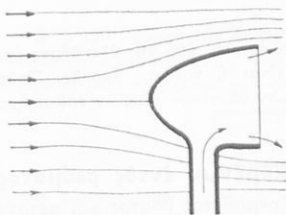
§ 156. **Ἐφαρμογαὶ τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli.** Μίαν πρώτην ἐφαρμογὴν τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli ἔχομεν εἰς τὸν ψευκαστήρα. Ὁ **ψευκαστήρ** (σχ. 262) χρησιμεύει διὰ τὴν ἐκτόξευσιν ἑνὸς ὑγροῦ ὑπὸ μορφὴν σταγονιδίων. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται ὡς ἑξῆς: Δι' ὠθήσεως τοῦ ἐμβόλου σχηματίζεται

ρεῦμα ἀέρος, τὸ ὁποῖον ἐξέρχεται διὰ τῆς ὀπῆς *O* (ἀκροφύσιον) μετὰ μεγάλῃν ταχύτητά. Ἐν συνεχείᾳ ἡ φλὲψ τοῦ ἀέρος διευρύνεται καί, ὥς ἐκ τούτου, ἡ ταχύτης του ἐλαττοῦται. Ἐπειδὴ εἰς τὸ σημεῖον 1 τῆς φλεβὸς ἡ πίεσις εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν, ἔπεται ὅτι εἰς τὸ σημεῖον 2 (εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ταχύτης εἶναι μεγάλη) ἡ πίεσις θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς (ὕποπίεσις). Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο καταλήγει σωληνίσκος, τοῦ ὁποῖου τὸ ἄλλο ἄκρον εἶναι βυθισμένον ἐντὸς τοῦ ὕγρου, τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ ψεκάσωμεν. Ἀφοῦ, λοιπόν, εἰς τὸ σημεῖον 2 ἐπικρατεῖ ὕποπίεσις, τὸ ὕγρον ἀνέρχεται εἰς τὸν σωληνίσκον καί, παρασυρόμενον ὑπὸ τοῦ ρεύματος τοῦ ἀέρος, διασπᾶται εἰς σταγονίδια.



Σχ. 262. Ψεκαστήρ.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀρχῆς στηρίζεται καὶ ἡ λειτουργία τῶν *ἐξαεριστήρων τῶν πλοίων* (σχ. 263), οἱ ὁποῖοι, λόγῳ τοῦ σχήματός των, προκαλοῦν στένωσιν τῶν φλεβῶν τοῦ πνέοντος ἀνέμου

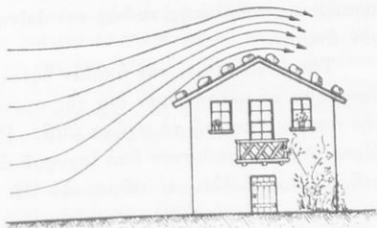


Σχ. 263. Ἐξαεριστὴρ πλοίου.

εἰς τὸ στόμιόν των, μετὰ ἀποτέλεσμα ν' αὐξάνεται ἐκεῖ ἡ ταχύτης τοῦ ἀνέμου. Ἡ μεγάλη αὕτη ταχύτης εἰς τὴν στένωσιν δημιουργεῖ ἐκεῖ ὕποπίεσιν (δηλ., πίεσιν μικροτέραν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς), ὥς ἐκ τῆς ὁποίας προκαλεῖται ἀναρρόφσις καί, συνεπῶς, ἀνανέωσις τοῦ ἀέρος εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πλοίου.

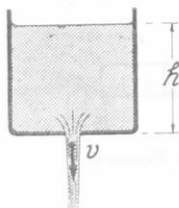
Διὰ τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli ἐξῆ- ἀναρπαγαὶ τῶν στεγῶν ὑπὸ ἰσχυρῶν ἀνέ-

γούνται καὶ αἱ παρατηρούμεναι μων: Ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος 264, ὑπεράνω τῆς στέγης προκαλεῖται συμπίκνωσις τῶν ρευματικῶν γραμμῶν (δηλ., στένωσις τῶν φλεβῶν), μετὰ ἀποτέλεσμα ν' αὐξάνεται ἐκεῖ ἡ ταχύτης τοῦ ἀέρος. Κατὰ τὸν νόμον τοῦ Bernoulli, λόγῳ τῆς αὐξήσεως τῆς ταχύτητος, ἡ πίεσις ἐλαττοῦται κάτω τῆς ἀτμοσφαιρικῆς. Δηλαδή, ὑπεράνω τῆς στέγης δημιουργεῖται ὕποπίεσις, ἐνῶ κάτω αὐτῆς (εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς οἰκίας) ἡ πίεσις εἶναι μεγαλύτερα. Ἔνεκα τῆς διαφορᾶς ταύτης τῶν πιέσεων ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς στέγης μία δύναμις μετὰ φορὰν πρὸς τὰ ἄνω, ἡ ὁποία καὶ ἀναρπάζει τὴν στέγην. Πρὸς ἀποφυγὴν, ἀκριβῶς, τούτου, τοποθετοῦνται ἐπὶ τῆς στέγης βαρεῖς λίθοι κ.λ.



Σχ. 264. Ὑπεράνω τῆς στέγης αἱ φλέβες τοῦ ἀέρος στενοῦνται, δημιουργομένης, ὥς ἐκ τούτου, ὕποπίεσεως.

§ 157. 'Εκρηξή ύγρου δι' ὀπῆς - Θεώρημα Torricelli. Θεωρήσωμεν δοχείον, φέρον ὁπὴν εἰς τὸν πυθμένα καὶ πλήρες ὕγρου μέχρις ὕψους h (σχ. 265).



Σχ. 265.

Ἡ ταχύτης v , μετὰ τὴν ὁποίαν ἐκρέει τὸ ὕγρον ἐκ τῆς ὀπῆς, ὑπολογίζεται διὰ τῶν ἐξῆς συλλογισμῶν: Θεωρήσωμεν μᾶζαν m τοῦ ὕγρου, εὐρισκομένην εἰς τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν, ἐν συνεχείᾳ δὲ ἐκρέουσαν ἐκ τῆς ὀπῆς. Ὄταν ἡ μᾶζα αὕτη ἔχει φθάσει εἰς τὴν ὀπὴν, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια $mg \cdot h$ αὐτῆς θὰ ἔχῃ μετατραπῇ εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν $\frac{1}{2} mv^2$, ὁπότε τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας δίδει τὴν ἐξίσωσιν

$$mg \cdot h = \frac{1}{2} mv^2.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύπτει διὰ τὴν ταχύτητα v ἡ τιμὴ

$v = \sqrt{2gh}$	Θεώρημα Torricelli	(1)
------------------	--------------------	-----

Ἡδη, ἡ παροχὴ τῆς ὀπῆς ὑπολογίζεται εὐχερῶς διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου

$$\Pi = S \cdot v,$$

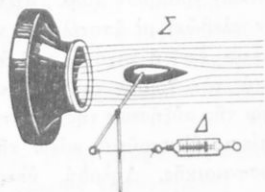
ἐνθα S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀπῆς.

Ἐκ τοῦ τύπου (1) συνάγομεν ὅτι ὅσον χαμηλότερον ἀπὸ τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας εὐρίσκεται ἡ ὀπή, τόσοον μεγαλύτερα θὰ εἶναι ἡ ταχύτης ἐκροῆς. Τοῦτο ἐξηγεῖ καὶ τὴν διαφορὰν εἰς τὴν μορφὴν τῶν τριῶν ὑδατίνων φλεβῶν τοῦ σχήματος 198.

§ 158. Ἀντίστασις σωμάτων, εὐρισκομένων ἐντὸς ρεύματος.

Ἐὰν ἐμβαπτίσωμεν τὴν παλάμην μας ἐντὸς ἡρεμοῦντος ὕδατος καὶ μετακινήσωμεν αὐτὴν ἀποτόμως, αἰσθανόμεθα ὅτι τὸ ὕδωρ ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς παλάμης μίαν δύναμιν, ἡ ὁποία τείνει νὰ ἐμποδίσῃ τὴν κίνησιν. Τὴν δύναμιν ταύτην καλοῦμεν **ἀντίστασιν**. Ἀντίστασιν, ὁμοίως, αἰσθάνεται ὁ ταχέως κινούμενος ποδηλάτης, καθὼς καὶ ἀκίνητος ἄνθρωπος, ἔκτεθειμένος εἰς ἰσχυρὸν ἄνεμον.

Τὴν ἀντίστασιν, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ἓν σῶμα ἐντὸς ρεύματος ἁέρος, δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν διὰ τῆς συσκευῆς, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ σχῆμα 266: Ρεῦμα ἁέρος, δημιουργούμενον ὑπὸ ἰσχυροῦ ἀνεμοστήρος, προσβάλλει τὸ σῶμα Σ . Ἡ ἀναπνευσσομένη ἀντίστασις μετρεῖται διὰ τοῦ δυναμομέτρου Δ .



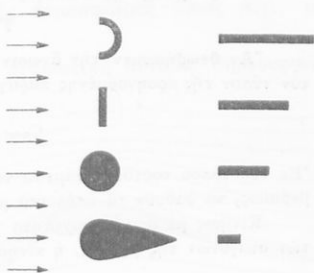
Ἐκ τοιούτων μετρήσεων προέκυψαν οἱ ἐξῆς νόμοι:

1) Ἡ ἀντίστασις εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητος τοῦ ἁέρος. Δηλαδή, ἂν διπλασιάσωμεν τὴν ταχύτητα τοῦ ἁέρος, ἡ ἀντίστασις τετραπλασιάζεται. Ἐκ τούτου ἐξηγεῖται διατί ἀπαιτοῦνται πολὺ ἰσχυροὶ κινητήρες εἰς τὰ ἀεροπλάνα μεγάλων ταχυτήτων. Εἶναι προφανὲς ὅτι μικραὶ αὐξήσεις

Σχ. 266. Διάταξις διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἀντιστάσεως ἐντὸς ρεύματος ἁέρος.

της ταχύτητος συνοδεύονται υπό μεγάλων αυξήσεων της αντίστασεως.

2) Ἡ αντίστασις ἐξαρτᾶται καὶ ἐκ τοῦ σχήματος τοῦ σώματος. Τοῦτο προκύπτει ἐκ συγκρίσεως της ἀντιστάσεως σωμάτων, διαφόρου σχήματος (σχ. 267), ἀλλὰ τῆς αὐτῆς μεγίστης διατομῆς (λαμβανομένης καθέτως πρὸς τὸ ρεῦμα). Εἰς τὸ αὐτὸ σχῆμα (δεξιὰ) ἀποδίδεται, δι' ὀριζοντίων γραμμῶν, ἡ ἀντίστασις σωμάτων διαφόρου σχήματος. Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐνῶ τὸ κοῖλον ἡμισφαίριον παρουσιάζει μεγάλην ἀντίστασιν, ἡ σφαῖρα παρουσιάζει σημαντικῶς μικροτέραν ἀντίστασιν. Τὴν μικροτέραν ἀντίστασιν ἐξ ὅλων παρουσιάζει τὸ σῶμα με ἀεροδυναμικὸν σχῆμα (κάτω).



Σχ. 267. Τὸ μήκος τῶν ὀριζοντίων γραμμῶν δεξιὰ ἐλήφθη ἀνάλογον τῆς ἀντίστασεως.

Ἐπειδὴ εἰς τὰ ἀεροπλάνα, αὐτοκίνητα κ.λ. ἡ μεγάλη ἀντίστασις προκαλεῖ μεγάλην κατανάλωσιν καυσίμων, δίδεται εἰς αὐτὰ ἀεροδυναμικὸν σχῆμα.

★ § 159. Τύπος της ἀντιστάσεως. Ἡ ἀντίστασις T , τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ἓν σῶμα, ὅταν κινῆται ἐντὸς ἡρεμοῦντος ἀέρος (ἢ ὅταν ὁ αἰὼρ κινῆται ὡς πρὸς τὸ ἡρεμοῦν σῶμα), παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$T = C_{\text{αντ}} \cdot S_{\text{μετ}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2$$

Εἰς τὸν τύπον τοῦτον v εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν αἶρα (ἢ τοῦ αἵρος ὡς πρὸς τὸ σῶμα), ρ ἡ πυκνότης τοῦ αἵρος, $S_{\text{μετ}}$ τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεγίστης διατομῆς τοῦ σώματος, λαμβανομένης καθέτως πρὸς τὸ ρεῦμα, ἢ ὁποῖα καλεῖται **μετωπικὴ ἐπιφάνεια** καὶ $C_{\text{αντ}}$ ὁ **συντελεστὴς ἀντιστάσεως**, ὁ ὁποῖος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σχήματος τοῦ σώματος καί, κυρίως, ἐκ τοῦ σχήματος τοῦ ὀπισθεν μέρους αὐτοῦ.

Ἐξαιρετικῶς μικρὸν συντελεστὴν ἀντιστάσεως ἔχει τὸ *ἰχθυοειδὲς σχῆμα* (βλ. σχ. 267), τὸ κοινῶς καλούμενον *ἀεροδυναμικόν*. Διὰ τὸν λόγον, ἀκριβῶς, αὐτὸν τὰ σῶματα ἀεροδυναμικοῦ σχήματος παρουσιάζουν τὴν ἐλαχίστην ἀντίστασιν. Αἱ μεγάλα διαφοραί, αἱ ὁποῖαι παρουσιάζονται εἰς τὴν ἀντίστασιν τῶν διαφόρων σωμάτων τοῦ σχήματος 267, ὀφείλονται, ἀποκλειστικῶς, εἰς διαφορὰς τοῦ συντελεστοῦ ἀντιστάσεως, δεδομένου ὅτι ἡ μετωπικὴ ἐπιφάνεια εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλα τὰ σῶματα.

★ § 160. Πτώσις σωμάτων ἐντὸς τοῦ αἵρος. Ἐπὶ σώματος, πίπτοντος κατακορύφως ἐντὸς τοῦ αἵρος, ἐξασκῶνται τρεῖς δυνάμεις: 1) Τὸ βάρος του B , 2) ἡ ἄνωσις A καὶ 3) ἡ ἀντίστασις T τοῦ αἵρος. Ἐκ τῶν τριῶν αὐτῶν δυνάμεων τὸ βάρος καὶ ἡ ἄνωσις εἶναι σταθεραὶ κατὰ τὴν πτώσιν, ἡ ἀντίστασις, ὅμως, αὐξάνεται, αὐξανομένης τῆς ταχύτητος (βλ. § 159). Ἐπομένως, ἐφ' ὅσον τὸ σῶμα πίπτει καὶ ἡ ταχύτης του αὐξάνεται συνεχῶς, θ' αὐξάνεται ἀντιστοίχως καὶ ἡ ἀντίστασις. Θὰ ἔλθῃ, λοιπόν, στιγμή, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἀντίστασις θὰ ἔχῃ γίνῃ τόσον μεγάλη, ὥστε αὐτὴ μετὰ τῆς ἀνώσεως θὰ ἰσορροποῦν τὸ βάρος, ὅποτε ἡ συνισταμένη τῶν τριῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐξασκῶνται ἐπὶ τοῦ πίπτοντος σώματος, θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἀπὸ τῆς στιγμῆς ταύτης καὶ ἐξῆς τὸ σῶμα θὰ κινῆται *χωρὶς ἐπι-*

τάχυνσιν, δηλαδή θά πίπτῃ, πλέον, μέ σταθεράν ταχύτητα, ἡ ὁποία καλεῖται *ὀρικὴ ταχύτης* v_{or} .

Ἡ ὀρικὴ ταχύτης ὑπολογίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως ἰσορροπίας

$$T + A_s - B = 0.$$

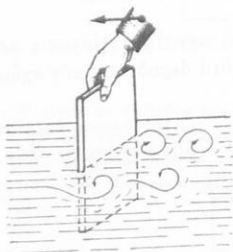
Ἄν θεωρήσωμεν τὴν ἄνωσιν ἀμελητέαν, διὰ δὲ τὴν τριβὴν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν τύπον τῆς προηγουμένης παραγράφου, θά ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$C_{arr} \cdot S_{μετ} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_{or}^2 = B.$$

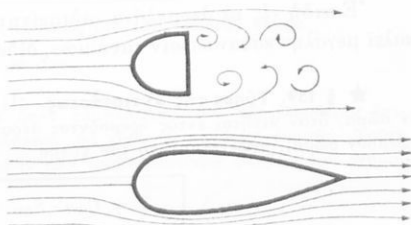
Ἐκ τοῦ τύπου τούτου δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ὀρικὴν ταχύτητα v_{or} - ἀρκεῖ, βεβαίως, νὰ δοθῶν τὰ ὑπόλοιπα μεγέθη.

Κίνησις μέ ὀρικὴν ταχύτητα εἶναι ἡ πτώσις τῶν ἀλεξιπτωτιστῶν, ἡ πτώσις τῶν σταγόνων τῆς βροχῆς, ἡ κίνησις λίθου, βυθιζομένου ἐντὸς τῆς θαλάσσης κ.λ.

§ 161. Στρόβιλοι. Ἐάν ἐμβαπτίσωμεν ἐντὸς ὕδατος τεμάχιον σανίδος καὶ τὸ μετακινήσωμεν παραλλήλως πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος (σχ. 268), θά παρατη-



Σχ. 268. Ὅπισθεν τῆς κινουμένης σανίδος σχηματίζονται στρόβιλοι.



Σχ. 269. Τὸ ἀεροδυναμικὸν σχῆμα (κάτω) παρουνσιάζει μικρὰν ἀντίστασιν, διότι ὀπισθεν αὐτοῦ δὲν σχηματίζονται στρόβιλοι.

ρήσωμεν ὅτι ὀπισθεν αὐτοῦ τὸ ὕδωρ σχηματίζει στροβίλους, δηλ., τίθεται εἰς περιστροφικὴν κίνησιν. Τοῦτο παρατηρεῖται ἐμφανέστερον, ἐάν ἐπὶ τοῦ ὕδατος ἔχωμεν ρίψει προηγουμένως ρινίσματα ξύλου (κ. πριονίδια). Οἱ στρόβιλοι ἔχουν κινήτικὴν ἐνέργειαν, ἡ ὁποία προέρχεται ἐκ τοῦ ἔργου, τὸ ὁποῖον παράγει ἡ χεὶρ ἡμῶν, ὅταν μετακινῶμεν τὴν σανίδα. Τὸ ἔργον τοῦτο, εἶναι, ὡς γνωστόν, ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὸν δρόμον. Ἐπειδὴ ἡ δύναμις τῆς χειρὸς εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν δύναμιν, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ ὕδωρ ἐπὶ τῆς κινουμένης σανίδος (ἀντίστασις), ἔπεται ὅτι ὅσον περισσότεροι στρόβιλοι παράγονται, τόσον μεγαλύτερα θά εἶναι ἡ ἀντίστασις. Ἐπειδὴ, ὡς εἶδομεν, οἱ στρόβιλοι δημιουργοῦνται εἰς τὸ ὀπισθεν μέρος τοῦ σώματος, διὰ νὰ ἐλαττώσωμεν τὴν ἀντίστασιν, πρέπει νὰ ἐμποδίσωμεν τὴν παραγωγὴν των. Τοῦτο, ἀκριβῶς, ἐπιτυγχάνομεν, δίδοντες εἰς τὸ οὐράϊον τμήμα τοῦ σώματος ἀεροδυναμικὸν σχῆμα, τὸ ὁποῖον, ὅπως δεικνύει καὶ τὸ σχῆμα 269, ἐλαττώνει σημαντικῶς τοὺς παραγομένους στροβίλους. Οἱ στρόβιλοι, μετὰ τινα χρόνον, σταματοῦν, τῆς κινήτικης των ἐνεργείας μετατρεπομένης εἰς θερμότητα.

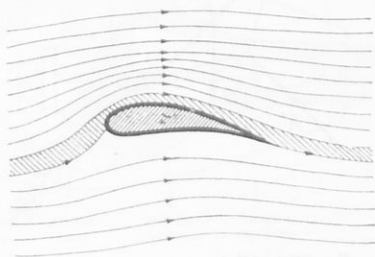
§ 162. Δυναμικὴ ἄνωσις. Εἰς τὴν Ἀεροστατικὴν εἶδομεν ὅτι, συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν τοῦ Ἀρχιμήδους, πᾶν σῶμα, εὐρισκόμενον ἐντὸς

αερίου, ύφίσταται ἄνωσιν, ἴσην πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου αερίου. Λόγῳ τοῦ φαινομένου τούτου, σώματι, τῶν ὁποίων τὸ βάρος εἶναι μικρότερον τῆς ἄνωσεως, ἀνέρχονται ἐντὸς τῆς ἀτμοσφαίρας - ὅπως π.χ., τὰ ἀερόστατα κ.λ.

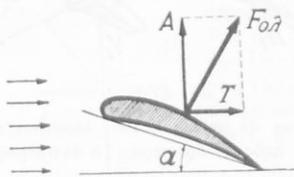
Εἰς τὰ ἀεροπλάνα, ἀντιθέτως, ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις δημιουργεῖται κατ' ἄλλον τρόπον: Θεωρή-

σωμεν πτέρυγα ἀεροπλάνου, εὐρισκομένην ἐντὸς ρεύματος αἵρος. Αἱ ρευματικαὶ γραμμαὶ κατανέμονται περὶ τὴν πτέρυγα, ὅπως δεῖκνυται τὸ σχῆμα 270. Παρακολουθοῦντες τὴν διαδρομὴν μιᾶς φλεβός, διερχομένης ὑπεράνω τῆς πτέρυγος (γραμμοσκιασμένης εἰς τὸ σχῆμα), παρατηροῦμεν ὅτι ἐκεῖ αὐτὴ στενεύεται, μὲ ἀποτέλεσμα αὐξήσιν τῆς ταχύτητος τοῦ αἵρος.

Κατὰ τὸν νόμον τοῦ Bernoulli, ἡ πίεσις, ἡ ὁποία ἐπικρατεῖ ὑπεράνω τῆς πτέρυγος, θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς πίεσεως, ἡ ὁποία ἐπικρατεῖ εἰς σημεῖα, εὐρισκόμενα μακρὰν τῆς πτέρυγος - δηλ., τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως. Ἀντιθέτως, φλέβες, διερχόμεναι κάτω τῆς πτέρυγος, διογκοῦνται, μὲ ἀποτέλεσμα ἐλάττωσιν τῆς ταχύτητος καὶ, συνεπῶς, αὐξήσιν τῆς πίεσεως ὑπὲρ τὴν ἀτμοσφαιρικήν. Αἱ δημιουργούμεναι ὑποπίεσις καὶ ὑπερπίεσις δίδουν, ἐν τῷ



Σχ. 270. Μορφή τῶν ρευματικῶν γραμμῶν περὶ τὴν πτέρυγα ἀεροπλάνου.



Σχ. 271. Ἐπὶ τῆς πτέρυγος ἐξασκεῖται ἡ δύναμις $F_{ολ}$.

συνόλῳ, μίαν πλαγίαν δύναμιν $F_{ολ}$ (σχ. 271), ἡ ὁποία καλεῖται **ἀεροδύναμις** καὶ τὴν ὁποίαν δυνάμεθα ν' ἀναλύσωμεν εἰς δύο συνιστώσας· μίαν κατακόρυφον συνιστώσαν A καὶ μίαν ὀριζοντιάν T . Ἡ πρώτη ἐξ αὐτῶν καλεῖται **δυναμικὴ ἄνωσις** καὶ εἶναι ἡ δύναμις, ἡ ὁποία συγκρατεῖ τὸ ἀεροπλάνον, ἐνῶ ἡ δευτέρα εἶναι ἡ **ἀντίστασις** (*), ἡ ὁποία ἀντιστα-

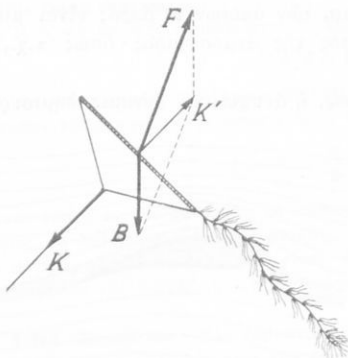
θμίζεται ἐκ τῆς δυνάμεως, τῆς ἐξασκουμένης ὑπὸ τῆς περιστρεφομένης ἑλικος τοῦ ἀεροπλάνου.

Ὅπως εὐρίσκεται πειραματικῶς, ὅσον ἡ δυναμικὴ ἄνωσις, ὅσον καὶ ἡ ἀντίστασις ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς **γωνίας προσβολῆς α** . Ἐκ μετρήσεων προκύπτει ὅτι ὑπάρχει μία ἀρίστη γωνία προσβολῆς, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ δυναμικὴ ἄνωσις λαμβάνει μεγίστην τιμὴν.

Δι' ἀναλόγων συλλογισμῶν ἐξηγεῖται καὶ ἡ πτῆσις τοῦ **χαρταετοῦ** (σχ. 272): Ἡ

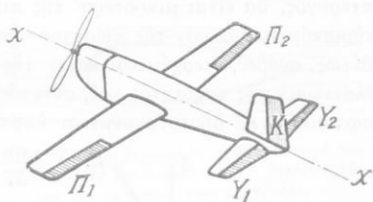
(*) Ὁ ὅρος «δυναμικὴ ἀντίστασις» εἶναι ἀνεπιτυχής.

ροί του αέρος περί τὸν χαρταετὸν δημιουργεῖ ὑποπίεσεις καὶ ὑπερπίεσεις, ἀκριβῶς ὅπως, καὶ εἰς τὴν πτέρυγα τοῦ αεροπλάνου καί, οὕτως, ἐξασκεῖ ἐπ' αὐτοῦ τὴν πλαγίαν δύναμιν F . Ἐκτὸς τῆς δυνάμεως ταύτης, ἐπὶ τοῦ χαρταετοῦ ἐξασκοῦνται δύο ἀκόμη δυνάμεις, τὸ βάρος τοῦ B καὶ ἡ δύναμις K , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ νῆμα, διὰ τοῦ ὁποίου συγκρατεῖται ὁ χαρταετός. Κατὰ τὴν πτήσιν τοῦ χαρταετοῦ αἱ τρεῖς αὗται δυνάμεις ἰσορροποῦν, ὅποτε ἡ δύναμις K εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν συνισταμένην K' τῶν δύο ἄλλων.



Σχ. 272. Ἐπὶ τοῦ χαρταετοῦ ἐξασκοῦνται αἱ τρεῖς δυνάμεις B , K καὶ F .

νου δίδεται ἀτρακτοειδὲς σχῆμα, ἵνα τοῦτο παρουσιάζει μικροτέραν ἀντίστασιν. Ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 271 αὗται σχηματίζουν μικρὰν γωνίαν προσβολῆς α μετὰ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, διότι εὐρέθη ὅτι, οὕτως, αὐξάνεται ἡ δυνاميκὴ ἄνωσις. Αἱ πτέρυγες φέρουν τὰ πηδάλια Π_1 , Π_2 (σχ. 273), τὰ ὁποῖα κλίνουν κατ' ἀντιθέτους φορὰς καὶ διὰ τῶν ὁποίων ἐπιτυγχάνεται ἡ περιστροφή τοῦ αεροπλάνου περὶ τὸν ἄξονα x . Διὰ κλίσεως τοῦ πηδαλίου Π_1 πρὸς τὰ ἄνω καὶ τοῦ πηδαλίου Π_2 πρὸς τὰ κάτω, ἡ ἀριστερὰ πτέρυξ κατέρχεται, ἐνῶ ἡ δεξιὰ ἀνέρχεται, οὕτως δὲ τὸ αεροπλάνον λαμβάνει τὴν ἀπαιτουμένην κλίσιν διὰ τὴν διαγράψην στροφὴν πρὸς τ' ἀριστερά. Τὸ ἀντίστροφον γίνεται διὰ στροφὴν πρὸς τὰ δεξιὰ.



Σχ. 273.

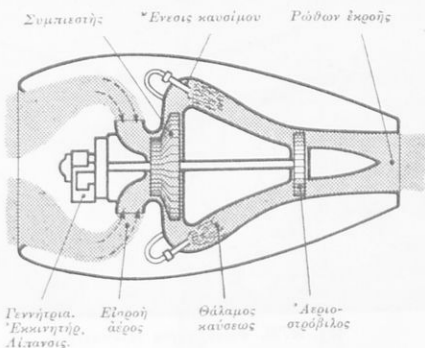
Διὰ τῶν πηδαλίων Y_1 , Y_2 ἐπιτυγχάνεται, ὥστε τὸ ρύγχος τοῦ αεροπλάνου νὰ κατευθύνεται ὑπεράνω ἢ κάτω τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου.

Διὰ τοῦ κατακορυφίου πηδαλίου K ἐπιτυγχάνεται στροφή τοῦ αεροπλάνου πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ τ' ἀριστερά.

§ 164. Σύστημα προωθήσεως τῶν αεροπλάνων. Διὰ τὴν προώθησιν τῶν συνήθων αεροπλάνων χρησιμοποιεῖται ἡ ἑλῖξ, ἡ ὁποία κινεῖται διὰ βενζινοκινητήρος. Ἡ ἑλῖξ ἀποτελεῖται ἐξ ὠρισμένου ἀριθμοῦ πτερυγίων, καταλλήλου σχήματος, ἡ δὲ λειτουργία τῆς ἔχει, στοιχειοδῶς, ὡς ἑξῆς: Ὅταν ἡ ἑλῖξ περιστρέφεται, παραλαμβάνει μάζας αέρος, τὰς ὁποίας ἐπιταχύνει πρὸς τὰ ὀπίσω. Διὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν ταύτην ἐξασκεῖ ἐπ' αὐτῶν μίαν δύναμιν. Κατὰ τὴν ἀρχὴν <δράσις = ἀντίδρασις> καὶ αἱ μάζαι αὗται τοῦ αέρος ἐξασκοῦν ἐπὶ τῆς ἑλίκος μίαν ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ, ἀκριβῶς, τὴν προωστικὴν δύναμιν τοῦ αεροπλάνου.

Εἰς τ' ἀεριοθούμενα αεροπλάνα ἡ προωστικὴ δύναμις προκαλεῖται δι' ἑκτο-

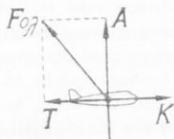
ξεύσεως ἰσχυροῦ ρεύματος ἀερίων πρὸς τὰ ὀπίσω. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιεῖται κινητήρ εἰδικοῦ τύπου (σχ. 274), ἀποτελούμενος ἐκ θαλάμου καύσεως, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἐκτοξεύεται φλὲξ πετρελαίου. Ὁ ἀήρ, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται διὰ τὴν καύσιν, παρέχεται ὑπὸ συμπίεστοῦ. Τὰ παραγόμενα καυσάερια ἔχουν ὑψηλὴν θερμοκρασίαν καὶ, ἐκτονούμενα, ἐξερχονται ἐκ τοῦ ρώθινος ἐκροῆς μετὰ μεγάλης ταχύτητος. Πρὸ τῆς ἐξόδου τῶν παρέχουν μικρὸν ποσοστὸν τῆς κινητικῆς τῶν ἐνεργείας εἰς ἀεροστροβίλον, ὁ ὁποῖος χρησιμεύει διὰ τὴν λειτουργίαν τοῦ συμπίεστοῦ. Διὰ τὴν κατανόησιν τῆς δημιουργίας τῆς προωστικῆς δυνάμεως εἰς τὰ ἀεριωθούμενα ἀεροπλάνα βλ. § 92.



Σχ. 274. Κινητὴρ ἀεριωθούμενον ἀεροπλάνον (ἀρχή).

Διὰ τῶν ἀεριωθούμενων ἀεροπλάνων ἐπετεύχθησαν καὶ αἱ ὑπερχητικαὶ ταχύτητες - δηλ., ταχύτητες, μεγαλύτεραι τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου (ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς 340 m/sec = 1224 km/h).

§ 165. Δυνάμεις ἐπὶ ἀεροπλάνου, ἱπταμένου ὁριζοντίως. Ἐπὶ τοῦ ἱπταμένου ἀεροπλάνου ἐξασκοῦνται τρεῖς δυνάμεις (σχ 275): 1) τὸ βάρος τοῦ B , 2) Ἡ προωστικὴ δυνάμις K , ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ὑπὸ τοῦ ἀέρος ἐπὶ τῆς στρεφομένης ἑλικος καὶ 3) ἡ ἀεροδύναμις $F_{ολ}$, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ὁ ἀήρ ἐπὶ τῆς πτέρυγος. Κατὰ τὴν ἰσοσταθῆ ὁριζοντίαν πτήσιν αἱ τρεῖς αὗται δυνάμεις εὐρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ. Ἐπειδὴ ἡ ἀεροδύναμις $F_{ολ}$ ἀναλύεται εἰς τὴν δυναμικὴν ἄνωσιν A καὶ τὴν ἀντίστασιν T , ἡ ἰσορροπία ἐκφράζεται διὰ τῶν ἐξισώσεων



Σχ. 275.

$$A - B = 0$$

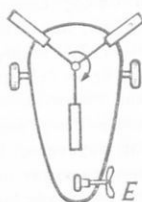
$$K - T = 0.$$

*Ἦτοι, ὅταν ἐν ἀεροπλάνου ἱπταται ὁριζοντίως καὶ με σταθερὰν ταχύτητα, ἡ μὲν δυναμικὴ ἄνωσις εἶναι ἴση πρὸς τὸ βάρος τοῦ, ἡ δὲ προωστικὴ δυνάμις ἴση πρὸς τὴν ἀντίστασιν.

§ 166. Ἑλικόπτερα. Ἄλλος τύπος ἀεροπλάνου εἶναι τὸ ἑλικόπτερον (σχ. 276). Τοῦτο στρεφεται ἑλικος, φέρει δὲ πτέρυγας, αἱ ὁποῖαι, εἶναι στρεπταὶ περὶ κατακόρυφον ἄξονα καὶ τίθενται εἰς περιστροφὴν διὰ βενζινοκινητήρος. Διὰ τῆς περιστροφῆς τῶν πτερύγων δημιουργεῖται δυναμικὴ ἄνωσις, ἡ ὁποία ἐπιτρέπει εἰς τὸ ἑλικόπτερον νὰ ἀπογειοῦται κατακορύφως καὶ νὰ αἰωρῆται ἀκίνητον. Διὰ τὴν ὁριζοντίαν πτήσιν ἀπαιτεῖται προωστικὴ δυνάμις, ἡ ὁποία προκαλεῖται διὰ καταλλήλων μεταβολῆς τῆς κλίσεως τῶν περιστρεφόμενων πτερύγων. Κατὰ τὴν περιστροφὴν τῶν πτερύγων, τὸ σκάφος τείνει νὰ περιστραφῇ κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν. Τοῦτο ἀποφεύ-

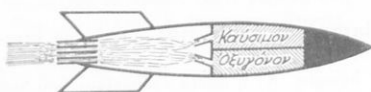


Σχ. 276. Φωτογραφία ελικοπτερόν.

Σχ. 277.
'Ελικοπτερόν.

γεται διά μικρᾶς ἑλικος E (σχ. 277) ἡ δευτέρου συστήματος πτερύγων, περιστρεφόμενων ἀντιθέτως.

§ 167. Πύραυλοι. Ἡ προωστική δύναμις τῶν πυραύλων προέρχεται ἐκ τῆς ἐκτοξεύσεως ἰσχυροῦ ρεύματος ἀερίων, ἀκριβῶς ὅπως εἰς τ' ἀεριοθούμενα ἀεροπλάνα.



Σχ. 278. Πύραυλος (ἀρχή).

Οἱ πύραυλοι, ὅμως, διαφέρουν τῶν ἀεριοθουμένων κατὰ τὸ ὅτι τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν καύσιν ὀξυγόνον δὲν προσλαμβάνεται ἐκ τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος, ἀλλὰ παράγεται εἰς τὸ ἐσωτερικόν των διὰ χημικῆς ἀντιδράσεως. Εἰς ἄλλους τύπους τὸ ὀξυγόνον φέρεται αὐτοῦσιον, ὑπὸ μορφὴν ὑγροῦ ὀξυγόνου, ἐντὸς εἰδικῶν δυσθερμαγωγῶν δοχείων. Ὡς ἐκ τούτου, οἱ πύραυλοι δὲν ἔχουν ἀνάγκην τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος διὰ τὴν λειτουργίαν των, θὰ ἠδύναντο, συνεπῶς, νὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ διαπλανητικὰ ταξείδια. Πύραυλοι, ἀκριβῶς, ἐχρησιμοποιήθησαν διὰ τὴν ἐκτόξευσιν τῶν τεχνητῶν δορυφόρων τῆς Γῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ'

ΜΗΧΑΝΑΙ

§ 168. Ὑδραντλία. Αἱ συνηθέστερον χρησιμοποιούμεναι ὑδραντλία εἶναι αἱ ἐμβολοφόροι καὶ αἱ φυγοκεντρικαί. Εἰς τὰς ἐμβολοφόρους κατατάσσονται ἡ ἀναρροφητικὴ ἀντλία καὶ ἡ καταθλιπτικὴ ἀντλία.

1) Ἀναρροφητικὴ ἀντλία. Αὕτη ἀποτελεῖται ἐκ μεταλλίνου κυλίνδρου K (σχ. 279), ἐντὸς τοῦ ὁποίου κινεῖται παλινδρομικῶς τὸ ἐμβόλον E καὶ ὁ ὁποῖος συνδέεται μετὰ τοῦ ἀναρροφητικοῦ σωλήνος Σ . Εἰς τὸ κέντρον τοῦ ἐμβόλου ὑπάρχει ὀπή, κλειομένη διὰ τῆς βαλβίδος B , ἡ ὁποία

ἀνοίγει ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Δευτέρα βαλβὶς Γ' , ὁμοίως λειτουργοῦσα, ὑπάρχει εἰς τὴν βᾶσιν τοῦ κυλίνδρου.

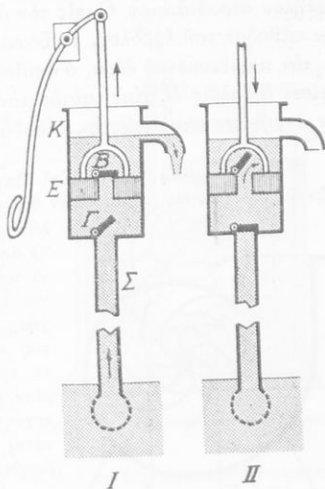
Ὅταν τὸ ἔμβολον εὐρίσκεται εἰς τὴν κατωτάτην του θέσιν, αἱ δύο βαλβίδες εἶναι κλεισταί. Ἐάν, τώρα, ἀνυψώσωμεν τὸ ἔμβολον (I), ἐλαττοῦμεν τὴν πίεσιν ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου, ὁπότε τὸ ὕδωρ, πιεζόμενον ὑπὸ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως, ἀνέρχεται καὶ γεμίζει τὸν κυλίνδρον. Ὅταν, ἐν συνεχείᾳ, καταβιβάσωμεν τὸ ἔμβολον (II), ἡ μὲν βαλβὶς Γ' κλείει, ἐνῶ ἡ B ἀνοίγει καὶ τὸ ὕδωρ ἀνέρχεται εἰς τὸν ἄνω τοῦ ἔμβολου χώρον, τὸν ὁποῖον καὶ γεμίζει, ἐφ' ὅσον ἐξακολουθεῖ λειτουργοῦσα ἡ ἀντλία. Ὅταν ἡ στάθμη τοῦ ὕδατος φθάσῃ εἰς τὴν ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου προσηρμοσμένον πλευρικὸν σωλῆνα, τὸ ὕδωρ ἀρχίζει νὰ ἐκρέῃ.

Ἐπειδὴ εἰς τὴν ἀναρροφητικὴν ἀντλίαν ἡ ἀνύψωσις τοῦ ὕδατος γίνεται τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως, θὰ ἔπρεπεν αἱ ἀντλίες αὗται νὰ ἀντλοῦν τὸ ὕδωρ ἀπὸ βάθους 10,3 μέτρων. Καὶ τοῦτο, διότι πίεσις μιᾶς ἀτμοσφαιρας ἀνυψώνει ὕδωρ εἰς ὕψος 10,3 μέτρων. Πρακτικῶς, ὅμως, λόγῳ τριβῶν κ.λ. τὸ βάθος τοῦτο μειοῦται εἰς τὰ 8 μέτρα περίπου.

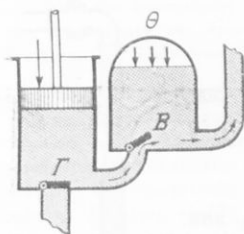
2) **Καταθλιπτικὴ ἀντλία.** Ὅπως εἶδομεν, διὰ τῆς ἀναρροφητικῆς ἀντλίας δυνάμεθα νὰ ἀντλήσωμεν ὕδωρ ἀπὸ βάθους, τὸ πολὺ, 8 μέτρων.

Ἄν, λοιπόν, τὸ βάθος τοῦ φρέατος εἶναι μεγαλύτερον, πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμεν ἄλλον τύπον ἀντλίας — τὴν καταθλιπτικὴν ἀντλίαν (σχ. 280) — ἡ ὁποία πρέπει νὰ τοποθετηθῇ παρὰ τὴν στάθμην τοῦ ὕδατος (ἢ ἐντὸς αὐτοῦ) ἢ, τὸ πολὺ, εἰς ἀπόστασιν 8 μέτρων ἀπ' αὐτῆς. Εἰς τὴν καταθλιπτικὴν ἀντλίαν ἡ βαλβὶς B , ἀντὶ νὰ εἶναι ἐπὶ τοῦ ἔμβολου, τοποθετεῖται πλευρικῶς καὶ ἀνοίγει ἐκ τῶν ἔσω πρὸς τὰ ἔξω.

Ὅταν ἀνυψώσωμεν τὸ ἔμβολον, ἡ βαλβὶς Γ' ἀνοίγει καὶ τὸ ὕδωρ εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου, τὸν ὁποῖον καὶ γεμίζει. Ὅταν, ἐν συνεχείᾳ, καταβιβάσωμεν τὸ ἔμβολον, τὸ ὕδωρ πιέζεται, κλείει ἡ βαλβὶς Γ' καὶ ἀνοίγει ἡ βαλβὶς B τοῦ πλευρικοῦ σωλῆνος, ὃ ὁποῖος καὶ πληροῦται δι' ὕδατος. Ἐπειδὴ ἡ ροὴ τοῦ ὕδατος εἶναι διακοπτομένη (λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ ἀντλία παρέχει ὕδωρ μόνον κατὰ



Σχ. 279. Ἀναρροφητικὴ ἀντλία. Ἀνοδος (I) καὶ κάθοδος (II) τοῦ ἔμβολου.



Σχ. 280. Καταθλιπτικὴ ἀντλία.

τὴν κάθοδον τοῦ ἐμβόλου), αἱ καταθλιπτικαὶ ἀντλῖαι ἐφοδιάζονται διὰ καταλλήλου ἀεροθαλάμου Θ , εἰς τὸν ὁποῖον παγιδεύεται ποσότης ἀέρος. Κατὰ τὴν κάθοδον τοῦ ἐμβόλου, τὸ ὕδωρ, εἰσερχόμενον εἰς τὸν θάλαμον, συμπίπτει τὸν παγιδευμένον ἀέρα, ὁ ὁποῖος ἐξακολουθεῖ νὰ πιεζῇ τὸ ὕδωρ καὶ ἀφοῦ κλείσει ἡ βαλβὶς B . Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὸ ὕδωρ ῥεεῖ συνεχῶς καὶ κατὰ τὴν ἀνύψωσιν καὶ κατὰ τὴν κάθοδον τοῦ ἐμβόλου.

3) **Φυγοκεντρικὴ ἀντλία.** Ἐπὶ ἀξονος εἶναι προσηρμοσμένα πτερύγια (σχ. 281), τὰ ὁποῖα τίθενται εἰς περιστροφὴν διὰ κινητήρος. Ὁ ἀναρροφητικὸς σωλὴν Σ καταλήγει, ἐκ τῶν πλαγιῶν, εἰς τὸ ὕψος τοῦ ἀξονος. Ὁ ἀπαγωγὸς σωλὴν A εἶναι προσηρμοσμένος εἰς τὸ τοίχωμα κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης τοῦ κυλινδρικοῦ τοιχώματος. Διὰ νὰ λειτουργήσῃ ἡ ἀντλία, γεμίζομεν αὐτὴν πρῶτον δι' ὕδατος καὶ, ἀκολουθῶς, θέτομεν εἰς περιστροφὴν τὰ πτερύγια, τὰ ὁποῖα προσδίδουν εἰς τὸ ὕδωρ μίαν ταχύτητα v . Τὸ ὕδωρ, εἰσερχόμενον μὲ τὴν ταχύτητα ταύτην εἰς τὸν ἀπαγωγὸν σωλῆνα, δύναται ν' ἀνέλθῃ εἰς ὕψος h , ὑπολογιζόμενον τῇ βοήθειᾳ τοῦ γνωστοῦ τύπου $v = \sqrt{2gh}$.

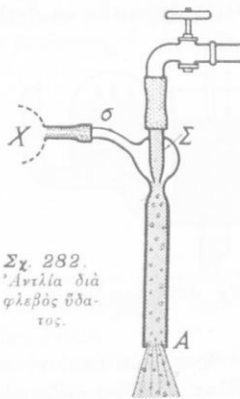
Ὁ ἀναρροφητικὸς σωλὴν τῆς ἀντλίας δὲν πρέπει νὰ ἔχη μῆκος, μεγαλύτερον τῶν 5 ἕως 7 μέτρων.

Σχ. 281. Φυγοκεντρικὴ ἀντλία.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἡ λειτουργία τῆς φυγοκεντρικῆς ἀντλίας οὐδεμίαν σχέσιν ἔχει μὲ τὴν φυγόκεντρον δύναμιν, ὅπως ἀφήνει νὰ ὑπονοηθῇ ἡ ὀνομασία τῆς. Πάντως, ὁ ὅρος «φυγοκεντρικὴ ἀντλία» ἔχει πλέον καθιερωθῇ.

§ 169. **Ἀντλῖαι κενοῦ.** Διὰ τῶν ἀντλιῶν κενοῦ ἐλαττοῦμεν τὴν πίεσιν εἰς ἓνα χώρον, ἀφαιροῦντες ἐξ αὐτοῦ τὸν ἀέρα. Οἱ συνθεστέροι τύποι ἀντλιῶν κενοῦ εἶναι οἱ ἑξῆς:

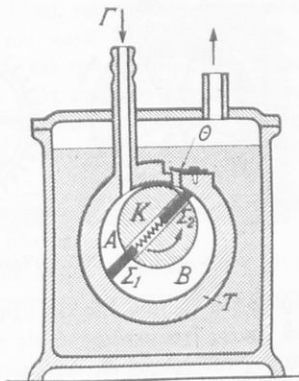
1) **Ἀντλία διὰ φλεβὸς ὕδατος.** Αὕτη ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ σωλήνος Σ (σχ. 282), ὁ ὁποῖος καταλήγει εἰς ἀκροφύσιον. Δεύτερος σωλὴν, περιβάλλων τὸν πρῶτον, φέρει ἀπ' ἑνὸς μὲν στένωσιν ἀκριβῶς εἰς τὸ ὕψος τοῦ ἀκροφυσίου, ἀπ' ἑτέρου δὲ τὸν πλάγιον σωληνίσκον σ , ὁ ὁποῖος συνδέεται μὲ τὸν πρὸς ἐκκένωσιν χώρον X . Συνδέομεν τὸν σωλῆνα Σ μετὰ τοῦ δικτύου ὑδρεύσεως, ὅποτε τὸ ὕδωρ ἐξέρχεται διὰ τοῦ ἀκροφυσίου μὲ μεγάλῃν ταχύτητα. Κατὰ τὸν νόμον τοῦ Bernoulli (§ 155, 2), ἡ πίεσις εἰς τὴν στένωσιν εἶναι μικροτέρα τῆς πίεσεως εἰς τὸ ἐλευθερὸν ἄκρον A , εἰς τὸ ὁποῖον ἐπικρατεῖ ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις. Ἡ ἡλαττωμένη πίεσις προκαλεῖ ῥοήν τοῦ ἀέρος, τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν πρὸς ἐκκένωσιν χώρον X καὶ οὕτω ἡ πίεσις ἐντὸς τοῦ χώρου τούτου βαθμυδὸν ἐλαττοῦται. Ὁ ἐκ τοῦ χώρου τούτου ἀφαιρούμενος ἀήρ, ἀναμειγνυόμενος μετὰ τοῦ ὕδατος, ἀπάγεται.



Σχ. 282. Ἀντλία διὰ φλεβὸς ὕδατος.

2) **Περιστροφικὴ ἀντλία.** Ἐὰν ἐπιζητῶμεν καλλίτερον κενὸν ἀπ' ὅ,τι ἐπιτυγ-

χάνομεν διὰ τῆς προηγουμένης ἀντλίας, χρησιμοποιοῦμεν τὴν *περιστροφικὴν ἀντλίαν* (σχ. 283). Αὕτη ἀποτελεῖται, κατ' ἀρχήν, ἐκ κοίλου κυλινδρικοῦ τυμπάνου T , ἐντὸς τοῦ ὁποίου στρέφεται μετάλλινος κύλινδρος K , περὶ ἄξονα, μὴ συμπίπτοντα μὲ τὸν ἄξονα τοῦ τυμπάνου. Δύο μετάλλιναι σύρται Σ_1, Σ_2 πιέζονται δι' ἐλατηρίου, ὥστε νὰ ἐφάπτονται, διαρκῶς, τοῦ τυμπάνου. Λόγῳ τῆς ἐκκέντρου τοποθετήσεως τοῦ κυλίνδρου K , αὐξάνεται, κατὰ τὴν περιστροφὴν, ὁ χώρος A , ὁ συνδεδεμένος διὰ τοῦ στομίου Γ , ὁπότε ἡ πίεσις ἐλαττοῦται καὶ ὁ ἀέρ ἀναρροφεῖται. Ἀντιθέτως, εἰς τὸν χώρον B ὁ ἀέρ συμπίεζεται καὶ ἐκδιώκεται διὰ τῆς βαλβίδος θ . Διὰ νὰ ἐπιτυγχάνεται καλλιτέρα στεγανότης, ἡ ἀντλία εἶναι βυθισμένη ἐντὸς εἰδικοῦ ὀρυκτελαίου. Διὰ τῶν ἀντλιῶν κενοῦ δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν ἐλάττωσιν τῆς πίσεως ἐνὸς αἵρου, τὸ ὅποιον εὐρίσκεται ἐντὸς χώρου τινός, εἰς τὸ σὺν χαμηλὰ ὄρια, ὥστε ὁ χώρος οὗτος νὰ θεωρητῇ πρακτικῶς κενός (*ὕψηλὸν κενόν*). Πίσεις, τὸσον χαμηλαί, ἔχουν σημασίαν τὸσον διὰ διαφόρους ἐπιστημονικὰς ἐρεῦνας, ὅσον καὶ διὰ πολλὰς πρακτικὰς ἐφαρμογὰς· π.χ., τοιαῦται πίσεις ἐπικριτοῦν ἐντὸς τῶν σωλῆνων ἀκτίνων Roentgen (Ρέντγκεν), τῶν ἡλεκτρονικῶν λυχνιῶν, τῶν φωτοκυττάρων κ.λ.



Σχ. 283. Περιστροφικὴ ἀντλία κενοῦ.

§ 170. Συμπίεσται καὶ ἀνεμιστήρες. Διὰ ν' αὐξήσωμεν τὴν πίεσιν τοῦ αέρος εἰς ἓνα χώρον, χρησιμοποιοῦμεν τοὺς *συμπίεστὰς* (*compresseurs* - κομπρεσέρ). Οὗτοι εἶναι εἴτε ἐμβολοφόροι, εἴτε φυγοκεντρικοί, λειτουργοῦν δὲ κατὰ τὴν ἀρχὴν τῶν ὑδραντλιῶν. Οἱ ἐμβολοφόροι χρησιμοποιοῦνται, π.χ., διὰ τὴν διόγκωσιν τῶν ἀεροθαλάμων τῶν τροχῶν τῶν αὐτοκινήτων, διὰ τὴν παροχὴν πεπιεσμένου αέρος διὰ τὴν λειτουργίαν τῶν ἀεροσφυγμάτων κ.λ.

Οἱ *ἀνεμιστήρες* προσδίδουν ταχύτητα εἰς τὸν αέρα, δημιουργοῦντες, οὕτω, ἰσχυρὸν ρεῦμα αέρος.

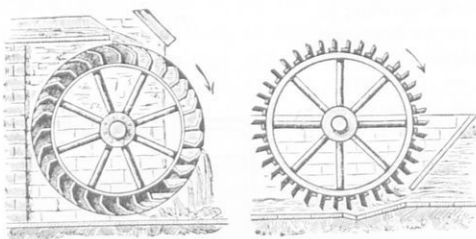
Διὰ τῶν συμπίεστῶν ἐπιτυγχάνονται καὶ αἱ ὑψηλαί πίσεις, αἱ ἀναγκαῖαι διὰ τὴν ὑδροποίησιν τῆς ὁμίωσις εἰς τὰ παγοποιεῖα. Ἐπίσης, διὰ συμπίεστοῦ εἶναι ἐφωδιασμένοι ὠρισμένοι τύποι ἡλεκτρικῶν ψυγείων.

★ Αἱ ὑψηλαί πίσεις ἔχουν ἰδιαιτέραν σημασίαν δι' ἐπιστημονικὰς ἐρεῦνας, προκειμένου νὰ ἐξετασθῇ ἡ συμπεριφορὰ τῆς ὕλης ὑπὸ πολὺ μεγάλας πίσεις. Ὁμοίως, κατὰ τὴν ὑδροποίησιν τοῦ αέρος διὰ τῆς μηχανῆς Linde (βλ. Κεφάλαιον Θεωρίας), οὗτος συμπίεζεται εἰς ὑψηλὴν πίεσιν. Ἐπίσης, διὰ τὴν σύνθεσιν τῆς ἁμμωνίας ἐκ τῶν συστατικῶν τῆς, ἀζώτου καὶ ὕδρογόνου, χρησιμοποιοῦνται μεγάλαι πίσεις. Ἐν γένει, εὐρέθῃ ὅτι ἡ ταχύτης διαφόρων χημικῶν ἀντιδράσεων αὐξάνεται πολὺ μετὰ τῆς πίσεως.

★ § 171. Ὑδραυλικοὶ τροχοὶ καὶ ὑδρστρόβιλοι. Οὗτοι χρησιμεύουν διὰ τὴν μετατροπὴν τῆς δυναμικῆς ἢ κινητικῆς ἐνεργείας ποσοτήτων ὕδατος εἰς ὠφέλιμον ἔργον.

1) Ὑδραυλικοὶ τροχοί. Εἰς ἓνα τύπον ἐξ αὐτῶν (σχ. 284) τὸ ὕδωρ προσάγεται εἰς τὸ ἄνω μέρος τοῦ τροχοῦ καὶ πληροῖ τὰ σκαφίδια, τὰ ὁποῖα.

λόγῳ τοῦ βάρους τοῦ περιεχομένου ὕδατος, θέτουν τὸν τροχὸν εἰς περι-

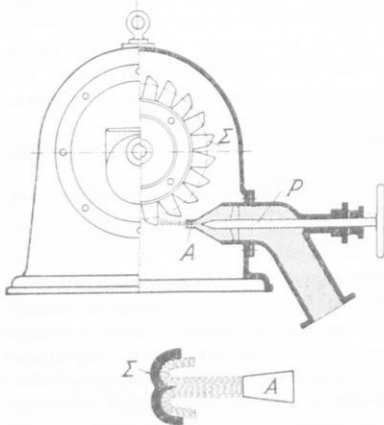


Σχ. 284 καὶ 285. Ὑδραυλικοὶ τροχοί.

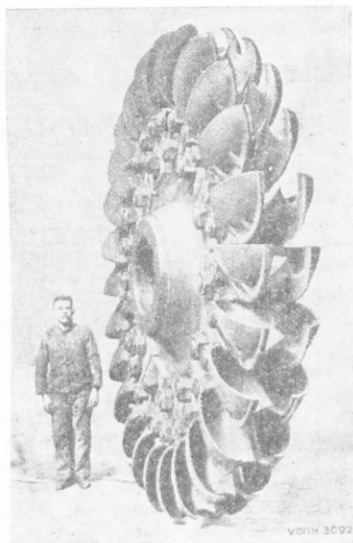
στροφήν. Διὰ τοιούτων, δηλ., τροχῶν ἐκμεταλλευόμεθα τὴν δυναμικὴν ἐνέργειαν τοῦ ὕδατος. Εἰς ἄλλον τύπον (σχ. 285) σχηματίζεται, διὰ καταλλήλου φράκτου, ὑδατίνη φλέψ μεγάλης ταχύτητος, ἡ ὁποία καὶ προσκρούει εἰς τὰ σκαφίδια τοῦ κάτω

μέρους τοῦ τροχοῦ. Εἰς τὴν σχηματιζομένην ὑδατίνη φλέβα ὅλη ἡ ἐνέργεια τοῦ ὕδατος ἔχει μετατραπῇ εἰς κινητικὴν, ἡ ὁποία, ἐν συνεχείᾳ, μετατρέπεται διὰ τοῦ τροχοῦ εἰς ὠφέλιμον ἔργον.

2) Ὑδροστροβίλοι. Ἐκ τῶν διαφόρων τύπων ὑδροστροβίλων περιγράφομεν τὸν ὑδροστροβίλον, τὸν ὁποῖον παριστᾷ τὸ σχῆμα 286: Τὸ ὕδωρ, ἐξερχόμενον μετὰ μεγάλης ταχύτητος ἐκ τοῦ ἀκροφυσίου *A*, πλήττει τὰ ἐπὶ



Σχ. 286. Ὑδροστροβίλος.



Σχ. 287. Πραγματικὴ μορφή τῶν σκαφιδίων.

τροχοῦ στερεωμένα σκαφίδια *Σ* καὶ θέτει τὸν ὑδροστροβίλον εἰς περιστροφήν. Εἰς τὸ αὐτὸ σχῆμα (κάτω) δεικνύεται ἡ ἀλλαγὴ κατευθύνσεως τῆς ὑδατίνης φλεβός, τῆς ἐξερχομένης ἐκ τοῦ ἀκροφυσίου *A* κατὰ τὴν πρόσκρουσιν αὐτῆς ἐπὶ τοῦ σκαφιδίου *Σ*. Ἡ πραγματικὴ μορφή τῶν σκαφι-

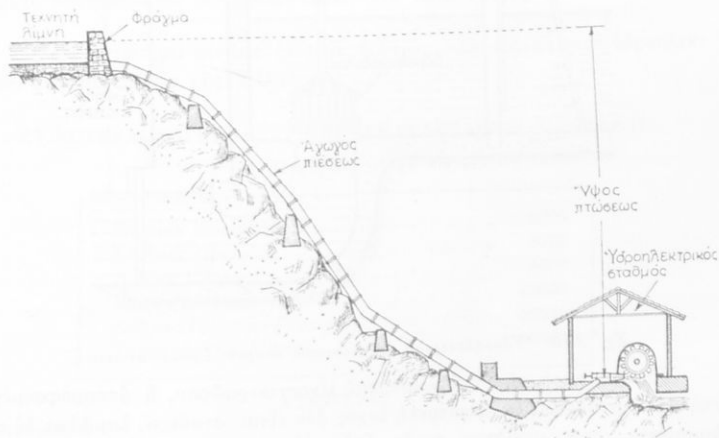
δίων φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 287. Διὰ τοῦ ρυθμιστοῦ P ρυθμίζεται ἡ ποσότης τοῦ παραγομένου ὕδατος.

Ἐὰν τὰ σκαφίδια εἶναι ἀκίνητα, τὸ ὕδωρ, προσπίπτον ἐπ' αὐτῶν, ἀλλάσσει ἀπλῶς τὴν φορὰν τῆς ταχύτητός του κατὰ 180° περίπου (σχ. 286, κάτω), ἐξασκουμένης οὕτω μιᾶς δυνάμεως ἐπὶ τοῦ τροχοῦ. Ἐάν, ὅμως, τὰ σκαφίδια μετατίθενται μὲ ταχύτητα, ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ταχύτητος τοῦ ὕδατος, ἡ ἀνακαμφθεῖσα ἀκτίς ἔχει, ὡς ἀποδεικνύεται, ταχύτητα, περίπου ἴσην πρὸς μηδέν· ἡ κινητικὴ τῆς, δηλαδή, ἐνέργεια ἔχει μεταδοθῇ εἰς τὸν τροχόν.

Οἱ ὑδροστρόβιλοι τοῦ τύπου τούτου χρησιμοποιοῦνται ἐκεῖ, ὅπου διατίθενται μεγάλα διαφορὰ στάθμης τοῦ ὕδατος.

Ὅταν ἡ ὑψομετρικὴ διαφορὰ εἶναι μικρά, χρησιμοποιοῦνται ὕδροστρόβιλοι, τῶν ὁποίων ἡ ἀρχὴ τῆς λειτουργίας εἶναι ὡς ἡ τοῦ ὑδροστροβίλου τοῦ σχήματος 211.

§ 172. Ύδροηλεκτρικαὶ ἐγκαταστάσεις. Εἰς τοὺς ὑδροηλεκτρικοὺς σταθμοὺς μετατρέπεται ἡ ἐνέργεια τῶν ὑδάτων ποταμῶν ἢ λιμνῶν εἰς ἡλεκτρικὴν ἐνέργειαν. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦνται ὑδροστρόβιλοι, οἱ ὅποιοι, συνδεδεμένοι καταλλήλως μὲ ἡλεκτρικὰς γεννητρίδας, θέτουν αὐτὰς



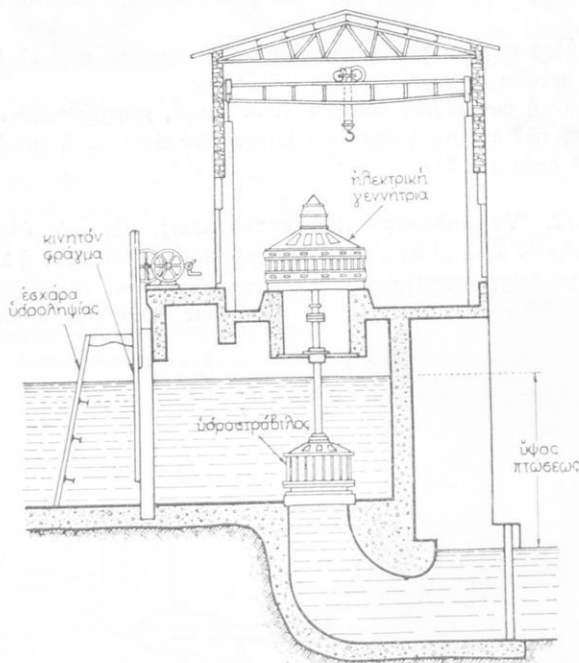
Σχ. 288. Ύδροηλεκτρικὴ ἐγκατάστασις μεγάλου ὕψους πτώσεως.

εἰς κίνησιν, ἡ δὲ παραγομένη ἡλεκτρικὴ ἐνέργεια μεταφέρεται, ὑπὸ ὑψηλὴν τάσιν, εἰς τὰ κέντρα καταναλώσεως.

★ Μία ὑδροηλεκτρικὴ ἐγκατάστασις, ἐκμεταλλευομένη τὰ ὕδατα ἑνὸς

ποταμοῦ καὶ ὑπὸ μέγα ὕψος πτώσεως, ἔχει, ἐν γενικαῖς γραμμαῖς, ὡς ἐξῆς: Ἐντὸς τοῦ ποταμοῦ κατασκευάζεται φράγμα (σχ. 288), τὸ ὁποῖον ἀνακόπτει τὸ ρεῦμα, τὰ δὲ ὕδατα φέρονται δι' ἀγωγὸν πίεσεως εἰς τὸν ὑδροστρόβιλον.

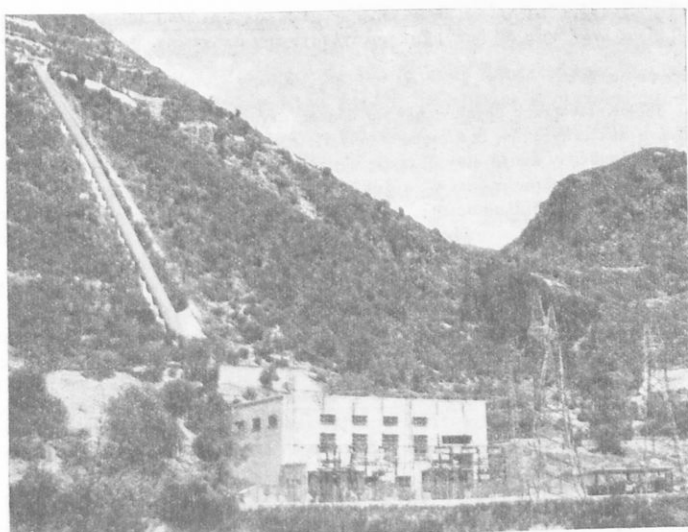
Ὅταν τὸ ὕψος πτώσεως εἶναι μικρόν, τὸ ὕδωρ φέρεται ἀπ' εὐθείας εἰς τὸν ὑδροστρόβιλον—δηλ., χωρὶς τὴν παρεμβολὴν σωλήνων—ὁ ὁποῖος, μάλιστα, εἰς μερικὰς περιπτώσεις εἶναι βυθισμένος ἐντὸς τοῦ ὕδατος (σχ. 289).



Σχ. 289. Ὑδροηλεκτρικὴ ἐγκατάστασις μικροῦ ὕψους πτώσεως.

Ἐπειδὴ, κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ εἰκοσιετραώρου, ἡ ἀπορροφουμένη ὑπὸ τῶν καταναλωτῶν ἡλεκτρικὴ ἰσχύς δὲν εἶναι σταθερά, λαμβάνει δὲ εἰς ὁρισμένας ὥρας μεγίστην τιμὴν (*αἰχμή*), ὑπερβαίνουσιν τὴν μεγίστην ἰσχύν, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ παράσῃ ὁ ποταμός, κατασκευάζεται ὑδατοποθήκη, ἐντὸς τῆς ὁποίας ἀποταμιεύεται τὸ ὕδωρ κατὰ τὰς φάσεις τῆς μικρᾶς ζητήσεως καὶ ἀποδίδεται κατὰ τὰς φάσεις τῶν αἰχμῶν.

Τὸ σχῆμα 290 εἶναι φωτογραφία τοῦ ὑδροηλεκτρικοῦ σταθμοῦ τοῦ Λάδωνος. Φαίνεται ὁ ἀγωγὸς πίεσεως (ἀριστερὰ ἄνω) καὶ (δεξιὰ) αἱ γραμμαὶ τοῦ δικτύου ὑψηλῆς τάσεως.



Σχ. 290. Φωτογραφία τοῦ ὑδροηλεκτρικοῦ σταθμοῦ Λάδωνος. Ὑψος πτώσεως 239 m.

Εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα δίδεται ἡ ἰσχὺς τῶν κυριωτέρων ὑδροηλεκτρικῶν ἐγκαταστάσεων τῆς Ἑλλάδος.

ΚΥΡΙΩΤΕΡΑΙ ΥΔΡΟΗΛΕΚΤΡΙΚΑΙ ΕΓΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΕΝ ΕΛΛΑΔΙ
(Ἰσχὺς εἰς kW)

Βέρμιον (Βερροίας)	2000
Γλαῦκος (Πατρῶν)	2600
Λοῦρος (Ἄρτης)	5000
Ἄγρα (Ἐδέσσης)	40000
Λάδων (Τρόπαια - Γορτυνίας)	60000
Ταυρωπὸς (Καρδίτσης)	80000

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κατηγορίᾳ Α'

176) Διὰ σωλῆνος, διαμέτρου 25 cm, ρέει πετρέλαιον μὲ ταχύτητα 3,6 km/h.
Πόσον πετρέλαιον θὰ δώσῃ ὁ σωλὴν ἐντὸς 24 ὥρων; (ΑΠ: 4239 m³)

177) Κρουνὸς, διαμέτρου 3 cm, γεμίζει δεξαμενὴν ὕδατος, χωρητικότητος 32 m³, ἐντὸς 24 ὥρων. Ποία ἡ ταχύτης ἐκροῆς τοῦ ὕδατος ἐκ τοῦ κρουνοῦ;
(ΑΠ: 52,4 cm/sec)

178) Πόσοι τόνοι ὕδατος διέρχονται ἀνά sec διὰ τινος διατομῆς (ἐμβαδοῦ 4 m² ποταμοῦ, ρέοντος μὲ ταχύτητα 2 m/sec; (ΑΠ: 8 t/sec)

179) Πόση εἶναι ἡ ἀντίστασις, τὴν ὁποίαν συναντᾷ ἀλεξίπτωτον, πλῖτον μὲ

σταθεράν ταχύτητα 6 m/sec , όταν τὸ βάρος τοῦ ἀλεξιπτώτου καὶ τοῦ ἀλεξιπτωτοῦ εἶναι ἴσον πρὸς 80 kgr^* ; Δικαιολογήσατε τὴν ἀπάντησιν. (ΑΠ: 80 kgr^*)

Κατηγορία Β'.

180) Κυλινδρικὸν δοχεῖον, πλήρες ὕδατος μέχρις ὕψους 80 cm , φέρει εἰς τὸν πυθμένα κυκλικὴν ὀπήν, διαμέτρου 2 cm . Ποία ἡ παροχὴ τῆς ὀπῆς, ἐὰν διατηρηθῇ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν διαρκῶς εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος; (ΑΠ: $1245 \text{ cm}^3/\text{sec}$)

181) Κατὰ πόσον πρέπει ν' αὐξηθῇ ἡ ἰσχύς τοῦ κινητήρος ἐνὸς ἀεροπλάνου, ἵνα ἡ ταχύτης του διπλασιασθῇ; (ΑΠ: Πρέπει νὰ δεπλασιασθῇ)

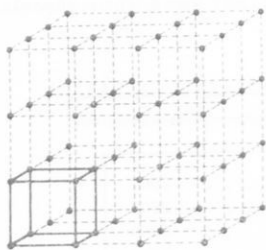
182) Πρόκειται ν' ἀνυψώσωμεν 900 λίτρα ὕδατος ἐντὸς 3 λεπτῶν εἰς ὕψος 150 m . Ποίας ἰσχύος μηχανὴν πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμεν; (Συντελεστὴς ἀποδόσεως τῆς μηχανῆς 90%). (ΑΠ: 11 HP)

183) Καταρράκτης, ὕψους $20,5 \text{ m}$, ἀποδίδει 126 τόννους ὕδατος ἀνά λεπτόν. Ζητεῖται α) τὸ ἀπολαμβανόμενον ἔργον ἐντὸς μιᾶς ὥρας καὶ β) ἡ ἰσχύς τῆς μηχανῆς, τὴν ὅποιαν δύναται οὗτος νὰ κινήσῃ. (Συντελεστὴς ἀποδόσεως 90%). (Ἡ ἰσχύς νὰ ἐκφρασθῇ εἰς HP καὶ kW). (ΑΠ: α) $1,55 \cdot 10^6 \text{ kgr}^* \cdot \text{m}$, β) $509,8 \text{ HP}$, $350,3 \text{ kW}$)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ'

ΜΟΡΙΑΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ

§ 173. **Ἄτομα καὶ μόρια.** Ἐὰν παρατηρήσωμεν διὰ μικροσκοπίου ἓν σῶμα — π.χ., τεμάχιον σιδήρου — ἔχομεν τὴν ἐντύπωσιν ὅτι τοῦτο ἔμφανίζεται ὡς συνεχὲς σύνολον. Ἄν, ὅμως, ἦτο



Σχ. 291. Τὰ ἄτομα τῶν στερεῶν σωμάτων εἶναι κανονικῶς διατεταγμένα.

δυνατὸν νὰ κατασκευάσωμεν ἓν μικροσκόπιον, ἀσυγκρίτως μεγαλυτέρας μεγεθύνσεως (*), θὰ διεπιστώνναμεν ὅτι τὸ τεμάχιον σιδήρου ἀποτελεῖται ἐκ μεμονωμένων δομικῶν λίθων, κανονικῶς διατεταγμένων, καί, ἐντελῶς, ὁμοίων μεταξύ των (σχ. 291). Τοὺς δομικοὺς αὐτοὺς λίθους καλοῦμεν **ἄτομα** τοῦ σιδήρου.

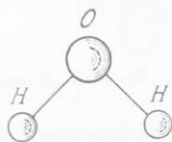
Ὅπως ὁ σίδηρος, οὕτω καὶ ἄλλα στοιχεῖα, ὅπως ὁ χαλκός, ὁ ἄνθραξ κ.λ., ἀποτελοῦνται ἐξ ἀτόμων. Τὰ ἄτομα τῶν διαφόρων στοιχείων διαφέρουν μεταξύ των κατὰ τὰς διαστάσεις, κατὰ τὴν μῆζαν καὶ κατ' ἄλλας,

ἀκόμη, ἰδιότητας, τὰς ὁποίας θὰ γνωρίσωμεν εἰς ἄλλο μέρος τῆς Φυσικῆς. Οἱ δομικοὶ λίθοι τῶν ἄνω στοιχείων (σιδήρου, χαλκοῦ, ἄνθρακος κ.λ.) ἦσαν μεμονωμένα ἄτομα. Ἄλλα, ὅμως, σώματα ἀποτελοῦνται ἐκ δομικῶν

(*) Τὸ φανταστικὸν τοῦτο μικροσκόπιον θὰ ἔπρεπε νὰ εἶχε μεγέθυνσιν $1.000.000$, δηλ., χιλιάς, τοιαύτην, φερόντα μεγαλυτέραν τῆς μεγεθύνσεως τοῦ ἀρίστου ὀπτικοῦ μικροσκοπίου, τὸ ὅποιον διαθέτομεν σήμερον καὶ τὸ ὅποιον μεγεθύνει 1000 , περίπου, φεράς. Μικροσκόπιον, ὅμως, τόσο μεγάλης μεγεθύνσεως δὲν εἶναι δυνατόν νὰ λειτουργήσῃ, διὰ λόγους, τοὺς ὁποίους ἐξηγεῖ ἡ κυματικὴ θεωρία τοῦ φωτός.

λίθων, οἱ ὅποιοι εἶναι συμπλέγματα ἀτόμων καὶ καλοῦνται **μόρια**. Οὕτω, τὸ ὀξυγόγον ἀποτελεῖται ἐκ μορίων, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι σύμπλεγμα δύο ἀτόμων ὀξυγόνου. Ὀμοίως, ἐκ δύο ἀτόμων ἀποτελοῦνται τὰ μόρια τοῦ ὑδρογόνου, τοῦ ἰωδίου καὶ ἄλλων ὑλικῶν. Εἰς ἄλλας περιπτώσεις (ὅπως εἰς τὸ θεῖον, τὸ ὕζον) ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀτόμων, τῶν ἀποτελούντων τὸ μόριον, εἶναι μεγαλύτερος.

Εἰς τὰς *χημικὰς ἐνώσεις*, αἱ ὁποῖαι, ὥς γνωστόν, ἀποτελοῦνται ἐκ διαφόρων στοιχείων, τὰ μόριά των ἀποτελοῦνται ἐξ ἁνομοίων ἀτόμων. Οὕτω, τὸ μόριον τοῦ ὕδατος ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἀτόμων ὑδρογόνου καὶ ἑνὸς ἀτόμου ὀξυγόνου (σχ. 292). Ὀμοίως, ἐκ μορίων, ἀκόμη συνθετωτέρων, ἀποτελεῖται τὸ οἶνόπνευμα. Τοῦτο, ἐξατμιζόμενον, μετατρέπεται εἰς ἀτμοὺς οἶνοπνεύματος, οἱ ὅποιοι ἀποτελοῦνται ἐκ μορίων οἶνοπνεύματος. Ἐκ πολυπλόκων μορίων, κανονικῶς διατεταγμένων, ἀποτελεῖται καὶ τὸ στερεὸν σάκχαρον. Τοῦτο διαχωρίζεται εἰς μεμονωμένα μόρια σακχάρου, ἐὰν διαλυθῇ ἐντὸς τοῦ ὕδατος.



Σχ. 292. Μόριον τοῦ ὕδατος.

Ἐκ τῶν ἄνωτέρω προκύπτει ὅτι πᾶν σῶμα (στερεόν, ὑγρὸν ἢ ἀέριον) ἀποτελεῖται ἐκ μεμονωμένων δομικῶν λίθων, οἱ ὅποιοι, ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως, εἶναι ἢ ἄτομα ἢ μόρια.

• § 174. **Μοριακαὶ δυνάμεις.** Ὄταν δύο μόρια πλησιάσουν πολὺ μεταξὺ των, ἐμφανίζεται μία ἰσχυρὰ ἑλκτική δύναμις, ἡ ὁποία καὶ τὰ συγκρατεῖ. Εἰς τοιαύτας, ἀκριβῶς, ἑλκτικὰς δυνάμεις ὀφείλεται ἡ στερεὰ καὶ ἡ ὑγρὰ κατάστασις, καθὼς καὶ διάφορα φαινόμενα — ὅπως ἡ συνοχή, ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις, ἡ ὑγροποίησις τῶν ἀερίων κ.λ. — τινὰ τῶν ὁποίων θὰ μελετήσωμεν εἰς τὰ κατωτέρω.

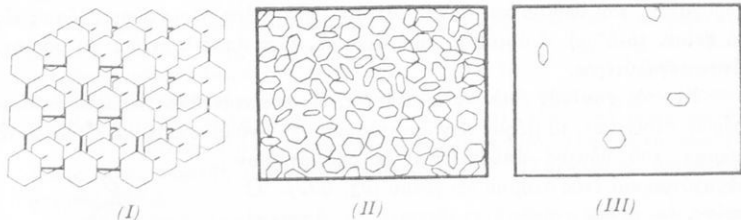
Εἰδικῶς, εἰς τὴν ἀέριον κατάστασιν αἱ ἀποστάσεις μεταξὺ τῶν μορίων εἶναι τόσον μεγάλαι, ὥστε αἱ ἐξασκούμεναι δυνάμεις νὰ εἶναι πολὺ ἀσθενεῖς.

Ἐκτὸς τῶν ἑλκτικῶν δυνάμεων, μεταξὺ τῶν μορίων ὑπάρχουν καὶ ἀπωστικαὶ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται, ὅταν ταῦτα πλησιάσουν τόσον πολὺ, ὥστε τὸ ἓν νὰ ἀρχίσῃ νὰ διεισδύῃ ἐντὸς τοῦ ἄλλου. Λόγῳ, ἀκριβῶς, τῶν ἀπωστικῶν αὐτῶν δυνάμεων, τὰ στερεὰ καὶ τὰ ὑγρὰ ἀνθίστανται εἰς τὴν ἐλάττωσιν τοῦ ὄγκου των. Ὄταν ἓν στερεὸν ἢ ὑγρὸν οὕτε συμπιέζεται, οὕτε ὑψίσταται ἑλκυσμόν, αἱ ἑλκτικαὶ καὶ αἱ ἀπωστικαὶ δυνάμεις μεταξὺ τῶν μορίων ἰσορροποῦν.

Εἰς τὰ στερεὰ (σχ. 293, I) οἱ δομικοὶ λίθοι (ἄτομα ἢ μόρια) εὐρίσκονται πολὺ πλησίον ἀλλήλων, ὥστε νὰ ἐφάπτονται μεταξὺ των καὶ νὰ μὴ εἶναι δυνατὴ ἡ μετὰθεσις αὐτῶν.

Εἰς τὰ ὑγρὰ (II), αἱ ἀποστάσεις μεταξὺ ἀτόμων ἢ μορίων εἶναι κατὰ τι μεγαλύτεραι, αἱ δυνάμεις, ἀντιστοίχως, μικρότεραι καί, ὥς ἐκ τούτου, τὰ μόρια δύνανται νὰ ὀλισθαίνουν τὰ μὲν ἐπὶ τῶν δέ, χωρὶς, ὁμοῦς.

καὶ ν' απομακρύνονται ἀπ' ἀλλήλων. Βεβαίως, διὰ θερμάνσεως, τὰ μόρια τῶν ὑγρῶν δύνανται νὰ ὑπερνικήσουν τὰς μεταξύ των ἑλκτικὰς δυνάμεις

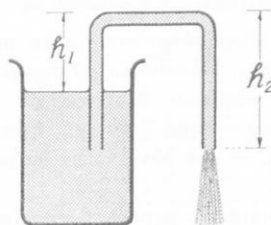


Σχ. 293. Διάταξις τῶν μορίων εἰς τὰ στερεὰ (I), ὑγρά (II) καὶ ἀέρια (III).

καὶ ν' απομακρυνθοῦν (βλ. κατωτέρω, ἐξάτμισις).

Εἰς τὰ ἀέρια, τέλος, αἱ ἀποστάσεις εἶναι ἀκόμῃ μεγαλύτεραι (III), ὥστε, πλέον, αἱ δυνάμεις μεταξύ τῶν μορίων εἶναι πολὺ μικραὶ καί, ὡς ἐκ τούτου, ταῦτα κινοῦνται ἀτάκτως πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις.

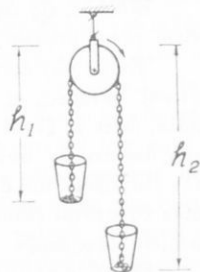
§ 175. Συνεχία. Εἰς τὰς ἑλκτικὰς δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται μεταξύ ὁμοειδῶν μορίων, ὁφείλεται καὶ ἡ **συνοχή** τῶν σωμάτων.



Σχ. 294. Σίφων.

περιέχοντος ὕδωρ, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ὕδωρ ἀρχίζει νὰ ἐκρέη ἐκ τοῦ ἄλλου ἄκρου. Ἡ ροὴ προέρχεται ἐκ τῆς διαφορᾶς τοῦ βάρους τῶν ὑγρῶν στιλῶν h_1 καὶ h_2 εἰς τὰ δύο σκέλη τοῦ σίφωνος, ἀκριβῶς ὅπως τοῦτο συμβαίνει εἰς ἄλυσιν, διερχομένην διὰ τροχαλίας (σχ. 295): "Ὅταν τὰ δύο ποτήρια, τὰ ὁποῖα περιέχουν μέρος τῆς ἀλύσεως, τεθοῦν εἰς διάφορα ὕψη, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ἄλυσις «ρέει» ἐκ τοῦ ὑψηλότερου εὐρισκομένου ποτηρίου εἰς τὸ ἄλλο. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ρεῖ τὸ ὕδωρ ἐντὸς τοῦ σίφωνος, ὅταν τὸ ἔξω τοῦ ὕδατος ἄκρον τοῦ σωλῆνος εὐρίσκεται χαμηλότερον τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ

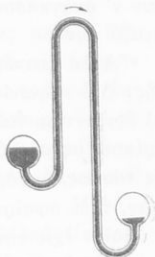
Ἐκτὸς τῶν στερεῶν, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ φαινόμενον τῆς συνοχῆς εἶναι ἐκδηλον (ἀντοχή τῶν στερεῶν), συνοχή ἐμφανίζεται καὶ εἰς τὰ ὑγρά. Λόγῳ τῆς συνοχῆς τῶν ὑγρῶν λειτουργεῖ καὶ ὁ **σίφων**, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἐκ σωλῆνος κεκαμμένου, ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα 294: Ἐὰν γεμίσωμεν τὸν σωλῆνα δι' ὕδατος καὶ βυθίσωμεν τὸ ἓν ἄκρον του ἐντὸς δοχείου,



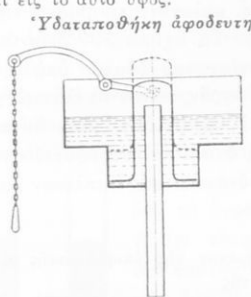
Σχ. 295. Μηχανικὸν ἀνάλογον διὰ τὴν κατανόησιν τῆς λειτουργίας τοῦ σίφωνος.

ὑδατος εἰς τὸ δοχεῖον. Εἶναι προφανές ὅτι, χωρὶς τὰς δυνάμεις συνοχῆς, αἱ δύο «κρεμάμεναι» στήλαι τοῦ ὑδατος θὰ διεκόπτοντο.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἡ παρουσία τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως δὲν εἶναι ἀναγκαία διὰ τὴν λειτουργίαν τοῦ σίφωνος, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ λειτουργῇ καὶ ἐν τῷ κενῷ. Τὸ σχῆμα 296 παριστᾷ σίφωνα, ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχει ἀφαιρεθῇ ὁ ἀτμοσφαιρικός ἀήρ. Διὰ νὰ θέσωμεν εἰς λειτουργίαν τὸν σίφωνα, κλίνομεν αὐτὸν καὶ ἀναγκάζομεν ὅλον τὸ ὕδωρ νὰ συγκεντρωθῇ εἰς τὸ ἀριστερὸν δοχεῖον. Ἀκολουθῶς, κλίνομεν τὸν σίφωνα ἀντιθέτως, ὅποτε οὗτος ἀρχίζει νὰ λειτουργῇ καὶ, κατόπιν τὸν ἐπαναφέρομεν εἰς τὴν κατακόρυφον θέσιν. Τὸ ὕδωρ ἐξακολουθεῖ νὰ ρεῖ πρὸς τὸ δεξιὸν δοχεῖον, ἐφ' ὅσον ἡ στάθμη τοῦ ὑδατος εἰς τὰ δύο δοχεῖα δὲν εὐρίσκειται εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος.



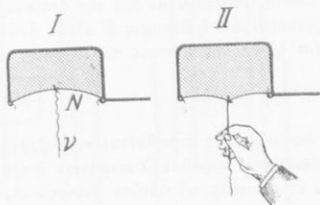
Σχ. 296. Σίφων ἐν κενῷ.



Σχ. 297. Ὑδαταποθήκη ἀφοδευτηρίου μετὰ σίφωνος.

Ὑδαταποθήκη ἀφοδευτηρίου μετὰ σίφωνος. Τὴν ἀρχὴν τοῦ σίφωνος ἐκμεταλεύομεθα διὰ τὴν δι' ἑνὸς χειρισμοῦ πλήρη ἐκκένωσιν τῶν ὑδαταποθηκῶν τῶν ἀφοδευτηρίων (σχ. 297). Πρὸς τοῦτο ἔλκομεν τὴν λαβὴν, ὅποτε ὁ κώδων ἀνυψοῦται. Ἀκολουθῶς, ἀφήνομεν αὐτὴν ἐλευθέραν καὶ ὁ κώδων κατέρχεται εἰς τὴν προτέραν του θέσιν. Ὁ κώδων, λόγῳ τῆς διαμορφώσεως τῶν χειλέων του, ἀναγκάζει τὸ ὑπ' αὐτὸν ὕδωρ ν' ἀνυψωθῇ ὑπὲρ τὴν ἐπιφανείαν, εἰς τὴν ὁποίαν εὐρίσκειτο προηγουμένως. Εὐθὺς, ὡς ἡ στάθμη τοῦ ὑδατος ὑπερβῇ τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται τὸ ἄνω ἄκρον τοῦ σωλήνος ἐκροῆς, τὸ ὕδωρ εἰσρέει εἰς αὐτὸν καί, οὕτως, ὁ σίφων ἀρχίζει νὰ λειτουργῇ. Οὗτος, ἅπαξ διεγερθεὶς, ἐξακολουθεῖ νὰ λειτουργῇ μέχρι πλήρους ἐκκένώσεως τῆς ὑδαταποθήκης.

• § 176. Ἐπιφανειακὴ τάσις. Ἐὰν ἐμβαπτίσωμεν ἐντὸς διαλύματος σάπωνος συρμάτινον πλαίσιον εἰς σχῆμα II, τοῦ ὁποίου τὴν τετάρτην πλευρὰν ἀποτελεῖ τὸ νῆμα N (σχ. 298, I) καί, ἀκολουθῶς, τὸ ἀνασύρωμεν μετὰ προσοχῆς, θὰ σχηματισθῇ ἐν λεπτότατον στρωμα ὑγροῦ (ὕμενιον), ἐνῶ τὸ νῆμα μετακινεῖται, ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα, κατὰ τρόπον ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑμενίου νὰ ἐλαττωθῇ. Ἐὰν διὰ τοῦ νήματος ν' ἐλξωμεν τὸ νῆμα N, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑμενίου αὐξάνεται (II), εὐθὺς, ὁμῶς, ὡς τὸ ἀφήσωμεν ἐλευθέρον, αὕτη ἐλαττοῦται ἐκ νέου. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι τὸ ὑγρὸν ὑμένιον ἔχει τὴν τάσιν νὰ ἐλαττώσῃ τὴν ἐπιφανείαν του.



Σχ. 298. Λόγῳ τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως τὸ ὑγρὸν ὑμένιον τείνει διαρκῶς νὰ ἐλαττώσῃ τὸ ἐμβαδόν του.

Τὴν τάσιν, τὴν ὁποίαν ἔχουν τὰ ὑγρά ὑμένια νὰ ἐλαττώσουν τὴν ἐπιφανείαν των, καλοῦμεν **ἐπιφανειακὴν τάσιν**. Ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις ὀφείλε-

ται εἰς τὰς ἐλκτικὰς δυνάμεις μεταξὺ τῶν μορίων τῶν ὑγρῶν, αἱ ὁποῖαι τείνουν ν' ἀναγκάσουν τὰ μόρια νὰ πλησιάσουν ὅσον τὸ δυνατόν περισσότερον μεταξὺ τῶν.

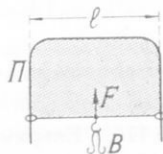
Ἄλλο φαινόμενον, ὀφειλόμενον εἰς τὴν ἐπιφανειακὴν τάσιν, εἶναι τὸ ἐξῆς: Διὰ σιφωνίου λαμβάνομεν σταγόνα ὑδραργύρου καὶ τὴν ἀποθέτομεν ἐπὶ ὀριζοντίας ὑαλίνης πλακός. Θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ σταγὼν λαμβάνει, περίπου, σφαιρικόν σχῆμα. Τοῦτο ἐξηγεῖται ὡς ἐξῆς: Λόγῳ τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως, ὁ ὑδράργυρος τείνει ν' ἀποκτήσῃ τὴν ἐλαχίστην δυνατὴν ἐπιφάνειαν, ἡ δὲ σφαῖρα εἶναι, ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Γεωμετρίας, τὸ σχῆμα ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἐλαχίστην ἐπιφάνειαν ὑπὸ δεδομένου ὄγκου.

Διὰ τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως ἐξηγεῖται καὶ τὸ ἐξῆς φαινόμενον: Μία βελόνη ραβίματος, ἀφοῦ ἀλοιφθῇ διὰ λίπους, ἐπιπλέει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, ἐὰν ἀφεθῇ μετὰ προσοχῆς ἐπ' αὐτῆς, μολονότι τὸ βάρος της εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἀνώσεως. Τὸ σχῆμα 299 δεικνύει τὴν παραμόρφωσιν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος ὑπὸ τὴν βελόνην. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ ὑγρὸν, τείνει νὰ ἐλαττώσῃ τὴν ἐπιφάνειάν του, ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς βελόνης μίαν δύναμιν μὲ φοράν πρὸς τὰ ἄνω, ἡ ὁποία καὶ συγκρατεῖ τὴν βελόνην. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον διάφορα ἔντομα δύνανται νὰ ἐπιπλέουν καὶ νὰ κινοῦνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος.



Σχ. 299.

★ **Συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως.** Τὸ φαινόμενον τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως δυνάμεθα νὰ παρακολουθήσωμεν ποσοτικῶς διὰ τῆς ἐξῆς διατάξεως: Ἐπὶ πλαισίου Π (σχ. 300), τοῦ ὁποῖου ἡ τετάρτη πλευρὰ εἶναι κινητὴ, σχηματίζομεν ὑμένιον ἀπὸ διάλυμα σάπωνος. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πλευρὰ αὕτη μετακινεῖται κατὰ τρόπον ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὑμένιου νὰ ἐλαττωταί. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὴν δύναμιν F , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπ' αὐτῆς τὸ ὑμένιον. Τὴν δύναμιν ταύτην δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν ἐκ τοῦ βάρους B τῶν σταθμῶν, τὰ ὁποῖα ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ἀντιστάθμισιν αὐτῆς. Οὕτως εὐρίσκεται ὅτι ἡ δύναμις F εἶναι ἀνάλογος τοῦ μήκους l τῆς κινητῆς πλευρᾶς, ἐξαο-
τᾶται δὲ ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ὑγροῦ. *Ἦτοι εἶναι



Σχ. 300.

$$F = 2 \cdot \sigma \cdot l$$

Ὁ συντελεστὴς σ καλεῖται **συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως** καὶ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ὑγροῦ. (Ὁ παράγον 2 τίθεται εἰς τὸν ἄνω τύπον, διότι τὸ ὑμένιον ἔχει δύο ἐπιφάνειas, αἱ ὁποῖαι τείνουν ἀμφοτέρωι νὰ ἐλαττώσουν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὑμένιου, διπλασιαζομένης, οὕτω, τῆς δυνάμεως ἐπὶ τῆς κινητῆς πλευρᾶς).

§ 177. Συνάφεια - Τριχιδεικὰ φαινόμενα. Ἐλκτικαὶ δυνάμεις παρουσιάζονται ὅχι μόνον μεταξὺ ὁμοειδῶν μορίων, ἀλλὰ καὶ μεταξὺ ἑτεροειδῶν. Λόγῳ τοιούτων δυνάμεων συγκρατοῦνται τὰ μόρια τῆς κιμωλίας ἐπὶ τοῦ μαυροπίνακος κατὰ τὴν γραφὴν. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ κατὰ τὴν γραφὴν διὰ μολυβδοκονδύλου ἐπὶ τοῦ χάρτου.

Αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται μεταξὺ ἐτεροειδῶν μορίων, καλοῦνται **δυνάμεις συναφείας**.

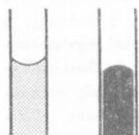
Εἰς τὰς ἄνω δύο περιπτώσεις πρόκειται περὶ συναφείας μεταξὺ δύο στερεῶν. Δυνάμεις, ὅμως, συναφείας παρουσιάζονται καὶ κατὰ τὴν ἐπαφὴν στερεῶν μὲ ὑγρὰ. Οὕτω, ἐὰν ἐμβαπτίσωμεν ἐντὸς ὕδατος καθαρὰν ὑαλίνην πλάκα καί, ἀκολούθως, τὴν ἀνασύρωμεν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ὕδωρ προσκολλᾶται ἐπ' αὐτῆς. Λέγομεν ὅτι τὸ ὕδωρ **διαβρέχει** τὴν ὑάλον. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς ἰσχυρὰς δυνάμεις συναφείας μεταξὺ τῶν μορίων τοῦ ὕδατος καὶ τῶν μορίων τῆς ὑάλου.

Εἰς ἄλλας περιπτώσεις αἱ δυνάμεις συναφείας εἶναι πολὺ ἀσθενέστεραι καὶ δὲν κατορθώνουν νὰ συγκρατήσουν τὸ ὑγρὸν. Οὕτω, ὁ ὑδράργυρος δὲν προσκολλᾶται ἐπὶ τῆς ὑάλου. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι ὁ ὑδράργυρος δὲν **διαβρέχει** τὴν ὑάλον.

Λόγω τῶν δυνάμεων συναφείας, ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ἐνὸς ὑγροῦ, ἐκεῖ ὅπου τοῦτο συναντᾷ ἐν στερεόν, δὲν εἶναι πλέον ὀριζοντία, ἀλλ' ἀνέρχεται ἢ κατέρχεται, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν τὸ ὑγρὸν διαβρέχῃ ἢ ὅχι τὸ στερεὸν τοίχωμα (σχ. 301). Τὴν παραμόρφωσιν ταύτην τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ παρατηροῦμεν εὐχερῶς, ἐὰν θέσωμεν τὸ ὑγρὸν ἐντὸς ὑαλίνου σωλήνος (σχ. 302).



σχ. 301. Τὸ ὕδωρ διαβρέχει τὴν ὑάλον, ἐνῶ ὁ ὑδράργυρος ὅχι.

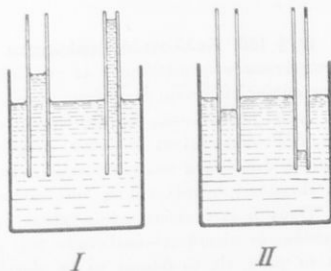


σχ. 302.

Τὰ περιγραφέντα φαινόμενα καλοῦνται **τριχοειδικὰ φαινόμενα**, διότι ἐμελετήθησαν, τὸ πρῶτον, ἐντὸς σωλήνων πολὺ μικρᾶς διαμέτρου (τριχοειδῶν σωλήνων).

• § 178. Μεταβολὴ τοῦ ὕψους τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἐντὸς τριχοειδῶν σωλήνων.

Ἐὰν ἐμβαπτίσωμεν ἐντὸς ὕδατος σωλήνα ὑαλίνον, μικρᾶς διαμέτρου, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐντὸς τοῦ σωλήνος ὕδωρ δὲν εὐρίσκεται εἰς τὸ ὕψος τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας, ἀλλ' ἀνέρχεται ἐντὸς αὐτοῦ, ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα 303, I Ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὸ πείραμα, ἐμβαπτίζοντες τὸν σωλήνα ἐντὸς ὑδραργύρου, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ στάθμη τοῦ ὑγροῦ ἐντὸς τοῦ σωλήνος εὐρίσκεται χαμηλότερον τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας (II). Κατὰ ταῦτα, τὰ τριχοειδικὰ φαινόμενα προ-



σχ. 303. Ἡ ἀνύψωσις (I) ἢ ἡ ταπείνωσις (II) τῆς στάθμης ἐντὸς σωλήνων εἶναι ἀντιτερόφως ἀνάλογος τῆς ἀκτίως.

καλοῦν μεταβολὴν τοῦ ὕψους τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ἐνὸς ὑγροῦ ἐντὸς στενῶν σωλῆνων. Καὶ ὅταν μὲν τὸ ὑγρὸν διαβρέχῃ αὐτούς, ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ἀνέρχεται, ἐνῶ, ἀντιθέτως, ὅταν οἱ σωλῆνες δὲν διαβρέχονται ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ, ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια κατέρχεται ἐντὸς αὐτῶν.

Ὅπως ἀποδεικνύεται, ἡ ταπείνωσις ἢ ἡ ἀνύψωσις τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀκτίνος τοῦ σωλῆνος. Οὕτω, εἰς τοὺς λεπτοτέρους σωλῆνας τοῦ σχήματος 303 ἡ ἀνύψωσις ἢ ἡ ταπείνωσις εἶναι μεγαλυτέρα παρὰ εἰς τοὺς εὐρυτέρους.

Λόγῳ τριχοειδικῶν φαινομένων ἀνέρχεται καὶ ἡ μελάνη, ὅταν ἔλθῃ εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν ἀπορροφητικὸν χάρτην (στυπλόχαρτον), τὸ πετρέλαιον, ὅταν ἔλθῃ εἰς ἐπαφὴν μὲ τὴν θρυαλλίδα (κ. φυτίλι) τῶν λύχνων πετρελαίου κ.λ.

• ★ § 179. Διαλύματα. Ὅταν ἐντὸς ὕδατος ρίψωμεν τεμάχιον σακχάρου, τὰ μόρια αὐτοῦ κατανέμονται ὁμοιόμορφως ἐντὸς τοῦ ὕδατος (*διάλυσις*), ὁπότε σχηματίζεται νέον ὁμοιογενὲς ὑγρὸν, τὸ ὁποῖον καλεῖται **διάλυμα**. Ἐὰν ἐντὸς τοῦ διαλύματος τούτου ἐξακολουθήσωμεν νὰ ρίπτωμεν σάκχαρον, θὰ ἔλθῃ στιγμή, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐπὶ πλέον προστιθεμένη ποσότης σακχάρου δὲν διαλύεται. Τὸ διάλυμα, τότε, καλεῖται **κεκορεσμένον**.

Ἐάν, ἀντὶ σακχάρου, διαλύσωμεν μαγειρικὸν ἅλας, ὁ κορεσμὸς θὰ ἐπέλθῃ, ὅταν ρίψωμεν διάφορον ποσότητα. Παρατηροῦμεν ὅτι, δι' ἐκάστην οὐσίαν, ἡ ποσότης, ἡ δυναμένη νὰ διαλυθῇ κατ' ἀνώτατον ὅριον, εἶναι διάφορος καὶ ἀποτελεῖ τὴν καλουμένην **διαλυτότητα** (ἢ *συντελεστὴν διαλυτότητος*) τῆς οὐσίας. Αἱ τιμαὶ τῆς διαλυτότητος τῶν διαφόρων οὐσιῶν παρέχονται ἐκ πινάκων καὶ ἐκφράζονται εἴτε εἰς *γραμμάρια οὐσίας ἀνὰ γραμμάριον ὕδατος*, εἴτε εἰς *γραμμάρια οὐσίας ἀνὰ μονάδα ὄγκου* (1 λίτρον ἢ 100 cm³) ὕδατος.

Ἡ διαλυτότης ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θερμοκρασίας, αὐξανόμενη μετ' αὐτῆς. Ἐὰν αὐξήσωμεν τὴν θερμοκρασίαν ἐνὸς **κεκορεσμένου** διαλύματος, αὐξάνεται ἡ διαλυτότης καὶ τὸ διάλυμα γίνεται **ἀκόρεστον**. Ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὴν θερμοκρασίαν ἐνὸς κεκορεσμένου διαλύματος, τότε, ἐπειδὴ τὸ διάλυμα δὲν εἶναι δυνατόν νὰ συγκεντρώσῃ ὅλην τὴν ποσότητα τῆς ἐν διαλύσει οὐσίας, ἀποβάλλει μέρος αὐτῆς ὑπὸ μορφήν κρυστάλλων, οἱ ὁποῖοι ἀποτίθενται ἐπὶ τῶν τοιχομάτων τοῦ δοχείου.

• ★ § 180. Κολλοειδῆ διαλύματα καὶ γαλακτώματα. Εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον ἡσχολήθημεν μὲ τὰ διαλύματα, εἰς τὰ ὁποῖα τὰ μόρια τῆς διαλυθείσης οὐσίας κινούνται ἐλευθέρως μεταξὺ τῶν μορίων τοῦ διαλυτικοῦ μέσου. Ὑπόχουν, ὁμως, περιπτώσεις, εἰς τὰς ὁποίας τὸ ἐν διαλύσει σῶμα δὲν διαχωρίζεται εἰς μόρια, ἀλλ' ἀποτελεῖται ἐκ πολλῶν μικρῶν κόκκων. Τοιαῦτα διαλύματα καλοῦνται **κολλοειδῆ διαλύματα** καὶ χαρακτηρίζονται ἐκ τῆς θολότητος, τὴν ὁποίαν παρουσιάζουν. Παράδειγμα κολλοειδοῦς διαλύματος εἶναι τὸ διάλυμα κόλλας, μαστίχης κ.λ.

Ὅταν ἡ ἐν διαλύσει οὐσία εἶναι ἀρχικῶς ὑγρὰ—ὁπότε, ἀντὶ κόκκων, ἔχομεν σταγονίδια ἐν αἰωρήσει—ὀμιλοῦμεν περὶ **γαλακτώματος**. Τὸ γνωστότερον γαλακτώμα εἶναι τὸ γάλα, εἰς τὸ ὁποῖον τὰ ἐν αἰωρήσει σταγονίδια εἶναι σταγονίδια λίπους.

Ἐν γένει, τὰ κολλοειδῆ διαλύματα καὶ τὰ γαλακτώματα δὲν εἶναι σταθερά, ἀλλὰ, σὺν τῷ χρόνῳ, διαχωρίζονται εἰς τὰ συστατικά των. Πρὸς σταθεροποίησιν ἀπαιτεῖται ἡ παρουσία ἄλλων ὕλικων. Οὕτω, τὴν σταθερότητα τοῦ γάλακτος προκαλεῖ τὸ ἐντὸς αὐτοῦ εὐρισκόμενον λεύκιμα.

Ἡ δραστικότης πολλῶν φαρμάκων, λιπασμάτων κ.λ. ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ κατὰ

τὸ δυνατόν λεπτοτέρου καταμερισμοῦ αὐτῶν ἐντὸς τοῦ διαλύματος - δηλ., ἐκ τῆς δυνατότητος παρασκευῆς αὐτῶν ὑπὸ μορφῇν κολλοειδῶν διαλυμάτων ἢ γαλακτωμάτων. Παράδειγμα εἶναι τὸ γνωστὸν ἐντομοκτόνον ντὶ-ντὶ-τὶ (D.D.T.) κ.λ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

185) Ἡ μᾶζα ἐνὸς ἀτόμου ὕδρογόνου εἶναι ἴση πρὸς $1,66 \cdot 10^{-24}$ gr. Νὰ υπολογισθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀτόμων ὕδρογόνου, τὰ ὅποια περιέχονται α) εἰς 1 gr ὕδρογόνου β) εἰς ἓνα τόννον ὕδρογόνου.

(ΑΠ: α) $6,02 \cdot 10^{23}$ ἄτομα, β) $6,02 \cdot 10^{23}$ ἄτομα)

186) Ἡ μᾶζα ἐνὸς ἀτόμου ὕδρογόνου εἶναι ἴση πρὸς $1,66 \cdot 10^{-24}$ gr, ἡ δὲ μᾶζα ἐνὸς ἀτόμου ὀξυγόνου εἶναι ἴση πρὸς $26,56 \cdot 10^{-24}$ gr. Πόση εἶναι ἡ μᾶζα ἐνὸς μορίου ὕδατος καὶ πόσα μόρια ὕδατος περιέχονται εἰς 10 gr ὕδατος;

(ΑΠ: $29,88 \cdot 10^{-24}$ gr, $3,34 \cdot 10^{23}$ μόρια)

187) Ἡ μᾶζα ἐνὸς ἀτόμου σιδήρου εἶναι 55,85 φορές μεγαλύτερα τῆς μάζης τοῦ ἀτόμου τοῦ ὕδρογόνου. Πόσα ἄτομα σιδήρου περιέχονται εἰς 1 cm³ σιδήρου;

(ΑΠ: $0,81 \cdot 10^{23}$ ἄτομα)

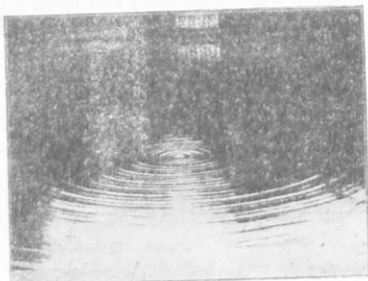
ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΔ'

ΚΥΜΑΤΙΚΗ

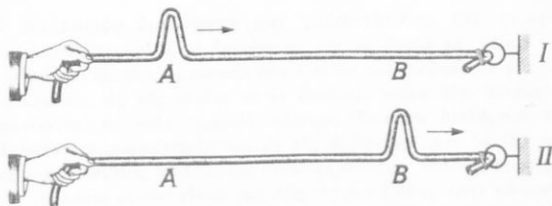
§ 181. Κύματα. Ἐάν ἐπὶ ἡρεμούσης ἐπιφανείας ὕδατος ρίψωμεν ἓνα λίθον, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι δημιουργεῖται μία διαταραχή, ἣ ὁποία καὶ διαδίδεται ὑπὸ μορφήν κύκλων (σχ. 304), τῶν ὁποίων ἡ διάμετρος αὐξάνεται συνεχῶς. Κατὰ τὴν διά-



Σχ. 304. Μορφή τοῦ κύματος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος εἰς ὁρισμένην χρονικὴν στιγμήν (στιγμιότυπον).

δοσιν τῆς διαταραχῆς ταύτης, δὲν μεταφέρεται τὸ ὕδωρ, ἀλλὰ τὰ μόρια αὐτοῦ ταλαντοῦνται περὶ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας των, ὅπως εὐκόλως δεικνύεται, ἔάν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος θέσωμεν μικρὰ τεμάχια ξύλου. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τεμάχια τοῦ ξύλου ταλαντοῦνται πρὸς τὰ ἄνω καὶ πρὸς τὰ κάτω, ἀλλὰ δὲν ἀπομακρύνονται τῆς θέσεώς των.

Τὴν διάδοσιν μιᾶς διαταραχῆς δυνάμεθα νὰ παρακολουθῇσωμεν καὶ διὰ τοῦ ἑξῆς πειράματος (σχ. 305): Στερεοῦμεν τὸ ἓν ἄκρον ἐλαστικοῦ



Σχ. 305. Ἡ διαταραχή τοῦ σημείου A μετὰ τινα χρόνον ἔχει φθάσει εἰς τὸ σημεῖον B.

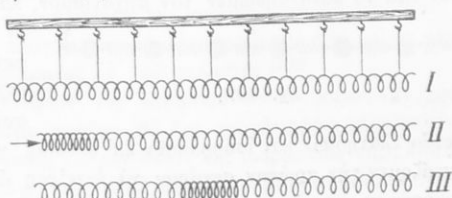
σωλήνος (ἢ σχοινίου μεγάλης διαμέτρου), ἐνῶ τὸ ἄλλο κρατοῦμεν διὰ τῆς χειρὸς. Ἐάν κινήσωμεν τὸ ἄκρον τοῦτο ἀποτόμως πρὸς τὰ ἄνω, δημιουργεῖται μία διαταραχή, ἣ ὁποία διαδίδεται κατὰ μήκος τοῦ σωλήνος πρὸς τὰ δεξιὰ.

Εἰς τὸ σχῆμα 305 ἀποδίδονται δύο διαδοχικαὶ εἰκόνες τοῦ σωλῆνος (στιγμιότυπα), ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει ὅτι ἡ διαταραχή, ἡ δημιουργηθεῖσα εἰς τὸ ἄκρον τοῦ σωλῆνος, διαδίδεται κατὰ μῆκος αὐτοῦ, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ σχῆμα τῆς.

Ἐκ τοῦ αὐτοῦ σχήματος προκύπτει ὅτι ἡ διαταραχή εἰς σημεῖόν τι B θὰ εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν διαταραχὴν εἰς τὸ σημεῖον A , μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι θὰ δημιουργηθῇ ὀλίγον χρόνον ἄργότερον. Παρατηροῦμεν, δηλ., ὅτι κατὰ τὴν διάδοσιν τῆς διαταραχῆς, ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἐλαστικοῦ σωλῆνος ἔκτε-
λοῦν διαδοχικῶς τὴν αὐτὴν, ἀκριβῶς, κίνησιν.

Ἄλλο πείραμα, διὰ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ παρακολουθήσωμεν τὴν διάδοσιν μιᾶς διαταραχῆς, εἶναι τὸ ἀκόλουθον: Ἐξαρτῶμεν διὰ νημάτων ἕν ἐλικοειδὲς ἑλατήριον, μεγάλου μήκους, ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα 306, I.

Ἀκολουθῶς, συμπιέζομεν, διὰ τῆς παλάμης μας, τὸ ἄριστερόν ἄκρον τοῦ ἑλατηρίου πρὸς τὰ δεξιὰ (II), ὁπότε προκαλεῖται μία συμπύκνωσις τῶν πρώτων σπειρῶν τοῦ ἑλατηρίου (πύκνωμα). Παρακολουθοῦντες τὸ πύκνωμα τοῦτο, διαπιστώνομεν ὅτι διαδίδεται κατὰ μῆκος τοῦ ἑλατηρίου πρὸς τὰ δεξιὰ (III) μὲ ὀρισμένην ταχύτητα.



Σχ. 306. Τὸ πύκνωμα τῶν σπειρῶν διαδίδεται κατὰ μῆκος τοῦ ἑλατηρίου.

Καὶ εἰς τὰ τρία περιγραφέντα πειράματα εἶδομεν ὅτι, ὅταν ἐντὸς μέσου τινος δημιουργηθῇ μία διαταραχή, αὕτη διαδίδεται ἐντὸς αὐτοῦ μὲ ὀρισμένην ταχύτητα. Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας λέγομεν ὅτι ἐντὸς τοῦ μέσου διαδίδεται ἕν κύμα.

Ἐάν ἡ κίνησις τῆς χειρὸς μας κατὰ τὰ πειράματα τῶν σχημάτων 305 καὶ 306 ἐπαναλαμβάνεται περιοδικῶς, θὰ δημιουργοῦνται συνεχῶς διαταραχαί, αἱ ὁποῖαι θὰ διαδίδωνται ἢ μία κατόπιν τῆς ἄλλης. Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι ἐντὸς τοῦ μέσου διαδίδεται ἕν κύμα.

Ἐν γένει, **κύμα** θὰ ὀνομάσωμεν μίαν διαταραχὴν, ἡ ὁποία διαδίδεται ἐντὸς μέσου τινὸς ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον, μὲ ὀρισμένην ταχύτητα, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **ταχύτητα διαδόσεως** τοῦ κύματος.

§ 182. Έγκάρσια καὶ διαμήκη κύματα. Εἰς τὸ πείραμα τοῦ σχήματος 305, διὰ τὴν δημιουργίαν τοῦ κύματος, ἐκινήσαμεν τὴν χεῖρά μας καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν διαδόσεως τοῦ κύματος, ὁπότε τὰ διάφορα σημεῖα τοῦ ἐλαστικοῦ σωλῆνος ἤρχισαν ταλαντούμενα ἐπὶ τροχιῶν, καθέτων ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν διαδόσεως τοῦ κύματος. Τοιαῦτα κύματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ διεύθυνσις, κατὰ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ ταλάντωσις, εἶναι καθέ-

το ς ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν διαδόσεως τοῦ κύματος, καλοῦνται **ἐγκάρσια κύματα**.

Εἰς τὸ πείραμα τοῦ σχήματος 306, διὰ τὴν δημιουργίαν τοῦ κύματος, ἐκινήσαμεν τὴν χεῖρά μας, $\pi \alpha \rho \alpha \lambda \lambda \eta \lambda \omega \varsigma$ πρὸς τὴν διεύθυνσιν διαδόσεως τοῦ κύματος, ὁπότε τὰ διάφορα σημεῖα τοῦ ἐλατηρίου ἤρχισαν ταλαντούμενα ἐπὶ τροχιῶν, $\pi \alpha \rho \alpha \lambda \lambda \eta \lambda \omega \nu$ πρὸς τὴν διεύθυνσιν διαδόσεως τοῦ κύματος. Τοιαῦτα κύματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ διεύθυνσις, κατὰ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ ταλάντωσις, εἶναι $\pi \alpha \rho \alpha \lambda \lambda \eta \lambda \omega \varsigma$ πρὸς τὴν διεύθυνσιν διαδόσεως τοῦ κύματος, καλοῦνται **διαμήκη κύματα**.

§ 183. Μηχανισμὸς διαδόσεως τῶν κυμάτων. α) **Ἐγκάρσια κύματα.** Διὰ νὰ κατανοήσωμεν τὸν μηχανισμόν, κατὰ τὸν ὁποῖον διαδίδεται

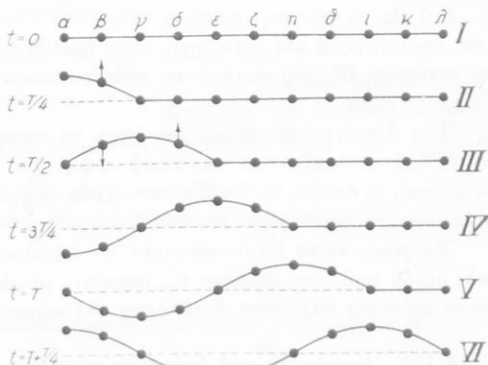


Σχ. 307.

ἐν ἐγκάρσιον κῆμα, θεωροῦμεν σειρὰν μικρῶν σφαιρῶν (σχ. 307), αἱ ὁποῖαι εἶναι συνδεδεμέναι μεταξύ των δι

ἄσθενῶν ἐλατηρίων καὶ ἰσορροποῦν ἐπ' εὐθείας γραμμῆς. Ἐστω, ἤδη, ὅτι ἀναγκάζομεν τὴν πρώτην σφαῖραν νὰ ἐκτελέσῃ ἁρμονικὴν ταλάντωσιν ἐπὶ κατακόρυφον τροχιάς. Λόγῳ τῶν ἐλατηρίων, ἡ πρώτη σφαῖρα θὰ παρασύρῃ εἰς ὁμοίαν ταλάντωσιν τὴν δευτέραν σφαῖραν, ἐν συνεχείᾳ ἡ δευτέρα σφαῖρα θὰ παρασύρῃ τὴν τρίτην κ.ο.κ., μὲ ἀποτέλεσμα ἡ ταλάντωσις νὰ διαδοθῇ διαδοχικῶς ἀπὸ σφαῖρας εἰς σφαῖραν.

Διὰ νὰ παρακολουθήσωμεν τὴν πορείαν τοῦ φαινομένου, θὰ μελετήσωμεν διάφορα στιγμιότυπα αὐτοῦ: Κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν $t=0$, ὅλαι αἱ σφαῖραι εὐρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ, συνεπῶς αἱ ἀπομακρύνσεις τῶν εἶναι ἴσαι πρὸς μηδὲν (σχ. 308, I). Μετὰ ἐν τέταρτον τῆς περιόδου—δηλ., κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν $t=T/4$ —ἡ ἀπομάκρυνσις τῆς πρώτης σφαῖρας α θὰ ἔχῃ γίνῃ ἴση μὲ τὸ πλάτος (II), ἐνῶ ἡ ἀπομάκρυνσις τῆς δευτέρας σφαῖρας β —ἡ ὁποία ἤρχισε νὰ ταλαντοῦται ὀλίγον ἄργότερον τῆς πρώτης—θὰ ἔχῃ μικροτέραν τιμήν. Ἐστω ὅτι, κατὰ τὴν στιγμήν ταύτην ($T/4$), ἡ διαταραχὴ δὲν ἔχει ἀκόμη φθάσει εἰς τὴν τρί-



Σχ. 308. Διαδοχικὰ στιγμιότυπα ἐγκάρσιον κύματος, διαδιδόμενον πρὸς τὰ δεξιὰ.

την σφαῖραν γ , τῆς ὁποίας, συνεπῶς, ἡ ἀπομάκρυνσις θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Εἶναι φανερόν ὅτι καὶ αἱ ἀπομακρύνσεις τῶν ὑπολοίπων σφαιρῶν δ , ϵ , ζ ... θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς μηδέν.

Μετὰ ἔν, ἀκόμη, τέταρτον τῆς περιόδου — δηλ., κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t = T/2$ — ἡ σφαῖρα α θὰ ἔχῃ ἐπανάλθει εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας της (III) — θὰ ἔχῃ, συνεπῶς, ἀπομάκρυνσιν μηδέν — ἐνῶ ἡ δευτέρα σφαῖρα, ἡ ὁποία ἐν τῷ μεταξύ ἔχει λάβει τὴν μεγίστην τῆς ἀπομάκρυνσιν, θὰ ἐπιστρέφῃ καὶ αὐτὴ εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας της, χωρὶς, ὅμως, νὰ ἔχῃ φθάσει ἀκόμη εἰς αὐτήν. Κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν, ἡ ἀπομάκρυνσις τῆς τρίτης σφαίρας γ ἔχει λάβει τὴν μεγίστην τῆς τιμὴν, ἡ ἀπομάκρυνσις τῆς σφαίρας δ εἶναι ὀλίγον μικροτέρα, ἐνῶ ἡ ἀπομάκρυνσις τῆς σφαίρας ϵ (καθὼς καὶ τῶν ὑπολοίπων) εἶναι ἴση πρὸς μηδέν.

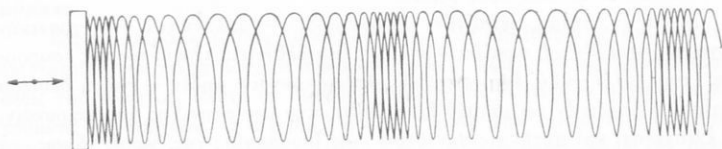
Μετὰ ἔν, ἀκόμη, τέταρτον τῆς περιόδου — δηλ., κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t = 3 \cdot T/4$ — ἡ ἀπομάκρυνσις τῆς πρώτης σφαίρας ἔχει γίνει ἀρνητικὴ καὶ ἴση πρὸς τὸ πλάτος, ἐνῶ αἱ ἀπομακρύνσεις τῶν ἄλλων σφαιρῶν παρέχονται ἐκ τοῦ διαγράμματος IV τοῦ σχήματος 308.

Μετὰ ἔν, ἀκόμη, τέταρτον τῆς περιόδου — δηλ., κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t = T$ — ἡ πρώτη σφαῖρα θὰ ἔχῃ συμπληρώσει μίαν ταλάντωσιν (θὰ ἔχῃ ἐπιστρέψει, συνεπῶς, εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας της), ἐνῶ ἡ διαταραχὴ θὰ ἔχῃ φθάσει μέχρι τῆς σφαίρας i (V). Παρατηροῦμεν ὅτι, κατὰ τὴν χρονικὴν ταύτην στιγμὴν, ἔχει δημιουργηθῇ μία «κοιλὰς» — σφαῖραι α ἔως ϵ — καὶ ἐν «ὄρῳ» - σφαῖραι ϵ ἔως i .

Ἐὰν παρατηρήσωμεν τὴν θέσιν τῆς «κοιλιάδος» καὶ τοῦ «ὄρου» μετὰ ἔν, ἀκόμη, τέταρτον τῆς περιόδου (VI), θὰ εὕρωμεν ὅτι τόσον ἡ «κοιλὰς» ὅσον καὶ τὸ «ὄρος» θὰ ἔχουν μετακινηθῇ πρὸς τὰ δεξιὰ. Ἐὰν, λοιπόν, ἡ πρώτη σφαῖρα ἐξακολουθῇ νὰ ταλαντοῦται, θὰ δημιουργοῦνται συνεχῶς «ὄρη» καὶ «κοιλιάδες», αἱ ὁποῖαι θὰ διαδίδωνται πρὸς τὰ δεξιὰ μὲ ὥρισμένην ταχύτητα.

β) **Διαμήκη κύματα.** Ἐὰν ἀναγκάσωμεν τὴν πρώτην σφαῖραν νὰ ταλαντωθῇ ὄχι καθέτως, ἀλλὰ παραλλήλως πρὸς τὴν διεύθυνσιν διαδόσεως τοῦ κύματος, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ἀπόστασις μεταξύ αὐτῆς καὶ τῆς ἐπομένης σφαίρας θὰ ἐλαττωθῇ, δημιουργουμένον, οὕτω, ἐνὸς «πυκνώματος». Μετ' ὀλίγον χρόνον, ἡ δευτέρα σφαῖρα, ὠθουμένη ὑπὸ τῆς πρώτης, θ' ἀναγκασθῇ νὰ πλησιάσῃ πρὸς τὴν τρίτην, ἐνῶ ἡ πρώτη θὰ ἔχῃ κινηθῇ πρὸς τ' ἀριστερὰ καὶ θὰ ἔχῃ ἀπομακρυνθῇ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας της. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, τὸ μὲν πυκνωμα θὰ ἔχῃ διαδοθῇ ἐκ τῆς θέσεως τῆς πρώτης σφαίρας εἰς τὴν θέσιν τῆς τρίτης, ἐνῶ εἰς τὴν περιοχὴν τῆς πρώτης θὰ ἔχῃ δημιουργηθῇ τὴν ἄραιωμα. Παρερχομένον, λοιπόν, τοῦ χρόνου, θὰ δημιουργοῦνται διαδοχικῶς πυκνώματα καὶ ἀραιώματα, τὰ ὁποῖα θὰ διαδίδωνται πρὸς τὰ δεξιὰ μὲ ὥρισμένην ταχύτητα. Πειραματικῶς ἐπιδεικνύονται εὐχερῶς τὰ ἀραιώματα καὶ τὰ πυκνώματα ἐνὸς διαμήκους κύ-

ματος δι' ἐλικοειδοῦς ἐλατηρίου (σχ. 309), τοῦ ὁποῖον τὸ ἐν ἄκρον τίθεται εἰς ταλάντωσιν κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον.



Σχ. 309. Κατὰ μῆκος τοῦ ἐλατηρίου διαδίδεται ἐν διάμκῳ κύμα.

Συμπέρασμα. Ἐκ τῶν λεχθέντων ἀνωτέρω καταλήγομεν εἰς τὸ ἔξης συμπέρασμα: Εἰς τὰ ἐγκάρσια κύματα δημιουργοῦνται «ὄρη» καὶ «κοιλιάδες», αἱ ὁποῖαι διαδίδονται μὲ ὠρισμένην ταχύτητα. Εἰς τὰ διαμήκη κύματα δημιουργοῦνται «πυκνώματα» καὶ «ἀραιώματα», τὰ ὁποῖα διαδίδονται, ὁμοίως, μὲ ὠρισμένην ταχύτητα.

§ 184. Μῆκος κύματος. Ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 308, V , ἡ ταλάντωσις, ἢ προκλήθεῖσα εἰς τὴν πρώτην σφαῖραν α , ἔχει μεταδοθῇ, ἐντὸς τοῦ χρόνου μιᾶς περιόδου, μέχρι τῆς σφαίρας β . Τὴν ἀπόστασιν ταύτην καλοῦμεν **μῆκος κύματος** καὶ συμβολίζομεν διὰ τοῦ λ . Ἦτοι, ὡς **μῆκος κύματος** ὀρίζομεν τὴν ἀπόστασιν, εἰς τὴν ὁποίαν διαδίδεται ἡ ἀρχικὴ διαταραχὴ, ἐντὸς χρονικοῦ διαστήματος, ἴσου πρὸς τὴν περίοδον τῆς ταλαντώσεως.

Σχέσις μήκους κύματος καὶ συχνότητος. Ἀφοῦ, ἐντὸς τοῦ χρόνου T μιᾶς περιόδου, ἡ διαταραχὴ προχωρεῖ κατὰ ἐν μῆκος κύματος λ , ἔπεται ὅτι τὸ πηλίκον

$$\frac{\text{διάστημα}}{\text{χρόνος}} = \frac{\lambda}{T}$$

θὰ παρέχῃ τὴν ταχύτητα διαδόσεως τῆς διαταραχῆς · δηλ., τὴν ταχύτητα διάδοσεως v τοῦ κύματος. Ἦτοι εἶναι

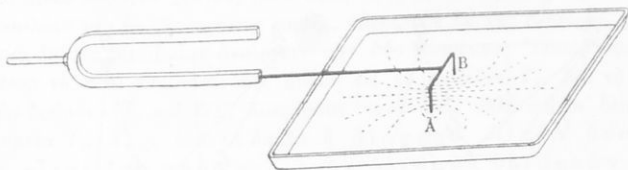
$$\boxed{\frac{\lambda}{T} = v}$$

Ἐπειδὴ ἡ περίοδος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς συχνότητος ($T=1/\nu$), ἔχομεν καὶ τὴν σχέσιν

$$\boxed{\lambda \cdot \nu = v} \quad (1)$$

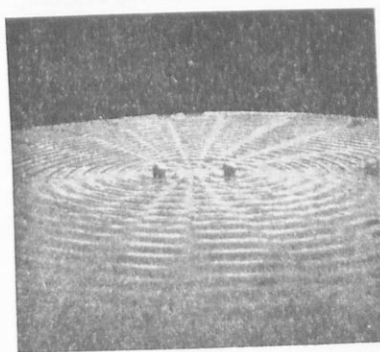
Ἐκ τοῦ τύπου (1) προκύπτει ὅτι, ἐὰν κύμα ὠρισμένης συχνότητος, τὸ ὁποῖον διαδίδεται ἐντὸς ἑνὸς μέσου μὲ ταχύτητα v , εἰσέλθῃ ἐντὸς ἄλλου μέσου, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ταχύτης διαδόσεως εἶναι διάφορος, θὰ ὑποστῇ μεταβολὴν τοῦ μήκους κύματος. Τοῦτο ἔχει ὡς ἐπακόλουθον διάφορα φαινόμενα — ἀνάκλασις, διάθλασις κ.λ. — τὰ ὁποῖα θὰ ἐξετάσωμεν εἰς τὰ κεφάλαια τῆς Ἀκουστικῆς καὶ τῆς Ὀπτικῆς.

§ 185. Συμβολή κυμάτων. Τὸ σχῆμα 310 παριστᾷ συσκευήν, ἣ ὁποία, διεγερομένη καταλλήλως, δημιουργεῖ κύματα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ



Σχ. 310. Τὰ σημεία *A* καὶ *B* εἶναι πηγὰι κυμάτων.

ὑδατος, τοῦ περιεχομένου ἐντὸς τῆς λεκάνης. Ἐπειδὴ τὸ παλλόμενον στέλεχος ἐμβαπτίζεται ἐντὸς τοῦ ὑδατος εἰς δύο σημεία *A*, *B*, δημιουργεῖ δύο πηγὰς κυμάτων. Εἰς πᾶν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑδατος καταφθάνουν καὶ τὰ δύο κύματα, ἡ δὲ κίνησις τοῦ ὑδατος εἰς ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς θὰ εὐρίσκειται διὰ συνθέσεως τῶν κινήσεων, τῶν προερχομένων ἐκ τῶν δύο κυμάτων. Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συνθέσεως δύο τοιούτων κυμάτων (παραχθέντων κατὰ τρόπον, ὀλίγον διάφορον τοῦ προηγουμένου) παριστᾷ τὸ σχῆμα 311. Τμῆμα



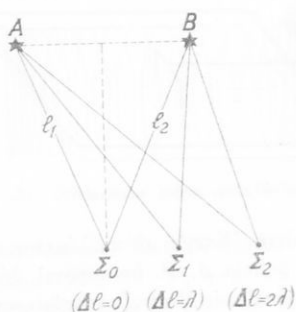
Σχ. 311 καὶ 312. Ἀποτέλεσμα τῆς συμβολῆς δύο κυμάτων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑδατος. Λεξιὰ: Μεγέθυνοις τμήματος τῆς ἀριστερᾶς εἰκόνης.

τῆς ὅλης εἰκόνης ἀποδίδεται, ἐν μεγεθύνσει, εἰς τὸ σχῆμα 312. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς ἄλλα σημεία ἢ κύμανσις εἶναι πολὺ ἔντονος, ἐνῶ εἰς ἄλλα ἔχει πλήρως καταπαύσει.

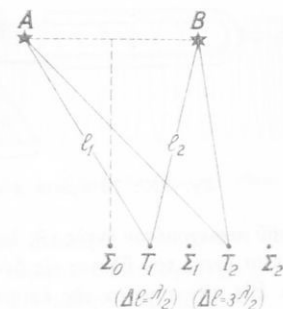
Τοιούτου εἶδους φαινόμενα, παραγόμενα κατὰ τὴν συνάντησιν δύο κυμάτων, καλοῦνται **φαινόμενα συμβολῆς**.

α) **Συμβολή κυμάτων διαφόρων διευθύνσεων.** Εἰς τὸ περιγραφέν πείραμα τὰ κύματα, προερχόμενα ἐκ δύο ὁμοίων πηγῶν τῆς αὐτῆς συχνότητος, διεδίδοντο ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑδατος πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις καὶ ἔδιδον, κατὰ τὴν συμβολήν, τὴν εἰκόνα τοῦ σχήματος 311. Διὰ τὴν κα-

τονόησιν τοῦ φαινομένου τούτου μελετῶμεν τὸ σχῆμα 313: Τὰ σημεῖα A καὶ B παριστοῦν τὰς δύο πηγὰς τῶν κυμάτων, τὸ δὲ σημεῖον Σ_0 , τὸ ὁποῖον εὐ-



Σχ. 313.



Σχ. 314.

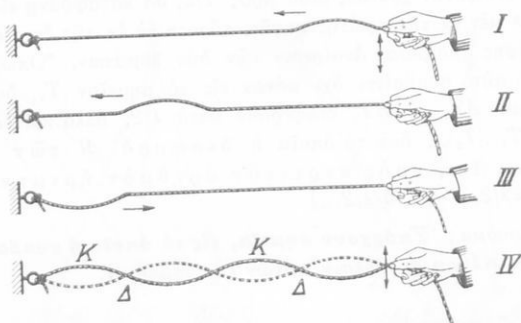
ρίσκεται εἰς ἴσας ἀποστάσεις l_1 καὶ l_2 ἀπὸ τῶν δύο πηγῶν, ἔστω τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ μελετήσωμεν τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συμβολῆς. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν στιγμὴν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ παλλόμενον στέλεχος ἐγγίζει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος εἰς τὸ σημεῖον A , ἐγγίζει αὐτήν καὶ εἰς τὸ σημεῖον B , ἔπεται ὅτι τὰ κύματα θὰ ἐκκινοῦν ἐκ τῶν δύο πηγῶν ταυτοχρόνως. Ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ οἱ δύο δρόμοι $A\Sigma_0$ καὶ $B\Sigma_0$ εἶναι ἴσοι καὶ τὰ δύο κύματα διαδίδονται μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα, ἔπεται ὅτι, κατὰ τὴν στιγμὴν, κατὰ τὴν ὁποίαν εἰς τὸ σημεῖον Σ_0 θὰ καταφθάνῃ «ὄρος» ἐκ τῆς πρώτης πηγῆς, θὰ καταφθάνῃ ἐπίσης «ὄρος» καὶ ἐκ τῆς δευτέρας πηγῆς, μὲ ἀποτέλεσμα τὸ «ὄρος» εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο νὰ ἔχῃ διπλάσιον ὕψος. Μετὰ πάροδον χρόνου, ἴσου πρὸς $T/2$, θὰ καταφθάσουν εἰς τὸ σημεῖον Σ_0 δύο «κοιλιάδες» ἐκ τῶν δύο πηγῶν, μὲ ἀποτέλεσμα ἡ «κοιλιάς» ἐκεῖ νὰ ἔχῃ διπλάσιον βάθος. Ἄρα, εἰς τὸ σημεῖον Σ_0 , τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἐξ ἴσου ἐκ τῶν δύο πηγῶν A, B , δημιουργοῦνται «ὄρη» καὶ «κοιλιάδες», διπλασίου ὕψους καὶ βάθους: Ἡ συμβολὴ ἐκεῖ δίδει ἐνίσχυσιν τοῦ κύματος.

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς ὅλα ἐκεῖνα τὰ σημεῖα $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ διαφορὰ Δl τῶν δύο δρόμων l_1, l_2 εἶναι ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ μήκους κύματος ($\Delta l = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$).

Συμπέρασμα: Ὑπάρχουν σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ συμβολὴ δύο κυμάτων δίδει ἐνισχυμένον κύμα.

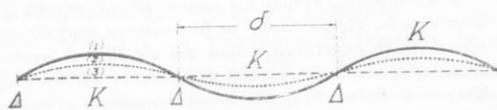
Ἄς ἐξετάσωμεν, τώρα, ἄλλο σημεῖον T_1 (σχ. 314), διὰ τὸ ὁποῖον οἱ δρόμοι AT_1 καὶ BT_1 εἶναι ἄνισοι καὶ, συγκεκριμένως, διαφέρουν μεταξύ των κατὰ $\lambda/2$. Ἀφοῦ, ὥς καὶ ἀνωτέρω εἶπομεν, τὰ «ὄρη» ἐκκινοῦν ταυτοχρόνως καὶ ἐκ τῶν δύο πηγῶν, οἱ δὲ δύο δρόμοι διαφέρουν κατὰ $\lambda/2$, εἶναι προφανές ὅτι, κατὰ τὴν στιγμὴν, κατὰ τὴν ὁποίαν εἰς τὸ σημεῖον T_1 καταφθάνει «ὄρος» ἐκ τῆς πρώτης πηγῆς, ἐκ τῆς δευτέρας θὰ καταφθάνῃ «κοι-

μορφήν τοῦ σχοινίου εἰς διαφόρους χρονικάς στιγμὰς: Εἰς ὠρισμένην σι-



Σχ. 315. Παραγωγή κυμάτων εἰς σχοινίον διὰ ταλαντώσεως τῆς χειρὸς.

γμὴν τὸ σχοινίον ἔχει τὴν μορφήν ἡμιτονοειδοῦς καμπύλης (σχ. 316 - πλήρης γραμμὴ (1)). Μετά τινα χρόνον, τὸ σχοινίον ἐξακολουθεῖ νὰ ἔχη τὸ



Σχ. 316. Διαδοχικὰ στιγμιότυπα τῆς ταλαντώσεως τοῦ σχοινίου τοῦ σχήματος 315.

αὐτὸ σχῆμα, ἀλλ' αἱ ἀπομακρύνσεις ὅλων τῶν σημείων τοῦ σχοινίου ἔχουν γίνει μικρότερα (2). Μετά τινα ἀκόμη χρόνον (καί, συγκεκριμένως,

μετὰ $T/4$), αἱ ἀπομακρύνσεις ὅλων τῶν σημείων γίνονται ἴσαι πρὸς μηδέν (3) - τὸ σχοινίον, δηλ., ἔγινεν εὐθύγραμμον. Ἐν συνεχείᾳ τὸ σχοινίον παραμορφοῦται ἐκ νέου, ἀλλ' ἀντιθέτως, δηλ., κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ ἀπομάκρυνσις ἐκάστου σημείου τοῦ σχοινίου νὰ ἔχη ἀντίθετον ἀλγεβρικὸν σημεῖον τοῦ προηγουμένου. Κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $T/2$ ἡ μορφή τοῦ σχοινίου εἶναι τὸ κατοπτρικὸν εἶδωλον τῆς ἀρχικῆς (1).

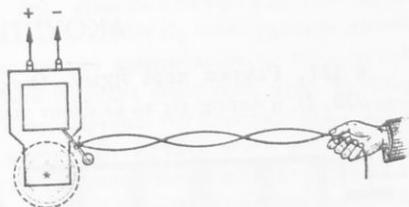
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι, πράγματι, εἰς τοὺς δεσμοὺς $\Delta, \Delta, \dots$ τὸ σχοινίον παραμένει διαρκῶς ἀκίνητον, ἐνῶ εἰς τὰς κοιλίας $K, K, \dots$ τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως λαμβάνει τὴν μεγίστην αὐτοῦ τιμήν.

Τὴν μορφήν ταύτην τῆς ταλαντώσεως τοῦ σχοινίου καλοῦμεν **στάσιμον κύμα**. Ἡ ὀνομασία προέρχεται ἐκ τῆς παρατηρήσεως ὅτι εἰς τὸ στάσιμον κύμα ἔχει, πλὴν, ἐκλείψει ἡ ἐντύπωσις τοῦ διαδιδόμενου κύματος.

Τὸ στάσιμον κύμα, λοιπόν, εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συμβολῆς δύο κυμάτων, διαδιδόμενων κατ' ἀντιθέτους φερὰς τοῦ ἐνὸς κύματος προερχομένου ἐκ τῆς χειρὸς μας, τοῦ δὲ ἄλλου ἐξ ἀνακλάσεως τοῦ πρώτου κύματος εἰς τὸ σημεῖον στερεώσεως.

Στάσιμα κύματα δυνάμεθα νὰ δημιουργήσωμεν πολὺ εὐχερῶς διὰ τῆς

συσκευῆς, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ σχῆμα 317 : Εἰς τὸ πλῆκτρον ἡλεκτρικοῦ κώδωνος στερεώνομεν τὸ ἐν ἄκρον νήματος, ἐνῶ τὸ ἄλλο κρατοῦμεν διὰ τῆς χειρὸς μας. Ἐὰν τροφοδοτήσωμεν τὸν κώδωνα δι' ἡλεκτρικοῦ ρεύματος, τὸ πλῆκτρον πάλλεται καὶ δημιουργεῖ εἰς τὸ νῆμα ἐν κύμα. Τὸ κύμα τοῦτο ἀνακλᾷται εἰς τὴν χειρὰ μας καί, ἐπιστρέφον, συμβάλλει μὲ τὸ πρῶτον, σχηματιζομένου, οὕτω, στασίμου κύματος μὲ λίαν ἐμφανεῖς τοὺς δεσμοὺς καὶ τὰς κοιλίας.



Σχ. 317. Παραγωγή στασίμων κυμάτων εἰς σχοινίον, τῇ βοηθείᾳ ἡλεκτρικοῦ κώδωνος. (Ἐκ τῆς συσκευῆς ἔχει ἀφαιρεθῇ ὁ κώδων).

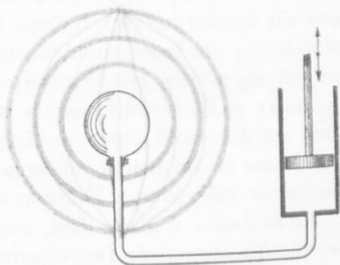
Μεταβάλλοντες, διὰ τῆς χειρὸς μας, τὴν δύναμιν, τὴν τείνουσαν τὸ νῆμα, ἐπιτυγχάνομεν ὀλιγωτέρους ἢ περισσοτέρους δεσμοὺς καὶ κοιλίας.

Ἡ θεωρητικὴ διερεύνησις δεικνύει ὅτι ἡ ἀπόστασις δ (σχ. 316) μεταξὺ δύο διαδοχικῶν δεσμῶν (ἢ κοιλιῶν) εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους κύματος λ τῶν κυμάτων, ἐκ τῆς συμβολῆς τῶν ὁποίων προῆλθε τὸ στάσιμον κύμα. Ἦτοι εἶναι

$$\delta = \frac{\lambda}{2}$$

§ 186. Διάδοσις κύματος εἰς τὸν ᾠδρον—Σφαιρικά κύματα.

Ἀνωτέρω ἐξητάσαμεν κύματα, τὰ ὁποῖα ἠδύναντο νὰ διαδοθοῦν εἴτε κατὰ μήκος μῖας εὐθείας (π.χ., εἰς ἐλαστικὸν σωλῆνα), εἴτε ἐπὶ μιᾷ ἐπιφανείᾳ (π.χ., ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ὕδατος). Εἰς τὴν γενικωτέραν περίπτωσιν, ἐν κύμα δύναται νὰ διαδοθῇ πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις. Παράδειγμα τοιαύτης περιπτώσεως ἔχομεν εἰς τὰ ἡχητικὰ κύματα, τὰ ὁποῖα ἐκπέμπει μία ἡχογόνος πηγὴ ἐντὸς τοῦ ἀέρος.



Σχ. 318. Ὅταν ἡ ἐλαστικὴ σφαῖρα διαστέλλεται καὶ συστέλλεται περιοδικῶς, δημιουργεῖ εἰς τὸν ᾠδρον σφαιρικὰ κύματα.

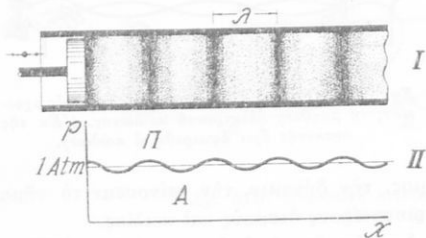
Τὴν ἀρχὴν τῆς παραγωγῆς τοιούτων κυμάτων κατανοοῦμεν διὰ τοῦ πειράματος τοῦ σχήματος 318 : Ἀνυψοῦντες καὶ καταβιβάζοντες περιοδικῶς τὸ ἔμβολον, προκαλοῦμεν περιοδικὰ μεταβολὰς τῆς πίεσεως τοῦ ἐντὸς τῆς ἐλαστικῆς σφαίρας ἀέρος, ἡ ὁποία ἀναγκάζεται νὰ διαστέλλεται καὶ νὰ συστέλλεται περιοδικῶς, μὲ ἀποτέλεσμα νὰ δημιουργοῦνται περὶ αὐτὴν διαδοχικὰ πυκνώματα καὶ ἀραιώματα. Τὰ πυκνώματα καὶ τὰ ἀραιώματα ταῦτα διαδίδονται πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις.

καὶ ἀποτελοῦν τὰ καλούμενα **σφαιρικὰ κύματα**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΕ'

ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

§ 187. Γενικά περί ἤχων. Θεωρήσωμεν σωλήνα, μεγάλου μήκους (σχ. 319, I), ὃ ὁποῖος εἰς τὸ ἓν ἄκρον του (ἀριστερά) κλείεται δι' ἔμβολον,



Σχ. 319.

σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν, καί, συνεπῶς, ὅλα τὰ μανόμετρα θὰ ἐδείκνυνον πίεσιν, ἴσην πρὸς 1 Atm. Ὅταν, ὅμως, τὸ ἔμβολον τεθῇ εἰς ταλάντωσιν, ὃ ἐν ἐπαφῇ πρὸς αὐτὸ εὐρίσκόμενος ἀὴρ θὰ συμπιέζεται καὶ θὰ ἐκτονοῦται περιοδικῶς καί, ὥς ἐκ τούτου, θὰ δημιουργοῦνται πυκνώματα καὶ ἀραιώματα, τὰ ὁποῖα θὰ διαδίδωνται πρὸς τὰ δεξιὰ. Ἐάν, εἰς μίαν ὀρισμένην χρονικὴν στιγμὴν, λάβωμεν τὰς ἐνδείξεις ὅλων τῶν μανομέτρων, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αἱ ἐνδείξεις αὗται εἶναι διάφοροι. Πράγματι, τὰ μανόμετρα, τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται εἰς θέσεις, εἰς τὰς ὁποίας, κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην, ἔχει φθάσει πύκνωμα, θὰ δεικνύουν πίεσιν, μεγαλυτέραν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς, ἐνῶ τὰ μανόμετρα ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται εἰς θέσεις, εἰς τὰς ὁποίας, κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην, ἔχει φθάσει ἀραιώμα, θὰ δεικνύουν πίεσιν, μικροτέραν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς. Ἐπίσης, θὰ ὑπάρχουν καὶ μανόμετρα, τῶν ὁποίων αἱ ἐνδείξεις θὰ ἔχουν τιμὰς ἐνδιάμεσους μεταξὺ τῆς πίεσεως τῶν πυκνωμάτων καὶ τῆς πίεσεως τῶν ἀραιωμάτων.

Ἐάν παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν πίεσιν p εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ σωλήνος συναρτήσῃ τῆς ἀποστάσεως x ἀπὸ τοῦ ἀριστεροῦ ἄκρου αὐτοῦ διὰ μίαν ὀρισμένην χρονικὴν στιγμὴν, θὰ λάβωμεν τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 319, II, τὸ ὁποῖον παριστᾷ ἐν στιγμιοτύπον τοῦ κύματος. Παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχουν ὀρισμένα σημεῖα $\Pi \dots$, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ πίεσις (καί, συνεπῶς, ἡ πυκνότης) εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς (πυκνώματα), ἐνῶ εἰς ἄλλα σημεῖα $A \dots$ ἡ πίεσις εἶναι μικροτέρα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς (ἀραιώματα). Εἰς τὰ ὑπόλοιπα σημεῖα ἡ πίεσις ἔχει ἐνδιάμεσους τιμὰς.

Ὅπως ἀποδεικνύεται, ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο διαδοχικῶν πυκνωμάτων (ἢ ἀραιωμάτων) εἶναι ἴση πρὸς τὸ μήκος κύματος λ .

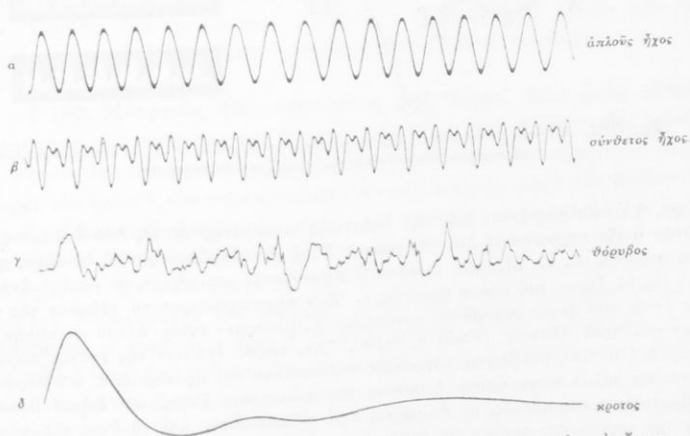
Τὸ σχῆμα 319, II παριστᾷ τὴν κατανομὴν τῆς πίεσεως τοῦ σωλήνος εἰς μίαν ὠρισμένην χρονικὴν στιγμήν - δηλ., εἶναι ἓν στιγμιότυπον τοῦ κύματος. Εἶναι προφανὲς ὅτι στιγμιότυπον, ληφθὲν εἰς ἄλλην χρονικὴν στιγμήν ὀλίγον ἀργότερον, θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ προηγούμενον, μετὰ τὴν διαφορὰν ὅτι τὰ πυκνώματα καὶ τὰ ἀραιώματα θὰ ἔχουν μετακινηθῇ πρὸς τὰ δεξιὰ.

Εἰς τ' ἀνωτέρω ἐξητάσαμεν στιγμιότυπα τοῦ κύματος, δηλ., ἐξητάσαμεν τὰς ἐνδείξεις ὅλων τῶν μανομέτρων εἰς ὠρισμένην χρονικὴν στιγμήν. Ἡδη, θὰ παρακολουθήσωμεν πῶς μεταβάλλεται μετὰ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου ἡ ἐνδείξις ἐνὸς μόνον μανομέτρου - δηλ., πῶς μεταβάλλεται μετὰ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου ἡ πίεσις εἰς ἓν σημεῖον τοῦ σωλήνος: Ἐφ' ὅσον διὰ τοῦ σημείου, εἰς τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται τὸ ἐν λόγω μανόμετρον, διέρχονται διαδοχικῶς πυκνώματα καὶ ἀραιώματα, ἔπεται ὅτι ἡ διὰ τοῦ μανομέτρου τούτου μετρουμένη πίεσις θὰ αὐξομειοῦται περιοδικῶς μετὰ τοῦ χρόνου.

Τοιαύτας περιοδικὰς μεταβολὰς τῆς πίεσεως τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος, τῶν ὁποίων ἡ συχνότης εἶναι ἱκανὴ νὰ ἐρεθίσῃ τὸ αἰσθητήριον τῆς ἀκοῆς καὶ νὰ προκαλῇ τὸ ἀντίστοιχον αἶσθημα, καλοῦμεν *ἤχους*.

Ἐκ τοῦ περιγραφέντος μηχανισμοῦ παραγωγῆς τῶν ἤχων προκύπτει ὅτι οἱ ἤχοι ἐντὸς τῶν ἀερίων διαδίδονται ὑπὸ μορφὴν διαμήκων κυμάτων.

Ὅλοι οἱ ἤχοι παράγονται ὑπὸ παλλομένων σωμάτων. Οὕτω, ἐὰν κτυπήσωμεν ἓνα κώδωνα, ἡ ἐὰν διεγείρωμεν τὴν χορδὴν



Σχ. 320. Μεταβολὴ τῆς πίεσεως τοῦ ἀέρος συναρτήσει τοῦ χρόνου εἰς τοὺς ἤχους.

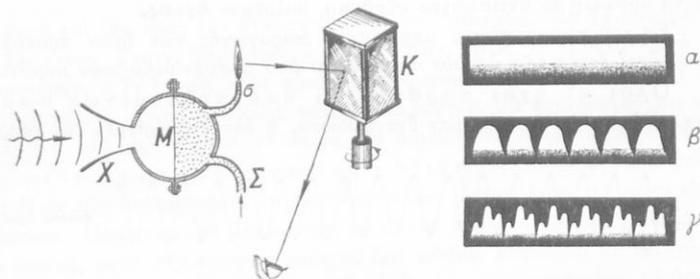
ἐνὸς βιολίου, τὰ σώματα ταῦτα (κώδων, χορδή) τίθενται εἰς ταλάντωσιν, δημιουργοῦντα δὲ εἰς τὸν περιβάλλοντα αὐτὰ ἀέρα πυκνώματα καὶ ἀραιώματα, παράγουσιν ἤχους.

Τοὺς ἤχους διακρίνομεν εἰς ἀπλοὺς καὶ συνθέτους. Καὶ εἰς μὲν τὸν **ἀπλοὺν ἤχον** ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος μεταβάλλεται ἡμιτονοειδῶς μετὰ τοῦ χρόνου (σχ. 320, α), ἐνῶ εἰς τὸν **σύνθετον ἤχον** (β) ἡ πίεσις μεταβάλλεται μὲν περιοδικῶς, ὅχι, ὅμως, ἡμιτονοειδῶς.

Ἀπλοὶ ἤχοι παράγονται εἰς σπανίας περιπτώσεις (π.χ. διὰ διαπασῶν, βλ. κατωτέρω), ἐνῶ αἱ περισσότεραι ἡχητικαὶ πηγαὶ (ἄδων ἄνθρωπος, ἐγχορδα ὄργανα κ.λ.), παράγουν συνθέτους ἤχους.

Εἰς τοὺς ἤχους δυνάμεθα νὰ κατατάξωμεν τοὺς **θορύβους** καὶ τοὺς **κρότους**. Εἰς τὸν **θόρυβον** ἡ πίεσις μεταβάλλεται μὲν, ὅχι, ὅμως, περιοδικῶς (γ), ἐνῶ ὁ **κρότος** προέρχεται ἐξ ἀποτόμου μεταβολῆς τῆς πίεσεως, βραχείας διαρκείας (δ). Κρότος, π.χ., παράγεται κατὰ τινα ἐκρηξίν, ἐνῶ θόρυβος κατὰ τὴν συγκέντρωσιν πολλῶν ἀνθρώπων.

★ § 188. Πειραματικὴ ἀπόδειξις τῶν ἡχητικῶν κυμάτων. Ἐν τῶν παλαιότερων μέσων, διὰ τοῦ ὁποῦν δυνάμεθα νὰ ἐξετάσωμεν πειραματικῶς τοὺς ἤχους, εἶναι ἡ **μανομετρικὴ κάψα** (σχ. 321). Αὕτη εἶναι μία (συνήθως) σφαιρικὴ

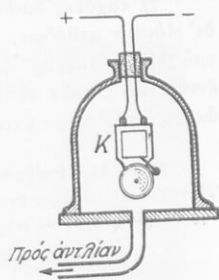


Σχ. 321. Μανομετρικὴ κάψα καὶ περιστρεπτόν κάτοπτρον K. (Τὸ περιστρεπτόν κάτοπτρον ἀποτελεῖται ἐκ τεσσάρων κατόπτρων).

κάψα, ἡ ὁποία χωρίζεται διὰ τῆς ἐλαστικῆς μεμβράνης M εἰς δύο θαλάμους. Ἐξ αὐτῶν ὁ εἰς συγκοινωνεῖ διὰ τῆς χοάνης X μὲ τὴν ἀτμόσφαιραν, ὁ δὲ ἄλλος φέρει δύο σωλῆνας Σ, σ. Εἰς τὸν σωλῆνα Σ προσάγεται φωταέριον, τὸ ὁποῖον ἀνάπτομεν εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ἄλλου σωλῆνος σ. Ἐὰν παρατηρήσωμεν τὸ εἶδωλον τῆς φλογὸς ἐντὸς τοῦ περιστρεφομένου κατόπτρου K, βλέπομεν ἐντὸς αὐτοῦ φωτεινὴν ταίναν σταθεροῦ πλάτους (εἰκὼν α, δεξιὰ). Ἄν, τώρα, ἐνώπιον τῆς χοάνης παραχθῇ ἤχος, ἡ ἐλαστικὴ μεμβράνη, λόγῳ τῶν πυκνωμάτων καὶ ἀραιώσεων τοῦ ἀέρος, τίθεται εἰς ταλάντωσιν, ὁπότε ἡ πίεσις τοῦ φωταερίου ἐντὸς τοῦ δεξιοῦ θαλάμου αὐξομειοῦται περιοδικῶς, μὲ ἀποτέλεσμα ν' αὐξομειοῦται καὶ τὸ ὕψος τῆς φλογός. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ ἐμφανίζετο ἐντὸς τοῦ κατόπτρου ἡ εἰκὼν β ἢ γ τοῦ σχήματος 321.

Σήμερον διὰ τὴν ἐξέτασιν τῶν ἤχων χρησιμοποιοῦνται ἡλεκτρονικαὶ συσκευαί, τῶν ὁποίων κύριον ὄργανον εἶναι τὸ **μικρόφωνον**, τὸ ὁποῖον μετατρέπει τοὺς ἤχους εἰς μεταβαλλόμενα ἡλεκτρικὰ ρεύματα καὶ ὁ σωλὴν Braun (Μπράουν), ὁ ὁποῖος καθιστᾷ αὐτοὺς ὁρατοὺς (βλ. Β' τόμον τοῦ ἀνά χεῖρας βιβλίου).

§ 189. Διάδοσις τοῦ ἤχου. Διὰ τὴν διαδοθῆναι τὸν ἤχος, εἶναι ἀπαραίτητος ἡ παρουσία ὑλῆς. Διὰ τοῦ κενοῦ, δηλ., ἡ διάδοσις τοῦ ἤχου εἶναι ἀδύνατος. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ δείξωμεν διὰ τοῦ ἑξῆς πειράματος: Ἐντὸς τοῦ κώδωνος ἀεραντλίας στερεοῦται καταλλήλως ὁ ἠλεκτρικὸς κώδων K (σχ. 322). Ἐὰν συνδέσωμεν τὸν κώδωνα K μετ' ἠλεκτρικὴν πηγὴν, θ' ἀρχίσῃ οὗτος νὰ ἤχη καὶ θ' ἀκούωμεν ἤχον. Ἀκολουθῶς, ἀρχίζομεν ν' ἀφαιρῶμεν τὸν ἀέρα, ὁπότε ὁ ἤχος ἀκούεται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἀσθενέστερος, διὰ τὴν παύσῃ τελικῶς ν' ἀκούεται, ὅταν ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος εἰς τὸν κώδωνα ἐλαττωθῇ πολὺ. Ἐὰν, τώρα, εἰσαγάγωμεν βαθμὴν δὸν ἀέρα ἐντὸς τοῦ κώδωνος, ὁ ἤχος ἀρχίζει ν' ἀκούεται ἔκ νέου.



Σχ. 322. Ὅταν ἀφαιρεθῇ ὁ ἀήρ, ὁ ἤχος δὲν ἀκούεται πλέον.

Ὁ ἤχος διαδίδεται ὄχι μόνον διὰ τῶν ἀερίων, ἀλλὰ καὶ διὰ τῶν στερεῶν. Οὕτω, ἂν εἰς τὸ ἐν ἄκρον ξυλίνης σανίδος τοποθετήσωμεν ἓν ὥρολόγιον τσέπης ἢ ἐγερτήριον ὥρολόγιον (κ. ξυπνητήρι), εἰς δὲ τὸ ἄλλο ἐφαρμόσωμεν τὸ οὖς, θ' ἀκούσωμεν πολὺ εὐκρινῶς τοὺς κτύπους τοῦ ὥρολογίου.

Ὁ ἤχος διαδίδεται ἐπίσης καὶ διὰ τῶν ὑγρῶν. Οὕτω, ἂν βυθίσωμεν τὴν κεφαλὴν μας ἐντὸς ὕδατος καὶ, κρατοῦντες διὰ τῶν χειρῶν μας δύο λίθους, τοὺς κτυπήσωμεν ὑπὸ τὸ ὕδωρ, θ' ἀκούσωμεν τὸν παραγόμενον κρότον. Ὁμοίως, διὰ τοῦ ὕδατος διαδίδεται ὁ θόρυβος τῶν ἐλικῶν τῶν ὑποβρυχίων, ἔκ τοῦ ὁποίου εἶναι δυνατὸν ταῦτα ν' ἀνακαλυφθῶν.

§ 190. Μέτρησις τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου. Μία ἀπλὴ μέθοδος μετρήσεως τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι ἡ ἑξῆς: Εἰς μεγάλην ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου μιᾶς ἐκρήξεως εὐρίσκεται παρατηρητής, ὁ ὁποῖος μετρεῖ τὸν χρόνον, τὸν παρερχόμενον ἀπὸ τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν βλέπει τὴν λάμψιν τῆς ἐκρήξεως, μέχρι τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀκούει τὸν κρότον. Ἐπειδὴ τὸ φῶς διαδίδεται μετὰ πολὺν μεγάλην ταχύτητα, ἐν σχέσει πρὸς τὸν ἤχον, δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν ὅτι ἡ λάμψις ἐγένετο ἀντιληπτὴ ὑπὸ τοῦ παρατηρητοῦ τὴν στιγμὴν, κατὰ τὴν ὁποίαν παρήχθη ὁ κρότος. Ἐπομένως, ὁ μετρηθεὶς χρόνος εἶναι ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος ἀπητήθη διὰ τὴν διαδοθῆναι τὸν ἤχος ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐκρήξεως μέχρι τοῦ παρατηρητοῦ. Ἐὰν μετρήσωμεν τὴν ἀπόστασιν ταύτην, ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ πηλίκον τῆς ἀποστάσεως ταύτης διὰ τοῦ μετρηθέντος χρόνου. Ἐκ τοιούτων μετρήσεων εὐρίσκεται ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι, περίπου, ἴση πρὸς 340 m/sec .

Ἀντιστρόφως, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου, εἰς τὸ ὁποῖον ἔπεσε κεραυνός, ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν τὸν χρόνον, ὁ ὁποῖος παρήλθεν ἀπὸ τῆς σι-

γμῆς, καθ' ἣν εἶδομεν τὴν λάμπιν, μέχρις ὅτου ἀκούσωμεν τὴν βροντὴν καὶ τὸν εὐρεθέντα χρόνον νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα.

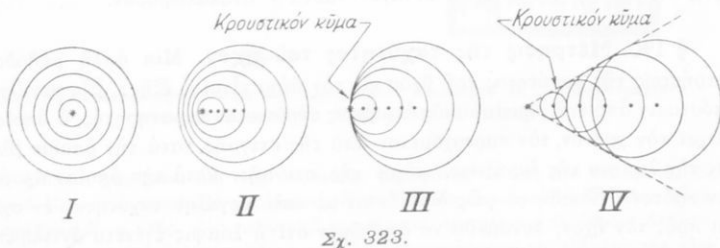
Ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου ἐντὸς ὑγρῶν καὶ στερεῶν εὐρίσκεται δι' εἰδικῶν μεθόδων, τῶν ὁποίων ἡ περιγραφή εὐρίσκεται ἔξω τῶν πλαισίων τοῦ βιβλίου τούτου. Ἐκ τοιούτων μετρήσεων εὐρέθη ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς τῶν ὑγρῶν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ταχύτητος ἐντὸς τῶν ἀερίων καὶ ἀκόμη μεγαλυτέρα ἐντὸς τῶν στερεῶν (*).

★ § 191. Ἐπίδρασις τῆς θερμοκρασίας ἐπὶ τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου. Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς τοῦ ἀέρος (καί, γενικῶς, ἐντὸς τῶν ἀερίων) ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θερμοκρασίας θ , αὐξανομένη μετ' αὐτῆς, κατὰ τὸν τύπον

$$v_{\theta} = v_0 \cdot \sqrt{1 + a \cdot \theta},$$

ἐνθα v_0 εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς 0°C καὶ a εἰς συντελεστής, ὁ ὁποῖος καλεῖται *θερμικὸς συντελεστὴς ὄγκου ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν* (βλ. κεφάλαιον Θερμότητος) καὶ εἶναι ἴσος πρὸς $1/273 \text{ grad}^{-1}$.

★★ § 192. Ὑπερηχητικαὶ ταχύτητες. Ὅταν ἡ ταχύτης ἑνὸς σώματος, κινουμένου ἐντὸς τοῦ ἀέρος, γίνῃ πολὺ μεγάλη καὶ πλησιάσῃ τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου ($340 \text{ m/sec} = 1224 \text{ km/h}$), παρουσιάζονται ὠρισμένα νέα φαινόμενα, τῶν ὁποίων ἡ προέλευσις δύναται νὰ κατανοηθῇ διὰ τῆς σειρᾶς τῶν ἐξῆς συλλογισμῶν: Θεωρήσωμεν ἡχητικὴν πηγὴν, ἡ ὁποία ἐκπέμπει, διαδοχικῶς, ἑξ ἡχητικὰ σημάτα $\pi\chi$, ἑξ πυκνώματα. Ἐάν ἡ πηγὴ εἶναι ἀκίνητος, ἡ μορφή τῶν ἀντιστοιχῶν ἡχητικῶν κυμάτων, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐκπέμπεται τὸ ἕκτον πυκνῶμα, θὰ παρίσταται ἀπὸ τὸ σχῆμα 323, I. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ κέντρα τῶν 5 σφαιρῶν εὐρί-



σκονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἡ πηγὴ, ἐνῶ ἡ ἕκτη σφαῖρα μόλις ἀρχίζει νὰ σχηματίζεται, συνεπῶς αὕτη εἶναι ἀκόμη σημεῖον. Ἐάν, ὅμως, ἡ πηγὴ κινηθῇ βραδέως (π.χ., πρὸς τ' ἀριστερά), τὰ ἡχητικὰ σημάτα ἐκπέμπονται ἑξ 6 διαφόρων σημείων καὶ αἱ σφαῖραι δὲν εἶναι πλέον συγκεντρικαὶ (II), συμπυκνούνται πρὸς τ' ἀριστερά. Ἐάν ἡ ταχύτης τῆς πηγῆς γίνῃ ἴση πρὸς τὴν ταχύτητα διαδόσεως τοῦ ἤχου, αἱ πέντε σφαῖραι ἐφάπτονται ἀλλήλων (III), τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον ἐπαφῆς αὐτῶν συμπίπτει, διαρκῶς, μετ' αὐτὴν κινουμένην πηγὴν, δηλ., μετ' αὐτὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον σχηματίζεται τὸ ἕκτον πυκνῶμα. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, λοιπόν, ἡ πηγὴ

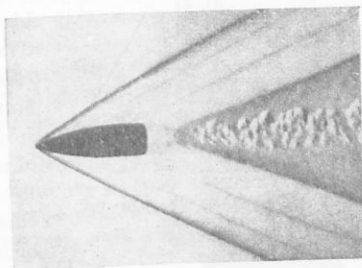
(*) Π.χ., ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸ ὕδωρ εἶναι περίπου 1500 m/sec , ἐνῶ εἰς τὸν ἀέρα 340 m/sec .

θά κινείται διαρκῶς ἐντὸς περιοχῆς ηὐξημένης πιέσεως, ἡ ὁποία καλεῖται *κρουστικὸν κύμα* (ἢ κύμα κρούσεως). Ἐάν, τέλος, ἡ ταχύτης τῆς πηγῆς ὑπερβῇ τὴν ταχύτητα τοῦ ήχου (ὑπερηχητικὴ ταχύτης), αἱ διαδοχικαὶ σφαῖραι τέμνουν ἀλλήλας (IV), τὸ δὲ κρουστικὸν κύμα ἀποτελεῖ κῶνον.

Τοιαῦτα κρουστικὰ κύματα παρατηροῦνται ὡς εὐθέϊαι γραμμαὶ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης κατὰ τὴν κίνησιν βενζινακίων, κινουμένων μετὰ ταχύτητα, μεγαλυτέραν τῆς ταχύτητος διαδόσεως τῶν κυμάτων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος.

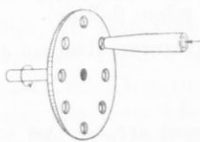
Εἰς τὸ σχῆμα 324 ἀποδίδεται φωτογραφία τοῦ κρουστικοῦ κύματος, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖ βλήμα πυροβόλου, κινούμενον ἐντὸς τοῦ αέρος μετὰ ταχύτητα 800 m/sec, δηλ., ταχύτητα, μεγαλυτέραν τῆς ταχύτητος τοῦ ήχου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἀεροπλάνα, κινούμενα μετὰ ταχύτητα, προσεγγίζουσιν ἢ καὶ υπερβαίνουν τὴν ταχύτητα τοῦ ήχου, ἀντιμετωπίζουν νέας συνθήκας πτήσεως, αἱ ὁποῖαι, ἐπειδὴ ἀκόμη δὲν ἔχουν μελετηθῇ ἐπαρκῶς, προκαλοῦν συχνὰ δυστηχήματα, χωρὶς τοῦτο νὰ ὀφείλεται εἰς τὸ ἀδιαπέραστον «ήχητικὸν τεῖχος». Τοιοῦτο τεῖχος, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀδιαπεράστου ἐμποδίου, δὲν ὑπάρχει, καθόσον, ὡς γνωστὸν, τὰ βλήματα τῶν πυροβόλων, κινούμενα μετὰ υπερηχητικῆς ταχύτητος, οὐδὲν ἀδιαπέραστον ἐμπόδιον συναντοῦν.



Σχ. 324.

§ 193. Πηγαί ήχων γνωστής συχνότητας. Εἰς τὰ ἐπιστημονικὰ ἔργαστήρια ἀπαιτοῦνται, συνήθως, ήχοι γνωστής συχνότητας. Πρὸς παραγωγὴν τοιούτων ήχων χρησιμοποιοῦμεν διάφορα ὄργανα, ἔκ τῶν ὁποίων τὰ κυριώτερα περιγράφομεν κατωτέρω.



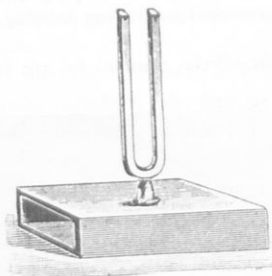
Σχ. 325. Σειρήν.

α) **Σειρήν.** Εἶναι ὄργανον, διὰ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ παραγάγωμεν ήχους διαφόρων συχνότητων, διακόπτοντες καὶ ἀποκαθιστῶντες περιοδικῶς ρεῦμα αέρος. Ἡ ἀπλουστάτη σειρήν ἀποτελεῖται ἐκ δίσκου, ὁ ὁποῖος φέρει ὁπᾶς εἰς ἴσας ἀποστάσεις (σχ. 325). Ἄν περιστρέψωμεν τὸν δίσκον ὁμαλῶς καὶ διαβιβάσωμεν ρεῦμα αέρος διὰ τοῦ ἀκροφυσίου, θὰ παραχθῇ ήχος, τοῦ ὁποίου ἡ συχνότης θὰ εἶναι ἀνάλογος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὁπῶν καὶ ἀνάλογος τῆς συχνότητος περιστροφῆς τοῦ δίσκου.

β) **Διαπασῶν.** Ἐάν κάμψωμεν μίαν χαλυβδίνην ράβδον εἰς σχῆμα U, λαμβάνομεν τὸ διαπασῶν (σχ. 326), τὸ ὁποῖον, καταλλήλως διεγερόμενον, πάλλεται, ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα 327.

Τὴν μορφήν τῆς ταλαντώσεως τοῦ διαπασῶν δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν διὰ τοῦ ἑξῆς πειράματος: Ἐπικολῶμεν, διὰ κηροῦ, ἐπὶ τοῦ ἐνὸς σκέλους λεπτὸν ἔλασμα, καταλήγον εἰς ὀξὺ ἄκρον καί, ἀφού διεγείρομεν τὸ

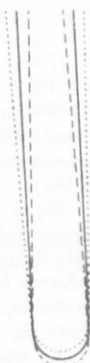
διαπασσών, σύροντες αὐτὸ ταχέως κατὰ μῆκος αἰθαλωμένης υαλίνης πλακὸς (σχ. 328). Θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ἀκὴς θὰ γράψῃ μίαν ἡμιτονοειδῆ καμπύλην, ἀποδείξεις ὅτι ἡ ταλάντωσις τοῦ διαπασσών ἐστὶν ἡμιτονοειδής. Ἀφοῦ, λοιπόν, ἡ ταλάντωσις τοῦ διαπασσών ἐστὶν ἡμιτονοειδής, ἔπεται ὅτι ὁ ὑπ' αὐτοῦ παραγόμενος ἦχος θὰ εἶναι ἀπλοῦς. Εἰς τὰ διαπασσών, τὰ χρησιμοποιούμενα διὰ μετρήσεις, ἡ συχνότης ἐστὶν ἀναγεγραμμένη ἐπ' αὐτῶν. Ἐπειδὴ ὁ ὑπὸ τῶν διαπασσών ἐκπεμπόμενος ἦχος ἐστὶν ἀσθενής, προσαρμύζονται ταῦτα ἐπὶ καταλλήλων ξυλίνων κιβω-



Σχ. 326. Διαπασσών μετὰ τοῦ ἀντηχείου του.



Σχ. 328. Πείραμα διὰ τὴν ἐπίδειξιν τῆς μορφῆς τῆς ταλαντώσεως τοῦ διαπασσών.



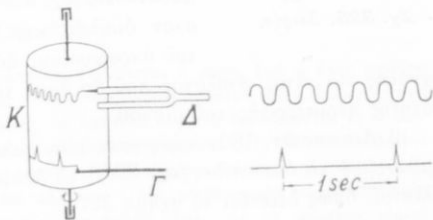
Σχ. 327. Διαδοχικὰ σιγμιότυπα τοῦ παλλομένου διαπασσών.

τίων, ἀνοικτῶν κατὰ τὸ ἓν μέρος (ἀντηχείων - σχ. 326), ὅποτε ὁ ἐκπεμπόμενος ἦχος ἐστὶν ἰσχυρότερος.

γ) **Μεγάφωνον.** Πηγὴν ἤχων ἀποτελεῖ καὶ τὸ *μεγάφωνον*, τὸ ὁποῖον συναντῶμεν εἰς πᾶν ραδιόφωνον. Ἐὰν τροφοδοτήσωμεν ἓν *μεγάφωνον* μὲ ἐναλλασσόμενον ρεῦμα, γνωστῆς συχνότητος, θὰ παραχθῇ ἦχος τῆς αὐτῆς, ἀκριβῶς, συχνότητος. Ἡ περιγραφή τοῦ *μεγαφώνου* καὶ τῆς λειτουργίας του ἐστὶν θέμα τοῦ «Ἡλεκτρισμοῦ» (βλ. β' τόμον τοῦ ἀνὰ χεῖρας βιβλίου).

δ) **Ἡχητικοὶ σωληνες.** Πηγαὶ ἤχων, γνωστῆς συχνότητος, εἶναι καὶ οἱ ἠχητικοὶ σωληνες, οἱ ὁποῖοι περιγράφονται κατωτέρω.

§ 194. Μέθοδοι μετρήσεως τῆς συχνότητος. α) **Γραφικὴ μέθοδος.** Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὴν συχνότητα, μὲ τὴν ὁποίαν πάλλεται, π.χ. ἓν διαπασσών, χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἐξῆς μέθοδον: Ἐπὶ κυλίνδρου *K* (σχ. 329), ὁ ὁποῖος περιστρέφεται δι' ὥρολογιακοῦ μηχανισμού, ἐπικολῶμεν φύλλον χάρτου, τὸ ὁποῖον ἔχει καλυφθῇ δι' αἰθάλης. Ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου ἐφάπτεται ἡ γραφίς *Γ*, ἡ ὁποία, διὰ καταλλήλου μηχανισμοῦ, κινεῖται εἰς τὸ τέλος ἐκάστου δευτερολέπτου ἀποτόμως πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἐπανερχεται ἀμέσως εἰς τὴν θέσιν της. Κατ'



Σχ. 329.

αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ γραφὶς γράφει ἐπὶ τοῦ αἰθαλομένου χάρτου μίαν συνεχῆ γραμμήν, φέρουσαν μικρὰς προεξοχάς, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς ἕκαστον δευτερόλεπτον. 'Επὶ τοῦ κυλινδρῶν ἐφάπτεται, ὁμοίως, μία ἀκίς, ἡ ὁποία εἶναι στερεωμένη εἰς τὸ ἄκρον τοῦ διαπασῶν Δ, τοῦ ὁποίου τὴν συχνότητα πρόκειται νὰ μετρήσωμεν. 'Αν θέλωμεν εἰς ταλάντωσιν τὸ διαπασῶν, ἡ ἀκίς πάλλεται καὶ γράφει ἐπὶ τοῦ χάρτου μίαν ἡμιτονοειδῆ γραμμήν. 'Εάν μετρήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ταλαντώσεων, αἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξὺ δύο προεξοχῶν, θὰ ἔχωμεν τὴν συχνότητα τοῦ διαπασῶν.

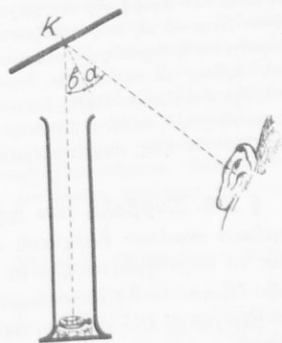
β) *Μέθοδος τῆς ὁμοφωνίας.* "Όταν δύο ἡχητικαὶ πηγαὶ ἐκπέμπουν ἤχους τῆς αὐτῆς συχνότητος, λέγομεν ὅτι εὐρίσκονται εἰς ὁμοφωνίαν. 'Εάν, ἐπομένως, κατορθώσωμεν νὰ μετρήσωμεν τὴν συχνότητα τοῦ ἤχου, τὸν ὁποῖον ἐκπέμπει ἡ μία τῶν πηγῶν, θὰ ἔχωμεν καὶ τὴν συχνότητα τοῦ ἤχου τῆς ἄλλης πηγῆς. Πρὸς τοῦτο δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν, π.χ., τὴν σειρήνα: Θέτομεν εἰς λειτουργίαν τὴν σειρήνα καὶ ρυθμίζομεν τὴν περιστροφὴν τῆς κατὰ τρόπον ὥστε ὁ ἤχος, τὸν ὁποῖον αὕτη παράγει, νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν ἀκριβῶς συχνότητα, τὴν ὁποίαν ἔχει ὁ πρὸς μέτρησιν ἤχος. 'Εάν, ἀκολούθως, πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ὁπῶν τῆς σειρήνης ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν στροφῶν αὐτῆς ἀνὰ δευτερόλεπτον, θὰ εὐρωμεν τὴν συχνότητα τοῦ ὑπ' αὐτῆς ἐκπεπομένου ἤχου καί, κατὰ συνέπειαν, τὴν ζητούμενην συχνότητα τοῦ ἄλλου ἤχου.

§ 195. "Εντασις τοῦ ἤχου. 'Εάν κτυπήσωμεν ἑλαφρῶς ἓν διαπασῶν, τοῦτο πάλλεται μὲ μικρὸν πλάτος, ὃ δὲ παραγόμενος ἤχος εἶναι ἀσθενής. 'Εάν, ἀκολούθως, κτυπήσωμεν τὸ διαπασῶν ἰσχυρότερον, τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως αὐξάνεται, ὃ δὲ ἤχος ἀκούεται ἐντονώτερος. Λέγομεν ὅτι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ *ἐντασις* τοῦ ἤχου ἦτο μικρά, ἐνῶ εἰς τὴν δευτέραν ἦτο μεγάλη. 'Αποδεικνύεται ὅτι ἡ *ἐντασις* ἐνὸς ἤχου ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ πλάτους τῆς ταλαντώσεως καί, συγκεκριμένως, εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τοῦ πλάτους.

Μεταβολὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ ἤχου μετὰ τῆς ἀποστάσεως. "Όπως ἀποδεικνύεται, ἡ ἐντασις τοῦ ἤχου ἐλαττοῦται κατ' ἀντίστροφον λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως. 'Εάν, δηλ., εἰς ὠρισμένην ἀπόστασιν ἀπὸ μιᾶς ἡχητικῆς πηγῆς ἡ ἐντασις τοῦ ἐκπεπομένου ἤχου ἔχει τιμὴν τινα, εἰς διπλάσιαν ἀπόστασιν ἡ ἐντασις θὰ εἶναι τέσσαρας φορὰς μικροτέρα, εἰς τριπλασίαν ἀπόστασιν ἑννέα φορὰς μικροτέρα κ.ο.κ.

§ 196. 'Ανάκλασις τῶν ἤχων.

"Όπως τὰ φωτεινὰ κύματα ἀνακλῶνται, ὅταν προσπίπτουν ἐπὶ κατόπτρου, οὕτω καὶ τὰ ἡχητικὰ κύματα ἀνακλῶνται, ὅταν προσπίπτουν ἐπὶ στερεᾶς ἐπιφανείας, ἡ δὲ γωνία ἀνακλάσεως εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν προσπίψεως. Τοῦτο δεικνύομεν διὰ τοῦ ἑξῆς πειράματος: Εἰς τὸν πυθμένα κυλινδρικοῦ δοχείου τοποθετοῦμεν ὀλίγον βάμβακα καὶ



Σχ. 330. 'Ανάκλασις τοῦ ἤχου.

ἐπ' αὐτοῦ ἐν ὥρολόγιον τσέπης (σχ. 330). Ἐάν, ἀκολουθῶς, εἰς τὸ στόμιον τοῦ δοχείου, φέρωμεν μίαν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν — π.χ., τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον K , ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα — ἀκούομεν εὐκρινῶς τοὺς κτύπους τοῦ ὥρολογίου, μόνον ἂν φέρωμεν τὸ οὗς εἰς ὠρισμένην θέσιν καί, συγκεκριμένως, εἰς ἐκείνην, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ γωνία ἀνακλάσεως α εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν προσπτώσεως β .

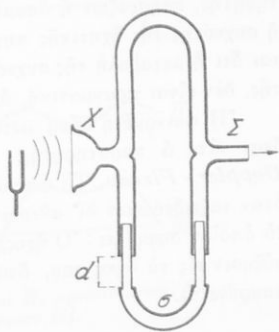
§ 197. Ἡχώ καὶ μετήχησις. Ἀποτελεσμα τῆς ἀνακλάσεως τοῦ ἤχου εἶναι καὶ ἡ **ἦχώ**, ἡ ὁποία παράγεται, ὅταν ὁ ἦχος ἀνακλᾶται ἐπὶ τινος κωλύματος (π.χ. τοίχου, βράχου κ.λ.), τὸ ὁποῖον ἀπέχει τῆς ἠχητικῆς πηγῆς περισσότερον τῶν 17 μέτρων. Καὶ τοῦτο διὰ τοὺς ἑξῆς λόγους: Ἡ ἐντύπωσις ἑνὸς ἤχου ἐξακολουθεῖ νὰ παραμένῃ ἐπὶ χρονικὸν διάστημα $\frac{1}{10}$ sec μετὰ τὴν παῦσιν τοῦ ῥεθιζματός. Ἐπειδὴ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι, περίπου, 340 m/sec, ἐντὸς τοῦ χρόνου τούτου ὁ ἦχος διανύει 34 m· συνεπῶς, διὰ νὰ ἀντιληφθῶμεν τὸν ἐξ ἀνακλάσεως ἦχον, χωριστὰ ἀπὸ τὸν ἀπ' εὐθείας, πρέπει ἡ ἀπόστασις μας ἀπὸ τῆς ἀνακλώσεως ἐπιφανείας νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 17 m. Ἐάν, ὅμως, ἡ ἀπόστασις αὕτη εἶναι μικροτέρα τῶν 17 m, τότε ἀκούομεν τὸν ἐξ ἀνακλάσεως ἦχον, πρὶν ἐκλείψῃ ὁ ἀπ' εὐθείας ἦχος. Τοῦτο συμβαίνει, συνήθως, ἐντὸς κλειστῶν χώρων, περιοριζομένων ὑπὸ μεγάλων ἀνακλαστικῶν ἐπιφανειῶν (π.χ. ἐκκλησιῶν), εἰς τοὺς ὁποίους, λόγῳ τῶν πολλαπλῶν ἀνακλάσεων, ἦχος μικρᾶς διαρκείας (π.χ. μία συλλαβὴ) ἀκούεται ἐπὶ πολὺν χρόνον. Τὸ φαινόμενον τοῦτο καλεῖται **μετήχησις** καὶ ἔχει μεγάλην σημασίαν διὰ τὴν καλὴν «ἀκουστικὴν» θεάτρων, αἰθουσῶν διαλέξεων κ.λ.

Ἡ διάρκεια τῆς μετήχσεως εἶναι δυνατόν νὰ γίνῃ μικροτέρα διὰ καταλλήλου ἐκλογῆς τοῦ σχήματος τοῦ χώρου καὶ τῶν ὕλικῶν τῶν ἀνακλαστικῶν ἐπιφανειῶν: Καὶ ὅσον μὲν ἀφορᾷ εἰς τὸν χρόνον, οὗτος πρέπει νὰ διορθωθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε νὰ μὴ παρουσιάζωνται, κατὰ τὸ δυνατόν, παράλληλοι ἐπιφάνειαι, ὅποτε ἀποφεύγεται ἡ δημιουργία στασιμῶν κυμάτων. Αἱ ἀνακλαστικαί, ἀρ' ἐτέρου, ἐπιφάνειαι πρέπει νὰ προκαλοῦν ὅσον τὸ δυνατόν μεγαλυτέραν ἀπορρόφησιν τοῦ ἤχου κατὰ τὴν ἀνάκλασιν. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται, ὅταν αἱ ἐπιφάνειαι αὗται φέρουσιν μέγαν προεξοχὰς ἢ ὀπὰς, ἡ ἀποτελοῦνται ἀπὸ πορώδη ὕλικα. Μεγάλαν ἀπορρόφησιν προκαλοῦν τάπητες, παραπετάσματα, πλῆθος συναθροισμένων ἀνθρώπων κ.λ.

§ 198. Συμβολὴ τῶν ἤχων. Ὅπως εἶδομεν, ὁ ἦχος ἀποτελεῖται ἐκ διαμήκων κυμάτων ἐντὸς τοῦ ἀέρος καί, ὥς ἐκ τούτου, πρέπει εἰς τοὺς ἦχους νὰ παρατηρῶνται ὅλα τὰ φαινόμενα, τὰ περιγραφέντα εἰς τὴν Κυματικὴν. Ἐνταῦθα θὰ ἐξετάσωμεν τὸ φαινόμενον τῆς συμβολῆς τῶν ἤχων.

Εἰς τὴν § 185 εἶδομεν ὅτι, ὅταν δύο κύματα τῆς αὐτῆς συχνότητος συμβάλλουν, παρατηρεῖται ἡ ἐνίσχυσις ἢ ἀπόσβεσις, ἀναλόγως τῆς διαφορᾶς δρόμου τῶν δύο κυμάτων. Τὸ αὐτὸ φαινόμενον παρουσιάζεται καὶ κατὰ τὴν συμβολὴν δύο ἤχων. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν διὰ τῆς συσκευῆς, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ σχῆμα 331: Ἐνώπιον τῆς χοάνης X παρὰ-

γομεν ἦχον, π.χ., δι' ἐνὸς διαπασῶν. Ὁ ἦχος οὗτος, εἰσερχόμενος εἰς τὴν συσκευὴν, χωρίζεται καὶ φθάνει εἰς τὸν σωλῆνα Σ διὰ δύο δρόμων. Ἐὰν οἱ δύο οὗτοι δρόμοι εἶναι ἀκριβῶς ἴσοι, τὰ δύο ἡχητικὰ κύματα, συναντῶμενα ἐκεῖ, συμβάλλουν καὶ δίδουν ἔντονον ἦχον. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ἑξῆς: Τὴν στιγμὴν, κατὰ τὴν ὁποίαν εἰς τὸν σωλῆνα Σ φθάνει, π.χ., πύκνωμα ἐκ τοῦ ἐνὸς σωλῆνος, φθάνει, ὁμοίως, πύκνωμα καὶ ἐκ τοῦ ἄλλου σωλῆνος, οὕτως ὥστε θὰ ἔχωμεν ἐκεῖ μεγάλην αὐξησην τῆς πίεσεως. Ἐπίσης, ὅταν ἐκ τοῦ ἐνὸς σωλῆνος φθάνη ἀραίωμα, ὁμοίως ἀραίωμα φθάνει καὶ ἐκ τοῦ δευτέρου σωλῆνος, οὕτως ὥστε εἰς τὸν σωλῆνα Σ θὰ ἔχωμεν μεγάλην ἐλάττωσιν τῆς πίεσεως κ.ο.κ. Οὕτω, ὁ ἐκ τῆς συμβολῆς ἦχος θὰ ἔχη μέγα πλάτος - δηλ., εἰς τὸν σωλῆνα Σ θὰ ἀκούσωμεν ἰσχυρὸν ἦχον. Ἄν, τώρα, αὐξήσωμεν τὸν ἓνα δρόμον, ἔλκοντες πρὸς τὰ ἔξω τὸν κινητὸν σωλῆνα σ , δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν ὥστε, ὅταν εἰς τὸν σωλῆνα Σ φθάνη ἀραίωμα, προερχόμενον ἐκ τοῦ ἐνὸς σωλῆνος, νὰ φθάνη, ταυτοχρόνως, πύκνωμα, προερχόμενον ἐκ τοῦ ἄλλου σωλῆνος. Τοῦτο σημαίνει ὅτι οἱ δύο ἦχοι, συμβάλλοντες εἰς τὸν σωλῆνα Σ , θὰ ἀλληλοαναιροῦνται - θὰ ἔχωμεν, δηλ., ἐκεῖ ἀπόσβεσιν τοῦ ἦχου.



Σχ. 331. Συσκευή διὰ τὴν μελέτην τῆς συμβολῆς τῶν ἡχων.

§ 199. Διακροτήματα. Ἐὰν διεγείρωμεν ταυτοχρόνως δύο ἀνοικτοὺς ἡχητικούς σωλῆνας, τῶν ὁποίων τὰ μήκη νὰ διαφέρουν ὀλίγον (*), θὰ παράγονται δύο ἦχοι, τῶν ὁποίων αἱ συχνότητες θὰ διαφέρουν ὀλίγον μεταξύ των, δεδομένου ὅτι (ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω), ἡ συχνότης τοῦ ἦχου, τοῦ ἐκπεμπομένου ὑφ' ἐνὸς ἡχητικοῦ σωλῆνος, ἔξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους αὐτοῦ. Οἱ δύο οὗτοι ἦχοι συμβάλλουν καὶ δίδουν ἦχον, τοῦ ὁποίου ἡ ἔντασις αὐξομειώνεται περιοδικῶς (**διακρότημα**). Τὸ αὐτὸ φαινόμενον παρατηροῦμεν, ὅταν δύο αὐτοκίνητα κινῶνται παραλλήλως καὶ μετὴν αὐτῆν, περίπου, ταχύτητα: Ἐκ συμβολῆς τῶν ἡχων, τῶν προερχομένων ἀπὸ τῶν ἐκρήξεων τῶν κινητῶν των, ἀκούομεν σαφῆ διακροτήματα. Ἐντελῶς ἀνάλογον φαινόμενον παρατηρεῖται καὶ εἰς τὸν ἦχον, τὸν ὁποῖον παράγουν τὰ δικινητήρια ἀεροπλάνα.

★ **§ 200. Φαινόμενον Doppler - Fizeau (Ντόπλερ - Φιζώ).**
 "Ὅταν μία ἡχητικὴ πηγὴ ἐκπέμπῃ ἦχον, συχνότητος ν , καὶ πλησιάζῃ πρὸς ἀκίνητον παρατηρητὴν, οὗτος ἀντιλαμβάνεται ἦχον, μεγαλυτέρας συχνότητος ἀπὸ τὴν πραγματικῶς ὑπὸ τῆς πηγῆς ἐκπεπομένην. Ἀντιθέτως, ὅταν ἡ πηγὴ ἀπομακρύνεται, ὁ παρατηρητὴς ἀντιλαμβάνεται

(*) Διὰ τὸ πείραμα τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν δύο ὁμοίους ἡχητικούς σωλῆνας, τοῦ ἐνὸς τῶν ὁποίων αὐξάνομεν τὸ μήκος διὰ μετακινήσεως χαρτονίου, περιβάλλοντος τὸν σωλῆνα.

ήχον, μικροτέρας συχνότητος. Ἀνάλογος μεταβολή τῆς συχνότητος παρατηρεῖται, ὅταν ἡ ἡχητικὴ πηγὴ παραμένῃ ἀκίνητος καὶ κινῆται ὁ παρατηρητής, πλησιάζων ἢ ἀπομακρυνόμενος αὐτῆς. Ἐπειδὴ, κατὰ τὴν κίνησιν, ἡ συχνότης τῆς ἡχητικῆς πηγῆς εἰς τὴν πραγματικότητα δὲν μετεβλήθη, ἔπεται ὅτι ἡ μεταβολὴ τῆς συχνότητος, τὴν ὁποῖαν ἀντιλαμβάνεται ὁ παρατηρητής, δὲν εἶναι πραγματικὴ, ἀλλὰ φαινόμενη.

Ἡ φαινόμενη αὕτη μεταβολὴ τῆς συχνότητος, ἡ ὁποία παρατηρεῖται, ὅταν εἴτε ὁ παρατηρητής, εἴτε ἡ πηγὴ κινῆται, καλεῖται **φαινόμενον Doppler - Fizeau**. Τὸ φαινόμενον τοῦτο ἀντιλαμβάνομεθα πολὺ εὐκρινῶς, ὅταν ταξειδεύωμεν δι' αὐτοκινήτου καὶ συναντώμεθα με' ἄλλο αὐτοκίνητον, τὸ ὁποῖον σφυρίζει: Ὁ ἤχος, τὸν ὁποῖον ἀκούομεν, παρουσιάζει σημαντικὴν αὐξήσιν εἰς τὸ ὕψος του, ὅταν τὸ αὐτοκίνητον πλησιάζῃ, παρὰ ὅταν ἀπομακρύνεται.

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ συχνότης ν' , τὴν ὁποῖαν ἀντιλαμβάνεται ὁ παρατηρητής, εἶναι ἴση πρὸς

$$\nu' = \nu \cdot \frac{V \pm v_{\text{παρατ.}}}{V \mp v_{\text{πηγῇ}}}$$

$$\begin{aligned} \nu' &= \nu + \Delta\nu \leftarrow \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v_{\text{παρατ.}}}{V_{\text{αὐτοκίνητου}}} \\ \nu' &= \nu - \Delta\nu \rightarrow \end{aligned}$$

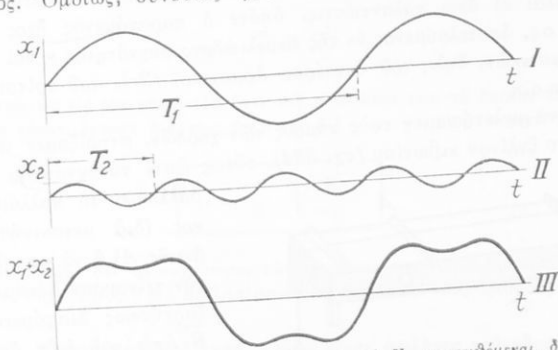
ἔνθα ν εἶναι ἡ (πραγματικὴ) συχνότης τῆς πηγῆς, V ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου, καὶ $v_{\text{παρατ.}}$ καὶ $v_{\text{πηγῇ}}$ ἡ ταχύτης τοῦ παρατηρητοῦ καὶ ἡ ταχύτης τῆς πηγῆς. Τὸ σημεῖον (+) τοῦ ἀριθμοῦ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποῖαν ὁ παρατηρητής πλησιάζει, ἐνῶ τὸ (—), ὅταν ὁ παρατηρητής ἀπομακρύνεται. Ἀντιθέτως, τὸ σημεῖον (—) τοῦ παρονομαστοῦ ἰσχύει, ὅταν ἡ πηγὴ πλησιάζῃ, ἐνῶ τὸ σημεῖον (+), ὅταν ἡ πηγὴ ἀπομακρύνεται.

§ 201. Σύνθετοι ἤχοι. Εἰς τὴν παράγραφον 187 εἶδομεν ὅτι οἱ σύνθετοι ἤχοι χαρακτηρίζονται ἐκ τοῦ ὅτι ἡ πίεσις μεταβάλλεται μὲν περιοδικῶς, ὅχι, ὅμως, ἡμιτονοειδῶς. Εἰς τὰ κατωτέρω θὰ μελετήσωμεν λεπτομερέστερον τοὺς συνθέτους ἤχους.

Θεωρήσωμεν τὰς δύο ἀρμονικὰς ταλαντώσεις, τὰς ὁποίας παριστᾷ γραφικῶς τὸ σχῆμα 332, *I* καὶ *II*, καὶ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη ἔχει περίοδον, τριπλασίαν τῆς δευτέρας ($T_1 = 3 \cdot T_2$). Ἐάν, εἰς ἐκάστην χρονικὴν στιγμήν, προσθέσωμεν τὰς ἀπομακρύνσεις x_1 καὶ x_2 τῶν δύο ταλαντώσεων, θὰ προκύψῃ μία νέα ταλάντωσις, τὴν ὁποῖαν παριστᾷ τὸ διάγραμμα *III* τοῦ ἄνω σχήματος. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συνθέσεως τῶν δύο ἄνω ἀρμονικῶν ταλαντώσεων εἶναι μία περιοδικὴ ταλάντωσις, ὅχι, ὅμως, ἀρμονικὴ. Μεταφέροντες τ' ἀνωτέρω εἰς τοὺς ἤχους, συμπεραίνομεν ὅτι, ἐὰν συνθέσωμεν δύο ἀπλοὺς ἤχους, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἰς ἔχει συχνότητα, τριπλασίαν τῆς τοῦ ἄλλου, θὰ λάβωμεν ἕνα σύνθετον ἤχον, ὁ ὁποῖος θὰ παρίσταται γραφικῶς διὰ τῆς καμπύλης τοῦ σχήματος 332, *III*.

Τὸ φαινόμενον τοῦτο εἶναι γενικόν. Ὅταν, δηλ., συνθέτωμεν δύο ἀπλοὺς ἤχους, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἰς ἔχει συχνότητα, ἡ ὁποία εἶναι ἀκέραιον πολλαπλάσιον τῆς συχνότητος τοῦ ἄλλου, προκύπτει σύν-

θετος ήχος. Ὁμοίως, σύνθετος ήχος προκύπτει, ὅταν συντίθενται περισσ-



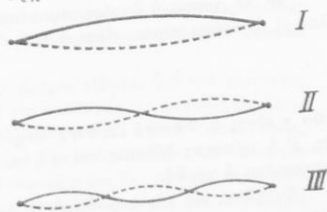
Σχ. 332. Αἱ ἀρμονικαὶ ταλαντώσεις I καὶ II, προστιθέμεναι, δίδουν τὴν περιοδικὴν ταλάντωσιν III.

σότεροι ἀπλοὶ ήχοι (τρεῖς, τέσσαρες κ.λ.), τῶν ὁποίων αἱ συχνότητες εἶναι ἀκέραια πολλαπλάσια μιᾶς ὁρισμένης συχνότητος.

Ἀντιστρόφως, εὐρίσκεται ὅτι, ἐὰν ἀναλύσωμεν ἕνα σύνθετον ήχον, θὰ λάβωμεν μίαν σειρὰν ἀπλῶν ήχων, τῶν ὁποίων αἱ συχνότητες εἶναι ἀκέραια πολλαπλάσια μιᾶς ὁρισμένης συχνότητος. Ὁ ήχος τῆς μικροτέρας συχνότητος καλεῖται **θεμελιώδης** (ἢ **πρωῖτος ἀρμονικός**), οἱ δὲ ήχοι τῶν ὑψηλοτέρων συχνοτήτων 2ν , 3ν , ... καλοῦνται **δεύτερος ἀρμονικός**, **τρίτος ἀρμονικός** κ.λ.

Συνθέτουσ ήχους παράγουν ὅλα τὰ μουσικὰ ὄργανα, αἱ σειρήνες, οἱ ήχητικοὶ σωλήνες κ.λ.

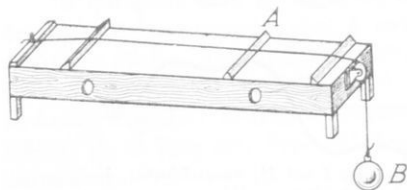
§ 202. Χορδαί. Αὗται κατασκευάζονται εἴτε ἐξ ἐντέρων, εἴτε ἐκ μετάλλου καὶ στερεώνονται εἰς τὰ δύο ἄκρα των, διὰ καταλήλῳ δὲ κλειδίου εἶναι δυνατόν νὰ μεταβληθῇ ἡ δύναμις, μὲ τὴν ὁποίαν τείνονται. Ἐάν διεγείρωμεν μίαν τοιαύτην χορδὴν, αὕτη θ' ἀρχίσῃ νὰ πάλῃται, ὁπότε σχηματίζονται στάσιμα κύματα, ὅπως ἀκριβῶς εἰς τὸ σχοινίον τοῦ σχήματος 315, IV. Ἐάν ἐκλέξωμεν τὴν συχνότητα τῆς διεγέρσεως καταλήλῳ, δυνατόν νὰ ἐπιτύχωμεν, ὥστε ἡ χορδὴ νὰ πάλῃται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ δημιουργηθῇ μία, μόνον, κοιλία (σχ. 333, I). Τὴν συχνότητα ταύτην ἂς συμβολίσωμεν διὰ τοῦ γράμματος ν . Ἐάν, τῶρα, διεγείρωμεν τὴν χορδὴν μὲ διπλάσιαν συχνότητα (2ν), θὰ παραχθοῦν δύο κοιλίαι (II), ἐὰν μὲ τριπλασίαν συχνότητα (3ν), θὰ παραχθοῦν τρεῖς κοιλίαι (III) κ.ο.κ. Ἐάν, ὅμως, ἡ διέ-



Σχ. 333. Διάφοροι μορφαὶ μιᾶς παλόμενης χορδῆς.

γεωρσις γίνη διὰ τοῦ τόξου — ὅπως, π.χ., εἰς τὸ βιολίον — παράγονται συγ· χρόνως ὅλαι αἱ ἄνω ταλαντώσεις, ὅποτε ὁ παραγόμενος ἦχος θὰ εἶναι σύνθετος, ἀποτελούμενος ἐκ τῆς θεμελιώδους συχνότητος ν καὶ τῶν ἄνω-τέρων ἁρμονικῶν, δηλ., τοῦ δευτέρου ἁρμονικοῦ (2ν), τοῦ τρίτου ἁρμονικοῦ (3ν) κ.ο.κ.

Διὰ τὴν μελετήσωμεν τοὺς νόμους τῶν χορδῶν, στηρίζομεν αὐτὰς ἐπὶ καταλλήλου ξυλίνου κιβωτίου (σχ. 334), οὕτως ὥστε νὰ δυνάμεθα νὰ μετα-



Σχ. 334. Συσκευή διὰ τὴν μελέτην τῶν νόμων τῶν χορδῶν (μονόχορδον). Ὅταν ἡ συσκευή φέ-ρει περισσότερας χορδὰς καλεῖται πολύχορδον.

βάλλωμεν τὸ παλλόμενον μῆ-κος (διὰ μετακινήσεως τῆς ἀκμῆς A) ἢ νὰ μεταβάλλωμεν τὴν τείνουσαν δύναμιν, δι' ἐ-ξαορτήσεως διαφόρων βαρῶν B ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τῆς χορδῆς. Διὰ τοιούτων πειρα-μάτων προκύπτουν οἱ ἐξῆς νόμοι τῶν χορδῶν, οἱ ὅποιοι ἀναφέρονται εἰς τὴν θεμε-λιώδη συχνότητα:

1) Ἡ θεμελιώδης συχνότης εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ μήκους τῆς χορδῆς.

Ὀῦτω, ἐάν, διατηροῦντες τὴν τείνουσαν δύναμιν σταθεράν, ἐλαττώσω-μεν τὸ μῆκος τῆς χορδῆς εἰς τὸ ἥμισυ, ἡ συχνότης θὰ διπλασιασθῇ.

2) Ἡ θεμελιώδης συχνότης ἐξαορτᾶται ἐκ τῆς τεινούσης δυνάμεως.

Ὅσον μεγαλύτερα εἶναι ἡ τείνουσα δύναμις, τόσον μεγαλύτερα εἶναι καὶ ἡ συχνότης.

3) Ἡ θεμελιώδης συχνότης ἐξαορτᾶται ἐκ τῆς διαμέτρου τῆς χορδῆς. Ὅσον μικροτέρα εἶναι ἡ διάμετρος, τόσον μεγαλύτερα εἶναι ἡ συχνότης.

4) Ἡ θεμελιώδης συχνότης ἐξαορτᾶται, τέλος, καὶ ἐκ τοῦ ὕλικου τῆς χορδῆς.

★ Ὁ τύπος, ὁ ὅποιος προκύπτει θεωρητικῶς καὶ ἐκ τοῦ ὁποίου ἐξάγονται ὅλοι οἱ ἀνωτέρω νόμοι, εἶναι ὁ ἐξῆς:

$$\nu = \frac{1}{\delta \cdot l} \cdot \sqrt{\frac{F}{\pi \cdot \rho}} \quad (1)$$

ἐνθα ν εἶναι ἡ θεμελιώδης συχνότης, δ ἡ διάμετρος τῆς χορδῆς, l τὸ μῆκος αὐ-τῆς, F ἡ τείνουσα δύναμις καὶ ρ ἡ πυκνότης τοῦ ὕλικου, ἐκ τοῦ ὁποίου εἶναι κατε-σκευασμένη ἡ χορδή.

Συνήθως, εἰς τὰς χορδὰς, ἀντὶ νὰ μετρήσωμεν τὴν πυκνότητα καὶ τὴν διάμε-τρον, μετροῦμεν τὴν «μᾶζαν ἀνὰ μονάδα μήκους» m_l . Ἐάν m εἶναι ἡ μᾶζα μιᾶς χορ-δῆς, μήκους l , θὰ ἔχωμεν $m_l = m/l$. Ἀλλ' ἡ μᾶζα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γινό-μενον τοῦ ὄγκου V ἐπὶ τὴν πυκνότητα ρ . Ἦτοι

$$m = V \cdot \rho = \pi r^2 \cdot l \cdot \rho = \frac{\pi \delta^2}{4} \cdot l \cdot \rho$$

όποτε έχουμε

$$m_l = \frac{m}{l} = \frac{\pi \delta^2}{4} \cdot \rho.$$

Αντικαθιστώντες εις τὸν τύπον (1), ἀντὶ τοῦ ρ τὸ ἴσον του, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἐκ τοῦ ἄνω τύπου, ἔχομεν διὰ τὴν θ μελελιώδη συχνότητα καὶ τὸν τύπον

$$\nu = \frac{1}{2l} \cdot \sqrt{\frac{F}{m_l}} \quad (2)$$

Εἶναι φανερόν ὅτι αἱ συχνότητες τῶν ἀνωτέρων ἀρμονικῶν προκύπτουν ἐκ τῆς θ μελελιώδους συχνότητος ν διὰ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῆς ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4, 5...

§ 203. Ήχητικοί σωλήνες. Οὗτοι εἶναι σωλήνες κυλινδρικοὶ ἢ πρισματικοὶ, ἐφωδιασμένοι διὰ καταλλήλου διατάξεως, διὰ τῆς ὁποίας ἡ ἐντὸς αὐτῶν περιεχομένη στήλη ἀέρος διεγείρεται εἰς ταλάντωσιν, σχηματιζομένων, οὕτω, στασίμων κυμάτων ἐντὸς αὐτῶν. Ἡ συχνότης τῶν ἤχων, τῶν ἐκπεμπομένων ὑπὸ τῶν ἡχητικῶν σωλήνων, ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους τῶν σωλήνων καί, συγκεκριμένως, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς αὐτό.

Ἐπὶ τῆς ἀρχῆς τῆς λειτουργίας τῶν ἡχητικῶν σωλήνων στηρίζεται καὶ ἡ λειτουργία τῶν *σφυρικτρῶν*.

Οἱ ἡχητικοὶ σωλήνες διακρίνονται εἰς *ἀνοικτοὺς* (σχ. 335, I) καὶ *κλειστοὺς* (II), ἀναλόγως τοῦ ἐὰν συγκοινωνοῦν μὲ τὰ δύο ἢ μὲ τὸ ἓν ἄκρον των μὲ τὴν ἀτμόσφαιραν.

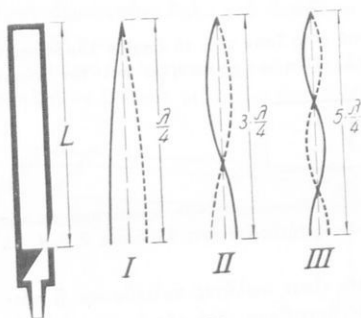
Οἱ ἡχητικοὶ σωλήνες διεγείρονται, συνήθως, κατὰ δύο τρόπους, εἴτε διὰ *στομίου* καὶ *χειλούς*, εἴτε διὰ *γλωσσίδος*. Εἰς τὴν διέγερσιν διὰ *στομίου* καὶ *χειλούς* (σχ. 335) τὸ ρεῦμα τοῦ ἀέρος, προσκρούον ἐπὶ τοῦ χειλούς, δημιουργεῖ στροβίλους, παραγομένης, οὕτω, πολυπλόκου διαταραχῆς τοῦ ἀέρος (συριγμός). Ἐξ ὧων τῶν συχνότητων, τὰς ὁποίας περιέχει ὁ συριγμὸς οὗτος, ἐνισχύονται μόνον ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ δημιουργήσουν στάσιμα κύματα ἐντὸς τοῦ σωλήνος.

Ἡ *γλωσσὶς* (σχ. 336), στερεωμένη κατὰ τὸ ἓν ἄκρον, τίθεται διὰ τοῦ ρεύματος τοῦ ἀέρος εἰς ταλάντωσιν, συχνότητος ἴσης πρὸς τὴν ἰδιοσυχνότητα αὐτῆς. Ὅταν, ὁμως, συνδέεται μὲ ἡχητικὸν σωλήνα, αἱ ταλαντώσεις τῆς ἐπερᾶζονται ἐκ τῶν ταλαντώσεων τοῦ ἐντὸς τοῦ σωλήνος ἀέρος καὶ ἡ γλωσσὶς αἰσταντοῦται μὲ τὴν ἰδιοσυχνότητα, κυρίως, τῆς ἀερίου στήλης.

Σχ. 336. Ήχητικὸς σωλήν μὲ γλωσσίδα.

★ Κατὰ τὴν διέγερσιν τῶν ἡχητικῶν σωλήνων, ὁ ἐντὸς αὐτῶν περιεχόμενος ἀὴρ τίθεται εἰς ταλάντωσιν, ἡ ὁποία ἔχει τὴν μορφήν στασίμου κύματος. Διὰ τὴν μελέτην τῶν ἡχητικῶν σωλήνων, ἐξετάζομεν πρῶτον τοὺς κλειστοὺς ἡχητικούς σωλήνας καὶ κατόπιν τοὺς ἀνοικτούς.

α) **Κλειστοί σωλήνες.** "Όταν διεγείρωμεν ένα κλειστόν ήχητικόν σωλήνα, τὸ παραγόμενον κύμα διαδίδεται κατὰ μήκος τοῦ σωλήνος καί, ἀνακλόμενον εἰς τὸ κλειστόν ἄκρον, ἐπιστρέφει καὶ συμβάλλει μὲ τὸ πρῶτον, οὕτω δὲ δημιουργεῖται στάσιμον κύμα. Ἐπειδὴ εἰς τὸ κλειστόν ἄκρον ἡ ταλάντασις τῶν μορίων τοῦ ἀέρος δὲν εἶναι δυνατή, θὰ σχηματίζεται ἐκεῖ δεσμός τῆς κινήσεως (σχ. 337, I), ἐνῶ εἰς τὸ ἀνοικτὸν ἄκρον θὰ σχηματίζεται κοιλία τῆς κινήσεως, διότι ἐκεῖ τὰ μόρια τοῦ ἀέρος δύνανται νὰ πάλλωνται μὲ μέγα πλάτος. Ἐκτὸς τῆς περιπτώσεως ταύτης, ἐντὸς ἐνὸς κλειστοῦ ήχητικοῦ σωλήνος εἶναι δυνατόν νὰ δημιουργηθοῦν καὶ στάσιμα κύματα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς ταλαντώσεις μεγαλυτέρας συχνότητος, δηλ., μικροτέρου μήκους κύματος (II, III).



Σχ. 337.

Ἐὰν καλέσωμεν L τὸ μήκος τοῦ σωλήνος καὶ συγκρίνωμεν τοῦτο πρὸς τὸ ἐκάστοτε μήκος κύματος λ , θὰ εὕρωμεν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν I ἰσχύει ἡ σχέση $L = \lambda/4$ · ἐπομένως, τὸ παραγόμενον μήκος κύματος εἶναι ἴσον πρὸς $\lambda = 4L$. Εἰς τὴν περίπτωσιν II ἔχομεν $L = 3 \cdot \frac{\lambda}{4}$ καί, συνεπῶς, $\lambda = 4L \cdot \frac{1}{3}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν III ἔχομεν $\lambda = 4L \cdot \frac{1}{5}$ καί, γενικῶς,

$$\lambda = 4L \cdot \frac{1}{n} \quad (1)$$

ἐνθα $n = 1, 3, 5, 7 \dots$

Ἦδη, ἐφ' ὅσον γνωρίζομεν τὸ ἐκάστοτε μήκος κύματος, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀντίστοιχον συχνότητα, δεδομένου ὅτι μεταξὺ τοῦ μήκους κύματος λ , τῆς συχνότητος ν καὶ τῆς ταχύτητος διαδόσεως v ἰσχύει ἡ σχέση

$$\nu = \frac{v}{\lambda} \quad (2)$$

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὴν σχέσηιν

$$\nu = n \cdot \frac{v}{4L} \quad (3)$$

($n = 1, 3, 5, 7 \dots$)

Θέτοντες $n = 1$ εἰς τὸν τύπον (3), λαμβάνομεν τὴν μικροτέραν συχνότητα τοῦ ἤχου, τὸν ὁποῖον δύναται νὰ δώσῃ κλειστός ήχητικὸς σωλήν, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **θεμελιώδη συχνότητα**. Διὰ $n = 3, 5, 7 \dots$ προκύπτουν ὁ τρίτος ἁρμονικός, ὁ πέμπτος ἁρμονικός, ὁ ἕβδομος ἁρμονικός κ.λ.

Ἦτοι: Οἱ κλειστοὶ ήχητικοὶ σωλήνες δύνανται νὰ παράγουν μόνον τοὺς περιττοὺς τὰς ν ἁρμονικοὺς $\nu, 3\nu, 5\nu, 7\nu \dots$

β) **Ἀνοικτοὶ σωλήνες.** Κατὰ τὴν διέγερσιν ἐνὸς ἀνοικτοῦ ήχητικοῦ σωλήνος σχηματίζονται, ὁμοίως, στάσιμα κύματα, τὰ ὁποῖα παρουσιάζουν εἰς τὰ δύο ἀνοικτὰ ἄκρα κοιλίας τῆς κινήσεως (σχ. 338, I), διότι τὰ μόρια τοῦ ἀέρος δύνανται νὰ πάλ-

λωνται ἐλευθέρως καὶ εἰς τὰ δύο ἄκρα. Δεσμός τῆς κινήσεως δημιουργεῖται εἰς τὸ μέσον τοῦ σωλήνος.

Ἐκτὸς τῆς περιπτώσεως ταύτης, εἶναι δυνατόν νὰ δημιουργηθοῦν καὶ στάσιμα κύματα, τὰ ὁποῖα ν' ἀντιστοιχοῦν εἰς ταλαντώσεις μεγαλυτέρας συχνότητος, δηλ., μικροτέρου μήκους κύματος (II, III).

Ἐὰν καλέσωμεν L τὸ μήκος τοῦ σωλήνος καὶ συγκρίνωμεν τοῦτο πρὸς τὸ ἐκάστοτε μήκος κύματος λ , θὰ εὕρωμεν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν I ἰσχύει ἡ σχέση $L = \lambda/2$, ἐπομένως τὸ παραγόμενον μήκος κύματος εἶναι ἴσον πρὸς $\lambda = 2L$. Εἰς τὴν περίπτωσιν II ἔχομεν $L = 2 \cdot \frac{\lambda}{2}$ καὶ συνεπῶς, $\lambda = 2L \cdot \frac{1}{2}$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν III ἔχομεν $\lambda = 2L \cdot \frac{1}{3}$ καὶ, γενικῶς,

$$\lambda = 2L \cdot \frac{1}{n}$$

ἐνθα $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ Ἀντικαθιστώντες τὸ λ εἰς τὴν γνωστὴν σχέσηιν $v = v/\lambda$, λαμβάνομεν διὰ τὴν συχνότητα ν τὴν ἐξίσωσιν

$$\nu = n \cdot \frac{v}{2L} \quad (4)$$

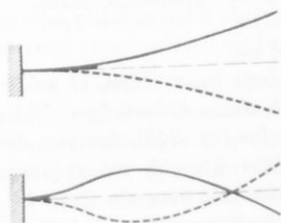
($n = 1, 2, 3, 4, \dots$).

Θέτοντες $n = 1$ εἰς τὸν τύπον (4), λαμβάνομεν τὴν **θεμελιώδη συχνότητα** τοῦ ἤχου, τὸν ὅποιον δύναται νὰ δώσῃ ὁ ἀνοικτὸς ἤχητικός σωλήν. Διὰ $n = 2, 3, 4, \dots$, προκύπτουν ὁ **δευτέρος ἁρμονικός**, ὁ **τρίτος ἁρμονικός**, ὁ **τέταρτος ἁρμονικός** κ.λ.

Ἦτοι: *Οἱ ἀνοικτοὶ ἤχητικοὶ σωλήνες δύνανται νὰ δώσουν ὁλὸκληρον τὴν σειρὰν $\nu, 2\nu, 3\nu, 4\nu, \dots$ τῶν ἁρμονικῶν.*

Ἐὰν συγκρίνωμεν τοὺς τύπους (4) καὶ (3), θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ θεμελιώδης συχνότης ($n = 1$) τοῦ ἤχου, τὸν ὅποιον δίδει ἀνοικτὸς ἤχητικός σωλήν, εἶναι διπλασία τῆς θεμελιώδους συχνότητος τοῦ ἤχου, τὸν ὅποιον παράγει κλειστὸς ἤχητικός σωλήν τοῦ αὐτοῦ μήκους.

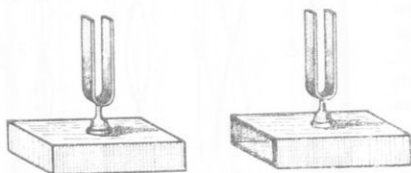
★ § 204. Ράβδοι. Ὅπως αἱ χορδαί, οὕτω καὶ αἱ **ράβδοι**, καταλλήλως διεγερόμεναι, πάλλονται καὶ σχηματίζουν στάσιμα κύματα. Τὸ σχῆμα 339 παριστᾷ στάσιμα κύματα ράβδου, παλλομένης μετ' διαφορῶν συχνότητος. Εἰς τὸ στερεωμένον ἄκρον σχηματίζεται πάντοτε δεσμός, ἐνῶ εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον κοιλία. Αἱ ράβδοι, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰς χορδὰς, πάλλονται μετ' συχνότητος, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι ἀκέραια πολλαπλάσια τῆς θεμελιώδους. Ἡ θεμελιώδης συχνότης μιᾶς ράβδου εἶναι τόσον μεγαλυτέρα, ὅσον μικρότερον εἶναι τὸ μήκος αὐτῆς.



Σχ. 339.

Εἰς τὰς ράβδους δυνάμεθα νὰ κατατάξωμεν καὶ τὸ διαπασῶν, τὸ ὁποῖον περιεγράψαμεν, ἤδη, εἰς τὴν § 193.

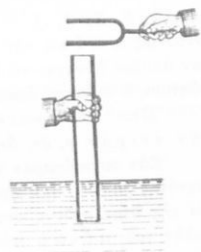
§ 205. Συντονισμός. Εἰς τὴν § 106 εἶδομεν ὅτι, ὅταν ἓν σύστημα ἐκτελῇ ἑξηναγκασμένην ταλάντωσιν, ἡ συχνότης δὲ τῆς ἑξωτερικῆς αἰτίας γίνῃ ἴση πρὸς τὴν ἰδιοσυχνότητα τοῦ συστήματος (**συντονισμός**), τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως γίνεται μέγιστον. Τὸ φαινόμενον τοῦτο παρατηρεῖται



Σχ. 340. Πείραμα διὰ τὴν ἐπίδειξιν τοῦ συντονισμοῦ.

Τὸ δεύτερον διαπασῶν, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ἤχου, τοῦ προσερχομένου ἐκ τοῦ πρώτου, τίθεται εἰς ἑξηναγκασμένην ταλάντωσιν μεγάλου πλάτους, ἀφοῦ τὰ δύο πάλλονται ἐν συντονισμῷ. Τοῦτο ἀντιλαμβάνομεθα, ἐὰν πλησιάσωμεν εἰς τὸ οὗς τὸ δεύτερον διαπασῶν, ἀφοῦ, προηγουμένως, διὰ τοῦ δακτύλου μας, σταματήσωμεν τὸ πρῶτον.

Διὰ νὰ δεῖξωμεν ὅτι κατὰ τὸν συντονισμὸν τὸ πλάτος τῆς ἑξηναγκασμένης ταλαντώσεως γίνεται μέγιστον, ἐκτελοῦμεν τὸ ἑξῆς πείραμα: Κρατοῦντες διὰ τῆς μῖα χειρὸς μας σωλῆνα, ἀνοικτὸν καὶ εἰς τὰ δύο ἄκρα, βυθίζομεν αὐτὸν ἐντὸς δοχείου (σχ. 341), περιέχοντος ἀρκετὸν ὕδωρ (π.χ., ἐντὸς δοχείου πετρελαίου, πλήρους ὕδατος). Ἀκολουθῶς, εἰς τὸ ἄνω ἄκρον πλησιάζομεν παλλόμενον διαπασῶν καί, ἀναβιβάζοντες ἢ καταβιβάζοντες τὸν σωλῆνα ἐντὸς τοῦ ὕδατος, θὰ εὕρωμεν μίαν θέσιν, εἰς τὴν ὁποῖαν ὁ ἤχος ἀκούεται ἐντονώτατος. Εἰς τὴν θέσιν ταύτην τὸ ὕψος τῆς στήλης τοῦ ἀέρος, τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν σωλῆνα, εἶναι τοιοῦτο, ὥστε ἡ στήλη αὕτη νὰ πάλῃται ἐν συντονισμῷ μὲ τὸ διαπασῶν.

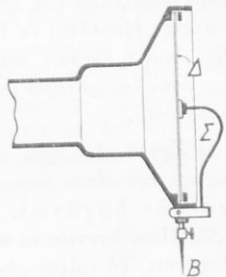


Σχ. 341. Κατὰ τὸν συντονισμὸν, ἀκούομεν ἐντονὸν ἤχον.

Εἰς τὸ φαινόμενον τοῦτο ἀκριβῶς στηρίζεται καὶ ἡ λειτουργία τῶν **ἀντηχείων**, τὰ ὁποῖα εἶναι δοχεῖα καταλλήλων διαστάσεων καὶ πλήρη ἀέρος καὶ τὰ ὁποῖα χρησιμεύουν εἰς τὴν καλὴν ἐκπομπὴν τῶν ἤχων. Οὕτω, ἐν παλλόμενον διαπασῶν, κρατούμενον διὰ τῆς χειρὸς, ἐκπέμπει ἀσθενῆ ἤχον. Ἐάν, ὅμως, στερεώσωμεν αὐτὸ ἐπὶ καταλλήλου ἀντηχείου (σχ. 340), ἀκούεται ἐντονὸς ἤχος. Ὁμοίως, διὰ νὰ ἐκπέμπῃ ἐντονὸν ἤχον ἡ χορδὴ τοῦ σχήματος 334 στηρίζεται ἐπὶ καταλλήλου ξυλίνου κιβωτίου. Μὲ ἀντηχεῖα εἶναι, ἐπίσης, ἐφωδιασμένα τὰ ἑγχορδα μουσικὰ ὄργανα (βιολίον, κιθάρα κ.λ.) Εἰς τὰ ἀντηχεῖα ταῦτα δίδεται τοιοῦτο σχῆμα, ὥστε νὰ λειτουργοῦν μὲ ὅλας τὰς συχνότητας, δεδομένου ὅτι πρέπει νὰ ἀκούωνται καλῶς ὅλαι αἱ συχνότητες, τὰς ὁποίας παράγουν αἱ χορδαί.

Ἀντηχεῖται εἶναι καὶ οἱ ἡχητικοὶ σωλήνες, οἱ ὅποιοι, ἐκ τοῦ συνόλου τῶν συχνοτήτων, τῶν παραγομένων εἰς τὸ χεῖλος ὑπὸ τοῦ ρεύματος τοῦ ἀέρος, ἐνισχύουν ἤχον μιᾶς μόνον συχνότητος - ἐκείνου, ἀκριβῶς, τοῦ ὁποίου ἡ συχνότης συμπίπτει μὲ τὴν ἰδιοσυχνότητα τῆς στήλης τοῦ ἀέρος, τοῦ περιεχομένου ἐντὸς τοῦ σωλήνος.

§ 206. **Γραμμοφώνον.** Τὸ *γραμμοφώνον* εἶναι ὄργανον, τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὁποίου ἐπιτυγχάνομεν τὴν ἀναπαραγωγὴν ἤχων, ἐγγραφέντων ἐπὶ εἰδικῶν δίσκων ἐκ πλαστικοῦ ὕλικου, ὑπὸ μορφὴν ἐλικοειδοῦς γραμμῆς, τῆς ὁποίας αἱ ἀνωμαλῖαι ἀντιστοιχοῦν, ἀκριβῶς, εἰς τοὺς ἐγγραφέντας ἤχους. Κύριον μέρος τοῦ γραμμοφώνου εἶναι τὸ *διάφραγμα* Δ (σχ. 342), τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐκ λεπτοῦ φύλλου μαρμαρυγίου (κ. μίκα) καὶ συγκρατεῖται μεταξὺ τεμαχίων ἐξ ἐλαστικοῦ κόμμεος (κ. καουτσούκ). Εἰς τὸ κέντρον τοῦ διαφράγματος στερεοῦται τὸ ἐν ἄκρον τοῦ στελέχους Σ, τὸ ὁποῖον εἶναι στρεπτόν περὶ ἄξονα καὶ φέρει εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον του τὴν βελόνην Β. Ὅταν ἡ βελόνη ἔλθῃ εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν περιστρεφόμενον δίσκον τοῦ γραμμοφώνου, ἀρχίζει νὰ ταλαντοῦται, λόγῳ τῶν ἀνωμαλιῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν χαραχθῇ ἐπ' αὐτοῦ. Αἱ ταλαντώσεις αὗται τῆς βελόνης μεταδίδονται διὰ τοῦ στελέχους εἰς τὸ διάφραγμα, τὸ ὁποῖον τίθεται εἰς ταλάντωσιν καὶ δημιουργεῖ περιοδικὰ μεταβολὰς τῆς πίεσεως τοῦ ἀέρος, ἀναπαραγομένων, οὕτω, τῶν ἤχων, οἱ ὅποιοι ἔχουν ἐγγραφῇ ἐπὶ τοῦ δίσκου.



Σχ. 342. Κεφαλὴ γραμμοφώνου.

Νεώτερον ὄργανον ἀναπαραγωγῆς τῶν ἤχων εἶναι τὸ *μαγνητόφωνον*. Εἰς τοῦτο ἡ ἐγγραφή δὲν γίνεται διὰ χαράξεως ἐπὶ δίσκου, ἀλλὰ μαγνητικῶς ἐπὶ χαλυβδίνου σύρματος ἢ καταλλήλου ταινίας. Τὸ μαγνητόφωνον καὶ ἡ λειτουργία του περιγράφονται εἰς τὸν β' τόμον τοῦ ἀνὰ χεῖρας βιβλίου.

ΦΥΣΙΟΛΟΓΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΗΧΩΝ

§ 207. Ὑποκειμενικά καὶ ἀντικειμενικά γνωρίσματα τῶν ἤχων. Ὅπως εἶδομεν, πᾶς ἀπλοῦς ἤχος χαρακτηρίζεται ἐκ δύο ἀντικειμενικῶν γνωρισμάτων - τῆς συχνότητος καὶ τῆς ἐντάσεως - ἐνῶ πᾶς σύνθετος ἤχος ἔχει καὶ τρίτον γνώρισμα - τὴν ἑντασιν ἐνὸς ἐκάστου τῶν ἀνωτέρων ἀρμονικῶν.

Ἐνταῦθα θ' ἀσχοληθῶμεν μὲ τὰ αἰσθητά, τὰ ὁποῖα προκαλοῦνται ὑπὸ τῶν ἤχων. Τὰ αἰσθητά ταῦτα χαρακτηρίζονται ἐκ τριῶν ὑποκειμενικῶν γνωρισμάτων, τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ ὕψος, ἡ ἀκουσιότης καὶ ἡ χροιά.

α) Ὑψος. Ὅταν ἀκούσωμεν, διαδοχικῶς, δύο ἤχους, διαφόρων συχνοτήτων, λέγομεν ὅτι οἱ ἤχοι οὗτοι ἔχουν διάφορον ὕψος. Ἄρα, ὕψος θὰ καλέσωμεν τὸ γνώρισμα ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον μᾶς ἐπιτρέπει νὰ κρίνωμεν, ἐὰν εἰς ἤχος εἶναι ὀξὺς ἢ βαρὺς.

Ἡ ἑννοία τοῦ ὕψους εἶναι ἐμπειρική, μὴ δυναμένη νὰ ὁρισθῇ δι' ἄλλων ἑννοιῶν. Ἐν τούτοις, πᾶς ἄνθρωπος ἔχει τὸ αἰσθημα τοῦ ὕψους, δυνάμενος νὰ κρίνῃ μεταξὺ δύο ἤχων ποῖος εἶναι ὁ ὀξύτερος. Ὅπως εὐρίσκεται, τὸ

Ύψος ἐνὸς ἤχου ἐξαεῖται ἐκ τῆς συχνότητος τοῦ ἤχου καί, μάλιστα, ὅσον ἡ συχνότης εἶναι μεγαλυτέρα, τόσον ὁ ἤχος εἶναι δεύτερος. Οὕτω, ὅσον ταχύτερον περιστρέφομεν τὴν σειρήνα τοῦ σχήματος 325, τόσον μεγαλυτέρα γίνεται ἡ συχνότης τοῦ παραγομένου ἤχου καὶ τόσον δεύτερος ἀκούεται ὁ ἤχος.

β) **Ἀκουστότης.** Ἐὰν ἀκούσωμεν διαδοχικῶς δύο ἤχους τῆς αὐτῆς συχνότητος, ἀλλὰ διαφόρου ἐντάσεως, σχηματίζομεν τὴν ἐντύπωσιν δύο ἤχων, τοῦ αὐτοῦ ὕψους, ἀλλὰ διαφόρου ἀκουστότητος. Ἄρα, **ἀκουστότης** εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὑποκειμενικὸν γνῶρισμα, τὸ ὁποῖον μᾶς ἐπιτρέπει νὰ χαρακτηρίζωμεν ἕνα ἤχον ὡς ἀσθενῆ ἢ ἰσχυρόν. Ὅπως εὐρίσκεται, ἡ ἀκουστότης ἐξαεῖται ἐκ τῆς ἐντάσεως τοῦ ἤχου καί, μάλιστα, ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἐνταση τοῦ ἤχου, τόσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἀκουστότης. Οὕτω, ὅσον ἰσχυρότερον κτυπῶμεν ἐν διαπασῶν, τόσον μεγαλυτέρα θὰ εἶναι ἡ ἀκουστότης.

γ) **Χροιά.** Δύο ἤχοι, οἱ ὁποῖοι διεγείρουν εἰς ἡμᾶς τὸ αὐτὸ αἰσθημα ὕψους καὶ τὴν αὐτὴν ἀκουστότητα, ἀλλὰ προέρχονται ἐκ δύο διαφορετικῶν μουσικῶν ὀργάνων, προκαλοῦν διάφορα αἰσθήματα, ἐκ τῶν ὁποίων ἀκριβῶς εἶναι δυνατὸν νὰ κρίνωμεν περὶ τῶν ὀργάνων, ἐκ τῶν ὁποίων οὗτοι προέρχονται. Τὸ τρίτον αὐτὸ ὑποκειμενικὸν γνῶρισμα, τὸ ὁποῖον παρουσιάζεται εἰς τοὺς συνθέτους, μόνον, ἤχους, καλεῖται **χροιά**.

Ὅπως εὐρέθη, ἡ **χροιά** ἐνὸς συνθέτου ἤχου ἐξαεῖται ἐκ τῶν συμπαγομένων μετὰ τοῦ θεμελιώδους ἀνωτέρων ἁρμονικῶν.

Οὕτω, ἐὰν ἐξετάσωμεν δύο ἤχους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν αὐτὴν θεμελιώδη συχνότητα, ἀλλὰ παράγονται ἐκ δύο διαφορετικῶν μουσικῶν ὀργάνων, θὰ εὐρωμεν ὅτι οὗτοι διαφέρουν ὡς πρὸς τοὺς ἁρμονικούς των ἐνῶ, π.χ., ὁ εἰς ἔχει πολλοὺς καὶ ἰσχυροὺς ἀνωτέρους ἁρμονικούς, ὁ ἄλλος ἔχει ὀλίγους καὶ ἀσθενεῖς.

ΠΙΝΑΞ

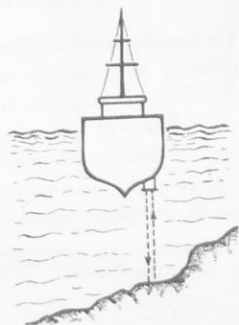
Ἀντικειμενικὰ γνώρισμα	Ὑποκειμενικὰ γνώρισμα
Συχνότης	Ύψος
Ἔνταση	Ἀκουστότης
Ἔνταση ἁρμονικῶν	Χροιά

§ 208. **Ὅρια τῶν ἀκουστῶν ἤχων.** Διὰ νὰ εἶναι ἀκουστὸς εἰς ἤχος, πρέπει ἡ συχνότης του νὰ μὴ εἶναι μικροτέρα τῶν 16 c/sec, οὔτε μεγαλυτέρα τῶν 20 000 c/sec. Ἀκουστοί, λοιπόν, εἶναι οἱ ἤχοι, τῶν ὁποίων ἡ συχνότης εὐρίσκεται μετὰ 16 c/sec καὶ 20 000 c/sec.

Τὰ ὅρια ταῦτα ἰσχύουν διὰ τὸν ἄνθρωπον. Ὑπάρχουν, ὅμως, ζῶα, διὰ τὰ ὁποῖα τὸ ἄνω ὄριον εἶναι σημαντικῶς ἀνώτερον τῶν 20 000 c/sec.

Οὕτω, αἱ νυκτερίδες παράγουν καὶ ἀκούουν ἤχους πολὺ μεγαλυτέρας συχνότητος, οἱ ὅποιοι, βεβαίως, δὲν γίνονται ἀκουστοὶ ὑπὸ τοῦ ἀνθρώπου. Αἱ νυκτερίδες χρησιμοποιοῦν τοὺς ἤχους τούτους διὰ νὰ ἐντοπίζουν διάφορα ἐμπόδια κατὰ τὴν πτήσιν των εἰς τὸ σκότος. Ἡ ἐντόπισις αὕτη βασίζεται ἐπὶ τῆς ἡχοῦς, ἡ ὁποία προκύλλεται ἐξ ἀνσκόλασεως ἐπὶ τῶν διαφόρων ἐμποδίων.

★ § 209. Ὑπέρηχοι. Καλοῦμεν *ὑπερήχους* τοὺς ἤχους ἐκείνους, τῶν ὁποίων ἡ συχνότης εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 20 000 c/sec καί, οἱ ὅποιοι, ὥς ἐκ τούτου, δὲν γίνονται ἀντιληπτοὶ διὰ τοῦ ὠτός τοῦ ἀνθρώπου. Οἱ ὑπέρηχοι παράγονται βάσει ἡλεκτρικῶν μεθόδων ὑψηλῆς συχνότητος (βλ. τόμος β', *πιεζοηλεκτρικὸν φαινόμενον*), χρησιμοποιοῦνται δὲ εἰς πολλὰς περιπτώσεις. Οὕτω, διὰ τῶν ὑπερήχων ἐπιτυγχάνεται καλὴ ἀνάμειξις ὑγρῶν, δυσκόλως μίγνυμένων. Ἐπίσης, οἱ ὑπέρηχοι χρησιμοποιοῦνται διὰ *βυθομετρήσεων*. Πρὸς τοῦτο, διὰ καταλλήλων συσκευῶν — καλουμένων *ἡχοβολιστικῶν μηχανημάτων* (ἢ *βυθομέτρων*) καὶ εὐρισκομένων εἰς τὰ ὕφαλα τῶν πλοίων (σχ. 343) — ἐκπέμπεται κατακορύφως ἐντὸς τῆς θαλάσσης ὑπέρηχος βραχείας διαρκείας, ὁ ὁποῖος, ἀνακλῶμενος ἐπὶ τοῦ πυθμένος, ἐπιστρέφει εἰς τὸ πλοῖον. Ἐὰν μετρήσωμεν τὸν χρόνον μεταβάσεως καὶ ἐπιστροφῆς τοῦ ἡχητικοῦ σήματος καὶ γνωρίζωμεν τὴν ταχύτητα διαδόσεως τοῦ ἤχου ἐντὸς τοῦ ὕδατος, προσδιορίζομεν τὸ βάθος τῆς θαλάσσης, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου ἐντὸς τοῦ ὕδατος ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ μετρηθέντος χρόνου· δεδομένου ὅτι ἡ μέτρησις δίδει τὸν χρόνον μεταβάσεως καὶ ἐπιστροφῆς τοῦ σήματος. Οἱ ὑπέρηχοι δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν, ἐπίσης, διὰ τὸν ἐντοπισμὸν διαφόρων ἀντικειμένων· π.χ., σμήνους ἰχθύων, ὑφάλων, παγοβούνων, ὑποβρυχίων κ.λ.

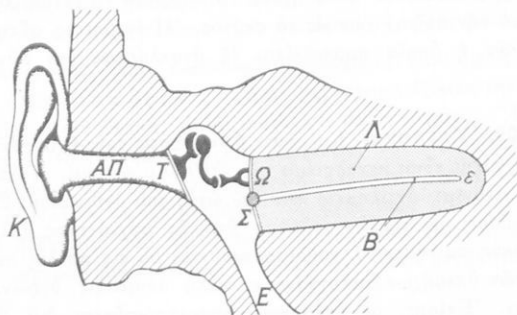


Σχ. 343.

§ 210. Τὸ οὖς. Τὸ ὄργανον τοῦτο μετατρέπει τοὺς ἤχους εἰς τὸ ἀντίστοιχον αἶσθημα. Εἰς τὰ κατωτέρω θὰ περιορισθῶμεν εἰς τὴν περιγραφὴν καὶ λειτουργίαν τοῦ ὠτός ἀπὸ τῆς ἀπόψεως, κυρίως, τῶν μηχανικῶν φαινομένων.

Τὸ οὖς ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία μέρη: τὸ ἔξω οὖς, τὸ μέσον οὖς καὶ τὸ ἔσω οὖς. Τὸ *ἔξω οὖς* ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν *κόγχην* *K* (σχ. 344) καὶ τὸν *ἀκουστικὸν πόρον* *ΑΠ*, ὁ ὁποῖος φράσσεται διὰ τοῦ *τυμπάνου* *T*. Τὸ *μέσον οὖς* εἶναι κοιλότης πλήρης ἀέρος, χωριζομένη ἀπὸ μὲν τοῦ ἔξω ὠτός διὰ τοῦ τυμπάνου, ἀπὸ δὲ τοῦ ἔσω ὠτός διὰ μεμβρανῶν, αἱ ὁποῖαι κλείουν δύο θυρίδας, τὴν *στρογγύλην θυρίδα* *Σ* καὶ τὴν *ὠοειδῆ θυρίδα* *Ω*. Ἐντὸς τῆς

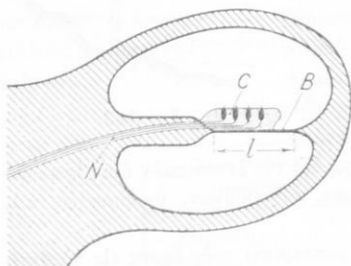
κοιλότητα ταύτης υπάρχουν τὰ τρία ἀκουστικά ὀστέρια — σφύρα, ἄκμων, ἀναβολὲνς—τὰ ὅποια ἀποτελοῦν σύστημα μοχλῶν καὶ συνδέουν τὸ τύμπανον



Σχ. 344. Σχηματική παράστασις τοῦ ὠτός. Ὁ κοχλίας Λ καὶ ὁ βασικός ὑμὴν B ἔχουν σχεδιασθῇ ἐν ἀναπτύξει.

μέ τὴν ὠοειδῇ θυρίδα. Τέλος, διὰ τῆς εὐσταχιανῆς σάλπιγγος E συγκοινωνεῖ ἡ κοιλότης αὐτῇ μετὰ τὴν κοιλότητα τοῦ στόματος καί, ὥς ἐκ τούτου, ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος ἐκατέρωθεν τοῦ τυμπάνου εἶναι ἡ αὐτὴ—δηλ., ἡ ἀτμοσφαιρική.

Τὸ ἔσω οὖς ἔχει πολυπλοκωτέραν μορφήν καὶ εἶναι πλήρες ὑγροῦ. Τὸ μέρος, τὸ ὁποῖον ἐνδιαφέρει ἡμᾶς ἐν προκειμένῳ, εἶναι ὁ κοχλίας Λ , ὁ ὁποῖος εἶναι καὶ τὸ σπουδαιότερον τμήμα τοῦ ὀργάνου τῆς ἀκοῆς. Ἀποτελεῖται ἐκ σωλήνος, περιελιγμένου εἰς σχῆμα κοχλίου, ὁ ὁποῖος εἶναι πλήρης ὑγροῦ καὶ χωρίζεται κατὰ μήκος εἰς δύο μέρη διὰ τοῦ βασικοῦ ὑμένους B σχεδὸν μέχρι τοῦ πέρας τοῦ κοχλίου. Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ὑπάρχει ἄνοιγμα ϵ , διὰ τοῦ ὁποῖου ἐξισοῦται ἡ πίεσις εἰς τὰ δύο ἡμίση τοῦ σωλήνος. Ὁ βασικός ὑμὴν B (σχ. 345) ἔχει σχῆμα τραπεζοειδές, ἔχει, δηλ., μικρὸν πλάτος l εἰς τὸ ἄκρον αὐτοῦ, τὸ εὐρισκόμενον πλησίον τῶν θυρίδων, εὐρύνεται δὲ εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον. Ἐπὶ τοῦ ὑμένους



Σχ. 345. Ἐγκαρσία τομὴ τοῦ κοχλίου. (Σχηματικὴ παράστασις).

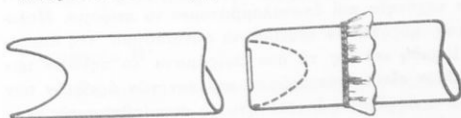
τούτου εὐρίσκεται τὸ ἐκ μαλακῶν ἰστῶν ἀποτελούμενον ὄργανον τοῦ Corti C , εἰς τὸ ὁποῖον καταλήγουν αἱ ἴνες τῶν ἀκουστικῶν νευρῶν N .

Λειτουργία τοῦ ὠτός. Ὁ ἦχος διαδίδεται εἰς τὸ ἔσω οὖς διὰ τοῦ ἀέρος, εἰς τὸ μέσον οὖς διὰ τῶν ὀσταρίων καὶ εἰς τὸ ἔσω οὖς διὰ τοῦ πληροῦντος αὐτὸ ὑγροῦ (*).

(*) Κατὰ μικρὸν ποσοστὸν ὁ ἦχος διαδίδεται εἰς τὸ ἔσω οὖς καί, ἀπ' εὐθείας, διὰ τῶν ὀστῶν τῆς κεφαλῆς.

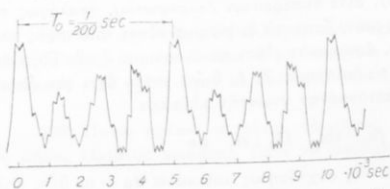
Αἱ μεταβολαὶ τῆς πίεσεως τοῦ ἀέρος θέτουν τὸ τύμπανον εἰς ταλαντώσεις, αἱ ὁποῖαι μεταδίδονται διὰ τῶν ὀσταρίων καὶ τῆς ὠοειδοῦς θυρίδος εἰς τὸ ὕγρον τοῦ ὄσω ὠτός. Αἱ ταλαντώσεις αὗται θέτουν εἰς ἐξηναγκασμένην ταλάντωσιν τὸν βασικὸν ὠτός, ὁ ὁποῖος πάλλεται κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε, εἰς ἐκάστην συχρότητα, ν' ἀντιστοιχῇ ἄλλη περιοχὴ ἐντόνου ταλαντώσεως αὐτοῦ. Ἡ περιοχὴ ἐκείνη τοῦ ὠτός, ἡ ὁποία πάλλεται μὲ μέγα πλάτος, λοιπόν, τῶν νευρικῶν ἰνῶν, μόνον ἐκείναι, τοῦ ὀργάνου τοῦ Corti. Ἐκ τοῦ συνόλου, λοιπόν, τῶν νευρικῶν ἰνῶν, μόνον ἐκείναι, αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς τὰ κύτταρα τῆς διεγερτομένης περιοχῆς, διαβιβάζουν τ' ἀντίστοιχα ἐρεθίσματα εἰς τὸν ἐγκέφαλον, προκαλουμένου, οὕτω, τοῦ αἰσθήματος τοῦ ὅψους τοῦ ἤχου.

§ 211. Ἀνθρωπίνη φωνή. Ἐὰν κόψωμεν τὸ ἄκρον ἑνὸς μεταλλίνου σωλῆνος, ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα 346, ἀριστερά, καί, ἀφ' οὗ τοῦ καλύψωμεν δι' ἐλαστικῆς με-



Σχ. 346. Ἀρχὴ τῆς λειτουργίας τοῦ λάρυγγος.

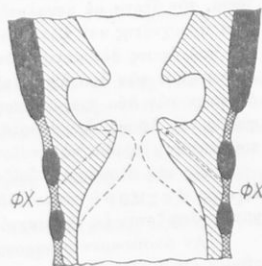
βράνης, ἡ ὁποία φέρει σχισμὴν, φυσηθῶμεν ἀέρα, τὰ χεῖλη τῆς σχισμῆς ἀρχίζουν νὰ πάλλονται, ἐνῶ, ταυτοχρόνως, παράγεται ἡχος. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς, ἰακριβῶς, ἀρχῆς στηρίζεται καὶ ἡ πα-



Σχ. 348. Τὸ φωνήεν α, ἐκφραζόμενον μὲ θεμελιώδη συχρότητα 200 c/sec.

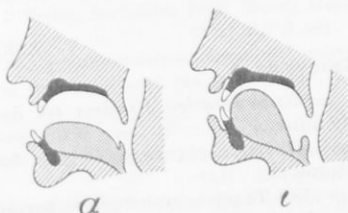
Ὁ [ἐκ τῶν πνευμόνων προερχόμενος ἀήρ] θέτει τὰς φωνητικὰς χορδὰς εἰς ταλάντωσιν καὶ παραγεῖ, οὕτω, τὴν φωνήν, ἡ ὁποία εἶναι εἰς σύνθετος ἡχος (σχ. 348) μὲ μεγάλον ἀριθμὸν ἀρμονικῶν. Ἡ θεμελιώδης συχρότης ἐξαρτᾶται, κυρίως, ἐκ τῶν διαστάσεων τῶν φωνητικῶν χορδῶν καί, ἐν μέρει, ἐκ τῆς τάσεως αὐτῶν. Ἀφ' ἑτέρου, ἡ χοιρὰ ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν διαστάσεων τοῦ φάρυγγος καὶ τῆς στοματικῆς καὶ ρινικῆς κοιλότητος, αἱ ὁποῖαι δρῶν ὡς ἀντηχείον, ἐνισχύουσιν ὠρισμένους ἀρμονικοὺς περισσότερον τῶν ἄλλων.

Ἡ παιδικὴ καὶ ἡ γυναικεῖα φωνὴ ἀποτελεῖται ἐξ ἤχων μὲ ὑψηλὰς, σχετικῶς, θεμελιώδεις συχρότητας, καθόσον αἱ διαστάσεις τῶν χορδῶν εἶναι τοιαῦται,



Σχ. 347. Σχηματικὴ παράστασις τοῦ λάρυγγος κατὰ τὴν ἀναπνοήν. Ἑστειγμένη γραμμή: θέσις τῶν φωνητικῶν χορδῶν κατὰ τὴν ὁμιλίαν.

ραγωγῆς τῆς ἀνθρωπίνης φωνῆς: Ὁ λάρυγξ φέρει πτυχὰς — τὰς καλουμένας φωνητικὰς χορδὰς ΦΧ (σχ. 347) — αἱ ὁποῖαι, τεινόμεναι κατὰ τὴν ὁμιλίαν δι' εἰδικῶν μυῶν, ἀφῆλουν μεταξύ των λεπτὴν σχισμὴν.



Σχ. 349. Διαμόρφωσις τῆς στοματικῆς κοιλότητος ἀνθρώπου, ἀδοντος τὰ φωνήεντα α καὶ ε μὲ τὴν αὐτὴν θεμελιώδη συχρότητα.

ώστε νά σχηματίζεται σχισμή μικροῦ μήκους, ἐνῶ, τουναντίον, εἰς τὴν ἀνδρικὴν φωνὴν ὁ θεμελιώδης ἔχει μικράν, σχετικῶς, συχνότητα. Διὰ μεταβολῆς τῆς τάσεως τῶν φωνητικῶν χορδῶν μεταβάλλεται, ὡς ἐλέχθη, ἡ συχνότης τοῦ θεμελιώδους, ἐνῶ διὰ μεταβολῆς τῶν διαστάσεων τῆς στοματικῆς κοιλότητος (διὰ καταλλήλου θέσεως τῆς γλώσσης καὶ τῆς κάτω σιαγόνης - σ. 349) μεταβάλλεται ἡ χροιά.

§ 212. Φυσικὴ θεωρία τῆς Μουσικῆς - Μουσικὰ διαστήματα. Ἐάν περι-στρέφωμεν ὁμαλῶς ἓνα ὀδοντωτὸν τροχὸν καὶ ἐγγίσωμεν εἰς αὐτὸν φύλλον σκληροῦ χάρτου (π.χ., ἐπισκεπτήριον), θὰ ἀκούσωμεν ἓνα ἦχον. Ἡ συχνότης τοῦ ἤχου τούτου εὐρίσκεται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὀδόντων καὶ ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στροφῶν τοῦ τρο-χοῦ ἀνά δευτερόλεπτον. Ἐάν, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος, προσαρμόσωμεν καὶ δεύτερον ὀδοντωτὸν τροχόν, ὁ ὁποῖος φέρει μεγαλύτερον ἀριθμὸν ὀδόντων καὶ ἐγγίσωμεν εἰς αὐτὸν τὸ φύλλον τοῦ χάρτου, θ' ἀκούσωμεν ἦχον μεγαλυτέρου ὤρους. Στρέφωμεν, τώρα, τὸν ἄξονα μὲ μεγαλυτέραν ταχύτητα καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὸ πείραμα. Μολο-νότι ἡ συχνότης καὶ τῶν δύο ἡχων ηὔξηθη, ἐν τούτοις τὸ συναίσθημα τῆς διαφο-ρᾶς τοῦ ὤρους δὲν μετεβλήθη. Ἐπειδὴ καὶ εἰς τὰ δύο πειράματα τὸ πηλίκον τῶν συχνοτήτων τῶν δύο ἡχων (τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πηλίκον τῶν ἀριθμῶν τῶν ὀδόντων τῶν δύο τροχῶν) παρέμεινε σταθερόν, ἔπεται ὅτι τὸ συναίσθημα τῆς δια-φορᾶς τοῦ ὤρους δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν συχνοτήτων, ἀλλὰ ἐκ τοῦ πηλίκου αὐτῶν, τὸ ὁποῖον καλεῖται (μουσικὸν) **διάστημα**.

Εἰς τὴν Μουσικὴν ὀρίζομεν ὡς **φθόγγον** ἓνα σύνθετον ἦχον, ἀποτελούμενον ἐξ ἑνὸς ἴσχυροῦ θεμελιώδους καὶ ἐξ ἀνωτέρων ἀρμονικῶν. Τὸ ὤρος ἑνὸς φθόγ-γου καθορίζεται ἐκ τῆς συχνότητος τοῦ θεμελιώδους.

Ἄν ἀκούσωμεν συγχρόνως ἢ διαδοχικῶς δύο φθόγγους, τὸ παραγόμενον αἰ-σθημα εἶναι εἴτε εὐχάριστον (*ἀρμονία*), εἴτε δυσάρεστον (*παρᾳφωνία*), ἀναλόγως τοῦ διαστήματος. Ὡς εὐρέθη, ἀρμονίαν ἔχον, ὅταν τὸ διάστημα εἶναι ἴσον πρὸς κλά-σμα μικρῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Οὕτω, ἀρμονικὸν εἶναι τὸ διάστημα $3:2$. Τὸ πλέον ἀρμονικὸν διάστημα εἶναι, προφανῶς, τὸ διάστημα $2:1$, διότι τοῦτο ἔχει τὸν ἀπλοῦ-στερον λόγον. Οὕτω, εἰς τὴν χρησιμοποιουμένην γνωστὴν κλίμακα

do, re, mi, fa, sol, la, si, do

ἡ συχνότης τοῦ ἄνω *do* εἶναι διπλασία τῆς συχνότητος τοῦ κάτω *do* — οἱ δύο, δηλ., αὐτοὶ φθόγγοι ἔχουν διάστημα $2:1$ — ἐνῶ οἱ ἐνδιάμεσοι ἔχουν μικρότερα διαστή-ματα ($3:2$ κ.λ.).

Αἱ συχνότητες τῶν φθόγγων τῆς μουσικῆς κλίμακος εἶναι ἐντελῶς καθωρισμέ-ναι, ἐάν ὀρίσωμεν τὴν συχνότητα ἑνὸς οἰουδήποτε φθόγγου. Ὡς τοιοῦτος ἐκλέγεται ὁ φθόγγος *la*, εἰς τὸν ὁποῖον δίδεται ἡ συχνότης 440 c/sec.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κατηγορία Α'.

(Εἰς τὰ κατωτέρω ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς τοῦ ἀέρος θὰ λαμβάνεται ἴση πρὸς 340 m/sec).

187) Ἦχος, συχνότητος 40 c/sec, διαδίδεται ἐντὸς τοῦ ἀέρος. Ποῖον τὸ μήκος (ΑΠ: $8,5$ m) κύματος;

188) Τὸ μήκος κύματος ἤχου, συχνότητος 200 c/sec, διαδιδόμενον ἐντὸς τοῦ ὕδα-τος, εἶναι $7,25$ m. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς τοῦ ὕδατος; (ΑΠ: 1450 m/sec)

189) Λίθος ἀφίηται νά πέσῃ ἐντὸς φρέατος, βάθους 120 m. Μετὰ πόσον χρό-νον θ' ἀκουσθῇ ὁ χότος τῆς κρούσεως αὐτοῦ μετὰ τοῦ πυθμένος; (ΑΠ: $5,3$ sec)

190) Ἦχος, συχνότητος 440 c/sec, ἀνακλᾶται καθέτως ἐπὶ τινος στερεᾶς ἐπιφα-

νείας καί, ἐπιστρέφων, δημιουργεῖ στάσιμα κύματα. Ποία ἡ ἀπόστασις μεταξύ δύο διαδοχικῶν δεσμῶν ; (ΑΠ : 38,6 cm)

191) Ἡ σειρὴν τοῦ σχήματος 325 περιστρέφεται μὲ συχνότητα 1500 στροφῶν ἀνὰ λεπτόν. Ποῖον τὸ μήκος κύματος τοῦ παραγομένου ἤχου ; (ΑΠ : 1,7 m)

192) Διαπασῶν παράγει ἤχον, τοῦ ὁποῖου τὸ μήκος κύματος εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 78,16 cm. Ποία ἡ συχνότης τοῦ διαπασῶν ; (ΑΠ : 435 c/sec)

193) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μήκος κύματος α) τοῦ ἐλαχίστης συχνότητος ἀκουστοῦ ἤχου ($v = 16$ c/sec) καὶ β) τοῦ μεγίστης συχνότητος ἀκουστοῦ ἤχου ($v = 20$ kc/sec) εἰς τὸν ἀτμοσφαιρικὸν ἀέρα. (ΑΠ : α) 21,25 m, β) 0,017 m)

194) Σειρὴν, φέρουσα 50 ὀπές, περιστρέφεται μὲ συχνότητα n στροφῶν ἀνὰ λεπτόν, ὃ δὲ παραγόμενος ἤχος προσπίπτει καθέτως ἐπὶ ἐπιπέδου κοιλύματος καί, ἀνακλόμενος, σχηματίζει στάσιμα κύματα. Ζητεῖται ἡ συχνότης περιστροφῆς τῆς σειρή-
νος, ἐάν ἡ ἀπόστασις ἐνὸς δεσμοῦ καὶ τῆς ἐπομένης κοιλίας εἶναι 8,5 cm.
(ΑΠ : 1200 στροφαι/min)

Κατηγορία Β’.

195) Διὰ τὰ εὐρωμεν τὸ βάθος φρέατος, ἀφήνομεν λίθον νὰ πέσῃ ἐντὸς αὐτοῦ καὶ μετροῦμεν τὸν χρόνον, ὃ ὁποῖος παρέχεται ἀπὸ τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀφήσαμεν τὸν λίθον, μέχρις οὗτοῦ ἀκούσωμεν τὸν κρότον. Ἐστω διὸ ὁ χρόνος οὗτος εἶναι 4 sec. Ποῖον τὸ ζητούμενον βάθος ;

196) Μὲ ποίαν δύναμιν πρέπει νὰ τείνεται χορδὴ, μήκους 50 cm καὶ μάζης 1 gr, ἵνα διδῇ ἤχον, συχνότητος 135 c/sec ; (ΑΠ : 3,7 kgr*)

197) Ποία ἡ θεμελιώδης συχνότης μὲ τὴν ὁποίαν πάλλεται χορδὴ, μήκους 50 cm, ζυγίζουσα 2,31 gr*/m καὶ τεινομένη ὑπὸ δυνάμεως 25 kgr* ; (ΑΠ : 326 sec⁻¹)

198) Νὰ προσδιορισθῇ ὁ λόγος τῶν συχνότητων δύο ἰσομήκων χορδῶν ἐκ τῆς αὐτῆς οὐσίας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία τείνεται διὰ δυνάμεως 6 kgr* καὶ ἡ ἄλλη διὰ δυνάμεως 1,62 kgr*, ὅταν αἱ διατομαὶ τῶν ἔχουν λόγον 3 : 1. (ΑΠ : 10 : 9)

199) Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ μήκος ἀνοικτοῦ ἡχητικοῦ σωλήνος καὶ ποῖον τὸ μήκος κλειστοῦ τοιοῦτου, ὥστε νὰ παρέχουν ἑκαστος ἤχον, συχνότητος 16 c/sec ; (ΑΠ : 106,25 cm, 53,125 cm)

200) Ἡ θεμελιώδης συχνότης ἐνὸς ἀνοικτοῦ ἡχητικοῦ σωλήνος, μήκους 100 cm, εἶναι 170 c/sec. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς τοῦ ἀέρος ; (ΑΠ : 340 m/sec)

201) Νὰ εὐρεθῇ ἡ θεμελιώδης συχνότης καὶ ἡ συχνότης τοῦ τρίτου ἀρμονικοῦ ἐνὸς ἡχητικοῦ σωλήνος, μήκους 120 cm, ἐάν οὗτος εἶναι α) ἀνοικτὸς καὶ β) κλειστός. (ΑΠ : α) 142 c/sec, 426 c/sec, β) 71 c/sec, 213 c/sec)

202) Ὑπερχητικὸν κύμα, συχνότητος 2 Mc/sec, διαδίδεται ἐντὸς ὕδατος. Ποῖον τὸ μήκος κύματος ; ($v_{\text{ὕδωρ}} = 1450$ m/sec). (ΑΠ : 0,072 cm)

203) Κατὰ τὸ πείραμα τοῦ σχήματος 341 χρησιμοποιοῦμεν διαπασῶν, συχνότητος 440 c/sec. Ποῖον τὸ μήκος τῆς στήλης τοῦ ἀέρος κατὰ τὸν συντονισμόν ; (ΑΠ : 19,3 cm)

204) Σειρὴν, ἐκπέμπουσα ἤχον, συχνότητος 200 c/sec, πλησιάζει μὲ ταχύτητα 100 m/sec πρὸς ἀκίνητον παρατηρητὴν. Ποία ἡ συχνότης, τὴν ὁποίαν ἀντιλαμβάνεται ὁ παρατηρητής ; (ΑΠ : 283 c/sec)

205) Μὲ ποίαν ταχύτητα πρέπει νὰ πλησιάζῃ πρὸς ἀκίνητον παρατηρητὴν ἡχητικὴ πηγὴ, ἐκπέμπουσα ἤχον συχνότητος 300 c/sec, ἵνα οὗτος ἀντιλαμβάνεται ἤχον διπλασίας συχνότητος ; (ΑΠ : 170 m/sec)

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΘΕΡΜΟΤΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΣ'

ΘΕΡΜΟΤΗΣ - ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ

• § 213. **Γενικά.** Μέχρι τοῦδε ἔγνωρίσαμεν μερικὰς μορφὰς ἐνεργείας, ὅπως τὴν κινήτικὴν ἐνέργειαν καὶ τὴν δυναμικὴν ἐνέργειαν. Ἐκτὸς αὐτῶν ὑπάρχουν καὶ ἄλλαι, ὅπως ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια, ἡ χημικὴ ἐνέργεια κ.λ. Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον θὰ ἐξετάσωμεν μίαν ἄλλην μορφήν ἐνεργείας, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **θερμότητα**, καθὼς καὶ τὰ φαινόμενα, τὰ σχετιζόμενα μὲ αὐτήν.

Τὰ πλέον γνωστὰ ἐκ τῶν φαινομένων αὐτῶν εἶναι τὰ ἑξῆς: Ἐὰν προσφέρωμεν διαρκῶς θερμότητα εἰς μίαν ποσότητα ὕδατος, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, μετ' ὀλίγον, τὸ ὕδωρ θ' ἀρχίσῃ νὰ βράζῃ. Ἀφ' ἑτέρου, ἐὰν θερμάνωμεν ἓν στερεὸν (π.χ., τεμάχιον μολύβδου), τοῦτο δύναται νὰ τακῇ. Ἀντιθέτως, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν θερμότητα ἀπὸ ἓν ὑγρὸν (π.χ., ὕδωρ), τοῦτο μετατρέπεται εἰς στερεὸν (πάγος).

Κατὰ τὴν λεπτομερεστέραν μελέτην ὅλων τῶν θερμικῶν φαινομένων σπουδαιότατον ρόλον παίζει μία νέα ἔννοια· ἡ ἔννοια τῆς **θερμοκρασίας**. Τὴν ἔννοιαν ταύτην δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν εἴτε ὑποκειμενικῶς, διὰ τῆς αἰσθήσεως τῆς ἀφῆς, εἴτε ἀντικειμενικῶς, δι' εἰδικῶν ὀργάνων - τῶν **θερμομέτρων**. Βυθίζοντες, π.χ., τὴν χεῖρά μας ἐντὸς ὕδατος, δυνάμεθα νὰ διαπιστώσωμεν, ἐὰν τοῦτο εἶναι θερμὸν ἢ ψυχρόν. Τοῦτο ἐκφράζομεν, λέγοντες ὅτι ἡ **θερμοκρασία** τοῦ **θερμοῦ ὕδατος** εἶναι **μεγαλύτερα** τῆς **θερμοκρασίας** τοῦ **ψυχροῦ ὕδατος**.

Ἡ ὑποκειμενικὴ, ὅμως, αὕτη ἐκτίμησις τοῦ ψυχροῦ καὶ τοῦ θερμοῦ δὲν εἶναι πάντοτε ἀσφαλῆς. Τοῦτο πιστοποιοῦμεν διὰ τοῦ ἑξῆς πειράματος: Ἐντὸς ἐνὸς δοχείου θέτομεν θερμὸν ὕδωρ καὶ ἐντὸς ἄλλου ψυχρὸν τοιοῦτο. Εἰς τὸ θερμὸν ὕδωρ βυθίζομεν τὴν δεξιὰν χεῖρα καὶ εἰς τὸ ψυχρὸν τὴν ἀριστεράν. Ἐάν, μετ' ὀλίγον, βυθίσωμεν καὶ τὰς δύο χεῖρας ἐντὸς τριτοῦ δοχείου, περιέχοντος χλιαρὸν ὕδωρ, διὰ μὲν τῆς δεξιᾶς χειρὸς ἔχομεν τὴν ἐντύπωσιν ὅτι τὸ χλιαρὸν ὕδωρ εἶναι ψυχρόν, ἐνὼ διὰ τῆς ἀριστερᾶς ὅτι εἶναι θερμόν. Ἐπίσης, τεμάχιον ξύλου καὶ τεμάχιον μετάλλου, εὐρίσκόμενα εἰς τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν (χαμηλοτέραν τῆς θερμοκρασίας τοῦ σώματος ἡμῶν), μᾶς φαίνονται, διὰ τῆς ἀφῆς, ὅτι ἔχουν διαφόρους θερμοκρασίας -

τὸ μέταλλον μᾶς φαίνεται ψυχρότερον τοῦ ξύλου. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι τὸ αἰσθημα τῆς ἀφῆς μᾶς δίδει ἀπατηλὰς ἐντυπώσεις διὰ τὴν θερμοκρασίαν ἐνὸς σώματος. Διὰ τοῦτο καταφεύγομεν εἰς ἀντικειμενικὴν ἐκτίμησιν τῆς θερμοκρασίας διὰ τῶν κατωτέρω περιγραφομένων θερμομέτρων.

Ἐὰν φέρωμεν εἰς ἐπαφὴν δύο σώματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἐν εἶναι θερμὸν καὶ τὸ ἄλλο ψυχρόν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ θερμὸν ψύχεται καὶ τὸ ψυχρὸν θερμαίνεται, μέχρις ὅτου ἀποκατασταθῇ ἰσορροπία εἰς τὴν θερμικὴν των κατὰστασιν, τὸ ὁποῖον θὰ συμβῇ, ὅταν καὶ τὰ δύο σώματα ἀποκτήσουν τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν.

• § 214. **Θερμόμετρα.** Ὅργανα, διὰ τῶν ὁποίων μετροῦμεν τὴν θερμοκρασίαν, καλοῦνται **θερμόμετρα**. Ἡ κατασκευὴ τῶν θερμομέτρων στηρίζεται ἐπὶ τῆς παρατηρήσεως ὅτι πολλαὶ ιδιότητες τῶν σωμάτων μεταβάλλονται, ὅταν μεταβάλλεται ἡ θερμοκρασία των. Π.χ., παρατηροῦμεν ὅτι, κατὰ κανόνα, τὸ μήκος μιᾶς ράβδου, ὁ ὄγκος ἐνὸς ὕγρου, ἡ πίεσις ἐνὸς αερίου, ἡ ἡλεκτρικὴ ἀντίστασις ἐνὸς ἀγωγοῦ κ.λ. μεταβάλλονται, ὅταν μεταβληθῇ ἡ θερμοκρασία αὐτῶν. Τοῦτο, ἀκριβῶς, ἐκμεταλλεύομεθα πρὸς κατασκευὴν τῶν θερμομέτρων.

Θερμομέτρων ὑπάρχουν διάφοροι τύποι: Τὸ μᾶλλον χρησιμοποιούμενον εἰς τὴν πρᾶξιν εἶναι τὸ **ὕδραργυρικὸν θερμόμετρον**, τοῦ ὁποίου ἡ λειτουργία στηρίζεται εἰς τὴν διαστολὴν, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται δεδομένη ποσότης ὕδραργύρου (*), ὅταν θερμαίνεται. Ἀποτελεῖται ἐκ δοχείου ὑαλίνου, κυλινδρικοῦ ἢ σφαιρικοῦ, τὸ ὁποῖον περιέχει τὸν ὑδράργυρον καὶ τὸ ὁποῖον καταλήγει εἰς τριχοειδῆ σωλῆνα, σταθερᾶς διαμέτρου. Ἡ ἐκάστοτε θέσις τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὕδραργύρου μᾶς παρέχει, ἐπὶ βαθμολογημένης κλίμακος, τὴν μετρούμενην θερμοκρασίαν.

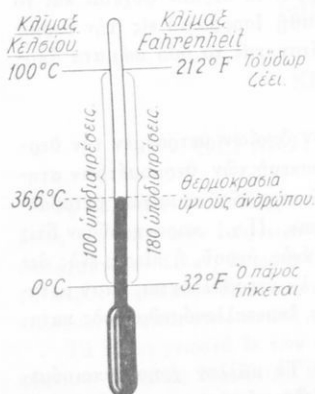
• § 215. **Θερμομετρικαὶ κλίμακες.** Ὅπως εἶδομεν ἄνωτέρω, διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ μέτρησις μιᾶς θερμοκρασίας διὰ θερμομέτρου, πρέπει τοῦτο νὰ φέρῃ βαθμολογημένην κλίμακα, ἐπὶ τῆς ὁποίας νὰ ἀναγινώσκωμεν τὴν ἐκάστοτε μετρούμενην θερμοκρασίαν. Διὰ τὴν βαθμολογίαν ἐκλέγομεν, αὐθαιρέτως, δύο σταθερὰς θερμοκρασίας: α) τὴν θερμοκρασίαν τοῦ τηκομένου πάγου καὶ β) τὴν θερμοκρασίαν ζέσεως τοῦ ἀπεσταγμένου ὕδατος, ἀφ' ὁποῦ ὑπὸ ἀτμοσφαιρικῆς πίεσιν 760 Torr (**). Ἀφοῦ ὀρίσωμεν τὰς σταθερὰς αὐτὰς θερμοκρασίας, διαιροῦμεν τὸ μεταξὺ των διάστημα εἰς ἴσα μέρη.

(*) Ὁ ὑδράργυρος ἐκλέγεται διὰ πολλοὺς λόγους: 1) Ἡ ἐλευθέρη ἐπιφάνεια τοῦ ὕδραργύρου διακρίνεται σαφῶς. 2) Δὲν διαβρέχει τὴν ὑάλον. 3) Ἐχει μέγαν σχετικῶς συντελεστὴν κυβικῆς διαστολῆς. 4) Εἶναι καλὸς ἀγωγὸς τῆς θερμότητος καί, ὥς ἐκ τούτου, λαμβάνει ταχέως τὴν θερμοκρασίαν τοῦ σώματος, μὲ τὸ ὁποῖον τίθεται εἰς ἐπαφὴν.

(**) Τοῦτο εἶναι ἀπαραίτητον, διότι, ὥς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, αἱ θερμοκρασίαι αὗται μεταβάλλονται μετὰ τῆς πίεσεως.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ λάβωμεν διαφόρους *θερμομετρικάς κλίμακας*, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ συνηθέστερον χρησιμοποιοῦνται εἶναι ἡ κλίμαξ Κελσίου (C) καὶ ἡ κλίμαξ Fahrenheit (Φαρενάιτ) (F).

1) **Κλίμαξ Κελσίου** (ἢ **εκατονταβάθμιος κλίμαξ**). Εἰς τὴν κλίμακα ταύτην (σχ. 350) ἡ θερμοκρασία τήξεως τοῦ πάγου καλεῖται **μηδὲν** (0°C)



Σχ. 350

καὶ ἡ θερμοκρασία ζέσεως τοῦ ὕδατος **ἐκατὸν** (100°C). Τὸ μεταξὺ των διάστημα διαιροῦμεν εἰς 100 ἴσα μέρη, τὴν δὲ ἀπόστασιν μεταξὺ δύο τοιούτων διαιρέσεων καλοῦμεν **βαθμὸν Κελσίου** (1°C) (Συμβολισμός: 1 grad). Ἡ διαίρεσις ἐπεκτείνεται καὶ ἄνω τῶν 100° καὶ κάτω τοῦ μηδενός. Οἱ κάτω τοῦ μηδενός βαθμοὶ σημειοῦνται δι' ἀρνητικοῦ σημείου. Οὕτω, π.χ. -5°C σημαίνει θερμοκρασίαν 5 βαθμῶν Κελσίου κάτω τοῦ μηδενός.

2) **Κλίμαξ Fahrenheit**. Εἰς τὴν κλίμακα ταύτην (σχ. 350) ἡ θερμοκρασία τήξεως τοῦ πάγου λαμβάνεται 32° καὶ ἡ θερμοκρασία ζέσεως τοῦ ὕδατος

212° . Τὸ μεταξὺ των διάστημα διαιροῦμεν εἰς 180 ἴσα μέρη, τὴν δὲ ἀπόστασιν μεταξὺ δύο τοιούτων διαιρέσεων καλοῦμεν **βαθμὸν Fahrenheit** (1°F).

Μετατροπὴ θερμοκρασιῶν εἰς τὰς δύο κλίμακας: Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι

εἰς διαφορὰν θερμοκρασίας 100°C ἀντιστοιχεῖ διαφορὰ 180°F
 ἄρα εἰς διαφορὰν θερμοκρασίας 5°C ἀντιστοιχεῖ διαφορὰ 9°F .

Ἐπομένως :

$$1^{\circ} \text{C} \text{ ἀντιστοιχεῖ εἰς } \frac{9}{5}^{\circ} \text{F} \quad \text{καὶ} \quad 1^{\circ} \text{F} \text{ ἀντιστοιχεῖ εἰς } \frac{5}{9}^{\circ} \text{C}.$$

Ἐκ τούτων δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν καὶ τὰς σχέσεις

$$\theta_{\text{C}} = (\theta_{\text{F}} - 32) \cdot \frac{5}{9} \quad \text{καὶ} \quad \theta_{\text{F}} = \left(\theta_{\text{C}} \cdot \frac{9}{5} \right) + 32$$

Διὰ νὰ μετατρέψωμεν, λοιπόν, μίαν θερμοκρασίαν ἀπὸ βαθμοὺς Fahrenheit εἰς βαθμοὺς Κελσίου, πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν 32 ἀπὸ τὸ δοθέν καὶ τὴν διαφορὰν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $5/9$. Ἀντιστρόφως, διὰ νὰ μετατρέψωμεν μίαν θερμοκρασίαν ἀπὸ βαθμοὺς Κελσίου εἰς βαθμοὺς Fahrenheit, πολλαπλασιάσωμεν αὐτὴν ἐπὶ $9/5$ καὶ προσθέτομεν 32 εἰς τὸ ἀποτέλεσμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΩΝ
(εις °C)

Θερμοκρασία ζέσεως του υγροποιημένου ήλιου	-269
Μέση θερμοκρασία ύγιους ανθρώπου	36,6
Θερμοκρασία πυρακτωμένων συρμάτων ηλεκτρικών λαμ- πτήρων	2300
Θερμοκρασία της επιφανείας του Ήλιου	6000
Θερμοκρασία εις τὸ κέντρον ἐκρήξεως ἀτο- μικῆς βόμβας	Μερικὰ ἑκατομύρια βαθμῶν

§ 216. Άλλοι τύποι θερμομέτρων. α) Ίατρικὸν θερμοόμετρον.

Τοῦτο εἶναι ὑδράργυρικὸν θερμοόμετρον, τὸ ὁποῖον φέρει στέ-
νωσιν εἰς τὸ κάτω μέρος τοῦ τριχοειδοῦς σωλήνος (σχ. 351).
"Όταν τὸ θερμοόμετρον θερμαίνεται, ὁ ὑδράργυρος διαστέλλεται,
διέρχεται διὰ τῆς στενώσεως καὶ φθάνει εἰς τινὰ θέσιν, εἰς τὴν
ὁποίαν ἡ ἔλευθέρα ἐπιφάνεια αὐτοῦ δεικνύει τὴν μετρουμένην
θερμοκρασίαν. "Όταν, ἀκολουθῶς, τὸ θερμοόμετρον ἀπομακρυνθῇ
τοῦ σώματος τοῦ ἀσθενοῦς, ἀρχίζει νὰ ψύχεται, ὁπότε ὁ ὑδράρ-
γυρος συστέλλεται καὶ ἡ στήλη διακόπτεται, ἀκριβῶς, εἰς τὴν
στένωσιν. Οὕτω, τὸ θερμοόμετρον παρέχει τὴν μεγίστην με-
τρηθεῖσαν θερμοκρασίαν. Διὰ νὰ χρησιμοποιησώμεν, ἐκ νέου,
τὸ θερμοόμετρον, φέρομεν, διὰ τιναγμῶν, τὸν ὑδράργυρον εἰς τὸ
κατώτατον σημεῖον τῆς κλίμακος.

β) *Θερμοηλεκτρικὸν θερμοόμετρον.* Ἡ λειτουργία τοῦ θερμομέ-
τρου τούτου στηρίζεται ἐπὶ τοῦ *θερμοηλεκτρικοῦ φαινομένου*, περιγρά-
φεται δὲ εἰς τὸ Κεφάλαιον τοῦ Ἠλεκτρισμοῦ (β' τόμος τοῦ ἀνά χεῖρας
βιβλίου). Τὰ θερμοηλεκτρικὰ θερμοόμετρα χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν
μέτρησιν ὑψηλῶν θερμοκρασιῶν (μέχρι 1600° C).

γ) *Θερμοόμετρον δι' οἶνοπνεύματος.* Ἐπειδὴ ὁ ὑδράργυρος πῆγνυ-
ται εἰς θερμοκρασίαν -39° C, τὸ ὑδράργυρικὸν θερμοόμετρον δὲν δύ-
ναι νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ θερμοκρασίας, μικροτέρας τῶν -39° C.
Ἀντ' αὐτοῦ, εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας χρησιμοποιεῖται τὸ θερμομέ-
τρον δι' οἶνοπνεύματος (μέχρι -100° C).

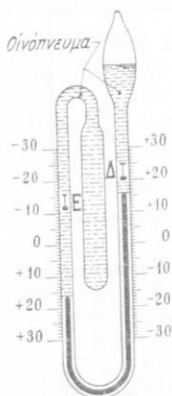
δ) *Θερμοόμετρον ἀντιστάσεως.* Τοῦτο στηρίζεται ἐπὶ τῆς παρατηρήσεως δι' ἣ
ἡλεκτρικὴ ἀντίστασις τῶν ἀγωγῶν μεταβάλλεται μετὰ τῆς θερμοκρασίας. Τὸ θερμο-
όμετρον ἀντιστάσεως ἀποτελεῖται ἀπὸ σπείραμα ἐκ λεπτοῦ σύρματος λευκοχρῶσου,
ἐνδρασκόμενον ἐντὸς σωλήνος ἐκ χαλαζίου. Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὴν θερμοκρασίαν
ἐνὸς σώματος, φέρομεν τὸ θερμοόμετρον εἰς θερμικὴν μετ' αὐτοῦ ἐπαφὴν καὶ με-
τροῦμεν τὴν ἀντίστασιν τοῦ σύρματος. Ἐκ τῆς ἀντιστάσεως εὐρίσκομεν, ἀκολουθῶς,
τὴν θερμοκρασίαν. Τὰ θερμοόμετρα ἀντιστάσεως χρησιμοποιοῦνται, συνήθως, διὰ
τὴν μέτρησιν χαμηλῶν θερμοκρασιῶν.

★ ε) *Άερίκον θερμοόμετρον* (βλ. κατωτέρω § 228).



Σχ. 351.

★ ζ) **Θερμόμετρα μεγίστου και ελαχίστου.** Τὰ θερμόμετρα τοῦ τύπου τούτου παρέχουν τὴν μεγίστην ἢ ελαχίστην παρατηρηθεῖσαν θερμοκρασίαν. Τὸ ἀνωτέρω περιγραφέν λατρικὸν θερμόμετρον εἶναι, ἀκριβῶς, ἓν *μεγιστοβάθμιον θερμόμετρον*. Τὸ σχῆμα 352 παριστᾷ τύπον μεγιστοβαθμίου καὶ ελαχιστοβαθμίου θερμομέτρου, τὸ ὁποῖον περιέχει ὑδράργυρον καὶ οἰνόπνευμα καὶ δύο δείκτας Δ, Εἰς σιδήρου. Τὸ ἀριστερὸν δοχεῖον εἶναι πλήρες οἰνοπνεύματος, ἐνῶ τὸ δεξιὸν δὲν εἶναι ἐντελῶς πλήρες. Ὅταν ἡ θερμοκρασία αὐξάνεται, τὸ οἰνόπνευμα τοῦ ἀριστεροῦ δοχείου διαστέλλεται καὶ ὥθει τὸν ὑδράργυρον, ὁ ὁποῖος, ἀνερχόμενος εἰς τὸ δεξιὸν δοχεῖον, παρασύρει τὸν δείκτην Δ. Ἀντιθέτως, ὅταν ἡ θερμοκρασία κατέρχεται, τὸ οἰνόπνευμα τοῦ ἀριστεροῦ δοχείου συστέλλεται καὶ ὁ ὑδράργυρος εἰς μὲν τὸ δεξιὸν δοχεῖον κατέρχεται, εἰς δὲ τὸ ἀριστερὸν ἀνέρχεται. Κατὰ τὴν κίνησιν του ταύτην ὥθει τὸν δείκτην Ε, ἐνῶ ὁ ἄλλος δείκτης Δ παραμένει εἰς τὴν θέσιν του. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, ἡ θέσις τοῦ δείκτη Δ θὰ παρέχῃ τὴν *μεγίστην* σημειωθεῖσαν θερμοκρασίαν, ἐνῶ ἡ θέσις τοῦ δείκτη Ε τὴν *ἐλαχίστην*. Διὰ νὰ ἐπαναφέρωμεν τοὺς δείκτας εἰς τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑδραργύρου, χρησιμοποιούμεν μαγνήτην.



Σχ 352.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

206) Νὰ μετατραποῦν αἱ θερμοκρασίαι -15°C , 20°C εἰς βαθμοὺς Fahrenheit.
Ὅμοίως 0°F , 98°F , -13°F εἰς βαθμοὺς Κελσίου.
(ΑΠ: 5°F , 65°F , $-17,8^{\circ} \text{C}$, $36,6^{\circ} \text{C}$, -25°C)

207) Ποία ἡ θερμοκρασία τοῦ ὑγιоῦς ἀνθρώπου εἰς βαθμοὺς Fahrenheit;
(ΑΠ: 98°F)

208) Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν αἱ ἐνδείξεις δύο θερμομέτρων, βαθμολογημένων εἰς βαθμοὺς Κελσίου καὶ εἰς βαθμοὺς Fahrenheit, εἶναι αἱ αὐταί;
(ΑΠ: -40°C)

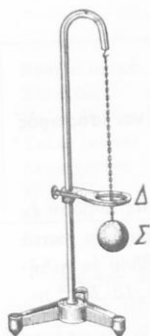
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΖ'

ΘΕΡΜΙΚΗ ΔΙΑΣΤΟΛΗ

• § 217. Γενικά. Ἡ παρατήρησις δεικνύει ὅτι αὐξήσις τῆς θερμοκρασίας τῶν διαφόρων σωμάτων (στερεῶν, ὑγρῶν, ἀερίων) προκαλεῖ, κατὰ κανόνα, αὐξήσιν τῶν διαστάσεων αὐτῶν.

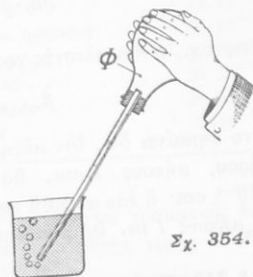
Τὴν διαστολὴν τῶν στερεῶν δεικνύομεν, χαρακτηριστικῶς, διὰ τῆς συσκευῆς, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ σχῆμα 353: Ἡ μεταλλίνη σφαῖρα Σ ἔχει διάμετρον, ὀλίγον μικροτέραν τῆς διαμέτρου τοῦ δακτυλίου Δ, ὥστε, εἰς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ περιβάλλοντος, νὰ διέρχεται ἐλευθέρως δι' αὐτοῦ. Ἐὰν θερμάνωμεν ἐπ' ἀρκετὸν τὴν σφαῖραν, παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη δὲν δύ-

ναται, πλέον, να διέλθῃ διὰ τοῦ δακτυλίου, ἀποδείξεις ὅτι ἡ σφαῖρα, διὰ τῆς θερμάνσεως, διεστάλῃ.



Σχ. 353.

Χαρακτηριστικὸν παράδειγμα διαστολῆς ὑγροῦ κατὰ τὴν θέρμανσιν ἔχομεν εἰς τὸ ὑδραργυρικὸν θερμόμετρον.



Σχ. 354.

Τέλος, τὴν διαστολὴν τῶν ἀερίων δεικνύομεν διὰ τοῦ ἑξῆς πειράματος (σχ. 354): Ὑαλίνη σφαιρική φιάλη Φ πωματίζεται διὰ φελλοῦ, διὰ μέσου τοῦ ὁποίου διέρχεται ὑάλινος σωλήν. Ἐὰν

βυθίσωμεν τὸν σωλῆνα ἐντὸς ποτηρίου, περιέχοντος ὕδατος, καὶ θερμάνωμεν τὴν φιάλην διὰ τῶν χειρῶν μας, ὁ ἐντὸς τῆς φιάλης περιεχόμενος ἀήρ διαστέλλεται καὶ ἐξέρχεται ὑπὸ μορφὴν φυσαλίδων.

• § 218. Γραμμικὴ διαστολὴ τῶν στερεῶν. Θεωρήσωμεν μεταλλίνην ράβδον, ἡ ὁποία, εἰς τὴν θερμοκρασίαν θ , ἔχει μῆκος l . Ἐὰν θερμάνωμεν τὴν ράβδον, ὥστε ἡ θερμοκρασία της νὰ γίνῃ θ' , τὸ μῆκος της θ' αὐξηθῇ καὶ θὰ γίνῃ l' . Ἐὰν τὴν αὐξησιν $l' - l$ τοῦ μήκους τῆς ράβδου συμβολίσωμεν διὰ τοῦ Δl καὶ τὴν αὐξησιν $\theta' - \theta$ τῆς θερμοκρασίας διὰ τοῦ $\Delta \theta$, εὐρίσκωμεν πειραματικῶς ὅτι ἡ ἐπιμήκυνσις Δl τῆς ράβδου εἶναι 1) ἀνάλογος τοῦ ἀρχικοῦ μήκους l τῆς ράβδου, 2) ἀνάλογος τῆς διαφορᾶς $\Delta \theta$ τῆς θερμοκρασίας καὶ 3) ἐξαρτᾶται καὶ ἐκ τοῦ ὕλικου, ἐκ τοῦ ὁποίου εἶναι κατεσκευασμένη ἡ ράβδος. Ἡτοι εἶναι

$$\Delta l = \beta \cdot l \cdot \Delta \theta$$

(1)

Ὁ συντελεστὴς β καλεῖται **συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς** καὶ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὕλικου τῆς ράβδου.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) προκύπτει ὅτι ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς **ΥΑΙΚΟΥ** τινος ἰσοῦται ἀριθμητικῶς πρὸς τὴν μεταβολήν, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ἡ μονὰς μήκους ἐκ τοῦ ἐν λόγῳ ὕλικου, ὅταν μεταβληθῇ ἡ θερμοκρασία του κατὰ 1°C .

Μονὰς τοῦ συντελεστοῦ γραμμικῆς διαστολῆς. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως

(1) ἔχομεν

$$\beta = \frac{\Delta l}{l \cdot \Delta \theta}$$

Ἐπειδὴ ἡ ἐπιμήκυνσις Δl μετρεῖται μὲ τὰς αὐτὰς μονάδας ὥς τὸ μῆκος l (π.χ., εἰς cm), ἔπεται, κατὰ τὸν ἄνω τύπον, ὅτι ἡ μονὰς τοῦ συντελεστοῦ

γραμμικής διαστολῆς θὰ εἶναι τὸ

$$1 \frac{cm}{cm \cdot grad} \quad \eta \quad 1 grad^{-1}.$$

Οὕτω, π.χ., ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ σιδήρου εἶναι ἴσος πρὸς

$$\beta_{\sigmaιδ\eta\rho\omicron\nu} = 12 \cdot 10^{-6} grad^{-1}.$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἐὰν αὐξηθῇ κατὰ $1^{\circ} C$ ἡ θερμοκρασία μιᾶς ράβδου ἐκ σιδήρου, μήκους $1 cm$, θὰ προκληθῇ ἐπιμήκυνσις τῆς ράβδου κατὰ $12 \cdot 10^{-6} cm$ ἢ ἐὰν αὐξηθῇ κατὰ $1^{\circ} C$ ἡ θερμοκρασία μιᾶς ράβδου ἐκ σιδήρου, μήκους $1 m$, θὰ προκληθῇ ἐπιμήκυνσις τῆς ράβδου κατὰ $12 \cdot 10^{-6} m$.

§ 219. Σχέσις μήκους καὶ θερμοκρασίας. Ἀφοῦ, διὰ τῆς θερμάνσεως τῆς ράβδου, τὸ μῆκος της l ηὐξήθη κατὰ Δl , τὸ νέον μῆκος l' θὰ εἶναι ἴσον πρὸς

$$l' = l + \Delta l.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ Δl διὰ τοῦ ἴσου του, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἐκ τοῦ τύπου (1) τῆς προηγουμένης παραγράφου, ἔχομεν

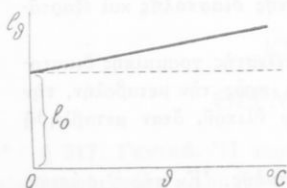
$$l' = l + \beta \cdot l \cdot \Delta \theta$$

ἢ

$$l' = l \cdot (1 + \beta \cdot \Delta \theta).$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίζωμεν τὸ μῆκος l' , τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ μία ράβδος, ὅταν θερμανθῇ κατὰ $\Delta \theta^{\circ} C$, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὸ ἀρχικόν της μῆκος l καὶ τὴν αὐξήσιν $\Delta \theta$ τῆς θερμοκρασίας.

Ἐκ τῆς ἐξίσωσεως ταύτης δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τύπον, ὁ ὁποῖος νὰ παρέχῃ τὸ μῆκος l_{θ} , τὸ ὁποῖον ἔχει ἡ ράβδος εἰς θερμοκρασίαν θ , ὅταν γνωρίζωμεν τὸ μῆκος της εἰς θερμοκρασίαν $\theta^{\circ} C$. Πρὸς τοῦτο γράφομεν



Σχ. 355.

l_{θ} ἀντὶ l' , l_{θ} ἀντὶ l καὶ θ ἀντὶ $\Delta \theta$,

(δεδομένου ὅτι ἡ αὐξήσις τῆς θερμοκρασίας ἀπὸ $\theta^{\circ} C$ εἰς $\theta^{\circ} C$ εἶναι, ἀκριβῶς, θ), ὁπότε ἔχομεν

$$l_{\theta} = l_{\theta^{\circ}} \cdot (1 + \beta \cdot \theta) \quad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1), ἡ συνδέουσα τὸ μῆκος l_{θ} μετὰ τῆς θερμοκρασίας θ , εἶναι ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ, συνεπῶς θὰ παρίσταται γραφικῶς ὑπὸ εὐθείας γραμμῆς (σχ. 355).

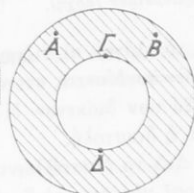
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ

(εις grad^{-1})

Κράμα invar	πρακτικῶς μηδέν	Σίδηρος	$12 \cdot 10^{-6}$
Χαλαζίας	"	Σκυρόδεμα (μπετόν)	$12 \cdot 10^{-6}$
"Υαλός Pyrex	$4 \cdot 10^{-6}$	Χαλκός	$16 \cdot 10^{-6}$
"Υαλός (κοινή)	$9 \cdot 10^{-6}$	Όρειχαλκος	$20 \cdot 10^{-6}$
Λευκόχρυσος	$9 \cdot 10^{-6}$	Ψευδάργυρος	$26 \cdot 10^{-6}$
Χάλυψ	$11 \cdot 10^{-6}$	Μόλυβδος	$29 \cdot 10^{-6}$

Ἐκ τοῦ ἄνω πίνακος παρατηροῦμεν ὅτι οἱ συντελεσταὶ γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ σιδήρου καὶ τοῦ σκυροδέματος ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμὴν. Τοῦτο ἐπιτρέπει εἰς τὸ ὠπλισμένον σκυρόδεμα (μπετόν ἀρμὲ) νὰ διαστελλεται καὶ νὰ συστέλλεται, ἀναλόγως τῶν καιρικῶν συνθηκῶν, ὡς συμπαγὲς σύνολον.

Ὁ τύπος (1) ἰσχύει καὶ διὰ τὴν μεταβολήν, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ἡ ἀπόστασις δύο οἰωνδήποτε σημείων ἑνὸς στερεοῦ σώματος, ὅταν μεταβάλλεται ἡ θερμοκρασία του, ἀνεξαρτήτως τοῦ σχήματος αὐτοῦ. Οὕτω, κατὰ τὴν θέρμανσιν τοῦ σώματος τοῦ σχήματος 356, αὐξάνεται ὄχι μόνον ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων A καὶ B , ἀλλὰ καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων Γ καὶ Δ , δηλ., τὸ μῆκος $\Gamma\Delta$ τῆς διαμέτρου τῆς ὀπῆς.



Σχ. 356

• § 220. Διμεταλλικά ελάσματα. Ἀποτελοῦνται ἐκιδύο διαφόρων μετάλλων A καὶ B (σχ. 357), τὰ ὁποῖα ἔχουν καλῶς συγκολληθῇ μεταξύ των.



Σχ. 357. Τὸ σχῆμα τῶν διμεταλλικῶν ελασμάτων μεταβάλλεται μετὰ τῆς θερμοκρασίας.

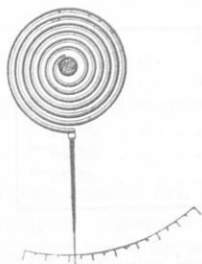
Ἐὰν τὸ μέταλλον A ἔχη συντελεστὴν γραμμικῆς διαστολῆς, μεγαλύτερον τοῦ συντελεστοῦ γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ μετάλλου B , τὸ σύστημα τῶν δύο, τὸ ὁποῖον εἶναι εὐθὺ εἰς τὴν συνήθη θερμοκρασίαν τοῦ περιβάλλοντος (π.χ., 20°C), καμπυλοῦνται, ὅταν ἡ θερμο-

κρασία μεταβληθῇ (αὐξηθῇ ἢ ἐλαττωθῇ).

Τὰ διμεταλλικά ελάσματα χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν κατασκευὴν αὐτομάτων ηλεκτρικῶν διακοπῶν (θερμοστάται), χρησιμοποιουμένων εἰς ἡλεκτρικὰ ψυγεία, εἰς ἡλεκτρικὰ σίδηρα σιδηρώματος κ.λ.

Ἄλλην ἐφαρμογὴν τῶν διμεταλλικῶν ελασμάτων ἔχομεν εἰς τὸ διμεταλλικὸν θερμόμετρον (σχ. 358). Τοῦτο ἀποτελεῖται ἐκ σπειροειδοῦς διμετα-

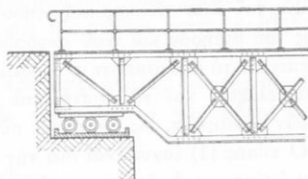
λικοῦ ἐλατηρίου, στερεωμένου εἰς τὸ ἐν ἄκρον, ἐνῶ εἰς τὸ ἄλλο προσαρμόζεται δείκτης. Μεταβολαὶ τῆς θερμοκρασίας προκαλοῦν συσπείρωσιν ἢ ἀποσυσπείρωσιν τοῦ ἐλατηρίου, ἡ ὁποία μετατρέπεται εἰς κίνησιν τοῦ δείκτη ἐνώπιον κλίμακος, βαθμολογημένης εἰς βαθμούς. Τὰ ὄργανα ταῦτα δὲν εἶναι ὄργανα ἀκριβείας.



Σχ. 358. Διμεταλλικὸν θερμομέτρον (ἀρχή).

βῶς, τὸν λόγον αἱ σιδηροδρομικαὶ γραμμαὶ δὲν συνδέονται στενῶς, ἀλλ' ἀφήνεται μεταξύ των διάκενον διὰ ν' ἀντισταθμίζεται ἡ διαστολή.

Διὰ νὰ διαστέλωνται ἐλευθέρως αἱ σιδηραὶ γέφυραι, τὸ ἐν ἄκρον αὐτῶν δὲν στερεοῦται ἀκλονήτως, ἀλλὰ φέρεται ἐπὶ κυλινδρῶν κυλίνδρων (σχ. 359).



Σχ. 359.

• § 222. Κυβικὴ διαστολὴ τῶν στερεῶν. Ἐὰν αὐξηθῇ ἡ θερμοκρασία ἐνὸς στερεοῦ σώματος κατὰ $\Delta\theta$, θ' αὐξηθῶν αἱ διαστάσεις του καί, συνεπῶς, ὁ ὄγκος του. Ἐὰν εἶναι V ὁ ὄγκος τοῦ σώματος εἰς τὴν θερμοκρασίαν θ , αὐξήσωμεν δὲ τὴν θερμοκρασίαν του κατὰ $\Delta\theta$, ἡ αὐξήσις ΔV τοῦ ὄγκου εὐρίσκεται ὅτι εἶναι 1) ἀνάλογος τοῦ ἀρχικοῦ ὄγκου V , 2) ἀνάλογος τῆς μεταβολῆς $\Delta\theta$ τῆς θερμοκρασίας καὶ 3) ἐξαρτᾶται καὶ ἐκ τοῦ ὕλικου, ἐκ τοῦ ὁποίου εἶναι κατεσκευασμένον τὸ σῶμα. Ἦτοι εἶναι

$$\Delta V = \gamma \cdot V \cdot \Delta\theta \quad (1)$$

Ὁ συντελεστὴς γ καλεῖται *συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς* καὶ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὕλικου τοῦ σώματος.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) προκύπτει ὅτι ὁ συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς ΥΛΙΚΟΥ τινος ἰσοῦται ἀριθμητικῶς πρὸς τὴν μεταβολήν, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου ἐκ τοῦ ἐν λόγῳ ὕλικου, ὅταν μεταβληθῇ ἡ θερμοκρασία του κατὰ 1°C .

Μονὰς τοῦ συντελεστοῦ κυβικῆς διαστολῆς. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) ἔχομεν

$$\gamma = \frac{\Delta V}{V \cdot \Delta\theta}$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου προκύπτει ὅτι ἡ μονὰς τοῦ συντελεστοῦ κυβικῆς διαστολῆς εἶναι τὸ

$$1 \text{ grad}^{-1}.$$

* **Σχέσεις ὄγκου καὶ θερμοκρασίας.** Ἀφοῦ, διὰ τῆς θερμάνσεως, ὁ ὄγκος V τοῦ σώματος ἡϋξήθη κατὰ ΔV , ὁ νέος ὄγκος V' θὰ εἶναι ἴσος πρὸς

$$V' = V + \Delta V.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ ΔV διὰ τοῦ ἴσου του (ἐξίσωσις (1)), λαμβάνομεν

$$V' = V + \gamma \cdot V \cdot \Delta \theta = V \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta \theta).$$

Ἐὰν ὡς ἀρχικὴ θερμοκρασία ληφθῇ τὸ 0°C , ὁ ὄγκος θὰ εἶναι V_0 . Εἰς τὴν θερμοκρασίαν θ , ὁ ὄγκος V_θ θὰ εἶναι ἴσος πρὸς

$$\boxed{V_\theta = V_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \theta)} \quad (2)$$

* ★ **Σχέσις μεταξὺ τοῦ συντελεστοῦ κυβικῆς διαστολῆς καὶ τοῦ συντελεστοῦ γραμμικῆς διαστολῆς.** Ἐὰν l_0 εἶναι ἡ πλευρὰ ἐνὸς κύβου εἰς θερμοκρασίαν 0°C , τότε, εἰς θερμοκρασίαν $\theta^\circ \text{C}$, αὕτη θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$l_\theta = l_0 \cdot (1 + \beta \cdot \theta).$$

Ἐπομένως, ὁ ὄγκος V_θ τοῦ κύβου εἰς θερμοκρασίαν $\theta^\circ \text{C}$ θὰ εἶναι ἴσος πρὸς

$$V_\theta = (l_\theta)^3 = \{l_0 \cdot (1 + \beta \cdot \theta)\}^3 = (l_0)^3 \cdot (1 + \beta \cdot \theta)^3 = V_0 \cdot (1 + 3\beta \cdot \theta + 3\beta^2 \cdot \theta^2 + \beta^3 \cdot \theta^3).$$

Ἐπειδὴ τὸ $\beta \cdot \theta$ εἶναι μικρὸν ὡς πρὸς τὴν μονάδα, τὸ $\beta^2 \cdot \theta^2$ καὶ $\beta^3 \cdot \theta^3$ εἶναι πολὺ μικρότερα αὐτῆς (*) καὶ, ὡς ἐκ τούτου, οἱ δύο τελευταῖοι προσθετέοι δύνανται, χωρὶς αἰσθητὸν λάθος, νὰ μὴ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν, ὁπότε ἔχομεν

$$V_\theta = V_0 \cdot (1 + 3\beta \cdot \theta).$$

Διὰ συγκρίσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης πρὸς τὴν ἐξίσωσιν (2) λαμβάνομεν

$$\gamma = 3\beta.$$

* § 223. **Ἀποτελέσματα τῆς διαστολῆς τῶν στερεῶν.** Κατὰ κανόνα, ὁ ὄγκος τῶν στερεῶν αὐξάνεται, αὐξανομένης τῆς θερμοκρασίας, ἡ σχέσις δὲ μεταξὺ ὄγκου καὶ θερμοκρασίας δίδεται, ἀκριβῶς, ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) τῆς § 222.

Ἐπειδὴ οἱ συντελεσταὶ διαστολῆς τῶν στερεῶν διαφέρουν μεταξὺ τῶν, διὰ τοῦτο, κατὰ τὴν θέρμανσιν δύο στερεῶς συγκεκολλημένων σωμάτων, ἡ διαστολὴ δὲν θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ διὰ τὰ δύο σώματα, ὁπότε ταῦτα εἶτε παραμορφώνονται (σχ. 357), εἴτε ἀποκολλῶνται.

Ἀνομοιόμορφος διαστολὴ παρουσιάζεται, ἐπίσης, ὅταν ἐν μόνον στερεῶν θερμομανθῇ ἀνομοιόμορφως. Οὕτω, τὰ ὑάλινα ἀντικείμενα, τιθέμενα ἀπο-

(*) Π.χ., προκειμένου διὰ σίδηρον καὶ θερμοκρασίαν 100°C εἶναι $\beta \cdot \theta = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 12 \cdot 10^{-4}$, $\beta^2 \cdot \theta^2 = 144 \cdot 10^{-8}$ καὶ $\beta^3 \cdot \theta^3 = 1728 \cdot 10^{-12}$.

τόμως ἐντὸς φλογός, θερμαίνονται ἀνομοιομόρφως καὶ θραύονται. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι ἡ ὑάλος εἶναι κακὸς ἀγωγὸς τῆς θερμότητος καὶ τὰ ἀμέσως θερμαίνόμενα μέρη διαστέλλονται περισσότερον ἀπὸ τὰ γειτονικά των, τὰ ὁποῖα εἶναι ψυχρότερα. Ὑπάρχουν, ὅμως, καὶ εἰδικαὶ ὑάλοι (Pyrex - Πύρεξ) μὲ μικρὸν συντελεστὴν διαστολῆς (βλ. πίνακα τῆς σ. 283), αἱ ὁποῖαι, θερμαίνόμεναι, δὲν θραύονται. Διὰ τοιούτων ὑάλων κατασκευάζονται σήμερον διάφορα μαγειρικά σκεύη, χημικὰ ὄργανα κ.λ.

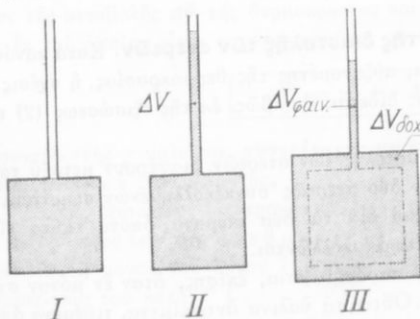
§ 224. Διαστολὴ τῶν ὑγρῶν. Ὅταν θερμαίνωμεν ἐν ὑδραργυρικῶν θερμομέτρῳ, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ὑδράργυρος διαστέλλεται καὶ ἡ στάθμη ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἀνέρχεται. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ κατὰ τὴν θέρμανσιν οἷου δὴ ποτε ὑγροῦ, εὐρισκομένου ἐντὸς δοχείου, τὸ ὁποῖον καταλήγει εἰς στενὸν σωλῆνα: Ἐὰν τὸ δοχεῖον δὲν διεστέλλετο, θὰ ἡδυνάμεθα, ἐκ τῆς ἀννύφσεως τῆς στάθμης, νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν αὔξησιν ΔV τοῦ ὄγκου τοῦ ὑγροῦ, τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου

$$\Delta V = \gamma \cdot V \cdot \Delta \theta,$$

εἰς τὸν ὁποῖον τὸ γ θὰ εἶναι ὁ (ἀπόλυτος) *συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς* τοῦ ὑγροῦ. Εἰς τὴν πραγματικότητά, κατὰ τὴν θέρμανσιν, διαστέλλεται, πλὴν τοῦ ὑγροῦ, καὶ τὸ δοχεῖον. Ἐπειδὴ, ὅμως, ὁ συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς τοῦ ὑγροῦ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ συντελεστοῦ κυβικῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου, διὰ τοῦτο, ἐν τῷ συνόλῳ, ἡ στάθμη τοῦ ὑγροῦ ἀνέρχεται.

Συμφώνως πρὸς τ' ἀνωτέρω, λόγῳ τῆς διαστολῆς τοῦ δοχείου, ἡ ἀννύφσις τῆς στάθμης δὲν παρέχει τὴν πραγματικὴν αὔξησιν τοῦ ὄγκου τοῦ ὑγροῦ, ἀλλὰ τὴν φαινομένην, καί, συνεπῶς, ὁ ἐκ τοιούτου πειράματος προκύπτων συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς θὰ εἶναι ὁ *φαινόμενος συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς*.

Σχέσις μεταξὺ ἀπολύτου καὶ φαινομένου συντελεστοῦ κυβικῆς διαστολῆς. Θεωρήσωμεν ὑάλινον δοχεῖον, πλήρες ὑγροῦ τίνος (σχ. 360, I), εἰς τὸ ὁποῖον ἔχει προσ-



Σχ. 360.

σμοσθῇ στενὸς κατακόρυφος ὑάλινος σωλῆν. Ἐστω V ὁ ὄγκος τοῦ ὑγροῦ εἰς τινὰ θερμοκρασίαν. Ἐὰν αὔξησωμεν κατὰ $\Delta \theta$ τὴν θερμοκρασίαν καὶ δεχθῶμεν ὅτι τὸ δοχεῖον δὲν διεστέλλετο, ὁ ὄγκος τοῦ ὑγροῦ θὰ ἡξάνετο κατὰ ΔV (σχ. 360, II). Ἡ αὔξησις αὕτη τοῦ ὄγκου τοῦ ὑγροῦ θὰ ἦτο, κατὰ τ' ἀνωτέρω, ἴση πρὸς

$$\Delta V = \gamma \cdot V \cdot \Delta \theta. (1)$$

Ἐπειδὴ, ὅμως, τὸ δοχεῖον διαστέλλεται, ἡ αὔξησις τοῦ ὄγκου τοῦ ὑγροῦ θὰ φαίνε-

ται μικρότερα (III). Ἄν τὴν αὔξησιν ταύτην καλέσωμεν *φαινομένην αὔξησιν* τοῦ

ὄγκου καὶ συμβολίσωμεν διὰ τοῦ $\Delta V_{\varphi\alpha\iota\nu.}$ θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$\Delta V_{\varphi\alpha\iota\nu.} = \gamma_{\varphi\alpha\iota\nu.} \cdot V \cdot \Delta \theta. \quad (2)$$

Τέλος, ἡ αὐξήσις $\Delta V_{\delta\sigma\chi.}$ τοῦ ὄγκου τοῦ δοχείου θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\Delta V_{\delta\sigma\chi.} = \gamma_{\nu\alpha\lambda\omicron\varsigma} \cdot V \cdot \Delta \theta, \quad (3)$$

ἐνθα $\gamma_{\nu\alpha\lambda\omicron\varsigma}$ εἶναι ὁ συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου.

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ (ἀπόλυτος) αὐξήσις ΔV τοῦ ὄγκου τοῦ ὕγρου θὰ εἶναι ἴση πρὸς

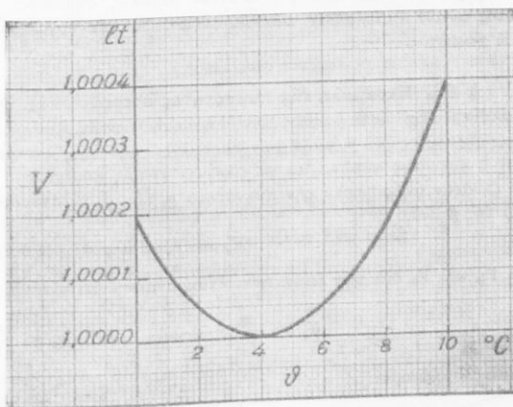
$$\Delta V = \Delta V_{\varphi\alpha\iota\nu.} + \Delta V_{\delta\sigma\chi.} \quad (4)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3) καὶ (4) λαμβάνομεν τὴν ζητούμενην σχέσιν

$$\gamma = \gamma_{\varphi\alpha\iota\nu.} + \gamma_{\nu\alpha\lambda\omicron\varsigma}.$$

• § 225. Ἀνωμαλία διαστολῆς τοῦ ὕδατος. Τὸ ὕδωρ παρουσιάζει ἀνωμαλίαν κατὰ τὴν διαστολὴν του. Οὕτω, ἐὰν θερμαίνωμεν δεδομένην ποσότητα ὕδατος, ἀρχικῆς θερμοκρασίας 0°C , θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, μέχρι τῆς θερμοκρασίας $+4^\circ \text{C}$, ὁ ὄγκος ἐλαττοῦται (σχ. 361), ἀπὸ τῆς θερμοκρα-

Σχ. 361. Μεταβολὴ τοῦ ὄγκου ποσότητος ὕδατος ἐνὸς χιλιογράμμου συναρτήσει τῆς θερμοκρασίας. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τοὺς $+4^\circ \text{C}$ ὁ ὄγκος λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην του τιμὴν (1 lt) καί, συνεπῶς, ἡ πυκνότης λαμβάνει τὴν μέγιστην της τιμὴν.



σίας, ὅμως, αὐτῆς καὶ ἄνω ἀρχίζει ν' αὐξάνεται (*). Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι καὶ ἡ πυκνότης ($\rho = m/V$) τοῦ ὕδατος θὰ μεταβάλλεται μετὰ τῆς θερμοκρασίας, θὰ λαμβάνῃ δὲ τὴν μεγίστην της τιμὴν εἰς τοὺς $+4^\circ \text{C}$, διότι εἰς τὴν θερμοκρασίαν ταύτην ὁ ὄγκος V , δεδομένης μᾶζης m ὕδατος, λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην του τιμὴν. Δι' αὐτόν, ἀκριβῶς, τὸν λόγον ἡ μονὰς μᾶζης 1 gr ὀρίζεται ὥς ἡ μᾶζα 1 cm^3 ὕδατος, θερμοκρασίας $+4^\circ \text{C}$ (βλ. § 5, B).

(*) Δηλαδή, ὁ συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς τοῦ ὕδατος εἶναι ἀρνητικὸς μὲν μεταξὺ τῶν θερμοκρασιῶν 0°C καὶ $+4^\circ \text{C}$, θετικὸς δὲ ἀπὸ τοὺς $+4^\circ \text{C}$ καὶ ἄνω.

Κατανομή της θερμοκρασίας ἐντὸς λιμνῶν κ.λ. Ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι τὸ ὕδωρ ἔχει τὴν μεγίστην πυκνότητα εἰς τοὺς $+4^{\circ}$ C προκύπτει ὅτι, ἐὰν ψύχωμεν ὕδωρ, εὐρισκόμενον ἐντὸς δοχείου, θὰ συσσωρευθῇ κατ' ἀρχὰς εἰς τὸν πυθμένα στρώμα ὕδατος, θερμοκρασίας $+4^{\circ}$ C, ἐνῶ τὰ ἀνώτερα στρώματα θὰ εἶναι θερμότερα. Συνεχίζουμένης τῆς ψύξεως, ψύχονται καὶ τὰ ἀνώτερα στρώματα, μέχρις ὅτου ὅλη ἡ μᾶζα τοῦ ὕδατος λάβῃ τὴν θερμοκρασίαν $+4^{\circ}$ C. Ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν ψύχοντες τὸ ὕδωρ, αἱ ψυχραὶ μᾶζαι, ὡς ἔχουσαι πυκνότητα, μικροτέραν τῆς πυκνότητος τῶν μαζῶν τῆς θερμοκρασίας $+4^{\circ}$ C, θὰ ἀνέλθουν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν καί, ὡς ἐκ τούτου, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, ἐνῶ ἡ θερμοκρασία τῶν στρωμάτων τοῦ πυθμένος παραμένει σταθερὰ εἰς τοὺς $+4^{\circ}$ C, τὰ ἀνώτερα στρώματα ἐξακολουθοῦν νὰ ψύχωνται, μέχρις ὅτου μεταβληθοῦν εἰς πάγον.

Τὴν τοιαύτην κατανομήν τῆς θερμοκρασίας ἐντὸς τοῦ ὕδατος δυνάμεθα νὰ παρακολουθήσωμεν διὰ τοῦ ἑξῆς πειράματος: Γεμίζομεν ἓν ποτήριον δι' ὕδατος καί, ἀκολουθῶς, θέτομεν ἐντὸς αὐτοῦ πολὺ μικρὰ τεμάχια πάγου, ὥστε νὰ σχηματισθῇ στρώμα, πάχους, π.χ., 2 cm. Ἐάν, μετὰ τινα χρόνον, ἐμβαπτίσωμεν ἐντὸς τοῦ ὕδατος ἓν θερμομέτρον, θὰ πιστοποιήσωμεν ὅτι εἰς τὸ στρώμα τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος ἡ θερμοκρασία εἶναι 0° C, ἐνῶ εἰς τὰ στρώματα τοῦ πυθμένος $+4^{\circ}$ C.

Τὸ γεγονός ὅτι τὰ στρώματα τοῦ ὕδατος εἰς τὸν πυθμένα τῶν λιμνῶν κ.λ. δὲν ψύχονται κάτω τῶν $+4^{\circ}$ C εἶναι μεγάλης σημασίας, καθόσον ἐπιτρέπει τὴν ἐντὸς αὐτῶν διατήρησιν τῶν διαφόρων ζώτων ὀργανισμῶν κατὰ τὴν διάρκεια τοῦ χειμῶνος.

§ 226. Μεταβολὴ τῆς πυκνότητος στερεῶν καὶ ὑγρῶν μετὰ τῆς θερμοκρασίας. Ἐφ' ὅσον ὁ ὄγκος τῶν διαφόρων στερεῶν ἢ ὑγρῶν μεταβάλλεται μετὰ τῆς θερμοκρασίας, ἐνῶ ἡ μᾶζα τῶν παραμένει σταθερὰ, ἔπεται ὅτι θὰ μεταβάλλεται καὶ ἡ πυκνότης αὐτῶν. Διὰ νὰ εὑρωμεν τύπον, παρέχοντα τὴν πυκνότητα ρ_0 εἰς 0° C, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν πυκνότητα ρ_θ εἰς θ° C, ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸν τύπον (2) τῆς § 222

$$V_\theta = V_0(1 + \gamma \cdot \theta)$$

τὰ V_θ καὶ V_0 διὰ τῶν ἴσων τῶν, ἐνθυμούμενοι ὅτι εἶναι

$$\rho_\theta = \frac{m}{V_\theta} \quad \text{καὶ} \quad \rho_0 = \frac{m}{V_0},$$

ὁπότε λαμβάνομεν

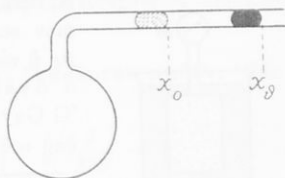
$$\rho_\theta = \frac{\rho_0}{1 + \gamma \cdot \theta}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, κατὰ τὴν διαστολὴν τῶν στερεῶν ἢ τῶν ὑγρῶν, ἡ πυκνότης αὐτῶν ἐλαττοῦται.

§ 227. Διαστολὴ τῶν ἀερίων ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν — Πρῶτος νόμος τοῦ Gay-Lussac (Γκέϋ-Λουσακ). Εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους εἶδομεν ὅτι τὰ ὑγρά, θερμαινόμενα, διαστέλλονται περισσότερον ἀπὸ τὰ στερεά. Ἀκόμη μεγαλυτέρα εἶναι ἡ διαστολὴ τῶν ἀερίων.

Εἰς τὴν § 217 περιεγράφη πείραμα, δεικνὺον ἀκριβῶς τὴν διαστολὴν τῶν ἀερίων. Διὰ τὴν μελέτην τοῦ φαινομένου τούτου, ἐγκλείομεν ἓν ἀέριον

ἐντὸς υαλίνου δοχείου (σχ. 362), τὸ ὁποῖον φέρει ὀριζontiώς σωλήνα καὶ ἐντὸς αὐτοῦ μίαν σταγόνα ὑγροῦ· π.χ., ὕδατος. Εἶναι φανερόν ὅτι εἰς τὰς δύο πλευρὰς τῆς σταγόνος ἡ πίεσις εἶναι ἡ αὐτὴ καί, μάλιστα, ἴση πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν. Ἐστω V_0 ὁ ὄγκος τοῦ αερίου εἰς **θερμοκρασίαν** 0°C . Ἐὰν θερμάνωμεν τὸ αέριον κατὰ $\theta^\circ \text{C}$, ἡ σταγὼν θὰ μετακινηθῇ ἐκ τῆς θέσεως x_0 εἰς τὴν θέσιν x_θ , εἰς τὴν ὁποίαν καὶ θὰ ἰσορροπήσῃ. Εἰς τὴν θέσιν ταύτην ὁ ὄγκος μὲν τοῦ αερίου ηὐξήθη ἐκ τῆς τιμῆς V_0 εἰς τὴν τιμὴν V_θ , ἡ πίεσις, ὅμως, παρέμεινεν ἡ αὐτὴ· ἴση πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν.



Σχ. 362. Διαστολὴ αερίου ὑπὸ σταθεράν πίεσιν.

Ὁ Gay-Lussac εὗρε πειραματικῶς ὅτι ὁ νέος ὄγκος V_θ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

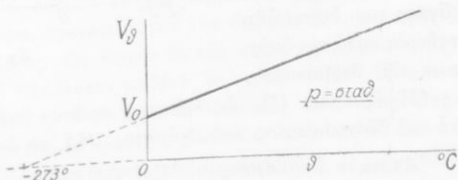
$V_\theta = V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \theta)$	1ος νόμος τοῦ Gay-Lussac	(1)
--	--------------------------	-----

ἐνθα α εἶναι μία σταθερά, ἡ ὁποία καλεῖται **θερμικὸς συντελεστὴς τοῦ ὄγκου ὑπὸ σταθεράν πίεσιν**. Ἡ ὀνομασία αὕτη δικαιολογεῖται ἐκ τῶν συνθηκῶν τοῦ πειράματος, δεδομένου ὅτι, καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ πειράματος, ἡ πίεσις τοῦ αερίου διετηρεῖτο σταθερὰ καί, μάλιστα, ἴση πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν.

Πειράματα, γενόμενα ἐπὶ διαφόρων αερίων, ἔδειξαν ὅτι ἡ σταθερὰ α εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλα τὰ αέρια, ἡ δὲ τιμὴ τῆς εἶναι ἴση πρὸς

$$\alpha = \frac{1}{273} \text{ grad}^{-1}$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἐὰν αὐξηθῇ ἡ θερμοκρασία ἐνὸς αερίου κατὰ 1°C , ὁ ὄγκος αὐτοῦ θ' αὐξηθῇ κατὰ τὸ $1/273$ τοῦ ὄγκου, τὸν ὁποῖον εἶχε τὸ αέριον εἰς θερμοκρασίαν 0°C , ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ πίεσις του διετηρήθη σταθερὰ.

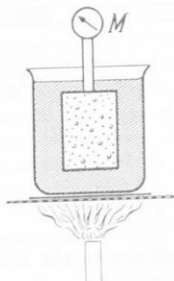


Σχ. 363.

Ἡ ἐξίσωσις (1), ὡς ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ, παρίσταται γραφικῶς ὑπὸ τοῦ διαγράμματος τοῦ σχήματος 363, τὸ ὁποῖον εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ.

• § 228. Δεύτερος νόμος τοῦ Gay-Lussac. (Μεταβολὴ τῆς πίεσεως ἐνὸς αερίου κατὰ τὴν θέρμανσιν ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον). Δοχεῖον κλειστόν, φέ

ρον μανόμετρον M (σχ. 364), περιέχει ἓν ἀέριον. Ἐστω p_0 ἡ πίεσις αὐτοῦ εἰς **θερμοκρασίαν** 0°C . Ἐὰν θερμάνωμεν τὸ ἀέριον κατὰ $\theta^\circ \text{C}$, ἡ πίεσις του θ' αὐξηθῇ, ἔστω δὲ p_θ ἡ νέα τιμὴ τῆς πίεσεως. (Κατὰ τὸ πείραμα τοῦτο ὁ ὄγκος τοῦ ἀερίου διατηρεῖται **σταθερός**). Ὁ Gay-Lussac εὗρεν ὅτι ἡ νέα πίεσις p_θ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου



Σχ. 364. Θέρμανσις ἑνὸς ἀερίου ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον.

$$p_\theta = p_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \theta) \quad \text{2ος νόμος τοῦ Gay-Lussac} \quad (1)$$

ἐνθα α εἶναι μία σταθερά, ἡ ὁποία καλεῖται **θερμικὸς συντελεστὴς τῆς πίεσεως ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον**. Ἡ ὀνομασία αὕτη ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι, κατὰ τὴν θέρμανσιν τοῦ ἀερίου, ὁ ὄγκος του παρέμεινε σταθερός. Ἡ σταθερά α εὗρίσκεται πειραματικῶς ὅτι

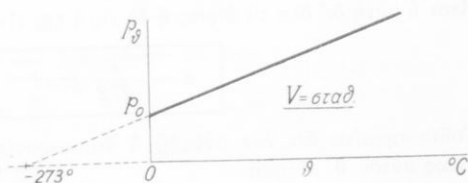
εἶναι ἡ αὕτη δι' ὅλα τὰ ἀέρια, ἡ δὲ τιμὴ της εἶναι ἴση πρὸς

$$\alpha = \frac{1}{273} \text{ grad}^{-1}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ συντελεστὴς οὗτος ἔχει τὴν αὐτὴν, ἀκριβῶς, τιμὴν, τὴν ὁποίαν ἔχει ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ὄγκου ὑπὸ σταθεράν πίεσιν.

Ἡ τιμὴ $1/273 \text{ grad}^{-1}$ τοῦ θερμικοῦ συντελεστοῦ τῆς πίεσεως ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον σημαίνει ὅτι, ἐὰν αὐξηθῇ ἡ θερμοκρασία ἑνὸς ἀερίου κατὰ 1°C , ἡ πίεσις αὐτοῦ θ' αὐξηθῇ κατὰ τὸ $1/273$ τῆς πίεσεως, τὴν ὁποίαν εἶχε τὸ ἀέριον εἰς θερμοκρασίαν 0°C , ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὁ ὄγκος του διατηρήθη σταθερὸς κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς θερμάνσεως.

Ἡ ἐξίσωσις (1), ὡς ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ, παρίσταται γραφικῶς ὑπὸ τοῦ διαγράμματος τοῦ σχήματος 365, τὸ ὁποῖον εἶναι εὐθεῖα γραμμή.



Σχ. 365.

Ἀερίκον θερμομέτρον. Ἐπὶ τοῦ δευτέρου νόμου τοῦ Gay-Lussac στηρίζεται καὶ ἡ λειτουργία τοῦ **αερίκου θερμομέτρου**: Εἰς τὴν διάταξιν τοῦ σχήματος 364 εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ ἔνδειξις τοῦ μανομέτρου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θερμοκρασίας τοῦ ἀερίου. Εἶναι, λοιπόν, δυνατόν νὰ χαράξωμεν ἐπὶ τοῦ μανομέτρου κλίμακα, ἡ ὁποία νὰ μᾶς παρέχῃ ἀπ' εὐθείας τὴν θερμοκρασίαν.

Τὰ αερίκα θερμομέτρα οὐδέποτε χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν πράξιν, δε-

δομένου ὅτι ἕκαστον ἐξ αὐτῶν χρειάζεται νὰ βαθμολογηθῇ ἰδιαιτέρως, καθόσον ἡ κλίμαξ του ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ποσότητος τοῦ εἰσαχθέντος ἐντὸς αὐτοῦ ἀερίου.

★ § 229. Ἀπόλυτος θερμοκρασία - Ἀπόλυτον μηδέν. Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$V_{\theta} = V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \theta) = V_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{273} \cdot \theta\right)$$

θέσωμεν $\theta = -273$ (ἐάν, δηλ., καταβιβάσωμεν τὴν θερμοκρασίαν ἐνὸς ἀερίου κατὰ 273° κάτω τοῦ μηδενὸς τῆς κλίμακος Κελσίου), θὰ λάβωμεν

$$V_{\theta} = 0.$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἐὰν ψύξωμεν ἓν ἀέριον εἰς τὴν θερμοκρασίαν $-273^{\circ} C$, ἐνῶ, ταυτοχρόνως, διατηροῦμεν τὴν πίεσιν αὐτοῦ σταθεράν, ὁ ὄγκος του θὰ γίνῃ ἴσος πρὸς μηδέν.

Τὸ συμπέρασμα τοῦτο προκύπτει καὶ ἐκ τοῦ διαγράμματος τοῦ σχήματος 363, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ εὐθεῖα, προεκτεινομένη πρὸς τὰς ἀρνητικὰς θερμοκρασίας, τέμνει τὸν ἄξονα τῶν θερμοκρασιῶν εἰς τὸ σημεῖον $\theta = -273^{\circ} C$.

Ἀναλόγους συλλογισμοὺς δυνάμεθα νὰ κάμωμεν καὶ ἐπὶ τῆς ἐξίσωσως

$$p_{\theta} = p_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \theta) = p_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{273} \cdot \theta\right).$$

Ἐάν, δηλ., καταβιβάσωμεν τὴν θερμοκρασίαν ἐνὸς ἀερίου εἰς $-273^{\circ} C$, ἐνῶ, ταυτοχρόνως, διατηροῦμεν τὸν ὄγκον σταθερόν, ἡ πίεσις του θὰ γίνῃ ἴση πρὸς μηδέν (βλ. καὶ σχ. 365).

Τὴν θερμοκρασίαν $-273^{\circ} C$, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ὁ ὄγκος ἢ ἡ πίεσις ἐνὸς ἀερίου μηδενίζεται, καλοῦμεν **ἀπόλυτον μηδέν**.

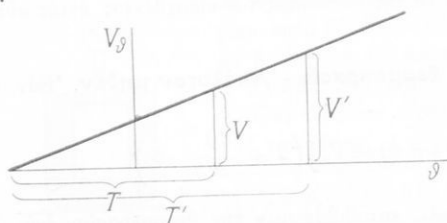
Μέχρι τοῦδε διὰ τὴν μέτρησιν τῆς θερμοκρασίας ἐχρησιμοποιήσαμεν τὴν κλίμακα Κελσίου, ἡ ὁποία ἀρχίζει ἐκ τῆς θερμοκρασίας, τῆς καλουμένης «μηδέν Κελσίου». Ἄν, τώρα, προεκτείνωμεν τὴν κλίμακα Κελσίου πρὸς θερμοκρασίας, κάτω τοῦ μηδενός, ὡς ἀρχὴν δὲ τῆς κλίμακος λάβωμεν, ὅχι τὸ «μηδέν Κελσίου», ἀλλὰ τὸ «ἀπόλυτον μηδέν», δηλ., τὸ $-273^{\circ} C$, ἡ ἐκ τοῦ ἀπολύτου μηδενὸς μετρουμένη θερμοκρασία καλεῖται **ἀπόλυτος θερμοκρασία** (σύμβολον T), ἕκαστος δὲ βαθμὸς **βαθμὸς Kelvin (Κέλβιν)** $^{\circ}K$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι ἡ ἀπόλυτος θερμοκρασία T θὰ συνδέεται μετὰ τῆς θερμοκρασίας Κελσίου θ διὰ τῆς σχέσεως

$$T = 273^{\circ} + \theta$$

Εἰς τὴν κλίμακα ταύτην τὸ σημεῖον τήξεως τοῦ πάγου ($0^{\circ} C$) θὰ εἶναι ἴσον πρὸς $273^{\circ} K$.

★ § 230. Νέα μορφή τῶν νόμων Gay-Lussac. Χρησιμοποιοῦν-



Σχ. 366.

τες τὴν ἀπόλυτον θερμοκρασίαν, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τοὺς νόμους Gay-Lussac ὑπὸ ἀπλουστεράν μορφήν :

α) 1ος νόμος τοῦ Gay-Lussac. Εἰς τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 366, τὸ ὁποῖον παριστᾷ γραφικῶς τὴν σχέσιν

μεταξὺ τοῦ ὄγκου καὶ τῆς θερμοκρασίας ἑνὸς αερίου, ὅταν ἡ πίεσίς του διατηρῇται σταθερά, ἡ ὁμοιότης τῶν δύο τριγώνων δίδει

$\frac{V}{V'} = \frac{T}{T'}$	1ος νόμος τοῦ Gay-Lussac	(1)
-------------------------------	--------------------------	-----

Ἦτοι : « Ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν, οἱ ὄγκοι δεδομένης ποσότητος ἑνὸς αερίου εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀπολύτων θερμοκρασιῶν ».

Τὸ πλεονέκτημα τῆς νέας μορφῆς τοῦ 1^{ου} νόμου τοῦ Gay-Lussac εἶναι ἡ ταχύτης, μὲ τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς αερίου εἰς μίαν θερμοκρασίαν, ὅταν γνωρίζωμεν αὐτὸν εἰς ἄλλην θερμοκρασίαν.

Παράδειγμα : Ἀέριον, ὑπὸ συνήθη ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν καὶ θερμοκρασίαν 20° C, κατέχει ὄγκον V. Ποῖος ὁ ὄγκος τοῦ αερίου εἰς 80° C (τῆς πίεσεως διατηρουμένης σταθερᾶς) ;

Λύσις. Μετατρέπομεν τὰς δοθείσας θερμοκρασίας εἰς ἀπολύτους, ὅποτε ἔχομεν $T = 273 + 20 = 293^{\circ} \text{ K}$ καὶ $T' = 273 + 80 = 353^{\circ} \text{ K}$. Ἐκ τῆς ἑξίσωσως (1) προκύπτει ὁ ζητούμενος ὄγκος V' ἴσος πρὸς

$$V' = V \cdot \frac{T'}{T} = V \cdot \frac{353}{293} \quad \text{ἢ} \quad V' = 1,2 \text{ V.}$$

β) 2ος νόμος τοῦ Gay-Lussac. Δι' ἐντελῶς ἀναλόγων συλλογισμῶν ὁ δεύτερος νόμος τοῦ Gay-Lussac λαμβάνει τὴν μορφήν

$\frac{p}{p'} = \frac{T}{T'}$	2ος νόμος τοῦ Gay-Lussac	(2)
-------------------------------	--------------------------	-----

Ἦτοι : « Ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον, αἱ πιέσεις δεδομένης ποσότητος ἑνὸς αερίου εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀπολύτων θερμοκρασιῶν ».

Παράδειγμα : Διὰ συμπιεστοῦ εἰσάγομεν ἐντὸς ἀεροθαλάμου αὐτοκινήτου ἀέρα, θερμοκρασίας 20° C, μέχρις ὅτου ἡ ἐντὸς αὐτοῦ ὑπερπίεσις γίνη ἴση πρὸς 2 at. (Ὑπενθυμίζομεν ὅτι, ὅταν λέγωμεν « ἡ ὑπερπίεσις ἑνὸς

αερίου είναι 2 at , ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ πίεσις τοῦ ἐν λόγῳ αερίου εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς κατὰ 2 at). Ποία θὰ εἶναι ἡ ὑπερπίεσις, ὅταν, κατὰ τὴν πορείαν τοῦ αὐτοκινήτου, ἡ θερμοκρασία αὐξηθῇ εἰς 50° C ;

Λύσις. Ἐν πρώτοις, μετατρέπομεν τὰς δοθείσας θερμοκρασίας εἰς ἀπολύτους, ὁπότε ἔχομεν $T = 273 + 20 = 293^\circ \text{ K}$ καὶ $T' = 273 + 50 = 323^\circ \text{ K}$. Ἀφ' ἐτέρου, ἔχομεν $p = 1 \text{ at} + 2 \text{ at} = 3 \text{ at}$ (θεωροῦντες, κατὰ προσέγγισιν, $1 \text{ Atm} = 1 \text{ at}$). Ἐκ τοῦ τύπου (2) λαμβάνομεν

$$p' = p \cdot \frac{T'}{T} = 3 \cdot \frac{323}{293} \text{ at} = 3,3 \text{ at}.$$

Ἀφαιροῦντες ἐκ τῆς ἀνωτέρω τιμῆς $3,3 \text{ at}$ τὴν 1 at , εὐρίσκομεν διὰ τὴν ὑπερπίεσιν p' εἰς τὴν θερμοκρασίαν 50° C τὴν τιμὴν

$$p' = 2,3 \text{ at}.$$

• ★ § 231. **Νόμος Boyle - Mariotte — Gay - Lussac.** Κατὰ τὴν περιγραφὴν τῶν νόμων τῶν αερίων παρουσιάζονται τὰ τρία μεγέθη πίεσις, ὄγκος καὶ θερμοκρασία. Καὶ οἱ μὲν νόμοι τοῦ Gay - Lussac μᾶς δίδουν τὴν μεταβολὴν τοῦ ὄγκου ἢ τῆς πίεσεως συναρτήσας τῆς θερμοκρασίας, ἐνῶ ὁ νόμος Boyle - Mariotte (§ 141) τὴν μεταβολὴν τῆς πίεσεως μετὰ τοῦ ὄγκου ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν. Καὶ εἰς τοὺς τρεῖς, ὅμως, αὐτοὺς νόμους ἀπαιτεῖται, ὅπως ἐν ἑκ τῶν τριῶν μεγεθῶν διατηρῇται σταθερὸν (ἡ πίεσις ἢ ὁ ὄγκος εἰς τοὺς νόμους Gay - Lussac, ἡ θερμοκρασία εἰς τὸν νόμον Boyle - Mariotte). Ὑπάρχουν, ἐν τούτοις, καὶ περιπτώσεις, εἰς τὰς ὁποίας μεταβάλλονται καὶ τὰ τρία μεγέθη ταυτοχρόνως. Ὡς ἀποδεικνύεται κατωτέρω, εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας ἰσχύει ὁ **νόμος Boyle - Mariotte — Gay - Lussac**, ὁ ὁποῖος συνδέει τὰ ἀρχικά μεγέθη p, V, T μὲ τὰ τελικά μεγέθη p', V', T' καὶ ὁ ὁποῖος γράφεται ὡς ἑξῆς:

$\frac{p \cdot V}{T} = \frac{p' \cdot V'}{T'}$	Νόμος Boyle - Mariotte — Gay - Lussac	(1)
--	--	-----

Τὸν νόμον Boyle - Mariotte — Gay - Lussac χρησιμοποιοῦμεν, ὅταν πρόκειται νὰ ὑπολογίσωμεν προβλήματα, εἰς τὰ ὁποία μεταβάλλονται καὶ τὰ τρία μεγέθη p, V, T . Εἶναι προφανὲς ὅτι ὁ τύπος (1), ὡς γενικός, λύνει καὶ τὰ προβλήματα ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποία μεταβάλλονται δύο μόνον ἐξ αὐτῶν καὶ τὰ ὁποία λύνονται καὶ διὰ τῶν νόμων Gay - Lussac ἢ διὰ τοῦ νόμου Boyle - Mariotte.

Παράδειγμα: Ἀέριον, ὑπὸ πίεσιν $p_1 = 1 \text{ at}$ καὶ θερμοκρασίαν $T_1 = 293^\circ \text{ K}$, κατέχει ὄγκον $V_1 = 300 \text{ λίτρων}$. Ποῖος ὁ ὄγκος V_2 τοῦ αερίου ὑπὸ θερμοκρασίαν $T_2 = 323^\circ \text{ K}$ καὶ πίεσιν $p_2 = 6 \text{ at}$;

Δύσις. Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (1), ἔχομεν

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}.$$

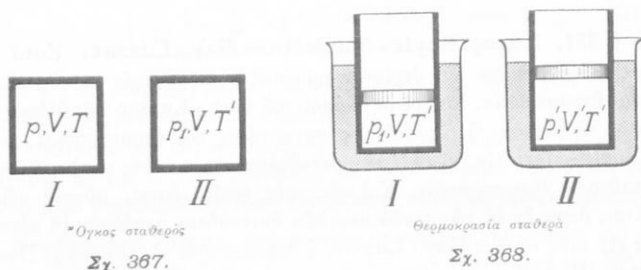
Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς V_2 , λαμβάνομεν

$$V_2 = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot V_1.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰ σύμβολα διὰ τῶν τιμῶν των, λαμβάνομεν

$$V_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{323}{293} \cdot 300 \text{ λίτρα} = 51,1 \text{ λίτρα}.$$

Ἀπόδειξις τοῦ τύπου (1). Ἐστώσαν p καὶ V ἡ πίεσις καὶ ὁ ὄγκος δεδομένης ποσότητος ἐνὸς αἰρίου εἰς τὴν θερμοκρασίαν T (σχ. 367, I). Ἐὰν θερμάνωμεν τὸ



αἶριον εἰς τὴν θερμοκρασίαν T' , διατηροῦντες τὸν ὄγκον σταθερὸν (II), ἡ πίεσις του θ' αὐξηθῇ καί, κατὰ τὸν 2ον νόμον τοῦ Gay-Lussac, θὰ γίνῃ ἴση πρὸς

$$p_1 = p \cdot \frac{T'}{T}. \quad (2)$$

Ἐάν, ἀκολούθως, κρατήσωμεν σταθερὰν τὴν θερμοκρασίαν T' καὶ αὐξήσωμεν τὸν ὄγκον ἐκ τῆς τιμῆς V εἰς τὴν τιμὴν V' (σχ. 368, II), θὰ ἐλαττωθῇ ἡ πίεσις ἐκ τῆς τιμῆς p_1 εἰς τὴν τιμὴν p' . Ὁ νόμος Boyle-Mariotte μᾶς δίδει τὴν σχέσιν

$$p_1 \cdot V = p' \cdot V'.$$

Ἄν εἰς τὸν τύπον αὐτὸν ἀντικαταστήσωμεν τὸ p_1 διὰ τοῦ ἴσου του, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἐκ τοῦ τύπου (2), θὰ ἔχωμεν

$$p \cdot \frac{T'}{T} \cdot V = p' \cdot V' \quad \text{ἢ} \quad \frac{p \cdot V}{T} = \frac{p' \cdot V'}{T'} \quad \text{ὁ. ἔ. ὁ.}$$

§ 232. Μεταβολὴ τῆς πυκνότητος τῶν αἰρίων μετὰ τῆς θερμοκρασίας. Ὅταν τὰ αἶρια, θερμαινόμενα, διαστελλῶνται, ὑφίστανται ἐλάττωσιν τῆς πυκνότητος αὐτῶν. Ἐπὶ τοῦ φαινομένου, ἀκριβῶς, τοῦτου στηρίζεται καὶ ἡ λειτουργία τῶν καπνοδόχων (σχ. 369): Ὁ ἐντὸς τῆς καπνο-

δόχον εὐρισκόμενος ἀήρ, θερμαινόμενος, καθίσταται ἀραιότερος τοῦ ἀέρος τοῦ περιβάλλοντος καί, ὥς ἐκ τούτου, ἀνέρχεται. Διὰ τὸν καλὸν ἐκνυσμὸν (κ. τράβηγμα) οὐσιώδες εἶναι τὸ ὕψος h τῆς θερμῆς στήλης τοῦ ἀέρος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ εἶναι ὅσον τὸ δυνατόν μεγαλύτερον.

Ἡ σχέσης μεταξύ τῆς πυκνότητος καὶ τῆς θερμοκρασίας εὐρίσκεται ὡς ἑξῆς: Ἐὰν καλέσωμεν ϱ καὶ ϱ_0 τὴν πυκνότητα τοῦ ἀερίου εἰς $\theta^\circ C$ καὶ $0^\circ C$, κατὰ τὸν ὁρίσμον τῆς πυκνότητος, ἔχομεν τὰς σχέσεις

$$\varrho = \frac{m}{V} \quad \text{καὶ} \quad \varrho_0 = \frac{m}{V_0}$$

ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει ἡ εξίσωσις

$$\varrho = \frac{\varrho_0 \cdot V_0}{V} \quad (1)$$

Ἀφ' ἐτέρου, ἐκ τοῦ νόμου Boyle-Mariotte—Gay-Lussac ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{p \cdot V}{T} = \frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} \quad (2)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) τὸ V , τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἐκ τοῦ τύπου (2), εὐρίσκομεν ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ ἀερίου εἰς ἀπόλυτον θερμοκρασίαν T καὶ ὑπὸ πίεσιν p εἶναι ἴση πρὸς

$$\varrho = \varrho_0 \cdot \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T}$$

Ἐὰν θέλωμεν νὰ χρησιμοποιήσωμεν θερμοκρασίαν Κελσίου, πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι $T = 273 + \theta$, ὁπότε εὐρίσκομεν τὸν τύπον

$$\varrho = \varrho_0 \cdot \frac{p}{p_0 \cdot (1 + a \cdot \theta)} \quad (*)$$

(ἐνθα $a = 1/273 \text{ grad}^{-1}$).

★ § 233. Καταστατική εξίσωσις τῶν ἀερίων. Ἐκ τῆς εξισώσεως

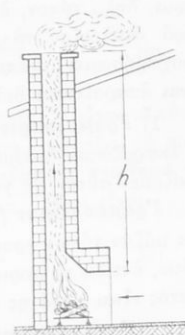
$$\frac{p \cdot V}{T} = \frac{p' \cdot V'}{T'}$$

προκύπτει ὅτι, ἐὰν μεταβάλωμεν τὴν πίεσιν, τὸν ὄγκον καὶ τὴν θερμοκρασίαν δεδομένης ποσότητος ἐνὸς ἀερίου, ἡ τιμὴ τοῦ μονωνύμου $p \cdot V/T$ διατηρεῖται σταθερά. Ἐὰν καλέσωμεν A τὴν σταθερὰν ταύτην τιμὴν, ἔχομεν

$$\frac{p \cdot V}{T} = A.$$

Ἡ σταθερὰ A ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς μάζης τοῦ θεωρουμένου ἀερίου. Αὕτη ἔχει ὠρισμένην τιμὴν, ἐφ' ὅσον θεωροῦμεν ὠρισμένην ποσότητα δεδομένου ἀερίου.

(*) Ὁ παρονομαστής $p_0 \cdot (1 + a \cdot \theta)$ εἶναι ἴσος πρὸς p , μόνον ὅταν ὁ ὄγκος τοῦ ἀερίου διατηρῆται σταθερός. Ἐπειδὴ τοῦτο δὲν ἰσχύει ἐν προκειμένῳ, ἡ ἀπλοποίησις τοῦ κλάσματος δὲν εἶναι δυνατόν.



Σχ. 369. Ὅσον μεγαλύτερον εἶναι τὸ ὕψος h , τόσον καλλίτερος καὶ ὁ ἐκνυσμός.

*Ηδη, θὰ ζητήσωμεν νὰ εὐρωμεν τύπον, ὁ ὁποῖος νὰ ἰσχύῃ δι' ὅλα τὰ ἀέρια, δηλ., τύπον, ἀνάλογον πρὸς τὸν ἄνω, εἰς τὸν ὁποῖον, ὅμως, ἡ σταθερὰ ἀναλογίας νὰ εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλα τὰ ἀέρια. Πρὶν, ὅμως, προχωρήσωμεν, πρέπει ν' ἀναφέρωμεν μερικὰς βοηθητικὰς γνώσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀπαραίτητοι διὰ τὴν εὐρεσιν τοῦ ζητουμένου τύπου.

1) **Γραμμομόριον.** Κατὰ τὴν θεωρητικὴν μελέτην τῶν σωμάτων, ἀντὶ νὰ ἐκφράζωμεν δεδομένην ποσότητα ἐνὸς ὕλικου εἰς γραμμάρια, ἐνίοτε ἐκφράζομεν αὐτὴν εἰς *γραμμομόρια*.

Γραμμομόριον (1 Mol) καλεῖται ἡ ποσότης ἐκείνη τῆς ὕλης, ἡ ὁποία ἔχει μᾶζαν τόσων γραμμαρίων, ὅσον εἶναι τὸ μοριακὸν βάρος τοῦ ὕλικου. Οὕτω, ἐπειδὴ τὸ μοριακὸν βάρος τοῦ ὕδατος εἶναι 18, τὸ 1 γραμμομόριον ὕδατος εἶναι ποσότης ὕδατος, ἴση πρὸς 18 gr.

2) **Γραμμομοριακὸς ὄγκος.** Θεωρήσωμεν ποσότητα ἔκ τινος ΥΑΙΚΟΥ, ἴσην πρὸς n γραμμομόρια καὶ καταλαμβάνουσιν ὄγκον V . Τὸ πηλίκον V/n δίδει ἀριθμητικῶς τὸν ὄγκον, τὸν ὁποῖον καταλαμβάνει τὸ 1 γραμμομόριον. Τὸν ὄγκον τοῦτον καλοῦμεν **γραμμομοριακὸν ὄγκον** καὶ συμβολίζομεν διὰ τοῦ V_{Mol} . *Ἄρα εἶναι

$$V_{Mol} = \frac{V}{n} \quad (1)$$

3) **Κανονικαὶ συνθήκαι ἐνὸς αερίου.** *Ὅταν ἓν αἷριον εὐρίσκεται ὑπὸ πίεσιν 1 Atm καὶ θερμοκρασίαν $0^\circ C$, λέγομεν ὅτι εὐρίσκεται ὑπὸ **κανονικὰς συνθήκας**.

4) **Γραμμομοριακὸς ὄγκος αερίου ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας.** Πειραματικῶς εὐρέθη ὅτι ἓν γραμμομόριον οἷου δῆποτε αερίου, εὐρισκόμενον ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, καταλαμβάνει ὄγκον, ἴσον πρὸς 22400 cm^3 ἢ $22,4 \text{ λίτρα (*)}$. *Ἦτοι εἶναι

$$V_{Mol, \text{ ὑπὸ καν. συνθήκας}} = 22,4 \frac{\text{λίτρα}}{\text{Mol}}$$

*Ηδη, κατόπιν τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ἄνω βοηθητικῶν μεγεθῶν, εἴμεθα ἔτοιμοι νὰ συνεχίσωμεν τοὺς συλλογισμοὺς μας: *Εφαρμόζοντες τὸν νόμον Boyle - Mariotte — Gay - Lussac διὰ ποσότητα αερίου, ἴσην πρὸς 1 Mol, εὐρισκομένην ἀφ' ἐνὸς μὲν ὑπὸ οἰσδῆποτε συνθήκας (πίεσις = p , ὄγκος = V_{Mol} καὶ θερμοκρασία = T), ἀφ' ἑτέρου δὲ ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας (πίε-

(*) Οὕτω, ἐπειδὴ ἡ πυκνότης τοῦ ὕδρογόνου, ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, εἶναι ἴση πρὸς $0,0899 \text{ gr/λίτρον}$, ὁ ὄγκος V_{Mol} τὸν ὁποῖον θὰ καταλαμβάνουν $2,016 \text{ gr}$ ὕδρογόνου (δηλ., 1 γραμμομόριον), θὰ εἶναι $V_{Mol} = m/\rho = 2,016/0,0899 \text{ λίτρα} = 22,43 \text{ λίτρα}$. Ὁμοίως, ἡ πυκνότης τοῦ ὀξυγόνου, ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, εἶναι ἴση πρὸς $1,429 \text{ gr/λίτρον}$ ὅρα ὁ ὄγκος V_{Mol} ἐνὸς γραμμομορίου ὀξυγόνου, δηλ., 32 gr , θὰ εἶναι $V_{Mol} = 32/1,429 \text{ λίτρα} = 22,39 \text{ λίτρα}$.

σις = 1 Atm , ὄγκος = V_{Mol} ὑπὸ καν. συνθήκας = $22400 \text{ cm}^3/\text{Mol}$ καὶ θερμοκρασία $T = 273^\circ \text{ K}$), λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{p \cdot V_{\text{Mol}}}{T} = \frac{1 \text{ Atm} \cdot 22400 \text{ cm}^3/\text{Mol}}{273 \text{ grad}} \quad (2)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ δεξιὸν μέλος τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι σταθερὸν καὶ ἀνεξάρτητον τῆς φύσεως τοῦ αερίου, δύναται, συνεπῶς, νὰ παρασταθῇ διὰ μιᾶς σταθερᾶς R , ἣ ὁποία καλεῖται **παγκόσμιος σταθερὰ τῶν αερίων**, ὡς μὴ ἐξαρτωμένη ἐκ τῆς φύσεως τοῦ αερίου. Ἦτοι εἶναι

$$R = \frac{1 \text{ Atm} \cdot 22400 \text{ cm}^3/\text{Mol}}{273 \text{ grad}} \quad (3)$$

Ἦδη, ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται ὑπὸ τὴν μορφήν

$$\frac{p \cdot V_{\text{Mol}}}{T} = R$$

ἢ

$p \cdot V_{\text{Mol}} = R \cdot T$	Καταστατικὴ ἐξίσωσις τῶν αερίων	(4)
--------------------------------------	---------------------------------	-----

Διὰ νὰ εὑρωμεν τὴν τιμὴν, τὴν ὁποίαν ἔχει ἡ σταθερὰ R εἰς τὸ σύστημα $C.G.S.$, θέτομεν εἰς τὸν τύπον (3), ἀντὶ τῆς 1 Atm , τὸ ἴσον τῆς $1,013 \cdot 10^6 \text{ dyn/cm}^2$, ὁπότε λαμβάνομεν

$$R = 8,31 \cdot 10^7 \text{ erg} \cdot \text{Mol}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}.$$

Ὁ τύπος (4) ἰσχύει διὰ ποσότητα αερίου, ἴσην πρὸς ἓν γραμμομόριον. Ἐάν, ὅμως, εἰς ἓν πρόβλημα δίδεται ποσότης αερίου ὅχι ἴση πρὸς 1 γραμμομόριον, ἀλλ' ἴση πρὸς n γραμμομόρια, χρησιμοποιοῦμεν τὸν τύπον

$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$	(5)
---------------------------------	-----

ὁ ὁποῖος προκύπτει εὐκόλως ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (4).

Ἐάν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (5) θέσωμεν $T = \text{σταθ.}$, θὰ λάβωμεν τὴν σχέσιν

$$p \cdot V = \text{σταθ.},$$

δηλαδὴ τὸν νόμον Boyle - Mariotte.

Ἀπόλυτον μηδέν. Ἐάν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (5) θέσωμεν $T = 0$, λαμβάνομεν $p \cdot V = 0$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ἀπόλυτον μηδέν θὰ εἶναι ἐκεῖνη ἡ θερμοκρασία, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ πίεσις ἢ ὁ ὄγκος ἐνὸς αερίου ἢ καὶ τὰ δύο μεγέθη γίνονται ἴσα πρὸς μηδέν.

Ἰδανικὰ καὶ πραγματικὰ αέρια. Ὅπως εὐρίσκεται πειραματικῶς, τὰ διάφορα ἐν τῇ φύσει αέρια (**πραγματικὰ αέρια**) ἀκολουθοῦν μόνον κατὰ προσέγγισιν τοὺς ἀναφερθέντας νόμους. Ἀέρια, τὰ ὁποῖα ἀκολουθοῦν αὐτὴν τὴν ὁμαλότητα τοὺς ἀνω νόμους, καλοῦνται **ιδανικὰ** (ἢ τέλεια) **αέρια**. Πολλὰ

τῶν πραγματικῶν αερίων καί, κυρίως, τὰ δυσκόλως ὑγροποιούμενα (δξυγό-
νον, ὑδρογόνον, ἄζωτον κ.λ.) συμπεριφέρονται, πρακτικῶς, ὡς ἰδανικά αέ-
ρια. Ἀντιθέτως, οἱ αἱμοὶ αἰθέρος, οἶνοπνεύματος κ.λ. (δηλ., αέρια, εὐκό-
λως ὑγροποιούμενα) δὲν ἀκολουθοῦν τοὺς ἄνω νόμους.

★ § 234. Σταθερὰ Loschmidt (Λόσμιτ). Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν
μᾶζαν ἑνὸς γραμμομορίου ὑδρογόνου ($= 2 \text{ gr}$) καὶ τὴν μᾶζαν ἑνὸς μο-
ρίου ὑδρογόνου, τὸ πηλίκον τῆς μάζης τοῦ γραμμομορίου τοῦ ὑδρογόνου
διὰ τῆς μάζης τοῦ μορίου τοῦ ὑδρογόνου θὰ μᾶς δώσῃ τὸν ἀριθμὸν τῶν
μορίων ὑδρογόνου, τῶν περιεχομένων εἰς ἓν γραμμομόριον αὐτοῦ. Ἐστω N
ὁ ἀριθμὸς οὗτος. Ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὸν αὐτὸν ὑπολογισμὸν διὰ τὸν ἀρι-
θμὸν τῶν μορίων, τῶν περιεχομένων εἰς ἓν γραμμομόριον δξυγόνου (δηλ., εἰς
 32 gr), θὰ εὗρωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν N . Πράγματι, ἡ μᾶζα τῶν 32 gr
δξυγόνου εἶναι 16 φορὰς μεγαλυτέρα τῆς μάζης τῶν 2 gr ὑδρογόνου. Ἀλλὰ
καὶ ἡ μᾶζα τοῦ ἑνὸς μορίου δξυγόνου (μοριακὸν βάρος 32) εἶναι 16 φορὰς
μεγαλυτέρα τῆς μάζης ἑνὸς μορίου ὑδρογόνου (μοριακὸν βάρος 2), ἐπομένως
τὸ πηλίκον τῆς μάζης ἑνὸς γραμμομορίου δξυγόνου διὰ τῆς μάζης ἑνὸς μο-
ρίου δξυγόνου δίδει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν N . Ἡ παρατήρησις αὕτη εἶναι γε-
νικὴ καὶ ἰσχύει διὰ τὸ γραμμομόριον ΟΪΑΣΔΗΠΟΤΕ ΟΥΣΙΑΣ. Ἄρα,
δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἑξῆς πρότασιν:

«Ὁ ἀριθμὸς τῶν μορίων, τῶν περιεχομένων εἰς ἓν γραμμομόριον
οἷας δὴ ποτε οὐσίης, εἶναι σταθερὸς καὶ ἴσος πρὸς N ».

Πειραματικῶς προσδιορίζεται ἡ σταθερὰ αὕτη N , ἡ ὁποία καλεῖται
σταθερὰ Loschmidt, ἴση πρὸς

$$N = 6,024 \cdot 10^{23} \text{ μόρια/γραμμομόριον}$$

Σταθερὰ Avogadro (Ἀβογκάντρο). Εἰδικῶς διὰ τὰ ΑΕΡΙΑ δυνά-
μεθα νὰ ὑπολογίσωμεν καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μορίων, τῶν περιεχομένων εἰς
 1 cm^3 ὑπὸ κανονικᾶς συνθήκας, ὡς ἑξῆς: Ἐπειδὴ γνωρίζομεν ὅτι ἓν γραμ-
μομόριον οἷου δὴ ποτε αερίου, εὗρισκομένου ὑπὸ κανονικᾶς συνθή-
κας, καταλαμβάνει ὄγκον $22,4 \text{ λίτρων}$ (ἢ 22400 cm^3), ἔπεται ὅτι εἰς $22,4 \text{ λί-}$
 τρα (ἢ 22400 cm^3) θὰ περιέχωνται N μόρια. Ἄρα

$$\begin{array}{lcl} \text{εἰς } 22400 \text{ cm}^3 & \text{περιέχονται } 6,024 \cdot 10^{23} & \text{μόρια} \\ \text{εἰς } 1 \text{ cm}^3 & & x; \end{array}$$

Ὁ ὑπολογισμὸς δίδει

$$x = 26,892 \cdot 10^{18} \text{ μόρια}$$

Ἄρα, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἑξῆς πρότασιν:

«Ὁ ἀριθμὸς τῶν μορίων, τῶν περιεχομένων εἰς 1 cm^3 οἷου δὴ πο-
τε αερίου, εὗρισκομένου ὑπὸ κανονικᾶς συνθήκας, εἶναι σταθερὸς».

Ἡ σταθερὰ αὕτη καλεῖται *σταθερὰ Avogadro* καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου N_A . Ἦτοι εἶναι

$$N_A = 26,892 \cdot 10^{18} \frac{\text{μόρια}}{\text{cm}^3}.$$

§ 235. Μεταβολή της θερμοκρασίας ἐνὸς αερίου κατὰ τὴν μεταβολήν τοῦ ὅγκου του. Θεωρήσωμεν κυλινδρικὸν δοχεῖον, κλειόμενον δι' ἐμβόλου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ὑπάρχει ἓν αέριον. Ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὸν ὅγκον αὐτοῦ, κινούμεντες τὸ ἐμβόλον πρὸς τὰ ἔσω, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ θερμοκρασία τοῦ αερίου θ' αὐξηθῇ. Ἀντιστρόφως, ἐὰν αὐξήσωμεν τὸν ὅγκον τοῦ αερίου, κινούμεντες τὸ ἐμβόλον πρὸς τὰ ἔξω, τὸ αέριον ψύχεται. Τὸ φαινόμενον τοῦτο ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς: Διὰ τὰ ἐλαττώσωμεν τὸν ὅγκον τοῦ αερίου, ἐξασκοῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου μίαν δύναμιν, ἡ ὁποία, κατὰ τὴν μετακίνησιν τοῦ ἐμβόλου, παράγει ἔργον. Τὸ ἔργον τοῦτο προσλαμβάνεται ὑπὸ τοῦ αερίου καὶ μετατρέπεται εἰς θερμότητα, μὲ ἀποτέλεσμα ν' αὐξηθῇ ἡ θερμοκρασία τοῦ αερίου. Ἀντιθέτως, κατὰ τὴν μετακίνησιν τοῦ ἐμβόλου πρὸς τὰ ἔξω (αὐξήσις τοῦ ὅγκου), τὸ αέριον παράγει ἔργον καί, ὡς ἐκ τούτου, ἡ θερμοκρασία του ἐλαττοῦται.

Ἐφαρμογὴν τῆς θερμάνσεως ἐνὸς αερίου κατὰ τὴν συμπίεσιν ἔχομεν εἰς τὰς μηχανὰς *Diesel* (Ντιζέλ) διὰ τὴν αὐτανάφλεξιν τοῦ καυσίμου (§ 290), ἐφαρμογὴν δὲ τῆς ψύξεως κατὰ τὴν ἐκτόνωσιν ἔχομεν εἰς τὰς ψυκτικὰς ἐγκαταστάσεις διὰ τὴν παραγωγὴν χαμηλῶν θερμοκρασιῶν (§ 292).

★ **§ 236. Εὐρεσις τῆς σχετικῆς πυκνότητος ἐνὸς αερίου ἐκ τοῦ μοριακοῦ βάρους.** Ὅταν γνωρίζωμεν τὸ μοριακὸν βάρος ἐνὸς αερίου, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν σχετικὴν πυκνότητα αὐτοῦ. Πρὸς τοῦτο ἐκκινούμεν ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ ὅτι 22,4 λίτρα ἐνὸς αερίου, εὐρισκομένου ὑπὸ κανονικᾶς συνθήκας, ἔχουν μᾶζαν, ἴσην πρὸς 1 γραμμομόριον, δηλ., M_{gr} (ἐνθα M εἶναι τὸ μοριακὸν βάρος τοῦ αερίου). Εἶναι, λοιπόν, προφανές ὅτι ἡ πυκνότης ἐνὸς αερίου ὑπὸ κανονικᾶς συνθήκας θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$\varrho_{(gr/λίτρον)} = \frac{M_{(gr)}}{22,4 \text{ λίτρα}}. \quad (1)$$

Ἡ σχετικὴ πυκνότης ϱ_{ox} τοῦ αερίου εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, ἴση πρὸς

$$\varrho_{ox} = \frac{\varrho_{\alpha\epsilon\rho\iota\omicron\nu}}{\varrho_{\alpha\tau\mu, \alpha\eta\rho}}.$$

Ὁ τύπος οὗτος ἰσχύει ὅχι μόνον διὰ κανονικὰς συνθήκας, ἀλλὰ καὶ δι' οἰανδήποτε πίεσιν καὶ θερμοκρασίαν τοῦ αερίου, διότι, αὐξανομένης, π.χ., τῆς θερμοκρασίας, αὐξάνεται τὸ πρῶτον ἡ πυκνότης τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ αέρος, ὅσον καὶ ἡ πυκνότης τοῦ ἐλαττοῦται τόσον ἡ πυκνότης τοῦ αερίου κατὰ τὸν αὐτὸν ὅγκον. Ἐάν, λοιπόν, γράψωμεν τὴν ἑξίσωσιν (1) ἀφ' ἐνὸς μὲν διὰ τὸ αέριον, ἀφ' ἑτέρου δὲ διὰ τὸν ἀτμοσφαιρικὸν αέρα καὶ σχηματίσωμεν τὸ πηλίκον αὐτῶν, θὰ λάβωμεν διὰ τὴν σχετικὴν πυκνότητα τοῦ αερίου

$$\varrho_{ox} = \frac{M_{\alpha\epsilon\rho\iota\omicron\nu}}{M_{\alpha\tau\mu, \alpha\eta\rho}}. \quad (2)$$

Εἰς τὸν τύπον (2) τὸ σύμβολον $M_{\text{αἰμ. ὕδρ}}$ παριστᾷ τὴν μέσην τιμὴν τῶν μοριακῶν βαρῶν τῶν συστατικῶν τοῦ ἀέρος — κυρίως τοῦ ὀξυγόνου καὶ τοῦ ἀζώτου — λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν καὶ τῆς ἀναλογίας αὐτῶν. Ἐπειδὴ τὸ μοριακὸν βᾶρος τοῦ ὀξυγόνου εἶναι 32, τοῦ δὲ ἀζώτου 28, αἱ δὲ σχετικαὶ ἀναλογίαι αὐτῶν εἶναι 21% ὀξυγόνου καὶ 78% ἀζώτου, προκύπτει διὰ τὸ μέσον μοριακὸν βᾶρος τοῦ ἀέρος τιμὴ, περίπου, ἴση πρὸς 29. Ἡ ἀκριβὴς τιμὴ εἶναι 28,96. Κατὰ ταῦτα, ὁ τύπος (2) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\varrho_{\sigma\chi} = \frac{M_{\text{αἰμ. ὕδρ}}}{28,96}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κατηγορία Α'.

209) Ἀτμαγωγὸς σωλὴν ἐκ σιδήρου ἔχει μῆκος 60 m εἰς θερμοκρασίαν 0°C . Κατὰ πόσον θ' αὐξηθῇ τὸ μῆκος του, ὅταν θερμανθῇ εἰς τοὺς 100°C ;

(ΑΠ : 7,2 cm)

210) Μεταλλικὴ ράβδος, μήκους 200 cm, θερμαινομένη ἀπὸ 10°C εἰς 100°C , ὑφίσταται αὐξησην τοῦ μήκους τῆς κατὰ 3,24 mm. Ποῖος ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ μετάλλου;

(ΑΠ : $18 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$)

211) Δύο ράβδοι, μία ἐκ σιδήρου καὶ μία ἐκ ψευδαργύρου, ἔχουν, ἀντιστοίχως, μήκη 25,55 cm καὶ 25,50 cm εἰς θερμοκρασίαν 0°C . Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν αἱ δύο ράβδοι θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος;

(ΑΠ : 140°C)

212) Ποῖον διακενον πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ δύο σιδηροτροχιῶν, ἐκάστη τῶν ὁποίων ἔχει, εἰς 15°C , μῆκος 15 m, ὅταν ἡ μεγίστη θερμοκρασία τοῦ θέρους εἶναι 45°C ;

(ΑΠ : 5,4 mm)

213) Ἀέριον ἔχει ὄγκον 2 λίτρων ὑπὸ πίεσιν 760 Torr καὶ θερμοκρασίαν 0°C . Ἐὰν τοῦτο διαστέλλεται ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν (760 Torr), ποῖον ὄγκον θὰ κατέχῃ ὑπὸ θερμοκρασίαν 273°C ;

(ΑΠ : 4 lt)

214) Ἀέριον ἔχει ὄγκον 200 cm³ ὑπὸ θερμοκρασίαν 100°C . Ποῖος ὁ ὄγκος του εἰς τὴν θερμοκρασίαν 0°C , ἐὰν ἡ πίεσίς του παραμένῃ σταθερά; (ΑΠ : 146,4 cm³)

215) Φιάλη πιέσεως περιέχει ὀξυγόνο, τὸ ὁποῖον, εἰς θερμοκρασίαν 0°C , ἔχει πίεσιν 120 at. Ποία θὰ εἶναι ἡ πίεσίς του, ὅταν θερμανθῇ εἰς 100°C ;

(ΑΠ : 164 at)

Κατηγορία Β'.

216) Κατὰ πόσον μεταβάλλεται τὸ μῆκος χαλυβδίνης γεφύρας, μήκους 50 m, ἐὰν ἡ μεγίστη θερμοκρασία κατὰ τὸ θέρος εἶναι 40°C καὶ ἡ ἐλαχίστη κατὰ τὸν χειμῶνα -20°C ;

(ΑΠ : 3,3 cm)

217) Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἐνὸς τροχοῦ ἀμάξης εἶναι 90 cm. Τὸ μῆκος σιδηρᾶς στεφάνης, μετρούμενον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς, εἶναι 89,76 cm. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν πρέπει νὰ θερμανθῇ ἡ στεφάνη, διὰ νὰ περιβάλλῃ, ἀκριβῶς, τὸν τροχόν;

(ΑΠ : 223°C)

218) Σιδηρὰ ράβδος ἔχει διάμετρον 2 cm εἰς θερμοκρασίαν 25°C . Ἀφ' ἑτέρου, ὀρειχάλκινος δακτύλιος ἔχει, εἰς τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν, ἐσωτερικὴν διάμετρον 1,995 cm. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν πρέπει νὰ θερμανθοῦν ἀμφότερα, ὥστε ὁ δακτύλιος νὰ περιβάλλῃ ἀκριβῶς τὴν ράβδον;

(ΑΠ : $339,4^{\circ}\text{C}$)

219) Ἀέριον, εἰς θερμοκρασίαν 0°C , ἔχει πίεσιν 1 at. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν θὰ ἔχῃ πίεσιν 2 at, 3 at, ἐὰν ὁ ὄγκος του διατηρῇται σταθερός; (ΑΠ : 273°C , 546°C).

220) Νὰ μετατραποῦν 20°C καὶ -20°C εἰς ἀπολύτους βαθμοὺς.

(ΑΠ : 293°K , 253°K)

221) Να λυθούν αἱ ἀσκήσεις 213, 214, 215, 219 διὰ χρήσεως τῆς ἀπολύτου θερμοκρασίας («Νέαι μορφαὶ τῶν νόμων Gay - Lussac»).

222) Ἀέριον ἔχει ὄγκον $2,5 \text{ m}^3$ ὑπὸ ἀπόλυτον θερμοκρασίαν 293° K καὶ πίεσιν 1 at . Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν ὁ ὄγκος του θὰ γίνῃ 4 m^3 , ὑπὸ τὴν αὐτὴν πίεσιν; (ΑΠ: $46,88^\circ \text{ K}$)

223) Ἀέριον ἔχει ὄγκον 3 m^3 ὑπὸ θερμοκρασίαν 15° C καὶ πίεσιν 740 Torr . Τὸ αέριον θερμαίνεται εἰς 120° C καὶ ἡ πίεσίς του αὐξάνεται εἰς 1520 Torr . Ποῖος ὁ ὄγκος τοῦ αερίου; (ΑΠ: $1,990 \text{ m}^3$)

224) Ἀέριον ἔχει ὄγκον 1 λίτρον ὑπὸ πίεσιν 1 at καὶ θερμοκρασίαν -20° C . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πίεσις τοῦ αερίου, ὅταν ὁ ὄγκος του ἐλαττωθῇ εἰς τὸ ἕμισον καὶ ἡ θερμοκρασία του γίνῃ 40° C . (ΑΠ: $2,47 \text{ at}$)

225) Ποσότης ὑδρογόνου ἔχει ὄγκον 5 m^3 ὑπὸ θερμοκρασίαν 21° C καὶ πίεσιν 735 Torr . Ποῖος ὁ ὄγκος του ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας (δηλ., $\theta = 0^\circ \text{ C}$ καὶ $p = 760 \text{ Torr}$); (ΑΠ: $4,49 \text{ m}^3$)

226) Ποῖος ὁ ὄγκος 10 gr ὀξυγόνου ὑπὸ θερμοκρασίαν 27° C καὶ πίεσιν 700 Torr ; (Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸ μοριακὸν βάρος τοῦ ὀξυγόνου, τὸ ὅποιον εἶναι 32). (ΑΠ: $8,35 \text{ λίτρα}$)

227) Πόση ποσότης ὑδρογόνου ἀπαιτεῖται διὰ νὰ πληρωθῇ σφαιρικὸν δοχεῖον, διαμέτρου 10 m , ὑπὸ θερμοκρασίαν 30° C καὶ πίεσιν 755 Torr ; (Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸ μοριακὸν βάρος τοῦ ὑδρογόνου, τὸ ὅποιον εἶναι 2). (ΑΠ: $41,82 \text{ kgr}$)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΗ'

ΘΕΡΜΙΔΟΜΕΤΡΙΑ

• § 237. Μονάδες θερμότητας. Ἡ μονὰς θερμότητος καλεῖται *θερμὶς* καὶ ὀρίζεται ὡς ἑξῆς:

Μία *θερμὶς* (1 cal) εἶναι ἡ θερμότης, ἡ ἀπαιτουμένη διὰ νὰ ἀνυψώσῃ τὴν θερμοκρασίαν 1 gr ὕδατος κατὰ 1° C (ἀπὸ $14,5^\circ \text{ C}$ ἕως $15,5^\circ \text{ C}$).

Ἐκτὸς τῆς μονάδος ταύτης χρησιμοποιοῦμεν καὶ τὴν *χιλιοθερμίδα* (1 kcal). Εἶναι δὲ

$$1 \text{ kcal} = 1000 \text{ cal}.$$

• § 238. Θερμολιθῶδης νόμος τῆς θερμιδομετρίας. Γνωρίζομεν ὅτι, ὅταν προσφέρεται θερμότης εἰς ἓν σῶμα, ἡ θερμοκρασία του, κατὰ γενικὸν κανόνα, αὐξάνεται, πλὴν ἐπιδεικνύων περιπτώσεων — ὅπως, π.χ., κατὰ τὴν διάρρηκτικὴν τῆς τήξεως ἢ τῆς ζέσεως — εἰς τὰς ὁποίας διατηρεῖται σταθερά. Πειραματικῶς εὐρίσκεται ὅτι 1) ἡ θερμότης Q , ἡ ἀπαιτουμένη διὰ νὰ θερμάνῃ ἓν σῶμα, εἶναι τόσον μεγαλυτέρα, ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἐπιζητουμένη ἀνύψωσις τῆς θερμοκρασίας. Ὄττω, διὰ νὰ αὐξήσωμεν τὴν θερμοκρασίαν ἐνὸς σώματος ἀπὸ θ_1 εἰς θ_2 , πρέπει νὰ προσφέρωμεν εἰς αὐτὸ θερμότητα, ἡ ὁποία εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀνυψώσεως ($\theta_2 - \theta_1$) τῆς θερμοκρασίας. 2) Ἡ θερμότης, ἡ ἀπαιτουμένη δι' ὠρισμένην ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας ἐνὸς σώματος, εἶναι τόσον μεγαλυτέρα, ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ μᾶζα m τοῦ σώ-

ματος. 3) Ἡ θερμότης, ἡ απαιτουμένη δι' ὥρισμένην αὐξησιν τῆς θερμοκρασίας ἐνὸς σώματος δεδομένης μάζης, ἐξαρτᾶται καὶ ἐκ τοῦ ὕλικου, ἐκ τοῦ ὁποίου συνίσταται τὸ σῶμα. Οὕτω, διὰ νὰ θερμάνωμεν 1 χιλιόγραμμα ὕδατος κατὰ 1° C, ἀπαιτεῖται περισσοτέρα θερμότης, ἀπὸ τὴν απαιτουμένην διὰ τὴν θέρμανσιν, κατὰ 1° C, ἐνὸς χιλιογράμμου χαλκοῦ.

Οἱ πειραματικοὶ οὗτοι νόμοι περιγράφονται διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$Q = c \cdot m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Θερμιδιῶδης νόμος τῆς θερμιδομετρίας} \end{array} \right. \quad (1)$$

Ἡ σταθερὰ c καλεῖται **εἰδικὴ θερμότης** καὶ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὕλικου, ἐκ τοῦ ὁποίου εἶναι κατεσκευασμένος τὸ σῶμα.

Ἐὰν θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) $m = 1 \text{ gr}$ καὶ $\vartheta_2 - \vartheta_1 = 1$ βαθμοῦς Κελσίου, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ θερμότης Q ἰσοῦται ἀριθμητικῶς πρὸς τὴν εἰδικὴν θερμότητα c . Ἄρα, ἡ **εἰδικὴ θερμότης** ἐνὸς ΥΛΙΚΟΥ ἰσοῦται ἀριθμητικῶς πρὸς τὴν θερμότητα, ἡ ὁποία πρέπει νὰ προσφερθῇ εἰς 1 gr ἐκ τοῦ ὕλικου τούτου, διὰ ν' αὐξηθῇ ἡ θερμοκρασία του κατὰ 1 βαθμὸν Κελσίου.

• § 238α. **Μονὰς εἰδικῆς θερμότητος.** Διὰ νὰ ὀρίσωμεν τὴν μονάδα εἰδικῆς θερμότητος, λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (1) τῆς προηγουμένης παραγράφου ὡς πρὸς c , ὁπότε λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$c = \frac{Q}{m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)}$$

Ἐὰν θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην $Q = 1 \text{ cal}$, $m = 1 \text{ gr}$ καὶ $\vartheta_2 - \vartheta_1 = 1 \text{ grad}$, θὰ λάβωμεν τὴν μονάδα εἰδικῆς θερμότητος, ἡ ὁποία εἶναι ἡ

$$1 \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot \text{grad}} \quad (= 1 \text{ θερμὺς ἀνὰ γραμμάριον καὶ βαθμὸν}).$$

Οὕτω, π.χ., ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος εἶναι ἴση πρὸς

$$c_{\text{ὕδωρ}} = 1 \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot \text{grad}}.$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι, διὰ ν' αὐξηθῇ ἡ θερμοκρασία 1 gr ὕδατος κατὰ 1° C, πρέπει νὰ προσφέρωμεν εἰς αὐτὸ θερμότητα, ἴσην πρὸς μίαν θερμίδα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΙΔΙΚΩΝ ΘΕΡΜΟΤΗΤΩΝ

(εἰς $\text{cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$)

Μόλυβδος	0,031	Ἀργίλιον	0,214
Ὑδράργυρος	0,033	Ἑδαφος	0,22
Κασσίτερος	0,052	Πάγος	0,50
Χαλκός	0,091	Πετρέλαιον	0,51
Ὁρεῖχαλκος	0,091	Οἰνόπνευμα	0,58
Σίδηρος	0,105	Ὑδωρ	1,00

Ἐκ τοῦ ἄνω πίνακος προκύπτει ὅτι ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος εἶναι πολὺ μεγαλυτέρα τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὄλων τῶν ἄλλων ὑλικῶν. Ἐκ τούτου ἐξηγεῖται καὶ ὁ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον ἡ θάλασσα θερμαίνεται ὑπὸ τοῦ ἥλιου βραδέως, ἐν σχέσει πρὸς τὸ ἔδαφος, τοῦ ὁποῖου ἡ εἰδικὴ θερμότης εἶναι πολὺ μικροτέρα. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἡ θάλασσα διατηρεῖται σχετικῶς θερμὴ κατὰ τὸ φθινόπωρον, μὲ ἀποτέλεσμα τὸ κλίμα τῶν παραθαλασσίων περιοχῶν νὰ εἶναι ἥπιον.

§ 239. Θερμοχωρητικότης. Τὸ γινόμενον $m \cdot c$ τῆς μάζης ἑνὸς σώματος ἐπὶ τὴν εἰδικὴν θερμότητα τοῦ ὑλικοῦ, ἔκ τοῦ ὁποῖου τὸ σῶμα τοῦτο ἀποτελεῖται, καλεῖται **θερμοχωρητικότης** τοῦ ΣΩΜΑΤΟΣ. Ἐκ τῆς ἑξισώσεως (1) τῆς § 238 προκύπτει ὅτι ἡ θερμοχωρητικότης ἑνὸς σώματος ἴσούται ἀριθμητικῶς πρὸς τὴν θερμότητα, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἀυξηθῇ ἡ θερμοκρασία τοῦ σώματος τούτου κατὰ $1^\circ C$.

Μονὰς θερμοχωρητικότητος. Ἡ μονὰς αὕτη προκύπτει ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς θερμιδομετρίας, τὸν ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὴν μορφήν

$$m \cdot c = \frac{Q}{\vartheta_2 - \vartheta_1},$$

ἐὰν θέσωμεν $Q = 1 \text{ cal}$ καὶ $\vartheta_2 - \vartheta_1 = 1 \text{ grad}$. Ἡ προκύπτουσα μονὰς θερμοχωρητικότητος εἶναι ἡ

$$1 \frac{\text{cal}}{\text{grad}} (= 1 \text{ θερμὴς ἀνὰ βαθμόν}).$$

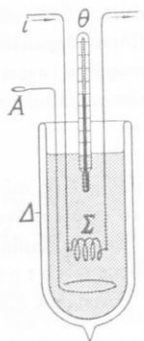
Οὕτω, λέγοντες π.χ., ὅτι μία συσκευὴ ἔχει θερμοχωρητικότητα 500 cal/grad , ἐννοοῦμεν ὅτι πρέπει νὰ προσφέρωμεν εἰς τὴν συσκευὴν ταύτην 500 θερμίδας , διὰ ν' ἀυξηθῇ ἡ θερμοκρασία τῆς κατὰ $1^\circ C$.

Τονίζομεν ὅτι ἡ θερμοχωρητικότης εἶναι μέγεθος, τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται εἰς δεδομένον σῶμα (π.χ., εἰς μίαν συσκευὴν κ.λ.), ἐνῶ ἡ εἰδικὴ θερμότης ἀναφέρεται εἰς ἓν ὑλικὸν (π.χ., εἰς τὸν χαλκόν).

• **§ 240. Θερμιδόμετρα.** Ἡ θερμιδομετρία πραγματεύεται τὴν μέτρησιν ποσῶν θερμότητος. Τὰ πρὸς τοῦτο χρησιμοποιούμενα ὄργανα καλοῦνται **θερμιδόμετρα**, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἀπλούστερον εἶναι τὸ **θερμιδόμετρον δι' ὕδατος** (σχ. 370). Τὸ θερμιδόμετρον τοῦτο ἀποτελεῖται ἐκ δοχείου A , τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ παρουσιάσῃ καλὴν θερμοκὴν μόνωσιν, ὥστε αἱ ἀπώλειαί τῆς θερμότητος νὰ εἶναι ἐλάχισται. Ὡς τοιοῦτο δοχεῖον χρησιμοποιοῦμεν τὸ καλούμενον **δοχεῖον Dewar** (Ντγιοῦαρ) (*). Ἐντὸς αὐτοῦ θέτομεν ποσό-

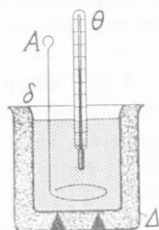
(*) Τὴν λειτουργίαν του θὰ γνωρίσωμεν κατωτέρω εἰς τὸ Κεφάλαιον Διάδοσις τῆς Θερμότητος.

τητα ὕδατος, τὸ θερμόμετρον Θ καὶ τὸν ἀναδευτήρα A , ὁ ὁποῖος χρησιμεύει διὰ τὴν ἀνάδυσιν τοῦ ὕδατος, ὥστε ἡ θερμοκρασία του νὰ εἶναι παντοῦ ἡ αὐτή.



Σχ. 370.
Θερμιδόμετρον
δι' ὕδατος.

Ἀπλούστερον θερμιδόμετρον δι' ὕδατος εἶναι τὸ ἐξῆς: Ἐντὸς βαλίνου δοχείου Δ (σχ. 371) τοποθετεῖται δευτέρου δοχείου δ , στήριζόμενον ἐπὶ τεμαχίων ἐκ φελλοῦ. Τὸ μεταξὺ τῶν δύο δοχείων διάκενον πληροῦται διὰ δυσθερμαγωγοῦ ὑλικοῦ — π.χ., μαλλίνου ὑφάσματος — διὰ ν' ἀποφεύγεται ἡ δημιουργία ρευμάτων αἵρος, τὰ ὁποῖα θ' ἀπῆγον θερμότητα. Ἐντὸς τοῦ ὕδατος τοῦ θερμιδομέτρου τοποθετεῖται, ὁμοίως, τὸ θερμόμετρον Θ καὶ ὁ ἀναδευτήρ A .



Σχ. 371. Ἀπλοῦς
τύπος θερμιδομέτρου
δι' ὕδατος.

Ἐὰν προσφέρωμεν εἰς τὸ θερμιδόμετρον θερμότητά τινα Q (π.χ., ἐμβαπίζοντες ἐντὸς τοῦ ὕδατος τὸ σύρμα Σ — σχ. 370 —, τὸ ὁποῖον θερμαίνεται δι' ἡλεκτρικοῦ ρεύματος), ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ἀνέρχεται ἀπὸ θ_1 εἰς θ_2 . Ὁ συλλογισμὸς ὅτι ἡ ὑπὸ τοῦ ἡλεκτρικοῦ ρεύματος προσφερομένη θερμότης Q εἶναι ἴση πρὸς τὴν θερμότητα, τὴν ὁποίαν ἔλαβε τὸ ὕδωρ διὰ νὰ θερμανθῇ ἐκ τῆς θερμοκρασίας θ_1 εἰς τὴν θερμοκρασίαν θ_2 , μᾶς ἐπιτρέπει νὰ γράψωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$Q = c \cdot m \cdot (\theta_2 - \theta_1)$$

ἐνθα m καὶ c εἶναι ἡ μᾶζα καὶ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος (*). Ἄν, λοιπόν, γνωρίζωμεν τὴν μᾶζαν m καὶ τὴν εἰδικὴν θερμότητα c τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ θερμιδόμετρον καὶ μετρήσωμεν τὴν διαφορὰν $(\theta_2 - \theta_1)$ τῶν θερμοκρασιῶν, εὐρίσκομεν, κατὰ τὸν ἄνω τύπον, τὴν θερμότητα Q .

§ 241. Μέθοδος τῶν μειγμάτων. Συνηθεστέρα μέθοδος μετρήσεως θερμότητος διὰ θερμιδομέτρων εἶναι ἡ μέθοδος τῶν μειγμάτων, τῆς ὁποίας ἡ ἀρχὴ εἶναι ἡ ἐξῆς: Ἐὰν δύο σώματα, εὐρισκόμενα εἰς διαφόρους θερμοκρασίας, ἔλθουν εἰς θερμικὴν ἐπαφήν, θὰ μεταβῇ θερμότης ἐκ τοῦ σώματος ὑψηλοτέρας θερμοκρασίας πρὸς τὸ σῶμα χαμηλοτέρας θερμοκρασίας, μέχρις ὅτου αἱ θερμοκρασίαι τῶν δύο σωμάτων ἐξισωθῶν. Εἶναι φανερόν ὅτι ὅσην θερμότητα θὰ ἔχῃ χάσει τὸ θερμότερον σῶμα, θὰ τὴν ἔχῃ κερδίσει τὸ ψυχρότερον.

(*) Εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην θεωροῦμεν ἀμελητέαν τὴν θερμότητα, τὴν ὁποίαν ἀπορροφᾷ τὸ δοχεῖον, τὸ θερμόμετρον, ὁ ἀναδευτήρ κ.λ., καθὼς καὶ τὴν ἀπώλειαν θερμότητος εἰς τὸ περιβάλλον.

Ἡ ειδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος εἶναι $c = 1 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$. Θέτοντες εἰς τὸν ἄνω τύπον $m = 500 \text{ gr}$, $c = 1 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, $\theta = 20^\circ \text{ C}$, $\theta_{\text{ελ}} = 24,3^\circ \text{ C}$, $m' = 140 \text{ gr}$ καὶ $\theta' = 100^\circ \text{ C}$, εὐρίσκομεν τὴν ειδικὴν θερμότητα τοῦ ἀργιλίου, ἴσην πρὸς

$$c' = 0,2 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}.$$

β) *Μέτρησις τῆς ειδικῆς θερμότητος τῶν ὑγρῶν.* Τὴν μέθοδον τῶν μειγμάτων δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ εἰς τὴν περιπτῶσιν τῶν ὑγρῶν: Τὸ ὑγρὸν τίθεται ἐντὸς λεπτοτοίχου μεταλλίνου δοχείου, τὸ ὁποῖον, ἀφοῦ θερμανθῇ εἰς γνωστὴν θερμοκρασίαν, φέρεται ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου. Πρέπει, ὅμως, κατὰ τὴν κατάστρωσιν τῆς ἐξισώσεως, νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν καὶ ἡ θερμοχωρητικότης τοῦ μεταλλίνου δοχείου.

★ § 242. *Εἰδικαὶ θερμότητες τῶν ἀερίων.* Ἐν ἀέριον δύναται νὰ θερμανθῇ κατὰ διαφόρους τρόπους: Π.χ., εἶναι δυνατόν νὰ θερμαίνεται, ἐνῶ ταυτοχρόνως ἡ πίεσις του νὰ διατηρῆται σταθερά, ὅποτε αὐξάνεται ὁ ὄγκος του (διάταξις τοῦ σχήματος 362) ἢ εἶναι δυνατόν ὁ ὄγκος νὰ διατηρῆται σταθερὸς, ὅποτε θ' αὐξάνεται ἡ πίεσις (διάταξις τοῦ σχήματος 364). Ὅπως, ὅμως, εὐρίσκεται (βλ. κατωτέρω), ἡ θερμότης, ἡ ἀπαιτουμένη διὰ ν' αὐξηθῇ ἡ θερμοκρασία 1 gr ἐνὸς αερίου κατὰ 1° C , δὲν εἶναι ἡ ἴδια εἰς τὰς δύο περιπτώσεις. Ἐνεκα τούτου, εἰς τὰ αέρια ὑπάρχουν δύο εἰδικαὶ θερμότητες.

α) *Εἰδικὴ θερμότης ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν* *cp*. Αὕτη ἰσοῦται ἀριθμητικῶς πρὸς τὴν θερμότητα, ἡ ὁποία πρέπει νὰ προσφερθῇ εἰς 1 gr ἐνὸς αερίου διὰ ν' αὐξηθῇ ἡ θερμοκρασία του κατὰ 1° C , ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ πίεσις του παρέμεινε σταθερὰ κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς θερμάνσεως.

β) *Εἰδικὴ θερμότης ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον* *cv*. Αὕτη ἰσοῦται ἀριθμητικῶς πρὸς τὴν θερμότητα, ἡ ὁποία πρέπει νὰ προσφερθῇ εἰς 1 gr ἐνὸς αερίου διὰ ν' αὐξηθῇ ἡ θερμοκρασία του κατὰ 1° C , ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὁ ὄγκος του παρέμεινε σταθερὸς κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς θερμάνσεως.

Ὅπως εὐρίσκεται, εἰς ὅλα τὰ αέρια ἡ εἰδικὴ θερμότης ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν *cp* εἶναι μεγαλύτερα τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον *cv*. Ἦτοι εἶναι

$$c_p > c_v$$

Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ἑξῆς: Ὅταν ὁρισμένη ποσότης αερίου θερμαίνεται ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον, ἡ προσφερομένη θερμότης ἀνυψώνει μόνον τὴν θερμοκρασίαν. Ἐνῶ, ὅταν ἡ ποσότης αὕτη θερμαίνεται ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν, τὸ αέριον διαστέλλεται (ὁ ὄγκος του, δηλ., αὐξάνεται) καὶ παράγει ἔργον. Ἀκριβῶς διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ ἔργου τούτου καταναλίσκεται τὸ ἐπὶ πλέον ποσὸν θερμότητος

Ἐφ' ὅσον εἶναι πάντοτε $c_p > c_v$, ἔπεται ὅτι ὁ λόγος $\gamma = c_p : c_v$ τῶν δύο εἰδικῶν θερμότητων θὰ ἔχῃ τιμὴν, μεγαλυτέραν τῆς μονάδος. Ἡ τιμὴ αὕτη ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀτόμων, τῶν περιεχομένων εἰς τὸ μόριον. Οὕτω, ἡ τιμὴ τοῦ γ διὰ τὰ μονατομικά αέρια (π.χ., ἥλιον He , ἀργὸν A κ.λ.) εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς διὰ τὰ διατομικά αέρια (π.χ., ὕδρογόνον H_2 , ὀξυγόνον O_2 , ἄζωτον N_2). Ἀκόμη μικροτέραν τιμὴν ἔχει τὸ γ εἰς τὰ τριτομικά αέρια (π.χ., διοξειδίον τοῦ ἄνθρακος, ὅζον).

Ἐκ τῶν δύο εἰδικῶν θερμότητων ἡ εἰδικὴ θερμότης ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν (*cp*).

Φύναται νά μετρηθῇ εὐκόλως — π.χ., διὰ θερμοιδόμετρον — ἑνὼ ἡ ἄλλη (c_p) εὐρίσκειται ἐμμέσως, ἐάν μετρησώμεν τὸν λόγον γ καὶ τὴν εἰδικὴν θερμότητα c_p .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΙΔΙΚΩΝ ΘΕΡΜΟΤΗΤΩΝ
ΑΕΡΙΩΝ ΤΙΝΩΝ
(εἰς $\text{cal. gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$)

	c_p	c_v	$\gamma = c_p/c_v$
Ἡλιον	1,250	0,753	1,66
Ἀργὸν	0,125	0,075	1,65
Υδρογόνον	3,389	2,403	1,41
Ὄξυγόνον	0,218	0,155	1,40
Ἀζωτον	0,248	0,177	1,40
Διοξείδ. ἀνθρακος	0,199	0,153	1,30
Ἀμμωνία	0,523	0,399	1,31

§ 243. Πηγαί θερμότητας. Ἡ σπουδαιότερα πηγὴ θερμότητος τόσον διὰ τὴν ἐν γένει οἰκονομίαν τῆς φύσεως, ὅσον καὶ διὰ τὸν ἄνθρωπον εἶναι ὁ Ἡλιος. Ἡ ἄσχος, τὴν ὁποίαν δέχεται ἐκ τοῦ Ἡλίου ἐν τετραγωνικῷ μέτρῳ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς, εἶναι, περίπου, ἴση πρὸς 1 kW .

Τὴν θερμότητα, τὴν ὁποίαν χρειάζομεθα διὰ τὰς ἀνάγκας τῆς καθημερινῆς ζωῆς, λαμβάνομεν κυρίως ἐκ τῆς καύσεως τῶν διαφόρων καυσίμων (ξύλον, ἄνθρακίτης, πετρέλαιον, βενζίνη, φωταέριον, ὑγραέριον κ.λ.).

Εἰς ὁρισμένας περιπτώσεις, ἡ θερμότης λαμβάνεται ἐκ μιᾶς ἠλεκτρικῆς ἀντιστάσεως, διαρροεμένης ὑπὸ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος. Οὕτω, π.χ., ἡ θερμότης, τὴν ὁποίαν παρέχουν αἱ ἠλεκτρικαὶ θερμάστραι, οἱ ἠλεκτρικοὶ κλίβανοι, αἱ ἠλεκτρικαὶ κουζίνα κ.λ., παράγεται κατ' αὐτόν, ἀκριβῶς, τὸν τρόπον.

Κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη ἤρχισε χρησιμοποιουμένη καὶ ἡ ἀτομικὴ ἐνέργεια, ἡ ὁποία λαμβάνεται ἐκ τῆς σχάσεως τοῦ οὐρανίου ἐντὸς τῶν ἀτομικῶν ἀντιδραστήρων. (Ἡ λειτουργία τῶν ἀτομικῶν ἀντιδραστήρων περιγράφεται εἰς τὸν β' τόμον τοῦ ἀνά χειρὸς βιβλίου).

§ 244. Θερμότης καύσεως. Διὰ τὸν καθορισμὸν τῆς ποιότητος ἐνὸς καυσίμου ἀπαιτεῖται ἡ γνῶσις τῆς **θερμότητος καύσεως**, ἡ ὁποία ὀρίζεται ὡς τὸ πηλίκον τῆς θερμότητος, ἡ ὁποία ἀποδίδεται ὑπὸ μάζης τίνος τῆς οὐσίας, ὅταν αὕτη καίεται τελείως, διὰ τῆς μάζης ταύτης. Ἡ θερμότης καύσεως ἰσοῦται ἀκριβῶς πρὸς τὴν θερμότητα, ἡ ὁποία ἀποδίδεται ὑπὸ μάζης τῆς οὐσίας, ἴσης πρὸς 1 gr , ὅταν αὕτη καίεται τελείως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΘΕΡΜΟΤΗΤΩΝ ΚΑΥΣΕΩΣ
(εἰς cal/gr)

Πετρέλαιον	11300	Κὼκ	7000
Βενζίνη	10500	Φωταέριον	$6800 (= 4,5 \text{ cal/lit})$
Ἀνθρακίτης	8500	Λιγνίτης	$3000 \div 5000$
Λιθάνθραξ	7500	Ξύλον	$3000 \div 4000$

Αί διάφοροι τροφαί, εἰσαγόμενοι ἐντὸς τοῦ ὀργανισμοῦ, ὑφίστανται βραδεῖαν καυσιν (δξείδωσις), λόγῳ τῆς ὁποίας ἀναπτύσσεται θερμότης, ἀντιπροσωπεύουσα τὴν ἐνέργειαν, τὴν ἀπαιτουμένην διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ σώματος, τὴν ἐργασίαν καὶ τὴν διατήρησιν εἰς ὑγιᾶ κατὰστασιν. Εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα ἀναγράφονται αἱ τιμαὶ τῆς θερμότητος καύσεως εἰς *θερμίδας ἀνὰ γραμμάριον* (*cal/gr*), ἡ ὁποία παράγεται κατὰ τὴν ἀφομοίωσιν τῶν τροφῶν ἐντὸς τοῦ σώματος.

Εἶδος τροφῆς	cal/gr	Εἶδος τροφῆς	cal/gr
Βούτυρον νωπὸν	7600	Φασόλια	2570
Σάκχαρον	4100	Κρέας	1500 ÷ 3000
Τυρὸς	3900	Γεώμηλα	950
* Οὐρζα	3400	Οἶνος	650
* Ἀρτος λευκός	2580	Λαχανικά	150 ÷ 350

§ 245. Θερμότης διαλύσεως. Πολλὰ στερεὰ σώματα, τιθέμενα ἐντὸς ὑγρῶν, διαλύονται. Τὸ πείραμα δεικνύει ὅτι διὰ τὴν διάλυσιν ἀπαιτεῖται θερμότης. Τὸ πηλίκον τῆς θερμότητος, τῆς ἀπαιτουμένης διὰ τὴν διάλυσιν μάζης τινος μιᾶς οὐσίας, διὰ τῆς μάζης ταύτης καλεῖται **θερμότης διαλύσεως**. Ἐφ' ὅσον ἡ θερμότης αὕτη δὲν προσφέρεται ἔξωθεν, λαμβάνεται ἐκ τοῦ διαλυτικοῦ μέσου, τὸ ὅποιον, οὕτω, ψύχεται. Οὕτω, ἐὰν ἀναμείξωμεν τρία μέρη πάγου καὶ ἓν μαγειρικοῦ ἁλατος, ἡ θερμοκρασία πίπτει εἰς τοὺς -20°C . Διὰ τοιούτων **ψυκτικῶν μειγμάτων** ἐπιτυγχάνονται αἱ χαμηλαὶ θερμοκρασίαι, αἱ ἀπαιτούμεναι κατὰ τὴν παρασκευὴν τῶν παγωτῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κατηγορία Α'.

228) Πόση θερμότης ἀπαιτεῖται, ἵνα ἀνυψώσῃ, κατὰ 100°C , τὴν θερμοκρασίαν $4,5 \text{ kg}$ χαλκοῦ ; (ΑΠ : $40,95 \text{ kcal}$)

229) Πόση θερμότης ἀπαιτεῖται, διὰ ν' ἀνυψώσῃ τὴν θερμοκρασίαν 50 λίτρων ὕδατος ἀπὸ 50°F εἰς 85°F ; (ΑΠ : 972 kcal)

230) Πόση θερμότης ἀπαιτεῖται, διὰ νὰ θερμάνῃ 6 kg πάγου ἀπὸ -25°C εἰς 0°C ; (ΑΠ : 75 kcal)

231) Ἐὰν ἀναμυχθοῦν 100 gr ὕδατος, θερμοκρασίας 90°C , μετὰ 40 gr ὕδατος, θερμοκρασίας 10°C , ποία θὰ εἶναι ἡ τελικὴ θερμοκρασία ; (ΑΠ : $67,1^{\circ} \text{C}$)

232) Τεμάχιον ἐκ κράματος τινος, μάζης $0,2 \text{ kg}$, θερμαίνεται εἰς θερμοκρασίαν 100°C καί, ἀκολούθως, ρίπτεται ἐντὸς θερμοδομέτρου, περιέχοντος 100 cm^3 ὕδατος, θερμοκρασίας 10°C . Ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἶναι 35°C . Ποία ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ κράματος ; (ΑΠ : $0,19 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$)

233) Τεμάχιον σιδήρου, μάζης 15 kg , θερμαίνεται ἐντὸς κλιβάνου καί, ἀκολούθως, ρίπτεται ἐντὸς δοχείου, περιέχοντος 50 kg ἐλαίου, θερμοκρασίας 22°C , ὅποτε ἡ θερμοκρασία του ἀνέρχεται εἰς $46,5^{\circ} \text{C}$. Ἐὰν ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ἐλαίου εἶναι $0,45 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$, νὰ εὑρεθῇ ἡ θερμοκρασία τοῦ κλιβάνου. (ΑΠ : $396,4^{\circ} \text{C}$)

234) Ἀναμειγνύομεν ποσότητα οἰνοπνεύματος, θερμοκρασίας 30°C , μετὰ τινος ποσότητος ὕδατος, θερμοκρασίας 12°C . Ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἶναι 20°C . Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν μαζῶν τοῦ οἰνοπνεύματος καὶ τοῦ ὕδατος. (ΑΠ : $1,38 : 1$)

235) Πόσον ὕδωρ, θερμοκρασίας 18°C , καὶ πόσον, θερμοκρασίας 95°C , πρέπει νὰ λάβωμεν, ὥστε νὰ σχηματίσωμεν μείγμα, μάζης 350 gr καὶ θερμοκρασίας 25°C ; (ΑΠ: $318,2 \text{ gr}$, $31,8 \text{ gr}$)

236) Πόση ποσότης ἀνθρακίτου ἀπαιτεῖται, ἵνα θερμάνῃ 20 λίτρα ὕδατος ἀπὸ 20°C εἰς 80°C ; (ΑΠ: 141 gr)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΘ'

ΜΕΤΑΒΟΛΑΙ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

§ 246. Αἱ τρεῖς καταστάσεις τῆς ὕλης. Ἡ ὕλη παρουσιάζεται ὑπὸ τρεῖς καταστάσεις· τὴν στερεάν, τὴν ὑγρὰν καὶ τὴν ἀέριον. Καὶ εἰς μὲν τὴν στερεάν κατάστασιν οἱ δομικοὶ λίθοι (ἄτομα ἢ μόρια) εἶναι, ὡς εἶδομεν καὶ εἰς τὴν § 173, κανονικῶς διατεταγμένοι καὶ σχηματίζουν κρυστάλλους. Εἰς ὁρισμένας περιπτώσεις οἱ κρυστάλλοι ἀναγνωρίζονται διὰ γυμνοῦ ὀφθαλμοῦ, διότι σχηματίζουν ἐξωτερικῶς εὐκρινεῖς ἐπιπέδους ἐπιφανείας. Τοιαύτας ἐπιπέδους ἐπιφανείας δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν εἰς τὸ κοινὸν σάκχαρον, τὸ χλωριούχον νάτριον κ.λ. Τελείως διαμορφωμένους κρυστάλλους ἀνευρίσκομεν εἰς πολλὰ ὀρυκτά. Εἰς ἄλλας, ὅμως, περιπτώσεις (ὅπως, π.χ., εἰς τὰ μέταλλα) οἱ κρυστάλλοι δὲν εἶναι ὁρατοὶ διὰ γυμνοῦ ὀφθαλμοῦ.

Εἰς τὴν ὑγρὰν κατάστασιν — ὅπως φαίνεται καὶ εἰς τὸ σχῆμα 293, II — ἐξαφανίζεται ἡ κανονικότης εἰς τὴν διάταξιν τῶν δομικῶν λίθων, οἱ ὅποιοι δύνανται, πλεόν, νὰ ὀλισθαίνουν οἱ μὲν ἐπὶ τῶν δέ.

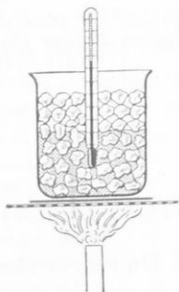
Εἰς τὰ ἀέρια, τέλος, τὰ μόρια — εὐρισκόμενα εἰς μεγάλας ἀποστάσεις μεταξύ των (σχ. 293, III) — κινούνται ἀτάκτως πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις.

Ἡ κατάστασις, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἐμφανίζεται ἓν σῶμα, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς ἐπικρατούσας ἐξωτερικὰς συνθήκας πίεσεως καὶ θερμοκρασίας. Ἐὰν αὗται μεταβληθῶν, εἶναι δυνατόν ἓν σῶμα, τὸ ὁποῖον ὑπὸ συνήθεις συνθήκας εἶναι στερεόν, νὰ μετατραπῇ εἰς ὑγρὸν καὶ ἀντιστρόφως. Ὅμοίως, ἓν ὑγρὸν δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς ἀέριον ἢ ἐν ἀέριον εἰς ὑγρόν.

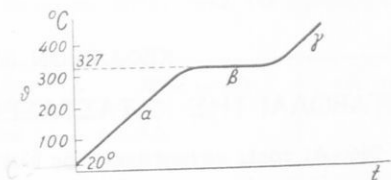
Εἰς τὰ κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν, ἀκριβῶς, τὰς τοιαύτας μεταβολὰς τῆς καταστάσεως τῶν διαφόρων σωμάτων καί, συγκεκριμένως, ποῖαν ἐπίδρασιν ἔχουν ἐπ' αὐτῶν αἱ μεταβολαὶ τῆς θερμοκρασίας καὶ τῆς πίεσεως.

§ 247. Τῆξις. Ἐντὸς δοχείου θέτομεν μικρὰ τεμάχια πάγου, ὀλίγον ὕδωρ καὶ θερμόμετρον (σχ. 372). Μετ' ὀλίγον, τὸ θερμόμετρον δεικνύει 0°C . Ἀκολούθως, θερμαίνομεν τὸ δοχεῖον καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ὁ πάγος ἀρχίζει νὰ τήκεται — μετατρέπεται, δηλ., εἰς ὕδωρ — ἐνῶ τὸ θερμόμετρον ἀρκίζει νὰ τήκεται — μετατρέπεται, δηλ., εἰς ὕδωρ. Ἐὰν δεικνύει διαρκῶς 0°C , μέχρις ὅτου ὅλος ὁ πάγος μετατραπῇ εἰς ὕδωρ. Ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν τὴν θέρμανσιν (τοῦ ὕδατος πλεόν), ἡ θερμοκρασία ἀρχίζει νὰ ἀνέρχεται. Ὅμοίως, ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὸ πείραμα, θερμαίνοντες μόλυνον, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, ἐνῶ ἀρχικῶς ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀνέρχεται,

μετά τινα χρόνον παύει ἀνερχομένη καὶ παραμένει σταθερά, ἐνῶ, ταυτοχρόνως, ὁ στερεὸς μολύβδος ἀρχίζει νὰ τήκεται. Μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου τὸ ποσοστὸν τοῦ μολύβδου, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται εἰς ὑγρὴν κατάσταση, γίνεται διαρκῶς μεγαλύτερον, μέχρις



Σχ. 372. Πείραμα διὰ τὴν παρακολούθησιν τῆς τήξεως τοῦ πάγου.



Σχ. 373. Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς τήξεως ἡ θερμοκρασία τοῦ μολύβδου διατηρεῖται σταθερὰ (327° C).

ὅτου ὅλος ὁ στερεὸς μολύβδος μετατραπῇ εἰς ὑγρόν. Ἀπὸ τῆς στιγμῆς ἐκείνης καὶ ἐξῆς ἡ θερμοκρασία τοῦ ὑγροῦ μολύβδου ἀρχίζει νὰ ἀνέρχεται ἐκ νέου.

Ἐάν, κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ πειράματος, μετρήσωμεν τὴν θερμοκρασίαν θ συναρτήσῃ τοῦ χρόνου t καὶ παραστήσωμεν γραφικῶς τὰ ἀποτελέσματα τῆς μετρήσεως, θὰ λάβωμεν τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 373. Παρατηροῦντες τὸ διάγραμμα τοῦτο, εὐρίσκομεν ὅτι, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t=0$, ἡ θερμοκρασία εἶναι ἴση πρὸς 20° C - τὸ θερμομέτρον, δηλ., δεικνύει τὴν θερμοκρασίαν τοῦ περιβάλλοντος. Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς θερμάνσεως τοῦ στερεοῦ μολύβδου, ἡ θερμοκρασία του ἀνέρχεται (τιμὴμα α τῆς καμπύλης), ἐνῶ, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς τήξεως, ἡ θερμοκρασία παραμένει σταθερὰ (τιμὴμα β τῆς καμπύλης). Ὅταν, τέλος, ὅλος ὁ μολύβδος μετατραπῇ εἰς ὑγρόν, ἡ θερμοκρασία ἀρχίζει νὰ ἀνέρχεται ἐκ νέου (τιμὴμα γ).

Τὸ περιγραφέν φαινόμενον, κατὰ τὸ ὁποῖον ἐν στερεόν, θερμαινόμενον, μετατρέπεται εἰς ὑγρόν (τήκεται), καλεῖται **τήξις**, ἡ δὲ σταθερὰ θερμοκρασία, εἰς τὴν ὁποίαν τοῦτο τήκεται, **θερμοκρασία τῆς σημείου τήξεως**. Τὸ σημεῖον τήξεως ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ τηχομένου ὕλικου.

Ἐκ τῶν λεχθέντων προκύπτει ὅτι, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς τήξεως, μέρος τῆς οὐσίας εὐρίσκεται εἰς στερεὰν κατᾶστασιν καὶ μέρος εἰς ὑγρὴν. Ἄρα, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς τήξεως, ἐντὸς τοῦ δοχείου συνυπάρχουν στερεὸν καὶ ὑγρόν.

Θερμότης τήξεως. Ἐκ τῶν περιγραφέντων πειραμάτων γεννᾶται τὸ ἐξῆς ἐρώτημα: Διὰ τί, μολοντί προσφέρεται διαρκῶς θερμότης εἰς τὸ μείγμα πάγου· ὕδατος (ἢ τὸν μολύβδον), ἡ θερμοκρασία των δὲν ἀνέρχεται; Ἡ ἀπάντησις εἶναι ἡ ἐξῆς: Ἡ προσφερομένη θερμότης καταναλίσκεται διὰ τὴν μετατροπὴν τοῦ στερεοῦ πάγου εἰς ὕδωρ (ἢ τοῦ στερεοῦ μολύβδου εἰς ὑγρόν μολύβδον). Ὅταν, ὅμως, ὅλος ὁ πάγος ταχῇ καὶ ἐξακολουθοῦμεν νὰ προσφέρωμεν θερμότητα, ἡ θερμότης αὕτη χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν θερ-

μανσιν τοῦ ὕδατος πλέον καί, ὥς ἐκ τούτου, ἡ θερμοκρασία του θ' ἀρ-
χίσῃ ν' ἀνέρχεται.

Ὅπως εὐρίσκεται, ἡ θερμότης Q , ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ νὰ τακῇ
μᾶζα m ἐκ τινος ὕλικου, εὐρισκομένου εἰς τὴν θερμοκρασίαν τήξεως, εἶναι
ἀνάλογος τῆς μάζης m αὐτοῦ. Ἦτοι

$$Q = \lambda \cdot m \quad (1)$$

ἐνθα λ εἶναι μία σταθερά, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὕλικου καὶ καλεῖται
θερμότης τήξεως (*).

Ἐκ τοῦ τύπου (1) προκύπτει ὅτι ἡ θερμότης τήξεως ἑνὸς ὕλικου ἰσοῦ-
ται ἀριθμητικῶς πρὸς τὴν θερμότητα, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ νὰ
τακῇ 1 gr ἐκ τοῦ ὕλικου τούτου, εὐρισκομένου εἰς τὴν θερμοκρασίαν τήξεως.

Μονὰς θερμότητος τήξεως. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς λ ,
λαμβάνομεν

$$\lambda = \frac{Q}{m}.$$

Ἐὰν θέσωμεν εἰς τὸν ἄνω τύπον $Q = 1\text{ cal}$ καὶ $m = 1\text{ gr}$, θὰ λάβωμεν
τὴν μονάδα θερμότητος τήξεως, ἡ ὁποία εἶναι ἡ

$$1 \frac{\text{cal}}{\text{gr}} (= 1 \text{ θερμὴς ἀνὰ γραμμάριον}).$$

Παράδειγμα: Ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου εἶναι ἴση πρὸς 80 cal/gr .
Τοῦτο σημαίνει ὅτι διὰ νὰ τακῇ ἓν γραμμάριον πάγου, θερμοκρασίας 0°C ,
πρέπει νὰ προσφερθῇ εἰς αὐτὸ θερμότης, ἴση πρὸς 80 θερμίδας .

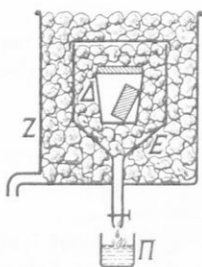
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΘΕΡΜΟΤΗΤΩΝ ΤΗΞΕΩΣ (εἰς cal/gr)

Μόλυβδος	5,86	Χαλκὸς	41
Κασσίτερος	14	Σίδηρος	66
Παραφίνη	35	Ὑδρὸς (πάγος)	80

• § 248. **Θερμιδόμετρον τῶν Lavoisier καὶ Laplace (Λαβουαζιέ-Λα-
πλάς).** Ἡ λειτουργία τοῦ θερμιδομέτρου τούτου στηρίζεται ἐπὶ τῆς θερμότητος τή-
ξεως τοῦ πάγου. Τὸ ὄργανον τοῦτο ἀποτελεῖται, κατ' ἀρχήν, ἐκ μεταλλίνου δοχείου A
(σχ. 374), τὸ ὁποῖον περιβάλλεται ὑπὸ τετριμμένου πάγου, περιεχομένου εἰς τὸ δο-
χεῖον E . Τὰ δύο ταῦτα δοχεῖα εὐρίσκονται ἐντὸς τρίτου δοχείου Z , τὸ ὁποῖον πε-
ριέχει, ὁμοίως, τεμάχια πάγου, ὥστε ἡ θερμοκρασία τῶν τοιχωμάτων τοῦ δοχείου E
νὰ διατηρῇται σταθερά εἰς τοὺς 0°C . Διὰ νὰ εὐρωμεν τὴν εἰδικὴν θερμότητα ἑνὸς

(*) Ἡ θερμότης τήξεως καλεῖται καὶ **λανθάνουσα θερμότης τήξεως**. Ἡ ὀνομα-
σία «λανθάνουσα» προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι ἡ θερμότης τήξεως δὲν γίνεται ἀντιλη-
πτὴ διὰ θερμομέτρου, διότι, ὡς εἶδομεν, δὲν προκαλεῖ ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας
τοῦ σώματος.

ὕλικου, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἀφοῦ, διὰ ζυγίσεως, εὗρωμεν τὴν μᾶζαν m ἐνός



Σχ. 374.

σώματος ἐκ τοῦ ὕλικου τούτου, τὸ θερμαίνομεν εἰς γνωστήν θερμοκρασίαν θ (π.χ., εἰς ἀτμούς ζέοντος ὕδατος) καί, ἀκολουθῶς, τὸ ρίπτομεν ἐντὸς τοῦ δοχείου Δ. Τὸ σῶμα ψύχεται βαθμῆδόν ἐκ τῆς θερμοκρασίας θ εἰς τὴν θερμοκρασίαν $\theta^{\circ} C$, ἡ δὲ ἀποβαλλομένη ὑπ' αὐτοῦ θερμότης τῇκει ὠρισμένην ποσότητα πάγου, μάζης M , ἡ ὁποία, μετατρεπομένη εἰς ὕδωρ, θερμοκρασίας $\theta^{\circ} C$, συλλέγεται ἐντὸς τοῦ ποτηρίου Π.

Ἐὰν c_x εἶναι ἡ ζητούμενη εἰδικὴ θερμότης, ἡ θερμότης Q , τὴν ὁποίαν παρέσχε τὸ σῶμα εἰς τὸν πάγον διὰ τὴν τῆξιν αὐτοῦ, εἶναι ἰση πρὸς

$$Q = c_x \cdot m \cdot \theta.$$

Ἡ θερμότης αὕτη εἶναι ἰση πρὸς τὴν θερμότητα, τὴν ὁποίαν παρέλαβεν ὁ πάγος διὰ νὰ ταχῇ καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἰση πρὸς $\lambda \cdot M$, ἔνθα λ εἶναι ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου. Ἐπομένως, ἔχομεν τὴν ἑξίσωσιν

$$c_x \cdot m \cdot \theta = \lambda \cdot M.$$

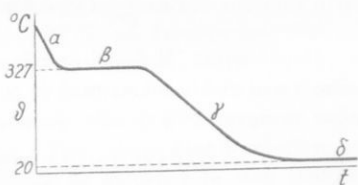
Ἐκ τῆς ἑξισώσεως ταύτης προκύπτει διὰ τὴν ζητούμενην εἰδικὴν θερμότητα c_x :

$$c_x = \frac{\lambda \cdot M}{m \cdot \theta}.$$

§ 249. Πῆξις. Ἐντὸς δοχείου θέτομεν ποσότητα τινα στερεοῦ μολύ-

βδου, τὸν ὁποῖον θερμαίνομεν ὑπεράνω τοῦ σημείου τήξεως. Ἐάν, ἀκολουθῶς, ἀφήσωμεν τὸν ὑγρὸν μόλυβδον εἰς ψυχρότερον περιβάλλον, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι κατ' ἀρχὰς ἡ θερμοκρασία του ἐλαττοῦται (τμῆμα α τῆς καμπύλης τοῦ σχήματος 375), διότι ὁ μόλυβδος χάνει θερμότητα, ἡ ὁποία ἀποδίδεται εἰς τὸ περιβάλλον· μετ' ὀλίγον, ὅμως, ἡ θερμοκρασία παύει νὰ ἐλαττοῦται — διατηρεῖται, δηλ., σταθερὰ (τμῆμα β) — ἐνῶ ταυτοχρόνως ὁ ὑγρὸς μόλυβδος ἀρχίζει νὰ στερεοποιεῖται. Ἡ θερμοκρασία διατηρεῖται σταθερὰ, μέχρις ὅτου στερεοποιηθῇ ὅλος ὁ μόλυβδος. Τὴν σταθερὰν ταύτην θερμοκρασίαν καλοῦμεν **σημεῖον πήξεως**, ὅπως δὲ εὐρίσκεται, εἶναι ἡ αὕτη ἀκριβῶς μετ' ὁ σημείου τήξεως. Ὅταν στερεοποιηθῇ ὅλος ὁ μόλυβδος, ἡ θερμοκρασία του ἀρχίζει νὰ κατέρχεται (τμῆμα γ τῆς καμπύλης), μέχρις ὅτου φθάσῃ τὴν θερμοκρασίαν τοῦ περιβάλλοντος (π.χ., $20^{\circ} C$), τὴν ὁποίαν ἔκτοτε καὶ διατηρεῖ (τμῆμα δ).

Κατὰ τὴν πῆξιν, τὰ σώματα ἀποδίδουν θερμότητα εἰς τὸ περιβάλλον, ἀκριβῶς ἴσην πρὸς τὴν θερμότητα, τὴν ὁποίαν παρέλαβον διὰ νὰ τακοῦν. Οὕτω, 1 gr ὕδατος, ὅταν στερεοποιηθῇ καὶ γίνῃ πάγος $0^{\circ} C$, θ' ἀποδώσῃ θερμότητα, ἴσην πρὸς 80 θερμίδας.



Σχ. 375. Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς πήξεως ἡ θερμοκρασία τοῦ μολύβδου διατηρεῖται σταθερὰ ($327^{\circ} C$).

Εἶδομεν ὅτι, εἰς θερμοκρασίαν, μεγαλυτέραν τοῦ σημείου τήξεως, ἡ οὐσία εὐρίσκεται μόνον ὑπὸ τὴν ὑγρὰν μορφήν, ἐνῶ εἰς μικροτέραν, μόνον ὑπὸ στερεὰν μορφήν. Κατὰ τὴν διάρκειαν, ὅμως, τῆς πήξεως ὑπάρχει καὶ στερεὸν καὶ ὑγρὸν. Ἐπομένως, εἰς τὴν θερμοκρασίαν πήξεως συνυπάρχουν καὶ ἡ στερεὰ καὶ ἡ ὑγρὰ κατάστασις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΗΞΕΩΣ ΚΑΙ ΠΗΞΕΩΣ
(εἰς °C)

Οἰνόπνευμα	-114	Κασσίτερος	232
Ύδραργυρος	-39	Μόλυβδος	327
Θαλάσσιον ὕδωρ	-2,5	Σίδηρος	1500
Ύδωρ	0	Βολφράμιον	3370

★ ★ § 250. Ύστερσις πήξεως. "Όταν ἐν ὑγρὸν ψύχεται, εἶναι δυνατόν νά παρατηρήσωμεν ὅτι, μοιλονότι ἡ θερμοκρασία του κατῆλθε κάτω τοῦ σημείου πήξεως, τοῦτο διατηρεῖται ἀκόμη εἰς ὑγρὰν κατάστασιν. Τὸ φαινόμενον τοῦτο καλεῖται *ὑστερσις πήξεως*. Οὕτω, ἐὰν ἐπὶ ὑαλίνης πλακὸς τήξωμεν μικρότατα τεμάχια θείου (σημεῖον τήξεως 115° C) καὶ τ' ἀφήσωμεν ἀκίνητα, εἶναι δυνατόν αἱ σταγόνες τοῦ θείου νά ψυχθοῦν εἰς θερμοκρασίαν, πολὺ χαμηλοτέραν τοῦ σημείου πήξεως, καὶ νά διατηροῦνται ἀκόμη εἰς ὑγρὰν μορφήν. Ἐάν, ὅμως, ἐγγίσσωμεν τὰς σταγόνας τοῦ θείου μὲ στερεὸν θεῖον, ἐπέρχεται ἀλότομος στερεοποίησης.

Τὸ αὐτὸ φαινόμενον δύναται νά παρατηρηθῇ, κατ' ἀρχήν, εἰς ὅλα τὰ ὑγρά, ἀπαιτεῖ, ὅμως, μεγάλην καθαρότητα τοῦ ὕλικου, ἐπιμελέστατον καθαρισμὸν τοῦ δοχείου κ.λ.

★ § 251. Μέτρσις τῆς θερμότητος τήξεως. Τὴν θερμότητα τήξεως μετροῦμεν, συνήθως, διὰ τῆς μεθόδου τῶν μειγμάτων.

Διὰ νά μετρήσωμεν, π.χ., τὴν θερμότητα τήξεως τοῦ πάγου, ἐργαζόμεθα ὡς ἐξῆς: Ἐντὸς θερμοιδρομέτρου δι' ὕδατος ῥιπτομεν ὠρισμένην ποσότητα πάγου, θερμοκρασίας 0° C (*) καὶ ἀναδεύομεν, μέχρις ὅτου ὅλος ὁ πάγος μετατραπῇ εἰς ὕδωρ. Ἡ θερμοκρασία τοῦ μείγματος κατέρχεται, ἔστω δὲ $\theta_{\text{τελ}}$ ἡ τελικὴ θερμοκρασία. Ἐφ' ὅσον ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος κατῆλθεν, ἔπεται ὅτι ἀφηρέθῃ ἐξ αὐτοῦ θερμότης. Ἡ θερμότης αὕτη κατηναλώθῃ 1) διὰ νά τήξῃ τὸν πάγον καὶ 2) διὰ ν' ἀνυψώσῃ τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ἐκ τοῦ πάγου προκύψαντος ὕδατος ἐκ τῆς τιμῆς 0° C (τὴν ὁποίαν εἶχε τοῦτο εὐθύς ὡς παρήχθη) εἰς τὴν τιμὴν $\theta_{\text{τελ}}$ τοῦ μείγματος.

Διὰ τὴν τήξιν τοῦ πάγου, μάζης m , ἀπητήθη θερμότης Q_1 , ἴση πρὸς

$$Q_1 = \lambda \cdot m,$$

ἐνθα λ εἶναι ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου.

(*) Ὁ πάγος, εὐθύς μετὰ τὴν παρασκευὴν του εἰς τὸ παγοποιεῖον, ἔχει θερμοκρασίαν, κατωτέραν τοῦ μηδενὸς (π.χ. -5° C). Ὅταν, ὅμως, ἀφεθῇ εἰς τὸ περιβάλλον, ἀρχικῶς θερμαίνεται μέχρι 0° C καὶ κατόπιν ἀρχίζει νά τήκεται, ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν.

Διὰ τὴν θέρμανσιν τοῦ ἐκ τοῦ πάγου προκύψαντος ὕδατος ἐκ τῆς θερμοκρασίας $\theta^\circ C$ εἰς τὴν θερμοκρασίαν $\theta_{τελ}$, ἀπληγῆς θερμοῦτης Q_2 , ἴση πρὸς

$$Q_2 = c \cdot m \cdot (\theta_{τελ} - \theta) = c \cdot m \cdot \theta_{τελ},$$

ἐνθα m εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ ὕδατος, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν μᾶζαν τοῦ πάγου, ἐκ τοῦ ὁποίου τοῦτο προέκυψε καὶ c ἡ εἰδικὴ θερμοῦτης τοῦ ὕδατος.

Τὸ ὕδωρ τοῦ θερμοδομέτρου, ψυχθὲν ἐκ τῆς θερμοκρασίας $\theta_{αρχ}$ εἰς τὴν θερμοκρασίαν $\theta_{τελ}$, ἔχασε θερμοῦτητα Q , ἴσην πρὸς

$$Q = c \cdot m' \cdot (\theta_{αρχ} - \theta_{τελ})$$

ἐνθα m' εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ ὕδατος τοῦ θερμοδομέτρου.

Συμφώνως, λοιπόν, πρὸς τ' ἀνωτέρω, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$Q_1 + Q_2 = Q.$$

$$\text{Ἔτσι} \quad \lambda \cdot m + c \cdot m \cdot \theta_{τελ} = c \cdot m' \cdot (\theta_{αρχ} - \theta_{τελ}).$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς λ , λαμβάνομεν τὴν ζητούμενην θερμοῦτητα τήξεως τοῦ πάγου.

Παράδειγμα: Ἐντὸς θερμοδομέτρου, περιέχοντος 200 gr ὕδατος, θερμοκρασίας $30^\circ C$, ῥίπτομεν 45 gr πάγου, θερμοκρασίας $0^\circ C$. Ἡ θερμοκρασία κατέρχεται τελικῶς εἰς $9,8^\circ C$. Ποία ἡ θερμοῦτης τήξεως τοῦ πάγου;

Λύσις: Λύοντες τὴν ἄνω ἐξίσωσιν ὡς πρὸς λ , λαμβάνομεν

$$\lambda = \frac{c \cdot m' \cdot (\theta_{αρχ} - \theta_{τελ}) - c \cdot m \cdot \theta_{τελ}}{m}.$$

ἔχομεν: $m' = 200 \text{ gr}$, $c = 1 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$, $\theta_{αρχ} = 30^\circ C$, $\theta_{τελ} = 9,8^\circ C$, $m = 45 \text{ gr}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἄνω ἐξίσωσιν, λαμβάνομεν διὰ τὸ λ τὴν τιμὴν

$$\lambda = 80 \text{ cal/gr}.$$

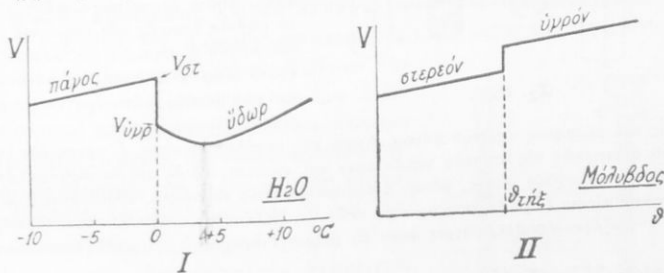
§ 252. Μεταβολὴ τοῦ ὄγκου κατὰ τὴν πήξιν. Γνωρίζομεν ὅτι ὁ πάγος ἐπιπλέει εἰς τὸ ὕδωρ, γεγονός, τὸ ὁποῖον δηλοῖ ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ πάγου εἶναι μικροτέρα τῆς πυκνότητος τοῦ ὕδατος. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι ὁ ὄγκος ὠρισμένης ποσότητος ὕδατος αὐξάνεται, ὅταν τοῦτο γίνῃ πάγος. Ἡ ἀπότομος αὐξήσις τοῦ ὄγκου κατὰ τὴν πήξιν τοῦ ὕδατος ἐξηγεῖ τὸ φαινόμενον, κατὰ τὸ ὁποῖον κλειστὸν δοχεῖον, πλήρες ὕδατος, διαρρηγνύεται, ὅταν ψυχθῇ τόσον, ὥστε νὰ ἐπέλθῃ πήξις τοῦ ὕδατος. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὰς μεγάλας δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἀναπτύσσονται κατὰ τὴν πήξιν, ἐὰν ἐμποδίσωμεν τὴν αὐξήσιν τοῦ ὄγκου. Δι' αὐτόν, ἀκριβῶς, τὸν λόγον οἱ σωλῆνες ὑδρεύσεις θραύονται κατὰ τὰς πολὺν ψυχρὰς νύκτας τοῦ χειμῶνος, ὅταν δὲν λάβωμεν πρόνοιαν ν' ἀφήσωμεν τὸ ὕδωρ νὰ ἐκρέῃ διαρκῶς, ὅποτε τοῦτο δὲν προλαμβάνει νὰ στερεοποιηθῇ. Ὅμοιως, διὰ τὴν πρόληψιν καταστροφῆς τῶν ψυγείων τῶν αὐτοκινήτων κατὰ τὸν χειμῶνα, ὅταν

πρόκειται να παραμείνουν άχρησιμοποίητα έπι μακρόν, επιβάλλεται ν' αφαιρηθίαι εξ αυτών τὸ ὕδωρ ἢ ν' αντικαθίσταται ὑπὸ καταλλήλου ὑγροῦ, τὸ ὁποῖον πηγνυται εἰς πολὺ χαμηλὴν θερμοκρασίαν.

Ἐνταῦθα ἀναφέρομεν καὶ τὴν ἀποσάθρωσιν τῶν πετρωμάτων, ἡ ὁποία, κατὰ μέγα μέρος, ὀφείλεται εἰς τὸ ὕδωρ, τὸ ὁποῖον εἰσδύει ἐντὸς τῶν ρωγμῶν καὶ προκαλεῖ, κατὰ τὴν πῆξιν, διάρρηξιν αὐτῶν.

Εἶδομεν ἀνωτέρω ὅτι, κατὰ τὴν τήξιν τοῦ πάγου, ὁ ὄγκος τοῦ προκύπτοντος ὕδατος εἶναι μικρότερος τοῦ ὄγκου τοῦ πάγου, ἐκ τοῦ ὁποῖου προήλθεν. Εἰς ἄλλα, ὅμως, ὕλικά συμβαίνει τὸ ἀντίθετον. Οὕτω, π.χ., εἰς τὸν μολύβδον ὁ ὄγκος τοῦ ἐκ τῆς τήξεως προκύπτοντος μολύβδου εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ὄγκου τοῦ στερεοῦ μολύβδου, ἐκ τοῦ ὁποῖου οὗτος προέκυψεν. Ἐάν, λοιπόν, ἐντὸς δοχείου τήκωμεν μολύβδον, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ ἐν στερεῇ ἀκόμη καταστάσει εὐρισκόμενα τεμάχια μολύβδου, ὡς εἰδικῶς βαρύτερα τοῦ ὑγροῦ μολύβδου, εὐρίσκονται εἰς τὸν πυθμένα τοῦ δοχείου.

§ 253. Γραφικὴ παράστασις τοῦ ὄγκου συναρτήσει τῆς θερμοκρασίας. Ἡ σχέσις μεταξὺ ὄγκου καὶ θερμοκρασίας εἰς τὸ ὕδωρ παρίσταται γραφικῶς ὑπὸ τοῦ σχήματος 376, I. Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐάν ἔχωμεν πάγον, θερμοκρασίας κατωτέ-



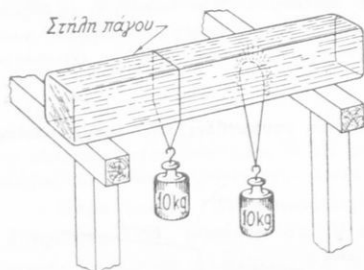
Σχ. 376. Μεταβολαὶ τοῦ ὄγκου κατὰ τὴν θέρμανσιν πάγου (I) καὶ μολύβδου (II). (Εἰς τὴν πραγματικότητα αἱ μεταβολαὶ τοῦ ὄγκου, λόγῳ μεταβολῆς τῆς θερμοκρασίας, εἶναι πολὺ μικρότεραι, ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τοῦ σχήματος).

ρας τοῦ μηδενὸς (π.χ., -10°C) καὶ τὸν θερμαίνωμεν, τότε, λόγῳ τῆς διαστολῆς, ὁ ὄγκος του αὐξάνεται κατὰ τι. Εἰς τοὺς 0°C , ὅμως, ὁ ὄγκος ἐλαττοῦται ἀποτόμως ἐκ τῆς τιμῆς $V_{στ}$ εἰς τὴν τιμὴν $V_{ὕγρ}$. Ἐάν συνεχίσωμεν τὴν θέρμανσιν καὶ μετὰ τὴν τήξιν ὅλου τοῦ πάγου, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος δὲν αὐξάνεται, ἀλλ' ἀντιθέτως ἐλαττοῦται. Ἡ ἐλάττωσις αὕτη τοῦ ὄγκου, ἡ ὁποία ἐκλήθη ἀνωμαλία διαστολῆς τοῦ ὕδατος, συνεχίζεται μέχρι τῶν 4°C , πέραν τῶν ὁποίων ἐμφανίζεται ἐκ νέου διαστολή.

Τὸ σχῆμα 376, II ἀναφέρεται εἰς τὴν τήξιν τοῦ μολύβδου. Παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν αὐξάνεται ἡ θερμοκρασία δεδομένης ποσότητος στερεοῦ μολύβδου, ὁ ὄγκος αὐτοῦ αὐξάνεται ὅταν δὲ ἡ θερμοκρασία φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον τήξεως, παρουσιάζεται ἀπότομος αὐξήσις τοῦ ὄγκου, χωρὶς, ἀντιστοίχως, ν' αὐξηθῇ ἡ θερμοκρασία. Ὅταν, τέλος, τακτῇ ὁλόκληρος ἡ ποσότης τοῦ μολύβδου, ὁ ὄγκος αὐξάνεται ἐκ νέου, αὐξανομένης τῆς θερμοκρασίας.

★ ★ § 254. Ἐπίδρασις τῆς πίεσεως ἐπὶ τῆς θερμοκρασίας τήξεως. Ἡ θερμοκρασία τήξεως μεταβάλλεται μετὰ τῆς πίεσεως. Ἡ μεταβολή, ὅμως, αὕτη εἶναι, ἐν γένει, μικρά καί, ὡς ἐκ τούτου, διὰ μικρὰς μεταβολὰς τῆς πίεσεως, ἡ θερμοκρασία τήξεως δύναται νὰ θεωρηθῇ σταθερά.

Ἡ θερμοκρασία τήξεως αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν ἐλαττοῦται ἢ αὐξάνεται κατὰ τὴν πῆξιν ὁ ὄγκος τοῦ σώματος. Οὕτω, εὐρέθῃ ὅτι εἰς τὰ σώματα ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων ὁ ὄγκος αὐξάνεται κατὰ τὴν πῆξιν (π.χ., ὕδωρ), ἡ θερμοκρασία τήξεως ἐλαττοῦται, αὐξανομένης τῆς ἐξωτερικῆς πίεσεως, ἐνῶ, ἀντιθέτως, εἰς τὰ σώματα, τῶν ὁποίων ὁ ὄγκος ἐλαττοῦται κατὰ τὴν πῆξιν (π.χ., μόλυβδος), ἡ θερμοκρασία τήξεως αὐξάνεται, ὅταν αὐξάνεται ἡ ἐξωτερικὴ πίεσις. Οὕτω, εἰς τὸ ὕδωρ, τοῦ ὁποῖου ὁ ὄγκος αὐξάνεται κατὰ τὴν πῆξιν, αὕξησις τῆς πίεσεως προκαλεῖ ἐλάττωσιν τῆς θερμοκρασίας τήξεως. Τοῦτο δεικνύμεν, χαρακτηριστικῶς, διὰ τοῦ



Σχ. 377.

ἐξῆς πειράματος: Στήλη πάγου στηρίζεται, ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα 377 καὶ περιβάλλεται διὰ λεπτοῦ χαλυβδίνου σύματος, ἀπὸ τοῦ ὁποῖου ἐξαρτῶμεν ἓν μέγα βάρος. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύρμα εἰσχωρεῖ βραδέως ἐντὸς τοῦ πάγου, δύναται δὲ νὰ διαπεράσῃ ὁλόκληρον τὴν στήλην, χωρὶς αὕτη νὰ κοπῇ. Τοῦτο ἐξηγεῖται ὡς ἐξῆς: Εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ σύματος μετὰ τοῦ πάγου ἡ πίεσις εἶναι μεγάλη καὶ τοῦτο διότι ἡ δύναμις, ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τοῦ βάρους, κατανέμεται ἐπὶ πολὺ μικρᾶς ἐπιφανείας· τῆς ἐπιφανείας ἐπαφῆς τοῦ σύματος καὶ τοῦ πάγου. Λόγῳ τῆς μεγάλης πίεσεως, ὁ πάγος δὲν δύναται νὰ διατηρηθῇ εἰς στερεὰν κατάστασιν καὶ τήκεται, τὸ δὲ σύρμα εἰσχωρεῖ ἐντὸς αὐτοῦ. Τὸ παραχθέν, ὅμως, ὕδωρ, ἀνερχόμενον ὑπὲρ τὸ σύρμα, εὐρίσκεται ὑπὸ τὴν κανονικὴν πίεσιν (τὴν ἀτμοσφαιρικὴν) καί, ὡς ἐκ τούτου, ἀνατῆγγνται. Οὕτω, τὸ φαινόμενον ἐξακολουθεῖ, μέχρις ὅτου τὸ σύρμα διαπεράσῃ τὴν στήλην τοῦ πάγου.

★ § 255. Ἐπίδρασις διακελυμένων εὐσιῶν ἐπὶ τοῦ σημείου πήξεως. Τὸ σημεῖον πήξεως ἑνὸς ὑγροῦ ἐλαττοῦται, ὅταν ἐντὸς αὐτοῦ διαλυθῇ ἄλλο τι σῶμα. Οὕτω, ἐνῶ τὸ σημεῖον πήξεως τοῦ καθαροῦ ὕδατος εἶναι $0^{\circ} C$, τὸ θαλάσσιον ὕδωρ πήγνυται εἰς τοὺς $-2,5^{\circ} C$.

Τὸ φαινόμενον τοῦτο ἐκμεταλλούμεθα εἰς τὰ παγοποιεῖα: Διὰ νὰ ψύξωμεν τὰ δοχεῖα, τὰ περιέχοντα τὸ ὕδωρ, πρέπει νὰ τοποθετήσωμεν αὐτὰ ἐντὸς λουτροῦ, θερμοκρασίας, χαμηλοτέρας τῶν $0^{\circ} C$. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὸ λουτρόν πυκνὸν διάλυμα μαγειρικοῦ ἁλατος (ἄλμη), τὸ ὁποῖον, μολοντί, εὐρίσκεται κάτω τοῦ μηδενὸς ($-20^{\circ} C$), διατηρεῖται εἰς ὑγρὰν κατάστασιν (βλ. κατωτέρω ψυκτικὰ μηχανὰ).

★ ★ § 256. Σημεῖον τήξεως τῶν κραμάτων. Ἡ παρουσία ξένων προσμείξεων μεταβάλλει τὸ σημεῖον τήξεως. Συνήθως, τὸ σημεῖον τήξεως τῶν κραμάτων εὐρίσκεται μετὰ τῶν σημείων τήξεως τῶν συστατικῶν αὐτῶν. Πολλὰκις, ὅμως, τοῦτο εἶναι μικρότερον τοῦ σημείου τήξεως τοῦ εὐτρυκτοῦρου τῶν μεταλλῶν, τῶν συνιστώμενων τὸ κράμα. Οὕτω, τὸ κράμα Wood (Γούντ), τὸ ὁποῖον

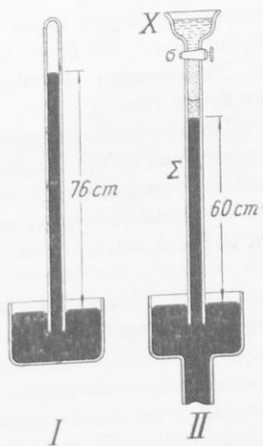
ἀποτελεῖται ἐκ μετάλλων, τῶν ὁποίων τὸ σημεῖον τήξεως εὐρίσκεται ὑπὲρ τοῦς 200° C (*), τήκεται εἰς θερμοκρασίαν 71° C . Ἐνίοτε, ὅμως, τὸ σημεῖον τήξεως τοῦ κράματος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ σημείου τήξεως τοῦ δυστηκτοτέρου τῶν συστατικῶν.

§ 257. Ἐξαέρωσις. Καλοῦμεν *ἐξαέρωσιν* τὴν μεταβάσιν ἐκ τῆς ὑγρᾶς καταστάσεως εἰς τὴν ἀέριον. Τὸ κατὰ τὴν ἐξαέρωσιν παραγόμενον ἀέριον, τὸ ὁποῖον συνήθως εἶναι ἀόρατον, καλοῦμεν *ἀτμόν*.

Ὡς θὰ ἴδωμεν ἐν συνεχείᾳ, ἡ ἐξαέρωσις ἐνὸς ὑγροῦ δύναται νὰ γίνη κατὰ δύο, κυρίως, τρόπους: α) δι' *ἐξατμίσεως* καὶ β) διὰ *βρασμοῦ*. Οἱ δύο τρόποι ἐξαερώσεως διαφέρουν μεταξύ των κυρίως ὡς πρὸς τὴν ταχύτητα, μὲ τὴν ὁποίαν τὸ ὑγρὸν μετατρέπεται εἰς ἀέριον.

Τὸ φαινόμενον τῆς ἐξαερώσεως περιπλέκεται, ὅταν ὑπεράνω τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ὑπάρχει καὶ ἄλλο ἀέριον, πλὴν τοῦ ἀτμοῦ. Τοιαύτην περίπτωσιν ἔχομεν κατὰ τὴν ἐξάτμισιν καὶ τὸν βρασμόν, π.χ., ὕδατος, εὐρισκομένου ἐντὸς ἀνοικτοῦ δοχείου, καθόσον ὑπεράνω τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος ὑπάρχει, πλὴν τῶν ὑδρατμῶν, καὶ ἀτμοσφαιρικός ἀήρ.

§ 258. Ἐξαέρωσις εἰς τὸ κενόν. Θεωρήσωμεν βαρομετρικὸν σωλήνα Σ (σχ. 378, Ι), ὁ ὁποῖος καταλήγει εἰς τὸ ἐν ἄκρον του εἰς χοάνην X , φέρει δὲ καὶ τὴν στρόφιγγα σ . Κλείομεν τὴν στρόφιγγα καί, πληροῦντες τὸν σωλήνα Σ δι' ὑδραργύρου, ἐκτελοῦμεν τὸ γνωστὸν πείραμα Torricelli. Ἡ στήλη τοῦ ὑδραργύρου θὰ δεικνύη, ὡς γνωστόν, τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν, ἡ ὁποία ἔστω ὅτι εἶναι ἴση πρὸς 76 cm Hg . Ἀκολουθῶς, θέτομεν ἐντὸς τῆς χοάνης ὀλίγον οἶνονπνευμα καί, ἀνοίγοντες τὴν στρόφιγγα, ἀφήνομεν νὰ εἰσέλθῃ ἐντὸς τοῦ σωλήνος μία σταγὼν οἶνονπνεύματος. Ἡ σταγὼν αὕτη ἐξαεροῦται ταχέως, ἐνῶ ταυτοχρόνως ὁ ὑδράργυρος κατέρχεται, λόγφ τῆς πίεσεως, τὴν ὁποίαν ἐξασκοῦν οἱ ἀτμοὶ τοῦ οἶνονπνεύματος. Ἐάν, ἐν συνεχείᾳ, εἰσαγάγωμεν καὶ ἄλλας σταγόνas οἶνονπνεύματος, παρατηροῦμεν ὅτι καὶ αὗται ἐξαεροῦνται, ἐνῶ ὁ ὑδράργυρος κατέρχεται. Τελικῶς, ὅμως, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐπὶ πλέον εἰσαγόμεναι ἐντὸς τοῦ σωλήνος σταγόνες δὲν ἐξαεροῦνται, ἀλλὰ παραμένουν ἐπὶ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ὡς ὑγρόν, ἐνῶ ταυτοχρόνως τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης διατηρεῖται πλέον σταθερόν. Εἰς



Σχ. 378. Ἡ διαφορὰ τῶν ὑδραργυρικῶν στηλῶν ($76 \text{ cm} - 60 \text{ cm} = 16 \text{ cm}$) μᾶς δίδει τὴν τάσιν κεκορεσμένων ἀτμῶν.

(*) Τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ βισμούθιον, μόλυβδον, κασίτερον καὶ κάδμιον.

τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ ὑγρὸν ἔπαυσεν ἔξαερούμενον, διότι ὁ ὑπεράνω αὐτοῦ γῶρος δὲν δύναται νὰ περιλάβῃ περισσότερους αἰμούς, ἔνεκα τοῦ ὁποίου καλεῖται **κεκορεσμένος**. Κατ' ἐπέκτασιν καὶ οἱ αἰμοί, οἱ περιεχόμενοι ἐντὸς τοῦ χώρου τούτου, καλοῦνται **κεκορεσμένοι αἰμοί**. Εἶναι προφανές ὅτι ἡ διαφορὰ $76\text{ cm} - 60\text{ cm} = 16\text{ cm}$ τοῦ ὕψους τῶν ὑδραργυρικῶν στήλων τοῦ σχήματος 378 ὁφείλεται εἰς τὴν πίεσιν τῶν κεκορεσμένων αἰμῶν τοῦ οἰνοπνεύματος, ἡ ὁποία καλεῖται **τάσις κεκορεσμένων αἰμῶν**. Εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα ἡ τάσις κεκορεσμένων αἰμῶν τοῦ οἰνοπνεύματος εἶναι ἴση πρὸς 16 cm Hg .

Τὸ γεγονὸς ὅτι περαιτέρω προσθήκη σταγόνων οἰνοπνεύματος μετὰ τὸν κόρον δὲν μεταβάλλει τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης καί, συνεπῶς, τὴν τάσιν κεκορεσμένων αἰμῶν δηλοῖ ὅτι **ἡ τάσις κεκορεσμένων αἰμῶν εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἐντὸς τοῦ σωλῆνος περιεχομένης ποσότητος τοῦ ὑγροῦ**.

Ἐὰν ὠθήσωμεν τὸν σωλῆνα Σ' πρὸς τὰ κάτω, ὥστε ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον καταλαμβάνουν οἱ κεκορεσμένοι αἰμοί, νὰ ἐλαττωθῇ, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ὑδραργυρική στήλη διατηρεῖ τὸ ὕψος τῆς, ἐνῶ ταυτοχρόνως αὐξάνεται ἡ ποσότης τοῦ ὑγροῦ οἰνοπνεύματος ἄνωθεν τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου. Ἐκ τοῦ πειράματος τούτου προκύπτει ὅτι, ἐφ' ὅσον τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης δὲν μετεβλήθῃ κατὰ τὴν ἐλάττωσιν τοῦ ὄγκου τῶν κεκορεσμένων αἰμῶν τοῦ οἰνοπνεύματος, θὰ πρέπει ἡ τάσις κεκορεσμένων αἰμῶν αὐτοῦ νὰ παρέμεινε σταθερά, τὸ μόνον δὲ ἀποτέλεσμα τῆς ἐλαττώσεως τοῦ ὄγκου ἦτο ἡ ὑγροποίησης μέρους τῶν αἰμῶν.

Συμπέρασμα: **Ἡ τάσις κεκορεσμένων αἰμῶν εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ ὄγκου τῶν.**

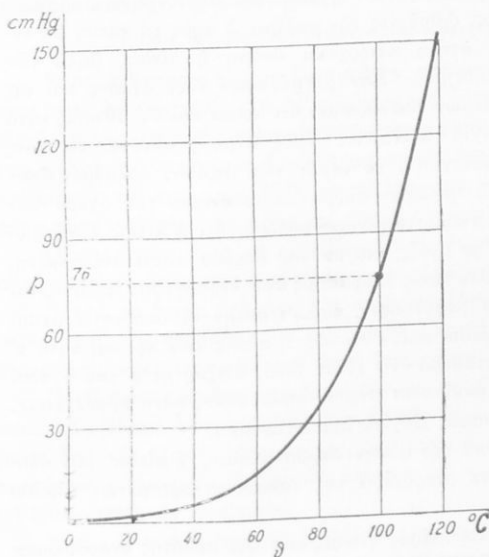
Ἐκ τῶν λεχθέντων προκύπτει ὅτι οἱ αἰμοί τοῦ οἰνοπνεύματος θὰ εἶναι κεκορεσμένοι, ἀφ' ἧς στιγμῆς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου παραμένει ὑγρὸν οἰνόπνευμα, χωρὶς πλεόν νὰ ἔξαεροῦται. Διὰ νὰ εἶναι, λοιπόν, εἰς γῶρος κεκορεσμένος αἰμῶν, πρέπει ἐντὸς αὐτοῦ νὰ συνυπάρχουν τὸ ὑγρὸν καὶ οἱ αἰμοί του.

§ 259. Μεταβολὴ τῆς τάσεως κεκορεσμένων αἰμῶν μετὰ τῆς θερμοκρασίας. Ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὸ περιγραφέν εἰς τὴν προηγούμενην παράγραφον πείραμα εἰς μεγαλυτέραν θερμοκρασίαν, θὰ εὗρωμεν ὅτι ἡ τάσις κεκορεσμένων αἰμῶν ἠϋξήθη. Ἐκ τοιούτων μετρήσεων συνάγεται ὅτι **ἡ τάσις κεκορεσμένων αἰμῶν αὐξάνεται, ὅταν αὐξάνεται ἡ θερμοκρασία τῶν.**

Τὸ σχῆμα 379 παριστᾷ γραφικῶς τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς τάσεως κεκορεσμένων αἰμῶν p τοῦ ὕδατος καὶ τῆς θερμοκρασίας θ . Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τοὺς 100°C ἡ τάσις κεκορεσμένων αἰμῶν τοῦ ὕδατος εἶναι ἴση πρὸς 76 cm Hg , δηλ., ἴση πρὸς μίαν ἀτμόσφαιραν.

Ἐξ ἐνὸς τοιούτου διαγράμματος δυνάμεθα ν' ἀνευρίσκωμεν ἐκάστοτε τὴν τάσιν κεκορεσμένων αἰμῶν ἐνὸς ὑγροῦ, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὴν θερμοκρασίαν.

Ἐκ τοῦ διαγράμματος τοῦ σχήματος 379 προκύπτει ὅτι, ἑλαττουμένης



Σχ. 379. Ἡ τάσις κεκορεσμένων ατμών τοῦ ὕδατος αὐξάνεται μετά της θερμοκρασίας.

τῆς θερμοκρασίας, ἑλαττοῦται καὶ ἡ τάσις κεκορεσμένων ατμών τοῦ ὕδατος. Τοῦτο δεικνύομεν διὰ τοῦ ἑξῆς πειράματος: Ἐντὸς λευκοσιδηροῦ δοχείου θέτομεν ὀλίγον ὕδωρ καὶ βράζο-



Σχ. 380.

μεν αὐτό, μέχρις ὅτου ὁ ἐξερχόμενος ἀτμός συμπαρασύρῃ ὅλον τὸν ἐντὸς τοῦ δοχείου ὑπάρχοντα ἀέρα. Ἀκολούθως, κλείομεν τὸ δοχεῖον διὰ φελλοῦ καὶ ψύχομεν αὐτό, περιλούοντες δι' ὕδατος (σχ. 380). Θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ δοχεῖον συνθλίβεται καὶ παραμορφοῦται ἐντόνως. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ἑξῆς: Τὸ ψυχρὸν ὕδωρ ἑλαττώνει τὴν θερμοκρασίαν τῶν ἐντὸς τοῦ δοχείου ὕδρατμῶν κάτω τῶν 100°C , ὁπότε καὶ ἡ τάσις κεκορεσμένων ὕδρατμῶν γίνεται κατωτέρα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως (ἀφοῦ εἰς τοὺς 100°C ἦτο ἴση πρὸς 1 Atm). Ἐφ' ὅσον, λοιπόν, ἐντὸς τοῦ δοχείου ἐπικρατεῖ πίεσις, μικροτέρα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς, ἑξωτερικῶς δὲ ἡ πίεσις εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν, τὰ τοιχώματα ὑφίστανται συνολικῶς δυνάμεις μὲ φορὰν πρὸς τὸ ἐσωτερικόν, αἱ ὁποῖαι καὶ συνθλίβουν τὸ δοχεῖον.

Ἄσκησις. Πόση εἶναι ἡ τάσις κεκορεσμένων ὕδρατμῶν εἰς τὴν θερμοκρασίαν 20°C ;

★ § 260. Ἀκόρεστοι ἀτμοί. Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πειράματος τῆς § 258 εἶδομεν ὅτι, εὐθύς ὥς ἡ πρώτη σταγὼν τοῦ οἰνοπνεύματος εἰσαχθῇ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, ἔξαερούται ταχέως, ἐνῶ ταυτοχρόνως, λόγῳ τῆς πίεσεως τῶν δημιουργουμένων ατμῶν, ἡ ὑδραργυρικὴ στήλη κατέρχεται

κατά τι. Ἐάν, χωρὶς νὰ εἰσαγάγωμεν δευτέραν σταγόνα οἴνοπνεύματος, ἐλαττώσωμεν τὸν ὄγκον, τὸν ὁποῖον καταλαμβάνουν οἱ ἀτμοὶ τοῦ οἴνοπνεύματος, ὠθοῦντες τὸν σωλήνα Σ' πρὸς τὰ κάτω, θὰ εὐρωμεν ὅτι ἡ ὑδραργυρική στήλη κατέρχεται ἀκόμη· ἡ πίεσις, δηλ., τῶν ἀτμῶν τοῦ οἴνοπνεύματος ἠὺξήθη. Ἐάν μετρήσωμεν τοὺς ὄγκους καὶ τὰς ἀντιστοίχους πιέσεις τῶν ἀτμῶν, θὰ εὐρωμεν ὅτι ἰσχύει καὶ δι' αὐτοὺς, κατὰ προσέγγισιν, ὁ νόμος Boyle - Mariotte. Τοὺς ἀτμοὺς αὐτοὺς, εἰς τοὺς ὁποίους ἰσχύουν, κατὰ προσέγγισιν, οἱ νόμοι τῶν ἀερίων, καλοῦμεν **ἀκόροεστους ἀτμούς**. Ἐάν ἐλαττώσωμεν ἀκόμη περισσότερον τὸν ὄγκον τῶν ἀκόροεστων ἀτμῶν τοῦ οἴνοπνεύματος, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πίεσις ἐξακολουθεῖ ν' αὐξάνεται μέχρις ὁρίου τινός, πέραν τοῦ ὁποίου παύει αὐξανόμενη, ἐνῶ ταυτοχρόνως ἐπὶ τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου ἐμφανίζεται ὕγρον οἶνόπνευμα. Εἰς τὴν περίπτωσιν, δηλ., ταύτην οἱ ἀκόροεστοι ἀτμοὶ μετετράπησαν εἰς κεκορεσμένους καί, συνεπῶς, ἡ πίεσις τῶν πρέπει, κατὰ τ' ἄνωτέρω, νὰ διατηρῇται σταθερά· νὰ εἶναι δηλ., ἀνεξάρτητος τοῦ ὄγκου.

Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἀκόροεστοι ἀτμοὶ ἀκολουθοῦν, κατὰ προσέγγισιν, τοὺς νόμους τῶν ἀερίων (νόμος Boyle - Mariotte κ.λ.).

Εἶναι προφανές ὅτι, ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν, ἡ πίεσις τῶν ἀκόροεστων ἀτμῶν εἶναι πάντοτε μικροτέρα τῆς τάσεως κεκορεσμένων ἀτμῶν.

§ 261. Ἐξάτμισις. Ἐκ πείρας γνωρίζομεν ὅτι ποσότης ὑγροῦ, ἀφιέρνεται εἰς τὸ ἐλεύθερον περιβάλλον, ἐλαττοῦται σὺν τῷ χρόνῳ, μετατρέπεται εἰς ἀέριον (ἀτμόν), τὸ ὁποῖον, ὥς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, εἶναι ἀόρατον. Τὸ φαινόμενον τοῦτο καλεῖται **ἐξάτμισις**, λαμβάνει δὲ χώραν μόνον ἐπὶ τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ καὶ εἰς οἵανδήποτε θερμοκρασίαν.

Οἱ ἐκ τῆς ἐξάτμισεως προερχόμενοι ἀτμοὶ συσσωρεύονται ἐπὶ τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, ἐάν δὲ δὲν ἀπομακρυνθοῦν, ὁ χῶρος περὶ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν καθίσταται, διαρκῶς, πλουσιώτερος εἰς ἀτμούς. Ἀποτέλεσμα τούτου εἶναι ἡ ἐξάτμισις νὰ γίνεται βαθμίδον βραδυτέρα, διὰ νὰ σταματήσει ἐντελῶς, ὅταν ὁ χῶρος οὗτος καταστῇ κεκορεσμένος. Διὰ τὸν λόγον, ἀκριβῶς, αὐτόν, ὕγρον, εὐρισκόμενον ἐντὸς ἡμιπλήρους καὶ πωματισμένης φιάλης, δὲν ἐξατμίζεται.

Ἡ **ταχύτης ἐξάτμισεως** (δηλ., τὸ πηλίκον τῆς μάζης τοῦ ὑγροῦ, ἡ ὁποία ἐξατμίζεται ἐντὸς χρόνου τινός, διὰ τοῦ χρόνου τούτου) ἀκολουθεῖ τοὺς ἑξῆς νόμους:

α) Ἡ ταχύτης ἐξάτμισεως εἶναι τόσον μεγαλυτέρα, ὅσον μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ.

β) Ἡ ταχύτης ἐξάτμισεως εἶναι τόσον μεγαλυτέρα, ὅσον περισσότερον ἀκόροστος εἶναι ὁ ὑπεράνω τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ εὐρισκόμενος ἀτμός. Συγκεκριμένως, ἡ ταχύτης ἐξάτμισεως ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς διαφορᾶς τῆς πίεσεως, τὴν ὁποίαν θὰ εἶχεν ὁ ἀτμός, ἐάν ἦτο κεκορεσμένος (δηλ..

τῆς τάσεως κεκορεσμένων ἀτμῶν) καὶ τῆς πίεσεως, τὴν ὁποίαν ἔχει οὗτος κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς παρατηρήσεως· ἥτοι ἐκ τῆς διαφορᾶς

τάσις κεκορεσμένων ἀτμῶν — πίσις ἀκορέστων ἀτμῶν.

Βάσει τοῦ νόμου τούτου δυνάμεθα ν' αὐξήσωμεν τὴν ταχύτητα ἑξατμίσεως κατὰ δύο τρόπους· εἴτε δι' αὐξήσεως τῆς τάσεως κεκορεσμένων ἀτμῶν, εἴτε δι' ἐλαττώσεως τῆς πίεσεως τῶν ἀκορέστων ἀτμῶν. Καὶ τὸν μὲν πρῶτον τρόπον ἐπιτυγχάνομεν, ἐὰν αὐξήσωμεν τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ὑγροῦ (βλ. διάγραμμα τοῦ σχήματος 379), τὸν δὲ δεύτερον, ἐὰν ἐκδιώξωμεν τοὺς ὑπερῶν τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ σχηματιζομένους ἀτμούς.

Οὕτω, προκειμένον νὰ στεγνώσωμεν βρεγμένα ὑφάσματα, ἢ φέρομεν αὐτὰ πλησίον τῆς πυρᾶς, ἢ τὰ ἀπλώνομεν εἰς τὸν ἄνεμον.

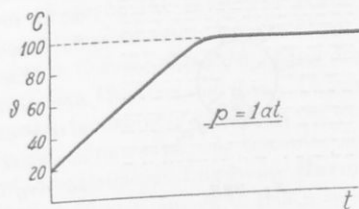
Υγρὰ, τὰ ὁποῖα ὑπὸ συνήθεις συνθήκας (δηλ., ὑπὸ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν καὶ τὴν θερμοκρασίαν τοῦ περιβάλλοντος) ἔχουν μεγάλην ταχύτητα ἑξατμίσεως, καλοῦνται **πηκτικὰ ὑγρὰ** (π.χ., αἰθέρ, οἰνόπνευμα κ.λ.).

Ἡ ἑξατμισίς παίζει σπουδαιότατον ρόλον εἰς τὴν οἰκονομίαν τῆς φύσεως: Τὰ ὕδατα τῶν ποταμῶν, τῶν λιμνῶν καὶ τῶν θαλασσῶν, ἑξατμιζόμενα διὰ τῆς ἡλιακῆς θερμότητος, δημιουργοῦν τὰ νέφη, τὰ ὁποῖα, μετατρεπόμενα ἐν συνεχείᾳ εἰς βροχὴν, πίπτουν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς, διὰ νὰ ἑξατμισθοῦν ἐκ νέου κ.ο.κ.

Ἐπὶ τοῦ φαινομένου τῆς ἑξατμίσεως στηρίζεται καὶ ἡ λειτουργία τῶν ἀλυκῶν πρὸς παραγωγὴν τοῦ μαγειρικοῦ ἁλατος ἐκ τοῦ θαλασσίου ὕδατος.

§ 262. Βρασμός. Ἐὰν θερμαίνωμεν ἐν ὑγρὸν (π.χ., ὕδωρ) ἐντὸς ἀνοικτοῦ δοχείου, ἐνῶ ταυτοχρόνως μετροῦμεν τὴν θερμοκρασίαν του, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἀρχικῶς ἡ θερμοκρασία ἀνέρχεται (σχ. 381). Ὅταν ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος λάβῃ τὴν τιμὴν 100°C , παύει ἀνερχομένη, ἐνῶ ταυτοχρόνως εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὕδατος ἀρχίζουν ν' ἀναπτύσσωνται φυσαλλίδες ἀτμοῦ, αἱ ὁποῖαι, ἀνερχόμεναι, διαρρηγνύονται, ὅταν φθάσουν εἰς τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν. Ἀπὸ τῆς στιγμῆς ταύτης ἀρχεῖται ὁ **βρασμός** τοῦ ὕδατος. Καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ βρασμοῦ ἡ θερμοκρασία παραμένει σταθερά, (100°C), μολοντί διαρκῶς προσφέρεται θερμότης εἰς τὸ ὕδωρ. Τὴν σταθερὰν ταύτην θερμοκρασίαν καλοῦμεν **σημεῖον ζέσεως ἢ θερμοκρασίαν ζέσεως** τοῦ ὕδατος.

Ἡ κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ βρασμοῦ προσφερομένη θερμότης δὲν ἀνψώνει τὴν θερμοκρασίαν, ἀλλ' ἀπλῶς καταναλίσκεται διὰ νὰ μετατρέπῃ τὸ



Σχ. 381. Κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ βρασμοῦ τοῦ ὕδατος, ἡ θερμοκρασία διατηρεῖται σταθερὰ (100°C).

ὑδωρ εἰς ἀτμόν (*). Εἶναι προφανές, ὅτι, ἐὰν αὐξήσωμεν τὴν ἀνὰ μονάδα χρόνου προσφερομένην εἰς τὸ ὑδωρ θερμότητα, ἀπλῶς καὶ μόνον θ' αὐξηθῇ τὸ ποσὸν τῶν ἀνὰ μονάδα χρόνου παραγομένων ὑδρατμῶν, χωρὶς ν' αὐξηθῇ τὸ σημεῖον ζέσεως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΖΕΣΕΩΣ

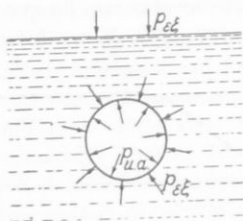
(εἰς °C) $p = 1 \text{ Atm}$

Αἰθὴρ	35	Πετρέλαιον	115
Οἰνόπνευμα	78	Υδράργυρος	357
Υδωρ	100	Σίδηρος	2730

Ὅπως εἶδομεν ἄνωτέρω, τὸ ὑδωρ ζεεῖ εἰς τοὺς 100° C. Εἰς τὴν θερμοκρασίαν ταύτην ἡ τάσις κεκορεσμένων ἀτμῶν τοῦ ὕδατος (ὅπως προκύπτει ἐκ τοῦ διαγράμματος τοῦ σχήματος 379) εἶναι ἴση πρὸς 76 cm Hg - δηλ., ἴση πρὸς μίαν ἀτμόσφαιραν. Τὴν αὐτὴν, ὅμως, τιμὴν (1 Atm) ἔχει καὶ ἡ ὑπεράνω τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἐπικρατοῦσα ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις. **Ἀρα, κατὰ τὸν βρασμόν, ἡ τάσις κεκορεσμένων ἀτμῶν τοῦ ὑγροῦ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐπὶ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ἐπικρατοῦσαν ἐξωτερικὴν πίεσιν. (Συνθήκη βρασμοῦ).** Ἦτοι

Συνθήκη βρασμοῦ	Τάσις κεκορεσμένων ἀτμῶν = ἐξωτερικὴ πίεσις
-----------------	---

Ἡ συνθήκη αὕτη ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς: Εἰς θερμοκρασίαν, μικροτέραν τῶν 100° C, δὲν εἶναι δυνατόν νὰ δημιουργηθοῦν φυσαλλίδες ὑδρατμῶν, διότι, ἐὰν τυχόν ἤθελε δημιουργηθῇ μία τοιαύτη φυσαλλίς, δὲν θὰ ἠδύνατο νὰ διατηρηθῇ, καθόσον ἡ πίεσις $p_{\kappa.α.}$ τῶν ἐντὸς αὐτῆς ἀτμῶν (σχ. 382) —



Σχ. 382.

οἱ ὅποιοι εἶναι κεκορεσμένοι — θὰ ἦτο μικρότερα τῆς ἐξωτερικῆς πίεσεως $p_{\kappa.α.}$ καί, ὡς ἐκ τούτου, ἡ φυσαλλίς θὰ συνεπιέζετο καὶ θὰ ἐξηφανίζετο (**).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι, διὰ νὰ προκαλέσωμεν βρασμόν ἐνὸς ὑγροῦ, πρέπει εἴτε ν' αὐξήσωμεν τὴν θερμοκρασίαν τοῦ τόσον ὥστε ἡ τάσις κεκορεσμένων ἀτμῶν αὐτοῦ νὰ γίνῃ ἴση πρὸς τὴν ἐπὶ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ἐπικρατοῦσαν ἐξωτερικὴν πίεσιν, εἴτε, χωρὶς ν' αὐξήσωμεν τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ὑγροῦ, νὰ ἐλαττώσωμεν τὴν ἐξωτερικὴν πίεσιν, μέχρις οὗ αὕτη γίνῃ ἴση πρὸς τὴν τάσιν κεκορεσμένων ἀτμῶν αὐτοῦ, εἰς τὴν θερμοκρασίαν, εἰς τὴν ὁποίαν εὐρίσκεται τὸ ἐν λόγω ὑγρὸν.

(*) Βλ. κατωτέρω θερμοτῆς ἐξαερώσεως.

(**) Εἰς τὴν πραγματικότητα ἡ πίεσις εἰς τὴν ἐξωτερικὴν ἐπιφάνειαν τῆς φυσαλλίδος δὲν εἶναι ἴση πρὸς $p_{\kappa.α.}$ ἀλλ' ἴση πρὸς $p_{\kappa.α.} + \varepsilon \cdot h$, ἐνθα $\varepsilon \cdot h$ εἶναι ἡ ὑδροστατικὴ πίεσις εἰς τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἡ φυσαλλίς. Εἰς τὰ συνήθη, ὅμως, πειράματα βρασμοῦ ὁ προσθετός $\varepsilon \cdot h$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀμελητέος.

§ 263. Μεταβολή τοῦ σημείου ζέσεως μετὰ τῆς ἐξωτερικῆς πίεσεως. Εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον εἶδομεν ὅτι ὁ βρασμὸς ἀρχίζει εἰς ἐκείνην τὴν θερμοκρασίαν, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ τάσις κεκορεσμένων ἀτμῶν τοῦ ὑγροῦ γίνεται ἴση πρὸς τὴν ἐπὶ τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας ἐπικρατοῦσαν ἐξωτερικὴν πίεσιν. Εἶναι, λοιπόν, φανερόν ὅτι, ἐὰν μεταβληθῇ ἡ ἐξωτερικὴ πίεσις, θὰ μεταβληθῇ καὶ τὸ σημεῖον ζέσεως. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ δειξώμεν πειραματικῶς ὡς ἑξῆς: Ἐντὸς κλειστοῦ ὑαλίνου δοχείου (σχ. 383) θέτομεν μικρὰν ποσότητα ὕδατος καί, δι' ἀντλίας, ἀρχίζομεν ν' ἀφαιρῶμεν τὸν ἀέρα. Μετ' ὀλίγον θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ὕδωρ θ' ἀρχίσῃ νὰ βράζῃ, μολονότι ἡ θερμοκρασία του εἶναι χαμηλὴ - ἴση πρὸς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ περιβάλλοντος. Ἐκ τοῦ πειράματος τούτου προκύπτει καὶ τὸ ἑξῆς συμπέρασμα: Ὅταν ἡ ἐξωτερικὴ πίεσις εἶναι μικροτέρα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς, τὸ σημεῖον ζέσεως τοῦ ὕδατος εἶναι μικρότερον τῶν 100°C .



Σχ. 383.

Τὸ κατὰ τὸ ἄνω πείραμα παρατηρηθὲν φαινόμενον ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς: Ὅταν ἡ πίεσις ἐντὸς τοῦ δοχείου, ἐλαττωμένη, γίνῃ ἴση πρὸς τὴν τάσιν κεκορεσμένων ἀτμῶν τοῦ ὕδατος εἰς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ περιβάλλοντος, τότε ἀκριβῶς ἐκπληροῦται ἡ συνθήκη τοῦ βρασμοῦ καὶ τὸ ὑγρὸν ἀρχίζει νὰ βράζῃ.

Τὸ αὐτὸ φαινόμενον δύναται νὰ ἐπιδειχθῇ, δι' ἀπλουστερῶν μέσων, ὡς ἑξῆς: Ἐντὸς ὑαλίνης σφαιρικῆς φιάλης θέτομεν ὕδωρ καὶ τὸ βράζομεν ἐπὶ μερικὰ λεπτά, ὥστε νὰ ἐκδιωχθῇ ὅλος ὁ ἐντὸς αὐτοῦ διατελυμένος ἀήρ. Κατόπιν πωματίζομεν τὴν φιάλην μὲ ἕνα φελλὸν καί, ἀποῦ τὴν ἀναστρέψωμεν, τὴν στηρίζομεν, ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα 384. Ἀφήνομεν νὰ ψυχθῇ ἐπὶ ἐν ἡ δύο λεπτά καί, ἀκολούθως, χύνομεν ἐπ' αὐτῆς ψυχρὸν ὕδωρ. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐντὸς τῆς φιάλης ὕδωρ ἀρχίζει νὰ βράζῃ. Τοῦτο ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς: Τὸ ψυχρὸν ὕδωρ προκαλεῖ ὑγροποίησιν τῶν ἐντὸς τῆς φιάλης ὑδρατμῶν καί, οὕτω, λόγῳ τῆς ἀπουσίας ἀέρος, ἡ πίεσις εἰς τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν ἐλαττοῦται τόσον, ὥστε τὸ ὕδωρ ν' ἀρχίσῃ νὰ βράζῃ ἐκ νέου, μολονότι ἡ θερμοκρασία του εἶναι, τώρα, πολὺ κάτω τῶν 100°C .



Σχ. 384.

Ἐφ' ὅσον τὸ σημεῖον ζέσεως ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἐξωτερικῆς πίεσεως, εἶναι ἐπόμενον ὕδωρ, περιεχόμενον ἐντὸς ἀνοικτοῦ δοχείου, ὅταν εὐρίσκεται εἰς μεγάλα ὑψόμετρα (ὕψηλὰ ὄρη κ.λ.), νὰ βράζῃ εἰς θερμοκρασίαν, σημαντικῶς μικροτέραν τῶν 100°C (*).

(*) Οὕτω, εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ Ὀλύμπου (ὕψος 2917 m, ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις 350 Torr) τὸ ὕδωρ ζεεῖ εἰς 90°C .

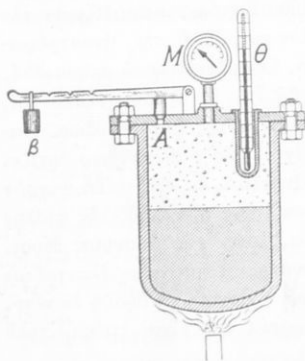
Ὡς εἶδομεν, τὸ σημεῖον ζέσεως ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἐξωτερικῆς πίεσεως. **Κανονικὸν σημεῖον ζέσεως** ὀρίζομεν τὸ σημεῖον ζέσεως, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς πίεσιν μιᾶς ἀτμοσφαίρας (760 Torr). Ὁ πίναξ τῆς § 262 δίδει τὸ σημεῖον ζέσεως διαφόρων ὑγρῶν ὑπὸ πίεσιν 1 Atm, δηλ., ἀκριβῶς τὸ κανονικὸν σημεῖον ζέσεως.

Νόμοι τοῦ βρασμοῦ. Ἐξ ὅλων τῶν ἀνωτέρω συνάγονται οἱ ἐξῆς νόμοι τοῦ βρασμοῦ :

- 1) Ἐν ὑγρὸν ἀρχίζει νὰ ζέῃ, ὅταν ἡ θερμοκρασία του ἀνέλθῃ τόσον, ὥστε ἡ τάσις κεκορεσμένων ἀτμῶν αὐτοῦ νὰ γίνῃ ἴση πρὸς τὴν ἐπὶ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ἐπικρατοῦσαν ἐξωτερικὴν πίεσιν.
- 2) Τὸ σημεῖον ζέσεως ἑνὸς ὑγροῦ εἶναι σταθερόν, ἐφ' ὅσον ἡ ἐξωτερικὴ πίεσις παραμένει σταθερά.
- 3) Τὸ σημεῖον ζέσεως αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται, ὅταν αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται ἡ ἐξωτερικὴ πίεσις.
- 4) Καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ βρασμοῦ ἡ θερμοκρασία τοῦ ὑγροῦ παραμένει σταθερά.

Ἀσκήσις. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν ζέει τὸ ὕδωρ εἰς τὴν πόλιν σας ; (Διὰ τὴν λύσιν πρέπει νὰ γνωρίζετε τὸ ὑψόμετρον τῆς πόλεώς σας καὶ νὰ συμβουλευθῇτε τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 249).

★ § 264. **Χύτρα τοῦ Papin (Παπέν).** Αὕτη ἀποτελεῖται ἐκ μεταλλίνου δοχείου μὲ ἀνθεκτικὰ τοιχώματα (σχ. 385), τὸ ὁποῖον φέρει τὴν ἀσφαλιστικὴν βαλβίδα Α, ὑποδοχὴν διὰ τὴν τοποθέτησιν τοῦ θερμομέτρου Θ καὶ τὸ μανόμετρον Μ. Διὰ τῆς συσκευῆς ταύτης



- Σχ. 385. Χύτρα τοῦ Papin.

δυνάμεθα νὰ φέρωμεν τὸ ὕδωρ εἰς θερμοκρασίαν, ἀνωτέραν τῶν 100°C , χωρὶς τοῦτο νὰ βράσῃ καὶ τοῦτο διότι οἱ σχηματιζόμενοι ἐντὸς τῆς χύτρας ὕδρατμοι πιέζουν τὸ ὕδωρ καὶ ἐμποδίζουν τὸν βρασμὸν αὐτοῦ. Ἡ πίεσις ἐντὸς τῆς χύτρας εἰς ἐκάστην θερμοκρασίαν εἶναι ἴση πρὸς τὴν τάσιν κεκορεσμένων ὕδρατμῶν καί, συνεπῶς, ὅσον ἀνυψοῦται ἡ θερμοκρασία, τόσον μεγαλυτέραν πίεσιν θὰ δεικνύῃ τὸ μανόμετρον. Ἡ ἀσφαλιστικὴ βαλβὶς ρυθμίζεται διὰ μετακινήσεως τοῦ βάρους β, ὥστε ν' ἀνοίγῃ εἰς ὀρισμένην πίεσιν. Ὅταν, λοιπόν, αὐξανόμενης τῆς θερμοκρασίας, ἡ πίεσις τῶν ἀτμῶν ὑπερβῇ τὴν τιμὴν ταύτην, ἡ ἀσφαλιστικὴ βαλβὶς ἀνοίγει, οἱ ἀτμοὶ ἐκφεύγουν καί, οὕτω, προλαμβάνεται διάρρηξις τῆς συσκευῆς.

Διὰ τὴν μελετήσωμεν τὴν λειτουργίαν τῆς χύτρας, πρέπει νὰ ἐκδιώξωμεν ἀρχικῶς ὅλον τὸν ἐντὸς αὐτῆς ἀέρα. Πρὸς τοῦτο, κρατοῦντες τὴν ἀσφαλτικὴν βαλβίδα ἀνοικτὴν, θερμαίνομεν τὸ περιεχόμενον ὕδωρ μέχρις $100^{\circ} C$, ὁπότε οἱ παραγόμενοι ἀφθινοὶ ὑδρατμοὶ συμπρασύρουν τὸν ἐντὸς τῆς χύτρας ἀέρα. Ἡδη, εἵμεθα ἕτοιμοι νὰ ἀρχίσωμεν τὸ πείραμα: Κλείομεν τὴν βαλβίδα καὶ ψύχομεν τὴν χύτραν εἰς θερμοκρασίαν, π.χ., $60^{\circ} C$, τὴν ὁποίαν καὶ διατηροῦμεν σταθεράν. Ἡ πίεσις τῶν ἐντὸς τῆς χύτρας ὑδρατμῶν, τὴν ὁποίαν καὶ δεικνύει τὸ μανόμετρον, θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν τάσιν κεκορεσμένων ὑδρατμῶν, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν θερμοκρασίαν $60^{\circ} C$. Ἐκ τοῦ διαγράμματος τοῦ σχήματος 379 εὐρίσκομεν ὅτι αὕτη εἶναι μικρότερα τῶν 76 cm Hg . Ἐάν, τώρα, θερμάνωμεν τὴν χύτραν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ μανόμετρον θὰ δεικνύη ὅλον ἐν μεγαλυτέραν πίεσιν, ὅταν δὲ ἡ θερμοκρασία γίνῃ $100^{\circ} C$, τὸ μανόμετρον θὰ δεικνύη 1 ἀτμόσφαιραν . Ἐάν συνεχίσωμεν τὴν θέρμανσιν, ἡ ἔνδειξις τοῦ θερμομέτρου θ' αὐξάνεται ὑπὲρ τοῦς $100^{\circ} C$, ἐνῶ ταυτοχρόνως θ' αὐξάνεται καὶ ἡ ἔνδειξις τοῦ μανομέτρου ὑπὲρ τὴν μίαν ἀτμόσφαιραν (*).

Ἐάν, εἰς οἵανδήποτε θερμοκρασίαν, παύσωμεν νὰ προσφέρωμεν θερμότητα εἰς τὴν χύτραν, ἡ θερμοκρασία δὲν αὐξάνεται πλέον, τὸ δὲ μανόμετρον δεικνύει συνεχῶς τὴν αὐτὴν πίεσιν. Ἐάν, ὅμως, ἀνοίξωμεν τὴν βαλβίδα ἐπ' ὀλίγον καὶ τὴν κλείσωμεν ἐκ νέου, οὕτως ὥστε μικρὸν μέρος τῶν ὑπερκειμένων ὑδρατμῶν νὰ ἐκφύγῃ εἰς τὴν ἐλευθέραν ἀτμόσφαιραν, ἡ πίεσις ἐλαττοῦται κατὰ τι καὶ τὸ ὕδωρ ἀρχίζει νὰ βράζῃ ἐντόνως. Ὁ βρασμὸς οὗτος διαρκεῖ ἐπὶ βραχυτάτον χρόνον, δηλ., ἐπὶ τόσον χρόνον, ὅστις ἀπαιτεῖται, ἵνα ἡ πίεσις λάβῃ τὴν τιμὴν, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῆς χύτρας.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον λειτουργοῦν καὶ αἱ χύτραι πίεσεως, αἱ χρησιμοποιοῦμεναι διὰ τὴν παρασκευὴν τῶν φαγητῶν. Αὗται, εἶναι, κατ' ἀρχὴν, χύτραι Papin, διὰ τῶν ὁποίων ἐπιτυγχάνομεν θερμοκρασίαν, ἀνωτέραν τῶν $100^{\circ} C$ καί, ὥς ἐκ τούτου, ἡ παρασκευὴ τῶν φαγητῶν γίνεται εἰς χρόνον, ἀσυγκρίτως μικρότερον, τοῦ ἀπαιτουμένου κατὰ τὴν χρῆσιν τῶν συνήθων μαγειρικῶν σκευῶν.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀρχῆς στηρίζεται καὶ ἡ λειτουργία τῶν ἀποστειρωτικῶν κλιβάνων τῶν νοσοκομείων, καθὼς καὶ τῶν αὐτοκλείστων, διὰ τῶν ὁποίων ἐπιτυγχάνονται θερμοκρασίαι, ἀνώτεραι τῶν $100^{\circ} C$.

§ 265. Θερμότης εξαερώσεως. Διὰ τὴν εξαέρωσιν — δηλ., τὴν μετατροπὴν ποσότητός τινος ὑγροῦ εἰς ἀτμὸν — πρέπει νὰ καταναλωθῇ θερμότης. Ὅπως εὐρίσκεται, ἡ θερμότης Q , ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται, ὅπως μετατραπῇ εἰς ἀτμὸν μία ποσότης ὑγροῦ, μάζης m καὶ θερμοκρασίας, ἴσης πρὸς τὴν

(*) Ὅπως εὐρίσκεται ἐκ μετρήσεων, ὅταν ἡ θερμοκρασία γίνῃ $100^{\circ}, 121^{\circ}, 134^{\circ}, 144^{\circ}, 152^{\circ} C...$, ἡ πίεσις γίνεται, ἀντιστοίχως, ἴση πρὸς $1, 2, 3, 4, 5 \text{ at...}$

κανονικὴν θερμοκρασίαν ζέσεως, εἶναι ἀνάλογος τῆς μάζης τοῦ ὑγροῦ
*Ητοι

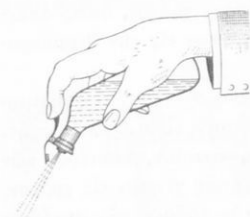
$$Q = L \cdot m \quad (1)$$

ἐνθα L εἶναι μία σταθερά, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ὑγροῦ καὶ καλεῖται **θερμότης ἐξαερώσεως** (*). Ἐκ τοῦ τύπου (1) προκύπτει ὅτι ἡ θερμότης ἐξαερώσεως ἐνὸς ὑγροῦ ἰσοῦται ἀριθμητικῶς πρὸς τὴν θερμότητα, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται, ὅπως 1 gr ἐκ τοῦ ἐν λόγῳ ὑγροῦ μετατραπῇ εἰς ἀτμόν, ὑπὸ τὴν κανονικὴν θερμοκρασίαν ζέσεως.

Ἡ θερμότης ἐξαερώσεως μετρεῖται εἰς cal/gr . Οὕτω, π.χ., ἡ θερμότης ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος εἶναι ἴση πρὸς 540 cal/gr . Τοῦτο σημαίνει ὅτι, διὰ νὰ μετατραπῇ ἐν γραμμάριον ὕδατος, θερμοκρασίας 100°C , εἰς ἀτμόν τῆς αὐτῆς θερμοκρασίας, ἀπαιτοῦνται 540 θερμίδες.

Εἶδομεν ἀνωτέρω ὅτι, διὰ νὰ μετατραπῇ 1 gr ὑγροῦ τινος εἰς ἀτμόν, πρέπει νὰ λάβῃ θερμότητα, ἴσην πρὸς τὴν θερμότητα ἐξαερώσεως. Τὴν αὐτήν, ἀκριβῶς, θερμότητα θ' ἀποδώσῃ 1 gr ἀτμοῦ, ὅταν μετατραπῇ εἰς ὑγρὸν ὑπὸ τὴν θερμοκρασίαν ζέσεως. Οὕτω, ἐὰν 1 gr ὑδρατμῶν, θερμοκρασίας 100°C , μετατραπῇ εἰς ὕδωρ τῆς αὐτῆς θερμοκρασίας, θ' ἀποδώσῃ θερμότητα, ἴσην πρὸς 540 θερμίδας.

§ 266. Ψῦξις, λόγῳ ἐξαερώσεως. Εἶδομεν ὅτι διὰ τὴν ἐξαέρωσιν ἐνὸς ὑγροῦ πρέπει νὰ προσφέρεται εἰς αὐτὸ θερμότης. Συνεπῶς, ὅταν ἐν



Σχ. 386. Τὸ χλωριόνηγον αἰθύλιον, ἐξατμιζόμενον, προκαλεῖ ἰσχυρὰν ψύξιν.

ὑγρὸν ἐξαεροῦται, χωρὶς νὰ λαμβάνῃ ἔξωθεν θερμότητα, ψύχεται. Τοῦτο δεῖκνύμεν διὰ τοῦ ἑξῆς ἀπλοῦ πειράματος: Ἐπαλείφομεν τὴν χεῖρά μας διὰ βάμβακος, ἐμποτισμένου δι' οἶνοπνεύματος ἢ αἰθέρος, ὅποτε αἰσθανόμεθα ψύξιν εἰς τὸ μέρος τῆς ἐπαλείψεως. Τοῦτο ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς: Τὸ οἶνοπνευμα (ἢ ὁ αἰθήρ), διὰ νὰ ἐξαερωθῇ, προσλαμβάνει θερμότητα ἐκ τῆς χειρός μας, ἡ ὁποία οὕτω ψύχεται.

Τὸ φαινόμενον τοῦτο χρησιμοποιεῖται εἰς τὴν Ἱατρικὴν διὰ τοπικὴν ἀναισθησίαν διὰ ψύξεως, ἡ ὁποία προκαλεῖται κατὰ τὴν ἐξαέρωσιν ὑγροῦ, λίαν πτητικοῦ (σχ. 386).

§ 267. Ἐξάχνωσις. Ἐὰν θερμάνωμεν ἑλαφρῶς κρυστάλλους ἰωδίου, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ στερεὸν ἰώδιον μετατρέπεται ἀπ' εὐθείας εἰς ἀτμούς, χωρὶς νὰ τακῇ. Τὸ φαινόμενον τοῦτο, κατὰ τὸ ὅποιον ἐν στερεόν, θερμα-

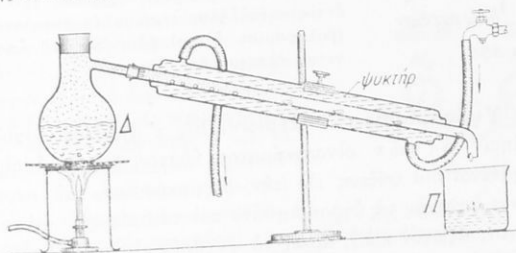
(*) Ἡ θερμότης ἐξαερώσεως καλεῖται καὶ «*λανθάνουσα θερμότης ἐξαερώσεως*».

νόμενον, μετατρέπεται ἀπ' ἐυθείας εἰς ἀέριον, χωρίς, δηλ., νὰ μεσολαβήσῃ ὑγρὰ κατάστασις, καλεῖται **ξεάχνωσις**.

Ὅμοιως, ξεαχνοῦνται καὶ ἡ ναφθαλίνη εἰς τὴν συνήθη θερμοκρασίαν τοῦ περιβάλλοντος. Δι' αὐτόν, ἀκριβῶς, τὸν λόγον, ἐὰν ἀφήσωμεν εἰς τὴν ἐλευθέραν αἰτμόσφαιραν τεμάχια ναφθαλίνης, ταῦτα διαρκῶς σμικρύνονται, μέχρις ὅτου ξεαφανισθοῦν. Ξεάχνωσιν ὑφίσταται, ἐπίσης, καὶ ἡ καμφορά.

Γενικῶς, ξεαχνοῦνται ἰσχυρῶς ὅλα τὰ στερεὰ σώματα, τὰ ὅποια ἔχουν ὁσμὴν.

§ 268. Ἀπόσταξις. Οἱ κεκορεσμένοι αἰμοὶ ὑγροῦ τινος, ψυχόμενοι, ὑγροποιοῦνται. Τοῦτο ἐκμεταλλεῖται εἰς τὴν **ἀπόσταξιν**: Ἐντὸς τοῦ δοχείου Δ τῆς συσκευῆς τοῦ σχήματος 387 τίθεται τὸ πρὸς ἀπόσταξιν ὑγρὸν



Σχ. 387. Συσκευή ἀποστάξεως.

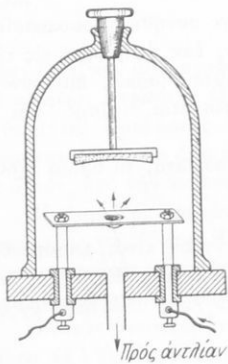
(π.χ., ὕδωρ) καὶ θερμαίνεται. Οἱ παραγόμενοι αἰμοὶ φέρονται εἰς τὸν **ψυκτῆρα** — σωλῆνα ὑάλινον, περιβαλλόμενον ὑπὸ κυκλοφοροῦντος ὕδατος — ἐντὸς τοῦ ὁποίου, ψυχόμενοι, ὑγροποιοῦνται. Τὸ παραγόμενον ὕδωρ συλλέγεται εἰς τὸ ποτήριον Π. Ἐπειδὴ ἡ κατὰ τὴν ὑγροποίησιν τοῦ ὕδατος ἀποδιδόμενη θερμότης εἰς τὰ τοιχώματα τοῦ ψυκτῆρος εἶναι μεγάλη (βλ. § 265), πρέπει τὸ ὕδωρ τῆς ψύξεως νὰ κυκλοφορῇ διαρκῶς, διὰ νὰ ἀπάγῃ τὴν μεγάλην ταύτην θερμότητα.

Ἡ ἀπόσταξις χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν παρασκευὴν τοῦ ἀπεσταγμένου ὕδατος — ὕδατος, δηλ., μὴ περιέχοντος ξένας προσμείξεις (*) — καθὼς καὶ εἰς τὴν βιομηχανίαν διὰ τὴν παρασκευὴν οἴνοπνεύματος ἐξ οἴνοπνευματοῦχων ὑγρῶν κ.λ.

Ἐὰν τὸ ὑγρὸν εἶναι μείγμα διαφόρων πτητικῶν ὑγρῶν, τότε, κατὰ τὴν ἀπόσταξιν, λαμβάνονται τὰ διάφορα ὑγρά, τὸ ἐν κατόπιν τοῦ ἄλλου (κλαματική ἀπόσταξις).

(*) Ὡς ἀπεσταγμένον ὕδωρ δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ τὸ ὕδωρ τῆς βροχῆς.

★ § 269. Ἐπιμετάλλωσις ἐν τῷ κενῷ. Ὅπως διάφοροι ἄλλαι οὐσίαι, οὕτω καὶ τὰ μέταλλα, ὅταν θερμανθῶν, δύνανται νὰ ὑποστοῦν ἐξάχνωσιν ἢ ἀπόσταξιν. Τοῦ φαινομένου τούτου γίνεται ἐκμετάλλευσις διὰ τὴν ἐπιμετάλλωσιν ἐπιφανειῶν. Πρὸς τοῦτο θερμαίνομεν ἐν τῷ κενῷ τὸ πρὸς ἀπόσταξιν μέταλλον—π.χ., ἀργύριον—ὅποτε τοῦτο τήκεται καὶ ἐξαερούται. Τὰ ἐκ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἀργυρίου ἐκπεμπόμενα ἄτομα ἀργυρίου κινοῦνται ἐν τῷ κενῷ εὐθύγραμμως καὶ ἐπικαθίζονται ἐπὶ τῆς πρὸς ἐπιμετάλλωσιν ἐπιφανείας, ἢ ὅποια εἶναι τοποθετημένη ἀκριβῶς ἀπέναντι τοῦ τετηγότος μέταλλου.



Σχ. 388.

Τὸ σχῆμα 388 παριστᾷ μίαν τοιαύτην συσκευήν ἐπιμεταλλώσεως, διὰ τῆς ὁποίας παράγεται ἡ κατοπτρικὴ ἐπιφάνεια ἐνὸς κοίλου κατόπτρου τηλεσκοπίου. Τὸ πρὸς τῆξιν ἀργύριον ἔχει τοποθετηθῇ ἐντὸς καταλήλου λεμβρίου ἐκ δυστήκτου μετάλλου (βολφραμίου ἢ μολυβδαίνιου), τὸ ὁποῖον θερμαίνεται ἡλεκτρικῶς.

§ 270. Ὑγροποίησις τῶν ἀερίων. Εἰς τ' ἀνωτέρω ἡσχολήθημεν μετὰ τὴν ὑγροποίησιν ἀτμῶν οἰνοπνεύματος, ὕδατος, κ.λ., ἢ ὅποια, ὡς εἶδομεν, ἐπιτυγχάνεται διὰ ψύξεως εἰς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ περιβάλλοντος. Ὅμοιως, εἶναι δυνατόν νὰ ὑγροποιηθῶν καὶ τὰ διάφορα ἀέρια (δξυγόνον, ὕδρογόνον, ἄζωτον κ.λ.), ἀρκεῖ νὰ ψυχθῶν εἰς πολὺ χαμηλὴν θερμοκρασίαν. Ἡ ἀνάγκη τόσον χαμηλῶν θερμοκρασιῶν ἀποφεύγεται, ἔάν, παραλλήλως πρὸς τὴν ψύξιν, τὸ ἀέριον πιεσθῇ πολὺ. Οὕτω, τὸ διοξειδίον τοῦ ἀνθρακος ὑγροποιεῖται, ἀκόμη καὶ ἄνευ ψύξεως, ἀρκεῖ νὰ πιεσθῇ ἐπαρκῶς.

Τὰ ὑγροποιημένα ταῦτα ἀέρια καλοῦνται *υγρὸν δξυγόνον*, *υγρὸν ὕδρογόνον* κ.λ. Ὅμοιως, ὁ ἀήρ (μεῖγμα κυρίως ἀζώτου καὶ δξυγόνου), ὅταν ὑγροποιηθῇ, καλεῖται *υγρὸς ἀήρ*.

Κρίσιμος θερμοκρασία. Διὰ νὰ ὑγροποιηθῇ ἓν ἀέριον, πρέπει ἡ θερμοκρασία του νὰ εὐρίσκειται κάτω μιᾶς ὁρισμένης δι' ἕκαστον ἀέριον θερμοκρασίας, ἢ ὅποια καλεῖται *κρίσιμος θερμοκρασία*. Ὅταν ἡ θερμοκρασία ἐνὸς αερίου εἶναι μεγαλύτερα τῆς κρίσεως, τὸ ἀέριον εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑγροποιηθῇ, ὅσηνδήποτε πίεσις καὶ ἂν ἐξασκηθῇ ἐπ' αὐτοῦ.

★★ **Κρίσιμος ὄγκος** · **Κρίσιμος πίεσις** · **Κρίσιμος πυκνότης.** Κατὰ τὴν μελέτην τῆς ὑγροποιήσεως τῶν ἀερίων, ἐκτὸς τῆς κρίσεως θερμοκρασίας, ἐμφανίζονται καὶ ἄλλα κρίσιμα μεγέθη. Οὕτω, ὀνομάζομεν *κρίσιμον πίεσιν*, τὴν πίεσιν ἐκείνην, ἢ ὅποια ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ὑγροποιηθῇ ἓν ἀέριον, ὅταν εὐρίσκειται εἰς τὴν κρίσιμον αὐτοῦ θερμοκρασίαν.

Ἀφ' ἑτέρου, ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον καταλαμβάνει ἓν γραμμομόριον αερίου, εὐρίσκόμενον ὑπὸ τὴν κρίσιμον θερμοκρασίαν καὶ τὴν κρίσιμον πίεσιν, καλεῖται *κρίσιμος ὄγκος*, ἢ δὲ ἀντίστοιχος πυκνότης *κρίσιμος πυκνότης*.

Ἡ κρίσιμος θερμοκρασία, ἡ κρίσιμος πίεσις καὶ ὁ κρίσιμος ὄγκος—αἱ ὁποῖαι

καλοῦνται καὶ **κρίσιμοι σταθεραὶ** — εἶναι σταθεραί, χαρακτηριστικαὶ δι' ἕκαστον αέριον.

§ 271. Ἀέρια, φερόμενα ἐν τῷ ἐμπορίῳ. Πολλὰ αέρια, χρησιμοποιούμενα εἰς τὴν καθημερινὴν ζωὴν, προσφέρονται ὑπὸ τοῦ ἐμπορίου ἐντὸς χαλυβδίνων φιαλῶν *πίσεως*. Ἐκ τῶν αερίων αὐτῶν, ἄλλα εὐρίσκονται ἐντὸς τῆς φιάλης εἰς ὑγρὰν μορφήν καὶ ἄλλα εἰς αέριον. Οὕτω, τὸ διοξειδίου τοῦ ἄνθρακος φέρεται εἰς ὑγρὰν μορφήν, διότι συμπιεζόμενον, ὑγροποιεῖται εἰς συνήθη θερμοκρασίαν. Ἐντὸς φιάλης, περιεχοῦσης CO_2 , ὑπάρχουν πάντοτε ὑπεράνω τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ κεκορεσμένοι ἀτμοὶ CO_2 . Συνεπῶς, ἡ πίεσις ἐντὸς τῆς φιάλης θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν τάσιν κεκορεσμένων ἀτμῶν τοῦ CO_2 εἰς τὴν ἐκάστοτε θερμοκρασίαν τοῦ περιβάλλοντος (περίπου ἴση πρὸς 56 at), ἀνεξαρτήτως τῆς ποσότητος τοῦ ὑγροῦ διαπεριβάλλοντος (περίπου ἴση πρὸς 56 at), ἀνεξαρτήτως τῆς ποσότητος τοῦ ὑγροῦ διοξειδίου τοῦ ἄνθρακος, ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχῃ ἔστω καὶ μικρὰ ποσότης ὑγροῦ. Κατὰ ταῦτα τὴν ἐντὸς τῆς φιάλης ποσότητα τοῦ ὑγροῦ διοξειδίου τοῦ ἄνθρακος δὲν δύναμεθα νὰ εὐρωμεν ἐκ τῆς πίσεως, παρὰ μόνον διὰ ζυγίσσεως. Ὅταν ἀνοίξωμεν τὴν στρόφιγγα τῆς φιάλης, τὸ ὑπεράνω τοῦ ὑγροῦ εὐρισκομενον αέριον CO_2 ἐξέρχεται καὶ χρησιμοποιεῖται διὰ διαφόρους ἀνάγκας (ἀεριοῦχα ποτά, ζῦθος κ.λ.).

Ἀλλ' ἄλλα, φερόμενα καὶ αὐτὰ ἔξω τοῦ ὑγροῦ μορφήν, εἶναι τὸ *ἠραερίον* (τάσις κεκορεσμένων ἀτμῶν αὐτοῦ εἰς τὴν συνήθη θερμοκρασίαν, περίπου, ἴση πρὸς 5 at), τὸ ὁποῖον σήμερον χρησιμοποιεῖται εὐρύτατα ὡς καύσιμον, ἀντὶ τοῦ φωταερίου, καθὼς καὶ τὸ *Freon* (φρεόν), τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται εἰς τὰ ἠλεκτρικὰ ψυγεῖα (βλ. κατωτέρω).

Ἄλλα αέρια, ὅπως τὸ ὀξυγόνον, τὸ ὕδρογόνον κ.λ., ἔχουν κρίσιμον θερμοκρασίαν πολὺ χαμηλὴν καί, συνεπῶς, εἰς συνήθεις θερμοκρασίας δὲν δύνανται νὰ φέρονται ὑπὸ ὑγρὰν μορφήν. Ὡς ἐκ τούτου, τὰ ἐν λόγω αέρια φέρονται εἰς τὸ ἐμπόριον ὑπὸ αέριον μορφήν ἐντὸς φιαλῶν πίσεως καὶ ὑπὸ μεγάλῃν πίεσιν (περίπου 150 at), ἵνα, ὑπὸ μικρὸν σχετικῶς ὄγκον, περιέχεται ἐντὸς αὐτῶν μεγάλῃ ποσότης αερίου. Ἐφ' ὅσον τὸ αέριον καταναλίσκεται, ἡ πίεσις αὐτοῦ βαθμηδὸν ἐλαττοῦται. Τὸ σχῆμα 389 παριστᾷ φιάλην πίσεως, ἐφωδιασμένην διὰ μειωτήρος, ὁ ὁποῖος υποβιβάζει τὴν πίεσιν εἰς μικράν τιμὴν, καθισταμένην, οὕτω, εὐκολωτέρας τῆς χρήσεως τοῦ αερίου.

Τὸ *ἀκετυλένιον* (κ. ἀσετυλίην) δὲν ἐπιτρέπεται νὰ συμπιεσθῇ, διότι ὑπάρχει κίνδυνος ἐκρηξέως, λόγῳ αὐτομάτου χημικῆς διασπάσεως αὐτοῦ. Ἔνεκα τούτου εἰς τὸ ἐμπόριον φέρεται διαλελυμένον ἐντὸς ἀκετόνης.



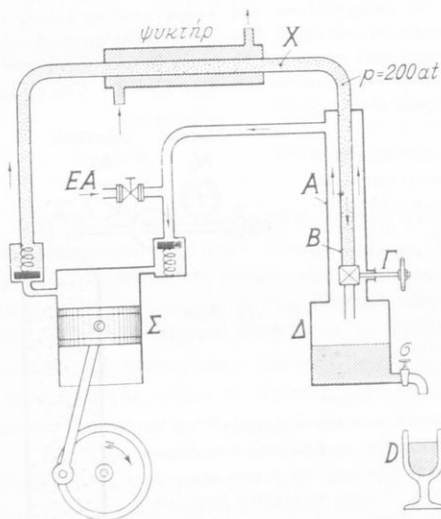
§ 272. Μέθοδοι παραγωγῆς χαμηλῶν θερμοκρασιῶν. Χαμηλαὶ θερμοκρασίαι δύνανται νὰ ἐπιτευχθοῦν διὰ τῶν ἑξῆς μεθόδων:

- Διὰ ψυκτικῶν μειγμάτων (βλ. § 245).
- Δι' ἐξαερώσεως (βλ. § 266).
- Δι' ἐκτονώσεως αερίων (βλ. § 235).
- Διὰ ξηροῦ πάγου. Ὑπὸ τὸ ὄνομα *ξηρὸς πάγος* φέρεται εἰς τὸ ἐμπόριον διοξειδίου τοῦ ἄνθρακος εἰς στερεάν κατάστασιν, τὸ ὁποῖον ἔχει ψυχθῇ εἰς πολὺ χα-

μηλὴν θερμοκρασίαν (*). Ὁ ξηρὸς πάγος χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν βαθεῖαν ψύξιν τροφίμων κ.λ., παρουσιάζει δὲ τὸ πλεονέκτημα — ἔναντι τοῦ συνήθους πάγου — νὰ μὴ ἐγκαταλείπῃ ὑγρὸν υπόλειμμα, καθόσον ἐξαχνοῦται εἰς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ περιβάλλοντος.

ε) Δι' ὑγροῦ αέρος. Ἀκόμη χαμηλότεραι θερμοκρασίαι ἐπιτυγχάνονται διὰ χρησιμοποίησεως ὑγροῦ αέρος (**).

★ ★ § 273. Ὑγραποίησης τοῦ αέρος διὰ τῆς μηχανῆς Linde (Λίντε). Ὅπως οἰοῦντοτε αέριον, οὕτω καὶ ὁ ἀήρ δύναται νὰ ὑδροποιηθῇ, ἀρκεῖ νὰ ψυχθῇ εἰς ἀρκετὰ χαμηλὴν θερμοκρασίαν. Ἐπειδὴ ἡ ψύξις, ἡ ἐπερχομένη κατὰ τὴν ἐκτόνωσιν πεπιεσμένου αέρος, εἶναι ἀνεπαρκής διὰ νὰ ὑδροποιηθῇ οὗτος, πρέπει ὁ ἀήρ



Σχ. 390. Μηχανὴ Linde (ἀρχή). Ὁ ἐφεδρικός ἀήρ EA ἀντικαθιστᾷ τὴν ποσότητα αέρος, ἡ ὁποία ὑδροποιεῖται.

τέρεται. Ὁ ψυχρὸς οὗτος ἀήρ, ἀνερχόμενος διὰ τοῦ σωλήνος A, προψύχει τὸν ἐσωτερικὸν σωλήνα B, συνεπῶς καὶ τὸν ἐντὸς αὐτοῦ κατερχόμενον αέρα. Ἡδη, ὁ κατερχόμενος οὗτος ψυχρὸς ἀήρ, κατὰ τὴν ἐκτόνωσιν, φθάνει εἰς θερμοκρασίαν χαμηλοτέραν ἢ ἀρχικῶς. Εἶναι προφανές, ὅτι, μετὰ τινα χρόνον συνεχοῦς λειτουργίας, ἡ ἐπιτυγχανομένη κατὰ τὴν ἐκτόνωσιν θερμοκρασία εἶναι τόσο χαμηλὴ, ὥστε μέρος τοῦ αέρος ὑδροποιεῖται καὶ συλλέγεται ἐντὸς τοῦ δοχείου Δ. Ἀνοίγοντες τὴν σφρόφιγγα σ, λαμβάνομεν τὸν ὑγρὸν αέρα ἐντὸς τοῦ δοχείου Dewar (Ντιγούαρ) Δ.

§ 274. Μοριακὴ ἢ θερμικὴ κίνησις. Ὅπως γνωρίζομεν ἤδη, ἡ ὕλη ἐμφανίζεται ὑπὸ τρεῖς μορφάς: τὴν στερεάν, τὴν ὑγρὰν καὶ τὴν αέριον.

(*) Ἡ θερμοκρασία τοῦ ξηροῦ πάγου εἶναι ἴση πρὸς -79° C.

(**) Ἡ θερμοκρασία τοῦ ὑγροῦ αέρος εἶναι ἴση πρὸς -193° C.

Εἰς τὰ στερεά, τὰ ἄτομα (ἢ μόρια) εὐρίσκονται εἰς ὠρισμένας θέσεις (βλ. σχ. 291), περὶ τὰς ὁποίας διαρκῶς ταλαντοῦνται (*θερμική κίνησις*). Τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως τῶν ἀτόμων εὐρίσκεται ὅτι ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θερμοκρασίας: *Ἐὰν θερμάνωμεν ἐν στερεόν, τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως τῶν ἀτόμων αὐξάνεται*, ἡ δὲ προσφερομένη, ὑπὸ μορφήν θερμότητος, ἐνέργεια καταναλίσκεται, ἀκριβῶς, διὰ τὴν αὔξησιν τῆς ἐνεργείας τῆς ταλαντώσεως. Ὅταν ἡ θερμοκρασία φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον τήξεως, τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως γίνεται πολὺ μεγάλο, ὅποτε τὰ ἄτομα, ἀπομακρυνόμενα πολὺ τῆς ἀρχικῆς τῶν θέσεως, δὲν ἐπιστρέφουν πλέον εἰς αὐτήν, ἀλλὰ κινοῦνται ἐλευθέρως πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις. Τὸ στερεόν, δηλ., μετετρέπη εἰς ὑγρὸν (τῆξις). Ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν τὴν θέρμανσιν, αἱ ταχύτητες, μὲ τὰς ὁποίας κινοῦνται τὰ ἄτομα (ἢ μόρια), αὐξάνονται, ὅποτε λέγομεν ὅτι ἡ θερμοκρασία τοῦ ὑγροῦ ἠϋξήθη.

Εἰς τὴν θερμικὴν κίνησιν τῶν μορίων τῶν ὑγρῶν ὀφείλεται καὶ τὸ φαινόμενον τῆς ἐξατμίσεως: Ἐὰν ἐν μόριον τοῦ ὑγροῦ εὐρίσκεται εἰς τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν καί, κατὰ τινα στιγμὴν, ἔχει ταχύτητα μὲ φοράν πρὸς τὰ ἄνω, εἶναι δυνατόν νὰ ὑπερικήσῃ τὰς δυνάμεις τῶν γειτονικῶν του μορίων, αἱ ὁποῖαι τὸ συγκρατοῦν καὶ ν' ἀπομακρυνθῇ τῆς ἐπιφανείας - τὸ ὑγρὸν, δηλ., ἐξατμίζεται.

Εἰς τὴν θερμικὴν κίνησιν τῶν μορίων τῶν ἀερίων, τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται ἐντὸς κλειστοῦ δοχείου, ὀφείλεται καὶ ἡ πίεσις αὐτῶν: Τὰ μόρια τῶν ἀερίων, κινούμενα πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις, συγκρούονται τόσον μετὰ τῶν ὅσων καὶ μὲ τὰ τοιχώματα τοῦ δοχείου. Κατὰ τὰς συνεχεῖς συγκρούσεις μετὰ τῶν τοιχωμάτων, τὰ μόρια ἐξασκοῦν ἐπ' αὐτῶν δυνάμεις, ἀποτέλεσμα τῶν ὁποίων εἶναι ἡ πίεσις τοῦ ἀερίου.

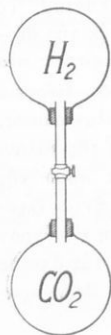
Ὅλα τὰ μόρια ἐνὸς ἀερίου δὲν κινοῦνται μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα. Μικρὸν ποσοστὸν αὐτῶν κινεῖται μὲ πολὺ μικρὰς ἢ πολὺ μεγάλας ταχύτητας, ἐνῶ τὰ ὑπόλοιπα κινοῦνται μὲ μίαν μέσην ταχύτητα. Ἡ μέση, αὕτη, ταχύτης εὐρίσκεται ὅτι ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θερμοκρασίας, αὐξανομένη μετ' αὐτῆς. *Ἐὰν, λοιπόν, θερμάνωμεν ἐν ἀέριον, ἡ μέση ταχύτης τῶν μορίων του θ' αὐξηθῇ.*

Ἐκ τούτου ἐξηγεῖται διατί, αὐξανομένης τῆς θερμοκρασίας ἐνὸς ἀερίου — ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον —, αὐξάνεται καὶ ἡ πίεσις αὐτοῦ (2ος νόμος Gay-Lussac). Πράγματι, αὐξανομένης τῆς θερμοκρασίας, αὐξάνεται καὶ ἡ μέση ταχύτης τῶν μορίων, μὲ ἀποτέλεσμα ν' αὐξηθοῦν καὶ αἱ ἐκ τῶν συγκρούσεων μετὰ τῶν τοιχωμάτων προκύπτουσαι δυνάμεις καί, συνεπῶς, ἡ πίεσις.

§ 274α. Διάχυσις - Διαπίδυσις. Ἀποτέλεσμα τῆς θερμικῆς κινήσεως εἶναι καὶ τὰ φαινόμενα τῆς διαχύσεως καὶ τῆς διαπίδσεως.

α) **Διάχυσις.** Πληροῦμεν τὴν ἄνω φιάλην τῆς συσκευῆς τοῦ σχήματος 390α δι' ὕδρογόνου ὑπὸ ἀτμοσφαιρικῇ πίεσιν, τὴν δὲ κάτω διὰ διοξειδίου

τοῦ ἀνθρακος καὶ ὑπὸ τὴν αὐτὴν πίεσιν. Ἐπειδὴ τὸ CO_2 εἶναι πυκνότερον τοῦ ὑδρογόνου, ἀναμένεται νὰ μὴ ἐπέλθῃ ἀνάμειξις τῶν δύο ἀερίων. Ὅπως, ὅμως, εὐρίσκεται, τὰ δύο ἀέρια ἀναμειγνύονται, ἐμφανιζόμενον καὶ ὑδρογόνου εἰς τὴν κάτω φιάλην καὶ CO_2 εἰς τὴν ἄνω. Τὴν διεύθυνσιν ταύτην τοῦ ἐνὸς ἀερίου ἐντὸς τοῦ ἄλλου καλοῦμεν **διάχυσιν**.



Σχ. 390α.

Ἡ διάχυσις ὀφείλεται εἰς τὴν θερμικὴν κίνησιν τῶν μορίων τῶν δύο ἀερίων, λόγῳ τῆς ὁποίας τὰ μόρια τοῦ ἐνὸς ἀερίου εἰσχωροῦν εἰς τὸν χῶρον τοῦ ἄλλου ἀερίου.

Τὸ φαινόμενον τῆς διαχύσεως δεικνύεται εὐκόλως διὰ τοῦ ἑξῆς πειράματος: Ἐντὸς στενοῦ ὑαλίνου κυλίνδρου θέτομεν μίαν ποσότητα πολὺ πυκνοῦ διαλύματος θειικοῦ χαλκοῦ (*). Κατόπιν, τῇ βοηθείᾳ σταγονόμετρου, τὸ ὁποῖον φέρομεν εἰς ἐπαφὴν μετὰ τοῦ ἐσωτερικοῦ τοιχώματος τοῦ κυλίνδρου, προσθέτομεν ὀλίγον ὕδωρ, ὥστε νὰ σχηματισθῇ στρῶμα, πάχους μερικῶν ἑκατοστομέτρων. Ἐὰν τὸ ὕδωρ προστεθῇ βραδέως,

ὥστε νὰ μὴ προκληθῇ ἀνατάραξις, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ δύο ὑγρά, λόγῳ τῆς διαφορῆς αὐτῶν πυκνότητος, δὲν ἀναμειγνύονται, ἀλλὰ τὸ ὕδωρ χωρίζεται σαφῶς ἀπὸ τὸ διάλυμα τοῦ θειικοῦ χαλκοῦ. Ἐὰν, ὅμως, ἀφήσωμεν τὸ δοχεῖον ἀδιατάρακτον ἐπ' ἀρκετόν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ἄχρουν ὕδωρ ἀρχίζει νὰ χρωματίζεται κυανοῦν. Τοῦτο δηλοῖ ὅτι θειικὸς χαλκὸς (ἀκριβέστερον $l\acute{o}n\tau\alpha\ Cu^{++}$ καὶ SO_4^{--}) εἰσεχώρησαν, λόγῳ τῆς θερμικῆς τῶν κινήσεως, ἐντὸς τοῦ ὕδατος, προκαλέσαντα τὸν χρωματισμὸν αὐτοῦ. Εἶναι προφανὲς ὅτι καὶ μόρια ὕδατος εἰσεχώρησαν ἐντὸς τοῦ διαλύματος τοῦ θειικοῦ χαλκοῦ.

β **Διαπιδύσεις.** Τὸ φαινόμενον τῆς διαχύσεως ἐμφανίζεται καὶ μεταξὺ δύο ἀερίων (ἢ δύο ὑγρῶν), τὰ ὁποῖα χωρίζονται διὰ πορώδους διαφράγματος, ὁπότε καὶ καλεῖται **διαπιδύσεις**. Τὸ φαινόμενον τῆς διαπιδύσεως δύο ἀερίων ἐπιδεικνύεται εὐχερῶς διὰ τῆς διατάξεως τοῦ σχήματος 390β: Τὸ πῆλινον δοχεῖον Δ , τὸ ὁποῖον περιέχει ἀέρα, φέρει τὸν σωλῆνα Σ , τοῦ ὁποῖου τὸ κάτω ἄκρον βυθίζομεν ἐντὸς ὕδατος. Καλύπτομεν τὸ δοχεῖον δι' ἀνεστραμμένον ποτηρίον καὶ προσάγομεν ὑδρογόνον, ὁπότε παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τοῦ βυθισμένου εἰς τὸ ὕδωρ ἄκρον τοῦ σωλῆνος Σ ἐξέρχονται φυσαλλίδες. Τοῦτο ἐγγεῖται ὡς ἑξῆς: Τὸ ὑδρογόνον πληροῖ τὸ ἀνεστραμμένον ποτήριον, τὰ δὲ μόρια αὐτοῦ ἀρχίζουν νὰ εἰσέρχονται εἰς τὸ πορώδες δοχεῖον Δ , ἐνῶ ταυτο-



Σχ. 390β.

(*) Τὸ διάλυμα τοῦτο ἔχει χρῶμα κυανοῦν.

χρόνως τὰ μόρια τοῦ αέρος ἐξέρχονται ἐξ αὐτοῦ. Ἐπειδή, ὅμως, τὸ ὑδρογό-
νον διαχέεται ταχύτερον τοῦ αέρος, θὰ δημιουργηθῇ ἐντὸς τοῦ δοχείου
ὑπερπίεσις. Λόγῳ τῆς ὑπερπίεσεως ταύτης δημιουργοῦνται φυσαλλίδες, αἱ
ὁποῖαι ἐξέρχονται ἐκ τοῦ κάτω ἄκρου τοῦ σωλῆνος Σ.

★ ★ ★ § 275. Κινητική θεωρία. Ὅπως εἶδομεν εἰς τὴν § 274, τὰ μό-
ρια ἐνὸς αέριου κινούνται ἀτάκτως καὶ διαρκῶς πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις, κατὰ
δὲ τὴν κίνησίν των ταύτην συγκρούονται τόσοι μεταξὺ των, ὅσοι καὶ μὲ τὰ τοιχώ-
ματα τῶν δοχείων, ἐντὸς τῶν ὁποίων περιέχονται. Κατὰ τὰς συνεχεῖς συγκρούσεις
μετὰ τῶν τοιχωμάτων, τὰ μόρια ἐξασκοῦν ἐπ' αὐτῶν δυνάμεις, ἀποτελέσμα τῶν
ὁποίων εἶναι ἡ πίεσις τοῦ αέριου. Εἶναι προφανές, ὅτι ἡ πίεσις θὰ εἶναι τόσοι
μεγαλύτερα, ὅσοι μεγαλύτερα θὰ εἶναι ἡ ταχύτης καὶ ἡ μᾶζα τῶν μορίων καὶ
ὅσοι μεγαλύτεροι ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν. Ἀφ' ἑτέρου, ἡ πίεσις δεδομένου ἀριθμοῦ
μορίων z ἐξαρτᾶται καὶ ἐκ τοῦ ὄγκου V τοῦ περιέχοντος αὐτὰ δοχείου, πρὸς τὸν
ὁποῖον εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος. Ὁ ἀκριβὴς ὑπολογισμὸς, ὁ ὁποῖος γίνεται δι'
ἐφαρμογῆς τῶν νόμων τῆς κρούσεως, παρέχει τὸν τύπον

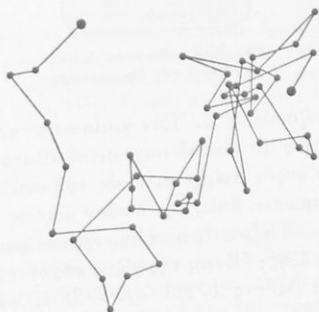
$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{z \cdot m}{V} \cdot v^2 \quad (1)$$

ἐνθα v εἶναι ἡ μέση ταχύτης τῶν μορίων καὶ m ἡ μᾶζα ἐκάστου μορίου. Ἐπειδὴ τὸ
γινόμενον $z \cdot m$ εἶναι ἡ ὁλικὴ μᾶζα τῶν μορίων, τὸ πηλίκον $z \cdot m / V$ παριστᾷ τὴν πυ-
κνότητα ρ τοῦ αέριου, ὁπότε ὁ τύπος (1) γράφεται

$$p = \frac{1}{3} \rho \cdot v^2.$$

Κίνησις Brown (Μπράουν). Τὴν ἄτακτον θερμικὴν κίνησιν τῶν μορίων δυνά-
μεθα νὰ πιστοποιήσωμεν, ἐὰν παρατηρήσωμεν διὰ μικροσκοπίου σταγόνα ὕδατος,
ἐντὸς τῆς ὁποίας ὑπάρχει λεπτὴ κόκκις γρα-
φίτου. Θὰ διαπιστώσωμεν ὅτι τὰ μικρὰ
σωματίδια τοῦ γραφίτου κινοῦνται διαρ-
κῶς καὶ ἀτάκτως πρὸς ὅλας τὰς διευθύν-
σεις (**κίνησις Brown**). Ἐὰν ἐξ ὧλων τῶν
σωματιδίων παρακολουθήσωμεν τὴν κίνη-
σιν ἐνὸς μόνου, θὰ ἴδωμεν ὅτι τοῦτο δια-
γράφει ἀκανόνιστον τεθλασμένην τροχίαν
(σχ. 391).

Ἡ κίνησις Brown ὀφείλεται εἰς τὰς
κρούσεις, τὰς ὁποίας ὑφίστανται τὰ σωμα-
τίδια τοῦ γραφίτου ὑπὸ τῶν μορίων τοῦ
ὕδατος, τὰ ὁποῖα, λόγῳ τῆς θερμικῆς τῶν
κινήσεως, προσπίπτουν ἐπὶ τῶν σωματι-
δίων ἀκανόνιστως ἐξ ὧλων τῶν διευθύν-
σεων. Εἶναι προφανές ὅτι ἡ κατὰ τὴν
κρούσιν τῶν μορίων τοῦ ὕδατος προσδιδο-
μένη εἰς τὰ σωματίδια τοῦ γραφίτου ταχύτης θὰ εἶναι τόσοι μεγαλύτερα, ὅσοι μι-
κρότερα εἶναι τὰ σωματίδια.



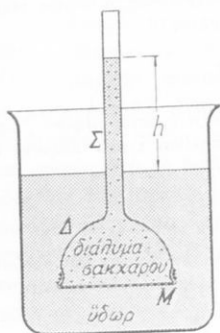
Σχ. 391. Τὰ σημεῖα καθορίζουν
τὰς θέσεις τοῦ σωματιδίου ἀνὰ ἴσα
χρονικά διαστήματα.

§ 276. Ὡσμωσις. Ἐὰν θέσωμεν ἐντὸς ὕδατος ἀπεξηραμμένης ράγας
σταφυλῆς (ξηρὰν σταφίδα), θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐκάστη ραξ διογκοῦται

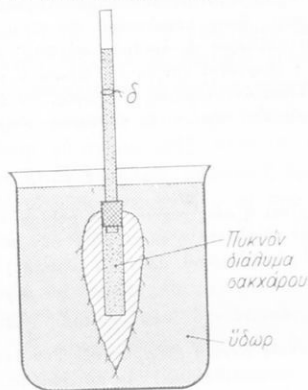
καὶ γίνεται πρακτικῶς σφαιρικῇ. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι ἡ ἐπιδερμὶς τῆς σταφίδος ἔχει τὴν ιδιότητα ν' ἀφίνη νὰ διέρχονται δι' αὐτῆς τὰ μόρια τοῦ ὕδατος, ἐνῶ τὰ μόρια τοῦ σακχάρου, τὰ ὁποῖα εἶναι μεγαλύτερα, δὲν δύνανται νὰ ἐξέλθουν. Ἡ εἰσχώρησις τῶν μορίων τοῦ ὕδατος ἐντὸς τῆς σταφίδος ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τὴν διόγκωσιν αὐτῆς.

Αἱ μεμβράναι, αἱ ὁποῖαι παρουσιάζουν τοιαύτας ιδιότητες, καλοῦνται **ἡμιπεραταὶ μεμβράναι**, τὸ δὲ περιγραφέν φαινόμενον καλεῖται **ὠσμῶσις**.

Τὸ φαινόμενον τῆς ὠσμῶσεως δυνάμεθα νὰ ἐπιδειξώμεν διὰ τοῦ ἑξῆς πειράματος: Ἐντὸς ποτηρίου, περιέχοντος καθαρὸν ὕδωρ, θέτομεν τὸ ὑάλινον δοχεῖον Δ (σχ. 392), τοῦ ὁποίου τὸ κάτω ἄνοιγμα φράσσεται διὰ τῆς ζωϊκῆς κύστεως M , ἡ ὁποία λειτουργεῖ ὡς ἡμιπερατὴ μεμβράνη, ἐνῶ τὸ ἄλλο καταλήγει εἰς τὸν στε-



Σχ. 392. Πείραμα διὰ τὴν ἐπίδειξιν τῆς ὠσμῶσεως.



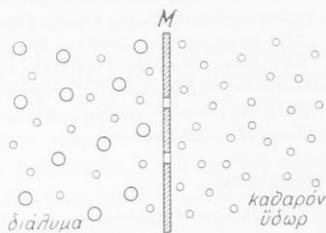
Σχ. 393. Λόγῳ τῆς ὠσμῶσεως, τὸ ὑγρὸν ἀνέρχεται ἐντὸς τοῦ σωλῆνος. (Ὁ δείκτης δ δεικνύει τὴν ἀρχικὴν στάθμην τοῦ ὑγροῦ).

νὸν σωλῆνα Σ . Ἐὰν γεμίσωμεν τὸ δοχεῖον Δ διὰ πυκνοῦ διαλύματος σακχάρου (ἢ κοινῶς μαγειρικοῦ ἁλατος), θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, μετ' ὀλίγον, τὸ ὑγρὸν ἀνέρχεται ἐντὸς τοῦ σωλῆνος. Τοῦτο ὀφείλεται, προφανῶς, εἰς τὴν ὠσμῶσιν, δηλ., τὴν διόδον μορίων ὕδατος διὰ τῶν πόρων τῆς μεμβράνης.

Τὸ ἀνωτέρω περιγραφέν πείραμα ἐπιτυγχάνεται καὶ μὲ ἀπλούστερα μέσα ὡς ἑξῆς: Ἐντὸς τῆς ρίζης καρῶτον ἀνοίγομεν κοίλωμα, διαμέτρου, π.χ., 1 cm καὶ βάθους 10 cm (σχ. 393). Πληροῦμεν τὸ κοίλωμα διὰ πυκνοῦ διαλύματος κοινῆς σακχάρους καὶ, ἀκολουθῶς, κλείομεν αὐτὸ διὰ φελλοῦ, φέροντος ὑάλινον σωλῆνα, διαμέτρου, π.χ., 5 mm . Ἀφαιροῦμεν τὴν πλεονάζουσαν ποσότητα τοῦ διαλύματος ἐκ τοῦ σωλῆνος καὶ βυθίζομεν τὸ καρῶτον ἐντὸς καθαροῦ ὕδατος. Μετ' ὀλίγον παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὑγρὸν, λόγῳ τῆς ὠσμῶσεως, ἀρχίζει ν' ἀνέρχεται ἐντὸς τοῦ ὑαλίνου σωλῆνος, δυνάμενον νὰ φθάσῃ εἰς μέγα ὕψος.

Ἐξήγησις τοῦ φαινομένου τῆς ὠσμῶσεως. Τὸ σχῆμα 394 παριστᾷ, σχηματικῶς, ἡμιπερατὴν μεμβράνην M , διαχωρίζουσαν διάλυμα σακχάρους ἀπὸ καθαρὸν

ὕδωρ. Τὸ διάλυμα ἀποτελεῖται ἐκ μορίων ὕδατος (μικραὶ σφαῖραι) καὶ ἐκ μορίων σακχάρους (μεγάλαι σφαῖραι). Λόγω τῆς θερμικῆς κινήσεως, μόρια ὕδατος διέρχονται διὰ τῆς μεμβράνης καὶ κατὰ τὰς δύο φοράς. Εἰς τὴν πλευράν, ὅμως, τοῦ διαλύματος ὁ ἀριθμὸς τῶν μορίων τοῦ ὕδατος ἀνά μονάδα ὄγκου εἶναι μικρότερος τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ εἰς τὸ καθαρὸν ὕδωρ καὶ τοῦτο διότι αἱ θέσεις ὠρισμένων μορίων ὕδατος εἰς τὸ διάλυμα εἶναι κατεληγμέναι ὑπὸ μορίων σακχάρους. Συνεπῶς, διὰ τῆς μεμβράνης θὰ διέρχωνται ἀνά μονάδα χρόνου *π ε ρ ι σ σ ὶ τ ε ρ α* μόρια ὕδατος ἐκ τοῦ καθαρῦ ὕδατος πρὸς τὸ διάλυμα, παρὰ κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν.



Σχ. 394.

§ 277. Ώσμωτική πίεσις. Εἰς τὰ περιγραφέντα πειράματα ἡ ὥσμωσις ἐπιβραδύνεται σὺν τῷ χρόνῳ καὶ σταματᾷ ἐντελῶς, ὅταν ἡ στάθμη τοῦ διαλύματος εἰς τὸν σωλῆνα Σ (σχ. 392) φθάσῃ εἰς ὠρισμένον ὕψος h . Τὸ ὕψος τοῦτο καθορίζει, ὡς γνωστόν, μίαν πίεσιν. Ἡ πίεσις αὕτη, ἡ ἀναγκαία ἵνα παύσῃ ἡ ὥσμωσις, καλεῖται *ὥσμωτική πίεσις*. Ὁμοίως, εἰς τὴν ράγα τῆς σταφυλῆς, ἡ ὁποία διογκοῦται, ὅταν τοποθετηθῇ ἐντὸς ὕδατος, ἡ ὥσμωσις θὰ σταματήσῃ, ὅταν ἐντὸς τῆς ραγὸς δημιουργηθῇ πίεσις, ἴση πρὸς τὴν ὥσμωτικὴν πίεσιν· ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν, βεβαίως, ὅτι ἡ ἐπιδερμὶς ἀντέχει μέχρι τῆς πίεσεως ταύτης, διότι, ἄλλως, θὰ διαρραγῇ.

Πειραματικῶς εὐρίσκεται ὅτι ἡ ὥσμωτικὴ πίεσις εἶναι ἀνάλογος τῆς *περιεκτικότητος* τοῦ διαλύματος (*) καὶ τῆς ἀπολύτου θερμοκρασίας αὐτοῦ.

Ίσοτονικὰ διαλύματα καλοῦνται ἐκεῖνα τὰ διαλύματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν ὥσμωτικὴν πίεσιν. Οὕτω, οἱ *φνσιολογικοὶ ὁροί*, οἱ ὁποῖοι ἐνίενται εἰς τὸ αἷμα, εἶναι διαλύματα χλωριούχου νατρίου, τοιαύτης περιεκτικότητος, ὥστε (ἐκτὸς εἰδικῶν περιπτώσεων) νὰ εἶναι ἰσοτονικὰ μὲ αὐτό, διότι, ἄλλως, προκαλοῦνται διάφοροι βλάβαι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κατηγορία Α'.

237) Ἀναμειγνύονται 2 *kg* πάγου, θερμοκρασίας -2°C , μετὰ 15 *kg* ὕδατος, θερμοκρασίας 22°C . Ποία ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μείγματος; (ΑΠ : $9,9^{\circ} \text{C}$)

238) Σιδηρὰ σφαῖρα, μάζης 200 *gr*, θερμαίνεται εἰς θερμοκρασίαν 100°C καί, ἀκολούθως, φέρεται ἐντὸς κοιλότητος ἐκ μεγάλου τεμαχίου πάγου, θερμοκρασίας 0°C . Μέρος τοῦ πάγου τήκεται καὶ ἀποδίδει 26,25 *gr* ὕδατος. Ποία ἡ θερμότης (ΑΠ : 80 *cal/gr*) τήξεως τοῦ πάγου;

239) Ἀνοθεν τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης τοῦ σωλῆνος Torricelli ὑπάρχει μικρὰ ποσότης ὕδατος. Ποῖον θὰ εἶναι τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης, ἐάν θερμάνωμεν τὸ ὕδωρ εἰς 100°C ; (ΑΠ : *Μηδέν, Διαιτί*.)

(*) *Περιεκτικότης* ἐνὸς διαλύματος καλεῖται τὸ πηλίκον τῆς μάζης τοῦ διαλυμένου στερεοῦ πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ διαλύματος.

240) Πόση θερμότης απαιτεῖται, ἵνα μεταβάλλῃ ποσότητα πάγου, μάζης 20 kgr καὶ θερμοκρασίας 0°C , εἰς ἀτμόν, θερμοκρασίας 100°C ; (ΑΠ : 14400 kcal)

241) Πόση ποσότης βενζίνης ἀπαιτεῖται διὰ τὸ ἄνω πείραμα; (ΑΠ : 1,37 kgr)

242) Πόση θερμότης ἀποδίδεται ὑπὸ 20 gr ἀτμοῦ, θερμοκρασίας 100°C , ὅταν ὑγροποιηθοῦν καί, ἐν συνεχείᾳ, ψυχθοῦν εἰς 20°C ; (ΑΠ : 12,4 kcal)

243) Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν ζεεῖ ὕδωρ, εὐρισκόμενον ὑπὸ ἀτμοσφαιρικῆν πίεσιν 60 cm Hg; (Βλ. σ. 379). (ΑΠ : 94°C)

Κατηγορία Β'.

244) Ψυγεῖον διὰ πάγου περιέχει 2,5 kgr ὕδατος καὶ 5 kgr τροφίμων. Νὰ εὐρεθῇ ἡ μᾶζα τοῦ πάγου, ἡ ἀπαιτουμένη διὰ τὴν ψύξιν τοῦ περιεχομένου ἀπὸ 30°C εἰς 10°C , ἐάν δεχθῶμεν ὅτι τὸ ἐκ τῆς τήξεως τοῦ πάγου ὕδωρ ἀπάγεται ὑπὸ θερμοκρασίαν 0°C . (Εἰδικὴ θερμότης τροφίμων = $0,9 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$). (ΑΠ : 1,75 kgr)

245) Ποῖον θὰ εἶναι τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης τοῦ πειράματος τῆς ἀσκήσεως 239, ἐάν ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος εἶναι 60°C , 80°C ; (ΑΠ : 61 cm, 40 cm)

246) Πόση θερμότης ἀπαιτεῖται, ἵνα 50 gr πάγου, θερμοκρασίας -8°C , μετατραποῦν εἰς ἀτμόν, θερμοκρασίας 100°C ; (ΑΠ : 36,2 kcal)

247) Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν ζεεῖ τὸ ὕδωρ εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ ὄρους Everest; (Βλ. σ. 249 καὶ σ. 379) (ΑΠ : 76°C)

248) Ποία ἡ πίεσις ἐντὸς ἀτμολέβητος, θερμοκρασίας 130°C ; (Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως ταύτης ἀπαιτεῖται γραφικὴ παράστασις τῶν εἰς τὴν σελίδα 325 — ὑποσημειώσεις — ἀναφερομένων τιμῶν). (ΑΠ : 2,7 at)

● 249) Ἐντὸς δοχείου, ἀμελητέας θερμοχωρητικότητος, θέτομεν πάγον, μάζης 100 gr καὶ θερμοκρασίας -10°C καί, ἐν συνεχείᾳ, προσφέρομεν εἰς αὐτὸν θερμότητα 3500 cal. Ποία θὰ εἶναι ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ ἐκ τῆς τήξεως τοῦ πάγου προκύπτοντος ὕδατος;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Κ'

ΔΙΑΔΟΣΙΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΟΣ

Ἡ θερμότης διαδίδεται κατὰ τρεῖς τρόπους: δι' ἀγωγῆς, διὰ μεταφορᾶς καὶ δι' ἀκτινοβολίας.

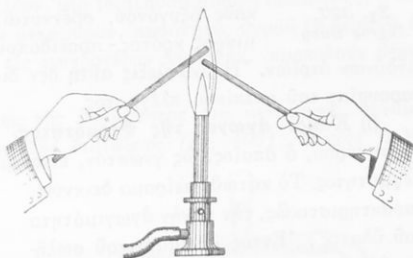
Ὅπως θὰ ἴδωμεν ἐν συνεχείᾳ, δι' ἀγωγῆς διαδίδεται ἡ θερμότης καὶ διὰ τῶν στερεῶν καὶ διὰ τῶν ὑγρῶν καὶ διὰ τῶν ἀερίων, ἐνῶ διὰ μεταφορᾶς μόνον διὰ τῶν ὑγρῶν καὶ διὰ τῶν ἀερίων. Τέλος, ἡ θερμότης διαδίδεται δι' ἀκτινοβολίας διὰ τῶν διαφανῶν σωμάτων (ὕαλος, ἀήρ κ.λ.) καὶ διὰ τοῦ κενοῦ.

§ 278. Ἀγωγή τῆς θερμότητος. Ἐάν κρατήσωμεν τὸ ἐν ἄκρον μεταλλικῆς ράβδου διὰ τῆς χειρός, φέρωμεν δὲ τὸ ἄλλο ἐντὸς φλογός, θὰ αἰσθανθῶμεν ὅτι, ὀλίγον κατ' ὀλίγον, ἡ ράβδος γίνεται θερμότερα, μέχρις ὅτου ἡ θερμοκρασία τῆς ἀνέληθι τόσον, ὥστε νὰ μὴ δυνάμεθα νὰ τὴν κρατήσωμεν πλέον. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι ἡ θερμότης ἐκ τῆς φλογός δια-

δίδεται διὰ τῆς ράβδου, ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον, ἀπὸ τοῦ ἐνὸς ἄκρου εἰς τὸ ἄλλο. Τὸν τρόπον αὐτὸν διαδόσεως τῆς θερμότητος, κατὰ τὸν ὁποῖον θερμότης διαδίδεται ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον ἐνὸς στερεοῦ σώματος καὶ ὁ ὁποῖος δὲν συνοδεύεται ἀπὸ μετακίνησιν ὕλης, καλοῦμεν **ἀγωγήν τῆς θερμότητος**.

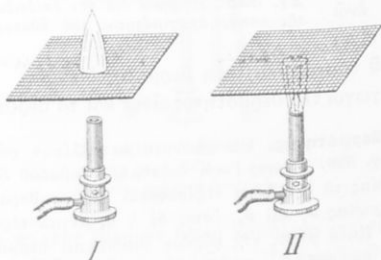
Τὰ ὑλικά, διὰ τῶν ὁποίων ἀγεται εὐκόλως ἡ θερμότης, καλοῦμεν **καλούς ἀγωγούς** τῆς θερμότητος, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τοὺς **κακούς ἀγωγούς**, διὰ τῶν ὁποίων πολὺ δυσκόλως διαδίδεται ἡ θερμότης. Κατὰ κανόνα, καλοὶ ἀγωγοὶ τῆς θερμότητος εἶναι τὰ μέταλλα, ἐνῶ ἄλλα ὑλικά (ὅπως ὁ ἀμιάντος, ἡ ὕαλος, τὸ ξύλον, τὰ ἀέρια κ.λ.) εἶναι κακοὶ ἀγωγοὶ τῆς θερμότητος ἢ — ὅπως ἄλλως λέγονται — **δυσθερμαγωγὰ σώματα**.

α) **Καλοὶ ἀγωγοὶ τῆς θερμότητος**. Ἡ ταχύτης, μὲ τὴν ὁποίαν διαδίδεται ἡ θερμότης, ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ εἶδους τοῦ ὑλικοῦ. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ δεῖξωμεν διὰ τοῦ ἐξῆς πειράματος: Κρατοῦμεν διὰ τῶν δύο χειρῶν μας ἀφ' ἐνὸς μὲν χαλκίνην ράβδον, ἀφ' ἑτέρου δὲ σιδηρᾶν τοιαύτην καὶ εἰσάγομεν τὰ ἄκρα αὐτῶν ἐντὸς τῆς φλογὸς ἐνὸς λύχνου (σχ. 395). Μετ' ὀλίγον θὰ αἰσθανθῶμεν τὸ ἄκρον τῆς χαλκίνης ράβδου, τὸ ὁποῖον κρατοῦμεν, νὰ ἔχη θερμαιθῇ αἰσθητῶς, ἐνῶ τὸ ἄκρον τῆς σιδηρᾶς διατηρεῖ ἀκόμῃ τὴν ἀρχικὴν του θερμοκρασίαν.



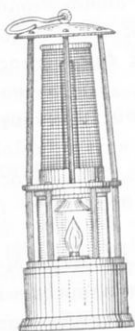
Σχ. 395. Πείραμα διὰ τὴν ἐπίδειξιν τῆς διαφόρου θερμικῆς ἀγωγιμότητος τοῦ χαλκοῦ καὶ τοῦ σιδήρου.

★ Ἡ μεγάλη διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἀγωγιμότητος τῶν μετάλλων καὶ τῶν ἀερίων δεικνύεται διὰ τοῦ ἐξῆς πειράματος: Ἐπὶ τρίποδος θέτομεν χαλκίνον πλέγμα καὶ κάτωθεν αὐτοῦ λύχνον. Ἐὰν διὰ τοῦ λύχνου διαβιβάζωμεν φωτιάριον καὶ ἀνάψωμεν τὴν φλόγα ἄνωθεν τοῦ πλέγματος, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ φλὸξ δὲν διαπερᾷ τὸ πλέγμα καὶ δὲν καίει κάτωθεν αὐτοῦ (σχ. 396, I). Τοῦτο ἐξηγεῖται ὡς ἐξῆς: Τὸ χαλκίνον πλέγμα, λόγῳ τῆς μεγάλης αὐτοῦ ἀγωγιμότητος, ἀπάγει τὴν θερμότητα τῆς φλογὸς καὶ οὕτω ἡ θερμοκρασία τῶν κάτωθεν αὐτοῦ εὐρισκομένων ἀερίων, τὰ



Σχ. 396. Τὸ χαλκίνον πλέγμα ἀπάγει τὴν θερμότητα, ὅπου διακόπτεται ἡ διάδοσις τῶν ὑψηλῶν θερμοκρασιῶν ἐκατέρωθεν αὐτοῦ.

ὁποῖα εἶναι καὶ πολὺ κακοὶ ἀγωγοὶ τῆς θερμότητος, δὲν δύναται ν' ἀνέλθῃ τόσον, ὥστε ν' ἀναφλεγούν.

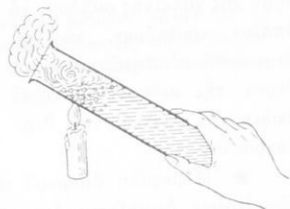


Σχ. 397.
Λύχνος Davy.

Ἐὰν ἀνάψωμεν τὴν φλόγα κάτω τοῦ πλέγματος (II), παρατηροῦμεν ὅτι ἡ φλόξ δὲν συνεχίζεται ἄνωθεν αὐτοῦ. Τοῦτο ὀφείλεται, ἀκριβῶς, εἰς τὴν μεγάλην ἀγωγιμότητα τοῦ χαλκοῦ, ὃ ὁποῖος ἀπάγει τὴν θερμότητα εἰς τὸ περιβάλλον καί, οὕτω, ἡ θερμοκρασία τοῦ πλέγματος δὲν ἀνέρχεται πολὺ.

Ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω φαινομένου στηρίζεται καὶ ἡ λειτουργία τοῦ **ἀσφαλιστικοῦ λύχνου Davy** (Ντέβν) (σχ. 397), τὸν ὁποῖον χρησιμοποιοῦν οἱ ἀνθρακωρύχοι. Ὁ λύχνος φέρει κυλινδρικὸν χάλκινον πλέγμα, τὸ ὁποῖον ἐμποδίζει τὴν μετάδοσιν τῆς φλογὸς εἰς τὰ τυχὸν ὑπάρχοντα ἐντὸς τοῦ ἀνθρακωρυχείου ἀναφλέξιμα ἀέρια: Τὰ ἀέρια ταῦτα, διερχόμενα διὰ τοῦ πλέγματος, ἀναφλέγονται ἐντὸς τοῦ λύχνου ὑπὸ τῆς φλογός, ἡ ὁποία, λόγῳ ἐλλείψεως ἐπαρκoῦς ὀξυγόνου, σβέννυται, ἐνῶ, ταυτοχρόνως, παράγεται μικρὸς κρότος - προειδοποιητικὸς τῆς παρουσίας τῶν ἐπικινδύνων ἀερίων. Ἡ ἀνάφλεξις αὕτη δὲν διαδίδεται πρὸς τὰ ἔξω, λόγῳ τῆς παρουσίας τοῦ χαλκίνου πλέγματος.

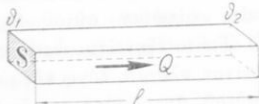
β) **Κακοὶ ἀγωγοὶ τῆς θερμότητος.** Τὰ πλεῖστα ὑγρὰ (πλὴν τοῦ ὑδραργύρου, ὃ ὁποῖος, ὥς γνωστόν, εἶναι μέταλλον) εἶναι κακοὶ ἀγωγοὶ τῆς θερμότητος. Τὸ κάτωθι πείραμα δεικνύει, χαρακτηριστικῶς, τὴν κακὴν ἀγωγιμότητα τοῦ ὕδατος: Ἐντὸς δοκιμαστικοῦ σωλῆνος θέτομεν ψυχρὸν ὕδωρ, καί, ἀκολουθῶς κρατοῦντες τὸν σωλῆνα ἐκ τῆς βάσεώς του, ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα 398, θερμαίνομεν τὸ ὕδωρ πλησίον τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας. Μετ' ὀλίγον θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τοῦτο θ' ἀρχίσῃ νὰ ζέβῃ, ἐνῶ τὸ ἄκρον, τὸ ὁποῖον κρατοῦμεν, εἶναι ἀκόμη ψυχρὸν· ἀπόδειξις ὅτι διὰ τοῦ ὕδατος ἐλαχίστη θερμότης διεδόθη.



Σχ. 398. Πείραμα διὰ τὴν ἐπίδειξιν τῆς κακῆς ἀγωγιμότητος τοῦ ὕδατος.

Ἐκτὸς τῶν ὑγρῶν, πολὺ κακοὶ ἀγωγοὶ τῆς θερμότητος εἶναι καὶ τὰ ἀέρια.

§ 279. Νόμος τῆς ἀγωγῆς τῆς θερμότητος. Θεωρήσωμεν μεταλλίνην ράβδον (σχ. 399) μήκους l καὶ διατομῆς, ἐμβαδοῦ S , τῆς ὁποίας τὰ δύο ἅκρα εὑρίσκονται εἰς σταθερὰς θερμοκρασίας θ_1 καὶ θ_2 , ἔστω δὲ ἡ θ_1 μεγαλυτέρα τῆς θ_2 . Κατὰ μήκος τῆς ράβδου διαδίδεται θερμότης Q ἐκ τοῦ θερμότερου ἁκρον πρὸς τὸ ψυχρότερον, ἡ ὁποία εἶναι ἀνάλογος τοῦ ἐμβαδοῦ S τῆς διατομῆς τῆς ράβδου, ἀνάλογος τοῦ χρόνου t , ἀνά-



Σχ. 399.

λόγος τῆς διαφορᾶς $\theta_1 - \theta_2$ τῶν θερμοκρασιῶν τῶν δύο ἁκρων καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ μήκους l τῆς ράβδου. Ἦτοι εἶναι

$$Q = k \cdot \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{l} \cdot S \cdot t.$$

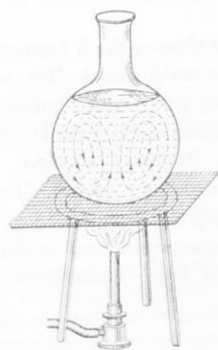
Ὁ συντελεστής k καλεῖται *συντελεστής θερμικῆς ἀγωγιμότητος* καὶ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὕλικου τῆς ῥάβδου.

Ὁ τύπος οὗτος ἰσχύει, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι δὲν ὑπάρχουν ἀπώλειαι θερμότητος εἰς τὸ περιβάλλον.

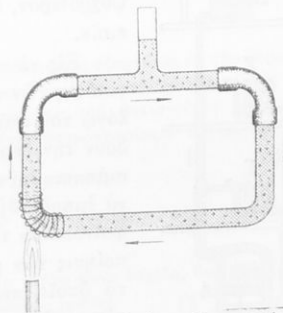
Ὑλικά, τὰ ὁποῖα ἔχουν μέγαν συντελεστὴν θερμικῆς ἀγωγιμότητος, εἶναι οἱ καλούμενοι *καλοὶ ἀγωγοὶ* τῆς θερμότητος, ἐνῶ οἱ *κακοὶ ἀγωγοὶ* ἔχουν μικρὸν συντελεστὴν θερμικῆς ἀγωγιμότητος. Οὕτω, ὁ συντελεστής θερμικῆς ἀγωγιμότητος τοῦ ἀέρος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ χιλιοστὸν τοῦ συντελεστοῦ θερμικῆς ἀγωγιμότητος τοῦ χαλκοῦ. Δι' αὐτὸν, ἀκριβῶς, τὸν λόγον, ὁσάκις ἐπιζητεῖται καλὴ θερμικὴ μόνωσις (ψυγεῖα, θερμοσίφωνες) χρησιμοποιοῦνται ὕλικά, τὰ ὁποῖα περικλείουν ἀέρα· π.χ., φελλὸς, ὑαλοβάμβαξ, κ.λ. Εἰς τὸν αὐτὸν λόγον ὀφείλονται καὶ αἱ καλὰ θερμομονωτικαὶ ἰδιότητες τῶν μαλλίνων ὑφασμάτων.

• § 280. *Διάδοσις τῆς θερμότητος διὰ μεταφορᾶς.* Εἰς τὰ ὑγρά καὶ τὰ αἶρια, ἀνεξαρτήτως τῆς (μικρᾶς) διαδόσεως τῆς θερμότητος δι' ἀγωγῆς, παρουσιάζεται, ἐπὶ πλέον, μία ἰδιάζουσα μορφή διαδόσεως, ἣ ὁποία καλεῖται *μεταφορά*. Κατὰ τὴν μεταφοράν, ποσότητες ὑγροῦ (ἢ ἀερίου) θερμαίνονται, μεταφερόμεναι δὲ εἰς ψυχροτέραν περιοχὴν, προκαλοῦν θέρμανσιν αὐτῆς.

Τὸν μηχανισμόν διαδόσεως τῆς θερμότητος διὰ μεταφορᾶς δυνάμεθα νὰ παρακολουθήσωμεν διὰ τῆς ἐξῆς διατάξεως (σχ. 400): Ἐντὸς ὑαλίνης



σχ. 400. Κατὰ τὴν θέρμανσιν τοῦ ὕδατος σχηματίζονται ρεύματα ἐντὸς αὐτοῦ.



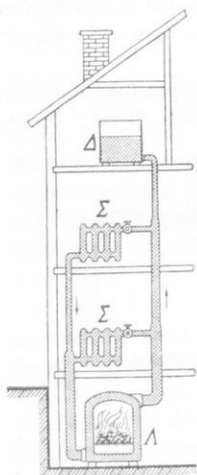
σχ. 401. Ἐπίδειξις τοῦ φαινομένου τῆς διαδόσεως τῆς θερμότητος διὰ μεταφορᾶς. (Περιτυλίσσοντες τὸ θερμαινόμενον τμήμα τοῦ ὑαλίνου σωλήνος διὰ χαλκίνου σύρματος, ἀποφεύγομεν τὸ ράγισμα τῆς ὑάλου).

φιάλης θέτομεν ὕδωρ καὶ ὀλίγα ρινίσματα ξύλου (κ. πριονίδια), κάτωθεν δὲ αὐτῆς ἀνάπτομεν λύχνον. Ἀρχικῶς θερμαίνεται τὸ ὕδωρ, τὸ εὐρισκόμενον εἰς τὸν πυθμένα, ὁπότε τοῦτο, λόγῳ τῆς ἐλαττώσεως τῆς πυκνότητός του, ἀνέρχεται, ἐνῶ τὸ ψυχρότερον κατέρχεται. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον δημιουργοῦνται ρεύματα θερμοῦ ὕδατος πρὸς τὰ ἄνω καὶ ψυχροῦ πρὸς τὰ κάτω καί, οὕτω, μετ' ὀλίγον ὅλον τὸ ὕδρον θερμαίνεται. Τὰ ρεύματα παρακολουθοῦμεν, εὐκόλως, ἐκ τῆς κινήσεως τῶν ρινισμάτων τοῦ ξύλου. Παρατηροῦ-

μεν, λοιπόν, ὅτι ἡ μεταφορὰ τῆς θερμότητος, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν ἄγωγὴν, ἀπαιτεῖ μετακίνησιν ὕλης ἀπὸ σημείου εἰς σημείον.

Τὸ φαινόμενον τῆς διαδόσεως τῆς θερμότητος διὰ μεταφορᾶς παρακολουθοῦμεν, εὐκρινέστερον, διὰ τῆς συσκευῆς, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ σχῆμα 401: Θερμαίνοντες τὸν ὑάλινον σωλῆνα εἰς τὸ ὑποδεικνυόμενον σημείον, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὕδωρ κυκλοφορεῖ κατὰ τὴν φορὰν τῶν βελῶν. Ὡς δεῖται τῆς κινήσεως χρησιμοποιοῦνται, ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον πείραγμα, ρινίσματα ξύλου. Ὅπως εὐρίσκεται πειραματικῶς, τὸ θερμανθὲν ὕδωρ ἀπάγει ἀσυγκρίτως περισσοτέραν θερμότητα, λόγῳ τῆς κυκλοφορίας του (δηλ., διὰ τοῦ φαινομένου τῆς μεταφορᾶς), ἀπὸ ἐκείνην, ἣ ὁποία θὰ διεδίδετο μόνον δι' ἄγωγῆς.

Τυπικὸν παράδειγμα διαδόσεως τῆς θερμότητος διὰ μεταφορᾶς ἔχομεν εἰς τὴν **κεντρικὴν θέρμανσιν** (*καλοριφέρ*): Τὸ ὕδωρ θερμαίνεται ἐντὸς τοῦ



Σχ. 402. Ἐγκατάστασις κεντρικῆς θερμάνσεως. (Διὰ τοῦ δοχείου διαστολῆς Δ ἀντιμετωπίζονται αἱ διαστολαί).

λέβητος Δ (σχ. 402) καὶ διὰ σωληνώσεων κυκλοφορεῖ αὐτομάτως εἰς τοὺς διαφόρους ὁρόφους τῆς οἰκίας. Εἰς κάθε χώρον ὑπάρχουν τὰ **θερμαντικὰ σώματα** Σ, εἰς τὰ ὁποῖα φθάνει τὸ θερμὸν ὕδωρ, τὸ ὁποῖον, ἀφοῦ ἀποδώσῃ μέρος τῆς θερμότητός του, ἐπανερχεται, ὡς ψυχρότερον, εἰς τὸν λέβητα διὰ νὰ θερμανθῇ ἐκ νέου κ.ο.κ.

Εἰς τὰ προηγούμενα εἶδομεν ὅτι ἡ θερμικὴ ἄγωγιμότης τῶν ἀερίων εἶναι πολὺ μικρά. Ἐν τούτοις, λόγῳ τοῦ φαινομένου τῆς μεταφορᾶς, ταῦτα διαδίδουν τὴν θερμότητα. Προκειμένου, λοιπόν, νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἀέρια διὰ θερμικὴν μόνωσιν, πρέπει νὰ ἐμποδισθῇ πᾶσα κυκλοφορία αὐτῶν. Ἐπὶ τοῦ φαινομένου τούτου στηρίζεται, ἀκριβῶς, ἡ χρησιμοποίησις τῶν μαλλίνων ὑφασμάτων, τοῦ φελλοῦ κ.λ., τὰ ὁποῖα περιέχουν μὲν ἀέρα, ἐμποδίζουν, ὅμως, τὴν κυκλοφορίαν αὐτοῦ.

• § 281. **Διάδοσις τῆς θερμότητος δι' ἄκτινοβολίας.** Εἰς προηγούμενας παραγράφους ἐμελέτησαμεν δύο τρόπους διαδόσεως τῆς θερμότητος· τὸν δι' ἄγωγῆς καὶ τὸν διὰ μεταφορᾶς. Καὶ εἰς τὰς δύο

περιπτώσεις διὰ τὴν διάδοσιν τῆς θερμότητος ἀπαιτεῖται ἡ παρουσία ὕλης εἴτε ὑπὸ στερεάν, εἴτε ὑπὸ ὑγρᾶν, εἴτε ὑπὸ ἀέριον κατὰστασιν. Ἡ θερμότης, ὅμως, εἶναι δυνατόν νὰ διαδοθῇ καὶ διὰ τοῦ κενοῦ. Οὕτω, ἐὰν τοποθετήσωμεν ἐντὸς κενοῦ χώρου ἓν θερμὸν σῶμα—ὁπότε δὲν ὑπάρχουν, πλέον, ἀπώλειαι θερμότητος, λόγῳ ἄγωγῆς ἢ μεταφορᾶς—θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ σῶμα βαθμηδὸν ψύχεται· ἀπόδειξις ὅτι τὸ σῶμα τοῦτο ἀποβάλλει συνεχῶς θερμότητα. Ὁ τρόπος οὗτος διαδόσεως τῆς θερμότητος καλεῖται **διάδοσις**

δι' ἀκτινοβολίας. Δι' ἀκτινοβολίας θερμαίνεται καὶ ἡ Γῆ ὑπὸ τοῦ Ἡλίου, δεδομένου ὅτι μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τῆς Γῆς παρεμβάλλεται «κενὸς» χώρος.

Ἡ ἀκτινοβολία εἶναι μία μορφή ἐνεργείας, ἡ ὁποία διαδίδεται διὰ κυμάτων, τὰ ὁποία εἶναι ὅμοια πρὸς τὰ φωτεινὰ κύματα καὶ διαδίδονται μετὰ τῆς αὐτῆς ταχύτητος - δηλ., τῆς ταχύτητος τοῦ φωτός. Ἡ ἀκτινοβολία μεταφέρει ἐνέργειαν, ἡ ὁποία, ἀπορροφουμένη ὑπὸ τῶν διαφόρων σωμάτων, μετατρέπεται εἰς θερμότητα. Δι' ἀκτινοβολίας, π.χ., θερμαίνομεθα, ὅταν εὐρισκώμεθα ἀπέναντι θερμάστρας.

Ἡ ὑπὸ τινος σώματος ἀκτινοβολουμένη θερμότης ἐξαρτᾶται 1) ἐκ τῆς θερμοκρασίας τοῦ σώματος καὶ 2) ἐκ τῆς φύσεως τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἀκτινοβολοῦντος σώματος. Οὕτω, ἐν ξερυθροπυρωμένον τεμάχιον σιδήρου ἀκτινοβολεῖ ἐντὸς δεδομένου χρόνου ἄσυγκρίτως περισσοτέραν θερμότητα, ἀπὸ τὴν θερμότητα, τὴν ὁποίαν ἀκτινοβολεῖ ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χρόνου ὅμοιον τεμάχιον, εὐρισκόμενον εἰς χαμηλοτέραν θερμοκρασίαν (π.χ., 100°C).

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν φύσιν τῆς ἀκτινοβολούσης ἐπιφανείας, εὐρίσκεται ὅτι μία μέλαινα (π.χ., αἰθθαλωμένη) ἐπιφάνεια ἀκτινοβολεῖ περισσοτέραν θερμότητα, ἀπὸ τὴν θερμότητα, τὴν ὁποίαν ἀκτινοβολεῖ μία στιλπνὴ μεταλλικὴ ἐπιφάνεια, τῆς αὐτῆς θερμοκρασίας. Δι' αὐτόν, ἀκριβῶς, τὸν λόγον αἱ θερμάστραι βάφονται μαῦραι, ὅποτε ἡ θερμότης ἀκτινοβολεῖται ταχέως καὶ δὲν ἀπάγεται ὑπὸ τῶν καυσαερίων.

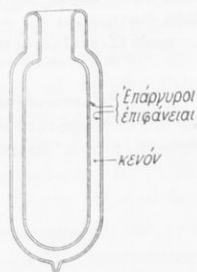
Ὡς, ἤδη, ἐλέγχθη, ἡ ἀκτινοβολουμένη θερμότης ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θερμοκρασίας τοῦ ἀκτινοβολοῦντος σώματος. Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἀκτινοβολουμένη ἰσχύς N —δηλ., τὸ πηλίκον τῆς ἀκτινοβολουμένης θερμότητος διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου—εἶναι ἀνάλογος τῆς τετάρτης δυνάμεως τῆς ἀπολύτου θερμοκρασίας T τοῦ σώματος. Ἦτοι εἶναι

$$N = \sigma \cdot S \cdot T^4$$

ἐνθα S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἀκτινοβολοῦντος σώματος καὶ σ μία σταθερά.

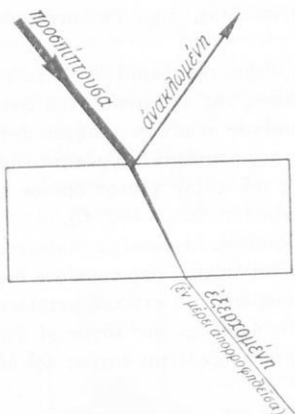
Δοχεῖα Dewar (Ντιούαρ). Τὰ δοχεῖα ταῦτα εἶναι δοχεῖα, διὰ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ διατηρήσωμεν ἐπὶ πολὺν, σχετικῶς, χρόνον ἐν ὑγρὸν εἰς σταθερὰν θερμοκρασίαν, εἴτε ὑψηλοτέραν, εἴτε κατωτέραν τῆς θερμοκρασίας τοῦ περιβάλλοντος. Τὰ δοχεῖα Dewar εἶναι ὑάλινα διπλότοιχα δοχεῖα (σχ. 403), εἰς τὰ ὁποία ὁ μεταξὺ τῶν τοιχωμάτων χώρος εἶναι ἀερόκενος καὶ τοῦτο διὰ νὰ ἀποφεύγεται ἡ διαρροὴ θερμότητος, λόγῳ θερμικῆς ἀγωγιμότητος καὶ λόγῳ μεταφορᾶς διὰ τοῦ ἀέρος. Ἀφ' ἑτέρου, διὰ νὰ ἐλαττωθῇ καὶ ἡ ἀπώλεια, λόγῳ διαδόσεως τῆς θερμότητος δι' ἀκτινοβολίας, ἐπαργυροῦνται αἱ ἐσωτερικαὶ ἐπιφάνειαι καὶ καθίστανται κατοπτρικαί.

Δοχεῖα Dewar εἶναι καὶ τὰ εἰς τὸ ἐμπόριον φερόμενα **θερμοφόρα δοχεῖα (Thermos)**, ἐντὸς τῶν ὁποίων θέτομεν διάφορα ὑγρά (θερμὸν γάλα, ψυχρὸν ὕδωρ, κ.λ.), τὰ ὁποία διατηροῦν σταθερὰν ἐπὶ πολὺ τὴν ἀρχικὴν των θερμοκρασίαν.



Σχ. 403. Δοχεῖον Dewar.

• § 282. Ἀπορρόφσις τῆς ἀκτινοβολίας. Ἡ ἀκτινοβολία, προσπίπτουσα ἐπὶ τῶν διαφόρων σωμάτων, ἐν μέρει ἀνακλᾶται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας των καὶ ἐν μέρει εἰσέρχεται ἐντὸς αὐτῶν. Ἡ εἰσελθούσα ἀκτινοβολία, ἀναλόγως τοῦ πάχους καὶ τῆς φύσεως τοῦ σώματος, εἴτε ἀπορροφεῖται πλήρως, εἴτε ἐν μέρει ἀπορροφεῖται καὶ ἐν μέρει ἐξέρχεται (σχ. 403α). Ἡ ἀπορροφουμένη ἀκτινοβολία — ἡ ὁποία, ὡς ἐλέγχθη, μετατρέπεται εἰς θερμότητα — ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φύσεως τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἀπορροφῶντος σώματος. Οὕτω, εἰς τὰς στιλπνὰς μεταλλικὰς ἐπιφανείας ἡ ἀκτινοβολία ἀνακλᾶται σχεδὸν ἐξ ὁλοκλήρου, ἐνῶ, ἀντιστοίχως, ἡ ἀπορροφουμένη ἀκτινοβολία εἶναι πολὺ μικρά. Ἀντιθέτως, αἱ μελαναὶ (π.χ., αἰθαλωμένοι ἐπιφάνειαι) ἀπορροφῶν ὁλόκληρον, σχεδόν, τὴν ἐπ' αὐτῶν προσπίπτουσαν ἀκτινοβολίαν. Δι' αὐτόν, ἀκριβῶς, τὸν λόγον αἱ θεριναὶ ἐνδυμασίαι κατασκευάζονται ἀπὸ λευκὰ καὶ, ἐν γένει, ἀνοικτόχρωμα ὑφάσματα, ἵνα μὴ ἀπορροφῶν τὴν ἐπ' αὐτῶν προσπίπτουσαν ἀκτινοβολίαν.



Σχ. 403α.

Εἰς τὰ διαφανῆ σώματα, (π.χ., ὕαλος, ὕδωρ) ἡ ἐντὸς αὐτῶν εἰσερχομένη ἀκτινοβολία ἐξέρχεται σχεδὸν ἄνευ ἀπορροφῆσεως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κατηγορία Β'.

250) Κυλινδρική ράβδος ἐκ χαλκοῦ, διαμέτρου 1 cm καὶ μήκους 1 m , τίθεται, κατὰ τὸ ἓν ἄκρον, εἰς ἐπαφὴν μὲ λουτρόν σταθερᾶς θερμοκρασίας 200°C , ἐνῶ τὸ ἄλλο διατηρεῖται εἰς θερμοκρασίαν 20°C . Πόση θερμότης ἀνά sec ἀπάγεται ἐκ τοῦ λουτροῦ; (Συντελεστὴς θερμ. ἀγωγιμότητος τοῦ χαλκοῦ $= 0,9\text{ cal} \cdot \text{grad}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1}$). (ΑΠ : $1,27\text{ cal/sec}$).

251) Ἡλεκτρικὴ θερμάστρα, εὐρισκομένη εἰς θερμοκρασίαν 276°C , ἀκτινοβολεῖ ὀρισμένην θερμότητα ἀνά δευτερόλεπτον. Πόσας φορές μεγαλύνεθαι θερμότητα ἀνά δευτερόλεπτον θ' ἀκτινοβολῇ αὕτη, ἐὰν ἡ θερμοκρασία τῆς αὐξηθῇ εἰς 825°C ; (ΑΠ : $16\text{ φορές μεγαλύνεθαι}$)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΑ΄

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

★ § 283. Ἑσωτερικὴ ἐνέργεια. Γνωρίζομεν, ἤδη, ὅτι ἡ θερμότης εἶναι μία μορφή ἐνεργείας. Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον τῆς *Θερμοδυναμικῆς* θὰ ἐξετάσωμεν τὴν σχέσιν τῆς θερμότητος πρὸς τὰς ἄλλας μορφὰς ἐνεργείας καί, ἰδιαιτέρως, πρὸς τὸ μηχανικὸν ἔργον.

Ὅπως εἶδομεν εἰς τὴν § 173, πᾶν σῶμα ἀποτελεῖται ἐξ ατόμων (ἢ μορίων). Τὰ ἄτομα τῶν στερεῶν εὐρίσκονται εἰς ὠρισμένας θέσεις, περὶ τὰς ὁποίας διαρκῶς πάλλονται, ἐνῶ τὰ μόρια τῶν ὑγρῶν κινοῦνται διαρκῶς καὶ ἀτάκτως, ὅπως τὰ μόρια ἐνὸς ἀερίου. Λόγῳ τῆς ταλαντώσεως, τὰ ἄτομα ἐνὸς στερεοῦ σώματος ἔχουν ἐνέργειαν (δυναμικὴν καὶ κινητικὴν). Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνεργειῶν ὅλων τῶν ατόμων τοῦ στερεοῦ καλοῦμεν *ἐσωτερικὴν ἐνέργειαν* αὐτοῦ.

Ἀναλόγως, *ἐσωτερικὴν ἐνέργειαν ἐνὸς ἀερίου* καλοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν κινητικῶν ἐνεργειῶν ὅλων τῶν μορίων τοῦ ἀερίου.

Ὅταν ἡ *θερμοκρασία ἐνὸς σώματος αὐξάνεται, αὐξάνεται καὶ ἡ ἐσωτερικὴ του ἐνέργεια* (*).

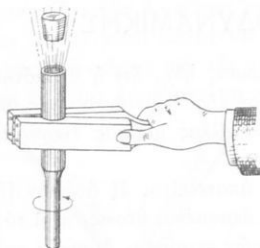
Ὅτιω, ὅταν προσφέρωμεν θερμότητα εἰς ἓν στερεόν, αὐξάνομεν τὴν ἐσωτερικὴν του ἐνέργειαν, διότι, τώρα, τὰ ἄτομά του πάλλονται μὲ μεγαλύτερον πλάτος, ἢ αὐξήσις δὲ αὕτη τοῦ πλάτους γίνεται ἀντιληπτὴ ἐκ τῆς αὐξήσεως τῆς *θερμοκρασίας* τοῦ σώματος. Ὅμοιως, ὅταν θερμαίνωμεν ἐν ἀερίον, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἐντὸς κλειστοῦ δοχείου μὲ ἀνένδοτα τοιχώματα, αὐξάνεται ἡ ἐσωτερικὴ του ἐνέργεια, λόγῳ αὐξήσεως τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τῶν μορίων του, τὴν ὁποίαν ἡμεῖς ἀντιλαμβανόμεθα ἐκ τῆς αὐξήσεως τῆς *θερμοκρασίας* τοῦ ἀερίου.

★ § 284. Μετατροπὴ τοῦ μηχανικοῦ ἔργου εἰς θερμότητα—Πρῶτον *θερμοδυναμικὸν ἀξίωμα*. Ἀναφέρομεν μερικά ἐκ τῶν γνωστοτέρων φαινομένων, κατὰ τὰ ὁποῖα λαμβάνει χώραν μετατροπὴ τοῦ μηχανικοῦ ἔργου εἰς θερμότητα: Ὅταν, διὰ τροχοπεδήσεως, ἀναγκάζωμεν ἐν κινούμενον ὄχημα νὰ σταματήσῃ, αἱ τροχοπέδαι θερμαίνονται. Ὡσαύτως, οἱ πρίονες θερμαίνονται, ὅταν κόπτωμεν ξύλα, τὰ τρύπανα θερμαίνονται ἰσχυρῶς, ὅταν τρυπῶμεν μεταλλικὰ ἀντικείμενα, τὰ πυρεῖα διὰ τῆς τριβῆς ἀνάπτουν κ.λ.

Χαρακτηριστικὸν πείραμα, διὰ τοῦ ὁποίου δεικνύομεν τὴν ἀνάπτυξιν θερμότητος διὰ τῆς τριβῆς, εἶναι τὸ ἐξῆς (σχ. 404): Ἐντὸς σιδηροῦ σωλῆνος θέτομεν ποσότητά τινα αἰθέρος καί, ἄφου τὸν πωματίσωμεν διὰ φελ-λοῦ, θέτομεν αὐτὸν εἰς περιστροφὴν διὰ καταλλήλου μηχανῆς. Ἀκολούθως,

(*) Ἐνίοτε, ἡ ἐσωτερικὴ ἐνέργεια καλεῖται, καταχρηστικῶς, «θερμότης τοῦ σώματος».

περιβάλλομεν τὸν σωλῆνα διὰ δύο ξυλίνων σιαγόνων, τὰς ὁποίας πιέζομεν,



Σχ. 404. Λόγω τῆς τριβῆς, καταναλίσκεται μηχανικὸν ἔργον, τὸ ὁποῖον μετατρέπεται εἰς θερμότητα.

οὕτως ὥστε νὰ δημιουργοῦνται σημαντικαὶ δυνάμεις τριβῆς. Ἡ διὰ τριβῆς ἀναπτυσσομένη θερμότης ἐξατμίζει ταχέως τὸν αἰθέρα, ἢ δημιουργοῦμένη δὲ πίεσις τῶν αἰτμῶν αὐτοῦ ἐκσφενδονίζει μεθ' ὀρμῆς τὸ πῶμα.

Εἰς ὅλα τὰ περιγραφέντα φαινόμενα καθὼς καὶ εἰς πλεῖστα ἄλλα καταναλίσκεται μηχανικὸν ἔργον, τὸ ὁποῖον, διὰ τῆς τριβῆς, μετατρέπεται εἰς θερμότητα. Διὰ τὴν μετατροπὴν ταύτην τοῦ μηχανικοῦ ἔργου εἰς θερμότητα ἰσχύει τὸ γενικὸν ἀξίωμα διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας. Ἐπομένως, ἡ ἀναπτυσσομένη θερμότης Q θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ καταναλισκόμενον μηχανικὸν ἔργον A . Ὡτοι, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$A = Q$$

Ἐπειδὴ, συνήθως, μετροῦμεν τὸ ἔργον μὲ μηχανικὰς μονάδας ἔργου, τὴν δὲ θερμότητα μὲ θερμίδας, ἢ ἄνω σχέσις γράφεται

$$A = J \cdot Q$$

ἐνθα J εἶναι εἷς συντελεστής, ὁ ὁποῖος ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν μονάδων ἔργου καὶ τῶν μονάδων θερμότητος καὶ καλεῖται **μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος**.

Ἐάν ἐκφράσωμεν τὸ ἔργον εἰς $\text{kgm}^*\cdot\text{m}$ καὶ τὴν θερμότητα εἰς χιλιοθερμίδας (kcal), τὸ J θὰ ἐκφράζεται εἰς $\text{kgm}^*\cdot\text{m}/\text{kcal}$, ἐνῶ, ἐάν τὸ ἔργον ἐκφρασθῇ εἰς Joule , ἢ δὲ θερμότης εἰς θερμίδας , τὸ J θὰ ἐκφράζεται εἰς Joule/cal .

Εἰς τὸν κάτωθι πίνακα δίδονται αἱ τιμαὶ τοῦ J διὰ διαφόρους περιπτώσεις.

ΠΙΝΑΞ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ
ΕΙΣ ΜΟΝΑΔΑΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΟΣ

* Ἔργον	Θερμότης	J
erg	cal	$4,2 \cdot 10^7 \text{ erg/cal}$
$\text{kgm}^*\cdot\text{m}$	kcal	$427 \text{ kgm}^*\cdot\text{m/kcal}$
Joule	cal	$4,2 \text{ Joule/cal}$
kWh	kcal	$\frac{1}{860} \text{ kWh/kcal}$

Ἡ ἐκφρασις $J = 427 \text{ kgm}^*\cdot\text{m}/\text{kcal}$ σημαίνει ὅτι, ἐάν μετατρέψωμεν ἔργον $427 \text{ kgm}^*\cdot\text{m}$ εἰς θερμότητα, θὰ λάβωμεν θερμότητα, ἴσην πρὸς 1 χιλιοθερμίδα.

Ἡ ἰσοδυναμία μεταξὺ παραγομένης θερμότητος καὶ καταναλισκομένου ἔργου δὲν εἶναι συμπτωματική, ἀλλὰ παρουσιάζεται εἰς οἰανδήποτε μετατροπὴν ἐνεργείας μιᾶς μορφῆς εἰς ἐνέργειαν ἄλλης μορφῆς. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν εἰς ἄξιώμα, τὸ ὁποῖον καλεῖται **πρῶτον θερμοδυναμικὸν ἄξιώμα**:

«Ὅταν **ἐξαφανίζεται ἐν ποσὸν ἐνεργείας μιᾶς μορφῆς, ἐμφανίζεται ἴσον ποσὸν ἐνεργείας ἄλλης μορφῆς**».

Τὸ ἄξιώμα τοῦτο ἀπαγορεύει τὴν κατασκευὴν τοῦ ἀεικινήτου. Λέγοντες **ἀεικίνητον**, δὲν ἐννοοῦμεν κάτι, τὸ ὁποῖον κινεῖται ἀενάως, ἀλλὰ μίαν μηχανήν, ἥ ὁποία θὰ δύναται νὰ παράγῃ ἔργον ἐκ τοῦ μηδενός. Μία τοιαύτη μηχανὴ εἶναι ἀδύνατον νὰ κατασκευασθῇ, διότι ἡ πραγματοποίησις αὐτῆς ἔρχεται εἰς ἀντίθεσιν πρὸς τὸ πρῶτον θερμοδυναμικὸν ἄξιώμα.

• § 285. **Έργον, παραγόμενον κατὰ τὴν ἐκτόνωσιν ἑνὸς αερίου.**
 Ὅταν ἐν αερίῳ ἐκτινοῦται (ὅταν, δηλ., αὐξάνεται ὁ ὄγκος του), παράγει ἔργον. Διὰ τὴν κατανόησιν τοῦ φαινομένου τούτου, θεωρήσωμεν κύλινδρον, κλειόμενον ἀεροστεγῶς δι' ἐμβόλου καὶ περιέχοντα ἐν αερίῳ. Κατὰ τὴν ἐκτόνωσιν τοῦ αερίου, τὸ ἔμβολον θὰ μετακινήθῃ, τὸ δὲ παραγόμενον ἔργον θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῆς δυνάμεως, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ αέριον ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου, ἐπὶ τὴν μετακίνησιν αὐτοῦ.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἔργον τοῦτο, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐστωσαν p ἡ πίεσις τοῦ αερίου καὶ S τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐμβόλου. Ἡ δυνάμις F , ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου ὑπὸ τοῦ αερίου, εἶναι ἴση πρὸς

$$F = p \cdot S.$$

Ἐάν τὸ ἔμβολον μετακινήθῃ κατὰ μικρὸν τι διάστημα Δx , θὰ παραχθῇ ἔργον A , ἴσον πρὸς

$$A = F \cdot \Delta x = p \cdot S \cdot \Delta x.$$

(Ὁ δρόμος Δx πρέπει νὰ ληφθῇ μικρὸς, ἵνα μὴ ἐλαττωθῇ, κατὰ τὴν διαστολὴν τοῦ αερίου, ἡ πίεσις αὐτοῦ). Ἐπειδὴ $S \cdot \Delta x$ παριστᾷ τὴν αὐξήσιν ΔV τοῦ ὄγκου τοῦ αερίου, ἔχομεν

$$A = p \cdot \Delta V$$

• § 286. **Μετατροπὴ τῆς θερμότητος εἰς ἔργον — Δεύτερον θερμοδυναμικὸν ἄξιώμα.** Ἐνῶ ἡ μετατροπὴ τοῦ ἔργου εἰς θερμότητα γίνεται κατὰ τὸσον ἀπλοῦν τρόπον, ἡ ἀντίστροφος μεταβολή, δηλ., ἡ μετατροπὴ τῆς θερμότητος εἰς ἔργον, ἀπαιτεῖ πολυπλοκωτέρας μηχανάς — τὰς καλουμένας **θερμικὰς μηχανάς**.

Θερμικὴ μηχανή καλεῖται ἡ μηχανὴ ἐκείνη, εἰς τὴν ὁποίαν προσφέρεται θερμότης καὶ ἡ ὁποία ἀποδίδει μηχανικὸν ἔργον.

Θερμικαὶ μηχαναὶ εἶναι, π.χ., αἱ ἀτμομηχαναί. αἱ μηχαναὶ ἐσωτερικῆς καύσεως, κ.λ., αἱ ὁποῖαι περιγράφονται εἰς τὸ ἐπόμενον κεφάλαιον.

Διὰ τὴν λειτουργίαν μίᾳ θερμικῇ μηχανῇ, ἀπαιτοῦνται α) μία δεξαμενὴ θερμότητος, ὑψηλῆς σχετικῶς θερμοκρασίας (ὁ λέβης τῶν ἀτμομηχανῶν), β) ἓν ἄερίον, τὸ ὁποῖον, διαστελλόμενον, παράγει τὸ ἔργον (ὑδρατμοί), καὶ γ) μία δεξαμενὴ θερμότητος, χαμηλοτέρας θερμοκρασίας (ὁ συμπυκνωτὴς τῶν ἀτμομηχανῶν). Κατὰ τὴν λειτουργίαν τῆς θερμικῆς μηχανῆς, ἡ δεξαμενὴ θερμότητος, ὑψηλῆς θερμοκρασίας, παρέχει εἰς τὴν μηχανὴν θερμότητα, ἐκ τῆς ὁποίας μέρος μὲν μετατρέπεται, κατὰ τὴν ἐκτόνωσιν τοῦ ἀερίου, εἰς μηχανικὸν ἔργον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἀποδίδεται εἰς τὴν δεξαμενὴν θερμότητος, χαμηλοτέρας θερμοκρασίας (τὸν συμπυκνωτήν).

Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι α) διὰ μιᾶς θερμικῆς μηχανῆς δὲν δυνάμεθα νὰ μετατρέψωμεν δεδομένην θερμότητα ἐξ ὁλοκλήρου εἰς μηχανικὸν ἔργον, παρὰ μόνον μέρος αὐτῆς καὶ β) διὰ τὴν λειτουργίαν μιᾶς τοιαύτης μηχανῆς ἀπαιτοῦνται δύο δεξαμεναὶ θερμότητος· μία ὑψηλῆς θερμοκρασίας καὶ μία χαμηλῆς θερμοκρασίας.

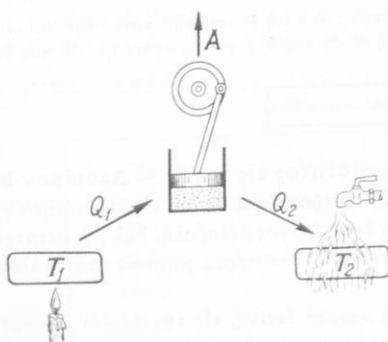
Αἱ ἄνω παρατηρήσεις μᾶς ἄγουν εἰς τὴν διατύπωσιν τοῦ **δευτέρου θερμοδυναμικοῦ ἀξιώματος** ὡς ἑξῆς:

«Εἶναι ἀδύνατον νὰ κατασκευασθῇ θερμικὴ μηχανή, ἡ ὁποία νὰ μετατρέπῃ, ἐξ ὁλοκλήρου, εἰς ἔργον τὴν προσλαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς θερμότητα».

Ἡ, ἄλλως: «Διὰ τὴν λειτουργίαν μίᾳ θερμικῇ μηχανῇ, ἀπαιτοῦνται δύο δεξαμεναὶ θερμότητος· μία ὑψηλῆς καὶ μία χαμηλῆς θερμοκρασίας».

Τὸ δεῦτερον θερμοδυναμικὸν ἀξίωμα ἀποκλείει, κατὰ ταῦτα, τὴν κατασκευὴν μιᾶς θερμικῆς μηχανῆς, ἡ ὁποία θὰ ἠδύνατο νὰ παράγῃ ὠφέλιμον ἔργον, παραλαμβάνουσα θερμότητα ἐκ τῆς θαλάσσης, ἀφοῦ, ἐκτὸς τῆς θαλάσσης, ἡ ὁποία εἶναι μία τεραστία δεξαμενὴ θερμότητος, δὲν διαθέτομεν καὶ τὴν ἀπαραίτητον δευτέραν δεξαμενὴν θερμότητος, κατωτέρας θερμοκρασίας.

§ 287. **Θερμοδυναμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως** (ἡ θεωρητικὴ ἀπόδοσις κατὰ ὃχι ἐπιτυχὴ ὁρισμόν).



Σχ. 405. Σχηματικὴ παράστασις θερμικῆς μηχανῆς.

κατὰ ὃχι ἐπιτυχὴ ὁρισμόν). Εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον εἶδομεν ὅτι διὰ τὴν λειτουργίαν μίᾳ θερμικῇ μηχανῇ, πρέπει νὰ διαθέτομεν δύο δεξαμενάς θερμότητος· μίαν ὑψηλῆς θερμοκρασίας T_1 καὶ μίαν χαμηλῆς θερμοκρασίας T_2 (σχ. 405). Μὲ τὴν βοήθειαν ἐνὸς ἀερίου (π.χ., ὑδρατμῶν) ἀπορροφεῖται ἐκ τῆς δεξαμενῆς ὑψηλῆς θερμοκρασίας T_1 ἡ θερμότης Q_1 , τῆς ὁποίας μέρος μὲν μετατρέπεται, κατὰ τὴν ἐκτόνωσιν τοῦ ἀερίου, εἰς μηχανικὸν ἔργον A , τὸ δὲ ὑπόλοιπον Q_2 ἀποδίδεται εἰς τὴν δεξαμενὴν τῆς κατωτέρας θερμοκρασίας T_2 .

Καλοῦμεν **θερμοδυναμικὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως** ἡ τῆς μηχανῆς ταύτης τὸ πηλίκον

Ὁ βιομηχανικὸς συντελεστής ἀποδόσεως τῶν διαφόρων θερμικῶν μηχανῶν εἶναι, σχετικῶς, μικρὸς καί, πάντως, μικρότερος τοῦ θερμοδυναμικοῦ συντελεστοῦ ἀποδόσεως μιᾶς ἰδανικῶς λειτουργοῦσης θερμικῆς μηχανῆς. Π.χ., διὰ τὰς ἀτμομηχανὰς οὗτος φθάνει μέχρις 25%, διὰ τοὺς ἀτμοστροβίλους μέχρι 35%, διὰ τοὺς βενζινοκινητήρας μέχρι 30% καὶ διὰ τὰς μηχανὰς Diesel (Ντίζελ) μέχρι 38%.

§ 288. Ἡ θερμότης ὡς μορφή ἐνεργείας κατωτέρας ποιότητος. Ὅπως εἶναι γνωστόν, ἡ μηχανικὴ ἐνέργεια (κινητικὴ καὶ δυναμικὴ) δύναται νὰ μετατραπῇ ἐξ ὅλου κληίρου εἰς θερμότητα. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὴν ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν. Ἀντιθέτως, ἡ θερμικὴ ἐνέργεια (θερμότης) μόνον κατὰ μικρὸν ποσοστὸν δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς μηχανικὸν ἔργον. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι αἱ διάφοροι μορφαὶ ἐνεργείας δύνανται νὰ διαιρεθοῦν εἰς δύο κατηγορίας: α) εἰς μορφὰς ἐνεργείας ἀνωτέρας ποιότητος (κινητικὴ ἐνέργεια, δυναμικὴ ἐνέργεια, ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια), ὅταν δύναται νὰ μετατραποῦν ἐξ ὁλοκλήρου εἰς ἄλλας μορφὰς ἐνεργείας καὶ β) εἰς μορφὰς ἐνεργείας κατωτέρας ποιότητος—ὅπως εἶναι ἡ θερμότης—ἡ ὁποία μόνον κατὰ μικρὸν ποσοστὸν δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς μηχανικὸν ἔργον.

Ἡ χρησιμότης δεδομένης θερμότητος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ποσοστοῦ αὐτῆς, τὸ ὅποion δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς μηχανικὸν ἔργον: Ὅπως εἶδομεν ἀνωτέρω, κατὰ τὴν λειτουργίαν μιᾶς θερμικῆς μηχανῆς, ἐκ τῆς προσφερομένης εἰς αὐτὴν θερμότητος Q_1 μικρὸν μόνον μέρος αὐτῆς ($Q_1 - Q_2$) μετατρέπεται εἰς ἔργον, ἐνῶ τὸ ὑπόλοιπον Q_2 ἀποδίδεται εἰς τὴν δεξαμενὴν θερμότητος, κατωτέρας θερμοκρασίας T_2 . Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ θερμότης Q_2 εὐρίσκεται ὑπὸ χαμηλὴν θερμοκρασίαν (T_2) καὶ εἶναι πλέον ἀχρηστος εἰς ἡμᾶς, ἀφοῦ δὲν δυνάμεθα νὰ τὴν μετατρέψωμεν εἰς ἔργον, ἐνῶ ἡ θερμότης Q_1 , ὡς εὐρισκομένη εἰς ὑψηλὴν θερμοκρασίαν (T_1), μετατρέπεται, ἐν μέρει τουλάχιστον, εἰς ἔργον. Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι ἡ θερμότης εἶναι τόσον χρησιμωτέρα, ὅσον ἡ θερμοκρασία, ὑπὸ τὴν ὁποίαν λαμβάνεται, εἶναι μεγαλύτερα.

Ἀφ' ἑτέρου, παρατηρεῖται ὅτι εἰς ὅλα τὰ φαινόμενα μέρος τῆς ἐνεργείας ἀνωτέρας ποιότητος (π.χ., κινητικῆς, ἠλεκτρικῆς κ.λ.) μετατρέπεται τελικῶς εἰς θερμότητα, ἡ ὁποία διαφεύγει εἰς τὸ περιβάλλον, τοῦ ὁποίου ἡ θερμοκρασία εἶναι χαμηλή. Ἐάν, λοιπόν, θεωρήσωμεν ἓν «μονωμένον σύστημα»—σύστημα, δηλ., εἰς τὸ ὁποῖον νὰ μὴ εἶναι δυνατὴ εἰσόδος ἢ ἐξόδος ἐνεργείας—ἐνῶ ἡ ὀλικὴ ἐνέργεια τοῦ συστήματος παραμένει σταθερά, συμφώνως πρὸς τὸ πρῶτον θερμοδυναμικὸν ἀξίωμα, ἐν τούτοις ἡ ἐνέργεια ἐκείνη, ἡ ὁποία δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς ἄλλας μορφὰς, θὰ ἐλαττοῦται συνεχῶς, ὅποτε, τελικῶς, ὁλόκληρος ἡ ἐνέργεια τοῦ συστήματος θὰ ἔχη μετατραπῇ εἰς θερμότητα, τῆς αὐτῆς θερμοκρασίας. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην οὐδενία, πλέον, μεταβολὴ θὰ εἶναι δυνατὴ καί, συνεπῶς, οὐδὲν φαινόμενον θὰ εἶναι δυνατόν νὰ λάβῃ χώραν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ὅλαι αἱ μορφαὶ ἐνεργείας τείνουν αὐτομάτως νὰ μετατραποῦν εἰς θερμότητα καί, μάλιστα, θερμότητα, τῆς αὐτῆς θερμοκρασίας, ἐκ τῆς ὁποίας δὲν εἶναι πλέον δυνατὴ ἡ παραγωγὴ ὠφέλιμου ἔργου (ἀρχὴ τῆς ὑποβαθμίσεως τῆς ἐνεργείας).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κατηγορία Α'.

252) Σιδηροδρομικὸς συρμός, βάρους 100 τόνων βάρους, ἔκκινεῖ ἐκ τῆς ἡρεμίας καί, κινούμενος ἐπὶ κατηγορικῆς τροχιάς, σταματᾷ εἰς στάθμην, εὐρισκομένην κατὰ 200 m χαμηλότερον. Πόση θερμότης (εἰς kcal) θ' ἀναπτυχθῇ εἰς τὰς τροχοπέδας; (ΑΠ; $4,68 \cdot 10^4$ kcal)

253) Σφαίρα εκ μολύβδου, μάζης 15 kg , πέπτει από ύψους 120 m επί άνενδóτου έπιφανείας. Νά ύπολογισθῇ ἡ παραγομένη θερμότης, ύπό τήν προϋπόθεσιν ότι ἡ κινητική ἐνέργεια τῆς σφαίρας μετατρέπεται ἐξ όλοκλήρου εἰς θερμότητα. (ΑΠ: $4,2 \text{ kcal}$)

254) Βλήμα εκ μολύβδου, βάρους 10 gr^* , προσπίπτει μετά ταχύτητος 250 m/sec επί άκλονήτου μάζης μολύβδου 450 gr , πρὸς τήν όποιαν καί ένσωματόυται. Ποία ἡ άνύψωσις τῆς θερμοκρασίας; (ΑΠ: $5,23^\circ \text{ C}$)

Κατηγορία Β'.

255) Ἀπό ποίον ύψος πρέπει ν' άφεθῇ τεμάχιον πάγου, μάζης 100 gr , ἵνα, κατά τήν πρόσκρουσίν του επί άνενδóτου έπιφανείας, τακῇ ἐξ όλοκλήρου, ύπό τήν προϋπόθεσιν ότι ὅλη ἡ κινητική του ἐνέργεια χρησιμοποιεῖται διά τήν τήξιν; (Θερμοκρασία άέρος 0° C). (ΑΠ: 34 km)

256) Ἀπό ποίον ύψος πρέπει ν' άφεθῇ σῶμα εκ κασσιτέρου, βάρους $1,5 \text{ kg}$, καί θερμοκρασίας 0° C , ἵνα, κατά τήν πρόσκρουσίν του επί άνενδóτου έπιφανείας, θερμοανθῇ μέχρι του σημείου τήξεως του κασσιτέρου; (ΑΠ: 5165 m)

257) Νά εκφρασθῇ ἡ θερμότης τήξεως του πάγου εἰς $\text{kg}^* \cdot \text{m/gr}$, Joule/gr , kWh/gr . (ΑΠ: $34,16 \text{ kg}^* \cdot \text{m gr}$, $335,1 \text{ Joule/gr}$, $93 \cdot 10^{-8} \text{ kWh/gr}$)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΒ'

ΘΕΡΜΙΚΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ

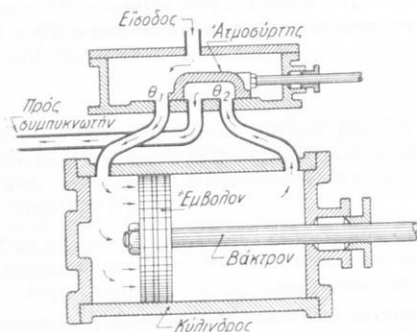
§ 289. Ἀτμομηχανή. Ὅπως εἶδομεν άνωτέρω, αἱ θερμικαί μηχαναί εἶναι μηχαναί, αἱ ὁποῖαι μετατρέπουσιν τήν θερμότητα εἰς μηχανικόν έργον. Ἐκ τῶν θερμικῶν μηχανῶν θά περιγράψωμεν κατωτέρω τὰς ατμομηχανάς, τοὺς ατμοστροβίλους καί τὰς μηχανάς έσωτερικῆς καύσεως.

Τὰ κύρια μέρη τῆς ατμομηχανῆς εἶναι α) ὁ λέβης, ἐντός του ὁποίου, διά θερμάνσεως ύδατος, παράγεται ατμός (δεξαμενῇ θερμότητος, ύψηλῆς θερμοκρασίας). β) Ὁ κύλινδρος, ἐντός του ὁποίου δύναται νά κινήται παλινδρομικῶς ἐν έμβολον. γ) Τὸ σύστημα μετατροπῆς τῆς παλινδρομικῆς κινήσεως του έμβόλου εἰς περιστροφικήν καί δ) ὁ συμπυκνωτής, ὁ ὁποῖος εἶναι δοχεῖον μετάλλινον, ψυχόμενον έξωτερικῶς διά διαρκῶς κυκλοφοροῦντος ύδατος καί ἐντός του ὁποίου ύγροποιεῖται ὁ ατμός, μετά τήν έξοδόν του εκ του κυλίνδρου. (Ὁ συμπυκνωτής άποτελεῖ τήν δεξαμενὴν θερμότητος, κατωτέρας θερμοκρασίας).

Ὁ λέβης εἶναι, κατ' αρχήν, μετάλλινον δοχεῖον με άνθεκτικά τοιχώματα, ἐντός του ὁποίου τίθεται τὸ πρὸς ατμοποίησιν ύδωρ. Καίοντες άνθρακα ἢ πετρέλαιον, θερμαίνομεν τὸ ύδωρ εἰς θερμοκρασίαν, πολὺ άνωτέραν τῶν 100° C . Ἡ πίεσις ἐντός του λέβητος εἶναι ἴση πρὸς τήν τάσιν κεκορε-

σμένων ατμῶν τοῦ ὕδατος, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ θερμοῦ ὕδατος τοῦ λέβητος (*).

Λειτουργία τῆς ἀτμομηχανῆς. Ὁ παραγόμενος ἐντὸς τοῦ λέβητος ατμός φέρεται, διὰ σωλῆνος, ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου (σχ. 406). Ὅταν τὸ ἔμβολον εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν,



Σχ. 406. Κύλινδρος ἀτμομηχανῆς μετὰ τοῦ ἀτμοσύρτου.

ῥιστερά, ὁπότε διακόπτεται ἡ παροχὴ τῆς θυρίδος Θ_1 καί, ἀντ' αὐτῆς, ἀνοίγει ἡ θυρὶς Θ_2 . Ὁ ατμός, εἰσερχόμενος, ἤδη, διὰ τῆς δεξιᾶς θυρίδος, πιέζει τὸ ἔμβολον ἐκ τῆς δεξιᾶς πλευρᾶς καὶ τὸ ἀναγκάζει νὰ κινηθῇ πρὸς τ' ἀριστερά. Κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην τοῦ ἔμβολου ὁ εἰς τὸ ἀριστερὸν διαμέρισμα τοῦ κυλίνδρου εὑρισκόμενος ατμός ἐκδιώκεται καὶ φέρεται εἰς τὸν συμπυκνωτὴν ἔνθα καὶ ὑγροποιεῖται. Ἐν τῷ μεταξὺ, ὁ ἀτμοσύρτης ἔχει κινηθῇ πρὸς τὰ δεξιὰ, ὁπότε, ἀνοιγομένης ἐκ νέου τῆς θυρίδος Θ_1 , εἰσέρχεται νέος ατμός καί, οὕτω, τὸ φαινόμενον ἐπαναλαμβάνεται περιοδικῶς. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὸ ἔμβολον κινεῖται παλινδρομικῶς, ἡ παλινδρομικὴ δὲ αὕτη κίνησις μετατρέπεται διὰ καταλλήλου μηχανισμοῦ (βάκτρον - διωστήρ - στρόφαλος) εἰς περιστροφικήν.

Εἰς τὸ σχῆμα 407 ἀπεικονίζεται ὁ στρόφαλος, εἰς δὲ τὸ σχῆμα 408 ὁλόκληρος ἡ ἀτμομηχανή.

Ἡ παλινδρομικὴ κίνησις τοῦ ἀτμοσύρτου δίδεται διὰ τοῦ ἐκκέντρον καὶ ὄχι δι' ἰδιαιτέρου στροφάλου.

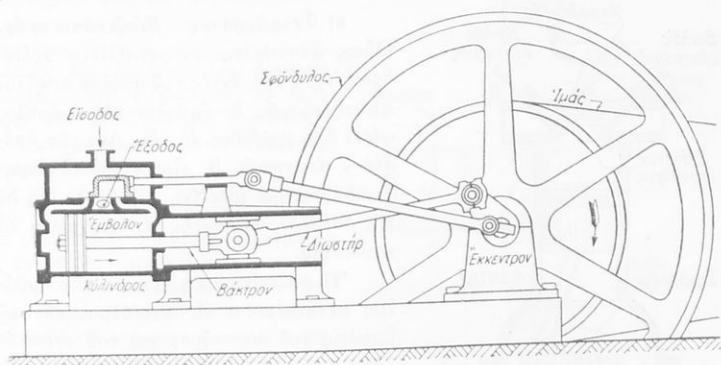
Ὁ σφόνδυλος, λόγῳ τῆς μεγάλης ἀδραναίας, τὴν ὁποίαν προβάλλει εἰς τὰς μεταβολὰς τῆς γωνιακῆς ταχύτητος, διατηρεῖ ταύτην περίπου σταθεράν, ὁ δὲ ἱμάς χρησιμεύει διὰ νὰ μεταβιβάσῃ τὴν κίνησιν εἰς ἄλλας μηχανὰς (ἡλεκτρικὰς γεννητρίας κ.λ.). Κατὰ τὴν λειτουργίαν τῆς ἀτμομηχανῆς,



Σχ. 407.

(*) Εἰς τοὺς λέβητας τῶν ἀτμομηχανῶν τῶν σιδηροδρόμων ἡ πίεσις ἀνέρχεται εἰς 14 at, ἀντιστοιχοῦσα εἰς θερμοκρασίαν 195° C.

μικρὸν μόνον μέρος τῆς θερμότητος, τῆς προσφερομένης ὑπὸ τοῦ αἵματος* μετατρέπεται εἰς ὠφέλιμον μηχανικὸν ἔργον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον παραλαμβάνει



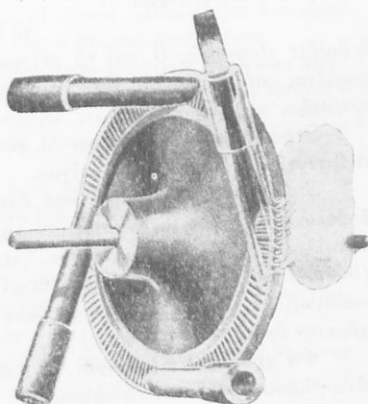
Σχ. 408. Ἀτμομηχανή.

νον μετ' ἑαυτῶν οἱ ἐκ τοῦ κυλίνδρου ἐξελθόντες, μετὰ τὴν ἐκτόνωσίν των, θερμοὶ εἰσέτι αἱμοί, οἱ ὅποιοι ὑδροποιοῦνται ἐντὸς τοῦ συμπυκνωτοῦ (*).

Ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τῶν ἀτμομηχανῶν εἶναι, σχετικῶς, μικρὸς (μέχρις 25 %).

Ἀτμοστρόβιλοι. Μεγαλύτερος (μέχρι 35 %) εἶναι ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τῶν **ἀτμοστρόβιλων**. Τὸ σχῆμα 409 παριστᾷ ἅπλοῦν τύπον ἀτμοστρόβιλου, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἐκ καμπυλωτῶν πτερυγίων, στερεωμένων εἰς τὴν περιφέρειαν ἐνὸς τροχοῦ. Ὁ αἶμος, προσβάλλων ἀπ' ἐνθείας τὰ πτερύγια, θέτει εἰς περιστροφὴν τὸν ἀτμοστρόβιλον.

Εἰς τὴν πραγματικότητα, οἱ ἀτμοστρόβιλοι παρουσιάζουν ἐντελῶς διάφορον μορφήν, ἡ λειτουργία των, ὅμως, στηρίζεται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀκριβῶς ἀρχῆς.

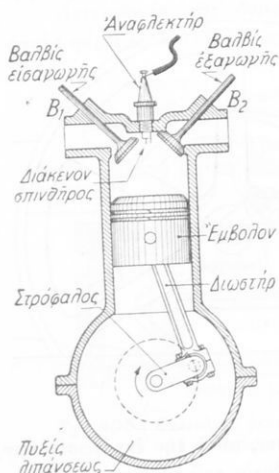


Σχ. 409. Ἀτμοστρόβιλος (ἀρχή).

• § 290. **Μηχαναὶ ἐσωτερικῆς καύσεως.** Αἱ μηχαναὶ αὗται εἶναι κινητήρες, εἰς τοὺς ὁποίους ἡ θερμότης παράγεται διὰ καύσεως, συντελουμένης

(*) Εἰς τὰς ἀτμομηχανὰς τῶν σιδηροδρόμων δὲν ὑπάρχει συμπυκνωτής, ἀλλ' ὁ αἶμος, ἐξερχόμενος ἐκ τοῦ κυλίνδρου, ἐκφεύγει εἰς τὸ περιβάλλον, τὸ ὅποιον, οὕτω, ἀποτελεῖ τὴν δευτέραν δεξαμενὴν θερμότητος, κατωτέρας θερμοκρασίας.

της ἐντὸς τῆς μηχανῆς, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰς ἀτμομηχανὰς κ.λ., εἰς τὰς ὁποίας ἡ θερμότης προσφέρεται εἰς τὸν λέβητα.



Σχ 410 Τετράχρονος βενζινοκινητήρ (ἀρχή).

α) **Τετράχρονος βενζινοκινητήρ.** Οὗτος ἀποτελεῖται ἐκ μεταλλίνου κυλίνδρου (σχ. 410), ἐντὸς τοῦ ὁποίου κινεῖται παλινδρομικῶς ἐν ἔμβολον καὶ ὁ ὁποῖος φέρει δύο βαλβίδας B_1 , B_2 . Διὰ τῆς βαλβίδος εἰσαγωγῆς B_1 εἰσέρχεται τὸ ἔκρηκτικὸν μείγμα (βενζίνη καὶ ἀήρ), διὰ δὲ τῆς βαλβίδος ἐξαγωγῆς B_2 ἐξέρχονται τὰ καυσάερια.

Ἡ παλινδρομικὴ κίνησις τοῦ ἐμβόλου μετατρέπεται εἰς περιστροφικὴν τῇ βοηθείᾳ τοῦ διωστήρος καὶ τοῦ στροφάλου. Ἐντὸς τῆς πυξίδος λίπανσεως (car-ter-κάστερ) εὐρίσκεται τὸ ἀναγκαῖον διὰ τὴν λίπανσιν ὀρυκτέλαιον.

Ἡ λειτουργία τῆς μηχανῆς γίνεται εἰς τέσσαρας χρόνους, τοὺς ἑξῆς:

1ος χρόνος—Ἀναρρόφησης. Ὅταν

τὸ ἔμβολον κινεῖται πρὸς τὰ κάτω, ἀνοίγει

ἡ βαλβὶς εἰσαγωγῆς B_1 καὶ τὸ μείγμα τοῦ καυσίμου καὶ τοῦ ἀέρος ἀναρροφεῖται καὶ εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου. Ἡ βαλβὶς ἐξαγωγῆς εἶναι κλειστή.

2ος χρόνος—Συμπίεσις. Αἱ δύο βαλβίδες εἶναι κλεισταί. Τὸ ἔμβολον ἀνέρχεται καὶ συμπιέζει τὸ μείγμα.

3ος χρόνος—Ἐκρηγξίς καὶ ἐκτόνωσις. Ὀλίγον πρὶν νὰ φθάσῃ τὸ ἔμβολον εἰς τὸ ἀνωτάτον σημεῖον τῆς διαδρομῆς του, δημιουργεῖται, διὰ καταλλήλου ἡλεκτρικῆς διατάξεως, ἡλεκτρικὸς σπινθὴρ εἰς τὸν ἀναφλεκτήρα (bougie) καὶ τὸ καύσιμον ἀναφλέγεται ἀποτόμως (**Ἐκρηγξίς**). Τὰ αἲρια τῆς καύσεως, θερμαινόμενα, δημιουργοῦν ὑψηλὴν πίεσιν καὶ ὥσθιεν τὸ κατερχόμενον ἔμβολον (**ἐκτόνωσις**).

4ος χρόνος—Ἐξαγωγή. Ἡ βαλβὶς ἐξαγωγῆς ἀνοίγει, τὸ δὲ ἔμβολον, ἀνερχόμενον, ἐκδιώκει τὰ καυσάερια.

Ἐκ τῶν τεσσάρων χρόνων λειτουργίας τῆς μηχανῆς μόνον εἰς τὸν 3ον χρόνον, κατὰ τὸν ὁποῖον ἐκτονοῦνται τὰ αἲρια, παράγεται ἔργον.

Ὁ περιγραφεὶς κινητήρ εἶχεν ἕνα κύλινδρον. Διὰ νὰ ἔχωμεν κινητήρας μεγάλης ἰσχύος, συνδυάζονται περισσότεροι κύλινδροι, 4, 6, 8, κ.λ., ὅποτε ὁ κινητήρ καλεῖται τετρακύλινδρος, ἑξακύλινδρος, ὀκτακύλινδρος κ.λ.

Τροφοδοτήσις τῆς μηχανῆς. Διὰ νὰ λειτουργήσῃ ὁ βενζινοκινητήρ, πρέπει νὰ τροφοδοτηθῇ δια καταλλήλου μείγματος βενζίνης καὶ ἀέρος. Το μείγμα τοῦτο

ἐπιτυγχάνεται, αὐτομάτως, διὰ τοῦ **ἐξαερωτήρος** (*carburateur* - καρυμυρατέρ - σχ. 411) :

Ἡ βενζίνη ἀντλείται ἐκ τῆς δεξαμενῆς βενζίνης καὶ στέλλεται εἰς θάλαμον, ὁ ὁποῖος, τῇ βοηθείᾳ τοῦ πλωτήρος Π, πληροῦται πάντοτε μέχρις ὠρισμένης στάθμης. Εἰς τὴν βάσιν τοῦ θαλάμου ὑπάρχει σωλὴν, ὁ ὁποῖος εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον του καταλήγει εἰς ἀκροφύσιον Α. Ὁ σωλὴν οὗτος καλεῖται **ἀναβρυτήρ** (*gicleur* - ζικλέρ).

Ἡ λειτουργία τοῦ ἐξαερωτήρος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν λειτουργίαν τοῦ ψεκαστήρος, ὁ ὁποῖος περιεγράφη εἰς τὴν § 156 : Κατὰ τὸν χρόνον τῆς ἀναρροφήσεως δημιουργεῖται ἰσχυρὸν ρεῦμα ἀέρος, τὸ ὁποῖον προκαλεῖ ὑποπίεσιν εἰς τὴν στένωσιν, εἰς τὴν ὁποίαν καταλήγει ὁ ἀναβρυτήρ. Ἐνεκα τούτου, ἡ βενζίνη ἀναβλύζει ἐκ τοῦ ἀναβρυτήρος, παρασυρομένη δὲ ὑπὸ τοῦ ρεύματος τοῦ ἀέρος, διασπᾶται εἰς λεπτότατα σταγονίδια.

Ἡ ποσότης τοῦ εἰς τὸν κινητήρα εἰσαγομένου ἐκρηκτικοῦ μείγματος ρυθμίζεται διὰ τῆς **δικλείδος μείγματος** ΔΜ (κ. πεταλούδας), μεταβαλλομένης, οὕτω, κατὰ βούλησιν τῆς ἐκάστοτε παραγομένης ἰσχύος. Διὰ τῆς **δικλείδος ἀέρος** ΔΑ ρυθμίζεται ἡ εἰσαγωγή προσθέτου ἀέρος, ὥστε τὸ μείγμα νὰ γίνεται πλουσιώτερον ἢ πτωχότερον εἰς βενζίνη. Διὰ τοῦ κοιλίου Β ρυθμίζεται ἡ ὀπὴ τοῦ ἀναβρυτήρος.

β) **Δίχρονος βενζινοκινητήρ.** Ἀπλουστεράς κατασκευῆς εἶναι ὁ **δίχρονος βενζινοκινητήρ**, εἰς τὸν ὁποῖον δὲν ὑπάρχουν βαλβίδες, ἀλλ' ἡ ρύθμισις τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ καυσίμου καὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῶν καυσαερίων γίνεται διὰ θυρίδων, εὐρισκομένων εἰς τὰ τοιχώματα τοῦ κυλίνδρου, τὰς ὁποίας φράσσει ἡ ἀποκαλύπτει τὸ κινούμενον ἔμβολον.

Ὁ κινητήρ οὗτος καλεῖται **δίχρονος**, διότι δημιουργεῖται ἕκρηξις ἅπας ἀνὰ στροφὴν τοῦ στροφαλοφόρου ἄξονος - δηλ., ἀνὰ δύο χρόνους. Οἱ δίχρονοι κινητήρες χρησιμοποιοῦνται εἰς μικρὰ αὐτοκίνητα, μοτοσυκλέτας κ.λ.

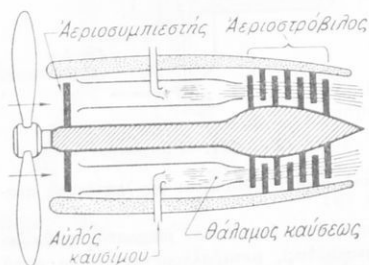
γ) **Μηχαναὶ Diesel (Ντιζέλ).** Καὶ αἱ μηχαναὶ Diesel εἶναι μηχαναὶ ἐσωτερικῆς καύσεως, ὁμοιάζουσιν πρὸς τοὺς βενζινοκινητήρας, χρησιμοποιοῦν, ὅμως, ὥς καύσιμον τὸ πετρέλαιον.

Ὅπως εἶδομεν, εἰς τοὺς βενζινοκινητήρας συμπιέζεται μείγμα βενζίνης καὶ ἀέρος, κατὰ τὴν κατάλληλον δὲ στιγμὴν ἠλεκτρικὸς σπινθήρ προκαλεῖ τὴν ἕκρηξιν. Εἰς τὴν μηχανὴν Diesel κατὰ τὴν ἀναρρόφωσιν εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου μόνον ἀτμοσφαιρικός ἀήρ, ὁ ὁποῖος, ἐν συνεχείᾳ, συμπιέζεται ὑπὸ τοῦ ἔμβολου. Περὶ τὸ τέλος τοῦ χρόνου τῆς συμπιέσεως εἰσάγεται εἰς τὸν κύλινδρον, δι' ἀντλίας ὑψηλῆς πίεσεως, τὸ πετρέλαιον ὑπὸ μορφὴν εἰς τὸν κύλινδρον, κατὰ τὴν συμπίεσιν προκαλουμένης μεγάλῃς ἀνυψώσεως τῆς θερμοκρασίας, ἐπέρχεται αὐτανάφλεξις τοῦ καυσίμου, μὴ ἀπαιτουμένου, ὥς ἐκ τούτου, ἰδιαιτέρου συστήματος ἀναφλέξεως, ὅπως εἰς τοὺς βενζινοκινητήρας.

Αἱ μηχαναὶ Diesel πλεονεκτοῦν τῶν βενζινοκινητήρων, καθόσον δὲν ἀπαιτοῦν βενζίνη διὰ τὴν λειτουργίαν των, ἀλλὰ πετρέλαιον, τὸ ὁποῖον εἶναι σημαντικῶς εὐθηνότερον.

Ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τῶν μηχανῶν ἐσωτερικῆς καύσεως εἶναι μεγαλύτερος τοῦ συντελεστοῦ ἀποδόσεως τῶν ἀτμομηχανῶν, διότι εἰς τὰς μηχανὰς ἐσωτερικῆς καύσεως ἐπιτυγχάνονται ὑψηλαὶ πιέσεις καί, συνεπῶς, ὑψηλαὶ θερμοκρασίαι.

§ 291. Ἀεριοστρόβιλοι. Ἐκτὸς τῶν ἀτμοστροβίλων, οἱ ὁποῖοι λειτουργοῦν δι' ἀτμοῦ, ὑπάρχουν καὶ ἰστροβίλοι, οἱ ὁποῖοι, ἀντὶ ἀτμοῦ, χρησιμοποιοῦν διὰ τὴν λειτουργίαν των ἀέρια, προερχόμενα ἐκ τῆς καύσεως πετρελαίου κ.λ. (ἀεριοστρόβιλοι - σ.χ. 412). Τοιοῦτους ἀεριοστροβίλους χρησιμοποιοῦν σήμερον ὠρίσμενον τύπου ἀεροπλάνα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ κίνησις τῆς ἑλικος δίδεται ὄχι ὑπὸ ἐμβολοφόρου βενζινοκινητήρος, ἀλλ' ὑπὸ ἀεριοστροβίλου (Turbo-Prop - ὅρος ὑπενθυμίζων στροβίλον — turbine — καὶ ἑλικά — propeller). Ὁ τύπος οὗτος παρουσιάζει ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ πλεονέκτημα



Σχ. 412. Ἀεριοστρόβιλος (ἀρχή). Τὰ τοιχώματα τοῦ θαλάμου καύσεως ψύχονται ἐξωτερικῶς.

πλεονέκτημα τῆς χρησιμοποιοῦσεως πετρελαίου, νητήρες οὗτοι πιθανόν ν' ἀντικαταστήσουν, σὺν τῷ χρόνῳ, τοὺς συνήθεις τύπους τῶν μηχανῶν ἐσωτερικῆς καύσεως ἀκόμη καὶ εἰς τὰ αὐτοκίνητα.

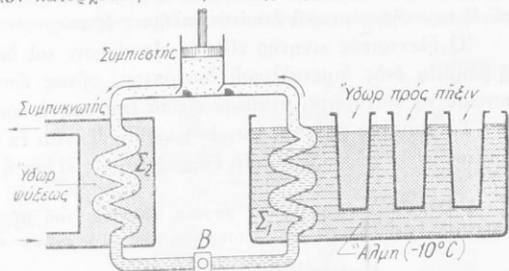
§ 292. Ψυκτικαὶ μηχαναί. Αἱ ψυκτικαὶ μηχαναὶ χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν δημιουργίαν χαμηλῶν θερμοκρασιῶν. Πρὸς τοῦτο πρέπει ἐκ τῶν πρὸς ψύξιν σωμάτων ν' ἀφαιρεθῇ θερμότης, ὁπότε, κατὰ τὰ γνωστά, ἡ θερμοκρασία των θὰ κατέλθῃ.

Ἡ λειτουργία τῶν ψυκτικῶν μηχανῶν στηρίζεται ἐπὶ τῆς ψύξεως, ἡ ὁποία προκαλεῖται κατὰ τὴν ἐξαέρωσιν ἐνὸς υγροῦ. Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν ταχέαν ἐξαέρωσιν, χρησιμοποιοῦμεν πτητικὰ υγρὰ (ἀμμωνία κ.λ.), τὰ ὁποῖα, φερόμενα εἰς χώρον ἡλαττωμένης πίεσεως, ζέουν, ἐνῶ ταυτοχρόνως ἀπορροφεῖται ἐκ τῶν πρὸς ψύξιν σωμάτων ἡ ἀντίστοιχος θερμότης ἐξαερώσεως.

★ Παγοποιητικὴ ἐγκατάστασις. Τὸ σχῆμα 413 παριστᾷ τὴν ἀρχὴν τῆς λειτουργίας μιᾶς παγοποιητικῆς ἐγκαταστάσεως, δηλ., μιᾶς ψυκτικῆς μηχανῆς, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ πάγου. Ἡ λειτουργία τῆς μηχανῆς ἔχει ὡς ἑξῆς:

1) Ὅταν τὸ ἐμβολὸν τοῦ συμπιεστοῦ ἀνυψοῦται, ἡ υγρὰ ἀμμωνία, ἡ ὁποία εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ σωλήνος Σ, (ἐξαερωτήρ), ἐξαεροῦται καὶ εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου. Ἡ ἀμμωνία, ἐξαερωμένη, ἀπορροφεῖ θερμότητα ἐκ τῆς ἄλμης, τῆς περιβαλλούσης τὸν ἐξαερωτήρα, ἡ ὁποία, ὡς ἐκ τούτου, ψύχεται,

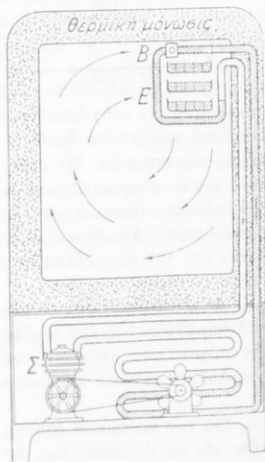
2) Όταν τὸ ἔμβολον κατέρχεται, οἱ αἰμοὶ τῆς ἀμμωνίας συμπιέζονται καὶ εἰσέρχονται εἰς τὸν σωλήνα Σ_2 (συμπυκνωτής), ἔνθα, ἐρχόμενοι εἰς ἐπαφὴν μετὰ τῶν ψυχρῶν τοιχωμάτων τοῦ σωλήνος τούτου, ὑγροποιοῦνται. Ἡ κατὰ τὴν ὑγροποίησιν τῆς ἀμμωνίας ἐκλυομένη θερμότης ἐντὸς τοῦ



Σχ. 413. Ἐγκατάστασις παγοποιείου (ἀρχή).

συμπυκνωτοῦ ἀπάγεται διὰ τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον κυκλοφορεῖ συνεχῶς περὶ τὸν σωλήνα Σ_2 . Ἡ πίεσις ἐντὸς τοῦ σωλήνος Σ_2 εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πίεσεως, τῆς ἐπικρατοῦσης ἐντὸς τοῦ σωλήνος Σ_1 . Ὡς ἐκ τούτου, ἡ ἐκ τῆς ὑγροποίησης προκύψασα ἀμμωνία ἐντὸς τοῦ σωλήνος Σ_2 διέρχεται διὰ τῆς αὐτορρυθμιζομένης βαλβίδος B καὶ εἰσέρχεται εἰς τὸν ἐξαερωτήρα Σ_1 , διὰ νὰ ἐξαερωθῇ ἐκ νέου κ.ο.κ. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἀφαιρεῖται βαθμὴδὸν θερμότης ἐκ τῆς ἄλμης, με ἀποτέλεσμα νὰ καταβιβασθῇ ἡ θερμοκρασία τῆς κάτω τῶν $0^\circ C$. Ἐὰν ἐντὸς αὐτῆς ἔχουν τοποθετηθῇ δοχεῖα, πλήρη ὕδατος, τὸ ὕδωρ θὰ μετατραπῇ εἰς πάγον.

Ἡλεκτρικὰ ψυγεῖα. Ἐντελῶς ἀνάλογος εἶναι καὶ ἡ λειτουργία τῶν **ἡλεκτρικῶν ψυγείων** (σχ. 414): Ὡς πηγικὸν ὑγρὸν χρησιμοποιεῖται, συνήθως τὸ κα-



Σχ. 414. Ἡλεκτρικὸν ψυγεῖον οἰκιακῆς χρήσεως.

λούμενον Freon (Φρεόν) (*), τὸ ὁποῖον εἶναι ἄοσμον καὶ μὴ τοξικόν. Ὁ συμπιεστής Σ κινεῖται δι' ἡλεκτρικοῦ κινητήρος, ἡ δὲ ψῦξις, ἡ ἀπαιτουμένη διὰ τὴν ὑγροποίησιν τῶν αἰτμῶν τοῦ Freon, γίνεται διὰ μικροῦ ἀνεμιστήρος. Τὸ ὑγρὸν, διερχόμενον διὰ τῆς αὐτορρυθμιζομένης βαλβίδος B , εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ ἐξαερωτήρος E . Λόγῳ τῆς ὑποπίεσεως, τῆς δημιουργουμένης ὑπὸ τοῦ συμπιεστοῦ, τὸ ὑγρὸν τοῦτο ἐξαεροῦται καί, ὡς ἐκ τούτου, ἡ θερμοκρασία τοῦ ἐξαερωτήρος κατέρχεται. Ὁ αἶρ, ὁ περιβάλλων τὸν ἐξαερωτήρα, ψύχεται καὶ κινεῖται πρὸς τὰ κάτω, δημιουργουμένης οὕτω συνεχοῦς κυκλοφορίας ἀέρος, λόγῳ τῆς ὁποίας ἡ θερμοκρασία ὅλου τοῦ χώρου τοῦ ψυγείου ἐλαττοῦται συνεχῶς.

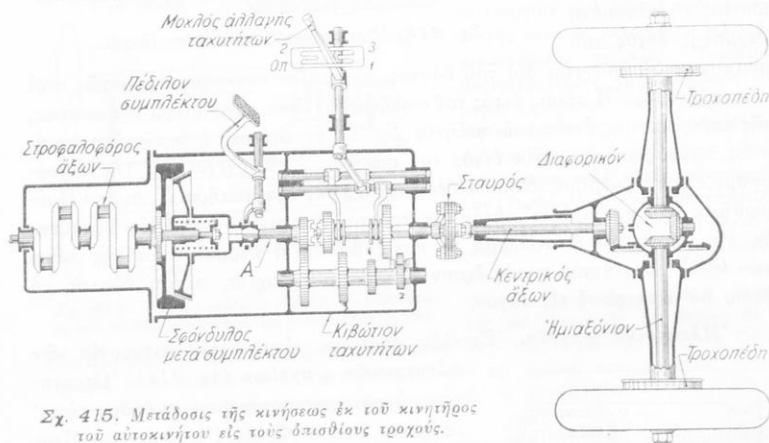
(*) Διχλωροδιφθορομεθάνιον (CF_2Cl_2).

Διὰ τὴν παραγωγὴν μικρῶν πόσοτήτων πάγου, τοποθετοῦνται ἐντὸς τοῦ ἐξαερωτῆρος μικροὶ λεκάναι, πλήρεις ὕδατος.

Ὁ ἠλεκτρικὸς κινητὴρ τίθεται εἰς κίνησιν καὶ διακόπτεται αὐτομάτως, τῇ βοηθείᾳ ἐνὸς διμεταλλικοῦ διακόπτου, οὕτως ὥστε ἡ θερμοκρασία τοῦ ψυγείου νὰ διατηρῆται σταθερὰ εἰς τὰ ἐπιθυμητὰ ὅρια.

Τὰ οἰκιακῆς χρήσεως ψυγεῖα χαρακτηρίζονται ἐκ τῆς χωρητικότητος τοῦ ψυκτικοῦ των χώρου, ἡ ὁποία ἐκφράζεται εἰς λίτρα ἢ εἰς κυβικοὺς πόδας.

§ 293. **Αὐτοκίνητον.** Ἡ μεγάλη διάδοσις τοῦ αὐτοκινήτου ἐπιβάλλει τὴν στοιχειώδη περιγραφὴν τῆς λειτουργίας του : Τὸ σχῆμα 415 παριστᾷ τὸν μηχανισμόν.



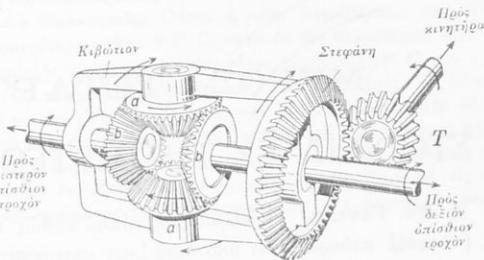
Σχ. 415. Μετάδοσις τῆς κινήσεως ἐκ τοῦ κινητήρος τοῦ αὐτοκινήτου εἰς τοὺς ὀπισθίους τροχοὺς.

μόνον μεταδόσεως τῆς κινήσεως τοῦ κινητήρος τοῦ αὐτοκινήτου εἰς τοὺς ὀπισθίους τροχοὺς. Ἀριστερὰ διακρίνομεν τὸν *στροφαλοφόρον ἄξονα*, ἐπὶ τοῦ ὁποίου δρῶν οἱ διωστήρες τῶν ἐμβόλων τοῦ κινητήρος καὶ τὸν θέτουν εἰς περιστροφὴν. Ἐν συνεχείᾳ, παρατηροῦμεν τὸν *σφόνδυλον* καὶ τὸν *συμπλέκτην* μετὰ τοῦ κινητήριου ἄξονος *A*. Ὅταν πιέζωμεν τὸ πέδιλον τοῦ συμπλέκτου, οὕτως ἀποσυνδέεται, ὅποτε ὁ κινητὴρ δύναται νὰ λειτουργῇ, χωρὶς ἡ κίνησις νὰ μεταδίδεται περαιτέρω. Ἀντιθέτως, ὅταν ἀφῆσωμεν ἐλεύθερον τὸ πέδιλον, ὁ συμπλέκτης προσσφύεται ἐπὶ τοῦ σφονδύλου καί, οὕτως, ἡ κίνησις μεταδίδεται εἰς τὸν κινητήριον ἄξονα *A*.

Ἐν συνεχείᾳ παρατηροῦμεν τὸ *κιβώτιον ταχυτήτων*, δηλ., σύστημα ὀδοντωτῶν τροχῶν, διαφορῶν διαμέτρων, τῇ βοηθείᾳ τῶν ὁποίων δυνάμεθα — διὰ τοῦ *μοχλοῦ* (ἀλλαγῆς) ταχυτήτων — ν' ἀλλάσωμεν, κατὰ βούλησιν, τὸν λόγον τῶν στροφῶν τοῦ κινητήρος πρὸς τὰς στροφὰς τῶν τροχῶν ἢ καὶ νὰ προκαλοῦμεν κίνησιν τοῦ αὐτοκινήτου πρὸς τὰ ὀπισθεν.

Ἐκ τοῦ *κιβωτίου ταχυτήτων* ἡ κίνησις μεταδίδεται, διὰ τοῦ *κεντρικοῦ ἄξονος*, εἰς τὸ *διαφορικόν*, τὸ ὁποῖον, ἐν συνεχείᾳ, τὴν μεταδίδει εἰς τὰ *ἡμισέλια* καί, δι' αὐτῶν, εἰς τοὺς ὀπισθίους τροχοὺς. Ὅταν τὸ αὐτοκίνητον κινῆται εὐθυγράμμως, οἱ ὀπίσθιοι τροχοὶ περιστρέφονται μὲ τὴν αὐτὴν γωνιακὴν ταχύτητα. Ὅταν, ὁμως, διαγράφῃ καμπύλην τροχίαν, ὁ πρὸς τὸ κέντρον τροχὸς διαγράφει, εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον, τόξον, μικρότερον τοῦ τόξου, τοῦ περιγραφομένου ὑπὸ τοῦ ἐξωτερικοῦ τρο-

χού καί, συνεπώς, πρέπει οὗτος νά κινηθῇ μὲ μικροτέραν γωνιακὴν ταχύτητα, δηλ. πρέπει νά ἐκτελέσῃ ὀλιγωτέρας στροφάς. Δι' αὐτόν, ἀκριβῶς, τὸν λόγον χρησιμοποιεῖται τὸ **διαφορικόν**. Τοῦτο ἀποτελεῖται ἐκ κωνικῆς ὀδοντωτῆς στεφάνης, μεγάλης σχετικῶς διαμέτρου (σχ. 416), ἣ ὁποία κινῆται, τῇ βοηθείᾳ, μικροῦ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ T , εὐρίσκομένου εἰς τὸ ὀπίσθιον ἄκρον τοῦ κεντρικοῦ ἄξονος.



Σχ. 416. Διαφορικόν.

Ἡ στεφάνη εἶναι στερεωμένη ἐπὶ κιβωτίου, τὸ ὅποιον περιστρέφεται μετ' αὐτῆς. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κιβωτίου τούτου ὑπάρχουν τέσσαρες κωνικοὶ ὀδοντωτοὶ τροχοί, a, a, b, b , οἱ ὅποιοι ἐμπλέκονται μετὰ τῶν. Ἐξ αὐτῶν οἱ δύο (b, b) — καλούμενοι *πλανῆται* — εἶναι στερεωμένοι εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἡμισαξονίων, ἐνῶ οἱ δύο ἄλλοι (a, a) — καλούμενοι *δορυφόροι* — περιστρέφονται περὶ ἄξονας, στερεωμένους ἐπὶ τοῦ κιβωτίου, τὸ ὅποιον περιστρέφεται κατὰ τὴν περιστροφὴν τῶν τροχῶν.

Ὅταν τὸ αὐτοκίνητον κινῆται καὶ οἱ τροχοὶ συναντοῦν εἰς τὸ ἔδαφος τὴν αὐτὴν ἀντίστασιν (λεῖος δρόμος καὶ εὐθύγραμμος κίνησις), ὅλος ὁ περιγραφείς μηχανισμὸς τοῦ διαφορικοῦ περιστρέφεται, μετὰ τοῦ κιβωτίου, ὡς ἓν στερεὸν σύνολον καὶ αἱ ταχύτητες τῶν δύο τροχῶν εἶναι αἱ αὐταί. Ὅταν, ὁμως, ὁ εἰς τῶν τροχῶν συναντήσῃ μεγαλύτεραν ἀντίστασιν ἢ τὸ αὐτοκίνητον ὑποχρεωθῇ νά διαγράψῃ καμπύλην τροχίαν, ἡ ταχύτης τοῦ πρὸς τὸ κέντρον τροχοῦ, ὅπως εἶδομεν καὶ ἀνωτέρω, θὰ ἐλαττωθῇ, οἱ δορυφόροι θὰ τεθοῦν εἰς περιστροφὴν καὶ περὶ τοὺς ἄξονάς των καὶ ἡ ταχύτης τοῦ ἄλλου τροχοῦ θ' αὐξηθῇ. Οὕτω, δυνάμεθα νά εἰπωμεν ὅτι «διὰ τοῦ διαφορικοῦ, ὁ ἑξωτερικὸς τροχὸς κερδίζει τόσας στροφάς, ὅσας χάνει ὁ ἐσωτερικὸς».

Κατὰ τὴν πορείαν τοῦ αὐτοκινήτου, ὁ κεντρικὸς ἄξων, τὸ διαφορικὸν κ.λ., ὑφίστανται, λόγῳ τῶν ἀνωμαλιῶν τοῦ δρόμου, συνεχεῖς ὡς πρὸς τὸ πλαίσιον μετακινήσεις. Ἔνεκα τούτου, ὁ κεντρικὸς ἄξων, ὁ ὅποιος μεταδίδει τὴν κίνησιν ἀπὸ τοῦ κιβωτίου ταχυτήτων εἰς τὸ διαφορικόν, ἐφοδιάζεται δι' ἀρθρωτῶν συνδέσμων (καλούμενων *σιαγῶν*), οἱ ὅποιοι ἐπιτρέπουν εἰς αὐτὸν νά λειτουργῇ ὑπὸ ὠρισμένην γωνίαν.

Ἐπὶ τῶν τροχῶν εἶναι προσηρμοσμένοι καὶ αἱ *τροχοπέδα*. Ὅταν πιέζωμεν τὸ πέλδιον τῶν τροχοπεδῶν, αἱ σιαγόνες συσφίγγουν τοὺς τροχοὺς καί, οὕτω, διὰ τῆς τριβῆς, ἐπιβραδύνουν ἢ καὶ ἀκίνητοὺν τὸ ὄχημα.

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΜΕΤΕΩΡΟΛΟΓΙΑΣ

§ 294. **Γενικά.** Τὸ κλίμα ἑνὸς τόπου καθὼς καὶ ἡ καιρική κατάστασις (**καιρὸς**) καθορίζονται ὑπὸ διαφόρων μετεωρολογικῶν στοιχείων, ὅπως εἶναι ἡ θερμοκρασία, ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις, ἡ ὑγρασία, ὁ ἄνεμος, ἡ βροχὴ κ.λ.

Μετεωρολογία καλεῖται ἡ ἐπιστήμη, ἡ ἀσχολουμένη μὲ τὴν μελέτην τῶν ἀτμοσφαιρικῶν φαινομένων.

§ 295. **Ἀτμόσφαιρα.** Καλεῖται **ἀτμόσφαιρα** τὸ στρώμα τοῦ ἀέρος, τὸ ὁποῖον περιβάλλει τὴν Γῆν. Τὸ ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον φθάνει ἡ ἀτμόσφαιρα, ὑπολογίζεται μέχρι 500 km. Τὰ ὅρια εἶναι ἀσαφῆ, καθόσον, αὐξανομένου τοῦ ὕψους, ἐλαττοῦται ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος, διὰ τὴν γίνῃ ἴση πρὸς μηδὲν εἰς τὸν διαπλανητικὸν χῶρον. Ὁ ἀτμοσφαιρικὸς ἀήρ εἶναι μείγμα διαφόρων ἀερίων, ἀποτελούμενος, κυρίως, ἀπὸ αἷωτον (78 %) καὶ ὀξυγόνον (21 %). Τὸ ὑπόλοιπον μικρὸν ποσοστὸν ἀποτελεῖται ἀπὸ διοξειδίου τοῦ ἀνθρακος, ὕδρογόνον, ὄζον καὶ τὰ εὐγενῆ ἀέρια ἥλιον, νέον κ.λ.

Ἡ ἀτμόσφαιρα διαχωρίζεται εἰς τὰ ἑξῆς στρώματα:

1) **Τροπόσφαιρα** (περίπου μέχρις ὕψους 10 km). Ἐντὸς αὐτῆς λαμβάνουν χώραν ὅλα τὰ μετεωρολογικὰ φαινόμενα (ομίχλη, νέφη, βροχὴ κ.λ.), ἡ δὲ θερμοκρασία ἐλαττοῦται μετὰ τοῦ ὕψους.

2) **Στρατόσφαιρα.** Ὑπεράνω τῆς τροποσφαίρας εὐρίσκεται ἡ στρατόσφαιρα (μέχρις ὕψους 35 km). Ἐντὸς αὐτῆς ἡ θερμοκρασία παραμένει σχεδὸν σταθερὰ (σημαντικῶς κάτω τοῦ μηδενὸς) καθ' ὅλον τὸ πάχος τοῦ στρώματος τούτου.

3) Ἐκ τῶν ὑπολοίπων στρωμάτων ἐνδιαφέρον εἶναι καὶ τὸ στρώμα, τὸ καλούμενον **ιονόσφαιρα** (ἄνω τῶν 60 km). Τὸ στρώμα τοῦτο καλεῖται οὕτω, λόγῳ τῶν πολλῶν **ιόντων** (*), τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν ἐντὸς αὐτοῦ. Ἡ ιονόσφαιρα εἶναι μεγάλης σπουδαιότητος διὰ τὴν διάδοσιν τῶν **βραχέων** ραδιοφωνικῶν κυμάτων.

§ 296. **Θερμοκρασία.** Ἡ θερμοκρασία μεταβάλλεται ἀπὸ τόπον εἰς τόπον καὶ, εἰς τὸν αὐτὸν τόπον, μετὰ τῆς ἐποχῆς τοῦ ἔτους καὶ τῆς ὥρας τῆς ἡμέρας.

(*) *Ίόντα* καλοῦνται ἄτομα ἢ μόρια, ἡλεκτρικῶς φορτισμένα.

Εἰς δεδομένον τόπον ἡ θερμοκρασία ἐλαττοῦται μετὰ τοῦ ὕψους περίπου κατὰ 1°C ἀνὰ 100 m .

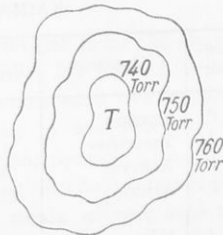
Λόγῳ τῆς μεταβολῆς τῆς θερμοκρασίας μετὰ τῆς ἐποχῆς καὶ τῆς ὥρας τῆς ἡμέρας, δίδεται συνήθως, ἡ μέση θερμοκρασία. Οὕτω, ἡ μέση θερμοκρασία τῶν 'Αθηνῶν εἶναι, κατὰ μὲν τὸν ψυχρότερον μῆνα $9,2^{\circ} \text{C}$, κατὰ δὲ τὸν θερμότερον $27,1^{\circ} \text{C}$. Τὸ εἶδος τῆς ἡμερησίας μεταβολῆς τῆς θερμοκρασίας εἶναι περίπου $11,6^{\circ} \text{C}$.

Τ' ἀνωτέρω ἀναφέρονται πάντοτε εἰς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ἀέρος. Ὡς ἐκ τούτου, ἡ μέτρησις πρέπει νὰ γίνεται εἰς χῶρον, εἰς τὸν ὅποιον ἀφ' ἐνὸς μὲν νὰ μὴ φθάνῃ ἡ ἐξωτερικὴ ἀκτινοβολία, ἀφ' ἑτέρου δὲ νὰ κυκλοφορῇ ἐλευθέρως ὁ ἀτμοσφαιρικός ἀήρ. Κατὰ ταῦτα, ἡ ἔκφρασις «θερμοκρασία εἰς τὸν ἥλιον» οὐδεμίαν σημασίαν ἔχει, δεδομένου ὅτι αἱ ἐνδείξεις ἐνὸς θερμομέτρου, ἐκτεθιμένου εἰς τὸν ἥλιον, θὰ ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ χρώματος τοῦ θερμομέτρου, ἐκ τῶν περιστοιχιζόντων αὐτὸ ἀντικειμένων κ.λ.

§ 297. 'Ατμοσφαιρική πίεσις. Ὅπως εἶδομεν, ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις ἐλαττοῦται μετὰ τοῦ ὕψους καί, συγκεκριμένως, αὐξανομένου τοῦ ὕψους κατὰ 10 m περίπου, ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις ἐλαττοῦται κατὰ 1 mm Hg . Ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις μεταβάλλεται ἀκόμη καὶ εἰς τὸν αὐτὸν τόπον διαρκῶς, ἀναλόγως τῶν καιρικῶν συνθηκῶν (*).

Αἱ τιμαὶ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως ἐνὸς τόπου, προκειμένου νὰ χρησιμοποιηθοῦν εἰς τὴν Μετεωρολογίαν, ἀνάγονται εἰς θερμοκρασίαν 0°C καὶ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης.

* Ἀν ἐπὶ γεωγραφικοῦ χάρτου ἐνώσωμεν διὰ γραμμῶν τοὺς τόπους, οἱ ὅποιοι, κατὰ τὴν αὐτὴν χρονικὴν στιγμήν, ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν, λαμβάνομεν τὰς καλουμένας *ισοβαρεῖς καμπύλας* (σχ. 417). Περιοχαί, περικλειόμεναι ὑπὸ ἰσοβαρῶν, εἰς τὰς ὁποίας ἡ πίεσις ἐλαττοῦται ἐκ τῶν ἔξω πρὸς τὸ κέντρον, καλοῦνται *περιοχαὶ χαμηλῶν πιέσεων* (T), τὸ δὲ σύστημα τῶν ἰσοβαρῶν *ὑψεῖς* (ἡ *κυκλῶν*). Ἐάν, ἀντιθέτως, ἔχωμεν σύνολον ἰσοβαρῶν, εἰς τὸ ὅποιον ἡ πίεσις αὐξάνεται ἀπὸ τῆς περιφερείας πρὸς τὸ κέντρον αἱ περιοχαὶ καλοῦνται *περιοχαὶ ὑψηλῶν πιέσεων*, τὸ δὲ σύστημα *ἀντικυκλῶν*.



Σχ. 417. * *Ισοβαρεῖς καμπύλας ὑψεῖς.*

§ 298. * *Ἄνεμος.* Ὁ ἐν κινήσει εὐρισκόμενος ἀτμοσφαιρικός ἀήρ καλεῖται *ἄνεμος*. Κύρια χαρακτηριστικὰ τοῦ ἀνέμου εἶναι ἡ διεύθυνσις καὶ ἡ ἔντασις αὐτοῦ.

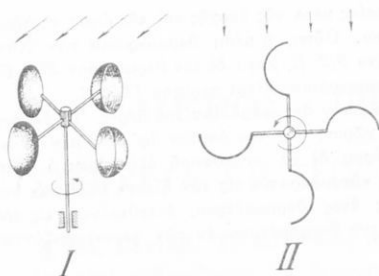
Ἡ διεύθυνσις τοῦ ἀνέμου καθορίζεται ἐκ τοῦ σημείου τοῦ ὀρίζοντος, ἐκ τοῦ ὁποίου οὗτος πνέει.

* *Ἐντασις* τοῦ ἀνέμου καλεῖται ἡ ταχύτης, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται οὗτος.

Ἡ διεύθυνσις τοῦ ἀνέμου εὐρίσκεται διὰ τῶν *ἀνεμοδείκτων*, τῶν ὁποίων ἀπλούστατον τύπον ἀποτελεῖ ταινία ἐξ ὑφάσματος, ἐξαρτωμένη ἐξ ὑψηλοῦ ἴστου. Ἡ ταινία προσανατολίζεται ὑπὸ τοῦ ἀνέμου καὶ παρέχει τὴν διεύθυνσιν αὐτοῦ.

(*) Αἱ εἰς τὰς καιρικὰς συνθήκας ὀφειλόμεναι μεταβολαὶ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως εἰς ἓνα τόπον δύνανται ν' ἀνέλθουν εἰς μερικά *cm Hg*.

Τὴν ταχύτητα τοῦ ἀνέμου μετροῦμεν διὰ τῶν *ἀνεμομέτρων* (σχ. 418, I) :



Σχ. 418. Ἀνεμόμετρον.

Ἐπὶ κατακορύφου ἄξονος στερεοῦνται καθέτως δύο στελέχη, εἰς τὰ ἄκρα τῶν ὁποίων εἶναι στερεωμένα τέσσαρα κοῖλα ἡμισφαίρια (II). Ὅταν φυσᾷ ἄνεμος, ἡ δύναμις, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς κοίλης ἐπιφανείας, εἶναι μεγαλύτερα τῆς δυνάμεως, τῆς ἐξασκουμένης ἐπὶ τῆς κυρτῆς καί, ὥς ἐκ τούτου, τὸ ἀνεμόμετρον τίθεται εἰς περιστροφὴν. Ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στροφῶν,

μετρονύμενων διὰ καταλλήλου στροφομέτρου, εὐρίσκεται ἡ ταχύτης τοῦ ἀνέμου.

ΚΑΙΜΑΞ ΕΝΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ ΑΝΕΜΟΥ

Βαθμός	Ὀνομασία	Ταχύτης (εἰς km/h)	Ἀποτέλεσμα
0	Νηνεμία	< 1	Καπνὸς ὑψοῦται κατακορύφως.
1	Ὑποπνέων	$1,4 \div 5,4$	Καπνὸς ὑψοῦται σχεδὸν κατακορύφως.
2	Ἀσθενὴς	$5,8 \div 11,9$	Αἰσθητὸς εἰς τὸ πρόσωπον.
3	Λεπτὸς	$12,2 \div 19,4$	Κινεῖ συνεχῶς φύλλα δένδρων καὶ μικρὰν σημαίαν.
4	Μέτριος	$19,8 \div 28,5$	Ἐγείρει κονιορτόν, φύλλα χάρτου.
5	Λαμπρὸς	$28,8 \div 38,5$	Αὐγίζει μικρὰ δένδρα με φύλλα.
6	Ἰσχυρὸς	$38,8 \div 49,7$	Κινεῖ μεγάλους κλάδους. Συριγμὸς εἰς τηλεφωνικὰ σύρματα.
7	Σφοδρὸς	$50,4 \div 61,6$	Κινεῖ δένδρα. Βάδισμα δύσκολον.
8	Ὁρμητικὸς	$61,9 \div 74,5$	Θραύει κλώνους δένδρων. Παρακωλύει τὸ βάδισμα.
9	Θύελλα	$74,9 \div 87,8$	Ἐλαφραὶ ξημίαι εἰς οἰκοδομάς.
10	Ἰσχυρὰ θύελλα	$88,2 \div 102,2$	Ἐκριζώνει δένδρα. Μεγάλαι ξημίαι εἰς οἰκοδομάς.
11	Σφοδρά θύελλα	$102,6 \div 117,4$	Μεγάλαι ξημίαι.
12	Τυφὼν	> 118	Καταστροφαὶ ἐξαιρετικῶς μεγάλαι.

Αἷτια τῆς παραγωγῆς τῶν ἀνέμων. Ἐπειδὴ ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀέρος δὲν εἶναι παντοῦ ἡ αὐτή, δημιουργοῦνται διαφοραὶ πιέσεως, ἔνεκα τῶν ὁποίων ὁ ἀὴρ κινεῖται ἀπὸ τῶν ὑψηλοτέρων πιέσεων πρὸς τὰς χαμηλοτέρας, δημιουργουμένων, οὕτω, τῶν ἀνέμων. Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἡμέρας θερμαίνεται τόσον ἡ ξηρά, ὅσον καὶ ἡ θάλασσα. Λόγω, ὅμως, τῆς μεγάλης εἰδικῆς θερμότητος τοῦ ὕδατος, ἡ αὐξησις τῆς θερμοκρασίας τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης εἶναι πολὺ μικροτέρα τῆς αὐξήσεως τῆς θερμοκρασίας τῆς

ξηραῖς. Αἱ διαφοραί, ἀκριβῶς, αὐται προκαλοῦν τοὺς τοπικοὺς ἀνέμους - τὴν θαλασσίαν αὖραν (κ. μπάτιν) καὶ τὴν ἀπόγειον αὖραν: Κατὰ τὴν ἡμέραν ἡ ξηρὰ εἶναι θερμότερα τῆς θαλάσσης καί, ὥς ἐκ τούτου, ὁ ἀήρ, θερμαινόμενος ἰσχυρότερον ὑπεράνω τῆς ξηραῖς, ἀνέρχεται. Λόγω τῆς ἀνόδου τοῦ ἀέρος ἰσχυρότερον κινούμενα ἐκ τῆς θαλάσσης πρὸς τὴν ξηράν. Ὁ ἄνεμος, ἀκριβῶς, αὐτὸς εἶναι ἡ **θαλασσία αὖρα**. Τὸ ἀντίθετον συμβαίνει κατὰ τὴν νύκτα, ὁπότε ἡ ξηρὰ εἶναι ψυχροτέρα τῆς θαλάσσης. Οὕτω, δημιουργεῖται ἀνοδικὴ κίνησις τοῦ ἀέρος ἐπὶ τῆς θαλάσσης καὶ καθοδικὴ ἐπὶ τῆς ξηραῖς, μὲ ἀποτέλεσμα τὴν δημιουργίαν ἀνέμου, πνέοντος, παρὰ τὸ ἔδαφος, ἐκ τῆς ξηραῖς πρὸς τὴν θάλασσαν. Ὁ ἄνεμος οὗτος καλεῖται **ἀπόγειος αὖρα**.

Ἐτησίοι (κ. μετέμια). Εἶναι ἄνεμοι βόρειοι περιοδικοί, πνέοντες εἰς τὴν ἀνατολικὴν Μεσόγειον κατὰ τὸ θέρος. (Ἀρχίζουν ἀπὸ τοῦ Μαΐου καὶ σταματοῦν περὶ τὰ τέλη Ὀκτωβρίου). Ἐνίοτε, ἡ ἔντασις τῶν γίνεται τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι ἐπικίνδυνος διὰ τὰ ἱστιοφόρα καὶ τὰ μικρὰ πλοῖα.

§ 299. Πρόγνωσης τοῦ καιροῦ. Τὸ σπουδαιότερον ἔργον τῆς Μετεωρολογίας εἶναι ἡ πρόγνωσης τοῦ καιροῦ. Πρὸς τοῦτο δὲν ἀρκεῖ ἡ γνῶσις τῶν μετεωρολογικῶν στοιχείων, τὰ ὅποια ἐπιυρατοῦν κατὰ τινα στιγμὴν, ἀλλὰ καὶ τῶν μεταβολῶν αὐτῶν. Οὕτω, αἱ ἐνδείξεις, αἱ ἀναγραφόμεναι εἰς τὰ συνήθη οἰκιακά βαρόμετρα «καιρὸς ξηρὸς», «καιρὸς βροχερὸς» κ.λ., οὐδὲ μίαν σημασίαν ἔχουν. Ἐν τούτοις, ἀπότομος πτώσις τῆς βαρομετρικῆς πιέσεως προαγγέλλει χειροτέρευσιν τοῦ καιροῦ, ἐνῶ ταχεῖα αὔξησις κατὰ τὴν διάρκειαν κακοκαιρίας προαγγέλλει βελτίωσιν αὐτοῦ.

§ 300. Ὑγραμετρία. Ὁ ἀτμοσφαιρικός ἀήρ, λόγῳ τῆς συνεχοῦς ἐξατμίσεως τῶν ὑδάτων (θαλασσῶν, λιμνῶν, ποταμῶν, ὑγρῶν ἑδαφῶν), περιέχει πάντοτε ἀτμοὺς ὕδατος. Καλοῦμεν **ἀπόλυτον ὑγρασίαν** τὸ πηλίκον τῆς μάζης m τῶν ὑδρατμῶν, τῶν περιεχομένων ἐντὸς ὄγκου τινὸς ἀέρος, διὰ τοῦ ὄγκου τούτου. Ἡ ἀπόλυτος ὑγρασία μετρεῖται, συνήθως, εἰς gr/m^3 . Ἡ μάζα m τῶν ὑδρατμῶν εἶναι, συνήθως, μικροτέρα τῆς μάζης $m_{κ.ν.}$ τῆς ἀπαιτουμένης διὰ νὰ κορεσθῇ δι' ὑδρατμῶν ὁ αὐτὸς χώρος ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν. Καλοῦμεν **σχετικὴν ὑγρασίαν** Σ τὸ πηλίκον τῆς μάζης m τῶν ὑδρατμῶν, τοὺς ὁποίους περιέχει ὥρισμα ὄγκος ἀέρος, διὰ τῆς μάζης $m_{κ.ν.}$ τῶν ὑδρατμῶν, τοὺς ὁποίους θὰ ἔπρεπε νὰ περιέχῃ ὁ αὐτὸς ὄγκος διὰ νὰ εἶναι κεκορεσμένος ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν. Ἦτοι εἶναι

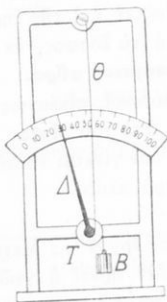
$$\Sigma = \frac{m}{m_{κ.ν.}}$$

Ἡ σχετικὴ ὑγρασία ἐκφράζεται ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν (%), παρέχει δὲ τὸ μέτρον τοῦ κατὰ πόσον ἡ ἀτμόσφαιρα εἶναι μακρὰν ἢ πλησίον τοῦ κόρου.

Οὕτω, σχετικὴ ὑγρασία 100 % σημαίνει ἀτμόσφαιραν, εὐρισκομένην εἰς κατάστασιν κόρου.

Κατὰ τὸν χειμῶνα ἡ σχετικὴ ὑγρασία εἶναι μεγάλη, ἐνῶ κατὰ τὸ θέρος μικρά (*).

Ἐάν θερμάνωμεν τὸν ἀέρα μιᾶς αἰθούσης, ἡ μὲν ἀπόλυτος ὑγρασία δὲν θὰ μεταβληθῇ (ἀφοῦ δὲν μετεβλήθῃ ἡ ποσότης τῶν περιεχομένων ὑδρατμῶν) ἡ σχετικὴ, ὅμως, ὑγρασία θὰ ἐλαττωθῇ, διότι εἰς τὴν ὑψηλότεραν θερμοκρασίαν ἀπαιτοῦνται περισσότεροι ὑδρατμοὶ διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ κόρος.



Σχ. 419. Ὑγρόμετρον διὰ τριχὸς.

Ὑγρόμετρα. Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς σχετικῆς ὑγρασίας χρησιμοποιοῦνται ὄργανα, καλούμενα ὑγρόμετρα. Συνηθέστερος τύπος ὑγρομέτρου εἶναι τὸ ὑγρόμετρον διὰ τριχὸς (σχ. 419). Ἡ λειτουργία τοῦ ὁργάνου τούτου στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἰδιότητος τριχὸς ἀνθρωπίνης κόμης νὰ διαστέλλεται, ὅταν εὐρίσκεται ἐντὸς ὑγροῦ περιβάλλοντος καὶ νὰ συστέλλεται, ὅταν εὐρίσκεται ἐντὸς ξηροῦ περιβάλλοντος. Ἡ θρίξ, στερεομένη εἰς τὸ ἓν ἄκρον, διέρχεται δι' εὐκινήτου τροχαλίας *T*, ἐνῶ τὸ ἄλλο ἄκρον αὐτῆς φορεῖται διὰ βάρους *B*. Κατὰ τὰς μεταβολὰς τοῦ μήκους τῆς τριχὸς, ἡ τροχαλία περιστρέφεται, δείκτης δὲ προσηρμοσμένος ἐπ' αὐτῆς, δεικνύει ἐνώπιον

βαθμολογημένης κλίμακος τὴν σχετικὴν ὑγρασίαν τοῦ περιβάλλοντος.

§ 301. Δρόσος, πάχνη, νέφη, ἐμίχλη. Ὅταν ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος κατέλθῃ, δὲν δύναται, πλέον, οὗτος νὰ συγκρατήσῃ ὅλους τοὺς ὑδρατμούς, τοὺς ὁποίους περιεῖχεν ὑπὸ τὴν προηγουμένην θερμοκρασίαν καί, ὡς ἐκ τούτου, οἱ ἐπὶ πλέον ὑδρατμοὶ ὑγροποιοῦνται. Ἐάν ἡ ψῦξις τοῦ ἀέρος γίνῃ δι' ἐπαφῆς πρὸς τὸ ἔδαφος (τὸ ὅποιον κατὰ τὴν διάρκειαν αἰθρίων νυκτῶν ψύχεται, λόγῳ ἀκτινοβολίας τῆς θερμότητος), οἱ ἐπὶ πλέον ὑδρατμοὶ ὑγροποιοῦνται καὶ ἐπικάθηνται ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ὑπὸ μορφὴν λεπτοτάτων σταγονιδίων, τὰ ὅποια ἀποτελοῦν τὴν καλουμένην **δρόσον**. Ἐάν, μετὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς δρόσου, ἐξακολουθήσῃ ἡ ψῦξις, ὥστε ἡ θερμοκρασία νὰ φθάσῃ εἰς 0°C , τὰ σταγονίδια πῆγνυνται καὶ σχηματίζεται ἡ **πάχνη**.

Ὡς γνωστόν, ὅταν ἓν αἲριον ἐκτονοῦται (ὅταν, δηλ., αὐξάνεται ὁ ὄγκος του), ψύχεται. Ὅταν, λοιπόν, δεδομένη μᾶζα ἀέρος ἀνέρχεται (ἀνοδικὸν ρεῦμα), ἡ πίεσις ἐλαττωταί, ὁπότε αὐξάνεται ἀντιστοίχως ὁ ὄγκος, με ἀποτέλεσμα τὴν ψύξιν αὐτοῦ. Λόγῳ τῆς ψύξεως, οἱ ὑδρατμοὶ ὑγροποιοῦνται καὶ σχηματίζουν μικρὰ σταγονίδια, τὰ ὅποια, ἐν τῷ συνόλῳ των, ἀποτελοῦν τὰ

(*) Εἰς τὴν Ἑλλάδα ἡ σχετικὴ ὑγρασία εἶναι, κατὰ μέσον ὄρον, 72% κατὰ τὸν χειμῶνα καὶ 49% κατὰ τὸ θέρος.

νέφη. Ἡ *δμίχλη*, ἂφ' ἐτέρου, εἶναι νέφος, σχηματιζόμενον εἰς τὰ πλησίον τοῦ ἐδάφους στρώματα τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος.

Διὰ τὰ συμπυκνωθῆναι οἱ ὑδρατμοὶ καὶ τὰ σχηματίζουν τὰ νέφη ἢ τὴν δμίχλην, δὲν ἀρκεῖ μόνον ἡ ψύξις αὐτῶν, ἀλλ' ἀπαιτεῖται καὶ ἡ παρουσία ἐντὸς αὐτῶν πυρρήνων συμπυκνώσεως, δηλαδὴ πολλῶν μικρῶν σωματιδίων - ὅπως εἶναι τεμαχίδια κοκκιοῦ, καπνοῦ κ.λ. Εἰς αὐτὸ, ἀκριβῶς, ὀφείλεται καὶ ἡ πυκνοτάτη δμίχλη, ἡ σχηματιζομένη εἰς βιομηχανικὰς πόλεις (Λονδίνον κ.λ.), εἰς τὰς ὁποίας δημιουργοῦνται μεγάλα ποσότητες καπνοῦ.

§ 302. Βροχή, χιόν, χάλαζα. Ὅταν τὰ σταγονίδια, τ' ἀποτελοῦντα τὰ νέφη, συνενωθῶν καὶ ἀποτελέσουν μεγάλας σταγόνas, αὗται, λόγῳ τοῦ βάρους τῶν, ἀρχίζουν νὰ πίπτουν καὶ ἀποτελοῦν τὴν *βροχήν*.

Ἐὰν οἱ ὑδρατμοὶ συμπυκνωθῶν εἰς τὴν ἀτμόσφαιραν ὑπὸ θερμοκρασίαν, κατωτέραν τῶν $0^{\circ} C$, σχηματίζονται παγοκρύσταλλοι, οἱ ὁποῖοι, πίπτοντες εἰς τὸ ἔδαφος, ἀποτελοῦν τὴν *χιόνα*.

Ὅταν ἡ συμπύκνωσις τῶν ὑδρατμῶν γίνῃ ὑπὸ θερμοκρασίαν, κατωτέραν τῶν $0^{\circ} C$ καὶ πολὺ ταχέως, σχηματίζονται μάζαι πάγου, αἱ ὁποῖαι, πίπτουσαι ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, ἀποτελοῦν τὴν *χάλαζαν*.

Ἡ ποσότης τῆς βροχῆς, ἡ ὁποία πίπτει εἰς ἕνα τόπον, καλεῖται *ὕψος βροχῆς* καὶ ἐκφράζεται, συνήθως, εἰς *mm*. Οὕτω, ὕψος βροχῆς, π.χ., *5 mm* δηλοῖ τὸ ὕψος τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον θὰ ἐκάλυπτε τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐδάφους, ἐὰν τὸ ὕδωρ τῆς βροχῆς δὲν ἀπερροφῆτο, δὲν ἀπέρρεε κ.λ. (*). Τὸ ὕψος τῆς βροχῆς μετρεῖται δι' ὀργάνων, καλουμένων *βροχομέτρων*. Ταῦτα ἀποτελοῦνται ἐξ ὑαλίνου ὀγκομετρικοῦ κυλίνδρου (σχ. 420), ἐντὸς τοῦ ὁποίου συγκεντρῶνται τὸ ὕδωρ, τὸ ὁποῖον συλλέγει μία χοάνη, γνωστῆς διαμέτρου, προσηρμοσμένη εἰς τὸ ἄνω ἄκρον τοῦ κυλίνδρου.



Σχ. 420.
Βροχομετρών.

§ 203. Κλιματισμός (air conditioning - αἶρ κεντίσιενινγκ). Τελευταίως ἤρχισαν νὰ χρησιμοποιοῦνται συσκευαί, αἱ ὁποῖαι ρυθμίζουν αὐτομάτως τὴν θερμοκρασίαν, τὴν ὑγρασίαν, κ.λ., οἰκῶν καὶ καταστημάτων, ὥστε ἡ διαμονὴ ἐντὸς αὐτῶν νὰ καθίσταται εὐχάριστος εἰς οἰανδήποτε ἐποχὴν τοῦ ἔτους. Μία τοιαύτη συσκευή ἀποτελεῖται ἐκ τεσσάρων, κυρίως, μερῶν, τὰ ὁποῖα ρυθμίζουν 1) τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ἀέρος, 2) τὴν ὑγρασίαν, 3) τὴν κυκλοφορίαν καὶ 4) τὸν καθαρισμὸν τοῦ ἀέρος.

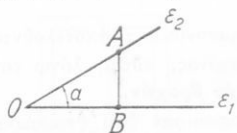
Ὁ αἶρ, διερχόμενος πρῶτον διὰ καταλλήλου ἡθμοῦ, καθαρίζεται ἀπὸ τεμαχίδια κοκκιοῦ κ.λ. Ἐν συνεχείᾳ, θερμαίνεται (ἢ ψύχεται), ἀναλόγως τῆς ἐποχῆς τοῦ ἔτους καὶ, ἀκολουθῶς, ἀφ' οὗ προστεθοῦν εἰς αὐτὸν ὑδρατμοὶ (κατὰ τὸν χειμῶνα) ἢ ἀφαιρεθοῦν (κατὰ τὸ θέρος), ὥστε νὰ ἐπιτευχθῇ ἡ κατάλληλος ὑγρασία, ὥθειται δὲ ἀνεμιστήρος καὶ εἰσέρχεται εἰς τοὺς διαφόρους χώρους τῆς οἰκίας ἢ τοῦ καταστήματος.

(*) Εἰς τὴν Ἑλλάδα τὸ ἐτήσιον ὕψος βροχῆς εἶναι, περίπου, ἴσον πρὸς *400 mm*

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Α) ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΕΚ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

Διὰ νὰ καθορίσωμεν μίαν γωνίαν, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἴτε τὴν τιμὴν τῆς (εἰς μοίρας ἢ ἀκτίνια), εἴτε τὰς τιμὰς τῶν *τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων* αὐτῆς. Εἰς



Σχ. 421. Αἱ *τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις* τῆς γωνίας α ὁρίζονται τῇ βοηθείᾳ τοῦ τριγώνου OAB .

τὴν Φυσικὴν χρησιμοποιοῦνται, συνήθως, τρεῖς τοιαῦται συναρτήσεις—τὸ *ἡμίτονον*, τὸ *συνῆμίτονον* καὶ ἡ *ἐφαπτομένη*—αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὡς ἑξῆς: Ἐστω α ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ δύο εὐθεῖαι ε_1 καὶ ε_2 (σχ. 421). Ἐκ τινος σημείου τῆς μιᾶς εὐθείας, π.χ., τοῦ σημείου A τῆς εὐθείας ε_2 , φέρομεν τὴν εὐθεῖαν AB , κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε_1 , σχηματιζομένου, οὕτω, τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OAB .

Ὡς *ἡμίτονον* τῆς γωνίας α ὁρίζομεν τὸ πηλίκον τοῦ μήκους τῆς ἀπέναντι τῆς γωνίας καθέτου

πλευρᾶς AB διὰ τοῦ μήκους τῆς ὑποτείνουσας OA . Ἦτοι

$$\eta \mu \alpha = \frac{\text{μῆκος τῆς ἀπέναντι καθέτου}}{\text{μῆκος τῆς ὑποτείνουσας}} \quad \eta \quad \eta \mu \alpha = \frac{AB}{OA}.$$

Τὸ *συνῆμίτονον* ὁρίζεται ὡς τὸ πηλίκον τοῦ μήκους τῆς προσκειμένης πρὸς τὴν γωνίαν καθέτου πλευρᾶς OB διὰ τοῦ μήκους τῆς ὑποτείνουσας OA . Ἦτοι

$$\sigma \nu \alpha = \frac{\text{μῆκος τῆς προσκειμένης καθέτου}}{\text{μῆκος τῆς ὑποτείνουσας}} \quad \eta \quad \sigma \nu \alpha = \frac{OB}{OA}.$$

Ἡ *ἐφαπτομένη* τῆς γωνίας α ὁρίζεται ὡς τὸ πηλίκον τοῦ μήκους τῆς ἀπέναντι καθέτου πλευρᾶς AB διὰ τοῦ μήκους τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς OB . Ἦτοι

$$\varepsilon \varphi \alpha = \frac{\text{μῆκος τῆς ἀπέναντι καθέτου}}{\text{μῆκος τῆς προσκειμένης καθέτου}} \quad \eta \quad \varepsilon \varphi \alpha = \frac{AB}{OB}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν προκύπτουν τὰ ἑξῆς:

α) Ἐκάστη κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τῆς ὑποτείνουσας ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας ἢ ἐπὶ τὸ συνῆμίτονον τῆς προσκειμένης γωνίας. Ἦτοι

$$AB = OA \cdot \eta \mu \alpha$$

καὶ

$$OB = OA \cdot \sigma \nu \alpha.$$

β) Ἐκάστη κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀπέναντι γωνίας. Ἦτοι

$$AB = OB \cdot \varepsilon \varphi \alpha.$$

Αἱ ἀνωτέρω σχέσεις ἐπιτρέπουν τὴν λύσιν προβλημάτων, σχετικῶν μὲ ὀρθογώνια τρίγωνα, ὅταν δίδωνται δύο ἐκ τῶν στοιχείων (π.χ., μία πλευρὰ καὶ μία γωνία) καὶ ζητεῖται τὸ τρίτον.

ΠΙΝΑΞ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Γ'ωνία (μοίρες)	ημ	συν	εφ	Γ'ωνία (μοίρες)	ημ	συν	εφ
0	0,000	1,000	0,000	46	0,719	0,695	1,035
1	0,017	0,999	0,017	47	0,731	0,682	1,072
2	0,035	0,999	0,035	48	0,743	0,669	1,111
3	0,052	0,999	0,052	49	0,755	0,656	1,150
4	0,070	0,997	0,070	50	0,766	0,643	1,192
5	0,087	0,996	0,087	51	0,777	0,629	1,235
6	0,105	0,994	0,105	52	0,788	0,616	1,280
7	0,122	0,993	0,123	53	0,799	0,602	1,327
8	0,139	0,990	0,140	54	0,809	0,588	1,376
9	0,156	0,988	0,158	55	0,819	0,574	1,428
10	0,174	0,984	0,176	56	0,829	0,559	1,483
11	0,191	0,983	0,194	57	0,839	0,545	1,540
12	0,208	0,978	0,213	58	0,848	0,530	1,600
13	0,225	0,974	0,231	59	0,857	0,515	1,664
14	0,242	0,970	0,249	60	0,866	0,500	1,732
15	0,259	0,966	0,268	61	0,875	0,485	1,804
16	0,276	0,961	0,279	62	0,883	0,469	1,881
17	0,292	0,956	0,297	63	0,891	0,454	1,963
18	0,309	0,951	0,325	64	0,899	0,438	2,050
19	0,326	0,945	0,344	65	0,906	0,423	2,144
20	0,342	0,940	0,364	66	0,914	0,407	2,246
21	0,358	0,933	0,384	67	0,920	0,391	2,356
22	0,375	0,928	0,404	68	0,927	0,375	2,475
23	0,391	0,920	0,424	69	0,934	0,358	2,605
24	0,407	0,913	0,445	70	0,940	0,342	2,747
25	0,423	0,907	0,466	71	0,946	0,326	2,904
26	0,438	0,899	0,488	72	0,951	0,309	3,078
27	0,454	0,891	0,509	73	0,956	0,292	3,271
28	0,469	0,883	0,532	74	0,961	0,276	3,487
29	0,485	0,875	0,554	75	0,966	0,259	3,732
30	0,500	0,866	0,577	76	0,970	0,242	4,010
31	0,515	0,857	0,601	77	0,974	0,225	4,331
32	0,521	0,848	0,625	78	0,978	0,208	4,705
33	0,545	0,839	0,649	79	0,982	0,191	5,145
34	0,559	0,829	0,674	80	0,985	0,174	5,671
35	0,574	0,819	0,700	81	0,988	0,156	6,314
36	0,588	0,809	0,726	82	0,990	0,139	7,115
37	0,602	0,799	0,754	83	0,992	0,122	8,144
38	0,616	0,788	0,781	84	0,994	0,104	9,514
39	0,629	0,777	0,810	85	0,996	0,087	11,430
40	0,643	0,766	0,839	86	0,998	0,070	14,301
41	0,656	0,755	0,869	87	0,999	0,052	19,081
42	0,669	0,743	0,900	88	0,999	0,035	28,636
43	0,682	0,731	0,932	89	0,999	0,017	57,290
44	0,700	0,713	0,988	90	1,000	0,000	∞
45	0,707	0,707	1,000				

Β) ΟΔΗΓΙΑΙ ΔΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Μία άσκησης Φυσικής δύναται, βεβαίως, νά λυθῇ κατὰ διαφόρους τρόπους. Εἰς τὰ κατωτέρω ὑποδεικνύεται τρόπος, ὁ ὁποῖος ἐξοικονομεῖ, κατὰ τὸ δυνατόν, χρόνον, περιορίζει δὲ σημαντικώτατα τὸν κίνδυνον σφαλμάτων.

Ὁ τρόπος οὗτος ἀκολουθεῖ τὴν ἑξῆς σειρὰν :

1) Εἰς ὅσας ἀσκήσεις ἀπαιτεῖται, κατασκευάζομεν σχέδιον, σημειοῦντες ἐπ' αὐτοῦ διὰ συμβόλων ὅλα τὰ διδόμενα καθὼς καὶ τὰ ζητούμενα μεγέθη.

2) Λύομεν τὴν ἀσκήσιν, χρησιμοποιοῦντες σύμβολα, ἀντὶ τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν διαφόρων μεγεθῶν. Τὸ μέρος τοῦτο τῆς ἀσκήσεως θεωρεῖται περατωθέν, ὅταν καταλήξωμεν εἰς **τελικὸν τύπον**, εἰς τὸ ἀριστερὸν μέλος τοῦ ὁποῖου νά εὐρίσκειται μόνον τὸ ζητούμενον μέγεθος, εἰς δὲ τὸ δεξιὸν μόνον τὰ μεγέθη, τὰ ὁποῖα δίδονται.

3) Ἐκλέγομεν τὸ σύστημα μονάδων, τὸ ὁποῖον πρόκειται νά χρησιμοποιήσωμεν. Ἀσκήσεις, εἰς τὰς ὁποίας παρουσιάζεται καὶ ἡ $m \bar{a} \bar{s}$, ἐνδείκνυται νά λύωνται εἰς τὸ σύστημα C.G.S.

4) Μετατρέπομεν ὅλας τὰς τιμὰς τῶν δεδομένων μεγεθῶν εἰς τὸ σύστημα, τὸ ὁποῖον ἐξελέξαμεν. Μεγάλως εὐκολύνονται οἱ ὑπολογισμοί, ἐὰν ἐκφράσωμεν τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς μὲ δυνάμεις τοῦ 10. Οὕτω, ἀντὶ νά γράψωμεν, π.χ., $l = 0,00004 \text{ cm}$, γράφομεν $l = 4 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$, ἢ, ἀντὶ νά γράψωμεν, $t = 87000 \text{ sec}$ γράφομεν $t = 8,7 \cdot 10^4 \text{ sec}$.

5) Ἡδὴ, εἰμεθα πλέον ἑτοιμοὶ διὰ ν' ἀντικαταστήσωμεν τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς εἰς τὸν τελικὸν τύπον ἀντικαθιστῶμεν καὶ ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις. Ἡ ἀσκησης ἐπερατώθη, ὅταν ἡ τελικὴ ἀπάντησις, τὴν ὁποῖαν θὰ δώσωμεν, ἔχει τὴν μορφήν, π.χ.,

$$l = 1,5 \text{ m} \quad \eta \quad t = 26,4 \text{ sec}$$

καὶ ὅχι

$$l = \frac{3}{2} \text{ m} \quad \eta \quad t = \sqrt{696,96 \text{ sec.}}$$

Παράδειγμα λύσεως ἀσκήσεως : Εἰς τ' ἀνωτέρω τονίζεται ὅτι, πρὸς ἀποφυγὴν σφαλμάτων κατὰ τὴν λύσιν μιᾶς ἀσκήσεως, πρέπει ἀφ' ἐνὸς μὲν νά χρησιμοποιοῦνται σύμβολα, ἀφ' ἑτέρου δὲ νά μετατρέπωνται ἀπαραίτητως ὅλα τὰ δεδομένα εἰς μονάδας τοῦ αὐτοῦ συστήματος. Ποῖον σύστημα θὰ χρησιμοποιήσωμεν εἶναι ἀδιάφορον καί, συνήθως, ἡ ἐκλογή τοῦ συστήματος ἀφίνεται εἰς τὸν λύοντα τὴν ἀσκήσιν.

Εἰς τὰ κατωτέρω θὰ λύσωμεν μίαν ἀσκήσιν, χωρὶς νά λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς ἀνωτέρω ὁδηγίας (ἐσφαλμένος τρόπος λύσεως τοῦ προβλήματος).

Ἀσκησης : Κινητὸν ἐκκινεῖ ἐκ τῆς ἡρεμίας καί, ἐπιταχυνόμενον μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν 1 cm/sec^2 , διανύει διάστημα 100 m . Ζητεῖται ἡ ταχύτης, τὴν ὁποῖαν θὰ ἔχῃ τὸ κινητὸν εἰς τὸ τέλος τῆς διαδρομῆς του.

Λύσις : Ἐφ' ὅσον τὸ κινητὸν ἐκκινεῖ ἐκ τῆς ἡρεμίας καὶ κινεῖται μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν, σημαίνει ὅτι ἐκτελεῖ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν ἀνευ ἀρχικῆς ταχύτητος. Συνεπῶς, θὰ ἐφαρμόσωμεν τοὺς τύπους

$$v = \gamma \cdot t \quad \text{καὶ} \quad s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2,$$

ὁπότε θὰ λάβωμεν

$$v = I \cdot t \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad 100 = \frac{I}{2} \cdot I \cdot t^2 = \frac{I^2}{2}. \quad (2)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (2) λαμβάνομεν διὰ τὴν τιμὴν τοῦ χρόνου t :

$$t = \sqrt{2 \cdot 100} = \sqrt{200},$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ t εἰς τὸν τύπον (1), λαμβάνομεν

$$v = \sqrt{200} = 14,1.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι 1) δὲν γνωρίζομεν τὰς μονάδας, εἰς τὰς ὁποίας ἐκφράζεται ἡ ὑπολογισθεῖσα ταχύτης (δηλ., cm/sec , m/sec ...). 2) Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ εἶναι ἐσφαλμένη· ὅπως ἐλέγχεται, ἐάν τὸ πρόβλημα λυθῇ κατὰ τὸν ὀρθὸν τρόπον (βλ. κατωτέρω). 3) Ἀνεξαρτήτως τῶν ἀνωτέρω, ἡ ἐξίσωσις

$$v = t$$

εἶναι ἀναγκαστικῶς ἐσφαλμένη, διότι ἐξισώνει δύο φυσικὰ μεγέθη, ἐντελῶς διάφορα.

Ὁ ὀρθὸς τρόπος λύσεως τῆς ἀσκήσεως εἶναι ὁ ἑξῆς:

1) Συμβολίζομεν τὴν ἐπιτάχυνσιν διὰ τοῦ γ , τὸ διάστημα διὰ τοῦ s , τὴν ταχύτητα διὰ τοῦ v καὶ τὸν χρόνον διὰ τοῦ t , ὁπότε ἔχομεν ὡς δεδομένα μὲν τὰ

$$\gamma = 1 \text{ cm/sec}^2 \quad \text{καὶ} \quad s = 100 \text{ m}$$

καὶ ὡς ζητούμενον τὴν ταχύτητα v .

2) Ἐφ' ὅσον τὸ κινητὸν ἐκτελεῖ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην ἀνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, θὰ χρησιμοποιήσωμεν τοὺς τύπους

$$v = \gamma \cdot t \quad \text{καὶ} \quad s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2.$$

Εἰς τὸ σύστημα τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων γνωστὰ εἶναι τὰ γ καὶ s , ἄγνωστα δὲ τὰ v καὶ t . Ἐχομεν, συνεπῶς, σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἄγνωστους, τὸ ὅποion, κατ' ἀρχήν, λύεται. Ἀπαλείφοντες τὸ μὴ ζητούμενον t , λαμβάνομεν

$$s = \frac{1}{2} \gamma \cdot \frac{v^2}{\gamma^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{\gamma}.$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου λαμβάνομεν διὰ τὴν ζητούμενην ταχύτητα v τὸν τύπον

$$v = \sqrt{2\gamma \cdot s}. \quad (3)$$

Ὁ τύπος οὗτος εἶναι ὁ τελικὸς τύπος, δεδομένου ὅτι εἰς τὸ ἀριστερὸν μέλος αὐτοῦ εὐρίσκεται μόνον τὸ ζητούμενον μέγεθος v , εἰς δὲ τὸ δεξιὸν μόνον τὰ μεγέθη γ καὶ s , τὰ ὁποῖα δίδονται.

3) Ἐκλέγομεν τὸ σύστημα μονάδων. Ἐστω τοῦτο τὸ C.G.S.

4) Ἐκφράζομεν ὅλα τὰ δεδομένα εἰς τὸ σύστημα, τὸ ὁποῖον ἐξελέξαμεν (C.G.S.), ὁπότε ἔχομεν $\gamma = 1 \text{ cm/sec}^2$, $s = 100 \text{ m} = 10000 \text{ cm} = 10^4 \text{ cm}$.

5) Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸν τελικὸν τύπον (3) καὶ λαμβάνομεν

$$v = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 10^4} \sqrt{\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}} \cdot \text{cm} = \sqrt{2 \cdot 10^4} \sqrt{\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^2}} = 10^2 \cdot \sqrt{2} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 100 \cdot 1,4 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 140 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Τὸ ὀρθὸν ἀποτέλεσμα, λοιπόν, εἶναι

$$v = 140 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \quad \eta \quad v = 1,4 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Εἰς τὰς κατωτέρω λυομένας ἀσκήσεις συνιστᾶται καὶ ἡ σχολαστικὴ παρακολούθησις τῆς ἐκτελέσεως τῶν διαδοχικῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, αἱ ὁποῖαι ὑποδεικνύονται κατὰ τρόπον, περιορίζοντα σημαντικῶς τὸν κίνδυνον σφαλμάτων. Ὁ ἐκ πρώτης ὄψεως ὑπερβολικὸς ἀριθμὸς τῶν μελῶν τῆς πολλαπλῆς ἐξισώσεως ὁρισμένων ἀσκήσεων εἶναι ἀπαραίτητος, διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐλαττώνει σημαντικῶς τὸν διανοητικὸν

κόπον, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐπιτρέπει τὸν ταχὺν καὶ ἀσφαλῆ ἐλεγχον τῆς ὀρθότητος τοῦ ἀποτελέσματος.

Σημείωσις. Εἶναι πιθανὸν εἰς μίαν ἀσκήσιν νὰ δοθοῦν στοιχεῖα, περισσότερα τῶν ἀπαιτουμένων διὰ τὴν λύσιν. Τοῦτο, βεβαίως, οὐδόλως πρέπει νὰ ἐνοχλῇ τὸν λύοντα τὴν ἀσκήσιν, διότι τελικῶς θὰ καταλήξῃ εἰς τύπον, ὃ ὅποιος θὰ τὸν ὀδηγήσῃ ποῖα ἐκ τῶν δοθέντων στοιχείων πρέπει νὰ χρησιμοποιήσῃ.

Γ) ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΛΥΣΕΩΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Εἰς τὰ κατωτέρω λύνονται αἱ ἀσκήσεις ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι, ἐντὸς τοῦ κειμένου, φέρουν τὸ σύμβολον $\odot$.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

* Ασκήσις 7η.

Ἐπειδὴ τὸ φύλλον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλλήλογράμμου, τὸ ἐμβαδὸν S τῆς ἐπιφανείας του θὰ εὐρίσκεται διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου τῆς Γεωμετρίας

$$S = l_1 \cdot l_2 \quad (1)$$

εἰς τὸν ὅποιον l_1 θὰ εἶναι, π.χ., τὸ μῆκος τοῦ φύλλου καὶ l_2 τὸ πλάτος αὐτοῦ. Δίδονται: $l_1 = 29,93 \text{ cm}$ καὶ $l_2 = 30,18 \text{ cm}$ καὶ ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν S εἰς m^2 , cm^2 , mm^2 .

α) Διὰ νὰ λάβωμεν τὸ ἐμβαδὸν εἰς m^2 , μετατρέπομεν τὰς δοθείσας τιμὰς τῶν l_1 καὶ l_2 εἰς m . Πρὸς τοῦτο, διὰ ν' ἀποφύγωμεν πιθανὰ σφάλματα, χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἀπλὴν μέθοδον τῶν τριῶν:

$$\begin{array}{rcl} 100 \text{ cm} & = & 1 \text{ m} \\ 29,93 \text{ cm} & = & x; \\ \hline x = \frac{1 \cdot 29,93}{100} \text{ m} = 0,2993 \text{ m}. \end{array}$$

Ἦτοι, εἶναι $l_1 = 0,2993 \text{ m} = 2,993 \cdot 10^{-1} \text{ m}$.

Ὁμοίως, διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου εὐρίσκομεν ὅτι $l_2 = 0,3018 \text{ m} = 3,018 \cdot 10^{-1} \text{ m}$.

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὸν τύπον (1) λαμβάνομεν

$$\begin{array}{l} S = 2,993 \cdot 10^{-1} \cdot 3,018 \cdot 10^{-1} \text{ m}^2, \\ \eta \quad S = 9,03287 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2. \end{array}$$

Στρογγυλοποιοῦμεν τὸ ἀποτέλεσμα εἰς $9,033 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ καὶ, κατὰ προσέγγισιν, γράφομεν

$$S = 9 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2,$$

δεδομένου ὅτι τὰ παραλειφθέντα δεκαδικὰ ψηφία δὲν ἀλλοιώνουν πρακτικῶς τὸ ἀποτέλεσμα.

β) Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸ ἐμβαδὸν εἰς cm^2 , ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸν τύπον (1) τὰς τιμὰς τῶν l_1 καὶ l_2 ὡς δίδονται, ὁπότε λαμβάνομεν

$$\begin{array}{l} S = 903,287 \text{ cm}^2 \\ \eta \quad S = 903,3 \text{ cm}^2. \end{array}$$

γ) Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸ ἐμβαδὸν εἰς mm^2 , μετατρέπομεν τὰς τιμὰς τῶν l_1 καὶ l_2 εἰς mm καὶ ἀντικαθιστῶμεν αὐτάς εἰς τὸν τύπον (1).

δ) Τέλος, ἡ ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν διαφορὰ τοῦ εὐρεθέντος ἐμβαδοῦ $S = 903,3 \text{ cm}^2$ ἔναντι τοῦ ἐμβαδοῦ $S' = 900 \text{ cm}^2$, ἡ ὁποία ἐκφράζει τὸ καλούμενον **σχετικὸν**

σφάλμα σ , εύρίσκεται εκ του όρισμού του σχετικού σφάλματος :

$$\text{σχετικόν σφάλμα} = \frac{\text{διαφορά των δύο μεγεθών}}{\text{εύρεθέν μέγεθος}}.$$

Ήτοι

$$\sigma = \frac{S - S'}{S}.$$

Αντικαθιστώντες εις τον τύπον αυτόν τὰ σύμβολα διὰ των τιμών των, εύρίσκομεν

$$\sigma = \frac{903,3 - 900}{903,3} = 3,6 \cdot 10^{-3},$$

τό όποιον γράφεται καί υπό την μορφήν

$$\sigma = 0,36 \text{ ‰}.$$

Άσκησης 8η.

Η άσκησης θα λυθῇ τῇ βοηθείᾳ του συλλογισμού ότι,

όλόκληρον τό φύλλον, βάρους B , έχει έμβαδόν S

τό άποκοπέν τεμάχιον, βάρους β , πόσον έμβαδόν S' θα έχει ;

Η άπλή μέθοδος των τριών διδαι τον τελικόν τύπον

$$S' = S \cdot \frac{\beta}{B}.$$

Λύσις εις τό Τεχνικόν Σύστημα: Δίδονται : $S = 1.2 \text{ m}^2 = 2 \text{ m}^2$, $\beta = 0,8 \text{ kgr}^*$ καί $B = 10 \text{ kgr}^*$. Αντικαθιστώντες εις τον τελικόν τύπον, λαμβάνομεν

$$S' = 2 \cdot \frac{0,8}{10} \text{ m}^2 \cdot \frac{\text{kgr}^*}{\text{kgr}^*} = \frac{1,6}{10} \text{ m}^2$$

ῆ

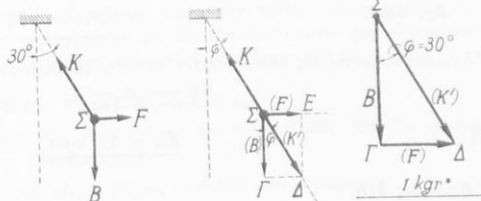
$$S' = 0,16 \text{ m}^2.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α' — ΣΤΑΤΙΚΗ

Άσκησης 9η.

α) 'Επί της σφαίρας Σ (σχ. 422), έξασκουνται αί εξής τρεῖς δυνάμεις: 1) Τό βάρος της B , 2) ή δύναμις F καί 3) ή δύναμις K , ή έξασκουμένη υπό του νήματος.

β) 'Εφ' όσον ή σφαίρα ίσορροπεῖ, πρέπει αἱ ἐπ' αὐτῆς έξασκούμεναι δυνάμεις B, F καί K νά ίσορροπούν. Διὰ νά συμβαίη τούτο, πρέπει ή συνισταμένη δύο ἐξ αὐτῶν νά εἶναι ἴση καί αντίθετος πρὸς τήν τρίτην - π.χ., ή συνισταμένη K' των δύο δυνάμεων B καί F νά εἶναι ἴση καί αντίθετος πρὸς τήν K



Σχ. 422.

(2ον σχέδιον). Φέρομεν τήν εὐθείαν $\Sigma\Delta$ κατὰ τήν διεύθυνσιν τῆς K καί εκ του πέ-
ρατος Γ τῆς δυνάμεως B τήν $\Gamma\Delta$, παράλληλον πρὸς τήν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως
 F . Ακολούθως, εκ του σημείου Δ φέρομεν τήν εὐθείαν $\Delta\epsilon$, παράλληλον πρὸς τήν
 $\Sigma\Gamma$. Προφανῶς, ή διαγωνίος $\Sigma\Delta$ του σχηματισθέντος παραλληλογράμμου εἶναι ή συν-
ισταμένη K των δύο δυνάμεων B καί F , ή όποία εἶναι ἴση καί αντίθετος πρὸς τήν K .

Διὰ τὰ εὐρωμεν τὰ μέτρα τῶν δυνάμεων F καὶ K , σχεδιάζομεν εἰς τὸ τρίτον σχέδιον τὸ βάρος B ὑπὸ κλίμακα (π.χ., 1 kgr^* ν' ἀντιστοιχῇ εἰς μῆκος 20 mm). Ἐπειδὴ τὸ βάρος εἶναι ἴσον πρὸς 1 kgr^* , σχεδιάζομεν μῆκος 20 mm . Ἀκολουθῶς, συμπληρώνομεν τὸ τρίγωνον $\Sigma Γ Α$ καὶ ἐπὶ τοῦ σχεδίου μετροῦμεν δι' ὑποδεκαμέτρον τὰ μῆκη $\Gamma Α$ καὶ $\Sigma Α$. Οὕτω, εὐρίσκομεν

$$\Gamma Α = 11,6 \text{ mm} \quad \text{καὶ} \quad \Sigma Α = 23,2 \text{ mm}.$$

Συνεπῶς, ἀφοῦ 1 kgr^* ἀντιστοιχεῖ εἰς 20 mm , εἶναι

$$F = 0,58 \text{ kgr}^* \quad \text{καὶ} \quad K = 1,16 \text{ kgr}^*.$$

γ) Ἐκ τοῦ τριγώνου $\Sigma Γ Α$ λαμβάνομεν τὰς δύο ἐξισώσεις

$$F = B \cdot \varepsilon \varphi \varphi \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad K = B \cdot \frac{1}{\sin \varphi}. \quad (2)$$

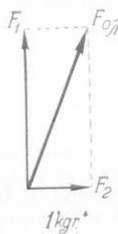
Τὴν $\varepsilon \varphi \varphi = \varepsilon \varphi 30^\circ$ καὶ τὸ $\sin \varphi = \sin 30^\circ$ λαμβάνομεν ἐκ τοῦ πίνακος τῆς σελίδος 365. Οὕτω, εὐρίσκομεν $\varepsilon \varphi 30^\circ = 0,577$ καὶ $\sin 30^\circ = 0,866$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς τύπους (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$F = 1 \cdot 0,577 \text{ kgr}^* = 0,577 \text{ kgr}^* \simeq 0,58 \text{ kgr}^* \quad \text{καὶ} \quad K = \frac{1}{0,866} \text{ kgr}^* = 1,155 \text{ kgr}^*.$$

* Ἀσκήσις 10η.

α) Σχεδιάζομεν, ὅπως καὶ προηγουμένως, τὰς δύο δυνάμεις F_1 καὶ F_2 ὑπὸ κλίμακα (π.χ., 1 kgr^* ν' ἀντιστοιχῇ εἰς 5 mm). Οὕτω λαμβάνομεν μῆκος 25 mm διὰ τὴν F_1 καὶ 10 mm διὰ τὴν F_2 . Διὰ τῆς μεθόδου τοῦ παραλληλογράμμου εὐρίσκομεν τὴν συνισταμένην $F_{ολ}$ τῶν δύο δυνάμεων F_1 καὶ F_2 . Μετροῦντες τὸ μῆκος αὐτῆς, εὐρίσκομεν αὐτὸ ἴσον πρὸς 27 mm . Συνεπῶς, τὸ μέτρον τῆς συνισταμένης $F_{ολ}$ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς

$$F_{ολ} = 5,4 \text{ kgr}^*.$$



Σχ. 423.

β) Τὸ μέτρον τῆς συνισταμένης $F_{ολ}$ ὑπολογίζεται, κατὰ τὸ γνωστὸν θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα, εἰς

$$F_{ολ} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν, λαμβάνομεν διὰ τὴν συνισταμένην

$$F_{ολ} = \sqrt{5^2 + 2^2} \text{ kgr}^* = \sqrt{29} \text{ kgr}^*$$

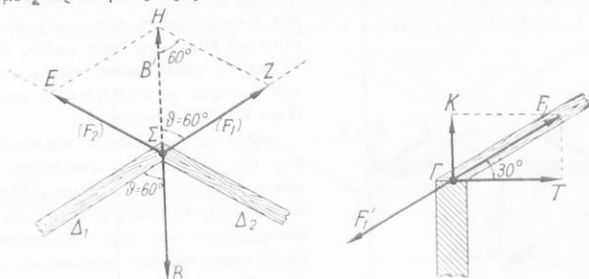
ἢ

$$F_{ολ} = 5,4 \text{ kgr}^*.$$

* Ἀσκήσις 21η.

α) Διὰ τὰ ὑπολογίσωμεν τὴν δύναμιν, μὲ τὴν ὁποίαν συμπιέζεται ἑκάστη δοκός, ἐξετάζομεν τὸ σημεῖον Σ τῆς ἐπαφῆς τῶν δύο δοκῶν (1ον σχέδιον τοῦ σχ. 424): Ἐπὶ τοῦ σημείου Σ ἐξασκοῦνται τρεῖς δυνάμεις: 1) Τὸ βάρος B τοῦ φορτίου. 2) Ἡ δύναμις F_1 , ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τῆς δοκοῦ Δ_1 κατὰ τὴν διεύθυνσιν αὐτῆς καὶ 3) Ἡ δύναμις F_2 , ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τῆς δοκοῦ Δ_2 κατὰ τὴν διεύθυνσιν αὐτῆς. Ἐφ' ὅσον τὸ σημεῖον Σ ἰσορροπεῖ, πρέπει ἡ συνισταμένη B' τῶν δύο δυνάμεων F_1 καὶ F_2 νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν τρίτην δύναμιν B .

Σχεδιάζομεν την B' ίσην και αντίθετον πρὸς την B καὶ ἐκ τοῦ πέρατος αὐτῆς φέρομεν α παραλλήλους πρὸς τὰς διευθύνσεις τῶν δοκῶν Δ_1 καὶ Δ_2 . Οὕτω λαμβάνομεν



Σχ. 424.

βάνομεν τὰς δυνάμεις F_1 καὶ F_2 . Ἐκ τοῦ σχήματος προκύπτει ὅτι ἡ γωνία θ εἶναι ἴση πρὸς 60° . Συνεπῶς καὶ ἐκάστη τῶν γωνιῶν $\angle ZSH$ καὶ $\angle ESH$ εἶναι ἴση πρὸς 60° . Κατ' ἀκολουθίαν καὶ ἡ γωνία $\angle SHZ$, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ πρὸς τὴν $\angle ESH$, εἶναι καὶ αὐτὴ ἴση πρὸς 60° . Συνεπῶς τὸ τρίγωνον $\angle ZSH$ εἶναι ἰσοπλευρον· ἄρα αἱ δυνάμεις F_1 καὶ F_2 εἶναι ἴσαι μεταξύ τῶν καὶ πρὸς τὴν τρίτην δύναμιν B . Ὥστὶ εἶναι

$$F_1 = F_2 = 1 \text{ τόννος βάρους.}$$

Αἱ ὑπολογισθεῖσαι δυνάμεις F_1 καὶ F_2 ἐξασκουῦνται ὑπὸ τῶν δοκῶν ἐπὶ τοῦ σημείου Σ τῆς ἐπαφῆς αὐτῶν. Κατὰ τὸ ἀξίωμα, ὁμως, «δράσις = ἀντίδρασις» καὶ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς θὰ ἐξασκῇ ἐφ' ἐκάστης δοκοῦ ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν. Συνεπῶς, ἐκάστη δοκὸς θὰ συμπίεζεται ὑπὸ δυνάμεως 1 τόννου βάρους.

β) Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν δύναμιν T , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἡ διάτονος ράβδος ἐφ' ἐκάστης δοκοῦ, σχεδιάζομεν δεύτερον σχῆμα, εἰς τὸ ὁποῖον παρατηροῦμεν ὅτι ἐπὶ τοῦ κοινοῦ σημείου ἐπαφῆς Γ τῆς ράβδου, τῆς δοκοῦ καὶ τοῦ τοίχου ἐξασκουῦνται αἱ ἐξῆς τρεῖς δυνάμεις: 1) Ἡ δύναμις F'_1 , ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τῆς δοκοῦ καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν δύναμιν F_1 . 2) Ἡ δύναμις K , ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τοῦ τοίχου κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω καὶ 3) ἡ δύναμις T , ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τῆς διατόνου ράβδου. Ἐφ' ὅσον τὸ σημεῖον Γ ἰσορροπεῖ, πρέπει αἱ ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένηαι δυνάμεις νὰ ἰσορροποῦν. Συνεπῶς, ἡ συνισταμένη F_1 τῶν δύο δυνάμεων T καὶ K πρέπει νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν τρίτην δύναμιν F'_1 .

Δι' ἐντελῶς ἀναλόγων συλλογισμῶν, ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν (α), εὐρίσκομεν τὰς δυνάμεις T καὶ K . Ἐκ τοῦ σχήματος 424, δεξιὰ προκύπτει ὅτι

$$T = F_1 \cdot \sin 30^\circ.$$

Ἐκ τοῦ πίνακος τῆς σελίδος 365 λαμβάνομεν $\sin 30^\circ = 0,866$. Ἐπειδὴ ἡ δύναμις F_1 εἶναι ἴση πρὸς 1 τόννον βάρους, ἔχομεν

$$T = 1 \cdot 0,866 \text{ τόννοι βάρους} = 0,866 \text{ τόννοι βάρους}$$

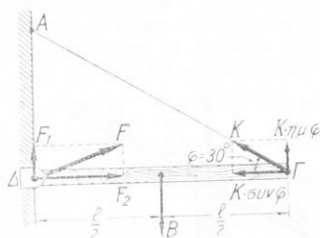
ἢ

$$T = 866 \text{ kgr*}.$$

* Ἀσκήσις 22α.

Ἐπὶ τῆς δοκοῦ (σχ. 425), ἐξασκουῦνται αἱ ἐξῆς τρεῖς δυνάμεις: 1) Τὸ βάρος B τοῦ φορτίου. 2) Ἡ δύναμις K , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ σχοινίον εἰς τὸ σημεῖον Γ τῆς δοκοῦ καὶ 3) ἡ δύναμις F , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἡ ἀρθρωσις καὶ τῆς ὁποίας ἡ διεύθυνσις, πρὸς τὸ παρόν, εἶναι ἄγνωστος.

Έφ' ὅσον ἡ δοκὸς ἰσορροπεῖ, πρέπει αἱ τρεῖς αὐταὶ δυνάμεις νὰ ἰσορροπούν.



Σχ. 425.

τὰς δύο συνιστώσας τῆς δυνάμεως F — τὰς F_1 καὶ F_2 . Ἡδη, γράφομεν τὰς ἐξισώσεις ἰσορροπίας κατὰ τὰς δύο διευθύνσεις :

$$F_1 - B + K \cdot \eta\mu\varphi = 0 \quad (1)$$

καὶ

$$F_2 + 0 - K \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 0. \quad (2)$$

Τὰς ροπὰς ὑπολογίζομεν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Δ τῆς ἀρθρώσεως, ὁπότε ἔχομεν

$$F_1 \cdot 0 + B \cdot \frac{l}{2} - K \cdot \eta\mu\varphi \cdot l = 0 \quad (3)$$

καὶ

$$F_2 \cdot 0 + K \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot 0 = 0. \quad (4)$$

Ἡδη, τὸ πρόβλημα, κατ' ἀρχήν, ἐλύθη, διότι ἔχομεν τρεῖς ἀγνώστους (F_1 , F_2 , K) καὶ σύστημα τριῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3). (Ἡ τετάρτη ἐξίσωσις (4) οὐδὲν στοιχεῖον μᾶς παρέχει, καθόσον ἀπλῶς δηλοῖ ὅτι $0 = 0$).

α) Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν δυνάμιν K , λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (3) ὡς πρὸς K , ὁπότε λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$K = \frac{B}{2 \cdot \eta\mu\varphi}. \quad (5)$$

Λύσις εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα : Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἀντὶ τοῦ B τὸ ἴσον τοῦ 10 kgr^* καὶ ἀντὶ τοῦ $\eta\mu\varphi$ τὸ ἴσον τοῦ $0,5$ (διότι $\eta\mu 30^\circ = 0,5$ - βλ. πίνακα σ. 365), ἔχομεν

$$K = \frac{10}{2 \cdot 0,5} \text{ kgr}^*$$

 η

$$K = 10 \text{ kgr}^*.$$

β) Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τοὺς τελικοὺς τύπους

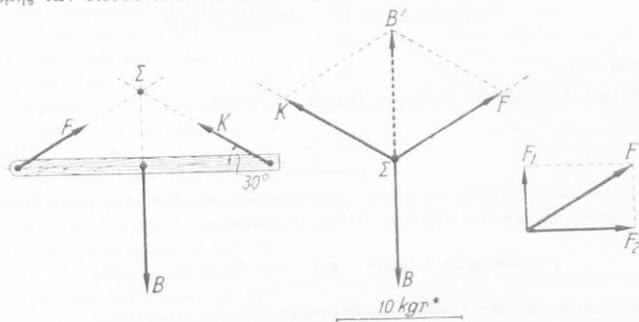
$$F_1 = \frac{B}{2} \quad (6) \quad \text{καὶ} \quad F_2 = \frac{B \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}{2 \cdot \eta\mu\varphi}. \quad (7)$$

Διὰ νὰ εὗρωμεν τὰς συνιστώσας F_1 καὶ F_2 , αντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (6) καὶ (7) τὰ σύμβολα διὰ τῶν τιμῶν τῶν (ἀφοῦ εὗρωμεν ὅτι $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = 0,866$) καὶ λαμβάνομεν

$$F_1 = \frac{10}{2} \text{ kgr}^* \quad \eta \quad F_1 = 5 \text{ kgr}^* \quad \text{καὶ} \quad F_2 = \frac{10 \cdot 0,866}{2 \cdot 0,5} \text{ kgr}^* \quad \eta \quad F_2 = 8,66 \text{ kgr}^*.$$

γ) Διὰ νὰ εὗρωμεν τὰ αὐτὰ γραφικῶς, σκεπτόμεθα ὡς ἐξῆς : Ἡ δοκὸς ἰσορροπεῖ· συνεπῶς, αἱ τρεῖς ἐπ' αὐτῆς ἐξασκούμεναι δυνάμεις B , K καὶ F , πρέπει νὰ ἰσορροπούν. Δηλαδή, πρέπει α) ἡ συνισταμένη αὐτῶν νὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδὲν καὶ β) ἡ

συνισταμένη των ροπών αυτών ως προς οποιονδήποτε σημείον να είναι και αυτή ίση προς μηδέν. 'Ως σημείον υπολογισμού των ροπών εκλέγομεν το σημείον Σ της τομής των διευθύνσεων των δύο δυνάμεων B και K (σχ. 426). Αί ροπαί των δύο



Σχ. 426.

αυτών δυνάμεων ως προς το σημείον Σ είναι ίσαι προς μηδέν, διότι αἱ διευθύνσεις των διέρχονται διὰ τοῦ σημείου τούτου. Ἀφοῦ (ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω) ἡ συνισταμένη των ροπών των τριῶν δυνάμεων πρέπει νὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, εὐρομεν δὲ ὅτι αἱ ροπαί των δύο δυνάμεων B καὶ K εἶναι μηδέν, ἔπεται ὅτι καὶ ἡ ροπή τῆς τρίτης δυνάμεως F , ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημείον Σ , πρέπει νὰ εἶναι καὶ αὕτη ἴση πρὸς μηδέν. Ἐπομένως, ἡ διεύθυνσις τῆς δυνάμεως F θὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τούτου.

Ἡδη, ἀφοῦ εὐρωμεν καὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως F , δυνάμεθα νὰ σχεδιάσωμεν τὴν δύναμιν B καὶ τὰς διευθύνσεις των δυνάμεων F καὶ K . Πρὸς τοῦτο σχεδιάζομεν τὴν δύναμιν B ὑπὸ κλίμακα (π.χ., $1 \text{ kgp}^ \text{ ν' ἀντιστοιχῇ εἰς } 2 \text{ mm}$) καὶ τὰς διευθύνσεις των F καὶ K , παραλλήλους πρὸς τὰς ἀντιστοίχους τοῦ προηγουμένου σχήματος. Ἀκολουθῶς, φέρομεν τὴν δύναμιν B' , ἴσην καὶ ἀντίθετον πρὸς τὴν δύναμιν B καὶ ἐκ τοῦ πέρατος αὐτῆς παραλλήλους πρὸς τὰς δυνάμεις F καὶ K . Οὕτω, λαμβάνομεν τὰς δυνάμεις F καὶ K . Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸ μέτρον τῆς δυνάμεως K , μετροῦμεν τὸ μήκος τοῦ βέλους, τὸ ὁποῖον εὐρίσκομεν ἴσον πρὸς 20 mm . Ἐπειδὴ — κατὰ τὴν κλίμακα — $1 \text{ kgp}^* \text{ ἀντιστοιχεῖ εἰς } 2 \text{ mm}$, ἔπεται ὅτι τὸ μέτρον τῆς δυνάμεως K θὰ εἶναι ἴσον πρὸς 10 kgp^* .

Διὰ νὰ εὐρωμεν τὰ μέτρα των συνιστωσῶν τῆς δυνάμεως F , ἀναλύομεν αὐτὴν εἰς τὰς συνιστώσας τῆς F_1 καὶ F_2 (βλ. 3ον σχέδιον) καὶ μετροῦντες τὰ μήκη των εὐρίσκομεν αὐτά, ἀντιστοίχως, ἴσα πρὸς 10 mm καὶ 17 mm . Ἐκ τούτων προκύπτει ὅτι :

$$F_1 = 5 \text{ kgp}^* \quad \text{καὶ} \quad F_2 = 8,5 \text{ kgp}^*.$$

* Ἀσκήσις 26η.

*Ἐπὶ ἡρεμοῦντος αὐτοκινήτου ἐξασκοῦνται αἱ ἐξῆς πέντε δυνάμεις : 1) Τὸ βάρος του B καὶ 2) τέσσαρες κατακόρυφοι δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται ὑπὸ τοῦ ἐδάφους ἐπὶ των τεσσάρων τροχῶν καὶ αἱ ὁποῖαι ἔχουν φορὰν πρὸς τὰ ἄνω. Ἐπειδὴ τὸ αὐτοκίνητον ἰσορροπεῖται, πρέπει τὸ βάρος του B νὰ εἶναι ἴσον καὶ ἀντίθετον πρὸς τὸ ἄθροισμα των ἐπὶ των τροχῶν ἐξασκουμένων τεσσάρων ἄλλων δυνάμεων. Εἶναι προφανές ὅτι, εἴτε μετρήσωμεν συγχρόνως καὶ τὰς τέσσαρας δυνάμεις (δηλ., ἐὰν ἐπὶ τῆς πλάστιγγος στηρίζωνται καὶ οἱ τέσσαρες τροχοὶ τοῦ αὐτοκινήτου), εἴτε μετρήσωμεν αὐτάς ἀνὰ δύο (δηλ., ἐπὶ τῆς πλάστιγγος στηρίζονται, ἐκάστοτε, μόνον οἱ δύο

τροχοί) και, άκολούθως, τός προσθέσωμεν, θά λάβωμεν και εις τός δύο περιπτώσεις τó αυτό άποτέλεσμα - δηλ., τó βάρος B τού αυτοκινήτου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β' — ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

*Άσκησης 27η.

Έκ τού όρισμού τής ταχύτητος έχομεν τόν τύπον

$$v = \frac{s}{t} \quad (1)$$

Έπειδή ζητείται ή ταχύτης εις km/h , μετατρέπομεν τās δοθείσας τιμάς διαστήματος και χρόνου εις km και εις $\acute{\omega}ρα$. Ούτω λαμβάνομεν

$$s = 150 \text{ m} = 0,15 \text{ km} \quad \text{και} \quad t = 30 \text{ sec} = \frac{30}{3600} \text{ h}.$$

Αντικαθιστώντες εις τόν τύπον (1), εύρίσκομεν διά τήν ταχύτητα

$$v = \frac{0,15}{\frac{30}{3600}} \frac{km}{h} = \frac{0,15 \cdot 3600}{30} \frac{km}{h} = \frac{0,15 \cdot 360}{3} \frac{km}{h} = 0,05 \cdot 360 \frac{km}{h} =$$

$$= 5 \cdot 10^{-2} \cdot 360 \frac{km}{h} = 1800 \cdot 10^{-2} \frac{km}{h}.$$

$$\eta \quad v = 18 \frac{km}{h}.$$

*Άσκησης 34η.

α) Έκ τού όρισμού τής επιταχύνσεως έχομεν τόν τύπον

$$\gamma = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1)$$

Ένθα Δv είναι ή μεταβολή τής ταχύτητος και Δt ó αντίστοιχος χρόνος. Θά λύσωμεν τήν άσκησην εις τó σύστημα $C.G.S.$: Έπειδή τά δεδομένα δίδονται εις τó σύστημα τούτο, αντικαθιστώνμεν άμέσως εις τόν τύπον (1) τó Δv διά τού ίσου του

$$\Delta v = v_2 - v_1 = (45 - 120) \frac{cm}{sec} = -75 \frac{cm}{sec}$$

και τó Δt διά τού ίσου του 12 sec , όποτε λαμβάνομεν διά τήν επιβράδυνσιν

$$\gamma = \frac{-75}{12} \frac{cm}{sec}$$

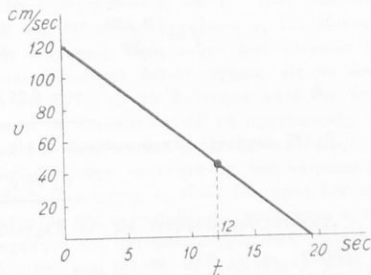
$$\eta \quad \gamma = -6,25 \frac{cm}{sec^2}.$$

β) Η κίνησης είναι ομαλώς επιβραδυνομένη, διά τήν όποιαν ισχύει ó τύπος

$$v = v_0 - \gamma \cdot t \quad (2)$$

εις τόν όποιον ή άρχική ταχύτης v_0 και ή επιβράδυνσις γ είναι μεγέθη σταθερά. Η έξίσωσις αυτή, ή συνδέουσα τά δύο μεταβλητά μεγέθη v και t , είναι έξίσωσις πρώτου βαθμού, συνεπώς θά παρίσταται γραφικώς υπό μύθειας γραμμής. Διά νά σχεδιάσωμεν τó διάγραμμα τούτο, λαμβάνομεν όρθογώνιον σύστημα άξόνων και χαράσ-

σομεν καταλλήλους κλίμακας ταχυτήτων και χρόνων (σχ. 427). Διὰ νὰ χαράξωμεν τὴν ζητουμένην εὐθείαν, ἀρκεῖ νὰ εὐρωμεν δύο οἰαδήποτε σημεία αὐτῆς. Ἐν προκειμένῳ χρησιμοποιοῦμεν τὰς δεδομένας τιμὰς $t = 0 \text{ sec}$ καὶ $v = 120 \text{ cm/sec}$, αἱ ὁποῖαι καθορίζουν τὸ ἓν σημεῖον καὶ τὰς τιμὰς $t = 12 \text{ sec}$ καὶ $v = 45 \text{ cm/sec}$ αἱ ὁποῖαι καθορίζουν τὸ δεῦτερον σημεῖον καὶ χαράσσομεν τὴν εὐθείαν, τὴν διερχομένην διὰ τῶν δύο αὐτῶν σημείων.



Σχ. 427.

γ) Ὄταν τὸ κινητὸν σταματήσει, ἡ ταχύτης του θὰ ἔχη γίνει ἴση πρὸς μηδέν. Ἡ χρονικὴ στιγμή, κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ συμβῇ τοῦτο, εὐρίσκεται ἐκ τοῦ σημείου τομῆς τῆς εὐθείας γραμμῆς τοῦ διαγράμματος μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν χρόνων. Τὸ σημεῖον τοῦτο ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χρόνων δίδει $t = 19,2 \text{ sec}$.

δ) Θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) $v = 0$, λαμβάνομεν διὰ τὸν χρόνον τὴν σχέσιν

$$t = \frac{v_0}{\gamma}$$

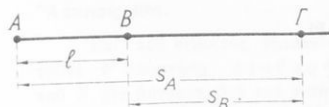
Ἀντικαθιστώντες τὸ v_0 διὰ τοῦ ἴσου του 120 cm/sec καὶ τὸ γ διὰ τοῦ ἴσου του $6,25 \text{ cm/sec}^2$ (*), λαμβάνομεν

$$t = \frac{120 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}}{6,25 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}} = 19,2 \text{ sec.}$$

ἦ

* Άσκησης 43η.

α) Θεωρήσωμεν ὅτι τὰ δύο κινητὰ εὐρίσκονται ἀντιστοιχῶς εἰς τὰς θέσεις Α καὶ Β (σχ. 428), ὅταν ἀπέχουν μεταξύ των κατὰ $l = 150 \text{ m}$, ἔστω δὲ Γ ἡ θέσις, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ συναντηθοῦν μετὰ χρόνον $t = 20 \text{ sec}$. Ἐντὸς τοῦ χρόνου τούτου t , τὸ μὲν κινητὸν Β ἐξακολουθεῖ νὰ κινῆται ὁμαλῶς (θὰ διανύσῃ, συνεπῶς, τὸ διάστημα $B\Gamma = s_B$), ἐνῶ τὸ κινητὸν Α, κινούμενον



Σχ. 428.

μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν γ , θὰ διανύσῃ τὸ διάστημα $A\Gamma = s_A$. Ἄν καλέσωμεν v_0 τὴν κοινὴν ἀρχικὴν ταχύτητα τῶν δύο κινητῶν, ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις

$$s_B = v_0 \cdot t \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad s_A = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot t^2. \quad (2)$$

Εἰς τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) παρουσιάζονται τρεῖς ἄγνωστοι — οἱ s_B , s_A καὶ γ — καὶ, συνεπῶς, διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἄσκησιν, πρέπει ν' ἀναζητήσωμεν καὶ τρίτην ἐξίσωσιν. Αὕτη προκύπτει ἐκ τοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖον δίδει

$$s_A = l + s_B. \quad (3)$$

* Ἡδη, ἐκ τῶν τριῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\gamma = \frac{2 \cdot l}{t^2}. \quad (4)$$

(*) Ἐφ' ὅσον χρησιμοποιοῦμεν τὸν τύπον (2), πρέπει ἡ τιμὴ τοῦ γ νὰ λαμβάνεται θετικὴ.

Θά λύσωμεν τὴν ἄσκησιν εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα : Δίδονται : $l=150 \text{ m}$, $t=20 \text{ sec}$.
 Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον (4), λαμβάνομεν διὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν

$$\gamma = \frac{2 \cdot 150}{20^2} \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} = \frac{300}{400} \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} = \frac{3}{4} \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

$$\eta \quad \gamma = 0,75 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

β) Ἡ ταχύτης v_A τοῦ κινητοῦ A δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$v_A = v_0 + \gamma \cdot t. \quad (5)$$

Λύομεν τὴν ἄσκησιν εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα : Ἔχομεν : $v_0 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} =$
 $= \frac{60000}{3600} \frac{\text{m}}{\text{sec}} = \frac{600}{36} \frac{\text{m}}{\text{sec}} = 16,7 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, \quad \gamma = 0,75 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad \text{καὶ} \quad t = 20 \text{ sec}.$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον, (5), λαμβάνομεν διὰ τὴν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ A

$$v_A = (16,7 + 0,75 \cdot 20) \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$\eta \quad v_A = 31,7 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

γ) Ὡς ἀνεφέρθη προηγουμένως, τὸ κινητὸν A ἐκτελεῖ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιτα-
 χυνομένην μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 , διανύει δὲ ἐντὸς τοῦ χρόνου t διάστημα s_A , πα-
 ρεχόμενον ὑπὸ τοῦ τύπου (2)

$$s_A = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot t^2.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον αὐτὸν, λαμβάνομεν διὰ τὸ διάστημα s_A τὴν τιμὴν

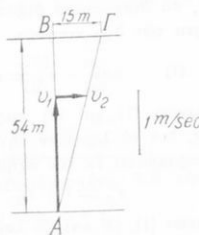
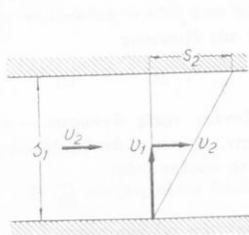
$$s_A = 16,7 \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \cdot \text{sec} + \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 20^2 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \cdot \text{sec}^2 = \left(334 + \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 400 \right) \text{m} =$$

$$= (334 + 0,75 \cdot 200) \text{m} = (334 + 150) \text{m} = 484 \text{m}$$

$$\eta \quad s_A = 484 \text{m}.$$

Ἀσκήσις 47η.

Διὰ νὰ εὗρωμεν τὴν ταχύτητα τοῦ ποταμοῦ, ἐξετάζομεν τὴν κίνησιν τοῦ



Σχ. 429.

σύρετο ὑπὸ τοῦ ποταμοῦ κατὰ τὸ διάστημα s_2 . Συνεπῶς, ὅταν τὸ πλοῖον ἐκτελῇ

πλοίου, τὸ ὁποῖον ἐκτε-
 λεῖ ταυτοχρόνως δύο κι-
 νήσεις, μίαν καθέτως
 πρὸς τὸν ροὺν μὲ ταχύ-
 τητα v_1 (σχ. 429), καὶ
 δευτέραν, παράλληλον
 πρὸς τὸν ροὺν, μὲ ταχύ-
 τητα v_2 . Ἐάν τὸ ὕδωρ
 τοῦ ποταμοῦ δὲν ἐκινή-
 το, τὸ πλοῖον θὰ διή-
 νυσ-τὸ διάστημα s_1 . Ἀφ'
 ἐτέρου, ἐάν τὸ πλοῖον
 ἦτο ἀκίνητον, θὰ παρε-

ταυτοχρόνως και τας δύο κινήσεις, θά κινήται κατά την διαγώνιον του παραλληλολογράμμου, του σχηματιζομένου υπό των διαστημάτων s_1 και s_2 . *Ηδη, διά να εύρωμεν την ταχύτητα v_2 , πρέπει, εκτός της δεδομένης ταχύτητος v_1 του πλοίου, να εύρωμεν και την διεύθυνσιν της όλικής ταχύτητος. Προς τοῦτο υπό κλίμακα (π.χ., $10 \text{ m } \nu'$ αντιστοιχοῦν εἰς 5 mm) κατασκευάζομεν τὸ δεξιὸν σχῆμα, εἰς τὸ ὁποῖον $AB = s_1$ εἶναι τὸ πλάτος τοῦ ποταμοῦ καὶ $BF = s_2$, τὸ διάστημα κατὰ τὸ ὁποῖον παρασύρεται τὸ πλοῖον. Οὕτω, προκύπτει ἡ διεύθυνσιν τῆς όλικῆς ταχύτητος. *Ακολουθῶς, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σχεδίου, σχεδιάζομεν τὴν ταχύτητα v_1 ὑπὸ κλίμακα (π.χ., $1 \text{ m/sec } \nu'$ αντιστοιχῇ εἰς 10 mm). *Ἐπειδὴ ἡ ταχύτης v_1 εἶναι ἴση πρὸς $1,8 \text{ m/sec}$, λαμβάνομεν μῆκος 18 mm . *Ἐκ τοῦ πέρατος τῆς σχεδιασθείσης ταχύτητος v_1 φέρομεν εὐθεῖαν, παράλληλον πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ ποταμοῦ, μέχρις ὅτου αὕτη συναντήσῃ τὴν εὐθεῖαν AF . Μετροῦντες τὸ μῆκος τοῦ βέλους v_2 , εὐρίσκομεν αὐτὸ ἴσον πρὸς 5 mm . Συνεπῶς, τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος v_2 εἶναι ἴσον πρὸς $0,5 \text{ m/sec}$.

β) *Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν δύο τριγώνων τοῦ πρώτου σχήματος ἔχομεν

$$\frac{v_1}{s_1} = \frac{v_2}{s_2}.$$

*Ἐκ τῆς εξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{s_2}{s_1}.$$

*Αντικαθιστῶντες τὰ σύμβολα διὰ τῶν τιμῶν των, εὐρίσκομεν διὰ τὴν ταχύτητα v_2

$$v_2 = 1,8 \cdot \frac{15}{54} \frac{\text{m}}{\text{sec}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{m}}$$

ἦ

$$v_2 = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ' — ΔΥΝΑΜΙΚΗ

*Άσκησις 49η.

*Ἐπὶ τοῦ σώματος ἐξασκείται σταθερὰ δύναμις, ἐπομένως τὸ σῶμα τοῦτο θ' ἀποκτήσῃ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν. *Ἐάν συμβολίσωμεν διὰ τοῦ F τὴν δύναμιν, διὰ τοῦ γ τὴν ἐπιτάχυνσιν καὶ διὰ τοῦ m τὴν μᾶζαν, ἔχομεν — συμφώνως πρὸς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς μηχανικῆς — τὴν σχέσιν

$$F = m \cdot \gamma. \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι σταθερά, ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη συνεπῶς, τὸ διάστημα s , τὸ ὁποῖον θά διανύσῃ τὸ σῶμα ἐντὸς τοῦ χρόνου t , θά δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$s = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot t^2. \quad (2)$$

*Ἐκ τῶν εξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$m = \frac{F \cdot t^2}{2 \cdot s}. \quad (3)$$

*Ἐπειδὴ καθορίζεται νὰ λυθῇ ἡ ἄσκησις εἰς τὸ σύστημα C.G.S., μετατρέπομεν τὰς δοθείσας τιμὰς τῶν F , t καὶ s εἰς τὸ σύστημα τοῦτο: *Ἐχομεν $F_1 = 12 \text{ kg} \cdot \nu^* = 12000 \text{ gr} \cdot \nu^* = 12000 \cdot 981 \text{ dyn} = 12 \cdot 10^3 \cdot 981 \text{ dyn}$ (καθόσον $1 \text{ gr} \cdot \nu^* = 981 \text{ dyn}$), $t = 15 \text{ sec}$ καὶ $s = 600 \text{ m} = 60000 \text{ cm} = 6 \cdot 10^4 \text{ cm}$.

*Αντικαθιστώντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον (3), λαμβάνομεν

$$m = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 981 \cdot 15^2}{2 \cdot 6 \cdot 10^4} \frac{\text{dyn} \cdot \text{sec}^2}{\text{cm}} = \frac{981 \cdot 225}{10} \frac{\text{gr} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-2} \cdot \text{sec}^2}{\text{cm}} = 98,1 \cdot 225 \text{ gr}$$

ἤ

$$m = 22072 \text{ gr.}$$

*Άσκησης 51η.

α) Διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι ἐπὶ τοῦ σώματος ἐπιδρῶν σταθερὰ δυνάμεις, πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ σῶμα ἔχει σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν. Ἐὰν τοῦτο συμβαίῃ, τὰ διανυόμενα διαστήματα θὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν χρόνων. Οὕτω, ἐὰν εἰς τὸ 1^{ον} sec τὸ σῶμα διανύῃ διάστημα s , εἰς 2 sec θὰ διανύσῃ διάστημα $2^2 \cdot s$, εἰς 3 sec διάστημα $3^2 \cdot s$ κ.ο.κ. Πράγματι, τὰ διανυθέντα διαστήματα εἶναι 25 cm , $100 \text{ cm} = 2^2 \cdot 25 \text{ cm}$ καὶ $225 \text{ cm} = 3^2 \cdot 25 \text{ cm}$. Συνεπῶς, ἐπὶ τοῦ σώματος ἐπιδρῶν σταθερὰ δυνάμεις.

β) Ἐὰν ἡ μᾶζα τοῦ σώματος εἶναι m καὶ ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἐπιδρῶσα δυνάμεις F , θὰ ἔχωμεν, κατὰ τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς, τὴν σχέσιν

$$F = m \cdot \gamma. \quad (1)$$

*Ἀφ' ἐτέρου, ἐπειδὴ ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, θὰ ἔχωμεν καὶ τὸν τύπον

$$s = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot t^2. \quad (2)$$

*Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$F = \frac{2 \cdot m \cdot s}{t^2}. \quad (3)$$

*Ἡ λύσις θὰ γίνῃ εἰς τὸ σύστημα C.G.S.: ἔχομεν: $m = 20 \text{ gr}$, $s = 25 \text{ cm}$ καὶ $t = 1 \text{ sec}$. Δι' ἀντικατάστασιν εἰς τὸν τύπον (3), λαμβάνομεν

$$F = \frac{2 \cdot 20 \cdot 25}{1^2} \frac{\text{gr} \cdot \text{cm}}{\text{sec}^2} = \frac{40 \cdot 25}{1} \text{ dyn.}$$

ἤ

$$F = 1000 \text{ dyn.}$$

(Σημείωσις: Τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα θὰ λάβωμεν, ἐὰν εἰς τὰ s καὶ t δώσωμεν, ἀντιστοίχως, τὰς τιμὰς $s = 100 \text{ cm}$, $t = 2 \text{ sec}$ ἢ $s = 225 \text{ cm}$, $t = 3 \text{ sec}$).

*Άσκησης 56η.

α) Ἐπὶ τοῦ ὕδατος ἐξασκούνται δύο δυνάμεις: 1) Ἡ δυνάμεις B καὶ 2) ἡ δύναμις F (βλέπε σχῆμα εἰς σελίδα 88).

β) Τὴν δυνάμιν B — δηλ., τὸ βάρος τοῦ ὕδατος — ἐξασκεῖ ἡ Γ'γ. Τὴν δυνάμιν F ἐξασκεῖ ὁ πυθμὴν τοῦ δοχείου.

γ) Διὰ νὰ εὗρωμεν τὴν ἐλαχίστην ταχύτητα, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ὅταν τὸ δοχεῖον εὐρίσκεται εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς τροχιάς του, αἱ ἐπὶ τοῦ ὕδατος ἐξασκούμεναι δύο δυνάμεις B καὶ F εἶναι κατακόρυφοι καὶ ἔχουν φορὰν πρὸς τὰ κάτω. Διὰ νὰ δύναται τὸ ὕδωρ νὰ διαγράφῃ τὸ ἀνώτατον κυκλικὸν τμήμα τῆς τροχιάς του μὲ ταχύτητα v , πρέπει ἡ συνισταμένη $B + F$ τῶν δύο ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένων δυνάμεων νὰ εἶναι κεντρομόλος καὶ νὰ ἔχῃ μέτρον, ἴσον πρὸς

$$B + F = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Ἐκ τῆς ἑξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν διὰ τὴν δύναμιν F :

$$F = m \cdot \frac{v^2}{r} - B = m \cdot \left(\frac{v^2}{r} - g \right)$$

(διότι: $B = m \cdot g$). Παρατηροῦμεν ὅτι, ἔλατουμένης τῆς ταχύτητος v , ἔλαττοῦται καὶ ἡ δύναμις F , ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ ὕδατος ὑπὸ τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου (ἀφου τὸ r καὶ τὸ g εἶναι σταθερά). Ὄταν ἡ ταχύτης v λάβῃ τοιαύτην τιμὴν $v_{ελ}$, ὥστε

$$\frac{v_{ελ}^2}{r} = g, \quad (1)$$

ἡ δύναμις F γίνεται ἴση πρὸς μηδέν - δηλ., ὁ πυθμὴν παύει νὰ ἐξασκῇ δύναμιν ἐπὶ τοῦ ὕγρου, τὸ ὁποῖον δὲν ἐφάπτεται, πλέον, τοῦ πυθμένος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἔχομεν $m \cdot v_{ελ}^2 / r = B$. Ἐὰν ἡ ταχύτης γίνῃ μικροτέρα τῆς $v_{ελ}$, θὰ ἔχομεν

$$\frac{m \cdot v^2}{r} < B.$$

Ἡδὴ, ἡ μόνη ἐπὶ τοῦ ὕδατος ἐξασκουμένη δύναμις B ἔχει φορὰν πρὸς τὰ κάτω καὶ εἶναι μεγαλύτερα τῆς $m \cdot v^2 / r$ - δηλ. τῆς δυνάμεως, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ νὰ διαγράψῃ τοῦτο κυκλικὴν τροχίαν. Συνεπῶς, τὸ ὕδωρ δὲν δύναται νὰ διαγράψῃ πλέον κυκλικὴν τροχίαν καί, ὥς ἐκ τούτου, χύνεται.

Ἡ ἐλαχίστη, λοιπόν, ταχύτης $v_{ελ}$ θὰ εἶναι, κατὰ τὸν τύπον (1), ἴση πρὸς

$$v_{ελ} = \sqrt{r \cdot g}. \quad (2)$$

Οὗτος εἶναι ὁ τελικὸς τύπος. Ἡ λύσις θὰ γίνῃ εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα: Ἐχομεν: $r = 1 \text{ m}$ καὶ $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (2), εὐρίσκομεν

$$v_{ελ} = \sqrt{1 \cdot 9,81} = \sqrt{9,81} \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

$$\eta \quad v_{ελ} = 3,13 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ' - ΒΑΡΥΤΗΣ

*Άσκησης 64η.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς πυκνότητος $\rho = m/V$, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$m = \rho \cdot V. \quad (1)$$

Λύσις εἰς τὸ σύστημα C.G.S.: Ἐχομεν $\rho = 1 \text{ gr/cm}^3$, $V = 1 \text{ m}^3 = 100 \cdot 100 \cdot 100 \text{ cm}^3 = 10^6 \text{ cm}^3$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (1), λαμβάνομεν

$$m = 1 \cdot 10^6 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \cdot \text{cm}^3 = 10^6 \text{ gr}$$

$$\eta \quad m = 10^6 \text{ kgr} = 1 \text{ τόννος}.$$

*Εσφαλμένη λύσις. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν τύπον (1) τὰ δεδομένα

$\rho = 1 \text{ gr/cm}^3$ καὶ $V = 1 \text{ m}^3$, θὰ λάβωμεν διὰ τὴν μᾶζαν

$$m = 1 \cdot 1 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \cdot \text{m}^3$$

δηλ., ἀποτέλεσμα, τὸ ὁποῖον δὲν ἐκφράζει τὴν μᾶζαν εἰς κανὲν ἐκ τῶν γνωστῶν συστημάτων - τὸ C.G.S., τὸ M.K.S. ἢ τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων.

*Άσκησης 66η.

Έκ του ορισμού του ειδικού βάρους $\varepsilon = B/V$, έχουμε διά το βάρος

$$B = \varepsilon \cdot V. \quad (1)$$

α) Λύσεις εις τὸ Τεχνικὸν Σύστημα: Ἐχομεν:

$$\varepsilon = 1 \frac{\text{gr}^*}{\text{cm}^3} = 1 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}^*}{\text{cm}^3} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{kg}^*}{\text{m}^3} = \frac{1}{10^{-3}} \frac{\text{kg}^*}{\text{m}^3} = 1 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}^*}{\text{m}^3}$$

καὶ $V = 1 \text{ λίτρον} = 10^3 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$.

(Ἡ τιμὴ τοῦ ειδικοῦ βάρους τοῦ ὕδατος $\varepsilon = 10^3 \text{ kg}^*/\text{m}^3$ δύναται νὰ προκύψῃ καί, ἀπ' εὐθείας, ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ ὅτι 1 m^3 ὕδατος ἔχει βάρος 1 t^*). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (1), λαμβάνομεν διὰ τὸ βάρος

$$B = 1 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}^*}{\text{m}^3} \cdot \text{m}^3$$

ἦ

$$B = 1 \text{ kg}^*.$$

β) Λύσεις εἰς τὸ σύστημα C.G.S.: Ἐχομεν: $\varepsilon = 1 \frac{\text{gr}^*}{\text{cm}^3} = 1.981 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^3}$

καὶ $V = 1 \text{ λίτρον} = 10^3 \text{ cm}^3$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (1), λαμβάνομεν

$$B = 9,81 \cdot 10^3 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^3} \cdot \text{cm}^3$$

ἦ

$$B = 9,81 \cdot 10^3 \text{ dyn}.$$

*Άσκησης 70η.

Ἐκ τοῦ ορισμοῦ τῆς πυκνότητος $\rho = m/V$ λαμβάνομεν διὰ τὴν μᾶζαν

$$m = \rho \cdot V. \quad (1)$$

Ὁ ὄγκος V τοῦ σύρματος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου, τοῦ περιέχοντος τὸν ὄγκον κυλίνδρου, ἀκτίνος r καὶ ὕψους l :

$$V = \pi r^2 \cdot l. \quad (2)$$

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$m = \rho \cdot \pi r^2 \cdot l. \quad (3)$$

Λύσεις εἰς τὸ σύστημα C.G.S.: Ἐχομεν: $\rho = 8,9 \text{ gr/cm}^3$ (καθόσον τὸ ειδικὸν βάρος τοῦ χαλκοῦ εἶναι ἴσον πρὸς $8,9 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, Πίναξ, σελ. 94), $\pi = 3,14$, $r = \delta/2 = 3,4/2 \text{ mm} = 1,7 \text{ mm} = 0,17 \text{ cm}$, $l = 1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 100000 \text{ cm} = 10^5 \text{ cm}$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τελικὸν τύπον (3), λαμβάνομεν

$$m = 8,9 \cdot 3,14 \cdot 0,17^2 \cdot 10^5 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{cm}$$

ἦ

$$m = 8,1 \cdot 10^4 \text{ gr} \quad \eta \quad m = 10 \text{ kg}^*.$$

*Άσκησης 71η.

Ἐὰν κατέσωμεν l_1 τὸ μήκος, l_2 τὸ πλάτος καὶ l_3 τὸ πάχος τῆς πλάκας, ὁ ὄγκος V αὐτῆς θὰ εἶναι ἴσος πρὸς

$$V = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3. \quad (1)$$

Εκ του ορισμού του ειδικού βάρους έχουμε την σχέση

$$\varepsilon = \frac{B}{V} \quad (2)$$

Εκ των εξισώσεων (1) και (2) λαμβάνομεν τον τελικόν τύπον

$$l_3 = \frac{B}{\varepsilon \cdot l_1 \cdot l_2} \quad (3)$$

Λύσις εις τὸ σύστημα C.G.S. : Έχουμεν : $B = 662,5 \text{ gr}^* = 662,5 \cdot 981 \text{ dyn}$. Εκ του πίνακος της σελ. 94 εφόρικομεν διὰ τὸ ειδικὸν βάρος τοῦ ἀργυρίου $\varepsilon = 2,7 \text{ gr}^*/\text{cm}^3 = 2,7 \cdot 981 \text{ dyn/cm}^3$. Ἀφ' ἑτέρου, εἶναι $l_1 = 50 \text{ cm}$ καὶ $l_2 = 25 \text{ cm}$.

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τελικὸν τύπον (3) λαμβάνομεν

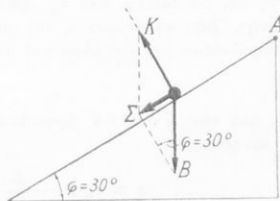
$$l_3 = \frac{662,5 \cdot 981}{2,7 \cdot 981 \cdot 50 \cdot 25} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^3 \cdot \text{cm} \cdot \text{cm}} = \frac{662,5}{2,7 \cdot 1250} \text{ cm} = \frac{662,5}{3375} \text{ cm} = 0,196 \text{ cm}.$$

Τοῦτο εἶναι, περίπου, ἴσον πρὸς

$$l_3 = 0,2 \text{ cm} \quad \eta \quad l_3 = 2 \text{ mm}.$$

Ἀσκήσις 77η.

α) Ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐξασκουῦνται αἱ ἐξῆς δύο δυνάμεις (σχ. 430) : 1) Τὸ βάρος τῆς B , τὸ ὁποῖον εἶναι κατακόρυφον καὶ 2) ἡ δύναμις K , ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἡ ὁποία, λόγῳ ἑλλείψεως τριβῆς, εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτό. Ἐφ' ὅσον ἡ σφαῖρα κινεῖται ἐπιταχυνομένη κατὰ μήκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, πρέπει ἡ συνισταμένη Σ τῶν δύο δυνάμεων B καὶ K νὰ εἶναι καὶ αὕτη παράλληλος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον. Διὰ νὰ σχεδιάσωμεν τὴν συνισταμένην Σ φέρομεν ἐκ τοῦ πέρατος τῆς δυνάμεως B εὐθεῖαν, παράλληλον πρὸς τὴν K , μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς συνισταμένης καί, ἀκολουθῶς, σχεδιάζομεν τὸ ἀντίστοιχον ἄνυσμα Σ . Ἦδη, ἐκ τοῦ πέρατος τῆς δυνάμεως Σ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν B , μέχρις ὅτου αὕτη συναντήσῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς K καί, οὕτως, εὐρίσκομεν τὸ ἄνυσμα τῆς δυνάμεως K , τοῦ ὁποίου τὸ μήκος εἴχομεν προηγουμένως σχεδιάσει αὐθαίρετως.



Σχ. 430.

β) Ἐπὶ τῆς σφαίρας καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἐξασκεῖται ἡ συνισταμένη δύναμις Σ . Συνεπῶς, ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς δίδει

$$\Sigma = m \cdot \gamma.$$

Ἐκ τῆς εξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν διὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν γ τῆς σφαίρας τὴν σχέσηιν

$$\gamma = \frac{\Sigma}{m} \quad (1)$$

ἐνθα m εἶναι ἡ μᾶζα τῆς σφαίρας. Ἐκ τοῦ σχήματος προκύπτει ὅτι $\Sigma = B \cdot \eta \mu \varphi = m g \cdot \eta \mu \varphi$ (διότι $B = m \cdot g$). Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1), λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\gamma = \frac{m g \cdot \eta \mu \varphi}{m} \quad \eta \quad \gamma = g \cdot \eta \mu \varphi. \quad (2)$$

Λύσεις εις τὸ σύστημα C.G.S.: Δίδονται: $g = 981 \text{ cm/sec}^2$, $\eta \mu \varphi = \eta \mu 30^\circ = 0,5$.
 Ἀντικαθιστώντες εις τὸν τελικὸν τύπον (2), εὐρίσκομεν

$$\gamma = 981 \cdot 0,5 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$$

$$\bar{\eta} \quad \gamma = 490,5 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$$

γ) Ἡ ἐπιταχύνουσα τὴν σφαῖραν δύναμις θὰ εὐρεθῇ ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου

$$\Sigma = m \cdot \gamma. \quad (3)$$

Δίδεται: $m = 100 \text{ gr}$, εὐρομεν δὲ $\gamma = 490,5 \text{ cm/sec}^2$. Ἀντικαθιστώντες εἰς τὸν τύπον (3), λαμβάνομεν

$$\Sigma = 100 \cdot 490,5 \text{ gr} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-2}$$

$$\bar{\eta} \quad \Sigma = 49050 \text{ dyn.}$$

Ἀσκῆσις 80ῆ.

Τὸ βλήμα, βαλλόμενον πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 , ἐκτελεῖ, ὡς γνωστόν, ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην κίνησιν. Ἀς καλέσωμεν h τὸ μέγιστον ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον θ' ἀνέλθῃ τοῦτο καὶ t_1 τὸν πρὸς τοῦτο ἀπαιτούμενον χρόνον. Ὅταν τὸ βλήμα φθάσῃ εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς τροχιάς του, θ' ἀρχίσῃ, ἐν συνεχείᾳ, νὰ βλήμα φθάσῃ εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς τροχιάς του, θ' ἀρχίσῃ, ἐν συνεχείᾳ, νὰ πίπτῃ καὶ θὰ ἐκτελῇ, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους του, κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνόμενην. Ἐὰν καλέσωμεν t_2 τὸν χρόνον τῆς πτώσεως, ὁ ὁλικὸς χρόνος $t_{ολ}$ (δηλ., ὁ χρόνος ἀνόδου καὶ καθόδου τοῦ βλήματος) θὰ εἶναι ἴσος πρὸς

$$t_{ολ} = t_1 + t_2. \quad (1)$$

Διὰ τὴν ἀνοδὸν χρησιμοποιοῦμεν τοὺς τύπους τῆς ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένης κινήσεως

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \text{καὶ} \quad v = v_0 - g \cdot t,$$

εἰς τοὺς ὁποίους, ἀντικαθιστώντες, ἀντὶ τοῦ s , τὸ h , ἀντὶ τοῦ t τὸ t_1 , ἀντὶ τοῦ γ τὸ g καὶ ἀντὶ τοῦ v τὴν τιμὴν μηδέν (δεδομένου ὅτι εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς τροχιάς ἡ ταχύτης τοῦ βλήματος ἔχει γίνῃ ἴση πρὸς μηδέν), λαμβάνομεν

$$h = v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad 0 = v_0 - g \cdot t_1. \quad (3)$$

Διὰ τὴν κάθοδον ἰσχύει ὁ τύπος τῆς ἐλευθέρας πτώσεως

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t_2^2. \quad (4)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἔχομεν 4 ἐξισώσεις μὲ 4 ἀγνώστους (h , v_0 , t_1 , t_2). Συνεπῶς, τὸ πρόβλημα, κατ' ἀρχήν, ἐλύθη. Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸ v_0 , λύομεν τὸ ἀνωτέρω σύστημα ὡς ἑξῆς: Ἐφ' ὅσον τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (4) εἶναι ἴσα, ἔπεται ὅτι καὶ τὰ δεύτερα θὰ εἶναι ἴσα. Ἦτοι

$$v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} g \cdot t_2^2. \quad (5)$$

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (5) τὴν τιμὴν τοῦ t_2 , τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1), ἔχομεν

$$v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} g \cdot (t_{ολ} - t_1)^2 \quad \eta \quad v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} g \cdot (t_{ολ}^2 + t_1^2 - 2 \cdot t_{ολ} \cdot t_1)$$

$$\eta \quad v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} g \cdot t_{ολ}^2 + \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 - g \cdot t_{ολ} \cdot t_1. \quad (6)$$

Τέλος, αντικαθιστώντες εις την εξίσωσιν (6) την τιμήν $t_1 = v_0/g$, την οποίαν λαμβάνομεν ἐκ τῆς εξισώσεως (3), εὐρίσκομεν, ἀφοῦ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, τὸν τελικὸν τύπον

$$v_0 = \frac{1}{2} g \cdot t_{ολ}. \quad (7)$$

Λύσις εις τὸ Τεχνικὸν Σύστημα: Δίδονται: $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$ καὶ $t_{ολ} = 30 \text{ sec}$.
 Ἀντικαθιστώντες εις τὸν τελικὸν τύπον (7), λαμβάνομεν

$$v_0 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 30 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \cdot \text{sec} = 9,81 \cdot 15 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$\eta \quad v_0 = 148 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

Ἀσκησης 81η.

α) Ἡ κίνησις τοῦ λίθου πρὸς τὰ κάτω εἶναι κίνησις ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη με ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 . Εἰς τὴν κίνησιν ταύτην ἰσχύει ὁ τύπος

$$v = v_0 + g \cdot t. \quad (1)$$

Λύσις εις τὸ Τεχνικὸν Σύστημα: Δίδονται: $v_0 = 30 \text{ m/sec}$, $t = 2 \text{ sec}$, $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$. Ἀντικαθιστώντες εις τὸν τύπον (1), λαμβάνομεν

$$v = (30 + 9,81 \cdot 2) \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$\eta \quad v = 49,6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

β) Εἰς τὴν κίνησιν ταύτην ἰσχύει καὶ ὁ τύπος

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2.$$

Λύοντες τὴν δευτεροβάθμιον ταύτην εξίσωσιν, λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 4 \cdot \frac{g}{2} h}}{g} \quad \eta \quad t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}. \quad (2)$$

Λύσις εις τὸ Τεχνικὸν Σύστημα: Δίδονται: $v_0 = 30 \text{ m/sec}$, $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$, $h = 100 \text{ m}$. Δι' αντικαταστάσεως εις τὸν τελικὸν τύπον (2), λαμβάνομεν

$$t = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 + 2 \cdot 9,81 \cdot 100}}{9,81} \text{ sec} = \frac{-30 \pm \sqrt{900 + 1962}}{9,81} \text{ sec} =$$

$$= \frac{-30 \pm \sqrt{2862}}{9,81} \text{ sec} = \frac{-30 \pm 53,5}{9,81} \text{ sec} \quad \eta \quad t = \frac{23,5}{9,81} \text{ sec} \text{ καὶ } t' = \frac{-83,5}{9,81} \text{ sec}$$

$$\eta \quad t = 2,4 \text{ sec}.$$

(Ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ t' τοῦ χρόνου ἀπορρίπτεται).

γ) Η ταχύτης, την οποίαν θα έχη ο λίθος, όταν φθάση εις τὸ ἔδαφος, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$v = v_0 + g \cdot t,$$

εἰς τὸν ὅποιον t εἶναι ὁ εὐρεθεὶς χρόνος 2,4 sec. Ἀντικαθιστῶντες, λαμβάνομεν

$$v = (30 + 9,81 \cdot 2,4) \frac{m}{sec}$$

ἢ

$$v = 53,5 \frac{m}{sec}.$$

* Άσκησης 82α.

Ἡ ἄσκησης εἶναι ἐντελῶς ὁμοία μετὰ τὴν λυθεῖσαν ἀνωτέρω 56ην, λύεται δὲ κατὰ τὸν αὐτόν, ἀκριβῶς, τρόπον. Ὡς τελικὸς τύπος προκύπτει ὁ ἑξῆς:

$$v_{ελ} = \sqrt{r \cdot g}.$$

Λύσις εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα: Δίδονται: $r = 8 \text{ m}$ καὶ $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν ἀνω τύπον, λαμβάνομεν

$$v_{ελ} = \sqrt{8 \cdot 9,81} \sqrt{m \cdot \frac{m}{sec^2}} = \sqrt{78,48} \frac{m}{sec}$$

ἢ

$$v_{ελ} = 8,86 \frac{m}{sec}.$$

* Άσκησης 93η.

Ὅταν ἡ σφαῖρα εὐρίσκεται ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου AB , ἐξασκοῦνται ἐπ' αὐτῆς δύο δυνάμεις; 1) τὸ βάρος τῆς B καὶ 2) ἡ ἐκ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἐξα-σκουμένη δύναμις (βλ. καὶ 77ην ἄσκησιν). Ἡ συνισταμένη F τῶν δύο αὐτῶν δυνάμεων εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον AB καὶ ἴση πρὸς

$$F = B \cdot \eta \mu \varphi$$

ἐνθα φ εἶναι ἡ γωνία κλίσεως. Κατὰ τὴν κίνησιν τῆς σφαίρας ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου AB , ἡ δύναμις F εἶναι σταθερὰ (ἐφ' ὅσον τὰ B καὶ φ εἶναι σταθερά), συνεπῶς καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις

$$\gamma = \frac{F}{m} = \frac{B \cdot \eta \mu \varphi}{m} = \frac{mg \cdot \eta \mu \varphi}{m} \quad \text{ἢ} \quad \gamma = g \cdot \eta \mu \varphi \quad (1)$$

εἶναι καὶ αὕτη σταθερά. Ἡ κίνησις, δηλ., θὰ εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη.

Ἐπὶ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου BI ἡ συνισταμένη δύναμις F εἶναι ἴση πρὸς μηδέν (διότι τὸ φ εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν), συνεπῶς ἡ σφαῖρα θὰ κινῆται ἰσοταχῶς μετὰ τὴν ταχύτητα, τὴν ὁποίαν εἶχεν, ὅταν ἔφθασεν εἰς τὸ σημεῖον B .

Ὅταν ἡ σφαῖρα φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον I , θ' ἀρχίσῃ ν' ἀνέρχεται ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου IA , ὁπότε ἡ δύναμις F , ὡς ἔχουσα φορὰν, ἀντίθετον τῆς φορᾶς τῆς ταχύτητος, ἐπιβραδύνει τὴν σφαῖραν. Ἐπειδὴ ἡ ἐπιβραδυνούσα δύναμις F εἶναι σταθερά, ἡ κίνησις θὰ εἶναι ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη. Ἡ σφαῖρα θὰ ἐξακολουθήσῃ ἀνερχομένη, μέχρις ὅτου ἡ ταχύτης αὐτῆς γίνῃ ἴση πρὸς μηδέν. Ἀκολουθῶς, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς σταθερᾶς δυνάμεως F , ἡ σφαῖρα θ' ἀρχίσῃ νὰ κατέρχεται μετὰ τὴν ἐπίδρασιν τῆς σταθερᾶς δυνάμεως F , ἐν συνεχείᾳ δὲ

θά κινηθῇ ἐπὶ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου ἰσοταῶς, μέχρις ὅτου φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον B . Ἀκολούθως, θ' ἀρχίσῃ ν' ἀνέρχεται εἰς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον BA μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην, καθόσον τώρα ἡ δύναμις F ἔχει φοράν, ἀντίθετον τῆς φορᾶς τῆς ταχύτητος. Ἡ σφαῖρα θ' ἀνέρχεται, μέχρις ὅτου ἡ ταχύτης αὐτῆς μηδενισθῇ. Ἐν συνεχείᾳ, θ' ἀρχίσῃ νὰ ἐπαναλαμβάνῃ, ἐξ ἀρχῆς, τὰς κινήσεις, αἱ ὁποῖαι περιεγράφησαν ἀνωτέρω.

Παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ τὴν κίνησιν τῆς σφαίρας ἐπὶ τῶν κεκλιμένων ἐπιπέδων AB καὶ $ΓA$, ἡ ἐπιτάχυνσις (ἢ ἡ ἐπιβραδυνσις) γ εἶναι ἡ αὐτή, καθόσον ἡ γωνία κλίσεως καὶ τῶν δύο ἐπιπέδων εἶναι ἡ αὐτή (60°).

Ἐστώσαν $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ οἱ ἀντίστοιχοι χρόνοι τῶν διαδρομῶν $AB = BF = \Gamma A = \Gamma \Gamma' = \Gamma' B = BA = l$. Εἶναι προφανές ὅτι ὁ ὁλικὸς χρόνος $t_{ολ}$ θὰ εἶναι ἴσος πρὸς

$$t_{ολ} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6. \quad (2)$$

1) Κατὰ τὴν διαδρομὴν AB ἰσχύουν οἱ τύποι τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως

$$s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (3)$$

καὶ

$$v = \gamma \cdot t. \quad (4)$$

Ἐπομένως, διὰ τὸ πέρας τῆς διαδρομῆς $AB = l$, ὁ ἀντίστοιχος χρόνος t_1 θὰ διδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (3), ἐὰν θέσωμεν $s = l$ καὶ $t = t_1$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{\gamma}}. \quad (5)$$

2) Κατὰ τὴν διαδρομὴν BF ὁ χρόνος t_2 εἶναι ἴσος πρὸς

$$t_2 = \frac{l}{v'}. \quad (6)$$

ἐνθα v' εἶναι ἡ ταχύτης, τὴν ὁποίαν εἶχεν ἡ σφαῖρα εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου t_1 . Αὕτη ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου (4), ἐὰν θέσωμεν $t = t_1$, ὁπότε λαμβάνομεν

$$v' = \gamma \cdot t_1 = \gamma \cdot \sqrt{\frac{2l}{\gamma}} = \sqrt{2l \cdot \gamma}. \quad (7)$$

Ἦδη, ἐκ τῶν τῶν τύπων (6) καὶ (7) λαμβάνομεν διὰ τὸν χρόνον t_2

$$t_2 = \frac{l}{\sqrt{2l \cdot \gamma}}. \quad (8)$$

3) Κατὰ τὴν διαδρομὴν ΓA ἰσχύουν οἱ τύποι τῆς ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένης κινήσεως

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (9)$$

καὶ

$$v = v_0 - \gamma \cdot t, \quad (10)$$

οἱ ὁποῖοι, διὰ τὸ πέρας τῆς διαδρομῆς $\Gamma A = l$, γράφονται ὡς ἑξῆς:

$$l = v_0 \cdot t_3 - \frac{1}{2} \gamma \cdot t_3^2 \quad (11)$$

καὶ

$$v_3 = v_0 - \gamma \cdot t_3 \quad (12)$$

Ἐπειδὴ εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον A τῆς διαδρομῆς ΓA ἡ ταχύτης v_3 θὰ ἔχη γίνεαι ἴση πρὸς μηδέν, ὁ τύπος (12) δίδει

$$v_0 = \gamma \cdot t_3. \quad (13)$$

Εκ τῶν δύο ἐξισώσεων (11) καὶ (13) λαμβάνομεν διὰ τὸν χρόνον t_3

$$t_3 = \sqrt{\frac{2l}{\gamma}}. \quad (14)$$

4) Κατὰ τὴν διαδρομὴν AI ἰσχύουν οἱ τύποι (3) καὶ (4) τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως. Ἐπομένως, διὰ τὸ πέρασ τῆς διαδρομῆς $AI = l$, ὁ ἀντίστοιχος χρόνος t_4 θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (3), ἐὰν θέσωμεν $s = l$ καὶ $t = t_4$:

$$t_4 = \sqrt{\frac{2l}{\gamma}}. \quad (15)$$

5) Κατὰ τὴν διαδρομὴν IB ὁ χρόνος t_5 εἶναι ἴσος πρὸς

$$t_5 = \frac{l}{v''}. \quad (16)$$

ἔνθα v'' εἶναι ἡ ταχύτης, τὴν ὁποίαν εἶχεν ἡ σφαῖρα εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου t_4 . Ἀὕτη ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου (4), ἐὰν θέσωμεν $t = t_4$, ὅποτε ἔχομεν

$$v'' = \gamma \cdot t_4. \quad (17)$$

Ἦδη, ἐκ τῶν ἐξισώσεων (16) καὶ (17) λαμβάνομεν διὰ τὸν χρόνον t_5

$$t_5 = \frac{l}{\gamma \cdot t_4}. \quad (18)$$

6) Κατὰ τὴν διαδρομὴν BA ἰσχύουν οἱ τύποι (9) καὶ (10) τῆς ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένης κινήσεως, οἱ ὁποῖοι, διὰ τὸ πέρασ τῆς διαδρομῆς $BA = l$, γράφονται

$$l = v_0 \cdot t_6 - \frac{1}{2} \gamma \cdot t_6^2 \quad (19)$$

καὶ

$$v_6 = v_0 - \gamma \cdot t_6. \quad (20)$$

Ἐπειδὴ εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον A τῆς διαδρομῆς BA ἡ ταχύτης v_0 θὰ ἔχη γίνῃ ἴση πρὸς μηδέν, ὁ τύπος (20) δίδει

$$v_0 = \gamma \cdot t_6. \quad (21)$$

Εκ τῶν τύπων (19) καὶ (21) λαμβάνομεν διὰ τὸν χρόνον t_6 :

$$t_6 = \sqrt{\frac{2l}{\gamma}}. \quad (22)$$

Ἦδη, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως (2) τὰς τιμὰς τῶν $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$, τὰς ὁποίας λαμβάνομεν ἐκ τῶν ἀντιστοιχῶν τύπων (5), (8), (14), (15), (18) καὶ (22), εὐρίσκομεν

$$t_{ολ} = 4 \cdot \sqrt{\frac{2l}{\gamma}} + 2 \cdot \frac{l}{\gamma \cdot t_4} = 4 \cdot \sqrt{\frac{2l}{\gamma}} + 2 \cdot \sqrt{\frac{l}{2\gamma}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{2l}{\gamma}} + \sqrt{\frac{2l}{\gamma}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{2l}{\gamma}}.$$

Ἐπειδὴ, κατὰ τὸν τύπον (1), ἡ ἐπιτάχυνσις γ εἶναι ἴση πρὸς $\gamma = g \cdot \eta \mu \varphi$ ἔχομεν, ἐλκῶς, τὸν τύπον

$$t_{ολ} = 5 \cdot \sqrt{\frac{2l}{g \cdot \eta \mu \varphi}}. \quad (23)$$

Λύσις εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων: Δίδονται: $l = 2 \text{ m}$, $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$ καὶ $\varphi = 60^\circ$ - ὅποτε εἶναι $\eta \mu 60^\circ = 0,866$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (23), λαμβάνομεν

$$t_{ολ} = 3,45 \text{ sec.}$$

Παρατήρησης : Ἡ ἀσκήσις αὕτη δύναται νά λυθῇ πολὺ εὐκολώτερον, ἐάν χρησιμοποιήσωμεν τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας, ὅποτε ἀποδεικνύεται ὅτι

$$t_1 = t_3 = t_4 = t_6 \quad \text{καὶ} \quad t_2 = t_5.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄—ΕΡΓΟΝ, ΕΝΕΡΓΕΙΑ, ΙΣΧΥΣ, ΑΠΛΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ

Ἀσκήσις 103η.

Ἐπὶ σώματος, εὐρισκομένου ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, γωνίας κλίσεως φ , ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις : 1) τὸ βάρος τοῦ B καὶ 2) ἡ ἐκ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου προφορομένη δύναμις K , ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτό, διότι ἡ τριβὴ θεωρεῖται ἀμελήτέα. Ἡ συνισταμένη F τῶν δύο αὐτῶν δυνάμεων εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον καὶ ἴση πρὸς $F = B \cdot \eta \mu \varphi$ (βλέπε καὶ 77ην ἀσκήσιν).

Κατὰ τὴν ὁλίσθησιν τοῦ σώματος ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ τὸ διάστημα s , ἡ δύναμις F παράγει ἔργον A , ἴσον πρὸς

$$A = \text{δύναμις} \cdot \text{δρομός} = F \cdot s$$

$$\eta \quad \underline{A = B \cdot \eta \mu \varphi \cdot s.} \quad (1)$$

Λύσις εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα : Δίδονται : $B = 30 \text{ kgr}^*$, $\varphi = 15^\circ$ ($\eta \mu 15^\circ = 0,259$) καὶ $s = 10 \text{ m}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), λαμβάνομεν

$$A = 30 \cdot 0,259 \cdot 10 \text{ kgr}^* \cdot \text{m} = 30 \cdot 2,59 \text{ kgr}^* \cdot \text{m} = 77,7 \text{ kgr}^* \cdot \text{m}.$$

Ἐπειδὴ $1 \text{ kgr}^* \cdot \text{m} = 1000 \cdot 981 \text{ dyn} \cdot 100 \text{ cm} = 9,81 \cdot 10^5 \text{ erg}$, ἔχομεν

$$A = 77,7 \cdot 9,81 \cdot 10^5 \text{ erg} = 762 \cdot 10^5 \text{ erg},$$

$$\eta \quad \underline{A = 7,62 \cdot 10^6 \text{ erg}.}$$

Ἀσκήσις 109η.

Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος εἶναι ἴση πρὸς

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2. \quad (1)$$

Εἰς τὴν παροῦσαν ἀσκήσιν δίδεται ἡ μᾶζα, ὄχι, ὅμως, καὶ ἡ ταχύτης. Αὕτη δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου τῆς ἐλευθέρως πτώσεως

$$v = g \cdot t. \quad (2)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} m \cdot g^2 \cdot t^2.} \quad (3)$$

Λύσις εἰς τὸ σύστημα C.G.S. : Δίδονται : $m = 20 \text{ kgr} = 20000 \text{ gr} = 2 \cdot 10^4 \text{ gr}$, $g = 981 \text{ cm/sec}^2$, $t = 5 \text{ sec}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον (3), λαμβάνομεν

$$\begin{aligned} E_{\text{κιν}} &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 981^2 \cdot 5^2 \text{ gr} \cdot \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^4} \cdot \text{sec}^2 = 10^4 \cdot 981^2 \cdot 25 \cdot \frac{\text{gr} \cdot \text{cm}}{\text{sec}^2} \text{ cm} = \\ &= 25 \cdot 10^4 \cdot 962361 \text{ dyn} \cdot \text{cm} = 25 \cdot 10^4 \cdot 962,4 \cdot 10^5 \text{ erg} = 24059 \cdot 10^5 \text{ erg}. \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $1 \text{ Joule} = 10^7 \text{ erg}$, ἔχομεν καὶ

$$\underline{E_{\text{κιν}} = 24059 \text{ Joule}.}$$

'Αφ' ετέρου, είναι $1 \text{ kgr}^* \cdot \text{m} = 1000 \cdot 981 \cdot 100 \text{ dyn} \cdot \text{cm} = 9,81 \cdot 10^8 \text{ erg} = 9,81 \text{ Joule}$.
 Συνεπώς, έχουμε και

$$E_{\text{κιν}} = \frac{24059}{9,81} \text{ kgr}^* \cdot \text{m}$$

$$\eta \quad E_{\text{κιν}} = 2452,5 \text{ kgr}^* \cdot \text{m}.$$

'Εσφαλμένος τρόπος λύσεως: 'Αντικαθιστώντες εις τὸν τύπον (3) ἀντὶ τῶν m , g , t τὰς τιμὰς τῶν, ὅπως δίδονται, λαμβάνομεν

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 981^2 \cdot 5^3 \text{ kgr} \cdot \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^4} \cdot \text{sec}^2 = 250 \cdot 981^2 \frac{\text{kgr} \cdot \text{cm}^2}{\text{sec}^2}$$

$$\eta \quad E_{\text{κιν}} = 250 \cdot 962361 \text{ kgr} \cdot \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^2} \quad \eta \quad E_{\text{κιν}} = 240590000 \frac{\text{kgr} \cdot \text{cm}^2}{\text{sec}^2}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ προκύψαν ἀποτέλεσμα ἐκφράζεται εἰς $\text{kgr} \cdot \text{cm}^2/\text{sec}^2$ - δηλ., εἰς μονάδα, μὴ ἀνήκονσαν εἰς κανέν ἐκ τῶν συνηθῶν συστημάτων μονάδων (C.G.S., M.K.S. ἢ T.S.).

*Άσκησης 118η.

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἰσχύς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$N = \frac{A}{t}. \quad (1)$$

'Αφ' ετέρου, τὸ ἔργον A εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, ἴσον πρὸς

$$A = F \cdot s. \quad (2)$$

'Εκ τῶν δύο ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$N = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot \frac{s}{t}.$$

*Ἐπειδὴ $s/t = v$, ἔχομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$N = F \cdot v. \quad (3)$$

Λύσις εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα: Δίδονται: $F = 4,5$ τόνοι βάρους $= 4,5 \cdot 10^3 \text{ kgr}^*$,

$$v = 61 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{61 \cdot 10^3}{3,6 \cdot 10^3} \frac{\text{m}}{\text{sec}} = \frac{61}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

'Αντικαθιστώντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον (3), λαμβάνομεν

$$N = 4,5 \cdot 10^3 \cdot \frac{61}{3,6} \text{ kgr}^* \cdot \frac{\text{m}}{\text{sec}} = \frac{274,5 \cdot 10^3}{3,6} \frac{\text{kgr}^* \cdot \text{m}}{\text{sec}}$$

$$\eta \quad N = 76,25 \cdot 10^3 \frac{\text{kgr}^* \cdot \text{m}}{\text{sec}}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $1 \text{ HP} = 76 \text{ kgr}^ \cdot \text{m}/\text{sec}$, ἔχομεν

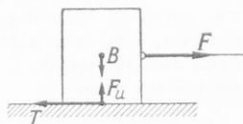
$$N = \frac{76,25 \cdot 10^3}{76} \text{ HP} = 1003 \text{ HP}$$

$$\eta, \text{ περίπου,} \quad \underline{N = 1000 \text{ HP.}}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η' — ΤΡΙΒΗ

Άσκησης 135η.

Ἐπὶ τοῦ σώματος ἐξασκοῦνται αἱ ἐξῆς δυνάμεις (σχ. 431) : 1) τὸ βάρος του B , ὀφειλόμενον εἰς τὴν βαρύτητα. 2) Ἡ δύναμις F , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ νῆμα. 3) Ἡ κάθετος δύναμις F_{κ} καὶ ἡ τριβὴ T , τὰς ὁποίας ἐξασκεῖ τὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου στηρίζεται τὸ σῶμα.



Σχ. 431.

Άσκησης 138η.

Ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου ἐξασκοῦνται αἱ ἐξῆς δυνάμεις (σχ. 432) : 1) τὸ βάρος του B καὶ 2) ἡ κάθετος δύναμις F_{κ} καὶ ἡ τριβὴ T , αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται ὑπὸ τῆς τραπέζης. Διὰ νὰ δύναται ὁ ἀνθρώπος νὰ ἐκτελῇ ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν, πρέπει ἐπ' αὐτοῦ νὰ ἐξασκῇται κεντρομόλος δύναμις F , ἴση πρὸς

$$F = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

(διότι $v = \omega \cdot r$). Ἡ δύναμις αὕτη εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν τριῶν ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου ἐξασκουμένων δυνάμεων B , F_{κ} καὶ T . Αὕτη εἶναι ἴση πρὸς τὴν T , καθόσον αἱ δύο ἄλλαι δυνάμεις B καὶ F_{κ} ἀλληλοαναιροῦνται, ὅποτε ἔχομεν

$$T = m \cdot \omega^2 \cdot r.$$

Ἡ δύναμις T , ὅμως, εἶναι ἴση πρὸς

$$T = \eta \cdot F_{\kappa} = \eta \cdot B.$$

Ἄρα, ἐὰν $\omega_{\text{μεγ}}$ εἶναι ἡ μεγίστη γωνιακὴ ταχύτης, θὰ ἔχομεν τὸν τύπον

$$\eta \cdot B = m \cdot \omega_{\text{μεγ}}^2 \cdot r. \quad (1)$$

Ἐπειδὴ, ὅμως, $B = m \cdot g$, ὁ ἄνω τύπος γράφεται

$$\eta \cdot m \cdot g = m \cdot \omega_{\text{μεγ}}^2 \cdot r,$$

ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ὁ τελικὸς τύπος

$$\omega_{\text{μεγ}} = \sqrt{\frac{\eta \cdot g}{r}}. \quad (2)$$

Ἐάν ἡ γωνιακὴ ταχύτης γίνῃ μεγαλύτερα τῆς ὑπολογισθείσης $\omega_{\text{μεγ}}$, τὸ δεξιὸν μέλος τῆς ἐξισώσεως (1) θ' αὐξηθῇ, ἐνῶ τὸ ἀριστερὸν μέλος διατηρεῖ τὴν τιμὴν του $\eta \cdot B$. Συνεπῶς, μὴ ἐκπληρουμένης πλέον τῆς ἐξισώσεως τῆς ὁμαλῆς κυκλικῆς κινήσεως, ὁ ἀνθρώπος θὰ διαγράψῃ ἄλλην τροχιάν καί, ὡς ἐκ τούτου, θὰ ἐκτιναχθῇ ἐκ τῆς τραπέζης.

Λύσεις εἰς τὸ σύστημα C.G.S. : Δίδονται : $\eta = 0,2$, $g = 981 \text{ cm/sec}^2$, $r = 122 \text{ cm}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον (2), λαμβάνομεν

$$\omega_{\text{μεγ}} = \sqrt{\frac{0,2 \cdot 981}{122}} \sqrt{\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}} = \sqrt{1,608} \sqrt{\text{sec}^{-2}}$$

$$\eta \quad \omega_{\text{μεγ}} = 1,27 \text{ sec}^{-1} \quad \eta \quad \omega_{\text{μεγ}} = 1,27 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

*Άσκησης 141η.

Διὰ νὰ κινῆται ἐν σῶμα ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου μὲ σταθεράν ταχύτητα, πρέπει αἱ ὀριζοντίως ἐπὶ τοῦ σώματος ἐξασκούμεναι δυνάμεις νὰ ἔχουν συνισταμένην, ἴσην πρὸς μηδέν. Συνεπῶς, ἡ δύναμις F πρέπει νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν τριβὴν T . Ἐπειδὴ (ὡς εἶδομεν εἰς τὴν 118ην ἄσκησιν) ἡ ἰσχύς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$N = F \cdot v,$$

δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν σχέσιν

$$N = T \cdot v = \eta \cdot F_{\kappa} \cdot v$$

$$N = \eta \cdot B \cdot v \quad (1)$$

(διότι $F_{\kappa} = B$).

Λύσις εἰς τὸ σύστημα C.G.S.: Δίδονται: $\eta = 0,5$, $B = 30 \text{ kg} \cdot \text{r}^* = 30000 \text{ gr}^* = 30000 \cdot 981 \text{ dyn} = 3 \cdot 10^4 \cdot 9,81 \cdot 10^3 \text{ dyn} = 29,43 \cdot 10^6 \text{ dyn}$, $v = 6 \text{ cm/sec}$.

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὸν τύπον (1), λαμβάνομεν διὰ τὴν ἰσχύν

$$N = 0,5 \cdot 29,43 \cdot 10^6 \cdot 6 \frac{\text{dyn} \cdot \text{cm}}{\text{sec}} = 3 \cdot 29,43 \cdot 10^6 \frac{\text{erg}}{\text{sec}}$$

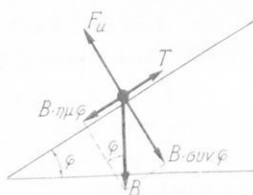
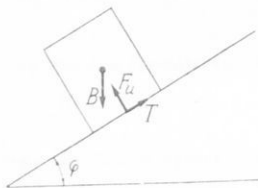
$$\eta \quad N = 88,3 \cdot 10^6 \frac{\text{erg}}{\text{sec}} = 8,83 \cdot 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{sec}}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $1 \text{ W} = 1 \text{ Joule/sec} = 10^7 \text{ erg/sec}$, ἔχομεν τελικῶς

$$N = 8,83 \text{ W}.$$

*Άσκησης 142α.

Ἐπὶ τοῦ σώματος ἐξασκούνται αἱ ἐξῆς δυνάμεις (σχ. 433): 1) τὸ βάρος του B ὑπὸ τῆς $\Gamma\eta\varsigma$ καὶ 2) αἱ δυνάμεις F_{κ} καὶ T ὑπὸ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.



Σχ. 433.

κεκλιμένον ἐπίπεδον καὶ τὴν ἄλλην (τὴν $B \cdot \sin \varphi$), κάθετον ἐπ' αὐτό.

Ὅταν ἡ γωνία κλίσεως φ γίνῃ ἴση πρὸς 22° , τὸ σῶμα ἀρχίζει νὰ ὀλισθαίνει μὲ σταθεράν ταχύτητα, δηλ., ἡ ἐπιτάχυνσις κατὰ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἐπειδὴ δὲ καὶ κατὰ τὴν κάθετον διεύθυνσιν ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος εἶναι, ὁμοίως, ἴση πρὸς μηδέν, ἔπεται ὅτι ἰσχύουν αἱ ἐξισώσεις

$$T - B \cdot \eta \mu \varphi = 0 \quad \eta \quad T = B \cdot \eta \mu \varphi \quad (1)$$

$$F_{\kappa} - B \cdot \sin \varphi = 0 \quad F_{\kappa} = B \cdot \sin \varphi \quad (2)$$

Ἡ τριβὴ ὀλισθήσεως T εἶναι ἴση πρὸς

$$T = \eta \cdot F_{\kappa}.$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς η λαμβάνομεν

$$\eta = \frac{T}{F_{\kappa}}.$$

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην τὸ T καὶ τὸ F_K διὰ τῶν ἴσων των, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), ἔχομεν

$$\eta = \frac{B \cdot \eta \mu \varphi}{B \cdot \sigma \eta \nu \varphi} = \frac{\eta \mu \varphi}{\sigma \eta \nu \varphi}$$

$$\eta = \frac{\eta}{\sigma \varphi \varphi} \quad (3)$$

Λίδεται: $\varphi = 22^\circ$. Ἀντικαθιστώντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον (3), λαμβάνομεν

$$\eta = \sigma \varphi 22^\circ.$$

Ἐκ τοῦ πίνακος τῆς σελίδος 365 λαμβάνομεν $\sigma \varphi 22^\circ = 0,404$. Ἄρα θὰ εἶναι

$$\eta = 0,404$$

ἢ, περίπου,

$$\eta = 0,4.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι' — ΑΕΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

*Άσκησης 169η.

Ἐπειδὴ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος εἶναι μικρότερον τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ ὕδραργύρου, ἔπεται ὅτι θὰ χρειασθῇ στήλη ὕδατος, μεγαλύτερου ὕψους. Ἐὰν ὀνομάσωμεν p τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν, ε_1 τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδραργύρου, ε_2 τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος, h_1 τὴν στήλην τοῦ ὕδραργύρου καὶ h_2 τὴν στήλην τοῦ ὕδατος, θὰ ἔχομεν

$$p = \varepsilon_1 \cdot h_1 \quad \text{καὶ} \quad p = \varepsilon_2 \cdot h_2.$$

Ἦτοι, εἶναι

$$\varepsilon_1 \cdot h_1 = \varepsilon_2 \cdot h_2.$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$h_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot h_1. \quad (1)$$

Λύσις εἰς τὸ σύστημα C.G.S.: Ἐκ τοῦ πίνακος τῆς σελίδος 94 λαμβάνομεν

$$\varepsilon_1 = 13,6 \frac{\text{gr}^*}{\text{cm}^3} = 13,6 \cdot 981 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^3}, \quad \varepsilon_2 = 1 \frac{\text{gr}^*}{\text{cm}^3} = 1 \cdot 981 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^3}, \quad \text{δίδεται δὲ } h_1 = 76 \text{ cm}$$

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον (1), λαμβάνομεν

$$h_2 = \frac{13,6 \cdot 981}{1 \cdot 981} \cdot 76 \frac{\text{dyn/cm}^3}{\text{dyn/cm}^3} \cdot \text{cm} = 13,6 \cdot 76 \text{ cm}$$

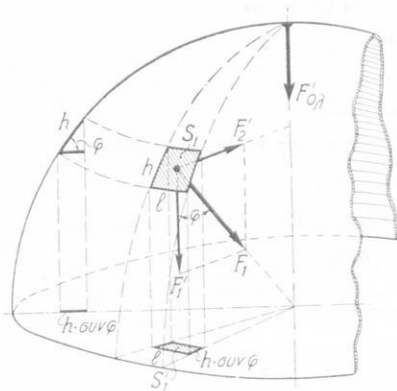
$$\eta \quad \underline{h_2 = 1033 \text{ cm}} \quad \eta \quad \underline{h_2 = 10,33 \text{ m.}}$$

*Άσκησης 171η.

Διὰ τὴν ὑπολογίσωμεν τὴν δύναμιν, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἡ ἀτμόσφαιρα ἐπὶ τοῦ ἐνὸς ἡμισφαιρίου, κατασκευάζομεν τὸ σχῆμα 434. Ἦδη, σκεπτόμεθα ὡς ἐξῆς: Ἐφ' ἐνὸς π ο λ ὺ μ ι κ ρ ο ὦ τμήματος τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἡμισφαιρίου (γραμμοσκιασμένου εἰς τὸ σχῆμα) ἐξασκεῖται ἡ δύναμις F_1 , ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτὸ καὶ ἴση πρὸς

$$F_1 = p \cdot S_1,$$

ἐνθα p εἶναι ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις καὶ S_1 τὸ ἐμβαδὸν τοῦ θεωρουμένου τμήματος τῆς ἐπιφανείας. Ἐπαναλαμβάνοντες τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς καὶ δι' ἄλλα τμήματα τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἡμισφαιρίου, τῶν ὁποίων τὰ ἐμβαδὰ συμβολίζομεν διὰ τῶν $S_2, S_3, \dots$, λαμβάνομεν



Σχ. 434.

κατὰ τὸν ἄξονα συμμετρίας ἐξασκουμένων δυνάμεων F'_1 θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$F'_{o\lambda} = F'_1 + F'_2 + F'_3 + \dots \quad (2)$$

Τὸ ἐμβαδὸν S_1 δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς παραλλήλογραμμον βάσεως l καὶ ὕψους h , ὁπότε ὁ τύπος (1) γράφεται

$$F'_1 = p \cdot l \cdot h \cdot \sin \varphi. \quad (3)$$

Προβάλλομεν τὸ ἐμβαδὸν S_1 ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ ἐπιπέδου, ὁπότε τὸ μὲν l , ὡς τόξον παραλλήλου κύκλου, προβάλλεται ἴσον πρὸς l , ἐνῶ τὸ h ἴσον πρὸς $h \cdot \sin \varphi$. Συνεπῶς, ἡ προβολὴ S'_1 τοῦ ἐμβαδοῦ S_1 θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$S'_1 = l \cdot h \cdot \sin \varphi. \quad (4)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4) λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$F'_1 = p \cdot S'_1.$$

Κατ' ἀναλογίαν, αἱ δυνάμεις $F'_2, F'_3, \dots$ θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς

$$F'_2 = p \cdot S'_2, \quad F'_3 = p \cdot S'_3, \dots$$

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2), λαμβάνομεν

$$F'_{o\lambda} = p \cdot S'_1 + p \cdot S'_2 + p \cdot S'_3 + \dots$$

Ἐξάγοντες κοινὸν παράγοντα τὸν p , ἔχομεν

$$F'_{o\lambda} = p \cdot (S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots) \quad (5)$$

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $(S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots)$ παρέχει τὸ ἐμβαδὸν $S'_{o\lambda}$ τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς

$$S'_{o\lambda} = S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots = \pi \cdot r^2 \quad (6)$$

ἐνθα r εἶναι ἡ ἀκτίς αὐτοῦ - δηλ., ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας.

Έκ τών έξισώσεων (5) και (6) λαμβάνομεν τόν τελικόν τύπον

$$F'_{ολ} = p \cdot \pi r^2. \quad (7)$$

Ο τύπος ούτος παρέχει τήν δύναμιν, ή όποία έξασκεΐται κατά τόν άξονα συμμετρίας του ήμισφαιρίου υπό της άτμοσφαιρικής πιέσεως. Έφ' όσον έκ του έξωτερικού του ήμισφαιρίου έχει αφαιρεθῇ ό άτμοσφαιρικός άήρ, έπεται ότι ό τύπος ούτος θα παρέχη και τήν δύναμιν, ή όποία άπαιτείται διά τόν άποχωρισμόν τών ήμισφαιρίων.

Λύσις είς τό Τεχνικόν Σύστημα: Δίδονται: $p = 1 \text{ Atm} = 1,033 \frac{\text{kg}r^*}{\text{cm}^2} = \frac{1,033}{10^{-4}} \frac{\text{kg}r^*}{\text{m}^2}$, $r = 21 \text{ cm} = 0,21 \text{ m}$, $\pi = 3,14$. Αντικαθιστώντες είς τόν τελικόν τύπον (7), λαμβάνομεν

$$F'_{ολ} = \frac{1,033}{10^{-4}} \cdot 3,14 \cdot 0,21^2 \frac{\text{kg}r^*}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^2 = 1,033 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot (2,1 \cdot 10^{-1})^2 \text{ kg}r^* = 1,033 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 4,41 \cdot 10^{-2} \text{ kg}r^* = 14,30 \cdot 10^2 \text{ kg}r^* \\ \eta \quad \underline{F'_{ολ} = 1430 \text{ kg}r^*}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ' — ΜΗΧΑΝΑΙ

*Άσκησις 181η.

Διά νά διατηρηται σταθερά ή ταχύτης του άεροπλάνου, πρέπει ή προωστική δύναμις F ν' άντισταθμίξη τήν άντίστασιν T .

Είς τήν άσκησιν 118 ευρομεν ότι ή ισχύς N είναι ίση πρός τό γινόμενον της δυνάμεως F επί τήν ταχύτητα v . *Ητοι

$$N = F \cdot v.$$

Έπειδή ή δύναμις F είναι ίση πρός τήν άντίστασιν T , δυνάμεθα νά γράψωμεν

$$N = T \cdot v.$$

Η άντίστασις T είναι (κατά τήν § 158) άνάλογος του τετραγώνου της ταχύτητος. Συνεπώς, ή ισχύς N —ώς ίση πρός $T \cdot v$ —θα είναι άνάλογος της τρίτης δυνάμεως της ταχύτητος. Άρα, διά νά διπλασιασθῇ ή ταχύτης του άεροπλάνου, πρέπει ή ισχύς του κινητήρος του νά γίνη 2^η φοράς μεγαλυτέρα—δηλ., πρέπει νά όκταπλασιασθῇ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΘ' — ΜΕΤΑΒΟΛΑΙ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

*Άσκησις 249η.

Η προσφερομένη θερμότης — τήν όποίαν άς καλέσωμεν $Q_{ολ}$ — θα καταναλωθῇ α) διά τήν θέρμανσιν του πάγου έκ της θερμοκρασίας $\theta_{αρχ} = -10^\circ \text{ C}$ μέχρι της θερμοκρασίας 0° C (θερμότης Q_1). β) Διά τήν τήξιν του πάγου (θερμότης Q_2) και γ) διά τήν θέρμανσιν του ύδατος από της θερμοκρασίας 0° C μέχρι της ζητουμένης θερμοκρασίας, τήν όποίαν άς καλέσωμεν $\theta_{τελ}$ (θερμότης Q_3).

Αί θερμότητες Q_1 , Q_2 , Q_3 δίδονται, ως γνωστόν, υπό τών τύπων

$$Q_1 = c_{παίγος} \cdot m \cdot (0 - \theta_{αρχ}) \quad (1)$$

$$Q_2 = \lambda \cdot m \quad (\lambda = \text{θερμότης τήξεως}) \quad (2)$$

$$Q_3 = c_{\text{ύδωρ}} \cdot m \quad (\theta_{τελ} - 0). \quad (3)$$

Διὰ τὴν λύσιν ἐνὸς προβλήματος τοιούτου εἵδους δὲν ἐνδείκνυται νὰ θέσωμεν

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_{ολ}$$

καί, ἐν συνεχείᾳ, νὰ λύσωμεν ὡς πρὸς $\theta_{τελ}$, ἰδίῳ, ἐνδεχομένως, ἢ θερμότης, τὴν ὁποίαν διαθέτομεν, νὰ μὴ εἶναι ἐπαρκὴς διὰ τὴν πλήρη τῆξιν τοῦ πάγου ἢ οὔτε καὶ διὰ τὴν θέρμανσιν αὐτοῦ μέχρι τοῦ σημείου τήξεως. Οὕτω, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰ δεδομένα εἰς τὸν τύπον

$$Q_{ολ} = c_{πάγος} \cdot m \cdot (\theta - \theta_{αρχ}) + \lambda \cdot m + c_{ὕδατος} \cdot m \cdot (\theta_{τελ} - \theta)$$

θὰ λάβωμεν

$$\theta_{τελ} = -60^\circ \text{ C},$$

τὸ ὁποῖον δηλοῖ ὅτι ἡ θερμοκρασία τοῦ ἐκ τῆς τήξεως τοῦ πάγου προκύπτοντος ὕδατος εἶναι κατωτέρα τοῦ σημείου τήξεως (0° C). Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο εἶναι παράλογον καὶ δεικνύει ὅτι ὁ ἄνω ὑπολογισμὸς ἐστηρίχθη ἐπὶ προϋποθέσεων, αἱ ὁποῖαι δὲν ἐκπληροῦνται - π.χ., διὰ τῆς διαθέσιμου θερμότητος δὲν ἐτάκη ὁλος ὁ πάγος κ.λ.

Ὁ ἀσφαλὴς τρόπος λύσεως τοῦ προβλήματος εἶναι ὁ ἑξῆς:

Πρῶτον ὑπολογίζομεν τὴν θερμότητα Q_1 καὶ ἐὰν εὕρωμεν αὐτὴν μεγαλύτεραν τῆς θερμότητος $Q_{ολ}$, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ διαθέσιμος θερμότης εἶναι ἀνεπαρκὴς διὰ τὴν θέρμανσιν τοῦ πάγου μέχρι 0° C , ὁπότε τὸ μόνον, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ υπολογίσωμεν, βάσει τοῦ τύπου (1), εἶναι ἡ θερμοκρασία τοῦ πάγου. Ἐὰν ἀντιθέτως τὸ Q_1 εἶναι μικρότερον τοῦ $Q_{ολ}$, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ διαθέσιμος θερμότης ὄχι μόνον εἶναι ἐπαρκὴς διὰ τὴν θέρμανσιν τοῦ πάγου μέχρι 0° C , ἀλλ' ὅτι ἀπομένει καὶ θερμότης διὰ τὴν τῆξιν. Εἰς τὴν δευτέραν ταύτην περίπτωσιν εὐρίσκομεν, ἐν συνεχείᾳ, διὰ τοῦ τύπου (2) τὴν ἀναγκαίαν διὰ τὴν τῆξιν θερμότητα Q_2 .

Ἐὰν τὸ ἄθροισμα $Q_1 + Q_2$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $Q_{ολ}$, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ θερμότης ἥτοι ἀνεπαρκὴς διὰ τὴν τῆξιν ὅλου τοῦ πάγου, ὁπότε τὸ μόνον, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ υπολογίσωμεν εἶναι ἡ ποσότης τοῦ πάγου, ὁ ὁποῖος ἐτάκη. Ἐὰν, ἀντιθέτως, τὸ ἄθροισμα $Q_2 + Q_3$ εἶναι μικρότερον τοῦ $Q_{ολ}$, τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ θερμότης $Q_{ολ}$ ἐπαρκεῖ διὰ τὴν τῆξιν ὅλου τοῦ πάγου καὶ ἀπομένει καὶ θερμότης διὰ τὴν περαιτέρω θέρμανσιν τοῦ προκύψαντος ὕδατος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι δυνατός ὁ ὑπολογισμὸς τῆς τελικῆς θερμοκρασίας τοῦ ὕδατος, τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου (3), ἐὰν θέσωμεν εἰς αὐτόν

$$Q_3 = Q_{ολ} - (Q_1 + Q_2).$$

Εἰς τὸ πρόβλημά μας εὐρίσκομεν $Q_1 = 500 \text{ cal}$ καὶ $Q_2 = 8000 \text{ cal}$. Ἄρα, μὲ τὴν δοθεῖσαν θερμότητα τῶν 3500 cal δὲν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τῆξιν ὁλοκλήρου τοῦ πάγου, ἀλλὰ μόνον $37,5 \text{ gr}$ αὐτοῦ καί, συνεπῶς, οὔτε θέρμανσιν τοῦ ὕδατος, ὅπως ζητεῖται εἰς τὴν ἐκφώνησιν.

ΑΛΦΑΒΗΤΙΚΟΝ ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Α
 Avogadro - σταθερά 298
 ἀγγλικὸν μίλον . . . 8
 ἀγωγή τῆς θερμότητος 337
 ἀδιάφορος ἰσορροπία . 97
 ἀδράνεια 71
 ἀεικίνητον 120
 ἀερικὸν θερμομετρον . 290
 ἀεροστρόβιλος . . . 354
 ἀεριοφθούμενον ἀερο-
 πλάνον 224
 ἀεροδύναμις 223
 ἀεροπλάνον 224
 ἀεροπλοῖον 205
 ἀεροστάθμη 178
 ἀερόστατον 205
 αἰωρητής 157
 ἀκόρεστοι αἵμοι . . . 320
 ἀκρίβεια ζυγῶν . . . 132
 ἀκουστότης 270
 ἀκτίνιον 8
 — ἀνά sec 59
 ἀμείωτος ταλάντως . 154
 ἀναβρυτήρ 353
 ἀνάκρουσις 136
 ἀνακύκλωσις 82
 ἀνάλυσις δυνάμεων . 23
 Ångström 5
 ἀναρροφητικὴ ἀντλία 226
 ἀνεμίστηρες 229
 ἀνεμόμετρον 360
 ἄνεμος 359
 ἀνισοσταχὲς εὐθύγραμ-
 μος κίνησις 50
 ἀνοικτὸν μαγόμετρον 213
 ἀντηχείον 268
 ἀντικυκλὼν 359
 ἀντίστασις 220, 223
 ἀντλία διὰ φλεβὸς ὑ-
 δατος 228
 ἄνυσμα 18
 ἀνυσματικὸν μέγεθος 18
 ἀνυψωτικὴ δύναμις ἀ-
 εροστάτου 205
 ἄνωσις 186
 ἀξίωμα τῆς ἀδράνειας 70
 — διατηρήσεως . . . 120
 — δράσεως καὶ
 ἀντιδράσεως 40
 ἀπλοῦς ὅχος 254
 ἀπόγειος αἶθρ 361
 ἀπόλυτον μηδὲν . 291, 297
 ἀπόλυτος θερμοκρασία 291
 — ὕγρασία 361

ἀπομάκρυνσις 143
 ἀπόσταξις 327
 ἀραιόμετρον 196
 ἀρμονικὴ ταλάντωσις 144
 ἀρνητικὴ ἐπιτάχυνσις 53
 ἀρτεσιανὸν φρεάρ . 179
 ἀρχὴ τῆς ἀνεξαερτησίας
 τῶν κινήσεων 63
 ἀρχὴ Ἀρχιμήδους 186, 205
 — Pascal 191, 202
 — συγκοινωνούν-
 των δοχείων 179
 — ὑποβαθμίσεως
 τῆς ἐνεργείας . . . 348
 Ἀρχιμήδους-ἀρχὴ 186, 205
 ἀσταθὲς ἰσορροπία . 97
 — πλεῖσις 188
 ἀσφαλιστικὸς λύχνος
 Davy 338
 Atwood - μηχανή . . . 73
 ἀτιοῦπος 116
 ἀτιομηχανή 349
 ἀτμός 317
 ἀτμοστρόβιλος 351
 ἀτμοσφαῖρα 358
 ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις . 206
 ἄτομα 234
 αὐτογραφικὸν βαρόμε-
 τρον 212
 αὐτόματος ζυγός . . . 133

Β

Βαθμός Baumé 196
 βαθμός Kelvin . 278, 291
 — Κελσίου 278
 — σταθερότητος 98
 — Fahrenheit . 278
 βαρογράφος 212
 βαρόμετρον 210
 — Fortin 211
 βάρος 89, 92
 βαροῦλκον 125
 βαρύτης 89
 Watt (μονάς) 116
 — ρυθμιστῆς 80
 βατώριον 117
 βεληνεκὲς 106
 Bernoulli - νόμος . 218
 βῆμα (χοχλίου) 129
 βιομηχανικὸς συντελε-
 στῆς ἀποδόσεως . 347
 βλητικὴ τροχιά 109
 Boyle - Mariotte - νό-
 μος 202
 βολή κατακόρυφος . 102

Βολὴ ὀριζοντία . . . 104
 —, πλαγία 105
 βρασμός 321
 βρετανικὸς ἴππος . . 116
 Brown - κίνησις . . . 333
 βροχὴ 363
 βροχόμετρον 363

Γ

Γαλάκτωμα 240
 γαλόνιον 8
 γάμμα (μονὰς μάξης) . 6
 γεωμετρικὸν ἄθροισμα 22
 γραμμάριον βάρους . 6
 — μάξης 5
 γραμμομοριακὸς ὄγκος 296
 γραμμομόριον 296
 γραμμόφωνον 269
 γραφικὴ παράστασις
 φαινομένου 10
 γωνία 8
 — βολῆς 105
 — προσβολῆς 223
 — στρέψεως 162
 γωνιακὴ ταχύτης . . . 59
 γωνιόμετρον 10

Δ

Davy - λύχνος 338
 δεκαπλασιαστικὸς ζυ-
 γός 134
 δεσμὸς 249
 δεῦτερον θερμοδυνα-
 μικὸν ἀξίωμα . . . 346
 Dewar - δοχεῖον . . . 341
 διάδοσις θερμότητος
 δι' ἀκτινοβολίας . 340
 διακρότημα 261
 διάλυμα 240
 διαλυτότης 240
 διάμηκες κῆμα 244
 διαπασῶν 257
 διαπιδύσεις 332
 διαστάσεις 13
 διάστημα (μουσικὸν) . 274
 διαστημόμετρον 9
 διαφορικὸν 357
 διάχυσις 332
 Diesel - μηχανή 353
 διμεταλλικὸν ἔλασμα 283
 — θερμομετρον 283
 διπλὴ ἐγγύσις 132
 δίχρονος βενζινοκίνη-
 τηρ 353

Doppler-Fizeau-φαινόμενον	261
δοχείον Dewar	341
δρόσος	362
δυναμική άνωσις	223
— ενέργεια	118
δύναμις	16
— επαναφοράς	148
— συναφείας	239
δυναμόμετρον	17
δύνη	6, 72
δυσθερμαγωγόν σώμα	337

E

*Εγκάρσιον κύμα	244
ειδική θερμότης	302
— υπό σταθεράν πίεσιν	306
— υπό σταθερόν όγκον	306
ειδικόν βάρος	94
έκκρεμείς	150
— μαθηματικόν	150
— Foucault	153
— φυσικόν	157
ελαστικά (ύλικά)	160
ελαστική κρούσις	139
ελαστον	164
ελευθέρα πτώσις	98
— ταλάντωσις	158
ελικόπτερον	225
ελίξ	224
έλιξισμός	161
ένέργεια	117
έντασις άνέμου	359
— ήχου	259
έξαεριστήρ πλοίων	219
έξαέρωσις	317
έξαιρετική	353
έξάτμισις	320
έξάχρωσις	327
έξηναγκασμένη ταλάντωσις	158
έξωτεριζαί δυνάμεις	135
ευστήματος	53
επιβράδυνσις	53
έπισκηπτική (σκόπευσις)	106
επιτάχυνσις	52
— άονητική	53
— τής βαρύτητος	90
έπιφανειακή τάσις	237
έργατης	126
έργιον	113
έργιον/sec	116
έργον	112
έσωτερικαί δυνάμεις	136
— συστήματος	136
έσωτερική ενέργεια	343
έτησιαί	361
εύαισθησία ζυγού	131
εύθραυστον (ύλικόν)	164

εύθύφορος (σκόπευσις)	106
εύσταθής ισορροπία	97
— πλεύσις	189

Z

Ζεύγος δυνάμεων	37
ζυγός	130
— Roberval	133

H

*Ηάλαρα	125
ήλεκτρικόν ψυγείον	355
ήμισφαίρια του Μαγδουρου	207
ήμιπερατή μεμβράνη	334
ήμιτονοειδής ταλάντωσις	144
ήχητικός σωλήν	265
ήχος	253
ήχώ	260

Θ

Θαλασσία αύρα	361
θεμελιώδεις μονάδες	3
θεμελιώδης νόμος τής θερμιδομετρίας	302
— τής Μηχανικής	68
— τής Ύδροστατικής	175
θερμιδόμετρον	303
— Lavoisier-Laplace	311
— δι' ύδατος	303
θερμική κίνησις	330
— μηχανή	345
θερμικός συντελεστής του όγκου υπό σταθεράν πίεσιν	289
— τής πίεσεως υπό σταθερόν όγκον	290
θερμής	301
θερμής/gr. grad	302
θερμής/grad	303
θερμιδυναμικός συντελεστής άποδόσεως	346
θερμιδοκρασία	276
— πήξεως	312
— τήξεως	310
θερμιόμετρον	277
— άντιστάσεως	279
— θερμοληκτρικόν	279
— μεγίστου και ελάχιστου	280
— ιατρικόν	279
— ματος	279
θερμότης	276
— διαλύσεως	308

θερμότης εξαερώσεως	326
— καύσεως	307
— τήξεως	311
θερμοφόρον δοχείον	341
θερμοχωρητικότητα	303
θεώρημα διατηρήσεως τής μηχανικής ενέργειας	119
— τής όρμης	136
— ροπών	31
— κέντρου παραλλήλων δυνάμεων	36
— Torricelli	220
θεωρία	4
θόρυβος	254

I

*Ιατρικόν θερμιόμετρον	279
ιδανικόν άέριον	297
ιδιοπερίοδος	145
ιδιοσυχνότης	145
ίμψ	126
ίντζα	8
ιονόσφαιρα	358
Joule	113
Joule/sec	116
ίππος	116
ισοβαρείς καμπύλαι	359
ισορροπία δυνάμεων	24
— ροπών	30
ισοτονικά διαλύματα	335
ισχύς	114

K

Καθαρός αριθμός	13
καλός άγωγός θερμότητος	337
καλός άγωγός θερμότητος	337
κανονικαί συνθήκαι	296
κανονικόν σημείον ζέσεως	324
καρποθραύστης	125
καταβληπτική άντλία	227
κατακόρυφος βολή	102
καταστατική έξίσωσις των άερίων	297
κατευθύνουσα δύναμις	148
κεκλιμένον έπίπεδον	121
κεκορεσμένος άτμός	318
κεντρική θερμάνσις	340
— κρούσις	139
κεντρομόλος δύναμις	75
— έπιτάχυνσις	62
κέντρον άνάσεως	189
— βάρους	93
— παραλλήλων δυνάμεων	36
— πίεσεως	185
κιλοβάτ	116
κιλοβατώριον	117
κιλοχέρης	61

κίνησις Brown . . .	333
κινητὴ τροχαλία . . .	122
κινητικὴ ἐνέργεια . . .	118
— θεωρία . . .	333
κλειστόν μανόμετρον . . .	214
κλιματισμός . . .	363
κοιλία . . .	249
κολλοειδὲς διάλυμα . . .	240
κόμβος . . .	46
Corti- ὄργανον . . .	272
κοχλίας . . .	129
κρίσιμος θερμοκρασία . . .	328
— ὄγκος . . .	328
— πίεσις . . .	382
— πυκνότης . . .	328
κροσσὸς συμβολῆς . . .	249
κρότος . . .	254
κρούσις . . .	139
κρουστικὸν κύμα . . .	257
κυκλικὴ συχνότης . . .	140
κύκλος ἀνά sec . . .	66
κυκλῶν . . .	359
κύλισις . . .	168
κύμα . . .	243
— διάμηκες . . .	244
— ἐγκάρσιον . . .	244
— κρουστικόν . . .	257
— στάσιμον . . .	250
— σφαιρικόν . . .	251

Λ

Λαβίς . . .	125
λήκυθος . . .	194
λίμπρα . . .	9
— ἀνά τετραγωνί- κην ἴντζαν . . .	177
Linde- μηχανή . . .	330
λίτρον . . .	7
λίτρον/sec . . .	216
Loschmidt- σταθερά . . .	298

Μ

Μάζα . . .	68
μαθηματικὸν ἔκκρεμὲς . . .	150
μανόμετρον . . .	213
—, ἀνοικτὸν . . .	213
—, κλειστὸν . . .	214
μανομετρικὴ κῆψα . . .	254
μεγάλυκος ἀνά sec . . .	60
μεγαχέρης . . .	61
μέθοδος τῶν μειγμά- των . . .	304
— τοῦ πολυγώνου . . .	22
μέση ἡλιακὴ ἡμέρα . . .	7
— πίεσις . . .	185
— ταχύτης . . .	50
μετάκεντρον . . .	190
μεταλλικὸν βαρόμε- τρον . . .	211
— μανόμετρον . . .	213
μεταφορά θερμότητος . . .	339

μετήχησις . . .	260
μέτρησις . . .	2
μέτρον (μονάς) . . .	4
— ἀνυσματικῶν μεγεθῶν . . .	18
— ἐλαστικότητος . . .	163
μετρονόμος . . .	9
μετωπικὴ ἐπιφάνεια . . .	221
μήκος κύματος . . .	246
μηχανὴ Atwood . . .	73
— Diesel . . .	353
— Linde . . .	330
μηχανικὴ ἐνέργεια . . .	119
μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος . . .	344
μικρόμετρον . . .	9
μικρὸν . . .	5
μιλιμπάρ (mBar) . . .	177
μοῖρα . . .	8
— ἀνά sec . . .	59
μοιρογνωμόνιον . . .	10
μονὰς μετρήσεως . . .	2
μονόμετρον μέγεθος . . .	19
μονωμένον σύστημα . . .	136
μόριον . . .	235
μοχλοβραχίων δυνά- μεως . . .	27
— ζεύγους . . .	37
μοχλός . . .	124

Ν

Ναυτικὸν μίλιον . . .	5
νέφος . . .	363
Newton (μονάς) . . .	7
νῆμα τῆς στάθμης . . .	89
νόμος . . .	2
— Boyle-Mariotte . . .	202
— Boyle - Mariot- te-Gay - Lussac . . .	293
— Bernoulli . . .	218
— Gay - Lussac (πρῶτος) . . .	289, 292
— Gay - Lussac (δευτέρος) . . .	289, 292
— Hooke . . .	161
— Νεύτωνος . . .	89
— τῆς παγκοσμίου ἐλξεως . . .	89
— τοῦ παραλληλο- γράμμου τῶν δυνάμεων . . .	20
— τῆς συνεχείας . . .	217

Ξ

Ξηρὸς πάγος . . .	329
-------------------	-----

Ο

Ὁδοντωτὸς τροχός . . .	126
οἰσπονευματόμετρον . . .	169

ὁμαλὴ εὐθύγραμμος κί- νησις . . .	45
— κυκλικὴ κίνησις . . .	59
ὁμαλὴς ἐπιταχυνομένη εὐθύγραμμος κίνη- σις . . .	54
ὁμοεπίπεδοι δυνάμεις . . .	25
ὁμίχλη . . .	363
ὄργανον Corti . . .	272
ὀρική ταχύτης . . .	222
ὄριον ἐλαστικότητος . . .	161
— θραύσεως . . .	163
ὄριμή . . .	85
οὐγγία . . .	9
οὐς . . .	271

Π

Παγκόσμιος σταθερά ἀερίων . . .	297
παράγωγοι μονάδες . . .	3
παροχή . . .	216
Papin- χύτρα . . .	324
Pascal- ἀρχή . . .	191, 202
πάχνη . . .	362
πείρασμα . . .	1
— Torricelli . . .	207
περίοδος . . .	60
περιεκτικότητα . . .	335
περιστροφικὴ ἀντίλη . . .	228
πῆξις . . .	312
πίεσις . . .	171
— προσερχομένη ἐξ ἐμβόλου . . .	191
πλαγία βολή . . .	105
πλαστικὴ κρούσις . . .	139
πλάτος . . .	113
πλάτυνσις τῆς Γῆς . . .	80
πλεῖσις . . .	188
πολύσπαστον . . .	124
ποῦς . . .	8
πραγματικὸν ἀέριον . . .	297
πρότυπον μέτρον . . .	4
— χυλιόγραμμον . . .	5
πρωτὸν θερμοδυναμι- κὸν ἀξίωμα . . .	345
πυθικὸν ὕδρον . . .	321
πυκνόμετρον . . .	196
πυκνότης . . .	95
πύκνωμα . . .	243
πύραυλος . . .	226

Ρ

Ράβδος . . .	267
ρευματικὴ γραμμή . . .	216
ρευστὸν . . .	171
ροπὴ ἀδραναίας . . .	135
— δυνάμεως . . .	27, 28, 29
— ζεύγους . . .	37
ρυθμιστὴς τοῦ Watt . . .	80

Σ

Σειρὴν	257
σημεῖον ζέσεως	321
— πήξεως	312
— τήξεως	310
σίφων	236
σιφώνιον	209
σκληρότης	164
σταθερά Avogadro	298
— Loschmidt	298
— παγκοσμίου	89
ἔλξεως	89
στάσιμον κύμα	250
στατήρ	133
στιγμιαία ταχύτης	50
στρατόσφαιρα	358
στρέμμα	7
στρέψις	162
στροβίλος	222
στροφική ταλάντωσις	156
σύζευξις	159
συμβολή κυμάτων	247
συμπιεστής	226
συνάφεια	238
συνεζευγμέναι ταλαν- τώσεις	159
σύνθεσις δυνάμεων	19
— κινήσεων	63
σύνθετος ἤχος	254, 262
συνισταμένη δυνάμεων	19
συνιστώσα δυνάμεως	19
συνοχή	236
συντελεστής ἀντιστά- σεως	221
— ἀποδόσεως	129
— γραμμικῆς δι- αστολῆς	281
— ἔλξεως	169
— ἐπιφανειακῆς τάσεως	238
— θερμικῆς ἀ- γωγιμότητος	339
— κυβικῆς δια- στολῆς	284
— τριβῆς	167
— κλίσεως	169
συντονισμός	268, 158
σύστημα μονάδων C. G. S.	3
— M. K. S.	3
— σωμάτων	135
συχνότης	60
σφαιρικὸν κύμα	251
σφῆν	127
σφυγμομετρητὸν	214
σχετική πυκνότης	96
— αἵρου	204
— ὑγρασία	361

σχετικὸν εἰδικὸν βάρος 96
σωλὴν τοῦ Νεύτωνος . 90

Τ

Ταλάντωσις	143
— ἀμείωτος	154
— ἐξηγαγασμένη	198
— στροφική	156
— φθίνουσα	155
τάσις κεκορεσμένων ἀ- τμῶν	318
ταχύτης	45
— διαδόσεως κύ- ματος	243
— ἑξαμίσεως	320
ταχύτης, μέση	50
— στιγμιαία	50
τετράχρονος βενζινοκι- νητήρ	352
τεχνική ἀτμόσφαιρα	173
— μονὰς μάζης 6, 73	
τεχνικὸν σύστημα μο- νάδων	3
τήεις	309
τόνος	6
Torr	177
Torrucelli - θεώρημα	220
— πείραμα	207
τριβή	166
— κλίσεως	169
— ὀλισθήσεως	166
τριχοειδικὰ φαινόμενα 239	
τροπόσφαιρα	358
τροχαλία	122
τροχιά	45

Υ

Υάρδα	8
υγρόμετρον	362
υγρὸς αἴρ	330
υδραγωγικὸν βαρόμε- τρον	210
— θερμομέτρον	277
υδραυλικὸν πιεστήριον 192	
υδραυλικὸς τροχὸς	229
υδροστατικὴ πίεσις	174
υδροστατικὸν παράδο- ξον	182
υδροστροφίλος	230
ὑπερηχητικὴ ταχύτης	256
ὑπέρηχος	271
ὑποβύχιον	190
ὑπόθεσις	4
ὑπομόχλιον	124
ὑστέρησις πήξεως	313
ὑφαισις	359
ὑψος βροχῆς	363
— ἤχου	269

Φ

Φαινόμενον	1
φαινόμενον Doppler - Fizeau	261
—, φυσικὸν	1
—, χημικὸν	1
φαινόμενον συντελε- στῆς κυβικῆς δια- στολῆς ὕγρου	286
φθίνουσα ταλάντωσις 155	
φθόγγος	274
Fortin - βαρόμετρον	211
Foucault - ἔκκρεμῆς	153
φυγόκεντρικὴ ἀντίλη	228
φυγόκεντρος δύναμις	76
— μηχανή	84
φυσικὴ ἀτμόσφαιρα	174
φυσικὸν ἔκκρεμῆς	157
— μέγεθος	1
— φαινόμενον	1
φωνητικαὶ χορδαί	273

Χ

Χάλαζα	363
χαρτατὸς	223
Hertz	60
χημικὸν φαινόμενον	1
χιλιογραμμόμετρον 28, 113	
— ἀνά sec	116
χιλιογράμμον μάζης	6
— βάρους	6
χιλιοθερμῆς	301
χιλιόκυκλος ἀνά sec	60
χιλιοστόμετρον στήλης ὑδατος	177
— ὑδραγύρου	177
χιών	363
Hooke - νόμος	161
χορδή	263
χορδαί	270
χρονοφωτογραφικὴ μέ- θοδος	101
χρυσοὺς κανὼν τῆς Μη- χανικῆς	128
χύτρα Papin	324

Ψ

Ψεκάστηρ	218
ψυκτικὴ μηχανή	354

Ω

ᾠθησις δυνάμεως	86
ὠσμωσις	334
ὠσμωτικὴ πίεσις	335

ΕΞΕΔΟΘΗΣΑΝ ΥΠΟ ΤΩΝ ΙΔΙΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΟΠΤΙΚΗ - ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ - ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ
ΑΤΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΕΝ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΙ ΜΕΤΑ ΤΟΥ κ. Δ. ΤΣΑΚΑΡΙΣΙΑΝΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ - ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ - ΘΕΡΜΟΤΗΣ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΟΠΤΙΚΗ - ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ - ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ
ΑΤΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

Εἰς τὰ βιβλία τῶν «Ἀσκήσεων» ἀφ' ἑνὸς μὲν, λύνονται ὅλαι αἱ ἀσκήσεις, αἱ περιεχόμεναι εἰς τοὺς δύο τόμους τῶν «Στοιχείων Φυσικῆς», ἀφ' ἑτέρου δὲ περιλαμβάνονται καὶ ἀσκήσεις ἄλυτοι μετὰ τῆς ἀπαντήσεως.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΑΙΣΧΙΟΤΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ - ΔΟΜΗ - ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ
ΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΙΕΣ - ΧΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ - ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ - ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ - ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ - ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

✓



0020637712

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

