ΑΛΚΙΝΟΟΥ Ε. ΜΑΖΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΝ ΠΡΟΤΥΠΟΝ ΣΧΟΛΗΝ
ΤΟΥ ΔΙΔΑΣΚΑΛΕΙΟΥ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΣΠΟΥΔΑΣΤΑΣ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΟΠΤΙΚΗ - ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ - ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

ΕΚΔΟΤΗΣ: ΠΕΤΡΟΣ Κ. ΡΑΝΟΣ
ΠΕΣΜΑΖΟΓΛΟΥ 5^{Ε} — ΑΘΗΝΑΙ
1950

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
ΦΥΣΙΚΗΣ

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

ΑΛΚΙΝΟΟΥ Ε. ΜΑΖΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΝ ΠΡΟΤΥΠΟΝ ΣΧΟΛΗΝ
ΤΟΥ ΔΙΔΑΣΚΑΛΕΙΟΥ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΣΠΟΥΔΑΣΤΑΣ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΟΠΤΙΚΗ – ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ – ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

ΕΚΔΟΤΗΣ: ΠΕΤΡΟΣ Κ. ΡΑΝΟΣ
ΠΕΣΜΑΖΟΓΛΟΥ 5ε – ΑΘΗΝΑ
1950

ΟΠΤΙΚΗ

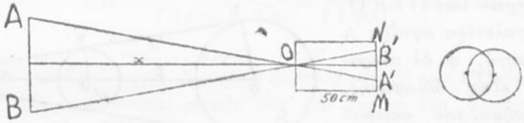
1. ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ ΔΙΑΔΟΣΙΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ ΦΩΤΟΜΕΤΡΙΑ

1.— *Ἐπὶ τῆς κατακορύφου ἕδρας ΜΝ σκοτεινοῦ θαλάμου σχηματίζεται τὸ εἴδωλον ἀντικειμένου ΑΒ, τὸ ὁποῖον ἔχει ὕψος 300 m. Τὸ μῆκος τοῦ εἰδώλου εἶναι 3 cm καὶ ἡ ὀπὴ Ο τοῦ θαλάμου ἀπέχει 50 cm ἀπὸ τὴν ἕδραν ΜΝ. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ΑΒ ἀπὸ τὸν τόπον τῆς παρατηρήσεως. 2) Δεχόμεθα ὅτι δύο σημεῖα τοῦ ἀντικειμένου δὲν διακρίνονται κεχωρισμένα ἐπὶ τοῦ εἰδώλου, ὅταν ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων τῶν φωτεινῶν κύκλων, τοὺς ὁποίους παράγουν τὰ δύο αὐτὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς ἕδρας ΜΝ, εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα ἑκάστου τῶν κύκλων τούτων. Γνωρίζοντες λοιπὸν ὅτι δύο σημεῖα τοῦ ἀντικειμένου ΑΒ πρέπει νὰ ἀπέχουν τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο περισσότερον ἀπὸ 5 m, διὰ νὰ φαίνωνται κεχωρισμένα ἐπὶ τοῦ εἰδώλου, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάμετρος τῆς ὀπῆς τοῦ θαλάμου.*

1) Ἐὰν x εἶναι ἡ ζητουμένη ἀπόστασις, τότε ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ἔχομεν:

$$\frac{x}{50}=\frac{30\,000}{3} \quad ἢ \quad x = 5\,000 \text{ m} = 5 \text{ km}.$$

2) Ἡ ἀπόστασις τῆς ὀπῆς Ο ἀπὸ τὸν φωτεινὸν κύκλον, τὸν ὁποῖον παρά-



Σχ. 1

γει ἐπὶ τοῦ ΜΝ ἕνα σημεῖον τοῦ ἀντικειμένου, εἶναι πολὺ μικρὰ ἐν σχέσει μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τὸν θάλαμον. Διὰ τοῦτο ἠμποροῦμε νὰ θεωρήσωμεν ὅτι ἡ ἀκτὶς ρ κάθε φωτεινοῦ κύκλου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς ὀπῆς Ο, ὁπότε εἶναι: $\frac{\rho}{50}=\frac{5}{5\,000}$ ἢ $\rho = 0{,}05 \text{ cm} = 0{,}5 \text{ mm}$.

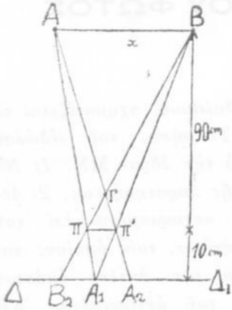
Ἡ διάμετρος τῆς ὀπῆς εἶναι: $2\rho = 1$ mm.

2.— *Ἔμπροσθεν κατακορύφου πετάσματος καὶ εἰς ἀπόστασιν 10 cm ἀπὸ αὐτὸ εὑρίσκεται τετραγωνικὴ ἀδιαφανὴς πλάξ, παράλληλος πρὸς τὸ πέτασμα, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ εἶναι 2 cm. Δύο ἠλεκτρικοὶ λαμπτῆρες διὰ πυρακτώσεως ἀποτελοῦνται ἀπὸ εὐθύγραμμα σύρματα, τὰ ὁποῖα εἶναι κατακόρυφα καὶ ἀπέχουν 1 m* *ἀπὸ τὸ πέτασμα. Ἐπὶ τοῦ πετάσματος σχηματίζονται δύο σκιαὶ τῆς πλακός, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μίαν κατακόρυφον πλευρὰν κοινήν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο διαπύρων συρμάτων.*

Ἐὰν θεωρήσωμεν ὁριζόντιον ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον τέμνει καθέτως τὰ δύο σύρματα, τὴν πλάκα καὶ τὸ πέτασμα, τότε θὰ ἔχωμεν τὸ σχῆμα 2.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι:

$$\frac{B_2A_1}{\Pi\Pi'}=\frac{100}{90}, \quad \text{ἄρα} \quad B_2A_1 = 2\times\frac{10}{9}=\frac{20}{9}\ \text{cm}.$$



Σχ. 2

Ἐπειδὴ ὅμως καὶ ἡ πηγὴ Α ἀπέχει 1 m ἀπὸ τὸ πέτασμα $\Delta\Delta_1$, εἶναι:

$$A_1A_2 = B_2A_1. \quad \text{Ὥστε:} \quad B_2A_2=\frac{40}{9}\ \text{cm}.$$

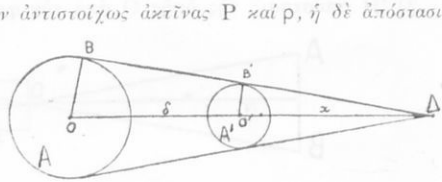
Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΓΒ καὶ $A_2\Gamma B_2$ εὑρίσκομεν ὅτι ὁ λόγος $\frac{x}{B_2A_2}$ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν τῶν δύο τριγώνων. Ἐὰν λοιπὸν ὀνομάσωμεν y τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΠΓΠ', ἔχομεν:

$$\frac{B_2A_2}{\Pi\Pi'}=\frac{y+10}{y} \quad \text{ἢ} \quad \frac{40}{18}=\frac{y+10}{y}.$$

Ὥστε εἶναι $y = 8{,}18$ cm καὶ ἑπομένως τὰ ὕψη τῶν τριγώνων ΑΓΒ καὶ $A_2\Gamma B_2$ ἀντιστοίχως εἶναι: 81,82 καὶ 18,18 cm. Ἄρα ἔχομεν:

$$\frac{x}{B_2A_2}=\frac{81{,}82}{18{,}18} \quad \text{ἢ} \quad x=\frac{40\times 81{,}82}{9\times 18{,}18}=20\ \text{cm}.$$

3. — *Δύο σφαῖραι Α καὶ Α' ἔχουν ἀντιστοίχως ἀκτῖνας Ρ καὶ ρ, ἡ δὲ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν κέντρων των Ο καὶ Ο' εἶναι δ. Ἡ μεγαλυτέρα σφαῖρα Α εἶναι φωτεινὴ πηγή, ἡ δὲ μικροτέρα σφαῖρα Α' εἶναι ἀδιαφανής. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ σκιεροῦ κώνου, ὁ ὁποῖος σχηματίζεται ὄπισθεν τῆς σφαίρας Α'. Ἐφαρμογή: Ρ = 108 ρ καὶ δ = 23 240 ρ.*



Σχ. 3

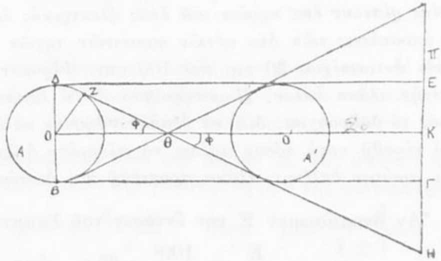
Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΒΔ καὶ Ο'Β'Δ ἔχομεν:

$$\frac{O\Delta}{O'\Delta}=\frac{OB}{O'B'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\delta+x}{x}=\frac{P}{\rho}, \quad \text{ἄρα} \quad x=\delta\,\frac{\rho}{P-\rho}.$$

Ἐφαρμογή: $x=\frac{23\,240}{107}\,\rho.$

4. — *Δύο ἴσαι σφαῖραι Α καὶ Α' ἔχουν ἀκτῖνα ρ, ἡ δὲ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο κέντρων των Ο καὶ Ο' εἶναι δ. Ἡ σφαῖρα Α εἶναι φωτεινὴ πηγή, ἡ δὲ σφαῖρα Α' εἶναι ἀδιαφανής. Ὄπισθεν τῆς Α' τοποθετεῖται πέτασμα, καθέτως πρὸς* *τὴν εὐθεῖαν ΟΟ′, καὶ εἰς ἀπόστασιν ε ἀπὸ τὸ κέντρον Ο′ τῆς ἀδιαφανοῦς σφαίρας. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων τῆς σκιᾶς καὶ τοῦ ὑποσκιάσματος, οἱ ὁποῖοι σχηματίζονται ἐπὶ τοῦ πετάσματος. Ἐφαρμογή :* $\rho = 10$ cm, $\delta = 40$ cm *καὶ* $\varepsilon = 20$ cm.

Αἱ ἐξωτερικαὶ καὶ ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι τῶν δύο σφαιρῶν καθορίζουν ἐπὶ τοῦ πετάσματος Π ἕνα κύκλον ἀπολύτου σκιᾶς, ἀκτῖνος ΚΓ καὶ μίαν περιοχὴν ὑποσκιάσματος, ἡ ὁποία περιορίζεται ἀπὸ περιφέρειαν, ἔχουσαν ἀκτῖνα ΚΗ. Εἶναι προφανὲς ὅτι $ΚΓ = ΟΒ = \rho$.



Σχ. 4

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΖΘ καὶ ΗΚΘ εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως εἶναι :

$$\frac{ΚΗ}{ΟΖ} = \frac{ΚΘ}{ΖΘ}$$

$$\text{ἢ} \quad ΚΗ = \frac{ΟΖ \times ΚΘ}{ΖΘ} = \frac{ΟΖ \times ΚΘ}{\sqrt{ΟΘ^2 - ΟΖ^2}} .$$

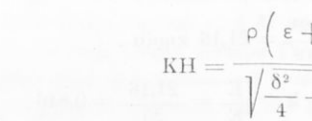
Ἐπειδὴ εἶναι : $ΟΖ = \rho \cdot \quad ΟΘ = \frac{\delta}{2} \quad ΚΘ = \varepsilon + \frac{\delta}{2}$, ἔχομεν :

$$ΚΗ = \frac{\rho\left(\varepsilon + \frac{\delta}{2}\right)}{\sqrt{\frac{\delta^2}{4} - \rho^2}} = \frac{\rho\,(2\varepsilon + \delta)}{\sqrt{\delta^2 - 4\rho^2}} .$$

Ἐφαρμογή : $ΚΗ = \frac{10 \times 80}{\sqrt{1\,600 - 400}} = \frac{800}{\sqrt{1\,200}} = 23{,}10$ cm.

5. — *Δύο φωτειναὶ πηγαὶ* Α *καὶ* Β *ἀπέχουν μεταξύ των* 150 cm. *Καθέτως πρὸς τὴν εὐθεῖαν* ΑΒ *τοποθετεῖται μεταξὺ τῶν δύο πηγῶν ἕνα φωτόμετρον τοῦ* Bunsen *καὶ εἰς τοιαύτην θέσιν ὥστε νὰ ἐξαφανισθῇ ἡ κηλὶς τοῦ χάρτου. Ἔπειτα ἐναλλάσσονται αἱ δύο πηγαὶ καὶ παρατηρεῖται ὅτι, διὰ νὰ ἐξαφανισθῇ πάλιν ἡ κηλὶς τοῦ χάρτου, πρέπει οὗτος νὰ μετακινηθῇ κατὰ* 30 cm. *Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν ἐντάσεων τῶν δύο φωτεινῶν πηγῶν ;*

Ἔστω ὅτι x καὶ y εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῶν δύο πηγῶν Α καὶ Β ἀπὸ τὸ φύλλον τοῦ χάρτου εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν. Ὅταν αἱ πηγαὶ ἀνταλλάξουν τὰς θέσεις των, αἱ ἀποστάσεις των ἀπὸ τὸ φύλλον τοῦ χάρτου γίνονται y καὶ x. Ἔχομεν λοιπὸν τὰς σχέσεις :



Σχ. 5

$$y + x = 150 \cdot \qquad y - x = 30 .$$

Ἄρα εἶναι : $2y = 180$

ἢ $y = 90$ cm · ὥστε : $x = 60$ cm.

Ἂν E_1 καὶ E_2 εἶναι αἱ ἐντάσεις τῶν φωτεινῶν πηγῶν A καὶ B, ἔχομεν τὴν σχέσιν: $\dfrac{E_2}{E_1} = \dfrac{90^2}{60^2}$ ἢ $\dfrac{E_2}{E_1} = \dfrac{9}{4} = 2{,}25$.

6 — *Εἰς ἕνα φωτόμετρον τοῦ Rutherford παρατηροῦμεν ὅτι αἱ σκιαί, τάς ὁποίας ρίπτουν ἕνα κηρίον καὶ ἕνας ἠλεκτρικὸς λαμπήρ, ἔχουν τὸ αὐτὸ βάθος, ὅταν αἱ ἀποστάσεις τῶν δύο αὐτῶν φωτεινῶν πηγῶν ἀπὸ τὸ ἡμιδιαφανὲς διάφραγμα εἶναι ἀντιστοίχως 20 cm καὶ 100 cm. Φέρομεν εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν λαμπτῆρα μίαν λεπτὴν πλάκα ὑάλου. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ λαμπτὴρ πρέπει νὰ πλησιάσῃ κατὰ 8 cm πρὸς τὸ διάφραγμα, διὰ νὰ ἐξακολουθήσουν νὰ ἔχουν αἱ δύο σκιαὶ τὸ ἴδιον βάθος. Νὰ εὑρεθῇ κατὰ πόσον πρέπει νὰ πλησιάσῃ ὁ λαμπτὴρ πρὸς τὸ διάφραγμα, ἐὰν εἰς τὴν πρώτην ὑαλίνην πλάκα προστεθῇ καὶ δευτέρα ὁμοία πλάξ.*

Ἂν ὀνομάσωμεν E τὴν ἔντασιν τοῦ λαμπτῆρος, τότε εἶναι:

$$\frac{E}{1} = \frac{100^2}{20^2} = 25 \cdot \quad \text{ἄρα: } E = 25 \text{ κηρία}.$$

Ἡ ὑαλίνη πλάξ, ἡ ὁποία φέρεται εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν λαμπτῆρα, ἀπορροφᾷ ἕνα μέρος τῆς φωτεινῆς ἐνεργείας ποὺ προσπίπτει ἐπ' αὐτῆς. Ἔστω ὅτι ἡ πλὰξ ἀφήνει νὰ διέλθῃ δι' αὐτῆς ἕνα κλάσμα k τῆς φωτεινῆς ἐνεργείας, ἡ ὁποία προσπίπτει ἐπὶ τῆς πλακός. Ἄρα, μετὰ τὴν παρεμβολὴν τῆς πλακός, ἡ φαινομένη ἔντασις τοῦ λαμπτῆρος γίνεται: $E' = k\,E = 25\,k$ **κηρία.**

Τότε ἔχομεν πάλιν τὴν σχέσιν:

$$\frac{E'}{1} = \frac{(100-8)^2}{20^2} \quad \text{ἢ} \quad E' = \frac{92^2}{20^2} = 21{,}16 \text{ κηρία}.$$

Ἄρα ὁ συντελεστὴς k ἔχει τὴν τιμήν: $k = \dfrac{E'}{E} = \dfrac{21{,}16}{25} = 0{,}846$.

Ἐὰν τώρα προσθέσωμεν καὶ δευτέραν ὁμοίαν πλάκα ὑάλου, ἡ φαινομένη ἔντασις τοῦ λαμπτῆρος γίνεται:

$$E'' = k\,E' \quad \text{ἢ} \quad E'' = k^2 E = 0{,}846^2 \times 25 \text{ κηρία}.$$

Καὶ ἐπειδὴ ἡ E'' εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν E', πρέπει νὰ πλησιάσῃ ὁ λαμπτὴρ πρὸς τὸ διάφραγμα, ἔστω κατὰ x cm. Ἂν α εἶναι ἡ νέα ἀπόστασις τοῦ λαμπτῆρος ἀπὸ τὸ διάφραγμα, τότε ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{E''}{1} = \frac{\alpha^2}{20^2} \quad \text{ἢ} \quad \alpha = \sqrt{20^2 \times E''} = \sqrt{400 \times 0{,}846^2 \times 25} = 84{,}6 \text{ cm}.$$

Ἄρα ὁ λαμπτὴρ πρέπει νὰ πλησιάσῃ κατά: $x = 92 - 84{,}6 = 7{,}4$ cm.

7. — *Αἱ ἐντάσεις δύο φωτεινῶν πηγῶν A καὶ B ἔχουν λόγον $I_1 : I_2 = \mu : \nu$, ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν δύο πηγῶν εἶναι d. Εἰς ποίαν θέσιν μεταξὺ τῶν δύο πηγῶν πρέπει νὰ τεθῇ πέτασμα, καθέτως πρὸς τὴν AB, ὥστε αἱ δύο ὄψεις αὐτοῦ νὰ δέχωνται τὸν αὐτὸν φωτισμόν; Ἐφαρμογή:* $d = 5$ m · $\mu : \nu = 18 : 7$.

Ἔστω x ἡ ἀπόστασις τοῦ πετάσματος ἀπὸ τὴν φωτεινὴν πηγὴν A.

Τότε εἶναι: $\dfrac{I_2}{I_1} = \left(\dfrac{d-x}{x}\right)^2$ ἢ $\sqrt{\dfrac{I_2}{I_1}} = \dfrac{d-x}{x}$.

Ἄρα: $x = \dfrac{d}{1+\sqrt{\dfrac{I_2}{I_1}}} = \dfrac{d}{1+\sqrt{\dfrac{\nu}{\mu}}}$.

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $x = \dfrac{5}{1+\sqrt{\dfrac{7}{18}}} = \dfrac{5}{1{,}62} = 3{,}08$ m.

8.— *Δύο φωτειναὶ πηγαὶ Α καὶ Β ἀπέχουν μεταξύ των $d = 5$ m, αἱ δὲ ἐντάσεις αὐτῶν ἔχουν λόγον $\nu : 1 = 6 : 1$. Εἰς ποίαν θέσιν πρέπει νὰ τεθῇ πέτασμα, καθέτως πρὸς τὴν ΑΒ, ὥστε αἱ δύο ὄψεις αὐτοῦ νὰ φωτίζωνται ἐξ ἴσου;*

Ἔστω **x** ἡ ἀπόστασις τοῦ πετάσματος ἀπὸ τὴν πηγὴν Β, τῆς ὁποίας ἡ ἔντασις εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα. Τότε ἔχομεν τὴν γνωστὴν σχέσιν τῆς φωτομετρίας:

$$\frac{\nu}{1} = \left(\frac{d-x}{x}\right)^2 \quad \text{ἢ} \quad \sqrt{\nu} = \frac{d-x}{x}. \quad \text{Ἄρα} \quad x = \frac{d}{1 \pm \sqrt{\nu}} .$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν:

$$x_1 = \frac{5}{1+\sqrt{6}} = \frac{5}{3{,}45} = 1{,}45 \text{ m} \cdot \qquad x_2 = \frac{5}{1-\sqrt{6}} = \frac{5}{-1{,}45} = -3{,}45 \text{ m}.$$

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ πέτασμα εὑρίσκεται μεταξὺ Α καὶ Β· εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν τοῦτο εὑρίσκεται πέραν τοῦ Β.

9.— *Δύο φωτειναὶ πηγαὶ Α καὶ Β, τὰς ὁποίας θεωροῦμεν ὡς φωτεινὰ σημεῖα, ἔχουν ἐντάσεις μ καὶ ν, ἡ δὲ μεταξύ των ἀπόστασις εἶναι d. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ τοποθετεῖται μικρὸν πέτασμα Γ, τὸ ὁποῖον φωτίζεται ἐξ ἴσου ὑπὸ τῶν δύο πηγῶν. Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ πετάσματος ἀπὸ τὸ φωτεινὸν σημεῖον Α; Ποία εἶναι ἡ σχετικὴ θέσις τῶν Α, Β καὶ Γ εἰς τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις: α) ὅταν εἶναι:* $d = 10$ m · $\mu = 1$ · $\nu = 4$ · *καὶ β) ὅταν εἶναι:* $d = 10$ m · $\mu = 1$ · $\nu = 1/4$.

Ἔστω x ἡ ἀπόστασις τοῦ πετάσματος Γ ἀπὸ τὸ φωτεινὸν σημεῖον Α. Τότε ἔχομεν:

$$\frac{\nu}{\mu} = \left(\frac{d-x}{x}\right)^2 \quad \text{καὶ} \quad \frac{\nu}{\mu} = \left(\frac{d}{x} - 1\right)^2 . \quad \text{Ἄρα εἶναι:} \quad x = \frac{d}{1 \pm \sqrt{\dfrac{\nu}{\mu}}} .$$

α) Διὰ $d = 10$ m · $\mu = 1$ · $\nu = 4$ λαμβάνομεν: $x = \dfrac{10}{1 \pm \sqrt{4}}$ ·

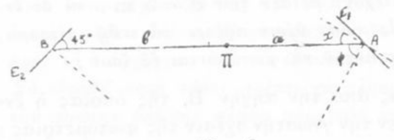
ἤτοι εἶναι: $x_1 = 3\,^1/_3$ m · τὸ Γ εἶναι μεταξὺ Α καὶ Β·
ἡ σχετικὴ θέσις αὐτῶν εἶναι: Α — Γ — Β·
$x_2 = -10$ m · τὸ Γ εἶναι πέραν τοῦ Α
καὶ ἡ σχετικὴ θέσις των εἶναι: Γ — Α — Β.

β) Διὰ $d = 10$ m · $\mu = 1$ · $\nu = 1/4$ λαμβάνομεν: $x = \dfrac{10}{1 \pm \sqrt{\dfrac{1}{4}}}$

ἤτοι εἶναι: $x_1 = 6\,^2/_3$ m · τὸ Γ εἶναι μεταξὺ Α καὶ Β
καὶ ἡ σχετικὴ θέσις των εἶναι: Α — Γ — Β·
$x_2 = 20$ m · τὸ Γ εἶναι πέραν τοῦ Β
καὶ ἡ σχετικὴ θέσις των εἶναι: Α — Β — Γ.

10.— *Μία φωτεινὴ πηγὴ Π ἀπέχει $\alpha = 3{,}20$ dm ἀπὸ μικρὰν ἐπιφάνειαν E_1 καὶ $\beta = 3{,}64$ dm ἀπὸ ἄλλην μικρὰν ἐπιφάνειαν E_2. Αἱ δύο ἐπιφάνειαι σχηματίζουν γωνίαν 45° μὲ τὴν προσπίπτουσαν ἀκτῖνα. Νὰ εὑρεθῇ κατὰ ποίαν γωνίαν πρέπει νὰ κλίνωμεν τὴν ἐπιφάνειαν E_1, ὥστε ὁ φωτισμὸς τῶν δύο ἐπιφανειῶν νὰ εἶναι ὁ αὐτός.*

Ἀρχικῶς αἱ δύο ἐπιφάνειαι σχηματίζουν γωνίαν 45° μὲ τὴν εὐθεῖαν ΑΠΒ. Ἔστω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια E_1 πρέπει νὰ σχηματίζῃ γωνίαν x μὲ τὴν ΠΑ, διὰ νὰ ἔχουν αἱ δύο ἐπιφάνειαι τὸν αὐτὸν φωτισμόν. Ἐὰν εἶναι I ἡ ἔντασις τῆς φωτεινῆς πηγῆς Π, τότε θὰ ἔχωμεν τὴν ἀκόλουθον σχέσιν, ἡ ὁποία ἐκφράζει τὴν ἰσότητα τοῦ φωτισμοῦ τῶν δύο ἐπιφανειῶν:



Σχ. 6

$$\Phi = \frac{I}{\alpha^2}\,\text{συν}\,\varphi = \frac{I}{\beta^2}\,\text{συν}\,45^0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\text{ημ}\,x}{\alpha^2} = \frac{\text{συν}\,45^0}{\beta^2}.$$

Ἄρα εἶναι: $\text{ημ}\,x = \dfrac{\alpha^2}{\beta^2}\,\text{συν}\,45^0$

ἤτοι $\text{ημ}\,x = \dfrac{3{,}20^2}{3{,}64^2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ $x = 33^0\ 7'\ 38''$.

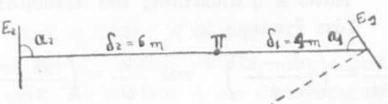
11.— *Δύο μικραὶ ἐπιφάνειαι E_1 καὶ E_2 φωτίζονται ἀπὸ ἕνα φωτεινὸν σημεῖον. Αἱ ἀποστάσεις τῶν ἐπιφανειῶν ἀπὸ τὴν φωτεινὴν πηγὴν εἶναι $\delta_1 = 4$ m καὶ $\delta_2 = 6$ m, αἱ δὲ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ ἐπιφάνειαι μὲ τὴν προσπίπτουσαν ἀκτῖνα, εἶναι ἀντιστοίχως $\alpha_1 = 70^0$ καὶ $\alpha_2 = 90^0$. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν φωτισμῶν τῶν δύο τούτων ἐπιφανειῶν;*

Ἐὰν I εἶναι ἡ ἔντασις τῆς πηγῆς, τότε εἶναι: ὁ φωτισμὸς τῆς ἐπιφανείας E_1:

$$\Phi_1 = \frac{I}{\delta_1^{\,2}}\,\text{ημ}\,\alpha_1$$

ὁ φωτισμὸς τῆς ἐπιφανείας E_2:

$$\Phi_2 = \frac{I}{\delta_2^{\,2}}\,\text{ημ}\,\alpha_2.$$



Σχ. 7

Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς λαμβάνομεν:

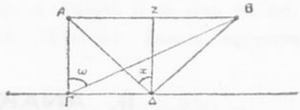
$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{\delta_2^{\,2}}{\delta_1^{\,2}} \times \frac{\text{ημ}\,\alpha_1}{\text{ημ}\,\alpha_2}$$

ἢ $\dfrac{\Phi_1}{\Phi_2} = \dfrac{6^2}{4^2} \times \dfrac{\text{ημ}\,70^0}{\text{ημ}\,90^0} = \dfrac{36 \times 0{,}9397}{16}$ καὶ $\dfrac{\Phi_1}{\Phi_2} = 2{,}114$.

12.— *Δύο ὅμοιοι λαμπτῆρες εὑρίσκονται εἰς ὕψος 9 m ὑπεράνω τοῦ ἐδάφους, ἡ δὲ ὁριζοντία ἀπόστασίς των εἶναι 12 m. Ἕκαστος λαμπτὴρ ἔχει ἔντασιν 500 κηρίων. Νὰ εὑρεθῇ ὁ φωτισμὸς τοῦ ἐδάφους: α) ἀκριβῶς κάτωθεν ἑκάστου λαμπτῆρος καὶ β) εἰς τὸ μέσον τῆς μεταξὺ τῶν λαμπτήρων ἀποστάσεως.*

α) Ἔστω Α καὶ Β οἱ δύο λαμπτῆρες καὶ Γ τὸ σημεῖον κάτωθεν τοῦ λαμπτῆρος Α. Ὁ φωτισμός, τὸν ὁποῖον παράγει ὁ λαμπτὴρ Α εἰς τὸ Γ, εἶναι:

$$\Phi_1 = \frac{500}{\mathrm{A\Gamma}^2} = \frac{500}{9^2} = 6{,}173 \text{ lux}.$$



Σχ. 8

Ὁ δὲ φωτισμός, τὸν ὁποῖον παράγει ὁ λαμπτὴρ Β εἰς τὸ Γ, εἶναι:

$$\Phi_2 = \frac{500}{\mathrm{B\Gamma}^2}\,\text{συν}\,\omega = \frac{500}{\mathrm{B\Gamma}^2} \times \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}}$$

ἄρα: $$\Phi_2 = \frac{500 \times 9}{(\sqrt{9^2 + 12^2}\,)^3} = \frac{4\,500}{(\sqrt{225})^3} = 1{,}333 \text{ lux}.$$

Ὥστε ὁ ὅλος φωτισμὸς εἰς τὸ Γ, εἶναι:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 6{,}173 + 1{,}333 = 7{,}506 \text{ lux}.$$

β) Εἰς τὸ σημεῖον Δ τοῦ ἐδάφους ἕκαστος λαμπτὴρ παράγει φωτισμόν:

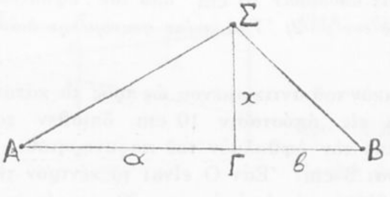
$$\Phi_1{}' = \frac{500}{\mathrm{A\Delta}^2}\,\text{συν}\,x = \frac{500}{\mathrm{A\Delta}^2} \times \frac{\mathrm{Z\Delta}}{\mathrm{A\Delta}}$$

ἄρα: $$\Phi_1{}' = \frac{500 \times 9}{(\sqrt{9^2 + 6^2}\,)^3} = \frac{4\,500}{(\sqrt{117})^3} \text{ lux}.$$

Ὁ ὅλος φωτισμὸς εἰς τὸ Δ εἶναι: $\Phi' = 2\,\Phi_1{}' = \dfrac{9\,000}{11{,}3^3} = 6{,}24$ lux.

13. — *Δύο φωτειναὶ πηγαί, ἔχουσαι ἐντάσεις* Ι *καὶ* Ι′ *εὑρίσκονται εἰς τὰ ἄκρα εὐθείας ἀποτελουμένης ἀπὸ δύο τμήματα:* $\mathrm{A\Gamma} = \alpha$ *καὶ* $\mathrm{\Gamma B} = \beta$. *Ἐπὶ τῆς καθέτου, τῆς διερχομένης διὰ τοῦ* Γ, *μετακινεῖται μία πολὺ μικρὰ σφαῖρα. Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ* Γ *πρέπει νὰ τεθῇ ἡ μικρὰ σφαῖρα, ὥστε αὕτη νὰ δέχεται τὸν αὐτὸν φωτισμὸν ἀπὸ τὰς δύο φωτεινὰς πηγάς;*

Ἔστω x ἡ ἀπόστασις τῆς σφαίρας Σ ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ. Εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν ἡ σφαῖρα δέχεται τὸν αὐτὸν φωτισμὸν ἀπὸ τὰς δύο φωτεινὰς πηγὰς Α καὶ Β.



Σχ. 9

Ἑπομένως θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$\Phi = \frac{\mathrm{I}}{\Sigma\mathrm{A}^2} = \frac{\mathrm{I}'}{\mathrm{B}\Sigma^2}$$

ἢ $$\frac{\mathrm{I}}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\mathrm{I}'}{\beta^2 + x^2}.$$

Ἂν λύσωμεν τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν:

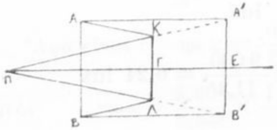
$$x = \sqrt{\frac{\alpha^2\mathrm{I}' - \beta^2\mathrm{I}}{\mathrm{I} - \mathrm{I}'}}\,.$$

II. ΑΝΑΚΛΑΣΙΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ
ΚΑΤΟΠΤΡΑ

14. — *Κανὼν ΑΒ ἔχει μῆκος l καὶ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν δ ἀπὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον ΚΛ. Παρατηρητὴς Π εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν Δ = 2 δ, ἀπὸ τὸ κάτοπτρον, τὸ δὲ ἐπίπεδον ΑΒΠ εἶναι κάθετον πρὸς τὸ κάτοπρον. Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ ὕψος h τοῦ κατόπτρου, ὥστε ὁ παρατηρητὴς νὰ βλέπῃ τὰ ἄκρα τοῦ εἰδώλου τοῦ κανόνος νὰ συμπίπτουν μὲ τὰ ἄκρα τοῦ κατόπτρου; Ἐφαρμογή: l = 60 cm,*

Τὸ εἴδωλον Α΄Β΄ ἀπέχει ἀπὸ τὸν παρατηρητήν: ΠΕ = ΠΓ + ΓΕ = Δ + δ = 3δ.

Ἀπὸ τα ὅμοια τρίγωνα ΚΠΛ καὶ Α΄ΠΒ΄ ἔχομεν:



Σχ. 10

$$\frac{ΚΛ}{Α΄Β΄} = \frac{ΠΓ}{ΠΕ}$$

ἤτοι: $$\frac{ΚΛ}{l} = \frac{Δ}{Δ + δ} = \frac{2\,δ}{3\,δ} = \frac{2}{3}.$$

ἄρα τὸ μῆκος τοῦ κατόπτρου εἶναι:

$$ΚΛ = 2/3\,l.$$

Ἐφαρμογή: $$ΚΛ = \frac{2}{3} \times 60 = 40 \text{ cm}.$$

15. — *Ἕνας παρατηρητὴς βλέπει τὸν ὀφθαλμόν του ΑΒ, μήκους 3 cm, ἐντὸς ἐπιπέδου κατόπτρου, τὸ ὁποῖον κρατεῖ εἰς ἀπόστασιν 10 cm ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν. 1) Ποῦ βλέπει τὸ εἴδωλον τοῦ ὀφθαλμοῦ του; 2) Ὑπὸ ποίαν φαινομένην διάμετρον βλέπει τὸ εἴδωλον τοῦτο;*

1) Τὸ εἴδωλον Α΄Β΄ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ ἀντικειμένου ὡς πρὸς τὸ κάτοπτρον. Ἑπομένως τὸ Α΄Β΄ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 10 cm ὄπισθεν τοῦ κατόπτρου καὶ εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἀπὸ τὸν ὀφθαλμὸν τοῦ παρατηρητοῦ.

2) Τὸ μῆκος τοῦ εἰδώλου Α΄Β΄ εἶναι 3 cm. Ἐὰν Ο εἶναι τὸ κέντρον τῆς κόρης τοῦ ὀφθαλμοῦ, ὁ παρατηρητὴς βλέπει τὸ εἰς ἀπόστασιν 20 cm εὑρισκόμενον εἴδωλον Α΄Β΄ ὑπὸ φαινομένην διάμετρον:

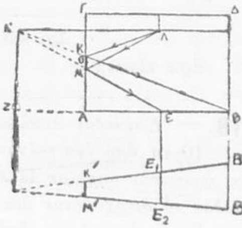
$$α = \frac{3}{20} \text{ ἀκτινίου} \quad ἤ \quad α = \frac{3}{20} \times 57^{\circ} = 8{,}5^{\circ} \text{ (περίπου)}.$$

16. — *Μία τετράγωνος αἴθουσα ἔχει πλευρὰν 5 m καὶ ὕψος 3,50 m. Ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ὀροφῆς ἐξαρτᾶται ἠλεκτρικὸς λαμπτήρ, οὕτως ὥστε ν' ἀπέχῃ 50 cm ἀπὸ τὴν ὀροφήν. Εἰς τὸ μέσον ἑνὸς τῶν τοίχων εὑρίσκεται κατακόρυφον ἐπίπεδον κάτοπτρον, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα τετραγώνου καὶ πλευρὰν 50 cm. 1) Πόση ἐπιφάνεια τοῦ ἀπέναντι τοίχου καὶ τοῦ δαπέδου φωτίζεται ἐξ ἀνακλάσεως; 2) Εἰς ποῖον ὕψος πρέπει νὰ στερεωθῇ τὸ κάτοπτρον, ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀπέναντι τοίχου, ἡ* *φωτιζομένη ἐξ ἀνακλάσεως, νὰ φθάνῃ μέχρι τῆς τομῆς τοῦ τοίχου καὶ τῆς ὀροφῆς ;*

1) Τὸ μέσον Ο τοῦ κατόπτρου ἀπέχει 1,75 m ἀπὸ τὸ δάπεδον, τὸ δὲ κατώτερον ἄκρον του Μ ἀπέχει 1,50 m. Ὁ λαμπτὴρ Λ ἀπέχει 3 m ἀπὸ τὸ δάπεδον· ἐπομένως καὶ ἡ ἀπόστασις Λ΄Ζ εἶναι 3 m. Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΕΑΜ καὶ ΕΖΛ΄ εὑρίσκομεν :

$$\frac{AE}{ZE}=\frac{MA}{\Lambda'Z}=\frac{1{,}50}{3}=\frac{1}{2} \qquad \text{ἄρα} \qquad AE=\frac{ZE}{2}=\frac{5}{2}=2{,}50 \text{ m}.$$

Ἐπὶ τοῦ δαπέδου τὸ ὅριον τῆς φωτιζομένης ἐπιφανείας εἶναι μία εὐθεῖα E_1E_2, παράλληλος πρὸς τὴν κατωτέραν πλευρὰν τοῦ κατόπτρου. Εἶναι δὲ $E_1E_2 = 1$ m, δηλαδὴ διπλασία ἀπὸ τὴν πλευρὰν τοῦ κατόπτρου. Τὸ ἀνώτερον ἄκρον Κ τοῦ κατόπτρου ἀπέχει 2 m ἀπὸ τὸ δάπεδον. Ἔστω Ν τὸ σημεῖον τοῦ δαπέδου εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἀκτὶς Λ΄Κ συναντᾷ τὸ δάπεδον, Τότε θὰ εἶναι :



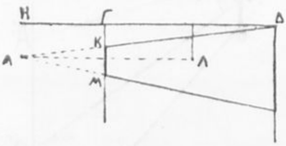
$$\frac{KA}{\Lambda'Z}=\frac{AN}{ZN}$$

ἤ $$\frac{2}{3}=\frac{AN}{ZA+AN}=\frac{AN}{2{,}50+AN} \quad \text{καὶ} \quad AN=5 \text{ m}\cdot$$

Σχ. 11

ἄρα τὸ τελευταῖον φωτιζόμενον σημεῖον τοῦ δαπέδου εἶναι τὸ Β. Τὸ ἄλλο ὅριον τῆς φωτιζομένης ἐπιφανείας εἶναι μία εὐθεῖα B_1B_2, παράλληλος πρὸς τὴν ἀνωτέραν πλευρὰν τοῦ κατόπτρου καὶ ἴση μὲ 1,50 m. Ὥστε ἡ φωτιζομένη ἐξ ἀνακλάσεως ἐπιφάνεια $E_1E_2B_1B_2$ εἶναι μόνον ἐπὶ τοῦ δαπέδου, ἔχει σχῆμα ἰσοσκελοῦς τραπεζίου καὶ ἐμβαδόν : $\dfrac{1+1{,}50}{2}\times 2{,}50 = 3{,}125 \text{ m}^2$.

2) Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ προέκτασις τῆς Λ΄Κ πρέπει νὰ καταλήγῃ εἰς τὸ Δ. Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΔΓΚ καὶ ΔΗΛ΄ εὑρίσκομεν :



Σχ. 12

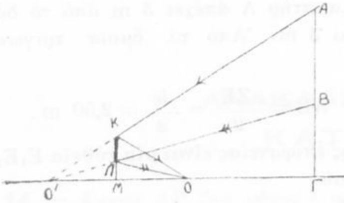
$$\frac{\Gamma K}{H\Lambda'}=\frac{\Delta\Gamma}{\Delta H}=\frac{5}{7{,}5}=\frac{2}{3}$$

$$\text{ἄρα} \quad \Gamma K=\frac{2}{3}H\Lambda'=\frac{2}{3}\times 50=33{,}33 \text{ cm}\cdot$$

ὥστε ἡ ἀνωτέρα πλευρὰ τοῦ κατόπτρου πρέπει νὰ ἀπέχῃ 33,33 cm ἀπὸ τὴν ὀροφήν.

17. — *Ἐπίπεδον κάτοπτρον, ὕψους 10 cm, εἶναι κατακόρυφον. Ἔμπροσθεν αὐτοῦ καὶ εἰς ὁριζοντίαν ἀπόστασιν 20 cm εὑρίσκεται ὁ ὀφθαλμὸς παρατηρητοῦ, ὁ ὁποῖος βλέπει ἐντὸς τοῦ κατόπτρου κατακόρυφον τοῖχον, εὑρισκόμενον ὄπισθεν αὐτοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν 2 m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ΑΒ τοῦ τοίχου, τὸ ὁποῖον βλέπει ὁ παρατηρητὴς ἐντὸς τοῦ κατόπτρου.*

Ἔστω Ο ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ καὶ Ο΄ τὸ εἴδωλον τοῦ ὀφθαλμοῦ. Τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα φαίνονται ἐξ ἀνακλάσεως ἐντὸς τοῦ κατόπτρου, περιλαμβάνονται ἐντὸς τοῦ κώνου ὁ ὁποῖος ἔχει κορυφὴν τὸ Ο΄, ἡ δὲ κυρτὴ ἐπιφάνειά του στηρίζεται εἰς τὴν περίμετρον τοῦ κατόπτρου ΚΛ. Ἡ τομὴ τοῦ κώνου τούτου καὶ τοῦ τοίχου καθορίζει μίαν ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος ΑΒ. Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα Ο΄ΚΛ καὶ Ο΄ΑΒ εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν:



Σχ. 13

$$\frac{AB}{K\Lambda} = \frac{O'\Gamma}{O'M}$$

ἢ
$$\frac{AB}{K\Lambda} = \frac{O'O + O\Gamma}{O'M}$$

ἢ
$$\frac{AB}{K\Lambda} = \frac{40 + 200}{20} = 12 \cdot$$

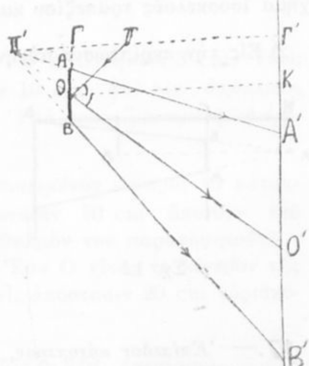
ἄρα εἶναι: $AB = 10 \times 12 = 120$ cm.

18. — *Ἐπίπεδον κυκλικὸν κάτοπρον εἶναι στερεωμένον κατακορύφως εἰς ἀπόστασιν 10 m ἀπὸ ἕνα τοῖχον. Ἡ ἀκτὶς τοῦ κυκλικοῦ κατόπτρου εἶναι 6 cm. Ἕνα φωτεινὸν σημεῖον Π εὑρίσκεται μεταξὺ τοῦ κατόπτρου καὶ τοῦ τοίχου· τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ Π καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ κάτοπτρον καὶ τὸν τοῖχον, ἀπέχει 1 m ἀπὸ τὸ κάτοπτρον. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάμετρος τοῦ φωτεινοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος σχηματίζεται ἐπὶ τοῦ τοίχου ἀπὸ τὰς φωτεινὰς ἀκτῖνας τὰς ἀνακλωμένας ἐπὶ τοῦ κατόπτρου. 2) Ἡ φωτεινὴ πηγὴ Π ἀπέχει 10 cm ἀπὸ τὴν κάθετον τὴν διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κατόπτρου. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἀπέχει ἀπὸ τὴν ἰδίαν κάθετον τὸ κέντρον τοῦ φωτεινοῦ κύκλου.*

1) Αἱ ἀκτῖνες, αἱ ὁποῖαι ἀνακλῶνται ἐπὶ τοῦ κατόπτρου, φαίνονται προερχόμεναι ἀπὸ τὸ εἴδωλον Π΄ τοῦ φωτεινοῦ σημείου Π. Ὅλαι αἱ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες ἀποτελοῦν ἕνα κόλουρον κῶνον· οὗτος ἔχει κορυφὴν τὸ Π΄ καὶ γεννετείρας τὰς ἀκτῖνας αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται τῆς περιφερείας τοῦ κατόπτρου. Ἄρα ἐπὶ τοῦ τοίχου σχηματίζεται φωτεινὸς κύκλος, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον Ο΄ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας Π΄Ο. Ἂν θεωρήσωμεν μίαν κατακόρυφον τομὴν τοῦ φωτεινοῦ κώνου, τότε ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων Π΄Α΄Β΄ καὶ Π΄ΑΒ εὑρίσκομεν:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{\Pi'O'}{\Pi'O} \cdot$$

Εἶναι ΠΓ=Π΄Γ=1 m καὶ ΓΓ΄=ΟΚ=10 m· ἄρα εἶναι: Π΄Γ΄ = 11 m. Ἂν λοιπὸν θεωρήσωμεν τὰ ὅμοια τρίγωνα Π΄Γ΄Ο΄ καὶ Π΄ΓΟ,



Σχ. 14

εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν: $\frac{\Pi'O'}{\Pi'O} = \frac{\Pi'\Gamma'}{\Pi'\Gamma} = \frac{11}{1} = 11.$

Ὥστε ἡ διάμετρος Α΄Β΄ τοῦ φωτεινοῦ κύκλου, εἶναι:

$A'B' = 11 \times AB$ ἢ $A'B' = 11 \times 12 = 132$ cm.

2) Εἶναι ΓΟ = Γ΄Κ = 10 cm. Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα Π΄Ο΄Γ΄ καὶ Π΄ΟΓ

εὑρίσκομεν: $\frac{\text{Ο}'\Gamma'}{\text{Ο}\Gamma}=\frac{\Pi\Gamma'}{\Pi\Gamma}$, ἄρα $\text{Ο}'\Gamma' = 11\times \text{Ο}\Gamma = 11\times 10 = 110$ cm.

Ἡ ζητουμένη ἀπόστασις τοῦ Ο′ ἀπὸ τὴν κάθετον ΚΟ εἶναι:

$$\text{Ο}'\text{Κ} = \text{Ο}'\Gamma' - \text{Κ}\Gamma' = 110 - 10 = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}.$$

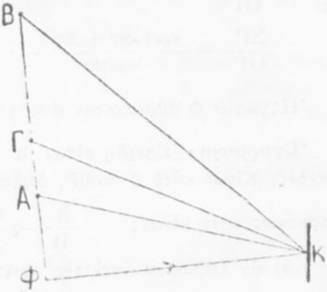
19. — *Κανὼν ΑΒ, βαθμολογημένος εἰς ἑκατοστόμετρα, φέρει εἰς τὴν διαίρεσιν μηδὲν πολὺ μικρὰν φωτεινὴν σχισμὴν Φ. Παραλλήλως πρὸς τὸν κανόνα καὶ εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπὸ αὐτὸν εὑρίσκεται μικρὸν ἐπίπεδον κάτοπτρον Κ. Τοῦτο εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου πρὸς τὸν κανόνα εἰς τὸ σημεῖον Φ. 1) Τὸ κάτοπτρον στρέφεται κατὰ 15° καὶ ἔπειτα κατὰ 30°· εἰς ποίαν διαίρεσιν συναντᾷ τὸν κανόνα ἡ ἀνακλωμένη ἀκτίς; 2) Ἐὰν ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς συναντᾷ τὸν κανόνα εἰς τὴν διαίρεσιν 50, πόση εἶναι ἡ γωνία κατὰ τὴν ὁποίαν ἐστράφη τὸ κάτοπτρον; 3) Ἐὰν ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς συναντᾷ τὸν κανόνα εἰς τὴν διαίρεσιν 1, πόση εἶναι εἰς ἀκτίνια ἡ γωνία κατὰ τὴν ὁποίαν ἐστράφη τὸ κάτοπτρον;*

1) Ὅταν τὸ κάτοπτρον στραφῇ κατὰ γωνίαν 15°, ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς στρέφεται κατὰ γωνίαν 30° καὶ συναντᾷ τὸν κανόνα εἰς τὴν διαίρεσιν Α. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΦΚ εὑρίσκομεν:

$$\Phi\text{Α} = \Phi\text{Κ} \,.\, \text{εφ}\, 30^\circ = \frac{50}{\sqrt{3}} = 28{,}8 \text{ cm}.$$

Ὅταν τὸ κάτοπτρον στραφῇ κατὰ γωνίαν 30°, ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς στρέφεται κατὰ 60° καὶ ἀκολουθεῖ τὴν διεύθυνσιν ΚΒ. Εἶναι δὲ πάλιν:

$$\Phi\text{Β} = \Phi\text{Κ} \,.\, \text{εφ}\, 60^\circ = 50\sqrt{3} = 86{,}6 \text{ cm}.$$



Σχ. 15

2) Ὅταν εἶναι $\Phi\Gamma = 50$ cm, τὸ τρίγωνον ΚΦΓ εἶναι ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως εἶναι:

$$\text{γωνία } \Phi\text{Κ}\Gamma = 45^\circ \cdot$$

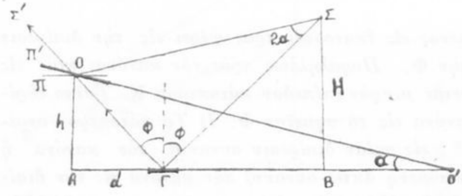
τὸ κάτοπτρον ἐστράφη λοιπὸν κατὰ 22° 30′.

3) Ὅταν ὁ φωτεινὸς δείκτης εὑρίσκεται εἰς τὴν διαίρεσιν 1, ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς ἐστράφη κατὰ γωνίαν ἴσην μὲ 1/50 τοῦ ἀκτινίου. Ἄρα τὸ κάτοπτρον ἐστράφη κατὰ 1/100 τοῦ ἀκτινίου.

20. — *Εἰς τὸ σημεῖον Ο ἑνὸς παραθύρου, εὑρισκομένου εἰς ὕψος h ὑπεράνω τοῦ ἐδάφους, δεχόμεθα φωτεινὴν ἀκτῖνα ΟΣ′, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς μιᾶς ἀκτῖνος ΣΓ. Ἡ τελευταία αὕτη ἀκτὶς προέρχεται ἀπὸ φωτεινὸν σημεῖον Σ, εὑρισκόμενον εἰς ὕψος Η ὑπεράνω τοῦ ἐδάφους καὶ ὑφίσταται ἀνάκλασιν ἐπὶ τῆς μικρᾶς ἐπιφανείας ἠρεμοῦντος ὕδατος Γ, εὑρισκομένου ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Ἡ ἀπόστασις τοῦ τοίχου ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν Γ τοῦ ὕδατος εἶναι d. Εἰς τὸ σημεῖον Ο θέτομεν ὑαλίνην πλάκα Π, ἡ ὁποία ἠμπορεῖ νὰ στραφῇ περὶ ὁριζόντιον ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ Ο. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι, ἂν στρέψωμεν τὴν πλάκα κατὰ γωνίαν α, ἡ ἐπὶ τῆς πλακὸς προσπίπτουσα ἀκτὶς ΣΟ ἀνακλᾶται κατὰ τὴν διεύ-*

θυνσιν τῆς ΟΣ΄. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος Η τοῦ σημείου Σ ὑπεράνω τοῦ ἐδάφους. Ἐφαρμογή: $h = d = 12$ m · $\alpha = 3^0$.

Ἡ πλὰξ Π δὲν προκαλεῖ ἐκτροπὴν τῆς διερχομένης ἀκτῖνος. Ὅταν ἡ πλὰξ Π στραφῇ κατὰ γωνίαν α, τότε ἡ ἀνακλωμένη τῆς ΣΓ καὶ ἡ ἀνακλωμένη τῆς ΣΟ συμπίπτουν. Τὰ δύο κάτοπτρα Γ καὶ Π΄ σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν α. Αἱ δύο προσπίπτουσαι ἀκτῖνες σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν ΟΣΓ ἴσην μὲ 2α· διότι, ἂν ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς ΓΣ΄ διατηρηθῇ σταθερὰ καὶ τὸ κάτοπτρον Γ στραφῇ κατὰ γωνίαν α, ἡ προσπίπτουσα ἀκτὶς ΣΓ πρέπει νὰ στραφῇ κατὰ γωνίαν 2α. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΑΓ καὶ ΣΒΓ εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως ἔχομεν:



Σχ. 16

$$\frac{H}{h} = \frac{\Sigma\Gamma}{O\Gamma}.$$ Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΟΣΓ εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

$$\frac{\Sigma\Gamma}{O\Gamma} = \frac{\eta\mu\,(2\alpha + 2\varphi)}{\eta\mu\, 2\alpha}. \qquad \text{ἄρα} \qquad H = h\,\frac{\eta\mu\,(2\alpha + 2\varphi)}{\eta\mu\, 2\alpha}.$$

Ἡ γωνία φ εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\varepsilon\varphi\ \varphi = \dfrac{d}{h}$.

Ἐφαρμογή: Ἐπειδὴ εἶναι $h = d$, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΑΓ εἶναι ἰσοσκελές. Εἶναι τότε $\varphi = 45^0$, δηλαδὴ τὸ τρίγωνον ΟΣΓ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἑπομένως τότε εἶναι:

$$\frac{h}{H} = \frac{O\Gamma}{\Sigma\Gamma} = \frac{\eta\mu\, 2\alpha}{\eta\mu\,(90 + 2\alpha)} = \varepsilon\varphi\, 2\alpha = \varepsilon\varphi\, 6^0.$$

Καὶ ἂν λάβωμεν ἀντὶ τῆς ἐφαπτομένης τὴν γωνίαν, τότε εὑρίσκομεν:

$$\frac{h}{H} = \frac{6\pi}{180} = \frac{\pi}{30}.$$

Ὥστε τὸ ζητούμενον ὕψος εἶναι: $H = \dfrac{30\,h}{\pi} = \dfrac{30 \times 12}{3{,}14} = 114{,}6$ m.

21. — *Ἕνας παρατηρητὴς βλέπει τὸν ὀφθαλμόν του ΑΒ, μήκους 3 cm, ἐντὸς κοίλου κατόπτρου, τὸ ὁποῖον κρατεῖ εἰς ἀπόστασιν 10 cm ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν· ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ κατόπτρου εἶναι 12 cm. 1) Ποῦ βλέπει τὸ εἴδωλον τοῦ ὀφθαλμοῦ του; 2) Ὑπὸ ποίαν φαινομένην διάμετρον βλέπει τὸ εἴδωλον τοῦτο; 3) Νὰ συγκριθῇ ἡ φαινομένη αὐτὴ διάμετρος τοῦ εἰδώλου πρὸς τὴν φαινομένην διάμετρον τοῦ εἰδώλου, τὸ ὁποῖον θὰ ἐσχηματίζετο ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου κατόπτρου εὑρισκομένου εἰς τὴν ἰδίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν.*

1) Τὸ ἀντικείμενον ΑΒ εὑρίσκεται μεταξὺ τῆς κορυφῆς τοῦ κατόπτρου καὶ τῆς κυρίας ἑστίας του· τὸ εἴδωλον Α΄Β΄ εἶναι φανταστικόν, ὀρθὸν καὶ μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν. Ἡ ἀπόστασις π΄ τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τὴν κορυφὴν δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{\pi'} = \dfrac{1}{12}$. ἄρα $\pi' = 60$ cm.

Τὸ εἴδωλον $A'B'$ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν $60 + 10 = 70$ cm ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν.

2) Ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{\pi'}{\pi} \quad ἢ \quad A'B' = AB \times \frac{\pi'}{\pi}$$

εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου εἶναι: $A'B' = 3 \times 6 = 18$ cm.

Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 70 cm ἀπὸ τὸν ὀφθαλμὸν τοῦ παρατηρητοῦ, ἡ φαινομένη διάμετρος αὐτοῦ εἶναι:

$$\alpha = \frac{18}{70} \text{ ἀκτινίου} \quad ἢ \quad \alpha = \frac{18}{70} \times 57^0 = 14{,}5^0 \text{ (περίπου).}$$

3) Εἰς τὸ πρόβλημα 15 εἴδομεν ὅτι ἐπίπεδον κάτοπτρον, εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 10 cm ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν, δίδει εἴδωλον τοῦ ὀφθαλμοῦ, τὸ ὁποῖον ἔχει φαινομένην διάμετρον $8{,}5^0$. Ὥστε τὸ κοῖλον κάτοπτρον δίδει εἴδωλον παρατηρούμενον ὑπὸ μεγαλυτέραν φαινομένην διάμετρον.

22.— *Ἀντικείμενον ἀπέχει 75 cm ἀπὸ ἕνα πέτασμα. Νὰ εὑρεθῇ ποῦ πρέπει νὰ τοποθετήσωμεν κοῖλον κάτοπτρον, ἑστιακῆς ἀποστάσεως $\varphi = 20$ cm, διὰ νὰ λάβωμεν ἐπὶ τοῦ πετάσματος εὐκρινὲς εἴδωλον τοῦ ἀντικειμένου.*

Ἐπειδὴ τὸ πρόβλημα δὲν καθορίζει τὰς διαστάσεις τοῦ εἰδώλου καὶ τοῦ πετάσματος, ἠμποροῦμε νὰ θεωρήσωμεν δύο δυνατὰς θέσεις τοῦ κατόπτρου: α) τὸ κάτοπτρον νὰ εὑρίσκεται πέραν τοῦ ἀντικειμένου· β) τὸ κάτοπτρον νὰ εὑρίσκεται πέραν τοῦ πετάσματος.

Α΄ περίπτωσις. Ὅταν τὸ κάτοπτρον εὑρίσκεται πέραν τοῦ ἀντικειμένου, τότε εἶναι: $\pi' = \pi + 75$. Ἑπομένως ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi + 75} = \frac{1}{20} \quad ἢ \quad \pi^2 + 35\pi - 1500 = 0 \quad καὶ \quad \pi = \frac{-35 \pm 85}{2}\cdot$$

ἡ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως εἶναι: $\pi = 25$· ἄρα $\pi' = 100$·
ἡ ἄλλη ρίζα τῆς ἐξισώσεως εἶναι: $\pi = -60$· ἄρα $\pi' = 15$.
Παραδεκτὴ εἶναι μόνον ἡ τιμὴ $\pi = 25$.

Β΄ περίπτωσις. Ὅταν τὸ κάτοπτρον εὑρίσκεται πέραν τοῦ πετάσματος, τότε εἶναι: $\pi' = \pi - 75$. Ἑπομένως:

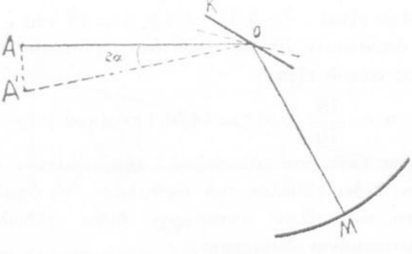
$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi - 75} = \frac{1}{20} \quad ἢ \quad \pi^2 - 115\pi + 1500 = 0 \quad καὶ \quad \pi = \frac{115 \pm 85}{2}\cdot$$

ἡ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως εἶναι: $\pi = 100$· ἄρα $\pi' = 25$.
ἡ ἄλλη ρίζα τῆς ἐξισώσεως εἶναι: $\pi = 15$· ἄρα $\pi' = -60$.
Παραδεκτὴ εἶναι μόνον ἡ τιμὴ $\pi = 100$.

Τὸ κάτοπτρον ἠμπορεῖ λοιπὸν νὰ τοποθετηθῇ εἰς δύο θέσεις: ἡ μία ἀπέχει 25 cm ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον καὶ 100 cm ἀπὸ τὸ πέτασμα, ἡ ἄλλη ἀπέχει 100 cm ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον καὶ 25 cm ἀπὸ τὸ πέτασμα.

23.— *Ἀπὸ φωτεινὸν σημεῖον Α προσπίπτει ἀκτὶς ἐπὶ ἐπιπέδου κατόπτρου Κ ἀπέχοντος 2 m ἀπὸ τὸ Α. Τὸ κάτοπτρον Κ στρέφεται περὶ ἄξονα Ο, κάθετον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῶν ἀκτίνων, μὲ ταχύτητα 375 στροφῶν κατὰ δευτερόλεπτον. Αἱ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τοῦ Κ ἀκτῖνες προσπίπτουν ἐπὶ ἀκινήτου κοίλου σφαιρικοῦ κατόπ-*

τρου Μ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος εἶναι 20 m, *τὸ δὲ κέντρον του συμπίπτει μὲ τὸ σημεῖον* Ο. *Παρατηροῦμεν τότε ὅτι ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς* ΟΑ΄ *στρέφεται κατὰ μίαν γωνίαν τοιαύτην ὥστε εἶναι* ΑΑ΄ = 1,256 mm. *Πόση εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτός;*



Σχ. 17

Ἡ ἀκτὶς ΑΟ, μετὰ τὴν ἀνάκλασίν της ἐπὶ τοῦ Κ, προσπίπτει καθέτως ἐπὶ τοῦ Μ καὶ ἐπιστρέφει ἀκολουθοῦσα τὸν ἴδιον δρόμον. Ἀλλὰ κατὰ τὸν χρόνον t, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ φῶς διατρέχει τὸ διάστημα ΟΜ + ΜΟ, δηλαδὴ 2 × ΟΜ, τὸ κάτοπτρον στρέφεται κατὰ μίαν γωνίαν α. Ἑπομένως ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς ΟΑ΄ σχηματίζει γωνίαν 2α μὲ τὴν ΑΟ. Ὥστε εἶναι:

$$2\alpha = \frac{AA'}{OA} = \frac{1{,}256}{2\,000} \quad \text{ἤτοι} \quad \alpha = 0{,}000\,314 \text{ ἀκτινίου}.$$

Ἡ γωνιώδης ταχύτης τοῦ κατόπτρου εἶναι: $\omega = 2\pi N$.

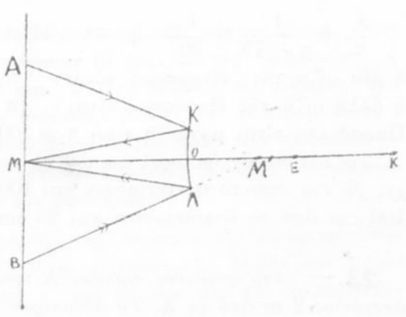
$$\text{Ἄρα:} \quad \alpha = \omega t \quad \text{καὶ} \quad t = \frac{\alpha}{2\pi N} = \frac{0{,}000\,314}{750\,\pi} = \frac{1}{7\,500\,000} \text{ sec}.$$

Ἐὰν υ εἶναι ἡ ζητουμένη ταχύτης τοῦ φωτός, τότε εἶναι:

$$\upsilon = \frac{2 \times OM}{t} = 2 \times 20 \times 7\,500\,000 = 300\,000\,000 \text{ m/sec} = 300\,000 \text{ km/sec}.$$

24. — *Κατακόρυφος κανών, βαθμολογημένος εἰς ἑκατοστόμετρα, φέρει ὀπὴν διὰ τῆς ὁποίας παρατηρητὴς βλέπει τὸ εἴδωλον τοῦ κανόνος ἐντὸς κυρτοῦ κατόπτρου· τοῦτο ἔχει διάμετρον* 3 cm, *ἡ δὲ κορυφή του εὑρίσκεται ἀπέναντι τῆς ὀπῆς καὶ εἰς ἀπόστασιν* 25 cm *ἀπὸ αὐτήν. Ὁ παρατηρητὴς βλέπει ἐντὸς τοῦ κατόπτρου τὸ τμῆμα τοῦ κανόνος, τὸ ὁποῖον ἐκτείνεται μεταξὺ τῶν διαιρέσεων* 3 *καὶ* 29. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ κατόπτρου.*

Ἔστω Μ ὁ ὀφθαλμὸς καὶ Μ΄ τὸ εἴδωλόν του. Ὁ παρατηρητὴς βλέπει ἐξ ἀνακλάσεως ἐντὸς τοῦ κατόπτρου ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται ἐντὸς τοῦ κώνου, ποὺ ἔχει κορυφὴν τὸ Μ΄ καὶ κυρτὴν ἐπιφάνειαν στηριζομένην εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κατόπτρου ΚΛ. Ἂν θεωρήσωμεν κατακόρυφον ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ΑΜΒ καὶ τοῦ Ο, τότε ἀπὸ τὰ



Σχ. 18

ὅμοια τρίγωνα Μ΄ΑΒ καὶ Μ΄ΚΛ ἔχομεν:

$$\frac{AB}{K\Lambda} = \frac{M'M}{M'O} \quad \text{ἢ} \quad \frac{AB}{K\Lambda} = \frac{\pi + \pi'}{\pi'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{26}{3} = \frac{\pi + \pi'}{\pi'}$$

ὅπου π καὶ π′ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τοῦ Μ καὶ τοῦ Μ′ ἀπὸ τὸ κάτοπτρον. Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν:

$$\pi' = \frac{3\pi}{23} = \frac{3 \times 25}{23} = \frac{75}{23} \text{ cm (κατ' ἀπόλυτον τιμήν).}$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν τῶν κυρτῶν κατόπτρων ἔχομεν:

$$-\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi'} \quad \text{ἢ} \quad -\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{25} - \frac{23}{75} = -\frac{20}{75}$$

ἄρα εἶναι: $\varphi = \frac{75}{20}$ cm ἢ $\varphi = 3{,}75$ cm.

25. — *Κυρτὸν σφαιρικὸν κάτοπτρον ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος 60 cm, ἡ δὲ ἀνακλῶσα ἐπιφάνειά του περιορίζεται ἀπὸ μικρὸν κύκλον ἀκτῖνος 6 cm. Παρατηρητὴς βλέπει μὲ τὸν ἕνα ὀφθαλμόν του ἐντὸς τοῦ κατόπτρου. Ὁ ὀφθαλμὸς ἀπέχει 12 cm ἀπὸ τὸν κύριον ἄξονα τοῦ κατόπτρου, ἡ δὲ προβολὴ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος ἀπέχει 60 cm ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ κατόπτρου. 1) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τοῦ εἰδώλου τοῦ ὀφθαλμοῦ. 2) Θεωροῦμεν ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὸν κύριον ἄξονα, εὑρισκόμενον ἔμπροσθεν τοῦ κατόπτρου καὶ εἰς ἀπόστασιν 10 m ἀπὸ αὐτό, ὑποθέτομεν δὲ ὅτι ὁ παρατηρητὴς βλέπει ἐξ ἀνακλάσεως τὰ ἀντικείμενα ποὺ εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ περιοχὴ τοῦ ἐπιπέδου ἐντὸς τῆς ὁποίας εὑρίσκονται ὅλα τὰ ὁρατὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, δηλαδὴ τὸ ὀπτικὸν πεδίον τοῦ κατόπτρου. 3) Χωρὶς νὰ μεταβληθῇ οὔτε ἡ θέσις τοῦ ὀφθαλμοῦ, οὔτε ἡ θέσις τοῦ ἐπιπέδου, ἀντικαθιστῶμεν τὸ κυρτὸν κάτοπτρον μὲ ἐπίπεδον κάτοπτρον, τὸ ὁποῖον περιορίζεται ἀπὸ τὸν ἴδιον μικρὸν κύκλον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ νέον ὀπτικὸν πεδίον.*

1) Ἔστω Μ ὁ ὀφθαλμὸς καὶ Α ἡ προβολή του ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος τοῦ κατόπτρου. Ἂν θεωρήσωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΜ ὡς πραγματικὸν ἀντικείμενον, ὕψους 12 cm, καὶ τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ο τοῦ κατόπτρου π = 60 cm, τότε ἡ ἀπόστασις π′ τοῦ εἰδώλου Α′Μ′ εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi'} = -\frac{1}{\varphi} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{60} - \frac{1}{\pi'} = -\frac{1}{30} \quad \text{ἄρα} \quad \pi' = 20 \text{ cm}.$$

Τὸ δὲ ὕψος τῆς Α′Μ′ εἶναι: $A'M' = AM \times \frac{\pi'}{\pi} = 12 \times \frac{20}{60} = 4$ cm.

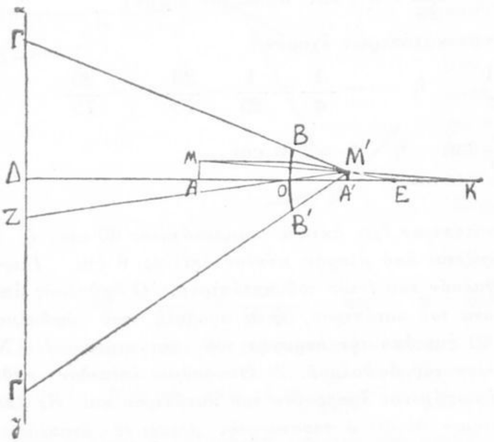
Τὸ εἴδωλον Μ′ τοῦ ὀφθαλμοῦ σχηματίζεται ὄπισθεν τοῦ κατόπτρου εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἀπὸ τὴν κορυφήν του καὶ ἀπέχει 4 cm ἀπὸ τὸν ἄξονα, εὑρίσκεται δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἄξονος πρὸς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται καὶ ὁ ὀφθαλμός.

2) Ἔστω xy τὸ θεωρούμενον ἐπίπεδον. Τότε ὁ ὀφθαλμὸς Μ βλέπει ἐντὸς τοῦ κατόπτρου ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἐντὸς ἑνὸς κύκλου, ἔχοντος διάμετρον τὴν ΓΓ′. Αὐτὴ λαμβάνεται, ἂν ἑνώσωμεν τὸ Μ′ μὲ τὰ ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα σημεῖα Β καὶ Β′ τῆς περιφερείας τοῦ κατόπτρου. Ἐπειδὴ τὸ ἄνοιγμα τοῦ κατόπτρου εἶναι πολὺ μικρόν, ἠμποροῦμε νὰ λάβωμεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{ΓΓ'}{BB'} = \frac{A'Δ}{A'O} \quad \text{ἢ} \quad \frac{ΓΓ'}{12} = \frac{1\,020}{20}. \qquad \text{ἄρα:} \quad ΓΓ' = 612 \text{ cm} = 6{,}12 \text{ m}.$$

Φέρομεν τὴν M'OZ. Τότε λαμβάνομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{ZΔ}{M'A'} = \frac{OΔ}{OA'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{ZΔ}{4} = \frac{1\,000}{20} \qquad \text{ἄρα:} \quad ZΔ = 200 \text{ cm} = 2 \text{ m}.$$



Σχ. 19

Τὸ ὀπτικὸν πεδίον περιορίζεται λοιπὸν ἀπὸ ἕνα κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶναι 6,12 m, τὸ δὲ κέντρον του ἀπέχει 2 m ἀπὸ τὸν ἄξονα καὶ εὑρίσκεται πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος τοῦ ἄξονος σχετικὰ μὲ τὸν ὀφθαλμόν.

3) Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸ κυρτὸν κάτοπτρον μὲ ἐπίπεδον κάτοπτρον τῶν ἰδίων διαστάσεων, τότε τὸ εἴδωλον A''M'' εἶναι συμμετρικὸν τοῦ AM.

Ἄρα εἶναι:

$$OA'' = OA = 60 \text{ cm}$$

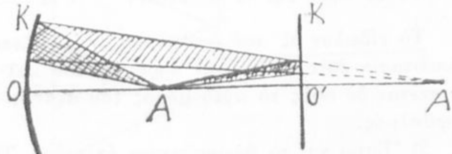
καὶ $A''M'' = AM = 12$ cm.

Λαμβάνομεν λοιπὸν τὴν σχέσιν:

$$\frac{ΓΓ'}{BB'} = \frac{A''Δ}{A''O} \quad \text{ἢ} \quad \frac{ΓΓ'}{12} = \frac{1\,060}{60}. \qquad \text{ἄρα} \quad ΓΓ' = 212 \text{ cm} = 2{,}12 \text{ m}.$$

Ἡ θέσις τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου δὲν μεταβάλλεται, ἀλλὰ ἡ διάμετρός του περιορίζεται εἰς 2,12 m.

26.—*Ἕνα φωτεινὸν σημεῖον A ἀπέχει 40 cm ἀπὸ κοῖλον κάτοπρον K, ἑστιακῆς ἀποστάσεως φ = 30 cm. Καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κατόπρου τούτου τοθετεῖται ἐπίπεδον κάτοπτρον K'. Ποῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ τὸ κάτοπτρον τοῦτο, ὥστε αἱ ἀκτῖνες αἱ ἀναχωροῦσαι ἐκ τοῦ A, ἀφοῦ ἀνακλασθοῦν διαδοχικῶς ἐπὶ τῶν δύο κατόπτρων, νὰ συγκεντρώνωνται εἰς τὸ σημεῖον A;*



Σχ. 20

Αἱ ἀκτῖνες, αἱ προερχόμεναι ἐκ τοῦ A, μετὰ τὴν ἀνάκλασίν των ἐπὶ τοῦ κοίλου κατόπτρου K, θὰ συγκεντρωθοῦν εἰς ἕνα σημεῖον A'. Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου A' ἀπὸ τὸ κάτοπτρον K εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{40} + \frac{1}{π'} = \frac{1}{30} \qquad \text{ἤτοι} \qquad π' = 120 \text{ cm}.$$

Διὰ νὰ στείλῃ ἐκ νέου τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον K' τὰς ἀκτῖνας εἰς τὸ σημεῖον Α, πρέπει τὸ πραγματικὸν εἴδωλον τοῦ φανταστικοῦ διὰ τὸ Κ΄ ἀντικειμένου Α΄ νὰ σχηματίζεται εἰς τὸ Α. Ὥστε τὸ κάτοπτρον Κ΄ πρέπει νὰ τεθῇ εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως ΑΑ΄, ἡ ὁποία εἶναι 80 cm. Ἄρα ἡ ἀπόστασις τῶν δύο κατόπτρων πρέπει νὰ εἶναι :

$$OO' = OA' - O'A' = 120 - 40 = 80 \text{ cm}.$$

Ἐάν θεωρήσωμεν τώρα τὰς ἀκτῖνας, αἱ ὁποῖαι προσπίπτουν πρῶτα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου Κ΄, αὗται μετὰ τὴν ἀνάκλασίν των ἐπὶ τοῦ Κ΄ φαίνονται προερχόμεναι ἀπὸ τὸ Α΄ καὶ ἑπομένως μετὰ τὴν ἀνάκλασίν των ἐπὶ τοῦ κατόπτρου Κ συγκεντρώνονται εἰς τὸ σημεῖον Α.

27.— *Ἔμπροσθεν κοίλου κατόπτρου* Μ *ἑστιακῆς ἀποστάσεως* 50 cm *τοποθετεῖται καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κατόπτρου ἕνα ἐπίπεδον κάτοπτρον* Ν, *τοῦ ὁποίου ἡ ἀνακλῶσα ἐπιφάνεια εὑρίσκεται ἀπέναντι τοῦ κατόπτρου* Μ. *Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν* Μ *καὶ* Ν *εἶναι* $\delta = 2$ m. *Μικρὰ φωτεινὴ εὐθεῖα* ΑΒ, *ὕψους* 5 cm, *τοποθετεῖται μεταξὺ τῶν* Μ *καὶ* Ν *καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα. Ἡ* ΑΒ *ἐκπέμπει ἀκτῖνας πρὸς τὸ* Μ, *αἱ ὁποῖαι μετὰ τὴν ἀνάκλασίν των ἐπὶ τοῦ* Μ *προσπίπτουν ἐπὶ τοῦ* Ν *καὶ ὑφίστανται ἐκεῖ δευτέραν ἀνάκλασιν. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου μετὰ τὴν δευτέραν ἀνάκλασιν εἰς τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :* BM = 25 cm *καὶ* BM = 65 cm. *2) Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν θέσιν πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἡ εὐθεῖα* ΑΒ, *ὥστε ἡ ἀπόστασις τοῦ τελικοῦ εἰδώλου ἀπὸ τὴν* ΑΒ *νὰ ἔχῃ ὡρισμένην τιμὴν* α. *Νὰ ἐρευνηθῇ ἰδιαιτέρως ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι :* $\alpha = 0$.

1) Ὅταν ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἀπέχῃ $\pi = 25$ cm ἀπὸ τὸ Μ, τότε τὸ εἴδωλον Α΄Β΄, τὸ ὁποῖον δίδει τὸ Μ, εἶναι φανταστικόν, ὀρθὸν καὶ σχηματίζεται ὄπισθεν τοῦ Μ εἰς ἀπόστασιν π΄, τὴν ὁποίαν ὑπολογίζομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\varphi} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{25} - \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{50} \quad \text{ἄρα} \quad \pi' = 50 \text{ cm}.$$

Τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου εἶναι : $A'B' = AB \times \frac{\pi'}{\pi} = 5 \times \frac{50}{25} = 10$ cm,

δηλαδὴ εἶναι διπλάσιον τοῦ ἀντικειμένου. Τὸ Α΄Β΄ παίζει ρόλον ἀντικειμένου διὰ τὸ κάτοπτρον Ν, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀπέχει : $200 + 50 = 250$ cm $= 2{,}50$ m. Τὸ Ν σχηματίζει τὸ τελικὸν εἴδωλον Α΄΄Β΄΄, τὸ ὁποῖον εἶναι φανταστικόν, ὀρθόν, εὑρίσκεται ὄπισθεν τοῦ Ν εἰς ἀπόστασιν 2,50 m καὶ ἔχει ὕψος 10 cm.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἀπέχῃ $\pi = 65$ cm, τότε τὸ εἴδωλον Α΄Β΄, τὸ ὁποῖον δίδει τὸ Μ εἶναι πραγματικόν, ἀνεστραμμένον καὶ ἡ ἀπόστασίς του π΄ ἀπὸ τὸ Μ εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

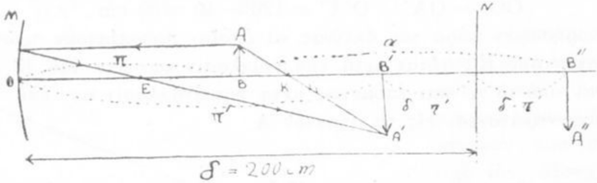
$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\varphi} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{65} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{50} \quad \text{ἄρα} \quad \pi' = \frac{650}{3} = 216{,}7 \text{ cm}.$$

τὸ δὲ μέγεθος τοῦ εἰδώλου εἶναι :

$$A'B' = AB \times \frac{\pi'}{\pi} = 5 \times \frac{650}{3 \times 65} = 5 \times \frac{10}{3} = 16{,}7 \text{ cm}.$$

Ὥστε τὸ Α΄Β΄ θὰ ἐσχηματίζετο εἰς ἀπόστασιν 216,7 cm, ἐὰν δὲν ὑπῆρχε τὸ κάτοπτρον Ν. Τὸ Α΄Β΄ παίζει λοιπὸν ρόλον φανταστικοῦ ἀντικειμένου διὰ τὸ Ν καὶ ἑπομένως τὸ Ν σχηματίζει τελικὸν εἴδωλον Α΄΄Β΄΄, τὸ ὁποῖον εἶναι πραγματικόν, ἀνεστραμμένον, εὑρίσκεται ἔμπροσθεν τοῦ N εἰς ἀπόστασιν 16,7 cm ἀπὸ τὸ N καὶ ἔχει ὕψος 16,7 cm.

2) Ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἁπλουστέραν περίπτωσιν (σχ. 21), κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἀντικείμενον AB δίδει διὰ τοῦ κατόπτρου M τὸ εἴδωλον A′B′· τὸ κάτοπ-



Σχ. 21

τρον N δίδει τελικῶς τὸ εἴδωλον A″B″ τοῦ A′B′. Ἂν θέσωμεν $OB = \pi$, $OB' = \pi'$ καὶ $BB'' = \alpha$, τότε εἶναι:

$$OB'' = \pi + \alpha = \pi' + 2(\delta - \pi') \quad \text{ἄρα:} \quad \pi' = 2\delta - \pi - \alpha.$$

Ἂν ἐκφράσωμεν τὰ π, π′ καὶ φ εἰς μέτρα, τότε διὰ τὸ εἴδωλον A′B′ ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\varphi} \quad (1) \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4 - \pi - \alpha} = \frac{1}{0{,}50} = 2$$

ἄρα: $$2\pi^2 - 2(4 - \alpha)\pi + (4 - \alpha) = 0.$$

Ἡ ζητουμένη λοιπὸν ἀπόστασις εἶναι:

$$\pi = \frac{1}{2}\left[4 - \alpha \pm \sqrt{(4-\alpha)^2 - 2(4-\alpha)}\right] = \frac{1}{2}\left[4 - \alpha \pm \sqrt{(4 - \alpha)(2 - \alpha)}\right].$$

Τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν, ἂν αἱ ῥίζαι τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως εἶναι θετικαὶ καὶ μικρότεραι ἀπὸ 2 (διότι εἶναι $\delta = 2$ m).

Διὰ τὴν περίπτωσιν $\alpha = 0$, ἔχομεν: $\pi = 2 \pm \sqrt{2}$·
ἡ παραδεκτὴ τιμὴ τῆς ζητουμένης ἀποστάσεως π εἶναι: $\pi = 2 - \sqrt{2}$·
τότε εὑρίσκομεν: $\pi' = 2 + \sqrt{2}$.

Πράγματι ἂν τὸ A′B′ σχηματίζεται ὄπισθεν τοῦ N εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ αὐτὸ ἴσην μὲ $\sqrt{2}$, τότε τὸ εἴδωλόν του A″B″ σχηματίζεται ἔμπροσθεν τοῦ N εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ αὐτὸ ἴσην μὲ $\sqrt{2}$· ἄρα τὸ A″B″ συμπίπτει μὲ τὸ AB.

28.— *Δύο κοῖλα σφαιρικὰ κάτοπτρα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν φ καὶ τὸν ἴδιον κύριον ἄξονα, ἔχουν δὲ τὰς κατοπτρικὰς ἐπιφανείας των ἀπέναντι ἀλλήλων. Ἡ ἀπόστασις τῶν κορυφῶν των εἶναι δ. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν θέσιν τοῦ κοινοῦ ἄξονος πρέπει νὰ τεθῇ φωτεινὸν σημεῖον A, ὥστε αἱ ἀκτῖνες, ποὺ ἀνακλῶνται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς κατόπτρου καὶ ἔπειτα ἐπὶ τοῦ ἄλλου, νὰ σχηματίζουν εἴδωλον A′, τὸ ὁποῖον συμπίπτει μὲ τὸ φωτεινὸν σημεῖον. Ἐφαρμογή:* $\varphi = 15$ cm, $\delta = 1{,}20$ m.

Ἔστω A τὸ φωτεινὸν σημεῖον καὶ M, M′ τὰ δύο ὅμοια κοῖλα κάτοπτρα. Αἱ ἀκτῖνες ποὺ προέρχονται ἀπὸ τὸ A, μετὰ τὴν ἀνάκλασίν των ἐπὶ τοῦ M, σχηματίζουν τὸ εἴδωλον A′. Τοῦτο παίζει ρόλον ἀντικειμένου διὰ τὸ κάτοπτρον M′, τὸ ὁποῖον σχηματίζει τὸ εἴδωλον τοῦ A′ εἰς τὸ A. Ἐὰν ὀνομάσωμεν:

$$OA = x \qquad O'A' = y$$
$$OA' = x' \qquad O'A = y'$$

τότε ἔχομεν τὰς ἑξῆς σχέσεις :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{\varphi} \qquad y = \delta - x'$$
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{y'} = \frac{1}{\varphi} \qquad y' = \delta - x\,.$$

Αἱ δύο πρῶται ἐξισώσεις γράφονται :

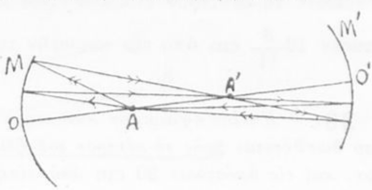
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{\varphi} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x + x'}{xx'} = \frac{1}{\varphi} \tag{1}$$
$$\frac{1}{\delta - x'} + \frac{1}{\delta - x} = \frac{1}{\varphi} \quad \text{ἢ} \quad \frac{2\delta - (x + x')}{\delta^2 - \delta(x + x') + xx'} = \frac{1}{\varphi}\,. \tag{2}$$

Ἂν θέσωμεν : $x + x = \alpha$, $xx' = \beta$ · τότε ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\varphi} \quad \text{ἢ} \quad \beta = \alpha\varphi\,,$$

ἡ δὲ ἐξίσωσις (2) διδει :

$$\frac{2\delta - \alpha}{\delta^2 - \delta\alpha + \alpha\varphi} = \frac{1}{\varphi}\,.$$



Σχ. 22

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν : $\alpha = \delta$ · ἑπομένως εἶναι :

$$\beta = \delta\varphi\,.$$

Συνάγεται λοιπὸν ὅτι τὰ x καὶ x' εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως :

$$x^2 - \delta x + \delta\varphi = 0\,.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἔχει ῥίζας, ἂν εἶναι :

$$\delta^2 - 4\,\delta\varphi \geqslant 0 \quad \text{ἢ} \quad \delta \geqslant 4\,\varphi\,.$$

Ἂν εἶναι : $\delta > 4\,\varphi$ ὑπάρχουν δύο θέσεις τοῦ A, αἱ ὁποῖαι εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὸ μέσον τῆς OO'.

Ἂν εἶναι : $\delta = 4\,\varphi$ ὑπάρχει μία μόνον θέσις τοῦ A εἰς τὸ μέσον τῆς OO', διότι τότε εἶναι : $x = \frac{\delta}{2} = 2\varphi$.

Ἂν εἶναι : $\delta < 4\varphi$ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἐφαρμογή : Διὰ $\varphi = 15$ cm καὶ $\delta = 120$ cm ἔχομεν :

$$x^2 - 120\,x + 1800 = 0 \cdot \quad \text{ἄρα} \quad x = 60 \pm 30\sqrt{2}\,.$$

Ὥστε αἱ ζητούμεναι ἀποστάσεις τοῦ A ἀπὸ τὸ O εἶναι :

$$x_1 = 60 + 30\sqrt{2} = 102 \text{ cm} \quad \text{ἢ} \quad x_2 = 60 - 30\sqrt{2} = 18 \text{ cm}\,.$$

29. — *Δύο σφαιρικὰ κάτοπτρα, τὸ ἕνα κυρτὸν M_1 καὶ τὸ ἄλλο κοῖλον M_2 ἔχουν τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα καμπυλότητος 20 cm. Οἱ κύριοι ἄξονές των συμπίπτουν, αἱ δὲ κατοπτρικαὶ ἐπιφάνειαί των εἶναι ἡ μία ἀπέναντι τῆς ἄλλης, οὕτως ὥστε αἱ κορυφαί των νὰ ἀπέχουν 40 cm. Εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς τοποθετεῖται φωτεινὸν ἀντικείμενον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ εἰδώλου, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται κατὰ τὴν ἀνάκλασιν τῶν ἀκτίνων πρῶτον ἐπὶ τοῦ κυρτοῦ καὶ ἔπειτα ἐπὶ τοῦ κοίλου κατόπτρου.*

Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τῶν κατόπτρων εἶναι : $\varphi = 10$ cm. Τὸ κυρτὸν κάτοπτρον M_1 σχηματίζει τὸ φανταστικὸν εἴδωλον A_1B_1 εἰς ἀπόστασιν π_1', τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{\pi_1} - \frac{1}{\pi_1'} = -\frac{1}{\varphi} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{20} - \frac{1}{\pi_1'} = -\frac{1}{10} \quad \text{ἄρα :} \quad \pi_1' = 6\frac{2}{3} \text{ cm} .$$

Τὸ φανταστικὸν εἴδωλον A_1B_1 εἶναι διὰ τὸ κάτοπτρον M_2 ἀντικείμενον καὶ ἐπομένως μετὰ τὴν δευτέραν ἀνάκλασιν ἐπὶ τοῦ κατόπτρου M_2 σχηματίζεται τὸ πραγματικὸν εἴδωλον A_2B_2 εἰς ἀπόστασιν π_2', ἡ ὁποία εἶναι :

$$\frac{1}{\pi_2} + \frac{1}{\pi_2'} = \frac{1}{\varphi} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{46\frac{2}{3}} + \frac{1}{\pi_2'} = \frac{1}{10}$$

ἄρα : $$\frac{1}{\pi_2'} = \frac{14-3}{140} = \frac{11}{140} \quad \text{ἢ} \quad \pi_2' = 12\frac{8}{11} \text{ cm} .$$

Ὥστε τὸ δεύτερον εἴδωλον εἶναι πραγματικὸν καὶ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν $12\frac{8}{11}$ cm ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ κοίλου κατόπτρου M_2.

30. — *Κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος 4 m καὶ ὁ ἄξων του διευθύνεται πρὸς τὸ κέντρον τοῦ ἡλίου. Μεταξὺ τοῦ κατόπτρου καὶ τῆς ἑστίας του, καὶ εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἀπὸ αὐτήν, τοποθετεῖται μικρὸν κυρτὸν κάτοπτρον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος 45 cm. Οἱ ἄξονες τῶν δύο κατόπτρων συμπίπτουν, αἱ δὲ ἀνακλῶσαι ἐπιφάνειαί των εὑρίσκονται ἡ μία ἀπέναντι τῆς ἄλλης. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου τοῦ ἡλίου, τὸ ὁποῖον παρέχει τὸ σύστημα τοῦτο. Φαινομένη διάμετρος τοῦ ἡλίου :* $\alpha = 0{,}5^\circ$.

Ἂς ὀνομάσωμεν F καὶ f τὰς ἑστιακὰς ἀποστάσεις τοῦ κοίλου καὶ τοῦ κυρτοῦ κατόπτρου. Τὸ κοῖλον κάτοπτρον δίδει εἴδωλον $A'B'$, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἐπὶ τοῦ ἑστιακοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατόπτρου. Ἄρα ἡ διάμετρος τοῦ εἰδώλου τούτου εἶναι : $A'B' = F \cdot \alpha$.

Ἀλλὰ εἶναι : $F = 200$ cm καὶ $\alpha = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{360}$ ἀκτίνια.

Ὥστε εὑρίσκομεν : $$A'B' = F \cdot \alpha = \frac{200\,\pi}{360} = \frac{5\pi}{9} = 1{,}74 \text{ cm} .$$

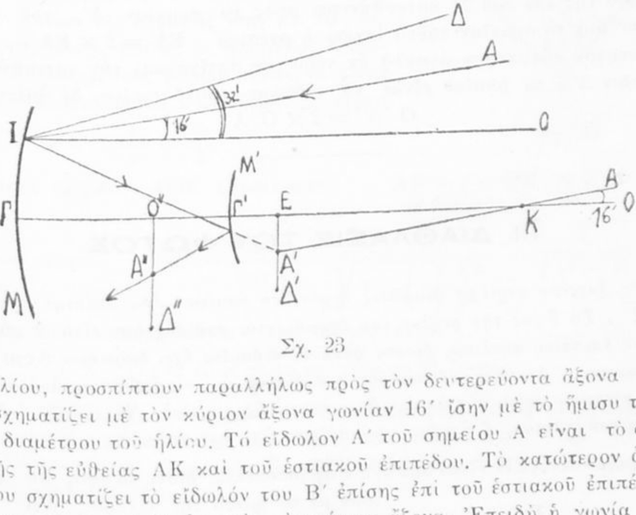
Τὸ κυρτὸν κάτοπτρον ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν $f = 22{,}5$ cm. Διὰ τὸ κάτοπτρον τοῦτο τὸ εἴδωλον $A'B'$ παίζει ρόλον φανταστικοῦ ἀντικειμένου, ἄρα εἶναι : $\pi = -20$ cm. Τὸ τελικὸν εἴδωλον ἔχει διάμετρον $A''B''$ καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὸ κυρτὸν κάτοπτρον ἀπόστασιν π', τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$-\frac{1}{20} + \frac{1}{\pi'} = -\frac{1}{22{,}5} \quad \text{ἄρα} \quad \pi' = 180 \text{ cm} = 1{,}80 \text{ m} .$$

Τὸ τελικὸν λοιπὸν εἴδωλον σχηματίζεται ἐπὶ τοῦ κοίλου κατόπτρου. Ἡ δὲ διάμετρος τοῦ τελικοῦ εἰδώλου εἶναι : $A''B'' = A'B' \times \frac{180}{20} = 15{,}7$ cm.

31. — *Ἔχομεν κοῖλον κάτοπτρον ἑστιακῆς ἀποστάσεως 2 m. Ὁ ἄξων του διευθύνεται πρὸς τὸ κέντρον τοῦ ἡλίου. 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγεθος τοῦ σχηματιζομένου εἰδώλου τοῦ ἡλίου, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ ἡλίου* *εἶναι 32′. 2) Μεταξὺ τοῦ εἰδώλου καὶ τοῦ ἀνωτέρω κατόπτρου παρεμβάλλομεν ἕνα μικρὸν κυρτὸν κάτοπτρον, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 cm, οὕτως ὥστε οἱ κύριοι ἄξονές των νὰ συμπίπτουν καὶ αἱ ἀνακλῶσαι ἐπιφάνειαί των νὰ εὑρίσκωνται ἡ μία ἀπέναντι τῆς ἄλλης. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο κατόπτρων εἶναι 1,84 m. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται μετὰ τὴν ἀνάκλασιν ἐπὶ τοῦ κυρτοῦ κατόπτρου. 3) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ πορεία μιᾶς φωτεινῆς ἀκτῖνος: α′) προσπιπτούσης ἐπὶ τοῦ κοίλου κατόπτρου παραλλήλως πρὸς τὸν κύριον ἄξονα· β′) προσπιπτούσης ἐπὶ τοῦ κοίλου κατόπτρου οὕτως ὥστε νὰ σχηματίζῃ γωνίαν 32′ μὲ τὸν κύριον ἄξονα.*

1) Τὸ κέντρον Ο τοῦ ἡλίου ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς σημεῖον εὑρισκόμενον εἰς τὸ ἄπειρον· ἐπομένως αἱ ἐξ αὐτοῦ προερχόμεναι ἀκτῖνες προσπίπτουν παραλλήλως πρὸς τὸν κύριον ἄξονα καὶ τὸ εἴδωλόν του Ο′ σχηματίζεται εἰς τὴν ἑστίαν Ε τοῦ κατόπτρου. Αἱ ἀκτῖνες, αἱ προερχόμεναι ἀπὸ τὸ ἀνώτερον ἄκρον



Σχ. 23

Α τοῦ ἡλίου, προσπίπτουν παραλλήλως πρὸς τὸν δευτερεύοντα ἄξονα ΑΚ, ὁ ὁποῖος σχηματίζει μὲ τὸν κύριον ἄξονα γωνίαν 16′ ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς φαινομένης διαμέτρου τοῦ ἡλίου. Τὸ εἴδωλον Α′ τοῦ σημείου Α εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς εὐθείας ΑΚ καὶ τοῦ ἑστιακοῦ ἐπιπέδου. Τὸ κατώτερον ἄκρον Β τοῦ ἡλίου σχηματίζει τὸ εἴδωλόν του Β′ ἐπίσης ἐπὶ τοῦ ἑστιακοῦ ἐπιπέδου καὶ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Α′ ὡς πρὸς τὸν κύριον ἄξονα. Ἐπειδὴ ἡ γωνία Α′ΚΒ′ εἶναι πολὺ μικρά, ἠμποροῦμε νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ μῆκος τῆς εὐθείας Α′Β′ εἶναι:

$$A'B' = \phi \, . \, \alpha$$

ὅπου ϕ εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ κοίλου κατόπτρου, ἡ δὲ γωνία α εἶναι ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ ἡλίου. Ἄρα: $A'B' = 200 \times \frac{2\pi \times 32}{360 \times 60} = 1{,}86$ cm.

2) Παρεμβάλλομεν τώρα τὸ κυρτὸν κάτοπτρον Μ′, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι ΓΓ′ = 184 cm. Τότε τὸ Α′Β′ ἀποβαίνει, διὰ τὸ κάτοπτρον Μ′, ἕνα φανταστικὸν ἀντικείμενον. Τὸ κάτοπτρον Μ′ δίδει τότε τὸ πραγματικὸν εἴδωλον Α″Β″, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ Α′Β′· ἡ ἀπόστασις π' τοῦ Α″Β″ ἀπὸ τὸ κάτοπτρον Μ′ προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$-\frac{1}{16} + \frac{1}{\pi'} = -\frac{1}{20} \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi' = 80 \text{ cm}.$$

Ἐπειδὴ εἶναι : $\dfrac{A''B''}{A'B'} = \dfrac{80}{16} = 5$, εὑρίσκομεν : $A''B'' = 5 \times 1{,}86 = 9{,}3$ cm.

Ἄρα τὸ τελικὸν εἴδωλον εἶναι πραγματικὸν καὶ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ κάτοπτρον Μ : $184 - 80 = 104$ cm .

3) Μια ἀκτὶς παράλληλος πρὸς τὸν κύριον ἄξονα, ἑπομένως προερχομένη ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τοῦ ἡλίου, μετὰ τὴν ἀνάκλασίν της ἐπὶ τοῦ κοίλου κατόπτρου, κατευθύνεται πρὸς τὴν κυρίαν ἑστίαν τοῦ κατόπτρου, ὅπου θὰ ἐσχημάτιζε τὸ εἴδωλον Ο΄ · ἀλλὰ ἡ ἀκτὶς ἀνακλᾶται ἐπὶ τοῦ κυρτοῦ κατόπτρου καὶ δίδει τὸ Ο΄΄, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ εἴδωλον τοῦ Ο΄ (ὡς πρὸς τὸ κάτοπτρον Μ΄).

Μία ἀκτὶς ΑΙ, σχηματίζουσα μὲ τὸν κύριον ἄξονα γωνίαν 16΄, ἑπομένως προερχομένη ἀπὸ τὸ σημεῖον Α, μετὰ τὴν ἀνάκλασίν της ἐπὶ τοῦ κοίλου κατόπτρου κατευθύνεται πρὸς τὸ σημεῖον Α΄, ἀλλὰ ἀνακλωμένη ἐκ νέου ἐπὶ τοῦ κυρτοῦ κατόπτρου κατευθύνεναι πρὸς τὸ σημεῖον Α΄΄. Μία ἀκτὶς ΔΙ, σχηματίζουσα μὲ τὸν ἄξονα γωνίαν 32΄, δηλαδὴ διπλασίαν τῆς προηγουμένης, μετὰ τὴν ἀνάκλασίν της ἐπὶ τοῦ Μ κατευθύνεται πρὸς τὸ σημεῖον Δ΄, τοῦ ἑστιακοῦ ἐπιπέδου· διὰ τὸ σημεῖον τοῦτο ἰσχύει ἡ σχέσις : $E\Delta' = 2 \times EA'$.

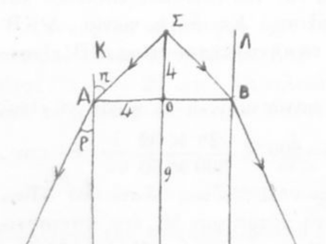
Τὸ κυρτὸν κάτοπτρον ἀνακλᾷ ἐκ νέου τὴν ἀκτῖνα καὶ τὴν κατευθύνει πρὸς τὸ σημεῖον Δ΄΄, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ εἴδωλον τοῦ Δ΄ · εἶναι δὲ πάλιν :

$$O'\Delta'' = 2 \times O''A'' .$$

III. ΔΙΑΘΛΑΣΙΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

32. — *Δοχεῖον περιέχει διαφανὲς ὑγρόν, τὸ ὁποῖον ἔχει δείκτην διαθλάσεως* $\nu = \sqrt{2}$. *Τὸ ὕψος τῆς στήλης τοῦ ὑγροῦ ἐντὸς τοῦ δοχείου εἶναι* 9 cm. *Ἐπὶ τοῦ ὑγροῦ ἐπιπλέει κυκλικὸς δίσκος φελλοῦ, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον* 8 cm *καὶ πάχος ἀσήμαντον. Ἄνωθεν τοῦ κέντρου τοῦ δίσκου καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ αὐτὸ* 4 cm *ὑπάρχει φωτεινὴ πηγή, τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν ὡς σημεῖον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάμετρος τοῦ σκοτεινοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος σχηματίζεται ἐπὶ τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου.*

Τὸ τρίγωνον ΑΣΒ εἶναι ὀρθογώνιον ἰσοσκελές, διότι τὸ ὕψος του ΣΟ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς ΑΒ. Ἄρα ἡ γωνία προσπτώσεως τῆς ἀκτῖνος ΣΑ εἶναι $\pi = 45^0$. Ἡ γωνία διαθλάσεως ρ εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :



Σχ. 24

$$\eta\mu\, \rho = \frac{\eta\mu\, \pi}{\nu} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \sqrt{2} = \frac{1}{2}$$

ἤτοι $\rho = 30^0$

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΚ΄Γ εὑρίσκομεν :

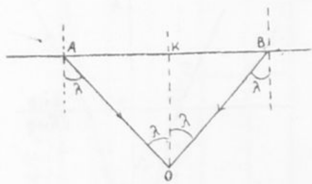
$$\Gamma K' = AK' . \varepsilon\varphi\, \rho = \frac{9}{\sqrt{3}} = 5{,}196 \text{ cm}.$$

Ὥστε ἡ διάμετρος τοῦ σκοτεινοῦ κύκλου εἶναι :

$$\Gamma\Delta = 2 \times 5{,}196 + 8 = 18{,}39 \text{ cm} .$$

33. — *Ὁ ὀφθαλμὸς ἑνὸς κολυμβητοῦ εὑρίσκεται εἰς βάθος 20 cm κάτωθεν τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης. Θέλομεν νὰ τοποθετήσωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης ἐπιπλέοντα ἀδιαφανῆ δίσκον, ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ τὸ κέντρον του ἐπὶ τῆς κατακορύφου ποὺ διέρχεται διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ κολυμβητοῦ καὶ νὰ ἀποκρύπτῃ ἀπὸ τὸν κολυμβητὴν ὅλα τὰ ἀντικείμενα τὰ εὑρισκόμενα ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος. Νὰ εὑρεθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ μικροτέρα δυνατὴ τιμὴ τῆς διαμέτρου τοῦ δίσκου καὶ ποῖα ἀντικείμενα θὰ βλέπῃ τότε ὁ κολυμβητής. Δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὕδατος :* $\nu = 4/3$.

Ἔστω Ο ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ. Αἱ ἀκτῖνες αἱ προερχόμεναι ἀπὸ τὰ ἀντικείμενα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, καὶ διαθλώμεναι εἰσέρχονται εἰς τὸν ὀφθαλμὸν τοῦ παρατηρητοῦ, περιέχονται ἐντὸς τοῦ κώνου ὁ ὁποῖος ἔχει κορυφὴν τὸ Ο, ἄξονα τὴν ΟΚ, κάθετον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος, καὶ γωνίαν τῆς κορυφῆς ἴσην μὲ τὸ διπλάσιον τῆς ὁρικῆς γωνίας λ. Ἑπομένως ἡ διάμετρος τοῦ ἀδιαφανοῦς δίσκου πρέπει νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπόστασιν ΑΒ. Γνωρίζομεν ὅτι εἶναι:



Σχ. 25

$$\eta\mu\,\lambda = \frac{1}{\nu} = \frac{3}{4}.$$

Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΟΚ εὑρίσκομεν: $AK = r = OK \,.\, \varepsilon\varphi\,\lambda$. (1)

Ἀλλὰ εἶναι : $$\varepsilon\varphi\,\lambda = \frac{\eta\mu\,\lambda}{\sigma\upsilon\nu\,\lambda} = \frac{\frac{1}{\nu}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\nu}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\nu^2-1}} = \frac{3}{\sqrt{7}}.$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη ἀκτὶς r τοῦ δίσκου εἶναι :

$$r = 20 \times \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{60}{\sqrt{7}} = 22{,}7 \text{ cm}.$$

Τότε ὁ ὀφθαλμός, παρατηρῶν τὴν ἐπιφάνειαν, θὰ βλέπῃ τὰ ἀντικείμενα τὰ εὑρισκόμενα ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ἀλλ' ἐκτὸς τοῦ κώνου ΑΟΒ. Τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ γίνονται ὁρατά, λόγῳ τῆς ὁλικῆς ἀνακλάσεως ποὺ συμβαίνει εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ΑΒ τοῦ ὕδατος.

34. — *Ἕνα ἔντομον πετᾷ ὁριζοντίως ἄνωθεν λίμνης εἰς ὕψος 12 cm ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος. Βλέπει κατακορύφως ἐντὸς τοῦ ὕδατος καὶ διακρίνει ἰχθὺν εἰς βάθος 18 cm ὑπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς λίμνης. Νὰ ὑπολογισθῇ : 1) Πόσον εἶναι τὸ πραγματικὸν βάθος εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ὁ ἰχθύς. 2) Εἰς ποῖον ὕψος ὑπεράνω τοῦ ὕδατος βλέπει ὁ ἰχθὺς νὰ πετᾷ τὸ ἔντομον. Δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὕδατος :* $\nu = 4/3$.

1) Ἔστω Α ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ ἐντόμου καὶ Β ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ ἰχθύος, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου. Ὁ ὀφθαλμὸς Α βλέπει τὸ Β ὑψηλότερα, εἰς τὸ Β′ (σχ. 26). Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι π καὶ δ εἶναι πολὺ μικραί, ἠμποροῦμε ἀπὸ τὰ τρίγωνα ΟΒΓ καὶ ΟΒ′Γ νὰ λάβωμεν τὴν σχέσιν :

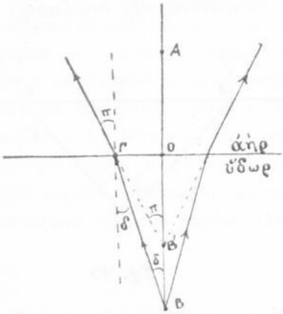
$$O\Gamma = OB \,.\, \delta = OB' \,.\, \pi$$

ἄρα εἶναι : $\frac{OB}{OB'} = \frac{\pi}{\delta} = \nu$ ἢ $OB = OB' . \nu .$ (1)

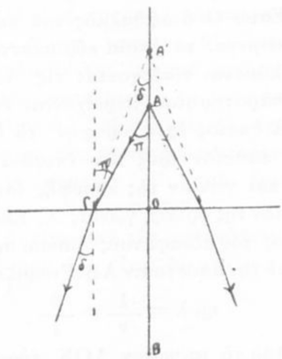
Ὥστε τὸ πραγματικὸν βάθος ΟΒ, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ὁ ἰχθύς, εἶναι :

$$OB = OB' . \nu = 18 \times \frac{4}{3} = 24 \text{ cm} .$$

2) Ὁ ὀφθαλμὸς Β βλέπει τὸ Α ὑψηλότερα ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος, εἰς τὸ Α′ (σχ. 27). Ἀπὸ τὰ τρίγωνα ΟΑΓ καὶ ΟΑ′Γ εὑρίσκομεν, ὅπως



Σχ. 26



Σχ. 27

καὶ ἀνωτέρω τὴν σχέσιν : $O\Gamma = OA . \pi = OA' . \delta$ ·

ἄρα εἶναι : $\frac{OA'}{OA} = \frac{\pi}{\delta} = \nu$ ἢ $OA' = OA . \nu .$ (2)

Ὥστε τὸ φαινόμενον ὕψος ΟΑ′ τοῦ ἐντόμου ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τῆς λίμνης εἶναι : $OA' = OA . \nu = 12 \times \frac{4}{3} = 16$ cm .

35.— *Δύο ὑάλινα κατακόρυφα δοχεῖα Α καὶ Β εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς τραπέζης τὸ ἕνα πλησίον τοῦ ἄλλου. Τὰ δοχεῖα εἶναι κενὰ καὶ εἰς τὸν πυθμένα των ὑπάρχουν ἀντιστοίχως δύο μικρὰ τεμάχια κιμωλίας α καὶ β. Παρατηροῦντες κατακορύφως ἐντὸς καὶ τῶν δύο δοχείων, χύνομεν εἰς τὸ Α ὕδωρ ἕως ὅτου τοῦτο φθάσῃ εἰς ὕψος* 40 cm. *1) Μετακινοῦμεν τότε πέριξ τοῦ Α ἕνα φύλλον χάρτου καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ α φαίνεται νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ χάρτου, ὅταν τοῦτο ἀπέχῃ* 10 cm *ἀπὸ τὸν πυθμένα τοῦ δοχείου Α. Νὰ εὑρεθῇ ὁ δείκτης διαθλάσεως ν τοῦ ὕδατος. 2) Τὸ Α ἐξακολουθεῖ νὰ περιέχῃ τὸ ὕδωρ. Χύνομεν εἰς τὸ δοχεῖον Β χλωροφόρμιον καὶ τότε εὑρίσκομεν ὅτι τὰ α καὶ β φαίνονται νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τοῦ ἰδίου ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ὅταν τὸ ὕψος τοῦ χλωροφορμίου ἐντὸς τοῦ Β γίνῃ* 32,7 cm *Νὰ εὑρεθῇ ὁ δείκτης διαθλάσεως ν′ τοῦ χλωροφορμίου. 3) Εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς γλυκερίνης εἶναι :* $\nu'' = 1{,}47$. *Νὰ εὑρεθῇ πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ ὕψος τῆς γλυκερίνης ἐντὸς τοῦ Β, ὥστε τὰ α καὶ β νὰ φαίνωνται πάλιν ὅτι εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ ἰδίου ἐπιπέδου.*

1) Γνωρίζομεν (πρ. 34) ὅτι μεταξὺ τῶν ἀποστάσεων Οα καὶ Οα′ ἰσχύει ἡ

σχέσις : $O\alpha = O\alpha' . \nu$ · ἄρα $\dfrac{O\alpha}{O\alpha'} = \nu$ ·

ἀπὸ τὴν δευτέραν σχέσιν εὑρίσκομεν :

$$\frac{O\alpha - O\alpha'}{O\alpha} = \frac{\nu - 1}{\nu} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\upsilon}{H} = \frac{\nu - 1}{\nu} \qquad (1)$$

ὅπου υ εἶναι ἡ ἀνύψωσις τοῦ σώματος ($\upsilon = O\alpha - O\alpha'$) καὶ Η ἡ ἀπόστασις τοῦ σώματος ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ. Εἰς τὴν περίπτωσιν λοιπὸν τοῦ ὕδατος τοῦ δοχείου Α ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται :

$$\frac{10}{40} = \frac{\nu - 1}{\nu} \quad \text{ἄρα} \quad \nu' = \frac{4}{3}.$$

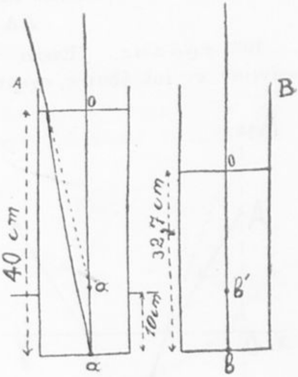
2) Ὅταν εἰς τὸ δοχεῖον Β ὑπάρχῃ τὸ χλωροφόρμιον, τότε ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται :

$$\frac{10}{32{,}7} = \frac{\nu' - 1}{\nu'} \quad \text{ἄρα} \quad \nu' = 1{,}44.$$

3) Ἂν εἰς τὸ δοχεῖον Β τεθῇ ἀντὶ χλωροφορμίου γλυκερίνη, τότε ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν :

$$\frac{10}{H} = \frac{1{,}47 - 1}{1{,}47}$$

$$\text{ἢ} \quad H = \frac{1{,}47 \times 10}{0{,}47} = 31{,}3 \text{ cm} .$$



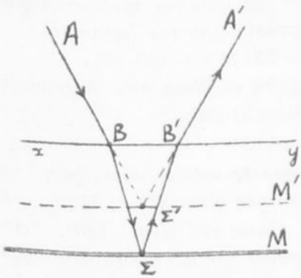
Σχ. 28

Ὥστε τὸ ὕψος Η τῆς γλυκερίνης πρέπει νὰ εἶναι : $H = 31{,}3$ cm .

36.— *Ἐντὸς δοχείου, τοῦ ὁποίου ὁ πυθμὴν ἀποτελεῖται ἀπὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον κάτοπτρον, περιέχεται ὕδωρ · ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὕδατος εἶναι* $\nu = 4/3$, *τὸ δὲ πάχος τοῦ στρώματος τοῦ ὕδατος εἶναι* 1 m . *Ὁ ὀφθαλμὸς Α ἑνὸς παρατηρητοῦ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν* 1,20 m *ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος. 1) Ποῦ βλέπει ὁ παρατηρητὴς τὸ εἴδωλον τοῦ ὀφθαλμοῦ του ; 2) Κατὰ ποίαν φορὰν καὶ κατὰ πόσον μετακινεῖται τὸ εἴδωλον, ἂν χυθῇ ὅλον τὸ ὕδωρ τοῦ δοχείου ;*

1) Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἠμπορεῖ νὰ λυθῇ κατὰ δύο τρόπους :

Α^ος τ ρ ό π ο ς . Ἡ φωτεινὴ ἀκτὶς ΑΒ, προσπίπτουσα ὑπὸ μικρὰν γωνίαν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, διαθλᾶται κατὰ τὴν ΒΣ· αὕτη ἀνακλᾶται ἐπὶ τοῦ κατόπτρου Μ κατὰ τὴν ΣΒ', ἡ ὁποία ἐξέρχεται εἰς τὸν ἀέρα κατὰ τὴν Β'Α'. Αἱ προεκτάσεις τῆς προσπιπτούσης ΑΒ καὶ τῆς ἀναδυομένης Β'Α' τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Σ'. Τὸ Σ' εἶναι τὸ εἴδωλον τοῦ Σ διὰ μέσου τοῦ ἐπιπέδου διόπτρου. Ὥστε τὸ σύστημα ἰσοδυναμεῖ μὲ ἕνα ἐπίπεδον κάτοπτρον Μ', τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ εἴδωλον τοῦ κατόπτρου Μ διὰ μέσου τοῦ ἐπιπέδου διόπτρου. Ἐπειδὴ τὸ κάτοπτρον Μ εὑρίσκεται 100 cm κάτωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ



Σχ. 29

ὕδατος, τὸ εἴδωλον Μ′ τοῦ κατόπτρου ἀπέχει ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος:

$$\frac{100}{\nu} = 100 : \frac{4}{3} = 75 \text{ cm}.$$

Ὥστε τὸ σύστημα ὕδωρ — ἐπίπεδον κάτοπτρον ἰσοδυναμεῖ μὲ ἕνα ἐπίπεδον κάτοπτρον Μ′, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸν ὀφθαλμὸν Α τοῦ παρατηρητοῦ:

$$120 + 75 = 195 \text{ cm}.$$

Τὸ εἴδωλον A_1 λοιπὸν τοῦ Α ἀπέχει ἀπὸ τὸν ὀφθαλμὸν τοῦ παρατηρητοῦ:

$$AA_1 = 195 \times 2 = 390 \text{ cm}.$$

Β^ος τρόπος. Ἕνεκα τῆς διαθλάσεως, ἡ ὁποία συμβαίνει εἰς τὴν ἐπιφάνειαν xy τοῦ ὕδατος, σχηματίζεται τὸ εἴδωλον A_1 τοῦ φωτεινοῦ σημείου Α. Εἶναι δέ:

$$OA_1 = OA \cdot \nu = 120 \times \frac{4}{3} = 160 \text{ cm}.$$

Τὸ σημεῖον A_1 ἐπέχει θέσιν πραγματικοῦ ἀντικειμένου διὰ τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον Μ. Ἡ ἀπόστασις τοῦ A_1 ἀπὸ τὸ Μ εἶναι:

$$\Sigma A_1 = \Sigma O + OA_1 = 100 + 160 = 260 \text{ cm}.$$

Τὸ κάτοπτρον Μ δίδει τὸ εἴδωλον A_2, συμμετρικὸν τοῦ A_1 ὡς πρὸς τὸ κάτοπτρον.

Ἄρα εἶναι: $\Sigma A_2 = 260$ cm.

Αἱ ἀνακλασθεῖσαι ἐπὶ τοῦ Μ ἀκτῖνες, ὅταν διαθλασθοῦν ἐκ νέου εἰς τὴν ἐπιφάνειαν xy τοῦ ὕδατος, φαίνονται προερχόμεναι ἀπὸ τὸ σημεῖον Α′· ἡ ἀπόστασις τοῦ Α′ ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος εἶναι:

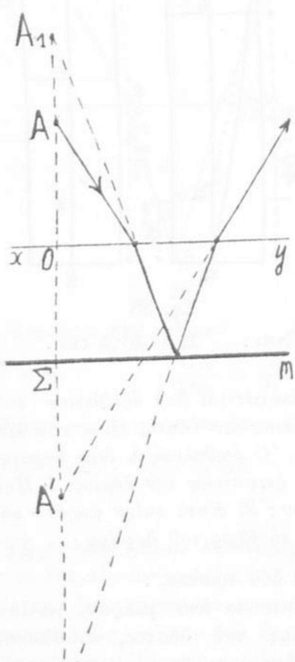
$$OA' = \frac{OA_2}{\nu} = 360 : \frac{4}{3} = 270 \text{ cm}.$$

Ὥστε τελικῶς ὁ παρατηρητὴς βλέπει τὸ εἴδωλον Α′ τοῦ ὀφθαλμοῦ του εἰς ἀπόστασιν:

$$AA' = OA + OA' = 120 + 270 = 390 \text{ cm}.$$

2) Ἐὰν τὸ δοχεῖον δὲν περιέχῃ ὕδωρ, τὸ εἴδωλον Α″ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν $120 + 100 = 220$ cm ὄπισθεν τοῦ κατόπτρου, δηλαδὴ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν:

$$AA'' = 220 \times 2 = 440 \text{ cm}.$$



Σχ. 30

Ὥστε ὅταν χυθῇ τὸ ὕδωρ τοῦ δοχείου, τὸ εἴδωλον ἀπομακρύνεται κατά: $440 - 390 = 50$ cm.

37. — *Φωτεινὸν σημεῖον εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον Κ κοίλου κατόπτρου, τοῦ ὁποίου ὁ κύριος ἄξων εἶναι κατακόρυφος. Τὸ κάτοπτρον εἶναι πλῆρες ὕδατος. Ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τοῦ κατόπτρου εἶναι R, τὸ δὲ πλάτος του εἶναι 120°. Ἀπὸ τὸ Κ ἀναχωρεῖ λεπτὴ δέσμη ἀκτίνων, ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ τὸν ἄξονα τοῦ κατόπτρου, εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ἀνακλᾶται ἐπὶ τοῦ κατόπτρου καὶ μετὰ τὴν ἔξοδόν της ἀπὸ τὸ ὕδωρ συγκλίνει εἰς ἕνα σημεῖον τοῦ κυρίου ἄξονος, τὸ ὁποῖον εὑρίσκε-*

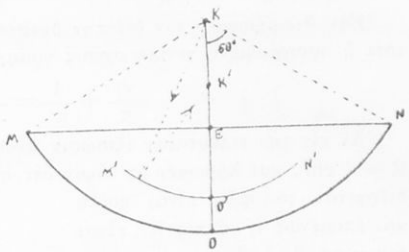
ται εἰς ἀπόστασιν x *ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις* x *συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος* R *καὶ τοῦ δείκτου διαθλάσεως τοῦ ὕδατος:* $\nu = 4/3$.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΕΚΝ εἶναι 60°, συνάγεται ὅτι εἶναι: $EK = R/2$. Ὥστε ἡ ΜΝ τέμνει καθέτως τὴν ΚΟ εἰς τὸ μέσον της Ε, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ κυρία ἑστία τοῦ κατόπτρου. Ἡ ἀκτὶς ΚΟ, ὅταν ἐξέρχεται ἀπὸ τὸ ὕδωρ, φαίνεται προερχομένη ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο΄, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ εἴδωλον τοῦ Ο ὡς πρὸς τὸ δίοπτρον ΜΝ. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι εἶναι:

$$EO = EO' \cdot \nu \qquad \text{ἄρα} \qquad EO' = \frac{EO}{\nu} = \frac{R}{2\nu}.$$

Τὸ σύστημα λοιπὸν κάτοπτρον ΜΝ — ὕδωρ ἰσοδυναμεῖ μὲ σφαιρικὸν κάτοπτρον, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ Ο΄. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις φ΄ τοῦ ἰσοδυνάμου κατόπτρου Μ΄Ν΄ εὑρίσκεται πάλιν ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\varphi' = \frac{\Phi}{\nu}, \quad \text{ἢ} \quad \varphi' = \frac{R}{2\nu}.$$



Σχ. 31

Ὥστε ἡ κυρία ἑστία τοῦ ἰσοδυνάμου κατόπτρου συμπίπτει μὲ τὴν κυρίαν ἑστίαν Ε. Ἡ ἀπόστασις τοῦ φωτεινοῦ σημείου Κ ἀπὸ τὸ κάτοπτρον Μ΄Ν΄ εἶναι:

$$\pi = O'K = O'E + EK$$

$$\text{ἢ} \qquad \pi = \frac{R}{2\nu} + \frac{R}{2} = \frac{R(\nu+1)}{2\nu}.$$

Τὸ εἴδωλον Κ΄ τοῦ σημείου Κ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν $\pi' = O'K'$, τὴν ὁποίαν ὑπολογίζομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\varphi'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{2\nu}{R(\nu+1)} + \frac{1}{\pi'} = \frac{2\nu}{R} \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi' = \frac{R(\nu+1)}{2\nu^2}.$$

Ἡ ἀπόστασις $x = EK'$ τοῦ εἰδώλου ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος εἶναι:

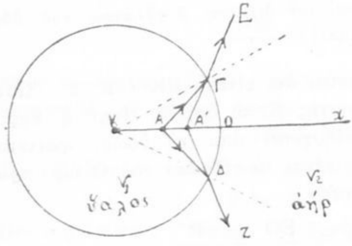
$$EK' = x = O'K' - O'E \quad \text{ἢ} \quad x = \pi' - \varphi' = \frac{R(\nu+1)}{2\nu^2} - \frac{R}{2\nu} = \frac{R}{2\nu^2}.$$

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\nu = \frac{4}{3}$, εὑρίσκομεν: $\qquad x = \frac{9R}{32}$.

38.— *Μία ὑαλίνη σφαῖρα ἔχει δείκτην διαθλάσεως* 1,5 *καὶ ἀκτῖνα* 2 cm. *Ἡ σφαῖρα περικλείει φυσαλίδα ἀέρος, ἡ ὁποία ἀπέχει* 1 cm *ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν θέσιν βλέπομεν τὴν φυσαλίδα τοῦ ἀέρος: 1) Ὅταν παρατηροῦμεν κατὰ μῆκος μιᾶς διαμέτρου διὰ μέσου τοῦ μικροτέρου πάχους τῆς ὑάλου. 2) Ὅταν παρατηροῦμεν κατὰ μῆκος μιᾶς διαμέτρου διὰ μέσου τοῦ μεγαλυτέρου πάχους τῆς ὑάλου.*

1) Ἔστω Κ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ Α τὸ κέντρον τῆς φυσαλίδος τοῦ ἀέρος. Εἶναι $KA = 1$ cm καὶ $KO = 2$ cm. Ὅταν παρατηροῦμεν κατὰ τὴν

διεύθυνσιν ΚΟx, τότε αἱ διαθλώμεναι ἀκτῖνες ΓΕ καὶ ΔΖ φαίνονται προερχόμεναι ἀπὸ τὸ σημεῖον Α΄ τῆς ἀκτῖνος ΚΟ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν δύο διαφανῆ μέσα (ὕαλος—ἀήρ), τὰ ὁποῖα χωρίζονται μεταξύ των μὲ μίαν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν, ἔχουσαν ἀκτῖνα καμπυλότητος R, δηλαδὴ ἔχομεν ἕνα σφαιρικὸν δίοπτρον. Ἂν ν_1 καὶ ν_2 εἶναι οἱ ἀπόλυτοι δεῖκται διαθλάσεως τῆς ὑάλου καὶ τοῦ ἀέρος, τότε γνωρίζομεν ὅτι κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς πορείας τοῦ φωτὸς ἰσχύει γενικῶς ἡ σχέσις:



Σχ. 32

$$\frac{\nu_1}{\pi}+\frac{\nu_2}{\pi'}=\frac{\nu_2-\nu_1}{R}$$ ὅπου εἶναι: $\pi = OA$ καὶ $\pi' = OA'$.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸν δείκτην διαθλάσεως τοῦ ἀέρος ἴσον μὲ τὴν μονάδα, τότε ἡ προηγουμένη γενικὴ σχέσις γράφεται:

$$\frac{\nu_1}{\pi}+\frac{1}{\pi'}=\frac{1-\nu_2}{R} \quad . \qquad (1)$$

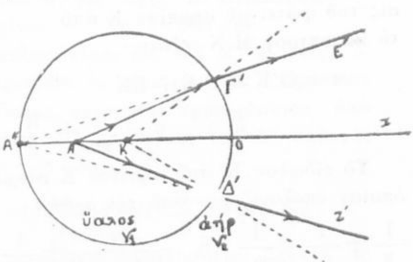
Ἂν εἰς τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν θέσωμεν τὰς τιμάς: $\pi = 1$ cm, $\nu_2 = 1{,}5$, $R = 2$ cm, καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια διὰ τῆς ὁποίας διέρχεται τὸ φῶς εἶναι κοίλη καὶ ἑπομένως ἡ ἀκτὶς R εἶναι ἀρνητική, θὰ λάβωμεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{1{,}5}{1}+\frac{1}{\pi'}=\frac{1-1{,}5}{-2}$$

Ἄρα εἶναι:

$$\pi' = -\frac{2}{2{,}5} = -0{,}8 \text{ cm} .$$

Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον φανερώνει ὅτι τὸ εἴδωλον Α΄ εἶναι φανταστικόν. Ἡ φυσαλὶς τοῦ ἀέρος φαίνεται νὰ ἀπέχῃ 0,8 cm ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ἐνῷ ἡ πραγματική ἀπόστασίς της εἶναι 1 cm.



Σχ. 33

2) Ὅταν παρατηροῦμεν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς διαμέτρου ΑΚΟx, τότε αἱ διαθλώμεναι ἀκτῖνες Γ΄Ε΄ καὶ Δ΄Ζ΄ φαίνονται προερχόμεναι ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α΄΄ τῆς εὐθείας Αx. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι: $\pi = OA = 3$ cm, ἑπομένως ἀπὸ τὴν σχέσιν (1) λαμβάνομεν:

$$\frac{1{,}5}{3}+\frac{1}{\pi'}=\frac{1-1{,}5}{-2} \qquad \text{ἄρα εἶναι:} \quad \pi' = -\frac{6}{1{,}5} = -4 \text{ cm} .$$

Τὸ εἴδωλον Α΄΄ εἶναι πάλιν φανταστικὸν καὶ ἀπέχει 4 cm ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο, δηλαδὴ βλέπομεν τὴν φυσαλίδα ἐπὶ τῆς ὀπισθίας ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

39.— *Μία ἀκτὶς φωτὸς διέρχεται διὰ τοῦ τοιχώματος ὑαλίνου δοχείου, τὸ ὁποῖον περιέχει ὕδωρ. Ἐὰν ἡ γωνία προσπτώσεως εἶναι 30°, πόση εἶναι ἡ ἐκτρο-*

πὴ τῆς φωτεινῆς ἀκτῖνος εἰς ἑκάστην διάθλασίν της; Δεῖκται διαθλάσεως: τῆς ὑάλου: $\nu = 1{,}50$ *καὶ τοῦ ὕδατος:* $\nu_1 = 1{,}33$.

Ἡ ἀκτὶς κατὰ τὴν πρώτην διάθλασίν της εἰς τὸ Α μεταβαίνει ἀπὸ τὸν ἀέρα εἰς τὴν ὕαλον καὶ ἐπομένως ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\eta\mu\, \pi = \nu \,.\, \eta\mu\, \delta \qquad \text{ἢ} \qquad \eta\mu\, 30^0 = 1{,}50 \,.\, \eta\mu\, \delta \cdot$$

ἄρα:
$$\eta\mu\, \delta = \frac{\eta\mu\, 30^0}{1{,}50} = \frac{0{,}50}{1{,}50} = 0{,}333 \qquad \text{ἢ} \qquad \delta = 19^0\ 28' .$$

Ὥστε ἡ ἐκτροπὴ ε κατὰ τὴν πρώτην διάθλασιν τῆς ἀκτῖνος εἶναι:

$$\varepsilon = \pi - \delta = 30^0 - 19^0\ 28' \qquad \text{ἢ} \qquad \varepsilon = 10^0\ 32'.$$

Εἰς τὸ Β ἡ ἀκτὶς μεταβαίνει ἀπὸ τὴν ὕαλον εἰς τὸ ὕδωρ. Ὁ δείκτης διαθλάσεως ν_1' τῆς ὑάλου ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς: Ἔστω υ_1, υ_2, υ_3 αἱ ταχύτητες τοῦ φωτὸς εἰς τὰ τρία μέσα: ἀήρ, ὕαλος, ὕδωρ. Τότε εἶναι:

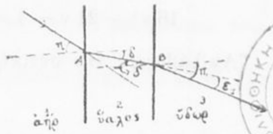
$$\nu = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} \qquad \text{καὶ} \qquad \nu_1 = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_3} .$$

Ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν τὸν δείκτην διαθλάσεως τοῦ ὕδατος ὡς πρὸς τὴν ὕαλον:

$$\frac{\nu_1}{\nu} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_3} : \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_3} = \nu_1' \cdot$$

$$\text{ἢ} \qquad \nu_1 = \nu \,.\, \nu_1' \cdot \qquad (1)$$

$$\text{ἄρα} \qquad \nu_1' = \frac{1{,}33}{1{,}50} = 0{,}887 .$$



Σχ. 34

Ἡ γωνία διαθλάσεως π_1 εὑρίσκεται τώρα ἀπὸ τὴν σχέσιν:

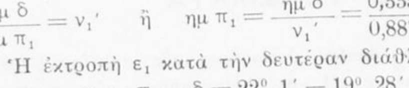
$$\frac{\eta\mu\, \delta}{\eta\mu\, \pi_1} = \nu_1' \qquad \text{ἢ} \qquad \eta\mu\, \pi_1 = \frac{\eta\mu\, \delta}{\nu_1'} = \frac{0{,}333}{0{,}887} = 0{,}375 \cdot \qquad \text{ἄρα εἶναι: } \pi_1 = 22^0\ 1'.$$

Ἡ ἐκτροπὴ ε_1 κατὰ τὴν δευτέραν διάθλασιν τῆς ἀκτῖνος εἶναι:

$$\varepsilon_1 = \pi_1 - \delta = 22^0\ 1' - 19^0\ 28' \qquad \text{ἢ} \qquad \varepsilon_1 = 2^0\ 33' .$$

40.— *Κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος* 45 cm. *Τὸ κάτοπτρον βυθίζεται ἐντὸς ὑαλίνου δοχείου, τὸ ὁποῖον περιέχει ἔλαιον. Τὰ τοιχώματα τοῦ δοχείου εἶναι ἐπίπεδα καὶ κάθετα πρὸς τὸν κύριον ἄξονα τοῦ κατόπτρου. Ἡ κορυφὴ τοῦ κατόπτρου ἀπέχει* 5 cm *ἀπὸ τὸ τοίχωμα* Α *τοῦ δοχείου, πρὸς τὸ ὁποῖον εἶναι ἐστραμμένον τὸ κάτοπτρον. Φωτεινὸν σημεῖον, εὑρισκόμενον ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος καὶ εἰς ἀπόστασιν* 20 cm *ἀπὸ τὸ τοίχωμα* Α, *δίδει τότε πραγματικὸν εἴδωλον εἰς ἀπόστασιν* 20 cm *ἀπὸ τὸ* Α. *Νὰ δειχθῇ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων, ὅταν τὸ πάχος τοῦ τοιχώματος* Α *εἶναι ἀσήμαντον καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ δείκτης διαθλάσεως* ν *τοῦ ἐλαίου ὡς πρὸς τὸν ἀέρα.*

Τὸ φωτεινὸν σημεῖον Κ ἀπέχει ἀπὸ τὴν κορυφὴν 0 τοῦ κατόπτρου 45 cm, ἄρα εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον καμπυλότητος τοῦ κατόπτρου. Μία φωτεινὴ ἀκτὶς ΚΒ ὑφίσταται εἰς τὸ Β διάθλασιν καὶ πλησιάζει πρὸς τὴν κάθετον. Ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ γίνεται ἡ ΒΓ, ἡ ὁποία φαίνεται προερχομένη ἀπὸ



Σχ. 35

ἕνα σημεῖον K_1 · τοῦτο εἶναι τὸ εἴδωλον τοῦ K εἰς τὸ δίοπτρον ἀὴρ — ἔλαιον. Ἐὰν ν εἶναι ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ἐλαίου, τότε ἀπὸ τὰ τρίγωνα ABK καὶ ABK_1 εὑρίσκομεν: $AK_1 = \nu \cdot AK$ · ἢ $OK_1 = OA + AK_1 = 5 + 40\,\nu$.

Ἡ ἀκτὶς ΒΓ ἀνακλᾶται ἐπὶ τοῦ κατόπτρου κατὰ τὴν ΓΔ καὶ διευθύνεται πρὸς τὸ σημεῖον K_2, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ εἴδωλον τοῦ K_1 διὰ τὸ κάτοπτρον.

Ἑπομένως ἔχομεν :
$$\frac{1}{OK_1} + \frac{1}{OK_2} = \frac{1}{\varphi}. \qquad (1)$$

Ἀλλὰ εἰς τὸ Δ ἡ ἀκτὶς ὑφίσταται διάθλασιν καὶ διευθύνεται πρὸς τὸ σημεῖον K′, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ εἴδωλον τοῦ K_2 εἰς τὸ δίοπτρον ἔλαιον — ἀήρ. Εὑρίσκομεν ὅμως πάλιν ὅτι εἶναι :
$$AK_2 = \nu \cdot AK' \quad \text{ἢ} \quad OK_2 = OA + AK_2 = 5 + 20\,\nu\,.$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται:
$$\frac{1}{5+40\,\nu} + \frac{1}{5+20\,\nu} = \frac{2}{45} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{1}{1+8\,\nu} + \frac{1}{1+4\nu} = \frac{2}{9}\,.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν :
$$16\,\nu^2 - 21\,\nu - 4 = 0 \cdot \qquad \text{ἄρα} \qquad \nu = \frac{21 \pm \sqrt{697}}{32}\,.$$

Ἂν λάβωμεν τὴν θετικὴν ρίζαν, ἔχομεν : $\nu = 1{,}48$.

IV. ΠΛΑΚΕΣ — ΠΡΙΣΜΑΤΑ

41.— *Μία φωτεινὴ πηγὴ Α, τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν ὡς σημεῖον, ἀπέχει* $\delta = 4$ cm *ἀπὸ ὑαλίνην πλάκα, πάχους* $\varepsilon = 1$ cm . *Θεωροῦμεν μίαν φωτεινὴν ἀκτῖνα, προσπίπτουσαν ἐπὶ τῆς πλακὸς ὑπὸ γωνίαν* 60^0. *Νὰ ὑπολογισθοῦν, αἱ ἀπὸ τὸ Α ἀποστάσεις τῶν τεσσάρων πρώτων εἰδώλων τοῦ Α, τὰ ὁποῖα βλέπομεν, ὅταν παρατηροῦμεν διὰ μέσου τῆς πλακός. Δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου :* $\nu = \sqrt{3/2}$.

Ἔστω AE_1 ἡ προσπίπτουσα ἀκτίς · αὕτη δίδει τὴν ἀνακλωμένην ἀκτῖνα E_1Z_1 καὶ τὴν διαθλωμένην ἀκτῖνα E_1B . Ἡ ἀκτὶς E_1Z δίδει τὸ εἴδωλον A_1 , τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ Α : $AA_1 = 2\,\delta = 8$ cm .

Ἡ γωνία διαθλάσεως ρ εἶναι :
$$\text{ημ}\,\rho = \frac{\text{ημ}\,60^0}{\nu} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{ἄρα} \quad \rho = 45^0\,.$$

Τὸ τρίγωνον E_1BE_2 εἶναι ὀρθογώνιον ἰσοσκελές.

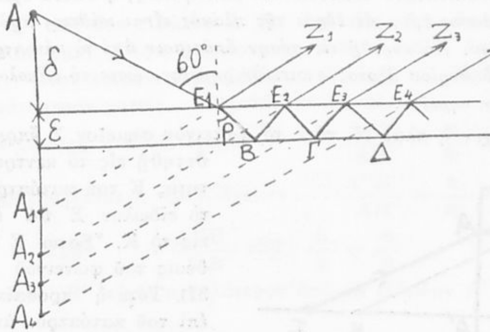
Ἑπομένως εἶναι : $E_1E_2 = 2\,\varepsilon$.

Ἡ ἀκτὶς E_1B, μετὰ τὴν ἀνάκλασίν της εἰς τὸ Β, προσπίπτει εἰς τὸ E_2 καὶ δίδει τὴν διαθλωμένην E_2Z_2 καὶ τὴν ἀνακλωμένην $E_2\Gamma$. Ἡ γωνία διαθλάσεως εἶναι 60^0 καὶ αἱ ἀκτῖνες $A_1E_1Z_1$ καὶ $A_2E_2Z_2$ εἶναι παράλληλοι.

Ἑπομένως ἔχομεν τὴν σχέσιν:
$$\frac{A_1\Theta}{E_1\Theta} = \frac{A_1A_2}{E_1E_2} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{\delta}{\delta\sqrt{3}} = \frac{A_1A_2}{2\,\varepsilon}$$

καὶ
$$A_1A_2 = \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{}} = \frac{2 \times 1 \times \sqrt{3}}{3} = 1{,}15 \text{ cm}\,.$$

Ἡ ἀπόστασις τοῦ 2ου εἰδώλου ἀπὸ τὸ Α εἶναι: $AA_2 = 8 + 1,15 = 9,15$ cm.



Σχ. 36

Ἐπειδὴ εἶναι: $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, εὑρίσκομεν ὅτι αἱ ἀποστάσεις τοῦ 3ου καὶ 4ου εἰδώλου ἀπὸ τὸ Α εἶναι:

$AA_3 = 8 + 2 \times 1,15 = 10,30$ cm · $AA_4 = 8 + 3 \times 1,15 = 11,46$ cm.

42. — *Φωτεινὸν σημεῖον Σ παρατηρεῖται διὰ μέσου πλακὸς Λ, ἡ ὁποία ἔχει πάχος* $\varepsilon = 3 + \sqrt{6}$ cm· *τὸ Σ φαίνεται τότε νὰ πλησιάζῃ πρὸς τὴν πλάκα κατὰ* 1 cm. *Τὸ αὐτὸ σημεῖον Σ παρατηρεῖται καὶ διὰ μέσου ἄλλης πλακὸς Λ′, ἡ ὁποία ἔχει πάχος* $\varepsilon' = 2 + \sqrt{2}$ cm· *τότε τὸ Σ, φαίνεται ἐπίσης νὰ πλησιάζῃ κατὰ* 1 cm. *Θέτομεν τὴν μίαν πλάκα ἐπὶ τῆς ἄλλης καὶ ἀφήνομεν νὰ προσπέσῃ ἐπὶ τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν, ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως* α, *μία ἀκτὶς μονοχρόου φωτός. Τὸ φῶς ἠμπορεῖ νὰ ὑποστῇ ὁλικὴν ἀνάκλασιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας διαχωρισμοῦ τῶν δύο πλακῶν;*

Διὰ νὰ συμβῇ ὁλικὴ ἀνάκλασις, πρέπει τὸ φῶς νὰ διέλθῃ πρῶτα διὰ τῆς πλακὸς ἡ ὁποία ἔχει μεγαλύτερον δείκτην διαθλάσεως. Ἔστω ν καὶ ν′ οἱ δεῖκται διαθλάσεως τῶν πλακῶν Λ καὶ Λ′. Ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\delta = \varepsilon\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)$, ἡ ὁποία δίδει τὴν μετατόπισιν δ τοῦ φωτεινοῦ σημείου Σ, εὑρίσκομεν:

διὰ τὴν Λ: $\nu = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \delta} = \frac{3 + \sqrt{6}}{3 + \sqrt{6} - 1} = \frac{3 + \sqrt{6}}{2 + \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = 1,22$

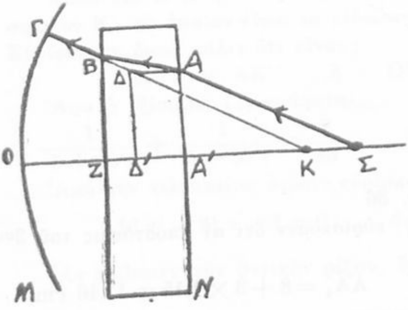
διὰ τὴν Λ′: $\nu' = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon' - \delta'} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2} - 1} = \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1,41$.

Ἄρα τὸ φῶς πρέπει νὰ μεταβαίνῃ ἀπὸ τὴν πλάκα Λ′ πρὸς τὴν πλάκα Λ. Ὁ σχετικὸς δείκτης διαθλάσεως ν″ τῆς Λ′ ὡς πρὸς τὴν Λ εἶναι: $\nu'' = \frac{\nu'}{\nu}$.

Ἡ ὁρικὴ γωνία λ ὑπολογίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\eta\mu\,\lambda = \frac{1}{\nu''} = \frac{\nu}{\nu'}$. Ἐπομένως διὰ νὰ συμβῇ, ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως α, ὁλικὴ ἀνάκλασις, πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις: $\eta\mu\,\alpha = \nu' \cdot \eta\mu\,\lambda = \nu' \cdot \frac{\nu}{\nu'} = \nu$ δηλαδὴ $\eta\mu\,\alpha > 1$· τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον καὶ ἑπομένως δὲν ἠμπορεῖ νὰ συμβῇ ὁλικὴ ἀνάκλασις.

43.— *Ἕνα κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος* 40 cm. *Πολὺ πλησίον τοῦ κατόπτρου τοποθετεῖται ὑαλίνη πλάξ, ἡ ὁποία ἔχει πάχος* 5 cm *καὶ δείκτην διαθλάσεως* 1,5. *Αἱ ἕδραι τῆς πλακὸς εἶναι κάθετοι πρὸς τὸν κύριον ἄξονα τοῦ κατόπτρου. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ κάτοπτρον πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος φωτεινὸν σημεῖον, ὥστε τὸ εἴδωλον νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ φωτεινὸν σημεῖον.*

Ἐὰν δὲν ὑπῆρχεν ἡ πλὰξ Ν, τότε τὸ φωτεινὸν σημεῖον Σ ἔπρεπε νὰ τοποθετηθῇ εἰς τὸ κέντρον καμπυλότητος Κ τοῦ κατόπτρου καὶ τότε τὸ εἴδωλον Σ′ θὰ ἐσχηματίζετο εἰς τὸ Κ. Ἔστω Σ ἡ ζητουμένη θέσις τοῦ φωτεινοῦ σημείου (σχ. 37). Τότε ἡ προσπίπτουσα ἀκτὶς ἐπὶ τοῦ κατόπτρου ἀκολουθεῖ τὸν δρόμον ΣΑΒΓ, ἡ δὲ ἀνακλωμένη ἀκτὶς ἀκολουθεῖ τὴν ἀντίθετον πορείαν. Γνωρίζομεν ὅτι ἡ πλὰξ Ν προκαλεῖ μόνον παράλληλον μετατόπισιν τῆς ἀκτῖνος ΣΑ. Ἑπομένως τὸ τετράπλευρον ΣΑΔΚ εἶναι παραλληλόγραμμον. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι εἶναι: ΑΔ = Α′Δ′, ὅπου Α′Δ′ εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ πραγματικοῦ καὶ τοῦ φαινομένου πάχους τῆς πλακός. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι εἶναι:



Σχ. 37

$$A'\Delta' = A'Z\left(1-\frac{1}{\nu}\right) \quad \text{ἄρα} \quad A'\Delta' = A'Z\,.\,\frac{\nu-1}{\nu} = 5\left(\frac{1{,}5-1}{1{,}5}\right).$$

$$\text{ἢ} \quad A'\Delta' = \frac{5\times 0{,}5}{1{,}5} = 1{,}66 \text{ cm}.$$

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι:
$$\Sigma K = A\Delta = A'\Delta' = 1{,}66 \text{ cm}$$
συνάγεται ὅτι τὸ φωτεινὸν σημεῖον Σ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ εἰς ἀπόστασιν 1,66 cm πέραν τοῦ κέντρου καμπυλότητος Κ, δηλαδὴ πρέπει νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ο τοῦ κατόπτρου ἀπόστασιν:
$$O\Sigma = OK + K\Sigma = 40 + 1{,}66 = 41{,}66 \text{ cm}.$$

44.— *Ἀντικείμενον* ΑΒ *ἀπέχει* 16 cm *ἀπὸ κοῖλον κάτοπτρον, ἑστιακῆς ἀποστάσεως* 10 cm. *Μεταξὺ τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ κατόπτρου τοποθετεῖται, καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα, μία ὑαλίνη πλάξ, ἡ ὁποία ἔχει πάχος* $\varepsilon = 3$ cm *καὶ δείκτην διαθλάσεως* $\nu = 1{,}5$. *Νὰ εὑρεθῇ κατὰ πόσον μετατοπίζεται τὸ εἴδωλον τοῦ* ΑΒ, *ἕνεκα τῆς παρεμβολῆς τῆς πλακὸς καὶ ἂν μεταβάλλεται καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου.*

Ἡ ἀπόστασις π′ τοῦ εἰδώλου Α′Β′ ἀπὸ τὸ κάτοπτρον, ὅταν δὲν ὑπάρχῃ ἡ πλάξ, εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:
$$\frac{1}{16} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{10} \quad \text{ἄρα} \quad \pi' = 26{,}7 \text{ cm}.$$

Ἡ πλὰξ προκαλεῖ φαινομένην μετατόπισιν τοῦ κατόπτρου κατά:
$$\delta = \varepsilon\left(1-\frac{1}{\nu}\right) = 3\left(1-\frac{1}{1{,}5}\right) = 1 \text{ cm}.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι ὡς ἐὰν τὸ κάτοπτρον ἀπέχῃ ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον $\pi_1 = 15$ cm, ὁπότε ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\frac{1}{15} + \frac{1}{\pi_1'} = \frac{1}{10}$ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀπόστασις π_1' τοῦ νέου εἰδώλου $A''B''$ ἀπὸ τὴν νέαν θέσιν τοῦ κατόπτρου εἶναι: $\pi_1' = 30$ cm. Ἄρα ἡ ἀπόστασις τοῦ $A''B''$ ἀπὸ τὸ κάτοπτρον εἶναι 31 cm. Ὅταν λοιπὸν παρεμβάλλεται ἡ πλάξ, τὸ εἴδωλον ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὸ κάτοπτρον κατά: $31 - 26{,}7 = 4{,}3$ cm.

Ὅταν δὲν ὑπάρχῃ ἡ πλάξ, ἔχομεν: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{\pi'}{\pi} = \frac{26{,}7}{16} = \frac{5}{3}$.

Ὅταν παρεμβάλλεται ἡ πλάξ, ἔχομεν: $\frac{A''B''}{AB} = \frac{\pi_1'}{\pi'} = \frac{30}{15} = 2$.

Ἄρα: $\frac{A''B''}{A'B'} = 2 : \frac{5}{3} = \frac{6}{5}$.

Τὸ εἴδωλον $A''B''$ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ εἴδωλον $A'B'$.

45. — *Φωτεινὴ ἀκτὶς διέρχεται διὰ πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει διαθλαστικὴν γωνίαν $A = 60^\circ$ καὶ δείκτην διαθλάσεως $\nu = 1{,}620$. Πόση εἶναι ἡ γωνία ἐλαχίστης ἐκτροπῆς ;*

Ἐὰν Ε εἶναι ἡ γωνία ἐλαχίστης ἐκτροπῆς, τότε θὰ εἶναι:

$$E = 2\pi - A \quad \text{καὶ} \quad A = 2\rho. \quad \text{Ἄρα:} \quad \nu = \frac{\eta\mu\, \pi}{\eta\mu\, \rho} = \frac{\eta\mu \frac{A + E}{2}}{\eta\mu \frac{A}{2}}.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν:

$$\eta\mu \frac{A + E}{2} = \nu \,.\, \eta\mu \frac{A}{2} = 1{,}620 \times \eta\mu\, 30^\circ = 0{,}810.$$

Ὥστε εἶναι: $\frac{60^\circ + E}{2} = 54^\circ\, 6'$ ἢ $E = 108^\circ\, 12' - 60^\circ = 48^\circ\, 12'$.

46. — *Ὑάλινον πρῖσμα ἔχει διαθλαστικὴν γωνίαν $A_1 = 5^\circ$ καὶ δείκτην διαθλάσεως $\nu_1 = 1{,}52$, εὑρίσκεται δὲ εἰς ἐπαφὴν μὲ ἄλλο ὑάλινον πρῖσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει δείκτην διαθλάσεως $\nu_2 = 1{,}63$. Μία φωτεινὴ ἀκτίς, ὅταν προσπίπτῃ καθέτως ἐπὶ τῆς ἕδρας τοῦ ἑνὸς πρίσματος, ἐξέρχεται ἀπὸ τὴν ἕδραν τοῦ ἄλλου πρίσματος, χωρὶς νὰ ὑποστῇ ἐκτροπήν. Πόση εἶναι ἡ διαθλαστικὴ γωνία A_2 τοῦ δευτέρου πρίσματος ;*

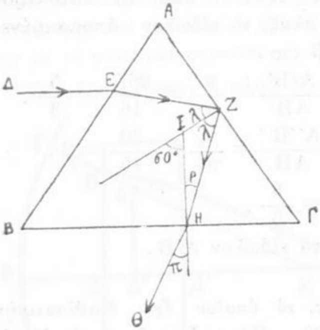
Τὰ πρίσματα εἶναι λεπτὰ καὶ προφανῶς αἱ κορυφαί των εἶναι ἐστραμμέναι ἀντιθέτως. Ἡ ἐκτροπὴ $E_1 = A_1(\nu_1 - 1)$, τὴν ὁποίαν προκαλεῖ τὸ πρῶτον πρῖσμα, ἀναιρεῖται ἀπὸ τὴν ἐκτροπὴν $E_2 = A_2(\nu_2 - 1)$, τὴν ὁποίαν προκαλεῖ τὸ δεύτερον πρῖσμα.

Ἄρα εἶναι: $E_1 = E_2$, ἤτοι: $A_1(\nu_1 - 1) = A_2(\nu_2 - 1)$·

ἢ $5(1{,}52 - 1) = A_2(1{,}63 - 1)$· καὶ $A_2 = \frac{5 \times 0{,}52}{0{,}63} = 4^\circ\, 8'$.

47. — *Ὑάλινον πρῖσμα ΒΑΓ ἔχει δείκτην διαθλάσεως $\nu = 1{,}5$, ἡ δὲ κυρία τομή του εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον. Ἐπὶ τῆς ἕδρας ΒΑ προσπίπτει φωτεινὴ* *ἀκτίς, ἡ ὁποία ἀνακλωμένη ὁλικῶς ἐπὶ τῆς ἕδρας ΓΑ ἐξέρχεται διὰ τῆς ἕδρας ΒΓ. Ποία εἶναι ἡ μεγαλυτέρα δυνατὴ τιμὴ τῆς γωνίας ἀναδύσεως ;*

Ἔστω ΔΕΖΗΘ ἡ πορεία τῆς φωτεινῆς ἀκτῖνος, ἡ ὁποία εἰς τὸ Ζ ὑφίσταται ὁλικὴν ἀνάκλασιν. Ἡ γωνία ἀναδύσεως π ἔχει τὴν μεγαλυτέραν δυνατὴν τιμήν, ὅταν ἡ γωνία λ ἔχῃ τὴν μικροτέραν δυνατὴν τιμήν, δηλαδὴ ὅταν εἶναι ἴση μὲ τὴν ὁρικὴν γωνίαν.



Σχ. 38

Τότε εἶναι : $\eta\mu\,\lambda = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{1,5} = 0,667$ ·

ἄρα $\lambda = 41^0\ 48'$.

Ἐξ ἄλλου ὅμως ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{\eta\mu\,\pi}{\eta\mu\,\rho} = \nu \cdot \quad ἄρα \quad \eta\mu\,\pi = \nu \, . \, \eta\mu\,\rho \, .$$

Εἰς τὸ τρίγωνον ΗΖΙ ἡ γωνία ΖΙΗ εἶναι 120^0. Ἑπομένως λαμβάνομεν :

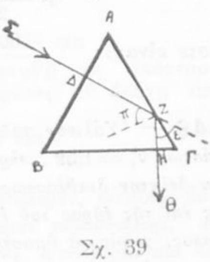
$$\rho = 180 - (120 + \lambda) = 60 - \lambda = 18^0\ 12'.$$

Ὥστε εἶναι : $\eta\mu\,\pi = 1,5 \times \eta\mu\ 18^0\ 12' = 0,468$ · ἄρα $\pi = 27^0\ 54'$.

48. — *Ἡ κυρία τομὴ πρίσματος εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτει καθέτως ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΒ. Ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου εἶναι $\nu = \sqrt{2}$. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ πορεία τῆς ἀκτῖνος καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία ἐκτροπῆς.*

Ἡ ἀκτὶς ΣΔ δὲν ὑφίσταται εἰς τὸ Δ διάθλασιν. Εἰς τὸ σημεῖον Ζ τῆς ἕδρας ΑΓ ἡ ἀκτὶς ΣΖ σχηματίζει γωνίαν προσπτώσεως $\pi = A = 60^0$. Ἀλλὰ διὰ τὴν ὕαλον ἡ ὁρικὴ γωνία λ εἶναι :

$$\eta\mu\,\lambda = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ἤτοι \quad \lambda = 45^0 .$$



Σχ. 39

Ἡ γωνία λοιπὸν π εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ὁρικὴν γωνίαν λ καὶ ἑπομένως εἰς τὸ σημεῖον Ζ ἡ ἀκτὶς ΣΖ ὑφίσταται ὁλικὴν ἀνάκλασιν. Ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς ΖΗΘ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἕδραν ΒΓ.

Ἡ γωνία ἐκτροπῆς εἶναι : $\varepsilon = 60^0$.

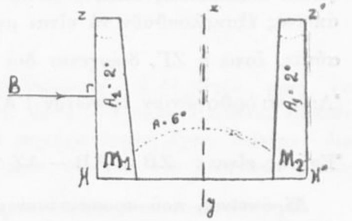
49. — *Τὸ σχῆμα 40 παριστᾷ τὴν κατακόρυφον τομὴν ἑνὸς πρισματικοῦ ὑαλίνου δοχείου, τὸ ὁποῖον στηρίζεται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Ἡ γωνία Α τοῦ κοίλου πρίσματος εἶναι 6^0. Τὰ τοιχώματα ἀποτελοῦν ὅμοια λεπτὰ πρίσματα M_1 καὶ M_2, τῶν ὁποίων ἡ διαθλαστικὴ γωνία εἶναι 2^0. Τὰ πρίσματα αὐτὰ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα xy τοῦ δοχείου. Μία φωτεινὴ ἀκτὶς ΒΓ προσπίπτει ἐπὶ τῆς ἕδρας τοῦ πρίσματος M_1 καὶ διέρχεται διὰ τοῦ δοχείου. Νὰ εὑρεθῇ : 1) Ποία εἶναι ἡ διεύθυνσις τῆς ἀκτῖνος, ἡ ὁποία ἐξέρχεται ἀπὸ τὸ M_2, ὅταν ἡ ΒΓ προσπίπτῃ καθέτως ἐπὶ τῆς πρώτης ἕδρας τοῦ M_1. 2) Ποία εἶναι ἡ διεύθυνσις τῆς ἀκτῖνος, ποὺ ἐξέρχεται ἀπὸ τὸ M_2, ὅταν ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος πρὸς τὸν* *ἄξονα xy τοῦ δοχείου, τὸ δὲ κοῖλον πρῖσμα εἶναι πλῆρες ὕδατος. Δεῖκται διαθλάσεως: τῆς ὑάλου ὡς πρὸς τὸν ἀέρα: $\nu = 3/2$, τοῦ ὕδατος ὡς πρὸς τὸν ἀέρα: $\nu' = 4/3$.*

1) Τὰ λεπτὰ πρίσματα M_1 καὶ M_2 προκαλοῦν ἴσας ἐκτροπὰς τῆς φωτεινῆς ἀκτῖνος καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, δηλαδὴ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ δοχείου. Τὸ M_1 προκαλεῖ ἐκτροπήν:

$$\varepsilon = A_1 (\nu - 1) = 2^0 \times \left(\frac{3}{2} - 1 \right) = 1^0.$$

Ὥστε τὰ δύο πρίσματα M_1 καὶ M_2 προκαλοῦν ἐκτροπὴν $2\varepsilon = 2^0$. Ἀλλὰ αἱ ἐξωτερικαὶ ἕδραι ΖΗ καὶ Ζ΄Η΄ τοῦ δοχείου σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν:

$$\varphi = A - 2A_1 = 6^0 - 4^0 = 2^0.$$



Σχ. 40

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΒΓ προσπίπτει καθέτως ἐπὶ τῆς ΖΗ, ἡ δὲ ἐξερχομένη ἀκτὶς σχηματίζει μὲ τὴν ΒΓ γωνίαν 2^0, συνάγεται ὅτι ἡ ἐξερχομένη ἀκτὶς εἶναι ἐπίσης κάθετος πρὸς τὴν ἕδραν Ζ΄Η΄,

2) Ὅταν τὸ κοῖλον πρῖσμα περιέχῃ ὕδωρ, τότε ἡ φωτεινὴ ἀκτὶς διέρχεται διαδοχικῶς διὰ τριῶν πρισμάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουν κατὰ σειράν:

α΄) διαθλαστικὴν γωνίαν: $A_1 = 2^0$ · δείκτην διαθλάσεως: $\nu = \dfrac{3}{2}$

β΄) » » : $A = 6^0$ · » » : $\nu_1 = \dfrac{4}{3}$

γ΄) » » : $A_1 = 2^0$ · » » : $\nu = \dfrac{3}{2}$.

Ἡ ἐκτροπή, τὴν ὁποίαν προκαλοῦν τὰ πρίσματα M_1 καὶ M_2, εἶναι συνολικῶς ἴση μὲ $2\varepsilon = 2^0$, ἡ δὲ ἀκτὶς ἐκτρέπεται πρὸς τὴν βάσιν τοῦ δοχείου. Ἀντιθέτως τὸ πρῖσμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ περιεχόμενον τώρα ὕδωρ, ἐκτρέπει τὴν ἀκτῖνα ἀντιθέτως, δηλαδὴ πρὸς τὸ χεῖλος τοῦ δοχείου, ἡ δὲ ἐκτροπὴ τοῦ πρίσματος τούτου εἶναι: $\varepsilon' = A(\nu - 1) = 6\left(\dfrac{4}{3} - 1 \right) = 2^0$.

Ἡ ὅλη λοιπὸν ἐκτροπή, την ὁποίαν προκαλοῦν τότε τὰ τρία πρίσματα εἶναι ἴση μὲ μηδὲν καὶ ἑπομένως ἡ ἐξερχομένη ἀκτὶς εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν προσπίπτουσαν.

50.— *Ἡ κυρία τομὴ ΑΒΓ ἑνὸς πρίσματος εἶναι ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ὀρθὴ γωνία εἶναι ἡ Α. Μία πηγὴ μονοχρόου φωτὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ σχισμὴν Σ, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς ἀκμὰς τοῦ πρίσματος καὶ εὑρίσκεται εἰς τὴν κυρίαν ἑστίαν συγκλίνοντος φακοῦ. Ὁ ὀπτικὸς ἄξων τοῦ φακοῦ τούτου εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ τοῦ πρίσματος καὶ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὴν ἀκμὴν Α καὶ τὴν βάσιν ΒΓ τοῦ πρίσματος. Ἕνα διάφραγμα ἔχει ὀρθογώνιον ἄνοιγμα, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς σχισμῆς· τὸ διάφραγμα τοῦτο περιορίζει τὴν δέσμην τῶν ἀκτίνων ποὺ ἐξέρχονται ἀπὸ τὸν φακόν, ὥστε ἡ ἐξερχομένη δέσμη νὰ καλύπτῃ ἀκριβῶς τὴν ἕδραν ΑΒ τοῦ πρίσματος. 1) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ προσπίπτουσα αὐτὴ δέσμη δίδει δύο* *ἀναδυομένας δέσμας καὶ νὰ καθορισθοῦν τὰ ὅρια τῶν δύο τούτων δεσμῶν. Ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ πρίσματος εἶναι* $\nu = \sqrt{2}$.

1) Αἱ ἀκτῖνες, ποὺ προσπίπτουν ἐπὶ τοῦ πρίσματος, εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ τοῦ πρίσματος καὶ προσπίπτουν ὑπὸ γωνίαν $\pi = 45^0$. Ἄρα ἡ γωνία διαθλάσεως εἶναι $\rho' = 30^0$ καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ πρίσματος διαθλώμεναι ἀκτῖνες ἐξακολουθοῦν νὰ εἶναι μεταξύ των παράλληλοι. Μια ἀπὸ τὰς ἀκτῖνας αὐτάς, ἔστω ἡ ΖΓ, διέρχεται διὰ τοῦ Γ. Τότε εἶναι : $\widehat{A Z \Gamma} = 60^0$.

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΑΖ εὑρίσκομεν : $AZ = A\Gamma \, . \, \sigma\varphi\, 60^0 = \dfrac{AB}{\sqrt{3}}$.

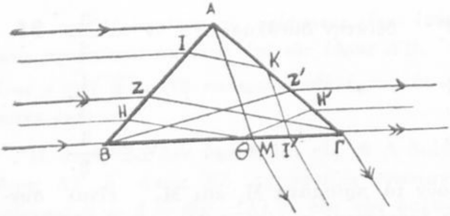
Ἐπίσης εἶναι : $ZB = AB - AZ$ · ἄρα $ZB = AB\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0{,}422\ AB.$

Αἱ ἀκτῖνες, ποὺ προσπίπτουν μεταξὺ τῶν σημείων Ζ καὶ Β, μετὰ τὴν διάθλασίν των διὰ τῆς ἐπιφανείας ΑΒ, προσπίπτουν ἐπὶ τῆς ἕδρας ΒΓ.

Ἡ γωνία ΗΘΒ εἶναι :

$$\widehat{H\Theta B} = 180^0 - (\widehat{B} + \widehat{BH\Theta}) = 180^0 - (45^0 + 120^0) = 15^0 .$$

Ἐπομένως ἡ ἀκτὶς ΗΘ προσπίπτει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ΒΓ ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως 75^0, ἤτοι ὑπὸ γωνίαν μεγαλυτέραν ἀπὸ τὴν ὁρικὴν γωνίαν. Ἡ ἀκτὶς ΗΘ ὑφίσταται λοιπὸν εἰς τὸ σημεῖον Θ ὁλικὴν ἀνάκλασιν καὶ προσπίπτει ἔπειτα ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΓ. Ὥστε τὸ τμῆμα τῆς προσπιπτούσης δέσμης, τὸ ὁποῖον συναντᾷ τὸ πρῖσμα μεταξὺ τῶν σημείων Ζ καὶ Β, ὑφίσταται ὁλικὴν ἀνάκλασιν ἐπὶ τῆς ἕδρας ΒΓ, προσπίπτει ἔπειτα ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΓ καὶ ἕνεκα τῆς συμμετρίας ἀναδύεται τελικῶς παράλληλος πρὸς τὴν ἀρχικῶς προσπίπτουσαν. Ἡ ἀναδυομένη δέσμη προέρχεται ἀπὸ τὸ τμῆμα τῆς ἕδρας ΑΓ, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν σημείων Γ καὶ Ζ′. Εἶναι δὲ ΓΖ′ = ΒΖ . Τὸ μέρος τῆς δέσμης, τὸ ὁποῖον συναντᾷ τὸ πρῖσμα μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Ζ τῆς ἕδρας ΑΒ, μετὰ τὴν διάθλασιν προσπίπτει ἐπὶ τῆς ΑΓ. Ἡ γωνία ΑΚΙ εἶναι :



Σχ. 41

$$\widehat{AKI} = 180^0 - (\widehat{A} + \widehat{AIK}) = 180^0 - (90^0 + 60^0) = 30^0 .$$

Ἐπομένως αἱ ἀκτῖνες προσπίπτουν ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΓ ὑπὸ γωνίαν 60^0, δηλαδὴ μεγαλυτέραν ἀπὸ τὴν ὁρικὴν γωνίαν. Ὑφίστανται λοιπὸν ἐπὶ τῆς ΑΓ ὁλικὴν ἀνάκλασιν καὶ προσπίπτουν ἐπὶ τῆς ἕδρας ΒΓ. Ἡ γωνία ΚΙ′Γ εἶναι :

$$\widehat{KI'\Gamma} = 180^0 - (\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma K I'}) = 180^0 - (45^0 + 30^0) = 105^0 .$$

Ἄρα ἡ ἀκτὶς ΚΙ′ προσπίπτει ἐπὶ τῆς ΒΓ ὑπὸ γωνίαν 15^0. Ἡ γωνία διαθλάσεως π' δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$\eta\mu\, \pi' = \nu\, \eta\mu\, 15^0 = \sqrt{2} \times 0{,}2588$ · ἄρα $\pi' = 21{,}5^0$ (περίπου).

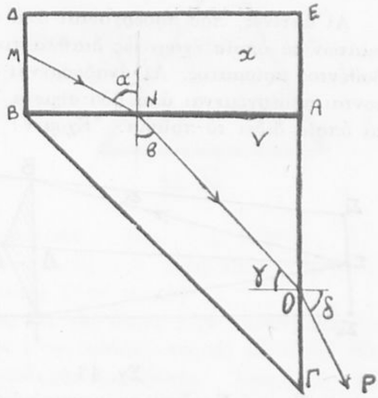
Ἡ ἀκτίς, ποὺ προσπίπτει εἰς τὸ σημεῖον Α, ἀναδύεται ἀπὸ ἕνα σημεῖον Μ τῆς ἕδρας ΒΓ, τὸ ὁποῖον προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{\Gamma M}{\eta\mu\,\widehat{\Gamma A M}} = \frac{A\Gamma}{\eta\mu\,\widehat{\Gamma M A}} \qquad \text{ἄρα} \qquad \Gamma M = A\Gamma \times \frac{\eta\mu\,30^0}{\eta\mu\,105^0} = A\Gamma \times \frac{\eta\mu\,30^0}{\sigma\upsilon\nu\,15^0}\,.$$

$$\text{ἢ} \qquad \Gamma M = A\Gamma \times 2\,\eta\mu\,15^0 = \frac{B\Gamma}{\sqrt{2}} \times 2\,\eta\mu\,15^0 \qquad \text{καὶ} \qquad \Gamma M = 0{,}365\ B\Gamma\,.$$

Ἡ ἀναδυομένη ἀπὸ τὴν ἕδραν ΒΓ δέσμη περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν σημείων Γ καὶ Μ.

√**51.**— *Ἕνα πρῖσμα ΒΑΓ ἔχει δείκτην διαθλάσεως* ν, *ἡ δὲ κυρία τομή του εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον. Ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθή. Τὸ πρῖσμα τίθεται κάτωθεν τοῦ πυθμένος ἑνὸς δοχείου ΔΒΑΕ, τὸ ὁποῖον περιέχει ὑγρόν, ἔχον δείκτην διαθλάσεως* x. *Μία φωτεινὴ ἀκτὶς ΜΝΟΡ διέρχεται διὰ τῶν δύο διαφανῶν μέσων, διαθλωμένη εἰς τὰ σημεῖα Ν καὶ Ο. Ἡ προσπίπτουσα ἀκτὶς ΜΝ σχηματίζει γωνίαν* α *μὲ τὴν κάθετον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ΑΒ εἰς τὸ Ν καὶ ἡ ἀναδυομένη ἀκτὶς ΟΡ σχηματίζει γωνίαν* δ *μὲ τὴν κάθετον, πρὸς τὴν ἕδραν ΑΓ τοῦ πρίσματος εἰς τὸ Ο. 1) Νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις συνδέει τὰ* x, ν, α *καὶ* δ. *2) Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ προσπίπτουσα ἀκτὶς σχηματίζει γωνίαν* $\alpha = 90^0$, *νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ δείκτου διαθλάσεως* x *συναρτήσει τοῦ δείκτου διαθλάσεως* ν *τοῦ πρίσματος καὶ τῆς γωνίας* δ. *3) Νὰ εὑρεθῇ μεταξὺ ποίων ὁρίων πρέπει νὰ περιλαμβάνεται ἡ τιμὴ τοῦ* x, *ὥστε αὕτη νὰ προσδιορίζεται μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ πρίσματος, ἔχοντος δείκτην διαθλάσεως* ν. *4) Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή:* $\nu = 1{,}622$ · $\delta = 45^0$. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὑγροῦ.*



Σχ. 42

1) Διὰ τὰς δύο διαθλάσεις ἔχομεν τὰς σχέσεις:

εἰς τὸ Ν: $x\,\eta\mu\,\alpha = \nu\,\eta\mu\,\beta$ · (1) εἰς τὸ Ο: $\nu\,\eta\mu\,\gamma = \eta\mu\,\delta$. (2)

Ἀλλὰ εἶναι: $\beta + \gamma = A = 90^0$. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται:

$$\nu\,\sigma\upsilon\nu\,\beta = \eta\mu\,\delta\,.$$

Ἂν ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον τὴν ἐξίσωσιν (1) λαμβάνομεν:

$$x^2\,\eta\mu^2\alpha = \nu^2\,\eta\mu^2\beta \qquad \text{ἢ} \qquad x^2\,\eta\mu^2\alpha = \nu^2\left(1 - \frac{\eta\mu^2\delta}{\nu^2}\right).$$

$$\text{ἄρα εἶναι:} \qquad x^2\,\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\delta = \nu^2\,. \qquad (3)$$

Αὐτὴ εἶναι ἡ ζητουμένη σχέσις μεταξὺ τῶν x, ν, α καὶ δ.

2) Ἐὰν εἶναι $\alpha = 90^0$, ἡ ἐξίσωσις (3) δίδει τὴν ζητουμένην τιμὴν τοῦ x:

$$x = \sqrt{\nu^2 - \eta\mu^2\delta}\,. \qquad (4)$$

τὸ x πρέπει νὰ εἶναι θετικόν.

3) Ἐὰν εἶναι $\delta = 0$ ἢ $\delta = 90^0$, τότε αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ x εἶναι:

$$x = \nu \qquad \text{καὶ} \qquad x = \sqrt{\nu^2 - 1}\,.$$

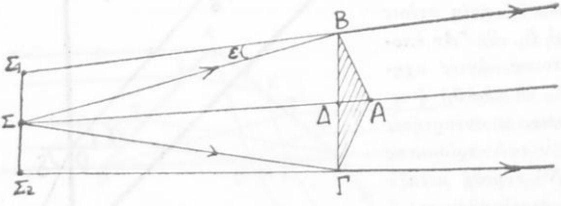
Ἄρα ἡ τιμὴ τοῦ x πρέπει νὰ εἶναι : $\sqrt{\nu^2 - 1} \leqslant x \leqslant \nu$.

4) Διὰ $\nu = 1{,}622$ καὶ $\delta = 45^0$ λαμβάνομεν :

$$x = \sqrt{1{,}622^2 - 0{,}5} = \sqrt{2{,}63 - 0{,}5} = 1{,}46 .$$

52.— *Ἡ κυρία τομὴ ΑΒΓ ἑνὸς πρίσματος εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον. Ἡ διαθλαστικὴ γωνία τοῦ πρίσματος εἶναι $A = 178^0$, ὁ δὲ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου εἶναι $\nu = 1{,}5$. Τὸ πάχος τοῦ πρίσματος, μετρούμενον καθέτως πρὸς τὴν βάσιν του, εἶναι πολὺ μικρόν. Ἔμπροσθεν τῆς βάσεως ΒΓ τοῦ πρίσματος, εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ αὐτὴν καὶ ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α εὑρίσκεται φωτεινὸν σημεῖον Σ. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἀκτῖνες, ποὺ ἀναδύονται ἀπὸ τὰς ἕδρας ΑΒ καὶ ΑΓ, φαίνονται προερχόμεναι ἀπὸ δύο σταθερὰ σημεῖα Σ_1 καὶ Σ_2 καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μεταξὺ τῶν δύο τούτων σημείων ἀπόστασις.*

Αἱ ἀκτῖνες, ποὺ προέρχονται ἀπὸ τὸ Σ, προσπίπτουν ἐπὶ δύο λεπτῶν πρισμάτων τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς διαθλαστικὰς γωνίας, τὰς γωνίας Β καὶ Γ τοῦ δοθέντος πρίσματος. Αἱ ἀναδυόμεναι ἀπὸ τὰς ἕδρας ΑΒ καὶ ΑΓ ἀκτῖνες φαίνονται προερχόμεναι ἀπὸ δύο σημεῖα Σ_1, Σ_2 · αὐτὰ εἶναι τὰ εἴδωλα τοῦ Σ, τὰ ὁποῖα δίδει τὸ πρῖσμα. Ἔχομεν : $B\Sigma_1 = B\Sigma$ καὶ $\Gamma\Sigma_2 = \Gamma\Sigma$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΒΓ εἶναι πολὺ μικρὰ ἐν σχέσει μὲ τὴν ΒΣ, ἠμποροῦμε νὰ θεωρήσωμεν τὰ σημεῖα Σ_1 καὶ Σ_2 ὡς εὑρισκόμενα ἐπὶ τῆς καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας ΣΑ. Ἐπομένως τὰ Σ_1 καὶ Σ_2 εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ΣΑ, εἶναι δέ :



Σχ. 43

$$\Sigma\Sigma_1 = \Sigma\Sigma_2 = B\Sigma \,.\, \varepsilon , \qquad \text{ὅπου } \varepsilon \text{ εἶναι ἡ γωνία ἐκτροπῆς.}$$

Αὕτη εἶναι : $\varepsilon = (\nu - 1)\,B = 0{,}5 \times 1 = 0{,}5^0$ ἢ $\varepsilon = \dfrac{\pi}{360}$ ἀκτίνια ·

ἐπειδὴ δὲ ἡ ΒΣ εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴση μὲ τὴν $\Sigma\Delta = 1\text{ m} = 1000\text{ mm}$,

εὑρίσκομεν : $\Sigma\Sigma_1 = \dfrac{1000\,\pi}{360} = 8{,}7\text{ mm}$ · ἄρα $\Sigma_1\Sigma_2 = 17{,}4\text{ mm}$.

53.— *Μία λεπτὴ δέσμη ἀκτίνων μονοχρόου φωτὸς προσπίπτει ἐπὶ πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει διαθλαστικὴν γωνίαν $A = 60^0$ καὶ δείκτην διαθλάσεως διὰ τὴν θεωρουμένην ἀκτινοβολίαν $\nu = 1{,}414$. 1) Νὰ εὑρεθῇ ὑπὸ ποίαν γωνίαν πρέπει νὰ προσπίπτῃ ἡ δέσμη ἐπὶ τοῦ πρίσματος, ὥστε ἡ ἐκτροπὴ νὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη. Πόση εἶναι ἡ ἐκτροπὴ αὕτη ; 2) Μεταξὺ ποίων ὁρίων πρέπει νὰ περιλαμβάνεται ἡ γωνία προσπτώσεως, ὥστε ἡ δέσμη νὰ ἐξέρχεται ἀπὸ τὸ πρῖσμα, χωρὶς νὰ συμβαίνῃ ὁλικὴ ἀνάκλασις εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πρίσματος ; 3) Ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω πρίσματος ἐπικολλῶμεν πρισματικὴν λεκάνην περιέχουσαν ὕδωρ. Τὸ ὑδάτινον πρῖσμα ἔχει διαθλαστικὴν γωνίαν $A' = 45^0$ καὶ δείκτην διαθλάσεως διὰ τὴν θεωρουμένην ἀκτινοβολίαν $\nu' = 1{,}333$. Ἡ δέσμη τῶν ἀκτίνων προσπίπτει καθέτως ἐπὶ τῆς μιᾶς* *ἕδρας τῆς πρισματικῆς λεκάνης καὶ ἔπειτα εἰσέρχεται εἰς τὸ ὑάλινον πρῖσμα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐκτροπή, τὴν ὁποίαν προκαλεῖ τὸ σύστημα τῶν δύο πρισμάτων.*

1) Ὅταν ἡ ἐκτροπὴ εἶναι ἐλαχίστη, τότε αἱ ἐντὸς τοῦ πρίσματος γωνίαι ρ καὶ ρ′ εἶναι: $\rho = \rho' = 30^0$. Ἐπίσης εἶναι $\pi = \pi'$. Ἄρα ἡ ζητουμένη γωνία προσπτώσεως π εἶναι:

$$\eta\mu\,\pi = \nu \,.\, \eta\mu\,\rho = 1{,}414 \times 0{,}5 = 0{,}707 \cdot \quad \text{ἢ} \quad \pi = 45^0 .$$

Ἡ δὲ γωνία ἐλαχίστης ἐκτροπῆς ε εἶναι: $\varepsilon = \pi + \pi' - A = 90 - 60 = 30^0$.

2) Ὅταν ἐλαττώνεται ἡ γωνία π, ἐλαττώνεται ἐπίσης καὶ ἡ γωνία ρ. Αὐξάνει ὅμως τότε ἡ γωνία ρ′ καὶ θὰ συμβῇ ὁλικὴ ἀνάκλασις, ὅταν ἡ γωνία ρ′ γίνῃ μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ὁρικὴν γωνίαν λ, ἡ ὁποία εἶναι τοιαύτη ὥστε:

$$\eta\mu\,\lambda = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{1{,}414} = 0{,}707 \cdot$$

$$\text{ἢ} \quad \lambda = 45^0 .$$

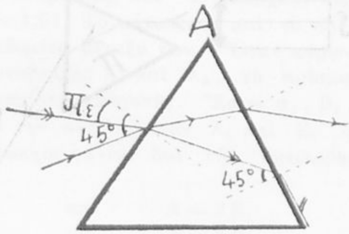
Ἄρα ὅταν γίνῃ:

$$\rho' = \lambda = 45^0 .$$

τότε θὰ εἶναι: $\rho = A - \rho'$

$$\text{ἢ} \quad \rho = 60 - 45 = 15^0 ,$$

ἡ δὲ ἀντίστοιχος γωνία προσπτώσεως π_ε θὰ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

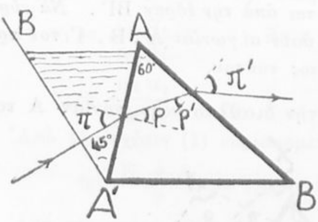


Σχ. 44

$$\eta\mu\,\pi_\varepsilon = \nu \,.\, \eta\mu\,15^0 = 1{,}414 \times 0{,}259 = 0{,}366 \quad \text{ἤτοι} \quad \pi_\varepsilon = 21{,}5^0 .$$

Ὥστε, διὰ νὰ μὴ συμβῇ ὁλικὴ ἀνάκλασις ἐντὸς τοῦ πρίσματος, πρέπει ἡ γωνία προσπτώσεως νὰ περιλαμβάνεται μεταξὺ $21{,}5^0$ καὶ 90^0.

3) Ἐπειδὴ ἡ δέσμη προσπίπτει καθέτως ἐπὶ τῆς ἕδρας Α′Β′ συνάγεται ὅτι κατὰ τὴν εἴσοδόν της εἰς τὸ ὕδωρ δὲν ὑφίσταται διάθλασιν. Ἑπομένως ἐπὶ τῆς ἕδρας τοῦ ὑαλίνου πρίσματος προσπίπτει ὑπὸ γωνίαν $\pi = 45^0$. Ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ εἶναι: $\nu'' = \dfrac{\nu}{\nu'} = \dfrac{1{,}414}{1{,}333}$.



Σχ. 45

Ἡ γωνία διαθλάσεως ρ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\eta\mu\,\rho = \dfrac{\eta\mu\,\pi}{\nu''}$

$$\text{ἢ} \qquad \eta\mu\,\rho = 0{,}707 \times \frac{1{,}333}{1{,}414} = 0{,}667 \cdot \quad \text{ἄρα} \quad \rho = 42^0 .$$

Ἡ γωνία προσπτώσεως ρ′ ἐντὸς τοῦ πρίσματος εἶναι:

$$\rho' = A - \rho = 60 - 42 = 18^0 .$$

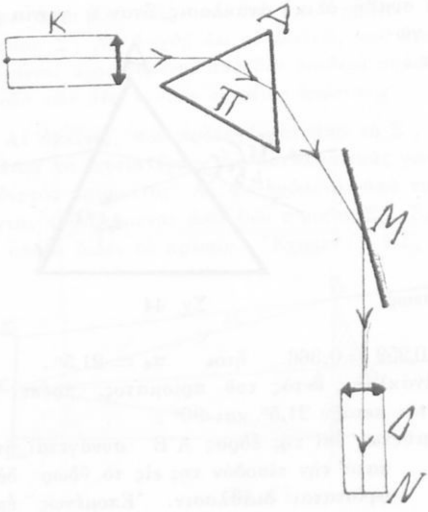
Ἑπομένως ἡ γωνία ἀναδύσεως π′ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\eta\mu\,\pi' = \nu \,.\, \eta\mu\,\rho' = 1{,}414 \times 0{,}309 = 0{,}437 \cdot \quad \text{ἤτοι} \quad \pi' = 26^0 .$$

Ἡ γωνία λοιπὸν ἐκτροπῆς ε εἶναι: $\varepsilon = \pi + \pi' - A = 45 + 26 - 60 = 11^0$.

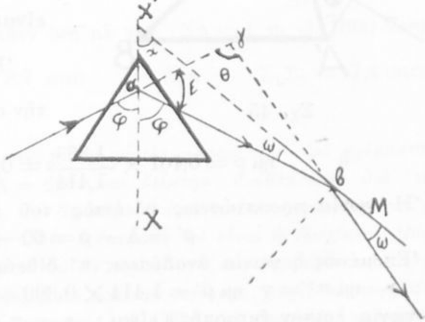
54. — *Τὸ σχῆμα 46 δεικνύει μίαν διάταξιν φασματοσκοπίας, ὅπου εἶναι:* S *ἡ φωτεινὴ πηγή·* Κ *ὁ κατευθυντήρ·* Α *ἡ διαθλαστικὴ γωνία τοῦ πρί-*

σματος Π · Μ ἐπίπεδον κάτοπτρον· Δ ἡ διόπτρα παρατηρήσεως καὶ Ν ἕνα νῆμα τοῦ σταυρονήματος, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἑστιακοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ τῆς διόπτρας. Οἱ ἄξονες τῶν Κ καὶ Δ εἶναι σταθεροὶ καὶ κάθετοι μεταξύ των. *1)* Ἡ μεσαία ἀκτὶς τῆς φωτεινῆς δέσμης. ποὺ ἐξέρχεται ἀπὸ τὸν κατευθυντῆρα Κ, ἐξέρχεται ἀπὸ τὸ πρῖσμα Π ὑπὸ τὴν γωνίαν τῆς ἐλαχίστης ἐκτροπῆς, ἀνακλᾶται ἐπὶ τοῦ Μ καὶ σχηματίζει εἴδωλον ἐπὶ τοῦ νήματος Ν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία x, τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ Μ μὲ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Α. *2)* Ἡ γωνία Α εἶναι 60°. Φέρομεν διαδοχικῶς ἐπὶ τοῦ νήματος Ν τὰς ἀκτῖνας τῶν ἁπλῶν χρωμάτων, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς δείκτας διαθλάσεως 1,60 καὶ 1,61. Πρὸς τοῦτο στρέφομεν κατὰ γωνίαν y τὸ σύστημα πρῖσμα Π — κάτοπτρον Μ (τὰ ὁποῖα ἐξακολουθοῦν νὰ εἶναι σταθερῶς συνδεδεμένα μεταξύ των, ὅπως εἰς τὴν § 1). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία y. *3)* Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύστημα πρῖσμα Π — κάτοπτρον Μ ἠμπορεῖ νὰ ἀντικατασταθῇ, διατηρουμένης πάντοτε τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν τῶν δύο διαθλάσεων, ἀπὸ ἕνα πρῖσμα ΑΒΓ τοιοῦτον ὥστε ἡ ἀκτίς, προσπίπτουσα ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΒ, νὰ ἀνακλᾶται ὁλικῶς ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΓ καὶ νὰ ἐξέρχεται ἀπὸ τὴν ἕδραν ΒΓ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι Α, Β, Γ τοῦ πρίσματος τούτου.



Σχ. 46

1) Ἔστω ΧΧ΄ τὸ ἐπίπεδον ποὺ διχοτομεῖ τὴν διαθλαστικὴν γωνίαν Α τοῦ πρίσματος. Εἰς τὴν θέσιν τῆς ἐλαχίστης ἐκτροπῆς ἡ προσπίπτουσα καὶ ἡ ἐξερχομένη ἀκτὶς εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Χ΄Χ. Δίδεται ὅτι ἡ γωνία θ, τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ κάτοπτρον Μ μὲ τὴν προσπίπτουσαν εἶναι 90°. Ἐὰν φ εἶναι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ προπίπτουσα μὲ τὸ ἐπίπεδον ΧΧ΄, τότε ἀπὸ τὸ τρίγωνον αβγ εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν :



Σχ. 47

$$E + 2\omega + \theta = \pi$$

$$\text{ἤτοι} \quad E = \frac{\pi}{2} - 2\omega . \quad (1)$$

Ἐπίσης ὅμως εἶναι : $\varphi = x + \omega$ καὶ $E + 2\varphi = \pi$·

ἄρα $E = \pi - 2\varphi = \pi - 2x - 2\omega$. (2)

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν :

$$E = \frac{\pi}{2} - 2\omega = \pi - 2x - 2\omega \cdot \quad \text{ἄρα} \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γωνία αὐτὴ x εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν διαθλαστικὴν γωνίαν τοῦ πρίσματος, τὴν γωνίαν προσπτώσεως καὶ τὸν δείκτην διαθλάσεως, ἀρκεῖ μόνον τὸ πρῖσμα νὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν τῆς ἐλαχίστης ἐκτροπῆς διὰ τὴν θεωρουμένην ἀκτινοβολίαν.

2) Ἂς ὀνομάσωμεν λ_1 καὶ λ_2 τὰς δύο ἀκτινοβολίας, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς δείκτας διαθλάσεως $\nu_1 = 1{,}60$ καὶ $\nu_2 = 1{,}61$. Τὸ κάτοπτρον καὶ τὸ πρῖσμα ἐξακολουθοῦν νὰ εἶναι σταθερῶς συνδεδεμένα μεταξύ των. Ὅταν φέρωμεν διαδοχικῶς ἐπὶ τοῦ νήματος Ν τὰς ἀκτινοβολίας λ_1 καὶ λ_2, τὸ πρῖσμα εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀντίστοιχον θέσιν τῆς ἐλαχίστης ἐκτροπῆς. Ἔστω α_1, β_1, αἱ γωνίαι προσπτώσεως καὶ διαθλάσεως διὰ τὴν ἀκτινοβολίαν λ_1 καὶ E_1 ἡ ἐλαχίστη ἐκτροπὴ καὶ α_2, β_2, E_2 αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι διὰ τὴν ἀκτινοβολίαν λ_2· τότε ἔχομεν τὰς σχέσεις :

διὰ τὴν λ_1 : $E_1 = 2\alpha_1 - A$ καὶ $A = 2\beta_1$

διὰ τὴν λ_2 : $E_2 = 2\alpha_2 - A$ καὶ $A = 2\beta_2$.

Ἡ διεύθυνσις τοῦ κατευθυντῆρος Κ μένει σταθερά. Ἑπομένως ἡ γωνία y κατὰ τὴν ὁποίαν στρέφεται τὸ σύστημα πρῖσμα — κάτοπτρον εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο γωνιῶν προσπτώσεως α_1 καὶ α_2, ἤτοι εἶναι :

$$y = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{1}{2}(E_2 - E_1).$$

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν διαφορὰν $E_2 - E_1$ χρησιμοποιοῦμεν τὰς σχέσεις

$$\nu_1 = \frac{\eta\mu\,\alpha_1}{\eta\mu\,\beta_1} \quad \text{ἢ} \quad \eta\mu\frac{E_1 + A}{2} = \nu_1\,\eta\mu\frac{A}{2} \qquad (1)$$

$$\nu_2 = \frac{\eta\mu\,\alpha_2}{\eta\mu\,\beta_2} \quad \text{ἢ} \quad \eta\mu\frac{E_2 + A}{2} = \nu_2\,\eta\mu\frac{A}{2}. \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν (1) εὑρίσκομεν :

$$\eta\mu\frac{E_1 + A}{2} = 1{,}60 \times 0{,}5 = 0{,}800 \cdot \quad \text{ἄρα} \quad E_1 = 46^\circ\ 15'\ 36''.$$

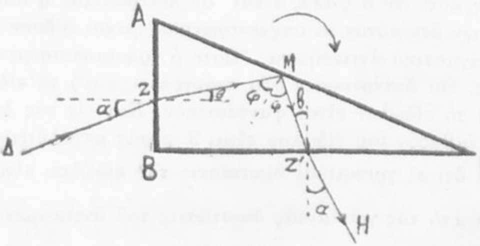
Ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) εὑρίσκομεν :

$$\eta\mu\frac{E_2 + A}{2} = 1{,}61 \times 0{,}5 = 0{,}805 \cdot \quad \text{ἄρα} \quad E_2 = 47^\circ\ 13'\ 20''.$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη γωνία y εἶναι :

$$y = \frac{E_2 - E_1}{2}$$

ἢ $y = \frac{57'\ 44''}{2} = 28'\ 52''$.



Σχ. 48

3) Ἔστω τὸ πρῖσμα ΑΒΓ. Ἡ ἀκτὶς ἀκολουθεῖ τὸν δρόμον ΔΖΜΖ′Η

καὶ θὰ ὑποστῇ τὴν ἀνωτέρω ἐλαχίστην ἐκτροπήν, ὅταν ἡ γωνία προσπτώσεως α ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ἀναδύσεως ἐκ τῆς ἕδρας ΒΓ. Ἡ ἕδρα ΑΓ ἐπέχει θέσιν ἐπιπέδου κατόπτρου. Αἱ ἐκτροπαὶ τῆς ἀκτῖνος εἰς τὰ σημεῖα Ζ, Μ καὶ Ζ′ κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους εἶναι:

$$\alpha-\beta, \quad \pi-2\varphi \quad \text{καὶ} \quad \beta-\alpha .$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἐκτροπῶν εἶναι ἴσον μὲ τὴν γωνίαν Ε, ποὺ σχηματίζουν μεταξύ των αἱ ΔΖ καὶ Ζ′Η, ἤτοι εἶναι ἴσον μὲ 90^0. Ἄρα:

$$E=(\alpha+\beta)+(\pi-2\varphi)+(\beta-\alpha)=\pi-2\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{ἢ} \quad 2\varphi=\frac{\pi}{2} \quad \text{καὶ} \quad \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Ὥστε ἡ γωνία ΖΜΖ′ εἶναι ὀρθή. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΖΜ ἔχομεν:

$$A+\varphi+\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\pi\cdot \quad \text{ἄρα} \quad A=\frac{\pi}{4}+\beta.$$

Εἰς τὸ τρίγωνον ΓΖ′Μ ἔχομεν:

$$\Gamma+\varphi+\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\pi\cdot \quad \text{ἄρα} \quad \Gamma=\frac{\pi}{4}-\beta.$$

Ἑπομένως εἶναι: $\quad A+\Gamma=\frac{\pi}{2}$ $\quad$ ὥστε $\quad B=\frac{\pi}{2}.$

Ἡ γωνία λοιπὸν Β τοῦ πρίσματος εἶναι ὀρθή. Αἱ γωνίαι Α καὶ Γ τοῦ πρίσματος προσδιορίζονται, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ γωνία β.

Διὰ $\beta=30^0$ εἶναι: $A=75^0$, καὶ $\Gamma=15^0$.

V. ΦΑΚΟΙ

α′) Φακὸς

55. — *Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως 15 cm πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἀντικείμενον, ὥστε τὸ σχηματιζόμενον εἴδωλον νὰ ἔχῃ ἐπιφάνειαν 9 φορὰς μεγαλυτέραν ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἀντικειμένου;*

Ἐδῶ δὲν καθορίζεται ἂν τὸ εἴδωλον θὰ εἶναι πραγματικὸν ἢ φανταστικόν, οὔτε ἂν ὁ φακὸς εἶναι συγκεντρωτικὸς ἢ ἀποκεντρωτικός. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι μόνον οἱ συγκεντρωτικοὶ φακοὶ δίδουν εἴδωλα μεγαλύτερα ἀπὸ τὰ πραγματικὰ ἀντικείμενα. Ὥστε ὁ χρησιμοποιούμενος φακὸς εἶναι συγκεντρωτικός. Θὰ διακρίνωμεν δύο περιπτώσεις: α′) τὸ εἴδωλον εἶναι πραγματικὸν καὶ β′) τὸ εἴδωλον εἶναι φανταστικόν. Καὶ εἰς τὰς δύο ὅμως περιπτώσεις, ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ εἰδώλου εἶναι 9 φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον, ἕπεται ὅτι αἱ γραμμικαὶ διαστάσεις τοῦ εἰδώλου εἶναι $\sqrt{9}=3$ φορὰς μεγαλύτεραι ἀπὸ τὰς γραμμικὰς διαστάσεις τοῦ ἀντικειμένου. Ὥστε εἶναι: $\frac{\varepsilon}{\alpha}=3.$

α′) Ἂν τὸ εἴδωλον εἶναι πραγματικόν, ἔχομεν:

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{\pi'}{\pi} = 3 \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\varphi}$$

ἑπομένως λαμβάνομεν :

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{3\pi} = \frac{1}{15} \qquad \text{ἢ} \qquad \pi = 20 \text{ cm} .$$

β΄) Ἂν τὸ εἴδωλον εἶναι φανταστικόν, ἔχομεν :

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{\pi_1'}{\pi_1} = 3 \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{1}{\pi_1} - \frac{1}{\pi_1'} = \frac{1}{\varphi}$$

ἑπομένως εἶναι :

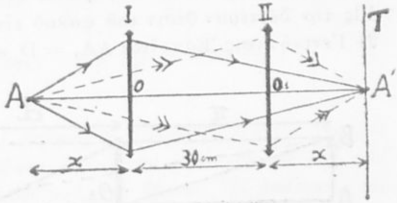
$$\frac{1}{\pi_1} - \frac{1}{3\pi_1} = \frac{1}{15} \qquad \text{ἢ} \qquad \pi_1 = 10 \text{ cm} .$$

56.— *Ἕνας συγκεντρωτικὸς φακὸς σχηματίζει τὸ εἴδωλον λαμπτῆρος ἐπὶ τοῦ τοίχου. Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ὁ φακὸς πλησιάσῃ πρὸς τὸν τοῖχον κατὰ* 30 cm, *τὸ σχηματιζόμενον εὐκρινὲς εἴδωλον εἶναι τέσσαρας φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὸ προηγούμενον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ.*

Ἔστω Α ἕνα σημεῖον τοῦ λαμπτῆρος. Ὅταν ὁ φακὸς εἶναι εἰς τὴν θέσιν Ι, τότε εἶναι : $\pi = OA$ καὶ $\pi' = OA'$. Ὅταν ὁ φακὸς ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν ΙΙ, τότε αἱ ἀποστάσεις αὗται ἀντιστρέφονται, δηλαδὴ εἶναι :

$$\pi_1 = O_1A = \pi'$$

$$\text{καὶ} \quad \pi_1' = O_1A' = \pi .$$



Σχ. 49

Ἂν ε καὶ ε_1 εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου, ὅταν ὁ φακὸς εἶναι ἀντιστοίχως εἰς τὰς θέσεις Ι καὶ ΙΙ, καὶ ἂν α εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ λαμπτῆρος, τότε ἔχομεν τὰς σχέσεις :

$$\text{(I)} \quad \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{\pi'}{\pi} = \frac{30 + x}{x} \qquad \text{(II)} \quad \frac{\varepsilon_1}{\alpha} = \frac{\pi_1'}{\pi_1} = \frac{x}{30 + x} .$$

Ἄρα : $$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{(30 + x)^2}{x^2} = 4 , \qquad \text{διότι εἶναι :} \quad \varepsilon = 4\,\varepsilon_1 .$$

Ἑπομένως ἔχομεν : $$\frac{30 + x}{x} = 2 \qquad \text{ἢ} \qquad x = 30 \text{ cm} .$$

Ἡ ζητουμένη ἑστιακὴ ἀπόστασις φ εὑρίσκεται τώρα ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\varphi} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{1}{30} + \frac{1}{60} = \frac{1}{\varphi} \qquad \text{ἄρα} \qquad \varphi = 20 \text{ cm} .$$

57.— *Φωτεινὸν ἀντικείμενον ἀπέχει* 1,80 m *ἀπὸ πέτασμα. 1) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν τοποθετηθῇ μεταξὺ τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ πετάσματος συγκλίνων φακός, ὑπάρχουν δύο θέσεις τοῦ φακοῦ διὰ τὰς ὁποίας λαμβάνεται ἐπὶ τοῦ πετάσματος εὐκρινὲς εἴδωλον. Ἂν δὲ εἶναι γνωστὸν ὅτι αἱ δύο θέσεις τοῦ φακοῦ ἀπέχουν μεταξύ των* 60 cm, *νὰ εὑρεθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ. 2) Νὰ εὑρεθῇ* *γενικὴ σχέσις διὰ τῆς ὁποίας προσδιορίζεται μὲ τὴν ἀνωτέρω μέθοδον ἡ ἐστιακὴ ἀπόστασις συγκλίνοντος φακοῦ, ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ ἀπόστασις D τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸ πέτασμα καὶ ἡ ἀπόστασις d τῶν δύο θέσεων τοῦ φακοῦ.*

1) Ἔστω π ἡ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον, ὅταν σχηματίζεται ἐπὶ τοῦ πετάσματος τὸ εὐκρινὲς εἴδωλον. Τότε ἡ ἀπόστασις π' τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τὸν φακὸν εἶναι: $\pi' = 180 - \pi$. Ἂν τὸ ἀντικείμενον καὶ τὸ πέτασμα ἀνταλλάξουν τὰς θέσεις των, τότε λαμβάνομεν πάλιν εὐκρινὲς εἴδωλον τοῦ ἀντικειμένου. Ἄρα ὑπάρχουν δύο θέσεις τοῦ φακοῦ διὰ τὰς ὁποίας λαμβάνομεν εὐκρινὲς εἴδωλον. Εἰς τὴν δευτέραν θέσιν ὁ φακὸς ἀπέχει ἀπὸ τὸ πέτασμα τόσον, ὅσον εἰς τὴν πρώτην θέσιν ἀπέχει ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον. Ἔχομεν ἑπομένως τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{180 - \pi} = \frac{1}{\phi} \quad \text{ἢ} \quad \pi^2 - 180\,\pi + 180\,\phi = 0 .$$

$$\text{καὶ} \quad \pi = 90 \pm \sqrt{8\,100 - 180\,\phi} .$$

Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο θέσεων τοῦ φακοῦ παριστᾷ τὴν διαφορὰν τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως. Ἄρα ἔχομεν:

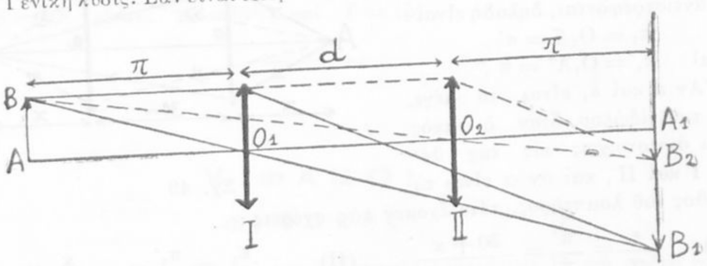
$$2\sqrt{8\,100 - 180\,\phi} = 60 \quad \text{ἢ} \quad 8\,100 - 180\,\phi = 900 \quad \text{καὶ} \quad \phi = 40 \text{ cm} .$$

Αἱ δύο ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι: $\pi = 90 \pm 30$.

Εἰς τὴν πρώτην θέσιν τοῦ φακοῦ εἶναι: $\pi_1 = 120$ cm.

Εἰς τὴν δευτέραν θέσιν τοῦ φακοῦ εἶναι: $\pi_2 = 60$ cm.

2) Γενικὴ λύσις. Ἐὰν εἶναι $AA_1 = D$ καὶ $O_1O_2 = d$, τότε ἔχομεν τὰς σχέσεις:



Σχ. 50

$$D = 2\,\pi + d \cdot \quad \text{ἄρα} \quad \pi = \frac{D - d}{2} \quad \text{καὶ} \quad \pi' = d + \pi = \frac{D + d}{2} .$$

$$\text{Ἄρα} \quad \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\phi} \quad \text{ἢ} \quad \frac{2}{D - d} + \frac{2}{D + d} = \frac{1}{\phi} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{\phi} = \frac{4D}{D^2 - d^2} .$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη ἐστιακὴ ἀπόστασις εἶναι: $\varphi = \dfrac{D^2 - d^2}{4\,D}$.

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Αὐτὸς ὁ τρόπος μετρήσεως τῆς ἐστιακῆς ἀποστάσεως λέγεται μέθοδος τοῦ Bessel.

58.— *Ἕνας συγκλίνων φακὸς εὑρίσκεται μεταξὺ μιᾶς φωτεινῆς πηγῆς καὶ ἑνὸς πετάσματος. Ἡ ἀπόστασις τῆς πηγῆς ἀπὸ τὸ πέτασμα εἶναι* $d = 1$ m. *Ἐπὶ* *τοῦ πετάσματος λαμβάνομεν εὐκρινὲς εἴδωλον τῆς πηγῆς διὰ δύο θέσεις τοῦ φακοῦ, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν μεταξύ των* $l = 40$ cm . *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ καὶ αἱ διαστάσεις τῶν δύο εἰδώλων, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ πηγὴ εἶναι φωτεινὴ εὐθεῖα μήκους* 2 cm .

Αἱ δύο θέσεις τοῦ φακοῦ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως τῆς πηγῆς ἀπὸ τὸ πέτασμα. Ἐπομένως διὰ τὴν πρώτην θέσιν τοῦ φακοῦ, ἔχομεν; $\pi = \frac{d - l}{2}$ καὶ $\pi' = \frac{d + l}{2}$.

Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\varphi}$ λαμβάνομεν :

$$\frac{2}{d - l} + \frac{2}{d + l} = \frac{1}{\varphi} \quad \text{ἢ} \quad \varphi = \frac{d^2 - l^2}{4\,d} = \frac{100^2 - 40^2}{4 \times 40} = 21 \text{ cm}.$$

Ἡ μεγέθυνσις εἶναι : $\frac{d + l}{d - l} = \frac{100 + 40}{100 - 40} = \frac{7}{3}$

καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου εἶναι : $2 \times \frac{7}{3} = 4{,}67$ cm .

Εἰς τὴν δευτέραν θέσιν ἡ μεγέθυνσις εἶναι : $\frac{d - l}{d + l} = \frac{3}{7}$

καὶ ἐπομένως τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου εἶναι : $2 \times \frac{3}{7} = 0{,}86$ cm .

59.— *Ἔμπροσθεν συγκλίνοντος φακοῦ εὑρίσκεται φωτεινὴ σχισμή, μήκους* 2 cm , *ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρὸς τὸν ἄξονα. Ὁ φακὸς δίδει εἴδωλον τῆς σχισμῆς ἐπὶ πετάσματος, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα. Ἡ ἀπόστασις τῆς σχισμῆς ἀπὸ τὸ πέτασμα εἶναι* 125 cm . *Παρατηροῦμεν ὅτι λαμβάνομεν εὐκρινὲς εἴδωλον, ὅταν ὁ φακὸς εὑρίσκεται εἰς δύο θέσεις, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν μεταξύ των* 75 cm . *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ. 2) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις τῶν δύο εἰδώλων τῆς σχισμῆς. 3) Τί θὰ συμβῇ, ἂν μεταβληθῇ ἡ ἀπόστασις τῆς σχισμῆς ἀπὸ τὸ πέτασμα ; Εἶναι πάντοτε δυνατὸς ὁ σχηματισμὸς εἰδώλου ;*

1) Ἔστω $D = 125$ cm ἡ ἀπόστασις τῆς σχισμῆς ἀπὸ τὸ πέτασμα, $d = 75$ cm ἡ μεταξὺ τῶν δύο θέσεων τοῦ φακοῦ ἀπόστασις καὶ π, π' αἱ ἀποστάσεις τῆς σχισμῆς καὶ τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τὸν φακόν, τοῦ ὁποίου ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις εἶναι φ. Τότε ἰσχύει ἡ γνωστὴ σχέσις :

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\varphi} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{\pi} + \frac{1}{D - \pi} = \frac{1}{\varphi}$$

$$\text{ἄρα} \qquad \pi^2 - D\pi + D\varphi = 0 . \tag{1}$$

Ἐὰν ἡ διακρίνουσα τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως εἶναι θετική, θὰ λάβωμεν δύο ῥίζας π_1 καὶ π_2 αἱ ὁποῖαι προσδιορίζουν τὰς δύο δυνατὰς θέσεις τοῦ φακοῦ. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο αὐτῶν θέσεων τοῦ φακοῦ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως· ὥστε $d = \pi_1 - \pi_2 = \sqrt{D^2 - 4\,D\varphi}$. ἄρα $\varphi = \frac{D^2 - d^2}{4\,D}$.

Ἡ ζητουμένη ἰσχὺς P εἶναι :

$$P = \frac{1}{\varphi} = \frac{4\,D}{D^2 - d^2} = \frac{4 \times 1{,}25}{1{,}25^2 - 0{,}75^2} = 5 \text{ διοπτρίαι} .$$

2) Ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν :

$$\pi = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4\,D\varphi}}{2} = \frac{125 \pm \sqrt{5\,625}}{2} \cdot$$

$$\text{ἄρα} \qquad \pi_1 = 100 \text{ cm} \quad \text{καὶ} \quad \pi_2 = 25 \text{ cm} .$$

Αἱ δύο αὐταὶ ῥίζαι εἶναι ἀντιστοίχως αἱ ἀποστάσεις τοῦ φακοῦ ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον καὶ ἀπὸ τὸ εἴδωλον διὰ τὰς δύο δυνατὰς θέσεις τοῦ φακοῦ. Ἄρα : ὅταν ἡ σχισμὴ ἀπέχῃ 100 cm ἀπὸ τὸν φακόν, τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου εἶναι :

$$2 \times \frac{100}{25} = 8 \text{ cm} \cdot$$

ὅταν δὲ ἡ σχισμὴ ἀπέχῃ 25 cm ἀπὸ τὸν φακόν, τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου εἶναι :

$$2 \times \frac{25}{100} = 0{,}5 \text{ cm} .$$

3) Ἂν μεταβληθῇ ἡ ἀπόστασις D, θὰ ἐξακολουθήσωμεν νὰ ἔχωμεν εἴδωλον, ἐφ' ὅσον ἡ διακρίνουσα τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι θετικὴ ἢ μηδέν, δηλαδὴ ἂν εἶναι:

$$D^2 - 4\,D\varphi \geqslant 0 \cdot \qquad \text{ἢ} \qquad D \geqslant 4\,\varphi .$$

Διὰ νὰ εἶναι λοιπὸν δυνατὸς ὁ σχηματισμὸς εἰδώλου ἐπὶ τοῦ πετάσματος, πρέπει ἡ ἀπόστασις τῆς σχισμῆς ἀπὸ τὸν φακὸν νὰ εἶναι τουλάχιστον ἴση μὲ τὸ τετραπλάσιον τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως τοῦ φακοῦ.

60.— *Φωτεινὴ εὐθεῖα AB εἶναι παράλληλος πρὸς πέτασμα κατακόρυφον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 2 m ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν. Μεταξὺ τῆς εὐθείας καὶ τοῦ πετάσματος τοποθετεῖται συγκλίνων φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως φ = 3/8 m. 1) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ δύο θέσεις τοῦ φακοῦ, διὰ τὰς ὁποίας λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ πετάσματος εὐκρινὲς εἴδωλον τῆς εὐθείας. Ποῖος εἶναι εἰς κάθε περίπτωσιν ὁ λόγος γ τοῦ εἰδώλου πρὸς τὸ ἀντικείμενον ; 2) Νὰ ὑπολογισθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ, ὥστε νὰ εἶναι δυνατὴ μία μόνον θέσις τοῦ φακοῦ διὰ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν εὐκρινὲς εἴδωλον.*

1) Ἔστω π ἡ ἀπόστασις τῆς εὐθείας AB ἀπὸ τὸν φακόν· τότε εἶναι π′ = 2 − π καὶ ἑπομένως ἔχομεν :

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2 - \pi} = \frac{8}{3} \cdot \qquad \text{ἢ} \qquad 4\,\pi^2 - 8\,\pi + 3 = 0 \cdot$$

$$\text{ἑπομένως :} \qquad \pi = \frac{4 \pm 2}{4} \cdot$$

$$\text{Ὥστε} \quad \text{ἢ} \quad \pi_1 = 1{,}5 \text{ m} \quad \text{ὁπότε} \quad \pi_1{}' = 0{,}5 \text{ m}$$
$$\text{ἢ} \quad \pi_2 = 0{,}5 \text{ m} \quad \text{ὁπότε} \quad \pi_2{}' = 1{,}5 \text{ m} .$$

Ὁ φακὸς ἠμπορεῖ λοιπὸν νὰ τοποθετηθῇ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν

$$1{,}5 \text{ m} \quad \text{ἢ} \quad 0{,}5 \text{ m} .$$

Ὁ λόγος τοῦ εἰδώλου A′B′ πρὸς τὸ ἀντικείμενον εἶναι :

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{\pi_1{}'}{\pi_1} = \frac{0{,}5}{1{,}5} = \frac{1}{3} \quad \text{ἢ} \quad \gamma' = \frac{A'B'}{AB} = \frac{\pi_2{}'}{\pi_2} = \frac{1{,}5}{0{,}5} = 3 .$$

2) Ἔστω φ_1 ἡ ζητουμένη ἑστιακὴ ἀπόστασις καὶ π_3 ἡ ἀπόστασις τῆς AB ἀπὸ τὸν φακόν. Τότε εἶναι :

$$\frac{1}{\pi_3} + \frac{1}{2 - \pi_3} = \frac{1}{\phi_1} \quad \text{ἢ} \quad \pi_3^2 - 2\pi_3 + 2\phi_1 = 0 .$$

Ὑπάρχει μία θέσις διὰ τὸν φακόν, ἐὰν ἡ τελευταία ἐξίσωσις ἔχῃ μίαν ρίζαν, δηλαδὴ ἂν ἡ διακρίνουσα εἶναι μηδέν :

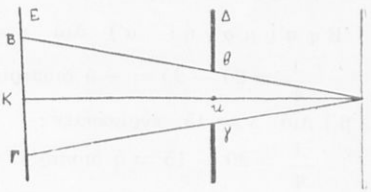
$$4 - 8\phi_1 = 0 \quad \text{ἢ} \quad \phi_1 = 0{,}5 \text{ m} .$$

Πράγματι εὑρίσκομεν τότε : $\pi_3 = 1$ m καὶ ἑπομένως εἶναι :

$$\pi_3' = 2 - \pi_3 = 1 \text{ m} .$$

Ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τὸν φακὸν εἶναι τότε ἴση μὲ τὸ διπλάσιον τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως τοῦ φακοῦ.

61. — *Ἐπὶ ἑνὸς πετάσματος* E *ἔχομεν γράψει συγκεντρικοὺς κύκλους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν κοινὸν κέντρον* K *καὶ ἀκτῖνας ἀντιστοίχως* 1 mm , 2 mm , 3 mm , 4 mm , *κλπ. Παρατηροῦμεν τοὺς κύκλους τούτους διὰ μέσου μιᾶς πολὺ μικρᾶς ὀπῆς* A. *Ἡ εὐθεῖα* AK *εἶναι κάθετος πρὸς τὸ πέτασμα καὶ ἔχει μῆκος* 20 cm . *Εἰς ἀπόστασιν* 12 cm *ἀπὸ τὸ πέτασμα* E , *μεταξὺ* A *καὶ* K , *τοποθετεῖται διάφραγμα* Δ , *τὸ ὁποῖον φέρει κυκλικὴν ὀπὴν ἀκτῖνος* 8 mm *καὶ τῆς ὁποίας τὸ κέντρον της* κ *εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας* AK . *1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς* N *τῶν κύκλων τοὺς ὁποίους βλέπομεν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν. 2) Εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας* AK *τοποθετεῖται φακὸς* Λ, *τοῦ ὁποίου ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις* φ *εἶναι κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν μεγαλυτέρα ἀπὸ* 10 cm . *Ὁ ἄξων του συμπίπτει μὲ τὴν εὐθεῖαν* AK . *Βλέπομεν τότε διὰ μέσου τῆς ὀπῆς* ν *κύκλους ἀντὶ τῶν* N , *ποὺ ἐβλέπομεν προηγουμένως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ εἰς διοπτρίας καὶ νὰ καθορισθῇ, ἂν ὁ φακὸς εἶναι συγκλίνων ἢ ἀποκλίνων. Ἐφαρμογή : α΄)* ν = 25 · *β΄)* ν = 15 .



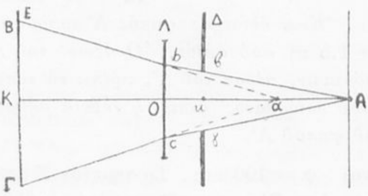
Σχ. 51

Ἡ ὀπὴ τοῦ διαφράγματος Δ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ βλέπωμεν ἐπὶ τοῦ πετάσματος E μίαν κυκλικὴν περιοχήν, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα KB . Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα AKB καὶ Aκβ ἔχομεν :

$$\frac{KB}{\kappa\beta} = \frac{AK}{A\kappa} \quad \text{ἄρα} \quad KB = \frac{AK}{A\kappa} \cdot \kappa\beta = \frac{20}{8} \times 0{,}8 = 2 \text{ cm} = 20 \text{ mm} .$$

Βλέπομεν λοιπὸν τότε : N = 20 κύκλους .

2) Ἐὰν παρεμβάλωμεν τὸν φακὸν Λ, ἐξακολουθοῦμεν νὰ βλέπωμεν τὰς ἀκτῖνας, αἱ ὁποῖαι, ἀφοῦ διέλθουν διὰ τῆς ὀπῆς βγ, διέρχονται καὶ διὰ τῆς ὀπῆς A . Αἱ ἀκτῖνες αὐταὶ εὑρίσκονται ἐντὸς κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς βάσιν ἐπὶ τοῦ φακοῦ ἕνα κύκλον ἀκτῖνος Ob. Τότε ἔχομεν τὴν σχέσιν :



Σχ. 52

$$\frac{Ob}{\kappa\beta} = \frac{AO}{A\kappa} \quad \text{ἄρα} \quad Ob = \frac{AO}{A\kappa} \cdot \kappa\beta$$

$$\text{ἢ} \quad Ob = \frac{10}{8} \times 0{,}8 = 1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}.$$

Ἐὰν ὁ φακὸς Λ εἶναι ἀποκλίνων, τὸ σημεῖον α εἶναι φανταστικόν. Ἐὰν ὁ φακὸς εἶναι συγκλίνων, ἐπειδὴ ὁρίζεται ὅτι ἡ ἑστιακή του ἀπόστασις φ εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μεγαλυτέρα ἀπὸ 10 cm, δηλαδὴ μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἀπόστασιν ΟΑ, τὸ σημεῖον α θὰ εἶναι πάλιν φανταστικόν. Ὥστε καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις τὸ α εἶναι πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ φακοῦ.

Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΚΒα καὶ Οbα εὑρίσκομεν:

$$\frac{KB}{Ob} = \frac{K\alpha}{O\alpha} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{KB}{Ob} = \frac{KO + O\alpha}{O\alpha} = \frac{KO}{O\alpha} + 1\cdot$$

ἐπειδὴ εἶναι: $KB = \frac{\nu}{10}$ cm · $Ob = 1$ cm · $KO = 10$ cm ἔχομεν:

$$\frac{\nu}{10} = \frac{10}{O\alpha} + 1, \qquad \text{ἄρα} \qquad O\alpha = \frac{100}{\nu - 10}\ \text{cm} = \frac{1}{\nu - 10}\ \text{m}.$$

Τὸ σημεῖον α παίζει ρόλον φανταστικοῦ ἀντικειμένου διὰ τὸν φακὸν Λ· τὸ εἴδωλον τοῦ α εἶναι τὸ Α. Ἑπομένως:

$$-\frac{1}{O\alpha} + \frac{1}{OA} = \frac{1}{\varphi} \qquad \text{ἢ} \qquad -(\nu - 10) + \frac{1}{0{,}10} = \frac{1}{\varphi}\cdot$$

ὥστε ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ εἶναι: $\frac{1}{\varphi} = 20 - \nu$ διοπτρίαι.

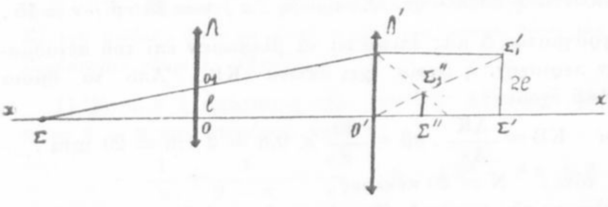
Ἐ φ α ρ μ ο γ ή: α') Διὰ $\nu = 25$ εὑρίσκομεν:

$$\frac{1}{\varphi} = 20 - 25 = -5 \text{ διοπτρίαι}$$ · ὁ φακὸς Λ εἶναι ἀποκλίνων.

β) Διὰ $\nu = 15$ εὑρίσκομεν:

$$\frac{1}{\varphi} = 20 - 15 = 5 \text{ διοπτρίαι}$$ · ὁ φακὸς Λ εἶναι συγκλίνων.

62. — *Ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἄξονος* xx' *ἑνὸς συγκλίνοντος φακοῦ* Λ *καὶ εἰς ἀπόστασιν* 2 m *ἀπὸ αὐτὸν εὑρίσκεται φωτεινὸν σημεῖον* Σ. *Ὁ φακὸς ἔχει ἰσχὺν* 1 *διοπτρίας καὶ τίθεται εἰς ταχεῖαν παλμικὴν κίνησιν οὕτως, ὥστε τὸ ὀπτικόν του κέντρον* Ο *νὰ κινῆται καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα* xx'· *τὸ πλάτος τῆς παλμικῆς κινήσεως τοῦ* Ο *εἶναι* 2 mm. *Ἕνας δεύτερος φακὸς* Λ' *τοποθετεῖται μονίμως πέραν τοῦ* Λ *καὶ εἰς ἀπόστασιν* 1,5 m *ἀπὸ αὐτόν. Ὁ ἄξων τοῦ* Λ' *συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα* xx'. *Εἰς ποίαν ἀπόστασιν, πέραν τοῦ* Λ', *πρέπει νὰ τοποθετηθῇ πέτασμα, ὥστε νὰ σχηματισθῇ ἐπὶ τοῦ πετάσματος φωτεινὴ εὐθεῖα μήκους* 4 mm; *Πόση εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ* Λ'.



Σχ. 53

Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ Λ εἶναι: $\varphi = 100$ cm. Τὸ σημεῖον Σ ἀπέχει ἀπὸ τὸν φακόν: $O\Sigma = 2\varphi$ · ἄρα τὸ εἴδωλον Σ' σχηματίζεται ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τοῦ φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν: $O\Sigma' = 2\varphi$. Ὅταν τὸ Ο μετατοπίζεται κατὰ $OO_1 = l$, τὸ σημεῖον Σ εὑρίσκεται ἐπὶ ἑνὸς δευτερεύοντος ἄξονος. Τὸ εἴδωλόν του ὅμως Σ_1' παραμένει συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὸ O_1, ἤτοι εἶναι: $\Sigma O_1 = O_1\Sigma_1' = 2\varphi$. Ἑπομένως ἡ μετατόπισις $\Sigma'\Sigma_1'$ τοῦ εἰδώλου Σ' εἶναι $2l$. Ὅταν τὸ Ο ἐκτελῇ μίαν παλμικὴν κίνησιν, πλάτους 2 mm, τὸ εἴδωλον Σ_1' διαγράφει μίαν φωτεινὴν εὐθεῖαν, κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα xx', ἡ ὁποία ἔχει μῆκος 8 mm και ἀπέχει 200 cm ἀπὸ τὸν φακὸν Λ. Τὸ μέσον τῆς εὐθείας αὐτῆς εἶναι τὸ Σ'. Αὐτὴ ἡ εὐθεῖα παίζει ρόλον φανταστικοῦ ἀντικειμένου διὰ τὸν φακὸν Λ' ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἀπέχει $\pi = 50$ cm.

Ὁ φακὸς Λ' δίδει τὸ εἴδωλον $\Sigma''\Sigma_1''$ τῆς εὐθείας $\Sigma'\Sigma_1'$. Τὸ εἴδωλον τοῦτο σχηματίζεται ἐπὶ τοῦ πετάσματος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ τοποθετηθῇ εἰς ἀπόστασιν π' ἀπὸ τὸν φακὸν Λ', τοιαύτην ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$\frac{\pi'}{\pi} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi' = \frac{50}{2} = 25 \text{ cm}.$$

Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις φ' τοῦ φακοῦ Λ' εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$-\frac{1}{50} + \frac{1}{25} = \frac{1}{\varphi'} \qquad \text{ἄρα} \qquad \varphi' = 50 \text{ cm}.$$

Ὁ φακὸς Λ' εἶναι συγκλίνων. Τοῦτο ἠμποροῦμε νὰ τὸ προβλέψωμεν, διότι μόνον ὁ συγκλίνων φακὸς δίδει πραγματικὸν εἴδωλον μικρότερον τοῦ ἀντικειμένου, ὅταν τοῦτο εἶναι φανταστικόν.

63.— *Ὁ κύριος ἄξων ἑνὸς λεπτοῦ συγκεντρωτικοῦ φακοῦ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 1 m διευθύνεται πρὸς τὸ κέντρον τοῦ ἡλίου. Εἰς ἀπόστασιν 2 m ἀπὸ τὸν φακὸν καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἡλίου τοποθετεῖται ἀδιαφανὲς λεπτὸν διάφραγμα Δ, τὸ ὁποῖον φέρει μικρὰν ὀπὴν Σ, εὑρισκομένην ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος τοῦ φακοῦ. Ἡ ὀπὴ θεωρεῖται ὡς γεωμετρικὸν σημεῖον. Ὄπισθεν τοῦ φακοῦ μετακινοῦμεν λευκὸν φύλλον χάρτου, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ φακοῦ. 1) Νὰ περιγραφῇ τί παρατηρεῖται ἐπὶ τοῦ φύλλου τοῦ χάρτου, ὅταν τοῦτο φέρεται: α') εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν φακόν· β') εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τὸν φακόν· γ') εἰς ἀπόστασιν 2 m ἀπὸ τὸν φακόν. 2) Τί παρατηρεῖται εἰς τὴν περίπτωσιν (β), ἂν ἀφαιρεθῇ τὸ διάφραγμα Δ; 3) Τί θὰ ἀλλάξῃ, ἂν τὸ διάφραγμα Δ τοποθετηθῇ εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τὸν φακόν; Φαινομένη διάμετρος τοῦ ἡλίου: 32'.*

1) Ἡ ὀπὴ Σ συμπεριφέρεται ὡς φωτεινὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἐκπέμπει κωνικὴν δέσμην ἀκτίνων. Ἡ γωνία τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν φαινομένην διάμετρον τοῦ ἡλίου, δηλαδὴ εἶναι: $\alpha = 32' = 0{,}0096$ ἀκτινίου.

Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Σ ἀπὸ τὸν φακὸν εἶναι διπλασία ἀπὸ τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασίν του. Ἑπομένως ὁ φακὸς σχηματίζει πραγματικὸν εἴδωλον Σ' τοῦ σημείου Σ εἰς ἀπόστασιν ἴσην, ἤτοι εἰς ἀπόστασιν 2 m. Ἄρα ἀπὸ τὸν φακὸν ἐξέρχεται μία συγκλίνουσα κωνικὴ δέσμη, ἡ ὁποία ἔχει κορυφὴν τὸ Σ'.

α') Ὅταν τὸ φύλλον τοῦ χάρτου φέρεται εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν φακόν, τότε σχηματίζεται ἐπὶ τοῦ χάρτου φωτεινὸς κύκλος, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον d ἴσην μὲ τὴν διάμετρον τοῦ φακοῦ.

Ἑπομένως εἶναι: $d = 200\,\alpha = 200 \times 0{,}0096 = 1{,}92 \text{ cm} = 19{,}2 \text{ mm}$.

β') Ὅταν τὸ φύλλον τοῦ χάρτου εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τὸν φακόν, σχηματίζεται ἐπὶ τοῦ φύλλου φωτεινὸς κύκλος, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον d', δύο φορὰς μικροτέραν ἀπὸ τὴν προηγουμένην, δηλαδὴ εἶναι:

$$d' = \frac{d}{2} = \frac{19{,}2}{2} \text{ mm}, \qquad \text{ἢ} \qquad d' = 9{,}6 \text{ mm}.$$

γ) Τέλος, ὅταν τὸ φύλλον τοῦ χάρτου εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 2 m ἀπὸ τὸν φακόν, σχηματίζεται ἐπὶ τοῦ χάρτου ἕνα φωτεινὸν σημεῖον.

2) Ὅταν τὸ φύλλον τοῦ χάρτου εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τὸν φακόν, δηλαδὴ εἰς τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον τοῦ φακοῦ, καὶ ἀφαιρεθῇ τότε τὸ διάφραγμα Δ, σχηματίζεται ἐπὶ τοῦ χάρτου τὸ πραγματικὸν εἴδωλον τοῦ ἡλίου, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶναι:

$$d_1 = \varphi \cdot \alpha = 100 \times 0{,}0096 = 0{,}96 \text{ cm} \quad \text{ἢ} \quad d_1 = 9{,}6 \text{ mm}.$$

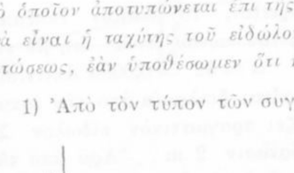
3) Ἐὰν τὸ διάφραγμα Δ τοποθετηθῇ εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τὸν φακόν, ἡ ὀπὴ Σ συμπίπτει μὲ τὴν κυρίαν ἑστίαν τοῦ φακοῦ. Ἀπὸ τὸ Σ ἀναχωρεῖ πάλιν μία κωνικὴ δέσμη ἀκτίνων, ἡ ὁποία ὅμως, μετὰ τὴν ἔξοδόν της ἀπὸ τὸν φακόν, εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν κύριον ἄξονα τοῦ φακοῦ. Ἑπομένως εἰς ὁποιανδήποτε ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν φακὸν καὶ ἂν τοποθετηθῇ τὸ φύλλον τοῦ χάρτου, σχηματίζεται ἐπ' αὐτοῦ φωτεινὸς κύκλος, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶναι σταθερά:

$$d_1 = \varphi \cdot \alpha \quad \text{ἢ} \quad d_1 = 9{,}6 \text{ mm}.$$

64. — *Σφαῖρα ἀπὸ χάλυβα ἀφήνεται ἀπὸ ὕψος 2 m νὰ πέσῃ χωρὶς ἀρχικὴν ταχύτητα εἰς τόπον ὅπου ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος εἶναι* $g = 980$ C.G.S. *Ἡ σφαῖρα φωτίζεται κάθε 0,2 δευτερολέπτου ἀπὸ ἰσχυρὸν ἠλεκτρικὸν σπινθῆρα, ὁ ὁποῖος ἔχει πολὺ μικρὰν διάρκειαν. Ὁ πρῶτος σπινθὴρ παράγεται, ὅταν ἡ σφαῖρα εὑρίσκεται εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς διαδρομῆς της. Μὲ μίαν φωτογραφικὴν μηχανὴν φωτογραφοῦμεν τὴν σφαῖραν εἰς διάφορα σημεῖα τῆς τροχιᾶς της. Ὁ ἀντικειμενικὸς φακὸς τῆς μηχανῆς ἐξομοιώνεται μὲ λεπτὸν φακόν, ἑστιακῆς ἀποστάσεως* $\varphi = 14$ cm. *Ὁ κύριος ἄξων τοῦ φακοῦ ἀπέχει 1 m ἀπὸ τὸ ἔδαφος καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς πλακός. Τὸ ὀπτικὸν κέντρον τοῦ φακοῦ ἀπέχει 2,94 m ἀπὸ τὴν κατακόρυφον τῆς πτώσεως τῆς σφαίρας. 1) Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν φακὸν πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἡ φωτογραφικὴ πλάξ, ὥστε τὸ εἴδωλον τῆς σφαίρας νὰ σχηματίζεται ἐπὶ τῆς πλακός. Ἡ σφαῖρα θεωρεῖται ὡς ὑλικὸν σημεῖον. 2) Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ θέσεις τῶν διαφόρων εἰδώλων ἐπὶ τῆς πλακός, λαμβάνοντες ὡς ἀρχὴν τὸ εἴδωλον τὸ ὁποῖον ἀποτυπώνεται κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς πτώσεως. 3) Πόσον ἀπέχει ἀπὸ τὸν ἄξονα τοῦ φακοῦ τὸ εἴδωλον, τὸ ὁποῖον ἀποτυπώνεται ἐπὶ τῆς πλακὸς κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς πτώσεως; 4) Πόση θὰ εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ εἰδώλου μετὰ παρέλευσιν 0,5 sec ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς πτώσεως, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ σφαῖρα φωτίζεται συνεχῶς;*

1) Ἀπὸ τὸν τύπον τῶν συγκλινόντων φακῶν: $\dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{\pi'} = \dfrac{1}{\varphi}$, συνάγομεν ὅτι ἡ ἀπόστασις π′ τῆς πλακὸς ἀπὸ τὸ ὀπτικὸν κέντρον Ο εἶναι:

$$\pi' = \frac{\pi\varphi}{\pi - \varphi} = \frac{294 \times 14}{280} = 14{,}7 \text{ cm}.$$



Σχ. 54

2) Τὸ διάστημα ΒΓ, τὸ ὁποῖον διανύει ἡ σφαῖρα εἰς τὸ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν σπινθήρων χρονικὸν διάστημα, ἐπέχει τὴν θέσιν ἀντικειμένου, ἐνῷ τὸ Β′Γ′ ἐπέχει τὴν θέσιν εἰδώλου. Ὁ λόγος τῶν μεγεθῶν εἰδώλου καὶ ἀντικειμένου εἶναι:

$$\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\pi'}{\pi} = \frac{14{,}7}{294} = \frac{1}{20}.$$

Εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου $t_1 = 0{,}2$ sec ἡ σφαῖρα ἔχει διανύσει διάστημα:

$$s_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2} \times 980 \times 0{,}2^2 = 19{,}6 \text{ cm} .$$

Ἑπομένως εἰς τοὺς χρόνους $t_2 = 2 \times 0{,}2$ sec, $t_3 = 3 \times 0{,}2$ sec κλπ. ἡ σφαῖρα θὰ διανύσῃ ἀντιστοίχως διαστήματα:

$$s_2 = 4\, s_1 = 4 \times 19{,}6 = 78{,}4 \text{ cm} \cdot \quad s_3 = 9\, s_1 = 9 \times 19{,}6 = 176{,}4 \text{ cm} .$$

Ὥστε αἱ ἀντίστοιχοι ἀποστάσεις τῶν εἰδώλων ἀπὸ τὸ πρῶτον εἴδωλον Β′ θὰ εἶναι: $\dfrac{19{,}6}{20} = 0{,}98$ cm · $4 \times 0{,}98 = 3{,}92$ cm · $9 \times 0{,}98 = 8{,}82$ cm.

3) Κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς πτώσεως ἡ σφαῖρα εὑρίσκεται εἰς ὕψος ΑΒ=200 cm. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ΑΜ = ΜΒ = 100 cm, ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{B'M'}{BM} = \frac{\pi'}{\pi} = \frac{1}{20} \qquad \text{ἄρα} \quad B'M' = \frac{100}{20} = 5 \text{ cm} .$$

Τὸ πρῶτον λοιπὸν εἴδωλον ἀπέχει 5 cm ἀπὸ τὸν κύριον ἄξονα τοῦ φακοῦ.

4) Εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου $t = 0{,}5$ sec ἡ σφαῖρα θὰ ἔχῃ ταχύτητα:

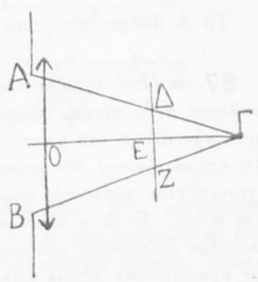
$$\upsilon = gt = 980 \times 0{,}5 = 490 \text{ cm/sec} .$$

Τὸ εἴδωλον θὰ ἔχῃ τὴν στιγμὴν ἐκείνην ταχύτητα υ′, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{\upsilon'}{\upsilon} = \frac{1}{20} \qquad \text{ἄρα} \quad \upsilon' = \frac{490}{20} = 24{,}5 \text{ cm/sec} .$$

65. — *Ὁ συγκλίνων ἀντικειμενικὸς φακὸς μιᾶς φωτογραφικῆς μηχανῆς ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν $\varphi = 54$ mm, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ φακοῦ περιορίζεται ἀπὸ ἕνα διάφραγμα, ποὺ ἔχει διάμετρον $\Delta = \varphi / 4{,}5$ mm. Ἡ μηχανὴ εἶναι ρυθμισμένη κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε αἱ ἀκτῖνες, ποὺ προέρχονται ἐκ τοῦ ἀπείρου, νὰ συνέρχωνται ἐπὶ τῆς φωτογραφικῆς πλακός. Φωτογραφοῦμεν τότε ἕνα ἀντικείμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν π ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν. Ὁ κῶνος τῶν διαθλωμένων ἀκτίνων δίδει ἐπὶ τῆς πλακὸς φωτεινὴν κηλῖδα, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον $\delta = 0{,}1$ mm. Πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις π;*

Τὸ εἴδωλον τοῦ ἀντικειμένου σχηματίζεται εἰς τὸ Γ καὶ ὁ κῶνος τῶν διαθλωμένων ἀκτίνων τέμνεται ἀπὸ τὴν φωτογραφικὴν πλάκα κατὰ τὴν ΔΖ. Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΓΔΖ καὶ ΓΑΒ εὑρίσκομεν:



Σχ. 55

$$\frac{\Delta Z}{AB} = \frac{\Gamma E}{\Gamma O} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\delta}{\Delta} = \frac{\pi' - \varphi}{\pi'} . \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου ὅμως ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\pi'} = \frac{\pi' - \varphi}{\varphi \pi'}$$

$$\text{ἢ} \quad \pi = \frac{\varphi \pi'}{\pi' - \varphi} . \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$\pi = \frac{\varphi \Delta}{\delta} = \frac{\varphi^2}{4{,}5 \times 0{,}1} = \frac{54^2}{0{,}45} = 6\,480 \text{ mm} \cdot \qquad \text{ἢ} \quad \pi = 6{,}48 \text{ m} .$$

66. — *Ὁ ἀντικειμενικὸς φακὸς μιᾶς φωτογραφικῆς μηχανῆς θεωρεῖται ὡς λεπτὸς συγκλίνων φακός· οὗτος ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν* 13,5 cm *καὶ διάμετρον* 3 cm. *Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ φακοῦ εὑρίσκεται φωτεινὸν σημεῖον* A, *τὸ ὁποῖον ἀρχικῶς εἶναι εἰς πολὺ μεγάλην ἀπόστασιν. Ἡ φωτογραφικὴ πλὰξ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον τοῦ ἀντικειμενικοῦ. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου* A *ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ φωτεινὴ κηλίς, ἡ σχηματιζομένη ἐπὶ τῆς πλακός, ἔχει διάμετρον* 0,1 mm. *2) Νὰ ἐξετασθῇ τὸ ζήτημα τῆς προηγουμένης παραγράφου ὅταν ὁ ἀντικειμενικὸς καλυφθῇ μὲ διάφραγμα, τοῦ ὁποίου ἡ χρήσιμος διάμετρος εἶναι* 1 cm.

1) Ἡ φωτεινὴ δέσμη, τὴν ὁποίαν στέλλει τὸ σημεῖον Α ἐπὶ τοῦ ἀντικειμενικοῦ, μετὰ τὴν διάθλασίν της σχηματίζει κωνικὴν δέσμην, ἡ ὁποία συγκλίνει εἰς τὸ Α΄· τοῦτο εἶναι τὸ εἴδωλον τοῦ Α.

Ἡ δέσμη αὐτὴ τέμνει τὴν φωτογραφικὴν πλάκα, εὑρισκομένην εἰς τὴν ἑστίαν Ε, κατὰ ἕνα μικρὸν κύκλον. Ἐὰν Ο εἶναι τὸ ὀπτικὸν κέντρον τοῦ ἀντικειμενικοῦ, θὰ ἔχωμεν: $\dfrac{EA'}{OA'} = \dfrac{0{,}1}{30}$ ἄρα $EA' = \dfrac{1}{300}\,OA'$.

Τὸ Α εὑρίσκεται πολὺ μακράν· ἠμποροῦμε λοιπὸν νὰ λάβωμεν κατὰ προσέγγισιν $OA' = OE$, ὁπότε ἔχομεν:

$$EA' = \frac{1}{300}\,OE = \frac{135}{300} = 0{,}45 \text{ mm}.$$

Ὥστε τὸ Α΄ σχηματίζεται 0,45 mm πέραν τῆς ἑστίας Ε, ἤτοι εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν: $\pi' = 135 + 0{,}45 = 135{,}45$ mm.

Ἡ ἀπόστασις π τοῦ σημείου Α ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{135{,}45} = \dfrac{1}{135}$ ἄρα $\pi = 40\,635$ mm $= 40{,}635$ m.

2) Ὅταν χρησιμοποιηθῇ τὸ διάφραγμα, τὸ ὁποῖον ἔχει χρήσιμον διάμετρον 1 cm, τότε σκεπτόμενοι ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, εὑρίσκομεν: $EA' = \dfrac{1}{100}\,OA' = \dfrac{1}{100}\,OE = \dfrac{135}{100} = 1{,}35$ mm.

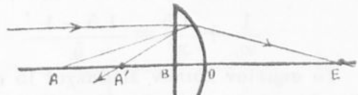
Ἄρα: $\dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{136{,}35} = \dfrac{1}{135}$ καὶ $\pi = 13\,635$ mm.

Τὸ Α ἀπέχει τότε ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν: $\pi = 13{,}635$ m.

67. — *Ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας ἑνὸς λεπτοῦ ἐπιπεδοκύρτου φακοῦ καὶ καθέτως πρὸς αὐτήν, προσπίπτει δέσμη ἀκτίνων μονοχρόου φωτός, παραλλήλων πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ φακοῦ. Μὲ τὴν βοήθειαν μικροῦ πετάσματος διαπιστώνομεν ὅτι σχηματίζονται δύο φωτεινὰ σημεῖα—εἴδωλα. Τὸ ἕνα εἶναι πολὺ φωτεινόν, σχηματίζεται πέραν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν* 30 cm *ἀπὸ αὐτήν. Τὸ ἄλλο εἶναι πολὺ ἀσθενέστερον, σχηματίζεται πρὸς τὸ μέρος τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας τοῦ φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν* 5 cm *ἀπὸ αὐτήν. Πῶς ἐξηγεῖτε τὸν σχηματισμὸν αὐτῶν τῶν δύο ἑστιῶν; Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἀριθμητικὰ δεδομένα νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος* R *τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ φακοῦ καὶ ὁ δείκτης διαπλάσεως* ν *τῆς ὑάλου ἀπὸ τὴν ὁποίαν εἶναι κατασκευασμένος.*

Τὸ φωτεινότερον σημεῖον Ε εἶναι ἡ ἑστία τοῦ φακοῦ εἰς τὴν ὁποίαν συν-ἔρχονται ὅλαι αἱ ἀκτῖνες, ποὺ ἐξέρχονται ἀπὸ τὸν φακόν. Ἑπομένως ἰσχύει ἡ σχέσις: $\frac{1}{30} = (\nu - 1)\frac{1}{R}$ ὥστε εἶναι: $R = 30(\nu - 1)$. (1)

Τὸ ὀλιγώτερον φωτεινὸν σημεῖον Α′ ὀφείλεται εἰς τὴν ἀνάκλασιν μέρους τοῦ προσπίπτοντος φωτὸς ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τοῦ φακοῦ. Αἱ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες κατευθύνονται πρὸς τὴν ἑστίαν Α τοῦ κοίλου κατόπτρου, τοῦ ὁποίου ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις εἶναι R / 2. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἔξοδόν των ἀπὸ τὸν φακὸν ὑφίστανται διάθλασιν, διότι τώρα δὲν προσπίπτουν καθέτως ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας τοῦ φακοῦ. Ἐπειδὴ ὁ φακὸς εἶναι λεπτός, ἠμποροῦμε νὰ λάβωμεν: $OA = BA = R/2$. Κατὰ τὴν διάθλασιν ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας ἰσχύει ἡ σχέσις:



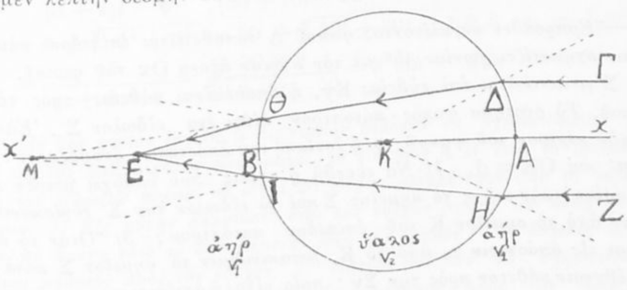
Σχ. 56

$$OA' = \frac{OA}{\nu} = \frac{R}{2\nu} \quad \text{ἤτοι ἔχομεν:} \quad 5 = \frac{R}{2\nu} \quad \text{ἢ} \quad R = 10\,\nu. \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν: $30(\nu - 1) = 10\,\nu$ ·
ἐπομένως εἶναι: $\nu = 1{,}5$ καὶ $R = 15$ cm.

68. — *Μία ὑαλίνη σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα 5 cm καὶ δείκτην διαθλάσεως $\nu = 1{,}5$. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τῆς κυρίας ἑστίας τοῦ σφαιρικοῦ φακοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελεῖ ἡ σφαῖρα.*

Ἡ σφαῖρα αὐτή, θεωρουμένη ὡς φακός, ἔχει ἀπείρους κυρίους ἄξονας. Ἔστω ΑΒ μία διάμετρος τῆς σφαίρας καὶ xKx′ ἕνας κύριος ἄξων αὐτῆς. Ἂς θεωρήσωμεν λεπτὴν δέσμην ἀκτίνων παραλλήλων πρὸς τὸν κύριον ἄξονα, αἱ



σχ. 57

ὁποῖαι προσπίπτουν πλησίον τοῦ σημείου Α. Παρατηροῦμεν ὅτι, αἱ προσπίπτουσαι ἀκτῖνες ΓΔ καὶ ΖΗ, μετὰ τὴν διάθλασίν των ἐπὶ τῆς ἐμπροσθίας ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, συγκλίνουν εἰς τὸ σημεῖον Μ τοῦ κυρίου ἄξονος. Ἡ ἀπόστασις $AM = \pi'$ εὑρίσκεται (ὅπως εἰς τὸ πρόβλ. 38) ἀπὸ τὴν γενικὴν σχέσιν τοῦ σφαιρικοῦ διόπτρου:

$$\frac{\nu_1}{\pi} + \frac{\nu_2}{\pi'} = \frac{\nu_2 - \nu_1}{R} \quad (1)$$

ὅπου ν_1 καὶ ν_2 εἶναι οἱ ἀπόλυτοι δεῖκται διαθλάσεως τοῦ ἀέρος καὶ τῆς ὑάλου. Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι : $\nu_1 = 1$ καὶ $\nu_2 = \nu$, ἡ προηγουμένη γενικὴ σχέσις γράφεται : $\dfrac{1}{\pi} + \dfrac{\nu}{\pi'} = \dfrac{\nu - 1}{R}$.

Ἂν εἰς τὴν τελευταίαν αὐτὴν σχέσιν θέσωμεν : $\pi = \infty$, $\nu = 1{,}5$ καὶ $R = 5$ cm, λάβωμεν δὲ ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ ἀκτὶς εἶναι θετική, διότι ἡ διαθλῶσα σφαιρικὴ ἐπιφάνεια εἶναι κυρτή, τότε θὰ λάβωμεν :

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1{,}5}{\pi'} = \frac{1{,}5 - 1}{5} \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi' = 15 \text{ cm}.$$

Τὸ σημεῖον λοιπὸν Μ ἀπέχει 15 cm ἀπὸ τὸ Α. Ἀλλὰ αἱ ἀκτῖνες ΔΘ καὶ ΗΙ, ἐξερχόμεναι εἰς τὸν ἀέρα, ὑφίστανται δευτέραν διάθλασιν ἐπὶ τῆς ὀπισθίας ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ οὕτω αἱ τελικῶς ἐξερχόμεναι ἀκτῖνες συγκλίνουν εἰς τὸ σημεῖον Ε, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ ζητουμένη κυρία ἑστία. Τὸ σημεῖον Μ εἶναι φανταστικὸν ἀντικείμενον (π_1 ἀρνητικὸν) διὰ τὴν διάθλασιν ἐπὶ τῆς ὀπισθίας ἐπιφανείας, ἡ ὁποία εἶναι κοίλη (R ἀρνητική). Ἡ γενικὴ λοιπὸν σχέσις τῶν σφαιρικῶν διόπτρων εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν γράφεται :

$$\frac{\nu_2}{\pi_1} + \frac{\nu_1}{\pi_1'} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{R} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{\nu}{\pi_1} + \frac{1}{\pi_1'} = \frac{1 - \nu}{R}.$$

Ἡ ἀπόστασις τοῦ Μ ἀπὸ τὸ Β εἶναι : $BM = AM - 2R = 15 - 10 = 5$ cm. Ἄρα εἶναι : $\pi_1 = -5$ cm καὶ ἑπομένως ἡ προηγουμένη σχέσις δίδει :

$$\frac{1{.}5}{-5} + \frac{1}{\pi_1'} = \frac{1 - 1{,}5}{-5} \qquad \text{ἢ} \qquad \pi_1' = 2{,}5 \text{ cm}.$$

Ὥστε ἡ κυρία ἑστία Ε σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 2,5 cm ἀπὸ τὴν ὀπισθίαν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.

β') Φακὸς καὶ κάτοπτρον

69. —*Ἔμπροσθεν συγκλίνοντος φακοῦ Λ τοποθετεῖται ἐπίπεδον κάτοπτρον Κ, τὸ ὁποῖον σχηματίζει γωνίαν 45° μὲ τὸν κύριον ἄξονα Οx τοῦ φακοῦ. Φωτεινὸν σημεῖον Σ μετακινεῖται ἐπὶ εὐθείας Ky, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ φακοῦ. Τὸ σύστημα φακὸς - κάτοπτρον δίδει ἕνα εἴδωλον Σ'. Ἐὰν Ο εἶναι τὸ ὀπτικὸν κέντρον τοῦ φακοῦ, φ ἡ ἑστιακή του ἀπόστασις, ὀνομάζομεν : $K\Sigma = z$, $O\Sigma' = \pi'$ καὶ $OK = d$. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ z καὶ π'. 2) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ z τὸ σημεῖον Σ καὶ τὸ εἴδωλόν του Σ' εὑρίσκονται εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ σημεῖον Κ τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου ; 3) Ὅταν τὸ σημεῖον Σ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν z_0 ἀπὸ τὸ Κ, μετακινοῦμεν τὸ σημεῖον Σ κατὰ $\Sigma\Sigma_1 = \delta$ κατὰ διεύθυνσιν κάθετον πρὸς τὴν Σy · ποία εἶναι ἡ ἀντίστοιχος μετατόπισις τοῦ Σ' ; Ἐφαρμογή : $\varphi = 50$ cm, $d = 30$ cm, $\delta = 2$ cm, $z_0 = 70$ cm.*

1) Τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον Κ δίδει τὸ εἴδωλον Σ'', τὸ ὁποῖον εἶναι συμμετρικὸν τοῦ φωτεινοῦ σημείου Σ ὡς πρὸς τὸ κάτοπτρον. Τὸ Σ'' παίζει ρόλον φανταστικοῦ ἀντικειμένου διὰ τὸν φακόν, ἡ δὲ ἀπόστασις π τοῦ Σ'' ἀπὸ τὸν φακὸν εἶναι : $\pi = OK + K\Sigma''$ ἢ $\pi = d + z$. Ἡ ἀπόστασις π' τοῦ εἰδώλου Σ', τὸ ὁποῖον δίδει ὁ φακός, εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\varphi}, \text{ ἢ } \frac{1}{d+z} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\varphi} \cdot \quad \text{ἄρα εἶναι : } \pi' = \frac{\varphi(d+z)}{(d+z) - \varphi}. \quad (1)$$

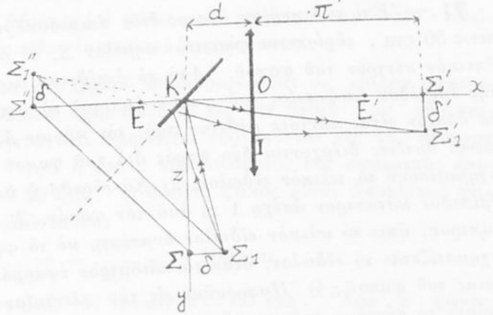
2) Διὰ νὰ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τοῦ Σ καὶ τοῦ Σ΄ ἀπὸ τὸ κάτοπτρον ἴσαι, πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις: $z = d + \pi'$. Ἐπομένως ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (1) γράφεται: $(z - d) = \dfrac{\varphi(d+z)}{(d+z) - \varphi}$ ἢ $z^2 - 2\varphi z - d^2 = 0$·
ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην τιμὴν τοῦ z:

$z = \varphi \pm \sqrt{\varphi^2 + d^2}$, ἄρα $z = \varphi + \sqrt{\varphi^2 + d^2}$·

ἡ ἀρνητικὴ ῥίζα ἀπορρίπτεται.

3) Ὅταν τὸ φωτεινὸν σημεῖον ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν Σ_1, τότε τὸ εἴδωλον Σ_1'', ποὺ δίδει τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον ἀπέχει ἀπὸ τὸν ἄξονα Ox:

$\Sigma''\Sigma_1'' = \Sigma\Sigma_1 = \delta$.



Σχ. 58

Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα EOI καὶ $E\Sigma''\Sigma_1''$ εὑρίσκομεν: $\dfrac{OI}{\Sigma''\Sigma_1''} = \dfrac{EO}{E\Sigma''}$,

ἢ $\dfrac{\delta'}{\delta} = \dfrac{\varphi}{z_0 - (\varphi - d)}$.

Ἄρα ἡ μετατόπισις δ΄ τοῦ εἰδώλου εἶναι: $\delta' = \dfrac{\varphi\delta}{z_0 + d - \varphi}$.

Ἐ φ α ρ μ ο γ ή:

$$\pi' = \frac{\varphi(d + z_0)}{(d + z_0) - \varphi} = \frac{50\,(30 + 70)}{(30 + 70) - 50} = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}.$$

$$z = \varphi + \sqrt{\varphi^2 + d^2} = 50 + \sqrt{50^2 + 30^2} = 108{,}3 \text{ cm} = 1{,}083 \text{ m}.$$

$$\delta' = \frac{\varphi\delta}{z_0 + d - \varphi} = \frac{50 \times 2}{70 + 30 - 50} = 2 \text{ cm}\cdot \quad \text{ἄρα} \quad \delta' = \delta.$$

70. — *Μὲ ἕνα φακὸν ἰσχύος 5 διοπτριῶν θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν ἐπὶ ἑνὸς τοίχου, ὁ ὁποῖος παίζει ρόλον πετάσματος, τὸ εἴδωλον* Α΄Β΄ *ἑνὸς ἀντικειμένου* ΑΒ. *Τὸ μῆκος τοῦ εἰδώλου πρέπει νὰ εἶναι* 20 *φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ ἀντικειμένου. 1) Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν τοῖχον πρέπει νὰ τεθῇ ὁ φακὸς καὶ πόσον θὰ ἀπέχῃ τότε τὸ ἀντικείμενον ἀπὸ τὸν φακόν; Ὁ ὀπτικὸς ἄξων τοῦ φακοῦ εἶναι κάθετος πρὸς τὸν τοῖχον. 2) Ἔπειτα θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν τὸ εἴδωλον* Α΄Β΄ *ἐπὶ ἑνὸς τοίχου, ὁ ὁποῖος εἶναι κάθετος πρὸς τὸν προηγούμενον τοῖχον καὶ ἀπέχει* 4 m *ἀπὸ τὸν ἄξονα τοῦ φακοῦ. Ποῦ καὶ πῶς πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμεν ἐπίπεδον κάτοπτρον, ὥστε ἐπὶ τοῦ δευτέρου τοίχου νὰ λάβωμεν εὐκρινὲς εἴδωλον; Ποῖον εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ δευτέρου εἰδώλου;*

1) Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ εἶναι: $\varphi = 20$ cm αἱ δὲ ἀποστάσεις π καὶ π΄ τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τὸν φακὸν εἶναι τοιαῦται, ὥστε νὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$\dfrac{\pi'}{\pi} = 20$ καὶ $\dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{20\,\pi} = \dfrac{1}{20}$· ἄρα $\pi = 21$ cm καὶ $\pi' = 420$ cm.

2) Τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον σχηματίζει εἴδωλον συμμετρικὸν τοῦ ἀντικειμένου. Ἐπειδὴ δὲ ὁ δεύτερος τοῖχος ἀπέχει ἀπὸ τὸν ὀπτικὸν ἄξονα τοῦ φακοῦ 4 m, συνάγεται ὅτι τὸ κάτοπτρον πρέπει νὰ τοποθετηθῇ εἰς ἀπόστασιν 4 m ἀπὸ τὸν πρῶτον τοῖχον ὥστε τὸ εἴδωλον, ποὺ σχηματίζεται ἐπ' αὐτοῦ, νὰ παίζῃ ρόλον φανταστικοῦ ἀντικειμένου διὰ τὸ κάτοπτρον. Τοῦτο πρέπει νὰ σχηματίζῃ γωνίαν 45° μὲ τὸν ἄξονα τοῦ φακοῦ. Τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου δὲν μεταβάλλεται ἐκ τῆς παρεμβολῆς τοῦ κατόπτρου.

71.— *Ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος ἑνὸς ἐπιπεδοκύρτου φακοῦ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 50 cm, εὑρίσκεται φωτεινὸν σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 75 cm ἀπὸ τὸ ὀπτικὸν κέντρον τοῦ φακοῦ. Ἀπὸ τὸ ἀντίθετον μέρος τοῦ φακοῦ καὶ ἀπέναντι τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας τοῦ φακοῦ ἠμπορεῖ νὰ μετακινῆται ἐπίπεδον κάτοπτρον, τὸ ὁποῖον εἶναι πάντοτε κάθετον πρὸς τὸν κύριον ἄξονα τοῦ φακοῦ. Οὕτω αἱ φωτειναὶ ἀκτῖνες διέρχονται δύο φορὰς διὰ τοῦ φακοῦ κατ' ἀντίθετον φοράν, πρὶν σχηματίσουν τὸ τελικὸν εἴδωλον. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ εἰδώλου Σ', ὅταν τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον ἀπέχῃ 1 m ἀπὸ τὸν φακόν. 2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ κατόπτρου, ὅταν τὸ τελικὸν εἴδωλον συμπίπτῃ μὲ τὸ φωτεινὸν σημεῖον Σ. 3) Ποῦ σχηματίζεται τὸ εἴδωλον, ὅταν τὸ κάτοπτρον ἐφαρμόζεται ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας τοῦ φακοῦ; 4) Ἠμποροῦμε εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ σύστημα τοῦ φακοῦ καὶ τοῦ κατόπτρου μὲ ἕνα ἄλλο ἁπλούστερον σύστημα;*

1) Τὸ σημεῖον Σ ἀπέχει ἀπὸ τὸν φακὸν π = 75 cm· ὁ φακὸς σχηματίζει τὸ πραγματικὸν εἴδωλον Σ' εἰς ἀπόστασιν π', ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{75}+\frac{1}{\pi'}=\frac{1}{50} \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi'=150 \text{ cm}.$$

Τὸ σημεῖον Σ' σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 50 cm ὄπισθεν τοῦ κατόπτρου. Ἑπομένως τὸ κάτοπτρον σχηματίζει τὸ πραγματικὸν εἴδωλον Σ'' τοῦ Σ' εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἔμπροσθεν τοῦ κατόπτρου, δηλαδὴ ἐπὶ τῆς ἄλλης κυρίας ἑστίας τοῦ φακοῦ. Τὸ τελικὸν λοιπὸν εἴδωλον σχηματίζεται εἰς τὸ ἄπειρον.

2) Διὰ νὰ συμπίπτῃ τὸ τελικὸν εἴδωλον μὲ τὸ φωτεινὸν σημεῖον Σ πρέπει τὸ εἴδωλον Σ' νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ εἴδωλόν του Σ'', τὸ ὁποῖον δίδει τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον. Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν τὸ κάτοπτρον εὑρίσκεται ἐκεῖ, ὅπου σχηματίζεται τὸ Σ', δηλαδὴ εἰς ἀπόστασιν 150 cm ἀπὸ τὸν φακόν.

3) Τὸ εἴδωλον Σ', ποὺ δίδει ὁ φακὸς παίζει τότε διὰ τὸ κάτοπτρον τὸν ρόλον φανταστικοῦ ἀντικειμένου. Καὶ ἑπομένως τὸ κάτοπτρον σχηματίζει τὸ εἴδωλον Σ'' ἔμπροσθεν τοῦ κατόπτρου καὶ εἰς ἀπόστασιν 150 cm. Τὸ εἴδωλον Σ'' παίζει διὰ τὸν φακὸν τὸν ρόλον φανταστικοῦ ἀντικειμένου. Ἡ ἀπόστασις π'' τοῦ τελικοῦ εἰδώλου εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$-\frac{1}{150}+\frac{1}{\pi''}=\frac{1}{50} \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi''=37{,}5 \text{ cm}.$$

Τὸ τελικὸν εἴδωλον σχηματίζεται ἔμπροσθεν τοῦ φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν 37,5 cm.

4) Τὸ σύστημα φακὸς—ἐπίπεδον κάτοπτρον ἰσοδυναμεῖ μὲ σφαιρικὸν κάτοπτρον, τοῦ ὁποίου ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις φ_1 εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{75}+\frac{1}{37{,}5}=\frac{1}{\varphi_1} \qquad \text{ἄρα} \qquad \varphi_1=25 \text{ cm}.$$

Τὸ σύστημα λοιπὸν ἰσοδυναμεῖ μὲ κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον ἀκτῖνος καμπυλότητος $R=2\varphi_1=50$ cm.

72.— *Ἕνας ἐπιπεδόκοιλος φακὸς ἔχει δείκτην διαθλάσεως 1,5, ἡ δὲ κοίλη ἐπιφάνειά του εἶναι ἐπαργυρωμένη. Ἔμπροσθεν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς μετακινοῦμεν φωτεινὴν εὐθεῖαν ΑΒ, κάθετον πρὸς τὸν κύριον ἄξονα, ἕως ὅτου τὸ λαμβανόμενον ἀνεστραμμένον εἴδωλον νὰ σχηματίζεται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ΑΒ. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι τὸ ἀντικείμενον καὶ τὸ εἴδωλόν του ἀπέχουν 50 cm ἀπὸ τὸν φακόν. Ἀναστρέφομεν τότε τὸν φακόν, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον. Ἀπέναντι τοῦ ἀντικειμένου εὑρίσκεται τώρα ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια τοῦ φακοῦ. Ποία εἶναι ἡ θέσις καὶ ἡ φύσις τοῦ λαμβανομένου νέου εἰδώλου; (Ἡ ἀνάκλασις ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας παραλείπεται).*

Ἡ ἐπαργυρωμένη ἐπιφάνεια τοῦ φακοῦ συμπεριφέρεται ὡς κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον. Ἐπειδὴ τὸ εἴδωλον σχηματίζεται εἰς τὴν θέσιν ποὺ εὑρίσκεται καὶ τὸ ἀντικείμενον, συνάγεται ὅτι ἀμφότερα εὑρίσκονται εἰς τὸ κέντρον καμπυλότητος τοῦ κατόπτρου. Ἄρα ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τοῦ φακοῦ εἶναι: $R = 50$ cm. Ὁ δοθεὶς φακὸς εἶναι ἀποκλίνων φακός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν:

$$\varphi = -\frac{R}{\nu - 1} = -\frac{50}{0,5} = -100 \text{ cm}.$$

Τὸ ἀντικείμενον ΑΒ ἀπέχει ἀπὸ τὸν φακὸν $\pi = 50$ cm. Ἄρα ὁ φακὸς οὗτος δίδει φανταστικὸν εἴδωλον A_1B_1, σχηματιζόμενον πρὸς τὸ μέρος ποὺ εἶναι καὶ τὸ ΑΒ· τὸ εἴδωλον A_1B_1 ἀπέχει ἀπὸ τὸν φακόν: $\pi' = \frac{100}{3}$ cm.

Τὸ εἴδωλον A_1B_1 ἐπέχει θέσιν πραγματικοῦ ἀντικειμένου διὰ τὴν ἐπαργυρωμένην ἐπιφάνειαν τοῦ φακοῦ, ἡ ὁποία τώρα ἀποτελεῖ κυρτὸν κάτοπτρον, ἔχον ἀκτῖνα καμπυλότητος $R = 50$ cm. Διὰ τὸ κάτοπτρον τοῦτο εἶναι:

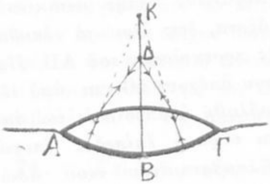
$$\pi_1 = \frac{100}{3} \text{ cm} \qquad \text{καὶ} \qquad \varphi_1 = -25 \text{ cm}.$$

Τὸ κυρτὸν κάτοπτρον δίδει εἴδωλον A_2B_2, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸν φακὸν εἶναι: $\pi_2' = -\frac{100}{7}$ cm· ἄρα τὸ εἴδωλον A_2B_2 εἶναι φανταστικόν.

73.— *Ἕνας συμμετρικὸς ἀμφίκυρτος λεπτὸς φακὸς ἔχει δείκτην διαθλάσεως $\nu = 1,5$ καὶ ἐπιπλέει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ὑδραργύρου. Εἰς ὕψος 25 cm ὑπεράνω τοῦ φακοῦ τοποθετεῖται φωτεινὸν σημεῖον. Παρατηρεῖται τότε ὅτι τὸ εἴδωλον τοῦ σημείου σχηματίζεται ἐκεῖ ὅπου εὑρίσκεται καὶ τὸ φωτεινὸν σημεῖον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ.*

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ κατωτέρα ἐπιφάνεια ΑΒΓ τοῦ φακοῦ ἐνεργεῖ ὡς κάτοπτρον, τοῦ ὁποίου ἔστω Κ τὸ κέντρον καμπυλότητος. Ἐπειδὴ αἱ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες ἀκολουθοῦν τὸν ἴδιον δρόμον μὲ τὰς προσπιπτούσας, συνάγεται ὅτι αἱ προσπίπτουσαι πίπτουν καθέτως ἐπὶ τῆς κατοπτρικῆς ἐπιφανείας ΑΒΓ. Ἑπομένως ἐντὸς τοῦ φακοῦ αἱ προσπίπτουσαι φωτειναὶ ἀκτῖνες ἀκολουθοῦν τὰς ἀκτῖνας καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας ΑΒΓ. Ἐὰν δὲ κάτω ἀπὸ τὸν φακὸν δὲν ὑπῆρχεν ὁ ὑδράργυρος, τότε αἱ φωτειναὶ ἀκτῖνες θὰ ἐξήρχοντο ἀπὸ τὸν φακὸν χωρὶς ἐκτροπὴν καὶ θὰ ἐφαίνοντο προερχόμεναι ἀπὸ τὸ Κ. Ὥστε τὸ Κ εἶναι τὸ φανταστικὸν εἴδωλον τοῦ φωτεινοῦ σημείου Δ. Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν: $\pi = 25$ cm καὶ $\pi' = KB = R$, τότε ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\varphi} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{25} - \frac{1}{R} = \frac{1}{\varphi}. \quad (1)$$



Σχ. 59

Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι εἶναι:

$$(\nu - 1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) = \frac{1}{\varphi},$$

ἢ

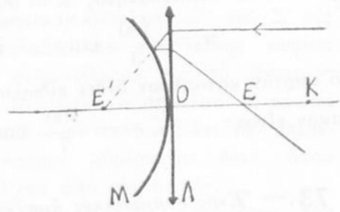
$$\frac{(1{,}5 - 1) \times 2}{R} = \frac{1}{\varphi}$$

ἄρα $\varphi = R$.

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν: $\frac{1}{25} - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi}$ ἤτοι $\varphi = 50$ cm.

74. — *Ὀπτικὸν σύστημα ἀποτελεῖται ἀπὸ λεπτὸν συγκλίνοντα φακὸν Λ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως φ, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται μὲ κυρτὸν κάτοπτρον Μ ποὺ ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος $R = 2\varphi$. Οἱ ἄξονες τοῦ φακοῦ καὶ τοῦ κατόπτρου συμπίπτουν. Τὸ φῶς προσπίπτει ἐπὶ τοῦ φακοῦ, διέρχεται πάλιν διὰ τοῦ φακοῦ κατ' ἀντίθετον φοράν. 1) Νὰ εὑρεθῇ ποῦ συνέρχονται αἱ ἀκτῖνες, αἱ ὁποῖαι προσπίπτουν ἐπὶ τοῦ φακοῦ παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ συστήματος. 2) Φωτεινὸν σημεῖον Σ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος καὶ εἰς ἀπόστασιν 2φ ἀπὸ τὸν φακόν. Ποῦ σχηματίζεται τὸ εἴδωλον τοῦ σημείου Σ;*

1) Ὁ φακὸς καὶ τὸ κάτοπτρον ἔχουν τὴν ἰδίαν ἑστιακὴν ἀπόστασιν. Ἐπομένως ἡ μία ἑστία Ε΄ τοῦ φακοῦ συμπίπτει μὲ τὴν ἑστίαν τοῦ κατόπτρου. Μία φωτεινὴ ἀκτίς, παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα, μετὰ τὴν διάθλασίν της διὰ τοῦ φακοῦ κατευθύνεται πρὸς τὴν κοινὴν ἑστίαν Ε΄ τοῦ φακοῦ καὶ τοῦ κατόπτρου. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἀκτὶς ἀνακλᾶται ἐπὶ τοῦ κατόπτρου, ἐπιστρέφει παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα καὶ μετὰ τὴν διάθλασίν της διὰ τοῦ φακοῦ διέρχεται διὰ τῆς ἑστίας Ε. Ὥστε αἱ παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα ἀκτῖνες, ποὺ προσπίπτουν ἐπὶ τοῦ φακοῦ, συνέρχονται εἰς τὴν ἑστίαν Ε τοῦ φακοῦ.



Σχ. 60

2) Ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις τοῦ Σ ἀπὸ τὸν φακὸν εἶναι 2φ συνάγεται ὅτι τὸ εἴδωλον Σ΄ θὰ ἐσχηματίζετο ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τοῦ φακοῦ εἰς ἀπόστασιν πάλιν 2φ ἀπὸ τὸν φακόν, δηλαδὴ θὰ ἐσχηματίζετο ἐπὶ τοῦ κέντρου καμπυλότητος τοῦ κατόπτρου. Αἱ ἀκτῖνες προσπίπτουν λοιπὸν ἐπὶ τοῦ κατόπτρου καθέτως καὶ ἐπιστρέφουσαι συνέρχονται πάλιν εἰς τὸ Σ. Ὥστε τὸ εἴδωλον τοῦ σημείου Σ συμπίπτει μὲ τὸ σημεῖον Σ.

75. — *Ὀπτικὸν σύστημα ἀποτελεῖται: α΄) ἀπὸ ἀμφίκυρτον φακὸν Λ, ὁ ὁποῖος ἔχει δείκτην διαθλάσεως $\nu = 1{,}5$ καὶ ἀκτῖνας καμπυλότητος $R_1 = 10$ cm καὶ $R_2 = 40$ cm· β΄) ἀπὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον Κ τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον πρὸς* *τὸν κύριον ἄξονα τοῦ φακοῦ καὶ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 8 cm ἀπὸ τὸν φακόν. Ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος τοῦ φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν 24 cm ἀπὸ τὸ κάτοπτρον Κ τοποθετεῖται φωτεινὸν σημεῖον Σ οὕτως, ὥστε αἱ ἀκτῖνες νὰ προσπίπτουν πρῶτον ἐπὶ τοῦ φακοῦ καὶ μετὰ τὴν διάθλασίν των νὰ ἀνακλῶνται ἐπὶ τοῦ κατόπτρου καὶ νὰ διέρχωνται πάλιν διὰ τοῦ φακοῦ, ἀλλὰ κατ' ἀντίθετον τώρα φοράν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ εἰδώλου, τὸ ὁποῖον δίδει τὸ σύστημα εἰς τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις: 1) ὅταν τὸ κάτοπτρον Κ εἶναι κάθετον πρὸς τὸν κύριον ἄξονα καὶ 2) ὅταν τὸ Κ στραφῇ κατὰ γωνίαν $\alpha = 0{,}01$ ἀκτινίου.*

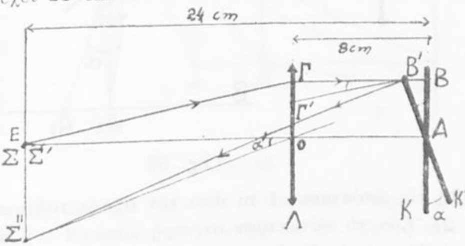
1) Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις φ τοῦ φακοῦ Λ εἶναι:

$$\frac{1}{\varphi} = (\nu - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = 0{,}5\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{40}\right) \quad \text{ἢ} \quad \varphi = 16 \text{ cm}.$$

Τὸ φωτεινὸν σημεῖον Σ ἀπέχει 24 cm ἀπὸ τὸ κατακόρυφον κάτοπτρον Κ, ἑπομένως τὸ Σ ἀπέχει ἀπὸ τὸν φακόν:

$$\pi = 24 - 18 = 16 \text{ cm}$$

ἄρα τὸ Σ εὑρίσκεται εἰς τὴν κυρίαν ἑστίαν τοῦ φακοῦ. Αἱ ἀκτῖνες, μετὰ τὴν διάθλασίν των διὰ τοῦ φακοῦ, ἐξέρχονται παράλληλοι πρὸς τὸν κύριον ἄξονα καὶ προσπίπτουσαι καθέτως ἐπὶ τοῦ κατόπτρου ἐπιστρέφουν πάλιν εἰς τὴν κυρίαν ἑστίαν τοῦ φακοῦ. Ὥστε τὸ τελικὸν εἴδωλον Σ' συμπίπτει μὲ τὸ ἀντικείμενον Σ.



Σχ. 61

2) Ὅταν τὸ κάτοπτρον Κ στραφῇ κατὰ γωνίαν α, ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς στρέφεται κατὰ γωνίαν $\alpha' = 2\alpha$, ἤτοι κατὰ 0,02 ἀκτινίου καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς ἕνα δευτερεύοντα ἄξονα, ὁ ὁποῖος τέμνει τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον εἰς τὸ σημεῖον Σ''. Τὸ Σ'' εἶναι τὸ εἴδωλον τοῦ Σ. Ὥστε εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ εἴδωλον σχηματίζεται εἰς τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον τοῦ φακοῦ καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὸν ἄξονα τοῦ φακοῦ:

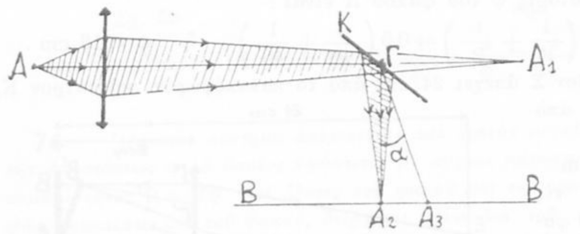
$$\Sigma'\Sigma'' = \alpha' \cdot \varphi = 0{,}02 \times 16 = 0{,}32 \text{ cm}.$$

√ **76.** — *Συγκλίνων φακὸς ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 50 cm. Εἰς ἀπόστασιν 60 cm ἀπὸ τὸν φακὸν καὶ ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος αὐτοῦ εὑρίσκεται φωτεινὸν σημεῖον Α. Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τοῦ φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τὸ σχηματιζόμενον εἴδωλον τοποθετεῖται ἐπίπεδον* **κάτοπτρον** *Κ, τὸ ὁποῖον σχηματίζει μὲ τὸν ἄξονα τοῦ φακοῦ γωνίαν 45°. 1) Νὰ εὑρεθῇ ποῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ πέτασμα Β, παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ φακοῦ, ὥστε νὰ σχηματίζεται ἐπ' αὐτοῦ τὸ εἴδωλον ποὺ δίδει ὁ φακὸς καὶ νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ πορεία τῆς δέσμης τῶν ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι προέρχονται ἀπὸ τὸ Α, προσπίπτουν ἐπὶ τοῦ φακοῦ καὶ ἀνακλῶνται ἐπὶ τοῦ κατόπτρου. 2) Πόσον μετατοπίζεται ἐπὶ τοῦ πετάσματος τὸ εἴδωλον, ἐὰν τὸ κάτοπτρον στραφῇ κατὰ 1° περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ μέσου του καὶ παράλληλον πρὸς τὸ πέτασμα. 3) Ἐὰν τὸ κάτοπτρον ἐκτελῇ 500 στροφὰς κατὰ δευτερόλεπτον, νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τῆς μετατοπίσεως τοῦ εἰδώλου ἐπὶ τοῦ πετάσματος. 4) Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ φωτεινὴ πηγὴ γίνεται διαλείπουσα καὶ ἐκπέμπει 100 000 σπινθῆρας κατὰ δευτερόλεπτον. Τὸ κάτοπτρον ἐξακολουθεῖ νὰ ἐκτελῇ 500* *στροφάς κατά δευτερόλεπτον. Παρατηροῦμεν τότε ἐπὶ τοῦ πετάσματος μίαν σειρὰν φωτεινῶν κηλίδων, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται εἰς ἴσας μεταξύ των ἀποστάσεις. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο φωτεινῶν κηλίδων.*

1) Ὁ φακὸς σχηματίζει τὸ εἴδωλον A_1 τοῦ φωτεινοῦ σημείου A εἰς ἀπόστασιν π΄ ἀπὸ τὸν φακόν, τὴν ὁποίαν ὑπολογίζομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{60}+\frac{1}{\pi'}=\frac{1}{50} \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi'=300 \text{ cm}=3 \text{ m}.$$

Ἂν ὅμως εἰς ἀπόστασιν 1 m παρεμβάλωμεν τὸ κάτοπτρον K, τότε αἱ ἀκτῖνες ἀνακλῶνται ἐπ' αὐτοῦ καὶ δὲν συνέρχονται εἰς τὸ A_1 ἀλλὰ εἰς τὸ A_2 τὸ ὁποῖον εἶναι συμμετρικὸν τοῦ A_1 ὡς πρὸς τὸ κάτοπτρον K, δηλαδὴ εἰς ἀπόστασιν $\Gamma A_2 = 1$ m. Ὥστε τὸ πέτασμα B πρέπει νὰ τοποθετηθῇ εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τὸν ἄξονα τοῦ φακοῦ.



Σχ. 62

2) Ἐὰν τὸ κάτοπτρον στραφῇ κατὰ 1° ἡ ἀνακλωμένη δέσμη στρέφεται κατὰ 2° καὶ τὸ εἴδωλον σχηματίζεται εἰς τὴν θέσιν A_3. Τότε εἶναι:

$$\text{γωνία } A_2\Gamma A_3 = \alpha = 2^\circ \qquad \text{ἢ} \qquad \alpha=\frac{\pi}{90} \text{ ἀκτίνια}.$$

Ἑπομένως ἡ ζητουμένη μετατόπισις A_2A_3 τοῦ εἰδώλου εἶναι:

$$A_2A_3 = \Gamma A_2 \cdot \alpha = 100 \times \frac{\pi}{90} \text{ cm} \qquad \text{ἢ} \qquad A_2A_3 = 3{,}5 \text{ cm}.$$

3) Ἐὰν τὸ κάτοπτρον K ἐκτελῇ 500 στροφὰς κατὰ δευτερόλεπτον, τότε διὰ νὰ στραφῇ κατὰ 1° χρειάζεται χρόνον: $t=\dfrac{1}{500\times 360}=\dfrac{1}{180\,000}$ sec.

Κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον τὸ A_2 μετατοπίζεται κατὰ $s=3{,}5$ cm.
Ὥστε ἡ ταχύτης υ τῆς μετατοπίσεως τοῦ A_2 εἶναι:

$$\upsilon=\frac{s}{t}=3{,}5\times 180\,000=630\,000 \text{ cm/sec} \qquad \text{ἢ} \qquad \upsilon = 6\,300 \text{ m/sec}.$$

4) Μεταξὺ δύο διαδοχικῶν σπινθήρων μεσολαβεῖ χρόνος: $t=\dfrac{1}{100\,000}$ sec.

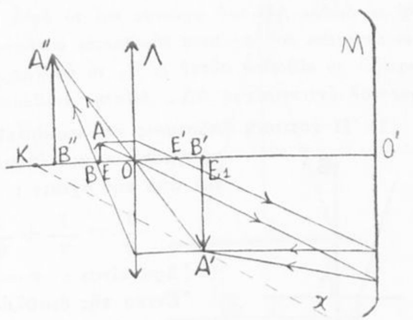
Κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον τὸ E_2 μετατοπίζεται κατά:

$$s_1=\upsilon t_1=\frac{630\,000}{100\,000}=6{,}3 \text{ cm}.$$

Ἄρα δύο φωτειναὶ κηλῖδες ἀπέχουν μεταξύ των 6,3 cm.

77. — *Συγκλίνων φακός, ἑστιακῆς ἀποστάσεως φ, εὑρίσκεται ἀπέναντι κοίλου κατόπτρου τὸ ὁποῖον ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος 10 φ. Ὁ φακὸς καὶ τὸ κάτοπτρον ἔχουν τὸν αὐτὸν κύριον ἄξονα, ἡ δὲ ἀπόστασις τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου τοῦ φακοῦ ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ κατόπτρου εἶναι: 13 φ / 2. Ἔμπροσθεν τοῦ φακοῦ* *καὶ καθέτως πρὸς τὸν ἄξονά του τοποθετεῖται ἀντικείμενον* AB *οὕτως, ὥστε τὸ* B *νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν κυρίαν ἑστίαν τοῦ φακοῦ. 1) Νὰ κατασκευασθῇ γεωμετρικῶς τὸ εἴδωλον ποὺ δίδει τελικῶς τὸ σύστημα. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος αὐτοῦ τοῦ εἰδώλου.*

1) Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ κατόπτρου εἶναι: $\phi_1 = 5\phi$. Ἔστω δὲ E, E′ αἱ ἑστίαι τοῦ φακοῦ καὶ E_1 ἡ ἑστία τοῦ κατόπτρου. Ὁ φακὸς δίδει εἴδωλον εἰς τὸ ἄπειρον. Αἱ ἀκτῖνες λοιπὸν ποὺ προέρχονται ἀπὸ τὸ A, μετὰ τὴν διάθλασίν των διὰ τοῦ φακοῦ Λ, ἐξέρχονται παράλληλοι πρὸς ἕνα δευτερεύοντα ἄξονα Kx τοῦ κατόπτρου, ὁ ὁποῖος εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν AO. Αἱ ἀκτῖνες αὐταί, μετὰ τὴν ἀνάκλασίν των ἐπὶ τοῦ κατόπτρου M, συγκλίνουν εἰς ἕνα σημεῖον A′ τοῦ ἑστιακοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατόπτρου M· τὸ σημεῖον A′ εἶναι ἡ τομὴ τοῦ ἄξονος Kx καὶ τοῦ ἑστιακοῦ ἐπιπέδου. Ἄρα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου σχηματίζεται τὸ πραγματικὸν εἴδωλον A′B′. Τοῦτο παίζει ρόλον πραγματικοῦ ἀντικειμένου διὰ τὸν φακὸν Λ, ὁ ὁποῖος σχηματίζει τελικῶς τὸ πραγματικὸν καὶ μεγαλύτερον εἴδωλον A′′B′′.



Σχ. 63

2) Ἡ ἀπόστασις OB′ = π τοῦ εἰδώλου A′B′ ἀπὸ τὸν φακόν, εἶναι;

$$\pi = OO' - E_1O' = \frac{13\,\phi}{2} - 5\phi = \frac{3\phi}{2}\,.$$

Ἄρα ἡ ἀπόστασις OB′′ = π′ τοῦ τελικοῦ εἰδώλου A′′B′′ ἀπὸ τὸν φακὸν εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:
$$\frac{2}{3\phi} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\phi} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \pi' = 3\phi\,.$$

Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα OA′′B′′ καὶ OA′B′ εὑρίσκομεν:
$$\frac{A''B''}{A'B'} = \frac{OB''}{OB'} = \frac{3\phi}{\frac{3\phi}{2}} = 2 \qquad \text{ἢ} \qquad A''B'' = 2A'B'\,.$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα KA′B′ καὶ OAB ἔχομεν:
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{KB'}{OB} = \frac{\phi_1}{\phi} = \frac{5\phi}{\phi} = 5 \qquad \text{ἢ} \qquad A'B' = 5\,AB\,.$$

Ὥστε εἶναι: $A''B'' = 10\,AB$.

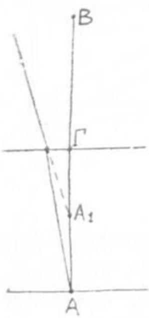
Τὸ τελικὸν λοιπὸν εἴδωλον A′′B′′ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 3ϕ ἀπὸ τὸν φακὸν καὶ εἶναι δεκαπλάσιον ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον.

γ′) Φακὸς καὶ δίοπτρον

78. — *Θεωροῦμεν κατακόρυφον φρέαρ τὸ ὁποῖον ἔχει ἄξονα* AB. *Τὸ σημεῖον* A *εὑρίσκεται εἰς τὸν πυθμένα καὶ τὸ σημεῖον* B *ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ στομίου τοῦ φρέατος. Ἐντὸς τοῦ φρέατος ὑπάρχει ποσότης ὕδατος, τοῦ ὁποίου ἡ ἐλευθέρα ἐπι-*

φάνεια τέμνει τὸν ἄξονα εἰς τὸ σημεῖον Γ. Εἰς τὸ σημεῖον Β ἔχομεν συγκλίνοντα φακόν, ὁ ὁποῖος ἔχει ἰσχὺν μιᾶς διοπτρίας. Ὁ κύριος ἄξων τοῦ φακοῦ συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα ΑΒ τοῦ φρέατος. Ὁ φακὸς σχηματίζει τὸ πραγματικὸν εἴδωλον Γ′ ἑνὸς φωτεινοῦ σημείου, εὑρισκομένου εἰς τὸ Γ, εἰς ἀπόστασιν ΒΓ′ = 110 cm. *Ἄλλο φωτεινὸν σημεῖον εὑρίσκεται εἰς τὸ Α, εἰς τὸν πυθμένα τοῦ φρέατος, καὶ ὁ φακὸς σχηματίζει τὸ εἴδωλόν του Α′ εἰς ἀπόστασιν* ΒΑ′ = 105 cm. *1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάθος* ΑΒ *τοῦ φρέατος καὶ τὸ ὕψος* ΑΓ *τοῦ στρώματος τοῦ ὕδατος. 2) Εἰς τὸν πυθμένα τοῦ φρέατος εὑρίσκεται φωτεινὸν ἀντικείμενον* ΑΔ *καὶ ὁ φακὸς σχηματίζει τὸ εἴδωλον αὐτοῦ* Α′Δ′, *τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος* 1 cm. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ ἀντικειμένου* ΑΔ. *Δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὕδατος :* $\nu = 1{,}33$.

1) Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ εἶναι: $\varphi = 1$ m. Τὸ εἴδωλον Γ′ εἶναι πραγματικὸν καὶ ἑπομένως ἡ ἀπόστασις $ΒΓ = \pi$ εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :



Σχ. 64

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{1}{1} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{1{,}1}$$

Ἄρα εἶναι : $\pi = ΒΓ = 11$ m.

Ἕνεκα τῆς διαθλάσεως, τὴν ὁποίαν ὑφίστανται αἱ φωτειναὶ ἀκτῖνες, ὅταν ἐξέρχωνται ἀπὸ τὸ ὕδωρ εἰς τὸν ἀέρα, τὸ Α φαίνεται εἰς τὸ σημεῖον $Α_1$. Τὸ σημεῖον τοῦτο ἐπέχει θέσιν ἀντικειμένου διὰ τὸν φακὸν καὶ ἑπομένως ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{ΒΑ_1} + \frac{1}{ΒΑ'} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{1}{1} = \frac{1}{ΒΑ_1} + \frac{1}{1{,}05}$$

ἄρα $ΒΑ_1 = 21$ m.

Ἀλλὰ εἶναι : $ΓΑ_1 = ΒΑ_1 - ΒΓ = 21 - 11 = 10$ m.

Ἐπὶ πλέον ὅμως γνωρίζομεν ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$ΓΑ = \nu \cdot ΓΑ_1 = 1{,}33 \times 10 = 13{,}3 \text{ m}.$$

Ὥστε τὸ βάθος τοῦ φρέατος εἶναι : $ΒΑ = ΒΓ + ΓΑ = 11 + 13{,}3 = 24{,}3$ m.

Τὸ δὲ ὕψος τοῦ ὕδατος εἶναι : $ΓΑ = 13{,}3$ m.

2) Τὸ ἀντικείμενον ΑΔ, παρατηρούμενον διὰ μέσου τοῦ ἐπιπέδου διόπτρου Γ, δίδει τὸ εἴδωλον $Α_1Δ_1$ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΑΔ. Ἄρα ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{Α'Δ'}{Α_1Δ_1} = \frac{ΒΑ'}{ΒΑ_1} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{Α'Δ'}{ΑΔ} = \frac{1{,}05}{21} = \frac{1}{20}.$$

Τὸ μῆκος τοῦ ἀντικειμένου ΑΔ εἶναι 20 φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ εἴδωλον Α′Δ′, ἤτοι εἶναι : $ΑΔ = 1 \times 20 = 20$ cm.

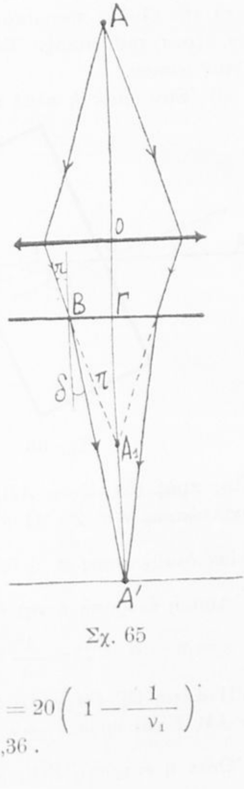
79. — *Συγκλίνων φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως* 20 cm *τοποθετεῖται ὁριζοντίως καὶ εἰς ἀπόστασιν* 45 cm *ὑπεράνω τοῦ πυθμένος κενοῦ δοχείου. Ἄνωθεν τοῦ φακοῦ, εἰς ἀπόστασιν* 40 cm, *καὶ ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος αὐτοῦ εὑρίσκεται φωτεινὸν σημεῖον Α. 1) Νὰ ὑπολογισθῇ πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ πάχος ἑνὸς στρώματος ὕδατος ἐντὸς τοῦ δοχείου, ὥστε τὸ εἴδωλον τοῦ σημείου* Α *νὰ σχηματίζεται ἐπὶ τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου. Δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὕδατος :* $\nu = 4/3$. *2) Ἀντικαθίσταται τὸ ὕδωρ μὲ ἴσον ὄγκον ἑνὸς ὑγροῦ, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ δείκτης διαθλάσεως* ν_1, *ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι, διὰ νὰ διατηρηθῇ τὸ εἴδωλον τοῦ σημείου* Α *ἐπὶ τοῦ πυθμένος, πρέπει τὸ* Α *νὰ ἀπομακρυνθῇ ἀπὸ τὸν φακὸν κατὰ* 3 mm.

1) Ἐπειδὴ τὸ φωτεινὸν σημεῖον Α ἀπέχει 40 cm ἀπὸ τὸν φακόν, δηλαδὴ ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τῆς ἑστιακῆς του ἀποστάσεως, συνάγεται ὅτι τὸ εἴδωλον A_1 σχηματίζεται κάτωθεν τοῦ φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν 40 cm ἀπὸ αὐτόν. Διὰ νὰ σχηματίζεται τὸ εἴδωλον Α′ ἐπὶ τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου, δηλαδὴ εἰς ἀπόστασιν 45 cm, πρέπει τὸ ὕδωρ τοῦ δοχείου νὰ προκαλῇ ὀπισθοχώρησιν τοῦ εἰδώλου κατὰ $A_1A' = 5$ cm. Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ σχῆμα εὑρίσκομεν τὰς σχέσεις:

$$A_1A' = \Gamma A' - \Gamma A_1 \qquad (1)$$

καὶ

$$B\Gamma = \Gamma A' . \delta = \Gamma A_1 . \pi . \qquad (2)$$



Σχ. 65

Ἐπειδὴ εἶναι: $\nu = \dfrac{\pi}{\delta}$, ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) ἔχομεν: $\Gamma A_1 = \Gamma A' . \dfrac{\delta}{\pi} = \dfrac{\Gamma A'}{\nu}$.

Ἄρα ἡ σχέσις (1) δίδει:

$$A_1A' = \Gamma A' \left(1 - \frac{1}{\nu} \right).$$

ἢ

$$5 = \Gamma A' \left(1 - \frac{3}{4} \right).$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον πάχος τοῦ στρώματος τοῦ ὕδατος εἶναι: $\Gamma A' = 20$ cm.

2) Ἐὰν τὸ ἀντικείμενον Α εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $\pi = 40{,}3$ cm, τότε τὸ εἴδωλον A_1' σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν π' τὴν ὁποίαν ὑπολογίζομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{40{,}3} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{20} \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi' = 39{,}7 \text{ cm}.$$

Τὸ νέον ὑγρόν, ποὺ τίθεται ἐντὸς τοῦ δοχείου, ἔχει ὕψος 20 cm, προκαλεῖ ὅμως ὀπισθοχώρησιν τοῦ εἰδώλου A_1' κατά:

$$45 - 39{,}7 = 5{,}3 \text{ cm}.$$

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τότε τὴν σχέσιν: $5{,}3 = 20 \left(1 - \dfrac{1}{\nu_1} \right)$.

ἄρα ὁ ζητούμενος δείκτης διαθλάσεως εἶναι: $\nu_1 = 1{,}36$.

80. — *Ἐπιπεδόκυρτος φακὸς ἔχει δείκτην διαθλάσεως $\nu = 3/2$ καὶ ἀκτῖνα καμπυλότητος $R = 50$ cm. Ὁ ἄξων του διευθύνεται πρὸς ἕνα ἀπλανῆ ἀστέρα. 1) Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν φακὸν πρέπει νὰ τοποθετηθῇ πέτασμα Β διὰ νὰ λάβωμεν ἐπ᾿ αὐτοῦ τὸ εἴδωλον τοῦ ἀστέρος; 2) Ἔμπροσθεν τοῦ φακοῦ καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἀστέρος θέτομεν ὑαλίνην πλάκα πάχους 6 cm, ἡ ὁποία ἔχει δείκτην διαθλάσεως $\nu = 3/2$. Ἡ πλὰξ τοποθετεῖται καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ φακοῦ. Ποία μεταβολὴ θὰ σημειωθῇ εἰς τὴν θέσιν τοῦ εἰδώλου; 3) Ἡ πλὰξ τοποθετεῖται τώρα μεταξὺ τοῦ φακοῦ καὶ τοῦ πετάσματος, καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ φακοῦ. Ποία εἶναι τότε ἡ θέσις τοῦ εἰδώλου; Τί συμβαίνει ἂν κλίνωμεν τὴν πλάκα, ὥστε νὰ σχηματίζῃ γωνίαν 2° μὲ τὸν ἄξονα;*

1) Τὸ εἴδωλον σχηματίζεται εἰς τὴν κυρίαν ἑστίαν Ε τοῦ φακοῦ· ἑπομένως ἐκεῖ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ τὸ πέτασμα. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις φ τοῦ φακοῦ προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{\varphi} = (\nu - 1) \cdot \frac{1}{R} = \left(\frac{3}{2} - 1\right) \times \frac{1}{50} = \frac{1}{100} \quad \text{ἢ} \quad \varphi = 100 \text{ cm}.$$

2) Ἐὰν ἔμπροσθεν τοῦ φακοῦ τοποθετήσωμεν τὴν πλάκα, τότε αἱ ἀκτῖνες, μετὰ τὴν ἔξοδόν των ἀπὸ τὴν πλάκα, ἐξακολουθοῦν νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ φακοῦ. Ἑπομένως θὰ συγκεντρωθοῦν καὶ τότε εἰς τὴν ἑστίαν Ε τοῦ φακοῦ.

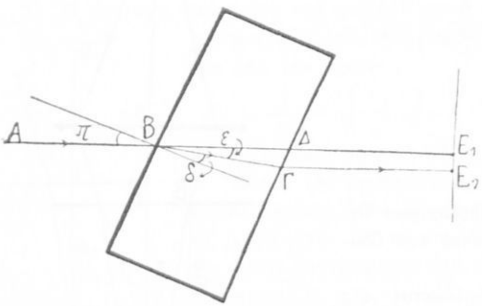
3) Ἐὰν ὅμως ἡ πλὰξ τοποθετηθῇ ὄπισθεν τοῦ φακοῦ, καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα, τότε ἡ πλὰξ προκαλεῖ μίαν μετατόπισιν τοῦ εἰδώλου εἰς τὴν θέσιν E_1. Ἡ μετατόπισις αὐτὴ EE_1 εἶναι :

$$EE_1 = 6\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)$$

ἢ

$$EE_1 = 6\left(1 - \frac{2}{3}\right)$$

ἄρα $EE_1 = 2$ cm



Σχ. 66

Ἐὰν ἡ πλὰξ κλίνῃ κατὰ 2^0, μία ἀκτίς, ἡ ὁποία προηγουμένως ἦτο παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα ΑΒ, τώρα προσπίπτει πλαγίως σχηματίζουσα γωνίαν προσπτώσεως $\pi = 2^0$. Ἡ ἀκτὶς ΑΒ εἰσέρχεται εἰς τὴν πλάκα σχηματίζουσα γωνίαν διαθλάσεως δ, ἡ ὁποία εἶναι : $\delta = \frac{\pi}{\nu} = 2^0 \times \frac{2}{2} = \frac{4^0}{3}$.

Ἄρα ἡ ἐκτροπὴ ε τῆς ἀκτῖνος ΒΓ εἶναι :

$$\varepsilon = \pi - \delta = 2^0 - \frac{4^0}{3} = \frac{2^0}{3}, \quad \text{ἢ} \quad \varepsilon = \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{270} \text{ ἀκτίνια.}$$

Ἡ ἀκτὶς ΒΓ ἐξέρχεται ἀπὸ τὴν πλάκα παράλληλος πρὸς τὴν προσπίπτουσαν ΑΒ. Κατὰ προσέγγισιν εἶναι : $E_1E_2 = \Gamma\Delta = B\Gamma \cdot \varepsilon$ καὶ $B\Gamma = 6$ cm.

Ὥστε ἡ ἐκτροπὴ E_1E_2 εἶναι : $E_1E_2 = 6 \times \frac{\pi}{270} = 0{,}07 \text{ cm} = 0{,}7 \text{ mm}.$

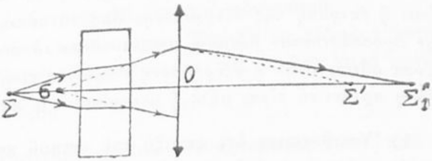
81. — *Ἕνα φωτεινὸν σημεῖον Σ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος ἑνὸς ἀμφικύρτου φακοῦ Λ καὶ εἰς ἀπόστασιν 30 cm ἀπὸ αὐτόν. Ὁ φακὸς δίδει πραγματικὸν εἴδωλον Σ', τὸ ὁποῖον σχηματίζεται εἰς ὡρισμένην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν φακόν. Μεταξὺ τοῦ φακοῦ καὶ τοῦ σημείου Σ θέτομεν, καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα, μίαν ὑαλίνην πλάκα. Ἡ πλὰξ καὶ ὁ φακὸς εἶναι κατασκευασμένοι ἀπὸ τὴν αὐτὴν ὕαλον, ἡ ὁποία ἔχει δείκτην διαθλάσεως ν. Τὸ νέον εἴδωλον Σ_1' σχηματίζεται τότε εἰς νέαν θέσιν, ἤτοι μετατοπίζεται κατὰ $\Sigma'\Sigma_1' = 3{,}75$ cm. Ἡ πλὰξ τοποθετεῖται τώρα, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, μεταξὺ τοῦ φακοῦ καὶ τοῦ εἰδώλου Σ'. Τὸ νέον εἴδωλον Σ_2' σχηματίζεται εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε εἶναι $\Sigma'\Sigma_2' = 3$ cm. 1) Πόση* *εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ; 2) Ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος τοῦ φακοῦ εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι εἶναι* R = 15 cm *, νὰ εὑρεθῇ ὁ δείκτης διαθλάσεως* ν *. 3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πάχος τῆς πλακός.*

1) Ἂς ὀνομάσωμεν π′ τὴν ἀπόστασιν τοῦ εἰδώλου Σ′ ἀπὸ τὸν φακόν. Τότε ἔχομεν:

$$\frac{1}{30}+\frac{1}{\pi'}=\frac{1}{\varphi}. \qquad (1)$$

Ὅταν μεταξὺ τοῦ Σ καὶ τοῦ φακοῦ παρεμβληθῇ ἡ πλάξ, αὕτη προκαλεῖ μετατόπισιν τοῦ Σ, κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς πορείας τοῦ φωτός, ἴσην μέ:

$\Sigma\sigma=\varepsilon\left(1-\frac{1}{\nu}\right)$, ὅπου ε τὸ πάχος τῆς πλακός. Τὸ σ παίζει ρόλον ἀντικειμένου διὰ τὸν φακόν. Ὅταν ἡ πλὰξ παρεμβληθῇ μεταξὺ τοῦ φακοῦ καὶ τοῦ εἰδώλου Σ′, ἡ μετατόπισις τοῦ εἰδώλου εἶναι πάλιν:



Σχ. 67

$$\Sigma'\Sigma_2'=\varepsilon\left(1-\frac{1}{\nu}\right)=3\ \text{cm}.$$

Ἄρα εἶναι: $\delta=\Sigma\sigma=\Sigma'\Sigma_2'=3$ cm.

Ἡ ἀπόστασις λοιπὸν τοῦ σ ἀπὸ τὸν φακὸν εἶναι: $\pi_1=30-3=27$ cm. Ἐὰν π_1' εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ εἰδώλου Σ_1' ἀπὸ τὸν φακόν, κατὰ τὴν πρώτην θέσιν τῆς πλακός, τότε θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$\frac{1}{27}+\frac{1}{\pi_1'}=\frac{1}{\varphi}.$$

Ἐπειδὴ ὅμως δίδεται ὅτι εἶναι:

$$\Sigma'\Sigma_1'=\pi_1'-\pi'=3{,}75\ \text{cm}, \qquad \text{ἤτοι} \qquad \pi_1'=\pi'+3{,}75,$$

ἡ τελευταία ἐξίσωσις γράφεται:

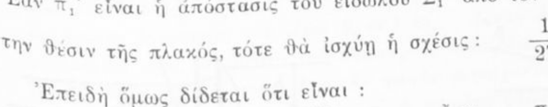
$$\frac{1}{27}+\frac{1}{\pi'+3{,}75}=\frac{1}{\varphi}. \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν τὸ π′:

$$\pi'=\frac{30\varphi}{30-\varphi} \qquad \text{καὶ} \qquad \pi'=\frac{27\varphi}{27-\varphi}-3{,}75.$$

Ἐὰν ἐξισώσωμεν τὰς τιμὰς τοῦ π′ εὑρίσκομεν:

$$\varphi^2-285\varphi+4050=0 \quad \text{ἄρα} \quad \varphi=15\ \text{cm} \quad \text{ἢ} \quad \varphi=270\ \text{cm}.$$



Σχ. 68

Παραδεκτὴ εἶναι ἡ τιμή:

$$\varphi=15\ \text{cm},$$

διότι διὰ φ=270 cm τὰ εἴδωλα Σ′, Σ_1' καὶ Σ_2' θὰ ἦσαν φανταστικά.

Ἄρα ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ εἶναι: φ = 15 cm.

2) Ὁ δείκτης διαθλάσεως εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{\varphi}=(\nu-1)\frac{2}{R} \qquad \text{ἄρα} \qquad \nu=1+\frac{R}{2\varphi}=1+\frac{15}{30}=1{,}5.$$

3) Τὸ πάχος ε τῆς πλακὸς εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

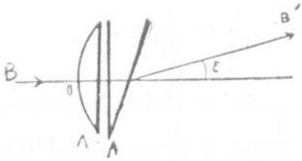
$$\delta = \varepsilon \left(1 - \frac{1}{\nu} \right) \quad \text{ἄρα} \quad \varepsilon = \frac{\nu\delta}{\nu - 1} = \frac{1{,}5 \times 3}{0{,}5} = 9 \text{ cm} .$$

82.— *Λεπτὸς ἐπιπεδόκυρτος φακός, ἰσχύος 1,5 διοπτριῶν, τοποθετεῖται πολὺ πλησίον λεπτοῦ πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει διαθλαστικὴν γωνίαν* $A = 5^0$ *καὶ δείκτην διαθλάσεως* $\nu = 4/3$. *Ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια τοῦ φακοῦ εὑρίσκεται ἀπέναντι μιᾶς ἕδρας τοῦ πρίσματος. Ἀφήνομεν νὰ προσπέσῃ ἐπὶ τοῦ φακοῦ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονός του μία λεπτὴ δέσμη παραλλήλων ἀκτίνων μονοχρόου φωτός. 1) Πόση εἶναι ἡ ἐκτροπὴ τῆς ἐξερχομένης ἀπὸ τὸ σύστημα δέσμης; 2) Χωρὶς νὰ θίξωμεν τὴν προσπίπτουσαν δέσμην, μετακινοῦμεν τὸ σύστημα κατὰ h, καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα οὕτως ὥστε ἡ ἐξερχομένη δέσμη νὰ γίνῃ παράλληλος πρὸς τὴν προσπίπτουσαν. Πόση πρέπει νὰ εἶναι αὐτὴ ἡ μετατόπισις h καὶ κατὰ ποίαν φορὰν πρέπει νὰ γίνῃ;*

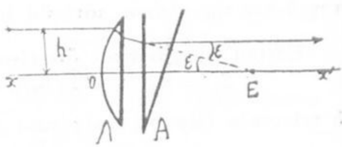
1) Ὑποθέτομεν ὅτι μεταξὺ τοῦ φακοῦ καὶ τοῦ πρίσματος παρεμβάλλεται στρῶμα ἀέρος, τοῦ ὁποίου ὅμως τὸ πάχος εἶναι ἀσήμαντον. Ἡ ἀκτὶς ΒΟ διέρχεται διὰ τοῦ φακοῦ χωρὶς νὰ ὑποστῇ ἐκτροπήν. Ἔπειτα ὅμως διέρχεται διὰ τοῦ λεπτοῦ πρίσματος, τὸ ὁποῖον προκαλεῖ ἐκτροπὴν τῆς ἀκτῖνος κατὰ γωνίαν:

$$\varepsilon = (\nu - 1)\, A = \frac{1}{3} \times 5^0 = \frac{5^0}{3} = 1^0\, 40'.$$

2) Ἡ ἐκτροπή, τὴν ὁποίαν προκαλεῖ τὸ πρῖσμα, εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν



Σχ. 69



Σχ. 70

γωνίαν προσπτώσεως. Ἑπομένως, διὰ νὰ ἐξέλθῃ ἡ δέσμη παράλληλος πρὸς τὴν προσπίπτουσαν, πρέπει ὁ φακὸς νὰ ἐξουδετερώσῃ αὐτὴν τὴν ἐκτροπὴν ε. Πρέπει λοιπὸν εἰς τὸ σχῆμα μας νὰ μετακινηθῇ τὸ σύστημα πρὸς τὰ κάτω. Ἡ ἀκτὶς ΒΓ πρέπει νὰ προσπίπτῃ τώρα εἰς ἕνα σημεῖον ποὺ ἀπέχει h ἀπὸ τὸν ἄξονα. Ἡ ἐξερχομένη ἀπὸ τὸν φακὸν ἀκτὶς διέρχεται πάλιν διὰ τῆς κυρίας ἑστίας Ε τοῦ φακοῦ. Ἀπὸ τὸ σχῆμα εὑρίσκομεν:

$$\varepsilon\varphi\ \varepsilon = \frac{h}{\varphi} \quad \text{ἢ} \quad \varepsilon = \frac{h}{\varphi} = \frac{3h}{200} \ \text{ἀκτίνια.}$$

Ἀλλὰ εἶναι: $\varepsilon = \dfrac{5^0}{3} = \dfrac{5\,\pi}{3 \times 180}$ ἀκτίνια· ἄρα εὑρίσκομεν:

$$h = \frac{200}{3} \times \varepsilon = \frac{200}{3} \times \frac{5\,\pi}{3 \times 180} = 1{,}95 \text{ cm.}$$

83.— *Συγκλίνων φακὸς ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν* 10 cm. *Εἰς ἀπόστασιν* 20 cm *ἀπὸ τὸν φακὸν ὑπάρχει κατακόρυφος φωτεινὴ σχισμή. 1) Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν θέσιν πρέπει νὰ τεθῇ πέτασμα, διὰ νὰ σχηματισθῇ ἐπ' αὐτοῦ τὸ εἴδωλον τῆς σχι-*

σμῆς. 2) Μεταξὺ τοῦ πετάσματος καὶ τοῦ φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν 10 cm ἀπὸ τὸν φακὸν τοποθετεῖται λεπτὸν πρῖσμα, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι κατακόρυφος. Ἡ φωτεινὴ δέσμη προσπίπτει ἐπὶ τοῦ πρίσματος σχεδὸν καθέτως. Τὸ εἴδωλον τῆς σχισμῆς μετατοπίζεται τότε ἐπὶ τοῦ πετάσματος κατὰ 8 mm. Ἂν ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ πρίσματος εἶναι ν = 3/2, νὰ εὑρεθῇ ἡ διαθλαστικὴ γωνία τοῦ πρίσματος.

1) Ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις τῆς σχισμῆς ἀπὸ τὸν φακὸν εἶναι 20 cm, δηλαδὴ διπλασία τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως τοῦ φακοῦ, συνάγεται ὅτι τὸ πραγματικὸν εἴδωλον τῆς σχισμῆς σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἀπὸ τὸν φακόν. Ἄρα τὸ πέτασμα πρέπει νὰ τεθῇ εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἀπὸ τὸν φακόν.

2) Τὸ πρῖσμα ἀπέχει 10 cm ἀπὸ τὸ πέτασμα. Ἐπειδὴ τὸ εἴδωλον μετατοπίζεται κατὰ 8 mm, συνάγεται ὅτι τὸ πρῖσμα ἐκτρέπει τὰς ἀκτῖνας κατὰ γωνίαν:

$$\varepsilon = \frac{0{,}8}{10} = \frac{8}{100} \text{ ἀκτινίου} \quad \text{ἢ} \quad \varepsilon = 4{,}5^0 .$$

Ἂν ὀνομάσωμεν Α τὴν διαθλαστικὴν γωνίαν τοῦ πρίσματος τότε ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\varepsilon = (\nu - 1)\,A$ ἔχομεν $4{,}5^0 = (1{,}5 - 1)\,A$ · ἄρα $A = 9^0$.

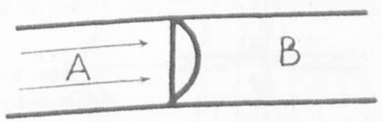
84.— *Ἕνας κύλινδρος ἀπεριορίστου μήκους διαιρεῖται εἰς δύο μέρη Α καὶ Β ἀπὸ λεπτὸν ἐπιπεδόκυρτον φακὸν Λ, τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ φακοῦ στρέφεται πρὸς τὸ μέρος Β, ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου τοῦ φακοῦ εἶναι ν = 1,5 καὶ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του εἶναι R = 1 m. Δέσμη ἀκτίνων μονοχρόου φωτός, παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, διαδίδεται ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν φακὸν συνέρχονται αἱ ἀκτῖνες: α) ὅταν τὸ Α καὶ τὸ Β περιέχουν ἀέρα· β) ὅταν τὸ Α περιέχῃ ὕδωρ καὶ τὸ Β ἀέρα· γ) ὅταν τὸ Α περιέχῃ ἀέρα καὶ τὸ Β ὕδωρ· δ) ὅταν τὸ Α καὶ τὸ Β περιέχουν ὕδωρ. Ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὕδατος εἶναι: ν' = 4/3.*

α) Ὅταν τὸ Α καὶ τὸ Β περιέχουν ἀέρα, αἱ ἀκτῖνες τῆς δέσμης συγκεντρώνονται εἰς τὴν κυρίαν ἑστίαν Ε τοῦ φακοῦ. Ἡ ἑστιακή του ἀπόστασις φ εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{\varphi} = (\nu - 1)\frac{1}{R} = \frac{0{,}5}{1} \quad \text{ἄρα} \quad \varphi = 2 \text{ m} .$$

β) Ὅταν τὸ Α περιέχῃ ὕδωρ καὶ τὸ Β ἀέρα, τότε ἡ παρουσία τοῦ ὕδατος δὲν ἐπηρεάζει τὴν θέσιν τῆς κυρίας ἑστίας Ε τοῦ φακοῦ εἰς τὸ μέρος Β τοῦ σωλῆνος. Ἄρα αἱ ἀκτῖνες συνέρχονται πάλιν εἰς τὴν κυρίαν ἑστίαν, ἤτοι εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν φακόν:

$$\varphi = 2 \text{ m}$$



Σχ. 71

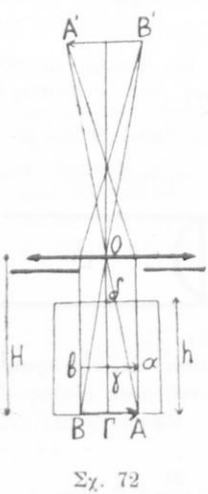
γ) Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ φῶς ὑφίσταται διάθλασιν ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τοῦ φακοῦ, ἡ ὁποία διαχωρίζει δύο διαφανῆ μέσα (ὕαλος—ὕδωρ), τῶν ὁποίων οἱ δεῖκται διαθλάσεως εἶναι ν καὶ ν'. Ἐφαρμόζοντες τὴν γνωστὴν σχέσιν τῶν σφαιρικῶν διόπτρων εὑρίσκομεν:

$$\frac{\nu}{\infty} + \frac{\nu'}{\pi'} = \frac{\nu' - \nu}{-R} \quad \text{ἢ} \quad \pi' = \frac{-R\,\nu'}{\nu' - \nu} = \frac{24}{3} = 8 \text{ m} .$$

δ) Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ ἀκτῖνες ὑφίστανται διάθλασιν μόνον ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τοῦ φακοῦ καὶ ἑπομένως συνέρχονται, ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, εἰς σημεῖον τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸν φακόν : $\pi' = 8$ m.

85. — *Ἕνας συγκεντρωτικὸς φακός, ἑστιακῆς ἀποστάσεως* φ, *ἔχει τὸν ἄξονά του κατακόρυφον. Τὸ ὀπτικὸν κέντρον του εὑρίσκεται εἰς ὕψος* H *ὑπεράνω τοῦ ὁριζοντίου πυθμένος ὑαλίνου κυλινδρικοῦ δοχείου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὕψος* h. *Εἰς τὸν πυθμένα τοῦ δοχείου καὶ πολὺ πλησίον εἰς τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ὁ ἄξων συναντᾷ τὸν πυθμένα εὑρίσκεται ὁριζοντίως μικρὸν ἐπίπεδον ἀντικείμενον* AB *ἰσχυρῶς φωτιζόμενον. Ἔμπροσθεν τοῦ φακοῦ εὑρίσκεται διάφραγμα, τὸ ὁποῖον ἐπιτρέπει νὰ προσπίπτουν ἐπὶ τοῦ φακοῦ μόνον κεντρικαὶ ἀκτῖνες. Ὅταν τὸ δοχεῖον εἶναι κενόν, ὁ φακὸς σχηματίζει τὸ εἴδωλον* A′B′ *τοῦ ἀντικειμένου* AB. *Ὅταν τὸ δοχεῖον εἶναι τελείως πλῆρες μὲ ὑγρόν, τοῦ ὁποίου ὁ δείκτης διαθλάσεως εἶναι* ν, *ὁ φακὸς σχηματίζει τὸ εἴδωλον* A″B″ *τοῦ ἀντικειμένου* AB. *1) Ἐὰν δοθοῦν τὰ μεγέθη* φ, h, ν, *νὰ εὑρεθῇ ὑπὸ ποίας συνθήκας τοῦ* H *τὰ εἴδωλα* A′B′ *καὶ* A″B″ *εἶναι καὶ τὰ δύο πραγματικὰ καὶ πόση εἶναι τότε ἡ μεταξὺ τῶν δύο εἰδώλων ἀπόστασις* x. *2) Ἡ ἀπόστασις* x *ἠμπορεῖ νὰ μετρηθῇ μὲ ἀκρίβειαν μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς πετάσματος. Θέλομεν τότε μὲ τὴν διάταξιν αὐτὴν νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἄγνωστον δείκτην διαθλάσεως* ν_1 *ἑνὸς ὑγροῦ, ὅταν εἶναι* $H = 2\varphi$. *Ἂν* h_1 *εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ὑγροῦ τούτου ἐντὸς τοῦ δοχείου, ὅταν εἶναι δυνατὸς ὁ σχηματισμὸς τοῦ δευτέρου εἰδώλου* A″B″, *νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις, ἡ ὁποία δίδει τὸν* ν_1 *συναρτήσει τῶν* φ, h *καὶ* x. *3) Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή : ὅταν εἶναι :* $\varphi = 20$ cm, $h_1 = 32$ cm, $H = 40$ cm *εὑρίσκεται* $x = 13{,}43$ cm· *νὰ ὑπολογισθῇ ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ χρησιμοποιηθέντος ὑγροῦ.*

1) Διὰ νὰ σχηματίσῃ ὁ φακὸς πραγματικὸν εἴδωλον τοῦ AB πρέπει ἡ ἀπόστασις τοῦ AB ἀπὸ τὸν φακὸν νὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν φ. Ὅταν τὸ δοχεῖον εἶναι κενόν, πρέπει λοιπὸν νὰ εἶναι : $H > \varphi$. Ὅταν ὅμως τὸ δοχεῖον εἶναι πλῆρες μὲ ὑγρόν, τότε τὸ δίοπτρον ὑγρὸν — ἀὴρ σχηματίζει τὸ εἴδωλον αβ τοῦ ἀντικειμένου AB. Ἡ ἀπόστασις τοῦ αβ ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ εἶναι :



Σχ. 72

$$\delta\gamma = \frac{\delta\Gamma}{\nu} \quad \text{ἢ} \quad \delta\gamma = \frac{h}{\nu}.$$

Ἄρα ἡ ἀπόστασις π_1 τοῦ εἰδώλου αβ, τὸ ὁποῖον παίζει ρόλον ἀντικειμένου, ἀπὸ τὸν φακὸν εἶναι :

$$\pi_1 = O\gamma = H - (h - \delta\gamma)$$

$$\text{ἢ} \quad \pi_1 = H - \left(h - \frac{h}{\nu}\right) = H - h\left(1 - \frac{1}{\nu}\right).$$

Διὰ νὰ σχηματίζεται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πραγματικὸν εἴδωλον A″B″ πρέπει νὰ εἶναι $\pi_1 > \varphi$, δηλαδή :

$$H - h\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) > \varphi \cdot \qquad \text{ἄρα} \qquad H > \varphi + h\left(1 - \frac{1}{\nu}\right).$$

Ὅταν τὸ δοχεῖον εἶναι κενόν, ἔχομεν: $\pi = H$ · ἡ ἀπόστασις π' τοῦ εἰδώλου Α΄Β΄ ἀπὸ τὸν φακὸν εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\phi} \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi' = \frac{\phi\pi}{\pi - \phi} \qquad \text{ἢ} \qquad \pi' = \frac{\phi H}{H - \phi}.$$

Ὅταν τὸ δοχεῖον εἶναι πλῆρες μὲ ὑγρόν, τότε ἡ ἀπόστασις π_1' τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τὸν φακὸν εἶναι:

$$\pi_1' = \frac{\phi\pi_1}{\pi_1 - \phi} \qquad \text{ἢ} \qquad \pi_1' = \frac{\phi\left[H - h\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\right]}{H - h\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) - \phi}.$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἀπόστασις x μεταξὺ τῶν Α΄Β΄ καὶ Α΄΄Β΄΄ εἶναι:

$$x = \pi_1' - \pi' = \frac{\phi\left[H - h\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\right]}{H - h\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) - \phi} - \frac{\phi H}{H - \phi}.$$

$$\text{ἄρα:} \qquad x = \frac{\phi^2 h\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)}{(H - \phi)\left[H - h\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) - \phi\right]}.$$

2) Ὅταν εἶναι $H = 2\phi$ ἡ ἀνωτέρω σχέσις ἁπλοποιεῖται καὶ γίνεται:

$$x = \frac{\phi h\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)}{\phi - h\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)}.$$

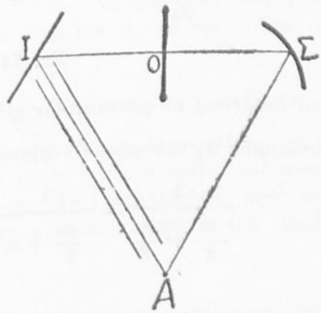
Εἰς τὴν περίπτωσιν λοιπὸν τοῦ ὑγροῦ, τὸ ὁποῖον ἔχει δείκτην διαθλάσεως ν_1 καὶ ὕψος h_1, εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω σχέσιν ὅτι ὁ ζητούμενος δείκτης διαθλάσεως εἶναι:

$$\nu_1 = \frac{h_1(\phi + x)}{h_1(\phi + x) - \phi x}.$$

3) Ἐφαρμογή: Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν λαμβάνομεν:

$$\nu_1 = \frac{32\,(20 + 13{,}33)}{32\,(20 + 13{,}33) - 20 \times 13{,}33} = 1{,}33.$$

86. — *Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΙΣ τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν α. Καθέτως πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου τίθενται: α) εἰς τὸ Ι ἕνα ἐπίπεδον κάτοπτρον Κ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΣ· β) εἰς τὸ Σ ἕνα κοῖλον κάτοπτρον Ν, τοῦ ὁποίου ὁ κύριος ἄξων εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ΑΙ· γ) εἰς τὸ Α ἕνα φωτεινὸν σημεῖον τὸ ὁποῖον στέλλει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου Κ μίαν λεπτὴν κωνικὴν δέσμην. 1) Εἰς ἕνα πρῶτον πείραμα τὸ εἴδωλον τοῦ Α μετὰ δύο ἀνακλάσεις, μίαν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου καὶ ἄλλην ἐπὶ τοῦ κοίλου κατόπτρου, σχηματίζεται ἐς τὸ Α. Νὰ*



Σχ. 73

εὑρεθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ κοίλου κατόπτρου. 2) Εἰς ἕνα δεύτερον πείραμα τίθεται μεταξὺ τοῦ Α καὶ τοῦ Ι ἕνας πλήρης ὑάλινος κύλινδρος μήκους α*, εἰς τὸ μέσον δὲ Ο τῆς πλευρᾶς ΙΣ τοποθετεῖται συγκλίνων φακός, τοῦ ὁποίου ὁ κύριος ἄξων συμπίπτει μὲ τὴν ΣΙ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ. Δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου:* $\nu = 3/2$.

1) Τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον σχηματίζει τὸ εἴδωλον A_1 τῆς πηγῆς. Ἡ προβολὴ τοῦ A_1 ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ κοίλου κατόπτρου εἶναι τὸ A_2. Ἀλλὰ εἶναι:

$$\frac{\Sigma A_2}{\Sigma A_3} = \frac{\Sigma A_1}{\Sigma I} \quad \text{ἢ} \quad \Sigma A_2 = \Sigma A_3 \cdot \frac{\Sigma A_1}{\Sigma I} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\alpha}{\alpha} = \alpha\sqrt{3}.$$

Τὸ εἴδωλον, τὸ ὁποῖον δίδει τὸ κοῖλον κάτοπτρον, σχηματίζεται εἰς τὸ Α. Ἡ προβολὴ τοῦ Α ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ κοίλου κατόπτρου εἶναι τὸ σημεῖον A_3.

Εἶναι δέ: $$\Sigma A_3 = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

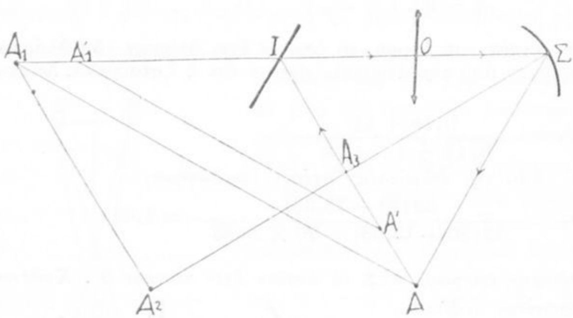
Ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν τῶν κοίλων κατόπτρων εὑρίσκομεν:

$$\frac{1}{\alpha\sqrt{3}} + \frac{2}{\alpha\sqrt{3}} = \frac{1}{\varphi} \qquad \text{ἄρα} \qquad \varphi = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}.$$

2) Ὁ ὑάλινος κύλινδρος μετατοπίζει τὸ σημεῖον Α εἰς τὸ Α′ κατὰ τὴν φορὰν τῆς πορείας τοῦ φωτὸς καὶ κατὰ διάστημα:

$$AA' = \alpha\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{\alpha}{3}.$$

Τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον δίδει τὸ εἴδωλον A_1' τοῦ σημείου Α′. Τὸ A_1' ἐπέχει θέσιν ἀντικειμένου διὰ τὸν φακόν. Διὰ νὰ σχηματίζεται ὅμως τὸ τελικὸν εἴδωλον, μετὰ τὴν ἀνάκλασιν ἐπὶ τοῦ κοίλου κατόπτρου, εἰς τὸ Α, πρέπει τὸ φῶς νὰ φαίνεται προερχόμενον ἀπὸ ἕνα φωτεινὸν σημεῖον εὑρισκόμενον εἰς τὸ A_1. Τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ εἶναι ἑπομένως τὸ φανταστικὸν εἴδωλον, τὸ ὁποῖον δίδει ὁ φακός. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις φ_1 τοῦ φακοῦ εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\dfrac{1}{OA_1'} - \dfrac{1}{OA_1} = \dfrac{1}{\varphi_1}$



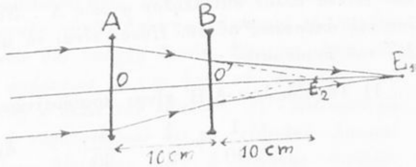
Σχ. 74

$$\text{ἢ} \quad \frac{1}{\frac{\alpha}{2} + \frac{2\alpha}{3}} - \frac{1}{\frac{\alpha}{2} + \alpha} = \frac{1}{\varphi_1} \qquad \text{ἄρα} \qquad \varphi_1 = \frac{21\alpha}{4}.$$

δ) Σύστημα φακῶν

87.— *Δύο λεπτοὶ φακοί, ὁ Α συγκεντρωτικὸς καὶ ὁ Β ἀποκεντρωτικός, ἔχουν κοινὸν κύριον ἄξονα. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις ἑκάστου φακοῦ εἶναι 20 cm, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν φακῶν ἀπόστασις εἶναι 10 cm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τῆς κυρίας ἑστίας τοῦ συστήματος τῶν δύο φακῶν: 1) ὅταν τὸ φῶς προσπίπτῃ πρῶτα ἐπὶ τοῦ φακοῦ Α καὶ 2) ὅταν τὸ φῶς προσπίπτῃ πρῶτα ἐπὶ τοῦ φακοῦ Β.*

1) Αἱ παράλληλοι ἀκτῖνες ποὺ προσπίπτουν ἐπὶ τοῦ φακοῦ Α, μετὰ τὴν διάθλασίν των, συγκλίνουν πρὸς τὴν κυρίαν ἑστίαν E_2 τοῦ φακοῦ Α, ἡ ὁποία εὑρίσκεται 10 cm πέραν τοῦ φακοῦ Β. Τὸ σημεῖον E_2 παίζει διὰ τὸν φακὸν Β ρόλον φανταστικοῦ ἀντικειμένου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸν Β εἶναι 10 cm. Ἑπομένως ἡ ἀπόστασις π' τοῦ εἰδώλου τοῦ σημείου E_2 ἀπὸ τὸν φακὸν Β δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

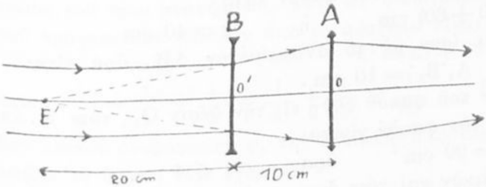


Σχ. 75

$$-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi'}=-\frac{1}{\varphi} \quad \text{ἢ} \quad -\frac{1}{10}+\frac{1}{\pi'}=-\frac{1}{20} \quad \text{ἄρα} \quad \pi'=20 \text{ cm}.$$

Ἡ εὑρεθεῖσα ἀπόστασις $\pi' = O'E_1$ προσδιορίζει τὴν θέσιν τῆς κυρίας ἑστίας E_1 τοῦ συστήματος τῶν φακῶν. Ὥστε ἡ κυρία ἑστία E_1 τοῦ συστήματος εὑρίσκεται πέραν τοῦ φακοῦ Β καὶ ἀπέχει ἀπὸ αὐτὸν 20 cm.

2) Αἱ παράλληλοι ἀκτῖνες προσπίπτουν τώρα ἐπὶ τοῦ ἀποκεντρωτικοῦ φακοῦ Β, ἄρα μετὰ τὴν διάθλασίν των ἀποκλίνουν καὶ φαίνονται προερχόμεναι ἀπὸ τὴν κυρίαν ἑστίαν Ε' τοῦ φακοῦ Β. Ἡ ἀποκλίνουσα αὐτὴ δέσμη προσπίπτει ἐπὶ τοῦ φακοῦ Α, διὰ τὸν ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἡ δέσμη



Σχ. 76

προέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ε'. Τοῦτο ἀπέχει ἀπὸ τὸν Α 30 cm, ἄρα εἶναι π = 30 cm. Ἑπομένως ἔχομεν:

$$\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi'}=\frac{1}{\varphi} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{30}+\frac{1}{\pi'}=\frac{1}{20} \quad \text{ἄρα} \quad \pi'=60 \text{ cm}.$$

Ὥστε ἡ δέσμη μετὰ τὴν ἔξοδόν της ἀπὸ τὸν φακὸν Α συγκλίνει εἰς ἕνα σημεῖον E_1' τοῦ κυρίου ἄξονος, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ κυρία ἑστία τοῦ συστήματος τῶν φακῶν (διότι ἡ προσπίπτουσα δέσμη εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν κύριον ἄξονα). Ἡ κυρία ἑστία τοῦ συστήματος εὑρίσκεται πέραν τοῦ φακοῦ Α καὶ ἀπέχει ἀπὸ αὐτὸν 60 cm.

88.— *Φωτεινὸν ἀντικείμενον ΑΒ ἔχει ὕψος 10 cm καὶ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ὀπτικοῦ ἄξονος συγκεντρωτικοῦ φακοῦ Λ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως* φ = 30 cm. *Τὸ* *ὀπτικὸν κέντρον* O *τοῦ φακοῦ ἀπέχει* 40 cm *ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον* AB. *1) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου* A′B′ *τὸ ὁποῖον δίδει ὁ φακός. 2) Ὁ φακὸς μετακινεῖται κατὰ* 20 cm *πρὸς τὸ* A′ *καὶ ἔστω* O_1 *ἡ νέα θέσις τοῦ ὀπτικοῦ του κέντρου. Νὰ εὑρεθῇ κατὰ πόσον καὶ κατὰ ποίαν διεύθυνσιν μετακινεῖται τὸ εἴδωλον. Νὰ ἐξετασθῇ τὸ ἴδιον ζήτημα, ἂν ὁ φακὸς μετακινηθῇ κατὰ* 20 cm *πρὸς τὸ* A *καὶ τὸ ὀπτικὸν κέντρον εἶναι εἰς τὴν θέσιν* O_2. *Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῶν εἰδώλων* $A_1'B_1'$ *καὶ* $A_2'B_2'$; *3) Ὁ φακὸς εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν* O, *θέλομεν δὲ νὰ λάβωμεν τὸ εἴδωλον τοῦ* AB *ἐπὶ ἑνὸς πετάσματος, τὸ ὁποῖον ἀπέχει* 5 m *ἀπὸ τὸ σημεῖον* O. *Πρὸς τοῦτο φέρομεν εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν φακὸν* Λ *ἕνα ἄλλον κατάλληλον φακὸν* Λ′. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τοῦ φακοῦ* Λ′ *καὶ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις αὐτοῦ. Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου ποὺ σχηματίζεται ἐπὶ τοῦ πετάσματος ;*

1) Τὸ εἴδωλον A′B′ εἶναι πραγματικὸν και ἑπομένως ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{40}+\frac{1}{\pi'}=\frac{1}{30}. \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi'=120 \text{ cm}.$$

Ἐπίσης ἔχομεν : $$\frac{A'B'}{AB}=\frac{\pi'}{\pi} \quad \text{ἢ} \quad \frac{A'B'}{10}=\frac{120}{40}. \qquad \text{ἄρα} \quad A'B'=30 \text{ cm}.$$

Τὸ εἴδωλον A′B′ εἶναι πραγματικόν, ἀνεστραμμένον, ἔχει ὕψος 30 cm καὶ ἀπέχει 120 cm ἀπὸ τὸ O.

2) Ὅταν ὁ φακὸς μετακινηθῇ κατὰ 20 cm πρὸς τὸ A′, τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸν φακὸν γίνεται : $\pi_1=40+20=60$ cm, δηλαδὴ γίνεται ἴση μὲ τὸ διπλάσιον τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως. Ἄρα τὸ εἴδωλον $A_1'B_1'$ εἶναι συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὸ ὀπτικὸν κέντρον, δηλαδὴ εἶναι:

$$\pi_1'=60 \text{ cm}.$$

Τὸ εἴδωλον πλησιάζει λοιπὸν πρὸς τὸν φακὸν κατά :

$$x=120-(20+60) \text{ cm} \qquad \text{ἢ} \qquad x=40 \text{ cm}.$$

Τὸ εἴδωλον $A_1'B_1'$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἀντικείμενον AB, ἄρα εἶναι :

$$A_1'B_1'=10 \text{ cm}.$$

Ὅταν τὸ ὀπτικὸν κέντρον τοῦ φακοῦ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν O_2, τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸν φακὸν γίνεται :

$$\pi_2=40-20=20 \text{ cm}\cdot \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi_2<\varphi.$$

Τὸ εἴδωλον εἶναι φανταστικὸν καὶ τότε ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{20}-\frac{1}{\pi_2'}=\frac{1}{30}\cdot \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi_2'=60 \text{ cm}.$$

Τὸ εἴδωλον $A_2'B_2'$ εἶναι λοιπὸν φανταστικὸν καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὸν φακὸν 60 cm. Τὸ δὲ μέγεθός του εἶναι :

$$\frac{A_2'B_2'}{AB}=\frac{\pi_2'}{\pi_2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{A_2'B_2'}{10}=\frac{60}{20}\cdot \qquad \text{ἄρα} \quad A_2'B_2'=30 \text{ cm}.$$

3) Ὅταν ἐπὶ τοῦ πετάσματος σχηματίζεται τὸ εἴδωλον τοῦ AB, τότε ἔχομεν :

$$\pi=40 \text{ cm} \qquad \text{καὶ} \qquad \pi'=600 \text{ cm}.$$

Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις Φ τοῦ συστήματος δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{\Phi}=\frac{1}{40}+\frac{1}{600} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{1}{\Phi}=\frac{2}{75}.$$

Ἂν ὀνομάσωμεν φ′ τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ φακοῦ Λ′, τότε ἔχομεν :

$$\frac{1}{\Phi}=\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi'} \quad ἢ \quad \frac{2}{75}=\frac{1}{30}+\frac{1}{\varphi'}.$$

Ἄρα ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις φ′ τοῦ φακοῦ Λ′ εἶναι: $\varphi'=-150$ cm· ὁ φακὸς Λ′ εἶναι ἀποκλίνων· τὸ δὲ μέγεθος τοῦ εἰδώλου Α″Β″ εἶναι:

$$\frac{A''B''}{AB}=\frac{600}{40} \quad ἢ \quad A''B''=10\times 15=150 \text{ cm}.$$

89.— *Δύο ὅμοιοι ἐπιπεδόκυρτοι φακοί, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 40 cm, ἔχουν τὸν αὐτὸν κύριον ἄξονα καὶ αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαί των ἐφάπτονται. Οἱ δύο φακοὶ εἶναι στερεωμένοι καταλλήλως ὥστε τὸ μεταξὺ αὐτῶν διάστημα ἠμπορεῖ νὰ γεμίσῃ μὲ ὑγρόν. 1) Ὅταν μεταξὺ τῶν δύο φακῶν δὲν ὑπάρχῃ ὑγρόν, θέτομεν ἐπὶ τοῦ κοινοῦ ἄξονός των φωτεινὸν σημεῖον εἰς ἀπόστασιν 40 cm ἀπὸ τὸ σύστημα, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν πολὺ λεπτόν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ εἰδώλου. 2) Γεμίζομεν μὲ ὑγρὸν τὸ μεταξὺ τῶν φακῶν διάστημα καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ εἴδωλον ἀπομακρύνεται κατὰ 30 cm ἀπὸ τὴν προηγουμένην θέσιν του. Ἂν ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου εἶναι 1,5 νὰ εὑρεθῇ ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὑγροῦ.*

1) Ἔστω Φ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ συστήματος τῶν δύο φακῶν· Τότε εἶναι:

$$\frac{1}{\Phi}=\frac{1}{40}+\frac{1}{40}=\frac{1}{20} \qquad ἄρα \qquad \Phi=20 \text{ cm}.$$

Ἐπειδὴ τὸ φωτεινὸν σημεῖον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 40 cm ἀπὸ τὸ σύστημα, δηλαδὴ διπλασίαν τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως, συνάγεται ὅτι τὸ εἴδωλον σχηματίζεται εἰς θέσιν συμμετρικήν, ἄρα εἰς ἀπόστασιν 40 cm ἀπὸ τὸ σύστημα.

2) Ἐὰν τὸ μεταξὺ τῶν φακῶν διάστημα γεμίσῃ μὲ τὸ ὑγρόν, τότε μεταξὺ τῶν δύο φακῶν σχηματίζεται τρίτος ἀμφίκοιλος φακός. Ἔστω Φ′ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ νέου συστήματος. Τότε αἱ ἀποστάσεις τοῦ φωτεινοῦ σημείου καὶ τοῦ πραγματικοῦ εἰδώλου ἀπὸ τὸ σύστημα εἶναι:

$$\pi=40 \text{ cm} \qquad καὶ \qquad \pi'=40+80=120 \text{ cm}.$$

$$Ἄρα \quad \frac{1}{\Phi'}=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi'}=\frac{1}{40}+\frac{1}{120}=\frac{1}{30} \qquad ἢ \qquad \Phi'=30 \text{ cm}.$$

Ἐὰν λοιπὸν ὀνομάσωμεν φ_1 τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ φακοῦ, τὸν ὁποῖον σχηματίζει τὸ ὑγρόν, τότε ἔχομεν:

$$\frac{1}{\Phi}+\frac{1}{\varphi_1}=\frac{1}{\Phi'} \quad ἢ \quad \frac{1}{\varphi_1}=\frac{1}{\Phi'}-\frac{1}{\Phi}=\frac{1}{30}-\frac{1}{20} \quad ἄρα \quad \varphi_1=-60 \text{ cm}.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν δείκτην διαθλάσεως ν_1 τοῦ ὑγροῦ, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὰς ἀκτῖνας καμπυλότητος τῶν ἐπιφανειῶν του, δηλαδὴ τὰς ἀκτῖνας καμπυλότητος τῶν δύο συγκλινόντων φακῶν. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις αὐτῶν εἶναι $\varphi=40$ cm· ἄρα ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{\varphi}=(\nu-1)\frac{1}{R}, \qquad ἤτοι \qquad R=\varphi(\nu-1)=40\times 0{,}5=20 \text{ cm}.$$

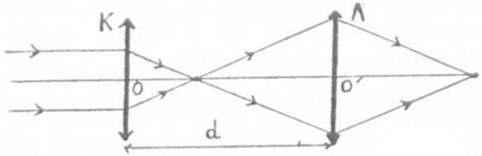
Ἐπειδὴ αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ φακοῦ εἶναι κοῖλαι, αἱ ἴσαι ἀκτῖνες καμπυλότητος εἶναι: $R=-20$ cm. Ὥστε διὰ τὸν ὑγρὸν φακὸν ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{\varphi_1}=(\nu_1-1)\left(-\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\right) \quad ἢ \quad -\frac{1}{60}=(\nu_1-1)\left(-\frac{1}{10}\right)\cdot$$

$$ἄρα \ εἶναι: \qquad \nu_1=\frac{7}{6}=1{,}17.$$

90. — *Δύο λεπτοὶ συγκλίνοντες φακοὶ ἔχουν τὸν αὐτὸν κύριον ἄξονα, τὴν αὐτὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν $\phi = 2$ cm καὶ ἡ μεταξύ των ἀπόστασις εἶναι d. 1) Ὁ ἄξων τοῦ συστήματος διευθύνεται πρὸς ἕνα μακρυνὸν ἀντικείμενον. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις καὶ ἡ φύσις τοῦ εἰδώλου ποὺ σχηματίζεται, ὅταν ἡ ἀπόστασις τῶν φακῶν γίνεται διαδοχικῶς d = 6 cm καὶ d = 3 cm. 2) Μία μικρὰ εὐθεῖα, κάθετος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ συστήματος εὑρίσκεται εἰς ὡρισμένην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν πρῶτον φακόν. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις καὶ ἡ φύσις τοῦ σχηματιζομένου εἰδώλου ὡς καὶ τὸ μέγεθός του εἰς τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις : α) d = 6 cm· τὸ πραγματικὸν ἀντικείμενον εὑρίσκεται 6 cm ἔμπροσθεν τοῦ πρώτου φακοῦ· β) d = 3 cm· τὸ φανταστικὸν εἴδωλον εὑρίσκεται 6 cm ὄπισθεν τοῦ πρώτου φακοῦ.*

1) Αἱ ἀκτῖνες προσπίπτουν ἐπὶ τοῦ πρώτου φακοῦ Κ παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα. Ἑπομένως αἱ διαθλώμεναι ἀκτῖνες διέρχονται διὰ τῆς ἑστίας του, ἡ ὁποία ἀπέχει 2 cm ἀπὸ τὸν φακὸν Κ. Τὸ εἴδωλον τοῦτο παίζει διὰ τὸν δεύτερον φακὸν Λ τὸν ρόλον ἀντικειμένου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸν δεύτερον φακὸν Λ : $\pi_2 = d - 2$.



Σχ. 77

Ἑπομένως ἡ θέσις τοῦ τελικοῦ εἰδώλου, δηλαδὴ ἡ ἀπόστασίς του π_2' ἀπὸ τὸν φακὸν Λ, προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν : $\dfrac{1}{d-2} + \dfrac{1}{\pi_2'} = \dfrac{1}{2}$ ἄρα εἶναι $\pi_2' = \dfrac{2(d-2)}{(d-4)}$.

Ὁ τύπος αὐτὸς διὰ d = 6 cm δίδει : $\pi_2' = \dfrac{2(6-2)}{(6-4)} = 4$ cm.

Τὸ εἴδωλον εἶναι πραγματικὸν καὶ εὑρίσκεται 4 cm ὄπισθεν τοῦ δευτέρου φακοῦ. Διὰ d = 3 cm, ἔχομεν : $\pi_2'' = \dfrac{2(3-2)}{3-4} = -2$ cm.

Τὸ εἴδωλον εἶναι φανταστικὸν καὶ εὑρίσκεται 2 cm ἔμπροσθεν τοῦ δευτέρου φακοῦ.

2.—α) Τὸ ἀντικείμενον (πραγματικὸν) ἀπέχει $\pi_1 = 6$ cm ἀπὸ τὸν φακὸν Κ, ἑπομένως ὁ φακὸς δίδει πραγματικὸν εἴδωλον εἰς ἀπόστασιν π_1' ἀπὸ αὐτόν.

Ἄρα ἔχομεν : $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{\pi_1'} = \dfrac{1}{2}$· ὥστε $\pi_1' = 3$ cm.

Διὰ τὸν φακὸν Λ εἶναι τότε $\pi_2 = d - 3$·

ἄρα ἔχομεν : $\dfrac{1}{6-3} + \dfrac{1}{\pi_2'} = \dfrac{1}{2}$· ὥστε $\pi_2' = 6$ cm.

Τὸ τελικὸν εἴδωλον εἶναι πραγματικὸν καὶ εὑρίσκεται 6 cm ὄπισθεν τοῦ δευτέρου φακοῦ.

Ἡ ὅλη γραμμικὴ μεγέθυνσις γ εἶναι γινόμενον τῶν μεγεθύνσεων τὰς ὁποίας παρέχουν οἱ δύο φακοί, δηλαδὴ εἶναι :

$$\gamma = \frac{\pi_1'}{\pi_1} \cdot \frac{\pi_2'}{\pi_2} = \frac{3}{6} \times \frac{6}{3} = 1 .$$

Τὸ μῆκος τοῦ εἰδώλου εἶναι ἴσον μὲ τὸ μῆκος τοῦ ἀντικειμένου.

β) Σκεπτόμενοι ὅπως ἀνωτέρω καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν :

$$-\frac{1}{6}+\frac{1}{\pi_1'}=\frac{1}{2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \pi_1'=1{,}5\ \text{cm}.$$

$$\frac{1}{3-1{,}5}+\frac{1}{\pi_2'}=\frac{1}{2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \pi_2'=-6\ \text{cm}.$$

Τὸ τελικὸν εἴδωλον εἶναι φανταστικὸν καὶ εὑρίσκεται 6 cm ἔμπροσθεν τοῦ δευτέρου φακοῦ. Ἡ ὅλη γραμμικὴ μεγέθυνσις εἶναι :

$$\gamma=\frac{\pi_1'}{\pi_1}\times\frac{\pi_2'}{\pi_2}=\frac{1{,}5}{6}\times\frac{6}{1{,}5}=1.$$

Τὸ μῆκος τοῦ εἰδώλου εἶναι πάλιν ἴσον μὲ τὸ μῆκος τοῦ ἀντικειμένου.

91.— *Δύο λεπτοὶ φακοὶ ἔχουν κοινὸν κύριον ἄξονα. Ὁ φακὸς Γ εἶναι συγκλί-*
νων, ἰσχύος 2 διοπτριῶν, ὁ δὲ φακὸς Δ εἶναι ἀποκλίνων, ἰσχύος 4 διοπτριῶν.
1) Κατ' ἀρχὰς οἱ δύο φακοὶ εἶναι ἡνωμένοι καὶ ἕνα ἀντικείμενον μήκους 2 cm εὑ-
ρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τὸ σύστημα. Ποία εἶναι ἡ θέσις καὶ πόσον τὸ μέ-
γεθος τοῦ εἰδώλου ; 2) Ἔπειτα οἱ δύο φακοὶ ἀπομακρύνονται ἀλλήλων καὶ ἡ μετα-
ξύ των ἀπόστασις γίνεται 25 cm . Νὰ σημειωθῇ ἡ πορεία δέσμης ἀκτίνων, παραλ-
λήλων πρὸς τὸν κοινὸν κύριον ἄξονα, αἱ ὁποῖαι προσπίπτουν ἐπὶ τοῦ φακοῦ Γ
καὶ διέρχονται διὰ τοῦ συστήματος. 3) Ὅταν οἱ φακοὶ εὑρίσκωνται εἰς τὴν ἀνω-
τέρω θέσιν, θέτομεν ἔμπροσθεν τοῦ φακοῦ Γ καὶ εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπὸ αὐτὸν
φωτεινὴν εὐθεῖαν AB, ὕψους 2 cm , ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρὸς τὸν ἄξονα καὶ
ἔχει τὸ ἄκρον της B ἐπὶ τοῦ ἄξονος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰ-
δώλου τὸ ὁποῖον δίδει τὸ σύστημα τῶν δύο φακῶν καὶ νὰ σημειωθῇ ἡ πορεία
τῆς φωτεινῆς δέσμης, ἡ ὁποία προέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον B τῆς εὐθείας.

1) Αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις φ_1 καὶ φ_2 τῶν φακῶν Γ καὶ Δ εἶναι :

$$\varphi_1=\frac{1}{2}\ \text{m}=50\ \text{cm} \qquad \text{καὶ} \qquad \varphi_2=-\frac{1}{4}=-25\ \text{cm}.$$

Ὅταν οἱ φακοὶ εἶναι ἡνωμένοι, ἡ ἰσχὺς τοῦ συστήματος εἶναι :

$$P=2-4=-2\ \text{διοπτρίαι}.$$

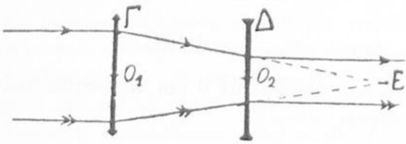
Ἐπομένως ἡ ἀπόστασις π′ τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τὸ σύστημα εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν γενικὴν σχέσιν τῶν φακῶν : $\frac{1}{1}+\frac{1}{\pi'}=-2$ ἄρα $\pi'=-33{,}3$ cm.

Τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου εἶναι : $2\times\frac{\pi'}{\pi}=\frac{2}{3}\ \text{cm}=0{,}67\ \text{cm}$.

Ὥστε τὸ εἴδωλον εἶναι φανταστικόν, ὀρθόν, εὑρίσκεται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ συστήματος μὲ τὸ ἀντικείμενον καὶ εἰς ἀπόστασιν 33,3 cm ἀπὸ τὸ σύστημα, ἔχει δὲ μῆκος 0,67 cm.

2) Ὁ φακὸς Δ εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως τοῦ Γ καὶ ἡ ἑστία τοῦ Δ συμπίπτει τότε μὲ τὴν ἑστίαν τοῦ Γ (σχ. 78). Ὁ φακὸς Γ συγκεντρώνει τὴν δέσμην τῶν παραλλήλων ἀκτίνων εἰς τὴν ἑστίαν του E_1 · ὁ φακὸς ὅμως Δ μεταβάλλει τὴν συγκλίνουσαν δέσμην εἰς δέσμην παραλλήλων ἀκτίνων. Τὸ σύστημα τῶν δύο φακῶν δὲν ἔχει κυρίαν ἑστίαν ἤτοι εἶναι ἀνεστιακὸν σύστημα.

3) Ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ.79) εὑρίσκεται τότε ἐπὶ τῆς ἑστίας τοῦ φακοῦ Γ, ὁ ὁποῖος σχηματίζει τὸ εἴδωλον Α΄Β΄ εἰς τὸ ἄπειρον. Τὸ Α΄Β΄ παίζει τὸν ρόλον ἀντικειμένου διὰ τὸν φακὸν Δ, ὁ ὁποῖος σχηματίζει τὸ τελικὸν εἴδωλον Α΄΄Β΄΄ εἰς τὸ



Σχ. 78

ἑστιακόν του ἐπίπεδον, δηλ. τὸ Α΄΄ συμπίπτει μὲ τὸ ὀπτικὸν κέντρον O_1 τοῦ φακοῦ Γ. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ σημεῖον Β΄΄ φέρομεν ἀπὸ τὸ Β ἀκτῖνα ΒΓ παράλληλον πρὸς τὸν κύριον ἄξονα, ἡ ὁποία μετὰ τὴν διάθλασίν της εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η ἐξέρχεται ἀπὸ τὸν φακὸν Δ παράλληλος πρὸς τὸν κύριον ἄξονα. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ἐξερχομένης ἀκτῖνος εὑρίσκεται τὸ Β΄΄.

Ἡ μεγέθυνσις γ εἶναι : $\gamma = \dfrac{A''B''}{AB}$.

Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα $EO_1\Gamma$ καὶ EO_2H εὑρίσκομεν :

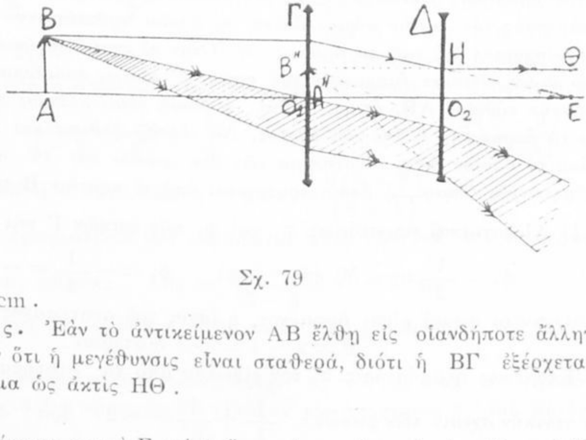
$$\gamma = \frac{A''B''}{AB} = \frac{O_2H}{O_1\Gamma} = \frac{O_2E}{O_1E} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \quad \text{ἢ} \quad \gamma = \frac{1}{2}.$$

Ἄρα εἶναι :

$A''B'' = AB \cdot \gamma$

ἢ $A''B'' = \dfrac{AB}{2}$

ἄρα $A''B'' = 1$ cm.



Σχ. 79

Ὥστε τὸ εἴδωλον ποὺ δίδει τὸ σύστημα, εἶναι φανταστικόν, ὀρθόν, εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πρώτου φακοῦ καὶ ἔχει ὕψος 1 cm.

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς. Ἐὰν τὸ ἀντικείμενον ΑΒ ἔλθῃ εἰς οἱανδήποτε ἄλλην θέσιν, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μεγέθυνσις εἶναι σταθερά, διότι ἡ ΒΓ ἐξέρχεται πάλιν ἀπὸ τὸ σύστημα ὡς ἀκτὶς ΗΘ.

92. — *Δύο συγκλίνοντες φακοὶ Γ καὶ Δ ἔχουν ἀντιστοίχως ἰσχὺν 10 καὶ 20 διοπτριῶν, ἔχουν τὸν ἴδιον κύριον ἄξονα καὶ ἡ μεταξύ των ἀπόστασις εἶναι 15 cm. Ἀντικείμενον ΑΒ τοποθετεῖται καθέτως πρὸς τὸν κύριον ἄξονα καὶ εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἔμπροσθεν τοῦ περισσότερον συγκεντρωτικοῦ φακοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου τὸ ὁποῖον δίδει τὸ σύστημα.*

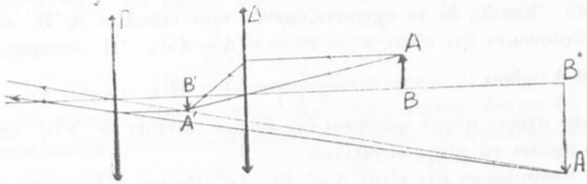
Οἱ φακοὶ Γ καὶ Δ ἔχουν ἀντιστοίχως ἑστιακὰς ἀποστάσεις :

$$\varphi_1 = \frac{1}{10}\ \text{m} = 10\ \text{cm} \qquad \text{καὶ} \qquad \varphi_2 = \frac{1}{20}\ \text{m} = 5\ \text{cm}.$$

Τὸ ἀντικείμενον ΑΒ εὑρίσκεται 20 cm ἔμπροσθεν τοῦ φακοῦ Δ. Ἄρα τὸ εἴδωλον Α΄Β΄, ποὺ δίδει ὁ φακὸς αὐτός, εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν π_1' ἀπὸ τὸν φακόν, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{\pi_1'}=\frac{1}{5} \quad \text{ἄρα} \quad \pi_1'=\frac{20}{3}\ \text{cm}.$$

Τὸ εἴδωλον Α΄Β΄ εἶναι πραγματικὸν καὶ ἀνεστραμμένον καὶ ἡ ἀπόστασίς



Σχ. 80

του ἀπὸ τὸν φακὸν Γ εἶναι: $\pi_2 = 15 - \frac{20}{3} = \frac{25}{3}$ cm. Τὸ εἴδωλον Α΄΄Β΄΄ ποὺ δίδει ὁ Γ, σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν π_2' ἀπὸ αὐτόν, τὴν ὁποίαν προσδιορίζομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\frac{3}{25}+\frac{1}{\pi_2'}=\frac{1}{10}$ ἄρα $\pi_2' = -50$ cm.

Ὥστε τὸ τελικὸν εἴδωλον Α΄΄Β΄΄ εἶναι φανταστικὸν καὶ ἀπέχει 50 cm ἀπὸ τὸν φακὸν Γ.

Ἡ μεγέθυνσις γ_1 τοῦ πρώτου φακοῦ Δ εἶναι:

$$\gamma_1 = \frac{A'B'}{AB} = \frac{\pi_1'}{\pi_1} = \frac{20}{3} : 20 = \frac{1}{3} \quad \text{ἄρα} \quad A'B' = \gamma_1 \,.\, AB = \frac{AB}{3}.$$

Ἡ δὲ μεγέθυνσις γ_2 τοῦ δευτέρου φακοῦ Γ εἶναι:

$$\gamma_2 = \frac{A''B''}{A'B'} = \frac{\pi_2'}{\pi_2} = \frac{50}{\frac{25}{3}} = 6 \quad \text{ἄρα} \quad A''B'' = \gamma_2 \,.\, A'B' = 6A'B' = 2\,AB.$$

Ὥστε ἡ ὅλη μεγέθυνσις γ εἶναι: $\gamma = \frac{A''B''}{AB} = 2$.

Τὸ τελικὸν εἴδωλον εἶναι διπλάσιον ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον.

Ἡ μεγέθυνσις εἶναι: $\gamma = \varphi_1 : \varphi_2 = 2$, δηλαδὴ εἶναι σταθερὰ ὁποιαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ θέσις τοῦ ἀντικειμένου.

93. — *Ἕνας φακὸς Λ ἀπέχει 15 cm ἀπὸ ἕνα πραγματικὸν ἀντικείμενον ΑΒ. Ὁ φακὸς δίδει πραγματικὸν εἴδωλον Α΄Β΄ = 3 . ΑΒ. 1) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ φύσις καὶ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ Λ. 2) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις ἑνὸς ἄλλου φακοῦ Λ΄, ὁ ὁποῖος, τοποθετούμενος Δ ἑκατοστόμετρα ὄπισθεν τῆς θέσεως τοῦ φακοῦ Λ, δίδει ἕνα νέον πραγματικὸν εἴδωλον Α΄΄Β΄΄ = ν . Α΄Β΄. 3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις φ΄ τοῦ φακοῦ Λ΄ διὰ ν = 2 καὶ Δ = 10 cm. 4) Νὰ ἐξετασθῇ ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι ν = 1.*

1) Ἐπειδὴ τὸ πραγματικὸν ἀντικείμενον δίδει πραγματικὸν εἴδωλον, συνάγεται ὅτι ὁ φακὸς Λ εἶναι συγκλίνων. Ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν σχέσιν Α΄Β΄ = 3 ΑΒ εὑρίσκομεν $\pi' = 3\,\pi = 45$ cm.

Ἄρα: $\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{15} + \frac{1}{45} = \frac{4}{45}$ καὶ $\varphi = \frac{45}{4} = 11{,}25$ cm.

2) Τὸ εἴδωλον Α΄Β΄ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 45 cm ἀπὸ τὸν φακὸν Λ.

α) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀπόστασις Δ τοῦ φακοῦ Λ′ ἀπὸ τὸν φακὸν Λ εἶναι $\Delta > 45$ cm. Τότε τὸ Α′Β′ εἶναι διὰ τὸν φακὸν Λ′ ἕνα πραγματικὸν ἀντικείμενον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις (θετική) ἀπὸ τὸν φακὸν Λ′ εἶναι: $\pi = \Delta - 45$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ σχηματιζόμενον νέον εἴδωλον Α″Β″ εἶναι πραγματικόν, εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι $\pi' = \nu\pi = \nu(\Delta - 45)$. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ Λ′ εἶναι:

$$\varphi' = \frac{\nu}{\nu + 1}(\Delta - 45). \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν φαίνεται ὅτι ἔχομεν πάντοτε $\varphi' > 0$, ἐπομένως ὁ φακὸς Λ′ πρέπει νὰ εἶναι συγκλίνων.

β) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι $\Delta < 45$. Τὸ εἴδωλον Α′Β′ ἐπέχει τότε θέσιν φανταστικοῦ ἀντικειμένου διὰ τὸν φακὸν Λ′, ἡ δὲ ἀπόστασις τοῦ Α′Β′ ἀπὸ τὸν φακὸν Λ′ εἶναι $\pi = 45 - \Delta$. Ἐπειδὴ τὸ σχηματιζόμενον νέον εἴδωλον Α″Β″ εἶναι πραγματικόν, ἡ ἀπόστασις π' εἶναι θετικὴ καὶ ἴση μέ: $\pi' = \nu(45 - \Delta)$. Ἄρα ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις φ' τοῦ φακοῦ Λ′ εἶναι:

$$\varphi' = \frac{\nu}{1 - \nu}(45 - \Delta). \qquad (2)$$

Ἐὰν λοιπὸν εἶναι $\nu < 1$, τότε $\varphi' > 0$· ὁ φακὸς Λ′ εἶναι συγκλίνων. ἂν $\nu > 1$, τότε $\varphi' < 0$· ὁ φακὸς Λ′ εἶναι ἀποκλίνων.

3) Διὰ $\nu = 2$ καὶ $\Delta = 10$ cm, δηλαδὴ διὰ $\Delta < 45$, ἡ ἐξίσωσις (2) δίδει $\varphi' = -70$ cm· ὁ φακὸς Λ′ εἶναι ἀποκλίνων. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν $\pi = 45 - 10 = 35$ cm. Ὁ φακὸς Λ′ δίδει πραγματικὸν εἴδωλον Α″Β″ σχηματιζόμενον εἰς ἀπόστασιν $\pi' = 70$ cm. Εἶναι δὲ $\frac{\pi'}{\pi} = 2$, ἄρα τὸ εἴδωλον Α″Β″ εἶναι διπλάσιον τοῦ ἀντικειμένου Α′Β′.

4) Ἐὰν εἶναι $\nu = 1$.

α) Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει: $\varphi' = \frac{\Delta - 45}{2}$.
Τὸ ἀντικείμενον Α′Β′ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν φακόν: $\pi = (\Delta - 45) = 2\varphi'$· ἄρα τὸ εἴδωλον Α″Β″ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἀντικείμενον δηλαδὴ εἶναι $\nu = 1$.

β) Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ ἐξίσωσις (2) δίδει $\varphi' = \infty$· τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, διότι ποτὲ ἕνας φακὸς δὲν δίδει πραγματικὸν εἴδωλον ἴσον πρὸς τὸ φανταστικὸν ἀντικείμενον.

94. — *Δύο φακοὶ ἔχουν τὸν αὐτὸν κύριον ἄξονα· ὁ ἕνας εἶναι συγκλίνων Λ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 cm, ὁ δὲ ἄλλος εἶναι ἀποκλίνων Λ′ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 6 cm. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο φακῶν εἶναι 14,5 cm. Ἕνα ἀντικείμενον ὕψους 20 m εὑρίσκεται πρὸς τὸ μέρος τοῦ συγκλίνοντος φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν 2 km ἀπὸ αὐτόν. Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν ἀποκλίνοντα φακὸν πρέπει νὰ τεθῇ πέτασμα διὰ νὰ σχηματισθῇ ἐπ᾽ αὐτοῦ τὸ εἴδωλον τοῦ ἀντικειμένου; Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου τούτου;*

Πρακτικῶς τὸ ἀντικείμενον ΑΒ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄπειρον. Ἡ φαινομένη διάμετρός του εἶναι:

$$\alpha = \frac{20}{2000} = \frac{1}{100} \text{ ἀκτινίου}.$$

Ὁ συγκλίνων φακὸς Λ σχηματίζει εἰς τὸ ἑστιακόν του ἐπίπεδον ἕνα εἴδωλον A_1B_1 τὸ ὁποῖον ἔχει μέγεθος: $A_1B_1 = \varphi \times \alpha = 20 \times \frac{1}{100} = \frac{1}{5}$ cm.

Τὸ εἴδωλον τοῦτο παίζει ῥόλον φανταστικοῦ ἀντικειμένου διὰ τὸν ἀποκλίνοντα φακὸν Λ', ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἀπέχει $\pi = 20 - 14{,}5 = 5{,}5$ cm.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν $-\frac{1}{5{,}5} + \frac{1}{\pi'} = -\frac{1}{6}$

εὑρίσκομεν ὅτι τὸ εἴδωλον Α'Β', τὸ ὁποῖον δίδει ὁ φακὸς Λ' ἀπέχει ἀπὸ αὐτόν: $\pi' = 66$ cm. Τὸ τελικὸν εἴδωλον Α'Β' εἶναι πραγματικόν, ἀπέχει 66 cm ἀπὸ τὸν ἀποκλίνοντα φακόν, εἶναι ἀνεστραμμένον ὡς πρὸς τὸ ἀντικείμενον ΑΒ καὶ ἔχει μέγεθος: $A'B' = A_1B_1 \times \frac{\pi'}{\pi} = \frac{1}{5} \times \frac{66}{5{,}5} = \frac{12}{5} = 2{,}4$ cm.

Τὸ πέτασμα πρέπει νὰ τεθῇ εἰς ἀπόστασιν 66 cm ἀπὸ τὸν ἀποκλίνοντα φακόν, τὸ δὲ λαμβανόμενον εἴδωλον θὰ ἔχῃ ὕψος 2,4 cm.

95. — *Ἕνας συγκλίνων φακὸς ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 20 cm. Μὲ τὸν φακὸν τοῦτον λαμβάνομεν τὸ εἴδωλον τοῦ ἡλίου. 1) Ἐὰν ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι 32', πόση εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ λαμβανομένου εἰδώλου; 2) Διὰ νὰ λάβωμεν μεγαλύτερον εἴδωλον, παρεμβάλλομεν μεταξὺ τοῦ προηγουμένου φακοῦ καὶ τοῦ ἑστιακοῦ ἐπιπέδου του ἕνα ἀποκλίνοντα φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως 5 cm. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ δευτέρου φακοῦ ὑπὸ τὸν πρῶτον, διὰ νὰ λάβωμεν εἴδωλον 5 φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ εἴδωλον ποὺ λαμβάνομεν εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν; Πόσον ἀπέχει τὸ τελικὸν εἴδωλον ἀπὸ τὸν πρῶτον φακόν;*

1) Ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι:

$$\alpha = \frac{32}{60} \times \frac{\pi}{180} = \frac{1}{108} \text{ ἀκτινίου.}$$

Ὁ συγκλίνων φακὸς δίδει πραγματικὸν εἴδωλον A_1B_1, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶναι: $A_1B_1 = \varphi \times \alpha = 20 \times \frac{1}{108} = 0{,}18$ cm.

2) Θέλομεν νὰ λάβωμεν πραγματικὸν εἴδωλον Α'Β' τὸ ὁποῖον εἶναι 5 φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ A_1B_1, δηλαδὴ νὰ ἔχῃ διάμετρον:

$$A'B' = 0{,}18 \times 5 = 0{,}9 \text{ cm.}$$

Τὸ εἴδωλον A_1B_1 θὰ παίζῃ ῥόλον φανταστικοῦ ἀντικειμένου διὰ τὸν ἀποκλίνοντα φακόν, ὁ ὁποῖος θὰ δίδῃ τὸ πραγματικὸν εἴδωλον Α'Β'.

Ἐπειδὴ εἶναι: $\frac{A'B'}{A_1B_1} = \frac{\pi'}{\pi} = 5$, εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$-\frac{1}{\pi} + \frac{1}{5\pi} = -\frac{1}{5}$$

ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ φανταστικοῦ ἀντικειμένου A_1B_1 ἀπὸ τὸν ἀποκλίνοντα φακὸν εἶναι: $\pi = 4$ cm.

Ἑπομένως ὁ ἀποκλίνων φακὸς πρέπει νὰ ἀπέχῃ: $20 - 4 = 16$ cm ἀπὸ τὸν συγκλίνοντα φακόν.

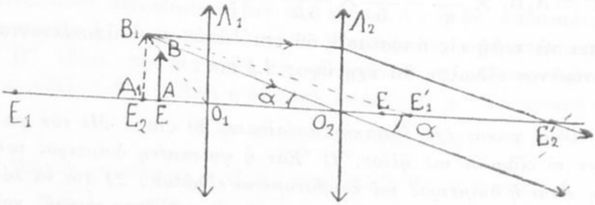
Τὸ τελικὸν εἴδωλον Α'Β' ἀπέχει ἀπὸ τὸν ἀποκλίνοντα φακόν:

$$\pi' = 5 \times 4 = 20 \text{ cm.}$$

Ὥστε τὸ Α'Β' ἀπέχει ἀπὸ τὸν συγκλίνοντα φακόν: $16 + 20 = 36$ cm.

96.— *Ἕνας προσοφθάλμιος ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ὁμοίους λεπτοὺς συγκλίνοντας φακοὺς ἑστιακῆς ἀποστάσεως $\varphi = 3$ cm. Τὰ ὀπτικά των κέντρα εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος καὶ ἀπέχουν μεταξύ των 2 cm. 1) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἑστίαι τοῦ συστήματος τῶν δύο φακῶν. 2) Ἀντικείμενον AB μήκους 1 mm τοποθετεῖται εἰς τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον τοῦ προσοφθαλμίου. Ὑπὸ ποίαν γωνίαν βλέπομεν τὸ εἴδωλόν του; 3) Πόση εἶναι ἡ ἰσχὺς καὶ ἡ μεγέθυνσις τοῦ προσοφθαλμίου τούτου;*

1) Πρῶτα πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ προσοφθαλμίου. Ἂς ὀνομάσωμεν Λ_1 καὶ Λ_2 τοὺς δύο φακούς. Αἱ ἀκτῖνες ποὺ προσπίπτουν ἐπὶ τοῦ Λ_1, παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα, θὰ συνήρχοντο εἰς τὴν ἑστίαν E_1' τοῦ φακοῦ Λ_1, δηλαδὴ εἰς ἀπόστασιν 1 cm πέραν τοῦ φακοῦ Λ_2. Τὸ σημεῖον E_1' παίζει λοιπὸν ρόλον φανταστικοῦ ἀντικειμένου διὰ τὸν φακὸν Λ_2 καὶ αἱ ἐπ' αὐτοῦ προσπίπτουσαι ἀκτῖνες συνέρχονται εἰς ἕνα σημεῖον E, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸν φακὸν Λ_2 ἀπόστασιν π' διδομένην ἀπὸ τὴν σχέσιν:



Σχ. 81

$$-\frac{1}{1}+\frac{1}{\pi'}=\frac{1}{3}\cdot \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi'=\frac{3}{4}=0{,}75 \text{ cm}.$$

Αἱ δύο ἑστίαι τοῦ συστήματος τῶν φακῶν τοῦ προσοφθαλμίου τούτου εὑρίσκονται πρὸ ἑκάστου φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ αὐτὸν 0,75 cm.

2) Τὸ ἀντικείμενον AB εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $\pi_1 = 0{,}75$ cm ἀπὸ τὸν φακὸν Λ_1· ὁ φακὸς αὐτὸς δίδει τὸ φανταστικὸν εἴδωλον A_1B_1 εἰς ἀπόστασιν π_1' ἀπὸ τὸν φακὸν Λ_1, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{\pi_1}-\frac{1}{\pi_1'}=\frac{1}{\varphi} \quad \text{ἢ} \quad \frac{4}{3}-\frac{1}{\pi_1'}=\frac{1}{3}\cdot \qquad \text{ἄρα} \quad \pi_1'=1 \text{ cm}.$$

Ὥστε τὸ A_1B_1 σχηματίζεται ἐπὶ τῆς ἑστίας E_2 τοῦ φακοῦ Λ_2 καὶ ἔχει μῆκος:

$$A_1B_1 = AB\times\frac{\pi_1'}{\pi}=1\times\frac{4}{3}=\frac{4}{3} \text{ mm}.$$

Τὸ A_1B_1 παίζει ρόλον φανταστικοῦ ἀντικειμένου διὰ τὸν φακὸν Λ_2, ὁ ὁποῖος δίδει εἴδωλον εἰς τὸ ἄπειρον. Τὸ εἴδωλον τοῦτο τὸ βλέπομεν ὑπὸ τὴν γωνίαν α, ἡ ὁποία εἶναι:

$$\alpha=\frac{A_1B_1}{O_2A_1}=\frac{4/3}{30}=\frac{4}{90} \text{ ἀκτινίου}, \qquad \text{ἢ} \qquad \alpha = 2^{\circ}\,30'.$$

3) Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἰσχὺς τοῦ προσοφθαλμίου δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$P=\frac{\alpha\ (\text{ἀκτίνια})}{AB\ (\text{μέτρα})} \qquad \text{ἄρα} \qquad P=\frac{4/90}{1/1000}=44{,}4 \text{ διοπτρίαι}.$$

Ἡ μεγέθυνσις διὰ κανονικὸν ὀφθαλμὸν (ἔχοντα ἐλαχίστην ἀπόστασιν εὐκρινοῦς ὁράσεως 0,25 m) εἶναι: $M = P \,.\, 0{,}25 = 11{,}1$.

ε) Παχὺς φακὸς

97.— *Συγκλίνων μηνίσκος ἔχει ἀκτῖνας καμπυλότητος* $R_1 = 25$ cm *καὶ* $R_2 = 50$ cm. *Τὸ πάχος τοῦ φακοῦ κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος εἶναι* 5 mm, *ὁ δὲ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου εἶναι* $\nu = 1{,}6$. *Νὰ εὑρεθῇ: 1) Ἡ θέσις τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου τοῦ φακοῦ ἐν σχέσει πρὸς τὰς δύο ἐπιφανείας του. 2) Ἡ θέσις τῶν δεσμικῶν σημείων τοῦ φακοῦ (σημεῖα τοῦ* Listing). *3) Ἡ ἐστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ.*

1) Ἔστω Ο τὸ ζητούμενον ὀπτικὸν κέντρον καὶ ΙΙ′ μία ἀκτὶς ἐντὸς τοῦ φακοῦ, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου. Ἡ ἀκτὶς ΙΙ′ ἀντιστοιχεῖ εἰς προσπίπτουσαν ΣΙ′ καὶ εἰς ἀναδυομένην ΙΝ, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΣΙ′. Αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος ΚΙ καὶ Κ′Ι′ εἶναι μεταξύ των παράλληλοι. Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΙΚ καὶ ΟΙ′Κ′ εὑρίσκομεν:

$$\frac{OK}{OK'} = \frac{OI}{OI'} = \frac{KI}{K'I'} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{OK}{OK'} = \frac{KA}{K'A'} = \frac{1}{2}$$

ἄρα εἶναι: $\quad OK = \dfrac{OK'}{2} \quad$ ἢ $\quad OK = KK'$.

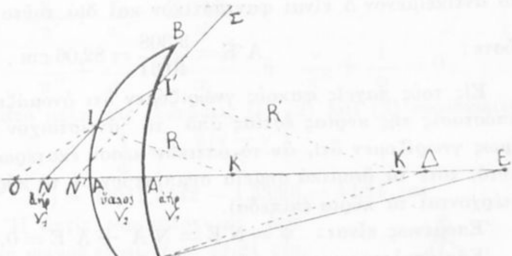
Ἑπομένως ἔχομεν:

$$OK = KK' = AA' + K'A' - KA = 0{,}5 + 50 - 25 = 25{,}5 \text{ cm}$$

καὶ $\quad OA = OK - KA = 25{,}5 - 25 = 0{,}5$ cm.

Τὸ ὀπτικὸν κέντρον Ο εὑρίσκεται πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Α καὶ ἀπέχει ἀπὸ αὐτό: $\quad OA = 5$ mm.

2) Ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν προσπίπτουσαν καὶ τὴν διαθλωμένην ἀκτῖνα εὑρίσκομεν τὰ ζητούμενα δεσμικὰ σημεῖα Ν καὶ Ν′. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σημεῖα αὐτὰ εἶναι τὰ συζυγῆ σημεῖα τοῦ Ο ὡς πρὸς τὰ σφαιρικὰ δίοπτρα ΒΑΓ καὶ ΒΑ′Γ. Τὸ Ν (ἀντικείμενον) ὡς πρὸς τὸ δίοπτρον ΒΑΓ ἔχει ὡς εἴδωλον τὸ Ο. Ἐὰν ν_1 καὶ ν_2 εἶναι οἱ ἀπόλυτοι δεῖκται διαθλάσεως τοῦ ἀέρος καὶ τῆς ὑάλου, τότε γνωρίζομεν ὅτι κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς πορείας τοῦ φωτὸς ἰσχύει ἡ γενικὴ



Σχ. 82

σχέσις:
$$\frac{\nu_1}{AN} + \frac{\nu_2}{AO} = \frac{\nu_2 - \nu_1}{R}.$$

Ἐὰν δὲ λάβωμεν $\nu_1 = 1$ καὶ $\nu_2 = 1{,}6$, τότε ἔχομεν:

$$\frac{1}{AN} - \frac{1{,}6}{0{,}5} = \frac{1{,}6 - 1}{25} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{AN} = \frac{0{,}6}{25} + \frac{1{,}6}{0{,}5} = \frac{80{,}6}{25}.$$

Ἡ ἀπόστασις ΑΟ εἶναι ἀρνητική, διότι τὸ εἴδωλον Ο εἶναι φανταστικόν, ἡ δὲ ἀκτὶς R εἶναι θετικὴ διότι τὸ δίοπτρον εἶναι κυρτόν.

Ἄρα εὑρίσκομεν: $AN = \frac{25}{80,6} = 0,31$ cm ἢ $AN = 3,1$ mm.

Τὸ ἄλλο δεσμικὸν σημεῖον N′ εἶναι τὸ φανταστικὸν εἴδωλον τοῦ O ὡς πρὸς τὸ δίοπτρον ΒΑ′Γ. Ἄρα ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{\nu_2}{A'O} - \frac{\nu_1}{A'N'} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{R'} \quad \text{εὑρίσκομεν:} \quad \frac{1,6}{1} - \frac{1}{A'N'} = \frac{1 - 1,6}{50}.$$

Ἄρα $A'N' = \frac{50}{80,6} = 0,62$ cm ἢ $A'N' = 6,2$ mm.

Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο δεσμικῶν σημείων N καὶ N′ εἶναι:

$$NN' = A'N - A'N' = (A'A + AN) - A'N' = (5 + 3,1) - 6,2 = 1,9 \text{ mm}.$$

3) Ἡ ἀκτὶς σι προσπίπτει ἐπὶ τοῦ φακοῦ παραλλήλως πρὸς τὸν κύριον ἄξονά του καὶ διαθλᾶται διαδοχικῶς ἐπὶ τῶν δύο ἐπιφανειῶν του. Μετὰ τὴν διάθλασίν της ἐπὶ τοῦ διόπτρου ΒΑΓ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Δ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ κυρία ἑστία τοῦ διόπτρου τούτου. Καὶ μετὰ τὴν διάθλασίν της διὰ τοῦ διόπτρου ΒΑ′Γ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ε, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ κυρία ἑστία τοῦ φακοῦ. Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον τῶν διόπτρων διὰ τὴν πρώτην διάθλασιν εὑρίσκομεν:

$$\frac{\nu_1}{\infty} + \frac{\nu_2}{A\Delta} = \frac{\nu_2 - \nu_1}{R} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{\infty} + \frac{1,6}{A\Delta} = \frac{1,6 - 1}{25}\cdot$$

ἄρα: $A\Delta = \frac{200}{3} = 66,66$ cm· καὶ $A'\Delta = 66,66 - 0,5 = 66,16$ cm.

Διὰ τὴν δευτέραν διάθλασιν ἔχομεν:

$$-\frac{\nu_2}{A'\Delta} + \frac{\nu_1}{A'E} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{R'} \quad \text{ἢ} \quad -\frac{1,6}{66,16} + \frac{1}{A'E} = \frac{1 - 1,6}{50}\cdot$$

τὸ ἀντικείμενον Δ εἶναι φανταστικὸν καὶ διὰ τοῦτο τὸ A′Δ εἶναι ἀρνητικόν· ὥστε:

$$A'E = \frac{3\,308}{40,31} = 82,06 \text{ cm}.$$

Εἰς τοὺς παχεῖς φακοὺς γνωρίζομεν ὅτι ὀνομάζεται ἑστιακὴ ἀπόστασις ἡ ἀπόστασις τῆς κυρίας ἑστίας ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον κύριον ἐπίπεδον. Ἐπίσης ὅμως γνωρίζομεν ὅτι, ἂν τὸ ὀπτικὸν μέσον ἑκατέρωθεν τοῦ φακοῦ εἶναι τὸ αὐτό, τότε τὰ δεσμικὰ σημεῖα συμπίπτουν μὲ τὰ κύρια σημεῖα (διὰ τῶν ὁποίων διέρχονται τὰ κύρια ἐπίπεδα).

Ἑπομένως εἶναι: $\phi = N'E = N'A' + A'E = 0,62 + 82,06 = 82,68$ cm.

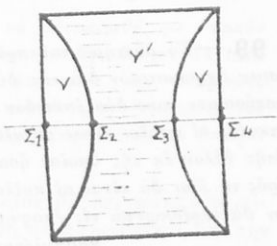
Ἐὰν ὑπολογίσωμεν τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ φακοῦ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου τῶν λεπτῶν φακῶν, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἑστιακή του ἀπόστασις εἶναι:

$$\frac{1}{\phi} = (\nu - 1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) = \frac{0,6}{50}, \quad \text{ἤτοι} \quad \phi = \frac{50}{0,6} = 83,33 \text{ cm}.$$

98. — *Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν συγκλίνοντα φακὸν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον: Δύο ὅμοιοι φακοὶ ὑάλινοι, ἔχοντες τὴν μίαν ἐπιφάνειάν των ἐπίπεδον, ἀποτελοῦν τὰ ἀπέναντι τοιχώματα ἑνὸς δοχείου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου θέτομεν ὕδωρ. Αἱ ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι τῶν φακῶν εὑρίσκονται πρὸς τὰ ἔξω, ἐνῶ αἱ καμπύλαι ἐπιφάνειαί των εὑρίσκονται εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸ ὕδωρ. Οἱ δύο φακοὶ ἔχουν κοινὸν ἄξονα, τὸν ἄξονα τοῦ συστήματος. 1) Διὰ μίαν ἀκτινοβολίαν Α οἱ δεῖκται διαθλάσεως τῆς ὑάλου καὶ τοῦ ὕδατος εἶναι ἀντιστοίχως:* $\nu = 1,5442$ *καὶ* $\nu' = 1,3330$. *Τὸ πάχος τοῦ στρώμα-*

τος τοῦ ὕδατος ὡς καὶ τῆς ὑάλου θεωροῦνται ἀσήμαντα. Νὰ εὑρεθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῶν δύο ὁμοίων φακῶν, ἵνα ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ συστήματος εἶναι 100 cm. Ποῖον εἶναι τὸ μικρότερον δυνατὸν πάχος τοῦ συστήματος, ἐὰν ἡ διάμετρος ἑκάστου φακοῦ εἶναι 4 cm; 2) Διὰ μίαν ἄλλην ἀκτινοβολίαν Β οἱ ἀντίστοιχοι δεῖκται διαθλάσεως τῆς ὑάλου καὶ τοῦ ὕδατος εἶναι: $\eta = 1{,}6305$ *καὶ* $\eta' = 1{,}4040$. *Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἀπέχουν μεταξύ των αἱ δύο ἑστίαι τοῦ συστήματος, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἀκτινοβολίας Α καὶ Β.*

1) Τὸ σύστημα εἶναι ἕνα λεπτὸν σύστημα. Αἱ φωτειναὶ ἀκτῖνες, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα, διέρχονται διὰ τοῦ ἐπιπέδου διόπτρου Σ_1 χωρὶς ἐκτροπήν, ἔπειτα διαθλῶνται διὰ τοῦ σφαιρικοῦ διόπτρου Σ_2 (ὕαλος—ὕδωρ), τὸ ὁποῖον ἔχει κέντρον καμπυλότητος K_2 καὶ ἑπομένως ἀκτῖνα καμπυλότητος $K_2\Sigma_2 = R$. Ἔπειτα διέρχονται διὰ τῶν διόπτρων Σ_3, Σ_4 καὶ τέλος συνέρχονται εἰς ἕνα σημεῖον Ε τοῦ ἄξονος, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ ἑστία τοῦ συστήματος. Καὶ ἐπειδὴ τὸ σύστημα εἶναι λεπτόν, ἡ ἑστιακή του ἀπόστασις φ εἶναι: $\Sigma_4 E = \varphi$. Αἱ καμπῦλαι ἐπιφάνειαι τῶν δύο ὁμοίων φακῶν θὰ εἶναι ἢ κυρταὶ ἢ κοῖλαι. Ἑπομένως αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος τῶν διόπτρων Σ_2 καὶ Σ_3 θὰ εἶναι ἑτερόσημοι. Ἂς ἐξετάσωμεν τὰς διαθλάσεις τῶν ἀκτίνων διὰ τῶν διόπτρων Σ_2, Σ_3 καὶ Σ_4. Θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:



Σχ. 83

διὰ τὸ δίοπτρον Σ_2: $\quad \dfrac{\nu}{\infty} + \dfrac{\nu'}{\pi'} = \dfrac{\nu' - \nu}{-R} \quad$ ἢ $\quad \dfrac{\nu}{\infty} + \dfrac{\nu'}{\pi'} = \dfrac{\nu - \nu'}{R} \qquad (1)$

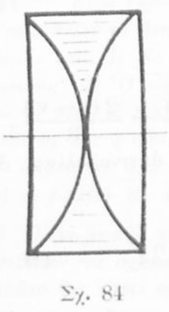
διὰ τὸ δίοπτρον Σ_3: $\quad -\dfrac{\nu'}{\pi'} + \dfrac{\nu}{\pi''} = \dfrac{\nu - \nu'}{R} \qquad (2)$

διὰ τὸ δίοπτρον Σ_4: $\quad -\dfrac{\nu}{\pi''} + \dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{1 - \nu}{\infty} \quad$ ἢ $\quad \dfrac{\nu}{\pi''} + \dfrac{1}{\varphi} = 0. \qquad (3)$

Ἂν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1), (2) καὶ (3) εὑρίσκομεν:

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{2(\nu - \nu')}{R} \qquad (4)$$

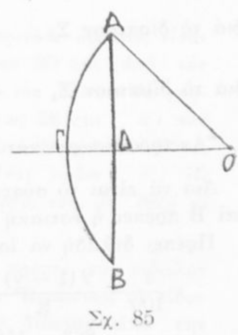
ἄρα: $\qquad R = 2\varphi\,(\nu - \nu') = 200\,(1{,}5442 - 1{,}3330) = 42{,}24 \text{ cm}.$



Σχ. 84

Ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος ἑκάστου φακοῦ εἶναι $R = 42{,}24$ cm, ἤτοι ὁ φακὸς εἶναι συγκλίνων καὶ μάλιστα ἐπιπεδόκυρτος.

Τὸ σύστημα θὰ ἔχῃ τὸ μικρότερον πάχος, ὅταν αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαί των ἐφάπτωνται. Θὰ εὕρωμεν τὸ πάχος ἑκάστου φακοῦ. Ἂς θεωρήσωμεν περιφέρειαν ἀκτῖνος $OA = R$ καὶ τόξον ποὺ ἔχει χορδὴν $AB = 4$ cm.



Σχ. 85

Τὸ μῆκος $\Gamma\Delta = x$ (ἤτοι τὸ πάχος τοῦ φακοῦ) δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$\overline{ΑΔ}^2 = x(2R - x)$ ἢ κατὰ προσέγγισιν $\overline{ΑΔ}^2 = 2Rx$·

ἄρα $x = \dfrac{\overline{ΑΔ}^2}{2R} = \dfrac{4}{2R} = \dfrac{2}{R} = \dfrac{2}{42}$ cm.

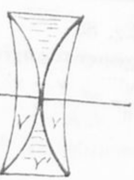
Τὸ ἐλάχιστον λοιπὸν πάχος τοῦ συστήματος εἶναι:

$$2x = \frac{4}{42} \text{ cm}, \quad \text{δηλαδὴ περίπου} \quad 2x = \frac{1}{10} \text{ cm} = 1 \text{ mm}.$$

2) Διὰ τὴν ἀκτινοβολίαν Β ἡ ἐξίσωσις (4) δίδει ὡς ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ συστήματος: $φ' = \dfrac{R}{2(η - η')} = \dfrac{42,24}{0.4530} = 93,245$ cm.

Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ἑστιῶν εἶναι: $φ - φ' = 100 - 93,245 = 6,755$ cm.

99. — *Τὸ σύστημα τοῦ προηγουμένου προβλήματος 98 θέλομεν νὰ τὸ καταστήσωμεν ἀχρωματικὸν διὰ τὰς δύο ἀκτινοβολίας Α καὶ Β. Πρὸς τοῦτο θὰ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς δύο ἐπιπεδοκύρτους φακοὺς μὲ δύο ἄλλους ὁμοίους μεταξύ των φακούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι συγκλίνοντες μηνίσκοι καὶ εἶναι κατασκευασμένοι ἐκ τῆς αὐτῆς ὑάλου ἐκ τῆς ὁποίας ἦσαν κατασκευασμένοι καὶ οἱ ἀντικαθιστάμενοι φακοί. Πρὸς τὰ ἔξω θὰ εἶναι αἱ κοῖλαι ἐπιφάνειαι τῶν φακῶν, ἐνῷ αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαί των θὰ εὑρίσκωνται εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸ ὕδωρ. Ποῖαι πρέπει νὰ εἶναι αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος τῶν δύο ἐπιφανειῶν ἑκάστου φακοῦ, ἐὰν ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀχρωματικοῦ συστήματος θὰ εἶναι πάλιν 100 cm;*



Σχ. 86

Ἔστω R' ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς ἐξωτερικῆς κοίλης ἐπιφανείας τῶν φακῶν καὶ R ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας των. Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ φῶς διερχόμενον διὰ τοῦ συστήματος τούτου ὑφίσταται διάθλασιν διὰ τεσσάρων σφαιρικῶν διόπτρων, θὰ ἔχωμεν τὰς κατωτέρω σχέσεις:

διὰ τὸ δίοπτρον $Σ_1$: $\dfrac{1}{\infty} - \dfrac{ν}{π'} = \dfrac{ν - 1}{-R'} = \dfrac{1 - ν}{R'}$

διὰ τὸ δίοπτρον $Σ_2$: $-\dfrac{ν}{π'} + \dfrac{ν}{π''} = \dfrac{ν' - ν}{-R} = \dfrac{ν - ν'}{R}$

διὰ τὸ δίοπτρον $Σ_3$: $-\dfrac{ν'}{π''} + \dfrac{ν}{π'''} = \dfrac{ν - ν'}{R}$

διὰ τὸ δίοπτρον $Σ_4$: $-\dfrac{ν}{π'''} + \dfrac{1}{φ} = \dfrac{1 - ν}{R'}$.

Ἂν προσθέσωμεν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν: $\dfrac{1}{φ} = \dfrac{2(1 - ν)}{R'} + \dfrac{2(ν - ν')}{R}$.

Διὰ νὰ εἶναι τὸ σύστημα ἀχρωματικὸν καὶ διὰ τὰς δύο ἀκτινοβολίας Α καὶ Β πρέπει ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις νὰ εἶναι 100 cm. Πρέπει δηλαδὴ νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$\frac{1}{100} = \frac{2(1 - ν)}{R'} + \frac{2(ν - ν')}{R} = \frac{2(1 - η)}{R'} + \frac{2(η - η')}{R} \qquad (1)$$

ἄρα $\dfrac{863}{R'} = \dfrac{153}{R}$ καὶ $R' = \dfrac{843}{153} R = 5,64$ R.

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν: $\frac{1}{100}=\frac{2(1-\nu)}{5,64\,R}+\frac{2(\nu-\nu')}{R}$.

Ἄρα αἱ ζητούμεναι ἀκτῖνες καμπυλότητος εἶναι:

$R = 23$ cm καὶ $R' = 129$ cm.

VI. ΟΡΑΣΙΣ

100 — *Ὁ ὀφθαλμὸς ἑνὸς ὑπερμέτρωπος ἠμπορεῖ νὰ ἐξομοιωθῇ μὲ φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως 15 mm, εἰς τὸν ὁποῖον ὁ ἀμφιβληστροειδὴς ἀπέχει 14 mm ἀπὸ τὸ ὀπτικὸν κέντρον. Νὰ εὑρεθῇ: 1) Ἡ μεγίστη ἀπόστασις τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως. 2) Ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἔμπροσθεν τοῦ ὀφθαλμοῦ τούτου, ὥστε νὰ ἠμπορῇ ὁ ὀφθαλμὸς νὰ βλέπῃ εὐκρινῶς εἰς τὸ ἄπειρον χωρὶς προσαρμογήν.*

1) Ἔστω π ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου, τὸ ὁποῖον θὰ ἐσχημάτιζε τὸ εἴδωλόν του εἰς ἀπόστασιν $\pi' = 14$ mm. Ἡ ἀπόστασις αὐτὴ εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi'}=\frac{1}{\varphi}$ ἢ $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{1,4}=\frac{1}{1,5}$ ἄρα $\pi = -21$ cm.

Τὸ ἀπώτερον λοιπὸν σημεῖον τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι φανταστικόν· εὑρίσκεται ὄπισθεν τοῦ ἀμφιβληστροειδοῦς καὶ εἰς ἀπόστασιν 21 cm ἀπὸ τὸ ὀπτικὸν κέντρον. Ἄρα ὁ ὀφθαλμὸς οὗτος βλέπει καὶ τὰ μακρινὰ ἀντικείμενα μὲ προσαρμογήν.

2) Ἕνα ἀντικείμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄπειρον, πρέπει νὰ σχηματίζῃ τὸ εἴδωλόν του εἰς ἀπόστασιν 21 cm ὄπισθεν τοῦ ἀμφιβληστροειδοῦς. Ὥστε πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἔμπροσθεν τοῦ ὀφθαλμοῦ συγκλίνων φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως 21 cm. Ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ τούτου εἶναι:

$P = \frac{1}{0,21}$ διοπτρίαι ἢ $P = 4,76$ διοπτρίαι.

101. — *Ἕνας γέρων, τοῦ ὁποίου ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι 1,20 m, θέλει νὰ διαβάζῃ βιβλίον, εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 30 cm ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν του. 1) Νὰ εὑρεθῇ πόση εἶναι ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ τὸν ὁποῖον θὰ χρησιμοποιήσῃ. 2) Ὁ γέρων διαθέτει φακοὺς ἑστιακῆς ἀποστάσεως 36 cm· α') ποῦ πρέπει νὰ θέσῃ τὸ βιβλίον, ὥστε νὰ ἠμπορῇ νὰ διαβάζῃ ὅσον τὸ δυνατὸν καλύτερα, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ ἀπὸ τὸν ὀφθαλμὸν εἶναι μηδέν; β') εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν ὀφθαλμὸν πρέπει νὰ θέσῃ τοὺς φακούς του, ἂν θέλῃ νὰ κρατῇ τὸ βιβλίον εἰς ἀπόστασιν 30 cm;*

1) Ὅταν κρατῇ τὸ βιβλίον εἰς ἀπόστασιν $\pi = 0,30$ m πρέπει τὸ εἴδωλον τοῦ βιβλίου νὰ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν $\pi' = 1,20$ m. Ἑπομένως τὸ εἴδωλον τοῦτο θὰ εἶναι φανταστικὸν καὶ ἡ ἰσχὺς P τοῦ φακοῦ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\frac{1}{0,30}-\frac{1}{1,20}=P$· ἄρα $P = 2,5$ διοπτρίαι.

Θὰ χρησιμοποιήσῃ λοιπὸν συγκλίνοντας φακοὺς ἰσχύος $P = 2{,}5$ διοπτριῶν.

2.—α΄) Ὅταν χρησιμοποιῇ φακούς, διὰ τοὺς ὁποίους εἶναι $\varphi = 36$ cm, τότε πρέπει νὰ τοποθετῇ τὸ βιβλίον εἰς ἀπόστασιν π_1 ὥστε τὸ εἴδωλόν του νὰ σχηματίζεται πάλιν εἰς ἀπόστασιν $\pi_1' = 120$ cm.

Ἡ ἀπόστασις π_1 εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{\pi_1} - \frac{1}{120} = \frac{1}{36}\cdot \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi_1 = 27{,}69 \text{ cm}.$$

β΄) Ἔστω x ἡ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν. Τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ βιβλίου ἀπὸ τὸν φακὸν εἶναι: $\pi_2 = (30 - x)$ cm, τὸ δὲ εἴδωλον πρέπει νὰ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν φακὸν: $\pi_2' = (120 - x)$ cm.

Ἐπομένως ἔχομεν τὴν σχέσιν:

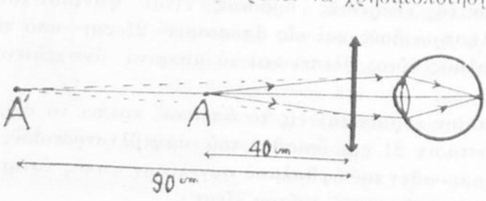
$$\frac{1}{30 - x} - \frac{1}{120 - x} = \frac{1}{36} \qquad \text{ἢ} \qquad x^2 - 150x + 360 = 0\cdot$$

ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν: $x' = 147{,}5$ cm καὶ $x'' = 2{,}5$ cm.

Παραδεκτὴ εἶναι μόνον ἡ δευτέρα ῥίζα καὶ ἐπομένως πρέπει ἡ ἀπόστασις τῶν φακῶν ἀπὸ ἕκαστον ὀφθαλμὸν νὰ εἶναι: $x = 2{,}5$ cm.

102.— *Εἰς ἕνα ὑπερμέτρωπα ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι* 90 cm. *Νὰ εὑρεθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἰσχὺς τῶν φακῶν, τοὺς ὁποίους θὰ χρησιμοποιῇ, διὰ νὰ διακρίνῃ εὐκρινῶς εἰς ἀπόστασιν* 40 cm.

Ὁ ἄνθρωπος αὐτὸς πρέπει νὰ χρησιμοποιήσῃ συγκεντρωτικὸν φακόν, ὥστε αἱ ἀκτῖνες, αἱ ὁποῖαι θὰ προέρχωνται ἀπὸ τὸ A, μετὰ τὴν διάθλασίν των διὰ τοῦ φακοῦ, νὰ φαίνωνται προερχόμεναι ἀπὸ τὸ A΄. Ὥστε τὸ A΄ θὰ εἶναι τὸ φανταστικὸν εἴδωλον τοῦ A. Ἐπομένως πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:



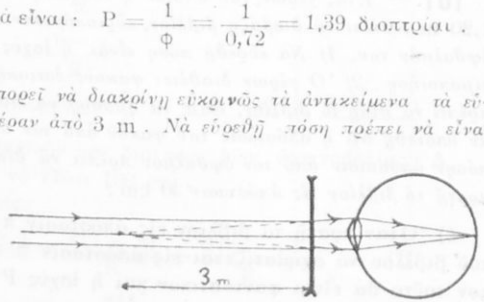
Σχ. 87

$$\frac{1}{40} - \frac{1}{90} = \frac{1}{\varphi}\cdot \qquad \text{ἄρα} \qquad \varphi = 72 \text{ cm}.$$

Ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ πρέπει νὰ εἶναι: $P = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{0{,}72} = 1{,}39$ διοπτρίαι.

103.— *Ἕνας μύωψ δὲν ἠμπορεῖ νὰ διακρίνῃ εὐκρινῶς τὰ ἀντικείμενα τὰ εὑρισκόμενα εἰς ἀπόστασιν μεγαλυτέραν ἀπὸ* 3 m. *Νὰ εὑρεθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἰσχὺς τῶν φακῶν, τοὺς ὁποίους θὰ χρησιμοποιῇ, διὰ νὰ διακρίνῃ εὐκρινῶς τὰ μακρινὰ ἀντικείμενα.*

Ὁ ἄνθρωπος αὐτὸς πρέπει νὰ χρησιμοποιήσῃ ἀποκεντρωτικὸν φακόν, ὥ-



Σχ. 88

στε αἱ παράλληλοι ἀκτῖνες, ποὺ προέρχονται ἀπὸ τὰ μακρινὰ ἀντικείμενα, μετὰ τὴν διάθλασίν των διὰ τοῦ φακοῦ, νὰ φαίνωνται προερχόμεναι ἀπὸ σημεῖον εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 3 m. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἡ φανταστικὴ ἑστία τοῦ φακοῦ. Ὥστε ὁ φακὸς πρέπει νὰ ἔχῃ ἑστιακὴν ἀπόστασιν 3 m.

Ἑπομένως ἡ ἰσχύς του εἶναι : $P = -\frac{1}{3}$ διοπτρίας.

104.— *Ἕνας μύωψ ὀφθαλμός, τοῦ ὁποίου τὰ ὅρια τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι* 60 cm *καὶ* 8 cm, *χρησιμοποιεῖ φακὸν ἰσχύος* —1 *διοπτρίας. Νὰ εὑρεθῇ· 1) Ποῖα εἶναι τὰ νέα ὅρια τῆς ὁράσεώς του. 2) Πόση εἶναι ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ χρησιμοποιῇ, διὰ νὰ βλέπῃ εὐκρινῶς καὶ χωρὶς προσαρμογήν: α΄) ἕνα ἀντικείμενον ποὺ ἀπέχει* 5 m *καὶ β΄) εἰς τὸ ἄπειρον.*

1) Ἔστω Α΄ τὸ ἀπώτερον σημεῖον τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως. Ὅταν ὁ ὀφθαλμὸς χρησιμοποιῇ τὸν φακόν, τότε αἱ ἀκτῖνες ποὺ προέρχονται ἀπὸ τὸ νέον ἀπώτερον σημεῖον Α πρέπει, μετὰ τὴν διάθλασίν των διὰ τοῦ φακοῦ, νὰ φαίνωνται προερχόμεναι ἀπὸ τὸ Α΄. Ὥστε τὸ Α΄ θὰ εἶναι τὸ εἴδωλον τοῦ Α. Ἑπομένως θὰ ἰσχύῃ τότε ἡ σχέσις : $\frac{1}{\pi} - \frac{1}{0{,}60} = -1$· ἄρα $\pi = 1{,}50$ m.

Τὸ νέον λοιπὸν ἀπώτερον σημεῖον τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως ἀπέχει 150 cm ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι διὰ τὸ πλησιέστερον σημεῖον τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν: $\frac{1}{\pi_1} - \frac{1}{0{,}08} = -1$· ἄρα $\pi_1 = 0{,}087$ m.

Τὸ νέον πλησιέστερον σημεῖον τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως ἀπέχει 87 mm ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν. Ὥστε τὰ νέα ὅρια τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι 150 cm καὶ 8,7 cm.

2) Διὰ νὰ βλέπῃ εὐκρινῶς καὶ χωρὶς προσαρμογὴν ἕνα ἀντικείμενον, ποὺ ἀπέχει 5 m, πρέπει νὰ χρησιμοποιῇ φακόν τοῦ ὁποίου ἡ ἰσχὺς P δίδεται ἀπὸ

τὴν σχέσιν: $\frac{1}{5} - \frac{1}{0{,}60} = P$.

ὥστε εἶναι: $P = -\frac{22}{15} = -1{,}46$ διοπτρίαι.

Διὰ νὰ βλέπῃ εἰς ἀπόστασιν 5 m πρέπει νὰ χρησιμοποιῇ ἀποκλίνοντα φακὸν ἰσχύος 1,46 διοπτριῶν. Καὶ διὰ νὰ βλέπῃ εἰς τὸ ἄπειρον πρέπει πάλιν νὰ χρησιμοποιῇ φακὸν τοῦ ὁποίου ἡ ἰσχὺς δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$\frac{1}{\infty} - \frac{1}{0{,}60} = P_1$· ὥστε εἶναι: $P_1 = -\frac{1}{0{,}60} = -\frac{5}{3} = -1{,}66$ διοπτρίαι.

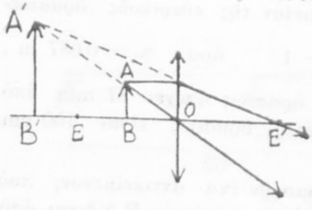
Πρέπει λοιπὸν νὰ χρησιμοποιῇ τότε ἀποκλίνοντα φακὸν ἰσχύος —1,66 διοπτριῶν.

VII. ΜΙΚΡΟΣΚΟΠΙΑ

105. — *Δι' ἕνα μύωπα ὀφθαλμὸν τὰ ὅρια τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι* 8,5 cm *καὶ* 21 cm. *Νὰ εὑρεθῇ : 1) Πόση εἶναι εἰς ἀκτίνια καὶ πρῶτα λεπτὰ ἡ μεγίστη φαινομένη διάμετρος ὑπὸ τὴν ὁποίαν βλέπει ἀντικείμενον ποὺ ἔχει μῆκος* 0,1 cm. *2) Ὁ ὀφθαλμὸς αὐτὸς παρατηρεῖ τὸ ἴδιον ἀντικείμενον διὰ μέσου συγκλίνοντος φακοῦ ἰσχύος* 20 *διοπτριῶν. Ὁ ὀφθαλμὸς ἀπέχει* 1 cm *ἀπὸ τὸν φακὸν καὶ διὰ νὰ διακρίνῃ εὐκρινῶς τὸ σχηματιζόμενον εἴδωλον, πρέπει τὸ ἀντικείμενον νὰ τοποθετηθῇ μεταξὺ δύο σημείων* Γ *καὶ* Δ *τοῦ ἄξονος τοῦ φακοῦ. Νὰ προσδιορισθῇ : α') ἡ θέσις τῶν δύο αὐτῶν σημείων· β') αἱ διαστάσεις τῶν ἀντιστοίχων δύο εἰδώλων· γ') ἡ ἰσχὺς καὶ ἡ μεγέθυνσις τοῦ φακοῦ.*

1) Ὁ ὀφθαλμὸς βλέπει τὸ ἀντικείμενον ὑπὸ τὴν μεγαλυτέραν φαινομένην διάμετρον α, ὅταν τὸ ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς τὴν μικροτέραν δυνατὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν. Ἄρα ἡ ζητουμένη φαινομένη διάμετρος α τοῦ ἀντικειμένου εἶναι: $\alpha = \dfrac{0{,}1}{8{,}5} = \dfrac{1}{85}$ ἀκτινίου ἢ περίπου $\alpha = 40$ λεπτά.

2.—α') Διὰ νὰ βλέπῃ ὁ ὀφθαλμὸς εὐκρινῶς τὸ ἀντικείμενον, πρέπει τὸ εἴδωλον νὰ σχηματίζεται εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὸν ὀφθαλμὸν νὰ εἶναι 8,5 ἕως 21 cm, δηλαδὴ πρέπει τὸ εἴδωλον νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὸν φακὸν 7,5 ἕως 20 cm. Διὰ τὰς δύο αὐτὰς ἀκραίας θέσεις τοῦ εἰδώλου αἱ ἀντίστοιχοι θέσεις Γ καὶ Δ τοῦ ἀντικειμένου προσδιορίζονται ἀπὸ τὰς σχέσεις:



Σχ. 89

$$\frac{1}{\pi_1} - \frac{1}{7{,}5} = \frac{1}{5} \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{\pi_2} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}.$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς εὑρίσκομεν: $\pi_1 = 3$ cm καὶ $\pi_2 = 4$ cm· ὥστε τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ἀπέχουν ἀντιστοίχως ἀπὸ τὸν φακόν:

τὸ Γ: 3 cm καὶ τὸ Δ: 4 cm.

β') Ὅταν τὸ ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ αἱ ἀντίστοιχοι διαστάσεις τῶν εἰδώλων εἶναι:

εἰς τὸ Γ: $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{7{,}5}{3}$ ἢ $A_1B_1 = 0{,}1 \times 2{,}5 = 0{,}25$ cm

εἰς τὸ Δ: $\dfrac{A_2B_2}{AB} = \dfrac{20}{4}$ ἢ $A_2B_2 = 0{,}1 \times 5 = 0{,}50$ cm.

γ') Ἡ ἰσχὺς P τοῦ φακοῦ δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν: $P = \dfrac{\alpha}{AB}$,

ὅπου α εἶναι ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ εἰδώλου καὶ AB τὸ μέγεθος τοῦ ἀντικειμένου. Ὅταν τὸ ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ, αἱ ἀντίστοιχοι φαινόμεναι διάμετροι α_1 καὶ α_2 τῶν εἰδώλων εἶναι:

τὸ AB εἰς τὸ Γ: $\alpha_1 = \frac{A_1B_1}{8,5} = \frac{0,25}{8,5} = \frac{1}{34}$ ἀκτινίου

τὸ AB εἰς τὸ Δ: $\alpha_2 = \frac{A_2B_2}{21} = \frac{0,50}{21} = \frac{1}{42}$ ἀκτινίου.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $AB = 0,001$ m ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ διὰ τὰς δύο θέσεις τοῦ ἀντικειμένου εἶναι:

τὸ AB εἰς τὸ Γ: $P_1 = \frac{\alpha_1}{AB} = \frac{1000}{34} = 29,4$ διοπτρίαι·

τὸ AB εἰς τὸ Δ: $P_2 = \frac{\alpha_2}{AB} = \frac{1000}{42} = 23,8$ διοπτρίαι.

Ἡ μεγέθυνσις M τοῦ φακοῦ εἶναι: $M = \frac{\alpha_1}{\alpha}$.

Ὅταν λοιπὸν τὸ ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ, αἱ ἀντίστοιχοι μεγεθύνσεις τοῦ φακοῦ εἶναι:

τὸ AB εἰς τὸ Γ: $M_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{1}{34} : \frac{1}{85} = \frac{85}{34} = 2,5$

τὸ AB εἰς τὸ Δ: $M_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha} = \frac{1}{42} : \frac{1}{85} = \frac{85}{42} = 2$.

106. — *Συγκλίνων φακὸς ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν φ καὶ χρησιμοποιεῖται ὡς ἁπλοῦν μικροσκόπιον. Τὸ ὀπτικὸν κέντρον τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ παρατηρητοῦ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν α ἀπὸ τὸ ὀπτικὸν κέντρον τοῦ φακοῦ. Ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως διὰ τὸν παρατηρητὴν τοῦτον εἶναι Δ. Νὰ εὑρεθῇ πῶς μεταβάλλεται ἡ ἰσχὺς τοῦ μικροσκοπίου μετὰ τῆς ἀποστάσεως Δ διὰ τὰς ἑξῆς περιπτώσεις:* $\alpha < \varphi$, $\alpha = \varphi$ *καὶ* $\alpha > \varphi$.

Ἔστω K τὸ ὀπτικὸν κέντρον τοῦ ὀφθαλμοῦ. Τὸ εἴδωλον A′B′ τοῦ ἀντικειμένου AB σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν $KB' = \Delta$ ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν.

Ἡ ἰσχὺς P τοῦ ἁπλοῦ μικροσκοπίου εἶναι:

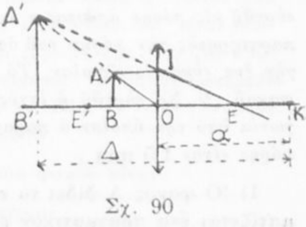
$$P = \frac{A'B'}{KB'} \times \frac{1}{AB} = \frac{A'B'}{AB} \times \frac{1}{\Delta}.$$

Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα EA′B′ καὶ EIO εὑρίσκομεν:

$$\frac{A'B'}{IO} = \frac{EB'}{EO} \quad \text{ἢ} \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{KB' - KE}{\varphi} = \frac{\Delta - (\alpha - \varphi)}{\varphi} = \frac{\Delta - \alpha + \varphi}{\varphi}.$$

Ἑπομένως ἡ ἰσχὺς εἶναι: $P = \frac{\varphi + \Delta - \alpha}{\varphi\Delta}$

ἢ $P = \frac{1}{\varphi}\left(1 + \frac{\varphi - \alpha}{\Delta}\right)$.



Σχ. 90

α′) Ἐὰν εἶναι $\alpha < \varphi$, τότε ἡ διαφορὰ $\varphi - \alpha$ εἶναι θετική· ὅταν τὸ Δ ἐλαττώνεται, τὸ κλάσμα $\frac{\varphi - \alpha}{\Delta}$ αὐξάνεται καὶ ἑπομένως αὐξάνεται καὶ ἡ ἰσχὺς P.

β′) Ἐὰν εἶναι $\alpha = \varphi$, τότε ἡ ἰσχὺς εἶναι $P = \frac{1}{\varphi}$, δηλαδὴ εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν εὐκρινοῦς ὁράσεως τοῦ παρατηρητοῦ.

γ') Τέλος ἐὰν εἶναι $\alpha > \varphi$, τότε εἶναι $\varphi - \alpha < 0$ καὶ ἡ ἰσχὺς εἶναι :

$$P = \frac{1}{\varphi}\left(1 - \frac{\alpha - \varphi}{\Delta}\right)$$

ὅταν λοιπὸν τὸ Δ αὐξάνεται, τὸ κλάσμα $\frac{\alpha - \varphi}{\Delta}$ ἐλαττώνεται καὶ ἑπομένως ἡ ἰσχὺς P αὐξάνεται.

107. — *Ἕνας παρατηρητής, τοῦ ὁποίου ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι 12 cm, χρησιμοποιεῖ ὡς ἁπλοῦν μικροσκόπιον συγκλίνοντα φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως 4 cm. Κατὰ τὴν παρατήρησιν τῶν ἀντικειμένων ὁ παρατηρητὴς θέτει τὸν ὀφθαλμόν του ἐπὶ τῆς ἑστίας τοῦ φακοῦ. 1) Πόση εἶναι ἡ μεγέθυνσις τὴν ὁποίαν ἐπιτυγχάνει καὶ πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸν φακόν; 2) Τὸ παρατηρούμενον ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς τὸν πυθμένα δοχείου, τὸ ὁποῖον περιέχει ὕδωρ. Ἐὰν τὸ ὕψος τοῦ ὕδατος εἶναι 2 cm, ὁ δὲ δείκτης διαθλάσεως αὐτοῦ εἶναι 4/3, νὰ εὑρεθῇ κατὰ πόσον καὶ κατὰ ποίαν φορὰν πρέπει νὰ μετακινήσῃ ὁ παρατηρητὴς τὸν φακὸν διὰ νὰ ἐξακολουθήσῃ νὰ βλέπῃ εὐκρινῶς τὸ εἴδωλον.*

1) Ἐὰν Δ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως, τότε εἶναι:

Ἡ μεγέθυνσις M: $\quad M = \frac{\Delta}{\varphi} = \frac{12}{4} = 3$.

Τὸ εἴδωλον ἀπέχει ἀπὸ τὸν φακόν: $\quad \pi' = 12 - 4 = 8$ cm.

Ἡ ἀπόστασις π τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸν φακὸν εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{\pi} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi = \frac{8}{3} = 2{,}33 \text{ cm}.$$

2) Τὸ ἀντικείμενον φαίνεται ἀνυψούμενον κατά:

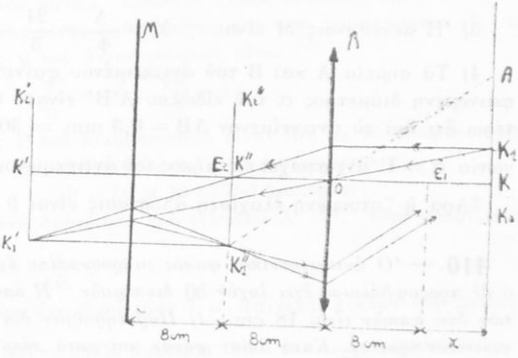
$$2\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \text{ cm}.$$

Ἄρα ὁ φακὸς πρέπει νὰ ὀπισθοχωρήσῃ κατὰ 0,5 cm.

108. — *Ἕνας παρατηρητὴς διὰ νὰ ἐξετάσῃ τὸν ὀφθαλμόν του, τὸν ὁποῖον θεωροῦμεν κανονικόν, χρησιμοποιεῖ συγκλίνοντα φακὸν Λ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 8 cm. Ὄπισθεν τοῦ φακοῦ, καὶ καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ φακοῦ τοποθετεῖται ἐπίπεδον κάτοπτρον M εἰς ἀπόστασιν 8 cm ἀπὸ τὴν ἑστίαν τοῦ φακοῦ. 1) Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσην ἀπόστασιν x ἀπὸ τὴν ἄλλην ἑστίαν τοῦ φακοῦ πρέπει νὰ θέσῃ ὁ παρατηρητὴς τὴν κόρην τοῦ ὀφθαλμοῦ του K_1K_2 διὰ νὰ βλέπῃ χωρὶς προσαρμογὴν ἕνα εὐκρινὲς εἴδωλον. Τὸ κέντρον τῆς κόρης εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ φακοῦ. 2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ ἀνωτέρω χρησιμοποιουμένου ὀργάνου καὶ ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὁ παρατηρητὴς βλέπει τὸ τελικὸν εἴδωλον. Ἡ ἀκτὶς τῆς κόρης εἶναι 1,5 mm.*

1) Ὁ φακὸς Λ δίδει τὸ εἴδωλον $K_1'K_2'$, ἀλλὰ ἕνεκα τοῦ κατόπτρου M σχηματίζεται ἕνα πραγματικὸν εἴδωλον $K_1''K_2''$ καὶ διὰ μιᾶς νέας διαθλάσεως διὰ τοῦ φακοῦ σχηματίζεται τὸ τελικὸν εἴδωλον εἰς τὸ ἄπειρον. Διὰ νὰ σχηματίζεται ὅμως τὸ εἴδωλον τοῦτο εἰς τὸ ἄπειρον, πρέπει τὸ εἴδωλον $K_1''K_2''$

νὰ σχηματίζεται ἐπὶ τῆς κυρίας ἑστίας E_2 τοῦ φακοῦ. Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν τὸ εἴδωλον $K_1'K_2'$ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 8 cm ὄπισθεν τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου. Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον τῶν φακῶν ἔχομεν τὴν σχέσιν:



Σχ. 91

$$\frac{1}{8+x}+\frac{1}{8+16}=\frac{1}{8}$$

ἄρα $x=4$ cm.

2) Ἡ ἰσχὺς P εἶναι ἡ φαινομένη διάμετρος ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὁ παρατηρητὴς βλέπει διὰ μέσου τοῦ ὀργάνου τὴν μονάδα μήκους τῆς κόρης.

Ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι: $P=\frac{\varepsilon\varphi\,\widehat{KOA}}{KK_1}=\frac{KA}{OK}\times\frac{1}{KK_1}$.

Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα OKA καὶ $OK''K_1''$ εὑρίσκομεν:

$$\frac{KA}{OK}=\frac{K''K_1''}{OK''} \quad \text{ἄρα} \quad KA=\frac{3}{2}\times K''K_1''.$$

Ἀλλὰ εἶναι: $K''K_1''=K'K_1'=2\times KK_1=2\times 1{,}5=3$ mm.

Ἄρα εἶναι: $KA=\frac{3}{2}\times 3=4{,}5$ mm

καὶ $P=\frac{4{,}5}{120}\times\frac{1}{0{,}0015}=25$ διοπτρίαι.

Ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὁ παρατηρητὴς βλέπει τὸ τελικὸν εἴδωλον εἶναι:

$$\varepsilon\varphi\,\widehat{KOA}=\frac{KA}{OK}=\frac{4{,}5}{120}=\frac{3}{80} \text{ ἀκτινίου}.$$

109. — *Διαθέτομεν ἕνα συγκλίνοντα φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως 3 cm. Τὸ ὀπτικὸν κέντρον τοῦ ὀφθαλμοῦ μας συμπίπτει μὲ τὴν ἑστίαν τοῦ φακοῦ. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ. 2) Παρατηροῦμεν διὰ τοῦ φακοῦ τούτου ἀντικείμενον ποὺ ἔχει μῆκος 0,3 mm· νὰ ὑπολογισθῇ εἰς πρῶτα λεπτὰ ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν βλέπομεν τὸ ἀντικείμενον. 3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγέθυνσις, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι Δ = 24 cm. 4) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μικροτέρα ἀπόστασις δύο σημείων τοῦ ἀντικειμένου τὰ ὁποῖα ἠμποροῦν νὰ φαίνωνται διὰ τοῦ φακοῦ διακεκριμένα τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ διαχωριστικὴ ἱκανότης τοῦ ὀφθαλμοῦ εἶναι 1 λεπτόν.*

1) Ἐπειδὴ εἶναι: $\varphi=0{,}03$ cm, ἡ ἰσχὺς P τοῦ φακοῦ εἶναι:

$$P=\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{0{,}03}=33{,}3 \text{ διοπτρίαι}.$$

2) Τὸ μέγεθος τοῦ ἀντικειμένου εἶναι: $AB=0{,}0003$ m· ἡ φαινομένη διάμετρος α εἶναι:

$$\alpha = P \cdot AB = \frac{100}{3} \times 0{,}0003 = 0{,}01 \text{ ἀκτινίου} \quad \text{ἤ} \quad \alpha = 34 \text{ λεπτά}.$$

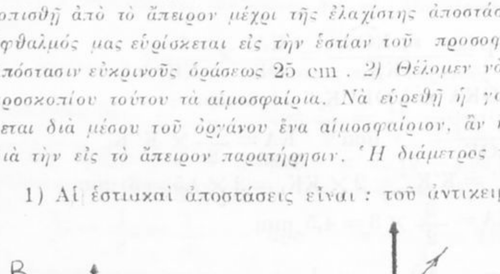
3) Ἡ μεγέθυνσις M εἶναι : $M = \frac{\Delta}{\varphi} = \frac{24}{3} = 8$.

4) Τὰ σημεῖα A καὶ B τοῦ ἀντικειμένου φαίνονται διακεκριμένα, ἐὰν ἡ φαινομένη διάμετρος α τοῦ εἰδώλου A′B′ εἶναι : $\alpha \geqslant 1'$. Ἀλλὰ εὑρέθη ἀνωτέρω ὅτι διὰ τὸ ἀντικείμενον AB = 0,3 mm = 300 μ εἶναι α = 34′. Ἄρα γωνία α = 1′ ἀντιστοιχεῖ εἰς μῆκος τοῦ ἀντιεκιμένου : $l = \frac{300}{34} = 9$ μ.

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἐλαχίστη ἀπόστασις εἶναι 9 μ.

110. — *Ὁ ἀντικειμενικὸς φακὸς μικροσκοπίου ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 1 cm, ὁ δὲ προσοφθάλμιος ἔχει ἰσχὺν 50 διοπτριῶν. Ἡ ἀπόστασις τῶν ὀπτικῶν κέντρων τῶν δύο φακῶν εἶναι 18 cm. 1) Παρατηροῦμεν διὰ μέσου τοῦ μικροσκοπίου ἕνα φωτεινὸν σημεῖον. Κατὰ ποίαν φορὰν καὶ κατὰ πόσον πρέπει νὰ μετακινηθῇ τὸ μικροσκόπιον ἐν σχέσει πρὸς τὸ ἀντικείμενον, ὥστε τὸ τελικὸν εἴδωλον νὰ μετατοπισθῇ ἀπὸ τὸ ἄπειρον μέχρι τῆς ἐλαχίστης ἀποστάσεως εὐκρινοῦς ὁράσεως; Ὁ ὀφθαλμός μας εὑρίσκεται εἰς τὴν ἑστίαν τοῦ προσοφθαλμίου καὶ ἔχει ἐλαχίστην ἀπόστασιν εὐκρινοῦς ὁράσεως 25 cm. 2) Θέλομεν νὰ παρατηρήσωμεν διὰ τοῦ μικροσκοπίου τούτου τὰ αἱμοσφαίρια. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν θὰ φαίνεται διὰ μέσου τοῦ ὀργάνου ἕνα αἱμοσφαίριον, ἂν ἡ ὅρασίς μας εἶναι ρυθμισμένη διὰ τὴν εἰς τὸ ἄπειρον παρατήρησιν. Ἡ διάμετρος τοῦ αἱμοσφαιρίου εἶναι 7 μ.*

1) Αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις εἶναι : τοῦ ἀντικειμενικοῦ : φ = 1 cm καὶ τοῦ προσοφθαλμίου: Φ = 2cm. Τὸ τελικὸν εἴδωλον A″B″ σχηματίζεται εἰς τὸ ἄπειρον, ὅταν τὸ εἴδωλον A′B′, ποὺ δίδει ὁ ἀντικειμενικός, σχηματίζεται εἰς τὴν κυρίαν ἑστίαν E_1 τοῦ προσοφθαλμίου. Τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ A B′ ἀπὸ τὸ O εἶναι : OE = π′ = 16 cm.



Σχ. 92

Ἑπομένως ἔχομεν :

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{16} = \frac{1}{1} \quad \text{ἄρα} \quad \pi = \frac{16}{15} = 1{,}0666 \text{ cm}.$$

Ὅταν τὸ A″B″ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 25 cm ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν, τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ A″B″ ἀπὸ τὸ O_1 εἶναι : $O_1A'' = \pi_1' = 23$ cm.

Ἑπομένως ἔχομεν : $\frac{1}{\pi_1} - \frac{1}{23} = \frac{1}{2}$ ἄρα $\pi_1 = 1{,}84$ cm.

Τὸ A′B′ ἀπέχει ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον 1,84 cm· ἄρα ἡ ἀπόστασις τοῦ A′B′ ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν εἶναι 18 − 1,84 = 16,16 cm. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν διὰ τὸν ἀντικειμενικὸν τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{\pi_2} + \frac{1}{16{,}16} = \frac{1}{1} \quad \text{ἄρα} \quad \pi_2 = 1{,}0659 \text{ cm}.$$

Ὥστε διὰ νὰ μετατοπισθῇ τὸ εἴδωλον A''B'' ἀπὸ τὸ ἄπειρον μέχρι τῆς ἐλαχίστης ἀποστάσεως εὐκρινοῦς ὁράσεως, πρέπει νὰ πλησιάσωμεν τὸ μικροσκόπιον πρὸς τὸ ἀντικείμενον κατά : $1{,}0666 - 1{,}0659 = 0{,}0007$ cm .

2) Ὅταν ὁ ὀφθαλμός μας εἶναι ρυθμισμένος διὰ τὴν παρατήρησιν εἰς τὸ ἄπειρον, τότε ἡ μεγέθυνσις γ τοῦ ἀντικειμενικοῦ εἶναι :

$$\gamma = \frac{\pi'}{\pi} = 16 : \frac{16}{15} = 15 .$$

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἰσχὺς P τοῦ μικροσκοπίου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἰσχύος τοῦ προσοφθαλμίου ἐπὶ τὴν μεγέθυνσιν τοῦ ἀντικειμενικοῦ.

Ὥστε ἡ ἰσχὺς εἶναι : $P = 50 \times 15 = 750$ διοπτρίαι.

Ἐὰν α εἶναι ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ εἰδώλου A''B'', τότε γνωρίζομεν ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις : $P = \dfrac{\alpha}{AB}$.

Ἕνα αἱμοσφαίριον, τὸ ὁποῖον ἔχει διάμετρον 7 μ, φαίνεται λοιπὸν ὑπὸ γωνίαν :

$$\alpha = P \, . \, AB = 750 \times 0{,}000\,007 = 0{,}005 \text{ ἀκτινίου} \quad \text{ἢ} \quad \alpha = \frac{1}{200} \text{ ἀκτινίου} .$$

Τὸ αἱμοσφαίριον φαίνεται ὅπως θὰ ἐφαίνετο δίσκος, διαμέτρου 1 mm, εὑρισκόμενος εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν.

111. — *Ἕνα μικροσκόπιον ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ἀντικειμενικὸν φακὸν καὶ ἕνα προσοφθάλμιον οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἀντιστοίχως ἑστιακὰς ἀποστάσεις* 5 mm *καὶ* 20 mm. *Ἀντικείμενον* AB *ἀπέχει* 5,2 mm *ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ πραγματικοῦ εἰδώλου* A_1B_1 *τὸ ὁποῖον δίδει ὁ ἀντικειμενικὸς καὶ ὁ λόγος τῶν γραμμικῶν διαστάσεων τοῦ εἰδώλου* A_1B_1 *καὶ τοῦ ἀντικειμένου* AB. *2) Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν πρέπει νὰ εὑρεθῇ ὁ προσοφθάλμιος, ὥστε τὸ φανταστικὸν εἴδωλον* A'B', *ποὺ δίδει ὁ προσοφθάλμιος, νὰ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν* 25 cm *ἀπὸ τὸν φακὸν τοῦτον ἐπὶ τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται καὶ ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ ; 3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν γραμμικῶν διαστάσεων τοῦ εἰδώλου* A'B' *καὶ τοῦ ἀντικειμένου* AB. *4) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχὺς καὶ ἡ μεγέθυνσις τοῦ μικροσκοπίου.*

1) Ἐὰν φ εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ π' ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸν φακὸν τοῦτον, τότε ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{5{,}2} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{5} \qquad \text{εὑρίσκομεν :} \qquad \pi' = 130 \text{ mm} .$$

Τὸ εἴδωλον A_1B_1 ἀπέχει 13 cm ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν. Ὁ ζητούμενος λόγος τῶν γραμμικῶν διαστάσεων εἶναι : $\gamma = \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{\pi'}{\pi} = \dfrac{130}{5{,}2} = 25$.

2) Ἐὰν φ_1 εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ προσοφθαλμίου, τότε ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{\pi_1} - \frac{1}{25} = \frac{1}{2} \qquad \text{εὑρίσκομεν :} \qquad \pi_1 = 1{,}85 \text{ cm}$$

τὸ εἴδωλον A_1B_1 πρέπει νὰ ἀπέχῃ 1,85 cm ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον.

Ὥστε ὁ προσοφθάλμιος εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν : $\Lambda = 14{,}85$ cm ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν.

3) Ὁ λόγος τῶν γραμμικῶν διαστάσεων εἶναι :

$$\frac{A'B'}{A_1B_1} = \frac{25}{1,85} = 13,5 \cdot \qquad \text{ἄρα} \qquad \frac{A'B'}{AB} = 13,5 \times 25 = 337 \cdot$$

4) Ἡ ἰσχὺς P τοῦ μικροσκοπίου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἰσχύος P' τοῦ προσοφθαλμίου ἐπὶ τὴν μεγέθυνσιν γ τοῦ ἀντικειμενικοῦ· ἄρα εἶναι :

$$P = P' \,.\, \gamma = \frac{1}{0,02} \times 25 = 1250 \text{ διοπτρίαι} \cdot$$

ἡ δὲ μεγέθυνσις M τοῦ μικροσκοπίου εἶναι : $M = P \,.\, 0,25 = 1250 \times 0,25 = 312$.

112.— *Ἕνα μικροσκόπιον ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο λεπτοὺς συγκλίνοντας φακούς, τῶν ὁποίων τὰ ὀπτικὰ κέντρα ἀπέχουν 15 cm. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ εἶναι 1 cm, τοῦ προσοφθαλμίου εἶναι 3 cm, ἡ δὲ διάμετρος τοῦ φακοῦ τούτου εἶναι 1,50 cm. Ὁ παρατηρητὴς ἔχει ἐλαχίστην ἀπόστασιν εὐκρινοῦς ὁράσεως 25 cm καὶ τοποθετεῖ τὸν ὀφθαλμόν του πολὺ κοντὰ εἰς τὸν προσοφθάλμιον. Νὰ εὑρεθῇ: 1) ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὴν ἑστίαν τοῦ ἀντικειμενικοῦ· 2) ἡ μεγέθυνσις τοῦ μικροσκοπίου.*

1) Ἡ ἀπόστασις τοῦ τελικοῦ εἰδώλου A''B'' ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον φακὸν εἶναι 25 cm. Ἡ ἀπόστασις τοῦ ἐνδιαμέσου εἰδώλου A'B' (σχ. 92) ἀπὸ τὸν ἴδιον φακὸν δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{O_1A'} - \frac{1}{25} = \frac{1}{3} \qquad \text{ἄρα} \qquad O_1A' = \frac{75}{28} \text{ cm}.$$

Ἔστω x ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου AB ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν φακόν. Ἡ ἀπόστασις αὐτὴ εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{15 - \dfrac{75}{28}} = 1 \cdot$

$$\text{ἄρα} \qquad x = \frac{28}{317} = 0,088 \text{ cm} \qquad \text{ἢ} \qquad x = 0,88 \text{ mm}.$$

2) Ἡ μεγέθυνσις M τοῦ μικροσκοπίου εἶναι ὁ λόγος τῆς φαινομένης διαμέτρου τοῦ εἰδώλου πρὸς τὴν φαινομένην διάμετρον τοῦ ἀντικειμένου, ὅταν ἀμφότερα εὑρίσκωνται εἰς τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως.

Ὥστε εἶναι :

$$M = \frac{A''B''}{25} : \frac{AB}{25} = \frac{A''B''}{AB} = \frac{A''B''}{A'B'} \times \frac{A'B'}{AB} \quad \text{ἢ} \quad M = \frac{O_1A''}{O'A'} \times \frac{OA'}{OA}$$

$$\text{ἄρα} \qquad M = \frac{25\left(15 - \dfrac{75}{28}\right)}{\dfrac{75}{28}\left(1 + \dfrac{28}{317}\right)} = \frac{317}{3} = 105,66\,.$$

113.— *Ἕνα μικροσκόπιον ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀντικειμενικὸν φακὸν Λ_1 ἰσχύος 200 διοπτριῶν καὶ ἀπὸ προσοφθάλμιον Λ_2 ἰσχύος 50 διοπτριῶν, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται εἰς σταθερὰν μεταξύ των ἀπόστασιν ἴσην μὲ 15 cm. Οἱ φακοὶ οὗτοι θεωροῦνται ὡς λεπτοὶ φακοί. Μὲ τὸ μικροσκόπιον τοῦτο θέλομεν νὰ προβάλωμεν ἐπὶ πετάσματος τὸ μεγεθυσμένον εἴδωλον ἑνὸς πολὺ μικροῦ ἀντικειμένου, τὸ ὁποῖον φωτίζεται ἰσχυρῶς. Τὸ πέτασμα ἀπέχει 2 m ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον. Νὰ εὑρεθῇ :*

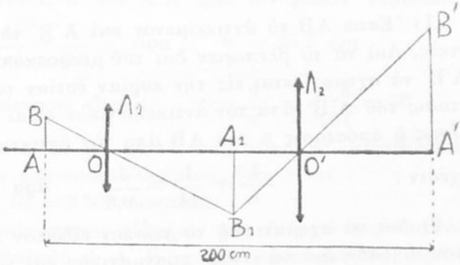
1) Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν $Λ_1$ πρέπει νὰ τεθῇ τὸ ἀντικείμενον. 2) Πόση εἶναι ἡ ἐπιτυγχανομένη μεγέθυνσις.

1) Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ εἶναι $φ_1 = 0,5$ cm, τοῦ δὲ προσοφθαλμίου εἶναι $φ_2 = 2$ cm.

Ἂς ὀνομάσωμεν π τὴν ἀπόστασιν ΟΑ. Διὰ τὸν ἀντικειμενικὸν φακὸν ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{OA_1} = \frac{10}{5}$$

ἄρα $$OA_1 = \frac{\pi}{2\pi - 1}.$$



Τότε εἶναι:

$$O'A_1 = 15 - OA_1 = \frac{29\pi - 15}{2\pi - 1}.$$

Σχ. 93

Διὰ τὸν προσοφθάλμιον λαμβάνομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{O'A_1} + \frac{1}{O'A'} = \frac{1}{2} \quad \text{ἤ} \quad \frac{2\pi - 1}{29\pi - 15} + \frac{1}{O'A'} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2\pi - 1}{29\pi - 15} + \frac{1}{200 - \pi - 15} = \frac{1}{2}.$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν λαμβάνομεν: $5\pi^2 - 916\,\pi + 475 = 0$

ἄρα $\pi = 0,52$ cm ἤ $\pi = 182,68$ cm.

Διὰ $\pi = 0,52$ cm λαμβάνομεν: $O'A' = 184,48$ cm.

Τὸ εἴδωλον θὰ εἶναι τότε πολὺ μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον.

Ὥστε ἡ προβολὴ εἶναι χρήσιμος διὰ $\pi = 0,52$ cm.

Διὰ $\pi = 0,52$ cm ἡ μεγέθυνσις θὰ εἶναι:

$$M_1 = \frac{185 - \pi}{\dfrac{29\pi - 15}{2\pi - 1}} \times \frac{\dfrac{\pi}{2\pi - 1}}{\pi} = \frac{185 - 0,52}{15,08 - 15} = 2\,306.$$

Διὰ $\pi = 182,68$ cm λαμβάνομεν:

$OA_1 = 0,501$ cm · $O'A_1 = 14,50$ cm · $O'A' = 2,32$ cm.

Ἡ μεγέθυνσις εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι:

$$M' = \frac{2,32}{14,50} \times \frac{0,50}{182,68} = \frac{1}{2\,283}.$$

Τὸ σχηματιζόμενον ἐπὶ τοῦ πετάσματος εἴδωλον θὰ εἶναι 2000 καὶ πλέον φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον. Ἡ προβολὴ δὲν ἔχει τότε καμμίαν χρησιμότητα, διότι αὐτὸ τοῦτο τὸ ἀντικείμενον εἶναι ἐλάχιστον.

114. — *Ὁ ἀντικειμενικὸς φακὸς μικροσκοπίου ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν $φ = 0,8$ cm, ὁ δὲ προσοφθάλμιος ἔχει $Φ = 2$ cm. Ἡ ἀρχικὴ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο φακῶν εἶναι 16 cm. 1) Ἀντικείμενον τοποθετεῖται ἔμπροσθεν τοῦ ἀντικειμενικοῦ, ὥστε νὰ τὸ παρατηροῦμεν διὰ τοῦ μικροσκοπίου εἰς τὸ ἄπειρον. Πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν; 2) Χωρὶς νὰ μετακι-*

νήσωμεν τὸ ἀντικείμενον ἢ τὸν ἀντικειμενικόν, μετακινοῦμεν τὸν προσοφθάλμιον ὥστε νὰ λάβωμεν ὄπισθεν αὐτοῦ ἕνα πραγματικὸν εἴδωλον τοῦ ἀντικειμένου ἐπὶ φωτογραφικῆς πλακός, ἡ ὁποία θὰ ἀπέχῃ 30 cm *ἀπὸ τὴν νέαν θέσιν τοῦ προσοφθαλμίου. Κατὰ ποίαν φορὰν καὶ κατὰ πόσον πρέπει νὰ μετακινήσωμεν τὸν προσοφθάλμιον ; Πόσον εἶναι τὸ γραμμικὸν μέγεθος τοῦ εἰδώλου σχετικὰ μὲ τὸ μέγεθος τοῦ ἀντικειμένου ;*

1) Ἔστω ΑΒ τὸ ἀντικείμενον καὶ Α΄Β΄ τὸ εἴδωλον ποὺ δίδει ὁ ἀντικειμενικός. Διὰ νὰ τὸ βλέπωμεν διὰ τοῦ μικροσκοπίου εἰς τὸ ἄπειρον, πρέπει τὸ Α΄Β΄ νὰ σχηματίζεται εἰς τὴν κυρίαν ἑστίαν τοῦ προσοφθαλμίου. Τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ Α΄Β΄ ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν εἶναι : $\pi' = 16 - \Phi = 14$ cm. Ἑπομένως ἡ ἀπόστασις π τοῦ ΑΒ ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν ὑπολογίζεται ἀπὸ τὴν

σχέσιν : $$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{14} = \frac{1}{0{,}8} \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi = \frac{28}{33} = 0{,}85\,.$$

2) Διὰ νὰ σχηματισθῇ τὸ τελικὸν εἴδωλον Α΄΄Β΄΄ ὄπισθεν τοῦ προσοφθαλμίου, δηλαδὴ διὰ νὰ εἶναι πραγματικὸν καὶ νὰ ἀπέχῃ $\pi_1' = 30$ cm ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον, πρέπει τὸ Α΄Β΄ (ποὺ παίζει ρόλον ἀντικειμένου διὰ τὸν προσοφθάλμιον φακὸν) νὰ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν π_1 ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον. Τότε ὅμως θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$\frac{1}{\pi_1} + \frac{1}{30} = \frac{1}{2} \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi_1 = \frac{30}{14} = 2{,}14 \text{ cm}\,.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς προηγουμένης παραγράφου τὸ Α΄Β΄ ἐσχηματίζετο εἰς τὴν κυρίαν ἑστίαν τοῦ προσοφθαλμίου, δηλαδὴ εἰς ἀπόστασιν 2 cm ἀπὸ αὐτόν. Τώρα πρέπει τὸ Α΄Β΄ νὰ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 2,14 cm, δηλαδὴ κατὰ 0,14 cm πέραν τῆς ἑστίας του. Ἄρα ὁ προσοφθάλμιος πρέπει νὰ ὀπισθοχωρήσῃ κατὰ 0,14 cm = 1,4 mm.

Διὰ τὸν ἀντικειμενικὸν ἔχομεν : $$\frac{A'B'}{AB} = \frac{\pi'}{\pi} = 14 : \frac{28}{33} = \frac{33}{2}\,.$$

Διὰ τὸν προσοφθάλμιον ἔχομεν : $$\frac{A''B''}{A'B'} = \frac{\pi_1'}{\pi_1} = 30 : \frac{30}{14} = 14\,.$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς εὑρίσκομεν : $$\frac{A''B''}{AB} = 14 \times \frac{33}{2} = 231\,.$$

Ὥστε τὸ τελικὸν πραγματικὸν εἴδωλον εἶναι 231 φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον.

115. — *Ὁ ἀντικειμενικὸς φακὸς μικροσκοπίου ἔχει ἰσχὺν 200 διοπτριῶν, ὁ δὲ προσοφθάλμιος 50 διοπτριῶν. Εἰς ἀπόστασιν* 5,1 mm *ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν τοποθετεῖται μικρὸν φωτεινὸν ἀντικείμενον. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ ὀργάνου διὰ παρατηρητὴν ἔχοντα κανονικὸν ὀφθαλμὸν (παρατήρησις χωρὶς προσαρμογήν). 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ ἀντικειμενικοῦ καὶ προσοφθαλμίου, διὰ παρατηρητὴν μύωπα, ὁ ὁποῖος θέτει τὸν ὀφθαλμόν του εἰς τὸ κέντρον τοῦ προσοφθαλμίου καὶ παρατηρεῖ χωρὶς προσαρμογήν. Ἡ μεγίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως διὰ τὸν μύωπα εἶναι* 1 m. *3) Θεωροῦμεν τὸ μικροσκόπιον ὅπως εἰς τὴν παράγραφον 1. Νὰ εὑρεθῇ κατὰ ποίαν φορὰν καὶ κατὰ πόσον πρέπει νὰ μετα-*

κινηθῇ ὁ προσοφθάλμιος, διὰ νὰ λάβωμεν πραγματικὸν εἴδωλον 200 φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον.

1) Αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ τοῦ προσοφθαλμίου εἶναι ἀντιστοίχως : $\varphi = 0{,}5$ cm καὶ $\Phi = 2$ cm.

Ἂν ὀνομάσωμεν ΑΒ τὸ ἀντικείμενον καὶ Α΄Β΄ τὸ εἴδωλον ποὺ δίδει ὁ ἀντικειμενικὸς φακός, τότε ἡ ἀπόστασις π΄ τοῦ Α΄Β΄ ἀπὸ τὸν φακὸν εὑρίσκεται

ἀπὸ τὴν σχέσιν : $\dfrac{1}{0{,}51} + \dfrac{1}{\pi'} = \dfrac{1}{0{,}5}$ ἄρα $\pi' = 25{,}5$ cm.

Ἡ μεγέθυνσις γ τοῦ ἀντικειμενικοῦ εἶναι : $\gamma = \dfrac{\pi'}{\pi} = \dfrac{25{,}5}{0{,}51} = 50$.

Ἡ ἰσχὺς P τοῦ μικροσκοπίου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς μεγεθύνσεως τοῦ ἀντικειμενικοῦ ἐπὶ τὴν ἰσχὺν τοῦ προσοφθαλμίου, ἤτοι εἶναι :

$$P = 50 \times 50 = 2\,500 \text{ διοπτρίαι}.$$

2) Ἔστω Α΄΄Β΄΄ τὸ τελικὸν φανταστικὸν εἴδωλον, ποὺ δίδει ὁ προσοφθάλμιος. Διὰ νὰ βλέπῃ ὁ μύωψ ὀφθαλμὸς τὸ Α΄΄Β΄΄ χωρὶς προσαρμογήν, πρέπει τὸ Α΄΄Β΄΄ νὰ σχηματίζεται εἰς τὴν μεγίστην ἀπόστασιν εὐκρινοῦς ὁράσεως, δηλαδὴ εἰς ἀπόστασιν $\pi_1' = 100$ cm ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον. Εὑρίσκομεν τὴν ἀπόστασιν π_1 τοῦ Α΄Β΄ (ποὺ παίζει ῥόλον ἀντικειμένου) ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον : $\dfrac{1}{\pi_1} + \dfrac{1}{100} = \dfrac{1}{2}$ ἄρα $\pi_1 = 1{,}96$ cm.

Ὥστε ἡ ἀπόστασις x μεταξὺ τῶν δύο φακῶν εἶναι :

$$x = \pi' + \pi_1 = 25{,}5 + 1{,}96 = 27{,}46 \text{ cm}.$$

Διὰ τὴν ἰδίαν παρατήρησιν εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ κανονικοῦ ὀφθαλμοῦ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν φακῶν εἶναι : $x' = 25{,}5 + 2 = 27{,}5$ cm.

3) Ὁ ἀντικειμενικὸς δίδει τὸ εἴδωλον Α΄Β΄ τὸ ὁποῖον εἶναι 50 φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον ΑΒ. Διὰ νὰ λάβωμεν τελικὸν πραγματικὸν εἴδωλον Α΄΄Β΄΄ 200 φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ΑΒ, δηλαδὴ 4 φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ Α΄Β΄ πρέπει νὰ θέσωμεν τὸν προσοφθάλμιον εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε αἱ ἀποστάσεις π_1 τοῦ Α΄Β΄ ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον καὶ π_1' τοῦ Α΄΄Β΄΄ ἀπὸ τὸν ἴδιον φακὸν νὰ συνδέωνται μὲ τὴν σχέσιν : $\pi_1' = 4\pi_1$.

Τότε διὰ τὸν προσοφθάλμιον ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$\frac{1}{\pi_1} + \frac{1}{4\pi_1} = \frac{1}{2} \quad \text{ἄρα} \quad \pi_1 = 2{,}5 \text{ cm}.$$

Ὥστε τὸ Α΄Β΄ πρέπει νὰ σχηματίζεται τώρα εἰς ἀπόστασιν 2,5 cm ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον. Ἡ μεταξὺ τῶν φακῶν ἀπόστασις εἶναι : $25{,}5 + 2{,}5 = 28$ cm, ἐνῶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς πρώτης παραγράφου ἦτο 27,5.

Ἄρα ὁ προσοφθάλμιος πρέπει νὰ ὀπισθοχωρήσῃ κατὰ 0,5 cm.

116.— *Ἕνας παρατηρητής, ἔχων κανονικὴν ὅρασιν, χρησιμοποιεῖ ὡς ἁπλοῦν μικροσκόπιον φακὸν* Λ_1, *τοῦ ὁποίου ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις εἶναι 3 cm. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐμπορικὴ μεγέθυνσις τοῦ ὀργάνου. 2) Τὸ ὀπτικὸν κέντρον τοῦ ὀφθαλμοῦ θεωρεῖται εὑρισκόμενον εἰς τὴν ἑστίαν τοῦ φακοῦ, ὁ δὲ παρατηρητὴς βλέπει χωρὶς προσαρμογήν. Νὰ εὑρεθῇ κατὰ πόσον ἠμποροῦμε νὰ μετακινήσωμεν τὸ ἀντικείμενον χωρὶς νὰ παύσῃ ὁ παρατηρητὴς νὰ βλέπῃ διὰ μέσου τοῦ φακοῦ εὐκρι-*

νὲς εἴδωλον. Ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως : $\Delta = 25$ cm . 3) Εἰς ἀπόστασιν 2 cm ἀπὸ τὸν φακὸν Λ_1 θέτομεν δεύτερον ὅμοιον φακὸν Λ_2 , τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα τοῦ Λ_1 . Ποῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ τὸ ἀντικείμενον διὰ νὰ τὸ βλέπῃ ὁ παρατηρητὴς εὐκρινῶς διὰ μέσου τοῦ συστήματος χωρὶς προσαρμογήν ; 4) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ συστήματος τῆς προηγουμένης παραγράφου.

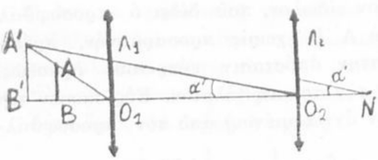
1) Ἡ ἰσχὺς τοῦ ἁπλοῦ μικροσκοπίου εἶναι :

$$P = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{0{,}03} = \frac{100}{3} = 33{,}3 \text{ διοπτρίαι.}$$

Ἡ ἐμπορικὴ μεγέθυνσις αὐτοῦ εἶναι :

$$M = P \times 0{,}25 = 33{,}3 \times 0{,}25 = 8{,}325 .$$

2) Ὁ κανονικὸς ὀφθαλμὸς βλέπει εὐκρινῶς χωρὶς προσαρμογὴν τὰ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν εὑρισκόμενα ἀντικείμενα. Διὰ νὰ σχηματίζεται τὸ εἴδωλον εἰς τὸ ἄπειρον, πρέπει τὸ ἀντικείμενον νὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν ἑστίαν τοῦ φακοῦ. Δια νὰ πλησιάσῃ τὸ εἴδωλον, πρέπει τὸ ἀντικείμενον νὰ πλησιάσῃ πρὸς τὸν φακόν. Ἔστω β ἡ ἀπόστασις τοῦ ὀφθαλμοῦ ἀπὸ τὸν φακόν. Ὅταν τὸ εἴδωλον θὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν εὐκρινοῦς ὁράσεως Δ, δηλαδὴ εἰς ἀπόστασιν Δ − β ἀπὸ τὸν φακόν, τότε ἡ ἀπόστασις π τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸν φακὸν εἶναι τοιαύτη ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :



Σχ. 91

$$\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\Delta - \beta} = \frac{1}{\varphi} .$$

Ἀλλὰ δίδεται ὅτι εἶναι $\beta = \varphi$· ἄρα :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\Delta - \varphi} \quad \text{καὶ} \quad \pi = \frac{\varphi(\Delta - \varphi)}{\Delta} = \frac{3(25-3)}{25} = 2{,}64 \text{ cm} .$$

Ἡ μετακίνησις τοῦ ἀντικειμένου, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὰς δύο αὐτὰς παρατηρήσεις, εἶναι : $3 - 2{,}64 = 0{,}35$ cm .

3) Τὸ σύστημα τῶν δύο φακῶν πρέπει νὰ δίδῃ εἴδωλον τοῦ ἀντικειμένου AB, σχηματιζόμενον εἰς τὸ ἄπειρον. Ἄρα τὸ εἴδωλον ποὺ δίδει ὁ φακὸς Λ_1 πρέπει νὰ σχηματίζεται ἐπὶ τοῦ ἑστιακοῦ ἐπιπέδου τοῦ φακοῦ Λ_2 , δηλαδὴ νὰ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν $\pi_1' = 1$ cm ἀπὸ τὸν φακὸν Λ_1 . Ἑπομένως ἡ ἀπόστασις π_1 τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸν φακὸν Λ_1 δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{\pi_1} - \frac{1}{1} = \frac{1}{3} \quad \text{ἤτοι} \quad \pi_1 = \frac{3}{4} = 0{,}75 \text{ cm} .$$

4) Ὁ φακὸς Λ_1 δίδει τὸ εἴδωλον A′B′, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται εἰς τὴν κυρίαν ἑστίαν τοῦ φακοῦ Λ_2 , δηλαδὴ εἰς ἀπόστασιν 3 cm ἀπὸ τὸν Λ_2 .

Οὕτω ἡ γωνία $A'O_2B' = \alpha'$ εἶναι : $\alpha' = \dfrac{A'B'}{0{,}03}$

ἂν ὑπολογίζωμεν τὰ μήκη εἰς μέτρα.

Τὸ τελικὸν εἴδωλον A″B″ σχηματίζεται εἰς τὸ ἄπειρον. Ἄρα τὸ σημεῖον A″ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας O_2A'. Ὁποιαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ θέσις τοῦ ὀφθαλμοῦ N, ἡ εὐθεῖα A″N εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν O_2A'. Ὁ ὀφθαλμὸς βλέπει λοιπὸν τὸ εἴδωλον ὑπὸ τὴν γωνίαν α΄.

Ἐξ ὁρισμοῦ ἡ ἰσχὺς τοῦ συστήματος εἶναι:

$$P = \frac{\alpha'}{AB} = \frac{A'B'}{0,03 \times AB} = \frac{A'B'}{AB} \times \frac{1}{0,03}$$

ἢ $$P = \frac{O_1B'}{O_1B} \times \frac{1}{0,03} \quad \text{καὶ} \quad P = \frac{0,01}{0,0075} \times \frac{1}{0,03} = 44,4 \text{ διοπτρίαι}.$$

117.— *Ἕνα μικροσκόπιον ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀντικειμενικὸν ἰσχύος 100 διοπτριῶν καὶ προσοφθάλμιον ἰσχύος 50 διοπτριῶν. Ἡ μεταξὺ τῶν δύο φακῶν ἀπόστασις εἶναι 210 mm. Ὁ παρατηρητὴς ἔχει ἐλαχίστην ἀπόστασιν εὐκρινοῦς ὁράσεως $\Delta = 20$ cm, ὁ δὲ ὀφθαλμός του εὑρίσκεται εἰς τὴν ἑστίαν τοῦ προσοφθαλμίου. 1) Τὸ τελικὸν εἴδωλον σχηματίζεται εἰς τὸ ἄπειρον. Ποῖαι εἶναι τότε, διὰ τὸν παρατηρητὴν τοῦτον, ἡ ἰσχὺς καὶ ἡ μεγέθυνσις τοῦ μικροσκοπίου; 2) Ὁ παρατηρητὴς ἠμπορεῖ νὰ διακρίνῃ δύο σημεῖα, ὅταν τὰ βλέπῃ ὑπὸ γωνίαν τουλάχιστον ἴσην μὲ 3×10^{-4} ἀκτινίου. Ποῖον εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ μικροτέρου ἀντικειμένου, τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ ὁ παρατηρητὴς νὰ ἴδῃ διὰ τοῦ μικροσκοπίου, ὅταν τοῦτο εἶναι ρυθμισμένον διὰ τὴν εἰς ἄπειρον παρατήρησιν; 3) Μεταξὺ ποίων ὁρίων πρέπει νὰ περιλαμβάνεται ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν, ὥστε τὸ τελικὸν εἴδωλον νὰ εἶναι ἐντὸς τοῦ πεδίου προσαρμογῆς τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ παρατηρητοῦ;*

1) Αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις τῶν φακῶν εἶναι:

τοῦ ἀντικειμενικοῦ: $\varphi_1 = 1$ cm· τοῦ προσοφθαλμίου: $\varphi_2 = 2$ cm.

Ὅταν τὸ τελικὸν εἴδωλον σχηματίζεται εἰς τὸ ἄπειρον, τὸ εἴδωλον, ποὺ δίδει ὁ ἀντικειμενικός, σχηματίζεται εἰς τὴν ἑστίαν τοῦ προσοφθαλμίου, ἤτοι ἀπέχει ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν: $\pi' = 21 - 2 = 19$ cm. Ἐπομένως ἡ ἀπόστασις π τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{19} = \frac{1}{1} \quad \text{ἄρα} \quad \pi = \frac{19}{18} \text{ cm} \quad \text{καὶ} \quad \gamma = \frac{\pi'}{\pi} = 18.$$

Ἡ ἰσχὺς P τοῦ μικροσκοπίου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἰσχύος τοῦ προσοφθαλμίου ἐπὶ τὴν μεγέθυνσιν τοῦ ἀντικειμενικοῦ:

$$P = 50 \times 18 = 900 \text{ διοπτρίαι}.$$

Ἡ δὲ μεγέθυνσις τοῦ μικροσκοπίου εἶναι: $M = P \,.\, \Delta = 900 \times 0,20 = 180$.

2) Ἐὰν α εἶναι ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ τελικοῦ εἰδώλου, AB εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ἀντικειμένου καὶ P ἡ ἰσχὺς τοῦ μικροσκοπίου, τότε γνωρίζομεν ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις: $P = \frac{\alpha}{AB}$. Ἐπομένως τὸ μέγεθος τοῦ μικροτέρου ἀντικειμένου, τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ ἴδῃ ὁ παρατηρητὴς διὰ τοῦ μικροσκοπίου, εἶναι:

$$AB = \frac{\alpha}{P} = \frac{3}{10^4} \times \frac{1}{900} \text{ m} = \frac{1}{3}\ \mu = 0,33\ \mu.$$

3) Ὅταν τὸ τελικὸν εἴδωλον A΄΄B΄΄ σχηματίζεται εἰς τὸ ἄπειρον, ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν εἴδομεν ὅτι εἶναι:

$$\pi = \frac{19}{18} = 1,055555 \text{ cm}.$$

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι τὸ τελικὸν εἴδωλον A΄΄B΄΄ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν, δηλαδὴ εἰς ἀπόστασιν 18 cm ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον · τότε εἶναι : $\pi_1' = 18$ cm. Τὸ πραγματικὸν εἴδωλον Α΄Β΄, ποὺ δίδει ὁ ἀντικειμενικός, ἀπέχει τότε ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον π_1.

Ἡ ἀπόστασις π_1 εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{\pi_1} - \frac{1}{18} = \frac{1}{2} \qquad \text{ἄρα εἶναι :} \qquad \pi_1 = 1{,}8 \text{ cm}.$$

Τὸ εἴδωλον Α΄Β΄ ἀπέχει τότε ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν : $\pi_2' = 21 - 1{,}8 = 19{,}2$ cm.

Ἡ ἀπόστασις π_2 τοῦ ἀντικειμένου ΑΒ ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{\pi_2} + \frac{1}{19.2} = 1 \cdot \qquad \text{ἄρα εἶναι :} \qquad \pi_2 = \frac{19.2}{18{,}2} = 1{,}054945 \text{ cm}.$$

Ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἀποστάσεων τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν (δηλαδὴ τὸ βάθος τοῦ πεδίου) εἶναι :

$$\pi_1 - \pi_2 = 1{,}055555 - 1{,}054945 = 0{,}000\,610 \text{ cm} = 6{,}1\ \mu.$$

118. — *Ἕνα μικροσκόπιον ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀντικειμενικὸν καὶ προσοφθάλμιον τῶν ὁποίων αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις εἶναι ἀντιστοίχως* 6 mm *καὶ* 25 mm. *Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο τούτων φακῶν εἶναι* 20 cm. *1) Ποῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ τὸ ἀντικείμενον, ὥστε ὁ παρατηρητὴς νὰ βλέπῃ τὸ εἴδωλον εἰς τὸ ἄπειρον; 2) Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ποία εἶναι ἡ ἰσχὺς τοῦ μικροσκοπίου; 3) Ποῖαι θὰ ἦσαν αἱ διαστάσεις ἑνὸς ἀντικειμένου, τὸ ὁποῖον ἕνας παρατηρητὴς θὰ τὸ ἔβλεπεν ὑπὸ γωνίαν ἑνὸς λεπτοῦ; 4) Ποία θὰ ἦτο ἡ θέσις καὶ ποῖον θὰ ἦτο τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου ἑνὸς ἀντικειμένου μήκους* 0,02 mm, *ἐὰν ὁ προσοφθάλμιος ὀπισθοχώρει κατὰ* 25 mm, *χωρὶς ὅμως νὰ μετακινηθοῦν τὸ ἀντικείμενον καὶ ὁ ἀντικειμενικὸς φακός;*

1) Διὰ νὰ σχηματίζεται τὸ τελικὸν εἴδωλον εἰς τὸ ἄπειρον, πρέπει τὸ πραγματικὸν εἴδωλον, ποὺ δίδει ὁ ἀντικειμενικός, νὰ σχηματίζεται εἰς τὴν ἑστίαν τοῦ προσοφθαλμίου, δηλαδὴ πρέπει νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν :

$$\pi' = 200 - 25 = 175 \text{ mm}.$$

Ἐπομένως ἡ ἀπόστασις π τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{175} = \frac{1}{6} \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi = \frac{6 \times 175}{169} = 6{,}21 \text{ mm}.$$

2) Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἰσχὺς Ρ τοῦ μικροσκοπίου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἰσχύος τοῦ προσοφθαλμίου ἐπὶ τὴν μεγέθυνσιν τοῦ ἀντικειμενικοῦ, ἤτοι εἶναι :

$$P = \frac{1}{0{,}025} \times \frac{\pi'}{\pi} = 40 \times \frac{169}{6} = 1\,127 \text{ διοπτρίαι}.$$

3) Γνωρίζομεν ὅτι, ἐὰν ἀντικείμενον μήκους ΑΒ δίδῃ διὰ τοῦ μικροσκοπίου εἴδωλον τὸ ὁποῖον ἔχει φαινομένην διάμετρον α ἀκτινίων, τότε ἡ ἰσχὺς τοῦ μικροσκοπίου καθορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν : $P = \dfrac{\alpha}{AB}$.

Ἐπομένως τὸ ζητούμενον μῆκος τοῦ ἀντικειμένου εἶναι :

$$AB = \frac{\alpha}{P} = \frac{\pi}{180 \times 60 \times 1127} = \frac{3}{10^4 \times 1127} \text{ m} = 0{,}27\ \mu.$$

4) Τὸ εἴδωλον, ποὺ δίδει ὁ ἀντικειμενικός, ἀπέχει πάλιν ἀπὸ αὐτὸν 175 mm, καὶ ἔχει μῆκος: $A'B' = 0{,}02 \times \frac{\pi'}{\pi} = \frac{0{,}02 \times 169}{6} = 0{,}56$ mm.

Τὸ Α'Β' ἀπέχει ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον: $200 + 25 - 175 = 50$ mm, ἤτοι ἀπέχει ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τῆς ἑστιακῆς του ἀποστάσεως. Ὁ προσοφθάλμιος δίδει τότε πραγματικὸν εἴδωλον, μήκους 0,56 mm, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον 50 mm.

119.— *Εἰς τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον τοῦ προσοφθαλμίου ἑνὸς μικροσκοπίου εὑρίσκεται μικρομετρικὴ κλῖμαξ Κ φέρουσα διαιρέσεις εἰς δέκατα τοῦ χιλιοστομέτρου. Παρατηρητὴς ἔχων κανονικὴν ὅρασιν παρατηρεῖ διὰ μέσου τοῦ μικροσκοπίου, ρυθμισμένου διὰ τὴν εἰς ἄπειρον παρατήρησιν, τὸ εἴδωλον μικρομετρικῆς κλίμακος* K_1 *ἡ ὁποία φέρει διαιρέσεις εἰς ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστομέτρου. Παρατηρεῖ τότε ὅτι 3 διαιρέσεις τῆς κλίμακος Κ συμπίπτουν ἀκριβῶς μὲ 1 διαίρεσιν τῆς κλίμακος* K_1. *1) Ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ὁ προσοφθάλμιος ἔχει ἰσχὺν 50 διοπτριῶν, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ μικροσκοπίου. 2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγέθυνσις τοῦ μικροσκοπίου τούτου διὰ παρατηρητὴν διὰ τὸν ὁποῖον ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι 20 cm. 3) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν ὀπτικῶν κέντρων τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ τοῦ προσοφθαλμίου εἶναι 20 cm.*

1) Ἔστω ὅτι πρὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ εὑρίσκεται ἀντικείμενον $AB = 0{,}01$ mm. Ὁ φακὸς οὗτος δίδει τότε πραγματικὸν εἴδωλον Α'Β' τὸ ὁποῖον σχηματίζεται εἰς τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον τοῦ προσοφθαλμίου, δηλαδὴ ἐπὶ τῆς μικρομετρικῆς κλίμακος Κ. Τὸ τελικὸν εἴδωλον ποὺ δίδει ὁ προσοφθάλμιος σχηματίζεται τότε εἰς τὸ ἄπειρον καὶ τὸ φαινόμενον μῆκος του εἶναι $A''B'' = 0{,}3$ mm.

Ἄρα ἡ γραμμικὴ μεγέθυνσις γ τοῦ ἀντικειμενικοῦ εἶναι:

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A''B''}{AB} = \frac{0{,}3}{0{,}01} = 30.$$

Ἡ ἰσχὺς λοιπὸν τοῦ μικροσκοπίου, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἰσχύος τοῦ προσοφθαλμίου ἐπὶ τὴν γραμμικὴν μεγέθυνσιν τοῦ ἀντικειμενικοῦ, θὰ εἶναι: $P = 50 \times 30 = 1\,500$ διοπτρίαι.

2) Διὰ τὸν θεωρούμενον παρατηρητὴν ἡ μεγέθυνσις εἶναι:

$$M = 1\,500 \times 0{,}20 = 300.$$

3) Ἂς ὀνομάσωμεν l τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ τῶν ὀπτικῶν κέντρων τῶν δύο φακῶν· π καὶ π' ἀντιστοίχως τὰς ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμένου ΑΒ καὶ τοῦ πραγματικοῦ εἰδώλου Α'Β' ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν· φ καὶ φ' τὰς ἑστιακὰς ἀποστάσεις τῶν φακῶν ἀντικειμενικοῦ καὶ προσοφθαλμίου.

Τότε εἶναι: $\varphi' = \frac{1}{50} = 2$ cm· $\pi' = l - \varphi' = 20 - 2 = 18$ cm.

Ἐπειδὴ ἡ μεγέθυνσις τοῦ ἀντικειμενικοῦ εἶναι γνωστή, ἔχομεν:

$$\gamma = \frac{\pi'}{\pi} = \frac{18}{\pi} = 30 \cdot \quad \text{ἄρα} \quad \pi = \frac{18}{30} \text{ cm}.$$

Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις φ τοῦ ἀντικειμενικοῦ εὑρίσκεται λοιπὸν ἀπὸ τὴν σχέσιν

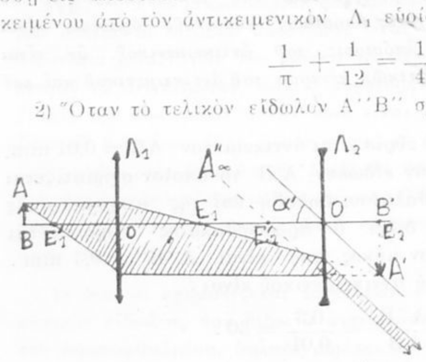
$$\frac{1}{\varphi} = \frac{30}{18} + \frac{1}{18} = \frac{31}{18} \quad \text{ἤτοι} \quad \varphi = \frac{18}{31} \text{ cm} = 5{,}8 \text{ mm}.$$

120. — *Συγκλίνων φακὸς* Λ_1 *ἑστιακῆς ἀποστάσεως* $\varphi_1 = 4$ cm *ἀπέχει* 11 cm *ἀπὸ ἀποκλίνοντα φακὸν* Λ_2 *ἑστιακῆς ἀποστάσεως* $\varphi_2 = 1$ cm. *Οἱ δύο φακοὶ ἔχουν τὸν αὐτὸν ὀπτικὸν ἄξονα. 1) Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἔμπροσθεν τοῦ συγκλίνοντος φακοῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἀντικείμενον* AB, *ὥστε τὸ τελικὸν εἴδωλον, τὸ ὁποῖον δίδει τὸ σύστημα τῶν δύο φακῶν, νὰ σχηματίζεται εἰς τὸ ἄπειρον; 2) Κατὰ πόσον πρέπει νὰ μετατοπισθῇ ἀπὸ τὴν προηγουμένην θέσιν του τὸ ἀντικείμενον, ὥστε τὸ τελικὸν εἴδωλον, τὸ ὁποῖον δίδει τὸ σύστημα τῶν φακῶν, νὰ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 25 cm ἀπὸ τὸ ὀπτικὸν κέντρον ἑνὸς ὀφθαλμοῦ εὑρισκομένου ὄπισθεν τοῦ ἀποκλίνοντος φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν 1 cm ἀπὸ αὐτόν; 3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς καὶ ἡ μεγέθυνσις τοῦ σχηματιζομένου μικροσκοπίου.*

1) Ὁ ἀντικειμενικὸς φακὸς Λ_1 δίδει τὸ πραγματικὸν καὶ ἀνεστραμμένον εἴδωλον Α′Β′. Ἐὰν τὸ εἴδωλον τοῦτο σχηματίζεται εἰς τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον τοῦ προσοφθαλμίου φακοῦ Λ_2, τότε τὸ τελικὸν εἴδωλον, τὸ ὁποῖον δίδει ὁ φακὸς Λ_2, θὰ σχηματίζεται εἰς τὸ ἄπειρον. Ἄρα τὸ Α′Β′ πρέπει νὰ σχηματισθῇ εἰς ἀπόστασιν $\pi' = 12$ cm ἀπὸ τὸν φακὸν Λ_1. Ἡ ἀπόστασις π τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν Λ_1 εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \qquad \text{ἄρα:} \qquad \pi = 6 \text{ cm}.$$

2) Ὅταν τὸ τελικὸν εἴδωλον Α′′Β′′ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 25 cm ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν, τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ Α′′Β′′ ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον εἶναι $\pi_1 = -24$. Ἡ ἀπόστασις π_1 τοῦ Α′Β′ ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:



Σχ. 95

$$\frac{1}{\pi_1} - \frac{1}{24} = -1 \cdot$$

$$\text{ἄρα εἶναι} \qquad \pi_1 = -\frac{24}{23} \text{ cm}.$$

Τὸ Α′Β′ ἀπέχει λοιπὸν ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν: $\quad 11 + \frac{24}{23} = \frac{277}{23}$ cm.

Εὑρίσκομεν τότε ὅτι τὸ ἀντικείμενον ΑΒ ἀπέχει ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν Λ_1: 5,44 cm. Ἄρα εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ ἀντικείμενον πρέπει νὰ πλησιάσῃ πρὸς τὸν ἀντικειμενικὸν κατά: $\quad 6 - 5{,}44 = 0{,}56$ cm $= 5{,}6$ mm.

3) Ὅταν τὸ τελικὸν εἴδωλον Α′′Β′′ σχηματίζεται εἰς τὸ ἄπειρον, ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ Α′′Β′′ εἶναι α′. Ἑπομένως ἡ ἰσχὺς τοῦ ὀργάνου εἶναι:

$P = \frac{\alpha'}{AB}$. Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι: $\quad \alpha' = \frac{A'B'}{\varphi_2} \quad$ καὶ $\quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{12}{6} = 2$,

εὑρίσκομεν κατ' ἀπόλυτον τιμήν:

$$P = \frac{1}{\varphi_2} \times \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{0{,}01} \times 2 = 200 \text{ διοπτρίαι}.$$

Ἡ μεγέθυνσις εἶναι: $\qquad M = 200 \times 0{,}50 = 50$.

VIII. ΔΙΟΠΤΡΑΙ ΚΑΙ ΤΗΛΕΣΚΟΠΙΑ

122. — *Εἰς μίαν ἀστρονομικὴν διόπτραν ὁ ἀντικειμενικὸς καὶ ὁ προσοφθάλμιος ἔχουν ἀντιστοίχως ἑστιακὰς ἀποστάσεις* $\Phi = 2$ m *καὶ* $\varphi = 2$ cm. *Ὁ ὀπτικὸς ἄξων τῆς διόπτρας διευθύνεται πρὸς ἕνα ἀστερισμόν, ἡ δὲ διόπτρα εἶναι ρυθμισμένη διὰ τὴν εἰς ἄπειρον παρατήρησιν. 1) Πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο φακῶν τῆς διόπτρας, ὅταν ὁ παρατηρητὴς διακρίνῃ εὐκρινῶς τοὺς ἀστέρας διὰ μέσου τῆς διόπτρας; 2) Ὑπὸ ποίαν γωνίαν θὰ ἴδῃ ὁ παρατηρητὴς διὰ μέσου τῆς διόπτρας δύο ἀστέρας τῶν ὁποίων ἡ ἀληθὴς γωνιώδης ἀπόστασις εἶναι 3′; 3) Ποῦ πρέπει νὰ τοποθετήσῃ ὁ παρατηρητὴς τὸν ὀφθαλμόν του διὰ νὰ συλλάβῃ ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερον φῶς;*

1) Ὅταν τὸ τελικὸν εἴδωλον σχηματίζεται εἰς τὸ ἄπειρον, τὸ μῆκος τῆς διόπτρας εἶναι: $l = \Phi + \varphi = 2 + 0{,}02 = 2{,}02$ m.

2) Ἡ μεγέθυνσις τῆς διόπτρας εἶναι: $M = \dfrac{\Phi}{\varphi} = \dfrac{2}{0{,}02} = 100$.

Εἶναι $\alpha = 3'$· ἐὰν α' εἶναι ἡ γωνιώδης ἀπόστασις τῶν δύο ἀστέρων, ὅταν τοὺς παρατηροῦμεν διὰ μέσου τῆς διόπτρας, τότε ἀπὸ τὴν σχέσιν ποὺ δίδει τὴν μεγέθυνσιν: $M = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$ εὑρίσκομεν: $\alpha' = \alpha \cdot M = 3 \times 100 = 300'$ ἢ $\alpha' = 5^0$.

3) Ὁ ὀφθαλμὸς πρέπει να τοποθετηθῇ εἰς τὸν προσοφθάλμιον κύκλον, δηλαδὴ ἐκεῖ ὅπου ὁ προσοφθάλμιος σχηματίζει τὸ εἴδωλον τοῦ ἀντικειμενικοῦ. Τὴν θέσιν αὐτὴν τὴν εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{202} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{2} \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi' = 2{,}02 \text{ cm}.$$

Ὁ ὀφθαλμὸς πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ὄπισθεν τοῦ προσοφθαλμίου καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ αὐτὸν 2,02 cm.

123. — *Ὁ ἀντικειμενικὸς καὶ ὁ προσοφθάλμιος μιᾶς ἀστρονομικῆς διόπτρας ἔχουν ἀντιστοίχως ἑστιακὰς ἀποστάσεις* $\Phi = 100$ cm *καὶ* $\varphi = 2$ cm. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγέθυνσις καὶ τὸ μῆκος τῆς διόπτρας εἰς τὰς κατωτέρω τρεῖς περιπτώσεις: 1) Ὅταν τὸ ἀντικείμενον εἶναι εἰς τὸ ἄπειρον καὶ ὁ ὀφθαλμὸς βλέπει διὰ τῆς διόπτρας εἰς τὸ ἄπειρον. 2) Ὅταν τὸ ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄπειρον καὶ ὁ ὀφθαλμός, εὑρισκόμενος εἰς ἀπόστασιν 2 cm ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον, βλέπει τὸ τελικὸν εἴδωλον εἰς ἀπόστασιν 25 cm. 3) Ὅταν τὸ ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 50 m καὶ ὁ ὀφθαλμός, εὑρισκόμενος εἰς ἀπόστασιν 1 cm ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον, βλέπει τὸ τελικὸν εἴδωλον εἰς ἀπόστασιν 25 cm.*

1) Ὅταν τὸ εἴδωλον σχηματίζεται εἰς τὸ ἄπειρον, τότε εἶναι:

ἡ μεγέθυνσις: $M_1 = \dfrac{\Phi}{\varphi} = \dfrac{100}{2} = 50$· τὸ μῆκος: $l_1 = \Phi + \varphi = 102$ cm.

2) Ὁ ὀφθαλμὸς εὑρίσκεται εἰς τὴν ἑστίαν τοῦ προσοφθαλμίου. Γνωρίζομεν ὅτι γενικῶς ἡ μεγέθυνσις τῆς διόπτρας ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως τοῦ ἀντικειμενικοῦ (εἰς μέτρα) ἐπὶ τὴν ἰσχὺν τοῦ προσοφθαλμίου.

Ἄρα ἡ μεγέθυνσις εἶναι : $M_2 = \Phi \times \dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{1}{0{,}02} = 50$.

Τὸ τελικὸν φανταστικὸν εἴδωλον A''B'' ἀπέχει 25 cm ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν· ἐπομένως ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον εἶναι : $\pi' = 23$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν : $\dfrac{1}{\pi} - \dfrac{1}{23} = \dfrac{1}{2}$ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ πραγματικὸν εἴδωλον A'B', ποὺ δίδει ὁ ἀντικειμενικός, σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον : $\pi = 1{,}84$ cm .

Ἄρα τὸ μῆκος τῆς διόπτρας εἶναι τότε : $l_2 = \Phi + \pi = 101{,}84$ cm .

3) Τὸ ἀντικείμενον AB ἀπέχει ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν $\pi_1 = 50$ m . Εὑρίσκομεν τότε ὅτι τὸ πραγματικὸν εἴδωλον A'B' σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν :

$\pi_1' = \dfrac{50}{49}$ m · ἐπομένως ἔχομεν τὴν σχέσιν : $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{1}{49}$.

Τὸ τελικὸν φανταστικὸν εἴδωλον A''B'' σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 25 cm ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν, δηλαδὴ εἰς ἀπόστασιν $\pi' = 24$ cm ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν : $\dfrac{1}{\pi} - \dfrac{1}{24} = \dfrac{1}{2}$ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ εἴδωλον A'B' ἀπέχει ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον : $\pi = \dfrac{24}{13}$ cm .

Ἐπομένως εἶναι : $\dfrac{A''B''}{A'B'} = 13$ καὶ $\dfrac{A''B''}{AB} = \dfrac{13}{49}$.

Ἄρα ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου AB ἀπὸ τὸν ὀφθαλμὸν εἶναι περίπου 51 m · ἐπομένως ἡ φαινομένη διάμετρός του εἶναι : $\alpha = \dfrac{AB}{5\,100}$.

Ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ εἰδώλου A''B'' εἶναι : $\alpha' = \dfrac{A''B''}{25}$.

Ἐπομένως ἡ μεγέθυνσις τῆς διόπτρας εἶναι :

$$M_3 = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{A''B''}{25} : \frac{AB}{5\,100} = \frac{A''B''}{AB} \times \frac{5\,100}{25} = \frac{13}{49} \times 204 = 54 .$$

Τὸ μῆκος τῆς διόπτρας εἶναι : $l_3 = \dfrac{5\,000}{49} + \dfrac{24}{13} = 103{,}88$ cm .

124. — *Ὁ ἀντικειμενικὸς καὶ ὁ προσοφθάλμιος μιᾶς διόπτρας εἶναι συγκλίνοντες φακοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἑστιακὰς ἀποστάσεις $\Phi = 1$ m καὶ $\varphi = 10$ cm. 1) Παρατηρητής, ἔχων κανονικὴν ὅρασιν, στρέφει τὸν ἄξονα τῆς διόπτρας πρὸς τὸ κέντρον τοῦ ἡλίου, τοῦ ὁποίου ἡ φαινομένη διάμετρος εἶναι 32'. Νὰ εὑρεθῇ ὑπὸ ποίαν γωνίαν (εἰς μοίρας) θὰ ἴδῃ ὁ παρατηρητὴς διὰ μέσου τῆς διόπτρας τὸν ἥλιον. 2) Ἀπομακρύνομεν τὸν προσοφθάλμιον κατὰ 2 cm ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν. Νὰ* *εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ εἰδώλου τοῦ ἡλίου καὶ ἡ διάμετρος τοῦ εἰδώλου τούτου.*

1) Ἡ μεγέθυνσις εἶναι: $M = \frac{\Phi}{\varphi} = \frac{100}{10} = 10$.

Ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ εἰδώλου εἶναι: $\alpha' = 10\,\alpha = 320' = 5^\circ\ 20$.

2) Ὁ ἀντικειμενικὸς δίδει εἴδωλον $A'B'$ τὸ ὁποῖον σχηματίζεται εἰς τὴν ἑστίαν τοῦ ἀντικειμενικοῦ. Ἑπομένως ἡ διάμετρός του εἶναι: $A'B' = \alpha \,.\, \Phi$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\alpha = 32' = \frac{1}{108}$ ἀκτινίου, εὑρίσκομεν:

$$A'B' = \frac{1}{108} \times 1000 = 0{,}9 \text{ cm}.$$

Τὸ εἴδωλον τοῦτο σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν $\pi = 12$ cm ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον. Ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\frac{1}{12} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{10}$ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ τελικὸν εἴδωλον $A''B''$ ἀπέχει $\pi' = 60$ cm ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον, ἤτοι σχηματίζεται πέραν τοῦ προσοφθαλμίου. Ἡ διάμετρος τοῦ τελικοῦ εἰδώλου εἶναι:

$$A''B'' = A'B' \times \frac{\pi'}{\pi} = 0{,}9 \times \frac{60}{12} = 4{,}5 \text{ cm}.$$

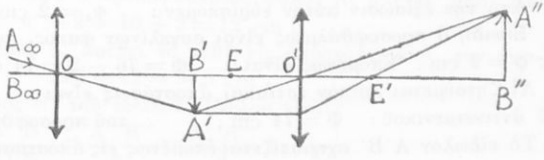
Τὸ εἴδωλον $A''B''$ εἶναι πραγματικὸν καὶ δύναται νὰ ληφθῇ ἐπὶ πετάσματος.

125.— *Εἰς μίαν διόπτραν ὁ ἀντικειμενικὸς ἔχει ἰσχὺν μιᾶς διοπτρίας καὶ ὁ προσοφθάλμιος ἔχει ἰσχὺν ἑκατὸν διοπτριῶν. Ὁ ἄξων τῆς διόπτρας διευθύνεται πρὸς τὸ κέντρον τοῦ ἡλίου. Ὄπισθεν τοῦ προσοφθαλμίου καὶ εἰς σταθερὰν ἀπὸ αὐτὸν ἀπόστασιν 50 cm στερεώνομεν, καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα τῆς διόπτρας, μίαν φωτογραφικὴν πλάκα. 1) Νὰ εὑρεθῇ πόσον πρέπει νὰ ἀπέχῃ ὁ προσοφθάλμιος ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν, ὥστε τὸ εἴδωλον τοῦ ἡλίου νὰ σχηματίζεται ἐπὶ τῆς πλακός. 2) Ποῖον εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου τούτου, ἐὰν ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι 30 λεπτά;*

1) Αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις ἀντικειμενικοῦ καὶ προσοφθαλμίου εἶναι ἀντιστοίχως:

$\Phi = 100$ cm

καὶ $\varphi = 1$ cm.



Σχ. 96

Διὰ νὰ εἶναι πραγματικὸν τὸ τελικὸν εἴδωλον $A''B''$ πρέπει τὸ εἴδωλον $A'B'$, ποὺ δίδει ὁ ἀντικειμενικός, νὰ σχηματίζεται πρὸ τῆς ἑστίας E τοῦ προσοφθαλμίου. Ἡ ἀπόστασις τοῦ $A''B''$ ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον εἶναι $\pi_1' = 50$ cm. Ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\frac{1}{\pi_1} + \frac{1}{50} = 1$ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ εἴδωλον $A'B'$ ἀπέχει ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον:

$$\pi_1 = \frac{50}{49} = 1{,}02 \text{ cm}.$$

Ἄρα ἡ ἀπόστασις τοῦ προσοφθαλμίου ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν πρέπει νὰ εἶναι: $l = \Phi + \pi_1 = 101{,}02$ cm.

2) Ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι: $\alpha = \frac{1^\circ}{2} = \frac{\pi}{360}$ ἀκτινίου.

Ἐπομένως ἡ διάμετρος τοῦ εἰδώλου Α΄Β΄ εἶναι:

$$A'B' = \Phi \cdot \alpha = \frac{100\,\pi}{360} = \frac{5\,\pi}{18}\ \text{cm}.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι: $\frac{A''B''}{A'B'} = 50 : \frac{50}{49} = 49$

εὑρίσκομεν ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ τελικοῦ πραγματικοῦ εἰδώλου Α΄΄Β΄΄ εἶναι:

$$A''B'' = 49 \times \frac{5\pi}{18} = 43\ \text{cm}.$$

126. — *Ἀστρονομικὴ διόπτρα ἔχει μῆκος 76 cm, ὅταν εἶναι ρυθμισμένη διὰ τὴν παρατήρησιν ἑνὸς πολὺ μακρινοῦ ἀντικειμένου. Ἐὰν αὐξήσωμεν τὸ μῆκος τῆς διόπτρας κατὰ 1 cm, τὸ εἴδωλον τοῦ ἀντικειμένου τούτου γίνεται πραγματικὸν καὶ σχηματίζεται ὄπισθεν τοῦ προσοφθαλμίου εἰς ἀπόστασιν 6 cm ἀπὸ αὐτὸν καὶ ἔχει ὕψος 13 mm. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ τοῦ προσοφθαλμίου καθὼς καὶ ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ ἀντικειμένου.*

Ἔστω φ καὶ Φ αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις τοῦ προσοφθαλμίου καὶ τοῦ ἀντικειμενικοῦ. Ὅταν ἡ διόπτρα εἶναι ρυθμισμένη διὰ τὴν παρατήρησιν ἀντικειμένου εὑρισκομένου εἰς τὸ ἄπειρον, τότε τὸ εἴδωλον Α΄Β΄, ποὺ δίδει ὁ ἀντικειμενικός, σχηματιζεται εἰς τὴν κοινὴν ἑστίαν τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ τοῦ προσοφθαλμίου. Ἑπομένως τὸ μῆκος τῆς διόπτρας εἶναι τότε: $\Phi + \varphi = 76$.

Ἐὰν ὁ προσοφθάλμιος ὀπισθοχωρήσῃ κατὰ 1 cm, τότε τὸ εἴδωλον Α΄Β΄, ποὺ δίδει ὁ ἀντικειμενικός, σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν $\pi = \varphi + 1$ ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον. Τὸ δὲ εἴδωλον Α΄΄Β΄΄, ποὺ δίδει ὁ προσοφθάλμιος, σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν $\pi' = 6$ cm. Ἑπομένως ἰσχύει τότε ἡ σχέσις:

$$\frac{1}{\varphi + 1} + \frac{1}{6} = \frac{1}{\varphi} \cdot \qquad \text{ἄρα} \qquad \varphi^2 + \varphi - 6 = 0.$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν: $\varphi_1 = 2$ cm καὶ $\varphi_2 = -3$ cm.

Ἐπειδὴ ὁ προσοφθάλμιος εἶναι συγκλίνων φακός, παραδεκτὴ εἶναι ἡ λύσις $\varphi = 2$ cm. Ἑπομένως εἶναι: $\Phi = 76 - 2 = 74$ cm.

Αἱ ζητούμεναι λοιπὸν ἑστιακαὶ ἀποστάσεις εἶναι:

τοῦ ἀντικειμενικοῦ: $\Phi = 74$ cm, τοῦ προσοφθαλμίου: $\varphi = 2$ cm.

Τὸ εἴδωλον Α΄Β΄ σχηματίζεται ἑπομένως εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον: $\pi = \varphi + 1 = 2 + 1 = 3$ cm. Ἑπομένως ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{A''B''}{A'B'} = \frac{\pi'}{\pi} = \frac{6}{3} = 2 \cdot \qquad \text{ἄρα} \qquad A'B' = \frac{A''B''}{2} = \frac{1{,}3}{2} = 0{,}65\ \text{cm}.$$

Ἐὰν α εἶναι ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ ἀντικειμένου, τότε ἔχομεν τὴν σχέσιν: $A'B' = \Phi \cdot \alpha$ · ἡ ζητουμένη φαινομένη διάμετρος εἶναι:

$$\alpha = \frac{A'B'}{\Phi} = \frac{0{,}65}{75}\ \text{ἀκνινίου} \quad \text{ἢ} \quad \text{περίπου} \quad \alpha = 0{,}5^\circ.$$

Ἡ λύσις $\varphi = -3$ δίδει ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ ἀντικειμενικοῦ:

$$\Phi = 76 + 3 = 79\ \text{cm}.$$

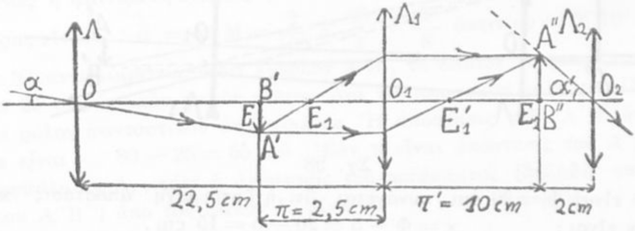
Τότε ὁ προσοφθάλμιος εἶναι ἀποκλίνων φακὸς καὶ ἡ διόπτρα εἶναι μία διόπτρα τοῦ Γαλιλαίου.

127. — *Μία διόπτρα τῶν ἐπιγείων ἀποτελεῖται : α) ἀπὸ ἀντικειμενικὸν Λ ἑστιακῆς ἀποστάσεως $\phi = 20$ cm · β) ἀπὸ συγκλίνοντα φακὸν Λ_1 ἑστιακῆς ἀποστάσεως $\phi_1 = 2$ cm, ὁ ὁποῖος ἀπέχει 22,5 cm ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν · γ) ἀπὸ συγκλίνοντα φακὸν Λ_2 ἑστιακῆς ἀποστάσεως $\phi_2 = 2$ cm, ὁ ὁποῖος χρησιμεύει ὡς προσοφθάλμιος. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν πρέπει νὰ τεθῇ ὁ προσοφθάλμιος διὰ νὰ παρατηροῦμεν διὰ τῆς διόπτρας ἀντικείμενον εὑρισκόμενον εἰς τὸ ἄπειρον. Πόση εἶναι τότε ἡ μεγέθυνσις τῆς διόπτρας ;*

Ἕνα ἀντικείμενον ΑΒ πoὺ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄπειρον, δίδει τὸ πραγματικὸν εἴδωλον Α′Β′ τὸ ὁποῖον σχηματίζεται εἰς τὴν κυρίαν ἑστίαν Ε τοῦ ἀντικειμενικοῦ Λ, δηλαδὴ εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἀπὸ αὐτόν. Τὸ εἴδωλον τοῦτο σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν $\pi = 2{,}5$ cm ἀπὸ τὸν δεύτερον φακὸν Λ_1. Ὁ φακὸς αὐτὸς δίδει τὸ πραγματικὸν εἴδωλον Α″Β″, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις π′ ἀπὸ τὸ O_1 εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{2{,}5} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{2} \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi' = 10 \text{ cm}.$$

Διὰ νὰ δώσῃ ὁ προσοφθάλμιος φακὸς Λ_2 εἴδωλον εἰς τὸ ἄπειρον, πρέπει τὸ Α″Β″ νὰ σχηματίζεται εἰς τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον τοῦ Λ_2, δηλαδὴ εἰς από-



Σχ. 97

στασιν 2 cm ἀπὸ τὸ O_2. Ἄρα ὁ προσοφθάλμιος φακὸς Λ_2 ἀπέχει ἀπὸ τὸν δεύτερον φακὸν Λ_1 : $\pi' + 2 = 10 + 2 = 12$ cm.

Ὁ προσοφθάλμιος φακὸς Λ_2 πρέπει νὰ τεθῇ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν : $22{,}5 + 12 = 34{,}5$ cm.

Ἡ φαινομένη διάμετρος α′ τοῦ τελικοῦ εἰδώλου εἶναι :

$$\alpha' = \frac{A''B''}{O_2B''} = \frac{A''B''}{\phi_2} = \frac{A''B''}{2} \text{ ἀκτίνια}.$$

Ἡ φαινομένη διάμετρος α τοῦ ἀντικειμένου εἶναι :

$$\alpha = \frac{A'B'}{OB'} = \frac{A'B'}{\phi} = \frac{A'B'}{20} \text{ ἀκτίνια}.$$

Ἡ μεγέθυνσις Μ τῆς διόπτρας εἶναι :

$$M = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{A''B''}{2} : \frac{A'B'}{20} = 10 \times \frac{A''B''}{A'B'}.$$

Ἀλλὰ εἶναι : $\dfrac{A''B''}{A'B} = \dfrac{\pi'}{\pi} = \dfrac{10}{2{,}5} = 4$.

Ὥστε ἡ μεγέθυνσις εἶναι : $M = 40$.

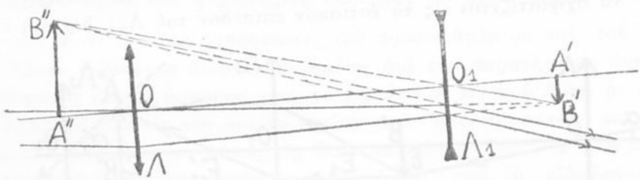
128.— *Εἰς μίαν διόπτραν τοῦ Γαλιλαίου ὁ ἀντικειμενικὸς ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 20 cm καὶ ὁ προσοφθάλμιος 4 cm. 1) Πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν δύο φακῶν, ὅταν παρατηροῦμεν διὰ τῆς διόπτρας ἕνα πολὺ μακρινὸν ἀντικείμενον, τοῦ ὁποίου τὸ εἴδωλον σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον; 2) Τί γίνεται τὸ εἴδωλον τοῦτο, ὅταν ὁ προσοφθάλμιος ὀπισθοχωρήσῃ κατὰ 15 mm; Νὰ ὑπολογισθοῦν, εἰς τὴν τελευταίαν αὐτὴν περίπτωσιν αἱ διαστάσεις τοῦ εἰδώλου, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ πολὺ μακρινοῦ ἀντικειμένου εἶναι 30΄.*

1) Ὁ προσοφθάλμιος εἶναι ἀποκλίνων φακός· ἐπομένως εἶναι : $\varphi = -4$ cm. Τὸ τελικὸν φανταστικὸν εἴδωλον Α΄΄Β΄΄ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν $\pi' = -20$ cm ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον.

Ἄρα ἡ ἀπόστασις π τοῦ εἰδώλου Α΄Β΄ (ποὺ δίδει ὁ ἀντικειμενικὸς) ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{\pi} - \frac{1}{20} = -\frac{1}{4} \quad \text{ἤτοι} \quad \pi = -5 \text{ cm}.$$

Ὥστε τὸ Α΄Β΄ σχηματίζεται 5 cm ὄπισθεν τοῦ προσοφθαλμίου καὶ εἰς τὴν ἑστίαν τοῦ ἀντικειμενικοῦ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις Φ τοῦ ἀντι-



Σχ. 98

κειμενικοῦ εἶναι Φ = 20 cm, συνάγεται ὅτι ἡ ζητουμένη ἀπόστασις x τῶν δύο φακῶν εἶναι :
$$x = \Phi - 5 = 20 - 5 = 15 \text{ cm}.$$

2) Ἐὰν ὁ προσοφθάλμιος ὀπισθοχωρήσῃ κατὰ 1,5 cm, τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ Α΄Β΄ ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον γίνεται : $\pi_1 = 5 - 1{,}5 = 3{,}5$ cm.

Ἐπομένως τότε εἶναι : $\dfrac{1}{3{,}5} - \dfrac{1}{\pi_1'} = -\dfrac{1}{4}$ ἄρα $\pi_1' = 28$ cm.

Τὸ τελικὸν εἴδωλον Α΄΄Β΄΄ γίνεται τότε πραγματικὸν καὶ σχηματίζεται ἔμπροσθεν τοῦ προσοφθαλμίου καὶ εἰς ἀπόστασιν 28 cm ἀπὸ αὐτόν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν : $\dfrac{A''B''}{A'B'} = \dfrac{28}{3{,}5} = 8$.

Ἐὰν α εἶναι ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ μακρινοῦ ἀντικειμένου, τότε εἶναι:

$$A'B' = \Phi \cdot \alpha = 20 \times \frac{\pi}{360} = \frac{\pi}{18} \text{ cm}.$$

Ἐπομένως τὸ μέγεθος τοῦ τελικοῦ εἰδώλου Α΄΄Β΄΄ εἶναι :

$$A''B'' = 8 \cdot A'B' = \frac{8\pi}{18} = 1{,}4 \text{ cm}.$$

129.— *Μία διόπτρα τοῦ Γαλιλαίου ἔχει ὡς ἀντικειμενικὸν συγκλίνοντα φακὸν Λ, ἰσχύος 4 διοπτριῶν καὶ προσοφθάλμιον φακὸν Λ_1, ἰσχύος 25 διοπτριῶν.*

Ἕνας ὀφθαλμὸς προσηρμοσμένος διὰ τὴν εἰς ἄπειρον παρατήρησιν βλέπει διὰ μέσου τῆς διόπτρας αὐτῆς ἕνα ἀντικείμενον ΑΒ, ποὺ ἔχει ὕψος 20 m *καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὸν παρατηρητὴν* 1000 m. *1) Ὅταν ἡ διόπτρα εἶναι ρυθμισμένη διὰ τὴν εἰς ἄπειρον παρατήρησιν, πόση εἶναι ἡ μεταξὺ τῶν φακῶν Λ καὶ $Λ_1$ ἀπόστασις; 2) Πόση εἶναι ἡ μεγέθυνσις τῆς διόπτρας καὶ ὑπὸ ποίαν γωνίαν (εἰς μοίρας) φαίνεται τὸ ἀντικείμενον διὰ μέσου τοῦ ὀργάνου; 3) Εἰς ἀπόστασιν* 80 cm *ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν θέτομεν ὄπισθεν τῆς διόπτρας ἕνα πέτασμα. Κατὰ πόσον καὶ κατὰ ποίαν φορὰν πρέπει νὰ μετακινηθῇ ὁ προσοφθάλμιος διὰ νὰ ληφθῇ ἐπὶ τοῦ πετάσματος τὸ πραγματικὸν εἴδωλον τοῦ ἀντικειμένου ΑΒ; 4) Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται τότε ἐπὶ τοῦ πετάσματος;*

1) Κατ' ἀπόλυτον τιμὴν αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις τῶν δύο φακῶν εἶναι:

τοῦ Λ: $\phi = \dfrac{100}{4} = 25$ cm· τοῦ $Λ_1$: $\phi_1 = \dfrac{100}{25} = 4$ cm.

Ὅταν ἡ διόπτρα εἶναι ρυθμισμένη διὰ τὴν εἰς ἄπειρον παρατήρησιν, ἡ μεταξὺ τῶν δύο φακῶν ἀπόστασις εἶναι: $l = \phi - \phi_1 = 25 - 4 = 21$ cm.

2) Ἡ μεγέθυνσις τῆς διόπτρας εἶναι τότε: $M = \dfrac{\phi}{\phi_1} = \dfrac{25}{4} = 6{,}25$.

Ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ ἀντικειμένου ΑΒ εἶναι:

$$\alpha = \frac{20}{1000} = \frac{2}{100} \text{ ἀκτινίου}\cdot$$

ἑπομένως ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ εἰδώλου, ποὺ βλέπομεν διὰ μέσου τῆς διόπτρας εἶναι: $\alpha' = \alpha \,.\, M = \dfrac{2}{100} \times \dfrac{25}{4} = \dfrac{1}{8}$ ἀκτινίου $= 7^\circ\ 10'$.

3) Ὁ ἀντικειμενικὸς δίδει εἴδωλον Α΄Β΄, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 25 cm ἀπὸ τὸν φακὸν τοῦτον. Διὰ τὸν προσοφθάλμιον τὸ εἴδωλον Α΄Β΄ παίζει ρόλον φανταστικοῦ ἀντικειμένου. Ἡ ἀπόστασις τοῦ Α΄Β΄ ἀπὸ τὸ πέτασμα εἶναι: $80 - 25 = 55$ cm. Ἐὰν π εἶναι ἀπόστασις τοῦ Α΄Β΄ ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον, $Λ_1$, τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ πετάσματος (δηλαδὴ τοῦ τελικοῦ εἰδώλου Α΄΄Β΄΄) ἀπὸ τὸν φακὸν $Λ_1$ εἶναι: $\pi' = \pi + 55$.

Ἔχομεν λοιπὸν τότε τὴν σχέσιν:

$$-\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi + 55} = -\frac{1}{4} \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi^2 + 55\,\pi - 220 = 0.$$

Παραδεκτὴ εἶναι μόνον ἡ θετικὴ ρίζα τῆς ἐξισώσεως, ἤτοι ἡ $\pi = 3{,}73$ cm.

Ἄρα εἶναι: $\pi' = 58{,}73$ cm καὶ ἑπομένως ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν φακῶν Λ καὶ $Λ_1$ πρέπει νὰ εἶναι: $l' = 80 - 58{,}73 = 21{,}27$ cm.

Ἡ ἀπόστασις λοιπὸν τῶν δύο φακῶν πρέπει νὰ αὐξηθῇ κατά:

$$\Delta l = l' - l = 21{,}27 - 21 = 0{,}27 \text{ cm} = 2{,}7 \text{ mm}.$$

Ὁ προσοφθάλμιος θὰ ἀπομακρυνθῇ ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν κατὰ 2,7 mm.

4) Τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου Α΄Β΄ εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{0{,}25}{1000} \qquad \text{ἢ} \qquad A'B' = \frac{20 \times 0{,}25}{1000} = \frac{1}{200} \text{ m} = \frac{1}{2} \text{ cm}.$$

Κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἡ γραμμικὴ μεγέθυνσις τοῦ προσοφθαλμίου εἶναι:

$\dfrac{A''B''}{A'B'} = \dfrac{\pi'}{\pi} = \dfrac{58{,}73}{3{,}73}$ ἄρα τὸ μῆκος τοῦ τελικοῦ εἰδώλου Α΄΄Β΄΄ εἶναι:

$$A''B'' = \frac{1}{2} \times \frac{58{,}73}{3{,}73} = 7{,}87 \text{ cm}.$$

130.— *Εἰς μίαν διόπτραν τοῦ Γαλιλαίου ὁ ἀντικειμενικὸς ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν* $\Phi = 50$ cm , *ὁ δὲ προσοφθάλμιος ἔχει* $\varphi = 10$ cm *(κατ' ἀπόλυτον τιμήν). Ἡ διόπτρα χρησιμοποιεῖται ἀπὸ ἕνα ὀφθαλμὸν προσηρμοσμένον διὰ τὴν εἰς ἄπειρον παρατήρησιν. Ὁ ὀφθαλμὸς αὐτὸς παρατηρεῖ διὰ τῆς διόπτρας ἀντικείμενον ὕψους* 20 m , *εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς χιλιομέτρου. 1) Πόση εἶναι ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ ἀντικειμένου, ὅταν τοῦτο παρατηρῆται διὰ τῆς διόπτρας ; 2) Ὁ παρατηρητὴς ἀναστρέφει τὴν διόπτραν καὶ χρησιμοποιεῖ τώρα ὡς προσοφθάλμιον τὸν συγκλίνοντα φακὸν τῆς διόπτρας. Διακρίνει τότε σαφὲς εἴδωλον τοῦ ἀντικειμένου ; Πόση εἶναι ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ ἀντικειμένου, ὅταν τοῦτο παρατηρῆται διὰ τῆς διόπτρας ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω συνθήκας ;*

1) Ἡ φαινομένη διάμετρος α τοῦ ἀντικειμένου εἶναι :

$$\alpha = \frac{20}{1000} = \frac{1}{50} \text{ ἀκτινίου .}$$

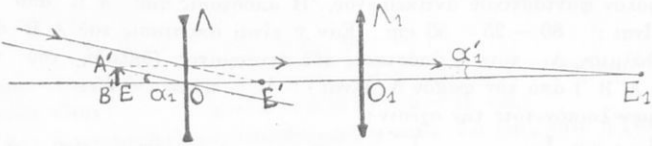
Ἡ μεγέθυνσις M τῆς διόπτρας εἶναι : $\quad M = \dfrac{\Phi}{\varphi} = \dfrac{50}{10} = 5 .$

Ἐξ ἄλλου, ἂν α' εἶναι ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ ἀντικειμένου, ὅταν τοῦτο παρατηρῆται διὰ τῆς διόπτρας, ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$M = \frac{\alpha'}{\alpha} \qquad \text{ἄρα} \qquad \alpha' = M \,.\, \alpha = 5 \times \frac{1}{50}$$

ἤτοι $\alpha' = 0{,}1$ ἀκτινίου, δηλαδὴ 6^0 περίπου.

2) Τὸ πολὺ μακρινὸν ἀντικείμενον στέλλει τότε εἰς τὸν ἀποκλίνοντα φακὸν Λ παραλλήλους ἀκτῖνας. Ὁ φακὸς αὐτὸς δίδει τότε τὸ φανταστικὸν εἴδωλον A'B' τὸ ὁποῖον σχηματίζεται εἰς τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον τοῦ Λ. Ἡ διόπτρα



Σχ. 99

εἶναι ρυθμισμένη διὰ τὴν εἰς ἄπειρον παρατήρησιν· ἄρα ἡ ἀπόστασις τῶν δύο φακῶν Λ καὶ Λ_1 εἶναι : $OO_1 = \Phi - \varphi = 50 - 10 = 40$ cm . Ἡ ἀπόστασις λοιπὸν O_1B' εἶναι : $\quad O_1B' = 40 + \varphi = 50$ cm ,

Ὥστε τὸ εἴδωλον A'B' σχηματίζεται εἰς τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον τοῦ συγκλίνοντος φακοῦ Λ_1 . Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν λοιπὸν αὐτὴν ὁ παρατηρητὴς βλέπει τὸ ὀρθὸν εἴδωλον A'B' .

Ὅταν ἀναστραφῇ ἡ διόπτρα, τότε εἶναι :

$$\alpha_1' = \frac{O_1\Gamma_1}{O_1E_1} = \frac{A'B'}{\Phi} \qquad \text{καὶ} \qquad \alpha_1 = \frac{A'B'}{OE} = \frac{A'B'}{\varphi} .$$

Ἄρα : $\quad A'B' = \varphi \,.\, \alpha_1 = 10 \times \dfrac{1}{50} = \dfrac{1}{5}$ cm ,

ἡ δὲ ζητουμένη φαινομένη διάμετρος α_1' τοῦ νέου εἰδώλου εἶναι :

$$\alpha_1' = \frac{A'B'}{\Phi} = \frac{1}{5} : 50 = \frac{1}{250} \text{ ἀκτινίου .}$$

Ἡ μεγέθυνσις M_1 εἶναι τότε : $M_1 = \frac{\alpha_1'}{\alpha} = \frac{1}{250} : \frac{1}{50} = \frac{1}{5}$,
δηλαδὴ τὸ ἀντικείμενον, παρατηρούμενον διὰ τῆς διόπτρας, φαίνεται 5 φορὰς μικρότερον ἀπὸ ὅσον φαίνεται μὲ γυμνὸν ὀφθαλμόν.

131. — *Μία ἀστρονομικὴ διόπτρα ἔχει ἀντικειμενικὸν φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως 1 m καὶ προσοφθάλμιον ἰσχύος 60 διοπτριῶν. 1) Ἡ διόπτρα χρησιμοποιεῖται ἀπὸ ἕνα παρατηρητήν, ὁ ὁποῖος ἔχει κανονικὴν ὅρασιν καὶ βλέπει δι' αὐτῆς χωρὶς προσαρμογὴν δύο ἀστέρας, τῶν ὁποίων ἡ γωνιώδης ἀπόστασις εἶναι* $\alpha = 20$ *δευτερόλεπτα. α) Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγέθυνσις τῆς διόπτρας καὶ ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὁ παρατηρητὴς βλέπει διὰ τῆς διόπτρας τοὺς δύο τούτους ἀστέρας. β) Ἂν ἡ διαχωριστικὴ ἱκανότης τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ παρατηρητοῦ εἶναι ἕνα λεπτόν, νὰ εὑρεθῇ ἂν ὁ παρατηρητὴς ἠμπορῇ νὰ βλέπῃ κεχωρισμένως τοὺς δύο ἀστέρας διὰ γυμνοῦ ὀφθαλμοῦ καὶ διὰ μέσου τῆς διόπτρας. γ) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ μικροτέρα γωνιώδης ἀπόστασις δύο ἀστέρων, οἱ ὁποῖοι ἠμποροῦν νὰ φαίνωνται ὡς διακεκριμένοι διὰ μέσου τῆς διόπτρας.*

2) Ἡ διόπτρα χρησιμοποιεῖται ἔπειτα ἀπὸ ἕνα παρατηρητὴν μύωπα, ὁ ὁποῖος ρυθμίζει τὴν διόπτραν ὥστε νὰ βλέπῃ εἰς τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν εὐκρινοῦς ὁράσεως, ἴσην μὲ 8 cm. Κατὰ πόσον θὰ μεταβληθῇ τὸ μῆκος τῆς διόπτρας καὶ ἡ μεγέθυνσις αὐτῆς ; Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ ὀφθαλμὸς τίθεται εἰς τὴν ἑστίαν τοῦ προσοφθαλμίου.

1) Ἡ μεγέθυνσις τῆς διόπτρας ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἑστιακῶν ἀποστάσεων Φ καὶ φ τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ τοῦ προσοφθαλμίου ἢ καὶ ἄλλως μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως τοῦ ἀντικειμενικοῦ ἐπὶ τὴν ἰσχὺν τοῦ προσοφθαλμίου : $M = \Phi \times P = 1 \times 60 = 60$.

Ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν οἱ δύο ἀστέρες φαίνονται διὰ μέσου τῆς διόπτρας εἶναι : $\alpha' = M \cdot \alpha = 60 \times 20'' = 1200'' = 20'$.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία α εἶναι μικροτέρα ἀπὸ 1 λεπτόν, ὁ παρατηρητὴς δὲν ἠμπορεῖ νὰ διακρίνῃ τοὺς ἀστέρας τούτους. Ἀντιθέτως διὰ τῆς διόπτρας διακρίνει τοὺς δύο ἀστέρας.

Ἡ μικροτέρα γωνιώδης ἀπόστασις β δύο διακρινομένων διὰ τῆς διόπτρας ἀστέρων εὑρίσκεται ἂν διαιρέσωμεν τὴν διαχωριστικὴν ἱκανότητα τοῦ ὀφθαλμοῦ διὰ τῆς μεγεθύνσεως.

Ἄρα εἶναι : $l = \frac{1}{60}$ λεπτοῦ $= 1$ δευτερόλεπτον.

2) Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ προσοφθαλμίου εἶναι : $\varphi = \frac{5}{3} = 1{,}67$ cm.

Ἐπειδὴ ὁ ὀφθαλμὸς εὑρίσκεται εἰς τὴν κυρίαν ἑστίαν καὶ τὸ τελικὸν εἴδωλον σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 8 cm ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν, συνάγεται ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον εἶναι : $\pi' = 8 - \frac{5}{3} = \frac{19}{3}$ cm.

Τὸ πραγματικὸν εἴδωλον Α'Β' τὸ ὁποῖον δίδει ὁ ἀντικειμενικός, καὶ τὸ ὁποῖον ἐπέχει θέσιν ἀντικειμένου διὰ τὸν προσοφθάλμιον, σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν π ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{\pi} - \frac{3}{19} = \frac{3}{5} \quad \text{ἤτοι} \quad \pi = \frac{95}{72} = 1{,}32 \text{ cm}.$$

Εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν τοῦ κανονικοῦ ὀφθαλμοῦ τὸ Α΄Β΄ ἐσχηματίζετο εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον $\varphi = 1{,}67$ cm. Πρέπει λοιπὸν τώρα ὁ προσοφθάλμιος νὰ πλησιάσῃ πρὸς τὸν ἀντικειμενικὸν κατά:

$$1{,}67 - 1{,}32 = 0{,}35 \text{ cm}.$$

Ἡ μεγέθυνσις εἶναι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν $M = 60$, διότι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ ἡ ἰσχὺς τοῦ προσοφθαλμίου δὲν μετεβλήθησαν.

132.— *Ἕνας ἀστήρ, ὅταν παρατηρῆται διὰ γυμνοῦ ὀφθαλμοῦ, φαίνεται ὑπὸ γωνίαν $\delta = 1/100$ τοῦ ἀκτινίου. Ὁ ἄξων τῆς διόπτρας διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἀστέρος. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ εἶναι $\varphi_1 = 40$ cm, ἡ δὲ ἰσχὺς τοῦ προσοφθαλμίου εἶναι $P_2 = 20$ διοπτρίαι. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ὑποθέτομεν ὅτι ὁ ὀφθαλμὸς εἶναι κανονικὸς καὶ παρατηρεῖ εἰς τὸ ἄπειρον. 1) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ διάμετρος τοῦ πραγματικοῦ εἰδώλου, τὸ ὁποῖον δίδει ὁ ἀντικειμενικὸς καὶ ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὁ ἀστὴρ φαίνεται διὰ μέσου τῆς διόπτρας. 2) Ὁ παρατηρητὴς διευθύνει τὴν διόπτραν πρὸς ἕνα ἀντικείμενον ποὺ ἀπέχει 5 m ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν. Νὰ εὑρεθῇ κατὰ πόσον καὶ κατὰ ποίαν φορὰν πρέπει νὰ μετακινηθῇ ὁ προσοφθάλμιος, ὥστε τὸ ἀντικείμενον νὰ φαίνεται εὐκρινῶς. 3) Νὰ εὑρεθῇ ὑπὸ ποίαν γωνίαν (εἰς ἀκτίνια) θὰ φαίνεται τὸ τελικὸν εἴδωλον διὰ τῆς οὕτω ρυθμισμένης διόπτρας. Τὸ παρατηρούμενον ἀντικείμενον εἶναι δίσκος, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον 5 cm.*

1) Ἐπειδὴ τὸ πραγματικὸν εἴδωλον Α΄Β΄, τὸ ὁποῖον δίδει ὁ ἀντικειμενικός, σχηματίζεται περίπου εἰς τὴν κυρίαν ἑστίαν του ἔχομεν:

$$A'B' = \varphi_1 \,.\, \delta = 40 \times \frac{1}{100} = 0{,}4 \text{ cm} = 4 \text{ mm}.$$

Ἡ φαινομένη διάμετρος δ' τοῦ τελικοῦ εἰδώλου εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$A'B' = \varphi_2 \,.\, \delta'$$

ὅπου φ_2 εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ προσοφθαλμίου.

Ἄρα: $$\delta' = \frac{A'B'}{\varphi_2} = A'B' \times P_2.$$

Ἂν λοιπὸν ἐκφράσωμεν τὸ Α΄Β΄ εἰς μέτρα καὶ τὸ P_2 εἰς διοπτρίας, εὑρίσκομεν

$$\delta' = 0{,}004 \times 20 = 0{,}08 \text{ ἀκτινίου} \quad \text{ἢ} \quad \delta' = 4^0\ 35'.$$

2) Ἡ ἀπόστασις π' τοῦ πραγματικοῦ εἰδώλου ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{500} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{40} \quad \text{ἄρα} \quad \pi' = 43{,}5 \text{ cm}.$$

Ὁ προσοφθάλμιος λοιπὸν φακὸς πρέπει νὰ ὀπισθοχωρήσῃ κατά:

$$43{,}5 - 40 = 3{,}5 \text{ cm}.$$

3) Ἡ διάμετρος τοῦ εἰδώλου Α΄Β΄, ποὺ δίδει ὁ ἀντικειμενικός, ἔχει μέγεθος:

$$A'B' = AB \times \frac{\pi'}{\pi} = 5 \times \frac{43{,}5}{500} = 0{,}435 \text{ cm}.$$

Ἡ φαινομένη διάμετρος δ'' τοῦ τελικοῦ εἰδώλου εὑρίσκεται (ὅπως καὶ εἰς τὴν παράγραφον 1) ἀπὸ τὴν σχέσιν : $A'B' = \varphi_2 . \delta'' = \frac{\delta''}{P_2}$.

Ἄρα ἡ ζητουμένη φαινομένη διάμετρος εἶναι :

$\delta'' = A'B' . P_2 = 0{,}00435 \times 20 = 0{,}087$ ἀκτινίου ἢ $\delta'' = 4^0\ 59'$.

133. — *Σύστημα φακῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο λεπτοὺς συγκλίνοντας φακοὺς A καὶ B οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται μεταξύ των. Ἀντικείμενον, ἀπέχον 12 cm ἀπὸ τὸ σύστημα τῶν φακῶν, σχηματίζει πραγματικὸν εἴδωλον εἰς ἀπόστασιν 9,6 cm. Παρατηρητής, ὁ ὁποῖος ἔχει κανονικὸν ὀφθαλμόν, σχηματίζει μὲ τοὺς δύο τούτους φακοὺς ἀστρονομικὴν διόπτραν τὴν ὁποίαν ρυθμίζει διὰ τὴν παρατήρησιν ἀντικειμένων εὑρισκομένων εἰς τὸ ἄπειρον· τότε ἡ ἀπόστασις τῶν δύο φακῶν εἶναι 54 cm. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις τῶν δύο φακῶν καὶ ἡ μεγέθυνσις τῆς κατασκευασθείσης διόπτρας.*

Ἐὰν φ_1 καὶ φ_2 εἶναι ἀντιστοίχως αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις τῶν φακῶν A καὶ B, τότε ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις Φ τοῦ συστήματος τῶν δύο ἐφαπτομένων φακῶν διδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{\Phi} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\varphi_1 \varphi_2}. \qquad (1)$$

Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις Φ προσδιορίζεται εὔκολα ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν τῶν φακῶν :

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{12} + \frac{1}{9{,}6} = \frac{21{,}6}{115{,}2} = \frac{3}{16}. \qquad \text{Ὥστε εἶναι :} \quad \Phi = \frac{16}{3}\ \text{cm}.$$

Ὅταν ἡ διόπτρα εἶναι ρυθμισμένη διὰ τὴν εἰς ἄπειρον παρατήρησιν, τὸ μῆκος της εἶναι : $l = \varphi_1 + \varphi_2 = 54$ cm. (2)

Ἄρα ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\varphi_1 \varphi_2} = \frac{1}{\Phi} \quad \text{ἢ} \quad \frac{54}{\varphi_1 \varphi_2} = \frac{3}{16} \quad \text{ὥστε :} \quad \varphi_1 \varphi_2 = \frac{54 \times 16}{3} = 288.$$

Αἱ δύο λοιπὸν ἑστιακαὶ ἀποστάσεις φ_1 καὶ φ_2 εἶναι αἱ δύο ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως : $x^2 - 54x + 288 = 0$·

ἄρα εἶναι : $\varphi_1 = 27 + 21 = 48$ cm καὶ $\varphi_2 = 27 - 21 = 6$ cm.

Ἀντικειμενικὸς εἶναι ὁ φακὸς A ὁ ὁποῖος ἔχει μεγαλυτέραν ἑστιακὴν ἀπόστασιν, προσοφθάλμιος δὲ εἶναι ὁ φακὸς B. Ἡ μεγέθυνσις τῆς διόπτρας εἶναι:

$$M = \varphi_1 : \varphi_2 = 48 : 6 = 8.$$

134. — *Ἕνας παρατηρητής, ἔχων κανονικὴν ὅρασιν, διαθέτει τρεῖς φακούς: ἕνα συγκλίνοντα φακὸν Λ_1 ἰσχύος 1 διοπτρίας καὶ διαμέτρου 4 cm, ἕνα δεύτερον συγκλίνοντα φακὸν Λ_2 ἰσχύος 25 διοπτριῶν καὶ ἕνα ἀποκλίνοντα φακὸν Λ_3 ἑστιακῆς ἀποστάσεως 1 cm. 1) Ἡ φαινομένη διάμετρος α τῆς Σελήνης εἶναι 30 λεπτά, δηλαδὴ 0,009 τοῦ ἀκτινίου. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν πρῶτον φακὸν Λ_1, ὅταν χρησιμοποιῆται μόνος, σχηματίζεται τὸ εἴδωλον τῆς Σελήνης καὶ πόση εἶναι ἡ διάμετρός του. 2) Τὸ εἴδωλον τοῦτο βλέπει ὁ παρατηρητὴς διὰ μέσου τοῦ φακοῦ Λ_2, τὸν ὁποῖον χρησιμοποιεῖ ὡς ἁπλοῦν μικροσκόπιον· ὑπὸ ποίαν γωνίαν βλέπει τότε ὁ παρατηρητὴς τὴν Σελήνην, χωρὶς προσαρμογήν; 3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάμετρος τοῦ προσοφθαλμίου κύκλου τοῦ ὀπτικοῦ ὀργάνου τὸ* *ὁποῖον σχηματίζουν οἱ δύο φακοὶ* Λ_1 *καὶ* Λ_2. *4) Ὁ παρατηρητὴς χρησιμοποιεῖ τώρα μόνον τὸν δεύτερον φακὸν* Λ_2 *καὶ ὄπισθεν αὐτοῦ τοποθετεῖ τὸν ἀποκλίνοντα φακὸν* Λ_3. *Οἱ δύο φακοὶ ἀπέχουν μεταξύ των 3,04 cm, ὄπισθεν δὲ τοῦ φακοῦ* Λ_3 *ὑπάρχει πέτασμα. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν φακὸν* Λ_2 *θὰ σχηματισθῇ τὸ εἴδωλον τῆς Σελήνης καὶ πόση θὰ εἶναι ἡ διάμετρός του. Νὰ συγκριθῇ τὸ ἐξαγόμενον πρὸς τὸ ἐξαγόμενον τῆς πρώτης παραγράφου.*

1) Ὁ φακὸς Λ_1 ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν $\phi_1 = 1$ m· ἄρα τὸ εἴδωλον τῆς Σελήνης σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τὸν φακὸν τοῦτον καὶ ἡ διάμετρός του d εἶναι : $d = \phi_1 . \alpha = 100 \times 0{,}009 = 0{,}9$ cm $= 9$ mm.

2) Ὁ φακὸς Λ_2 ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν : $\phi_2 = 4$ cm. Ἡ φαινομένη διάμετρος α' τοῦ εἰδώλου τῆς Σελήνης εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν :

$$P_2 = \frac{\alpha'}{d}.$$

Ἄρα εὑρίσκομεν : $\alpha' = P_2 . d = 25 \times 0{,}009 = 0{,}225$ ἀκτινίου.

Τὸ σύστημα τῶν δύο φακῶν Λ_1 καὶ Λ_2 ἀποτελεῖ τότε ἀστρονομικὴν διόπτραν, ἡ ὁποία εἶναι ρυθμισμένη διὰ τὴν παρατήρησιν εἰς τὸ ἄπειρον.

3) Ὁ προσοφθάλμιος κύκλος εἶναι τὸ εἴδωλον τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ Λ_1 τῆς διόπτρας, τὸ ὁποῖον δίδει ὁ προσοφθάλμιος φακὸς Λ_2. Ὁ φακὸς Λ_1 θεωρούμενος ὡς φωτεινὸν ἀντικείμενον ἀπέχει ἀπὸ τὸν φακὸν Λ_2 ἀπόστασιν : $\pi = \phi_1 + \phi_2 = 104$ cm. Ἄρα ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{104} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{4} \qquad \text{καὶ} \qquad \pi' = 4{,}16 \text{ cm}.$$

Ἡ ζητουμένη διάμετρος x τοῦ προσοφθαλμίου κύκλου εἶναι :

$$\frac{x}{4} = \frac{\pi'}{\pi} \qquad \text{ἢ} \qquad x = \frac{4 \times 4{,}16}{104} = 0{,}16 \text{ cm} = 1{,}6 \text{ mm}.$$

4) Ὁ φακὸς Λ_2 σχηματίζει τὸ εἴδωλον τῆς Σελήνης εἰς τὸ ἑστιακόν του ἐπίπεδον, δηλαδὴ εἰς ἀπόστασιν 4 cm, ἡ δὲ διάμετρος d' τοῦ εἰδώλου εἶναι :

$$d' = \phi_2 . \alpha = 4 \times 0{,}009 = 0{,}036 = 0{,}36 \text{ mm}.$$

Τὸ εἴδωλον τοῦτο παίζει ρόλον φανταστικοῦ ἀντικειμένου διὰ τὸν ἀποκλίνοντα φακὸν Λ_3, ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἀπέχει : $\pi_1 = \phi_2 - 3{,}04 = 4 - 3{,}04 = 0{,}96$ cm.

Ἀπὸ τὸν τύπον τῶν φακῶν εὑρίσκομεν :

$$-\frac{1}{0{,}96} + \frac{1}{\pi_1'} = -\frac{1}{1} \qquad \text{καὶ} \qquad \pi_1' = 24 \text{ cm}.$$

Ὥστε τὸ εἴδωλον ἀπέχει ἀπὸ τὸν φακὸν Λ_2 : $3{,}04 + 24 = 27{,}04$ cm.

Ἡ μεγέθυνσις γ τοῦ φακοῦ Λ_3 εἶναι : $\gamma = \frac{\pi_1'}{\pi_1} = \frac{24}{0{,}96} = 25$.

Ἡ διάμετρος d'' τοῦ εἰδώλου εἶναι : $d'' = d' . \gamma = 0{,}36 \times 25 = 9$ mm.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύστημα τῶν φακῶν Λ_2 καὶ Λ_3 παρέχει εἴδωλον ἴσον μὲ ἐκεῖνο, ποὺ δίδει μόνος του ὁ φακὸς Λ_1.

135. — *Θέλομεν νὰ λάβωμεν φωτογραφίαν μιᾶς οἰκοδομῆς εὑρισκομένης εἰς ἀπόστασιν 25 km καὶ ἡ ὁποία ἔχει ὕψος 25 m. 1) Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ τῆς μηχανῆς, ὁ ὁποῖος θὰ δώσῃ ἐπὶ τῆς πλακὸς εἴδωλον ὕψους 12 mm ; 2) Ἕνας παρατηρητής, ἔχων ἐλαχίστην ἀπόστασιν* *εὐκρινοῦς ὁράσεως* 10 cm, *ἐξετάζει τὴν φωτογραφικὴν πλάκα. Πόση εἶναι διὰ τὸν παρατηρητὴν τοῦτον ἡ ἐπιτυγχανομένη μεγέθυνσις ἐν σχέσει μὲ τὴν παρατήρησιν τοῦ ἀντικειμένου διὰ γυμνοῦ ὀφθαλμοῦ ; 3) Ἐὰν ὁ παρατηρητὴς χρησιμοποιῇ, διὰ τὴν ἐξέτασιν τῆς πλακός, συγκλίνοντα φακὸν ἰσχύος* 20 *διοπτριῶν, νὰ εὑρεθῇ πόση εἶναι ἡ μεγέθυνσις. 4) Ἀντὶ τῆς ἀνωτέρω φωτογραφικῆς μηχανῆς χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἀκόλουθον διάταξιν : α) ἕνα ἀντικειμενικὸν συγκλίνοντα φακὸν* Λ_1, *ἑστιακῆς ἀποστάσεως* $\phi_1 = 60$ cm· *β) ἕνα προσοφθάλμιον ἀποκλίνοντα φακὸν* Λ_2, *ἑστιακῆς ἀποστάσεως* $\phi_2 = 20$ cm *καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ὀπτικὸν κέντρον εὑρίσκεται* 41 cm *ὄπισθεν τοῦ φακοῦ* Λ_1. *Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν φακὸν* Λ_1 *θὰ σχηματισθῇ τὸ εἴδωλον τῆς οἰκοδομῆς. 5) Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν μὲ τὴν διάταξιν αὐτήν ; Τί πλεονέκτημα παρουσιάζει αὐτὴ ἡ τηλεφωτογραφικὴ διάταξις ;*

1) Ἀπὸ τὰς σχέσεις : $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\phi}$ καὶ $\frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{\pi'}{\pi}$

εὑρίσκομεν : $\frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{\pi'}{\pi} = \frac{\phi}{\pi - \phi}$ ἄρα $\phi = \frac{\varepsilon\,\pi}{\alpha + \varepsilon}$.

Ἐπειδὴ τὸ ε εἶναι πολὺ μικρὸν ἐν σχέσει μὲ τὸ α, ἠμποροῦμε νὰ λάβωμεν :

$$\phi = \frac{\varepsilon\,\pi}{\alpha} = \frac{0{,}012 \times 25\,000}{25} = 12 \text{ m}.$$

2) Ἡ φαινομένη διάμετρος ω ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὁ παρατηρητὴς βλέπει τὴν οἰκοδομὴν διὰ γυμνοῦ ὀφθαλμοῦ εἶναι :

$$\omega = \frac{25}{25\,000} = 0{,}001 \text{ ἀκτινίου}.$$

Ὅταν ὁ παρατηρητὴς βλέπῃ τὸ εἴδωλον εἰς ἀπόστασιν 10 cm, τὸ παρατηρεῖ ὑπὸ φαινομένην διάμετρον : $\omega' = \frac{12}{100} = 0{,}12$ ἀκτινίου.

Ἡ ἐπιτυγχανομένη μεγέθυνσις κατὰ τὴν παρατήρησιν τῆς οἰκοδομῆς ἐπὶ τῆς πλακὸς εἶναι : $M = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{0{,}12}{0{,}001} = 120$.

3) Ὁ συγκλίνων φακὸς χρησιμοποιεῖται ὡς ἁπλοῦν μικροσκόπιον καὶ ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν φ = 5 cm. Ἐὰν ἡ φωτογραφικὴ πλὰξ τοποθετηθῇ πολὺ πλησίον τῆς κυρίας ἑστίας τοῦ φακοῦ, τότε ἡ γωνία ω'' ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὁ παρατηρητὴς βλέπει τὸ εἴδωλον τῆς φωτογραφίας (δηλαδὴ ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ εἰδώλου) εἶναι : $\omega'' = \frac{12}{50} = 0{,}24$ ἀκτινίου.

Ἡ μεγέθυνσις ἡ ὁποία οὕτω ἐπιτυγχάνεται, ἐν σχέσει μὲ τὴν ἀπ' εὐθείας παρατήρησιν τῆς οἰκοδομῆς διὰ γυμνοῦ ὀφθαλμοῦ, εἶναι :

$$M' = \frac{\omega''}{\omega} = \frac{0{,}24}{0{,}001} = 240.$$

Ἡ μεγέθυνσις ἡ ὁποία ἐπιτυγχάνεται, ἐν σχέσει μὲ τὴν ἀπ' εὐθείας παρατήρησιν τῆς πλακὸς διὰ γυμνοῦ ὀφθαλμοῦ, εἶναι :

$$M'' = \frac{\omega''}{\omega'} = \frac{0{,}24}{0{,}12} = 2.$$

4) Ὁ φακὸς Λ_1 σχηματίζει πραγματικὸν εἴδωλον πολὺ πλησίον τῆς κυρίας ἑστίας του, δηλαδὴ εἰς ἀπόστασιν 60 cm ἀπὸ αὐτὸν καὶ εἰς ἀπόστασιν $60 - 41 = 19$ cm ὄπισθεν τοῦ φακοῦ Λ_2. Τὸ εἴδωλον τοῦτο παίζει ρόλον φανταστικοῦ ἀντικειμένου διὰ τὸν φακὸν Λ_2. Ὥστε ὁ φακὸς Λ_2 θὰ δώσῃ πραγματικὸν εἴδωλον, σχηματιζόμενον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ αὐτὸν π_1' τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$-\frac{1}{19} + \frac{1}{\pi_2'} = -\frac{1}{20} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \pi_2' = 380 \text{ cm} .$$

Τὸ τελικὸν εἴδωλον σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν φακὸν Λ_1:

$$x = 41 + 380 = 421 \text{ cm} = 4{,}21 \text{ m} .$$

5) Τὸ εἴδωλον, τὸ ὁποῖον σχηματίζει ὁ φακὸς Λ_1, ἔχει μέγεθος:

$$\varepsilon_1 = \alpha \frac{\pi_1'}{\pi_1} = 2\,500 \times \frac{60}{2\,500\,000} = 0{,}06 \text{ cm} = 0{,}6 \text{ mm} .$$

Τὸ εἴδωλον τοῦτο τὸ μεγεθύνει ὁ φακὸς Λ_2. Ὥστε τὸ τελικὸν εἴδωλον ἔχει μέγεθος:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{\pi_2'}{\pi_2} = 0{,}6 \times \frac{3\,800}{190} = 12 \text{ mm} .$$

Ἡ διάταξις τῶν δύο φακῶν Λ_1 καὶ Λ_2 δίδει εἴδωλον ἔχον μέγεθος ἴσον μὲ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου, τὸ ὁποῖον δίδει καὶ ὁ ἀντικειμενικὸς τῆς φωτογραφικῆς μηχανῆς, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 12 m. Ἀλλὰ ἡ τηλεφωτογραφικὴ διάταξις τῶν δύο φακῶν Λ_1 καὶ Λ_2 εἶναι περισσότερον πλεονεκτικὴ διότι ἔχει μῆκος μόνον 4,21 m, ἐνῷ ἡ φωτογραφικὴ διάταξις, ἡ ἀποτελουμένη ἀπὸ ἕνα μόνον ἀντικειμενικὸν φακόν, ἔχει μῆκος 12 m.

136. — *Τὸ σχῆμα 100 δεικνύει μίαν πρισματικὴν διόπτραν, ἡ ὁποία περιλαμβάνει λεπτὸν ἀντικειμενικὸν φακὸν* O_1 *ἑστιακῆς ἀποστάσεως* $\varphi_1 = 12$ cm· *ἕνα πρῖσμα* Π_1 *τὸ ὁποῖον ἔχει δείκτην διαθλάσεως 3/2 καὶ εἰς τὸ ὁποῖον τὸ φῶς ὑφίσταται δύο ὁλικὰς ἀνακλάσεις· ἕνα ἄλλο πρῖσμα* Π_2 *ὅμοιον πρὸς τὸ* Π_1· *ἕνα λεπτὸν προσοφθάλμιον φακὸν* O_2 *ἑστιακῆς ἀποστάσεως* $\varphi_2 = 6$ cm. *Ἡ κυρία τομὴ ἑκάστου τῶν ἀνωτέρω πρισμάτων εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον. Αἱ ἀκμαὶ* Π_1 *καὶ* Π_2 *τῶν πρισμάτων εἶναι κάθετοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν ἀξόνων τῶν φακῶν, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς ὁριζόντιον καὶ συμπίπτον μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ σχήματος. 1) Ἕνα ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄπειρον, ἡ δὲ διόπτρα εἶναι ρυθμισμένη διὰ παρατηρητὴν ὁ ὁποῖος βλέπει τὸ εἴδωλον εἰς τὸ ἄπειρον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις* x *τοῦ φακοῦ* O_2 *ἀπὸ τὴν ὑποτείνουσαν ἕδραν τοῦ πρίσματος* Π_2. *2) Πόση εἶναι εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν ἡ μεγέθυνσις τῆς διόπτρας.*

2) Ἔστω A τὸ εἰς ἄπειρον ἀντικείμενον. Ὁ ἀντικειμενικὸς O_1 θὰ σχηματίσῃ τὸ εἴδωλον A_1 τοῦ ἀντικειμένου τούτου ἐπὶ τῆς κυρίας ἑστίας του· ἤτοι, ἂν δὲν ὑπῆρχε τὸ πρῖσμα Π_1, τὸ A_1 θὰ ἐσχηματίζετο εἰς ἀπόστασιν 12 cm ἀπὸ τὸν φακὸν O_1. Ἂς ἴδωμεν τὴν ἐπίδρασιν τῆς παρουσίας τοῦ πρίσματος. Αἱ ἀνακλάσεις εἰς τὰ σημεῖα β καὶ γ δὲν ἐπηρεάζουν τὴν θέσιν τοῦ τελικοῦ εἰδώλου. Ἀλλ' αἱ δύο διαθλάσεις, ποὺ συμβαίνουν εἰς τὰ σημεῖα α καὶ δ, τροποποιοῦν τὴν θέσιν τοῦ εἰδώλου. Ἡ τεθλασμένη πορεία τῆς δέσμης αβγδ ἐντὸς τοῦ πρίσματος ἰσοδυναμεῖ πρὸς διέλευσιν τῆς δέσμης διὰ μέσου πλακὸς μὲ παραλλήλους ἕδρας καὶ ἡ ὁποία ἔχει πάχος: $e = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta = 2$ cm

καὶ δείκτην διαθλάσεως $\nu = 3/2$. Ἑπομένως κατὰ τὴν διέλευσιν τῆς δέσμης διὰ τοῦ πρίσματος Π_1 τὸ εἴδωλον A_1 μετατοπίζεται κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς πορείας τοῦ φωτὸς κατὰ διάστημα:

$$d = e\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) = 2\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\ \text{cm}.$$

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ μὲ τὸ πρῖσμα Π_2. Ὥστε τὸ μὲν πραγματικὸν μῆκος τῆς τεθλασμένης πορείας $O_1\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\theta$ εἶναι: $\phi_1 = 4 + 2 + 4 + 2 = 12$ cm, ἀλλὰ τὸ εἴδωλον A_1 λόγῳ τῶν δύο πρισμάτων θὰ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ O_1 ἴσην μέ:

$$\phi_1 + 2d = 12 + 1{,}33 = 13{,}33\ \text{cm}.$$

Ὥστε τὸ εἴδωλον A_1 σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 1,33 cm ἀπὸ τὴν ὑποτείνουσαν ἕδραν τοῦ Π_2. Τὸ εἴδωλον τοῦτο συμπίπτει μὲ τὴν ἑστίαν τοῦ προσοφθαλμίου O_2, διότι ὁρίζεται ὅτι τὸ τελικὸν εἴδωλον φαίνεται εἰς τὸ ἄπειρον.

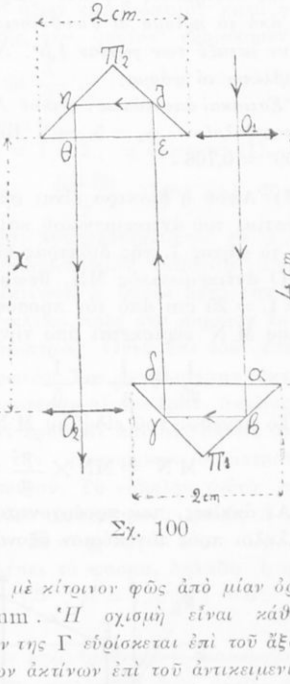
Ἄρα ἡ ζητουμένη ἀπόστασις x εἶναι:

$$x = \phi_2 + 1{,}33 = 6 + 1{,}33 = 7{,}33\ \text{cm}.$$

2) Αἱ διαθλάσεις δι' ἐπιπέδων διόπτρων καὶ αἱ ἀνακλάσεις ἐπὶ ἐπιπέδων κατόπτρων δὲν μεταβάλλουν τὰ μεγέθη τῶν εἰδώλων.

Ἄρα ἡ μεγέθυνσις εἶναι:

$$M = \frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{12}{6} = 2.$$



Σχ. 100

137. — *Συγκεντρωτικὸς φακὸς Λ φωτίζεται μὲ κίτρινον φῶς ἀπὸ μίαν ὀρθογώνιον σχισμήν, ἡ ὁποία ἔχει πλάτος AB = 1 mm. Ἡ σχισμὴ εἶναι κάθετος πρὸς τὸν κύριον ἄξονα τοῦ φακοῦ καὶ τὸ κέντρον της Γ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ φακοῦ. Ὁ φακὸς στέλλει δέσμην παραλλήλων ἀκτίνων ἐπὶ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ MN μιᾶς μικρᾶς ἀστρονομικῆς διόπτρας, ἡ ὁποία εἶναι ρυθμισμένη διὰ τὴν εἰς τὸ ἄπειρον παρατήρησιν. Ὁ ἄξων τῆς διόπτρας συμπίπτει μὲ τὸν κύριον ἄξονα τοῦ φακοῦ Λ. Ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὁ προσοφθάλμιος τῆς διόπτρας σχηματίζει το εἴδωλον M′N′ τοῦ ἀντικειμενικοῦ της MN.*

1) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου M′N′ καὶ νὰ περιγραφῇ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων, ποὺ προέρχονται ἀπὸ τὸ κέντρον K τῆς σχισμῆς.

2) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου A′B′ τῆς σχισμῆς AB τὸ ὁποῖον δίδεται ἀπὸ τὸ σύστημα: φακὸς Λ — ἀντικειμενικὸς MN. Νὰ παρασταθῇ ἡ πορεία μιᾶς δέσμης ἀκτίνων ἀπὸ τὸ ἄκρον A τῆς σχισμῆς ἕως τὸν ὀφθαλμόν, ἂν τὸ A εὑρίσκεται 0,5 mm ἄνωθεν τοῦ ἄξονος.

3) Μεταξὺ τοῦ φακοῦ Λ καὶ τῆς διόπτρας τοποθετεῖται, εἰς τὴν θέσιν τῆς *ἐλαχίστης ἐκτροπῆς, ἕνα ὑάλινον πρῖσμα, τοῦ ὁποίου ὁ δείκτης διαθλάσεως διὰ τὸ κίτρινον φῶς εἶναι* $\nu = 1{,}532$ *ἡ δὲ κυρία τομή του εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον. Νὰ εὑρεθῇ κατὰ ποίαν γωνίαν πρέπει νὰ στραφῇ ὁ ἄξων τῆς διόπτρας, ὥστε ὁ ὀφθαλμὸς νὰ βλέπῃ πάλιν τὸ εἴδωλον τῆς σχισμῆς. Νὰ ὁρισθῇ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι προερχόμεναι ἀπὸ τὸ Γ διέρχονται διὰ τοῦ συστήματος : φακὸς — πρῖσμα — διόπτρα .*

4) Ἡ σχισμὴ φωτίζεται τώρα μὲ λευκὸν φῶς. Νὰ εὑρεθῇ ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι προερχόμεναι ἀπὸ τὸ Γ διέρχονται διὰ τοῦ συστήματος ; φακὸς — πρῖσμα — ἀντικειμενικὸς ΜΝ . Μετὰ τὴν ἔξοδόν των ἀπὸ τὸ πρῖσμα αἱ διευθύνσεις τῶν ἐρυθρῶν καὶ τῶν ἰωδῶν ἀκτίνων σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν $1{,}5^0$. *Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὁ ὀφθαλμὸς βλέπει τὸ φάσμα.*

Ἑστιακαὶ ἀποστάσεις : φακοῦ Λ : $\varphi = 15$ cm *· ἀντικειμενικοῦ* ΜΝ : $\varphi_1 = 20$ cm*· προσοφθαλμίου :* $\varphi_2 = 5$ cm . *Διάμετρος ἀντικειμενικοῦ :* ΜΝ = 4 cm . *Εἶναι :* ημ $50^0 = 0{,}766$.

1) Ἀφοῦ ἡ διόπτρα εἶναι ρυθμισμένη διὰ τὴν εἰς τὸ ἄπειρον παρατήρησιν, αἱ ἑστίαι τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ τοῦ προσοφθαλμίου συμπίπτουν καὶ ἐπομένως τὸ μῆκος L τῆς διόπτρας εἶναι : $L = \varphi_1 + \varphi_2 = 20 + 5 = 25$ cm .

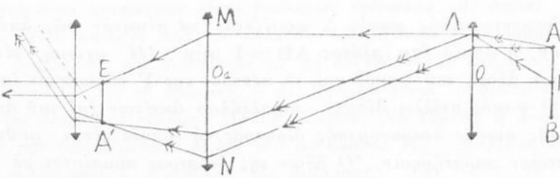
Ὁ ἀντικειμενικὸς ΜΝ, θεωρούμενος ὡς φωτεινὸν ἀντικείμενον, ἀπέχει $\pi = L = 25$ cm ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον. Ἑπομένως ἡ ἀπόστασις π' τοῦ εἰδώλου Μ΄Ν΄ εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{25} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{5} \qquad \text{ἄρα} \qquad \pi' = 6{,}25 \text{ cm}.$$

Τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου Μ΄Ν΄ εἶναι :

$$M'N' = MN \times \frac{\pi'}{\pi} = 4 \times \frac{6{,}25}{25} = 4 \times 0{,}25 = 1 \text{ cm}.$$

Αἱ ἀκτῖνες, ποὺ προέρχονται ἀπὸ τὸ Γ, ἐξέρχονται ἀπὸ τὸν φακὸν Λ παράλληλοι πρὸς τὸν κύριον ἄξονά του. Ἀφοῦ διέλθουν διὰ τοῦ ἀντικειμενι-



Σχ. 101

κοῦ ΜΝ συγκλίνουν εἰς τὴν κυρίαν ἑστίαν τῶν δύο φακῶν τῆς διόπτρας καὶ ἐξέρχονται ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα τῆς διόπτρας.

2) Ἡ σχισμὴ ΑΒ εὑρίσκεται εἰς τὴν κυρίαν ἑστίαν τοῦ φακοῦ Λ . Ἑπομένως ὁ φακὸς Λ σχηματίζει τὸ εἴδωλον τῆς σχισμῆς εἰς τὸ ἄπειρον, ἡ δὲ φαινομένη διάμετρος αὐτοῦ εἶναι : $\alpha = AB : \varphi$.

Ὁ ἀντικειμενικὸς φακὸς ΜΝ σχηματίζει τὸ νέον εἴδωλον Α΄Β΄ τοῦ ἀνωτέρω πραγματικοῦ εἰδώλου εἰς τὴν κυρίαν ἑστίαν του, δηλαδὴ εἰς ἀπόστασιν $\varphi_1 = 20$ cm . Τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου Α΄Β΄ εἶναι :

$A'B' = \varphi_1 . \alpha$ ἄρα $A'B' = AB \times \dfrac{\varphi_1}{\varphi} = 1 \times \dfrac{20}{15} = \dfrac{4}{3}$ mm $= 1{,}33$ mm.

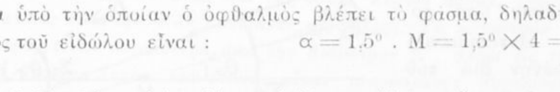
Μία δέσμη ἀκτίνων προερχομένων ἀπὸ τὸ Α, μετὰ τὴν ἔξοδόν της ἀπὸ τὸν φακὸν Λ, γίνεται παράλληλος καὶ συγκλίνει εἰς τὸ Α΄ τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ κοινοῦ ἑστιακοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο φακῶν τῆς διόπτρας. Αἱ ἀκτῖνες τῆς δέσμης, ὅταν ἐξέλθουν ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον εἶναι πάλιν παράλληλοι.

3) Ἂν μεταξὺ τοῦ φακοῦ Λ καὶ τῆς διόπτρας τοποθετηθῇ τὸ πρῖσμα, τότε ἡ δέσμη τῶν ἀκτίνων τοῦ κιτρίνου φωτὸς ἐκτρέπεται πρὸς τὴν βάσιν τοῦ πρίσματος. Ἑπομένως πρέπει τότε νὰ στραφῇ ὁ ἄξων τῆς διόπτρας κατὰ γωνίαν ἴσην μὲ τὴν γωνίαν Ε τῆς ἐλαχίστης ἐκτροπῆς, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν:
$$\text{ημ}\,\frac{E+A}{2} = \nu\;\text{ημ}\,\frac{A}{2}\,, \qquad (1)$$
ὅπου Α εἶναι ἡ διαθλαστικὴ γωνία τοῦ πρίσματος.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι: $A = 60^\circ$ καὶ $\nu = 1{,}532$, ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει:
$$\text{ημ}\,\frac{E+60}{2} = 1{,}532 \times \frac{1}{2} = 0{,}766 \cdot \quad \text{ἄρα} \quad \frac{E+60}{2} = 50^\circ \quad \text{καὶ} \quad E = 40^\circ.$$

4) Αἱ ἀκτῖνες τοῦ λευκοῦ φωτός, αἱ ὁποῖαι προέρχονται ἀπὸ τὸ Γ, μετὰ τὴν ἔξοδόν των ἀπὸ τὸ πρῖσμα, ὑφίστανται διασκεδασμόν. Καθεμία ἀπὸ τὰς ἀκτινοβολίας ἀποτελεῖ δέσμην παραλλήλων ἀκτίνων, ἡ ὁποία μετὰ τὴν ἔξοδόν της ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν τῆς διόπτρας συγκλίνει πρὸς ἕνα σημεῖον τοῦ κοινοῦ ἑστιακοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο φακῶν τῆς διόπτρας. Οὕτω ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου σχηματίζεται τὸ φάσμα τοῦ λευκοῦ φωτός. Τὴν μεγαλυτέραν ἐκτροπὴν παρουσιάζουν αἱ ἰώδεις ἀκτῖνες καὶ τὴν μικροτέραν αἱ ἐρυθραὶ ἀκτῖνες. Ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζουν μεταξύ των αἱ ἐρυθραὶ καὶ αἱ ἰώδεις ἀκτῖνες, ποὺ εἰσέρχονται εἰς τὴν διόπτραν, ἀποτελεῖ τὴν φαινομένην διάμετρον τοῦ ἀντικειμένου τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄπειρον. Τὸ εἴδωλον τοῦτο σχηματίζεται ἀπὸ τὰ ἔγχρωμα εἴδωλα τὰ ὁποῖα δίδει τὸ σύστημα: φακὸς Λ — πρῖσμα. Ἡ μεγέθυνσις τῆς διόπτρας εἶναι: $M = \varphi_1 : \varphi_2 = 4$
καὶ ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὁ ὀφθαλμὸς βλέπει τὸ φάσμα, δηλαδὴ ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ εἰδώλου εἶναι: $\alpha = 1{,}5^\circ \,.\, M = 1{,}5^\circ \times 4 = 6^\circ$.

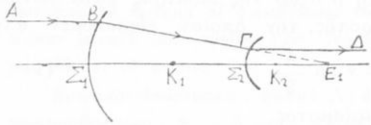
138. — *Αἱ δύο βάσεις ἑνὸς πλήρους ὑαλίνου κυλίνδρου ἔχουν διαμορφωθῆ εἰς σφαιρικὰ δίοπτρα. Τὸ Σ_1 πρὸς τὰ ἀριστερὰ εἶναι κυρτὸν καὶ ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος $\Sigma_1K_1 = R_1 = 6$ cm, τὸ δὲ Σ_2 πρὸς τὰ δεξιὰ εἶναι κοῖλον καὶ ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος $\Sigma_2K_2 = R_2 = 2$ cm. Ὁ κύλινδρος ἔχει μῆκος 12 cm καὶ δείκτην διαθλάσεως $\nu = 3/2$. Τὰ κέντρα K_1 καὶ K_2 τῶν δύο σφαιρικῶν διόπτρων εὑρί-*



Σχ. 102

σκονται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου, αἱ δὲ γεννέτειραι αὐτοῦ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ. 1) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ κυρία ἑστία τοῦ συστήματος, ὅταν τὸ φῶς προσπίπτῃ πρῶτον ἐπὶ τοῦ διόπτρου Σ_1. Νὰ εὑρεθῇ ἐπίσης ἡ θέσις τοῦ *εἰδώλου ἑνὸς ἀντικειμένου εὑρισκομένου εἰς τὸ ἄπειρον πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ πολὺ πλησίον τοῦ ἄξονος. 2) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ μεγέθυνσις τῆς οὕτω σχηματιζομένης διόπτρας, ἂν ὁ ὀφθαλμὸς εὑρίσκεται πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ Σ_2. 3) Πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Σ_1 εὑρίσκεται ἀντικείμενον μήκους* 3 mm, *τὸ ὁποῖον εἶναι πλησίον τοῦ ἄξονος καὶ κάθετον πρὸς αὐτόν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου. 4) Ἐὰν τὸ ἀνωτέρω ἀντικείμενον μετακινηθῇ κατὰ* 1 m, *κατὰ πόσον μετακινεῖται τὸ εἴδωλόν του ;*

1) Ἄς θεωρήσωμεν ἀκτῖνα ΑΒ ἡ ὁποία προσπίπτει ἐπὶ τοῦ διόπτρου Σ_1 παραλλήλως πρὸς τὸν κύριον ἄξονα. Ἡ ἀκτὶς αὐτὴ διαθλωμένη διέρχεται διὰ τῆς κυρίας ἑστίας E_1 τοῦ διόπτρου Σ_1.



Σχ. 103

Ἄρα ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{\infty} + \frac{\nu}{\Sigma_1 E_1} = \frac{\nu - 1}{R_1} \quad \text{ἤτοι} \quad \Sigma_1 E_1 = \frac{\nu \,.\, R_1}{\nu - 1} = \frac{1{,}5 \times 6}{0{,}5} = 18 \text{ cm},$$

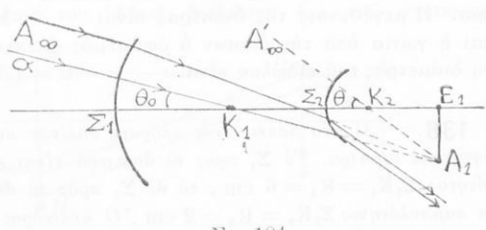
Ἡ ἀκτὶς ΒΓ προσπίπτει ἐπὶ τοῦ διόπτρου Σ_2 καὶ διαθλωμένη ἐξέρχεται εἰς τὸν ἀέρα. Ἄν καλέσωμεν E_1' τὸ εἴδωλον τοῦ E_1 διὰ μέσου τοῦ διόπτρου Σ_2, τότε ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$-\frac{\nu}{\Sigma_2 E_1} + \frac{1}{\Sigma_2 E_1'} = \frac{1 - \nu}{R_2} \quad \text{ἄρα} \quad \frac{1}{\Sigma_2 E_1'} = \frac{-0{,}5}{2} + \frac{1{,}5}{6} = 0$$

$$\text{καὶ} \quad \Sigma_2 E_1' = \infty$$

τὸ εἴδωλον E_1' σχηματίζεται εἰς τὸ ἄπειρον. Ἡ ἐξερχομένη λοιπὸν ἀκτὶς ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν κύριον ἄξονα, ἤτοι τὸ θεωρούμενον σύστημα εἶναι ἀνεστιακὸν σύστημα.

Ἄς θεωρήσωμεν ἕνα ἀντικείμενον εὑρισκόμενον εἰς τὸ ἄπειρον πρὸς τὰ ἀριστερά· ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ ἀντικειμένου εἶναι θ_0. Ἄς λάβωμεν μίαν ἀκτῖνα α προερχομένην ἀπὸ τὸ ἄκρον τοῦ ἀντικειμένου καὶ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου K_1 τοῦ πρώτου διόπτρου Σ_1. Τὸ εἴδωλον τοῦ εἰς τὸ ἄπειρον εὑρισκομένου σημείου Α καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς



Σχ. 104

αK_1, σχηματίζεται εἰς τὸ A_1, δηλαδὴ εἰς τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον τοῦ διόπτρου Σ_1. Ἐὰν θεωρήσωμεν ἀκτῖνας παραλλήλους πρὸς τὸν κύριον ἄξονα καὶ αἱ ὁποῖαι νὰ προσπίπτουν ἐπὶ τοῦ διόπτρου Σ_2 ἐκ δεξιῶν, ἤτοι νὰ εἰσέρχωνται ἐκ τοῦ ἀέρος εἰς τὴν ὕαλον, τότε θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{\infty} - \frac{\nu}{\varphi} = \frac{\nu - 1}{-R_2} \quad \text{ἢ} \quad \varphi = \frac{\nu \,.\, R_2}{\nu - 1} \times \frac{1{,}5 \times 2}{0{,}5} = 6 \text{ cm}.$$

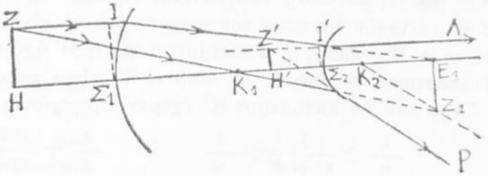
Ὥστε τὸ εἴδωλον A_1 σχηματίζεται ἐπὶ τοῦ ἑστιακοῦ ἐπιπέδου τοῦ διόπτρου Σ_2. Ἡ ἀκτὶς λοιπὸν α μετὰ τὴν διάθλασίν της διὰ τοῦ διόπτρου Σ_2 ἐξέρχεται παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν K_2A_1 καὶ σχηματίζει μὲ τὸν ἄξονα γωνίαν θ.

Τὸ τελικὸν εἴδωλον τοῦ σημείου Α σχηματίζεται ἐπομένως πρὸς τὰ ἀριστερὰ εἰς τὸ ἄπειρον καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν A_1K_2· τὸ εἴδωλον τοῦτο εἶναι φανταστικόν.

2) Ἐξ ὁρισμοῦ ὀνομάζομεν μεγέθυνσιν τῆς διόπτρας τὸν λόγον τῆς γωνίας θ πρὸς τὴν γωνίαν θ_0. Ἄρα ἡ μεγέθυνσις τῆς διόπτρας εἶναι:

$$M = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{A_1E_1}{K_2E_1} : \frac{A_1E_1}{K_1E_1} = \frac{K_1E_1}{K_2E_1} = \frac{12}{4} = 3 .$$

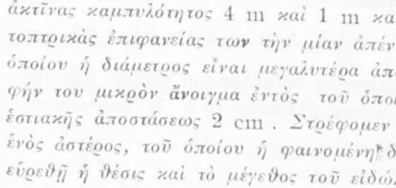
3) Ἔστω ΖΗ ἕνα μικρὸν ἀντικείμενον κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα. Ἂς κατασκευάσωμεν τὸ εἴδωλόν του. Ἡ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα ἀκτὶς ΖΙ διαθλᾶται εἰς τὸ Ι κατὰ τὴν διεύθυνσιν IE_1, ἀλλὰ διαθλωμένη ἐπὶ τοῦ δευτέρου διόπτρου ἐξέρχεται εἰς τὸν ἀέρα παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα. Ἡ ἀκτὶς ZK_1, μετὰ τὴν διάθλασίν της διὰ τοῦ Σ_2, ἐξέρχεται παράλληλος πρὸς τὴν K_2Z_1. Ἡ τομὴ τῶν ἐξερχομένων ἀκτίνων προσδιορίζει τὴν θέσιν τοῦ Ζ΄ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ εἴδωλον τοῦ Ζ. Τὸ Ζ΄ εὑρίσκεται πάντοτε ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς Ι΄Λ καὶ ἐπομένως τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου Ζ΄Η΄ εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ ἀντικειμένου ΖΗ. Τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου Ζ΄Η΄ εὑρίσκεται εὔκολα ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα Σ_1IE_1 καὶ $\Sigma_2I'E_1$. Ἐκ τούτων λαμβάνομεν τὴν σχέσιν:



Σχ. 105

$$\frac{\Sigma_2I'}{\Sigma_1I} = \frac{\Sigma_2E_1}{\Sigma_1E_1} \quad \text{ἢ} \quad \frac{Z'H'}{ZH} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \quad \text{ἄρα} \quad Z'H' = ZH : 3 = 3 : 3 = 1 \text{ mm} .$$

139.— *Δύο κοῖλα σφαιρικὰ κάτοπτρα Κ καὶ Κ΄, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀντιστοίχως ἀκτῖνας καμπυλότητος 4 m καὶ 1 m καὶ τὸν ἴδιον κύριον ἄξονα, ἔχουν τὰς κατοπτρικὰς ἐπιφανείας των τὴν μίαν ἀπέναντι τῆς ἄλλης. Τὸ κάτοπτρον Κ, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν διάμετρον Κ΄, φέρει εἰς τὴν κορυφήν του μικρὸν ἄνοιγμα ἐντὸς τοῦ ὁποίου εἶναι στερεωμένος συγκλίνων φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως 2 cm. Στρέφομεν τὸν ἄξονα τοῦ συστήματος πρὸς τὸ κέντρον ἑνὸς ἀστέρος, τοῦ ὁποίου ἡ φαινομένη διάμετρος εἶναι 50 δευτερόλεπτα. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου, τὸ ὁποῖον δίδει τὸ κάτοπτρον Κ. 2) Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν θέσιν τοῦ ἄξονος πρέπει νὰ τεθῇ τὸ κάτοπτρον Κ΄, ὥστε τοῦτο νὰ δίδῃ δεύτερον εἴδωλον μεγαλύτερον, τὸ ὁποῖον παρατηρούμενον διὰ τοῦ φακοῦ νὰ φαίνεται εἰς τὸ ἄπειρον. Ὁ ὀφθαλμὸς τοποθετεῖται ὄπισθεν τοῦ φακοῦ. 3) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέγεθος τοῦ δευτέρου τούτου εἰδώλου, ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ τελικοῦ εἰδώλου τὸ ὁποῖον δίδει ὁ φακὸς καὶ ἡ ὅλη μεγέθυνσις τοῦ ὀργάνου.*



Σχ. 106

1) Τὰ κάτοπτρα Κ καὶ Κ′ ἔχουν ἀντιστοίχως ἑστιακὰς ἀποστάσεις: $\Phi = 2$ m καὶ $\varphi = 0{,}50$ m. Τὸ κάτοπτρον Κ δίδει πραγματικὸν καὶ ἀνεστραμμένον εἴδωλον Α′Β′, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται εἰς τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον τοῦ Κ. Τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου τούτου εἶναι: $A'B' = \Phi \cdot \alpha$ ὅπου α εἶναι ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ ἀντικειμένου· ἡ α εἰς ἀκτίνια εἶναι:

$$\alpha = \frac{50}{3\,600} \times \frac{\pi}{180} = \frac{1}{4\,000} \text{ ἀκτινίου.}$$

Ἐπομένως εἶναι: $$A'B' = \frac{2}{4\,000} = \frac{1}{2\,000} = 0{,}5 \text{ mm.}$$

Ὥστε τὸ κάτοπτρον Κ δίδει εἴδωλον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 2 m ἀπὸ τὴν κορυφήν του καὶ ἔχει μέγεθος 0,5 mm.

2) Τὸ Α′Β′ παίζει ρόλον ἀντικειμένου διὰ τὸ κάτοπτρον Κ′. Τὸ κάτοπτρον τοῦτο πρέπει νὰ δώσῃ πραγματικὸν εἴδωλον Α″Β″ τὸ ὁποῖον νὰ σχηματίζεται εἰς τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον τοῦ φακοῦ. Διὰ νὰ εἶναι δὲ τὸ Α″Β″ μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ Α′Β′, πρέπει ἡ ἀπόσταaσις π τοῦ Α′Β′ ἀπὸ τὸ Κ′ νὰ εἶναι: $\varphi < \pi < 2\varphi$. Ἡ ἀπόστασις π′ τοῦ Α″Β″ ἀπὸ τὸ Κ′ εἶναι κατὰ προσέγγισιν: $\pi' = \pi + \Phi$.

Ἄρα διὰ τὸ κάτοπτρον Κ′ ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi + \Phi} = \frac{1}{\varphi} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi + 2} = \frac{1}{0{,}50}.$$

ἡ τελευταία σχέσις δίδει τὴν ἐξίσωσιν:

$$\pi^2 + \pi - 1 = 0 \cdot \quad \text{ἄρα} \quad \pi = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Παραδεκτὴ λύσις εἶναι: $$\pi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0{,}62 \text{ m.}$$

Ὥστε τὸ κάτοπτρον Κ′ πρέπει νὰ τεθῇ εἰς ἀπόστασιν 2,62 m ἀπὸ τὸ κάτοπτρον Κ.

3) Διὰ τὸ κάτοπτρον Κ′ ἔχομεν την σχέσιν:

$$\frac{A''B''}{A'B'} = \frac{\pi'}{\pi} = \frac{2{,}62}{0{,}62} = 4{,}2 \cdot \text{ ἄρα } A''B'' = 4{,}2 \cdot A'B' = 4{,}2 \times 0{,}5 = 2{,}1 \text{ mm.}$$

Τὸ εἴδωλον Α″Β″ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον τοῦ φακοῦ, ὁ ὁποῖος ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν $\varphi_1 = 20$ mm. Ἐπομένως βλέπομεν τὸ Α″Β″ ὑπὸ γωνίαν:

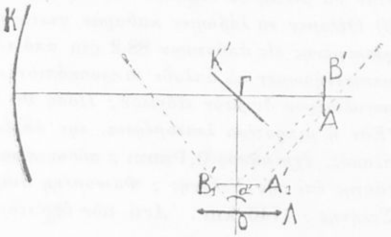
$$\alpha' = \frac{A''B''}{\varphi_1} = \frac{2{,}1}{20} = 0{,}105 \text{ ἀκτινίου.}$$

Ἡ μεγέθυνσις Μ τοῦ ὀργάνου εἶναι:

$$M = \frac{\alpha'}{\alpha} = 0{,}105 : \frac{1}{4\,000} \quad \text{ἢ} \quad M = 420.$$

140. — *Σφαιρικὸν κοῖλον κάτοπτρον ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν* $\Phi = 1$ m. *Ὁ ἄξων του διευθύνεται πρὸς τὸ κέντρον τοῦ ἡλίου, μεταξὺ δὲ τοῦ κατόπτρου καὶ τῆς κυρίας ἑστίας του τοποθετεῖται μικρὸν ἐπίπεδον κάτοπτρον, τὸ ὁποῖον σχηματίζει γωνίαν* 45° *μὲ τὸν ἄξονα τοῦ κοίλου κατόπτρου. Τὸ κέντρον τοῦ μικροῦ κατόπτρου ἀπέχει* 5 cm *ἀπὸ τὴν ἑστίαν. Τὸ σύστημα τοῦτο δίδει πραγματικὸν εἴδωλον τοῦ ἡλίου, τὸ ὁποῖον παρατηρητὴς βλέπει διὰ συγκλίνοντος φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως* $\varphi = 2$ cm. *Ὁ ὀφθαλμὸς εἶναι προσηρμοσμένος διὰ τὴν εἰς* *ἄπειρον παρατήρησιν. 1) Ἂν ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι 32′ ἢ 0,009 ἀκτινίου, νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ εἰδώλου, τὸ ὁποῖον δίδει τὸ σύστημα τῶν δύο κατόπτρων. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ φαινομένη διάμετρος ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὁ παρατηρητὴς βλέπει τὸν ἥλιον διὰ τοῦ ὀργάνου. 3) Ποία εἶναι ἡ μεγέθυνσις τοῦ ὀργάνου ; 4) Τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον ἀντικαθίσταται ἀπὸ πρῖσμα ὁλικῆς ἀνακλάσεως, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα ἕδρα καταλαμβάνει τὴν θέσιν τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου. Κατὰ ποίαν φορὰν πρέπει νὰ μετακινήσῃ τότε ὁ παρατηρητὴς τὸν φακόν ;*

1) Τὸ κάτοπτρον Κ, ἂν εἶναι μόνον του, δίδει τὸ πραγματικὸν εἴδωλον Α′Β′ τὸ ὁποῖον σχηματίζεται εἰς τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον τοῦ Κ. Ἡ διάμετρος τοῦ Α′Β′ εἶναι : $A'B' = \Phi \cdot \alpha = 1 \times 0{,}009$
ἢ $A'B' = 0{,}009 \text{ m} = 9 \text{ mm}$.



Σχ. 107

Διὰ τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον Κ′ τὸ Α′Β′ παίζει τὸν ρόλον φανταστικοῦ ἀντικειμένου. Ἑπομένως τὸ Κ′ δίδει τὸ πραγματικὸν εἴδωλον $A_1{}'B_1{}'$ τὸ ὁποῖον εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Α′Β′ ὡς πρὸς τὸ κάτοπτρον Κ′. Ὥστε τὸ $A_1{}'B_1{}'$ ἀπέχει 5 cm ἀπὸ τὸ κέντρον Γ τοῦ κατόπτρου Κ′. Ἡ διάμετρος λοιπὸν τοῦ εἰδώλου τὸ ὁποῖον δίδει τὸ σύστημα τῶν δύο κατόπτρων εἶναι : $A_1{}'B_1{}' = A'B' = 9$ mm.

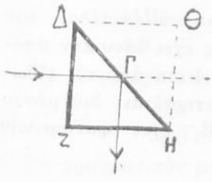
2) Ἐὰν ὁ ὀφθαλμὸς εἶναι προσηρμοσμένος διὰ τὴν εἰς ἄπειρον παρατήρησιν, τότε τὸ εἴδωλον $A_1{}'B_1{}'$ σχηματίζεται εἰς τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον τοῦ φακοῦ Λ. Ὁ παρατηρητὴς βλέπει λοιπὸν τὸ τελικὸν εἴδωλον ὑπὸ γωνίαν :

$$\alpha' = \frac{A_1{}'B_1{}'}{\varphi} = \frac{9}{20} \text{ ἀκτινίου} \quad ἢ \quad \alpha' = 25^0 \text{ περίπου}.$$

3) Ἡ μεγέθυνσις Μ τοῦ ὀργάνου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἕνα κατοπτρικὸν τηλεσκόπιον, θὰ εἶναι : $M = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{9}{20} : \frac{9}{1\,000} = \frac{1\,000}{20} = 50$.

4) Ἐὰν τὸ κάτοπτρον Κ ἀντικατασταθῇ ἀπὸ τὸ πρῖσμα ὁλικῆς ἀνακλάσεως ΔΖΗ, τότε αἱ ἀκτῖνες ποὺ εἰσέρχονται διὰ τῆς ἕδρας ΔΖ καὶ ἐξέρχονται ἀπὸ τὴν ἕδραν ΖΗ συμπεριφέρονται ὡς ἐὰν διήρχοντο διὰ μιᾶς πλακὸς ΔΖΗΘ, ἡ ὁποία ἔχει πάχος ΖΗ. Ἑπομένως τὸ εἴδωλον $A_1{}'B_1{}'$ ὀπισθοχωρεῖ κατὰ διάστημα x τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$x = ZH\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)$$



Σχ. 108

ὅπου ν ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ πρίσματος. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ εἴδωλον $A_1{}'B_1{}'$ πλησιάζει τότε πρὸς τὸν φακὸν κατὰ x, ἕπεται ὅτι πρέπει νὰ ὀπισθοχωρήσῃ καὶ ὁ φακὸς κατὰ τὸ αὐτὸ διάστημα x.

141.— *Ὁ κύριος ἄξων ἑνὸς μεγάλου κοίλου κατόπτρου* Κ, *ἔχοντος ἀκτῖνα καμπυλότητος* 4 m, *διευθύνεται πρὸς τὸ κέντρον τῆς Σελήνης. Εἰς ἀπόστασιν*

1,5 m ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ κατόπτρου Κ τοποθετεῖται ἕνα μικρὸν ἐπίπεδον κάτοπτρον Κ', τοῦ ὁποίου ἡ ἀνακλῶσα ἐπιφάνεια εἶναι ἐστραμμένη πρὸς τὸ κοῖλον κάτοπτρον καὶ σχηματίζει γωνίαν 45° μὲ τὸν κύριον ἄξονα. 1) Ποῦ θὰ σχηματισθῇ τὸ εἴδωλον ΑΒ τῆς Σελήνης ὑπὸ τοῦ συστήματος τούτου ; Ποία εἶναι ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ εἰδώλου τούτου ; 2) Παρατηρητὴς ἔχων κανονικὴν ὅρασιν βλέπει τὸ εἴδωλον ΑΒ διὰ μέσου ἁπλοῦ μικροσκοπίου, ἔχοντος ἰσχὺν 25 διοπτριῶν. Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ ΑΒ πρέπει νὰ τεθῇ τὸ ἁπλοῦν μικροσκόπιον, ὥστε ὁ παρατηρητὴς νὰ βλέπῃ τὸ τελικὸν εἴδωλον χωρὶς προσαρμογήν ; Ὑπὸ ποίαν γωνίαν θὰ βλέπῃ τὸ εἴδωλον τοῦτο ; Ποία εἶναι ἡ μεγέθυνσις τοῦ ὀργάνου τούτου ; 3) Θέλομεν νὰ λάβωμεν καθαρὰν φωτογραφίαν τῆς Σελήνης ἐπὶ μιᾶς πλακὸς εὑρισκομένης εἰς ἀπόστασιν 88,2 cm ἀπὸ τὸ εἴδωλον ΑΒ. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ μετακινήσωμεν τὸ ἁπλοῦν μικροσκόπιον καὶ κατὰ ποίαν φορὰν διὰ νὰ λάβωμεν τὸ μεγαλύτερον δυνατὸν εἴδωλον ; Πόση θὰ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ εἰδώλου τούτου ; Ἐὰν ἡ μικροτέρα λεπτομέρεια, τὴν ὁποίαν ἠμποροῦμε νὰ διακρίνωμεν ἐπὶ τῆς πλακός, ἔχῃ μῆκος 0,1 mm, πόσον εἶναι τὸ πραγματικὸν μῆκος τῆς λεπτομερείας ταύτης ἐπὶ τῆς Σελήνης ; Φαινομένη διάμετρος τῆς Σελήνης δ = 31'. Ἀκτὶς τῆς Σελήνης : 1740 km. Ἀντὶ τῶν ἐφαπτομένων θὰ ληφθοῦν αἱ γωνίαι εἰς ἀκτίνια.

1) Τὸ κοῖλον κάτοπτρον Κ σχηματίζει τὸ εἴδωλον Α'Β' τῆς Σελήνης ἐπὶ τοῦ ἑστιακοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατόπτρου, ἤτοι εἰς ἀπόστασιν 2 m ἀπὸ τὸ κάτοπτρον. Τὸ μικρὸν κάτοπτρον Κ', σχηματίζει τελικὸν εἴδωλον ΑΒ πραγματικὸν καὶ συμμετρικὸν τοῦ Α'Β' ὡς πρὸς τὸ Κ'. Τὸ μέσον τοῦ Α'Β', εὑρισκόμενον ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος, ἀπέχει 50 cm ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τοῦ Κ' μὲ τὸν κύριον ἄξονα. Ἄρα καὶ τὸ μέσον τοῦ ΑΒ ἀπέχει 50 cm ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου πρὸς τὸν κύριον ἄξονα τῆς διερχομένης διὰ τοῦ Γ. Ἔστω ὅτι αἱ ἀκτῖνες αΟ καὶ βΟ προέρχονται ἀπὸ δύο ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα σημεῖα τοῦ δίσκου τῆς Σελήνης. Τότε εἶναι : $\widehat{\alpha O \beta} = 31'$. Ἐπομένως τὸ εἴδωλον τῆς Σελήνης, τὸ ὁποῖον σχηματίζει τὸ κοῖλον κάτοπτρον Κ, ἔχει διάμετρον :

$$A'B' = 200 \,.\, \varepsilon\varphi\, 31' = 200 \times \frac{31\,\pi}{180 \times 60} = 1{,}8 \text{ cm} .$$

Τὸ εἴδωλον τὸ σχηματιζόμενον ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον Κ εἶναι ἴσον μὲ τὸ προηγούμενον· ἄρα εἶναι : $AB = 1{,}8$ cm.

2) Τὸ εἴδωλον ΑΒ πρέπει νὰ σχηματίζεται ἐπὶ τοῦ ἑστιακοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἁπλοῦ μικροσκοπίου, δηλαδὴ τοῦ προσοφθαλμίου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 4 cm. Ἄρα ὁ προσοφθάλμιος πρέπει νὰ ἀπέχῃ 4 cm ἀπὸ τὸ εἴδωλον ΑΒ. Τὸ εἴδωλον ΑΒ ἔχει διάμετρον 1,8 cm καὶ παρατηρεῖται διὰ μέσου φακοῦ ἰσχύος $P = 25$ διοπτριῶν. Τὸ τελικὸν εἴδωλον A_1B_1 ἔχει φαινομένην διάμετρον δ' ἡ ὁποία εἶναι :

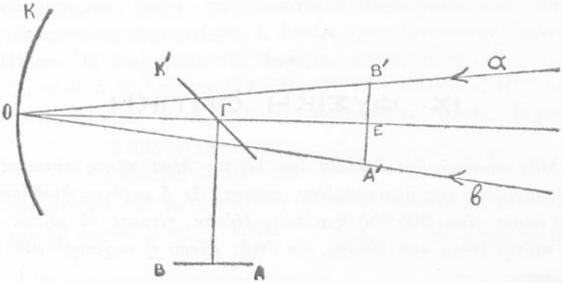
$$\delta' = P \times AB = 25 \times \frac{1{,}8}{100} = 0{,}45 \text{ ἀκτινίου} = 25^\circ\ 50' .$$

Ἡ μεγέθυνσις τοῦ ὀργάνου εἶναι : $M = \dfrac{\delta'}{\delta} = \dfrac{25^\circ\,50'}{31'} = 50$.

Ἡ μεγέθυνσις αὐτὴ εὑρίσκεται καὶ ἀπὸ τὸν λόγον τῶν ἑστιακῶν ἀποστάσεων τοῦ κατόπτρου καὶ τοῦ προσοφθαλμίου : $M = 200 : 4 = 50$.

3) Διὰ νὰ λάβωμεν πραγματικὸν εἴδωλον τῆς Σελήνης, πρέπει νὰ ὀπισθο-

χωρήσῃ ὁ προσοφθάλμιος κατὰ x, ὁπότε τὸ εἴδωλον AB παίζει ρόλον ἀντικειμένου. Τότε τὸ τελικὸν εἴδωλον A_1B_1 σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν x΄ ἀπὸ



Σχ. 109

τὴν ἄλλην ἑστίαν τοῦ φακοῦ. Ἀπὸ τὴν σχέσιν : $xx' = \varphi^2$ εὑρίσκομεν :

$$x' = \frac{\varphi^2}{x} = \frac{16}{x}.$$

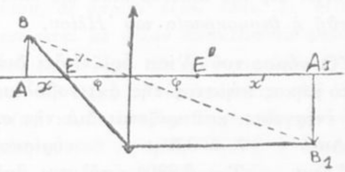
Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ἑστιῶν τοῦ φακοῦ εἶναι 2φ. Ἑπομένως ἡ ἀπόστασις τοῦ AB ἀπὸ τὸ τελικὸν εἴδωλον A_1B_1 εἶναι :

$$x + 2\varphi + x' = x + 8 + \frac{16}{x} = 88,2 \text{ cm} \qquad \text{ἢ} \qquad x + \frac{16}{x} = 80,2.$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν:

$x = 0,2$ cm ἢ $x = 80$ cm καὶ $x' = 80$ cm ἢ $x' = 0,2$ cm.

Ὑπάρχουν λοιπὸν δύο θέσεις τοῦ φακοῦ διὰ τὰς ὁποίας ἠμποροῦμε νὰ λάβωμεν εὐκρινὲς εἴδωλον ἐπὶ τῆς πλακός. Τὸ μεγαλύτερον εἴδωλον ἔχομεν, ὅταν ὁ φακὸς εἶναι πλησιέστερα πρὸς τὸ AB, δηλαδὴ διὰ $x = 0,2$ cm $= 2$ mm.



Σχ. 110

Τὸ μέγεθος τοῦ τελικοῦ εἰδώλου A_1B_1 εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{\varphi}{x} \qquad \text{ἄρα} \qquad A_1B_1 = 1,8 \times \frac{4}{0,2} = 36 \text{ cm}.$$

Ἡ μικροτέρα λεπτομέρεια, τὴν ὁποίαν ἠμποροῦμε νὰ διακρίνωμεν, ἀντιστοιχεῖ εἰς τό : $\dfrac{0,1}{360} = \dfrac{1}{3\,600}$ τῆς διαμέτρου τοῦ εἰδώλου A_1B_1.

Τὸ πραγματικὸν μῆκος τῆς λεπτομερείας αὐτῆς εἶναι :

$$\frac{2 \times 1\,740}{3\,600} = 0,967 \text{ km} = 967 \text{ m}.$$

ΙΧ. ΦΥΣΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ

142. — *Μία φωτεινὴ ἀκτινοβολία ἔχει εἰς τὸν ἀέρα μῆκος κύματος $\lambda = 0{,}6$ μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συχνότης τῆς ἀκτινοβολίας ταύτης, ἂν ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ φωτὸς ἐντὸς τοῦ ἀέρος εἶναι 300 000 km/sec. Πόσον γίνεται τὸ μῆκος κύματος τῆς ἀκτινοβολίας ταύτης ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ἂν ἐντὸς αὐτοῦ ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἶναι 225 000 km/sec;*

Ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἶναι:

εἰς τὸν ἀέρα: $V = 300\,000$ km/sec $= 3 \times 10^{14}$ μ/sec.

εἰς τὸ ὕδωρ: $V = 225\,000$ km/sec $= 225 \times 10^{12}$ μ/sec.

Ἡ συχνότης τῆς ἀκτινοβολίας εἶναι: $N = \dfrac{V}{\lambda} = \dfrac{3 \times 10^{14}}{0{,}6} = 5 \times 10^{14}$.

Τὸ μῆκος κύματος λ′ τῆς ἀκτινοβολίας αὐτῆς ἐντὸς τοῦ ὕδατος εἶναι:

$$\lambda' = \frac{V'}{N} = \frac{225 \times 10^{12}}{5 \times 10^{14}} = 0{,}45 \ \mu.$$

143. — *Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ μέγιστον τῆς ἐνεργείας εἰς τὸ ἡλιακὸν φάσμα ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἀκτινοβολίαν τῆς ὁποίας τὸ μῆκος κύματος εἶναι $\lambda = 0{,}5$ μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θερμοκρασία τοῦ Ἡλίου.*

Ὁ νόμος τοῦ Wien ὁρίζει ὅτι διὰ μίαν δεδομένην ἀπόλυτον θερμοκρασίαν T τὸ μῆκος κύματος τῆς ἀκτινοβολίας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ τὸ μέγιστον τῆς ἐνεργείας, καθορίζεται διὰ τῆς σχέσεως: $\lambda \, . \, T = 2\,940$.

Διὰ $\lambda = 0{,}5$ μ εὑρίσκομεν: $0{,}5 \times T = 2\,940$.

Ἄρα $T = 5\,880^{\circ}$ ἀπόλυτοι βαθμοὶ ἢ $\theta = 5\,607^{\circ}$ C.

144. — *Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἀπόστασις τῆς Γῆς ἀπὸ τὸν Ἥλιον εἶναι 149 560 000 km, ἡ δὲ διάμετρος τοῦ Ἡλίου εἶναι 696 000 km. Ἡ ἡλιακὴ σταθερά, δηλαδὴ ἡ ποσότης θερμότητος τὴν ὁποίαν κατὰ λεπτὸν δέχεται κάθε τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς, ὑποτιθεμένης καθέτου πρὸς τὰς προσπιπτούσας ἀκτῖνας, εἶναι 1 922 cal. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θερμοκρασία τοῦ Ἡλίου, ἂν οὗτος ἐξομοιωθῇ μὲ μέλαν σῶμα.*

Ἡ ἀκτινοβολοῦσα ἐπιφάνεια τοῦ Ἡλίου εἶναι:

$$S = 4 \pi R^2 = 4 \pi (696 \times 10^8)^2 = 6\,087 \times 10^{19} \text{ cm}^2 .$$

Ὁ νόμος τοῦ Stefan καθορίζει ὅτι ἡ ποσότης θερμότητος, ἡ ὁποία ἀκτινοβολεῖται ἀπὸ 1 τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον ἑνὸς μέλανος σώματος, εἶναι:

$$q = 1{,}56 \times 10^{-12} \times T^4 \text{ cal κατὰ δευτερόλεπτον.}$$

Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸν νόμον τοῦτον διὰ τὸν Ἥλιον, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ Ἡλίου ἀκτινοβολεῖ ποσότητα θερμότητος:

$$Q = S \cdot q = 6\,087 \times 10^{19} \times 1{,}56 \times 10^{-12} \times T^4$$

ἢ $\quad Q = 9\,495 \times 10^7 \times T^4$ cal κατὰ δευτερόλεπτον.

Ἂς ὑπολογίσωμεν τώρα τὴν ποσότητα θερμότητος τὴν ὁποίαν δέχεται 1 cm² τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν τῆς Γῆς ἀπὸ τὸν Ἥλιον. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας αὐτῆς εἶναι:

$$S_1 = 4\ \pi\ R_1^2 = 4\,\pi\,(14\,956 \times 10^9)^2 = 28\,085 \times 10^{23}\ \text{cm}^2 .$$

Κατὰ δευτερόλεπτον τὸ 1 cm² τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς δέχεται ποσότητα θερμότητος:

$$\frac{9\,495 \times 10^7 \times T^4}{28\,085 \times 10^{23}} = 337 \times 10^{-19} \times T^4\ \text{cal},$$

ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὴν μετρηθεῖσαν ἡλιακὴν σταθεράν, δηλαδὴ εἶναι:

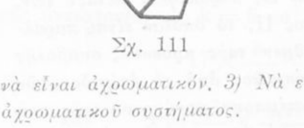
$$337 \times 10^{-19} \times T^4 = \frac{1{,}992}{60} \qquad \text{ἄρα} \qquad T^4 = 955 \times 10^{12}$$

ἢ $\quad T = 5\,560^0$ ἀπόλυτοι βαθμοὶ $\quad$ ἢ $\quad T = 5\,287^0$ C.

145. — *Διαθέτομεν δύο εἴδη ὑάλου τῶν ὁποίων οἱ δεῖκται διαθλάσεως δίδονται συναρτήσει τοῦ μήκους κύματος διὰ τῶν ἀντιστοίχων σχέσεων:*

$$\nu_1 = \alpha_1 + \frac{\beta_1}{\lambda^2} \qquad \text{καὶ} \qquad \nu_2 = \alpha_2 + \frac{\beta_2}{\lambda^2} .$$

Τὸ λ μετρεῖται εἰς χιλιοστὰ τοῦ χιλιοστομέτρου, εἶναι δέ: $\alpha_1 = 1,5$, $\beta_1 = \frac{1}{200}$ $\alpha_2 = 1{,}6$, $\beta_2 = \frac{1}{80}$ *καὶ* $\lambda = 0{,}55\ \mu$. *Ἀπὸ τὴν πρώτην ὕαλον κατασκευάζομεν ἀμφίκυρτον φακὸν* Λ_1 *ἑστιακῆς ἀποστάσεως* 30 cm. *1) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος τοῦ φακοῦ τούτου, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι. 2) Ὁ φακὸς* Λ_1 *συνενώνεται μὲ ἄλλον ἀποκλίνοντα φακὸν* Λ_2 *κατασκευασμένον ἀπὸ τὴν δευτέραν ὕαλον. Ἡ μία ἐπιφάνεια τοῦ* Λ_2, *ἡ ὁποία ἐφάπτεται τοῦ* Λ_1, *ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος τοῦ* Λ_1. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς δευτέρας ἐπιφανείας τοῦ φακοῦ* Λ_2, *ἐὰν θέλωμεν τὸ σύστημα τῶν φακῶν* Λ_1, Λ_2 *νὰ εἶναι ἀχρωματικόν. 3) Νὰ εὑρεθῇ, διὰ* $\lambda = 0{,}55\ \mu$, *ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀχρωματικοῦ συστήματος.*



Σχ. 111

1) Ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος R τοῦ φακοῦ Λ_1 δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{\varphi_1} = (\nu_1 - 1)\,\frac{2}{R} \cdot \qquad \text{ἄρα} \qquad R_1 = 2\,\varphi\,(\nu_1 - 1) = 2\,\varphi\left(\alpha_1 + \frac{\beta_1}{\lambda^2} - 1\right) \cdot$$

$$\text{ἢ} \qquad R_1 = 60\left(0{,}5 + \frac{1}{200 \times 0{,}55^2}\right) = 30 + \frac{60}{60{,}5} = 30,991 = 31\ \text{cm}.$$

2) Ἡ μία ἐπιφάνεια τοῦ φακοῦ Λ_2 ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος R_1 ἡ δὲ ἄλλη ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἐξέρχεται τὸ φῶς ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος R_2. Τότε ἔχομεν:

$$\text{διὰ τὸν } \Lambda_1: \qquad \frac{1}{\varphi_1} = (\nu_1 - 1)\,\frac{2}{R_1} = \left(\alpha_1 + \frac{\beta_1}{\lambda^2} - 1\right)\frac{2}{R_1} \cdot$$

διὰ τὸν Λ_2 : $\dfrac{1}{\varphi_2} = (\nu_2 - 1)\left(-\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right) = \left(\alpha_2 + \dfrac{\beta_2}{\lambda^2} - 1\right)\left(-\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)$.

Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις Φ τοῦ συστήματος δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} = \left(\alpha_1 + \frac{\beta_1}{\lambda^2} - 1\right)\frac{2}{R_1} - \left(\alpha_2 + \frac{\beta_2}{\lambda^2} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ σύστημα ἀχρωματικὸν πρέπει τὸ $\dfrac{1}{\Phi}$ νὰ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ λ. Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν ὁ συντελεστὴς $\dfrac{1}{\lambda^2}$ εἶναι μηδέν, δηλαδὴ ὅταν εἶναι : $\dfrac{2\beta_1}{R_1\lambda^2} = \dfrac{\beta_2}{\lambda^2}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)$· ἢ $\dfrac{2\beta_1 - \beta_2}{R_1} = \dfrac{\beta_2}{R_2}$.

Ὥστε εἶναι : $R_2 = \dfrac{\beta_2}{2\beta_1 - \beta_2} R_1 = \dfrac{1/80}{1/100 - 1/80} R_1 = -5 R_1$ ·

ἢ $R_2 = -155$ cm .

Ὁ φακὸς Λ_2 εἶναι ἕνας ἀποκλίνων μηνίσκος. Τὸ ἀνωτέρω σύστημα εἶναι ἀπολύτως ἀχρωματικόν.

3) Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις φ_2 τοῦ φακοῦ Λ_2 εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{\varphi_2} = \left(1{,}6 + \frac{1}{80 \times 0{,}55^2} - 1\right)\left(-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{5R_1}\right) = -\frac{4}{5R_1}\left(0{,}6 + \frac{1}{80 \times 0{,}55^2}\right)$$

ἄρα $\varphi_2 = -60{,}42$ cm.

Ἐπειδὴ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τοῦ ἀχρωματισμοῦ ὁ συντελεστὴς $1/\lambda^2$ εἶναι μηδέν, ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις Φ τοῦ συστήματος δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{\Phi} = (\alpha_1 - 1)\frac{2}{R_1} - (\alpha_2 - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = 0{,}5 \times \frac{2}{R_1} - 0{,}6 \times \frac{4}{5R_1}$$

ἢ $\dfrac{1}{\Phi} = \dfrac{2{,}6}{5R_1}$ · ἄρα $\Phi = 59{,}61$ cm.

146· — *Δύο εὐθύγραμμοι φωτειναὶ πηγαὶ Α καὶ Β, παράλληλοι μεταξύ των, ἀπέχουν ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην 1 mm. Ἐπὶ πετάσματος Π, τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο πηγῶν, παρατηροῦμεν τοὺς κροσσοὺς συμβολῆς τοῦ φωτὸς τῶν δύο πηγῶν. Ἡ ἀπόστασις τοῦ πετάσματος ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τῶν φωτεινῶν πηγῶν εἶναι 1 m. — 1) Αἱ δύο πηγαὶ ἐκπέμπουν μονόχρουν φῶς ποὺ ἔχει μῆκος κύματος $\lambda = 0{,}47\ \mu$. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν κεντρικὸν κροσσὸν εὑρίσκεται ὁ ἔνατος σκοτεινὸς κροσσός. — 2) Αἱ δύο πηγαὶ ἐκπέμπουν τώρα λευκὸν φῶς. Ἂν γνωρίζωμεν ὅτι τὰ μήκη κύματος τῶν ὁρατῶν ἀκτινοβολιῶν περιλαμβάνονται μεταξὺ 0,39 μ καὶ 0,78 μ, νὰ εὑρεθῇ ποῖαι ἐκ τῶν ἀκτινοβολιῶν τούτων εἶναι ἐκεῖναι αἱ ὁποῖαι δίδουν σκοτεινὸν κροσσὸν εἰς ἕνα σημεῖον Γ τοῦ πετάσματος, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 4 mm ἀπὸ τὸν κεντρικὸν κροσσὸν καὶ τί θὰ παρατηρηθῇ εἰς τὸ λαμβανόμενον φάσμα, ὅταν ἀντὶ τοῦ πετάσματος τοποθετηθῇ εἰς τὸ Γ ἡ σχισμὴ φασματοσκοπίου παραλλήλως πρὸς τοὺς κροσσούς.*

1) Ἔστω Γ ἕνα σημεῖον τοῦ πετάσματος εἰς τὸ ὁποῖον φθάνουν αἱ φωτειναὶ κυμάνσεις ἐκ τῶν δύο πηγῶν Α καὶ Β. Εἰς τὸ Γ θὰ ἔχωμεν ἐλάχιστον τῆς κυμάνσεως, δηλαδὴ σκοτεινὸν κροσσόν, ἐὰν ἡ διαφορὰ πορείας δ τῶν ἀκτίνων

ΑΓ καὶ ΒΓ εἶναι ἴση μὲ περιττὸν ἀριθμὸν ἡμικυμάτων, ἤτοι ὅταν εἶναι:

$$B\Gamma - A\Gamma = \delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Ἂν θέσωμεν: $AB = \alpha$, $OK = d$, $K\Gamma = x$, εὑρίσκομεν:

$$\overline{A\Gamma}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{A'\Gamma}^2 = d^2 + \left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

$$\overline{B\Gamma}^2 = \overline{BB'}^2 + \overline{B'\Gamma}^2 = d^2 + \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

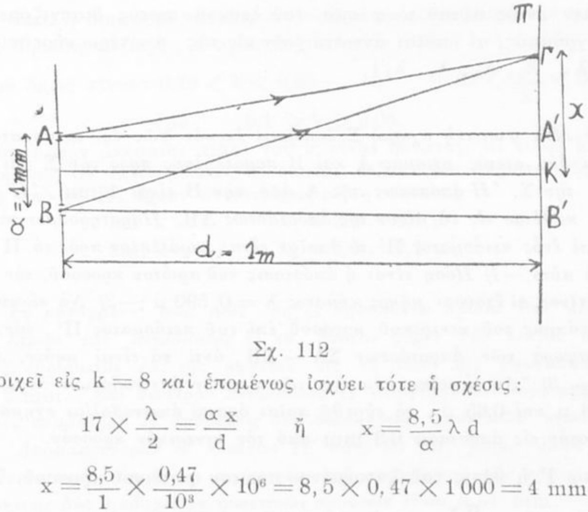
Ἄρα εἶναι:

$$\overline{B\Gamma}^2 - \overline{A\Gamma}^2 = 2\alpha x, \quad \text{ἢ} \quad B\Gamma - A\Gamma = \frac{2\alpha x}{B\Gamma + A\Gamma} = \frac{2\alpha x}{2d} = \frac{\alpha x}{d}.$$

Ὥστε εἰς τὸ Γ σχηματίζεται σκοτεινὸς κροσσός, ὅταν εἶναι:

$$\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2} = \frac{\alpha x}{d}. \qquad (1)$$

Ὁ πρῶτος σκοτεινὸς κροσσὸς ἀντιστοιχεῖ εἰς $k = 0$· ἄρα ὁ ἔνατος κροσ-



Σχ. 112

σὸς ἀντιστοιχεῖ εἰς $k = 8$ καὶ ἑπομένως ἰσχύει τότε ἡ σχέσις:

$$17 \times \frac{\lambda}{2} = \frac{\alpha x}{d} \quad \text{ἢ} \quad x = \frac{8,5}{\alpha}\lambda d$$

καὶ $$x = \frac{8,5}{1} \times \frac{0,47}{10^3} \times 10^6 = 8,5 \times 0,47 \times 1\,000 = 4 \text{ mm}.$$

Ὥστε ὁ ἔνατος σκοτεινὸς κροσσὸς σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 4 mm ἀπὸ τὸν κεντρικὸν κροσσόν.

2) Διὰ τὰς ἀκτινοβολίας, αἱ ὁποῖαι δίδουν σκοτεινὸν κροσσὸν εἰς τὸ σημεῖον Γ, πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις (1), δηλαδή: $(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{\alpha x}{d}$.

Διὰ $x = 4$ mm καὶ $\alpha = 1$ mm ἡ ἀνωτέρω σχέσις δίδει: $2k+1 = \dfrac{8}{\lambda}$.

Ἐπειδὴ εἶναι: $0,39 < \lambda < 0,78$, εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν:

$$0,39 < \frac{8}{2k+1} < 0,78 \quad \text{ἢ} \quad \frac{8}{0,39} > 2k+1 > \frac{8}{0,78}.$$

Ἀλλὰ εἶναι : $\dfrac{8}{0,39} = 20,5$ καὶ $\dfrac{8}{0,78} = 10,25$.

ἐπομένως εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν :

$$20,5 > 2\,k + 1 > 10,25 \qquad \text{ἢ} \qquad 9,75 > k > 4,625.$$

Οἱ σκοτεινοὶ κροσσοὶ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἀκεραίας τιμὰς τοῦ k αἱ ὁποῖαι περιλαμβάνονται μεταξὺ 4,625 καὶ 9,75 Ὥστε εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ k ἠμπορεῖ νὰ λάβῃ μόνον τὰς τιμάς : 5, 6, 7, 8, καὶ 9, δηλαδὴ πέντε μόνον τιμάς. Αἱ ἀκτινοβολίαι, αἱ ὁποῖαι δίδουν εἰς τὸ Γ σκοτεινὸν κροσσόν, ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ ἑξῆς μήκη κύματος :

$$\text{διὰ } k = 5: \quad \lambda_1 = \frac{8}{2\,k + 1} = \frac{8}{11} = 0,727\ \mu\cdot$$
$$\text{διὰ } k = 6: \quad \lambda_2 = 8/13 = 0,615\ \mu\cdot$$
$$\text{διὰ } k = 7: \quad \lambda_3 = 8/15 = 0,533\ \mu\cdot$$
$$\text{διὰ } k = 8: \quad \lambda_4 = 8/17 = 0,470\ \mu\cdot$$
$$\text{διὰ } k = 9: \quad \lambda_5 = 8/19 = 0,420\ \mu\cdot$$

Ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον Γ τοποθετηθῇ ἡ σχισμὴ φασματοσκοπίου, τότε θὰ παρατηρήσωμεν ἐντὸς αὐτοῦ τὸ φάσμα τοῦ λευκοῦ φωτὸς διασχιζόμενον ἀπὸ 5 σκοτεινὰς γραμμάς, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἀνωτέρω εὑρεθείσας 5 ἀκτινοβολίας (λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5).

147.— *Μία φωτεινὴ σχισμὴ Σ ἐκπέμπει λευκὸν φῶς ἐπὶ πετάσματος Π τὸ ὁποῖον φέρει δύο στενὰς σχισμὰς Α καὶ Β παραλλήλους πρὸς τὴν Σ καὶ τοῦ αὐτοῦ πλάτους μὲ τὴν Σ. Ἡ ἀπόστασις τῆς Α ἀπὸ τὴν Β εἶναι 4 mm. Ἡ Σ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως ΑΒ. Παρατηροῦμεν τὰ φαινόμενα συμβολῆς ἐπὶ ἑνὸς πετάσματος Π′ τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ Π καὶ ἀπέχει 60 cm ἀπὸ αὐτό.—1) Πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ πρώτου κροσσοῦ, τὸν ὁποῖον δίδουν αἱ ἀκτῖνες, αἱ ἔχουσαι μῆκος κύματος λ = 0,590 μ ;—2) Νὰ εὑρεθῇ πόση θὰ ἦτο ἡ μετατόπισις τοῦ κεντρικοῦ κροσσοῦ ἐπὶ τοῦ πετάσματος Π′, ἐάν, ἕνεκα λάθους, ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ΣΑ — ΣΒ, ἀντὶ νὰ εἶναι μηδέν, ἦτο ἴση μὲ 0,1 mm. — 3) Ἂν τὰ μήκη κύματος τῶν ὁρατῶν ἀκτινοβολιῶν περιλαμβάνωνται μεταξὺ 0,39 μ καὶ 0,65 μ, νὰ εὑρεθῇ ποῖαι ὁραταὶ ἀκτινοβολίαι σχηματίζουν φωτεινὸν κροσσὸν εἰς ἀπόστασιν 0,3 mm ἀπὸ τὸν κεντρικὸν κροσσόν.*

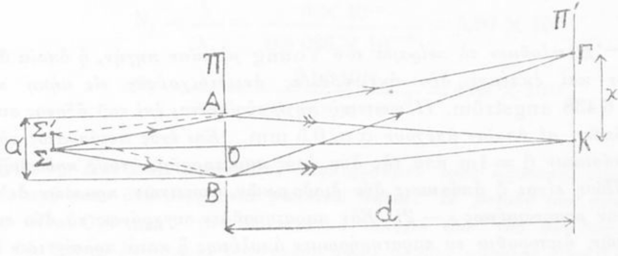
1) Ἔστω Γ ἡ θέσις τοῦ ζητουμένου πρώτου φωτεινοῦ κροσσοῦ. Τότε ἡ διαφορὰ πορείας : $\delta = \dfrac{\alpha\, x}{d}$ τῶν ἀκτίνων ΑΓ καὶ ΒΓ θὰ εἶναι ἴση μὲ ἕνα μῆκος κύματος, δηλαδὴ ἴση μὲ λ. Ἄρα ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{\alpha\, x}{d} = \lambda\cdot \qquad \text{ἢ} \qquad x = \frac{\lambda\, d}{\alpha} = \frac{0,590 \times 600}{4} = 88,5\ \mu = 0,0885\ \text{mm}.$$

2) Ὅταν ἡ Σ δὲν εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΟΚ, τότε αἱ ἀκτῖνες Σ′Α καὶ Σ′Β παρουσιάζουν διαφορὰν πορείας $\delta' = 0,1$ mm. Ἐπομένως ὁ κεντρικὸς κροσσὸς Κ μετατοπίζεται εἰς ἄλλο σημεῖον Λ τοιοῦτον, ὥστε ἡ γεωμετρικὴ διαφορὰ δ′ τῶν ἀκτίνων ΑΛ καὶ ΒΛ νὰ εἶναι ἴση μὲ 0,1 mm, δηλαδὴ νὰ ἐξουδετερώνῃ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων Σ′Α καὶ Σ′Β. Ἡ νέα ἀπόστασις λοιπὸν x′ τοῦ σημείου Γ ἀπὸ τὸ Κ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{\alpha\, x'}{d} = 0{,}1 \qquad \text{ἢ} \qquad x' = \frac{0{,}1\, d}{\alpha} = \frac{0{,}1 \times 600}{4} = 15 \text{ mm.}$$

3) Εἰς ἀπόστασιν $x = 0{,}3$ mm ἀπὸ τὸ Κ ἡ διαφορὰ πορείας τῶν ἀκτίνων εἶναι: $\delta'' = \frac{\alpha\, x}{d} = \frac{4 \times 0{,}3}{600} = 0{,}002 \text{ mm} = 2\ \mu$. Αἱ ἀκτινοβολίαι, αἱ ὁποῖαι διδουν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἕνα μέγιστον τῆς ἐντάσεως, ἔχουν μῆκος κύματος



Σχ. 113

λ τοιοῦτον, ὥστε ἡ διαφορὰ πορείας $\delta'' = 2\ \mu$ νὰ εἶναι ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ λ, δηλαδὴ νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις: $k\lambda = 2$ ἢ $\lambda = 2/k$.

Ἐξ ἄλλου ὅμως εἶναι: $0{,}39 < \lambda < 0{,}65$ ἢ $0{,}39 < \frac{2}{k} < 0{,}65$

ἄρα $5{,}1 > k > 3{,}08$.

Ὥστε δύο μόνον ἀκέραιαι τιμαὶ τοῦ k εἶναι δυναταί, αἱ τιμαὶ $k = 4$ καὶ $k = 5$. Ἑπομένως αἱ ἀκτινοβολίαι, αἱ ὁποῖαι δίδουν ἕνα μέγιστον εἰς ἀπόστασιν 0,3 mm ἀπὸ τὸ Κ, ἔχουν ἀντιστοίχως μήκη κύματος:

διὰ $k = 4$: $\lambda_1 = 2/4 = 0{,}5\ \mu$·

διὰ $k = 5$: $\lambda_2 = 2/5 = 0{,}4\ \mu$.

148. — *Τὸ μονόχρουν φῶς μιᾶς πηγῆς προσπίπτει πρῶτα ἐπὶ λεπτῆς σχισμῆς Σ καὶ ἔπειτα ἐπὶ πετάσματος Π τὸ ὁποῖον φέρει δύο λεπτὰς σχισμὰς Α καὶ Β. Ἡ Σ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως ΑΒ, ἡ ὁποία εἶναι 2 mm. Ἐπὶ δευτέρου πετάσματος Π′ παρατηροῦμεν τοὺς σχηματιζομένους κροσσοὺς συμβολῆς. Ἡ ἀπόστασις δύο διαδοχικῶν φωτεινῶν κροσσῶν εἶναι 0,34 mm. Ἀπομακρύνομεν τὸ πέτασμα Π′ κατὰ 50 cm, χωρὶς ὅμως νὰ παύσῃ νὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας τοῦ συστήματος τῶν τριῶν σχισμῶν. Τότε ἡ ἀπόστασις δύο διαδοχικῶν φωτεινῶν κροσσῶν εἶναι 0,51 mm.—1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος κύματος τῆς χρησιμοποιουμένης ἀκτινοβολίας. — 2) Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς δευτερόλεπτα ἡ γωνία φ ὑπὸ τὴν ὁποίαν βλέπομεν τὴν ἀπόστασιν ΑΒ ἀπὸ τὸ σημεῖον τοῦ πετάσματος Π′ εἰς τὸ ὁποῖον ὁ ἄξων συμμετρίας τέμνει τὸ πέτασμα.*

1) Ἂν ὀνομάσωμεν β τὴν μετατόπισιν τοῦ πετάσματος Π′ (σχ.113) καὶ x τὴν ἀπόστασιν δύο διαδοχικῶν φωτεινῶν κροσσῶν, τότε διὰ τὰς δύο θέσεις τοῦ πετάσματος θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως τὰς σχέσεις: $\frac{\alpha x}{d} = \lambda$ καὶ $\frac{\alpha\, x_1}{d+\beta} = \lambda$.

Ἑπομένως εἶναι: $\frac{\alpha\, x}{d} = \frac{\alpha\, x_1}{d+\beta}$ ἢ $d = \frac{\beta\, x}{x_1 - x} = \frac{500 \times 0{,}34}{0{,}51 - 0{,}34} = 1000$ mm.

Ὥστε τὸ μῆκος κύματος λ τῆς ἀκτινοβολίας εἶναι:

$$\lambda = \frac{\alpha\, \mathbf{x}}{d} = \frac{2 \times 0,34}{1\,000} = \frac{0,68}{1\,000}\ \mathrm{mm} = 0,68\ \mu .$$

2) Ἡ ζητουμένη γωνία ΑΚΒ $= \varphi$ εἶναι:

$$\varphi = \frac{AB}{OK} = \frac{\alpha}{d} = \frac{2}{1\,000}\ \text{ἀκτινίου} = 412{,}5\ \text{δευτερόλεπτα}.$$

149. — *Ἐκτελοῦμεν τὸ πείραμα τοῦ* Young *μὲ μίαν πηγήν, ἡ ὁποία θεωρεῖται ὡς σημεῖον καὶ ἐκπέμπει δύο ἀκτινοβολίας ἀντιστοιχούσας εἰς μήκη κύματος:* 5 086 *καὶ* 6 438 angström. *Ἡ φωτεινὴ πηγὴ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας τῶν δύο ὀπῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν* $\alpha = 0{,}5$ mm. *Ἐπὶ ἑνὸς πετάσματος εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν* $d = 1$m *ἀπὸ τὰς δύο ὀπὰς παρατηροῦμεν τοὺς κροσσοὺς συμβολῆς.—1) Πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις δύο διαδοχικῶν φωτεινῶν κροσσῶν δι' ἑκάστην ἀκτινοβολίαν μεμονωμένως; — 2) Ἐὰν παρατηροῦμεν συγχρόνως τὰ δύο συστήματα τῶν κροσσῶν, ἠμποροῦμε νὰ παρατηρήσωμεν ἀπολύτως ἢ κατὰ προσέγγισιν ἐπιπροσθέσεις τῶν φωτεινῶν κροσσῶν;—3) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συχνότητες τῶν δύο ἀκτινοβολιῶν, ἂν ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἶναι* $V = 300\,000$ km/sec.

1) Ἡ ἀπόστασις ε δύο διαδοχικῶν κροσσῶν δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν:

$$\varepsilon = \frac{\lambda\, d}{\alpha}.$$

Διὰ τὰς δύο θεωρουμένας ἀκτινοβολίας ἔχομεν:

$$\varepsilon_1 = \frac{0{,}5086 \times 1\,000}{1\,000 \times 0{,}5} = 1{,}0172\ \mathrm{mm} \qquad \varepsilon_2 = \frac{0{,}6438 \times 1\,000}{1\,000 \times 0{,}5} = 1{,}2876\ \mathrm{mm}.$$

2) Οἱ κεντρικοὶ κροσσοὶ τῶν δύο συστημάτων συμπίπτουν ἐπὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας, ἔπειτα ὅμως οἱ γειτονικοὶ κροσσοὶ τῶν δύο συστημάτων ἀπομακρύνονται προοδευτικῶς. Εἶναι δυνατὸν νὰ συμπέσουν οἱ κροσσοὶ διαφόρου τάξεως τῶν δύο συστημάτων, ἂν αἱ ἀποστάσεις τῶν κροσσῶν τούτων ἀπὸ τὸν κεντρικὸν κροσσὸν ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμήν. Θὰ συμπέσουν ἀπολύτως δύο κροσσοὶ εἰς μίαν ἀπόστασιν ἡ ὁποία θὰ εἶναι ἀκέραιον πολλαπλάσιον καὶ τοῦ ε_1 καὶ τοῦ ε_2. Κατὰ προσέγγισιν θὰ συμπέσουν δύο κροσσοί, ἂν ὑπάρχουν δύο ἀποστάσεις, αἱ ὁποῖαι νὰ εἶναι ἀκέραια πολλαπλάσια τῶν ε_1 καὶ ε_2, ἀλλὰ αἱ τιμαὶ τῶν ἀποστάσεων τούτων νὰ διαφέρουν ἐλάχιστα μεταξύ των. Ἄρα ὁ κροσσὸς τῆς τάξεως ν τοῦ πρώτου συστήματος (ὁ κεντρικὸς κροσσὸς ἔχει ἀριθμὸν μηδὲν) θὰ συμπέσῃ μὲ τὸν κροσσὸν τῆς τάξεως $\nu + \mu$ τοῦ δευτέρου συστήματος, ἂν εἶναι: $\nu\, \varepsilon_2 = (\nu + \mu)\, \varepsilon_1$.

Ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν θέσωμεν $\mu = 1$, εὑρίσκομεν διὰ τὸ ν τὴν τιμὴν 3,7 , δηλαδὴ μὴ ἀκεραίαν τιμήν. Ἄρα δὲν ὑπάρχει σύμπτωσις τῶν κροσσῶν ν καὶ $\nu+1$ τῶν δύο συστημάτων.

Ἡ προηγουμένη σχέσις ἠμπορεῖ νὰ γραφῇ:

$$\frac{\nu + \mu}{\nu} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{6\,438}{5\,086} = \frac{3\,219}{2\,543} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{\mu}{\nu} = \frac{676}{2\,543}.$$

Ὁ ἀριθμητὴς 676 ἀναλυόμενος εἰς γινόμενον πρώτων ἀριθμῶν γράφεται:

$$676 = 2 \times 2 \times 13 \times 13 .$$

Ὁ παρονομαστὴς 2543 δὲν εἶναι διαιρετὸς οὔτε διὰ τοῦ 2, οὔτε διὰ τοῦ 13.

Ἄρα ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἡ πρώτη λοιπὸν ἀπόλυτος σύμπτωσις θὰ ληφθῇ διὰ $\nu = 2\,543$ καὶ $\mu = 676$. Εἶναι προφανὲς ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ παρατηρηθῇ, διότι ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν ἀπόστασιν πολὺ μεγάλην ἀπὸ τὸν κεντρικὸν κροσσόν. Μόνον κατὰ προσέγγισιν συμπτώσεις τῶν κροσσῶν εἶναι δυνατὸν νὰ παρατηρηθοῦν.

3) Αἱ συχνότητες τῶν δύο ἀκτινοβολιῶν εἶναι :

$$N_1 = \frac{V}{\lambda_1} = \frac{3 \times 10^{10}}{0{,}5\,086 \times 10^{-4}} = 5{,}90 \times 10^{14}$$

$$N_2 = \frac{V}{\lambda_2} = \frac{3 \times 10^{10}}{0{,}6\,438 \times 10^{-4}} = 4{,}66 \times 10^{14}.$$

150. — *Ἐπὶ ἑνὸς πετάσματος παρατηροῦμεν τοὺς κροσσοὺς συμβολῆς τοὺς ὁποίους παράγουν δύο σύγχρονοι φωτειναὶ πηγαί. Ἡ μεταξὺ τῶν δύο πηγῶν ἀπόστασις εἶναι 0,5 mm, τὸ δὲ πέτασμα ἀπέχει ἀπὸ τὰς δύο πηγάς 50 cm. — 1) Αἱ δύο πηγαὶ ἐκπέμπουν μονόχρουν φῶς, μήκους κύματος $\lambda = 0{,}546\ \mu$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο γειτονικῶν φωτεινῶν κροσσῶν. — 2) Τὸ φῶς ἑκάστης τῶν δύο πηγῶν ἀποτελεῖται τώρα ἀπὸ δύο ἀκτινοβολίας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μήκη κύματος $\lambda = 0{,}546\ \mu$ καὶ $\lambda' = 0{,}578\ \mu$. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἀπέχουν ἀπὸ τὸν κεντρικὸν κροσσὸν τὰ σημεῖα τοῦ πετάσματος εἰς τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχεῖ πλῆρες σκότος.*

1) Ἡ ἀπόστασις x μεταξὺ δύο διαδοχικῶν φωτεινῶν κροσσῶν δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν : $x = \frac{d\lambda}{\alpha}$

ὅπου εἶναι $d = 50$ cm, $\alpha = 0{,}5$ mm καὶ $\lambda = 0{,}546\ \mu$.

Ἄρα ἔχομεν : $x = \frac{500}{0{,}5} \times \frac{0{,}546}{10^3} = 0{,}546$ mm.

2) Αἱ δύο ἀκτινοβολίαι λ καὶ λ΄ δίδουν πλῆρες σκότος, εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ πετάσματος, ὅταν ἑκάστη ἐξ αὐτῶν δίδῃ σκοτεινὸν κροσσὸν εἰς τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν x ἀπὸ τὸν κεντρικὸν κροσσόν. Διὰ τὴν ἀκτινοβολίαν λ ἔχομεν σκοτεινὸν κροσσὸν εἰς ἀπόστασιν (ἀπὸ τὸν κεντρικὸν κροσσόν) :

$$x = \frac{(2k+1)\lambda}{2}\,\frac{d}{\alpha} = (2k+1) \times \frac{0{,}546}{2 \times 10^3} \times \frac{500}{0{,}5} = (2k+1) \times 0{,}273 \quad (1)$$

καὶ διὰ τὴν ἀκτινοβολίαν λ΄ ἔχομεν :

$$x = \frac{(2k'+1)\lambda'}{2}\,\frac{d}{\alpha} = (2k+1) \times \frac{0{,}578}{2 \times 10^3} \times \frac{500}{0{,}5} = (2k'+1) \times 0{,}289. \quad (2)$$

Ἂν ἐξισώσωμεν τὰς σχέσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν : $\frac{2k+1}{2k'+1} = \frac{289}{273}$.

Οἱ ἀριθμοὶ 289 καὶ 273 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ὥστε οἱ ἀριθμοὶ $2k+1$ καὶ $2k'+1$ εἶναι περιττὰ παλλαπλάσια τοῦ 289 καὶ τοῦ 273.

Ἄρα εἶναι : $\frac{2k+1}{2k'+1} = \frac{\nu \times 289}{\nu \times 273}$.

Διὰ $\nu = 1$ λαμβάνομεν : $k = \frac{289 - 1}{2} = 144 \cdot k' = \frac{273 - 1}{2} = 136'$

διὰ $\nu = 3$ λαμβάνομεν : $k_1 = \frac{3 \times 289 - 1}{2} = 433 \cdot k_1' = \frac{3 \times 273 - 1}{2} = 490$.

Σύμφωνα μὲ τὴν ἐξίσωσιν (1) αἱ ζητούμεναι ἀποστάσεις εἶναι:

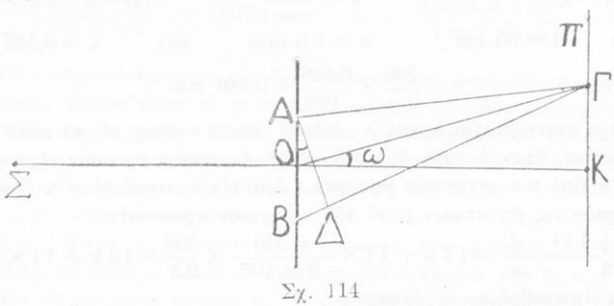
$$x = (2 \times 144 + 1) \times 0{,}273 = 78{,}89 \text{ mm}$$

$$x_1 = (2 \times 433 + 1) \times 0{,}273 = 236{,}69 \text{ mm}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ δεύτερον σκοτεινὸν σημεῖον σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν κεντρικὸν κροσσόν $x_1 = 3x$.

151. — *Φωτεινὴ σχισμὴ Σ ἐκπέμπει μονόχρουν φῶς, μήκους κύματος $\lambda = 0{,}6\ \mu$. Τὸ φῶς τῆς σχισμῆς προσπίπτει ἐπὶ δύο λεπτῶν σχισμῶν Α καὶ Β αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν σχισμὴν Σ. Ἡ μεταξὺ τῶν Α καὶ Β ἀπόστασις εἶναι 2 mm. Τὸ ἐπίπεδον τῶν σχισμῶν Α καὶ Β εἶναι κάθετον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΣΟ ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Σ κάθετος εἰς τὸ μέσον Ο τῆς ΑΒ. Ἡ ἀπόστασις ΣΟ εἶναι 1 m. 1) Ἐπὶ πετάσματος Π, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 1 m ἀπὸ τὰς δύο σχισμὰς Α καὶ Β, σχηματίζονται κροσσοὶ συμβολῆς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο διαδοχικῶν φωτεινῶν κροσσῶν. — 2) Ἡ σχισμὴ Σ μετατοπίζεται πρὸς τὰ κάτω κατὰ $ΣΣ_1 = 2$ mm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ νέα θέσις τοῦ κεντρικοῦ κροσσοῦ.—3) Ὅταν ἡ σχισμὴ εὑρίσκεται εἰς τὴν νέαν θέσιν της $Σ_1$, θέτομεν ἐμπρὸς ἀπὸ τὴν σχισμὴν Β ἕνα πλακίδιον τὸ ὁποῖον ἔχει πάχος 8 μ. Ὁ κεντρικὸς κροσσὸς ἐπαναφέρεται τότε εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν του, δηλαδὴ εἰς τὸ σημεῖον ὅπου ἡ ΑΟ τέμνει τὸ πέτασμα Π. Νὰ εὑρεθῇ ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ πλακιδίου.*

1) Ἔστω Γ ἡ θέσις τοῦ πρώτου φωτεινοῦ κροσσοῦ καὶ ἂς ὀνομάσωμεν: $AB = \alpha$, $OK = d$ καὶ $KΓ = x$. Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΓΑ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΓΒ εἰς τὸ Δ. Τότε εἶναι



Σχ. 114

$ΓΑ = ΓΔ$ καὶ ἑπομένως τὸ τμῆμα ΒΔ εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν πορείας δ τῶν ἀκτίνων ΑΓ καὶ ΒΓ, δηλαδὴ εἶναι: $BΔ = \delta = \lambda$. Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι πολὺ μικρὰ ἐν σχέσει μὲ τὴν ἀπόστασιν ΟΚ, ἠμποροῦμε νὰ θεωρήσωμε τὸ τόξον ΑΔ ὡς εὐθεῖαν, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ΓΟ. Τότε ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΓΟΚ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία αὐτὴ ω εἶναι πολὺ μικρά, ἠμποροῦμε νὰ λάβωμεν:

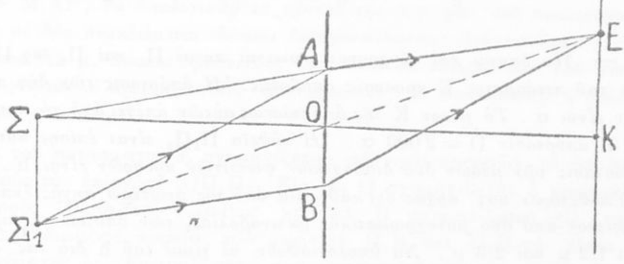
$$BΔ = AB \cdot \omega, \quad \text{ἢ} \quad \delta = \alpha\,\omega \quad \text{καὶ} \quad KΓ = OK \cdot \omega, \quad \text{ἢ} \quad x = d\,\omega.$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς λαμβάνομεν: $\dfrac{\delta}{\alpha} = \dfrac{x}{d}$ ἢ $x = \dfrac{\delta\, d}{\alpha} = \dfrac{\lambda\, d}{\alpha}$.

Ἂν εἰς τὴν τελευταίαν σχέσιν θέσωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμάς, εὑρίσκομεν:

$$x = \frac{0{,}0006 \times 1\,000}{2} = 0{,}3 \text{ mm}.$$

2) Όταν ἡ σχισμὴ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν Σ_1, φέρομεν τὴν $\Sigma_1 OE$· τότε οἱ δύο δρόμοι $\Sigma_1 AE$ καὶ $\Sigma_1 BE$ εἶναι ἴσοι. Ἐπομένως τὸ σημεῖον Ε εἶναι ἡ θέσις τοῦ

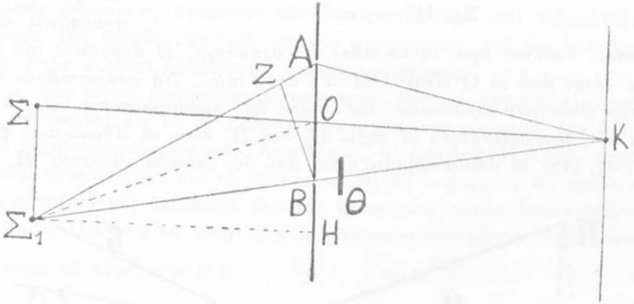


Σχ. 115

νέου κεντρικοῦ κροσσοῦ. Ὁλόκληρον λοιπὸν τὸ σύστημα τῶν κροσσῶν μετατοπίζεται πρὸς τὰ ἄνω κατὰ $KE = 2$ mm.

3) Αἱ ἀκτῖνες $\Sigma_1 A$ καὶ $\Sigma_1 B$ παρουσιάζουν μεταξύ των διαφορὰν πορείας ΖΑ, τὴν ὁποίαν ἠμποροῦμε νὰ τὴν ὑπολογίσωμεν ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΖΑΒ καὶ $O\Sigma_1 H$: $\dfrac{ZA}{OH} = \dfrac{AB}{\Sigma_1 H}$ ἢ $ZA = \dfrac{\overline{OH} \times \overline{AB}}{\overline{\Sigma_1 H}} = \dfrac{2 \times 2}{1\,000} = 0{,}004$ mm. $= 4\,\mu$.

Ἔστω ε τὸ πάχος τοῦ πλακιδίου Θ καὶ ν ὁ δείκτης διαθλάσεως αὐτοῦ. Ἂν



Σχ. 116

ὀνομάσωμεν V καὶ V′ τὴν ταχύτητα τοῦ φωτὸς ἐντὸς τοῦ πλακιδίου καὶ ἐντὸς τοῦ ἀέρος, τότε εἶναι: $\dfrac{V'}{V} = \nu$ ἢ $V' = \nu . V$.

Ἐπομένως ἂν ε καὶ ε′ εἶναι τὰ διαστήματα ποὺ διανύει τὸ φῶς ἐντὸς τῶν δύο αὐτῶν μέσων (πλακιδίου καὶ ἀέρος) εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον t, τότε εἶναι:

$$\varepsilon = Vt \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon' = V't = \nu V t \cdot \quad \text{ἄρα} \quad \varepsilon' = \nu \varepsilon.$$

Ὅταν λοιπὸν τὸ φῶς διατρέχῃ τὸ πάχος ε τοῦ πλακιδίου, διατρέχει εἰς τὸν ἀέρα διάστημα ν ε. Ἡ διαφορὰ δ τῶν δύο αὐτῶν δρόμων τοῦ φωτὸς εἶναι:

$$\delta = \nu\varepsilon - \varepsilon \quad \text{ἢ} \quad \delta = \varepsilon(\nu - 1).$$

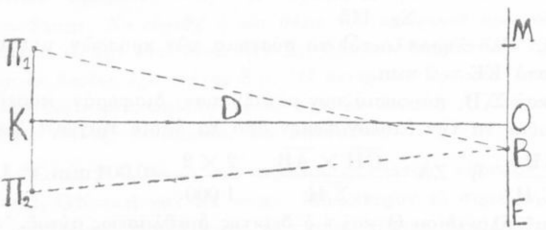
Πρέπει λοιπὸν ἡ διαφορὰ πορείας δ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΖΑ, δηλαδὴ πρέ-

πει νὰ εἶναι : $\varepsilon(\nu - 1) = ZA$ ἢ $\varepsilon(\nu - 1) = 4$·
καὶ ἐπομένως ὁ ζητούμενος δείκτης διαθλάσεως εἶναι :

$$\nu = \frac{4}{\varepsilon} + 1 = \frac{4}{8} + 1 \quad \text{ἢ} \quad \nu = \frac{3}{2}.$$

152. — *Δύο ὅμοιαι καὶ σύγχρονοι φωτειναὶ πηγαὶ Π_1 καὶ Π_2 (σχ.117) παράγουν ἐπὶ τοῦ πετάσματος E κροσσοὺς συμβολῆς. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πηγῶν μεταξύ των εἶναι α. Τὸ μέσον K τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν ἀπέχει ἀπὸ τὸ κατακόρυφον πέτασμα E ἀπόστασιν D = 2 000 α. Ἡ εὐθεῖα $\Pi_1\Pi_2$ εἶναι ἐπίσης κατακόρυφος ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν μέσων δύο διαδοχικῶν φωτεινῶν κροσσῶν εἶναι h.*

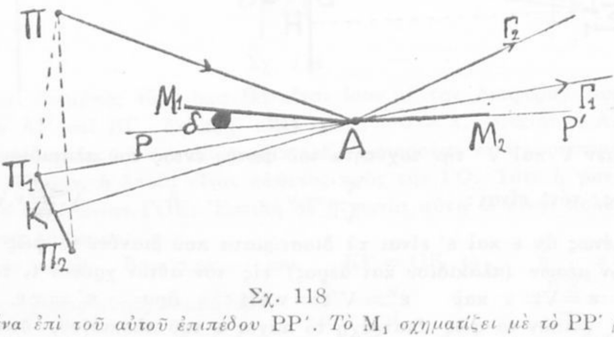
1) Ὑποθέτομεν κατ' ἀρχὰς ὅτι κάθε μία ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω πηγὰς ἐκπέμπει φῶς ἀποτελούμενον ἀπὸ δύο μονοχρωματικὰς ἀκτινοβολίας, τῶν ὁποίων τὰ μήκη κύματος εἶναι 1/2 μ καὶ 2/3 μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ h διὰ τὰς δύο αὐτὰς ἀκτινοβολίας καὶ νὰ σημειωθῇ τί θὰ παρατηροῦμεν ἐπὶ τοῦ πετάσματος.



Σχ. 117

2) Ὑποθέτομεν ἔπειτα ὅτι αἱ δύο πηγαὶ ἐκπέμπουν λευκὸν φῶς. Ἐξετάζομεν μὲ τὸ φασματοσκόπιον τὸ φῶς τὸ ὁποῖον προσπίπτει ἐπὶ μιᾶς στενῆς ζώνης, καθέτου πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ σχήματος. Ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου M τῆς ζώνης αὐτῆς ἀπὸ τὸ O εἶναι OM = z = 12 mm. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη κύματος τῶν φωτεινῶν ῥαβδώσεων, τὰς ὁποίας θὰ παρατηρήσωμεν εἰς τὸ φάσμα.

3) Εἰς τὴν πραγματικότητα αἱ πηγαὶ Π_1 καὶ Π_2 εἶναι τὰ εἴδωλα μιᾶς φωτεινῆς πηγῆς Π (σχ. 118) τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ἀπὸ δύο ἐπίπεδα κάτοπτρα M_1 καὶ M_2



Σχ. 118

τοποθετημένα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου PP'. Τὸ M_1 σχηματίζει μὲ τὸ PP' μίαν πολὺ μικρὰν γωνίαν. Πρὸς τοῦτο κάτωθεν τοῦ M_1 τοποθετεῖται σύρμα διαμέτρου δ = 200 μ εἰς ἀπόστασιν 5 cm ἀπὸ τὴν ἀκμὴν A τῆς διέδρου γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν τὰ κάτοπτρα. Ἡ ἀπόστασις ΠA εἶναι ἴση μὲ 25 cm. Ἡ δὲ ἀπόστασις τῆς κο-

ρυφῆς Α ἀπὸ τὸ πέτασμα Ε εἶναι 375 cm. Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ σχήματος ὑποτίθεται ὅτι ἡ γωνία ΠΑΡ εἶναι 20° ἕως 30° καὶ ὅτι τὰ κάτοπτρα ἔχουν μῆκος πολλῶν ἑκατοστομέτρων. Ἀφοῦ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ γωνία $\Pi_1 A \Pi_2$ *εἶναι διπλασία ἀπὸ τὴν γωνίαν* $M_1 AP$, *νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πλάτος τῆς περιοχῆς τοῦ πετάσματος Ε ἐπὶ τῆς ὁποίας αἱ δύο ἀνακλώμεναι δέσμαι ἐπιπροστίθενται. Διὰ μονόχρουν φῶς μήκους κύματος 0,5 μ, πόσους φωτεινοὺς κροσσοὺς θὰ ἴδωμεν ἐπὶ τοῦ πετάσματος Ε; Πόσος γίνεται ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς τῶν κροσσῶν, ἂν διπλασιασθῇ ἡ διάμετρος δ τοῦ σύρματος;*

1) Ἐπὶ τοῦ πετάσματος Ε σχηματίζεται σύστημα κροσσῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι κάθετοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον $O\Pi_1\Pi_2$. Εἰς τὸ Ο σχηματίζεται ὁ κεντρικὸς φωτεινὸς κροσσός. Ὁ πρῶτος φωτεινὸς κροσσὸς Β σχηματίζεται εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε ἡ διαφορὰ πορείας τῶν ἀκτίνων $\Pi_1 B$ καὶ $\Pi_2 B$ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ μῆκος κύματος λ. Ἐφαρμόζοντες τὴν γνωστὴν κλασσικὴν ἀπόδειξιν εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν:

$$h = \frac{D\lambda}{\alpha} \cdot \quad \text{ἄρα εἶναι:} \quad h = \frac{2\,000\,\alpha \,.\, \lambda}{\alpha} = 2\,000\,\lambda \,.$$

Διὰ τὴν πρώτην ἀκτινοβολίαν ἔχομεν: $h_1 = 2\,000 \times 1/2 = 1\,000\,\mu = 2\text{ mm}$.
καὶ διὰ τὴν δευτέραν ἀκτινοβολίαν ἔχομεν:

$$h_2 = 2\,000 \times 2/3 = 4\,000/3\,\mu = 4/3\text{ mm}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι: $4\,h_1 = 3\,h_2$.

Ἑπομένως ὁ τέταρτος φωτεινὸς κροσσὸς τοῦ πρώτου συστήματος συμπίπτει μὲ τὸν τρίτον φωτεινὸν κροσσὸν τοῦ δευτέρου συστήματος. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ δι' ἄλλους φωτεινοὺς κροσσοὺς τῶν δύο συστημάτων καὶ εἰδικώτερον διὰ τοὺς κροσσοὺς τῆς τάξεως 4ν τοῦ πρώτου συστήματος καὶ 3ν τοῦ δευτέρου συστήματος, ὅπου ν εἶναι οἱοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός.

2) Ἂν αἱ δύο πηγαὶ ἐκπέμπουν λευκὸν φῶς, τότε αἱ ἀκτινοβολίαι τοῦ λευκοῦ φωτός, αἱ ὁποῖαι εἰς τὸ Μ σχηματίζουν σκοτεινὸν κροσσόν, δὲν θὰ ὑπάρχουν εἰς τὸ λαμβανόμενον φάσμα. Ἀντιθέτως, αἱ ἀκτινοβολίαι τοῦ λευκοῦ φωτός, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν εἰς τὸ Μ ἕνα φωτεινὸν κροσσόν, θὰ ἔχουν εἰς τὸ φάσμα ἕνα μέγιστον τῆς ἐντάσεως. Διὰ τὰς τελευταίας αὐτὰς ἀκτινοβολίας πρέπει ἡ ἀπόστασις $OM = z$ νὰ εἶναι ἴση μὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν k ἀποστάσεων h.

Ἄρα πρέπει νὰ εἶναι $z = k\,h$ ἢ $z = k\,\dfrac{D\lambda}{\alpha}$.

Ἂν εἰς τὴν τελευταίαν σχέσιν θέσωμεν: $D = 2\,000\,\alpha$ καὶ $z = 12\,000\,\mu$ εὑρίσκομεν:

$$12\,000 = 2\,000\,k\,\lambda \quad \text{ἄρα} \quad \lambda = \frac{6}{k}\,\mu \,.$$

Διὰ τὰς ὁρατὰς ἀκτινοβολίας ἡ τιμὴ τοῦ λ εἶναι: $0{,}4\,\mu > \lambda > 0{,}8\,\mu$. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι πρέπει νὰ εἶναι: $15 > k > 7{,}5$. Ἄρα τὸ k ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ 7 μόνον ἀκεραίας τιμὰς καὶ συνεπῶς εἰς τὸ φάσμα θὰ ὑπάρχουν 7 φωτειναὶ ῥαβδώσεις, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς ἀκτινοβολίας ἐχούσας τὰ κατωτέρω μήκη κύματος:

διὰ $k = 8$ εἶναι $\lambda = 6/8 = 0{,}75\,\mu$ $k = 9$ εἶναι $\lambda = 6/9 = 0{,}67\,\mu$
διὰ $k = 10$ εἶναι $\lambda = 6/10 = 0{,}60\,\mu$ $k = 11$ εἶναι $\lambda = 6/11 = 0{,}55\,\mu$
διὰ $k = 12$ εἶναι $\lambda = 6/12 = 0{,}50\,\mu$ $k = 13$ εἶναι $\lambda = 6/13 = 0{,}46\,\mu$
διὰ $k = 14$ εἶναι $\lambda = 6/14 = 0{,}43\,\mu$.

3) Ἡ μικρὰ γωνία $M_1AP = \varphi$ εἶναι: $\varphi = \dfrac{200}{50\,000} = \dfrac{1}{250}$ ἀκτινίου.

Ἡ ἀκτὶς ΠΑ, προσπίπτουσα ἐπὶ τοῦ κατόπτρου M_1, δίδει ἀνακλωμένην ἀκτῖνα προερχομένην ἀπὸ τὸ εἴδωλον Π_1 τῆς πηγῆς. Ἡ ΠΑ, προσπίπτουσα ἐπὶ τοῦ M_2 δίδει ἀνακλωμένην, ἡ ὁποία προέρχεται ἀπὸ τὸ εἴδωλον Π_2 τῆς πηγῆς. Ἂν στρέψωμεν τὸ κάτοπτρον M_1 κατὰ γωνίαν φ, τὸ M_1 καὶ τὸ M_2 θὰ ἀποτελέσουν ἕνα κάτοπτρον, ἡ δὲ ἀνακλωμένη ἀκτὶς $A\Gamma_1$ στρεφομένη κατὰ γωνίαν 2 φ θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν $A\Gamma_2$. Ἄρα εἶναι: $\widehat{\Pi_1 A \Pi_2} = 2\,\varphi$:

Ἀπὸ τὸ τρίγωνον $\Pi_1 A \Pi_2$ εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

$$\Pi_1\Pi_2 = \Pi_1 A \times 2\,\varphi \quad \text{ἤτοι} \quad \alpha = \Pi A \times 2\,\varphi = 25 \times \frac{2}{250} = 0{,}2 \text{ cm} = 2 \text{ mm}.$$

Ἡ ἀπόστασις τῶν εἰδώλων Π_1 καὶ Π_2 ἀπὸ τὸ πέτασμα Ε εἶναι:

$$D = KA + 375 = 25 + 375 = 400 \text{ cm}.$$

Ἡ δέσμη ἡ ὁποία ἀνακλᾶται ἐπὶ ἑκάστου κατόπτρου ἀποτελεῖ μίαν κωνικὴν δέσμην, ἡ ὁποία ἔχει ὡς κορυφὴν τὸ εἴδωλον τῆς πηγῆς καὶ ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς περιφερείας τοῦ κατόπτρου. Τὸ κοινὸν μέρος τῶν δύο ἀνακλωμένων δεσμῶν εἶναι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος, ἡ γωνία $\Gamma_1 A \Gamma_2$ ἡ ὁποία εἶναι κατὰ κορυφὴν τῆς $\Pi_1 A \Pi_2$ καὶ ἑπομένως εἶναι ἴση μὲ 2 φ. Ἐπὶ τοῦ πετάσματος Ε ἡ γωνία $\Gamma_1 A \Gamma_2$ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα μῆκος:

$$x = 375 \times 2\,\varphi = 375 \times \frac{1}{125} = 3 \text{ cm} = 30 \text{ mm}.$$

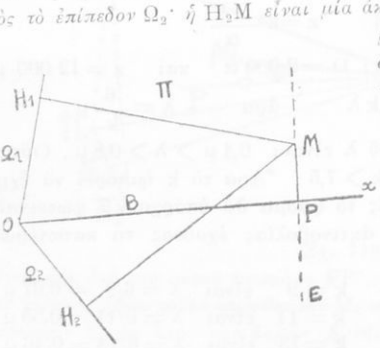
Εἰς τὴν § 1 εὕρομεν ὅτι διὰ $\lambda = 0{,}5\,\mu$ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο διαδοχικῶν φωτεινῶν κροσσῶν εἶναι $h = 1$ mm. Ἄρα ἐπὶ τοῦ πετάσματος Ε θὰ σχηματισθοῦν:

$$x : h = 30 : 1 = 30 \text{ κροσσοί}.$$

Ἐὰν διπλασιασθῇ ἡ διάμετρος δ τοῦ σύρματος, διπλασιάζονται καὶ αἱ γωνίαι φ καὶ 2 φ. Ἑπομένως διπλασιάζεται ἐπὶ τοῦ πετάσματος καὶ τὸ μῆκος x, τὸ ὁποῖον οὕτω γίνεται 60 mm. Εἰς τὴν περίπτωσιν λοιπὸν αὐτὴν θὰ σχηματισθοῦν:

$$2\,x : 1 = 60 : 1 = 60 \text{ κροσσοί}.$$

153. — *Μὲ μίαν διάταξιν συμβολῆς παράγονται δύο δέσμαι παραλλήλων ἀκτίνων μονοχρόου φωτός. Αἱ ἀκτῖνες τῆς πρώτης δέσμης εἶναι κάθετοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ω_1· ἡ H_1M εἶναι μία ἀκτίς. Αἱ ἀκτῖνες τῆς δευτέρας δέσμης εἶναι κάθετοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ω_2· ἡ H_2M εἶναι μία ἀκτὶς τῆς δέσμης. Ἡ γωνία H_1MH_2 εἶναι μικρά. Ἔστω Β τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ τὴν δίεδρον γωνίαν τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων Ω_1 καὶ Ω_2. Τὸ ἐπίπεδον Π τοῦ σχήματος εἶναι κάθετον πρὸς τὰ ἐπίπεδα Ω_1, Ω_2, Β. Ἡ εὐθεῖα Ox εἶναι ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Β. Ἔστω δὲ $PM = z$ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Μ ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον Β.—*



Σχ. 119

1) Δίδεται ἡ διαφορὰ πορείας δ τῶν δύο ἀκτίνων H_1M καὶ H_2M, αἱ ὁποῖαι συναντῶνται εἰς τὸ σημεῖον Μ:

$$\delta = \frac{z}{1\,000}.$$

Τὸ μῆκος κύματος τοῦ χρησιμοποιουμένου φωτὸς εἶναι :

$$\lambda = \frac{1}{2}\ \mu = \frac{1}{2\,000}\ \text{mm}.$$

Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ἔντασις εἶναι : α) μεγίστη καὶ β) ἐλαχίστη. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο διαδοχικῶν κροσσῶν, οἱ ὁποῖοι σχηματίζονται ἐπὶ ἑνὸς πετάσματος καθέτου πρὸς τὴν Ox.

2) Ὑποθέτομεν ἔπειτα ὅτι τὸ χρησιμοποιούμενον φῶς περιέχει δύο ἀκτινοβολίας, τῶν ὁποίων τὰ μήκη κύματος εἶναι 0,500 μ καὶ 0,625 μ καὶ ὅτι ἡ σχέσις $\delta = \dfrac{z}{1\,000}$ *ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὰς δύο αὐτὰς ἀκτινοβολίας. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ z διὰ τὰς ὁποίας ἕνας φωτεινὸς κροσσὸς τοῦ δευτέρου συστήματος συμπίπτει μὲ ἕνα κροσσόν : α) φωτεινόν· β) σκοτεινὸν τοῦ πρώτου συστήματος. Τί θὰ παρατηρηθῇ ἐπὶ ἑνὸς πετάσματος καθέτου πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π καὶ σχηματίζοντος μὲ τὴν εὐθεῖαν Ox γωνίαν α :*

Ἐφαρμογή : 1) $\alpha = 30^\circ$· *2)* $\alpha = 1/100$ *ἀκτινίου.*

1) Διὰ νὰ εἶναι εἰς τὸ σημεῖον M ἡ ἔντασις τοῦ φωτὸς μεγίστη, πρέπει ἡ διαφορὰ πορειας $\delta = H_2M - H_1M$ τῶν δύο ἀκτίνων νὰ εἶναι ἴση μὲ ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ μήκους κύματος :

$$\delta = \frac{z}{1\,000} = k\,\lambda \qquad \text{ἤτοι} \qquad z = 1\,000\,k\,\lambda$$

ὅπου k ἀκέραιος ἀριθμός. Ἀντιθέτως διὰ νὰ εἶναι εἰς τὸ M ἡ ἔντασις ἐλαχίστη, πρέπει νὰ εἶναι :

$$\delta = \frac{z}{1\,000} = (2\,k - 1)\,\frac{\lambda}{2} \qquad \text{ἢ} \qquad z = 1\,000\,(2\,k - 1)\frac{\lambda}{2}.$$

Ἡ ἀπόστασις h τῶν δύο κροσσῶν εὑρίσκεται, ἂν θέσωμεν $k = 1$.

Τότε λαμβάνομεν : $h = 1000\,\lambda$.

Διὰ $\lambda = \dfrac{1}{2\,000}$ mm ἔχομεν : $h = 0{,}5$ mm.

2) Ἡ ἀπόστασις τῶν κροσσῶν τοῦ πρώτου συστήματος εἶναι πάλιν $h = 0{,}5$ mm. Ἡ ἀπόστασις τῶν κροσσῶν τοῦ δευτέρου συστήματος εἶναι :

$$h' = 1\,000\,\lambda' = 1000 \times \frac{0{,}625}{1\,000} = 0{,}625\ \text{mm}.$$

Οἱ κεντρικοὶ φωτεινοὶ κροσσοὶ τῶν δύο συστημάτων συμπίπτουν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ὁ μ τάξεως φωτεινὸς κροσσός τοῦ δευτερου συστήματος θὰ συμπίπτη μὲ τὸν ν τάξεως φωτεινὸν κροσσὸν τοῦ πρώτου συστήματος, ὅταν ἰσχύη ἡ σχέσις : $\mu\,h' = \nu\,h$ ἢ $1{,}25\,\mu = \nu$ καὶ $5\,\mu = 4\,\nu$.

Ἡ τελευταία αὐτὴ σχέσις ἐπαληθεύεται, ὅταν εἶναι $\mu = 4$ καὶ $\nu = 5$· ἢ ἀκόμη ὅταν τὸ μ εἶναι ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ 4 καὶ τὸ ν εἶναι ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ 5. Αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ z εἶναι 2,5 mm καὶ τὰ πολλαπλάσιά του, 5 mm, 7,5 mm, 10 mm κ.λ.

Ὁμοίως ὁ μ τάξεως φωτεινὸς κροσσὸς τοῦ δευτέρου συστήματος συμπίπτει μὲ τὸν ρ τάξεως σκοτεινὸν κροσσὸν τοῦ πρώτου συστήματος, ἂν ἔχωμεν :

$$\mu\,h' = (2\rho - 1)\,\frac{h}{2} \qquad \text{ἢ} \qquad 5\,\mu = 2\,(2\rho - 1) = 4\rho - 2.$$

Ἡ σχέσις αὐτὴ ἐπαληθεύεται διὰ $\mu = 2$ καὶ $\rho = 3$ ἢ ἀκόμη διὰ $\mu = 2 + 4\,k$ καὶ $\rho = 3 + 5\,k$, ὅπου k εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός. Αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ z εἶναι 1,25 mm καὶ ἐκεῖναι αἱ ὁποῖαι διαφέρουν κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ 2,5 mm.

Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν κροσσῶν ἑνὸς συστήματος εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ πετάσματος Ε, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον πρὸς τὴν Ox· διότι, ἂν μετακινήσωμεν τὸ πέτασμα παραλλήλως πρὸς ἑαυτό, τὸ z διατηρεῖ τὴν αὐτὴν τιμήν, τὰ δὲ μήκη H_1M καὶ H_2M ὑφίστανται τὴν αὐτὴν αὔξησιν. Ἄρα ὁ γεωμετρικὸς τόπος ἑνὸς ὡρισμένου κροσσοῦ εἶναι ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον Β

Ἐπὶ ἑνὸς πετάσματος, σχηματίζοντος γωνίαν α μὲ τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον Β, παρατηροῦμεν σύστημα κροσσῶν οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν μεταξύ των περισσότερον ἀπὸ ὅσον ἀπεῖχον ἐπὶ τοῦ πετάσματος Ε. Ἡ ἀπόστασις αὐτῶν θὰ εἶναι :

$$\varepsilon = \frac{h}{\eta\mu\,\alpha}\,.$$

Διὰ $\alpha = 30^0$ ἔχομεν : $\varepsilon = 2\,h = 2 \times 0,5 = 1$ mm ,

διὰ τὸ πρῶτον σύστημα τῶν κροσσῶν.

Διὰ $\alpha = 0,01$ ἀκτινίου ἔχομεν : $\eta\mu\,\alpha = 0,01$

ἄρα $\varepsilon = 0,5 : 0,01 = 50$ mm .

154.— *Πειραματιζόμεθα μὲ τὰ δύο κάτοπτρα τοῦ* Fresnel. *Τὰ δύο κάτοπτρα ἠμποροῦν νὰ στρέφωνται περὶ κατακόρυφον ἄξονα* Ο. *Ἔμπροσθεν τῶν κατόπτρων τοποθετεῖται μία φωτεινὴ πηγὴ* Π. *Τὰ κάτοπτρα σχηματίζουν τὰ εἴδωλα* Π′ *καὶ* Π″ *τῆς πηγῆς. Τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ* Π *τέμνει τὰ κάτοπτρα κατὰ τὰς* ΟΜ *καὶ* ΟΝ . *Παρατηροῦμεν τοὺς κροσσοὺς συμβολῆς οἱ ὁποῖοι σχηματίζονται ἐπὶ ἑνὸς κατακορύφου ἐπιπέδου, παραλλήλου πρὸς τὴν εὐθεῖαν* Π′Π″ , *καὶ τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν* d *ἀπὸ τὸ* Ο . *Ἡ πηγὴ* Π *ἐκπέμπει μονόχρουν φῶς. Μετροῦμεν τὴν ἀπόστασιν* ε *μεταξὺ δύο διαδοχικῶν φωτεινῶν κροσσῶν, ὡς καὶ τὴν γωνίαν* φ *ὑπὸ τὴν ὁποίαν βλέπομεν ἐκ τοῦ κεντρικοῦ κροσσοῦ τὰ δύο εἴδωλα* Π′ *καὶ* Π″ . *Ἀπομακρύνομεν τὴν πηγὴν* Π *κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς* ΟΠ *κατὰ ἕνα μῆκος* β . *Ὅταν τὸ πέτασμα μετατοπισθῇ παραλλήλως πρὸς ἑαυτὸ κατὰ μίαν ἀπόστασιν* γ , *παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀπόστασις* ε *τῶν δύο διαδοχικῶν φωτεινῶν κροσσῶν δὲν μεταβάλλεται. Οὕτω εὑρίσκομεν τὰς ἑξῆς τιμάς :*

$\varepsilon = 0,315$ mm , $\beta = 5$ cm , $\gamma = 55$ cm, $\varphi = 1/500$ *ἀκτινίου*, $d = 1,10$ m .

1) Νὰ εὑρεθῇ πόσον εἶναι τὸ μῆκος κύματος τοῦ φωτός, τὸ ὁποῖον ἐκπέμπει ἡ πηγή.—2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζουν μεταξύ των τὰ κάτοπτρα. Κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν θὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ γωνία αὕτη εἶναι περίπου 180^0 *καὶ ὅτι εἶναι* $\pi = 22/7$.

1) Ἂς ὀνομάσωμεν $2\,\alpha$ τὴν μεταξὺ τῶν δύο φωτεινῶν πηγῶν Π′ καὶ Π″ ἀπόστασιν, ἤτοι $\Pi'\Pi'' = 2\,\alpha$. Τὸ μῆκος κύματος τοῦ φωτὸς τῶν δύο τούτων πηγῶν εἶναι λ. Ἡ ἀπόστασις h τοῦ πετάσματος ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν Π′Π″ εἶναι : $h = OH + d$. Ἐπομένως ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο διαδοχικῶν φωτεινῶν κροσσῶν εἶναι :

$$\varepsilon = \lambda \times \frac{h}{2\,\alpha}\,. \tag{1}$$

Ἡ γωνία φ ὑπὸ τὴν ὁποίαν βλέπομεν ἐκ τοῦ κεντρικοῦ κροσσοῦ Κ τὴν εὐθεῖαν Π΄Π΄΄ θὰ δίδεται ἀπὸ τὴν

σχέσιν: $\quad ἐφ\,\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{\alpha}{h}$

ἢ $\quad \dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{\alpha}{h}$. $\quad$ (2)

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$\lambda = 2\,\varepsilon \times \frac{\alpha}{h} = 2\,\varepsilon \times \frac{\varphi}{2}$$

ἢ $\lambda = 2 \times 0{,}315 \times \dfrac{1}{1\,000}$

ἢ $\quad \lambda = \dfrac{0{,}630}{1\,000}$ mm

ἤτοι $\quad \lambda = 0{,}630\ \mu$.

2) Ἂς ὀνομάσωμεν ω τὴν γωνίαν ΝΟΜ΄. Τότε εἶναι:

$$\widehat{NOM} = 180^0 - \omega$$

καὶ $\quad \widehat{\Pi' O H} = \omega$.

Ἄρα ἔχομεν:

ΟΗ = ΟΠ΄. συν ω = ΟΠ. συν ω.

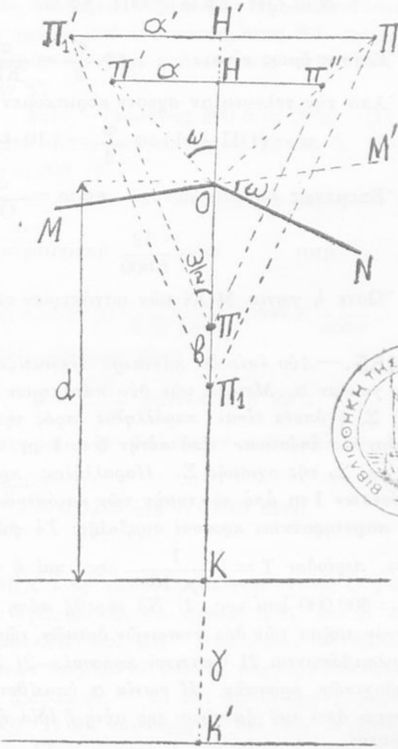
Ἐπειδὴ τὸ α εἶναι πολὺ μικρόν, ἠμποροῦμε νὰ λάβωμεν:

ΟΗ = ΟΠ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν διὰ τὴν δευτέραν θέσιν τῆς πηγῆς:

$ΟΗ' = ΟΠ_1'.$ συν ω $= ΟΠ_1.$ συν ω

καὶ $\quad ΟΗ' = ΟΠ_1 = ΟΠ + \beta$.



Σχ. 120

Εἰς τὴν πρώτην θέσιν Π τῆς πηγῆς ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$ἐφ\,\frac{\varphi}{2} = \frac{\alpha}{KH} = \frac{\alpha}{OH + d} = \frac{O\Pi.\ ημ\,\omega}{O\Pi + d}. \qquad (3)$$

Ὅταν μετατοπισθῇ ἡ πηγὴ κατὰ β καὶ τὸ πέτασμα κατὰ γ, ἡ ἀπόστασις ε τῶν κροσσῶν δὲν μεταβάλλεται· ἄρα:

$$\varepsilon = \lambda \times \frac{KH}{2\,\alpha} = \lambda \times \frac{K'H'}{2\,\alpha} \quad \text{καὶ ἑπομένως} \quad \frac{K'H'}{KH} = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

ἤτοι τὰ τρίγωνα ΚΗΠ΄ καὶ $Κ'Η'Π_1'$ εἶναι ὅμοια. Εἰς τὴν δευτέραν λοιπὸν θέσιν τῆς πηγῆς καὶ τοῦ πετάσματος ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$ἐφ\,\frac{\varphi}{2} = \frac{\alpha'}{K'H'} = \frac{O\Pi_1'.ημ\,\omega}{OH' + d + \gamma} = \frac{(O\Pi + \beta)\,ημ\,\omega}{O\Pi + \beta + d + \gamma}. \qquad (4)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4) εὑρίσκομεν: $\dfrac{O\Pi}{O\Pi + d} = \dfrac{O\Pi + \beta}{O\Pi + \beta + d + \gamma}$.

Ἄρα: $\quad O\Pi = \dfrac{\beta\,.\,d}{\gamma} = \dfrac{5 \times 110}{55} = 10$ cm.

Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΟΗΠ΄ εὑρίσκομεν:

$$\alpha = OH \cdot \varepsilon\varphi\, \omega = O\Pi \cdot \varepsilon\varphi\, \omega \qquad \text{ἄρα} \qquad \varepsilon\varphi\, \omega = \frac{\alpha}{O\Pi}.$$

Ἐπίσης ὅμως εἶναι: $\varepsilon\varphi \frac{\varphi}{2} = \frac{\alpha}{KH} = \frac{\alpha}{O\Pi + d}$.

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν:

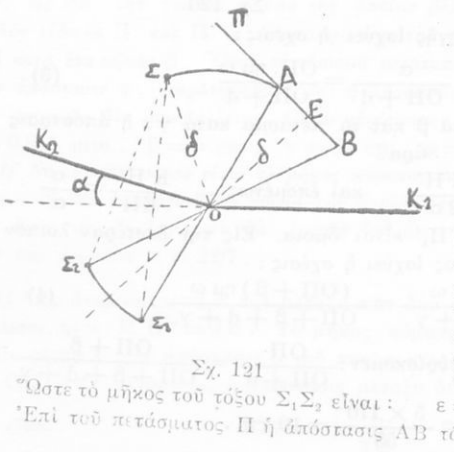
$$\alpha = (O\Pi + d)\, \varepsilon\varphi \frac{\varphi}{2} = (10 + 110) \times \frac{1}{1\,000} = \frac{12}{100} \text{ cm}.$$

Ἑπομένως λαμβάνομεν: $\varepsilon\varphi\, \omega = \frac{\alpha}{O\Pi} = \frac{12}{100 \times 10} = \frac{12}{1\,000}$

ἤτοι $\omega = \frac{12}{1\,000}$ ἀκτινίου $= 41'\,14''$.

Ὥστε ἡ γωνία ΜΟΝ τῶν κατόπτρων εἶναι: $\widehat{MON} = 179^0\,18'\,46''$.

155.—*Δύο ἐπίπεδα κάτοπτρα σχηματίζουν μεταξύ των πολὺ μικρὰν ἐξωτερικὴν γωνίαν α. Μεταξὺ τῶν δύο κατόπτρων ὑπάρχει μία πολὺ στενὴ φωτεινὴ σχισμὴ Σ, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τομὴν τῶν δύο κατόπτρων καὶ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ αὐτὴν* $\delta = 1$ m. *Τὰ κάτοπτρα σχηματίζουν δύο εἴδωλα* Σ_1 *καὶ* Σ_2 *τῆς σχισμῆς Σ. Παραλλήλως πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν* Σ_1 *καὶ* Σ_2 *καὶ εἰς ἀπόστασιν* 1 m *ἀπὸ τὴν τομὴν τῶν κατόπτρων τοποθετεῖται πέτασμα, ἐπὶ τοῦ ὁποίου παρατηροῦνται κροσσοὶ συμβολῆς. Τὸ φῶς, τὸ ὁποῖον φωτίζει τὴν σχισμὴν Σ, ἔχει περίοδον* $T = \frac{1}{5 \times 10^{14}}$ sec *καὶ ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἰς τὸν ἀέρα εἶναι* $V = 300\,000$ km/sec. *1) Νὰ εὑρεθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία α ὥστε εἰς τὸ κοινὸν τμῆμα τῶν δύο φωτεινῶν δεσμῶν, τῶν ἀνακλωμένων ἐπὶ τῶν κατόπτρων, νὰ περιλαμβάνωνται 21 φωτεινοὶ κροσσοί.—2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο διαδοχικῶν κροσσῶν. Ἡ γωνία α ὑποτίθεται τόσον μικρὰ ὥστε ἠμπορεῖ νὰ λαμβάνεται ἀντὶ τοῦ ἡμιτόνου της αὐτὴ ἡ ἰδία ἡ γωνία καὶ ἀντὶ τοῦ συνημιτόνου της ἡ μονάς.*



Σχ. 121

1) Τὸ μῆκος κύματος τοῦ χρησιμοποιουμένου φωτὸς εἶναι:

$$\lambda = VT$$

ἤτοι $\lambda = \frac{3 \times 10^{10}}{5 \times 10^{14}}$

ἢ $\lambda = \frac{3}{5 \times 10^4}$ cm.

Τὰ δύο κάτοπτρα K_1 καὶ K_2 σχηματίζουν τὰ δύο εἴδωλα Σ_1 καὶ Σ_2 τῆς σχισμῆς Σ. Ἡ μεταξὺ τῶν δύο τούτων εἰδώλων ἀπόστασις ε ἠμπορεῖ νὰ ληφθῇ ἴση μὲ τὸ τόξον $\Sigma_1\Sigma_2$. Ἡ γωνία $\Sigma_1 O \Sigma_2$ εἶναι ἴση μὲ 2α, αἱ δὲ ἀποστάσεις $O\Sigma_1$ καὶ $O\Sigma_2$ εἶναι ἴσαι μὲ $\delta = 100$ cm.

Ὥστε τὸ μῆκος τοῦ τόξου $\Sigma_1\Sigma_2$ εἶναι: $\varepsilon = \delta \times 2\alpha = 100 \times 2\alpha = 200\,\alpha$.

Ἐπὶ τοῦ πετάσματος Π ἡ ἀπόστασις ΑΒ τῶν δύο ἀκραίων κροσσῶν εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπόστασιν $\Sigma_1\Sigma_2$ δηλαδὴ ἔχομεν: $AB = \Sigma_1\Sigma_2 = \varepsilon = 200\,\alpha$.

Ἐὰν ὀνομάσωμεν x τὴν μεταξὺ δύο διαδοχικῶν φωτεινῶν κροσσῶν ἀπόστασιν καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι εἰς τὸ τμῆμα AB τοῦ πετάσματος θὰ σχηματίζωνται 21 φωτεινοὶ κροσσοί, τότε εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀπόστασις AB εἶναι 20 φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἀπόστασιν x.

Ἄρα εἶναι: $AB = \varepsilon = 20\,x$ καὶ ἑπομένως $200\,\alpha = 20\,x$. (1)

Ἡ ἀπόστασις d τοῦ πετάσματος ἀπὸ τὰς φωτεινὰς πηγὰς Σ_1 καὶ Σ_2 εἶναι:

$$d = 2\,\delta = 200 \text{ cm}.$$

Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἀπόστασις x μεταξὺ δύο διαδοχικῶν κροσσῶν δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $x = \dfrac{\lambda d}{\varepsilon}$.

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται:

$$200\,\alpha = 20\,\frac{\lambda d}{\varepsilon} \quad \text{ἢ} \quad 200\,\alpha = 20 \times \frac{3}{5 \times 10^4} \times 200 \times \frac{1}{200\,\alpha}.$$

Ἡ ζητουμένη λοιπὸν γωνία α τῶν κατόπτρων εἶναι:

$$\alpha^2 = \frac{6}{10^6} \quad \text{καὶ} \quad \alpha = \frac{\sqrt{6}}{10^3} \text{ ἀκτίνια} = 8'\,25''.$$

2) Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν καὶ τὴν ἀπόστασιν x μεταξὺ δύο διαδοχικῶν κροσσῶν:

$$x = \frac{200\,\alpha}{20} = 10\,\alpha = \frac{\sqrt{6}}{10^2} = 0{,}0245 \text{ cm} = 0{,}245 \text{ mm}.$$

156. — *Ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος OKX ἑνὸς φακοῦ εὑρίσκεται σχισμὴ O φωτιζομένη μὲ μονόχρουν φῶς. Ὁ φακὸς σχίζεται εἰς δύο ἡμίσυ K'Λ' καὶ K''Λ'', τὰ ὁποῖα μετακινοῦνται ἀντιστοίχως κατὰ KK' καὶ KK'' (ἡμιφακοὶ τοῦ Billet). 1) Νὰ γραφῇ ἡ πορεία τῶν δύο φωτεινῶν δεσμῶν αἱ ὁποῖαι, ἀναχωροῦσαι ἀπὸ τὸ σημεῖον O, διέρχονται διὰ τῶν δύο ἡμιφακῶν.— 2) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τῶν δύο εἰδώλων τοῦ σημείου O.— 3) Τί θὰ παρατηρηθῇ ἐπὶ ἑνὸς πετάσματος MN, καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα OX;—4) Εἶναι γνωστὴ ἡ ἀπόστασις ε' μεταξὺ δύο σκοτεινῶν κροσσῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνονται 9 φωτεινοὶ κροσσοί. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος κύματος τῆς φωτεινῆς ἀκτινοβολίας. Δίδεται ὅτι εἶναι:*

$OK = 1$ m · $KX = 2$ m · $KK' = KK'' = 0{,}5$ mm · $\varepsilon' = 3$ mm ·

ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ: $\varphi = 50$ cm.

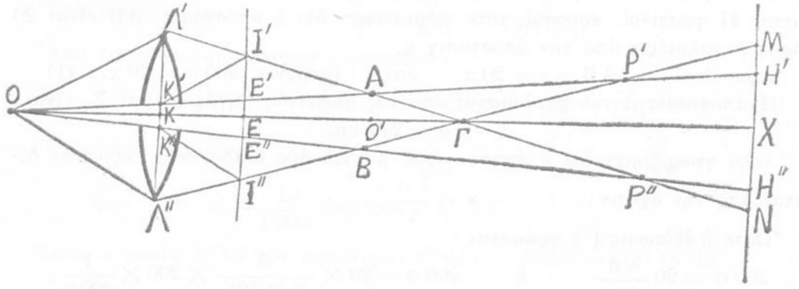
1) Ἡ ἀκτὶς OK' δὲν ὑφίσταται ἐκτροπήν. Ἔστω E ἡ κυρία ἑστία τοῦ φακοῦ καὶ I'I'' τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον. Φέρομεν τὴν K''I'' παράλληλον πρὸς τὴν OΛ''. Ἡ τομὴ τῆς K''I'' καὶ τοῦ ἑστιακοῦ ἐπιπέδου προσδιορίζει τὸ σημεῖον I'' διὰ τοῦ ὁποίου θὰ διέλθῃ ἡ διαθλωμένη τῆς OΛ''. Ἡ τομὴ τῆς Λ''I'' καὶ τῆς OK'' προσδιορίζει τὸ σημεῖον B, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἕνα εἴδωλον τοῦ σημείου O. Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκεται τὸ σημεῖον A.

2) Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου O ἀπὸ τὸ ὀπτικὸν κέντρον K εἶναι $2\,\varphi$. Ἑπομένως τὰ εἴδωλα A καὶ B εὑρίσκονται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον πρὸς τὴν OE καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὸν φακὸν $2\,\varphi$. Ὥστε εἶναι $KO' = 1$ m.

Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα OK'K'' καὶ OAB ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{AB}{K'K''} = \frac{OO'}{OK} = 2 \cdot \quad \text{ἄρα} \quad AB = 2\,K'K'' = 2 \text{ mm}.$$

3) Τὰ εἴδωλα Α καὶ Β ἀποτελοῦν δύο συγχρόνους φωτεινὰς πηγάς. Αἱ φωτειναὶ δέσμαι, αἱ προερχόμεναι ἀπὸ τὰς πηγὰς αὐτάς, συμβάλλουν εἰς τὸ κοι-



Σχ. 122

νὸν τμῆμα των ΓΡ'Η'Η''Ρ''. Οὕτω ἐπὶ τοῦ πετάσματος θὰ παρατηρηθοῦν κροσσοὶ συμβολῆς.

4) Ἡ ἀπόστασις ε ἑνὸς σκοτεινοῦ κροσσοῦ ἀπὸ τὸν γειτονικόν του φωτεινὸν κροσσὸν δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν: $\varepsilon = \dfrac{\lambda\, d}{2\,\alpha}$

ὅπου εἶναι $\alpha = AB = 2$ mm καὶ $d = O'X = 1$ m $= 1\,000$ mm.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι: $\varepsilon' = 3$ mm $= 18\,\varepsilon$· ἤτοι $\varepsilon = 1/6$ mm.

Τὸ ζητούμενον λοιπὸν μῆκος κύματος εἶναι:

$$\lambda = \frac{2\,.\,\alpha\,.\,\varepsilon}{d} = \frac{2\times 2\times 1}{1\,000\times 6} = \frac{2}{3\times 1\,000}\ \text{mm} = \frac{2}{3}\,\mu.$$

157.— *Οἱ δύο ἡμιφακοὶ τοῦ Billet ἔχουν ἑστιακὴν ἀπόστασιν 20 cm καὶ τὰ ὀπτικά των κέντρα ἔχουν ἀπομακρυνθῆ κατὰ 0,5 mm. Ἡ φωτεινὴ σχισμὴ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπὸ τοὺς φακούς. Τὸ μῆκος κύματος τοῦ χρησιμοποιουμένου φωτὸς εἶναι 0,6 μ. Πόση εἶναι ἡ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν κροσσῶν ἀπόστασις ἐπὶ ἑνὸς πετάσματος εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 53 cm ἀπὸ τοὺς φακούς;*

Οἱ δύο φακοὶ δίδουν τὰ εἴδωλα Α καὶ Β, (σχ.122) τῶν ὁποίων ἡ θέσις προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\dfrac{1}{50} + \dfrac{1}{\pi'} = \dfrac{1}{20}$ ἄρα $\pi' = \dfrac{100}{3}$ cm.

Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΚ'Κ'' καὶ ΟΑΒ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν δύο εἰδώλων εἶναι:

$$\alpha = AB = K'K'' \times \frac{OO'}{OK} = 0{,}5 \times \frac{250}{3\times 50} = \frac{2{,}50}{3}\,\text{mm}.$$

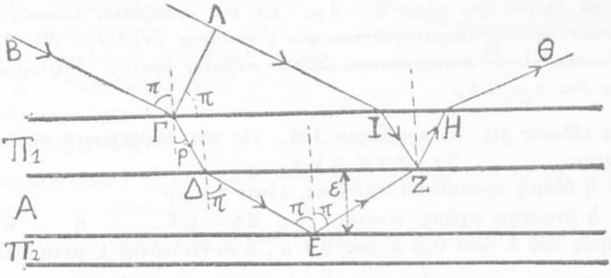
Ἡ ἀπόστασις Ο'Χ τῶν δύο συγχρόνων πηγῶν ἀπὸ τὸ πέτασμα εἶναι:

$$O'X = d = 53 - \frac{100}{3} = \frac{59}{3}\ \text{cm}.$$

Ἡ ἀπόστασις ε δύο διαδοχικῶν κροσσῶν εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν: $\varepsilon = \dfrac{\lambda\, d}{\alpha} = \dfrac{6}{10^4} \times \dfrac{590\times 3}{3\times 2{,}5} = 0{,}1\,416$ mm.

158. — *Λεπτὸν στρῶμα ἀέρος περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο ὑαλίνων πλακῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀπολύτως παράλληλοι. Ἐπὶ τοῦ συστήματος τούτου προσπίπτει δέσμη παραλλήλων ἀκτίνων λευκοῦ φωτὸς ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως 60°. Παρατηροῦνται τότε φαινόμενα συμβολῆς. Νὰ εὑρεθῇ ποῖα χρώματα καταργοῦνται εἰς ἕνα σημεῖον, ἂν τὸ πάχος τοῦ στρώματος τοῦ ἀέρος εἶναι* $\varepsilon = 0{,}03$ mm. *Μήκη κύματος: ἐρυθροῦ: 0,70 μ· πορτοκαλοχρόου: 0,60 μ· κιτρίνου: 0,55 μ· πρασίνου: 0,50 μ· κυανοῦ: 0,40 μ· ἰώδους: 0,40 μ.*

Ἔστω Π_1 καὶ Π_2 αἱ δύο ὑάλιναι πλάκες καὶ Α τὸ μεταξὺ αὐτῶν στρῶμα τοῦ ἀέρος. Ἡ προσπίπτουσα ἀκτὶς ΒΓ ἀκολουθεῖ τὸν δρόμον ΒΓΔΕΖΗΘ καὶ καὶ ἡ ΛΙ ἀκολουθεῖ τὸν δρόμον ΛΙΖΗΘ. Ἡ πρώτη ἀκτὶς ἀνακλᾶται εἰς τὸ Ε, ἡ δευτέρα εἰς τὸ Ζ. Καὶ αἱ δύο ἐξέρχονται εἰς τὸ Η καὶ ἠμποροῦν νὰ συμβάλλουν. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ δύο ἀκτῖνες διατρέχουν ἐντὸς τῆς ὑάλου τὸν ἴδιον δρόμον ΓΔ + ΖΗ ἡ μία καὶ ΙΖ + ΖΗ ἡ ἄλλη. Εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Λ



Σχ. 123

αἱ δύο ἀκτῖνες ἔχουν τὴν αὐτὴν φάσιν. Ἐὰν δὲν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἀλλαγὴν τῆς φάσεως, ἕνεκα τῆς ἀνακλάσεως εἰς τὸ Ε, τότε ἡ διαφορὰ πορείας δ' τῶν δύο ἀκτίνων εἶναι: $\delta' = \Delta E + EZ - \Lambda I = 2\,\Delta E - \Lambda I$,

Ἀλλὰ εἶναι: $\varepsilon = \Delta E \,.\, \sigma\upsilon\nu\,\pi$ · ἄρα $2\,\Delta E = \dfrac{2\,\varepsilon}{\sigma\upsilon\nu\,\pi}$ ·

Ἐπίσης ἔχομεν: $\Lambda I = \Gamma I \,.\, \eta\mu\,\pi = \Delta Z \,.\, \eta\mu\,\pi$ ·

ἀλλὰ εἶναι: $\dfrac{\Delta Z}{2} = \varepsilon \,.\, \varepsilon\varphi\,\pi$ · ἄρα $\Lambda I = 2\,\varepsilon \,.\, \eta\mu\,\pi \,.\, \varepsilon\varphi\,\pi = \dfrac{2\,\varepsilon \,.\, \eta\mu^2\pi}{\sigma\upsilon\nu\,\pi}$

Ὥστε λαμβάνομεν: $\delta' = \dfrac{2\,\varepsilon}{\sigma\upsilon\nu\,\pi} - \dfrac{2\,\varepsilon \,.\, \eta\mu^2\pi}{\sigma\upsilon\nu\,\pi} = \dfrac{2\,\varepsilon}{\sigma\upsilon\nu\,\pi}(1 - \eta\mu^2\pi)$ ·

ἢ $\delta' = \dfrac{2\,\varepsilon \,.\, \sigma\upsilon\nu^2\pi}{\sigma\upsilon\nu\,\pi} = 2\,\varepsilon \,.\, \sigma\upsilon\nu\,\pi$.

Ἡ ἀνωτέρω διαφορὰ πορείας δ' αὐξάνεται κατὰ $\dfrac{\lambda}{2}$ ἕνεκα τῆς ἀνακλάσεως εἰς τὸ Ε καὶ ἑπομένως ἡ ὅλη διαφορὰ πορείας δ τῶν δύο ἀκτίνων εἶναι:

$$\delta = \delta' + \frac{\lambda}{2} \quad ἢ \quad \delta = 2\,\varepsilon \,.\, \sigma\upsilon\nu\,\pi + \frac{\lambda}{2}.$$

Διὰ νὰ συμβῇ κατάργησις μιᾶς ἀκτινοβολίας, πρέπει ἡ διαφορὰ πορείας δ νὰ εἶναι ἴση μὲ περιττὸν ἀριθμὸν λ/2, ἤτοι:

$$\delta = 2\,\varepsilon\,.\,\text{συν}\,\pi + \frac{\lambda}{2} = (2\,k+1)\,\frac{\lambda}{2} \qquad \text{ἢ} \qquad 2\,\varepsilon\,.\,\text{συν}\,\pi = k\,\lambda\,. \qquad (1)$$

Διὰ $\pi = 60^0$ ἡ τελευταία σχέσις δίδει: $\varepsilon = k\,\lambda$ ἢ $k\,\lambda = 0{,}03\ \text{mm} = 30\ \mu$.

Αἱ ἀκτινοβολίαι, ποὺ καταργοῦνται, ἔχουν μήκη κύματος:

$$\lambda = \frac{30}{k}, \quad \text{ὅπου } k \text{ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.}$$

Αἱ μόναι λοιπὸν ἀκτινοβολίαι, ποὺ καταργοῦνται, εἶναι ἐκεῖναι αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ ἑξῆς μήκη κύματος: $0{,}6\ \mu$, $0{,}5\ \mu$ καὶ $0{,}4\ \mu$.

Ἑπομένως καταργοῦνται τὰ χρώματα: τὸ πορτοκαλόχρουν, τὸ πράσινον καὶ τὸ ἰῶδες.

159.— *Μετταξὺ δύο παραλλήλων ὑαλίνων πλακῶν περιλαμβάνεται λεπτὸν στρῶμα ἀέρος τὸ ὁποῖον ἔχει πάχος* $\varepsilon = 2\ \mu$. *Ἐπὶ τοῦ συστήματος προσπίπτει καθέτως δέσμη λευκοῦ φωτός. Παρατηροῦνται τότε φαινόμενα συμβολῆς. Νὰ εὑρεθῇ ποῖαι ὁραταὶ ἀκτινοβολίαι καταργοῦνται. Μήκη κύματος ὁρατῶν ἀκτινοβολιῶν: ἀπὸ* $\lambda = 0{,}8\ \mu$ *ἕως* $\lambda = 0{,}4\ \mu$.

Ὅπως εἴδομεν εἰς τὸ πρόβλημα 158, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἰσχύει ἡ γενικὴ σχέσις: $2\,\varepsilon\,.\,\text{συν}\,\pi = k\,\lambda$.

Ἀφοῦ ἡ δέσμη προσπίπτει καθέτως, εἶναι $\pi = 0^0$·
ἑπομένως ἡ ἀνωτέρω σχέσις γίνεται: $2\,\varepsilon = k\,\lambda$. ἢ $k\,\lambda = 4\ \mu$.

Διὰ τιμὰς τοῦ λ ἀπὸ 0,8 μ ἕως 0,4 μ, ὁ συντελεστὴς k μεταβάλλεται:

$$\text{ἀπὸ} \quad k = \frac{4}{0{,}8} = 5 \qquad \text{ἕως} \qquad k = \frac{4}{0{,}4} = 10\,.$$

Ἄρα αἱ καταργούμεναι ὁραταὶ ἀκτινοβολίαι ἔχουν μήκη κύματος:

$$\lambda_1 = \frac{4}{k} = \frac{4}{5} = 0{,}8\ \mu \qquad \lambda_4 = \frac{4}{k} = \frac{4}{8} = 0{,}5\ \mu$$

$$\lambda_2 = \frac{4}{k} = \frac{4}{6} = 0{,}66\ \mu \qquad \lambda_5 = \frac{4}{k} = \frac{4}{9} = 0{,}44\ \mu$$

$$\lambda_3 = \frac{4}{k} = \frac{4}{7} = 0{,}57\ \mu \qquad \lambda_6 = \frac{4}{k} = \frac{4}{10} = 0{,}4\ \mu.$$

√ **160**.— *Ἕνας ἐπιπεδόκυρτος φακὸς τοποθετεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου καὶ ὁριζοντίας ἀνακλαστικῆς ἐπιφανείας. Ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια τοῦ φακοῦ εἶναι ἐστραμμένη πρὸς τὰ ἄνω. Τὸ σύστημα φωτίζεται ἐκ τῶν ἄνω ἀπὸ μίαν κατακόρυφον δέσμην ὁμογενοῦς φωτὸς ἔχοντος μῆκος κύματος* $\lambda = 0{,}54\ \mu$ *Ἂν θέσωμεν τὸν ὀφθαλμόν μας ἐπὶ τῆς κατακορύφου, ὥστε νὰ δεχώμεθα τὴν ἀνακλωμένην δέσμην, παρατηροῦμεν δακτυλίους ἐκ συμβολῆς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ τετάρτου σκοτεινοῦ δακτυλίου, ἂν ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ φακοῦ εἶναι* $R = 6\text{m}$.

Διὰ τοὺς δακτυλίους οἱ ὁποῖοι σχηματίζονται πλησίον τοῦ Κ, ἠμποροῦμε νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ κατωτέρα ἐπιφάνεια τοῦ φακοῦ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πλακός. Μεταξὺ δὲ τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν παρεμβάλλεται στρῶμα ἀέρος ποὺ ἔχει πάχος ε. Αἱ ἀκτῖνες προσπίπτουν καθέτως ($\pi = 0^0$) καὶ ἑπομένως ἡ διαφορὰ πορείας δ μεταξὺ τῆς προσπιπτούσης καὶ τῆς ἀνακλωμένης ἀκτῖνος (βλ. πρόβλημ. 158) εἶναι:

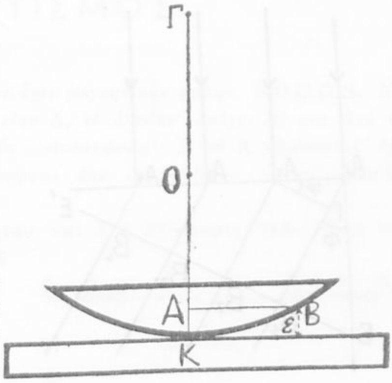
$$\delta = 2\varepsilon + \frac{\lambda}{2}.$$

Σχηματίζεται σκοτεινὸς δακτύλιος, ὅταν εἶναι:

$$\delta = 2\varepsilon + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ἢ} \quad \varepsilon = k\frac{\lambda}{2} \qquad (1)$$

Ἔστω Β ἕνα σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον σχηματιζεται σκοτεινὸς δακτύλιος, Ο τὸ κέντρον καμπυλότητος τοῦ φακοῦ καὶ Γ τὸ ἐκ διαμέτρου ἀντίθετον σημεῖον τοῦ Κ. Ἂν ὀνομάσωμεν ρ τὴν ἀκτῖνα ΑΒ, τότε ἔχομεν:



Σχ. 124

$$\overline{AB}^2 = \overline{\Gamma A} \times \overline{AK} \quad \text{ἢ} \quad \rho^2 = \varepsilon(2R - \varepsilon) = 2R\varepsilon - \varepsilon^2.$$

Ἂν παραλείψωμεν τὸ ε^2, διότι εἶναι πολὺ μικρὸν σχετικὰ μὲ τὸ $2R$, τότε θὰ λάβωμεν: $\rho^2 = 2R\varepsilon$.

Καὶ ἂν εἰς τὴν τελευταίαν σχέσιν ἀντικαταστήσωμεν τὸ ε ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1), εὑρίσκομεν; $\rho^2 = 2R \times \mathbf{k}\dfrac{\lambda}{2}$ ἢ $\rho^2 = kR\lambda$.

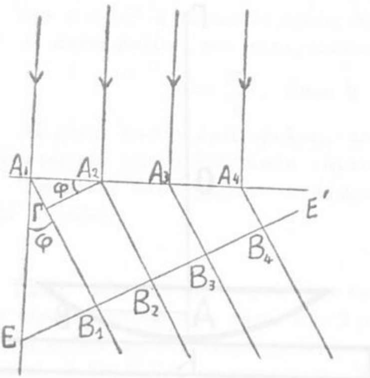
Διὰ τὸν τέταρτον σκοτεινὸν δακτύλιον εἶναι: $k = 4$· ἄρα ἡ ἀκτὶς του ρ εἶναι: $\rho = \sqrt{4 \times 6\,000 \times \dfrac{0{,}54}{1\,000}} = 3{,}6$ mm.

161.—*Ἕνα φράγμα φέρει* 100 *γραμμὰς εἰς κάθε χιλιοστόμετρον. Ἐπ' αὐτοῦ προσπίπτει καθέτως δέσμη λευκοῦ φωτὸς ἡ ὁποία προέρχεται ἀπὸ πολὺ μακρινὴν λεπτὴν σχισμήν. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διευθύνσεις αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν, διὰ τὰ δύο πρῶτα φάσματα, εἰς τὸ ἄκρον ἐρυθρὸν* ($\lambda = 0{,}8\ \mu$) *καὶ εἰς τὸ ἄκρον ἰῶδες* ($\lambda = 0{,}4\ \mu$).

1) Καθεμία ἀπὸ τὰς γραμμὰς $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$ τοῦ φράγματος προκαλεῖ παράθλασιν τοῦ φωτὸς καὶ ἐκπέμπει φῶς πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις. Ἔστω A_1B_1 μία ἀπὸ τὰς διευθύνσεις κατὰ τὰς ὁποίας ἐκπέμπει φῶς ἡ γραμμὴ A_1. Ἡ A_1B_1 σχηματίζει γωνίαν φ μὲ τὴν κάθετον. Ἀλλὰ καὶ αἱ γραμμαὶ $A_2, A_3, \ldots$ ἐκπέμπουν φῶς κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, δηλαδὴ κατὰ τὰς $A_2B_2, A_3B_3 \ldots\ldots$ Θεωροῦμεν ἐπίπεδον ΕΕ' κάθετον πρὸς τὰς ἀκτῖνας A_1B_1, $A_2B_2, A_3B_3 \ldots\ldots$ Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου αἱ κυμάνσεις, ποὺ προέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα $A_1, A_2, A_3 \ldots$, εἶναι σύγχρονοι, τότε αἱ ἀκτῖνες A_1B_1, A_2B_2, $A_3\Gamma_3 \ldots$ διερχόμεναι δι' ἑνὸς συγκλίνοντος φακοῦ συγκεντρώνονται εἰς

ἕνα σημεῖον τοῦ ἑστιακοῦ του ἐπιπέδου καὶ ἐκεῖ σχηματίζεται ἑπομένως ἕνα μέγιστον τῆς ἐντάσεως. Διὰ νὰ συμβῇ ὅμως τοῦτο πρέπει ἡ διαφορὰ πορείας $\delta = A_1\Gamma$ νὰ εἶναι ἴση μὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν κυμάτων, δηλαδὴ πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$\delta = k\lambda \cdot$$



Σχ. 125

ἂν θέσωμεν : $A_1A_2 = \varepsilon$ καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι εἶναι :

$$\delta = A_1A_2 \,.\, \eta\mu\,\varphi = \varepsilon \,.\, \eta\mu\,\varphi\,,$$

ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται :

$$\varepsilon \,.\, \eta\mu\,\varphi = k\,\lambda\,. \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν ὅτι ἔχομεν μέγιστα κατὰ τὰς διευθύνσεις αἱ ὁποῖαι προσδιορίζονται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\eta\mu\,\varphi = k\,\frac{\lambda}{\varepsilon}\,.$$

Ἡ ἀπόστασις A_1A_2 εἶναι : $\varepsilon = 10\,\mu$. Ἄρα διὰ τὸ πρῶτον φάσμα $(k = 1)$ ἔχομεν :

διὰ τὸ ἐρυθρόν : $\eta\mu\,\varphi_1 = \dfrac{0{,}8}{10} = 0{,}08$

διὰ τὸ ἰῶδες : $\eta\mu\,\varphi_1{}' = \dfrac{0{,}4}{10} = 0{,}04\,.$

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι φ_1 καὶ $\varphi_1{}'$ εἶναι πολὺ μικραί, ἠμποροῦμε νὰ λάβωμεν :

$\varphi_1 = 0{,}08$ ἀκτινίου καὶ $\varphi_1{}' = 0{,}04$ ἀκτινίου.

Διὰ τὸ δεύτερον φάσμα $(k = 2)$ εὑρίσκομεν ὁμοίως :

$\eta\mu\,\varphi_2 = 2 \times 0{,}8 = 0{,}16$ ἢ $\varphi_2 = 0{,}16$ ἀκτινίου

$\eta\mu\,\varphi_2{}' = 2 \times 0{,}4 = 0{,}08$ ἢ $\varphi_2{}' = 0{,}08$ ἀκτινίου.

ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

162. — *Μικρὸς εὐθύγραμμος μαγνήτης ἔχει μαγνητικὴν ροπὴν 500 C.G.S. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου εἰς ἕνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 30 cm ἀπὸ τὸ μέσον Ο τοῦ μαγνήτου, εἰς τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις: 1) τὸ Α εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ μαγνήτου· 2) τὸ Α εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον Ο τοῦ μαγνήτου.*

1) Ἔστω l τὸ μῆκος ΒΝ τοῦ μαγνήτου καὶ d ἡ ἀπόστασις ΟΑ. Τότε εἰς τὸ Α ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου ἕνεκα τοῦ

πόλου Ν εἶναι: $H_1 = \dfrac{m}{(d - l/2)^2}$

ὅπου m ἡ μαγνητικὴ μᾶζα τοῦ Ν·

Σχ. 126

καὶ ἕνεκα τοῦ πόλου Β εἶναι: $H_2 = \dfrac{m}{(d + l/2)^2}$.

Ὥστε εἰς τὸ Α ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου εἶναι:

$$H = H_1 - H_2 = \frac{m}{(d - l/2)^2} - \frac{m}{(d + l/2)^2}.$$

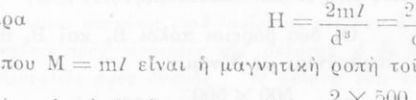
Ἐπειδὴ τὸ $\dfrac{l^2}{4}$ εἶναι πολὺ μικρόν, λαμβάνομεν:

$$H = \frac{m}{d^2(1 - l/d)} - \frac{m}{d^2\,(1 + l/d)} = \frac{m}{d^2}\,(1 + l/d) - \frac{m}{d^2}\,(1 - l/d)\cdot$$

ἄρα
$$H = \frac{2ml}{d^3} = \frac{2M}{d^3}$$

ὅπου $M = ml$ εἶναι ἡ μαγνητικὴ ροπὴ τοῦ μαγνήτου. Ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου εἰς τὸ Α εἶναι:
$$H = \frac{2 \times 500}{30^3} = \frac{1\,000}{27\,000} = 0{,}037 \text{ gauss}.$$

2) Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ H_1 καὶ H_2 εἶναι ἴσαι, ἡ δὲ Η εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν μαγνήτην.



Σχ. 127

Ἐπειδὴ τὸ $OB = \dfrac{l}{2}$ εἶναι πολὺ μικρὸν σχετικὰ μὲ τὴν ἀπόστασιν $OA = d$, ἠμποροῦμε νὰ λάβωμεν κατὰ προσέγγισιν $BA = NA = d$. Ἄρα ἔχομεν:

$H_1 = H_2 = \dfrac{m}{d^2}\cdot$ Ἀλλὰ εἶναι: $\dfrac{H}{BN} = \dfrac{H_1}{BA}$. ἢ $\dfrac{H}{l} = \dfrac{H_1}{d}$.

Ἄρα
$$H = \frac{ml}{d^3} = \frac{M}{d^3}\cdot$$

Ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου εἰς τὸ Α εἶναι: $H = \dfrac{500}{30^3} = 0{,}0185$ gauss.

163 — *Νὰ λυθῇ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα 162, ὅταν ὁ μαγνήτης ἔχῃ μῆκος* 10 cm.

1) Ὅταν θεωροῦμεν τὸ σημεῖον A ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ μαγνήτου, ἡ ἔντασις H τοῦ πεδίου εἰς τὸ A εἶναι :

$$H = \frac{m}{(d - l/2)^2} - \frac{m}{(d + l/2)^2} = \frac{2\,m\,l\,d}{(d^2 - l^2/4)^2} = \frac{2\,M\,d}{(d^2 - l^2/4)^2}\,.$$

Ἄρα εἶναι: $H = \frac{2 \times 500 \times 30}{(30^2 - 5^2)^2} = \frac{30\,000}{(900 - 25)^2} = 0{,}0392$ gauss.

2) Ὅταν θεωροῦμεν τὸ σημεῖον A ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον O τοῦ μαγνήτου, τότε εἶναι $H_1 = H_2$. Ἀλλὰ εἶναι:

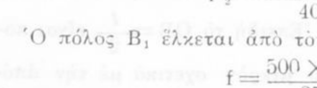
$$H_1 = \frac{m}{BA^2} = \frac{m}{d^2 + l^2/4}\,. \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{H}{l} = \frac{H_1}{\sqrt{d^2 + l^2/4}}\,.$$

Ἄρα $$H = H_1 \frac{l}{\sqrt{d^2 + l^2/4}} = \frac{M}{\left(d^2 + l^2/4\right)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Ἡ ζητουμένη λοιπὸν ἔντασις εἶναι :

$$H = \frac{500}{\left(30^2 + 5^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{500}{925^{\frac{3}{2}}} = 0{,}0178 \text{ gauss.}$$

164. — *Δύο ὅμοιοι εὐθύγραμμοι μαγνῆται εὑρίσκονται ἐπὶ ὁριζοντίας τραπέζης κατὰ μῆκος τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ ἔχοντες τοὺς βορείους πόλους των ἀπέναντι ἀλλήλων. Ἕκαστος πόλος θεωρεῖται εὑρισκόμενος εἰς τὸ ἄκρον τοῦ μαγνήτου, ἡ δὲ μαγνητικὴ μᾶζα του εἶναι ἴση μὲ 500 μονάδας* C.G.S. *Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλων ἑκάστου μαγνήτου εἶναι* 15 cm*, οἱ δὲ δύο βόρειοι πόλοι των ἀπέχουν μεταξύ των* 10 cm. *Πόση εἶναι ἡ δύναμις ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ ἑκάστου μαγνήτου ;*



Σχ. 128

Οἱ δύο βόρειοι πόλοι B_1 καὶ B_2 ἀπωθοῦνται μὲ δύναμιν :

$$F_1 = \frac{500 \times 500}{10^2} = 2\,500 \text{ δύναι.}$$

Οἱ δύο νότιοι πόλοι N_1 καὶ N_2 ἀπωθοῦνται μὲ δύναμιν :

$$F_2 = \frac{500 \times 500}{40^2} = 156{,}25 \text{ δύναι.}$$

Ὁ πόλος B_1 ἕλκεται ἀπὸ τὸν N_2 μὲ δύναμιν:

$$f = \frac{500 \times 500}{25^2} = 400 \text{ δύναι.}$$

Ὁμοίως ὁ πόλος N_1 ἕλκεται ἀπὸ τὸν B_2 μὲ δύναμιν :

$$f = \frac{500 \times 500}{25^2} = 400 \text{ δύναι.}$$

Ὥστε ἐπὶ ἑκάστου μαγνήτου ἐξασκεῖται ἄπωσις ἴση μέ :

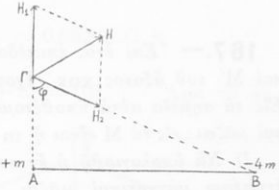
$$2\,500 + 156{,}25 = 2\,656{,}25 \text{ δύνας.}$$

καὶ ἕλξις ἴση μέ : $2 \times 400 = 800$ δύνας.

Ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων τούτων εἶναι ἄπωσις ἴση μέ :

$$F = 2\,656{,}25 - 800 = 1\,856{,}25 \text{ δύνας.}$$

165 — *Εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β εὑρίσκονται δύο μαγνητικαὶ μᾶζαι* $+\mathrm{m}$ *καὶ* $-4\mathrm{m}$. *Ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶναι ἴση μὲ* 30 cm. *Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἔντασις καὶ ἡ διεύθυνσις τοῦ παραγομένου ὑπὸ τῶν δύο μαζῶν μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Γ, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἔχει μῆκος* $10\sqrt{3}$ cm.



Σχ. 129

Ἂν εἰς τὸ σημεῖον Γ φέρωμεν τὴν μᾶζαν $+1$, τότε ἐπ' αὐτῆς ἐνεργοῦν αἱ ἑξῆς δύο δυνάμεις: ἐκ μέρους τῆς μάζης $+\mathrm{m}$ ἐξασκεῖται ἡ ἄπωσις:

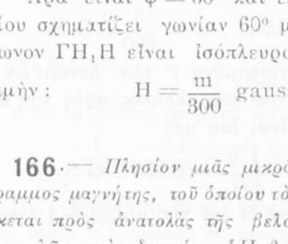
$$H_1 = -\frac{\mathrm{m}\times 1}{3\times 10^2} = -\frac{\mathrm{m}}{3\times 10^2} \text{ δύναι·}$$

ἐκ μέρους τῆς μάζης $-4\mathrm{m}$ ἐξασκεῖται ἡ ἕλξις: $H_2 = \frac{4\mathrm{m}}{12\times 10^2} = \frac{\mathrm{m}}{3\times 10^2}$ δύναι.

Ἄρα εἶναι $H_1 = -H_2$. Ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Γ εἶναι ἡ συνισταμένη Η τῶν δύο μερικῶν ἐντάσεων H_1 καὶ H_2. Τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον $\Gamma H_1 H H_2$ εἶναι ῥόμβος καὶ ἑπομένως ἡ συνισταμένη Η διχοτομεῖ τὴν γωνίαν $H_1\Gamma H_2$. Ἡ γωνία φ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{30}{10\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Ἄρα εἶναι $\varphi = 60^0$ καὶ ἑπομένως: $\widehat{H_1\Gamma H_1} = 120^0$. Ἡ ἔντασις Η τοῦ πεδίου σχηματίζει γωνίαν 60^0 μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΓ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον $\Gamma H_1 H$ εἶναι ἰσόπλευρον, συνάγεται ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου ἔχει τὴν τιμήν: $H = \frac{\mathrm{m}}{300}$ gauss.

166 — *Πλησίον μιᾶς μικρᾶς μαγνητικῆς βελόνης, τοποθετεῖται μικρὸς εὐθύγραμμος μαγνήτης, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον ἀπέχει* 20 cm *ἀπὸ τὴν βελόνην καὶ εὑρίσκεται πρὸς ἀνατολὰς τῆς βελόνης, ὁ δὲ ἄξων τοῦ μαγνήτου ἔχει διεύθυνσιν ἐξ ἀνατολῶν πρὸς δυσμάς. Ἡ βελόνη τότε ἐκτρέπεται ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας της. Διὰ νὰ τὴν ἐπαναφέρωμεν εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας λαμβάνομεν δεύτερον μικρὸν εὐθύγραμμον μαγνήτην, ἔχοντα μαγνητικὴν ῥοπὴν ἴσην μὲ* 900 *μονάδας* C.G.S. *καὶ τοποθετοῦμεν αὐτὸν οὕτως ὥστε ὁ ἄξων του νὰ ἔχῃ διεύθυνσιν ἐξ ἀνατολῶν πρὸς δυσμάς, τὸ κέντρον του νὰ ἀπέχῃ* 30 cm *ἀπὸ τὴν βελόνην καὶ νὰ εὑρίσκεται βορείως αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ τοῦ πρώτου μαγνήτου.*



Σχ. 130

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τοῦ μικροῦ μαγνήτου ΒΝ εἶναι:

$$H = \frac{2M}{20^3} \text{ gauss.}$$

Ἡ δὲ ἔντασις τοῦ πεδίου κατὰ τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τοῦ μικροῦ μαγνήτου Β'Ν' εἶναι:

$$H' = \frac{M'}{30^3} = \frac{900}{30^3} \text{ gauss.}$$

Ἐπειδὴ ἡ ἀπόκλισις τῆς βελόνης, ἡ ὀφειλομένη εἰς τὴν ἐπίδρασιν τοῦ μαγνήτου ΒΝ, ἐξουδετερώνεται ἀπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ μαγνήτου Β′Ν′ ἔπεται ὅτι εἰς τὸ σημεῖον Α τὰ δύο πεδία Η καὶ Η′ εἶναι ἴσα καὶ ἀντίθετα. Ἄρα εἶναι:

$$\frac{2\,M}{20^3} = \frac{900}{30^3} \qquad \text{ἤτοι} \qquad M = \frac{900}{2} \times \frac{8}{27} = 133{,}3 \text{ C.G.S.}$$

167. — *Ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου λαμβάνομεν ὀρθογωνίους ἄξονας. Δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ τοῦ ἄξονος xox′ ἔχουν ἀντιστοίχως συντεταγμένας* $+10$ cm *καὶ* -10 cm. *Εἰς τὰ σημεῖα αὐτὰ ὑποθέτομεν ὅτι εὑρίσκονται δύο ἴσαι ἀλλ' ἑτερώνυμοι μαγνητικαὶ μᾶζαι: εἰς τὸ Μ εἶναι ἡ* $m = 5$ C.G.S. *καὶ εἰς τὸ Μ′ εἶναι ἡ* $m' = -5$ C.G.S.

1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον δημιουργοῦν αἱ ἀνωτέρω μαγνητικαὶ μᾶζαι εἰς τὰ ἑξῆς σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου:

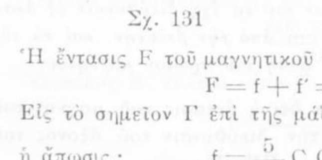
$$A\,(0, 10)\,, \quad B\,(0, 0)\,, \quad \Gamma\,(15, 0), \quad \Delta\,(5, 5\sqrt{3})\,.$$

2) Ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον Μ′ τοποθετηθῇ μία μαγνητικὴ μᾶζα $m_1 = -2$ C.G.S., *νὰ εὑρεθῇ ποία μαγνητικὴ μᾶζα* m_2 *πρέπει νὰ τεθῇ εἰς τὸ σημεῖον Μ ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου τὸ ὁποῖον δημιουργοῦν αἱ δύο αὐταὶ μαγνητικαὶ μᾶζαι εἰς τὸ σημεῖον Ε (6, 8) τοῦ ἐπιπέδου νὰ διευθύνεται πρὸς τὸ σημεῖον Ο τοῦ ἄξονος xox′. Αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων Α,Β.Γ,Δ καὶ Ε δίδονται εἰς ἑκατοστόμετρα.*

1) Εἰς τὸ σημεῖον Α ἐπὶ τῆς θετικῆς μονάδος τῆς μαγνητικῆς μάζης ἐνεργοῦν:

ἡ ἄπωσις: $f = \frac{5}{200}$ C.G.S. καὶ ἡ ἕλξις $f' = \frac{5}{200}$ C.G.S.

Ἡ γωνία ΜΑΜ′ εἶναι ὀρθή· ἑπομένως ἡ συνισταμένη F τῶν δυνάμεων f καὶ f′, ἤτοι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα xox′ καὶ εἶναι ἴση μέ:



Σχ. 131

$$F = \sqrt{2\,f^2} = \frac{5\sqrt{2}}{200} = 0{,}035 \text{ C.G.S.}$$

Εἰς τὸ σημεῖον Β ἐπὶ τῆς μάζης $+1$ ἐνεργοῦν ὁμορρόπως:

ἡ ἄπωσις: $f = \frac{5}{100}$ C.G.S.

καὶ ἡ ἕλξις: $f' = \frac{5}{100}$ C.G.S.

Ἡ ἔντασις F τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἔχει τὴν φορὰν Οx καὶ εἶναι ἴση μέ:

$$F = f + f' = 2 \times 0{,}05 = 0{,}1 \text{ C.G.S}$$

Εἰς τὸ σημεῖον Γ ἐπὶ τῆς μάζης $+1$ ἐνεργοῦν ἀντιρρόπως:

ἡ ἄπωσις: $f = \frac{5}{25}$ C.G.S. καὶ ἡ ἕλξις: $f' = \frac{5}{625}$ C.G.S.

Ἡ ἔντασις F τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἔχει τὴν φορὰν Γx καὶ εἶναι ἴση μέ:

$$F = f - f' = \frac{5}{25} - \frac{5}{625} = \frac{24}{125} = 0{,}2 \text{ C.G.S.}$$

Εἰς τὸ σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς μάζης $+1$ ἐνεργοῦν:

ἡ ἄπωσις: $f = \frac{5}{\overline{M\Delta}^2} = \frac{5}{25 + 75} = \frac{5}{100}$ C.G.S.

καὶ ἡ ἕλξις : $f' = \dfrac{5}{\overline{M'\Delta}^2} = \dfrac{5}{225 + 75} = \dfrac{5}{300}$ C.G.S.

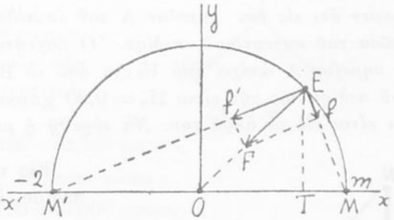
Τὸ τρίγωνον ΜΔΜ′ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἑπομένως ἡ ἔντασις F τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι ἴση μέ :

$$F = \sqrt{f^2 + f'^2} = \sqrt{\frac{25}{100^2} + \frac{25}{300^2}} = \frac{5\sqrt{10}}{300} = 0{,}052 \text{ C.G.S.}$$

2) Εἶναι : $\overline{OT}^2 + \overline{ET}^2 = \overline{OE}^2$ ἤ $6^2 + 8^2 = 10^2$. Ἄρα τὸ σημεῖον Ε εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα ΟΕ = 10 cm. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὅμως περιφερείας εὑρίσκονται καὶ τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ διότι εἶναι :

ΟΕ = ΟΜ = ΟΜ′ = 10 cm.

Ἄρα αἱ γωνίαι ΟΜ′Ε καὶ ΟΕΜ′ εἶναι ἴσαι. Ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον Ε φέρωμεν τὴν μᾶζαν +1, θὰ



Σχ. 132

ἐνεργοῦν ἐπ' αὐτῆς : ἡ ἕλξις : $f = \dfrac{m_2}{\overline{EM}^2} = \dfrac{m_2}{8^2 + 4^2} = \dfrac{m_2}{80}$ C.G.S.

καὶ ἡ ἕλξις : $f' = \dfrac{m_1}{\overline{EM'}^2} = \dfrac{m_1}{8^2 + 16^2} = \dfrac{2}{320} = \dfrac{1}{160}$ C.G.S.

Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΕFf′ καὶ ΕΜ Τ εὑρίσκομεν :

$$\frac{f}{f'} = \frac{ET}{M'T} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \quad \text{ἤ} \quad \frac{m_2}{80} : \frac{1}{160} = \frac{1}{2}.$$

Ἡ ζητουμένη μᾶζα m_2 εἶναι : $m_2 = 0{,}25$ C.G.S., πρέπει δὲ νὰ εἶναι ἀρνητική, διότι ἡ f πρέπει νὰ εἶναι ἕλξις. Ὥστε εἰς τὸ σημεῖον Μ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ μᾶζα : $m_2 = -0{,}25$ C.G.S.

168.— *Δύο βόρειοι μαγνητικοὶ πόλοι Α καὶ Β ἔχουν ἀντιστοίχως μαγνητικὰς μάζας 20 καὶ 30 μονάδων, ἀπέχουν δὲ μεταξύ των 10 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἔντασις αὐτοῦ εἶναι μηδέν.*

Διὰ νὰ εἶναι εἰς ἕνα σημεῖον Γ ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου μηδέν, πρέπει εἰς τὸ Γ ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον παράγει ὁ πόλος Α, νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν ἔντασιν τοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον παράγει ὁ πόλος Β. Τοῦτο ἠμπορεῖ νὰ συμβαίνῃ μόνον εἰς ἕνα σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ ὁποία ἑνώνει τοὺς δύο πόλους. Ἔστω ΑΓ = x καὶ ΒΓ = y. Τότε εἰς τὸ Γ αἱ ἐντάσεις τῶν δύο πεδίων εἶναι :

ἕνεκα τοῦ πόλου Α : $H_1 = \dfrac{20}{x^2}$

ἕνεκα τοῦ πόλου Β : $H_2 = \dfrac{30}{y^2}$.

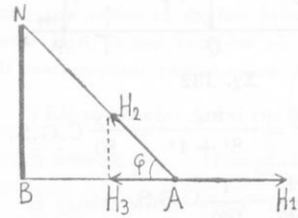
Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $H_1 = H_2$, ἔχομεν:

$$\frac{20}{x^2} = \frac{30}{y^2} \quad ἢ \quad \frac{x^2}{y^2} = \frac{20}{30} \quad καὶ \quad \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}816.$$

Ἀλλὰ εἶναι: $x + y = 10$· ἄρα $0{,}816\,y + y = 10$ ἢ $y = 5{,}51$ cm.

Τὸ ζητούμενον σημεῖον Γ ἀπέχει λοιπὸν 5,51 cm ἀπὸ τὸν ἰσχυρότερον πόλον Β.

169. — *Εὐθύγραμμος μαγνήτης ΒΝ ἔχει μῆκος 20 cm καὶ εἶναι στηριγμένος κατακορύφως ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Μὲ μίαν μικρὰν πυξίδα ἀποκλίσεως εὑρίσκομεν ὅτι εἰς ἕνα σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου τούτου δὲν ὑπάρχει ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Ὁ μαγνήτης στηρίζεται διὰ τοῦ πόλου του Β, τὸ δὲ σημεῖον Α ἀπέχει ἀπὸ 15 cm ἀπὸ τὸ Β. Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τῆς γῆς εἶναι $H_0 = 0{,}20$ gauss, οἱ δὲ πόλοι τοῦ μαγνήτου ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι εἰς τὰ ἄκρα του. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ τοῦ μαγνήτου.*



Σχ. 133

Εἰς τὸ σημεῖον Α αἱ μερικαὶ ἐντάσεις τοῦ πεδίου, ἕνεκα τῶν πόλων Β καὶ Ν εἶναι ἀντιστοίχως: $H_1 = \frac{m}{15^2}$

καὶ $$H_2 = \frac{m}{20^2 + 15^2} = \frac{m}{625}$$

ὅπου m εἶναι ἡ μαγνητικὴ μᾶζα ἑκάστου πόλου. Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς H_2 εἶναι:

$$H_3 = H_2 \,.\, \text{συν}\,\varphi = \frac{m}{625} \times \frac{BA}{NA}$$

ἢ $$H_3 = \frac{m}{625} \times \frac{15}{\sqrt{625}} = \frac{3m}{3\,125}.$$

Ὥστε ἡ ὁριζοντία συνισταμένη τῶν ἐντάσεων εἰς τὸ σημεῖον Α εἶναι:

$$H' = H_1 - H_3 = \frac{m}{15^2} - \frac{3m}{3\,125} = m\left(\frac{1}{225} - \frac{3}{3\,125}\right)$$

ἢ $$H' = 0{,}003\,484\,m \ \text{gauss}.$$

Ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ Α δὲν ὑπάρχει ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Τοῦτο συμβαίνει διότι ἡ H′ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν H_0. Ἄρα εἶναι: $0{,}003\,484\,m = 0{,}20$ ἤτοι $m = 57{,}4$ C.G.S.

Ἡ μαγνηνικὴ ῥοπὴ τοῦ μαγνήτου εἶναι: $M = 57{,}4 \times 20 = 1\,148$ C.G.S.

170. — *Δύο ἀπολύτως ὅμοιοι εὐθύγραμμοι μαγνῆται, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει μῆκος 10 cm, εἶναι τοποθετημένοι ἐπὶ ὁριζοντίας τραπέζης οὕτως ὥστε οἱ νότιοι πόλοι των νὰ εὑρίσκωνται ὁ ἕνας ἐπὶ τοῦ ἄλλου, οἱ δὲ ἄξονες τῶν μαγνητῶν νὰ σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν καὶ ὁ μαγνητικὸς μεσημβρινὸς νὰ διχοτομῇ τὴν ὀρθὴν γωνίαν. Ἕκαστος πόλος ἔχει μαγνητικὴν μᾶζαν 45 μονάδων C.G.S., ἡ ὁποία ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι συγκεντρωμένη εἰς τὸ ἄκρον τοῦ μαγνήτου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ τετάρτη κορυφὴ τοῦ τετραγώνου ποὺ σχηματίζουν οἱ δύο μαγνῆται. Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι $H_0 = 0{,}18$ gauss.*

Εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν τριῶν μερικῶν ἐντάσεων H_1, H_2, H_3, καὶ τῆς H_0. Εἶναι δέ :

$$H_1 = H_2 = \frac{45}{10^2} = 0{,}45 \text{ gauss}$$

$$H_3 = \frac{2 \times 45}{10^2 + 10^2} = \frac{90}{200} = 0{,}45 \text{ gauss}.$$

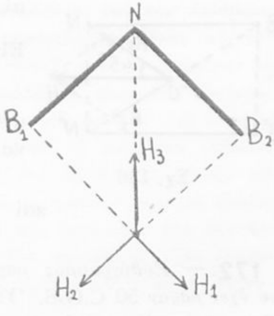
Ἡ συνισταμένη τῶν H_1 καὶ H_2 εἶναι :

$$H' = \sqrt{H_1^2 + H_2^2} = \sqrt{2 \times 0{,}45^2} = 0{,}636 \text{ gauss}.$$

Ἡ συνισταμένη τῶν H' καὶ H_3 εἶναι :

$$H'' = H' - H_3 = 0{,}636 - 0{,}45 = 0{,}186 \text{ gauss}.$$

Ἂν δεχθῶμεν ὅτι ἡ H_0 ἔχει τὴν φορὰν τῆς H_3, τότε ἡ ζητουμένη ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι :



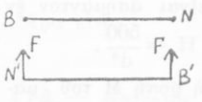
Σχ. 134

$$H = 0{,}186 + 0{,}180 = 0{,}366 \text{ gauss}.$$

Ἂν ὅμως ἡ H_0 ἔχῃ τὴν φορὰν τῆς H', τότε εἶναι :

$$H = 0{,}186 - 0{,}180 = 0{,}006 \text{ gauss}.$$

171.— *Δύο ὅμοιοι εὐθύγραμμοι μαγνῆται* BN *καὶ* B'N' *εἶναι τοποθετημένοι ὁριζοντίως ἐντὸς τοῦ ἰδίου κατακορύφου ἐπιπέδου. Ὁ* BN *εὑρίσκεται ἄνωθεν τοῦ* B'N' *εἰς τρόπον ὥστε οἱ ἑτερώνυμοι πόλοι νὰ εἶναι ἀπέναντι ἀλλήλων. Πλησιάζομεν τὸν μαγνήτην* B'N' *πρὸς τὸν* BN *καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ὁ* B'N' *ἕλκεται καὶ ἔρχεται εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν* BN, *ὅταν ἡ ἀπόστασις τῶν ἀξόνων τῶν δύο μαγνητῶν γίνῃ ἴση μὲ* $2\sqrt{2}$ cm. — *1) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ μαγνητικαὶ μᾶζαι τῶν πόλων τῶν δύο μαγνητῶν, αἱ ὁποῖαι ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι συγκεντρωμέναι εἰς τὰ ἄκρα τῶν μαγνητῶν. Αἱ δράσεις μεταξὺ τῶν ὁμωνύμων πόλων παραλείπονται. — 2) Ἀναστρέφομεν τὸν μαγνήτην* B'N' *καὶ τὸν φέρομεν εἰς ἀπόστασιν* 40 cm *ἀπὸ τὸν μαγνήτην* BN *(ἡ ἀπόστασις μετρεῖται μεταξὺ τῶν ἀξόνων). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον* O, *τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον τῆς καθέτου ποὺ συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο μαγνητῶν. Τὸ μῆκος ἑκάστου μαγνήτου εἶναι* $l = 40$ cm, *ἡ τομή του εἶναι* $s = 2$ cm², *ἡ πυκνότης του εἶναι* $d = 8$ gr/cm³. *Θὰ ληφθῇ :* $g = 1\,000$ C.G.S.



Σχ. 135

1) Τὸ βάρος τοῦ μαγνήτου B'N' εἶναι :

$$40 \times 2 \times 8 \times 1000 = 64 \times 10^4 \text{ δύναι}.$$

Τὸ βάρος τοῦτο ἰσορροπεῖται ἀπὸ τὰς δύο ἴσας δυνάμεις ἕλξεως, αἱ ὁποῖαι ἀναφαίνονται μεταξὺ τῶν ἑτερωνύμων πόλων. Ἄρα εἶναι :

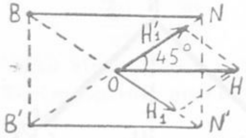
$$2F = 64 \times 10^4 \text{ δύναι} \qquad \text{καὶ} \qquad F = 32 \times 10^2 \text{ δύναι}.$$

Ἔστω m ἡ μαγνητικὴ μᾶζα ἑκάστου πόλου. Ὁ νόμος τοῦ Coulomb δίδει :

$$F = \frac{m^2}{(2\sqrt{2})^2} \qquad \text{ἢ} \qquad 32 \times 10^4 = \frac{m^2}{8} \cdot \qquad \text{ἄρα} \qquad m = 1\,600 \text{ C.G.S.}$$

2) Ὅταν φέρωμεν τὸν μαγνήτην B'N' εἰς ἀπόστασιν 40 cm ἀπὸ τὸν BN, τότε τὸ τετράπλευρον, ποὺ σχηματίζουν οἱ δύο μαγνῆται, εἶναι τετράγωνον. Ἑπομένως εἶναι : $B'N = 40\sqrt{2}$ cm καὶ $OB' = ON' = ON = OB = 20\sqrt{2}$ cm.

Ἐὰν εἰς τὸ O φέρωμεν μαγνητικὴν μᾶζαν $+1$, τότε θὰ ἐνεργοῦν ἐπ' αὐτῆς αἱ δύο ἴσαι μεταξύ των δυνάμεις H_1 καὶ H_1'.



Σχ. 136

Εἶναι δέ: $H_1 = H_1' = \dfrac{2\,m}{400 \times 2} = \dfrac{m}{400} = 4$ gauss.

Ἡ ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον O εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων H_1 καὶ H_1', αἱ ὁποῖαι εἶναι μεταξύ των κάθετοι.

Ἄρα $H^2 = 2\,H_1^2 = 2 \times 16$

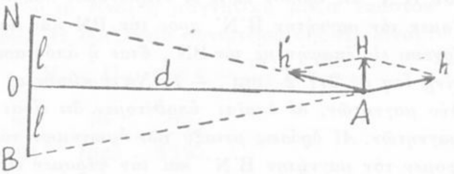
καὶ $H = 4\sqrt{2}$ gauss.

172. — *Εὐθύγραμμος μαγνήτης ἔχει μῆκος $2\,l = 10$ cm, ἕκαστος δὲ πόλος του ἔχει μᾶζαν 50 C.G.S. Ὑποθέτομεν ὅτι οἱ πόλοι εὑρίσκονται εἰς τὰ ἄκρα του. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον εἰς τὸ μέσον O τοῦ μαγνήτου δίδεται. σημεῖον A, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν d ἀπὸ τὸ μέσον O τοῦ μαγνήτου 1) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου τὸ ὁποῖον παράγει ὁ μαγνήτης εἰς τὸ σημεῖον A. — 2) Ὁ μαγνήτης τοποθετεῖται καθέτως πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ, ἡ δὲ εὐθεῖα OA εἶναι ὁριζοντία. Φέρομεν τότε εἰς τὸ σημεῖον A μικρὰν μαγνητικὴν βελόνην. Ἐὰν εἶναι γνωστὸν ὅτι εἶναι OA = 50 cm καὶ ὅτι ἡ βελόνη σχηματίζει μὲ τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινὸν γωνίαν ἴσην μὲ 0,02 ἀκτινίου, νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου.*

1) Ἐπειδὴ οἱ δύο πόλοι B καὶ N ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ A, δημιουργοῦν ἐκεῖ πεδία ἴσης ἐντάσεως:

$$h = h' = \frac{50}{d^2 + l^2}.$$

ἤτοι $$h = h' = \frac{50}{d^2 + 25}.$$



Σχ. 137

Ἡ ὅλη ἔντασις τοῦ πεδίου εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν ἐντάσεων h καὶ h'· ἡ ἔντασις H εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν μαγνήτην BN.

Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα AHh καὶ ABN εὑρίσκομεν.

$$\frac{H}{2\,l} = \frac{h}{AN} \quad ἢ \quad \frac{H}{10} = \frac{h}{\sqrt{d^2 + 25}}. \quad ἄρα \quad H = \frac{500}{(d^2 + 25)\sqrt{d^2 + 25}}.$$

Ἐὰν ἡ ἀπόστασις d εἶναι ἀρκετὰ μεγάλη, τότε τὸ 25 εἶναι ἀσήμαντον ἐν σχέσει μὲ τὸ d^2 καὶ ἑπομένως ἠμποροῦμε νὰ λάβωμεν: $H = \dfrac{500}{d^3}$.

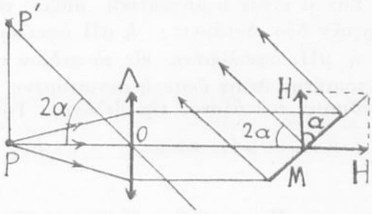
Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος τούτου εἶναι ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ M τοῦ μαγνήτου. Ἄρα: $H = \dfrac{M}{d^3}$.

2) Ἐὰν εἶναι d = 50 cm, τότε λαμβάνομεν: $H = \dfrac{500}{50^3} = \dfrac{1}{250} = 0{,}004$ gauss.

Ἀφοῦ ἡ βελόνη, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ πεδίου H καὶ τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης H_0 τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου ἐστράφη κατὰ γωνίαν $\alpha = 0{,}02$ ἀκτινίου, θὰ εἶναι: $H = H_0 \,.\, \alpha$ ἄρα $H_0 = \dfrac{H}{\alpha} = \dfrac{0{,}004}{0{,}02} = 0{,}2$ gauss.

173. — *Μαγνητικὴ βελόνη κινητὴ περὶ κατακόρυφον ἄξονα εἶναι ἐφωδιασμένη μὲ μικρὸν ἐπίπεδον κάτοπτρον* M. *Ἡ βελόνη προσανατολίζεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ὁριζοντίου μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως* 100 gauss, *συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου. Μὲ τὴν βοήθειαν συγκλίνοντος φακοῦ ἀφήνομεν νὰ προσπέσῃ καθέτως ἐπὶ τοῦ κατόπτρου δέσμη παραλλήλων φωτεινῶν ἀκτίνων, θέτοντες φωτεινὸν σημεῖον* P *εἰς τὴν κυρίαν ἑστίαν τοῦ φακοῦ. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ εἶναι* $\varphi = 1$ m. *1) Ποῦ σχηματίζεται τὸ ὁριστικὸν εἴδωλον τοῦ φωτεινοῦ σημείου ; — 2) Ἀφήνομεν νὰ ἐπιδράσῃ ἐπὶ τῆς βελόνης, ἐκτὸς τοῦ προηγουμένου πεδίου, ἕνα ἄλλο πεδίον, κάθετον πρὸς τὸ πρῶτον καὶ τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπίσης ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Ἡ βελόνη τότε ἀποκλίνει ἀπὸ τὴν ἀρχικήν διεύθυνσίν της καὶ τὸ εἴδωλον σχηματίζεται εἰς ἕνα σημεῖον* P′. *Ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀπόστασιν* PP′ = 2,2 cm, *νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ δευτέρου μαγνητικοῦ πεδίου.*

1) Αἱ φωτειναι ἀκτῖνες προσπίπτουν ἐπὶ τοῦ κατόπτρου καθέτως καὶ ἑπομένως ἀνακλῶνται πάλιν καθέτως. Οὕτω τὸ εἴδωλον συμπίπτει μὲ τὸ φωτεινὸν σημεῖον P.



Σχ. 138

2) Ὅταν ἐνεργήσῃ καθέτως πρὸς τὸ πρῶτον πεδίον, ἐντάσεως H = 100 gauss, ἕνα δεύτερον πεδίον ἐντάσεως H′, ἡ βελόνη στρέφεται κατὰ γωνίαν α ἡ ὁποία δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:
$$\varepsilon\varphi\ \alpha = \frac{H'}{H}$$

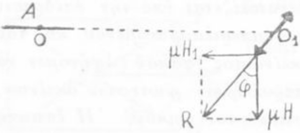
Ἂν ἡ γωνία α εἶναι μικρά, τότε θὰ εἶναι: $\alpha = \dfrac{H'}{H} = \dfrac{H'}{100}$ ἀκτίνια.

Ἐπειδὴ τὸ κάτοπτρον στρέφεται κατὰ γωνίαν α, αἱ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες στρέφονται κατὰ γωνίαν 2α καὶ συγκεντρώνονται εἰς σημεῖον P′, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἑστιακοῦ ἐπιπέδου τοῦ φακοῦ. Ἑπομένως ἔχομεν:
$$2\alpha = \frac{PP'}{OP} = \frac{2{,}2}{100} \quad \text{ἢ} \quad \alpha = \frac{1{,}1}{100} \text{ ἀκτινίου.}$$

Ἄρα εἶναι: $$\frac{H'}{100} = \frac{1{,}1}{100} \quad \text{ἢ} \quad H' = 1{,}1 \text{ gauss.}$$

174. — *Μαγνήτης* A *ἔχει μῆκος* 10 cm, *ῥοπὴν ἀδρανείας ἴσην μὲ* 650 *μονάδας* C.G.S. *καὶ ἐξαρτᾶται καταλλήλως ὥστε νὰ ἐκτελῇ αἰωρήσεις ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου ὁ μαγνήτης οὗτος ἐκτελεῖ* 10 *αἰωρήσεις ἐντὸς* 2 *λεπτῶν. Ὁ μαγνήτης* A *τοποθετεῖται οὕτως ὥστε ὁ ἄξων του νὰ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον μιᾶς ἠρεμούσης μικρᾶς μαγνητικῆς βελόνης ἀποκλίσεως. Ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου τοῦ μαγνήτου* A *ἀπὸ τὸ μέσον τῆς βελόνης εἶναι* 30 cm. *Παρατηρεῖται τότε ὅτι ἡ βελόνη ἐκτρέπεται ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας της κατὰ γωνίαν* 35^0. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ τοῦ μαγνήτου καὶ ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου.*

Ἡ περίοδος αἰωρήσεως τοῦ μαγνήτου Α, ὑπὸ τὴν ἐπίδρυσιν τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης Η τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου,



δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{K}{MH}}$. Ἐπειδὴ δίδεται ὅτι εἶναι : T = 12 sec καὶ K = 650 C.G.S. εὑρίσκομεν :

Σχ. 139

$$MH = K\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 650\left(\frac{2 \times 3{,}14}{12}\right)^2$$

ἢ $$MH = 178{,}3. \qquad (1)$$

Ὅταν ὁ ἄξων τοῦ μαγνήτου Α τοποθετηθῇ καθέτως πρὸς τὴν ἠρεμοῦσαν βελόνην, τότε εἰς τὸ O_1, ἡ ἔντασις H_1 τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον παράγει ὁ μαγνήτης Α (πρ. 163) εἶναι : $H_1 = \dfrac{2\,M\,d}{(d^2 - l^2/4)^2}$.

Ἐὰν μ εἶναι ἡ μαγνητικὴ μᾶζα τοῦ πόλου τῆς βελόνης, τότε ἐπ' αὐτῆς ἐνεργοῦν δύο δυνάμεις : ἡ μH ὀφειλομένη εἰς τὸ γήϊνον μαγνητικὸν πεδίον καὶ ἡ μH_1 ὀφειλομένη εἰς τὸ πεδίον τοῦ μαγνήτου Α. Ἡ βελόνη ἰσορροπεῖ εἰς τοιαύτην θέσιν ὥστε ἡ συνισταμένη τῶν δύο αὐτῶν δυνάμεων νὰ ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τῆς βελόνης. Τότε ὅμως εἶναι :

$$\mu H_1 = \mu H.\ \varepsilon\varphi\,\varphi \qquad \text{ἢ} \qquad H.\ \varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{2\,M\,d.}{\left(d^2 - \dfrac{l^2}{4}\right)^2}$$

ἄρα $$\frac{M}{H} = \frac{(900 - 25)^2 \times \varepsilon\varphi\,35^0}{2 \times 30} = \frac{875^2 \times 0{,}7002}{60} = 8\,932. \qquad (2)$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν ὅτι ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ τοῦ μαγνήτου Α εἶναι :

$$M = \sqrt{178{,}3 \times 8\,932} = 1\,262 \text{ C.G.S.}$$

Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι :

$$H = \frac{178{,}3}{8\,932} = 0{,}141 \text{ gauss.}$$

175. — *Μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη* Β *ἐκτελεῖ* 10 *αἰωρήσεις ἐντὸς* 30,4 sec, *ὅταν αἰωρῆται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης μαγνηνικοῦ πεδίου. Καθέτως πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ τοποθετεῖται μαγνήτης* Α, *ὁ ὁποῖος ἔχει μῆκος* 10 cm, *ὁ δὲ ἄξων του προεκτεινόμενος διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς βελόνης. Ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου τοῦ μαγνήτου ἀπὸ τὸ μέσον τῆς βελόνης εἶναι* 25 cm. *Παρατηρεῖται τότε ὅτι ἡ βελόνη ἐκτελεῖ* 10 *αἰωρήσεις ἐντὸς* 21,2 sec. *Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι* H = 0,18 gauss. *Νὰ εὑρεθῇ ποίαν γωνίαν σχηματίζει ὁ ἄξων τῆς βελόνης μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ, ὅταν ἡ βελόνη θὰ ἰσορροπήσῃ καὶ πόση εἶναι ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ τοῦ μαγνήτου.*

Ἐὰν H_1 εἶναι εἰς τὸ O_1 ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον παράγει ὁ μαγνήτης Α, καὶ R εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δύο πεδίων (σχ. 139), τότε κατὰ τὴν ἰσορροπίαν τῆς βελόνης εἰς τὴν νέαν θέσιν της θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$H = R\ .\ \sigma\upsilon\nu\,\varphi. \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου ἐὰν T καὶ T_1 εἶναι ἀντιστοίχως αἱ περίοδοι αἰωρήσεως, ὅταν ἡ βελόνη αἰωρῆται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ πεδίου H καὶ τοῦ πεδίου R, τότε θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:
$$\frac{T}{T_1} = \sqrt{\frac{R}{H}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{R}{H} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{3,04}{2,12}\right)^2. \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:
$$\frac{1}{\text{συν}\,\varphi} = \left(\frac{3,04}{2,12}\right)^2 \quad \text{ἄρα} \quad \text{συν}\,\varphi = 0,486 \quad \text{καὶ} \quad \varphi = 60^0\,54'.$$

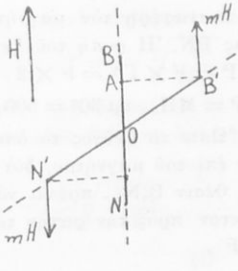
Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι ἂν M εἶναι ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ τοῦ μαγνήτου Α, τότε ἰσχύουν αἱ σχέσεις:
$$H_1 = \frac{2\,M\,d}{\left(d^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2} \quad \text{καὶ} \quad H_1 = H\,\text{εφ}\,\varphi.$$

Ἄρα εἶναι:
$$M = \left(d^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2 \times \frac{H\,\text{εφ}\,\varphi}{2d},$$
$$\text{ἢ} \quad M = \frac{360\,000 \times 0,18 \times 1,7966}{50} = 2\,328 \text{ C.G.S.}$$

176. — *Εὐθύγραμμος μαγνήτης, ἐξηρτημένος ἀπὸ κατακόρυφον νῆμα, ἰσορροπεῖ. Ἡ μαγνητικὴ ῥοπή του εἶναι* 500 C.G.S, *ἡ δὲ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι* $H = 0,18$ gauss. *Πόσον ἔργον ἀπαιτεῖται διὰ νὰ στραφῇ ὁ μαγνήτης κατὰ* 60^0;

Ἔστω ὅτι ἡ μᾶζα ἑκάστου πόλου εἶναι m, ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν δύο πόλων εἶναι $2l$. Ἐπὶ ἑκάστου πόλου ἐνεργεῖ δύναμις mH.
Ὁ πόλος Β διαγράφει τὸ τόξον ΒΒ′, τοῦ ὁποίου ἡ προβολὴ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐντάσεως H εἶναι ΒΑ. Τὸ δαπανώμενον ἔργον διὰ τὴν μεταφορὰν τῶν πόλων ἀπὸ τὸ Β εἰς τὸ Β′ εἶναι:
$$W_1 = mH \times BA = mH\,(OB - OA)$$
$$\text{ἢ} \quad W_1 = mH\,(l - l\,\text{συν}\,60^0) = m\,l\,H\,(1 - \text{συν}\,60^0).$$

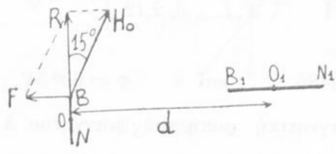
Τὸ αὐτὸ ἔργον δαπανᾶται καὶ διὰ τὴν μετακίνησιν τοῦ πόλου Ν. Ἄρα τὸ ὅλον ἔργον ποὺ δαπανᾶται εἶναι:
$$W = 2\,m\,l\,H\,(1 - \text{συν}\,60^0) = MH\,(1 - \text{συν}\,60^0)$$
$$\text{ἢ} \quad W = 500 \times 0,18\,(1 - 0,5) = 45 \text{ ἔργια.}$$



Σχ. 140

177. — *Εἰς ἕνα τόπον ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι* $H_0 = 0,20$ gauss, *ἡ δὲ ἀπόκλισις εἶναι* $\alpha = 15^0$. *Εἰς τὸν τόπον τοῦτον λαμβάνομεν πυξίδα ἀποκλίσεως καὶ μικρὸν μαγνήτην* B_1N_1 *τὸν ὁποῖον τοποθετοῦμεν πλησίον τῆς βελόνης τῆς πυξίδος οὕτως ὥστε ὁ ἄξων του νὰ διευθύνεται ἐξ ἀνατολῶν πρὸς δυσμάς. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι ὁ ἄξων τῆς βελόνης εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ γεωγραφικοῦ μεσημβρινοῦ. Ἐὰν ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ τοῦ μαγνήτου* B_1N_1 *εἶναι* 50 C.G.S., *νὰ εὑρεθῇ πόσον ἀπέχει ἡ βελόνη ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ μαγνήτου.*

Ἡ μαγνητικὴ βελόνη ἰσορροπεῖ εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε ἡ συνισταμένη R τῶν H_0 καὶ F νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ γεωγραφικοῦ μεσημβρινοῦ. Ἄρα ἡ F ἔχει τὴν διεύθυνσιν ἐξ Α. πρὸς Δ. καὶ ἑπομένως τὰ τρίγωνα BRF



Σχ. 141

καὶ BRH_0 εἶναι ὀρθογώνια.

Τότε ἔχομεν: $F = H_0 \,.\, \text{ημ}\, 15^0$

ἢ $F = 0{,}20 \times 0{,}259 = 0{,}0518$ gauss.

Ὁ πόλος Β τῆς βελόνης εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ἄξονος τοῦ μαγνήτου B_1N_1 καὶ ὅπως γνωρίζομεν ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου τὸ ὁποῖον δημιουργεῖ ὁ μικρὸς μαγνήτης B_1N_1 εἰς τὸ σημεῖον Α εἶναι:

$$F = \frac{2\,M}{d^3}\cdot \qquad \text{ἄρα}\ d^3 = \frac{2\,M}{F} = \frac{1\,000}{0{,}0518} \qquad \text{καὶ} \qquad d = 26.8 \text{ cm.}$$

178 — *Εὐθύγραμμος μαγνήτης ἠμπορεῖ νὰ στρέφεται περὶ κατακόρυφον ἄξονα εἰς τόπον ὅπου ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι* $H_0 = 0{,}18$ gauss. *Ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ τοῦ μαγνήτου εἶναι* M = 500 C.G.S. *Νὰ εὑρεθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ῥοπὴ τοῦ ζεύγους, τὸ ὁποῖον πρέπει ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τοῦ μαγνήτου, ὥστε ὁ ἄξων του νὰ σχηματίζῃ γωνίαν* 30° *μὲ τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινόν.*

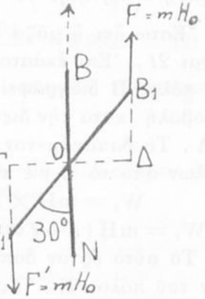
Ἔστω m ἡ μαγνητικὴ μᾶζα ἑκάστου πόλου τοῦ μαγνήτου καὶ $2\,l$ τὸ μῆκος του. Τότε εἶναι: $M = 2\,l\,m = 500$ C.G.S.

Ἐπὶ ἑκάστου πόλου ἐνεργεῖ δύναμις $F = m\,H_0$. Εἰς τὴν νέαν θέσιν B_1N_1 τοῦ μαγνήτου αἱ δύο αὗται ἴσαι δυνάμεις ἀποτελοῦν ζεῦγος, τὸ ὁποῖον τείνει νὰ ἐπαναφέρῃ τὸν μαγνήτην εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας ΒΝ. Ἡ ῥοπὴ τοῦ ζεύγους τούτου εἶναι:

$$P = F \times \Gamma\Delta = F \times 2\,.\,O\Delta = 2\,l\,m\,H_0 \,.\, \text{ημ}\, 30^0$$

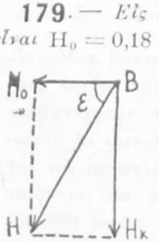
$$\text{ἢ}\ P = MH_0 \,.\, \text{ημ}\, 30^0 = 500 \times 0{,}18 \times 0{,}5 = 45 \text{ C.G.S.}$$

Ὥστε τὸ ζεῦγος τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τοῦ μαγνήτου, διὰ νὰ τὸν διατηρήσωμεν εἰς τὴν θέσιν B_1N_1, πρέπει νὰ ἔχῃ ῥοπὴν ἴσην καὶ ἀντίθετον πρὸς τὴν ῥοπὴν τοῦ ζεύγους τῶν δυνάμεων F, F′.



Σχ. 142

179. — *Εἰς ἕνα τόπον ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι* $H_0 = 0{,}18$ gauss, *ἡ δὲ ἔγκλισις εἶναι θετικὴ καὶ ἴση μὲ* 67°. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸν τόπον τοῦτον.*



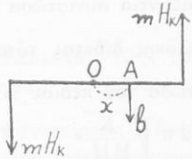
Σχ. 143

Ἔστω Β ὁ βόρειος πόλος μιᾶς πυξίδος ἐγκλίσεως καὶ $m = 1$ ἡ μαγνητικὴ μᾶζα τοῦ πόλου τούτου. Ἐπὶ τοῦ Β ἐνεργεῖ ἡ ὅλη ἔντασις Η τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τῆς Γῆς, ἡ ὁποία ἀναλύεται εἰς τὴν ὁριζοντίαν συνιστῶσαν H_0 καὶ τὴν κατακόρυφον συνιστῶσαν H_κ. Ἐὰν ε εἶναι ἡ γωνία ἐγκλίσεως, τότε ἔχομεν:

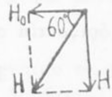
$$H_\kappa = H_0 \,.\, \text{εφ}\ \varepsilon = 0{,}18 \times \text{εφ}\ 67^0 = 0{,}18 \times 2{,}356 = 0{,}424 \text{ gauss.}$$

180.— *Μία μαγνητικὴ βελόνη ἐγκλίσεως ἔχει μαγνητικὴν ῥοπὴν ἴσην μὲ 300 μονάδας C.G.S. καὶ αἰωρεῖται ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Ἡ ἔντασις τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸν τόπον τοῦτον εἶναι* $H_0 = 0{,}20$ gauss, *ἡ δὲ ἔγκλισις εἶναι* $\varepsilon = 60^0$. *Διὰ νὰ διατηρηθῇ ὁριζοντία ἡ βελόνη, θέτομεν ἐπ' αὐτῆς ἱππέα, ὁ ὁποῖος ἔχει βάρος* $\beta = 50$ mgr. *Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν ἄξονα τῆς βελόνης εὑρίσκεται ὁ ἱππεύς ;*

Ἔστω ὅτι H_κ εἶναι ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Ἡ βελόνη ἰσορροπεῖ, ὅταν ἡ ῥοπὴ τοῦ ζεύγους τῶν δυνάμεων ποὺ ἐνεργοῦν εἰς τοὺς πόλους τοῦ μαγνήτου, εἶναι ἴση μὲ τὴν ῥοπὴν τοῦ βάρους β ὡς πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς τῆς βελόνης, δηλαδὴ ὅταν εἶναι :



Σχ. 144



Σχ. 145

$$M.H_\kappa = \beta \,.\, x \quad \text{ἢ} \quad M.H_0 \,\varepsilon\varphi\, 60^0 = \beta \,.\, x \,.$$

Ἄρα $$x = \frac{300 \times 0{,}20 \times 1{,}732}{0{,}05 \times 981} = 2{,}12 \text{ cm.}$$

181.— *Μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη Β αἰωρουμένη ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου, ἐκτελεῖ 20 αἰωρήσεις κατὰ λεπτόν. Εὐθύγραμμος μαγνήτης Α τοποθετεῖται πλησίον τῆς βελόνης οὕτως ὥστε ὁ χρόνος αἰωρήσεώς της γίνεται ἀπείρως μεγάλος. Ἐὰν ὁ μαγνήτης Α ἀναστραφῇ, πόσας αἰωρήσεις θὰ ἐκτελῇ ἡ βελόνη κατὰ λεπτόν ;*

Ἡ περίοδος αἰωρήσεως μιᾶς μαγνητικῆς βελόνης, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως Η, δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{K}{MH}}$,

ὅπου Κ εἶναι ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας τῆς βελόνης ὡς πρὸς τὸν ἄξονα καὶ Μ ἡ μαγνητικὴ ῥοπή της. Ἡ συχνότης λοιπὸν τῶν αἰωρήσεων μιᾶς βελόνης ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δύο πεδίων, ἐντάσεων H_1 καὶ H_2, εἶναι :

$$N_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{M\,H_1}{K}} \quad \text{καὶ} \quad N_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{MH_2}{K}}.$$

Ἄρα : $$\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{H_1}{H_2}} \,. \qquad (1)$$

Ἐὰν ὁ χρόνος αἰωρήσεως τῆς βελόνης Β γίνῃ ἀπείρως μεγάλος, τότε ἡ ἔντασις Η τοῦ πεδίου πρέπει νὰ εἶναι μηδέν. Δηλαδὴ τότε ἡ συνισταμένη τῶν ἐντάσεων H_1 καὶ H_2 τοῦ γηΐνου πεδίου καὶ τοῦ πεδίου τοῦ μαγνήτου Α θὰ εἶναι ἴση μὲ μηδέν. Αἱ ἐντάσεις τῶν δύο πεδίων εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι. Ἐὰν ἀναστραφῇ ὁ μαγνήτης Α, τότε ἡ βελόνη αἰωρεῖται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἑνὸς πεδίου, ἔχοντος ἔντασιν : $H_2 = 2\,H_1$. Ἑπομένως σύμφωνα μὲ τὴν σχέσιν (1) ἔχομεν :

$$\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{H_1}{2\,H_1}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{ἄρα :} \quad N_2 = N_1\sqrt{2} = \frac{20}{60} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ κατὰ sec.}$$

Κατὰ λεπτὸν θὰ ἐκτελῇ : $N' = 60\,N_2 = 60 \times \dfrac{\sqrt{2}}{3} = 28{,}3$ αἰωρήσεις.

182.— *Μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη Β ἐκτελεῖ 20 αἰωρήσεις ἐντὸς 25 sec, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου. Ὄπισθεν αὐτῆς τοποθετεῖται εὐθύγραμμος μαγνήτης Α τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων εὑρίσκεται ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Τότε ἡ βελόνη ἐκτελεῖ 10 αἰωρήσεις ἐντὸς 12 sec. Πόσας αἰωρήσεις θὰ ἐκτελῇ ἡ βελόνη κατὰ λεπτόν, ἐὰν ὁ μαγνήτης ἀναστραφῇ;*

Ἔστω H_1 ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου. Ἡ περίοδος αἰωρήσεως τῆς βελόνης δίδεται τότε ἀπὸ τὴν σχέσιν: $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{K}{MH_1}}$. Ἐὰν ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ πεδίου γίνῃ H_2, τότε ἡ περίοδος τῆς βελόνης γίνεται: $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{K}{MH_2}}$. Ἄρα: $\dfrac{T_1}{T_2} = \sqrt{\dfrac{H_2}{H_1}}$ (1)

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν:

δια H_1: $T_1 = \dfrac{25}{20}$ sec · διὰ H_2: $T_2 = \dfrac{12}{20}$ sec.

Ἐπειδὴ εἶναι $T_1 > T_2$ συνάγεται ὅτι εἶναι $H_2 > H_1$. Ἐὰν ὀνομάσωμεν H τὴν ὁριζοντίαν συνιστῶσαν τοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖ ὁ μαγνήτης Α, τότε θὰ εἶναι: $H_2 = H_1 + H$.

Ἄρα ἔχομεν:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{H_1 + H}{H_1}} = \sqrt{1 + \frac{H}{H_1}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{625}{144} = 1 + \frac{H}{H_1} \quad \text{καὶ} \quad \frac{H}{H_1} = \frac{481}{144}. \quad (2)$$

Ἐὰν ὁ μαγνήτης ἀναστραφῇ, τότε ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ πεδίου γίνεται: $H_3 = H - H_1$· τὸ ὅτι εἶναι $H > H_1$ καταφαίνεται ἀπὸ τὴν σχέσιν (2). Ἡ νέα περίοδος τῆς βελόνης εἶναι T_3, ἔχομεν δὲ τότε τὴν σχέσιν:

$$\frac{T_1}{T_3} = \sqrt{\frac{H - H_1}{H_1}} = \sqrt{\frac{H}{H_1} - 1} = \sqrt{\frac{481 - 144}{144}} = \sqrt{\frac{337}{144}}.$$

Ἑπομένως εἶναι: $T_3 = T_1\sqrt{\dfrac{144}{337}} = \dfrac{5 \times 12}{4 \times \sqrt{337}} = 0{,}817$ sec.

Ἐντὸς ἑνὸς λεπτοῦ ἡ βελόνη θὰ ἐκτελῇ τότε: $\dfrac{60}{0{,}817} = 73,4$ αἰωρήσεις.

Ἐπειδὴ εἶναι $H > H_1$, ἡ βελόνη θὰ στραφῇ κατὰ 180^0 καὶ ὁ βόρειος πόλος της θὰ διευθύνεται πρὸς νότον.

183.— *Δύο ἰσομήκεις εὐθύγραμμοι μαγνῆται Γ καὶ Δ τίθενται ὁ ἕνας ἐπὶ τοῦ ἄλλου οὕτως ὥστε οἱ ὁμώνυμοι πόλοι των νὰ εὑρίσκωνται ὁ ἕνας ἄνωθεν τοῦ ἄλλου. Τό σύστημα τῶν μαγνητῶν ἐξαρτᾶται καταλλήλως ὥστε νὰ ἠμπορῇ νὰ ἐκτελέσῃ ὁριζοντίας αἰωρήσεις. Εὑρίσκεται τότε ὅτι τὸ σύστημα ἐκτελεῖ 50 αἰωρήσεις ἐντὸς 2 min 32 sec. Ὅταν ἀναστραφῇ ὁ ἕνας ἐκ τῶν δύο μαγνητῶν π. χ. ὁ Δ, τότε τὸ σύστημα ἐκτελεῖ 50 αἰωρήσεις ἐντὸς 10 min 15 sec. Ποῖον λόγον ἔχουν αἱ μαγνητικαὶ ῥοπαὶ τῶν δύο μαγνητῶν;*

Ἄς ὀνομάσωμεν M_1 καὶ M_2 ἀντιστοίχως τὰς μαγνητικὰς ῥοπὰς τῶν μαγνητῶν Γ και Δ. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ τοῦ συστήματος εἶναι $M_1 + M_2$ καὶ ἡ περίοδος αἰωρήσεώς του εἶναι T. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν τό σύστημα ἔχει μαγνητικὴν ῥοπὴν $M_1 - M_2$ καὶ περίοδον T′. Εἰναι δέ: $T = \frac{152}{50}$ sec καὶ $T' = \frac{615}{50}$ sec. Ἀπὸ τὴν σχέσιν : $T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{MH}}$

λαμβάνομεν : $\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}}$ ἢ $\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} = \left(\frac{152}{615}\right)^2 = 0{,}0611$ ·

ἄρα $\frac{M_1}{M_2} = \frac{1 + 0{,}0611}{1 - 0{,}0611} = 1{,}128.$

184. — *Εὐθύγραμμος μαγνήτης ἔχει διαστάσεις:* 10 × 1,5 × 0,5 *καὶ μαγνητικὴν ῥοπὴν* 1500 C.G.S. *Πόση εἶναι ἡ ἔντασις μαγνητίσεως αὐτοῦ ;*

Γνωρίζομεν ὅτι ὀνομάζεται ἔντασις μαγνητίσεως J ἑνὸς μαγνήτου τὸ πηλίκον τῆς μαγνητικῆς ῥοπῆς M τοῦ μαγνήτου διὰ τοῦ ὄγκου του V. ἤτοι:

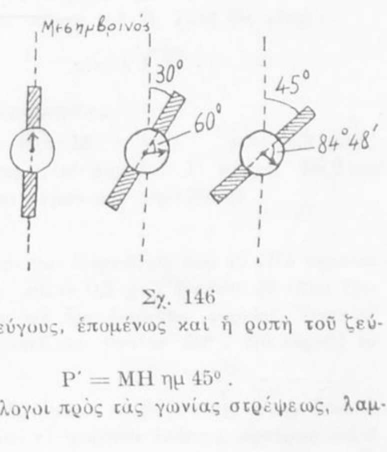
$$J = M : V.$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἔντασις μαγνητίσεως εἶναι :

$$J = \frac{1\,500}{10 \times 1{,}5 \times 0{,}5} = \frac{1\,500}{7{,}5} = 200 \text{ C.G.S.}$$

185. — *Εὐθύγραμμος μαγνήτης εἶναι ἐξηρτημένος διὰ σύρματος οὕτως ὥστε νὰ διατηρῆται ὁριζόντιος καὶ νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Τὸ ἀνώτερον ἄκρον τοῦ σύρματος εἶναι στερεωμένον εἰς βαθμολογημένον δίσκον διὰ τοῦ ὁποίου ἠμποροῦμεν νὰ εὑρίσκωμεν τὴν στρέψιν τοῦ σύρματος. Διὰ νὰ στρέψωμεν τὸν μαγνήτην κατὰ* 30°, *πρέπει νὰ στραφῇ ὁ δίσκος κατὰ* 90°. *Νὰ εὑρεθῇ κατὰ ποίαν γωνίαν πρέπει νὰ στραφῇ ἀκόμη ὁ δίσκος, ὥστε ὁ ἄξων τοῦ μαγνήτου νὰ σχηματίσῃ γωνίαν* 45° *μὲ τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινόν. Θὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ ζεῦγος στρέψεως εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὴν γωνίαν στρέψεως.*

Ὅταν ὁ μαγνήτης σχηματίζῃ γωνίαν 30° μὲ τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινὸν ἡ γωνία στρέψεως τοῦ σύρματος εἶναι : $\varphi = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.



Σχ. 146

Ἐὰν τότε ὁ δίσκος στραφῇ περαιτέρω κατὰ μίαν γωνίαν θ , ἕως ὅτου ὁ μαγνήτης σχηματίσῃ γωνίαν 45° μὲ τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινόν, ἡ γωνία στρέψεως τοῦ σύρματος γίνεται :

$$\varphi' = (90^\circ + \theta) - 45^\circ$$

ἤτοι $\varphi' = 44^\circ + \theta.$

Ἐὰν H εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου καὶ M εἶναι ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ τοῦ μαγνήτου, τότε εἰς τὰς δύο θέσεις ἰσορροπίας τοῦ μαγνήτου ἡ ῥοπὴ τοῦ ἐπ' αὐτοῦ ἐνεργοῦντος ζεύγους, ἑπομένως καὶ ἡ ῥοπὴ τοῦ ζεύγους στρέψεως, εἶναι :

$$P = MH \text{ ημ } 30^\circ \qquad P' = MH \text{ ημ } 45^\circ .$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ ῥοπαὶ αὐταὶ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς γωνίας στρέψεως, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{60^0}{45^0 + \theta} = \frac{\eta\mu\, 30^0}{\eta\mu\, 45^0} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707 .$$

Ἄρα $60^0 = 0{,}707\ (45^0 + \theta)$ καὶ $\theta = 84^0\, 48' - 45^0 = 39^0\, 48'$.

186. — *Μία κατακόρυφος καπνοδόχος ἐκ χάλυβος ἔχει ὕψος* 10 m, *διάμετρον* 1 m, *τὸ δὲ πάχος τῶν τοιχωμάτων της εἶναι* 0,5 cm. *Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μαγνητικὴ ροπὴ αὐτῆς ἡ ὀφειλομένη εἰς τὴν κατακόρυφον συνιστῶσαν τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου, ἂν εἶναι γνωστὰ τὰ ἑξῆς στοιχεῖα:*

ἔντασις τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου: $H_0 = 0{,}18$ gauss· *γωνία ἐγκλίσεως;* $\varepsilon = 60^0$ · *μαγνητικὴ ἐπιδεκτικότης τοῦ χάλυβος:* $k = 12$.

Ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα H_κ τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι:

$$H_\kappa = H_0 \cdot \varepsilon\varphi\, \varepsilon = 0{,}18 \times \varepsilon\varphi\, 60^0 = 0{,}18 \times \sqrt{3} = 0{,}312 \text{ gauss.}$$

Ἂν M εἶναι ἡ μαγνητικὴ ροπὴ καὶ V ὁ ὄγκος τοῦ χάλυβος, ἡ ἔντασις μαγνητίσεως J εἶναι:

$$J = M : V. \tag{1}$$

Ἐξ ἄλλου ὅμως εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἔντασις μαγνητίσεως J καὶ ἡ ἔντασις H_κ τοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον προκαλεῖ τὴν μαγνήτισιν, συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως:

$$J = k \cdot H_\kappa \tag{2}$$

ὅπου **k** εἶναι ἡ μαγνητικὴ ἐπιδεκτικότης. Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην μαγνητικὴν ροπήν:

$$M = k \cdot H_\kappa\, V.$$

Εἰς μονάδας C.G.S. εὑρίσκομεν:

$$M = 12 \times 0{,}312 \times 1\,000 \times 100\,\pi \times 0{,}5 = 588\,000 \text{ C.G.S.}$$

ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

Ι. ΣΤΑΤΙΚΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

187.— *Εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β τὰ ὁποῖα ἀπέχουν μεταξύ των 15 cm φέρονται δύο ἠλεκτρικὰ φορτία, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα εἶναι διπλάσιον ἀπὸ τὸ ἄλλο. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν θέσιν πρέπει νὰ τεθῇ ἡ μονὰς τοῦ θετικοῦ φορτίου, ὥστε αἱ ἐπ' αὐτῆς ἀσκούμεναι δράσεις ἐκ μέρους τῶν δύο ἀνωτέρω φορτίων νὰ ἔχουν συνισταμένην ἴσην μὲ μηδέν. Νὰ ἐξετασθῇ ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν: α) τὰ δύο φορτία εἶναι ὁμώνυμα καὶ β) τὰ δύο φορτία εἶναι ἑτερώνυμα.*

Τὰ δύο φορτία εἶναι ὁμώνυμα. Διὰ νὰ ἰσορροπῇ ἡ μονὰς τοῦ θετικοῦ φορτίου πρέπει αἱ ἐπ' αὐτῆς ἐξασκούμεναι δράσεις τῶν δύο φορτίων νὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι. Ἄρα ἡ ζητουμένη θέσις εἶναι ἕνα σημεῖον Γ τῆς εὐθείας ΑΒ.

Τότε εἶναι: $F = \frac{2Q}{x^2} = \frac{Q}{y^2}$ ἢ $x = y\sqrt{2}$.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $x + y = 15$, εὑρίσκομεν:

$y\sqrt{2} + y = 15$· ἄρα $y(\sqrt{2} + 1) = 15$ καὶ $y = 6{,}21$ cm.

Ὥστε, ἐὰν τὰ δύο φορτία εἶναι ὁμώνυμα, τὸ σημεῖον Γ ἀπέχει 6,21 cm ἀπὸ τὸ μικρότερον φορτίον.

Ἐὰν τὰ δύο φορτία εἶναι ἑτερώνυμα, τὸ σημεῖον Γ δὲν ἠμπορεῖ νὰ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β, διότι τότε αἱ ἐξασκούμεναι ἐπὶ τῆς μονάδος τοῦ φορτίου δράσεις εἶναι ὁμόρροποι. Ἀλλὰ τὸ Γ δὲν ἠμπορεῖ νὰ εὑρίσκεται καὶ πέραν τοῦ Α, διότι τότε θὰ ἦτο πλησιέστερα πρὸς τὸ μεγαλύτερον φορτίον. Ἄρα τὸ Γ πρέπει νὰ εὑρίσκεται πέραν τοῦ Β. Τότε θὰ εἶναι:

$$F = \frac{2Q}{x^2} = \frac{Q}{y^2} \quad \text{ἢ} \quad x = y\sqrt{2}.$$

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $x - y = 15$ εὑρίσκομεν:

$y\sqrt{2} - y = 15$· ἄρα $y(\sqrt{2} - 1) = 15$ καὶ $y = 36{,}2$ cm.

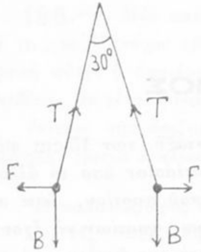
Ὥστε, ἂν τὰ δύο φορτία εἶναι ἑτερώνυμα, τὸ σημεῖον Γ ἀπέχει 36,2 cm ἀπὸ τὸ μικρότερον φορτίον καὶ εὑρίσκεται πέραν τοῦ σημείου Β.

188 —*Δύο ὅμοιαι μικραὶ μεταλλικαὶ σφαῖραι ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον μὲ δύο νήματα μετάξης. Ἑκάστη σφαῖρα ἔχει μᾶζαν 0,5 gr, ἕκαστον δὲ νῆμα ἔχει μῆκος 20 cm. Φορτίζομεν τὰς δύο σφαίρας μὲ ἴσα ὁμώνυμα φορτία. Ὅταν αἱ σφαῖραι ἰσορροπήσουν, τὰ δύο νήματα σχηματίζουν γωνίαν 30°. Νὰ εὑρεθῇ τὸ φορτίον ἑκάστης σφαίρας.*

Ἐπὶ ἑκάστης σφαίρας ἐνεργοῦν τρεῖς δυνάμεις: τὸ βάρος της Β, ἡ ἄπωσις F καὶ ἡ τάσις Τ τοῦ νήματος. Ἐὰν Q εἶναι τὸ φορτίον ἑκάστης σφαίρας καὶ d ἡ μεταξὺ τῶν δύο σφαιρῶν ἀπόστασις, τότε εἶναι : $F = \frac{Q^2}{d^2}$. Ἀλλὰ εἶναι :

$\frac{d}{2} = 20 \times ημ\, 15^0$ · ἄρα $d = 40 \times ημ\, 15^0 = 40 \times 0{,}2588 = 10{,}35$ cm.

Ἐπομένως εἶναι : $F = \frac{Q^2}{10{,}35^2}$.



Σχ. 147

Διὰ νὰ ἰσορροποῦν αἱ τρεῖς δυνάμεις B, F καὶ T πρέπει ἡ μὲν κατακόρυφος συνιστῶσα τῆς T νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος μὲ τὴν B, ἡ δὲ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς T νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος μὲ τὴν F. Ἄρα ἰσχύουν τότε αἱ σχέσεις :

$$T\,.\,συν\, 15^0 = mg = 0{,}5 \times 981 \cdot$$

καὶ $$T\,.\,ημ\, 15^0 = \frac{Q^2}{10{,}35^2}.$$

Ἂν διαιρέσωμεν κατὰ τὰ μέλη τὰς ἀνωτέρω σχέσεις, εὑρίσκομεν :

$$εφ\, 15^0 = \frac{Q^2}{0{,}5 \times 981 \times 10{,}35^2} = 0{,}2679\,.$$

Ἄρα $$Q = \sqrt{0{,}2679 \times 0{,}5 \times 981 \times 10{,}35^2} = 118{,}7 \text{ C.G.S.}$$

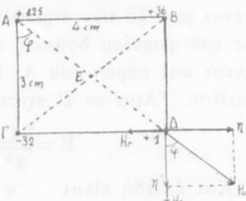
189. — *Εἰς τὰς τρεῖς κορυφὰς A, B, Γ, ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, ἔχοντος πλευρὰς 3 cm καὶ 4 cm, εὑρίσκονται τρία ἠλεκτρικὰ φορτία ἴσα μέ : +125, +36 καὶ −32 μονάδας C.C.S. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς τὴν τετάρτην κορυφὴν Δ τοῦ παραλληλογράμμου. Τὰ φορτία εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ ἀέρος.*

Αἱ μερικαὶ ἐντάσεις τῶν τριῶν πεδίων εἰς τὸ σημεῖον Δ εἶναι :

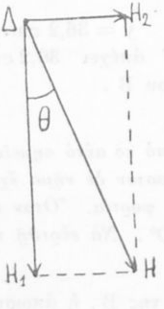
$$H_A = \frac{125 \times 1}{16 + 9} = 5 \text{ δύναι}$$

$$H_B = \frac{36 \times 1}{9} = 4 \text{ δύναι}$$

$$H_Γ = \frac{32 \times 1}{16} = 2 \text{ δύναι.}$$



Σχ. 148



Σχ. 149

Ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Δ εἶναι ἴση μὲ τὴν συνισταμένην τῶν τριῶν αὐτῶν δυνάμεων.

Ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα τῆς H_A εἶναι :

$$η' = H_A\,.\,συν\, φ \cdot$$

ἡ δὲ ὁριζοντία συνιστῶσα αὐτῆς εἶναι : $η = H_A\,.\,ημ\, φ$.

Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ εὑρίσκομεν : $ημ\, φ = \frac{4}{5}$

καὶ $συν\, φ = \frac{3}{5}$

Ἄρα εἶναι : $η' = 5 \times \frac{3}{5} = 3$ δύναι καὶ $\eta = 5 \times \frac{4}{5} = 4$ δύναι.

Ὥστε αἱ δύο συνιστῶσαι τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου εἶναι:

ἡ κατακόρυφος: $H_1 = H_B + \eta' = 4 + 3 = 7$ δύναι

ἡ ὁριζοντία: $H_2 = \eta - H_\Gamma = 4 - 2 = 2$ δύναι.

Ἡ ἔντασις λοιπὸν τοῦ πεδίου εἰς τὸ Δ εἶναι:

$$H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2} = \sqrt{7^2 + 2^2} = 7{,}28 \text{ δύναι.}$$

Ἡ δὲ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ H μὲ τὴν κατακόρυφον εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\varepsilon\varphi\, \theta = \frac{2}{7} = 0{,}2857$ ἤτοι $\theta = 16^0$ (περίπου).

√**190** — *Εἰς τὰς τρεῖς κορυφὰς A, B, Γ ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου (σχ. 148) ἔχοντος πλευρὰς* 3 cm *καὶ* 4 cm, *εὑρίσκονται τρία ἠλεκτρικὰ φορτία τὰ ὁποῖα ἀντιστοίχως εἶναι ἴσα μὲ* +125, +36, −32 *μονάδας* C.G.S. *1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ δυναμικὸν εἰς τὴν τετάρτην κορυφὴν Δ τοῦ παραλληλογράμμου.—2) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον τὸ δαπανώμενον κατὰ τὴν μεταφορὰν* +10 *μονάδων* C.G.S. *ἀπὸ τὸ σημεῖον Δ εἰς τὴν τομὴν E τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου. Τὰ φορτία εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ ἀέρος.*

1) Γνωρίζομεν ὅτι τὸ δυναμικὸν εἰς ἕνα σημεῖον N τοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον παράγει ἕνα φορτίον Q, εἶναι: $V = \frac{Q}{k\,d}$

ὅπου d εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου N ἀπὸ τὸ φορτίον (λαμβανόμενον ὡς σημεῖον) καὶ k εἶναι ἡ διηλεκτρικὴ σταθερά. Διὰ τὸν ἀέρα εἶναι $k = 1$.

Τὸ δυναμικὸν εἰς τὸ σημεῖον Δ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν δυναμικῶν τῶν ὀφειλομένων εἰς ἕκαστον φορτίον. Ἤτοι εἶναι:

$$V_\Delta = \frac{125}{5} + \frac{36}{3} + \frac{-32}{4} = 29 \text{ C.G.S.}$$

2) Τὸ δυναμικὸν εἰς τὸ σημεῖον E τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων εἶναι:

$$V_E = \frac{125}{2{,}5} + \frac{36}{2{,}5} + \frac{-32}{2{,}5} = 51{,}6 \text{ C.G.S.}$$

Κατὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ φορτίου $Q = 10$ C.G.S. ἀπὸ τὸ Δ εἰς τὸ E δαπανᾶται ἔργον:

$$W = Q\,(V_E - V_\Delta) \quad \text{ἢ} \quad W = 10\,(51{,}6 - 29) = 10 \times 22{,}6 = 226 \text{ ἔργια.}$$

191 — *Ἐκκρεμὲς ἀποτελεῖται ἀπὸ λεπτὸν ἀβαρὲς νῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος* 90 cm. *Εἰς τὸ ἄκρον του φέρει μικρὰν σφαῖραν ἡ ὁποία ἔχει μᾶζαν* 0,5 gr. *Αὕτη εἶναι ἠλεκτρισμένη καὶ φέρει θετικὸν φορτίον ἴσον μὲ* 50 *μονάδας* C.G.S. *Τὸ ἐκκρεμὲς τοῦτο αἰωρεῖται ἐντὸς κατακορύφου ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον κατ' ἀρχὰς διευθύνεται ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἔπειτα ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ διαρκεια* 100 *μικρῶν ἁπλῶν αἰωρήσεων εἶναι* 107 sec· *εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ διάρκεια αὕτη εἶναι* 86 sec. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου βαρύτητος ὡς καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, ἡ ὁποία παραμένει σταθερὰ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις.*

Ἔστω Η ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Ἐπὶ τοῦ φορτίου τῆς σφαίρας τὸ πεδίον ἐξασκεῖ μίαν δύναμιν ἴσην μέ: $F = 50\,H$ δύνας, ἡ ὁποία προσδίδει εἰς τὴν μᾶζαν m τῆς σφαίρας ἐπιτάχυνσιν γ. Αὕτη εἶναι:

$$\gamma = \frac{F}{m} = \frac{50\,H}{0{,}5} = 100\,H \text{ cm/sec}^2.$$

Ἐπειδὴ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ F διευθύνεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω, ἡ ἐπιτάχυνσις εἰς τὴν ὁποίαν ὑπόκειται τὸ ἐκκρεμὲς εἶναι:

$$\gamma_1 = g - \gamma = g - 100\,H.$$

Ἀντιθέτως εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν εἶναι:

$$\gamma_2 = g + \gamma = g + 100\,H.$$

Αἱ περίοδοι αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμμοῦς εἰς τὰς δύο περιπτώσεις δίδονται τότε ἀπὸ τὰς σχέσεις:

$$\frac{107}{100} = \pi\sqrt{\frac{l}{g - 100\,H}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{86}{100} = \pi\sqrt{\frac{l}{g + 100\,H}}.$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς εὑρίσκομεν:

$$g - 100\,H = \pi^2 l\left(\frac{100}{107}\right)^2 = \pi^2 \times 90\left(\frac{100}{107}\right)^2$$

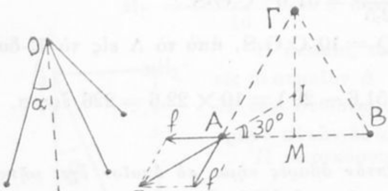
$$g + 100\,H = \pi^2 l\left(\frac{100}{86}\right)^2 = \pi^2 \times 90\left(\frac{100}{86}\right)^2.$$

Ἄρα εἶναι: $g = 988{,}4$ δύναι καὶ $H = 2{,}13$ δύναι.

192 — *Τρία ἠλεκτρικὰ ἐκκρεμῆ ἀποτελοῦνται ἀπὸ μονωτικὸν νῆμα, μήκους* l, *καὶ ἀπὸ μεταλλικὴν σφαῖραν ἡ ὁποία ἔχει μᾶζαν* m. *Τὰ ἐκκρεμῆ εἶναι στερεωμένα εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον* O. *Φορτίζομεν ἕκαστον τῶν τριῶν ἐκκρεμῶν μὲ τὸ αὐτὸ φορτίον* Q. *Τὰ ἐκκρεμῆ, ἀπωθούμενα μεταξύ των, ἰσορροποῦν εἰς τοιαύτην θέσιν ὥστε τὸ νῆμα ἑκάστου ἐκκρεμοῦς νὰ σχηματίζῃ τὴν αὐτὴν γωνίαν* α *μὲ τὴν κατακόρυφον ποὺ διέρχεται διὰ τοῦ* O. *Νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις συνδέει τότε τὰ μεγέθη* l, m, Q, *καὶ* εφ α.

1) Ἕνεκα τῆς συμμετρίας αἱ τρεῖς σφαῖραι Α,Β,Γ τοποθετοῦνται εἰς τὰς κορυφὰς ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου. Τὸ τρίγωνον τοῦτο καὶ τὰ τρία νήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ σχηματίζουν πυραμίδα. Ἡ σφαῖρα Α ἀπωθεῖται ἀπὸ τὰς ἄλλας δύο σφαίρας Β καὶ Γ. Αἱ ἀπώσεις αὐταὶ f καὶ f′ εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ἑκάστη δὲ ἐξ αὐτῶν εἶναι:

$$f = \frac{Q^2}{AB^2}. \qquad (1)$$



Σχ. 150

Ἔστω Μ τὸ μέσον τῆς ΑΒ καὶ Ι τὸ κέντρον τοῦ τριγώνου. Τὸ σημεῖον Ι εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ὕψους ΟΙ τῆς πυραμίδος. Τότε ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$f = \frac{Q^2}{4\,AM^2} = \frac{Q^2}{4\,AI^2\,\sigma\upsilon\nu^2 30^\circ} = \frac{Q^2}{3\,AI^2}.$$

Ἐξ ἄλλου ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΙΑ ἔχομεν:

$AI = l \cdot \eta\mu\, \alpha$· ἄρα $f = \dfrac{Q^2}{3\, l^2 \cdot \eta\mu^2 \alpha}$.

Ἡ συνισταμένη F τῶν δυνάμεων f καὶ f′ εἶναι:

$$F = \sqrt{2f^2 + 2f^2 \sigma\upsilon\nu\, 60^0} = f\sqrt{3} = \frac{Q^2}{\sqrt{3} \cdot l^2\, \eta\mu^2 \alpha}.$$

Ἀλλὰ ἡ σφαῖρα Α ἰσορροπεῖ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς συνισταμένης F τῶν δύο ἀπώσεων καὶ τοῦ βάρους τῆς β. Ἡ συνισταμένη R τῶν δυνάμεων F καὶ β εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΟΑΙ. Τότε εἶναι:

$$\varepsilon\varphi\, \alpha = \frac{F}{\beta} = \frac{Q^2}{\sqrt{3} \cdot l^2\, \eta\mu^2 \alpha \cdot mg} \quad \text{ἄρα} \quad \varepsilon\varphi\alpha \cdot \eta\mu^2 \alpha = \frac{Q^2}{l^2\, mg\sqrt{3}}$$

$$\text{ἤ} \quad \frac{\varepsilon\varphi^3 \alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2 \alpha} = \frac{Q^2}{mg\, l^2 \sqrt{3}}.$$

Αὐτὴ εἶναι ἡ ζητουμένη σχέσις.

√**193** — *Μεταξὺ δύο μεταλλικῶν πλακῶν, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν* $l = 2$ cm, *ὑπάρχει ὁμογενὲς ἠλεκτρικὸν πεδίον. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν δύο πλακῶν εἶναι* 1200 volt. *Νὰ εὑρεθῇ πόση δύναμις ἐνεργεῖ ἐπὶ ἑνὸς θετικοῦ φορτίου* 20 C.G.S., *ὅταν τοῦτο τεθῇ ἐντὸς τοῦ πεδίου.*

Ἐὰν Η εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τότε ἐπὶ τοῦ φορτίου Q ἐξασκεῖται ὑπὸ τοῦ πεδίου δύναμις: $F = Q \cdot H$.

Ἀλλὰ ἡ σταθερὰ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου γνωρίζομεν ὅτι διδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $H = \dfrac{V}{l}$.

Ἄρα ἡ ζητουμένη δύναμις F εἶναι: $F = Q \times \dfrac{V}{l}$.

Εἰς μονάδας C.G.S. εὑρίσκομεν: $F = 20 \times \dfrac{4}{2} = 40$ δύναι.

√**194**. — *Ἐκ δύο μεταλλικῶν σφαιρῶν Α καὶ Β ἡ μὲν Α ἔχει ἀκτῖνα* $R_1 = 2$ cm *ἡ δὲ Β ἔχει* $R_2 = 3$ cm. *Αἱ δύο σφαῖραι φέρουν ἀντιστοίχως φορτία* $Q_1 = +18$ C.G.S. *καὶ* $Q_2 = -6$ C.G.S. *Αἱ δύο σφαῖραι ἔρχονται στιγμιαίως εἰς ἐπαφὴν ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην καὶ ἔπειτα ἀπομακρύνονται. Νὰ εὑρεθῇ τὸ φορτίον πού φέρει ἑκάστη σφαῖρα μετὰ τὴν ἐπαφήν της μὲ τὴν ἄλλην σφαῖραν.*

Ἄς καλέσωμεν Q_1' καὶ Q_2' τὰ φορτία τὰ ὁποῖα φέρουν τελικῶς αἱ σφαῖραι Α καὶ Β. Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου, πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2 = 18 - 6 = 12.$$

Ἡ χωρητικότης ἑκάστης σφαίρας εἶναι: $C_1 = 2$ C.G.S. καὶ $C_2 = 3$ C.G.S. Μετὰ τὴν ἐπαφὴν των αἱ δύο σφαῖραι ἔχουν τὸ αὐτὸ δυναμικὸν V. Ἑπομένως θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$V = \frac{Q_1'}{2} = \frac{Q_2'}{3}, \quad \text{ἤ} \quad \frac{Q_1'}{2} = \frac{Q_2'}{3} = \frac{Q_1' + Q_2'}{5} = \frac{12}{5}.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν:

$$Q_1' = 2 \times \frac{12}{5} = 4{,}8 \text{ C.G.S.} \qquad Q_2' = 3 \times \frac{12}{5} = 7{,}2 \text{ C.G.S.}$$

√ **195**. — *Δύο μεταλλικαὶ σφαῖραι Α καὶ Β εἶναι θετικῶς ἠλεκτρισμέναι καὶ ἔχουν ἀντιστοίχως ἀκτῖνας R_1 καὶ R_2, δυναμικὸν δὲ V_1 καὶ V_2. Συνδέομεν τὰς σφαίρας μεταξύ των μὲ λεπτὸν καὶ μακρὸν σύρμα. Διακόπτομεν ἔπειτα τὴν σύνδεσιν τῶν δύο σφαιρῶν καὶ φέρομεν τὴν μίαν πλησίον τῆς ἄλλης οὕτως ὥστε ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν κέντρων αὐτῶν νὰ εἶναι* d. — *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ δύναμις μὲ τὴν ὁποίαν ἀπωθοῦνται μεταξύ των αἱ δύο σφαῖραι. — 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνέργεια ἑκάστης σφαίρας πρὸ τῆς συνδέσεως καὶ μετὰ τὴν σύνδεσιν τῶν σφαιρῶν.*

Ἐφαρμογή. Ἀκτῖνες: $R_1 = 5$ cm · $R_2 = 20$ cm. *Δυναμικὸν εἰς μονάδας* C.G.S.: $V_1 = 100$ · $V_2 = 60$ · $d = 10$ cm.

1) Διὰ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις μὲ τὴν ὁποίαν ἀπωθοῦνται αἱ δύο σφαῖραι, μετὰ τὴν διακοπὴν τῆς συνδέσεώς των, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ φορτίον ἑκάστης σφαίρας. Ἡ χωρητικότης σφαίρας εἶναι ἀριθμητικῶς ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα της. Ἄρα αἱ χωρητικότητες τῶν σφαιρῶν Α καὶ Β εἶναι ἀντιστοίχως $C_1 = R_1$ καὶ $C_2 = R_2$. Πρὸ τῆς συνδέσεως, ἑκάστη σφαῖρα εἶχε φορτίον:

$$Q_A = C_1V_1 \quad \text{καὶ} \quad Q_B = C_2V_2 .$$

Ὅταν αἱ σφαῖραι συνεδέθησαν, ἀπέκτησαν τὸ αὐτὸ δυναμικὸν V. Ὥστε, μετὰ τὴν διακοπὴν τῆς συνδέσεως, ἑκάστη σφαῖρα ἔχει φορτίον:

$$Q_A{}' = C_1V \quad \text{καὶ} \quad Q_B{}' = C_2V .$$

Ἀλλὰ σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ποσότητος τοῦ ἠλεκτρισμοῦ, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$C_1V_1 + C_2V_2 = C_1V + C_2V \cdot \quad \text{ἄρα} \quad V = \frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2} . \qquad (1)$$

Ἡ μεταξὺ τῶν σφαιρῶν ἄπωσις εἶναι: $F = \dfrac{Q_A{}' \cdot Q_B{}'}{d^2}$.

Ἐφαρμογή. Εἶναι: $V = \dfrac{5 \times 100 + 20 \times 60}{5 + 20} = 68$ C.G.S.

Ἄρα: $Q_A{}' = 5 \times 68 = 340$ C.G.S. καὶ $Q_B{}' = 20 \times 68 = 1\,360$ C.G.S.

καὶ ἐπομένως: $F = \dfrac{340 \times 1\,360}{100} = 4\,624$ δύναι.

2) Πρὸ τῆς συνδέσεως ἑκάστη σφαῖρα εἶχεν ἐνέργειαν:

$$W_A = \frac{1}{2} C_1V_1{}^2 \quad \text{καὶ} \quad W_B = \frac{1}{2} C_2V_2{}^2 .$$

Μετὰ τὴν σύνδεσιν, ἡ ἐνέργεια ἑκάστης σφαίρας εἶναι:

$$W_A{}' = \frac{1}{2} C_1V^2 \quad \text{καὶ} \quad W_B{}' = \frac{1}{2} C_2V^2 .$$

Ἐφαρμογή. Πρὸ τῆς συνδέσεως εἶναι:

$$W_A{}' = \frac{1}{2} \times 5 \times 100^2 = 25\,000 \text{ ἔργια} \cdot \quad W_B{}' = \frac{1}{2} \times 20 \times 60^2 = 36\,000 \text{ ἔργια}.$$

Μετὰ τὴν σύνδεσιν εἶναι:

$$W_A{}' = \frac{1}{2} \times 5 \times 68^2 = 11\,560 \text{ ἔργια} \cdot \quad W_B{}' = \frac{1}{2} \times 20 \times 68^2 = 46\,240 \text{ ἔργια}.$$

196 — *Ἕκαστος τῶν ὁπλισμῶν ἑνὸς ἐπιπέδου πυκνωτοῦ ἔχει ἐπιφάνειαν* 1 m². *Ὁ ἕνας ὁπλισμὸς τοῦ πυκνωτοῦ τούτου συνδέεται μὲ τὴν γῆν, ὁ δὲ ἄλλος συνδέεται μὲ πηγὴν ἔχουσαν δυναμικὸν* 600 volt. *Μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν παρεμβάλλεται στρῶμα ἀέρος, τὸ ὁποῖον ἔχει πάχος* 1 mm.—*1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ χωρητικότης καὶ ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια τοῦ πυκνωτοῦ.—2) Πόση ποσότης θερμότητος λαμβάνεται κατὰ τὴν ἐκκένωσιν τοῦ πυκνωτοῦ ;*

1) Ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι :

$$C = \frac{1}{9 \times 10^{11}} \times \frac{S}{4\pi\varepsilon} = \frac{1}{9 \times 10^{11}} \times \frac{10^4}{4\pi \times 0{,}1} \text{ farad}$$

$$\text{ἢ} \qquad C = 0{,}0089 \text{ microfarad}.$$

Ἡ ἐνέργεια τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι :

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \times \frac{89}{10^4 \times 10^6} \times 36 \times 10^4 = \frac{16}{10^4} \text{ joule}$$

$$\text{ἢ} \qquad W = 16\,000 \text{ ἔργια}.$$

2) Ἡ ἐνέργεια τοῦ πυκνωτοῦ ἰσοδυναμεῖ μὲ ποσότητα θερμότητος :

$$Q = \frac{W}{J} = \frac{16}{10^4 \times 4{,}18} = \frac{384}{10^6} \text{ cal}.$$

197.— *Ἕνας πυκνωτὴς* A *ἔχει χωρητικότητα* 0,2 microfarad, *εἶναι φορτισμένος καὶ ἔχει δυναμικὸν* 100 volt. *Ἕνας δεύτερος πυκνωτὴς* B *ἔχει μικρὰν χωρητικότητα καὶ φορτίζεται συνδεόμενος διὰ μίαν στιγμὴν κατ' ἐπιφάνειαν μὲ τὸν πυκνωτὴν* A. *Μετὰ τὴν φόρτισίν του ὁ πυκνωτὴς* B *ἐκκενοῦται καὶ ἔπειτα φορτίζεται πάλιν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον. Αὐτὴ ἡ διαδοχικὴ φόρτισις καὶ ἐκκένωσις τοῦ πυκνωτοῦ* B *ἐπαναλαμβάνεται εἴκοσι φορὰς καὶ τότε εὑρίσκεται ὅτι τὸ δυναμικὸν τοῦ πυκνωτοῦ* A *ἔχει πέσει εἰς* 35 volt. *Πόση εἶναι ἡ χωρητηκότης τοῦ πυκνωτοῦ B ;*

Ἔστω Q τὸ φορτίον τὸ ὁποῖον φέρει ἀρχικῶς ὁ πυκνωτὴς A.

Τότε ἰσχύει ἡ σχέσις : $V = \dfrac{Q}{C}$. (1)

Ἐὰν C_1 εἶναι ἡ ἄγνωστος χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ B, τότε τὸ κοινὸν δυναμικὸν V_1, τὸ ὁποῖον ἀποκτᾷ τὸ σύστημα τῶν πυκνωτῶν A καὶ B κατὰ τὴν στιγμιαίαν σύνδεσίν των κατ' ἐπιφάνειαν, δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$V_1 = \frac{Q}{C + C_1}. \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{C}{C + C_1} \qquad \text{ἢ} \qquad V_1 = V \frac{C}{C + C_1}.$$

Μετὰ τὸν ἀποχωρισμὸν τῶν πυκνωτῶν τὸ φορτίον τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι Q′, ἰσχύει δὲ τότε ἡ σχέσις : $V_1 = \dfrac{Q'}{C}$. (3)

Κατὰ τὴν δευτέραν συνένωσιν τῶν πυκνωτῶν τὸ κοινὸν δυναμικὸν γίνεται V_2, ἰσχύει δὲ πάλιν ἡ σχέσις : $V_2 = \dfrac{Q'}{C + C_1}$. (4)

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (3) καὶ (4) εὑρίσκομεν:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{C}{C + C_1} \quad ἤ \quad V_2 = V_1 \frac{C}{C \times C_1}. \quad ἄρα \quad V_2 = V\left(\frac{C}{C + C_1}\right)^2.$$

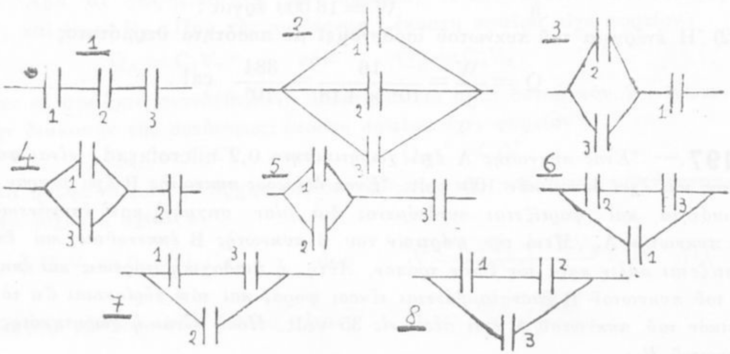
Μετὰ τὴν 20ὴν σύνδεσιν τῶν δύο πυκνωτῶν, τὸ κοινὸν δυναμικόν, ἤτοι καὶ τὸ δυναμικὸν τοῦ πυκνωτοῦ Α γίνεται:

$$V_{20} = V\left(\frac{C}{C + C_1}\right)^{20} \quad ἤ \quad 35 = 100 \times \left(\frac{0{,}2}{0{,}2 + C_1}\right)^{20}.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν: $C_1 = 0{,}0108$ microfarad.

√ **198**. — *Τρεῖς πυκνωταὶ ἔχουν ἀντιστοίχως χωρητικότητα 1, 2 καὶ 3 microfarad. Νὰ εὑρεθῇ πόση εἶναι ἡ χωρητικότης τῆς συστοιχίας τὴν ὁποίαν σχηματίζομεν μὲ τοὺς ἀνωτέρω τρεῖς πυκνωτάς, ὅταν τοὺς συνδυάσωμεν καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.*

Εἰς τὸ σχῆμα 26 φαίνονται ὅλοι οἱ δυνατοὶ συνδυασμοί, τοὺς ὁποίους ἠμποροῦμε νὰ ἔχωμεν μὲ τοὺς τρεῖς δοθέντας πυκνωτάς. Ἄς ὑπολογίσωμεν τὴν



Σχ. 151

χωρητικότητα τῆς συστοιχίας κατὰ τὴν σειρὰν μὲ τὴν ὁποίαν εἶναι ἀριθμημέναι αἱ ἀντίστοιχοι διατάξεις εἰς τὸ σχῆμα.

1) $\frac{1}{C_1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$. ἄρα $C_1 = \frac{6}{11}$ μ F.

2) $C_2 = 1 + 2 + 3 = 6$ μ F.

3) $\frac{1}{C_3} = \frac{1}{2+3} + \frac{1}{1} = \frac{6}{5}$. ἄρα $C_3 = \frac{5}{6}$ μ F.

4) $\frac{1}{C_4} = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. ἄρα $C_4 = 1\frac{1}{3}$ μ F.

5) $\frac{1}{C_5} = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. ἄρα $C_5 = 1\frac{1}{2}$ μ F.

6) $C_6 = \frac{1}{1/2 + 1/3} + 1 = 2\frac{1}{5}$ μ E.

7) $C_7 = \frac{1}{1 + 1/3} + 2 = 2\frac{3}{4}$ μ F.

8) $C_8 = \frac{1}{1 + 1/2} + 3 = 3\frac{2}{3}$ μ F.

199.— *Νὰ εὑρεθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ χωρητικότης πυκνωτοῦ ἔχοντος δυναμικὸν* 10 000 volt, *διὰ νὰ παραχθῇ κατὰ τὴν ἐκκένωσίν του ἔργον* 5 joule.

Κατὰ τὴν ἐκκένωσιν τοῦ πυκνωτοῦ παράγεται ἔργον: $W = \frac{1}{2} VC^2$.

Ἄρα ἡ χωρητικότης του εἶναι:

$$C = \frac{2W}{V^2} = \frac{2 \times 5}{10^8} = \frac{1}{10^7} \text{ farad} = 0{,}1 \, \mu F.$$

200.— *Ἕνας πυκνωτὴς ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἐπιπέδους πλάκας αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν μεταξύ των* 1 mm. *Ἑκάστη πλὰξ ἔχει ἐπιφάνειαν* 100 cm², *ὡς διηλεκτρικὸν δὲ εἶναι ὁ ἀήρ. Ὁ ἕνας ὁπλισμὸς τοῦ πυκνωτοῦ συνδέεται μὲ τὸ ἔδαφος, ὁ δὲ ἄλλος ὁπλισμός του συνδέεται μὲ μεταλλικὴν σφαῖραν ἀκτῖνος* 1 cm. *Νὰ εὑρεθῇ πόσον φορτίον πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς τὴν σφαῖραν ὥστε τὸ δυναμικόν της νὰ γίνῃ ἴσον μὲ* 100 *μονάδας* C.G.S.

Ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι:

$$C_1 = \frac{S}{4\pi d} = \frac{100}{4\pi \times 0{,}1} = 79{,}55 \text{ C.G.S.}$$

Ἡ σφαῖρα ἔχει χωρητικότητα: $C_2 = 1$ C.C.S. Ὁ ὁπλισμὸς τοῦ πυκνωτοῦ, ὁ ὁποῖος συνδέεται μὲ τὴν σφαῖραν, θὰ ἔχῃ τὸ ἴδιον δυναμικὸν μὲ τὴν σφαῖραν, ἑπομένως τὸ φορτίον θὰ κατανεμηθῇ ἐπὶ τοῦ συστήματος σφαῖρα — πυκνωτής. Τὸ σύστημα τοῦτο ἔχει χωρητικότητα:

$$C = C_1 + C_2 = 79{,}55 + 1 = 80{,}55 \text{ C.G.S.}$$

Ἄρα τὸ ζητούμενον φορτίον εἶναι:

$$Q = CV = 80{,}55 \times 100 = 8\,055 \text{ C.G.S.}$$

201.— *Πυκνωτὴς ἔχει χωρητικότητα* 0,1 μF *καὶ ἐκκενοῦται ἐντὸς σύρματος ἀπὸ μόλυβδον, τὸ ὁποῖον ἔχει διάμετρον* 0,2 mm. *Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἂν ἡ θερμοκρασία τοῦ σύρματος εἶναι* 0°, *τὸ μέγιστον μῆκος τοῦ σύρματος, τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ τακῇ κατὰ τὴν ἐκκένωσιν τοῦ πυκνωτοῦ, εἶναι* 10 cm. *Νὰ εὑρεθῇ ποῖον δυναμικὸν πρέπει νὰ ἀποκτήσῃ ὁ πυκνωτὴς διὰ νὰ τακῇ τὸ σύρμα. Θερμότης τήξεως τοῦ μολύβδου:* 5,4 cal/gr· *εἰδικὴ θερμότης τοῦ μολύβδου:* 0,03 cal/gr· *πυκνότης τοῦ μολύβδου:* 11,4 gr/cm³· *θερμοκρασία τήξεως τοῦ μολύβδου:* 325°· J = 4,17 joule/cal.

Τὸ σύρμα ἔχει μᾶζαν: $m = \pi \times 0{,}01^2 \times 10 \times 11{,}4 = 0{,}0358$ gr.

Τὸ σύρμα, διὰ νὰ τακῇ, ἀπορροφᾷ ποσότητα θερμότητος:

$$Q = m\,(325 \times 0{,}03 + 5{,}4) = 0{,}0358 \times 15{,}15 = 0{,}542 \text{ cal}$$

ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν:

$$W = JQ = 4{,}17 \times 0{,}542 = 2{,}26 \text{ joule.}$$

Ἡ ἐνέργεια αὐτὴ παράγεται κατὰ τὴν ἐκκένωσιν τοῦ πυκνωτοῦ.

Ἄρα ἔχομεν τὴν σχέσιν: $W = \frac{1}{2} C\,V^2 = 2{,}26$ joule.

Τὸ δυναμικὸν λοιπὸν τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι:

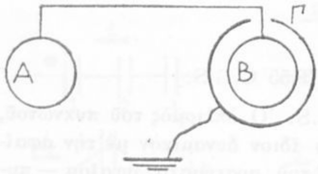
$$V = \sqrt{\frac{2W}{C}} = \sqrt{\frac{4{,}52 \times 10^6}{0{,}1}} = 6\,725 \text{ volt.}$$

202.— *Δύο μονωμέναι μταλλικαὶ σφαῖραι ἔχουν ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἀκτῖνα* 4 cm *καὶ δυναμικὸν* 100 volt. *Αἱ σφαῖραι συνδέονται μὲ λεπτὸν σύρμα. Ἡ σφαῖρα* B *περιβάλλεται ἔπειτα ἀπὸ ἕνα κοῖλον σφαιρικὸν ἀγωγὸν* Γ *ἀκτῖνος* 5 cm, *ὁ ὁποῖος, ἀποτελούμενος ἀπὸ δύο ἡμισφαίρια, περιβάλλει συγκεντρικῶς τὸν ἀγωγὸν* B. *Ὁ ἀγωγὸς* Γ *συνδέεται μὲ τὸ ἔδαφος. — 1) Νὰ εὑρεθῇ ποῖον εἶναι τελικῶς τὸ δυναμικὸν καὶ τὸ φορτίον τῶν ἀγωγῶν* A *καὶ* B. —*2) Ποία μεταβολὴ ἐπῆλθεν εἰς τὴν ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν τοῦ συστήματος;*

1) Ἀρχικῶς ἑκάστη σφαῖρα εἶχε φορτίον $4 \times \frac{100}{300}$ C.G.S., ἤτοι τὸ φορτίον τοῦ ὅλου συστήματος ἦτο:

$$Q = \frac{8}{3} \text{ C.G.S.}$$

Μετὰ τὴν προσθήκην τοῦ ἀγωγοῦ Γ τὸ φορτίον τοῦ συστήματος εἶναι τὸ αὐτό, κατανέμεται ὅμως διαφορετικά. Τὸ σύστημα τῶν ἀγωγῶν B καὶ Γ ἀποτελεῖ σφαιρικὸν πυκνωτὴν ὁ ὁποῖος ἔχει χωρητικότητα:



Σχ. 152

$$C_1 = \frac{R\,r}{R - r} = \frac{5 \times 4}{5 - 4} = 20 \text{ C.G.S.}$$

Ἡ σφαῖρα A ἔχει χωρητικότητα:

$$C_2 = 4 \text{ C.G.S.}$$

Ἐὰν V εἶναι τελικῶς τὸ κοινὸν δυναμικὸν τοῦ συστήματος καὶ Q_1, Q_2 εἶναι τελικῶς τὰ φορτία τοῦ πυκνωτοῦ καὶ τῆς σφαίρας A, τότε θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$V = \frac{Q_1}{20} = \frac{Q_2}{4} = \frac{Q_1 + Q_2}{24} = \frac{Q}{24}.$$

Ἄρα $\quad Q_1 = 20 \times \frac{Q}{24} = \frac{5}{6} \times \frac{8}{3} = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}$ C.G.S.

καὶ $\quad Q_2 = 4 \times \frac{Q}{24} = \frac{1}{6} \times \frac{8}{3} = \frac{4}{9}$ C.G.S.

Τὸ κοινὸν δυναμικὸν τοῦ συστήματος εἶναι:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{8}{3} : 24 = \frac{1}{9} \text{ C.G.S} = 33\frac{1}{3} \text{ volt.}$$

2) Ἀρχικῶς τὸ κοινὸν δυναμικὸν ἦτο $V_1 = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$ C.G.S. καὶ ἡ ἐνέργεια τοῦ συστήματος ἦτο:

$$W_1 = \frac{1}{2} QV_1 = \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \text{ ἔργια.}$$

Τελικῶς ἡ ἐνέργεια τοῦ συστήματος εἶναι:

$$W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{4}{27} \text{ ἔργια,}$$

Ἄρα ἡ προσθήκη τοῦ ἀγωγοῦ Γ συνετέλεσεν εἰς ἐλάττωσιν τῆς ἐνεργείας τοῦ συστήματος κατὰ $\quad W_1 - W = \frac{4}{9} - \frac{4}{27} = \frac{8}{27}$ ἔργια.

203.— *Ἡ χωρητικότης ἑνὸς πυκνωτοῦ Π εἶναι C = 0,2 μF. Ὁ ὁπλισμός του Α συνδέεται μὲ τὸ ἔδαφος, ἐνῷ ὁ ἄλλος ὁπλισμὸς του Β συνδέεται μὲ τὸν πόλον ἠλεκτροστατικῆς μηχανῆς, τοῦ ὁποίου τὸ δυναμικὸν εἶναι* 40 000 volt. — *1) Νὰ ὑπολογισθοῦν τὸ φορτίον καὶ ἡ ἐνέργεια τοῦ πυκνωτοῦ Π, ὡς καὶ ἡ ποσότης θερμότητος ἡ ὁποία ἠμπορεῖ νὰ ἀναπτυχθῇ, ἂν ἡ ἐκκένωσις γίνῃ διὰ μέσου ἑνὸς μεταλλικοῦ σύρματος.— 2) Ὁ πυκνωτὴς Π εἶναι φορτισμένος εἰς δυναμικὸν* 40 000 volt. *Συνδέομεν τὸν ὁπλισμὸν του Β μὲ τὸν ὁπλισμὸν Β′ ἑνὸς ἄλλου πυκνωτοῦ Π′ ἔχοντος χωρητικότητα* C′ = 0,8 microfarad *καὶ τοῦ ὁποίου ὁ ὁπλισμὸς Α′ συνδέεται μὲ τὸ ἔδαφος. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κοινὸν δυναμικὸν τοῦ ὁπλισμοῦ Β καὶ Β′.— 3) Νὰ ὑπολογισθῇ πόσον εἶναι εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν τὸ φορτίον ἑκάστου τῶν πυκνωτῶν Π καὶ Π′. Νὰ συγκριθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν φορτίων τούτων μὲ τὸ ἀρχικὸν φορτίον τοῦ πυκωτοῦ Π. — 4) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνέργεια ἑκάστου τῶν πυκνωτῶν Π καὶ Π′. Νὰ συγκριθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνεργειῶν τούτων μὲ τὴν ἀρχικὴν ἐνέργειαν τοῦ πυκνωτοῦ Π.*

Ὁ πυκνωτὴς Π ἔχει φορτίον :

$$Q = CV = \frac{0{,}2}{10^6} \times 4 \times 10^4 = 0{,}008 \text{ coulomb} .$$

Ἡ ἐνέργεια τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι :

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \times \frac{0{,}2}{10^6} \times 16 \times 10^8 = 160 \text{ joule} .$$

Ἐὰν ὅλη αὐτὴ ἡ ἐνέργεια μετατραπῇ εἰς θερμότητα, θὰ ἔχωμεν :

$$Q = \frac{W}{4{,}18} = \frac{160}{4{,}18} = 38{,}27 \text{ cal.}$$

2) Οἱ δύο πυκνωταὶ Π καὶ Π′ ἀποκτοῦν τὸ αὐτὸ δυναμικὸν V′. Ἡ ποσότης ἠλεκτρισμοῦ Q κατανέμεται τώρα καὶ εἰς τοὺς δύο πυκνωτὰς σύμφωνα μὲ τὴν σχέσιν :

$$Q = C \,.\, V' + C' . V' = V'(C + C').$$

Ἄρα τὸ κοινὸν δυναμικὸν τῶν ὁπλισμῶν Β καὶ Β′ εἶναι :

$$V' = \frac{Q}{C + C'} = \frac{0{,}008 \times 10^6}{0{,}2 + 0{,}8} = 8\,000 \text{ volt.}$$

3) Τὸ φορτίον ἑκάστου πυκνωτοῦ εἶναι :

τοῦ Π : $Q_1 = CV' = \dfrac{0{,}2 \times 8\,000}{10^6} = 0{,}0016$ coulomb

τοῦ Π′ : $Q_2 = C'V' = \dfrac{0{,}8 \times 8\,000}{10^6} = 0{,}0064$ coulomb

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν φορτίων τῶν δύο πυκνωτῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἀρχικὸν φορτίον τοῦ πυκνωτοῦ Π :

$$0{,}0016 + 0{,}0064 = 0{,}008 \text{ coulomb} .$$

4) Ἡ ἐνέργεια ἑκάστου πυκνωτοῦ εἶναι :

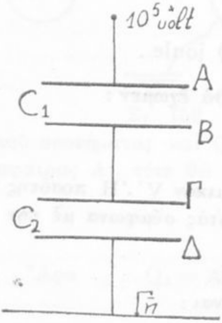
τοῦ Π : $W_1 = \dfrac{1}{2} CV'^2 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{0{,}2}{10^6} \times 64 \times 10^6 = 6{,}4$ joule

τοῦ Π′ : $W_2 = \dfrac{1}{2} C'V'^2 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{0{,}8}{10^6} \times 64 \times 10^6 = 25{,}6$ joule .

Ἡ ὅλη ἐνέργεια τῶν δύο πυκνωτῶν εἶναι : $6{,}4 + 25{,}6 = 32$ joule· ἐνῷ ἡ ἀρχικὴ ἐνέργεια τοῦ πυκνωτοῦ Π εἶναι 160 joule. Ἐσημειώθη λοιπὸν ἀπώλεια ἐνεργείας : $160 - 32 = 128$ joule, ἡ ὁποία μετετράπη εἰς θερμότητα.

204.— *Δύο ἐπίπεδοι πυκνωταί, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει χωρητικότητα* 0,2 μF *συνδέονται ὡς ἑξῆς : ὁ ὁπλισμὸς* A *τοῦ πρώτου πυκνωτοῦ συνδέεται μὲ ἀ-γωγὸν ἔχοντα σταθερὸν δυναμικὸν* 100 000 volt· *ὁ ἄλλος ὁπλισμὸς* B *συνδέεται μὲ τὸν ὁπλισμὸν* Γ *τοῦ δευτέρου πυκνωτοῦ, τοῦ ὁποίου ὁ ὁπλισμὸς* Δ *συνδέεται μὲ τὸ ἔδαφος.— 1) Ἂν ὁ ὁπλισμὸς* A *λάβῃ* Q coulomb, *νὰ σημειωθῇ ποῖα φορτία φέ-ρουν οἱ ἄλλοι ὁπλισμοί.— 2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ δυναμικὸν τῶν ὁπλισμῶν* B *καὶ* Γ. *Πόσον εἶναι τὸ ἀνωτέρω φορτίον* Q ; *— 3) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνέργεια ἡ ὁποία πα-ρέχεται κατὰ τὴν ἐκκένωσιν, ἂν συνδέσωμεν τοὺς ὁπλισμοὺς* A *καὶ* Δ. *Ἐὰν ἡ ἐκ-κένωσις αὐτὴ γίνῃ δι' ἑνὸς σύρματος ἔχοντος θερμοχωρητικότητα* K, *νὰ εὑρεθῇ ἡ ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ σύρματος, ἂν ὅλη αὐτὴ ἡ ἐνέργεια μετατρέπεται εἰς θερμότητα.*

1) Ἡ κατανομὴ τῶν ἀναπτυσσομένων ἠλεκτρικῶν φορτίων ἐπὶ τῶν τεσσάρων ἀγωγῶν εἶναι ἡ ἑξῆς :



Σχ. 153

ἐπὶ τοῦ A : $+Q$ ἐπὶ τοῦ B : $-Q$

ἐπὶ τοῦ Γ : $+Q$ ἐπὶ τοῦ Δ : $-Q$.

2) Ἂς ὀνομάσωμεν V_1 τὸ δυναμικὸν τοῦ A V' τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ μεταξὺ A καὶ B, καὶ V'' τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ μεταξὺ Γ καὶ Δ. Τότε θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις :

$$Q = V'C_1 \qquad Q = V''C_2 \qquad V_1 = V' + V''.$$

Ἐπειδὴ εἶναι $C_1 = C_2$ καὶ $V_1 = 10^5$ volt, εὑρίσκομεν :

$$V' = V'' = V_1 : 2 = 50\,000 \text{ volt}.$$

Ἄρα τὸ δυναμικὸν V τῶν ὁπλισμῶν B καὶ Γ εἶναι : $V = 50\,000$ volt.

Τὸ ζητούμενον φορτίον Q εἶναι :

$$Q = (V_1 - V)\,C_1 = \frac{50\,000 \times 0{,}2}{10^6} = 0{,}01 \text{ coulomb}.$$

3) Ὅταν συνδέσωμεν τοὺς ὁπλισμοὺς A καὶ Δ, ἡ ἐνέργεια ἡ ὁποία ἐλευθερώνεται κατὰ τὴν ἐκκένωσιν εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνεργειῶν τῶν δύο πυκνωτῶν. Ἕκαστος ὅμως πυκνωτὴς ἔχει ἐνέργειαν :

$$\frac{1}{2} \times \frac{0{,}2}{10^6} \times 25 \times 10^8 = 250 \text{ joule}.$$

Ὥστε ἡ ὅλη ἐνέργεια τῶν δύο πυκνωτῶν εἶναι :

$$W = 2 \times 250 = 500 \text{ joule}.$$

Ἂν ἡ ἐνέργεια αὐτὴ μετατραπῇ ὁλόκληρος εἰς θερμότητα, ἡ ὁποία παραμένει ἐπὶ τοῦ σύρματος τῆς ἐκκενώσεως, τότε ἡ ὕψωσις θ τῆς θερμοκρασίας τοῦ σύρματος εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{W}{4{,}18} = K \times \theta \qquad \text{ἄρα} \qquad \theta = \frac{500}{4{,}18 \times K}.$$

205.— *Πυκνωτὴς ἔχει χωρητικότητα* 0,01 μF *καὶ εἶναι φορτισμένος ὑπὸ τάσιν* 15 000 volt. — *1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ δαπανηθῇ διὰ τὴν φόρτισιν αὐτοῦ. Κατὰ τὴν ἐκκένωσιν τοῦ πυκνωτοῦ ἡ ἐνέργεια αὐτοῦ διέρχεται δι' ἑνὸς λεπτοῦ σύρματος βυθισμένου ἐντὸς ἑνὸς γραμμαρίου ὕδατος. Πόση εἶναι ἡ ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ ὕδατος; Ὅταν ὁ ἀνωτέρω πυκνωτὴς εἶναι φορτισμένος, συνδέομεν αὐτὸν ἐν παραλλήλῳ μὲ ἕνα ἄλλον πυκνωτήν, ὁ ὁποῖος ἀρχικῶς δὲν εἶναι φορτισμένος καὶ ἔχει χωρητικότητα* 0,005 μF. *Ἔπειτα δὲ ἐκφορτίζομεν τὸ σύστημα διὰ μέσου σύρματος βυθισμένου ἐντὸς ἑνὸς γραμμαρίου ὕδατος. Εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας εἶναι τώρα μικροτέρα ἀπὸ ἐκείνην τῆς προηγουμένης περιπτώσεως. Νὰ καθορισθῇ τί ἀπέγινεν ἡ ποσότης ἐνεργείας ἡ ὁποία δὲν ἐπανευρίσκεται εἰς τὸ ὕδωρ.*

Διὰ τὴν φόρτισιν τοῦ πυκνωτοῦ δαπανᾶται ἐνέργεια ἴση μὲ τὴν ἐνέργειαν τὴν ὁποίαν ἔχει ὁ πυκνωτής, ὅταν εἶναι φορτισμένος. Ἄρα εἶναι:

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \times \frac{0{,}01}{10^6} \times 15^2 \times 10^6 = 1{,}125 \text{ joule.}$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ θερμοχωρητικότης τοῦ σύρματος εἶναι ἀσήμαντος, τότε ὅλη ἡ ἀνωτέρω ὑπολογισθεῖσα ἐνέργεια δαπανᾶται διὰ τὴν ὕψωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ ὕδατος κατὰ θ°. Ἡ ὕψωσις αὕτη εἶναι:

$$\theta = 1{,}125 : 4{,}18 = 0{,}27^\circ.$$

2) Ὁ πρῶτος πυκνωτὴς ἔχει φορτίον:

$$Q = CV = \frac{0{,}01}{10^6} \times 15 \times 10^3 = \frac{15}{10^5} \text{ coulomb .}$$

Ἡ χωρητικότης τῆς συστοιχίας τῶν δύο πυκνωτῶν εἶναι:

$$C_1 = \frac{0{,}01}{10^6} + \frac{0{,}005}{10^6} = \frac{0{,}015}{10^6} \text{ farad .}$$

Τὸ δυναμικὸν V_1 τῆς συστοιχίας εἶναι τώρα:

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{15}{10^5} : \frac{0{,}015}{10^6} = 10^4 \text{ volt.}$$

Κατὰ τὴν ἐκκένωσιν ἐλευθερώνεται ἐνέργεια:

$$W_1 = \frac{1}{2}C_1V_1^2 = \frac{1}{2} \times \frac{0.015}{10^6} \times 10^8 = 0{,}75 \text{ joule .}$$

Ἡ ὕψωσις τώρα τῆς θερμοκρασίας τοῦ 1 gr ὕδατος θὰ εἶναι:

$$\theta_1 = 0{,}75 : 4{,}18 = 0{,}18^\circ.$$

Μεταξὺ τῶν δύο ἐκκενώσεων παρατηρεῖται ἀπώλεια ἐνεργείας ἴση μέ:

$$1{,}125 - 0{,}75 = 0{,}375 \text{ joule}$$

ἡ ἐνέργεια αὐτὴ ἐμφανίζεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἐπὶ τῶν ἀγωγῶν κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς συνδέσεως τῶν δύο πυκνωτῶν.

206.— *Μία στήλη Σ ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* 2 volt *καὶ τροφοδοτεῖ κύκλωμα ἀποτελούμενον ἀπὸ πυκνωτὴν* ΑΒ *χωρητικότητος* 4 μF *καὶ ἀπὸ τρεῖς πυκνωτὰς* ΒΓ *συνδεδεμένους παραλλήλως, ἔχοντας χωρητικότητας* 1 μF, 2 μF *καὶ* 3 μF.—*1)* ***Νὰ*** *εὑρεθῇ τὸ φορτίον τὸ ὁποῖον φέρει ἡ συστοιχία τῶν πυκνωτῶν ὡς καὶ τὸ φορτίον ποὺ φέρει ἕκαστος πυκνωτής. Ἐπίσης νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαφοραὶ δυναμικοῦ μεταξὺ* Α,Β *καὶ* Β,Γ. — *2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνέργεια ἡ ὁποία ἀπο-*

ταμιεύεται ἐπὶ ἑκάστου πυκνωτοῦ, ἡ ἐνέργεια τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ στήλη καὶ ἡ ἐνέργεια ἡ ὁποία χάνεται ὑπὸ μορφὴν θερμότης εἰς τοὺς διαφόρους ἀγωγοὺς τῆς συνδεσμολογίας.

Οἱ μεταξὺ Β καὶ Γ τρεῖς πυκνωταὶ ἰσοδυναμοῦν μὲ ἕνα πυκνωτὴν ἔχοντα χωρητικότητα : $C_2 = 1 + 2 + 3 = 6\ \mu F$.

Οἱ μεταξὺ Α καὶ Γ πυκνωταὶ ἰσοδυναμοῦν μὲ πυκτωτὴν ἔχοντα χωρητικότητα C τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} \qquad \text{ἄρα} \qquad C = 2{,}4\ \mu F.$$

Ὁλόκληρος ἡ συστοιχία τῶν συσσωρευτῶν φέρει φορτίον :

$$Q = CV = \frac{2{,}4}{10^6} \times 2 = \frac{4{,}8}{10^6}\ \text{coulomb}.$$

Τόσον εἶναι καὶ τὸ φορτίον τὸ ὁποῖον φέρει ὁ πυκνωτὴς ΑΒ καὶ ὁ ἰσοδύναμος πρὸς τοὺς τρεῖς πυκνωτὰς ΒΓ. Ἂν ὀνομάσωμεν V_1 καὶ V_2 ἀντιστοίχως τὰς διαφορὰς δυναμικοῦ μεταξὺ Α,Β καὶ Β,Γ τότε θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις :

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \qquad \text{καὶ} \qquad V_2 = \frac{Q}{C_2}.$$

Ἄρα εἶναι : $V_1 = \frac{4{,}8}{10^6} : \frac{4}{10^6} = 1{,}2$ volt $\quad V_2 = \frac{4{,}8}{10^6} : \frac{6}{10^6} = 0{,}8$ volt.

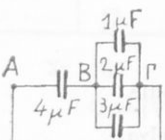
Ἕκαστος τῶν τριῶν πυκνωτῶν, τῶν εὑρισκομένων μεταξὺ Β καὶ Γ φέρει ἀντιστοίχως φορτίον:

$$q_1 = 0{,}8 \times 1 \times 10^{-6} = 0{,}8 \times 10^{-6}\ \text{coulomb}$$
$$q_2 = 0{,}8 \times 2 \times 10^{-6} = 1{,}6 \times 10^{-6}\ \text{—}$$
$$q_3 = 0{,}8 \times 3 \times 10^{-6} = 2{,}4 \times 10^{-6}\ \text{—}$$

2) Ὁ πυκνωτὴς ΑΒ φέρει ἐνέργειαν :

$$W_1 = \frac{1}{2} QV_1 = \frac{1}{2} \times \frac{4{,}8}{10^6} \times 1{,}2 = 2{,}88 \times 10^{-6}\ \text{joule}.$$

Ἕκαστος τῶν τριῶν πυκνωτῶν ΒΓ φέρει ἀντιστοίχως ἐνέργειαν :



Σχ. 154

$$W' = \frac{1}{2} q_1 V_2 = \frac{1}{2} \times \frac{0{,}8}{10^6} \times 0{,}8 = \frac{0{,}32}{10^6}\ \text{joule}$$

$$W'' = \frac{1}{2} q_2 V_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1{,}6}{10^6} \times 0{,}8 = \frac{0{,}64}{10^6}\ \text{—}$$

$$W''' = \frac{1}{2} q_3 V_2 = \frac{1}{2} \times \frac{2{,}4}{10^6} \times 0{,}8 = \frac{0{,}96}{10^6}\ \text{—}$$

Ἡ ὅλη ἐνέργεια ἡ ὁποία εἶναι ἀποταμιευμένη εἰς τὴν συστοιχίαν τῶν πυκνωτῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς ἐνεργείας τῶν διαφόρων πυκνωτῶν :

$$W = W_1 + (W' + W'' + W''') = 4{,}8 \times 10^{-6}\ \text{joule}.$$

Ἡ ἐνέργεια αὐτὴ ἠμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ καὶ ἀμέσως :

$$W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \times \frac{4{,}8}{10^6} \times 2 = 4{,}8 \times 10^{-6}\ \text{joule}.$$

Ἡ στήλη παρέχει ἐνέργειαν :

$$W' = EQ = 2 \times 4{,}8 \times 10^{-6} = 9{,}6 \times 10^{-6}\ \text{joule}.$$

Ἀπὸ τὴν ἐνέργειαν αὐτὴν τὸ ἥμισυ ἀποταμιεύεται ἐπὶ τῶν πυκνωτῶν καὶ τὸ ἄλλο ἥμισυ δαπανᾶται ἐπὶ τῶν ἀγωγῶν λόγῳ τοῦ φαινομένου τοῦ Joule.

207. — *Οἱ ὁπλισμοὶ ἑνὸς ἐπιπέδου πυκνωτοῦ ἔχουν ἐπιφάνειαν ἑνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου καὶ χωρίζονται μεταξύ των μὲ στρῶμα ἀέρος πάχους 5 mm. Μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν δημιουργεῖται διαφορὰ δυναμικοῦ 3 000 volt. — 1) Νὰ εὑρεθῇ μὲ πόσην δύναμιν ἕλκονται οἱ δύο ὁπλισμοὶ τοῦ πυκνωτοῦ καὶ νὰ ἐκφρασθῇ αὕτη εἰς γραμμάρια βάρους.— 2) Τὸ μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν στρῶμα τοῦ ἀέρος ἀντικαθίσταται μὲ στρῶμα διηλεκτρικοῦ, τοῦ αὐτοῦ πάχους καὶ εἰδικῆς ἐπαγωγικῆς ἱκανότητος 5,8. Τὸ δυναμικὸν τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι πάλιν 3 000 volt. Πόση εἶναι τότε ἡ ἐνέργεια τοῦ πυκνωτοῦ ;—3) Συνδέομεν τοὺς δύο ὁπλισμοὺς μὲ ἕνα κύκλωμα, τοῦ ὁποίου ἕνα τμῆμα παρουσιάζει ἀντίστασιν. Τὸ τμῆμα αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ μεταλλικὸν σύρμα τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 20 cm, διάμετρον 0,2 mm, πυκνότητα 7,80 gr/cm³ καὶ εἰδικὴν θερμότητα 0,11 cal/gr. Τὸ σύρμα τοῦτο εὑρίσκεται ἐντὸς σφαιρικοῦ δοχείου τὸ ὁποῖον ἔχει ὄγκον 100 cm³ καὶ περιέχει ξηρὸν ἀέρα θερμοκρασίας 20° καὶ ὑπὸ πίεσιν τὴν κανονικήν. Τὸ δοχεῖον συγκοινωνεῖ μὲ ἀνοικτὸν μανόμετρον περιέχον ὕδωρ. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἐκκένωσις εἶναι ταχυτάτη καὶ ὅτι κατ' ἀρχὰς ὁλόκληρος ἡ ἐνέργεια τοῦ πυκνωτοῦ δαπανᾶται διὰ νὰ θερμανθῇ μόνον τὸ σύρμα. Πόση εἶναι ἡ θερμοκρασία τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ τὸ σύρμα ; Ἔπειτα ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἐνέργεια τοῦ πυκνωτοῦ δαπανᾶται διὰ τὴν θέρμανσιν τοῦ σύρματος καὶ τοῦ ἀέρος τοῦ δοχείου. Πόση εἶναι ἡ ἀνύψωσις τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ ἀνοικτοῦ σωλῆνος τοῦ μανομέτρου, ἂν πρὸ τῆς ἐκκενώσεως ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος ἐντὸς τῶν δύο σωλήνων τοῦ μανομέτρου εὑρίσκετο εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον ; Δεχόμεθα ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος μένει ἀμετάβλητος. Ἀριθμητικὰ δεδομένα : g = 981 C.G.S.· συντελεστὴς διαστολῆς τῶν ἀερίων : α = 0,0037· πυκνότης τοῦ ἀέρος ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας : d = 0,00129 gr/cm³· πυκνότης τοῦ Hg : d = 13,6 gr/cm³· εἰδικὴ θερμότης τοῦ ἀέρος ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον :* $c_v = 0{,}170$ cal/gr.

1) Ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ, ὅταν ἔχῃ ὡς διηλεκτρικὸν τὸν ἀέρα, εἶναι :

$C_0 = \dfrac{S}{4\pi\varepsilon}$. Ὁ πυκνωτὴς φέρει τότε φορτίον : $Q = C_0 V$.

Πολὺ πλησίον τοῦ ἑνὸς ὁπλισμοῦ τὸ ἠλεκτρικὸν πεδίον ἔχει ἔντασιν ;

$$E = 2\pi\sigma = 2\pi \times \frac{Q}{S}.$$

Ἡ δύναμις, ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ φορτίου Q, εἶναι :

$$F = Q.E = 2\pi\frac{Q^2}{S} \qquad \text{ἢ} \qquad F = 2\pi\frac{C_0^2V^2}{S} = \frac{SV^2}{8\pi\varepsilon^2}.$$

Ἐπειδὴ εἶναι : $S = 10\,000$ cm²· $\varepsilon = 0{,}5$ cm· $V = 10$ C.G.S., ἡ τελευταία σχέσις δίδει :

$$F = \frac{10^4 \times 10^2}{8\pi \times 0{,}5^2} = 159 \times 10^3 \text{ δύναι} = 162 \text{ gr}^* .$$

2) Ὅταν ὁ ἀνωτέρω πυκνωτὴς ἔχῃ ἀντὶ τοῦ ἀέρος ἄλλο διηλεκτρικόν, τότε ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι :

$$C = k\frac{S}{4\pi\varepsilon} = 5{,}8 \times \frac{10^4}{4\pi \times 0{,}5} = 9\,222 \text{ C.G.S.}$$

Ἡ ἐνέργεια τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι :

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \times 9\,222 \times 10^2 = 461\,000 \text{ ἔργια} = 0{,}0\,461 \text{ joule}.$$

3) Κατὰ τὴν ἐκκένωσιν τοῦ πυκνωτοῦ ὁλόκληρος ἡ ἐνέργεια αὐτοῦ μετατρέπεται εἰς θερμότητα, παραμένουσαν ἐπὶ τοῦ σύρματος. Ἡ ἐνέργεια τοῦ πυκνωτοῦ ἰσοδυναμεῖ μὲ ποσότητα θερμότητος: $q = \dfrac{0{,}0461}{4{,}18}$ cal.

Τὸ σύρμα ἔχει μᾶζαν: $m = 20 \times \pi \times \left(\dfrac{1}{100}\right)^2 \times 7{,}8 = \dfrac{\pi \times 15{,}6}{1\,000}$ gr

καὶ θερμοχωρητικότητα $mc = \dfrac{\pi \times 15{,}6 \times 0{,}11}{1\,000} = \dfrac{5{,}4}{1\,000}$.

Ἐὰν θ εἶναι ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ σύρματος, τότε ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$q = mc\,(\theta - 20) \qquad \text{ἄρα} \qquad \theta = 20 + \frac{q}{mc}$$

$$\text{ἢ} \qquad \theta = 20 + \frac{0{,}0461}{4{,}18 \times 0{,}054} = 22{,}05^\circ.$$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ ἐνέργεια τοῦ πυκνωτοῦ κατανέμεται εἰς τὸ σύρμα καὶ τὸν ἀέρα τοῦ δοχείου ἀναλόγως πρὸς τὰς θερμοχωρητικότητας αὐτῶν, οὕτως ὥστε τὸ σύρμα καὶ ὁ ἀὴρ νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν τελικὴν θερμοκρασίαν.

Ὁ ἀὴρ ἔχει μᾶζαν: $m' = 100 \times \dfrac{0{,}00129}{1 + 20 \times 0{,}0037} = 0{,}120$ gr·

ἡ δὲ θερμοχωρητικότης του ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον εἶναι:

$$m'c_v = 0{,}17 \times 0{,}120 = 0{,}0204.$$

Τὸ σύρμα καὶ ὁ ἀὴρ ἔχουν θερμοχωρητικότητα συνολικῶς:

$$mc + m'c_v = 0{,}0054 + 0{,}0204 = 0{,}0258.$$

Τὸ σύρμα ἀπορροφᾷ τὰ $\dfrac{54}{258}$ τῆς ὅλης θερμικῆς ἐνεργείας· ἐπομένως ἡ μεταβολὴ τῆς θερμοκρασίας του εἶναι τώρα: $\Delta\theta = \dfrac{54}{258} \times 2{,}05 = 0{,}429^\circ$.

Ὁ ἀὴρ θερμαίνεται ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον. Ἄρα ἡ πίεσίς του δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$p = p_0\,(1 + \alpha\,\theta). \qquad (1)$$

Ἐὰν ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀερίου γίνῃ θ + Δθ, ἡ πίεσίς του γίνεται:

$$p + \Delta p = p\,[\,1 + \alpha\,(\theta + \Delta\theta)\,] \qquad \text{ἤτοι} \qquad \Delta p = p_0\,\alpha\,\Delta\theta. \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\alpha\,\Delta\theta}{1 + \alpha\,\theta} \qquad \text{καὶ} \qquad \Delta p = \frac{\alpha\,\Delta\theta}{1 + \alpha\,\theta}\,p.$$

Ἄρα ἡ αὔξησις τῆς πιέσεως τοῦ ἀέρος εἶναι:

$$\Delta p = \frac{0{,}0037 \times 0{,}429}{1 + 20 \times 0{,}0037}\,p = 0{,}00148\,p\cdot$$

ἡ αὔξησις λοιπὸν τῆς πιέσεως τοῦ ἀέρος εἶναι ἴση μὲ τὰ $\dfrac{148}{10^5}$ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως. Ἡ αὔξησις αὐτὴ ὑπολογιζομένη εἰς cm στήλης ὕδατος εἶναι:

$$\Delta p = \frac{148}{10^5} \times 76 \times 13{,}6 = 1{,}53 \text{ cm ὕδατος}.$$

Τὸ ὕδωρ θὰ ἀνυψωθῇ ἐντὸς τοῦ ἀνοικτοῦ σωλῆνος κατὰ 1,53 cm.

II. ΑΝΤΙΣΤΑΣΙΣ - ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ JOULE

208.— *Ένα σύρμα χάλκινον έχει μάζαν* 4,5 kg *και αντίστασιν* 14,7 ohm. *Νά εύρεθῇ τό μῆκος καί ἡ διάμετρος τοῦ σύρματος. Εἰδική μᾶζα τοῦ χαλκοῦ:* $d = 8{,}93\ gr/cm^3$· *εἰδική ἀντίστασις αὐτοῦ* : $\rho = 1{,}8 \times 10^{-6}$ ohm-cm.

Ἂν ὀνομάσωμεν δ τήν διάμετρον καί l τό μῆκος τοῦ σύρματος, τότε ἡ μᾶζα τοῦ σύρματος δίδεται ἀπό τήν σχέσιν: $$m = d\frac{\pi\delta^2}{4}l. \qquad (1)$$

Ἡ δέ ἀντίστασις R τοῦ σύρματος εἶναι: $$R = \rho\frac{l}{\sigma} = \rho l\frac{4}{\pi\delta^2}. \qquad (2)$$

Ἀπό τήν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν: $$\delta^2 l = \frac{4m}{d\pi}. \qquad (3)$$

καί ἀπό τήν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν: $$\frac{l}{\delta^2} = \frac{R\pi}{4\rho}. \qquad (4)$$

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν κατά μέλη τάς ἐξισώσεις (3) καί (4) λαμβάνομεν:
$$l^2 = \frac{mR}{d\rho} = \frac{4\,500 \times 14{,}7 \times 10^6}{8{,}93 \times 1{,}8},$$
καί ἑπομένως: $$l = \sqrt{41{,}2 \times 10^8} = 6{,}42 \times 10^4\ cm = 642\ m.$$
Ἀντικαθιστῶντες τήν τιμήν αὐτήν τοῦ l εἰς τήν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν τήν διάμετρον:
$$\delta = \sqrt{\frac{4m}{d\,l\,\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 4\,500}{8{,}93 \times 6{,}42 \times 10^4 \times 3{,}142}} = 0{,}10\ cm = 1\ mm.$$

209.— *Ἠλεκτρική κουζίνα ἔχει ἰσχύν καταναλώσεως* 500 watt *καί τροφοδοτεῖται μέ ρεῦμα ἐντάσεως* 4 ampère. — *1) Πόση εἶναι ἡ ἀντίστασις τῆς συσκευῆς; — 2) Εἰς πόσον χρόνον ἠμπορεῖ νά θερμάνῃ μέχρις βρασμοῦ ἥμισυ λίτρον ὕδατος πού ἔχει ἀρχικήν θερμοκρασίαν* 20°, *ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι δέν συμβαίνει καμμία ἀπώλεια θερμότητος; — 3) Εἰς τήν πραγματικότητα ἡ συσκευή, διά νά φέρῃ τό ἀνωτέρω ἀποτέλεσμα, χρειάζεται* 10 *λεπτά· πόσον μέρος τῆς παραγομένης θερμότητος χρησιμοποιοῦμεν; — 4) Πόση εἶναι εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἡ δαπάνη, ἐάν πληρώνωμεν* 360 *δρχ. τό ὡριαῖον κιλοβάτ;*

1) Ἀφοῦ ἡ ἰσχύς εἶναι P = 500 watt καί ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι I = 4 ampère, ἡ ἀντίστασις R προσδιορίζεται ἀπό τήν σχέσιν: $P = RI^2$·

ἤτοι ἔχομεν: $$R = \frac{P}{I^2} = \frac{500}{16} = 31\ \text{ohm περίπου.}$$

2) Διά νά θερμανθῇ τό ἥμισυ-λίτρον ὕδατος ἀπό 20° εἰς 100°, χρειάζεται ποσόν θερμότητος: $$Q = 500 \times 80 = 40\,000\ \text{cal.}$$

Ἄρα σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Joule ἔχομεν:

$$Q = 0{,}24 \cdot RI^2 t \qquad \text{ἢ} \qquad Q = 0{,}24 \cdot P \cdot t$$

καὶ $$t = \frac{40\,000}{0{,}24 \times 500} = 333 \text{ δευτερόλεπτα}\cdot$$

ἤτοι διὰ νὰ θερμανθῇ τὸ ὕδωρ χρειάζονται 5,5 λεπτὰ περίπου.

3) Ἐὰν δὲν εἴχαμε καμμίαν ἀπώλειαν θερμότητος, θὰ ἔπρεπε νὰ καταναλωθῇ ἐνέργεια: $W = P \times 333$ joule·

ἀλλ' εἰς τὴν πραγματικότητα πρέπει νὰ καταναλωθῇ: $W' = P \times 600$ joule.

Ἄρα, ἀπὸ τὴν παραγομένην θερμότητα χρησιμοποιοῦμεν μόνον τὸ κλάσμα:

$$\frac{W}{W'} = \frac{333}{600} = 0{,}56 \qquad \text{ἢ} \qquad \text{τὰ } 56\,\%.$$

4) Εἰς μίαν ὥραν ἡ κατανάλωσις τῆς συσκευῆς ἀνέρχεται εἰς 0,5 ὡριαῖα κιλοβάτ. Ὥστε εἰς 10′, ἤτοι εἰς 1/6 ὥρας, ἡ κατανάλωσις ἀνέρχεται εἰς:

$$0{,}5 \times 1/6 = 1/12 \text{ ὡριαῖα κιλοβάτ.}$$

Ἄρα ἡ δαπάνη εἶναι: $360 \times 1/12 = 30$ δραχμαί.

√**210**.— *Ἕνας ἀπολυμαντικὸς κλίβανος χάνει κατὰ δευτερόλεπτον 6 θερμίδας καὶ διὰ κάθε ἕνα βαθμὸν κατὰ τὸν ὁποῖον ὑπερέχει ἡ θερμοκρασία του ἀπὸ τὴν θερμοκρασίαν τοῦ περιβάλλοντος. Διὰ νὰ ἰσοφαρίσωμεν αὐτὴν τὴν ἀπώλειαν θερμότητος, θέτομεν ἐντὸς τοῦ κλιβάνου μίαν ἠλεκτρικὴν ἀντίστασιν* R *διαρρεομένην ἀπὸ ρεῦμα καταλλήλου ἐντάσεως εἰς τρόπον ὥστε ὁ κλίβανος νὰ ἔχῃ σταθερὰν θερμοκρασίαν, ἀνωτέραν κατὰ* 10^0 C *ἀπὸ τὴν θερμοκρασίαν τοῦ περιβάλλοντος. Ἡ ἀντίστασις* R *ἀποτελεῖται ἀπὸ σύρμα τομῆς* 1 mm², *καὶ εἰδικῆς ἀντιστάσεως* $\rho = 107$ microhm — cm *ἡ ὁποία εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν θερμοκρασίαν. Εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως* R *ἐφαρμόζεται σταθερὰ διαφορὰ δυναμικοῦ ἴση μὲ* 110 volt. *Νὰ εὑρεθῇ: 1) Ἡ ἐντὸς τῆς ἀντιστάσεως δαπανωμένη ἰσχύς.— 2) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος. — 3) Ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος. 4) Τὸ μῆκος τοῦ σύρματος.*

1) Κατὰ δευτερόλεπτον πρέπει νὰ προσφέρεται εἰς τὸν κλίβανον ποσότης θερμότητος: $Q = 6 \times 10 = 60$ cal

ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μέ: $60 \times 4{,}18 \doteq 250{,}8$ joule.

Ἄρα ἡ προσφερομένη ἰσχὺς θὰ εἶναι: $P = 250{,}8$ watt.

2) Ἡ ἰσχὺς αὐτὴ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $P = VI$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν ὑπολογίζομεν τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{250{,}8}{110} = 2{,}28 \text{ ampère.}$$

3) Ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{110}{2{,}28} = 48{,}2 \text{ ohm.}$$

4) Τὸ μῆκος l τοῦ σύρματος ὑπολογίζεται ἀπὸ τὸν νόμον τῆς ἀντιστάσεως:

$$l = \frac{R\sigma}{\rho} = \frac{48{,}2 \times 0{,}01 \times 10^6}{107} = 4\,505 \text{ cm} = 45{,}05 \text{ m.}$$

211. — *Ἐντὸς 5 λεπτῶν θέλομεν νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία ἑνὸς λίτρου ὕδατος ἀπὸ 10° εἰς 100°. Πρὸς τοῦτο θὰ βυθίσωμεν ἐντὸς τοῦ ὕδατος ἕνα σύρμα διὰ τοῦ ὁποίου θὰ διαβιβάσωμεν ἠλεκτρικὸν ρεῦμα ὑπὸ τάσιν 125 volt.—1) Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος τούτου;—2) Ἐὰν ἡ διάμετρος τοῦ ἀνωτέρω σύρματος εἶναι 0,4 mm καὶ ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι σύρμα ἐκ τοῦ αὐτοῦ μετάλλου, διαμέτρου 1 mm, ἔχει ἀντίστασιν 0,4 ohm κατὰ μέτρον, νὰ εὑρεθῇ πόσον μῆκος σύρματος πρέπει νὰ λάβωμεν. — 3) Νὰ ὑπολογισθῇ πόσον ἀξίζει ἡ δαπανηθεῖσα ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια, ἐὰν ἡ τιμὴ αὐτῆς εἶναι 500 δραχμαὶ κατὰ ὡριαῖον κιλοβάτ.*

1) Διὰ νὰ ὑψωθῇ κατὰ 90° ἡ θερμοκρασία 1 000 gr ὕδατος, ἀπαιτεῖται ποσότης θερμότητος: $Q = 90\,000$ cal, ἤτοι κατὰ δευτερόλεπτον:

$$Q' = \frac{90\,000}{60 \times 5} = 300 \text{ cal/sec.}$$

Ἄρα ἡ δαπανωμένη ἰσχὺς πρέπει νὰ εἶναι:

$$P = JQ' = 4{,}18 \times 300 = 1\,250 \text{ watt.}$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $P = VI$, συνάγεται ὅτι ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος θὰ εἶναι:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{1\,250}{125} = 10 \text{ ampère.}$$

Ἐπομένως ἡ ἀντίστασις R τοῦ σύρματος πρέπει νὰ εἶναι:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{125}{10} = 12{,}5 \text{ ohm.}$$

2) Ἐπειδὴ 1 m σύρματος διαμέτρου 1 mm ἔχει ἀντίστασιν 0,4 ohm, ἕπεται ὅτι 1 m σύρματος διαμέτρου 0,4 mm θὰ ἔχῃ ἀντίστασιν $\frac{0{,}4}{0{,}4^2} = 2{,}5$ ohm.

Διὰ νὰ ἔχωμεν ἀντίστασιν 12,5 ohm, πρέπει νὰ λάβωμεν σύρμα μήκους:

$$l = \frac{12{,}5}{2{,}5} = 5 \text{ m.}$$

3) Ἐντὸς 5 λεπτῶν, ἤτοι ἐντὸς 1/12 τῆς ὥρας, δαπανᾶται ἐνέργεια:

$$w = P \times 1/12 = 1{,}25 \times 1/12 = 0{,}1 \text{ kWh.}$$

Ἡ δαπανηθεῖσα ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια ἀξίζει:

$$500 \times 0{,}1 = 50 \text{ δραχμάς.}$$

212. — *Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἠλεκτρικὸν βραστῆρα, ὁ ὁποῖος ἐντὸς 5 λεπτῶν νὰ θερμαίνῃ ἕνα λίτρον ὕδατος ἀπὸ 15° εἰς 100°. Πρὸς τοῦτο βυθίζομεν μίαν ἀντίστασιν R ἐντὸς τοῦ ὕδατος ἑνὸς δοχείου, μονωμένου θερμικῶς, καὶ ἐφαρμόζομεν εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R τάσιν 120 volt. Τὸ ρεῦμα εἶναι συνεχές, τὸ δὲ δοχεῖον ἔχει χωρητικότητα 1 λίτρου, μᾶζαν 100 gr καὶ εἰδικὴν θερμότητα 0,2 cal/gr. — 1) Ἂν δεχθῶμεν ὅτι αἱ ἀπώλειαι θερμότητος εἶναι ἀσήμαντοι, νὰ εὑρεθῇ ἡ καταναλισκομένη ἠλεκτρικὴ ἰσχύς, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ ἡ ἀντίστασις R.— 2) Διὰ νὰ πραγματοποιήσωμεν τὴν ἀντίστασιν R χρησιμοποιοῦμεν σύρμα, τὸ ὁποῖον ἔχει εἰδικὴν ἀντίστασιν $\rho = 80$ microhm-cm, πυκνότητα $d = 8$ gr/cm³ καὶ μᾶζαν $m = 8$ gr. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος καὶ ἡ διάμετρος τοῦ σύρματος, τὸ ὁποῖον θὰ χρησιμοποιήσωμεν. Ἡ θερμοχωρητικότης τοῦ σύρματος εἶναι ἀσήμαντος. — 3) Τὸ ὡριαῖον κιλοβὰτ στοιχίζει 300 δραχμάς. Πόσον κοστίζει ἡ ἀνωτέρω θέρμανσις τοῦ ὕδατος; Τὸ κυβικὸν μέτρον τοῦ φωταερίου στοιχίζει 1 000 δραχμὰς* *καὶ κατὰ τὴν καῦσιν του ἐλευθερώνονται* 5 200 kcal. *Ἂν δεχθῶμεν ὅτι, κατὰ τὴν θέρμασιν διὰ φωταερίου εἰς τὸν ἐλεύθερον ἀέρα, ἔχομεν ἀπόδοσιν* 30 %, *νὰ εὑρεθῇ πόσα λίτρα ὕδατος θὰ ἠμπορούσαμε νὰ θερμάνωμεν μὲ τὴν αὐτὴν δαπάνην χρημάτων καὶ μὲ τὸ αὐτὸ δοχεῖον.*

1) Διὰ νὰ θερμανθῇ 1 λίτρον ὕδατος ἀπὸ 15^0 εἰς 100^0 μαζὺ μὲ τὸ δοχεῖον, ἐντὸς τοῦ ὁποίου περιέχεται, ἀπαιτεῖται ποσότης θερμότητος:

$$Q = (1\,000 + 100 \times 0{,}2)\,85 = 86\,700 \text{ cal}$$

ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν: $W = 86\,700 \times 4{,}18 = 362\,400$ joule.

Ἄρα ἡ καταναλισκομένη ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς εἶναι:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{362\,400}{300} = 1\,208 \text{ watt.}$$

Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι: $I = \frac{P}{V} = \frac{1\,208}{120} = 10$ ampère.

Ἡ δὲ ἀντίστασις R τοῦ σύρματος εἶναι: $R = \frac{P}{I^2} = \frac{1\,208}{10^2} = 12$ ohm.

2) Ἔστω l τὸ μῆκος καὶ σ ἡ τομὴ τοῦ σύρματος, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὴν ἀντίστασιν R. Ἐπειδὴ τὸ σύρμα ἔχει μᾶζαν 8 gr, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$m = l\sigma d$ ἢ $8 = l\sigma \times 8$. Ἄρα ἔχομεν $l\sigma = 1$.

Ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν:

$R = \rho \frac{l}{\sigma}$ εὑρίσκομεν $\frac{l}{\sigma} = \frac{R}{\rho} = \frac{12}{8} \times 10^5 = 1{,}5 \times 10^5$.

Αἱ δύο εὑρεθεῖσαι σχέσεις δίδουν: $l = 387{,}3$ cm καὶ $\sigma = \frac{1}{387{,}3}$ cm².

Ἡ διάμετρος x τοῦ σύρματος εἰς mm εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{\pi x^2}{4} = \frac{100}{387{,}5} \quad \text{ἄρα} \quad x = 0{,}57 \text{ mm.}$$

3) Ἡ δαπανωμένη ἐνέργεια εἶναι: $W = \frac{362\,400}{36 \times 10^5} = 0{,}10$ kWh.

Ἡ θέρμανσις λοιπὸν τοῦ ὕδατος διὰ τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος κοστίζει:

$$300 \times 0{,}10 = 30 \text{ δραχμάς.}$$

Μὲ τὰ ἴδια χρήματα ἠμποροῦμε νὰ καταναλώσωμεν:

$\frac{30}{1\,000} = 0{,}03$ m³ φωταερίου, τὸ ὁποῖον καιόμενον, μὲ ἀπόδοσιν 30 %, μᾶς δίδει χρήσιμον ποσότητα θερμότητος:

$$0{,}03 \times 5\,200 \times 0{,}30 = 46{,}8 \text{ kcal} = 46\,800 \text{ cal.}$$

Ἄρα μὲ τὸ φωταέριον ἠμποροῦμε νὰ θερμάνωμεν ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ δοχείου y γραμμάρια ὕδατος, τὰ ὁποῖα ὑπολογίζομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$(y + 100 \times 0{,}2)\,85 = 46\,800 \quad \text{ἄρα} \quad y = 530 \text{ gr.}$$

213.— *Θέλομεν ν' ἀντικαταστήσωμεν μίαν γραμμὴν μεταφορᾶς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ σύρμα χάλκινον διαμέτρου* 3 mm *μὲ σύρμα ἀλουμινίου ἔχοντος τὴν ἰδίαν ἀντίστασιν.—1) Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ σύρματος τούτου; — 2) Ποῖος θὰ εἶναι ὁ λόγος τοῦ βάρους τῆς νέας γραμμῆς πρὸς τὸ βάρος τῆς παλαιᾶς γραμμῆς; Εἰδικὴ ἀντίστασις εἰς* microhm — cm: *τοῦ χαλκοῦ* 1,6, *τοῦ ἀλουμινίου* 3· *πυκνότης τοῦ χαλκοῦ* 9 gr/cm³, *τοῦ ἀλουμινίου* 2,7 gr/cm³.

1) Ἐὰν ὀνομάσωμεν l τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς καὶ R τὴν ἀντίστασιν αὐτῆς, σ τὴν τομὴν τοῦ χάλκινου σύρματος καὶ σ′ τὴν τομὴν τοῦ σύρματος τοῦ ἀλουμινίου, θὰ ἔχωμεν:

ἀντίστασις παλαιᾶς γραμμῆς: $R = 1{,}3\,\dfrac{l}{\sigma}$

ἀντίστασις νέας γραμμῆς: $R = 3\,\dfrac{l}{\sigma'}$,

ἄρα $1{,}3\dfrac{l}{\sigma} = 3\,\dfrac{l}{\sigma'}$ ἢ $\dfrac{\sigma'}{\sigma} = \dfrac{3}{1{,}3} = 1{,}87$. Ὥστε: $\sigma' = 1{,}87\,\sigma$.

Καὶ ἂν x εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ σύρματος τοῦ ἀλουμινίου, θὰ ἔχωμεν:

$$\sigma = \pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9\,\pi}{4}\ \mathrm{mm}^2 \quad \text{καὶ} \quad \sigma' = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi\,x^2}{4}.$$

Ἄρα εἶναι: $\dfrac{\pi\,x^2}{4} = 1{,}87 \times \dfrac{9\,\pi}{4}$ ἤτοι $x^2 = 1{,}87 \times 9 = 16{,}83$.

Ὥστε ἡ ζητουμένη διάμετρος εἶναι: $x = 4{,}1$ mm.

2) Οἱ ὄγκοι ω καὶ ω′ τῆς παλαιᾶς καὶ τῆς νέας γραμμῆς εἶναι:

$$\omega = l\,.\,\sigma \quad \text{καὶ} \quad \omega' = l\,.\,\sigma'. \quad \text{Ἄρα} \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sigma'}{\sigma} = 1{,}87.$$

Τὰ δὲ βάρη B καὶ B′ τῆς παλαιᾶς καὶ τῆς νέας γραμμῆς εἶναι:

$$B = 9\,.\,\omega \quad \text{καὶ} \quad B' = 2{,}7\cdot\omega'. \quad \text{Ἄρα} \quad \frac{B'}{B} = \frac{\omega'}{\omega} \times \frac{2{,}7}{9}.$$

Ἑπομένως ἔχομεν: $\dfrac{B'}{B} = 1{,}87 \times \dfrac{2{,}7}{9} = 0{,}56$,

ἤτοι τὸ βάρος τῆς νέας γραμμῆς εἶναι μόνον τὰ 0,56 τοῦ βάρους τῆς παλαιᾶς γραμμῆς.

III. ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΟΗΜ

α) Κύκλωμα χωρὶς ἀποδέκτην

214.— *Μία γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* 120 volt *καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* 6 ohm. *Οἱ δύο πόλοι τῆς γεννητρίας συνδέονται μὲ ἀγωγὸν ἀντιστάσεως* 10 ohm. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ποσότης θερμότητος ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται κατὰ λεπτὸν ἐπὶ τοῦ ἀγωγοῦ τούτου καὶ ὁ λόγος τῆς ἰσχύος ἡ ὁποία ἐμφανίζεται ὡς θερμότης ἐπὶ τοῦ ἀγωγοῦ τούτου πρὸς τὴν ὅλην ἰσχὺν τῆς γεννητρίας.*

Ἡ γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E = 120 volt καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν r = 6 ohm. Ἑπομένως ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{120}{16} = 7{,}5 \text{ ampère}.$$

Ἐπὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ ἀγωγοῦ ἀναπτύσσεται ποσότης θερμότητος:

$$Q = \frac{RI^2 t}{4,18} = \frac{10 \times 7,5^2 \times 60}{4,18} = 8\,100 \text{ cal.}$$

Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ἐξωτερικοῦ ἀγωγοῦ ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ:

$$V = RI = 10 \times 7,5 = 75 \text{ volt.}$$

Ἄρα ἡ ἠλεκτρικὴ ἰσχύς, ποὺ ἐμφανίζεται ὡς θερμότης ἐπὶ τοῦ ἀγωγοῦ, εἶναι:

$$P' = VI = 75 \times 7,5 = 562,5 \text{ watt.}$$

Ἡ ἰσχὺς τῆς γεννητρίας εἶναι: $P = E \,.\, I = 120 \times 7,5 = 900$ watt.

Ὁ ζητούμενος λοιπὸν λόγος εἶναι:

$$x = \frac{P'}{P} = \frac{VI}{EI} = \frac{V}{E} = \frac{75}{120} = \frac{5}{8}.$$

215. — *Στήλη ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* $E = 12$ volt *καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* $r = 10$ ohm. *Τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα περιλαμβάνει δύο ἀντιστάσεις κατὰ σειράν, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως* $R_1 = 26$ ohm *καὶ* $R_2 = 36$ ohm. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν ἄκρων τῆς δευτέρας ἀντιστάσεως* R_2. *Ἡ ἀντίστασις τῶν ἄλλων ἀγωγῶν τοῦ κυκλώματος εἶναι ἀσήμαντος.*

Ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2 + r} = \frac{12}{26 + 36 + 10} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6} \text{ ampère.}$$

Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ V μεταξὺ τῶν ἄκρων τῆς ἀντιστάσεως R_2 εἶναι:

$$V = I\,R_2 = 1/6 \times 36 = 6 \text{ volt.}$$

216. — *Στήλη ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* 2 volt *καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν ἀσήμαντον. Τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα περιλαμβάνει μόνον ἕνα ἀμπερόμετρον ἀντιστάσεως* 0,3 ohm. — *1) Ποία εἶναι ἡ ἔνδειξις τοῦ ἀμπερομέτρου; — 2) Ποίαν ἀντίστασιν* R *πρέπει νὰ παρεμβάλωμεν κατὰ σειρὰν εἰς τὸ κύκλωμα, ὥστε τὸ ἀμπερόμετρον νὰ σημειώνῃ* 5 ampère;

1) Τὸ ἀμπερόμετρον θὰ σημειώσῃ ἔντασιν τοῦ ρεύματος:

$$I = E : r = 2 : 0,3 = \frac{20}{3} \text{ ampère.}$$

2) Ἡ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος γίνεται τώρα $R + r$.

ἄρα: $$I' = \frac{E}{R + r} = 5 \text{ ampère}$$

ὥστε εἶναι: $$R = \frac{E - I'r}{I'} = \frac{2 - (5 \times 0,3)}{5} = 0,1 \text{ ohm.}$$

217. — *Στήλη ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* $E = 2$ volt *καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* $r = 8$ ohm. *Τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα περιλαμβάνει κατὰ σειρὰν ἀντίστασιν* R *καὶ βολτόμετρον τὸ ὁποῖον ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* $R' = 300$ ohm. *Νὰ εὑρεθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀντίστασις* R, *ὥστε τὸ βολτόμετρον νὰ σημειώνῃ* 1,5 volt.

Ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς ὁλόκληρον τὸ κύκλωμα.

Ἀφοῦ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ βολτομέτρου εἶναι $V = 1{,}5$ volt, ἕπεται ὅτι εἶναι: $I = V : R' = 1{,}5 : 300 = 0{,}005$ ampère.

Ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι $308 + R$· ἄρα ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm: $E = I\,(308 + R)$ εὑρίσκομεν:

$$R = \frac{E - 308\,I}{I} = \frac{0{,}46}{0{,}005} = 92 \text{ ohm.}$$

218. — *Ἔχομεν 12 ὅμοια στοιχεῖα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ἀντίστασιν 2 ohm καὶ ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 1,5 volt. Νὰ εὑρεθῇ πῶς πρέπει νὰ συνδέσωμεν τὰ στοιχεῖα αὐτά, ὥστε τὸ ρεῦμα τὸ διαρρέον τὸν ἐξωτερικὸν ἀγωγόν, ἀντιστάσεως 9 ohm, νὰ ἔχῃ τὴν μεγίστην δυνατὴν ἔντασιν. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις αὕτη;*

Ἐὰν μὲ τὰ 12 αὐτὰ στοιχεῖα σχηματίσωμεν ν σειράς, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἀπὸ μ στοιχεῖα, τότε ἑκάστη σειρὰ θὰ ἔχῃ ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $1{,}5\,\mu$ volt καὶ ἀντίστασιν $2\,\mu$ ohm. Τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον θὰ διαρρέῃ τὸ κύκλωμα, θὰ ἔχῃ ἔντασιν:

$$I = \frac{1{,}5\,\mu}{R + \dfrac{2\,\mu}{\nu}} = \frac{1{,}5}{\dfrac{R}{\mu} + \dfrac{2}{\nu}} = \frac{1{,}5}{\dfrac{9}{\mu} + \dfrac{2}{\nu}}.$$

Ἡ ἔντασις I εἶναι μεγίστη, ὅταν $\dfrac{9}{\mu} + \dfrac{2}{\nu}$ εἶναι ἐλάχιστον. Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν οἱ δύο ἀριθμοὶ $\dfrac{9}{\mu}$ καὶ $\dfrac{2}{\nu}$, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι σταθερόν, τείνουν νὰ ἐξισωθοῦν. Ἄρα ἔχομεν τὰς ἑξῆς δύο σχέσεις:

$$\frac{9}{\mu} = \frac{2}{\nu} \qquad \text{καὶ} \qquad \mu\nu = 12.$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς εὑρίσκομεν: $\nu = \sqrt{\dfrac{8}{3}} = 1{,}63.$

Ἐπειδὴ ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ ν δὲν εἶναι ἀκεραία, θὰ λάβωμεν τὰς ἀκεραίας τιμὰς τοῦ ν, αἱ ὁποῖαι πλησιάζουν περισσότερον πρὸς τὴν εὑρεθεῖσαν· ἤτοι ἢ $\nu = 2$ ἢ $\nu = 1$. Διὰ $\nu = 2$, δηλαδὴ ἂν σχηματίσωμεν 2 σειράς, ἑκάστη τῶν ὁποίων νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ 6 στοιχεῖα, θὰ ἔχωμεν ἔντασιν τοῦ ρεύματος:

$$I = \frac{1{,}5 \times 6}{15} = 0{,}60 \text{ ampère.}$$

Διὰ $\nu = 1$, δηλαδὴ ἂν σχηματίσωμεν μίαν σειρὰν ἀπὸ 12 στοιχεῖα, θὰ ἔχωμεν ἔντασιν τοῦ ρεύματος: $I = \dfrac{1{,}5 \times 12}{24 + 9} = 0{,}54$ ampère.

Ἄρα συμφέρουσα διάταξις τῶν στοιχείων εἶναι ὁ σχηματισμὸς δύο σειρῶν, ὁπότε ἔχομεν τὴν μεγίστην δυνατὴν ἔντασιν $I = 0{,}60$ ampère.

219. — *Εἰς κύκλωμα παρεμβάλλονται κατὰ σειρὰν ἕνας συσσωρευτής, ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως $E_1 = 2$ volt, μία στήλη ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως E_2, ἕνας ροοστάτης καὶ ἀμπερόμετρον. Ὅταν συνδέσωμεν κατὰ σειρὰν τὸν συσσωρευτὴν καὶ τὴν στήλην, τότε τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν 350 milliampère. Ἐὰν ὅμως συνδέσωμεν* *τὸν συσσωρευτὴν καὶ τὴν στήλην κατ' ἀντίθεσιν, τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν* 50 milli-ampère *καὶ φορὰν ἐκείνην ποὺ εἶχε καὶ εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις* E_2 *τῆς στήλης.*

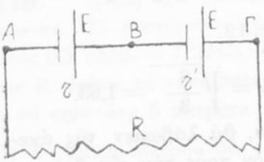
Καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ἡ ὅλη ἀντίστασις R τοῦ κυκλώματος εἶναι σταθερά. Ἀλλὰ εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ συστήματος τῶν δύο γεννητριῶν εἶναι $E_1 + E_2$, ἐνῷ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, εἶναι $E_1 - E_2$. Ἄρα ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$R = \frac{E_1 + E_2}{0{,}350} = \frac{E_1 - E_2}{0{,}050} \quad ἢ \quad \frac{2 + E_2}{0{,}35} = \frac{2 - E_2}{0{,}05}.$$

Ὥστε εἶναι: $E_2 = 1{,}5$ volt.

220 — *Δύο γεννήτριαι εἶναι ἡνωμέναι κατὰ σειράν. Ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* 1 volt, *ἡ μία ὅμως ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* $r = 2$ ohm *ἐνῷ ἡ ἄλλη ἔχει* $r' = 3$ ohm. *Τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἔχει ἀντίστασιν* 5 ohm. *Νὰ εὑρεθῇ: 1) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα.—2) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν πόλων ἑκάστης γεννητρίας καὶ μεταξὺ τῶν πόλων τῆς συστοιχίας τῶν δύο γεννητριῶν.— 3) Ἡ ἰσχὺς ἡ ὁποία ἐμφανίζεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑκάστης γεννητρίας καὶ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα.— 4) Ἐὰν θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ δώσωμεν εἰς τὴν ἀντίστασιν τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος τοιαύτην τιμὴν ὥστε ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν πόλων τῆς δευτέρας γεννητρίας νὰ εἶναι μηδέν.*

1) Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς συστοιχίας εἶναι $E_1 = 2$ volt, ἡ δὲ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι $R_1 = 2 + 3 + 5 = 10$ ohm. Ἑπομένως ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:



Σχ. 155

$$I = \frac{E_1}{R_1} = \frac{2}{10} = 0{,}2 \text{ ampère}.$$

2) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν πόλων A καὶ B τῆς πρώτης γεννητρίας εἶναι:

$$V_A - V_B = E - I\,r = 1 - 0{,}2 \times 2 = 0{,}6 \text{ volt}.$$

Ἐπίσης ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν πόλων B καὶ Γ τῆς 2ας γεννητρίας εἶναι: $V_B - V_\Gamma = E - Ir' = 1 - 0{,}2 \times 3 = 0{,}4$ volt.

Τέλος ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν πόλων A καὶ Γ τῆς συστοιχίας εἶναι: $V_A - V_\Gamma = (V_A - V_B) + (V_B - V_\Gamma) = 0{,}6 + 0{,}4 = 1$ volt·

ἢ καὶ ἄλλως $V_A - V_\Gamma = RI = 5 \times 0{,}2 = 1$ volt.

3) Ἡ ἰσχὺς τοῦ ρεύματος, ἡ ὁποία ἐμφανίζεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος, εἶναι:

εἰς τὴν 1ην γεννήτριαν: $P_1 = r\,I^2 = 2 \times 0{,}04 = 0{,}08$ watt

εἰς τὴν 2αν γεννήτριαν: $P_2 = r'\,I^2 = 3 \times 0{,}04 = 0{,}12$ watt

εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα: $P = RI^2 = 5 \times 0{,}04 = 0{,}20$ watt.

4) Διὰ νὰ εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν πόλων B καὶ Γ ἴση μὲ μηδέν, πρέπει ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος νὰ ἔχῃ τὴν τιμὴν I' ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$V_B - V_\Gamma = 0 = E - I'\,r', \quad ἄρα \quad I' = \frac{E}{r'} = \frac{1}{3} \text{ ampère}.$$

Θὰ ἔχωμεν αὐτὴν τὴν ἔντασιν, ἐὰν ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$R_2 = \frac{E_1}{I'} = 2 : \frac{1}{3} = 6 \text{ ohm} \cdot$$

ἑπομένως ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$R' = R_2 - (r + r') = 6 - (2 \times 3) = 1 \text{ ohm}.$$

221.— *Ἕνα βολτόμετρον πολὺ μεγάλης ἀντιστάσεως συνδέεται μὲ τοὺς δύο πόλους μιᾶς συστοιχίας συσσωρευτῶν. Ὅταν ἡ συστοιχία δὲν παρέχῃ ρεῦμα, τὸ βολτόμετρον σημειώνει* 100 volt. *Ὅταν ὅμως οἱ πόλοι τῆς συστοιχίας συνδεθοῦν μὲ ἐξωτερικὸν ἀγωγὸν ἀντιστάσεως* R, *τότε τὸ βολτόμετρον σημειώνει* 50 volt, *τὸ δὲ ρεῦμα, ποὺ διαρρέει τὸ κύκλωμα, ἔχει ἔντασιν* 25 ampère. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντίστασις* R *καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις* r *τῆς συστοιχίας.*

Ὅταν τὸ κύκλωμα εἶναι ἀνοικτόν, τὸ βολτόμετρον δεικνύει τὴν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E τῆς συστοιχίας· ἄρα εἶναι: $E = 100$ volt. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν τὸ βολτόμετρον δεικνύει τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ V μεταξὺ τῶν πόλων τῆς συστοιχίας· ἄρα εἶναι: $V = 50$ volt. Ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$E = V + I r$ ἢ $100 = 50 + 25 r$ εὑρίσκομεν $r = 2$ ohm.

Καὶ ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$V = I R$ ἢ $50 = 25 R$ εὑρίσκομεν $R = 2$ ohm.

222.-- *Οἱ πόλοι μιᾶς συστοιχίας συσσωρευτῶν συνδέονται μὲ βολτόμετρον τὸ ὁποῖον ἔχει πολὺ μεγάλην ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν. Ὅταν ἡ συστοιχία δὲν παρέχῃ ἐξωτερικὸν ρεῦμα, τὸ βολτόμετρον δεικνύει* 40 volt. *Οἱ πόλοι τῆς συστοιχίας συνδέονται μὲ ἀγωγὸν ἀντιστάσεως* R· *τὸ βολτόμετρον δεικνύει τότε* 30,8 volt. *Εἰς τὸ κύκλωμα παρεμβάλλεται κατὰ σειρὰν καὶ ἄλλη ἀντίστασις* $R_1 = 5$ ohm· *τὸ βολτόμετρον δεικνύει εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν* 34,8 volt. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις* E *τῆς συστοιχίας, ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις* R *καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις* r *τῆς συστοιχίας.*

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς συστοιχίας εἶναι: $E = 40$ volt. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ V εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R εἶναι:

$V = IR$· ἐξ ἄλλου ὅμως ἔχομεν: $E = V + Ir$ ·

Ἄρα: $30{,}8 = IR$ καὶ $40 = 30{,}8 + Ir$ ·

$$\text{ἢ} \quad I = \frac{30{,}8}{R} = \frac{9{,}2}{r} \quad \text{καὶ} \quad \frac{r}{R} = \frac{9{,}2}{30{,}8} = 0{,}3\,. \qquad (1)$$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἔχομεν ὁμοίως:

$V_1 = I_1 (R + R_1)$ καὶ $E = V_1 + I_1 r$.

$$\text{Ἄρα:} \quad I_1 = \frac{V_1}{R + R_1} = \frac{E - V_1}{r} \quad \text{ἢ} \quad \frac{34{,}8}{R + 5} = \frac{5{,}2}{r}$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{r}{R + 5} = \frac{5{,}2}{34{,}8} = 0{,}15\,. \qquad (2)$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς σχέσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν:

$$\frac{R + 5}{R} = \frac{0{,}3}{0{,}15} = 2 \cdot \quad \text{ἄρα} \quad R = 5 \text{ ohm}.$$

Ἑπομένως εἶναι: $r = 0{,}3\,R = 0{,}3 \times 5 = 1{,}5$ ohm.

223. *Συνδέομεν κατὰ σειρὰν τέσσαρα ὅμοια στοιχεῖα τῶν ὁποίων ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις μᾶς εἶναι ἄγνωστοι. Τοὺς πόλους τῆς στήλης τοὺς συνδέομεν μὲ ἀμπερόμετρον τὸ ὁποῖον ἔχει ἀσήμαντον ἀντίστασιν. Οἱ ἀγωγοὶ ποὺ ἐχρησιμοποιήθησαν διὰ τὴν σύνδεσιν ἔχουν ἐπίσης ἀσήμαντον ἀντίστασιν. Τὸ ἀμπερόμετρον σημειώνει τότε* 0,6 ampère. *Ἀντικαθιστῶμεν ἔπειτα τὸ ἀμπερόμετρον μὲ ἕνα βολτόμετρον· τοῦτο δεικνύει τότε* 5,4 volt. *Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ βολτόμετρον τοῦτο δεικνύει* 6 volt, *ὅταν διέρχεται δι' αὐτοῦ ρεῦμα ἐντάσεως* 1/15 ampère. *Ἀπὸ τὰ πειράματα αὐτὰ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις* E *καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις* r *ἑκάστου στοιχείου.*

Ἡ στήλη ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 4E καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 4r. Ὅταν τὸ κύκλωμα κλείεται μὲ τὸ ἀμπερόμετρον (ποὺ ἔχει ἀσήμαντον ἀντίστασιν), τότε ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι 4r καὶ ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος εἶναι $I = 0{,}6$ ampère. Ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$4E = I \times 4r \quad \text{ἢ} \quad E = Ir \quad \text{εὑρίσκομεν} \quad E = 0{,}6r\ .$$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν τὸ κύκλωμα κλείεται μὲ τὸ βολτόμετρον. Ἡ ἀντίστασις R τοῦ βολτομέτρου εἶναι: $R = 6 : \dfrac{1}{15} = 6 \times 15 = 90$ ohm.

Ὅταν λοιπὸν δεικνύῃ 5,4 volt, τὸ ὄργανον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I_1 = 5{,}4 : 90 = 0{,}06 \text{ ampère.}$$

Ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι τότε: $(R + 4r)$ καὶ ἑπομένως ἔχομεν τὴν σχέσιν: $4E = 0{,}06\,(90 + 4r)$ ἢ $4 \times 0{,}6r = 0{,}06\,(90 + 4r)$.

Ἄρα: $r = 2{,}5$ ohm καὶ $E = 0{,}6 \times 2{,}5 = 1{,}5$ volt.

224.—*Ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις ἑνὸς κυκλώματος εἶναι* R = 5 ohm, *θέλομεν δὲ νὰ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλυτέρας ἐντάσεως. Διαθέτομεν δύο γεννητρίας αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἠλεκτρεγερτικὰς δυνάμεις* $E_1 = 42$ volt *καὶ* $E_2 = 14$ volt *καὶ ἀντιστοίχους ἐσωτερικὰς ἀντιστάσεις* $R_1 = 7$ ohm *καὶ* $R_2 = 4$ ohm. *Εἶναι προτιμότερον νὰ χρησιμοποιήσωμεν μόνον μίαν γεννήτριαν ἢ καὶ τὰς δύο ἡνωμένας κατὰ σειράν;*

Μόνη ἡ γεννήτρια E_1 θὰ δώσῃ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I_1 = \frac{42}{7 + 5} = 3{,}5 \text{ ampère}$$

μόνη ἡ γεννήτρια E_2 θὰ δώσῃ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I_2 = \frac{14}{7 + 5} = 1{,}55 \text{ ampère}$$

καὶ αἱ δύο γεννήτριαι, ἡνωμέναι κατὰ σειράν, θὰ δώσουν ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I = \frac{42 + 14}{7 + 4 + 5} = 3{,}5 \text{ ampère.}$$

Ἡ μεγαλυτέρα ἔντασις, τὴν ὁποίαν ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν, εἶναι 3,5 ampère. Αἱ δύο γεννήτριαι, ἡνωμέναι κατὰ σειράν, θὰ μᾶς δώσουν τὸ αὐτὸ ρεῦμα μὲ ἐκεῖνο ποὺ δίδει μόνη της ἡ γεννήτρια E_1. Συμφέρει νὰ χρησιμοποιήσωμεν μόνον τὴν μίαν γεννήτριαν, διότι θὰ ἔχωμεν μικροτέραν δαπάνην ἐνεργείας.

225.— *Δι' ἑνὸς ἠλεκτρικοῦ λαμπτῆρος διὰ πυρακτώσεως διαβιβάζομεν ἠλεκτρικὸν ρεῦμα τὸ ὁποῖον ἔχει τάσιν* 120 volt· *εἰς τὸ κύκλωμα παρεμβάλλεται ἀμπερόμετρον τὸ ὁποῖον δεικνύει τότε* 0,5 ampère.— *1) Νὰ εὑρεθῇ πόση ποσότης θερμότητος ἐκλύεται ὑπὸ τοῦ λαμπτῆρος ἐντὸς* 10 *λεπτῶν.—2) Ἡ τάσις τοῦ ρεύματος γίνεται* 125 volt· *πόσην ἀντίστασιν πρέπει νὰ παρεμβάλωμεν εἰς τὸ κύκλωμα διὰ νὰ ἐπαναφέρωμεν τὸν λαμπτῆρα εἰς τὴν κανονικήν του λειτουργίαν; Αὐτὴν τὴν ἀντίστασιν θὰ τὴν κατασκευάσωμεν ἀπὸ ἕνα σύρμα διαμέτρου* 1,5 mm· *νὰ εὑρεθῇ πόσα μέτρα σύρματος πρέπει νὰ λάβωμεν, ἐὰν εἶναι γνωστὸν ὅτι σύρμα τῆς ἰδίας φύσεως, διαμέτρου* 1 mm *καὶ μήκους* 1 m *ἔχει ἀντίστασιν* 1 ohm.— *3) Παρεμβάλλομεν τὸν ἴδιον λαμπτῆρα εἰς ἕνα κύκλωμα τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει συσσωρευτὴν ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως* $E = 2{,}1$ volt *καὶ μίαν ἀντίστασιν* $R_1 = 200$ ohm· *ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος γίνεται τότε* 9,5 milliampère. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἀντιστάσεων τοῦ σύρματος τοῦ λαμπτῆρος, ὅταν οὗτος φωτοβολῇ καὶ ὅταν δὲν ἐκπέμπῃ φῶς.*

1) Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ σύρματος τοῦ λαμπτῆρος ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ $V = 120$ volt. Ἄρα ἡ ἀντίστασις R τοῦ σύρματος εἶναι:

$$R = V : I = 120 : 0{,}5 = 240 \text{ ohm}.$$

Εἰς χρόνον $t = 600$ sec ἐκλύεται θερμότης:

$$Q = \frac{RI^2 t}{4{,}18} = \frac{240 \times 0.5^2 \times 600}{4{,}18} = 8\,640 \text{ cal}.$$

2) Ἐὰν ἡ τάσις γίνῃ $V' = 125$ volt, τότε, διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν αὐτὴν ἔντασιν $I = 0{,}5$ ampère, πρέπει τὸ κύκλωμα νὰ ἔχῃ ἀντίστασιν:

$$R' = V' : I' = 125 : 0{,}5 = 250 \text{ ohm}.$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ παρεμβάλωμεν ἀντίστασιν: $r = 250 - 240 = 10$ ohm.

Ἐὰν 1 m σύρματος διαμέτρου 1 mm ἔχῃ ἀντίστασιν 1 ohm, τότε 1 m σύρματος διαμέτρου 1,5 mm ἔχει ἀντίστασιν $\frac{1}{1{,}5^2} = \frac{4}{9}$ ohm. Καὶ διὰ νὰ ἔχωμεν ἀντίστασιν 10 ohm πρέπει νὰ λάβωμεν σύρμα μήκους:

$$l = 10 : \frac{4}{9} = \frac{90}{4} = 22{,}50 \text{ m}.$$

3) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τώρα τὸ κύκλωμα, εἶναι:

$$I_1 = E : R_1$$

ἄρα ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι: $R_1 = \frac{2{,}1}{0{,}0095} = 221$ ohm.

Ἑπομένως ἡ ἀντίστασις τοῦ λαμπτῆρος εἶναι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν: $R'' = 221 - 200 = 21$ ohm. Ὁ ζητούμενος λόγος τῶν ἀντιστάσεων εἶναι:

$$\frac{R}{R''} = \frac{240}{21} = 11{,}4.$$

226.— *Μία γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* $E = 120$ volt *καὶ ἀσήμαντον ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν. Τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα διακόπτην καὶ ἕνα ἠλεκτρικὸν λαμπτῆρα ἰσχύος* 500 watt. *Τὸ σύρμα τοῦ λαμπτῆρος ἀρχικῶς ἔχει θερμοκρασίαν* 0°. *Ὅταν κλείσωμεν τὸ κύκλωμα, τὸ σύρμα θερμαίνεται ταχέως καὶ ἡ θερμοκρασία του σταθεροποιεῖται εἰς* 2 000° C. — *1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος, ὅταν τοῦτο ἔχῃ θερμανθῇ.— 2) Ἡ ἀντίστασις*

R τοῦ σύρματος μεταβάλλεται μετὰ τῆς θερμοκρασίας, σύμφωνα μὲ τὴν σχέσιν: $R = R_0\,(1 + \alpha\theta)$, *ὅπου* R_0 *εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος εἰς* 0^0 *καὶ* α *συντελεστὴς ὁ ὁποῖος ἔχει τὴν τιμὴν* $\alpha = 1/200$. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος εἰς* 0^0 *καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ λαμπτῆρος ἀμέσως μετὰ τὸ κλείσιμον τοῦ διακόπτου.—3) Ἂν δεχθῶμεν κατὰ προσέγγισιν ὅτι κατὰ τὴν θέρμασίν του τὸ σύρμα ἔχει μίαν μέσην ἀντίστασιν, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῶν* $1\,000^0$ *καὶ ὅτι κατὰ τὸν πολὺ μικρὸν τοῦτον χρόνον δὲν συμβαίνει καμμία ἀπώλεια θερμότητος, νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος οὗτος κατὰ τὸν ὁποῖον διαρκεῖ ἡ θέρμανσις. Τὸ σύρμα ἔχει μᾶζαν* $m = 0{,}12$ gr *καὶ εἰδικὴν θερμότητα* $c = 0{,}03$ cal/gr. $J = 4{,}18$ joule/cal.

1) Ἐπειδὴ ἡ γεννήτρια δὲν ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν, συνάγεται ὅτι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους της εἶναι ἴση μὲ τὴν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν αὐτῆς, δηλαδὴ εἶναι: $E = V = 120$ volt. Ἡ ἰσχὺς τὴν ὁποίαν καταναλίσκει ὁ λαμπτήρ, εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος ἐπὶ τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τοὺς πόλους του, δηλαδὴ εἶναι:

$$P = VI \cdot \quad \text{ἄρα} \quad I = \frac{P}{V} = \frac{500}{120} = 4{,}17 \text{ ampère.}$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν: $P = \dfrac{V^2}{R}$ εὑρίσκομεν τὴν ἀντίστασιν τοῦ σύρματος:

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{120^2}{500} = 28{,}8 \text{ ohm.}$$

2) Ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος εἰς 0^0 εἶναι:

$$R_0 = \frac{R}{1 + \alpha\theta} = \frac{28{,}8}{1 + 10} = \frac{28{,}8}{11} = 2{,}62 \text{ ohm.}$$

Μόλις κλείσωμεν τὸ κύκλωμα καὶ πρὶν θερμανθῇ τὸ σύρμα, τοῦτο διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I_0 = \frac{V}{R_0} = \frac{120}{2{,}62} = 45{,}8 \text{ ampère.}$$

Ἡ ἔντασις αὐτὴ εἶναι πολὺ μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν λαμπτῆρα, ὅταν ἀποκατασταθῇ ἡ κανονικὴ λειτουργία του.

3) Εἰς θερμοκρασίαν $1\,000^0$ ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος εἶναι:

$$R' = \frac{R_0 + R}{2} = \frac{2{,}62 + 28{,}8}{2} = 15{,}7 \text{ ohm.}$$

Ἡ ἰσχύς, ἡ ὁποία μετατρέπεται εἰς θερμότητα ἐπὶ τοῦ σύρματος, εἶναι:

$$P' = \frac{V^2}{R'} = \frac{120^2}{15{,}7} = 917 \text{ watt.}$$

Ἄρα κατὰ δευτερόλεπτον ἀναπτύσσεται ἐπὶ τοῦ σύρματος ποσότης θερμότητος:

$$Q = \frac{917}{4{,}18} = 219 \text{ cal.}$$

Ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν τῆς θερμιδομετρίας $Q = mc\,\theta$, ὅπου θ εἶναι ἡ ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας, εὑρίσκομεν:

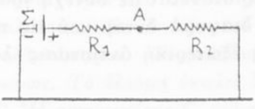
$$\theta = \frac{Q}{mc} = \frac{219}{0{,}12 \times 0{,}03} = 60\,800^0.$$

Τόση θὰ ἦτο ἡ ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ σύρματος ἐντὸς 1 δευτερο-

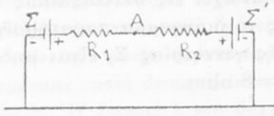
λέπτου, ἕνεκα τοῦ φαινομένου τοῦ Joule. Ἀλλὰ ἡ ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸν χρόνον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ πραγματικὴ ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ σύρματος εἶναι 2000^0, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ διάρκεια τῆς θερμάνσεως τοῦ σύρματος εἶναι:
$$t = \frac{2\,000}{60\,800} = 0{,}033 \text{ sec.}$$

227 — *Στήλη Σ ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* $E = 24$ volt *καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν ἀσήμαντον. Ὁ ἀρνητικὸς πόλος τῆς στήλης συνδέεται μὲ τὴν γῆν, ὁ δὲ θετικὸς πόλος της συνδέεται μὲ δύο κατὰ σειρὰν ἀντιστάσεις* $R_1 = 20$ ohm *καὶ* $R_2 = 18$ ohm. *Τὸ ἕνα ἄκρον τῆς τελευταίας καταλήγει εἰς τὴν γῆν.—1) Θεωροῦμεν σημεῖον Α τοῦ κυκλώματος εὑρισκόμενον μεταξὺ τῶν ἀντιστάσεων* R_1 *καὶ* R_2. *Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τοῦ σημείου Α καὶ τοῦ ἐδάφους ; — 2) Πόση γίνεται αὐτὴ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ, ἐὰν μεταξὺ τῆς ἀντιστάσεως* R_2 *καὶ τοῦ ἐδάφους παρεμβληθῇ μία δευτέρα στήλη Σ', ἡ ὁποία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* $E' = 5$ volt, *ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν ἀσήμαντον καὶ τὸν μὲν θετικὸν πόλον της συνδεδεμένον μὲ τὴν* R_2, *τὸν δὲ ἀρνητικὸν πόλον της μὲ τὸ ἔδαφος ;*

1) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα, εἶναι:
$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{24}{20 + 18} = \frac{24}{38} \text{ ampère.}$$
Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τοῦ σημείου Α καὶ τοῦ ἐδάφους εἶναι ἴση



Σχ. 156



Σχ. 157

μὲ τὸ δυναμικὸν τοῦ σημείου Α. Εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R_2 ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ:
$$V_A - 0 = IR_2 \qquad \text{ἢ} \qquad V_A = \frac{24}{38} \times 18 = 11{,}368 \text{ volt.}$$
2) Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:
$$I' = \frac{E - E'}{R_1 + R_2} = \frac{24 - 5}{38} = 0{,}5 \text{ ampère.}$$
Τὸ ρεῦμα ἔχει διεύθυνσιν ἐκ τῆς R_1 πρὸς τὴν R_2. Τὸ δυναμικὸν τοῦ σημείου Α εὑρίσκεται τώρα ἀπὸ τὴν σχέσιν:
$$V_A{}' - 5 = I'R_2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad V_A{}' = 5 + I'R_2 = 5 + (0{,}5 \times 18) = 14 \text{ volt.}$$
Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τοῦ Α καὶ τοῦ ἐδάφους εἶναι τώρα:
$$V_A{}' = 14 \text{ volt.}$$

228 — *Δύο γεννήτριαι* Σ_1 *καὶ* Σ_2 *ἔχουν τὴν αὐτὴν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν Ε καὶ ἀντιστοίχους ἐσωτερικὰς ἀντιστάσεις* $r_1 = 2$ ohm *καὶ* $r_2 = 10$ ohm. *Αἱ γεννήτριαι συνδέονται κατὰ σειρὰν καὶ τὸ κύκλωμα κλείεται διὰ μιᾶς μεταβλητῆς ἀντιστάσεως R. — 1) Νὰ ἐκφρασθοῦν, συναρτήσει τῆς R, αἱ μεταβολαὶ τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ : α) εἰς τοὺς πόλους τῆς* Σ_1 *καὶ β) εἰς τοὺς πόλους τῆς* Σ_2. *— 2) Νὰ* *παρασταθοῦν γραφικῶς τὰ ἐξαγόμενα. — 3) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ δώσωμεν εἰς τὴν R μίαν τιμήν, τοιαύτην ὥστε ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τῆς μιᾶς γεννητρίας νὰ εἶναι μηδέν.*

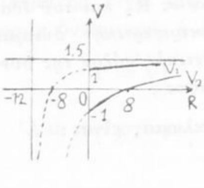
1) Αἱ δύο γεννήτριαι παρέχουν εἰς τὸ κύκλωμα ρεῦμα, τοῦ ὁποίου ἡ ἔντασις εἶναι: $I = \dfrac{2E}{R + r_1 + r_2}$.

Ἐπομένως αἱ ζητούμεναι διαφοραὶ δυναμικοῦ εἶναι:

α) εἰς τοὺς πόλους τῆς Σ_1: $V_1 = E - r_1 I = E\dfrac{R - r_1 + r_2}{R + r_1 + r_2} = 1{,}5\dfrac{R+8}{R+12}$.

β) εἰς τοὺς πόλους τῆς Σ_2: $V_2 = E - r_2 I = E\dfrac{R + r_1 - r_2}{R + r_1 + r_2} = 1{,}5\dfrac{R-8}{R-12}$.

2) Αἱ καμπύλαι αἱ ὁποῖαι παριστάνουν τὰς μεταβολὰς τοῦ V_1 καὶ τοῦ V_2 εἶναι δύο ὑπερβολαί (σχ. 157), αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς αὐτὰς ἀσυμπτώτους: $R = -12$ καὶ $V = 1{,}5$. Ἡ πρώτη καμπύλη τέμνει τοὺς δύο ἄξονας V καὶ R εἰς τὰ σημεῖα $V = 1$ volt καὶ $R = -8$ ohm. Ἡ δευτέρα καμπύλη τέμνει τοὺς δύο ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα $V = -1$ volt καὶ $R = 8$ ohm, δηλαδὴ εἰς σημεῖα τὰ ὁποῖα εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὰ προηγούμενα. Τὸ χρήσιμον μέρος ἑκάστης καμπύλης, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς θετικὰς τιμὰς τοῦ R, παριστάνεται μὲ συνεχῆ γραμμήν.

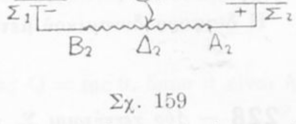


Σχ. 158

3) Εἰς τὸ διάγραμμα παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς δύο πόλους τῆς γεννητρίας Σ_2 εἶναι μηδέν, ὅταν ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις λάβῃ τὴν τιμὴν $R = 8$ ohm.

229. *Εἰς ἕνα κύκλωμα παρεμβάλλονται κατὰ σειράν: α) στήλη Σ_1 ἡ ὁποία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* $E_1 = 2$ volt· *β) ἀντίστασις* A_1B_1 *ἡ ὁποία εἶναι* $R_1 = 2\,000$ ohm· *γ) στήλη Σ_2 ἡ ὁποία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* $E_2 = 4$ volt *καὶ δ) ἀντίστασις* A_2B_2 *ἡ ὁποία εἶναι* $R_2 = 4\,000$ ohm. *Δύο δρομεῖς Δ_1 καὶ Δ_2 ἠμποροῦν νὰ μετακινοῦνται ἐπὶ τῶν ἀντιστάσεων R_1, R_2 καὶ συνδέονται μὲ τοὺς πόλους ἑνὸς γαλβανομέτρου Γ. Νὰ εὑρεθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως $A_2\Delta_2$ ὥστε διὰ μίαν κατάλληλον θέσιν τοῦ δρομέως Δ_1 τὸ γαλβανόμετρον νὰ μὴ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα. Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῶν στηλῶν εἶναι ἀσήμαντος.*

Ἐὰν διὰ τοῦ γαλβανομέτρου δὲν διέρχεται ρεῦμα, τότε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα $\Sigma_1A_1B_1\Sigma_2A_2B_2\Sigma_1$, εἶναι:



$$I = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2} = \frac{2+4}{2\,000 + 4\,000} = \frac{1}{1\,000} \text{ amp.}$$

Σχ. 159

Ἔστω x ἡ ἀντίστασις τοῦ τμήματος $A_2\Delta_2$. Ἐὰν V εἶναι τὸ δυναμικὸν τοῦ σημείου Δ_2, τότε τὸ δυναμικὸν $V_A{}'$ τοῦ σημείου A_2 εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $V_A{}' - V = Ix$· ἄρα $V_A{}' = V + \dfrac{x}{1\,000}$.

Τὸ δυναμικὸν τοῦ σημείου B_1 εἶναι:

$$V_B = V + I x - E_2 = V + \frac{x}{1\,000} - 4 .$$

Τὸ δὲ σημεῖον A_1 ἔχει δυναμικόν:

$$V_A = V + Ix + IR_1 - E_2 = V + \frac{x}{1\,000} + \frac{2\,000}{1\,000} - 4$$

$$\text{ἤ} \quad V_A = V + \frac{x}{1\,000} - 2 .$$

Τὸ σημεῖον Δ_1 θὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ δυναμικὸν V μὲ τὸ σημεῖον Δ_2. Ἀλλὰ τὸ δυναμικὸν τοῦ σημείου Δ_1 πρέπει νὰ εἶναι:

$$V_A > V > V_B \quad \text{ἤτοι} \quad V + \frac{x}{1\,000} - 2 > V > V + \frac{x}{1\,000} - 4$$

$$\text{ἤ} \quad \frac{x}{1\,000} - 2 > 0 > \frac{x}{1\,000} - 4.$$

Ἀπὸ τὴν διπλῆν αὐτὴν ἀνισότητα εὑρίσκομεν: $2\,000 < x < 4\,000$.

230.— *Ἕνα κύκλωμα περιλαμβάνει κατὰ σειράν: α) μίαν στήλην ἔχουσαν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* E = 20 volt *καὶ ἀσήμαντον ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν· β) ἕνα γαλβανόμετρον μὲ ἀσήμαντον ἐπίσης ἀντίστασιν καὶ γ) μίαν ἀντίστασιν* R = 20 000 ohm. *Τὸ γαλβανόμετρον παρουσιάζει μίαν ἀπόκλισιν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς ρεῦμα ἐντάσεως* I. *Ἀφαιροῦμεν τὴν ἀντίστασιν* R *καὶ μεταξὺ τῆς στήλης καὶ τοῦ γαλβανομέτρου τοποθετοῦμεν ἕνα πυκνωτήν, τοῦ ὁποίου ὁ ἕνας ὁπλισμὸς εἶναι ἐφωδιασμένος μὲ παλλόμενον ἔλασμα· τοῦτο συνδέει ἐναλλὰξ τὸν πυκνωτὴν μὲ τὴν στήλην καὶ τὸ γαλβανόμετρον. Τὸ γαλβανόμετρον δεικνύει τὴν αὐτὴν ἀπόκλισιν ὅπως καὶ προηγουμένως. Τὸ ἔλασμα ἐκτελεῖ* N = 50 *κυμάνσεις κατὰ δευτερόλεπτον. Νὰ εὑρεθῇ: 1) Ἡ χωρητικότης* C *τοῦ πυκνωτοῦ. — 2) Ἡ ἔντασις* I *τοῦ ἀρχικοῦ ρεύματος τῆς στήλης.*

1) Αον πείραμα: Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι: $I = E : R$.

Βον πείραμα: Εἰς κάθε μίαν κύμανσιν τοῦ ἐλάσματος ὁ πυκνωτὴς λαμβάνει φορτίον: $q = C . E$ coulomb· κατόπιν ἐκφορτίζεται εἰς τὸ γαλβανόμετρον. Ὥστε ἐντὸς ἑκάστου δευτερολέπτου διέρχεται διὰ τοῦ γαλβανομέτρου ποσότης ἠλεκτρισμοῦ: $Q = Nq = N.C.E$ coulomb/sec·

ἄρα ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐκκενώσεως εἶναι:

$$I = N.C.E \text{ ampère} \quad \text{ἤ} \quad I = E : R = N.C.E .$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν:

$$C = \frac{1}{N . R} = \frac{1}{50 \times 20\,000} = \frac{1}{10^6} \text{ farad} = 1 \ \mu F .$$

2) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τῆς στήλης εἶναι:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{20}{20\,000} = \frac{1}{10^3} \text{ ampère} = 1 \text{ milliampère} .$$

β) Κύκλωμα μὲ ἀποδέκτην

231.— *Εἰς τὸ κύκλωμα συνεχοῦς ρεύματος, τάσεως* 110 volt, *παρεμβάλλομεν κατὰ σειρὰν ἕνα ἠλεκτρικὸν ἀνεμιστῆρα καὶ ἕνα ἀμπερόμετρον τὸ ὁποῖον ἔχει ἀσήμαντον ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν.— 1) Κατ' ἀρχὰς κρατῶμεν ἀκίνητον τὸν ἀνεμιστῆρα καὶ παρατηροῦμεν τότε ὅτι τὸ διερχόμενον δι' αὐτοῦ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν* 1 ampère. *Ἔπειτα ἀφήνομεν τὸν ἀνεμιστῆρα ἐλεύθερον νὰ στραφῇ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος γίνεται* 0,6 ampère. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀνεμιστῆρος καὶ ἡ ποσότης θερμότητος ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐπὶ τοῦ σπειράματός του, ὅταν οὗτος δὲν στρέφεται καὶ ὅταν στρέφεται.— 2) Πόση ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς δαπανᾶται εἰς ἑκάστην ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο περιπτώσεων; — 3) Ποία εἶναι ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ ἀνεμιστῆρος; — 4) Νὰ εὑρεθῇ εἰς* watt *ἡ ἰσχὺς τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας τὴν ὁποίαν ἀναπτύσσει ὁ κινητὴρ τοῦ ἀνεμιστῆρος, ἂν δεχθῶμεν ὅτι αἱ ἀπώλειαι ἐνεργείας ὀφείλονται μόνον εἰς τὴν θέρμανσιν τῶν ἀγωγῶν.*

1) Ὅταν ὁ ἀνεμιστὴρ δὲν στρέφεται, διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I = 1$ ampère. Ἑπομένως συμπεριφέρεται ὡς ἀγωγὸς ὁ ὁποῖος ἔχει ἀντίστασιν:

$$R = V : I = 110 : 1 = 110 \text{ ohm}.$$

Τότε κατὰ δευτερόλεπτον ἀναπτύσσεται ἐπὶ τοῦ σπειράματός του ποσότης θερμότητος:

$$Q = \frac{RI^2}{4{,}18} = \frac{110 \times 1^2}{4{,}18} = 26{,}4 \text{ cal.}$$

Ὅταν ὁ ἀνεμιστὴρ στρέφεται, τότε κατὰ δευτερόλεπτον ἀναπτύσσεται ποσότης θερμότητος:

$$Q' = \frac{RI_1^{\,2}}{4{,}18} = \frac{110 \times 0{,}6^2}{4{,}18} = 9{,}5 \text{ cal.}$$

2) Ἡ δαπανωμένη ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς εἶναι πάντοτε ἴση μὲ τὸ γινόμενον VI.

Ἄρα: ὅταν ὁ ἀνεμιστὴρ δὲν στρέφεται εἶναι: $P = 110 \times 1 = 110$ watt

ὅταν ὁ ἀνεμιστὴρ στρέφεται εἶναι: $P' = 110 \times 0{,}6 = 66$ watt.

3) Ὅταν ὁ ἀνεμιστὴρ στρέφεται, τότε οὗτος παρεμβάλλει εἰς τὸ κύκλωμα μίαν ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E', ἡ ὁποία προσδιορίζεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm: $V - E' = RI_1$ · ἄρα $E' = V - RI_1 = 110 - (110 \times 0{,}6) = 44$ volt.

4) Ἡ ἰσχὺς τῆς παραγομένης μηχανικῆς ἐνεργείας εἶναι:

$$P' = E'I_1 = 44 \times 0{,}6 = 26{,}4 \text{ watt} \qquad \text{ἢ} \qquad P' = \frac{26{,}4}{736} = \frac{1}{30} \text{ ἀτμοίππου.}$$

232.—*Εἰς ἕνα κύκλωμα παρεμβάλλονται κατὰ σειράν: μία γεννήτρια, ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως* $E = 52$ volt *καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως* $r = 1$ ohm, *ἕνας κινητὴρ καὶ μία ἀντίστασις* $R = 5$ ohm *ἡ ὁποία εἶναι βυθισμένη ἐντὸς θερμιδομέτρου. Αἱ ἀντιστάσεις τῶν ὑπολοίπων ἀγωγῶν τοῦ κυκλώματος εἶναι ἀσήμαντοι. Ὅταν ὁ κινητὴρ δὲν στρέφεται, παρατηροῦμεν ὅτι ἐντὸς* 5 *λεπτῶν ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως* R *ἀναπτύσσεται ποσότης θερμότητος ἴση μὲ* 5 760 cal. *Ὅταν δὲ ὁ κινητὴρ στρέφεται, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ἐπὶ τῆς* R *ἀναπτύσσεται ποσότης θερμότητος ἴση μὲ* 360 cal. *Νὰ εὑρεθῇ: 1) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα εἰς τὰς δύο ἀνωτέρω περιπτώσεις. — 2) Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις* r' *καὶ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις* E' *τοῦ κινητῆρος. — 3) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ* V *εἰς τοὺς πόλους τοῦ κινητῆρος.*

1) Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἀναπτύσσεται κατὰ δευτερόλεπτον ποσότης

θερμότητος: $Q_1 = 5\,760 : 300 = 19{,}2$ cal.

Ἤτοι ἡ ἠλεκτρικὴ ἰσχύς, ἡ ὁποία δαπανᾶται κατὰ δευτερόλεπτον ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἐπὶ τῆς R, εἶναι: $P_1 = 19{,}2 \times 4{,}18 = 80$ watt.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $P_1 = RI^2$, ἕπεται ὅτι εἶναι:

$$I_1^2 = P_1 : R = 80 : 5 = 16 \cdot \quad \text{ἄρα} \quad I_1 = 4 \text{ ampère}.$$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ ἀναπτυσσομένη κατὰ δευτερόλεπτον ποσότης θερμότητος εἶναι:

$$Q_2 = 360 : 300 = 1{,}2 \text{ cal} \cdot \quad \text{ἄρα} \quad P_2 = 1{,}2 \times 4{,}18 = 5 \text{ watt}.$$

Καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι τότε:

$$I_2^2 = P_2 : R = 5 : 5 = 1 \cdot \quad \text{ἄρα} \quad I_2 = 1 \text{ ampère}.$$

2) Ὅταν ὁ κινητὴρ δὲν στρέφεται τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν I_1. Ἑπομένως ἡ ὅλη ἀντίστασις R_1 τοῦ κυκλώματος εἶναι: $R_1 = \dfrac{E}{I_1} = \dfrac{52}{4} = 13$ ohm.

Ἡ ζητουμένη ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος εἶναι:

$$r' = R_1 - (R + r) = 13 - (5 + 1) = 7 \text{ ohm}.$$

Ὅταν ὁ κινητὴρ στρέφεται, τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν I_2. Ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις E′ τοῦ κινητῆρος καθορίζεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm:

$$E - E' = I_2R_1 \quad \text{ἄρα} \quad E' = E - I_2R_1 = 52 - (1 \times 13) = 39 \text{ volt}.$$

3) Ἔστω V ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τοῦ κινητῆρος, ὅταν τὸ ρεῦμα ἔχῃ ἔντασιν I_2. Τότε θὰ ἰσχύῃ πάλιν ἡ σχέσις:

$$V - E' = I_2r' \cdot \quad \text{ἄρα} \quad V = E' + I_2r' = 39 + (1 \times 7) = 46 \text{ volt}.$$

233.— *Οἱ δύο πόλοι μιᾶς συστοιχίας συσσωρευτῶν συνδέονται μὲ βολτόμετρον τὸ ὁποῖον ἔχει πολὺ μεγάλην ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν. Τὸ βολτόμετρον δεικνύει τότε* 120 volt. — *1) Οἱ πόλοι τῆς συστοιχίας συνδέονται ἔπειτα μὲ ἀγωγὸν ἀντιστάσεως* 5 ohm. *Τὸ βολτόμετρον δεικνύει τότε* V = 100 volt. *Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ συστοιχία εἰς τὸ κύκλωμα καὶ πόση εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις αὐτῆς;— 2) Ἀντικαθιστῶμεν τὸν ἀνωτέρω ἀγωγὸν μὲ ἕνα κινητῆρα, τὸν ὁποῖον ἐμποδίζομεν νὰ στρέφεται. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ βολτόμετρον δεικνύει τότε* $V_1 = 90$ volt. *Πόση εἶναι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ πόση εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος; —3) Ἀφήνομεν τὸν κινητῆρα νὰ λειτουργήσῃ καὶ παρατηροῦμεν τότε ὅτι τὸ βολτόμετρον δεικνύει* $V_2 = 115$ volt. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος καὶ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις αὐτοῦ. Αἱ τριβαὶ θεωροῦνται ἀσήμαντοι.*

1) Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς συστοιχίας εἶναι E = 120 volt. Ὅταν οἱ πόλοι τῆς συστοιχίας συνδεθοῦν μὲ τὸν ἀγωγόν, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀντίστασιν R = 5 ohm, τότε τὸ βολτόμετρον δεικνύει τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ V ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ἀγωγοῦ τούτου. Ἄρα ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι: $I = V : R = 100 : 5 = 20$ ampère.

Ἀλλὰ V εἶναι καὶ ἡ μεταξὺ τῶν πόλων τῆς συστοιχίας ὑπάρχουσα διαφορὰ δυναμικοῦ. Ἐὰν r εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς συστοιχίας, τότε ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm: $E = V + Ir$, εὑρίσκομεν:

$$r = \frac{E - V}{I} = \frac{120 - 100}{20} = 1 \text{ ohm}.$$

2) Ὅταν ὁ κινητὴρ δὲν στρέφεται, οὗτος παρεμβάλλεται εἰς τὸ κύκλωμα

ὡς μία ἁπλῆ ἀντίστασις R_1 καὶ ἐπομένως ἡ ἔντασις I_1 τοῦ ρεύματος εὑρίσκεται εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$E = V_1 + I_1 r \cdot \quad \text{ἄρα} \quad I_1 = \frac{E - V_1}{r} = \frac{120 - 90}{1} = 30 \text{ ampère.}$$

Ἡ δὲ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις R_1 τοῦ κινητῆρος εἶναι:

$$R_1 = V_1 : I_1 = 90 : 30 = 3 \text{ ohm.}$$

3) Ὅταν ὁ κινητὴρ στρέφεται, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι I_2. Ἐὰν E' εἶναι ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος, τότε θὰ ἰσχύουν αἱ κατωτέρω δύο σχέσεις: $E - E' = I_2(R_1 + r)$

καὶ $V_2 - E' = I_2 R_1 \cdot$ ἄρα $E - E' = (V_2 - E') + I_2 r$,

ἤτοι $$I_2 = \frac{E - V_2}{r} = \frac{120 - 115}{1} = 5 \text{ ampère.}$$

Ἡ ἀντηλεκτρεγετικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος εἶναι:

$$E' = V_2 - I_2 R_1 = 115 - (5 \times 3) = 100 \text{ volt.}$$

Ἡ μηχανικὴ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι: $P' = E' I_2 = 100 \times 5 = 500$ watt.

Σημείωσις. Ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος ἠμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: Εἰς τὸν κινητῆρα παρέχεται ἰσχύς:

$$P = V_2 \cdot I_2 = 115 \times 5 = 575 \text{ watt}$$

Ὑπὸ μορφὴν θερμότητος χάνεται ἰσχύς: $p = R_1 I_2^2 = 3 \times 25 = 75$ watt.

Ἄρα ἡ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ κινητήρ, εἶναι:

$$P' = P - p = 575 - 75 = 500 \text{ watt.}$$

καὶ ἐπομένως $E' = P : I = 500 : 5 = 100$ volt.

234. — *Μεταξὺ τῶν πόλων Α καὶ Β μιᾶς γεννητρίας ὑπάρχει σταθερὰ διαφορὰ δυναμικοῦ* 220 volt. *Οἱ πόλοι Α καὶ Β συνδέονται μὲ τοὺς πόλους ἑνὸς κινητῆρος. Οἱ ἀγωγοὶ οἱ χρησιμοποιούμενοι διὰ τὴν σύνδεσιν ἔχουν ἀσήμαντον ἀντίστασιν. Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι τότε* 15 ampère. *Ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος εἶναι* 0,8. *Νὰ εὑρεθῇ: 1) Ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος. — 2) Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις καὶ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος — 3) Ἡ ἡμερησία δαπάνη, ἐὰν εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ κινητὴρ λειτουργεῖ* 4 *ὥρας ἡμερησίως καὶ ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ρεύματος εἶναι* 400 *δραχμαὶ κατὰ ὡριαῖον κιλοβάτ. Δεχόμεθα ὅτι αἱ ἀπώλειαι ἐνεργείας ἐντὸς τοῦ κινητῆρος περιορίζονται μόνον εἰς τὴν θέρμανσιν τῶν ἀγωγῶν.*

1) Ἕνα ρεῦμα ἐντάσεως $I = 15$ ampère ὑπὸ τάσιν $V = 220$ volt παρέχει εἰς τὸν κινητῆρα ἰσχύν: $P = VI = 220 \times 15 = 3\,300$ watt $= 3{,}3$ kW.

Ἐπειδὴ ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος εἶναι 0,8, ἕπεται ὅτι ἡ ὑπὸ τοῦ κινητῆρος παρεχομένη ἰσχὺς εἶναι: $P' = 0{,}8\,P = 0{,}8 \times 3\,300 = 2\,640$ watt $= 2{,}64$ kW.

2) Ἡ ἰσχὺς ἡ ὁποία χάνεται ἐντὸς τοῦ κινητῆρος ὑπὸ μορφὴν θερμότητος εἶναι: $p = P - P' = 3\,300 - 2\,640 = 660$ watt.

Ἐὰν R εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος, τότε σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Joule θὰ εἶναι: $p = RI^2$. Ἐπομένως ἡ ἀντίστασις R εἶναι:

$$R = p : I^2 = 660 : 225 = 3 \text{ ohm (περίπου).}$$

Ἐὰν E' εἶναι ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος, τότε ἀπὸ τὴν σχέσιν $P' = E'I$ εὑρίσκομεν: $E' = P' : I = 2\,640 : 15 = 176$ volt.

3) Ἡ ἡμερησία κατανάλωσις ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας εἶναι:

$$W = 3{,}3 \times 4 = 13{,}2 \text{ kWh.}$$

Ἄρα ἡ ἡμερησία δαπάνη εἶναι: $400 \times 13{,}2 = 5\,280$ δραχμαί.

235. — *Κινητὴρ συνεχοῦς ρεύματος τροφοδοτεῖται μὲ ρεῦμα τὸ ὁποῖον ἔχει ἔντασιν* 2 ampère *καὶ τάσιν* 110 volt. *Ὁ κινητὴρ οὗτος κινεῖ ἀντλίαν ἡ ὁποία, λειτουργοῦσα κανονικῶς, ἀνυψώνει εἰς ὕψος* 8 *μέτρα* 120 *λίτρα ὕδατος κατὰ λεπτόν. Ἡ ἀπώλεια ἰσχύος ἕνεκα τῶν τριβῶν, ἐντὸς τῆς ἀντλίας καὶ τῶν σωλήνων, εἶναι* 40 watt. *Ἡ δὲ ἀπώλεια ἰσχύος ἐντὸς τοῦ κινητῆρος ὀφείλεται ἀποκλειστικῶς εἰς τὸ φαινόμενον τοῦ* Joule.— *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ κινητὴρ εἰς τὴν ἀντλίαν.— 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος καὶ ἡ ἐσωτερική του ἀντίστασις. Θὰ ληφθῇ* 1 kgm = 9,8 joule.

1) Ἡ ἀντλία ἀνυψώνει κατὰ δευτερόλεπτον 2 λίτρα ὕδατος, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάρος 2 **kg***. Πρὸς τοῦτο ἀπαιτεῖται ἔργον:

$$W = 2 \times 8 = 16 \text{ kgm} = 16 \times 9{,}8 = 157 \text{ joule}.$$

Διὰ τὴν ὑπερνίκησιν τῶν τριβῶν δαπανᾶται ἰσχὺς 40 watt. Ἐπομένως ἡ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ κινητὴρ εἰς τὴν ἀντλίαν, εἶναι:

$$P' = 157 + 40 = 197 \text{ watt}.$$

2) Τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν $I = 2$ ampère καὶ τάσιν $V = 110$ volt· ἐπομένως ἔχει ἰσχύν: $P = VI = 110 \times 2 = 220$ watt.

Αὐτὴ ἡ ἰσχὺς παρέχεται εἰς τὸν κινητῆρα. Ἄρα ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος εἶναι: $A = P' : P = 197 : 220 = 0{,}90$ ἢ $A = 90\,\%$.

Ἐντὸς τοῦ κινητῆρος χάνεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἰσχύς:

$$p = P - P' = 220 - 197 = 23 \text{ watt}.$$

Ὥστε ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις R τοῦ κινητῆρος εἶναι:

$$R = p : I^2 = 23 : 4 = 6 \text{ ohm (περίπου)}.$$

IV. ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

236 — *Διαβιβάζομεν ρεῦμα δι' ἑνὸς μεταλλικοῦ σύρματος διὰ νὰ θερμάνωμεν ἠλεκτρικῶς ἕνα ὄργανον ἀποστάξεως τοῦ αἰθέρος, διὰ τοῦ ὁποίου ἀποστάζονται* 900 gr *αἰθέρος καθ' ὥραν. Τὸ ρεῦμα ἔχει τάσιν* 220 volt. *Αἱ ἀπώλειαι θερμότητος θεωροῦνται ἀσήμαντοι. Ἡ θερμότης ἐξαερώσεως τοῦ αἰθέρος εἰς τὴν θερμοκρασίαν βρασμοῦ εἶναι* 91 cal/gr, *τὸ δὲ μηχανικὸν ἰσοδύναμον εἶναι* 4,18 joule/cal. *Νὰ εὑρεθῇ: 1) Ἡ ἐντὸς τοῦ ὀργάνου καταναλισκομένη ἰσχύς.— 2) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ ὄργανον. — 3) Ἡ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος.— 4) Πόσον κοστίζει ἡ ἀπόσταξις* 9 kg *αἰθέρος, ἐὰν ἡ τιμὴ τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας εἶναι* 200 *δραχμαὶ κατὰ ὡριαῖον κιλοβάτ.*

1) Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ὑγρὸς αἰθὴρ ἔχει τὴν θερμοκρασίαν βρασμοῦ, τότε κατὰ δευτερόλεπτον ἐξαερώνεται μᾶζα αἰθέρος 900 : 3600 = 0,25 gr. Διὰ τὴν ἐξαέρωσιν αὐτῆς τῆς μάζης ἀπαιτεῖται ποσότης θερμότητος $0{,}25 \times 91$ cal, ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μέ: $0{,}25 \times 91 \times 4{,}18 = 95$ joule.

Ἄρα ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς εἶναι: $P = 95$ watt.

2) Αὐτὴ ἡ ἰσχὺς προσφέρεται ἀπὸ τὸ ρεῦμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἔντασιν:

$$I = P : V = 95 : 220 = 0{,}43 \text{ ampère}.$$

3) Ἡ ἀντίστασις R τοῦ σύρματος εἶναι: $R = \frac{V}{I} = \frac{220 \times 220}{95} = 509$ ohm.

4) Διὰ νὰ ἐξαερωθοῦν 9 kg αἰθέρος, πρέπει τὸ ὄργανον νὰ λειτουργήσῃ ἐπὶ 10 ὥρας. Ἄρα ἡ δαπάνη εἶναι: $0{,}095 \times 10 \times 200 = 190$ δραχμαί.

237.— *Δύο γεννήτριαι Γ_1 καὶ Γ_2 ἔχουν τὴν αὐτὴν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E καὶ ἐσωτερικὰς ἀντιστάσεις $r_1 = 1$ ohm καὶ $r_2 = 2$ ohm. Αἱ γεννήτριαι εἶναι ἡνωμέναι κατὰ σειράν, ἡ δὲ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις εἶναι x. — 1) Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς τὴν x, ὥστε ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας Γ_2 νὰ εἶναι μηδέν; —2) Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς τὴν x, ὥστε ἡ ἐνέργεια ἡ παρεχομένη εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα νὰ εἶναι ἡ μεγίστη;*

1) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ V εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας Γ_2 εἶναι:

$V = E - Ir_2$ · διὰ $V = 0$ εἶναι: $E = Ir_2$.

Ἐφαρμόζοντες τὸ νόμον τοῦ Ohm εἰς ὁλόκληρον τὸ κύκλωμα λαμβάνομεν:

$2E = I(r_1 + r_2 + x)$ ἢ $2Ir_2 = I(r_1 + r_2 + x)$ · ἄρα $x = 1$ ohm.

2) Εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα παρέχεται ἰσχύς:

$P = I^2 x$ ὅπου εἶναι: $I = \frac{2E}{r_1 + r_2 + x}$ ἄρα $P = 4E^2 \times \frac{x}{(3+x)^2}$.

Ἡ ἰσχὺς P ἔχει τὴν μεγίστην τιμήν, ὅταν ἡ παράστασις $\frac{x}{(3+x)^2}$ ἔχῃ τὴν μεγίστην τιμὴν μ.

Ἂν θέσωμεν: $\frac{x}{(3+x)^2} = \mu$, εὑρίσκομεν: $\mu x^2 + (6\mu - 1)x + 9\mu = 0$.

Τὸ x πρέπει νὰ ἔχῃ θετικὴν τιμήν. Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν ἡ διακρίνουσα Δ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως εἶναι $\Delta \geqslant 0$, ἤτοι ὅταν εἶναι:

$$(6\mu - 1)^2 - 36\mu^2 \geqslant 0.$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη τιμὴ τοῦ μ εἶναι: $\mu = 1/12$ ὁπότε εἶναι $x = 3$.

Ἡ ἰσχὺς λοιπὸν P ἔχει τὴν μεγίστην τιμήν, ὅταν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος εἶναι $x = 3$ ohm.

238.— *Ρεῦμα ὕδατος πίπτει ἀπὸ ὕψος 50 μέτρων καὶ ἔχει παροχὴν 1 m^3 κατὰ δευτερόλεπτον.— 1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μεγίστη χρησιμοποιήσιμος ἰσχὺς τῆς ὑδατοπτώσεως.— 2) Τὰ 80 % αὐτῆς τῆς ἰσχύος συλλαμβάνονται ἀπὸ ἕνα στρόβιλον. Μὲ τὸν ἄξονα τοῦ στροβίλου εἶναι συνδεδεμένη δυναμοηλεκτρικὴ μηχανή, ἡ ὁποία ἔχει ἀπόδοσιν 0,90. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον δίδει ἡ μηχανὴ αὐτή, ἂν ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους της εἶναι 1 000 volt.— 3) Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ἰσχὺς τῆς ὑδατοπτώσεως εὑρίσκεται διασκορπισμένη ὑπὸ τῶν τριβῶν ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Ἂν δεχθῶμεν ὅτι δὲν συμβαίνουν ἀνταλλαγαὶ θερμότητος μεταξὺ τοῦ ὕδατος καὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ περιβάλλοντος, νὰ εὑρεθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς θερμοκρασίας πρὸ καὶ μετὰ τὴν πτῶσιν. Μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος:* $J = 427$ kgm/kcal.

1) Κατὰ δευτερόλεπτον πίπτουν 1 000 kg* ὕδατος ἀπὸ ὕψος 50 m. Ἄρα ἡ

χρησιμοποιήσιμος ἐνέργεια τῆς ὑδατοπτώσεως εἶναι:

$$W_1 = 1\,000 \times 50 = 50\,000 \text{ kgm}\cdot$$

ὥστε ἡ ἰσχὺς τῆς ὑδατοπτώσεως εἶναι: $P_1 = 50\,000 : 75 = 667$ ἀτμόϊπποι.

2) Ὁ στρόβιλος συλλαμβάνει μόνον τὰ 80 % τῆς ἐνεργείας W_1, ἤτοι: $50\,000 \times 0{,}80 = 40\,000$ kgm. Ἐκ τῆς συλλαμβανομένης πάλιν ἐνεργείας ἡ δυναμοηλεκτρικὴ μηχανὴ μετατρέπει εἰς ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν W_2, τὰ 0,90 · ἤτοι εἶναι: $W_2 = 40\,000 \times 0{,}90 = 36\,000 \text{ kgm} = 353\,160$ joule.

Ἄρα ἡ ἰσχὺς τῆς παραγομένης ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας εἶναι:

$$P_2 = 353\,160 \text{ watt}.$$

Ἀφοῦ V εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας, ἔχομεν τὴν γνωστὴν σχέσιν: $P_2 = V \cdot I$ · ἄρα ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = P_2 : V = 353\,160 : 1\,000 = 353 \text{ ampère}.$$

3) Ἡ ἐνέργεια τῆς ὑδατοπτώσεως, ἡ ὁποία διασκορπίζεται ὑπὸ τῶν τριβῶν ἐντὸς τοῦ ὕδατος, εἶναι: $W_3 = 50\,000 \times 0{,}20 = 10\,000$ kgm.

Ἡ ἐνέργεια αὐτὴ ἰσοδυναμεῖ μὲ ποσότητα θερμότητος:

$$Q = \frac{W_3}{J} = \frac{10\,000}{427} = 23{,}4 \text{ kcal}.$$

Αὐτὴ ἡ ποσότης θερμότητος δαπανᾶται διὰ νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία μάζης ὕδατος 1 000 kg κατὰ θ^0. Ὥστε ἔχομεν τὴν σχέσιν: $Q = 1\,000 \times \theta$ ·

Ἄρα ἡ ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας εἶναι: $\theta = \dfrac{Q}{1\,000} = \dfrac{23{,}4}{1\,000} = 0{,}023^0$.

239.— *Μία ἠλεκτροκίνητος ἁμαξοστοιχία ἔχει τὰ ἑξῆς χαρακτηριστικά: Οἱ κινητῆρες ἔχουν ἰσχὺν* 3 520 *ἀτμοΐππων, τὸ δὲ ὄχημα τὸ ὁποῖον φέρει τοὺς κινητῆρας ἔχει βάρος* 133 *τόννους καὶ* 4 *κινητηρίους τροχούς, ἕκαστος τῶν ὁποίων λειτουργεῖ διὰ* 2 *κινητήρων· οὗτοι τροφοδοτοῦνται διὰ συνεχοῦς ρεύματος ὑπὸ τάσιν* 1 500 volt. *Κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐκκινήσεως ἕκαστος κινητὴρ ἠμπορεῖ νὰ ἀνθέξῃ εἰς μεγίστην ἔντασιν ρεύματος* 650 ampère. *Τὸ ὄχημα τῶν κινητήρων σύρει* 20 *ὀχήματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει μέσον βάρος* 45 *τόννους. Ἡ ἁμαξοστοιχία κινεῖται μὲ μέσην ταχύτητα* 120 km/h.— *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γραμμὴ κατὰ τὴν κίνησιν τῆς ἁμαξοστοιχίας. Νὰ γραφῇ ἁπλῶς ἡ μεγίστη ἰσχὺς ἡ ὁποία καταβάλλεται κατὰ τὴν ἐκκίνησιν.— 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀνθισταμένη δύναμις εἰς χιλιόγραμμα κατὰ κινούμενον τόννον, ἡ ὀφειλομένη εἰς τὰς τριβὰς ἐκ κυλίσεως· ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος ὑποτίθεται ἀσήμαντος.—3) Διὰ νὰ σταματήσῃ ἡ ἁμαξοστοιχία, τίθενται εἰς λειτουργίαν τὰ φρένα καὶ τότε ἡ ἁμαξοστοιχία σταματᾷ, ἀφοῦ προηγουμένως διατρέξῃ διάστημα* 500 m. *Νὰ εὑρεθῇ εἰς χιλιόγραμμα κατὰ τόννον ἡ δύναμις ἡ ἀσκουμένη ὑπὸ τῶν φρένων, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν καὶ τῆς τριβῆς ἐκ κυλίσεως. Ὑποθέτομεν ὅτι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος εἶναι ἀσήμαντος καὶ ὅτι εἶναι* $g = 10$ m/sec².— *4) Ἕκαστον ἐκ τῶν* 20 *ὀχημάτων εἶναι ἐφωδιασμένον μὲ* 23 *ἠλεκτρικὰς θερμάστρας. Ἡ μέση ἰσχὺς κάθε θερμάστρας εἶναι* 700 watt. *Νὰ εὑρεθῇ πόσον στοιχίζει ἡ δαπανωμένη ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια κατὰ μίαν χειμερινὴν διαδρομὴν διαρκείας* 10 *ὡρῶν, ἂν ἡ τιμὴ τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας εἶναι* 100 *δραχμαὶ κατὰ ὡριαῖον κιλοβάτ.*

1) Οἱ κινητῆρες ἔχουν ἰσχύν: $P = 3\,520 \times 736 = 2\,590\,720$ watt.

Ἂν I εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γραμμὴ καὶ V ἡ τάσις τοῦ ρεύματος, τότε ἡ ἰσχὺς P δίδεται ἐπίσης ἀπὸ τὴν σχέσιν: $P = VI$. Ἄρα ἡ ζητουμένη ἔντασις εἶναι $I = P : V = 2\,590\,720 : 1500 = 1\,727$ ampère.

Ἐὰν διαβιβάσωμεν δι' ἑκάστου κινητῆρος τὴν μεγίστην ἔντασιν, εἰς τὴν ὁποίαν ἠμπορεῖ νὰ ἀνθέξῃ, τότε ἡ ἰσχὺς τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας τῆς δαπανωμένης ἐντὸς τῶν 8 κινητήρων εἶναι: $8 \times 1\,500 \times 650$ watt καὶ ἐπομένως κατὰ τὴν ἐκκίνησιν ἡ ἰσχὺς τῶν κινητήρων εἶναι:

$$P' = (8 \times 1\,500 \times 650) : 736 = 10\,600 \text{ ἀτμόϊπποι}.$$

2) Ἂς ὀνομάσωμεν F τὴν κινοῦσαν δύναμιν. Ἡ ταχύτης τῆς ἁμαξοστοιχίας εἶναι $\upsilon = 100/3$ m/sec. Κατὰ δευτερόλεπτον οἱ κινητῆρες παράγουν ἔργον:

$$W = 3\,520 \times 75 \text{ kgm},$$

τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς κινούσης δυνάμεως ἐπὶ τὴν μετατόπισιν. Ἄρα ἔχομεν: $F = \dfrac{W}{\upsilon} = \dfrac{3\,520 \times 75 \times 3}{100} = 7\,920 \text{ kg*}$.

Ἐπειδὴ ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλή, ἡ δύναμις αὐτὴ F εἶναι ἴση μὲ τὴν συνισταμένην τῶν ἀντιστάσεων. Ἑπομένως ἡ ἀνθισταμένη δύναμις κατὰ κινούμενον τόννον εἶναι: $f = \dfrac{F}{133 + (20 \times 45)} = \dfrac{7\,920}{133 + (20 \times 45)} = 7{,}67 \text{ kg*}$.

Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῆς ἁμαξοστοιχίας εἶναι:

$$W_1 = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1\,033}{10} \times \left(\frac{100}{3}\right)^2 = 57\,390\,000 \text{ kgm}.$$

Ἡ ὅλη ἀνθισταμένη δύναμις F_1, ἡ ὁποία προκαλεῖ τὴν στάσιν τῆς ἁμαξοστοιχίας, εἶναι τοιαύτη ὥστε τὸ ἔργον τῆς F_1 νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν W_1. Ἄρα ἔχομεν:

$$W_1 = F_1 \times 500 \quad \text{ἤτοι} \quad F_1 = \frac{W_1}{500} = \frac{57\,390\,000}{500} = 114\,780 \text{ kg*}.$$

Ἂν ἀπὸ τὴν δύναμιν F_1 ἀφαιρέσωμεν τὴν F, ἡ ὁποία ὀφείλεται εἰς τὰς τριβὰς ἐκ κυλίσεως, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ δύναμις ἡ ὀφειλομένη εἰς τὰ φρένα εἶναι: $F_2 = F_1 - F = 114\,780 - 7\,920 = 106\,860$ kg*, ἤτοι κατὰ κινούμενον τόννον εἶναι: $f' = 106\,860 : 1\,033 = 103{,}4$ kg*.

4) Διὰ τὴν ἕλξιν τῆς ἁμαξοστοιχίας ἐπὶ 10 ὥρας δαπανᾶται ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια: $2\,590{,}7 \times 10 = 25\,907$ kWh

Διὰ τὴν θέρμανσιν τῶν 20 ὀχημάτων ἐπὶ 10 ὥρας δαπανᾶται ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια: $20 \times 23 \times 0{,}7 \times 10 = 3\,220$ kWh.

Ἄρα ἡ ὅλη δαπανωμένη ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια κατὰ τὴν διαδρομὴν εἶναι:

$$25\,907 + 3\,220 = 29\,127 \text{ kWh}.$$

Ἡ ἀξία τῆς ἐνεργείας αὐτῆς εἶναι: $29\,127 \times 100 = 2\,912\,700$ δραχμαί.

240. — *Μία ὑδατόπτωσις τροφοδοτεῖ ἠλεκτρογεννήτριαν. Ἡ ὑδατόπτωσις ἔχει παροχὴν 418 λίτρα κατὰ δευτερόλεπτον καὶ ὕψος πτώσεως τοῦ ὕδατος 100 m. Ἡ γεννήτρια λαμβάνει τὰ 80 % τῆς διαθεσίμου ἐνεργείας.— 1) Πόση εἶναι ἡ ἰσχὺς τῆς γεννητρίας εἰς κιλοβάτ; — 2) Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς γεννητρίας εἶναι ἴση μὲ τὸ 1/9 τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ μεταλλικὸν σύρμα βυθισμένον ἐντὸς θερμιδομέτρου. Διὰ τοῦ θερμιδομέτρου κυκλοφορεῖ ρεῦμα ὕδατος. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ παροχὴ τοῦ ρεύματος τούτου* *ὥστε, ἂν τὸ ὕδωρ φθάνῃ εἰς τὸ θερμιδόμετρον μὲ θερμοκρασίαν 0^0, νὰ ἐξέρχεται ἀπὸ αὐτὸ μὲ θερμοκρασίαν 80^0;*

1) Ἡ ἰσχὺς τῆς ὑδατοπτώσεως εἶναι:

$$P = 418 \times 100 \times 9{,}81 = 410\,058 \text{ watt} = 410{,}058 \text{ kW}.$$

Ἡ ἰσχὺς λοιπὸν τῆς γεννητρίας εἶναι:

$$P' = 0{,}80 \times 410{,}058 = 328{,}046 \text{ kW}.$$

2) Ἡ ὅλη ἀντίστασις εἶναι ἴση μὲ τὰ $1/9 + 1 = 10/9$ τῆς ἐξωτερικῆς ἀντιστάσεως. Ὅλη ἡ ἐνέργεια, τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ γεννήτρια, μετατρέπεται εἰς θερμότητα. Ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις ἀπορροφᾷ τὰ 9/10 τῆς ἰσχύος τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ γεννήτρια, δηλαδὴ ἀπορροφᾷ ἰσχύν: $0{,}9 \times 328\,046$ watt ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μὲ ποσότητα θερμότητος: $Q = \dfrac{0{,}9 \times 328\,046}{4{,}18}$ cal.

Ἂν x γραμμάρια ὕδατος διέρχωνται ἀπὸ τὸ θερμιδόμετρον κατὰ δευτερόλεπτον, τότε αὐτὴ ἡ ποσότης θερμότητος δαπανᾶται διὰ τὴν ὕψωσιν τῆς θερμοκρασίας τῶν x γραμμαρίων ὕδατος ἀπὸ 0^0 εἰς 80^0. Ἑπομένως ἔχομεν:

$$\frac{0{,}9 \times 328\,046}{4{,}18} = 80\,x \qquad \text{ἢ} \qquad x = 882{,}9 \text{ gr}.$$

241. — *Διὰ τὴν μεταβίβασιν ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας χρησιμοποιεῖται σύρμα χάλκινον μήκους l καὶ τομῆς σ. Ἡ μεταβιβαζομένη ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς εἶναι P καὶ ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας ἐπὶ τῆς γραμμῆς εἶναι $\alpha\,\%$. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι V. Νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις συνδέει τὰ ἀναφερόμενα ἀνωτέρω μεγέθη καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τομὴ σ τῆς γραμμῆς μεταβάλλεται ἀντιστρόφως ἀναλόγως τοῦ τετραγώνου τῆς τάσεως V, ἂν ὅλα τὰ ἄλλα μεγέθη διατηροῦνται σταθερά. Ἐφαρμογή: Νὰ εὑρεθῇ ἡ τομὴ σ τῆς γραμμῆς ὅταν εἶναι:* $P = 10$ kW· $V = 200$ volt· $l = 2$ km· $\rho = 1{,}6/10^6$ ohm — cm· $\alpha = 5\,\%$.

1) Ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς εἶναι: $R = \rho \cdot \dfrac{l}{\sigma}$.

Ἡ ἰσχύς, ποὺ χάνεται ἐπὶ τῆς γραμμῆς, εἶναι: $P_1 = RI^2 = \dfrac{\alpha}{100}\,P$. (1)

Ἐξ ἄλλου ἀπὸ τὴν γεννήτριαν ἀναχωρεῖ ἰσχύς:

$$P = VI \cdot \qquad \text{ἄρα} \qquad I = P : V. \tag{2}$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$R \cdot \frac{P^2}{V^2} = \frac{\alpha}{100}\,P \quad \text{ἢ} \quad \rho\frac{l}{\sigma} \cdot \frac{P^2}{V^2} = \frac{\alpha}{100}\,P \cdot \quad \text{ὥστε εἶναι:} \quad \sigma = \frac{100\,\rho\,l\,P}{\alpha\,V^2}.$$

2) Ἐφαρμογή: $\sigma = \dfrac{100 \times 1{,}6 \times 2 \times 10^5 \times 10^4}{5 \times 4 \times 10^4 \times 10^6} = 1{,}6 \text{ cm}^2$.

242 — *Μεταξὺ τῶν δύο πόλων μιᾶς γεννητρίας ὑπάρχει σταθερὰ διαφορὰ δυναμικοῦ* 3 000 volt. *Ἡ παραγομένη ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια μεταφέρεται εἰς ἀπόστασιν* 2,5 km. *Ἡ γραμμὴ διὰ τῆς ὁποίας μεταφέρεται ἡ ἐνέργεια ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο χάλκινα σύρματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει τομὴν* $\sigma = 244$ mm². *Ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ εἶναι* $\rho = 1{,}6/10^6$ ohm — cm. *Διὰ τῆς γραμμῆς* *κυκλοφορεῖ ρεῦμα ἐντάσεως* 400 ampère.— *1) Νὰ ἐκφρασθῇ εἰς κιλοβὰτ ἡ ἰσχὺς τῆς ἐνεργείας, ἡ ὁποία ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸν σταθμὸν ἠλεκτροπαραγωγῆς. — 2) Νὰ ὑπολογισθῇ : α) ἡ ἰσχὺς ἡ ὁποία χάνεται ἐπὶ τῆς γραμμῆς ὑπὸ μορφὴν θερμότητος· β) ἡ ἰσχὺς ἡ ὁποία φθάνει εἰς τὸν τόπον καταναλώσεως τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας· γ) ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν δύο συρμάτων τῆς γραμμῆς εἰς τὸν τόπον καταναλώσεως τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας. — 3) Νὰ εὑρεθῇ πόση μᾶζα ὕδατος θὰ ἠμποροῦσε καθ' ὥραν θὰ θερμανθῇ ἀπὸ* 10^0 *εἰς* 100^0 *μὲ τὴν ποσότητα θερμότητος ἡ ὁποία χάνεται ἐπὶ τῆς γραμμῆς.*

1) Ὅταν τὸ ρεῦμα ἀναχωρῇ ἀπὸ τὸν σταθμὸν ἠλεκτροπαραγωγῆς ἔχει ἰσχύν:

$$P_0 = V_0 I = 3\,000 \times 400 = 1\,200\,000 \text{ watt} = 1\,200 \text{ kW}.$$

2) Ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς εἶναι :

$$R = \rho \frac{2\,l}{\sigma} = \frac{1,6}{10^6} \times \frac{5 \times 10^5}{2,44} = \frac{20}{61} \text{ ohm.}$$

Ἐπὶ τῆς γραμμῆς χάνεται, ὑπὸ μορφὴν θερμότητος, ἰσχύς :

$$p = RI^2 = \frac{20}{61} \times 400^2 = 52\,000 \text{ watt} = 52 \text{ kW}.$$

Εἰς τὸν τόπον καταναλώσεως φθάνει ἰσχύς :

$$P = P_0 - p = 1\,200 - 52 = 1\,148 \text{ kW}.$$

Μεταξὺ τῶν δύο συρμάτων τῆς γραμμῆς, εἰς τὸν τόπον καταναλώσεως, ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ V, ἡ ὁποία καθορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν : $P = VI$.

Ἄρα : $V = P : I = 1\,148\,000 : 400 = 2\,870$ volt.

3) Κατὰ δευτερόλεπτον ἀναπτύσσεται ἐπὶ τῆς γραμμῆς ποσότης θερμότητος :

$$q = \frac{1}{4,18}\, p = \frac{1}{4,18} \times 52\,000 = 12\,480 \text{ cal.}$$

Καθ' ὥραν ἀναπτύσσονται : $Q = 12\,480 \times 3\,600$ cal.

Αὐτὴ ἡ ποσότης θερμότητος ἠμπορεῖ νὰ ὑψώσῃ κατὰ 90^0 τὴν θερμοκρασίαν μιᾶς μάζης m ὕδατος, ἡ ὁποία εἶναι :

$$m = \frac{Q}{90} = \frac{12\,480 \times 3\,600}{90} = 500\,000 \text{ gr (περίπου)} = 500 \text{ kg.}$$

243.— *Μία ὑδατόπτωσις ἔχει παροχὴν* 2 m³ *κατὰ δευτερόλεπτον. Τὸ ὕδωρ πίπτει ἀπὸ ὕψος* 10 m. *Ἡ ὑδατόπτωσις αὐτὴ θέτει εἰς κίνησιν ὑδροστρόβιλον, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀπόδοσιν* 75 %₀ *καὶ κινεῖ γεννήτριαν ἡ ὁποία ἔχει ἀπόδοσιν* 80 %. *1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαθέσιμος ἰσχὺς εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας.—2) Ἡ ἀνωτέρω ὑπολογισθεῖσα ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια θὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς ἕνα ἐργοστάσιον τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς χιλιομέτρου. Ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἀνέρχεται εἰς* 10 %, *ἡ δὲ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι* 5 000 volt. *Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς.*

Τὰ 2 m³ ὕδατος ἔχουν βάρος 2 000 kg*. Ὅταν πίπτουν ἀπὸ ὕψος 10 m, παράγουν ἔργον 20 000 kgm. Ἄρα ἡ ἰσχὺς τῆς ὑδατοπτώσεως εἶναι :

$$P_1 = 20\,000 \times 9,81 = 196\,000 \text{ watt} \quad \text{ἢ} \quad \text{περίπου} \quad P_1 = 200 \text{ kW}.$$

Ἀπὸ τὴν ἰσχὺν αὐτὴν ὁ ὑδροστρόβιλος μετατρέπει εἰς ὠφέλιμον ἰσχὺν τὰ 75 %. Ἄρα ἡ ἰσχὺς τοῦ στροβίλου εἶναι : $P_2 = 200 \times 0,75 = 150$ **k**W.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀπόδοσις τῆς γεννητρίας εἶναι 80 %, συνάγεται ὅτι ἡ ἰσχὺς τῆς γεννητρίας εἶναι : $P = 150 \times 0{,}80 = 120$ kW.

2) Ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος εἶναι : $I = \frac{P}{V} = \frac{120\,000}{5\,000} = 24$ ampère.

Ἐπὶ τῆς γραμμῆς χάνεται ἰσχύς : $p = 120 \times 0{,}10 = 12$ kW. Ἀπὸ τὴν σχέσιν $p = RI^2$ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς εἶναι :

$$R = \frac{p}{I^2} = \frac{12\,000}{24^2} = 20{,}9 \text{ ohm (περίπου).}$$

244. — *Μία γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* 500 volt *καὶ παρέχει ρεῦμα ἐντάσεως* 350 ampère, *τὸ ὁποῖον θὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς ἕνα σταθμὸν ἀπέχοντα 5 χιλιόμετρα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τομὴ τοῦ χαλκίνου σύρματος τὸ ὁποῖον θὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς γραμμή, ἂν θέλωμεν ἡ ἰσχὺς ποὺ θὰ χάνεται, ἕνεκα τῆς θερμάνσεως τοῦ ἀγωγοῦ, νὰ εἶναι τὸ 1/15 τῆς ἰσχύος τῆς γεννητρίας. Εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ :* $\rho = 1{,}6/10^6$ ohm — cm.

Ἡ ἰσχὺς P τῆς γεννητρίας εἶναι :

$$P = E \cdot I = 500 \times 350 = 175\,000 \text{ watt} = 175 \text{ kilowatt.}$$

Ἡ ἐνέργεια, ποὺ θὰ χάνεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος, θὰ ἔχῃ ἰσχύν :

$$P' = \frac{P}{15} = \frac{175\,000}{15} \text{ watt}$$

Ἄρα κατὰ δευτερόλεπτον θὰ χάνεται ἐνέργεια : $W = \frac{175\,000}{15}$ joule.

Ἂν R εἶναι ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς, τότε θὰ εἶναι :

$$W = RI^2 \cdot \qquad \text{ὥστε} \qquad R = \frac{W}{I^2} = \frac{175\,000}{15 \times 350^2} = \frac{1}{10{,}5} \text{ ohm.}$$

Τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς εἶναι : $l = 2 \times 5\,000 = 10\,000$ m $= 10^6$ cm.

Ἂν λοιπὸν σ εἶναι ἡ τομὴ τοῦ σύρματος, τότε ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$R = \rho \frac{l}{\sigma} \qquad \text{ἔχομεν :} \qquad \sigma = \rho \frac{l}{R} = \frac{1{,}6 \times 10^6 \times 10{,}5}{10^6} = 16{,}8 \text{ cm}^2.$$

Ἡ τομὴ αὐτὴ ἀντιστοιχεῖ εἰς διάμετρον ἀρκετὰ μεγάλην. Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα φαίνεται ἡ ἀνάγκη τῆς μεταφορᾶς τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας ὑπὸ μεγάλην τάσιν καὶ χαμηλὴν ἔντασιν.

245. — *Ἕνα κύκλωμα περιλαμβάνει γεννήτριαν συνεχοῦς ρεύματος, ἔχουσαν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* E volt, *ἕνα κινητῆρα, ὁ ὁποῖος ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* r ohm *καὶ ἕνα ροοστάτην, ὁ ὁποῖος ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* R ohm. *Ὁ κινητὴρ καὶ ὁ ροοστάτης εἶναι ἡνωμένοι κατὰ σειράν. — 1) Ἐμποδίζομεν τὸν κινητῆρα νὰ στρέφεται. Νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῶν* E, r, R *ἡ ἔντασις* I *τοῦ ρεύματος, ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τοῦ κινητῆρος καὶ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως. — 2) Ἀφήνομεν τὸν κινητῆρα νὰ στρέφεται καὶ νὰ παράγῃ ἔργον. Ἡ μηχανικὴ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι* P watt. *Νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσει τῶν* E, r, R, P *ἡ νέα ἔντασις* I′ *τοῦ ρεύματος καὶ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις* E′ *τοῦ κινητῆρος. Εὑρίσκομεν ὅτι τὸ πρόβλημα δὲν εἶναι δυνατόν, παρὰ μόνον ὅταν ἡ ἰσχὺς* P *δὲν ὑπερβαίνῃ μίαν ὡρισμένην τιμὴν*

P_0, ἡ ὁποία νὰ ὑπολογισθῇ. α) Ὅταν ἡ τιμὴ τῆς P εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν P_0, ὑπάρχουν δύο δυναταὶ περιπτώσεις λειτουργίας τοῦ κινητῆρος. Ποία ἐξ αὐτῶν ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν καλυτέραν χρησιμοποίησιν τῆς ἐγκαταστάσεως, δηλαδὴ εἰς τὴν μικροτέραν ἀπώλειαν ἐνεργείας λόγῳ τοῦ φαινομένου τοῦ Joule; — β) Ἐὰν ἡ P ἔχῃ τὴν μεγαλυτέραν τιμήν της P_0, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστοιχος ἔντασις I_0' τοῦ ρεύματος, ὡς καὶ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις E_0' τοῦ κινητῆρος. 3) Εἶναι:

$E = 110$ volt, $r = 1$ ohm, $R = 4$ ohm, $P = 360$ watt.

Νὰ ὑπολογισθοῦν δι' ἑκάστην περίπτωσιν τῆς λειτουργίας τοῦ κινητῆρος ἡ ἔντασις I' καὶ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις E' ὡς καὶ αἱ διαφοραὶ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κινητῆρος καὶ τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως. Πόση εἶναι εἰς ἑκάστην περίπτωσιν ἡ ἀπόδοσις τῆς ἐγκαταστάσεως;

1) Ὅταν ὁ κινητὴρ δὲν στρέφεται, δὲν ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν, διότι δὲν παράγει ἔργον· τότε εἶναι μία ἁπλῆ ἀντίστασις. Τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἀντάσεως: $I = \frac{E}{R + r}$ καὶ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι:

εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κινητῆρος: $V = Ir = \frac{rE}{R + r}$.

εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ροοστάτου: $V' = RI = \frac{RE}{R + r}$.

2) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $I' = \frac{E - E'}{R + r}$ (1)

καὶ ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι: $P = E' \cdot I'$. (2)

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸ E' εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν: $(R + r)I'^2 - EI' + P = 0$. (3)

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἔχει ρίζας, ἂν ἡ διακρίνουσα εἶναι θετικὴ ἢ μηδέν:

$$E^2 - 4(R + r)P \geqslant 0.$$

Τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατὸν μόνον ὅταν ἡ ἰσχὺς P τοῦ κινητῆρος ἔχῃ τιμὴν μικροτέραν ἀπό: $P_0 = \frac{E^2}{4(R + r)}$.

Ὅταν ἡ P εἶναι μικροτέρα ἀπὸ P_0, ἡ ἐξίσωσις (3) δίδει δύο ρίζας τοῦ I'. Ὥστε ὑπάρχουν δύο τιμαὶ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος, αἱ ὁποῖαι παρέχουν τὴν αὐτὴν ἰσχύν. Ἡ μικροτέρα ἀπώλεια ἐνεργείας, λόγῳ τοῦ φαινομένου τοῦ Joule, ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μικροτέραν τιμὴν τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος, δηλαδὴ εἰς τὴν μικροτέραν ρίζαν τῆς ἐξισώσεως.

Διὰ $P = P_0$ ὑπάρχει μία μόνον ρίζα. Τότε ἡ ἐξίσωσις (3) γράφεται:

$$(R + r)I'^2 - EI' + \frac{E^2}{4(R + r)} = 0$$

καὶ ἡ ρίζα αὐτῆς εἶναι: $I_0' = \frac{E}{2(R + r)} = \frac{I}{2}$.

Ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος εἶναι $E_0' = \frac{P_0}{I_0'} = \frac{E}{2}$.

3) Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) θέσωμεν τὰς δοθείσας τιμάς, εὑρίσκομεν:

$$5I'^2 - 110I' + 360 = 0 \quad \text{ἢ} \quad I'^2 - 22I' + 72 = 0.$$

Αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι:

$I_1 = 11 - \sqrt{49} = 4$ ampère· $I_2 = 11 + \sqrt{49} = 18$ ampère.

Αἱ ἀντίστοιχοι ἀντηλεκτρεγερτικαὶ δυνάμεις εἶναι:

$$E_1' = \frac{P}{I_1} = \frac{360}{4} = 90 \text{ volt} \cdot \quad E_2' = \frac{P}{I_2} = \frac{360}{18} = 20 \text{ volt.}$$

Αἱ διαφοραὶ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κινητῆρος ἔχουν τὰς ἀντιστοίχους τιμάς: $V_1 = E_1' + rI_1 = 94$ volt· $V_2 = E_2' + rI_2 = 38$ volt καὶ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ροοστάτου:

$V_1' = RI_1 = 16$ volt· $V_2' = RI_2 = 72$ volt.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι: $V_1 + V_1' = V_2 + V_2' = E = 110$ volt.

Ἡ δαπανωμένη ἰσχὺς εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εἶναι:

$P_1 = EI_1 = 110 \times 4 = 440$ watt· $P_2 = EI_2 = 110 \times 18 = 1980$ watt.

Αἱ ἀντίστοιχοι ἀποδόσεις τῆς ἐγκαταστάσεως, δηλαδὴ ὁ λόγος τῆς ἰσχύος τοῦ κινητῆρος πρὸς τὴν ὅλην δαπανωμένην ἰσχύν, εἶναι:

$$A_1 = \frac{P}{P_1} = \frac{360}{440} = 0{,}82 \cdot \quad A_2 = \frac{P}{P_2} = \frac{360}{1980} = \frac{2}{11} = 0{,}18.$$

V. ΗΛΕΚΤΡΟΛΥΣΙΣ

246. — *Ἠλεκτρικὸν ρεῦμα διέρχεται διὰ βολταμέτρου τὸ ὁποῖον περιέχει διάλυμα νιτρικοῦ ἀργύρου. Ἐντὸς 5 ὡρῶν ἀποτίθενται εἰς τὴν κάθοδον* 10 gr *ἀργύρου. Τὸ ρεῦμα διέρχεται καὶ δι' ἑνὸς λαμπτῆρος διὰ πυρακτώσεως, ἰσχύος* 60 watt. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τοῦ λαμπτῆρος καὶ ἡ ἀντίστασις αὐτοῦ.*

Ὅταν διέρχωνται διὰ τοῦ βολταμέτρου 96 500 coulomb, ἀποτίθενται εἰς τὴν κάθοδον 108 gr ἀργύρου. Ἑπομένως, ὅταν ἀποτίθενται 10 gr, διέρχεται ποσότης ἠλεκτρισμοῦ: $Q = \dfrac{96\,500 \times 10}{108} = 9\,000$ coulomb (περίπου).

Ἡ ἔντασις λοιπὸν τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{9\,000}{3\,600 \times 5} = 0{,}5 \text{ ampère.}$$

Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τοῦ λαμπτῆρος, ὁ ὁποῖος ἔχει ἰσχὺν $P = 60$ watt, εἶναι: $V = P : I = 60 : 0{,}5 = 120$ volt.

Ἡ δὲ ἀντίστασις τοῦ λαμπτῆρος εἶναι: $R = V : I = 120 : 0{,}5 = 240$ ohm.

247. — *Ἐπὶ μιᾶς ἐπιπέδου καθόδου, ἡ ὁποία ἔχει ἐπιφάνειαν* 1 cm², *θέλομεν νὰ ἀποτεθῇ ἠλεκτρολυτικῶς στρῶμα χαλκοῦ πάχους* 2 mm. *Ὡς πηγὴν ρεύματος χρησιμοποιοῦμεν συσσωρευτήν, ὁ ὁποῖος ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* 2 volt *καὶ παρέχει εἰς τὸ κύκλωμα ρεῦμα ἐντάσεως* 0,01 ampère. *Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ συσσωρευτοῦ καὶ τῶν χρησιμοποιηθέντων ἀγωγῶν θεωροῦνται ἀσήμαντοι.— 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ βολταμέτρου καὶ ἡ ποσότης ἠλεκτρισμοῦ ἡ ὁποία διῆλθεν διὰ τοῦ βολταμέτρου κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἠλεκτρολύσεως.— 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχὺς καταναλώσεως ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας τοῦ βολτα-*

μέτρου, ή όλη δαπανηθεῖσα ἐνέργεια καὶ ἡ διάρκεια τῆς ἠλεκτρολύσεως. Πυκνότης τοῦ χαλκοῦ 8,8 gr/cm³ · ἀτομικὸν βάρος αὐτοῦ 63,6 καὶ σθένος του 2.

1) Ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος περιορίζεται μόνον εἰς τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν R τοῦ βολταμέτρου, ἡ ὁποία εἶναι :

$$R = E : I = 2 : 0{,}01 = 200 \text{ ohm}.$$

Ὁ ὄγκος τοῦ ἀποτιθεμένου χαλκοῦ εἶναι 0,2 cm³, ἡ δὲ μᾶζα του εἶναι: $m = 0{,}2 \times 8{,}8 = 1{,}76$ gr. Διὰ νὰ ἀποτεθοῦν 63,6 : 2 = 31,8 gr χαλκοῦ, πρέπει νὰ διέλθουν διὰ τοῦ βολταμέτρου 96 500 coulomb. Ἄρα διὰ νὰ ἀποτεθῇ ἡ μᾶζα m πρέπει νὰ διέλθουν:

$$Q = \frac{96\,500 \times 1{,}76}{31{,}8} = 5\,340 \text{ coulomb (περίπου)}.$$

2) Ἡ ἰσχὺς καταναλώσεως τοῦ βολταμέτρου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἰσχὺν τῆς γεννητρίας :

$$P = EI = 2 \times 0{,}01 = 0{,}02 \text{ watt}.$$

Ἡ ὅλη δαπανηθεῖσα ἐνέργεια εἶναι :

$$W = EIt = EQ = 2 \times 5\,340 = 10\,680 \text{ joule}.$$

Ἡ διάρκεια τῆς ἠλεκτρολύσεως εἶναι :

$$t = W : P = 10\,680 : 0{,}02 = 534\,000 \text{ sec} = 148 \text{ ὧραι (περίπου)}.$$

248 — *Μία ἠλεκτρικὴ στήλη ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E = 5,4 volt καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν r = 0,5 ohm. Εἰς τὸ κύκλωμα τῆς στήλης παρεμβάλλονται κατὰ σειρὰν δύο βολτάμετρα A καὶ B. Τὸ A ἔχει ἠλεκτρόδια ἀπὸ χαλκόν, περιέχει διάλυμα θειϊκοῦ χαλκοῦ καὶ ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $R_1 = 0{,}2$ ohm. Τὸ B ἔχει ἠλεκτρόδια ἀπὸ σίδηρον, περιέχει διάλυμα καυστικοῦ καλίου καὶ ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $R_2 = 1{,}2$ ohm. Τὰ ἄλλα μέρη τοῦ κυκλώματος ἔχουν ἀσήμαντον ἀντίστασιν. Εἰς τὴν κάθοδον τοῦ βολταμέτρου B συλλέγονται ἐντὸς 20 λεπτῶν 278 cm³ ὑδρογόνου (ὁ ὄγκος ὑπολογίζεται ὑπὸ τὰς κανονικὰς συνθήκας). Νὰ εὑρεθοῦν: 1) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα.— 2) Αἱ ἀντηλεκτρεγερτικαὶ δυνάμεις τῶν βολταμέτρων. — 3) Ἡ μᾶζα τοῦ χαλκοῦ, ἡ ὁποία ἀποτίθεται ἐπὶ τῆς καθόδου τοῦ βολταμέτρου A ἐντὸς τῶν 20 λεπτῶν.*

1) Τὸ 1 gr ὑδρογόνου ἔχει ὄγκον 11 200 cm³ καὶ ἐκλύεται, ὅταν διὰ τοῦ βολταμέτρου διέλθουν 96 500 coulomb. Ἄρα τὰ 278 cm³ ὑδρογόνου ἐκλύονται κατὰ τὴν διέλευσιν:

$$Q = \frac{96\,500 \times 278}{11\,200} = 2\,400 \text{ coulomb}.$$

Ἡ ἔντασις λοιπὸν τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{2\,400}{20 \times 60} = 2 \text{ ampère}.$$

2) Τὸ βολτάμετρον A δὲν παρουσιάζει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν, διότι ἐπανευρίσκομεν τὰ ἴδια σώματα. Ἀντιθέτως ἐντὸς τοῦ βολταμέτρου B συμβαίνει διάσπασις τῶν μορίων τοῦ ὕδατος. Ἐπομένως τὸ B παρουσιάζει ἀντηλεκτρεγετικὴν δύναμιν E', ἡ ὁποία καθορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$E - E' = (R_1 + R_2 + r)\, I \quad \text{ἄρα} \quad E' = 5{,}4 - 3{,}8 = 1{,}6 \text{ volt}.$$

3) Ἡ ἀποτιθεμένη μᾶζα m τοῦ χαλκοῦ εἶναι :

$$m = \frac{32 \times 2\,400}{96\,400} = 0{,}77 \text{ gr}.$$

249.— *Κατὰ μίαν ἠλεκτρόλυσιν ὀξειδίου τοῦ ἀλουμινίου συλλέγονται εἰς τὴν κάθοδον 6,700 kg ἀλουμινίου καθ' ὥραν. —1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ ἠλεκτρολύτου. — 2) Ἐὰν ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ βολταμέτρου εἶναι E' = 2,8 volt, ἡ δὲ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους του εἶναι V = 5 volt, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐσωτερική του ἀντίστασις. — 3) Πόση ἰσχὺς χρησιμοποιεῖται ἐντὸς τοῦ βολταμέτρου ἀφ' ἑνὸς ὑπὸ μορφὴν θερμότητος καὶ ἀφ' ἑτέρου ὑπὸ μορφὴν χημικῆς ἐνεργείας; — 4) Πόση χημικὴ ἐνέργεια ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἐλευθέρωσιν 1 gr ἀλουμινίου; Ἡ ἀτομικὴ μᾶζα τοῦ ἀλουμινίου εἶναι 27, τὸ δὲ σθένος του εἶναι 3.*

1) Ἕνα ῥεῦμα ἐντάσεως 1 ampère διερχόμενον διὰ τοῦ βολταμέτρου ἐπὶ 1 ὥραν, ἐλευθερώνει μᾶζαν ἀλουμινίου: $\dfrac{27 \times 3\,600}{3 \times 96\,500} = 0{,}335$ gr. Ἄρα ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος εἶναι: $I = 6\,700 : 0{,}335 = 20\,000$ ampère.

2) Ἐὰν R εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ βολταμέτρου, τότε ἀπὸ τὴν σχέσιν: $V - E' = RI$ εὑρίσκομεν: $R = \dfrac{V - E'}{I} = \dfrac{2{,}2}{20\,000} = 0{,}00011$ ohm.

3) Ὑπὸ μορφὴν θερμότητος χρησιμοποιεῖται ἰσχύς:

$$P = RI^2 = 0{,}00011 \times 20\,000^2 = 44\,000 \text{ watt} = 44 \text{ kW}.$$

Ὑπὸ μορφὴν χημικῆς ἐνεργείας χρησιμοποιεῖται ἰσχύς.

$$P' = E'I = 2{,}8 \times 20\,000 = 56\,000 \text{ watt} = 56 \text{ kW}.$$

4) Διὰ νὰ ληφθῇ 1 gr ἀλουμινίου ἀπαιτεῖται χρόνος $t = 1 : 6\,700$ ὥρας. Ἄρα πρέπει νὰ δαπανηθῇ χημικὴ ἐνέργεια:

$$W = P't = 56 \times \frac{1}{6\,700} = 0{,}0084 \text{ kWh} = 8{,}4 \text{ Wh}.$$

250.— *Ἔχομεν 10 στοιχεῖα Leclanché ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 1 ohm καὶ ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 1,5 volt. 1) Συνδέομεν τὰ στοιχεῖα αὐτὰ κατὰ σειράν, τοὺς δὲ πόλους τῆς σχηματιζομένης στήλης τοὺς συνδέομεν μὲ τὰ δύο ἠλεκτρόδια ἑνὸς βολταμέτρου τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 2 volt καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 2 ohm. Τὸ βολτάμετρον περιέχει ἀραιὸν διάλυμα ὀξέος. 2) Συνδέομεν τὰ στοιχεῖα ἀνὰ δύο καὶ σχηματίζομεν 5 στήλας τὰς ὁποίας συνδέομεν παραλλήλως. Οἱ πόλοι τῆς οὕτω σχηματιζομένης στήλης συνδέονται μὲ τὰ δύο ἠλεκτρόδια τοῦ βολταμέτρου τὸ ὁποῖον εἴχομεν καὶ προηγουμένως. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ἑκάστην τῶν δύο ἀνωτέρω περιπτώσεων: α) ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ βολτάμετρον· β) πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ λάβωμεν 1 gr ὑδρογόνου· γ) πόσον βάρος ψευδαργύρου δαπανᾶται κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον ἐντὸς ὅλων τῶν στοιχείων. Ἀτομικὴ μᾶζα τοῦ Zn : 66.*

1) Ὅταν τὰ 10 στοιχεῖα συνδέωνται κατὰ σειράν, ἡ στήλη ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 15$ volt καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = 10$ ohm. Ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι $R + r = 2 + 10 = 12$ ohm.

Ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος εἶναι:

$$I = \frac{E - E'}{R + r} = \frac{15 - 2}{12} = \frac{13}{12} = 1{,}08 \text{ ampère}.$$

Διὰ νὰ λάβωμεν 1 gr ὑδρογόνου, πρέπει νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ βολταμέτρου ποσότης ἠλεκτρισμοῦ 96 500 coulomb. Ὁ ἀπαιτούμενος πρὸς τοῦτο χρόνος εἶναι:

$$t = 96\,500 : 1{,}08 = 89\,000 \text{ sec} = 25 \text{ ὧραι (περίπου).}$$

Ἡ αὐτὴ ποσότης ἠλεκτρισμοῦ προκαλεῖ ἐντὸς ἑκάστου στοιχείου δαπάνην 33 gr ψευδαργύρου. Ἄρα ἐντὸς τῶν 10 στοιχείων καταναλίσκονται κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἀνωτέρω ἠλεκτρολύσεως 330 gr ψευδαργύρου.

2) Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς στήλης εἶναι $E_1 = 3$ volt, ἡ δὲ ἐσωτερική της ἀντίστασις εἶναι $r_1 = 2/5 = 0{,}4$ ohm. Ἐπομένως ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = \frac{E_1 - E'}{R + r_1} = \frac{3 - 2}{2{,}4} = \frac{1}{2{,}4} = 0{,}417 \text{ ampère.}$$

Διὰ νὰ λάβωμεν 1 gr ὑδρογόνου, πρέπει νὰ διέλθουν διὰ τοῦ βολταμέτρου 96 500 coulomb, ἄρα ἀπαιτεῖται χρόνος:

$$t = 96\,500 : I = 96\,500 \times 2{,}4 = 231\,600 \text{ sec} = 64 \text{ ὧραι (περίπου).}$$

Ἀπὸ κάθε στοιχεῖον τῆς στήλης διέρχεται ρεῦμα τὸ ὁποῖον ἔχει ἔντασιν ἴσην μὲ τὸ 1/5 τῆς ἐντάσεως τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ ρεῦμα τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ βολταμέτρου. Ἄρα κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἠλεκτρολύσεως καταναλίσκονται ἐντὸς ἑκάστου στοιχείου 33/5 gr ψευδαργύρου, καὶ ἐντὸς ὅλης τῆς στήλης καταναλίσκονται: $10 \times \frac{33}{5} = 66$ gr.

251. — *Ἔχομεν 12 ὅμοια στοιχεῖα ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 1,4 volt καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,8 ohm. — 1) Νὰ εὑρεθῇ πῶς πρέπει νὰ συνδέσωμεν τὰ στοιχεῖα ὥστε ἐντὸς τοῦ ἐξωτερικοῦ ἀγωγοῦ, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀντίστασιν 0,6 ohm, νὰ ἔχωμεν τὴν μεγίστην δυνατὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις αὐτή; — 2) Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν δύο πόλων τῆς στήλης, ὅταν τὸ κύκλωμα εἶναι κλειστόν; — 3) Οἱ ἀρνητικοὶ πόλοι τῶν στοιχείων εἶναι ἀπὸ ψευδάργυρον. Πόσον βάρος ψευδαργύρου δαπανᾶται κατὰ λεπτὸν ἐντὸς ἑκάστου στοιχείου; Ἀτομικὴ μᾶζα τοῦ ψευδαργύρου 65.*

1) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος θὰ εἶναι μεγίστη, ἐὰν τὰ στοιχεῖα εἶναι συνδεδεμένα κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε ἡ ὅλη ἀντίστασις τὴν ὁποίαν παρουσιάζουν νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν, δηλαδὴ ἐὰν εἶναι ἴση μὲ 0,6 ohm. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ 12 στοιχεῖα σχηματίζουν x σειρὰς ἑκάστη τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἀπὸ y στοιχεῖα. Ἡ στήλη θὰ ἔχῃ τότε ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = \frac{0{,}8y}{x}$ ἤτοι θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν: $\frac{0{,}8y}{x} = 0{,}6$ ἢ $4y = 3x$.

Ἐξ ἄλλου ὅμως θὰ ἔχωμεν καὶ τὴν σχέσιν: $yx = 12$.

Ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας σχέσεις εὑρίσκομεν:

$$4y^2 = 36 \cdot \quad \text{ἄρα} \quad y = 3 \quad \text{καὶ} \quad x = 4.$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ σχηματίσωμεν 4 μερικὰς στήλας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 στοιχεῖα.

Ἡ στήλη ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 1{,}4 \times 3 = 4{,}2$ volt καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = 0{,}6$ ohm. Ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{4{,}2}{0{,}6 + 0{,}6} = 3{,}5 \text{ ampère.}$$

2) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ V μεταξὺ τῶν δύο πόλων τῆς στήλης εἶναι:

$$V = RI = 0{,}6 \times 3{,}5 = 2{,}1 \text{ volt}$$

ἢ καὶ ἄλλως $\quad V = E - Ir = 4{,}2 - (0{,}6 \times 3{,}5) = 2{,}1$ volt.

3) Δι' ἑκάστου στοιχείου διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως:

$\frac{I}{4} = \frac{3{,}5}{4}$ ampère. Ἄρα κατὰ λεπτὸν διέρχεται ποσότης ἠλεκτρισμοῦ:

$\frac{3{,}5}{4} \times 60 = 52{,}5$ coulomb. Δι' αὐτὴν τὴν ποσότητα ἠλεκτρισμοῦ δαπανᾶται

μᾶζα ψευδαργύρου: $\frac{32{,}5 \times 52{,}5}{96\,500}$ gr ἤτοι ἐντὸς ὅλων τῶν στοιχείων τῆς στή-

λης καταναλίσκονται: $\frac{32{,}5 \times 52{,}5 \times 12}{96\,500} = 0{,}2$ gr ψευδαργύρου.

252. — *Ἀπὸ τὸ φαινόμενον τῆς ἠλεκτρολύσεως εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ ἰὸν τοῦ ὑδρογόνου φέρει ἐπ' αὐτοῦ φορτίον ἠλεκτρισμοῦ* $e = 4{,}50 \times 10^{-10}$ C.G.S. *καὶ ὅτι κατὰ τὴν διέλευσιν* 96 540 coulomb *διὰ τοῦ βολταμέτρου ἐλευθερώνεται εἰς τὴν κάθοδον* 1 gr *ὑδρογόνου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀτόμων ὑδρογόνου τὰ ὁποῖα ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας περιέχονται εἰς* 1 cm^3 *ὑδρογόνου καθὼς καὶ ἡ μέση ἀπόστασις μεταξὺ τῶν ἀτόμων τούτων. Σχετικὴ πυκνότης τοῦ ὑδρογόνου:* $\delta = 0{,}0692$ · *πυκνότης τοῦ ἀέρος ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας:* $d = 1{,}293$ gr/dm^3.

Ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας 1 cm^3 ὑδρογόνου ἔχει μᾶζαν:

$$m = \delta \frac{d}{1\,000} = \frac{0{,}0692 \times 1{,}293}{1\,000} \text{ gr}.$$

Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μᾶζα τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου εἶναι ἴση μὲ τὴν μᾶζαν τοῦ ἰόντος τοῦ ὑδρογόνου· τότε ἡ μᾶζα m τοῦ ὑδρογόνου, ὅταν εἶναι ὑπὸ μορφὴν ἰόντων, φέρει φορτίον: $\quad Q = m \times 96\,540 \times 3 \times 10^9$ C.G.S.

Ἄρα εἰς τὴν μᾶζαν m περιέχονται:

$$N = \frac{Q}{e} = \frac{0{,}0692 \times 1{,}293 \times 96\,540 \times 3 \times 10^9 \times 10^{10}}{4{,}50 \times 1\,000} = 5{,}759 \times 10^{19} \text{ ἄτομα.}$$

Ἐὰν x εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο ἀτόμων, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν ὡς ὑλικὰ σημεῖα, τότε εὑρίσκομεν:

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{5{,}759 \times 10^{19}}} = \frac{2{,}5895}{10^7} \text{ cm} = \frac{2{,}5895}{10^3}\ \mu.$$

253. — *Μὲ ἕνα ρεῦμα ἐντάσεως* 3 ampère *φορτίζομεν ἐπὶ* 10 *ὥρας συσσωρευτήν.— 1) Νὰ εὑρεθῇ πόσην ποσότητα ἠλεκτρισμοῦ προσέφερεν τὸ ρεῦμα εἰς τὸν συσσωρευτὴν καὶ πόσην ποσότητα ἠλεκτρισμοῦ ἠμπορεῖ ν' ἀποδώσῃ οὗτος, ἂν ἡ ἀπόδοσίς του εἶναι* 90 %. — *2) Ὁ ἀνωτέρω συσσωρευτὴς χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν τροφοδότησιν ἑνὸς λαμπτῆρος ὁ ὁποῖος καταναλίσκει* 0,36 ampère. *Ὁ συσσωρευτὴς ἀφήνεται νὰ λειτουργήσῃ ὡς γεννήτρια ἕως ὅτου παραχωρήσῃ τὰ* 2/3 *τῆς ὅλης ποσότητος ἠλεκτρισμοῦ, τὴν ὁποίαν ἠμπορεῖ οὗτος νὰ προσφέρῃ. Ἐπὶ πόσας ὥρας ἠμπορεῖ νὰ λειτουργήσῃ ὁ λαμπτήρ;*

1) Τὸ ρεῦμα ἐντὸς 10 ὡρῶν παρέχει εἰς τὸν συσσωρευτὴν ποσότητα ἠλεκτρι-

σμοῦ : $Q = It = 3 \times 10 \times 3\,600 = 108\,000$ coulomb.

Κατὰ τὴν ἐκκένωσίν του ὁ συσσωρευτὴς θὰ ἀποδώσῃ τὰ 90 % τῆς ἀνωτέρω ποσότητος: $Q' = 0{,}90\,Q = 0{,}90 \times 108\,000 = 97\,200$ coulomb.

2) Ὁ συσσωρευτὴς θὰ ἀποδώσῃ διὰ τὴν λειτουργίαν τοῦ λαμπτῆρος τὰ 2/3 τῆς ἀνωτέρω ποσότητος ἠλεκτρισμοῦ, ἤτοι θὰ ἀποδώσῃ:

$$Q'' = 2/3 \times 97\,200 = 64\,800 \text{ coulomb.}$$

Ὁ λαμπτήρ, διὰ τὴν λειτουργίαν ἐπὶ μίαν ὥραν, καταναλίσκει ποσότητα ἠλεκτρισμοῦ : $q = 0{,}36 \times 3\,600$ coulomb.

Ἄρα ὁ λαμπτὴρ θὰ λειτουργήσῃ ἐπί: $\dfrac{64\,800}{0{,}36 \times 3\,600} = 50$ ὥρας.

254.— *Μία συστοιχία συσσωρευτῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ 20 συσσωρευτὰς οἱ ὁποῖοι συνδέονται κατὰ σειράν. Φορτίζομεν τὴν συστοιχίαν μὲ τὴν βοήθειαν μιᾶς δυναμοηλεκτρικῆς μηχανῆς, ἡ ὁποία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* 100 volt. *Ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἑκάστου συσσωρευτοῦ εἶναι* 2,2 volt.— *1) Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς δυναμοηλεκτρικῆς μηχανῆς εἶναι* 1 ohm. *Νὰ εὑρεθῇ πόσην ἀντίστασιν πρέπει νὰ παρεμβάλωμεν εἰς τὸ κύκλωμα τῶν συσσωρευτῶν κατὰ σειράν, ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος νὰ εἶναι* 6 ampère. *Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῶν συσσωρευτῶν καὶ τῶν συρμάτων ποὺ χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὰς συνδέσεις παραλείπονται.— 2) Κατὰ τὴν φόρτισιν ἡ χωρητικότης ἑκάστου συσσωρευτοῦ εἶναι* 60 *ὡριαῖα*–ampère. *Πόσον χρόνον διαρκεῖ ἡ φόρτισις τῆς συστοιχίας;— 3) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνέργεια ἡ ὁποία δαπανᾶται ἐντὸς τῆς ἀντιστάσεως κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς φορτίσεως.— 4) Νὰ εὑρεθῇ πόσον κοστίζει ἡ φόρτισις τῆς συστοιχίας, ἐὰν ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια τιμᾶται* 250 *δραχμὰς κατὰ ὡριαῖον κιλοβάτ. — 5) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνέργεια τὴν ὁποίαν ἀποδίδει ἡ συστοιχία κατὰ τὴν ἐκκένωσίν της, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι κατὰ τὴν ἐκκένωσιν ἕκαστος συσσωρευτὴς ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* 1,9 volt *καὶ ἡ ἀπόδοσις εἰς ποσότητα ἠλεκτρισμοῦ εἶναι* 0,8. *Πόσον τιμᾶται τὸ ὡριαῖον κιλοβὰτ τῆς ἐνεργείας ἡ ὁποία ἀποταμιεύεται ἐντὸς τῆς συστοιχίας;*

1) Ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς συστοιχίας εἶναι $E' = 2{,}2 \times 20 = 44$ volt. Ἄρα ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος πρέπει νὰ εἶναι:

$$R' = \frac{E - E'}{I} = \frac{110 - 44}{6} = \frac{66}{6} = 10 \text{ ohm.}$$

Ἡ ἀντίστασις R τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ παρεμβάλωμεν κατὰ σειρὰν εἶναι:

$$R = R' - r = 11 - 1 = 10 \text{ ohm.}$$

2) Διὰ νὰ ἀποταμιευθοῦν ἐντὸς ἑκάστου συσσωρευτοῦ 60 ὡριαῖα-ampère, πρέπει τὸ ρεῦμα νὰ διέρχεται δι' αὐτοῦ ἐπὶ 10 ὥρας.

3) Ἐντὸς 10 ὡρῶν ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R καταναλίσκεται ἐνέργεια:

$$W = RI^2t = 10 \times 6^2 \times 3\,600 = 12\,960\,000 \text{ joule.}$$

4) Ἡ δαπανωμένη ἰσχὺς εἶναι: $P = EI = 110 \times 6 = 660$ watt.

Ἄρα ἐντὸς 10 ὡρῶν δαπανᾶται ἐνέργεια:

$0{,}660 \times 10 = 6{,}60$ kWh ἡ ὁποία ἀξίζει $250 \times 6{,}60 = 1\,650$ δρχ.

5) Ἡ συστοιχία ἀποδίδει τὰ 0,8 τῆς ἐνεργείας τὴν ὁποίαν ἔλαβε, δηλαδὴ

$$60 \times 0{,}8 = 48 \text{ ὡριαῖα - ampère.}$$

Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς συστοιχίας εἶναι: $E_1 = 1{,}9 \times 20 = 38$ volt. Ἐπομένως ἡ συστοιχία ἀποδίδει ἐνέργειαν: $W_1 = 48 \times 38 = 1\,824$ ὡριαῖα βὰτ ἢ $W_1 = 1{,}824$ kWh.

Ὥστε ἡ τιμὴ τοῦ ὡριαίου κιλοβάτ, τὸ ὁποῖον ἀποδίδει ἡ συστοιχία, εἶναι:

$$1650 : 1{,}8 = 917 \text{ δραχμαί.}$$

255 — *Ἔχομεν 27 ὅμοια στοιχεῖα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 1,5 volt καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 2 ohm. Μὲ τὰ στοιχεῖα αὐτὰ σχηματίζομεν 3 σειράς· ἑκάστη σειρὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ 9 στοιχεῖα ἡνωμένα κατὰ σειράν, αἱ δὲ τρεῖς σειραὶ συνδέονται μεταξύ των παραλλήλως. Τὸ ἐξωτερικον κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα βολτάμετρον A, τὸ ὁποῖον περιέχει ἀραιὸν διάλυμα ὀξέος καὶ ἀπὸ βολτάμετρον B, τὸ ὁποῖον περιέχει διάλυμα νιτρικοῦ ἀργύρου τὰ δὲ ἠλεκτρόδιά του εἶναι ἐξ ἀργύρου. Τὰ δύο βολτάμετρα συνδέονται κατὰ σειράν. Τὸ βολτάμετρον A ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E′ = 1,5 volt καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $R_1 = 2$ ohm, τὸ δὲ B ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $R_2 = 4$ ohm. Νὰ εὑρεθῇ: 1) Πόση μᾶζα ὑδρογόνου ἐκλύεται, εἰς τὴν κάθοδον τοῦ A, πόση μᾶζα ἀργύρου ἀποτίθεται εἰς τὴν κάθοδον τοῦ B καὶ πόση μᾶζα ψευδαργύρου διαλύεται ἐντὸς τῆς στήλης εἰς μίαν ὥραν.— 2) Ποῖαι εἶναι αἱ διαφοραὶ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῶν δύο βολταμέτρων.— 3) Πόση ἰσχὺς δαπανᾶται εἰς τὰ διάφορα τμήματα τοῦ κυκλώματος. Αἱ ἀντιστάσεις τῶν συρμάτων τῆς συνδεσμολογίας εἶναι ἀσήμαντοι. Χρειάζονται 96 600 coulomb διὰ νὰ ἐλευθερωθῇ 1 gr ὑδρογόνου:*

$$H = 1, \quad Zn = 65, \quad Ag = 108.$$

1) Ἡ στήλη ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν: $E = 9 \times 1{,}5 = 13{,}5$ volt καὶ

ἀντίστασιν: $R = \dfrac{9 \times 2}{3} = 6$ ohm.

Τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I = \frac{13{,}5 - 1{,}5}{6 + 2 + 4} = 1 \text{ ampère.}$$

Ἐντὸς μιᾶς ὥρας εἰς τὴν κάθοδον τοῦ βολταμέτρου A ἐκλύεται μᾶζα ὑδρογόνου: $m = \dfrac{1 \times 3\,600}{96\,600} = 0{,}037$ gr·

εἰς τὴν κάθοδον τοῦ βολταμέτρου B ἀποτίθεται μᾶζα ἀργύρου:

$$m' = 0{,}037 \times 108 = 4{,}021 \text{ gr.}$$

Ἕκαστον στοιχεῖον τῆς στήλης διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 1/3 ampère· εἰς μίαν ὥραν διαλύεται μᾶζα ψευδαργύρου:

$$\frac{1 \times 65 \times 3\,600}{3 \times 2 \times 96\,600} = 0{,}404 \text{ gr}$$

καὶ εἰς τὰ 27 στοιχεῖα τῆς στήλης διαλύονται: $m'' = 27 \times 0{,}404 = 10{,}9$ gr.

2) Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ βολταμέτρου A ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι:

$$V_1 = E' + IR_1 = 1{,}5 + (1 \times 2) = 3{,}5 \text{ volt}$$

καὶ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ βολταμέτρου B εἶναι: $V_2 = IR_2 = 1 \times 4 = 4$ volt.

3) Ἐντὸς τῆς στήλης δαπανᾶται ἰσχύς: $p = RI^2 = 6 \times 1 = 6$ watt·

ἐντὸς τοῦ βολταμέτρου A: $p_1 = V_1 I = 3{,}5 \times 1 = 3{,}5$ watt·

ἐντὸς τοῦ βολταμέτρου B: $p_2 = V_2 I = 4 \times 1 = 4$ watt.

Ἡ ὅλη δαπανωμενη ἰσχὺς εἶναι: $P = EI = 13{,}5 \times 1 = 13{,}5$ watt.

ἤτοι $P = p + p_1 + p_2 = 6 + 3{,}5 + 4 = 13{,}5$ watt.

256 — *Ἕνα κύκλωμα περιλαμβάνει τὰ ἑξῆς: α) μίαν γεννήτριαν ἡ ὁποία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* 10 volt *καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* 2 ohm · *β) μίαν ἀντίστασιν* R = 3 ohm · *γ) μίαν διακλάδωσιν ἀποτελουμένην ἀπὸ δύο βολτάμετρα* A *καὶ* B. *Τὸ βολτάμετρον* A *ἔχει ἠλεκτρόδια ἀπὸ χαλκὸν καὶ περιέχει διάλυμα θειϊκοῦ χαλκοῦ. Τὸ δὲ βολτάμετρον* B *ἔχει ἠλεκτρόδια ἀπὸ ἄργυρον καὶ περιέχει διάλυμα νιτρικοῦ ἀργύρου. Ὅταν τὸ ρεῦμα διέλθῃ ἐπὶ μίαν ὥραν, ἐπὶ τῆς καθόδου τοῦ βολταμέτρου* A *ἀποτίθενται* 0,750 gr *χαλκοῦ, ἐνῷ κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον ἐπὶ τῆς καθόδου τοῦ βολταμέτρου* B *ἀποτίθενται* 4,320 gr *ἀργύρου (ἀτομικαὶ μᾶζαι* Cu : 63,5 Ag : 108). *Νὰ εὑρεθοῦν: 1) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια. — 2) Αἱ ἀντιστάσεις τῶν δύο βολταμέτρων. — 3) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας καὶ εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀντιστάσεων τοῦ κυκλώματος. — 4) Ἡ ὅλη ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ γεννήτρια καὶ ἡ ἰσχὺς ἡ ὁποία δαπανᾶται εἰς τὰ διάφορα τμήματα τοῦ κυκλώματος. — 5) Τὰ δύο βολτάμετρα ἀντικαθίστανται ἀπὸ ἕνα τρίτον βολτάμετρον* Γ *τὸ ὁποῖον ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* 1 ohm. *Τὸ κύκλωμα διαρρέεται τότε ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως* 1,5 ampère. *Πόσην ἰσχὺν ἀπορροφᾷ τὸ βολτάμετρον; Ὑπὸ ποίαν μορφὴν ἐμφανίζεται αὕτη;*

1) Αἱ ἐντάσεις I_A καὶ I_B τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὰ δύο βολτάμετρα εἶναι: $I_A = \dfrac{96\,500 \times 0{,}750 \times 2}{63{,}5 \times 3\,600} = 0{,}63$ ampère

$$I_B = \frac{96\,500 \times 4{,}320}{108 \times 3\,600} = 1{,}07 \text{ ampère.}$$

Ἄρα ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια, εἶναι:

$$I = I_A + I_B = 0{,}63 + 1{,}07 = 1{,}70 \text{ ampère.}$$

2) Τὰ δύο βολτάμετρα A καὶ B δὲν ἔχουν ἀντηλεκτρεγερτικὰς δυνάμεις, διότι δὲν συμβαίνει ἐντὸς αὐτῶν καμμία χημικὴ ἀντίδρασις, ἀλλ' ἁπλῶς μεταφορὰ τοῦ μετάλλου ἀπὸ τὴν ἄνοδον εἰς τὴν κάθοδον. Τὰ δύο λοιπὸν βολτάμετρα συμπεριφέρονται ὡς δύο ἁπλαῖ ἀντιστάσεις R_A καὶ R_B. Ἂν R' εἶναι ἡ ἀντίστασις ἡ ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα τῶν δύο βολταμέτρων, ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Ohm λαμβάνομεν:

$$10 = 1{,}7\,(2 + 3 + R') \quad \text{ἄρα} \quad R' = 0{,}88 \text{ ohm}$$

Εἰς τὰ δύο ἄκρα τῆς διακλαδώσεως ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ:

$$V = IR' = 1{,}70 \times 0{,}88 = 1{,}50 \text{ volt.}$$

Ἑπομένως ἡ ἀντίστασις ἑκάστου βολταμέτρου εἶναι:

$$R_A = V : I_A = 1{,}50 : 0{,}63 = 2{,}38 \text{ ohm}$$

$$R_B = V : I_B = 1{,}50 : 1{,}07 = 1{,}40 \text{ ohm.}$$

3) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι:

$$V' = E - Ir = 10 - (1{,}70 \times 2) = 6{,}60 \text{ volt.}$$

Εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι:

$$V'' = IR = 1{,}70 \times 3 = 5{,}10 \text{ volt.}$$

Εἰς δὲ τὰ ἄκρα τῶν βολταμέτρων εὕρομεν ὅτι εἶναι: $V = 1{,}50$ volt.

4) Ἡ ὅλη ἰσχύς, τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ γεννήτρια, εἶναι:

$$P = EI = 10 \times 1{,}70 = 17 \text{ watt.}$$

Αὐτὴ κατανέμεται ἐπὶ τοῦ κυκλώματος, ὡς ἑξῆς, δαπανωμένη ὑπὸ μορφὴν θερμότητος:

α) ἐντὸς τῆς γεννητρίας: $p = rI^2 = 2 \times 1{,}70^2 = 5{,}78$ watt
β) ἐντὸς τῆς ἀντιστάσεως R: $p_1 = RI^2 = 3 \times 1{,}70^2 = 8{,}67$ watt
γ) ἐντὸς τοῦ βολταμέτρου A: $p_2 = R_A \, I_A{}^2 = 2{,}38 \times 0{,}63^2 = 0{,}95$ watt
δ) ἐντὸς τοῦ βολταμέτρου B: $p_3 = R_B \, I_B{}^2 = 1{,}40 \times 1{,}07^2 = 1{,}60$ watt.
Παρατηροῦμεν ὅτι πράγματι εἶναι:

$$5{,}78 + 8{,}67 + 0{,}95 \times 1{,}60 = 17 \text{ watt.}$$

5) Ἔστω E′ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ βολταμέτρου Γ. Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Ohm λαμβάνομεν:

$$10 = E' + 1{,}50\,(2 + 3 + 1) \quad \text{ἄρα} \quad E' = 1 \text{ volt.}$$

Τὸ βολτάμετρον τοῦτο ἀπορροφᾷ ἰσχύν:
α) διὰ τὴν παραγωγὴν χημικῆς ἐνεργείας: $E'I = 1 \times 1{,}50 = 1{,}50$ watt
β) λόγῳ τοῦ φαινομένου τοῦ Joule: $1 \times 1{,}50^2 = 2{,}25$ watt
ἤτοι ἀπορροφᾷ συνολικῶς ἰσχύν: 3,75 watt.

257.— *Ἕνα κύκλωμα περιλαμβάνει κατὰ σειρὰν γεννήτριαν Γ συνεχοῦς ρεύματος, ἀμπερόμετρον A μὲ ἀσήμαντον ἀντίστασιν, πηνίον Π μὲ σταθερὰν ἀντίστασιν R, βολτάμετρον B τὸ ὁποῖον ἔχει ἠλεκτρόδια ἐκ λευκοχρύσου καὶ περιέχει ἀραιὸν διάλυμα θεϊκοῦ ὀξέος καὶ τέλος ροοστάτην Δ τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστασις X ἠμπορεῖ νὰ μεταβάλλεται ἀπὸ μηδὲν μέχρι μιᾶς τιμῆς, ἡ ὁποία πρακτικῶς εἶναι ἄπειρος. Ὅταν μεταβάλλεται ἡ ἀντίστασις X, τότε μεταβάλλεται ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν ροοστάτην. Ἐπίσης ὅμως μεταβάλλονται καὶ αἱ διαφοραὶ δυναμικοῦ V_1, V_2, V_3 αἱ ὁποῖαι μετροῦνται ἀντιστοίχως εἰς τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ πηνίου Π, τῆς γεννητρίας Γ καὶ τοῦ βολταμέτρου B. — 1) Λαμβάνομεν τότε τὰ ἑπόμενα ἀποτελέσματα:*

α)	I = 0,50 ampère	$V_1 = 1{,}03$ volt·
β)	I = 0,50 —	$V_2 = 9{,}70$ —
	I = 1 —	$V_2 = 9{,}45$ —
γ)	I = 0,50 —	$V_3 = 3{,}77$ —
	I = 1 —	$V_3 = 5{,}52$ —

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀντιστάσεις καί, ἂν ὑπάρχουν, αἱ ἠλεκτρεγερτικαὶ καὶ ἀντηλεκτρεγερτικαὶ δυνάμεις (τὰς ὁποίας ὑποθέτομεν σταθεράς) τῶν ὀργάνων Π, Γ καὶ B.

2) Ἡ ἀντίστασις X τοῦ ροοστάτου γίνεται μηδέν. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τότε τὸ κύκλωμα; Πόσην ἐνέργειαν παρέχει τότε ἡ γεννήτρια κατὰ λεπτὸν εἰς τὸ κύκλωμα καὶ πῶς καὶ ὑπὸ ποίας μορφὰς κατανέμεται αὕτη εἰς τὰ διάφορα ὄργανα τοῦ κυκλώματος;

1) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου εἶναι: $V_1 = RI$.
Ἐπομένως ἡ ἀντίστασις αὐτοῦ εἶναι: $R = V_1 : I = 1{,}03 : 0{,}5 = 2{,}06$ ohm.
Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας, δίδεται, συναρτήσει τῆς ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως E καὶ τῆς ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεώς της r, ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$V_2 = E - rI.$$

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν θέσωμεν τὰς τιμὰς (β), εὑρίσκομεν τὰς δύο ἐξισώσεις: $9{,}7 = E - {,}05\,r$ καὶ $9{,}45 = E - r$
ἀπὸ τὰς ὁποίας εὑρίσκομεν: $r = 0{,}5$ ohm $E = 9{,}95$ volt.
Ἂν E′ καὶ r′ εἶναι ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ βολταμέτρου, ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους του εἶναι:

$$V_3 = E' + r'I.$$

Ἂν εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν θέσωμεν τὰς τιμὰς (γ), εὑρίσκομεν τὰς δύο ἐξισώσεις: $3{,}77 = E' + 0{,}5\,r'$ καὶ $5{,}52 = E' + r'$

ἀπὸ τὰς ὁποίας εὑρίσκομεν: $r' = 3{,}5$ ohm $E' = 2{,}02$ volt.

2) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα, εἶναι:

$$I = \frac{E - E'}{r + R + r'} = \frac{7{,}93}{6{,}06} = 1{,}31 \text{ ampère}.$$

Εἰς 1 λεπτὸν ἡ γεννήτρια παρέχει εἰς τὸ κύκλωμα ἐνέργειαν:

$$W = EIt = 9{,}95 \times 1{,}31 \times 60 = 782 \text{ joule}.$$

Εἰς τὸ πηνίον Π καταναλίσκεται ἐνέργεια W_1 μόνον ὑπὸ μορφὴν θερμότητος: $W_1 = RI^2t = 2{,}06 \times 1{,}31^2 \times 60 = 212$ joule.

Εἰς τὸ βολτάμετρον Β καταναλίσκεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἐνέργεια:

$$W_2 = r'\,I^2\,t = 3{,}5 \times 1{,}31^2 \times 60 = 360 \text{ joule}.$$

καὶ ὑπὸ μορφὴν χημικῆς ἐνεργείας ἡ ἐνέργεια:

$$W_2' = E'It = 2{,}02 \times 1.31 \times 60 = 159 \text{ joule}.$$

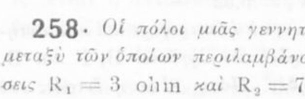
Τέλος ἐντὸς τῆς γεννητρίας καταναλίσκεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἐνέργεια: $W_3 = rI^2t = 0{,}5 \times 1{,}31^2 \times 60 = 51$ joule.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἐπαληθεύεται ἡ ἀρχὴ τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας:

$$W = 212 + 360 + 159 + 51 = 782 \text{ joule}.$$

VI. ΔΙΑΚΛΑΔΙΖΟΜΕΝΑ ΡΕΥΜΑΤΑ

258. *Οἱ πόλοι μιᾶς γεννητρίας συνδέονται δι' ἀγωγῶν μὲ δύο σημεῖα Α καὶ Β, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνονται κατὰ διακλάδωσιν δύο ἀγωγοὶ ἔχοντες ἀντιστάσεις* $R_1 = 3$ ohm *καὶ* $R_2 = 7$ ohm. *Ἑκάστη ἐκ τῶν ἀντιστάσεων τούτων βυθίζεται ἐντὸς θερμιδομέτρου, περιέχοντος* 500 gr *ὕδατος. Ἡ θερμοχωρητικότης τῶν θερμιδομέτρων καὶ τῶν ἀγωγῶν οἱ ὁποῖοι βυθίζονται ἐντὸς τοῦ ὕδατος θεωρεῖται ἀσήμαντος.—1) Ἐντὸς 2 λεπτῶν ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος, ἐντὸς τοῦ ὁποίου εἶναι βυθισμένη ἡ ἀντίστασις* R_1, *ὑψώνεται κατὰ* 5^0 C. *Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὰς ἀντιστάσεις* R_1 *καὶ* R_2; — *2) Κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον πόσον ὑψώνεται ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ ὁποίου εἶναι βυθισμένη ἡ ἀντίστασις* R_2; — *3) Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς γεννητρίας καὶ ἡ ἀντίστασις τῶν ἀγωγῶν συνδέσεως, οἱ ὁποῖοι καταλήγουν εἰς τὰ σημεῖα* Α *καὶ* Β, *εἶναι* 1,9 ohm. *Πόση εἶναι ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς γεννητρίας;*



Σχ. 160

1) Ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R_1 ἀναπτύσσεται ἐντὸς 120 sec ποσότης θερμότη-

τος: $5 \times 500 = 2\,500$ cal, ἤτοι κατὰ δευτερόλεπτον: $\frac{250}{12}$ cal/sec. Ἐπομένως ἡ ἰσχὺς τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν ἀντίστασιν R_1 εἶναι: $P_1 = \frac{250}{12} \times 4{,}18 = 87$ watt. Ἡ ἔντασις I_1 τοῦ ρεύματος τούτου εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $P_1 = R_1 I_1^2$. Ἄρα εὑρίσκομεν:

$$I_1 = \sqrt{\frac{P_1}{R_1}} = \sqrt{\frac{87}{3}} = \sqrt{29} = 5{,}4 \text{ ampère.}$$

Ἐὰν V εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β, τότε ἔχομεν: $V = R_1 I_1 = 3 \times 5{,}4 = 16{,}2$ volt.

Καὶ ἑπομένως ἡ ἔντασις I_2 τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν ἀντίστασιν R_2 εἶναι: $I_2 = V : R_2 = 16{,}2 : 7 = 2{,}3$ ampère.

2) Αἱ ποσότητες θερμότητος αἱ ὁποῖαι ἀναπτύσσονται ἐπὶ τῶν δύο ἀντιστάσεων τῆς διακλαδώσεως εἶναι:

$$Q_1 = \frac{120\, R_1 I_1^2}{4{,}18} = \frac{120}{4{,}18} \times \frac{V^2}{R_1} \quad \text{καὶ} \quad Q_2 = \frac{120\, R_2 I_2^2}{4{,}18} = \frac{120}{4{,}18} \times \frac{V^2}{R_2}.$$

$$\text{ἄρα} \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{7} \quad \text{ἢ} \quad \frac{2\,500}{500\,\theta} = \frac{3}{7}. \text{ Ὥστε εἶναι: } \theta = \frac{3 \times 5}{7} = 2{,}1^\circ \text{ C.}$$

Ἡ ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ δευτέρου θερμιδομέτρου εἶναι $2{,}1^\circ$ C.

3) Ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις R τῶν δύο ἀγωγῶν τῆς διακλαδώσεως δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

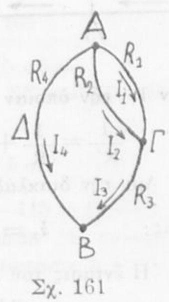
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{10}{21}, \text{ ἤτοι εἶναι } R = 2{,}1 \text{ ohm.}$$

Ἡ ἔντασίς I τοῦ κυρίου ρεύματος εἶναι $I = I_1 + I_2$ ἢ $I = 7{,}7$ ampère, ἡ δὲ ὅλη ἀντίσταστασις R′ τοῦ κυκλώματος εἶναι $R' = 2{,}1 + 1{,}9 = 4$ ohm. Ὥστε ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις E τῆς γεννητρίας εἶναι: $E = 4 \times 7{,}7 = 30{,}8$ volt.

259. — *Ἀγωγὸς διακλαδίζεται μεταξὺ τῶν σημείων* Α *καὶ* Β *ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα* 161. *Μεταξὺ τῶν* Α *καὶ* Β *ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ* 5 volt. *Αἱ ἀντιστάσεις τῶν διαφόρων τμημάτων τοῦ ἀγωγοῦ εἶναι:*

$R_1 = 1$ ohm, $R_2 = 2$ ohm, $R_3 = 3$ ohm, $R_4 = 4$ ohm.

1) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐντάσεις I_1, I_2, I_3, I_4 *τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν ἀντιστοίχως τοὺς ἀνωτέρω τέσσαρας κλάδους. — 2) Τὸ ἀνωτέρω σύστημα τῶν ἀγωγῶν ἀντικαθίσταται ἀπὸ σύρμα ἀλουμινίου τομῆς* 1 mm², *τὸ ὁποῖον παρεμβάλλεται μεταξὺ τῶν σημείων* Α *καὶ* Β. *Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ σύρματος τούτου, ὥστε τὸ δι' αὐτοῦ διερχόμενον ρεῦμα νὰ ἔχῃ τὴν ἰδίαν ἔντασιν μὲ τὴν ἔντασιν τοῦ κυρίου ρεύματος τὸ ὁποῖον διήρχετο διὰ τῆς διακλαδώσεως; Εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ ἀλουμινίου:* $\rho = 0{,}03 \times 10^{-4}$ ohm — cm.



Σχ. 161

1) Αἱ ἀντιστάσεις R_1 καὶ R_2 ἔχουν ἰσοδύναμον ἀντίστασιν R, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \quad \text{ἄρα} \quad R = \frac{2}{3} \text{ ohm.}$$

Ὥστε ὁ κλάδος ΑΓΒ ἔχει ἀντίστασιν $R' = R + R_3 = 2/3 + 3 = 11/3$ ohm. Ἐπομένως διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I_3 = \frac{V}{R'} = 5 : \frac{11}{3} = \frac{15}{11} = 1{,}36 \text{ ampère.}$$

Τὸ ρεῦμα τοῦτο διακλαδίζεται εἰς τὰς ἀντιστάσεις R_1 καὶ R_2 ἀντιστρόφως ἀναλόγως πρὸς τιμὰς τῶν R_1 καὶ R_2. Ἄρα εἶναι:

$$I_1 = \frac{2}{3} I_3 = \frac{10}{11} = 0.91 \text{ ampère} \qquad I_2 = \frac{1}{3} I_3 = \frac{5}{11} = 0{,}45 \text{ ampère.}$$

Διὰ τῆς ἀντιστάσεως R_4 διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I_4 = V : R_4 = 5 : 4 = 1{,}25 \text{ ampère.}$$

2) Ὁλόκληρος ἡ διακλάδωσις ἔχει ἰσοδύναμον ἀντίστασιν R'' ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R_4} = \frac{3}{11} + \frac{1}{4} = \frac{23}{44} \qquad \text{ἄρα } R'' = \frac{44}{23} = 1{,}91 \text{ ohm.}$$

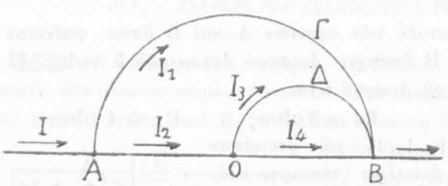
Σύρμα ἀλουμινίου μήκους 1 m καὶ τομῆς 1 mm² ἔχει ἀντίστασιν:

$$\frac{0{,}03}{10^4} \times \frac{10^2}{0{,}01} = 0{,}03 \text{ ohm.}$$

Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ σύρμα ἀντίστασιν 1,91 ohm, πρέπει τὸ μῆκος του νὰ εἶναι

$$l = 1{,}91 : 0{,}03 = 64 \text{ m (περίπου).}$$

260. — *Εὐθύγραμμον σύρμα* ΑΒ *ἔχει ἀντίστασιν* 2 R. *Μὲ διάμετρον τὴν* ΑΒ *σχηματίζομεν ἡμιπεριφέρειαν* ΑΓΒ *ἀποτελουμένην ἀπὸ τὸ ἴδιον σύρμα. Ἂν* Ο *εἶναι τὸ μέσον τῆς* ΑΒ, *μὲ διάμετρον τὴν* ΟΒ *σχηματίζομεν ἄλλην ἡμιπεριφέρειαν ἀποτελουμένην ἀπὸ τὸ ἴδιον πάλιν σύρμα. Εἰς τὸ σημεῖον* Α *φθάνει ρεῦμα ἐντάσεως* I. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐντάσεων τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὰς δύο ἡμιπεριφερείας.*



Σχ. 162

Ἡ ἀντίστασις ἑκάστου τῶν ἀγωγῶν ΑΟ καὶ ΟΒ εἶναι R. Ὁ ἀγωγὸς ΑΓΒ ἔχει ἀντίστασιν π R, ὁ δὲ ἀγωγὸς ΟΔΒ ἔχει ἀντίστασιν $\frac{\pi R}{2}$. Οἱ δύο ἀγωγοὶ ΟΒ καὶ ΟΔΒ ἔχουν ἰσοδύναμον ἀντίστασιν R' τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{2}{\pi R} = \frac{\pi + 2}{\pi R} \qquad \text{ἄρα} \qquad R' = \frac{\pi}{\pi + 2} R.$$

Διὰ τὴν διακλάδωσιν μεταξὺ τῶν σημείων Ο καὶ Β ἔχομεν τὰς γνωστὰς σχέσεις:

$$I_2 = I_3 + I_4 \qquad \text{καὶ} \qquad I_4 R = I_3 \frac{\pi R}{2}.$$

Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐντὸς τοῦ ἀγωγοῦ ΟΔΒ εἶναι:

$$I_3 = \frac{2 I_4}{\pi} = \frac{2(I_2 - I_3)}{\pi} \qquad \text{ἢ} \qquad I_3 = \frac{2}{\pi + 2} I_2. \qquad (1)$$

Διὰ τὴν διακλάδωσιν μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β ἔχομεν τὰς σχέσεις:

$$I = I_1 + I_2 \quad \text{καὶ} \quad I_1 \pi R = I_2 (R + R') \quad \text{ἢ} \quad I_1 \pi R = I_2 R \frac{2\pi + 2}{\pi + 2}.$$

Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐντὸς τοῦ ἀγωγοῦ ΑΓΒ εἶναι:

$$I_1 = \frac{2\pi + 2}{\pi(\pi + 2)} I_2. \tag{2}$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον λόγον:

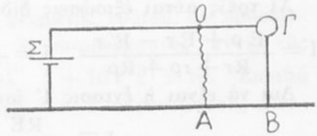
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{2\pi + 2}{2\pi} = \frac{\pi + 1}{\pi} = \frac{4,14}{3,14} = 1,32.$$

561. — *Μία στήλη Σ ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* E = 60 volt *καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* r = 5 ohm. *Ὁ ἕνας πόλος τῆς στήλης συνδέεται μὲ τὸ ἔδαφος, ὁ δὲ ἄλλος συνδέεται μὲ τὸν ἕνα ἀκροδέκτην γαλβανομέτρου Γ, τοῦ ὁποίου ὁ ἄλλος ἀκροδέκτης συνδέεται μὲ τὸ ἔδαφος. Τὸ γαλβανόμετρον ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* r′ = 75 ohm, *τὸ δὲ ὁμογενὲς σύρμα τὸ ὁποῖον συνδέει τὴν στήλην μὲ τὸ γαλβανόμετρον ἔχει μῆκος* 10 km *καὶ σταθερὰν τομήν. Ὡς ἀγωγὸς ἐπιστροφῆς τοῦ ρεύματος θεωρεῖται τὸ ἔδαφος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστασις εἶναι ἀσήμαντος. Τὸ γαλβανόμετρον δεικνύει τότε ὅτι τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ στήλη ἔχει ἔντασιν* I = 0,25 ampère. — *1) Μεταξὺ ἑνὸς σημείου* Ο *τοῦ ἀγωγοῦ* ΣΓ *καὶ τοῦ ἐδάφους παρεμβάλλεται τυχαίως ἀγωγὸς* ΟΑ *ὁ ὁποῖος ἔχει ἀντίστασιν μηδέν. Εἰς τὸ τμῆμα* ΣΟ *τῆς γραμμῆς παρατηροῦμεν τότε ρεῦμα ἐντάσεως* I_1 = 0,50 ampère, *ἐνῷ τὸ γαλβανόμετρον δὲν διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου* Ο *ἀπὸ τὴν στήλην* Σ. *2) Μεταξὺ τοῦ σημείου* Ο *καὶ τοῦ ἐδάφους, ἀντὶ τοῦ προηγουμένου ἀγωγοῦ, παρεμβάλλεται τώρα ἄλλος ἀγωγὸς ὁ ὁποῖος ἔχει ἀντίστασιν* R′. *Τὸ τμῆμα* ΣΟ *τοῦ ἀγωγοῦ διαρρέεται τώρα ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως* 1/3 ampère. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως* R′ *καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ γαλβανόμετρον.*

1) Ἔστω R ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος ΣΓ. Ὅταν μεταξὺ τοῦ Ο καὶ τοῦ Α δὲν ὑπάρχῃ ἀγωγός, ὁ νόμος τοῦ Ohm μᾶς δίδει τὴν σχέσιν:

$E = I(R + r + r')$ ἢ $60 = 0,25(R + 80)$.

ἄρα $R = 160$ ohm.



Σχ. 163

Ὅταν μεταξὺ τοῦ Ο καὶ τοῦ Α παρεμβληθῇ ὁ ἀγωγὸς τότε, ἂν R_1 εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ τμήματος ΣΟ τοῦ σύρματος, ἔχομεν:

$60 = 0,5(R_1 + 5)$ ἄρα εἶναι $R_1 = 115$ ohm.

Αἱ ἀντιστάσεις R καὶ R_1 εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ μήκη ΣΓ καὶ ΣΟ τοῦ σύρματος· ὥστε ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{115}{160} = \frac{\Sigma O}{10\,000} \quad \text{ἢ} \quad \Sigma O = 10\,000 \times \frac{115}{160} = 7\,187,5 \text{ m}.$$

2) Ἡ ἀντίστασις τοῦ τμήματος ΟΓ τοῦ σύρματος εἶναι 160 — 115 = 45 ohm. Ὥστε ὁ κλάδος ΟΓΒ ἔχει ἀντίστασιν $R_2 = 45 + 75 = 120$ ohm. Ἡ μεταξὺ τοῦ Ο καὶ τοῦ ἐδάφους διακλάδωσις ἔχει ἰσοδύναμον ἀντίστασιν R″ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{120} \quad \text{ἄρα} \quad R'' = \frac{120 R'}{120 + R'}.$$

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Ohm ἔχομεν:

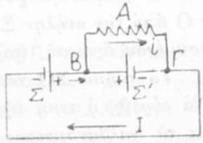
$$60 = \frac{1}{3}\left(5 + 115 + \frac{120\,R'}{120 + R'}\right)\cdot \quad \text{ἄρα} \quad R' = 120 \text{ ohm}.$$

Οἱ δύο κλάδοι ΟΑ καὶ ΟΓΒ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀντίστασιν. Ἐπομένως διαρρέονται ἀπὸ ρεύματα τῆς αὐτῆς ἐντάσεως: $I' = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ampère.

262. — *Εἰς τὸ κύκλωμα μιᾶς στήλης Σ (σχ. 164) ἡ ὁποία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν Ε volt, τίθεται συσσωρευτὴς Σ', ὁ ὁποῖος ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν Ε' καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν ρ. Ἡ ἀντίστασις τῆς στήλης Σ καὶ τῶν ἀγωγῶν τῆς συνδέσεως εἶναι R ohm. — 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ παραγομένου ρεύματος. — 2) Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ συσσωρευτοῦ τοποθετεῖται κατὰ διακλάδωσιν ἀγωγὸς Α, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀντίστασιν r. Νὰ εὑρεθῇ ἡ νέα ἔντασις Ι τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῆς στήλης καὶ αἱ ἐντάσεις i καὶ Ι' τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διέρχονται διὰ τοῦ ἀγωγοῦ Α καὶ διὰ τοῦ συσσωρευτοῦ. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως r διὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ συσσωρευτοῦ εἶναι μηδέν.*

Ἐφαρμογή: $E = 6{,}6$ volt · $R = 10$ ohm · $E' = 2{,}2$ volt · $\rho = 0$.

1) Ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm εὑρίσκομεν: $I = \dfrac{E - E'}{R + \rho}$.



Σχ. 164

Ἐφαρμογή: $I = \dfrac{6{,}6 - 2{,}2}{10} = 0{,}44$ ampère.

2) Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸν νόμον τοῦ Ohm μεταξὺ τῶν σημείων Β καὶ Γ, εὑρίσκομεν τὰς σχέσεις:

$$(V_B - V_\Gamma) = ir \cdot \quad (V_B - V_\Gamma) - E' = I'\rho$$

$$(V_B - V_\Gamma) - E = -IR.$$

Αἱ τρεῖς αὐταὶ ἐξισώσεις δίδουν:

$$I = \frac{E\rho + Er - E'r}{Rr + r\rho + R\rho} \quad i = \frac{RE' + E\rho}{Rr + r\rho + R\rho} \quad I' = \frac{Er - E'r - E'R}{Rr + r\rho + R\rho}.$$

Διὰ νὰ εἶναι ἡ ἔντασις Ι' ἴση μὲ μηδέν, πρέπει νὰ εἶναι:

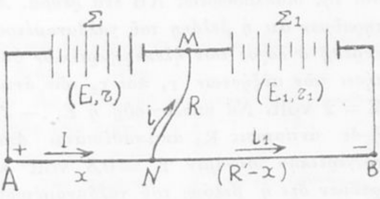
$$r = \frac{RE'}{E - E'} \quad \text{ἤτοι} \quad r = 5 \text{ ohm}.$$

Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν στήλην Σ, εἶναι:

$$I = \frac{E}{R + 2} = \frac{6{,}6}{15} = 0{,}44 \text{ ampère}.$$

263. — *Μία στήλη ἀποτελεῖται ἀπὸ 10 ὅμοια στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἠνωμένα κατὰ σειράν. Ἕκαστον στοιχεῖον ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 2 volt καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 1 ohm. Ὁ θετικὸς πόλος Α τῆς στήλης ἑνώνεται μὲ τὸν ἀρνητικὸν πόλον τῆς Β δι' ἑνὸς σύρματος ἔχοντος ἀντίστασιν 10 ohm. Ἡ στήλη ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μικροτέρας στήλας ἑκάστη τῶν ὁποίων περιλαμβάνει 5 στοιχεῖα. Ἐπὶ τοῦ ἀγωγοῦ, ὁ ὁποῖος συνδέει τὰς δύο αὐτὰς μικροτέρας στήλας λαμβάνομεν σημεῖον Μ. Ἕνας μεταλλικὸς ἀγωγὸς ΜΝ, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀντίστασιν 5 ohm, συνδέει τὸ σημεῖον Μ μὲ μεταβλητὸν σημεῖον Ν ἀγωγοῦ ΑΒ. Ἔστω x ohm ἡ ἀντίστασις τοῦ* *μήματος* ΑΝ *τοῦ σύρματος* ΑΒ. — *1) Νὰ εὑρεθῇ συναρτήσει τοῦ* x *ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ σύρμα* ΜΝ. — *2) Ποίαν θέσιν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον* Μ, *ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν ἀγωγὸν* ΜΝ, *νὰ εἶναι μηδέν; — 3) Νὰ εὑρεθῇ πόσην ἔντασιν ἔχει τὸ ρεῦμα, ποὺ διαρρέει τὸ σύρμα* ΜΝ, *ὅταν τὸ* Ν *συμπίπτῃ μὲ τὸ* Α *καὶ ὅταν τὸ* Ν *συμπίπτῃ μὲ τὸ* Β.

1) Ἔστω R' ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος ΑΒ, ἡ ὁποία εἶναι $R' = 10$ ohm. Ἔστω I ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια Σ, ἡ εὑρισκομένη μεταξὺ τοῦ Α καὶ τοῦ Μ. Ἡ γεννήτρια αὐτὴ ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 10$ volt καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = 5$ ohm. Εἰς τὸ σημεῖον Ν τὸ ρεῦμα τοῦτο χωρίζεται εἰς δύο κλάδους· τὸ ἕνα ρεῦμα, ἐντάσεως i, διαρρέει τὸ σύρμα ΜΝ τὸ δὲ ἄλλο ρεῦμα, ἐντάσεως i_1, διέρχεται διὰ τῆς στήλης Σ_1 ἡ ὁποία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E_1 καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r_1 = 5$ ohm. Ὥστε ἔχομεν: $I = i + i_1$. (1)



Σχ. 165

Ἐπειδὴ ἡ ἀντίστασις τοῦ ΑΝ εἶναι x, ἕπεται ὅτι ἡ ἀντίστασις τοῦ ΝΒ εἶναι $(10 - x)$. Ὥστε λαμβάνομεν:

$$V_N - V_M = E - (r + x)I = Ri = (r_1 + 10 - x)i_1 - E_1.$$

Ἡ σχέσις αὐτὴ δίδει: $10 - (5 + x)I = 5i = (15 - x)i_1 - 10.$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν αὐτὴν σχέσιν εὑρίσκομεν:

$$I = \frac{10 - 5i}{5 + x} \quad \text{καὶ} \quad i_1 = \frac{10 + 5i}{15 - x}.$$

Ἂν θέσωμεν τὰς τιμὰς αὐτὰς τοῦ I καὶ τοῦ i_1 εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), εὑρίσκομεν:

$$\frac{10 - 5i}{5 + x} = i + \frac{10 + 5i}{15 - x} \quad \text{ἄρα} \quad i = \frac{20(x - 5)}{x^2 + 10x - 175}. \quad (2)$$

Ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν φορὰν τοῦ ρεύματος τούτου, ἂν προσδιορίσωμεν τὸ σημεῖον τοῦ i ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2). Ὁ παρονομαστὴς αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως ἔχει τὰς ρίζας $5 - 10\sqrt{2} < 0$ καὶ $5 + 10\sqrt{2} > 10$. Ἐπειδὴ τὸ x μεταβάλλεται μόνον ἀπὸ 0 ἕως 10, συνάγεται ὅτι ὁ παρονομαστὴς εἶναι πάντοτε ἀρνητικός. Ἐπομένως εἶναι:

$i > 0$ (δηλαδὴ ρεῦμα ἐκ τοῦ Ν πρὸς τὸ Μ) ἂν $x - 5 < 0$ ἢ $x < 5$

$i = 0$ (δηλαδὴ κανένα ρεῦμα ἐντὸς τοῦ ΜΝ) ἂν $x - 5 = 0$ ἢ $x = 5$

$i < 0$ (δηλαδὴ ρεῦμα ἐκ τοῦ Μ πρὸς τὸ Ν) ἂν $x - 5 > 0$ ἢ $x > 5$.

2) Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω πίνακα ὁ ἀγωγὸς ΜΝ δὲν διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα, ὅταν εἶναι $x = 5$, δηλαδὴ ὅταν τὸ Ν εἶναι τὸ μέσον τοῦ σύρματος ΑΒ.

3) Ἐὰν τὸ Ν συμπίπτῃ μὲ τὸ Α, δηλαδὴ ἂν εἶναι $x = 0$, τότε εἶναι:

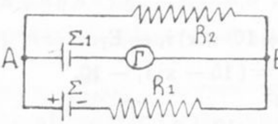
$i = \dfrac{-100}{-175} = +\dfrac{4}{7}$ ampère. Τὸ ρεῦμα ἔχει διεύθυνσιν ἀπὸ τὸ Ν πρὸς τὸ Μ.

Ἐὰν τὸ Ν συμπίπτῃ μὲ τὸ Β, δηλαδὴ ἂν εἶναι $x = 10$ ohm, τότε εἶναι

$i = \dfrac{100}{-175} = -\dfrac{4}{7}$ ampère. Τὸ ρεῦμα ἔχει διεύθυνσιν ἀπὸ τὸ Μ πρὸς Ν.

264.— *Μία στήλη Σ ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν Ε, τὸ δὲ κύκλωμά της ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μεταβλητὰς ἀντιστάσεις R_1 καὶ R_2. Μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Β τοῦ κυκλώματος παρεμβάλλεται μία διακλάδωσις ἡ ὁποία περιλαμβάνει γαλβανόμετρον Γ καὶ στήλην $Σ_1$, ἔχουσαν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E_1.— 1) Ποῖος πόλος τῆς $Σ_1$ πρέπει νὰ συνδεθῇ μὲ τὸν θετικὸν πόλον τῆς Σ, ὥστε διὰ τοῦ γαλβανομέτρου νὰ μὴ διέρχεται κανένα ρεῦμα; Ἔστω ὅτι R_1 καὶ R_2 εἶναι αἱ ἀντιστάσεις αἱ ὁποῖαι πληροῦν αὐτὴν τὴν συνθήκην. Αὐξάνομεν τὴν R_1 κατὰ r_1· τότε διέρχεται διὰ τῆς διακλαδώσεως ΑΒ ἕνα ρεῦμα. Αὐξάνομεν τώρα τὴν R_2 κατὰ r_2 καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ βελόνη τοῦ γαλβανομέτρου ἐπανέρχεται εἰς τὴν διαίρεσιν μηδέν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἠλεκτρεγερτικῶν δυνάμεων τῶν δύο στηλῶν Σ καὶ $Σ_1$ συναρτήσει τῶν αὐξήσεων r_1 καὶ r_2 τῶν ἀντιστάσεων. Δίδεται $r_1 = r_2 = 10$ ohm καὶ Ε = 2 volt. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ E_1.— 2) Ἡ ἀντίστασις R_1 γίνεται ἴση μὲ 11 ohm, ἡ δὲ ἀντίστασις R_2 ἀντικαθίσταται ἀπὸ ἕνα βολτάμετρον τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν Ε′ = 0,8 volt καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν x. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ βελόνη τοῦ γαλβανομέτρου τῆς διακλαδώσεως ΑΒ, ἐξακολουθεῖ νὰ δεικνύῃ τὴν διαίρεσιν μηδέν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντίστασις x. Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς στήλης Σ παραλείπεται.*

1) Τὸ γαλβανόμετρον Γ δὲν ἠμπορεῖ νὰ δεικνύῃ μηδὲν παρὰ μόνον ὅταν αἱ δύο στῆλαι Σ καὶ $Σ_1$ συνδεθοῦν μεταξύ των κατ' ἀντίθεσιν, δηλαδὴ ἂν ὁ θετικὸς πόλος τῆς $Σ_1$ συνδεθῇ μὲ τὸ σημεῖον Α. Τότε θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν: $V_A - V_B = E_1$. Ἐὰν δὲ ὀνομάσωμεν Ι τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τότε τὸ κύκλωμα $ΑΣR_1BR_2A$, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν: $V_A - V_B = R_2 I$. Ἄρα $E_1 = R_2 I$. (1) Ἐπειδὴ



Σχ. 166

δὲ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς Σ εἶναι ἀσήμαντος, ἔχομεν: $I = \frac{E}{R_1 + R_2}$. (2)

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν: $E_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$. (3)

Ἐὰν τὸ γαλβανόμετρον δεικνύῃ μηδέν, ὅταν αἱ ἀντιστάσεις εἶναι $R_1 + r_1$ καὶ $R_2 + r_2$, τότε ἔχομεν πάλιν τὴν σχέσιν:

$$E_1 = \frac{R_2 + r_2}{(R_1 + r_1) + (R_2 + r_2)} E. \quad (4)$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν:

$$\frac{E_1}{E} = \frac{R_2 + r_2}{R_1 + R_2 + r_1 + r_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{r_2}{r_1 + r_2}.$$

Ἐφαρμογή. Διὰ $r_1 = r_2 = 10$ ohm καὶ Ε = 2 volt εὑρίσκομεν: $E_1 = 1$ volt.

2) Ὅταν ἀντικαταστήσωμεν τὴν ἀντίστασιν R_2 μὲ τὸ βολτάμετρον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν Ε′ = 0,8 volt καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν x, τότε, ὅταν τὸ γαλβανόμετρον δεικνύῃ μηδέν, θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$V_A - V_B = E_1 = E' + xI \quad \text{καὶ} \quad E - E' = I(R_1 + x).$$

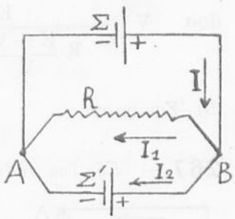
Ἄρα $xI = E_1 - E' = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ καὶ $2 - 0{,}8 = I(11 + x)$ ἢ $I(11 + x) = 1{,}2$.

$$\text{Ὥστε} \quad \frac{11 + x}{x} = \frac{1{,}2}{0{,}2} = 6 \quad \text{καὶ} \quad x = 2{,}2 \text{ ohm.}$$

265.— *Στήλη Σ ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* $E = 48$ volt *καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* $r = 2{,}4$ ohm. *Οἱ πόλοι της συνδέονται μὲ δύο σημεῖα Α καὶ Β μεταξὺ τῶν ὁποίων παρεμβάλλονται κατὰ διακλάδωσιν δύο κυκλώματα. Τὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀντίστασιν* $R = 80$ ohm *καὶ τὸ ἄλλο ἀπὸ στήλην Σ′ ἡ ὁποία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* $E' = 40$ volt *καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* $r' = 0{,}5$ ohm. *Ἡ στήλη Σ′ εἶναι ἠνωμένη κατ' ἀντίθεσιν μὲ τὴν στήλην Σ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὰ διάφορα τμήματα τοῦ κυκλώματος.*

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δὲν ἠμποροῦμε νὰ εὕρωμεν τὴν ἰσοδύναμον ἀντίστασιν τῶν δύο κλάδων ARB καὶ ΑΣ′Β, διότι ὁ ἕνας κλάδος περιέχει στήλην. Ἂς ὁρίσωμεν ὡς θετικὴν τὴν φορὰν τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν φορὰν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου. Σύμφωνα μὲ τὸν πρῶτον κανόνα τοῦ Kirchhoff ἔχομεν τότε τὴν σχέσιν:

$$I = I_1 + I_2 . \qquad (1)$$



Σχ. 167

Ἂν ἐφαρμόσωμεν τώρα τὸν δεύτερον κανόνα τοῦ Kirchhoff πρῶτα εἰς τὸ κύκλωμα ΣΒRΑΣ καὶ ἔπειτα εἰς τὸ κύκλωμα ΣΒΣ′ΑΣ, εὑρίσκομεν τὰς ἑπομένας σχέσεις:

$$E = Ir + I_1R \quad \text{ἤτοι} \quad 48 = 2{,}4\,I + 80\,I_1 \qquad (2)$$
$$E - E' = Ir + I_2r \quad \text{ἤτοι} \quad 48 - 40 = 2{,}4\,I + 0{,}5\,I_2 . \qquad (3)$$

Τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3) περιέχει τρεῖς ἀγνώστους. Ἐὰν εἰς τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (3) θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ I ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν:

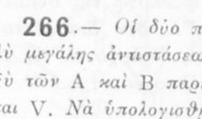
$$48 = 82{,}4\,I_1 + 2{,}4\,I_2 \qquad (2')$$
$$8 = 2{,}4\,I_1 + 2{,}9\,I_2 . \qquad (3')$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς εὑρίσκομεν:

$I_1 = 0{,}5146$ ampère $I_2 = 2{,}3327$ ampère καὶ $I = I_1 + I_2 = 2{,}8473$ ampère.

Σημείωσις. Ἐὰν εὑρίσκετο δι' ἕνα ἐκ τῶν ρευμάτων τούτων ἀρνητικὴ τιμὴ τῆς ἐντάσεώς του, τοῦτο θὰ ἐσήμαινεν ὅτι ἡ πραγματικὴ φορὰ τοῦ ρεύματος τούτου εἶναι ἀντίθετος πρὸς τὴν φορὰν τὴν ὁποίαν τοῦ ἀπεδώσαμεν αὐθαιρέτως.

266.— *Οἱ δύο πόλοι Α καὶ Β μιᾶς στήλης Σ συνδέονται μὲ βολτόμετρον, πολὺ μεγάλης ἀντιστάσεως. Τὸ βολτόμετρον σημειώνει τότε τὴν ἔνδειξιν E.— 1) Μεταξὺ τῶν Α καὶ Β παρεμβάλλομεν ἀντίστασιν R. Ἡ ἔνδειξις τοῦ βολτομέτρου γίνεται V. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς στήλης. — 2) Μεταξὺ τῶν Α καὶ Β παρεμβάλλομεν κατὰ διακλάδωσιν νέαν ἀντίστασιν R, ἴσην μὲ τὴν προηγουμένην. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ νέα ἔνδειξις V′ τοῦ βολτομέτρου καὶ νὰ εὑρεθῇ σχέσις δίδουσα τὸ V′ ἀνεξαρτήτως τῆς τιμῆς τοῦ R. — 3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ V′ ἂν εἶναι:* $E = 2$ volt καὶ $V = 1{,}5$ volt.



Σχ. 168

1) Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς στήλης εἶναι E. Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι: $I = V : R$, ὅπου V εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ Α καὶ Β. Ἐὰν r εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς στήλης, ἔχομεν:

$$I = \frac{E}{R + r} \quad \text{ἢ} \quad \frac{V}{R} = \frac{E}{R + r} \cdot \text{ ἄρα } r = R\,\frac{E - V}{V}$$

2) Ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις γίνεται τότε R/2. Ἄρα ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι : $r+\frac{R}{2}$ ἢ $R\frac{E-V}{V}+\frac{R}{2}$.

Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι τότε :

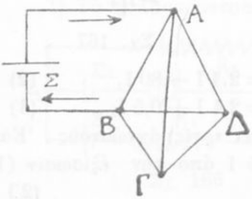
$$I'=\frac{E}{r+\frac{R}{2}}=\frac{E}{R\frac{E-V}{V}+\frac{R}{2}}.$$

Ἡ δὲ ἔνδειξις τοῦ βολτομέτρου γίνεται : $V'=I'\times\frac{R}{2}$

$$\text{ἄρα}\quad V'=\frac{E}{R\frac{E-V}{V}+\frac{R}{2}}\times\frac{R}{2}=\frac{ER}{R\left[\frac{2(E-V)}{V}+1\right]}=\frac{EV}{2E-V}.$$

3) Ἐφαρμογή : $V'=\frac{3}{4-1,5}=1,2$ volt.

267.— *Ἓξ ἴσα εὐθύγραμμα σύρματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ἀντίστασιν* 1 ohm, *συνδέονται οὕτως ὥστε νὰ σχηματίζουν τὰς ἀκμὰς κανονικοῦ τετραέδρου. Δύο κορυφαὶ τούτου συνδέονται μὲ τοὺς πόλους γεννητρίας ἐχούσης ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* 3 volt *καὶ ἀσήμαντον ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν. Ποία εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ κυρίου ρεύματος;*



Σχ. 169

Ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 169, πρέπει νὰ θεωρήσωμεν ὅτι μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B παρεμβάλλονται κατὰ διακλάδωσιν τρεῖς ἀγωγοί : ὁ AB ἀντιστάσεως 1 ohm, ὁ ΑΓΒ ἀντιστάσεως 2 ohm, ὁ ΑΔΒ ἀντιστάσεως 2 ohm. Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ συνδέονται μὲ τὸν ἀγωγὸν ΓΔ ὁ ὁποῖος ἔχει ἀντίστασιν 1 ohm. Ἄς θεωρήσωμεν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ AB καὶ κάθετον εἰς τὸ μέσον τοῦ ἀγωγοῦ ΓΔ. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας τοῦ κυκλώματος. Ἑπομένως τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ, λόγῳ τῆς συμμετρίας, ἔχουν τὸ αὐτὸ δυναμικὸν καὶ διὰ τοῦτο ὁ ἀγωγὸς ΓΔ δὲν διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα. Ἠμποροῦμε λοιπὸν νὰ τὸν θεωρήσωμεν ὡς μὴ ὑπάρχοντα εἰς τὸ κύκλωμα. Ἂν R εἶναι ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις, ἔχομεν τὴν σχέσιν :

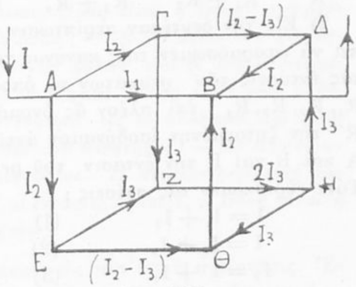
$$\frac{1}{R}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2\cdot\quad\text{ἄρα}\quad R=\frac{1}{2}\ \text{ohm}.$$

Ἡ ἔντασις τοῦ κυρίου ρεύματος εἶναι : $I=\frac{E}{R}=3:\frac{1}{2}=6$ ampère.

268.— *Ἕνα κυβικὸν κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπὸ δώδεκα ἴσα εὐθύγραμμα σύρματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ἀντίστασιν* R ohm. *Εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς ἀκμῆς τοῦ κύβου ἐφαρμόζεται διαφορὰ δυναμικοῦ ἴση μὲ* V volt. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὅλη ἔντασις τοῦ ρεύματος. Ἐφαρμογή :* V = 42 volt · R = 10 ohm.

Ἄς καλέσωμεν I τὴν ὅλην ἔντασιν τοῦ ρεύματος καὶ I_1 τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος τοῦ διαρρέοντος τὸ σύρμα AB.

Εἶναι προφανὲς ὅτι λόγῳ συμμετρίας οἱ ἀγωγοὶ ΑΓ, ΑΕ, ΔΒ καὶ ΘΒ διαρρέονται ἀπὸ ρεύματα τῆς αὐτῆς ἐντάσεως, τὴν ὁποίαν ἂς καλέσωμεν I_2. Ἐπίσης οἱ ἀγωγοὶ ΓΖ, ΕΖ, ΗΔ καὶ ΗΘ διαρρέονται ἀπὸ ρεύματα τῆς αὐτῆς ἐντάσεως I_3. Τότε ὁ μὲν ἀγωγὸς ΖΗ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $2I_3$, οἱ δὲ ἀγωγοὶ ΓΔ καὶ ΕΘ διαρρέονται ἀπὸ ρεύματα ἔχοντα ἔντασιν $I_2 - I_3$.



Σχ. 170

Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸν δεύτερον κανόνα τοῦ Kirchhoff εἰς τὰ τμήματα ΑΒ, ΑΓΔΒ καὶ ΑΓΖΗΔΒ, λαμβάνομεν τὰς τρεῖς ἐξισώσεις:

$$V = RI_1$$
$$V = RI_2 + R(I_2 - I_3) + RI_2 = 3RI_2 - RI_3$$
$$V = RI_2 + RI_3 + 2RI_3 + RI_3 + RI_2 = 2RI_2 + 4RI_3.$$

Ἀπὸ τὰς τρεῖς αὐτὰς ἐξισώσεις εὑρίσκομεν:

$$I_1 = \frac{V}{R}. \qquad I_2 = \frac{5V}{14R}. \qquad I_3 = \frac{V}{14R}.$$

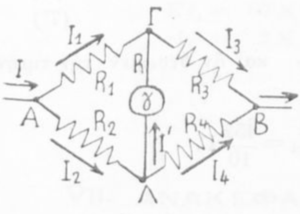
Ἄρα ἡ ὅλη ἔντασις I τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = I_1 + 2I_2 = \frac{V}{R} + \frac{10V}{14R} = \frac{24V}{14R} \text{ ampère.}$$

Ἐφαρμογή: Διὰ $V = 42$ volt, $R = 10$ ohm, ἔχομεν:

$$I = \frac{24 \times 42}{14 \times 10} = \frac{36}{5} = 7{,}2 \text{ ampère.}$$

269 — *Μία γέφυρα τοῦ* Wheatstone *ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς ἑξῆς ἀντιστάσεις: τὴν* ΑΓ: $R_1 = 10$ ohm· *τὴν* ΑΛ: $R_2 = 1$ ohm· *τὴν* ΑΒ: $R_4 = 10$ ohm *καὶ τὴν διαγώνιον ἀντίστασιν* ΓΛ, *ἡ ὁποία περιλαμβάνει γαλβανόμετρον καὶ ἔχει ἀντίστασιν* $R = 200$ ohm.— *1) Νὰ εὑρεθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ τετάρτη ἀντίστασις* ΓΒ, *ὥστε ἡ γέφυρα νὰ ἰσορροπηθῇ. Πόση εἶναι τότε ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις ὁλοκλήρου τῆς γεφύρας; — 2) Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ γέφυρα δὲν ἰσορροπεῖται καὶ ὅτι ἡ ἀντίστασις* ΓΒ *εἶναι* 50 ohm. *Πόση εἶναι τότε ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις ὅλης τῆς γεφύρας; Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν διαγώνιον* ΓΛ, *ἐὰν ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων* Α *καὶ* Β *εἶναι* 1 volt;



Σχ. 171

1) Ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν:

$R_1 \times R_4 = R_3 \times R_2$ εὑρίσκομεν: $R_3 = 100$ ohm.

Τότε ἡ διαγώνιος ΓΛ δὲν διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα καὶ ἑπομένως εἶναι ὡς νὰ μὴ ὑπάρχῃ. Ἡ γέφυρα ἰσοδυναμεῖ τότε μὲ ἀντίστασιν R′ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{R'}=\frac{1}{R_1+R_3}+\frac{1}{R_2+R_4}=\frac{1}{110}+\frac{1}{11} \cdot \quad \text{ἄρα:} \quad R'=10 \text{ ohm}.$$

2) Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἔχομεν δίκτυον ἀγωγῶν εἰς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν τοὺς κανόνας τοῦ Kirchhoff. Ἂς ὀνομάσωμεν I_1, I_2, I_3, I_4 τὰς ἐντάσεις τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν ἀντιστοίχως τὰς ἀντιστάσεις R_1, R_2, R_3, R_4 · ἐπὶ πλέον ἂς ὀνομάσωμεν I τὴν ἔντασιν τοῦ κυρίου ρεύματος, R'' τὴν ζητουμένην ἰσοδύναμον ἀντίστασιν, V τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ μεταξὺ A καὶ B καὶ I' τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος ποὺ διαρρέει τὴν ἀντίστασιν ΓΔ. Τότε εὑρίσκομεν τὰς σχέσεις :

$$I=I_1+I_2 \quad (1) \qquad 10\,I_1-200\,I'-1\,I_2=0 \quad (4)$$
$$I=I_3+I_4 \quad (2) \qquad 200\,I'+50\,I_3-10\,I_4=0 \quad (5)$$
$$I_2=I'+I_4 \quad (3) \qquad V=R''I=1 \text{ volt}. \quad (6)$$
$$V=10\,I_1+50\,I_3=1 \text{ volt}. \quad (7)$$

Οὕτω λαμβάνομεν σύστημα 7 ἐξισώσεων μὲ 7 ἀγνώστους, ἐκ τῶν ὁποίων ὅμως ζητοῦνται μόνον δύο, τὸ R'' καὶ τὸ I'. Ἀπαλείφοντες διαδοχικῶς τοὺς ἄλλους πέντε ἀγνώστους ἠμποροῦμε νὰ εὕρωμεν τελικῶς σύστημα, τὸ ὁποῖον περιέχει μόνον τοὺς δύο ζητουμένους ἀγνώστους. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3) λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ I_2 καὶ τὴν ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (4). Οὕτω ἔχομεν τὸ νέον σύστημα :

$$I=I_1+I'+I_4 \quad (1')$$
$$I=I_3+I_4 \quad (2)$$
$$10\,I_1-201\,I'-I_4=0 \quad (4')$$

καὶ αἱ ἐξισώσεις (5), (6) καὶ (7).

Ἀπὸ τὰς (1') καὶ (2) εὑρίσκομεν $I_3=I_1+I'$ · ἄρα $I=I_1+I'+I_4$.

Ἂν θέσωμεν αὐτὰς τὰς τιμὰς τῶν I_3 καὶ I εἰς τὰς ἐξισώσεις (4'), (5), (6) καὶ (7), ἔχομεν:

$$10\,I_1-201\,I'-I_4=0 \quad (4')$$
$$250\,I'+50\,I_1-10\,I_4=0 \quad (5')$$
$$I_1+I'+I_4=1/R'' \quad (6')$$
$$60\,I_1+50\,I'=1. \quad (7')$$

Ἀπὸ τὴν (4') εὑρίσκομεν : $I_1=\frac{201\,I'}{10}+\frac{I_4}{10}$ καὶ ἂν θέσωμεν τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ I_1 εἰς τὴν (5'), εὑρίσκομεν :

$$I_4=251\,I' \cdot \quad \text{ἄρα} \quad I_1=\frac{452}{10}I'.$$

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις (7') γράφεται :

$$\left(\frac{60\times 452}{10}+50\right)I'=1 \cdot \quad \text{ἄρα} \quad I'=\frac{1}{2\,762}=0,000\,362 \text{ ampère}.$$

Τέλος ἡ ἐξίσωσις (6') δίδει :

$$\frac{1}{R''}=\frac{452}{10}I'+I'+251\,I'=\frac{2\,972}{10\times 2\,762} \quad \text{ἄρα} \quad R''=9{,}293 \text{ ohm}.$$

270.— *Μία γεννήτρια Γ ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* E = 100 volt *καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν ἀσήμαντον. Δύο σύρματα τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀσήμαντον ἀντίστασιν συνδέουν τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας μὲ τοὺς πόλους* A *καὶ* B *ἑνὸς κινητῆρος*

Κ, *ὁ ὁποῖος ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* $r = 2$ ohm. —1) *Μὲ κατάλληλον διάταξιν ἐμποδίζομεν τὸν ἄξονα τοῦ κινητῆρος νὰ στρέφεται. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια εἰς τὸ κύκλωμα; — 2) Ὁ ἄξων τοῦ κινητῆρος ἐμποδίζεται καὶ πάλιν νὰ στρέφεται. Μεταξὺ τῶν πόλων του* Α *καὶ* Β *παρεμβάλλομεν κατὰ διακλάδωσιν μίαν ἀντίστασιν* $R = 4$ ohm. *Πόση εἶναι τότε ἡ ἔντασις* I *τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια εἰς τὸ κύκλωμα καὶ πόση εἶναι ἡ ἔντασις* I_1 *τοῦ ρεύματος ποὺ διέρχεται διὰ τοῦ κινητῆρος; — 3) Ἀφήνομεν τώρα τὸν ἄξονα τοῦ κινητῆρος ἐλεύθερον νὰ στρέφεται. Ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ του δύναμις εἶναι* $E' = 60$ volt. *Ποῖαι εἶναι τότε αἱ ἐντάσεις* I *καὶ* I_1; *Πόση εἶναι ἡ ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς τὴν ὁποίαν καταναλίσκει ὁ κινητήρ;*

1) Ὁ κινητὴρ παρεμβάλλεται εἰς τὸ κύκλωμα ὡς μία ἁπλῆ ἀντίστασις. Ἑπομένως διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως: $I = E : r = 100 : 2 = 50$ ampère.

2) Ὅταν παρεμβάλλωμεν κατὰ διακλάδωσιν τὴν ἀντίστασιν $R = 4$ ohm, τότε ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β εἶναι $V = E = 100$ volt.

Ἄρα διὰ τοῦ κινητῆρος διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I_1 = V : r = 100 : 2 = 50 \text{ ampère}$$

διὰ τῆς διακλαδώσεως διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I_2 = V : R = 100 : 4 = 25 \text{ ampère.}$$

Ἡ ὅλη ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι $I = 50 + 25 = 75$ ampère.

3) Ὅταν στρέφεται ὁ κινητήρ, τότε εἶναι πάλιν $E = V$, ἡ δὲ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ κινητῆρος, εἶναι:

$$I_1 = \frac{V - E'}{r} = \frac{100 - 60}{2} = 20 \text{ ampère}$$

διὰ τῆς διακλαδώσεως εἶναι: $I_2 = V : R = 100 : 4 = 25$ ampère.

Ἄρα ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον ἡ γεννήτρια παρέχει εἰς τὸ κύκλωμα, εἶναι: $I = 20 + 25 = 45$ ampère.

Ὁ κινητὴρ καταναλίσκει ἠλεκτρικὴν ἰσχύν:

$$P = VI_1 = 100 \times 20 = 2\,000 \text{ watt} \quad \text{ἐξ αὐτῆς:}$$

$$E'I_1 = 60 \times 20 = 1\,200 \text{ watt μετατρέπονται εἰς ἔργον}$$

$$rI_1^2 = 2 \times 20^2 = 800 \text{ watt μετατρέπονται εἰς θερμότητα.}$$

VII. ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΙΣ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΤΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

271.— *Μία αἴθουσα φωτίζεται μὲ* 3 *λαμπτῆρας διὰ πυρακτώσεως, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει ἰσχὺν καταναλώσεως* 40 watt *καὶ λειτουργοῦν ὑπὸ τάσιν* 120 volt. *Ἡ αἴθουσα θερμαίνεται μὲ μίαν ἠλεκτρικὴν θερμάστραν ἡ ὁποία ἔχει ἰσχὺν καταναλώσεως* 600 watt *καὶ λειτουργεῖ ὑπὸ τὴν αὐτὴν τάσιν. Τὰ σύρματα τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται διὰ τὰς συνδέσεις ἔχουν ἀσήμαντον ἀντίστασιν.— 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω ὀργάνων ὡς καὶ ἕκαστον τῶν συρμάτων τὰ ὁποῖα συνδέουν τὴν αἴθουσαν μὲ τὸ δίκτυον διανομῆς* *τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας.— 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις ἑνὸς λαμπτῆρος, τῆς θερμάστρας καὶ ἡ ἀντίστασις ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ σύνολον τῶν ὀργάνων.— 3) Νὰ εὑρεθῇ πόση ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια καταναλίσκεται εἰς 1 ὥραν καὶ πόση εἶναι ἡ ἀντίστοιχος δαπάνη, ἐὰν τὸ ὡριαῖον κιλοβὰτ τιμᾶται 600 δραχμάς.— 4) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ποσότης θερμότητος ἡ ὁποία ἐλευθερώνεται ἐντὸς μιᾶς ὥρας ἀπὸ ὅλα τὰ ἀνωτέρω ὄργανα.*

1) Οἱ 3 λαμπτῆρες καὶ ἡ θερμάστρα παρεμβάλλονται κατὰ διακλάδωσιν μεταξὺ τῶν δύο ἀγωγῶν, οἱ ὁποῖοι φέρουν εἰς τὴν αἴθουσαν τὸ ρεῦμα. Μεταξὺ τῶν ἀγωγῶν τούτων ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ $V = 120$ volt. Καθένας λαμπτὴρ καταναλίσκει ἰσχὺν $P = 40$ watt καὶ ἑπομένως διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως: $i = P : V = 40 : 120 = 1/3$ ampère.

Ἡ θερμάστρα καταναλίσκει ἰσχὺν $P' = 600$ watt καὶ ἑπομένως διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $i' = P' : V = 600 : 120 = 5$ ampère.

Ὥστε οἱ ἀγωγοὶ οἱ ὁποῖοι φέρουν τὸ ρεῦμα εἰς τὴν αἴθουσαν διαρρέονται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως: $I = 3i + i' = 1 + 5 = 6$ ampère.

2) Ἡ ἀντίστασις ἑνὸς λαμπτῆρος εἶναι: $r = V : i = 120 \times 3 = 360$ ohm. Ἄρα οἱ 3 λαμπτῆρες τῆς διακλαδώσεως ἔχουν ἀντίστασιν $r/3 = 120$ ohm. Ἡ ἀντίστασις τῆς θερμάστρας εἶναι $r' = 120 : 5 = 24$ ohm. Ἑπομένως ἡ ἀντίστασις R ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύνολον τῶν ὀργάνων εἶναι:

$$\frac{1}{R} = \frac{3}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{120} + \frac{1}{24} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20} \quad \text{ἢ} \quad R = 20\,\text{ohm}.$$

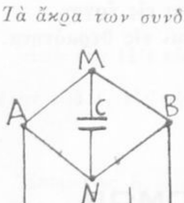
3) Ἡ ὅλη καταναλισκομένη ἰσχὺς εἶναι: $P_1 = (40 \times 3) + 600 = 720$ watt. Ἄρα εἰς 1 ὥραν καταναλίσκεται ἐνέργεια $W = 0{,}720$ kWh
ἡ ὁποία ἀξίζει: $600 \times 0{,}720 = 432$ δρχ.

4) Κατὰ δευτερόλεπτον ἐλευθερώνεται ποσότης θερμότητος: $720 : 4{,}18 = 17{,}28$ cal. Ἑπομένως εἰς μίαν ὥραν ἐλευθερώνεται:

$$17{,}28 \times 3\,600 = 62\,200 \text{ cal (περίπου).}$$

272.— *Δύο σύρματα* ANB *καὶ* AMB *ἔχουν ἀντιστοίχως ἀντιστάσεις* R *καὶ* R′. *Τὰ ἄκρα των συνδέονται μὲ τοὺς πόλους μιᾶς συστοιχίας συσσωρευτῶν ἡ ὁποία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* E *καὶ ἀσήμαντον ἀντίστασιν. Ὁ ἕνας ὁπλισμὸς πυκνωτοῦ, ἔχοντος χωρητικότητα* C, *συνδέεται μὲ τὸ μέσον* N *τῆς ἀντιστάσεως* R, *ὁ δὲ ἄλλος ὁπλισμός του συνδέεται μὲ ἕνα σημεῖον* M *τὸ ὁποῖον χωρίζει τὴν ἀντίστασιν* R′ *εἰς δύο τμήματα τῶν ὁποίων τὰ μήκη ἔχουν λόγον* x. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ φορτίον* Q *τὸ ὁποῖον λαμβάνει ὁ πυκνωτής.*

Ἐφαρμογή: $C = 1$ microfarad · $E = 40$ volt · $x = 1/4$.



Σχ. 172

Τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ συστοιχία διαρρέει τοὺς δύο κλάδους AMB καὶ ANB. Τὰ σημεῖα M καὶ N ἔχουν ἀντιστοίχως δυναμικὸν V_M καὶ V_N.

Ὥστε τὸ φορτίον, ποὺ λαμβάνει ὁ πυκνωτής, εἶναι: $Q = C\,(V_M - V_N)$.

Τὰ τμήματα AM καὶ AMB διαρρέονται ἀπὸ τὸ ἴδιον ρεῦμα. Τὰ τμήματα αὐτὰ ἔχουν ἀντιστοίχως ἀντιστάσεις R_1 καὶ R'. Ἀπὸ τὰς σχέσεις:

$$V_A - V_M = IR_1 \text{ καὶ } E = IR' \quad \text{εὑρίσκομεν} \quad V_A - V_M = E\,\frac{R_1}{R'}. \qquad (1)$$

Ἂν ὀνομάσωμεν R_2 τὴν ἀντίστασιν τοῦ τμήματος MB, τότε ὁ λόγος

$$\frac{R_1}{R_2} = x \quad \text{γράφεται} \quad \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{x}{1+x}.$$

Ἀλλὰ εἶναι $R_1 + R_2 = R'$, ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται:

$$V_A - V_M = \frac{E\,x}{1+x}. \qquad (2)$$

Ὁμοίως σκεπτόμενοι διὰ τὸν ἄλλον κλάδον ANB εὑρίσκομεν:

$$V_A - V_N = \frac{E}{2}. \qquad (3)$$

Ἂν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (3) ἔχομεν:

$$V_M - V_N = \frac{E}{2} - \frac{E\,x}{1+x} = \frac{E}{2} \times \frac{1-x}{1+x}.$$

Ἄρα τὸ φορτίον τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι: $Q = \frac{C\,E}{2} \times \frac{1-x}{1+x}$.

Ἐφαρμογή: $Q = \frac{1 \times 40}{10^6 \times 2} \times \left(\frac{3}{4} : \frac{5}{4}\right) = \frac{12}{10^6}$ coulomb.

273.— *Συστοιχία ἀποτελεῖται ἀπὸ 5 συσσωρευτὰς ἡνωμένους κατὰ σειράν. Ἕκαστος ἐξ αὐτῶν ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 2 volt καὶ ἀσήμαντον ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν. Ἡ συστοιχία συνδέεται κατὰ σειρὰν μὲ σταθερὰν ἀντίστασιν* $R = 10$ *ohm ἡ ὁποία ἀκολουθεῖται ἀπὸ δύο μεταβλητὰς ἀντιστάσεως* R_1 *καὶ* R_2 *συνδεδεμένας μεταξύ των ἐν παραλλήλῳ. Διὰ καταλλήλου διατάξεως τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων ἀντιστάσεων διατηρεῖται σταθερόν:* $R_1 + R_2 = 1\,000$ ohm.— *1) Ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι* $R_1 = 100$ ohm *καὶ* $R_2 = 900$ ohm· *νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὅλη ἔντασις* I *τοῦ ρεύματος καὶ αἱ ἐντάσεις* I_1 *καὶ* I_2 *τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὰς ἀντιστάσεις* R_1 *καὶ* R_2. — *2) Μεταβάλλομεν τὰς* R_1 *καὶ* R_2. *Νὰ ἐξετασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς ὅλης ἐντάσεως* I. — *3) Νὰ εὑρεθῇ συναρτήσει τῆς* R_1 *ὁ λόγος* x *τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῆς* R. — *4) Νὰ εὑρεθῇ συναρτήσει τῆς* R_1 *ὁ λόγος* y *τῶν ποσοτήτων θερμότητος αἱ ὁποῖαι ἀναπτύσσονται κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον ἐπὶ τῶν ἀντιστάσεων* R_1 *καὶ* R_2.

1) Ἡ διακλάδωσις ἔχει ἰσοδύναμον ἀντίστασιν: $R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Ἑπομένως ἡ ὅλη ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = E : (R + R') = 10 : 100 = 0{,}1 \text{ ampère}.$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις τῶν διακλαδιζομένων ρευμάτων $I = I_1 + I_2$ καὶ $I_1 R_1 = I_2 R_2$ εὑρίσκομεν ὅτι αἱ μερικαὶ ἐντάσεις I_1 καὶ I_2 εἶναι:

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = \frac{900 \times 0{,}1}{1\,000} = 0{,}09 \text{ ampère}$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I = \frac{100 \times 0{,}1}{1\,000} = 0{,}01 \text{ ampère}.$$

2) Ἡ ὅλη ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = \frac{E}{R + R'} = \frac{E(R_1 + R_2)}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2} = \frac{10\,000}{10\,000 + 1\,000\,R_1 - R_1^2}.$$

Διὰ $R_1 = 0$ καὶ $R_2 = 1\,000$ ohm, ἡ ἔντασις γίνεται: $I = 1$ ampère.

Διὰ $R_1 = R_2 = 500$ ohm ἡ ἔντασις γίνεται: $I = 0{,}038$ ampère ἤτοι λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην τιμήν της.

3) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀντιστάσεων R_1 καὶ R_2 εἶναι: $V_1 = R'I$. Ἡ δὲ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R εἶναι: $V = RI$. Ἄρα ὁ ζητούμενος λόγος εἶναι:

$$x = \frac{R'}{R} = \frac{R_1 R_2}{R(R_1 + R_2)} = \frac{R_1(1\,000 - R_1)}{10\,000}.$$

Διὰ $R_1 = R_2 = 500$ ohm εἶναι $x = 25$.

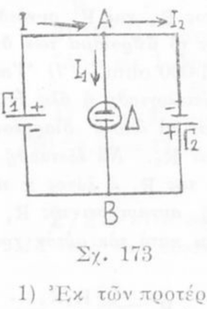
4) Ἡ ἠλεκτρικὴ ἰσχύς, ἡ ὁποία μετατρέπεται εἰς θερμότητα ἐντὸς ἑκάστης ἀντιστάσεως, εἶναι:

$$P_1 = V_1 I_1 = \frac{V_1^2}{R_1} \quad \text{καὶ} \quad P_2 = V_1 I_2 = \frac{V_1^3}{R_2}$$

Ὁ ζητούμενος λόγος εἶναι:

$$y = P_1 : P_2 = \frac{V_1^2}{R_1} : \frac{V_1^2}{R_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{1\,000 - R_1}{R_1'}.$$

274.— *Οἱ ἑτερώνυμοι πόλοι δύο γεννητριῶν Γ_1 καὶ Γ_2 συνδέονται μὲ δύο σημεῖα A καὶ B (σχ. 173). Αἱ γεννήτριαι ἔχουν ἀντιστοίχως ἠλεκτρεγερτικὰς δυνάμεις* $E_1 = 120$ volt *καὶ* $E_2 = 80$ volt *καὶ ἀντιστοίχους ἐσωτερικὰς ἀντιστάσεις* $r_1 = 2$ ohm *καὶ* $r_2 = 2$ ohm. *Μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B παρεμβάλλεται μία σειρὰ βολταμέτρων Δ τὰ ὁποῖα περιέχουν ἀραιὸν διάλυμα ὀξέος. Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς σειρᾶς τῶν βολταμέτρων εἶναι* $R = 1$ ohm. *Αἱ λοιπαὶ ἀντιστάσεις τοῦ κυκλώματος παραλείπονται. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὰ διάφορα μέρη τοῦ κυκλώματος εἰς τὰς ἑξῆς περιπτώσεις: — 1) Ὅταν ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῶν βολταμέτρων εἶναι* 10 volt. — *2) Ὅταν ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι* 30 volt.



Σχ. 173

1) Ἐκ τῶν προτέρων φαίνεται ὅτι ἡ πιθανωτέρα φορὰ τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα κυκλοφοροῦν ἐντὸς τοῦ κυκλώματος, εἶναι ἐκείνη ἡ ὁποία σημειώνεται εἰς τὸ σχῆμα. Τότε, σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ποσότητος ἠλεκτρισμοῦ, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν: $I = I_1 + I_2$. (1)

Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B εἶναι:

$$V_A - V_B = 120 - 2I = I_1 \times 1 + 10 = 2I_2 - 80. \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ 2) εὑρίσκομεν:

$I = 52{,}5$ ampère· $I_1 = 5$ ampère· $I_2 = 47{,}5$ ampère.

Αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαὶ εἶναι θετικαὶ καὶ ἑπομένως τὰ ρεύματα ἔχουν πράγματι τὰς διευθύνσεις τὰς ὁποίας ἐδέχθημεν ἐξ ἀρχῆς ὡς τὰς περισσότερον πιθανάς.

2) Ἂν δεχθῶμεν ὅτι καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσχύῃ ἡ ἐξίσωσις (1), τότε ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B θὰ δίδεται ἀπὸ τὰς σχέσεις: $V_A - V_B = 120 - 2I = I_1 \times 1 + 30 = 2I_2 - 80$. (3)

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (3) εὑρίσκομεν:

$$I = 47,5 \text{ ampère} \quad \text{καὶ} \quad I_1 = -5 \text{ ampère}.$$

Ἐπειδὴ ἡ I_1 εἶναι ἀρνητική, συνάγεται ὅτι τὸ ρεῦμα πρέπει νὰ διαρρέῃ τώρα τὰ βολτάμετρα κατ' ἀντίθετον φορὰν (ἐκ τοῦ B πρὸς τὸ A). Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον, διότι τὰ βολτάμετρα εἶναι ἀποδέκται, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν. Αἱ σχέσεις λοιπὸν (1) καὶ (3 δὲν ἐφαρμόζονται εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν. Πρέπει ἑπομένως νὰ συμπεράνωμεν ὅτι διὰ τῆς διακλαδώσεως ΑΔΒ δὲν διέρχεται κανένα ρεῦμα. Ἐὰν δὲν ὑπῆρχε ἡ διακλάδωσις τότε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα, θὰ ἦτο:

$$I = (E_1 + E_2) : (r_1 + r_2) = 200 : 4 = 50 \text{ ampère}.$$

Καὶ ἑπομένως μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B θὰ ὑπῆρχεν διαφορὰ δυναμικοῦ: $V_A - V_B = E_1 - r_1 I = 120 - (2 \times 50) = 20$ volt.

Ὥστε διὰ νὰ διέρχεται ρεῦμα διὰ τῆς διακλαδώσεως, πρέπει ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις των βολταμέτρων νὰ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ 20 volt. Εἰς τὴν τὴν δευτέραν λοιπὸν περίπτωσιν εἶναι ἀδύνατον νὰ διέρχεται ρεῦμα διὰ τῶν βολταμέτρων καὶ ἑπομένως ἡ διακλάδωσις εἶναι ὡς νὰ μὴ ὑπάρχῃ εἰς τὸ κύκλωμα.

275. — *Κλειστὸν κύκλωμα περιλαμβάνει κατὰ σειράν: α) μίαν γεννήτριαν ἡ ὁποία ἔχει σταθερὰν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* E *καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* $r = 0{,}01$ ohm· *β) ἕνα βολτάμετρον τὸ ὁποῖον ἔχει σταθερὰν ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* $E' = 1{,}6$ volt *καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* $r' = 0{,}03$ ohm. *Αἱ ἀντιστάσεις τῶν συρμάτων τῆς συνδεσμολογίας παραλείπονται.— 1) Διὰ τοῦ βολταμέτρου διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως* 10 ampère. *Νὰ εὑρεθῇ: α) ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς γεννητρίας καὶ β) ἡ ἀπόδοσις τῆς ἠλεκτρολύσεως (δηλαδὴ ὁ λόγος τῆς ἰσχύος ποὺ δαπανᾶται κατὰ τὴν ἠλεκτρόλυσιν πρὸς τὴν ἰσχὺν τῆς γεννητρίας).— 2) Συνδέομεν τοὺς δύο πόλους τῆς γεννητρίας μὲ σύρμα τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν* $R = 1$ ohm. *Τὸ σύρμα τοῦτο εὑρίσκεται οὕτω συνδεδεμένον μὲ τὸ βολτάμετρον ἐν παραλλήλῳ. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια εἰς τὸ κύκλωμα;— 3) Ἡ ἀντίστασις* R *ἐλαττώνεται συνεχῶς ἀπὸ* 1 ohm *εἰς* 0,02 ohm. *Πόση γίνεται τότε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ βολταμέτρου;*

1) Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Ohm ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$E = E' + (r + r')\, I = 1{,}6 + (0{,}01 + 0{,}03)\, 10 = 2 \text{ volt}.$$

Ἐντὸς τοῦ βολταμέτρου δαπανᾶται ἰσχύς: $P' = E'I = 1{,}6 \times 10 = 16$ watt ἐνῷ ἡ ἰσχὺς τῆς γεννητρίας εἶναι: $P = EI = 2 \times 10 = 20$ watt.

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἀπόδοσις εἶναι: $A = P' : P = 16 : 20 = 0{,}80$.

2) Ἂς καλέσωμεν I' καὶ I'' τὰς ἐντάσεις τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀντιστοίχως διὰ τοῦ βολταμέτρου καὶ διὰ τῆς ἀντιστάσεως R. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι: $V = E - rI = 2 - 0{,}01\, I$ ὅπου I εἶναι ἡ νέα ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια. Διὰ τὴν διακλάδωσιν τὴν ἀποτελουμένην ἀπὸ τὴν ἀντίστασιν R καὶ τὸ βολτάμετρον θα ἰσχύουν τότε αἱ σχέσεις: $I = I' + I''$ $\quad V = RI'' = E' + r'I'$ ἢ ἐπειδὴ εἶναι $V = 2 - 0{,}01\, I$ καὶ $R = 1$ ohm λαμβάνομεν:

$$2 - 0{,}01\,(I' + I'') = I'' = 1{,}6 + 0{,}03\, I'$$

$$\text{ἢ} \quad 2 - 0{,}01\,(1{,}6 + 1{,}03\, I') = 1{,}6 + 0{,}03\, I'$$

ἄρα $I' = 9{,}53$ ampère καὶ $I'' = 1{,}6 + 0{,}03\, I' = 1{,}6 + 0{,}29 = 1{,}89$ ampère.

ὥστε $I = 9{,}53 + 1{,}89 = 11{,}4$ ampère.

3) Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις: $V = E - rI = R(I - I') = E' + r'I'$ (1)

εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις I' τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ βολταμέτρου, εἶναι: $I' = \dfrac{E - E'\left(1 + \dfrac{r}{R}\right)}{r + r'\left(1 + \dfrac{r}{R}\right)}$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις I' μηδενίζεται, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος γίνῃ ἴσος μὲ μηδέν, δηλαδὴ ὅταν εἶναι:

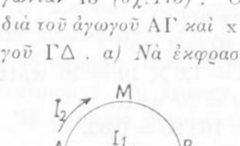
$E = E'\left(1 + \dfrac{r}{R}\right)$ δηλαδὴ ὅταν ἡ ἀντίστασις R γίνῃ: $R = r\dfrac{E'}{E - E'}$

ἤτοι ὅταν εἶναι: $R = 0{,}01 \times \dfrac{1{,}6}{2 - 1{,}6} = 0{,}04$ ohm.

Ὥστε, ὅταν ἡ ἀντίστασις R ἐλαττώνεται ἀπὸ 1 ohm ἕως 0,04 ohm, ἡ ἔντασις I' τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ βολταμέτρου, συνεχῶς ἐλαττώνεται. Καὶ ὅταν ἡ ἀντίστασις R γίνῃ ἴση μὲ 0,04 ohm δὲν διέρχεται διὰ τοῦ βολταμέτρου ρεῖμα. Ἠμποροῦμε νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ βολτάμετρον χωρὶς νὰ προκληθῇ καμμία διατάραξις εἰς τὸ κύκλωμα. Τότε ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ βολταμέτρου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀντηλεκτρεγερτικήν του δύναμιν. Ὥστε διὰ τοῦ βολταμέτρου διέρχεται ρεῦμα μόνον ἐφ' ὅσον εἶναι

$$R > 0{,}04 \text{ ohm}.$$

276.— *Μεταλλικὸν σύρμα ἔχει ἀντίστασιν* 1 ohm *κατὰ μέτρον καὶ ἔχει τὸ σχῆμα περιφερείας κύκλου* O *ἀκτῖνος* 1 m. *Δύο σημεῖα* Γ *καὶ* Δ, *ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα, ἑνώνονται μὲ εὐθύγραμμον σύρμα τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν* 1 ohm *κατὰ μέτρον. Ρεῦμα ἐντάσεως* 1 ampère *φθάνει εἰς τὸ σημεῖον* Γ *καὶ ἐκεῖ διακλαδίζεται εἰς τοὺς τρεῖς ἀγωγοὺς* ΓΜΔ, ΓΟΔ *καὶ* ΓΝΔ.— *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει ἕκαστον τῶν τριῶν ἀγωγῶν.— 2) Τὸ ρεῦμα, ἔχον ἔντασιν* 1 ampère, *φθάνει τώρα εἰς τὸ σημεῖον* A *καὶ ἐξέρχεται ἀπὸ τὸ ἐκ διαμέτρου ἀντίθετον σημεῖον* B, *ἀλλὰ αἱ δύο διάμετροι* AB *καὶ* ΓΔ *σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν* 45° *(σχ. 175)*. *Ὀνομάζομεν* i *τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ ἀγωγοῦ* AΓ *καὶ* x *τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ ἀγωγοῦ* ΓΔ. *α) Νὰ ἐκφρασθοῦν συναρτήσει τοῦ* i *καὶ τοῦ* x *αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα κυκλοφοροῦν ἐντὸς τῶν ἀγωγῶν* AΔ, ΔB *καὶ* ΓB. *β) Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ ἀγωγοὶ* AΓ *καὶ* ΔB *διαρρέονται ἀπὸ ρεύματα τῆς αὐτῆς ἐντάσεως καὶ ὅτι συμβαίνει τὸ ἴδιον εἰς τοὺς ἀγωγοὺς* AΔ *καὶ* ΓB. *γ) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις* x *τοῦ ρεύματος ποὺ διαρρέει τὸν ἀγωγὸν* ΓΟΔ. — *3) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ* x *διὰ μίαν οἱανδήποτε θέσιν τοῦ ἀγωγοῦ* ΓΔ, *προσδιοριζομένην ἀπὸ τὴν γωνίαν* α, *τὴν ὁποίαν σχηματίζουν μεταξύ των οἱ ἀγωγοὶ* AB *καὶ* ΓΔ. *Νὰ ἐφαρμοσθῇ ὁ τύπος, ὁ ὁποῖος θὰ εὑρεθῇ, εἰς τὰς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις:* $\alpha = 0°$, $\alpha = 45°$, $\alpha = 60°$.



Σχ. 174

1) Ὁ ἀγωγὸς ΓΟΔ ἔχει μῆκος 2 m καὶ ἀντίστασιν $R_1 = 2$ ohm. Ἕκαστος δὲ τῶν ἀγωγῶν ΓΜΒ καὶ ΓΝΔ ἔχει μῆκος π μέτρα καὶ ἀντίστασιν $R_2 = \pi$ ohm.

Ἂν καλέσωμεν R τὴν ἀντίστασιν τοῦ συνόλου τῶν ἀγωγῶν, τότε ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}=\frac{\pi+4}{2\pi} \qquad \text{ἄρα} \qquad R=\frac{2\pi}{\pi+4}\ \text{ohm}.$$

Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β εἶναι:

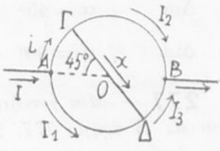
$$V=RI=\frac{2\pi}{\pi+4}\ \text{volt}.$$

Ἑπομένως ἡ ἔντασις I_1 τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν ἀγωγὸν ΓΔ, εἶναι:

$$I_1=\frac{V}{R_1}=\frac{2\pi}{\pi+4}:2=\frac{\pi}{\pi+4}=0{,}44\ \text{ampère}.$$

Ἡ ἔντασις I_2 τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει ἕκαστον τῶν ἀγωγῶν ΓΜΔ καὶ ΓΝΔ, εἶναι: $I_2=(I-I_1):2=(1-0{,}44):2=0{,}28$ ampère.

2) Ἂς ὀνομάσωμεν I_1, I_2, I_3 τὰς ἐντάσεις τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν τοὺς ἀγωγοὺς ΑΔ, ΓΒ καὶ ΔΒ. Τότε ἔχομεν τὰς σχέσεις:



Σχ. 175

εἰς τὸ Α: $I=i+I_1$ ἄρα $I_1=1-i$

εἰς τὸ Γ: $i=x+I_2$ ἄρα $I_2=i-x$

εἰς τὸ Δ: $I_3=I_1+x$ ἄρα $I_3=1-i+x$.

Αἱ τρεῖς εὑρεθεῖσαι σχέσεις μᾶς δίδουν τὰς ζητουμένας ἐντάσεις I_1, I_2 καὶ I_3 συναρτήσει τοῦ i καὶ τοῦ x.

Οἱ δύο ἀγωγοὶ ΑΓ καὶ ΔΒ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀντίστασιν $r=\pi/4$. Ἐπίσης οἱ δύο ἀγωγοὶ ΓΒ καὶ ΑΔ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀντίστασιν $r'=3\pi/4=3r$. Μεταξὺ τῶν ἄκρων Α καὶ Β τῶν κυκλωμάτων ΑΓΒ καὶ ΑΔΒ ὑπάρχει ἡ αὐτὴ διαφορὰ δυναμικοῦ. Ἄρα ἔχομεν:

$$(V_A-V_\Gamma)+(V_\Gamma-V_B)=(V_A-V_\Delta)+(V_\Delta-V_B)$$

$$\text{ἢ} \qquad ri+r'I_2=r'I_1+rI_3.$$

ἄρα $r(i-I_3)=r'(I_1-I_2)$ ἢ $(i-I_3)=3(I_1-I_2)$.

ἐξ ἄλλου ὅμως ἔχομεν: $I=i+I_1=I_2+I_3$.

Ἑπομένως ἔχομεν: $(i-I_3)+(I_1-I_2)=0$ ἢ $4(I_1-I_2)=0$.

Ὥστε εἶναι: $I_1=I_2$ καὶ $i=I_3$.

Ἄρα οἱ ἀγωγοὶ ΑΔ καὶ ΓΒ διαρρέονται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I_1=I_2$, οἱ δὲ ἀγωγοὶ ΑΓ καὶ ΔΒ διαρρέονται ἐπίσης ἀπὸ ρεῦμα τῆς αὐτῆς ἐντάσεως $i=I_3$.

Ἂς ὑπολογίσωμεν τώρα τὴν ἔντασιν x τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν ἀγωγὸν ΓΔ. Ἔχομεν $I=i+I_1$, ἄρα $I_1=I-i$ (1). Ἐπίσης ἔχομεν $i=x+I_2$ ἢ $i=x+I_1$ ἄρα $I_1=i-x$ (2). Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν: $I-i=i-x$. Ὥστε εἶναι:

$$i=\frac{I+x}{2} \quad (3) \qquad \text{καὶ} \qquad I_1=\frac{I-x}{2}. \quad (4)$$

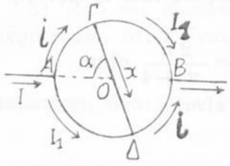
Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν τὴν σχέσιν: $(V_A-V_\Gamma)+(V_\Gamma-V_\Delta)=(V_A-V_\Delta)$.

Ἡ σχέσις αὐτὴ γράφεται: $ri+2x=r'I_1$. Ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν ἀντικαταστήσωμεν τὰς τιμὰς τῶν i καὶ I_1 ἀπὸ τὰς σχέσεις (3) καὶ (4) εὑρίσκομεν:

$$x=\frac{r'-r}{r+r'+4}=\frac{\pi}{2(\pi+4)}=0{,}22\ \text{ampère}.$$

3) Ἔστω α ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζουν μεταξύ των ὁ ἀγωγὸς ΓΔ

και ἡ διάμετρος ΑΒ. Οἱ ἀγωγοὶ ΑΓ καὶ ΔΒ διαρρέονται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως i, οἱ δὲ ἀγωγοὶ ΓΒ καὶ ΑΔ διαρρέονται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I_1. Ἡ ἀντίστασις τῶν ἀγωγῶν ΑΓ καὶ ΔΒ



Σχ. 176

γίνεται: $r = \frac{\pi\,\alpha}{180^0}$, τῶν δὲ ἀγωγῶν ΑΔ καὶ ΓΒ

γίνεται: $r' = \frac{\pi\,(180^0 - \alpha)}{180^0}$.

Ἐπίσης ὅμως ἔχομεν:

$$x = \frac{r' - r}{r + r' + 4} \qquad \text{ἄρα} \qquad x = \left(1 - \frac{\alpha}{90^0}\right) \times \frac{\pi}{\pi + 4}.$$

Διὰ $\alpha = 0^0$ εὑρίσκομεν: $x = \frac{\pi}{\pi + 4}$.

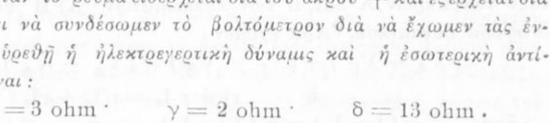
Διὰ $\alpha = 45^0$ εὑρίσκομεν: $x = \frac{\pi}{2(\pi + 4)}$.

Διὰ $\alpha = 90^0$ εὑρίσκομεν: $x = 0$.

277. — *Μία γεννήτρια συνδέεται μὲ 4 ἀγωγοὺς α, β, γ καὶ δ ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 177. Μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς πολὺ εὐαισθήτου βολτομέτρου, ἔχοντος ἀντίστασιν πρακτικῶς ἄπειρον, μετροῦμεν τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων Μ καὶ Ρ, εὑρίσκομεν δὲ ὅτι αὐτὴ εἶναι* $V_1 = 1{,}836$ volt. *Ἔπειτα ἀνταλλάσσομεν τοὺς ἀγωγοὺς β καὶ δ· τὸ βολτόμετρον δεικνύει τότε* $V_2 = 0{,}135$ volt. *Τὰ δύο ἄκρα τοῦ βολτομέτρου φέρουν τὰ διακριτικὰ + καὶ —. Τὸ ὄργανον δὲν δίδει καμμίαν ἔνδειξιν παρὰ μόνον ὅταν τὸ ρεῦμα εἰσέρχεται διὰ τοῦ ἄκρου + καὶ ἐξέρχεται διὰ τοῦ ἄκρου —. Πῶς πρέπει νὰ συνδέσωμεν τὸ βολτόμετρον διὰ νὰ ἔχωμεν τὰς ἐνδείξεις* V_1 *καὶ* V_2; *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς γεννητρίας. Εἶναι:*

$\alpha = 7$ ohm· $\beta = 3$ ohm· $\gamma = 2$ ohm· $\delta = 13$ ohm.

Ἐπειδὴ ἡ ἀντίστασις τοῦ βολτομέτρου θεωρεῖται ἄπειρος, πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι ἡ γέφυρα ΜΡ δὲν διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα. Ἂς καλέσωμεν I_1 καὶ I_2 τὰς ἐντάσεις τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν ἀντιστοίχως τοὺς ἀγωγοὺς ΛΜΝ καὶ ΛΡΝ.



Σχ. 177

Τότε θὰ ἔχωμεν διὰ τὸν κλάδον ΛΜΝ τὰς σχέσεις:

$$V_\Lambda - V_M = 7\,I_1 \qquad \text{καὶ} \qquad V_\Lambda - V_N = (7 + 3)\,I_1 = 10\,I_1$$

$$\text{ἄρα} \qquad V_\Lambda - V_M = 0{,}7\,(V_\Lambda - V_N)\,. \tag{1}$$

Ἐπίσης διὰ τὸν κλάδον ΛΡΝ θὰ ἔχωμεν: $V_\Lambda - V_P = 2\,I_2$

καὶ $V_\Lambda - V_N = (2 + 13)\,I_2 = 15\,I_2$ ἄρα $V_\Lambda - V_P = 2/15\,(V_\Lambda - V_N)$.(2)

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι: $V_\Lambda - V_M > V_\Lambda - V_P$.

Ἡ πτῶσις τοῦ δυναμικοῦ ἀπὸ τὸ Λ εἰς τὸ Μ εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν πτῶσιν δυναμικοῦ ἀπὸ τὸ Λ εἰς τὸ Ρ. Ἑπομένως τὸ δυναμικὸν τοῦ Ρ εἶναι ἀνώτερον ἀπὸ τὸ δυναμικὸν τοῦ Μ, ἤτοι εἶναι : $V_P > V_M$.

Ἄρα τὸ ἄκρον + συνδέεται μὲ τὸ Ρ καὶ τὸ ἄκρον — συνδέεται μὲ τὸ Μ.

Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸν νόμον τοῦ Ohm εἰς τοὺς τέσσαρας ἀγωγούς, εὑρίσκομεν :

$$(\mathrm{I})\quad \left.\begin{array}{l} V_\Lambda - V_M = 7\,I_1 \\ V_\Lambda - V_P = 2\,I_2 \end{array}\right\}\ \text{ἄρα}\ V_P - V_M = 7\,I_1 - 2\,I_2 = 1{,}836 \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} V_M - V_N = 3\,I_1 \\ V_P - V_N = 13\,I_2 \end{array}\right\}\ \text{ἄρα}\ V_P - V_M = 13\,I_2 - 3\,I_1 = 1{,}836. \quad (4)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4) εὑρίσκομεν :

$I_1 = 0{,}324$ ampère · $I_2 = 0{,}216$ ampère · $I = 0.540$ ampère .

Ὅταν ἀνταλλάξωμεν τοὺς ἀγωγοὺς β καὶ δ, εὑρίσκομεν τὰς ἑξῆς σχέσεις :

$V_\Lambda - V_M = 7/20\,(V_\Lambda - V_N)$ καὶ $V_\Lambda - V_P = 2/5\,(V_\Lambda - V_N)$·

ἄρα $V_\Lambda - V_M < V_\Lambda - V_P$ ἤτοι $V_M > V_P$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ ἄκρον + τοῦ βολτομέτρου συνδέεται μὲ τὸ Μ καὶ τὸ ἄκρον — συνδέεται μὲ τὸ Ρ.

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Ohm ἔχομεν :

$$(\mathrm{II})\quad \left.\begin{array}{l} V_\Lambda - V_M = 7\,I_1' \\ V_\Lambda - V_P = 2\,I_2' \end{array}\right\}\ \text{ἄρα}\ V_M - V_P = 2\,I_2' - 7\,I_1' = 0{,}135 \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l} V_M - V_N = 13\,I_1' \\ V_P - V_N = 3\,I_2' \end{array}\right\}\ \text{ἄρα}\ V_M - V_P = 13\,I_1' - 3\,I_2' = 0{,}135. \quad (6)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (5) καὶ (6) εὑρίσκομεν :

$I_1' = 0{,}135$ ampère · $I_2' = 0{,}540$ ampère · $I' = 0{,}675$ ampère .

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (I) καὶ (II) λαμβάνομεν :

$$V_\Lambda - V_N = 7\,I_1 + 3\,I_1 = 10\,I_1 = 3{,}24 \text{ volt}$$

$$V_\Lambda - V_N = 7\,I_1' + 13\,I_1' = 20\,I_1' = 2{,}70 \text{ volt} .$$

Ἐὰν Ε καὶ r εἶναι ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς γεννητρίας, τότε ὁ νόμος τοῦ Ohm, ἐφαρμοζόμενος εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, μᾶς δίδει : $E = Ir + (V_\Lambda - V_N)$ ἢ $E = 0{,}540\,r + 3{,}24$

$E = I'r + (V_\Lambda - V_N)$ ἢ $E = 0{,}675\,r + 2{,}70$·

ἄρα εἶναι : $E = 5{,}40$ volt καὶ $r = 4$ ohm .

278.— *Δύο γεννήτριαι* Γ_1 *καὶ* Γ_2 *ἔχουν ἀντιστοίχους ἠλεκτρεγερτικὰς δυνάμεις* $E_1 = 1{,}08$ volt *καὶ* $E_2 = 1{,}4$ volt. *Συνδέονται κατὰ σειράν, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 178 α. Μία γέφυρα, ἀποτελουμένη ἀπὸ μεταβλητὴν ἀντίστασιν* R *συνδέει τὰ σημεῖα* Α *καὶ* Β. *Ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ τμήματος* $\mathrm{A\Gamma_1B}$ *εἶναι* $R_1 = 2$ ohm *καὶ ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ τμήματος* $\mathrm{A\Gamma_2B}$ *εἶναι* $R_2 = 10$ ohm.— *1) Νὰ ἐξετασθοῦν, συναρτήσει τῆς* R, *αἱ μεταβολαὶ τῆς ἐντάσεως* I *τοῦ ρεύματος ἐντὸς τῆς γεφύρας* ΑΒ *καὶ νὰ προσδιορισθῇ ἡ φορά του.— 2) Δίδεται εἰς τὴν ἀντίστασιν* R *μία σταθερὰ τιμὴ* 0,01 ohm *καὶ ἀντικαθίσταται ἡ γεννήτρια* Γ_2 *διαδοχικῶς μὲ ἄλλας γεννητρίας αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν μὲ τὴν* Γ_2 *ἀλλὰ διαφορετικὰς ἠλεκτρεγερτικὰς δυνάμεις* Ε. *Ὁ ἀρνητικὸς πόλος τῶν γεννητριῶν τούτων συνδέεται* *πάντοτε μὲ τὸ σημεῖον Α. Νὰ ἐξετασθοῦν, συναρτήσει τοῦ Ε, αἱ μεταβολαὶ τῆς ἐντάσεως Ι τοῦ ῥεύματος ἐντὸς τῆς γεφύρας ΑΒ καὶ νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ μεταβολαὶ αὗται.*

1) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ θετικὸς πόλος τῆς $Γ_1$ συνδέεται μὲ τὸ σημεῖον Α καὶ ὁ θετικὸς πόλος τῆς $Γ_2$ συνδέεται μὲ τὸ σημεῖον Β. Ἂς καλέσωμεν I_1 τὴν ἔντασιν τοῦ ῥεύματος τὸ ὁποῖον κυκλοφορεῖ κατὰ τὴν διεύθυνσιν $ΒΓ_1Α$· I_2 τὴν ἔντασιν τοῦ ῥεύματος τὸ ὁποῖον κυκλοφορεῖ κατὰ τὴν φορὰν $ΑΓ_2Β$ καὶ Ι τὴν ἔντασιν τοῦ ῥεύματος τὸ ὁποῖον κυκλοφορεῖ ἐντὸς τῆς γεφύρας ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β. Ἐὰν καλέσωμεν V τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β, τότε θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις :

$I_1 = I + I_2$ (1) $\qquad V = RI = E_1 - R_1 I_1 = R_2 I_2 - E_2.$ (2)

Ἂν θέσωμεν τὰς ἀριθμητικὰς τιμάς, εὑρίσκομεν :

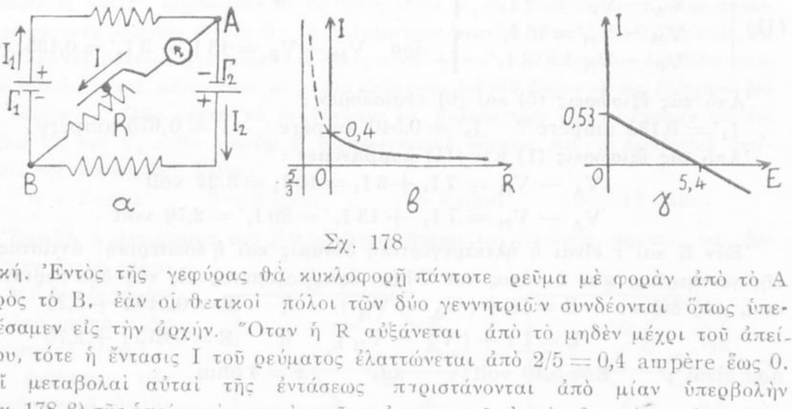
$$V = RI = 1{,}08 - 2\,I_1 = 10\,I_2 - 1{,}4. \quad (3)$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν (3) εὑρίσκομεν : $I_1 = \dfrac{1{,}08 - RI}{2}$ καὶ $I_2 = \dfrac{RI + 1{,}4}{10}$.

Ἂν θέσωμεν τὰς τιμὰς αὐτὰς εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), ἔχομεν :

$$\frac{1{,}08 - RI}{2} = I + \frac{RI + 1{,}4}{10} \quad \text{ἄρα} \quad I = \frac{2}{5 + 3R}.$$

Ἐπειδὴ τὸ R εἶναι θετικόν, συνάγεται ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ Ι εἶναι πάντοτε θε-



Σχ. 178

τική. Ἐντὸς τῆς γεφύρας θὰ κυκλοφορῇ πάντοτε ῥεῦμα μὲ φορὰν ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὸ Β, ἐὰν οἱ θετικοὶ πόλοι τῶν δύο γεννητριῶν συνδέονται ὅπως ὑπεθέσαμεν εἰς τὴν ἀρχήν. Ὅταν ἡ R αὐξάνεται ἀπὸ τὸ μηδὲν μέχρι τοῦ ἀπείρου, τότε ἡ ἔντασις Ι τοῦ ῥεύματος ἐλαττώνεται ἀπὸ 2/5 = 0,4 ampère ἕως 0. Αἱ μεταβολαὶ αὗται τῆς ἐντάσεως παριστάνονται ἀπὸ μίαν ὑπερβολὴν (σχ. 178 β), τῆς ὁποίας τὸ συνεχὲς τμῆμα ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰς θετικὰς τιμὰς τοῦ R.

2) Ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, ὁ ἀρνητικὸς πόλος τῆς γεννητρίας, ἡ ὁποία τίθεται εἰς τὴν θέσιν τῆς $Γ_2$, συνδέεται μὲ τὸ σημεῖον Α. Ἐπομένως αἱ εὑρεθεῖσαι εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν ἐξισώσεις ἰσχύουν καὶ διὰ τὴν παροῦσαν περίπτωσιν. Ἐὰν εἰς τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) θέσωμεν R = 0,01 ohm καὶ ἀντὶ E_2 θέσωμεν Ε, λαμβάνομεν τὰς δύο σχέσεις :

$I_1 = I + I_2$ (1′) $\qquad V = 0{,}01\,I = 1{,}08 - 2\,I_1 = 10\,I_2 - E.$ (2′)

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν ἔχομεν :

$$I_1 = \frac{1{,}08 - 0{,}01\,I}{2} \quad \text{καὶ} \quad I_2 = \frac{0{,}01\,I + E}{10},$$

ἤτοι ἡ ἐξίσωσις (1′) γράφεται :

$$\frac{1{,}08 - 0{,}01\,I}{2} = I + \frac{0{,}01\,I + E}{10}. \qquad \text{ἄρα} \qquad I = \frac{5{,}4 - E}{10{,}06}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἐφ' ὅσον τὸ Ε εἶναι μικρότερον ἀπὸ 5,4 volt, τὸ Ι εἶναι θετικόν, δηλαδὴ τὸ ρεῦμα κυκλοφορεῖ ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β. Ὅταν γίνῃ $E = 5{,}4$ volt, ἡ ἔντασις Ι τοῦ ρεύματος μηδενίζεται καὶ ὅταν γίνῃ $E > 5{,}4$ volt, τὸ ρεῦμα ἀλλάσει φορὰν καὶ κυκλοφορεῖ ἀπὸ τὸ Β πρὸς τὸ Α. Εἰς τὸ σχῆμα 178 γ αἱ μεταβολαὶ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος παριστάνονται ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τοὺς δύο ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα $I = 0{,}53$ ampère καὶ $E = 5{,}4$ volt.

279.— *Εἰς τὴν διάταξιν τοῦ σχήματος 179 εἶναι συνδεδεμέναι κατὰ σειρὰν δύο συστοιχίαι συσσωρευτῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀσήμαντον ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν καὶ ἠλεκτρεγερτικὰς δυνάμεις E_1 καὶ E_2. Εἰς τὸ κύκλωμα ὑπάρχει ἐπίσης μία ἀντίστασις ΑΔΒ, ἔχουσα τιμὴν $R = 3$ ohm καὶ μία διακλάδωσις ΓΔ, ἀντιστάσεως $r = 0{,}87$ ohm, περιλαμβάνουσα καὶ γαλβανόμετρον Ζ. Ὅλαι αἱ ἄλλαι ἀντιστάσεις ἐκτὸς τῆς R καὶ τῆς r εἶναι ἀσήμαντοι. — 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ E_2 ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ E_1 εἶναι ἴση μὲ 6 volt καὶ ὅτι δι' ἕνα σημεῖον Δ, τοιοῦτον ὥστε ἡ ἀντίστασις τοῦ ΑΔ νὰ εἶναι $R_1 = 1$ ohm, τὸ γαλβανόμετρον δὲν διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα.— 2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ φορὰ καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τοῦ διαρρέοντος τὸ γαλβανόμετρον, ὅταν εἶναι $E_1 = 6$ volt, $E_2 = 12$ volt καὶ $R_1 = 0{,}9$ ohm.*

1) Ἂς καλέσωμεν R_1 καὶ R_2 τὰς ἀντιστάσεις τῶν τμημάτων ΑΔ καὶ ΔΒ. Ἀφοῦ τὸ γαλβανόμετρον δὲν διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα, ἠμποροῦμε νὰ θεωρήσωμεν τὴν διακλάδωσιν ΓΔ ὡς μὴ ὑπάρχουσαν. Τότε τὸ ὑπόλοιπον κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως Ι. Εφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Ohm λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν: $E_1 + E_2 = (R_1 + R_2)\,I$. (1)

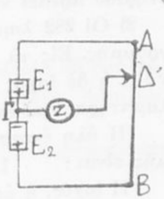
Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ διακλάδωσις ΓΔ δὲν διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα, συνάγεται ὅτι μεταξὺ τῶν σημείων Γ καὶ Δ δὲν ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ.

Ἑπομένως εἶναι: $V_B - V_\Delta = E_2 = R_2 I$. (2)

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἔχομεν:

$$\frac{E_1 + E_2}{E_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1}{R_2} \qquad \text{καὶ} \qquad E_2 = 12 \text{ volt}.$$

2) Ὅταν τὸ σημεῖον Δ μετακινηθῇ εἰς ἕνα σημεῖον Δ', πλησιέστερα πρὸς τὸ Α, τότε τὸ δυναμικὸν τοῦ σημείου τούτου γίνεται μικρότερον ἀπὸ τὸ δυναμικὸν τοῦ σημείου Γ. Τὸ γαλβανόμετρον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως Ι', τὸ ὁποῖον ἔχει φορὰν ἐκ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ'. Ἂς ὀνομάσωμεν I_1 καὶ I_2 τὰς ἐντάσεις τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν ἀντιστοίχως τὰς γεννητρίας E_1 καὶ E_2.



Τότε ἔχομεν τὴν σχέσιν: $I_1 = I_2 + I'$. (3)

Σχ. 179

Ἐξ ἄλλου ἂν ἐξισώσωμεν τὰς τρεῖς τιμὰς τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ $V_\Gamma - V_\Delta{}'$, εὑρίσκομεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις: $rI' = E_1 - R_1{}' I_1 = R_2{}' I_2 - E_2$

ἤτοι $0{,}87\, I' = 6 - 0{,}9\, I_1 = 2{,}1\, I_2 - 12$.

Ἀπὸ τὰς τελευταίας σχέσεις εὑρίσκομεν:

$$I_1 = \frac{6 - 0,87\,I'}{0,9} \quad \text{καὶ} \quad I_2 = \frac{12 + 0,87\,I'}{2\,1}.$$

Ἂν θέσωμεν τὰς τιμὰς αὐτὰς εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) εὑρίσκομεν:

$$\frac{6 - 0,87\,I'}{0,9} = \frac{12 + 0,87\,I'}{2,1} + I'.$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τοῦ διαρρέοντος τὸ γαλβανόμετρον εἶναι: $I' = 0,4$ ampère.

280.— *Ἕνα ὑδροηλεκτρικὸν ἐργοστάσιον ἐκμεταλλεύεται ἕνα ρεῦμα ὕδατος τὸ ὁποῖον πίπτει ἀπὸ ὕψος 180 m καὶ ἔχει παροχὴν 60 m³ τὴν ὥραν. Μία γεννήτρια συνεχοῦς ρεύματος παράγει ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται ἀποκλειστικὰ διὰ τὸν ἠλεκτροφωτισμὸν ἑνὸς ἐργαστηρίου τὸ ὁποῖον ἀπέχει 300 m ἀπὸ τὸ ὑδροηλεκτρικὸν ἐργοστάσιον. Τὸ ἐργαστήριον χρησιμοποιεῖ λαμπτῆρας τῶν 75 watt. Ἡ ὅλη ἀπόδοσις τοῦ ὑδροηλεκτρικοῦ ἐργοστασίου εἶναι 0,8 καὶ ἡ ἀπώλεια ἐπὶ τῆς γραμμῆς εἶναι 10 %.—1) Νὰ εὑρεθῇ πόσοι λαμπτῆρες ἠμπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθοῦν εἰς τὸ ἐργαστήριον. — 2) Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ τομὴ τῶν συρμάτων τῆς γραμμῆς, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ σύρμα εἶναι χάλκινον καὶ ὅτι οἱ λαμπτῆρες λειτουργοῦν ὑπὸ τάσιν 120 volt; Εἰδικὴ ἀντίστασις $\rho = 1,6 \times 10^{-6}$ ohm — cm. — 3) Πόση εἶναι ἡ τάσις μὲ τὴν ὁποίαν τὸ ρεῦμα φεύγει ἀπὸ τὸ ἐργοστάσιον;*

1) Ἡ παροχὴ τοῦ ρεύματος τοῦ ὕδατος κατὰ δευτερόλεπτον εἶναι: 100/6 λίτρα. Ἑπομένως ἡ ἰσχὺς τῆς ὑδατοπτώσεως εἶναι:

$$P = 100/6 \times 180 = 3\,000 \text{ kgm/sec}.$$

Ἡ γεννήτρια μετατρέπει εἰς ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν τὰ 0,8 τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τῆς ὑδατοπτώσεως. Ἄρα ἡ ἰσχὺς τῆς παραγομένης ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας εἶναι: $P_1 = 0,8\,P = 0,8 \times 3\,000 \times 9,81 = 23\,544$ watt.

Τὰ 10 % αὐτῆς τῆς ἰσχύος χάνονται ἐπὶ τῆς γραμμῆς ὑπὸ μορφὴν θερμότητος. Ἑπομένως ἡ ἰσχὺς τῆς ἐνεργείας, ἡ ὁποία φθάνει εἰς τὸ ἐργαστήριον, εἶναι: $P_2 = 0,9\,P_1 = 0,9 \times 23\,544 = 21\,190$ watt.

Ἐπειδὴ οἱ χρησιμοποιούμενοι λαμπτῆρες ἔχουν ἕκαστος ἐξ αὐτῶν ἰσχὺν καταναλώσεως 75 watt, συνάγεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν λαμπτήρων τοῦ ἐργαστηρίου πρέπει νὰ εἶναι: $\nu = P_2 : 75 = 21\,190 : 75 = 282$ λαμπτῆρες.

2) Οἱ 282 λαμπτῆρες παρεμβάλλονται κατὰ διακλάδωσιν εἰς τὸ κύκλωμα τῆς γραμμῆς. Εἰς τὰ ἄκρα κάθε λαμπτῆρος ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ $V = 120$ volt, ἡ δὲ ἰσχύς του εἶναι $p = 75$ watt. Ἄρα τὸ ρεῦμα τὸ διαρρέον καθένα λαμπτῆρα ἔχει ἔντασιν: $i = p : V = 75 : 120$ ampère.

Ἡ ὅλη ἔντασις I τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα τῆς γραμμῆς εἶναι: $I = 282\,i = P_2 : V = 21\,190 : 120 = 176,6$ ampère.

Ἡ ἰσχύς, ἡ ὁποία χάνεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἐπὶ τῆς γραμμῆς, εἶναι:

$$P_3 = 0,1\,P_1 = 0,1 \times 23\,544 = 2\,354,4 \text{ watt}.$$

Ἡ ἀντίστασις R τῆς γραμμῆς εὑρίσκεται τώρα ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$P_3 = RI^2 \quad \text{ἄρα:} \quad R = \frac{P_3}{I^2} = \frac{2\,354,4}{176,6^2} = 0,0755 \text{ ohm}.$$

Τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς εἶναι: $l = 6 \times 10^4$ cm. Ἐὰν σ εἶναι ἡ τομὴ τοῦ σύρματος τῆς γραμμῆς, τότε εἶναι: $\sigma = \frac{\rho l}{R} = \frac{1,6 \times 6 \times 10^4}{0,0775 \times 10^6} = 1,27$ cm².

3) Ἐὰν V′ εἶναι ἡ τάσις μὲ τὴν ὁποίαν φεύγει τὸ ρεῦμα ἀπὸ τὴν γεννήτριαν, τότε σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Ohm ἡ πτῶσις V″ τῆς τάσεως κατὰ μῆκος τῆς γραμμῆς εἶναι: $V'' = RI = 0{,}0755 \times 176{,}6 = 13{,}3$ volt,
καὶ ἐπομένως ἡ ζητουμένη τάσις V′ εἶναι:

$$V' = V + V'' = 13{,}3 + 120 = 133{,}3 \text{ volt}.$$

281. — *Μία ἠλεκτρικὴ ἐγκατάστασις τροφοδοτεῖται ἀπὸ γεννήτριαν, ἔχουσαν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* 110 volt. *Ἡ ἐγκατάστασις αὐτὴ περιλαμβάνει: α) 75 λαμπτῆρας ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει ἰσχὺν καταναλώσεως* 50 watt· *οἱ λαμπτῆρες οὗτοι ἀνάβουν συγχρόνως· β) ἕνα κινητῆρα ὁ ὁποῖος χρησιμεύει διὰ τὴν λειτουργίαν μιᾶς ἀντλίας· αὕτη ἠμπορεῖ ἐντὸς μιᾶς ὥρας νὰ γεμίσῃ μὲ ὕδωρ μίαν δεξαμενὴν ἔχουσαν χωρητικότητα* $10\ m^3$ *καὶ εὑρισκομένην* 12 m *ὑψηλότερα ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος τοῦ φρέατος. Ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος καὶ τῆς ἀντλίας εἶναι 60 %. Χάρις εἰς μίαν συστοιχίαν συσσωρευτῶν ὁ κινητὴρ καὶ ἡ ἀντλία ἠμποροῦν νὰ λειτουργοῦν ἐπὶ 4 ὥρας μετὰ τὴν διακοπὴν τῆς λειτουργίας τῆς γεννητρίας. Νὰ εὑρεθῇ: 1) Πόσην ἰσχὺν πρέπει νὰ ἔχῃ ὁ κινητήρ, ὁ ὁποῖος ἐξασφαλίζει τὴν λειτουργίαν τῆς γεννητρίας, ἂν ἡ ἀπόδοσις αὐτῆς εἶναι 90 %. — 2) Πόσην παροχὴν θὰ ἔχῃ ἡ γεννήτρια. 3) Πόση εἶναι ἡ χωρητικότης τῆς συστοιχίας τῶν συσσωρευτῶν, ἂν ἡ ἀπόδοσις αὐτῶν κατὰ τὴν ἐκκένωσιν εἶναι 80 %.*

1) Οἱ 75 λαμπτῆρες καταναλίσκουν ἰσχύν: $p_1 = 75 \times 50 = 3\,750$ watt.

Εἰς 1 ὥραν ἡ ἀντλία ἐκτελεῖ ἔργον: $W = 10\,000 \times 12 = 120\,000$ kgm·
ἄρα ἡ ἰσχύς της εἶναι: $p_2 = 120\,000 : 3\,600 = 33{,}33$ kgm/sec $= 327$ watt.

Ἐπειδὴ ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος καὶ τῆς ἀντλίας εἶναι 60 %, συνάγεται ὅτι εἰς τὸν ἠλεκτρικὸν κινητῆρα πρέπει νὰ προσφέρεται ἰσχύς:

$$p = 327 : 0{,}60 = 545 \text{ watt}.$$

Ἡ ὅλη λοιπὸν ἰσχὺς τῆς γεννητρίας πρέπει νὰ εἶναι:

$$P = p_1 + p = 3\,750 + 545 = 4\,295 \text{ watt}.$$

Ἡ ἀπόδοσις τῆς γεννητρίας εἶναι 90 %· ἄρα ὁ κινητήρ, διὰ τοῦ ὁποίου ἐξασφαλίζεται ἡ λειτουργία της, πρέπει νὰ ἔχῃ ἰσχύν:

$$P' = 4\,295 : 0{,}90 = 4\,772 \text{ watt} = 4{,}8 \text{ kW}.$$

2) Τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I = P : E = 4\,295 : 110 = 39 \text{ ampère}.$$

Ἄρα ἡ γεννήτρια παρέχει κατὰ δευτερόλεπτον εἰς τὸ κύκλωμα 39 coulomb.

3) Διὰ τὴν λειτουργίαν τοῦ κινητῆρος τῆς ἀντλίας ἐπὶ 4 ὥρας ἀπαιτεῖται ποσότης ἠλεκτρισμοῦ: $Q = 39 \times 4$ ὡριαῖα - ampère.

Ἐπειδὴ ἡ ἀπόδοσις τῆς συστοιχίας εἶναι 80 % ἕπεται ὅτι ἡ χωρητικότης τῆς συστοιχίας πρέπει νὰ εἶναι τουλάχιστον ἴση μέ:

$$Q' = \frac{39 \times 4 \times 100}{80} = 195 \text{ ὡριαῖα - ampère}.$$

282. — *Εἰς ἕνα στοιχεῖον τοῦ* Daniell *τὸ ἠλεκτρόδιον τοῦ ψευδαργύρου βυθίζεται ἐντὸς διαλύματος θειϊκοῦ ψευδαργύρου, τὸ δὲ ἠλεκτρόδιον τοῦ χαλκοῦ βυθίζεται ἐντὸς διαλύματος θειϊκοῦ χαλκοῦ. Τὰ δύο ὑγρὰ χωρίζονται μεταξύ των μὲ πορῶδες διάφραγμα. Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ στοιχείου εἶναι* E, *ἡ δὲ ἐσωτερικὴ ἀντίστασίς του εἶναι* r. — *1) Συνδέομεν τοὺς δύο πόλους τοῦ στοιχείου μὲ* *σύρμα τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν* R . *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις* I *τοῦ ρεύματος καὶ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ* V *εἰς τοὺς πόλους τοῦ στοιχείου. — 2) Νὰ ὑπολογισθῇ πόση ἐνέργεια δαπανᾶται ἐπὶ τοῦ σύρματος. — 3) Πόσον βάρος ψευδαργύρου καταναλίσκεται διὰ τὴν λειτουργίαν τοῦ στοιχείου ἐπὶ μίαν ὥραν ; — 4) Ὁ ἐξωτερικὸς ἀγωγὸς ἀφαιρεῖται καὶ τὸ στοιχεῖον συνδέεται μὲ τοὺς πόλους μιᾶς γεννητρίας ἡ ὁποία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* E_1 . *Τὸ στοιχεῖον καὶ ἡ γεννήτρια συνδέονται κατ' ἀντίθεσιν, ἡ δὲ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐξωτερικῶς τοῦ στοιχείου, ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν* R . *Ποία εἶναι ἡ νέα ἔντασις τοῦ ρεύματος ; Τί συμβαίνει τότε ἐντὸς τοῦ στοιχείου ; Πόσον βάρος ψευδαργύρου καὶ χαλκοῦ ἀποτίθεται ἐντὸς μιᾶς ὥρας ;*

Ἐφαρμογή : r = 2 ohm , R = 7 ohm , E = 1,08 volt , E_1 = 9,98 volt *ἀτομικαὶ μᾶζαι : τοῦ* Zn 65,4 *καὶ τοῦ* Cu 63,6 .

1) Ἡ ἀντίστασις ὅλου τοῦ κυκλώματος εἶναι $R + r = 7 + 2 = 9$ ohm, ἡ δὲ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ στοιχείου εἶναι E = 1,08 volt. Ἄρα ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι :

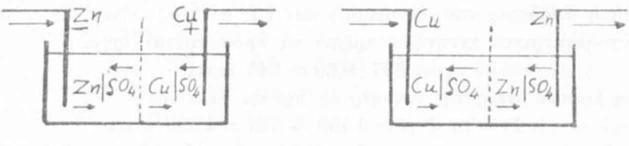
$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{1{,}08}{9} = 0{,}12 \text{ ampère.}$$

Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τοῦ στοιχείου εἶναι :

$$V = RI = 7 \times 0{,}12 = 0{,}84 \text{ volt.}$$

2) Ἐπὶ τοῦ σύρματος δαπανᾶται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος κατὰ δευτερόλεπτον ἐνέργεια : $W = VI = 0{,}84 \times 0{,}12 = 0{,}10$ joule.

3) Τὸ ρεῦμα, τὸ ὁποῖον παρέχει τὸ στοιχεῖον εἰς τὸ κύκλωμα, προκαλεῖ τὴν



α Σχ. 180 β

ἠλεκτρόλυσιν τῶν θειϊκῶν ἀλάτων τοῦ ψευδαργύρου καὶ τοῦ χαλκοῦ (σχ. 180α). Οὕτω σχηματίζεται θειϊκὸς ψευδάργυρος εἰς βάρος τοῦ ἠλεκτροδίου τοῦ ψευδαργύρου, ἐνῷ ἐπὶ τοῦ ἠλεκτροδίου τοῦ χαλκοῦ ἀποτίθεται χαλκός. Ἐντὸς μιᾶς ὥρας τὸ στοιχεῖον παρέχει εἰς τὸ κύκλωμα : $0{,}12 \times 3\,600 = 432$ coulomb. Ἀλλὰ διὰ τὴν παραγωγὴν 96 500 coulomb καταναλίσκονται $65{,}4 : 2 = 32{,}7$ gr ψευδαργύρου. Ἄρα ἐντὸς μιᾶς ὥρας καταναλίσκεται ἐντὸς τοῦ στοιχείου μᾶζα ψευδαργύρου :

$$\frac{32{,}7 \times 432}{96\,500} = 0{,}15 \text{ gr (περίπου).}$$

4) Ἡ γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E_1 > E$. Ἄρα εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ ρεῦμα ἔχει διεύθυνσιν ἀντίθετον ἐκείνης τὴν ὁποίαν εἶχε τὸ ρεῦμα εἰς τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις. Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι τώρα :

$$I_1 = \frac{E_1 - E}{R + r} = \frac{9{,}98 - 1{,}08}{9} = \frac{8{,}9}{9} = 0{,}99 \text{ ampère.}$$

Τὸ ρεῦμα διέρχεται διὰ τοῦ στοιχείου διευθυνόμενον ἀπὸ τὸν χαλκὸν πρὸς τὸν ψευδάργυρον καὶ προκαλεῖ πάλιν ἠλεκτρόλυσιν τῶν δύο θειϊκῶν ἀλάτων (σχ.180 β). Τώρα ὅμως σχηματίζεται θειϊκὸς χαλκὸς εἰς βάρος τοῦ ἠλεκτροδίου τοῦ χαλκοῦ καὶ ἀποτίθεται ψευδάργυρος ἐπὶ τοῦ ἠλεκτροδίου τοῦ ψευδαργύρου. Ἐντὸς μιᾶς ὥρας διέρχεται διὰ τῆς στήλης ποσότης ἠλεκτρισμοῦ:

$$0{,}99 \times 3\,600 = 3\,560 \text{ coulomb.}$$

Ἄρα καταναλίσκεται μᾶζα χαλκοῦ: $\dfrac{31{,}8 \times 3\,560}{96\,500} = 11{,}7$ gr

ἀποτίθεται μᾶζα ψευδαργύρου: $\dfrac{32{,}7 \times 3\,560}{96\,500} = 12$ gr.

283.— *Ἕνας δέκτης ἀσυρμάτου τηλεγράφου ἀποτελεῖται ἀπὸ 5 λυχνίας αἱ ὁποῖαι διατάσσονται κατὰ διακλάδωσιν. Κάθε μία ἀπὸ τὰς λυχνίας λειτουργεῖ μὲ ρεῦμα* 0,06 ampère *καὶ ὑπὸ τάσιν* 4 volt. — *1) Τροφοδοτοῦμεν τὸν δέκτην μὲ τὸ ρεῦμα ἠλεκτροφωτισμοῦ τῆς πόλεως τὸ ὁποῖον ἔχει τάσιν* 220 volt. *Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις τοῦ ροοστάτου τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ παρεμβάλωμεν κατὰ σειρὰν εἰς τὸ κύκλωμα τοῦ δέκτου καὶ ἡ δαπάνη καθ' ὥραν λειτουργίας τοῦ δέκτου. — 2) Ὁ ἴδιος δέκτης τροφοδοτεῖται μὲ τὸ ρεῦμα* 10 *ὁμοίων στοιχείων. Καθένα στοιχεῖον ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* 1 volt *καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* 4/3 ohm. *Νὰ εὑρεθῇ ποῖον τρόπον συνδέσεως τῶν στοιχείων πρέπει νὰ προτιμήσωμεν καὶ πόσος ψευδάργυρος καταναλίσκεται κατὰ τὴν λειτουργίαν τοῦ δέκτου ἐπὶ μίαν ὥραν. Τιμὴ τοῦ ρεύματος:* 500 *δραχμαὶ κατὰ* kWh. *Ἀτομικὴ μᾶζα τοῦ* Zn: 65.

1) Διὰ νὰ τροφοδοτήσωμεν τὰς 5 λυχνίας, αἱ ὁποῖαι συνδέονται παραλλήλως, πρέπει ἡ ὅλη ἔντασις τοῦ ρεύματος νὰ εἶναι: $I = 0{,}06 \times 5 = 0{,}3$ ampère. Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι $V = 220$ volt, ἕπεται ὅτι ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος πρέπει νὰ εἶναι: $R = \dfrac{V}{I} = \dfrac{220}{0{,}3} = 733$ ohm.

Ἐπειδὴ δὲ καθεμία λυχνία καταναλίσκει ρεῦμα ἐντάσεως $I_1 = 0{,}06$ ampère ὑπὸ τάσιν $V_1 = 4$ volt, συνάγεται ὅτι ἡ ἀντίστασις τῆς λυχνίας εἶναι:

$R_1 = \dfrac{V_1}{I_1} = \dfrac{4}{0{,}06} = \dfrac{200}{3}$ ohm. Ἑπομένως αἱ 5 λυχνίαι τῆς διακλαδώσεως ἔχουν ἀντίστασιν: $R' = \dfrac{R_1}{5} = \dfrac{40}{3} = 13$ ohm (περίπου). Πρέπει λοιπὸν νὰ παρεμβάλωμεν ἕνα ροοστάτην ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ ἀντίστασιν:

$$R_2 = R - R' = 733 - 13 = 720 \text{ ohm.}$$

Ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς εἶναι: $P = VI = 220 \times 0{,}3 = 66$ watt.

Καθ' ὥραν καταναλίσκεται ἐνέργεια 0,066 kWh, ἡ ὁποία ἀξίζει:

$$500 \times 0{,}066 = 33 \text{ δραχμάς.}$$

2) Τὰ 10 στοιχεῖα ἠμποροῦν νὰ συνδεθοῦν κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους:

α) Συνδέομεν αὐτὰ κατὰ σειράν, ὁπότε ἡ σχηματιζομένη στήλη ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 10$ volt καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν:

$r = 10 \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{40}{3}$ ohm. Ἡ ἔντασις λοιπὸν τοῦ ρεύματος θὰ εἶναι:

$$I = \frac{E}{R' + r} = \frac{10}{\dfrac{40}{3} + \dfrac{40}{3}} = \frac{30}{80} = 0{,}375 \text{ ampère.}$$

β) Σχηματίζομεν δύο μερικὰς στήλας, οὕτως ὥστε καθεμία ἀπὸ αὐτὰς νὰ περιλαμβάνῃ 5 στοιχεῖα. Ἡ ὅλη στήλη ἔχει τότε ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 5$ volt καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = \frac{5}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$ ohm. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν ρεῦμα ἐντάσεως: $I = \frac{E}{R + r} = \frac{5}{\frac{40}{3} + \frac{10}{3}} = \frac{15}{50} = 0{,}3$ ampère.

γ) Σχηματίζομεν 5 μερικὰς στήλας ὥστε καθεμία ἀπὸ αὐτὰς νὰ περιλαμβάνῃ 2 στοιχεῖα. Τότε εἶναι $E =$ volt· αὐτὴ ἡ ἠλεκτεγερτικὴ δύναμις εἶναι ἀνεπαρκής.

δ) Συνδέομεν τὰ 10 στοιχεῖα παραλλήλως. Καὶ τότε ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς στήλης $E = 1$ volt εἶναι ἀνεπαρκής.

Ἄρα θὰ προτιμήσωμεν τὸν δεύτερον τρόπον συνδέσεως τῶν 10 στοιχείων, διότι τότε ἔχομεν τὴν κατάλληλον ἔντασιν. Ἀπὸ κάθε στοιχεῖον τῆς στήλης διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως $0{,}3 : 2 = 0{,}15$ ampère. Ἄρα εἰς μίαν ὥραν διέρχονται διὰ τοῦ στοιχείου $0{,}15 \times 3\,600 = 540$ coulomb διὰ τὰ ὁποῖα καταναλίσκονται: $\frac{32{,}5 \times 540}{96\,500} = 0{,}18$ gr ψευδαργύρου. Ἐντὸς τῶν 10 στοιχείων καταναλίσκονται $0{,}18 \times 10 = 1{,}8$ gr ψευδαργύρου.

284 — *Μεταξὺ τῶν δύο πόλων A καὶ B ἑνὸς συσσωρευτοῦ, ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως $E = 2{,}1$ volt παρεμβάλλομεν κατὰ σειράν: α) ἕνα ἀμπερόμετρον βαθμολογημένον εἰς χιλιοστὰ τοῦ ampère καὶ β) ἕνα βολτάμετρον τὸ ὁποῖον περιέχει διάλυμα θειϊκοῦ χαλκοῦ, τὰ δὲ ἠλεκτρόδιά του εἶναι ἀπὸ χαλκόν. Δύο λαμπτῆρες διὰ πυρακτώσεως παρεμβάλλονται κατὰ διακλάδωσιν μεταξὺ τῶν πόλων A καὶ B. Τότε τὸ ἀμπερόμετρον σημειώνει τὴν ἔνδειξιν 30. Ἐὰν οἱ ἴδιοι λαμπτῆρες παρεμβληθοῦν κατὰ σειρὰν μεταξὺ τῶν A καὶ B, τότε τὸ ἀμπερόμετρον σημειώνει τὴν ἔνδειξιν 21. Ἐξ ἄλλου εἶναι γνωστὸν ὅτι ἕκαστος τῶν λαμπτήρων τούτων ἔχει ἰσχὺν 60 watt καὶ λειτουργεῖ κανονικῶς ὑπὸ τάσιν 120 volt. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντίστασις ἑκάστου λαμπτῆρος εἰς τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις: 1) ὅταν ὁ λαμπτὴρ δὲν φωτοβολῇ καὶ 2) ὅταν ὁ λαμπτὴρ λειτουργῇ κανονικῶς.*

1) Τὸ βαλτάμετρον πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς μία βοηθητικὴ ἀντίστασις. Ὅταν οἱ λαμπτῆρες παρεμβάλλωνται εἰς τὸ κύκλωμα κατὰ διακλάδωσιν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι $I = 0{,}030$ ampère. Ἡ ὅλη λοιπὸν ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$R = E : I = 2{,}1 : 0{,}030 = 70 \text{ ohm}.$$

Ὅταν οἱ λαμπτῆρες παρεμβάλλωνται κατὰ σειράν, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι: $I_1 = 0{,}021$ ampère καὶ ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$R_1 = E : I_1 = 2{,}1 : 0{,}021 = 100 \text{ ohm}.$$

Ἔστω r ἡ ἀντίστασις ἑνὸς λαμπτῆρος καὶ r_1 ἡ ἀντίστασις τοῦ ὑπολοίπου κυκλώματος. Ἂν συνδέσωμεν τοὺς δύο λαμπτῆρας κατὰ διακλάδωσιν, ἔχομεν:

$$R = \frac{r}{2} + r_1 = 70 \text{ ohm}. \qquad (1)$$

Ἂν τοὺς συνδέσωμεν κατὰ σειράν, ἔχομεν: $R_1 = 2r + r_1 = 100$ ohm. (2)

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν: $r = 20$ ohm.

2) Διὰ νὰ φωτοβολῇ ὁ λαμπτήρ, πρέπει νὰ τὸν τροφοδοτήσωμεν μὲ ρεῦμα

τάσεως 120 volt. Τότε ἔχει ἰσχὺν καταναλώσεως $P = 60$ watt, ἤτοι διέρχεται δι' αὐτοῦ ρεῦμα ἐντάσεως: $I' = P : V = 60 : 120 = 0{,}5$ ampère.

Ἑπομένως ἡ ἀντίστασις τοῦ λαμπτῆρος εἶναι τότε:

$$r' = \frac{V}{I} = \frac{120}{0{,}5} = 240 \text{ ohm} \quad \text{ἤτοι} \quad r' = 12\,r.$$

285.— *Μία ἐγκατάστασις περιλαμβάνει τρεῖς ἠλεκτρικοὺς λαμπτῆρας* $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ *συνδεδεμένους ἐν παραλλήλῳ. Ἡ τάσις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον τροφοδοτεῖ αὐτοὺς εἶναι* 120 volt. *Οἱ λαμπτῆρες ἔχουν ἀντιστοίχως ἰσχὺν καταναλώσεως* $P_1 = 60$ watt, $P_2 = 45$ watt, $P_3 = 15$ watt. — *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὅλη ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον τροφοδοτεῖ τὴν ἐγκατάστασιν καὶ ἡ ὅλη ἀντίστασις τῆς ἐγκαταστάσεως, ὅταν οἱ λαμπτῆρες φωτοβολοῦν.—2) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀντιστάσεις* R_1, R_2, R_3 *ἑκάστου τῶν λαμπτήρων. — 3) Ἡ τάσις τοῦ ρεύματος γίνεται* 110 volt. *Ἂν δεχθῶμεν ὅτι αἱ ἀντιστάσεις δὲν μετεβλήθησαν, νὰ εὑρεθῇ ἡ νέα ἰσχὺς* P_1', P_2' P_3' *ἡ ὁποία καταναλίσκεται ἀπὸ καθένα λαμπτῆρα.—4) Τὸ σύρμα τῶν λαμπτήρων εἶναι ἀπὸ βολφράμιον, ἡ δὲ ἀντίστασις αὐτοῦ αὐξάνει ἀναλόγως πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς θερμοκρασίας. Ὑπὸ τάσιν* 120 volt. *ἡ θερμοκρασία τοῦ σύρματος εἶναι* $2\,600^0$, *ἡ δὲ κατανάλωσις τοῦ λαμπτῆρος* Λ_1 *εἶναι* 60 watt. *Ὑπὸ τάσιν* 10 volt *ἡ θερμοκρασία τοῦ σύρματος εἶναι* 10^0 *καὶ ἡ κατανάλωσις τοῦ ἰδίου λαμπτῆρος εἶναι* 5 watt. *Ἀπὸ τὰ δεδομένα αὐτὰ νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις δίδει τὴν μεταβολὴν τῆς εἰδικῆς ἀντιστάσεως τοῦ βολφραμίου συναρτήσει τῆς θερμοκρασίας.*

1) Ἡ ὅλη ἰσχὺς καταναλώσεως εἶναι: $P = 60 + 45 + 15 = 120$ watt.

Ἑπομένως ἡ ὅλη ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = P : V = 120 : 120 = 1 \text{ ampère}.$$

Ἂν R εἶναι ἡ ὅλη ἀντίστασις τῆς ἐγκαταστάσεως, τότε ἀπὸ τὴν σχέσιν: $P = RI^2$ εὑρίσκομεν: $R = P : I^2 = 120 : 1 = 120$ ohm.

2) Ἐὰν I_1, I_2, I_3 εἶναι αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα διαρρέουν τοὺς τρεῖς λαμπτῆρας, τότε ἔχομεν τὰς σχέσεις: $V = R_1I_1 = R_2I_2 = R_3I_3$.

Ἄρα ἡ ἀντίστασις ἑκάστου λαμπτῆρος εἶναι:

$$R_1 = \frac{120^2}{60} = 240 \text{ ohm}\cdot\ R_2 = \frac{120^2}{45} = 320 \text{ ohm}\cdot\ R_3 = \frac{120^2}{15} = 960 \text{ ohm}.$$

3) Ἡ σχέσις $P = \frac{V^2}{R}$ δεικνύει ὅτι ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς ἐντὸς μιᾶς ἀντιστάσεως R εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς τάσεως τοῦ ρεύματος. Ἐὰν λοιπὸν ἡ τάσις γίνῃ 110 volt, τότε ἡ νέα ἰσχὺς καταναλώσεως ἐντὸς ἑκάστου λαμπτῆρος γίνεται: $P_1' = 60 \times \frac{110^2}{120^2} = 60 \times 0{,}84 = 50{,}4$ watt

$$P_2' = 45 \times 0{,}84 = 37{,}8 \text{ watt} \qquad P_3' = 15 \times 0{,}84 = 12{,}6 \text{ watt}.$$

4) Εὕρομεν ἀνωτέρω ὅτι εἰς $2\,600^0$ ἡ ἀντίστασις τοῦ λαμπτῆρος Λ_1 εἶναι $R_1 = 240$ ohm. Εἰς 10^0 ἡ ἀντίστασις τοῦ ἰδίου λαμπτῆρος εἶναι:

$$r_1 = 10^2 : 5 = 20 \text{ ohm}.$$

Ἐὰν δὲν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν διαστολὴν τοῦ σύρματος, τότε ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ σύρματος μεταβάλλεται ὅπως καὶ ἡ ἀντίστασις αὐτοῦ. Ἂν α εἶναι ὁ συντελεστὴς μεταβολῆς τῆς ἀντιστάσεως, τότε διὰ τὴν μεταβολὴν τῆς θερμοκρασίας κατὰ $2\,600^0 - 10^0 = 2\,590^0$, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν :

$$R_1 = r_1\,(1 + \alpha\, 2\,590).$$

Ἄρα εἶναι : $$\alpha = \frac{2\,590\, r_1}{R_1 - r_1} = \frac{2\,590 \times 20}{220} = 0{,}00425.$$

286 — *Μία στήλη ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* E = 6 volt. *Οἱ πόλοι της συνδέονται μὲ κύκλωμα τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει ἕνα ἀμπερόμετρον, μὲ ἀσήμαντον ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν καὶ μίαν ἀντίστασιν* 5 ohm. *Τὸ ἀμπερόμετρον δεικνύει τότε* 1 ampère.— *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς στήλης. — 2) Ἀφήνομεν εἰς τὴν θέσιν της τὴν ἀντίστασιν τῶν* 5 ohm *καὶ μεταξὺ τῶν δύο ἄκρων της παρεμβάλλομεν κατὰ διακλάδωσιν ἕνα λαμπτῆρα ὁ ὁποῖος ἔχει ἀντίστασιν* 25 ohm. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὅλη ἔντασις τοῦ ρεύματος ὡς καὶ αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὸν λαμπτῆρα καὶ τὴν διακλάδωσιν αὐτοῦ.— 3) Ἀντικαθιστῶμεν τὸν λαμπτῆρα μὲ ἕνα βολτάμετρον τὸ ὁποῖον περιέχει διάλυμα ὀξέος. Τὰ ἠλεκτρόδιά του δὲν προσβάλλονται ἀπὸ τὸ ὀξύ. Ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* 1 ohm *καὶ ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* E′ = 1,5 volt. *Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὰ διάφορα μέρη τοῦ κυκλώματος.*

1) Ἐπειδὴ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι $I = 1$ ampère καὶ $E = 6$ volt, συνάγεται ὅτι ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι $E : I = 6 : 1 = 6$ ohm. Ἄρα ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς στήλης εἶναι : $r = 6 - 5 = 1$ ohm.

2) Ἔστω R ἡ ἀντίστασις ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὰς δύο ἀντιστάσεις τῶν 5 καὶ τῶν 25 ohm τῆς διακλαδώσεως. Τότε ἔχομεν: $R = \frac{25}{6}$ ohm.

Ἡ ὅλη ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι : $$I = \frac{E}{R + r} = \frac{36}{31} = 1{,}16 \text{ ampère}.$$

Ἐπειδὴ ἡ ἀντίστασις τοῦ λαμπτῆρος εἶναι 5 φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἀντίστασιν τῆς διακλαδώσεώς του, διὰ τοῦτο τὸ ρεῦμα, ποὺ διαρρέει τὸν λαμπτῆρα, ἔχει ἔντασιν : $$I_1 = \frac{I}{6} = \frac{1{,}16}{6} = 0{,}19 \text{ ampère}.$$

Ἡ δὲ διακλάδωσις διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I_2 = \frac{5\,I}{6} = \frac{5 \times 1{,}16}{6} = 0{,}97 \text{ ampere}.$$

3) Ἔστω I′ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ βολταμέτρου καὶ I′′ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῆς ἀντιστάσεως $r'' = 5$ ohm. Ἔστω ὅτι r′ εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ βολταμέτρου.
Η διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν ἄκρων τῆς διακλαδώσεως εἶναι :

$$V = E' + r''\, I' = r''\, I'' \quad \text{ἢ} \quad V = 1{,}5 + I' = 5\, I''. \qquad (1)$$

Ἐὰν I_3 εἶναι ἡ ὅλη ἔντασις τοῦ ρεύματος, τότε εἶναι: $I_3 = I' + I''$. (2)

Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ V μεταξὺ τῶν ἄκρων τῆς διακλαδώσεως, μετρουμένη εἰς τὸ τμῆμα ἐκεῖνο τοῦ κυκλώματος τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει τὴν γεννήτριαν, εἶναι : $$V = E - r\, I_3 = 6 - I_3. \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (3) λαμβάνομεν : $1{,}5 + I' = 5\, I'' = 6 - I_3$. (4)

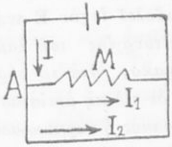
Ἂν λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (4) εὑρίσκομεν :

$$I_3 = 2{,}6 \text{ ampère} \qquad I' = 1{,}9 \text{ ampère} \qquad I'' = 0{,}7 \text{ ampère}.$$

287.—*1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις* Ε *καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις* r *μιᾶς συστοιχίας συσσωρευτῶν, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ συστοιχία παρέχει ῥεῦμα ἐντάσεως* 2 ampère, *ὅταν ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις εἶναι* 3 ohm.—*2) Οἱ δύο πόλοι τῆς συστοιχίας συνδέονται μὲ τὴν ἀντίστασιν τῶν* 3 ohm *ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ σύρμα μήκους* 5 m. *Ἐπὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ ἀγωγοῦ λαμβάνομεν δύο σημεῖα* Α *καὶ* Β *μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται μῆκος τοῦ ἐξωτερικοῦ ἀγωγοῦ ἴσον μὲ* 2 m. *Τὰ δύο σημεῖα* Α *καὶ* Β *συνδέονται μεταξύ των καὶ μὲ ἕνα ἄλλο σύρμα* ΑΜΒ *τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ προηγούμενον καὶ ἔχει μῆκος* 1 m. *Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἐντάσεις τῶν ῥευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὰ διάφορα τμήματα τοῦ κυκλώματος. — 3) Ὁ ἀγωγὸς* ΑΜΒ *καταργεῖται καὶ κατὰ σειρὰν μὲ τὴν ἀντίστασιν τῶν* 3 ohm *παρεμβάλλεται κινητήρ. Ὅταν ὁ κινητὴρ δὲν στρέφεται, ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος εἶναι* 4,5 volt. *Ὅταν ὅμως στρέφεται καὶ παράγει ἔργον, ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος εἶναι* 2 ampère. *Νὰ εὑρεθῇ εἰς* watt *καὶ ἀτμοΐππους ἡ ἰσχὺς τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ κινητὴρ καὶ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν πόλων του, ὅταν στρέφεται*

1) Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἔχομεν τὴν σχέσιν: $E = 2(9 + r)$ εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἔχομεν: $E = 5(3 + r)$. Ἄρα ἔχομεν: $2(9 + r) = 5(3 + r)$ ἤτοι $r = 1$ ohm· ἑπομένως εἶναι: $E = 20$ volt.

2) Ἀφοῦ τὰ 5 m τοῦ σύρματος ἔχουν ἀντίστασιν 3 ohm, ἕπεται ὅτι τὸ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β τμῆμα τοῦ σύρματος ἔχει ἀντίστασιν $R_1 = \frac{3}{5} \times 2 = 1{,}2$ ohm καὶ ἡ γέφυρα ΑΜΒ ἔχει ἀντίστασιν $R_2 = \frac{3}{5} \times 1 = 0{,}6$ ohm. Ἡ μεταξὺ τῶν Α καὶ Β διακλάδωσις ἔχει ἰσοδύναμον ἀντίστασιν R τὴν ὁποίαν ὑπολογίζομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν:



Σχ. 181

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{1{,}2} + \frac{1}{0{,}6} = \frac{3}{1{,}2} \quad \text{ἤτοι εἶναι} \quad R = 0{,}4 \text{ ohm}.$$

Τὸ ὑπόλοιπον σύρμα ἔχει ἀντίστασιν: $3 - 1{,}2 = 1{,}8$ ohm.
Ἡ ὅλη λοιπὸν ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι: $0{,}4 + 1{,}8 + 1 = 3{,}2$ ohm.

Ἡ ὅλη ἔντασις τοῦ ῥεύματος εἶναι: $I = \frac{E}{3{,}2} = \frac{20}{3{,}2} = 6{,}25$ volt.

Ἂν I_1 καὶ I_2 εἶναι ἀντιστοίχως αἱ ἐντάσεις τῶν ῥευμάτων, τὰ ὁποῖα διαρρέουν τοὺς ἀγωγοὺς ΑΒ καὶ ΑΜΒ, τότε ἀπὸ τὴν σχέσιν: $I_1R_1 = I_2R_2$ εὑρίσκομεν $\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{0{,}6}{1{,}2} = \frac{1}{2}$. Ἄρα $I_2 = 2\,I_1$.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $I = I_1 + I_2 = 3\,I_1$ εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

$$I_1 = \frac{I}{3} = \frac{6.25}{3} = 2{,}08 \text{ ampère} \quad I_2 = \frac{6{,}25}{3} \times 2 = 4{,}17 \text{ ampère}.$$

3) Ὅταν ὁ κινητὴρ δὲν στρέφεται, τότε ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι: $R' = \frac{E}{I'} = \frac{20}{4{,}5} = \frac{40}{9}$ ohm καὶ ἑπομένως ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις r' τοῦ κινητῆρος εἶναι: $r' = \frac{40}{9} - 4 = \frac{4}{9}$ ohm.

῞Οταν ὁ κινητὴρ στρέφεται, τότε οὗτος παρεμβάλλει εἰς τὸ κύκλωμα ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E' καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος γίνεται $I'' = 2$ ampère. Ἀπὸ τὴν σχέσιν: $E - E' = I'' R'$ εὑρίσκομεν:

$$E' = E - I'' R' = 20 - \left(2 \times \frac{40}{9}\right) = \frac{100}{9} \text{ volt.}$$

Ὁ κινητὴρ ἀναπτύσσει ἰσχύν:

$$p = E' I'' = \frac{100}{9} \times 2 = 22{,}2 \text{ watt} \quad \text{ἢ} \quad p = \frac{22{,}2}{736} = 0{,}03 \text{ ἀτμοΐπποι.}$$

Μεταξὺ τῶν πόλων του ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ:

$$V = E' + r' I'' = \frac{100}{9} + \left(\frac{4}{9} \times 2\right) = \frac{108}{9} = 12 \text{ volt.}$$

288 — *Ἠλεκτρικὸς λαμπτὴρ διὰ πυρακτώσεως ἔχει ἰσχὺν καταναλώσεως* W watt *καὶ λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν* V volt.— *1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος l καὶ ἡ ἀκτὶς α τοῦ εὐθυγράμμου κυλινδρικοῦ σύρματος τὸ ὁποῖον θὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ λαμπτῆρος τούτου, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ σύρματος εἶναι ρ, ὅτι ἡ λαμβανομένη ὑπὸ τοῦ λαμπτῆρος ἰσχὺς ἀκτινοβολεῖται ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σύρματος καὶ ὅτι κάθε τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον αὐτῆς ἀκτινοβολεῖ ἰσχὺν* E watt.— *2) Τὸ προηγούμενον σύρμα, ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω συνθήκας λειτουργίας τοῦ λαμπτῆρος, ἠμπορεῖ νὰ εἶναι σύρμα βολφραμίου ἢ νῆμα ἄνθρακος. Διὰ τὸ σύρμα βολφραμίου ἡ θερμοκρασία τῆς λειτουργίας εἶναι* 2 600° C, *ἡ δὲ εἰδικὴ ἀντίστασις εἶναι* $\rho = 100 \times 10^{-6}$ ohm — cm, *ἐνῷ διὰ τὸ νῆμα ἄνθρακος ἡ θερμοκρασία εἶναι* 1 800° C *καὶ ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις εἶναι* $\rho = 3\,000 \times 10^{-6}$ ohm — cm. *῎Αν δεχθῶμεν ὅτι ἡ ἀκτινοβολουμένη ἰσχὺς εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν τετάρτην δύναμιν τῆς ἀπολύτου θερμοκρασίας τοῦ σύρματος, νὰ εὑρεθῇ ἀφ' ἑνὸς μὲν ὁ λόγος τῶν μηκῶν καὶ ἀφ' ἑτέρου ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων τῶν δύο συρμάτων.*

1) Ὁ λαμπτὴρ λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν V volt, τὸ δὲ σύρμα του ἔχει ἀντίστασιν:

$$R = \rho \frac{l}{\pi \alpha^2}.$$

Ἡ ἰσχὺς καταναλώσεως τοῦ λαμπτῆρος εἶναι:

$$W = VI = \frac{V^2}{R} \quad \text{ἢ} \quad W = \frac{V^2 \pi \alpha^2}{\rho l}. \tag{1}$$

Αὐτὴ ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς ἀκτινοβολεῖται ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν $2\pi\alpha l$ τοῦ σύρματος. ῎Αρα ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$W = E \times 2\pi\alpha l. \tag{2}$$

῎Αν λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$l = \left(\frac{W V^2}{4\pi E^2 \rho}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (3) \qquad \alpha = \left(\frac{W^2 \rho}{2\pi^2 E V^2}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (4)$$

2) Καὶ διὰ τὰ δύο σύρματα αἱ συνθῆκαι λειτουργίας, ἤτοι αἱ τιμαὶ τῶν V, I, W, R, εἶναι αἱ αὐταί. Ἀντιθέτως αἱ τιμαὶ τῶν E, ρ, l, α εἶναι διάφοροι διὰ τὰ δύο σύρματα. ῞Ας χαρακτηρίσωμεν μὲ τοὺς δείκτας 1 καὶ 2 ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν αὐτῶν ποσῶν διὰ τὸ σύρμα τοῦ βολφραμίου καὶ τοῦ ἄνθρακος. Τότε ἔχομεν τὰς σχέσεις:

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = \left(\frac{2\,600 + 273}{1\,800 + 273}\right)^4 = \left(\frac{2\,873}{2\,073}\right)^4 = 3{,}6 \cdot \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{100}{3\,000} = \frac{1}{30} \cdot$$

Διὰ τὸ σύρμα τοῦ βολφραμίου καὶ τὸ νῆμα τοῦ ἄνθρακος ἡ ἐξίσωσις (3) δίδει:
$$l_1 = \left(\frac{W V^2}{4 \pi E_1^2 \rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad l_2 = \left(\frac{W V^2}{4 \pi E_2^2 \rho_2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

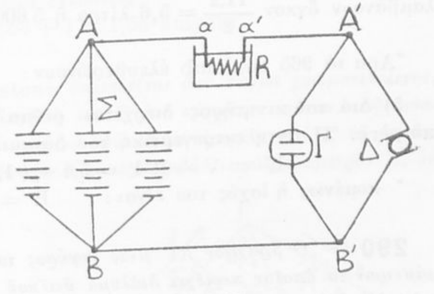
Ἄρα ὁ λόγος τῶν μηκῶν τῶν δύο αὐτῶν συρμάτων εἶναι:
$$\frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{E_2^2}{E_1^2} \times \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{30}{3{,}6^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{30}{13}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2{,}3} = 1{,}32 .$$

Ἐπίσης ἐφαρμόζοντες τὴν ἐξίσωσιν (4) εὑρίσκομεν:
$$\alpha_1 = \left(\frac{W^2 \rho_1}{2 \pi^2 E_1 V^2}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \alpha_2 = \left(\frac{W^2 \rho_2}{2 \pi^2 E_2 V^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Ὥστε ὁ ζητούμενος λόγος τῶν ἀκτίνων τῶν συρμάτων εἶναι:
$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \left(\frac{E_2}{E_1} \times \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3{,}6 \times 30}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{108}} = \frac{1}{4{,}8} = 0{,}21.$$

Ἡ διάμετρος τοῦ σύρματος τοῦ βολφραμίου εἶναι πέντε φορὰς μικροτέρα ἀπὸ τὴν διάμετρον τοῦ νήματος τοῦ ἄνθρακος, ἐνῷ τὸ μῆκος τοῦ σύρματος τοῦ βολφραμίου εἶναι ὀλίγον μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ νήματος τοῦ ἄνθρακος.

289. — *Μία στήλη Σ ἀποτελεῖται ἀπὸ 12 ὅμοια στοιχεῖα ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 2 volt καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,3 ohm. Τὰ 12 στοιχεῖα σχηματίζουν 3 σειρὰς καὶ καθεμία ἀπὸ αὐτὰς περιλαμβάνει 4 στοιχεῖα. Τὸ κύκλωμα τῆς στήλης περιλαμβάνει μίαν ἀντίστασιν R καὶ δύο κλάδους μεταξὺ τῶν σημείων A′ καὶ B′. Ὁ κλάδος A′ΓB′ περιλαμβάνει ἕνα βολτάμετρον τὸ ὁποῖον περιέχει διάλυμα ὀξέος, ὁ δὲ ἄλλος κλάδος A′ΔB′ περιλαμβάνει ἕνα μικρὸν κινητῆρα Δ. Ἡ ἀντίστασις R εἶναι 0,25 ohm. — 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις καὶ ἡ ἀντίστασις τῆς στήλης Σ.— 2) Ἡ ἀντίστασις R εἶναι βυθισμένη ἐντὸς 400 gr πετρελαίου τὸ ὁποῖον ἔχει εἰδικὴν θερμότητα 0,5 cal/gr. Ἐντὸς 4 λεπτῶν 10 δευτερολέπτων ἡ θερμοκρασία τοῦ πετρελαίου ὑψώνεται κατὰ 1,2°. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν ἀντίστασιν R;—3) Οἱ ἀγωγοὶ Aα, α′A′ καὶ BB′ ἔχουν ἀσήμαντον ἀντίστασιν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων A′ καὶ B′.— 4) Τὸ βολτάμετρον Γ ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 1,6 volt, ἡ δὲ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κλάδου A′ Γ B′ (μετὰ τοῦ βολταμέτρου) εἶναι 3,8 ohm. Πόσος ὄγκος ὀξυγόνου (μετρημένος ὑπὸ τὰς κανονικὰς συνθήκας) ἐλευθερώνεται ἐντὸς 16 λεπτῶν 5 δευτερολέπτων;— 5) Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος Δ εἶναι R′ = 1,2 ohm, ἡ δὲ ἀντίστασις τῶν ἀγωγῶν A′Δ καὶ B′Δ εἶναι ἀσήμαντος. Πόση εἶναι ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις καὶ ἡ ἰσχὺς τοῦ μικροῦ κινητῆρος;*



Σχ. 182

1) Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς στήλης Σ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν μιᾶς σειρᾶς, δηλαδὴ εἶναι : $E = 8$ volt. Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις μιᾶς σειρᾶς εἶναι $0{,}3 \times 4 = 1{,}2$ ohm. Ἄρα ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς στήλης Σ εἶναι : $r = \frac{1{,}2}{3} = 0{,}4$ ohm.

2) Διὰ νὰ ὑψωθῇ κατὰ $1{,}2^0$ ἡ θερμοκρασία τῶν 400 gr πετρελαίου ἀπαιτεῖται ποσότης θερμότητος : $Q = 0{,}5 \times 400 \times 1{,}2 = 240$ cal ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν $W = 240 \times 4{,}18 = 1\,000$ joule.

Ἡ ἐνέργεια αὐτὴ παρέχεται ἐντὸς χρόνου $t = 250$ sec. Ἄρα ἡ ἰσχὺς τῆς παρεχομένης ἐνεργείας εἶναι : $P = 1\,000 : 250 = 4$ watt.

Ἡ ἰσχὺς αὐτὴ παρέχεται ἐντὸς τῆς ἀντιστάσεως $R = 0{,}25$ ohm ἀπὸ ἕνα ρεῦμα ἐντάσεως I, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$P = RI^2 \cdot \quad \text{ἄρα} \quad I^2 = \frac{P}{R} = \frac{4}{0{,}25} = 16 \quad \text{ἤτοι} \quad I = 4 \text{ ampère.}$$

3) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων A′ καὶ B′ εἶναι :

$$V = E - (R + r)\,I = 8 - (0{,}65 \times 4) = 5{,}4 \text{ volt.}$$

4) Ἀφοῦ τὸ βολτάμετρον ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E' = 1{,}6$ volt καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r' = 3{,}8$ ohm, ἕπεται ὅτι διέρχεται διὰ τοῦ βολταμέτρου ρεῦμα ἐντάσεως : $I' = \frac{V - E'}{r'} = \frac{5{,}4 - 1{,}6}{3{,}8} = 1$ ampère.

Ἐντὸς χρόνου $t' = 965$ sec διέρχονται διὰ τοῦ βολταμέτρου 965 coulomb. Ἀλλὰ 96 500 coulomb ἐλευθερώνουν $16/2 = 8$ gr ὀξυγόνου τὰ ὁποῖα καταλαμβάνουν ὄγκον $\frac{11{,}2}{2} = 5{,}6$ λίτρα ἢ 5 600 cm^3.

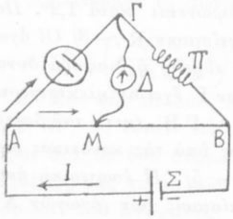
Ἄρα τὰ 965 coulomb ἐλευθερώνουν : $\frac{5\,600 \times 965}{96\,500} = 56\ cm^3$ ὀξυγόνου.

5) Διὰ τοῦ κινητῆρος διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως $I'' = I - I' = 4 - 1 = 3$ ampère. Ἡ ἀντηλεκτρεγερτική του δύναμις E″ εἶναι :

$$E'' = V - R'I'' = 5{,}4 - (1{,}2 \times 3) = 1{,}8 \text{ volt.}$$

Ἑπομένως ἡ ἰσχύς του εἶναι : $P' = E''I'' = 1{,}8 \times 3 = 5{,}4$ watt.

290.— *Ὁ βραχίων* ΑΓ *μιᾶς γεφύρας τοῦ* Wheatstone *ἀποτελεῖται ἀπὸ βολτάμετρον τὸ ὁποῖον περιέχει διάλυμα θειϊκοῦ χαλκοῦ καὶ ἔχει ἠλεκτρόδια ἀπὸ χαλκόν. Ὁ δεύτερος βραχίων* ΓΒ *ἀποτελεῖται ἀπὸ πηνίον* Π *ἀντιστάσεως* 10 ohm. *Ὁ τρίτος καὶ ὁ τέταρτος βραχίων ἀποτελοῦν ἕνα εὐθύγραμμον ὁμογενὲς σύρμα* AB *τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος* 60 cm *καὶ ἀντίστασιν* 8 ohm. *Ἡ πηγὴ τοῦ ρεύματος συνδέεται μὲ τὰ σημεῖα* A *καὶ* B. *Τὸ γαλβανόμετρον* Δ *δεικνύει μηδέν, ὅταν ὁ δρομεὺς* M *εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν* 20 cm *ἀπὸ τὸ σημεῖον* A.— *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ βολταμέτρου.— 2) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα κυκλοφοροῦν ἐντὸς τῶν βραχιόνων τῆς γεφύρας καὶ ἐντὸς τῆς γεννητρίας, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἐντὸς 30 λεπτῶν τὸ βάρος τῆς καθόδου τοῦ βολ-*



Σχ. 183

ταμέτρου αὐξάνεται κατὰ 0,315 gr. Ὁ χαλκός ἔχει σθένος 2 καὶ ἀτομικὴν μᾶζαν 64. Ὅταν διέλθουν διὰ τοῦ βολταμέτρου* 96 540 coulomb, *ἀποτίθενται ἐπὶ τῆς καθόδου* 64/2 gr *χαλκοῦ.*

1) Ἂς ὀνομάσωμεν R_1 καὶ R_2 τὰς ἀντιστάσεις τῶν ἀγωγῶν ΑΜ καὶ ΜΒ ὅταν τὸ γαλβανόμετρον δεικνύῃ μηδέν. Ἐὰν r εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ βολταμέτρου, τότε θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν: $\frac{r}{10} = \frac{R_1}{R_2}$. Ἐπειδὴ τὸ σύρμα εἶναι ὁμογενές, αἱ ἀντιστάσεις R_1 καὶ R_2 εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ μήκη ΑΜ καὶ ΜΒ. Ἄρα $\frac{r}{10} = \frac{AM}{MB} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$ καὶ $r = 5$ ohm.

2) Ἐντὸς 30 λεπτῶν, δηλαδὴ 1 800 sec, ἀποτίθενται εἰς τὴν κάθοδον 0,315 gr χαλκοῦ. Ἄρα διὰ τοῦ βολταμέτρου διῆλθον: $\frac{96\,540 \times 0.315}{32} = 960$ coulomb.

Ἡ ἔντασις λοιπὸν I τοῦ ρεύματος ποὺ διέρχεται διὰ τοῦ βολταμέτρου εἶναι:

$$I = \frac{960}{1\,800} = 0{,}53 \text{ ampère}.$$

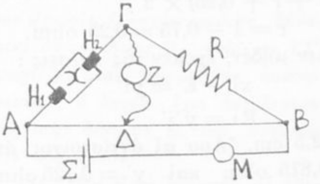
Ὁ κλάδος ΑΓΒ ἔχει ἀντίστασιν $R = 5 + 10 = 15$ ohm, ἡ δὲ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β εἶναι: $V = RI = 15 \times 0{,}53 = 8$ volt (περίπου). Ἑπομένως τὸ σύρμα ΑΜΒ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I' = \frac{V}{R'} = \frac{8}{8} = 1 \text{ ampère}.$$

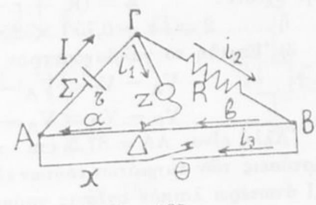
Ἡ γεννήτρια διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I'' = I + I' = 0{,}53 + 1 = 1{,}53 \text{ ampère}.$$

291.— *Μιὰ γέφυρα τοῦ* Wheatstone *ἀποτελεῖται ἀπὸ σύρμα χρωμονικελίνης, μήκους* 1 m *καὶ τομῆς* 1 mm². *Τὰ ἄκρα* Α *καὶ* Β *τοῦ σύρματος τούτου συνδέονται ἀφ' ἑνὸς μὲ τὴν στήλην* Σ *καὶ ἀφ' ἑτέρου μὲ δύο ἀντιστάσεις* x *καὶ* R *αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον* Γ. *Ἡ γέφυρα* ΓΔ *περιλαμβάνει γαλβανόμετρον* Ζ, *τὸ*



Σχ. 184



Σχ. 185

δὲ σημεῖον Δ εἶναι ἕνα μεταβλητὸν σημεῖον τοῦ σύρματος ΑΒ. *Εἰς τὸ τμῆμα* ΑΣΒ *τοῦ κυκλώματος ὑπάρχει καὶ ἀμπερόμετρον* Μ.

1) Ἡ ἀντίστασις x *ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν στήλην διαλύματος θειϊκοῦ χαλκοῦ, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς ἠλεκτρόδια* H_1 *καὶ* H_2 *ἐκ χαλκοῦ. Ἡ ἀντίστασις* R *εἶναι ἴση μὲ* 0,75 ohm. *Ὅταν τὸ γαλβανόμετρον* Ζ *δεικνύῃ μηδέν, ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου* Δ *ἀπὸ τὸ* Α *εἶναι* ΑΔ = 25 cm. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντίστασις* x.

2) Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς στήλης Σ *εἶναι* E = 2 volt, *ἡ δὲ εἰδικὴ* *ἀντίστασις τοῦ σύρματος* AB *εἶναι* $\rho = 100/10^6$ ohm – cm. *Ὅταν τὸ γαλβανόμετρον* Z *δὲν διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα, τὸ ἀμπερόμετρον* M *σημειώνει ἔντασιν ρεύματος* $I = 2$ ampère. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις* r *τῆς στήλης, ἂν ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ ἀμπερομέτρου εἶναι* $r' = 0{,}25$ ohm.

3) Ἀντικαθιστῶμεν τὰ ἐκ χαλκοῦ ἠλεκτρόδια τῆς ἀντιστάσεως x *μὲ ἠλεκτρόδια ἐκ λευκοχρύσου, χωρὶς ὅμως νὰ μεταβάλωμεν τὴν ἀντίστασιν τοῦ ὀργάνου. Ὅταν τώρα τὸ γαλβανόμετρον δεικνύῃ μηδέν, ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου* Δ *ἀπὸ τὸ* A *εἶναι* $A\Delta = 87{,}5$ cm. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις* E' *τοῦ βολταμέτρου καὶ ἡ νέα ἔνδειξις τοῦ ἀμπερομέτρου* M.

4) Ἀφαιροῦμεν τὴν ὑγρὰν ἀντίστασιν x *καὶ τὴν ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸν κλάδον* AΓ *μὲ τὴν στήλην* Σ. *(σχ. 185). Ἐπίσης ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ κύκλωμα τὸ ἀμπερόμετρον* M *καὶ προσθέτομεν διακόπτην* Θ. *Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ* A *πρέπει νὰ εἶναι τὸ σημεῖον* Δ *διὰ νὰ δεικνύῃ τὸ γαλβανόμετρον* Z *τὴν αὐτὴν ἔνδειξιν καὶ ὅταν κλείωμεν καὶ ὅταν ἀνοίγωμεν τὸν διακόπτην* Θ.

1) Ἂς καλέσωμεν y καὶ y' τὰς ἀντιστάσεις τῶν τμημάτων AΔ καὶ ΔB (σχ. 184), i τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος εἰς τὸν κλάδον AΓB καὶ i' τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος εἰς τὸν κλάδον AΔB. Ἐπειδὴ τὰ ἠλεκτρόδια H_1 καὶ H_2 εἶναι ἀπὸ τὸ μέταλλον, τὸ ὁποῖον ὑπάρχει εἰς τὸν ἠλεκτρολύτην, διὰ τοῦτο τὸ βολτάμετρον δὲν ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν. Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ἔχουν τὸ αὐτὸ δυναμικόν· ἄρα ἔχομεν:

$$\left.\begin{aligned} V_A - V_\Gamma &= V_A - V_\Delta \quad \text{ἢ} \quad xi = yi' \\ V_\Gamma - V_B &= V_\Delta - V_B \quad \text{ἢ} \quad Ri = y'i' \end{aligned}\right| \quad \text{ἄρα} \quad \frac{x}{R} = \frac{y}{y'}.$$

Ἡ ἀντίστασις λοιπὸν τοῦ βολταμέτρου εἶναι:

$$x = R \cdot \frac{y}{y'} = R \cdot \frac{A\Delta}{B\Delta} = 0{,}75 \times \frac{25}{75} = 0{,}25 \text{ ohm}.$$

2) Τὸ σύρμα AΔB ἔχει ἀντίστασιν: $\rho \dfrac{l}{\sigma} = \dfrac{100}{10^6} \times \dfrac{100}{0{,}01} = 1$ ohm.

Οἱ δύο βραχίονες AΓB καὶ AΔB ἔχουν ἰσοδύναμον ἀντίστασιν $R' = 0{,}5$ ohm. Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Ohm εἰς τὸ κύκλωμα ΣABMΣ λαμβάνομεν τὴν σχέσιν: $E = (R' + r + r')I = (0{,}5 + r + 0{,}25) \times 2$

ἢ $2 = (r + 0{,}75) \times 2$ · ἄρα $r = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$ ohm.

3) Ἐπειδὴ τὸ γαλβανόμετρον δεικνύει πάλιν μηδέν, ἔχομεν τὰς σχέσεις:

$$V_A - V_\Gamma = V_A - V_\Delta \quad \text{ἢ} \quad xi + E' = yi'$$
$$V_\Gamma - V_B = V_\Delta - V_B \quad \text{ἢ} \quad Ri = y'i'.$$

Ἀλλὰ εἶναι $A\Delta = 87{,}5$ cm καὶ $\Delta B = 12{,}5$ cm. Ἄρα αἱ ἀντίστοιχοι ἀντιστάσεις τῶν τμημάτων τούτων εἶναι: $y = 0{,}875$ ohm καὶ $y' = 0{,}125$ ohm. Αἱ ἀνωτέρω λοιπὸν σχέσεις γράφονται:

$$0{,}25\,i + E' = 0{,}875\,i' \quad \text{ἢ} \quad i + 4E' = 3{,}5\,i' \qquad (1)$$
$$0{,}75\,i = 0{,}125\,i' \quad \text{ἢ} \quad 6\,i = i'. \qquad (2)$$

Εἰς τὸ κύκλωμα AΔBMΣA ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$E - (r + r')(i + i') = i' \times 1 \quad \text{ἢ} \quad 2 - (0{,}25 + 0{,}25)(i + i') = i'$$
$$\text{καὶ} \quad 4 - i = 3\,i'. \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1), (2) καὶ (3) εὑρίσκομεν:

$i = 0{,}21$ ampère· $i' = 1{,}26$ ampère· $E' = 1{,}05$ volt.

Ἡ νέα ἔνδειξις τοῦ ἀμπερομέτρου εἶναι:

$$I_1 = i + i' = 0{,}21 + 1{,}26 = 1{,}47 \text{ ampère}.$$

4) Ἔστω x ἡ ἀντίστασις τοῦ κλάδου ΑΘΒ καὶ r_1 ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ γαλβανομέτρου Ζ.

Ἂς καλέσωμεν Rα καὶ Rβ τὰς ἀντιστάσεις τῶν τμημάτων ΔΑ καὶ ΒΔ. Διὰ τὰς ἐντάσεις τῶν ρευμάτων λαμβάνομεν τὰς ἑξῆς σχέσεις:

$$I = i_1 + i_2 \cdot \quad i_2 = \beta + i_3 \cdot \quad \alpha = i_1 + \beta .$$

Εἰς τὸ κύκλωμα ΑΣΓΖΔΑ ἔχομεν: $E - I r = i_1 . r_1 + \alpha . R\alpha .$ (6)

Εἰς τὸ κύκλωμα ΓΒΔΓ ἔχομεν: $i_1 . r_1 = i_2 . R + \beta . R\beta .$ (7)

Ἡ ἐξίσωσις (6) γράφεται: $E - (i_1 + i_2) r = i_1 . r_1 + (i_1 + \beta) R\alpha .$ (8)

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (7) εὑρίσκομεν: $i_2 = \dfrac{i_1 . r_1 - \beta . R\beta}{R} .$

Ἂν θέσωμεν αὐτὴν τὴν τιμὴν τοῦ i_2 εἰς τὴν ἐξίσωσιν (8), λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$E - i_1 \left[r + \frac{r}{R} r_1 + r_1 + R\alpha \right] + \left(\frac{r}{R} R\beta - R\alpha \right) \beta = 0 . \qquad (9)$$

Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος i_3 ἠμπορεῖ νὰ λάβῃ τιμὰς ἀπὸ 0 ἕως i_2. Ὁμοίως ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος β ἠμπορεῖ νὰ λάβῃ τιμὰς ἀπὸ 0 ἕως i_2.

Ἡ ἐξίσωσις (9) δεικνύει ὅτι, διὰ νὰ εἶναι ἡ ἔντασις i_1 σταθερὰ καὶ ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ β, πρέπει ὁ συντελεστὴς τοῦ β νὰ εἶναι μηδέν.

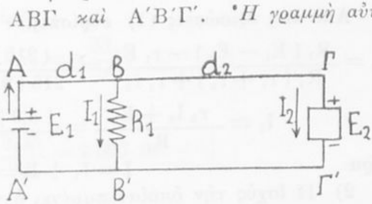
Τότε θὰ εἶναι: $\dfrac{r}{R} R\beta - R\alpha = 0$ ἤτοι $\dfrac{r}{R} = \dfrac{R\alpha}{R\beta}$.

Ἐπειδὴ εἶναι: $\dfrac{r}{R} = \dfrac{0{,}25}{0{,}75} = \dfrac{1}{3}$ εὑρίσκομεν: $\dfrac{R\alpha}{R\beta} = \dfrac{1}{3}$ ἄρα $R\beta = 3 R\alpha$.

Ὥστε τὸ σημεῖον Δ πρέπει νὰ ἔχῃ τοιαύτην θέσιν ὥστε νὰ εἶναι:

$\Delta B = 3 \Delta A$ ἤτοι $\Delta B = 75$ cm καὶ $\Delta A = 25$ cm.

292 — *Μία πηγὴ συνεχοῦς ρεύματος ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* E_1 *καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν ἀσήμαντον. Ἡ πηγὴ αὐτὴ εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀρχὴν ΑΑ΄ μιᾶς γραμμῆς ἀποτελουμένης ἀπὸ δύο σύρματα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄. Ἡ γραμμὴ αὐτὴ τροφοδοτεῖ: εἰς τὸ ΒΒ΄ ἕνα ὄργανον (χωρὶς ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν) ἀντιστάσεως* R_1*· εἰς τὸ ΓΓ΄ φορτίζει μίαν συστοιχίαν συσσωρευτῶν, ἡ ὁποία ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* E_2 *καὶ ἀντίστασιν ἀσήμαντον.*



Σχ. 186

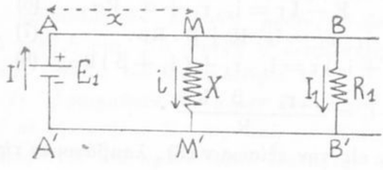
1) Ἐὰν εἶναι γνωσταὶ αἱ ἀποστάσεις $AB = d_1$, $B\Gamma = d_2$, *ἡ διάμετρος* δ *καὶ ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις* ρ *τοῦ σύρματος τῆς γραμμῆς, νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐντάσεις* I_1 *καὶ* I_2 *τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὰ τμήματα ΒΒ΄ καὶ ΓΓ΄ τοῦ κυκλώματος.*

Ἐφαρμογή: $E_1 = 550$ volt· $E_2 = 420$ volt· $R_1 = 215$ ohm· $\delta = 3$ mm· $\rho = 1{,}6/10^6$ ohm—cm · $d_1 = 2\,100$ m· $d_2 = 820$ m.

Θὰ ὀνομασθοῦν r_1 *ἡ ἀντίστασις* (ΑΒ + Α΄Β΄) *καὶ* r_2 *ἡ ἀντίστασις* (ΒΓ + Β΄Γ΄). *Θὰ τεθῇ* $I_1 + I_2 = I$.

2) Ἡ πηγὴ τοῦ ρεύματος εἶναι μία γεννήτρια, ἡ ὁποία ἔχει ἀπόδοσιν η_1 *καὶ* *κινεῖται ἀπὸ ὑδραυλικὸν στρόβιλον ἔχοντα ἀπόδοσιν* η_2· *ἡ ὑδατόπτωσις, ἡ ὁποία θέτει εἰς κίνησιν τὸν στρόβιλον, ἔχει ὕψος πτώσεως τοῦ ὕδατος* h *μέτρα. Πόση εἶναι εἰς κυβικὰ μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον ἡ ἀπαιτουμένη παροχὴ τοῦ ρεύματος τοῦ ὕδατος; Ἐφαρμογή:* $\eta_1 = 0{,}80$ · $\eta_2 = 0{,}72$ · $h = 10$ m.

3) Ἡ ἀντίστασις R_1 *ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα σύνολον λαμπτήρων διὰ πυρακτώσεως, ἕκαστος τῶν ὁποίων καταναλίσκει* 0,7 watt *κατὰ κηρίον. Πόσην ἰσχὺν φωτεινῆς ἐνεργείας ἔχομεν εἰς τὸ τμῆμα* BB′;



Σχ. 187

4) Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς λειτουργίας τοῦ συστήματος παρατηροῦμεν ὅτι αἰφνηδίως αὐξάνεται ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια καὶ λαμβάνει τιμὴν $I' > I$, *ἐνῷ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ* BB′ *ἐλαττώνεται καὶ λαμβάνει τὴν τιμὴν* $I_1' < I_1$. *Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι εἰς ἕνα σημεῖον* MM′ *τῆς γραμμῆς, μεταξὺ* AA′ *καὶ* BB′, *ἔγινε κάποια τυχαία διακλάδωσις. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις* $AM = x$ *καὶ ἡ ἀντίστασις* $MM' = x$.

Ἐφαρμογή: $I' = 12{,}5$ ampère · $I_1' = 2{,}02$ ampère.

1) Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον Kirchhoff εὑρίσκομεν τὰς σχέσεις:

διὰ τὸ κύκλωμα ABB′A′A: $E_1 = r_1 (I_1 + I_2) + R_1 I_1$

διὰ τὸ κύκλωμα ΒΓΓ′Β′: $R_1 I_1 = r_2 I_2 + E_2$.

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς λαμβάνομεν:

$$\left.\begin{aligned} E_1 - E_2 &= r_1 I_1 + (r_1 + r_2) I_2 \\ E_2 &= R_1 I_1 - r_2 I_2 . \end{aligned}\right| \quad (1)$$

Αἱ ἀντιστάσεις r_1 καὶ r_2 εἶναι:

$$r_1 = \rho \frac{2\,d_1}{\sigma} = 9{,}5 \text{ ohm} \qquad r_2 = \rho \frac{2\,d_2}{\sigma} = 3{,}9 \text{ ohm}.$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) εὑρίσκομεν:

$$I_2 = \frac{R_1 (E_1 - E_2) - r_1 E_2}{R_1 (r_1 + r_2) + r_1 r_2} = \frac{(215 \times 130) - (9{,}5 \times 420)}{215 (9{,}5 + 3{,}9) + (9{,}5 \times 3{,}9)} = 8{,}2 \text{ ampère}$$

$$I_1 = \frac{r_2 I_2 + E_2}{R_1} = \frac{(3{,}9 \times 8{,}2) + 420}{215} = 2{,}1 \text{ ampère}$$

ἄρα $$I = I_1 + I_2 = 10{,}3 \text{ ampère}.$$

2) Ἡ ἰσχὺς τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ γεννήτρια εἶναι $P = E_1 I$ watt. Ἐπομένως ἡ ἰσχὺς τῆς ὑδατοπτώσεως εἶναι:

$$P' = \frac{P}{\eta_1 \eta_2} \text{ watt} = \frac{EI}{\eta_1 \eta_2 \times 9{,}81} \text{ kgm/sec.}$$

Κατὰ δευτερόλεπτον πίπτει ὕδωρ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάρος:

$$\frac{P'}{h} = \frac{EI}{\eta_1 \eta_2 \times 9{,}81\, h} = \frac{550 \times 10{,}3}{0{,}8 \times 0{,}72 \times 9{,}81 \times 10} = 100 \text{ kg}^*.$$

Ἄρα ἡ παροχὴ τῆς ὑδατοπτώσεως εἶναι: $0{,}1 \text{ m}^3$ κατὰ sec.

3) Ἐντὸς τῆς ἀντιστάσεως R_1 καταναλίσκεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἰσχὺς $R_1 I_1^2$ watt. Ἐπομένως ἡ λαμβανομένη ἰσχὺς τῆς φωτεινῆς ἐνεργείας εἶναι:

$$\frac{R_1 I_1^2}{0{,}7} = \frac{215 \times 2{,}1^2}{0{,}7} = 215 \times 6{,}3 = 1\,355 \text{ κηρία.}$$

4) Ἄς καλέσωμεν i τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος ἐντὸς τῆς ἀντιστάσεως ΜΜ΄, r τὴν ἀντίστασιν (ΑΜ + Α΄Μ΄) καὶ V τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων Β καὶ Β΄. Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Kirchhoff εὑρίσκομεν:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{διὰ τὸ κύκλωμα: } & AMM'A': & E = rI' + Xi \\ \text{διὰ τὸ κύκλωμα: } & ABB'A': & E = rI' + (I' - i)(r_1 - r) + V. \end{array}\right| \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ἀλλὰ εἶναι: } V = R_1 I_1' = E_2 + r_2 I_2' \quad \text{ἄρα} \quad I_2' = \dfrac{R_1 I_1' - E_2}{r_2} \\ I' - i = I_1' + I_2'. \end{array}\right| \quad (3)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (2) εὑρίσκομεν:

$$\left.\begin{array}{l} r = \dfrac{E - V - r_1 (I' - i)}{i} \\ X = \dfrac{E - rI'}{i}. \end{array}\right| \quad (4)$$

Διὰ $I' = 12{,}5$ ampère καὶ $I_1' = 2{,}02$ ampère ἔχομεν:

$$I_2' = \frac{(215 \times 2{,}02) - 420}{3{,}9} = \frac{143}{39} = 3{,}66 \text{ ampère}$$

$$I' - i = I_1' + I_2' = 2{,}02 + 3{,}66 = 5{,}68 \text{ ampère}$$

$$V = R_1 I_1' = 215 \times 2{,}02 = 434{,}3 \text{ volt}$$

$$i = I' - 5{,}68 = 12{,}5 - 5{,}68 = 6{,}82 \text{ ampère.}$$

Ἄρα ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (4) λαμβάνομεν:

$$r = \frac{550 - 434{,}3 - (9{,}5 \times 5{,}68)}{6{,}82} = \frac{61{,}74}{6{,}82} = 9{,}05 \text{ ohm}$$

$$X = \frac{550 - (9{,}05 \times 12{,}5)}{6{,}82} = 64 \text{ ohm.}$$

Ἡ ἀπόστασις x εὑρίσκεται ἀπὸ τὰς σχέσεις:

$$r = \rho \frac{2x}{\sigma} \quad \text{καὶ} \quad r_1 = \rho \frac{2d_1}{\sigma}.$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη εὑρίσκομεν:

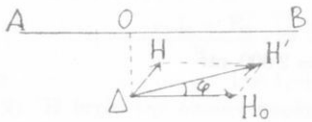
$$x = d_1 \frac{r}{r_1} = 2\,100 \times \frac{9{,}05}{9{,}5} = 2\,000 \text{ m.}$$

VIII. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

293.— *Σύρμα* AB *τείνεται ὁριζοντίως ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Κάτωθεν τοῦ μέσου* O *τοῦ σύρματος καὶ εἰς ἀπόστασιν* 10 cm *ἀπὸ τὸ* O *τοποθετεῖται μιὰ πολὺ μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη ἀποκλίσεως. Τὸ σύρμα* AB *παρεμβάλλεται εἰς τὸ κύκλωμα μιᾶς γεννητρίας. Ἡ βελόνη ἀποκλίνει τότε ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας της κατὰ* 15^0 *(δίδεται* εφ $15^0 = 0{,}27$*).— 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι* $H_0 = 0{,}2$ gauss.—*2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν ἄκρων* A *καὶ* B *ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος εἶναι* 0,032 ohm.— *3) Μεταξὺ τοῦ* A *καὶ ἑνὸς σημείου* A′ *τοιούτου ὥστε νὰ εἶναι* AA′ = AB : 20, *παρεμβάλλομεν εἰς τὸ κύκλωμα κατὰ διακλάδωσιν ἕνα γαλβανόμετρον* Γ *τὸ ὁποῖον ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* 320 ohm. *Παρατηροῦμεν τότε ὅτι ἡ βελόνη τοῦ γαλβανομέτρου ἐκτρέπεται κατὰ* 135 *διαιρέσεις (ἡ μετατόπισις μετρεῖται ἐπὶ βαθμολογημένου κανόνος μὲ τὴν μέθοδον τοῦ στρεφομένου κατόπτρου). Ἀπὸ τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εὐαισθησία τοῦ γαλβανομέτρου, ἂν αὕτη χαρακτηρίζεται διὰ τῆς μετατοπίσεως κατὰ μίαν διαίρεσιν ἐπὶ τῆς κλίμακος τοῦ ὀργάνου.*

1) Γνωρίζομεν ὅτι εὐθύγραμμος ἀγωγός, μεγάλου μήκους, διαρρεόμενος ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I ampère, δημιουργεῖ πέριξ αὐτοῦ μαγνητικὸν πεδίον, τοῦ ὁποίου ἡ ἔντασις H εἰς ἀπόστασιν d ἑκατοστομέτρων ἀπὸ τὸν ἀγωγὸν εἶναι: $H = \dfrac{2\,I}{10\,d}$ gauss. Ἄρα εἰς τὸ σημεῖον Δ, ὅπου εὑρίσκεται ὁ βόρειος πόλος τῆς μαγνητικῆς βελόνης, ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ εὐθυγράμμου ρεύματος εἶναι: $H = \dfrac{2\,I}{100}$ gauss.

Ἐπὶ τοῦ ἰδίου πόλου ἐνεργεῖ καὶ ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα H_0 τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἀγωγὸν AB. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν δύο τούτων πεδίων ἡ βελόνη ἰσορροπεῖ εἰς τοιαύτην θέσιν ὥστε ὁ ἄξων της νὰ σχηματίζῃ γωνίαν $\varphi = 15^0$ μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ· Ἀπὸ τὸ σχηματιζόμενον ὀρθογώνιον τρίγωνον $H_0 \Delta H'$ ἔχομεν:



Σχ. 188

$$H = H_0 \text{ εφ } \varphi = 0{,}2 \times 0{,}27 = 0{,}054 \text{ gauss.}$$

Ἄρα $\dfrac{2\,I}{100} = 0{,}054$ καὶ $I = 2{,}7$ ampère.

2) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ A καὶ B εἶναι:

$$V = RI = 0{,}032 \times 2{,}7 = 0{,}086 \text{ volt.}$$

3) Τὸ τμῆμα AA′ τοῦ σύρματος ἔχει ἀντίστασιν:

$$R' = R : 20 = 0{,}032 : 20 = 0{,}0016 \text{ ohm.}$$

Ἡ ἀντίστασις τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι : $r = 320$ ohm.

Ὁ λόγος τῶν δύο ἀντιστάσεων εἶναι : $r : R = 320 : 0{,}0016 = 200\,000$.

Ἄρα ἡ ἔντασις I_1 τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι 200 000 φορὰς μικροτέρα ἀπὸ τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ ἀγωγοῦ ΑΑ΄, ἤτοι εἶναι :

$I_1 = 2{,}7 : 200\,000 = 1{,}35 \times 10^{-5}$ ampère ἢ $I_1 = 135 \times 10^{-7}$ ampère.

Διὰ τὴν τιμὴν αὐτὴν τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος ἔχομεν ἐκτροπὴν τῆς βελόνης τοῦ γαλβανομέτρου κατὰ 135 διαιρέσεις. Ἑπομένως μία διαίρεσις ἀντιστοιχεῖ εἰς ἔντασιν 10^{-7} ampère, δηλαδὴ ἑνὸς δεκάκις ἑκατομμυριοστοῦ τοῦ ampère.

294. — *Κυκλικὸς ἀγωγὸς ἔχει ἀκτῖνα $\rho = 20$ cm καὶ περιλαμβάνει 10 σπείρας. Εἰς τὸ κέντρον του τοποθετεῖται μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη ἐγκλίσεως ἡ ὁποία ἠμπορεῖ νὰ κινῆται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Ἡ γωνία ἐγκλίσεως εἶναι $\varepsilon = 60^0$, ἡ δὲ ἔντασις τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τῆς Γῆς εἶναι $H_0 = 0{,}18$ gauss. Ἐὰν διαβιβάσωμεν διὰ τοῦ ἀγωγοῦ ρεῦμα, πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, ὥστε ἡ βελόνη νὰ ἰσορροπῇ ἔχουσα τὸν ἄξονά της ὁριζόντιον;*

Διὰ νὰ ἰσορροπήσῃ ἡ βελόνη εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε ὁ ἄξων της νὰ εἶναι ὁριζόντιος, πρέπει ἡ ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τὸ ρεῦμα, νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν κατακόρυφον συνιστῶσαν H_K τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου. Τότε θὰ εἶναι :

$$H = H_K = \frac{2\pi N}{\rho} \times \frac{I}{10} \text{ gauss} \quad \text{ἢ} \quad H_0\, \varepsilon\varphi\, 60^0 = \frac{2 \times 3{,}14 \times 10}{20} \times \frac{I}{10}$$

$$\text{ἄρα} \quad I = \frac{10 \times 0{,}18 \times \sqrt{3}}{3{,}14} = 0{,}99 \text{ ampère.}$$

295. — *Ἐπὶ ἑνὸς κυκλικοῦ πλαισίου ἀκτῖνος 10 cm τυλίσσονται 100 σπεῖραι χαλκίνου σύρματος τὸ ὁποῖον ἔχει διάμετρον 0,2 mm καὶ εἰδικὴν ἀντίστασιν $1{,}6 \times 10^{-6}$ ohm — cm. Μία μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον τοῦ πλαισίου, ἐξηρτημένη ἀπὸ ἄκλωστον νῆμα. Τὸ ἐπίπεδον τοῦ πλαισίου συμπίπτει μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Τὰ ἄκρα τοῦ σύρματος συνδέονται μὲ τοὺς δύο πόλους ἑνὸς στοιχείου Daniell, τοῦ ὁποίου ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι $E = 1{,}08$ volt. Ἡ βελόνη ἐκτρέπεται τότε κατὰ γωνίαν 45^0. Πόση εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ στοιχείου; Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι : $H_0 = 0{,}2$ gauss.*

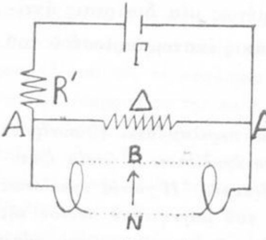
Ἐπειδὴ ἡ βελόνη ἐκτρέπεται κατὰ 45^0, συνάγεται ὅτι ἡ ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖ τὸ ρεῦμα, εἶναι ἴση μὲ τὴν ὁριζοντίαν συνιστῶσαν τοῦ γηΐνου πεδίου, ἤτοι εἶναι $H = 0{,}2$ gauss. Ἐὰν εἶναι I ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς ampère, ν ὁ ἀριθμὸς τῶν σπειρῶν καὶ α ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, τότε ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ κυκλικοῦ ρεύματος εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εἶναι : $H = \dfrac{2\pi\nu I}{10\,\alpha}$ gauss.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἔντασιν I τοῦ ρεύματος:

$$I = \frac{10\ H\alpha}{2\ \pi\nu} = \frac{10 \times 0{,}2 \times 10}{200\ \pi} = \frac{1}{10\ \pi}\ \text{ampère}.$$

Ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι: $R = E : I = 1{,}08 \times 10\,\pi = 34$ ohm.

296. — *Ἕνα κύκλωμα περιλαμβάνει κατὰ σειρὰν μίαν γεννήτριαν Γ, ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,5 ohm, μίαν ἀντίστασιν R′ ἴσην μὲ 5 ohm, καὶ ἕνα πηνίον ΑΑ′ τὸ ὁποῖον ἔχει μεγάλο μῆκος, ἀντίστασιν R = 49,5 ohm καὶ φέρει 10 σπείρας κατὰ ἑκατοστόμετρον μήκους. Ὁ ἄξων τοῦ πηνίου εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Μεταξὺ τῶν ἄκρων Α καὶ Α′ τοῦ πηνίου ὑπάρχει κατὰ διακλάδωσιν ἕνας ἀγωγὸς ΑΔΑ′ τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστασις εἶναι $R_1 = 0{,}5$ ohm. Εἰς τὸ κέντρον τοῦ πηνίου εὑρίσκεται μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη ΒΝ. Ὅταν διὰ τοῦ πηνίου διέρχεται τὸ ρεῦμα, τότε ἡ βελόνη στρέφεται κατὰ γωνίαν α διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι: $\varepsilon\varphi\,\alpha = \frac{\pi}{20}$. Νὰ εὑρεθῇ: 1) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐντὸς τοῦ πηνίου, ἐντὸς τῆς ἀντιστάσεως ΑΔΑ′ καὶ ἡ ὅλη ἔντασις τοῦ ρεύματος. — 2) Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς γεννητρίας Γ. Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι $H_0 = 0{,}2$ gauss.*



Σχ. 189

1) Ὅταν διὰ τοῦ πηνίου δὲν διέρχεται ρεῦμα, τότε ὁ ἄξων τῆς βελόνης εἶναι κάθετος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ πηνίου, διότι προσανατολίζεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης τοῦ γηΐνου πεδίου. Ὅταν ὅμως διὰ τοῦ πηνίου διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως I, τότε τὸ ρεῦμα τοῦτο δημιουργεῖ μαγνητικὸν πεδίον, τοῦ ὁποίου ἡ ἔντασις εἰς τὸ μέσον τοῦ πηνίου εἶναι:

$$H = \frac{4\ \pi}{10}\ I\nu = \frac{4\pi}{10} \times I \times 10 = 4\ \pi\ I\ \text{gauss}.$$

Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς συνισταμένης τῶν δύο πεδίων ἡ βελόνη ἰσορροπεῖ εἰς νέαν θέσιν καὶ στρέφεται κατὰ γωνίαν α. Τότε ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$H = H_0\ \varepsilon\varphi\ \alpha = 0{,}2 \times \frac{\pi}{20} = 4\,\pi\,I \quad \text{ἄρα} \quad I = \frac{1}{400}\ \text{ampère}.$$

Ἡ ἀντίστασις τοῦ πηνίου εἶναι $R = 49{,}5$ ohm, τοῦ δὲ ἀγωγοῦ ΑΔΑ′ εἶναι $R_1 = 0{,}5$ ohm. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $R : R_1 = 49{,}5 : 0{,}5 = 99$ ἕπεται ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ ΑΔΑ′ εἶναι:

$$I_1 = 99\ I = 99/400\ \text{ampère}.$$

Καὶ ἡ ὅλη ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι: $I' = I + I_1 = 0{,}25$ ampère.

2) Οἱ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Α′ δύο κλάδοι τοῦ κυκλώματος ἔχουν ἰσοδύναμον ἀντίστασιν 0,495 ohm ἢ κατὰ προσέγγισιν 0,5 ohm.

Ἡ ἀντίστασις τοῦ ὅλου κυκλώματος εἶναι: $R_2 = 9 + 0{,}5 + 0{,}5 = 10$ ohm.

Ἑπομένως ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς γεννητρίας εἶναι:

$$E = R_2\,I' = 10 \times 0{,}25 = 2{,}5\ \text{volt}.$$

297.— *Ἕνα πηνίον, πολὺ μεγάλου μήκους, ἔχει τὸν ἄξονά του κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Εἰς τὸ κέντρον τοῦ πηνίου ὑπάρχει μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη ἀποκλίσεως, ἡ ὁποία φέρει μικρὸν κοῖλον κάτοπτρον. Τὸ πηνίον ἔχει 10 σπείρας κατὰ ἑκατοστόμετρον καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως* $\frac{1}{2\,000}$ ampère. *Τὸ κάτοπτρον σχηματίζει τὸ εἴδωλον τῆς φωτεινῆς πηγῆς ἐπὶ διαφανοῦς βαθμολογημένου κανόνος, ὁ ὁποῖος ἀπέχει* 1 m *ἀπὸ τὸ κάτοπτρον. Ὅταν διὰ τοῦ πηνίου διέρχεται τὸ ἀνωτέρω ρεῦμα, ὁ φωτεινὸς δείκτης μετατοπίζεται ἐπὶ τοῦ κανόνος κατὰ* 62,5 mm. *Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου.*

Τὸ ρεῦμα δημιουργεῖ ἐντὸς τοῦ πηνίου μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως :

$$H = 1{,}25\, \nu\, I = 1.25 \times 10 \times 1/2\,000 = 0{,}00625 \text{ gauss} .$$

Τὸ εἴδωλον μετακινεῖται κατὰ 62,5 mm ἐπὶ τοῦ κανόνος ὁ ὁποῖος ἀπέχει 1 m ἀπὸ τὸ κάτοπτρον. Ἄρα ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς ἐστράφη κατὰ γωνίαν $\beta = \frac{62{,}5}{1\,000}$ ἀκτίνια. Τὸ κάτοπτρον λοιπὸν ἐστράφη κατὰ γωνίαν $\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{625}{20\,000} = 0{,}03125$ ἀκτίνια. Ἐὰν H_0 εἶναι ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου, τότε κατὰ τὴν ἰσορροπίαν τῆς βελόνης ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$H = H_0\, \varepsilon\varphi\alpha \qquad \text{ἤτοι εἶναι} \qquad H_0 = \frac{H}{\alpha} = \frac{0{,}00625}{0{,}03125} = 0{,}2 \text{ gauss} .$$

298.— *Εἰς τοὺς ἀκροδέκτας μιᾶς πυξίδος τῶν ἐφαπτομένων ἐφαρμόζομεν διαφορὰν δυναμικοῦ* 2 volt *καὶ παρατηροῦμεν ἀπόκλισιν τῆς βελόνης κατὰ* 65°. *Τὸ πλαίσιον φέρει* 500 *σπείρας καὶ ἔχει ἀκτῖνα* 7 cm. *Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι* $H_0 = 0{,}20$ gauss . *Πόση εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ πλαισίου ;*

Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ πλαίσιον εἶναι : $I = V : R$ ὅπου R ἡ ἀντίστασις τοῦ πλαισίου. Ἐξ ἄλλου γνωρίζομεν ὅτι εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον παράγει τὸ κυκλικὸν ρεῦμα, εἶναι :

$$H = \frac{2\,\pi}{10} \times \frac{N\, I}{\rho} .$$

Ἀλλὰ εἶναι :

$$H = H_0\, \varepsilon\varphi\, 65^0 .$$

Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω σχέσεις εὑρίσκομεν :

$$R = \frac{V\, \pi\, N}{5\, H_0\, \rho\, \varepsilon\varphi\, 65^0} = \frac{2 \times 3{,}14 \times 500}{5 \times 0{,}2 \times 7 \times 2{,}145} = 209 \text{ ohm} .$$

299.— *Ὅταν διαβιβάσωμεν ρεῦμα ἐντάσεως* 0,1 ampère *διὰ τοῦ πλαισίου μιᾶς πυξίδος τῶν ἐφαπτομένων, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ βελόνη, πρὶν ἰσορροπήσῃ εἰς μίαν σταθερὰν ἀπόκλισιν* 45°, *ἐκτελεῖ* 10 *αἰωρήσεις ἐντὸς* 12 *δευτερολέπτων. Πόση θὰ γίνῃ ἡ ἀπόκλισις καὶ ἡ περίοδος αἰωρήσεως, ἂν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐλαττωθῇ εἰς* 0,05 ampère.

Ὅταν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος λαμβάνῃ τὰς τιμὰς I_1 καὶ I_2, ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου (εὑρισκομένου ἐπὶ τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ) ἔχει τὰς τιμάς:

$$H_1 = \frac{2\pi N I_1}{10\rho} = H_0 \,\text{εφ}\, \theta_1 \quad \text{καὶ} \quad H_2 = \frac{2\pi N I_2}{10\rho} = H_0 \,\text{εφ}\, \theta_2 .$$

Ὥστε: $\quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{\text{εφ}\,\theta_1}{\text{εφ}\,\theta_2} \quad$ καὶ $\quad \text{εφ}\,\theta_2 = \frac{I_2}{I_1}\,\text{εφ}\,\theta_1 .$

ἡ νέα ἀπόκλισις τῆς βελόνης εἶναι:

$$\text{εφ}\,\theta_2 = \frac{0{,}05}{0{,}1} \times \text{εφ}\,45^0 = 0{,}5 \cdot \quad \text{ἄρα} \quad \theta_2 = 26^0\,34'.$$

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἐπὶ τῆς βελόνης ἐνεργοῦν δύο μαγνητικὰ πεδία, τὸ πεδίον τοῦ ρεύματος ἐντάσεως H_1 καὶ τὸ γήϊνον μαγνητικὸν πεδίον ἔχον ὁριζοντίαν συνιστῶσαν H_0. Ἡ συνισταμένη Σ_1 τῶν ἐντάσεων τῶν δύο πεδίων, καθορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$H_0 = \Sigma_1 \,\text{συν}\, \theta_1 , \quad \text{ἄρα} \quad \Sigma_1 = \frac{H_0}{\text{συν}\,\theta_1} .$$

Ὁμοίως εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν εἶναι:

$$H_0 = \Sigma_2 \,\text{συν}\, \theta_2 , \quad \text{ἄρα} \quad \Sigma_2 = \frac{H_0}{\text{συν}\,\theta_2} .$$

Ἐξ ἄλλου αἱ περίοδοι αἰωρήσεως τῆς βελόνης εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εἶναι:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{K}{M\Sigma_1}} \quad \text{καὶ} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{K}{M\Sigma_2}}$$

ὅπου K εἶναι ἡ ροπὴ ἀδρανείας τῆς βελόνης.

Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω σχέσεις εὑρίσκομεν:

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{\text{συν}\,\theta_2}{\text{συν}\,\theta_1} .$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη περίοδος T_2 εἶναι:

$$T_2 = T_1 \sqrt{\frac{\text{συν}\,\theta_2}{\text{συν}\,\theta_1}} = 1{,}2 \sqrt{\frac{\text{συν}\,26^0\,34'}{\text{συν}\,45^0}} = 1{,}2 \sqrt{\frac{0{,}8945}{0{,}7071}} \quad \text{ἢ} \quad T_2 = 1{,}35 \text{ sec.}$$

300.— *Ἕνα κύκλωμα περιλαμβάνει ἡνωμένα κατὰ σειρὰν δύο στοιχεῖα καὶ μίαν πυξίδα τῶν ἐφαπτομένων. Τότε ἡ βελόνη τῆς πυξίδος ἀποκλίνει κατὰ 62°. Ἂν ἀντιστραφῇ ἡ σύνδεσις τοῦ ἑνὸς στοιχείου, οὕτως ὥστε τὰ δύο στοιχεῖα νὰ εἶναι συνδεδεμένα κατ' ἀντίθεσιν, ἡ ἀπόκλισις τῆς βελόνης γίνεται 28°. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν ἠλεκτρεγερτικῶν δυνάμεων τῶν δύο στοιχείων;*

Ἂς καλέσωμεν E_1 καὶ E_2 τὰς ἠλεκτρεγερτικὰς δυνάμεις τῶν δύο στοιχείων καὶ I_1 καὶ I_2 τὰς ἐντάσεις τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὸ κύκλωμα εἰς τὰς δύο περιπτώσεις. Ἔστω ὅτι εἶναι $E_1 > E_2$. Καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ἡ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι ἡ αὐτή. Ὅταν τὰ στοιχεῖα εἶναι συνδεδεμένα κατὰ σειράν, ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς στήλης εἶναι: $E_1 + E_2$, ἐνῷ ὅταν εἶναι συνδεδεμένα κατ' ἀντίθεσιν ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς στήλης εἶναι: $E_1 - E_2$. Ὥστε αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εἶναι:

$$I_1 = \frac{E_1 + E_2}{R} \quad \text{καὶ} \quad I_2 = \frac{E_1 - E_2}{R} \quad \text{ἄρα} \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{E_1 + E_2}{E_1 - E_2} . \qquad (1)$$

Αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων συναρτήσει τῆς ἀποκλίσεως τῆς βελόνης δίδονται ἀπὸ τὰς σχέσεις:

$$I_1 = \frac{10\,H_0\,\rho}{2\,\pi}\,\varepsilon\varphi\,\theta_1 \quad \text{καὶ} \quad I_2 = \frac{10\,H_0\,\rho}{2\,\pi}\,\varepsilon\varphi\,\theta_2 \cdot \quad \text{ἄρα} \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{\varepsilon\varphi\,\theta_1}{\varepsilon\varphi\,\theta_2}. \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$\frac{E_1 + E_2}{E_1 - E_2} = \frac{\varepsilon\varphi\,\theta_1}{\varepsilon\varphi\,\theta_2} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon\varphi\,\theta_1 + \varepsilon\varphi\,\theta_2}{\varepsilon\varphi\,\theta_1 - \varepsilon\varphi\,\theta_2}.$$

Ὥστε ὁ ζητούμενος λόγος εἶναι:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon\varphi\,62^0 + \varepsilon\varphi\,28^0}{\varepsilon\varphi\,62^0 - \varepsilon\varphi\,28^0} = \frac{1{,}881 + 0{,}532}{1{,}881 - 0{,}532} = \frac{2{,}413}{1{,}349} = 1{,}79.$$

301. — *Μαγνητικὴ βελόνη ἠμπορεῖ νὰ αἰωρῆται ὁριζοντίως εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ὁριζοντίου σωληνοειδοῦς τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 25 cm καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ 100 σπείρας· ὁ ἄξων του εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Ὅταν διὰ τοῦ σωληνοειδοῦς δὲν διέρχεται ρεῦμα, ἡ βελόνη, ἀπομακρυνομένη ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας της, αἰωρεῖται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου καὶ ἐκτελεῖ τότε 10 πλήρεις αἰωρήσεις κατὰ λεπτόν. Διαβιβάζομεν διὰ τοῦ σωληνοειδοῦς ρεῦμα ἐντάσεως 1 ampère καὶ φορᾶς τοιαύτης ὥστε ὁ βόρειος πόλος τῆς βελόνης νὰ ἐκτελῇ τότε 51 πλήρεις αἰωρήσεις κατὰ λεπτόν. — 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸν τόπον τοῦ πειράματος.— 2) Πόσας αἰωρήσεις κατὰ λεπτὸν θὰ ἐκτελέσῃ ἡ βελόνη, ἐὰν ἀντιστραφῇ ἡ φορὰ τοῦ ρεύματος ἐντὸς τοῦ σωληνοειδοῦς, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἔντασίς του;*

1) Ἡ περίοδος ἑνὸς ἐκκρεμοῦς, αἰωρουμένου ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ πεδίου βαρύτητος, εἶναι:
$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{K}{mg\,\alpha}}$$
ὅπου K εἶναι ἡ ροπὴ ἀδρανείας καὶ α ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους ἀπὸ τὸν ἄξονα ἐξαρτήσεως. Ὥστε τὸ γινόμενον mg α παριστάνει τὴν ροπὴν τῆς δυνάμεως mg ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ἐξαρτήσεως. Ἐὰν M εἶναι ἡ μαγνητικὴ ροπὴ τῆς βελόνης καὶ H_0 ἡ ἔντασις τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου, τότε ἡ περίοδος αἰωρήσεως αὐτῆς θὰ εἶναι:

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{K}{M\,H_0}} = \frac{60}{10}. \qquad (1)$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ σωληνοειδοῦς ἔχει τὴν φορὰν τῆς H_0, τότε ἡ μὲν H ἔχει τὴν τιμήν:

$$H = \frac{4\,\pi}{10} \times \frac{100}{25} \times 1 = 1{,}25 \times 4 = 5 \text{ gauss},$$

ἡ δὲ περίοδος αἰωρήσεως τῆς βελόνης εἶναι:

$$T' = 2\,\pi\sqrt{\frac{K}{M\,(H_0 + H)}} = \frac{60}{51}. \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$\frac{51}{10} = \sqrt{\frac{H_0 + H}{H_0}} = \sqrt{\frac{H_0 + 5}{H_0}} \qquad \text{ἄρα} \qquad H_0 = 0{,}2 \text{ gauss}.$$

2) Ἔστω N ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς αἰωρήσεων. Ἂν ἀντιστραφῇ ἡ φορὰ τοῦ ρεύματος, τότε ἡ H ἔχει φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν φορὰν τῆς H_0 καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:
$$T'' = 2\,\pi\sqrt{\frac{K}{M\,(H - H_0)}} = \frac{60}{N}. \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (3) εὑρίσκομεν :

$$\frac{N}{10} = \sqrt{\frac{H - H_0}{H_0}} = \sqrt{\frac{4,8}{0,2}}. \quad \text{ἄρα} \quad N = 49.$$

302.— *Ἕνα γαλβανόμετρον ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* 20 ohm, *ὁ δὲ δείκτης του ἀποκλίνει κατὰ* 100 *διαιρέσεις ἐπὶ τῆς κλίμακος, ὅταν τὸ ὄργανον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως* 5 milliampère. *Δεχόμεθα ὅτι ἡ ἀπόκλισις τοῦ δείκτου εἶναι πάντοτε ἀνάλογος πρὸς τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ γαλβανόμετρον. — 1) Μεταξὺ τῶν ἀκροδεκτῶν τοῦ γαλβανομέτρου τοποθετεῖται κατὰ διακλάδωσιν ἕνα σύρμα ἀντιστάσεως* x. *Νὰ εὑρεθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς* x, *ὥστε τὸ γαλβανόμετρον νὰ δεικνύῃ* 50 *διαιρέσεις, ὅταν τὸ ὅλον μετρούμενον ρεῦμα ἔχῃ ἔντασιν* 1 ampère. — *2) Ἡ προηγουμένη διακλάδωσις ἀποτελεῖται ἀπὸ σπειροειδὲς σύρμα τυλιγμένον ἐπὶ ὑαλίνου κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει μῆκος* 25 cm *καὶ περιφέρειαν* 8 cm. *Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ σωληνοειδοῦς; Τομὴ τοῦ σύρματος* 0,1 mm², *εἰδικὴ ἀντίστασις* 1,25/10⁶ ohm—cm.— *3) Τὸ γαλβανόμετρον, ἐφωδιασμένον μὲ τὴν διακλάδωσίν του, χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἐντάσεως ἑνὸς ρεύματος τροφοδοτοῦντος* 10 *λαμπτῆρας διὰ πυρακτώσεως, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει ἰσχὺν* 50 watt· *οὗτοι εἶναι συνδεδεμένοι ἐν παραλλήλῳ καὶ λειτουργοῦν ὑπὸ τάσιν* 100 volt. *Ποίαν διαίρεσιν τῆς κλίμακος θὰ δείξῃ ὁ δείκτης τοῦ γαλβανομέτρου ;*

1) Ἐπειδὴ δίδεται ὅτι ἡ ἀπόκλισις τοῦ δείκτου τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ ὀργάνου, συνάγεται ὅτι εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν ἡ ἔντασις I_1 τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ γαλβανομέτρου, εἶναι :

$$I_1 = 0,005 \times 0,50 = 0,0025 \text{ ampère}.$$

Ἄρα ἡ ἔντασις I_2 τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῆς διακλαδώσεως, εἶναι : $I_2 = I - I_1 = 1 - 0,0025 = 0,9975$ ampère.

Ἡ ζητουμένη ἀντίστασις x εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$20\, I_1 = x\, I_2 \quad \text{ἄρα} \quad x = 20 \times \frac{0,0025}{0,9975} = \frac{20}{399} \quad \text{ἢ} \quad \text{περίπου } x = 0,05 \text{ ohm}.$$

2) Τὸ μῆκος l τοῦ σύρματος εἶναι :

$$l = \frac{x \times \sigma}{\rho} = \frac{20 \times 0,001 \times 10^6}{399 \times 1,25} = \frac{20 \times 10^3}{399 \times 1,25} \text{ cm}.$$

Ὁ ἀριθμὸς N τῶν σπειρῶν τοῦ σωληνοειδοῦς εἶναι : $N = l : 8$

καὶ ὁ ἀριθμὸς ν τῶν σπειρῶν κατὰ cm μήκους εἶναι $\nu = \frac{N}{25} = \frac{l}{25 \times 8}$.

Ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ σωληνοειδοῦς εἶναι:

$$H = 1,25\, \nu\, I_2 = 1,25 \times \frac{l}{25 \times 8} \times I_2 = 1,25 \times \frac{20 \times 10^3}{399 \times 1,25} \times \frac{1}{25 \times 8} \times 0,9975$$

$$\text{ἄρα} \quad H = 0,25 \text{ gauss}.$$

3) Οἱ 10 λαμπτῆρες καταναλίσκουν ἰσχύν : $P = 10 \times 50 = 500$ watt.

Ἄρα ἡ ἰσχὺς τοῦ κυρίου ρεύματος εἶναι : $P = VI = 500$ watt.

Ἐπειδὴ εἶναι $V = 100$ volt, συνάγεται ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ κυρίου ρεύματος εἶναι : $I = P : V = 500 : 100 = 5$ ampère.

Ἑπομένως ὁ δείκτης τοῦ γαλβανομέτρου θὰ δεικνύῃ τότε τὴν διαίρεσιν :

$$50 \times 5 = 250.$$

303 — *Ἕνας δακτύλιος ἐκ μαλακοῦ σιδήρου ἔχει μέσην ἀκτῖνα καμπυλότητος 10 cm καὶ τομὴν 15 cm². Ἀπὸ τὸν δακτύλιον ἀφαιρεῖται τμῆμα πάχους 2 mm. Νὰ εὑρεθῇ πόσος πρέπει νὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀμπεροστροφῶν τὰς ὁποίας πρέπει νὰ φέρῃ ὁ δακτύλιος, ὥστε, ἂν τὸ σχηματιζόμενον πηνίον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα, εἰς τὸ διάκενον τοῦ δακτυλίου νὰ ὑπάρχῃ μαγνητικὴ ροὴ ἴση μὲ 120 000 maxwell. Ἡ μαγνητικὴ διαπερατότης τοῦ μαλακοῦ σιδήρου εἶναι:* $\mu = 2\,310$.

Ἔστω Φ ἡ μαγνητικὴ ροὴ καὶ σ ἡ τομὴ τοῦ δακτυλίου. Τότε ἡ μαγνητικὴ ἐπαγωγὴ εἶναι: $B = \dfrac{\Phi}{\sigma} = \dfrac{120\,000}{15} = 8\,000$ gauss.

Ἄς ὀνομάσωμεν ἀντιστοίχως l καὶ l' τὰ μήκη τῶν τμημάτων τῆς δυναμικῆς γραμμῆς, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ δακτυλίου καὶ εἰς τὸ διάκενον αὐτοῦ. Τότε ἡ μαγνητικὴ ἀντίστασις R τοῦ κυκλώματος γνωρίζομεν ὅτι θὰ εἶναι:

$$R = \frac{l}{\mu\sigma} + \frac{l'}{\sigma} = \frac{2\pi \times 10}{2\,310 \times 15} + \frac{0{,}2}{15}$$

ἤ $$R = 0{,}0018 + 0{,}0133 = 0{,}0151.$$

Ἡ μαγνητικὴ τάσις εἶναι: $\dfrac{4\pi}{10} NI = 1{,}25 \,.\, NI$.

Ἑπομένως ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ Hopkinson: $\Phi = \dfrac{1{,}25 \,.\, NI}{R}$,

εὑρίσκομεν: $$NI = \frac{\Phi R}{1{,}25} = \frac{120\,000 \times 0{,}0151}{1{,}25} = 1\,450 \text{ ἀμπεροστροφαί.}$$

304. — *Πεταλοειδὴς ἠλεκτρομαγνήτης ἔχει μέσον μῆκος 50 cm καὶ τομὴν 10 cm², τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν ὁμοιόμορφον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀπαιτούμενος ἀριθμὸς τῶν ἀμπεροστροφῶν, ἂν θέλωμεν ἡ φέρουσα δύναμις τοῦ ἠλεκρομαγνήτου τούτου νὰ εἶναι 50 kg*. Μαγνητικὴ διαπερατότης τοῦ σιδήρου:* $\mu = 2\,345$.

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ φέρουσα δύναμις τοῦ πεταλοειδοῦς ἠλεκτρομαγνήτου, διὰ τοὺς δύο πόλους του, δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $F = 2 \times \dfrac{\sigma B^2}{8\pi}$ δύναι.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν:

$$B^2 = \frac{8\pi F}{2\sigma} = \frac{8\pi \times 50 \times 981\,000}{2 \times 10} \qquad \text{ἄρα} \qquad B = 7\,840 \text{ gauss.}$$

Διὰ τὸ μαγνητικὸν κύκλωμα ἰσχύει ὁ νόμος:

$$\text{μαγνητικὴ ροὴ} = \frac{\text{μαγνητικὴ τάσις}}{\text{μαγνητικὴ ἀντίστασις}}$$

$$\text{ἄρα} \quad \Phi = \frac{1{,}25\, NI}{\dfrac{l}{\mu\sigma}} = \frac{1{,}25\, NI \times \mu\sigma}{l} = B\sigma.$$

Ὁ ζητούμενος λοιπὸν ἀριθμὸς ἀμπεροστροφῶν εἶναι:

$$NI = \frac{B \times l}{1{,}25 \times \mu} = \frac{7\,850 \times 50}{1{,}25 \times 2\,345} = 134$$

305 — *Πέριξ μιᾶς κυλινδρικῆς ῥάβδου ἐκ σιδήρου, διαμέτρου* 5 cm, *τυλίσσονται ἀκριβῶς* 100 *σπεῖραι ἑνὸς μονωμένου χαλκίνου σύρματος, τὸ ὁποῖον ἔχει διάμετρον* 2 mm *(ὑπολογιζομένης καὶ τῆς μονώσεώς του). Θέλομεν νὰ ἔχωμεν ὁλικὴν μαγνητικὴν ῥοὴν* 200 000 maxwell.— *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ διαβιβάσωμεν διὰ τοῦ πηνίου.—2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μαγνητικὴ τάσις καὶ ἡ μαγνητικὴ ἀντίστασις τοῦ σχηματιζομένου ἠλεκτρομαγνήτου. Μαγνητικὴ διαπερατότης τοῦ σιδήρου :* $\mu = 2\,000$. *Θὰ ληφθῇ* $\pi^2 = 10$.

1) Τὸ μῆκος l τῆς κυλινδρικῆς ῥάβδου εἶναι: $l = 0{,}2 \times 100 = 20$ cm.

Ἡ μαγνητικὴ ῥοὴ Φ εἶναι: $\Phi = H \cdot \mu \cdot \sigma$. (1)

Ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου εἶναι: $H = \frac{4\pi}{10} \times \frac{NI}{l}$ gauss.

Ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σπείρας εἶναι: $\sigma = \frac{5^2\pi}{4} = \frac{25\pi}{4}$ cm².

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται: $\Phi = \frac{4\pi}{10} \times \frac{NI}{l} \times \mu\,\sigma$.

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἔντασιν τοῦ ῥεύματος:

$$I = \frac{10}{4\pi} \times \frac{l}{N} \times \frac{\Phi}{\mu\,\sigma} = \frac{16\,000}{\pi^2 \times \mu} = \frac{16\,000}{10 \times 2\,000} = 0{,}80 \text{ ampère}.$$

2) Ἡ μαγνητικὴ τάσις εἶναι:

$$E = \frac{4\pi}{10} NI = 1{,}25 \times 100 \times 0{,}80 = 100 \text{ gilbert}.$$

Ἡ μαγνητικὴ ἀντίστασις R τῆς ῥάβδου τοῦ σιδήρου εἶναι:

$$R = \frac{l}{\mu\,\sigma} = \frac{20 \times 4}{2\,000 \times 25\pi} = \frac{4}{25 \times 314} = 0{,}0005.$$

306 — *Ἕνα κυκλικὸν πηνίον φέρει* 1 000 *σπείρας, ἡ δὲ μέση περιφέρειά του ἔχει διάμετρον* $\Delta = 30$ cm. — *1) Τὸ πηνίον τυλίσσεται ἀκριβῶς ἐπὶ τοῦ ἐκ μαλακοῦ σιδήρου πυρῆνος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ διαβιβάσωμεν διὰ τοῦ πηνίου, ἐὰν θέλωμεν νὰ ἔχωμεν μαγνητικὴν ἐπαγωγὴν* $B = 18\,000$ gauss. — *2) Εἰς τὸν πυρῆνα τοῦ προηγουμένου πηνίου δημιουργοῦμεν διάκενον, μήκους* 1 cm. *Ὁ ἀριθμὸς τῶν σπειρῶν δὲν μεταβάλλεται. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ διαβιβασθῇ τώρα διὰ τοῦ πηνίου, ἂν θέλωμεν νὰ ἔχωμεν τὴν αὐτὴν μαγνητικὴν ἐπαγωγὴν* $B = 18\,000$ gauss. *Μαγνητικὴ διαπερατότης σιδήρου* $\mu = 80$.

1) Τὸ μῆκος l τοῦ μαγνητικοῦ κυκλώματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ μῆκος τῆς μέσης περιφερείας τοῦ πηνίου, δηλαδὴ εἶναι: $l = \pi\Delta = 30\pi$ cm.

Ἐὰν E εἶναι ἡ μαγνητικὴ τάσις τοῦ κυκλώματος καὶ R ἡ μαγνητικὴ ἀντίστασις αὐτοῦ, τότε ἔχομεν: $E = \Phi R$ ἢ $\frac{4\pi}{10} NI = \Phi \times \frac{l}{\mu\,\sigma}$. (1)

Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι εἶναι: $\Phi = B\sigma$.

Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν (1) δίδει τὴν ζητουμένην ἔντασιν I τοῦ ῥεύματος:

$$I = \frac{10}{4\pi} \times \frac{B}{N} \times \frac{l}{\mu} = \frac{10 \times 18\,000 \times 30\pi}{4\pi \times 1\,000 \times 80} = 16{,}875 \text{ ampère}.$$

2) Ὅταν ὁ πυρὴν ἔχῃ διάκενον μήκους $l' = 1$ cm, τότε τὸ μῆκος τοῦ κυκλώματος ἐντὸς τοῦ σιδήρου γίνεται $l = (30\pi - 1)$ cm. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ μαγνητικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$R = \frac{l}{\mu\,\sigma} + \frac{l'}{\sigma}.$$

Ἐπομένως ἡ γνωστὴ σχέσις $E = \Phi R$ γράφεται:

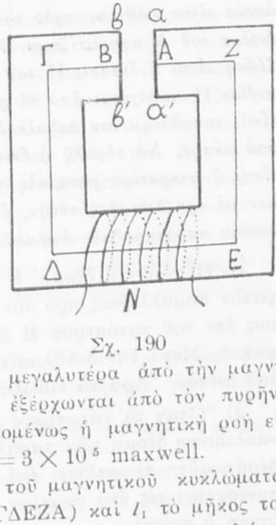
$$\frac{4\pi}{10} N I_1 = \Phi\left(\frac{l}{\mu\,\sigma} + \frac{l'}{\sigma}\right) = B\left(\frac{l}{\mu} + l'\right).$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I_1 = \frac{10}{4\pi} \times \frac{B}{N}\left(\frac{l}{\mu} + l'\right) = \frac{10 \times 18\,000}{4\pi \times 1000} \times \left(\frac{94.2}{80} + 1\right)$$

$$\text{ἢ} \qquad I_1 = \frac{9 \times 87.1}{8\pi} = 29{,}2 \text{ ampère}.$$

307.—*Ἕνα μαγνητικὸν κύκλωμα ἔχει σχῆμα τετραγώνου (σχ. 190). Ἑκάστη μέση πλευρά του εἶναι ΓΔ = 10 cm, ἡ δὲ τομὴ ἑκάστης πλευρᾶς του εἶναι αα′ = 20 cm². Ἡ μία πλευρὰ τοῦ τετραγώνου φέρει διάκενον, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος αβ = 1 cm. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΔΕ τυλίσσονται N = 1 000 σπεῖραι. Νὰ εὑρεθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον θὰ διαβιβασθῇ διὰ τοῦ πηνίου, ὥστε εἰς τὸ διάκενον νὰ ἔχωμεν μαγνητικὴν ἐπαγωγὴν B = 10 000 grauss, ἐὰν ὁ συντελεστὴς διασπορᾶς τῶν δυναμικῶν γραμμῶν εἰς τὸν ἀέρα εἶναι k = 1,5. Μαγνητικὴ διαπερατότης τοῦ σιδήρου μ = 400.*



Σχ. 190

Ἂν καλέσωμεν σ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς τομῆς αα′, τότε εἰς τὸ διάκενον θὰ ἔχωμεν μαγνητικὴν ροήν:

$$\Phi_1 = B\sigma = 10\,000 \times 20 \times 10^5 \text{ maxwell}.$$

Εἰς τὸν πυρῆνα ἡ μαγνητικὴ ροὴ Φ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν μαγνητικὴν ροὴν Φ_1 διότι, ὅταν αἱ δυναμικαὶ γραμμαὶ ἐξέρχωνται ἀπὸ τὸν πυρῆνα εἰς τὸν ἀέρα, ὑφίστανται πάντοτε διασποράν. Ἐπομένως ἡ μαγνητικὴ ροὴ εἰς τὸν πυρῆνα εἶναι: $\Phi = k\,\Phi_1 = 1{,}5 \times 2 \times 10^5 = 3 \times 10^5$ maxwell.

Ἃς καλέσωμεν l τὸ ἐντὸς τοῦ πυρῆνος μῆκος τοῦ μαγνητικοῦ κυκλώματος (δηλαδὴ τὸ μῆκος τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΒΓΔΕΖΑ) καὶ l_1 τὸ μῆκος τοῦ κυκλώματος ἐντὸς τοῦ ἀέρος. Τὰ δύο αὐτὰ τμήματα τοῦ μαγνητικοῦ κυκλώματος ἔχουν ἀντιστοίχως μαγνητικὴν ἀντίστασιν:

$$R_\Pi = \frac{l}{\mu\,\sigma} = \frac{39}{8 \times 10^3} \qquad R_\Delta = \frac{l_1}{\sigma} = \frac{1}{20}$$

Ἡ δὲ μαγνητικὴ τάσις εἶναι: $E = \frac{4\pi}{10} N I = 1{,}25\, N I$ gilbert.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ θεωρουμένου μαγνητικοῦ κυκλώματος ὁ τύπος τοῦ Hopkinson γράφεται: $E = \Phi R_\Pi + \Phi_1 R_\Delta$.

Ἄρα ἔχομεν τὴν σχέσιν: $1{,}25\, N I = \Phi R_\Pi + \Phi_1 R_\Delta$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἔντασιν τοῦ ρεύματος:

$$I = \frac{1}{1{,}25\ N}\left(\Phi\ R_{\Pi} + \Phi_1\ R_{\Delta}\right)$$

ἤτοι $$I = \frac{1}{1{,}25 \times 10^3}\left(\frac{3 \times 10^5 \times 39}{8 \times 10^3} + \frac{2 \times 10^5 \times 1}{20}\right) = 9{,}17 \text{ ampère.}$$

308.— *Μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη, στρεπτὴ περὶ κατακόρυφον ἄξονα φέρει μικρὸν ἐπίπεδον κάτοπτρον Μ κατακόρυφον. Ἐπὶ τῆς βελόνης ἐνεργεῖ μόνον ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου* $H_0 = 0{,}2$ gauss. *Δι' ἑνὸς συγκλίνοντος φακοῦ Λ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 1 m, ἀφήνομεν νὰ προσπέσῃ καθέτως ἐπὶ τοῦ κατόπτρου Μ δέσμη παραλλήλων ἀκτίνων, τὴν ὁποίαν πραγματοποιοῦμεν θέτοντες ἕνα φωτεινὸν σημεῖον Α εἰς τὴν ἑστίαν τοῦ φακοῦ. — 1) Ποῦ σχηματίζεται τὸ εἴδωλον* A_1 *τοῦ σημείου Α; — 2) Ἡ βελόνη στρέφεται κατὰ γωνίαν ἴσην μὲ 1/100 τοῦ ἀκτινίου παρασύρουσα καὶ τὸ κάτοπτρον Μ. Ποῦ σχηματίζεται τὸ νέον εἴδωλον* A_2 *τοῦ Α; Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις* A_1A_2. *— 3) Ἐπὶ τῆς βελόνης ἐνεργεῖ ἐκτὸς τοῦ πεδίου* H_0 *καὶ ἄλλο μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως Η ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρὸς τὴν* H_0 *καὶ ὁριζοντία. Ἡ βελόνη ἐκτρέπεται καὶ τὸ εἴδωλον τοῦ Α σχηματίζεται εἰς τὸ* A_3. *Ἡ ἀπόστασις* A_1A_3 *εἶναι ἴση μὲ 3,4 cm. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις Η τοῦ δευτέρου μαγνητικοῦ πεδίου; — 4) Τὸ μαγνητικὸν πεδίον Η παράγεται ἀπὸ τὸ ρεῦμα τὸ διαρρέον εὐθύγραμμον σύρμα ΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τοποθετημένον παραλλήλως πρὸς τὴν βελόνην καὶ εἰς ἀπόστασιν* d = 5 cm *ἀπὸ αὐτήν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ σύρμα. Πόση εἶναι ἡ μικροτέρα μεταβολὴ τῆς ἐντάσεως Ι τὴν ὁποίαν ἠμποροῦμε νὰ διαπιστώσωμεν μὲ τὴν διάταξιν αὐτήν, ἂν ἡ μικροτέρα μετατόπισις τοῦ εἰδώλου τοῦ Α, τὴν ὁποίαν παρατηροῦμεν ἀσφαλῶς, εἶναι 0,5 mm;*

1) Ἡ φωτεινὴ δέσμη, ἡ προερχομένη ἐκ τοῦ σημείου Α, ἐξέρχεται ἀπὸ τὸν φακὸν παραλλήλως πρὸ τὸν κύριον ἄξονα τοῦ φακοῦ καὶ προστίπτουσα καθέτως ἐπὶ τοῦ κατόπτρου Μ ἐπιστρέφει παράλληλος πρὸς τὸν κύριον ἄξονα τοῦ φακοῦ. Μετὰ τὴν διάθλασίν της διὰ τοῦ φακοῦ συγκεντρώνεται εἰς τὴν ἑστίαν τοῦ φακοῦ. Ἄρα τὸ εἴδωλον A_1 συμπίπτει μὲ τὸ φωτεινὸν σημεῖον Α.

2) Ὅταν τὸ κάτοπτρον στραφῇ κατὰ γωνίαν $\alpha = 0{,}01$ ἀκτινίου, τότε ἡ ἀνακλωμένη δέσμη τῶν παραλλήλων ἀκτίνων στρέφεται κατὰ γωνίαν 2α. Ἡ δέσμη αὕτη προσπίπτει ἐπὶ τοῦ φακοῦ καὶ μετὰ τὴν διάθλασίν της δι' αὐτοῦ συνέρχεται εἰς ἕνα σημεῖον A_2 τοῦ ἑστιακοῦ ἐπιπέδου τοῦ φακοῦ. Τότε θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$A_1A_2 = \varphi\ .\ \text{εφ}\ 2\alpha$$

ὅπου φ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ. Ἐπειδὴ ἡ γωνία 2α εἶναι πολὺ μικρά, εὑρίσκομεν: $$A_1A_2 = \varphi \times 2\alpha = 100 \times 0{,}02 = 2 \text{ cm.}$$

3) Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς συνισταμένης τῶν δύο πεδίων H_0 καὶ Η ἡ βελόνη ἰσορροπεῖ εἰς νέαν θέσιν, σχηματίζουσαν γωνίαν β μὲ τὴν παλαιὰν θέσιν ἰσορροπίας. Κατὰ γωνίαν β ἐστράφη καὶ τὸ κάτοπρον Μ, ὁπότε θὰ ἰσχύῃ πάλιν ἡ σχέσις:

$$A_1A_3 = \varphi \times 2\beta \cdot \quad \text{ἄρα} \quad \beta = A_1A_3 : 2\varphi = 3{,}4 : 200 = 0{,}017 \text{ ἀκτινίου.}$$

Εἰς τὴν νέαν θέσιν ἰσορροπίας τῆς βελόνης ἰσχύει ἡ γνωστὴ σχεσις μεταξὺ τῶν ἐντάσεων τῶν πεδίων: $H = H_0\ \text{εφ}\ \beta$.

Ἂν ἀντὶ τῆς ἐφαπτομένης λάβωμεν αὐτὴν τὴν γωνίαν, θὰ εὕρωμεν :

$$H = H_0\, \beta = 0{,}2 \times 0{,}017 = 0{,}0034 \text{ gauss}.$$

4) Ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον παράγει ἕνα ἀπεριόριστον εὐθύγραμμον ρεῦμα, εἶναι : $H = \dfrac{2\,I}{10\,d}$.

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I = 5\,H\,d = 5 \times 0{,}0034 \times 5 = 0{,}085 \text{ ampère} = 85 \text{ mA}.$$

Ἂν ἡ ἔντασις αὐτὴ μεταβληθῇ κατὰ ΔΙ, τὸ μαγνητικὸν πεδίον μεταβάλλεται κατὰ ΔΗ, ἡ γωνία β κατὰ Δβ καὶ ἡ ἀπόστασις $A_1A_3 = \varepsilon$ κατὰ Δε. Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω εὑρεθείσας σχέσεις εὔκολα εὑρίσκομεν ὅτι αἱ θεωρούμεναι μεταβολαὶ ΔΙ, ΔΗ, Δβ, Δε συνδέονται μεταξύ των διὰ τῆς σχέσεως :

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta \beta}{\beta} = \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon}.$$

Ἄρα ἡ μικροτέρα μεταβολὴ ἐντάσεως τὴν ὁποίαν ἠμποροῦμε νὰ μετρήσωμεν εἶναι : $\Delta I = I\,\dfrac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = 85 \times \dfrac{0{,}5}{34} = 1{,}25$ milliampère.

309. — *Ἕνα τετράγωνον πλαίσιον, κινητὸν περὶ κατακόρυφον ἄξονα, ἔχει πλευρὰν 2 cm. Πέριξ αὐτοῦ εἶναι τυλιγμένον μεταλλικὸν σύρμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζει 10 σπείρας. Τὸ πλαίσιον εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον ἑνὸς πηνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν ἄξονά του ὁριζόντιον, ἔχει μῆκος 1m καὶ φέρει 1 000 σπείρας. Τὸ πηνίον καὶ τὸ πλαίσιον εἶναι συνδεδεμένα κατὰ σειράν. Διαβιβάζομεν διὰ τοῦ πηνίου καὶ τοῦ πλαισίου τὸ αὐτὸ ρεῦμα. — 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις ἡ ὁποία δίδει τὴν ἔντασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐντὸς τοῦ πηνίου συναρτήσει τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος. — 2) Ὅταν τὸ ἐπίπεδον τοῦ πλαισίου εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ πηνίου, νὰ εὑρεθῇ : α) συναρτήσει τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους τὸ ὁποῖον ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ κινητοῦ πλαισίου· β) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ πηνίον καὶ τὸ πλαίσιον, ὅταν ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους, τὸ ὁποῖον ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ πλαισίου, εἶναι ἴση μὲ 201,06 μονάδας C.G.S.*

1) Τὸ πηνίον ἔχει κατὰ ἑκατοστόμετρον $\nu = 1\,000 : 100 = 10$ σπείρας. Ἐὰν Ι εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς ampère, τότε ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐντὸς τοῦ πηνίου εἶναι : $H = \dfrac{4\,\pi}{10}\,\nu\,I = \dfrac{4\,\pi}{10} \times 10 \times I = 4\,\pi\,I$ gauss.

2) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ πλαισίου, αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, ἐνεργοῦν δυνάμεις, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι :

$$F = \frac{1}{10}\,\nu\,H\,I\,l = \frac{1}{10} \times 10 \times 4\,\pi\,I^2 \times 2 = 8\,\pi\,I^2 \text{ δύναι.}$$

Ἡ ζητουμένη ροπὴ τοῦ ζεύγους εἶναι :

$$\Gamma = F\,.\,l = 8\,\pi\,I^2 \times 2 = 16\,\pi\,I^2 \text{ μονάδες C.G.S.}$$

Ἐὰν εἶναι Γ = 201,06 C.G.S. τότε εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$I = \sqrt{\frac{\Gamma}{16\,\pi}} = \sqrt{\frac{201{,}06}{50{,}24}} = 2 \text{ ampère.}$$

310 — *Μία ράβδος χαλκοῦ ΑΒ ἠμπορεῖ νὰ κυλίεται ἐπὶ δύο χαλκίνων ἀγωγῶν ΓΓ′ καὶ ΔΔ′, τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα Γ καὶ Δ συνδέονται μὲ τοὺς πόλους μιᾶς* *γεννητρίας· αὕτη ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* 10 volt *καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* 0,12 ohm. *Οἱ χάλκινοι ἀγωγοὶ ἔχουν τομὴν* 0,5 cm², *μῆκος* ΑΔ = ΒΓ = 50 cm *καὶ* ΑΒ = 20 cm. *Εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ*: ρ = 1,6 microhm — cm. *Τὸ χάλκινον σύρμα* ΓΔ *ἔχει μῆκος* 50 cm *καὶ τομὴν* 0,5 mm². — *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον κυκλοφορεῖ εἰς τὸ κύκλωμα.— 2) Τοποθετοῦμεν ἕνα πεταλοειδῆ μαγνήτην* N S *ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα* 191. *Τὰ σκέλη του ἔχουν πλάτος* 10 cm, *μεταξὺ δὲ αὐτῶν παράγεται ὁμογενὲς μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως* 100 gauss. *Τί παρατηροῦμεν, ἂν ἡ ράβδος* ΑΒ *εἶναι ἐλευθέρα; Εἰς τὸ μέσον τῆς ράβδου στερεώνομεν νῆμα τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τροχαλίας. Ποῖον βάρος* β *πρέπει νὰ ἐξαρτήσωμεν εἰς τὸ ἄκρον τοῦ νήματος διὰ νὰ ἀκινητοποιήσωμεν τὴν ράβδον* ΑΒ; g = 981 C.G.S.— *3) Ἀντικαθιστῶμεν τὸ βάρος* β *μὲ σπειροειδὲς ἐλατήριον τὸ ὁποῖον ἐβαθμολογήθη προηγουμένως διὰ τῶν ἀκολούθων μετρήσεων:*

φορτία :	0 gr*	5 gr*	10 gr*	15 gr*	20 gr*
ἐπιμήκυνσις τοῦ ἐλατηρίου :	20 cm	20,8 cm	21,6 cm	22,4 cm	23,2 cm.

Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἐπιμήκυνσις τοῦ ἐλατηρίου.

1) Ἡ ὅλη ἀντίστασις τῶν τριῶν ράβδων ΔΑ, ΑΒ, ΓΒ εἶναι:

$$R = \rho\frac{l}{\sigma} = \frac{1,6}{10^6}\times\frac{120}{0,5} = \frac{384}{10^6}\ \text{ohm}.$$

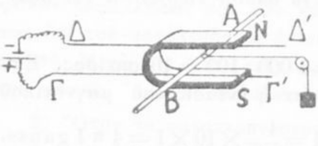
Τὸ σύρμα ΓΔ ἔχει ἀντίστασιν: $R' = \rho\frac{l'}{\sigma'} = \frac{1,6}{10^6}\times\frac{50}{0,005} = \frac{16}{10^3}$ ohm.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀντίστασις R εἶναι ἀσήμαντος ἐν σχέσει πρὸς τὰς ἀντιστάσεις r = 0,12 ohm τῆς γεννητρίας καὶ R′ τοῦ σύρματος ΓΔ. Ἄρα ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι: $R_1 = 0,12 + 0,016 = 0,136$ ohm.

Τὸ κύκλωμα διαρρέεται λοιπὸν ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I = E : R_1 = 10 : 0,136 = 73,5\ \text{ampère}.$$

2) Ἕνα τμῆμα τῆς ράβδου ΑΒ ἴσον μὲ 10 cm, εὑρίσκεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν διεύθυνσις εἶναι κατακόρυφος, ἡ δὲ ἔντασίς του εἶναι: H = 100 gauss. Ἄρα ἐπὶ τῆς ράβδου ΑΒ ἐνεργεῖ μία δύναμις F ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ὁρίζουν ἡ ΑΒ καὶ ἡ H, δηλαδὴ ἡ F εἶναι ὁριζοντία.



Σχ. 191

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ σχήματος τὸ ρεῦμα διαρρέει τὴν ΑΒ διευθυνόμενον πρὸς τὰ ὄπισθεν, ἡ δὲ H ἔχει διεύθυνσιν πρὸς τὰ κάτω. Σύμφωνα λοιπὸν μὲ τὸν κανόνα τοῦ Ampère ἡ δύναμις F διευθύνεται πρὸς τὰ ἀριστερά, ἔχει δὲ ἔντασιν:

$$F = 0,1\times 100\times 10\times 73,5 = 7\,350\ \text{δύναι}.$$

Ἂν ἡ ράβδος εἶναι ἐλευθέρα, ἡ δύναμις F σύρει τὴν ράβδον. Διὰ νὰ ἰσορροπήσωμεν τὴν F πρέπει νὰ ἐξαρτήσωμεν εἰς τὸ ἄκρον τοῦ νήματος ἕνα βάρος β: $\beta = 7\,350 : 981 = 7,49$ gr.*

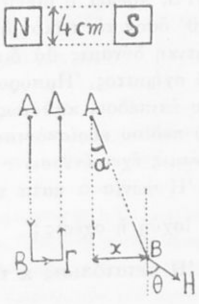
3) Παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις:

αὔξησις τοῦ φορτίου κατὰ	5 gr*	ἐπιμήκυνσις κατὰ	0,8 cm
—	10 —	—	2 × 0,8 —
—	15 —	—	3 × 0,8 —
—	20 —	—	4 × 0,8 —

Ἄρα ἡ ἐπιμήκυνσις τοῦ ἐλατηρίου εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ φορτίον. Ὥστε δι' ἕλξιν $\beta = 7{,}49$ gr* θὰ ἔχωμεν ἐπιμήκυνσιν :

$$\Delta\, l = 0{,}8 \times \frac{7{,}49}{5} = 1{,}20 \text{ cm} .$$

311.— *Ἕνα σύρμα ΒΓ, εὐθύγραμμον καὶ ἀνθεκτικόν, μήκους* $l = 10$ cm *καὶ διαμέτρου* $\delta = 1{,}5$ mm *ἐξαρτᾶται μὲ δύο μεταλλικὰ σύρματα* ΑΒ *καὶ* ΓΔ *τὰ ὁποῖα εἶναι ἀπείρως εὔκαμπτα, ἔχουν μῆκος* 1 m *καὶ μᾶζαν ἀσήμαντον. Διαβιβάζομεν ρεῦμα κατὰ τὴν φορὰν* ΑΒΓΔ. *Πεταλοειδὴς μαγνήτης δημιουργεῖ μεταξὺ τῶν βραχιόνων του ὁμοιόμορφον μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως* $H = 400$ gauss. *Τὸ πεδίον τοῦτο ὑποθέτομεν ὅτι περιορίζεται μόνον μεταξὺ τῶν δύο βραχιόνων τοῦ μαγνήτου, οἱ ὁποῖοι ἔχουν πάχος* 4 cm.— *1) Νὰ εὑρεθῇ πῶς πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ὁ μαγνήτης ὥστε τὸ τμῆμα* ΒΓ *νὰ ἠμπορῇ νὰ ἀνυψωθῇ ἀπὸ μίαν κατακόρυφον ἠλεκτρομαγνητικὴν δύναμιν. Νὰ ὑπολογισθῇ πόση εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἔντασις τοῦ ρεύματος διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι δυνατὸν νὰ παρατηρηθῇ αὐτὴ ἡ ἀνύψωσις.—2) Νὰ εὑρεθῇ πῶς πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ὁ μαγνήτης ὥστε τὸ τμῆμα* ΒΓ *νὰ ἀπομακρυνθῇ κατὰ γωνίαν* α *ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον* ΑΒΓΔ *ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μιᾶς ἠλεκτρομαγνητικῆς δυνάμεως καθέτου πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο. Ἐὰν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι* 0,1 ampère, *νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μετατόπισις* x *τοῦ σύρματος* ΒΓ.— *3) Νὰ εὑρεθῇ πῶς πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ὁ μαγνήτης, ὥστε ἐπὶ τοῦ σύρματος νὰ μὴ ἀσκῆται καμμία ἐπίδρασις.—4) Δίδεται εἰς τὸν μαγνήτην τοιαύτη θέσις ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου* H *νὰ εἶναι κάθετος πρὸς τὸ σύρμα* ΒΓ, *ἀλλὰ καὶ νά σχηματίζῃ γωνίαν* θ *μὲ τὴν κατακόρυφον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γενικὴ σχέσις ἡ ὁποία δίδει τὴν* $\varepsilon\varphi\, \alpha$ *συναρτήσει τῆς* θ.— *5) Ἀπομακρύνομεν τὸν μαγνήτην καὶ τοποθετοῦμεν τὸ σύρμα* ΒΓ *ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ σύρμα τοῦτο ἠμπορεῖ νὰ μετατοπισθῇ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, ὅταν ἡ μετατόπισις εἶναι* 1 mm.



Σχ. 192

Πυκνότης τοῦ χαλκοῦ : $d = 8{,}85$ gr/cm³. *Ἔντασις τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου ;* 0,2 gauss. *Ἔγκλισις :* $\varepsilon = 64^{0}\, 45'$.$g = 981$ C.G.S.

1) Τὸ σύρμα πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ ὁποίου ἡ ἔντασις νὰ εἶναι ὁριζοντία. Οἱ βραχίονες τοῦ μαγνήτου πρέπει νὰ εἶναι ὁριζόντιοι, παράλληλοι πρὸς τὸ σύρμα ΒΓ, οὕτως ὥστε ὁ βόρειος πόλος νὰ εἶναι ἔμπροσθεν τοῦ σχήματος, ὁ δὲ νότιος πόλος ὄπισθεν αὐτοῦ. Τὸ σύρμα ἀνυψώνεται ὅταν ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις γίνῃ μεγαλυτέρα ἀπὸ τὸ βάρος τοῦ σύρματος. Ἡ μᾶζα τοῦ σύρματος ΒΓ εἶναι :

$$m = \pi \frac{\delta^2}{4}\, l d = 3{,}14 = \frac{0{,}15^2}{4} \times 10 \times 8{,}85 = \frac{3{,}14}{2} = 1{,}58 \text{ gr}.$$

Ἐξ ἄλλου ἡ ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις εἶναι :

$$E = 0{,}1\, H I l = 0{,}1 \times 400 \times I \times 10 = 400\, I \cdot$$

τὸ γήϊνον μαγνητικὸν πεδίον παραλείπεται.

Ἡ ζητουμένη ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι τοιαύτη ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$F = mg$ ἤτοι $400\,I = 1{,}57 \times 981 = 1\,540$· ἄρα $I = 3{,}85$ ampère.

Ἠμποροῦμεν ὅμως νὰ τοποθετήσωμεν τὸν μαγνήτην οὕτως ὥστε οἱ πόλοι του νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ ΒΓ. Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅμως αὐτὴν ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου θὰ εὑρίσκεται μῆκος τοῦ ΒΓ ἴσον μόνον μὲ 4 cm. Ἐπομένως ἡ ζητουμένη ἔντασις τοῦ ρεύματος θὰ εἶναι: $I' = \frac{10}{4} I = \frac{10 \times 3{,}85}{4} = 9{,}6$ ampère.

2) Διὰ νὰ εἶναι ἡ ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις καθέτος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ, πρέπει ἡ διεύθυνσις τοῦ πεδίου τοῦ μαγνήτου νὰ εἶναι κατακόρυφος. Καθ' ὅσον τὸ πεδίον διευθύνεται πρὸς τὰ ἄνω ἢ πρὸς τὰ κάτω, ἡ ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις θὰ διευθύνεται πρὸς τὸ ἔμπροσθεν ἢ πρὸς τὸ ὄπισθεν μέρος τοῦ σχήματος. Ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ θέσωμεν τὸν μαγνήτην ἐντὸς κατακορύφου ἐπιπέδου, καθέτως πρὸς τὸ σύρμα ΒΓ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐντὸς τοῦ πεδίου εὑρίσκονται 4 cm τοῦ σύρματος καὶ ἡ ὁριζοντία ἠλεκρομαγνητικὴ δύναμις ἔχει ἔντασιν: $f = 0{,}1 \times 400 \times 0{,}1 \times 4 = 16$ δύναι.

Ἡ γωνία α κατὰ τὴν ὁποίαν ἐκτρέπεται τὸ κύκλωμα εἶναι τοιαύτη, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις: $\text{εφ}\,\alpha = \frac{f}{mg} = \frac{16}{1{,}57 \times 981}$.

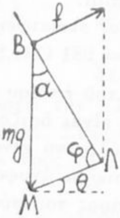
Ἡ μετατόπισις x τοῦ σύρματος εἶναι.

$$x = AB\ \text{ημ}\,\alpha = \frac{100 \times 16}{1{,}57 \times 981} = 1{,}04 \text{ cm}$$

λαμβάνοντες κατὰ προσέγγισιν τὸ ἡμίτονον τῆς μικρᾶς γωνίας α ἴσον μὲ τὴν ἐφαπτομένην.

3) Διὰ νὰ μὴ ὑφίσταται τὸ σύρμα ΒΓ καμμίαν ἐπίδρασιν, πρέπει, τὸ σύρμα νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου. Ὁ μαγνήτης πρέπει νὰ τοποθετηθῇ οὕτως ὥστε οἱ βροχιόνές του νὰ εἶναι κατακόρυφοι, τὸ δὲ σύρμα ΒΓ νὰ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν πόλων τοῦ μαγνήτου κατὰ μῆκος μιᾶς δυναμικῆς γραμμῆς τοῦ πεδίου. Τοῦτο ὅμως δὲν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ παρὰ μόνον ἐὰν ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλων εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ 10 cm, δηλαδὴ μεγαλυτέρα ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ σύρματος ΒΓ.

4) Ἐὰν τὸ πεδίον Η διατηρηθῇ κάθετον πρὸς τὸ σύρμα, ἡ ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις διατηρεῖ τὴν τιμὴν f τὴν ὁποίαν εὕρομεν εἰς τὴν δευτέραν παράγραφον. Ἀλλ' ἡ δύναμις αὐτὴ σχηματίζει τώρα γωνίαν θ μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, ἑπομένως σχηματίζει μὲ τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον γωνίαν $\beta = 90^o - \theta$. Ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων f καὶ mg ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ ΑΒ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΛΜ ἡ γωνία φ ἔχει τὴν τιμήν: $\varphi = \pi - (\alpha + \beta) = 90^o - \alpha + \theta$.



Σχ. 193

Ἔχομεν λοιπὸν τὴν σχέσιν:

$$\frac{f}{\text{ημ}\,\alpha} = \frac{mg}{\text{ημ}\,\varphi} \quad \text{ἢ} \quad \frac{f}{\text{ημ}\,\alpha} = \frac{mg}{\text{συν}(\alpha - \theta)}.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν, ἂν ἀναπτύξωμεν τὸ $\text{συν}(\alpha - \theta)$, εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην σχέσιν: $\text{εφ}\,\alpha = \frac{16\,\text{συν}\,\theta}{1\,540 - 16\,\text{ημ}\,\theta}$.

5) Τὸ γήϊνον μαγνητικὸν πεδίον Η σχηματίζει μὲ τὸ ρεῦμα ΒΓ γωνίαν Ε ἴσην μὲ τὴν ἔγκλισιν. Ἐπειδὴ τὸ πεδίον καὶ τὸ ρεῦμα εὑρίσκονται ἐπὶ ἐπιπέ-

δου κατακορύφου, ἕπεται ὅτι ἡ ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις εἶναι ὁριζοντία καὶ ἔχει τιμήν: $f' = 0{,}1\,H\,I\,l\,ημ\,ε$ ·
ἢ ἂν H_0 εἶναι ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου:

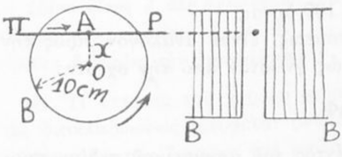
$$f' = 0{,}1\,H_0\,I\,l\,εφ\,ε = 0{,}1 \times 0{,}2 \times I \times 10 \times 2{,}12 = 0{,}424\,I\,.$$

Ἡ γωνία α, τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ κύκλωμα μὲ τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον, εἶναι τοιαύτη ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις: $εφ\,α = \dfrac{f'}{mg} = \dfrac{0{,}424\,I}{1\,540}\,.$

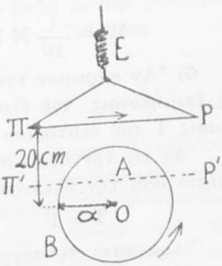
Ἐξ ἄλλου ὅμως ἔχομεν καὶ τὴν σχέσιν: $ημ\,α = \dfrac{0{,}1}{100} = \dfrac{1}{1\,000}\,.$

Ἄρα $\dfrac{0{,}424\,I}{1\,540} = \dfrac{1}{1\,000}$ ἤτοι $I = \dfrac{1{,}54}{0{,}424} = 3{,}63$ ampère.

312.— *Ἕνα πολὺ μακρὸν πηνίον* B *εἶναι ὁριζόντιον καὶ ἔχει τομὴν κυκλικὴν ἀκτῖνος* 10 cm. *Διὰ μιᾶς πολὺ λεπτῆς σχισμῆς, ἐπιπέδου καὶ καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ πηνίου, τοῦτο διαιρεῖται εἰς δύο τμήματα. Τὸ πηνίον φέρει* 80 *σπείρας κατὰ ἑκατοστόμετρον. Ἑκάστη σπεῖρα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως* 10 ampère. *Δεχόμεθα ὅτι εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πηνίου τὸ μαγνητικὸν πεδίον εἶναι ὁμοιόμορφον, ἐκτὸς δὲ τοῦ πηνίου τὸ πεδίον εἶναι μηδέν. Ἐντὸς τῆς σχισμῆς ἠμπορεῖ νὰ κινῆται ὁριζοντία ράβδος* ΠΡ, *ἡ ὁποία διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως* 10 ampère. *Αἱ φοραὶ τῶν ρευμάτων δίδονται εἰς τὸ σχῆμα* 194.— *1) Ἐὰν* x *εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς ράβδου* ΠΡ *ἀπὸ τὸν ἄξονα τοῦ πηνίου, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς δυνάμεως* F, *ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς* ΠΡ. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς* F *διὰ* x = 0. *2) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς δυνάμεως, ὅταν ἡ ράβδος* ΠΡ *μετακινῆται ἐντὸς τῆς σχισμῆς παραλλήλως πρὸς ἑαυτὴν ἀπὸ τὸ ἕνα ἄκρον τοῦ πεδίου ἕως τὸ ἄλλο. — 3) Ἡ ράβδος* ΠΡ *ἐξαρτᾶται ἀπὸ δυναμόμετρον οὕτως ὥστε νὰ εὑρίσκεται* 20 cm *ὑψηλότερα ἀπὸ τὸν ἄξονα* O *(σχ. 195). Ἡ τάσις τοῦ ἐλατηρίου* E *αὐξάνεται κατὰ* 500 *δύνας διὰ κάθε ἐπιμήκυνσιν κατὰ* 1 cm. *Ἐπιμηκύνοντες τὸ ἐλατήριον, φέρομεν τὴν* ΠΡ *ἐντὸς τῆς σχισμῆς καὶ εἰς τοιαύτας θέσεις ὥστε ἡ τάσις τοῦ ἐλατηρίου νὰ ἰσορροπῇ τὴν ἠλεκτρομαγνητικὴν δύναμιν* F. *Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ* x *διὰ τὰς θέσεις αὐτὰς τῆς ἰσορροπίας.*



Σχ. 194



Σχ. 195

1) Τὸ ὁμοιόμορφον μαγνητικὸν πεδίον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πηνίου ἔχει ἔντασιν: $H = \dfrac{4\,\pi}{10}\,ν\,I = \dfrac{4\,\pi}{10} \times 80 \times 10 = 320\,\pi$ gauss.

Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ρεῦμα τοῦ σχήματος 194 εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος, τότε ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καὶ ἔχει φορὰν ἐκ τῶν ὄπισθεν πρὸς τὰ ἔμπροσθεν. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος εὑρίσκεται τότε καὶ ὁ ἀγωγὸς ΠΡ, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἀναπτύσσεται μία ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις F, ἐφαρμοζομένη εἰς τὸ μέσον τοῦ ἀγωγοῦ ΠΡ. Ἡ δύναμις F εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ὁρίζουν ἡ ἔντασις H τοῦ πεδίου καὶ ὁ ἀγωγὸς ΠΡ. Ἄρα ἡ F εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος καὶ σύμφωνα μὲ τὸν κανόνα τοῦ παρατηρητοῦ τοῦ Ampère διευθύνεται πρὸς τὰ κάτω. Ἡ τιμὴ τῆς ἐντάσεως τῆς F εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Laplace: $F = \frac{1}{10} HI\,l = 320\,\pi\,l$ δύναι.

Ἂς ὀνομάσωμεν x τὴν ἀπόστασιν ΟΑ, λαμβάνοντες ὡς θετικὴν τὴν κατακόρυφον πρὸς τὰ ἄνω φοράν. Τότε εὑρίσκομεν ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ ἀγωγοῦ ΠΡ, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, ἔχει μῆκος l ἴσον μέ:

$$l = 2\sqrt{\alpha^2 - x^2} = 2\sqrt{100 - x^2}.$$

Ἄρα ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως F εἶναι:

$$F = 640\,\pi\sqrt{100 - x^2} = 2\,010\sqrt{100 - x^2} \text{ δύναι.}$$

Διὰ $x = 0$, δηλαδὴ ὅταν ὁ ἀγωγὸς ΠΡ εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τοῦ πεδίου, ἡ τιμὴ τῆς δυνάμεως F εἶναι: $F = 20\,100$ δύναι.

2) Τὸ ἔργον τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς δυνάμεως εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς μαγνητικῆς ροῆς καὶ δίδεται ὡς γνωστὸν ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$W = \frac{1}{10} I\,\Delta\Phi.$$

Κατὰ τὴν μετακίνησιν τοῦ ἀγωγοῦ ΠΡ, ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου προκαλεῖται μεταβολὴ τῆς ροῆς:

$$\Delta\Phi = HS = 320\,\pi \times \pi\,\alpha^2 = 320\,\pi^2\,\alpha^2 = 32\,000\,\pi^2.$$

Ἄρα τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως F εἶναι:

$$W = \frac{1}{10} \times 10 \times 32\,000 \times 3{,}14^2 = 315\,800 \text{ ἔργια (περίπου).}$$

3) Ἂν φέρωμεν τὸν ἀγωγὸν ΠΡ εἰς ἀπόστασιν $ΟΑ = x$ ἀπὸ τὸ κέντρον Ο, ἡ ἐπιμήκυνσις τοῦ ἐλατηρίου εἶναι: $\varepsilon = (20 - x)$ ἑκατοστόμετρα. Τότε ἡ τάσις T τοῦ ἐλατηρίου γίνεται: $T = 500\,\varepsilon = 500\,(20 - x)$ δύναι.

Ἂν εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν τοῦ ἀγωγοῦ ΠΡ ἡ τάσις T τοῦ ἐλατηρίου ἰσορροπῆται ἀπὸ τὴν ἠλεκτρομαγνητικὴν δύναμιν F, τότε θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:

$$T = F \qquad \text{ἢ} \qquad 500\,(20 - x) = 2\,010\sqrt{100 - x^2}.$$

Ἄρα κατὰ προσέγγισιν: $17\,x^2 - 40\,x - 1\,200 = 0$.

Αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι:

$$x_1 = 9{,}6 \qquad \text{καὶ} \qquad x_2 = -7{,}2$$

Αἱ τιμαὶ αὐταὶ εἶναι παραδεκταί, διότι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν εἶναι μικρότεραι τοῦ 10, δηλαδὴ τῆς ἀκτῖνος α τοῦ πηνίου. Ὑπάρχουν λοιπὸν δύο θέσεις ἰσορροπίας τοῦ ἀγωγοῦ ΠΡ: α) εἰς ἀπόστασιν 9,6 cm ἄνωθεν τοῦ Ο καὶ β) εἰς ἀπόστασιν 7,2 cm κάτωθεν τοῦ Ο.

IX. ΟΡΓΑΝΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Γαλβανόμετρα ἀμπερόμετρα - βολτόμετρα

313.— *Ἕνα γαλβανόμετρον εἶναι βαθμολογημένον εἰς* ampère *καὶ φέρει διαιρέσεις ἀπὸ* 0 *ἕως* 10 ampère. *Μεταξὺ τῶν ἀκροδεκτῶν Α καὶ Β τοῦ γαλβανομέτρου παρεμβάλλεται βοηθητικὴ διακλάδωσις, ἡ ὁποία ἔχει ἀντίστασιν* $R_1 = 8$ ohm, *ὥστε διὰ τοῦ γαλβανομέτρου νὰ διέρχεται τὸ* 1/10 *τοῦ κυρίου ρεύματος. Οἱ ἀκροδέκται Α καὶ Β συνδέονται μὲ τοὺς δύο πόλους στήλης καὶ τότε τὸ γαλβανόμετρον δεικνύει* $I_1 = 4$ ampère. — *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ κυρίου ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ στήλη καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις R τοῦ γαλβανομέτρου.* — *2) Πόση εἶναι ἡ ὅλη ἀντίστασις, ἡ ὁποία παρεμβάλλεται εἰς τὸ κύκλωμα τῆς στήλης μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β;* — *3) Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν διακλάδωσιν;*

1) Ἡ ἔντασις τοῦ κυρίου ρεύματος εἶναι: $I = 40$ ampère. Ἐπειδὴ διὰ τῆς διακλαδώσεως διέρχεται ρεῦμα, τοῦ ὁποίου ἡ ἔντασις εἶναι 9 φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος ποὺ διέρχεται διὰ τοῦ γαλβανομέτρου, ἕπεται ὅτι ἡ ἀντίστασις R τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι 9 φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἀντίστασιν τῆς διακλαδώσεως. Ἄρα εἶναι: $R = 8 \times 9 = 72$ ohm.

2) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β εἶναι: $V = RI_1 = 72 \times 4 = 288$ volt. Ἄρα τὸ γαλβανόμετρον μαζὺ μὲ τὴν βοηθητικὴν ἀντίστασιν ἔχουν ἀντίστασιν: $R' = V : I = 288 : 40 = 7{,}2$ ohm.

3) Ἡ διακλάδωσις διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I_2 = 40 - 4 = 36 \text{ ampère.}$$

314.— *Μία συστοιχία συσσωρευτῶν ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E καὶ τροφοδοτεῖ ν λαμπτῆρας, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀντίστασιν r καὶ παρεμβάλλονται κατὰ διακλάδωσιν μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Β τοῦ κυκλώματος. Εἰς τὸ κύκλωμα ὑπάρχει καὶ γαλβανόμετρον Γ, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν R. Μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β τοποθετεῖται κατ' ἀρχὰς μόνον ἕνας λαμπτήρ. Τότε ἡ βελόνη τοῦ γαλβανομέτρου δεικνύει ἀπόκλισιν* α. *Ἔπειτα τοποθετοῦνται μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β οἱ ν λαμπτῆρες, καὶ μεταξὺ τῶν ἄκρων τοῦ γαλβανομέτρου παρεμβάλλεται κατὰ διακλάδωσιν μία βοηθητικὴ ἀντίστασις x, τοιαύτη ὥστε ἡ ἀπόκλισις τῆς βελόνης τοῦ γαλβανομέτρου νὰ εἶναι πάλιν* α. *Ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ ἀντίστασις x, νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς ν τῶν λαμπτήρων καὶ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β. Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς συστοιχίας παραλείπεται. Ἐφαρμογή:* $E = 200$ volt · $R = r = 100$ ohm · $x = 25$ ohm.

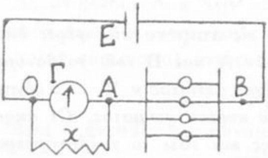
Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι: $I_1 = \dfrac{E}{R + r}$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις R_1 τοῦ γαλβανομέτρου καὶ τῆς διακλαδώσεως εἶναι:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{x} \quad \text{ἤτοι} \quad R_1 = \frac{Rx}{R+x}.$$

Οἱ ν λαμπτῆρες ἔχουν ἀντίστασιν: $\dfrac{r}{\nu}$.

Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Ohm εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν:



Σχ. 196

$$E = I_2\left(\frac{Rx}{R+x} + \frac{r}{\nu}\right).$$

Ἄρα ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν εἶναι:

$$I_2 = \frac{\nu E(R+x)}{\nu Rx + rR + rx}.$$

Ἐὰν I′ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ γαλβανόμετρον, τότε εἶναι:

$$I' = I_2 \frac{x}{R+x} = \frac{\nu Ex}{\nu Rx + rR + rx}.$$

Ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ ἀπόκλισις τῆς βελόνης εἶναι α, δηλαδὴ εἶναι: $I' = I$. Ἄρα ἔχομεν: $\dfrac{\nu Ex}{\nu Rx + rR + rx} = \dfrac{E}{R+x}$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν ν τῶν λαμπτήρων: $\nu = \dfrac{R+x}{x} = 1 + \dfrac{R}{x}$.

Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B εἶναι:

$$V_A - V_B = I_2 \times \frac{r}{\nu} = \frac{rE(R+x)}{\nu Rx + rR + rx}.$$

Ἐφαρμογή: $\nu = \dfrac{100+25}{25} = 5$ λαμπτῆρες. $V_A - V_B = 100$ volt.

315.—*Ἕνα κύκλωμα περιλαμβάνει: α) μίαν γεννήτριαν ἡ ὁποία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 2 volt καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,3 ohm. β) ἕνα γαλβανόμετρον τὸ ὁποῖον ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 499,5 ohm καὶ γ) ἀγωγοὺς διὰ τὴν σύνδεσιν τοῦ γαλβανομέτρου μὲ τὴν γεννήτριαν καὶ οἱ ὁποῖοι ἔχουν συνολικῶς ἀντίστασιν 0,2 ohm. Μεταξὺ τῶν ἀκροδεκτῶν τοῦ γαλβανομέτρου παρεμβάλλομεν διακλάδωσιν ἡ ὁποία ἔχει ἀντίστασιν 0,5 ohm. Τὸ γαλβανόμετρον φέρει κινητὸν πλαίσιον, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμου· αἱ πλευραὶ τοῦ πλαισίου εἶναι 5 καὶ 6 ἑκατοστόμετρα, τὸ δὲ πλαίσιον φέρει 100 σπείρας. Τὸ μαγνητικὸν πεδίον τοῦ μαγνήτου τοῦ γαλβανομέτρου ἔχει ἔντασιν H = 240 gauss, τὸ δὲ ζεῦγος στρέψεως τοῦ σύρματος εἶναι 7,2 gr* — cm κατὰ ἀκτίνιον. Νὰ εὑρεθῇ πόσον θὰ μετατοπισθῇ ὁ φωτεινὸς δείκτης ἐπὶ μιᾶς κλίμακος εὑρισκομένης εἰς ἀπόστασιν 1 μέτρου.*

Ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος, ὅταν δὲν ὑπάρχῃ ἡ διακλάδωσις τοῦ γαλβανομέτρου, εἶναι: $0{,}3 + 0{,}2 + 499{,}5 = 500$ ohm

Ἑπομένως ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι: $I = 2 : 500 = 0{,}004$ ampère.

Ἡ ἀντίστασις τῆς διακλαδώσεως εἶναι $499{,}5 : 0{,}5 = 999$ φορὰς μικροτέρα ἀπὸ τὴν ἀντίστασιν τοῦ γαλβανομέτρου. Ὥστε διὰ τοῦ γαλβανομέτρου διέρχεται μόνον τὸ 1/1000 τοῦ ὅλου ρεύματος. Ὅταν ὅμως παρεμβληθῇ εἰς τὸ κύκλωμα ἡ διακλάδωσις τοῦ γαλβανομέτρου, τότε ἡ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος γίνεται: $0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}5 = 1$ ohm καὶ ἐπομένως ἡ ὅλη ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι: $I' = 2 : 1 = 2$ ampère.

Ὥστε διὰ τοῦ γαλβανομέτρου διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως $I_1 = 0{,}002$ ampère. Ἐπὶ τοῦ πλαισίου τοῦ γαλβανομέτρου, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐπιφάνειαν $\sigma = 30$ cm², ἐνεργεῖ ζεῦγος τοῦ ὁποίου ἡ ροπὴ εἶναι:

$$\Gamma = \frac{1}{10}\,\nu\, H\, I_1\, \sigma = \frac{1}{10} \times 100 \times 240 \times 0{,}002 \times 30 = 144 \text{ C.G.S. (δύναι—cm)}$$

ἤ
$$\Gamma = \frac{144}{981} = 0{,}14 \text{ gr}^* - \text{cm}.$$

Ἕνα ζεῦγος, τὸ ὁποῖον ἔχει ροπὴν 7,2 gr*—cm, στρέφει τὸ πλαίσιον κατὰ 1 ἀκτίνιον. Ἄρα τὸ ζεῦγος, τὸ ὁποῖον ἔχει ροπὴν 0,14 gr*—cm, στρέφει τὸ πλαίσιον κατὰ γωνίαν: $\alpha = 0{,}14 : 7{,}2 = 0{,}02$ ἀκτινίου (περίπου).

Ἡ ἀκτίς, ἡ ἀνακλωμένη ἐπὶ τοῦ κατόπτρου τοῦ γαλβανομέτρου, στρέφεται κατὰ γωνίαν: $\beta = 2\alpha = 0{,}04$ ἀκτινίου, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς μεταλοιπὸν κατὰ γωνίαν: ... τόπισιν κατὰ 4 cm ἐπὶ τῆς κλίμακος τῆς εὑρισκομένης εἰς ἀπόστασιν 1 μέτρου.

316. — *Ἕνα γαλβανόμετρον ἀποτελεῖται ἀπὸ ὀρθογώνιον κινητὸν πλαίσιον τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει 500 σπείρας σύρματος χαλκίνου, διαμέτρου 0,1 mm. Τὸ ὕψος τοῦ πλαισίου εἶναι 4 cm καὶ τὸ πλάτος του 2 cm. Τὸ μαγνητικὸν πεδίον, ἐντὸς τοῦ ὁποίου στρέφεται τὸ πλαίσιον, ἔχει ἔντασιν 1 000 gauss. Τὸ πλαίσιον εἶναι στερεωμένον εἰς σύρματα στρέψεως τὰ ὁποῖα, ὅταν στρέφεται τὸ πλαίσιον, ἀναπτύσσουν ἕνα ἀνταγωνιζόμενον ζεῦγος ἀνάλογον πρὸς τὴν γωνίαν. Ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους τούτου εἶναι ἴση μὲ 20 μονάδας C.G.S. διὰ στροφὴν τοῦ πλαισίου κατὰ 1 ἀκτίνιον. Ἐπὶ τοῦ πλαισίου εἶναι στερεωμένον κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον τὸ ὁποῖον ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος 66 cm. Τὸ κάτοπτρον σχηματίζει τὸ πραγματικὸν εἴδωλον μιᾶς μικρᾶς εὐθείας ἐπὶ βαθμολογημένης κλίμακος, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ ὁποίου εἶναι καὶ τὸ κέντρον καμπυλότητος τοῦ κατόπτρου. Ἡ κλῖμαξ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν φωτεινὴν δέσμην, τὴν ὁποίαν ρίπτει ἐπ' αὐτῆς τὸ κάτοπτρον, ὅταν τὸ πλαίσιον δὲν διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα. — 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ σύρματος τοῦ πλαισίου, ὅταν τὸ φωτεινὸν εἴδωλον μετακινῆται κατὰ 1 cm ἐπὶ τοῦ κανόνος. — 2) Νὰ ὑπολογισθῇ πόση εἶναι τότε ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πλαισίου.*

Εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ $\rho = 1{,}8 \times 10^{-6}$ ohm—cm.

1) Ἡ ἀπόστασις τοῦ κατόπτρου ἀπὸ τὴν κλίμακα εἶναι 66 cm. Ἐὰν τὸ πλαίσιον στραφῇ κατὰ γωνίαν φ, ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς στρέφεται κατὰ διπλασίαν γωνίαν. Ἄρα ἔχομεν: $2\varphi = \dfrac{1}{66}$ καὶ $\varphi = \dfrac{1}{132}$ ἀκτινίου.

Ἐπὶ ἑκάστου κατακορύφου σύρματος τοῦ πλαισίου ἐνεργεῖ ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις:

$$f = \frac{1}{10}\, H I l = \frac{1}{10} \times 1\,000 \times I \times 4 = 400\, I$$

καὶ ἑπομένως ἐπὶ ἑκάστης κατακορύφου πλευρᾶς τοῦ πλαισίου ἐνεργεῖ δύναμις:

$$F = 500\, f = 500 \times 400\, I = 200\,000\, I \quad \text{δύναι.}$$

Αἱ δύο δυνάμεις, αἱ ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τῶν δύο κατακορύφων πλευρῶν τοῦ πλαισίου, ἀποτελοῦν ζεῦγος τοῦ ὁποίου ἡ ῥοπὴ εἶναι:

$$\Gamma = 200\,000\, I \times 2 = 400\,000\, I \quad \text{C.G.S.}$$

Τὸ ζεῦγος τοῦτο ἰσορροπεῖται ἀπὸ τὸ ἀναπτυσσόμενον ζεῦγος στρέψεως. Τότε ἰσχύει ἡ σχέσις: $\Gamma = k\,\alpha$

ὅπου k εἶναι ἡ δοθεῖσα σταθερὰ τῆς στρέψεως. Ἑπομένως εἶναι:

$$400\,000\, I = 20 \times \frac{1}{132}.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν τὴν ἔντασιν I τοῦ ρεύματος:

$$I = 0{,}38 \times 10^{-6} \text{ ampère} = 0{,}38 \text{ microampère}.$$

2) Ἡ ἀντίστασις R τοῦ σύρματος τοῦ πλαισίου εἶναι:

$$R = \rho \frac{l}{s} = \frac{1{,}8}{10^6} \times \frac{500 \times 12 \times 4}{\pi \times 0{,}0001} = 137{,}5 \text{ ohm}.$$

Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πλαισίου θὰ εἶναι:

$$V = RI = 137{,}5 \times 0{,}38 \times 10^{-6} = 52{,}25 \times 10^{-6} \text{ volt} = 52{,}25 \text{ microvolt}.$$

317 — *Ἕνα ἀμπερόμετρον μὲ κινητὸν πλαίσιον φέρει κλίμακα ἀπὸ 0 ἕως 100. Ἡ διαίρεσις 100 ἀντιστοιχεῖ εἰς στροφὴν τοῦ πλαισίου κατὰ 90°. Ἡ μεγίστη ἀπόκλισις ἐπιτυγχάνεται, ὅταν διὰ τοῦ ὀργάνου διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως 20 milliampère. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς ἀκροδέκτας εἶναι τότε ἴση μὲ V = 0,1 volt, ἂν ἡ θερμοκρασία εἶναι 15° C.— 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντίστασις R_{15} τοῦ πλαισίου εἰς 15° C.—2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντίστασις R τῆς διακλαδώσεως, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ ὄργανον τοῦτο, διὰ νὰ τὸ καταστήσωμεν ἱκανὸν νὰ μετρᾷ ρεύματα ἀπὸ 0 ἕως 20 ampère καὶ ἡ μεγίστη ἀπόκλισις 100 νὰ λαμβάνεται, ὅταν ἡ ἔντασις τοῦ κυρίου ρεύματος εἶναι 20 ampère.— 3) Ἡ ἀντίστασις τῆς διακλαδώσεως τοῦ ὀργάνου εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν θερμοκρασίαν. Τὸ πλαίσιον τοῦ ἀμπερομέτρου ἀποτελεῖται ἀπὸ χάλκινον σύρμα, τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστασις ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν θερμοκρασίαν σύμφωνα μὲ τὴν σχέσιν $R = R_{15}\,[1 + \alpha(\theta - 15)]$, ὅπου εἶναι $\alpha = 41 \times 10^{-4}$. Νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίαν τιμὴν τῆς ἐντάσεως τοῦ κυρίου ρεύματος, τὸ ἀμπερόμετρον θὰ δείξῃ 100, ὅταν ἡ ἐξωτερικὴ θερμοκρασία γίνῃ 20°.— 4) Τὸ πλαίσιον εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ 200 σπείρας. Ἡ πλευρά, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς, ἔχει μῆκος 3 cm. Κινεῖται ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ ὁποίου ἡ ἔντασις εἶναι H = 500 gauss. Αἱ δυναμικαὶ γραμμαὶ τοῦ πεδίου εὑρίσκονται πάντοτε ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πλαισίου, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ θέσις τοῦ πλαισίου. Ἡ ἄλλη πλευρὰ τοῦ πλαισίου, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρὸς τὸν ἄξονα, ἔχει μῆκος 2 cm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ῥοπὴ τοῦ ζεύγους ἐπαναφορᾶς, τὸ ὁποῖον ἀναπτύσσεται ὑπὸ τοῦ σπειροειδοῦς ἐλατηρίου, ὅταν ἡ ἀπόκλισις τοῦ πλαισίου γίνῃ 90°.*

1) Ἡ ἀντίστασις τοῦ πλαισίου εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm:

$$R_{15} = V : I = 0{,}1 : 0{,}020 = 5 \text{ ohm}.$$

2) Ὁ νόμος τῶν διακλαδιζομένων ρευμάτων μᾶς δίδει τὴν σχέσιν:

$R_{15} \times 0{,}020 = R \times (20 - 0{,}020)$ ἄρα πρέπει νὰ εἶναι $R = 0{,}005$ ohm.

3) Εἰς θερμοκρασίαν 25° ἡ ἀντίστασις τοῦ πλαισίου εἶναι:

$$R_{25} = R_{15}(1 + 10\,\alpha) = 5 \times 1{,}041 = 5{,}205 \text{ ohm}.$$

Ἐὰν κατὰ προσέγγισιν θεωρήσωμεν τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν διακλάδωσιν τοῦ ὀργάνου, ἴσην μὲ τὴν ἔντασιν I τοῦ κυρίου ρεύματος, τότε ὁ νόμος τῶν διακλαδιζομένων ρευμάτων δίδει τὴν σχέσιν:

$$5{,}205 \times 0{,}020 = 0{,}005 \times I \qquad \text{ἄρα} \qquad I = 20{,}82 \text{ ampère}.$$

4) Κάθε κατακόρυφον σύρμα τοῦ πλαισίου διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I = 0{,}020$ ampère. Ἐπὶ τοῦ σύρματος τούτου ἐνεργεῖ ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις:

$$F = \frac{1}{10} H I l = \frac{1}{10} \times 500 \times 0{,}020 \times 3 = 3 \text{ δύναι}.$$

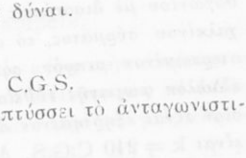
Καὶ ἡ τιμὴ τῆς ροπῆς τοῦ ζεύγους εἶναι:

$$\Gamma = 200\,F \times 2 = 200 \times 3 \times 2 = 1\,200 \text{ C.G.S.}$$

Τόση εἶναι καὶ ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους τὴν ὁποίαν ἀναπτύσσει τὸ ἀνταγωνιστικὸν ἐλατήριον.

318. — *Συνδέομεν κατὰ σειρὰν στήλην Σ μὲ πυκνωτὴν χωρητικότητος C καὶ μὲ βαλιστικὸν γαλβανόμετρον Γ. Κατὰ τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν κλείομεν τὸ κύκλωμα μὲ τὸν διακόπτην Δ, τὸ βαλιστικὸν γαλβανόμετρον δεικνύει μίαν ἀπόκλισιν α_1. Ὅταν ἠρεμήσῃ τὸ γαλβανόμετρον, παρεμβάλλομεν μεταξὺ τῶν πόλων τῆς στήλης διακλάδωσιν, ἡ ὁποία ἔχει ἀντίστασιν R. Ἀναγινώσκομεν τότε ἐπὶ τοῦ γαλβανομέτρου μίαν νέαν ἀπόκλισιν α_2, κατὰ φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν προηγουμένην. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις x τῆς στήλης. Αἱ λοιπαὶ ἀντιστάσεις εἶναι ἀσήμαντοι.*

Ἐφαρμογή: $\alpha_1 = 150$ *διαιρέσεις*· $\alpha_2 = 70$ *διαιρέσεις*· $R = 2$ ohm.



Σχ. 197

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι E volt, ἂν E εἶναι ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς στήλης Σ. Ἑπομένως τὸ φορτίον τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι: $Q_1 = CE$ coulomb. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ k τὸν ἀριθμὸν τῶν διαιρέσεων κατὰ τὰς ὁποίας ἀποκλίνει τὸ βαλιστικὸν γαλβανόμετρον, ὅταν διέρχεται δι' αὐτοῦ 1 coulomb, τότε ἡ ἀπόκλισις τοῦ γαλβανομέτρου εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν εἶναι:

$$\alpha_1 = k\,C\,E. \tag{1}$$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ στήλη παρέχει εἰς τὴν διακλάδωσιν ρεῦμα ἐντάσεως $I = \dfrac{E}{R + x}$ καὶ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τῆς στήλης γίνεται $V = IR = \dfrac{E\,R}{R + x}$. Μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ ὑπάρχει ἡ αὐτὴ διαφορὰ δυναμικοῦ V καὶ ἑπομένως τὸ φορτίον τοῦ πυκνωτοῦ γίνεται $Q_2 = \dfrac{C\,E\,R}{R + x}$. Ἡ ἐλάττωσις τοῦ φορτίου τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι:

$$Q_1 - Q_2 = CE - \frac{C\,E\,R}{R + x} = \frac{C\,E\,x}{R + x}.$$

Αὐτὴ εἶναι ἡ ποσότης ἠλεκτρισμοῦ ἡ ὁποία, διερχομένη διὰ τοῦ γαλβανομέτρου, τὸ ἀποκλίνῃ κατὰ φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν προηγουμένην. Ἄρα $$\alpha_2 = k \frac{C E x}{R + x}. \qquad (2)$$

Ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{R + x}{x} \quad \text{ἤτοι εἶναι} \quad x = R \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Ἐφαρμογή: $$x = 2 \times \frac{70}{150 - 70} = \frac{140}{80} = 1{,}75 \text{ ohm}.$$

319 — *Ἕνα γαλβανόμετρον ἔχει κινητὸν πλαίσιον, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις 2 cm × 3 cm. Ἐπὶ τοῦ πλαισίου τυλίσσονται 200 σπεῖραι χαλκίνου σύρματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν 40 ohm. Ἐπὶ τοῦ πλαισίου εἶναι στερεωμένον μικρὸν σφαιρικὸν κάτοπτρον, τὸ ὁποῖον σχηματίζει τὸ πραγματικὸν εἴδωλον φωτεινῆς εὐθείας ἐπὶ κανόνος εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 1 m. Τὸ πλαίσιον εἶναι ἐξηρτημένον ἀπὸ λεπτὸν σύρμα ἀργύρου, τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον στρέψεως εἶναι k = 240 C.G.S. δηλαδὴ πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπ' αὐτοῦ ζεῦγος ἔχον ῥοπὴν 240 C.G.S., διὰ νὰ ἰσορροπηθῇ στρέψις τοῦ πλαισίου κατὰ 1 ἀκτίνιον. Τὸ ὁμοιόμορφον μαγνητικὸν πεδίον, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖ ὁ μαγνήτης τοῦ γαλβανομέτρου ἔχει ἔντασιν 400 gauss.— 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ διαρρέῃ τὸ γαλβανόμετρον, διὰ νὰ προκληθῇ μετακίνησις τοῦ φωτεινοῦ δείκτου κατὰ 1 cm.— 2) Μεταξὺ τῶν ἀκροδεκτῶν τοῦ γαλβανομέτρου παρεμβάλλεται διακλάδωσις ἔχουσα ἀντίστασιν R = 0,1 ohm. Τὸ γαλβανόμετρον, μαζὺ μὲ τὴν διακλάδωσίν του, τοποθετεῖται κατὰ σειρὰν εἰς τὸ κύκλωμα βολταμέτρου, τὸ ὁποῖον περιέχει διάλυμα νιτρικοῦ ἀργύρου. Τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ῥεῦμα σταθερᾶς ἐντάσεως. Μετὰ παρέλευσιν μιᾶς ὥρας ἡ μᾶζα τῆς καθόδου τοῦ βολταμέτρου ἔχει αὐξηθῇ κατὰ 0,201 gr. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόκλισις τοῦ φωτεινοῦ δείκτου τοῦ γαλβανομέτρου κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἠλεκτρολύσεως. Ὑπενθυμίζεται ὅτι κατὰ τὴν διέλευσιν 1 coulomb διὰ τοῦ βολταμέτρου ἀποτίθεται εἰς τὴν κάθοδον 1,118 mgr ἀργύρου.*

1) Ἔστω α ἡ γωνία κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ στραφῇ τὸ πλαίσιον διὰ νὰ μετακινηθῇ ὁ φωτεινὸς δείκτης κατὰ $\delta = 1$ cm. Ὅταν τὸ πλαίσιον στρέφεται κατὰ γωνίαν α, ἡ ἀνακλωμένη ἀκτίς, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν σταθερὰν προσπίπτουσαν ἀκτῖνα, στρέφεται κατὰ διπλασίαν γωνίαν 2α. Ἐπειδὴ ἡ α εἶναι μικρὰ ἔχομεν: $2\alpha = \delta : 100 = 0{,}01$ ἤτοι $\alpha = 0{,}005$ ἀκτινίου.

Τὸ πλαίσιον στρέφεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν δυνάμεων αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται μόνον ἐπὶ τῶν κατακορύφων συρμάτων τοῦ πλαισίου. Αἱ δυνάμεις αὗται ἀποτελοῦν ζεῦγος. Ἐὰν I εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ πλαίσιον, l τὸ μῆκος ἑνὸς κατακορύφου σύρματος καὶ H ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τότε ἐπὶ ἑκάστου κατακορύφου σύρματος ἐνεργεῖ δύναμις: $$f = \frac{1}{10} H I l = \frac{400 \times I \times 3}{10} = 120\, I \text{ δύναι}.$$

Καὶ ἐπὶ τῶν 200 κατακορύφων συρμάτων τῆς μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πλαισίου ἐνεργεῖ δύναμις: $F = 120\, I \times 200 = 24\,000\, I$ δύναι.

Τὸ πλαίσιον στρέφεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἑνὸς ζεύγους, τὸ ὁποῖον ἔχει ῥοπήν: $\Gamma = F \times 2 = 24\,000\, I \times 2 = 48\,000\, I$ C.G.S.

Ἀλλὰ ἡ ῥοπὴ αὐτὴ ἔχει ἐπίσης τὴν τιμήν:

$$\Gamma = k\alpha = 240 \times 0{,}005 = 1{,}20 \ \text{C.G.S.}$$

Ἂν ἐξισώσωμεν τὰς δύο αὐτὰς τιμὰς τῆς ῥοπῆς, εὑρίσκομεν τὴν ζητουμέ-
νην ἔντασιν τοῦ ῥεύματος:

$$I = \frac{1{,}2}{48\,000} = \frac{1}{40\,000} = 2{,}5 \times 10^{-5} \ \text{ampère} = 25 \ \text{microampère.}$$

2) Εἰς 1 ὥραν διέρχεται διὰ τοῦ βολταμέτρου B ποσότης ἠλεκτρισμοῦ:

$$Q = \frac{201}{1{,}118}.$$ Ἑπομένως ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος εἶναι:

$$I_1 = \frac{Q}{3\,600} = \frac{201}{1{,}118 \times 3\,600} = 0{,}050 \ \text{ampère.}$$

Ἡ ἀντίστασις r τοῦ γαλβανομέτρου περιορίζεται εἰς μόνην τὴν ἀντίστασιν
τοῦ πλαισίου ἤτοι εἶναι r = 40 ohm. Ἐὰν I καὶ i εἶναι ἀντιστοίχως αἱ ἐντά-
σεις τῶν ῥευμάτων, τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὴν διακλάδωσιν καὶ τὸ γαλβανόμε-
τρον, τότε ἀπὸ τὴν σχέσιν: $RI = ri$ εὑρίσκομεν $i = \frac{RI}{r} = \frac{0{,}1\,I}{40} = \frac{I}{400}$.

Ἐὰν κατὰ προσέγγισιν λάβωμεν $I = I_1$, εὑρίσκομεν:

$$i = \frac{I_1}{400} = \frac{0{,}05}{400} = 0{,}125 \times 10^{-3} \ \text{ampère} = 125 \ \text{microampère.}$$

Ἡ μετακίνησις τοῦ φωτεινοῦ δείκτου τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι ἀνάλογος
πρὸς τὴν ἔντασιν τοῦ ῥεύματος. Ἑπομένως ἡ μετακίνησις δ′ τοῦ δείκτου εἶναι:

$$\delta' = \delta \frac{i}{I} = 1 \times \frac{125}{25} = 5 \ \text{cm.}$$

320.— *Στήλη ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E καὶ ἀσήμαντον ἐσωτερικὴν ἀν-
τίστασιν. Τὸ κύκλωμα περιλαμβάνει δύο ἀντιστάσεις R καὶ R_1 ἡνωμένας κατὰ
σειράν.— 1) Νὰ εὑρεθῇ συναρτήσει τῶν E, R καὶ R_1 ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ V εἰς
τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R_1.— 2) Διὰ νὰ μετρήσωμεν αὐτὴν τὴν διαφοράν, θέτο-
μεν κατὰ διακλάδωσιν μεταξὺ τῶν ἄκρων τῆς R_1 ἕνα βολτόμετρον τὸ ὁποῖον ἔχει
ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν r. Ποία εἶναι ἡ ἔνδειξις V′ τοῦ βολτομέτρου; — 3) Νὰ
εὑρεθῇ ὁ λόγος $\frac{V}{V'}$.— 4) Νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις πρέπει νὰ ἰσχύῃ διὰ τὴν ἀντίστασιν
r τοῦ βολτομέτρου, ἐὰν θέλωμεν τὸ σχετικὸν λάθος $\frac{V - V'}{V}$, τὸ ὁποῖον δίδει ἡ
προηγουμένη μέτρησις, νὰ εἶναι μικρότερον ἀπὸ $\frac{1}{1\,000}$.*

Ἐφαρμογή: R = 30 ohm, R_1 = 20 ohm.

1) Ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι $R + R_1$ καὶ ἑπομένως ἔχομεν
τὴν σχέσιν:

$$R = I\,(R + R_1).$$

Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R_1 εἶναι:

$$V = I R_1 = \frac{E R_1}{R + R_1}.$$

2) Ὅταν τὸ βολτόμετρον παρεμβληθῇ κατὰ διακλάδωσιν πρὸς τὴν ἀντί-
στασιν R_1, τότε ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις R_2 τῆς διακλαδώσεως θὰ εἶναι

$R_2 = \dfrac{R_1 r}{R_1 + r}$ καὶ τὸ κύριον ρεῦμα θὰ ἔχῃ ἔντασιν:

$$I' = \frac{E}{R + R_2} = \frac{E(R_1 + r)}{R(R_1 + r) + R_1 r}.$$

Ἡ νέα ἔνδειξις τοῦ βολτομέτρου εἶναι:

$$V' = I' R_2 = \frac{E R_1 r}{R(R_1 + r) + R_1 r}.$$

3) Ὁ ζητούμενος λόγος εἶναι: $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{R(R_1 + r) + R_1 r}{(R + R_1) r}$.

4) Τὸ σχετικὸν σφάλμα εἶναι:

$$\frac{V - V'}{V} = 1 - \frac{V'}{V} = 1 - \frac{(R + R_1) r}{R(R_1 + r) + R_1 r} = \frac{R R_1}{R R_1 + r(R + R_1)}.$$

Ἔχομεν λοιπὸν νὰ λύσωμεν τὴν ἀνισότητα:

$$\frac{R R_1}{R R_1 + r(R + R_1)} < \frac{1}{1\,000}. \quad ἢ \quad 999 R R_1 < r(R + R_1).$$

ὥστε ἡ ζητουμένη σχέσις εἶναι: $r > 999 \dfrac{R R_1}{R + R_1}$.

Ἡ ἀριθμητικὴ ἐφαρμογὴ δίδει τὴν τιμήν:

$$r > 999 \times \frac{30 \times 20}{30 + 20} \quad ἢ \quad r > 11\,988 \text{ ohm}.$$

321.— *Ἕνα βολτόμετρον μὲ κινητὸν πλαίσιον φέρει διαιρέσεις ἀπὸ* 0 *ἕως* 5 volt. *Θέλομεν νὰ ἐξετάσωμεν τὸ βολτόμετρον τοῦτο καὶ νὰ τὸ χρησιμοποιήσωμεν εἰς διαφόρους μετρήσεις.— 1) Συνδέομεν τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ βολτομέτρου μὲ τοὺς δύο πόλους μιᾶς γεννητρίας, ἡ ὁποία ἔχει ἀσήμαντον ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν. Τὸ βολτόμετρον δεικνύει τότε* 3 volt. *Οἱ δύο πόλοι τῆς ἀνωτέρω γεννητρίας συνδέονται μὲ τὸ κύκλωμα τὸ ὁποῖον σχηματίζεται, ἂν συνδέσωμεν κατὰ σειρὰν τὸ βολτόμετρον μὲ μίαν ἀντίστασιν* $R = 1\,000$ ohm. *Τὸ βολτόμετρον δεικνύει τότε* 1 volt. *Νὰ εὑρεθοῦν: α) ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς γεννητρίας· β) ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις* r *τοῦ βολτομέτρου· γ) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ βολτόμετρον, ὅταν τοῦτο δεικνύῃ* 5 volt. — *2) Μὲ τὸ βολτόμετρον τοῦτο θέλομεν νὰ μετρήσωμεν διαφορὰς δυναμικοῦ μεγαλυτέρας ἀπὸ* 5 volt. *Νὰ εὑρεθῇ ποίαν ἀντίστασιν* R′ *πρέπει νὰ ἑνώσωμεν κατὰ σειρὰν μὲ τὸ πλαίσιον τοῦ ὀργάνου, ὥστε ἡ μεγίστη ἀπόκλισις νὰ λαμβάνεται, ὅταν εἰς τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ οὕτω τροποποιημένου ὀργάνου ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι: α) ἴση μὲ* 30 volt *καὶ β) ἴση μὲ* 150 volt. — *3) Συνδέομεν τὸ ἀρχικὸν βολτόμετρον μὲ τοὺς πόλους μιᾶς στήλης, ἡ ὁποία ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* $r_1 = 50$ ohm. *Τὸ βολτόμετρον δεικνύει* 1,5 volt *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς στήλης.*

1) Τὸ βολτόμετρον δεικνύει τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς γεννητρίας εἶναι ἀσήμαντος, ἕπεται ὅτι αὐτὴ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν τῆς γεννητρίας. Ἄρα εἶναι: $E = 3$ volt.

Ὅταν τὸ βολτόμετρον συνδεθῇ κατὰ σειρὰν μὲ τὴν ἀντίστασιν R, τότε τὸ ρεῦμα, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα, ἔχει ἔντασιν : $\mathrm{I} = \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{R} + \mathrm{r}}$

καὶ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ βολτομέτρου εἶναι :

$$\mathrm{V} = \mathrm{I\,r} = \frac{\mathrm{E\,r}}{\mathrm{R} + \mathrm{r}} .$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις r τοῦ βολτομέτρου εἶναι : $\mathrm{r} = \dfrac{\mathrm{R\,V}}{\mathrm{E} - \mathrm{V}} = \dfrac{1\,000 \times 1}{3 - 1} = 500$ ohm .

Ὅταν τὸ βολτόμετρον δεικνύῃ διαφορὰν δυναμικοῦ $\mathrm{V}' = 5$ volt, τότε τὸ ὄργανον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως : $\mathrm{I}' = \mathrm{V}' : \mathrm{r} = 5 : 500 = 0{,}01$ ampère

2) Διὰ νὰ δεικνύῃ τὸ βολτόμετρον 5 volt, πρέπει τοῦτο νὰ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 0,01 ampère. Αἱ πρόσθετοι λοιπὸν ἀντιστάσεις R_1 καὶ R_2, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ θέσωμεν κατὰ σειρὰν διὰ νὰ μετρήσωμεν διαφορὰς δυναμικοῦ $\mathrm{V}_1 = 30$ volt καὶ $\mathrm{V}_2 = 150$ volt, εὑρίσκονται ἀπὸ τὰς σχέσεις τὰς ὁποίας λαμβάνομεν, ἂν ἐφαρμόσωμεν εἰς τὰς δύο περιπτώσεις τὸν νόμον τοῦ Ohm : $\mathrm{V}_1 = \mathrm{I}'\,\mathrm{R}_1 + \mathrm{I}'\,\mathrm{r} = \mathrm{I}'\,(\mathrm{R}_1 + \mathrm{r})$ καὶ $\mathrm{V}_2 = \mathrm{I}'\,\mathrm{R}_2 + \mathrm{I}'\,\mathrm{r} = \mathrm{I}'\,(\mathrm{R}_2 + \mathrm{r})$.

Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς εὑρίσκομεν :

$$\mathrm{R}_1 = \frac{\mathrm{V}_1 - \mathrm{I}'\mathrm{r}}{\mathrm{I}'} = \frac{30 - (\,0{,}01 \times 500\,)}{0{,}01} = 2\,500 \text{ ohm}$$

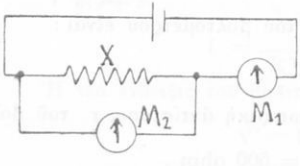
$$\mathrm{R}_2 = \frac{\mathrm{V}_2 - \mathrm{I}'\mathrm{r}}{\mathrm{I}'} = \frac{150 - (\,0{,}01 \times 500\,)}{0{,}01} = 14\,500 \text{ ohm.}$$

3) Τὸ ρεῦμα, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα, ἔχει ἔντασιν :

$$\mathrm{I}_1 = \mathrm{V}' : \mathrm{r} = 1{,}5 : 500 \text{ ampère.}$$

Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις E_1 τῆς στήλης εὑρίσκεται τότε ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm : $\mathrm{E}_1 = \mathrm{I}_1\,(\,50 + \mathrm{r}\,) = \dfrac{1{,}5}{500} \times 550 = 1{,}65$ volt.

322.— *Ἡ ἀπόκλισις τοῦ δείκτου ἑνὸς μικροαμπερομέτρου εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ ὄργανον. Ἡ μεγίστη ἀπόκλισις τοῦ δείκτου, ἀντιστοιχοῦσα εἰς 150 διαιρέσεις τῆς κλίμακος, ἐπιτυγχάνεται μὲ ἕνα ρεῦμα ἐντάσεως 75 microampère. Ἡ ἀντίστασις τοῦ μικροαμπερομέτρου εἶναι r = 1 330 ohm. — 1) Μεταξὺ τῶν ἄκρων τοῦ μικροαμπερομέτρου τίθεται κατὰ διακλάδωσιν μία ἀντίστασις s. Τὸ σύνολον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἔχον ὁλικὴν ἔντασιν I. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως s ὥστε ἡ ἀπόκλισις τοῦ δείκτου νὰ γίνεται μεγίστη, ὅταν ἡ ἔντασις εἶναι I = 600 microampère καὶ ὅταν εἶναι I = 1,5 ampère ; Νὰ εὑρεθῇ εἰς τὰς δύο αὐτὰς περιπτώσεις ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις τοῦ συνόλου τῶν ἀντιστάσεων αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν δύο ἄκρων τοῦ ὀργάνου. — 2) Τὸ μικροαμπερόμετρον χρησιμοποιεῖται ὡς βολτόμετρον. Πόση διαφορὰ δυναμικοῦ πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὰ ἄκρα του, διὰ νὰ ληφθῇ ἡ μεγίστη ἀπόκλισις τοῦ δείκτου ; Εἰς τὸ κιβώτιον τοῦ ὀργάνου εἰσάγεται κατὰ σειρὰν μὲ τὴν ἀντίστασίν του μία πρόσθετος ἀντίστασις. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ τιμὴ αὐτῆς τῆς ἀντιστάσεως, ὥστε ἡ μεγίστη ἀπόκλισις νὰ λαμβάνεται ὅταν ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα τοῦ συνόλου εἶναι : a) 150 millivolt, β) 1,5 volt. Νὰ εὑρεθῇ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ἡ ἀντίστασις τοῦ συνόλου τὸ* *ὁποῖον ἀποτελοῦν τὸ ὄργανον καὶ ἡ πρόσθετος ἀντίστασίς του.— 3) Δύο μικροαμπερόμετρα* M_1 *καὶ* M_2, *ὅμοια μὲ τὸ προηγούμενον* M *ἔχουν μετατραπῆ ὅπως εὑρέθη ἀνωτέρω, οὕτως ὥστε τὸ ἕνα νὰ εἶναι ἀμπερόμετρον δυνάμενον νὰ μετρᾷ ἐντάσεις ἕως* 1,5 ampère, *τὸ δὲ ἄλλο νὰ εἶναι βολτόμετρον δυνάμενον νὰ μετρᾷ διαφορὰς δυναμικοῦ ἕως* 1,5 volt. *Θεωροῦμεν τώρα τὴν διάταξιν τοῦ σχήματος* 198, *ἡ ὁποία περιλαμβάνει μίαν ἀντίστασιν ἄγνωστον* X, *διαρρεομένην ἀπὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον παρέχει συσσωρευτής. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ* M_1 *σημειώνει τὴν διαίρεσιν* 43, *τὸ δὲ* M_2 *τὴν διαίρεσιν* 135. *Ὡς τιμὴν τῆς ἀντιστάσεως* X *δεχόμεθα τὸ πηλίκον τῆς τάσεως, τὴν ὁποίαν δεικνύει τὸ βολτόμετρον, πρὸς τὴν ἔντασιν τὴν ὁποίαν δεικνύει τὸ ἀμπερόμετρον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ αὐτὴ καὶ νὰ ἐξηγηθῇ διὰ ποῖον λόγον ἡ τιμὴ αὐτὴ εἶναι ὀλίγον ἐσφαλμένη.*



Σχ. 198

1) Αἱ ἀντιστάσεις τοῦ μικροαμπερομέτρου καὶ τῆς διακλαδώσεώς του εἶναι r καὶ s. Ἂν καλέσωμεν I′ καὶ I″ τὰς ἐντάσεις τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα διαρρέουν ἀντιστοίχως τὸ ὄργανον καὶ τὴν διακλάδωσίν του, τότε θὰ ἔχωμεν τὰς γνωστὰς σχέσεις τῶν διακλαδιζομένων ρευμάτων:

$$I'r = I''s \quad \text{καὶ} \quad I' + I'' = I \quad \text{ἄρα} \quad I'r = (I - I')s.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν: $s = r\dfrac{I'}{I - I'}$.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν πρέπει νὰ εἶναι:

$$s_1 = 1\,330 \times \frac{75}{600 - 75} = 190 \text{ ohm}$$

καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν πρέπει νὰ εἶναι:

$$s_2 = 1\,330 \times \frac{75}{1\,500\,000 - 75} = 0{,}067 \text{ ohm}.$$

Αἱ ἀντιστάσεις αἱ παρεμβαλλόμεναι μεταξὺ τῶν δύο ἄκρων τοῦ ὀργάνου ἔχουν ἰσοδύναμον ἀντίστασιν R′, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν:

α′ περίπτωσις: $\dfrac{1}{R_1'} = \dfrac{1}{1\,330} + \dfrac{1}{190}$ ἤτοι $R_1' = 166$ ohm

β′ περίπτωσις: $\dfrac{1}{R_2'} = \dfrac{1}{1\,330} + \dfrac{1}{0{,}067}$ ἤτοι $R_2' = 0{,}067$ ohm.

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις εἶναι πρακτικῶς ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἀντίστασιν τῆς διακλαδώσεως τοῦ ὀργάνου.

2) Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Ohm, ἡ ἐφαρμοζομένη εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ὀργάνου διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι:

$$V = 1\,330 \times \frac{75}{10^6} = 0{,}10 \text{ volt} = 100 \text{ millivolt}.$$

Αἱ ζητούμεναι πρόσθετοι ἀντιστάσεις r_1' καὶ r_2' ὑπολογίζονται ὁμοίως ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm:

$$0{,}150 = (1\,330 + r_1') \times \frac{75}{10^6} \qquad \text{ἤτοι} \qquad r_1' = 670 \text{ ohm}$$

$$1{,}5 = (1\,330 + r_2') \times \frac{75}{10^6} \qquad \text{ἤτοι} \qquad r_2' = 18\,670 \text{ ohm}.$$

Αἱ συνολικαὶ ἀντιστάσεις εἶναι :

$$R_1'' = 1\,330 + 670 = 2\,000 \text{ ohm.}$$

$$R_2'' = 1\,330 + 18\,670 = 20\,000 \text{ ohm .}$$

3) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ ἀμπερόμετρον M_1, εἶναι :

$$I = 1{,}5 \times \frac{43}{150} = 0{,}43 \text{ ampère}$$

καὶ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ, ἡ ὑπάρχουσα εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως X, εἶναι :

$$V = 1{,}5 \times \frac{135}{150} = 1{,}35 \text{ volt.}$$

Ἡ τιμὴ λοιπὸν τῆς ἀντιστάσεως, ὅπως ὁρίζεται εἰς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, εἶναι : $X = V : I = 1{,}35 : 0{,}43 = 3{,}14$ ohm.

Ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τῆς X εἶναι ὀλίγον ἐσφαλμένη, διότι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν ἀντίστασιν X, εἶναι ὀλίγον μικροτέρα ἀπὸ τὴν I. Ἂς καλέσωμεν J καὶ i τὰς ἐντάσεις τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν ἀντιστοίχως τὴν ἀντίστασιν X καὶ τὴν διακλάδωσιν M_2. Τότε ἡ ἀντίστασις X διαρρέεται εἰς τὴν πραγματικότητα ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως : $J = I - i$

καὶ ἑπομένως ἡ πραγματικὴ τιμὴ τῆς X εἶναι : $X = \dfrac{V}{J}$.

323. — *Ἕνα ἀμπερόμετρον μὲ κινητὸν πλαίσιον ἔχει τὰ ἑξῆς χαρακτηριστικά : Τὸ πλαίσιον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου καὶ περιλαμβάνει 400 σπείρας τῶν ὁποίων αἱ μέσαι διαστάσεις εἶναι : μῆκος 2 cm καὶ ὕψος 3 cm. Ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ πλαισίου εἶναι 19,6 ohm. Τὸ πλαίσιον περιστρέφεται περὶ ἄξονα συμπίπτοντα μὲ τὴν μεγάλην διάμεσον τῆς μεσαίας σπείρας του. Μὲ τὸ πλαίσιον συνδέεται σταθερῶς δείκτης, κάθετος πρὸς τὸν ἄξονα καὶ εὑρισκόμενος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς μεσαίας σπείρας. Τὸ πλαίσιον τείνουν νὰ τὸ ἐπαναφέρουν εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας δύο ὅμοια σπειροειδῆ ἐλατήρια· ταῦτα χρησιμεύουν καὶ διὰ τὴν διαβίβασιν τοῦ ρεύματος εἰς τὸ πλαίσιον. Τὸ μαγνητικὸν πεδίον ἔχει σταθερὰν ἔντασιν H gauss ἐντὸς μιᾶς γωνίας 2θ = 2 ἀκτίνια, ἐχούσης ὡς διχοτόμον τὴν θέσιν ἰσορροπίας τοῦ δείκτου, ὅταν τὸ ὄργανον δὲν διαρρέεται ἀπὸ τὸ ρεῦμα. Τὸ ἄκρον τοῦ δείκτου κινεῖται ἔμπροσθεν κυκλικοῦ βαθμολογημένου τόξου φέροντος 150 ἴσας διαιρέσεις ἑκατέρωθεν τῆς μεσαίας διαιρέσεως μηδέν. Ὁ δείκτης τοποθετεῖται ἔμπροσθεν τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης διαιρέσεως 150, ὅταν τὸ πλαίσιον στραφῇ κατὰ 1 ἀκτίνιον, πρὸς τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην φοράν.*

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις ἰσορροπίας τοῦ κινητοῦ συστήματος, ὅταν τὸ ὄργανον διαρρέεται ἀπὸ συνεχὲς ρεῦμα ἐντάσεως I ampère. Θὰ παρασταθῇ μὲ C ἡ σταθερὰ στρέψεως ἑκάστου τῶν δύο σπειροειδῶν ἐλατηρίων.

2) Ὅταν μεταξὺ τῶν ἀκροδεκτῶν τοῦ ἀμπερομέτρου ἐφαρμοσθῇ διαφορὰ δυναμικοῦ 0,196 volt, ὁ δείκτης σταματᾷ εἰς μίαν ἐκ τῶν διαιρέσεων 150. α) Πόση εἶναι τότε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ ὄργανον ; Θὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν μόνον ἡ ἀντίστασις τοῦ πλαισίου. β) Πόσην ἰσχὺν ἀπορροφᾷ τὸ ὄργανον ; γ) Ποία εἶναι ἡ εὐαισθησία του, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ διαπιστώσωμεν στροφὴν τοῦ δείκτου κατὰ 0,1 διαιρέσεως ;

3) Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν σταθερὰν στρέψεως C τῶν σπειροειδῶν ἐλατηρίων, τοποθετοῦμεν τὸ ὄργανον κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε ὁ ἄξων περιστροφῆς *τοῦ πλαισίου νὰ εἶναι κατακόρυφος· ἐπὶ τοῦ δείκτου, εἰς ἀπόστασιν* 3 cm *ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς του, στερεώνομεν ὁριζόντιον νῆμα τὸ ὁποῖον ἔχει ἀσήμαντον μᾶζαν καὶ διέρχεται διὰ τῆς αὔλακος τροχαλίας, ἐχούσης τὸν ἄξονά της ὁριζόντιον· εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ νήματος στερεώνεται μᾶζα* 0,17 gr. *Ὅταν ἀποκατασταθῇ ἰσορροπία, τὸ νῆμα εἶναι κάθετον πρὸς τὸν δείκτην, ὁ ὁποῖος δεικνύει τότε* 124,5. *α) Νὰ εὑρεθῇ εἰς μονάδας* C.G.S. *ἡ τιμὴ τῆς σταθερᾶς* C· *θὰ ληφθῇ* $g = 980$ C.G.S. *β) Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς* gauss *ἡ ἔντασις* H *τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ ὀργάνου. γ) Πόση εἶναι ἡ αὔξησις τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας ἑκάστου ἐλατηρίου, ὅταν τὸ ἄκρον τοῦ δείκτου μετακινῆται ἀπὸ τὴν διαίρεσιν* 0 *εἰς μίαν τῶν διαιρέσεων* 150 *τῆς κλίμακος;*

4) Ὅταν τὸ ὄργανον δὲν διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα, ἀπομακρύνομεν τὸ κινητὸν σύστημα ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας του καὶ τὸ ἀφήνομεν νὰ αἰωρῆται. Εὑρίσκομεν τότε ὅτι ἐκτελεῖ 20 *αἰωρήσεις ἐντὸς* 46 *δευτερολέπτων. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ροπὴ ἀδρανείας τοῦ κινητοῦ συστήματος ὡς πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς.*

1) Ὅταν τὸ πλαίσιον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I ampère, ἡ μαγνητικὴ ροπή του εἶναι: $M = \frac{1}{10} N S I$· ἄρα ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους, τὸ ὁποῖον ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ πλαισίου, ἕνεκα τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου H, εἶναι:

$$M H = \frac{N S I H}{10}$$

Ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους στρέψεως, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς στροφὴν τοῦ πλαισίου κατὰ γωνίαν φ ἀκτινίων, εἶναι: $2 C \varphi$·

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις ἰσορροπίας τοῦ κινητοῦ συστήματος τοῦ ὀργάνου εἶναι: $2 C \varphi = \frac{N S I H}{10}$ ἢ $C \varphi = 120\, H I$. (1)

2) Ὅταν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ σύρματος τοῦ πλαισίου ὑπάρχῃ διαφορὰ δυναμικοῦ $V = 0{,}196$ volt, τότε τὸ ὄργανον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I = V : R = 0{,}196 : 19{,}6 = 0{,}01 \text{ ampère}.$$

Τὸ ὄργανον ἀπορροφᾷ τότε ἰσχύν:

$$P = V I = 0{,}196 \times 0{,}01 = 0{,}00196 \text{ watt} \quad \text{ἢ} \quad P = 1{,}96 \text{ milliwatt}.$$

Ἡ γωνία κατὰ τὴν ὁποίαν στρέφεται τὸ πλαίσιον εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, ἤτοι ἔχομεν: $\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{\Delta I}{I}$.

Ἀλλὰ ὅταν ὁ δείκτης μετακινῆται ἀπὸ τὴν διαίρεσιν 0 εἰς τὴν διαίρεσιν 150 τῆς κλίμακος, τὸ πλαίσιον στρέφεται κατὰ γωνίαν $\varphi = 1$ ἀκτίνιον καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι τότε $I = 0{,}01$ ampère. Κάθε διαίρεσις τῆς κλίμακος ἀντιστοιχεῖ εἰς στροφὴν τοῦ πλαισίου κατὰ γωνίαν 1/150 τοῦ ἀκτινίου.

Ἄρα στροφὴ τοῦ πλαισίου κατὰ 0,1 μιᾶς διαιρέσεως, ἤτοι κατὰ $\Delta\varphi = \frac{0{,}1}{150}$ τοῦ ἀκτινίου, ἀντιστοιχεῖ εἰς μεταβολὴν τῆς ἐντάσεως κατά:

$$\Delta I = \frac{\Delta\varphi}{\varphi} I = \frac{0{,}1}{150} \times 0{,}01 = 6{,}7 \times 10^{-6} \text{ ampère}.$$

Ἡ εὐαισθησία λοιπὸν τοῦ ὀργάνου εἶναι: 6,7 microampère.

3) Κατὰ τὴν ἰσορροπίαν τοῦ συστήματος ἡ ροπὴ τῆς δυνάμεως, ἡ ὁποία

ἐνεργεῖ καθέτως ἐπὶ τοῦ δείκτου, εἶναι ἴση μὲ τὴν ῥοπὴν τοῦ ζεύγους στρέψεως:

$$mgl = 2\,C\,\varphi\,, \qquad \text{ἄρα} \qquad C = \frac{mgl}{2\,\varphi}\,. \tag{2}$$

Ἡ γωνία φ κατὰ τὴν ὁποίαν στρέφεται ὁ δείκτης εἶναι:

$$\varphi = \frac{124{,}5}{150} \text{ ἀκτινίου· ἑπομένως λαμβάνομεν :}$$

$$C = \frac{0{,}17 \times 980 \times 3 \times 150}{2 \times 124{,}5} = 300 \text{ C.G.S. (περίπου).}$$

Ἡ ἔντασις Η τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1). Γνωρίζομεν ὅτι διὰ $I = 0{,}01$ ampère εἶναι $\varphi = 1$ ἀκτίνιον. Ἄρα:

$$H = \frac{C\,\varphi}{120\,I} = \frac{300}{120 \times 0{,}01} = 250 \text{ gauss.}$$

Ὅταν τὸ ἄκρον τοῦ δείκτου μετακινῆται ἀπὸ τὴν διαίρεσιν 0 εἰς τὴν διαίρεσιν 150, ἡ αὔξησις τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας ἑκάστου ἐλατηρίου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἔργου τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ δαπανηθῇ διὰ νὰ στραφῇ τὸ πλαίσιον κατὰ 1 ἀκτίνιον ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ισορροπίας του. Τὸ ἔργον λοιπόν, ποὺ δαπανᾶται διὰ τὴν στρέψιν ἑκάστου ἐλατηρίου κατὰ γωνίαν φ, εἶναι:

$$W = \frac{1}{2}\,C\varphi\cdot \qquad \text{διὰ } \varphi = 1 \text{ ἀκτίνιον εἶναι :} \qquad W = \frac{C}{2}\,.$$

Ὥστε ἡ αὔξησις τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας ἑκάστου ἐλατηρίου εἶναι ἴση μὲ $\frac{C}{2}$ ἤτοι 150 ἔργια.

4) Ὅταν τὸ ὄργανον δὲν διαρρέεται ἀπὸ ῥεῦμα, αἱ αἰωρήσεις τοῦ κινητοῦ συστήματος ὑπόκεινται ἀποκλειστικῶς εἰς τὴν δρᾶσιν τῶν δυνάμεων στρέψεως. Ἐὰν Κ εἶναι ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας τοῦ συστήματος, ἡ περίοδος τοῦ συστήματος δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{K}{2\,C}}\,.$$

Ὥστε ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας τοῦ συστήματος εἶναι:

$$K = \frac{2\,C}{4\,\pi^2}\,T^2 = \frac{600}{4\,\pi^2} \times \left(\frac{46}{20}\right)^2 = 80 \text{ C.G.S.}$$

Χ. ΕΠΑΓΩΓΗ

324.— *Ἕνα πλαίσιον φέρει 100 σπείρας σύρματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν 1 ohm. Τὸ πλαίσιον ἔχει ἐπιφάνειαν 1 m² καὶ δέχεται καθέτως τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου. Τὰ δύο ἄκρα τοῦ σύρματος τοῦ πλαισίου συνδέονται μὲ γαλβανόμετρον τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν 9 ohm καὶ ἠμπορεῖ νὰ μετρήσῃ ποσότητας ἠλεκτρισμοῦ. Στρέφομεν ταχέως τὸ πλαίσιον κατὰ 90° οὕτως ὥστε τὸ ἐπίπεδόν του νὰ γίνῃ παράλληλον πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τοῦ γαλβανομέτρου διέρχεται τότε ποσότης ἠλεκτρισμοῦ 1/2 500 coulomb. Ἀπὸ τὸ πείραμα τοῦτο νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου.*

Ἔστω H ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τῆς Γῆς. Κατὰ τὴν στροφὴν τοῦ πλαισίου ἀναπτύσσεται ἐξ ἐπαγωγῆς ποσότης ἠλεκτρισμοῦ $Q = 1/2\,500$ coulomb ἐντὸς χρόνου Δt. Διὰ τοῦ πλαισίου διέρχεται ροή:

$$\Phi = HS\nu = 10\,000 \times 100 = H \times 10^6 \text{ maxwell.}$$

Ἐντὸς τοῦ χρόνου Δt ἡ ροὴ αὐτὴ γίνεται μηδέν. Ἄρα ἡ μεταβολὴ τῆς ροῆς εἶναι $\Delta\Phi = H \times 10^6$. Ἡ ἀναπτυσσομένη ἐξ ἐπαγωγῆς ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι:

$$E = \frac{1}{10^8} \times \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{10^8} \times \frac{H \times 10^6}{\Delta t} = \frac{1}{10^2} \times \frac{H}{\Delta t} \text{ volt.}$$

Ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι $R = 10$ ohm.

Ἀπὸ τὰς σχέσεις: $Q = I \,.\, \Delta t$ καὶ $E = I \,.\, R$ εὑρίσκομεν:

$$E = \frac{Q}{\Delta t} \times R \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{10^2} \times \frac{H}{\Delta t} = \frac{1}{2\,500} \times \frac{1}{\Delta t} \times 10\,.$$

Ἄρα $\quad H = 0{,}40$ gauss.

325.— *Ρεῦμα ἐντάσεως 10 ampère διαρρέει πηνίον τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 40 cm καὶ φέρει 200 σπείρας. Ἐντὸς τῆς κοιλότητος τοῦ πηνίου ὑπάρχει ὀρειχάλκινος δακτύλιος ὁ ὁποῖος ἔχει ἐσωτερικὴν διάμετρον 10 cm τὸ δὲ ἐπίπεδόν του διατηρεῖται πάντοτε κάθετον πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς ροοστάτου μεταβάλλομεν συνεχῶς τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ πηνίον, οὕτως ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος αὐξάνει ἀπὸ 10 εἰς 15 ampère ἐντὸς 20 δευτερολέπτων. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐντὸς τοῦ δακτυλίου κατ' αὐτὴν τὴν μεταβολήν.*

Τὸ πηνίον φέρει 200 : 40 = 5 σπείρας κατὰ ἑκατοστόμετρον. Ἕνα ρεῦμα ἐντάσεως 10 ampère δημιουργεῖ ἐντὸς τοῦ πηνίου μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως:

$$H = \frac{4\pi}{10} \times 5 \times 10 = 20\pi = 62{,}8 \text{ gauss.}$$

Ἕνα δὲ ρεῦμα ἐντάσεως 15 ampère δημιουργεῖ πεδίον ἐντάσεως:

$$H' = 30\pi = 94{,}2 \text{ gauss}\,.$$

Ὅταν λοιπὸν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος μεταβάλλεται ἀπὸ 10 εἰς 15 ampère, ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου μεταβάλλεται κατά: $\Delta H = 10\,\pi = 31{,}4$ gauss. Αὐτὴ ἡ μεταβολὴ ΔH τῆς ἐντάσεως προκαλεῖ ἐντὸς τοῦ δακτυλίου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἐπιφάνειαν $S = 25\,\pi$ cm², μεταβολὴν τῆς μαγνητικῆς ροῆς:

$$\Delta\Phi = \Delta H \times S = 10\,\pi \times 25\,\pi = 250\,\pi^2 = 2\,500 \text{ maxwell}.$$

Ἄρα ἡ ἐξ ἐπαγωγῆς ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι:

$$E = \frac{1}{10^8} \times \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{10^8} \times \frac{2\,500}{20} = \frac{125}{10^8} \text{ volt} \quad \text{ἢ} \quad E = 1{,}25 \text{ microvolt}.$$

326.—*Ἕνα πηνίον ἔχει μῆκος 50 cm καὶ φέρει 500 σπείρας ἑνὸς σύρματος. Τὸ πηνίον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 10 ampère. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πηνίου τούτου καὶ ἀκριβῶς εἰς τὸ μέσον του, ὅπου τὸ πεδίον ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὁμοιόμορφον, ὑπάρχει δεύτερον μικρὸν πηνίον διαμέτρου 4 cm τὸ ὁποῖον φέρει 1 000 σπείρας καὶ εἶναι συνδεδεμένον μὲ γαλβανόμετρον. Οἱ ἄξονες τῶν δύο πηνίων συμπίπτουν. Μεταβάλλομεν συνεχῶς τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ πρῶτον πηνίον εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐλαττώνεται ἀπὸ 10 εἰς 0 ampère ἐντὸς 4 δευτερολέπτων. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐξ ἐπαγωγῆς ἐντὸς τοῦ μικροῦ ἐσωτερικοῦ πηνίου.*

Τὸ ἐξωτερικὸν πηνίον φέρει $500 : 50 = 10$ σπείρας κατὰ ἑκατοστόμετρον. Τὸ ρεῦμα ἐντάσεως 10 ampère δημιουργεῖ ἐντὸς αὐτοῦ μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως:

$$H = 1{,}25 \times 10 \times 10 = 125 \text{ gauss}.$$

Κάθε σπεῖρα τοῦ μικροῦ πηνίου ἔχει ἐπιφάνειαν $4\,\pi$ cm². Ἡ ὅλη λοιπὸν ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία διαρρέεται ἀπὸ τὴν μαγνητικὴν ροήν, εἶναι:

$$S = 4\,\pi \times 1\,000 = 4\,000\,\pi \text{ cm}^2.$$

Ὅταν διὰ τοῦ ἐξωτερικοῦ πηνίου διέρχεται τὸ ρεῦμα ἐντάσεως 10 ampère διὰ τοῦ μικροῦ πηνίου διέρχεται ροή:

$$\Phi = H \times S = 125 \times 4\,000\,\pi = 500\,000\,\pi = 16 \times 10^5 \text{ maxwell}.$$

Ὅταν μηδενισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, μηδενίζεται καὶ ἡ ροή. Ἄρα ἐντὸς χρόνου $\Delta t = 4$ sec ἡ ροὴ μεταβάλλεται κατὰ $\Delta\Phi = 16 \times 10^6$ maxwell.

Ὥστε ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐξ ἐπαγωγῆς εἶναι:

$$E = 10^{-8} \times \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 10^{-8} \times \frac{16 \times 10^5}{4} = 4 \times 10^{-3} = 0{,}004 \text{ volt}.$$

327.— *Ἕνα εὐθύγραμμον χάλκινον σύρμα ἠμπορεῖ νὰ στρέφεται περὶ ὁριζόντιον μεταλλικὸν ἄξονα O, διερχόμενον διὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου του. Τὸ σύρμα ἔχει μῆκος $l = 60$ cm καὶ ἠμπορεῖ νὰ αἰωρῆται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς βαρύτητος, ἔχον πάντοτε τὸ ἄλλο ἄκρον του βυθισμένον ἐντὸς ὑγροῦ ἀγωγοῦ A. Ὁ ἄξων O καὶ ὁ ἀγωγὸς A συνδέονται μὲ σύρμα, ἡ δὲ ὅλη ἀντίστασις τοῦ σχηματιζομένου κυκλώματος εἶναι 1 ohm. Καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς αἰωρήσεως τοῦ σύρματος τὸ κατώτερον ἥμισυ αὐτοῦ ὑπόκειται εἰς τὴν ἐπίδρασιν ὁμοιομόρφου μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως $H = 490$ gauss. Ἀπομακρύνομεν τὸ σύρμα ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν κατακόρυφον θέσιν τῆς ἰσορροπίας του κατὰ γωνίαν $\alpha = 30^\circ$. Ἡ ἀπομάκρυνσις αὐτὴ γίνεται μὲ κίνησιν ὁμαλήν, ἡ ὁποία διαρκεῖ 0,1 τοῦ δευτερολέπτου.— 1) Νὰ ὑπολογι-*

σθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς μετατοπίσεως. — 2) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον θὰ δαπανήσωμεν διὰ τὴν μετατόπισιν αὐτήν.

1) Ὅταν μετακινήσωμεν τὸ σύρμα, μεταβάλλεται ἡ ροὴ ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ κυκλώματος· γεννᾶται τότε ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐξ ἐπαγωγῆς καὶ τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα. Ἐὰν ΔΦ ὀνομάσωμεν τὴν μεταβολὴν τῆς ροῆς κατὰ δευτερόλεπτον, τότε ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις Ε ἔχει τὴν τιμήν:

$$E = \frac{\Delta\Phi}{10^8} \text{ volt.}$$

Ἡ μεταβολὴ τῆς ροῆς κατὰ δευτερόλεπτον εἶναι:

$$\Delta\Phi = \left(\frac{\pi l^2 \alpha}{2\pi} - \frac{\pi l^2 \alpha}{8\pi}\right) H : 0{,}1 = \frac{3\, l^2 \alpha}{8} H \times 10$$

ἢ διὰ $\alpha = 30^0 = \pi/6$ ἀκτίνια, $H = 490$ gauss, $l = 60$ cm ἔχομεν:

$$\Delta\Phi = 3\,462\,000 \text{ maxwell.}$$

Ὥστε ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι: $E = 3\,462\,000 : 10^8 = 0{,}0346$ volt.

Καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ἐπαγωγικοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{0{,}0346}{1} = 0{,}0346 \text{ ampère.}$$

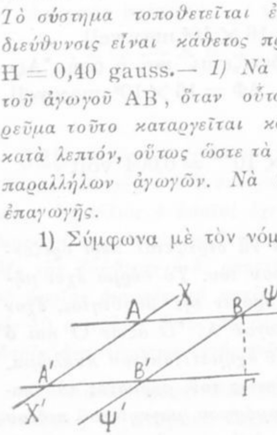
2) Τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον θὰ δαπανήσωμεν, μετατρέπεται εἰς ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἂν ὑπολογίσωμεν τὴν ἐνέργειαν τοῦ ἀναπτυσσομένου ἐπαγωγικοῦ ρεύματος. Αὕτη εἶναι:

$$W = EI\,t = 0{,}0346 \times 0{,}0346 \times 0{,}1 = 1\,200 \text{ ἔργια.}$$

328 — *Ἀγωγὸς* ΑΒ, *διαρρεόμενος ἀπὸ ρεῦμα, ἔχει μῆκος* 1,50 m *καὶ στηρίζεται ἐπὶ δύο ἄλλων παραλλήλων ἀγωγῶν* ΧΧ′ *καὶ* ΨΨ′ *διὰ τῶν σημείων του* Α *καὶ* Β. *Ἡ διεύθυνσις τοῦ* ΑΒ *σχηματίζει γωνίαν* 30⁰ *μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ* ΧΧ′. *Τὸ σύστημα τοποθετεῖται ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου ὁμοιομόρφου, τοῦ ὁποίου ἡ διεύθυνσις εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον* ΧΧ′ΨΨ′, *ἡ δὲ ἔντασίς του εἶναι* Η = 0,40 gauss.— *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ δύναμις τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ πεδίον ἐπὶ τοῦ ἀγωγοῦ* ΑΒ, *ὅταν οὗτος διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως* 8 ampère.— *2) Τὸ ρεῦμα τοῦτο καταργεῖται καὶ μετακινοῦμεν τὸν ἀγωγὸν* ΑΒ *μὲ ταχύτητα* 660 m *κατὰ λεπτόν, οὕτως ὥστε τὰ σημεῖα* Α *καὶ* Β *νὰ εὑρίσκωνται πάντοτε ἐπὶ τῶν δύο παραλλήλων ἀγωγῶν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναπτυσσομένη ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐξ ἐπαγωγῆς.*

1) Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Laplace ἀναπτύσσεται ἐπὶ τοῦ ἀγωγοῦ ΑΒ μία ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις:

$$F = \frac{I}{10} H\, l = \frac{8}{10} \times 0{,}40 \times 150 = 48 \text{ δύναι.}$$



Σχ. 199

2) Ἐντὸς 1 λεπτοῦ ὁ ἀγωγὸς ΑΒ μετακινεῖται κατὰ τὸ διάστημα ΒΒ′ = 660 m. Ἑπομένως ἡ μεταβολὴ τῆς ἐπιφανείας εἶναι:

$$\Delta S = AB \times B\Gamma.$$

Ἀλλὰ εἶναι:

$$B\Gamma = BB' \cdot \eta\mu\, 30^0 = \frac{BB'}{2} = \frac{660}{2} = 330 \text{ m.}$$

Ἄρα ἡ μεταβολὴ τῆς μαγνητικῆς ῥοῆς κατὰ δευτερόλεπτον εἶναι:

$$\Delta\Phi = H\,.\Delta S = \frac{0{,}4 \times 150 \times 33\,000}{60} = 33\,000 \text{ maxwell.}$$

Ἡ ἀναπτυσσομένη ἐντὸς $\Delta t = 1$ sec ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐξ ἐπαγωγῆς

εἶναι: $$E = \frac{1}{10^8} \times \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{10^8} \times 33\,000 = \frac{33}{10^5} \text{ volt} = 0{,}33 \text{ millivolt.}$$

329.— *Αἱ δύο παράλληλοι μεταλλικαὶ ῥάβδοι μιᾶς ὁριζοντίας καὶ εὐθυγράμμου σιδηροδρομικῆς γραμμῆς συνδέονται κατὰ τὸ ἕνα ἄκρον των διὰ μιᾶς ἄλλης μεταλλικῆς ῥάβδου. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ῥάβδων εἶναι* $\alpha = 1{,}44$ m. *Ἐπὶ τῆς γραμμῆς αὐτῆς κινεῖται ἀτμομηχανὴ σιδηροδρόμου μὲ ταχύτητα* 100 km/h *Νὰ εὑρεθῇ εἰς* volt *ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐξ ἐπαγωγῆς, ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος τῶν τροχῶν τῆς ἀτμομηχανῆς. Ἡ ἔντασις τῆς κατακορύφου συνιστώσης τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι* $H = 0{,}5$ gauss.

Ἔστω ὅτι ὁ ἄξων μετακινῆται ἀπὸ ἕνα σημεῖον A εἰς ἄλλο σημεῖον A′ καὶ ὅτι εἶναι $AA' = \Delta x$. Τότε ἡ μεταβολὴ τῆς μαγνητικῆς ῥοῆς εἶναι:

$$\Delta\Phi = S\,H = \Delta x \times \alpha \times H.$$

Τὸ διάστημα Δx τὸ διατρέχει ἡ ἀτμομηχανὴ ἐντὸς χρόνου Δt μὲ ταχύτητα υ.

Ἄρα εἶναι: $\Delta x = \upsilon \times \Delta t$ καὶ ἑπομένως ἔχομεν:

$$\Delta\Phi = \upsilon \times \Delta t \times \alpha \times H.$$

Ἡ ἀναπτυσσομένη ἐξ ἐπαγωγῆς ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι:

$$E = \frac{1}{10^8}\,\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{10^8}\,\upsilon\,\alpha\,H.$$

Ἐπειδὴ εἶναι $$\upsilon = \frac{100 \times 10^5}{3\,600} = \frac{10^5}{36} \text{ cm/sec}$$ εὑρίσκομεν:

$$E = \frac{1}{10^8} \times \frac{10^5 \times 144 \times 0{,}5}{36} = \frac{144}{72 \times 10^3} = 0{,}002 \text{ volt.}$$

330.— *Εὐθύγραμμος ἠλεκτρομαγνήτης, μήκους* 25 cm, *ἔχει πυρῆνα ἐκ μαλακοῦ σιδήρου, διαμέτρου* 7 cm. *Πέριξ τοῦ πυρῆνος τυλίσσονται* 800 *σπεῖραι, αἱ ὁποῖαι διαρρέονται ἀπὸ ῥεῦμα ἐντάσεως* 4 ampère. *Ἕνας δακτύλιος, ἀποτελούμενος ἀπὸ* 100 *σπείρας, περιβάλλει τὸ μέσον τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐντὸς τοῦ δακτυλίου κατὰ τὴν διακοπὴν τοῦ ῥεύματος τοῦ διαρρέοντος τὸν ἠλεκτρομαγνήτην. Ἡ διακοπὴ αὐτὴ διαρκεῖ ἐπὶ* 1/40 *τοῦ δευτερολέπτου. Ἡ μαγνητικὴ διαπερατότης τοῦ σιδήρου εἶναι* $\mu = 108$.

Τὸ πηνίον δημιουργεῖ ἐντὸς αὐτοῦ μαγνητικὸν πεδίον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἔντασιν: $$H = \frac{1{,}25 \times 800 \times 4}{25} = 160 \text{ gauss}.$$

Ἡ μαγνητικὴ ἐπαγωγὴ εἶναι: $B = \mu\,.\,H = 108 \times 160 = 17\,280$ gauss.

Μία σπεῖρα τοῦ δακτυλίου ἔχει ἐπιφάνειαν $S = \pi \times 3{,}5^2 = 38{,}5 \text{ cm}^2$.

Ἄρα ἡ διὰ τοῦ δακτυλίου διερχομένη μαγνητικὴ ῥοὴ εἶναι:

$$\Phi = 17\,280 \times 38{,}5 \times 100 = 6{,}653 \times 10^7 \text{ maxwell.}$$

Τόση εἶναι καὶ ἡ μεταβολὴ τῆς μαγνητικῆς ροῆς κατὰ τὴν διακοπὴν τοῦ ρεύματος. Ὥστε ἡ ἀναπτυσσομένη ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐντὸς τοῦ δακτυλίου εἶναι:
$$E = \frac{1}{10^8} \times \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{10^8} \times \frac{66\,528 \times 10^3}{1/40} = 26{,}6 \text{ volt.}$$

331.— *Ἕνα πηνίον Α ἔχει μῆκος 1 m, ἀποτελεῖται ἀπὸ 650 σπείρας καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 3 ampère. Ἄλλο πηνίον Β, ἀποτελούμενον ἀπὸ 800 σπείρας, ἔχει τομὴν 4 cm² καὶ εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ πηνίου Α. Οἱ ἄξονες τῶν δύο πηνίων συμπίπτουν. Τὸ πηνίον Β συνδέεται μὲ βαλιστικὸν γαλβανόμετρον Γ, τὸ δὲ οὕτω ἀποτελούμενον κύκλωμα ἔχει ἀντίστασιν R = 600 ohm. Ὅταν διακόψωμεν τὸ ρεῦμα, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ πηνίον Α, τότε ὁ δείκτης τοῦ γαλβανομέτρου ἀπομακρύνεται ἀποτόμως ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας του μέχρι τῆς διαιρέσεως 32,5. Νὰ εὑρεθῇ πόση ποσότης ἠλεκτρισμοῦ ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν διαίρεσιν τῆς κλίμακος τοῦ γαλβανομέτρου.*

Ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐντὸς τοῦ πηνίου εἶναι:
$$H = 1{,}25\,\frac{NI}{l} = \frac{1{,}25 \times 650 \times 3}{100} = 24{,}375 \text{ gauss.}$$

Δι᾿ ἑκάστης σπείρας τοῦ πηνίου Β διέρχεται ροή:
$$\phi = HS = 24{,}375 \times 4 = 97{,}5 \text{ maxwell.}$$

Ἡ ὅλη ροή, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ πηνίου Β, εἶναι:
$$\Phi = 97{,}5 \times 800 = 78\,000 \text{ maxwell.}$$

Ὅταν διακόψωμεν τὸ ρεῦμα, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ πηνίον Α, τότε ἡ ἀνωτέρω ὑπολογισθεῖσα ροὴ μηδενίζεται. Ἐντὸς τοῦ κυκλώματος τοῦ βαλιστικοῦ γαλβανομέτρου ἀναπτύσσεται τότε ἐξ ἐπαγωγῆς ποσότης ἠλεκτρισμοῦ:
$$Q = \frac{1}{10^8}\,\frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{78\,000}{10^8 \times 600} = \frac{130}{10^8} \text{ coulomb.}$$

Αὐτὴ ἡ ποσότης ἠλεκτρισμοῦ προκαλεῖ ἀπόκλισιν τοῦ δείκτου κατὰ 32,5 διαιρέσεις. Ἄρα διὰ μίαν διαίρεσιν ἀπαιτεῖται ποσότης ἠλεκτρισμοῦ:
$$q = \frac{130}{32{,}5} \times \frac{1}{10^8} = \frac{4}{10^8} \text{ coulomb.}$$

332.— *Εἰς τὸ σχῆμα 200 ἡ τετράγωνος ἐπιφάνεια ΑΒΓΔ, πλευρᾶς l = 3 cm, παρουσιάζει τὴν τομὴν τοῦ μεταξὺ τῶν πόλων ἠλεκτρομαγνήτου διαστήματος. Τὸ μαγνητικὸν πεδίον εἶναι κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ σχήματος καὶ ἔχει ἔντασιν H = 10 000 gauss. Ἕνα ἄλλο τετράγωνον πλαίσιον $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$, ἀπὸ σύρμα χάλκινον, ἔχει τὰς ἰδίας διαστάσεις μὲ τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ καὶ μετακινεῖται κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε αἱ πλευραὶ A_1B_1 καὶ $\Gamma_1\Delta_1$ νὰ ὀλισθαίνουν ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.— 1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ σύρμα, ὅταν ἡ ταχύτης τῆς μετατοπίσεως αὐτῶν εἶναι 1 cm/sec.— 2) Τὸ μαγνητικὸν πεδίον ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ σύρμα, οὕτω δὲ ἀναπτύσσεται μία ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις F ἡ ὁποία ἀντιτίθεται εἰς τὴν μετατόπισιν τοῦ πλαισίου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ F, ὅταν ἡ ταχύτης τῆς μετατοπίσεως εἶναι 1 cm/sec. — 3) Νὰ εὑρεθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ταχύτης υ τῆς μετατοπίσεως, ὥστε ἡ δύναμις F νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ βάρος τοῦ σύρματος καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ* *δύναμις F εἶναι τότε ἀνεξάρτητος τῆς τομῆς τοῦ σύρματος.— Πυκνότης τοῦ χαλκοῦ:* $d = 8{,}9$ gr/cm³ · *διάμετρος τοῦ σύρματος* $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$: 1 mm· *ἡ ἀντίστασις αὐτοῦ θὰ ὑπολογισθῇ, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι σύρμα χάλκινον μήκους* 60 m *καὶ τομῆς* 1 mm² *ἔχει ἀντίστασιν* 1 ohm.

1) Ἐὰν τὸ πλαίσιον μετακινῆται κατὰ 1 cm ἐντὸς 1 δευτερολέπτου, τότε ἡ ἐπιφάνεια διὰ τῆς ὁποίας διέρχεται ἡ μαγνητικὴ ροὴ μεταβάλλεται κατὰ 3 cm² ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χρόνου. Ἄρα κατὰ δευτερόλεπτον ἔχομεν μεταβολὴν τῆς μαγνητικῆς ροῆς κατά:

$$\Delta\Phi = H.S = 10\,000 \times 3 = 30\,000 \text{ maxwell}$$

καὶ ἑπομένως ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐξ ἐπαγωγῆς εἶναι:

$$E = 10^{-8} \times 30\,000 = 3 \times 10^{-4} \text{ volt.}$$

Ἂς ὑπολογίσωμεν τώρα τὴν ἀντίστασιν R τοῦ σύρματος τοῦ πλαισίου. Τοῦτο ἔχει μῆκος 12 cm καὶ τομὴν π/4 mm².

Ἄρα ἔχομεν ὅτι σύρμα:

μήκους 60 m, τομῆς 1 mm², ἔχει ἀντίστασιν 1 ohm.

» 0,12 m, » 1 » » » $\dfrac{0{,}12}{60} = \dfrac{2}{1\,000}$ ohm

» 0,12 m » $\dfrac{\pi}{4}$ » » » $\dfrac{2}{1\,000} : \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{4}{500\,\pi}$ ohm.

Ὥστε ἡ ἀντίστασις τοῦ πλαισίου εἶναι:

$$R = \frac{4}{500\,\pi} \text{ ohm}$$

καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

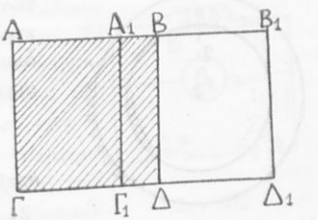
$$I = \frac{E}{R} = 3 \times 10^{-4} \times \frac{500\,\pi}{4} = 0{,}12 \text{ ampère.}$$

2) Μόνον ἐπὶ τοῦ ἀγωγοῦ $A_1\Gamma_1$ ὁ ὁποῖος ἔχει μῆκος 3 cm, ἀναπτύσσεται ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις:

$$F = \frac{1}{10} HIl = \frac{1}{10} \times 10\,000 \times 0{,}12 \times 3 = 360 \text{ δύναι} = 0{,}36 \text{ gr* περίπου.}$$

3) Ὁ ὄγκος τοῦ χαλκοῦ εἶναι:

$$120 \times \frac{\pi}{4} = 30\,\pi \text{ mm}^3.$$



Σχ. 200

Τὸ βάρος λοιπὸν τοῦ σύρματος εἶναι:

$30\,\pi \times 8{,}9 = 840$ mgr* ἢ 0,84 gr*.

Ἡ δύναμις F εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἔντασιν I, ἄρα εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν E, ἤτοι εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ΔΦ καὶ πρὸς τὴν ταχύτητα τῆς μετατοπίσεως. Ἐὰν λοιπὸν ἔχωμεν μίαν δύναμιν 0,36 gr*, ὅταν ἡ ταχύτης εἶναι 1 cm/sec, θὰ ἔχωμεν δύναμιν 0,84 gr*, ὅταν ἡ ταχύτης εἶναι: $\upsilon = 0{,}84 : 0{,}36 = 2{,}3$ cm/sec.

Ἐὰν διπλασιασθῇ ἡ τομὴ σύρματος, διπλασιάζεται καὶ τὸ βάρος του, ἀλλὰ ἡ ἀντίστασίς του γίνεται 2 φορὰς μικροτέρα, ὁπότε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος διπλασιάζεται καὶ ἑπομένως διπλασιάζεται καὶ ἡ δύναμις F. Ἄρα ἡ δύναμις F θὰ ἐξακολουθήσῃ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ βάρος τοῦ σύρματος, ἐφ' ὅσον ἡ ταχύτης μετατοπίσεως θὰ εἶναι ἡ αὐτή.

333.— *Ἕνα ἐπαγωγικὸν πηνίον ἔχει τὰ ἑξῆς χαρακτηριστικά:*
Τὸ πρωτεῦον ρεῦμα ἔχει ἔντασιν $I = 1$ ampère, *ὁ δὲ χρόνος διακοπῆς τοῦ ρεύματος εἶναι* 0,001 sec. *Τὸ πρωτεῦον κύκλωμα ἔχει* $N_1 = 100$ *σπείρας καὶ μῆκος* $l = 40$ cm. *Το δευτερεῦον κύκλωμα ἔχει* $N_2 = 20\,000$ *σπείρας, ἡ δὲ μαγνητικὴ διαπερατότης τοῦ πυρῆνος εἶναι* $\mu = 400$. *Ἡ τομὴ μιᾶς σπείρας εἶναι* $S = 200$ cm². *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναπτυσσομένη ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐντὸς τοῦ πηνίου κατὰ τὴν διακοπὴν τοῦ ρεύματος.*

Τὸ ρεῦμα δημιουργεῖ μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως: $H = \dfrac{4\pi}{10} \times \dfrac{N_1 I}{l}$.

Ἡ μαγνητικὴ ροὴ εἶναι: $\Phi = \mu H S \times N_2$.

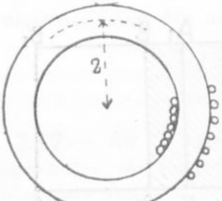
Ἄρα κατὰ τὴν διακοπὴν τοῦ ρεύματος ἀναπτύσσεται ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις:

$$E_2 = \frac{1}{10^8}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{10^8} \times \frac{\mu S}{\Delta t} \times \frac{4\pi N_1 I}{10\, l} \times N_2$$

ἢ $$E_2 = \frac{1}{10^8} \times \frac{400 \times 200}{0{,}001} \times \frac{1{,}25 \times 100 \times 1}{40} \times 20\,000 = 50\,000 \text{ volt.}$$

334.— *Δακτύλιος ἀπὸ μαλακὸν σίδηρον ἔχει ἐσωτερικὴν διάμετρον* 16 cm, *ἐξωτερικὴν διάμετρον* 24 cm *καὶ μαγνητικὴν διαπερατότητα* $\mu = 2\,236$. *Πέριξ τοῦ δακτυλίου τυλίσσεται μονωμένον σύρμα χάλκινον τὸ ὁποῖον σχηματίζει ἕνα μόνον στρῶμα. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ δακτυλίου αἱ σπεῖραι ἐφάπτονται ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην. Τὸ σύρμα ἔχει διάμετρον* 1 mm *καὶ εἰδικὴν ἀντίστασιν* $\rho = 1{,}6 \times 10^{-6}$ ohm - cm. *Τὸ πάχος τοῦ μονωτικοῦ στρώματος παραλείπεται.— 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντίστασις τοῦ πηνίου.— 2) Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου ἐφαρμόζεται διαφορὰ δυναμικοῦ* $V = 0{,}5$ volt. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τὸ ὁποῖον παράγει τὸ πηνίον.— 3) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου.— 4) Πόση ἐνέργεια ἀποταμιεύεται ἐντὸς τοῦ πηνίου κατὰ τὴν περίοδον τῆς ἀποκαταστάσεως τοῦ ρεύματος;*

1) Ἂν θεωρήσωμεν μίαν τομὴν τοῦ δακτυλίου, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ κέντρα τῶν τομῶν τοῦ σύρματος εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ δακτυλίου εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον: $16 - 0{,}1 = 15{,}9$ cm. Ἡ περιφέρεια αὐτὴ ἔχει μῆκος: $15{,}9 \times 3{,}14 = 49{,}92$ cm.



Σχ. 201

Ἄρα εὑρίσκονται ἐπ' αὐτῆς: $\nu = \dfrac{49{,}92}{0{,}1} = 499$ σπεῖραι. Ἡ τομὴ τοῦ δακτυλίου ἔχει διάμετρον: $\dfrac{24-16}{2} = 4$ cm. Ἐπομένως ἡ διάμετρος ἑκάστης σπείρας εἶναι: $4 + 0{,}1 = 4{,}1$ cm καὶ τὸ μῆκος μιᾶς σπείρας εἶναι:

$$4{,}1 \times 3{,}14 = 12{,}87 \text{ cm.}$$

Ὥστε τὸ ὅλον μῆκος τοῦ σύρματος εἶναι:

$$l = 12{,}87 \times 499 = 6\,422 \text{ cm.}$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἀντίστασις R τοῦ σύρματος εἶναι:

$$R = \rho\frac{l}{\sigma} = \frac{1{,}6}{10^6} \times \frac{6\,422 \times 400}{\pi} = 1{,}3 \text{ ohm.}$$

2) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ πηνίον, εἶναι:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{0,5}{1,3} = 0,385 \text{ ampère.}$$

Γνωρίζομεν ὅτι εἰς τὸ δακτυλιοειδὲς πηνίον ἡ ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, διὰ δυναμικὴν γραμμὴν ἀκτῖνος r, δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$H = 1,25\,\frac{I\,\nu}{2\,\pi\,r}.$$

ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι: $\nu = 499$ καὶ $r = 10$ cm εὑρίσκομεν:

$$H = 1,25 \times \frac{0,385 \times 499}{62,8} = 3,82 \text{ gauss.}$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι:

$$B = \mu\, H = 2\,236 \times 3,82 = 8\,541 \text{ gauss.}$$

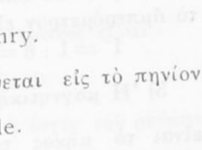
3) Ἡ μαγνητικὴ ἀντίστασις R′ τοῦ δακτυλίου τοῦ μαλακοῦ σιδήρου εἶναι: $R' = \frac{l'}{\mu\sigma}$, ὅπου l' εἶναι τὸ μῆκος τῆς δυναμικῆς γραμμῆς ἀκτῖνος r καὶ σ′ ἡ τομὴ τοῦ δακτυλίου. Ἄρα: $R' = \frac{2\,\pi\,r}{4\,\pi\,\mu} = \frac{r}{2\,\mu} = \frac{10}{2 \times 2\,236} = 0,00223.$

Ἑπομένως ὁ ζητούμενος συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς εἶναι:

$$L = \frac{1,25\,\nu^2}{10^8\,R'} = \frac{1,25 \times 499^2}{10^8 \times 0,00223} = 1,395 \text{ henry.}$$

4) Κατὰ τὴν ἀποκατάστασιν τοῦ ρεύματος ἀποταμιεύεται εἰς τὸ πηνίον ἐνέργεια: $W = \frac{1}{2}\,L I^2 = \frac{1,395 \times 0,385^2}{2} = 0,103$ joule.

335.— *Ἕνα κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπὸ στήλην Σ, ἡ ὁποία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 1$ volt, ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = 1$ ohm, ἀπὸ ἕνα διακόπτην Δ καὶ δύο διακλαδώσεις. Ἡ πρώτη διακλάδωσις ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀμπερόμετρον A ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $r_1 = 5$ ohm. Ἡ δευτέρα διακλάδωσις ἀποτελεῖται ἀπὸ πηνίον B χωρὶς πυρῆνα μαλακοῦ σιδήρου. Τὸ πηνίον περιλαμβάνει 10 000 σπείρας αἱ ὁποῖαι κατανέμονται ἐξ ἴσου εἰς 40 ἐπάλληλα στρώματα. Ἡ μέση διάμετρος τῶν σπειρῶν εἶναι 8 cm. Τὸ χάλκινον σύρμα τοῦ πηνίου ἔχει εἰδικὴν ἀντίστασιν $\rho = 1,6 \times 10^{-6}$ ohm·cm καὶ διάμετρον 1,6 mm. Τὸ πάχος τοῦ μονωτοῦ τοῦ σύρματος καὶ ἡ ἀντίστασις τῶν ἀγωγῶν ποὺ χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν συνδεσμολογίαν δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν.— 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντίστασις R τοῦ πηνίου καὶ αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὰς δύο διακλαδώσεις.— 2) Κατὰ τὴν στιγμὴν ποὺ ἀποκαθίσταται τὸ ρεῦμα παρατηρεῖται ὅτι τὸ ἀμπερόμετρον A δεικνύει μίαν ἔντασιν I′. Ἀλλὰ ἡ ἔντασις αὐτὴ ἐλαττώνεται ταχύτατα καὶ τέλος σταθεροποιεῖται εἰς τὴν τιμὴν ποὺ εὑρέθη εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον. Νὰ ἑρμηνευθῇ τὸ φαινόμενον τοῦτο καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἐντάσεως I′.— 3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου.*



Σχ. 202

1) Τὸ μῆκος μιᾶς σπείρας εἶναι κατὰ μέσον ὅρον 8 π cm καὶ τὸ ὅλον μῆ-

κος τοῦ σύρματος τοῦ πηνίου εἶναι: $l = 8\pi \times 10\,000 = 80\,000\,\pi$ cm. Ἄρα ἡ ἀντίστασις τοῦ πηνίου εἶναι:

$$R = \rho\,\frac{l}{\sigma} = \frac{1,6}{10^6} \times \frac{80\,000\,\pi \times 4}{\pi \times 0,16^6} = 20 \text{ ohm}.$$

Αἱ δύο διακλαδώσεις ἔχουν ἰσοδύναμον ἀντίστασιν $R_1 = \dfrac{20 \times 5}{20 + 5} = 4$ ohm.

Ἄρα ἡ ὅλη ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = \frac{E}{R_1 + r} = \frac{1}{5} = 0,200 \text{ ampère}.$$

Ἄν I_1 καὶ I_2 εἶναι αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν ἀντιστοίχως τὸ ἀμπερόμετρον καὶ τὸ πηνίον, τότε ἀπὸ τὰς σχέσεις:

$$5\,I_1 = 20\,I_2 \qquad \text{καὶ} \qquad I_1 + I_2 = 0,200$$

εὑρίσκομεν: $\quad I_1 = 0,160$ ampère $\quad$ καὶ $\quad I_2 = 0,040$ ampère.

2) Ὅταν κλείσωμεν τὸν διακόπτην Δ, τὸ ρεῦμα ἀποκαθίσταται ἀμέσως εἰς τὸ ἀμπερόμετρον, διότι τοῦτο στερεῖται αὐτεπαγωγῆς. Ἀντιθέτως εἰς τὸ πηνίον, ἕνεκα τῆς αὐτεπαγωγῆς του, ἡ ἀποκατάστασις τοῦ ρεύματος γίνεται μετὰ πάροδον ὡρισμένου χρόνου. Κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον εἶναι ὡς νὰ μὴ ὑπῆρχε τὸ πηνίον εἰς τὸ κύκλωμα, καὶ ἑπομένως ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι τότε $5 + 1 = 6$ ohm. Ἄρα ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τότε τὸ ἀμπερόμετρον εἶναι:

$I' = 1 : 6 = 0,167$ ampère $\qquad$ δηλαδὴ εἶναι: $\quad I' > I_1$.

3) Ἡ μαγνητικὴ ἀντίστασις R' τοῦ πηνίου εἶναι: $\quad R' = \dfrac{l'}{\sigma}$, ὅπου l' εἶναι τὸ μῆκος τοῦ πηνίου καὶ σ ἡ τομή του. Ἐπειδὴ κάθε στρῶμα τοῦ πηνίου περιλαμβάνει $10\,000 : 40 = 250$ σπείρας καὶ ἡ διάμετρος τοῦ σύρματος εἶναι 0,16 cm, συνάγεται ὅτι τὸ μῆκος τοῦ πηνίου εἶναι: $l' = 250 \times 0,16 = 40$ cm. Ἡ μέση τομὴ τῶν σπειρῶν εἶναι: $\sigma = 16\,\pi$ cm².

Ἄρα ἔχομεν: $\qquad R' = \dfrac{40}{16\,\pi} = \dfrac{10}{4\,\pi}$.

Ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου εἶναι:

$$L = \frac{1,25\,\nu^2}{10^8\,R'} = \frac{1,25 \times 10^8 \times 4\,\pi}{10^8 \times 10} = \frac{5\,\pi}{10} = 1,57 \text{ henry}.$$

336. — *Πέριξ ἑνὸς πυρῆνος ἐκ μαλακοῦ σιδήρου, ἔχοντος μαγνητικὴν διαπερατότητα* $\mu = 1500$ *τυλίσσεται πηνίον, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος* 20 cm, *μέσην τομὴν* $S = 12,57$ cm², *ἀντίστασιν* 3,2 ohm *καὶ τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ* 2 000 *σπείρας. Τὸ πηνίον τοῦτο διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως* 10 ampère. *Ἡ διακοπὴ τοῦ ρεύματος συντελεῖται ἐντὸς* 1/20 *τοῦ δευτερολέπτου.—Νὰ εὑρεθῇ: 1) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου. — 2) Ἡ ἰσχὺς τοῦ ρεύματος τοῦ διαρρέοντος τὸ πηνίον. — 3) Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐξ αὐτεπαγωγῆς κατὰ τὴν διακοπὴν τοῦ ρεύματος. — 4) Ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου. — 5) Ἡ ἰσχὺς τοῦ ἐξ αὐτεπαγωγῆς ἀναπτυσσομένου ρεύματος.*

1) Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου ἐφαρμόζεται διαφορὰ δυναμικοῦ:

$$V = RI = 3{,}2 \times 10 = 32 \text{ volt.}$$

2) Ἡ ἰσχὺς τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ πηνίον εἶναι:

$$P = VI = 32 \times 10 = 320 \text{ watt.}$$

3) Τὸ πηνίον παράγει μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως:

$$B = \mu H = \frac{4\pi}{10} \times \frac{N I \mu}{l}$$ καὶ ἐπομένως ἡ μαγνητικὴ ροὴ εἶναι:

$$\Phi = SBN = \frac{4\pi}{10} \times \frac{N^2 S \mu I}{l}.$$

Ὅταν διακόπτεται τὸ ρεῦμα, ἀναπτύσσεται ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐξ αὐτεπαγωγῆς:

$$E = \frac{1}{10^8} \times \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{4\pi N^2 S \mu}{10^9 l} \times \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

ἤτοι $$E = \frac{4\pi \times 2\,000^2 \times 12{,}57 \times 1\,500}{10^9 \times 20} \times \frac{10}{0{,}05} = 9\,480 \text{ volt}.$$

4) Ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου εἶναι: $$L = \frac{4\pi N^2 S \mu}{10^9 l}.$$

Ἡμπορεῖ ὅμως νὰ εὑρεθῇ καὶ ἀπὸ τὴν σχέσιν: $$E = L\,\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Ἄρα εἶναι: $$L = \frac{E \,.\, \Delta t}{\Delta I} = \frac{9480 \times 0{,}05}{10} = 47{,}4 \text{ henry.}$$

5) Ἡ ἐνέργεια τοῦ ἀναπτυσσομένου ἐξ αὐτεπαγωγῆς ρεύματος εἶναι:

$$W = \frac{1}{2}\, L I^2 = \frac{1}{2} \times 47{,}4 \times 10^2 = 2\,370 \text{ joule}.$$

Ἐπειδὴ τὸ ρεῦμα τοῦτο διαρκεῖ ἐπὶ χρόνον $t = 0{,}05$ ἡ ἰσχὺς τοῦ ρεύματος τούτου εἶναι: $$P' = \frac{W}{t} = \frac{2\,370}{0{,}05} = 47\,400 \text{ watt} = 47{,}4 \text{ kW}.$$

Ἡ ἰσχὺς τοῦ ἐξ αὐτεπαγωγῆς ρεύματος εἶναι 148 φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἰσχὺν τοῦ πρωτεύοντος ρεύματος.

337.— *Μία γεννήτρια συνεχοῦς ρεύματος ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* E, *ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* r *καὶ συνδέεται διὰ συρμάτων, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν ἀντίστασιν, μὲ βολτόμετρον ἀντιστάσεως* $r_1 = 490$ ohm. *Τὸ βολτόμετρον δεικνύει τότε* 49 volt. *Μεταξὺ τῶν πόλων τῆς γεννητρίας προσθέτομεν κατὰ διακλάδωσιν μίαν ἀντίστασιν* 10 ohm. *Τὸ βολτόμετρον δεικνύει τότε* 24,7 volt.— *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ* E *καὶ ἡ* r, *ὡς καὶ ἡ ὅλη ἰσχὺς τὴν ὁποίαν δαπανᾷ ἡ γεννήτρια κατὰ τὸ δεύτερον πείραμα.— 2) Ἀφαιροῦμεν τὸ βολτόμετρον καὶ τὴν προηγουμένην ἀντίστασιν, καὶ μεταξὺ τῶν πόλων τῆς γεννητρίας θέτομεν κατὰ διακλάδωσιν μίαν ἀντίστασιν* $R = 20$ ohm *καὶ μίαν μεταβλητὴν ἀντίστασιν* x ohm. *Νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσει τοῦ* x *ἡ ἰσχὺς* P *τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ γεννήτρια εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα.— 3) Ἡ γεννήτρια τροφοδοτεῖ μὲ ρεῦμα μόνον ἕνα μακρὸν πηνίον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰ ἑξῆς χαρακτηριστικά: ἀντίστασιν* 10 ohm, *ἀριθμὸν σπειρῶν ἐν ὅλῳ* 2 000, *μῆκος* 20 cm. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐντὸς τοῦ πηνίου. Ἂν ἡ τομὴ τοῦ πηνίου εἶναι* 20 cm², *νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου.*

1) Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ βολτομέτρου ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ $V_1 = 49$ volt· ἄρα τὸ βολτόμετρον (ὅπως καὶ ὅλον τὸ κύκλωμα)

διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως: $I_1 = V_1 : r_1 = 49 : 490 = 0{,}1$ ampère.

Ἑπομένως ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς γεννητρίας δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$E = 0{,}1\,(r_1 + r) \quad \text{ἤ} \quad E = 49 + 0{,}1\,r\,. \tag{1}$$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν τὸ βολτόμετρον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως: $I_2 = V_2 : r_1 = 24{,}7 : 490 = 0{,}05$ ampère,
ἡ δὲ ἀντίστασις τῶν 10 ohm διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I_3 = 24{,}7 : 10 = 2{,}47 \text{ ampère.}$$

Ἄρα ἡ ὅλη ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα, εἶναι:

$$I' = I_2 + I_3 = 0{,}05 + 2{,}47 = 2{,}52 \text{ ampère.}$$

Ἑπομένως ἔχομεν τότε τὴν σχέσιν: $E = V + I'r = 24{,}7 + 2{,}52\,r\,.$ (2)

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$E = 50 \text{ volt} \qquad r = 10 \text{ ohm.}$$

Ἡ ὅλη ἰσχύς, τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ γεννήτρια εἰς τὸ κύκλωμα, εἶναι:

$$P = EI' = 50 \times 2{,}52 = 126 \text{ watt.}$$

2) Ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις R_1 τῆς διακλαδώσεως εἶναι: $R_1 = \dfrac{R\,x}{R + x}$

Ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι $R_1 + r$ καὶ ἑπομένως ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι: $I = \dfrac{E}{R_1 + r}\,.$

Ἡ γεννήτρια παρέχει εἰς τὸ κύκλωμα ἰσχύν:

$$P = R_1 I^2 = \frac{E^2 R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{E^2 R\,x\,(R + x)}{[R\,x + r\,(R + x)]^2}\,.$$

3) Ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι τώρα 20 ohm. Ἑπομένως ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι: $I = 50 : 20 = 2{,}5$ ampère.

Ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐντὸς τοῦ πηνίου εἶναι:

$$H = \frac{4\,\pi}{10} \times \frac{N\,I}{l} = \frac{4\,\pi}{10} \times \frac{2\,000 \times 2{,}5}{20} = 100\,\pi = 314 \text{ gauss.}$$

Ὁ δὲ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου εἶναι:

$$L = \frac{4\,\pi}{10^9} \times \frac{N^2\,S}{l} = \frac{4\,\pi}{10^9} \times \frac{4 \times 10^6 \times 20}{20} = \frac{16\,\pi}{10^3} = 0{,}05 \text{ henry}\,.$$

338 — *Μία γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* 1,12 volt. — *1) Συνδέομεν τοὺς δύο πόλους τῆς γεννητρίας μὲ σύρμα τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν* 3,80 ohm. *Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν δύο πόλων τῆς γεννητρίας γίνεται τότε* 0,76 volt. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς γεννητρίας.* — *2) Ἡ ἀνωτέρω γεννήτρια παρεμβάλλεται εἰς κύκλωμα τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει κατὰ σειράν: μίαν ἀντίστασιν* 48,2 ohm, *ἕνα διακόπτην καὶ ἕνα σωληνοειδές, τὸ ὁποῖον ἔχει πολὺ μεγάλο μῆκος. Ὁ ἄξων τοῦ σωληνοειδοῦς εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη, ἡ ὁποία ἠμπορεῖ νὰ στρέφεται ἐλευθέρως περὶ κατακόρυφον ἄξονα, εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ σωληνοειδοῦς καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ. Ὅταν τὸ ρεῦμα διέρχεται διὰ τοῦ σωληνοειδοῦς, ἡ βελόνη στρέφεται κατὰ γωνίαν* 45^0. *Ἐὰν εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ σωληνοειδὲς φέρει* 10 *σπείρας κατὰ ἑκατοστόμετρον μήκους, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις τοῦ πηνίου. Ἡ ἔντασις τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι:* $H_0 = 0{,}20$ gauss. — *3) Ἐν-*

τὸς τοῦ σωληνοειδοῦς καὶ εἰς τὴν θέσιν τῆς μαγνητικῆς βελόνης τοποθετοῦμεν ἄλλο πηνίον τοῦ ὁποίου αἱ σπεῖραι εὑρίσκονται εἰς ἐπίπεδα κάθετα πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ σωληνοειδοῦς. Τὸ πηνίον φέρει 100 *σπείρας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ἐπιφάνειαν* 25 cm². *Διακόπτομεν ἀποτόμως τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ σωληνοειδὲς καὶ οὕτω ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τούτου ἐλαττώνεται ἀπὸ* 1,6 ampère *εἰς μηδὲν ἐντὸς* 0,01 *τοῦ δευτερολέπτου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐξ ἐπαγωγῆς ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐντὸς τοῦ πηνίου, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐντὸς τοῦ σωληνοειδοῦς μεταβάλλεται κατὰ τὴν διακοπὴν γραμμικῶς.*

1) Ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος δίδεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm:

$$I = V : R = 0{,}76 : 3{,}8 = 0{,}2 \text{ ampère}.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν $E = V + Ir$ εὑρίσκομεν τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν r τῆς γεννητρίας:

$$r = \frac{E - V}{I} = \frac{1{,}12 - 0{,}76}{0{,}2} = 1{,}8 \text{ ohm}.$$

2) Ἡ μαγνητικὴ βελόνη προσανατολίζεται οὕτως ὥστε ὁ ἄξων της νὰ ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς συνισταμένης τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου καὶ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ σωληνοειδοῦς. Ἡ διεύθυνσις αὐτὴ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζουν μεταξύ των αἱ ἐντάσεις τῶν δύο πεδίων. Ἄρα ἡ ἔντασις H τοῦ πεδίου τοῦ σωληνοειδοῦς εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἔντασιν τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου, δηλαδὴ εἶναι:

$$H = H_0 = 0{,}2 \text{ gauss}.$$

Ἡ ἔντασις αὐτὴ H δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν: $H = \frac{4\pi}{10} \nu I_1$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τὴν νέαν ἔντασιν I_1 τοῦ ρεύματος:

$$I_1 = \frac{10\,H}{4\pi\nu} = \frac{10 \times 0{,}2}{4 \times 3{,}14 \times 10} = \frac{1}{62{,}8} \text{ ampère}.$$

Ἐὰν R_1 εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ σωληνοειδοῦς, τότε ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$E = (1{,}8 + 48{,}2 + R_1)\, I_1 \qquad \text{ἄρα} \qquad R_1 = \frac{E - 50\, I_1}{I_1} = 20{,}3 \text{ ohm}.$$

3) Ἡ ἐπιφάνεια τῶν σπειρῶν τοῦ πηνίου εἶναι:

$$S = 100 \times 25 = 2\,500 \text{ cm}^2$$

ἡ δὲ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ σωληνοειδοῦς εἶναι:

$$H = \frac{4\pi}{10} \times 10 \times 1{,}6 = 20{,}1 \text{ gauss}.$$

Ἑπομένως ἡ μαγνητικὴ ροὴ ἡ ὁποία διαρρέει τὸ πηνίον εἶναι:

$$\Phi = HS = 20{,}1 \times 2\,500 = 50\,250 \text{ maxwell}.$$

Ὅταν διακόψωμεν τὸ ρεῦμα, ποὺ διαρρέει τὸ σωληνοειδές, τότε ἡ μαγνητικὴ ροὴ μεταβάλλεται κατὰ $\Delta\Phi = 50\,250$ maxwell ἐντὸς χρόνου $\Delta t = 0{,}01$ sec. Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐξ ἐπαγωγῆς, ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐντὸς τοῦ πηνίου, διατηρεῖ κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον σταθερὰν τιμὴν καὶ εἶναι ἴση μέ:

$$E_1 = \frac{1}{10^8} \times \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{10^8} \times \frac{50\,250}{0{,}01} = 0{,}05 \text{ volt}.$$

339.—*Δύο εὐθύγραμμοι ἀγωγοὶ* AB *καὶ* ΓΔ *εἶναι παράλληλοι καὶ εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Ἐπὶ τῶν ἀγωγῶν τούτων ἠμπορεῖ νὰ ὀλισθαίνῃ μεταλλικὴ ράβδος* MN *ἡ ὁποία μένει πάντοτε κάθετος πρὸς τοὺς δύο ἀγωγούς. Τὸ σύστημα τοῦτο τῶν ἀγωγῶν εὑρίσκεται ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου, ποὺ ἔχει ἔντασιν*

$H = 5\,000$ gauss, *εἶναι κατακόρυφον καὶ διευθύνεται ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Τὰ ἄκρα* A *καὶ* Δ *τῶν ἀγωγῶν συνδέονται ἀντιστοίχως μὲ τὸν θετικὸν καὶ τὸν ἀρνητικὸν πόλον μιᾶς στήλης, ἡ ὁποία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* $E = 6$ volt· *ἡ δὲ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ* $R = 2$ ohm. *Ἡ ἀπόστασις τῶν ἀγωγῶν* AB *καὶ* ΓΔ *εἶναι* $\alpha = 20$ cm. — *1) Νὰ εὑρεθῇ πόση εἶναι ἡ ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τῆς ράβδου* MN, *τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν ἀκίνητον. Πόσον εἶναι τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως αὐτῆς, ὅταν ἡ ράβδος* MN *μετακινῆται κατὰ* $x = 1$ cm ; — *2) Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ κύκλωμα τὴν στήλην καὶ κλείομεν πάλιν τὸ κύκλωμα, τὸ ὁποῖον ἐξακολουθεῖ νὰ ἔχῃ ἀντίστασιν* $R = 2$ ohm. *Μετακινοῦμεν τότε τὴν ράβδον μὲ ταχύτητα* $\upsilon = 5$ m/sec. *Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, ποὺ διαρρέει τότε τὸ κύκλωμα.* — *3) Ἐπαναφέρομεν τὴν στήλην εἰς τὸ κύκλωμα. Νὰ ἐξετασθῇ ἡ προηγουμένη πάλιν περίπτωσις : α) ὅταν ἡ* MN *μετακινῆται πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ β) ὅταν ἡ* MN *μετακινῆται πρὸς τὰ ἀριστερά. 4) Ἀφήνομεν ἐλευθέραν τὴν ράβδον, ἀλλὰ αἱ μηχανικαὶ τριβαὶ εἶναι ἰσοδύναμοι μὲ δύναμιν* $F' = 25\,000$ *δύνας, ἡ ὁποία ἔχει φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν φορὰν τῆς κινήσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ πόση εἶναι τότε ἡ ὁρικὴ ταχύτης καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ποὺ διαρρέει τὸ κύκλωμα.*

Τὸ μαγνητικὸν πεδίον ποὺ ὀφείλεται εἰς τὸ ρεῦμα, τὸ διαρρέον τὸ κύκλωμα, παραλείπεται.

1) Ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὸ κύκλωμα, εἶναι :

$$I = E : R = 6 : 2 = 3 \text{ ampère}.$$

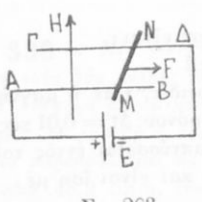
Ἐπὶ τῆς ράβδου MN ἀναπτύσσεται ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις F, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ διευθύνσεις τοῦ ρεύματος καὶ τοῦ πεδίου, ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τοὺς ἀγωγοὺς AB καὶ ΓΔ. Ἡ δύναμις F ἔχει φορὰν πρὸς τὰ δεξιά, δηλαδὴ διευθύνεται πρὸς τὰ ἄκρα B καὶ Δ τῶν ἀγωγῶν καὶ ἔχει ἔντασιν :

$$F = \frac{1}{10} HI\alpha = \frac{1}{10} \times 5\,000 \times 3 \times 20 = 30\,000 \text{ δύναι.}$$

Ὅταν ἡ ράβδος μετακινῆται κατὰ 1 cm, τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως F εἶναι :

$$W = F \,.\, x = 30\,000 \times 1 = 30\,000 \text{ ἔργια.}$$

2) Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῆς στήλης ἀπὸ τὸ κύκλωμα, τοῦτο δὲν διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα. Ἂν τότε μετακινηθῇ ἡ ράβδος MN, μεταβάλλεται ἡ μαγνητικὴ ροὴ Φ ποὺ διαρρέει τὸ κύκλωμα. Ἑπομένως ἀναπτύσσεται ἐντὸς τοῦ κυκλώματος ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις, ἡ ὁποία ἔχει τιμήν :



Σχ. 203

$$\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{10^8} \text{ volt}$$

ὅπου ΔΦ εἶναι ἡ μεταβολὴ τῆς ροῆς ἐντὸς 1 δευτερολέπτου. Ἂν ἡ ράβδος MN μετακινῆται μὲ ταχύτητα $\upsilon = 500$ cm/sec, τότε ἐντὸς 1 δευτερολέπτου ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυκλώματος μεταβάλλεται κατά :

$$S = 500 \times 20 = 10\,000 \text{ cm}^2.$$

Ἄρα ἡ μεταβολὴ ΔΦ τῆς ροῆς εἶναι :

$$\Delta\Phi = H.S = 5\,000 \times 10^4 = 5 \times 10^7 \text{ maxwell}$$

καὶ ἡ ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι : $\varepsilon = \dfrac{\Delta\Phi}{10^8} = \dfrac{5 \times 10^7}{10^8} = 0{,}5$ volt.

Ἡ ἔντασις τοῦ ἐπαγωγικοῦ ῥεύματος εἶναι :

$$i = \varepsilon : R = 0{,}5 : 2 = 0{,}25 \text{ ampère}.$$

Ἂν ἡ ῥάβδος μετακινῆται πρὸς τὰ δεξιά, τότε σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Lenz ἀναπτύσσεται ἐπ' αὐτῆς μία ἀντιδρῶσα δύναμις, ἡ ὁποία διευθύνεται πρὸς τὰ ἀριστερά. Ἄρα τὸ ἐπαγωγικὸν ῥεῦμα i ἔχει διεύθυνσιν ἀντίθετον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ ῥεύματος I τὸ ὁποῖον παρεῖχεν ἡ στήλη εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

3) Ἂν ἐπαναφέρωμεν τὴν στήλην εἰς τὸ κύκλωμα, καὶ μετακινήσωμεν τὴν ῥάβδον MN, τότε τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ τὸ συνεχὲς ῥεῦμα I τῆς στήλης καὶ ἀπὸ τὸ ἐπαγωγικὸν ῥεῦμα i τὸ ὁποῖον ὑπελογίσαμεν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον. Καὶ ἂν μὲν ἡ ῥάβδος MN μετακινῆται πρὸς τὰ δεξιά, ἡ ὅλη ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι $E - \varepsilon$ καὶ ἡ ἔντασις I_1 τοῦ ῥεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τότε τὸ κύκλωμα, εἶναι :

$$I_1 = \frac{E - \varepsilon}{R} = \frac{6 - 0{,}5}{2} = 2{,}75 \text{ ampère} \quad \text{ἤτοι} \quad I_1 = I - i.$$

Ἀντιθέτως ἂν ἡ ῥάβος μετακινηθῇ πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἡ ὅλη ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι $E + \varepsilon$ καὶ ἡ ἔντασις I_2 τοῦ ῥεύματος εἶναι :

$$I_2 = \frac{E + \varepsilon}{R} = \frac{6 + 0{,}5}{2} = 3{,}25 \text{ ampère} \quad \text{ἤτοι} \quad I_2 = I + i.$$

4) Ἂν ἀφήσωμεν τὴν ῥάβδον MN νὰ κινηθῇ ἐλευθέρως ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς δυνάμεως F, τότε ἡ ῥάβδος θὰ ἀποκτήσῃ τὴν ὁρικὴν ταχύτητα, ὅταν ἡ ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις F γίνῃ ἴση καὶ ἀντίθετος μὲ τὴν δύναμιν τῶν τριβῶν $F' = 25\,000$ δύναι. Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος ἀποκτήσῃ μίαν τιμὴν I_3, τοιαύτην ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$F = F' \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{10} H I_3 \alpha = 25\,000 .$$

Ἄρα ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος πρέπει νὰ εἶναι :

$$I_3 = \frac{10 \times 25\,000}{H \alpha} = \frac{25 \times 10^4}{10^5} = 2{,}5 \text{ ampère} .$$

Τὸ ῥεῦμα τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὴν ἐπιπρόσθεσιν δύο ῥευμάτων : τοῦ ῥεύματος $I = 3$ ampère τῆς στήλης καὶ τοῦ ἐπαγωγικοῦ ῥεύματος i' τὸ ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τὴν ἐπαγωγικὴν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν ε' ποὺ ἀναπτύσσεται ἕνεκα τῆς κινήσεως τῆς ῥάβδου MN. Τὸ ῥεῦμα τοῦτο i' ἔχει φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν φορὰν τοῦ ῥεύματος τῆς στήλης καὶ ἑπομένως ἡ τιμὴ τοῦ i' εἶναι :

$$i' = I - I_3 = 3 - 2{,}5 = 0{,}5 \text{ ampère}.$$

Ἄρα ἡ ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ε' εἶναι :

$$\varepsilon' = R\, i' = 2 \times 0{,}5 = 1 \text{ volt} .$$

Εὑρίσκομεν λοιπὸν ὅτι ἡ ε' εἶναι διπλασία τῆς ἐπαγωγικῆς ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως ε τὴν ὁποίαν εὕρομεν εἰς τὴν πρώτην παράγραφον τοῦ προβλήματος. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ε ἀναπτύσσεται ὅταν ἡ ῥάβδος ἔχῃ ταχύτητα $\upsilon = 5$ m/sec, συνάγεται ὅτι ἡ ε', ποὺ εἶναι διπλασία τῆς ε, ἀναπτύσσεται ὅταν ἡ ῥάβδος μετακινῆται μὲ διπλασίαν ταχύτητα. Ἄρα ἡ ζητουμένη ὁρικὴ ταχύτης υ' τῆς ῥάβδου MN εἶναι :

$$\upsilon' = 2\upsilon = 10 \text{ m/sec} .$$

340.— *Εἰς μίαν μηχανὴν τοῦ* Atwood *ἑκάστη ἀπὸ τὰς δύο ἴσας μάζας* M *εἶναι ἴση μὲ* 490 gr. *Ἡ πρόσθετος μᾶζα* m = 20 gr, *ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα τετράγωνον πλαίσιον* ΑΒΓΔ, *πλευρᾶς* 10 cm. *Τὸ πλαίσιον τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ χάλκινον σύρμα, τὸ ὁποῖον ἔχει σταθερὰν τομήν. Τὸ πλαίσιον εἶναι ἐξηρτημένον κάτω ἀπὸ τὴν μίαν μᾶζαν* M *οὕτως ὥστε αἱ πλευραί του* AB *καὶ* ΓΔ *νὰ εἶναι ὁριζόντιοι, τὸ δὲ ἐπίπεδον* ΑΒΓΔ *τοῦ πλαισίου νὰ συμπίπτῃ πάντοτε μὲ τὸ αὐτὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον* Ω. *Κατὰ τὴν κάθοδόν του τὸ πλαίσιον διέρχεται μεταξὺ τῶν δύο πόλων ἠλεκτρομαγνήτου, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἐπικρατεῖ ὁμοιόμορφον μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως* H = 10 000 gauss. *Αἱ δυναμικαὶ γραμμαὶ τοῦ πεδίου εἶναι κάθετοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ πλαισίου καὶ διευθύνονται ἐκ τῶν ἔμπροσθεν πρὸς τὰ ὄπισθεν. Ἡ τομὴ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου* Ω *εἶναι τετράγωνον* ΝΟΠΡ *τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ* NO *καὶ* ΠΡ *εἶναι ὁριζόντιοι. Ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τούτου ἔχει μῆκος* 12 cm. *Τὰ τετράγωνα* ΑΒΓΔ *καὶ* ΝΟΠΡ *ἔχουν τὸν αὐτὸν κατακόρυφον ἄξονα συμμετρίας.*

I) Ὁ ἠλεκτρομαγνήτης δὲν διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα. Κατὰ τὴν κάθοδον τοῦ πλαισίου θέλομεν ἡ κατωτέρα πλευρά του AB *νὰ φθάνῃ εἰς τὸ ὕψος τῆς* NO *μὲ ταχύτητα* $\upsilon_0 = 50$ cm/sec. *Νὰ εὑρεθῇ ἀπὸ πόσον ὕψος πρέπει νὰ ἀφήσωμεν νὰ πέσῃ τὸ πλαίσιον καὶ εἰς πόσον χρόνον ἡ* AB *διατρέχει τὸ ὕψος τῆς* ΝΠ.

II) Ὁ ἠλεκτρομαγνήτης διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα καὶ ἡ κατωτέρα πλευρὰ AB *τοῦ πλαισίου εὑρίσκεται εἰς τὸ ὕψος τῆς* NO.—*α) Νὰ ἐξηγηθῇ διατί, ὅταν ἡ* AB *κινῆται μεταξὺ τῶν πόλων τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου, ἐντὸς τοῦ πλαισίου κυκλοφορεῖ ρεῦμα καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος τοῦ πλαισίου, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι σύρμα χάλκινον μήκους* 30 m *καὶ τομῆς* 0,5 mm² *ἔχει ἀντίστασιν* 1 ohm.— *β) Νὰ δειχθῇ ὅτι τότε ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ πλαισίου μία ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις* F *καὶ νὰ προσδιορισθῇ ἡ διεύθυνσίς της, ἡ φορά της καὶ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της.— γ) Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως αὐτῆς ἡ κίνησις τοῦ πλαισίου γίνεται ἰσοταχὴς μὲ ταχύτητα* $\upsilon = 2{,}4$ cm/sec. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις διὰ τῆς ὁποίας ἠμποροῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος συναρτήσει τῆς ταχύτητος* υ. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις αὐτὴ τοῦ ρεύματος καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις* F.—*δ) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ φορὰ τοῦ ρεύματος ἐντὸς τῶν συρμάτων* AB *καὶ* ΓΔ *τοῦ πλαισίου εἰς τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις: 1) ὅταν μόνον τὸ* AB *μετακινῆται ἐντὸς τοῦ πεδίου· 2) ὅταν τὸ* AB *εὑρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὸ πεδίον καὶ ἐντὸς αὐτοῦ μετακινεῖται μόνον τὸ* ΓΔ. *Τί θὰ συμβῇ ὅταν τὸ* AB *καὶ τὸ* ΓΔ *εὑρεθοῦν καὶ τὰ δύο ἐντὸς τοῦ πεδίου; Ἡ μᾶζα τῆς τροχαλίας καὶ αἱ πάσης φύσεως ἀντιστάσεις θεωροῦνται ἀσήμαντοι. Πυκνότης τοῦ χαλκοῦ:* d = 9 gr/cm³. g = 1 000 C.G.S.

I) Ὁ ἠλεκτρομαγνήτης δὲν διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα.

Τὸ σύστημα τῶν μαζῶν τῆς μηχανῆς τοῦ Atwood κινεῖται μὲ ἐπιτάχυνσιν:

$$\gamma = \frac{mg}{2M + m} = \frac{20 \times 1\,000}{(2 \times 490) + 20} = 20 \text{ cm/sec}^2 .$$

Διὰ νὰ ἀποκτήσῃ τὸ σύστημα τὴν ταχύτητα υ_0 πρέπει νὰ διανύσῃ διάστημα s_0 τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\upsilon_0^2 = 2\gamma s_0$

ἄρα
$$s_0 = \frac{\upsilon_0^2}{2\gamma} = \frac{2\,500}{2 \times 20} = 62{,}5 \text{ cm}.$$

Ἔστω ὅτι ἡ πλευρὰ AB φθάνει εἰς τὸ ὕψος τῆς NO κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t καὶ ὅτι διὰ νὰ διατρέξῃ τὸ διάστημα NO = 12 cm χρειάζεται χρόνον θ. Τότε ἔχομεν τὰς σχέσεις:

$$62{,}5 = \frac{1}{2}\,20\,t^2 \qquad \text{καὶ} \qquad 74{,}5 = \frac{1}{2}\,20\,(t+\theta)^2$$

ἄρα εἶναι: $\theta = \sqrt{7{,}45} - \sqrt{6{,}25} = 0{,}23$ sec.

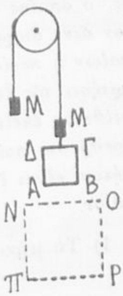
II) Ὁ ἠλεκτρομαγνήτης διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα.

α) Ὅταν ἡ πλευρὰ AB κατέρχεται ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, ἡ μαγνητικὴ ροή, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ πλαισίου, βαίνει αὐξανομένη. Ἑπομένως ἐντὸς τοῦ πλαισίου ἀναπτύσσεται ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐξ ἐπαγωγῆς.

Τὸ πλαίσιον ἔχει μῆκος $l = 40$ cm καὶ μᾶζαν $m = l\sigma d$, ὅπου σ εἶναι ἡ τομὴ τοῦ σύρματος. Ἄρα εἶναι: $\sigma = \frac{m}{l\,d} = \frac{20}{40 \times 9} = \frac{1}{18}$ cm².

Ἐπειδὴ ἡ ἀντίστασις ἑνὸς σύρματος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ μῆκος του καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὴν τομήν του, συνάγεται ὅτι ἡ ἀντίστασις R τοῦ πλαισίου εἶναι: $R = \frac{0{,}005}{1/18} \times \frac{40}{3\,000} = \frac{12}{10^4}$ ohm.

β) Τὸ σύρμα AB διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα καὶ εὑρίσκεται ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου. Ἑπομένως ἐπὶ τοῦ AB ἐνεργεῖ μία ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις F, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ὁρίζουν τὸ ρεῦμα AB καὶ ἡ διεύθυνσις τοῦ πεδίου, δηλαδὴ εἶναι κατακόρυφος. Ἡ δύναμις F ἐφαρμόζεται εἰς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς AB καί, σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Lenz, πρέπει νὰ ἀνθίσταται εἰς τὴν κίνησιν ἡ ὁποία προκαλεῖ τὴν γένεσιν τοῦ ρεύματος. Ἄρα ἡ δύναμις F διευθύνεται πρὸς τὰ ἄνω.



Σχ. 204

γ) Ἔστω ὅτι κατὰ δευτερόλεπτον ἡ μαγνητικὴ ροή, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ πλαισίου, μεταβάλλεται κατὰ Δφ. Τότε ἡ ἀναπτυσσομένη ἐξ ἐπαγωγῆς ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι: $E = \frac{1}{10^8}\,\Delta\phi = \frac{1}{10^8} \times 10\,000 \times 10 \times \upsilon = \frac{\upsilon}{10^8}$.

Ἡ ἔντασις τοῦ ἐπαγωγικοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{\upsilon}{10^8} : \frac{12}{10^4} = \frac{2{,}4 \times 10}{12} = 2 \text{ ampère}.$$

Ἡ δύναμις F, ἡ ὁποία ἐνεργεῖ εἰς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς AB, ἔχει ἔντασιν:

$$F = \frac{1}{10}\,HI \times AB = \frac{1}{10} \times 10\,000 \times 2 \times 10 = 20\,000 \text{ δύναι} = 20 \text{ gr}^*.$$

Ἡ δύναμις αὐτὴ εἶναι ἴση μὲ τὸ βάρος τοῦ πλαισίου καὶ διὰ τοῦτο ἡ κίνησις τοῦ συστήματος ἔγινεν ἰσοταχής.

δ) Μὲ τὸν κανόνα τοῦ Ampère εὑρίσκομεν ὅτι ἐντὸς τοῦ AB ἢ τοῦ ΓΔ, ὅταν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν εὑρίσκεται μόνον του ἐντὸς τοῦ πεδίου, τὸ ἐπαγωγικὸν ρεῦμα ἔχει διεύθυνσιν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά. Ὅταν τὸ AB καὶ τὸ ΓΔ εὑρίσκωνται καὶ τὰ δύο ἐντὸς τοῦ πεδίου, ἡ μαγνητικὴ ροὴ ποὺ διέρχεται διὰ τοῦ πλαισίου εἶναι σταθερά. Ἐπαγωγικὸν ρεῦμα δὲν παράγεται καὶ συνεπῶς τὸ πλαίσιον δὲν διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα. Τότε ἡ κίνησις τῶν μαζῶν εἶναι πάλιν ἐπιταχυνομένη μὲ ἐπιτάχυνσιν γ = 20 cm/sec².

341.— *Ἕνα κυκλικὸν πλαίσιον ἔχει ἀκτῖνα* $\alpha = 10$ cm *καὶ περιλαμβάνει* $N = 20$ *σπείρας σύρματος ἔχοντος διάμετρον* $\delta = 1$ mm *καὶ εἰδικὴν ἀντίστασιν* $1{,}5 \times 10^{-6}$ ohm - cm. *Τὰ ἄκρα τοῦ πλαισίου συνδέονται μὲ μίαν στήλην, ἡ ὁποία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* $E = 0{,}95$ volt *καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* 0,76 ohm.— *1) Τὸ ἐπίπεδον τοῦ πλαισίου εἶναι κατακόρυφον καὶ κάθετον πρὸς τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινόν. Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι* $H_0 = 0{,}2$ gauss, *ἡ δὲ φορὰ τοῦ ρεύματος εἶναι τοιαύτη ὥστε ἡ διεύθυνσις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ ρεύματος εἰς τὸ κέντρον τοῦ πλαισίου νὰ εἶναι ὁμόρροπος πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου. Εἰς τὸ κέντρον τοῦ πλαισίου τούτου τοποθετεῖται ἕνα μικρὸν πηνίον ἀποτελούμενον ἀπὸ* $N_1 = 200$ *σπείρας σύρματος, ἔχοντος διάμετρον* $\delta_1 = 0{,}1$ mm *καὶ τὴν αὐτὴν εἰδικὴν ἀντίστασιν μὲ τὸ σύρμα τοῦ πλαισίου. Ἡ ἀκτὶς τοῦ πηνίου τούτου εἶναι* $\alpha_1 = 1$ cm, *τὸ δὲ ἐπίπεδον τῶν σπειρῶν του εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ πλαισίου. Τὸ πηνίον συνδέεται μὲ ἀντίστασιν* 276 ohm, *ἡ ὁποία κλείει τὸ κύκλωμα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ποσότης ἠλεκτρισμοῦ ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐξ ἐπαγωγῆς ἐντὸς τοῦ κυκλώματος τούτου, κατὰ τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν κλείεται τὸ κύκλωμα τοῦ πλαισίου. — 2) Εἰς τὸ κέντρον τοῦ πλαισίου τοποθετεῖται τώρα, ἀντὶ τοῦ πηνίου, ἕνας μικρὸς εὐθύγραμμος μαγνήτης, ὁ ὁποῖος ἐξαρτᾶται διὰ νήματος μὴ παρουσιάζοντος στρέψιν. Ὅταν τὸ πλαίσιον δὲν διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα, ὁ μαγνήτης ἐκτελεῖ ὁριζοντίους αἰωρήσεις, τῶν ὁποίων ἡ περίοδος εἶναι* 1 sec. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίοδος τῶν αἰωρήσεων τούτων συναρτήσει τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος, ὅταν τοῦτο διαρρέῃ τὸ πλαίσιον κατὰ φορὰν ἀντίθετον ἐκείνης ποὺ ἀναφέρεται εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον. Ἐπίσης νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίαν τιμὴν τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος ἡ περίοδος αἰωρήσεως τοῦ μαγνήτου εἶναι ἴση μὲ ἐκείνην τὴν ὁποίαν προκαλεῖ μόνον τὸ γήϊνον μαγνητικὸν πεδίον.*

1) Τὸ μῆκος τοῦ σύρματος τοῦ κυκλικοῦ πλαισίου εἶναι :

$$l = 2\pi\alpha N = 2\pi \times 10 \times 20 = 400\,\pi \text{ cm}$$

ἡ δὲ τομή του εἶναι : $$\sigma = \frac{\pi\delta^2}{4} = \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{10^2} = \frac{\pi}{400} \text{ cm}^2.$$

Ἑπομένως ἡ ἀντίστασις τοῦ πλαισίου εἶναι :

$$R = \rho\frac{l}{\sigma} = \frac{1{,}5}{10^6} \times 400\,\pi \times \frac{400}{\pi} = \frac{24}{10^2} = 0{,}24 \text{ ohm.}$$

Ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι : $R' = 0{,}24 + 0{,}76 = 1$ ohm,

ἡ δὲ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι : $I = E : R' = 0{,}95 : 1 = 0{,}95$ ampère.

Τὸ ρεῦμα τοῦτο δημιουργεῖ εἰς τὸ κέντρον τοῦ πλαισίου μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως : $$H = \frac{2\,\pi}{10} = \frac{N\,I}{\alpha} = \frac{2\,\pi}{10} \times \frac{20 \times 0{,}95}{10} = 1{,}19 \text{ gauss.}$$

Εἰς τὸ κέντρον λοιπὸν τοῦ πλαισίου ἡ συνισταμένη ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι : $H' = H_0 + H = 0{,}20 + 1{,}19 = 1{,}39$ gauss.

Τὸ σύρμα τοῦ μικροῦ πηνίου ἔχει μῆκος :

$$l_1 = 2\,\pi\,\alpha_1\,N_1 = 2\,\pi \times 1 \times 200 = 400\,\pi\,,$$

ἤτοι ἔχει μῆκος ἴσον μὲ τὸ μῆκος τοῦ σύρματος τοῦ πλαισίου. Ἡ τομὴ τοῦ σύρματος τοῦ πηνίου εἶναι : $$\sigma_1 = \frac{\pi\,\delta_1^2}{4} = \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{100^2} = \frac{\pi}{40\,000} \text{ cm}^2 \cdot$$

ἄρα εἶναι $\sigma_1 = \frac{\sigma}{100}$. Τὸ σύρμα τοῦ πηνίου ἔχει λοιπὸν ἀντίστασιν R_1 ἑκατὸν φορὰς μεγαλυτέραν ἀπὸ τὴν ἀντίστασιν τοῦ σύρματος τοῦ πλαισίου, ἤτοι εἶναι:

$$R_1 = 100\,R = 100 \times 0{,}24 = 24 \text{ ohm}.$$

Ἡ δὲ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος τοῦ μικροῦ πηνίου εἶναι:

$$R_1' = 24 + 276 = 300 \text{ ohm}.$$

Ἡ μαγνητικὴ ροή, ἡ ὀφειλομένη εἰς τὸ γήϊνον μαγνητικὸν πεδίον, δὲν μεταβάλλεται. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἀποκατάστασιν τοῦ ρεύματος εἰς τὸ πλαίσιον, ἡ μαγνητικὴ ροή, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ πηνίου, μεταβάλλεται ἀπὸ 0 εἰς Φ· εἶναι δέ:

$$\Phi = HS_1N_1 = 1{,}19 \times \pi \times 200 = 238\,\pi \text{ maxwell}.$$

Ἄρα ἡ ἀναπτυσσομένη ἐξ ἐπαγωγῆς ποσότης ἠλεκτρισμοῦ ἐντὸς τοῦ κυκλώματος τοῦ πηνίου εἶναι:

$$Q = \frac{1}{10^8} \times \frac{\Delta\Phi}{R_1'} = \frac{238\,\pi}{300} = \frac{25}{10^9} \text{ coulomb}.$$

2) Ἡ περίοδος τῶν αἰωρήσεων τοῦ μαγνήτου ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου διδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν

$$T = 2\,\pi \sqrt{\frac{K}{MH_0}}$$

ὅπου K ἡ ροπὴ ἀδρανείας καὶ M ἡ μαγνητικὴ ροπὴ τοῦ μαγνήτου. Ὅταν τὸ πλαίσιον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα φορᾶς ἀντιθέτου πρὸς τὴν προηγουμένην, τότε αἱ ἐντάσεις τῶν δύο πεδίων εἶναι ἀντιθέτου φορᾶς. Ἡ περίοδος αἰωρήσεως τοῦ μαγνήτου εἶναι τότε:

$$T_1 = 2\,\pi \sqrt{\frac{K}{M\,(H - H_0)}}.$$

Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω σχέσεις εὑρίσκομεν:

$$\frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{H_0}{H - H_0}} \qquad \text{ἢ} \qquad T_1^2 = \frac{H_0}{H - H_0}\,T^2.$$

Ἐπειδὴ εἶναι: $H_0 = 0{,}2$ gauss, $T = 1$ sec, $H = \frac{2\,\pi\,N\,I}{10\,\alpha} = 1{,}25\,I$ ampère

λαμβάνομεν τὴν σχέσιν:

$$T_1^2 = \frac{0{,}2}{1{,}25\,I - 0{,}2}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἂν εἶναι: $1{,}25\,I - 0{,}2 = 0$ ἡ περίοδος T_1 γίνεται ἄπειρος. Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος γίνῃ:

$$I = \frac{0{,}2}{1{,}25} = 0{,}159 \text{ ampère}.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι $H = H_0$, ἤτοι ἡ ἔντασις τοῦ συνισταμένου πεδίου εἶναι μηδέν· ἄρα ὁ μαγνήτης δὲν αἰωρεῖται.

Ἡ περίοδος εἶναι $T_1 = 1$ sec, ὅταν εἶναι: $1{,}25\,I - 0{,}2 = 0{,}2$

ὁπότε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι: $I = 0{,}4 : 1{,}25 = 0{,}318$ ampère.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι $H - H_0 = H_0$, ἤτοι ἡ ἔντασις τοῦ συνισταμένου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἔντασιν τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου. Ὁ μαγνήτης αἰωρεῖται μὲ τὴν αὐτὴν περίοδον, τὴν ὁποίαν ἔχει καὶ ὅταν αἰωρῆται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μόνον τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου, μὲ τὴν διαφορὰν ὅμως ὅτι τώρα ὁ βόρειος πόλος του εἶναι ἐστραμμένος πρὸς νότον.

342.— *Εἰς ἕνα γαλβανόμετρον μὲ κινητὸν πλαίσιον* ΑΒΓΔ, *αἱ κατακόρυφοι πλευραί του* ΑΔ *καὶ* ΒΓ *εὑρίσκονται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως* Η *ὁριζοντίου καὶ διευθυνομένου πρὸς τὸ κατακόρυφον σύρμα* ΕΖΘΛ *τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ καὶ τὸν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ πλαισίου.— 1) Τὰ ἄκρα* Ε *καὶ* Λ *τοῦ πλαισίου συνδέονται μὲ ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν* R. *Τὸ πλαίσιον ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας του καὶ ἔπειτα ἀφήνεται ἐλεύθερον. Νὰ ἐξετασθῇ ποσοτικῶς μόνον ἡ κίνησις τὴν ὁποίαν θὰ ἀποκτήσῃ τὸ πλαίσιον.— 2) Τὸ πλαίσιον ἔχει πλευρὰς* ΑΒ = ΔΓ = 15 cm *καὶ* ΒΓ = ΑΔ = 5 cm. *Τὰ σύρματα τοῦ πλαισίου εἶναι πολὺ πυκνὰ καὶ θὰ θεωρηθῇ ὅτι συμπίπτουν μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου* ΑΒΓΔ. *Ὅταν τὸ κύκλωμα εἶναι ἀνοικτόν, ἡ περίοδος αἰωρήσεως τοῦ πλαισίου εἶναι* Τ = 16 cm· *ἐνῷ, ὅταν τὸ πλαίσιον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως* 10^{-8} ampère, *ὁ φωτεινὸς δείκτης τοῦ γαλβανομέτρου μετακινεῖται κατὰ* 1 mm *ἐπὶ τῆς κλίμακος ἡ ὁποία εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν* 1 m *ἀπὸ τὸ κάτοπτρον τοῦ ὀργάνου. Τὸ πλαίσιον φέρει* N = 500 *σπείρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις* Η *τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Ἡ ροπὴ ἀδρανείας τοῦ πλαισίου εἶναι* K = 562,5 C.G.S.

1) Ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ μαγνητικὸν πεδίον, τὸ πλαίσιον λαμβάνει μίαν ἁπλῆν ἁρμονικὴν κίνησιν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ζεύγους στρέψεως τὸ ὁποῖον ἀναπτύσσεται ἐπὶ τοῦ σύρματος. Ἡ περίοδος τῶν αἰωρήσεων αὐτοῦ εἶναι τότε :

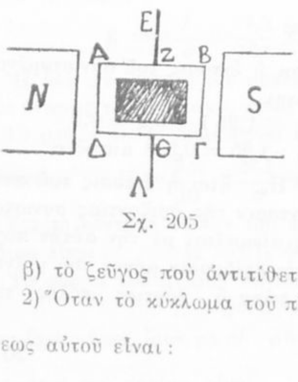
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{C}}$$

ὅπου K ἡ ροπὴ ἀδρανείας καὶ C ἡ ροπὴ στρέψεως τοῦ σύρματος. Ὅταν ὅμως ὑπάρχῃ τὸ μαγνητικὸν πεδίον, τότε τὸ πλαίσιον κινεῖται ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου καὶ ἐπομένως ἀναπτύσσεται ἐντὸς τοῦ κυκλώματος τοῦ πλαισίου ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐξ ἐπαγωγῆς διδομένη ἀπὸ τὴν σχέσιν : $E = \frac{1}{10^8}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

Διὰ τὰς πολὺ μικρὰς γωνίας στροφῆς τοῦ πλαισίου ἡ μεταβολὴ τῆς ροῆς εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς γωνίας, ἤτοι εἶναι $\Delta\Phi = SH \cdot \Delta\theta$ (διότι $\Phi = SH$ ημ θ). Αὐτὴ ἡ μεταβολὴ τῆς ροῆς δημιουργεῖ ἐντὸς τοῦ πλαισίου ἐπαγωγικὸν ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I = \frac{E}{R} = \frac{SH}{10^8} \times \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \times \frac{1}{R}.$$

Τὸ μαγνητικὸν πεδίον Η ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ ρεύματος τούτου ἕνα ζεῦγος τὸ ὁποῖον, σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Lenz, τείνει νὰ ἀντισταθῇ εἰς τὴν κίνησιν τοῦ πλαισίου. Τὸ ζεῦγος τοῦτο εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὴν ἔντασιν Η τοῦ πεδίου καὶ πρὸς τὴν ἔντασιν I τοῦ ρεύματος, ἄρα εἶναι ἀνάλογον καὶ πρὸς τὸ H^2 καὶ πρὸς τὸ $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$. Ὥστε ἐπὶ τοῦ πλαισίου ἐνεργοῦν τελικῶς:



Σχ. 205

α) τὸ ζεῦγος στρέψεως τοῦ σύρματος : $C\theta$

β) τὸ ζεῦγος ποὺ ἀντιτίθεται εἰς τὴν κίνησιν τοῦ πλαισίου.

2) Ὅταν τὸ κύκλωμα τοῦ πλαισίου εἶναι ἀνοικτόν, τότε ἡ περίοδος αἰωρήσεως αὐτοῦ εἶναι :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{C}}. \qquad (1)$$

Ὅταν δὲ τὸ κύκλωμα τοῦ πλαισίου διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I ampère, τότε τὸ πλαίσιον ἰσορροπεῖ εἰς τοιαύτην θέσιν ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ἀκόλουθος συνθήκη ἰσορροπίας :

$$\frac{NSIH}{10} = C\,\theta \qquad (2)$$

ἤτοι ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους στρέψεως τοῦ σύρματος νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ροπὴν τοῦ ζεύγους, τὸ ὁποῖον ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ πλαισίου ἕνεκα τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν : $C = \frac{4\,\pi^2\,K}{T^2}$.

Θέτοντες αὐτὴν τὴν τιμὴν τοῦ C εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τῆς ἐντάσεως H :

$$H = \frac{10\,C\,\theta}{NSI} = \frac{40\,\pi^2\,K\,\theta}{NSIT^2}.$$

Ὅταν τὸ πλαίσιον στρέφεται κατὰ γωνίαν θ, ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς στρέφεται κατὰ γωνίαν 2 θ· εἶναι δὲ

$$2\,\theta = \frac{1}{1\,000} \text{ ἀκτινίου} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \theta = \frac{1}{2\,000} \text{ ἀκτινίου}.$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι :

$$H = \frac{40 \times \pi^2 \times 562{,}5 \times \frac{1}{2\,000}}{500 \times 15 \times 5 \times 16^2 \times 10^{-8}} = 1\,157 \text{ gauss.}$$

ΓΕΝΝΗΤΡΙΑΙ ΚΑΙ ΚΙΝΗΤΗΡΕΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

343.— *Μία γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* E = 8 200 volt *καὶ ἰσχὺν* 1 600 kilowatt. *Θέλομεν νὰ μεταβιβάσωμεν τὴν ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν, τὴν παραγομένην ὑπὸ τῆς μηχανῆς, εἰς ἀπόστασιν* 100 *χιλιομέτρων μὲ μεγίστην ἀπώλειαν* 20 %. *1) Νὰ εὑρεθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀγωγοῦ, ὁ ὁποῖος θὰ συνδέῃ τὴν γεννήτριαν μὲ τὸν ἀποδέκτην.— 2) Ἐὰν ἡ μεταφορὰ (μετάβασις καὶ ἐπιστροφὴ) τοῦ ρεύματος γίνεται μὲ σύρμα χάλκινον, νὰ εὑρεθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη διάμετρος τοῦ σύρματος, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι σύρμα χάλκινον μήκους 1 χιλιομέτρου καὶ διαμέτρου* 1 mm *ἔχει ἀντίστασιν* 21 ohm.

1) Ἡ ἰσχὺς τῆς γεννητρίας εἶναι P = EI. Ἄρα ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I = \frac{P}{E} \times \frac{1\,600 \times 1\,000}{8\,200} = \frac{8 \times 10^3}{41} \text{ ampère.}$$

Ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας ἐπὶ τῆς γραμμῆς ὑπὸ μορφὴν θερμότητος κατὰ δευτερόλεπτον εἶναι :

$$I^2R = 0{,}20 \times 1\,600\,000 = 32 \times 10^4 \text{ joule.}$$

Ἄρα ἡ μεγίστη δυνατὴ τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀγωγοῦ πρέπει νὰ εἶναι:

$$R = \frac{32 \times 10^4 \times 41^2}{64 \times 10^6} = 8{,}405 \text{ ohm.}$$

2) Αἱ ἀντιστάσεις τῶν δύο ἀγωγῶν, ἐκ τοῦ αὐτοῦ μετάλλου, εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ μήκη αὐτῶν καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν. Ἄρα ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{21}{8{,}405} = \frac{1}{2\times 100} \times \frac{d^2}{1} \qquad \text{ἤτοι} \qquad d = \sqrt{\frac{21\times 200}{8{,}405}} = 22{,}34 \text{ mm} .$$

344.— *Μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Β ἑνὸς κυκλώματος συνεχοῦς ρεύματος διατηρεῖται σταθερὰ διαφορὰ δυναμικοῦ* V = 110 volt. *Μὲ δύο σύρματα τὰ ὁποῖα ἔχουν ὁλικὴν ἀντίστασιν* R = 1 ohm, *συνδέομεν τὰ σημεῖα Α καὶ Β μὲ τοὺς δύο πόλους ἑνὸς κινητῆρος. Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι τότε* I = 20 ampère. *Εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ κινητὴρ μετατρέπει εἰς μηχανικὴν ἐνέργειαν τὰ 8/10 τῆς ἐνεργείας τὴν ὁποίαν λαμβάνει.— 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος.— 2) Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ ἀπώλειαι ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας εἰς τὸν κινητῆρα ὀφείλονται ἀποκλειστικῶς εἰς τὸ φαινόμενον τοῦ* Joule, *νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος.*

1) Ἡ ἰσχὺς τοῦ παρεχομένου εἰς τὸ κύκλωμα ρεύματος εἶναι :

$$P = VI = 110 \times 20 = 2\,200 \text{ watt}.$$

Τὰ δύο σύρματα, τὰ ὁποῖα συνδέουν τὸν κινητῆρα μὲ τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ἀπορροφοῦν ἰσχύν : $P_1 = RI^2 = 1 \times 400 = 400$ watt .

Ἄρα ὁ κινητὴρ λαμβάνει ἰσχύν : $P_2 = P - P_1 = 2\,200 - 400 = 1\,800$ watt.

Ἀπὸ τὴν ἰσχὺν αὐτὴν ὁ κινητὴρ μετατρέπει εἰς μηχανικὴν ἐνέργειαν τὰ 0,8.

Ὥστε ἡ μηχανικὴ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι :

$P_3 = 0{,}8\ P_2 = 0{,}8 \times 1\,800 = 1\,440$ watt = 2 ἀτμόϊπποι (περίπου) .

2) Ὁ κινητὴρ ἀπορροφᾷ ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἰσχύν :

$$P_4 = 0{,}2\ P_2 = 0{,}2 \times 1\,800 = 360 \text{ watt}.$$

Ἂν R′ εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος, τότε ἀπὸ τὴν σχέσιν $P_4 = R'I^2$ εὑρίσκομεν : $R' = P_4 : I^2 = 360 : 400 = 0{,}9$ ohm .

345.— *Μία μηχανὴ τοῦ* Gramme *λειτουργεῖ ὡς γεννήτρια. Ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* 300 volt, *ἀντίστασιν* 0,5 ohm *καὶ ταχύτητα περιστροφῆς* 1 500 *στροφὰς κατὰ λεπτόν. Αἱ ψῆκτραι της συνδέονται μὲ τὰ δύο χάλκινα σύρματα μιᾶς γραμμῆς ἡ ὁποία ἔχει μῆκος* 1 200 m. *Ἡ τομὴ ἑκάστου σύρματος εἶναι* 10 mm². *Εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς γραμμῆς τὰ σύρματα συνδέονται μὲ τὰς ψήκτρας μιᾶς δευτέρας μηχανῆς ὁμοίας μὲ τὴν πρώτην, ἡ ὁποία λειτουργεῖ ὡς κινητὴρ καὶ στρέφεται μὲ ταχύτητα* 1 200 *στροφῶν κατὰ λεπτόν. Γνωρίζοντες ὅτι σύρμα χάλκινον μήκους* 60 m *καὶ τομῆς* 1 mm² *ἔχει ἀντίστασιν* 1 ohm, *νὰ εὑρεθῇ : 1) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος.— 2) Ἡ ἰσχὺς ἑκάστης μηχανῆς καὶ ἡ ἰσχὺς ἡ ὁποία καταναλίσκεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἐπὶ τῆς γραμμῆς καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν κύκλωμα ἑκάστης μηχανῆς.*

1) Τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς εἶναι 2 400 m. Ἂς ὑπολογίσωμεν τὴν ἀντίστασιν αὐτῆς. Σύρμα :

μήκους 60 m,	τομῆς 1 mm²	ἔχει ἀντίστασιν 1 ohm	
» 2 400 »	» 1 »	» »	2 400 : 60 = 40 ohm
» 2 400 »	» 10 »	» »	40 : 10 = 4 ohm.

Ἑκάστη μηχανὴ ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,5 ohm, ἄρα ὅλον τὸ κύκλωμα ἔχει ἀντίστασιν R = 5 ohm. Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις E μιᾶς γεννητρίας καὶ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις E′ ἑνὸς κινητῆρος, εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ταχύτητα περιστροφῆς. Ἄρα ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς δευτέρας μηχανῆς εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{E}{E'} = \frac{1\,500}{1\,200} \quad \text{ἤτοι εἶναι} \quad E' = E \times \frac{1\,200}{1\,500} = 300 \times \frac{4}{5} = 240 \text{ volt.}$$

Ἡ ἔντασις λοιπὸν τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = \frac{E - E'}{R} = \frac{300 - 240}{5} = 12 \text{ ampère.}$$

2) Ἡ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ γεννήτρια, εἶναι:

$$P = EI = 300 \times 12 = 3\,600 \text{ watt,}$$

ἡ δὲ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν ἀναπτύσσει ὁ κινητήρ, εἶναι:

$$P' = E'I = 240 \times 12 = 2\,880 \text{ watt.}$$

Ἄρα ὑπὸ μορφὴν θερμότητος χάνεται ἰσχύς:

$$P - P' = 3\,600 - 2\,880 = 720 \text{ watt}$$

ἐκ τῆς ὁποίας $4 \times 12^2 = 576$ watt χάνεται ἐπὶ τῆς γραμμῆς καὶ $0{,}5 \times 12^2 = 72$ watt χάνεται ἐντὸς ἑκάστης μηχανῆς.

346.— *Εἰς μίαν γεννήτριαν συνεχοῦς ρεύματος τὸ ἐπάγον (δηλαδὴ τὸ σύστημα τῶν ἠλεκτρομαγνητῶν) διεγείρεται κατὰ διακλάδωσιν. Τὸ παραγόμενον ρεῦμα χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν πλήρωσιν μιᾶς συστοιχίας 60 συσσωρευτῶν ἡνωμένων κατὰ σειράν. Τὸ ἐπαγώγιμον ἔχει ἀντίστασιν* $r = 0{,}5$ ohm, *τὸ ἐπάγον ἔχει ἀντίστασιν* $R = 250$ ohm *καὶ ἕκαστος συσσωρευτὴς ἔχει ἀντίστασιν* $r' = 0{,}01$ ohm. *Τὰ σύρματα ποὺ χρησιμοποιοῦνται διὰ τὰς συνδέσεις ἔχουν ἀσήμαντον ἀντίστασιν. Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἑνὸς συσσωρευτοῦ εἰς ἀνοικτὸν κύκλωμα εἶναι* 2,1 volt.

1) Μὲ ἕνα βολτόμετρον εὑρίσκομεν ὅτι μεταξὺ τῶν πόλων A *καὶ* B *τῆς μηχανῆς, ὅταν αὕτη φορτίζῃ τοὺς συσσωρευτάς, ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ* $V = 137$ volt. *Νὰ εὑρεθοῦν: α) αἱ ἐντάσεις* I, i, i' *τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὸ ἐπαγώγιμον, τὸ ἐπάγον καὶ τὴν συστοιχίαν τῶν συσσωρευτῶν· β) ἡ ἀναπτυσσομένη ἐντὸς τοῦ ἐπαγωγίμου ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις· γ) ὁ λόγος τῆς ἐνεργείας ἡ ὁποία ἀποταμιεύεται ἐντὸς τῆς συστοιχίας πρὸς τὴν ὅλην ἐνέργειαν ἡ ὁποία δαπανᾶται διὰ τὴν ἐξασφάλισιν τῆς περιστροφῆς τοῦ ἐπαγωγίμου (αἱ τριβαὶ παραλείπονται).—*

2) Ἀφαιρεῖται ὁ ἱμὰς ὁ ὁποῖος ἔθετε εἰς περιστροφικὴν κίνησιν τὸ ἐπαγώγιμον καὶ τότε ἡ συστοιχία παρέχει ρεῦμα εἰς τὴν μηχανήν. Τὸ βολτόμετρον δεικνύει ὅτι μεταξὺ τῶν πόλων A *καὶ* B *τῆς μηχανῆς εἶναι* $V_1 = 119$ volt. *Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐντάσεις* I_1, i_1, i_1' *τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὸ ἐπαγώγιμον, τὸ ἐπάγον καὶ τοὺς συσσωρευτάς. Πρὸ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ ἱμάντος τὸ ἐπαγώγιμον ἐστρέφετο κατὰ τὴν φορὰν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου. Ποία εἶναι ἡ φορὰ τῆς περιστροφῆς τοῦ ἐπαγωγίμου μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ ἱμάντος;*

1) Τὸ ρεῦμα I τὸ ὁποῖον παράγεται ἐντὸς τοῦ ἐπαγωγίμου ε διαχωρίζεται εἰς ἕνα ρεῦμα i τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ ἐπάγον ε′ (ἀντίστασις) καὶ ἕνα ρεῦμα i′ τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν συστοιχίαν Σ. Ἔχομεν λοιπόν:

$$i = V : R = 137 : 250 = 0{,}548 \text{ ampère.}$$

Ἡ συστοιχία ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν:

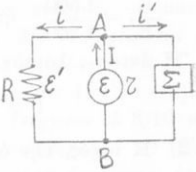
$$E' = 2{,}1 \times 60 = 126 \text{ volt}$$

καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν: $r' = 0{,}01 \times 60 = 0{,}60$ ohm.

Ἄρα ἔχομεν: $i' = \dfrac{V - E'}{0{,}6} = \dfrac{137 - 126}{0{,}6} = \dfrac{11}{0{,}6} = 18{,}333$ ampère.

Ἐντὸς τοῦ ἐπαγωγίμου εἶναι:

$I = i + i' = 0{,}548 + 18{,}333 = 18{,}88$ ampère.



Σχ. 206

Ἡ ἀναπτυσσομένη ἐντὸς τοῦ ἐπαγωγίμου ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι:

$E = V + rI = 137 + (0{,}5 \times 18{,}88) = 146{,}4$ volt.

Κατὰ δευτερόλεπτον ἀποταμιεύεται ἐντὸς τῆς συστοιχίας ἐνέργεια:

$P' = E'i' = 126 \times 18{,}333 = 2\,310$ joule.

Εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον, διὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἐπαγωγίμου δαπανᾶται ἐνέργεια: $P = EI = 146{,}4 \times 18{,}88 = 2\,760$ joule.

Ὁ ζητούμενος λοιπὸν λόγος εἶναι: $\dfrac{P'}{P} = \dfrac{2\,310}{2\,760} = 0{,}84$ ἢ 84 %.

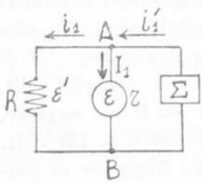
2) Ὅταν ἀφαιρεθῇ ὁ ἱμάς, τότε ἡ συστοιχία ἀποβαίνει γεννήτρια μὲ ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E_1 = 126$ volt καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r' = 0{,}6$ ohm, τὸ δὲ ἐπαγώγιμον ἀποβαίνει ἀποδέκτης. Τὸ ρεῦμα, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ συστοιχία, ἔχει ἔντασιν: $i_1' = \dfrac{E_1 - V_1}{r'} = \dfrac{126 \quad 119}{0{,}6} = \dfrac{7}{0{,}6} = 11{,}666$ ampère.

Εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β τὸ ρεῦμα τοῦτο χωρίζεται εἰς δύο κλάδους. Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐντὸς τοῦ ἐπάγοντος εἶναι:

$$i_1 = V_1 : R = 119 : 250 = 0{,}476 \text{ ampère}$$

καὶ ἐντὸς τοῦ ἐπαγωγίμου εἶναι:

$$I_1 = i_1' - i_1 = 11{,}666 - 0{,}476 = 11{,}19 \text{ ampère}.$$



Σχ. 207

Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ ἱμάντος ἡ φορὰ τοῦ ρεύματος ἐντὸς τοῦ ἐπάγοντος δὲν μεταβάλλεται, ἀλλὰ ἡ φορὰ τοῦ ρεύματος ἐντὸς τοῦ ἐπαγωγίμου ἀντιστρέφεται. Ἐὰν ἡ μηχανὴ ἦτο τώρα γεννήτρια, θὰ ἐστρέφετο κατ᾽ ἀντίθετον φοράν, ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ἔγινε κινητήρ, ἐξακολουθεῖ νὰ στρέφεται κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν.

347.—*Ὁ δακτύλιος μιᾶς μηχανῆς τοῦ* Gramme *περιλαμβάνει* 210 *σπείρας καὶ ἐκτελεῖ* 1 200 *στροφὰς κατὰ λεπτόν. Στρέφεται μεταξὺ τῶν πόλων ἑνὸς ἠλεκτρομαγνήτου ὁ ὁποῖος παράγει μαγνητικὴν ροὴν ἴσην μὲ* 2 000 000 *μονάδας* C.G.S.— *1) Πόση εἶναι ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς μηχανῆς;— 2) Ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κλειστοῦ κυκλώματος τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν αἱ σπεῖραι τοῦ δακτυλίου, εἶναι* 0,05 ohm. *Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν πόλων τῆς μηχανῆς, ὅταν αἱ σπεῖραι τοῦ δακτυλίου διαρρέωνται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως* 100 ampère;— *3) Νὰ εὑρεθῇ πόση εἶναι τότε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον παρέχεται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα καὶ πόση εἶναι ἡ ἀπόδοσις τῆς μηχανῆς, δηλαδὴ ὁ λόγος τῆς ὠφελίμου ἐνεργείας, τῆς χρησιμοποιουμένης ἐντὸς τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος, πρὸς* *τὴν ὅλην ἐνέργειαν τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον παράγει ἡ μηχανή.— 4) Νὰ εὑρεθῇ μὲ πόσην ταχύτητα πρέπει νὰ στρέφεται ὁ δακτύλιος τῆς μηχανῆς, ὥστε ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν πόλων της νὰ εἶναι 80 volt, ὅταν τὸ ρεῦμα, ποὺ διαρρέει τὰς σπείρας τοῦ δακτυλίου ἔχῃ ἔντασιν 100 ampère.*

1) Ὁ δακτύλιος περιλαμβάνει $\nu = 210$ σπείρας, ἐκτελεῖ $N = 20$ στροφὰς κατὰ δευτερόλεπτον καὶ διαρρέεται ἀπὸ μαγνητικὴν ροὴν $\Phi = 2 \times 10^6$ C.G.S. Ἄρα ἡ ἀναπτυσσομένη ἐντὸς αὐτοῦ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι :

$$E = 10^{-8}\,\nu N \Phi = 10^{-8} \times 210 \times 20 \times 2 \times 10^6 = 84 \text{ volt.}$$

2) Ἡ ἀντίστασις ὅλων τῶν σπειρῶν εἶναι $0{,}05 = 1/20$ ohm. Καθένα ἀπὸ τὰ δύο ἡμίσυ τοῦ δακτυλίου ἔχει ἀντίστασιν $1/40$ ohm. Καθένα ἀπὸ τὰ ἡμίσυ αὐτὰ ἀποτελεῖ ἰδίαν γεννήτριαν, ἡ ὁποία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 84$ volt καὶ ἀντίστασιν $r = 1/40$ ohm. Αἱ δύο αὗται γεννήτριαι εἶναι συνδεδεμέναι ἐν παραλλήλῳ καὶ ἑκάστη ἐξ' αὐτῶν παρέχει ρεῦμα ἐντάσεως $I_1 = 100$ ampère. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν πόλων των εἶναι :

$$V = E - rI_1 = 84 - \left(\frac{1}{40} \times 100\right) = 81{,}5 \text{ volt.}$$

3) Τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ μηχανὴ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἔχει ἔντασιν :

$$I = 2\,I_1 = 200 \text{ ampère.}$$

Ἡ χρησιμοποιήσιμος ἐνέργεια ἡ ὁποία παρέχεται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα εἶναι VI, ἡ δὲ ὅλη ἐνέργεια, τὴν ὁποίαν παράγει ἡ μηχανή, εἶναι EI.

Ἄρα ἡ ἀπόδοσις τῆς μηχανῆς εἶναι :

$$A = \frac{VI}{EI} = \frac{V}{E} = \frac{81{,}5}{84} = 0{,}97 \quad \text{ἢ} \quad A = 97\ \%.$$

4) Διὰ νὰ ἔχωμεν μεταξὺ τῶν πόλων διαφορὰν δυναμικοῦ $V' = 80$ volt, πρέπει ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις αὐτῆς νὰ εἶναι :

$$E' = V' + rI = 80 + \left(\frac{1}{40} \times 100\right) = 82{,}5 \text{ volt.}$$

Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ταχύτητα περιστροφῆς τοῦ δακτυλίου.

Ἔχομεν $V = 84$ volt, ὅταν εἶναι $N = 1\,200$ στροφαὶ κατὰ λεπτόν· ἄρα ἔχομεν $V' = 82{,}5$ volt ὅταν εἶναι :

$$N' = \frac{1\,200 \times 82{,}5}{84} = 1\,178 \text{ στροφαὶ κατὰ λεπτόν.}$$

348.—*Εἰς μίαν δυναμοηλεκτρικὴν μηχανὴν τὸ ἐπάγον παρεμβάλλεται κατὰ διακλάδωσιν εἰς τὸ κύκλωμα τοῦ ἐπαγίμου. Ἡ ἀπόδοσις τῆς μηχανῆς ἀνέρχεται εἰς 94 %. Αἱ ἐντὸς τῆς μηχανῆς ἀπώλειαι ἀναλύονται ὡς ἑξῆς: 3 % ἐντὸς τοῦ ἐπαγωγίμου, 2 % ἐντὸς τοῦ ἐπάγοντος καὶ 1 % ὀφείλονται εἰς ὑστέρησιν καὶ ρεύματα τοῦ Foucault. Ἡ μηχανὴ αὐτὴ παρέχει εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα ρεῦμα ἐντάσεως 80 ampère ὑπὸ τάσιν 200 volt. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διάφοροι ἀπώλειαι, αἱ ἀντιστάσεις τοῦ ἐπαγωγίμου καὶ τοῦ ἐπάγοντος ὡς καὶ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς μηχανῆς.*

Τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ μηχανή, ἔχει ἰσχύν :

$$P' = VI = 200 \times 80 = 16\,000 \text{ watt.}$$

Ἡ ὅλη λοιπὸν ἰσχὺς τῆς μηχανῆς εἶναι:

$$P = P' : 0{,}94 = 16\,000 : 0{,}94 = 17\,021 \text{ watt}.$$

Αἱ διάφοροι ἀπώλειαι εἶναι:

α) ἐντὸς τοῦ ἐπαγωγίμου : $p_1 = 0{,}3 \times 17\,021 = 510{,}63$ watt

β) ἐντὸς τοῦ ἐπάγοντος : $p_2 = 0{,}2 \times 17\,021 = 340{,}42$ »

γ) ἐντὸς τοῦ σιδήρου : $p_3 = 0{,}1 \times 17\,021 = 170{,}21$ »

Ἡ ἀντίστασις R_2 τοῦ ἐπάγοντος εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν

$$p_2 = R_2 I_2^2 = V I_2$$

ὅπου I_2 εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα τοῦ ἐπάγοντος καὶ V ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τῆς μηχανῆς. Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν: $I_2 = p_2 : V = 340{,}42 : 200 = 1{,}70$ ampère.

Ἄρα εἶναι: $R_2 = V : I_2 = 200 : 1{,}70 = 117{,}6$ ohm.

Ἡ ἔντασις I_1 τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ ἐπαγώγιμον, εἶναι:

$$I_1 = I + I_2 = 80 + 1{,}70 = 81{,}70 \text{ ampère}.$$

Ἡ ἀντίστασις R_1 τοῦ ἐπαγωγίμου εὑρίσκεται τώρα ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$p_1 = R_1 I_1^2 \quad \text{ἤτοι} \quad R_1 = \frac{p_1}{I_1^2} = \frac{510{,}63}{81{,}7^2} = 0{,}076 \text{ ohm}.$$

Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις E τῆς μηχανῆς εἶναι:

$$E = V + R_1 I_1 = 200 + (0{,}076 \times 81{,}70) = 206{,}21 \text{ volt}.$$

349. – *Μία δυναμοηλεκτρικὴ μηχανὴ ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* 120 volt *καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* 1 ohm. — *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγίστη ἰσχὺς ἡ ὁποία ἠμπορεῖ νὰ δαπανηθῇ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα, ὡς καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἀπόδοσις (δηλαδὴ ὁ λόγος τῆς ἰσχύος ποὺ δαπανᾶται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν πρὸς τὴν ἰσχὺν τῆς γεννητρίας).— 2) Νὰ ὑπολογισθῇ πόση γίνεται αὐτὴ ἡ ἀπόδοσις, ἂν ἡ προηγουμένη γεννήτρια τροφοδοτῇ λαμπτῆρας λειτουργοῦντας ὑπὸ τάσιν* 110 volt.— *3) Ἂν ἕκαστος τοιοῦτος λαμπτὴρ ἔχῃ ἀντίστασιν ἐν θερμῷ* 440 ohm, *νὰ εὑρεθῇ πόσους τοιούτους λαμπτῆρας ἠμπορεῖ νὰ τροφοδοτήσῃ ἡ ἀνωτέρω γεννήτρια. Αἱ ἀντιστάσεις τῶν συρμάτων τῶν συνδέσεων θεωροῦνται ἀσήμαντοι.*

1) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ V εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι:

$$V = E - Ir = 120 - I \times 1 = 120 - I \text{ volt} \quad \text{ἄρα} \quad I = 120 - V.$$

Ἡ γεννήτρια παρέχει εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἰσχύν:

$$P = VI = V(120 - V) = 120\,V - V^2.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν:

$$V^2 - 120\,V + P = 0 \quad \text{ἄρα} \quad V = 60 \pm \sqrt{3\,600 - P}.$$

Θὰ εἶναι $V > 0$, ἂν ἡ ἰσχὺς P εἶναι ἴση ἢ μικροτέρα ἀπὸ 3 600.

Ἄρα ἡ μεγίστη ἰσχὺς εἶναι: $P = 3\,600$ watt. Τότε θὰ εἶναι:

$$V = 60 \text{ volt, ἡ δὲ ἀπόδοσις θὰ εἶναι:} \quad \alpha = \frac{VI}{EI} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}.$$

2) Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ $V' = 110$ volt.

Ἄρα ἡ ἀπόδοσις εἶναι: $\alpha' = \dfrac{V'I}{EI} = \dfrac{110}{120} = \dfrac{11}{12}$.

3) Ἂν R εἶναι ἡ ἀντίστασις ἑκάστου λαμπτῆρος, τότε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύ-

ματος τοῦ διερχομένου δι' αὐτοῦ εἶναι : $I' = V' : R = 110 : 440 = 0{,}25$ ampère.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν $E = V' + I r$, ὅπου r εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς γεννητρίας, εὑρίσκομεν: $I = \dfrac{E - V'}{r} = \dfrac{120 - 110}{1} = 10$ ampère.

Ἂν N εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν λαμπτήρων, οἱ ὁποῖοι εἶναι συνδεδεμένοι ἐν παραλλήλῳ, τότε πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις : $I = N I_1$.

Ἄρα ὁ ἀριθμὸς τῶν λαμπτήρων εἶναι : $N = I : I_1 = 10 : 0{,}25 = 40$.

350.— *Μία γεννήτρια παρέχει ρεῦμα ἐντάσεως* 11 ampère *εἰς μίαν ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν* 10 ohm. *Διπλασιάζομεν τὴν ἀντίστασιν αὐτὴν καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος γίνεται* 6 ampère.— *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις καὶ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς γεννητρίας. — 2) Ἡ ἀνωτέρω γεννήτρια χρησιμοποιεῖται ἔπειτα διὰ τὴν κίνησιν ἑνὸς κινητῆρος. Ἡ ὅλη ἀντίστασις εἶναι* 10 ohm, *ἡ δὲ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι* 5 ampère. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος. Διὰ ποίαν τιμὴν τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος ἡ ἰσχὺς αὕτη ἔχει τὴν μεγαλυτέραν τιμήν ;*

1) Ἂν E εἶναι ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς γεννητρίας καὶ r ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις αὐτῆς, τότε σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Ohm ἔχομεν:
$E = 11\,(10 + r) = 6\,(20 + r)$· ἄρα : $r = 2$ ohm καὶ $E = 132$ volt.

2) Ἔστω E' ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος. Ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm εὑρίσκομεν : $E' = E - I R = 132 - (5 \times 10) = 82$ volt.

Ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι : $P = E' I = 82 \times 5 = 410$ watt.

Ἂς ὀνομάσωμεν I_1 τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, ὅταν ἡ ἰσχὺς ἔχῃ τὴν μεγίστην τιμὴν της P_1. Τότε εἶναι : $P_1 = E' I_1$ ἄρα $E' = \dfrac{P_1}{I_1}$.

Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Ohm λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$E = E' + I_1 R \qquad \text{ἤτοι} \qquad E = \frac{P_1}{I_1} + I_1 R\,\cdot$$

ἄρα $132 = \dfrac{P_1}{I_1} + 10\, I_1$ καὶ $10\, I_1^2 - 132\, I_1 + P_1 = 0$.

Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ I_1 πραγματικὴν τιμήν, πρέπει νὰ εἶναι : $66^2 - 10\, P_1 \geqslant 0$,

ἢ $P_1 \leqslant \dfrac{66^2}{10}$ δηλαδὴ $P_1 \leqslant 435{,}6$.

Ἡ μεγίστη λοιπὸν ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι : 435,6 watt.

Τότε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι: $I_1 = \dfrac{132}{2 \times 10} = 6{,}6$ ampère.

351.— *Θέλομεν νὰ φορτίσωμεν μίαν συστοιχίαν συσσωρευτῶν, ἡ ὁποία ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* 1 ohm. *Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν δυναμοηλεκτρικὴν μηχανὴν ἡ ὁποία ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* 1 ohm. *Εἰς τὸ κύκλωμα παρεμβάλλεται ροοστάτης, ἔχων ἀντίστασιν* 2 ohm. *Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς γεννητρίας, ἐκπεφρασμένη εἰς* volt, *εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τοῦ* 20 *ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν* N *τῶν στροφῶν, τὰς ὁποίας ἐκτελεῖ κατὰ δευτερόλεπτον. Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τῆς φορτίσεως εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ* 20 ampère. *Ὁ ἀριθμὸς* N *τῶν* *στροφῶν ρυθμίζεται λοιπὸν καταλλήλως εἰς κάθε περίπτωσιν. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ* V *μεταξὺ τῶν δύο ἀκροδεκτῶν τῆς συστοιχίας εἶναι κατὰ τὴν ἔναρξιν τῆς φορτίσεως* 120 volt *καὶ κατὰ τὸ τέλος αὐτῆς* 160 volt. *Ποῖαι πρέπει νὰ εἶναι αἱ τιμαὶ τοῦ* N *κατὰ τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ τέλος τῆς φορτίσεως; Ποῖαι εἶναι, κατὰ τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ τέλος τῆς φορτίσεως, αἱ τιμαὶ τῆς μηχανικῆς ἰσχύος, ἡ ὁποία προσφέρεται εἰς τὴν γεννήτριαν διὰ τὴν λειτουργίαν της;*

Ἂς ὀνομάσωμεν E′ τὴν ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν τῆς συστοιχίας. Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Ohm, εὑρίσκομεν:

$$E = 20\,(1 + 2 + 1) + E' \quad \text{ἢ} \quad 20\,N = 80 + E'. \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους τῆς συστοιχίας εἶναι:

$$V = 20 \times 1 + E' \quad \text{ἢ} \quad V = 20 + E'. \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν: $N = \dfrac{60 + V}{20}$.

Κατὰ τὴν ἔναρξιν τῆς φορτίσεως εἶναι $V = 120$ volt· ἄρα $N = 9$ στροφαὶ κατὰ δευτερόλεπτον.

Εἰς τὸ τέλος τῆς φορτίσεως εἶναι $V = 160$ volt· ἄρα $N = 11$ στροφαὶ κατὰ δευτερόλεπτον.

Ἡ μηχανικὴ ἰσχύς, ἡ ὁποία προσφέρεται εἰς τὴν γεννήτριαν, εἶναι ἴση μὲ τὴν ὅλην ἰσχὺν τῆς γεννητρίας· αὕτη εἶναι: κατὰ τὴν ἔναρξιν τῆς φορτίσεως:

$$EI = 20 \times 9 \times 20 = 3\,600 \text{ watt} = 3{,}6 \text{ kW}$$

καὶ εἰς τὸ τέλος τῆς φορτίσεως εἶναι:

$$EI = 20 \times 11 \times 20 = 4\,400 \text{ watt} = 4{,}4 \text{ kW}.$$

352.— *Κινητὴρ ἰσχύος* 50 *ἀτμοΐππων ἔχει εἰς τοὺς πόλους του διαφορὰν δυναμικοῦ* 500 volt *καὶ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς χιλιομέτρου ἀπὸ τὸν σταθμὸν ἠλεκτροπαραγωγῆς ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια μεταφέρεται μὲ δύο ἀγωγοὺς (μετάβασις καὶ ἐπιστροφή). Εἰς τὴν γραμμὴν παρατηρεῖται πτῶσις τῆς τάσεως κατὰ* 12,5 volt. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ τομὴ τοῦ σύρματος τῆς γραμμῆς, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ μετάλλου τοῦ σύρματος εἶναι* $1{,}5 \times 10^{-6}$ ohm — cm. *Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος εἶναι ἀσήμαντος.*

Ὁ κινητὴρ ἔχει ἰσχύν: $P = 50 \times 736 = 36\,800$ watt.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν: $V = E' + IR'$ εὑρίσκομεν $V = E'$, διότι εἶναι $R' = 0$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι: $P = E'I$ λαμβάνομεν $I = P : E' = 36\,800 : 500 = 73{,}6$ ampère.

Ἂν R εἶναι ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς, τότε εἶναι:

$$12{,}5 = IR \quad \text{ἄρα} \quad R = \frac{12{,}5}{73{,}60} = \frac{125}{736} \text{ ohm}.$$

Ἀπὸ τὸν νόμον τῆς ἀντιστάσεως $R = \rho \dfrac{l}{\sigma}$ εὑρίσκομεν τὴν τομὴν σ τοῦ σύρματος τῆς γραμμῆς:

$$\sigma = \rho\,\frac{l}{R} = \frac{1{,}5}{10^6} \times 2 \times 10^5 \times \frac{736}{125} = 1{,}766 \text{ cm}^2.$$

353.— *Μεταξὺ δύο σημείων* A *καὶ* B *ἑνὸς κυκλώματος συνεχοῦς ρεύματος διατηρεῖται σταθερὰ διαφορὰ δυναμικοῦ* 600 volt. *Τὰ σημεῖα* A *καὶ* B *συνδέονται* *μὲ τὸ ἐπαγώγιμον μιᾶς δυναμοηλεκτρικῆς μηχανῆς. Τὰ δύο σύρματα τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν σύνδεσιν ἔχουν ἀντίστασιν* 0,40 ohm. *Τὸ ἐπάγον τῆς μηχανῆς εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπὸ τὸ ἐπαγώγιμον καὶ εἶναι συνδεδεμένον μὲ πηγὴν ρεύματος ἡ ὁποία ἔχει σταθερὰν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν. Ἐπομένως ἡ διέγερσις τῆς μηχανῆς διατηρεῖται ἀμετάβλητος. — 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν δύο πόλων τοῦ ἀνωτέρω κινητῆρος, ἂν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι* 100 ampère. — *2) Νὰ εὑρεθῇ πόση ἰσχὺς προσφέρεται εἰς τὸ ἐπαγώγιμον τοῦ κινητῆρος, καὶ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος, ἐὰν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐπαγωγίμου εἶναι* 0,6 ohm. — *3) Ἡ ταχύτης περιστροφῆς τοῦ κινητῆρος γίνεται τώρα ἴση μὲ τὰ 8/10 τῆς ταχύτητος τὴν ὁποίαν εἶχεν ἀνωτέρω. Ὅλαι αἱ ἄλλαι συνθῆκαι εἶναι αἱ αὐταί. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν κινητῆρα ;*

1) Ἡ πτῶσις τοῦ δυναμικοῦ κατὰ μῆκος τῆς γραμμῆς εἶναι, σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Ohm: $RI = 0{,}40 \times 100 = 40$ volt.

Ἐπομένως ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ κινητῆρος εἶναι:

$$V = 600 - 40 = 560 \text{ volt.}$$

2) Εἰς τὸ ἐπαγώγιμον προσφέρεται ἰσχύς:

$$P = VI = 560 \times 100 = 56\,000 \text{ watt} = 56 \text{ kW.}$$

Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐπαγωγίμου εἶναι $r = 0{,}6$ ohm. Ἄρα ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις E' τοῦ κινητῆρος δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$V - E' = rI \cdot \quad \text{ἄρα} \quad E' = V - rI = 560 - (0{,}6 \times 100) = 500 \text{ volt.}$$

3) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ ἐπαγώγιμον διατηρεῖται σταθερά. Ἐπίσης εἶναι σταθερὰ καὶ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐντὸς τοῦ ὁποίου στρέφεται τὸ ἐπαγώγιμον. Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐξ ἐπαγωγῆς, ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐντὸς μιᾶς σπείρας, εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς μαγνητικῆς ροῆς καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὴν διάρκειαν αὐτῆς τῆς μεταβολῆς. Ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος μεταβάλλεται ἀναλόγως πρὸς τὴν ταχύτητα περιστροφῆς του, καὶ ἐπομένως ἡ νέα τιμὴ τῆς ἀντηλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως γίνεται:

$$E_1' = \frac{8}{10} E' = \frac{8 \times 500}{10} = 400 \text{ volt.}$$

Ἡ νέα τιμὴ τῆς ἐντάσεως I_1 εὑρίσκεται τότε ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$600 - E_1' = I_1 (R + r) \quad \text{ἤτοι εἶναι:} \quad I_1 = \frac{600 - 400}{0{,}4 + 0{,}6} = 200 \text{ ampère.}$$

354. — *Μία γεννήτρια ἔχει εἰς τοὺς πόλους της διαφορὰν δυναμικοῦ* 120 volt *καὶ στέλλει ρεῦμα ἐντάσεως* 100 ampère *εἰς κινητῆρα εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς χιλιομέτρου. — 1) Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ σύρματος τῆς γραμμῆς, ἂν θέλωμεν νὰ χρησιμοποιῇ ὁ κινητὴρ τὰ 90 % τῆς ἰσχύος τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ γεννήτρια ; Τὸ σύρμα τῆς γραμμῆς εἶναι ἀπὸ χαλκόν, γνωρίζομεν δὲ ὅτι σύρμα χάλκινον μήκους* 1 m *καὶ τομῆς* 1 mm² *ἔχει ἀντίστασιν* 0,017 ohm.— *2) Πόση εἶναι τότε ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τοῦ κινητῆρος ;*

1) Ἡ γεννήτρια παρέχει εἰς τὸ κύκλωμα ἰσχύν:

$$P = VI = 120 \times 100 = 12\,000 \text{ watt.}$$

Ἀπὸ αὐτὴν τὴν ἰσχὺν ἡ γραμμὴ ἀπορροφᾷ:

$$p = 0{,}10\ P = 0{,}10 \times 12\,000 = 1\,200 \text{ watt.}$$

Ὁλόκληρος ἡ ἰσχὺς p μετατρέπεται εἰς θερμότητα. Ἂν λοιπὸν ὀνομάσωμεν R τὴν ἀντίστασιν τῆς γραμμῆς, τότε ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Joule: $p = RI^2$ εὑρίσκομεν: $R = p : I^2 = 1\,200 : 100^2 = 0{,}12$ ohm

Ἂς ὑπολογίσωμεν τώρα τὴν τομὴν τοῦ σύρματος:

σύρμα μήκους 1 m τομῆς 1 mm² ἔχει ἀντίστασιν: 0,017 ohm

» » 2 000 » » 1 » » » 34 ohm

» » 2 000 » » 1 » » » 0,12 ohm.

Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι αἱ ἀντιστάσεις δύο ἀγωγῶν τοῦ αὐτοῦ μήκους εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἐπιφανείας τῆς τομῆς των· ἄρα $\sigma = \frac{34}{0{,}12}$ mm².

Ἂν δ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ σύρματος, τότε εἶναι:

$$\delta = \sqrt{\frac{4\sigma}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 34}{0{,}12 \times 3{,}14}} = 18{,}9 \text{ mm.}$$

2) Εἰς τὸν κινητῆρα φθάνει ἰσχύς:

$$P' = 0{,}90\ P = 0{,}90 \times 12\,000 = 10\,800 \text{ watt.}$$

Ἄρα ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ V′ εἰς τοὺς πόλους τοῦ κινητῆρος εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $P' = V'I$ ἤτοι. $V' = P' : I = 10\,800 : 100 = 108$ volt.

355.—*Μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B μιᾶς λήψεως συνεχοῦς ρεύματος, ἔχοντος τάσιν 110 volt, παρεμβάλλομεν κύκλωμα, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει κατὰ σειρὰν σύρμα Σ καὶ κινητῆρα Κ. Τὸ σύρμα Σ ἔχει ἀντίστασιν R = 10 ohm καὶ εἶναι βυθισμένον ἐντὸς θερμιδομέτρου, ὁ δὲ κινητὴρ ἔχει ἄγνωστον ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν. Αἱ ἀντιστάσεις τῶν συρμάτων τῆς συνδέσεως θεωροῦνται ἀσήμαντοι. — 1) Ἐμποδίζομεν τὸν κινητῆρα νὰ στρέφεται καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου ἀναπτύσσεται κατὰ λεπτὸν ποσότης θερμότητος ἴση μὲ 2 000 θερμίδας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις r τοῦ κινητῆρος. — 2) Ἀφήνομεν τὸν κινητῆρα νὰ στρέφεται καὶ λαμβάνομεν ἀπὸ αὐτὸν ὡρισμένην ἰσχύν. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου ἀναπτύσσεται κατὰ λεπτὸν ποσότης θερμότητος ἴση μὲ 100 θερμίδας. Νὰ εὑρεθῇ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος. — 3) Πόση εἶναι εἰς τὰς ἀνωτέρω δύο περιπτώσεις ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τοῦ κινητῆρος; Δίδεται ὅτι 1 joule ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,24 cal.*

1) Ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Joule: $Q = 0{,}24\ RI^2 t$ εὑρίσκομεν τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος: $I_2 = \frac{2\,000}{0{,}24 \times 10 \times 60} = \frac{125}{9}$ ἄρα $I = \frac{5\sqrt{5}}{3} = 3{,}73$ ampère.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ κινητὴρ εἶναι μία ἁπλῆ ἀντίστασις. Ἄρα ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm: $V = I(R + r)$ εὑρίσκομεν τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν τοῦ κινητῆρος: $r = \frac{V}{I} - R = \frac{3 \times 110\sqrt{5}}{25} - 10 = 19{,}5$ ohm.

2) Τώρα ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι I_1 ἡ ὁποία εὑρίσκεται κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον: $I_1{}^2 = \frac{100}{0{,}24 \times 10 \times 60} = \frac{100}{144}$ ἄρα $I = \frac{5}{6}$ ampère.

Ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις Ε΄ τοῦ κινητῆρος εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm:

$$V = I(R + r) + E'.$$

ἄρα: $E' = V - I(R + r) = 110 - \left(29{,}5 \times \frac{5}{6}\right) = 85{,}4$ volt.

3) Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ V_1 εἰς τοὺς πόλους τοῦ κινητῆρος εἶναι: $V_1 = Ir = 3{,}73 \times 19{,}5 = 72{,}735$ volt.

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν εἶναι:

$$V_2 = E' + I_1 r = 85{,}4 + \left(\frac{5}{6} \times 19{,}5\right) = 101{,}65 \text{ volt.}$$

356.— *Δύο δυναμοηλεκτρικαὶ μηχαναὶ Α καὶ Α΄ ἔχουν ἀντιστοίχως ἀντιστάσεις* $R = 30$ ohm *καὶ* $R' = 15$ ohm, *συνδέονται δὲ μεταξύ των δι' ἀγωγῶν οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἀντίστασιν* $R'' = 5$ ohm. *Ἡ πρώτη λειτουργεῖ ὡς γεννήτρια καὶ παρουσιάζει μεταξὺ τῶν πόλων της διαφορὰν δυναμικοῦ* $V = 120$ volt, *ἡ δὲ δευτέρα λειτουργεῖ ὡς ἀποδέκτης καὶ παρουσιάζει μεταξὺ τῶν πόλων της διαφορὰν δυναμικοῦ* $V = 90$ volt. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις* Ε *τῆς* Α *καὶ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις* Ε΄ *τῆς* Α΄.

Μεταξὺ τῶν δύο μηχανῶν παρατηρεῖται πτῶσις τοῦ δυναμικοῦ κατὰ $V'' = 120 - 90 = 30$ volt. Ἄρα ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = V'' : R'' = 30 : 5 = 6 \text{ ampère.}$$

Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις Ε τῆς γεννητρίας Α εἶναι:

$$E = V + IR = 120 + (6 \times 30) = 300 \text{ volt.}$$

Ἡ δὲ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις Ε΄ τοῦ ἀποδέκτου Α΄ εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $V' = E' + IR'$. Ἄρα $E' = V' - IR' = 90 - (6 \times 15) = 0$ volt.

Ἄρα ἡ μηχανὴ Α΄ δὲν στρέφεται καὶ παρεμβάλλεται εἰς τὸ κύκλωμα ὡς ἁπλῆ ἀντίστασις.

357.— *Κινητὴρ λειτουργεῖ μὲ τὸ συνεχὲς ρεῦμα τῆς πόλεως.— 1) Ὅταν ὁ κινητὴρ δὲν στρέφεται, εἰς τοὺς πόλους του ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ* 160 volt, *διαρρέεται δὲ ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως* 10 ampère. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος.— 2) Ὅταν ὁ κινητὴρ στρέφεται, οὗτος διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως* 4 ampère. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ κινητήρ, ἡ ἀπόδοσις καὶ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις αὐτοῦ.*

1) Ὅταν ὁ κινητὴρ δὲν στρέφεται, οὗτος ἀποτελεῖ ἁπλῆν ἀντίστασιν. Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις αὐτοῦ εἶναι: $R = V : I = 160 : 10 = 16$ ohm.

2) Τὸ ρεῦμα παρέχει εἰς τὸν κινητῆρα ἰσχύν:

$$P = VI = 160 \times 4 = 640 \text{ watt.}$$

Ἐξ αὐτῆς ἀπορροφᾶται, ὑπὸ μορφὴν θερμότητος, ἰσχύς:

$$p = I^2 R = 16 \times 16 = 256 \text{ watt.}$$

Ἄρα ὁ κινητὴρ παρέχει ἰσχύν: $P' = P - p = 640 - 256 = 384$ watt.

Ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος εἶναι: $A = P' : P = 384 : 640 = 0{,}60$.

Ἡ δὲ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις αὐτοῦ εἶναι:

$$E' = V - IR = 160 - (4 \times 16) = 96 \text{ volt.}$$

358.— *Ὁ θάλαμος ἑνὸς ἀνελκυστῆρος, ὅταν εἶναι κενός, ἔχει βάρος* B=100 kg* *καὶ κινεῖται μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς κινητῆρος, τοῦ ὁποίου ὁ στάτορ (ἐπάγον) συνδέεται ἐν παραλλήλῳ μὲ τὸν ρότορα (ἐπαγώγιμον). Ἡ τάσις τοῦ ρεύματος εἶναι* 100 volt *καὶ ὁ κενὸς θάλαμος κινεῖται μὲ ταχύτητα* 1 m/sec. *Νὰ εὑρεθῇ μὲ πόσην ταχύτητα ἀνέρχεται ὁ θάλαμος, ὅταν ἐντὸς αὐτοῦ εὑρίσκωνται 4 ἄτομα ἔχοντα συνολικὸν βάρος* 300 kg*. *Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐπαγωγίμου εἶναι* $R_1 = 0{,}2$ ohm, *τοῦ δὲ ἐπάγοντος εἶναι* $R_2 = 200$ ohm. *Ἡ ἀπόδοσις τῆς ἐγκαταστάσεως (κινητῆρος καὶ βαρούλκου) εἶναι* 80 % *καὶ διατηρεῖται σταθερὰ εἴτε ὁ θάλαμος εἶναι κενὸς εἴτε φέρει φορτίον.*

Ὅταν ὁ θάλαμος ἀνέρχεται κενός, δαπανᾶται ἰσχύς: $100 \times 1 = 100$ kgm/sec. Αὐτὴ ὅμως ἡ ἰσχὺς εἶναι τὰ 80 % τῆς δαπανωμένης ἠλεκτρικῆς ἰσχύος. Ἄρα κατὰ δευτερόλεπτον δαπανᾶται ἠλεκτρικὴ ἰσχύς:

$$P = 100 : 0{,}80 = 125 \text{ kgm/sec} = 125 \times 9{,}81 = 1\,226 \text{ watt}.$$

Διὰ τοῦ στάτορος διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I_2 = V : R_2 = 100 : 200 = 0{,}50 \text{ ampère}.$$

Ἡ ἔντασις I τοῦ ὅλου ρεύματος, τὸ ὁποῖον εἰσέρχεται εἰς τὸν κινητῆρα, εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $P = VI$ · ἄρα εἶναι:

$$I = P : V = 1\,226 : 100 = 12{,}26 \text{ ampère}.$$

Ὥστε διὰ τοῦ ρότορος διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I_1 = I - I_2 = 12{,}26 - 0{,}50 = 11{,}76 \text{ ampère}.$$

Ἂν E′ εἶναι ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος (ἀναπτυσσομένη ἐντὸς τοῦ ρότορος), τότε θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις: $V = E' + R_1 I_1$ · ἄρα εἶναι:

$$E' = V - R_1 I_1 = 100 - (0{,}2 \times 11{,}76) = 97{,}65 \text{ volt}.$$

Ὅταν ὁ θάλαμος ἀνέρχεται μεταφέρων τὰ 4 ἄτομα, τότε τὸ ὅλον βάρος τοῦ θαλάμου εἶναι 400 kg*. Ἑπομένως ἡ δαπανωμένη ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς γίνεται:

$$P' = 4\,P = 4 \times 1\,226 \text{ watt}.$$

Διὰ τοῦ στάτορος διέρχεται πάλιν ρεῦμα ἐντάσεως I_2, ἡ ἔντασις ὅμως τοῦ ὅλου ρεύματος, τὸ ὁποῖον εἰσέρχεται εἰς τὸν κινητῆρα, γίνεται τώρα:

$$I' = P' : V = 4\,P : V = 4\,I.$$

Διὰ τοῦ ρότορος διέρχεται εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I_1' = I' - I_2 = 4\,I - 0{,}50 = (4 \times 11{,}76) - 0{,}50 = 46{,}54 \text{ ampère}.$$

Ἑπομένως ἡ νέα ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι:

$$E'' = V - R_1 I_1' = 100 - (0{,}2 \times 46{,}54) = 90{,}7 \text{ volt}.$$

Ἂς καλέσωμεν N′ καὶ N″ ἀντιστοίχως τὰς στροφὰς τοῦ ρότορος εἰς τὰς δύο περιπτώσεις. Ἐπειδὴ γνωρίζομεν ὅτι εἶναι:

$$E' = \frac{N'\,\nu\,\Phi}{10^8} \quad \text{καὶ} \quad E'' = \frac{N''\,\nu\,\Phi}{10^8} \quad \text{εὑρίσκομεν :} \quad \frac{E''}{E'} = \frac{N''}{N'}.$$

Ἀλλὰ αἱ ἀντίστοιχοι γραμμικαὶ ταχύτητες υ_1 καὶ υ_2 τοῦ ρότορος εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς στροφὰς N′ καὶ N″. Ἑπομένως εὑρίσκομεν τελικῶς τὴν σχέσιν:

$$\frac{E''}{E'} = \frac{N''}{N'} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{90{,}7}{97{,}65} = 0{,}928.$$

Ὅταν λοιπὸν ὁ θάλαμος ἀνέρχεται μὲ φορτίον, ἔχει ταχύτητα:

$$\upsilon_2 = 0{,}928 \times \upsilon_1 = 0{,}928 \times 1 = 0{,}928 \text{ m/sec} = 92{,}8 \text{ cm/sec}.$$

359.— *Ένας μικρὸς ἠλεκτροκινητὴρ συνδέεται μὲ τὸ κύκλωμα καταναλώσεως, τὸ ὁποῖον διατηρεῖ εἰς τοὺς πόλους τοῦ κινητῆρος σταθερὰν διαφορὰν δυναμικοῦ* 120 volt. *Ὁ κινητὴρ οὗτος χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν λειτουργίαν μιᾶς ἀντλίας ἡ ὁποία ἀνυψώνει τὸ ὕδωρ φρέατος ἔχοντος βάθος* 7,5 m· *ἡ παροχὴ τῆς ἀντλίας εἶναι* 56 *λίτρα ὕδατος κατὰ λεπτόν.— 1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὠφέλιμος ἰσχὺς τῆς ἀντλίας.— 2) Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος, ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι τὰ* 10 % *τῆς ἐνεργείας, τὴν ὁποίαν οὗτος παρέχει εἰς τὴν ἀντλίαν, χάνονται ἕνεκα διαφόρων αἰτίων. — 3) Ὁ κινητὴρ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως* 0,8 ampère· *νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐσωτερική του ἀντίστασις καὶ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις αὐτοῦ.— 4) Πόση ποσότης θερμότητος ἀναπτύσσεται ἐντὸς τοῦ κινητῆρος εἰς 5 λεπτά ;— 5) Πόση θὰ ἐγίνετο αὐτὴ ἡ ποσότης θερμότητος, ἐάν, λόγῳ βλάβης τῆς ἀντλίας, ὁ κινητὴρ ἔπαυε νὰ στρέφεται ;*

1) Ἡ ὠφέλιμος ἰσχὺς τῆς ἀντλίας εἶναι:

$$P = \frac{56 \times 7,5}{60} = 7 \text{ kgm/sec} = 7 \times 9,81 = 68,7 \text{ watt.}$$

2) Ἐὰν P′ εἶναι ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος, τότε, πρέπει νὰ εἶναι:

$$P = 0,90\,P' \quad \text{ἄρα} \quad P' = P : 0,90 = 68,7 : 0,90 = 76,3 \text{ watt.}$$

3) Ἂν E′ εἶναι ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος, τότε ἡ ἰσχύς του δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$P' = E'I\cdot$$

ἄρα $$E' = P' : I = 76,3 : 0,8 = 95,4 \text{ volt.}$$

Εἰς τοὺς πόλους τοῦ κινητῆρος ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ $V = 110$ volt. Ἂν r εἶναι ἡ ἐσωτερική του ἀντίστασις, τότε ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Ohm λαμβάνομεν τὴν σχέσιν:

$$V = E' + Ir \quad \text{ὥστε} \quad r = \frac{V - E'}{I} = \frac{110 - 95,4}{0,8} = 18,2 \text{ ohm.}$$

4) Κατὰ τὸν χρόνον $t = 300$ sec ἀναπτύσσεται ἐντὸς τοῦ κινητῆρος ποσότης θερμότητος:

$$Q = \frac{rI^2t}{4,18} = \frac{18,2 \times 0,8^2 \times 300}{4,18} = 836 \text{ cal.}$$

5) Ὅταν σταματήσῃ ἡ περιστροφὴ τοῦ κινητῆρος, οὗτος δὲν παράγει ἔργον καὶ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ του δύναμις εἶναι μηδέν. Τότε εἶναι μία ἁπλῆ ἀντίστασις καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I' = V : r = 110 : 18,2 = 6,05 \text{ ampère.}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἀναπτυσσομένη ποσότης θερμότητος εἶναι:

$$Q' = \frac{18,2 \times 6,05^2 \times 300}{4,18} = 47\,800 \text{ cal.}$$

360.— *Εἰς τοὺς πόλους ἑνὸς κινητῆρος ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ* 110 volt. *Ὁ κινητὴρ παρέχει ἰσχὺν* 22 *ἀτμοΐππων, ἡ δὲ ἀπόδοσίς του εἶναι* 0,92. *Νὰ εὑρεθῇ : 1) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος. — 2) Ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος. — 3) Ἡ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος. — 4) Ἡ ἀναπτυσσομένη ἐντὸς αὐτοῦ κατὰ δευτερόλεπτον ποσότης θερμότητος λόγῳ τοῦ φαινομένου τοῦ* Joule.

1) Ὁ κινητὴρ παρέχει ἰσχύν: $\quad P = 22 \times 736$ watt.

Ἡ δὲ ἰσχὺς τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον φθάνει εἰς τοὺς πόλους του, εἶναι:

$$P' = VI \text{ watt.}$$

Δίδεται ὅμως ὅτι εἶναι : $P = 0{,}92\ P'$ ἤτοι $P = 0{,}92\ VI$.
Ἄρα ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I = \frac{P}{0{,}92\ V} = \frac{22 \times 736}{0{,}92 \times 110} = 160 \text{ ampère.}$$

2) Ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις E′ τοῦ κινητῆρος εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν : $P = E'I$ ἢ $0{,}92\ VI = E'I$. Ἄρα $E' = 0{,}92 \times 110 = 101{,}2$ volt.

3) Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις r τοῦ κινητῆρος εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm : $V = E' + Ir$. Ὥστε $r = \dfrac{110 - 101{,}2}{160} = 0{,}055$ ohm.

4) Εἰς 1 δευτερόλεπτον χάνεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἰσχύς :

$$p = 0{,}08\ P' = 0{,}08 \times \frac{P}{0{,}92} \text{ watt}$$

ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μὲ ποσότητα θερμότητος :

$$Q = \frac{1}{4{,}18} \times 0{,}08 \times \frac{22 \times 736}{0{,}92} = 336 \text{ cal.}$$

361.— *Δύο ὅμοιαι μηχαναὶ τοῦ* Gramme *χρησιμοποιοῦνται ἡ μὲν μία ὡς γεννήτρια ἡ δὲ ἄλλη ὡς κινητήρ. Ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* 0,2 ohm. *Ἡ γραμμὴ ἡ ὁποία συνδέει τὰς δύο μηχανὰς ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο χάλκινα σύρματα ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει μῆκος* 500 m *καὶ τομὴν* 10 mm²· *ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ εἶναι* 1,6 microhm−cm. *Ἡ γεννήτρια ἔχει ἰσχὺν* 10 kW *καὶ ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* 250 volt. — *1) Πόση ἰσχὺς χάνεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἐπὶ τῆς γραμμῆς καὶ ἐντὸς ἑκάστης μηχανῆς ; — 2) Πόση εἶναι ἡ μηχανικὴ ἰσχὺς τῆς μηχανῆς, ἡ ὁποία λειτουργεῖ ὡς κινητὴρ καὶ πόση εἶναι ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις αὐτῆς ; — 3) Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους ἑκάστης μηχανῆς ;*

1) Ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς εἶναι : $R = \dfrac{1{,}6}{10^6} \times \dfrac{10^5}{0{,}1} = 1{,}6$ ohm.

Ἐπειδὴ ἡ ἰσχὺς τῆς γεννητρίας εἶναι $P = 10\,000$ watt, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος θὰ εἶναι : $I = P : E = 10\,000 : 250 = 40$ ampère. Ἄρα ἐπὶ τῆς γραμμῆς χάνεται ἰσχύς : $P_1 = RI^2 = 1{,}6 \times 40^2 = 2\,560$ watt
καὶ ἐντὸς ἑκάστης μηχανῆς χάνεται ἰσχύς : $P_2 = rI^2 = 0{,}2 \times 40^2 = 320$ watt.

2) Ἡ ὅλη λοπὸν ἀπώλεια ἰσχύος εἶναι :

$$P_1 + 2\,P_2 = 2\,560 + 640 = 3\,200 \text{ watt.}$$

Ἑπομένως ἡ μηχανικὴ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι :

$$P' = 10\,000 - 3\,200 = 6\,800 \text{ watt} = 6{,}8 \text{ kW}.$$

Ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος εἶναι :

$$E' = P' : I = 6\,800 : 40 = 170 \text{ volt.}$$

3) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι :

$$V = E - rI = 250 - (0{,}2 \times 40) = 242 \text{ volt}$$

καὶ εἰς τοὺς πόλους τοῦ κινητῆρος εἶναι :

$$V' = E' + rI = 170 + (0{,}2 \times 40) = 178 \text{ volt.}$$

362.— *Μία ὑδατόπτωσις παρέχει ἰσχὺν 500 ἀτμοΐππων εἰς μίαν γεννήτριαν ρεύματος, ἡ ὁποία ἔχει ἀπόδοσιν 90 % καὶ ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* 20 000 volt. *Τὸ ρεῦμα μεταφέρεται μὲ δύο καλώδια εἰς ἀπόστασιν* 30 km, *ὅπου ὑπάρχει κινητὴρ ἔχων ἀπόδοσιν 92 %.— 1) Νὰ εὑρεθῇ πόση εἶναι ἡ ἰσχύς, ἡ ὁποία παρέχεται εἰς τὸν κινητῆρα.— 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ βιομηχανικὴ ἀπόδοσις τῆς ὅλης ἐγκαταστάσεως.— 2) Νὰ εὑρεθῇ πόση θὰ γίνῃ ἡ ἀνωτέρω ἀπόδοσις, ἐὰν ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς γεννητρίας γίνῃ* 100 000 volt, *αἱ δὲ ἀποδόσεις τῆς γεννητρίας καὶ τοῦ κινητῆρος μείνουν αἱ αὐταί. Ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ* 300 ohm.

1) Ἡ ἰσχὺς τῆς ὑδατοπτώσεως εἶναι : $P = 500 \times 736 = 368\,000$ watt

ἄρα ἡ ἰσχὺς τῆς γεννητρίας εἶναι :

$$P_1 = 0{,}9\,P = 0{,}9 \times 368\,000 = 331\,200 \text{ watt.}$$

Ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν : $P_1 = EI$ ἄρα :

$$I = P_1 : E = 331\,200 : 20\,000 = 16{,}56 \text{ ampère.}$$

Ἐπὶ τῆς γραμμῆς χάνεται ἰσχύς :

$$P_2 = RI^2 = 300 \times 16{,}56^2 = 82\,270 \text{ watt.}$$

Ὥστε εἰς τὸν κινητῆρα φθάνει ἰσχύς :

$$P_3 = P_1 - P_2 = 331\,200 - 82\,270 = 248\,930 \text{ watt.}$$

2) Ὁ κινητὴρ παρέχει ὠφέλιμον ἰσχύν :

$$P_4 = 0{,}92\,P_3 = 0{,}92 \times 248\,930 = 229\,000 \text{ watt.}$$

Ἡ βιομηχανικὴ ἀπόδοσις τῆς ἐγκαταστάσεως, δηλαδὴ ὁ λόγος τῆς ὠφελίμου ἰσχύος πρὸς τὴν δαπανωμένην ἰσχύν, εἶναι :

$$A = \frac{P_4}{P} = \frac{229\,000}{368\,000} = 0{,}62 \quad \text{ἢ} \quad A = 62\ \%.$$

3) Ὅταν γίνῃ $E_1 = 100\,000$ volt, τότε ἡ ἰσχὺς τῆς γεννητρίας εἶναι :

$$P_1 = E_1 I_1 = 331\,200 \text{ watt καὶ ἑπομένως εἶναι :}$$

$$I_1 = \frac{331\,200}{100\,000} = 3{,}312 \text{ ampère.}$$

Ἐπὶ τῆς γραμμῆς χάνεται ἰσχύς : $P_2' = RI_1^2 = 300 \times 3{,}312^2 = 3\,290$ watt.

Ὥστε εἰς τὸν κινητῆρα φθάνει ἰσχύς :

$$P_3' = P_1 - P_2' = 331\,200 - 3\,290 = 327\,910 \text{ watt.}$$

Ὁ κινητὴρ παρέχει ὠφέλιμον ἰσχύν :

$$P_4' = 0{,}92\,P_3' = 0{,}92 \times 327\,910 = 301\,700 \text{ watt.}$$

Ἡ βιομηχανικὴ ἀπόδοσις τῆς ἐγκαταστάσεως εἶναι :

$$A' = \frac{P_4'}{P} = \frac{301\,700}{368\,000} = 0{,}82 \quad \text{ἢ} \quad A' = 82\ \%.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ βιομηχανικὴ ἀπόδοσις αὐξάνεται πολύ, ὅταν αὐξηθῇ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς γεννητρίας. Τοῦτο συμβαίνει, διότι ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας ἐπὶ τῆς γραμμῆς ὑποβιβάζεται ἀπὸ 82 270 watt εἰς 3 290 watt.

363.— *Μεταξὺ τῶν δύο σημείων Α καὶ Β ἑνὸς κυκλώματος διατηρεῖται σταθερὰ διαφορὰ δυναμικοῦ* 110 volt.—*1) Μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β παρεμβάλλομεν συστοιχίαν συσσωρευτῶν τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ φορτίσωμεν. Οἱ 40 συσσω-*

ρευταὶ τῆς συστοιχίας εἶναι συνδεδεμένοι κατὰ σειράν, ἕκαστος δὲ ἐξ αὐτῶν ἔχει ἀντίστασιν $r = 0{,}05$ ohm *καὶ ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* $\varepsilon' = 2{,}5$ volt. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τῆς φορτίσεως. — 2) Μεταξὺ τῶν σημείων* A *καὶ* B *παρεμβάλλεται τώρα ἕνας κινητήρ, ὁ ὁποῖος ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν* 2 ohm. *Αἱ ἀντιστάσεις τῶν συρμάτων τῆς συνδέσεως εἶναι ἀσήμαντοι. α) Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τοῦ διαρρέοντος τὸν κινητῆρα, ὅταν θέλωμεν νὰ λαμβάνωμεν ἀπὸ αὐτὸν χρήσιμον ἔργον ἴσον μὲ* 3 240 kWh; *Ἂν εὑρεθοῦν περισσότεραι τιμαὶ τῆς ἐντάσεως, νὰ καθορισθῇ ποία ἐξ αὐτῶν ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μεγαλυτέραν ἀπόδοσιν τοῦ κινητῆρος. β) Ποία εἶναι ἡ μεγίστη ὠφέλιμος ἰσχὺς τὴν ὁποίαν ἠμποροῦμεν νὰ ζητήσωμεν ἀπὸ τὸν κινητῆρα ;*

1) Ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$V = 40\,Ir + 40\,\varepsilon' \cdot \quad \text{ἄρα} \quad I = \frac{110 - (40 \times 2{,}5)}{40 \times 0{,}05} = 5 \text{ ampère.}$$

2) Ἡ ὠφέλιμος ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι :

$$P' = 3\,240\,000 : 3\,600 = 900 \text{ watt.}$$

Τὸ ρεῦμα παρέχει εἰς τὸν κινητῆρα ἰσχύν : $P = VI = 110\,I$ watt.

Ἡ διαφορὰ $p = P - P'$ παριστᾷ τὴν ἰσχὺν ἡ ὁποία χάνεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος. Εἶναι δέ : $p = rI^2 = 2\,I^2$.

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν : $P = P' + p$ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$2\,I^2 - 110\,I + 900 = 0 \cdot$ (1) ἄρα $I' = 45$ ampère καὶ $I'' = 10$ ampère

Ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\alpha = \frac{P'}{P} = \frac{P - p}{P} = 1 - \frac{2\,I}{V} \quad \text{ἢ} \quad \alpha = 1 - \frac{2\,I}{110}\,.$$

Ἡ τελευταία σχέσις φανερώνει ὅτι ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος εἶναι τόσον μεγαλυτέρα, ὅσον μικροτέρα εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος. Ἄρα διὰ $I = 10$ ampère ἔχομεν τὴν μεγίστην ἀπόδοσιν : $\alpha = \dfrac{900}{110 \times 10} = \dfrac{9}{11}$.

Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται : $2\,I^2 - 110\,I + P' = 0 \cdot$

ἡ τελευταία αὐτὴ ἐξίσωσις ἔχει πραγματικὰς ρίζας, ὅταν εἶναι :

$$55^2 - 2\,P' \geqslant 0 \quad \text{ἢ} \quad P' \leqslant \frac{55^2}{2} \quad \text{δηλαδὴ} \quad P' \leqslant 1512{,}5\,.$$

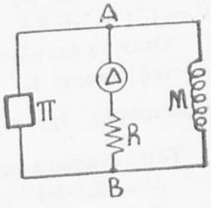
Ἡ μεγίστη ὠφέλιμος ἰσχὺς εἶναι : $P' = 1512{,}5$ watt.

Τότε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος θὰ εἶναι : $I = \dfrac{55}{2}$ ampère

ἡ δὲ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος θὰ εἶναι : $\alpha = 1 - \dfrac{2 \times 55}{2 \times 110} = \dfrac{1}{2}\,.$

364.— *Μία πηγὴ Π διατηρεῖ σταθερὰν διαφορὰν δυναμικοῦ* $V = 120$ volt *μεταξὺ δύο πόλων* A *καὶ* B *μιᾶς διπολικῆς μηχανῆς τοῦ* Gramme, *ἡ ὁποία λειτουργεῖ ὡς κινητήρ. Τὸ μαγνητικὸν πεδίον ἐξασφαλίζεται μὲ τὸ ἐπάγον* M, *τὸ ὁποῖον τροφοδοτεῖται μὲ ρεῦμα σταθερᾶς ἐντάσεως. Σταθερὰ εἶναι ἐπίσης καὶ ἡ μαγνητικὴ ροὴ ἐντὸς τῆς ὁποίας στρέφεται τὸ ἐπαγώγιμον. Ροοστάτης* R *συνδέεται κατὰ σειρὰν μὲ τὸ ἐπαγώγιμον. Ὅταν ἡ μηχανὴ παρέχῃ τὴν κανονικὴν ἰσχύν, ἐκτελεῖ* 1 000 *στροφὰς κατὰ λεπτόν. Τὸ ὅλον ρεῦμα τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ πηγὴ Π ἔχει ἔντασιν* $I = 50$ ampère, *ὁ δὲ ροοστάτης δὲν παρεμβάλλει καμμίαν ἀντίστασιν.—*

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ ἐπαγώγιμον, ἐὰν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐπάγοντος εἶναι 60 ohm. — 2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ σύρματος τοῦ ἐπαγωγίμου ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ φαινομένη ἀντίστασις τοῦ αὐτοῦ εἶναι 0,5 ohm.—3) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος. — 4) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς ἡ ὁποία δαπανᾶται μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B ὑπὸ τῆς πηγῆς. Πόσον μέρος τῆς ἐνεργείας αὐτῆς μετατρέπεται εἰς μηχανικὴν ἐνέργειαν; Εἰς τὴν πραγματικότητα ἕνα μέρος αὐτῆς τῆς ἐνεργείας ἀπορροφᾶται εἰς τριβὰς καὶ διαφόρους ἄλλας ἀπωλείας. Ἡ οὕτω δαπανωμένη ἰσχὺς ἀνέρχεται εἰς 0,5 kW. Νὰ εὑρεθῇ πόση εἶναι τότε ἡ ροπὴ τοῦ κινητηρίου ζεύγους, τὸ



Σχ. 208

ὁποῖον πραγματικῶς λαμβάνομεν. — 5) Ὁ κινητὴρ στρέφεται τώρα μὲ διαφόρους ταχύτητας. Κάθε ὅμως φορὰν ρυθμίζομεν τὴν τιμὴν τῆς ἀντιστάσεως R οὕτως ὥστε ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος νὰ εἶναι ἴση μὲ 50 ampère. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῆς R εἰς τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις: α) Κατὰ τὴν ἐκκίνησιν τοῦ κινητῆρος. β) Ὅταν στρέφεται μὲ ταχύτητα 100 καὶ 500 στροφῶν κατὰ λεπτόν. — 6) Τὸ ἐπαγώγιμον φέρει 200 σπείρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὅλη ροὴ ἡ ὁποία ἐξέρχεται ἀπὸ τὸν ἕνα πόλον τοῦ ἐπάγοντος.

1) Τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ ἐπάγον M ἔχει ἔντασιν:

$$I' = 120 : 60 = 2 \text{ ampère}.$$

Ἑπομένως τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ ἐπαγώγιμον ἔχει ἔντασιν:

$$I'' = I - I' = 50 - 2 = 48 \text{ ampère}.$$

2) Ἂν R_1 εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος τοῦ ἐπαγωγίμου, τὸ ρεῦμα ἐντὸς αὐτοῦ διχάζεται εἰς δύο κλάδους, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἡνωμένοι ἐν παραλλήλῳ καὶ ἡ φαινομένη ἀντίστασις εἶναι: $R_1' = R_1/4$. Ἡ ὅλη λοιπὸν ἀντίστασις τοῦ σύρματος τοῦ ἐπαγωγίμου εἶναι: $R_1 = 4 \times 0{,}5 = 2$ ohm.

3) Ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς μηχανῆς δίδεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm:

$$E' = V - I''R_1' = 120 - 48 \times 0{,}5 = 96 \text{ volt}.$$

4) Ἡ ὅλη ἰσχύς, ἡ ὁποία δαπανᾶται μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B, εἶναι:

$$P = VI = 120 \times 50 = 6\,000 \text{ watt} = 6 \text{ kW}.$$

Ἀπὸ τὴν ἰσχὺν αὐτὴν μετατρέπεται εἰς μηχανικὴν ἰσχύν, ἡ ἰσχύς:

$$P' = E'I'' = 96 \times 48 = 4\,608 \text{ watt} = 4,608 \text{ kW}.$$

Ἂν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν P′ τὴν ἰσχύν, ἡ ὁποία ἀπορροφᾶται ἀπὸ τὰς διαφόρους τριβάς, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ὠφέλιμος ἰσχὺς εἶναι:

$$P'' = P' - 0{,}5 = 4{,}608 - 0{,}5 = 4{,}108 \text{ kW}.$$

Ὁ ρότορ ἐκτελεῖ: $N = \frac{1\,000}{60} = \frac{100}{6}$ στροφὰς κατὰ δευτερόλεπτον.

Ἡ ροπὴ Γ τοῦ κινητηρίου ζεύγους εἶναι τοιαύτη ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$P'' = 2\pi N\Gamma$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν (εἰς μονάδας C.G.S.) ὅτι εἶναι:

$$\Gamma = \frac{P''}{2\pi N} = \frac{4\,108 \times 10^7 \times 6}{2\pi \times 100} = 3{,}92 \times 10^8 \text{ C.G.S.}$$

5) Κατὰ τὴν ἐκκίνησιν, ὁ κινητὴρ δὲν ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν, διότι δὲν παράγει διόλου ἔργον. Τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ ἐπάγον ἔχει

πάντοτε ἔντασιν $I' = 2$ ampère. Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ ὅλον ρεῦμα τῆς πηγῆς ἔχει πάντοτε ἔντασιν $I = 50$ ampère, συνάγεται ὅτι τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ ἐπαγώγιμον θὰ ἔχῃ ἔντασιν $I'' = 48$ ampère. Ἂν ἐφαρμόσωμεν τότε τὸν νόμον τοῦ Ohm εἰς τὸ κύκλωμα ΑΔΒ, εὑρίσκομεν:
$V = I''(R_1' + R)$ ἢ $120 = 48(0{,}5 + R)$. Ὥστε εἶναι: $R = 2$ ohm.

Ὅταν τὸ ἐπαγώγιμον ἐκτελῇ $N' = 100$ στροφὰς κατὰ λεπτὸν ἡ ἀντιηλεκτρεγερτικὴ δύναμις E_1' τοῦ κινητῆρος, ἡ ὁποία εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ταχύτητα περιστροφῆς, ἔχει τὴν τιμήν: $E_1' = E'\dfrac{N'}{N} = 96 \times \dfrac{100}{1\,000} = 9{,}6$ volt.

Τότε, σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Ohm, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$V = E_1' + I''(R_1' + R') \quad \text{ἢ} \quad 120 = 9{,}6 + 48(0{,}5 + R')$$

ὅπου R' εἶναι ἡ νέα τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως τὴν ὁποίαν παρεμβάλλει ὁ ροοστάτης. Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $R' = 1{,}8$ ohm.

Ὁμοίως ὅταν ἡ ταχύτης περιστροφῆς γίνῃ $N'' = 500$, τότε ἡ ἀντιηλεκτρεγερτικὴ δύναμις E_2' τοῦ κινητῆρος εἶναι:

$$E_2' = E'\frac{N''}{N} = 96 \times \frac{500}{1\,000} = 48 \text{ volt}.$$

Καὶ ἡ νέα ἀντίστασις R'' τοῦ ροοστάτου εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν:
$120 = 48 + 48(0{,}5 + R'')$ ὅτι εἶναι: $R'' = 1$ ohm.

6) Ἡ ἀντιηλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἑνὸς κινητῆρος τοῦ Gramme δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$E' = \frac{1}{10^8} N \nu \Phi$$

ὅπου N εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν κατὰ δευτερόλεπτον, ν ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν σπειρῶν καὶ Φ ἡ ὅλη ροὴ τὴν ὁποίαν παράγει τὸ ἐπάγον.

Ἑπομένως διὰ τὸν θεωρούμενον κινητῆρα ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$96 = \frac{1}{10^8} \times \frac{1\,000}{60} \times 200 \times \Phi \quad \text{ἤτοι} \quad \Phi = 2{,}88 \times 10^6 \text{ maxwell.}$$

XII. ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟΝ ΡΕΥΜΑ

365. — *Ἕνα ἐπίπεδον κύκλωμα, ἀποτελούμενον ἀπὸ $\nu = 100$ σπείρας, ἔχει ἐπιφάνειαν $800\ cm^2$ καὶ στρέφεται περὶ ὁριζόντιον ἄξονα μὲ ταχύτητα 10 στροφῶν κατὰ δευτερόλεπτον. Τὸ κύκλωμα εἶναι κλειστόν, ἔχει ἀντίστασιν 0,50 ohm καὶ στρέφεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντάσεως 0,2 gauss καὶ τοῦ ὁποίου ἡ διεύθυνσις εἶναι κάθετος πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγίστη ἔντασις τοῦ παραγομένου ἐναλλασσομένου ρεύματος. Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ κύκλωμα δὲν ἔχει αὐτεπαγωγήν.*

Ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς μαγνητικῆς ροῆς εἶναι:

$$\Phi_0 = HS\nu = 0{,}2 \times 800 \times 100 = 1{,}6 \times 10^4 \text{ maxwell.}$$

Κατὰ τὸν χρόνον t ἡ ροὴ ἔχει τὴν τιμήν:

$$\Phi = \Phi_0 \text{ συν } \omega t = 1{,}6 \times 10^4 \text{ συν } 20\pi t.$$

Ἡ ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἰς κάθε στιγμὴν εἶναι:

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = 20\pi \times 1{,}6 \times 10^4 \text{ ημ } 20\pi t \quad \text{C.G.S.}$$

$$\text{ἢ} \quad E = \frac{32\pi \times 10^4 \text{ ημ } 20\pi t}{10^8} \text{ volt.}$$

Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς κάθε στιγμὴν εἶναι:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{32\pi \times 10^4 \text{ ημ } 20\pi t}{0{,}50 \times 10^8} = 0{,}0201 \text{ ημ } 20\pi t \text{ ampère.}$$

Ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς ἐντάσεως εἶναι: $I_0 = 0{,}0201$ ampère.

366.— *Ἕνας ἐναλλακτὴρ ἔχει δύο πόλους, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει ἐπιφάνειαν 10 dm². Ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖ τὸ ἐπάγον εἶναι H = 2 000 gauss, ὁ δὲ ὅλος ἀριθμὸς τῶν σπειρῶν τοῦ ἐπαγωγίμου εἶναι ν = 200. Νὰ εὑρεθῇ πόσην ταχύτητα περιστροφῆς πρέπει νὰ ἀποκτήσῃ ὁ ρότορ, ὥστε ἡ μεγίστη ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις νὰ εἶναι 1 414 volt.*

Γνωρίζομεν ὅτι, ἂν εἶναι:

K ὁ ἀριθμὸς τῶν ζευγῶν τῶν πόλων τοῦ ἐπάγοντος

N ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν κατὰ δευτερόλεπτον

ν ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν σπειρῶν τοῦ ἐπαγωγίμου

Φ_0 ἡ μεγίστη μαγνητικὴ ροὴ

τότε ἡ μεγίστη ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐξ ἐπαγωγῆς, ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐπὶ τοῦ ἐπαγωγίμου, εἶναι: $E_0 = 10^{-8}\, \pi\, N\, \nu\, K\, \Phi_0$ volt.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν:

$$E_0 = 10^{-8}\pi \times N \times 200 \times 2\,000 \times 1\,000 = 8\,\pi\, N$$

$$\text{ἄρα} \quad N = \frac{1\,414}{8\,\pi} = 56{,}25 \text{ στροφαὶ κατὰ sec.}$$

367.— *Ὁ ρότορ μονοφασικοῦ ἐναλλακτῆρος ἔχει 4 πόλους καὶ ἐκτελεῖ 1 500 στροφὰς κατὰ λεπτόν. — 1) Ποία εἶναι ἡ συχνότης τοῦ παραγομένου ρεύματος; 2) Τὸ ρεῦμα τοῦτο διέρχεται διὰ πηνίου A τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν 5 ohm καὶ εἶναι βυθισμένον ἐντὸς θερμιδομέτρου· τὸ ἰσοδύναμον εἰς ὕδωρ τοῦ θερμιδομέτρου εἶναι 1 kg. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ θερμοκρασία τοῦ θερμιδομέτρου ὑψώνεται κατὰ 10° ἐντὸς ἑνὸς λεπτοῦ. Πόση εἶναι ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος; — 3) Μεταξὺ τῶν δύο ἄκρων τοῦ πηνίου τοποθετεῖται βολτόμετρον, τὸ ὁποῖον δεικνύει ὅτι ἡ ἐνεργὸς διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι 65 volt. Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς ἰσχύος τοῦ πηνίου.*

$$J = 4{,}18 \text{ joule/cal.}$$

1) Εἰς μίαν στροφὴν τοῦ ρότορος ὑπάρχουν 4/2 περίοδοι τοῦ ρεύματος. Ἄρα εἰς $\frac{1\,500}{60}$ στροφὰς τοῦ ρότορος κατὰ δευτερόλεπτον ὑπάρχουν:

$$\frac{4}{2} \times \frac{1\,500}{60} = 50 \text{ περίοδοι.}$$

Ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι $N = 50$ Hz.

2) Ἡ ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου ἀναπτυσσομένη

$$P = \frac{1000 \times 10}{60} \times 4{,}18 = \frac{4\,180}{6} \text{ watt.}$$

Ἂν I_ε εἶναι ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος, τότε ἔχομεν:

$$P = RI_\varepsilon^2 \qquad \text{ἄρα} \qquad \text{ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν:}$$

$$I_\varepsilon = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{4\,180}{6 \times 5}} = 11{,}8 \text{ ampère.}$$

3) Ἡ μέση ἰσχὺς τοῦ ρεύματος εἶναι: $P = V_\varepsilon \; I_\varepsilon \text{ συν } \varphi$.

Ὥστε ὁ ζητούμενος συντελεστὴς ἰσχύος εἶναι:

$$\text{συν } \varphi = \frac{P}{V_\varepsilon \; I_\varepsilon} = \frac{4\,180}{6 \times 65 \times 11{,}8} = 0{,}908.$$

368.— *Μονοφασικὸς ἐναλλακτὴρ λειτουργεῖ μὲ τὴν βοήθειαν κινητῆρος, ὁ ὁποῖος ἀναπτύσσει ἰσχὺν 70 ἀτμοΐππων. Ἡ ἐνεργὸς ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι* $E_\varepsilon = 1\,000$ volt, *ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι* $I_\varepsilon = 50$ ampère, *τὸ δὲ βατόμετρον σημειώνει τότε* 43 300 watt —*1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς ἰσχύος καὶ ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τῆς ἐντάσεως καὶ τῆς τάσεως.—2) Πόση εἶναι ἡ μηχανικὴ ἀπόδοσις τοῦ ἐναλλακτῆρος ;*

1) Τὸ βατόμετρον σημειώνει ὡς γνωστὸν τὴν μέσην ἰσχὺν P τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος: $P = E_\varepsilon \; I_\varepsilon \text{ συν } \varphi$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν τὸν συντελεστὴν ἰσχύος:

$$\text{συν } \varphi = \frac{P}{E_\varepsilon \; I_\varepsilon} = \frac{43\,300}{1\,000 \times 50} = 0{,}866.$$

Ἡ διαφορὰ φάσεως φ εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\text{συν } \varphi = 0{,}866 \qquad \text{ἄρα} \qquad \varphi = 30^0.$$

2) Ὁ κινητὴρ παρέχει εἰς τὸν ἐναλλακτῆρα μηχανικὴν ἰσχύν: $P' = 70 \times 736$ watt, ὁ δὲ ἐναλλακτὴρ παρέχει εἰς τὸ κύκλωμα ἰσχὺν P.

Ἄρα ἡ ἀπόδοσις τοῦ ἐναλλακτῆρος εἶναι:

$$\alpha = \frac{P}{P'} = \frac{43\,300}{70 \times 736} = 0{,}84.$$

369.—*Ἕνα κυκλικὸν πλαίσιον ἔχει διάμετρον* 1 m· *ἀποτελεῖται ἀπὸ* 100 *σπείρας μεταλλικοῦ σύρματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν* 2 ohm *κατὰ μέτρον καὶ συνδέεται μὲ ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν* 100 ohm. *Τὸ ἐπίπεδον τοῦ πλαισίου τούτου εἶναι κατ' ἀρχὰς κάθετον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς βελόνης ἐγκλίσεως, ἐντὸς δὲ* 1/5 *τοῦ δευτερολέπτου στρέφεται κατὰ* 180⁰ *περὶ τὴν ὁριζοντίαν διάμετρόν του. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνεργὸς ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἡ ἀναπτυσσομένη ἐντὸς τοῦ πλαισίου καὶ ἡ ἀναπτυσσομένη ποσότης θερμότητος ἐντὸς τοῦ κυκλώματος. Ἡ ἔντασις τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου θὰ ληφθῇ ἴση μὲ* 0,5 gauss.

Τὸ σύρμα τοῦ πλαισίου ἔχει μῆκος:

$100\,\pi \times 1 = 314{,}16$ m καὶ ἀντίστασιν: $r = 314{,}16 \times 2 = 628{,}32$ ohm.

Ἑπομένως ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$R = r + R_1 = 628{,}32 + 100 = 728{,}32 \text{ ohm.}$$

Κατὰ μίαν στιγμὴν t ἡ τιμὴ τῆς μαγνητικῆς ροῆς δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\Phi = \Phi_0 \text{ συν } \omega t \qquad (1)$$

ἡ μεγίστη τιμὴ Φ_0 τῆς ροῆς εἶναι:

$$\Phi_0 = SH \,.\, N = \frac{\pi\, 100^2}{4} \times 0{,}5 \times 100 = 12{,}5\,\pi \times 10^4 \text{ maxwell}$$

ἡ δὲ τιμὴ τοῦ ω εἶναι: $\omega = \frac{2\,\pi}{T} = 2\,\pi : \frac{2}{5} = 5\,\pi.$

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται: $\Phi = 12{,}5\,\pi \times 10^4 \text{ συν } 5\pi t.$

Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐξ ἐπαγωγῆς εἶναι:

$$E = -\frac{1}{10^8} \times \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{10^8} \times 5\pi \times 12{,}5\,\pi \times 10^4 \text{ ημ } 5\pi t$$

$$\text{ἢ} \qquad E = \frac{62{,}5\,\pi^2}{10^4} \text{ ημ } 5\pi t = E_0 \text{ ημ } \omega t.$$

Ἡ μεγίστη ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι: $E_0 = \frac{62{,}5\,\pi^2}{10^4}$ volt

καὶ ἐπομένως ἡ ἐνεργὸς ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι:

$$E_\varepsilon = \frac{E_0}{\sqrt{2}} = 0{,}0436 \text{ volt.}$$

Ἐπειδὴ τὸ κύκλωμα δὲν περιέχει οὔτε αὐτεπαγωγήν, οὔτε χωρητικότητα ἡ ὑπὸ μορφὴν θερμότητος δαπανωμένη ἰσχὺς εἶναι:

$$P = \frac{1}{4{,}18}\, RI_\varepsilon^2 = \frac{1}{4{,}18} \times \frac{E_\varepsilon^2}{R} \qquad \text{ἢ} \qquad P = \frac{0{,}0436^2}{4{,}18 \times 728{,}32} = \frac{6{,}27}{10^7} \text{ cal.}$$

370.— *Λαμπτὴρ διὰ πυρακτώσεως τροφοδοτεῖται μὲ ἐναλλασσόμενον ἡμιτονοειδὲς ρεῦμα συχνότητος* N. *Εἰς τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ λαμπτῆρος ἐφαρμόζεται μεγίστη τάσις* V_0 volt, *ἡ δὲ ἀντίστασις τοῦ λαμπτῆρος ἐν θερμῷ εἶναι ἴση μὲ* R ohm. *Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἀντίστασις αὕτη δὲν ἔχει αὐτεπαγωγὴν καὶ χωρητικότητα.— 1) Νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσει τοῦ χρόνου ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τοῦ διαρρέοντος τὸ σύρμα τοῦ λαμπτῆρος καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγίστη ἔντασις τοῦ ρεύματος.— 2) Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς θερμίδας ἡ ποσότης θερμότητος ἡ ἀναπτυσσομένη ἐπὶ τοῦ σύρματος ἐντὸς* t *δευτερολέπτων.*

Ἐφαρμογή: N = 50 Hz · $V_0 = 141{,}4$ volt · R = 220 ohm.

1) Ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ λαμπτῆρος μεταβάλλεται συναρτήσει τοῦ χρόνου ἡμιτονοειδῶς: $V = V_0 \text{ ημ} \frac{2\,\pi\, t}{T}$.

Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R} \text{ ημ} \frac{2\,\pi\, t}{T}$$

ἤτοι ἀριθμητικῶς: $I = \frac{141{,}4}{220} \text{ ημ } 100\pi t$ ἢ $I = 0{,}642 \times \text{ημ } 314{,}16\, t.$

Ἡ μεγίστη ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = \frac{V_0}{R} = \frac{141{,}4}{220} = 0{,}642 \text{ ampère.}$$

2) Ἡ ἐνεργὸς ἔντασις I_ε τοῦ ρεύματος εἶναι : $I_\varepsilon = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$.

Ἡ ἀναπτυσσομένη ποσότης θερμότητος δίδεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Joule :

$$Q = \frac{1}{4{,}18} RI_\varepsilon^2 t = \frac{1}{4{,}18} \times \frac{V_0^2 t}{2R}$$

$$\text{ἄρα} \quad Q = \frac{141{,}4^2 \times 3\,600}{2 \times 220 \times 4{,}18} = 39\,148 \text{ cal.}$$

371.—*Εἰς τὸ ἄκρον* A *ἑνὸς σύρματος* AB *φθάνουν δύο ρεύματα: ἕνα συνεχὲς ρεῦμα σταθερᾶς ἐντάσεως* $I_\sigma = 3{,}3$ ampère *καὶ ἕνα ἐναλλασσόμενον ἡμιτονοειδὲς ρεῦμα ἐνεργοῦ ἐντάσεως* $I_\varepsilon = 5{,}6$ ampère. *Νὰ εὑρεθῇ πόση εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ἐνεργοῦ ἐντάσεως τοῦ συνισταμένου ρεύματος, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς ἐπιπροσθέσεως τῶν δύο ἀνωτέρω ρευμάτων.*

Ἔστω R ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος AB καὶ I ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ συνισταμένου ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν ἀγωγὸν AB. Τὸ θερμικὸν ἀποτέλεσμα ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R εἶναι τὸ αὐτό, εἴτε ὁ ἀγωγὸς διαρρέεται ἀπὸ τὸ ρεῦμα ἐντάσεως I, εἴτε διαρρέεται ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν ρευμάτων I_σ καὶ I_ε.

Ἄρα θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις : $I^2 Rt = I_\sigma^2 R t + I_\varepsilon^2 R t$ ἤτοι εἶναι :

$$I = \sqrt{I_\sigma^2 + I_\varepsilon^2} = \sqrt{3{,}3^2 + 5{,}6^2} = 6{,}5 \text{ ampère.}$$

372.— *Ἕνας λαμπτὴρ διὰ πυρακτώσεως, ἐντάσεως 25 κηρίων, ἀντιστάσεως* R = 370 ohm *καὶ χωρὶς αὐτεπαγωγὴν τροφοδοτεῖται μὲ ἐναλλασσόμενον ἡμιτονοειδὲς ρεῦμα συχνότητος* N = 45, *τοῦ ὁποίου ἡ ἐνεργὸς τάσις εἶναι* $V_\varepsilon = 110$ volt. *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγίστη τάσις εἰς τὴν ὁποίαν ὑπόκειται ὁ λαμπτήρ.— 2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὸν λαμπτῆρα, συναρτήσει τοῦ χρόνου.— 3) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς κατὰ κηρίον.*

1) Ἡ ἐφαρμοζομένη μεγίστη τάσις εἶναι :

$$V_0 = V_\varepsilon \sqrt{2} = 110\sqrt{2} = 155{,}54 \text{ volt.}$$

2) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$I = I_0 \,\text{ημ}\, \alpha t = \frac{V_0}{R} \,\text{ημ}\, 2\pi N t \quad \text{ἤτοι} \quad I = 0{,}42 \,\text{ημ}\, 90\pi t.$$

3) Ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς εἶναι :

$$P = V_\varepsilon \times I_\varepsilon = V_\varepsilon \times \frac{V_\varepsilon}{R} = \frac{V_\varepsilon^2}{R} \quad \text{ἤτοι} \quad P = \frac{110^2}{370} = 32{,}70 \text{ watt.}$$

Κατὰ κηρίον καταναλίσκεται ἰσχύς : $p = \frac{32{,}70}{25} = 1{,}3$ watt.

373.— *Ἐπὶ ἑνὸς κυλίνδρου, στρεφομένου ἰσοταχῶς καταγράφομεν τὰς κυμάνσεις ἑνὸς διαπασῶν δίδοντος τὸ* la_2 *καὶ τὴν ρυθμικὴν κίνησιν μιᾶς σιδηρᾶς ράβδου, ἡ ὁποία εἶναι στερεωμένη μονίμως εἰς τὸ ἓν ἄκρον της καὶ ἔμπροσθεν τῆς ὁποίας ὑπάρχει ἠλεκτρομαγνήτης διαρρεόμενος ἀπὸ ἐναλλασσόμενον ρεῦμα. Αἱ δύο καμπύλαι τὰς ὁποίας λαμβάνομεν δεικνύουν ὅτι κάθε σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τοῦ* *κυλίνδρου μετακινεῖται κατὰ 9,6 cm ἐντὸς 20 περιόδων τῆς ῥάβδου καὶ κατὰ 12,8 cm ἐντὸς 116 περιόδων τοῦ διαπασῶν.— 1) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ συχνότης τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος.—2) Τὸ ἐναλλασσόμενον ρεῦμα διαρρέει ἀγωγόν, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀσήμαντον αὐτεπαγωγήν, ἀντίστασιν 260 ohm καὶ ὁ ὁποῖος εἶναι βυθισμένος ἐντὸς θερμιδομέτρου. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ θερμοκρασία τοῦ θερμιδομέτρου ὑψώνεται κατὰ 0,6° ἐντὸς ἑνὸς λεπτοῦ. Ἐὰν εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ ἰσοδύναμον εἰς ὕδωρ τοῦ συστήματος (ἀγωγὸς - θερμιδόμετρον) εἶναι 450 gr, νὰ εὑρεθῇ τί θὰ ἐδείκνυεν ἕνα θερμικὸν βολτόμετρον τὸ ὁποῖον τοποθετεῖται κατὰ διακλάδωσιν μεταξὺ τῶν δύο ἄκρων τοῦ ἀγωγοῦ, τοῦ βυθισμένου ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου. Συχνότης τοῦ* la_3 : 435.

1) Ἡ συχνότης τοῦ διαπασῶν εἶναι: $\quad N_1 = \dfrac{435}{2}$.

Ἐντὸς 20 περιόδων της ἡ ῥάβδος καταγράφει ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου 20 κυμάνσεις ἐπὶ μήκους 9,6 cm. Ἄρα ἐπὶ μήκους 12,8 cm καταγράφονται ν′ κυμάνσεις τῆς ῥάβδου, αἱ ὁποῖαι εἶναι: $\quad \nu' = \dfrac{20 \times 12{,}8}{9{,}6}$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μήκους 12,8 cm καταγράφονται $\nu_1 = 116$ κυμάνσεις τοῦ διαπασῶν. Ὁ λόγος τῆς συχνότητος N′ τῆς ῥάβδου πρὸς τὴν συχνότητα N_1 τοῦ διαπασῶν εἶναι:

$$\frac{N'}{N_1} = \frac{\nu'}{\nu_1} = \frac{20 \times 12{,}8}{9{,}6 \times 116} \quad \text{ἄρα} \quad N' = \frac{20 \times 12{,}8}{9{,}6 \times 116} N_1.$$

Ἐντὸς ἑκάστης περιόδου τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος ἡ ῥάβδος ἕλκεται δύο φοράς. Ἄρα ἡ συχνότης N′ τῆς ῥάβδου εἶναι διπλασία τῆς συχνότητος N τοῦ ρεύματος· ὥστε εἶναι:

$$N = \frac{N'}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{20 \times 12{,}8}{9{,}6 \times 116} \times \frac{435}{2} = 25.$$

2) Ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου δαπανᾶται, ὑπὸ μορφὴν θερμότητος, ἰσχύς:

$$W = \frac{450 \times 0{,}6 \times 4.18}{60} = 18{,}81 \text{ watt}.$$

Ἐὰν ὀνομάσωμεν V_ε τὴν ἐνεργὸν διαφορὰν δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τοῦ θερμιδομέτρου, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:

$$W = \frac{V_\varepsilon^2}{R} \quad \text{ἤτοι} \quad V_\varepsilon = \sqrt{WR} = \sqrt{18{,}81 \times 260} = 61{,}3 \text{ volt}.$$

374.— *Τὸ πηνίον ἑνὸς ἠλεκτρομαγνήτου τροφοδοτεῖται μὲ ἐναλλασσόμενον ρεῦμα, τοῦ ὁποίου ἡ ἔντασις κατὰ τὴν στιγμὴν* t *δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:* $I = I_0$ ημ ωt. *Ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος, μετρηθεῖσα μὲ θερμικὸν ἀμπερόμετρον, εἶναι* 2 ampère. *Ἡ ἀντίστασις τοῦ πηνίου εἶναι* 5 ohm. *Ἔμπροσθεν τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου τείνεται χορδὴ ἀπὸ μαλακὸν σίδηρον ἔχουσα μῆκος* $l = 40{,}2$ cm *καὶ τομὴν* $\sigma = 0{,}5$ mm². *Ἡ χορδὴ πάλλεται καὶ δίδει τὸν θεμελιώδη ἦχον, ὅταν τείνεται ἀπὸ βάρος ἔχον μᾶζαν* M. *Μία δευτέρα χορδὴ ἀπὸ μαλακὸν σίδηρον, τῆς αὐτῆς τομῆς* σ *καὶ μήκους* $l' = 59{,}8$ cm, *πάλλεται ἐπίσης μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου καὶ δίδει τὸν αὐτὸν θεμελιώδη ἦχον, ὅταν τὸ τεῖνον βάρος ἔχῃ μᾶζαν* M′.— *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ συχνότης τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος καὶ ἡ μᾶζα*

M, *ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν μαζῶν* M *καὶ* M′ *εἶναι* 400 gr.— *2) Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἰσχύς, ἡ ὁποία καταναλίσκεται ἐντὸς τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου, εἶναι μόνον ἐκείνη ποὺ ἀναφέρεται εἰς τὸ φαινόμενον τοῦ* Joule. *Νὰ εὑρεθῇ πόση εἶναι κατὰ τὴν στιγμὴν* t *ἡ τιμὴ τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου, ἂν ὁ συντελεστὴς ἰσχύος εἶναι* 0,866.— *Πυκνότης τοῦ σιδήρου :* 7,8 gr/cm³ · g = 980 C.G.S.

1) Διὰ τὰς δύο χορδὰς ἔχομεν τὰς σχέσεις :

$$N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{Mg}{\mu}} \quad \text{καὶ} \quad N = \frac{1}{2l'}\sqrt{\frac{M'g}{\mu}} \quad \text{ἄρα εἶναι :}$$

$$\frac{\sqrt{M}}{l} = \frac{\sqrt{M'}}{l'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{M}{l^2} = \frac{M'}{l'^2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{l'^2 - l^2}{l^2} = \frac{M' - M}{M} .$$

Ἡ ζητουμένη μᾶζα M εἶναι :

$$M = \frac{l^2 (M' - M)}{l'^2 - l^2} = \frac{40{,}2^2 \times 400}{(40{,}2 + 59{,}8) \times (59{,}8 - 40{,}2)} = 329{,}80 \text{ gr.}$$

Ἡ συχνότης τῆς χορδῆς εἶναι :

$$N = \frac{1}{2 \times 40{,}2}\sqrt{\frac{40{,}2^2 \times 400 \times 980}{100 \times 19{,}6 \times 7{,}8 \times 0{,}005}} = 35{,}8$$

ἄρα ἡ συχνότης N′ τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος εἶναι : $N' = N : 2 = 17{,}9$.

2) Ἐντὸς τοῦ πηνίου καταναλίσκεται ἰσχύς : $P = I_\varepsilon^2 R = V_\varepsilon I_\varepsilon$ συν φ, (1) ὅπου φ εἶναι ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τῆς τάσεως καὶ τῆς ἐντάσεως. Ἀλλὰ εἶναι :

$$\text{συν}\,\varphi = 0{,}866 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{συν}\,\frac{\pi}{6} .$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐνεργὸς διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι :

$$V_\varepsilon = \frac{I_\varepsilon R}{\text{συν}\,\varphi} = \frac{2 \times 5}{0{,}866}$$

$$\text{ἄρα} \qquad V_o = V_\varepsilon \sqrt{2} = \frac{10\sqrt{2}}{0{,}866} = 16{,}33 \text{ volt.}$$

Κατὰ τὴν στιγμὴν t εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου ἐφαρμόζεται διαφορὰ δυναμικοῦ : $V = 16{,}33$ ημ (ωt − φ) ἤτοι $V = 16{,}33\ \text{ημ}\left(35{,}8\,\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$.

375.— *Ἡ συχνότης ἑνὸς ἐναλλασσομένου ρεύματος περιλαμβάνεται μεταξὺ* 10 *καὶ* 20 Hz, *τὴν προσδιορίζομεν δὲ ἀκριβῶς ὡς ἑξῆς : Παρατηροῦμεν ἕνα ἠλεκτρικὸν τόξον, τροφοδοτούμενον μὲ τὸ ρεῦμα τοῦτο, διὰ μέσου τῶν* 8 *κανονικῶς διατεταγμένων ὀπῶν ἑνὸς δίσκου στρεφομένου μὲ μεταβλητὴν ταχύτητα. Ἡ λάμψις τοῦ τόξου φαίνεται σταθερά, ὅταν ὁ δίσκος ἐκτελῇ* 4 *στροφὰς κατὰ δευτερόλεπτον. Πόση εἶναι ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος ; Τί φαινόμενον θὰ παρατηρεῖτο, ἐὰν ἡ ταχύτης περιστροφῆς τοῦ δίσκου ηὐξάνετο κατὰ τὸ* 1/100 *τῆς τιμῆς της ;*

Ἐὰν N εἶναι ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος, τότε ἡ συχνότης τῶν μεγίστων τῆς λάμψεως τοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον τροφοτεῖται μὲ τὸ ἐναλλασσόμενον τοῦτο ρεῦμα, θὰ εἶναι 2N. Ὅταν ὁ δίσκος ἐκτελῇ 4 στροφὰς κατὰ δευτερόλεπτον, τότε βλέπομεν τὸ τόξον 32 φοράς. Ὥστε τὸ 2N πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ 32. Ἄρα : $2N = 32 \times k$ ἤτοι $N = 16\,k$.

Ἀλλὰ τὸ N πρέπει νὰ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 10 καὶ τοῦ 20, δηλαδὴ πρέπει νὰ εἶναι $10 < 16\,k < 20$ · ἐπὶ πλέον ὅμως τὸ k πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός. Ἄρα εἶναι $k = 1$ καὶ ἑπομένως $N = 16$.

Ἐὰν αὐξάνεται ἡ ταχύτης περιστροφῆς τοῦ δίσκου, τότε ὁ χρόνος ποὺ μεσολαβεῖ μεταξὺ δύο παρατηρήσεων τοῦ τόξου ἐλαττώνεται καὶ βλέπομεν τὸ τόξον κατὰ μίαν χρονικὴν στιγμήν, ἡ ὁποία προηγεῖται διαρκῶς καὶ περισσότερον τοῦ μεγίστου τῆς λάμψεως. Ἑπομένως κατ' ἀρχὰς ἡ λάμψις τοῦ τόξου φαίνεται νὰ ἐλαττώνεται, ἔπειτα δὲ νὰ αὐξάνεται ἕως ὅτου ἡ ὀπὴ τῆς παρατηρήσεως νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὸ μέγιστον τῆς λάμψεως. Ἐντὸς ἑνὸς δευτερολέπτου ἠμποροῦμε νὰ ἴδωμεν τὸ τόξον $32 + 0{,}32 = 32{,}32$ φοράς. Τὸ διάστημα μεταξὺ δύο διαδοχικῶν παρατηρήσεων τοῦ τόξου εἶναι $\frac{1}{32{,}32}$ τοῦ δευτερολέπτου· ἑπομένως εἰς κάθε παρατήρησιν τοῦ τόξου ἀντιστοιχεῖ καθυστέρησις ὡς πρὸς τὴν φάσιν τοῦ μεγίστου τῆς λάμψεως $\frac{1}{32} - \frac{1}{32{,}32} = \frac{1}{3\,232}$ τοῦ δευτερολέπτου.

Διὰ νὰ ἴδωμεν ἐκ νέου τὸ μέγιστον τῆς λάμψεως πρέπει νὰ ἴδωμεν τὸ τόξον:

$$\frac{1}{32} : \frac{1}{3\,232} = 101 \text{ φορὰς}$$

δηλαδὴ μετὰ παρέλευσιν: $\frac{101}{32{,}32} = \frac{100}{32} = 3{,}125$ δευτερόλεπτα.

Αὐτὴ εἶναι ἡ περίοδος τῆς φαινομένης μεταβολῆς τῆς λάμψεως τοῦ τόξου.

376.— *Μία χορδὴ ἐκ μαλακοῦ σιδήρου, μήκους* 120,27 cm *καὶ διαμέτρου* 0,2 mm, *τείνεται ἐπὶ ἑνὸς ἠχομέτρου. Ἔμπροσθεν τοῦ μέσου τῆς χορδῆς τοποθετεῖται ἠλεκρομαγνήτης, διαρρεόμενος ἀπὸ ἐναλλασσόμενον ρεῦμα συχνότητος* 50. *Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ παραγομένου ἦχου μεταβάλλεται, ὅταν μεταβάλλωμεν τὸ τεῖνον βάρος καὶ ὅτι ἡ ἔντασις αὐτὴ γίνεται μεγίστη δι' ὡρισμένας τιμὰς τοῦ τείνοντος βάρους. Νὰ εὑρεθῇ μὲ πόσον βάρος Β πρέπει νὰ τείνεται ἡ χορδή, ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ παραγομένου ἦχου νὰ εἶναι μεγίστη.*
Πυκνότης τοῦ σιδήρου : $7{,}8\ gr/cm^3 \cdot g = 981$ C.G.S.

Ὁ ἦχος, τὸν ὁποῖον παράγει ἡ χορδή, ἔχει τὴν μεγαλυτέραν ἔντασίν του, ὅταν ἡ συχνότης του N εἶναι ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ διπλασίου τῆς συχνότητος τοῦ ρεύματος (διότι ἡ χορδὴ ἕλκεται καθ' ἑκάστην ἐναλλαγὴν τοῦ ρεύματος). Ἄρα πρέπει νὰ εἶναι:
$N = 2 \times 50 \times k$ ὅπου k οἱοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἤτοι : $$100\,k = \frac{1}{2\,l}\sqrt{\frac{Mg}{\pi\, r^2\, d}}$$

καὶ $$M = \frac{10^4\, k^2 \times 4 \times 120{,}27^2 \times \pi \times 0{,}02^2 \times 7{,}8}{981}$$

ἢ $M = 5\,781\ k^2$ gr καὶ $B = 5\,781\ k^2$ gr*.

377.— *Λαμπτὴρ διὰ βολταϊκοῦ τόξου τροφοδοτεῖται μὲ ἐναλλασσόμενον ρεῦμα, τοῦ ὁποίου ἡ συχνότης εἶναι ἄγνωστος. Παρατηροῦμεν τὸ τόξον διὰ μέσου τῶν σχισμῶν ἑνὸς δίσκου, ὁ ὁποῖος στρέφεται ἰσοταχῶς περὶ τὸν ἄξονά του. Ὁ ἀρι-*

θμὸς τῶν σχισμῶν, τὰς ὁποίας φέρει ὁ δίσκος ἀκτινοειδῶς, εἶναι $2p = 4$. *Ρυθμίζομεν τὴν ταχύτητα περιστροφῆς τοῦ δίσκου οὕτως ὥστε νὰ διακρίνωμεν τὸ τόξον συνεχῶς (δηλαδὴ ὡς ἐὰν νὰ μὴ ὑπῆρχεν ὁ δίσκος μεταξὺ τοῦ λαμπτῆρος καὶ τοῦ παρατηρητοῦ).— 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ συχνότης* N *τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον τροφοδοτεῖ τὸ τόξον, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ δίσκος ἐκτελεῖ* $\nu = 1\,500$ *στροφὰς κατὰ λεπτόν.— 2) Ἐὰν ἡ συχνότης τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος εἶναι* 42 Hz, *νὰ εὑρεθῇ μὲ πόσην ταχύτητα πρέπει νὰ στρέφεται ὁ δίσκος ὥστε νὰ διακρίνωμεν τὸ τόξον συνεχῶς.*

1) Ἡ συχνότης τῶν μεγίστων τῆς ἐντάσεως τοῦ φωτὸς εἶναι 2N. Ἄρα ἡ περίοδος τοῦ φωτεινοῦ φαινομένου εἶναι: $T = \dfrac{1}{2N}$.

Ἡ συχνότης τῶν διακοπῶν τῆς φωτεινῆς δέσμης εἶναι $\dfrac{4\nu}{60} = \dfrac{\nu}{15}$.

Ἑπομένως ἡ περίοδος αὐτῶν τῶν διακοπῶν εἶναι: $T' = \dfrac{15}{\nu}$.

Διὰ νὰ βλέπωμεν σταθερὰν τὴν ἔντασιν τοῦ φωτὸς τοῦ τόξου, πρέπει ἡ περίοδος T′ τῶν παρατηρήσεων νὰ εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολλαπλάσιον k τῆς περιόδου T τῶν μεγίστων ἐντάσεων τοῦ φωτός. Ἄρα πρέπει νὰ εἶναι:

$$T' = kT \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{15}{\nu} = k\frac{1}{2N} \quad \text{καὶ} \quad N = k\frac{\nu}{15 \times 2} = k\frac{1\,500}{15 \times 2} = 50\,k.$$

Αἱ δυναταὶ τιμαὶ τῆς ζητουμένης συχνότητος τοῦ ρεύματος εἶναι 50, 100, 150, 200 κ.λ.π.

2) Ἐὰν εἶναι N = 42, τότε ἡ συχνότης τῶν μεγίστων τῆς ἐντάσεως τοῦ φωτὸς εἶναι 84 καὶ ἡ περίοδος τοῦ φωτεινοῦ φαινομένου εἶναι $T = \dfrac{1}{84}$. Ἡ συχνότης τῶν παρατηρήσεων εἶναι $\dfrac{4\nu}{60} = \dfrac{\nu}{15}$ καὶ ἡ περίοδος αὐτῶν εἶναι $T' = \dfrac{15}{\nu}$.

Ὅπως εἴδομεν καὶ ἀνωτέρω, διὰ νὰ βλέπωμεν σταθερὰν τὴν ἔντασιν τοῦ φωτὸς τοῦ τόξου, πρέπει νὰ εἶναι:

$$T' = kT \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{15}{\nu} = k\frac{1}{84} \quad \text{καὶ} \quad \nu = \frac{15 \times 84}{k} = \frac{1\,260}{k}$$

ὅπου k εἶναι οἱοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός. Διὰ τὴν τιμὴν k = 1 ἔχομεν τὴν μεγίστην τιμὴν τοῦ ν ἤτοι 1 260 στροφὰς κατὰ λεπτόν.

378.— *Ἕνα κύκλωμα ἔχει ἀντίστασιν* 20 ohm *καὶ εἶναι βυθισμένον ἐντὸς θερμιδομέτρου, τελείως μονωμένου θερμικῶς. Τὸ θερμιδόμετρον περιέχει ὕδωρ θερμοκρασίας* 0°, *τὸ δὲ ἰσοδύναμον εἰς ὕδωρ ὅλου τοῦ θερμιδομέτρου εἶναι* 2 500 gr. *Διὰ τοῦ κυκλώματος τούτου διοχετεύομεν διφασικὸν ρεῦμα καὶ μὲ μίαν αὐτόματον διάταξιν εὑρίσκομεν δὲ ὅτι ἐντὸς* 4 min $49\frac{7}{12}$ sec *ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ὑψώνεται κατὰ* 80° C. *Ὑποθέτομεν ὅτι δὲν ὑπάρχει αὐτεπαγωγή. Ἡ συχνότης ἑκάστου ρεύματος εἶναι* N = 50 Hz.— *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγίστη ἔντασις καὶ ἡ ἐνεργὸς τάσις ἑκάστου τῶν χρησιμοποιουμένων ἐναλλασσομένων ρευμάτων.— 2) Νὰ δοθῇ ἡ ἔκφρασις τῆς συνισταμένης ἐντάσεως τοῦ ρεύματος κατὰ τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος γίνεται* 80°. J = 4,17 joule/cal

1) Γνωρίζομεν ὅτι τὸ διφασικὸν ρεῦμα εἶναι σύστημα δύο ἐναλλασσομένων ρευμάτων τῆς αὐτῆς περιόδου, τὰ ὁποῖα ὅμως παρουσιάζουν διαφορὰν φάσεως π/2. Ἄρα αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐντάσεων τῶν δύο ρευμάτων εἶναι :

$$I_1 = I_0 \,\eta\mu\, \omega t \quad \kappa\alpha\grave{\iota} \quad I_2 = I_0 \,\eta\mu \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Ἡ συνισταμένη ἔντασις εἶναι :

$$I = I_1 + I_2 = I_0 \left|\eta\mu\, \omega t + \eta\mu\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right|.$$

ἄρα $$I = 2\,I_0 \,\eta\mu\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = I_0 \frac{2\sqrt{2}}{2}\,\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{4}\right)$$

καὶ $$I = I_0\sqrt{2}\;\eta\mu\, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{8}\right). \qquad (1)$$

Ἡ συνισταμένη ἔντασις ἔχει τὴν μεγίστην τιμήν : $I_m = I_0\sqrt{2}$.

Ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ συστήματος τῶν δύο ρευμάτων εἶναι :

$$I_\varepsilon = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_0\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = I_0$$

δηλαδὴ εἶναι ἴση μὲ τὴν μεγίστην ἔντασιν ἑνὸς ἑκάστου τῶν ρευμάτων.

Ἐντὸς τοῦ δοθέντος χρόνου θ ἀνεπτύχθη ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου ποσότης θερμότητος : $Q = \frac{1}{4{,}17} I_\varepsilon^2\, R\,\theta$ cal· ὥστε εἶναι : $I_\varepsilon^2 = \frac{4{,}17\, Q}{R\,\theta}$.

$$I_\varepsilon^2 = \frac{4{,}17 \times 2\,500 \times 80 \times 12}{20 \times 3\,475} = 144 \quad \text{ἤτοι} \quad I_\varepsilon = 12 \text{ ampère.}$$

Ἐπειδὴ δὲ εὑρέθη ἀνωτέρω ὅτι εἶναι $I_\varepsilon = I_0$, συνάγεται ὅτι ἡ μεγίστη ἔντασις ἑκάστου τῶν ρευμάτων εἶναι : $I_0 = 12$ ampère.

Ἡ ἐνεργὸς τάσις ἑκάστου ρεύματος εἶναι :

$$E_\varepsilon = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_0\, R}{\sqrt{2}} = \frac{12 \times 20}{\sqrt{2}} = 120\sqrt{2} = 169{,}68 \text{ volt.}$$

2) Ἐντὸς τοῦ χρόνου 4 min $49\frac{7}{12}$ sec ἢ $\frac{3\,475}{12}$ sec

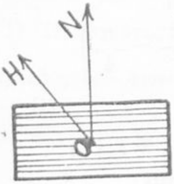
ὑπάρχουν $\frac{3\,475}{12} \times 50 = 14\,479$ περίοδοι $+ \frac{1}{6}$ περιόδου.

Σύμφωνα μὲ τὴν εὑρεθεῖσαν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (1), ἡ συνισταμένη ἔντασις κατὰ τὴν θεωρουμένην στιγμὴν θὰ εἶναι :

$$I = I_0\sqrt{2}\;\eta\mu\, 2\pi\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) = I_0\sqrt{2}\;\eta\mu\frac{\pi}{12}$$

ἢ $$I = 12\sqrt{2} \times \eta\mu\, 15^0 = 4{,}392 \text{ ampère.}$$

379.— *Ἐπίπεδον πλαίσιον ἔχει* $\nu = 200$ *σπείρας χαλκίνου σύρματος, ἔχει ἐπιφάνειαν* $S = 50$ cm² *καὶ στρέφεται περὶ κατακόρυφον ἄξονα* O *ἐντὸς ὁμοιομόρφου μαγνητικοῦ πεδίου τὸ ὁποῖον ἔχει ἔντασιν* $H = 1\,000$ gauss *καὶ διεύθυνσιν ὁριζοντίαν. Τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος τοῦ πλαισίου συνδέονται μὲ σταθερὸν κύκλωμα τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει αὐτεπαγωγήν, ἡ δὲ ἀντίστασίς του εἶναι* $R = 1$ ohm. *Τὸ πλαίσιον ἐκτελεῖ* $15{,}9 = 50/\pi$ *στροφὰς κατὰ δευτερόλεπτον. — 1) Ἕνα θερμικὸν* *ἀμπερόμετρον δεικνύει ὅτι τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐνεργὸν ἔντασιν* $I_\varepsilon = 5$ ampère *Πόση εἶναι ἡ ἰσχὺς ἡ ὁποία μεταβάλλεται εἰς θερμότητα ἐντὸς τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος; — 2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις, ἡ ὁποία δίδει τὴν τιμὴν τῆς ἀναπτυσσομένης ἐξ ἐπαγωγῆς ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως ἐντὸς τοῦ πλαισίου, κατὰ τὴν στιγμὴν* t, *λαμβάνοντες ὡς ἀρχὴν τῶν χρόνων τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ κάθετος* ON *πρὸς τὸ πλαίσιον συμπίπτει μὲ τὴν διεύθυνσιν* OH *τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνεργὸς τιμὴ αὐτῆς τῆς ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως. — 3) Ἡ καταγραφὴ τῆς ἐντάσεως* I *τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον κυκλοφορεῖ εἰς τὸ κύλωμα, δεικνύει ὅτι τὸ ρεῦμα τοῦτο μηδενίζεται, ὅταν ἡ κάθετος* ON *ἔχῃ διέλθει διὰ τῆς διευθύνσεως* OH *τοῦ πεδίου καὶ σχηματίζει μὲ αὐτὴν γωνίαν* 45^0. *Πόση εἶναι ἡ ὅλη ἰσχὺς τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐντὸς τοῦ ὀργάνου; — 4) Ἔστω ὅτι κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν* t *εἶναι* E *ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις καὶ* V *ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τοῦ πλαισίου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις ἡ ὁποία δίδει τὴν τιμὴν τῆς διαφορᾶς* E — V *συναρτήσει τοῦ* t *καὶ νὰ εὑρεθῇ ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν ὅτι ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς ἐντὸς τοῦ πλαισίου εἶναι μηδέν.*



Σχ. 209

1) Ἡ ζητουμένη ἰσχὺς εἶναι : $W = RI_\varepsilon^2 = 1 \times 5^2 = 25$ watt.

2) Ἐὰν καλέσωμεν α τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζει κατὰ τὴν στιγμὴν t ἡ κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ πλαισίου μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τότε ἡ μαγνητικὴ ροὴ ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ πλαισίου κατὰ τὴν στιγμὴν αὐτὴν εἶναι : $\Phi = \nu SH \text{ συν } \alpha = \nu SH \text{ συν } \omega t$.

Ἑπομένως ἡ ἀναπτυσσομένη ἐξ ἐπαγωγῆς ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι κατὰ τὴν στιγμὴν t :

$$E = -10^{-8}\frac{d\Phi}{dt} = 10^{-8}\nu SH\omega \text{ ημ } \omega t = E_0 \text{ ημ } \omega t.$$

Ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως εἶναι :

$$E_0 = 10^{-8}\nu SH\omega \quad \text{ὅπου εἶναι} \quad \omega = 2\pi \times \frac{50}{\pi} = 100.$$

Ἄρα ἡ ἐνεργὸς ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι :

$$E_\varepsilon = \frac{E_0}{\sqrt{2}} = \frac{\nu SH\omega}{10^8 \times \sqrt{2}} = \frac{200 \times 50 \times 1\,000 \times 100}{10^8 \times \sqrt{2}} = 7{,}07 \text{ volt}.$$

3) Ὁ συντελεστὴς ἰσχύος εἶναι $\text{συν } \varphi = \text{συν } 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ὥστε ἡ ὅλη ἰσχὺς τῆς ἐνεργείας, ἡ ὁποία παράγεται εἰς τὸ κύκλωμα, εἶναι :

$$W_1 = E_\varepsilon I_\varepsilon \text{ συν } \varphi = 7{,}07 \times 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 25 \text{ watt}.$$

4) Ἐπειδὴ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι $I_\varepsilon = 5$ ampère, συνάγεται ὅτι εἶναι $I_0 = I_\varepsilon\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$. Ἄρα κατὰ τὴν στιγμὴν t τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν : $I = I_0 \text{ ημ } (\omega t - \varphi)$.

Τὸ κύκλωμα δὲν ἔχει αὐτεπαγωγήν, οὔτε χωρητικότητα. Ἑπομένως ἰσχύει ὁ νόμος τοῦ Ohm καὶ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τοῦ πλαισίου θὰ εἶναι : $V = IR = I_0 R \text{ ημ } (\omega t - \varphi) = 5\sqrt{2} \text{ ημ}\left(100\,t - \frac{\pi}{4}\right)$ ἤ

$$V = 5\sqrt{2}\left(\eta\mu\, 100t\ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} - \sigma\upsilon\nu\, 100t\ \eta\mu\frac{\pi}{4}\right) = 5\left(\eta\mu\, 100t - \sigma\upsilon\nu\, 100t\right).$$

Ἐπειδὴ εἶναι $E_0 = 10^{-8} \times \nu S H \omega = 10^{-8} \times 200 \times 50 \times 1\,000 \times 100 = 10$ V, ἕπεται ὅτι εἶναι $E = E_0\ \eta\mu\ \omega t = 10\ \eta\mu\ 100t$. Ἄρα ἔχομεν :

$$E - V = 10\ \eta\mu\ 100t - 5\,(\eta\mu\ 100t - \sigma\upsilon\nu\ 100t) = 5\,(\eta\mu\ 100t + \sigma\upsilon\nu\ 100t)$$

ἢ $$E - V = 5\sqrt{2}\ \eta\mu\left(100t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Κατὰ τὸν χρόνον t ἡ καταναλισκομένη ἐντὸς τοῦ πλαισίου ἰσχὺς εἶναι ἴση μὲ $(E - V)I$ συν β. Ἀλλὰ ἡ ἔντασις I καθυστερεῖ κατὰ $\frac{\pi}{4}$ ὡς πρὸς τὸ E καὶ ἡ διαφορὰ $(E - V)$ προηγεῖται κατὰ $\frac{\pi}{4}$. Ὥστε ἡ ἔντασις καθυστερεῖ ὡς πρὸς τὸ $(E - V)$ κατὰ $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Ἡ καταναλισκομένη λοιπὸν ἰσχὺς εἶναι : $$(E - V)I\ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 0.$$

380.— *Μία ἀτμομηχανὴ Δ παρέχει τὴν μηχανικὴν ἐνέργειαν εἰς ἕνα ἐναλλακτῆρα Α, τοῦ ὁποίου τὸ ρεῦμα μεταφέρεται διὰ μιᾶς γραμμῆς Γ εἰς κινητῆρα ἐναλλασσομένου ρεύματος Κ· οὗτος κινεῖ ἀντλίαν Β. Ἡ ἀτμομηχανὴ λειτουργεῖ χωρὶς ἐκτόνωσιν καὶ χωρὶς συμπυκνωτήν. Ὁ ἀτμὸς εἰς τὸν λέβητα ἔχει πίεσιν 10 kg*/cm², τὸ δὲ ἔμβολον τοῦ κυλίνδρου ἔχει διάμετρον 30 cm καὶ ἐκτελεῖ διαδρομὴν 50 cm. Ὁ ρότορ τοῦ ἐναλλακτῆρος εἶναι στερεωμένος ἀπ' εὐθείας ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς μηχανῆς Δ. Τὸ ἐπαγώγιμον αὐτοῦ περιλαμβάνει 25 βορείους πόλους καὶ 25 νοτίους πόλους. Εἰς τοὺς πόλους τοῦ κινητῆρος Κ ὑπάρχει ἐνεργὸς τάσις 500 volt. Ὁ συντελεστὴς ἰσχύος τοῦ ρεύματος ἐντὸς τοῦ κινητῆρος εἶναι 0,75. Ἡ ἀντλία Β ἀνυψώνει 20 m³ ὕδατος κατὰ λεπτὸν εἰς ὕψος 10 m. Τὰ 80 % τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ ἀτμὸς μετατρέπονται ὑπὸ τοῦ ἐναλλακτῆρος Α εἰς ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν. Εἰς τὴν γραμμὴν Γ χάνονται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος τὰ 10 % τῆς ἀνωτέρω ἐνεργείας. Ὁ κινητὴρ Κ ἔχει ἀπόδοσιν 80 % καὶ ἡ ἀντλία Β ἔχει ἀπόδοσιν 50 %.— Νὰ εὑρεθῇ : 1) Πόσας στροφὰς κατὰ λεπτὸν ἐκτελεῖ ὁ κοινὸς ἄξων τῶν μηχανῶν Δ καὶ Α καὶ πόση εἶναι ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος.— 2) Ἡ μέση ἰσχὺς ἡ ὁποία παρέχεται εἰς τὸν κινητῆρα Κ.— 3) Ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος.— 4) Ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς. Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις θὰ ληφθῇ ἴση μὲ 1 kg*/cm².*

1) Ἡ ἀντλία Β παρέχει ἰσχύν : $P = \frac{20\,000 \times 10}{60}$ kgm/sec.

Ὁ κινητὴρ Κ παρέχει ἰσχύν : $2P$.

Εἰς τὸν κινητῆρα παρέχεται ἰσχύς : $2P \times \frac{100}{80} = \frac{5}{2}P$.

Ὁ ἐναλλακτὴρ Α παρέχει ἰσχύν : $\frac{5}{2}P \times \frac{10}{9}$.

Ἡ ἀτμομηχανὴ Δ παρέχει ἰσχύν :

$$P' = \frac{5}{2}P \times \frac{10}{9} \times \frac{100}{80} = \frac{125}{36}P \quad ἢ \quad P' = \frac{125}{36} \times \frac{20\,000 \times 10}{60}\ \text{kgm/sec}.$$

Ἐὰν x εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν τοῦ κοινοῦ ἄξονος τῶν μηχανῶν Δ καὶ Α, τότε κατὰ δευτερόλεπτον ἡ ἀτμομηχανὴ παράγει ἔργον:

$$P'' = \pi \times \frac{900}{4} \times 0{,}50 \times \frac{2\,x}{60} \times 9 \ \text{kgm/sec}.$$

Ἀλλὰ εἶναι $P'' = P'$. Ἄρα εὑρίσκομεν:

$$x = \frac{125 \times 20\,000 \times 10}{36 \times 60} : \frac{9 \times 2 \times 900 \times \pi}{60 \times 2 \times 4}$$

ἢ $x = 109$ στροφαὶ κατὰ λεπτόν.

Ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παράγει ὁ ἐναλλακτὴρ εἶναι:

$$N = \frac{25 \times 109}{60} = 45{,}48.$$

2) Ἡ μέση ἰσχύς, ἡ ὁποία παρέχεται εἰς τὸν κινητῆρα, εἶναι:

$$P_1 = \frac{5}{2} P = \frac{5}{2} \times \frac{20\,000 \times 10}{60} \times 9{,}81 = 81\,750 \ \text{watt}.$$

3) Εἰς τὸν κινητῆρα παρέχεται ἰσχύς: $P_1 = V_\varepsilon I_\varepsilon$ συν φ.

Ἄρα ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I_\varepsilon = \frac{P_1}{V_\varepsilon \text{ συν } \varphi} = \frac{81\,750}{500 \times 0{,}75} = 218 \ \text{ampère}.$$

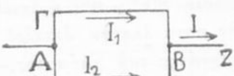
4) Ἡ γραμμὴ ἀπορροφᾷ ἰσχύν:

$$p = P_1 \times \frac{10}{9} \times \frac{1}{10} = 81\,750 \times \frac{1}{9} = 9\,083{,}33 \ \text{watt}.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν $p = RI_\varepsilon^2$ εὑρίσκομεν τὴν ἀντίστασιν R τῆς γραμμῆς:

$$R = \frac{p}{I_\varepsilon^2} = \frac{9\,083{,}33}{218^2} = 0{,}191 \ \text{ohm}.$$

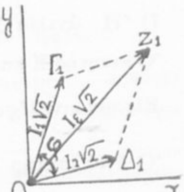
381.—*Δύο ἡμιτονοειδῆ ἐναλλασσόμενα ρεύματα τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐνεργοὺς ἐντάσεις* $I_1 = 8$ ampère, *καὶ* $I_2 = 4$ ampère *διαρρέουν δύο παραλλήλους ἀγωγοὺς* ΑΓΒ *καὶ* ΑΔΒ. *Ἡ ἐνεργὸς διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων* Α *καὶ* Β *εἶναι* $V_\varepsilon = 110$ volt. *Ἡ ἔντασις* I_1 *ἔχει τὴν αὐτὴν φάσιν μὲ τὴν τάσιν, ἐνῷ ἡ ἔντασις* I_2 *καθυστερεῖ ἐν σχέσει μὲ τὴν τάσιν κατὰ ἓν ὄγδοον τῆς περιόδου. — 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν ἀγωγὸν* ΒΖ.— *2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχὺς ἡ ὁποία δαπανᾶται ἐντὸς ἑκάστου ἐκ τῶν δύο κλάδων* ΑΓΒ *καὶ* ΑΔΒ.



Σχ. 210

1) Ἂς καλέσωμεν I_ε τὴν ἐνεργὸν ἔντασιν τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν ἀγωγὸν ΒΖ. Τότε ἡ μεγίστη ἔντασις τοῦ ρεύματος τούτου εἶναι: $I_0 = I_\varepsilon \sqrt{2}$.

Τὰ δύο συνιστῶντα ἡμιτονοειδῆ ρεύματα θὰ ἔχουν ἀντιστοίχως μεγίστας ἐντάσεις: $I_1 \sqrt{2}$ καὶ $I_2 \sqrt{2}$.



Σχ. 211

Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τοῦ Fresnel ἡ ἔντασις I_0 εἶναι ἴση μὲ τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα δύο ἀνυσμάτων τὰ ὁποῖα ἔχουν μεγέθη

$I_1\sqrt{2}$ καὶ $I_2\sqrt{2}$ σχηματίζουν δὲ μεταξύ των γωνίαν $\varphi = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

Οὕτω λαμβάνομεν τὴν σχέσιν:

$$\overline{OZ}^2_1 = \overline{O\Gamma}_1{}^2 + \overline{O\Delta}_1{}^2 + 2 \times \overline{O\Gamma}_1 \times \overline{O\Delta}_1 \times \sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi}{4}$$

ἤτοι $$2\,I_\varepsilon^2 = 2 \times 64 + 2 \times 16 + 2 \times 8 \times 4 \times \sqrt{2}$$

ἄρα $$I_\varepsilon = 4\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} = 11{,}2 \text{ ampère.}$$

2) Ἡ δαπανωμένη ἰσχὺς εἶναι:

ἐντὸς τοῦ κλάδου ΑΓΒ: $P_1 = V_\varepsilon \cdot I_1 = 110 \times 8 = 880$ watt

ἐντὸς τοῦ κλάδου ΑΔΒ: $P_2 = V_\varepsilon \cdot I_2\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi}{4} = 110 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 311{,}12$ watt.

382. — *Ὁ στάτορ ἑνὸς μονοφασικοῦ ἐναλλακτῆρος φέρει 10 ὅμοια πηνία, τὰ ὁποῖα διατάσσονται κανονικῶς. Ὁ ρότορ του ἀποτελεῖται ἀπὸ 10 ἠλεκτρομαγνήτας κανονικῶς διατεταγμένους. — 1) Νὰ εὑρεθοῦν ἡ περίοδος Τ καὶ ἡ συχνότης Ν τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος, τὸ ὁποῖον παράγει ὁ ἐναλλακτήρ, ὅταν ἡ γωνιώδης ταχύτης τοῦ ρότορος εἶναι 26π ἀκτίνια κατὰ δευτερόλεπτον.—2) Ἕνα μέρος τοῦ οὕτω παραγομένου ἐναλλασσομένου ρεύματος διαβιβάζεται δι' ἑνὸς μικροῦ ἠλεκτρομαγνήτου εὑρισκομένου ἔμπροσθεν μιᾶς ὁριζοντίας χορδῆς ἀπὸ χάλυβα, τῆς ὁποίας προοδευτικῶς αὐξάνομεν τὴν τάσιν. Ἔρχεται στιγμὴ κατὰ τὴν ὁποίαν ἐπιτυγχάνεται ἕνα φαινόμενον συντονισμοῦ, ἤτοι ἡ χορδὴ πάλλεται σχηματίζουσα μίαν μόνον ἄτρακτον. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ χορδὴ ἔχει μῆκος 1 m, εἰδικὴν μᾶζαν 7,7 gr/cm³ καὶ διάμετρον 0,2 mm. Νὰ εὑρεθῇ: α) ποῖον φθόγγον δίδει ἡ χορδή· β) ἡ ταχύτης διαδόσεως τῆς ἐγκαρσίας κυμάνσεως κατὰ μῆκος τῆς χορδῆς· γ) ἡ τάσις τῆς χορδῆς· δ) ἐνῷ ἡ χορδὴ πάλλεται τὴν φωτίζομεν δι' ἑνὸς ἠλεκτρικοῦ τόξου τὸ ὁποῖον τροφοδοτεῖται μὲ ἐναλλασσόμενον ρεῦμα ἔχοντος περίοδον Τ'· τί θέαμα παρουσιάζει ἡ χορδὴ εἰς τὰς ἑπομένας περιπτώσεις: 1) Τ' = Τ (ὅπου Τ εἶναι ἡ περίοδος τοῦ διεγείροντος ρεύματος)· 2) Τ' = 2Τ · 3) Τ' = Τ/2 · 4) ἡ Τ' εἶναι ὀλίγον διάφορος ἀπὸ τὴν Τ.*

1) Ὁ ρότορ εἶναι ἕνα ἐπάγον τὸ ὁποῖον ἔχει 10/2 = 5 ζεύγη πόλων καὶ ἐκτελεῖ $\frac{26\pi}{2\pi} = 13$ στροφὰς κατὰ δευτερόλεπτον. Τὸ παραγόμενον ἐναλλασσόμενον ρεῦμα ἔχει ἑπομένως:

συχνότητα: $N = 13 \times 5 = 65$ Hz · περίοδον: $T = \frac{1}{N} = \frac{1}{65} = 0{,}015$ sec.

2) Ἡ χαλύβδινη χορδὴ μαγνητίζεται μονίμως ἀπὸ τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν ἠλεκτρομαγνήτην. Ἑπομένως ἐντὸς ἑκάστης περιόδου τοῦ ρεύματος ἡ χορδὴ ἕλκεται μίαν φοράν, δηλαδὴ 65 φορὰς κατὰ δευτερόλεπτον. Τὸ ὕψος τοῦ ἤχου, τὸν ὁποῖον δίδει ἡ χορδή, εἶναι: $N = 65$ Hz.

α) Ἡ συχνότης τοῦ la_3 εἶναι $N_0 = 435$. Ἑπομένως ἡ συχνότης τοῦ do_3 εἶναι:

$$N_3 = \frac{3 \times 435}{5} = 261 \text{ Hz.}$$ Ἡ συχνότης τοῦ do_1 εἶναι:

$N_1 = \frac{3 \times 435}{4 \times 5} = 65{,}25$ Hz. Ὥστε ὁ φθόγγος τὸν ὁποῖον δίδει ἡ χορδὴ εἶναι αἰσθητῶς ὁ φθόγγος do_1.

β) Ἐπειδὴ σχηματίζεται μόνον μία ἄτρακτος, ἂν l ὀνομάσωμεν τὸ μῆκος τῆς χορδῆς, θὰ ἔχωμεν:

$$l = \frac{\lambda}{2} = \frac{VT}{2} = \frac{V}{2N} \quad \text{ἄρα} \quad V = 2Nl = 2 \times 65 \times 1 = 130 \text{ m/sec.}$$

γ) Ἂν F εἶναι ἡ τάσις τῆς χορδῆς καὶ μ ἡ γραμμικὴ πυκνότης αὐτῆς, τότε ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν $V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ ἡ ὁποία δίδει τὴν ταχύτητα διαδόσεως τῆς κυμάνσεως, εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην δύναμιν F:

$$F = V^2\mu = 13\,000^2 \times \pi \times 0{,}01^2 \times 7{,}7 = 408\,000 \text{ δύναι} = 0{,}416 \text{ kg}^*.$$

δ) Ἐντὸς μιᾶς περιόδου T′ τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον τροφοδοτεῖ τὸ ἠλεκτρικὸν τόξον, ὑπάρχουν δύο μέγιστα τῆς ἐντάσεως τοῦ φωτός, διότι γνωρίζομεν ὅτι τὰ θερμικὰ φαινόμενα εἶναι ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὴν φορὰν τοῦ ρεύματος. Ἑπομένως ἡ περίοδος T″ τῶν φωτισμῶν τῆς χορδῆς εἶναι $T'' = \frac{T'}{2}$.

1) Ἐὰν $T' = T$ τότε εἶναι καὶ $T'' = \frac{T}{2}$. Ἐπειδὴ οἱ δύο διαδοχικοὶ φωτισμοὶ τῆς χορδῆς ἀπέχουν μεταξύ των χρονικῶς κατὰ ἡμίσειαν περίοδον τῆς χορδῆς, συνάγεται ὅτι θὰ βλέπωμεν τὴν χορδὴν εἰς 2 θέσεις συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας της. Αἱ θέσεις αὐταὶ φαίνονται σταθεραί.

2) Ἐὰν εἶναι $T' = 2T$, τότε εἶναι $T'' = T$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ χορδὴ φαίνεται ἀκίνητος εἰς μίαν μόνον ἀπὸ τὰς θέσεις της.

3) Ἐὰν εἶναι $T' = \frac{T}{2}$, τότε εἶναι $T'' = \frac{T}{4}$. Ἡ χορδὴ φωτίζεται κάθε ἕνα τέταρτον τῆς περιόδου της. Θὰ βλέπωμεν τὴν χορδὴν εἰς 4 θέσεις πάντοτε τὰς αὐτάς ἐκ τῶν ὁποίων αἱ 2 εἶναι συμμετρικαὶ τῶν ἄλλων 2 ὡς πρὸς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας.

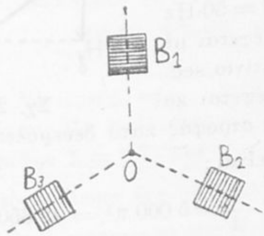
4) Ἐὰν ἡ T′ εἶναι ὀλίγον διάφορος ἀπὸ τὴν T, τότε ἡ T″ εἶναι ὀλίγον διάφορος ἀπὸ τὴν $\frac{T}{2}$. Αἱ δύο συμμετρικαὶ θέσεις, τὰς ὁποίας εἴδομεν εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, πλησιάζουν· συμπίπτουν κατὰ τὴν στιγμὴν ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας καὶ ἔπειτα ἀπομακρύνονται ἕως ὅτου φθάσουν τὸ μέγιστον πλάτος κ.ο.κ. Βλέπομεν λοιπὸν μίαν ἄτρακτον ἡ ὁποία διαστέλλεται καὶ συστέλλεται μὲ συχνότητα $\nu = \frac{N' - N}{2}$, ὅπου N′ καὶ N εἶναι αἱ συχνότητες αἱ ἀντιστιχοῦσαι εἰς τὰς περιόδους T′ καὶ T.

383. — *Οἱ ἄξονες τριῶν ὁμοίων πηνίων εἶναι συμμετρικῶς τοποθετημένοι καὶ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο (σχ. 212). Ἕκαστον πηνίον διαρρέεται ἀπὸ ἕνα ἐναλλασσόμενον ρεῦμα τοῦ ὁποίου ἡ ἔντασις ἐκφράζεται μὲ τὴν ἐξίσωσιν:*

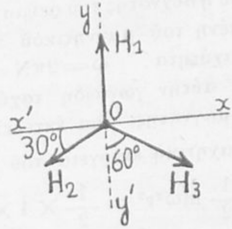
διὰ τὸ B_1 $\quad I_1 = I_0 \text{ ημ } 2\pi\frac{t}{T}$ $\qquad$ *διὰ τὸ* B_2 $\quad I_2 = I_0 \text{ ημ } 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{3}\right)$

διὰ τὸ B_3 $\quad I_3 = I_0\ \text{ημ}\ 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2}{3}\right).$

1) Πῶς μεταβάλλεται κατὰ μέγεθος καὶ διεύθυνσιν τὸ μαγνητικὸν πεδίον τὸ δημιουργούμενον εἰς τὸ O; — 2) Μὲ πόσην ταχύτητα θὰ στρέφεται μικρὸς μαγνήτης ὁ ὁποῖος ἠμπορεῖ νὰ περιστρέφεται περὶ ἄξονα κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον



Σχ. 212



Σχ. 213

τοῦ σχήματος εἰς τὸ σημεῖον O; Ἡ συχνότης τοῦ ῥεύματος εἶναι N = 50 Hz, *ὑποθέτομεν δὲ ὅτι ὁ μαγνήτης ὑπακούει ἀπολύτως εἰς τὸ πεδίον.— 3) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ μαγνήτου, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι οὗτος ἠμπορεῖ νὰ ἐξομοιωθῇ μὲ δύο μικρὰς μάζας, ἑκάστη τῶν ὁποίων θεωρεῖται ὡς σημεῖον, εἶναι ἴση μὲ* 2 gr *καὶ ἀπέχει* 0,5 cm *ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς. — 4) Πόση τάσις ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς ῥάβδου ἡ ὁποία συνδέει τὰς δύο αὐτὰς μικρὰς μάζας;*

1) Αἱ ἐντάσεις τῶν παραγομένων μαγνητικῶν πεδίων ἔχουν τὴν διάταξιν τῶν πηνίων καὶ κατὰ τὸν χρόνον t αἱ τρεῖς ἐντάσεις θὰ ἔχουν ἀντιστοίχως τὰς τιμάς: $\quad H_1 = H_0\ \text{ημ}\ 2\pi\frac{t}{T} \qquad H_2 = H_0\ \text{ημ}\ 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{3}\right)$

$$H_3 = H_0\ \text{ημ}\ 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2}{3}\right).$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν συνισταμένην αὐτήν, λαμβάνομεν τοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας xx′ καὶ yy′. Ἂς ὀνομάσωμεν H_x καὶ H_y τὰς προβολὰς τῆς συνισταμένης τῶν τριῶν ἐντάσεων. Τότε ἔχομεν τὰς σχέσεις:

$$H_x = 0 + H_2\ \text{συν}\ 30^0 - H_3\ \text{συν}\ 30^0 = (H_2 - H_3)\ \text{συν}\ 30^0$$

$$H_y = H_1 - H_2\ \text{συν}\ 60^0 - H_3\ \text{συν}\ 60^0 = H_1 - (H_2 + H_3)\ \text{συν}\ 60^0.$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς εὑρίσκομεν:

$$H_x = -\frac{3}{2}H_0\ \text{συν}\ 2\pi\frac{t}{T} \quad (1) \qquad H_y = \frac{3}{2}H_0\ \text{ημ}\ 2\pi\frac{t}{T}. \quad (2)$$

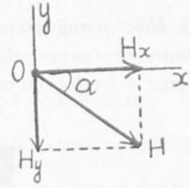
Ἡ συνισταμένη H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι:

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = \frac{3}{2}H_0. \quad (3)$$

Ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει αὐτὴ μὲ τὸν ἄξονα xx′ εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\text{εφ}\ \alpha = \frac{H_y}{H_x} = -\ \text{εφ}\ 2\pi\frac{t}{T} = -\ \text{εφ}\ \omega t. \quad (4)$$

Ἡ εὑρεθεῖσα σχέσις (3) φανερώνει ὅτι ἡ συνισταμένη H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ Ο ἔχει σταθερὰν ἔντασιν $\frac{3}{2}$ H_0. Ἡ δὲ σχέσις (4) φανερώνει ὅτι ἡ συνισταμένη Η τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου στρέφεται περὶ τὸ Ο μὲ γωνιώδη ταχύτητα ω, ἡ ὁποία καθορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν $\omega = 2\pi N$, ὅπου Ν ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος.



Σχ. 214

2) Ἀφοῦ ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι $N = 50$ Hz ἡ συνισταμένη τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου στρέφεται μὲ γωνιώδη ταχύτητα: $\omega = 2\pi N = 100\,\pi$ ἀκτίνια/sec.

Μὲ τὴν αὐτὴν γωνιώδη ταχύτητα στρέφεται καὶ ὁ μικρὸς μαγνήτης· ἄρα ἐκτελεῖ οὗτος 50 στροφὰς κατὰ δευτερόλεπτον.

3) Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ μαγνήτου εἶναι:

$$W = \frac{1}{2}\, m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 100^2\pi^2 \times \frac{1}{4} = 5\,000\ \pi^2 = 49\,350 \text{ ἔργια}.$$

4) Ἡ τάσις εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀναπτυσσομένην φυγόκεντρον δύναμιν ἐξ ἑκάστης μάζης:

$$f = m\omega^2 r^2 = 2 \times 100^2\pi^2 \times \frac{1}{2} = 100^2\pi^2$$

$$\text{ἢ } f = 98\,700 \text{ δύναι.}$$

384.—*Ἕνα τριφασικὸν ρεῦμα συχνότητος* 40 Hz *τροφοδοτεῖ ὑπὸ τάσιν* 110 volt *κινητῆρα μὲ στρεφόμενον μαγνητικὸν πεδίον. Ἕκαστον πηνίον ἔχει ἀντίστασιν* 1 ohm *καὶ συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς* 0,003 henry, *διαρρέεται δὲ ἀπὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον ἔχει ἐνεργὸν ἔντασιν* 5 ampère.—*1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς ἰσχύος τοῦ κινητῆρος.—2) Πόση εἶναι ἡ διαθέσιμος μηχανικὴ ἰσχύς, ἂν ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος εἶναι* 60 %;

Ὁ συντελεστὴς ἰσχύος εἶναι:

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (3 \times 10^{-3} \times 2\pi \times 40)^2}} = 0{,}8.$$

2) Κάθε πηνίον τοῦ κινητῆρος ἀπορροφᾷ ἰσχύν:

$$V_\varepsilon \,.\, I_\varepsilon\ \text{συν}\,\varphi = 110 \times 5 \times 0{,}8 = 440 \text{ watt}\cdot$$

τὰ τρία πηνία ἀπορροφοῦν: $P = 440 \times 3 = 1\,320$ watt.

Ἡ ὠφέλιμος μηχανικὴ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι:

$$P' = 0{,}6\ P = 0{,}6 \times 1\,320 = 792 \text{ watt}.$$

XIII. ΕΠΙΔΡΑΣΙΣ ΤΗΣ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΗΣ

385.— *Νὰ εὑρεθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ χωρητικότης πυκνωτοῦ, ὁ ὁποῖος παρεμβαλλόμενος εἰς ἐναλλασσόμενον ρεῦμα, συχνότητος* $N = 100$ Hz, *ἐξουδετερώνει αὐτεπαγωγὴν* $L = 0{,}75$ henry.

Ὅταν τὸ κύκλωμα ἔχῃ κατὰ σειρὰν ὠμικὴν ἀντίστασιν R, ἐπαγωγικὴν ἀντίστασιν ωL καὶ χωρητικὴν ἀντίστασιν $\frac{1}{\omega C}$, τότε ἡ σύνθετος ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι:
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$
Ἡ δὲ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ ἡ τάσις παρουσιάζουν διαφορὰν φάσεως. Ἡ διαφορὰ αὐτὴ φάσεως μηδενίζεται, δηλαδὴ ὑπάρχει συντονισμὸς τῆς ἐντάσεως πρὸς τὴν τάσιν, ὅταν εἶναι:
$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0.$$

Ὥστε ἡ χωρητικότης πρέπει νὰ ἔχῃ τὴν τιμήν: $C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 N^2 L}$

ἢ $C = \frac{1}{4\pi^2 \times 10^4 \times 0{,}75} = \frac{3{,}37}{10^6}$ farad ἢ $C = 3{,}37$ microfarad.

386.— *Εἰς τὰ ἄκρα ἑνὸς πηνίου ἐφαρμόζομεν ἐνεργὸν διαφορὰν δυναμικοῦ* 48 volt. *Τὸ ρεῦμα ἔχει συχνότητα* $N = 50$ Hz, *ἡ δὲ ἀντίστασις τοῦ πηνίου εἶναι* 3 ohm. *Παρατηροῦμεν ὅτι ἐντὸς τοῦ πηνίου κυκλοφορεῖ ρεῦμα ἔχον ἐνεργὸν ἔντασιν* 6 ampère. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου.*

Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ νόμος τοῦ Ohm ἰσχύει ὑπὸ τὴν μορφήν:
$$V_E = I_E \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}.$$
Ἄρα ἡ σύνθετος ἀντίστασις τοῦ πηνίου εἶναι:
$$\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{V_E}{I_E} = \frac{48}{6} = 8$$
Ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν: $L = \sqrt{\frac{8^2 - R^2}{\omega^2}} = \frac{\sqrt{55}}{100\pi} = 0{,}0236$ henry.

387.— *Ἐναλλασσόμενον ρεῦμα συχνότητος* 60 Hz *ἔχει ἐνεργὸν ἔντασιν* 1/10 ampère *καὶ διαρρέει πηνίον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν* 1/40 ohm *καὶ συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς* 0,002 henry.— *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνεργὸς τάσις ἡ ἐφαρμοζομένη εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου.— 2) Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος καὶ τῆς τάσεως;*

1) Εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν τὸ κύκλωμα ἔχει αὐτεπαγωγὴν καὶ ὠμικὴν ἀντίστασιν. Ἑπομένως ἔχει σύνθετον ἀντίστασιν: $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$.

Ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm $V_\varepsilon = I_\varepsilon \cdot Z = I_\varepsilon \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ εὑρίσκομεν:

$$V_\varepsilon = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{1}{1600} + \frac{16\pi^2}{10^6} \times 3600} = \frac{1}{10} \times 0{,}754 = 0{,}0754 \text{ volt.}$$

2) Ἡ διαφορὰ φάσεως φ εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν:

$$\varepsilon\varphi\, \varphi = \frac{\omega L}{R} = \frac{0{,}002 \times 2\pi \times 60}{1/40} = \frac{96\pi}{10} \qquad \text{ἄρα } \varphi = 88^0\, 6'\, 33''$$

388. — *Ἕνα κυκλικὸν πλαίσιον AB ἀποτελεῖται ἀπὸ 20 σπείρας καὶ λειτουργεῖ ὡς ἐναλλακτήρ. Ἑκάστη σπεῖρα ἔχει ἐπιφάνειαν 500 cm², τὸ δὲ πλαίσιον ἐκτελεῖ 10 στροφὰς κατὰ δευτερόλεπτον ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 1 000 gauss καθέτου πρὸς τὴν διάμετρον περὶ τὴν ὁποίαν περιστρέφεται τὸ πλαίσιον.— 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναπτυσσομένη ἐντὸς τοῦ πλαισίου ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις ὡς καὶ ἡ ἐνεργὸς διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πλαισίου AB.— 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ αὐτεπαγωγὴ καὶ ἡ ἀντίστασις τοῦ πλαισίου, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι, ὅταν βραχυκλωθῇ τὸ πλαίσιον, τοῦτο διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἔχον ἐνεργὸν ἔντασιν 0,22 ampère καὶ ὅτι μεταξὺ τῆς ἐντάσεως καὶ τῆς τάσεως ὑπάρχει διαφορὰ φάσεως 0,5°.— 3) Ἐπὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρου εἶναι στερεωμένα δύο πλαίσια ὅμοια μὲ τὸ προηγούμενον AB καὶ τῶν ὁποίων αἱ θετικαὶ ὄψεις σχηματίζουν γωνίαν 30°. Τὰ τυλίγματα τῶν δύο πλαισίων συνδέονται μεταξύ των κατὰ τάσιν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὅλη ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἡ ἀναπτυσσομένη ἐντὸς τῶν δύο πλαισίων.*

1) Ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι ἡ ταχύτης περιστροφῆς εἶναι σταθερά, τότε ἡ μαγνητικὴ ροὴ εἰς κάθε στιγμὴν δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\Phi = HS\, \sigma\upsilon\nu\, \omega t$ ἄρα εἶναι: $\Phi = 1\,000 \times 500 \times 20\, \sigma\upsilon\nu\, 20\pi t = 10^7\, \sigma\upsilon\nu\, 20\pi t$.

Ἡ ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι:

$$E = -\frac{1}{10^8}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{10^8} \times 20\pi \times 10^7\, \eta\mu\, 20\pi t \quad \text{volt}$$

ἢ

$$E = 2\pi\, \eta\mu\, 20\pi t \text{ volt.}$$

Ἡ μεγίστη ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι: $E_0 = 2\pi$ volt

ἡ δὲ ἐνεργὸς ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι:

$$E_\varepsilon = \frac{E_0}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2} = 4{,}443 \text{ volt.}$$

2) Ἔστω φ ἡ διαφορὰ φάσεως. Τότε εἶναι: $\varepsilon\varphi\, \varphi = \frac{\omega L}{R}$.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία φ εἶναι μικρά, ἠμποροῦμε ἀντὶ τῆς ἐφαπτομένης νὰ λάβωμεν αὐτὴν τὴν γωνίαν εἰς ἀκτίνια, ὁπότε ἔχομεν:

$$\frac{\pi}{360} = \frac{\omega L}{R} \qquad \text{ἢ} \qquad \omega L = R\,\frac{\pi}{360}. \tag{1}$$

Ἐξ ἄλλου θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:

$$I_\varepsilon = \frac{E_\varepsilon}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \qquad \text{ἢ} \qquad 0{,}22 = \frac{4{,}443}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}. \tag{2}$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν: $R = 20$ ohm καὶ $L = \frac{1}{360}$ henry.

3) Ἡ ὅλη ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι:

$$E_1 = 2\pi \text{ ημ } 20\pi t + 2\pi \text{ ημ } \left(20\pi + \frac{\pi}{6}\right) t \quad \text{volt}$$

ἢ
$$E_1 = 2\pi \left| \text{ημ } 20\pi t + \text{ημ } \left(20\pi + \frac{\pi}{6}\right) t \right|$$

$$E_1 = 4\pi \text{ ημ } \pi \left(20 + \frac{1}{12}\right) t \times \text{συν } \frac{\pi}{12} t\cdot$$

ἄρα
$$E_1 = 4\pi \text{ ημ } \frac{241}{12} \pi t \times \text{συν } 0{,}2618 \ t \quad \text{volt.}$$

389— *Εἰς τοὺς πόλους ἑνὸς μονοφασικοῦ ἐναλλακτῆρος συχνότητος* N = 50 Hz *διατηρεῖται ἐνεργὸς διαφορὰ δυναμικοῦ* $V_\varepsilon = 125$ volt. *Τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα πηνίον, τὸ ὁποῖον ἔχει συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς* L = 0,25 henry *καὶ ἀπὸ τὴν ἀντίστασιν* R=10 ohm.— *1) Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος; — 2) Πόση εἶναι ἡ ἰσχὺς τοῦ ρεύματος τούτου; — 3) Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ χωρητικότης ἑνὸς πυκνωτοῦ ὥστε νὰ ὑπάρξῃ συντονισμός; Πόση θὰ ἦτο τότε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος;*

1) Ἡ σύνθετος ἀντίστασις τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{100 + (100\pi \times 0{,}25)^2} = 79{,}17.$$

Ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I_\varepsilon = \frac{V_\varepsilon}{Z} = \frac{125}{79{,}17} = 1{,}58 \text{ ampère.}$$

2) Ὁ συντελεστὴς ἰσχύος τοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$\text{συν } \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{10}{79{,}17}.$$

Ἡ μέση ἰσχὺς τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$P_\mu = V_\varepsilon I_\varepsilon \text{ συν } \phi = 125 \times 1{,}58 \times \frac{10}{79{,}17} = 24{,}93 \text{ watt.}$$

3) Συντονισμὸς ὑπάρχει ὅταν ἰσχύῃ ἡ συνθήκη:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \quad \text{ἄρα ὅταν εἶναι:}$$

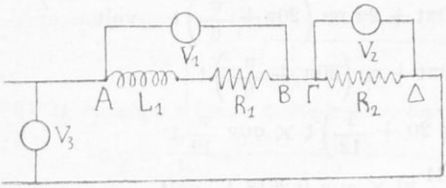
$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 N^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 \times 50^2 \times 0{,}25} = \frac{1}{24675} \text{ farad}$$

ἢ
$$C = 40{,}5 \text{ microfarad.}$$

Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ ἡ τάσις ἔχουν τὴν αὐτὴν φάσιν· ὁ συντελεστὴς ἰσχύος εἶναι ἴσος μὲ τὴν μονάδα καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἔχει τὴν μεγαλυτέραν τιμήν:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{125}{10} = 12{,}5 \text{ ampère.}$$

390— *Δίδεται τὸ κύκλωμα τοῦ σχήματος* 215. *Εἰς τὸ κύκλωμα τοῦτο εἶναι:* $L_1 = 1/10\pi$ henry, $R_1 = 5$ ohm *καὶ* $R_2 = 11$ ohm. *Ἡ ἐνεργὸς τάσις τοῦ ρεύματος εἶναι* $V_\varepsilon = 100$ volt, *ἡ δὲ συχνότης αὐτοῦ εἶναι* 60 Hz. — *1) Νὰ ὑπολογισθῇ ποῖαι θὰ εἶναι αἱ ἐνδείξεις δύο βολτομέτρων τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν σημείων* Α,Β *καὶ* Γ,Δ.— *2) Νὰ ... ἡ ὑπάρχουσα διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τῆς* *τάσεως καὶ τῆς ἐντάσεως εἰς τὰ δύο τμήματα* ΑΒ *καὶ* ΓΔ *τοῦ κυκλώματος καὶ νὰ δειχθῇ πῶς αἱ δύο τάσεις* V_1 *καὶ* V_2 *ἠμποροῦν νὰ δώσουν τὴν ἐνεργὸν τάσιν* $V_\varepsilon = 100$ volt.



Σχ. 215

1) Ἡ σύνθετος ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (L_1\omega)^2}.$$

Ἐπειδὴ εἶναι:

$$L_1\omega = \frac{1}{10\pi} \times 2\pi \times 60 = 12 \text{ ohm}$$ εὑρίσκομεν

$$Z = \sqrt{(5+11)^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20 \text{ ohm}.$$

Ἄρα ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I_\varepsilon = \frac{V_\varepsilon}{Z} = \frac{100}{20} = 5 \text{ ampère}.$$

Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος ΑΒ τοῦ κυκλώματος ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς διαφορὰ δυναμικοῦ: $V_1 = I_\varepsilon Z_1 = I_\varepsilon \sqrt{R_1^2 + (L_1\omega)^2}$

ἤτοι $V_1 = 5\sqrt{5^2 + 12^2} = 5 \times 13 = 65$ volt.

Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος ΓΔ ἐφαρμόζεται διαφορὰ δυναμικοῦ:

$$V_2 = I_\varepsilon R_2 = 5 \times 11 = 55 \text{ volt}.$$

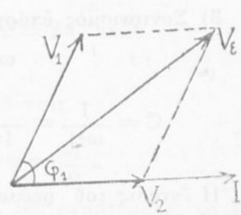
Ὥστε αἱ ἐνδείξεις τῶν δύο βολτομέτρων θὰ εἶναι:

$$V_1 = 65 \text{ volt} \quad \text{καὶ} \quad V_2 = 55 \text{ volt}.$$

2) Εἰς τὸ τμῆμα ΑΒ τοῦ κυκλώματος ἡ διαφορὰ φάσεως φ μεταξὺ τάσεως καὶ ἐντάσεως δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\text{εφ}\ \varphi_1 = \frac{L_1\omega}{R_1} = \frac{12}{5} \qquad \text{ἄρα} \qquad \varphi_1 = 67^0\ 23'.$$

Ἡ γωνία φάσεως φ_1 φανερώνει τὴν γωνίαν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ τάσις V_1 προπορεύεται τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος. Ἡ διεύθυνσις τοῦ ἀνύσματος τῆς τάσεως V_2 συμπίπτει μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐντάσεως. Ἄρα ἡ φ_1 παριστᾷ τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζουν μεταξύ των τὰ ἀνύσματα V_1 καὶ V_2. Ἐπειδὴ εἶναι:



Σχ 216

$$\text{συν}\ \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{εφ}^2\varphi_1}} = \frac{5}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{5}{13}$$

εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐνεργὸς τάσις V_ε εἶναι τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν τάσεων V_1 καὶ V_2

ἤτοι εἶναι: $V_\varepsilon = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1 V_2\ \text{συν}\ \varphi_1}$

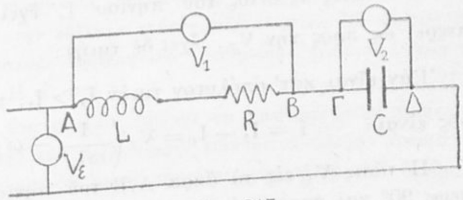
ἢ $V_\varepsilon = \sqrt{65^2 + 55^2 + 2 \times 65 \times 55 \times \frac{5}{13}} = \sqrt{10\,000} = 100$ volt.

391.— *Δίδεται τὸ κύκλωμα τοῦ σχήματος* 217. *Εἰς τὸ κύκλωμα τοῦτο εἶναι;* $L = \frac{1}{20\pi}$ henry· $C = \frac{1}{240\pi}$ farad· $R = 3$ ohm. *Ἡ ἐνεργὸς τάσις τοῦ ἐναλλασ-*

σομένου ρεύματος εἶναι $V_\varepsilon = 100$ volt, *ἡ δὲ συχνότης του εἶναι* 60 Hz.— *1) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐνδείξεις τῶν δύο βολτομέτρων* V_1 *καὶ* V_2.— *2) Νὰ ὑπολογισθῇ διὰ ποίαν συχνότητα τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος ἡ ἔντασις αὐτοῦ εἰς τὸ κύκλωμα τοῦτο θὰ ἔχῃ τὴν μεγαλυτέραν τιμήν.*

1) Ἡ σύνθετος ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος τούτου εἶναι:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}.$$



Σχ. 217

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι:

$$L\omega = \frac{1}{20\pi} \times 2\pi \times 60 = 6 \text{ ohm}$$

$$\frac{1}{C\omega} = 240\pi \times \frac{1}{2\pi \times 60} = 2 \text{ ohm}$$

ἡ σύνθετος ἀντίστασις εἶναι:

$$Z = \sqrt{3^2 + (6-2)^2} = 5 \text{ ohm}.$$

Ἄρα ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I_\varepsilon = V_\varepsilon : Z = 100 : 5 = 20 \text{ ampère}.$$

Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος AB εἶναι:

$$V_1 = I_\varepsilon \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} = 20\sqrt{3^2 + 6^2} = 134{,}16 \text{ volt}$$

ἡ δὲ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος ΓΔ εἶναι:

$$V_2 = I_\varepsilon \sqrt{\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} = 20\sqrt{2^2} = 40 \text{ volt}.$$

Ὥστε αἱ ἐνδείξεις τῶν δύο βολτομέτρων εἶναι:

$$V_1 = 134{,}16 \text{ volt} \quad \text{καὶ} \quad V_2 = 40 \text{ volt}.$$

2) Ἡ ἀντίστασις R εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν συχνότητα τοῦ ρεύματος, ἀλλὰ ἡ ἐπαγωγικὴ καὶ ἡ χωρητικὴ ἀντίστασις εἶναι συνάρτησις τοῦ ω, δηλαδὴ τῆς συχνότητος. Ἡ ἔντασις ἔχει τὴν μεγαλυτέραν τιμὴν ὅταν εἶναι:

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \quad \text{ἤτοι ὅταν εἶναι:} \quad \omega = \pi\sqrt{4\,800} \text{ ἀκτίνια/sec}.$$

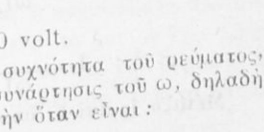
Τότε ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$N = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{4\,800} = 20\sqrt{3} = 24{,}64.$$

Ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I_\varepsilon = V_\varepsilon : R = 100 : 3 = 33{,}3 \text{ ampère}.$$

392.—*Μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ Γ ἑνὸς κυκλώματος ὑπάρχει πηνίον ἔχον συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς L καὶ μία διακλάδωσις ἀποτελουμένη ἀπὸ πυκνωτὴν χωρητικότητος C καὶ ἀπὸ πηνίον ἔχον συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς L′. Αἱ ἀντιστάσεις τῶν δύο πηνίων εἶναι ἀσήμαντοι. Μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B διατηρεῖται σταθερὰ ἡμιτονοειδὴς διαφορὰ δυναμικοῦ* V_ε. *Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐὰν τὸ πηνίον L καὶ ἡ χωρητικότης C εὑρίσκωνται εἰς συντονισμόν, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐντὸς τοῦ πηνίου L εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς τιμῆς τοῦ L′.— Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή:* $L = 1$ henry, $V_\varepsilon = 80$ volt *καὶ* $\omega = 5\,000$. *Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ C καὶ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐντὸς τοῦ L′.*



Σχ. 218

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ἀνυσματικὸν διάγραμμα θὰ λάβωμεν ὡς ἀφετηρίαν τὸ ἄνυσμα OV_2 τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὴν κοινὴν τάσιν V_2 εἰς τὰ ἄκρα Β, Γ τῆς διακλαδώσεως. Ἡ ἔντασις I_1 ἐντὸς τῆς χωρητικότητος παρουσιάζει διαφορὰν φάσεως 90^0 καὶ προπορεύεται τῆς V_2, ἔχει δὲ τιμήν:

$$I_1 = \omega C V_2 .$$

Ἡ ἔντασις I_2 ἐντὸς τοῦ πηνίου L' ἔχει διαφορὰν φάσεως 90^0 καὶ καθυστερεῖ ὡς πρὸς τὴν V_2, ἔχει δὲ τιμήν: $$I_2 = \frac{V_2}{\omega L'} .$$

Ἐὰν εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν $I_2 > I_1$, τότε ἡ ἔντασις τοῦ κυρίου ῥεύματος εἶναι: $$I = I_2 - I_1 = V_2 \left(\frac{1}{\omega L'} - \omega C \right).$$

Ἡ τάσις V_1 εἰς τὰ ἄκρα Α, Β τοῦ πηνίου L παρουσιάζει διαφορὰν φάσεως 90^0 καὶ προπορεύεται τῆς I, ἄρα εὑρίσκεται εἰς τὴν αὐτὴν φάσιν μὲ τὴν V_2. Ἡ V_1 παριστάνεται μὲ τὸ ἄνυσμα OV_1 καὶ ἔχει τιμήν:

$$V_1 = \omega L I = \omega L V_2 \left(\frac{1}{\omega L'} - \omega C \right).$$

Ἡ ὅλη τάσις V μεταξὺ Α καὶ Γ εἶναι:

$$V = V_1 + V_2 = V_2 \left| 1 + \omega L \left(\frac{1}{\omega L'} - \omega C \right) \right| .$$

Ἄρα ἡ ἔντασις I_2 ἐντὸς τοῦ πηνίου L' δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$I_2 = \frac{V_2}{\omega L'} = \frac{1}{\omega L'} \times \frac{V}{1 + \omega L \left(\frac{1}{\omega L'} - \omega C \right)}$$

$$\text{ἢ} \quad I_2 = \frac{V}{\omega L' + \omega L - \omega L' \times \omega^2 C L} . \qquad (1)$$

Μεταξὺ L καὶ C ὑπάρχει συντονισμός, ὅταν πληροῦται ἡ συνθήκη:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \text{ἢ} \quad \omega^2 L C = 1. \qquad (2)$$

Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὴν σχέσιν (1) εἶναι $\omega^2 LC = 1$, τότε ἡ τιμὴ τῆς I_2 γίνεται:

$$I_2 = \frac{V}{\omega L}$$

ἤτοι γίνεται ἀνεξάρτητος τῆς τιμῆς τοῦ L'.

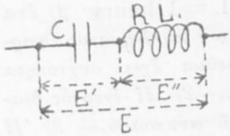
Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή. Ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{5\,000^2} = \frac{1}{25 \times 10^6} \text{ farad} = \frac{1}{25} \text{ microfarad.}$$

Ἡ ἐνεργὸς ἔντασις ἐντὸς τοῦ πηνίου L' εἶναι:

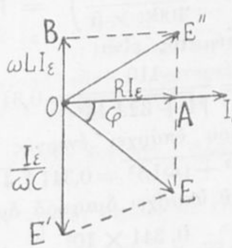
$$I_2 = \frac{V}{\omega L} = \frac{80}{5\,000} = 0{,}016 \text{ ampère.}$$

393. — *Ἕνα κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπὸ πυκνωτήν, χωρητικότητος C. συνδεδεμένον κατὰ σειρὰν μὲ πηνίον τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν R καὶ αὐτεπαγωγὴν L. Ὀνομάζομεν E τὴν ἐνεργὸν διαφορὰν δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ὅλου κυκλώματος, E' καὶ E'' ἀντιστοίχως τὴν ἐνεργὸν διαφορὰν δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πυκνωτοῦ καὶ τοῦ πηνίου. — 1) Νὰ σχηματισθῇ τὸ ἀνυσματικὸν διάγραμμα τῶν* τάσεων Ε,Ε΄ καὶ Ε΄΄. — *2) Δίδεται ὅτι εἶναι:* $E = 100$ volt, $R = 10$ ohm, $I = 8{,}66$ ampère, *ἡ δὲ συχνότης εἶναι* $N = 50$ Hz. *Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τῆς* Ε *καὶ τῆς* Ι. — *3) Ἐκλέγομεν τὰς τιμὰς τῶν* L *καὶ* C *τοιαύτας ὥστε αἱ ἐνεργοὶ τάσεες* Ε΄ *καὶ* Ε΄΄ *νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμήν. Νὰ σχηματισθῇ τὸ προηγούμενον διάγραμμα διὰ τὴν εἰδικὴν ταύτην περίπτωσιν. Νὰ εὑρεθῇ ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἀριθμητικὰ δεδομένα ἡ κοινὴ τιμὴ τῆς* Ε΄ *καὶ* Ε΄΄, *ὡς καὶ αἱ τιμαὶ τῶν* Ε, L *καὶ* C.

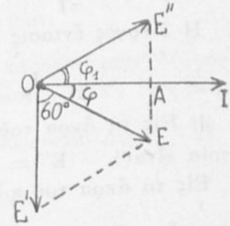


Σχ. 219

1) Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ διάγραμμα, πρέπει νὰ καθορίσωμεν πρῶτα τὸ ἄνυσμα ΟΙ τῆς ἐντάσεως, διότι εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν κατὰ σειρὰν ἡνωμένων ἀγωγῶν ἡ ἔντασις εἶναι μέγεθος κοινὸν δι' ὅλους τοὺς ἀγωγούς. Ἡ διδομένη τιμὴ ἐντάσεως εἶναι προφανῶς ἡ ἐνεργὸς ἔντασις· ὥστε εἶναι $OI = I_\varepsilon$. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ Ε΄ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πυκνωτοῦ παριστάνεται ἀπὸ τὸ ἄνυσμα ΟΕ΄, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς φασικὴν καθυστέρησιν 90^0 ὡς πρὸς τὴν ἔντασιν. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ Ε΄΄ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου παριστάνεται ἀπὸ τὸ ἄνυσμα ΟΕ΄΄. Τοῦτο εἶναι ἡ συνισταμένη δύο ἀνυσμάτων: τοῦ ΟΑ τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος RI_ε καὶ τοῦ ΟΒ τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος $\omega L I_\varepsilon$ καὶ παρουσιάζει φασικὴν προπορείαν 90^0 ἐν σχέσει μὲ τὴν ἔντασιν. Ἡ ὅλη λοιπὸν διαφορὰ δυναμικοῦ παριστάνεται μὲ τὸ ἄνυσμα ΟΕ τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν ἀνυσμάτων ΟΕ΄ καὶ ΟΕ΄΄.



Σχ. 220



Σχ. 221

2) Ἡ σύνθετος ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι: $Z = \dfrac{E}{I_\varepsilon} = \dfrac{100}{8{,}66}$.

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι τὸ συνημίτονον τῆς διαφορᾶς φάσεως δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\text{συν}\,\phi = \frac{R}{Z} = \frac{10 \times 8{,}66}{100} = 0{,}866 \quad \text{ἄρα} \quad \text{συν}\,\phi = 30^0.$$

3) Ἐὰν εἶναι $OE' = OE'' = E'E$, τότε ἡ γωνία φ διατηρεῖ τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν τιμήν της, ὁπότε ἡ γωνία Ε΄ΟΕ εἶναι 60^0 καὶ τὸ τρίγωνον Ε΄ΟΕ εἶναι ἰσόπλευρον. Ἄρα αἱ τρεῖς τάσεις εἶναι ἴσαι:

$$E = E' = E'' = 100 \text{ volt}.$$

Ἡ γωνία $E''OI = \phi_1$ εἶναι 30^0. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι:

$$\omega L I_\varepsilon = R I_\varepsilon \,\text{εφ}\, \phi_1 \quad \text{εὑρίσκομεν:}$$

$$\omega L = R\,\text{εφ}\,30^0 = \frac{R}{\sqrt{3}} \quad \text{καὶ} \quad L = \frac{R}{\omega\sqrt{3}} = \frac{10}{100\pi\sqrt{3}} = 0{,}018 \text{ henry}.$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι: $E' = \dfrac{I_\varepsilon}{\omega C}$ ἄρα ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι:

$$C = \frac{I_\varepsilon}{\omega E'} = \frac{8{,}66}{100\pi \times 100} = \frac{275}{10^6} \text{ farad}.$$

394.— *Κύκλωμα περιλαμβάνει ἡνωμένα κατὰ σειράν: α) ἕνα πηνίον τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν* $R = 2$ ohm *καὶ συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς* $L = 1$ henry· *β) ἕνα πυκνωτὴν χωρητικότητος* $C = 5$ microfarad. *Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς διαφορὰ δυναμικοῦ* $E = 110$ volt. *Τὸ ρεῦμα ἔχει συχνότητα* $N = 50$ Hz. *Νὰ εὑρεθῇ: 1) Ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος.—2) Ἡ ἐνεργὸς διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου καὶ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πυκνωτοῦ.— 3) Ἡ διαφορὰ φάσεως.— 4) Ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ διὰ τὴν ὁποίαν ἡ διαφορὰ φάσεως θὰ ἦτο μηδέν.*

1) Ἡ σύνθετος ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

ἤτοι: $$Z = \sqrt{4 + \left(100\pi - \frac{1 \times 10^6}{100\pi \times 5}\right)^2} = \sqrt{4 + 322{,}46^2}\,.$$

Ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I_\varepsilon = \frac{E}{Z} = \frac{110}{\sqrt{4 + 322{,}46^2}} = 0{,}341 \text{ ampère.}$$

2) Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου ὑπάρχει ἐνεργὸς διαφορὰ δυναμικοῦ E'' ἡ ὁποία εἶναι: $$E'' = I_\varepsilon \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = 0{,}341 \sqrt{4 + (100\pi)^2} = 107{,}1 \text{ volt.}$$

Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πυκνωτοῦ ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ E' ἡ ὁποία γνωρίζομεν ὅτι εἶναι: $$E' = \frac{I_\varepsilon}{\omega C} = \frac{0{,}341 \times 10^6}{100\pi \times 5} = 127{,}1 \text{ volt.}$$

3) Ἡ διαφορὰ φάσεως δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\varepsilon\varphi\, \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega L}}{R} = \frac{314{,}16 - 636{,}62}{2} = -161{,}23 \cdot \quad \text{ἄρα} \quad \varphi = -89^0\, 38'.$$

4) Διὰ νὰ εἶναι ἡ διαφορὰ φάσεως ἴση μὲ μηδέν, πρέπει νὰ εἶναι:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

τοῦτο θὰ συμβῇ ὅταν εἶναι:

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(100\pi)^2} = \frac{1}{10^5} \text{ farad} = 10 \text{ microfarad.}$$

395.—*Ἡ ἔντασις ἑνὸς ἐναλλασσομένου ρεύματος καθορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:*

$$I = 2\ \eta\mu\ 500t\,.$$

Τὸ ρεῦμα τοῦτο διαρρέει κύκλωμα ἀποτελούμενον α) ἀπὸ ἀντίστασιν ἴσην μὲ $R = 10$ ohm· *β) ἀπὸ πηνίον ἔχον συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς* $L = 1$ henry *καὶ γ) ἀπὸ πυκνωτὴν χωρητικότητος* $C = 4$ microfarad.— *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ συχνότης καὶ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος.—2) Πόση εἶναι ἡ ἰσχὺς ἡ μετατρεπομένη εἰς θερμότητα ἐντὸς τῆς ἀντιστάσεως;— Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαφοραὶ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως, τοῦ πηνίου καὶ τοῦ πυκνωτοῦ, τὰς ὁποίας θὰ ἐσημείωναν θερμικὰ βολτόμετρα, ὡς καὶ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος.*

1) Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐντάσεως ἡμιτονοειδοῦς ρεύματος εἶναι: $I = I_0\ \eta\mu\ \omega t$.

Ἄρα εἶναι: $I_0 = 2$ καὶ $\omega = 2\pi N = 500$.

Ἡ συχνότης τοῦ ῥεύματος εἶναι: $N = \frac{500}{2\pi} = 79{,}58$ Hz.

Ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ῥεύματος εἶναι:

$$I_\varepsilon = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = 1{,}414 \text{ ampère.}$$

2) Ἡ ἰσχὺς ἡ μετατρεπομένη εἰς θερμότητα ἐντὸς τῆς ἀντιστάσεως εἶναι:

$$P = RI_\varepsilon^2 = 10 \times (\sqrt{2})^2 = 20 \text{ watt.}$$

3) Εἰς τὰ ἄκρα τῆς ὠμικῆς ἀντιστάσεως R ἡ ἐνεργὸς διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι: $V_1 = RI_\varepsilon = 10 \times \sqrt{2} = 14{,}14$ volt.

Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ὅτι δὲν ἔχει ἀντίστασιν, ἡ ἐνεργὸς διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι: $V_2 = \omega L \times I_\varepsilon = 500 \times 1 \times 1{,}414 = 707$ V.

Τέλος εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πυκνωτοῦ ἡ ἐνεργὸς διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι:

$$V_3 = \frac{1}{\omega C} \times I_\varepsilon = \frac{1{,}414 \times 10^6}{500 \times 4} = 707 \text{ volt.}$$

Αἱ ἀνωτέρω ὑπολογισθεῖσαι τάσεις ἠμπορεῖ νὰ παρουσιάζουν διαφορὰς φάσεως. Οὕτω ἡ V_1 ἔχει τὴν αὐτὴν φάσιν μὲ τὴν ἔντασιν. Ἡ V_2 ἔχει διαφορὰν φάσεως $\frac{\pi}{2}$ ἐν σχέσει μὲ τὴν ἔντασιν, ἀλλὰ προπορεύεται αὐτῆς. Ἡ V_3 ἔχει φασικὴν καθυστέρησιν $\frac{\pi}{2}$ ἐν σχέσει μὲ τὴν ἔντασιν.

Ἡ ὅλη διαφορὰ δυναμικοῦ V μεταξὺ τῶν ἄκρων τοῦ κυκλώματος εἶναι ἴση μὲ τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀνωτέρω τάσεων. Ἀλλὰ εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι αἱ τάσεις V_2 καὶ V_3 εἶναι ἴσαι καὶ ἔχουν ἀντίθετα σημεῖα. Ἡ συνισταμένη των εἶναι μηδέν, δηλαδὴ ὑπάρχει συντονισμός. Ἑπομένως ἡ ἐνεργὸς διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$V = V_1 = 14{,}14 \text{ volt.}$$

396.— *Τὸ ῥεῦμα τὸ ὁποῖον παρέχει ἐναλλακτὴρ Γ διακλαδίζεται μεταξὺ τῶν σημείων* A *καὶ* B *εἰς δύο ἀγωγοὺς* ΑΔΒ *καὶ* ΑΕΒ. *Μὲ τρία θερμικὰ ἀμπερόμετρα* M_1, M_2, M_3 *μετροῦμεν τὴν ἔντασιν τοῦ κυρίου ῥεύματος καὶ ἐντὸς ἑκάστης διακλαδώσεως.— 1) Ὁ ἐναλλακτὴρ Γ εἶναι μονοφασικός, ὁ δὲ ῥότορ αὐτοῦ ἔχει 4 ἐναλλασσομένους πόλους καὶ ἐκτελεῖ 1500 στροφὰς κατὰ λεπτόν. Μεταξὺ τῶν σημείων* A *καὶ* B *διατηρεῖται ἐνεργὸς διαφορὰ δυναμικοῦ* $V_\varepsilon = 200$ volt. *Ἡ στιγμιαία τιμὴ* V *τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ κατὰ μίαν στιγμὴν* t *δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:* $V = V_0 \,\text{συν}\, \omega t$ *Νὰ εὑρεθῇ ἡ* V *καὶ ἡ* ω.*—2) Ὁ ἀγωγὸς* ΑΔΒ *ἔχει ἀντίστασιν* 10 ohm *καὶ δὲν ἔχει αὐτεπαγωγήν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις* $I_{2\varepsilon}$ *τὴν ὁποίαν θὰ σημειώνῃ τὸ ἀμπερόμετρον* M_2 *καὶ νὰ δοθῇ ἡ πλήρης ἔκφρασις τῆς στιγμιαίας ἐντάσεως* I_2 *τοῦ ῥεύματος τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ ἀγωγοῦ τούτου.— 3) Τὰ ἀμπερόμετρα* M_2 *καὶ* M_3 *δίδουν τὴν αὐτὴν ἔνδειξιν* $I_{2\varepsilon}$, *τὴν ὁποίαν εὕρομεν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, τὸ δὲ ἀμπερόμετρον* M_1 *σημειώνει ἔντασιν* $10\sqrt{3}$ ampère. *Νὰ δοθοῦν αἱ ἐκφράσεις τῶν στιγμιαίων ἐντάσεων* i_1 *καὶ* i_3:

$$i_1 = I_1 \,\text{συν}\,(\omega t - \alpha) \qquad i_3 = I_3 \,\text{συν}\,(\omega t - \varphi)$$

δηλαδὴ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν μεγίστων ἐντάσεων I_1 *καὶ* I_3 *καὶ αἱ φάσεις* α *καὶ φ.—4) Τὸ κύκλωμα ΑΕΒ ἔχει ἀντίστασιν r καὶ αὐτεπαγωγὴν L. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ r καὶ τοῦ L.*

1) Μία στροφὴ τοῦ ρότορος ἀντιστοιχεῖ εἰς δύο περιόδους τοῦ ρεύματος. Καὶ ἐπειδὴ ὁ ρότορ ἐκτελεῖ $\frac{1\,500}{60}$ στροφὰς κατὰ δευτερόλεπτον, ἡ συχνότης τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος εἶναι: $N = \frac{2 \times 1\,500}{60} = 50$ Hz

Ἑπομένως εἶναι: $\omega = 2\pi N = 100\pi = 314$.

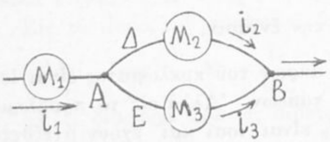
Ἡ μεγίστη διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι: $V_0 = V_\varepsilon \sqrt{2} = 100\sqrt{2} = 141$.

Ἄρα ἡ στιγμιαία τιμὴ τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ εἶναι:

$V = 100\sqrt{2}$ συν $100\pi t$ ἢ κατὰ προσέγγισιν: $V = 141$ συν $314t$.

2) Ἀφοῦ ὁ ἀγωγὸς ΑΔΒ δὲν ἔχει αὐτεπαγωγὴν ἠμποροῦμε νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν νόμον τοῦ Ohm, λαμβάνοντες τὰς ἐνεργοὺς τιμὰς τῆς τάσεως καὶ τῆς ἐντάσεως: $I_{2\varepsilon} = \frac{V_\varepsilon}{R} = \frac{100}{10} = 10$ ampère.

Ὥστε τὸ ἀμπερόμετρον M_2 σημειώνει 10 ampère. Ἡ ἔντασις καὶ ἡ τάσις V ἔχουν τὴν αὐτὴν φάσιν καὶ ἑπομένως ἡ στιγμιαία ἔντασις i_2 τοῦ ρεύματος ἔχει τὴν ἔκφρασιν: $i_2 = 10\sqrt{2}$ συν $100\pi t$ ἢ $i_2 = 14{,}1$ συν $314t$.



Σχ. 222

3) Τὰ ρεύματα i_1 καὶ i_3 ἔχουν τὴν αὐτὴν συχνότητα μὲ τὸ ρεῦμα i_2, ἀλλὰ παρουσιάζουν ὡς πρὸς αὐτὸ διαφορὰν φάσεως. Δίδεται ὅτι ἡ μεγίστη ἔντασις εἶναι ἡ αὐτὴ διὰ τὰ δύο ρεύματα, ἤτοι: $I_3 = I_2 = 10\sqrt{2}$ ampère.

Ἑπομένως διὰ τὸ ρεῦμα i_3 ἔχομεν:

$i_3 = 10\sqrt{2}$ συν $(100\pi t - \varphi)$.

Ἀφοῦ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ κυρίου ρεύματος εἶναι $10\sqrt{3}$, ἡ μεγίστη ἔντασις αὐτοῦ εἶναι: $I_1 = 10\sqrt{3}\sqrt{2}$.

Ἑπομένως ἡ στιγμιαία ἔντασις αὐτοῦ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$i_1 = 10\sqrt{3}\sqrt{2}\ \text{συν}\,(100\pi t - \alpha).$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς φάσεις α καὶ φ, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν ὅτι κατὰ τὴν στιγμὴν t ἰσχύει ἡ σχέσις: $i_1 = i_2 + i_3$ δηλαδὴ

$$10\sqrt{3}\sqrt{2}\ \text{συν}\,(100\pi t - \alpha) = 10\sqrt{2}\ \text{συν}\,100\pi t + 10\sqrt{2}\ \text{συν}\,(100\pi t - \varphi)$$

$$\text{ἢ} \quad \sqrt{3}\ \text{συν}\,(100\pi t - \alpha) = \text{συν}\,100\pi t + \text{συν}\,(100\pi t - \varphi).$$

Ἡ σχέσις αὐτὴ ἀληθεύει δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ t. Εἰδικώτερα:

$$\text{διὰ} \quad t = 0 \quad \text{ἔχομεν:} \quad \sqrt{3}\ \text{συν}\,\alpha = 1 + \text{συν}\,\varphi \cdot \qquad (1)$$

$$\text{διὰ} \ 100\pi t = \frac{\pi}{2} \quad \text{ἤτοι} \quad \text{διὰ} \ t = \frac{1}{200} \quad \text{ἔχομεν:} \quad \sqrt{3}\ \text{ημ}\,\alpha = \text{ημ}\,\varphi. \ (2)$$

Τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) μᾶς δίδει τὰς τιμὰς τοῦ α καὶ τοῦ φ. Ὑψώνομεν εἰς τὸ τετράγωνον τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$3\,(\text{ημ}^2\alpha + \text{συν}^2\alpha) = \text{ημ}^2\varphi + 1 + 2\,\text{συν}\,\varphi + \text{συν}^2\varphi$$

$$\text{ἤτοι} \quad \text{συν}\,\varphi = \frac{1}{2} \quad \text{ἄρα} \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Θέτοντες τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ φ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν:

$$\sigma\upsilon\nu\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{ἄρα} \qquad \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

Ὥστε αἱ ζητούμεναι στιγμιαῖαι ἐντάσεις δίδονται ἀπὸ τὰς σχέσεις:

$$i_1 = 10\sqrt{3}\sqrt{2}\ \sigma\upsilon\nu\left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$i_3' = 10\sqrt{2}\ \sigma\upsilon\nu\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

4) Ἡ σύνθετος ἀντίστασις Z τοῦ κυκλώματος AEB εἶναι:

$$Z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}.$$

Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἰσχύει ὁ γενικὸς νόμος: $I_3 = \dfrac{V_0}{Z}$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι: $V_0 = 100\sqrt{2}$ volt καὶ $I_3 = 10\sqrt{2}$ ampère εὑρίσκομεν:

$$Z = \frac{V_0}{I_3} = \frac{100\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} = 10 \text{ ohm} \qquad \text{ἄρα:} \qquad \sqrt{r^2 + (\omega L)^2} = 10. \qquad (3)$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι γνωστὴ ἡ σχέσις: $\sigma\upsilon\nu\,\varphi = \dfrac{r}{Z}$.

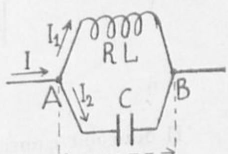
$$\text{ἄρα} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \frac{r}{Z} \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{r}{Z} = \frac{1}{2}.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν: $r = \dfrac{Z}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ ohm.

Ἂν ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον τὴν ἐξίσωσιν (3) λαμβάνομεν:

$$25 + \omega^2 L^2 = 100 \qquad \text{ἄρα} \quad \text{εἶναι:} \qquad L = \frac{\sqrt{75}}{\omega} = \frac{8{,}66}{314} = 0{,}028 \text{ henry}.$$

397.—*Μεταξὺ δύο σημείων A καὶ B ἑνὸς κυκλώματος διαρρεομένου ἀπὸ ἐναλλασσόμενον ρεῦμα ὑπάρχει διακλάδωσις ἀποτελουμένη: α) ἀπὸ ἕνα πηνίον ἔχον ἀντίστασιν R καὶ συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς L· β) ἀπὸ πυκνωτὴν χωρητικότητος C — 1) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ σύνθετος ἀντίστασις τῆς διακλαδώσεως καὶ ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τῆς ἐντάσεως καὶ τῆς τάσεως.—2) Νὰ εὑρεθῇ ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ ἀντίστασις R συναρτήσει τῶν C, L καὶ ω, ὥστε ὁλόκληρος ἡ διακλάδωσις νὰ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ ἁπλῆν ἀντίστασιν.*



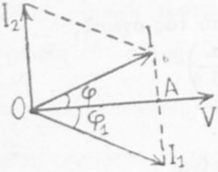
Σχ. 223

1) Ἐπειδὴ πρόκειται περὶ διακλαδώσεως, τὸ κοινὸν στοιχεῖον εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι ἡ τάσις μεταξὺ τῶν κοινῶν σημείων A καὶ B. Ὥστε διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ διαγράμματος τῶν ἀνυσμάτων θὰ ἔχωμεν ὡς ἀφετηρίαν τὸ ἄνυσμα OV τῆς τάσεως. Ἡ ἔντασις I_1 ἐντὸς τοῦ πηνίου θὰ παριστάνεται ἀπὸ τὸ ἄνυσμα OI_1 τὸ ὁποῖον παρουσιάζει φασικὴν καθυστέρησιν φ_1 σχετικὰ μὲ τὴν τάσιν· εἶναι δὲ $\varepsilon\varphi\,\varphi_1 = \dfrac{\omega L}{R}$ καὶ $\eta\mu\,\varphi_1 = \dfrac{\omega L_1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$.

Ἡ ἔντασις I_1 ἔχει τὴν τιμήν: $I_1 = \dfrac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$. (1)

Ἡ ἔντασις I_2 ἐντὸς τῆς χωρητικότητος παριστάνεναι ἀπὸ τὸ ἄνυσμα OI_2 τὸ ὁποῖον παρουσιάζει φασικὴν προπορείαν 90^0 σχετικὰ μὲ τὴν τάσιν καὶ ἔχει τιμήν:

$$I_2 = V \times \omega C. \qquad (2)$$



Σχ. 224

Ἡ ὅλη ἔντασις παριστάνεται μὲ τὸ ἄνυσμα OI, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν OI_1 καὶ OI_2 καὶ ἔχει τιμήν:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \,\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right)} \qquad (3)$$

Εἶναι:

$$\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right) = -\,\text{ημ}\,\varphi_1 = -\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\,.$$

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) ἀντικαταστήσωμεν τὰς τιμὰς τῶν I_1, I_2 καὶ $\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right)$ λαμβάνομεν:

$$I = \sqrt{\frac{V^2}{R^2+(\omega L)^2} + V^2(\omega C)^1 - \frac{2V \times V\omega C}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \times \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}}$$

ἢ $$I = V\sqrt{\frac{1}{R^2+(\omega L)^2} + (\omega C)^2 - \frac{2L\omega^2 C}{R^2+(\omega L)^2}}$$

ἢ $$I = V\sqrt{\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\right)^2 + \left(\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}\right)^2}\,. \qquad (4)$$

Ἂν Z εἶναι ἡ σύνθετος ἀντίστασις, ἔχομεν:

$$I = \frac{V}{Z} \qquad \text{ἄρα} \qquad Z = \frac{V}{I}\,.$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (4) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ σύνθετος ἀντίστασις τῆς διακλαδώσεως εἶναι:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\right)^2 + \left(\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}\right)^2}}$$

ἢ $$Z = \frac{R^2+\omega^2 L^2}{\sqrt{R^2 + [\omega C\,(R^2+\omega^2 L^2) - \omega L]^2}}\,.$$

Ἡ διαφορὰ φάσεως φ προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\text{εφ}\,\varphi = \frac{IA}{OA} = \frac{I_2 - I_1\,\text{ημ}\,\varphi_1}{I_1\,\text{συν}\,\varphi_1} = \frac{V\omega C - \dfrac{V\omega L}{R^2+\omega^2 L^2}}{\dfrac{VR}{R^2+\omega^2 L^2}}$$

ἄρα $$\text{εφ}\,\varphi = \frac{\omega C\,(R^2+\omega^2 L^2) - \omega L}{R}\,. \qquad (5)$$

2) Ἡ ἐξίσωσις (5) δεικνύει ὅτι ἡ γωνία φ θὰ εἶναι μηδέν, ἂν εἶναι:

$$\omega C\,(R^2+\omega^2 L^2) = \omega L$$

ὁπότε ἡ ἀντίστασις R εἶναι $$R = \sqrt{\frac{L}{C}\left(1-\omega^2 LC\right)}\,.$$

398. — *Ἕνας μονοφασικὸς ἐναλλακτήρ, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπάγον φέρει 10 ζεύγη πόλων, παρουσιάζει μεταξὺ τῶν πόλων του μίαν ἡμιτονοειδῶς μεταβαλλομένην διαφορὰν δυναμικοῦ· ἡ ἐνεργὸς τιμὴ αὐτῆς εἶναι 120 volt καὶ ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι 50. — 1) Νὰ εὑρεθῇ πόσας στροφὰς ἐκτελεῖ κατὰ λεπτὸν τὸ ἐπάγον καὶ νὰ γραφῇ ἡ ἐξίσωσις ἡ δίδουσα τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ εἰς κάθε στιγμὴν συναρτήσει τοῦ χρόνου, ἂν ὡς ἀρχὴ τοῦ χρόνου ληφθῇ ἡ στιγμὴ κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ διαφορὰ τοῦ δυναμικοῦ εἶναι μεγίστη. — 2) Συνδέομεν τοὺς πόλους τοῦ ἐναλλακτῆρος μὲ ἠλεκτρομαγνήτην. Ἔμπροσθεν αὐτοῦ τείνεται χορδὴ ἀπὸ σίδηρον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ βαρυτέρου ἤχου, τὸν ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ δώσῃ ἡ χορδή. Πρὸς ποῖον φθόγγον τῆς συγκεκραμένης κλίμακος ἀντιστοιχεῖ ὁ ἦχος οὗτος; Συχνότης τοῦ $l\alpha_3$: 435 Hz· ἕνα ἡμιτόνιον ἰσοῦται μὲ 25 savart. — 3) Συνδέομεν ἔπειτα τοὺς πόλους τοῦ ἐναλλακτῆρος μὲ κύκλωμα τὸ ὁποῖον περιέχει κατὰ σειράν: μίαν ἀντίστασιν $R = 10$ ohm μὴ ἔχουσαν αὐτεπαγωγήν, πηνία μὲ αὐτεπαγωγὴν καὶ ἕνα θερμικὸν ἀμπερόμετρον τῶν ὁποίων αἱ ἀντιστάσεις εἶναι ἀσήμαντοι ἐν σχέσει μὲ τὴν R. Ἐντὸς 6 λεπτῶν 58 δευτερολέπτων ἡ ἀντίστασις R θερμαίνει τὴν μᾶζαν ἑνὸς λίτρου ὕδατος κατὰ 4°C. Νὰ εὑρεθῇ: α) ἡ ἔνδειξις τοῦ θερμικοῦ ἀμπερομέτρου· β) ἡ ἔνδειξις ἑνὸς θερμικοῦ βολτομέτρου τὸ ὁποῖον θὰ ἦτο συνδεδεμένον μὲ τοὺς ἀκροδέκτας τῆς ἀντιστάσεως R γ) ὁ συντελεστὴς ἰσχύος καὶ ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς L τοῦ κυκλώματος.*

1) Ὁ ρότορ φέρει 10 βορείους καὶ 10 νοτίους πόλους. Ἑπομένως εἰς μίαν στροφὴν τοῦ ρότορος ἀντιστοιχοῦν 10 περίοδοι τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος. Διὰ νὰ ἔχωμεν λοιπὸν ρεῦμα συχνότητος 50, πρέπει ὁ ρότορ νὰ ἐκτελῇ:

$50 : 10 = 5$ στροφὰς/sec ἤτοι 300 στροφὰς κατὰ λεπτόν.

Ἡ μεγίστη διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι: $V_0 = 120\sqrt{2}$ volt.

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν: $\omega = 2\pi N = 2\pi \times 50 = 100\pi$.

Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ χρόνου ἡ τάσις ἔχει τὴν μεγίστην τιμήν της, ἡ τάσις συναρτήσει τοῦ χρόνου θὰ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$V = V_0$ συν $\omega t = 120\sqrt{2}$ συν $100\pi t$ ἢ $V = 169{,}70 \times$ συν $314t$.

2) Ἐντὸς μιᾶς περιόδου τοῦ ρεύματος ἡ ἕλξις τῆς χορδῆς ὑπὸ τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου γίνεται δύο φορὰς μεγίστη (ὅταν ἡ ἔντασις γίνεται κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μεγίστη) καὶ δύο φορὰς ἐλαχίστη. Ἡ μικροτέρα συχνότης τὴν ὁποίαν ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ ἡ χορδή, ὅταν αὐτὴ πάλλεται ἐκ συντονισμοῦ, εἶναι ἴση μὲ τὸ διπλάσιον τῆς συχνότητος, ἤτοι $N' = 2N = 100$ Hz.

Τὸ μουσικὸν διάστημα μεταξὺ τοῦ $l\alpha_3$ καὶ τοῦ φθόγγου, τὸν ὁποῖον δίδει ἡ χορδή, εἶναι: $435 : 100 = 4{,}35$.

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 4,35 ἐπὶ 1 000, λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ διαστήματος τούτου εἰς savart: $1\,000 \times$ λογ $4{,}35 = 638{,}5$ savart.

Τὸ διάστημα τοῦτο περιλαμβάνει: $638{,}5 : 25 = 25{,}5$ ἡμιτόνια.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ διάστημα μιᾶς ὀγδόης περιλαμβάνει 12 ἡμιτόνια, συνάγεται ὅτι ὁ φθόγγος οὗτος εἶναι ὀλίγον βαρύτερος ἀπὸ τὸ sol_1.

3) Ἡ ἐνεργὸς ἔντασις I τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν ἀντίστασιν R, δίδεται συναρτήσει τοῦ χρόνου t καὶ τῆς ποσότητος θερμότητος Q ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$Q = \frac{1}{4{,}18} RI^2t.$$

Ἐπειδὴ εἶναι: $Q = 4\,000$ cal, $t = 418$ sec, ἔχομεν:

$$I^2 = \frac{4{,}18\,Q}{Rt} = \frac{4{,}18 \times 4\,000}{10 \times 418} = 4 \quad \text{ἄρα} \quad I = 2 \text{ ampère}.$$

Τὸ θερμικὸν ἀμπερόμετρον θὰ δεικνύῃ 2 ampère. Τὸ θερμικὸν βολτόμετρον ἀποτελεῖ διακλάδωσιν μεταξὺ τῶν ἄκρων τῆς ἀντιστάσεως R. Ἐπειδὴ δὲ αὕτη δὲν ἔχει αὐτεπαγωγήν, τὸ ρεῦμα ποὺ διαρρέει τὸ βολτόμετρον ἔχει τὴν αὐτὴν φάσιν μὲ τὸ ρεῦμα τὸ διαρρέον τὴν ἀντίστασιν R. Ἑπομένως τὸ βολτόμετρον δεικνύει τὴν ἐνεργὸν τάσιν, τὴν ὁποίαν δίδει ὁ νόμος τοῦ Ohm:

$$V' = RI = 10 \times 2 = 20 \text{ volt}.$$

Ἡ σύνθετος ἀντίστασις Z δίδεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm:

$$Z = V_\varepsilon : I = 120 : 2 = 60 \text{ ohm}.$$

Ἡ ὠμικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι: $R = 10$ ohm. Ἑπομένως ὁ συντελεστὴς ἰσχύος εἶναι: $\text{συν}\,\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6} = 0{,}167$.

Ἡ σύνθετος ἀντίστασις Z δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν:

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν: $L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{\omega} = \frac{\sqrt{3\,500}}{100\pi} = 0{,}189$ henry.

399.— *Μία γραμμή, ἡ ὁποία ἔχει ἀντίστασιν* $R = 2$ ohm, *χρησιμεύει διὰ τὴν μεταφορὰν ἐναλλασσομένου ρεύματος, συχνότητος* 50, *εἰς ἕνα μετρητήν. Ἡ ἐνεργὸς διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τοῦ μετρητοῦ εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ* 120 volt.—*1) Μετὰ τὸν μετρητὴν τοποθετεῖται μία ἠλεκτρικὴ θερμάστρα, ἡ ὁποία λειτουργεῖ ἐπὶ 5 ὥρας. Ὁ μετρητὴς δεικνύει ὅτι ἡ κατανάλωσις ἐνεργείας ἀνῆλθεν εἰς 6 ὡριαῖα κιλοβάτ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν γραμμὴν καὶ ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας (εἰς* kWh*) ἐπὶ τῆς γραμμῆς κατὰ τὰς 5 αὐτὰς ὥρας. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ θερμάστρα ἀποτελεῖται μόνον ἀπὸ ἀντίστασιν καὶ δὲν ἔχει αὐτεπαγωγήν. — 2) Ἀντικαθιστῶμεν τὴν θερμάστραν μὲ ἕνα κινητῆρα, ὁ ὁποῖος ἔχει συντελεστὴν ἰσχύος* $\text{συν}\,\varphi = 0{,}80$. *Νὰ εὑρεθοῦν τὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα ζητοῦνται καὶ εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἐντὸς 5 ὡρῶν ἡ κατανάλωσις ἐνεργείας εἶναι πάλιν* 6 **kWh**.— *3) Οἱ δύο πόλοι τοῦ μετρητοῦ συνδέονται μὲ ἕνα πυκνωτήν, χωρητικότητος* 10 microfarad. *Νὰ εὑρεθῇ πάλιν ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος, ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἐντὸς 5 ὡρῶν καὶ ἡ κατανάλωσις τὴν ὁποίαν θὰ δείξῃ ὁ μετρητὴς διὰ τὰς 5 αὐτὰς ὥρας.— 4) Συνδέομεν πάλιν τὸν μετρητὴν μὲ τὸν κινητῆρα τῆς παραγράφου 2. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν μεταξὺ τῶν πόλων τοῦ κινητῆρος τοποθετηθῇ ἕνας πυκνωτής, βελτιοῦται ὁ συντελεστὴς ἰσχύος ἐπὶ τῆς γραμμῆς. Νὰ ὑπολογισθῇ διὰ ποίαν τιμὴν τῆς χωρητικότητος ὁ συντελεστὴς ἰσχύος ἐπὶ τῆς γραμμῆς γίνεται ἴσος μὲ 1.—5) Ὁ κινητὴρ καὶ ἡ θερμάστρα τοποθετοῦνται κατὰ διακλάδωσιν μεταξὺ τῶν πόλων τοῦ μετρητοῦ. Δὲν ὑπάρχει τώρα πυκνωτής. Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς ἰσχύος τοῦ κυκλώματος τὸ ὁποῖον ὑπάρχει μεταξὺ τῶν πόλων τοῦ μετρητοῦ.*

1) Ἐντὸς χρόνου $t = 5$ ὧραι καταναλίσκεται ἐνέργεια $W = 6$ kWh.

Ἄρα ἡ ἰσχὺς τῆς θερμάστρας εἶναι:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{6}{5} = 1{,}2\,\text{kW} = 1\,200 \text{ watt}.$$

Ἐπειδὴ τὸ κύκλωμα δὲν ἔχει αὐτεπαγωγήν, ἕπεται ὅτι ἡ ἰσχὺς αὐτὴ εἶναι ἐπίσης: $P = V_\varepsilon I_\varepsilon$ ·

ὅπου I_ε εἶναι ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος. Ὥστε εὑρίσκομεν:

$$I_\varepsilon = P : V_\varepsilon = 1\,200 : 120 = 10 \text{ ampère}.$$

Ἐπὶ τῆς γραμμῆς χάνεται ἰσχύς, λόγῳ τοῦ φαινομένου τοῦ Joule:

$$RI_\varepsilon^2 = 2 \times 100 = 200 \text{ watt} = 0{,}2 \text{ kW}.$$

Ἐντὸς 5 ὡρῶν χάνεται ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἐνέργεια:

$$W_1 = 0{,}2 \times 5 = 1 \text{ kWh}.$$

2) Ἐπειδὴ ἐντὸς 5 ὡρῶν ὁ κινητὴρ καταναλίσκει πάλιν 6 kWh, συνάγεται ὅτι ἡ ἰσχύς του εἶναι ἐπίσης $P = 1\,200$ watt. Ἀλλ' ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος δίδεται τώρα ἀπὸ τὴν σχέσιν: $P = V_\varepsilon I_\varepsilon$ συν φ.

Ἑπομένως ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος θὰ εἶναι εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν:

$$I_\varepsilon = \frac{P}{V_\varepsilon \text{ συν } \varphi} = \frac{10}{0{,}8} = 12{,}5 \text{ ampère}.$$

Ἡ ἐνέργεια ἡ ὁποία χάνεται ἐπὶ τῆς γραμμῆς εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος. Ἄρα εἶναι:

$$W_2 = W_1 \frac{12{,}5^2}{10^2} = 1 \times 1{,}56 = 1{,}56 \text{ kWh}.$$

3) Εἰς τοὺς πόλους τοῦ μετρητοῦ κατὰ τὴν στιγμὴν t ἡ τάσις ἔχει τὴν τιμήν:

$$V = V_0 \text{ ημ } \omega t. \quad \textit{καὶ} \quad \omega = 2\pi N = 100\pi.$$

Ἀλλὰ εἶναι $V_0 = V_\varepsilon \sqrt{2} = 120\sqrt{2}$

Ἑπομένως τὸ φορτίον τοῦ πυκνωτοῦ κατὰ τὴν στιγμὴν t εἶναι:

$$Q = CV = CV_0 \text{ ημ } \omega t$$

καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι: $i = \dfrac{dQ}{dt} = CV_0\,\omega \text{ συν } \omega t.$

Ἡ μεγίστη λοιπὸν ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι: $I_0 = CV_0\omega$

καὶ ἑπομένως ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος ἔχει τὴν τιμήν:

$$I_\varepsilon = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{CV_0\omega}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times 120\sqrt{2} \times 100\pi}{10^5 \times \sqrt{2}} = 0{,}377 \text{ ampère}.$$

Ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἐντὸς 5 ὡρῶν εἶναι:

$$W_3 = \frac{2 \times 0{,}377^2 \times 5}{1\,000} = 0{,}0014 \text{ kWh},$$

Γνωρίζομεν ὅτι εἰς κύκλωμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται μόνον ἀπὸ χωρητικότητα, ὁ συντελεστὴς ἰσχύος εἶναι μηδέν. Ἑπομένως ἡ κατανάλωσις τὴν ὁποίαν θὰ γράψῃ ὁ μετρητὴς θὰ εἶναι μηδέν. Εἰς τοὺς ἀνωτέρω ὑπολογισμοὺς ὑποτίθεται ὅτι τὰ διάφορα σύρματα, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται διὰ τὰς συνδέσεις, ἔχουν ἀντίστασιν μηδέν.

4) Ὁ κινητὴρ διαρρέεται πάντοτε ἀπὸ ρεῦμα τοῦ ὁποίου ἡ ἐνεργὸς ἔντασις εἶναι $I_\varepsilon = 12{,}5$ ampère. Αὐτὴ παρουσιάζει καθυστέρησιν ὡς πρὸς τὴν τάσιν, ἡ δὲ διαφορὰ φάσεως φ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν συν φ = 0,8. Ἂν θέσωμεν $I_0 = I_\varepsilon \sqrt{2}$, τότε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸν κινητῆρα κατὰ τὴν στιγμὴν t δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $i_1 = I_0 \text{ ημ } (\omega t - \varphi)$.

Ἐξ ἄλλου ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸν πυκνωτὴν εἶναι:

$$i_2 = CV_0\omega \text{ συν } \omega t.$$

Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον κυκλοφορεῖ ἐντὸς τῆς γραμμῆς, ἐκτὸς τοῦ μετρητοῦ, εἶναι: $i = i_1 + i_2 = I_0 \,\eta\mu\, (\omega t - \phi) + CV_0\omega \,\sigma\upsilon\nu\, \omega t$

ἢ $i = I_0 \,\sigma\upsilon\nu\, \phi \,\eta\mu\, \omega t - I_0 \,\eta\mu\, \phi \,\sigma\upsilon\nu\, \omega t + CV_0\omega \,\sigma\upsilon\nu\, \omega t$

ἢ ἀκόμη $i = I_0 \,\sigma\upsilon\nu\, \phi \,\eta\mu\, \omega t + (CV_0\omega - I \,\eta\mu\, \phi) \,\sigma\upsilon\nu\, \omega t.$ (1)

Ἡ ἔντασις αὐτὴ εἶναι ἡμιτονοειδὴς συνάρτησις, τῆς μορφῆς:

$$i = J \,\eta\mu\, (\omega t - \phi'). \qquad (2)$$

Ἡ συχνότης εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν συχνότητα τοῦ ρεύματος. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ϕ' ἐξισώνομεν τὰς τιμὰς τοῦ i, τὰς ὁποίας δίδουν αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2). Ἐὰν τὸ ϕ' εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μικρότερον ἀπὸ τὸ ϕ, τότε ὁ συντελεστὴς ἰσχύος αὐξάνει ἐπὶ τῆς γραμμῆς.

Διὰ νὰ γίνῃ ἐπὶ τῆς γραμμῆς ὁ συντελεστὴς ἰσχύος ἴσος μὲ 1, πρέπει ὁ συντελεστὴς τοῦ $\sigma\upsilon\nu\, \phi$ νὰ εἶναι μηδέν, δηλαδὴ πρέπει νὰ εἶναι:

$$CV_0\omega - I_0 \eta\mu\, \phi = 0 \quad \text{ἤτοι νὰ εἶναι} \quad C = \frac{I_0 \,\eta\mu\, \phi}{V_0\, \omega}.$$

Ἐπειδὴ εἶναι: $\eta\mu\, \phi = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2 \phi} = \sqrt{1 - 0{,}8^2} = 0{,}6$ εὑρίσκομεν:

$$C = \frac{12{,}5\sqrt{2} \times 0{,}6}{120\sqrt{2} \times 100\pi} = \frac{2}{10^4} \text{ farad} = 200 \text{ microfarad.}$$

5) Ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν κινητῆρα, εἶναι:

$$i_1 = I_0 \,\eta\mu\, (\omega t - \phi) = 12{,}5\sqrt{2} \,\eta\mu\, (\omega t - \phi)$$

καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν θερμάστραν, εἶναι ὅπως εἰς τὴν πρώτην παράγραφον: $i_2 = 10\sqrt{2} \,\eta\mu\, \omega t.$

Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$i = i_1 + i_2 = 12{,}5\sqrt{2} \,\sigma\upsilon\nu\, \phi \,\eta\mu\, \omega t - 12{,}5\sqrt{2} \,\eta\mu\, \phi \,\sigma\upsilon\nu\, \omega t + 10\sqrt{2} \,\eta\mu\, \omega t\cdot$$

καὶ ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι εἶναι: $\eta\mu\, \phi = 0{,}6\cdot \quad \sigma\upsilon\nu\, \phi = 0{,}8$ ἔχομεν:

$$i = 20\sqrt{2} \,\eta\mu\, \omega t - 7{,}5\sqrt{2} \,\sigma\upsilon\nu\, \omega t. \qquad (3)$$

Ἡ ἔντασις αὐτὴ εἶναι τῆς μορφῆς: $i = I' \,\eta\mu\, (\omega t - \phi')\cdot$

ἂν ἀναπτύξωμεν τὴν παράστασιν αὐτὴν εὑρίσκομεν:

$$i = I' \,\sigma\upsilon\nu\, \phi' \,\eta\mu\, \omega t - I' \,\eta\mu\, \phi' \,\sigma\upsilon\nu\, \omega t. \qquad (4)$$

Ἐὰν ἐξισώσωμεν τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4) λαμβάνομεν:

$$I' \,\sigma\upsilon\nu\, \phi' = 20\sqrt{2} \quad \text{καὶ} \quad I' \,\eta\mu\, \phi' = 7{,}5\sqrt{2}. \qquad (5)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς ἔχομεν: $\epsilon\phi\, \phi' = \dfrac{7{,}5}{20} = 0{,}375.$

Ἑπομένως ὁ νέος συντελεστὴς ἰσχύος τοῦ κυκλώματος, τὸ ὁποῖον ὑπάρχει μεταξὺ τῶν πόλων τοῦ μετρητοῦ, εἶναι: $\sigma\upsilon\nu\, \phi' = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 0{,}375^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1{,}14}} = 0{,}93.$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (5) εὑρίσκομεν:

$$I_2'(\eta\mu^2 \phi' + \sigma\upsilon\nu^2 \phi') = (7{,}5^2 + 20^2) \times 2\ \cdot$$

ἄρα ἡ νέα μεγίστη ἔντασις ἐπὶ τῆς γραμμῆς εἶναι: $I' = 21{,}3\sqrt{2}$ ampère.

400. — *Ἕνας ἐναλλακτὴρ ἔχει 4 βορείους πόλους οἱ ὁποῖοι ἐναλλάσσονται μὲ 4 νοτίους πόλους. Ὁ ἐναλλακτὴρ δημιουργεῖ μίαν ἡμιτονοειδῆ ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν, τῆς ὁποίας ἡ ἐνεργὸς τιμὴ εἶναι* 120 volt *καὶ ἡ συχνότης εἶναι* 50 Hz.

'Η ἀντίστασίς του καὶ ἡ αὐτεπαγωγή του θεωροῦνται ἀσήμαντοι.— 1) Νὰ γραφῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνιώδης ταχύτης τοῦ ῥότορος.— 2) Οἱ πόλοι τοῦ ἐναλλακτῆρος συνδέονται μὲ τὰ ἄκρα κυκλώματος, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει κατὰ σειρὰν α) ῥοοστάτην ἀντιστάσεως R′ = 100 ohm καὶ ἄνευ αὐτεπαγωγῆς καὶ β) πηνίον B τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν R″ = 20 ohm. 'Η ἐνεργὸς διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ῥοοστάτου R εἶναι 50 volt. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ποσότητες θερμότητος, αἱ ὁποῖαι ἀναπτύσσονται ἐντὸς μιᾶς ὥρας ἐπὶ τοῦ ῥοοστάτου καὶ ἐπὶ τοῦ πηνίου.—3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου καὶ ἡ ἐνεργὸς διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου. — 4) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ποσότητες θερμότητος, αἱ ὁποῖαι θὰ ἀναπτυχθοῦν ἐντὸς μιᾶς ὥρας ἐπὶ τοῦ ῥοοστάτου καὶ τοῦ πηνίου, ἐὰν ὁ ἐναλλακτὴρ ἀντικατασταθῇ μὲ μίαν γεννήτριαν συνεχοῦς ῥεύματος, ἡ ὁποία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 120 volt.—5) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχὺς τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ ἐναλλακτὴρ καὶ ὁ συντελεστὴς ἰσχύος του. 'Ημποροῦμε νὰ αὐξήσωμεν τὴν ἰσχύν, ἂν προσθέσωμεν εἰς τὸ κύκλωμα μίαν χωρητικότητα; Νὰ εὑρεθῇ ἡ χωρητικότης αὐτὴ C. Πόση θὰ εἶναι ἡ μεγίστη ἰσχύς;

1) 'Αφοῦ ἡ ἐνεργὸς ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι $E_\varepsilon = 120$ volt, συνάγεται ὅτι ἡ μεγίστη ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις E_0 ἔχει τὴν τιμήν :

$$E_0 = E_\varepsilon\sqrt{2} = 120\sqrt{2} = 169{,}68 \text{ volt} \qquad \text{ἤτοι} \qquad E_0 = 170 \text{ volt (περίπου)}.$$

'Η ἐξίσωσις τῆς ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως εἶναι :

$$E = E_0 \,\eta\mu\, \omega t = E_0 \,\eta\mu\, 2\pi N t$$

ὅπου N εἶναι ἡ συχνότης τοῦ ἐναλλασσομένου ῥεύματος. 'Επειδὴ εἶναι N = 50, εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν :

$$E = 170 \,\eta\mu\, 100\pi t \qquad \text{ἢ} \qquad E = 170 \,\eta\mu\, 314t.$$

'Ο ἐναλλακτὴρ ἔχει 4 βορείους καὶ 4 νοτίους πόλους, ἑπομένως εἰς ἑκάστην στροφὴν τοῦ ῥότορος ἀντιστοιχοῦν 4 περίοδοι τοῦ ῥεύματος.

'Ο ῥότορ ἐκτελεῖ λοιπὸν N/4 = 12,5 στροφὰς κατὰ δευτερόλεπτον καὶ ἑπομένως, ἡ γωνιώδης ταχύτης του εἶναι : $\omega = \dfrac{2\pi N}{4} = 25\pi = 78{,}5$ ἀκτίνια/sec.

2) 'Επειδὴ ἡ ἀντίστασις καὶ ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ ἐναλλακτῆρος εἶναι ἀσήμαντοι, ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους του θὰ εἶναι κάθε στιγμὴν ἴση μὲ τὴν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν, ἤτοι θὰ εἶναι :

$$V = E = 170 \,\eta\mu.\, 314t.$$

'Επομένως ἡ ἐνεργὸς διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι : $V_\varepsilon = E_\varepsilon = 120$ volt.

"Ας θεωρήσωμεν μόνον τὸν ῥοοστάτην. 'Επειδὴ οὗτος δὲν ἔχει αὐτεπαγωγήν, ἠμποροῦμε νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν νόμον τοῦ Ohm, ἤτοι :

$$I_\varepsilon = V_\varepsilon : R' = 50 : 100 = 0{,}5 \text{ ampère}.$$

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι εἰς ἕνα κύκλωμα, τὸ ὁποῖον δὲν διακλαδίζεται, ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος ἔχει παντοῦ τὴν αὐτὴν τιμήν. "Ωστε ἡ ἐνεργὸς ἔντασις ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν ἐντὸς τοῦ ῥοοστάτου καὶ ἐντὸς τοῦ πηνίου B. Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐνεργοῦ ἐντάσεως, ὁ νόμος τοῦ Joule ἐφαρμόζεται εἰς ἕκαστον τῶν τμημάτων τοῦ κυκλώματος. "Ωστε ἡ ἀναπτυσσομένη ποσότης θερμότητος εἶναι :

α) ἐπὶ τοῦ ῥοοστάτου: $\quad P_1 = R' I_\varepsilon^2 = 100 \times 0{,}25 = 25$ watt

καὶ $\quad Q_1 = \dfrac{1}{4{,}18} P_1 t = \dfrac{25}{4{,}18} \times 3\,600 = 21\,531 \text{ cal} = 21{,}5 \text{ kcal}$

β) ἐπὶ τοῦ πηνίου : $P_2 = R''I_\varepsilon^2 = 20 \times 0{,}25 = 5$ watt

καὶ $Q_2 = \dfrac{1}{4{,}18} P_2 t = \dfrac{Q_1}{5} = 4\,306$ cal $= 4{,}3$ kcal.

3) Ἄς θεωρήσωμεν τὸ σύστημα τοῦ ροοστάτου καὶ τοῦ πηνίου. Ἐὰν Z εἶναι ἡ σύνθετος ἀντίστασις, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$V_\varepsilon = Z\, I_\varepsilon \quad \text{ὅπου εἶναι} \quad Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}\,.$$

Ἄρα ἔχομεν: $V_\varepsilon = I_\varepsilon \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ ἢ $120 = 0{,}5 \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$.
Ἐὰν εἰς τὴν τελευταίαν σχέσιν θέσωμεν $R = R' + R'' = 100 + 20 = 120$ ohm καὶ $\omega = 2\pi N = 2\pi \times 50 = 100\pi$, εὑρίσκομεν: $240^2 = 120^2 + L^2\omega^2$

ἄρα $L\omega = 120\sqrt{3}$ καὶ $L = \dfrac{120\sqrt{3}}{100\pi} = \dfrac{207{,}8}{314} = 0{,}66$ henry.

Ἡ ἀντίστασις, τὴν ὁποίαν παρουσιάζει εἰς τὸ ἐναλλασσόμενον ρεῦμα τὸ πηνίον, εἶναι μία σύνθετος ἀντίστασις Z_1 προσδιοριζομένη ἀπὸ τὴν σχέσιν:
$Z_1 = \sqrt{R''^2 + L^2\omega^2}$ ὅπου τὰ R'', L καὶ ω ἔχουν τὰς ἀνωτέρω τιμάς.
Ἄρα εὑρίσκομεν ὅτι ἡ σύνθετος ἀντίστασις τοῦ πηνίου εἶναι:

$$Z_1 = \sqrt{20^2 + 120^2 \times 3} = \sqrt{43\,600} = 208{,}8 \text{ ohm}.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν $V_\varepsilon' = Z_1 I_\varepsilon$ εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἐνεργὸν διαφορὰν δυναμικοῦ: $V'_\varepsilon = 208{,}8 \times 0{,}5 = 104{,}4$ volt.

4) Ἄν ἀντικαταστήσωμεν τὴν ἐναλλασσομένην ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν μὲ μίαν συνεχῆ ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν, τότε ἡ παρουσία τοῦ πηνίου εἰς τὸ κύκλωμα δὲν ἔχει καμμίαν ἐπίδρασιν (ἐκτὸς ἑνὸς ἐλαχίστου χρόνου κατὰ τὸν ὁποῖον κλείεται τὸ κύκλωμα). Τότε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος δίδεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm : $I = E : R = 120 : 120 = 1$ ampère.

Ἐντὸς τοῦ ροοστάτου καὶ ἐντὸς τοῦ πηνίου ἀναπτύσσονται αἱ κάτωθι ποσότητες θερμότητος:

ἐντὸς τοῦ ροοστάτου: $Q_\rho = \dfrac{R'I^2t}{4{,}18} = \dfrac{100 \times 1 \times 3\,600}{4{,}18} = 86\,120$ cal

ἐντὸς τοῦ πηνίου: $Q_\pi = \dfrac{R''I^2t}{4{,}18} = \dfrac{20 \times 1 \times 3\,600}{4{,}18} = 17\,220$ cal.

Αἱ ποσότητες θερμότητος εἶναι τώρα 4 φορὰς μεγαλύτεραι ἀπὸ ἐκείνας ποὺ εὕρομεν εἰς τὴν § 2, διότι τώρα ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι διπλασία ἀπὸ τὴν I_ε.

5) Ἡ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ ἐναλλακτὴρ εἰς τὸ κύκλωμα, δαπανᾶται μόνον ὡς θερμικὴ ἐνέργεια. Ἡ ἰσχὺς αὐτὴ εἶναι:

$$P = (R' + R'')\, I_\varepsilon^2 = 120 \times 0{,}25 = 30 \text{ watt}.$$

Ὁ συντελεστὴς ἰσχύος τοῦ κυκλώματος προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$P = V_\varepsilon\, I_\varepsilon \text{ συν } \varphi = 120 \times 0{,}5 \times \text{συν } \varphi = 60 \text{ συν } \varphi$$

$$\text{ἄρα} \qquad \text{συν } \varphi = \frac{P}{60} = \frac{30}{60} = 0{,}5.$$

Ἐὰν εἰς τὸ κύκλωμα θέσωμεν κατὰ σειρὰν μὲ τὸν ροοστάτην καὶ τὸ πηνίον ἕνα πυκνωτὴν χωρητικότητος C, τότε ἡ σύνθετος ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος γίνεται: $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}$.

Ἡ ἐνεργὸς ἔντασις I_ε ἔχει τὴν μεγίστην δυνατὴν τιμήν, ὅταν εἶναι :

$$L\omega = \frac{1}{C\omega}\,. \qquad (1)$$

Τότε ἡ διαφορὰ φάσεως εἶναι μηδὲν καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἔχει πάντοτε τὴν αὐτὴν φάσιν μὲ τὴν τάσιν, ἄρα εἶναι συν $\phi = 1$. Ἀπὸ τὴν σχέσιν (1) εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς χωρητικότητος :

$$C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{L\omega \times \omega} = \frac{1}{120\sqrt{3} \times 100\,\pi} = \frac{1}{207{,}8 \times 314} \text{ farad}$$

ἤ $\quad C = 15{,}3$ microfarad .

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ χωρητικότης ἐξουδετερώνει τὴν ἐπίδρασιν τῆς αὐτεπαγωγῆς καὶ ὁ συντελεστὴς ἰσχύος γίνεται ἴσος μὲ 1. Δηλαδή, ἀριθμητικῶς ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ συνεχοῦς ρεύματος (§ 4):

$I_\varepsilon = 1$ ampère καὶ ἑπομένως $P = V_\varepsilon I_\varepsilon = 120 \times 1 = 120$ watt .

Αὐτὴ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μεγίστης ἰσχύος.

XIV. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΑΙ — ΕΡΤΖΙΑΝΑ ΚΥΜΑΤΑ

401. — *Εἰς ἕνα μετασχηματιστὴν τὸ πρωτεῦον κύκλωμα ἔχει 100 σπείρας καὶ τὸ δευτερεῦον ἔχει 2000 σπείρας. Εἰς τὸ πρωτεῦον ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις ἴση μὲ 110 volt, ἡ δὲ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ πρωτεύοντος ρεύματος εἶναι 96 ampère. Εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν ἡ ἔντασις καὶ ἡ τάσις εἰς ἕκαστον κύκλωμα εὑρίσκονται εἰς τὴν αὐτὴν φάσιν.— 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τάσις καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐντὸς τοῦ δευτερεύοντος κυκλώματος, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ ἰσχὺς διατηρεῖται σταθερά.— 2) Εἰς τὴν πραγματικότητα αἱ ἀπώλειαι λόγῳ τοῦ φαινομένου τοῦ Joule δὲν εἶναι ἀσήμαντοι· αὗται ἠμποροῦν νὰ ὑπολογισθοῦν μὲ ἀρκετὴν προσέγγισιν, ἂν θεωρήσωμεν ὡς ἀκριβεῖς τὰς ἀνωτέρω εὑρεθείσας ἐντάσεις. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ὅλαι αἱ σπεῖραι τοῦ πρωτεύοντος καὶ τοῦ δευτερεύοντος ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος καὶ εἶναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ μετάλλου, νὰ εὑρεθῇ ποῖον λόγον ἔχουν αἱ τομαὶ τοῦ σύρματος τοῦ πρωτεύοντος καὶ τοῦ σύρματος τοῦ δευτερεύοντος, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι αἱ ἀπώλειαι ἐνεργείας λόγῳ τοῦ φαινομένου τοῦ Joule εἶναι ἴσαι εἰς τὸ πρωτεῦον καὶ τὸ δευτερεῦον.—3) Ἡ ἀντίστασις τοῦ πρωτεύοντος εἶναι 0,03 ohm. Ποία εἶναι ἡ ἀπόδοσις τοῦ μετασχηματιστοῦ, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι εἶναι ἀσήμαντοι ὅλαι αἱ ἄλλα ἀπώλειαι ἐκτὸς τῶν ἀπωλειῶν λόγῳ τοῦ φαινομένου τοῦ Joule ;*

1) Ἡ τάσις τοῦ δευτερεύοντος ρεύματος εἶναι :

$$E_2 = \frac{2\,000}{100} \times 110 = 2\,200 \text{ volt.}$$

Ἀφοῦ ἡ ἰσχὺς διατηρεῖται σταθερά : $E_1 I_1 = E_2 I_2$, ἡ ἔντασις τοῦ δευτερεύοντος ρεύματος εἶναι :

$$I_2 = \frac{E_1 I_1}{E_2} = \frac{110 \times 96}{2\,200} = 4{,}8 \text{ ampère.}$$

2) Ἂς καλέσωμεν R_1 καὶ R_2 τὰς ἀντιστάσεις ἀντιστοίχως μιᾶς σπείρας

τοῦ πρωτεύοντος καὶ τοῦ δευτερεύοντος. Ἡ ἰσχὺς τῆς ἀναπτυσσομένης ποσότητος θερμότητος εἶναι : $100\ R_1 \times I_1^2 = 2\,000\ R_2 \times I_2^2$.

Ὁ λόγος τῶν ἀντιστάσεων δύο σπειρῶν εἶναι :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{2\,000 \times 4{,}8 \times 4{,}8}{100 \times 96 \times 96} = \frac{1}{20}.$$

Ἂν σ_1 καὶ σ_2 εἶναι αἱ τομαὶ μιᾶς σπείρας τοῦ πρωτεύοντος καὶ τοῦ δευτερεύοντος, τότε εἶναι : $\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = \dfrac{R_2}{R_1} = 20.$

3) Εἰς τὰ δύο κυκλώματα χάνεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἰσχύς :

$$P = 2\,R\,I_1{}^2 = 2 \times 0{,}03 \times 96^2 = 552{,}96 \text{ watt}.$$

Ἡ παρεχομένη εἰς τὸ πρωτεῦον ἰσχὺς εἶναι :

$$P' = E_1\,I_1 = 110 \times 96 = 10\,560 \text{ watt}.$$

Ἄρα ἡ ὠφέλιμος ἰσχὺς εἶναι :

$$P'' = P' - P = 10\,560 - 552{,}96 = 10\,007 \text{ watt}.$$

Ἡ ἀπόδοσις λοιπὸν τοῦ μετασχηματιστοῦ εἶναι :

$$A = \frac{P''}{P'} = \frac{10\,007}{10\,560} = 0{,}95 \quad \text{ἢ} \quad A = 95\ \%.$$

402.— *Τὸ πρωτεῦον κύκλωμα ἑνὸς μετασχηματιστοῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ 100 σπείρας καὶ εἰς τὰ ἄκρα του ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις 120 volt. Ἡ κυκλικὴ συχνότης εἶναι $\omega = 300$.—1) Ὅταν τὸ δευτερεῦον κύκλωμα εἶναι ἀνοικτόν, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πρωτεῦον κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον ἔχει ἐνεργὸν ἔντασιν 6 ampère καὶ ὅτι ἡ ἐμφανιζομένη εἰς τὰ ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος ἐνεργὸς διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι 2 400 volt. Ὑποθέτομεν ὅτι δὲν ὑπάρχουν ἀπώλειαι καὶ ὅτι τὰ δύο κυκλώματα ἔχουν ἀσήμαντον ἀντίστασιν. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν συντελεστῶν αὐτεπαγωγῆς τῶν δύο κυκλωμάτων (πρωτεύοντος καὶ δευτερεύοντος) καὶ ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς.— 2) Τὸ δευτερεῦον κύκλωμα τοῦ μετασχηματιστοῦ συνδέεται τώρα μὲ ἐξωτερικὸν κύκλωμα τὸ ὁποῖον παρουσιάζει μόνον ὠμικὴν ἀντίστασιν ἴσην μὲ 1 000 ohm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τοῦ διαρρέοντος τὸ πρωτεῦον κύκλωμα, ὡς καὶ ἡ φαινομένη ἀντίστασις τοῦ πρωτεύοντος.*

1) Τὸ πρωτεῦον κύκλωμα ἔχει μόνον ἐπαγωγικὴν ἀντίστασιν ωL_1 ἡ ὁποία εἶναι :

$$\omega L_1 = \frac{E_1}{I_1} = \frac{120}{6} = 20 \text{ ohm}.$$

Ἄρα ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πρωτεύοντος ἔχει τὴν τιμήν :

$$L_1 = \frac{20}{300} = \frac{1}{15} \text{ henry}.$$

Ὁ λόγος μετασχηματισμοῦ εἶναι : $\dfrac{N_2}{N_1} = \dfrac{E_2}{E_1} = \dfrac{2\,400}{120} = 20.$

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι οἱ συντελεσταὶ αὐτεπαγωγῆς τῶν δύο πηνίων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν σπειρῶν, ἤτοι ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{N_2^2}{N_1^2} = 400.$$

Ἄρα ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ δευτερεύοντος ἔχει τὴν τιμήν:

$$L_2 = 400\,L_1 = \frac{400}{15} = \frac{80}{3}\ \text{henry}.$$

Ὁ συντελεστὴς ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς τῶν δύο κυκλωμάτων εἶναι:

$$M = \sqrt{L_1 \times L_2} = \sqrt{\frac{1}{15} \times \frac{80}{3}} = \frac{4}{3}\ \text{henry}.$$

2) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ δευτερεῦον εἶναι:

$$I_2 = \frac{2\,400}{1\,000} = 2{,}4\ \text{ampère}$$

Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ πρωτεῦον θὰ εἶναι τώρα:

$$I_1' = I_2\,\frac{N_2}{N_1} = 2{,}4 \times 20 = 48\ \text{ampère}.$$

Ἡ φαινομένη ἀντίστασις τοῦ πρωτεύοντος εἶναι:

$$Z_1 = \frac{E_1}{I_1'} = \frac{120}{48} = 2{,}5\ \text{ohm}.$$

403.— *Ἕνας μετασχηματιστὴς ὑποβιβασμοῦ τῆς τάσεως ἔχει εἰς τὸ πρωτεῦον 4 500 σπείρας καὶ εἰς τὸ δευτερεῦον 150 σπείρας. Τὸ πρωτεῦον δέχεται ἐναλλασσόμενον ρεῦμα ἔχον ἐνεργὸν τάσιν 3000 volt. Τὸ δευτερεῦον ρεῦμα διαβιβάζεται ἐντὸς μιᾶς ἀντιστάσεως χρησιμοποιουμένης πρὸς θέρμανσιν, ἡ ὁποία δὲν ἔχει αὐτεπαγωγήν. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐλευθερουμένη θερμότης ὑψώνει ἐντὸς 10 λεπτῶν τὴν θερμοκρασίαν 15 λίτρων ὕδατος ἀπὸ 15° εἰς 100°. Ὑποθέτομεν ὅτι δὲν ὑπάρχουν ἀπώλειαι ἐνεργείας.— 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ πρωτεύοντος ρεύματος καὶ ἡ ἰσχὺς ἡ ὁποία δαπανᾶται ἐντὸς τοῦ πρωτεύοντος.— 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις ἐπὶ τῆς ὁποίας ἀναπτύσσεται ἡ χρησιμοποιουμένη θερμότης.*

1) Εἰς τὸ δευτερεῦον κύκλωμα ἀναπτύσσεται κατὰ δευτερόλεπτον ποσότης θερμότητος: $Q = \frac{15\,000 \times 85}{600} = 2\,125$ cal

ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μὲ ἰσχύν: $P = 2\,125 \times 4{,}18 = 8\,900$ watt·

Ἀφοῦ δὲν ὑπάρχουν ἀπώλειαι ἐνεργείας, ἔπεται ὅτι ἡ δαπανωμένη ἐντὸς τοῦ πρωτεύοντος ἰσχὺς εἶναι ἐπίσης $P = 8\,900$ watt. Ἑπομένως ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ πρωτεύοντος ρεύματος εἶναι: $I_1 = \frac{P}{E_1} = \frac{8\,900}{3\,000} = 2{,}966$ ampère.

2) Ἡ ἐνεργὸς τάσις τοῦ δευτερεύοντος ρεύματος εἶναι:

$$E_2 = \frac{150}{4\,500}\,E_1 = \frac{3\,000}{30} = 100\ \text{volt}.$$

Ἡ δαπανωμένη εἰς τὸ δευτερεῦον κύκλωμα ἰσχὺς εἶναι:

$$P = E_2 I_2 = \frac{E_2^2}{R} = 8\,900\ \text{watt}.$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἀντίστασις εἶναι:

$$R = \frac{E_2^2}{P} = \frac{10\,000}{8\,900} = \frac{100}{89} = 1{,}123\ \text{ohm}.$$

404.— *Τὸ πρωτεῦον κύκλωμα ἑνὸς ἐπαγωγικοῦ πηνίου τοῦ* Ruhmkorff *ἀποτελεῖται ἀπὸ* 200 *σπείρας, ἡ δὲ μέση διάμετρος αὐτοῦ εἶναι* 6 cm. *Ὁ πυρὴν ἔχει μῆκος* 30 cm, *καὶ ἡ μαγνητικὴ διαπερατότης αὐτοῦ εἶναι* 100. *Τὸ δευτερεῦον κύκλωμα ἔχει* 80 000 *σπείρας καὶ εἶναι ἀρκετὰ βραχύ, ὥστε νὰ περιβάλλῃ ὁλόκληρον τὸ πεδίον τοῦ πρωτεύοντος. Τὸ πρωτεῦον τροφοδοτεῖται μὲ ρεῦμα ἐντάσεως* 5 ampère, *τὸ ὁποῖον διακόπτεται ἐντὸς ἑνὸς χιλιοστοῦ τοῦ δευτερολέπτου. Νὰ εὑρεθῇ: 1) Ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πρωτεύοντος.— 2) Ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους τοῦ πρωτεύοντος κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς διακοπῆς τοῦ ρεύματος.— 3) Ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμήν.*

1) Ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου εἶναι:

$$L = \frac{4\pi}{10} \times \frac{N^2 S \mu}{10^8\, l} = 1{,}25 \times \frac{200^2 \times 28{,}26 \times 100}{10^8 \times 30} = 0{,}0473 \text{ henry.}$$

2) Κατὰ τὴν διαποπὴν τοῦ ρεύματος εἰς τὸ πρωτεῦον ἀναπτύσσεται ἐντὸς αὐτοῦ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐξ αὐτεπαγωγῆς:

$$E = L\,\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0{,}0473 \times \frac{5}{0{,}001} = 236{,}5 \text{ volt.}$$

3) Ἡ ἀναπτυσσομένη ἐντὸς τοῦ δευτερεύοντος ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις E_1 εἶναι:

$$E_1 = E\,\frac{N_1}{N} = 236{,}5 \times \frac{80\,000}{200} = 95\,000 \text{ volt (περίπου).}$$

405.— *Εἰς ἕνα μετασχηματιστὴν τὸ πρωτεῦον ἔχει* 7 500 *σπείρας καὶ τὸ δευτερεῦον, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ὅτι δὲν ἔχει αὐτεπαγωγήν, ἀποτελεῖται ἀπὸ* 250 *σπείρας. Εἰς τὸ δευτερεῦον ἡ μεγίστη ἰσχὺς εἶναι* 3 kW.— *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἡ ἐφαρμοζομένη εἰς τὰ ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος, ὅταν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πρωτεύοντος ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς διαφορὰ δυναμικοῦ ἴση μὲ* 3 600 volt. — *2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ χρησίμου πρωτεύοντος ρεύματος, ἂν θέλωμεν νὰ ἔχωμεν ἀπόδοσιν* 95 %.— *3) Νὰ εὑρεθῇ, εἰς ἀτμοΐππους, ἡ ὅλη ἰσχὺς ἡ ὁποία χάνεται κατὰ τὸν μετασχηματισμόν.*

1) Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἡ ἐφαρμοζομένη εἰς τὰ ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος, εἶναι:

$$E_2 = E_1\,\frac{N_2}{N_1} = 3\,600 \times \frac{250}{7\,500} = 120 \text{ volt.}$$

2) Ἡ χρήσιμος ἰσχύς, δηλαδὴ ἡ πραγματικὴ ἰσχύς, τοῦ πρωτεύοντος ρεύματος εἶναι: $P_1 = E_1 I_1$,

ἐνῷ ἡ ἰσχὺς τοῦ δευτερεύοντος ρεύματος εἶναι: $P_2 = 3\,000$ watt.

Ἐπειδὴ πρέπει νὰ εἶναι: $P_2 = 0{,}95\, P_1$

εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ πρωτεύοντος ρεύματος θὰ εἶναι:

$$I_1 = \frac{P_2}{0{,}95\, E_1} = \frac{3\,000}{0{,}95 \times 3\,600} = 0{,}877 \text{ ampère.}$$

3) Κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν χάνονται τὰ 5 % τῆς ἰσχύος P_1, ἤτοι χάνεται ἰσχύς:

$$p = \frac{5}{100}\, P_1 = \frac{5}{100} \times \frac{P_2}{0{,}95} = \frac{5}{95}\, P_2.$$

ἢ

$$p = \frac{5 \times 3\,000}{95} \text{ watt} = \frac{3\,000}{19 \times 9{,}81 \times 75} = 0{,}215 \text{ ἀτμόϊπποι.}$$

406.— *Ἕνας ἐναλλακτὴρ ἔχει ἐνεργὸν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν* 500 volt *καὶ παρέχει ρεῦμα ἔχον ἐνεργὸν ἔντασιν* 50 ampère. *Τὸ ρεῦμα τοῦτο μεταφέρεται ἀπ' εὐθείας εἰς ἀπόστασιν* d *διὰ σύρματος τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει αὐτεπαγωγὴν καὶ χωρητικότητα, εἶναι δὲ τοιοῦτον ὥστε ἡ ἐνέργεια ἡ ὁποία χάνεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἕνα δέκατον τῆς ὅλης ἐνεργείας. Ἀντὶ αὐτῆς τῆς ἀπ' εὐθείας μεταφορᾶς, τὸ ρεῦμα διαβιβάζεται, εἰς τὸν σταθμὸν ἠλεκτροπαραγωγῆς, δι' ἑνὸς μετασχηματιστοῦ τοῦ ὁποίου τὸ πρωτεῦον ἔχει* 400 *σπείρας καὶ τὸ δευτερεῦον ἔχει* 1 000 *σπείρας. Τὸ χρησιμοποιούμενον σύρμα εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν διὰ τὴν μεταφορὰν τῆς ἐνεργείας εἶναι τοιοῦτον ὥστε ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας ὑπὸ μορφὴν θερμότητος νὰ εἶναι πάλιν ἴση μὲ τὸ ἕνα δέκατον τῆς ὅλης ἐνεργείας. Ποῖον λόγον ἔχουν αἱ διάμετροι τῶν συρμάτων τὰ ὁποῖα ἐχρησιμοποιήθησαν εἰς τὰς δύο περιπτώσεις;*

Ὁ ἐναλλακτὴρ παρέχει ἰσχύν: $P = E_1 I_1 = 500 \times 50 = 25\,000$ watt.

Ἐπὶ τοῦ σύρματος θέλομεν νὰ χάνεται ἰσχύς:

$$p_1 = \frac{P}{10} = \frac{25\,000}{10} = 2\,500 \text{ watt.}$$

Ἂν R εἶναι ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς, τότε εἶναι:

$$p_1 = R_1 I_1^2 \qquad \text{ἄρα} \qquad R_1 = \frac{p_1}{I_1^2} = \frac{2\,500}{2\,500} = 1 \text{ ohm}.$$

Ἔστω σ_1 ἡ τομὴ τοῦ σύρματος. Τότε ἔχομεν: $\sigma_1 = \rho \dfrac{d}{R_1} = \rho d.$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὸν μετασχηματιστὴν δὲν ὑπάρχουν ἀπώλειαι ἐνεργείας, καὶ καλέσωμεν E_2 καὶ I_2 τὴν τάσιν καὶ τὴν ἔντασιν εἰς τὸ δευτερεῦον, τότε εἶναι: $E_1 I_1 = E_2 I_2 = 25\,000$ watt.

Ἀλλὰ ἡ τάσις εἰς τὸ δευτερεῦον εἶναι:

$$E_2 = E_1 \frac{10\,000}{400} = 500 \times \frac{50}{2} = 12\,500 \text{ volt}$$

ἑπομένως: $I_2 = \dfrac{25\,000}{E_2} = \dfrac{25\,000}{12\,500} = 2$ ampère.

Ἐπὶ τοῦ σύρματος θέλομεν νὰ ἔχωμεν ἀπώλειαν $p_1 = 2\,500$ watt. Ἂν R_2 εἶναι τώρα ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος τῆς γραμμῆς, θὰ ἔχωμεν:

$$R_2 = \frac{p_1}{I_2^2} = \frac{2\,500}{4} = 625 \text{ ohm}.$$

Ἡ τομὴ σ_2 τοῦ σύρματος εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι:

$$\sigma_2 = \rho \frac{d}{R_2} = \frac{\rho d}{625}.$$

Αἱ τομαὶ τῶν συρμάτων ἔχουν λόγον: $\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = \rho d : \dfrac{\rho d}{625} = 625$

ἤτοι εἶναι $\sigma_1 = 625\, \sigma_2$.

Ἂν δ_1 καὶ δ_2 εἶναι αἱ διάμετροι τῶν συρμάτων, τότε ἔχομεν:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \sqrt{625} = 25 \qquad \text{ἤτοι εἶναι} \qquad \delta_1 = 25\, \delta_2.$$

Εἰς τὸ [illegible] ὅτι διὰ τὴν αὐτὴν ἀπώλειαν ἐνεργείας ἐπὶ τῆς γραμμῆς μεταφορᾶς, ἡ χρησιμοποίησις τοῦ μετασχηματιστοῦ μᾶς παρέχει μεγάλην οἰκονομίαν εἰς τὴν ἐγκατάστασιν τῆς γραμμῆς, διότι ἀπαιτεῖται πολὺ μικρότερον βάρος σύρματος.

407.— *Μία ὑδατόπτωσις ἔχει παροχὴν* 400 *λίτρα ὕδατος κατὰ δευτερόλεπτον καὶ ὕψος πτώσεως* 25 m. *Ἡ ἐνέργεια τοῦ ὑδροστροβίλου χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν λειτουργίαν ἑνὸς μονοφασικοῦ ἐναλλακτῆρος τοῦ ὁποίου ὁ ρότορ ἔχει* 8 *πόλους καὶ ἐκτελεῖ* 12 *στροφὰς κατὰ δευτερόλεπτον. Τὸ ἐπαγώγιμον ἀποτελεῖται ἀπὸ* 8 *πηνία ἡνωμένα κατὰ σειράν. Τὸ ρεῦμα τὸ παρεχόμενον ὑπὸ τοῦ ἐναλλακτῆρος ἔχει ἐνεργὸν τάσιν* 7 200 volt *καὶ διαβιβάζεται εἰς μετασχηματιστὴν τοῦ ὁποίου τὸ πρωτεῦον ἔχει* 3 000 *σπείρας, τὸ δὲ δευτερεῦον* 50 *σπείρας.— 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ συχνότης τοῦ πρωτεύοντος ρεύματος καὶ ἡ ἐνεργὸς τάσις τοῦ δευτερεύοντος ρεύματος.—2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὠφέλιμος ἰσχὺς ἡ ὁποία λαμβάνεται εἰς τὰ ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἀπόδοσις τοῦ ὑδροστροβίλου εἶναι* 0,80, *ἡ ἀπόδοσις τοῦ ἐναλλακτῆρος εἶναι* 0,90, *ἡ ἀπόδοσις τοῦ μετασχηματιστοῦ εἶναι* 0 95 *καὶ ὅτι ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας ἐπὶ τῆς γραμμῆς, ἡ ὁποία συνδέει τὸν ἐναλλακτῆρα μὲ τὸν μετασχηματιστήν, εἶναι* 0,10.— 4) *Νὰ ὑπολογισθῇ πόσους λαμπτῆρας τῶν* 25 *κηρίων ἠμπορεῖ νὰ τροφοδοτήσῃ ὁ μετασχηματιστής, ἂν οἱ λαμπτῆρες οὗτοι τροφοδοτοῦνται μὲ ρεῦμα ἐντάσεως* 0,75 ampère *ὑπὸ τάσιν* 120 volt.

1) Ἡ συχνότης τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὁμωνύμων πόλων (π.χ. τῶν βορείων) ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν στροφῶν, ἤτοι εἶναι: $N = 4 \times 12 = 48$ Hz.

Ἡ ἐνεργὸς τάσις τοῦ δευτερεύοντος ρεύματος εἶναι:

$$E_2 = \frac{50}{3\,000} \times 7\,200 = 120 \text{ volt.}$$

2) Ἡ ἰσχὺς τῆς ὑδατοπτώσεως εἶναι: $P_1 = 400 \times 25 = 10\,000$ kgm/sec.

Ἡ ὠφέλιμος ἰσχὺς εἶναι: $P_2 = 10\,000 \times 0{,}80 \times 0{,}90 \times 0{,}95 \times 0{,}90$ kgm/sec.

ἢ $P_2 = 60\,390$ watt.

3) Ἕκαστος λαμπτὴρ ἔχει ἰσχὺν καταναλώσεως: $0{,}75 \times 120 = 90$ watt.

Ἄρα ἡ ὠφέλιμος ἰσχὺς τοῦ δευτερεύοντος ἠμορεῖ νὰ τροφοδοτήσῃ:

$$\frac{60\,390}{90} = 671 \text{ λαμπτῆρας.}$$

408.— *Μία ὑδατόπτωσις παρέχει κατὰ δευτερόλεπτον* 2 m³ *ὕδατος ἀπὸ ὕψος* 600 m.—*1) Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς ἀτμοῖππους καὶ κιλοβὰτ ἡ ἰσχὺς τῆς ὑδατοπτώσεως.— 2) Ἡ ἰσχὺς αὕτη χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν λειτουργίαν ἑνὸς ἐναλλακτῆρος παρέχοντος ρεῦμα εἰς ἕνα μετασχηματιστήν. Ἡ ἀπόδοσις ὅλου τοῦ συστήματος εἶναι* 80 %. *Ἡ ἐνεργὸς ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἰς τὸ δευτερεῦον εἶναι* 200 000 volt. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος.— 3) Μεταφέρομεν τὴν ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν εἰς ἀπόστασιν* 100 *χιλιομέτρων μὲ γραμμὴν ἀποτελουμένην ἀπὸ δύο σύρματα. Δεχόμεθα νὰ χάνωμεν ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὸ* 1/10 *τῆς ἐνεργείας ἡ ὁποία ἐξέρχεται ἀπὸ τὸν μετασχηματιστήν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τομὴ τοῦ σύρματος τῆς γραμμῆς, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι σύρμα τομῆς* 1 mm² *καὶ μήκους* 1 000 m *ἔχει ἀντίστασιν* 17 ohm.— *4) Εἰς τὸν τόπον τῆς καταναλώσεως τῆς ἐνεργείας ἡ ἐνεργὸς τάσις ὑποβιβάζεται εἰς* 120 volt *μὲ τὴν βοήθειαν μετασχηματιστῶν τῶν ὁποίων ἡ ὅλη ἀπόδοσις εἶναι* 90 %. *Μὲ τὴν ἐνέργειαν αὐτὴν τροφοδοτοῦμεν λαμπτῆρας διὰ πυρακτώσεως, οἱ ὁποῖοι καταναλίσκουν* 3/4 watt *κατὰ κηρίον. Πόσον ἀριθμὸν κηρίων ἠμποροῦμε νὰ διαθέσωμεν εἰς τὸ συνολικὸν δίκτυον;*

1) Ἡ ἰσχὺς τῆς ὑδατοπτώσεως εἶναι: $P = 2\,000 \times 600 = 12 \times 10^5$ kgm/sec

ἢ $P = \dfrac{12 \times 10^5}{75} = 16\,000$ CV καὶ $P = \dfrac{16\,000 \times 736}{1\,000} = 11\,776$ kW.

2) Ἡ λαμβανομένη ἰσχὺς εἰς τὸ δευτερεῦον τοῦ μετασχηματιστοῦ εἶναι:

$$P_1 = 11\,776 \times 1\,000 \times 0{,}8 = 9\,420\,800 \text{ watt.}$$

Ἄρα ἡ ἐνεργὸς ἔντασις εἶναι:

$$I_\varepsilon = \frac{P_1}{V_\varepsilon} = \frac{9\,420\,800}{200\,000} = 47 \text{ ampère (περίπου).}$$

3) Ἐπὶ τῆς γραμμῆς χάνεται ἰσχύς: $P' = \dfrac{P_1}{10} = 942\,080$ watt.

Ἂν R εἶναι ἡ ἀντίστασις τῶν 200 km τῆς γραμμῆς, τότε ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$P' = RI_\varepsilon^2$ εὑρίσκομεν $R = \dfrac{P'}{I_\varepsilon^2}$ ἤτοι $R = \dfrac{942\,080}{47^2} = 426{,}4$ ohm.

Σύρμα τομῆς	1 mm²	μήκους	1 km	ἔχει ἀντίστασιν	17 ohm.
» »	1 mm²	»	200 km	» »	200 × 17 ohm.
» »	1 mm²	»	200 km	» »	426,4 ohm.
» »	σ mm²	»	200 km	»	

Ἀλλὰ γνωρίζομεν (ἀπὸ τὸν νόμον τῆς ἀντιστάσεως) ὅτι εἶναι:

$$\frac{200 \times 17}{426{,}4} = \frac{\sigma}{1} \quad \text{ἄρα} \quad \sigma = 8 \text{ mm}^2.$$

5) Ἐπὶ τοῦ δικτύου τῆς καταναλώσεως διαθέτομεν ἰσχύν:

$$P_2 = 0{,}9\,P_1 = 0{,}9 \times 9\,420\,800 = 8\,478\,720 \text{ watt.}$$

Ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν κηρίων, τὰ ὁποῖα ἠμπορεῖ τὰ φέρῃ τὸ δίκτυον, εἶναι:

$$P_2 : \frac{3}{4} = P_2 \times \frac{4}{3} = 11\,305\,000 \text{ κηρία (περίπου).}$$

409.— *Μία ὑδατόπτωσις παρέχει* 45 *κυβικὰ μέτρα ὕδατος κατὰ λεπτὸν καὶ τροφοδοτεῖ ὑδροστρόβιλον, διὰ τοῦ ὁποίου κινεῖται ἐναλλακτήρ. Ἡ ἀπόδοσις τῆς ἐγκαταστάσεως εἶναι* 0,8. *Τὸ ῥεῦμα, τὸ ὁποῖον παράγει ὁ ἐναλλακτήρ, διέρχεται διὰ τοῦ πρωτεύοντος κυκλώματος ἑνὸς μετασχηματιστοῦ· τὸ κύκλωμα τοῦτο περιλαμβάνει* 3 600 *σπείρας. Τὸ δευτερεῦον κύκλωμα τοῦ μετασχηματιστοῦ περιλαμβάνει* 180 *σπείρας. Τὸ δευτερεῦον ῥεῦμα τροφοδοτεῖ, χωρὶς αἰσθητὰς ἀπωλείας, μίαν ἐγκατάστασιν φωτισμοῦ, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ* 1 000 *λαμπτῆρας διὰ πυρακτώσεως, ἕκαστος τῶν ὁποίων εἶναι* 60 *κηρίων, καταναλίσκει* 0,5 watt *κατὰ κηρίον καὶ διαρρέεται ἀπὸ ῥεῦμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐνεργὸν τάσιν* 0,25 ampère. *Οἱ λαμπτῆρες εἶναι ἡνωμένοι ἐν παραλλήλῳ.— 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τοὺς πόλους τοῦ δευτερεύοντος.— 2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ῥεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ὁ ἐναλλακτήρ, ὡς καὶ ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τοὺς πόλους του.— 3) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος ἀπὸ τὸ ὁποῖον πίπτει τὸ ὕδωρ.* g = 10 m/sec².

1) Ὁ ἠλεκτρικὸς λαμπτὴρ καταναλίσκει: 60 × 0,5 = 30 watt.

Ἡ ἰσχὺς αὐτὴ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $p = V_\varepsilon I_\varepsilon$.

Ἄρα ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τοὺς πόλους τοῦ δευτερεύοντος εἶναι:

$$V_\varepsilon = p : I_\varepsilon = 30 : 0{,}25 = 120 \text{ volt.}$$

Ἡ δὲ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ῥεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ δευτερεῦον κύκλωμα, εἶναι: $I_\varepsilon = 0{,}25 \times 1\,000 = 250$ ampère.

2) Ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τοὺς πόλους τοῦ πρωτεύοντος εἶναι:

$$V'_\varepsilon = V_\varepsilon \times \frac{3\,600}{180} = 120 \times 20 = 2\,400 \text{ volt.}$$

Ἂν δεχθῶμεν ὅτι ἡ ἀπόδοσις τοῦ μετασχηματιστοῦ εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα, τότε ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ῥεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ πρωτεῦον, εἶναι:

$$I'_\varepsilon = I_\varepsilon \times \frac{180}{3\,600} = \frac{250}{20} = 12{,}5 \text{ ampère.}$$

3) Ἐπειδὴ δεχόμεθα ὅτι αἱ ἀπώλειαι εἶναι ἀσήμαντοι, συνάγεται ὅτι ἡ ἰσχὺς τοῦ ἐναλλακτῆρος εἶναι ἴση μὲ τὴν ἰσχὺν ἡ ὁποία δαπανᾶται εἰς τοὺς λαμπτῆρας, ἤτοι εἶναι: $P = 30 \times 1\,000 = 30\,000$ watt.

Ἑπομένως ἡ ἰσχὺς τῆς ὑδατοπτώσεως εἶναι:

$$P' = P : 0{,}8 = 30\,000 : 0{,}8 = 37\,500 \text{ watt.}$$

Καὶ ἐπειδὴ λαμβάνομεν $g = 10$ m/sec² εὑρίσκομεν: $P' = 3\,750$ kgm/sec.

Ἡ παροχὴ τῆς ὑδατοπτώσεως κατὰ δευτερόλεπτον εἶναι:

$$45\,000 : 60 = 750 \text{ kg*}.$$

Ἄρα τὸ ὕδωρ πίπτει ἀπὸ ὕψος: $h = 3\,750 : 750 = 5$ m.

410. — *Εἰς μίαν ὑδατόπτωσιν τὸ ὕδωρ πίπτει ἀπὸ ὕψος* 27 m, *ἡ δὲ παροχὴ εἶναι* 500 *λίτρα κατὰ δευτερόλεπτον. Ὁ ὑδροστρόβιλος παρέχει μηχανικὴν ἐνέργειαν εἰς ἕνα μονοφασικὸν ἐναλλακτῆρα, ὁ ὁποῖος ἔχει* 5 *ζεύγη πόλων, ἐκτελεῖ* 600 *στροφὰς κατὰ λεπτὸν καὶ παράγει ἠλεκτρικὸν ῥεῦμα τοῦ ὁποίου ἡ ἐνεργὸς τάσις εἶναι* 1 000 volt. *Τὸ ῥεῦμα διαβιβάζεται εἰς τὴν γραμμήν, εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς ὁποίας ὑπάρχει μετασχηματιστὴς ὑποβιβασμοῦ τῆς τάσεως· ὁ λόγος μετασχηματισμοῦ εἶναι* 1/10. *Τὸ δευτερεῦον ῥεῦμα τροφοδοτεῖ λαμπτῆρας. Αἱ διάφοροι ἀποδόσεις εἶναι: τοῦ ὑδροστοβίλου* 0,7· *τοῦ ἐναλλακτῆρος* 0,9 *τοῦ μετασχηματιστοῦ* 0,95· *ἡ ἀπώλεια ἐπὶ τῆς γραμμῆς εἶναι ἴση μὲ τὰ* 10 % *τῆς ἐνεργείας ἡ ὁποία στέλλεται εἰς τὴν γραμμήν. Νὰ εὑρεθῇ: 1) Ἡ συχνότης τοῦ ῥεύματος.— 2) Ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος εἰς τὴν γραμμὴν καὶ εἰς τὴν ἔξοδον ἐκ τοῦ δευτερεύοντος.— 3) Ὁ ἀριθμὸς τῶν λαμπτήρων τοὺς ὁποίους ἠμπορεῖ τὸ ῥεῦμα νὰ τροφοδοτήσῃ, ἂν ἕκαστος ἐξ αὐτῶν ἔχῃ ἰσχὺν καταναλώσεως* 50 watt.

1) Ὁ ρότορ τοῦ ἐναλλακτῆρος ἐκτελεῖ: $600 : 60 = 10$ στροφὰς κατὰ δευτερόλεπτον.

Ἄρα ἡ συχνότης τοῦ ῥεύματος εἶναι: $N = 10 \times 5 = 50$ Hz.

2) Ἡ ἰσχὺς τῆς ὑδατοπτώσεως εἶναι:

$$P_1 = 500 \times 20 = 10\,000 \text{ kgm/sec} = 98\,100 \text{ watt.}$$

Ὁ ἐναλλακτὴρ παρέχει εἰς τὴν γραμμὴν ἰσχύν:

$$P_2 = P \times 0{,}7 \times 0{,}9 = 98\,100 \times 0{,}63 = 61\,803 \text{ watt.}$$

Οἱ λαμπτῆρες δὲν ἔχουν αὐτεπαγωγήν. Ἄρα ὁ συντελεστὴς ἰσχύος τοῦ κυκλώματος εἶναι ἴσος μὲ τὴν μονάδα. Ἡ ἐνεργὸς λοιπὸν ἔντασις τοῦ ῥεύματος εἰς τὴν γραμμὴν εἶναι: $I_\varepsilon = P_2 : V_\varepsilon = 61\,803 : 1\,000 = 61{,}800$ ampère.

Τὸ ρεῦμα κατὰ τὴν εἴσοδόν του εἰς τὸν μετασχηματιστὴν ἔχει τάσιν:

$$V'_\varepsilon = V_\varepsilon - RI_\varepsilon\,,$$

ὅπου R εἶναι ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς. Ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας ἐπὶ τῆς γραμμῆς εἶναι ἴση μὲ τὰ 10 % τῆς ἐνεργείας, ἡ ὁποία στέλλεται εἰς τὴν γραμμήν, ἤτοι εἶναι: $p = 0{,}10 \times P_2 = 0{,}10\, V_\varepsilon I_\varepsilon = RI_\varepsilon^2$.

ἄρα εἶναι: $RI_\varepsilon = 0{,}10\, V_\varepsilon$ καὶ $V'_\varepsilon - V_\varepsilon = 0{,}10\, V_\varepsilon = 0{,}90\, V_\varepsilon$

ἢ $V'_\varepsilon = 0{,}90 \times 1\,000 = 900$ volt.

Ἐντὸς τοῦ πρωτεύοντος τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν $I_\varepsilon = 61{,}803$ ampère. Εἰς τὸ δευτερεῦον ἡ τάσις εἶναι: $V''_\varepsilon = 900 : 10 = 90$ volt.

Ἐξ ἄλλου ὅμως ἔχομεν τὴν σχέσιν: $0{,}95\, V'_\varepsilon I_\varepsilon = V''_\varepsilon I'_\varepsilon$

ὅπου I'_ε εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ δευτερεῦον. Ἄρα εἶναι:

$$I'_\varepsilon = 0{,}95 \times 10 \times I_\varepsilon = 9{,}5 \times 61{,}803 = 587{,}1 \text{ ampère}.$$

3) Ὑπὸ τάσιν 90 volt ἕνας λαμπτὴρ τῶν 50 watt διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως: $i = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}$ ampère.

Τὸ δευτερεῦον ἠμπορεῖ λοιπὸν νὰ τροφοδοτήσῃ ἀριθμὸν λαμπτήρων:

$$587{,}1 : \frac{5}{9} = 1\,056.$$

411. — *Εἰς ἕνα σταθμὸν ἠλεκτροπαραγωγῆς Α, ἕνας μετασχηματιστὴς ἀπορροφᾷ ἰσχὺν 80 kW ὑπὸ ἐνεργὸν τάσιν $E_1 = 1\,000$ volt. Τὸ δευτερεῦον ρεῦμα, τοῦ ὁποίου ἡ ἐνεργὸς ἔντασις εἶναι $I_2 = 5$ ampère, διοχετεύεται εἰς μίαν γραμμὴν ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ πρωτεῦον κύκλωμα τοῦ μετασχηματιστοῦ ἑνὸς ἄλλου σταθμοῦ Β. Τὸ δευτερεῦον ρεῦμα, ποὺ παρέχει ὁ μετασχηματιστὴς οὗτος, ἔχει ἐνεργὸν τάσιν $E_2' = 150$ volt. Ἡ ὅλη ἀπώλεια ἐνεργείας εἶναι 10 %· αἱ ἀποδόσεις τῶν μετασχηματιστῶν εἶναι 0,95 εἰς τὸν σταθμὸν Α καὶ 0,96 εἰς τὸν σταθμὸν Β. Οἱ συντελεσταὶ ἰσχύος ἔχουν τὰς ἀκολούθους τιμάς: εἰς τὸ κύκλωμα τὸ περιλαμβάνον τὴν γραμμὴν εἶναι 0,76· εἰς ἕκαστον τῶν ἐξωτερικῶν κυκλωμάτων εἶναι 1.—1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς καὶ δι' ἕκαστον τῶν μετασχηματιστῶν ὁ λόγος τῶν ἀριθμῶν τῶν σπειρῶν τοῦ πρωτεύοντος καὶ τοῦ δευτερεύοντος. — 2) Τὸ ρεῦμα τὸ παρεχόμενον ἀπὸ τὸν μετασχηματιστὴν Β τροφοδοτεῖ λαμπτῆρας διὰ βολταϊκοῦ τόξου, ἕκαστος τῶν ὁποίων καταναλίσκει 16,6 ampère ὑπὸ τάσιν 75 volt. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν λαμπτήρων τοὺς ὁποίους τροφοδοτεῖ τὸ ρεῦμα τοῦτο.*

1) Ὁ μετασχηματιστὴς τοῦ σταθμοῦ Α παρέχει εἰς τὴν γραμμὴν ἰσχύν:

$$P_1 = 80 \times 0{,}95 = 76 \text{ kW}.$$

Ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας εἶναι: $80 \times 0{,}10 = 8$ kW.

Ἄρα τὸ δευτερεῦον ρεῦμα τὸ παρεχόμενον ὑπὸ τοῦ μετασχηματιστοῦ τοῦ σταθμοῦ Β ἔχει ἰσχύν: $P_2 = 80 - 8 = 72$ kW.

Ἡ ἰσχὺς αὕτη εἶναι τὰ 0,96 τῆς ἰσχύος P_2' τοῦ πρωτεύοντος ρεύματος τοῦ σταθμοῦ Β, ἤτοι εἶναι:

$$P_2 = 0{,}96\, P_2' \quad \text{καὶ ἑπομένως:} \quad P_2' = \frac{P_2}{0{,}96} = \frac{72 \times 100}{96} = 75 \text{ kW}.$$

Τόση λοιπὸν ἰσχὺς ἀπορροφᾶται εἰς τὸ πρωτεῦον τοῦ μετασχη-

ματιστοῦ Β. Ἑπομένως ἐπὶ τῆς γραμμῆς χάνεται ἰσχύς: $p = 76 - 75 = 1$ kW.
Ἐὰν R εἶναι ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς, τότε εἶναι:

$p = RI_2^2$. ἡ ζητουμένη ἀντίστασις R εἶναι: $R = \frac{p}{I_2^2} = \frac{1\,000}{25} = 40$ ohm.

Ἂς καλέσωμεν N_1 καὶ N_2 τὸν ἀριθμὸν τῶν σπειρῶν τοῦ πρωτεύοντος καὶ τοῦ δευτερεύοντος τοῦ μετασχηματιστοῦ τοῦ σταθμοῦ Α καὶ N_1' καὶ N_2' ὁμοίως τοῦ μετασχηματιστοῦ τοῦ βαθμοῦ Β. Ἡ ἰσχὺς τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ γραμμὴ εἶναι:

$$P_1 = E_2 I_2 \text{ συν } \phi$$

ὅπου εἶναι συν $\phi = 0{,}76$. Ἄρα ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τὸ δευτερεῦον τοῦ μετασχηματιστοῦ Α εἶναι: $E_2 = \frac{P_1}{I_2 \text{ συν } \phi} = \frac{76\,000}{5 \times 0{,}76} = 20\,000$ volt.

Ὁ ζητούμενος λόγος τῶν σπειρῶν τοῦ πρωτεύοντος καὶ τοῦ δευτερεύοντος τοῦ μετασχηματιστοῦ Α εἶναι: $\frac{N_2}{N_1} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{20\,000}{1\,000} = 20.$

Ἡ ἰσχὺς τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ πρωτεῦον τοῦ μετασχηματιστοῦ Β εἶναι:

$$P_2' = E_1' I_2 \text{ συν } \phi.$$

Ἄρα ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πρωτεύοντος εἶναι:

$$E_1' = \frac{P_2'}{I_2 \text{ συν } \phi} = \frac{75\,000}{5 \times 0{,}76} = 19\,736 \text{ volt.}$$

Ὁ λόγος τῶν σπειρῶν τοῦ μετασχηματιστοῦ Β εἶναι:

$$\frac{N_2'}{N_1'} = \frac{E_2'}{E_1'} = \frac{150 \times 5 \times 0.76}{75\,000} = \frac{76}{10\,000}.$$

2) Ἡ τάσις τοῦ ῥεύματος εἶναι $E_2' = 150$ volt. Ἀλλὰ κάθε λαμπτὴρ ἀπαιτεῖ διὰ τὴν λειτουργίαν του πτῶσιν δυναμικοῦ 75 volt. Ἄρα πρέπει νὰ σχηματισθοῦν σειραὶ ἑκάστη τῶν ὁποίων νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ 2 λαμπτῆρας. Κάθε μία τοιαύτη σειρὰ ἀπορροφᾷ ἰσχύν: $p' = 16{,}6 \times 75 \times 2 = 2\,490$ watt.

Μὲ τὴν διαθέσιμον ἰσχὺν $P_2 = 72$ kW ἠμποροῦμε νὰ τροφοδοτήσωμεν:

$$72\,000 : 2\,490 = 28 \quad \text{πλήρεις σειράς}$$

αἱ ὁποῖαι ἀπορροφοῦν ἰσχύν: $2\,490 \times 28 = 69\,720$ watt.

Ἐπειδὴ τὸ πρωτεῦον τοῦ Β δίδει αὐτομάτως τὴν ἰσχύν, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται εἰς τὸ δευτερεῦον του, διὰ τοῦτο ἡ ἰσχὺς τοῦ δευτερεύοντος ῥεύματος θὰ εἶναι: 69 720 watt καὶ ὄχι 72 000 watt, ὅπως ὑπελογίσθη ἀνωτέρω. Αὐτὴ ἡ αὐτόματος ἐλάττωσις γίνεται διὰ τῆς αὐξήσεως τῆς διαφορᾶς φάσεως τῆς ἐντάσεως σχετικὰ μὲ τὴν τάσιν. Ἡ αὔξησις τῆς διαφορᾶς φάσεως ἐπιφέρει ἐλάττωσιν τῆς ἐντάσεως καὶ ἑπομένως τῆς ἰσχύος.

412.— *Ἕνας διεγέρτης τοῦ* Hertz *ἔχει αὐτεπαγωγὴν* $R = \frac{1}{\pi + 10^6}$ henry *καὶ χωρητικότητα* $C = \frac{1}{\pi \times 10^{10}}$ farad. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ συχνότης τῶν παραγομένων ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων καὶ τὸ μῆκος κύματος αὐτῶν.*

Ἡ συχνότης τῶν παραγομένων ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων εἶναι:

$$N = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{1}{\pi \times 10^6} \times \frac{1}{\pi \times 10^{10}}}} = \frac{10^8}{2}$$

ἤτοι $N = 5 \times 10^7 = 50\,000\,000.$

Τὸ μῆκος κύματος τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων εἶναι :

$$\lambda = \frac{V}{N} = \frac{3 \times 10^8}{5 \times 10^7} = 6 \text{ m}$$

413.— *Ἕνα κύκλωμα ταλαντώσεων περιλαμβάνει ἐπίπεδον πυκνωτὴν ἀποτελούμενον ἀπὸ δύο μεταλλικὰς παραλλήλους πλάκας, μεταξὺ τῶν ὁποίων παρεμβάλλεται στρῶμα ἀέρος πάχους* 2 mm· *ἑκάστη πλὰξ ἔχει ἐπιφάνειαν* 4 dm². *Τὸ κύκλωμα περιλαμβάνει ἐπὶ πλέον καὶ πηνίον, χωρὶς πυρῆνα ἐκ σιδήρου, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος* 20 cm *καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ* 100 *σπείρας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ἐπιφάνειαν* 1 dm². *Νὰ εὑρεθῇ ἡ συχνότης τῶν ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων τὰς ὁποίας παράγει τὸ κύκλωμα.*

Ἡ περίοδος τῶν ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ Thomson : $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Ὁ πυκνωτὴς ἔχει χωρητικότητα :

$$C = \frac{400}{4\pi \times 0{,}2 \times 9 \times 10^{11}} = \frac{1}{0{,}2\,\pi \times 9 \times 10^9} \text{ farad.}$$

Τὸ πηνίον ἔχει συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς :

$$L = \frac{4\pi}{10} \times \frac{N^2 S}{10^8 l} = \frac{4\pi \times 100^2 \times 100}{10^9 \times 20} = \frac{2\pi}{10^4} \text{ henry.}$$

Ἡ περίοδος εἶναι :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\pi}{10^4} \times \frac{1}{0{,}2\,\pi \times 9 \times 10^9}} = \frac{2\pi}{3 \times 10^6} \text{ sec.}$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη συχνότης εἶναι : $N = \frac{1}{T} = \frac{3 \times 10^6}{2\pi} = 477\,500$ Hz.

414.— *Ἕνα κύκλωμα ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων περιλαμβάνει πυκνωτήν, ἔχοντα χωρητικότητα* C=0,0594 microfarad. *καὶ ἕνα πηνίον ἀποτελούμενον ἀπὸ* 10 *σπείρας διαμέτρου* 30 cm· *τὸ πηνίον ἔχει μῆκος* 10 cm. *Νὰ εὑρεθῇ : 1) Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος, διὰ νὰ παύσῃ τοῦτο νὰ εἶναι κύκλωμα ταλαντώσεων.— 2) Ἡ συχνότης τῶν ταλαντώσεων, ὅταν παράγωνται τοιαῦται ἐντὸς τοῦ κυκλώματος.— 3) Τὸ μῆκος κύματος τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων τὰ ὁποῖα ἐκπέμπονται.*

1) Ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$L = \frac{4\pi}{10} \times \frac{N^2 S}{10^8 l} = \frac{4\pi \times 10^2 \times \pi \times 15^2}{10^9 \times 10} = 888 \times 10^{-7} \text{ henry.}$$

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἰδιοπερίοδος τῶν ταλαντώσεων δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ Thomson :

$$T = \frac{2\pi\sqrt{LC}}{\sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}} .$$

Διὰ νὰ μὴ συμβαίνουν ταλαντώσεις πρέπει νὰ εἶναι :

$$1 - \frac{R^2 C}{4L} = 0 \qquad \text{ἤτοι} \qquad R^2 = \frac{4L}{C} .$$

Ὥστε ἡ ἀντίστασις τοῦ δοθέντος κυκλώματος πρέπει νὰ εἶναι:

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{888 \times 10^{-7}}{594 \times 10^{-11}}} = 245 \text{ ohm}.$$

2) Ὅταν ἐντὸς τοῦ κυκλώματος παράγωνται ταλαντώσεις, αὗται ἔχουν συχνότητα: $N = \frac{1}{T}$. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι ἡ περίοδος αὐτῶν δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ Thomson: $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Ἄρα ἡ ζητουμένη συχνότης εἶναι:

$$N = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{888 \times 10^{-7} \times 594 \times 10^{-11}}} = 219\,000 \text{ Hz}.$$

Τὸ μῆκος κύματος τῶν ἐκπεμπομένων κυμάτων εἶναι:

$$\lambda = \frac{V}{N} = \frac{300\,000}{219\,000} = 1{,}37 \text{ km}.$$

415.—*Μία σειρὴν ἀποτελεῖται ἀπὸ μικρὸν κυκλικὸν δίσκον, φέροντα εἰς τὴν περιφέρειάν του καὶ εἰς ἴσας ἀποστάσεις 6 ὀπάς. Διὰ καταλλήλου διατάξεως προσφυσᾶται ρεῦμα ἀέρος καὶ ἡ σειρὴν παράγει τὸν φθόγγον* do_7. *Ὁ κατακόρυφος ἄξων τῆς σειρῆνος φέρει ἕνα κοῖλον κάτοπτρον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος εἶναι* 2 m *(ἡ ἄλλη ἐπιφάνεια τοῦ κατόπτρου δὲν εἶναι κατοπτρική). Ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου καμπυλότητος τοῦ κατόπτρου, καὶ ἀκριβῶς εἰς τὸ κέντρον τούτου, σχηματίζεται ἁρμονικῶς ἐναλλασσόμενος σπινθήρ. Τὸ εἴδωλον τοῦ σπινθῆρος τούτου σχηματίζεται ἐπὶ ἑνὸς πετάσματος. Ὅταν στρέφεται ὁ ἄξων τῆς σειρῆνος, παρατηροῦμεν ἐπὶ τοῦ πετάσματος μίαν σειρὰν εἰδώλων τοῦ σπινθῆρος, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν μεταξύ των* 2 mm.*—1) Νὰ ἐξηγηθῇ τὸ πείραμα τοῦτο. — 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν κατὰ δευτερόλεπτον παραγομένων σπινθήρων καὶ ἡ συχνότης τῶν παραγομένων ἑρτζιανῶν κυμάτων.— 3) Εἰς δύο σημεῖα* A *καὶ* B, *πολὺ ἀπέχοντα μεταξύ των, σχηματίζονται δύο ἁρμονικῶς ἐναλλασσόμενοι σπινθῆρες ἔχοντες συχνότητα ἴσην μὲ τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν. Ἐξετάζοντες τὸ ἠλεκτρομαγνητικὸν πεδίον κατὰ μῆκος τῆς εὐθείας* AB, *εὑρίσκομεν μίαν σειρὰν δεσμῶν τῆς κυμάνσεως, εὑρισκομένων εἰς ἴσας μεταξύ των ἀποστάσεις. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο διαδοχικῶν δεσμῶν. — 4) Εἰς τὸ μέσον* M *τῆς εὐθείας* AB *παρατηροῦμεν ἕνα δεσμόν. Νὰ ἐξηγηθῇ τὸ φαινόμενον τοῦτο. Τί συμπέρασμα ἐξάγεται διὰ τοὺς θεωρουμένους σπινθῆρας; Συχνότης τοῦ* do_3: 261 Hz.

1) Ὁ ἦχος, τὸν ὁποῖον παράγει ἡ σειρήν, ἔχει συχνότητα:

$$\nu = 261 \times 2^4 = 4\,176 \text{ Hz}.$$

Ἡ συχνότης τοῦ ἤχου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὀπῶν τοῦ δίσκου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν στροφῶν τοῦ ἄξονος αὐτοῦ. Ἄρα, κατὰ δευτερόλεπτον τὸ κάτοπτρον ἐκτελεῖ: $4\,176 : 6 = 696$ στροφάς.

Τὸ παραγόμενον εἴδωλον τῶν σπινθήρων ἔχει διπλασίαν γωνιώδη ταχύτητα, ἤτοι $2 \times 696 = 1\,392$ στροφὰς κατὰ sec.

Τὸ εἴδωλον τοῦτο διαγράφει κύκλον ἀκτῖνος 200 cm. Ἐπειδὴ δὲ οἱ σπινθῆρες παράγονται περιοδικῶς, διὰ τοῦτο τὰ εἴδωλά των τὰ βλέπομεν εὑρισκόμενα εἰς ὡρισμένην ἀπόστασιν τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο.

2) Ἐντὸς ἑνὸς δευτερολέπτου τὸ εἴδωλον διαγράφει περιφέρειαν κύκλου, ἔχουσαν μῆκος: $1392 \times 2\pi \times 200$ cm.

Ἐπειδὴ δὲ οἱ σπινθῆρες φαίνονται ἀπέχοντες μεταξύ των 2 mm, συνάγεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὁμοίων εἰδώλων εἶναι:

$$N = \frac{1392 \times 2\pi \times 200}{0{,}2} = 8\,750\,000 .$$

Ἕνα ἠλεκτρομαγνητικὸν κῦμα ἀντιστοιχεῖ εἰς δύο διαδοχικοὺς σπινθῆρας ἀντιθέτου φορᾶς. Ἄρα ἡ συχνότης τῶν κυμάνσεων τούτων εἶναι:

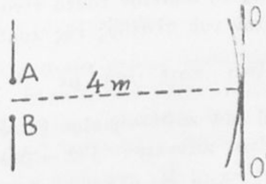
$$N' = \frac{N}{2} = \frac{8\,750\,000}{2} = 4\,375\,000 .$$

3) Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν σχηματίζονται κατὰ μῆκος τῆς εὐθείας στάσιμα κύματα. Ἡ ἀπόστασις δύο διαδοχικῶν δεσμῶν εἶναι ἴση μὲ ἥμισυ μῆκος κύματος:

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{V}{2\,N} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 4\,375\,000} = 34{,}3 \text{ m} .$$

4) Ἀφοῦ εἰς τὸ μέσον Μ τῆς εὐθείας ΑΒ σχηματίζεται δεσμός, συνάγεται ὅτι αἱ δύο κυμάνσεις, αἱ προερχόμεναι ἀπὸ τὰς πηγὰς Α καὶ Β, φθάνουν εἰς τὸ σημεῖον Μ μὲ διαφορὰν φάσεως 180°. Ἐπειδὴ ὅμως οἱ δύο δρόμοι ΑΜ καὶ ΒΜ εἶναι ἴσοι, ἕπεται ὅτι οἱ σπινθῆρες παράγονται μὲν συγχρόνως εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ἀλλὰ ἔχουν πάντοτε ἀντίθετον φοράν.

416. — *Μὲ ἕνα στρεφόμενον κάτοπτρον θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν περίοδον ἑνὸς ἁρμονικῶς ἐναλλασσομένου σπινθῆρος, ὁ ὁποῖος παράγεται μεταξὺ τῶν δύο σφαιρῶν Α καὶ Β. Ἕνα κοῖλον κάτοπτρον ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος 4 m καὶ εἶναι στερεωμένον ἐπὶ ἄξονος ΟΟ', ὁ ὁποῖος εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἀπέχει ἀπὸ αὐτὴν 4 m. Τὸ ἀνακλώμενον φῶς προσπίπτει καθέτως ἐπὶ ἑνὸς πετάσματος εὑρισκομένου πολὺ κοντὰ εἰς τὴν ΑΒ.— 1) Ὅταν τὸ κάτοπτρον ἐκτελῇ 300 στροφὰς κατὰ δευτερόλεπτον, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ φωτειναὶ ταινίαι, αἱ ὀφειλόμεναι εἰς δύο διαβάσεις τοῦ ρεύματος κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, ἀπέχουν μεταξύ των 1 cm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συχνότης Ν τῶν ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων καὶ τὸ μῆκος κύματος λ τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων τὰ ὁποῖα διαδίδονται ἐντὸς τοῦ χώρου.— 2) Δύο ὅμοιαι κεραῖαι, ἀπέχουσαι μεταξύ των* $\frac{\lambda}{2}$, *παράγουν ἠλεκτρικὰς ταλαντώσεις συχνότητος Ν. Κατὰ ποίας διευθύνσεις ἔχομεν μέγιστα καὶ ἐλάχιστα τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς κυμάνσεως; — 3) Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ κεραῖαι αὐταὶ πάλλονται ὅπως ἕνας κλειστὸς ἠχητικὸς σωλήν, ὁ ὁποῖος παράγει τὸν θεμελιώδη φθόγγον, νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ σύρματος τῶν κεραιῶν. (Τὸ μῆκος κύματος κατὰ μῆκος τῆς κεραίας εἶναι ἴσον μὲ τὸ μῆκος τοῦ κύματος εἰς τὸν ἀέρα).*



Σχ. 225

1) Ἐπειδὴ οἱ σπινθῆρες σχηματίζονται εἰς τὸ κέντρον καμπυλότητος τοῦ κατόπτρου, τὸ εἴδωλον αὐτῶν [illegible] εἰς τὸ κέντρον καμπυλότη-

τος, ὅπου εὑρίσκεται τὸ πέτασμα. Κατὰ τὸν χρόνον, ὁ ὁποῖος μεσολαβεῖ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν σπινθήρων τῆς αὐτῆς φορᾶς, ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς στρέφεται κατὰ γωνίαν: $2\varphi = \frac{1}{400}$ ἀκτινίου, καὶ ἑπομένως τὸ κάτοπτρον στρέφεται κατὰ γωνίαν: $\varphi = \frac{1}{800}$ ἀκτινίου.

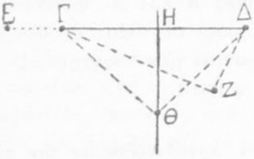
Ἐντὸς ἑνὸς δευτερολέπτου τὸ κάτοπτρον στρέφεται κατὰ γωνίαν $2\pi \times 300$ ἀκτίνια. Ἄρα ἡ συχνότης τῶν ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων εἶναι:

$$N = 2\pi \times 300 : \frac{1}{800} = 1\,507\,968 \text{ Hz.}$$

Τὸ μῆκος κύματος τῶν παραγομένων ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων εἶναι:

$$\lambda = \frac{V}{N} = \frac{3 \times 10^8}{1\,507\,968} = 198{,}9 \text{ m (περίπου)}.$$

2) Ἔστω ὅτι τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ παριστάνουν τὰς προβολὰς τῶν δύο κεραιῶν ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου.



Σχ. 226

α) Ἂς λάβωμεν τὸ τυχὸν σημεῖον Ζ, εὑρισκόμενον ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΓΔ καὶ τῆς ΗΘ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΔ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΓΔΖ εἶναι πάντοτε: $\Gamma Z - \Delta Z < \Gamma\Delta$

ἤτοι εἶναι $\Gamma Z - \Delta Z < \frac{\lambda}{2}$.

Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἑπομένως ἀδύνατον νὰ ἔχωμεν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τοῦ πλάτους τῆς κυμάνσεως, διότι ἡ διαφορὰ πορείας $\Gamma Z - \Delta Z$ δὲν εἶναι ποτὲ ἴση μὲ $2k\frac{\lambda}{2}$ ἢ $(2k+1)\frac{\lambda}{2}$, ὅπου k ἀκέραιος ἀριθμός.

β) Διὰ κάθε σημεῖον Θ εὑρισκόμενον ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΔ εἶναι πάντοτε: $\Gamma\Theta - \Delta\Theta = 0$.

Ἄρα εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ΗΘ θὰ ἔχωμεν μέγιστα.

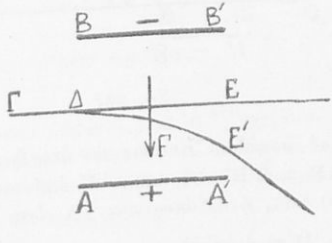
γ) Διὰ κάθε σημεῖον Ε τῆς ΓΔ, μὴ εὑρισκόμενον ὅμως μεταξὺ τῶν δύο κεραιῶν, θὰ εἶναι πάντοτε: $\Delta E - \Gamma E = \frac{\lambda}{2}$.

Ἄρα εἰς ὅλα αὐτὰ τὰ σημεῖα θὰ ἔχωμεν πάντοτε κατάργησιν τῆς κυμάνσεως.

3) Ὅπως εἰς τὸν κλειστὸν σωλῆνα, οὕτω καὶ εἰς τὴν κεραίαν τὸ μῆκος της l εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $l = \frac{\lambda}{4} = \frac{198{,}9}{4} = 49{,}7$ m.

XV. ΑΠΟ ΤΗΝ ΝΕΩΤΕΡΑΝ ΦΥΣΙΚΗΝ

417.— *Μία κάθοδος Γ ἐκπέμπει λεπτὴν δέσμην καθοδικῶν ἀκτίνων, ἡ ὁποία διαδίδεται εὐθυγράμμως. Ἡ δέσμη αὐτὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἠλεκτρόνια, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει μᾶζαν* $1/10^{27}$ gr *καὶ κινεῖται μὲ ταχύτητα* $V = 10^9$ cm/sec. *Ἑκατέρωθεν τοῦ τμήματος ΔΕ τῆς δέσμης εὑρίσκονται δύο πλάκες ΑΑ' καὶ ΒΒ' ἴσαι καὶ παράλληλοι πρὸς τὴν ΔΕ. Αἱ πλάκες αὐταὶ ἀποτελοῦν τοὺς ὁπλισμοὺς ἑνὸς πυκνωτοῦ. Ἡ πλὰξ ΑΑ' εἶναι ἠλεκτρισμένη θετικῶς, ἡ δὲ πλὰξ ΒΒ' ἀρνητικῶς. Ἐκτὸς τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΑ'ΒΒ' τὸ ἠλεκτρικὸν πεδίον ἔχει ἔντασιν μηδέν.— 1) Νὰ ἐξετασθῇ ποίαν μεταβολὴν ἐπιφέρει ὁ πυκνωτὴς εἰς τὴν τροχιὰν τῆς δέσμης.— 2) Ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου τὸ πεδίον ἐξασκεῖ μίαν δύναμιν* $F = \frac{1}{8 \times 10^{11}}$ *δύνας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τὴν ὁποίαν προσδίδει εἰς τὸ ἠλετρόνιον ἡ δύναμις F.— 3) Δίδεται ὅτι εἶναι:* ΑΑ' = ΒΒ' = ΔΕ = 40 cm. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐκτροπὴ ΕΕ' τοῦ ἠλεκτρονίου ἀπὸ τὴν εὐθύγραμμον τροχιάν του κατὰ τὴν ἔξοδόν του ἀπὸ τὸν πυκνωτήν.*



Σχ. 226

1) Μεταξὺ τῶν δύο πλακῶν ΑΑ' καὶ ΒΒ' τὸ ἠλεκτρικὸν πεδίον εἶναι ὁμογενές, εἶναι κάθετον πρὸς τὰς ἐπιφανείας τῶν δύο πλακῶν καὶ ἔχει φορὰν ἀπὸ τὴν θετικὴν πλάκα πρὸς τὴν ἀρνητικήν. Τὰ ἠλεκτρόνια ἕλκονται ἀπὸ τὴν θετικὴν πλάκα ΑΑ'. Ἐπὶ ἑκάστου ἠλεκτρονίου ἐνεργεῖ ἡ σταθερὰ δύναμις F καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεώς του μεταξὺ τῶν πλακῶν. Μετὰ τὸ σημεῖον Δ τὸ ἠλεκτρόνιον κινεῖται ὅπως καὶ ἕνα βλῆμα ἐντὸς τοῦ πεδίου βαρύτητος. Οὕτω τὸ ἠλεκτρόνιον διαγράφει ἕνα τόξον παραβολῆς ΔΕ'. Μετὰ τὸ Ε' τὸ ἠλεκτρόνιον κινεῖται εὐθυγράμμως, κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον Ε' τοῦ τόξου τῆς παραβολῆς.

2) Ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ ἠλεκτρονίου ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F εἶναι:

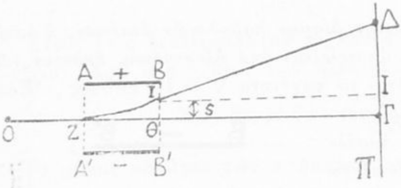
$$\gamma = \frac{F}{m} = \frac{10^{27}}{8 \times 10^{11}} = 1{,}25 \times 10^{15} \text{ C.G.S.}$$

3) Τὸ ἠλεκτρόνιον διατρέχει τὸ τόξον ΔΕ' εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον εἰς τὸν ὁποῖον θὰ διέτρεχεν τὸ διάστημα ΔΕ, ἂν δὲν ὑπῆρχεν ὁ πυκνωτής.

Ἄρα εὑρίσκομεν: $t = \frac{\Delta E}{V} = \frac{40}{10^9} = \frac{4}{10^8}$ sec.

Εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον τὸ ἠλεκτρόνιον διατρέχει ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F τὸ διάστημα: $EE' = \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{1{,}25 \times 10^{15} \times 16}{2 \times 10^{16}} = 1$ cm.

418.— *Μία λεπτὴ δέσμη καθοδικῶν ἀκτίνων διέρχεται διὰ τῆς ὀπῆς O ἑνὸς διαφράγματος καὶ σχηματίζει μικρὰν φωτεινὴν κηλίδα ἐπὶ τοῦ φθορίζοντος ἐπιπέδου Π. Ἡ δέσμη τῶν ἀκτίνων διέρχεται μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν AB καὶ A'B' ἑνὸς ἐπιπέδου πυκνωτοῦ. Μεταξὺ τῶν δύο τούτων ὁπλισμῶν δημιουργεῖται ὁμογενὲς ἠλεκτρικὸν πεδίον, τὸ ὁποῖον περιορίζεται ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα ΛΑ' καὶ ΒΒ'. Ὅταν ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι μηδέν, ἡ φωτεινὴ κηλὶς σχηματίζεται εἰς τὸ σημεῖον Γ. ὅταν ὅμως ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου ἔχῃ τὴν τιμὴν E, ἡ κηλὶς σχηματίζεται εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης τῶν ἠλεκτρονίων τῆς δέσμης τῶν καθοδικῶν ἀκτίνων, Μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου :* $m = 8 \times 10^{-28}$ gr· *φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου :* $e = 1{,}4 \times 10^{-20}$ *ἠλεκτρομαγνητικαί μονάδες. Ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου :* $E = 10^{10}$ *δύναι. Μῆκος ὁπλισμῶν* $AB = A'B' = 1$ cm. *Ἡ ἀπόστασις τοῦ ἐπιπέδου Π ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον ΑΑ' εἶναι* 30 cm, *ἡ δὲ ἀπόστασις ΓΔ εἶναι* 5,3 cm.



Σχ. 227

Ἐπὶ ἑνὸς ἠλεκτρονίου, εὑρισκομένου μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ, ἐνεργεῖ ἕνεκα τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου δύναμις κάθετος πρὸς τὴν ΟΓ καὶ ἔχουσα ἔντασιν :

$$F = e \times E.$$

Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως αὐτῆς τὸ ἠλεκτρόνιον ἀποκτᾷ ἐπιτάχυνσιν :

$$\gamma = \frac{F}{m} = \frac{e \times E}{m}.$$

Ἡ κίνησις τοῦ ἠλεκτρονίου μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι συνισταμένη δύο κινήσεων : α) μιᾶς ὁμαλῆς κινήσεως μὲ ταχύτητα υ κατὰ μῆκος τῆς ΟΓ καὶ β) μιᾶς κινήσεως ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης καθέτως πρὸς τὴν ΟΓ καὶ τὴν ὁποίαν προκαλεῖ ἡ δύναμις F. Οὕτω τὸ ἠλεκτρόνιον διαγράφει τὸ τόξον παραβολῆς ZI ἐντὸς χρόνου t.

Ἀπὸ τὸν σχέσιν: $Z\Theta = \upsilon t$ εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι $AB = Z\Theta = 1$ cm εὑρίσκομεν :

$$t = \frac{Z\Theta}{\upsilon} = \frac{1}{\upsilon}.$$

Εἰς τὸν αὐτὸν ὅμως χρόνον t ἡ δύναμις F ἀναγκάζει τὸ ἠλεκτρόνιον νὰ διανύσῃ τὸ διάστημα : $\Theta I = \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{\gamma}{2\upsilon^2}$ καὶ τοῦ προσδίδει ταχύτητα :

$$\upsilon' = \gamma t.$$

Ὅταν τὸ ἠλεκτρόνιον εὑρεθῇ ἐκτὸς τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, κινεῖται κατὰ μῆκος τῆς εὐθείας ΙΔ ἡ ὁποία εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ τόξου ZI εἰς τὸ σημεῖον I. Ἡ κίνησις τοῦ ἠλεκτρονίου ἐπὶ τῆς ΙΔ ἠμπορεῖ νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο συνιστώσας κινήσεις : α) μίαν ὁμαλὴν κίνησιν μὲ ταχύτητα υ κατὰ μῆκος τῆς ΙΙ'· τὸ διάστημα $II' = 30 - 1 = 29$ cm τὸ διανύει τὸ ἠλεκτρόνιον εἰς χρόνον $t' = \frac{29}{\upsilon}$· β) μίαν ὁμαλὴν κίνησιν, μὲ ταχύτητα υ', καθέτως πρὸς τὴν ΟΓ· ἐντὸς τοῦ χρόνου t' τὸ ἠλεκτρόνιον διανύει μὲ ταχύτητα υ' τὸ διάστημα: $\Gamma'\Delta = \upsilon' t' = \gamma t t'$ ἢ $\Gamma'\Delta = \gamma \times \frac{1}{\upsilon} \times \frac{29}{\upsilon} = \frac{29\,\gamma}{\upsilon^2}$.

Ἡ ὅλη λοιπὸν ἀπόκλισις τοῦ ἠλεκτρονίου ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν πορείαν τοῦ ΟΓ εἶναι: $\Gamma\Gamma' + \Gamma'\Delta = \Gamma\Delta$ ἢ $\frac{\gamma}{2\,\upsilon^2} + \frac{29\,\gamma}{\upsilon^2} = 5{,}3$.

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν:

$$\upsilon^2 = \frac{59}{2 \times 5{,}3}\,\gamma = \frac{59}{10{,}6} \times \frac{e \times E}{m}.$$

Ἄρα ἡ ταχύτης τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{59}{10{,}6} \times \frac{1{,}4 \times 10^{-20} \times 10^{10}}{8 \times 10^{-28}}} = \sqrt{97 \times 10^{16}}$$

ἢ $\upsilon = 10^8 \sqrt{97} = 9\,860 \times 10^5$ cm/sec $= 9\,860$ km/sec.

419.— *Μία ἠλεκτρισμένη σταγὼν ἐλαίου, ἔχουσα μᾶζαν* $1{,}2 \times 10^{-11}$ gr, *διατηρεῖται αἰωρουμένη εἰς τὸν ἀέρα μεταξὺ δύο μεταλλικῶν πλακῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν* 2 cm *καὶ παρουσιάζουν διαφορὰν δυναμικοῦ* 3 000 volt. *Πόσον εἶναι τὸ φορτίον τῆς σταγόνος, ἐκπεφρασμένον εἰς ἀριθμὸν ἠλεκτρονίων;* $g = 980$ C.G.S. *φορτίον ἠλεκτρονίου:* $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ coulomb.

Μεταξὺ τῶν δύο πλακῶν ὑπάρχει ὁμογενὲς ἠλεκτρικὸν πεδίον ἐντάσεως:

$$E = \frac{V}{l}.$$

Τὸ βάρος τῆς σταγόνος $B = mg$ ἐξουδετερώνεται ἀπὸ τὴν ἐπὶ τοῦ φορτίου Q τῆς σταγόνος ἐξασκουμένην δύναμιν ὑπὸ τοῦ πεδίου:

$F = Q \times E = Q \times \frac{V}{l}$. Ἄρα ἔχομεν: $B = F$ ἢ $mg = Q \times \frac{V}{l}$.

Ἑπομένως εἰς μονάδας C.G.S. εἶναι:

$$Q = \frac{mgl}{V} = \frac{1{,}2 \times 980}{10^{11}} \times \frac{2}{10} = 2\,352 \times 10^{-12} \text{ C.G.S}$$

Τὸ φορτίον ἑνὸς ἠλεκτρονίου εἶναι:

$$e = 1{,}6 \times 10^{-19} \text{ coulomb} = 4{,}8 \times 10^{-10} \text{ C.G.S.}$$

Ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς τῶν ἠλεκτρονίων, τὰ ὁποῖα φέρει ἡ σταγὼν εἶναι:

$$\nu = \frac{Q}{e} = \frac{2\,352 \times 10^{-12}}{4{,}8 \times 10^{-10}} = 5.$$

420.— *Εἶναι γνωστὸν ὅτι ῥεῦμα ἐντάσεως* 1 ampère, *διερχόμενον ἐπὶ 1 δευτερόλεπτον διὰ διαλύματος νιτρικοῦ ἀργύρου, ἀποθέτει εἰς τὴν κάθοδον* 1,118 mgr *ἀργύρου. Νὰ εὑρεθῇ πόση ποσότης ἠλεκτρισμοῦ πρέπει νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ βολταμέτρου, διὰ νὰ ἀποτεθῇ εἰς τὴν κάθοδον ἕνα μόνον ἄτομον ἀργύρου. Ἀτομικὴ μᾶζα τοῦ* Ag: 108, *ἀριθμὸς τοῦ* Loschmidt: $N = 6{,}02 \times 10^{23}$.

Ὅταν διὰ τοῦ βολταμέτρου διέρχεται ποσότης ἠλεκτρισμοῦ ἴση μὲ 1 coulomb, ἀποτίθεται εἰς τὴν κάθοδον μᾶζα ἀργύρου 1,118 mgr = 0,001118 gr. Διὰ νὰ ἀποτεθῇ εἰς τὴν κάθοδον ἕνα γραμμοάτομον ἀργύρου, δηλαδὴ 108 gr ἀργύρου, πρέπει νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ βολταμέτρου ποσότης ἠλεκτρισμοῦ:

$$Q = \frac{108}{0{,}001118} = 96\,600 \text{ coulomb}.$$

Ἀλλὰ ἕνα γραμμοάτομον ἀργύρου περιέχει N ἄτομα. Ἑπομένως διὰ νὰ ἀποτεθῇ εἰς τὴν κάθοδον ἕνα μόνον ἄτομον ἀργύρου, πρέπει νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ βολταμέτρου ποσότης ἠλεκτρισμοῦ:

$$e = \frac{Q}{N} = \frac{96\,600}{6{,}02 \times 10^{23}} = \frac{1{,}6}{10^{19}} \text{ coulomb} \quad \text{ἢ} \quad e = 1{,}6 \times 10^{-19} \text{ coulomb}.$$

421. — *Ἕνα ἠλεκτρόνιον κινεῖται μὲ ταχύτητα ἴσην μὲ τὸ 1/5 τῆς ταχύτητος τοῦ φωτὸς ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντάσεως 150 gauss. Τὸ ἐπίπεδον τῆς τροχιᾶς τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι κάθετον πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς, τὴν ὁποίαν διαγράφει τὸ ἠλεκτρόνιον ἐντὸς τοῦ πεδίου. Μᾶζα ἠλεκτρονίου:* $m = 9{,}1 \times 10^{-28}$ gr · *φορτίον ἠλεκτρονίου:* $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ coulomb.

Ὅταν ἕνα εὐθύγραμμον ρεῦμα, μήκους L ἑκατοστομέτρων καὶ ἐντάσεως I ampère, εὑρίσκεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως H gauss, τότε ἐπὶ τοῦ ρεύματος τούτου ἀναπτύσσεται μία ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις, τῆς ὁποίας ἡ ἔντασις δίδεται ἀπὸ τὸν γνωστὸν νόμον τοῦ Laplace:

$$F = \frac{HIL}{10} \,\text{ημ}\,\alpha.$$

Ἂν τὸ ρεῦμα εἶναι κάθετον πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ πεδίου, τότε εἶναι:

$$F = \frac{HIL}{10} \text{ δύναι}. \qquad (1)$$

Ἡ δύναμις αὐτὴ F εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ὁρίζουν τὸ ρεῦμα καὶ ἡ διεύθυνσις τοῦ πεδίου.

Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ εὐθύγραμμον ρεῦμα ὀφείλεται εἰς τὴν κίνησιν ἑνὸς μόνον ἠλεκτρονίου, κινουμένου μὲ ταχύτητα υ, τότε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τούτου θὰ εἶναι: $I = \frac{e}{t}$. Τὸ ἠλεκτρόνιον διατρέχει ἐντὸς χρόνου t διάστημα: $L = \upsilon t$. Ἂν θέσωμεν τὰ τιμὰς αὐτὰς τοῦ I καὶ τοῦ L εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$F = \frac{He\upsilon}{10} \text{ δύναι} \qquad (2)$$

εἰς τὴν ὁποίαν τὸ e ἐκφράζεται εἰς coulomb.

Ἡ δύναμις F, ἐνεργοῦσα συνεχῶς ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου, τὸ ἐκτρέπει ἀπὸ τὴν εὐθύγραμμον τροχιὰν καὶ τὸ ἀναγκάζει νὰ διαγράψῃ περιφέρειαν κύκλου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ πεδίου. Οὕτω ἡ δύναμις F ἐνεργεῖ ὡς κεντρομόλος δύναμις καὶ ἑπομένως ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$F = \frac{m\upsilon^2}{r} \quad \text{ἢ} \quad \frac{He\upsilon}{10} = \frac{m\upsilon^2}{r} \quad \text{καὶ} \quad \frac{He}{10} = \frac{m\upsilon}{r}. \quad (3)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3) ἠμποροῦμε νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀκτῖνα r τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς τοῦ ἠλεκτρονίου:

$$r = \frac{10\,m\upsilon}{He} = \frac{10 \times 9{,}1 \times 10^{-28} \times 3 \times 10^{10} \times 10^{19}}{150 \times 5 \times 1{,}6} = \frac{91}{40} = 2{,}275 \text{ cm}.$$

422. — *Ἕνα ἠλεκτρόνιον, κινούμενον ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως* 50 gauss, *διαγράφει κυκλικὴν τροχιὰν ἀκτῖνος* 7,5 cm. *Πόση εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ἠλεκτρονίου; Μᾶζα ἠλεκτρονίου:* $m = 9{,}1 \times 10^{-28}$ gr· *φορτίον ἠλεκτρονίου:* $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ coulomb.

Εἰς τὸ πρόβλημα 421 εὕρομεν τὴν ἐξίσωσιν: $\dfrac{He}{10} = \dfrac{m\upsilon}{r}$,

ἀπὸ τὴν ὁποίαν ὑπολογίζομεν τὴν ταχύτητα τοῦ ἠλεκτρονίου:

$$\upsilon = \frac{He\,r}{10\,m} = \frac{50 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 7.5}{10 \times 9{,}1 \times 10^{-28}} = \frac{60 \times 10^{9}}{9{,}1}$$

$$\text{ἢ} \quad \upsilon = 6{,}6 \times 10^{9}\ \text{cm/sec} = 66\,000\ \text{km/sec}.$$

423. — *Εἰς ἕνα καθοδικὸν σωλῆνα ἐφαρμόζεται διαφορὰ δυναμικοῦ* 10 000 volt. *Πόσην ταχύτητα ἀποκτοῦν τὰ ἠλεκτρόνια ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν αὐτῆς τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ; Φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου:* $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ coulomb· *μᾶζα αὐτοῦ:* $m = 9 \times 10^{-28}$ gr.

Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἔργον eV, τὸ ὁποῖον θὰ παραχθῇ ὑπὸ τοῦ ἀρνητικοῦ φορτίου e. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{2} m\upsilon^2 = eV.$$

Εἰς ἠλεκτροστατικὰς μονάδας ἡ ἀνωτέρω σχέσις δίδει:

$$\frac{1}{2}(9 \times 10^{-28})\,\upsilon^2 = 1{,}6 \times 10^{-19} \times 10\,000 \times 10^{7}.$$

$$\text{Ἄρα} \quad \upsilon = \sqrt{\frac{2\,eV}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6 \times 10^{4} \times 10^{-12}}{9 \times 10^{-28}}} = 60\,000\ \text{km/sec}.$$

$$\text{ἢ} \quad \upsilon = 0{,}6 \times 10^{10}\ \text{cm/sec} = 60\,000\ \text{km/sec}.$$

424. — *Μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων ὁπλισμῶν ἑνὸς πυκνωτοῦ θέλομεν νὰ διατηρηθῇ αἰωρουμένη μία μικρὰ σταγὼν ἐλαίου, ἡ ὁποία ἔχει μᾶζαν* 1×10^{-12} gr. *Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι* $l = 2$ cm, *ἡ δὲ σταγὼν φέρει φορτίον ἴσον μὲ τὸ φορτίον δύο ἠλεκτρονίων. Πόση διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς* volt *πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ; Φορτίον ἠλεκτρονίου:* $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ couloub· $g = 980$ C.G.S.

Διὰ νὰ διατηρηθῇ αἰωρουμένη ἡ σταγὼν τοῦ ἐλαίου, πρέπει τὸ βάρος της mg νὰ ἐξουδετερωθῇ ἀπὸ τὴν ἐπὶ τοῦ φορτίου της ἐξασκουμένην δύναμιν ὑπὸ τοῦ πεδίου· ἤτοι $mg = Q \times E$ ἢ $mg = 2e \times \dfrac{V}{l}$.

Ἄρα ἡ ζητουμένη διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι εἰς μονάδας C.G.S.:

$$V = \frac{mg\,l}{2e} = \frac{1 \times 10^{-12} \times 980 \times 2}{2 \times 4{,}8 \times 10^{-10}} = 2{,}04\ \text{C.G.S.}$$

$$\text{ἢ} \quad V = 2{,}04 \times 300 = 612\ \text{volt}.$$

425.— *Ἕνα δευτερόνιον (δηλαδὴ πυρὴν ἀτόμου βαρέος ὑδρογόνου) κινεῖται εἰς τὸν χῶρον τὸν μεταξὺ δύο ἐπιπέδων ὁπλισμῶν πυκνωτοῦ. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ὁπλισμῶν εἶναι* $l = 4$ cm, *ἡ δὲ μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουσα διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι* V = 1 200 volt. — *1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ δύναμις ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ ἰόντος καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ τὸ ἰόν.— 2) Ἐὰν τὸ ἰὸν ἐσχηματίσθη πολὺ κοντὰ εἰς τὴν θετικὴν πλάκα, νὰ εὑρεθῇ πόσην κινητικὴν ἐνέργειαν ἔχει τὸ ἰόν ὅταν φθάνῃ εἰς τὴν ἀρνητικὴν πλάκα. Μᾶζα τοῦ δευτερονίου:* $m = 3{,}2 \times 10^{-24}$ gr· *φορτίον τοῦ δευτερονίου:* $e = +1{,}6 \times 10^{-19}$ coulomb.

1) Ἐπὶ τοῦ ἰόντος ἐνεργεῖ μία δύναμις F, ἡ ὁποία κινεῖ τὸ ἰὸν ἐκ τῆς θετικῆς πλακὸς πρὸς τὴν ἀρνητικὴν πλάκα. Ἡ δύναμις αὐτὴ εἶναι:

$$F = Q \times E = e \times \frac{V}{l}.$$

Ἐπειδὴ εἶναι: $V = \dfrac{1\,200}{300} = 4$ C.G.S. καὶ

$$e = 1{,}6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^{9} = 4{,}8 \times 10^{-10} \text{ C.G.S.}$$

ἔχομεν: $F = \dfrac{4{,}8}{10^{10}} \times \dfrac{4}{4} = 4{,}8 \times 10^{-10}$ δύναι.

Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F τὸ ἰὸν ἀποκτᾷ ἐπιτάχυνσιν:

$$\gamma = \frac{F}{m} = \frac{4{,}8 \times 10^{-10}}{3{,}2 \times 10^{-24}} = 1{,}5 \times 10^{14} \text{ cm/sec}^2.$$

2) Ἂν ὑποτεθῇ ὅτι τὸ ἰὸν διατρέχῃ τὴν ἀπόστασιν l, τότε τὸ ἰόν, ὅταν φθάνῃ εἰς τὴν ἀρνητικὴν πλάκα, ἔχει ταχύτητα: $\upsilon = \sqrt{2\gamma l}$
καὶ ἑπομένως ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν: $W = 1/2\, m\upsilon^2 = m\gamma l$·
ἤτοι ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν:

$$W = 3{,}2 \times 10^{-24} \times 1{,}5 \times 10^{14} \times 4 = 19{,}2 \times 10^{-10} \text{ ἔργια}.$$

426.— *Ἕνας μετεωρίτης ἔχει ἐν ἠρεμίᾳ μᾶζαν* 1 kg. *Πόση θὰ ἦτο ἡ μᾶζα του, ἂν οὗτος ἐκινεῖτο μὲ ταχύτητα ἴσην μὲ τὰ* 9/10 *τῆς ταχύτητος τοῦ φωτός;*

Ἔστω m_0 ἡ μᾶζα τοῦ μετεωρίτου, ὅταν οὗτος ἠρεμῇ. Ἂν ὁ μετεωρίτης ἐκινεῖτο μὲ ταχύτητα $\upsilon = 0{,}90$ V, τότε ἡ μᾶζα του m, σύμφωνα μὲ τὴν θεωρίαν τῆς σχετικότητος, θὰ ἦτο:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\upsilon}{V}\right)^2}}$$

ἤτοι θὰ ἦτο

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{0{,}90V}{V}\right)^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{0{,}19}} = 2{,}3\, m_0.$$

Ἄρα ἡ μᾶζα του θὰ ἦτο 2,3 φορὰς μεγαλυτέρα, δηλαδὴ θὰ ἦτο 2,3 kg.

427.— *Εἰς ἕνα πυροβόλον ἠλεκτρονίων ἐφαρμόζεται διαφορὰ δυναμικοῦ* 1 000 volt. *Πόση εἶναι ἡ ταχύτης τῶν ἠλεκτρονίων; Μᾶζα ἠλεκτρονίου:* $m = 9{,}1 \times 10^{-28}$ gr· *φορτίον ἠλεκτρονίου:* $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ coulomb.

Ἡ ἐνέργεια, τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ τὸ ἠλεκτρόνιον, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπὸ τοῦ πεδίου, ἤτοι ἔχομεν: $Ve = \frac{m\upsilon^2}{2}$.

Ἄρα ἡ ταχύτης τῶν ἐκσφενδονιζομένων ἠλεκτρονίων εἶναι: $\upsilon = \sqrt{\frac{2Ve}{m}}$

ἤτοι εἰς μονάδας C.G.S. ἔχομεν

$$\upsilon^2 = \frac{2 \times 1\,000 \times 4{,}8 \times 10^{-10}}{300 \times 9{,}1 \times 10^{-28}} = \frac{96 \times 10^{18}}{27{,}3}$$

ἢ $\upsilon = 10^9 \sqrt{3{,}53} = 1{,}9 \times 10^9$ cm/sec $= 19\,000$ km/sec.

428.— *Μία ὁμογενὴς ἀκτινοβολία* Röntgen, *ἔχουσα μῆκος κύματος* $\lambda = 0{,}05$ μμ, *προσπίπτει καθέτως ἐπὶ ἑνὸς πλακιδίου κρυστάλλου. Ἡ διερχομένη δέσμη προσπίπτει ἐπὶ ἑνὸς πετάσματος εὐαισθήτου εἰς τὰς ἀκτινοβολίας καὶ εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν* 10 cm *ἀπὸ τὸ πλακίδιον. Ἐπὶ τοῦ πετάσματος λαμβάνομεν μίαν ὁμάδα φωτεινῶν κηλίδων, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν* 1 cm *ἀπὸ τὴν κεντρικὴν κηλῖδα. — 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν στρωμάτων τοῦ κρυσταλλικοῦ πλέγματος.— 2) Χωρὶς νὰ θίξωμεν τὸ πλακίδιον τοῦ κρυστάλλου καὶ τὸ πέτασμα, ἀφήνομεν νὰ προσπέσῃ ἐπὶ τοῦ κρυστάλλου ὁμογενὴς δέσμη ἀκτίνων* Röntgen. *Αἱ σχηματιζόμεναι ἐπὶ τοῦ πετάσματος κηλῖδες ἀπέχουν* 1,5 cm *ἀπὸ τὴν κεντρικὴν κηλῖδα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος κύματος τῆς ἀνωτέρω ἀκτινοβολίας* Röntgen.

1) Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ κρυσταλλικὸν πλέγμα παίζει τὸν ρόλον φράγματος. Ἠμποροῦμε λοιπὸν νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τοῦ φράγματος (βλ. πρόβλ. 161):

$$\varepsilon \,.\, \eta\mu\, \varphi = k\,\lambda \qquad (1)$$

ὅπου ε εἶναι ἡ ἀπόστασις δύο μορίων τοῦ κρυστάλλου καὶ k ἀκέραιος ἀριθμός. Διὰ πολὺ μικρὰν γωνίαν ἔχομεν $\eta\mu\, \varphi = 1/10$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἀπόστασις ε εἶναι: $\varepsilon = \frac{\lambda}{\eta\mu\,\varphi} = \frac{0{,}05}{1/10} = 0{,}5$ μμ.

2) Ἐπειδὴ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι: $\eta\mu\,\varphi' = \frac{1{,}5}{10}$ καὶ $\varepsilon = 0{,}5$ μμ ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον μῆκος κύματος τῆς ἀκτινοβολίας Röntgen:

$$\lambda' = \varepsilon \,.\, \eta\mu\,\varphi' = 0{,}5 \times \frac{1{,}5}{10} = 0{,}075 \text{ μμ}.$$

429.— *Μία φωτεινὴ ἀκτινοβολία, ἔχουσα μῆκος κύματος* 4 000 angstrom, *προσπίπτει ἐπὶ μεταλλικῆς ἐπιφανείας. Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ ἐκπέμπει τότε φωτοηλεκτρόνια τὰ ὁποῖα ἔχουν ταχύτητα* 8×10^7 cm/sec. *Πόσον εἶναι τὸ ἐλάχιστον μῆκος κύματος διὰ τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ παρατηρηθῇ ἐκπομπὴ ἠλεκτρονίων; Σταθερὰ τοῦ* Planck: $h = 6{,}56 \times 10^{-27}$ C.G.S. *Μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου:* $m = 9{,}1 \times 10^{-28}$ gr.

Ἡ προσπίπτουσα ἐπὶ τοῦ μετάλλου ἀκτινοβολία ἔχει συχνότητα:

$$\nu = \frac{V}{\lambda} = \frac{3 \times 10^{10}}{4 \times 10^{-5}} = \frac{3 \times 10^{15}}{4}.$$

Ἂν καλέσωμεν λ_0 καὶ ν_0 τὸ μῆκος κύματος καὶ τὴν συχνότητα τῆς ἀκτινοβολίας, ἡ ὁποία ἠμπορεῖ νὰ προκαλέσῃ ἀπόσπασιν ἠλεκτρονίων ἀπὸ τὴν μεταλλικὴν πλάκα, χωρὶς ὅμως νὰ προσδώσῃ εἰς αὐτὰ κινητικὴν ἐνέργειαν, τότε σύμφωνα μὲ τὸν φωτοηλεκτρικὸν νόμον τοῦ Einstein ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$h\nu_0 = h\nu - \frac{1}{2} m\upsilon^2 .$$

Ἀλλὰ εἶναι : $\frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{1}{2} \times \frac{9,1}{10^{28}} \times 64 \times 10^{14} = \frac{291}{10^{14}}$ ἔργια .

Ἄρα ἔχομεν : $h\nu_0 = \frac{6,56}{10^{27}} \times \frac{3 \times 10^{15}}{4} - \frac{291}{10^{14}} = \frac{200}{10^{14}}$ ἔργια .

Τὸ ζητούμενον λοιπὸν μῆκος κύματος εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$h \frac{V}{\lambda_0} = \frac{200}{10^{14}}$$

ἤτοι εἶναι : $\lambda_0 = \frac{hV \times 10^{14}}{200} = \frac{6,56}{10^{27}} \times 3 \times 10^{10} \times \frac{10^{14}}{200} = \frac{0,098}{10^3}$ cm

ἢ $\lambda_0 = 9\,800$ angstrom .

430.— *Ἐπὶ μεταλλικῆς πλακὸς προσπίπτουν ἀκτῖνες* Röntgen , *τῶν ὁποίων τὸ μῆκος κύματος εἶναι* 1 angstrom . *Τὸ ἔργον τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν ἀπόσπασιν τοῦ ἠλεκτρονίου ἀπὸ τὸ ἄτομον θεωρεῖται ἀσήμαντον. Πόση εἶναι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῶν φωτοηλεκτρονίων ; Σταθερὰ τοῦ* Planck : $h = 6,56 \times 10^{-27}$ C. G. S.

Ἡ χρησιμοποιουμένη ἀκτινοβολία Röntgen ἔχει συχνότητα:

$$\nu = \frac{V}{\lambda} = \frac{3 \times 10^{10}}{1 \times 10^{-8}} = 3 \times 10^{18} .$$

Ἐπειδὴ τὸ διὰ τὴν ἀπόσπασιν τοῦ ἠλεκτρονίου ἀπαιτούμενον ἔργον εἶναι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀσήμαντον, ὁλόκληρος ἡ ἐνέργεια τοῦ φωτονίου εὑρίσκεται ὑπὸ μορφὴν κινητικῆς ἐνεργείας ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου.

Ἄρα ὁ φωτοηλεκρικὸς νόμος εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν γράφεται:

$W = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = h\nu$ ἤτοι εἶναι $W = \frac{6,56}{10^{27}} \times 3 \times 10^{18} = 1,968 \times 10^{-8}$ ἔργια.

431.— *Εὑρέθη ὅτι ἕνα μέταλλον ἀρχίζει νὰ ἐκπέμπῃ ἠλεκτρόνια, ὅταν ἐπὶ τοῦ μετάλλου τούτου προσπίπτῃ ἡ πρασίνη ἀκτινοβολία τοῦ ὁρατοῦ φωτός, ἡ ὁποία ἔχει μῆκος κύματος* $\lambda = 5\,000$ angstrom. *Ὅταν ἐπὶ τοῦ μετάλλου τούτου προσπίπτῃ ἰώδης ἀκτινοβολία, ἔχουσα μῆκος κύματος* $\lambda' = 4\,000$ angstrom , *νὰ εὑρεθῇ : 1) Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῶν ἐκπεμπομένων φωτοηλεκτρονίων.— 2) Ἡ ταχύτης τῶν ἠλεκτρονίων τούτων.— 3) Τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀπόσπασιν τῶν ἠλεκτρονίων ἀπὸ τὰ ἄτομα τοῦ μετάλλου. Σταθερὰ τοῦ* Planck : $h = 6,56 \times 10^{-27}$ C.G.S. *Μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου :* $m = 9,1 \times 10^{-28}$ gr .

1) Αἱ ἀντίστοιχοι συχνότητες τῆς πρασίνης καὶ τῆς ἰώδους ἀκτινοβολίας εἶναι:

$$\nu = \frac{V}{\lambda} = \frac{3 \times 10^{10}}{5 \times 10^{-5}} = \frac{3 \times 10^{15}}{5} \qquad \nu' = \frac{V}{\lambda'} = \frac{3 \times 10^{10}}{4 \times 10^{-5}} = \frac{3 \times 10^{15}}{4} .$$

Ἡ πρασίνη ἀκτινοβολία ἐλευθερώνει ἠλεκτρόνια, χωρὶς ὅμως νὰ προσδίδῃ εἰς αὐτὰ κινητικὴν ἐνέργειαν. Ἡ ἐνέργεια λοιπὸν τοῦ φωτονίου της εἶναι ἴση μὲ τὸ ἔργον W, τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν ἀπόσπασιν τοῦ ἠλεκτρονίου ἀπὸ τὸ ἄτομον τοῦ μετάλλου. Ὅταν ἐπὶ τοῦ μετάλλου προσπίπτῃ ἡ ἰώδης ἀκτινοβολία τὰ ἐλευθερούμενα ἠλεκτρόνια ἔχουν κινητικὴν ἐνέργειαν $W' = 1/2\,m\upsilon^2$, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ τὸν φωτοηλεκτρικὸν νόμον τοῦ Einstein:

$$W' = 1/2\,m\upsilon^2 = h\nu' - h\nu .$$

Ἄρα εἶναι: $W' = h(\nu' - \nu) = \dfrac{6{,}56}{10^{27}}\left(\dfrac{3 \times 10^{15}}{4} - \dfrac{3 \times 10^{5}}{5}\right) = \dfrac{6{,}56 \times 3}{10^{13} \times 2}$

ἢ $W' = 9{,}84 \times 10^{-13}$ ἔργια.

2) Ἀπὸ τὴν σχέσιν $W' = 1/2\,m\upsilon^2$ εὑρίσκομεν τὴν ταχύτητα τῶν φωτοηλεκτρονίων: $\upsilon = \sqrt{\dfrac{2W'}{m}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 9{,}84 \times 10^{-13}}{9{,}1 \times 10^{-28}}} = 4{,}6 \times 10^{7}$ cm/sec

ἢ $\upsilon = 460$ km/sec,

3) Διὰ τὴν ἀπόσπασιν τοῦ ἠλεκτρονίου ἀπὸ τὸ ἄτομον τοῦ μετάλλου ἀπαιτεῖται ἔργον: $W = h\nu = \dfrac{6{,}56}{10^{27}} \times \dfrac{3 \times 10^{15}}{5} = 3{,}9 \times 10^{-12}$ ἔργια.

432.— *Ἕνα σωματίδιον α κινούμενον μὲ μεγάλην ταχύτητα πλησιάζει πρὸς τὸν πυρῆνα ἑνὸς ἀτόμου μαγγανίου, τοῦ ὁποίου ὁ ἀτομικὸς ἀριθμὸς εἶναι $Z = 25$. 1) Νὰ εὑρεθῇ πόση δύναμις ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ σωματιδίου α, ὅταν τοῦτο φθάσῃ εἰς ἀπόστασιν 1×10^{-12} cm ἀπὸ τὸν πυρῆνα τοῦ ἀτόμου τοῦ μαγγανίου.— 2) Πόση εἶναι τότε ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ σωματιδίου α; Ἡ τιμὴ τοῦ στοιχειώδους ἠλεκτρικοῦ φορτίου εἶναι: $e = 4{,}8 \times 10^{-10}$ C.G.S.*

1) Τὸ σωματίδιον α εἶναι ἕνας πυρὴν ἀτόμου ἡλίου καὶ ἔχει θετικὸν φορτίον $Q = 2e$. Ὁ πυρὴν τοῦ ἀτόμου τοῦ μαγγανίου ἔχει φορτίον $Q' = 25e$. Μεταξὺ τῶν δύο τούτων θετικῶς ἠλεκτρισμένων σωματιδίων ἐξασκεῖται ἄπωσις, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Coulomb: $F = \dfrac{QQ'}{r^2}$.

Ἄρα ἡ ἄπωσις ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ σωματιδίου α, ὅταν τοῦτο φθάσῃ εἰς ἀπόστασιν $r = 1 \times 10^{-12}$ cm ἀπὸ τὸν πυρῆνα τοῦ ἀτόμου τοῦ μαγγανίου εἶναι:

$$F = \frac{2e \times 25e}{r^2} = \frac{50 \times e^2}{r^2} = \frac{50 \times (4{,}8 \times 10^{-10})^2}{(1 \times 10^{-12})^2} = 115 \times 10^{5} \text{ δύναι.}$$

2) Ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια V τοῦ σωματιδίου α, ὅταν τοῦτο εὑρεθῇ εἰς ἀπόστασιν r ἀπὸ τὸν πυρῆνα τοῦ ἀτόμου τοῦ μαγγανίου, εἶναι: $V = \dfrac{QQ'}{r}$

ἤτοι εἶναι: $V = \dfrac{2e \times 25e}{r} = \dfrac{50 \times e^2}{r} = \dfrac{50 \times (4{,}8 \times 10^{-10})^2}{1 \times 10^{-12}}$

ἢ $V = 115 \times 10^{-7}$ ἔργια.

433.— *Ἕνα ἠλεκτρόνιον κινεῖται μὲ ταχύτητα ἴσην μὲ τὸ 1/4 τῆς ταχύτητος τοῦ φωτός. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος κύματος τῶν κυμάτων τοῦ Broglie τὰ ὁποῖα* *ἰσοδυναμοῦν πρὸς τὸ ἠλεκτρόνιον. Σταθερὰ τοῦ* Planck : $6{,}6 \times 10^{-27}$ C.G.S. *μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου :* $m = 9{,}1 \times 10^{-28}$ gr .

Σύμφωνα μὲ τὴν θεωρίαν τοῦ Broglie κάθε κινούμενον ὑλικὸν σωματίδιον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ δέσμην κυμάτων, τὰ ὁποῖα καλοῦμεν κύματα τοῦ Broglie. Τὸ μῆκος κύματος αὐτῶν δίδεται ἀπὸ τὴν κλασσικὴν σχέσιν : $\lambda = \dfrac{h}{m\upsilon}$.

Διὰ τὸ ἠλεκτρόνιον, τὸ ὁποῖον κινεῖται μὲ ταχύτητα :

$\upsilon = \dfrac{3 \times 10^{10}}{4}$ cm / sec , τὸ μῆκος κύματος τῶν κυμάτων τοῦ Broglie εἶναι:

$$\lambda = \frac{6{,}6 \times 10^{-27} \times 4}{9{,}1 \times 10^{-28} \times 3 \times 10^{10}} = \frac{26{,}4}{27{,}3 \times 10^{9}} = 0{,}96 \times 10^{-9} \text{ cm}$$

ἢ $\lambda = 0{,}96 \times 10^{-9} \times 10^{8} = 0{,}096$ angstrom .

434.— *Εἰς ἕνα πυροβόλον ἠλεκτρονίων ἐφαρμόζεται διαφορὰ δυναμικοῦ* 6 100 volt . *Πόσον εἶναι τὸ μῆκος κύματος τῶν κυμάτων τοῦ* Broglie, *τὰ ὁποῖα ἰσοδυναμοῦν πρὸς τὰ ἐκσφενδονιζόμενα ἠλεκτρόνια ; Σταθερὰ τοῦ* Planck : $h = 6{,}6 \times 10^{-27}$ C.G.S. · *μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου :* $m = 9{,}1 \times 10^{-28}$ gr· *φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου :* $e = 4{,}8 \times 10^{-10}$ C.G.S.

Εἰς τὸ πλόβλημα 427 εὕρομεν ὅτι ἡ ταχύτης τῶν ἐκσφενδονιζομένων ἠλεκτρονίων εἶναι : $\upsilon = \sqrt{\dfrac{2Ve}{m}}$.

Τὸ μῆκος κύματος τῶν ἰσοδυνάμων κυμάτων τοῦ Broglie εὑρίσκεται τώρα ἀπὸ τὴν σχέσιν : $\lambda = \dfrac{h}{m\upsilon} = \dfrac{h}{\sqrt{2mVe}}$.

Ἄρα εἰς μονάδας C.G.S. ἔχομεν :

$$\lambda = \frac{6{,}6 \times 10^{-27}}{\sqrt{2 \times 9{,}1 \times 10^{-28} \times \frac{61}{3} \times 4{,}8 \times 10^{-10}}} = \frac{6{,}6 \times 10^{-8}}{\sqrt{1776{,}51}}$$

ἢ $\lambda = \dfrac{6{,}6 \times 10^{-8}}{42{,}2} = 0{,}156 \times 10^{-8}\text{cm} = 0{,}156$ angstrom .

435.— *Νὰ εὑρεθῇ μὲ πόσην ἐνέργειαν, ἐκπεφρασμένην εἰς* joule *καὶ ἠλεκτρονιοβόλτ. ἰσοδυναμεῖ : α) ἡ μᾶζα ἑνὸς γραμμαρίου· β) ἡ μᾶζα ἑνὸς ἠλεκτρονίου· γ) ἡ μονὰς τῆς ἀτομικῆς μάζης, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ* $1{,}66 \times 10^{-24}$ gr. *Μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου :* $m = 9{,}1 \times 10^{-28}$ gr .

Ἡ θεωρία τῆς σχετικότητος ἀπέδειξεν ὅτι μᾶζα m εἶναι ἰσοδύναμος μὲ ἐνέργειαν W . Αὐτὴ ἡ ἀρχὴ τῆς ἰσοδυναμίας ἐκφράζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Einstein : $W = mc^2$ (1)

ὅπου c εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτός.

α) Σύμφωνα λοιπὸν μὲ τὴν ἐξίσωσιν (1) ἡ μᾶζα 1 gr ἰσοδυναμεῖ μέ :

$$W_1 = 1 \times (3 \times 10^{10})^2 = 9 \times 10^{20} \text{ ἔργια} = 9 \times 10^{13} \text{ joule} .$$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ μονὰς ἐνεργείας, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ἠλεκτρονιοβόλτ (eV), ἐκφράζει τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπὸ ἑνὸς ἠλεκτρονίου κατὰ τὴν μετάβασίν του ἀπὸ ἕνα σημεῖον εἰς ἄλλο, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ ἴση μὲ 1 volt. Ἄρα εἶναι:

$$1 \text{ ἠλεκτρονιοβόλτ} = 1 \text{ eV} = 1{,}6 \times 10^{-19} \times 1 = 1{,}6 \times 10^{-19} \text{ joule}.$$

Ἄρα ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια W ἰσοῦται μέ:

$$W_1 = \frac{9 \times 10^{13}}{1{,}6 \times 10^{-19}} = 5{,}625 \times 10^{32} \text{ eV} = 5{,}625 \times 10^{26} \text{ MeV}.$$

β) Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν

$$W_2 = 9{,}1 \times 10^{-28} \times (3 \times 10^{10})^2 = 81{,}9 \times 10^{-8} \text{ ἔργια}$$

ἢ $$W_2 = 81{,}9 \times 10^{-15} \text{ joule} = 5 \times 10^5 \text{ eV} = 0{,}5 \text{ MeV}.$$

γ) Ἡ μονὰς τῆς ἀτομικῆς μάζης ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν:

$$W_3 = 1{,}66 \times 10^{-24} \times (3 \times 10^{10})^2 = 14{,}94 \times 10^{-4} \text{ ἔργια}$$

ἢ $$W_3 = 14{,}94 \times 10^{-11} \text{ joule} = 9{,}3 \times 10^8 \text{ eV} = 930 \text{ MeV}.$$

Ἡ μονὰς τῆς ἀτομικῆς μάζης εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἰσοδύναμος μὲ 1 000 MeV.

436. — *Ἡ ἑπομένη πυρηνικὴ ἀντίδρασις προκαλεῖται μὲ σωματίδια α (πυρῆνες ἀτόμων He) ἔχοντα κινητικὴν ἐνέργειαν ἴσην μὲ* 7,7 MeV:

$$He_2^4 + N_7^{14} = O_8^{17} + H_1^1.$$

Νὰ εὑρεθῇ πόση ἐνέργεια ἐλευθερώνεται κατὰ τὴν πυρηνικὴν αὐτὴν ἀντίδρασιν:

Ἀτομικαὶ μᾶζαι:

He_2^4 : 4,0039 $\qquad$ H_1^1 : 1,0081

N_7^{14} : 14,0075 $\qquad$ O_8^{17} : 17,0045

1 *μονὰς ἀτομικῆς μάζης* = 931 MeV.

Εἰς κάθε πυρηνικὴν ἀντίδρασιν ἰσχύει ἡ ἀρχὴ τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας. Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν ἐξίσωσις τῆς πυρηνικῆς ἀντιδράσεως πρέπει νὰ συμπληρωθῇ ὡς ἑξῆς: εἰς τὸ πρῶτον μέλος της πρέπει νὰ προστεθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια W_1 τοῦ σωματιδίου α καὶ εἰς τὸ δεύτερον μέλος πρέπει νὰ προστεθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια W_2 τῶν παραγομένων πυρήνων ὀξυγόνου καὶ ὑδρογόνου. Ἄρα ἔχομεν:

$$He_2^4 + N_7^{14} + W_1 = O_8^{17} + H_1^1 + W_2.$$

Ἡ ἐνέργεια W_1 τοῦ σωματιδίου α εἶναι ἰσοδύναμος μὲ μᾶζαν:

$$\frac{7{,}7}{931} = 0{,}0083 \text{ τῆς μονάδος ἀτομικῆς μάζης.}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν μαζῶν καὶ τῆς ἰσοδυνάμου ἐνεργείας W_1 πρὸ τῆς ἀντιδράσεως καὶ μετ' αὐτὴν εἶναι:

He_2^4 =	4,0039	O_8^{17} =	17,0045
N_7^{14} =	14,0075	H_1^1 =	1,0081
W_1 =	0,0083	Σύνολον	18,0126
Σύνολον	18,0197		

Ἡ παρουσιαζομένη διαφορὰ μάζης: $\quad 18{,}0197 - 18{,}0126 = 0{,}0071$

ἀντιπροσωπεύει ἰσοδύναμον κινητικὴν ἐνέργειαν W_2 τῶν δύο νέων πυρήνων. Ὥστε κατὰ τὴν ἀντίδρασιν αὐτὴν ἐλευθερώνεται ἐνέργεια:

$$W_2 = 0{,}0071 \times 931 = 6{,}6 \text{ MeV} .$$

437.— *Ὅταν ὁ πυρὴν τοῦ ἀτόμου τοῦ λιθίου βομβαρδίζεται μὲ πρωτόνιον, ἔχον κινητικὴν ἐνέργειαν 0,250 MeV, παράγονται δύο σωματίδια α, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει τὴν αὐτὴν κινητικὴν ἐνέργειαν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἑκάστου σωματιδίου α. Ἀτομικαὶ μᾶζαι:*

$$Li_3^7 = 7{,}0180 \cdot \qquad H_1^1 = 1{,}0081 \cdot \qquad He_2^4 = 4{,}0039 .$$

Ἂν W καλέσωμεν τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν τοῦ πρωτονίου τὸ ὁποῖον βομβαρδίζει τὸν πυρῆνα τοῦ λιθίου καὶ W′ καλέσωμεν τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν ἑκάστου σωματιδίου α, τότε ἡ ἀνωτέρω πυρηνικὴ ἀντίδρασις παρίσταται μὲ τὴν ἐξίσωσιν:

$$H_1^1 + Li_3^7 + W = He_2^4 + He_2^4 + 2W' .$$

Ἡ ἐνέργεια W ἰσοδυναμεῖ μὲ μᾶζαν: $\dfrac{0{,}250}{931} = 0{,}00027$.

Τὸ ἄθροισμα τῶν μαζῶν τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἐξισώσεως καὶ τῶν παραγομένων δύο σωματιδίων α εἶναι:

H_1^1	$= 1{,}00810$		
Li_3^7	$= 7{,}01800$	He_2^4	$= 4{,}0039$
W	$= 0{,}00027$	H_2^4	$= 4{,}0039$
Σύνολον	8,02637	Σύνολον	0,0078

Ἡ διαφορὰ μάζης εἶναι: $8{,}02637 - 8{,}0078 = 0{,}01857 \cdot$

αὕτη ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν: $W'' = 0{,}01857 \times 931 = 17{,}28 \text{ MeV}$.

Ἄρα ἕκαστον τῶν παραγομένων σωματιδίων α ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν:

$$W = \frac{17{,}28}{2} = 8{,}64 \text{ MeV} .$$

438.— *Κατὰ τὴν διάσπασιν ἑνὸς μόνον ἀτόμου οὐρανίου ἐλευθερώνεται ἐνέργεια ἴση μὲ 200 ἑκατομμύρια ἠλεκτρονιοβόλτ.— 1) Νὰ εὑρεθῇ εἰς ὡριαῖα—κιλοβὰτ καὶ χιλιογραμμόμετρα ἡ ἐνέργεια ἡ ὁποία ἐλευθερώνεται κατὰ τὴν διάσπασιν 1 kg οὐρανίου. 2) Κατὰ τὴν καῦσιν ἑνὸς χιλιογράμμου γαιάνθρακος ἐλευθερώνεται ποσότης θερμότητος ἴση μὲ 8 000 kcal. Νὰ εὑρεθῇ πόσοι τόννοι γαιάνθρακος πρέπει νὰ καοῦν διὰ νὰ ληφθῇ τόση ἐνέργεια ὅση λαμβάνεται κατὰ τὴν διάσπασιν 1 kg οὐρανίου. Ἀτομικὴ μᾶζα οὐρανίου: 235 · ἀριθμὸς τοῦ Loschmidt: $N = 6{,}02 \times 10^{23}$ · φορτίον ἠλεκτρονίου: $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ coulomb.*

1) Εἶναι γνωστὸν ὅτι 1 ἠλεκτρονιοβὸλτ $= 1 \text{ eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ joule.

Κατὰ τὴν διάσπασιν ἑνὸς ἀτόμου οὐρανίου ἐλευθερώνεται ἐνέργεια:

$$W = 2 \times 10^8 \text{ eV} = 2 \times 10^8 \times 1{,}6 \times 10^{-19} = 3{,}2 \times 10^{-11} \text{ joule} \cdot$$

καὶ κατὰ τὴν διάσπασιν 1 γραμμοατόμου οὐρανίου, δηλαδὴ 235 gr οὐρανίου, ἐλευθερώνεται ἐνέργεια:

$$W_1 = N \cdot W = 6{,}02 \times 10^{23} \times 3{,}2 \times 10^{-11} = 19{,}264 \times 10^{12} \text{ joule} .$$

Εἰς 1 kg οὐρανίου περιέχονται : $\frac{1\,000}{235}$ γραμμοάτομα οὐρανίου.

Ἄρα κατὰ τὴν διάσπασιν 1 kg οὐρανίου ἐλευθερώνεται ἐνέργεια :

$$W_2 = 19{,}264 \times 10^{12} \times \frac{1\,000}{235} = 82 \times 10^{12} \text{ joule}$$

ἢ $W_2 = \frac{82 \times 10^{12}}{36 \times 10^5} = 2{,}28 \times 10^7$ kWh καὶ $W_2 = \frac{82 \times 10^{12}}{9{,}81} = 8{,}36 \times 10^{12}$ kgm.

2) Ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια W_2 ἰσοδυναμεῖ μὲ ποσότητα θερμότητος :

$$Q = \frac{W_2}{J} = \frac{82 \times 10^{12}}{4{,}18} \text{ cal} = \frac{82 \times 10^9}{4{,}18} \text{ kcal}.$$

Κατὰ τὴν καῦσιν ἑνὸς τόννου γαιάνθρακος ἐλευθερώνεται ποσότης θερμότητος 8×10^6 kcal . Ἄρα διὰ νὰ ληφθῇ ἡ ἀνωτέρω ποσότης θερμότητος Q πρέπει νὰ καοῦν : $\frac{82 \times 10^9}{4{,}18 \times 8 \times 10^6} = 2\,452$ τόννοι γαιάνθρακος.

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελ.	6	στ. 2 ἄνωθεν	ἀντὶ Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο διαπύρων συρμάτων	νὰ γραφῇ: Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τῆς σκιερᾶς περιοχῆς ἀπὸ τὴν πλάκα ὡς καὶ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο διαπύρων συρμάτων
Σελ.	11	στ. 12 ἄνωθεν	ἀντὶ $\frac{9\,000}{11{,}3^2} = 6{,}24$	νὰ γραφῇ $\frac{9\,000}{10.8^3} = 7{,}278$
Σελ.	29	στ. 3 ἄνωθεν	ἀντὶ $\frac{O\alpha - O\alpha'}{O\alpha}$	νὰ γραφῇ $\frac{O\alpha - O\alpha'}{O\alpha'}$
Σελ.	32	στ. 16 ἄνωθεν	ἀντὶ $\frac{1 - \nu_2}{R}$	νὰ γραφῇ $\frac{1 - \nu_1}{R}$
Σελ.	32	στ. 17 ἄνωθεν	ἀντὶ $\nu_2 = 1{,}5$	νὰ γραφῇ $\nu_1 = 1{,}5$
Σελ.	189	στ. 4 ἄνωθεν	ἀντὶ $R = 1{,}3 \frac{l}{\sigma}$	νὰ γραφῇ $R = 1{,}6 \frac{l}{\sigma}$ εἰς δὲ τὰς ἑπομένας σχέσεις ἀντὶ 1,3 νὰ τεθῇ 1,6
Σελ.	222	στ. 10 κάτωθεν	ἀντὶ ὁ ἀγωγὸς ΑΔΒ	νὰ γραφῇ ὁ ἀγωγὸς ΟΔΒ
Σελ.	272	στ. 2 κάτωθεν	ἀντὶ γωνίαν Ε	νὰ γραφῇ γωνίαν ε
Σελ.	384	στ. 19 ἄνωθεν	ἀντὶ Σύνολον 0,0078	νὰ γραφῇ Σύνολον 8,0078

Σημείωσις: Ἡ διόρθωσις τῶν δοκιμίων ἐγένετο μετὰ πολὺ μεγάλης προσοχῆς. Ἐν τούτοις λόγῳ τῶν τεχνικῶν δυσκολιῶν, αἵτινες ἐμφανίζονται κατὰ τὴν διόρθωσιν δοκιμίων τοιαύτης φύσεως, εἶναι πιθανὸν νὰ παρατηρηθοῦν ἀπὸ τοὺς ἀναγνώστας καὶ παροράματά τινα διὰ τὰ ὁποῖα ἐπικαλούμεθα τὴν ἐπιεικῆ κρίσιν των.

Ποσὸν	Ἐξίσωσις ὁρισμοῦ	Διαστάσεις εἰς τὸ C.G.S.	Πρακτικαὶ
μαγνητικὴ μᾶζα	$F = \frac{mm'}{\alpha^2}$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$	
μαγνητικὸν πεδίον	$H = \frac{F}{m}$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}$	
μαγνητικὴ ῥοὴ	$\Phi = Hs$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$	
ποσότης ἠλεκτρισμοῦ	$F = \frac{QQ'}{\alpha^2}$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$	coulomb
ἔντασις ῥεύματος	$I = \frac{Q}{t}$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-2}$	ampère
ἔργον	$W = Fl$	$L^2 M T^{-2}$	joule
διαφορὰ δυναμικοῦ	$V = \frac{W}{Q}$	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$	volt
ἀντίστασις	$R = \frac{V}{I}$	$L^{-1} T$	ohm
χωρητικότης	$C = \frac{Q}{V}$	L	farad
συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς	$E = L \frac{I}{t}$	$L^{-1} T^2$	henry

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ: Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ποσοῦ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν *ἠλεκτρικαὶ μονάδες*

μονάδες	Τιμὴ εἰς μονάδας C.G.S (ἠλεκτροστατικάς, ΗΣ)	Τιμὴ εἰς μονάδας ἠλεκτρομαγνητικὰς (ΗΜ)
	μονὰς μάζης βορείου μαγνητικοῦ πόλου (+1)	
	gauss	
	maxwell	
C	$= 3 \times 10^9$ μονάδες C.G.S.	$= \frac{1}{10}$ μονάδος ΗΜ
A	$= 3 \times 10^9$ μονάδες C.G.S.	$= \frac{1}{10}$ μονάδος ΗΜ
J	$= 10^7$ ἔργια	
V	$= \frac{1}{300}$ μονάδος C.G.S.	$= 10^8$ μονάδες ΗΜ
$\underline{O}$	$= \frac{1}{9 \times 10^{11}}$ μονάδος C.G.S.	$= 10^9$ μονάδες ΗΜ
F	$= 9 \times 10^{11}$ μονάδες C.G.S.	$= \frac{1}{10^9}$ μονάδος ΗΜ
Hn	$= \frac{1}{9 \times 10^{11}}$ μονάδος C.G.S.	$= 10^9$ μονάδες ΗΜ

χρησιμοποιουμένην ἐξίσωσιν ὁρισμοῦ τοῦ ποσοῦ τούτου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΟΠΤΙΚΗ

ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

ΠΙΝΑΞ

Ἐτυπώθη εἰς τὸ τυπογραφεῖον ΚΩΣΤΑ ΣΕΡΜΠΙΝΗ & Σία, Κωλέττη 31